

Diktatorisches Übungsblatt

DIE QUAL DER WAHL DES WAHLVERFAHRENS

Szenario: Zwei Gruppen von je sieben Schülervetretern S_1, S_2, \dots, S_7 aus den Jahrgängen J1 und J2 wählen ihre beliebtesten Lehrer. Zur Wahl stehen die Lehrer von Astronomie (A), Biologie (B) und Chemie (C). Dazu nennt jeder Schüler seine Lieblingsreihenfolge von oben nach unten. Nun soll ein Ranking der Lehrer in J1 bzw. J2 bestimmt werden:

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
C	C	A	A	B	B	C
A	A	B	B	C	C	B
B	B	C	C	A	A	A

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
A	A	B	B	B	B	C
C	C	A	C	C	C	B
B	B	C	A	A	A	A

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst

Alternatives Szenario: Die Arrow-Schule (A), die Borda-Schule (B) und die Cusanus-Schule (C) treten in sieben Sportarten S_1, S_2, \dots, S_7 gegeneinander an. Nun soll in Jahr 1 bzw. in Jahr 2 eine Rangfolge der Schulen bestimmt werden.

Aufgabe 1: Werte die Ergebnisse von J1 bzw. J2 mit Hilfe der folgenden Verfahren aus.

Vereinfachung: Diese Wahlverfahren werten nur strikte Präferenzen aus, aber die Ergebnispräferenz muss nicht strikt sein. Dadurch sind die Verfahren einfacher zu beschreiben. Wer möchte, kann sich überlegen, wie man diese Verfahren sinnvoll auf evtl. nicht-strikte Präferenzen erweitern kann.

- **Borda-Verfahren (Bor):** Jeder erste Platz zählt 3 Punkte, jeder zweite 2 Punkte und jeder dritte immerhin noch 1 Punkt. Die Alternativen werden nach der Gesamtpunktzahl sortiert. Dieses Verfahren bezeichnen wir auch mit $B(3, 2, 1)$.
- **Mehrheitswahl (Maj):** Es zählen nur die ersten Plätze, die Alternative mit den meisten ersten Plätzen ist die beste, die mit den zweitmeisten ersten Plätzen die nächstbeste, usw.
- **Medaillenspiegel (Med):** Die Alternative mit den meisten ersten Plätzen ist die beste, haben zwei Alternativen gleich viele erste Plätze, dann zählen die zweiten Plätze, bei Gleichstand die dritten Plätze. Ebenso werden die anderen Plätze bestimmt.
- **Duell-Methode (Duell):** Zuerst treten A und B gegeneinander an. Die Alternative, die öfter vor der anderen bewertet wird, gewinnt das Duell. Der Gewinner tritt gegen C an. Gewinnt er hier wieder, dann gibt es noch ein Duell um Platz 2 und 3. (Man müsste noch festlegen, was bei Gleichstand passieren soll; das kann uns hier aber nicht passieren.)
- **Diktatur (Dikt):** Es wird einer bestimmt, dessen Präferenz übernommen wird, nehmen wir z.B. den Schülersprecher S_2 bzw. die zweite Sportart (Handball).
- **Konstanz (Konst):** Das Gesamtergebnis ist konstant immer A vor B vor C.

Lösungsskizze: —

- Bor: Die Punkteverteilungen sind:

$J1:$ $A: 6 + 4 + 3 = 13$ $B: 6 + 6 + 2 = 14$ $C: 9 + 4 + 2 = 15$	$J2:$ $A: 6 + 2 + 4 = 12$ $B: 12 + 2 + 2 = 16$ $C: 3 + 10 + 1 = 14$
---	---

- Duell: In J1 gewinnt A gegen B und C gegen A, die Rangfolge ist C vor A vor B. In J2 gewinnt B gegen A und gegen C, im Spiel um Platz 2 gewinnt C gegen A, es ergibt sich die Rangfolge B vor C vor A.

Votum J1

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
C	C	A	A	B	B	C
A	A	B	B	C	C	B
B	B	C	C	A	A	A

Ergebnis

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst
C	C	C	C	C	A
B	AB	B	A	A	B
A		A	B	B	C

Votum J1

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
A	A	B	B	B	B	C
C	C	A	C	C	C	B
B	B	C	A	A	A	A

Ergebnis

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst
B	B	B	B	A	A
C	A	A	C	C	B
A	C	C	A	B	C

Aufgabe 2: Finde für jedes Verfahren eines der Axiome, das nicht erfüllt ist: Einhelligkeit (UNA), Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (IIA), Monotonie (MON), Nicht-Diktatur (~~DIC~~).

