Spieltheorie

Mathematik-Workshop für TryScience

Prof. Dr. Michael Eisermann

Institut für Geometrie und Topologie (IGT)

`www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm`

Universität Stuttgart

Sommersemester 2018

23. Juli 2018

Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Was ist ein Spiel allgemein gesehen?

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:

- Mehrere Akteure interagieren (Spieler, Teilnehmer, etc.).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Auszahlung, Nutzen, etc).
- Jeder Spieler versucht, sein Ergebnis zu maximieren.

Eigenschaften von Spielen

Anzahl der Akteure

- Ein Spieler: Geschicklichkeit, Steuerung, Optimierung
- Zwei Spieler: Tischtennis, Schach, Handel, Vertrag
- Drei und mehr Spieler: Wahlen, Koalitionen, Gesellschaft

Konkurrenz und Kooperation

- Nullsummen vs Win-Win: Marktaufteilung, Absprachen
- kooperativ vs nicht-kooperativ: Verträge, Nebenzahlungen

Zufall und Information

- deterministisch vs stochastisch: Go, Monopoly,
- vollständige vs unvollständige Information: Lotto, Poker

Zeitlicher Verlauf

- parallel vs sequentiell: Quizz, Schere-Stein-Papier
- diskret vs kontinuierlich: M-ä-d-n, Onlinespiele, Börse

Weitere Beispiele: Straßenverkehr, Fußball, Elfmeter, Schwarzfahren, Auktion, Klausur, Bewerbung, Steuererklärung, Verhandlungen, etc.

Wer interessiert sich für Spiele?

Wer interessiert sich für Spiele?

- Kinder und Erwachsene, auch Eltern
- Spieledesigner und Programmierer
- Mathematiker und Sozialwissenschaftler
- Biologen und Evolutionstheoretiker
- Wirtschaftswissenschaftler und Anwender
- Politiker, Diplomaten, Strategen, Militärs

Spieltheorie: die Gründungsväter

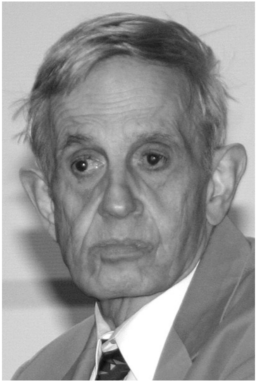
Emile Borel
(Saint-Affrique 1871 –
Paris 1956)

John von Neumann
(Budapest 1903 –
Washington 1957)

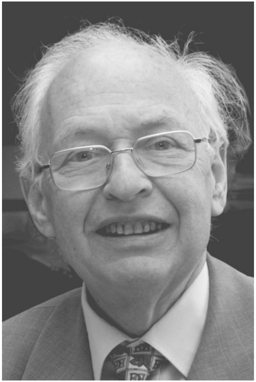
Oskar Morgenstern
(Görlitz 1902 –
Princeton 1977)

1944: *The Theory of Games and Economic Behavior*

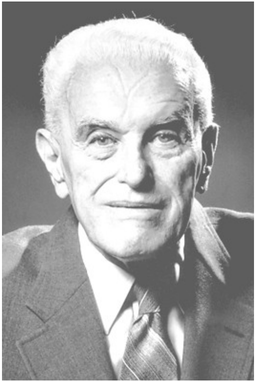
Spieltheoretiker der zweiten Generation



John Nash
(Bluefield/WV 1928 –
Monroe Township/NJ 2015)



Reinhard Selten
(Breslau 1930 –
Posen 2016)

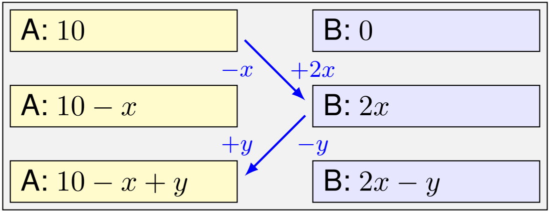


John C. Harsanyi
(Budapest 1920 –
Berkeley/CA 2000)

Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften 1994:
für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen

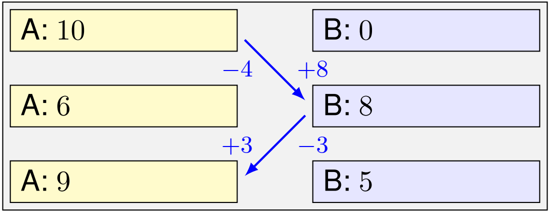
Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung.

