

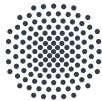
Spieltheorie

Mathematik-Workshop für TryScience

Prof. Dr. Michael Eisermann

Institut für Geometrie und Topologie (IGT)

www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm



Universität Stuttgart

Sommersemester 2018

23. Juli 2018



Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.



Willkommen!

Ich begrüße Sie herzlich zu *TryScience* und unserem Workshop. Für *TryScience* bietet der Fachbereich Mathematik auch dieses Jahr wieder eine unterhaltsame und lehrreiche Infoveranstaltung an. Wir präsentieren ein mathematisches Thema, so dass interessierte Schülerinnen und Schüler die „Uni ausprobieren“ können. Unser Thema diesmal heißt: **Spieltheorie**.

Wer dieses faszinierende Thema vertiefen möchte, dem bietet sich eine umfangreiche Lehrbuchliteratur. Zum ernsthaften Einstieg empfehle ich das Buch von Duncan Luce & Howard Raiffa: *Games and Decisions*, Dover Books on Mathematics, Reprint 2012, als günstiges Taschenbuch mit ausführlichen Erklärungen. (Nebenbei wird auch die mathematische Darstellung eingeführt, mit einigen wenigen aber schönen Beweisen.) Ebenso findet man im Internet zahlreiche Einführungen zur Spieltheorie für sehr unterschiedliche Zielgruppen und von eher variabler Qualität. Ein vollständiges Lehrbuch bietet Giacomo Bonanno: *Game Theory*, faculty.econ.ucdavis.edu/faculty/bonanno/PDF/GT_book.pdf.

Warnhinweise

Es geht um Mathematik. Das birgt besondere Chancen und Risiken, die muss ich erklären. Viele Schüler kommen ja mit Mathematik nicht mehr in Kontakt. – „Was? Wir haben doch Mathematik in der Schule!“ – Naja, ein Fach wird so genannt; wenn's gut läuft, lernen Sie etwas Rechnen. Rechnen ist gut und nützlich, doch Mathematik bietet so viel mehr!

Mathematik ist nicht (nur) die sture *Anwendung* vorgefertigter Formeln, sondern (auch und vor allem) die *Entwicklung* neuer (Denk-)Werkzeuge. Mathematik (gr. μαθηματική τέχνη) ist die *Kunst des Erkennens*. Sie ist ein schöpferischer Prozess zum Lösen von Problemen.

Was zeichnet mathematische Arbeit aus? Ehrlich sein zu sich selbst und zu allen anderen, präzise formulieren, sorgfältig argumentieren, nachvollziehbar, nach logischen Regeln, alle Fälle berücksichtigen.

Sorgfalt und Ehrlichkeit sind mühsam, viele mögen das nicht, manche spotten gar darüber. Beides ist dennoch bitter nötig, und es lohnt sich! Was Sie einmal als richtig erkannt und nachgewiesen haben, behält seine Gültigkeit, auch nach Jahrhunderten, für immer! Andere Bereiche des Wissens sind modischer – aber flüchtiger.

Vorgehensweise

Die Arbeiten von Nobelpreisträgern sind oft spannend und wegweisend. Für populärwissenschaftliche Vorträge eignen sie sich leider selten, oder nur mit größten Mühen. Es gibt ein paar bemerkenswerte Ausnahmen, wie Nashs Gleichgewicht in der Spieltheorie, von dem ich heute spreche, oder Arrows Satz vom Diktator, den wir letztes Jahr vorgestellt haben.

Diese Theoreme sind schöne Lehrstücke mathematischen Denkens. Die Argumente sind genial, die Aussagen sind gesellschaftlich relevant. Natürlich muss ich heute stark vereinfachen und abkürzen, aber es lohnt sich: Wir werden die grundlegenden Begriffe und Methoden sehen, die zur Analyse von Spielen genutzt werden, und allgemein zur Analyse und Lösung von Konflikten. Dafür bekam John Nash 1994 seinen Nobelpreis!

Dieser Vortrag steht Ihnen schriftlich zur Verfügung, auch online. Sie müssen nicht mitschreiben; mir ist lieber, dass Sie mitdenken.

Bitte unterbrechen Sie mich, wenn etwas unklar ist!

Zögern Sie nicht, Ihre Fragen zu stellen!

Was ist ein Spiel allgemein gesehen?

Spiele im engeren Sinne sind Kinderspiele, Kartenspiele, Brettspiele, Gesellschaftsspiele, Rollenspiele, Computerspiele, auch Handyspiele, sportliche Wettkämpfe, etwa Olympische Spiele, etc.

