Knotengruppen-Darstellungen und Invarianten von endlichem Typ

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
an der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

vorgelegt von

Michael Eisermann

Bonn 2000

Angefertigt mit Genehmigung
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Referent: Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Korreferent: Prof. Dr. F. Pop

Tag der Promotion: 13. Januar 2000

Mathematics Subject Classification:

57M25 Knots and links in the 3-sphere
57M27 Invariants of knots and 3-manifolds
57M05 Fundamental group and presentations
20C40 Computational methods
57–04 Explicit machine computation and programs

Diese Arbeit wurde mit LaTeX2ε im Format amsbook gesetzt.
Die Verwendung der Schriftfamilie New Century Schoolbook
wurde durch das Paket newcent realisiert.

Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
ISSN 0524–045X

Белеет парус одинокой
В тумане моря голубом!..
Что ищет он в стране далекой?
Что кинул он в краю родном?..

Играют волны – ветер свищет,
И мачта гнется и скрыпит...
Увы, – он счастия не ищет
И не от счастия бежит!

Михаил Лермонтов, Парус

Weiß schimmert das einsame Segel
im blassblauen Nebel des Meeres!
Was sucht es im fernen Lande?
Was ließ es am Heimatstrand zurück?

Die Wellen spielen, der Wind pfeift,
und der Mast biegt sich und knarrt.
O weh – sein Glück sucht es nicht,
und es flieht auch nicht davor.

Michail Lermontov, Das Segel

Inhaltsverzeichnis

Oft schon hatte er so empfunden, oft schon so gedacht, so gefürchtet. (...) und nach Wochen oder Monaten, nach Qual oder Betäubung war die Auferstehung gekommen, neuer Brand, neuer Ausbruch der unterirdischen Feuer, neue glühendere Werke, neuer glänzender Lebensrausch. So war es gewesen, und die Zeiten der Qual und des Versagens, die elenden Zwischenzeiten waren vergessen worden und untergesunken.

Hermann Hesse, *Klingsors letzter Sommer*

Einleitung

Die mathematische Untersuchung von Knoten beginnt in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts mit C.F. Gauß und seinen Studien zur Elektrodynamik. Sie wurde fortgeführt von seinem Schüler J.B. Listing, dem wir auch die Bezeichnung *Topologie* verdanken. Als eigenständiges Gebiet wurden Knoten von P.G. Tait, T.P. Kirkman und C.N. Little behandelt, die gegen Ende des 19. Jahrhunderts eine empirische Klassifikation einfacher Knoten unternahmen. Mit der Entwicklung von Topologie und algebraischer Topologie, initiiert durch H. Poincaré, nahm auch die Knotentheorie nach und nach ihre heutige, topologische Gestalt an.

Der klassische Blickwinkel. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurden die heute klassischen Konzepte zur Untersuchung von Knoten entwickelt, allen voran die Fundamentalgruppe und das Alexander-Polynom. Diese wurden durch die Untersuchung topologischer Räume motiviert und mit großem Erfolg auf Knoten angewendet bzw. darauf zugeschnitten. Hierzu waren die Arbeiten von M. Dehn, J.W. Alexander, K. Reidemeister, E. Artin, H. Seifert und E.R. van Kampen grundlegend (um nur einige zu nennen).

In den folgenden Jahrzehnten bestätigte sich die zentrale Stellung der Knotentheorie in der niedrig-dimensionalen Topologie. Sie fand Anwendungen bei der Untersuchung von Singularitäten eingebetteter Flächen im $\mathbb{R}^4$ durch R.H. Fox und J.W. Milnor, ebenso bei der Chirurgie-Darstellung von 3-Mannigfaltigkeiten durch W.B.R. Lickorish, R.C. Kirby und andere, und schließlich bei der Untersuchung hyperbolischer 3-Mannigfaltigkeiten durch W.P. Thurston.

Das Jones-Polynom und seine Folgen. Seit 1984 hat die Knotentheorie eine stürmische Entwicklung erlebt. Nach der Entdeckung des Jones-Polynoms entstand eine erstaunliche Vielfalt weiterer Knotenpolynome. Sie wurden zwar auf verschiedenen Wegen entdeckt, gemeinsam ist ihnen jedoch, dass sie aus deformierten Darstellungen der Zopfgruppen gewonnen werden können.

Die von V.A. Vassiliev entwickelte Idee der Knoteninvarianten endlichen Typs bietet hierfür einen allgemeineren Rahmen und wurde innerhalb weniger Jahre zu einer weitverzweigten Theorie ausgearbeitet. Dabei wurden Brücken zu anderen Gebieten der Mathematik und zur theoretischen Physik geschlagen, zur Theorie der Lie-Algebren und Quantengruppen ebenso wie zu topologischen Feldtheorien. Diese Wechselwirkungen gaben der Knotentheorie wesentliche Impulse und prägen heute einen großen Teil der Forschung auf diesem Gebiet.

Eine topologische Interpretation des Jones-Polynoms und anderer Vassiliev-Invarianten ist hingegen noch nicht gelungen. Das Alexander-Polynom bildet bislang die einzige Verbindung zwischen der Knotengruppe und der Klasse der Vassiliev-Invarianten.

Zum Aufbau dieser Arbeit

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen und folgt damit der historischen Entwicklung der Knotentheorie: Der erste Teil widmet sich der Knotengruppe und ihren Darstellungen. Hierzu wird die Klasse der Färbungspolynome eingeführt und eingehend untersucht. Der zweite Teil behandelt Vassiliev-Invarianten und entwickelt das Konzept der geometrischen Folgen von Knoten. Damit gelingt eine Charakterisierung von Vassiliev-Invarianten als Polynome auf geometrischen Knotenfolgen. Die Handlungsstränge beider Teile führen im letzten Kapitel zusammen, in dem ich zeige, dass die Anzahlen von Knotengruppen-Darstellungen und Vassiliev-Invarianten zwei getrennte Klassen bilden.

Teil I: Knotengruppen-Darstellungen

Das erste Kapitel behandelt die Grundlagen zu Knoten, Verschlingungen, Tangles und Zöpfen, wie sie in den folgenden Kapiteln benötigt werden. Kapitel 2 widmet sich der Knotengruppe $\pi(K) = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ und stellt die grundlegenden Techniken für die Untersuchung ihrer Darstellungen zusammen. Hierzu wird die Wirtinger-Präsentation erklärt und ihre Interpretation durch Knotenfärbungen diskutiert. Diese Betrachtung nutzt aus, dass für Knotengruppen-Darstellungen nicht die gesamte Gruppe, sondern nur die Konjugationsklasse der Meridiane wesentlich ist. Zur allgemeinen Behandlung von Färbungen wurde von D. Joyce der Begriff des Quandels eingeführt, der die Eigenschaften von Konjugationsklassen axiomatisiert. Konjugationsklassen sind Quandel, umgekehrt lässt sich aber nicht jedes Quandel in eine Gruppe einbetten. Ich zeige jedoch:

SATZ 2.34. *Für jeden Knoten gibt es eine Bijektion zwischen Färbungen mit Quandeln und Färbungen mit Gruppen.*

Dies rechtfertigt, sich im Folgenden auf Gruppen zu konzentrieren.

Färbungspolynome. Darstellungen in endliche Gruppen sind ein Standard-Werkzeug der Knotentheorie, denn sie erlauben in besonderem Maße die Berechnung von Invarianten, vor allem die Homologie-Invarianten von (verzweigten) Überlagerungen. Je nach Anwendung wurden dazu auch die Bilder von Meridian und Longitude als charakteristische Elemente betrachtet. Zur Systematisierung werden in Kapitel 3 Färbungspolynome eingeführt und eingehend untersucht. Hierzu sei G eine Gruppe und x ein Element mit endlicher Konjugationsklasse. Für jeden Knoten K ist das Färbungspolynom definiert als

$$P(K) := \sum_{\rho} \rho(l_K) \qquad \in \quad \mathbb{Z}G.$$

Summiert wird dabei über alle Darstellungen $\rho : \pi(K) \to G$, die den fest gewählten Meridian m_K des Knotens auf das Element x in G abbilden. Das Bild $\rho(l_K)$ der Longitude ist ein Charakteristikum der Darstellung ρ. Durch die Summation über alle Darstellungen erhalten wir eine Knoteninvariante.

BEISPIEL 3.2. Für die alternierende Gruppe $\mathrm{Alt}(5)$ mit Fußpunkt $x = (12345)$ ist das Färbungspolynom der linkshändigen Kleeblattschlinge $1 + 5x$, das der rechtshändigen hingegen $1 + 5x^{-1}$. Dieses Beispiel zeigt bereits, dass die beiden Kleeblattschlingen chiral sind.

Symmetrien. Die Invariante $P(K)$ ist kein echtes Polynom, sondern ein Element im Gruppenring $\mathbb{Z}G$. Die möglichen Bildwerte und ihre Symmetrien werden in den Abschnitten 3.3 und 3.4 untersucht. Erfreulicherweise verhalten sich Färbungspolynome wie die bekannten Knotenpolynome:

SATZ 3.32. *Färbungspolynome sind multiplikativ, das heißt, für die verbundene Summe von Knoten gilt* $P(K_1 \sharp K_2) = P(K_1)P(K_2)$.

Meridian und Longitude codieren sowohl die Orientierung des Knotens als auch die des umgebenden Raumes $\mathbb{S}^3$. Eine Orientierungsumkehr der Sphäre kommt einer Spiegelung gleich und überführt einen Knoten K in sein Spiegelbild $K^\times$. Die Orientierungsumkehr des Knotens ergibt den *reversen* Knoten $K^!$. Beide Orientierungen umzukehren, führt zum *inversen* Knoten K^*.

SATZ 3.33. *Bei der Inversion von Knoten gilt* $P(K^*) = P(K)^*$, *wobei* $^* : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ *die lineare Fortsetzung der Inversion* $g \mapsto g^{-1}$ *in* G *ist.*

Spiegelung und Reversion lassen sich ebenso behandeln, wenn die Gruppe G die nötigen Symmetrien besitzt: Einen Automorphismus $^\times : G \to G$ mit $x^\times = x^{-1}$ nennen wir *Obversion* von (G, x). Komponiert mit der Inversion entsteht daraus ein Anti-Automorphismus $^! : G \to G$ mit $x^! = x$, den wir *Reversion* nennen.

SATZ 3.38. *Wenn die Gruppe* (G, x) *eine Obversion besitzt, dann gilt für Färbungspolynome bei Spiegelung* $P(K^\times) = P(K)^\times$ *und bei Reversion* $P(K^!) = P(K)^!$.

Auch Perioden des Knotens spiegeln sich in seinem Färbungspolynom wider – hier gilt eine ähnliche Formel wie für das Alexander-Polynom:

SATZ 3.45. *Sei* K *ein Knoten mit Periode* p *und Faktorknoten* $\hat{K}$. *Für die Färbungspolynome gilt dann* $P(K) = P(\hat{K})^{(p)} + r$ *mit einem Rest* $r \geq 0$. *Ist darüber hinaus* p *eine Primzahl, die* $|\operatorname{Inn}(G)'|$ *nicht teilt, dann gilt* $p|r$.

Hierbei ist $^{(p)} : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ die lineare Fortsetzung der Potenzierung $g \mapsto g^p$ in der Gruppe G. Für mögliche Perioden bedeutet dies ein zusätzliches Kriterium, das über die Information des Alexander-Polynoms hinausgeht.

Nicht-reversible Knoten. In vielen Beispielen erweist sich die Mathieu-Gruppe M_{11} als nützlich. Sie besitzt keinen Automorphismus, der ein Element der Ordnung 11 auf sein Inverses abbildet. Diese Asymmetrie der Gruppe hat eine interessante Asymmetrie der Färbungspolynome zur Folge:

BEISPIEL 3.7. Der Knoten 8_{17} aus Abbildung 1.1 ist der kleinste nicht-reversible Knoten. Zur Färbung wählen wir die Mathieu-Gruppe M_{11} und ein Element x der Ordnung 11. Der Knoten 8_{17} hat dann das Färbungspolynom

$$P(8_{17}) = 1 + 11x^5 + 11x^6,$$

sein reverser Knoten hingegen hat triviales Färbungspolynom 1.

Dies ist der bislang einfachste Beweis, dass dieser Knoten nicht-reversibel ist. Einem Knoten diese Asymmetrie nachzuweisen, gilt als schwierig, da alle üblichen Invarianten unempfindlich gegenüber Reversion sind.

Zentrale Erweiterungen. Das vierte Kapitel widmet sich dem Verhalten von Färbungspolynomen bei zentraler Erweiterung der Färbungsgruppe.

SATZ 4.11. *Sei $\tilde{G}, \tilde{x} \twoheadrightarrow G, x$ eine zentrale Erweiterung. Dann lässt sich jede Knotengruppen-Darstellung $\rho : \pi(K), m_K \to G, x$ eindeutig zu einer Darstellung $\tilde{\rho} : \pi(K), m_K \to \tilde{G}, \tilde{x}$ hochheben.*

Die Anzahlen der Knotenfärbungen sind demnach für $\tilde{G}$ und G die gleichen. Beispiele zeigen jedoch, dass das hochgehobene Färbungspolynom $\tilde{P}$ mehr Information enthält als P: Longituden, die in G gleich sind, können in $\tilde{G}$ aufspalten. Dieses Phänomen wirft die Frage auf, wie sich eine Konjugationsklasse $Q = x^G$ in verschiedene Gruppen einbetten lässt und wie sich die Färbungspolynome dabei verhalten. Hierzu beweise ich folgenden Satz:

SATZ 4.32. *Jede endliche Konjugationsklasse Q lässt sich in eine endliche Gruppe $\Gamma(Q)$ einbetten, sodass das Färbungspolynom maximale Information enthält.*

Für die Untersuchung von Färbungspolynomen kann man sich demnach auf endliche Gruppen beschränken. Die Gruppe $\Gamma(Q)$ nennen wir die *universelle* Färbungsgruppe zu Q.

BEISPIEL 4.39. Zu der Gruppe $G = \mathrm{Sym}(4)$ mit Fußpunkt $x = (1234)$ sind die Färbungspolynome der beiden Kleeblattschlingen K und K^* gegeben durch

$$P(K) = P(K^*) = 1 + 4x^2.$$

Die hier auftretenden Bilder 1 und x^2 sind für alle Knoten die einzig möglichen Longitudenbilder in G. Die zur Konjugationsklasse $Q = x^G$ gehörige universelle Färbungsgruppe Γ entsteht durch eine zentrale Erweiterung

$$\mathbb{Z}_4 \to \Gamma \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}(4).$$

Sei $\tilde{x}$ ein Urbild von x. Die Konjugationsklasse $\tilde{Q} = \tilde{x}^\Gamma$ wird bei dieser Erweiterung bijektiv auf Q abgebildet. Die Gruppe der möglichen Longitudenbilder in Γ ist jedoch größer als in G: Sie wird von einem Element t der Ordnung 4 erzeugt. Für die Färbungspolynome der beiden Kleeblattschlingen gilt

$$\tilde{P}(K) = 1 + 4t \qquad \text{und} \qquad \tilde{P}(K^*) = 1 + 4t^3.$$

Dieses Beispiel erstaunt vor allem durch seine Kleinheit: Die Konjugationsklasse von $\tilde{x}$ hat nur 6 Elemente, aber das zugehörige Färbungspolynom kann Knoten von ihren Spiegelbildern unterscheiden.

Komplexität der Berechnung. Um ein Färbungspolynom zu berechnen, müssen zuerst *alle* Darstellungen von $(\pi(K), m_K)$ in (G, x) gefunden werden. Die übliche Vorgehensweise ist die Minimierung der Brückenzahl: Lässt sich der Knoten durch ein Diagramm mit b Brücken darstellen, dann wird die Knotengruppe $\pi(K)$ von den zugehörigen b Meridianen erzeugt. Ist $Q = x^G$ die betrachtete Konjugationsklasse, dann müssen $|Q|^{b-1}$ mögliche Abbildungen geprüft werden.

In den Beispielen haben die Konjugationsklassen bis etwa 1000 Elemente, und kleine Knoten haben Brückenzahl $b = 2$ oder $b = 3$. In einfachen Fällen führt der Standard-Algorithmus daher zu akzeptablen Ergebnissen, ist aber schon für größere Konjugationsklassen zu langsam. Für Knoten mit vier und mehr Brücken ist die Situation verheerend. Diese Schwierigkeit hat die Verwendung größerer Knotengruppen-Darstellungen seit jeher stark eingeschränkt.

Effiziente Berechnung. In Kapitel 5 erkläre ich einen Algorithmus, der die erschöpfende Suche von Knotengruppen-Darstellungen drastisch verkürzt. Dies ist von allgemeinerem Interesse, da Knotengruppen-Darstellungen in endliche Gruppen auch in anderen Zusammenhängen genutzt und berechnet werden.

Zur Optimierung dieses Färbungsproblems nutzt man geeignete Unterdiagramme, rationale Tangles im Sinne von J.H.Conway, und löst das Teilproblem hierfür separat. Der Erfolg dieses Vorgehens beruht auf folgendem Satz:

SATZ 5.14. *Bei der Färbung eines Knotendiagramms kann das Teilproblem eines rationalen Tangles von linearem auf konstanten Aufwand reduziert werden.*

Aus dieser lokalen Optimierung lassen sich optimierte Lösungsverfahren für alle Knotendiagramme aufbauen. Am wirkungsvollsten ist diese Technik bei algebraischen Tangles; das sind diejenigen, die sich rekursiv aus rationalen Tangles zusammensetzen lassen. Für sie lässt sich das Färbungsproblem typischerweise mit linearem Aufwand lösen. Für Knoten bedeutet das:

ERGEBNIS. *Die Klasse der Knoten, die mit linearem Aufwand gefärbt werden können, enthält nicht nur die Zweibrückenknoten, sondern die meisten arboreszenten Knoten, insbesondere Brezel-Knoten und Montesinos-Knoten.*

Die meisten Knoten mit geringer Kreuzungszahl sind arboreszent. Darüber hinaus gibt es arboreszente Knoten mit beliebig hoher Brückenzahl, wie etwa die Familie der Montesinos-Knoten zeigt. Die Existenz eines Algorithmus mit typischerweise linearem Zeitaufwand ist daher höchst erstaunlich.

Der hier entwickelte Algorithmus ist auf alle Knoten und auf alle Gruppen gleichermaßen anwendbar. Als generischer Algorithmus ist er die bisher effizienteste Methode zur erschöpfenden Suche nach Knotengruppen-Darstellungen.

Software. Kapitel 5 ist auf die Erklärung der Grundideen ausgerichtet und bleibt dabei so wenig technisch wie möglich. Darüber hinaus habe ich den Algorithmus in C++ implementiert. (Alle größeren Beispiele dieser Arbeit wurden damit berechnet.) Das Programm ist von mir frei erhältlich. Da es bereits regen Zuspruch gefunden hat, wird eine Weiterentwicklung mit Dokumentation und Beispielbibliothek demnächst öffentlich zur Verfügung gestellt.

Teil II: Vassiliev-Invarianten

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden Vassiliev-Invarianten betrachtet, und Kapitel 6 erklärt die hierzu nötigen Grundlagen. Besonderes Augenmerk habe ich dabei auf den Vergleich zu den Färbungsinvarianten aus Teil I gerichtet. Hier ergeben sich vor allem zwei Berührungspunkte: Vassiliev-Invarianten und Färbungszahlen lassen sich gleichermaßen aus linearen Darstellungen der Zopfgruppen gewinnen. Die verwendeten R-Matrizen sind jedoch grundverschieden, und die Invarianten verhalten sich entsprechend unterschiedlich.

Als zweite Quelle von Vassiliev-Invarianten erläutere ich die Artin-Magnus-Darstellung der Zopfgruppen. Diese entspricht der Färbung von Zöpfen mit Elementen einer freien Gruppe. Kombiniert mit der Magnus-Darstellung der freien Gruppe erlaubt dies, Zöpfe in Potenzreihen zu entwickeln. Ihre Koeffizienten sind Vassiliev-Invarianten und klassifizieren Zöpfe vollständig.

Der Kontsevich-Isomorphismus ist Inhalt von Kapitel 7. Zu seiner Formulierung gebe ich eine Zusammenfassung zur Hopf-Algebra der Knoten und der Sehnendiagramme. Der Satz von Kontsevich besagt, dass diese Hopf-Algebren über $\mathbb{Q}$ isomorph sind.

Geometrische Knotenfolgen. Kapitel 8 untersucht geometrische Folgen von Knoten, also Folgen der Form $K_n = st^n u$ für $n \in \mathbb{N}$. Dabei sind s und u zwei Tangles und ihre Komposition su ein Knoten – dies ist das Folgenglied $K_0 = s \circ \mathrm{id} \circ u$. Das Tangle t sei in der angegebenen Weise mit s und u komponierbar und homotop zur Identität. Vassiliev-Invarianten werden durch ihr Verhalten auf geometrischen Folgen charakterisiert:

SATZ 8.9. *Eine Knoteninvariante $v : \mathcal{K} \to \mathbb{Q}$ ist genau dann eine Vassiliev-Invariante vom Grad $\leq m$, wenn sie auf jeder geometrischen Folge ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist.*

Dies erlaubt die „Lokalisierung" von Vassiliev-Invarianten und erweist sich bei ihrer Untersuchung als nützlich. Die folgenden Anwendungen geben davon einen Eindruck.

Nicht-reversible Knoten. Bislang ist unbekannt, ob Vassiliev-Invarianten alle Knoten unterscheiden, und die Erkennung nicht-reversibler Knoten ist ein wichtiger Prüfstein. Geometrische Folgen eröffnen neue Ansätze, ein Knotenpaar zu finden, das von keiner Vassiliev-Invariante unterschieden werden kann:

KOROLLAR 8.19. *Angenommen ein Knoten K ist Teil einer geometrischen Folge, die unendlich viele reversible Knoten enthält. Dann können Vassiliev-Invarianten in Charakteristik 0 den Knoten K nicht von seinem Reversen $K^!$ unterscheiden.*

Bislang ist leider kein Knoten $K \neq K^!$ mit dieser Eigenschaft bekannt, aber seine Existenz auch nicht ausgeschlossen. Wenn wir umgekehrt wüssten, dass eine Vassiliev-Invariante vom Grad m die Knoten K und $K^!$ unterscheidet, dann lässt sich dieses Ergebnis so interpretieren: In jeder geometrischen Folge, die den Knoten K enthält, sind höchstens m Knoten reversibel, alle anderen hingegen nicht-reversibel.

Anwendung auf Brezelknoten. Brezelknoten bildeten das historisch erste Beispiel nicht-reversibler Knoten und sind seitdem eingehend studiert worden. Die Technik der geometrischen Folgen lässt sich hier besonders gut einsetzen. Insbesondere kann man statt rationaler Vassiliev-Invarianten auch solche mit Werten in einer beliebigen abelschen Gruppe behandeln. Allein aus den Symmetrien der Brezelknoten gewinnen wir folgende Aussagen:

SATZ 8.16. *Bis Grad 8 kann keine Vassiliev-Invariante Brezelknoten von ihren Reversen unterscheiden.*

Nach Ergebnissen von J. Kneissler gilt die Aussage über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_2$ sogar bis Grad 12. Für endliche abelsche Gruppen außer $\mathbb{F}_2$ war bislang nichts bekannt. Satz 8.16 lässt sich noch verschärfen:

SATZ 8.17. *Sei A eine abelsche Gruppe ohne 2-Torsion. Bis Grad 10 kann keine Vassiliev-Invariante $v : \mathcal{K} \to A$ Brezelknoten von ihren Reversen unterscheiden.*

Anwendung auf Zopfgruppen. Aufgrund der Artin-Magnus-Darstellung lassen sich je zwei Zöpfe durch eine geeignete Vassiliev-Invariante unterscheiden. Dies erlaubt Folgerungen über die Struktur der Zopfgruppen:

KOROLLAR 8.23. *Sei α ein Zopf und β ein reiner Zopf gleicher Strangzahl. Wenn α mit einer Potenz β^n für ein $n \geq 2$ kommutiert, dann kommutiert α auch mit β.*

Man beachte, dass dieser Satz nicht gilt, wenn man für β einen beliebigen Zopf zulässt: Der Zopf $\beta = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ liegt nicht im Zentrum der Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n)$, die Potenz β^n hingegen schon. Als weitere Anwendung gebe ich einen neuen und sehr kurzen Beweis für einen bekannten Satz über Zopfgruppen:

KOROLLAR 8.24. *Die reinen Zopfgruppen sind torsionsfrei.*

Sequentiell beschränkte Invarianten. Die einfachsten geometrischen Folgen sind Twistfolgen und wurden zuerst von J. Dean und R. Trapp untersucht. Sie konnten damit zeigen, dass viele klassische Invarianten nicht von endlichem Typ sind. Dieses Ergebnis vertiefe ich in Kapitel 9, indem ich zeige, dass Zopfindex, Brückenzahl, Geschlecht und Entknotungszahl auf Twistfolgen beschränkt sind. Dies führt zu einem allgemeinen Beschränktheitskriterium:

SATZ 9.9. *Sei $\nu : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$ entweder der Zopfindex, die Brückenzahl, das Geschlecht oder die Entknotungszahl und $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion. Wenn eine Knoteninvariante $F : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ die Ungleichung $|F(K)| \leq \phi(\nu(K))$ für alle Knoten K erfüllt, dann ist F entweder konstant oder nicht von endlichem Typ.*

Färbungszahlen. Das Beschränktheitskriterium lässt sich gut auf die im ersten Teil dieser Arbeit diskutierten Färbungszahlen anwenden:

SATZ 9.10. *Die Anzahl $F_G(K)$ der Knotengruppen-Darstellungen $\pi(K) \to G$ ist entweder konstant oder nicht von endlichem Typ.*

Dies beantwortet eine Frage von D. Altschuler, der diese Aussage zuvor nur für wenige Gruppen zeigen konnte. Auch die Frage, für welche Gruppen G die Färbungszahl F_G konstant ist, konnte ich klären:

SATZ 9.15. *Die Invariante F_G ist genau dann konstant, wenn G nilpotent ist.*

Bezeichnungen

Wie üblich bezeichnet $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ die Menge der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen, $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe der Ordnung n und $\mathbb{F}_p$ den Körper der Ordnung p. Weiterhin steht $\mathbb{I} = [0,1]$ für das Einheitsintervall, $\mathbb{D}^n$ für die n-dimensionale Einheitskugel und $\mathbb{S}^n$ für die n-dimensionale Einheitssphäre. Das Zeichen $\square$ zeigt das Ende oder die Auslassung eines Beweises an. Angaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

Warum scheuen Sie sich auch so sehr, etwas zu wiederholen,
das schon vor Ihnen gesagt worden ist?
In Verbindung mit Ihren eigenen Gedanken erscheint das Alte
selbst doch immer von einer neuen Seite.
Moses Mendelssohn an Immanuel Kant

KAPITEL 1

Grundbegriffe der Knotentheorie

Die Gegenstände der Knotentheorie sind neben Knoten auch ihre naheliegenden Verallgemeinerungen, Verschlingungen und Tangles. Allen gemeinsam ist das Konzept der stetigen Deformation durch Isotopie, welches wir als erstes erklären. Nicht dem einzelnen Knoten gilt das Interesse, sondern seiner Isotopieklasse, seinem Knotentyp. Diese Begriffsbildung überträgt sich auf Verschlingungen, Tangles und Zöpfe. Das erste Kapitel führt diese Objekte ein und erläutert die grundlegenden Beziehungen zwischen ihnen.

Knoten, Verschlingungen und Tangles lassen sich durch Diagramme in der Ebene darstellen — alle hier gezeigten Bilder sind von dieser Art. Die Bewegung durch Isotopie übersetzt sich dabei in Reidemeister-Züge, wie in Abschnitt 1.4 erläutert. Daran anschließend werden verbundene Summe, Symmetrien und Perioden von Knoten erklärt, und das Kapitel schließt mit einer Diskussion des Invarianten-Begriffs.

1.1. Knoten und Verschlingungen

Um pathologische Verwicklungen zu vermeiden, nehmen wir im Folgenden stets an, dass alle Räume trianguliert und alle Abbildungen stückweise linear sind. Zur Diskussion dieser Voraussetzung und für weitere Erläuterungen empfehle ich die Lehrbücher von Crowell/Fox [22], Rolfsen [85], Burde/Zieschang [17] und Lickorish [70].

Isotopie. Sei X ein topologischer Raum und $\mathbb{I} = [0,1]$ das Einheitsintervall. Zu einer Abbildung $H : X \times \mathbb{I} \to X$ bezeichnen wir mit $H_t : X \to X$ die Abbildung $H_t(x) = H(x,t)$ und mit $\tilde{H} : X \times \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$ die Abbildung $\tilde{H}(x,t) = (H_t(x),t)$. Wir nennen H eine *Isotopie* wenn sie bei der Identität $H_0 = \mathrm{id}_X$ beginnt und $\tilde{H}$ ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist dann für jeden Parameterwert t die Abbildung $H_t : X \to X$ ein Homöomorphismus. Wenn $H_t(x) = x$ für alle $t \in \mathbb{I}$ gilt, dann sagen wir, der Punkt x wird von der Isotopie fest gelassen.

Knoten und Knotentypen. Ein *Knoten* ist eine Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ der Kreislinie $\mathbb{S}^1$ in die dreidimensionale Sphäre $\mathbb{S}^3$. Genauer nennen wir f einen *parametrisierten Knoten* und $f(\mathbb{S}^1)$ das *Bild* des Knotens.

Zwei Knoten $f, f' : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ heißen *isotop*, wenn es eine Isotopie $H : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^3$ mit $f' = H_1 \circ f$ gibt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Knoten. Eine Isotopieklasse von Knoten nennt man *Knotentyp*, die Menge der Knotentypen bezeichnen wir mit $\mathcal{K}$.

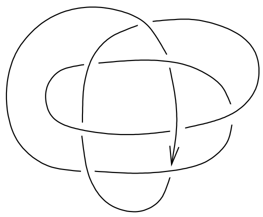


Abb. 1.1. Ein Knoten

Wir denken uns die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ mit ihrer Standardorientierung ausgestattet. Diese überträgt sich auf das Bild $f(\mathbb{S}^1)$, das wir im Folgenden stets als solcherart orientiert ansehen. Beim Übergang von einem Knoten f zu seinem Bild $f(\mathbb{S}^1)$ geht keine wesentliche Information verloren: Die Isotopieklasse von f ist bereits durch das orientierte Bild $f(\mathbb{S}^1)$ festgelegt. Dies rechtfertigt die verbreitete Nachlässigkeit, zwischen einem Knoten, seinem orientierten Bild und seiner Isotopieklasse sprachlich nicht zu unterscheiden und jedes dieser Objekte einen Knoten zu nennen.

Knoten lassen sich in vielerlei Hinsicht verallgemeinern, zum Beispiel lassen sich Knoten $\mathbb{S}^{n-2} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ in Dimension $n \geq 4$ betrachten. Die vorliegende Arbeit behandelt ausschließlich den klassischen Fall von Knoten in drei Dimensionen.

Verschlingungen. Bei der Untersuchung von Knoten ist es oft nützlich oder gar unerlässlich, den Blickwinkel etwas zu erweitern: Die Parametermenge $\mathbb{S}^1$ kann durch eine andere, kompakte 1-Mannigfaltigkeit ersetzt werden und der umgebende Raum $\mathbb{S}^3$ durch eine beliebige 3-Mannigfaltigkeit.

Sei M eine zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit, nicht notwendig kompakt und eventuell mit Rand. Ferner sei E eine geschlossene 1-Mannigfaltigkeit, also die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Kopien der Kreislinie $\mathbb{S}^1$. Wir schreiben hierfür kurz $E = \mu{\cdot}\mathbb{S}^1$, wobei μ die Komponentenzahl angibt. Eine *Verschlingung* in M mit Komponentenzahl μ ist eine Einbettung $f : E \hookrightarrow M \setminus \partial M$.

Wiederum betrachten wir Verschlingungen nur bis auf Isotopie. Da die Parametermenge E nun mehrere Komponenten hat, erlauben wir auch Umnummerierungen der Komponenten, das heißt Umparametrisierungen von E. Zwei Verschlingungen $f : E \to M$ und $f' : E' \to M$ heißen *isotop*, wenn es einen orientierungstreuen Homöomorphismus $h : E' \to E$ und eine Isotopie $H : M \times \mathbb{I} \to M$ mit $f' = H_1 \circ f \circ h$ gibt. Ein *Verschlingungstyp* ist eine Isotopieklasse von Verschlingungen. Diese ist bereits durch das orientierte Bild $f(E)$ festgelegt. Die Menge der Verschlingungstypen mit Komponentenzahl μ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^\mu(M)$, die Vereinigung dieser Mengen mit $\mathcal{L}(M)$.

Eine Verschlingung $f : \mu{\cdot}\mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$ heißt *triviale Verschlingung*, wenn sie sich zu einer Einbettung $\tilde{f} : \mu{\cdot}\mathbb{D}^2 \hookrightarrow M$ erweitern lässt. Dabei ist $\mathbb{D}^2$ die Kreisscheibe und $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$ ihr Rand. Triviale Verschlingungen mit gleicher Komponentenzahl μ sind isotop; ihre Isotopieklasse bezeichnen wir mit $\bigcirc^\mu$.

Verschlingungen in M, die sich in eine Umgebung $U \cong \mathbb{R}^3$ zusammenziehen lassen, heißen *lokal*. Anders betrachtet: Eine Einbettung $\iota : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow M$ induziert eine Abbildung $\iota_* : \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{L}(M)$ von Verschlingungstypen. Sie ist surjektiv, wenn $\pi_1(M) = \{1\}$, und injektiv, wenn M orientierbar ist.

1.2. Die Kategorie der Tangles

Verschlingungen lassen sich verallgemeinern, indem man auch Komponenten hinzunimmt, die in der Mannigfaltigkeit M von Rand zu Rand laufen. Zu diesem Zweck lassen wir als Parametermenge auch das Intervall $\mathbb{I}$ zu. Sein Rand besteht aus den Punkten 0 und 1, wobei wir 0 mit negativer und 1 mit positiver Orientierung versehen. Der Rand der Parametermenge $E = \mu{\cdot}\mathbb{S}^1 \cup \nu{\cdot}\mathbb{I}$ besteht demzufolge aus ν negativen und ν positiven Punkten.

Tangles. Sei M eine zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit auf deren Rand ∂M eine endliche Menge von Punkten $A \subset \partial M$ markiert und jeder dieser Punkte mit einer Orientierung $+$ oder $-$ versehen ist. Wir nehmen an, dass die Markierung A aus ν negativen und ν positiven Punkten besteht. Einen negativ orientierten Punkt interpretieren wir als Eingang, einen positiv orientierten als Ausgang. Die Markierung $-A$ entsteht aus A durch Umkehrung aller Vorzeichen.

Ein *Tangle* in der markierten 3-Mannigfaltigkeit (M, A) ist eine Einbettung $f : E \hookrightarrow M$ mit $f^{-1}(\partial M) = \partial E$, sowie $f(\partial E) = A$ mit übereinstimmenden Orientierungen. Das Bild $f(E)$ des Tangles besteht aus μ geschlossenen und ν offenen Strängen. (Für das Tangle in Abb. 1.2 gilt $\mu = 1$ und $\nu = 4$.)

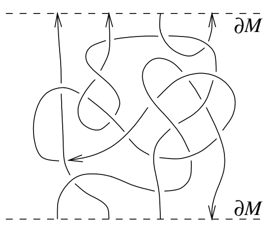


Abb. 1.2. Ein Tangle

Zwei Tangles $f : E \hookrightarrow M$ und $f' : E' \hookrightarrow M$ heißen *isotop*, wenn es einen orientierungstreuen Homöomorphismus $h : E' \to E$ und eine Isotopie $H : M \times \mathbb{I} \to M$ mit $f' = H_1{\circ}f{\circ}h$ gibt. Wir verlangen dabei, dass die Isotopie H den Rand ∂M punktweise fest lasse. Wiederum gilt: Die Isotopieklasse eines Tangles wird bereits durch sein orientiertes Bild bestimmt. Die Menge der Isotopieklassen von Tangles in (M, A) bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(M, A)$. Die Teilmenge der Tangles mit genau μ freien Komponenten bezeichnen wir mit $\mathcal{T}^\mu(M, A)$. Man beachte, dass wir im Fall $A = \emptyset$ gerade die oben erklärten Verschlingungen erhalten, also $\mathcal{T}^\mu(M, \emptyset) = \mathcal{L}^\mu(M)$.

Die Kategorie der Tangles. Da man Mannigfaltigkeiten längs ihrer Ränder verkleben kann, erlaubt das Konzept der Tangles eine Erweiterung der bisherigen Struktur. Hierzu betrachten wir eine zusammenhängende Fläche F. Objekte der Kategorie $\mathcal{T}_F$ sind endliche Mengen $A \subset F$, wobei jeder Punkt in A eine der Orientierungen $+$ oder $-$ trägt. Die leere Menge ist ebenfalls zugelassen.

Um die Morphismenmenge $\mathcal{T}_F(A, B)$ zu erklären, betrachten wir A und B als orientierte Ein- bzw. Ausgänge der 3-Mannigfaltigkeit $F \times \mathbb{I}$. Hierzu identifizieren wir die Markierung A mit $A \times 0$ sowie die Markierung B mit $B \times 1$ und erhalten die markierte Mannigfaltigkeit $(F \times \mathbb{I}, -(A \times 0) \cup (B \times 1))$. Die Tangles in dieser Mannigfaltigkeit nennen wir Tangles mit Eingängen A und Ausgängen B, und die Menge der Isotopieklassen bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_F(A, B)$. Die so erklärten Objekte und Morphismen werden zu einer Kategorie durch die Komposition

$$\mathcal{T}_F(B, C) \times \mathcal{T}_F(A, B) \to \mathcal{T}_F(A, C),$$

die durch Verkleben längs der Fläche (F, B) entsteht (siehe Abb. 1.3).

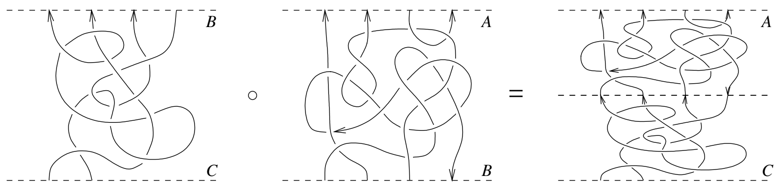


ABBILDUNG 1.3. Komposition zweier Tangles

Zu einer Markierung A ist die Identität id_A gegeben durch das Tangle

$$f : A \times \mathbb{I} \to F \times \mathbb{I} \quad \text{mit} \quad f(a,t) = \begin{cases} (a,t) & \text{wenn } a \text{ positiv orientiert ist,} \\ (a,1-t) & \text{wenn } a \text{ negativ orientiert ist.} \end{cases}$$

Die Identität für die leere Markierung $A = \emptyset$ ist das leere Tangle.

Die Tensorkategorie der Tangles. Bei Tangles über der Ebene $\mathbb{R}^2$ tritt neben ihrer Komposition auch ein Tensorprodukt in Erscheinung: Die Objekte der Kategorie $\mathcal{T}$ sind endliche Folgen der Zeichen $+$ und $-$, einschließlich der leeren Folge $\emptyset$. Jede solche Folge identifizieren wir mit der Folge der Punkte $(1,0), \dots, (n,0)$ in $\mathbb{R}^2$, versehen mit den entsprechenden Orientierungen. So erhalten wir zu jeder Folge A die markierte Fläche $(\mathbb{R}^2, A)$. Morphismen von A nach B erklären wir als Tangles in der Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{I}, -(A\times 0) \cup (B \times 1))$. Wie man sieht, ist $\mathcal{T}$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$. Das Tangle in Abb. 1.2 ist zum Beispiel ein Morphismus von $(-,-,+,-)$ nach $(-,-,-,+)$.

Neben der Komposition können wir nun auch ein Tensorprodukt erklären: Für Objekte A und A' ist das Tensorprodukt $A \otimes A'$ die Aneinanderhängung der beiden Folgen. Für zwei Tangles $f \in \mathcal{T}(A,B)$ und $f' \in (A',B')$ erklären wir $f \otimes f'$ durch Nebeneinanderstellen in der offensichtlichen Weise. Eine ausführliche Darstellung findet sich in dem Lehrbuch von C. Kassel [56, Kap.XII].

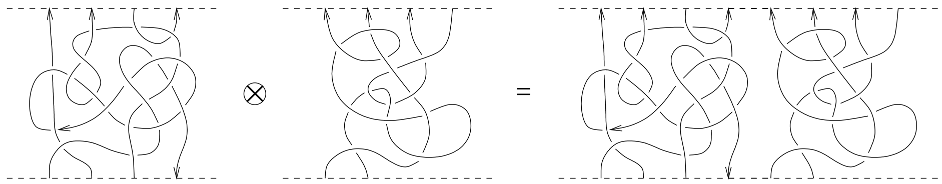


ABBILDUNG 1.4. Tensorprodukt zweier Tangles

1.3. Zöpfe und Markov-Züge

Besonders interessante Tangles sind die Automorphismen der Kategorie $\mathcal{T}_F$: Dies sind diejenigen Tangles, die ein beidseitiges Inverses besitzen. Abbildung 1.5 zeigt ein Beispiel, bei dem alle Stränge streng monoton abwärts laufen. Solche Tangles heißen *Zöpfe* [3, 37, 9, 17, 56]. Für jeden Zopf $f : A \times \mathbb{I} \to \mathbb{F} \times \mathbb{I}$ ist der inverse Zopf gegeben durch $f^*(a,t) = f(a, 1-t)$.

Zur Präzisierung betrachten wir die Mannigfaltigkeit $F \times \mathbb{I}$ und die Projektion $h : F \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ auf den zweiten Faktor, den wir als Höhe interpretieren. Für ein Tangle $f : E \hookrightarrow F \times \mathbb{I}$ definieren wir die *Brückenzahl* $br(f)$ als die halbe Anzahl der relativen Extrema von $h{\circ}f$. (Randextrema zählen wir dabei nicht mit.) Für eine Isotopieklasse von Tangles definieren wir ihre Brückenzahl als die minimale Brückenzahl ihrer Repräsentanten. Wir erhalten so eine Abbildung $br : \mathcal{T}_F \to \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Zöpfe sind genau die Tangles mit Brückenzahl 0.

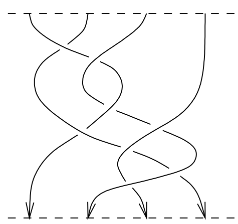


Abb. 1.5. Ein Zopf

Zwei naheliegende Fragen. Jeder Zopf besitzt ein beidseitiges Inverses. In der Tangle-Kategorie sind Zöpfe demnach Isomorphismen. Die Umkehrung dieser Aussage scheint einleuchtend, ist aber bislang nicht bewiesen worden. Wir sind damit unverhofft auf eine erste Frage gestoßen:

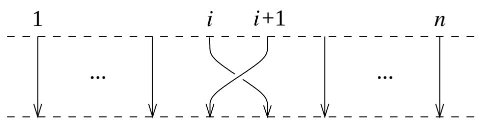
FRAGE: Ist jedes Tangle, das ein beidseitiges Inverses besitzt, ein Zopf?

Wenn ein Tangle $f \in \mathcal{T}_F(A,B)$ ein beidseitiges Inverses besitzt, dann muss jeder Strang von f einen Eingang $a \times 0$ mit einem Ausgang $b \times 1$ verbinden. Es reicht daher, den Fall $A = B$ zu betrachten. Zur Bearbeitung der Frage bietet sich die Brückenzahl als Invariante an. Bei der Komposition von Tangles gilt offenbar $br(f{\circ}g) \le br(f) + br(g)$. Dies führt uns zu folgender verallgemeinerten

FRAGE: Ist die Brückenzahl $br : \mathcal{T}_F^0(A,A) \to \mathbb{N}$ additiv?

Diese zweite Frage ist wesentlich allgemeiner und geometrisch interessanter: Der einfachste Fall der Ebene $F = \mathbb{R}^2$ mit $|A| = 1$ entspricht langen Knoten, und ihre Komposition ist die verbundene Summe (siehe Abschnitt 1.5). Für diesen Fall ist die Additivität der Brückenzahl ein klassisches Ergebnis von H. Schubert [88]. Schon im nächst komplizierteren Fall $|A| = 2$ ist die Antwort bislang unbekannt.

Präsentation der Zopfgruppe. Wir betrachten Zöpfe im Folgenden für die Ebene $\mathbb{R}^2$. Für die n-fache Wiederholung $(+,\dots,+)$ schreiben wir kurz n. Die Zopfgruppe auf n Strängen bezeichnen wir mit $\mathrm{Br}(n)$. Sie wird von den elementaren Zöpfen $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ der folgenden Form erzeugt:



SATZ 1.1 (Artin [3,9,17]). *Die Zopfgruppe* $\mathrm{Br}(n)$ *besitzt die Präsentation*

$$\mathrm{Br}(n) = \langle\, \sigma_1,\dots,\sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ und } \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ für } |i-j| \ge 2 \,\rangle. \quad \square$$

Zu jedem Zopf definieren wir seinen *Abschluss* wie in Abb. 1.6 gezeigt und erhalten so eine Abbildung $[\,] : \mathrm{Br} \to \mathcal{L}$. Nach dem Satz von Alexander [9,17,65] ist diese Abbildung surjektiv: Jede Verschlingung L in $\mathbb{S}^3$ lässt sich als Abschluss eines Zopfes darstellen. Die kleinste Anzahl von Strängen, für die das möglich ist, heißt *Zopfindex* von L, geschrieben $s(L)$.

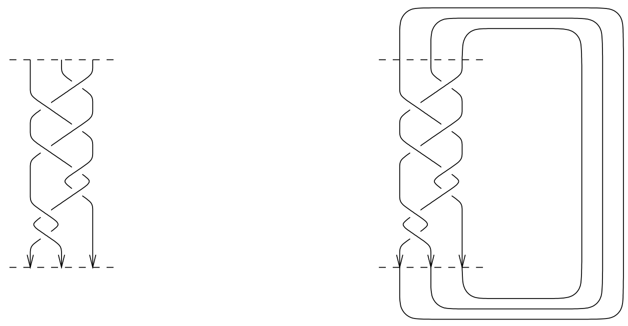


ABBILDUNG 1.6. Ein Zopf β und sein Abschluss $[\beta]$

BEISPIEL 1.2. Für den Knoten 8_{17} aus Abb. 1.1 zeigt Abb. 1.6 einen darstellenden Zopf mit drei Strängen. Da eine Darstellung mit zwei Strängen nicht möglich ist, gilt für den Zopfindex $s(8_{17}) = 3$.

Aus einem darstellenden Zopf für L kann man leicht neue gewinnen, denn die folgenden zwei *Markov-Züge* ändern den Abschluss des Zopfes nicht:

(M1) Konjugation: Gehe von dem Zopf β zu einem konjugierten Zopf $\alpha\beta\alpha^{-1}$ über.
(M2) Stabilisation: Gehe von dem Zopf β in $\mathrm{Br}(n)$ zu einem erweiterten Zopf $\beta' = (\beta \otimes \downarrow) \circ \sigma_n^{\pm 1}$ in $\mathrm{Br}(n+1)$ über, oder umgekehrt, von β' zu β.

SATZ 1.3 (Alexander-Markov [9]). *Jede Verschlingung lässt sich als Abschluss eines Zopfes darstellen. Zwei Zöpfe haben genau dann denselben Abschluss, wenn sie sich durch eine Folge von Markov-Zügen ineinander überführen lassen.* □

Die Zopfgruppe erlaubt eine Surjektion $\pi : \mathrm{Br}(n) \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}(n)$, die jedem Zopf σ_i die Transposition $(i, i{+}1)$ zuordnet. Der Kern $\mathrm{PBr}(n)$ wird *reine Zopfgruppe* genannt. Mehr zu diesen Gruppen findet sich bei J. Birman [9].

1.4. Diagramme und Reidemeister-Züge

Diagramme. Wie zuvor sei $E = \mu{\cdot}\mathbb{S}^1 \cup \nu{\cdot}\mathbb{I}$ eine eindimensionale Parametermenge und F eine Fläche. Ein *Diagramm* auf der Fläche F ist eine Immersion $f : E \looparrowright F$ mit $f^{-1}(\partial F) = \partial E$ und der Eigenschaft, dass jeder Mehrfachpunkt ein transversaler Doppelpunkt ist. Ein solcher Doppelpunkt heißt *Kreuzung*. An jeder Kreuzung sei eines der beiden Urbilder als „über“ und das andere als „unter“ markiert. Wir stellen dies bildlich dar, indem der unterkreuzende Strang an der Stelle der Kreuzung unterbrochen gezeichnet wird, während der überkreuzende durchgezogen ist. Diese sinnfällige Notation haben wir in den vorangegangenen Abbildungen bereits stillschweigend verwendet.

BEISPIEL 1.4. Abbildung 1.1 zeigt ein Diagramm des Knotens 8_{17}. Abbildung 1.2 zeigt ein Diagramm eines Tangles, die Fläche ist hier $\mathbb{R} \times \mathbb{I}$ oder $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$.

Wir betrachten Diagramme nur bis auf orientierungserhaltende Homöomorphismen von E und Isotopien der Fläche F, wobei der Rand ∂F punktweise fest bleibe. In diesem Sinne ist ein Diagramm bereits durch sein orientiertes Bild und die Angabe von Über-/Unterkreuzungen bestimmt.

Diagramme zu Tangles. Eine *Höhenfunktion* zu dem parametrisierten Diagramm $f : E \looparrowright F$ ist eine stetige Abbildung $h : E \to \mathbb{R}$, sodass an jeder Kreuzung $f(t) = f(t')$ mit $t \neq t'$ der überkreuzende Strang höher als der unterkreuzende Strang ist, also $h(t) > h(t')$ bei geeigneter Bezeichnung mit t und t'. Um den Fall $\partial E \neq \emptyset$ einheitlich behandeln zu können, verlangen wir außerdem $h(\partial E) = 0$.

Wir erhalten so zu jedem Diagramm $f : E \looparrowright F$ ein Tangle $(f, h) : E \hookrightarrow F \times \mathbb{R}$. Es ist klar, dass die Isotopieklasse des Tangles nicht von der gewählten Höhenfunktion abhängt. Eine Isotopie der Fläche F oder eine Umparametrisierung von E ändern die Isotopieklasse des Tangles ebenfalls nicht. Wir sagen daher, die Isotopieklasse des Tangles wird durch das Diagramm *dargestellt*.

LEMMA 1.5. *Jedes Tangle in $F \times \mathbb{R}$ mit Ein-/Ausgängen $A \subset \partial F \times 0$ lässt sich durch ein Diagramm auf der Fläche F darstellen. Die minimale Anzahl von Kreuzungen, für die das möglich ist, heißt* Kreuzungszahl *des Tangles.*

BEWEIS-IDEE: Jedes Tangle in $(F \times \mathbb{R}, A)$ lässt sich durch $(f, h) : E, \partial E \to F \times \mathbb{R}, A$ parametrisieren. Dies projiziert zu der Kurve f auf der Fläche F. Wenn nur transversale Doppelpunkte vorliegen, dann ist ein geeignetes Diagramm gefunden. Andernfalls können wir das Tangle durch eine Isotopie in allgemeine Lage bringen und so eine Projektion mit ausschließlich transversalen Doppelpunkten erreichen. [22, 17] $\square$

Reidemeister-Züge. Ein Tangle kann durch verschiedene Diagramme dargestellt werden: Die folgenden Reidemeister-Züge ändern das Diagramm, nicht aber das dargestellte Tangle. Die Züge sind so zu verstehen, dass ein Ausschnitt des Diagramms wie angegeben modifiziert werden darf.

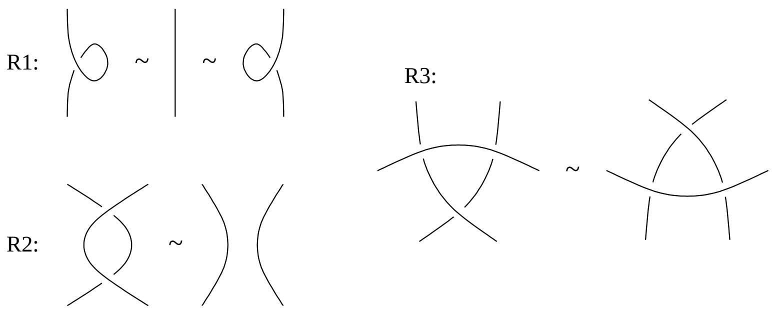


ABBILDUNG 1.7. Reidemeister-Züge

SATZ 1.6 (Reidemeister). *Jedes Tangle in $F \times \mathbb{R}$ mit Ein-/Ausgängen $A \subset \partial F \times 0$ lässt sich durch ein Diagramm auf der Fläche F darstellen. Genau dann stellen zwei Diagramme dasselbe Tangle dar, wenn sie sich durch eine Folge von Reidemeister-Zügen ineinander überführen lassen.*

BEWEIS-IDEE: Wir beginnen mit zwei Diagrammen $f, f' : E \to F$, die dasselbe Tangle darstellen. Das bedeutet, dass sich die Tangles (f, h) und (f', h') durch eine Isotopie ineinander überführen lassen. Diese Isotopie lässt sich durch eine Folge von Δ-Zügen der Tangles realisieren, wie in [82, 17, 56, 70] beschrieben.

Durch allgemeine Lage kann man erreichen, dass jeder Zwischenschritt zu einem Diagramm projiziert. Schließlich kann man die Δ-Züge so weit verfeinern, dass sich die Diagramme in jedem Zug entweder durch eine Isotopie der Ebene oder einen der obigen Reidemeister-Züge unterscheiden. □

Ebenso wie die Stränge des Tangles betrachten wir auch die Linien des Diagramms als orientiert. Wenn die Fläche F ebenfalls orientiert ist, dann können wir jeder Kreuzung ein Vorzeichen zuordnen. (Diese Konvention entspricht den Erzeugern σ_i^{+1} und σ_i^{-1} der Zopfgruppen.) Die Summe der Vorzeichen ändert sich bei R1-Zügen. Dieses Problem verschwindet, wenn wir zwei verschiedene Komponenten K_1 und K_2 betrachten: Sei $lk(K_1, K_2)$ die halbe Vorzeichensumme aller Kreuzungen, an denen K_1 und K_2 zusammentreffen. Sie ist invariant unter den Reidemeister-Zügen und wird *Verschlingungszahl* genannt.

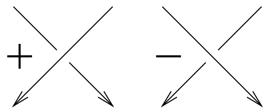


Abb. 1.8.
Kreuzungsvorzeichen

1.5. Verbundene Summe

Die verbundene Summe verknüpft zwei Knoten in $\mathbb{S}^3$ zu einem neuen Knoten wie in Abbildung 1.9 gezeigt. Das Ergebnis ist – bis auf Isotopie – unabhängig von der Stelle, an der die Knoten aufgeschnitten und neu verklebt werden. Man beachte allerdings, dass die Orientierungen zusammenpassen müssen. Der entstehende Knoten ist dann ebenfalls orientiert.

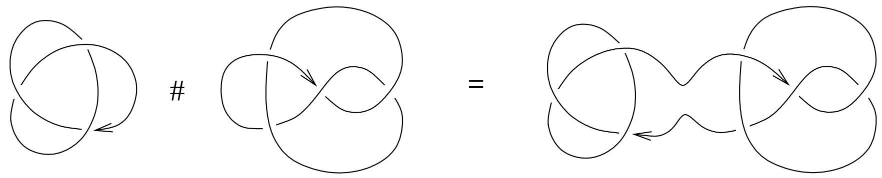


ABBILDUNG 1.9. Die verbundene Summe $K \sharp K'$ von zwei Knoten

Wir erhalten eine assoziative und kommutative Verknüpfung $\sharp : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ mit dem trivialen Knoten als neutralem Element. Das Monoid $(\mathcal{K}, \sharp, \bigcirc)$ hat viele interessante Eigenschaften, zum Beispiel gibt es außer dem trivialen Knoten keine invertierbaren Elemente, das heißt $K \sharp K' = \bigcirc$ impliziert $K = K' = \bigcirc$. Es ist ein klassisches Ergebnis von H. Schubert [87, 17, 70], dass dieses Monoid eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren erlaubt. Damit lassen sich viele Fragen von Knoten auf *Primknoten* zurückführen.

LEMMA 1.7. *Der Abschluss* $[\,] : \mathcal{T}^0(+,+) \to \mathcal{K}$ *stiftet eine Bijektion zwischen den Isotopieklassen von* 1*-Tangles in* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{I}$ *und Knoten in* $\mathbb{S}^3$*. Die Komposition von Tangles geht dabei in die verbundene Summe von Knoten über.* □

Aus zwei Verschlingungen L und L' lässt sich ebenfalls eine verbundene Summe bilden. Das Ergebnis hängt allerdings von der Auswahl der zu verbindenden Komponenten ab: Ist i eine Komponente von L und j eine Komponente von L', dann lässt sich $L\,{}_i\sharp_j\, L'$ wie oben im Fall von Knoten erklären, und das Ergebnis ist bis auf Isotopie wohldefiniert.

1.6. Spiegelung, Reversion, Inversion

Für einen Knoten $K \subset \mathbb{S}^3$ ist sowohl die Orientierung der Sphäre als auch die Orientierung der Knotenlinie relevant. Kehren wir die Orientierung der Sphäre um, so sprechen wir von dem *gespiegelten* oder *obversen* Knoten $K^\times$. Wir stellen dies als $K^\times = \sigma K$ dar, wobei $\sigma : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ eine Spiegelung der 3-Sphäre ist. Kehren wir die Orientierung der Knotenlinie um, so erhalten wir den *reversen* Knoten $K^!$. Beide Orientierungen umzukehren ergibt den *inversen* Knoten K^*.

Offenbar vertragen sich Spiegelung und Reversion mit der verbundenen Summe, das heißt $(K_1 \sharp K_2)^\times = K_1^\times \sharp K_2^\times$ und $(K_1 \sharp K_2)^! = K_1^! \sharp K_2^!$.

Man beachte, dass in der Literatur auch andere Benennungen zu finden sind. Ich folge hier der Notation von J.H. Conway [19, 70] mit dem Hinweis, dass der inverse Knoten K^* in der Konkordanzgruppe der zu K inverse Knoten ist [36]. Außerdem gilt: Wird K durch einen Zopf β dargestellt, dann repräsentiert der inverse Zopf β^{-1} den inversen Knoten K^* (siehe Beispiel 3.37).

Schwache Symmetrien. Ein Knoten heißt *obversibel*, wenn $K = K^\times$ gilt, wenn es also eine Isotopie von K zu seinem Spiegelbild $K^\times$ gibt. Ein Knoten heißt *reversibel*, wenn $K = K^!$, und *inversibel*, wenn $K = K^*$. Obversible Knoten werden auch *positiv amphichiral* genannt und inversible Knoten auch *negativ amphichiral*. Trifft einer der beiden Fälle zu, so nennt man den Knoten *amphichiral*, andernfalls *chiral*.

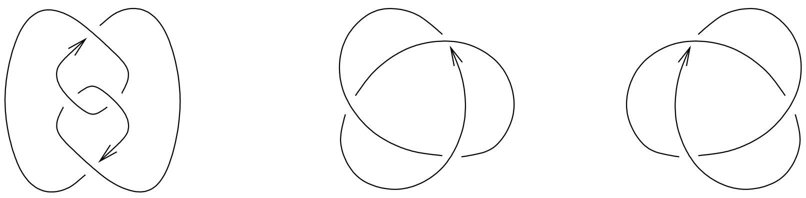


ABBILDUNG 1.10. Der Achterknoten und die beiden Kleeblattschlingen

Der Achterknoten (Abb. 1.10) ist amphichiral, die beiden Kleeblattschlingen hingegen chiral, wie erstmals M. Dehn [25] im Jahr 1914 zeigen konnte. Alle drei sind reversibel, ebenso die meisten anderen Knoten mit kleiner Kreuzungszahl. Dass es überhaupt nicht-reversible Knoten gibt, wurde erst 1964 von H.F. Trotter [94] bewiesen. Das erste Beispiel in den Knotentabellen [85, 17] ist der Knoten 8_{17} aus Abbildung 1.1. Er ist weder reversibel noch obversibel, dafür aber inversibel. Wir werden dies in Kapitel 3 mit Hilfe der dort eingeführten Färbungspolynome beweisen. Mit diesen werden wir auch zeigen können, dass der Conway-Knoten und der Kinoshita-Terasaka-Knoten keine der genannten Symmetrien besitzen.

