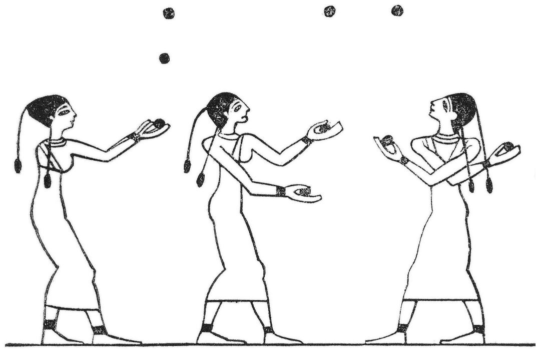
Prof. Dr. Michael Eisermann • Institut für Geometrie und Topologie

Jonglieren und Mathematik



Möge die Schwerkraft mit Euch sein!

Willkommen!

Ich begrüße Sie und Euch herzlich zu meinem Vortrag und danke dem Landesgymnasium für Hochbegabte in Schwäbisch Gmünd für die freundliche Einladung.

Es geht um Mathematik… heute speziell ums Jonglieren. Mathematische Strukturen spielen überall eine wichtige Rolle, nicht nur in der Wissenschaft, sondern häufig auch im Alltag.

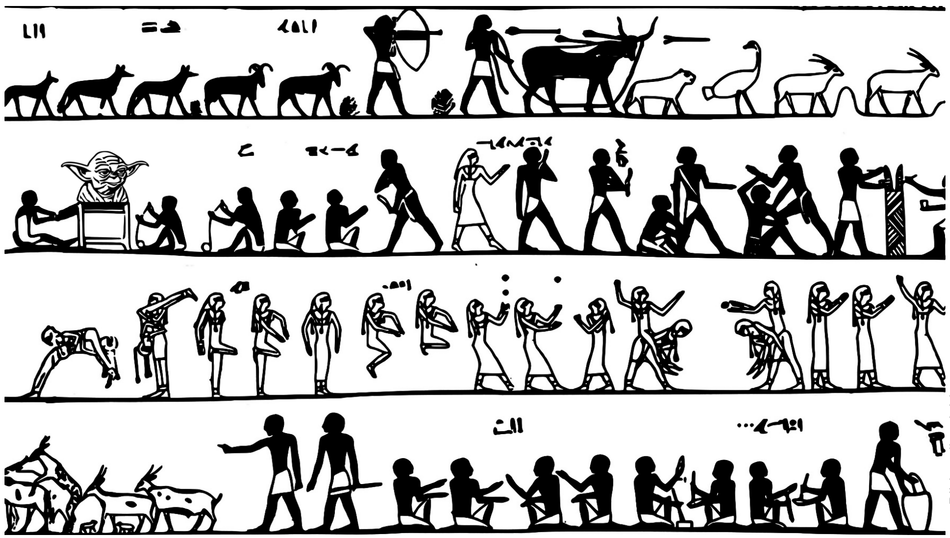
Alles, was ich hier erzähle, könnt Ihr nachprüfen… besser noch nachmachen. Wenn etwas unklar ist, dürft Ihr gerne zwischenfragen.

Ich werde Sie im Folgenden siezen. Ich möchte Euch eigentlich euchen, das werde ich in der Aufregung aber vergessen. Also nicht böse sein!

Dieser Vortrag ist etwas ungewöhnlich, nämlich eine Auftragsarbeit: Die Organisatoren haben sich das Thema *Jonglieren und Mathematik* gewünscht. Da bin ich kein Experte, sondern eher ein interessierter Laie.

Also: *Let's juggle!*

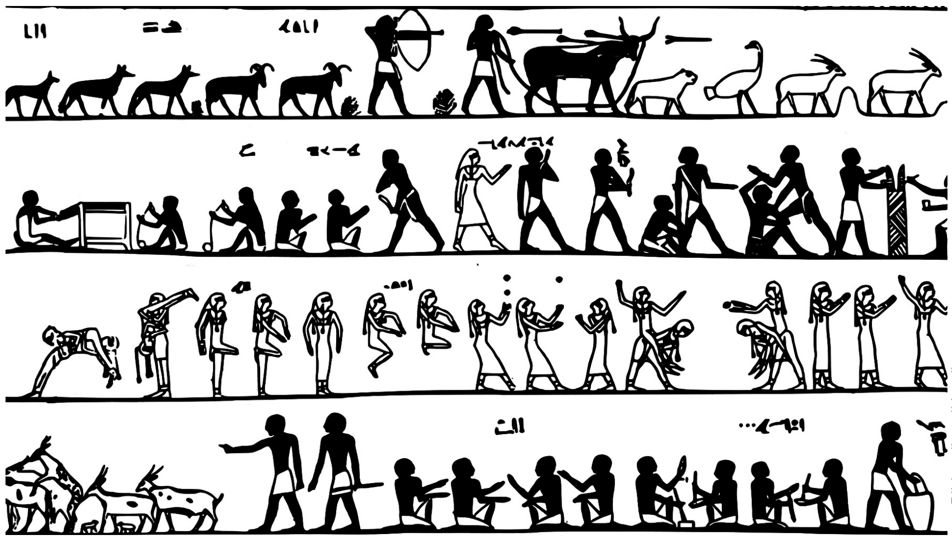
Jonglieren: eine lange Geschichte…



Bildquelle: dubios

Diese ägyptische Wandmalerei ist etwa 4000 Jahre alt. Sie zeigt Szenen des Alltags: Viehzucht, Jagd, Handwerk, Kunst, Schule? … Vorsicht: Prüfen Sie kritisch! Glauben Sie nicht alles, was Ihnen gezeigt wird!

Jonglieren: eine lange Geschichte…



Bildquelle: wikipedia.org

In Beni Hasan gibt es 39 Felsengräber aus der Bronzezeit, etwa 2200 bis 1800 v.Chr. Diese Wandmalerei stammt aus Grab Nr. 15. Die dritte Zeile zeigt Tänzerinnen, Akrobatinnen und Jongleurinnen mit Bällen.

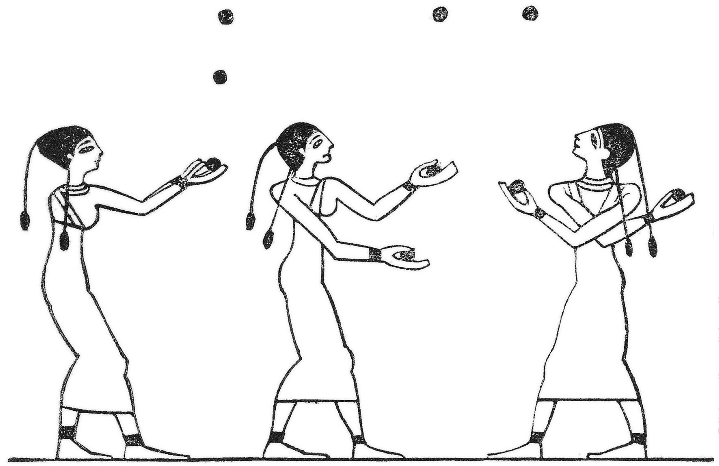
Jonglieren: eine lange Geschichte. . .