Wir fassen den Begriff des Spiels im Folgenden wesentlich weiter als Interaktion mehrere Akteure, wobei es zu Konflikten kommen kann.

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:

- Mehrere Akteure interagieren (Spieler, Teilnehmer, etc.).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Auszahlung, Nutzen, etc).
- Jeder Spieler versucht, sein Ergebnis zu maximieren.

Ein Spiel muss demnach nicht kindisch-verspielt sein, sondern kann durchaus vollkommen ernst sein. Hierzu nenne ich im Folgenden einige Beispiele, damit Sie sich einen besseren Überblick verschaffen können. Die möglichen Interpretationen und Anwendungen sind unbegrenzt.

Warum spielt der Mensch?

Es ist eine bemerkenswerte Grunderfahrung: **Der Mensch spielt**, sogar häufig und gerne! Das unterscheidet ihn von vielen anderen Lebewesen.

Homo ludens, der spielende Mensch: Im Spiel entdeckt und übt der Mensch seine Fähigkeiten, macht Erfahrungen und entwickelt seine Persönlichkeit. Er erprobt Handlungsfreiheit und eigenes Denken. Er erkennt und antizipiert die Konsequenzen seines Handelns.

Warum ist das so? **Alles Leben ist Problemlösen**, schrieb Karl Popper. Und erfahrungsgemäß führt uns das Leben immer wieder in Konflikte. Daher ist es überaus sinnvoll, Probleme vorher „durchzuspielen“. Die Evolution hat uns hierzu Neugier und Spielfreude geschenkt.

Die genauere Untersuchung führt uns zur **Spieltheorie**. Dies können wir ebenso gut *Konflikttheorie* nennen, oder *Theorie der strategischen Interaktion* oder *Interaktive Entscheidungstheorie*. Das klingt seriös aber leider auch schwerfällig. Die Bezeichnung *Spieltheorie* hat Vorteile: Sie ist kurz und knapp, sie klingt positiv und beschreibt die Situation recht treffend, und sie ist seit bald einhundert Jahren traditionell üblich.

Eigenschaften von Spielen

Anzahl der Akteure

- Ein Spieler: Geschicklichkeit, Steuerung, Optimierung
- Zwei Spieler: Tischtennis, Schach, Handel, Vertrag
- Drei und mehr Spieler: Wahlen, Koalitionen, Gesellschaft

Konkurrenz und Kooperation

- Nullsummen vs Win-Win: Marktaufteilung, Absprachen
- kooperativ vs nicht-kooperativ: Verträge, Nebenzahlungen

Zufall und Information

- deterministisch vs stochastisch: Go, Monopoly,
- vollständige vs unvollständige Information: Lotto, Poker

Zeitlicher Verlauf

- parallel vs sequentiell: Quizz, Schere-Stein-Papier
- diskret vs kontinuierlich: M-ä-d-n, Onlinespiele, Börse

Weitere Beispiele: Straßenverkehr, Fußball, Elfmeter, Schwarzfahren, Auktion, Klausur, Bewerbung, Steuererklärung, Verhandlungen, etc.

Eigenschaften von Spielen

Spiele mit nur einem Akteur können bereits sehr anspruchsvoll sein: Sie wollen mit einem Fahrzeug von A nach B kommen (Auto, Fahrrad, Schiff, Flugzeug, Raumsonde, etc). Damit dies überhaupt möglich ist, müssen Sie Ihr Vehikel zunächst steuern können. Zudem wollen Sie den besten Weg finden, Zeit und Aufwand minimieren, Nutzen maximieren. In der Ökonomie muss jeder Akteur ähnliche Probleme lösen: Was ist möglich? Was ist erstrebenswert? Wie finde ich die beste Möglichkeit? Das führt zu Fragen und Methoden der mathematischen Optimierung.

Bei zwei oder mehr Spielern kommt es zur **Interaktion**: Das Ergebnis jedes Akteurs hängt nicht nur von seinen eigenen Entscheidungen ab, sondern auch von den Aktionen der anderen Akteure. Wie bereits die hier skizzierten ersten Beispiele zeigen, kann es dabei zu Konflikten kommen, sowohl zu Konkurrenz als auch zu Kooperation.

Praktisch alles im Leben ist ein Spiel oder kann so gesehen werden. Die großen Weltreligionen fassen das gesamte Leben in dieser Form: Der Mensch wählt frei seine Handlungen und wird hierfür belohnt oder bestraft: Paradies / Himmel vs Hölle, Nirwana vs Wiedergeburt, usw.