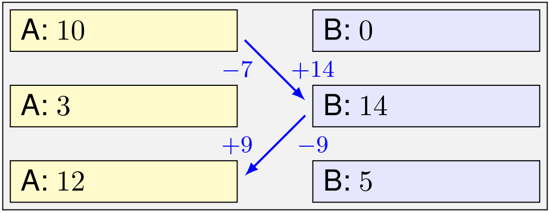


Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Beispiel 1:



Beispiel 2:



Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Wir haben dies für Sie als Online-Spiel implementiert:

`www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/spiele`

Stufen der Rationalität

Definition B1 (Stufen der Rationalität)

Unter **Rationalität** fassen wir folgende Axiome zusammen:

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will seinen Gewinn maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels.

$\mathscr{R}_2$: Es gelten die Aussagen $\mathscr{R}_0, \mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_3$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_2$, und jeder Spieler weiß dies.

etc. . . Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ die Aussage

$\mathscr{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_\infty$: Es gelten die Aussagen $\mathscr{R}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Kuchen teilen

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jedes Kind will möglichst viel Schokokuchen.

$\mathscr{R}_1$: Bob wird das größere Stück erkennen und sich nehmen.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß, dass sie das kleinere Stück bekommen wird. Daher schneidet Alice zwei möglichst gleich große Stücke.

Beispiel: die Erbschaft

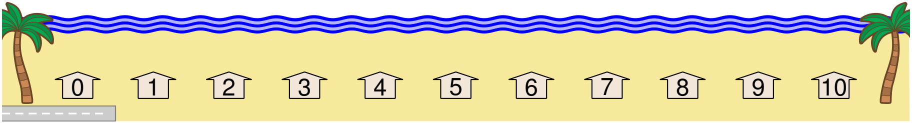
Aufgabe: Alice und Bob erben $1\,000\,000$€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob und $1\,000\,000 - x$ für Alice. Dies kann Bob nun annehmen… oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder will seine Auszahlung maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß dies und schlägt $x = 1$€ vor.

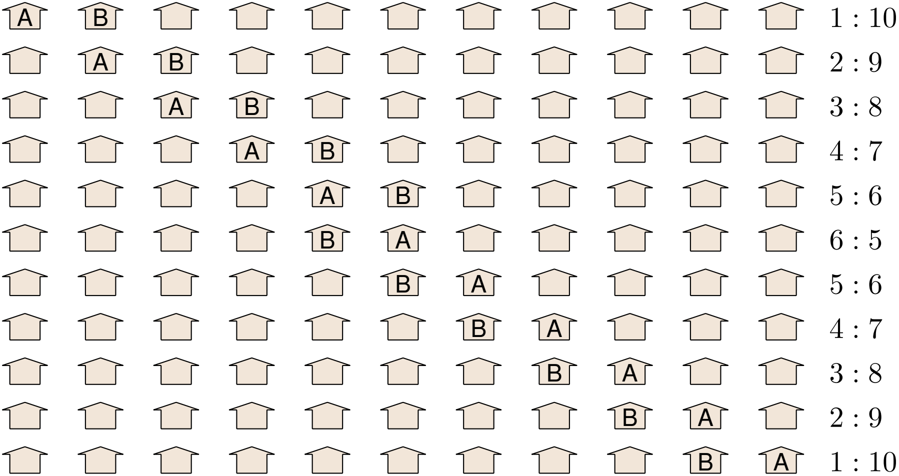
Beispiel: Kiosk am Strand



Aufgabe: (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?

Beispiel: Kiosk am Strand

Bei Frage (2) suchen wir zu jeden Zug von A die beste Antwort von B:



Beispiel: drohen oder nachgeben?

	USA	EU
Start		
– USA drohen nicht.	5	9
– USA drohen mit Zöllen.		
– – Europa gibt nach.	6	7
– – Europa droht ebenfalls.		
– – – USA lenken ein.	4	8
– – – Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

Aufgabe: Was wird passieren? rational? irrational?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder maximiert sein Ergebnis (wie rechts gezeigt).

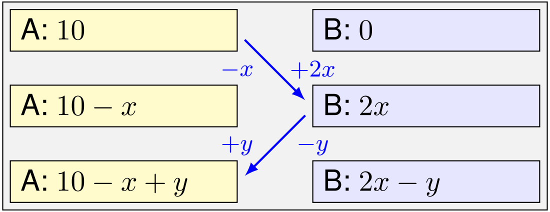
$\mathscr{R}_1$: Vor einem Handelskrieg im 3. Zug lenken die USA ein (vorteilhaft).

$\mathscr{R}_2$: Die EU weiß dies, also wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).

