Invariants de Vassiliev et Conjecture de Poincaré

Michael Eisermann

UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon, France
Courriel: Michael Eisermann ⟨Michael.Eisermann@umpa.ens-lyon.fr⟩

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Série I, 334 (2002), 1005–1010
Preprint version available at http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm

Résumé. Nous établissons le résultat suivant : si les invariants de Vassiliev distinguent les nœuds dans toute sphère d'homotopie, alors la conjecture de Poincaré est vraie, c'est-à-dire toute sphère d'homotopie est homéomorphe à la sphère standard. D'un autre coté, dans toute variété de Whitehead il existe des nœuds qui ne sont pas distingués par les invariants de Vassiliev.

Vassiliev invariants and the Poincaré Conjecture

Abstract. *We prove the following result: if Vassiliev invariants distinguish knots in each homotopy sphere, then the Poincaré conjecture is true, in other words every homotopy sphere is homeomorphic to the standard sphere. On the other hand, in every Whitehead manifold there exist knots that cannot be distinguished by Vassiliev invariants.*

Abridged English version

Initially Vassiliev theory was conceived to study knots in euclidean space $\mathbb{R}^3$, but the combinatorial definition given by Birman and Lin [3] immediately extends to knots in an arbitrary 3-manifold. The abundance of finite type invariants of knots [1] has motivated the question as to whether they distinguish all knots. The purpose of this note is to relate this question to the topology of the ambient 3-manifold.

For ease of notation we will assume each 3-manifold V to be smooth, connected, oriented, and without boundary. Likewise, all maps will be assumed to be smooth. A singular knot is an immersion $\kappa : \mathbb{S}^1 \looparrowright V$ such that the only multiple points are double points according to the local model . In particular κ can only have a finite number of such singularities; for convenience we will assume that they are numbered by $1, \ldots, n$. Let $\mathcal{K}_n$ be the set of ambient isotopy classes of n-singular knots in V, in particular $\mathcal{K}_0$ is the set of isotopy classes of non-singular knots. Let $\mathscr{K}_n = \mathbb{Z}\mathcal{K}_n$ be the free $\mathbb{Z}$-module with basis $\mathcal{K}_n$. As usual one defines a map $\delta : \mathscr{K}_n \to \mathscr{K}_{n-1}$ by resolving the n-th singularity according to the local model $\mapsto$ $-$. This construction can be seen as a discretization of homotopy, see Lin [7], Lemma 6.4: two n-singular knots K and K' are homotopic if and only if $K \equiv K'$ modulo $\delta\mathscr{K}_{n+1}$.

The Vassiliev filtration of $\mathscr{K}_0$ is defined by $\mathscr{F}_n = \operatorname{im}(\delta^n : \mathscr{K}_n \to \mathscr{K}_0)$. Dually, a knot invariant v with values in an abelian group is called Vassiliev invariant of degree n if $v(\mathscr{F}_{n+1}) = 0$. For the purpose of this note we are particularly interested in the limit $\mathscr{F}_\omega = \bigcap_n \mathscr{F}_n$ of the Vassiliev filtration.

version du 3 mars 2002

It is worth emphasizing that this construction is functorial: it associates to every 3-manifold V a sequence of $\mathbb{Z}$-modules $(\mathscr{K}_* V, \delta)$ and to every orientation preserving embedding $\phi : V \hookrightarrow W$ a family of linear maps $\mathscr{K}_* \phi : \mathscr{K}_* V \to \mathscr{K}_* W$ commuting with δ.

These prerequisites being in place, we can now state our key observation:

LEMMA. – *Let V be a simply connected 3-manifold and $h : V \hookrightarrow V$ be an orientation preserving embedding. Then Vassiliev invariants cannot distinguish between a knot K and its image hK.*

Proof. – A singular knot is called *local* if it is contained in the image of some embedding $\phi : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow V$. Since h preserves orientation, ϕ is isotopic to $h\phi$, see [5], Theorem 8.3.1. In particular, if a singular knot K^* is local, then it is ambient isotopic to its image hK^*, see [5], Theorem 8.1.4.