Starke Symmetrien. Ein Homöomorphismus $h : \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^3$ ist genau dann isotop zur Identität, wenn er orientierungserhaltend ist (vgl. [22]). Für den Fall der 3-Sphäre oder des $\mathbb{R}^3$ können wir also die Äquivalenz von Knoten auch als Homöomorphie von orientierten Paaren $(\mathbb{S}^3, K)$ erklären.

Ein Knoten $K \subset \mathbb{S}^3$ ist genau dann obversibel, wenn es einen Homöomorphismus $\sigma : \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^3$ mit $\sigma(K) = K$ gibt, der die Orientierung von $\mathbb{S}^3$ umkehrt und die von K erhält. Wir nennen K *stark obversibel*, wenn ein solcher Homöomorphismus mit $\sigma^2 = \mathrm{id}$ existiert. Entsprechend definiert man die Begriffe *stark reversibel* und *stark inversibel*. Diese Symmetriebegriffe sind echte Verschärfungen der schwachen Symmetrien [46]. Es ist ein Leichtes, zusammengesetzte Knoten mit starken Symmetrien zu konstruieren. Zum Beispiel ist für jeden Knoten K die verbundene Summe $K \sharp K^\times$ stark obversibel.

Perioden. Als Symmetrien eines Knotens K sind auch Perioden untersucht worden, also Homöomorphismen $\varphi : \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^3$ mit $\varphi(K) = K$ und $\varphi^p = \mathrm{id}$. Ist φ fixpunktfrei, dann heißt K *frei p-periodisch*. Ist die Fixpunktmenge ein unverknoteter Kreis und disjunkt zu K, dann heißt K (zyklisch) *p-periodisch* [76, 17, 46]. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich K durch ein Diagramm mit p-zähliger Rotationssymmetrie darstellen lässt. (Der Mittelpunkt der Drehung darf dabei nicht auf dem Diagramm liegen.) Ist q die Verschlingungszahl des Knotens mit der Rotationsachse, dann nennen wir K genauer *(p, q)-periodisch*. Das Diagramm des Achterknotens aus Abb. 1.10 ist $(2, 3)$-periodisch, das der Kleeblattschlinge $(3, 2)$-periodisch.

Ein Knoten K ist genau dann p-periodisch, wenn er sich als Abschluss $[t^p]$ darstellen lässt. Dabei ist $t \in \mathcal{T}(X, X)$ ein Tangle, und die Vorzeichensumme $q = x_1 + \cdots + x_n$ von X ist die Verschlingungszahl mit der Rotationsachse. Der Knoten $\hat{K} = [t]$ heißt *Faktorknoten* von K. (Bislang ist ungeklärt, ob zu einem Knoten K mit Periode p der Faktorknoten $\hat{K}$ eindeutig bestimmt ist.)

BEISPIEL 1.8. Die Torusverschlingung $T_{p,q}$ ist definiert als Abschluss des Zopfes $(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{p-1})^q$ in $\mathrm{Br}(p)$. Der Name rührt daher, dass sie sich auf eine unverknotete Torusfläche in $\mathbb{S}^3$ legen lässt. Ihre Komponentenzahl ist $\mu = \mathrm{ggT}(p, q)$, für teilerfremde Parameter p und q erhalten wir demnach einen Torusknoten. Dieser hat Periode p mit Verschlingungszahl q und trivialem Faktorknoten. Wegen $T_{p,q} = T_{q,p}$ hat dieser Knoten auch Periode q mit Verschlingungszahl p.

1.7. Was sind und was sollen Invarianten?

Eine *Knoteninvariante* ist eine Abbildung $F : \mathcal{K} \to A$ der Menge der Knotentypen $\mathcal{K}$ in eine Menge A. Wir nennen sie *invariant*, weil sie jedem Knoten k einen Wert $F(k)$ zuordnet, der sich unter Isotopie nicht ändert. Meist trägt A eine weitere Struktur und die Abbildung F überträgt Eigenschaften von Knoten in die Struktur von A.

Drei Quellen von Invarianten. Als erste Einteilung lassen sich geometrische, topologisch-algebraische und darstellungstheoretische Invarianten unterscheiden:

1. Geometrische Invarianten sind etwa die Kreuzungszahl, der Zopfindex oder die Brückenzahl, die sich durch Minimierung einer geometrischen Eigenschaft ergeben. Sie sind im Allgemeinen leicht zu definieren und schwer zu berechnen.

2. Algebraisch-topologische Invarianten sind etwa das Alexander-Polynom, Milnors μ-Invarianten oder die Signatur. Sie leiten sich aus algebraisch-topologischen Konzepten ab, etwa der Fundamentalgruppe, der Homologie von Überlagerungen oder der Schnittpaarung auf Seifertflächen.
3. Darstellungstheoretische Invarianten sind solche, die sich aus linearen Darstellungen der Zopfgruppen bzw. der Tangle-Kategorie gewinnen lassen. Hierzu zählen das Jones-, HOMFLY- und Kauffman-Polynom und alle weiteren „Quanteninvarianten" von Knoten. Diese werden umfasst vom Konzept der Vassiliev-Invarianten.

Diese Einteilung ist nicht axiomatisch, sondern folgt der Erfahrung. Auch zieht sie keine scharfe Trennung, ganz im Gegenteil: Reizvoll sind gerade die Verbindungen und Überlappungen der verschiedenen Sichtweisen. Das zentrale Beispiel ist das Alexander-Polynom: Es lässt sich einerseits aus der Fundamentalgruppe gewinnen (vgl. Anhang A), und beinhaltet wesentliche geometrische Information, etwa über Perioden des Knotens oder seine Konkordanzklasse. Nach Alexander [1] bzw. Conway [19] lässt sich das Alexander-Polynom andererseits auch durch eine kombinatorisch-rekursive Formel berechnen, die später zum Jones- bzw. HOMFLY-Polynom verallgemeinert wurde (vgl. Abschnitt 6.2) und die insbesondere zeigt, dass sich das Alexander-Polynom in eine Folge von Vassiliev-Invarianten entwickeln lässt.

Invarianten sind Werkzeuge. Eine Invariante ist nützlich, wenn sie relevante Informationen zu extrahieren erlaubt — zugegeben ein sehr subjektiver Maßstab, der gänzlich von der gewählten Fragestellung abhängt. Ein paar Beispiele sollen diesen Standpunkt im Falle der Knotentheorie erläutern.

1. Die lokalen Eigenschaften von eingebetteten Flächen im $\mathbb{R}^4$ führen zu dem Begriff des Scheibenknotens und der Konkordanzgruppe von Knoten [36,85]. Für ihre Untersuchung liefern Alexander-Polynom und Signatur wichtige Hilfsmittel [36,75,93].
2. Zum Beweis, dass die Kleeblattschlinge chiral ist, benötigt man eine Invariante, die den Knoten K und sein Spiegelbild $K^\times$ unterscheidet. Dies gelingt nicht mit dem Alexander-Polynom, wohl aber mit dem Jones-Polynom (Bsp. 6.6) oder mit Knotengruppen-Darstellungen (Bsp. 3.2). Den ersten Beweis gab M. Dehn [25] im Jahr 1914 durch eine Analyse der Knotengruppe und ihrer Automorphismen.
3. Für die Unterscheidung von Knoten und ihren Reversen sind raffinierte Invarianten nötig. Die Knotenpolynome nach Alexander, Jones, HOMFLY oder Kauffman sind sämtlich unempfindlich gegenüber Reversion. Hier leisten Färbungspolynome gute Dienste, wie in Kapitel 3 erklärt wird. Den ersten Beweis, dass nicht-reversible Knoten existieren, gab H.F. Trotter [94] im Jahr 1964, ebenfalls durch eine Analyse von Knotengruppen.
4. Einer der Triumphe des Jones-Polynoms ist der Beweis einer Vermutung von P.G. Tait aus den Anfängen der Knotentheorie: Jedes alternierende (und in der offensichtlichen Weise reduzierte) Diagramm realisiert die minimale Kreuzungszahl des dargestellten Knotens. Dies war etwa einhundert Jahre lang ein experimenteller Tatbestand, konnte jedoch erst mithilfe des Jones-Polynoms bewiesen werden [78,57,91,70].

Als naheliegende Frage wird oft das Klassifikationsproblem genannt: Wie kann man zu zwei gegebenen Knoten entscheiden, ob sie isotop sind oder nicht? Dieses Problem wurde von W. Haken und G. Hemion [43] durch Angabe eines Entscheidungsverfahrens im Prinzip gelöst. Die Komplexität ist jedoch so enorm, dass diese Lösung bislang nur theoretischen Wert hat. Überdies würde selbst eine praktikable Lösung des Klassifikationsproblems viele weitere Fragen der Knotentheorie unbeantwortet lassen.

Berechenbarkeit. Im Allgemeinen wünschen wir uns, dass Invarianten gut zu berechnen sind. Dies umschreibt drei unterschiedliche Problemkreise: zuerst die *prinzipielle* Berechenbarkeit, als zweites die *asymptotische* Komplexität und schließlich den Zeitaufwand in *konkreten*, für uns interessanten Fällen.

Doch statt algorithmischer können auch strukturelle Überlegungen in den Vordergrund treten: Zum Beispiel definiert die Brückenzahl minus 1 eine additive Invariante $\nu : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$, und es gilt $\nu(K) = 0$ genau dann, wenn K trivial ist. Dies erlaubt wesentliche Folgerungen für die Struktur des Monoids $(\mathcal{K}, \sharp, \bigcirc)$, obwohl wir $\nu(K)$ für die meisten Knoten nicht berechnen können.

Ein extremes Beispiel dieser Art ist das folgende: Für jeden Knoten K ist der Homöomorphietyp des Knotenkomplements eine sehr starke Invariante — bis auf Orientierungen unterscheidet sie Knoten vollständig. Dies war lange Zeit eine offene Frage, die schließlich von C. Gordon und J. Luecke [41] gelöst wurde. Obwohl wir diese Invariante algorithmisch schlecht handhaben können, birgt sie doch Erkenntnisse über die Geometrie von Knoten und Knotenkomplementen.

Als eine weitere vollständige Knoteninvariante werden wir in den folgenden Kapiteln die Knotengruppe diskutieren und in Form von Färbungspolynomen auswerten. Dies schließt einen Kompromiss zwischen Informationsgehalt und Berechenbarkeit.

Es stand noch nicht bei Morgenstern / Noch war nicht seine Zeit
Und Goethe lag es völlig fern / Es war noch nicht soweit.
Erst David Joyce hat es geschaffen / Nun kann es alle Welt begaffen.
So führt der Menschheit steter Wandel / von Goethe fort zum Quandel.
Egbert Brieskorn, *Goethe und das Quandel*

KAPITEL 2

Darstellungen von Knotengruppen

Die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements ist eine sehr mächtige Invariante; mit Meridian und Longitude versehen klassifiziert sie Knoten vollständig. Da sich die Knotengruppe selbst nur schwer handhaben lässt, betrachten wir ihre Darstellungen, d.h. Homomorphismen in leichter zugängliche Gruppen. Ab dem nächsten Kapitel werden wir uns auf endliche Gruppen konzentrieren.

Gemäß der Wirtinger-Präsentation sind Knotengruppen-Darstellungen dasselbe wie Färbungen eines Knotendiagramms. Beide Konzepte ergänzen sich: Die Behandlung als Darstellungen ist algebraisch befriedigender, die Betrachtung als Färbungen ist hingegen etwas flexibler: Sie betont, dass für die Darstellung in eine Gruppe G nicht die ganze Gruppe sondern nur die Konjugationsklasse x^G wichtig ist.

Die für Färbungen wesentlichen Eigenschaften werden durch den Begriff des Quandels präzisiert. Konjugationsklassen sind Quandel, aber umgekehrt lässt sich nicht jedes Quandel in eine Gruppe einbetten. Dieses Phänomen ist für die Quandel von langen Knoten typisch, und Satz 2.32 konstruiert eine treue Darstellung zu jedem solchen Quandel.

Satz 2.34 zeigt, dass sich Färbungen mit einem Quandel durch Färbungen mit einer Gruppe ersetzen lassen. Wir können uns daher in den folgenden Kapiteln auf Färbungen mit Gruppen beschränken. Die einfachste Knoteninvariante ist die Anzahl der Darstellungen wie in Abschnitt 2.8 erläutert. Das Kapitel schließt mit der Charakterisierung homomorpher Bilder von Knotengruppen.

2.1. Die Knotengruppe

Zu einem Knoten K in der 3-Sphäre $\mathbb{S}^3$ bezeichnen wir mit $\pi(K)$ die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements $\mathbb{S}^3 \setminus K$. Alle höheren Homotopiegruppen $\pi_n(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ mit $n \geq 2$ sind trivial [17], das heißt, das Knotenkomplement ist ein Eilenberg-MacLane-Raum. Poincaré-Dualität impliziert für die Homologiegruppen $H_0 \cong H_1 \cong \mathbb{Z}$ und $H_n = 0$ für $n \geq 2$. Daher ist unter den genannten allein die Gruppe $\pi(K)$ als Knoteninvariante interessant.

Als zusätzliche Information zeichnen wir ein Meridian-Longituden-Paar in $\pi(K)$ aus. Hierzu wählen wir eine Schlauchumgebung $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ des Knotens K. Dabei soll $f|_{\mathbb{S}^1 \times 0}$ den Knoten K parametrisieren und die Orientierungen von $\mathbb{S}^1$ und K sollen übereinstimmen. Wir fordern außerdem, dass die Meridian-Kurve $f|_{1 \times \mathbb{S}^1}$ Verschlingungszahl $+1$ und die Longituden-Kurve $f|_{\mathbb{S}^1 \times 1}$ Verschlingungszahl 0 mit dem Knoten hat.

Als Fußpunkt der Sphäre $\mathbb{S}^3$ wählen wir $p = f(1,1)$. In der Fundamentalgruppe $\pi(K) = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K, p)$ nennen wir die Homotopieklasse $m_K = [f|_{1 \times \mathbb{S}^1}]$ den *Meridian* und die Homotopieklasse $l_K = [f|_{\mathbb{S}^1 \times 1}]$ die *Longitude* des Knotens K. Die Gruppe $\pi(K)$ bzw. das Tripel $(\pi(K), m_K, l_K)$ betrachten wir nur bis auf Isomorphie, sodass wir eine Invariante des Knotentyps erhalten.

DEFINITION 2.1. Die Isomorphieklasse von $\pi(K)$ nennen wir die *Knotengruppe* des Knotentyps K, die Isomorphieklasse $\check{\pi}(K) = [\pi(K), m_K, l_K]$ nennen wir die *markierte Knotengruppe* von K.

BEMERKUNG 2.2. Das Tripel $(\pi(K), m, l)$ wird in der Literatur auch als *peripheres System* des Knotens bezeichnet. Es ist eine vollständige Knoteninvariante, das bedeutet, je zwei verschiedene Knoten werden damit unterschieden. (Siehe hierzu [99,44,17,70].) Für die Knotengruppe $\pi(K)$ allein gilt dies immerhin noch für Primknoten modulo Reversion und Spiegelung ([101,59,70]). Dadurch lässt sich das Klassifikationsproblem für Knoten durch das Klassifikationsproblem für markierte Gruppen ersetzen. Im Hinblick auf praktikable Lösungen ist dadurch aber noch nichts gewonnen.

Die Knotengruppe $\pi(K)$ ist offenbar unabhängig von der Orientierung der Knotenlinie und des umgebenden Raumes. Man beachte jedoch, dass zur Definition der Longitude die Orientierung des Knotens wesentlich ist, und dass für die Definition des Meridians zusätzlich die Orientierung der Sphäre benötigt wird.

LEMMA 2.3. *Die markierte Knotengruppe $\check{\pi}(K) = [\pi(K), m_K, l_K]$ verhält sich bei Spiegelung, Reversion und Inversion wie folgt:*

$$\begin{array}{ll} \textit{Spiegelung:} & \check{\pi}(K^{\times}) = [\pi(K), m_K^{-1}, l_K] \\ \textit{Reversion:} & \check{\pi}(K^{!}) = [\pi(K), m_K^{-1}, l_K^{-1}] \\ \textit{Inversion:} & \check{\pi}(K^{*}) = [\pi(K), m_K, l_K^{-1}] \end{array} \qquad \square$$

Die markierte Knotengruppe bietet demnach die Möglichkeit, das Problem der Reversibilität direkt anzugehen. Auf diese Weise hat H.F. Trotter [94] zum ersten Mal die Existenz nicht-reversibler Knoten nachgewiesen. Wir werden dies im folgenden Kapitel mit Hilfe von Knotengruppen-Darstellungen erreichen.

2.2. Die Wirtinger-Präsentation

Nach folgender Methode können wir zu einem Knoten K die Knotengruppe $\pi(K)$ durch Erzeuger und Relationen darstellen: Eine *Nummerierung* eines Knotendiagramms ist eine Abbildung $\nu : \{\text{Bögen}\} \to \mathbb{N}$, sodass bei Durchlaufung des Knoten in Richtung seiner Orientierung die Bögen in aufsteigender Reihenfolge $1, 2, \dots, n$ besucht werden. Bei einem Umlauf unterkreuzen wir nach dem Bogen i einen Bogen $k(i)$ und gelangen zu dem nächsten Bogen $i+1$. Sei $\varepsilon(i) = \pm 1$ das Vorzeichen dieser Kreuzung. Die Abbildungen $k : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ und $\varepsilon : \{1,\dots,n\} \to \{\pm 1\}$ codieren alle Kreuzungsrelationen des Diagramms.

Aus den Daten (k, ε) gewinnen wir wie folgt eine Präsentation der Knotengruppe: Jedem Bogen $i = 1, \dots, n$ ordnen wir den Erzeuger x_i zu. Für jede Kreuzung notieren wir die Relation $r_i : \ x_i = x_k^{-\varepsilon(i)}\, x_{i+1}\, x_k^{\varepsilon(i)}$. (Die beiden Vorzeichen $\varepsilon = \pm 1$ lassen sich zusammenfassen: Für eine Kreuzung wie in Abb. 2.1 lautet die Relation $x_i = x_k^{-1}\, x_j\, x_k$, unabhängig von der Orientierung des unterkreuzenden Strangs.)

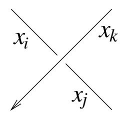


Abb. 2.1.

SATZ 2.4 (Wirtinger-Präsentation). *Für die Knotengruppe des Knotens K gilt*

$$\pi(K) \cong \langle\, x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \,\rangle.$$

Jede Relation ist Konsequenz der anderen $n-1$ Relationen. Folglich kann eine beliebige dieser Relationen in der Präsentation gelöscht werden. □

Diese Konstruktion interpretieren wir so: Gemäß des Diagramms legen wir den Knoten in die Zeichenebene, sodass nur Unterkreuzungen unter die Ebene tauchen. Als Fußpunkt der Fundamentalgruppe wählen wir einen Punkt P oberhalb der Zeichenebene (etwa die Nasenspitze des Betrachters). Der Erzeuger x_i entspricht dem direkten Weg von P zum Bogen i und einer rechtshändigen Umschlingung dieses Bogens (d.h. mit Verschlingungszahl $+1$) mit anschließendem direkten Rückweg nach P. An jeder Kreuzung ist dann die angegebene Relation offensichtlich. Dass dies eine Präsentation von $\pi(K)$ definiert, beweist man mit dem Satz von Seifert und van Kampen, siehe etwa [22, 85, 17].

LEMMA 2.5. *In der Wirtinger-Präsentation der Knotengruppe ist ein Meridian-Longitude-Paar gegeben durch den Meridian $m = x_1$ und die Longitude*

$$l = \prod_{i=1}^{i=n} x_i^{-\varepsilon(i)} x_{k(i)}^{\varepsilon(i)}.$$

BEWEIS: Dass x_1 ein Meridian ist, folgt aus der vorangegangenen Erläuterung. Als Repräsentanten der Longitude wählen wir einen Weg λ, der beim Fußpunkt P beginnt, direkt zum Bogen 1 läuft, dann parallel den Knoten einmal ganz umläuft und anschließend geradewegs zum Punkt P zurückkehrt.

Um Verschlingungszahl 0 mit dem Knoten zu erreichen, verlangen wir, dass der Weg λ parallel zur Knotenlinie in der Zeichenebene liegt und an jeder Unterkreuzung wie in Abb. 2.2 verläuft: Je nach Kreuzungsvorzeichen wird der Weg λ so gewählt, dass sich die beiden Beiträge zur Verschlingungszahl auslöschen.

Sei l die Homotopieklasse von λ. Nach Konstruktion ist m, l ein Meridian-Longituden-Paar. Das für l angegebene Wort in den Erzeugern $x_1, \dots, x_n$ lässt sich längs des Weges λ ablesen. □

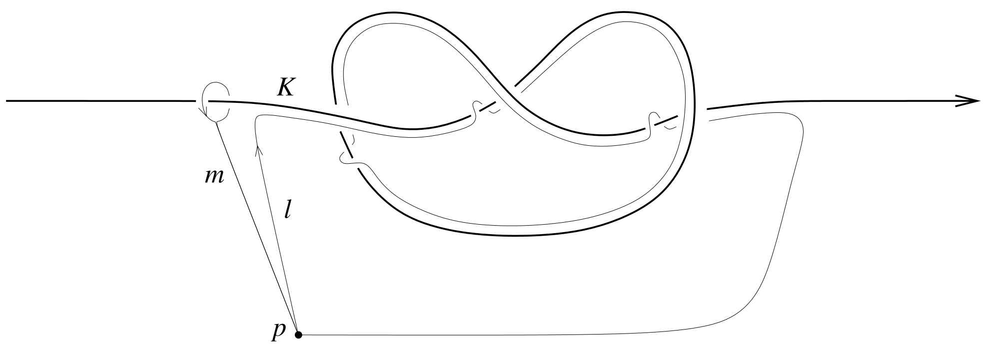


ABBILDUNG 2.2. Verlauf von Meridian und Longitude

2.3. Knoten und lange Knoten

Nach den Ausführungen aus Kapitel 1 entsprechen sich die Isotopietypen von Knoten und 1-Tangles. Wir können also jeden Knoten eindeutig durch einen *langen Knoten* wie in Abb. 2.2 darstellen.

LEMMA 2.6. *Sei $K \subset \mathbb{S}^3$ ein Knoten und $T \subset \mathbb{R}^3$ der entsprechende lange Knoten. Dann sind die Komplemente $\mathbb{S}^3 \setminus K$ und $\mathbb{R}^3 \setminus T$ homöomorph. Insbesondere sind die Gruppen $\pi(K)$ und $\pi(T)$ isomorph.*

BEWEIS: Sei P ein Punkt auf dem Knoten K. Dann ist das Paar $(\mathbb{S}^3 \setminus P, K \setminus P)$ homöomorph zu $(\mathbb{R}^3, T)$. □

BEMERKUNG 2.7. Ebenso wie für $\pi(K)$ können wir auch für $\pi(T)$ eine Wirtinger-Präsentation angeben. Man beachte jedoch, dass der erste Bogen x_1 und der letzte Bogen x_{n+1} nun nicht mehr identifiziert werden. Das bedeutet, die entsprechende Relation der Präsentation von $\pi(K)$ tritt in der Präsentation von $\pi(T)$ nicht mehr auf. Beide Gruppen sind isomorph, daher kann eine beliebige der Relationen aus der Wirtinger-Präsentation von $\pi(K)$ gelöscht werden.

In der Gruppe $\pi(T)$ gibt es ein kanonisches Meridian-Longitude-Paar wie in Abb. 2.2 gezeigt. Diese zusätzliche Information ermöglicht es, die verbundene Summe von der topologischen in die algebraische Sprache zu übertragen:

LEMMA 2.8. *Die Knotengruppe der verbundenen Summe $K_1 \sharp K_2$ ist das amalgamierte Produkt $\pi(K_1) * \pi(K_2)$ modulo $m_1 = m_2$. Ihr Meridian ist $m_1 = m_2$ und ihre Longitude $l_1 l_2$.*

BEWEIS: Wir stellen die Knoten K_1 und K_2 als lange Knoten T_1 und T_2 wie in Abb. 2.2 dar. Als Meridian wählen wir jeweils die Schleife um den ersten Bogen — diese ist offenbar homotop zur Schleife um den letzten Bogen. Für die Gruppe der verbundenen Summe gilt dann $\pi(T_1 \sharp T_2) \cong \pi(T_1) * \pi(T_2) \,/\, m_1{=}m_2$ und die Longitude ist $l = l_1 l_2$. Dies folgt leicht aus dem Satz von Seifert und van Kampen und ebenso aus der Wirtinger-Präsentation. □

In der Kategorie der einfach punktierten Gruppen (G, x) und punktierungserhaltenden Homomorphismen ist das Koprodukt gegeben durch das Amalgam

$$(G, x) * (G', x') = (G \underset{x=x'}{*} G', x).$$

Für zweifach punktierte Gruppen definieren wir das Amalgam durch

$$(G, x, y) * (G', x', y') = (G \underset{x=x'}{*} G, x, yy').$$

Dadurch wird $\breve{\pi}$ zu einer multiplikativen Knoteninvariante.

2.4. Färbungen von Knotendiagrammen

Dieser Abschnitt erläutert den Zusammenhang zwischen Darstellungen der Knotengruppe und Färbungen des Knotendiagramms. Sei K ein Knoten und G sei eine Gruppe. Aufgrund der Wirtinger-Präsentation ist eine Darstellung $\pi(K) \to G$ dasselbe wie eine Abbildung f der Wirtinger-Erzeuger nach G, die die angegebenen Relationen erfüllt. Wir stellen dies so dar, dass wir an jedem Bogen i des Diagramms das zugehörige Bild x_i in G vermerken.

DEFINITION 2.9. Eine *Färbung* eines Knotendiagramms D mit Farben in der Gruppe G ist eine Abbildung x : {Bögen} $\to G$, die an jeder Kreuzung wie in Abb. 2.1 die Bedingung $x_i = x_k^{-1} x_j x_k$ erfüllt.

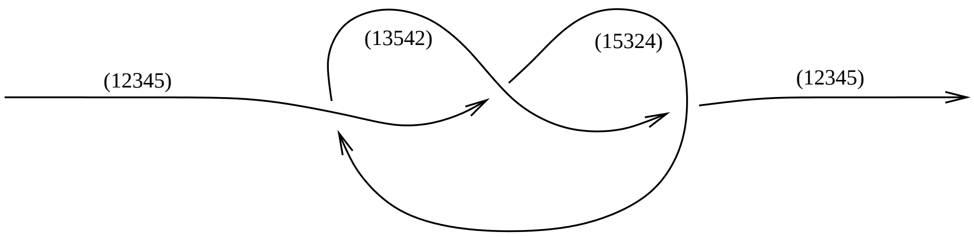


ABBILDUNG 2.3. Kleeblattschlinge mit einer Färbung in $\mathrm{Alt}(5)$

BEMERKUNG 2.10. Für jedes Knotendiagramm und jedes Element $g \in G$ ist die konstante Abbildung {Bögen} $\to \{g\}$ eine Färbung, die wir *triviale* Färbung nennen. Dem entspricht die *triviale* Darstellung $\pi(K), m_K \twoheadrightarrow \mathbb{Z}, 1 \to G, g$.

Knotengruppen-Darstellungen und Färbungen entsprechen sich eindeutig. Die Betrachtung als Färbungen wird sich im Folgenden als nützlich erweisen, denn sie erlaubt eine effiziente Beschreibung und berücksichtigt die Besonderheiten von Knotengruppen.

BEMERKUNG 2.11. Für eine Färbung x : {Bögen} $\to G$ lässt sich leicht das Bild des Meridian-Longituden-Paars bestimmen. Als Meridian haben wir oben die Schleife um den ersten Bogen vereinbart, also ist sein Bild $x_1 \in G$. Für die zugehörige Longitude $\lambda(x)$ gilt die Formel aus Lemma 2.5. Wir nennen dies die *Longitude* der Färbung x. Die Färbung aus Abb. 2.3 hat die Longitude (15432).

Quandel wurden von D. Joyce [54] eingeführt, um Färbungen von Knotendiagrammen in größtmöglicher Allgemeinheit zu untersuchen.

DEFINITION 2.12. Sei Q eine Menge mit Verknüpfung $*$. Eine *Färbung* des Knotendiagramms D mit Farben in Q ist eine Abbildung $x : \{\text{Bögen}\} \to Q$, die an jeder Kreuzung wie in Abb. 2.1 die Bedingung $x_i = x_j * x_k$ erfüllt.

Damit sich gefärbte Diagramme durch Reidemeisterzüge in der gewohnten Weise bewegen lassen, verlangen wir folgende Axiome:

DEFINITION 2.13. Eine Menge Q mit Verknüpfung $* : Q \times Q \to Q$ heißt *Quandel*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es gilt $x * x = x$ für alle $x \in Q$.
(2) Für jedes x ist die Abbildung $\gamma_x : y \mapsto y * x$ eine Bijektion.
(3) Es gilt $(z * y) * x = (z * x) * (y * x)$ für alle $x, y, z \in Q$.

Axiome (2) und (3) besagen, dass jede Rechtstranslation $\gamma_x : y \mapsto y * x$ ein Automorphismus von $(Q, *)$ ist. Sein Inverses bezeichnen wir mit $\gamma_x^{-1} : y \mapsto y \mathbin{\overline{*}} x$.

BEISPIEL 2.14. *Konjugationsklassen* sind für die vorliegende Untersuchung das wichtigste Beispiel: Sei G eine Gruppe und $Q \subset G$ bezüglich Konjugation abgeschlossen, etwa $Q = G$ oder $Q = x^G$. Dies ist ein Quandel mit der Verknüpfung $x * y = y^{-1}xy$ und der inversen Verknüpfung $x \mathbin{\overline{*}} y = yxy^{-1}$.

LEMMA 2.15. *Sei Q ein Quandel und $C_Q(D)$ die Menge der Q-Färbungen des Knotendiagramms D. Jeder Reidemeister-Zug $D \to D'$ induziert eine Bijektion $C_Q(D) \xrightarrow{\sim} C_Q(D')$.*

KOROLLAR 2.16. *Die Gesamtzahl $F_Q(D) = |C_Q(D)|$ der Färbungen ist invariant unter Reidemeister-Zügen und daher eine Knoteninvariante.*

BEWEIS: Abb. 2.4 zeigt, wie sich die Quandel-Axiome (1–3) in Reidemeisterzüge übersetzen: Ein gefärbtes Diagramm geht durch einen Reidemeister-Zug in ein neues gefärbtes Diagramm über. Die Färbungen vor und nach dem Zug entsprechen sich dabei eindeutig. □

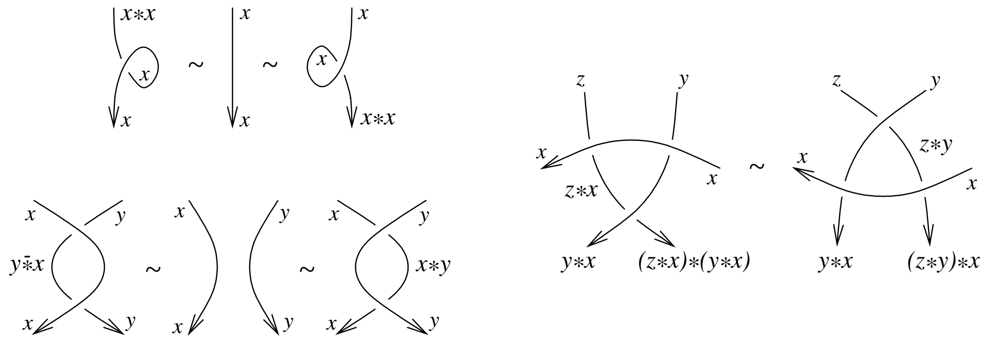


ABBILDUNG 2.4. Reidemeister-Züge für gefärbte Diagramme

BEMERKUNG 2.17. Für jedes Knotendiagramm und $q \in Q$ ist die konstante Abbildung $\{\text{Bögen}\} \to \{q\}$ eine Färbung, die wir *triviale* Färbung nennen.

BEISPIEL: Das einfachste Quandel gehört zur 3-*Färbung*, die von R.H. Fox eingeführt wurde. Das rechts angegebene Quandel besteht aus drei „Farben“ a, b, c. Bei einer Färbung treffen an einer Kreuzung entweder alle drei Farben zusammen oder die Kreuzung ist einfarbig. Ein Knoten heißt 3-*färbbar*, wenn er eine nicht-triviale 3-Färbung besitzt. Die Kleeblattschlinge hat diese Eigenschaft, der Achterknoten nicht. Die 3-Färbung ist der einfachste Fall eines *linearen Quandels*:

$*$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

BEISPIEL 2.18. Sei A eine abelsche Gruppe und $\xi : A \to A$ ein Automorphismus. Die Menge A wird zu einem Quandel mit der Operation $x * y := \xi x + (1 - \xi) y$.

Im Fall $A = \mathbb{F}_p$ und $\xi = -1$ erhalten wir die p-Färbungen nach R.H. Fox. Das Quandel $(A, *)$ ist isomorph zur Konjugationsklasse einer Spiegelung in der Diedergruppe $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_2$. Der Fall $\xi \in \mathbb{F}_p^\times$ entspricht der metazyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$ mit $q = \operatorname{ord}(\xi)$, vgl. Anhang M.

Für weitere Beispiele verweise ich auf die Arbeit von D. Joyce [54]. Aufgrund der Ähnlichkeit zu *automorphen Mengen*, wie sie von E. Brieskorn untersucht wurden, können weitere schöne Beispiele in seiner Arbeit [15] gefunden werden.

Punktierte Färbungen. Die Menge der Darstellungen $\rho : \pi(K) \to G$ kann man weiter eingrenzen, indem man *punktierte* Darstellungen betrachtet, also solche mit $\rho(m_K) = g$ für einen gewählten Fußpunkt $g \in G$. Dies lässt sich leicht auf Färbungen übertragen: In einem Knotendiagramm D markieren wir einen der Bögen. (In unserer Nummerierung sei dies der erste Bogen.) Wir statten das Quandel Q mit einem Fußpunkt q aus. Eine Färbung $x : \{\text{Bögen}\} \to Q$ heißt *punktiert*, wenn sie den ersten Bogen des Diagramms mit $q \in Q$ färbt. Die Menge der punktierten Färbungen bezeichnen wir mit $C_Q^q(D)$.

Punktierte (G, g)-Färbungen entsprechen den Darstellungen $\rho : \pi(K) \to G$ mit $\rho(m_K) = g$. Daher ist ihre Anzahl $F_G^g(D) = |C_G^g(D)|$ eine Knoteninvariante. Für Färbungen mit einem Quandel lässt sich dies wie folgt betrachten:

LEMMA 2.19. *Sei Q ein Quandel mit Fußpunkt $q \in Q$ und sei $C_Q^q(D)$ die Menge der punktierten Färbungen des Diagramms D. Die Verschiebung des Fußpunkts und jeder Reidemeisterzug $D \to D'$ induzieren eine Bijektion $C_Q^q(D) \to C_Q^q(D')$.*

BEWEIS: Ein Reidemeister-Zug $D \to D'$, der den Fußpunkt nicht betrifft, induziert eine Bijektion $C_Q^q(D) \to C_Q^q(D')$ wie in Abb. 2.4 gezeigt. Das Verschieben des Fußpunktes von einem Bogen zum nächsten induziert ebenfalls eine Bijektion: Sei D ein Diagramm mit Fußpunkt auf Bogen 1 und D' dasselbe Diagramm mit Fußpunkt auf Bogen 2. (In der Nummerierung von D' gilt $1' = 2$, $2' = 3$ usw.) Um den Fußpunkt von Bogen 1 nach 2 zu verschieben, muss der Bogen k unterkreuzt werden, das Vorzeichen dieser Kreuzung sei ε. Für eine Färbung x gilt $x_1 = q$ und $x_2 = x_1^\varphi$ mit $\varphi = \gamma_{x_k}^\varepsilon$. Auf alle Farben $x_1, \dots, x_n$ wenden wir den Automorphismus φ^{-1} an und erhalten eine neue Färbung x' mit $x'_2 = q$. Die Abbildung $x \mapsto x'$ ist die gewünschte Bijektion von $C_G^g(D)$ nach $C_G^g(D')$. □

Die Anzahl $F_Q^q(D) = |C_Q^q(D)|$ ist demnach eine Knoteninvariante, und wegen $F_Q = \sum_{q \in Q} F_Q^q$ ist dies eine Verfeinerung der Invariante F_Q.

2.5. Die Kategorie der Quandel

DEFINITION 2.20. Ein *Quandelmorphismus* $\varphi : Q \to Q'$ ist eine Abbildung mit $\varphi(x * y) = \varphi(x) *' \varphi(y)$ für alle $x, y \in Q$.

Quandel und ihre Morphismen bilden eine Kategorie $\underline{\mathtt{Qnd}}$. Zu einem Quandel Q besteht die Gruppe $\mathrm{Aut}(Q)$ aus allen Automorphismen, und Q heißt *homogen*, wenn $\mathrm{Aut}(Q)$ transitiv auf Q operiert.

DEFINITION 2.21. Sei Q ein Quandel und G eine Gruppe. Wir nennen $\varphi : Q \to G$ einen *Morphismus* oder eine *Darstellung* des Quandels Q in die Gruppe G, wenn $\varphi(x * y) = \varphi(y)^{-1}\varphi(x)\varphi(y)$ für alle $x, y \in Q$ gilt.

Für jedes $x \in Q$ ist die Rechtstranslation $\gamma_x(y) = y * x$ ein Automorphismus des Quandels. Wir erhalten so eine Darstellung $\gamma : Q \to \mathrm{Aut}(Q)$. Die von ihrem Bild $\gamma(Q)$ erzeugte Gruppe nennen wir die Gruppe der *inneren Automorphismen*, kurz $\mathrm{Inn}(Q)$. Ein Quandel Q heißt *zusammmenhängend*, wenn $\mathrm{Inn}(Q)$ transitiv auf Q operiert.

LEMMA 2.22. *Zu jedem Quandel Q existiert eine Gruppe $\mathrm{Adj}(Q)$ und eine Darstellung $\mathrm{adj} : Q \to \mathrm{Adj}(Q)$ mit folgender universeller Eigenschaft: Für jede Darstellung $\varphi : Q \to G$ in eine Gruppe G gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{\varphi} : \mathrm{Adj}(Q) \to G$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \mathrm{adj}$. Die Darstellung $\mathrm{adj} : Q \to \mathrm{Adj}(Q)$ ist durch diese Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert.*

BEWEIS: Die Eindeutigkeit ist klar. Wir konstruieren die Gruppe $\mathrm{Adj}(Q)$ wie folgt: Sei $q \mapsto \bar{q}$ eine Bijektion von Q auf eine Menge $\bar{Q}$. Dann setzen wir

$$\mathrm{Adj}(Q) := \langle\, \bar{q} \in \bar{Q} \mid \bar{a} = \bar{c}^{-1}\,\bar{b}\,\bar{c} \text{ für } a = b * c \text{ in } Q \,\rangle.$$

Nach Konstruktion existiert genau ein Quandelmorphismus $\mathrm{adj} : Q \to \mathrm{Adj}(Q)$ mit $\mathrm{adj}(q) = \bar{q}$ für alle $q \in Q$, und dieser besitzt die geforderte Eigenschaft. □

DEFINITION 2.23. Für ein Quandel Q nennen wir $\mathrm{Adj}(Q)$ die *adjungierte Gruppe* und adj die *adjungierte Gruppendarstellung* von Q.

Diese Bezeichnung fügt sich in die übliche kategorielle Sprechweise: Für eine Gruppe G sei $\mathrm{Conj}(G)$ das Quandel auf der Menge G mit Operation $x * y = y^{-1}xy$. Morphismen von Gruppen werden dabei zu Morphismen von Quandeln. Wir erhalten somit einen Funktor $\mathrm{Conj} : \underline{\mathtt{Grp}} \to \underline{\mathtt{Qnd}}$ von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Quandel. Hierzu ist $\mathrm{Adj} : \underline{\mathtt{Qnd}} \to \underline{\mathtt{Grp}}$ der adjungierte Funktor.

2.6. Quandel von Knoten und langen Knoten

Für Färbungen eines Knotens K mit Gruppen ist die Knotengruppe $\pi(K)$ das universelle Objekt. Für Färbungen mit Quandeln können wir ebenso ein universelles Objekt konstruieren: das *Knotenquandel* $Q(K)$. Seine algebraische Definition ist das Analogon zur Wirtinger-Präsentation:

DEFINITION 2.24. Sei K ein Knoten, dargestellt durch ein Knotendiagramm. Das Knotenquandel ist definiert als

$$Q(K) = Q\langle\, q_1, \ldots, q_n \text{ (Bögen) } \mid q_i = q_j * q_k \text{ (Kreuzungen) } \rangle.$$

Das bedeutet, $Q(K)$ ist ein Quandel mit Erzeugern $q_1, \ldots, q_n$, für jeden Bogen des Diagramms einen. Als einzige Relationen gelten die Kreuzungsrelationen wie oben zur Wirtinger-Präsentation 2.4 erklärt.

Die Konstruktion eines Quandels mit diesen Eigenschaften erfolgt über ein freies Magma mit Erzeugern $q_1, \ldots, q_n$ und Quotientenbildung nach den Quandelaxiomen (1–3) sowie den gewünschten Kreuzungsrelationen. (Zu den Details verweise ich auf die Arbeit von D. Joyce [54].) Die Quandelaxiome garantieren, dass der Isomorphietyp des so konstruierten Quandels nicht vom speziellen Diagramm sondern nur vom Knotentyp abhängt.

BEMERKUNG 2.25. Joyce hat für das Knotenquandel außerdem eine topologische Konstruktion angegeben, die der Konstruktion der Fundamentalgruppe ähnelt. Analog zur Wirtinger-Präsentation hat er bewiesen, dass die topologische und die algebraische Definition isomorphe Quandel ergeben.

PROPOSITION 2.26. *Für einen Knoten sei Q das Knotenquandel und π die Knotengruppe. Dann gilt* $\operatorname{Adj}(Q) \cong \pi$.

BEWEIS: Das Quandel Q codiert genau die Kreuzungsrelationen des Diagramms, die in die Wirtinger-Präsentation eingehen. Dies sind die einzigen Relationen in der Gruppe $\operatorname{Adj}(Q)$, wir erhalten also $\operatorname{Adj}(Q) \cong \pi$. □

Knoten und lange Knoten. Für einen langen Knoten T und den zugehörigen Knoten $K = [T]$ sind die Knotengruppen $\pi(T)$ und $\pi(K)$ isomorph, aber die Knotenquandel $Q(T)$ und $Q(K)$ sind im Allgemeinen verschieden! In der Präsentation von $Q(T)$ fehlt die Relation $q_{n+1} = q_1$, und diese ist *nicht* Konsequenz der anderen Relationen, wie wir nun zeigen werden.

LEMMA 2.27. *Für jede Gruppe G ist die Menge $G \times G$ ein Quandel mit der Verknüpfung $(x, a) * (y, b) = (x^y, ax^{-1}y)$. Wir bezeichnen dieses Quandel mit $G \boxtimes G$.* □

Diese Definition imitiert das Verhalten von Meridian und Longitude an einer Kreuzung, siehe Abb. 2.2 und Lemma 2.5. Man beachte, dass die Projektion auf den ersten Faktor ein Quandelmorphismus von $G \boxtimes G$ nach G ist.

LEMMA 2.28. *Sei Q das Knotenquandel und π die Knotengruppe eines langen Knotens. Die Darstellung* $\operatorname{adj} : Q \to \pi$ *lässt sich zu einem Quandelmorphismus $\phi : Q \to \pi \boxtimes \pi$ mit $\phi(q_1) = (x_1, 1)$ hochheben.*

BEWEIS: Den Knoten stellen wir durch ein Diagramm dar und präsentieren Q und π wie oben angegeben. Zu jeden $k = 1, \ldots, n{+}1$ sei x_k der Meridian um den k-ten Bogen und l_k die partielle Longitude vom ersten zum k-ten Bogen, definiert durch das Analogon zur Formel aus Lemma 2.5:

$$l_k = \prod_{i=1}^{i=k} x_i^{-\varepsilon(i)} x_{k(i)}^{\varepsilon(i)}.$$

Die Darstellung adj bildet den Quandelerzeuger q_k auf den Meridian x_k ab. Die Hochhebung ϕ erklären wir durch $\phi(q_k) = (x_k, l_k)$. Nach Konstruktion ist an jeder Kreuzung die notwendige Quandelrelation erfüllt, ϕ definiert also einen Quandelmorphismus $Q \to \pi \boxtimes \pi$. □

KOROLLAR 2.29. *Sei T ein langer Knoten. In der Präsentation seines Quandels sei q_1 der erste und q_{n+1} der letzte Erzeuger. Wenn T nicht-trivial ist, dann sind die Elemente q_1 und q_{n+1} im Knotenquandel $Q(T)$ verschieden.*

BEWEIS: Der erste Bogen wird auf $\phi(q_1) = (x_1, 1)$ abgebildet, der letzte Bogen hingegen auf $\phi(q_{n+1}) = (x_{n+1}, l_{n+1})$. In der Knotengruppe $\pi(T)$ ist $x_1 = x_{n+1}$ ein Meridian und $l = l_{n+1}$ die zugehörige Longitude des Knotens. Für jeden nicht-trivialen Knoten gilt $l \neq 1$, denn die Untergruppe $\langle m, l\rangle$ ist isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, vgl. etwa [17, 70]. Also folgt $\phi(q_1) \neq \phi(q_{n+1})$. □

Anders als bei Knotengruppen kann daher in der Präsentation der Knotenquandel keine der Kreuzungsrelationen gelöscht werden! Der lange Knoten besitzt Quandelfärbungen, die den ersten und den letzten Bogen verschieden färben — für Gruppenfärbungen ist dies nicht möglich.

Eine treue Darstellung des Knotenquandels. Die Darstellung $Q \to \pi \boxtimes \pi$ erlaubt, das Knotenquandel Q durch sein leichter verständliches Bild zu ersetzen. Wir zeigen nun, dass dies ein Quandelisomorphismus ist.

Wie zuvor sei T ein langer Knoten, π seine Knotengruppe und $x_1 \in \pi$ der Meridian um den ersten Bogen. Sei $\varepsilon : \pi \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ die Abelschmachung mit $\varepsilon(x_1) = 1$. Sei $\bar{Q}$ die Menge aller Paare (x, a) mit $a \in \pi'$ in der Kommutatoruntergruppe und $x = x_1^a$. In dem Quandel $\pi \boxtimes \pi$ ist die Menge $\bar{Q}$ ein Unterquandel, das heißt abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung $*$.

LEMMA 2.30. *Für jeden langen Knoten ist die Darstellung $\phi : Q \to \pi \boxtimes \pi$ ein Isomorphismus des Knotenquandels Q auf das Quandel $\bar{Q} \subset \pi \boxtimes \pi$.*

BEWEIS: Das Bild von $\phi : Q \to \pi \boxtimes \pi$ liegt in $\bar{Q}$, denn jeder Erzeuger $q_k \in Q$ wird auf (x_k, l_k) abgebildet, und dies liegt nach Konstruktion in $\bar{Q}$.

INJEKTIVITÄT: Die Darstellung $Q \to \mathrm{Inn}(Q)$ faktorisiert durch die universelle Darstellung $Q \to \mathrm{Adj}(Q) = \pi$. Somit operiert π durch innere Automorphismen auf Q; diese Operation ist auf Erzeugern gegeben durch $q^{x_k} = q * q_k$. Die Abbildung $\psi : \bar{Q} \to Q$ mit $\psi(x, a) = q_1^a$ ist ein Quandelmorphismus. Auf den Erzeugern gilt $\psi\phi(q_k) = q_k$, denn die partielle Longitude l_k erfüllt $q_k = q_1^{l_k}$. Folglich gilt $\psi\phi = \mathrm{id}_Q$.

SURJEKTIVITÄT: Die Gruppe π operiert auf $\bar{Q}$ durch $(x, a)^g = (x^g, a x^{-\varepsilon(g)} g)$. Für $(y, b) \in \bar{Q}$ gilt $\varepsilon(y) = 1$ und daher $(x, a) * (y, b) = (x, a)^y$. Insbesondere operiert π durch Quandelautomorphismen. Die Operation ist transitiv auf $\bar{Q}$, denn für jedes Element $(x, a) \in \bar{Q}$ gilt $\varepsilon(a) = 0$ und daher $(x, a) = (x_1, 1)^a$. Die π-Operation ist äquivariant bezüglich ϕ, das bedeutet $\phi(q^g) = \phi(q)^g$ für alle $q \in Q$ und $g \in \pi$. Es reicht, dies für Erzeuger $x_k \in \pi$ zu zeigen:

$$\phi(q^{x_k}) = \phi(q * q_k) = \phi(q) * (x_k, l_k) = \phi(q)^{x_k}.$$

Daraus folgt die Surjektivität: Es gilt $\phi(q_1) = (x_1, 1)$, und für $(x, a) \in \bar{Q}$ haben wir $\phi(q_1^a) = (x_1, 1)^a = (x, a)$. □

Das Quandel $\bar{Q}$ lässt sich wie oben als Kombination aus Meridian und partieller Longitude interpretieren. Da für alle Elemente $(x, a) \in \bar{Q}$ die Bedingung $x = m^a$ gilt, können wir den ersten Eintrag außer Acht lassen. Für den verbleibenden Eintrag hat die Quandeloperation dann die Form $a * b = m^{-1}ab^{-1}mb$.

LEMMA 2.31. *Sei G eine Gruppe, m ein Element in G und $H \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe. Auf der Menge H definiert $a*b = m^{-1}ab^{-1}mb$ eine Quandeloperation. Dieses Quandel bezeichnen wir mit $m \boxtimes H$.* □

Diese Darstellung knüpft die Verbindung zur Arbeit von D. Joyce [54]. Wir fassen die Diskussion der Knotenquandel in folgendem Satz zusammen.

SATZ 2.32. *Für jeden langen Knoten T ist $Q(T)$ isomorph zu $m \boxtimes \pi(T)'$.* □

Demzufolge enthält das Knotenquandel $Q(T)$ dieselbe Information wie die markierte Knotengruppe $(\pi(K), m)$: Einerseits definiert Q die Gruppe $\pi = \mathrm{Adj}(Q)$, und der Meridian m ist das Bild eines Erzeugers $q \in Q$. Umgekehrt gilt für das Knotenquandel der Isomorphismus $Q \cong m \boxtimes \pi'$.

2.7. Quandel- versus Gruppenfärbungen

Wie wir gesehen haben, ist für ein Quandel Q die universelle Gruppendarstellung $Q \to \mathrm{Adj}(Q)$ nicht notwendig injektiv. Es gibt demnach Quandel, die sich in keine Gruppe einbetten lassen. A priori sind Quandelfärbungen also allgemeiner als Färbungen mit Gruppen.

Wir zeigen nun, wie sich Quandel- und Gruppenfärbungen dennoch verlustfrei ineinander übersetzen lassen. Das hierzu entwickelte Argument wird uns in Kapitel 4 bei der Untersuchung zentraler Erweiterungen gute Dienste leisten.

Augmentierung eines Quandels. Zu jedem Quandel ist $\gamma : Q \to \mathrm{Inn}(Q)$ eine Gruppendarstellung und $\mathrm{Inn}(Q)$ operiert auf Q. Für $x \in Q$ und $\alpha \in \mathrm{Inn}(Q)$ gilt außerdem $\gamma(x^\alpha) = \gamma(x)^\alpha$. Dies ist der Prototyp einer *Augmentierung*: Sei $\varphi : Q \to G$ eine Darstellung in eine Gruppe G und $\psi : G \to \mathrm{Inn}(Q)$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Operation $Q \times G \to Q$ schreiben wir als $(x, g) \mapsto x^g$.

DEFINITION 2.33. Wir nennen $Q \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} \mathrm{Inn}(Q)$ eine *Augmentierung* des Quandels Q, wenn $\psi\varphi = \gamma$ und $\varphi(x^g) = \varphi(x)^g$ für alle $x \in Q$ und $g \in G$ gilt.

Augmentierte Quandel wurden von D. Joyce [54] betrachtet und ebenso von C. Kassel [56] unter der Bezeichnung *gekreuzte G-Menge*.

SATZ 2.34. *Sei $Q, q_1 \xrightarrow{\varphi} G, x_1 \xrightarrow{\psi} \mathrm{Inn}(Q)$ eine Augmentierung des Quandels Q. Für jedes lange Knotendiagramm D ist dann die durch φ induzierte Abbildung $\varphi_* : C_Q^{q_1}(D) \to C_G^{x_1}(D)$ eine Bijektion zwischen Q-Färbungen und G-Färbungen.*

BEWEIS: Sei D ein langes Knotendiagramm mit Bögen $B = \{1, \dots, n+1\}$. Da φ ein Quandelmorphismus ist, wird jede Färbung $q : B \to Q$ auf eine Färbung $x = \varphi q : B \to G$ abgebildet. Dies definiert die Abbildung $\varphi_* : C_Q^{q_1}(D) \to C_G^{x_1}(D)$.

Wir konstruieren nun die Umkehrabbildung $\psi_* : C_G^{x_1}(D) \to C_Q^{q_1}(D)$, indem wir die Operation von G auf Q ausnutzen. Sei $x : B \to G$ eine Färbung. Wir beginnen mit der Farbe q_1 und durchlaufen die weiteren Bögen der Reihe nach:

Von Bogen i nach $i+1$ unterkreuzen wir einen Bogen $k(i)$, das Vorzeichen der Kreuzung sei $\varepsilon(i) = \pm 1$. Da x eine Färbung ist, gilt $x_{i+1} = x_i^h$ mit $h = x_{k(i)}^{\varepsilon(i)}$. Wir setzen $q_{i+1} = q_i^h$ und erhalten

$$\varphi(q_{i+1}) = \varphi(q_i^h) = \varphi(q_i)^h = x_i^h = x_{i+1}.$$

So fortfahrend definieren wir q für alle Bögen und erhalten $q : B \to Q$ mit $\varphi q = x$. Es bleibt zu zeigen, dass q tatsächlich eine Färbung ist. An jeder Kreuzung wie in Abb. 2.1 gilt die Relation $x_i = x_j^{x_k}$. Für die Hochhebung q gilt nach Konstruktion

$$q_i = q_j^{x_k} = q_j^{\varphi q_k} = q_j * q_k.$$

Daher ist q eine Q-Färbung des Diagramms. Wir haben damit eine Abbildung $\psi_* : C_G^{g,q}(D) \to C_Q^q(D)$ konstruiert. Diese erfüllt $\varphi_*\psi_* = \mathrm{id}$ und $\psi_*\varphi_* = \mathrm{id}$. Die Abbildung φ_* ist daher bijektiv. □

Folgerungen. Der Satz gilt *nicht* für Diagramme von geschlossenen Knoten, denn die Gleichung $q_{n+1} = q_1$ ist im Allgemeinen nicht erfüllt. Aus der Konstruktion der Hochhebung folgt $q_{n+1} = q_1^l$. Das bedeutet, die Longitude l operiert als Monodromie beim Umlaufen des Knotendiagramms.

KOROLLAR 2.35. *Sei $Q, q \xrightarrow{\varphi} G, g \xrightarrow{\psi} \mathrm{Inn}(Q)$ eine Augmentierung. Für jedes geschlossene Knotendiagramm D ist $\varphi_* : C_Q^q(D) \to C_G^g(D)$ eine Injektion. Ihr Bild sind genau die G-Färbungen, deren Longitude im Stabilisator von q liegen.* □

Aufgrund des Satzes können wir bei Knotenfärbungen jedes Quandel durch eine Gruppe ersetzen, etwa mittels der Augmentierung $Q \to \mathrm{Inn}(Q)$. Wir konzentrieren uns im Folgenden auf solche Quandel, die Konjugationsklassen in einer Gruppe sind. Für diesen Fall nimmt der Satz folgende Form an:

KOROLLAR 2.36. *Sei $Q, q \xrightarrow{\varphi} G, g \xrightarrow{\psi} \mathrm{Inn}(Q)$ eine Augmentierung des Quandels Q. Wir nehmen zusätzlich an, dass sich Q in eine Gruppe einbetten lässt. Dann ist die Abbildung $\varphi_* : C_Q^q(D) \to C_G^g(D)$ für jedes Diagramm D eine Bijektion.* □

2.8. Färbungszahlen und Zopfgruppen-Darstellungen

Bisher mussten wir für Darstellungen nicht voraussetzen, dass das Quandel Q oder die Gruppe G endlich sind. Die diskutierten Techniken gelten daher für endliche und unendliche Quandel bzw. Gruppen gleichermaßen.

Bei der Konstruktion von Knoteninvarianten unterscheiden sich beide Fälle jedoch erheblich. Für eine endliche Gruppe G ist auch die Menge $\mathrm{Hom}(\pi(K), G)$ endlich und legt folgende Invarianten nahe:

- Die Anzahl $F_G(K) = |\,\mathrm{Hom}(\pi(K), G)\,|$ aller G-Färbungen, des Weiteren
- die Anzahl der Darstellungen $\pi(K) \to G$ modulo Automorphismen von G,
- die Anzahl der Darstellungen $\pi(K) \to G$ modulo Konjugation in G oder
- die Anzahl der Epimorphismen $\pi(K) \twoheadrightarrow G$, evtl. auch diese modulo Automorphismen oder Konjugation.

Besonders interessant für das Folgende ist die Anzahl der Darstellungen $\pi(K) \to G$, die den Meridian m_K auf ein vorgegebenes Element $x \in G$ abbilden. Um sicherzustellen, dass es für jeden Knoten nur endlich viele solcher Darstellungen gibt, reicht folgende Einschränkung:

LEMMA 2.37. *Sei G eine Gruppe und x ein Element mit endlicher Konjugationsklasse. Dann ist $\mathrm{Hom}(\pi(K), m_K\,;\,G, x)$ für jeden Knoten K eine endliche Menge. Die Invariante*

$$F_G^x(K) = |\,\mathrm{Hom}(\pi(K), m_K\,;\,G, x)|$$

nennen wir die Färbungszahl *zu* (G, x). □

Für die Gesamtzahl der Färbungen gilt $F_G = \sum_{x \in G} F_G^x$. Sind x und y konjugiert, dann gilt $F_G^x = F_G^y$. Für das Quandel $Q = x^G$ gilt daher $F_Q = |Q| \cdot F_G^x$. Man beachte, dass F_G nur für endliche Gruppen sinnvoll ist. Für die Invariante F_G^x hingegen darf die Gruppe G durchaus unendlich sein, es genügt, dass die Konjugationsklasse x^G endlich ist.

Darstellungen der Zopfgruppen. Die Invariante F_G lässt sich auch als Spur einer linearen Darstellung der Zopfgruppe gewinnen. Im Hinblick auf die Theorie der R-Matrizen (Abschnitt 6.4) führen wir diese Betrachtung hier aus: Sei Q ein Quandel, zum Beispiel eine Konjugationsklasse $Q = x^G$. Für den Vektorraum $V = \mathbb{Q}[Q]$ definieren wir $c : V \otimes V \to V \otimes V$ durch

$$c(x \otimes y) = y \otimes (x * y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in Q.$$

Nach Quandelaxiom (2) ist dies ein Automorphismus, und nach (3) erfüllt c die Zopfrelation, denn es gilt einerseits

$$x \otimes y \otimes z \;\overset{c \otimes \mathrm{id}}{\longmapsto}\; y \otimes (x * y) \otimes z \;\overset{\mathrm{id} \otimes c}{\longmapsto}\; y \otimes z \otimes (x * y) * z \;\overset{c \otimes \mathrm{id}}{\longmapsto}\; z \otimes (y * z) \otimes (x * y) * z$$

und andererseits

$$x \otimes y \otimes z \;\overset{\mathrm{id} \otimes c}{\longmapsto}\; x \otimes z \otimes (y * z) \;\overset{c \otimes \mathrm{id}}{\longmapsto}\; z \otimes (x * z) \otimes (y * z) \;\overset{\mathrm{id} \otimes c}{\longmapsto}\; z \otimes (y * z) \otimes (x * z) * (y * z).$$

Wir erhalten daher für jede Strangzahl $n \geq 1$ eine Darstellung

$$\rho_Q^n : \mathrm{Br}(n) \to \mathrm{Aut}(V^{\otimes n}) \quad \text{mit} \quad \sigma_i \mapsto \mathrm{id}^{\otimes (i-1)} \otimes c \otimes \mathrm{id}^{\otimes (n-i-1)}.$$

Wie man sieht, überträgt diese Definition die Färbungsrelation aus Abb. 2.1 von Knotendiagrammen auf Zöpfe.