$\mathscr{R}_3$: Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

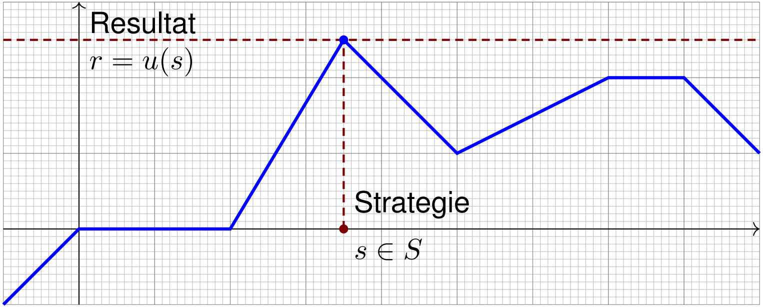
Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

Im Lichte dieser Erkenntnisse spielen wir erneut „Hin-und-Rück“.



Aufgabe: Maximieren Sie Ihre Erträge bei diesem Spiel!
Wie gelingt das rational? für Spieler B? für Spieler A?

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?



Der Spieler sucht seine Strategie $s \in S$ so, dass sein Resultat $r = u(s)$ maximal ist, also $u(x) \le u(s)$ für alle alternativen Strategien $x \in S$ gilt.

Definition C1 (Spiel mit nur einem Spieler: Gewinnmaximierung)

Ein **Spiel** mit nur einem Spieler ist eine Funktion $u : S \to R : s \mapsto u(s)$.

Hierbei ist S die Menge der **Strategien**, die der Spieler wählen kann, und R ist die Menge möglicher **Resultate**, linear geordnet durch $\le$.

Meist sind R die reellen Zahlen, und wir nennen u die **Nutzenfunktion**.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

$s_2 \in S_2 =$

$s_1 \in S_1 =$

A \ B	Schere	Stein	Papier
Schere	0 0	$+1$ -1	-1 $+1$
Stein	-1 $+1$	0 0	$+1$ -1
Papier	$+1$ -1	-1 $+1$	0 0

$u_2(s_1, s_2)$

$u_1(s_1, s_2)$

Definition C2 (strategisches Spiel in Normalform)

Ein **Spiel** mit n Spielern ist eine Funktion

$$
\begin{aligned}
u \,:\, S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n &\to R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n \\
s = (s_1, s_2, \dots, s_n) &\mapsto (u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)).
\end{aligned}
$$

Hierbei ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler i wählen kann, und R_i ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch $\leq_i$.

Ein zweites Experiment: „Kartenduell“

Wir haben für Sie ein zweites Online-Spiel implementiert:

`www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/spiele`

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Wir nennen $s = (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ einen **Strategievektor**.

Spieler i kann sich aus eigener Kraft verbessern, wenn für ein $x \in S_i$ gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{x}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;>\; u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Andernfalls ist s ein **Maximum** bezüglich seiner Strategien $x \in S_i$:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{x}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;\le\; u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Somit ist s_i eine **beste Antwort** auf $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Definition C3 (Nash–Gleichgewichte eines Spiels)

Der Strategievektor s ist im **Gleichgewicht für Spieler i**, wenn gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;=\; \max_{x \in S_i} u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{x}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Gilt dies für jeden Spieler i, so nennen wir s ein **Nash–Gleichgewicht**.

Beispiel: das Gefangenendilemma

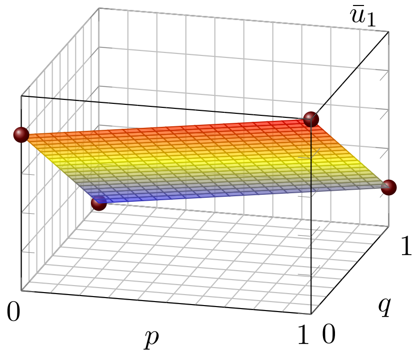
A \ B	schweigen	gestehen
schweigen	-1, -1	-5, 0
gestehen	0, -5	-4, -4

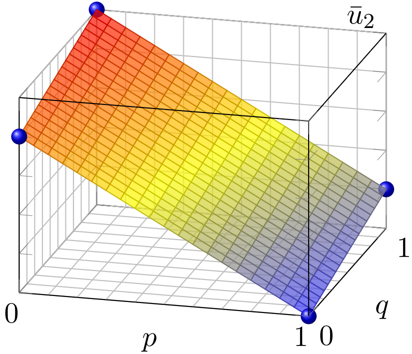
Als Funktion $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bedeutet das ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
(\text{schweigen}, \text{schweigen}) &\mapsto (-1, -1) \\
(\text{schweigen}, \text{gestehen}) &\mapsto (-5, \ \ 0) \\
(\text{gestehen}, \text{schweigen}) &\mapsto (\ \ 0, -5) \\
(\text{gestehen}, \text{gestehen}) &\mapsto (-4, -4)
\end{aligned}$$

Nash–Gleichgewicht ist hier einzig (gestehen, gestehen).