Since V is simply connected, every knot $K \in \mathcal{K}_n$ is homotopic to some local knot K^*. Consequently there exists $A \in \mathscr{K}_{n+1}$ such that $\delta A = K - K^*$. By functoriality we obtain $\delta hA = hK - hK^*$, hence $\delta(A - hA) = K - hK$. We conclude that for every $A_n \in \mathscr{K}_n$ there exists some $A_{n+1} \in \mathscr{K}_{n+1}$ such that $\delta(A_{n+1} - hA_{n+1}) = A_n - hA_n$. For a knot $K \in \mathcal{K}_0$ this implies $K - hK \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cap \cdots = \mathscr{F}_\omega$. □

If every knot in V is local, then V is simply connected. The converse, however, is false — at least for open manifolds [8]. The following arguments are based on Bing's characterization of the 3-sphere [2]: if V is a closed connected 3-manifold in which every knot is local, then V is homeomorphic to $\mathbb{S}^3$. This result has been generalized by Costich, Doyle, and Galewski [4] to a characterization of euclidian space: if W is a contractible open 3-manifold in which every knot is local, then W is homeomorphic to $\mathbb{R}^3$.

According to Kister and McMillan [6, 8] there exist uncountably many contractible open 3-manifolds, no two of which are homeomorphic. They can be divided into two uncountable families depending on whether they embed into $\mathbb{R}^3$ or not. A contractible open 3-manifold $W \not\cong \mathbb{R}^3$ that embeds into $\mathbb{R}^3$ is called a Whitehead manifold [8, 9].

THEOREM 1. – *In every Whitehead manifold W there exist knots that are distinct but cannot be distinguished by any Vassiliev invariant.*

Proof. – Let $h : W \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow W$ be an embedding that preserves orientation. The theorem of Costich, Doyle, and Galewski [4] guarantees the existence of a non-local knot K in W. Its image hK is local, hence $K \neq hK$. According to the previous lemma we have $K \equiv hK$ modulo $\mathscr{F}_\omega$. □

Conjecturally the theorem holds for every contractible open 3-manifold, but a proof would certainly require a more detailed analysis, cf. Lin [7]. For the time being we will content ourselves with the following weaker version:

LEMMA. – *Let V be a simply connected 3-manifold that contains a non-local knot K. Then the two copies of K in $V \sharp V$ are distinct but cannot be distinguished by any Vassiliev invariant.*

Proof. – The connected sum $V \sharp V$ allows a diffeomorphism h of period 2 that preserves orientation and exchanges the two copies of V. In particular, h exchanges the two copies K_0 and K_1 of K. According to the previous lemma they cannot be distinguished by any Vassiliev invariant. The only subtlety is to show that K_0 and K_1 are actually distinct. This is achieved by an isotopy version of the Alexander-Schönflies Theorem. □

The lemma applies for example to every contractible open 3-manifold that does not embed into $\mathbb{R}^3$. Via the theorem of Bing [2] we arrive at the following conclusion:

THEOREM 2. – *Suppose that V is a homotopy 3-sphere that is not homeomorphic to $\mathbb{S}^3$. Then the connected sum $V \sharp V$ contains distinct knots that cannot be distinguished by any Vassiliev invariant.* □

Note that $V \sharp V$ is again a homotopy sphere. Hence, if Vassiliev invariants distinguish knots in each homotopy sphere, then the Poincaré conjecture is true. For an arbitrary closed 3-manifold V we conclude: if Vassiliev invariants distinguish all knots in $V \sharp V$, then V does not contain any fake 3-cells.

INTRODUCTION. – Dans la topologie et la géométrie en dimension 3, les nœuds jouent un rôle essentiel. Dans leur étude les invariants de type fini, aussi nommés invariants de Vassiliev [3], sont devenus célèbres. Presque tous les invariants que l'on a découverts ces dernières années sont de ce type, notamment le polynôme de Jones et ses généralisations, les invariants quantiques [1]. Leur abondance a motivé la question de savoir si les invariants de Vassiliev distinguent tous les nœuds. Le but de cette note est d'analyser cette question en fonction de la variété ambiante.

On appelle *variété de Whitehead* une 3-variété ouverte contractile, non-homéomorphe à $\mathbb{R}^3$ mais plongeable dans ce dernier. Le premier exemple d'une telle variété fut découvert par Whitehead [9], et il en existe une infinité non-dénombrable, deux à deux non-homéomorphes [8].

