Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 1

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. Bezeichne ∇^g den Levi-Civita Zusammenhang von (M, g) und ∇^h den von (N, h) wobei h die von g induzierte Riemannsche Metrik auf N ist.

   (a) Zeigen Sie für $\xi \in T_pN$ ($p \in N$) und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ gilt
   $$\nabla^h_\xi Y = \mathrm{pr}_N \left(\nabla^g_\xi Z\right),$$
   wobei Z eine lokale Erweiterung von Y ist, d.h. Z ist ein Vektorfeld definiert auf einer Umgebung $U \subset M$ um p, sodass $Z|_{U\cap N} = Y|_{U\cap N}$ ist. Hier bezeichnet pr_N die orthogonale Projektion von T_pM auf T_pN.

   (b) Sei $M = \mathbb{R}^{2n+2}$, g die euklidische standard Metrik und $N = S^{2n+1}$. Betrachten Sie das Vektorfeld $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2})$ definiert durch
   $$\widetilde{X}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{2n+2}, x_{2n+1})$$
   und $X := \widetilde{X}|_{S^{2n+1}}$.

   (i) Begründen Sie, dass $X \in \mathfrak{X}(S^{2n+1})$.

   (ii) Zeigen Sie, dass $\nabla_X X = 0$ gilt. Was kann man über die Integralkurven von X sagen? Ist X parallel?

2. (a) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Killing-Vektorfeld. Zeigen Sie, dass die Länge $|X| := \sqrt{g(X, X)}$ genau dann konstant ist, wenn jede Integralkurve von X eine Geodätische ist.

   (b) Beweisen Sie, dass es kein nicht-triviales Killing-Vektorfeld auf S^{2n} gibt, dessen Integralkurven Geodätische sind. Existieren solche Vektorfelder auf S^{2n+1}?

3. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis des Vektorraums V und $e^1, \ldots, e^n$ die hierzu duale Basis. Dann gilt für jede k-Form ω die Formel
   $$\sum_{i=1}^{n} e^i \wedge (e_i \lrcorner\, \omega) \; = k \cdot \omega.$$

4. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und K die Schnittkrümmung von g. Beweisen Sie: Falls für alle $p \in M$ die Schnittkrümmung $K_p(E)$ unabhängig von der Ebene $E \subset T_pM$ ist, so hat (M, g) konstante Schnittkrümmung.