Beispiel: das Gefangenendilemma

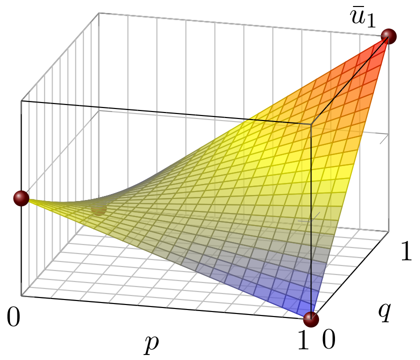


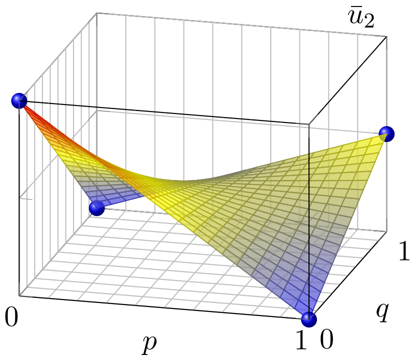


Beispiel: Bach oder Strawinsky?

A \ B	Bach	Strawinsky
Bach	1, 2	0, 0
Strawinsky	0, 0	2, 1

Beispiel: Bach oder Strawinsky?

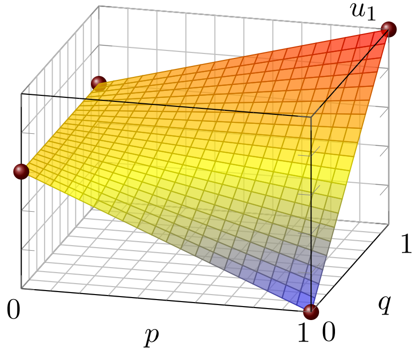


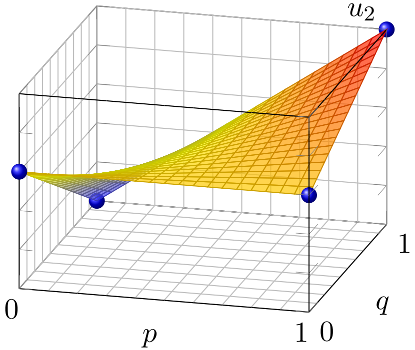


Beispiel: bleiben oder gehen?

A \ B	bleiben	gehen
bleiben	A: -2, B: -2	A: -2, B: -5
gehen	A: -5, B: -2	A: 0, B: 0

Beispiel: bleiben oder gehen?





Gemischte Strategie: Was ist das?

Beim Spiel Schere-Stein-Papier ist es nicht sinnvoll, sich auf eine der drei **reinen Strategien** festzulegen. Besser ist, eine zufällig zu wählen:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Wir nennen dies eine **gemischte Strategie**. Allgemein:

Definition C4 (gemischte Strategie)

Sei $S_i = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die (endliche) Strategiemenge des Spielers i. Eine **gemischte Strategie** ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S_i:

$$s = p_0 \cdot s_0 + p_1 \cdot s_1 + \cdots + p_\ell \cdot s_\ell$$

Hierbei gelte $p_0, p_1, \dots, p_\ell \geq 0$ und $p_0 + p_1 + \cdots + p_\ell = 1$, wie üblich.