PROPOSITION 2.38. *Sei Q ein Quandel. Die Abbildung $F_Q = \mathrm{tr} \circ \rho_Q : \mathrm{Br} \to \mathbb{Q}$ ist Markov-invariant und induziert daher eine Invariante von Verschlingungen. Für jede Verschlingung L ist $F_Q(L)$ die Anzahl der Q-Färbungen.*

BEWEIS: Als Spur ist F_Q konjugationsinvariant. Stabilisation entspricht einem Reidemeister-1-Zug und wird durch das Quandelaxiom (1) garantiert. Folglich ist F_Q Markov-invariant.

Für jeden Zopf β ist die Matrix $\rho(\beta)$ eine Permutationsmatrix, das heißt sie operiert als Permutation auf der Basis Q^n. Zu jeder Färbung $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ der Eingänge ist $\rho(\beta)\, x = y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$ die Färbung der Ausgänge. Dies definiert genau dann eine Färbung des geschlossenen Zopfes, wenn $\rho(\beta)(x) = x$ gilt. Die Anzahl dieser Färbungen ist demzufolge gegeben durch $\mathrm{tr}(\rho(\beta))$. □

2.9. Homomorphe Bilder von Knotengruppen

Zur Färbung von Knoten können wir jede Gruppe G und ein beliebiges Element $x \in G$ wählen. Aber welche Gruppen treten tatsächlich als homomorphes Bild einer Knotengruppe auf? Diese Frage wurde von L.P. Neuwirth in seinem Buch [79] über Knotengruppen gestellt und zuerst von F. Gonzalez-Acuña [40] beantwortet:

SATZ 2.39. *Eine endlich erzeugte Gruppe G mit Fußpunkt x ist genau dann homomorphes Bild einer Knotengruppe $(\pi(K), m_K)$, wenn G von der Konjugationsklasse x^G erzeugt wird.* □

Die Bedingung ist offenbar notwendig, denn die Knotengruppe wird von den Konjugierten eines Meridians erzeugt. Um zu zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist, hat D. Johnson einen eleganten und frappierend einfachen Beweis gefunden [50].

BEMERKUNG 2.40. Sei G eine Gruppe und $x \in G$. Für die Färbungszahl F_G^x reicht es, die Endlichkeit von x^G zu fordern. Falls $G_1 = \langle x^G \rangle$ eine echte Untergruppe von G ist, dann können wir unsere Untersuchungen auf (G_1, x) beschränken. Da x^G endlich ist, können wir dieses Argument so lange wiederholen, bis wir bei einer Gruppe G_n mit $G_n = \langle x^{G_n} \rangle$ angelangt sind. Es reicht daher, sich auf Gruppen $G = \langle x^G \rangle$ zu beschränken.

DEFINITION 2.41. Sei G eine Gruppe und $x \in G$. Das Paar (G, x) nennen wir *Färbungsgruppe*, wenn die Konjugationsklasse x^G endlich ist und G erzeugt.

BEISPIEL 2.42. Eine einfache Gruppe erfüllt $G = \langle x^G \rangle$ für jedes Element $x \neq 1$. Wenn G endlich erzeugt ist, dann ist (G, x) Bild einer Knotengruppe. Ist x^G überdies endlich, dann ist (G, x) eine Färbungsgruppe.

BEISPIEL 2.43. Die Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n)$ wird von σ_1 normal erzeugt, denn die Zopfrelation $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ist äquivalent zu $\sigma_i^\alpha = \sigma_{i+1}$ mit $\alpha = \sigma_{i+1} \sigma_i$. Die Standarderzeuger liegen also alle in einer Konjugationsklasse. Diese ist nicht endlich und $(\mathrm{Br}(n), \sigma_1)$ deshalb keine Färbungsgruppe.

Gruppen mit der Eigenschaft $G = \langle x^G \rangle$ heißen auch Gruppen *von Gewicht eins*. Allgemein definiert man das Gewicht $w(G)$ einer Gruppe G als die kleinste Anzahl von Elementen, die G normal erzeugen. Auch der trivialen Gruppe ordnen wir das Gewicht 1 zu. Für jeden Epimorphismus $G \twoheadrightarrow H$ gilt $w(G) \geq w(H)$. Im Fall der Abelschmachung $G \twoheadrightarrow G_{ab}$ gilt sogar Gleichheit:

LEMMA 2.44 ([64, 83]). *Für jede endliche Gruppe G gilt $w(G) = w(G_{ab})$.* □

Endliche Gruppen von Gewicht eins sind also genau solche mit zyklischer Abelschmachung. Dies trifft insbesondere für einfache und perfekte Gruppen zu, denn in diesem Fall gilt sogar $G_{ab} = \{1\}$.

What is needed are some standard procedures
for deriving from a group presentation
some easily calculable algebraic quantities.
Richard H. Crowell / Ralph H. Fox [22]

KAPITEL 3

Färbungspolynome

Wir untersuchen im Folgenden ein Verfahren, das detaillierte Information aus der Knotengruppe zu extrahieren erlaubt. Da die Gruppe $\pi(K)$ schwer zu handhaben ist, betrachten wir die Menge $\mathrm{Hom}(\pi(K), G)$ der Darstellungen in eine endliche Gruppe G. Die Färbungszahl $F_G(K) = |\mathrm{Hom}(\pi(K), G)|$ werden wir zu einem Färbungspolynom P_G^x verfeinern, das die Information von Meridian *und* Longitude ausnutzt. Diese Invariante erlaubt es auf einfache Weise, Knoten von ihren Spiegelbildern oder Reversen zu unterscheiden.

Die Invariante P_G^x verhält sich bzgl. verbundener Summe und Spiegelung/Inversion wie die Knotenpolynome von Alexander und Jones. Die Bilder liegen jedoch nicht in einem Polynomring, sondern im Gruppenring $\mathbb{Z}G$. Wir untersuchen die möglichen Bildwerte und ihre Symmetrien.

3.1. Definition

Sei K ein Knoten und G eine Gruppe. Wir wählen ein Element $x \in G$ und betrachten Darstellungen $\rho : \pi(K) \to G$ mit $\rho(m_K) = x$, also Homomorphismen von punktierten Gruppen. Die Anzahl dieser Darstellungen bezeichnen wir wie zuvor mit $F_G^x(K) = |\mathrm{Hom}(\pi(K), m_K\,;\, G, x)|$. Um auch die Longitude auszuwerten, summieren wir für jede Darstellung ρ das Bild der Longitude $\rho(l_K)$:

$$P_G^x(K) := \sum_{\substack{\rho\,:\,\pi K \to G,\\ \rho(m_K) = x}} \rho(l_K) \qquad \in \quad \mathbb{Z}G.$$

Dies ist eine Verfeinerung von F_G^x, denn mittels der Augmentation $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ erhalten wir die Färbungszahl $F_G^x = \varepsilon P_G^x$ zurück.

DEFINITION 3.1. Sei G eine Gruppe und x ein Element mit endlicher Konjugationsklasse. Die Invariante P_G^x nennen wir das *Färbungspolynom* zu (G, x).

BEISPIEL 3.2. Als Färbungsgruppe wählen wir $\mathrm{Alt}(5)$ mit $x = (12345)$ als Fußpunkt. Das Färbungspolynom der linkshändigen Kleeblattschlinge ist $1 + 5x$, das der rechtshändigen hingegen $1 + 5x^{-1}$. (Eine typische Färbung ist in Abb. 2.3 zu sehen.) Dies zeigt, dass die beiden Kleeblattschlingen chiral sind.

3.2. Anwendungen und Beispiele

Färbungspolynome bieten praktische und theoretische Vorzüge:

- Sie bilden ein einheitliches Verfahren, um eine große Klasse von Invarianten zu konstruieren. Die Wahl der Gruppe lässt dabei viele Freiheiten.
- Meridian und Longitude werden genutzt und so die Orientierungen des Knotens und der Sphäre berücksichtigt (siehe unten).
- Die Färbungsdaten sind detailliert und dennoch übersichtlich organisiert.
- Färbungspolynome sind multiplikativ (siehe Abschnitt 3.6).
- Die Invariante $P_G^x(K)$ lässt sich gut mit Hilfe eines Computers berechnen (siehe Kapitel 5).

Färbungspolynome sind bei der Untersuchung von Knoten in vielen Fällen erfolgreich, in denen andere Invarianten versagen. Als Beispiel betrachten wir den Kinoshita-Terasaka-Knoten K und den Conway-Knoten C:

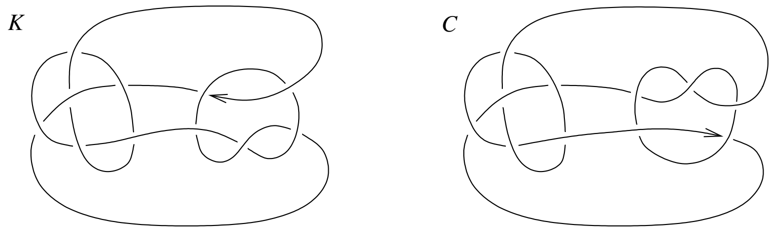


ABBILDUNG 3.1. Der Kinoshita-Terasaka- und der Conway-Knoten

Beide Knoten haben triviales Alexander-Polynom. Sie unterscheiden sich nur durch die Rotation eines 2-Tangles, das heißt, sie sind Mutanten im Sinne von Conway [19]. Daher können sie nicht durch das Jones-, HOMFLY- oder Kauffman-Polynom unterschieden werden [70,29]. Mithilfe von Färbungspolynomen gelingt dies hingegen leicht – die folgenden Beispiele mögen dies illustrieren.

BEISPIEL 3.3. R. Riley [84] hat Darstellungen in die Gruppe $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ untersucht. Für jedes Element z der Ordnung 7 gilt

$$\begin{aligned} P_G^z(K) &= P_G^z(C) &&= 1 + 7z^5 + 7z^6, \\ P_G^z(K^*) &= P_G^z(C^*) &&= 1 + 7z + 7z^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt leider nur, dass beide Knoten chiral sind. Durch eine Untersuchung ihrer Überlagerungen konnte Riley zeigen, dass K und C verschieden sind.

Wir gehen hier einen anderen Weg: Für ein Element x der Ordnung 3 trennt das zugehörige Färbungspolynom dieses Mutantenpaar:

$$\begin{aligned} P_G^x(K) &= 1 + 6x & \qquad P_G^x(C) &= 1 + 12x \\ P_G^x(K^*) &= 1 + 6x^2 & \qquad P_G^x(C^*) &= 1 + 12x^2 \end{aligned}$$

Sowohl P_G^x als auch P_G^z ist unempfindlich gegenüber Reversion.

BEISPIEL 3.4. Die alternierende Gruppe $G = \mathrm{Alt}(7)$ mit dem Zykel $x = (1234567)$ als Fußpunkt ergibt folgende Färbungspolynome:

$$\begin{aligned} P^x_G(K) &= 1 + 7x^2 + 28x^5 + 28x^6 & \qquad P^x_G(C) &= 1 + 7x^2 + 7x^3 + 21x^5 + 14x^6 \\ P^x_G(K^*) &= 1 + 28x + 28x^2 + 7x^5 & \qquad P^x_G(C^*) &= 1 + 14x + 21x^2 + 7x^4 + 7x^5 \end{aligned}$$

Auch diese Invariante trennt die vier genannten Knoten, ist aber unempfindlich gegenüber Reversion.

BEISPIEL 3.5. Wesentlich genauere Aussagen liefert die Mathieu-Gruppe M_{11} mit Ordnung $7920 = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}11$. Sie ist die kleinste der sporadischen einfachen Gruppen und lässt sich als Untergruppe von $\mathrm{Alt}(11)$ darstellen, zum Beispiel als

$$G = \langle x, x' \rangle \quad \text{mit} \quad x = (\mathrm{abcdefghijk}),\ x' = (\mathrm{abcejikdghf}).$$

Die Färbungspolynome des Kinoshita-Terasaka- und des Conway-Knotens sowie ihrer Inversen und Spiegelungen sind:

$$\begin{aligned} P^x_G(K) &= 1 + 11x^3 + 11x^7 & \qquad P^x_G(C) &= 1 + 11x^3 + 11x^7 \\ P^x_G(K^*) &= 1 + 11x^4 + 11x^8 & \qquad P^x_G(C^*) &= 1 + 11x^4 + 11x^8 \\ P^x_G(K^\times) &= 1 + 11x^4 + 22x^8 & \qquad P^x_G(C^\times) &= 1 + 11x^4 + 11x^6 + 11x^8 \\ P^x_G(K^!) &= 1 + 22x^3 + 11x^7 & \qquad P^x_G(C^!) &= 1 + 11x^3 + 11x^5 + 11x^7 \end{aligned}$$

Folglich sind die acht genannten Knoten verschieden, K und C sind weder obversibel noch reversibel noch inversibel. (Dieses Beispiel geht auf G. Kuperberg zurück, der in seinem Artikel [63] die schwächere Invariante F^x_G verwendete, um C von seinem Inversen zu unterscheiden.)

Auf diesen besonders ästhetischen Beispielen gründet die kühne Bezeichnung Färbungs*polynome*. Nicht-reversible Knoten zu erkennen ist schwer, da die meisten Invarianten hierbei versagen, die üblichen Knotenpolynome eingeschlossen. In Anbetracht des einfachen Ansatzes ist der Erfolg der Färbungspolynome bemerkenswert. Dies gilt auch für die folgenden Beispiele:

BEISPIEL 3.6. Die Familie der Brezelknoten $B(p_1, p_2, p_3)$ ist in Abbildung 8.4 dargestellt. Dies war historisch das erste Beispiel nicht-reversibler Knoten [94, 70]. Nach der Klassifikation der Brezelknoten [17] ist $B = B(3,5,7)$ weder reversibel noch obversibel noch inversibel. Für die Gruppe $G = M_{11}$ mit Fußpunkt x wie in Beispiel 3.5 gilt:

$$\begin{aligned} P^x_G(B) &= 1 + 11x & \qquad P^x_G(B^!) &= 1 + 11x^4 \\ P^x_G(B^\times) &= 1 + 11x^7 & \qquad P^x_G(B^*) &= 1 + 11x^{10} \end{aligned}$$

Auch hier beweist das Färbungspolynom, dass dieser Knoten keine der drei Symmetrien besitzt.

BEISPIEL 3.7. Der Knoten 8_{17} aus Abbildung 1.1 ist der kleinste nicht-reversible Knoten. Wir wählen wie zuvor die Mathieu-Gruppe M_{11} und das Element x wie angegeben. Der Knoten 8_{17} hat das Färbungspolynom $1 + 11x^5 + 11x^6$, der reverse Knoten hingegen hat triviales Färbungspolynom 1.

Die Berechnung der Färbungspolynome wurde mit dem Programm *KnotGRep* durchgeführt, das in Kapitel 5 erläutert wird.

3.3. Die Longitudengruppe

Dieser Abschnitt präzisiert, welche Longituden in Färbungspolynomen auftreten können. Für die Färbungsgruppe (G, x) sei Λ die Menge der Longituden $\lambda = \rho(l_K)$ für alle Knoten K und alle Homomorphismen $\rho : \pi(K), m_K \to G, x$. Da es immer die triviale Darstellung $\pi(K), m_K \twoheadrightarrow \mathbb{Z}, 1 \to G, x$ gibt, ist Λ nicht leer. Aus Lemma 2.3 und 2.8 folgt, dass Λ eine Untergruppe von G ist. Wir nennen Λ die *Longitudengruppe* von (G, x).

BEISPIEL 3.8. Zunächst ist klar, dass Λ im Zentralisator von x liegt, denn es kommutieren Meridian und Longituden in $\pi(K)$. Jede der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Färbungsgruppen hat einen zyklischen Zentralisator $Z(x) = \langle x \rangle$. Aus den angegebenen Färbungspolynomen liest man $\Lambda = \langle x \rangle$ ab.

In der Arbeit [51] wurde von D. Johnson und C. Livingston untersucht, welche Tripel (G, x, λ) als *epimorphe* Bilder von Knotengruppen möglich sind. Sei hierzu Λ^+ die Menge der Longituden $\rho(l_K)$ für alle Knoten K und alle *Epi*morphismen $\rho : \pi(K), m_K \twoheadrightarrow G, x$. Nach Satz 2.39 ist Λ^+ nicht leer. Wie Λ ist auch Λ^+ eine Untergruppe von G.

LEMMA 3.9. *Für jede Färbungsgruppe gilt* $\Lambda^+ = \Lambda$.

BEWEIS: Die Inklusion $\Lambda^+ \subset \Lambda$ ist trivial. Wir zeigen $\Lambda^+ \supset \Lambda$ wie folgt: Zu $\lambda \in \Lambda$ sei K' ein Knoten mit $\rho' : \pi(K'), m' \to G, x$ und $\rho'(l') = \lambda$. Der Homomorphismus ist eventuell nicht surjektiv, deshalb wählen wir zusätzlich einen Knoten K'' mit Epimorphismus $\rho'' : \pi(K''), m'' \twoheadrightarrow G, x$ und $\rho''(l'') = 1$. Dies ist möglich, weil Λ^+ nicht leer ist. Nach Satz 2.8 erlaubt der Knoten $K = K' \sharp K''$ einen Epimorphismus $\rho : \pi(K), m \twoheadrightarrow G, x$ mit $\rho(l) = \lambda$. □

Mithilfe des vorangegangenen Lemmas lassen sich die Ergebnisse aus [51] auf die vorliegende Situation übertragen:

SATZ 3.10. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe mit $G = \langle x^G \rangle$. Ein Element $\lambda \in G$ gehört genau dann zur Longitudengruppe, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:*

$$(1)\ \ \lambda \in G'' \qquad (2)\ \ \lambda \in Z(x) \qquad (3)\ \ p(\lambda) = 0 \qquad (4)\ \ q(\lambda) = 0$$

Dabei ist G'' die zweite Kommutator-Untergruppe, $Z(x)$ der Zentralisator von x und $p : Z(x) \to H_2(G)$ ist das Pontryagin-Produkt mit x. Die Abbildung q ist nachstehend unter Punkt (4) erläutert. □

ERLÄUTERUNG ZU (1) UND (2): Für jeden Knoten kommutieren Meridian und Longitude, denn die zu ihrer Definition verwendeten Repräsentanten liegen auf einem Torus. Die Longitude liegt in der zweiten Kommutatoruntergruppe, siehe etwa [17]. Daher sind die Bedingungen (1) und (2) notwendig.

BEISPIEL 3.11. Jede Diedergruppe und jede metazyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}_m \rtimes \mathbb{Z}_n$ erfüllt $G'' = \{1\}$. Daher können bei diesen Färbungen nur triviale Longituden auftreten; die Anzahl der Färbungen ist hier die einzige Information.

ERLÄUTERUNG ZU (3): Für je zwei kommutierende Elemente a, b existiert ein Gruppenhomomorphismus $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$ mit $f(1, 0) = a$ und $f(0, 1) = b$. In der

Homologiegruppe $H_2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ sei ω der Standarderzeuger. Das Pontryagin-Produkt $\langle a|b\rangle$ ist definiert als das Bild $f_*(\omega) \in H_2(G)$. Es gilt $\langle a|a\rangle = 0$ und $\langle a|bb'\rangle = \langle a|b\rangle + \langle a|b'\rangle$ für $b, b' \in Z(a)$. Die Abbildung $p : Z(\lambda) \to H_2(G)$ mit $p(\lambda) = \langle x|\lambda\rangle$ ist demnach ein Gruppenhomomorphismus.

BEMERKUNG 3.12. Bedingung (3) hat folgende Begründung: Für jeden Knoten K ist das Knotenkomplement $X = \mathbb{S}^3 \setminus K$ ein Eilenberg-MacLane-Raum, das heißt $\pi_n(X) = 0$ für $n \geq 2$, siehe etwa [17]. Die Knotengruppe $\pi = \pi_1(X)$ hat daher Homologiegruppen $H_n(\pi) = H_n(X)$. Aus Poincaré-Dualität folgt $H_1(X) = \mathbb{Z}$ und $H_n(X) = 0$ für $n \geq 2$. Für je zwei kommutierende Elemente in π verschwindet demnach ihr Pontryagin-Produkt. Dies gilt für Meridian und Longitude und auch natürlich für ihre homomorphen Bilder.

BEISPIEL 3.13. Die alternierende Gruppe $\mathrm{Alt}(6)$ ist einfach. Insbesondere gilt $G' = G$, und die Bedingungen (1) und (4) sind immer erfüllt. Der Zentralisator von $x = (123)$ wird erzeugt von x und $y = (456)$. Das Pontryagin-Produkt $\langle x|y\rangle$ verschwindet jedoch nicht [28], und die Longitudengruppe ist $\Lambda = \langle x\rangle \neq Z(x)$. Bedingung (3) ist demnach nicht leer.

BEISPIEL 3.14. In der Gruppe $G = \mathrm{Alt}(8)$ wird der Zentralisator von $x = (12345)$ erzeugt von x und $y = (678)$. Ihr Pontryagin-Produkt verschwindet [28], und die Longitudengruppe ist $\Lambda = \langle x, y\rangle$. Dies lässt sich auch am Färbungspolynom des Kinoshita-Terasaka-Knotens ablesen:

$$P_G^x(K) = 61 + 120x + 30x^3 + 60x^4 + 15x^4y + 15x^4y^2.$$

Die hier auftretenden Longituden erzeugen $Z(x)$, daher gilt $\Lambda = Z(x)$.

ERLÄUTERUNG ZU (4): Sei $\alpha : G \twoheadrightarrow G/G'$ die Abelschmachung und $\overline{H}_3(G) = H_3(G/G') \,/\, \alpha_* H_3(G)$. Der Homomorphismus $q : G'' \cap \ker(p) \to \overline{H}_3(G)$ wird in [51] über eine Bordismus-Konstruktion definiert. Konstruktion und Untersuchung von q sind mühsam und für das Weitere nicht von Belang, da unsere Beispiele nur Gruppen mit $\overline{H}_3(G) = 0$ behandeln. In [51] wird gezeigt, dass q surjektiv ist und ein Beispiel mit $\overline{H}_3(G) \neq 0$ gegeben. Bedingung (4) ist demnach nicht leer.

3.4. Der Färbungsring

Nach Definition liegt die Färbungssumme in $\mathbb{Z}G$, wie wir wissen sogar in dem sehr viel kleineren Ring $\mathbb{Z}\Lambda$. Die folgenden Symmetrieüberlegungen grenzen den Wertebereich weiter ein.

BEMERKUNG 3.15. Für jeden Automorphismus $\alpha : G \to G$ gilt $\alpha P_G^x = P_G^{\alpha x}$. Das Färbungspolynom P_G^x ist daher invariant unter $\mathrm{Aut}(G, x)$. Für eine zyklische Longitudengruppe $\Lambda = \langle x\rangle$ bedeutet dies wegen $\alpha|_\Lambda = \mathrm{id}$ keinerlei Einschränkung. Wir geben zwei Beispiele, in denen Λ nicht zyklisch ist.

BEISPIEL 3.16. Wie in Beispiel 3.14 sei $G = \mathrm{Alt}(8)$ mit Fußpunkt $x = (12345)$ ausgestattet. Konjugation mit (68) lässt den Fußpunkt x fest, vertauscht aber $y = (678)$ und $y^2 = (876)$. Da das Färbungspolynom invariant unter $\mathrm{Aut}(G, x)$ ist, erklärt dies die Symmetrie in den Monomen $x^n y$ und $x^n y^2$.

BEISPIEL 3.17. Die Symmetrisierung fällt für $G = \mathrm{Alt}(9)$ noch drastischer aus. Für $x = (12345)$ ist der Zentralisator $\langle x\rangle \times \mathrm{Alt}(\{6,7,8,9\})$. Das Färbungspolynom des Kinoshita-Terasaka-Knotens ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} P_G^x(K) &= 61 + 220x + 40x^3 + 120x^4 + 15x^4 \cdot s \quad \text{mit} \\ s &= (678) + (687) + (679) + (697) + (689) + (698) + (789) + (798). \end{aligned}$$

Die Gruppe $\mathrm{Sym}(\{6,7,8,9\})$ operiert durch Konjugation und erzwingt die gezeigte Symmetrisierung. Die auftretenden Longituden erzeugen $\Lambda = Z(x)$, insbesondere ist die Longitudengruppe nicht abelsch.

LEMMA 3.18. *Sei (G, x) eine Färbungsgruppe und $z \in Z_G(G')$. Dann sind die Färbungspolynome P_G^x und P_G^{zx} und P_G^{xz} identisch. Insbesondere sind bezüglich x, zx und xz die Färbungszahlen sowie die Longitudengruppen gleich.*

BEWEIS: Sei K ein Knoten mit Gruppe π und Meridian m. Jede Darstellung $\pi, m \to G, x$ entspricht einer Färbung $f : \{\text{Bögen}\} \to x^G$, die dem ersten Bogen die Farbe $f_1 = x$ zuordnet. Multiplikation mit z überführt dies in die Färbung $zf : \{\text{Bögen}\} \to zx^G$: Die Kreuzungsrelation $a = b^{-1}cb$ geht in $za = b^{-1}czb$ über. Da b und c konjugiert sind, liegt $b^{-1}c$ in G' und kommutiert mit z. (Mit anderen Worten, die Multiplikation mit z ist ein Quandelisomorphismus von x^G auf zx^G.) Mit f erfüllt damit auch zf alle Kreuzungsrelationen. Die Färbung zf entspricht einer Darstellung $\pi, m \to G, zx$.

Wir erhalten eine Bijektion von $\mathrm{Hom}(\pi, m; G, x)$ nach $\mathrm{Hom}(\pi, m; G, zx)$. Diese lässt die Longitudenbilder unverändert: Die Longitude der Färbung f hat nach Lemma 2.5 die Form $\lambda(f) = \prod_{i=1}^{i=n} f_i^{-\varepsilon(i)} f_{k(i)}^{\varepsilon(i)}$, daher gilt $\lambda(zf) = \lambda(f)$. Die Longitudensummen P_G^x und P_G^{zx} sind also gleich. Den Fall xz beweist man genauso. □

BEISPIEL 3.19. Sei $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ und $x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann sind die Färbungspolynome P_G^x und P_G^{-x} identisch. Man beachte, dass x Ordnung p hat, $-x$ hingegen Ordnung $2p$. Es gibt also keinen Automorphismus von G, der x auf $-x$ abbildet.

BEMERKUNG 3.20. Das vorangegangene Lemma besagt nicht, dass (G, zx) eine Färbungsgruppe ist; eventuell erzeugt zx^G nicht die ganze Gruppe G. Als Beispiel dieser Art sei etwa (H, y) eine endliche Färbungsgruppe. Sei $\mathbb{Z}_n = \langle z\rangle$ und $n \geq 2$ teilerfremd zur Ordnung von y. Wir setzen $G = H \times \mathbb{Z}_n$. Dann ist (G, yz^{-1}) eine Färbungsgruppe, (G, y) hingegen nicht, denn $\langle y^G\rangle = \langle y^H\rangle = H \neq G$.

SATZ 3.21. *Sei (G, x) eine Färbungsgruppe, $Z = Z_G(G')$ und $X = ZxZ$. Das Bild des Färbungspolynoms $P_G^x : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}G$ liegt in dem invarianten Unterring*

$$R_G^x = \{\, P \in \mathbb{Z}\Lambda \mid \varphi(P) = P \text{ für alle } \varphi \in \mathrm{Aut}(G, X) \,\},$$

den wir den Färbungsring *von (G, x) nennen. Der Ring R_G^x liegt im Zentrum von $\mathbb{Z}\Lambda$ und ist insbesondere kommutativ.*

BEWEIS: Sei $\varphi : G \to G$ ein Automorphismus mit $\varphi(X) = X$. Für den Fußpunkt x bedeutet das $\varphi(x) = zxz'$ mit $z, z' \in Z$. Folglich gilt $\varphi P_G^x = P_G^{zxz'} = P_G^x$. Das Färbungspolynom P_G^x liegt also in dem invarianten Unterring von $\mathbb{Z}G$.

Da jede Longitude $\lambda \in \Lambda$ mit x kommutiert, ist die Konjugation mit λ ein Automorphismus von (G, x). Folglich kommutiert λ mit jedem Element $P \in R_G^x$. Das bedeutet, R_G^x liegt im Zentrum von $\mathbb{Z}\Lambda$. □

Nach dem vorangegangenen Satz besteht die Symmetriegruppe nicht nur aus den *starken* Automorphismen $\mathrm{Aut}(G, x)$, sondern aus der eventuell größeren Gruppe $\mathrm{Aut}(G, X)$ der *schwachen* Automorphismen $\varphi : G \to G$ mit $\varphi(X) = X$.

BEISPIEL 3.22. Für $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ und $x = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sind die Färbungspolynome P_G^x und P_G^{-x} identisch. Anders als in Beispiel 3.19 sind x und $-x$ jedoch konjugiert. Zur Vereinfachung nehmen wir $p \equiv 1 \mod 4$ an. Dann existiert eine vierte Einheitswurzel ζ in $\mathbb{F}_p$, und die Matrix $a = \left(\begin{smallmatrix} -\zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{smallmatrix}\right)$ erfüllt $x^a = -x$. Konjugation mit a ist demnach ein schwacher Automorphismus der Färbungsgruppe (G, x).

LEMMA 3.23. *Sei (G, x) eine Färbungsgruppe und die Konjugation mit x habe Ordnung p^k für eine Primzahl p. Für jeden Knoten K gilt dann*

$$P_G^x(K) \in 1 + p \cdot \mathbb{Z}\Lambda.$$

BEWEIS: Die zyklische Gruppe $\langle x \rangle$ operiert auf der Menge der Darstellungen $\mathrm{Hom}(\pi(K), m_K\, ; G, x)$ via Konjugation. Einziger Fixpunkt ist die triviale Darstellung $\pi(K), m_K \twoheadrightarrow \mathbb{Z}, 1 \to G, x$. Alle nicht-trivialen Darstellungen treten in Bahnen der Länge p^l mit $l \geq 1$ auf. Da ein Bild der Longitude notwendig mit x kommutiert, haben alle Darstellungen einer Bahn dieselbe Longitude in G. Die Longitudensumme beginnt mit 1 für die triviale Darstellung, alle weiteren Summanden treten in Vielfachheiten von p auf. □

Dies deckt sich mit den Beobachtungen aus den Beispielen 3.2 bis 3.7. Das Beispiel 3.14 der Gruppe $\mathrm{Alt}(8)$ verdient besondere Erwähnung, denn alle nicht-trivialen Färbungen des Kinoshita-Terasaka-Knotens treten in Vielfachheiten von 15 auf: Sowohl $x = (12345)$ als auch $y = (678)$ operieren durch Konjugation auf den Färbungen. Die Konjugation mit x wurde in Lemma 3.23 untersucht: Jede nicht-triviale Färbung liegt in einer x-Bahn der Länge 5. Eine Färbung, die unter der Konjugation mit y invariant ist, muss ganz in $\mathrm{Alt}(5)$ liegen. Der Knoten K erlaubt aber nur die triviale Färbung mit $(\mathrm{Alt}(5), x)$. Jede nicht-triviale Färbung liegt also in einer y-Bahn der Länge 3. Die Operation von $\langle x, y \rangle$ zerlegt die Menge der nicht-trivialen Färbungen demnach in Bahnen der Länge 15.

3.5. Perfekte Gruppen

Eine Gruppe heißt *perfekt*, wenn $G' = G$ gilt. Dies ist äquivalent zu $G_{ab} = \{1\}$. Zum Beispiel ist jede einfache Gruppe auch perfekt. Für Knoten mit trivialem Alexander-Polynom gilt $\pi(K)' = \pi(K)''$, das heißt, die Kommutatoruntergruppe $\pi(K)'$ ist perfekt [79]. Für jede Darstellung $\pi(K) \twoheadrightarrow G$ gilt dann neben $G = G' \rtimes \mathbb{Z}_n$ auch $G' = G''$. Wenn G außer $\{1\}$ keine perfekten Untergruppen enthält, dann folgt $G' = \{1\}$, und die Darstellung ist trivial.

Gerade in schwierigen Fällen eignen sich daher perfekte Gruppen (und ihre zyklischen Erweiterungen) besonders gut für Knotenfärbungen. Darüber hinaus haben perfekte Gruppen einfach zu beschreibende Longitudengruppen. Wir gehen daher auf diesen Fall näher ein.

LEMMA 3.24. *Eine Färbungsgruppe (G, x) ist genau dann perfekt, wenn x in der Longitudengruppe liegt.*

BEWEIS: Für jede Färbungsgruppe (G, x) erfüllt x die Bedingungen (2) und (3) aus Satz 3.10. Wenn G perfekt ist, dann sind die Bedingungen (1) und (4) für alle $g \in G$ erfüllt. Für eine perfekte Färbungsgruppe (G, x) gilt demnach $x \in \Lambda$. Nehmen wir umgekehrt $x \in \Lambda$ an, dann muss Bedingung (1) zufolge $x \in G'$ gelten. Da G' eine normale Untergruppe von G ist, folgt $G' \geq \langle x^G \rangle = G$, also $G' = G$. □

LEMMA 3.25. *Ist (G, x) eine perfekte Färbungsgruppe und z ein zentrales Element, dann ist auch (G, zx) eine Färbungsgruppe.*

BEWEIS: Jedes zentrale Element z erfüllt $[za, b] = [a, zb] = [a, b]$ für alle $a, b \in G$. Daher gilt $\langle zx^G \rangle' = \langle x^G \rangle' = G' = G$ und somit $\langle zx^G \rangle = G$. □

KOROLLAR 3.26. *Für eine perfekte Färbungsgruppe (G, x) gilt $\langle x \rangle Z(G) \leq \Lambda$.*

BEWEIS: Aufgrund von Lemma 3.24 gilt $\langle x \rangle \leq \Lambda$. Für jedes zentrale Element z ist (G, zx) gemäß Lemma 3.25 ebenfalls eine Färbungsgruppe. Nach Lemma 3.18 sind die Longitudengruppen bezüglich x und zx die gleichen, also gilt $zx \in \Lambda$. Daraus folgt schließlich $Z(G) \leq \Lambda$. □

SATZ 3.27. *Sei (G, x) eine perfekte Färbungsgruppe. Dann ist die Longitudengruppe gegeben durch*

$$\Lambda = \{ \lambda \in Z(x) \mid \langle x | \lambda \rangle = 0 \}.$$

Ist überdies der Zentralisator $Z(x)$ zyklisch, so gilt $\Lambda = Z(x)$.

BEWEIS: Wegen $G' = G$ sind die Bedingungen (1) und (4) aus Satz 3.10 für alle $g \in G$ erfüllt. Die angegebene Charakterisierung von Λ ist eine Umformulierung der Bedingungen (2) und (3). Wenn wir $Z(x) = \langle y \rangle$ annehmen, dann gilt $x = y^k$ für einen geeigneten Exponenten k und daher $\langle x|y \rangle = k \langle y|y \rangle = 0$. Es folgt $y \in \Lambda$ und damit $Z(x) \leq \Lambda$. □

BEISPIEL 3.28. In der Gruppe $\mathrm{Alt}(6)$ wird der Zentralisator von $x = (123)$ erzeugt von x und $y = (456)$. Wegen $\langle x|y \rangle \neq 0$ gilt $\Lambda = \langle x \rangle$. In der Gruppe $G = \mathrm{Alt}(8)$ wird der Zentralisator von $x' = (12345)$ erzeugt von x' und $y' = (678)$. Das Pontryagin-Produkt verschwindet in diesem Fall, und die Longitudengruppe ist $\Lambda = \langle x', y' \rangle$.

BEISPIEL 3.29 (Lineare Gruppen). Für eine Primzahl $p \geq 5$ ist $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$ eine einfache Gruppe. Das Element $x = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ hat Ordnung p, der Zentralisator ist $Z(x) = \langle x \rangle$. Die Longitudengruppe ist demnach zyklisch, vgl. Beispiel 3.3.

BEISPIEL 3.30 (Alternierende Gruppen). Sei $n \geq 5$ eine ungerade ganze Zahl, $G = \mathrm{Alt}(n)$ und $x = (123 \ldots n)$ ein Zykel maximaler Länge. Der Zentralisator von x ist die von x erzeugte zyklische Untergruppe. Folglich gilt $\Lambda = \langle x \rangle$. Der Färbungsring ist in diesem Fall $R^x_G = \mathbb{Z}[\langle x \rangle] \cong \mathbb{Z}[t]/_{t^n = 1}$, vergleiche Beispiel 3.4.

BEISPIEL 3.31 (Mathieu-Gruppe). Auch für die Mathieu-Gruppe $M_{11} \leq \mathrm{Alt}(11)$ aus Beispiel 3.5 hat der Färbungsring die Form $\mathbb{Z}[\langle x \rangle] \cong \mathbb{Z}[t]/_{t^{11} = 1}$. Als Longituden treten nur Potenzen x^n auf, denn diese bilden den Zentralisator von x in $\mathrm{Alt}(11)$ und daher auch in M_{11}.

3.6. Verbundene Summe und Symmetrien

Die Invariante $P_G^x(K)$ ist kein Polynom, sondern ein Element im Gruppenring $\mathbb{Z}G$. Sie verhält sich jedoch ähnlich wie die klassischen Knotenpolynome: Aus Lemma 2.3 und Lemma 2.8 ergeben sich zwei vertraute Eigenschaften:

SATZ 3.32. *Für jede Färbungsgruppe (G, x) ist das Färbungspolynom $P = P_G^x$ multiplikativ, das heißt $P(K_1 \sharp K_2) = P(K_1)P(K_2)$.* □

SATZ 3.33. *Bei Inversion gilt $P(K^*) = P(K)^*$, wobei $^* : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ die lineare Fortsetzung der Inversion $g \mapsto g^{-1}$ in G ist.* □

Insbesondere gilt für Färbungszahlen stets $F(K) = F(K^*)$. Spiegelung und Reversion lassen sich ähnlich behandeln, allerdings muss man die Existenz eines besonderen Automorphismus der Gruppe G voraussetzen:

DEFINITION 3.34. Sei G eine Gruppe mit Fußpunkt x. Einen Automorphismus $^\times : G \to G$ mit $x^\times = x^{-1}$ nennen wir *Obversion*. Einen Anti-Automorphismus $^! : G \to G$ mit $x^! = x$ nennen wir *Reversion* der Gruppe (G, x).

Offenbar existiert genau dann eine Reversion, wenn eine Obversion existiert. In diesem Fall sind sie nicht eindeutig bestimmt, da man sie mit den Automorphismen aus $\operatorname{Aut}(G, x)$ komponieren kann. Die lineare Fortsetzung der Obversion bezeichnen wir mit $^\times : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$, die der Reversion mit $^! : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$.

BEISPIEL 3.35. Falls das gewählte Element x die Ordnung 2 hat, dann ist die Identität eine Obversion. In der symmetrischen Gruppe $\operatorname{Sym}(n)$ lässt sich jedes Element durch einen inneren Automorphismus auf sein Inverses abbilden, denn beide besitzen dieselbe Zykelstruktur. In der alternierenden Gruppe $\operatorname{Alt}(n)$ gilt diese Aussage wenigstens noch für äußere Automorphismen. In all diesen Fällen existiert demnach eine Obversion.

BEISPIEL 3.36. Sei G die metazyklische Gruppe $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$ mit Fußpunkt $x = (0, 1)$ wie in Anhang M. Für $q = 2$ ist dies die Diedergruppe, und x ist eine Spiegelung. Für $q \geq 3$ hingegen existiert kein Automorphismus von G, der x auf x^{-1} abbildet.

BEISPIEL 3.37. Die Zopfgruppen erlauben Obversion und Reversion. Dazu stellen wir Zöpfe wie in Kapitel 1 als strikt abwärts laufende Tangles in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{I}$ dar.

- Die Inversion $\beta \mapsto \beta^{-1}$ wird realisiert durch die Spiegelung an der Ebene $E_1 = \mathbb{R}^2 \times \{\frac{1}{2}\}$. (Damit der resultierende Zopf wieder von oben nach unten läuft, kehren wir anschließend die Orientierung aller Stränge um.) Dies ist ein Anti-Automorphismus der Zopfgruppe, der jeden Standarderzeuger σ_i auf σ_i^{-1} abbildet.
- Die Spiegelung an der Zeichenebene $E_2 = \mathbb{R} \times 0 \times \mathbb{R}$ entspricht dem Automorphismus der Zopfgruppe mit $\sigma_i \mapsto \sigma_i^{-1}$ und ist demnach eine Obversion von $(\operatorname{Br}(n), \sigma_1)$. Wie man an der Exponentensumme sieht, handelt es sich um einen äußeren Automorphismus.
- Die Komposition beider Operationen ist eine Halbdrehung des Zopfes um die Achse $E_1 \cap E_2 = \mathbb{R} \times 0 \times \{\frac{1}{2}\}$ (mit anschließender Umkehr der Orientierungen aller Stränge). Dies entspricht dem Anti-Automorphismus der Zopfgruppe mit $\sigma_i \mapsto \sigma_i$ und ist demnach eine Reversion von $(\operatorname{Br}(n), \sigma_1)$.

Diese Symmetrie-Operationen entsprechen denen für Knoten: Ist K ein Knoten und β ein darstellender Zopf, dann wird der inverse Knoten K^* durch den inversen Zopf β^{-1} dargestellt, der obverse Knoten $K^\times$ durch den obversen Zopf $\beta^\times$ und der reverse Knoten $K^!$ durch den reversen Zopf $\beta^!$.

SATZ 3.38. *Wenn die Färbungsgruppe (G,x) eine Obversion besitzt, dann gilt für die Spiegelung $P_G^x(K^\times) = P_G^x(K)^\times$ und für die Reversion $P_G^x(K^!) = P_G^x(K)^!$. In diesem Fall sind die Färbungszahlen von K, K^*, $K^\times$ und $K^!$ gleich.*

BEWEIS: Für jede Darstellung $\rho : \pi(K) \to G$ mit $\rho(m_K) = x$ ist $\rho^\times : \pi(K) \to G$ eine Darstellung mit $\rho(m_K^{-1}) = x$. Die Obversion $^\times$ stiftet also eine Bijektion zwischen den Färbungen des Knotens K und denen seines Spiegelbildes $K^\times$. Für das Bild der Longitude gilt $\rho^\times(l_K) = \rho(l_K)^\times$. Daher gilt $P_G^x(K^\times) = P_G^x(K)^\times$. Die Reversion entsteht als Komposition von Obversion und Inversion. Mit Satz 3.33 folgt daraus $P_G^x(K^!) = P_G^x(K)^!$. □

BEMERKUNG 3.39. Es reicht, für (G,x) eine schwache Obversion / Reversion zu fordern: Sei $Z = Z_G(G')$ und $X = ZxZ$. Eine *schwache Obversion* ist ein Automorphismus $\varphi : G \to G$ mit $\varphi(X) = X^{-1}$. Entsprechend ist eine *schwache Reversion* ein Anti-Automorphismus $\varphi : G \to G$ mit $\varphi(X) = X$. Mit Lemma 3.18 lassen sich alle Überlegungen auf schwache Symmetrien übertragen.

Symmetrien der Färbungsgruppe gehen in das Färbungspolynom $P_G^x(K)$ ebenso ein wie die Symmetrien des Knotens K:

KOROLLAR 3.40. *Wenn eine Färbungsgruppe (G,x) zyklische Longitudengruppe $\Lambda \subset \langle x \rangle$ und eine Reversion besitzt, dann operiert diese als Identität auf dem Färbungsring. Das Färbungspolynom P_G^x ist in diesem Fall unempfindlich gegenüber Reversion des Knotens.* □

BEISPIEL 3.41 (Lineare Gruppen). Sei $p \geq 5$ prim und $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_p)$ mit Fußpunkt $x = -\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Inversion, Obversion und Reversion haben die Form

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right), \qquad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{\times} = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right), \qquad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{!} = \left(\begin{smallmatrix} d & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right).$$

Wegen $\Lambda = \langle x \rangle$ ist das Färbungspolynom P_G^x unempfindlich gegenüber Reversion. Für die Gruppe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_p)$ gelten analoge Aussagen.

BEISPIEL 3.42 (Alternierende Gruppen). Sei $n \geq 5$ eine ungerade ganze Zahl, $G = \mathrm{Alt}(n)$ und $x = (123\ldots n)$ ein Zykel maximaler Länge. Diese Färbungsgruppe besitzt eine offensichtliche Obversion, nämlich die Konjugation mit

$$(1,n)(2,n{-}1)\cdots(\tfrac{n-1}{2},\tfrac{n+3}{2}) \in \mathrm{Sym}(n).$$

Wegen $\Lambda = \langle x \rangle$ ist das Färbungspolynom P_G^x unempfindlich gegenüber Reversion.

BEISPIEL 3.43 (Mathieu-Gruppe). In Beispiel 3.5 haben wir die Mathieu-Gruppe M_{11} verwendet. Die Unterschiede in den Färbungspolynomen sind nur möglich, weil diese Färbungsgruppe keine Obversion erlaubt: Die Gruppe $\mathrm{Out}(M_{11})$ der äußeren Automorphismen ist trivial [20]. Das Element $x = (\mathrm{abcdefghijk})$ ist in M_{11} nicht zu seinem Inversen konjugiert, denn dies ist selbst in $\mathrm{Alt}(11)$ nicht der Fall. Folglich gibt es keinen Automorphismus der x auf sein Inverses abbildet.

3.7. Periodische Knoten

Das Alexander-Polynom spiegelt Perioden von Knoten wider, indem es eine algebraische Beziehung zwischen der Invariante des Knotens und des Faktorknotens herstellt. Hierzu hat K. Murasugi [76] den folgenden Satz bewiesen:

SATZ 3.44. *Sei K ein Knoten mit Primperiode p, Verschlingungszahl q und Faktorknoten $\hat{K}$. Für ihre Alexander-Polynome $\Delta(t)$ und $\hat{\Delta}(t)$ gilt dann*

$$\hat{\Delta}(t) \mid \Delta(t) \quad \textit{sowie} \quad \Delta(t) \equiv \hat{\Delta}(t)^p \cdot (1 + t + \cdots + t^{q-1})^{p-1} \mod p. \qquad \square$$

Auch Färbungspolynome setzen periodische Knoten mit ihren Faktorknoten in Beziehung. Hierzu bezeichne $^{(p)} : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ die lineare Fortsetzung der Potenzierung $g \mapsto g^p$ in der Gruppe G. Für eine Färbungsgruppe (G, x) induziert dies eine Abbildung $^{(p)} : R_G^x \to R_G^x$ des Färbungsrings. Den Fall $p = -1$ haben wir oben in der Schreibweise $^* : R_G^x \to R_G^x$ für die Inversion von Knoten betrachtet. Für ein Element $r = \sum r_g \cdot g$ des Gruppenrings $\mathbb{Z}G$ schreiben wir $r \geq 0$, wenn für alle Koeffizienten $r_g \geq 0$ gilt.

SATZ 3.45. *Sei K ein Knoten mit Periode p und dem Faktorknoten $\hat{K}$. Für jede Färbungsgruppe (G, x) gilt dann*

$$P_G^x(K) = P_G^x(\hat{K})^{(p)} + r \quad \textit{mit einem Rest } r \geq 0 \textit{ in } R_G^x.$$

Ist darüber hinaus p eine Primzahl, die $|\operatorname{Inn}(G)'|$ nicht teilt, dann gilt $p|r$.

BEWEIS: Sei D ein p-periodisches Diagramm des Knotens K, das heißt, eine Rotation um den Winkel $2\pi/p$ überführt das Diagramm in sich. Wir nummerieren die Bögen $b_1, \ldots, b_{pn}$ zyklisch umlaufend. Ist q die Verschlingungszahl mit der Rotationsachse, dann überführt eine Drehung um den Winkel $2\pi\frac{q}{p}$ den Bogen b_1 in den Bogen b_{n+1}; diese Drehung bezeichnen wir mit τ. Für jede Färbung $f : \{b_1, \ldots, b_{pn}\} \to G$ ist auch $f\tau$ eine Färbung.

Sei λ_1 die partielle Longitude entlang der Bögen $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$, wie in Lemma 2.28 definiert. Analog sei λ_2 die partielle Longitude von b_{n+1} nach b_{2n+1}, etc. Die Longitude von f setzt sich als Produkt $\lambda(f) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_p$ aus den partiellen Longituden zusammen.

Jede Färbung $\hat{f}$ des Faktorknotens entspricht einer rotationssymmetrischen Färbung f von D. Für die partiellen Longituden gilt dann $\lambda_i = \lambda(\hat{f})$ und deshalb $\lambda(f) = \lambda(\hat{f})^p$. Die Longitudensumme $P(K)$ zerfällt demnach in die Teilsumme $P(\hat{K})^{(p)}$ der rotationssymmetrischen Färbungen und die Restsumme r der nicht-rotationssymmetrischen Färbungen. Dies beweist den ersten Teil des Satzes.

Wir nehmen nun an, dass p eine Primzahl ist und $|\operatorname{Inn}(G)'|$ nicht teilt. Die Färbungssumme $P(K)$ berücksichtigt nur Färbungen mit $f(b_1) = x$. Die rotierte Färbung $f\tau$ erfüllt diese Bedingung im Allgemeinen nicht mehr. Zur Korrektur konjugieren wir mit λ_1, denn dies erfüllt nach Konstruktion $f(b_1)^{\lambda_1} = f(b_{n+1})$. Die partielle Longitude λ_1 liegt in G', die Konjugation $\gamma_1 : g \mapsto \lambda_1 g \lambda_1^{-1}$ in $\operatorname{Inn}(G)'$.

Wir erreichen damit $\gamma_1 f\tau(b_1) = f(b_1) = x$ und nennen $f' = \gamma_1 f\tau$ die *Rotokonjugation* von f. Für die rotierte Färbung gilt $\lambda(f\tau) = \lambda_2 \cdots \lambda_p\lambda_1$ und für die Rotokonjugation folglich $\lambda(\gamma_1 f\tau) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_p$. Zu jeder Färbung f erhalten wir eine Folge $f, f', f'', \ldots$ von Färbungen mit derselben Longitude.

Es ergeben sich zwei Fälle:

1. FALL: Es gilt $f = f\tau$, das heißt, die Färbung f ist rotationsinvariant. In der Longitudensumme gehört dies zur Teilsumme $P(\hat{K})^{(p)}$.

2. FALL: Die Bahn $\{f, f', f'', \dots\}$ hat als Länge ein Vielfaches von p. Da alle Longituden gleich sind, tragen sie zur Restsumme r ein Vielfaches von p bei.

Zum Beweis des Satzes bleibt zu zeigen, dass dies die einzigen Möglichkeiten sind: Sei f eine Färbung mit Bildgruppe $H = \langle \mathrm{Im}(f) \rangle$, und sei $l \geq 1$ die kleinste Zahl mit $f^{(l)} = f$. Es gilt $f^{(l)} = \gamma_l f \tau^l$ mit $\gamma_l \in \mathrm{Inn}(H)'$. Wir nehmen an, dass Fall 2 nicht zutrifft, also $p \nmid l$. Da p prim ist, gilt dann $\mathrm{ggT}(p, l) = 1$, es gibt also ganze Zahlen p' und l' mit $pp' + ll' = 1$. Folglich gilt $f = \gamma_l f \tau^l = \gamma_l^{l'} f \tau^{ll'} = \gamma_l^{l'} f \tau$ und weiter $f = \gamma_l^{l'p} f$. Das bedeutet $\gamma_l^{l'p} = \mathrm{id}$. Wäre $\gamma_l^{l'} \neq \mathrm{id}$, dann müsste p die Ordnung von $\mathrm{Inn}(H)'$ teilen und damit auch die Ordnung $\mathrm{Inn}(G)'$. Das ist aber nach Voraussetzung ausgeschlossen. Folglich gilt $\gamma_l^{l'} = \mathrm{id}$ und daher $f = f\tau$, das heißt, Fall 1 trifft zu. □

Beispiele und Gegenbeispiele. Die folgenden drei Beispiele zeigen periodische Knoten und illustrieren die Auswirkungen auf ihre Färbungspolynome.

Sei $n \geq 3$ prim und $G = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_m$ eine metazyklische Gruppe (vgl. Anhang M). Diese hat triviales Zentrum, also gilt $\mathrm{Inn}(G) = G$. Ihre Kommutatorgruppe ist $G' = \mathbb{Z}_n$. Wegen $G'' = \{1\}$ treten nur triviale Longituden auf und das Färbungspolynom degeneriert zur Färbungszahl F_G^x. Für eine Primperiode $p \neq n$ können wir den Satz in seiner starken Form anwenden:

$$F_G^x(K) = F_G^x(\hat{K}) + p \cdot r \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{N}.$$

BEISPIEL 3.46. Sei $G = \mathbb{Z}_{11} \rtimes \mathbb{Z}_5$ und x ein Element der Ordnung 5. Aufgrund von Lemma 3.23 haben alle Färbungszahlen die Form $1 + 5k$. Der Achterknoten hat Periode 2 mit trivialem Faktorknoten, die Färbungszahl ist

$$F_G^x(4_1) = 11 = 1 + r \quad \text{mit Rest} \quad r = 10.$$

Da die Periode 2 die Ordnung $|G'| = 11$ nicht teilt, ist die starke Form des Satzes anwendbar. Dies erklärt die beobachtete Teilbarkeit $2 \mid r$.

BEISPIEL 3.47. Die Kleeblattschlinge hat Perioden 2 und 3 mit trivialem Faktorknoten. Sei s eine Spiegelung in der Diedergruppe $D = D_3$. Es gilt

$$F_D^s(3_1) = 3 = 1 + r \quad \text{mit Rest} \quad r = 2.$$

Für die Periode 3 ist nur die schwache Version des Satzes anwendbar.

BEISPIEL 3.48. Sei $G = \mathrm{Alt}(5)$ und $x = (12345)$. Nach Beispiel 3.2 hat die Kleeblattschlinge das Färbungspolynom $P(3_1) = 1 + 5x^4$. Der Knoten 8_{21} hat Periode 2 mit Faktorknoten 3_1, und sein Färbungspolynom ist

$$P(8_{21}) = 1 + 5x^3 = P(3_1)^{(2)}.$$

Der Torusknoten 9_1 hat Periode 3 mit Faktorknoten 3_1. Hier gilt

$$P(9_1) = 1 + 5x^2 = P(3_1)^{(3)}.$$

In diesen besonders einfachen Fällen tritt nur Rest $r = 0$ auf, das bedeutet, alle Färbungen von 8_{21} bzw. 9_1 sind rotationssymmetrisch.

Anwendung auf Perioden von Knoten. Wie wir zuvor gesehen haben, erfüllen die metazyklischen Gruppen $G = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_m$ die Bedingung $2 \nmid |\mathrm{Inn}(G)'|$. Darüber hinaus ist es schwierig, interessante Beispiele mit dieser Eigenschaft zu finden. Für eine perfekte Gruppe ist es gar unmöglich, denn nach dem Satz von W. Feit und J. Thompson [33] sind Gruppen ungerader Ordnung stets auflösbar.

Ich gebe daher ein Beispiel für Periode $p = 3$: Die Suzuki-Gruppe $\mathrm{Sz}(8)$ ist einfach und hat die Ordnung $29120 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Die Primzahl 3 teilt diese Ordnung nicht, daher können wir Satz 3.45 in seiner starken Fassung anwenden. (Alle Gruppen der Suzuki-Serie $\mathrm{Sz}(2^{2n+1})$ besitzen diese Eigenschaft, siehe [20]. Unter den perfekten Gruppen mit bis zu 10^6 Elementen sind $\mathrm{Sz}(8)$ und ihre Überlagerungen die einzigen Gruppen mit dieser Eigenschaft [39].)

BEISPIEL 3.49. Für den Kinoshita-Terasaka-Knoten ist das Alexander-Polynom trivial. Wenn er überhaupt eine Periode besitzt, dann muss nach Satz 3.44 der Faktorknoten ebenfalls triviales Alexander-Polynom haben. Von allen Knoten mit weniger als 11 Kreuzungen erfüllt dies nur der triviale Knoten.

Für den Fall der Periode 3 betrachten wir die Suzuki-Gruppe $\mathrm{Sz}(8)$ mit einem Element der Ordnung 7 als Fußpunkt. Der Kinoshita-Terasaka-Knoten hat das Färbungspolynom

$$P(K) = 1 + 7x^3 + 7x^4 + 7x^6.$$

Aufgrund von Satz 3.45 muss jeder Faktorknoten $\hat{K}$ zur Periode 3 die Bedingung $P(K) = P(\hat{K})^{(3)} + 3s$ mit $s \geq 0$ erfüllen. Nach Lemma 3.23 gilt außerdem $P(\hat{K}) \equiv 1 \mod 7$. Wie man sieht, sind beide Bedingungen nur für

$$P(\hat{K}) = 1 + 7x + 7x^2 + 7x^6$$

möglich. Das schließt den trivialen Knoten als möglichen Faktorknoten aus.

Je größer die Primzahl p, desto leichter lassen sich perfekte oder gar einfache Gruppen mit $p \nmid |G|$ finden. Für $p = 5$ kommen etwa $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ mit Ordnung $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ oder $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_{13})$ mit Ordnung $1092 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ in Betracht. Die Primzahl $p = 7$ teilt zum Beispiel die Ordnungen von $\mathrm{Alt}(5)$ oder $\mathrm{Alt}(6)$ oder der Mathieu-Gruppe M_{11} nicht. Da in diesen Fällen eine reichhaltige Auswahl besteht, schließe ich mit einem einfachen Beispiel dieser Art.

BEISPIEL 3.50. Ebenso wie der Kinoshita-Terasaka-Knoten hat auch der Conway-Knoten triviales Alexander-Polynom. Als Faktorknoten mit weniger als 11 Kreuzungen kommt daher auch hier nur der triviale Knoten in Betracht.

Für den Fall der Periode 5 wählen wir die Gruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$. Die Primzahl 5 teilt die Ordnung $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ nicht, daher können wir Satz 3.45 in seiner starken Fassung anwenden. Als Fußpunkt wählen wir ein Element der Ordnung 7, etwa $x = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Für den Conway-Knoten ist das Färbungspolynom dann

$$P(C) = 1 + 7x^5 + 7x^6.$$

Wie im vorangegangenen Beispiel sieht man daran, dass ein Faktorknoten $\hat{C}$ zur Periode 5 das Färbungspolynom

$$P(\hat{C}) = 1 + 7x + 7x^4$$

haben müsste. Das schließt den trivialen Knoten als möglichen Faktorknoten aus.

BEMERKUNG 3.51. Die hier vorgestellte Analyse lässt sich auch auf andere Symmetrien von Knoten anwenden. So konnte ich zum Beispiel eine entsprechende Aussage über Färbungspolynome von symmetrischen Vereinigungen beweisen. Diese werden in der Arbeit von C. Lamm [66] diskutiert, und dort findet sich auch der entsprechende Satz mit Beweis und Anwendungen.

BEMERKUNG 3.52. Die obigen Aussagen lassen sich wesentlich verschärfen: Der Kinoshita-Terasaka-Knoten und der Conway-Knoten sind hyperbolisch, das heißt, das Knotenkomplement lässt sich mit einer hyperbolischen Metrik ausstatten. Mit Methoden der hyperbolischen Geometrie kann man die Symmetriegruppen solcher Knoten bestimmen. Für den Kinoshita-Terasaka- und den Conway-Knoten lässt sich so zeigen, dass ihre Symmetriegruppen trivial sind. [100, 47]

3.8. Mögliche Verfeinerungen

Die Untersuchung von Knoten mittels ihrer Knotengruppen ist eines der ältesten Werkzeuge der Knotentheorie (vgl. [17, Sec. 3.G]). Darstellungen in endliche Gruppen wurden von R.H. Fox untersucht [34, 22] und später unter anderem von R. Riley [84] und R. Hartley [42]. Darüber hinaus wurden auch Darstellungen in Lie-Gruppen betrachtet. Motiviert durch die Untersuchung hyperbolischer Geometrien auf Knotenkomplementen ist hier vor allem die Gruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ interessant [23, 90, 21]. Der Darstellungsraum der Knotengruppe ist dann nicht mehr diskret, sondern eine Varietät und damit einer Fülle algebraisch-geometrischer Methoden zugänglich. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf den diskreten, gar endlichen Fall. Die Anzahl der Darstellungen wurde verschiedentlich als Knoteninvariante genutzt, zum Beispiel in [34, 84, 42, 63]. Die hier durchgeführte Diskussion von Färbungspolynomen ist neu.

