Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 2

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇, dann gilt
$$\nabla_X * \alpha = *\nabla_X \alpha$$
für alle Formen α und Vektorfelder X.

2. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ sowie $f \in C^\infty(M)$.
   (i) Zeigen Sie
   $$\operatorname{div}(f \cdot X) = f \cdot \operatorname{div}(X) + g(\operatorname{grad} f, X).$$
   (ii) X heisst *konformes Vektorfeld*, falls der lokale Fluss φ_t aus konformen Transformationen besteht, d.h. $\varphi_t^*(g) = \lambda g$ für eine gewisse lokal definierte Funktion λ.
   Beweisen Sie: X ist genau dann ein konformes Vektofeld, wenn $L_X g = f \cdot g$ gilt. In diesem Fall ist $f = -\frac{2}{n}\operatorname{div}(X)$.

3. Sei M eine kompakte, orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand und bezeichne $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ die k-te deRham Kohomomologiegruppe. Wir definieren folgende Bilinearform
$$B\colon H^k(M) \times H^{n-k}(M) \to \mathbb{R}, \quad ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta.$$
Zeigen Sie, dass B wohldefiniert und nicht-ausgeartet ist.

4. Sei $f \in C^\infty(M)$ mit $df_p = 0$ für ein $p \in M$. Zeigen Sie, dass für jede Riemannsche Metrik g auf M gilt
$$\operatorname{Hess}_g(f)(X, Y) = X(Y(f)),$$
d.h. in kritischen Punkten einer glatten Funktion lässt sich die Hessische ohne Riemannsche Metrik definieren.