Wer interessiert sich für Spiele?

Wer interessiert sich für Spiele?

- Kinder und Erwachsene, auch Eltern
- Spieledesigner und Programmierer
- Mathematiker und Sozialwissenschaftler
- Biologen und Evolutionstheoretiker
- Wirtschaftswissenschaftler und Anwender
- Politiker, Diplomaten, Strategen, Militärs

Spiele und Konflikte sind eine uralte menschliche Grunderfahrung. Darüber hinaus gab es hierzu jedoch lange keinerlei geeignete Theorie.

Bis in die 1920er Jahre fehlte den Wirtschaftswissenschaften eine geeignete Sprache zur quantitativen Erfassung und Untersuchung.

Hierzu braucht es raffinierte Mathematik! Erste Untersuchungen unternahm in den 1920er Jahren der Mathematiker Emile Borel.

Der Durchbruch gelang 20 Jahre später. Der Mathematiker John von Neumann und der Ökonom Oskar Morgenstern legten hierzu 1944 die Grundlage mit ihrem bahnbrechenden Lehrbuch *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*. Es gilt als Geburtsurkunde der Spieltheorie.

Spieltheorie: die Gründungsväter



Emile Borel
(Saint-Affrique 1871 –
Paris 1956)



John von Neumann
(Budapest 1903 –
Washington 1957)



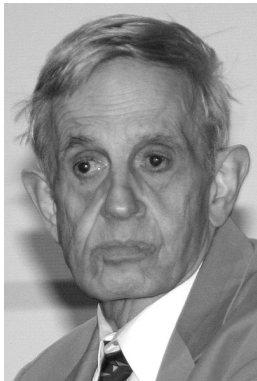
Oskar Morgenstern
(Görlitz 1902 –
Princeton 1977)

1921: *La Theorie du jeux*

1928: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*

1944: *The Theory of Games and Economic Behavior*

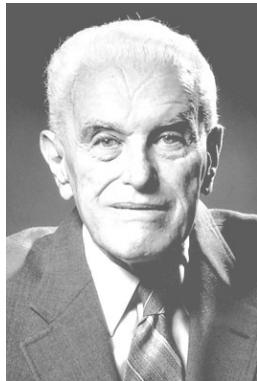
Spieltheoretiker der zweiten Generation



John Nash
(Bluefield/WV 1928 –
Monroe Township/NJ 2015)



Reinhard Selten
(Breslau 1930 –
Posen 2016)



John C. Harsanyi
(Budapest 1920 –
Berkeley/CA 2000)

Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften 1994:
für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen

Nobelpreise für Spieltheorie

Der Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften wird seit 1969 vergeben, darunter immer wieder für Arbeiten der Spieltheorie:

1994: für Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen

2005: für die Analyse von Konflikt und Kooperation durch Spieltheorie

2007: für die Grundlegung der Theorie des Mechanismendesigns

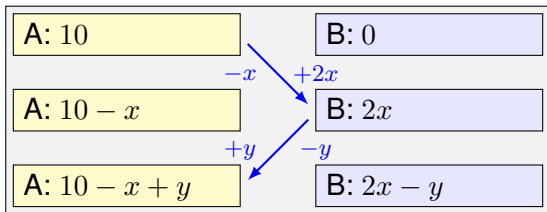
Spieltheorie gehört so gesehen zur Mikroökonomie, denn sie untersucht das Verhalten einzelner Akteure. Im Gegensatz hierzu untersucht die Makroökonomie übergeordnete Größen und Kennzahlen: Investition und Konsum, Export und Import, staatliche Ausgaben und Steuern, etc.

Beide Sichtweisen gehören zusammen und ergänzen sich.

Ich werde über *Spieltheorie* sprechen, also mathematische Modelle und Methoden. Bevor ich Sie damit jedoch erleuchte oder verwirre, möchte ich gerne ein Experiment durchführen. Damit betone ich das empirische Gegenstück zur mathematischen Theorie: die experimentelle Ökonomie. Hier versucht man, konkrete Situationen zu verstehen, reale Daten zu erheben, und daran die Theorie zu testen bzw. zu kalibrieren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung. Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.



Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

Erster Zug: A schickt an B einen frei wählbaren Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

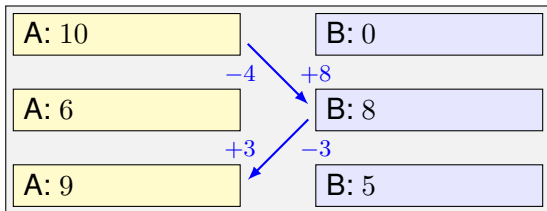
Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$. Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.