Bildquelle: wikipedia.org

Ein vergrößerter Ausschnitt der vorigen Skizze: Die drei Frauen links jonglieren. Die vier Frauen rechts spielen ein (unbekanntes) Ballspiel. Ein andere Wand in Grab Nr. 15 zeigt die berühmten Ringkämpfer:

Bildquelle: wikipedia.org

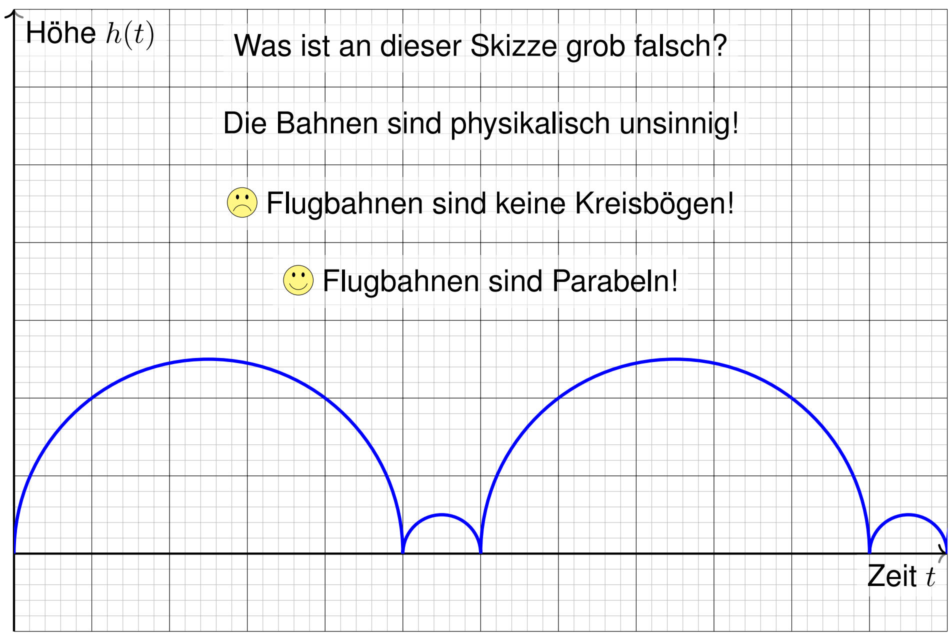
Jonglieren: eine lange Geschichte. . .



Bildquelle: wikipedia.org

Detailliertere Wiedergabe der Wandmalerei aus Grab Nr. 15 von Beni Hasan. Hier sind die Bälle deutlicher gezeigt: Jede der drei gezeigten Frauen jongliert mit drei Bällen, dabei eine mit überkreuzten Armen. (Das sind Zeichnungen. Ich habe leider kein Photo der Wandmalerei. Dieses Grab ist der Öffentlichkeit zugänglich. Schauen Sie mal nach!)

Wie beschreiben wir Jonglier-Muster?



Wie beschreiben wir Jonglier-Muster?

Wir betrachten unsere Jonglage hier wie im Physik-Unterricht:
Auf der horizontalen Achse nach rechts ist die Zeit t aufgetragen,
auf der vertikalen Achse nach oben die Flughöhe $h(t)$.

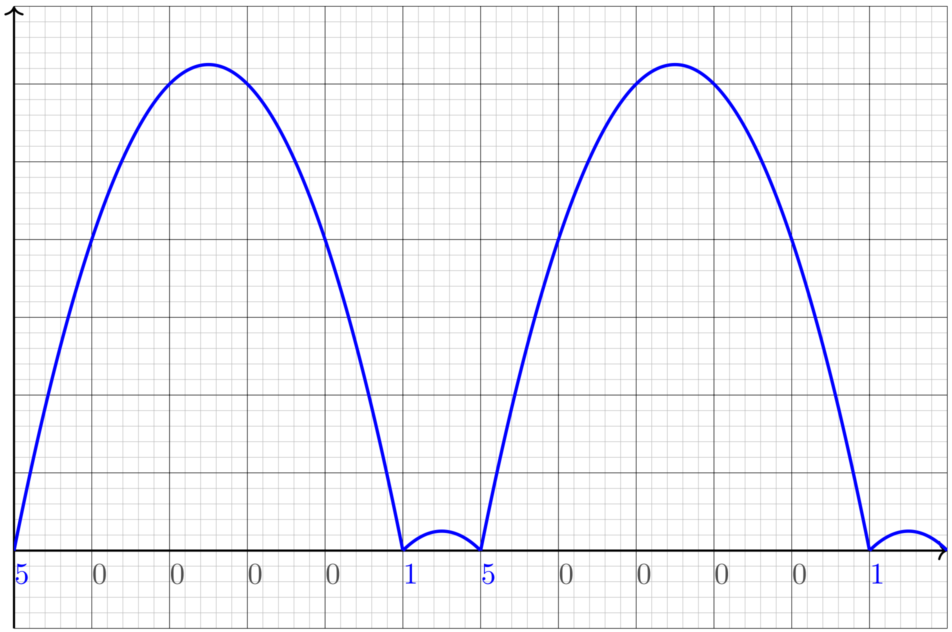
Vorsicht, Falle: Diese erste Skizze ist physikalisch unsinnig!
Flugbahnen sind keine Kreisbögen, sicher keine Halbkreise.
Sie wissen: Die Steigung dieser Kurve ist die Geschwindigkeit.
Senkrechte Tangente bedeutet unendliche Geschwindigkeit.
Das ist also ganz großer Quatsch!

Zum Glück haben Sie einen guten Mathematik- und Physik-Unterricht!
Sie erinnern sich vielleicht sogar, dass Flugbahnen Parabeln sind,
also eine sehr spezielle und sehr einfache Form haben.
(Meine folgenden Skizzen sind realistischer.)

Das hat eine wichtige Konsequenz, die sie beim Jonglieren sehen und spüren: Wenn der Ball *doppelt* so lange fliegen soll, dann müssen Sie ihn *viermal* so hoch werfen! Bei Halbkreisen gilt das offensichtlich nicht.

— Vorführen! Die Parabel kann man sogar direkt sehen! —

Wie beschreiben wir Jonglier-Muster?



Wie beschreiben wir Jonglier-Muster?

Wir treffen folgende Annahmen zur Vereinfachung:

1. Wir jonglieren mit festem Zeittakt $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$.
   Ob dies Sekunden sind oder ein anderer Rhythmus, ist ganz egal.
2. Zu jedem Zeitpunkt wird höchstens ein Ball gefangen & geworfen.
   Wir nehmen an, er wird gefangen und sofort wieder geworfen.
3. Die Jonglage ist periodisch / wiederholt sich mit Periode $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
   In diesem ersten Beispiel ist die kleinste Periode $\ell = 6$.

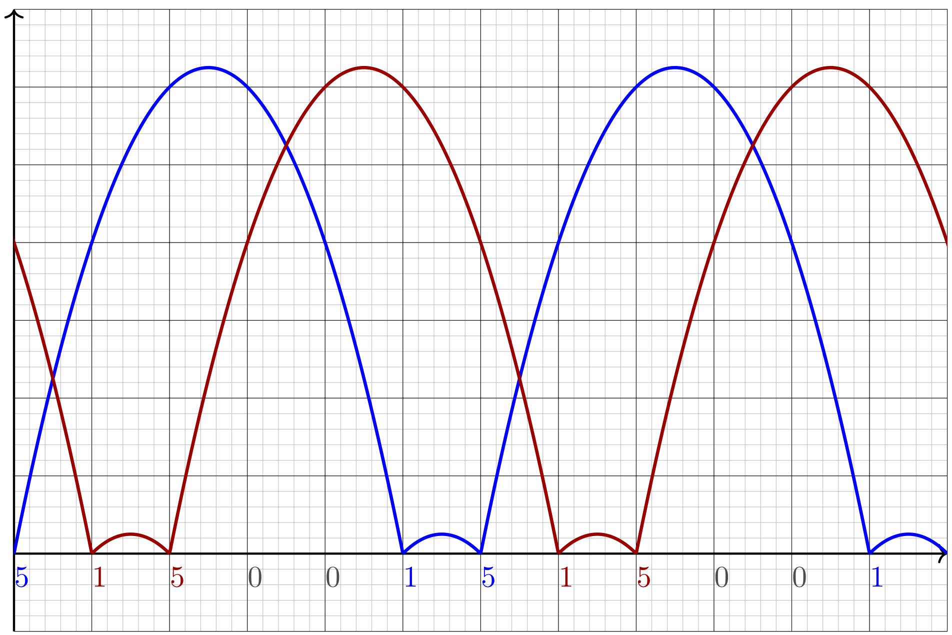
Wir notieren zu jedem Wurf seine Höhe, genauer seine Flugdauer.
Es entsteht das periodische Muster $500001500001\dots$ wie gezeigt.

