Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 3

1. Betrachten Sie S^n mit $n \geq 2$ und ihrer euklidischen Standardmetrik. Beweisen Sie, dass das Bild Γ einer Geodätischen stets ein Großkreis der Sphäre ist, d.h. es existiert eine 2-dimensionale Ebene $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\Gamma = S^n \cap E$. (**Hinweis:** Ist γ eine Geodätische so betrachten Sie die Vektoren $x := \gamma(0)$ und $y := \dot{\gamma}(0)$. Geben Sie nun eine geeignete Isometrie von S^n an, welche x und y invariant lässt.)

2. Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Beweisen Sie, dass eine Geodätische γ von $(M \times N, g \oplus h)$ gegeben ist durch $\gamma = (\gamma_M, \gamma_N)$, wobei γ_M und γ_N Geodätische von (M, g) und (N, h) sind.

3. Seien N und M zwei vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\pi\colon N \to M$ eine lokale Isometrie.

   (a) Zeigen Sie: Für jede Geodätische $\gamma\colon [0, 1] \to M$ und für jeden Punkt $q \in N$ mit $\pi(q) = \gamma(0)$ existiert eine eindeutige Geodätische $\gamma'\colon [0, 1] \to N$, sodass $\pi \circ \gamma' = \gamma$ und $\gamma'(0) = p$.

   (b) Man beweise, dass π surjektiv ist.

4. Sei (M, g) eine zusammenhängende, vollständige und einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung. Beweisen Sie, dass zu je zwei verschiedenen Punkten in M genau eine Geodätische existiert, welche diese beiden Punkte verbindet. **Hinweis:** Verwenden Sie den *Satz von Cartan-Hadamard.*