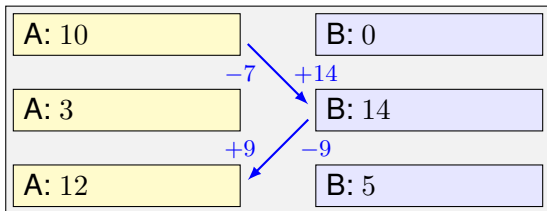
Wichtig: Es gelten nur diese Regeln, und sonst keine weiteren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Beispiel 1: A schickt 4€, B schickt 3€ zurück. 😞 A macht Verlust.



Beispiel 2: A schickt 7€, B schickt 9€ zurück. 😊 Beide profitieren.



Beachte: Der zweite Zug ist ein Nullsummenspiel, der erste Zug nicht!

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Das ist ein einfaches aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns.

Wir können diese Interaktion als „Kredit und Rückzahlung“ interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen?

Allerdings gibt es keinen Vertrag und keine Strafen!

Ebenso können wir dies als Online-Handel interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen.

Zugegeben, dieses Modell ist allzu simpel und eher unrealistisch, insbesondere fehlen hier alle üblichen Kontrollmechanismen.

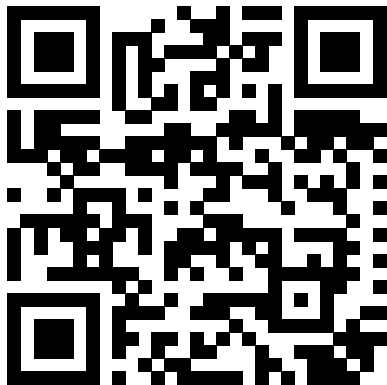
Der große Vorteil ist jedoch: Alle Regeln sind klar und einfach.

Wir können es vollständig verstehen und beherrschen.

Das ist ein stark vereinfachtes Modell, sozusagen ein Laborexperiment. Wir blenden alles andere aus und untersuchen es unter dem Mikroskop.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Wir haben dies für Sie als Online-Spiel implementiert:



www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/spiele

Stufen der Rationalität

Definition B1 (Stufen der Rationalität)

Unter **Rationalität** fassen wir folgende Axiome zusammen:

\mathcal{R}_0 : Jeder Spieler will seinen Gewinn maximieren.

\mathcal{R}_1 : Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels.

\mathcal{R}_2 : Es gelten die Aussagen $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

\mathcal{R}_3 : Es gilt die Aussage \mathcal{R}_2 , und jeder Spieler weiß dies.

etc. . . Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ die Aussage

\mathcal{R}_n : Es gilt die Aussage \mathcal{R}_{n-1} , und jeder Spieler weiß dies.

\mathcal{R}_∞ : Es gelten die Aussagen \mathcal{R}_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Axiome \mathcal{R}_0 und \mathcal{R}_1 sind extrem wichtige Annahmen für die Spieltheorie: Erst damit können wir das Spielerverhalten mathematisch analysieren. Je nach Spiel nutzen wir auch die Verschärfungen $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \dots$ usw.

In Spielanalysen bzw. Beweisen ist es meist nützlich anzugeben, welche Stufe \mathcal{R}_n der Rationalität wir benutzen bzw. voraussetzen.

Stufen der Rationalität

Diese Axiome sind die Grundlage der Spieltheorie. Wir müssen sie daher gründlich verstehen und an zahlreichen Beispielen diskutieren.

Als Warnung bzw. freundliche Enttäuschung schicke ich gleich vorweg: Diese Idealisierungen gelten in vielen Anwendungen überhaupt nicht! Diese Eigenschaften sind zwar wünschenswert aber oft nicht erfüllt.

Axiom \mathcal{R}_0 bedeutet: Wir verkneifen uns metaphysische Spekulationen über Moral, Ethik, Gerechtigkeit, Egoismus vs Altruismus, Erziehung, Tradition, Religion, Sünde, Fegefeuer, jüngstes Gericht, Karma, etc. . .

Damit will ich nicht behaupten, dass diese Fragen unwichtig wären, sie liegen nur schlicht außerhalb der Reichweite unseres mathematischen Modells. Sie sind nicht Teil des von uns untersuchten Spiels.