THÉORÈME 1. – *Dans toute variété de Whitehead il existe des nœuds distincts qui ne sont pas distingués par les invariants de Vassiliev.*

Une telle pathologie peut-elle se produire aussi dans une variété fermée ? On appelle *sphère d'homotopie* une 3-variété fermée qui est simplement connexe. Une telle variété est équivalente par homotopie à la sphère standard $\mathbb{S}^3$, d'où le nom. Selon la conjecture de Poincaré toute sphère d'homotopie est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$.

THÉORÈME 2. – *Si V est une sphère d'homotopie qui n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^3$, alors la somme connexe $V \sharp V$ contient des nœuds distincts qui ne sont pas distingués par les invariants de Vassiliev.*

Remarquons que $V \sharp V$, elle aussi, est une sphère d'homotopie. Par conséquent, si les invariants de Vassiliev distinguent les nœuds dans toute sphère d'homotopie, alors la conjecture de Poincaré est vraie.

On appelle *fausse 3-cellule* une 3-variété compacte contractile, à bord $\mathbb{S}^2$, qui n'est pas homéomorphe à la 3-cellule standard. Pour une variété fermée V quelconque on déduit la version suivante : si les invariants de Vassiliev distinguent les nœuds dans $V \sharp V$, alors V ne contient pas de fausses 3-cellules.

1. La théorie de Vassiliev vue comme complétion par homotopie

Initialement la théorie de Vassiliev fut conçue pour l'étude des nœuds dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, mais la définition combinatoire donnée par Birman et Lin [3] s'adapte immédiatement aux nœuds dans une 3-variété quelconque. Nous rappelons brièvement les principaux éléments.

Afin de simplifier la notation toute 3-variété sera supposée lisse et orientée, et sauf indication contraire aussi connexe et sans bord. Elle peut être compacte (= fermée) ou non-compacte (= ouverte). On supposera également que toute application est lisse et que tout plongement entre 3-variétés préserve l'orientation.

Un *nœud* dans une 3-variété V est un plongement $\kappa : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow V$. Plus généralement, un *nœud singulier* est une immersion $\kappa : \mathbb{S}^1 \looparrowright V$ dont tout point multiple est un point double suivant le modèle local $\times$. En particulier κ n'a qu'un nombre fini de singularités, et nous les supposons numérotées par $1, \ldots, n$.

Deux nœuds singuliers sont *équivalents* s'ils ne diffèrent que par des difféotopies de V et de $\mathbb{S}^1$. Ceci équivaut à regarder l'image orientée $\kappa(\mathbb{S}^1)$ à difféotopie de V près. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des classes d'équivalence des nœuds n-singuliers, y compris $\mathcal{K}_0$ les classes des nœuds non-singuliers. Pour la suite il sera essentiel que cette relation d'équivalence se comporte bien par rapport aux plongements de 3-variétés :

LEMME 3. – *Soient $\kappa : \mathbb{S}^1 \looparrowright V$ un nœud singulier et $\phi : [0,1] \times V \to W$ une isotopie entre deux plongements $\phi_0, \phi_1 : V \hookrightarrow W$. Alors les nœuds singuliers $\phi_0\kappa$ et $\phi_1\kappa$ dans W sont équivalents.*

Démonstration. – Si V est fermée, l'isotopie ϕ est en fait une difféotopie, donc $\phi_0\kappa$ et $\phi_1\kappa$ sont équivalents par la difféotopie $\Phi_t := \phi_t\phi_0^{-1}$. Si V est ouverte, on se restreint à un compact $K \subset V$, l'image de κ dans notre cas. Il existe alors une difféotopie $\Phi : [0,1] \times W \to W$ à support compact telle que $\Phi_0 = \mathrm{id}_W$ et $\Phi_t\phi_0(x) = \phi_t(x)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $x \in K$. Voir Hirsch [5], théorème 8.1.4. $\square$

Selon le lemme tout plongement $\phi_0 : V \hookrightarrow W$ induit une application $\mathcal{K}_*\phi_0 : \mathcal{K}_*V \to \mathcal{K}_*W$ qui ne dépend que de la classe d'isotopie de ϕ_0. Par exemple, deux plongements $\phi_0, \phi_1 : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow V$ ayant la même orientation sont isotopes dans V, donc ils induisent la même application $\mathcal{K}_*\phi_0 = \mathcal{K}_*\phi_1$.

DÉFINITION 4. – Un nœud singulier est *local* s'il est contenu dans l'image d'un plongement $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow V$.