Zusatzaufgabe: Welche Axiome sind jeweils erfüllt? SYM steht für Symmetrie. Kennzeichne durch ✓ oder ✗.

	UNA	IIA	MON	DIC	SYM
Bor					
Maj					
Med					
Duell					
Dikt					
Konst					

Lösungsskizze: —

	(UNA)	(IIA)	(MON)	(DIC)	(SYM)
Bor	✓	✗	✗	✓	✓
Maj	✗	✗	✗	✓	✓
Med	✓	✗	✗	✓	✓
Duell	✓	✗	✗	✓	✓
Dikt	✓	✓	✓	✗	✗
Konst	✗	✓	✓	✓	✓

- **Einhelligkeit (UNA): Bor:** Wird eine Alternative von jedem Wähler vor einer zweiten Alternative gewertet, dann bekommt die erste Alternative von jedem Wähler mehr Punkte als die zweite, also auch in der Summe mehr Punkte.

Maj: In der folgenden Situation liegt B immer vor C , in der Gesamtwertung sind B und C gleichwertig:

A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C

Med: Im Fall mit drei Alternativen erfüllt das Verfahren die Einhelligkeit, denn ist eine Alternative immer vor einer anderen, dann auch in der Gesamtwertung. Anders sieht es aus, wenn es mehr als vier Alternativen gibt. Ist A immer auf dem vierten Platz und B immer auf dem fünften, dann tauchen A und B im Medaillenspiegel gar nicht auf, sind also in der Gesamtwertung gleichwertig, aber A liegt immer vor B .

Duell: Bewertet jeder Wähler eine Alternative X vor der Alternative Y , dann wird X vor Y in der Gesamtwertung landen: Tritt X im Duell gegen Y an, dann gewinnt X gegen Y und landet in der Gesamtwertung vor Y . Tritt X nicht gegen Y im Duell an, dann treten sowohl X als auch Y gegen die dritte Alternative Z an und es gibt kein drittes Duell. Das kann nur der Fall sein, wenn Z im ersten Duell gewinnt und im zweiten verliert. Angenommen, Z gewinnt gegen X , dann gewinnt Y gegen Z . Da X aber immer vor Y positioniert ist, gewinnt X auch gegen Z , was nicht sein kann. Also gewinnt Z gegen Y und X gegen Z .

Dikt: Wertet alle eine Alternative vor einer anderen, dann auch der Diktator S_2 , und damit auch die Gesamtwertung.

Konst: Wertet alle B vor A , dann ist im Gesamtergebnis dennoch A vor B , Einhelligkeit ist also nicht erfüllt.

- **Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (IIA):**

In den ersten vier Verfahren **Bor**, **Maj**, **Med** und **Duell** ist die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen nicht erfüllt. Ein Gegenbeispiel sind die beiden gegebenen Situationen J_1 und J_2 aus Aufgabe 1: Die relativen Positionen von B und C sind in J_1 und J_2 für jeden Schulvertreter / jede Sportart dieselben. Im Gesamtergebnis ist die Reihenfolge von B und C in J_1 und J_2 verschieden.

Dikt: Die Reihenfolge zweier Alternativen im Gesamtergebnis hängt nur davon ab, wie der Diktator S_2 diese beiden Alternativen reiht.

Konst: Die Reihenfolge zweier Alternativen im Gesamtergebnis ist konstant, hängt also von gar nichts ab, insbesondere auch nicht von irrelevanten Alternativen.

- **Monotonie (MON):**

Die ersten vier Verfahren erfüllen die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen nicht, also auch nicht die Monotonie.

Dikt: Führt eine Situation zu einem Wahlergebnis, in dem eine Alternative X vor einer anderen Alternative Y gerankt wird, dann hat auch der Diktator X vor Y gesetzt. Entscheiden sich nun noch mehr Wähler dafür, X vor Y zu setzen, ist im Ergebnis immer noch X vor Y , denn der Diktator hat sich nicht umentschieden.

Konst: Da das Gesamtergebnis sich niemals ändert, auch nicht, wenn irgendjemand sich umentscheidet, ist Monotonie erfüllt.

- **Nicht-Diktatur (NDI):**

Die ersten vier Verfahren sind offensichtlich nicht-diktatorisch.

Dikt: Das Verfahren ist genau so definiert, dass es die Nicht-Diktatur nicht erfüllt.