— Mit Metronom / Klatschen ist es erstaunlich schwierig! —

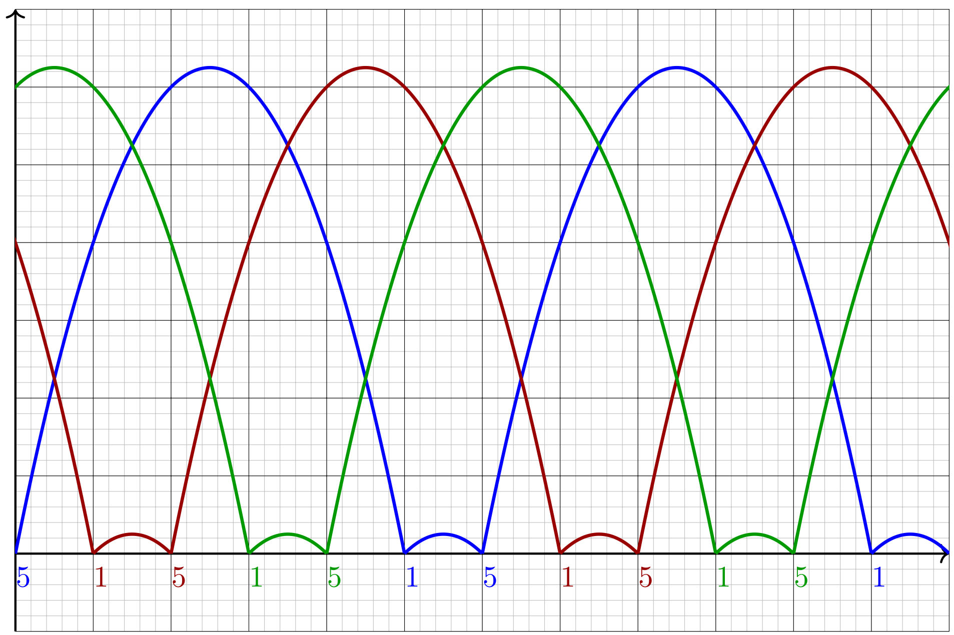
Wenn wir mit zwei Händen jonglieren, dann bietet es sich an, links und rechts abzuwechseln. Wir können dieses Muster aber auch mit nur einer Hand jonglieren, oder auch mit mehr als zwei Händen, etwa *passen*.

Im Folgenden werde ich die Anzahl der Hände nicht weiter beachten.
Solche und ähnliche Verfeinerungen können wir später einbauen.

Wie beschreiben wir Jonglier-Muster?



Wie beschreiben wir Jonglier-Muster?



Die Siteswap-Notation: Definition

Definition B1 (Siteswap)

Wir treffen folgende Annahmen zur Vereinfachung:

1. Wir jonglieren mit festem Zeittakt $t = 0, 1, 2, 3, \dots$, etwa links/rechts.
2. Zu jedem Zeitpunkt wird höchstens ein Ball gefangen & geworfen.
3. Die Jonglage ist periodisch / wiederholt sich mit Periode $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Den Verlauf notieren wir in **Siteswap-Notation** durch natürliche Zahlen

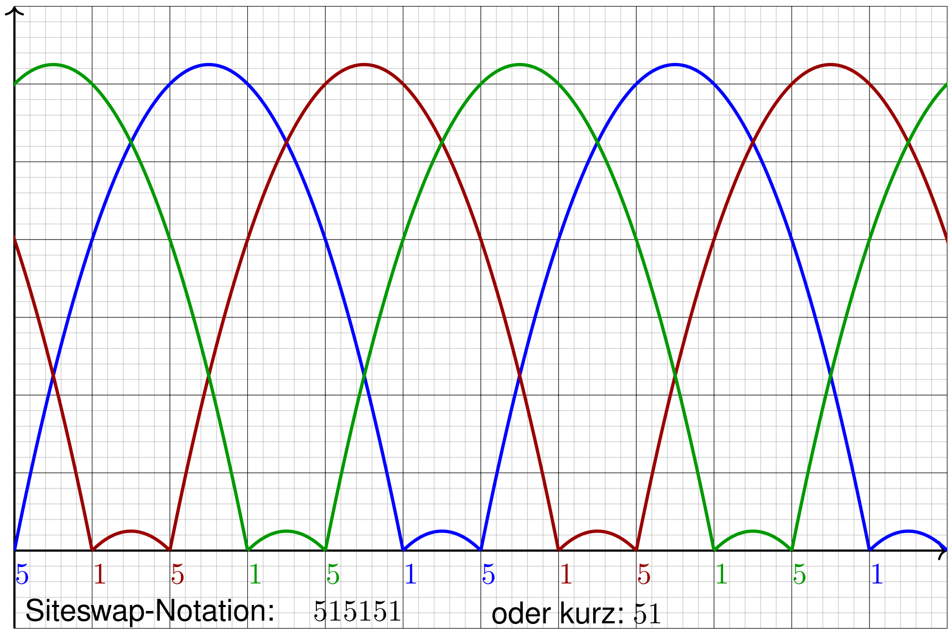
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_\ell.$$

Bedeutung: Zum Zeitpunkt t wird ein Ball geworfen mit Flugdauer a_t.

Es gibt drei Sonderfälle, hier vereinbaren wir folgende Konventionen:

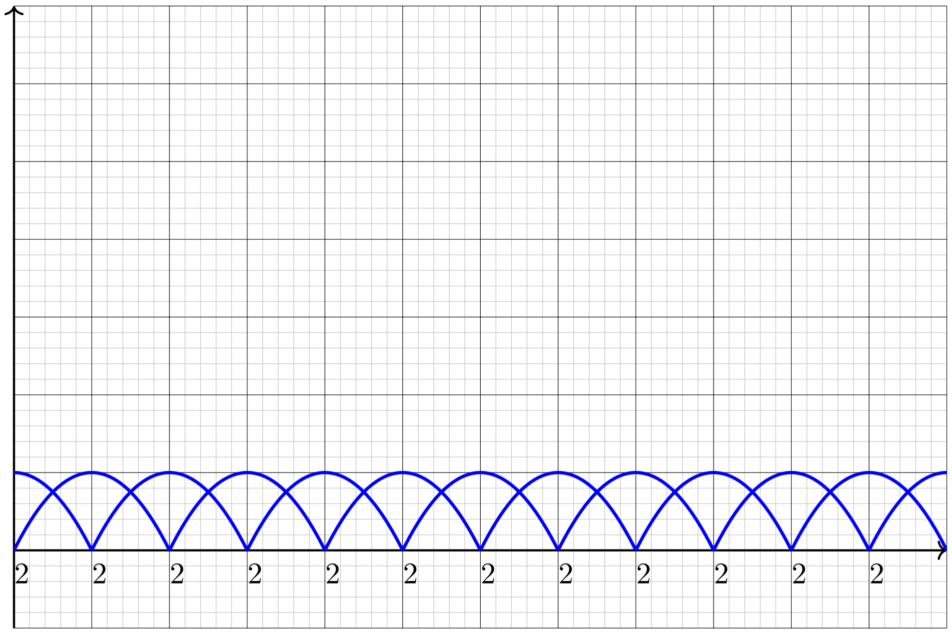
- $a_t = 0$ steht für eine leere Hand, also keinen Wurf.
- $a_t = 1$ bedeutet kurz werfen, bei einer Hand den Ball halten.
- $a_t = 2$ kann bei zwei Händen als Halten interpretiert werden.