Soit $\mathscr{K}_n = \mathbb{Z}\mathcal{K}_n$ le $\mathbb{Z}$-module libre ayant pour base l'ensemble $\mathcal{K}_n$. On définit $\delta : \mathscr{K}_n \to \mathscr{K}_{n-1}$ par la résolution de la n-ième singularité suivant le modèle local $\mapsto$ $-$. Évidemment les deux termes de cette différence sont homotopes par une homotopie préservant les points doubles et leur numérotation. Le lemme suivant établit la réciproque : toute homotopie entre deux nœuds singuliers peut être discrétisée en une suite finie de changements de croisements, voir Lin [7], lemme 6.4.

LEMME 5. – *Deux nœuds n-singuliers K, K' sont homotopes si et seulement si $K \equiv K'$ modulo $\delta\mathscr{K}_{n+1}$.*

La filtration de Vassiliev de $\mathscr{K}_0$ est définie par $\mathscr{F}_n = \operatorname{im}(\delta^n : \mathscr{K}_n \to \mathscr{K}_0)$. Les quotients $\mathscr{K}_0/\mathscr{F}_n$ forment un système projectif ayant pour limite le $\mathbb{Z}$-module $\hat{\mathscr{K}_0}$, et l'application canonique $\alpha : \mathscr{K}_0 \to \hat{\mathscr{K}_0}$ a pour noyau $\mathscr{F}_\omega = \bigcap_n \mathscr{F}_n$. Selon le lemme on peut interpréter $\hat{\mathscr{K}_0}$ comme la complétion du module des nœuds $\mathscr{K}_0$ par homotopie. De façon duale, un invariant des nœuds v à valeurs dans un groupe abélien est appelé *invariant de type fini* ou *invariant de Vassiliev* de degré n si $v(\mathscr{F}_{n+1}) = 0$.

Le lemme 3 permet d'interpréter la théorie de Vassiliev comme un foncteur qui associe à toute 3-variété V une suite de $\mathbb{Z}$-modules $(\mathscr{K}_* V, \delta)$ et à chaque plongement $\phi : V \hookrightarrow W$ une famille d'applications $\mathscr{K}_*\phi : \mathscr{K}_* V \to \mathscr{K}_* W$ commutant avec δ. Voici l'observation-clé :

LEMME 6. – *Soit V une 3-variété simplement connexe et $h : V \hookrightarrow V$ un plongement qui préserve l'orientation. Alors aucun invariant de Vassiliev ne distingue un nœud K et son image hK.*

Démonstration. – Comme h préserve l'orientation, tout plongement $\phi : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow V$ est isotope à $h\phi$, voir Hirsch [5], théorème 8.3.1. Par le lemme 3, tout nœud singulier local K^* est équivalent à son image hK^*.

Comme V est simplement connexe, tout nœud $K \in \mathcal{K}_n$ est homotope à un nœud local K^*. Il existe alors $A \in \mathscr{K}_{n+1}$ tel que $\delta A = K - K^*$. Par fonctorialité on obtient $\delta hA = hK - hK^*$ puis $\delta(A - hA) = K - hK$. On conclut que pour tout $A_n \in \mathscr{K}_n$ il existe $A_{n+1} \in \mathscr{K}_{n+1}$ tel que $\delta(A_{n+1} - hA_{n+1}) = A_n - hA_n$. Pour tout nœud $K \in \mathcal{K}_0$ ceci implique $K - hK \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cap \cdots = \mathscr{F}_\omega$, d'où la conclusion. $\square$

2. Application aux variétés simplement connexes

Si tout nœud dans une 3-variété V est local, alors V est simplement connexe. La réciproque est pourtant fausse, au moins pour les variétés ouvertes [8]. Pour les variétés fermées cette question équivaut à la conjecture de Poincaré, comme le montre la caractérisation suivante due à Bing [2] :

THÉORÈME 7. – *Soit V une 3-variété connexe fermée. Si tout nœud dans V est local, alors V est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3$.* $\square$

Costich, Doyle et Galewski [4] ont généralisé ce résultat à une caractérisation de l'espace euclidien :

THÉORÈME 8. – *Soit W une 3-variété ouverte contractile. Si tout nœud dans W est local, alors W est homéomorphe à l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.* $\square$

Rappelons qu'il existe une infinité non-dénombrable de variétés ouvertes contractiles, deux à deux non-homéomorphes. On peut les diviser en deux familles non-dénombrables : celles qui se plongent dans $\mathbb{R}^3$ [8] et celles qui ne s'y plongent pas [6]. Une variété $W \ncong \mathbb{R}^3$ du premier type est appelée variété de Whitehead.