Konst: Anhand des folgenden Falls erkennt man, dass es keinen Diktator geben kann:

C	C	C	C	C	C	C
A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B

- **Symmetrie (SYM):** In den Verfahren außer Dikt spielt die Reihenfolge der Wähler keine Rolle.

Diese wünschenswerten Eigenschaften nutzen wir als theoretische Hilfsmittel und Grundlage für unsere Untersuchungen. Sie sind keine willkürlichen Idealisierungen, sondern dringende Notwendigkeiten! Ist Monotonie (MON) nicht erfüllt, so ist das Wahlverfahren manipulierbar:

Aufgabe 3: Der Rektor der Cusanus-Schule, Dr. Moriarty, möchte die Wahl des beliebtesten Lehrers in J1 manipulieren. Dazu wählt er das Duell-Verfahren. Wie muss er die Reihenfolge der Duelle wählen, damit der Astronomie-Lehrer als beliebtester Lehrer gewählt wird?

Die beste Schule soll im zweiten Jahr J2 mit einem modifizierten Borda-System $B(p, q, r)$ ermittelt werden. Dabei bekommt jeder erste Platz p Punkte, jeder zweite q Punkte und jeder dritte Platz r Punkte. Wie kann der Schulleiter $p > q > r$ festsetzen, damit seine Schule gewinnt?

Lösungsskizze: — Lässt der Schulleiter in J1 zuerst B gegen C antreten, dann gewinnt B. Der Gewinner B verliert im Duell mit A, also ist A der Gesamtsieger, gefolgt von B und dann C.

Gibt es für den ersten Platz 5, für den zweiten Platz 4 und für den dritten Platz keinen Punkt, dann bekommt in J2 die Arrow-Schule $10 + 4 = 14$ Punkte, die Borda-Schule $20 + 4 = 24$ Punkte und die Cusanus-Schule $5 + 20 = 25$ Punkte, womit die Cusanus-Schule gewinnt.

WISSENSWERTES

Das Borda-Verfahren ist benannt nach Jean-Charles de Borda (1733-1799). Er war aber nicht der erste, der dieses Verfahren beschrieb: Bereits in *De concordantia catholica* wurde es von Nikolaus von Kues alias Nicolaus Cusanus (1401-1464) vorgeschlagen. Heutzutage wird es in abgewandelter Form im *Eurovision Song Contest* verwendet, um einen Sieger zu küren. Es findet aber nicht nur bei Wahlen Anwendung: Auch in der *Formel 1* wird aus den Rangfolgen der einzelnen Rennen mit Hilfe eines Punktesystems eine Gesamtrangfolge bestimmt. Ähnlich werden in vielen Wintersportarten aus mehreren Einzelwettkämpfen *Gesamtweltcup*sieger bestimmt.



Die Mehrheitswahl ist eines der bekanntesten Wahlsysteme: Jeder Teilnehmer wählt einen Kandidaten, es gewinnt der Kandidat mit den meisten Stimmen. Der Medaillenspiegel wird selten als Wahlsystem eingesetzt, eher für Rangfolgen von Nationen in sportlichen Wettbewerben. Beide Verfahren sind modifizierte Borda-Wahlen. Bei der Mehrheitswahl $B(1, 0, 0)$ bekommt der erste Platz 1 Punkt, alle anderen 0 Punkte. Beim Medaillenspiegel-Verfahren $B(n^2, n, 1)$ wählt man n größer als die Anzahl der Wettbewerbe und vergibt 1 Punkt für jede Bronzemedaille, n Punkte für jede Silbermedaille und n^2 Punkte für jede Goldmedaille.

Es gibt zahlreiche Algorithmen, die eine Liste von Elementen durch paarweise Vergleiche und Vertauschungen sortieren. Jeden solchen Algorithmus können wir im Duell-Verfahren dazu verwenden, eine Gesamtliste zu erzeugen. Beim Sport dient ein Turnierbaum im KO-System dazu, “den Besten” zu bestimmen. Der Haken daran: Jeder Sortieralgorithmus und jeder Turnierbaum geht stillschweigend davon aus, dass eine sinnvolle Ordnung existiert, die insbesondere transitiv ist. Ist Transitivität nicht erfüllt, dann hängt das Ergebnis von der Anfangsreihenfolge der Alternativen ab und ist somit manipulierbar. Oder schlimmer noch: Der Sortieralgorithmus endet nicht!