Die Siteswap-Notation: Beispiel



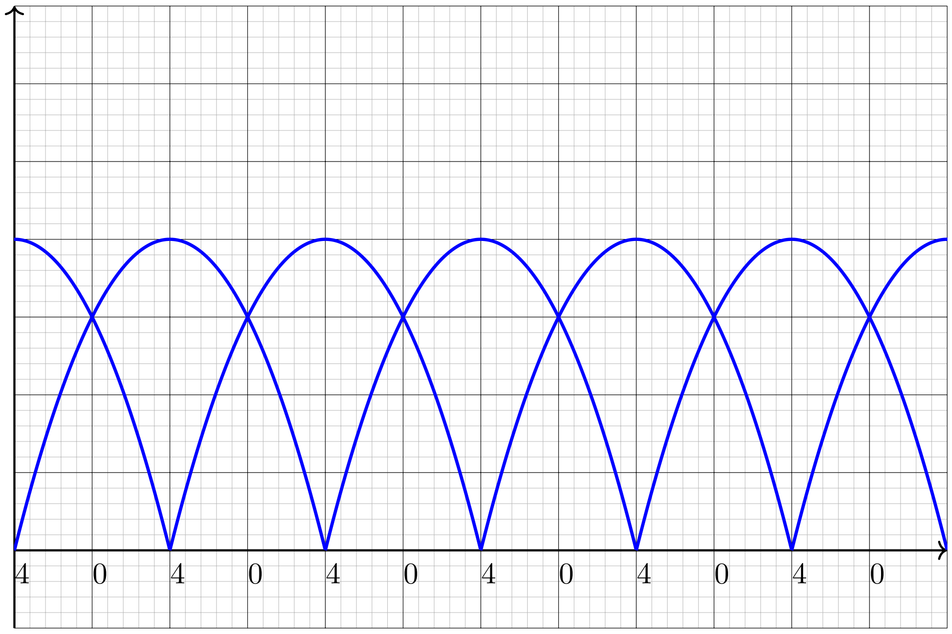
Die Siteswap-Notation: Übung

Aufgabe: Zeichnen und jonglieren Sie den Siteswap 22. **Lösung:**

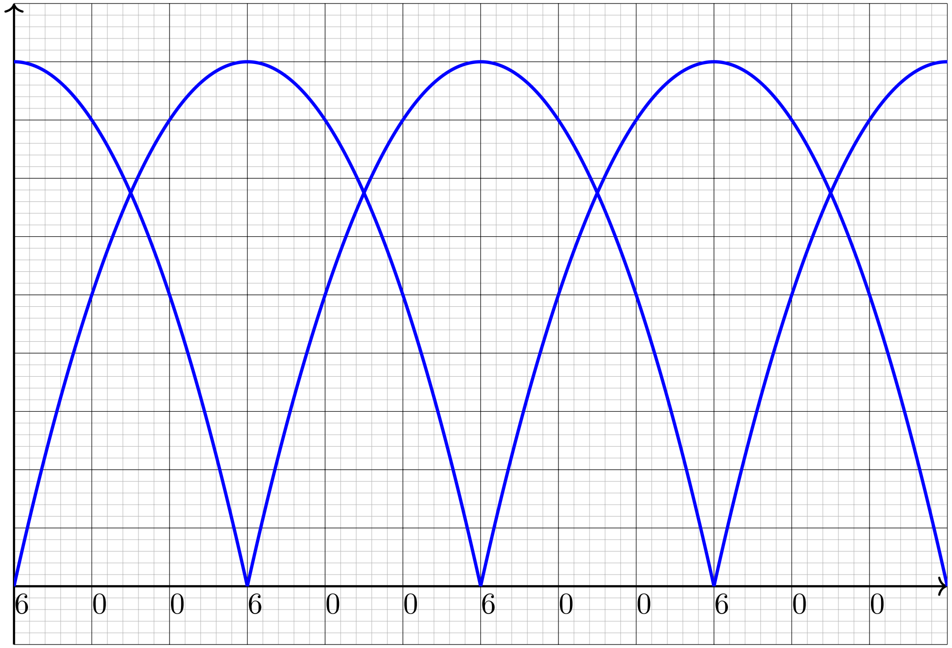


Die Siteswap-Notation: Übung

Aufgabe: Zeichnen und jonglieren Sie den Siteswap 40. **Lösung:**



Der Siteswap 600



Vergleich 22 und 40 und 600

Die Siteswaps 22 und 40 und 600 beschreiben eigentlich dasselbe.
Wir denken uns einen anderen Takt, aber die Jonglage ist gleich.
(So ähnlich ist es übrigens in der Musik.)

Bei zwei Händen bietet sich die Konvention an, abwechselnd zu werfen.
Dann bedeuten die Muster 22 und 40 und 04 etwas leicht verschiedenes.
Hingegen beschreiben die Siteswaps 22 und 600 dieselbe Jonglage,
selbst wenn wir linke und rechte Hand abwechseln.

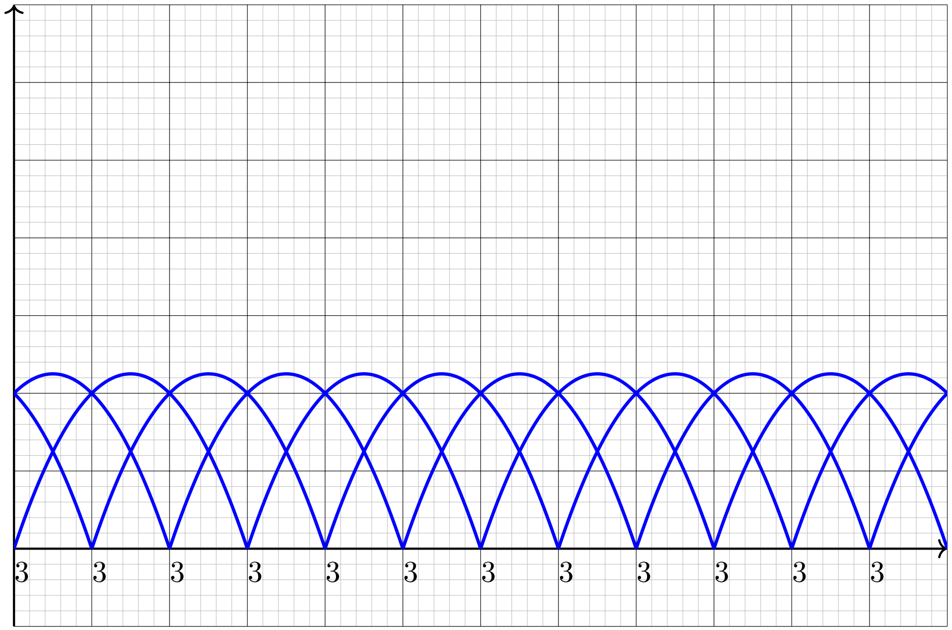
Ich will im Folgenden nicht auf diese Feinheiten eingehen.
Wir unterscheiden nicht zwischen linker und rechter Hand.