THÉORÈME 9. – *Soit W une 3-variété ouverte et simplement connexe. Si W se plonge dans $\mathbb{R}^3$, alors $\mathscr{K}_0 W/\mathscr{F}_n \cong \mathscr{K}_0\mathbb{R}^3/\mathscr{F}_n$ pour tout n. Dans ce sens la théorie de Vassiliev dans W et dans $\mathbb{R}^3$ est la même.*

Démonstration. – Soient $\phi : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow W$ et $\psi : W \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ deux plongements qui préservent l'orientation. D'une part $\psi\phi$ est isotope à l'identité de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathscr{K}_0(\psi\phi)$ est l'identité sur $\mathscr{K}_0\mathbb{R}^3$. D'autre part $\phi\psi$ est un plongement de W dans elle-même, donc le lemme 6 entraîne que $\mathscr{K}_0(\phi\psi)$ est l'identité modulo $\mathscr{F}_\omega$. $\square$

Ceci correspond à un résultat de Lin [7] : pour une 3-variété ouverte contractile W tout plongement $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow W$ induit des isomorphismes $\mathscr{K}_0\mathbb{R}^3/\mathscr{F}_n \cong \mathscr{K}_0 W/\mathscr{F}_n$ modulo 2-torsion. Dans le cas d'une variété de Whitehead non seulement la démonstration est considérablement simplifiée, mais elle suggère aussi une conclusion plus forte :

THÉORÈME 10. – *Dans toute variété de Whitehead W il existe des nœuds distincts qui ne sont pas distingués par les invariants de Vassiliev.*

Démonstration. – Soit $h : W \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow W$ un plongement préservant l'orientation. Le théorème 8 garantit l'existence d'un nœud non-local K dans W. Or le nœud hK est local, donc $K \neq hK$. Selon le lemme 6 on a $K \equiv hK$ modulo $\mathscr{F}_\omega$, d'où la conclusion. □

Conjecturalement le théorème est valable pour toute 3-variété ouverte contractile. Une démonstration nécessiterait certainement une analyse plus profonde, cf. Lin [7]. L'intérêt de cette conjecture réside surtout dans son application à une sphère d'homotopie $V \ncong \mathbb{S}^3$: dans ce cas $W = V \smallsetminus \{p\}$ est une variété ouverte contractile qui ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^3$. Si W contient des nœuds indistinguables, il en est de même pour V. En l'absence de cet argument nous allons nous contenter d'une version affaiblie :

LEMME 11. – *Soit V une 3-variété simplement connexe contenant un nœud non-local K. Alors les deux copies de K dans $V \sharp V$ sont distinctes mais elles ne sont pas distinguées par les invariants de Vassiliev.*

Démonstration. – La somme connexe $V \sharp V$ admet un difféomorphisme h de période 2 qui préserve l'orientation et échange les deux copies de V. En particulier h échange les deux copies K_0 et K_1 du nœud K, et le lemme 6 entraîne qu'aucun invariant de Vassiliev ne distingue K_0 et K_1. Il ne reste qu'à montrer que K_0 et K_1 sont distincts, ce qui résulte du corollaire 14. □

Le lemme s'applique par exemple à toute 3-variété ouverte contractile V qui ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^3$. Grâce au théorème 7 de Bing, on en déduit également le théorème 2.

3. Couper les variétés en quatre

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'un nœud non-local ne peut pas traverser une 2-sphère (voir le corollaire 14). Nous rappelons d'abord quelques techniques standard de « couper-coller » en dimension 3.

Comme précédemment soit V une 3-variété connexe orientée sans bord. Un *système de sphères* $S \subset V$ est une réunion finie non-vide de 2-sphères disjointes dont chacune sépare V. Le *découpage* de V le long de S est la 3-variété non-connexe $V|S := V \smallsetminus \operatorname{int} T$, où T est un petit voisinage tubulaire de S, dont le bord consiste en deux copies de S.