Überlagerungen. Als Charakteristikum einer Darstellung $\rho : \pi(K) \twoheadrightarrow G$ haben wir das Bild des Meridian-Longituden-Paars genutzt. Zu jeder Darstellung ρ lässt sich aber auch eine Reihe von topologischen Räumen konstruieren, die weitere Information über ρ und K enthalten:

Zum Kern $\tilde{\pi} = \ker(\rho)$ gehört die Überlagerung $\tilde{X} \to X$ mit Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}) = \tilde{\pi}$. Die Gruppe $G = \pi/\tilde{\pi}$ operiert auf $\tilde{X}$ als Decktransformationsgruppe. Insbesondere operiert G auf der ersten Homologie $H_1(\tilde{X})$, die dadurch zu einem G-Modul wird. Wir nennen $M := H_1(\tilde{X})$ den *Alexander-Modul*; sein Isomorphietyp $[M]$ ist ein Charakteristikum der Darstellung ρ.

BEISPIEL 3.53. Für $\varepsilon_n : \pi(K) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$ erhält man aus der n-fachen zyklischen Überlagerung $\tilde{X}_n$ die sogenannten abelschen Knoteninvarianten. Die Abelschmachung $\varepsilon : \pi(K) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ entspricht der unendlich zyklischen Überlagerung $\tilde{X}_\infty$. Ihre Homologie ist der klassische Alexander-Modul des Knotens, und aus diesem gewinnt man das Alexander-Polynom als Invariante (vgl. Anhang A).

Weitere Invarianten lassen sich aus *verzweigten* Überlagerungen erhalten [34, 84, 77, 17]: Sei $\rho : \pi(K) \to G$ eine endliche Darstellung. Zu einer Untergruppe $H \leq G$ sei $\tilde{H} = \rho^{-1}(H)$ das Urbild in $\pi(K)$. Die zugehörige Überlagerung $\tilde{X}$ des Knotenkomplements erlaubt eine natürliche Kompaktifizierung: die entlang des Knotens verzweigte Überlagerung $\bar{X}$.

BEMERKUNG 3.54. Die abelschen Darstellungen ε_n und ε behandeln die triviale Konjugationsklasse $Q = \{1\}$ und ergeben höchst interessante Invarianten. Eine analoge Konstruktion lässt sich für jede endliche Konjugationsklasse $Q = x^G$ durchführen, siehe Anhang A.

Eine weitere Überlegung wurde zur Definition von „getwisteten“ Alexander-Polynomen genutzt [98, 49, 60]. Hierzu wird eine feste Darstellung $G \to \mathrm{GL}(V)$ gewählt und jeder Darstellung $\rho : \pi(K) \to G$ ein Polynom zugeordnet. Um daraus eine Invariante des Knotens zu gewinnen, muss man wie zuvor die Menge aller Darstellungen $\rho : \pi(K) \to G$ betrachten.

3.9. Mögliche Verallgemeinerungen

Die Theorie der Färbungspolynome wurde hier für Knoten entwickelt. Zum Schluss möchte ich zwei mögliche Verallgemeinerungen erwähnen: Verschlingungen und reine Tangles. Der Vergleich zeigt, dass sich für Verschlingungen keine ähnlich schöne Konstruktion durchführen lässt. Für reine Tangles hingegen lässt sich die Konstruktion von Färbungspolynomen weitgehend analog durchführen.

Verschlingungen. Sei L eine Verschlingung und $\pi(L) = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L)$ die Fundamentalgruppe des Komplements. Der Isomorphietyp von $\pi(L)$ ist eine Invariante des Verschlingungstyps. Für eine endliche Gruppe G ist daher die Anzahl $F_G(L)$ der Darstellungen $\pi(L) \to G$ eine Invariante.

Wir nehmen an, dass die Komponenten nummeriert sind. Für jede Komponente L_i können wir ein Meridian-Longituden-Paar m_i, l_i in $\pi(L)$ definieren. Wir erhalten eine 2μ-fach markierte Gruppe

$$\breve{\pi}(L) := [\ \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L);\ (m_1, l_1),\ (m_2, l_2),\ \dots,\ (m_\mu, l_\mu)\ ].$$

Jedes Meridian-Longituden-Paar ist nur bis auf Konjugation $(m, l) \mapsto (m^a, l^a)$ definiert. Zwei markierte Gruppen $(G; m_1, l_1, \dots)$ und $(G'; m_1', l_1', \dots)$ sind daher als äquivalent zu betrachten, wenn ein Isomorphismus $\phi : G \to G'$ und innere Automorphismen $\alpha_i : G \to G$ mit $\phi\alpha_i(m_i) = m_i'$ und $\phi\alpha_i(l_i) = l_i'$ für alle i existieren. Nur im Fall $\mu = 1$ reicht hierzu allein der Isomorphismus ϕ.

Für Verschlingungen mit $\mu \geq 2$ Komponenten reicht es daher nicht, in einer Gruppe G eine Markierung $x \in G^\mu$ zu wählen und Darstellungen $\rho : \pi(L) \to G$ mit $\rho(m) = x$ zu betrachten. Vielmehr muss eine Familie $Q = (Q_1, \dots, Q_\mu)$ von Konjugationsklassen $Q_i = x_i^G$ gewählt werden. Dann ist die Anzahl $F_Q(L)$ der Darstellungen $\rho : \pi(L) \to G$ mit $\rho(m) \in Q$ eine Invariante des Verschlingungstyps. Im Fall $Q_i = G$ für alle i erhalten wir wieder die obige Invariante $F_G(L)$.

Um auch die Longituden $l = (l_1, \dots, l_\mu)$ auszuwerten, können wir für jede Darstellung das Bild der Meridian-Longituden-Paare in $G^{2\mu}$ betrachten. Auf dieser Menge operiert G^μ durch paarweise Konjugation. Wir zählen die Meridian-Longituden-Bilder in der Quotientenmenge $X = G^{2\mu}/G^\mu$ und erhalten eine Invariante $P : \mathcal{L}^\mu \to \mathbb{Z}X$.

Für Knoten gelingt es, diese Invariante in Form von Färbungspolynomen zu organisieren; im Fall $\mu \geq 2$ bleibt die Invariante P sehr unübersichtlich.

Tangles eignen sich wesentlich besser zur Konstruktion von Färbungspolynomen. Sei $T \in \mathcal{T}(\nu, \nu)$ ein Tangle mit offenen Komponenten $T_1, \ldots, T_\nu$ und geschlossenen Komponenten $L_1, \ldots, L_\mu$. Jede offene Komponente T_i verbindet einen Eingang $(i, 0, 0)$ mit einem Ausgang $(\tau i, 0, 1)$. Zur Vereinfachung nehmen wir $\tau = \mathrm{id}$ an und sprechen in diesem Fall von einem *reinen* Tangle (in Analogie zu reinen Zöpfen). Die Klasse der reinen Tangles umfasst lange Knoten in Form von 1-Tangles, Verschlingungen mit einer ausgezeichneten Komponente ($\nu = 1, \mu \geq 1$) und die sogenannten *string links* ($\nu \geq 1, \mu = 0$).

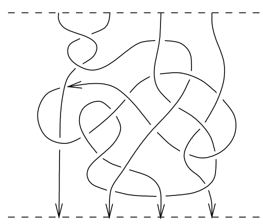


Abb. 3.2. Ein reines Tangle

Die Fundamentalgruppe des Komplements ist eine Invariante des Tangletyps. Darüber hinaus lässt sich für jede Komponente T_i ein kanonisches Meridian-Longitude-Paar definieren, ganz so, wie wir dies für lange Knoten gesehen haben (vgl. Abschnitt 2.3). Der Isomorphietyp der 2ν-fach markierten Gruppe $\breve{\pi}(T)$ ist eine Invariante des Tangletyps. Für eine Gruppe G mit Markierung $x \in G^\nu$ ist demnach die Anzahl $F_G^x(T)$ aller Darstellungen $\rho : \pi(T) \to G$ mit $\rho(m) = x$ eine Invariante. Gleiches gilt für die Longitudensumme $P_G^x(T)$ in $\mathbb{Z}G^\nu$.

Mit einer leichten Variation dieses Ansatzes lässt sich sogar erreichen, dass die Färbungsinvariante multiplikativ bzgl. Komposition reiner Tangles wird. Für eine Färbung f stimmen die Eingangsfarben $x_i = f(i, 0, 0)$ im Allgemeinen nicht mit den Ausgangsfarben $y_i = f(i, 0, 1)$ überein, lediglich das Produkt $x_1 x_2 \cdots x_\nu$ ist gleich dem Produkt $y_1 y_2 \cdots y_\nu$. (Nur in dem zuvor diskutierten Fall $\nu = 1$ ist dies gleichbedeutend mit $x = y$.)

Sei $C_y^x(T)$ die Menge aller Färbungen mit Eingangsfarben $x \in G^\nu$ und Ausgangsfarben $y \in G^\nu$, und sei $P_y^x(T) \in \mathbb{Z}G^\nu$ die Longitudensumme dieser Färbungen. (Im Fall $\nu = 1$ ist dies das oben diskutierte Färbungspolynom von Knoten.) Für jedes Tangle definiert dies eine Matrix

$$P(T) \in \mathrm{Mat}(G^\nu \times G^\nu; \mathbb{Z}G^\nu).$$

Die Invariante $P : \mathcal{T}(\nu, \nu) \to \mathrm{Mat}$ ist antimultiplikativ, denn für das Produkt zweier reiner Tangles T und T' gilt

$$P_z^x(T'T) = \sum_y P_y^x(T) P_z^y(T').$$

Auch Inversion, Obversion und Reversion lassen sich analog zum Fall von Knoten behandeln. Zur Definition von Färbungspolynomen sind daher reine Tangles die geeignete Verallgemeinerung von Knoten.

The reason that so much of the literature is about
the cyclic invariants of knots is their relative tractability.
It is simply that the non-abelian invariants are not as well-behaved,
and hence not very much has been done with them.
Ralph H. Fox [35]

KAPITEL 4

Zentrale Erweiterungen

Färbungen von Knotendiagrammen mit einer Gruppe G verwenden nur die Konjugationsstruktur von G. Es liegt daher nahe, zur Gruppe $\operatorname{Inn}(G)$ der inneren Automorphismen überzugehen, das heißt, durch das Zentrum zu teilen. Dieses Kapitel widmet sich der Umkehrung: Satz 4.11 besagt, dass sich Knotengruppen-Darstellungen bei zentraler Erweiterung eindeutig hochheben lassen. Die Färbungszahlen sind demnach gleich, doch Beispiele zeigen, dass die hochgehobenen Longituden mehr Information enthalten als die ursprünglichen.

Dieses Phänomen wirft die Frage auf, wie sich eine Konjugationsklasse in verschiedene Gruppen einbetten lässt. Jede Konjugationsklasse Q lässt sich in eine universelle Gruppe $\operatorname{Adj}(Q)$ einbetten. Das Färbungspolynom hierzu enthält maximale Information, aber leider ist $\operatorname{Adj}(Q)$ eine unendliche Gruppe. Satz 4.32 zeigt, dass man sich auf endliche Gruppen zurückziehen kann: Zu jeder Färbungsgruppe (G, x) konstruieren wir eine *endliche* universelle Färbungsgruppe $\Gamma(G, x)$. Diese spielt für Färbungsgruppen in etwa dieselbe Rolle wie die universelle Überlagerung einer perfekten Gruppe.

Im letzten Abschnitt wenden wir die Konstruktion auf drei einfache Fälle an: Für jede Coxeter-Gruppe (G, s) gilt $\Gamma(G, s) = (G, s)$. Für $\operatorname{Alt}(4) \cong \operatorname{PSL}(2, \mathbb{F}_3)$ ist $\operatorname{SL}(2, \mathbb{F}_3)$ die universelle Färbungsgruppe. Für die symmetrische Gruppe $\operatorname{Sym}(4)$ mit Fußpunkt (1234) ist die universelle Färbungsgruppe eine zentrale Erweiterung mit Kern $\mathbb{Z}_4$.

4.1. Überlagerung perfekter Gruppen

Wie wir im vorangegangenen Kapitel gesehen haben, eignen sich perfekte Gruppen besonders gut für Knotenfärbungen. Wir beginnen die Untersuchung zentraler Erweiterungen daher mit dem Fall perfekter Gruppen.

DEFINITION 4.1. Eine *Erweiterung* einer Gruppe G ist eine Gruppe $\tilde{G}$ zusammen mit einem Epimorphismus $\varphi : \tilde{G} \twoheadrightarrow G$. Die Erweiterung heißt *zentral*, wenn ihr Kern im Zentrum von $\tilde{G}$ liegt. Sie heißt *perfekt*, wenn $\tilde{G}$ (und damit auch G) eine perfekte Gruppe ist. Eine perfekte zentrale Erweiterung nennt man auch *Überlagerung*.

BEISPIEL 4.2. Die Gruppe $\tilde{G} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ ist eine Erweiterung von $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$. Der Kern $\{\pm 1\}$ liegt im Zentrum von $\tilde{G}$. Für $p \geq 5$ ist $\tilde{G}$ perfekt, G sogar einfach, und $\tilde{G} \twoheadrightarrow G$ ist eine Überlagerung.

SATZ 4.3 ([4]). *Zu jeder perfekten Gruppe G existiert eine universelle Überlagerung $\tilde{G} \twoheadrightarrow G$. Wenn G endlich ist, dann ist auch $\tilde{G}$ endlich.* □

BEMERKUNG 4.4. Der Kern der universellen Überlagerung $\tilde{G} \twoheadrightarrow G$ wird *Schur-Multiplikator* genannt. Die Ordnungen von G und $\tilde{G}$ besitzen dieselben Primfaktoren, das heißt, der Schur-Multiplikator führt keine neuen Primfaktoren ein.

BEISPIEL 4.5. Für $n \geq 5$ ist die alternierende Gruppe $\mathrm{Alt}(n)$ einfach und damit auch perfekt. Für $n \neq 6, 7$ hat die universelle Überlagerung Kern $\mathbb{Z}_2$, in den Ausnahmefällen $n = 6, 7$ hingegen Kern $\mathbb{Z}_6$. [4, 20]

Hochhebung von Konjugationsklassen. Für Knotenfärbungen ist allein die Struktur der Konjugationsklasse x^G wesentlich. Die folgenden Beispiele erläutern, wie sich Konjugationsklassen bei Erweiterung verhalten können.

BEISPIEL 4.6. In der Gruppe $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$ betrachten wir $x = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. In der Überlagerung $H = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ gibt es dazu zwei Urbilder, $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $-y$. Als Quandel sind y^H und $-y^H$ isomorph. Die beiden Konjugationsklassen sind disjunkt, denn y hat Ordnung p und $-y$ hat Ordnung $2p$. Die Quotientenabbildung $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$ bildet jede dieser Konjugationsklassen bijektiv auf x^G ab.

Anders verhält es sich mit dem Element $a = \pm\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ der Ordnung 2 in G. Die beiden Urbilder $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $-b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ haben Ordnung 4 und sind konjugiert (vgl. Beispiel 3.22). Die Konjugationsklasse b^H wird surjektiv auf a^G abgebildet, wobei je zwei Elemente identifiziert werden.

BEISPIEL 4.7. Sei $G = \mathrm{Alt}(6)$ und $\varphi : H \twoheadrightarrow G$ die dreifache Überlagerung. Für ein Element $x \in G$ der Ordnung $p = 2, 4, 5$ existiert ein Urbild der Ordnung p und zwei Urbilder der Ordnung $3p$. Diese drei bilden disjunkte Konjugationsklassen, und jede wird von φ bijektiv auf x^G abgebildet. Wenn x hingegen die Ordnung 3 hat, dann haben alle drei Urbilder ebenfalls die Ordnung 3. Diese liegen in einer gemeinsamen Konjugationsklasse; auf dieser ist φ daher nicht injektiv.

Im ersten Fall wird die Gruppe G zu H erweitert, aber die Konjugationsklasse x^G kann unverändert nach H hochgehoben werden. Im zweiten Fall wird auch die Konjugationsklasse x^G erweitert.

DEFINITION 4.8. Eine Erweiterung $\varphi : H, y \twoheadrightarrow G, x$ heißt *separabel*, wenn alle Urbilder von x in disjunkten Konjugationsklassen von H liegen.

LEMMA 4.9. *Eine separable Erweiterung von Färbungsgruppen ist zentral.*

BEWEIS: Seien $H = \langle y^H \rangle$ und $G = \langle x^G \rangle$ Färbungsgruppen und $\varphi : H, y \twoheadrightarrow G, x$ eine separable Erweiterung. Für $z \in \ker(\varphi)$ und $y' \in y^H$ gilt $\varphi(y') = \varphi(z^{-1} y' z)$. Nach Voraussetzung ist φ separabel, also injektiv auf der Konjugationsklasse y^H. Daraus können wir $y' = z^{-1} y' z$ schließen. Das Element z kommutiert demnach mit allen Elementen der Konjugationsklasse y^H. Nach Voraussetzung erzeugt y^H die Gruppe H, also liegt z im Zentrum von H. □

LEMMA 4.10. *Eine zentrale Erweiterung $\varphi : H, y \twoheadrightarrow G, x$ von Färbungsgruppen ist separabel, wenn die Ordnung des Kerns und die Ordnung von x teilerfremd sind. In diesem Fall existiert zu x genau ein Urbild y_0 mit $\operatorname{ord}(y_0) = \operatorname{ord}(x)$.*

BEWEIS: Sei $p = \operatorname{ord}(x)$ und $q = |\ker(\varphi)|$. Das Urbild der zyklischen Untergruppe $X = \langle x \rangle$ ist eine abelsche Gruppe Y der Ordnung pq. Nach dem Satz von Schur-Zassenhaus (hier in einem elementaren Spezialfall) existiert zu x ein Urbild y_0 der Ordnung p. Jedes andere Urbild hat die Form $y = zy_0$ mit $z \in \ker(\varphi)$ und deshalb als Ordnung $\operatorname{ord}(y) = \operatorname{ord}(z)p$ ein echtes Vielfaches von p. Daher können y_0 und y in H nicht konjugiert sein, und die Konjugationsklasse y_0^H wird bijektiv auf x^G abgebildet. Dies gilt folglich auch für die Konjugationsklasse y^H. □

4.2. Hochhebung von Färbungspolynomen

Für einen Isomorphismus $\varphi : H, y \to G, x$ gilt offenbar $\varphi P_H^y = P_G^x$. Für einen beliebigen Homomorphismus besteht die Gleichung im Allgemeinen nicht – man denke etwa an $\langle x \rangle \hookrightarrow G$ oder $H \twoheadrightarrow \{1\}$. Der folgende Satz zeigt jedoch, dass sie für zentrale Erweiterungen erfüllt ist.

SATZ 4.11. *Sei $\varphi : H, y \twoheadrightarrow G, x$ eine zentrale Erweiterung. Dann lässt sich jede Knotengruppen-Darstellung $\rho : \pi(K), m_K \to G, x$ eindeutig zu einer Darstellung $\tilde\rho : \pi(K), m_K \to H, y$ mit $\rho = \varphi\tilde\rho$ hochheben. Für die Färbungspolynome gilt folglich $P_G^x = \varphi P_H^y$, und die Färbungszahlen sind gleich.*

BEWEIS: Sei $\gamma : H \twoheadrightarrow \operatorname{Inn}(H)$ der Gruppenhomomorphismus, der jedem Element $h \in H$ die Konjugation $\gamma_h : a \mapsto a^h$ zuordnet. Der Kern von γ ist das Zentrum von H. Da $\varphi : H \twoheadrightarrow G$ eine zentrale Erweiterung ist, existiert genau ein Homomorphismus $\psi : G \twoheadrightarrow \operatorname{Inn}(H)$ mit $\psi\varphi = \gamma$. Auf diese Weise operiert G durch Konjugation auf H, und es gilt $\varphi(h^g) = \varphi(h)^g$ für alle $h \in H$ und $g \in G$.

Insbesondere operiert G auf der Konjugationsklasse $Q = y^H$, und $\varphi : Q \to G$ ist eine Augmentierung im Sinne von Definition 2.33. Unter diesen Voraussetzungen besagt Korollar 2.36: Die Abbildung $\varphi : H \to G$ induziert eine Bijektion

$$\varphi_* : \operatorname{Hom}(\pi(K), m_K; H, y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(\pi(K), m_K; G, x).$$

Für die Färbungspolynome gilt deshalb $P_G^x = \varphi P_H^y$. □

BEMERKUNG 4.12. Nach Lemma 3.18 ist es unerheblich, welches Urbild des Fußpunkts wir für die Hochhebung wählen: Zu je zwei Urbildern y und y' von x sind die Färbungspolynome P_H^y und $P_H^{y'}$ identisch.

KOROLLAR 4.13. *Für eine zentrale Erweiterung $\varphi : H, y \twoheadrightarrow G, x$ von Färbungsgruppen ist die Einschränkung $\varphi|_\Lambda : \Lambda_H^y \to \Lambda_G^x$ ein Epimorphismus.* □

Wenn für eine zentrale Erweiterung $\varphi : H, y \twoheadrightarrow G, x$ die Einschränkung $\varphi|_\Lambda$ zudem injektiv ist, dann lassen sich die Färbungspolynome P_H^y und P_G^x mittels $\varphi|_\Lambda$ identifizieren. In diesem Fall nennen wir die Erweiterung φ *redundant*: für Färbungspolynome bietet sie keinen Informationsgewinn.

4.3. Beispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir eine redundante Erweiterung, anschließend widmen wir uns Erweiterungen mit Informationsgewinn.

BEISPIEL 4.14. Sei (G, x) eine endliche Färbungsgruppe. Wir wählen n teilerfremd zur Ordnung von x und setzen $H = G \times \mathbb{Z}_n$ mit $\mathbb{Z}_n = \langle z \rangle$. Nach Konstruktion ist H eine Färbungsgruppe bezüglich des Fußpunkts $y = xz$.

Die Projektion $\varphi : H, y \twoheadrightarrow G, x$ ist eine zentrale Erweiterung mit Kern $\langle z \rangle$. Offenbar gilt jedoch $H' = G'$ und $\Lambda_H^y = \Lambda_G^x$. Die Erweiterung φ ist redundant.

Die Anzahl der Knotenfärbungen bleibt unverändert bei jeder zentralen Erweiterung $H \twoheadrightarrow G$ der Färbungsgruppen. Jedoch können sich Longituden, die in G gleich sind, bei Hochhebung in H aufspalten:

BEISPIEL 4.15. In der Gruppe $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$ wählen wir $x = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ als Fußpunkt. In $H = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ betrachten wir $y = -\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Für $p \geq 5$ sind beide Gruppen perfekt. Die Longitudengruppe $\Lambda = \langle x \rangle$ hat Ordnung p, in der Erweiterung hat die Longitudengruppe $\tilde{\Lambda} = \langle y \rangle$ jedoch Ordnung $2p$. Dies führt zu differenzierteren Färbungspolynomen. Unser Beispiel zeigt, dass dies sogar für $p = 3$ der Fall ist:

$$\begin{aligned} P_G^x(8_{15}) &= 4 \quad \text{liftet zu} \quad P_H^y(8_{15}) = 4, \\ P_G^x(9_1) &= 4 \quad \text{liftet zu} \quad P_H^y(9_1) = 1 + 3y^3. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass das hochgehobene Polynom P_H^y mehr Information über die Knoten enthält als das ursprüngliche Polynom P_G^x.

BEISPIEL 4.16. In der Gruppe $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ betrachten wir $x = \pm \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und in der zentralen Erweiterung $H = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ das Urbild $y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Der Knoten 8_{20} ist in Abb. 5.2 dargestellt.

$$P_G^x(8_{20}) = 25 \quad \text{liftet zu} \quad P_H^y(8_{20}) = 9 + 16y^2.$$

BEISPIEL 4.17. Sei $G = \mathrm{Alt}(6)$ und $H \twoheadrightarrow G$ die dreifache Überlagerung. Für x von der Ordnung 5 und y ein Urbild der Ordnung 15 gilt:

$$\begin{aligned} P_G^x(3_1^\times) &= 1 + 10x \quad \text{liftet zu} \quad P_H^y(3_1^\times) = 1 + 10y^6, \\ P_G^x(6_1) &= 1 + 10x \quad \text{liftet zu} \quad P_H^y(6_1) = 1 + 5y + 5y^{11}. \end{aligned}$$

Dabei ist $3_1^\times$ die linkshändige Kleeblattschlinge aus Abb. 1.10 und 6_1 ist der Twistknoten W_4 aus Abb. 8.3.

BEISPIEL 4.18. Sei $G = \mathrm{Alt}(6)$ und $H \twoheadrightarrow G$ die dreifache Überlagerung mit Zentrum $Z(H) = \langle z \rangle$. Sei $x \in G$ ein Element der Ordnung 3 und $y \in H$ eines seiner Urbilder. (Dieses hat dann ebenfalls die Ordnung 3.)

$$P_G^x(8_{20}) = 10 + 18x \quad \text{liftet zu} \quad P_H^y(8_{20}) = 10 + 6y + 6yz + 6yz^2.$$

Alle Urbilder y, yz und yz^2 von x sind untereinander konjugiert. Die Symmetriebedingung des Färbungsrings R_H^y schränkt daher die möglichen Hochhebungen stark ein, vgl. Satz 3.21.

4.4. Universelle Färbungsgruppen

Für die Anzahl der Knotenfärbungen mit einer Gruppe (G, x) ist allein die Konjugationsklasse x^G wesentlich. Diese lässt sich in verschiedene Gruppen einbetten: Beispiel 4.14 zeigte redundante Erweiterungen, Beispiele 4.15 bis 4.18 zeigen Erweiterungen mit Informationsgewinn.

DEFINITION 4.19. Seien (G, x) und (H, y) zwei Färbungsgruppen. Wir nennen (G, x) eine *Verfeinerung* von (H, y), wenn ein Homomorphismus $\phi : \Lambda_G^x \to \Lambda_H^y$ der Longitudengruppen mit $\phi P_G^x = P_H^y$ existiert.

Ist (G, x) eine Verfeinerung von (H, y), dann enthält das Färbungspolynom P_G^x mindestens soviel Information wie P_H^y. Satz 4.11 besagt, dass zentrale Erweiterungen Verfeinerungen sind. Ist auch (H, y) eine Verfeinerung von (G, x), dann sind die Färbungspolynome austauschbar. Es stellt sich die Frage nach einer universellen Verfeinerung:

DEFINITION 4.20. Eine Färbungsgruppe (G, x) heißt *universell* für das Quandel x^G, wenn für jede Färbungsgruppe (H, y) mit isomorpher Konjugationsklasse $y^H \cong x^G$ ein Homomorphismus $\phi : \Lambda_G^x \to \Lambda_H^y$ mit $\phi P_G^x = P_H^y$ existiert.

BEMERKUNG 4.21. Der Homomorphismus ϕ wird nur für die Longitudengruppen gefordert. Die Bedingung $x^G \cong y^H$ besagt lediglich, dass es einen Quandelisomorphismus $\psi : x^G \xrightarrow{\sim} y^H$ gibt. Das bedeutet im Allgemeinen nicht, dass dieser sich zu einem Gruppenhomomorphismus $G \to H$ fortsetzen lässt. Wie man in Beispiel 4.14 sieht, ist es ohne weiteres möglich, dass die Ordnung von x kleiner ist als die Ordnung von y.

Wenn (G, x) eine universelle Färbungsgruppe ist, dann enthält das Färbungspolynom P_G^x die maximale Information, die bei Färbung mit dem Quandel $Q = x^G$ möglich ist. Hierfür existiert ein natürlicher Kandidat: die adjungierte Gruppe $\mathrm{Adj}(Q)$ aus Abschnitt 2.5.

DEFINITION 4.22. Sei (G, x) eine Färbungsgruppe. Unter $\mathrm{Adj}(G, x)$ verstehen wir die Gruppe $\mathrm{Adj}(x^G)$ mit Fußpunkt $\mathrm{adj}(x)$.

SATZ 4.23. *Die Färbungsgruppe* $\mathrm{Adj}(G, x)$ *ist universell für das Quandel* x^G.

BEWEIS: Mit (G, x) ist auch $\mathrm{Adj}(G, x)$ eine Färbungsgruppe, denn das Quandel $Q = x^G$ ist endlich und zusammenhängend. Nach Konstruktion von $\mathrm{Adj}(Q)$ ist das Bild $\mathrm{adj}(Q)$ dann eine endliche Konjugationsklasse, die $\mathrm{Adj}(Q)$ erzeugt. Die Abbildung $\mathrm{adj} : Q \to \mathrm{Adj}(Q)$ ist eine Einbettung; die Umkehrabbildung ist durch den Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Adj}(Q) \twoheadrightarrow G$ gegeben.

Ist (H, y) eine Färbungsgruppe und $\psi : x^G \xrightarrow{\sim} y^H$ ein Isomorphismus, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathrm{Adj}(Q) \to H$ mit $\psi = \phi \circ \mathrm{adj}$. Wegen $H = \langle y^H \rangle$ ist ϕ surjektiv und daher eine separable, zentrale Erweiterung. Nach Satz 4.11 gilt $\phi P_{\mathrm{Adj}(G,x)} = P_H^y$. Folglich ist $\mathrm{Adj}(G, x)$ universell. $\square$

4.5. Unendliche Färbungsgruppen

Für eine Färbungsgruppe (G,x) ist das Quandel $Q = x^G$ endlich, aber die universelle Gruppe $\operatorname{Adj}(Q)$ ist leider unendlich. Wir beginnen unsere Untersuchung unendlicher Färbungsgruppen mit einem allgemeinen Satz über Gruppen von Gewicht eins, also solche, die von einem einzigen Element normal erzeugt werden. Da der Beweis keinen Mehraufwand erfordert, formulieren wir den Satz für beliebige, nicht notwendig endlich erzeugte Gruppen.

SATZ 4.24. *Sei G eine Gruppe und von einer Konjugationsklasse $Q = x^G$ erzeugt. Die Menge Q sei mit einer Wohlordnung versehen. Dann lässt sich jedes Element $g \in G$ schreiben als $g = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ in Q und $e_i \in \mathbb{Z}$.*

BEMERKUNG 4.25. Wohlordnung bedeutet, dass $(Q, \leq)$ eine geordnete Menge ist und jede nicht-leere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. Für eine endliche Menge ist eine Wohlordnung äquivalent zu einer Nummerierung $x_1, x_2, \dots, x_n$. Im abzählbaren Fall stiftet jede Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} Q$ eine Wohlordnung auf Q.

BEWEIS DES SATZES: Jedes Element $g \in G$ lässt sich schreiben als ein Wort in dem Alphabet $A = Q \cup Q^{-1}$. Entweder gilt $Q = Q^{-1}$ oder $Q \cap Q^{-1} = \emptyset$. Im ersten Fall statten wir A mit der Ordnung von Q aus. Im zweiten Fall übertragen wir die lexikographische Ordnung von $Q \times \{-1, +1\}$ auf A mittels der Bijektion $(q, \varepsilon) \mapsto q^\varepsilon$. Damit wird A zu einer wohlgeordneten Menge.

Die Menge A^l der Wörter der Länge l versehen wir mit der von A induzierten lexikographischen Ordnung. Für Wörter unterschiedlicher Länge vereinbaren wir $A^0 < A^1 < A^2 < \dots$. Damit ist $A^* = \bigcup_{l \geq 0} A^l$ wohlgeordnet.

Wie üblich wird die Menge A^* durch Aneinanderhängung zu einem Monoid. Sei $\mu : A^* \to G$ die multiplikative Abbildung mit $\mu(a) = a$ für alle $a \in A$. Das bedeutet, μ ordnet jedem Wort in A^* das entsprechende Produkt in G zu. Zu einem Gruppenelement $g \in G$ sei $W = \mu^{-1}(g)$ die Menge aller darstellenden Wörter. Da A^* wohlgeordnet ist, gibt es in W ein kleinstes Wort $w = \min W$.

BEHAUPTUNG: Es gilt $w = a_1 a_2 \cdots a_l$ mit $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_l$. Wenn nicht, dann gäbe es ein Paar $a_i > a_{i+1}$. In der Gruppe G gilt aber $a_i a_{i+1} = a_{i+1} a_i'$ mit $a_i' \in A$, denn A ist abgeschlossen unter Konjugation. Folglich wäre auch $w' = a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} a_i' a_{i+2} \cdots a_l$ ein darstellendes Wort für g und kleiner als w. Das ist aber aufgrund der Minimalität von w nicht möglich.

In der Gruppe G erhalten wir $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_l^{\varepsilon_l}$ mit $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_l$ in Q und $\varepsilon_i = \pm 1$. Es bleibt nur noch, aufeinanderfolgende gleiche Faktoren zusammenzufassen. Damit haben wir die gewünschte Darstellung gefunden. □

KOROLLAR 4.26. *Für eine Färbungsgruppe (G,x) sei $Q = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ die Konjugationsklasse von x. Jedes Element $g \in G$ lässt sich dann schreiben als $g = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$ mit $e_i \in \mathbb{Z}$. Ist $p = \operatorname{ord}(x)$ endlich, dann gilt $|G| \leq p^n$.* □

Die im Korollar gegebene Abschätzung ist im Allgemeinen recht grob. Für die Diedergruppe D_n mit $n \geq 3$ ungerade sei $Q = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ die Konjugationsklasse der Spiegelungen. In diesem Fall ist $|D_n| = 2n$ kleiner als 2^n. Die Diskrepanz kommt daher, dass nicht jedes aufsteigende Wort $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$ auch minimal ist.

4.6. Reduktion auf endliche Färbungsgruppen

Sei (G, x) eine Färbungsgruppe. Die Ordnung von x in G kann unendlich sein, aber die Ordnung der Konjugation γ_x ist stets endlich: Da $Q = x^G$ eine endliche Menge ist, gibt es einen Exponenten p mit $\gamma_x^p = \mathrm{id}$ auf Q und damit auf G.

Wir wenden dies auf die adjungierte Gruppe $\mathrm{Adj}(Q)$ an: Sei $\bar{Q} = \mathrm{adj}(Q)$ das isomorphe Bild von Q. Wegen $\gamma_{\bar{x}}^p = \mathrm{id}$ liegt das Element $\theta := \bar{x}^p$ im Zentrum von $\mathrm{Adj}(Q)$. Für jedes $\bar{y} \in \bar{Q}$ gilt $\bar{y}^p = \theta$, denn aus $\bar{y} = a^{-1}\bar{x}a$ folgt $\bar{y}^p = a^{-1}\bar{x}^p a = \theta$.

DEFINITION 4.27. Wir setzen $\Gamma(Q) := \mathrm{Adj}(Q)/\langle\theta\rangle$ und nennen die Quotientenabbildung $\mathrm{r} : \mathrm{Adj}(Q) \twoheadrightarrow \Gamma(Q)$ die *Reduktion* der adjungierten Gruppe. Unter $\Gamma(G, x)$ verstehen wir die Gruppe $\Gamma(Q)$ mit Fußpunkt $\bar{x}$.

LEMMA 4.28. *$\Gamma(G, x)$ ist eine endliche Färbungsgruppe.*

BEWEIS: Nach Satz 4.23 ist $\mathrm{Adj}(G, x)$ eine Färbungsgruppe und damit auch der Quotient $\Gamma(G, x)$. Die Endlichkeit folgt aus Korollar 4.26. □

LEMMA 4.29. *Die Reduktion $\mathrm{r} : \mathrm{Adj}(G, x) \twoheadrightarrow \Gamma(G, x)$ ist separabel.*

BEWEIS: Nach Konstruktion ist r eine zentrale Erweiterung mit Kern $\langle\theta\rangle$. Sei $\bar{Q}$ die Konjugationsklasse von $\bar{x}$ in der adjungierten Gruppe $\mathrm{Adj}(G, x)$. Für die Abelschmachung $\varepsilon : \mathrm{Adj}(G, x) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ gilt $\varepsilon(\bar{Q}) = 1$ und $\varepsilon(\theta) = p$. Daraus folgt $x\langle\theta\rangle \cap \bar{Q} = \{x\}$, und r ist injektiv auf $\bar{Q}$. Das bedeutet, r ist separabel. □

LEMMA 4.30. *Die Einschränkung $\mathrm{r}' : \mathrm{Adj}(G, x)' \to \Gamma(G, x)'$ ist ein Isomorphismus der Kommutatorgruppen.*

BEWEIS: Mit r ist auch r' ein Epimorphismus. Die Injektivität folgt mithilfe der Abelschmachung $\varepsilon : \mathrm{Adj}(Q) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$: Es gilt $\varepsilon(\theta) = p$ und deshalb $\langle\theta\rangle \cap \mathrm{Adj}(Q)' = \{1\}$. Die Einschränkung $\mathrm{r}' : \mathrm{Adj}(Q)' \twoheadrightarrow \Gamma(Q)'$ ist demnach ein Isomorphismus. □

LEMMA 4.31. *Die Einschränkung $\mathrm{r}|_\Lambda$ der Reduktion r ist ein Isomorphismus der Longitudengruppen.*

BEWEIS: Nach Konstruktion ist $\mathrm{r} : \mathrm{Adj}(G, x) \twoheadrightarrow \Gamma(G, x)$ eine zentrale Erweiterung mit Kern $\langle\theta\rangle$. Nach Satz 4.11 bzw. Korollar 4.13 ist die Einschränkung $\mathrm{r}|_\Lambda : \Lambda_{\mathrm{Adj}(G,x)} \to \Lambda_{\Gamma(G,x)}$ surjektiv. Nach Lemma 4.30 ist r auf $\mathrm{Adj}(G, x)'$ injektiv und damit auch auf Λ. Die Einschränkung $\mathrm{r}|_\Lambda$ ist also ein Isomorphismus. □

SATZ 4.32. *Für jede (endliche oder unendliche) Färbungsgruppe (G, x) gilt:*

1. *Die Färbungsgruppe $\Gamma(G, x)$ ist endlich und universell für das Quandel x^G. Zweifache Anwendung der Konstruktion liefert $\Gamma(\Gamma(G, x)) \cong \Gamma(G, x)$.*
2. *Die Kommutatorgruppe G' und die Longitudengruppe Λ_G^x sind endlich.*
3. *Wenn G triviales Zentrum hat, dann sind $\mathrm{ord}(x)$ und $\mathrm{ord}(G)$ endlich, und $\Gamma(G, x) \twoheadrightarrow G, x$ ist eine zentrale Erweiterung von Färbungsgruppen.*

BEWEIS: Nach Lemma 4.28 ist $\Gamma(G, x)$ eine endliche Färbungsgruppe. Die adjungierte Gruppe $\mathrm{Adj}(G, x)$ ist nach Satz 4.23 universell für das Quandel x^G. Nach Lemma 4.31 ist $\mathrm{r}|_\Lambda$ ein Isomorphismus der Longitudengruppen, und deshalb ist auch $\Gamma(G, x)$ universell für x^G. Wegen $\bar{x}^\Gamma \cong x^G$ gilt $\Gamma(\Gamma(G, x)) \cong \Gamma(G, x)$.

Nach Lemma 4.30 ist $\mathrm{r}' : \mathrm{Adj}(G,x)' \to \Gamma(G,x)'$ ein Isomorphismus der Kommutatorgruppen. Mit $\Gamma(G,x)'$ ist daher auch $\mathrm{Adj}(G,x)'$ endlich. Der Epimorphismus $\mathrm{Adj}(G,x) \twoheadrightarrow G$ induziert $\mathrm{Adj}(G,x)' \twoheadrightarrow G'$, und folglich ist auch G' endlich. Die Longitudengruppe liegt in G' und ist daher ebenfalls endlich.

Wenn G triviales Zentrum hat, dann ist $\gamma : G \twoheadrightarrow \mathrm{Inn}(G)$ ein Isomorphismus, und die Ordnung von x ist gleich der Ordnung der Konjugation γ_x. Da $|x^G|$ und die Ordnung von x endlich sind, muss nach Korollar 4.26 die Gruppe G endlich sein. Wegen $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(\gamma_x)$ faktorisiert der Epimorphismus $\mathrm{Adj}(G,x) \twoheadrightarrow G, x$ in die Reduktion $\mathrm{r} : \mathrm{Adj}(G,x) \twoheadrightarrow \Gamma(G,x)$ und einen Epimorphismus $\Gamma(G,x) \twoheadrightarrow G, x$. Letzterer ist eine separable, zentrale Erweiterung von Färbungsgruppen. □

Folgerungen. In den Kapiteln 2 und 3 haben wir unendliche Färbungsgruppen G zugelassen; einzige Bedingung war, dass die Konjugationsklasse x^G endlich ist. Das typische Beispiel einer unendlichen Färbungsgruppe ist die adjungierte Gruppe $\mathrm{Adj}(G,x)$. Aus dem vorangegangenen Satz folgt allerdings:

KOROLLAR 4.33. *Jede endliche Konjugationsklasse x^G mit $G = \langle x^G \rangle$ lässt sich in eine endliche Gruppe $\Gamma(x^G)$ einbetten, sodass das zugehörige Färbungspolynom maximale Information enthält. Zur Untersuchung von Knoten mittels ihrer Färbungspolynome reicht es daher, endliche Gruppen zu betrachten.* □

Die Anzahl der Knotenfärbungen bleibt unverändert, gleichgültig in welche Gruppe wir Q einbetten. Auch der Rechenaufwand zur vollständigen Aufzählung der Färbungen bleibt gleich, siehe Kapitel 5. Nur für die Darstellung der Longituden ist es wichtig, in welche Gruppe wir das Quandel Q einbetten. Der Satz besagt, dass die Erweiterung von endlichen zu unendlichen Färbungsgruppen keine neuen Färbungspolynome ergibt. Insbesondere ist auch in einer unendlichen Färbungsgruppe die Longitudengruppe stets endlich.

BEMERKUNG 4.34. Eine endliche Konjugationsklasse $Q = x^G$ lässt sich in viele verschiedene Gruppen einbetten, neben der oben definierten Gruppe Γ kommen zum Beispiel ihre Erweiterungen $\Gamma_n := \mathrm{Adj}(Q)/\langle \theta^n \rangle$ in Betracht. Für jedes n ist Γ_n eine endliche Gruppe. Die Longitudengruppen sind jeweils isomorph, wir können also ohne Einschränkung die kleinste Gruppe $\Gamma = \Gamma_1$ wählen.

Für die Überlagerungen des Knotenkomplements ist es hingegen wichtig, in welche der Gruppen Γ_n wir die Konjugationsklasse Q einbetten. Für das triviale Quandel $Q = \{1\}$ sind neben der trivialen Gruppe auch $\mathbb{Z}_n$ und $\mathbb{Z}$ Kandidaten für eine Einbettung. Die Überlagerungen zu $\varepsilon_n : \pi(K) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$ und $\varepsilon : \pi(K) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ sind aber drastisch verschieden und liefern unterschiedliche Invarianten. In Analogie dazu sind für eine nicht-triviale Konjugationsklasse neben Γ auch die Gruppen Γ_n und $\Gamma_\infty = \mathrm{Adj}(Q)$ interessant.

4.7. Anwendung auf Färbungspolynome

Knotengruppen-Darstellungen in $\mathrm{Sym}(3)$ und $\mathrm{Sym}(4)$ sind vielfach untersucht worden, da sie für ein systematisches Verständnis noch übersichtlich genug sind. Zum Schluss dieses Kapitels beleuchten wir daher diese Beispiele unter dem Aspekt der zentralen Erweiterung.

Coxeter-Gruppen. Wenn wir in $G = \mathrm{Sym}(n)$ eine Transposition s als Fußpunkt wählen, dann gilt $\Gamma(G,s) = G$. Die universelle Färbungsgruppe stimmt also mit G überein. Dies ist ein allgemeiner Sachverhalt für Coxeter-Gruppen:

SATZ 4.35. *Sei G eine endliche Coxeter-Gruppe, s eine der Spiegelungen, und ihre Konjugationsklasse $Q = s^G$ erzeuge G. Dann gilt $\Gamma(Q) = G$.*

BEWEIS: Sei M eine symmetrische $n\times n$-Matrix ganzer Zahlen mit Einträgen $m_{ii} = 1$ auf der Diagonalen und $m_{ij} \geq 2$ für $i \neq j$. Die zugehörige Coxeter-Gruppe ist definiert durch die Präsentation

$$G = \langle\, s_1, \ldots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \text{ für alle } i,j \,\rangle.$$

Insbesondere sind alle Erzeuger $s_1, \ldots, s_n$ Involutionen. Wir setzen voraus, dass sie untereinander konjugiert sind. In ihrer Konjugationsklasse $Q = \{x_1, \ldots, x_N\}$ gilt $x_i^{x_j} = x_{k(i,j)}$ mit einer geeigneten Abbildung $k : \{1, \ldots, N\}^2 \to \{1, \ldots, N\}$. Damit erhalten wir für G die äquivalente Präsentation

$$G = \langle\, x_1, \ldots, x_N \mid x_i^2 = 1 \text{ und } x_i^{x_j} = x_{k(i,j)} \text{ für alle } i,j \,\rangle.$$

Die adjungierte Gruppe berücksichtigt allein die Konjugationen, es gilt also

$$\mathrm{Adj}(Q) = \langle\, y_1, \ldots, y_N \mid y_i^{y_j} = y_{k(i,j)} \text{ für alle } i,j \,\rangle.$$

Da die Konjugationsordnung von y_i gleich 2 ist, entsteht die Gruppe $\Gamma(Q)$ durch Wiedereinführung der Relation $y_i^2 = 1$. Folglich gilt $\Gamma(Q) = G$. □

BEMERKUNG 4.36. Die adjungierte Gruppe $\mathrm{Adj}(Q)$ ist nicht die zur Matrix M gehörige Artin-Gruppe, vielmehr entsteht sie aus letzterer als Quotient nach den zusätzlichen Relationen $y_i y_j^2 = y_j^2 y_i$.

BEISPIEL 4.37. Sei $N \geq 3$ ungerade, D die Diedergruppe der Ordnung $2N$ und $s \in D$ eine Spiegelung. Da die Longitudengruppe trivial ist, degeneriert das Färbungspolynom P_D^s zur Färbungszahl F_D^s. Wegen $\Gamma(D,s) = D$ kann daran auch die universelle Färbungsgruppe nichts ändern.

Die alternierende Gruppe Alt(4).

BEISPIEL 4.38. Das kleinste Beispiel einer echten Erweiterung beobachten wir bei der Gruppe $G = \mathrm{Alt}(4)$. Sie hat Ordnung 12, und die Konjugationsklasse von $x = (1,2,3)$ hat 4 Elemente. Die universelle Färbungsgruppe $\Gamma(G,x)$ entsteht als zentrale Erweiterung $\mathbb{Z}_2 \to \Gamma \twoheadrightarrow \mathrm{Alt}(4)$ und ist äquivalent zur Erweiterung

$$\{\pm 1\} \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_3) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_3).$$

Die Longitudengruppe wird von der trivialen Gruppe $\Lambda_G = \{1\}$ zu der zweielementigen Gruppe $\Lambda_\Gamma = \{1, z\}$ erweitert. Dies macht sich zum Beispiel bei den Färbungspolynomen für den Knoten 8_{20} und die Kleeblattschlinge bemerkbar:

$$P_G^x(8_{20}) = 4 \quad \text{liftet zu} \quad P_\Gamma^{\tilde{x}}(8_{20}) = 4,$$
$$P_G^x(3_1) \ = 4 \quad \text{liftet zu} \quad P_\Gamma^{\tilde{x}}(3_1) \ = 1 + 3z.$$

Selbst für kleine Konjugationsklassen kann demnach die Einbettung in ihre universelle Färbungsgruppe interessante Ergebnisse erzielen. Diese Beobachtung soll mit folgendem Beispiel gekrönt werden.

Die symmetrische Gruppe Sym(4).

BEISPIEL 4.39. Die Gruppe $G = \mathrm{Sym}(4)$ hat Ordnung 24, und die Konjugationsklasse des Zykels $x = (1,2,3,4)$ besteht aus 6 Elementen. Wir betrachten die Färbungspolynome der beiden Kleeblattschlingen,

$$P_G^x(3_1) = P_G^x(3_1^\times) = 1 + 4x^2.$$

Die hier auftretenden Longituden schöpfen die Longitudengruppe $\Lambda_G^x = \{1, x^2\}$ bereits aus. Das hat zur Folge, dass Obversion und Reversion alle Färbungspolynome unverändert lassen.

Dies ändert sich, wenn wir zur universellen Färbungsgruppe $\Gamma = \Gamma(G,x)$ übergehen. Sie hat 96 Elemente und entsteht durch eine zentrale Erweiterung

$$\mathbb{Z}_4 \to \Gamma \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}(4).$$

(Eine Darstellung findet sich unten.) Die Konjugationsordnung von x ist 4, nach Konstruktion von Γ hat daher jedes Urbild y von x ebenfalls die Ordnung 4.

Die Longitudengruppe $\Lambda_\Gamma^y = \langle t \rangle$ hat 4 Elemente und ist damit zweimal so groß wie Λ_G^x. Dies äußert sich in differenzierteren Färbungspolynomen: Für die beiden Kleeblattschlingen gilt

$$P_\Gamma^y(3_1) = 1 + 4t \qquad \text{und} \qquad P_\Gamma^y(3_1^\times) = 1 + 4t^3.$$

Dieses Beispiel erstaunt vor allem durch seine Kleinheit: Die Konjugationsklasse von y hat nur 6 Elemente, aber das zugehörige Färbungspolynom kann die beiden Kleeblattschlingen unterscheiden.

Ergänzung. Die Gruppe $\Gamma(G,x)$ ist abstrakt durch Erzeuger und Relationen definiert. Um die obige Rechnung nachvollziehbar zu machen, gebe ich eine treue Permutationsdarstellung für $\Gamma(G,x)$ an. Diese wurde mithilfe des Programms *GAP* gefunden [39].

BEMERKUNG 4.40. Sei $G = \mathrm{Sym}(4)$ und $x = (1,2,3,4)$. Die universelle Färbungsgruppe $\Gamma = \Gamma(G,x)$ lässt sich mit der Permutationsgruppe identifizieren, die durch die folgenden zwei Elemente in $\mathrm{Sym}(24)$ erzeugt wird:

$$\begin{aligned} y &= (1,2,3,4)(5,6,7,8)(9,10,11,12)(13,14,15,16)(17,18,19,20) \quad \text{und} \\ y' &= (1,9,21,5)(2,7,24,14)(3,16,23,20)(4,18,22,11)(8,13,19,10). \end{aligned}$$

Die Erweiterung $\Gamma \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}(4)$ ist gegeben durch $y \mapsto (1,2,3,4)$ und $y' \mapsto (1,2,4,3)$. Ihr Kern ist das Zentrum $Z(\Gamma)$ und wird erzeugt von

$$z = (1,4,3,2)(5,11,20,14)(6,12,17,15)(7,9,18,16)(8,10,19,13)(21,22,23,24).$$

Die Kommutatoruntergruppe Γ' hat Index 4, die Abelschmachung ist $\Gamma_{ab} \cong \mathbb{Z}_4$. Der Zentralisator $Z(y) = \langle y, z \rangle$ hat 16 Elemente. Für die Longitudengruppe gilt $\Lambda = Z(y) \cap \Gamma'$. Sie hat Ordnung 4 und wird erzeugt von

$$t = (1,2,3,4)(5,9,20,16)(6,10,17,13)(7,11,18,14)(8,12,19,15)(21,22,23,24).$$

Leider kann man aus dieser Darstellung keine tieferen Einsichten gewinnen. Sie dient daher einstweilen nur als Konkretisierung von $\Gamma(\mathrm{Sym}(4),x)$. Eine weitere Interpretation wäre wünschenswert.

Πάντα δὲ δοκιμάζετε,
τὸ καλὸν κατέχετε.
Alles aber prüfet,
das Gute behaltet!
1. Thessalonicher 5,21

KAPITEL 5

Ein schneller Algorithmus zur Knotenfärbung

Wie die vorangegangenen Kapitel gezeigt haben, sind Färbungspolynome sehr mächtige Invarianten. Dieses Kapitel erklärt, wie man sie berechnen kann. Dies läuft auf die Auflistung aller Färbungen eines Diagramms hinaus und sollte von einem Computer übernommen werden. Aber diesem Vorgehen sind Grenzen gesetzt, da die erschöpfende Suche selbst für einfache Probleme sehr zeitaufwendig ist. Dieses Kapitel erklärt ein Verfahren, das die Suche drastisch abkürzt.

Problemstellung: Gegeben sei ein Knoten und eine Färbungsgruppe (G, x). Gesucht ist eine Auflistung aller Darstellungen $\pi(K), m_K \to G, x$.

Der Standard-Ansatz zur Lösung dieses Problems geht von der Wirtinger-Präsentation aus und minimiert die Anzahl der Meridian-Erzeuger: Wenn sich der Knoten durch ein Diagramm mit b Brücken darstellen lässt, dann wird die Knotengruppe von den zugehörigen b Meridianen erzeugt. Der erste von ihnen wird auf x abgebildet, die Bilder der anderen Meridiane liegen dann in der Konjugationsklasse $Q = x^G$. Es bleiben demnach $|Q|^{b-1}$ Möglichkeiten zu prüfen.

Alternative Formulierung: Gegeben sei ein Knotendiagramm mit Bögen $B = \{1, \ldots, c\}$ und eine Färbungsgruppe (G, x). Gesucht ist eine Auflistung aller Färbungen $f : B \to G$, die den ersten Bogen mit x färben.

Die Grundidee zur Optimierung ist die Zerlegung des Knotendiagramms in einfachere Teildiagramme (rationale bzw. algebraische Tangles). Für diese löst man das Färbungsproblem separat und setzt daraus die Gesamtlösung zusammen. Das Ergebnis lässt sich wie folgt zusammenfassen:

Algorithmen: Der Standard-Algorithmus hat Zeitaufwand $|Q|^{b-1}$. Die hier entwickelte Verbesserung reduziert den Exponenten erheblich. Für arboreszente Knoten erreichen wir typischerweise linearen Aufwand.

Das bedeutet, dass insbesondere Brezel-Knoten und Montesinos-Knoten mit linearem Aufwand gefärbt werden können, obwohl die Brückenzahl auf dieser Klasse beliebig groß werden kann.

5.1. Erzeuger der Knotengruppe

Gegeben sei ein Knotendiagramm mit c Kreuzungen und Bögen $B = \{1, \ldots, c\}$, sowie eine Gruppe G. Gesucht sind alle Abbildungen $f : B \to G$, die die Kreuzungsrelationen erfüllen. Der naive – und hoffnungslos ineffiziente – Algorithmus durchläuft alle Abbildungen G^B und prüft jeweils die Bedingungen. Es ist jedoch viel geschickter, die Kreuzungsrelationen zu nutzen, um möglichst viele Variablen zu eliminieren. Das entspricht Umformungen der Wirtinger-Präsentation zu einer äquivalenten Präsentation mit möglichst wenigen Erzeugern.

Diagramme mit minimaler Brückenzahl. Um eine Präsentation der Knotengruppe mit einer möglichst geringen Anzahl von Meridian-Erzeugern zu erhalten, bringt man das Diagramm in eine Form mit kleiner Brückenzahl b wie in Abb. 5.1 gezeigt. Jede Färbung ist bereits durch die Farben $x_1, \ldots, x_b$ festgelegt, alle weiteren berechnen sich daraus durch den Zopf α. Dieser operiert auf den Farben $x_1, \ldots, x_b$ der Eingänge und produziert die Farben $y_1, y_1', \ldots, y_b, y_b'$ der Ausgänge. Die zu prüfenden Bedingungen reduzieren sich auf $y_1 = y_1'$, $\ldots$, $y_b = y_b'$. Anders betrachtet:

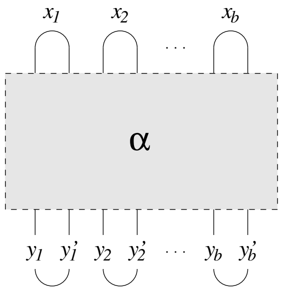


Abb. 5.1. Brücken

PROPOSITION 5.1. *Ein Diagramm mit Brückenzahl b definiert eine Präsentation der Knotengruppe mit b Erzeugern und ebenso vielen Relationen.* □

Als Darstellungen kommen daher nur $|G|^b$ Möglichkeiten in Betracht. Das ist eine enorme Verbesserung gegenüber dem ersten Ansatz, denn die Brückenzahl ist viel kleiner als die Kreuzungszahl. Die Anzahl reduziert sich weiter durch die Bedingung, dass der erste Bogen mit $x \in G$ gefärbt werden soll. Da alle Meridianbilder in der Konjugationsklasse $Q = x^G$ liegen, bleiben schließlich nur $|Q|^{b-1}$ Möglichkeiten zu prüfen.

BEMERKUNG 5.2. Der einzige Knoten mit Brückenzahl 1 ist der triviale Knoten. Knoten mit zwei Brücken wurden von H. Schubert [89, 17] klassifiziert. Schon bei drei Brücken ist die Vielfalt der Knoten enorm und bis heute kein Ansatz für ihre Klassifikation in Sicht.

Als alternative Vorgehensweise kann man den zu färbenden Knoten als Abschluss eines Zopfes darstellen. Die Färbungen entsprechen dann genau der in Abschnitt 2.8 erklärten Zopfoperation. Hat man für den Knoten einen darstellenden Zopf mit n Strängen gefunden, dann definiert dies gleichzeitig ein Diagramm mit n Brücken. Im Allgemeinen ist die Brückenzahl jedoch viel kleiner als der Zopfindex, wie die Twistknoten aus Beispiel 8.2 zeigen. Daher ist die Minimierung der Brückenzahl wesentlich effizienter.

BEMERKUNG 5.3. Ein Knotendiagramm in eine Form mit minimaler Brückenzahl zu überführen, ist im Allgemeinen nicht leicht. Der Kinoshita-Terasaka- und der Conway-Knoten aus Abb. 3.1 haben die Brückenzahl 3, was man ihnen aber nicht sofort ansieht.

Wieviele Meridiane sind zur Erzeugung der Knotengruppe nötig? Sei (π, m) eine endlich erzeugte Gruppe von Gewicht eins, zum Beispiel eine Knotengruppe. Dann wird π von einer endlichen Menge $\{m_1, \dots, m_b\} \subset m^\pi$ erzeugt. Die kleinste Anzahl b, für die das möglich ist, nennen wir die *Breite* $br(\pi, m)$ der Gruppe. Die Ähnlichkeit der Bezeichnung zur Brückenzahl eines Knotens ist beabsichtigt, denn offenbar gilt $br(\pi(K), m_K) \leq br(K)$.

FRAGE: Gilt für jeden Knoten K die Gleichheit $br(\pi(K), m_K) = br(K)$?

Dies präzisiert die Frage Z aus dem Fragenkatalog von L.P.Neuwirth [79]. Für den trivialen Knoten und für Zweibrückenknoten gilt offenbar Gleichheit. Aus den Untersuchungen von M. Boileau und B. Zimmermann [13] folgt sie für Knoten mit drei Bücken. Sie wurde ebenfalls für die Familie der Montesinos-Knoten bewiesen [12], und hier treten beliebig große Brückenzahlen auf.

BEMERKUNG 5.4. Für jeden Epimorphismus $\pi, m \twoheadrightarrow G, x$ gilt $br(\pi, m) \geq br(G, x)$. Dies liefert eine *untere* Schranke für die Brückenzahl eines Knotens, wenn man die Breite der Gruppe (G, x) kennt. Mit dieser Methode haben H. Azcan und R. Fenn [5] die Brückenzahl der Montesinos-Knoten bestimmt.

Beliebige Erzeuger. In vielen Fällen kommt man für Knotengruppen mit weniger Erzeugern aus, wenn man außer Meridianen auch alle anderen Elemente zulässt. Ein Beispiel dieser Art sind die Torusknoten. Ihre Brückenzahlen wurden bereits von H. Schubert [88, Satz 10] bestimmt:

$$br(T_{p,q}) = \min\{|p|, |q|\}$$

Die zugehörigen Knotengruppen [17] erlauben aber auch die Präsentation

$$\pi(T_{p,q}) = \langle\, x, y \mid x^p = y^q \,\rangle.$$

Man kommt demnach mit nur zwei Erzeugern aus, keiner davon ist allerdings ein Meridian.