Wenn wir diese Begriffe in der Spieltheorie betrachten wollen, und das sollten wir, dann dürfen wir sie nicht implizit und vage dazufabulieren, sondern müssen sie explizit und präzise im Spiel kodieren.

Stufen der Rationalität

Axiom \mathcal{R}_1 bedeutet: Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels, er kennt alle Handlungsoptionen und deren Konsequenzen.

Das ist eine zentrale aber manchmal allzu starke Annahme: Für das Spiel Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen. Mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere folgenden Beispiele. Sie werden sehen, dass Sie zwar die Regeln verstehen aber nicht sofort alle Konsequenzen erkennen. Wir sehen das daran, dass Sie als Spieler nicht sofort die beste Strategie wählen, sondern noch Fehler machen. Sie beherrschen das Spiel erst nach einiger Übung!

Gerade hierzu ist es wichtig, diesen Vortrag mit konkreten Beispielen aufzubauen, die Sie dann auch ernsthaft bearbeiten und lösen sollen. Andernfalls hören Sie schöne Theorie und glauben, damit sei alles klar. Die Wirklichkeit ist viel komplizierter. . . und auch viel interessanter! Neben der Spieltheorie lohnt sich auch das soziale Experiment.

Stufen der Rationalität

Axiome $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ usw. kodieren gegenseitige Einschätzungen der Spieler. „Als Spieler verhalte ich mich rational. Dazu muss ich das Verhalten der anderen Spieler vorhersehen, antizipieren, besser gesagt: berechnen. Am besten gelingt mir dies, wenn ich weiß, dass auch die anderen Spieler sich rational verhalten. Davon will und muss ich ausgehen.“

Wir nennen dies **gemeinsames Wissen**, engl. *common knowledge*. Es genügt nicht, dass etwas wahr ist, es muss auch jeder wissen. Und man muss sich darauf verlassen können, dass es jeder weiß. Und auch darauf, dass jeder weiß, dass jeder es weiß. Usw.

Das ist ein allgemeines und wichtiges Konzept: Das Wissen eines Spielers besteht neben seiner reinen Sachkenntnis auch aus seinem Metawissen über das Wissen der anderen Spieler. „Ich weiß, dass du weißt, dass ich weiß, ...“. Das klingt vertrackt und ist es auch meistens. Für die Analyse von Spielen ist die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Information von zentraler Bedeutung.

Beispiel: Kuchen teilen

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: \mathcal{R}_0 : Jedes Kind will möglichst viel Schokokuchen.
Diese stillschweigende Annahme ist wesentlich für unser Modell!

\mathcal{R}_1 : Bob wird das größere Stück erkennen und sich nehmen.
Er kann beide Stücke anschauen oder wiegen, um sicher zu gehen.

\mathcal{R}_2 : Alice weiß, dass sie das kleinere Stück bekommen wird.
Daher schneidet Alice zwei möglichst gleich große Stücke.

😊 Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität.
Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

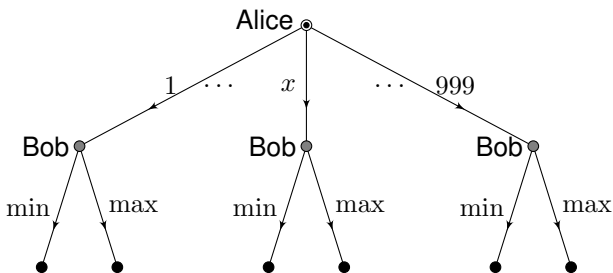
😊 Wir werden später strategische Spiele in Normalform erklären und diese Lösung als (das einzige) Nash-Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: Kuchen teilen

Auszahlungsmatrix (statisch) und Spielbaum (dynamisch) in Gramm:

	Bob	wähle Min	wähle Max
Alice			
$x < 500$	$1000 - x$	x	$1000 - x$
$x = 500$	500	500	500
$x > 500$	x	$1000 - x$	$1000 - x$



Beispiel: Kuchen teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich:

\mathcal{R}_0 : Wenn Alice oder Bob gar keinen Schokokuchen mag, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

\mathcal{R}_1 : Vielleicht ist Bob noch jung und unerfahren und kann die Größe von Kuchenstücken nicht treffsicher vergleichen. Die Masse könnte er leicht und zerstörungsfrei wiegen, zum Vergleich genügt eine Balkenwaage. Auch das Volumen könnte er leicht bestimmen, mit dem Archimedisches Prinzip durch Wasserverdrängung. (Das gibt vermutlich Sauerei.)
Andernfalls täuschen ihn vielleicht komplizierte Formen, etwa fraktale Kuchenstücke, nicht-messbare Mengen etc. Vielleicht möchte Alice genau dies provozieren, falls sie so etwas überhaupt herstellen kann.