Réciproquement soit M une 3-variété orientée dont le bord consiste en 2-sphères. Si M est connexe on obtient sa *clôture* $\langle M \rangle$ en recollant une 3-cellule à toute 2-sphère du bord. Si M a plusieurs composantes connexes $M_1, \dots, M_n$, on définit sa *clôture connexe* par $\langle M \rangle := \langle M_1 \rangle \sharp \dots \sharp \langle M_n \rangle$. Il sera commode d'inclure aussi le cas exceptionnel de la variété vide en posant $\langle \emptyset \rangle := \mathbb{S}^3$.

EXEMPLE 12. – On a $\langle M \rangle \cong \mathbb{S}^3$ si et seulement si M est une collection de 3-sphères trouées, c'est-à-dire privées de l'intérieur d'un nombre fini de 3-cellules fermées disjointes.

Pour un système de 2-sphères $S \subset V$ on a $V \cong \langle V|S \rangle$. Une coorientation de S induit une coorientation du bord de $V|S$. Une composante de $V|S$ est appelée *positive* resp. *négative* si son bord est coorienté vers l'intérieur resp. vers l'extérieur. Dans la suite on supposera toujours que la coorientation de S est *cohérente* dans le sens que toute composante de $V|S$ est soit positive soit négative. Comme V est connexe et chaque sphère de S est séparante, il y a exactement deux coorientations cohérentes de S.

On note $V|S^+$ resp. $V|S^-$ la réunion des composantes positives resp. négatives de $V|S$. Ainsi on obtient un découpage en deux variétés connexes orientées sans bord :

$$V \cong \langle V|S^+ \rangle \sharp \langle V|S^- \rangle \ .$$

Étant donné un deuxième système de sphères S_0 transverse à S, on souhaite remplacer S_0 par S_* qui est disjoint de S. Ceci se réalise par une *chirurgie* sur S_0 le long de S comme suit. L'intersection $C_0 := S_0 \cap S$ est une collection finie de cercles. Soit T un voisinage tubulaire de S paramétré par $\tau : S \times [-\varepsilon, +\varepsilon] \xrightarrow{\sim} T$ de sorte que $\tau_0 : S \to S$ soit l'identité et $S_0 \cap T = \tau(C_0 \times [-\varepsilon, +\varepsilon])$. On choisit un cercle $C \subset C_0$ qui borde un disque $D \subset S$ tel que $\partial D = D \cap C_0 = C$. On remplace alors le cylindre $\tau(C \times [-\frac{\varepsilon}{2}, +\frac{\varepsilon}{2}])$ par deux disques $\tau(D \times \{-\frac{\varepsilon}{2}, +\frac{\varepsilon}{2}\})$. Le résultat est un système de sphères S_1 dont l'intersection $C_1 := S_1 \cap S$ a une composante de moins. Par récurrence on arrive à un système de sphères $S_* \subset V$ disjoint de S.

Supposons de plus que S et S_0 sont munies de coorientations cohérentes. La chirurgie produit S_* avec une coorientation cohérente induite par S_0. On définit alors la 3-variété $V|S^+|S_0^+ := (V|S^+) \cap (V|S_*^+)$. Les choix dans la construction de S_* ne changent $V|S^+|S_0^+$ qu'en découpant ou recollant des 3-cellules. En particulier la clôture connexe $\langle V|S^+|S_0^+ \rangle$ est bien définie. On obtient ainsi un découpage en quatre :

$$V \cong \langle V|S^+|S_0^+ \rangle \sharp \langle V|S^+|S_0^- \rangle \sharp \langle V|S^-|S_0^+ \rangle \sharp \langle V|S^-|S_0^- \rangle \ .$$

Le théorème suivant dit que ce découpage est invariant par des isotopies de S et de S_0. Ce résultat et surtout sa preuve sont une version d'isotopie du théorème d'Alexander-Schönflies ; en effet ce dernier s'obtient comme cas particulier.

THÉORÈME 13. – *Soit V une 3-variété contenant trois 2-sphères séparantes coorientées S, S_0, S_1 de sorte que S_0 et S_1 soient transverses à S. Si S_0 et S_1 sont isotopes, alors $\langle V|S^+|S_0^+ \rangle \cong \langle V|S^+|S_1^+ \rangle$.*

Esquisse de démonstration. – Soit $\phi : [0,1] \times \mathbb{S}^2 \to V$ une isotopie entre $S_0 = \phi_0(\mathbb{S}^2)$ et $S_1 = \phi_1(\mathbb{S}^2)$. Après une petite déformation de ϕ fixant ϕ_0 et ϕ_1 on peut supposer que toute sphère $S_t := \phi_t(\mathbb{S}^2)$ est transverse à S, sauf pour un nombre fini de paramètres critiques. On peut supposer de plus que toute sphère critique S_t est tangente à S en un seul point non-dégénéré.