Fazit. In den nachfolgenden Untersuchungen wird Meridian-Präsentationen der Vorzug gegeben, und zwar aus folgenden praktischen Erwägungen:

- Die Wirtinger-Präsentation bietet ein einheitliches Verfahren und erfordert keine vorhergehende Analyse der Knotengruppe.
- Zur Konstruktion von Meridian-Darstellungen müssen die Bildwerte nur aus der Konjugationsklasse x^G gewählt werden, und diese ist wesentlich kleiner als G. Ein extremes Beispiel ist die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$: Sie hat $n!$ Elemente, die Konjugationsklasse der Transpositionen aber nur $\frac{1}{2}n(n-1)$. Dieser Vorteil kann eine erhöhte Zahl von Meridian-Erzeugern unter Umständen ausgleichen.
- Schließlich ist die Konjugationsklasse x^G *homogen*, da G transitiv operiert. Dies werden wir in Abschnitt 5.4 bei der Reduktion rationaler Tangles ausnutzen.

Meridian-Darstellungen entsprechen Färbungen des Knotendiagramms. Für die folgenden Untersuchungen erweist sich daher die zuvor entwickelte Sprache der Färbungen als besonders geeignet.

5.2. Ein typisches Beispiel

Zur Färbung von Knotendiagrammen entwickeln wir in diesem Abschnitt eine einfache und übersichtliche Notation. Die hierzu ausgeführten Überlegungen präzisieren zunächst das Standard-Verfahren. In Abschnitt 5.4 dient dies als Grundlage für den neuen und erheblich verbesserten Algorithmus.

Notation. Die hier verwendete Notation codiert die Wirtinger-Präsentation in einer Form, die der algorithmischen Behandlung direkt zugänglich ist. Sie besteht aus drei Typen von Information:

- Angabe der Bögen, für die eine Farbe gewählt werden muss.
- Angabe, wie daraus die Farben der restlichen Bögen zu berechnen sind.
- Angabe der schließlich zu prüfenden Färbungsbedingungen.

Dies entspricht der Dreiteilung, die wir in Abbildung 5.1 für ein Diagramm mit minimaler Brückenzahl gesehen haben. Die hier vorgeschlagene Notation wird sich jedoch flexibler einsetzen lassen, und setzt die Brückenform nicht voraus.

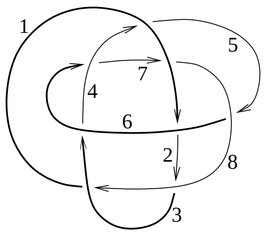


ABBILDUNG 5.2. Ein Diagramm des Knotens 8_{20}

Wir erklären die notwendige Notation anhand eines Beispiels, das übersichtlich und zugleich reichhaltig genug ist. Abbildung 5.2 zeigt ein Diagramm des Knotens 8_{20}. Dieser Knoten hat drei Brücken, daher sind drei Meridiane nötig, um die Knotengruppe zu erzeugen. Die Bögen sind von 1 bis 8 durchnummeriert, in einer Färbung entspricht dies den Farben $x_1, \dots, x_8$ in G. Aus dem Diagramm liest man ab:

- Jede Färbung ist bereits festgelegt durch die Kenntnis der Farben

$$x_1, x_3, x_6.$$

- Die restlichen Farben lassen sich berechnen durch

$$x_8 = x_3 x_1 x_3^{-1}, \quad x_2 = x_8 x_3 x_8^{-1}, \quad x_4 = x_6 x_3 x_6^{-1},$$
$$x_7 = x_4 x_6 x_4^{-1}, \quad x_5 = x_1^{-1} x_4 x_1.$$

- Zu prüfen bleiben dann die Bedingungen

$$x_2 \stackrel{!}{=} x_6^{-1} x_1 x_6, \quad x_8 \stackrel{!}{=} x_1^{-1} x_7 x_1, \quad x_6 \stackrel{!}{=} x_8 x_5 x_8^{-1}.$$

Dies ist eine Umformulierung der Wirtinger-Präsentation. Es geht jedoch insofern darüber hinaus, als auch die *Abfolge der Schritte* und damit ein expliziter Algorithmus festlegt wird. Wir notieren dies prägnanter und übersichtlicher in Form eines *Färbungsskripts*:

Skript	Bedeutung
1 ?	wähle $x_1 \in Q$
3 ?	wähle $x_3 \in Q$
6 ?	wähle $x_6 \in Q$
8 = 1 - 3	setze $x_8 := x_3 x_1 x_3^{-1}$
2 = 3 - 8	setze $x_2 := x_8 x_3 x_8^{-1}$
4 = 3 - 6	setze $x_4 := x_6 x_3 x_6^{-1}$
7 = 6 - 4	setze $x_7 := x_4 x_6 x_4^{-1}$
5 = 4 + 1	setze $x_5 := x_1^{-1} x_4 x_1$
2 ! 1 + 6	prüfe, ob $x_2 = x_6^{-1} x_1 x_6$ gilt
8 ! 7 + 1	prüfe, ob $x_8 = x_1^{-1} x_7 x_1$ gilt
6 ! 5 - 8	prüfe, ob $x_6 = x_8 x_5 x_8^{-1}$ gilt

Man verzeihe das Auftreten von Symbolfolgen wie `8=1-3` . Diese sind selbstverständlich nicht als Aussage über natürliche Zahlen gedacht. In Anlehnung an die Verknüpfungen $*$ und $\overline{*}$ eines Quandels ist `5=4+1` zu lesen als $x_5 = x_4 * x_1$, und `8=1-3` entspricht $x_8 = x_1 \,\overline{*}\, x_3$. Die abkürzende Notation durch + und − gleicht zudem der Konvention über Kreuzungsvorzeichen, wie in nachstehender Abbildung zu sehen ist.

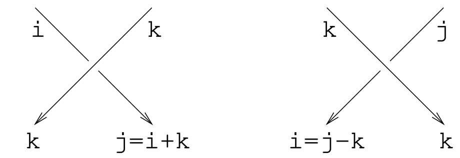


ABBILDUNG 5.3. Kreuzungen und ihre Codierung in einem Skript

Der Standard-Algorithmus. Zur Ausführung des Skripts werden die Elemente der Konjugationsklasse $Q = x^G$ durchnummeriert. Sei $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ und $q_1 = x$ der Fußpunkt der Färbungsgruppe. Jedes Skript beginnt mit der Zeile `1?` , welche nach der Zuordnung der Farbe x_1 verlangt. Nach Vereinbarung wählen wir stets $x_1 = q_1$. Die zweite Zeile des obigen Skripts ist so zu verstehen, dass der Reihe nach *alle* Wahlmöglichkeiten $x_3 = q_1, q_2, \dots, q_n$ durchprobiert werden. Gleiches gilt in der dritten Zeile für die Farbe x_6. Dies lässt sich am besten in Form eines Baumes (Abb. 5.4) veranschaulichen:

Der Algorithmus besteht im Durchlaufen dieses Baumes. Jede Ecke entspricht der Ausführung der zugehörigen Zeile des Skripts, die links neben dem Baum angegeben ist. Die Wahl `3?` wird dabei je nach Zweig mit $q_1, q_2, \dots, q_n$ entschieden. Entsprechendes gilt für die Wahl `6?` . Die Berechnungen `8=1-3` oder `4=3-6` können danach ausgeführt werden, da die Farben x_1, x_3, x_6 bekannt sind.

Wenn eine der Bedingungen, etwa `2!1+6` , nicht erfüllt ist, dann wird dieser Weg aufgegeben und die Suche bei der letzten Verzweigung fortgesetzt. Gelangt die Suche an ein Blatt des Baumes, dann sind entlang dieses Weges alle Bedingungen erfüllt und eine gültige Färbung gefunden. Nach Ausgabe dieses Einzelergebnisses wird die Suche bei der letzten Verzweigung fortgesetzt. Die Suche endet, wenn alle Zweige bearbeitet wurden.

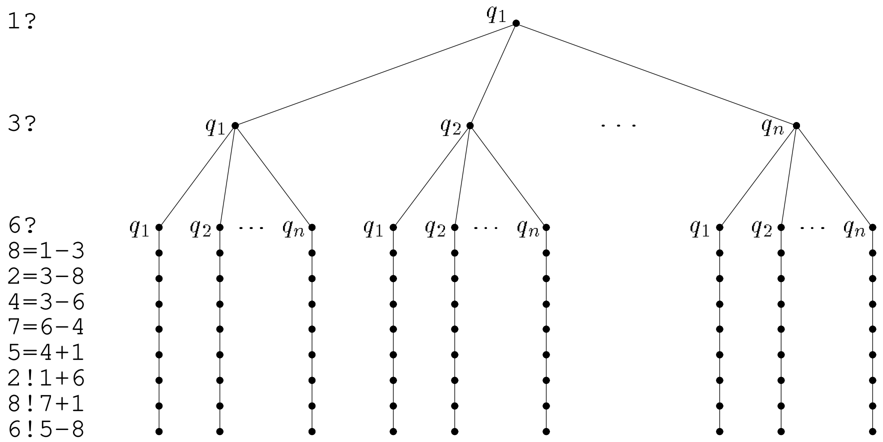


ABBILDUNG 5.4. Ein Färbungsskript und sein zugehöriger Baum

5.3. Färbungsskripte und ihre Komplexität

Wie das obige Beispiel zeigt, ist in einem Skript die Abfolge der Zeilen nicht beliebig. Um es als Algorithmus interpretieren zu können, muss das Skript logische Mindestvoraussetzungen erfüllen. Die Beobachtungen des Beispiels fassen wir zu einer Definition zusammen.

DEFINITION 5.5. Ein *Skript* besteht aus einer endlichen Folge von Zeilen. Jede Zeile ist dabei entweder

- eine Wahl `i?` oder
- eine Definition `i=j+k` bzw. `i=j-k` oder
- eine Bedingung `i!j+k` bzw. `i!j-k`.

Dabei sind `i,j,k` Zahlen von 1 bis n und stehen für die Bögen eines Knotendiagramms. Jedem Bogen `i` wird bei seinem ersten Auftreten – und nur dort – eine Farbe zugewiesen, entweder durch Wahl oder durch Definition. Da der erste Bogen immer mit dem vorgegebenen Element $x \in G$ gefärbt wird, verlangen wir außerdem, dass jedes Skript mit der Zeile `1?` beginnt.

Diese Forderungen lassen noch viele Freiheiten in der Anordnung der Zeilen. Das obige Skript lässt sich zum Beispiel wie in Abb. 5.5 umordnen:

Hier wurden die Berechnungen `8=1-3` und `2=3-8` vor die Wahl `6?` gezogen, da sie von der Farbe x_6 unabhängig sind. So wird eine überflüssige Wiederholung derselben Rechnungen vermieden. Auch die Bedingungen `2!1+6` und `8!7+1` wurden so weit wie möglich vorgezogen. Wenn eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, brauchen nachfolgende Operationen nicht ausgeführt zu werden. In dieser Hinsicht sind Skripte flexibler als die direkte Umsetzung der Brückendarstellung aus Abbildung 5.1.

Skripte und Diagramme. Die vorangegangene Definition formuliert nur die logischen Bedingungen eines Skripts, und diese sind unabhängig vom zugrundeliegenden Knotendiagramm. Die folgende Definition verbindet Skripte mit Diagrammen.

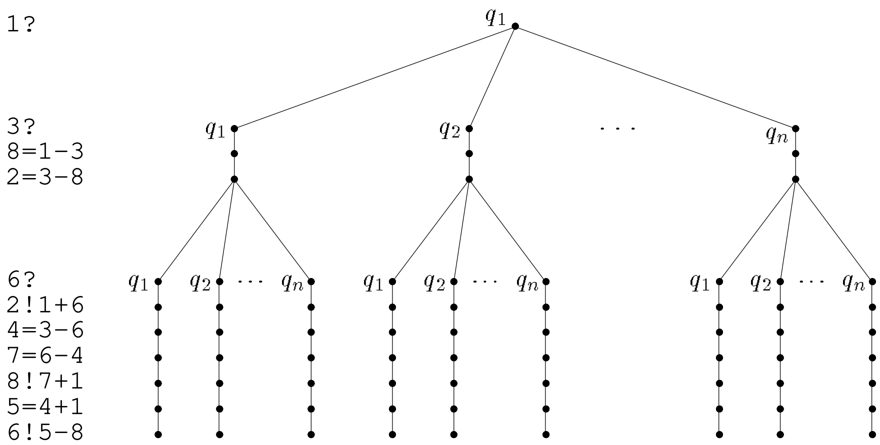


ABBILDUNG 5.5. Das modifizierte Färbungsskript und sein Baum

DEFINITION 5.6. Gegeben sei ein Knotendiagramm D mit umlaufend nummerierten Bögen $1, 2, \ldots, n$. Ein *Färbungsskript* zu D ist ein Skript mit der folgenden Eigenschaft: Jede Kreuzung (x_i, x_j, x_k) wie in Abbildung 2.1 entspricht im Skript genau einer Relation, das heißt einer Zeile der Form

`j=i+k` oder `i=j-k` oder `j!i+k` oder `i!j-k` ,

und umgekehrt entspricht jede solche Zeile genau einer Kreuzung.

BEMERKUNG 5.7. Offensichtlich lassen sich zu jedem nummerierten Diagramm sehr viele Färbungsskripte angeben. Aus jedem Färbungsskript lässt sich die Wirtinger-Präsentation rekonstruieren, ebenso ein Meridian-Longituden-Paar.

Ich gehe hier nicht darauf ein, welche Skripte von Diagrammen herrühren und welche nicht. Die Realisierbarkeit von abstrakten Wirtinger-Präsentationen durch Knotendiagramme wurde zum Beispiel von S. Rosebrock [86] untersucht.

Komplexität. Da jedes Skript einen Algorithmus definiert, können wir nach seiner Komplexität fragen. Wir betrachten hier vor allem den Zeitaufwand und messen diesen durch die Anzahl der Operationen, die bei der Abarbeitung des Skripts ausgeführt werden. Dies entspricht der Anzahl der besuchten Ecken des zugehörigen Baumes.

Wie man an den Bäumen aus Abbildung 5.4 und 5.5 erkennt, ist die Suche dann am schnellsten beendet, wenn auf jedem Weg schon die erste Bedingung nicht erfüllt ist. Der langsamste Fall tritt ein, wenn auf jedem Weg alle Bedingungen erfüllt sind, also alle Wahlen zu gültigen Färbungen führen. (Auf die Möglichkeit bzw. Wahrscheinlichkeit solcher Fälle will ich hier nicht eingehen.) Für eine Konjugationsklasse der Größe $n = |Q|$ ergeben sich folgende Abschätzungen:

	bester Fall	schlechtester Fall
Skript aus Abb. 5.4	$7n^2 + n$	$9n^2 + n$
Skript aus Abb. 5.5	$2n^2 + 3n$	$7n^2 + 3n$

Das zweite Skript ist daher besser, und für die Praxis würde man es dem ersten Skript vorziehen. Unabhängig von solchen Feinheiten halten wir folgende Abschätzung fest:

PROPOSITION 5.8. *Zu jedem Knotendiagramm mit b Brücken und c Kreuzungen gibt es Färbungsskript mit b Wahlen und einer Länge von $c + b$ Zeilen.* □

KOROLLAR 5.9. *Sei G eine Gruppe und $Q = x^G$ eine endliche Konjugationsklasse. Zu jedem Knotendiagramm mit b Brücken und c Kreuzungen hat das Färbungsproblem höchstens Zeitaufwand $(c + b)|Q|^{b-1}$.* □

Der Zeitaufwand $(c+b)|Q|^{b-1}$ ist jedoch bei Weitem nicht optimal, wie wir im folgenden Abschnitt zeigen.

5.4. Reduktion rationaler Tangles

Dieser Abschnitt geht der Frage nach, wie man zu einem gegebenem Knotendiagramm einen möglichst guten Färbungsalgorithmus finden kann. Die Grundlage hierfür ist Satz 5.14, der einen (vermutlich optimalen) Färbungsalgorithmus für rationale Tangles beschreibt.

BEMERKUNG 5.10. Um die folgenden Komplexitätsbetrachtungen zu vereinfachen, werde ich konstante Faktoren wie die Kreuzungszahl c in den meisten Fällen nicht ausdrücklich nennen. Wie sich herausstellt, ist die höchste Potenz von $|Q|$ nicht nur asymptotisch, sondern auch für kleine Konjugationsklassen dominierend. Ich spreche im Folgenden kurz von quadratischem, linearen oder konstantem Aufwand. Gemeint ist damit der Zeitaufwand $c \cdot |Q|^e$ für Exponenten $e = 2, 1$ bzw. 0.

Die Grundidee. Gegeben sei ein Färbungsskript, in dem b Wahlen zu treffen sind. Zur Bearbeitung des Skripts werden alle $|Q|^{b-1}$ Zweige des zugehörigen Baums durchlaufen. Insbesondere kann es höchstens $|Q|^{b-1}$ Lösungen geben.

Im Allgemeinen ist die Anzahl der Lösungen jedoch viel geringer, das heißt, die meisten Zweige werden vergeblich bearbeitet. Es stellt sich daher die Frage: Kann man fruchtlose Zweige erkennen und von vorneherein abschneiden? Erstaunlicherweise ist dies möglich.

BEISPIEL 5.11. Wir betrachten erneut das Skript aus Abb. 5.5. Dort stehen die Zeilen `6?` und `2!1+6` unmittelbar hintereinander. Das bedeutet natürlich: Die Farben x_1 und x_2 sind bereits bekannt, gesucht sind alle Möglichkeiten für die Farbe x_6, die die Gleichung $x_2 = x_6^{-1} x_1 x_6$ erfüllen. Diese Gleichung lässt sich nach x_1 und x_2 auflösen, nicht aber nach x_6.

Sei $\Psi : Q \times Q \to \mathfrak{P}Q$ die Funktion, die zu gegebenen Farben x_1 und x_2 die Menge aller Lösungen x_6 liefert. Die Lösungsmenge kann leer sein, aus einem oder auch aus mehreren Elementen bestehen. Daher bildet die Funktion Ψ nicht nach Q, sondern in die Potenzmenge $\mathfrak{P}Q$ ab.

Für die Zwecke dieses Beispiels nehmen wir die Funktion Ψ als elementar an, das heißt, ihre Berechnung erfordert nur einen Zeitschritt. Dies wäre ein enormer Vorteil: Die Werte für x_6 brauchen dann nicht mehr die gesamte Menge Q zu durchlaufen, sondern nur noch die sehr viel kleinere Menge $\Psi(x_1, x_2)$.

Diese Idee ist soweit einfach. Allerdings ist nach dem Standard-Verfahren zur Berechnung jeder einzelnen Lösungsmenge $\Psi(x_1, x_2)$ die Durchsuchung der gesamten Menge Q nötig. Das folgende Verfahren zeigt, dass die Menge Q insgesamt nur ein einziges Mal durchlaufen werden muss. Danach ist die Berechnung von $\Psi(x_1, x_2)$ für alle x_1, x_2 mit konstantem Aufwand möglich.

Diese Optimierung ist sehr ergiebig, denn sie lässt sich auf alle rationalen Tangles anwenden. Abbildung 5.6 zeigt rechts den Spezialfall, den wir im vorangegangen Beispiel betrachtet haben. Links ist der allgemeine Fall dargestellt.

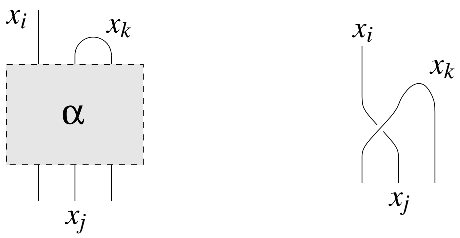


ABBILDUNG 5.6. Das rationale Tangle zum Zopf α, rechts ein Beispiel

Lösungsfunktionen. Angenommen, das Knotendiagramm enthält ein rationales Tangle R. Das bedeutet, R hat vier Ein-/Ausgänge und genau eine Brücke wie in Abb. 5.6 dargestellt. Der Verlauf der Stränge wird durch den 3-Zopf α bestimmt, und die Anzahl seiner Kreuzungen bzw. seine Länge als Zopfwort sei c.

Wenn die Farben x_i und x_k bekannt sind, dann lassen sich daraus leicht die Farben der Ausgänge berechnen: Man braucht die Farben von oben nur entlang des Zopfes nach unten zu flechten. Sei etwa x_j die Farbe des mittleren Ausgangs. (Welchen der drei Ausgänge wir für die folgenden Überlegungen wählen, ist unerheblich.) Dann gibt es eine Funktion $\Phi : Q \times Q \to Q$ mit $\Phi(x_i, x_k) = x_j$, und zur Berechnung von $\Phi(x_i, x_k)$ müssen genau c Konjugationen ausgeführt werden.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass die Eingangsfarbe x_i und die Ausgangsfarbe x_j bekannt sind, und suchen alle Lösungen x_k der Gleichung $\Phi(x_i, x_k) = x_j$.

DEFINITION 5.12. Sei R ein rationales Tangle wie in Abb. 5.6. Sei $\Psi : Q \times Q \to \mathfrak{P}Q$ die Abbildung, die jedem Paar (x_i, x_j) die Menge aller Lösungen x_k der Gleichung $\Phi(x_i, x_k) = x_j$ zuordnet. Wir nennen Ψ die *Lösungsfunktion* des Tangles R. Die Vorgabe der Farben x_i und x_j nennen wir die *Randbedingung*.

LEMMA 5.13. *Durchschnittlich hat jede Lösungsmenge $\Psi(x_i, x_j)$ nur ein Element.*

BEWEIS: Bei vorgegebenem x_i gibt es genau n Lösungsmengen $\Psi(x_i, x_j)$, eine für jeden der Werte $x_j = q_1, q_2, \ldots, q_n$. Es gibt insgesamt ebenso viele Lösungen, nämlich alle Möglichkeiten $x_k = q_1, q_2, \ldots, q_n$, und jede tritt in genau einer Lösungsmenge auf. $\square$

Diese Beobachtung lehrt, dass eine Optimierung ausgesprochen lohnend ist: Für x_k gibt es durchschnittlich nur eine erfolgreiche Wahl – alle übrigen Verzweigungen führen in Sackgassen und sollten daher gemieden werden.

Die effiziente Berechnung von Lösungsfunktionen stellt sich nach den obigen Ausführungen als das Kernproblem dar. Hierfür gibt es folgende Lösung:

SATZ 5.14. *Sei R ein rationales Tangle mit c Kreuzungen und zwei gewählten Ausgängen i, j. Zu einer gegebenen Konjugationsklasse Q sei $\Psi : Q \times Q \to \mathfrak{P}Q$ die Lösungsfunktion. Dann gibt es für Ψ ein Berechnungsverfahren folgender Art:*

1. *In einer Vorbereitungsphase wird eine Tabelle der Länge $|Q|$ angelegt. Dazu wird die Menge Q genau einmal durchlaufen; der Zeitaufwand hierzu ist bestimmt durch die Ausführung von jeweils c Konjugationen.*
2. *Nach der Vorbereitungsphase erfolgt die Berechnung von Ψ für jedes Paar (x_i, x_j) mit konstantem Aufwand. Dies geschieht durch Nachschlagen in der zuvor angelegten Tabelle und der Anwendung von zwei Konjugationen.*

BEMERKUNG 5.15. Um den Nutzen dieses Vorgehens einzuschätzen, vergleiche man es mit dem Standard-Verfahren. Dort ist zur Berechnung jeder einzelnen Lösungsmenge $\Psi(x_i, x_j)$ derselbe Aufwand wie in Schritt (1) nötig. Lösungsmengen müssen aber sehr häufig berechnet werden! Schon beim zweiten Mal hat sich daher das Anlegen der Tabelle amortisiert. Bei jeder weiteren Berechnung von $\Psi(x_i, x_j)$ ist der optimierte Algorithmus um den Faktor $|Q|$ schneller als das Standard-Verfahren.

Der Rest dieses Abschnitts widmet sich dem Beweis des Satzes. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung zur Homogenität der Konjugationsklasse Q. Anschließend erfolgt der Beweis des Satzes durch Angabe der beiden Teilalgorithmen: dem Erstellen der Lösungstabelle und dem Abrufen der Lösungsfunktion.

Vorüberlegung zur Homogenität. Jedes Element in Q ist zum Fußpunkt q_1 konjugiert. Zur Bereitstellung dieser Konjugationen (in Form einer Tabelle) treffen wir folgende Vorbereitung: Zu jedem $q_i \in Q$ wird ein Element $\gamma_i \in G$ bestimmt, das $q_i^{\gamma_i} = q_1$ erfüllt. Dies wird bei der Generierung der Konjugationsklasse Q ohnehin durchgeführt und bedeutet keinen zeitlichen Mehraufwand. Die Abbildung $q_i \mapsto \gamma_i$ liegt danach in einer Tabelle vor; der zusätzliche Speicherbedarf ist ebenso groß wie zur Speicherung der Menge Q. Wir nehmen an, dass das Abrufen von Einträgen aus dieser Tabelle mit konstantem Aufwand erfolgt.

Diese Vorbereitung bezieht sich allein auf die Konjugationsklasse Q und hat noch nichts mit dem Tangle R zu tun. Mit ihrer Hilfe lässt sich jedoch die Lösungsfunktion Ψ wesentlich vereinfachen, denn für jeden Automorphismus $\gamma : G \to G$ gilt $\Psi(x, y)^\gamma = \Psi(x^\gamma, y^\gamma)$. Via Konjugation kann jedes Paar (x_i, x_j) in die Form (q_1, x'_j) gebracht werden. Wir müssen demnach nicht die gesamte Funktion Ψ, sondern nur ihre Einschränkung $\{q_1\} \times Q \to \mathfrak{P}Q$ berechnen.

BEWEIS DES SATZES 5.14: Sei R ein rationales Tangle mit c Kreuzungen und zwei gewählten Ausgängen i, j wie in Abbildung 5.6. Zu der gegebenen Konjugationsklasse Q sei $\Psi : Q \times Q \to \mathfrak{P}Q$ die Lösungsfunktion, die jedem Paar (x_i, x_j) die Menge aller Lösungen x_k mit $\Phi(x_i, x_k) = x_j$ zuordnet.

Erster Teil: Erstellen der Lösungstabelle. Die partielle Lösungsfunktion $\Psi_1 : Q \to \mathfrak{P}Q$ ordnet jedem x_j die Menge aller Lösungen x_k mit $\Phi(q_1, x_k) = x_j$ zu. Nach den Vorbereitungen reicht es, statt Ψ nur Ψ_1 als Tabelle anzulegen.

Dazu lassen wir x_k alle Werte $q_1, q_2, \ldots, q_n$ durchlaufen und notieren zu jedem Bildwert $x_j = \Phi(q_1, x_k)$ das Urbild x_k. Die so erstellte Tabelle enthält für jeden Wert x_j eine Liste der möglichen Lösungen x_k und entspricht der Abbildung Ψ_1. Man beachte, dass dies nur linearen Aufwand erfordert, da die Menge Q nur einmal durchlaufen wird.

Zweiter Teil: Abrufen der Lösungsfunktion. Die gesamte Lösungsfunktion Ψ lässt sich aus der partiellen Lösungsfunktion Ψ_1 rekonstruieren. Die Berechnung von $\Psi(x_i, x_j)$ erfolgt in vier Schritten:

1. Nachschlagen von γ_i in der Tabelle der Konjugationen.
2. Durch Konjugation mit γ_i wird (x_i, x_j) auf (q_1, x'_j) standardisiert.
3. Nachschlagen der Lösung $\Psi_1(x'_j)$ liefert die Menge der Lösungen x'_k.
4. Konjugation mit γ_i^{-1} macht daraus die Menge der Lösungen x_k.

Dies erfordert nur konstanten Aufwand: zweimaliges Nachschlagen in Tabellen und zweimaliges Konjugieren. Damit ist Satz 5.14 bewiesen. □

5.5. Optimierte Skripte und ihre Komplexität

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass die separate Färbung von rationalen Tangles einen erheblichen Zeitvorteil bedeutet. Um dies vom Knotendiagramm in ein Skript zu übersetzen, führen wir folgende Notation ein:

Standard-Skript	optimiertes Skript	Bedeutung
`k ?`	`k & i : j`	Aus x_k und x_i lässt sich x_j bestimmen. Leider ist x_k unbekannt, aber x_i, x_j sind gegeben.
`[Zopf` α`]`	`[Zopf` α`]`	Es folgen die Zeilen zur Definition der Farben entlang des Zopfes α.
`j ! l ± m`	`j ! l ± m`	Die Farbe x_j muss schließlich mit dem Ergebnis des Zopfes übereinstimmen.

Die Zeile `k?` wird durch die Optimierungsanweisung `k&i:j` ersetzt. Von dieser Zeile bis zur abschließenden Bedingung `j!l±m` entspricht das Skript genau der Struktur des rationalen Tangles wie in Abb. 5.6: In den Zwischenzeilen werden genau die Farben definiert, die sich aus den Eingangsvariablen x_i und x_k entlang des Zopfes α berechnen lassen.

Komplexität. Insbesondere bei optimierten Skripten sind wir am Zeitaufwand des Färbungsalgorithmus interessiert. Für Standard-Skripte war die Abschätzung einfach: Bei jeder Wahl verzweigte der Baum in $|Q|$ Unterbäume. Für eine optimierte Wahl hingegen ist der Verzweigungsindex durch die Größe der Lösungsmenge $\Psi(x_i, x_j)$ gegeben.

Wie wir in Lemma 5.13 gesehen haben, besitzt jede Lösungsmenge $\Psi(x_i, x_j)$ durchschnittlich nur ein Element. Wir würden also für optimierte Wahlen einen Verzweigungsindex von 1 erwarten. Leider sagt der Durchschnittswert nichts über die tatsächliche Partitionierung der Lösungsmengen aus. Dies erschwert eine genauere Analyse, da wir a priori nicht wissen, welche Lösungsmengen bei der Bearbeitung des Skripts tatsächlich abgerufen werden. Das folgende Argument formuliert daher nur eine obere Schranke.

DEFINITION 5.16. Sei R wie oben ein rationales Tangle und $\Psi : Q \times Q \to \mathfrak{P}Q$ die Lösungsfunktion. Die maximale Größe $E = \max|\Psi(x_i, x_j)|$ aller auftretenden Lösungsmengen nennen wir *Exzentrizität* des Tangles R bezüglich Q.

Das rechtsstehende Beispiel zeigt ein Tangle mit maximaler Exzentrizität $E = |Q|$. Die Lösungsmengen $\Psi(x_i, x_i)$ auf der Diagonalen haben je $|Q|$ Elemente, alle anderen Lösungsmengen sind leer. Dieser Fall ist insofern untypisch, als hier die Kenntnis von x_i und x_j überhaupt keinen Nutzen für die Wahl von x_k bedeutet. Es zeigt, dass in Ausnahmefällen eine andere Behandlung des Tangles nötig ist.

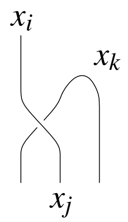


Abb. 5.7. auch ein rationales Tangle

Realistischer ist dagegen das Beispiel aus Abb. 5.6. Ist $Q = x^G$ die betrachtete Konjugationsklasse, dann ist die Exzentrizität höchstens so groß wie der Zentralisator $Z(x)$ in G. Für je zwei Lösungen a, b der Gleichung $x_i^a = x_i^b = x_j$ gilt $a = zb$ mit einem Element $z \in Z(x_i)$. Es gibt demnach entweder keine oder genau $|Z(x_i)|$ Lösungen in G. Eingeschränkt auf Q gibt es höchstens $|Z(x_i)|$ Lösungen, im Allgemeinen deutlich weniger. Bezüglich metazyklischer Gruppen etwa hat dieses Tangle Exzentrizität $E = 1$. Das liegt natürlich daran, dass in diesem Fall die Konjugation $x_i^a = x_j$ durch eine lineare Gleichung beschrieben wird.

SATZ 5.17. *Es sei ein Skript mit s freien Wahlen und t optimierten Wahlen vorgelegt. Zu der Konjugationsklasse $Q = x^G$ seien $E_1, \ldots, E_t$ die Exzentrizitäten der Teilprobleme. Dann müssen zur Abarbeitung des Skripts im schlechtesten Fall*

$$(c + s + t) \cdot |Q|^{s-1} \cdot E_1 E_2 \cdots E_t$$

Operationen ausgeführt werden.

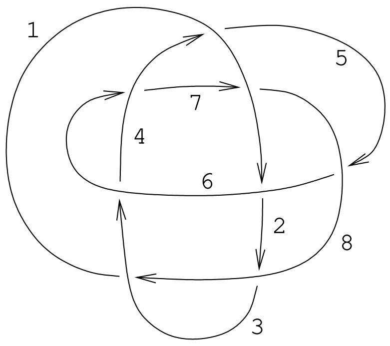
BEWEIS: Die Behauptung folgt durch Abzählen der Zweige des zugehörigen Baumes. Die erste Wahl wird mit dem Fußpunkt x entschieden, jede weitere freie Wahl verzweigt in $|Q|$ Unterbäume. Die i-te optimierte Wahl verzweigt in maximal E_i Unterbäume, alle anderen Zweige werden nicht betreten. Insgesamt werden also höchstens $|Q|^{s-1} \cdot E_1 E_2 \cdots E_t$ Wege von der Wurzel zu den Blättern verfolgt. Die Länge jedes Weges ist durch die Länge des Skripts gegeben; sie setzt sich zusammen aus der Kreuzungszahl c zuzüglich der Anzahl $s + t$ der Verzweigungspunkte. Daraus erhalten wir obiges Produkt. □

BEMERKUNG 5.18. Die Vorlaufzeiten $c_i|Q|$ zum Anlegen der Lösungstabellen werden in dieser Zählung nicht berücksichtigt. Sie sind von linearem Aufwand und fallen für $s \geq 2$ nicht ins Gewicht. Nur im Fall $s = 1$ sind sie von der gleichen Größenordnung; obige Formel müsste demnach durch einen zweiten, aber kleineren Summanden $\sum c_i|Q|$ ergänzt werden.

5.6. Anwendungen und Beispiele

Als erste Anwendung kommen wir auf den Knoten 8_{20} zurück. Abbildung 5.8 zeigt das nummerierte Knotendiagramm nebst zwei Skripten: links das Standard-Skript, rechts das optimierte Skript, wie es sich aus obiger Analyse ergeben hat. Der Knoten hat drei Brücken; im Standard-Skript werden die drei Farben x_1, x_3 und x_6 frei gewählt. Im zweiten Skript hingegen müssen nur die beiden Farben x_1 und x_3 frei gewählt werden. Die Farbe x_6 lässt sich dann optimiert wählen.

```
1?
3?
8=1-3
2=3-8
6?
2!1+6
4=3-6
7=6-4
8!7+1
5=4+1
6!5-8
```




```
1?
3?
8=1-3
2=3-8
6&1:2
2!1+6
4=3-6
7=6-4
8!7+1
5=4+1
6!5-8
```

ABBILDUNG 5.8. Zwei Färbungsskripte zum Knoten 8_{20}

Abbildung 5.9 zeigt eine Auswertung empirischer Daten. Dargestellt ist der Zeitaufwand der beiden Skripte bei der Färbung mit einigen Konjugationsklassen perfekter Gruppen. Wie erwartet, hat das Standard-Skript quadratischen Aufwand, das optimierte Skript hingegen nur linearen Aufwand in $|Q|$. Die Ausführung von 10^5 Schritten dauert auf einem heutigen PC etwa 1 Sekunde.

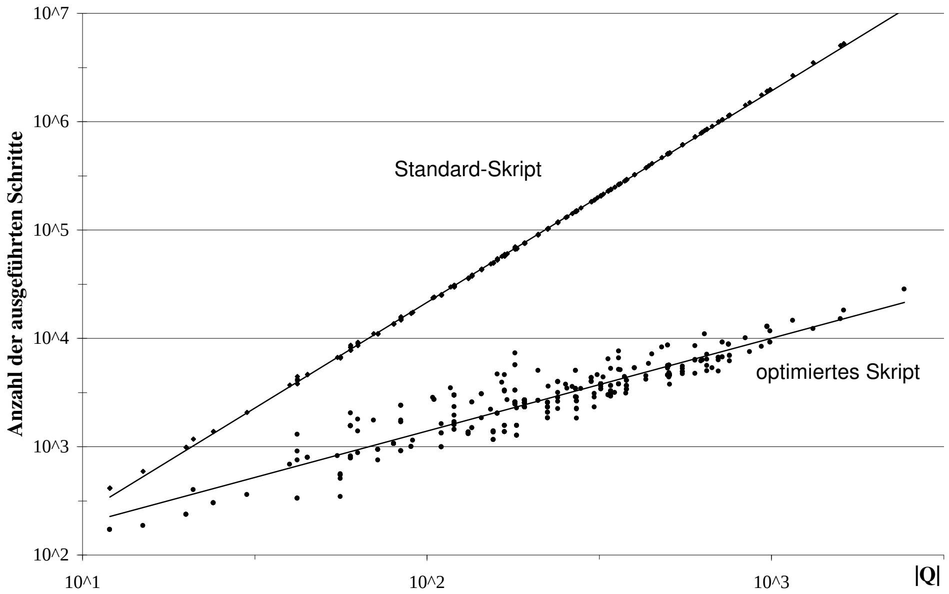
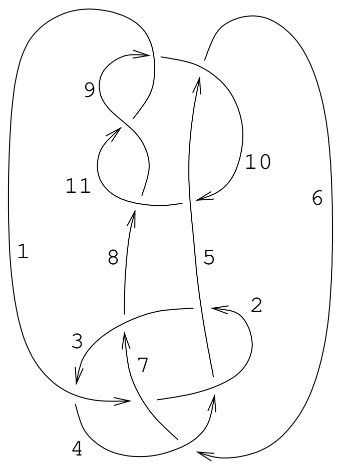


ABBILDUNG 5.9. Zeitaufwand für die Färbung des Knotens 8_{20}

Abbildung 5.10 zeigt den Conway-Knoten. Dieser Knoten hat drei Brücken, daher erzeugen bereits drei Meridiane die Knotengruppe. In dem gezeigten Diagramm leisten dies zum Beispiel die Meridiane der Bögen `1`, `3` und `10`. Links steht ein Standard-Skript, das von diesen Wahlen ausgeht.

Das rechts angegebene, optimierte Skript geht einen anderen Weg. Hier werden nur die beiden Bögen `1` und `3` frei gewählt. Dies wird erkauft mit den optimierten Wahlen von `5`, `7` und `10`. Wie die unten angegebenen empirischen Daten belegen, führt dies immer noch zu einer enormen Beschleunigung.

```
 1?
10?
 9=10+ 1
11= 1+ 9
 8= 9+11
 3?
 4= 3- 1
 7= 8+ 3
 2= 1- 7
 5= 4+ 2
 2! 3- 5
11!10+ 5
 6= 7- 4
 5! 6-10
```




```
 1?
 3?
 4= 3- 1
 5& 3: 4
 2= 3- 5
 4! 5- 2
 7& 1: 2
 2! 1- 7
 8= 7- 3
 6= 7- 4
10& 6: 5
 5! 6-10
11=10+ 5
 9= 8-11
 1!11- 9
10! 9- 1
```

ABBILDUNG 5.10. Zwei Färbungsskripte zum Conway-Knoten

Abbildung 5.11 zeigt einen empirischen Vergleich der Laufzeiten der beiden Skripte zum Conway-Knoten. Das Standard-Skript hat quadratischen Aufwand, das optimierte Skript hingegen nur linearen Aufwand.

Wie man an dieser Statistik sieht, schwankt die Anzahl der ausgeführten Schritte je nach Konjugationsklasse. Die Streuung ist umso stärker ausgeprägt, je mehr Wahlen in dem Skript getroffen werden. (Man vergleiche etwa Abb. 5.11 mit Abb. 5.13.) Dies erklärt sich dadurch, dass es Konjugationsklassen gibt, die das Knotendiagramm besonders gut oder besonders schlecht färben: Wenn es viele Q-Färbungen gibt, dann müssen mehr Zweige verfolgt werden, und die erschöpfende Suche ist aufwendiger. Lässt sich das Diagramm hingegen schlecht mit Q färben, dann können viele Zweige frühzeitig aufgegeben werden, und die Bearbeitung des Skripts erfordert weniger Schritte.

5.7. Die durchschnittliche Komplexität

Die Abschätzung aus Satz 5.17 geht vom schlechtesten Fall aus und zeigt bereits die Verbesserung gegenüber dem Standard-Algorithmus. Diese Abschätzung beschreibt das tatsächliche Verhalten des Algorithmus jedoch nur ungenügend, da der schlechteste Fall praktisch nie eintritt.

Den *durchschnittlichen* Zeitaufwand des Färbungsalgorithmus zu bestimmen, ist weitaus schwieriger. Das Problem ließe sich in Einzelfällen kombinatorisch analysieren, würde uns hier jedoch zu weit vom Pfad führen. Wir formulieren die folgende Aussage daher nicht als Satz, sondern vorsichtiger als Heuristik.

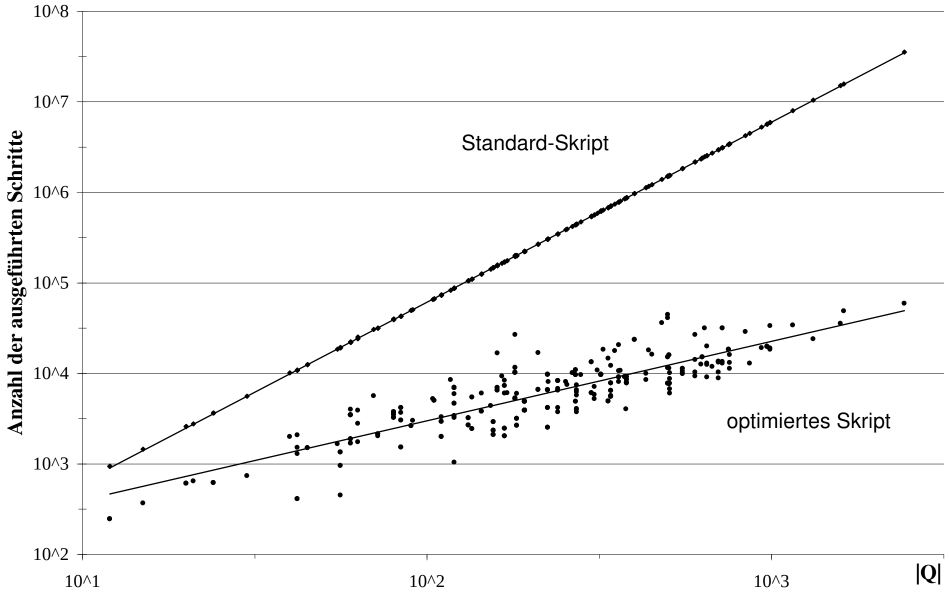


ABBILDUNG 5.11. Zeitaufwand für die Färbung des Conway-Knotens

HEURISTIK 5.19. *Ein Skript mit s freien Wahlen und t optimierten Wahlen hat typischerweise einen Zeitaufwand von* $(c + s + t) \cdot |Q|^{s-1}$.

BEGRÜNDUNG: Nach Lemma 5.13 hat jede optimierte Wahl durchschnittlichen Verzweigungsindex 1. Mit anderen Worten, sie verhält sich im Durchschnitt nicht wie eine Wahl, sondern wie eine Definition. Bei einer Kombination optimierter Wahlen in einem Skript bleibt dieser Durchschnittswert erhalten, solange die Größen der abgerufenen Lösungsmengen unkorreliert sind. Dies ist typischerweise der Fall. Die Anzahl der bearbeiteten Zweige ist demnach $|Q|^{s-1}$. □

Dies ist selbstverständlich kein Beweis, erklärt aber das beobachtete Zeitverhalten. In Abbildung 5.7 haben wir ein Tangle gesehen, das keine Optimierung erlaubt – wir stufen dies als atypisch ein. Die Schwierigkeit einer theoretischen Präzisierung steckt in der Unterscheidung typischer und atypischer Fälle. Empirisch stellt sich heraus, dass die typischen Fälle in der überwiegenden Mehrzahl sind und daher ihren Namen verdienen.

Methodenkritik. Der hier beschriebene Algorithmus ist für alle Knotendiagramme und für alle Gruppen geeignet. Diese Allgemeinheit ist von enormem praktischen Wert, erschwert aber eine theoretische Komplexitätsanalyse. Die vorangegangenen Überlegungen weisen bereits auf folgendes Dilemma hin:

- Allgemein *beweisbar* sind grobe Abschätzungen der Komplexität. Sie geben das Verhalten des Algorithmus meist nur ungenau wider.
- Der empirisch beobachtete Zeitaufwand lässt sich ebenfalls in linear, quadratisch etc. einteilen. Das typische bzw. durchschnittliche Verhalten kann *begründet* nicht aber *bewiesen* werden. Dazu ist die Problemstellung zu allgemein und die Zahl der nötigen Einzeluntersuchungen zu groß.

Aus diesen Gründen verzweigen sich die möglichen Aussagen und Methoden in einen theoretischen und einen praktischen Teil. Neben (exakte) Sätze und ihre (strengen) Beweise treten im Folgenden auch (empirische) Heuristiken und ihre (vereinfachenden) Begründungen.

5.8. Conway-Polyeder

Die Reduktion rationaler Tangles ist eine *lokale* Optimierung. Die obigen Beispiele zeigen, dass sich die Verbesserung von rationalen Tangles auf Knotendiagramme überträgt. Um diese Beobachtung zu systematisieren, erläutern wir, wie Knotendiagramme aus rationalen Tangles aufgebaut werden können.

Conway-Polyeder. J.H. Conway [19] betrachtete 4-valente Graphen auf der Sphäre, wobei jede Ecke Platzhalter für ein rationales Tangle ist. Solch eine Anordnung nennen wir *Conway-Polyeder*. Abbildung 5.12 zeigt links den Fall eines Zweibrückenknotens. Das Polyeder in der Mitte steht für Montesinos-Knoten mit drei rationalen Tangles. (Diese Klasse beinhaltet zum Beispiel die Brezelknoten.) Als drittes ist das Analogon zu einem Oktaeder angegeben.

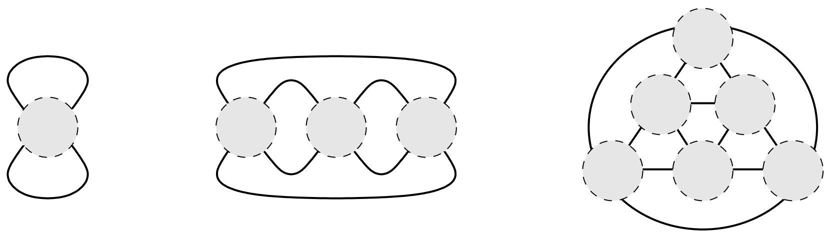


ABBILDUNG 5.12. Drei einfache Beispiele für Conway-Polyeder

Für die Färbung eines Zweibrückenknotens ist nur linearer Aufwand nötig. Wie man im mittleren Beispiel erkennt, reicht auch hier die Farbwahl für *zwei* Bögen bereits aus – alle weiteren Farben können dann optimiert gewählt werden. Dies ergibt sich aus dem Reduktionssatz 5.14: Wenn zwei Kanten eines rationalen Tangles gefärbt sind, dann lassen sich alle dazu passenden Färbungen des Tangles mit konstantem Aufwand finden.

Bei dem dritten Conway-Polyeder aus Abb. 5.12 sieht man, dass zwei Farbwahlen nicht ausreichen, um die weiteren Farben optimiert wählen zu können. Nach der Farbwahl für drei geeignete Kanten ist dies jedoch möglich. Das bedeutet, dass ein typischer Knoten dieser Familie von unserem Algorithmus mit quadratischem Aufwand gefärbt wird.

Die Betrachtung der Conway-Polyeder zeigt, dass die Färbungskomplexität nicht in erster Linie von der Brückenzahl des Knotens, sondern vielmehr von der Komplexität des Conway-Polyeders abhängt. Eine graphentheoretische Präzisierung ist leicht möglich, soll aber hier nicht weiter verfolgt werden. Wir halten lediglich fest:

BEMERKUNG 5.20. Zu jeder Zahl $s \geq 1$ lässt sich ein Conway-Polyeder konstruieren, bei dem die Farbwahl von $s-1$ Kanten nicht ausreicht, um die weiteren Farben optimiert zu wählen. Unser Algorithmus hat in diesem Fall mindestens Aufwand $|Q|^{s-1}$.

Montesinos-Knoten. An dem obigen Beispiel sehen wir, dass Montesinos-Knoten typischerweise mit linearem Aufwand gefärbt werden können:

PROPOSITION 5.21. *Zu jedem Montesinos-Knoten mit t rationalen Tangles gibt es ein Färbungsskript mit zwei freien Wahlen und t optimierten Wahlen.*

BEWEIS: Jeder Montesinos-Knoten besteht aus einer zyklischen Kette von t rationalen Tangles. (Das mittlere Beispiel aus Abbildung 5.12 zeigt dies für den Fall $t = 3$.) Es reicht daher die Farbwahl für zwei Bögen, die an ein gemeinsames Tangle angrenzen. Alle weiteren Farben können optimiert gewählt werden. □

HEURISTIK 5.22. *Montesinos-Knoten lassen sich durchschnittlich mit linearem Aufwand färben.*

BEGRÜNDUNG: Für Montesinos-Knoten sind nur zwei freie Farbwahlen nötig: Die erste Wahl wird stets mit dem Fußpunkt q_1 entschieden, die zweite Wahl verursacht linearen Aufwand. Optimierte Wahlen hingegen haben typischerweise nur konstanten Aufwand. □

Das hier vorgebrachte Argument wird durch die empirische Beobachtung gestützt. Abbildung 5.13 zeigt den Zeitaufwand für die Färbung des Brezelknotens $B(3, 5, 7, 9, 11)$. Dieser Knoten hat 5 Brücken; benutzt wurde ein Skript mit 2 freien und 3 optimierten Wahlen. Wie man sieht, hängt die Anzahl der nötigen Schritte stark von der Konjugationsklasse Q ab. Im Mittel wächst sie jedoch nur linear mit $|Q|$. Zum Vergleich sind die Werte eines Standard-Skripts eingetragen. Die einfache Struktur der Brezelknoten erlaubt die frühzeitige Prüfung von Bedingungen und führt zu durchschnittlich quadratischem Aufwand.

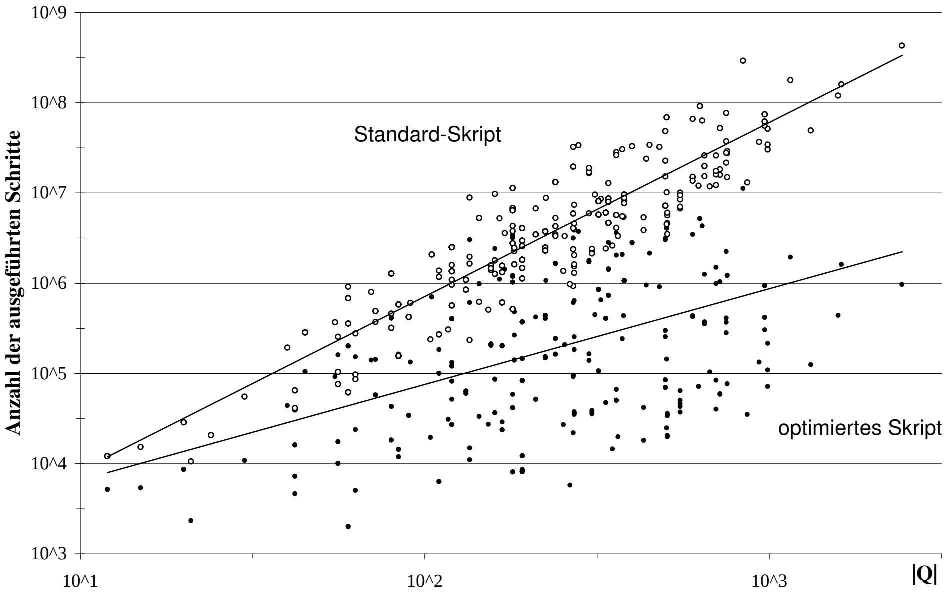


ABBILDUNG 5.13. Zeitaufwand für den Brezelknoten $B(3, 5, 7, 9, 11)$

5.9. Arboreszente Knoten

Wir erkunden im Folgenden die Klasse der Knoten, die mit linearem Aufwand gefärbt werden können. Dies führt uns zu *arboreszenten* Knoten, also solchen, die sich rekursiv als Zusammensetzung rationaler Tangles darstellen lassen.

Die Konstruktion wird präzisiert durch die Menge der *algebraischen Tangles*: Dies ist die kleinste Menge, die alle rationalen Tangles enthält und abgeschlossen ist unter Kompositionen wie in Abbildung 5.14.

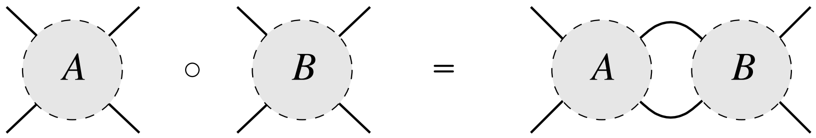


ABBILDUNG 5.14. Konstruktionsprinzip algebraischer Tangles

HEURISTIK 5.23. *Gegeben sei ein algebraisches Tangle mit zwei markierten Ausgängen i und j. Das Färbungsproblem erlaubt typischerweise folgende Lösung:*

1. *Das Anlegen einer Lösungstabelle zu den Randbedingungen (q_1, x_j) bereitet nur linearen Aufwand.*
2. *Zu jeder Randbedingung (x_i, x_j) kann anschließend die Lösungsmenge mit konstantem Zeitaufwand abgerufen werden.*
3. *Durchschnittlich gibt es zu jeder Randbedingung nur eine Lösung.*

BEGRÜNDUNG: Den Induktionsanfang bilden rationale Tangles. Für diesen Fall liefert Satz 5.14 ein Verfahren mit den geforderten Eigenschaften. Nach demselben Prinzip können Teillösungen nun zu größeren Lösungen zusammengesetzt werden. Wir erklären dies für den Fall aus Abbildung 5.15, alle anderen Fälle sind analog oder sogar einfacher zu behandeln.

ANLEGEN DER LÖSUNGSTABELLE: Wir nehmen an, dass für das Tangle AB die Randwerte x_i und x_j vorgegeben werden. Daher lohnt es sich, in einer Vorbereitungsphase eine Lösungstabelle anzulegen, die zu allen Randwerten (x_i, x_j) die passenden Färbungen vermerkt. Das Verfahren ist uns aus Satz 5.14 bekannt:

Sei $Q = x^G$ die betrachtete Konjugationsklasse. Wir setzen $x_i = x$ und lassen x_k alle Werte von Q durchlaufen. Zu den Randwerten (x_i, x_k) schlagen wir die A-Färbungen nach; dies legt die Farbe x_h fest. Zu den Randwerten (x_h, x_k) schlagen wir dann die B-Färbungen nach; dies legt die Farbe x_j fest.

Zu jeder Wahl von x_k erhalten wir auf diese optimierte Weise eine Liste der möglichen Färbungen. Zu jedem Ergebnis x_j vermerken wir in einer Tabelle die zugehörige Farbe x_k (und die weiteren Farben, die zur Festlegung der AB-Färbung nötig sind). Nach Abschluss dieser Vorbereitungen steht die partielle Lösungsfunktion des Tangles AB in einer Tabelle zur Verfügung.

AUFWAND: Zum Abrufen der Lösungsfunktion gilt dasselbe Argument wie im Beweis von Satz 5.14. Im typischen Fall sind die Größen der Lösungsmengen für A und B unkorreliert, das heißt, der Mittelwert der Produkte ist das Produkt der Mittelwerte. In diesem Fall gibt es zu jedem Randwert (x_i, x_j) durchschnittlich nur eine Lösung und das Anlegen der Lösungstabelle hat linearen Aufwand. □

BEMERKUNG 5.24. Unkorreliertheit ist zum Beispiel nicht gegeben, wenn A und B Spiegelbilder sind. Dies ist der Fall einer *symmetrischen Vereinigung* [66]. Tatsächlich beobachtet man, dass solche Knoten besonders viele Färbungen erlauben und der Algorithmus daher mehr Schritte abzuarbeiten hat.

Skripte für algebraische Tangles. Skripte codieren den rekursiven Aufbau durch ineinander verschachtelte, optimierte Wahlen. Dies entspricht dem Aufbau eines algebraischen Tangles aus ineinander verschachtelten Tangles.

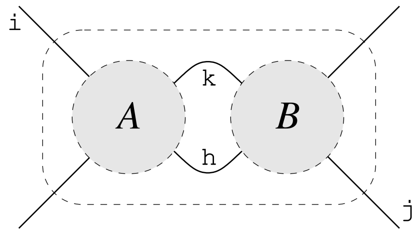


ABBILDUNG 5.15. Zur Erstellung eines optimierten Skripts

Abbildung 5.15 zeigt den Fall eines Tangles AB, für welches die Farben x_i und x_j bekannt sind. Das Tangle setzt sich aus zwei Teilen A und B zusammen, die über die Bögen `k` und `h` verbunden sind. Eine optimierte Wahl der Farbe x_k lässt sich dann wie folgt in einem Skript codieren:

Skript	Bedeutung
`k & i : j`	Die Farbe x_k ist optimiert zu wählen; hierzu sind die Farben x_i und x_j bekannt.
`[Teil A]`	Es folgen die Zeilen für das Tangle A. Hier sind die Eingangsfarben x_i und x_k bekannt. Als Ergebnis wird unter anderem x_h berechnet.
`[Teil B]`	Es folgen die Zeilen für das Tangle B. Hier sind die Eingangsfarben x_h und x_k bekannt.
`j ! l ± m`	Schließlich bleibt die Bedingung für x_j zu prüfen.

Arboreszente Knoten. Alle Knoten, die sich aus algebraischen Tangles aufbauen lassen, heißen bei Conway [19] *algebraische* Knoten. Um Verwechslungen zu vermeiden, ist die Bezeichnung *arboreszente* Knoten üblich [14, 59, 70]. Der Name rührt daher, dass solche Knoten aus ineinander verschachtelten Tangles bestehen, was sich am besten als Baumstruktur darstellen lässt.

PROPOSITION 5.25. *Zu jedem arboreszenten Knoten gibt es ein Färbungsskript mit nur zwei freien Wahlen.*

BEWEIS: Jeder arboreszente Knoten ist Abschluss eines algebraischen Tangles. Für diesen Fall beschreibt Heuristik 5.23 ein rekursives Lösungsverfahren mit optimierten Wahlen. In dem entstehenden Skript bleiben nur zwei Farben auf der obersten Ebene frei zu wählen. □

HEURISTIK 5.26. *Arboreszente Knoten lassen sich typischerweise mit linearem Aufwand färben.* □

BEGRÜNDUNG: Dies folgt ebenfalls aus Heuristik 5.23: Wenn wir annehmen, dass bei jeder Komposition der Färbungsaufwand durchschnittlich linear bleibt, dann setzt sich dieser Vorteil von rationalen Tangles auf der untersten Ebene bis zur obersten Ebene des Gesamtdiagramms fort. □

Die Klasse der arboreszenten Knoten ist groß; unter den Knoten mit geringer Kreuzungszahl stellen sie die überwiegende Mehrheit. Diese Klasse beinhaltet Knoten mit beliebig hoher Brückenzahl, wie das Beispiel der Montesinos-Knoten zeigt. Die Existenz eines Algorithmus mit typischerweise linearem Zeitaufwand ist daher höchst erstaunlich.

5.10. Abschließende Bemerkungen

Das oben erklärte Verfahren nutzt allein die Zerlegung des Knotendiagramms und ist für jede Gruppe G gleichermaßen anwendbar. Man kann auch die Gruppe G analysieren und von dieser Seite Optimierungen vornehmen. Es bietet sich an, G in eine Kompositionsreihe zu zerlegen:

$$G = G_n \twoheadrightarrow G_{n-1} \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow G_1$$

Das Färbungsproblem wird zuerst für G_1 gelöst, seine Lösungen müssen dann schrittweise hochgehoben werden. Der Fall der zentralen Erweiterung wurde in Kapitel 4 gelöst. Nicht-zentrale Erweiterungen erfordern eine erschöpfende Suche nach möglichen Hochhebungen.