\mathcal{R}_2 : Ist Alice irrational so könnte sie ein großes Stück schneiden und naiv hoffen, Bob nimmt das kleinere. Ist Bob rational, so wird er das nicht tun. Wenn Bob sich leicht täuschen ließe, könnte Alice zwei ungleiche Stücke so schneiden, dass Bob das kleinere und das größere verwechselt. Wenn Bob das jedoch durchschaut, dann steht Alice schlechter da.

Beispiel: Kuchen teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an. . . Dies sind zunächst keine klar festlegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

Wenn das erklärte Ziel ist, den Kuchen möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird dies durch das Spiel „Die eine teilt, der andere wählt“ recht gut implementiert. Dazu müssen beide Spieler „nur“ rational handeln und zudem die Spielaktionen sicher und präzise ausführen können.

- Wenn Alice präzise schneiden, aber Bob nur grob schätzen kann, dann ist Alice im Vorteil, und das Spiel verläuft zu ihren Gunsten.
- Wenn Bob präzise schätzen, aber Alice nur grob schneiden kann, dann ist Bob im Vorteil, und das Spiel verläuft zu seinen Gunsten.

Wenn wir uns Alice und Bob wirklich als kleine Kinder vorstellen, dann hängt die Fairness von ihrem Alter und ihren Fähigkeiten ab. Die Asymmetrie des Spiels könnten wir per Münzwurf beheben, eine eventuelle Asymmetrie der Fähigkeiten hingegen nicht!

Beispiel: die Erbschaft

Aufgabe: Alice und Bob erben 1 000 000€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob und $1\,000\,000 - x$ für Alice. Dies kann Bob nun annehmen... oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: \mathcal{R}_0 : Jeder will seine Auszahlung maximieren.
Diese stillschweigende Annahme ist wesentlich für unser Modell!

\mathcal{R}_1 : Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen.
Das ist vielleicht wenig, aber immer noch besser als nichts.

\mathcal{R}_2 : Alice weiß dies und schlägt $x = 1\text{€}$ vor.

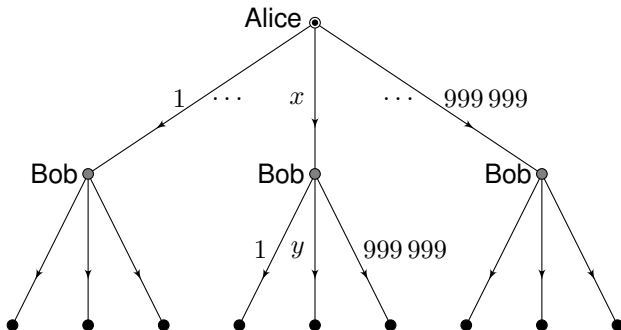
😊 Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität.
Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

😊 Wir werden später dynamische Spiele erklären und diese Lösung als (das einzige teilspielperfekte) Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: die Erbschaft

Wir interpretieren das Spiel wie folgt: Alice bietet $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Bob fordert anschließend $y \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Bei Einigung ($x \geq y$) tritt die Aufteilung $(1\,000\,000 - x, x)$ in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.



Hier ist die zeitliche Reihenfolge entscheidend: Alice macht ihr Angebot und kann nicht mehr zurück, Bob ist daher unter Zugzwang. Muss Bob zuerst fordern, so ist es umgekehrt. Als Variante ist auch gleichzeitige verdeckte Abgabe von Alice' Angebot und Bobs Forderung denkbar.

Beispiel: die Erbschaft

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich:

\mathcal{R}_0 : Wenn Alice oder Bob gar kein Geld haben wollen, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

\mathcal{R}_1 : Wir gehen hier davon aus, dass Bob streng rational ist. „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert.“ Ist das zwingend? Vielleicht hat Bob ein extremes Gerechtigkeitsempfinden und wird nur den Vorschlag $x = 500\,000\text{€}$ akzeptieren, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das ist irrational, aber möglich. Vielleicht hat Bob $850\,000\text{€}$ Schulden und wird von einem Killer verfolgt, dann würde er nur $x \geq 850\,000\text{€}$ akzeptieren.