Pour tout paramètre régulier $t \in [0,1]$ on considère la variété $M_t := V|S^+|S_t^+$. Il est clair que M_a est difféomorphe à M_b si l'intervalle $[a,b]$ est sans paramètres critiques (et que l'on fait des choix uniformes en effectuant la chirurgie sur S_t). Pour un paramètre critique t il faut distinguer plusieurs cas selon le type du point critique et les coorientations de S et de S_t. Au total, quatre transformations sont possibles :
- Ou les variétés $M_{t-\varepsilon}$ et $M_{t+\varepsilon}$ sont difféomorphes,
- ou elles diffèrent par l'addition d'une 3-cellule comme nouvelle composante,
- ou elles diffèrent par le recollement d'une 3-cellule à une 2-sphère du bord,
- ou elles diffèrent par le découpage le long d'un disque proprement plongé et séparant.

Dans tous les cas leurs clôtures connexes $\langle M_{t-\varepsilon} \rangle$ et $\langle M_{t+\varepsilon} \rangle$ sont difféomorphes, d'où la conclusion. □

Enfin nous en déduisons le corollaire suivant, ce qui achève la démonstration du lemme 11.

COROLLAIRE 14. – *Soient V une 3-variété et $S \subset V$ une 2-sphère séparante coorientée. Si un nœud K_0 dans $V|S^+$ est équivalent à K_1 dans $V|S^-$, alors il est local.*

Démonstration. – Soit $S_0 \subset V|S^+$ une copie parallèle de S située du coté positif et munie de la même coorientation. Ceci entraîne $V|S^-|S_0^+ = \emptyset$ alors que $V|S^+|S_0^+ = V|S_0^+$ contient K_0. Par hypothèse il existe une difféotopie $\Phi : [0,1] \times V \to V$ avec $\Phi_0 = \mathrm{id}_V$ telle que $\Phi_1 K_0 = K_1$ soit contenu dans $V|S^-$. On peut supposer que la 2-sphère $S_1 := \Phi_1 S_0$ est transverse à S. Grâce au théorème précédent on a $\langle V|S^-|S_1^+ \rangle \cong \langle V|S^-|S_0^+ \rangle \cong \mathbb{S}^3$, donc $V|S^-|S_1^+$ est une collection de 3-sphères trouées. Comme le nœud K_1 est contenu dans $V|S^-|S_1^+$, il est local dans $V|S^-$. Symétriquement K_0 est local dans $V|S^+$. □

Remerciements. Je tiens à remercier Christine Lescop, Bruno Sévennec, Étienne Ghys, Patrick Popescu-Pampu, Thomas Fiedler ainsi que le rapporteur pour leurs remarques, leurs critiques et leurs encouragements.

Références bibliographiques

[1] Bar-Natan D., *On the Vassiliev knot invariants.* Topology **34** (1995), 423–472
[2] Bing R.H., *Necessary and sufficient conditions a* 3*-manifold be* $\mathbb{S}^3$. Ann. of Math. **68** (1958), 17–37
[3] Birman J.S., Lin X.S., *Knot polynomials and Vassiliev's invariants.* Invent. Math. **111** (1993), 225–270
[4] Costich O.L., Doyle P.H., Galewski D.E., *A characterisation of punctured open* 3*-cells.* Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 295–298
[5] Hirsch M.W., *Differential Topology.* Graduate Texts in Mathematics No. 33, Springer Verlag, New York 1976
[6] Kister J.M., McMillan D.R., *Locally euclidean factors of E^4 which cannot be imbedded in E^3.* Ann. of Math. **76** (1962), 541–546
[7] Lin X.S., *Finite type link invariants of* 3*-manifolds.* Topology **33** (1994), 45–71
[8] McMillan D.R., *Some contractible open* 3*-manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 373–382
[9] Whitehead J.H.C., *A certain open manifold whose group is unity.* Quart. J. Math. **6** (1935), 268–279