Für einfache Gruppen ist eine solche Zerlegung nicht möglich. Da aber gerade einfache Gruppen für die hier vorgestellte Arbeit wichtig sind, gehe ich auf die Untersuchung von Kompositionsreihen nicht weiter ein.

Ausblick. Die Methode, ein Knotendiagramm in Tangles zu zerlegen, ist ein Standard-Werkzeug der Knotentheorie. Die hierarchische Zerlegung in Tangles entfaltet ihre volle Wirksamkeit in der Arbeit von F. Bonahon und L. Siebenmann [14, 59]. Sie zeigen, dass es für jeden Knoten $K \subset \mathbb{S}^3$ eine maximale Zerlegung dieser Art gibt und dass sie eindeutig bestimmt ist. Man spricht daher von der *charakteristischen Zerlegung* des Knotens.

Dieses Kapitel hat gezeigt, dass sich mit dem Knotendiagramm auch das Färbungsproblem zerlegen lässt. Am erfolgreichsten ist dieses Vorgehen für algebraische Tangles, denn hier erreicht man typischerweise linearen Aufwand. Statt algebraischer Tangles kann man auch allgemeinere Fälle betrachten. Der Weg für weitere Untersuchungen praktischer oder komplexitätstheoretischer Natur steht offen.

Der hier entwickelte Algorithmus ist auf alle Knoten und auf alle Gruppen gleichermaßen anwendbar. Als generischer Algorithmus ist er die bisher effizienteste Methode zur erschöpfenden Suche nach Knotengruppen-Darstellungen. Nachdem bislang nur Algorithmen mit Komplexität $|Q|^{b-1}$ bekannt waren, dürfte die erzielte Verbesserung die Untersuchung von endlichen Knotengruppen-Darstellungen wesentlich zugänglicher machen.

GARCIN: *Alors voilà.*
LE GARÇON: *Voilà.*
GARCIN: *C'est comme ça...*
LE GARÇON: *C'est comme ça.*
Jean-Paul Sarte, *Huis clos*

KAPITEL 6

Grundbegriffe der Vassiliev-Theorie

Dieses Kapitel definiert und erläutert Invarianten von endlichem Typ, ein Konzept, das zuerst von V.A. Vassiliev und M.N. Gusarov untersucht wurde. Die ursprüngliche Definition wurde von J. Birman und X.S. Lin [10] in eine direkt zugängliche, kombinatorische Form gebracht, die wir hier als Ausgangspunkt wählen. Prominentestes Beispiel ist das Jones-Polynom und seine Entwicklung in eine Folge von Vassiliev-Invarianten.

Das Jones-Polynom und seine vielfältigen Verallgemeinerungen lassen sich aus Darstellungen der Zopfgruppen mittels R-Matrizen gewinnen. Jede solche Invariante lässt sich in eine Folge von Vassiliev-Invarianten entwickeln, wenn die R-Matrix eine Deformation der Tauschung ist. Für das Jones-Polynom ist dies der Fall. Die in Abschnitt 2.8 definierten R-Matrizen sind hingegen keine Deformationen der Tauschung. (Die zugehörigen Färbungszahlen sind nicht von endlichem Typ, wie wir in Kapitel 9 beweisen werden.)

Den im ersten Teil dieser Arbeit diskutierten Färbungen sehr nahe steht die Artin-Darstellung von Zöpfen als Automorphismen einer freien Gruppe. Sie lässt sich kombinieren mit der Magnus-Darstellung von freien Gruppen in die Einheitengruppe eines Potenzreihenrings. Damit gelingt es, Zöpfe in Potenzreihen zu entwickeln. Ihre Koeffizienten sind Vassiliev-Invarianten und klassifizieren Zöpfe vollständig.

6.1. Definition nach Birman und Lin

Knoten, Verschlingungen, Tangles und Zöpfe wurden als Einbettungen definiert. In der Vassiliev-Theorie werden daneben auch Immersionen mit endlich vielen Selbstdurchdringungen betrachtet. Wir verlangen dabei, dass jede Selbstdurchdringung die Kreuzung von genau zwei Geradenstücken sei und nennen dies einen *Doppelpunkt* oder eine *Singularität*. Wir sprechen dann von *singulären* Knoten, Verschlingungen, Tangles oder Zöpfen und bezeichnen die entsprechenden Mengen mit $\overline{\mathcal{K}}$, $\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{T}}$ bzw. $\overline{\mathrm{Br}}$.

Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$ die Menge der Isotopieklassen von Verschlingungen in M. Eine Invariante $v : \mathcal{L} \to A$ in eine abelsche Gruppe A lässt sich zu einer Invariante $v : \overline{\mathcal{L}} \to A$ von singulären Verschlingungen fortsetzen, indem wir induktiv die Regel

$$v(\quad) = v(\quad) - v(\quad)$$

anwenden. Diese Schreibweise ist zu lesen als $v(L_\bullet) = v(L_+) - v(L_-)$ für je drei Verschlingungen $L_\bullet, L_+, L_-$, die sich an einer einzigen Stelle wie skizziert unterscheiden. Wir nehmen dazu an, dass die Mannigfaltigkeit M orientiert ist, und bestimmen die Vorzeichen wie angegeben.

DEFINITION 6.1. Eine Invariante $v : \mathcal{L}M \to A$ heißt *vom Typ* $\leq m$ oder *Vassiliev-Invariante vom Grad* $\leq m$, wenn sie auf allen Verschlingungen mit mehr als m Doppelpunkten verschwindet. Eine solche Invariante nennen wir *von endlichem Typ* oder auch *Vassiliev-Invariante.*

Wir können diese Definition auch wie folgt umformulieren: Sei $\mathbb{Z}\mathcal{L}$ der freie $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\mathcal{L}$. Jede Invariante $v : \mathcal{L} \to A$ können wir linear zu einer Abbildung $v : \mathbb{Z}\mathcal{L} \to A$ fortsetzen. Zu einer Verschlingung L mit n Singularitäten sei $\delta L \in \mathbb{Z}\mathcal{L}$ die Wechselsumme der 2^n nicht-singulären Verschlingungen, die durch Auflösen aller Singularitäten nach der Regel $\quad \mapsto \quad - \quad$ entstehen.

Sei $\mathcal{L}_n \subset \mathbb{Z}\mathcal{L}$ der Untermodul, der von den Auflösungen δL aller n-singulären Verschlingungen erzeugt wird. Die Folge $\mathbb{Z}\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \dots$ nennen wir die *Vassiliev-Filtrierung*. Man beachte, dass zur Definition dieser Filtrierung die Orientierbarkeit von M nicht nötig ist. Es reicht, an jedem Doppelpunkt eine lokale Orientierung zu wählen, das Ergebnis δL hängt nur bis auf ein Vorzeichen von diesen Wahlen ab.

PROPOSITION 6.2. *Eine Invariante $v : \mathcal{L} \to A$ ist genau dann von Typ $\leq m$, wenn sie auf dem Untermodul $\mathcal{L}_{m+1}$ verschwindet.* □

Die Menge der Vassiliev-Invarianten vom Grad $\leq m$ bezeichnen wir mit $\mathcal{V}_A^m(\mathcal{L})$ oder abkürzend, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, mit $\mathcal{V}^m$. Diese bilden offenbar einen $\mathbb{Z}$-Modul. Wenn A ein Modul über einem Ring R ist, dann ist auch $\mathcal{V}^m$ ein Modul über R. Ist A selbst ein Ring, dann lassen sich Knoteninvarianten $v : \mathcal{K} \to A$ punktweise multiplizieren, und es gilt $\mathcal{V}^m \cdot \mathcal{V}^n \subset \mathcal{V}^{m+n}$. Die Menge $\mathcal{V} = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{V}^m$ aller Vassiliev-Invarianten ist in diesem Fall eine filtrierte Algebra über A.

BEMERKUNG 6.3. Alles, was hier über Vassiliev-Invarianten von Verschlingungen gesagt wurde, lässt sich wörtlich auf Vassiliev-Invarianten von Tangles und Zöpfen übertragen.

6.2. Prominentestes Beispiel: das Jones-Polynom

Vassiliev-Invarianten erlauben, die in den 1980er Jahren entdeckten Knotenpolynome unter einem einheitlichen Aspekt zu behandeln: In einer geeigneten Parametrisierung bilden ihre Koeffizienten eine Folge von Vassiliev-Invarianten aufsteigenden Grades. Als Beispiel diskutieren wir hier das Jones-Polynom bzw. seine Verallgemeinerung zum HOMFLY-Polynom [38, 71, 81, 70]:

SATZ 6.4. *Für jede ganze Zahl k existiert genau eine Verschlingungs-Invariante $P : \mathcal{L}(\mathbb{S}^3) \to \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$, die den folgenden Bedingungen genügt:*

1. *Es gilt* $\;t^{\frac{k}{2}}P(⤱) - t^{-\frac{k}{2}}P(⤲) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})P(\rangle\langle)\;$ *für je drei Verschlingungen, die sich an einer einzigen Stelle wie skizziert unterscheiden.*
2. *Für die trivialen Verschlingungen gilt* $P(\bigcirc^{\mu}) = \left(\frac{t^{k/2}-t^{-k/2}}{t^{1/2}-t^{-1/2}}\right)^{\mu-1}$.

Diese Bedingungen können zu einer rekursiven Berechnung genutzt werden. □

Die Wahl der Variablen $t^{\frac{1}{2}}$ hat historische Gründe. Im Fall $k = 0$ erhalten wir das Alexander-Polynom in der Normierung von Conway, der Fall $k = 2$ entspricht dem Jones-Polynom. Der Fall $k = 1$ liefert eine triviale Invariante, die Fälle $k \geq 3$ nennt man verallgemeinerte Jones-Polynome.

PROPOSITION 6.5. *Das verallgemeinerte Jones-Polynom P ist multiplikativ bzgl. verbundener Summe, invariant unter Reversion, und bei einer Spiegelung des Knotens geht $t^{\frac{1}{2}}$ in $t^{-\frac{1}{2}}$ über.* □

BEISPIEL 6.6. Für die linkshändige Kleeblattschlinge $K = [\sigma_1^{-3}]$ gilt

$$P(K) = t^{k-1} + t^{k+1} - t^{2k}.$$

Ihr Alexander-Polynom ist demnach $t^{-1} - 1 + t$ und ihr Jones-Polynom $t^1 + t^3 - t^4$. An letzterem können wir ablesen, dass die Kleeblattschlinge chiral ist.

Um aus dem Laurent-Polynom $P(L)$ Vassiliev-Invarianten zu extrahieren, betrachten wir sein Bild unter der Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}] & \to & \mathbb{Q}[[h]], \\ & t^{\frac{1}{2}} & \mapsto & q = 1 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots. \end{array}$$

Die Komposition $v = \phi P$ ordnet jeder Verschlingung L eine formale Potenzreihe $v(L) = \sum v_n(L)h^n$ zu. Für $a_1 \neq 0$ ist ϕ injektiv und die gesamte Information des Jones-Polynoms ist in den Koeffizienten v_n codiert. Mit dieser Umparametrisierung erreichen wir:

PROPOSITION 6.7. *Der Koeffizient $v_n : \mathcal{L} \to \mathbb{Q}$ ist eine Invariante vom Typ $\leq n$.*

BEWEIS: Wir setzen die Invariante $v = \phi P$ gemäß $v(\times) = v(⤱) - v(⤲)$ auf singuläre Verschlingungen fort und zeigen: Für jede Verschlingung L mit n Doppelpunkten gilt $v(L) \equiv 0 \mod (h^n)$. Wir beginnen die Induktion mit dem Fall $n = 0$, und für diesen ist die Behauptung trivial. Betrachten wir nun eine Verschlingung mit $n + 1$ Singularitäten, so erhalten wir durch Auflösung einer Singularität eine Differenz von zwei n-singulären Verschlingungen:

$$\begin{array}{rll} v(\times) & = v(⤱) - v(⤲) & \text{nach Definition} \\ & \equiv q^k v(⤱) - q^{-k} v(⤲) \mod (h^{n+1}) & \text{nach Induktionsannahme} \\ & = (q - q^{-1})v(\rangle\langle) & \text{nach Konstruktion von } P \\ & = (2a_1 h + \dots)v(\rangle\langle) & \text{nach Wahl von } q \\ & \equiv 0 \mod (h^{n+1}) & \text{nach Induktionsannahme.} \end{array}$$

Folglich gilt $v_n(L) = 0$ für jede Verschlingung mit mehr als n Singularitäten. □

6.3. Die Vassiliev-Filtrierung der Tangle-Kategorie

Eine elegante und für das Folgende besonders nützliche Fassung der Vassiliev-Bedingung lässt sich in der Sprache der Tangles formulieren. Dies umfasst den zuvor diskutierten Fall von Verschlingungen: Wegen $\mathcal{L} = \mathcal{T}(\emptyset, \emptyset)$ lässt sich jede Verschlingungs-Invariante v als eine Abbildung $\mathcal{T}(\emptyset, \emptyset) \to A$ betrachten. Indem wir v durch die Nullfunktion fortsetzen, erhalten wir eine Invariante $v : \mathcal{T} \to A$. Analog zu obiger Definition lassen sich singuläre Tangles und Tangle-Invarianten von endlichem Typ erklären. Die folgende Konstruktion erreicht dasselbe Ergebnis in einer algebraischen Sprechweise.

Linearisierung. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Die Kategorie $R\mathcal{T}$ hat dieselben Objekte wie $\mathcal{T}$, aber die Morphismen in $R\mathcal{T}(X,Y)$ sind formale R-Linearkombinationen von Morphismen in $\mathcal{T}(X,Y)$. Die Komposition in $R\mathcal{T}$ ist die lineare Fortsetzung der Komposition in $\mathcal{T}$.

Ein *Ideal* J in der Kategorie $R\mathcal{T}$ ist eine Teilmenge aller Morphismen von $R\mathcal{T}$, sodass J unter den folgenden Operationen abgeschlossen ist:

1. Wenn $f, g \in R\mathcal{T}(X,Y)$ in J liegen, dann auch $f+g$ und rf für $r \in R$.
2. Für je zwei komponierbare formale Tangles f, g in $R\mathcal{T}$ gilt: Liegt f oder g in J, dann auch ihre Komposition $f \circ g$.
3. Für je zwei formale Tangles f, f' in $R\mathcal{T}$ gilt: Liegt f oder f' in J, dann auch ihr Tensorprodukt $f \otimes f'$.

Sind J und J' zwei Ideale, so bezeichnen wir mit $J \circ J'$ das Ideal, welches von allen möglichen Kompositionen $f \circ f'$ mit $f \in J$ und $f' \in J'$ erzeugt wird. Auf diese Weise wird die n-fache Potenz $J^n = J \circ \cdots \circ J$ eines Ideals erklärt.

Vassiliev-Filtrierung. In der Kategorie $R\mathcal{T}$ sei J das Ideal, welches von  $-$  erzeugt wird. Dieses Ideal spielt eine besondere Rolle: Es ist der Kern bei der Projektion auf die Kategorie der Tangles modulo Homotopie. Genauer gilt:

LEMMA 6.8. *Für je zwei Tangles $f, g \in \mathcal{T}(X,Y)$ sind äquivalent:*

1. *Die Tangles f und g sind homotop.*
2. *Das Tangle f lässt sich durch Kreuzungswechsel in g überführen.*
3. *Die Differenz $f - g$ liegt in J.* □

Analog zur oben genannten Vassiliev-Filtrierung erhalten wir die J-adische Filtrierung $R\mathcal{T} \supset J \supset J^2 \supset \dots$ in der Tangle-Kategorie $R\mathcal{T}$. Wir halten fest:

PROPOSITION 6.9. *Eine Invariante $v : \mathcal{T} \to A$ ist genau dann vom Typ $\le m$, wenn sie auf dem Ideal J^{m+1} verschwindet.* □

BEMERKUNG 6.10. Die Vassiliev-Filtrierung für Knoten erhalten wir durch Einschränkung gemäß $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_0 \cap J^m$.

BEMERKUNG 6.11. In dem Gruppenring $\mathbb{Z}\,\mathrm{Br}(n)$ ist das Vassiliev-Ideal das von den Differenzen $\sigma_i^{+1} - \sigma_i^{-1}$ erzeugte Ideal.

BEMERKUNG 6.12. Für die reine Zopfgruppe ist das Vassiliev-Ideal in $\mathbb{Z}\,\mathrm{PBr}(n)$ das von den Differenzen $\sigma_i^2 - 1$ erzeugte Ideal. Es fällt mit dem Augmentierungsideal zusammen, das heißt dem Kern der Augmentierung $\mathbb{Z}\,\mathrm{PBr}(n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$.

6.4. Lineare Darstellungen der Zopfgruppen

Als eine weitere Quelle von (Vassiliev-)Invarianten möchte ich Darstellungen der Zopfgruppen mittels R-Matrizen erläutern. Dies war der Ausgangspunkt für die Entdeckung des Jones-Polynoms [52, 53]. Nach Satz 1.3 von Alexander und Markov gewinnen wir Verschlingungs-Invarianten aus Zopfdarstellungen, wenn wir Invarianz unter den beiden Markov-Zügen erreichen können.

DEFINITION 6.13. Sei V ein Modul über einem kommutativen Ring R mit Eins. Ein Automorphismus $c \in \operatorname{Aut}(V \otimes V)$ heißt *Yang-Baxter-Operator* oder *R-Matrix*, wenn die Gleichung

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)$$

in $\operatorname{Aut}(V^{\otimes 3})$ erfüllt ist. Jeder Yang-Baxter-Operator c definiert eine Familie von Darstellungen $\rho_c^n : \mathrm{Br}(n) \to \operatorname{Aut}(V^{\otimes n})$ durch

$$\rho_c^n(\sigma_i) = c_i := \mathrm{id}^{\otimes(i-1)} \otimes c \otimes \mathrm{id}^{\otimes(n-i-1)}.$$

BEISPIEL 6.14. Die Tauschung $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ ist gegeben durch $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Sie erfüllt offenbar die Yang-Baxter-Gleichung; die zugehörige Darstellung der Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n)$ faktorisiert durch die Permutationsdarstellung der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ auf $V^{\otimes n}$.

BEISPIEL 6.15. Sei G eine Gruppe und $Q \subset G$ abgeschlossen unter Konjugation. Für den Vektorraum $V = \mathbb{Q}[Q]$ definiert $c : V \otimes V \to V \otimes V$ mit $c(x \otimes y) = y \otimes (y^{-1}xy)$ eine R-Matrix, vgl. Abschnitt 2.8. Wenn alle Elemente in Q kommutieren, dann ist c die Tauschung.

Um Markov-Invarianten zu gewinnen, nehmen wir an, dass der Modul V über R endlich erzeugt und frei ist. Es steht dann eine Spur $\mathrm{tr} : \operatorname{End}(V^{\otimes n}) \to R$ zur Verfügung, und die Komposition $\mathrm{tr} \circ \rho_c^n$ definiert eine konjugations-invariante Abbildung $\mathrm{Br}(n) \to R$. Diese ist invariant unter dem zweiten Markov-Zug, wenn $\mathrm{tr}_2(c^{\pm 1}) = \mathrm{id}$ gilt. Dabei ist tr_2 die partielle Spur bezüglich des zweiten Tensorfaktors. Nach Wahl einer Basis schreiben wir $c(v_i \otimes v_j) = \sum_{kl} c_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l$. (Genau genommen sollte man sagen, dass *dies* die R-Matrix ist, während die Abbildung c der Yang-Baxter-*Operator* ist.) In dieser Schreibweise lautet die Bedingung dann $\sum_l c_{il}^{kl} = \delta_i^k$ und entsprechend für c^{-1}. Die R-Matrizen aus obigem Beispiel 6.15 haben diese Eigenschaft.

Viele weitere R-Matrizen erfüllen die strenge Bedingung $\mathrm{tr}_2(c^{\pm 1}) = \mathrm{id}$ indes nicht. Zur Korrektur fügen wir einen Automorphismus $\mu : V \to V$ ein und definieren die Abbildung $P : \mathrm{Br}(n) \to R$ durch

$$P(\beta) := \mathrm{tr}(\mu^{\otimes n} \circ \rho_c^n(\beta)).$$

Für $\mu = \mathrm{id}$ erhält man den vorherigen Fall $\mathrm{tr} \circ \rho_c^n$ zurück. Die Invarianz unter den beiden Markov-Zügen lässt sich durch die folgenden Bedingungen formulieren:

DEFINITION 6.16. Ein Paar (c, μ) heißt *erweiterte R-Matrix*, wenn c eine R-Matrix ist und zusammen mit μ folgende Bedingungen erfüllt:

$$c \circ (\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu) \circ c \qquad \text{und} \qquad \mathrm{tr}_2(\, (\mu \otimes \mu) \circ c^{\pm 1}\,) = \mu.$$

SATZ 6.17. *Für eine erweiterte R-Matrix* (c,μ) *ist die Abbildung* $P : \mathrm{Br}(n) \to R$ *mit* $P(\beta) = \mathrm{tr}(\mu^{\otimes n} \circ \rho_c^n(\beta))$ *eine Markov-invariante Abbildung und damit eine Invariante von Verschlingungen.* □

Für den Spezialfall der Färbungs-R-Matrizen haben wir diesen Satz bereits in Abschnitt 2.8 kennengelernt. Die Invarianten sind in diesem Fall die Färbungszahlen. Die R-Matrix des folgenden Beispiels gehört einer anderen Klasse an:

BEISPIEL 6.18. Sei R ein Ring und V ein freier R-Modul mit Basis (b_1, b_2). Wir statten $V \otimes V$ mit der Basis $(b_1 \otimes b_1, b_1 \otimes b_2, b_2 \otimes b_1, b_2 \otimes b_2)$ aus. Dann ist das Paar

$$c = q^{-2} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q-q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mu = \begin{pmatrix} q^{+1} & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

eine erweiterte R-Matrix, wobei $q \in R^\times$ frei wählbar ist. Wir können zum Beispiel $R = \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ und $q = t^{\frac{1}{2}}$ wählen; die zugehörige Invariante ist das Jones-Polynom, allerdings multipliziert mit $\mathrm{tr}(\mu) = q + q^{-1}$. Der Automorphismus c hat ein quadratisches Minimalpolynom, daher erfüllt das Jones-Polynom eine Schienenrelation der Länge 2. Für die verallgemeinerten Jones-Polynome lassen sich ähnliche R-Matrizen angeben, siehe etwa [95, 56, 70].

6.5. Vassiliev-Invarianten aus R-Matrizen

Die R-Matrix aus Beispiel 6.18 hat eine besondere Eigenschaft: Wenn wir als Parameter $q = 1$ wählen, so geht die Matrix c in die Tauschung τ über. Wir sagen daher, die Matrix c ist eine Deformation der Tauschung τ. Um diesen Begriff zu präzisieren sei I ein Ideal des Rings R und $I \supset I^2 \supset I^3 \supset \dots$ die I-adische Filtrierung. In der Endomorphismen-Algebra induziert dies ein Ideal $\hat{I} = I \cdot \mathrm{End}(V^{\otimes n})$, und es gilt $\hat{I}^m = I^m \cdot \mathrm{End}(V^{\otimes n})$.

DEFINITION 6.19. Bezüglich des Ideals I nennen wir c eine *Deformation der Tauschung*, wenn $c \equiv \tau \mod \hat{I}$ gilt.

BEMERKUNG 6.20. Aus $c \equiv \tau$ folgt $c^2 \equiv \tau^2 = \mathrm{id}_{V \otimes V}$, daher gilt $c \equiv c^{-1} \mod \hat{I}$. Für die folgenden Argumente genügt diese letzte, etwas schwächere Bedingung. Wir sagen in diesem Fall, c^2 sei eine *Deformation der Identität*.

LEMMA 6.21. *Wenn* c^2 *eine Deformation der Identität ist, dann ist die Abbildung* $P_m : \mathcal{L} \to R \twoheadrightarrow R/I^{m+1}$ *eine Vassiliev-Invariante vom Grad* $\leq m$.

BEWEIS: Durch den Yang-Baxter-Operator c wird, wie oben erklärt, eine Darstellung $\rho : \mathrm{Br}(n) \to \mathrm{Aut}(V^{\otimes n})$ definiert. Diese setzen wir linear zu einer Darstellung $\rho : R\mathrm{Br}(n) \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ des Gruppenrings fort. Eine singuläre Kreuzung können wir hierin durch $\sigma_i^\bullet = \sigma_i^{+1} - \sigma_i^{-1}$ darstellen. Da c^2 eine Deformation der Identität ist, liegt $\rho(\sigma_i^\bullet) = c_i^{+1} - c_i^{-1}$ im Ideal $\hat{I}$. Das Bild eines m-singulären Zopfes $\beta = \beta_1 \sigma_{i_1}^\bullet \beta_2 \sigma_{i_2}^\bullet \cdots \beta_m \sigma_{i_m}^\bullet \beta_{m+1}$ liegt demnach in der m-ten Potenz $\hat{I}^m$, und seine Spur liegt im Ideal I^m des Rings R.

Jeden $(m+1)$-singulären Knoten K können wir als Abschluss eines geeigneten $(m+1)$-singulären Zopfes darstellen. Es folgt $P_m(K) = 0$. □

BEISPIEL 6.22. Wir betrachten die erweiterte R-Matrix aus obigem Beispiel 6.18 für den Ring $R = \mathbb{Q}[[h]]$ und $q = 1 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots$. Bezüglich des Ideals (h) ist die R-Matrix c eine Deformation der Tauschung, und P_m ist vom Typ $\leq m$. Dies deckt sich mit Proposition 6.7: Dort hatten wir gezeigt, dass die Koeffizienten des Jones-Polynoms in der Parametrisierung $t^{\frac{1}{2}} = q$ Vassiliev-Invarianten sind.

BEISPIEL 6.23. Die R-Matrizen aus Abschnitt 2.8 sind keine Deformationen der Identität, und die zugehörigen Färbungszahlen sind keine Invarianten von endlichem Typ (vgl. Kapitel 9).

BEMERKUNG 6.24. Bislang ist keine Vassiliev-Invariante bekannt, die einen Knoten von seinem Reversen unterscheidet. Es sei deshalb noch einmal betont, dass manche Invarianten, die mittels R-Matrizen gewonnen werden, sehr wohl die Orientierung von Knoten erkennen. Einen solchen Fall haben wir in Beispiel 3.7 gesehen: Die dort angegebene Färbungszahl zur Mathieu-Gruppe M_{11} unterscheidet zum Beispiel den Knoten 8_{17} von seinem Reversen.

BEMERKUNG 6.25. Die Komplexität der Berechnung von $\rho(\beta)$ für einen Zopf β hängt von der Dimension $d = \dim V$ und vor allem vom Zopfindex n ab. Die Darstellungsmatrix hat $d^n \times d^n$ Einträge, der Aufwand an Speicher und Rechenzeit ist demnach exponentiell im Zopfindex n. Hingegen ist bei festem Zopfindex der Zeitaufwand nur linear in der Kreuzungszahl, das heißt in der Länge des Zopfwortes. Dies entspricht der Situation für Färbungszahlen.

Die Verbesserung vom Zopfindex zur Brückenzahl als Komplexitätsmaß lässt sich ebenfalls erreichen: Die hier diskutierten Darstellungen der Zopfgruppen lassen sich zu Darstellungen der Tangle-Kategorie erweitern. Die einheitliche Behandlung führt auf natürliche Weise zu Quantengruppen bzw. Quasi-Hopf-Algebren mit universeller R-Matrix [95, 56].

Deformationen von Färbungsmatrizen. In Abschnitt 2.8 wurden für die Färbungszahlen geeignete Zopfgruppen-Darstellungen angegeben. Die dort konstruierten R-Matrizen sind keine Deformationen der Identität. Es stellt sich die Frage, ob es sich um isolierte Lösungen der Yang-Baxter-Gleichung handelt.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir die Konjugationsklasse $Q = \{s_1, s_2, s_3\}$ der Spiegelungen in der Diedergruppe D_3. (Dies entspricht der 3-Färbung.) Sei $V = \mathbb{Q}[Q]$ der Vektorraum mit Basis Q. Nachfolgend abgebildet ist die R-Matrix der Abbildung $s_i \otimes s_j \mapsto s_j \otimes (s_j s_i s_j)$. Wie wir in Abschnitt 2.8 gesehen haben, definiert diese Permutationsmatrix einen Yang-Baxter-Operator.

$$c := \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Lösung gehört zu einer Familie von Matrizen $\tilde{c}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $\tilde{c}(1, 1, 1) = c$.

$$\tilde{c}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) := \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_2/\alpha_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_3/\alpha_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_1/\alpha_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_3/\alpha_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_1/\alpha_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_2/\alpha_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Für jede Wahl von Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ ist dies eine Lösung der Yang-Baxter-Gleichung. Dies ist ein Spezialfall der Beobachtung, dass sich R-Matrizen immer durch Basiswechsel transformieren lassen:

PROPOSITION 6.26. *Sei $\phi : V \to V$ ein Automorphismus und ϕ_n sein n-faches Tensorprodukt $\phi^{\otimes n}$. Ist $c : V \otimes V \to V \otimes V$ eine Lösung der Yang-Baxter-Gleichung, dann auch $\tilde{c} = \phi_2 \circ c \circ \phi_2^{-1}$. Die induzierten Darstellungen $\rho, \tilde{\rho} : \mathrm{Br}(n) \to \mathrm{Aut}(V^{\otimes n})$ sind dann ebenfalls konjugiert, denn $\tilde{\rho} = \phi_n \circ \rho \circ \phi_n^{-1}$. Ist (c, μ) eine erweiterte Lösung, dann auch $(\tilde{c}, \tilde{\mu})$ mit $\tilde{\mu} = \phi \circ \mu \circ \phi^{-1}$. Die zugehörigen Verschlingungs-Invarianten P und $\tilde{P}$ sind identisch.* □

Das obige Beispiel entsteht durch den Automorphismus $\phi(s_i) = \alpha_i \cdot s_i$. Wie diese Beobachtung lehrt, sollte man den Lösungsraum $\mathrm{YB}(V) \subset \mathrm{Aut}(V \otimes V)$ der Yang-Baxter-Gleichung nur modulo $\mathrm{Aut}(V)$ betrachten.

BEMERKUNG 6.27. Zum Jones-Polynom gehört eine Familie von R-Matrizen $c(q)$, und diese beschreibt eine Kurve im Quotientenraum $\mathrm{YB}(V)/\mathrm{Aut}(V)$, die durch die Tauschung $\tau = c(1)$ läuft. Das obige Beispiel $\tilde{c}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ hingegen beschreibt in $\mathrm{YB}(V)/\mathrm{Aut}(V)$ nur einen Punkt. Es ist nicht bekannt, ob Färbungsmatrizen auch echte Deformationen besitzen und ob diese zu veränderten Verschlingungs-Invarianten führen können.

6.6. Vassiliev-Invarianten aus der Artin-Magnus-Darstellung

Dieser Abschnitt behandelt Vassiliev-Invarianten von Zöpfen und verbindet hierzu zwei klassische Darstellungen: die Artin-Darstellung der Zopfgruppen als Automorphismen einer freien Gruppe und die Magnus-Darstellung von freien Gruppen in die Einheitengruppe eines Potenzreihenrings. Die Komposition der beiden Darstellungen erlaubt es, Zöpfe in Potenzreihen zu entwickeln. Ihre Koeffizienten sind Vassiliev-Invarianten und klassifizieren Zöpfe vollständig. Dieses Ergebnis ist dem Artikel [8] von D. Bar-Natan entnommen.

Die Artin-Darstellung. Sei $\mathrm{Fr}(n)$ die von $x_1, \dots, x_n$ frei erzeugte Gruppe. Die Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n)$ operiert darauf durch

$$\xi_i(x_j) = \begin{cases} x_{j+1} & \text{für } j = i, \\ x_j^{-1} x_{j-1} x_j & \text{für } j = i+1, \\ x_j & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Automorphismen erfüllen die Zopfrelationen, das bedeutet, die Abbildung $\xi : \mathrm{Br}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Fr}(n))$ mit $\xi(\sigma_i) = \xi_i$ definiert einen Gruppenhomomorphismus. Wir nennen ξ die *Artin-Darstellung* der Zopfgruppen.

SATZ 6.28 (Artin [3]). *Die Darstellung* $\xi : \mathrm{Br}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Fr}(n))$ *ist injektiv.* □

Dieser Satz löst das Wortproblem in der Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n)$: Zu zwei Zöpfen α und β, gegeben als Wörter in den Erzeugern $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, bestimmt man die Automorphismen $\xi(\alpha)$ und $\xi(\beta)$. Diese lassen sich leicht vergleichen, denn in der freien Gruppe ist das Wortproblem trivial.

BEMERKUNG 6.29. Die Artin-Darstellung erlangt ihre geometrische Bedeutung, wenn man sie als Operation der Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n)$ auf der Fundamentalgruppe der n-fach punktierten Ebene betrachtet [9, 17]. Dies knüpft eine Verbindung zur Fundamentalgruppe von Verschlingungen: Ist $L = [\alpha]$ der Abschluss des Zopfes α, dann hat das Komplement $\mathbb{S}^3 \setminus L$ die Fundamentalgruppe

$$\pi(L) = \langle\, x_1, \dots, x_n \mid x_1 = \alpha x_1, \dots, x_n = \alpha x_n \,\rangle.$$

Dieser Quotient hat eine natürliche Interpretation: Wenn eine Gruppe A auf einer weiteren Gruppe G operiert, dann bezeichnet G_A die *ko-invariante* Gruppe. Dies ist der größte Quotient, auf dem A trivial operiert; er entsteht durch die Quotientenbildung nach dem von allen Produkten $g^{-1}g^{\alpha}$ erzeugten Normalteiler, wobei $g \in G$ und $\alpha \in A$. Wenn wir zum Beispiel die Operation von G auf sich selbst via Konjugation betrachten, dann ist G_G die Abelschmachung.

PROPOSITION 6.30. *Für jeden Zopf* $\alpha \in \mathrm{Br}(n)$ *ist die Fundamentalgruppe der Verschlingung* $[\alpha]$ *isomorph zur ko-invarianten Gruppe* $\mathrm{Fr}(n)_\alpha$. □

Die Magnus-Darstellung. Um die Artin-Darstellung in Potenzreihen zu entwickeln, betrachten wir den Potenzreihenring $R = \mathbb{Z}\langle\!\langle y_1, \dots, y_n \rangle\!\rangle$ in den nichtkommutierenden Variablen $y_1, \dots, y_n$. Dieser Ring enthält das von $y_1, \dots, y_n$ frei erzeugte Monoid M. Die Elemente von R sind formale Potenzreihen $\sum_{m \in M} f^m \cdot m$ mit Koeffizienten $f^m \in \mathbb{Z}$ und Monomen $m \in M$.

Das Monoid M ist durch die Wortlänge graduiert, und dies überträgt sich auf den Monoidring $\mathbb{Z}M$. Der Potenzreihenring R ist die Komplettierung von $\mathbb{Z}M$ bezüglich dieser Graduierung. In R sei $\mathcal{F}^k$ das Ideal aller Elemente $\sum_{|m| \ge k} f^m \cdot m$. Dies bildet eine absteigende Filtrierung, und der Quotient $\mathcal{F}^k / \mathcal{F}^{k+1}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}M_k$, dem linearen Spann der Monome der Länge k.

Das Element $1 + y_i$ besitzt in R das Inverse $1 - y_i + y_i^2 - y_i^3 + \dots$. Es existiert also genau ein Gruppenhomomorphismus $\mu : \mathrm{Fr}(n) \to R^\times$ mit $\mu(x_i) = 1 + y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wir nennen μ die *Magnus-Darstellung* der freien Gruppe $\mathrm{Fr}(n)$.

SATZ 6.31 (Magnus [73]). *Die Darstellung* $\mu : \mathrm{Fr}(n) \to R^\times$ *ist injektiv.* □

Zu jedem Gruppenautomorphismus $\varphi : \mathrm{Fr}(n) \to \mathrm{Fr}(n)$ existiert genau ein Ringautomorphismus $\bar\varphi : R \to R$ mit $\bar\varphi\mu = \mu\varphi$, denn dies entspricht gerade der Bedingung $\bar\varphi(y_i) = \mu\varphi(x_i) - 1$ für $i = 1, \dots, n$. Der induzierte Homomorphismus $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fr}(n)) \to \mathrm{Aut}(R)$ ist injektiv.

KOROLLAR 6.32. *Die Komposition* $\bar\xi : \mathrm{Br}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Fr}(n)) \to \mathrm{Aut}(R)$ *ist injektiv.* □

Entwicklung in Vassiliev-Invarianten. Nach den obigen Ausführungen operiert die Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n)$ auf dem Ring R und die Abbildung

$$\mathrm{Br}(n) \to R^n \quad \text{mit} \quad \beta \mapsto (\beta y_1, \dots, \beta y_n)$$

ist injektiv. Für jeden Zopf β erhalten wir Entwicklungen $\beta y_i = \sum_{m \in M} v_i^m \cdot m$. Die Koeffizienten definieren eine Familie von Abbildungen $v_i^m : \mathrm{Br}(n) \to \mathbb{Z}$ für $i = 1, \dots, n$ und $m \in M$. Aufgrund des obigen Korollars ist der Zopf β durch seine Koeffizienten $v_i^m(\beta)$ eindeutig bestimmt.

SATZ 6.33. *Für jedes Monom m ist $v_i^m : \mathrm{Br}(n) \to \mathbb{Z}$ eine Vassiliev-Invariante vom Grad $< |m|$. Zöpfe werden daher von ihren Vassiliev-Invarianten klassifiziert.*

BEWEIS: Sei $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(R)$ der Ring der $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen $\varphi : R \to R$ mit $\varphi(\mathcal{F}^k) \subset \mathcal{F}^k$ für alle k. Darin sei J^p das Ideal aller Endomorphismen φ mit $\varphi(\mathcal{F}^k) \subset \mathcal{F}^{k+p}$. Den Gruppenhomomorphismus $\bar{\xi} : \mathrm{Br}(n) \to \mathrm{Aut}(R)$ setzen wir linear zu einem Ringhomomorphismus $\bar{\xi} : \mathbb{Z}\,\mathrm{Br}(n) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(R)$ fort. Wie in Abschnitt 6.3 sei $I \subset \mathbb{Z}\,\mathrm{Br}(n)$ das Vassiliev-Ideal $(\sigma_i^{+1} - \sigma_i^{-1})$. Wir zeigen $\bar{\xi}(I) \subset J$.

Die Automorphismen $\bar{\xi}_i = \bar{\xi}(\sigma_i)$ nehmen auf R die folgende Gestalt an:

$$\bar{\xi}_i(y_j) = \begin{cases} y_{j+1} & \text{für } j = i, \\ y_{j-1} + y_{j-1}y_j - y_j y_{j-1} + \dots & \text{für } j = i+1, \\ y_j & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das bedeutet, $\bar{\xi}_i$ operiert auf $\mathcal{F}^k/\mathcal{F}^{k+1}$ als Transposition $y_i \leftrightarrow y_{i+1}$. Gleiches gilt folglich für den inversen Automorphismus. Daraus folgt $(\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_i^{-1})(\mathcal{F}^k) \subset \mathcal{F}^{k+1}$, oder anders formuliert $\bar{\xi}(\sigma_i^{+1} - \sigma_i^{-1}) \in J$. Damit ist $\bar{\xi}(I) \subset J$ bewiesen.

Da $\bar{\xi} : \mathbb{Z}\,\mathrm{Br}(n) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(R)$ ein Ringhomomorphismus ist, folgt $\bar{\xi}(I^p) \subset J^p$ für jedes p. Für jedes Element $\beta \in I^p$ gilt also $\bar{\xi}(\beta)(y_i) \in \mathcal{F}^{p+1}$, das heißt, für jedes Monom m der Länge $|m| \le p$ verschwindet der Koeffizient $v_i^m(\beta)$. Die Abbildung $v_i^m : \mathrm{Br}(n) \to \mathbb{Z}$ verschwindet demnach auf I^p und ist daher eine Vassiliev-Invariante vom Grad $< p$. □

BEMERKUNG 6.34. Der Satz stellt eine enorme Fülle von Vassiliev-Invarianten $v_i^m : \mathrm{Br}(n) \to \mathbb{Z}$ zur Verfügung. Leider sind sie nicht Markov-invariant, das heißt, ihr Wert ändert sich bei Konjugation oder Stabilisation des Zopfes. Um daraus Verschlingungs-Invarianten $v : \mathcal{L} \to \mathbb{Z}$ zu konstruieren, müsste man Markov-invariante Polynome in den v_i^m bilden. Das ist jedoch selbst in kleinen Graden nicht einfach, und soweit ich weiß, ist dieser Ansatz noch nicht bearbeitet worden.

BEMERKUNG 6.35. Es ist nicht bekannt, ob die Invarianten v_i^m alle Vassiliev-Invarianten von Zöpfen erzeugen. Der obige Satz macht hierüber keine Aussage. (Als Analogie: Die Polynome z^2 und z^3 trennen zwar alle Punkte von $\mathbb{C}$, erzeugen aber nicht die gesamte Polynomalgebra.)

Los que gobiernan ínsulas,
por lo menos, han de saber gramática.
Miguel de Cervantes, *Don Quijote*

KAPITEL 7

Der Kontsevich-Isomorphismus

Zum Verständnis der Vassiliev-Theorie ist der Kontsevich-Isomorphismus grundlegend. Dieses Kapitel erläutert daher die Hopf-Algebra der Knoten und der Sehnendiagramme. Diese sind nach dem Satz von Kontsevich über $\mathbb{Q}$ isomorph und dual zur Algebra der Vassiliev-Invarianten.

7.1. Die Hopf-Algebra der Knoten

Wir wählen einen kommutativen Ring R mit Eins, über dem wir alle folgenden Konstruktionen ausführen. Wir denken hier vor allem an $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{F}_p$ oder $\mathbb{Q}$. Für eine Mannigfaltigkeit M betrachten wir die Menge der Knotentypen $\mathcal{K}M$ und ihre Vassiliev-Filtrierung $\mathcal{K}_0M \supset \mathcal{K}_1M \supset \mathcal{K}_2M \supset \dots$. Die Filtrierungsquotienten bezeichnen wir mit $\operatorname{gr}_n \mathcal{K}M = \mathcal{K}_nM/\mathcal{K}_{n+1}M$ und bilden daraus den graduierten Modul $\operatorname{gr}\mathcal{K}M = \bigoplus_{n\ge 0} \operatorname{gr}_n \mathcal{K}M$. In Grad 0 lässt er sich sehr einfach beschreiben: Es gilt $\operatorname{gr}_0 \mathcal{K}M = RC_0$, und die Basis C_0 ist die Menge der Homotopieklassen von Kurven in M. Dies entspricht der Menge der Konjugationsklassen in $\pi_1(M)$.

Knoten in der Sphäre. Wir wenden uns im Folgenden dem besonderen Fall der 3-Sphäre zu und betrachten die Menge $\mathcal{K} = \mathcal{K}\mathbb{S}^3$. Die verbundene Summe definiert eine Monoidstruktur $(\mathcal{K}, \sharp, \bigcirc)$ auf der Menge der Knotentypen. Der freie R-Modul $R\mathcal{K}$ wir dadurch zu einer Algebra; Produkt und Eins schreiben wir als

$$\begin{aligned} &\mu : R\mathcal{K} \otimes R\mathcal{K} \to R\mathcal{K}, \quad && \mu(K, K') = K \sharp K' \qquad \text{und} \\ &\eta : R \to R\mathcal{K}, && \eta(1) = \bigcirc. \end{aligned}$$

Außerdem können wir eine Komultiplikation und Koeins definieren:

$$\begin{aligned} &\Delta : R\mathcal{K} \to R\mathcal{K} \otimes R\mathcal{K}, \quad && \Delta(K) = K \otimes K \qquad \text{und} \\ &\varepsilon : R\mathcal{K} \to R, && \varepsilon(K) = 1 \qquad \text{für alle Knoten } K. \end{aligned}$$

Beide Strukturen sind verträglich, denn es gilt $\Delta(K \sharp K') = \Delta(K) \sharp \Delta(K')$.

Damit erhält $R\mathcal{K}$ die Struktur einer kommutativen und kokommutativen Hopfalgebra (ohne Antipode). Das ist soweit nichts Besonderes, denn diese Konstruktion lässt sich mit jedem Monoid durchführen. Interessant ist aber, dass die Hopf-Algebrastruktur mit der Vassiliev-Filtrierung verträglich ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{K}_m \otimes \mathcal{K}_n) &\subset \mathcal{K}_{m+n} \qquad \text{und} \\ \Delta(\mathcal{K}_m) &\subset \sum_{p+q=m} \mathcal{K}_p \otimes \mathcal{K}_q. \end{aligned}$$

Die Quotienten $\operatorname{gr}_n^R \mathcal{K}\mathbb{S}^3 = \mathcal{K}_n / \mathcal{K}_{n+1}$ definieren einen graduierten R-Modul, den wir mit $\operatorname{gr}^R \mathcal{K}\mathbb{S}^3$ bezeichnen – oder kurz mit $\operatorname{gr}\mathcal{K}$, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.

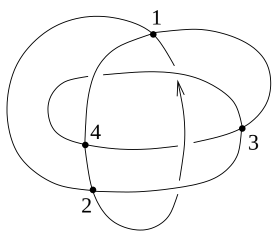
LEMMA 7.1. *Der R-Modul $\operatorname{gr}\mathcal{K}\mathbb{S}^3$ ist eine graduierte Hopf-Algebra und als solche strikt kommutativ, kokommutativ, zusammenhängend, mit einer Antipode ausgestattet und in jedem Grad endlich erzeugt.*

BEWEIS: Zur Hopf-Algebrastruktur muss man die zuvor genannten Schritte nachrechnen; die Übertragung vom filtrierten Modul $\mathcal{K}$ auf den graduierten Modul $\operatorname{gr}\mathcal{K}$ ist dann klar. Dass $\operatorname{gr}\mathcal{K}$ zusammenhängend ist, bedeutet, dass η einen Isomorphismus zwischen R und $\operatorname{gr}_0\mathcal{K}$ stiftet. Injektivität folgt aus $\varepsilon\eta = \mathrm{id}_R$; die Surjektivität folgt aus $\pi_1(\mathbb{S}^3) = \{1\}$ bzw. der Tatsache, dass man jeden Knoten durch Kreuzungswechsel in den trivialen Knoten überführen kann.

Die Existenz einer Antipode gilt für jede graduierte, zusammenhängende Hopf-Algebra, siehe [74]. Aus der Konstruktion im nächsten Abschnitt wird sich ergeben, dass $\operatorname{gr}\mathcal{K}$ in jedem Grad endlich erzeugt ist. □

7.2. Die Hopf-Algebra der Sehnendiagramme

Wenn zwei n-singuläre Knoten K, K' sich nur durch einen Kreuzungswechsel unterscheiden, dann gilt für ihre Auflösungen $\delta K \equiv \delta K'$ modulo $\mathcal{K}_{n+1}$. Das heißt, sie definieren dasselbe Element in $\operatorname{gr}_n \mathcal{K}$. Um eine kombinatorische Beschreibung der Hopf-Algebra $\operatorname{gr}\mathcal{K}$ zu erhalten, betrachten wir also singuläre Knoten modulo Kreuzungswechsel. Diese sind allein durch die Konfiguration der Doppelpunkte bestimmt.



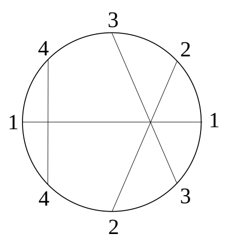


ABBILDUNG 7.1. Ein singulärer Knoten und sein Sehnendiagramm

Ist $f : \mathbb{S}^1 \looparrowright \mathbb{S}^3$ eine Parametrisierung eines n-singulären Knotens, dann markieren wir auf der Kreislinie $\mathbb{S}^1$ die Urbildpaare der n Singularitäten. Wir zeichnen dies als Kreislinie mit n Sehnen und nennen dies ein *Sehnendiagramm*.

Wir betrachten Sehnendiagramme als äquivalent, wenn sie durch einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus der Kreislinie ineinander übergehen. (Dies entspricht einer Umparametrisierung des singulären Knotens.)

Sei $\mathcal{A}'_n$ der freie R-Modul über allen Sehnendiagrammen mit genau n Sehnen. Wir erklären die Abbildung $\delta' : \mathcal{A}'_n \to \operatorname{gr}_n \mathcal{K}$ wie folgt: Zu einem Sehnendiagramm C sei K ein Knoten mit der durch C beschriebenen Konfiguration von Doppelpunkten. Die Abbildung $\delta'(C) = \delta K$ ist modulo $\mathcal{K}_{n+1}$ wohldefiniert.

LEMMA 7.2. *Die Abbildung* $\delta' : \mathcal{A}'_n \to \operatorname{gr}_n \mathcal{K}$ *ist surjektiv. Mit* $\mathcal{A}'_n$ *ist daher auch* $\operatorname{gr}_n \mathcal{K}$ *endlich erzeugt.* □

Der Kern von δ' umfasst zwei Arten von offensichtlichen Relationen, die Ein-Term- und Vier-Terme-Relation genannt werden. Diese ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden topologischen Relationen, wie in Abbildung 7.2 und 7.3 zu sehen ist.

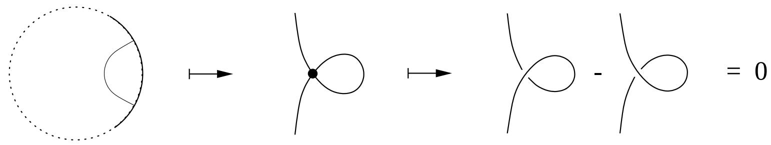


ABBILDUNG 7.2. Die Ein-Term-Relation (1T)

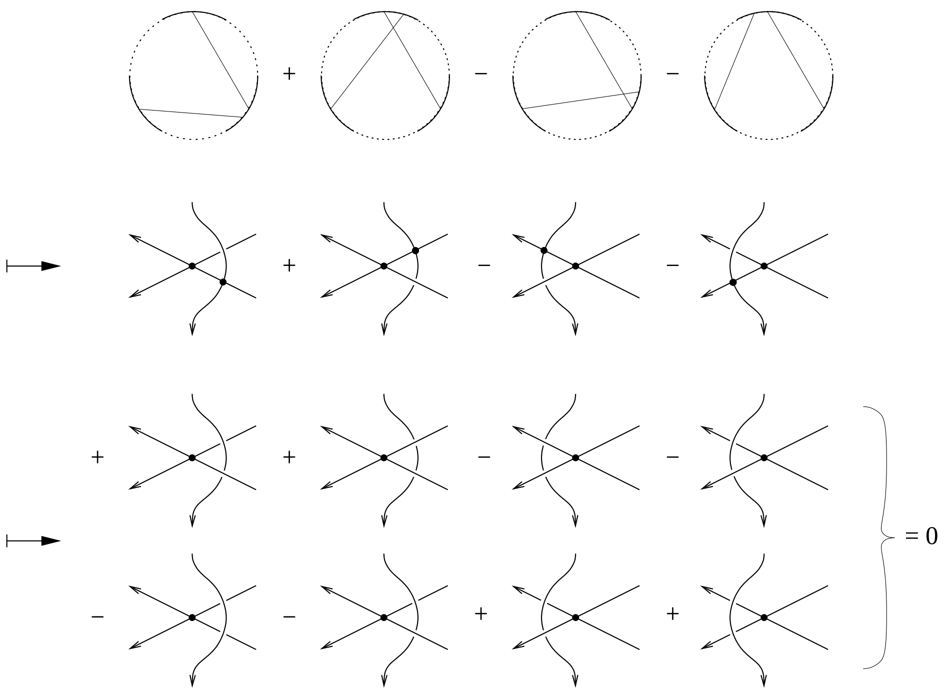


ABBILDUNG 7.3. Die Vier-Terme-Relation (4T)

Sei $\langle 1T, 4T \rangle$ der von den 1T- und 4T-Relationen erzeugte Untermodul von $\mathcal{A}'_n$, und sei $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}'_n / \langle 1T, 4T \rangle$ der Quotient. Nach Konstruktion erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus $\delta : \mathcal{A}_n \twoheadrightarrow \operatorname{gr}_n \mathcal{K}$.

Hopf-Algebrastruktur. Wir können den R-Modul $\mathcal{A} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{A}_n$ ebenfalls mit einer Hopf-Algebrastruktur ausstatten. Die Multiplikation ist definiert durch das Verschmelzen von Sehnendiagrammen, wie in Abb. 7.4 skizziert. (Dies ist das Analogon zur verbundenen Summe von Knoten.) Aufgrund der 4T-Relation ist diese Verknüpfung wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Punkte, an denen die beiden Diagramme aufgeschnitten werden. Das so definierte Produkt ist assoziativ und kommutativ, das Einselement ist das Diagramm ohne Sehnen.

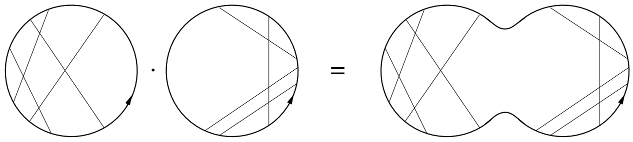


ABBILDUNG 7.4. Produkt von zwei Sehnendiagrammen

Das Koprodukt $\Delta : \mathcal{A}_n \to \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{A}_p \otimes \mathcal{A}_q$ erklären wir wie folgt: Zu einem Sehnendiagramm C sei S die Menge seiner Sehnen, und für $I \subset S$ bezeichne C_I das Sehnendiagramm, welches nur aus den Sehnen in I besteht. Wir definieren

$$\Delta(C) := \sum_{I\subset S} C_I \otimes C_{S\setminus I}.$$

Das bedeutet, $\Delta(C)$ ist die Summe aller Möglichkeiten, das Sehnendiagramm C in zwei Teildiagramme zu zerlegen. Diese Abbildung ist zunächst auf $\mathcal{A}'_n$ definiert; da sie 1T- und 4T-Relationen auf ebensolche abbildet, können wir zum Quotienten $\mathcal{A}_n$ übergehen. Die Koeins ist gegeben durch $\varepsilon(\bigcirc) = 1$ für das Diagramm ohne Sehnen und $\varepsilon(C) = 0$ für alle anderen Sehnendiagramme.

LEMMA 7.3. *Der R-Modul $\mathcal{A} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{A}_n$ ist eine graduierte Hopf-Algebra und als solche strikt kommutativ, kokommutativ, zusammenhängend, mit einer Antipode ausgestattet und in jedem Grad endlich erzeugt.* □

KOROLLAR 7.4. *Über einem Körper der Charakteristik 0 ist die Hopf-Algebra $\mathcal{A}$ isomorph zur symmetrischen Algebra über ihren primitiven Elementen $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$. Dabei ist $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}) = \{\, x \in \mathcal{A} \mid \Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x \,\}$.* □

LEMMA 7.5. *Die Abbildung $\delta : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \operatorname{gr}\mathcal{K}$ ist ein Morphismus von graduierten Hopf-Algebren.* □

Die Hopf-Algebra $\mathcal{A}$ trägt weitere Strukturen und ist eingehend untersucht worden [6]. Viele Fragen über ihre Erzeuger sind allerdings bis heute offen. Für die Dimension von $\mathcal{A}_n^{\mathbb{Q}}$ bzw. $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}_n^{\mathbb{Q}})$ sind untere und obere Schranken bekannt, sie klaffen jedoch weit auseinander. In kleinen Graden ließen sich die Dimensionen nur durch aufwendige Computer-Berechnungen ermitteln, die $\mathcal{A}_n$ wie in obiger Definition explizit als Diagramme modulo Relationen konstruieren. Die Dimensionen wurden von D. Bar-Natan [6] bis Grad 9 und von J. Kneissler [61] bis Grad 12 bestimmt:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathcal{A}_n^{\mathbb{Q}}$	1	0	1	1	3	4	9	14	27	44	80	132	232
$\dim \mathrm{Prim}(\mathcal{A}_n^{\mathbb{Q}})$	1	0	1	1	2	3	5	8	12	18	27	39	55

Spiegelung und Reversion übertragen sich von $\mathcal{K}$ auf die graduierte Hopf-Algebra $\operatorname{gr}\mathcal{K}$. Die Spiegelung wird zur Vorzeichenumkehr gemäß $u^\times = (-1)^n u$ für jedes Element $u \in \operatorname{gr}_n \mathcal{K}$, und die gleiche Formel definiert die Spiegelung auf $\mathcal{A}$. Die Reversion operiert auf Sehnendiagrammen durch Orientierungsumkehr des Kreises, d.h. die Fußpunkte der Sehnen werden in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen. In kleinen Graden ist diese Operation die Identität auf $\mathcal{A}$. Über $\mathbb{Q}$ folgt dies bis Grad 12 aus den Ergebnissen von J. Kneissler. In Graden größer als 12 ist dies bislang nicht bekannt.

7.3. Die Algebra der Vassiliev-Invarianten

Nachdem wir oben die Hopf-Algebren $\operatorname{gr}\mathcal{K}$ und $\mathcal{A}$ konstruiert haben, erläutern wir nun den Zusammenhang zur Algebra der Vassiliev-Invarianten. Hierzu sei $R\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \supset \mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \dots$ die Vassiliev-Filtrierung und A ein Modul über R. Der R-Modul der Vassiliev-Invarianten vom Grad $\leq n$ ist definiert als

$$\mathcal{V}^n = \mathcal{V}^n_A := \{\, v : \mathcal{K} \to A \mid v(\mathcal{K}_{n+1}) = 0 \,\} \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{K}_0/\mathcal{K}_{n+1}, A).$$

Dies bildet eine aufsteigende Filtrierung $0 = \mathcal{V}^0 \subset \mathcal{V}^1 \subset \mathcal{V}^2 \subset \dots$ der Menge $\mathcal{V} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{V}^n$ aller Vasiliev-Invarianten.

Wenn A eine R-Algebra ist, dann können Vassiliev-Invarianten multipliziert werden. Dadurch wird $\mathcal{V}$ zu einer filtrierten Algebra; die Filtrierungsquotienten $\operatorname{gr}^n \mathcal{V} := \mathcal{V}^n/\mathcal{V}^{n-1}$ bilden eine graduierte Algebra $\operatorname{gr}\mathcal{V} = \bigoplus_{n\geq 0} \operatorname{gr}^n \mathcal{V}$.

DEFINITION 7.6. Jede Vassiliev-Invariante $v : \mathcal{K} \to A$ vom Grad $\leq n$ lässt sich mittels der Surjektion $\delta : \mathcal{A}_n \twoheadrightarrow \mathcal{K}_n/\mathcal{K}_{n+1}$ zu einer linearen Abbildung $w : \mathcal{A}_n \to A$ zurückziehen. Sie wird das *Gewichtsystem* von v genannt.

Diese Konstruktion definiert eine injektive Abbildung $\operatorname{gr}^n \mathcal{V} \to \operatorname{Hom}(\mathcal{A}_n, A)$. Das Hauptproblem besteht in dem Nachweis, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist. Das folgende Lemma hält zunächst fest, dass $\operatorname{gr}^n \mathcal{V}$ und $\operatorname{gr}_n \mathcal{K}$ dual zueinander sind. Es fehlt schließlich noch der Isomorphismus $\operatorname{gr}\mathcal{K} \cong \mathcal{A}$. Der Satz von Kontsevich löst dieses Problem für Charakteristik 0.

LEMMA 7.7. *Ist R ein Körper, dann gilt* $\operatorname{gr}^n_A \mathcal{V} \cong \operatorname{Hom}(\operatorname{gr}^R_n \mathcal{K}, A)$.

