Kugelpackungen

Problem: Kugeln von gleichem Radius möglichst dicht, ohne Überlappungen im $\mathbb{R}^n$ verteilen

Spezialfall: Mittelpunkte der Kugeln liegen auf einem Gitter in $\mathbb{R}^n$ = Gitter-Packung

Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter und die Mittelpunkte der Kugeln liegen auf Punkten in Γ

maximaler Radius $= \frac{1}{2} \min \{ d(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in \Gamma \}$

$$= \frac{1}{2} \left(\min \{ \|v\|^2 \mid v \in \Gamma \} \right)^{1/2}$$

Γ ist Translations invariant

Kuss-Zahl = Anzahl der Kugeln, die eine fixierte Kugel berühren, z.B. die Kugel im Ursprung

gleich für alle Kugeln im Falle von Gitter-Packungen

↳ Kuß-Zahl-Problem

$= \cancel{\ldots} \}$ $k \neq 0$

$= A_\Gamma(k)$
k minimal mit $A_\Gamma(k) \neq 0$

wobei $A_\Gamma(k) = \# \{ x \in \Gamma \mid \|x\| = k \}$

$$\Theta_\Gamma(\tau) = \sum_k A_\Gamma(k) e^{\pi i \tau k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_\Gamma(k) e^{\pi i \tau k}$$

Bemerkung: Sei Γ ein gerades Gitter, dann ist $A_\Gamma(2r+1) = 0$

Beispiel: $\Gamma = \Gamma(8)$

$\to \Theta_\Gamma \in M_4$

$\to \Theta_\Gamma = E_4$ da
- $\dim M_4 = 1$
- $\Theta_\Gamma = 1 + \ldots$

E_8-Gitter optimal für Kugel-Packg und Kuss-Zahl

$n = 24$ Leech-Gitter!

$\to \Theta_\Gamma(z) = 1 + 240 \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_3(k) e^{2\pi i \tau k}$

$\to A_\Gamma(k) = 240\, \sigma_3(k)$

mit $\sigma_3(k) = \sum_{\ell \mid k} \ell^3$

zwei Funktionen sind gleich, wenn ihre Fourier-koeffizienten übereinstimmen

$\to \sigma_3(1) = 1$

$\to$ minimaler Abstand: $\sqrt{2}$ Kuss-Zahl: 240

Bemerkung: • Unimodulare Gitter in $\mathbb{R}^n$ (mit positiv-definiter Bilinearform) sind klassifiziert bis $n = 25$

davon gerade:

$n = 8$: $\Gamma(8)$

$n = 16$: $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ und $\Gamma(16)$

$n = 24$: 24 Typen (= Niemeier Gitter), zB Leech Gitter

• $\Gamma(8) = E_8$ = Wurzelgitter der exceptionellen (einfachen) Lie-Gruppe E_8

$\Gamma(16)$ = Wurzelgitter der Lie-Gruppe $SO(32)$

• (Freedman) E_8 - Mfk.

= 4-dim. topologische Mfk. mit Schnittform gegeben durch das E_8-Gitter $\to$ es ex. keine glatte Struktur

$H^2(M, \mathbb{Z}) \subset H^2_{dR}(M)$ Gitter M einfach-zus.

• String-Theorie: in Dimension 26
man braucht Kompaktifizierung von 16 Dim.:
$T^{16} = \mathbb{R}^{16}/\Gamma$, Γ gerade, unimodular $\Rightarrow$ 2 Mögl.

$\to$ $E_8 \times E_8$ - String

$SO(32)$ - String

• Kodierungstheorie

Die Weylsche Asymptotik auf dem Torus

Satz: Sei $N(\lambda)$ die Anzahl der Eigenwerte des Laplace Operators kleiner gleich λ (mit Vielfachheit gezählt). Auf einem flachen Torus T gilt für $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) \sim \omega_n \cdot \lambda^{\frac{n}{2}} \frac{vol(T)}{(2\pi)^n} \qquad (*)$$

d.h. $N(\lambda)/\lambda^{n/2} \to \frac{\omega_n vol(T)}{(2\pi)^n}$

wobei $n = \dim T$ und $\omega_n = vol(B^n(1))$.

Beweis: $T = \mathbb{R}^n / \Gamma$ (siehe: Chavel, Eigenvalues in Riem. Geom.)

$\to$ Eigenwerte: $\lambda = 4\pi^2 \|x\|^2$ $\quad x \in \Gamma^*$

$$N^*(r) := \# (\Gamma^* \cap \overline{B}^n(r))$$

$\to$ $(*)$ ist äquivalent zu: $N^*(r) \sim \omega_n r^n \cdot vol(T)$

für $r \to \infty$

da: $r \mathrel{\hat{=}} \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} = \|x\|$

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von Γ und $v \in \Gamma$ fixiert

$\to v = \sum_j \alpha_j v_j \qquad \alpha_j \in \mathbb{Z}$

$P(v) := \{ \sum_j x_j v_j \mid \alpha_j < x_j < \alpha_j + 1 \}$ Fundamentalbereich $\mathrel{\hat{=}}$ Kopie von T

$\to vol(T) = vol(P(v)) = \frac{1}{vol(T^*)}$ mit $T^* = \mathbb{R}^n / \Gamma^*$

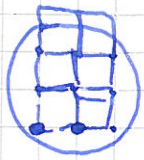
$\to$ $(*)$ ist äquivalent zu: $N^*(r) \sim \omega_n \cdot r^n \cdot \frac{1}{vol(T^*)}$ für $r \to \infty$

Sei $w \in \Gamma^*$, $P^*(w)$ der Fundamentalbereich von T^*

d = Durchmesser von $P^*(w)$ (unabhängig von w!)

$P^*(r)$ = Anzahl der Kopien von T^*, die ganz in $\overline{B}^n(r)$ liegen

$$\Rightarrow \quad P^*(r) \leq N^*(r) \leq P^*(r+d)$$



$\square$

Sei $C^*(r)$ der Polyeder, der aus allen Kopien von T^* in $\bar{B}^n(r)$ gebildet wird

$$\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(C^*(r)) = \mathrm{vol}(T^*) \cdot P^*(r)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(T^*) \cdot P^*(r) \leq w_n \cdot r^n$$

Sei $\beta(r) := \min \{ \|\gamma\| \mid \gamma \in \Gamma^* \cap \partial C^*(r) \}$

$$\Rightarrow \quad \beta(r) > r - d$$

$$\Rightarrow \quad \bar{B}^n(r-d) \subset C^*(r)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(T^*) \cdot P^*(r) \geq w_n (r-d)^n$$

$$\Rightarrow \quad w_n (r-d)^n \cdot \frac{1}{\mathrm{vol}(T^*)} \leq P^*(r) \leq N^*(r) \leq P^*(r+d) \leq w_n (r+d)^n \cdot \frac{1}{\mathrm{vol}(T^*)}$$

$\Rightarrow$ Behauptung

Folgerung: $$(\lambda_k)^{\frac{n}{2}} \sim \frac{(2\pi)^n}{w_n} \cdot \frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \cdot k$$

Bemerkung: Die Weylsche Asymptotik gilt auf beliebigen kompakten Mfk. und für verschiedene Eigenwertprobleme, z.B. auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Randbedingung $f|_{\partial\Omega} = 0$ (Dirichlet Eigenwertproblem)