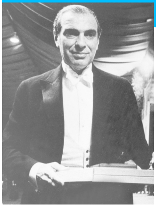
Der Satz vom Diktator

Mathematik-Workshop für TryScience

erkennen.
beweisen.
anwenden.



Kenneth Arrows geniale Antwort auf die Frage:
Wie schreibe ich meine Doktorarbeit in fünf Tagen und erhalte dafür den Wirtschafts-Nobelpreis?

Prof. Dr. Michael Eisermann

michael-eisermann.de/popularisation

Universität Stuttgart

15. März 2024

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Wahlverfahren: informelle Problemstellung

Beispiel: Eine vierköpfige Familie $I = \{1, 2, 3, 4\}$ plant ihren Urlaub. Zur Wahl stehen $A = \{\ a = \text{Venedig},\ b = \text{London},\ c = \text{Paris}\ \}$.

$1:$	b	$\succ$	c	$\succ$	a
$2:$	a	$\succ$	b	$\approx$	c
$3:$	a	$\succ$	c	$\succ$	b
$4:$	c	$\succ$	b	$\succ$	a

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Geschäftsstrategien, jede Aktionär:in i hat ihre eigene Präferenz P_i. Wir suchen ein Abstimmungsergebnis P.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Universitäten, P_i ist das Ranking nach Kriterium i. Wir suchen ein zusammenfassendes Ranking P aller Unis.

Präferenzen: Definition

Sei $A = \{a, b, c, \dots\}$ die Menge der betrachteten **Alternativen**, $\sharp A \geq 2$.

(Schwache) Präferenz: $x \succeq y$ bedeutet x ist mindestens so gut wie y.
Indifferenz/Äquivalenz: $x \approx y$ bedeutet $x \succeq y$ und $y \succeq x$ (gleich gut).
Starke Präferenz: $x \succ y$ bedeutet $x \succeq y$ und nicht $y \succeq x$.

Insgesamt wird $\succeq$ festgelegt durch alle Paare $(x, y) \in A \times A$ mit $x \succeq y$.

Definition 1A: Präferenz

Die Relation $\succeq$ heißt **Präferenz**, wenn sie folgende Grundregeln erfüllt:
Transitivität: Gilt $x \succeq y$ und $y \succeq z$, so auch $x \succeq z$.
Linearität: Für jedes Paar $x, y \in A$ gilt $x \succeq y$ oder $y \succeq x$.
Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Präferenzen: Beispiele

Aufgabe: Wie viele Präferenzen gibt es auf der Menge $A = \{a, b\}$?

Lösung: Es gibt genau drei Präferenzen, nämlich:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \{(a,a),(b,b),(a,b)\} & \text{kurz:} & a & \succ & b \\ \{(a,a),(b,b),(b,a)\} & \text{kurz:} & b & \succ & a \\ \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\} & \text{kurz:} & a & \approx & b \end{array} \right\} = \mathbb{P}(A)$$

Aufgabe: Wie viele Präferenzen gibt es auf der Menge $A = \{a, b, c\}$?

Lösung: Es gibt genau 13 Präferenzen, nämlich:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & \succ & b & \succ & c & \qquad & a & \succ & b & \approx & c \\ a & \succ & c & \succ & b & & b & \succ & a & \approx & c \\ b & \succ & a & \succ & c & & c & \succ & a & \approx & b \\ b & \succ & c & \succ & a & & a & \approx & b & \succ & c \\ c & \succ & a & \succ & b & & a & \approx & c & \succ & b \\ c & \succ & b & \succ & a & & b & \approx & c & \succ & a \\ \multicolumn{5}{l}{\text{(strikte Präferenzen } \mathbb{S})} & & a & \approx & b & \approx & c \end{array} \right\} = \mathbb{P}(A)$$

Präferenzen: Anzahl

Aufgabe: Wie viele (strikte) Präferenzen gibt es bei n Alternativen?