BEWEIS: Die Filtrierung $\{\mathcal{V}^n\}$ entsteht durch Dualisieren der Filtrierung $\{\mathcal{K}_n\}$. Um dies auf die Quotienten zu übertragen, betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow \mathcal{K}_0/\mathcal{K}_n \longleftarrow \mathcal{K}_0/\mathcal{K}_{n+1} \xleftarrow{\;i\;} \mathcal{K}_n/\mathcal{K}_{n+1} \longleftarrow 0.$$

Dualisiert wird daraus die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}^{n-1} \longrightarrow \mathcal{V}^n \xrightarrow{\;i^*\;} \operatorname{Hom}(\operatorname{gr}_n \mathcal{K}, A).$$

Die Abbildung $\bar{i}^* : \operatorname{gr}^n \mathcal{V} \to \operatorname{Hom}(\operatorname{gr}_n \mathcal{K}, A)$ ist injektiv. Sie ist surjektiv, wenn $\operatorname{gr}_n \mathcal{K}$ projektiv ist. Über einem Körper ist $\bar{i}^*$ daher stets ein Isomorphismus. $\square$

7.4. Der Kontsevich-Isomorphismus

Die drei Algebren $\operatorname{gr}\mathcal{V}$, $\operatorname{gr}\mathcal{K}$ und $\mathcal{A}$ spielen in der Vassiliev-Theorie eine entscheidende Rolle. Der folgende Satz von M. Kontsevich besagt, dass diese drei Objekte über $\mathbb{Q}$ isomorph sind. Zur Formulierung des Satzes betrachten wir neben der Algebra $\mathcal{A} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{A}_n$ auch ihre Komplettierung $\hat{\mathcal{A}} = \prod_{n\geq 0} \mathcal{A}_n$. Diese ist vollständig bezüglich ihrer Filtrierung $\mathcal{F}_m = \prod_{n \geq m} \mathcal{A}_n$. Die Quotienten sind $\mathcal{F}_m / \mathcal{F}_{m+1} = \mathcal{A}_m$, das graduierte Objekt zu $\hat{\mathcal{A}}$ ist demnach $\operatorname{gr} \hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Die Hopf-Algebrastruktur von $\mathcal{A}$ überträgt sich auf $\hat{\mathcal{A}}$.

SATZ 7.8 (Kontsevich [62,6]). *Sei $R \supset \mathbb{Q}$ ein Ring und $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}^R$ die Algebra der Sehnendiagramme über R. Dann existiert eine R-lineare Abbildung $Z : R\mathcal{K} \to \hat{\mathcal{A}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Z ist ein Homomorphismus von Hopf-Algebren.*
2. *Z respektiert die Filtrierungen, das heißt $Z(\mathcal{K}_m) \subset \mathcal{F}_m$ für alle m.*
3. *Die induzierte Abbildung $\operatorname{gr} Z : \operatorname{gr} \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ ist invers zu $\delta : \mathcal{A} \to \operatorname{gr} \mathcal{K}$.* □

BEMERKUNG 7.9. Kontsevich konstruiert in seinem Beweis ein Integral über den komplexen Zahlen, und dieses definiert die gewünschte Abbildung $Z^{\mathbb{C}} : \mathcal{K} \to \hat{\mathcal{A}}^{\mathbb{C}}$. Nach den Ergebnissen von T.Q. Le und J. Murakami [67,68] sind die Koeffizienten von $Z^{\mathbb{C}}$ jedoch sämtlich rational. Die Konstruktion liefert daher eine Abbildung $Z^{\mathbb{Q}} : \mathcal{K} \to \hat{\mathcal{A}}^{\mathbb{Q}}$. Für einen Ring $R \supset \mathbb{Q}$ leistet $Z^R = Z^{\mathbb{Q}} \otimes R$ das Gewünschte.

BEMERKUNG 7.10. Nach Aussage (2) des Satzes ist $Z_n : \mathcal{K} \to \mathcal{A}_n$ eine Vassiliev-Invariante vom Grad n. Aussage (3) impliziert, dass sich jede Vassiliev-Invariante $v : \mathcal{K} \to A$ vom Grad $\leq n$ als $v = w_n \circ Z_n + v'$ darstellen lässt, wobei $w_n : \mathcal{A}_n \to A$ das Gewichtsystem von v ist und v' eine Vassiliev-Invariante kleineren Grades. Per Induktion lässt sich somit jede Vassiliev-Invariante als Summe

$$v = w_n \circ Z_n + w_{n-1} \circ Z_{n-1} + \cdots + w_0 \circ Z_0$$

darstellen. Die Abbildung Z wird daher auch *universelle* Vassiliev-Invariante genannt. Die Aussage, dass $\operatorname{gr}^n_{\mathbb{Q}} \mathcal{V} \to \operatorname{Hom}(\mathcal{A}^{\mathbb{Q}}_n, \mathbb{Q})$ ein Isomorphismus ist, wird auch als Fundamentalsatz der Vassiliev-Theorie bezeichnet.

BEMERKUNG 7.11. Die Theorie der Vassiliev-Invarianten wurde von Knoten auf Verschlingungen und Tangles ausgedehnt [67,68] und mittels Chirurgie-Darstellungen auch auf 3-Mannigfaltigkeiten [69]. Die Beschreibung durch Sehnendiagramme und der Kontsevich-Isomorphismus spielen dabei eine zentrale Rolle.

7.5. Offene Fragen

Es ist nicht bekannt, ob $\delta : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \operatorname{gr} \mathcal{K}$ auch über $\mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist. Gleiches gilt für $\operatorname{gr} \mathcal{V} \hookrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{gr} \mathcal{K}, A)$ bzw. $\operatorname{gr} \mathcal{V} \hookrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{A}, A)$. Über $\mathbb{Q}$ sind alle drei Abbildungen Isomorphismen, insbesondere sind die freien Anteile von $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ und $\operatorname{gr}^{\mathbb{Z}} \mathcal{K}$ isomorph. Es ist nicht bekannt, ob Torsion vorhanden ist.

Ebenso ungelöst ist die Frage, ob die Vassiliev-Filtrierung gegen 0 konvergiert, das heißt, ob $\bigcap \mathcal{K}_n = \{0\}$ gilt. Dualisiert wird hieraus die Frage, ob zu je zwei Knoten $K \neq K'$ eine Vassiliev-Invariante $v : \mathcal{K} \to A$ mit $v(K) \neq v(K')$ existiert. Ein interessanter Spezialfall ist die Frage, ob Vassiliev-Invarianten die Orientierung von Knoten erkennen können: Gibt es ein Paar $K \neq K^!$ nicht-reversibler Knoten, die von einer Vassiliev-Invariante unterschieden werden? Gibt es ein Paar, das von keiner Vassiliev-Invariante getrennt wird? Bislang sind in keine der beiden Richtungen Beispiele bekannt.

Und nur derjenige spricht oder schreibt gutes Deutsch, (...) der sich ferner dazu erzogen hat, nicht immer alle seine Gedanken an die Sachen zu wenden, von denen die Rede sein soll, sondern einen Teil seiner Aufmerksamkeit bei den Wörten zurückzuhalten, die vielleicht noch etwas besser gesetzt werden können, als es die erste Eingebung geraten hat.

Harald Weinrich, *Wege der Sprachkultur*

KAPITEL 8

Vassiliev-Invarianten sind Polynome

Das schrittweise Fortsetzen einer Invariante $v : \mathcal{K} \to A$ von Knoten auf singuläre Knoten kann mit dem wiederholten Differenzieren einer Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ verglichen werden. In dieser Analogie entsprechen die Vassiliev-Invarianten vom Grad $\le m$ den Polynomen vom Grad $\le m$. Das vorliegende Kapitel stellt diese Analogie auf ein solides Fundament.

Selbstverständlich ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}^d$ unerreicht schön, während die Menge $\mathcal{K}$ der Knotentypen zunächst unstrukturiert ist. Dies ändert sich, wenn wir die Menge $\mathcal{K}$ durch geeignete „Karten“ parametrisieren: die geometrischen Gitter, wie wir sie hier erklären werden.

Damit erreichen wir in Satz 8.7 eine neue Charakterisierung von Vassiliev-Invarianten als Polynome auf geometrischen Gittern. Dieses Ergebnis lässt sich in Charakteristik Null besonders prägnant formulieren: Eine Knoteninvariante $v : \mathcal{K} \to \mathbb{Q}$ ist genau dann eine Vassiliev-Invariante vom Grad $\le m$, wenn sie auf jeder geometrischen Folge ein Polynom vom Grad $\le m$ ist.

Daraus ergeben sich neue Ansätze ein Knotenpaar zu finden, das von keiner Vassiliev-Invariante unterschieden werden kann. Als Anwendung zeige ich, dass Vassiliev-Invarianten bis Grad 10 keinen Brezelknoten von seinem Reversen unterscheiden können.

Auch für Tangles und Zöpfe ist die Betrachtung geometrischer Folgen nützlich. So ergibt sich zum Beispiel ein neuer Beweis, dass die reinen Zopfgruppen torsionsfrei sind.

8.1. Twistfolgen

Eine Familie (K_z) mit $z \in \mathbb{Z}$ nennen wir *vertikale Twistfolge*, wenn sich die Knoten K_z an genau einer Stelle wie in Abb. 8.1 unterscheiden und außerhalb dieses Bereichs identisch sind. Der analoge Fall einer *horizontalen Twistfolge* ist in Abb. 8.2 dargestellt.

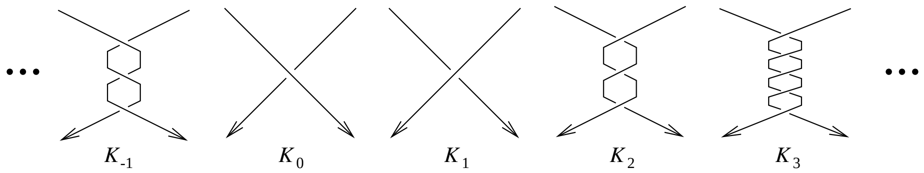


ABBILDUNG 8.1. Lokales Bild einer vertikalen Twistfolge

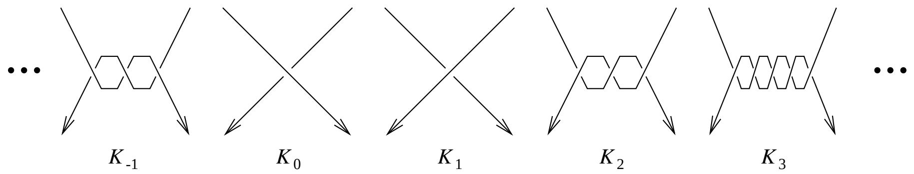


ABBILDUNG 8.2. Lokales Bild einer horizontalen Twistfolge

LEMMA 8.1. *Sei (K_z) eine Twistfolge. Wenn $v : \mathcal{K} \to \mathbb{Q}$ vom Typ $\leq m$ ist, dann ist $v(K_z)$ ein Polynom in z vom Grad $\leq m$.* □

Der Beweis wird unten für das allgemeinere Lemma 8.4 geführt. Die erste Anwendung geht auf R. Trapp [92] und J. Dean [24] zurück, die die spezielle Twistfolge der Torusknoten untersuchten.

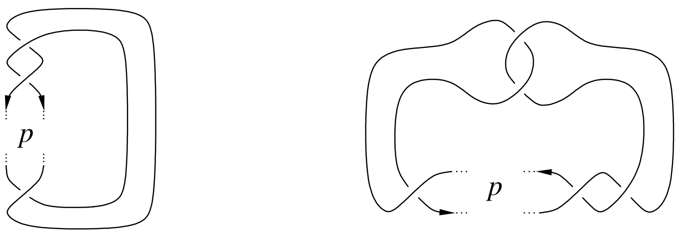


ABBILDUNG 8.3. Torusknoten $T_{2,p}$ und Twistknoten W_p

BEISPIEL 8.2. Der Torusknoten $T_{2,p}$ ist definiert als der Abschluss des Zopfes σ_1^p in $\mathrm{Br}(2)$. Die Knoten $T_z = T_{2,2z+1}$ bilden eine vertikale Twistfolge. Für diese zeigt die nachstehende Tabelle die Werte einiger Invarianten [24, 92]. (Kreuzungszahl, Zopfindex und Brückenzahl wurden in Kapitel 1 erklärt, für die weiteren siehe [85, 17, 70].)

		$z \geq 1$	$z = 0, -1$	$z \leq -2$
Kreuzungszahl	$cr(T_z)$	$1 + 2z$	0	$\|1 + 2z\|$
Zopfindex	$s(T_z)$	2	1	2
Brückenzahl	$br(T_z)$	2	1	2
Entknotungszahl	$u(T_z)$	z	0	$\|1 + z\|$
Geschlecht	$g(T_z)$	z	0	$\|1 + z\|$
Signatur	$\sigma(T_z)$	$2z$	0	$2 + 2z$

Keine dieser Invarianten ist auf der Folge T_z ein Polynom. Sie sind daher nicht von endlichem Typ.

Die Familie der Twistknoten $T'_z = W_{2z-1}$ aus Abb. 8.3 ist eine horizontale Twistfolge. Sie enthält zum Beispiel die Kleeblattschlinge $T'_1 = 3_1$, den trivialen Knoten $T'_0 = \bigcirc$ und den Achterknoten $T'_{-1} = 4_1$. Für die zuvor betrachteten Invarianten erhalten wir nun folgende Werte:

		$z \geq 1$	$z = 0$	$z \leq -1$
Kreuzungszahl	$cr(T'_z)$	$1 + 2z$	0	$2 - 2z$
Zopfindex	$s(T'_z)$	$1 + z$	1	$1 - z$
Brückenzahl	$br(T'_z)$	2	1	2
Entknotungszahl	$u(T'_z)$	1	0	1
Geschlecht	$g(T'_z)$	1	0	1
Signatur	$\sigma(T'_z)$	2	0	0

Diese Tabellen deuten bereits auf einen allgemeineren Sachverhalt hin: Der Zopfindex ist auf jeder vertikalen Twistfolge beschränkt, während Entknotungszahl, Geschlecht und Signatur auf jeder horizontalen Twistfolge beschränkt sind. Die Brückenzahl ist sowohl vertikal als auch horizontal beschränkt. Diese Beobachtung werden wir in Kapitel 9 zu einem allgemeinen Kriterium ausbauen.

8.2. Geometrische Folgen

Das Konzept der Twistfolgen lässt sich erweitern, indem man anstelle der eingefügten Kreuzungen ein allgemeineres Tangle erlaubt.

Seien dazu $s \in \mathcal{T}(X, \emptyset)$ und $u \in \mathcal{T}(\emptyset, X)$ zwei Tangles und ihre Komposition su ein Knoten. Ferner sei $t \in \mathcal{T}(X; X)$ homotop zur Identität id_X. Das ist genau dann der Fall, wenn t keine freien Komponenten enthält und jeden Eingang $i \times 0$ mit dem Ausgang $i \times 1$ verbindet.

Unter diesen Voraussetzungen nennen wir die Knoten $K_z = s \circ t^z \circ u$ für $z \in \mathbb{N}$ eine *geometrische Folge*. Wenn t ein Zopf ist, dann erlauben wir $z \in \mathbb{Z}$. Wie man sieht, umfasst diese Definition den Spezialfall der Twistfolgen.

BEISPIEL 8.3. Für natürliche Zahlen p, q ist die Torusverschlingung $T_{p,q}$ der Abschluss des Zopfes $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-1})^q$ in $\mathrm{Br}(p)$. Wenn p und q teilerfremd sind, dann ist $T_{p,q}$ ein Knoten, und $T_z = T_{p,q+zp}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ ist eine geometrische Folge. Das eingefügte Tangle ist hierbei der Zopf $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-1})^p$ und entspricht einer vollen Drehung aller p Stränge um die Mittelachse des Zopfes.

Geometrische Folgen lassen sich ohne Schwierigkeiten auf Verschlingungen und Tangles verallgemeinern. Alle Folgenglieder sind homotop zueinander, insbesondere sind ihre Komponentenzahlen gleich.

LEMMA 8.4. *Sei $T_z = s \circ t^z \circ u$ eine geometrische Folge. Für jede Vassiliev-Invariante $v : \mathcal{T} \to A$ vom Grad $\leq m$ ist die Folge $v(T_z)$ ein Polynom in z vom Grad $\leq m$.*

BEWEIS: Sei $J \supset J^2 \supset J^3 \supset \dots$ die Vassiliev-Filtrierung der Tangle-Kategorie $\mathbb{Z}\mathcal{T}$. Die Voraussetzung, dass v vom Typ $\leq m$ sei, ist dann gleichbedeutend mit $v(J^{m+1}) = 0$. Die Abbildung $z \mapsto v(T_z)$ ist genau dann ein Polynom vom Grad $\leq m$ (zur Notation siehe Anhang P), wenn für alle z die binomische Wechselsumme

$$\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} \cdot v(T_{z+k})$$

verschwindet. Diesen Ausdruck können wir auch als $v(r)$ schreiben mit

$$r = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} \cdot s \circ t^{z+k} \circ u = s \circ t^z \circ (\mathrm{id} - t)^{m+1} \circ u.$$

Nach Voraussetzung ist t homotop zur Identität, die Differenz $\mathrm{id} - t$ liegt also im Ideal J. Folglich liegt r in der Potenz J^{m+1}, und $v(r)$ verschwindet. □

8.3. Geometrische Gitter

Zur angestrebten Charakterisierung gehen wir noch einen Schritt weiter und erlauben unabhängige Einfügungen an mehreren Stellen eines Tangles: Seien $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_d, t_d, s_{d+1}$ komponierbare Tangles, und jedes t_i sei homotop zur Identität id_i. Für jedes d-Tupel natürlicher Zahlen $z \in \mathbb{N}^d$ können wir das Tangle $T_z = s_1 t_1^{z_1} s_2 t_2^{z_2} \cdots s_d t_d^{z_d} s_{d+1}$ definieren. Die so entstehende Abbildung $\mathbb{N}^d \to \mathcal{K}$ nennen wir ein *geometrisches Gitter*. Wenn das Tangle t_i ein Zopf ist, erlauben wir auch hier $z_i \in \mathbb{Z}$. Wenn alle Tangles t_i Twists wie in Abb. 8.1 oder Abb. 8.2 sind, dann sprechen wir von einem *Twistgitter*.

BEISPIEL 8.5. Die Familie der Brezelknoten $B(p_1, p_2, p_3)$ ist in Abb. 8.4 gezeigt. Diese bildet ein Twistgitter in der Parametrisierung $p_i = 2z_i - 1$.

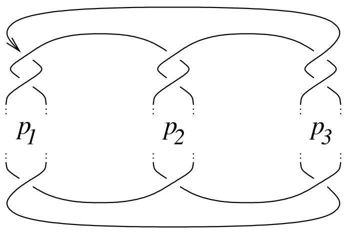


ABBILDUNG 8.4. Die Familie der Brezelknoten bildet ein Twistgitter

LEMMA 8.6. *Sei T_z ein geometrisches Gitter. Wenn $v : \mathcal{K} \to A$ vom Typ $\leq m$ ist, dann ist $v(T_z)$ ein Polynom in $z_1, \dots, z_d$ vom Grad $\leq m$.*

BEWEIS: Der Beweis verläuft wie der zu Lemma 8.4. □

8.4. Charakterisierung von Vassiliev-Invarianten als Polynome

Die folgenden Sätze charakterisieren Vassiliev-Invarianten als Polynome auf geometrischen Gittern. Satz 8.7 behandelt beliebige abelsche Gruppen, Satz 8.9 verschärft die Aussage in Charakteristik Null.

SATZ 8.7. *Für jede Invariante $v : \mathcal{T} \to A$ in eine abelsche Gruppe A sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *v ist eine Vassiliev-Invariante vom Grad $\le m$.*
2. *v ist auf jedem geometrischen Gitter ein Polynom vom Grad $\le m$.*
3. *v ist auf jedem vertikalen Twistgitter ein Polynom vom Grad $\le m$.*
4. *v ist auf jedem horizontalen Twistgitter ein Polynom vom Grad $\le m$.*

Dies rechtfertigt die Schlussfolgerung: Vassiliev-Invarianten sind Polynome.

BEWEIS: Die Implikation (1)⇒(2) ist Inhalt von Lemma 8.6. Die Implikationen (2)⇒(3) und (2)⇒(4) sind Spezialisierungen. Wir zeigen nun (3)⇒(1), der Fall (4)⇒(1) ist analog.

Sei $v : \mathcal{T} \to A$ eine Invariante mit Eigenschaft (3). Für jedes Tangle $T_\bullet$ mit $m+1$ Singularitäten haben wir $v(T_\bullet) = 0$ zu zeigen. Jede der $m+1$ Singularitäten ersetzen wir durch eine vertikale Twistfolge und erhalten so ein Twistgitter T_z mit $z \in \mathbb{Z}^{m+1}$. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $f(z) = v(T_z)$ ein Polynom in $z = (z_1, \dots, z_{m+1})$ vom Grad $\le m$. (Zur Notation siehe Anhang P.) Der Wert $v(T_\bullet)$ ist gegeben durch $(\Delta_1 \cdots \Delta_{m+1} f)(0)$ und muss daher verschwinden. □

Charakteristik Null. Der vorangegangene Satz gilt für Invarianten mit Werten in einer beliebigen abelschen Gruppe. Dafür muss allerdings die Polynombedingung auf Gittern formuliert werden. In Charakteristik 0 kommt man hingegen allein mit Folgen aus. Zur Vorbereitung dieses Satzes beginnen wir mit einer einfachen Umordnung von geometrischen Gittern.

LEMMA 8.8. *Jedes geometrische Gitter lässt sich darstellen durch $st_1^{z_1} t_2^{z_2} \cdots t_d^{z_d} u$ mit kommutierenden Tangles $t_i t_j = t_j t_i$.*

BEWEIS: Geometrische Gitter wurden oben definiert als Kompositionen der Form $S_1 T_1^{z_1} S_2 T_2^{z_2} \cdots S_d T_d^{z_d} S_{d+1}$. Eine einfache Umordnung bringt dies in eine Form mit kommutierenden Tangles t_i; Abbildung 8.5 zeigt dies für den Fall $d = 3$. □

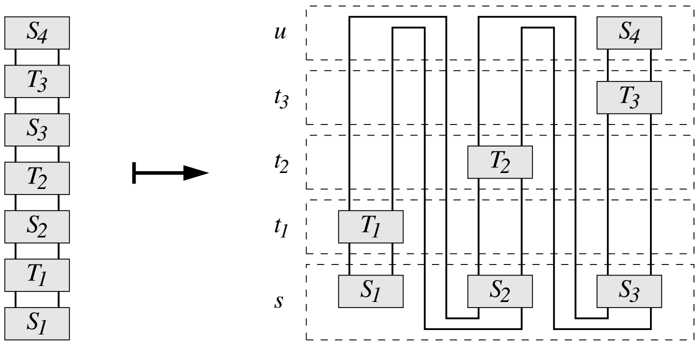


ABBILDUNG 8.5. Umordnung von Tangles

SATZ 8.9. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe. Für jede Tangle-Invariante $v : \mathcal{T} \to A$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *v ist eine Vassiliev-Invariante vom Grad $\leq m$.*
2. *v ist auf jeder geometrischen Folge ein Polynom vom Grad $\leq m$.*

BEWEIS: Die Implikation (1)⇒(2) ist die Aussage des Lemmas 8.4, es bleibt daher nur (2)⇒(1) zu beweisen. Sei v eine Invariante, die auf jeder geometrischen Folge ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist. Wir werden zeigen, dass sie dann auf jedem geometrischen Gitter ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist.

Nach dem vorangegangenen Lemma können wir jedes geometrische Gitter in eine Form $st_1^{z_1} \cdots t_d^{z_d} u$ bringen, sodass die Tangles t_i und t_j kommutieren. In diesem Fall schreiben wir für jedes $z \in \mathbb{N}^d$ abkürzend $t^z = t_1^{z_1} \cdots t_d^{z_d}$. Jede Wahl von Konstanten $a, b \in \mathbb{N}^d$ definiert eine geometrische Folge $st^{a+xb}u$, wobei x alle natürlichen Zahlen durchläuft. Nach Voraussetzung (2) ist $v(st^{a+xb}u)$ ein Polynom in x vom Grad $\leq m$. Die Abbildung $f : \mathbb{N}^d \to \mathcal{T}$ mit $f(z) = v(st^z u)$ ist demnach auf jeder Geraden $a + xb$ ein Polynom vom Grad $\leq m$. Nach Lemma P.8 ist sie daher auf $\mathbb{N}^d$ ein Polynom vom Grad $\leq m$.

Die Invariante v ist folglich auf jedem geometrischen Gitter ein Polynom vom Grad $\leq m$. Nach Satz 8.7 ist sie eine Vassiliev-Invariante vom Grad $\leq m$. □

KOROLLAR 8.10. *Sei $v : \mathcal{K} \to \mathbb{Q}$ eine Vassiliev-Invariante und m eine natürliche Zahl. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Der Grad der Vassiliev-Invariante v ist höchstens m.*
2. *Es gibt Konstanten a und b, sodass die Ungleichung $|v(K)| \leq a \cdot cr(K)^m + b$ für alle Knoten K erfüllt ist.*

BEWEIS: Die Implikation (1)⇒(2) wurde von D. Bar-Natan [7] gezeigt. Wir zeigen (2)⇒(1). Für jede geometrische Folge T_z mit $z \in \mathbb{N}$ ist die Kreuzungszahl $cr(T_z)$ durch eine lineare Funktion $c(z) = c_0 + c_1 z$ beschränkt. Nach Voraussetzung (2) ist das Polynom $f(z) = v(T_z)$ beschränkt durch $a \cdot c(z)^m + b$. Es kann daher höchstens Grad m haben. Aus Satz 8.9 folgt die Behauptung (1). □

8.5. Invarianten in endlicher Charakteristik

In der Charakterisierung nach Satz 8.7 ist es wesentlich, dass der Polynomgrad auf allen Twistgittern durch eine globale Konstante m beschränkt wird:

SATZ 8.11. *Es gibt Knoteninvarianten, die auf jedem Twistgitter polynomiell aber dennoch keine Vassiliev-Invarianten sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Polynomgrade auf Twistgittern jede Schranke überschreiten.*

Als Beispiel betrachten wir $\bar{F}_p$, die Anzahl der p-Färbungen modulo p. Der untenstehende Satz 8.14 besagt, dass $\bar{F}_p$ auf jeder Twistfolge ein Polynom vom Grad $< p$ ist. Auf allgemeineren geometrischen Folgen ist $\bar{F}_p$ jedoch kein Polynom.

Färbungszahlen sind periodisch. Sei $p \geq 3$ eine Primzahl. Eine *p-Färbung* eines Diagramms D ist eine Abbildung $x : \{\text{Bögen}\} \to \mathbb{F}_p$, die jedem Bogen i eine Farbe x_i zuordnet und an jeder Kreuzung wie in Abb. 2.1 die Bedingung $x_i + x_j = 2x_k$ erfüllt. Die Menge der p-Färbungen bezeichnen wir mit $C_p(D)$. In Abschnitt 2.4 haben wir gesehen, dass jeder Reidemeister-Zug $D \to D'$ eine

Bijektion $C_p(D) \to C_p(D')$ stiftet. Folglich ist die Anzahl der Färbungen eine Invariante des Knotens.

Da alle Kreuzungsbedingungen linear sind, ist $C_p(D)$ ein Vektorraum über $\mathbb{F}_p$. Dieser enthält die konstanten Färbungen, also gilt $\dim C_p(D) \geq 1$. Als Invariante betrachten wir im Folgenden $F_p(K) := \dim C_p(D) - 1$. Mit dieser Normierung ist F_p additiv, das heißt $F_p(K \sharp K') = F_p(K) + F_p(K')$. Für den trivialen Knoten gilt $F_p(\bigcirc) = 0$, für den $(2,p)$-Torusknoten gilt $F_p(T_{2,p}) = 1$. Mittels verbundener Summe sehen wir, dass jede natürliche Zahl als Wert von F_p auftritt.

LEMMA 8.12. *Die Invariante $F_p : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$ hat Periode p auf jeder Twistfolge.*

BEWEIS: Wir betrachten einen Diagrammausschnitt wie in Abbildung 8.6. Durch Iteration der Kreuzungsbedingung erhält man für die eingezeichneten Farben die Gleichung $x_k = (1-k)x_0 + kx_1$. Für eine Sequenz der Länge p folgt $x_p = x_0$ und $x_{p+1} = x_1$. Für zwei Diagramme D und D', die sich durch die Einfügung einer solchen Sequenz unterscheiden, erlaubt diese Eigenschaft eine Bijektion der Färbungsmengen $C_p(D)$ und $C_p(D')$.

In einer Twistfolge unterscheiden sich die Knoten K_z und K_{z+p} genau durch die Einfügung einer solchen Sequenz von $2p$ Kreuzungen. Ihre Färbungszahlen sind demnach gleich: $F_p(K_z) = F_p(K_{z+p})$. □

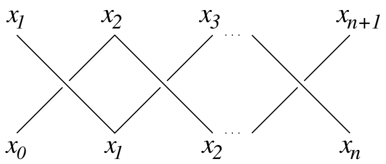


ABBILDUNG 8.6. Färbung einer Sequenz von Kreuzungen

BEMERKUNG 8.13. Periodizität gilt allgemein für jede Färbungszahl F_G^x und für jedes Färbungspolynom P_G^x. Die Perioden setzen sich im Allgemeinen jedoch aus vielen verschiedenen Primzahlen zusammen.

Färbungszahlen sind nur lokal polynomiell. Die Invariante $F_p : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$ ist auf jeder Twistfolge periodisch, folglich beschränkt und nicht polynomiell. Deshalb ist F_p keine Vassiliev-Invariante. Wenn wir allerdings zur Reduktion modulo p übergehen, dann gilt:

SATZ 8.14. *Die Invariante $\bar{F}_p : \mathcal{K} \to \mathbb{F}_p$ ist auf jeder Twistfolge ein Polynom vom Grad $< p$. Sie ist dennoch keine Vassiliev-Invariante.*

BEWEIS: Die Invariante $\bar{F}_p$ ist auf jeder Twistfolge p-periodisch. Nach Lemma P.4 ist sie daher ein Polynom vom Grad $< p$. Mit dem Kriterium für Twistfolgen können wir also nicht ausschließen, dass $\bar{F}_p$ eine Vassiliev-Invariante ist. Dies gelingt jedoch mit der geometrischen Folge $K_z = T_{p,1+zp}$ der Torusknoten. Auf dieser gilt $\bar{F}_p(K_z) = 0$ für z gerade und $\bar{F}_p(K_z) = 1$ für z ungerade. Nach Lemma P.4 ist $\bar{F}_p$ daher keine Vassiliev-Invariante. □

8.6. Anwendung auf Brezel-Knoten

Die Technik der Twistgitter lässt sich besonders gut zur Untersuchung von Vassiliev-Invarianten auf Brezelknoten einsetzen. Wie man in Abbildung 8.4 erkennt, besitzen Brezelknoten dihedrale Symmetrie. Es gilt

$$\begin{array}{ll} \text{bei Rotation} & B(p_1,p_2,p_3) = B(p_2,p_3,p_1), \\ \text{bei Reversion} & B(p_1,p_2,p_3)^! = B(p_3,p_2,p_1), \\ \text{und außerdem} & B(p_1,p_2,\pm 1) = B(p_1,\pm 1,p_2). \end{array}$$

Nach dem bekannten Klassifikations-Satz [11, 17, 58] sind dies bereits alle Relationen in der Familie der Brezelknoten:

SATZ 8.15. *Seien p und q zwei Tripel ungerader ganzer Zahlen. Die Brezelknoten $B(p_1,p_2,p_3)$ und $B(q_1,q_2,q_3)$ sind genau dann isotop zueinander, wenn*

- *p eine zyklische Umordnung von q ist oder*
- *mindestens eine Stelle den Wert ± 1 hat und p eine Permutation von q ist.*

Insbesondere ist der Brezelknoten $B(p)$ genau dann nicht-reversibel, wenn die fünf Zahlen $p_1,p_2,p_3,-1,+1$ sämtlich verschieden sind. □

Allein aus den Symmetrien der Brezelknoten gewinnen wir folgende Aussage:

SATZ 8.16. *Bis Grad 8 kann keine Vassiliev-Invariante Brezelknoten von ihren Reversen unterscheiden.*

Nach den Computer-Berechnungen von J. Kneissler [61] gilt die Aussage über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_2$ sogar bis Grad 12. Über $\mathbb{Q}$ wurde dies zuvor von D. Bar-Natan [6] bis Grad 9 und von E. Kalfagianni [55] bis Grad 10 bewiesen. Für endliche abelsche Gruppen außer $\mathbb{F}_2$ war bislang nichts bekannt.

BEWEIS DES SATZES: Zu jeder Knoteninvariante $v : \mathcal{K} \to A$ sei $\bar{v} := v - v^!$. Auf der Familie der Brezelknoten erhalten wir daraus eine Funktion $f : \mathbb{Z}^3 \to A$ mit

$$f(z_1,z_2,z_3) = \bar{v}(B(2z_1-1, 2z_2-1, 2z_3-1)).$$

Die Symmetrie-Eigenschaften der Brezelknoten implizieren

$$\begin{aligned} f(z_1,z_2,z_3) &= +f(z_2,z_3,z_1) \qquad \text{(Rotation)}, \\ f(z_1,z_2,z_3) &= -f(z_1,z_3,z_2) \qquad \text{(Reversion)}, \\ f(z_1,z_2,z_3) &= 0 \qquad \begin{cases} \text{wenn } z_i = 0 \text{ oder } z_i = 1 \text{ für ein } i \\ \text{oder } z_i = z_j \text{ für ein Paar } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Für Parameter $z_1,z_2,z_3 \geq 0$ mit Summe $z_1+z_2+z_3 \leq 8$ gilt demnach $f(z) = 0$, und alle diskreten Ableitungen $(\Delta^\alpha f)(0) = 0$ vom Grad $|\alpha| \leq 8$ verschwinden. Wenn v eine Vassiliev-Invariante vom Grad ≤ 8 ist, dann ist f ein Polynom vom Grad ≤ 8. Da alle Ableitungen verschwinden, ist f konstant Null. □

SATZ 8.17. *Sei A eine abelsche Gruppe ohne 2-Torsion. Bis Grad 10 kann keine Vassiliev-Invariante $v : \mathcal{K} \to A$ Brezelknoten von ihren Reversen unterscheiden.*

Zur Vorbereitung des Beweises in Grad 9 und 10 müssen wir zwei Sehnendiagramme auf ihre Reversibilität prüfen. Für natürliche Zahlen a,b,c sei $C(a,b,c)$

das Sehnendiagramm, das drei Büschel von a, b bzw. c parallelen Sehnen kreuzt. Abbildung 8.7 zeigt das Diagramm $C(2,3,4)$. Bei Rotation dieser Diagramme gilt $C(a,b,c) = C(b,c,a)$ und bei Reversion $C(a,b,c)^! = C(a,c,b)$.

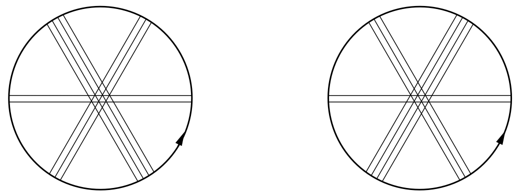


ABBILDUNG 8.7. Die Sehnendiagramme $C(2,3,4)$ und $C(2,4,3)$

LEMMA 8.18. *Das Sehnendiagramm $C(2,b,c)$ und sein Reverses $C(2,c,b)$ sind äquivalent modulo 1T- und 4T-Relationen.* □

Der Beweis besteht im Zeichnen von ca. 30 Sehnendiagrammen und ist wenig erhellend. Man vergleiche dies mit den Rechnungen von E. Kalfagianni [55]. Ich sondere dieses Lemma allein deshalb aus, um es vom weiteren, konzeptionellen Beweis zu trennen.

BEWEIS DES SATZES: Da A keine 2-Torsion hat, ist $A \to A \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ injektiv. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass A ein $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-Modul ist.

GRAD 9: Wir benutzen die Bezeichnungen des vorangegangenen Beweises. Wenn v eine Vassiliev-Invariante vom Grad ≤ 9 ist, dann ist f ein Polynom vom Grad ≤ 9. Nicht-verschwindende Ableitungen $\Delta^\alpha f$ können nur auftreten, wenn α eine Permutation von $(2,3,4)$ ist. Da dies im höchsten Grad liegt, können wir zur Vereinfachung statt v das zugehörige Gewichtsystem w betrachten.

Es gilt $\Delta^\alpha f = w(C(\alpha))$. Die Sehnendiagramme $C(2,3,4)$ und $C(2,4,3)$ sind äquivalent modulo 4T-Relationen. Das bedeutet $\Delta^{(2,3,4)} f = \Delta^{(2,4,3)} f$. Da dies die einzige nicht-verschwindende Ableitung ist, folgt daraus $f(z_1,z_2,z_3) = f(z_1,z_3,z_2)$ für alle z. Aufgrund der Antisymmetrie von f folgt damit $f = 0$.

GRAD 10: Wir zerlegen die Invariante v bezüglich Spiegelung in einen geraden Anteil $v_+ = \frac{1}{2}(v + v^\times)$ und einen ungeraden Anteil $v_- = \frac{1}{2}(v - v^\times)$. Wenn v Grad ≤ 10 hat, dann hat v_- Grad ≤ 9, und diesen Fall haben wir oben gelöst. Wir können daher annehmen, dass v gerade ist.

Nicht-verschwindende Ableitungen $\Delta^\alpha f$ können nur dann auftreten, wenn α eine Permutation von $(2,3,5)$ ist. Wir gehen wieder zum Gewichtsystem und den Sehnendiagrammen $C(\alpha)$ über. Das Sehnendiagramm $C(2,3,5)$ ist äquivalent zu seinem Reversen $C(2,5,3)$. Daraus folgt $\Delta^{(2,3,5)} f = \Delta^{(2,5,3)} f$. Wiederum aufgrund der Antisymmetrie von f folgt $f = 0$. □

8.7. Die Suche nach nicht-unterscheidbaren Knoten

Geometrische Folgen ermöglichen neue Ansätze ein Knotenpaar zu finden, das von Vassiliev-Invarianten nicht getrennt werden kann. Dieser Abschnitt legt hierzu drei Strategien dar, viele weitere sind denkbar.

KOROLLAR 8.19. *Angenommen der Knoten K ist Teil einer geometrischen Folge, die unendlich viele reversible Knoten enthält. Dann können Vassiliev-Invarianten in Charakteristik 0 den Knoten K nicht von seinem Reversen $K^!$ unterscheiden.*

BEWEIS: Mit K_z ist auch $K_z^!$ eine geometrische Folge. Für jede Vassiliev-Invariante $v : \mathcal{K} \to \mathbb{Q}$ sind daher $f(z) = v(K_z)$ und $f^!(z) = v(K_z^!)$ Polynome. Nach Voraussetzung gilt $K_z = K_z^!$ für unendlich viele $z \in \mathbb{N}$, die Polynome f und $f^!$ stimmen also an unendlich vielen Stellen überein. In Charakteristik 0 können wir daraus folgern, dass sie gleich sind. Insbesondere gilt $v(K) = v(K^!)$. □

Dieses Kriterium gibt einen Hinweis, wie Knoten konstruiert werden könnten, die von Vassiliev-Invarianten nicht getrennt werden. Bislang ist jedoch kein solches Beispiel gefunden worden, weder mit dieser noch mit anderen Methoden. Das Kriterium kann daher auch umgekehrt gelesen werden:

KOROLLAR 8.20. *Angenommen eine Vassiliev-Invariante vom Grad m unterscheidet den Knoten K von seinem Reversen $K^!$. Dann enthält jede geometrische Folge, die durch K läuft, höchstens m reversible Knoten.* □

Diese Symmetrie-Überlegungen treffen ebenso auf die Spiegelung zu: Wenn eine Vassiliev-Invariante vom Grad m den Knoten K von seinem Spiegelbild $K^\times$ unterscheidet, dann enthält jede geometrische Folge durch K höchstens m obversible Knoten. Zum Beispiel wird die Kleeblattschlinge 3_1 bereits in Grad 3 als chiral erkannt; sowohl die Folge der Torusknoten $T_{2,p}$ als auch der Twistknoten W_p hat nur zwei amphichirale Glieder.

KOROLLAR 8.21. *Angenommen eine geometrische Folge ist periodisch. Dann können Vassiliev-Invarianten mit Werten in $\mathbb{Q}$ die Folgenglieder nicht unterscheiden. Dies gilt ebenso für jede endliche abelsche Gruppe, deren Ordnung teilerfremd zur Periode ist.*

BEWEIS: In Charakteristik 0 ist die Aussage klar, denn beschränkte Polynome sind in diesem Fall konstant. Ist A eine endliche abelsche Gruppe, dann hat jedes Polynom $f : \mathbb{Z} \to A$ eine Periode q, wobei die Primfaktoren von q in denen von $|A|$ enthalten sind, siehe Korollar P.7. Wenn die Folge außerdem p-periodisch ist, dann muss f die Periode $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ haben. □

Für Knoten ist keine geometrische Folge mit Periode bekannt, und ihre Existenz scheint sehr unwahrscheinlich. Für Tangles oder Zöpfe über der Fläche $\mathbb{S}^2$ hingegen werden wir im folgenden Abschnitt Beispiele dieser Art konstruieren.

KOROLLAR 8.22. *Sei $st_1^{z_1}t_2^{z_2}u$ ein geometrisches Gitter mit $t_it_j \neq t_jt_i$. Angenommen es gäbe zwei Exponenten $a, b \geq 2$, sodass die Tangles t_1^a und t_2^b kommutieren. Dann können Vassiliev-Invarianten in Charakteristik 0 die Knoten st_1t_2u und st_2t_1u nicht unterscheiden. Diese Aussage gilt auch in Charakteristik p, vorausgesetzt p teilt weder a noch b.*

BEWEIS: Sei v eine Vassiliev-Invariante. Das Polynom

$$f(z_1, z_2) = v(st_1^{z_1}t_2^{z_2}u) - v(st_2^{z_2}t_1^{z_1}u)$$

verschwindet auf allen Punkten des Gitters $a\mathbb{N} \times b\mathbb{N}$. Dies ist nur für das konstante Polynom $f = 0$ möglich. Folglich gilt $v(st_1^{z_1}t_2^{z_2}u) = v(st_2^{z_2}t_1^{z_1}u)$ für alle z_1, z_2. □

8.8. Anwendung auf Zopfgruppen

Aufgrund der Artin-Magnus-Darstellung aus Satz 6.33 lassen sich je zwei Zöpfe durch eine geeignete Vassiliev-Invariante $v : \mathrm{Br} \to \mathbb{Q}$ unterscheiden. Dies führt direkt zu Folgerungen über die Struktur der Zopfgruppen:

KOROLLAR 8.23. *Sei α ein Zopf und β ein reiner Zopf gleicher Strangzahl. Wenn α mit β^n für ein $n \geq 2$ kommutiert, dann kommutiert α auch mit β.*

Man beachte, dass dieser Satz nicht gilt, wenn man für β einen beliebigen Zopf zulässt: Der Zopf $\beta = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ liegt nicht im Zentrum von $\mathrm{Br}(n)$, die Potenz β^n hingegen schon.

BEWEIS: Jeder reine Zopf β ist homotop zum trivialen Zopf, deshalb ist die Abbildung $(z_1, z_2) \mapsto \beta^{z_1}\alpha\beta^{z_2}$ ein geometrisches Gitter im obigen Sinne. Jede Vassiliev-Invariante $v : \mathrm{Br} \to \mathbb{Q}$ ist auf der Diagonalen $z \mapsto \beta^z\alpha\beta^{-z}$ ein Polynom. Wenn α mit β^n kommutiert, dann ist diese Folge n-periodisch und v darauf konstant. Vassiliev-Invarianten können also die Zöpfe der Folge $\alpha, \beta\alpha\beta^{-1}, \beta^2\alpha\beta^{-2}, \dots$ nicht unterscheiden. Nach Satz 6.33 sind sie gleich, insbesondere gilt $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha$. □

Als weitere Anwendung gebe ich einen neuen Beweis für einen bekannten Satz über Zopfgruppen:

KOROLLAR 8.24. *Die reinen Zopfgruppen sind torsionsfrei.*

BEWEIS: Die Folge $z \mapsto \beta^z$ ist eine geometrische Folge im obigen Sinne. Wenn $\beta^n = 1$ gilt, dann ist diese Folge periodisch. Jede Vassiliev-Invariante $v : \mathrm{Br} \to \mathbb{Q}$ ist ein Polynom auf dieser Folge und damit konstant. Die Zöpfe $1, \beta, \beta^2, \dots$ können demnach von Vassiliev-Invarianten nicht unterschieden werden. Nach Satz 6.33 sind sie gleich, insbesondere gilt $\beta = 1$. □

BEMERKUNG 8.25. Der Satz gilt allgemeiner für die volle Zopfgruppe, aber der hier angegebene Beweis lässt sich darauf nicht übertragen. Zur Torsionsfreiheit der Zopfgruppen gibt es bislang drei Beweise, die gänzlich verschiedenen Strategien folgen:

- E. Fadell und L.P. Neuwirth [32] konstruierten zu jeder Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n)$ einen endlich-dimensionalen klassifizierenden Raum. Torsionsfreiheit ist dann eine der Folgerungen aus der Gruppen-Kohomologie.
- Neben diesem topologischen gibt es auch einen algebraischen Beweis von J.L. Dyer [27], der auf der Artin-Darstellung der Zopfgruppen aufbaut.
- Schließlich hat P. Dehornoy [26] bewiesen, dass die Zopfgruppen eine links-invariante lineare Anordnung erlauben und daher torsionsfrei sind.

Zopfgruppen über der Sphäre. Wir können geometrische Folgen auch auf exotischere Fälle anwenden: Die reine Zopfgruppe $\mathrm{PBr}(n; \mathbb{S}^2)$ über der Sphäre hat 2-Torsion. Abbildung 8.8 zeigt das Element τ der Ordnung 2.

KOROLLAR 8.26. *Sei A eine abelsche Gruppe ohne 2-Torsion. Dann kann keine Vassiliev-Invariante mit Werten in A den Zopf τ vom trivialen Zopf in $\mathrm{PBr}(n; \mathbb{S}^2)$ unterscheiden.*

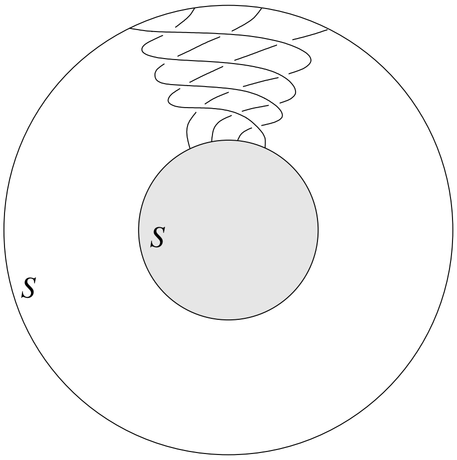


ABBILDUNG 8.8. Ein Element der Ordnung 2 in $\mathrm{PBr}(n;\mathbb{S}^2)$

BEWEIS: Ist v eine Vassiliev-Invariante mit Werten in A, dann liegt ihr Bild in einer endlich erzeugten Untergruppe von A. Wir können uns demnach auf die Fälle $A=\mathbb{Z}$ und $A=\mathbb{Z}_{p^l}$ mit $p\geq 3$ beschränken. Die Folge τ^z hat Periode 2, und die Behauptung folgt aus Korollar 8.21. □

Eine Präsentation der Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n;\mathbb{S}^2)$ wurde zuerst von E. Fadell und J. van Buskirk gegeben [31, 9]. Sie entsteht aus der Präsentation der Zopfgruppe $\mathrm{Br}(n;\mathbb{R}^2)$ durch Hinzunahme der Relation

$$r=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\cdots\sigma_2\sigma_1.$$

Die Exponentensumme $v:\mathrm{Br}(n;\mathbb{R}^2)\to\mathbb{Z}$ ist eine Vassiliev-Invariante vom Grad 1. Wie man an der Präsentation aus Satz 1.1 erkennt, ist dies die Abelschmachung der Zopfgruppe. Die Relation r hat Exponentensumme $v(r)=2(n-1)$. Wenn wir zur Reduktion modulo $2(n-1)$ übergehen, dann erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung auf der Quotientengruppe:

$$\bar{v}:\mathrm{Br}(n;\mathbb{S}^2)\to\mathbb{Z}_{2(n-1)}.$$

Dies ist die Abelschmachung von $\mathrm{Br}(n;\mathbb{S}^2)$ und eine Vassiliev-Invariante vom Grad 1. Wenn die Strangzahl n ungerade ist, dann gilt für das Torsionselement τ

$$\bar{v}(\tau)=n(n-1)\equiv(n-1)\neq 0.$$

Die Vassiliev-Invariante $\bar{v}$ unterscheidet also τ vom trivialen Zopf in $\mathrm{PBr}(n;\mathbb{S}^2)$.

BEMERKUNG 8.27. Ähnliche Konstruktionen lassen sich nicht nur für die Sphäre, sondern auch für die projektive Ebene durchführen. Die Zopfgruppen enthalten in beiden Fällen Elemente endlicher Ordnung. Über allen anderen Flächen sind die Zopfgruppen hingegen torsionsfrei [18].

In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister.
Johann Wolfgang von Goethe

KAPITEL 9

Färbungszahlen sind nicht von endlichem Typ

Im ersten Teil dieser Arbeit wurden Darstellungen von Knotengruppen in endliche Gruppen untersucht. Als Invarianten haben wir Färbungspolynome extrahiert und gezeigt, dass sie für die Orientierung von Knoten empfindlich sind. Es wäre ausgesprochen interessant, Vassiliev-Invarianten mit dieser Eigenschaft zu konstruieren. Wir gehen im Folgenden der Frage nach, ob Färbungszahlen Vassiliev-Invarianten sein können.

Für bestimmte Gruppen G hat D. Altschuler [2] gezeigt, dass die Färbungszahl F_G nicht von endlichem Typ ist. Ausgehend von diesen partiellen Ergebnissen stellte er die Frage, ob F_G für jede Gruppe G entweder konstant oder nicht von endlichem Typ ist. Diese Dichotomie wird hier in Satz 9.10 bewiesen. Sie gilt darüber hinaus für jede Invariante, die aus einer endlichen Folge von Färbungszahlen berechnet werden kann. Satz 9.15 charakterisiert diejenigen Gruppen, für die F_G konstant ist. Erstaunlicherweise sind dies genau die nilpotenten Gruppen.

9.1. Sequentiell beschränkte Invarianten

Als wesentliches Hilfsmittel beweisen wir ein allgemeines Beschränktheits-Kriterium, mit welchem eine große Klasse von Invarianten als nicht-polynomiell erkannt werden kann.

DEFINITION 9.1. Eine Knoteninvariante $F : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ heißt *vertikal beschränkt*, falls für jede vertikale Twistfolge $\{ K_z \mid z \in \mathbb{Z} \}$ die Folge $F(K_z)$ eine beschränkte Teilfolge besitzt. Entsprechend heißt F *horizontal beschränkt*, falls für jede horizontale Twistfolge die Folge $F(K_z)$ eine beschränkte Teilfolge besitzt. Falls eine der beiden Bedingungen zutrifft, nennen wir F *sequentiell beschränkt*.

BEISPIEL 9.2. Wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, ist der Zopfindex vertikal beschränkt, während Geschlecht, Entknotungszahl und Signatur horizontal beschränkt sind. Die Brückenzahl ist sowohl vertikal als auch horizontal beschränkt, die Kreuzungszahl hingegen weder vertikal noch horizontal. Dieses Verhalten zeigte sich bereits in Beispiel 8.2.

LEMMA 9.3. *Wenn eine Knoteninvariante sequentiell beschränkt ist, dann ist sie entweder konstant oder nicht von endlichem Typ.*

BEWEIS: Sei $F : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ sequentiell beschränkt und von endlichem Typ. Einen gegebenen Knoten repräsentieren wir durch ein Knotendiagramm. Wir wählen eine Kreuzung p und konstruieren an der Stelle dieser Kreuzung eine vertikale bzw. horizontale Twistfolge $\{ K_z \mid z \in \mathbb{Z} \}$. Die Abbildung $z \mapsto F(K_z)$ ist nach Lemma 8.1 ein Polynom in z. Andererseits besitzt $F(K_z)$ eine beschränkte Teilfolge, sie muss also konstant sein. Insbesondere erhalten wir $F(K_0) = F(K_1)$, das heißt, wir können die Kreuzung p wechseln, ohne den Wert von F zu verändern. Da wir jeden Knoten durch eine Reihe von Kreuzungswechseln in den trivialen Knoten überführen können, ist die Knoteninvariante F konstant. □

Zopfindex, Geschlecht, Entknotungszahl und Brückenzahl sind sequentiell beschränkt und daher nicht von endlichem Typ. Aus ihnen gewinnen wir eine große Klasse weiterer Beispiele, denn die Menge der sequentiell beschränkten Invarianten ist in folgendem Sinne abgeschlossen:

- Wenn $F : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ sequentiell beschränkt ist, dann gilt dies auch für alle von ihr majorisierten Knoteninvarianten, das heißt für jede Invariante F' mit $|F'| \leq |F|$.
- Wenn $F : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ sequentiell beschränkt ist und $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet, dann ist auch die Komposition $\phi F : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ sequentiell beschränkt.
- Wenn zwei Invarianten $F, F' : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ vertikal (bzw. horizontal) beschränkt sind, dann gilt dies auch für ihre Summe $F + F'$ und ihr Produkt FF'.

Diese Einzelfälle fassen wir im folgenden Lemma zusammen.

LEMMA 9.4. *Angenommen die Knoteninvarianten $F_1, \ldots, F_n : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ sind alle vertikal (bzw. horizontal) beschränkt, und $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ bildet beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab. (Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn ϕ stetig ist.) Dann ist auch die Invariante $F = \phi(F_1, \ldots, F_n) : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ vertikal (bzw. horizontal) beschränkt und ebenso jede von ihr majorisierte Knoteninvariante.* □

9.2. Zopfindex, Geschlecht, Entknotungs- und Brückenzahl

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass Zopfindex, Geschlecht, Entknotungs- und Brückenzahl sequentiell beschränkt sind.

LEMMA 9.5. *Der Zopfindex ist auf jeder vertikalen Twistfolge beschränkt.*

BEWEIS: Jede vertikale Twistfolge K_z kann wie in Abbildung 8.1 als Sequenz von Knotendiagrammen D_z dargestellt werden. Nach dem Satz von Alexander (siehe J. Birman [9] und etwas allgemeiner bei S. Lambropoulou [65]) können wir diese in Zopfform bringen, ohne den Ausschnitt zu verändern, in dem sich die Diagramme unterscheiden. Mit anderen Worten, die Zopfform kann für alle Diagramme D_z auf dieselbe Weise herbeigeführt werden. So erhalten wir einen Zopf β mit n Strängen, und jeder Knoten K_z wird durch den Zopf $\beta\sigma_i^{2z}$ dargestellt. Damit erreichen wir die gewünschte Ungleichung $s(K_z) \leq n$ für alle z. □

ALTERNATIVER BEWEIS: Für eine vertikale Twistfolge wie in Abb. 8.1 ist die Anzahl der Seifert-Kreise konstant. Nach einem Satz von S. Yamada [102] ist diese Zahl eine obere Schranke für den Zopfindex. □

LEMMA 9.6. *Das Geschlecht ist auf jeder horizontalen Twistfolge beschränkt.*

BEWEIS: Eine horizontale Twistfolge stellen wir wie in Abb. 8.2 als Sequenz von Knotendiagrammen D_z dar. Zu jedem dieser Diagramme konstruieren wir eine Fläche nach dem Seifert-Algorithmus (siehe [17]). Alle so entstehenden Flächen haben dieselbe Euler-Charakteristik und daher auch dasselbe Geschlecht g_0. Dies liefert die obere Schranke $g(K_z) \leq g_0$ für alle z. □

LEMMA 9.7. *Die Entknotungszahl ist auf jeder horizontalen Twistfolge von Knoten beschränkt.*

BEWEIS: Jede horizontale Twistfolge von Knoten kann auf die folgende Weise gleichförmig entknotet werden: Wir beginnen mit einem Diagramm D_0 für den Knoten K_0, wobei die Sequenz wie in Abb. 8.2 durch Verdrillung an der Kreuzung p entstehe. Beginnend auf dem oberen Strang der Kreuzung p durchlaufen wir das Diagramm D_0 gemäß seiner Orientierung. Wir nennen eine Kreuzung *aufsteigend*, wenn wir beim ersten Besuch auf den unteren Strang treffen und erst beim zweiten Besuch auf den oberen. Sei A die Menge der aufsteigenden Kreuzungen des Diagramms D_0. Mit D_z^A bezeichnen wir das Diagramm, welches aus D_z durch Wechsel aller Kreuzungen in A entsteht.

BEHAUPTUNG: Für jedes z stellt das Diagramm D_z^A den trivialen Knoten dar.

Zu jedem der Diagramme D_z^A können wir eine Höhenfunktion angeben, die nur ein Maximum und ein Minimum hat. Solch eine Höhenfunktion ist in Abb. 9.1 für den Fall $z \geq 1$ skizziert. An einigen Punkten des Diagramms ist die Höhe angegeben; auf dem Weg von P nach Q soll die Höhe streng monoton abnehmen und auf dem Weg von Q nach P streng monoton zunehmen. Nach Konstruktion ist dies tatsächlich eine Höhenfunktion für das Diagramm D_z^A und der entsprechende Knoten trivial. Daraus folgt $u(K_z) \leq |A|$ für alle z. □

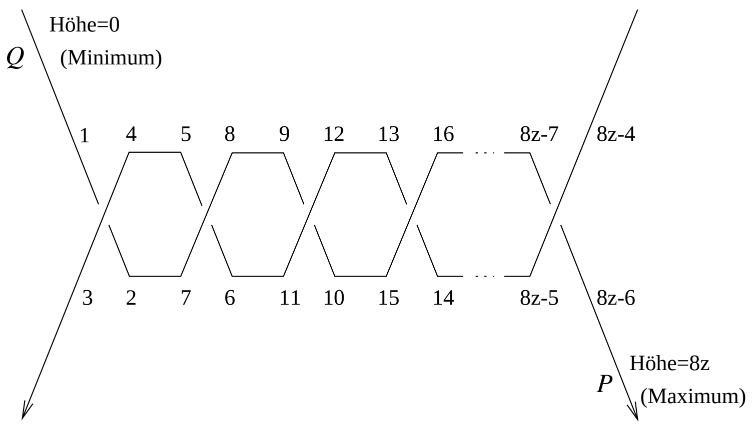


ABBILDUNG 9.1. Eine Höhenfunktion für das Diagramm D_z^A

In den vorangegangenen Lemmata ist die Wahl der Twistfolgen – vertikal oder horizontal – nicht beliebig. Beispiel 8.2 zeigt: Der Zopfindex ist auf jeder vertikalen Twistfolge beschränkt, aber auf horizontalen Twistfolgen gilt nur die Abschätzung $s(K_z) \leq s_0 + |z|$. Geschlecht und Entknotungszahl hingegen sind auf jeder horizontalen Twistfolge beschränkt, aber auf vertikalen Twistfolgen gelten nur die linearen Abschätzungen $g(K_z) \leq g_0 + |z|$ und $u(K_z) \leq u_0 + |z|$.

LEMMA 9.8. *Die Brückenzahl ist sowohl auf vertikalen als auch auf horizontalen Twistfolgen beschränkt.*

BEWEIS: Wir betrachten zuerst eine vertikale Twistfolge von Diagrammen wie in Abb. 8.1. Als Kurven in der Ebene haben diese Diagramme dieselben Extrema in vertikaler Richtung. Die Anzahl der Maxima ist eine obere Schranke für die Brückenzahl der entsprechenden Knoten.

Im Falle einer horizontalen Twistfolge argumentiert man ebenso, indem man die Extrema in horizontaler Richtung betrachtet. □

Die bisherigen Untersuchungen fassen wir zu einem einfachen hinreichenden Kriterium zusammen, wann eine Knoteninvariante sequentiell beschränkt ist:

SATZ 9.9. *Sei $\nu : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$ entweder der Zopfindex, die Brückenzahl, das Geschlecht oder die Entknotungszahl und $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion. Wenn eine Knoteninvariante $F : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ die Ungleichung $|F(K)| \leq \phi(\nu(K))$ für alle Knoten K erfüllt, dann ist F sequentiell beschränkt. Insbesondere ist F entweder konstant oder nicht von endlichem Typ.*

BEWEIS: Wie wir wissen ist ν sequentiell beschränkt. Aufgrund der Ungleichung $|F| \leq \phi\nu$ ist auch F sequentiell beschränkt. Nach Lemma 9.3 ist F entweder konstant oder nicht von endlichem Typ. □

Man beachte, dass sich die Kreuzungszahl ganz anders verhält: Sie ist keine Vassiliev-Invariante, aber jede Invariante vom Typ m wird beschränkt durch ein geeignetes Polynom vom Grad m in der Kreuzungszahl (siehe Korollar 8.10).