\mathcal{R}_2 : Wenn Alice an Bobs Rationalität zweifelt, dann sollte sie ihre Strategie anpassen. Zum Beispiel könnte Bob drohen: „Alles unter $300\,000\text{€}$ werde ich ablehnen.“ Aber ist diese Drohung glaubwürdig? Wird er das wirklich tun, wenn er vor der endgültigen Entscheidung steht? Wenn er rational ist, sicher nicht! Andernfalls vielleicht doch. . .
Alice muss also die Rationalität von Bob einschätzen. Das ist schwierig. Der Idealfall ist perfekte Rationalität, aber das ist nicht immer realistisch.

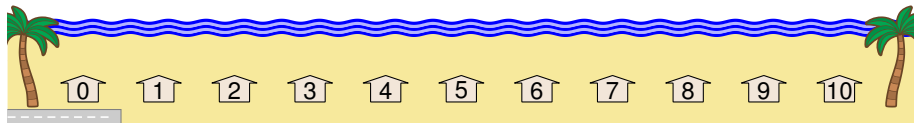
Beispiel: die Erbschaft

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an. . . Dies sind zunächst keine klar festlegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

- Wenn das erklärte Ziel ist, das Erbe möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird es durch das Testament denkbar schlecht implementiert.
- Wenn das Ziel nur ist, das Testament wortgetreu auszuführen, dann erfüllt das beschriebene, rationale Verhalten genau dies.

Genauso gut hätte der Erblasser die Aufteilung 999 999€ für Alice und 1€ für Bob im Testament festlegen können. Ist das un/fair? Das Testament ist ungewöhnlich, aber nicht zwangsläufig un/gerecht; dazu müssten wir viel mehr Vorgeschichte und Kontext kennen. Vielleicht ist es ausgleichende Gerechtigkeit für früheres Verhalten? Und was ist mit Chuck, der nicht erwähnt wurde und nichts bekommt? Vielleicht wäre es besser, das Erbe verfällt für wohltätige Zwecke. . . Vielleicht will der Erblasser Alice und Bob eine Lehre erteilen?

Beispiel: Kiosk am Strand



Sie eröffnen einen Kiosk, mögliche Positionen sind $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Die Badegäste sind gleichverteilt und gehen immer zum nächsten Kiosk. Jeder Spieler (Kiosk) maximiert seine Kundenzahl (Umsatz, Marktanteil). Bei sonst gleichem Anteil sucht jeder die Nähe zur Zufahrtstraße 0.

Aufgabe: (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
 (2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
 (3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
 Finden Sie zu jedem Zug von A die beste Antwort von B und von C!

Lösung: Bei rationalem Verhalten finden wir folgende Anordnungen:

(1) A 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

(2) 0 1 2 3 B A 6 7 8 9 10

(3) 0 1 B C 4 5 6 7 A 9 10

Beispiel: Kiosk am Strand

Ausführlich: Frage (1) wird gelöst durch die offensichtliche Optimierung.
Bei Frage (2) suchen wir zu jedem Zug von A die beste Antwort von B:

A	B										1 : 10
	A	B									2 : 9
		A	B								3 : 8
			A	B							4 : 7
				A	B						5 : 6
				B	A						6 : 5
					B	A					5 : 6
						B	A				4 : 7
							B	A			3 : 8
								B	A		2 : 9
									B	A	1 : 10

Versuchen Sie, die Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Ihre Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Beispiel: Kiosk am Strand

Frage (3) ist länger, wir müssen systematisch und sorgfältig vorgehen. Dies ist ein einfach-schönes Beispiel der kombinatorischen Spieltheorie: Wir durchsuchen hier einen endlichen Entscheidungsbaum, zählen alle Möglichkeiten auf und sortieren sie nach den Kriterien der Rationalität.

⚠ Jeder Spieler muss bei seiner Analyse Annahmen machen über die Rationalität seiner Mitspieler. Ich nenne hierzu ein einfaches Beispiel:

Wäre B gierig und dumm, dann wäre Platz 4 für A ein guter Zug: Spieler B wird kurzfristig Platz 5 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 6.



Sind B und C rational, dann wäre Platz 4 für A ein schlechter Zug: Spieler B wird schlau Platz 6 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 3.



Um unsere Analyse zu vereinfachen, nehmen wir hier vollständige Rationalität an, wie oben erklärt. Damit wird das Kioskproblem stark vereinfacht und lösbar durch eine kombinatorische Optimierung.

Beispiel: Kiosk am Strand

Aufgabe: Diskutieren und lösen Sie das Problem für drei Kiosklizenzen. Versuchen Sie, Ihre Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Wenn Sie Freude daran haben, diskutieren Sie Erweiterungen:
Was passiert, wenn Kiosk A und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk B und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk A und B demselben Spieler gehören?