Lösung: Wir erhalten $\sharp\mathbb{S} = n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sharp\mathbb{S}$	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800
$\sharp\mathbb{P}$	1	3	13	75	541	4 683	47 293	545 835	7 087 261	102 247 563

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Nennen Sie alle Abstimmungen bei zwei Individuen, $I = \{1, 2\}$, und zwei Alternativen, $A = \{a, b\}$. Was ergibt Mehrheitswahl? **Lösung:**

$$\begin{array}{llll} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \approx & b \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $M : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Beschreiben Sie ebenso folgendes Wahlverfahren D_1: „Allein 1 entscheidet.“ (Das ist die lupenreine Diktatur.) **Lösung:**

$$
\begin{array}{cccc}
\hline
1: & a & \succ & b \\
2: & a & \succ & b \\
\hline
 & a & \succ & b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\hline
1: & a & \succ & b \\
2: & b & \succ & a \\
\hline
 & a & \succ & b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\hline
1: & a & \succ & b \\
2: & a & \approx & b \\
\hline
 & a & \succ & b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\hline
1: & b & \succ & a \\
2: & a & \succ & b \\
\hline
 & b & \succ & a
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\hline
1: & b & \succ & a \\
2: & b & \succ & a \\
\hline
 & b & \succ & a
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\hline
1: & b & \succ & a \\
2: & a & \approx & b \\
\hline
 & b & \succ & a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\hline
1: & a & \approx & b \\
2: & a & \succ & b \\
\hline
 & a & \approx & b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\hline
1: & a & \approx & b \\
2: & b & \succ & a \\
\hline
 & b & \approx & a
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\hline
1: & a & \approx & b \\
2: & a & \approx & b \\
\hline
 & a & \approx & b
\end{array}
$$

Dies definiert das Wahlverfahren $D_1 : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P = P_1$.

Aufgabe: Beschreiben Sie ebenso die aufgeklärte Diktatur $D_{1,2}$: „Allein 1 entscheidet, nur bei Indifferenz entscheidet 2.“ **Lösung:**

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $D_{1,2} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Wie viele Wahlverfahren $V : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ gibt es hier?

Lösung: Für $\sharp I = 2$ und $\sharp A = 2$ gibt es $3^{3\cdot 3} = 19\,683$ Wahlverfahren.

Zum Kontrast: $\sharp I = 2$ und $\sharp A = 3$ ergibt $13^{13\cdot 13} = 13^{169} \approx 10^{188}$.

Familienurlaub: $\sharp I = 4$ und $\sharp A = 3$ ergibt $13^{13^4} = 13^{28561} \approx 10^{31815}$.

Wahlverfahren: Definition

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \geq 2$, und die Menge $A = \{a, b, c, \dots\}$ der Alternativen/Kandidaten, $\sharp A \geq 2$. Wie oben erklärt sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Definition 2A: Wahlverfahren

Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.

Beispiel: (Diktatur) Zu $k \in I$ definieren wir $D_k(P_1, P_2, \dots, P_n) = P_k$.

Definition 2B: Diktator

Im Verfahren V heißt $k \in I$ **Diktator**, wenn aus $x \succ_k y$ stets $x \succ y$ folgt.

Mehrheitswahl bei zwei Alternativen: $A = \{a, b\}$

Aufgabe: Formulieren Sie die Mehrheitswahl (1) M durch Stimmzählung und (2) M_μ gewichtet durch $\mu : I \to [0,1]$ mit $\mu(1) + \dots + \mu(n) = 1$.

Lösung: (1) Wir erhalten das Ergebnis $x \succeq y$ genau dann, wenn

$$\sharp\{\, i \mid x \succeq_i y \,\} \;\ge\; \sharp\{\, i \mid y \succeq_i x \,\}.$$

(2) Jede Teilmenge $J \subseteq I$ hat ihr Gewicht $\mu(J) := \sum_{i \in J} \mu(i)$. Wir setzen

$$\delta(x, y) \;:=\; \mu\{\, i \mid x \succeq_i y \,\} - \mu\{\, i \mid y \succeq_i x \,\}.$$

Wir erhalten das Ergebnis $x \succeq y$ genau dann, wenn $\delta(x, y) \ge 0$ gilt.