Die Siteswap-Notation ist nützlich, aber nicht perfekt!

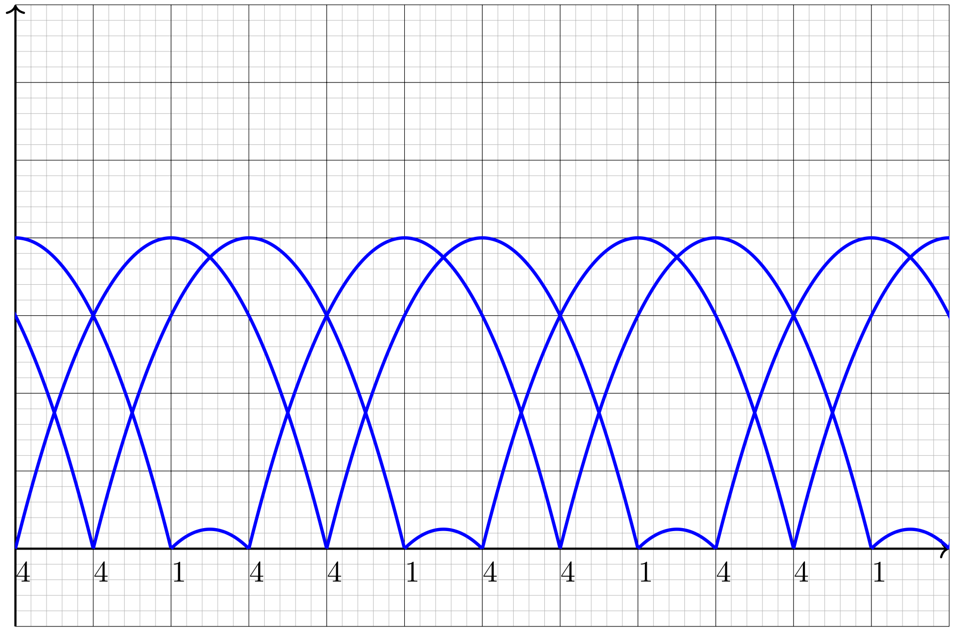
Die Abbildung von Siteswap zu Jonglage ist nicht injektiv:
Mehrere Siteswaps ergeben im Wesentlichen dieselbe Jonglage.

Die Abbildung von Siteswap zu Jonglage ist nicht surjektiv:
Manche Jonglagen können wir so nicht beschreiben.

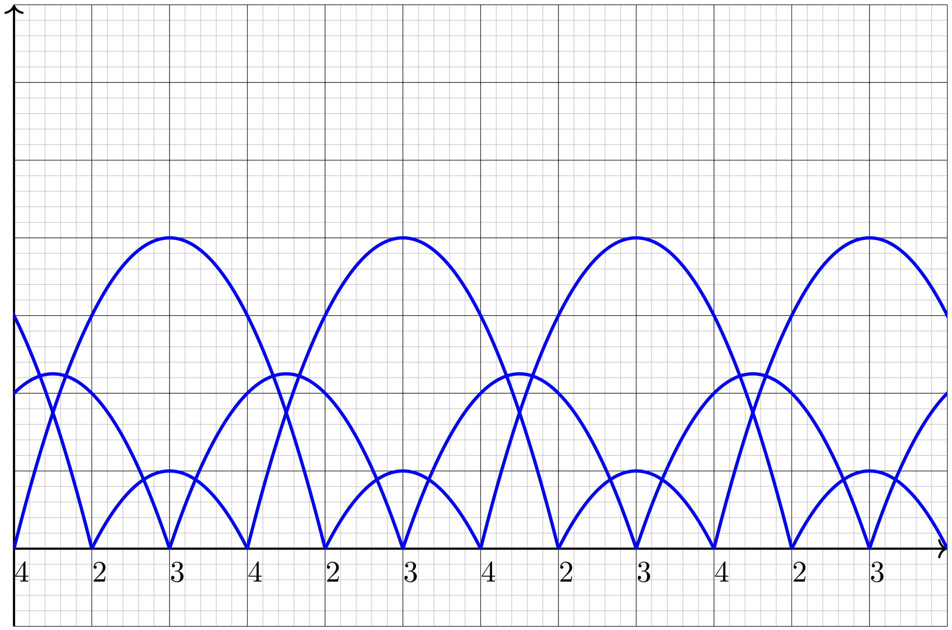
Der Siteswap 333 (Kaskade)



