Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten
(Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 4

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $e_1, \ldots, e_n \in T_pM$ eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie: Es existieren lokale glatte Vektorfelder $E_1, \ldots, E_n$ um p, sodass $E_i(p) = e_i$ und $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$.

2. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und (U, x) Normalkoordinaten um p. Man beweise: Für $f \in C^\infty(M)$ gilt
$$\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p).$$

3. Sei G eine Liesche Gruppe, B eine biinvariante Metrik und $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G.

   (a) Zeigen Sie: Für X, Y linksinvariante Vektorfelder gilt
   $$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

   Wir definieren die *Exponentialabbildung von G* $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ wie folgt: Für $X \in \mathfrak{g}$ setzen wir $\exp(X) := \gamma(1)$, wobei γ die Integralkurve des zu X gehörenden linksinvarianten Vektorfeldes ist.

   (b) Man beweise, dass die Exponentialabbildung von G mit der Exponentialabbildung von (G, B) als Riemannsche Mannigfaltigkeit übereinstimmt.

4. (a) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für eine glatte Funktion $u \in C^\infty(M)$ betrachten wir die Metrik $g_u := e^{2u}g$. Zeigen Sie, dass für den Laplace-Operator bezüglich g_u gilt
   $$\Delta_{g_u} = e^{-2u}\Delta_g + (n-2)e^{-2u}\mathrm{grad}_g u.$$

   (b) Sei (H^n, g_h) der hyberbolische Raum, d.h. $H^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ und
   $$g_h = \frac{1}{(x_n)^2} \cdot g_0,$$
   wobei g_0 die euklidische Standardmetrik des $\mathbb{R}^n$ eingeschränkt auf H^n ist. Berechnen Sie den Laplace-Operator Δ_{g_h} von (H^n, g_h) ausgedrückt durch den euklidischen Laplace-Operator Δ_{g_0}.