9.3. Die Anzahl der Knotengruppen-Darstellungen

In diesem Abschnitt wenden wir das Beschränktheits-Kriterium von Satz 9.9 auf die Anzahl der Knotengruppen-Darstellungen an. Als Ergebnis unserer Vorarbeit ernten wir nun leicht den folgenden Satz.

SATZ 9.10. *Für jede endliche Gruppe G ist die Knoteninvariante F_G entweder konstant oder nicht von endlichem Typ.*

BEWEIS: Zu einem Knoten K wähle man ein Diagramm mit minimaler Brückenzahl $br(K)$. Aus der Wirtinger-Präsentation ersehen wir, dass die Knotengruppe von $br(K)$ geeigneten Meridianen erzeugt wird. Die Anzahl der Darstellungen in eine endliche Gruppe G erfüllt daher die Abschätzung $F_G(K) \leq |G|^{br(K)}$. Aus Satz 9.9 folgt, dass F_G entweder konstant oder nicht von endlichem Typ ist. □

Dasselbe Argument lässt sich anwenden, wenn statt der Menge $\mathrm{Hom}(\pi(K), G)$ nur eine Teilmenge der Darstellungen gezählt wird, etwa nur Epimorphismen oder nur solche Homomorphismen, die einen Meridian auf ein festes Element $g \in G$ oder eine Longitude auf ein festes Element $l \in G$ abbilden. Entsprechendes gilt, falls Darstellungen modulo einer Äquivalenzrelation gezählt werden, zum Beispiel modulo Konjugation in G. Jede Invariante, die durch eine solcherart modifizierte Zählweise von Knotengruppen-Darstellungen entsteht, nennen wir eine *Modifikation* der Färbungszahl F_G.

SATZ 9.11. *Seien $F_1, \dots, F_n : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$ Färbungszahlen oder Modifikationen davon. Für jede Abbildung $\phi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{C}$ ist dann $F = \phi(F_1, \dots, F_n) : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ entweder konstant oder nicht von endlichem Typ.*

BEWEIS: Die (modifizierte) Färbungszahl F_i entsteht durch eine Zählung von Homomorphismen $\mathrm{Hom}(\pi(K), G_i)$ in eine endliche Gruppe G_i. Sie ist daher beschränkt durch $|G_i|^{br(K)}$. Als Funktion auf $\mathbb{N}^n$ bildet ϕ trivialerweise beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab. Die Invariante F ist folglich auf jeder Twistfolge beschränkt. Sie ist entweder konstant oder nicht von endlichem Typ. □

9.4. Nilpotente Gruppen

Wir gehen einen Schritt weiter und charakterisieren diejenigen Gruppen, für die F_G konstant ist. Nach Satz 4.11 wissen wir, dass für eine nilpotente Gruppe G die Färbungszahl F_G^x konstant gleich 1 ist, denn G entsteht durch wiederholte zentrale Erweiterung aus der trivialen Gruppe. In diesem Fall gilt $F_G(K) = |G|$ für alle Knoten K.

Zur Umkehrung ziehen wir Satz 2.39 heran: Eine endliche Gruppe ist genau dann epimorphes Bild einer Knotengruppe, wenn sie von einer ihrer Konjugationsklassen erzeugt wird. Dieser Satz hat folgendes Korollar:

KOROLLAR 9.12. *Die Invariante F_G ist genau dann konstant, wenn jede Untergruppe $H \leq G$ mit $H = \langle x^H \rangle$ abelsch ist (und damit zyklisch).*

BEWEIS: Jeder Knoten K besitzt genau $|G|$ Darstellungen, die durch die Abelschmachung $\pi(K)_{ab} \cong \mathbb{Z}$ faktorisieren. Daraus folgt $F_G(K) \geq F_G(\bigcirc) = |G|$.

Wenn ein Knoten K mit $F_G(K) > |G|$ existiert, dann muss es mindestens einen Homomorphismus $\varphi : \pi(K) \to G$ geben, der nicht durch die Abelschmachung faktorisiert. Das Bild $H = \mathrm{Im}(\varphi)$ ist dann eine nicht-abelsche Untergruppe und erfüllt $H = \langle x^H \rangle$, wobei x das Bild eines Meridians ist.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass G eine nicht-abelsche Untergruppe $H = \langle x^H \rangle$ enthält. Nach Satz 2.39 existiert dann ein Knoten K mit einem Epimorphismus $\pi(K) \twoheadrightarrow H \hookrightarrow G$. Das bedeutet aber $F_G(K) > F_G(\bigcirc)$, und die Knoteninvariante F_G ist nicht konstant. □

Wir bringen dieses Kriterium in eine gruppentheoretisch leichter fassbare Form. Für zwei Untergruppen $S, H \leq G$ definieren wir $\langle S^H \rangle$ als diejenige Untergruppe, die von den Elementen $s^h = h^{-1}sh$ erzeugt wird, wobei $s \in S$ und $h \in H$ gelte. Für eine zyklische Untergruppe $S = \langle x \rangle$ gilt dann $\langle S^H \rangle = \langle x^H \rangle$.

LEMMA 9.13. *Für eine endliche Gruppe G und eine Untergruppe $S \leq G$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die einzige Untergruppe $H \leq G$ mit $H = \langle S^H \rangle$ ist die Untergruppe S selbst.*
2. *Die Untergruppe S ist subnormal in G, das heißt, es gibt eine Subnormalreihe $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G_{n-1} \trianglerighteq G_n = S$.*

BEWEIS: (1⇒2) Wir beginnen mit $G_0 = G$ und konstruieren eine Subnormalreihe induktiv durch $G_{k+1} := \langle S^{G_k} \rangle$. Da G endlich ist, muss sich diese Reihe stabilisieren, also gilt $G_{n+1} = G_n$ für hinreichend großes n. Das bedeutet aber $G_n = \langle S^{G_n} \rangle$, und Voraussetzung (1) impliziert $G_n = S$.

(2⇒1) Wir nehmen an, es existiere eine Subnormalreihe wie in Bedingung (2) angegeben. Sei nun $H \leq G$ eine Untergruppe mit $H = \langle S^H \rangle$. Aus $H \leq G_0$ folgt dann $H = \langle S^H \rangle \leq \langle S^{G_0} \rangle \leq G_1$, denn G_1 enthält S und ist normal in G_0. Dieses Argument können wir nun iterieren: Aus $H \leq G_1$ folgt $H = \langle S^H \rangle \leq \langle S^{G_1} \rangle \leq G_2$. So fortfahrend erreichen wir schließlich $H \leq G_n = S$ und damit $H = S$. □

LEMMA 9.14. *Für eine endliche Gruppe G sind äquivalent:*

1. *Die Gruppe G ist nilpotent.*
2. *Jede Untergruppe ist subnormal in G.*
3. *Jede zyklische Untergruppe ist subnormal in G. (Baer-Bedingung)*
4. *Für je zwei Elemente $x, y \in G$ verschwindet die Folge der iterierten Kommutatoren $x_0 = x$, $x_{k+1} = [x_k, y]$ für hinreichend großes k. (Engel-Bedingung)*

BEWEIS: Die Äquivalenz (1)⇔(2) ist eine der vielen Charakterisierungen nilpotenter Gruppen und zum Beispiel in dem Buch von B. Huppert [48, Kap. III, §2,§7] zu finden. Der Schritt (2)⇒(3) ist trivial. Um (3)⇒(4) zu zeigen, beginnen wir mit einer Subnormalreihe $G = G_0 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = \langle y \rangle$. Ausgehend von $x_0 \in G_0$ erhalten wir induktiv $x_{k+1} = x_k^{-1} y^{-1} x_k y \in \langle y^{G_k} \rangle \leq G_{k+1}$. So gelangen wir schließlich zu $x_n \in G_n = \langle y \rangle$. Der nächste Kommutator ergibt dann $x_{n+1} = [x_n, y] = 1$. Die Implikation (4)⇒(1) wurde zuerst von M. Zorn [103] beobachtet, ein Beweis findet sich bei B. Huppert [48, Kap. III, §6]. □

Wir kommen nun zu der angekündigten Charakterisierung:

SATZ 9.15. *Die Invariante F_G ist genau dann konstant, wenn G nilpotent ist.*

BEWEIS: Nach Korollar 9.12 ist die Knoteninvariante F_G genau dann konstant, wenn jede Untergruppe $H = \langle x^H \rangle$ zyklisch ist. Nach Lemma 9.13 ist dies genau dann der Fall, wenn jede zyklische Untergruppe subnormal in G ist. Das wiederum ist nach Lemma 9.14 äquivalent zur Nilpotenz von G. □

9.5. Verallgemeinerung auf Verschlingungen

Zum Schluss dieses Kapitels vergleichen wir die obigen Ergebnisse mit der Situation für Verschlingungen. Das Beschränktheits-Kriterium aus Satz 9.9 lässt sich nur teilweise auf Verschlingungen übertragen. Für Verschlingungen sind der Zopfindex, das Geschlecht und die Brückenzahl sequentiell beschränkt; die Beweise von Lemma 9.5, 9.6 und 9.8 übertragen sich wörtlich.

KOROLLAR 9.16. *Sei $\mathcal{L}^\mu$ die Menge der Isotopieklassen von Verschlingungen mit μ Komponenten, und sei $\nu : \mathcal{L}^\mu \to \mathbb{N}$ der Zopfindex, das Geschlecht oder die Brückenzahl. Wenn eine Invariante $F : \mathcal{L}^\mu \to \mathbb{C}$ die Ungleichung $|F(L)| \leq \phi(\nu(L))$ für alle Verschlingungen L und eine geeignete Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ erfüllt, dann ist F sequentiell beschränkt. Insbesondere ist F entweder konstant oder nicht von endlichem Typ.* □

Für die Entknotungszahl gilt diese Verallgemeinerung nicht mehr, denn im Beweis von Lemma 9.7 war die Voraussetzung eines *Knotens* wesentlich. Als Gegenbeispiel betrachte man die Verschlingungszahl lk; diese ist eine Vassiliev-Invariante vom Typ 1. Wenn zwei Komponenten der Verschlingung miteinander verdrillt werden, dann gilt $lk(L_z) = lk(L_0) + z$. Die Ungleichung $u \geq |lk|$ zeigt insbesondere, dass die Entknotungszahl in diesem Fall unbeschränkt wächst.

Wir kommen schließlich zur Verschlingungs-Invariante $F_G : \mathcal{L}^\mu \to \mathbb{N}$, die wie zuvor durch $F_G(L) = |\operatorname{Hom}(\pi(L), G)|$ definiert wird. Anders als für Knoten gilt für Verschlingungen eine wesentlich einfachere Dichotomie; die Rolle der nilpotenten Gruppen wird von den abelschen Gruppen übernommen.

SATZ 9.17. *Sei $\mu \geq 2$. Die Verschlingungs-Invariante $F_G : \mathcal{L}^\mu \to \mathbb{N}$ ist konstant, wenn G abelsch ist; andernfalls ist sie nicht von endlichem Typ.*

BEWEIS: Sei br die Brückenzahl der Verschlingung L. Nach der Wirtinger-Präsentation kann die Gruppe $\pi(L)$ von br Meridianen erzeugt werden. Daraus folgt die Abschätzung $F_G(L) \leq |G|^{br(L)}$ genau wie im Fall von Knoten. Nach Korollar 9.16 können wir schließen, dass F_G entweder konstant oder nicht von endlichem Typ ist.

Im Falle einer abelschen Gruppe G faktorisiert jede Darstellung durch die Abelschmachung $\pi(L)_{ab} \cong \mathbb{Z}^\mu$, also ist $F_G = |G|^\mu$ konstant. Wenn G hingegen nicht-abelsch ist, dann ist F_G nicht konstant. Es reicht, dies für Verschlingungen mit zwei Komponenten zu erklären. Die Gruppe der trivialen Verschlingung $\bigcirc^2$ ist frei über zwei Erzeugern, die Gruppe der Hopf-Verschlingung H ist hingegen frei-abelsch über zwei Erzeugern. Folglich gilt $F_G(H) < F_G(\bigcirc^2) = |G|^2$ für jede nicht-abelsche Gruppe G. $\square$

But pleasures are like poppies spread—
You seize the flow'r, its bloom is shed;
Or like the snow falls in the river—
A moment white, then melts for ever;
Nae man can tether time nor tide;
The hour approaches Tam maun ride.
Robert Burns, *Tam o'Shanter*

Zusammenfassung

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen: Der erste widmet sich der Knotengruppe und ihren Darstellungen. Hier wird die Klasse der Färbungspolynome eingeführt und untersucht. Der zweite Teil behandelt Vassiliev-Invarianten und entwickelt das Konzept der geometrischen Folgen von Knoten. Damit gelingt die Charakterisierung von Vassiliev-Invarianten als Polynome auf geometrischen Knotenfolgen. Die Handlungsstränge beider Teile führen im letzten Kapitel zusammen, in dem ich zeige, dass die Anzahlen von Knotengruppen-Darstellungen und Vassiliev-Invarianten zwei getrennte Klassen bilden.

Färbungspolynome

Sei G eine Gruppe und x ein Element mit endlicher Konjugationsklasse. Für jeden Knoten K ist das Färbungspolynom definiert als $P(K) = \sum_\rho \rho(l_K)$. Summiert wird dabei über alle Darstellungen $\rho : \pi(K) \to G$ der Knotengruppe, die den fest gewählten Meridian m_K des Knotens auf das Element x in G abbilden. Das Bild $\rho(l_K)$ der Longitude ist ein Charakteristikum der Darstellung ρ. Durch die Summation über alle Darstellungen erhalten wir eine Invariante des Knotens.

Die so definierten Invarianten sind keine Polynome, sondern Elemente im Gruppenring $\mathbb{Z}G$. Sie verhalten sich jedoch wie die bekannten Knotenpolynome: Sie sind multiplikativ bei verbundener Summe und spiegeln Symmetrien und Perioden von Knoten wider. Zahlreiche Beispiele zeigen, dass Färbungspolynome hervorragend geeignet sind, die Symmetrien von Knoten zu untersuchen. Zum Beispiel wird der Knoten 8_{17} von seinem Reversen unterschieden.

Kapitel 4 zeigt, dass man Knotengruppen-Darstellungen bei zentraler Erweiterung der Gruppe G eindeutig hochheben kann. Ich zeige anschließend, dass sich jede endliche Konjugationsklasse in eine endliche Gruppe einbetten lässt, sodass das Färbungspolynom maximale Information enthält. Für die Untersuchung von Färbungspolynomen kann man sich demnach auf endliche Gruppen beschränken.

Algorithmen

Um ein Färbungspolynom zu berechnen, müssen zuerst *alle* Darstellungen von $(\pi(K), m_K)$ in (G, x) gefunden werden. Die übliche Vorgehensweise ist die Minimierung der Brückenzahl: Lässt sich der Knoten durch ein Diagramm mit b Brücken darstellen, dann wird die Knotengruppe $\pi(K)$ von b Meridianen erzeugt. Ist $Q = x^G$ die betrachtete Konjugationsklasse, dann müssen $|Q|^{b-1}$ mögliche Abbildungen geprüft werden.

Kapitel 5 erklärt einen verbesserten Algorithmus, der die erschöpfende Suche von Knotengruppen-Darstellungen drastisch abkürzt. Das ist von allgemeinerem Interesse, da Knotengruppen-Darstellungen in endliche Gruppen auch in anderen Zusammenhängen genutzt und berechnet werden.

Zur Optimierung sucht man geeignete Unterdiagramme, rationale Tangles im Sinne von J.H. Conway, und löst das Teilproblem hierfür separat:

SATZ 5.14. *Bei der Färbung eines Knotendiagramms kann das Teilproblem eines rationalen Tangles von linearem auf konstanten Aufwand reduziert werden.*

Aus dieser lokalen Optimierung lassen sich optimierte Lösungsverfahren für alle Knotendiagramme aufbauen. Am wirkungsvollsten ist diese Technik bei algebraischen Tangles; für sie lässt sich das Färbungsproblem typischerweise mit linearem Aufwand lösen. Für Knoten bedeutet das:

ERGEBNIS. *Die Klasse der Knoten, die mit linearem Aufwand gefärbt werden können, enthält nicht nur die Zweibrückenknoten, sondern die meisten arboreszenten Knoten, insbesondere Brezel-Knoten und Montesinos-Knoten.*

Die meisten Knoten mit geringer Kreuzungszahl sind arboreszent. Darüber hinaus gibt es arboreszente Knoten mit beliebig hoher Brückenzahl, wie etwa die Familie der Montesinos-Knoten zeigt. Die Existenz eines Algorithmus mit typischerweise linearem Zeitaufwand ist daher höchst erstaunlich.

Der hier entwickelte Algorithmus ist auf alle Knoten und auf alle Gruppen gleichermaßen anwendbar. Als generischer Algorithmus ist er die bisher effizienteste Methode zur erschöpfenden Suche nach Knotengruppen-Darstellungen.

Vassiliev-Invarianten

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden Vassiliev-Invarianten betrachtet, wobei der Vergleich zu Färbungsinvarianten betont wird: Erstens lassen sich Vassiliev-Invarianten und Färbungszahlen aus linearen Darstellungen der Zopfgruppen gewinnen. Zweitens entspricht die Artin-Magnus-Darstellung der Zopfgruppen der Färbung von Zöpfen mit Elementen einer freien Gruppe. Trotz dieser Ähnlichkeiten verhalten sich Färbungszahlen und Vassiliev-Invarianten vollkommen unterschiedlich. Hierzu entwickelt der zweite Teil dieser Arbeit das Konzept der geometrischen Knotenfolgen.

Geometrische Knotenfolgen. Kapitel 8 untersucht geometrische Folgen von Knoten, also Folgen der Form $K_n = st^n u$ für $n \in \mathbb{N}$. Dabei sind s und u zwei Tangles und ihre Komposition su ein Knoten. Das Tangle t sei in der angegebenen Weise mit s und u komponierbar und homotop zur Identität.

SATZ 8.9. *Eine Knoteninvariante $v : \mathcal{K} \to \mathbb{Q}$ ist genau dann eine Vassiliev-Invariante vom Grad $\leq m$, wenn sie auf jeder geometrischen Folge ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist.*

Geometrische Folgen ermöglichen neue Ansätze, ein Knotenpaar zu finden, das von keiner Vassiliev-Invariante unterschieden werden kann:

KOROLLAR 8.19. *Angenommen ein Knoten K ist Teil einer geometrischen Folge, die unendlich viele reversible Knoten enthält. Dann können Vassiliev-Invarianten in Charakteristik 0 den Knoten K nicht von seinem Reversen $K^!$ unterscheiden.*

Bislang ist unbekannt, ob Vassiliev-Invarianten alle Knoten unterscheiden, und die Erkennung nicht-reversibler Knoten ist ein wichtiger Prüfstein. Brezelknoten bildeten das historisch erste Beispiel nicht-reversibler Knoten und sind seitdem eingehend studiert worden. Die Technik der geometrischen Folgen lässt sich hier besonders gut einsetzen:

SATZ 8.16/8.17. *Bis Grad 8 kann keine Vassiliev-Invariante Brezelknoten von ihren Reversen unterscheiden. Für abelsche Gruppen ohne 2-Torsion gilt diese Aussage sogar bis Grad 10.*

Nach den Computer-Rechnungen von J. Kneissler gilt die Aussage über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_2$ sogar bis Grad 12. Für andere abelsche Gruppen war bislang nichts bekannt.

Anwendung auf Zopfgruppen. Aufgrund der Artin-Magnus-Darstellung lassen sich je zwei Zöpfe durch eine geeignete Vassiliev-Invariante unterscheiden. Dies erlaubt Folgerungen über die Struktur der Zopfgruppen:

KOROLLAR 8.23. *Sei α ein Zopf und β ein reiner Zopf gleicher Strangzahl. Wenn α mit einer Potenz β^n für ein $n \geq 2$ kommutiert, dann kommutiert α auch mit β.*

Als weitere Anwendung gebe ich einen neuen und sehr kurzen Beweis, dass die reinen Zopfgruppen torsionsfrei sind.

Sequentiell beschränkte Invarianten. Die einfachsten geometrischen Folgen sind Twistfolgen und wurden zuerst von J. Dean und R. Trapp untersucht. Sie konnten damit zeigen, dass viele klassische Invarianten nicht von endlichem Typ sind. Dieses Ergebnis vertiefe ich in Kapitel 9, indem ich zeige, dass Zopfindex, Brückenzahl, Geschlecht und Entknotungszahl auf Twistfolgen beschränkt sind. Dies führt zu einem allgemeinen Beschränktheitskriterium:

SATZ 9.9. *Sei $\nu : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$ entweder der Zopfindex, die Brückenzahl, das Geschlecht oder die Entknotungszahl und $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion. Wenn eine Knoteninvariante $F : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ die Ungleichung $|F(K)| \leq \phi(\nu(K))$ für alle Knoten K erfüllt, dann ist F entweder konstant oder nicht von endlichem Typ.*

Das Beschränktheitskriterium lässt sich sehr gut auf die im ersten Teil dieser Arbeit diskutierten Färbungszahlen anwenden:

SATZ 9.10/9.15. *Die Anzahl $F_G(K)$ der Knotengruppen-Darstellungen $\pi(K) \to G$ ist entweder konstant oder nicht von endlichem Typ. Sie ist genau dann konstant, wenn G nilpotent ist.*

Offene Fragen

Zum Schluss stelle ich einige offene Fragen zusammen, die im Verlauf dieser Arbeit berührt wurden.

In Kapitel 1 wurde die Kategorie $\mathcal{T}$ der Tangles erklärt. Die *Brückenzahl* eines Tangles ist die halbe Anzahl relativer Extrema, minimiert über die Isotopieklasse. Zöpfe sind genau diejenigen Tangles, die Brückenzahl 0 haben. Offenbar gilt bei der Komposition zweier Tangles die Ungleichung $br(st) \leq br(s) + br(t)$. Es stellt sich daher die

FRAGE: Ist die Brückenzahl $br : \mathcal{T}(n,n) \to \mathbb{N}$ additiv?

Der einfachste Fall $n = 1$ entspricht langen Knoten; hier ist die Additivität ein klassisches Ergebnis von H. Schubert. Der Fall $n \geq 2$ ist eine natürliche Verallgemeinerung, wurde aber bislang nicht behandelt.

FRAGE: Ist die Brückenzahl eines Knotens gleich der Mindestzahl von Meridian-Erzeugern der Knotengruppe?

Diese Frage wurde in Kapitel 5 diskutiert. Die Gleichheit gilt für Knoten mit bis zu drei Brücken und für alle Montesinos-Knoten. Ein Gegenbeispiel müsste mindestens Brückenzahl vier haben, ist aber bislang nicht bekannt.

FRAGE: Werden Knoten durch ihre Färbungspolynome getrennt?

Jede Knotengruppe $\pi(K)$ ist residuell endlich, das heißt, zu jedem Element $a \neq 1$ existiert ein Homomorphismus $\rho : \pi(K) \to G$ in eine endliche Gruppe mit $\rho(a) \neq 1$. Es gibt also sehr viele endliche Darstellungen, und die Chancen einer positiven Antwort stehen nicht schlecht. Andererseits enthalten Färbungspolynome neben der Anzahl keine weitere Information über die Darstellungen der Knotengruppe. Die Frage kann daher nicht ohne Weiteres entschieden werden.

FRAGE: Lassen sich Färbungs-R-Matrizen deformieren?

Die Tauschung $\tau : a \otimes b \mapsto b \otimes a$ ist eine Lösung der Yang-Baxter-Gleichung, die zugehörige Verschlingungs-Invariante ist trivial. Das Jones-Polynom entsteht daraus durch Deformation — und ist eine höchst interessante Invariante.

Zu jeder Konjugationsklasse $Q = x^G$ wird durch $c_Q : a \otimes b \mapsto b \otimes a^b$ eine R-Matrix definiert. Die zugehörige Verschlingungs-Invariante ist die Färbungszahl F_Q und schon für sich genommen interessant. Lässt sich c_Q deformieren oder handelt es sich um eine isolierte Lösung der Yang-Baxter-Gleichung?

FRAGE: Welche Vassiliev-Invarianten von Verschlingungen lassen sich aus der Artin-Magnus-Darstellung der Zopfgruppen gewinnen?

Diese Darstellung wurde in Abschnitt 6.6 diskutiert. Sie produziert ausreichend viele Invarianten, um Zöpfe zu klassifizieren. Es scheint möglich, diesen Ansatz auf geschlossene Zöpfe und Verschlingungen zu übertragen.

ANHANG A

Alexander-Moduln

Dieser Anhang erläutert den Zusammenhang zwischen Knotengruppe und Alexander-Polynom. Wir vergleichen dies anschließend mit Darstellungen der Knotengruppe in endliche Gruppen.

Alexander-Moduln. Sei k ein Ring. Zu jedem Epimorphismus $\rho : \pi \twoheadrightarrow G$ von Gruppen definieren wir einen kG-Modul wie folgt: Die Gruppe π operiert via Konjugation auf $\tilde{\pi} = \ker(\rho)$ und damit auch auf der Abelschmachung $\tilde{\pi}_{ab}$. Dabei operiert $\tilde{\pi}$ trivial, sodass wir zum Quotienten $\pi/\tilde{\pi} = G$ übergehen können. Dadurch wird $M(\rho) := \tilde{\pi}_{ab} \otimes k$ zu einem kG-Modul, den wir den *Alexander-Modul* der Darstellung ρ nennen. Wenn π eine endlich erzeugte Gruppe ist, dann ist $M(\rho)$ ein endlich erzeugter kG-Modul.

Eine geometrische Interpretation dieser Konstruktion erhalten wir, wenn wir einen topologischen Raum X mit Fundamentalgruppe $\pi_1(X) = G$ betrachten. Zu der Untergruppe $\tilde{\pi} = \ker(\rho)$ gehört die Überlagerung $\tilde{X} \to X$ mit Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}) = \tilde{\pi}$. Da $\tilde{\pi}$ normal in π ist, handelt es sich um eine normale Überlagerung: Die Quotientengruppe $G = \pi/\tilde{\pi}$ operiert als Decktransformationsgruppe auf $\tilde{X}$ mit Quotientenraum $X = \tilde{X}/G$. Insbesondere operiert G auf der ersten Homologie $H_1(\tilde{X}; k) = \tilde{\pi}_{ab} \otimes k$, die dadurch zu einem kG-Modul wird. Dies ist der oben definierte Alexander-Modul.

Das Alexander-Polynom. Die obige Konstruktion wenden wir auf Knoten an. Hierzu betrachten wir die Abelschmachung der Knotengruppe, $\alpha : \pi(K) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$. Der Alexander-Modul des Knotens K ist der Modul $M(\alpha)$ über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. Die Isomorphieklasse dieses Moduls ist eine Invariante des Knotens und als solche detailliert untersucht worden [45].

Um diese Invariante zu vereinfachen, wählen wir als Koeffizientenring die rationalen Zahlen. Der *rationale Alexander-Modul* $M \otimes \mathbb{Q}$ ist ein endlich erzeugter Modul über $R = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. Nach dem Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen existiert eine eindeutige Summenzerlegung

$$M \otimes \mathbb{Q} \;\cong\; R^r \oplus R/t_1 \oplus R/t_2 \oplus \cdots \oplus R/t_n.$$

Dabei ist r der Rang des freien Anteils, und der Torsionsteil wird beschrieben durch eine Kette von Elementen $t_1 | t_2 | \cdots | t_n$ in R. Diese sind bis auf Einheiten eindeutig bestimmt. Ihr Produkt $\Delta_K = t_1 t_2 \cdots t_n \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ heißt *Alexander-Polynom* des Knotens K.

BEMERKUNG A.1. Das Alexander-Polynom Δ_K lässt sich durch die Bedingungen $\Delta_K(1) = 1$ und $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$ normieren, sodass wir von *dem* Alexander-Polynom des Knotens sprechen können. In dieser Normierung tritt es in Satz 6.4 als Spezialfall des HOMFLY-Polynoms auf.

BEMERKUNG A.2. Die hier angegebene Definition des Alexander-Polynoms deutet bereits eine Berechnungsmethode an. Eine algorithmische Ausführung wird durch Fox' Kalkül der „freien Differentiale" [22, 70] erklärt. Einen weiteren, geometrischen Zugang bietet die Auswertung von Seifert-Matrizen [17]. Sie hat den Vorteil, dass ihr Rechenaufwand nur quadratisch in der Kreuzungszahl wächst.

BEMERKUNG A.3. Die kombinatorische, rekursive Berechnungsmethode wurde von J.H. Conway [19] ausgearbeitet. Sie entspricht dem Fall $k = 0$ aus Satz 6.4 und findet sich als Schlussbemerkung bereits in der Arbeit [1] von J.W. Alexander aus dem Jahr 1928. Es blieb über 60 Jahre unbemerkt, dass diese Schienenrelation für jede Wahl der Koeffizienten eine Invariante definiert [38, 71].

BEMERKUNG A.4. Da die markierte Knotengruppe $[\pi(K), m_K, l_K]$ eine vollständige Invariante ist, sollte sich jede andere Invariante daraus gewinnen lassen. Für das Alexander-Polynom haben wir einen solchen Weg oben skizziert. Für das Jones-Polynom und alle anderen Vassiliev-Invarianten ist hingegen kein solcher Zusammenhang bekannt.

Endliche Darstellungen. Sei (G, x) eine Färbungsgruppe, das heißt, die Konjugationsklasse x^G ist endlich und erzeugt G. Dann gibt es für jeden Knoten K nur endlich viele Darstellungen $\rho : \pi(K), m_K \to G, x$. Diese Tatsache wird im ersten Teil dieser Arbeit zur Definition von Färbungspolynomen genutzt. Färbungspolynome werten das *Bild* von ρ aus, es lohnt sich aber, auch den *Kern* zu untersuchen. Ich skizziere einen Ansatz, der das Alexander-Polynom imitiert.

Eventuell hat x endliche Ordnung in G. Um diesen Missstand zu beheben, gehen wir zur adjungierten Gruppe über, wie sie in Abschnitt 2.5 konstruiert wurde. Der Einfachheit halber nehmen wir $G = \mathrm{Adj}(x^G)$ an. Die Untergruppe $\langle x \rangle$ ist dann frei und hat endlichen Index in G (vgl. Abschnitt 4.6).

Zu jeder Darstellung $\rho : \pi(K), m_K \to G, x$ gehört der Alexander-Modul $M(\rho)$. Er ist endlich erzeugt über G und deshalb auch über $\langle x \rangle$. Folglich ist $M(\rho)$ ein endlich-erzeugter $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}]$-Modul. Wie oben können wir ein Alexander-Polynom $\Delta_K^\rho \in \mathbb{Q}[x^{\pm 1}]$ definieren. Dieses Polynom hängt nicht nur vom Knoten, sondern auch von der Darstellung ρ ab. Wir gewinnen eine Knoteninvariante, indem wir die Menge aller Darstellungen $\rho : \pi(K), m_K \to G, x$ berücksichtigen.

Für die triviale Konjugationsklasse $\{1\}$ ist $\mathbb{Z}$ die adjungierte Gruppe. Es gibt hier nur eine Darstellung $\alpha : \pi(K), m_K \to \mathbb{Z}, 1$, und wir sind in der Situation des klassischen Alexander-Polynoms. Der hier vorgeschlagene Rahmen ist seine natürliche Verallgemeinerung. Eine nähere Untersuchung steht noch aus.

ANHANG M

Metazyklische Gruppen

Die Mathieu-Gruppe M_{11} aus Abschnitt 3.2 besitzt keinen Automorphismus, der ein Element der Ordnung 11 auf sein Inverses abbildet. Dieses Phänomen ist nichts ungewöhnliches und tritt bereits bei weniger komplizierten Gruppen auf. Als einfachstes Beispiel seien hier die metazyklischen Gruppen $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$ genannt.

Hierzu sei $p \geq 3$ eine Primzahl und $q \geq 2$ teile $p-1$. Die Gruppe $\mathbb{Z}_p$ identifizieren wir mit der additiven Gruppe des Körpers $\mathbb{F}_p$. Ein Element $\xi \in \mathbb{F}_p^\times$ der Ordnung q stiftet eine Identifikation der Gruppe $\mathbb{Z}_q$ mit der multiplikativen Untergruppe $\langle\xi\rangle \leq \mathbb{F}_p^\times$. In der Gruppe $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$ hat die Multiplikation die Gestalt

$$(a, \xi^i) \cdot (b, \xi^j) = (a + \xi^i b,\ \xi^{i+j}).$$

Neutrales Element ist $(0, 1)$, und das Inverse des Elements (a, ξ^i) ist $(-\xi^{-i} a, \xi^{-i})$. Dies entspricht der Multiplikation der Matrizen in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & \xi^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & \xi^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a + \xi^i b & \xi^{i+j} \end{pmatrix}.$$

(Im Fall $q = 2$ ist $\xi = -1$, und $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_2$ ist die Diedergruppe der Ordnung $2p$.) Auf der Menge $Q = \{\, (a, \xi) \mid a \in \mathbb{Z}_p \,\}$ nimmt die Konjugation die Form

$$(a, \xi)^{(b,\xi)} = (\, \xi^{-1} a + (1 - \xi^{-1}) b \,,\, \xi \,)$$

an. Es handelt sich um das Quandel der linearen Färbung aus Beispiel 2.18.

PROPOSITION M.1. *Es existiert kein Automorphismus von $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$, der $(0, \xi)$ auf $(0, \bar{\xi})$ mit $\xi \neq \bar{\xi}$ abbildet. Im Fall $q \geq 3$ bedeutet dies, dass es keine Obversion bzgl. des Fußpunktes $(0, \xi)$ gibt.*

BEWEIS: Zunächst ist klar, dass nur Elemente der Form $(a, 1)$ Ordnung p haben; insbesondere ist $\mathbb{Z}_p$ eine *charakteristische* Untergruppe in $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$: Jeder Automorphismus φ erfüllt $\varphi(a, 1) = (\lambda a, 1)$ mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{F}_p^\times$. Nehmen wir $\varphi(0, \xi) = (0, \bar{\xi})$ an, dann folgt

$$\varphi(a, \xi^i) = \varphi\big[(a, 1) \cdot (0, \xi^i)\big] = (\lambda a, 1) \cdot (0, \bar{\xi}^i) = (\lambda a, \bar{\xi}^i).$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$(\xi, 1) = \varphi(\xi\lambda^{-1}, 1) = \varphi\big[(0, \xi) \cdot (\lambda^{-1}, \xi^{-1})\big] = (0, \bar{\xi}) \cdot (1, \bar{\xi}^{-1}) = (\bar{\xi}, 1).$$

Ein solcher Automorphismus kann also nur für $\xi = \bar{\xi}$ existieren. □

Diese Überlegungen übertragen sich auf den allgemeineren Fall $\mathbb{Z}_p^d \rtimes \mathbb{Z}_q$. Hierbei ist $\xi \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{F}_p)$ ein Automorphismus der Ordnung q, und diese ist teilerfremd zu p. R. Hartley [42] hat diese Gruppen genutzt, um Knoten mittels ihrer Überlagerungen von ihren Reversen zu unterscheiden.

ANHANG P

Diskrete Polynomfunktionen

Dieser Anhang erläutert Polynomfunktionen $f : \mathbb{N}^d \to A$ in eine abelsche Gruppe A. Definition und Lemmata übertragen sich wörtlich auf Abbildungen $f : \mathbb{Z}^d \to A$. Wir definieren die diskrete partielle Ableitung $\Delta_i f : \mathbb{N}^d \to A$ durch $(\Delta_i f)(z) = f(z+e_i) - f(z)$. Dabei ist $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der i-te Einheitsvektor. Diese Ableitungen lassen sich wiederholt anwenden, und offensichtlich gilt $\Delta_i \Delta_j f = \Delta_j \Delta_i f$. Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^d$ setzen wir $\Delta^\alpha = \Delta_1^{\alpha_1} \cdots \Delta_d^{\alpha_d}$. Die Summe $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ nennen wir den *Grad* des Multiindex α.

DEFINITION P.1. Eine Abbildung $f : \mathbb{N}^d \to A$ heißt *Polynomfunktion* oder kurz *Polynom* vom Grad $\le m$, wenn die diskrete Ableitung $\Delta^\alpha f$ für jeden Multiindex α vom Grad $m+1$ verschwindet.

Die iterierte Differenz $\Delta^\alpha f$ können wir ausschreiben als

$$(\Delta^\alpha f)(z) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} (-1)^{|\alpha|-|\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \cdot f(z+\beta).$$

Für d-Tupel $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$ setzen wir dabei $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}$. Im Fall $\beta_i < 0$ oder $\beta_i > \alpha_i$ gilt $\binom{\alpha_i}{\beta_i} = 0$. Die oben angegebene Summe erstreckt sich über alle β mit $0 \le \beta \le \alpha$, das heißt $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ für alle $i = 1, \dots, d$.

Polynome und Koeffizienten. Wenn A ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, dann lässt sich jedes Polynom als $\sum c_\alpha z^\alpha$ mit Koeffizienten $c_\alpha \in A$ schreiben. Im allgemeinen Fall müssen wir eine andere Formulierung wählen: An die Stelle der Potenz z^α tritt der Binomialkoeffizient $\binom{z}{\alpha}$. Aus den Rechenregeln für die Binomialkoeffizienten folgt:

LEMMA P.2. *Für* $f(z) = \binom{z}{\alpha}$ *gilt* $(\Delta^\beta f)(z) = \binom{z}{\alpha-\beta}$.

BEWEIS: Dies folgt aus der Gleichung $\binom{z_i+1}{\alpha_i} - \binom{z_i}{\alpha_i} = \binom{z_i}{\alpha_i-1}$. □

LEMMA P.3. *Eine Abbildung* $f : \mathbb{N}^d \to A$ *ist genau dann ein Polynom vom Grad* $\le m$, *wenn sie sich schreiben lässt als*

$$f(z) = \sum_{|\alpha| \le m} \binom{z}{\alpha} c_\alpha$$

mit Koeffizienten $c_\alpha \in A$. *In diesem Fall ist die Darstellung eindeutig.*

BEWEIS: Angenommen, wir haben eine Abbildung f mit $f(z) = \sum_{|\alpha| \le m} \binom{z}{\alpha} c_\alpha$ für alle $z \in \mathbb{N}^d$. Nach Lemma P.2 ist f dann ein Polynom vom Grad $\le m$. Wegen $c_\alpha = (\Delta^\alpha f)(0)$ sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt.

Sei nun umgekehrt eine Abbildung $f : \mathbb{N}^d \to A$ gegeben, und es gelte $\Delta^\beta f = 0$ für $|\beta| = m + 1$. Wir setzen $c_\alpha = (\Delta^\alpha f)(0)$ und definieren damit das Polynom $\tilde{f}(z) = \sum_{|\alpha| \le m} \binom{z}{\alpha} c_\alpha$. Die Differenz $g = f - \tilde{f}$ erfüllt dann $\Delta^\beta g = 0$ für $|\beta| > m$ und darüber hinaus $(\Delta^\beta g)(0) = 0$ für alle Multiindizes β mit $|\beta| \le m$. Per Induktion über den Grad m zeigt man leicht, dass eine solche Funktion die Nullfunktion sein muss. Folglich gilt $f = \tilde{f}$. $\square$

Polynome und Perioden. Das Bild einer Polynomfunktion ist endlich erzeugt; es zerlegt sich in einen freien Anteil und einen endlichen Torsionsteil. Im Folgenden charakterisieren wir das Verhalten von Polynomfunktionen in eine endliche Gruppe A. Hierzu reicht es, $\mathbb{Z}_{p^l}$ mit p prim und $l \ge 1$ zu betrachten.

LEMMA P.4. *Für eine Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f hat Periode p^e, das heißt $f(z) = f(z + p^e w)$ für alle $z, w \in \mathbb{Z}$.*
(2) *f ist ein Polynom vom Grad $< p^e$.*

BEWEIS: Wir betrachten die oben genannte binomische Wechselsumme für die Primzahlpotenz $q = p^e$. In diesem Fall reduziert sich die Summe zu

$$(\Delta^q f)(z) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} \cdot f(z+k) = f(z+q) - f(z),$$

denn für $0 < k < q$ gilt $\binom{q}{k} \equiv 0 \mod p$. Daraus folgt die Äquivalenz (1)$\Leftrightarrow$(2). $\square$

Daraus folgt, dass es in der Algebra der Polynomfunktionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ Nullteiler gibt. Insbesondere ist der Grad eines Produkts im Allgemeinen nicht die Gradsumme der Faktoren.

Für Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{p^l}$ gelten ähnliche Aussagen. Das Verhältnis von Periode und Polynomgrad ist hier allerdings nicht so einfach. Wir begnügen uns mit der folgenden Charakterisierung:

LEMMA P.5. *Eine Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{p^l}$ ist genau dann ein Polynom, wenn sie eine Potenz von p als Periode hat.*

BEWEIS: Angenommen, f hat Periode $q = p^e$ und Werte in $A \subset \mathbb{Z}_{p^l}$. Wie im vorangegangenen Beweis sieht man, dass $\Delta^q f$ Werte in pA hat. Wiederholte Anwendung dieses Arguments liefert $\Delta^{ql} f = 0$, das bedeutet, f ist ein Polynom vom Grad $< ql$.

Wir zeigen nun umgekehrt, dass jedes Polynom modulo p^l periodisch ist. Für $q \in \mathbb{N}$ rechnet man leicht aus, dass $\binom{z+q}{\alpha} - \binom{z}{\alpha} = q \cdot r/\alpha!$ mit $r \in \mathbb{N}$ gilt. Für $q = p^e$ mit hinreichend grossem Exponenten e gilt folglich $\binom{z+q}{\alpha} \equiv \binom{z}{\alpha} \mod p^l$. $\square$

KOROLLAR P.6. *Eine Abbildung $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}_{p^l}$ ist genau dann ein Polynom, wenn sie in jeder Richtung eine Potenz von p als Periode hat, das heißt, es existiert ein Exponent $e \ge 0$, sodass $f(z) = f(z + p^e w)$ für alle $z, w \in \mathbb{Z}^d$ gilt.* $\square$

KOROLLAR P.7. *Jedes Polynom $f : \mathbb{Z}^d \to A$ in eine endliche abelsche Gruppe A besitzt eine Periode $q \ge 1$, das heißt $f(z) = f(z + qw)$ für alle $z, w \in \mathbb{Z}^d$. Ist q_0 die kleinste aller möglichen Perioden, dann sind die Primfaktoren von q_0 in denen der Ordnung $|A|$ enthalten.* $\square$

Polynome in Charakteristik Null. Die Polynom-Bedingung ist oben für ein d-dimensionales Gitter formuliert worden. In Charakteristik Null lässt sie sich auch durch das Verhalten auf Geraden formulieren. Eine *Gerade* ist dabei eine Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^d$ mit $g(x) = a + xb$ zu Konstanten $a, b \in \mathbb{N}^d$.

LEMMA P.8. *Sei A eine torsionsfrei abelsche Gruppe. Dann sind für jede Funktion $f : \mathbb{N}^d \to A$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Funktion f ist auf jeder Geraden ein Polynom Grad $\leq m$.*
2. *Die Funktion f ist auf $\mathbb{N}^d$ ein Polynom vom Grad $\leq m$.*

BEWEIS: Da $A \to A \otimes \mathbb{Q}$ eine Einbettung ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass A selbst ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist. Jedes Polynom $f : \mathbb{N}^d \to A$ können wir dann schreiben als $f(z) = \sum c_\alpha z^\alpha$ mit geeigneten Konstanten $c_\alpha \in A$. Die Implikation (2)⇒(1) ist dann klar.

Sei umgekehrt nur vorausgesetzt, dass f auf jeder Geraden ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist. Dies gilt insbesondere auf jeder Geraden $g(x) = a + xe_i$, also verschwindet $\Delta_i^{m+1} f$ für jedes i. Folglich ist f auf $\mathbb{N}^d$ ein Polynom vom Grad $\leq md$. Es bleibt noch zu zeigen, dass der Grad höchstens m ist.

Dazu schreiben wir f als $f(z) = \sum c_\alpha z^\alpha$ mit geeigneten Konstanten $c_\alpha \in A$. Sei f_i der homogene Anteil in Grad i. Ist n der Grad von f, dann wählen wir einen Punkt $b \in \mathbb{N}^d$ mit $f_n(b) \neq 0$. Das Polynom $h : \mathbb{N} \to A$ mit $h(x) = f(xb)$ setzt sich zusammen aus den homogenen Anteilen $h_i(x) = x^i f_i(b)$ und hat daher ebenfalls Grad n. Da aber $x \mapsto xb$ eine Gerade ist, hat h nach Voraussetzung höchstens Grad m. Also ist auch f ein Polynom vom Grad $\leq m$. □

BEMERKUNG P.9. Man beachte, dass dieser Satz für Torsionsgruppen nicht gilt. Als Gegenbeispiel betrachte man etwa die Funktion $f : \mathbb{N}^d \to \mathbb{F}_p$, die durch das Produkt $f(z) = z_1 z_2 \cdots z_d \mod p$ gegeben ist. Dies ist eine Polynomfunktion vom Grad d. Sie ist jedoch auf jeder Geraden p-periodisch und daher auf jeder Geraden ein Polynom vom Grad $< p$. Der Grad des Polynoms f kann also nicht allein durch sein Verhalten auf Geraden bestimmt werden.

Literaturverzeichnis

[1] J.W. Alexander: *Topological invariants of knots and links.* Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), 275–306

[2] D. Altschuler: *Representation of knot groups and Vassiliev invariants.* J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), 421–425

[3] E. Artin: *Theory of braids.* Ann. of Math. **48** (1947), 101–126

[4] M. Aschbacher: *Finite group theory.* Cambridge University Press 1986

[5] H. Azcan, R. Fenn: *Spherical representations of the link quandles.* Turkish J. of Mathematics **18** (1994), 102-110

[6] D. Bar-Natan: *On the Vassiliev knot invariants.* Topology **34** (1995), 423–472

[7] D. Bar-Natan: *Polynomial invariants are polynomial.* Math. Res. Lett. **2** (1995), 239–246

[8] D. Bar-Natan: *Vassiliev homotopy string link invariants.* J. Knot Theory Ramifications **4** (1995), 13–32

[9] J.S. Birman: *Braids, links, and mapping class groups.* Annals of Mathematics Studies No. 82, Princeton University Press 1974

[10] J.S. Birman, X.-S. Lin: *Knot polynomials and Vassiliev invariants.* Invent. Math. **111** (1993), 225–270

[11] M. Boileau: *Inversibilité des nœuds de Montesinos.* Publ. Math. Orsay No. 81.03, Paris 1981

[12] M. Boileau, H. Zieschang: *Nombre de ponts et générateurs méridiens des entrelacs de Montesinos.* Comment. Math. Helv. **60** (1985), 270–279

[13] M. Boileau, M. Zimmermann: *The π-orbifold group of a link.* Math. Z. **200** (1989), 187–208

[14] F. Bonahon, L. Siebenmann: *New geometric splittings of classical knots.* London Math. Soc. Lecture Notes No. 75, Cambridge University Press

[15] E. Brieskorn: *Automorphic sets and braids and singularities,* in: *Braids* (Hg. J.S. Birman, A. Libgober), Contemporary Mathematics No. 78, Amer. Math. Soc., Providence/RI 1988, 45–115

[16] E. Brieskorn, K. Saito: *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen.* Invent. Math. **17** (1972), 245–271

[17] G. Burde, H. Zieschang: *Knots.* de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1985

[18] J. van Buskirk: *Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order.* Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966), 81–97

[19] J.H. Conway: *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties,* in: *Computational problems in abstract algebra* (Hg. J. Leech), Pergamon Press, New York 1969, 329–358

[20] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson: *Atlas of finite groups.* Clarendon Press, Oxford 1985

[21] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D.D. Long, P.B. Shalen: *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds.* Invent. Math. **118** (1994), 47–84

[22] R.H. Crowell, R.H. Fox: *Introduction to knot theory.* Blaisdell Publishing Company (Ginn & Co), New York 1963; Neuauflage: Graduate Texts in Mathematics No. 57, Springer-Verlag, New York 1977

[23] M. Culler, P.B. Shalen: *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds.* Ann. of Math. **117** (1983), 109–146

[24] J. Dean: *Many classical knot invariants are not Vassiliev invariants.* J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), 7–9

[25] M. Dehn: *Die beiden Kleeblattschlingen.* Math. Ann. **75** (1914), 402–413

[26] P. Dehornoy: *From large cardinals to braids via distributive algebra.* J. Knot Theory Ramifications **4** (1995), 33–79

[27] J.L. Dyer: *The algebraic braid groups are torsion-free: an algebraic proof.* Math. Z. **172** (1980), 157–160

[28] A.J. Edmonds, C. Livingston: *Symmetric representations of knot groups.* Topology Appl. **18** (1984), 281–312

[29] M. Eisermann: *Über Schienenrelationen, Quandel und Knoteninvarianten.* Diplomarbeit, Universität Bonn 1996

[30] M. Eisermann: *The number of knot group representations is not a Vassiliev invariant.* Proc. Amer. Math. Soc. (2000), wird demnächst erscheinen

[31] E. Fadell, J. van Buskirk: *The braid groups of E^2 and S^2.* Duke Math. J. **29** (1962), 243–257

[32] E. Fadell, L.P. Neuwirth: *Configuration spaces.* Math. Scand. **10** (1962), 111–118

[33] W. Feit, J. Thompson: *Solvability of groups of odd order.* Pacific J. Math. **13** (1963), 775–1029

[34] R.H. Fox: *A quick trip through knot theory,* in: *Topology of 3-manifolds and related topics* (Hg. M.K. Fort), Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1962, 120–167

[35] R.H. Fox: *Metacyclic invariants of knots and links.* Canad. J. Math. **22** (1970), 193–201

[36] R.H. Fox, J.W. Milnor: *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots.* Osaka J. Math. **3** (1966), 257–267

[37] R.H. Fox, L.P. Neuwirth: *The braid groups.* Math. Scand. **10** (1962), 119-126

[38] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millet, A. Ocneanu: *A new polynomial invariant of knots and links.* Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 239–246

[39] The GAP Group: *GAP* — Groups, Algorithms, and Programming. Aachen / St Andrews 1999, `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap`

[40] F. Gonzalez-Acuña: *Homomorphs of knot groups.* Ann. of Math. (2) **102** (1975), 373–377

[41] C.McA. Gordon, J. Luecke: *Knots are determined by their complements.* J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 371-415

[42] R. Hartley: *Identifying non-invertible knots.* Topology **22** (1983), 137–145

[43] G. Hemion: *The classification of knots and 3-dimensional spaces.* Oxford University Press 1992

[44] J. Hempel: *3-Manifolds.* Annals of Mathematics Studies No. 86, Princeton University Press 1976

[45] J.A. Hillman: *Alexander ideals of links.* Lecture Notes in Mathematics No. 895, Springer-Verlag, New York 1981

[46] J.A. Hillman: *Symmetries of knots and links, and invariants of abelian coverings.* Kobe J. Math. **3** (1986), Part I p.7–27, Part II p.149–165

[47] J. Hoste, M. Thistlethwaite, et al: *KnotScape* . `http://www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html`

[48] B. Huppert: *Endliche Gruppen I.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134, Springer-Verlag, Berlin 1967

[49] B. Jiang, S. Wang: *Twisted topological invariants associated with representations,* in: *Topics in knot theory* (Hg. M.E. Bozhüyük), Kluwer Academic Publ., Dordrecht 1993, 211–227

[50] D. Johnson: *Homomorphs of knot groups.* Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 135–138

[51] D. Johnson, C. Livingston: *Peripherally specified homomorphs of knot groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 135–146

[52] V.F.R. Jones: *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra.* Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 103–111

[53] V.F.R. Jones: *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials.* Ann. Math. **126** (1987), 335–388

[54] D. Joyce: *A classifying invariant of knots, the knot quandle.* J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), 37–65

[55] E. Kalfagianni: *Vassiliev invariants and orientation of Pretzel knots.* J. Knot Theory Ramifications **7** (1998), 173-185

[56] C. Kassel: *Quantum groups.* Graduate Texts in Mathematics No. 155, Springer-Verlag, New York 1995

[57] L.H. Kauffman: *States models and the Jones polynomial.* Topology **26** (1987), 395–407

[58] K. Kawauchi: *Classification of pretzel knots.* Kobe J. Math. **2** (1985), 11–22

[59] A. Kawauchi: *A survey of knot theory.* Birkhäuser Verlag, Basel 1996

[60] T. Kitano: *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion.* Pac. J. Math. **174** (1996), 431–442

[61] J. Kneissler: *Die Kombinatorik der Diagrammalgebren von Invarianten endlichen Typs.* Dissertation, Bonn 1999

[62] M. Kontsevich: *Vassiliev's knot invariants,* in: *Gelfand Seminar,* Adv. Soviet Mat. vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence/RI 1993, 137–150

[63] G. Kuperberg: *Detecting knot invertibility.* J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), 173–181

[64] P. Kutzko: *On groups of finite weight.* Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 279–280

[65] S. Lambropoulou, C. P. Rourke: *Markov's theorem in 3-manifolds.* Topology Appl. **78** (1997), Special issue on braid groups and related topics, 95–122

[66] C. Lamm: *Zylinder-Knoten und symmetrische Vereinigungen.* Dissertation, Bonner Mathematische Schriften Nr. 321, Bonn 1999

[67] T.T.Q. Le, J. Murakami: *Representations of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral.* Commun. Math. Phys. **168** (1995), 535-562

[68] T.T.Q. Le, J. Murakami: *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links.* Compositio Math. **102** (1996), 41–64

[69] T.T.Q. Le, J. Murakami, T. Ohtsuki: *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds.* Topology **37** (1998), 539–574

[70] W.B.R. Lickorish: *An introduction to knot theory.* Graduate Texts in Mathematics No. 175, Springer-Verlag, New York 1997

[71] W.B.R. Lickorish, K.C. Millet: *A polynomial invariant of oriented links.* Topology **26** (1987), 107–141

[72] J. Lieberum: *Invariants de Vassiliev pour les entrelacs dans S^3 et dans les variétés de dimension trois.* Thèse, Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée No. 1998/30, Strasbourg 1998

[73] W. Magnus, A. Karras, D. Solitar: *Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations.* Wiley, New York 1966

[74] J. Milnor, J. Moore: *On the structure of Hopf algebras.* Ann. of Math. **81** (1965), 211–264

[75] K. Murasugi: *On a certain numerical invariant of link types.* Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 387–422

[76] K. Murasugi: *On periodic knots.* Comm. Math. Helv. **46** (1971), 162–174

[77] K. Murasugi: *On symmetry of knots.* Tsukuba J. Math. **2** (1980), 331–347

[78] K. Murasugi: *Jones polynomials and classical conjectures in knot theory.* Topology **26** (1987), 187-194

[79] L.P. Neuwirth: *Knot groups.* Annals of Mathematics Studies No. 56, Princeton University Press 1965

[80] K.A. Perko: *On dihedral covering spaces of knots.* Invent. Math. **34** (1976), 77–82

[81] J.H. Przytycki, P. Traczyk: *Invariants of links of Conway type.* Kobe J. Math. **4** (1987), 115–139

[82] K. Reidemeister: *Knotentheorie.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin 1932; Neuauflage: Springer-Verlag, New York 1948

[83] A.H. Rhemtulla: *Groups of finite weight.* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 191–192

[84] R. Riley: *Homomorphisms of knot groups on finite groups.* Math. Computation **25** (1971), 603–619

[85] D. Rolfsen: *Knots and Links.* Publish or Perish Inc., Berkeley 1976

[86] S. Rosebrock: *On the realization of Wirtinger presentations as knot groups.* J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), 211–222

[87] H. Schubert: *Knoten und Vollringe.* Acta Math. **90** (1953), 131–286

[88] H. Schubert: *Über eine numerische Knoteninvariante.* Math. Z. **61** (1954), 245–288

[89] H. Schubert: *Knoten mit zwei Brücken.* Math. Z. **65** (1956), 133–170

[90] P.B. Shalen: *Representations of 3-manifold groups and applications in topology,* in: *Proc. Int. Congr. Math. (ICM) Berkeley 1986* (Hg. A.M. Gleason), Amer. Math. Soc., Providence/RI 1987, 607–614

[91] M.B. Thistlethwaite: *Kauffman's polynomial and alternating links.* Topology **27** (1988), 285–298

[92] R. Trapp: *Twist sequences and Vassiliev invariants.* J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), 391–405

[93] A.G. Tristram: *Some cobordism invariants for links.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **66** (1969), 251-264

[94] H.F. Trotter: *Non-invertible knots exist.* Topology **2** (1964), 275–280

[95] V.G. Turaev: *Quantum invariants for knots and 3-manifolds.* de Gruyter, Berlin 1994

[96] V.A. Vassiliev: *Cohomology of knot spaces,* in: *Theory of Singularities and its Applications* (Hg. V.I. Arnold), Amer. Math. Soc., Providence/RI 1990, 23–69

[97] V.A. Vassiliev: *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications.* Transl. of Math. No. 98, Amer. Math. Soc., Providence/RI 1992

[98] M. Wada: *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups.* Topology **33** (1994), 241–256

[99] F. Waldhausen: *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large.* Ann. of Math. **87** (1968), 56–88

[100] J. Weeks: *SnapPea* . `http://thames.northnet.org/weeks/`

[101] W. Witten: *Knot complements and groups.* Topology **26** (1987), 41–44

[102] S. Yamada: *The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link.* Invent. Math. **89** (1987), 347–356.

[103] M. Zorn: *Nilpotency of finite groups.* Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 485–486

Unser Leben währet siebenzig Jahr',
und wenn's hoch kommt, so sind's achtzig Jahre,
und wenn's köstlich gewesen ist,
so ist's Mühe und Arbeit gewesen.
Psalm 90,10 nach Martin Luther

Nachwort

Der Leserin und dem Leser präsentiert sich diese Arbeit als Ergebnis, für mich war sie Prozess und bleibt Erfahrung. In gebundener Form ist sie ein Stück geronnene Zeit, konserviert zwischen zwei Buchdeckeln. Zur selben Zeit sind Menschen gestorben und wurden Menschen geboren, unter ihnen Paula, Clara, Niklas, Henning, Tim, Alexander und Lioba. Wie viel wiegen die Schwierigkeiten einer Doktorarbeit?

Zuvörderst danke ich Prof. Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer für sein Angebot, meine Dissertation unter seiner Ägide zu schreiben. Ohne diese Initiative und seine organisatorische Unterstützung wäre diese Arbeit nicht zustande gekommen. Besonders möchte ich meinem Zweitgutachter Prof. Dr. Florian Pop danken, der trotz des Termindrucks zum Abschluss meiner Promotion stets freundlich, kooperativ und engagiert war.

Von Juli 1997 bis Januar 2000 wurde meine Arbeit durch ein großzügiges Stipendium des Graduiertenkollegs Mathematik gefördert. Dem Graduiertenkolleg und der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gebührt mein Dank.

Von Februar bis Juni 1998 durfte ich einen Forschungsaufenthalt am Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA) in Strasbourg verbringen. Hier hat mich Prof. C. Kassel sehr engagiert betreut und gefördert, wofür ich ihm in herzlichem Dank verbunden bin. Mein Artikel [30] entstand auf seine Ermutigung hin und bildete den Kondensationskeim dieser Arbeit. Die Ratschläge von Prof. V. Turaev und Jens Lieberum waren hierzu ebenfalls sehr hilfreich.

Von meinen Mitstreitern und Freunden Christoph Lamm und Jan Kneissler konnte ich viel lernen, zum Beispiel ihre abstrakten, zuweilen bizarren Weisen, die Welt zu erklären. Bei aller Ausgelassenheit bot unsere Kooperation die verlässliche Hilfe, die ein Promotionsvorhaben benötigt. Unsere Freundschaft war und ist ein seltener Glücksfall.

Mein persönlichster Dank gilt Andrea Linden. Unsere Freundschaft hat uns viele Jahre getragen, Krisen gelindert, Freude verdoppelt. Nicht nichts ohne dich aber nicht dasselbe.

Den genannten und vielen weiteren Freunden und Weggefährten bleibe ich verbunden. Im Gedanken an sie rufe ich mir die guten Zeiten in Erinnerung und stelle fest: Es hat sich gelohnt. — Mit anderen Worten:

Es war gut so.
Es würde gehen,
wie es oft gegangen war.