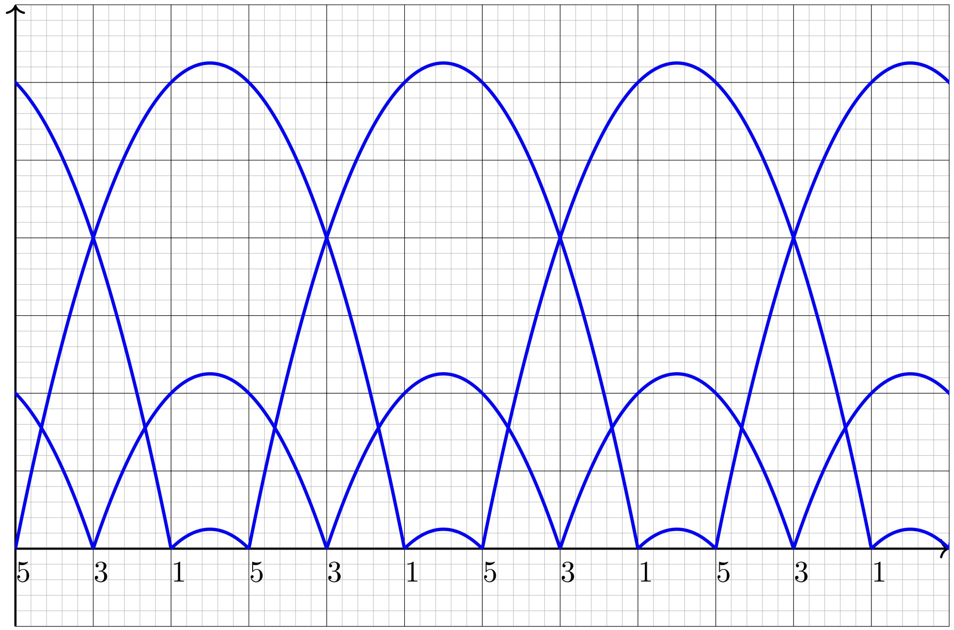
Der Siteswap 441



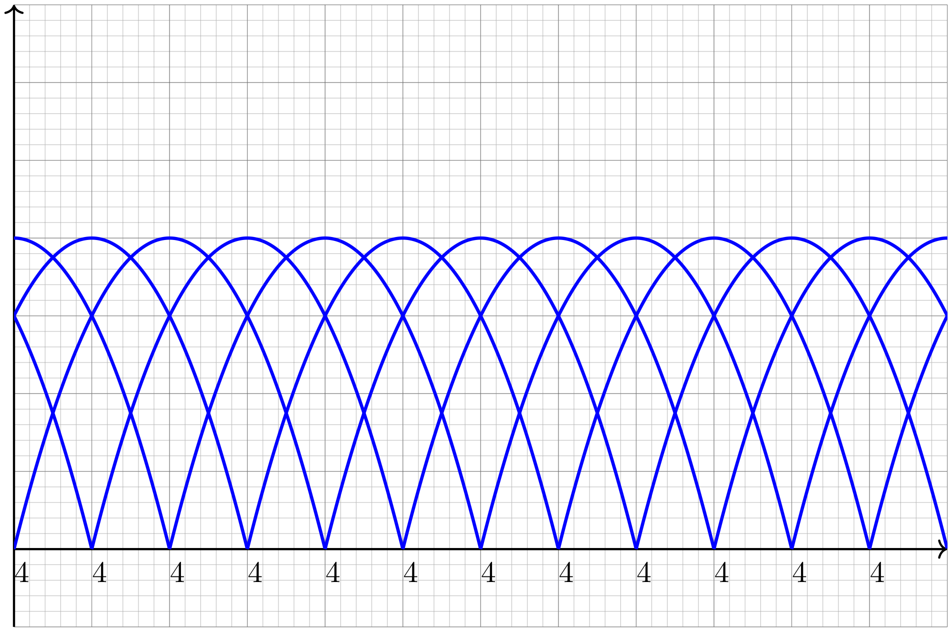
Der Siteswap 423



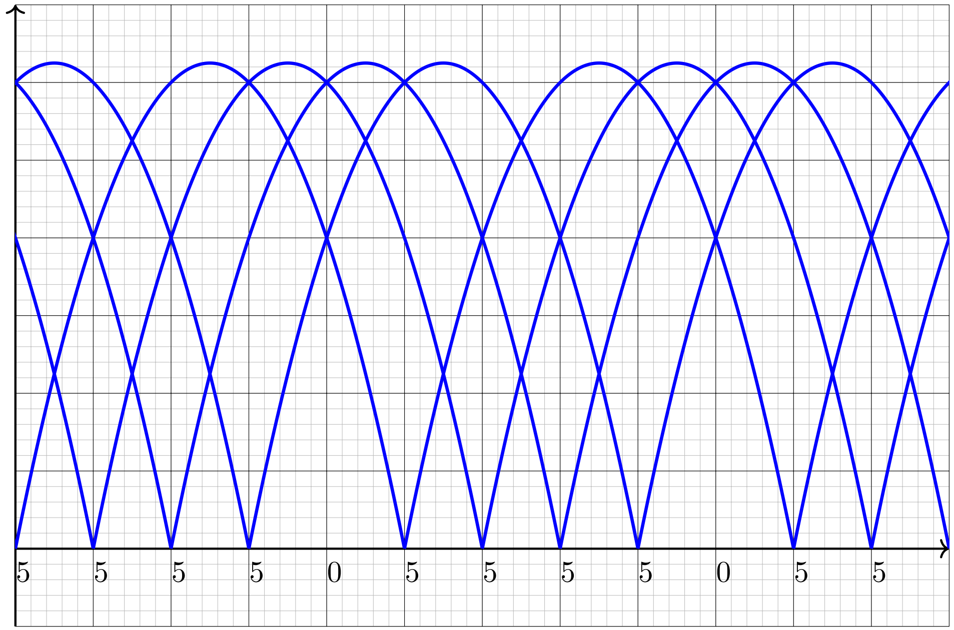
Der Siteswap 531



Der Siteswap 4444 (Kaskade)



Der Siteswap 55550



Die Ballformel

Wie können wir die Anzahl der Bälle berechnen?

Satz B2 (Ballformel, Satz von Gauß, Ergodensatz)

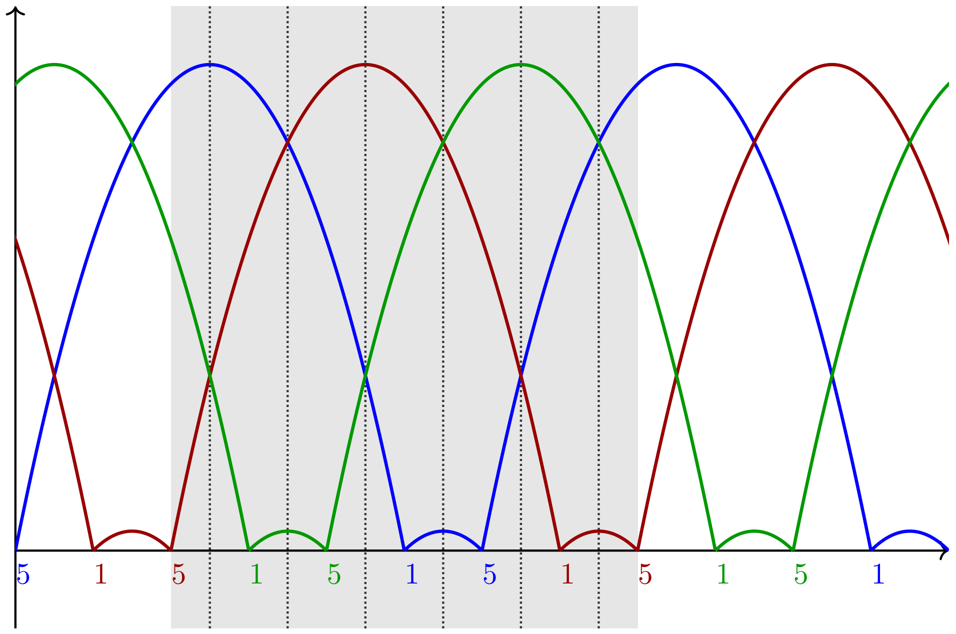
Sei $a_1, a_2, \dots, a_\ell$ ein Siteswap. Die Anzahl der Bälle ist der Mittelwert

$$\boxed{b = \frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} a_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_\ell}{\ell}}$$

Schauen wir uns nochmal die Beispiele an: Hier stimmt die Formel!
Als Mathematiker wollen wir zudem einen Beweis! Wie geht das?

Beweisidee: Doppeltes Zählen ergibt $b\,\ell = a_1 + a_2 + \dots + a_\ell$.
Wir wählen eine Periode $\ell \ge a_1, a_2, \dots, a_\ell$, länger als jede Flugbahn. Offensichtlich ist die Anzahl der Bälle b gleich der Anzahl der Bahnen. Wir betrachten ℓ Zeitpunkte zwischen aufeinander folgenden Würfen; dies habe ich als Wände skizziert. Jede Bahn durchstößt jede Wand genau einmal. Insgesamt haben wir $b\,\ell$ Durchstoßungen. Wir zählen diese auf eine zweite Art: Jeder Parabelbogen startet zu einer Zeit t und durchstößt genau a_t Wände. Insgesamt also $a_1 + a_2 + \dots + a_\ell$. QED

Die Ballformel



Beyond Siteswaps. . .

Wofür ist die Siteswap-Notation gut?

- Muster aufschreiben und kommunizieren
- Neue Muster finden und entwickeln
- Neue Muster schrittweise lernen
- Beziehungen zwischen den Mustern erkennen

Beantwortet die Siteswap-Notation alle Fragen? Nein!
Sie beschreibt den zeitlichen Verlauf, nicht den räumlichen.

Die Siteswap-Notation gibt uns eine erste wichtige Information, blendet aber noch viele Feinheiten aus. Das war gerade ihr Zweck!

Abstraktion bedeutet: das Unwichtige vergessen und sich auf das Wichtige konzentrieren. Dazu muss man sich festlegen und auswählen, was in der vorliegenden Situation das Wichtige ist. Dazu braucht es Kreativität und Sorgfalt, falls nötig Erweiterungen, Verfeinerungen, ...