Beispiele: Für $\mu = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ erhalten wir $M_\mu = M$ wie in (1). Die Diktatur $D_k = M_\mu$ erhalten wir für $\mu(k) = 1$, es genügt $\mu(k) > 1/2$.

Die Mehrheitswahl erfreut sich folgender Eigenschaften:

UNA: Einhelligkeit. Gilt $x \succ_i y$ für alle $i \in I$, so folgt $x \succ y$.

$$\begin{array}{rccc}
\hline
I: & x & \succ & y \\
\hline
 & x & \succ & y
\end{array}$$

MON: Monotonie. Angenommen, $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ ergibt $x \succeq y$, und bei einem Vergleichswahlgang $(P_1', P_2', \dots, P_n') \mapsto P'$ wächst die Unterstützung für x und sinkt die Unterstützung für y. Dann gilt $x \succeq' y$.

$$\begin{array}{cccl}
\hline
x & \succ & y & : J \\
x & \approx & y & : U \\
y & \succ & x & : K \\
\hline
x & \succeq & y &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\subseteq \\
\\
\supseteq \\
\Longrightarrow
\end{array}
\quad
\begin{array}{rccc}
\hline
J': & x & \succ' & y \\
U': & x & \approx' & y \\
K': & y & \succ' & x \\
\hline
 & x & \succeq' & y
\end{array}$$

Aus Monotonie folgt **Unabhängigkeit von dritten Alternativen**, engl. *independence of irrelevant alternatives*:

IIA: Sind bei Voten $(P_1, P_2, \ldots, P_n) \mapsto P$ und $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_n) \mapsto P'$ alle individuellen Präferenzen zwischen x und y gleich, so auch das Ergebnis.

$$
\begin{array}{cccl}
\hline
x & \succ & y & : J \\
x & \approx & y & : U \\
y & \succ & x & : K \\
\hline
x & \succeq & y &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
= \\ = \\ = \\ \Longleftrightarrow
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
\hline
J' : & x & \succ' & y \\
U' : & x & \approx' & y \\
K' : & y & \succ' & x \\
\hline
 & x & \succeq' & y
\end{array}
$$

SYM: Symmetrie. Das Ergebnis ändert sich nicht bei Umordnung; $V(P_1, P_2, \ldots, P_n) = V(P_{\tau 1}, P_{\tau 2}, \ldots, P_{\tau n})$ für jede Umnummerierung τ.

Gegenbeispiel: das Dessert-Paradox

IIA: Was bedeutet das Fehlen der Unabhängigkeits-Eigenschaft?

„Was bieten Sie zum Nachtisch?“ — „Crème Brûlée oder Tiramisù.“
„Dann nehme ich Crème Brûlée.“ — „Wir hätten auch Apfelstrudel.“
„Gut, dann nehme ich Tiramisù.“

Gegenbeispiel: Abhängigkeit von dritten Alternativen

L: 15% M: 40% R: 45%

politisches Spektrum

Aufgabe: Wer gewinnt die Präsidentschaftswahl? wenn L zuvor aufgibt?

Lösung: (1) Kandidat R gewinnt mit einer relativen Mehrheit von 45%.
(2) Gibt L zuvor auf, so gewinnt M mit einer absoluten Mehrheit von 55%.

Zusammenfassung: Wahlverfahren für zwei Alternativen

	UNA einhellig	MON monoton	~~DIC~~ nicht-diktatorisch	SYM symmetrisch
Diktatur D_k	✓	✓	✗	✗
Mehrheitswahl M	✓	✓	✓	✓
mit Gewichtung M_μ	✓	✓	(✓)	(✗)

Wir nennen ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ **perfekt**, wenn die Zuordnung $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ einhellig, monoton und nicht-diktatorisch ist.

