Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten
(Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 6

1. Sei V_n der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad n in zwei Variablen z_1 und z_2. Wir betrachten $P \in V_n$ als Polynome auf $\mathbb{C}^2$. Wir definieren eine Wirkung von $\mathrm{SU}(2)$ auf V_n durch
$$(gP)(z) = P(zg)$$
wobei $P \in V_n$ und
$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$$
mit $zg = (az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2)$.
   (a) Begründen Sie, dass V_n $\mathrm{SU}(2)$-invariant ist.
   (b) Man beweise, dass die Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$ auf V_n irreduzibel ist. Gehen Sie dabei nach folgender Anleitung vor: Es soll gezeigt werden, dass jeder $\mathrm{SU}(2)$-äquivariante Endomorphismus A von V eine Vielfaches der Identität ist.
      i. Die Polynome $P_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$ bilden eine Basis von V_n. Betrachten Sie für $a \in \mathrm{U}(1)$ die Matrix $g_a = \mathrm{diag}(a, a^{-1}) \in \mathrm{SU}(2)$. Beweisen Sie, dass P_k den Eigenraum von g_a zum Eigenwert a^{2k-n} aufspannt.
      ii. Zeigen Sie, dass AP_k ein Eigenvektor von g_a bei geeigneter Wahl von a. Also muss $AP_k = c_k P_k$ gelten für $c_k \in \mathbb{C}$.
      iii. Betrachten Sie nun die Rotationsmatrizen
      $$r_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2), \quad t \in \mathbb{R}.$$
      Berechnen Sie Ar_tP_k und r_tAP_k und folgern Sie hieraus die Behauptung der Aufgabe.

2. Sei V ein komplexer Vektorraum, G eine Lie-Gruppe und $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung von G auf V. Zeigen Sie: Ist $f : V \to V$ eine G-äquivariante lineare Abbildung, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f = \lambda \cdot \mathrm{Id}$.

3. Sei $\mathbb{RP}^n$ der reell projektive Raum und g die Riemannsche Metrik induziert von der Standardmetrik auf S^n. Berechnen Sie das Spektrum von $(\mathbb{RP}^n, g)$.