Nach dem zeitlichen Verlauf wollen wir nun die räumliche Anordnung genauer beschreiben. . . und womöglich später noch weiter untersuchen.

Beyond Siteswaps. . .

Drei Raumdimensionen und eine Zeitdimension, das sind vier. . .
und vier sind zu viele! (Zumindest für heute, am Donnerstag Abend.)

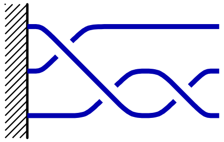
Ich vereinfache dies wie folgt: Ich jongliere die Bälle vor mir in einer senkrechten Ebene. Ich betrachte also nur zwei Raumdimensionen! Die Zeitdimension veranschauliche ich so: Ich bewege mich gleichmäßig von links nach rechts. Die Bälle zeichnen dann einen Zopf in die Luft.

Wenn Sie nöchten, denken Sie an ein Rollband oder eine Rolltreppe, besonders beeindruckend wären brennende Bälle mit Rauchfahnen. Schön wäre auch eine Videoaufnahme, um die Flugbahnen der Bälle nachzuzeichnen. Das haben wir leider alles nicht zur Verfügung.

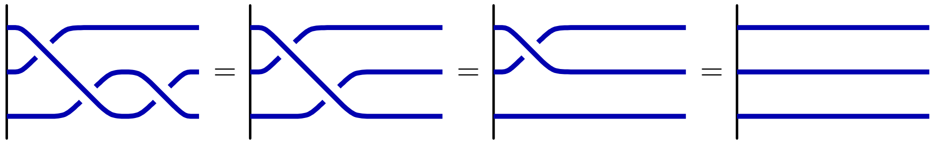
Wir haben etwas genial-einfaches gebastelt: Jonglierbälle mit Bändern. Beim Jonglieren entsteht ein Zopf: Dieser Zopf ist das Gedächtnis, er speichert den räumlichen Verlauf, was genau jongliert wurde.

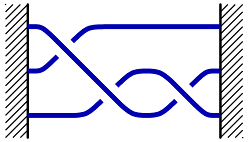
— Vorführen: vorwärts und rückwärts —

Der Zopf ist das Über-Ich der Permutation.

Erstes Modell:  Die Stränge sind flexibel, sie dürfen sich bewegen.

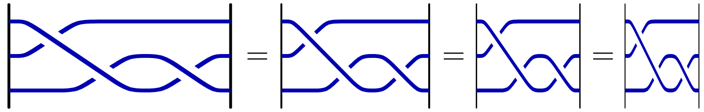
Die Stränge verlaufen streng monoton von links nach rechts.
Sie sind links an der Wand befestigt, aber rechts zunächst noch offen.
Schlechte Nachricht: In diesem ersten Modell sind alle Zöpfe gleich.

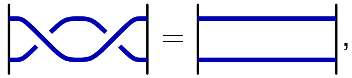


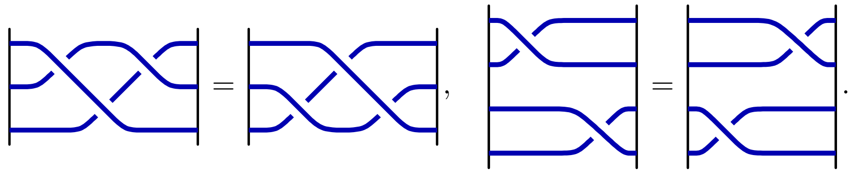
Besseres Modell:  Wir fixieren die Enden links und rechts.

In der Mitte hingegen dürfen wir die Stränge weiterhin frei bewegen.

Die Länge ist unwesentlich:

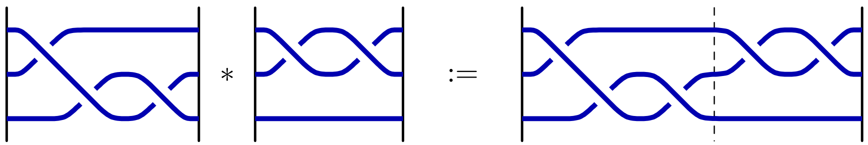


Elementare Bewegungen: 



Diese drei elementaren Bewegungen reichen bereits aus!
Genauer gesagt: Jede noch so komplizierte Bewegung von Zöpfen lässt sich aus diesen elementaren Bewegungen zusammensetzen.

Zöpfe auf n Strängen erlauben eine Verknüpfung:



Welche Rechenregeln gelten hier?

1. Gibt es ein neutrales Element?

$$a * 1 = a \qquad \text{und} \qquad 1 * a = a$$

2. Gibt es zu jedem Zopf einen inversen Zopf?

$$a * a^{-1} = 1 \qquad \text{und} \qquad a^{-1} * a = 1$$

3. Ist diese Verknüpfung assoziativ?

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

4. Ist diese Verknüpfung kommutativ?

$$a * b = b * a$$

Dies sind vier Rechenregeln, die Sie aus der Schule kennen und lieben!
Wir sehen hier ein interessantes Anwendungsbeispiel dieser Regeln.
Jetzt ist ein guter Moment, einmal genauer darüber nachzudenken.

Das neutrale Element tut nichts. Das Inverse macht alles rückgängig.
Bei der Multiplikation rationaler Zahlen leisten dies die Eins und der Kehrwert, bei der Addition entsprechend die Null und das Negative.

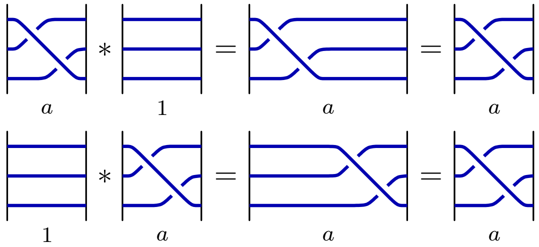
Das Assoziativgesetz ist recht unscheinbar und doch extrem beliebt:
Damit können Sie Klammern weglassen und viel Schreibarbeit sparen.
Sie nutzen dies täglich, bei jeder Rechnung, ganz ohne es zu bemerken.
Vorsicht! Assoziativität gilt nicht überall, z.B. $(5-3)-2 \neq 5-(3-2)$.

Kennen Sie auch Operationen, die nicht kommutieren, also $ab \neq ba$?
Sobald Sie anfangen, danach zu suchen, finden Sie viele Beispiele:

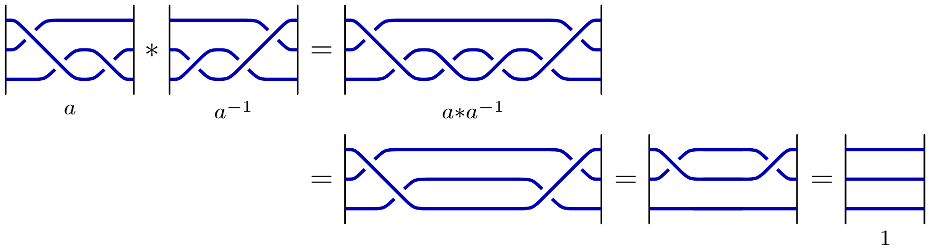
- Es ist nicht egal, ob Sie morgens zuerst die Socken und dann die Schuhe anziehen, oder zuerst die Schuhe und dann die Socken!
- Es ist nicht dasselbe, ob Sie zuerst die Tür öffnen und dann durch das Loch in der Wand gehen, oder es umgekehrt versuchen!

Verknüpfung von Zöpfen

Gibt es ein neutrales Element? Ja!