Das Paradox von Condorcet

Können wir paarweise Stimmzählung auf drei Alternativen anwenden?

40% :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
35% :	b	$\succ$	c	$\succ$	a
25% :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Beispiel: 65% sagen $a \succ b$, 75% sagen $b \succ c$, 60% sagen $c \succ a$.

Satz 3A: Nicolas de Condorcet 1785

Für $\sharp A \geq 3$ ist die paarweise Stimmzählung kein Wahlverfahren $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$.

Aufgabe: Entwickeln Sie Wahlverfahren für drei und mehr Alternativen! Welche guten Eigenschaften können Sie erreichen? Erreichen Sie alle?

Satz 3B: Satz vom Diktator, Kenneth Arrow 1951

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen. Erfüllt $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ die Forderungen der Einhelligkeit und Monotonie, so ist V diktatorisch.

Der Beweis ist genial-einfach, vollkommen elementar, doch raffiniert.

"Elementary" does not mean easy to understand.
"Elementary" means that very little is required
to know ahead of time in order to understand it,
except to have an infinite amount of intelligence.
Richard P. Feynman (1918–1988), Physik-Nobelpreis 1965

Entscheidende und souveräne Teilmengen

halbentscheidend			
$J:$	x	$\succ$	y
$I \setminus J:$	y	$\succ$	x
	x	$\succ$	y

entscheidend			
$J:$	x	$\succ$	y
$I \setminus J:$	y	,	x
	x	$\succ$	y

Definition 3c: entscheidende und souveräne Teilmengen

Vorgelegt sei ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.

(1) Eine Teilmenge $J \subseteq I$ heißt **halbentscheidend** für das Paar (x, y), falls für jedes Votum gilt: Aus $x \succ_J y$ und $y \succ_{I \setminus J} x$ folgt $x \succ y$.

(2) Stärker nennen wir J **(ganz) entscheidend** für das Paar (x, y), falls für jedes Votum gilt: Allein aus $x \succ_J y$ folgt $x \succ y$.

(3) Ist J entscheident für jedes Paar $(x, y) \in A \times A$, so heißt J **souverän**.

Entscheidende und souveräne Teilmengen

Beispiele: Die leere Menge $\emptyset \subseteq I$ ist niemals souverän in V.

Genau dann ist I souverän in V, wenn Einhelligkeit (UNA) gilt.

In der Diktatur $D_k : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ ist eine Menge $J \subseteq I$ souverän gdw $k \in J$.

In der Mehrheitswahl $M_\mu : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ ist $J \subseteq I$ souverän gdw $\mu(J) > \frac{1}{2}$.

Lemma 3D: Halbentscheidend impliziert souverän.

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen. Das vorgelegte Wahlverfahren V erfülle Einhelligkeit (UNA) und Unabhängigkeit (IIA). Ist $J \subseteq I$ in V halbentscheidend für ein Paar (x, y), so ist J souverän.

Beweis: (1) Die Teilmenge J ist entscheidend für (x, z) mit $z \in A \setminus \{x, y\}$:

$$\begin{array}{rccc} \hline J: & x & \succ & z \\ I \setminus J: & z & , & x \\ \hline & x & \succ & z \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longleftarrow \\ \Longleftarrow \\ \underset{\text{TRA,IIA}}{\Longleftarrow} \end{array} \quad \begin{array}{rccccc} \hline J: & x & \succ & y & \succ & z \\ I \setminus J: & y & \succ & z & , & x \\ \hline & x & \underset{\text{HE}}{\succ} & y & \underset{\text{UNA}}{\succ} & z \end{array}$$

