Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten
(Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 5

1. (a) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon U \to^n$ eine Karte. (U, φ) heißt *harmonisches Koordinatensystem*, falls $\Delta\varphi^j = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$ gilt, wobei $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$. Seien Γ_{ij}^k die Christoffel-Symbole von g bezüglich (U, φ) und definiere

$$\Gamma^k := \sum_{i,j} g^{ij}\Gamma_{ij}^k.$$

(Hierbei ist g^{ij} die zu g_{ij} inverse Matrix. Letzteres ist die Darstellung von g in der Karte (U, φ).) Man beweise, dass (U, φ) genau dann harmonisch ist, falls $\Gamma^k \equiv 0$ für alle $1 \leq k \leq n$ ist.

   (b) Sei (Σ, g) eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Angenommen für $p \in \Sigma$ existiert eine lokale Funktion $u\colon U \to$, welche harmonisch ist, sodass $\operatorname{grad} u(p) \neq 0$. Man zeige, dass es eine Umgebung von p gibt auf der ein harmonisches Koordinatensystem existiert.

2. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir setzen

$$\mathrm{GL}(M)_p := \{v_p = (v_1, \dots, v_n) : v_p \text{ ist eine Basis von } T_pM\}$$

sowie $\mathrm{GL}(M) := \bigcup_{p\in M} \mathrm{GL}(M)_p$ und definieren die Abbildung $\pi\colon \mathrm{GL}(M) \to M$, $\pi(v_p) = p$. Für $A \in \mathrm{GL}(n,)$ und $v_p \in \mathrm{GL}(M)$ definieren wir

$$v_p \cdot A := \left(\sum_{i=1}^n v_i A_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n v_n A_{in}\right), \quad A = (A_{ij}).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathrm{GL}(M), \pi, M, \mathrm{GL}(n,))$ ein $\mathrm{GL}(n,)$-Hauptfaserbündel ist.

3. Zwei Hauptfaserbündel (P_1, π_1, M, G) und (P_2, π_2, M, G) heißen *isomorph*, falls es einen G-äquivarianten Diffeomorphismus $\Phi\colon P_1 \to P_2$ gibt mit $\pi_2 \circ \Phi = \pi_1$.

   Sei nun (P, π, M, G) ein Hauptfaserbündel mit einem globalen Schnitt s, d.h. $s\colon M \to P$ mit $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$. Man beweise, dass (P, π, M, G) isomorph zum trivialen Bündel $(M \times G, \mathrm{pr}, M, G)$ ist.

4. Sei $\pi\colon P \to M$ ein G-Hauptfaserbündel und sei F eine Mannigfaltigkeit auf der die Gruppe G wirkt. Betrachten Sie das assoziierte Bündel

$$\widetilde{\pi}\colon P \times_G F \to M.$$

Man beweise folgende Bijektion

$$\Gamma(P \times_G F) \cong \left\{f\colon P \to F : f(pg) = g^{-1}.f(p)\right\}.$$