Beispiel: Matching Pennies

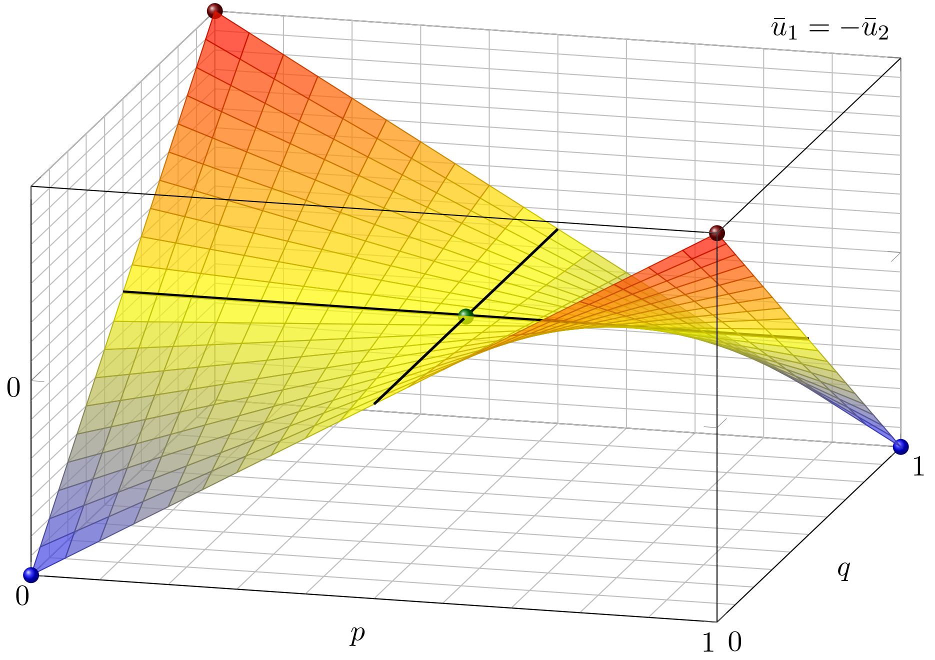
A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Zahl	-1 / $+1$	$+1$ / -1

Wie bei *Schere-Stein-Papier* gibt es zunächst kein Nash–Gleichgewicht.
Erweiterung: Beide Spieler dürfen nun gemischte Strategien wählen!

Spieler A: $[0,1] \ni p \quad \mapsto \quad s_p = (1-p)\cdot$ Kopf $+\, p \cdot$ Zahl

Spieler B: $[0,1] \ni q \quad \mapsto \quad s_q = (1-q)\cdot$ Kopf $+\, q \cdot$ Zahl

Beispiel: Matching Pennies



Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Lemma D1 (Gleichgewichte und Minimax = Maximin)

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *ein Nullsummenspiel, also* $u_1 + u_2 = 0$*.*
(0) Allgemein gilt „Maximin $\le$ *Minimax“, also ausgeschrieben:*

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \le \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(1) Ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ *ein Nash–Gleichgewicht, so gilt Gleichheit:*

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(2) Angenommen, es gilt die Gleichheit „Maximin = Minimax“. Wir wählen einen Min-Maximierer $s_1 \in S_1$ *und Max-Minimierer* $s_2 \in S_2$*:*

$$v = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y),$$
$$v = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2).$$

Dann ist das Paar $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ *ein Nash–Gleichgewicht.*

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Gleichgewichte sind grundlegend. Gibt es sie immer? Ja, oft genug:

Satz D3 (Existenzsatz für Gleichgewichte, John Nash 1950)

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ *ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und* $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ *seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.*

Dann besitzt das Spiel $\bar{u}$ *mindestens ein Nash–Gleichgewicht.*

Hieraus folgt der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummenspiele:

Korollar D4 (Minimax-Satz, John von Neumann 1928)

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ *ein endliches Nullsummenspiel, also* $u_1 + u_2 = 0$*, und* $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ *seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.*

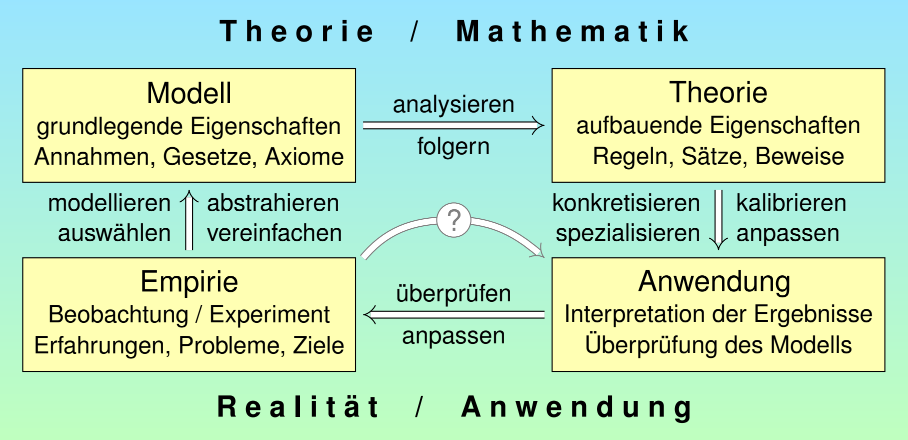
Dann besitzt das Spiel $\bar{u}$ *mindestens ein Gleichgewicht, und somit gilt*

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} \bar{u}_1(x, y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} \bar{u}_1(x, y)$$

Dies nennen wir den ***Wert*** *des Spiels* $\bar{u}$ *für Spieler* 1*.*

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)