(2) Ebenso ist J ist entscheidend für (z, y):

$$\begin{array}{rccc} \hline J: & z & \succ & y \\ I \setminus J: & y & , & z \\ \hline & z & \succ & y \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longleftarrow \\ \Longleftarrow \\ \underset{\text{TRA,IIA}}{\Longleftarrow} \end{array} \quad \begin{array}{rccccc} \hline J: & z & \succ & x & \succ & y \\ I \setminus J: & y & , & z & \succ & x \\ \hline & z & \underset{\text{UNA}}{\succ} & x & \underset{\text{HE}}{\succ} & y \end{array}$$

(3) So können wir das Paar (x, y) in jedes beliebige Paar tauschen. $\boxed{\text{QED}}$

Beweis des Satzes vom Diktator

Satz 3E: Satz vom Diktator, Kenneth Arrow 1951

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen. Erfüllt irgendein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ die Forderungen der Einhelligkeit (UNA) und der Unabhängigkeit von dritten Alternativen (IIA), so ist V diktatorisch.

Beweis: Sei $J \subseteq I$ souverän und zudem minimal. Wir wissen $J \neq \emptyset$. Sei $k \in J$. Wir untersuchen folgende Abstimmung (à la Condorcet):

$$\begin{array}{r|ccccc}
k: & a & \succ & x & \succ & b \\
J \setminus k: & b & \succ & a & \succ & x \\
I \setminus J: & x & \succ & b & \succ & a \\
\hline
 & a & \succ & x & \succeq & b
\end{array}$$

Zunächst folgt $a \succ x$, denn J ist souverän. Kann zudem $b \succ x$ gelten? Nein, dann wäre $J \setminus k$ souverän (Lemma 3D) und J nicht minimal. Dank Linearität folgt somit $x \succeq b$. Dank Transitivität folgt $a \succ b$.

Nur das Individuum k wertet $a \succ b$, alle anderen werten $b \succ a$. Somit ist k souverän (erneut dank Lemma 3D). $\boxed{\text{QED}}$

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \geq 2$, und die Menge $A = \{a, b, c, \dots\}$ der Alternativen/Kandidaten, $\sharp A \geq 2$.

Eine **Präferenz** P ist eine transitive und lineare Relation auf A.
Sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf der Menge A.

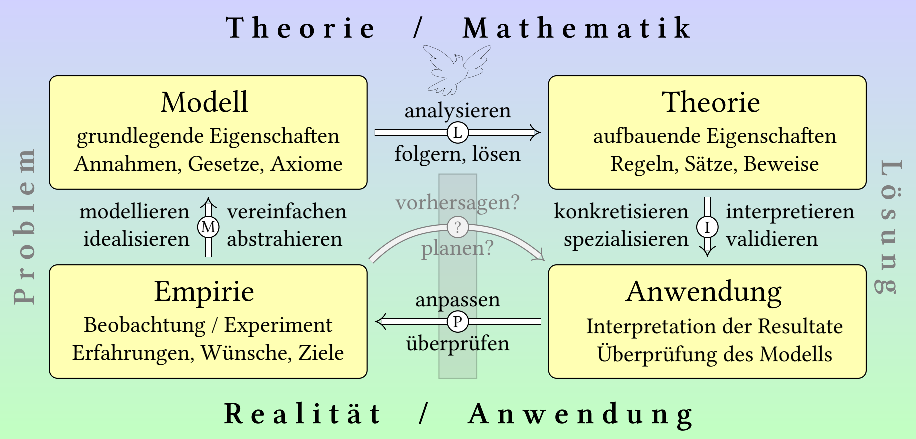
Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.
Es heißt **perfekt**, wenn es einhellig, monoton und nicht-diktatorisch ist.

Korollar 3F: Arrows Un/Möglichkeitssatz

Für $\sharp A = 2$ gibt es (viele) perfekte Wahlverfahren.
Für $\sharp A \geq 3$ gibt es kein perfektes Wahlverfahren.

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper, 1902–1994)



Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)