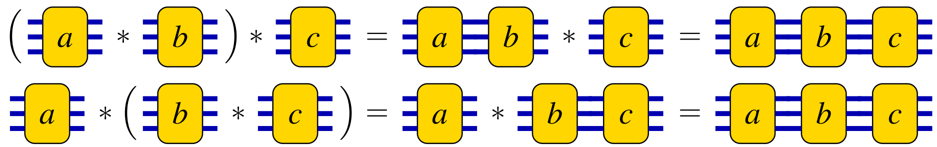


Gibt es zu jedem Zopf einen inversen Zopf? Ja!

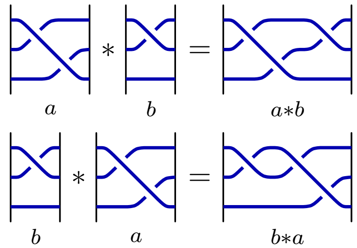


Verknüpfung von Zöpfen

Ist sie assoziativ? Ja!



Ist sie kommutativ? Nein!



In der Schulmathematik kommutiert noch (fast) alles...
doch nicht-kommutative Operationen sind sehr häufig!

Die Zopfgruppe

Wir können mit Zöpfen rechnen:

- Die Verknüpfung von Zöpfen ist assoziativ:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

- Es gibt ein neutrales Element 1, nämlich den trivialen Zopf:

$$a * 1 = 1 * a = a$$

- Zu jedem Zopf a gibt es einen inversen Zopf a^{-1}, sein Spiegelbild:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$$

Definition C1 (Gruppe)

Eine Verknüpfung mit diesen drei Eigenschaften heißt *Gruppe*.

Satz C2 (Emil Artin 1925)

Die Verknüpfung von Zöpfen auf n Strängen ist eine Gruppe, $(B_n, *)$.

Gruppen begegnen uns überall!

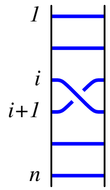
Gruppen sind eine wichtige Grundstruktur der Mathematik, Physik, Informatik und allgegenwärtig in ihren zahlreichen Anwendungen, manchmal ganz offensichtlich und andermal etwas versteckt.

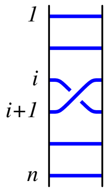
Die Idee scheint zunächst schwindelerregend abstrakt und allgemein, doch Gruppen sind zugleich wunderbar konkret und nützlich, so wie hier.

Anregung: Unter/Suchen Sie weitere Gruppen aus Ihrem Alltag!

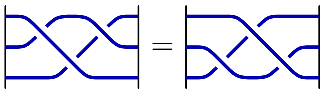
- Verschiebungen im Raum $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, allgemein Vektorrechnung.
- Tanzschule: a Schritte vor und b nach links ergibt dasselbe wie b nach links und a nach vorn. Das gilt in der Ebene, aber nicht auf dem Globus: Krümmung macht Verschiebungen nicht-kommutativ!
- Drehungen im Raum bilden eine Gruppe, zudem nicht-kommutativ. Die Drehsymmetrien eines Körper (Polyeders) bilden eine Gruppe.
- Drehungen in der Ebene bilden eine Gruppe, sogar kommutativ. Drehungen und Verschiebungen hingegen kommutieren nicht.
- Hütchenspieler: Die Vertauschungen (Permutationen) von n Objekten bilden eine Gruppe, nicht kommutativ für $n \geq 3$.

Rechenregeln für die Zopfgruppe

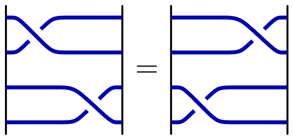
Elementare Zöpfe: $s_i =$ 

, $s_i^{-1} =$ 

Elementare Relationen: Es gilt $s_i\, s_i^{-1} = s_i^{-1}\, s_i = 1$, und außerdem



$s_i\, s_{i+1}\, s_i = s_{i+1}\, s_i\, s_{i+1}$



$s_i\, s_j = s_j\, s_i$ für $|i-j| \ge 2$

Satz C3 (Emil Artin 1925)

Die Zopfgruppe auf n Strängen erlaubt die Präsentation

$$(B_n, *) = \left\langle\, s_1, \dots, s_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{für } |i-j| = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{für } |i-j| \ge 2 \end{array} \right\rangle.$$

Rechenregeln für die Zopfgruppe

Mathematik nannte man einst die Wissenschaft der Zahlen und Figuren. Hier sehen Sie beides zugleich und zudem eng miteinander verwoben: Wir übersetzen Bilder in Formeln und ebenso zurück Formeln in Bilder. Dabei enthüllen wir eine wichtige, verborgene Struktur: eine Gruppe!

Artins Präsentation fasst alles zusammen, was wir zum Rechnen mit Zöpfen benötigen: (1) Erzeuger: Jeden noch so komplizierten Zopf erhalten wir als ein Produkt elementarer Zöpfe. (2) Relationen: Jede Umformung von Zöpfen erhalten wir als Folge elementarer Relationen.

Es gibt viele interessante Gruppen, darunter ist die Zopfgruppe $(B_n, *)$ besonders leicht und intuitiv, denn wir können sie tatsächlich begreifen. Sie tritt überall dort auf, wo n Objekte in einer Ebene bewegt werden, vom Hütchenspiel bis zu topologischen Quantencomputern.

Die Zopfgruppe $(B_n, *)$ ist verwandt mit der Permutationsgruppe $(S_n, \circ)$. Letztere erhalten wir, wenn wir nur die Umordnung der Punkte $1, 2, \dots, n$ vom Eingang zum Ausgang betrachten, aber die Stränge dazwischen vergessen. Auch diese Gruppe ist sehr konkret, schön und wichtig.

Beyond Siteswaps...

Wir jonglieren Bälle-mit-Bändern... so wird der Zopf sichtbar!

Einige Experimente: Jonglieren eines Zopfes... und seines Inversen.

Der Siteswap 333 lässt sich tatsächlich auch zopfneutral jonglieren!

Verzopfen und entzopfen... zunächst nacheinander, dann zeitgleich!

Dem Jongleur ist nichts zu schwör...

Am Ende gewinnt immer die Schwerkraft.

Fragen und Anregungen:

1. Lässt sich jeder Siteswap jonglieren? zopfneutral?
2. Lässt sich aus dem Zopf der Siteswap ablesen?
3. Wie viele Siteswaps gibt es? zu fester Länge ℓ?
4. Wie kann man diese Siteswaps alle aufzählen?
5. ... und jonglieren? Bauen Sie einen Jonglier-Roboter!

Beyond Siteswaps...

Damit beschließen wir unseren Spaziergang durch die wunderbare Welt des Jonglierens und die noch phantastischere der Mathematik. Wir haben mit mathematischen Objekten und Formeln jongliert!

Zuerst haben wir die zeitliche Struktur von Jonglier-Mustern untersucht. Dazu bietet die Siteswap-Notation eine kurze, bequeme Beschreibung. Dabei haben wir die schöne, einfache Ballformel entdeckt und konnten sie sogar elegant beweisen: Das gelingt durch doppeltes Abzählen!

Nach der zeitlichen haben wir die räumliche Struktur des Jonglierens untersucht und sind auf eine schöne und wichtige Struktur gestoßen: Gruppen, speziell die Zopfgruppe $(B_n, *)$. Die abstrakt-mathematischen Rechenregeln konnten wir anschließend konkret-anschaulich jonglieren!

Ich hoffe, diese Illustrationen haben Ihnen Freude bereitet und auch einen ersten Eindruck vermittelt von der Vielfalt der Mathematik.

Vielen Dank!