Aufgabe: Wenn Sie gerne programmieren, dann können Sie die einfachen, aber länglichen Aufzählungen einem Computer übertragen.

Tipp: Lösen Sie so am besten gleich das allgemeine Problem für einen Strand der Länge ℓ und k Kiosklizenzen, wobei $1 \leq k \leq \ell$. (Der Spezialfall $k = 3$ ist einfacher und auch schon interessant.)

Herausforderung: Erweitern Sie dies zu Koalitionen, wobei sich die Kioske in feste Gruppen einteilen, so wie Geschäfte einer Kette. Denkbar sind zwei Spieler, die abwechselnd ihre Kioske setzen. Noch kniffliger: Der Zufall entscheidet, wer als nächster setzt.

Ein Spiel, viele Anwendungen

Es geht in der Spieltheorie einerseits um konkrete Spiele und Strategien, um explizite Probleme und präzise Lösungen, um rationales Verhalten, notgedrungen auch um irrationales und begrenzt rationales Verhalten.

Andererseits geht es auch um gemeinsame Muster und Mechanismen. Wenn Alice und Bob einen Kuchen oder ein Erbe teilen, dann beschreibt das auch allgemeinere Verhandlungssituationen, zumindest im Prinzip. Die Details sind sicher verschieden, aber die Mechanismen sind ähnlich.

Die hier untersuchten Spiele sind stark vereinfacht, manchmal lächerlich, oft genug übertrieben simpel, doch sie treffen häufig einen wahren Kern. Solch konkrete Beispiele benennen und repräsentieren typische Muster. Ihre Einfachheit zeigt den Problemkern besonders klar und deutlich.

In konkreten Anwendungen müssen wir genaue Daten berücksichtigen, es gibt viel mehr Wenn-und-Aber, und all das ist auch gut und richtig so. Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung oft genug ein ganz einfaches Muster als wesentlich heraus, als dominierender Term, als hauptsächlicher Kern des Problems.

Ein Spiel, viele Anwendungen

Das Strandkiosk-Problem ist eine schöne kombinatorische Aufgabe. Sie steht hier stellvertretend für ähnliche Spiele, allgemein für Konflikte um eine räumliche Marktaufteilung, Konkurrenz um Marktanteile, etc. Mögliche Anwendungen gehen wesentlich weiter als auf den ersten Blick erscheint. Der Kampf um den Strand kann auch anderes darstellen! Danken Sie zum Beispiel an ein politisches Spektrum, die verbreitete Sprechweise von „links“ und „rechts“ ist eine hilfreiche Vereinfachung. Wir gehen davon aus, dass Wähler über das Spektrum verteilt sind und immer genau die Partei wählen, die ihrer Position am nächsten liegt. Wenn es nur eine Partei A gibt, wie positioniert sie sich im Spektrum? Nun, das ist eigentlich egal, da sie alle Wählerstimmen bekommt. Wenn es zwei Parteien A und B gibt, wie positioniert sich die erste? Genau dieses Problem haben wir oben gelöst! Tatsächlich beobachtet man in der politischen Debatte den Kampf um die „politische Mitte“. Jetzt wissen Sie etwas genauer, warum das strategisch sinnvoll ist.

Ein Spiel, viele Anwendungen

Moment mal, können wir das banale Strandkiosk-Problem ernsthaft vergleichen mit hochkomplizierten parteipolitischen Strategien?

Genau genommen natürlich nicht, aber grob gesagt schon.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung solcher Modelle: Sie treffen den Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung.

Für eine genauere Analyse im konkreten Einzelfall dürfen wir natürlich nicht stur bei dieser Grundidee verharren, sondern müssen wesentlich weiter gehen und genauer hinschauen. Im obigen Parteienbeispiel: Die politische Landschaft ist heutzutage nicht (mehr) eindimensional, das Wählerverhalten ist (leider) nicht so einfach vorhersehbar, etc.

Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung oft genug ein ganz einfaches Muster als wesentlich heraus, als dominierender Term, als hauptsächlicher Kern des Problems.

Ein Spiel, viele Anwendungen

Wir werden dieses Phänomen noch des Öfteren beobachten: Selbst übertrieben einfache Spiele treffen den Kern einer Konfliktsituation.

Das also war des Pudels Kern!

(Johann Wolfgang von Goethe, 1749–1832, *Faust I*)

Das Modell, das wir von der Realität entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen. Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Gerade deshalb lohnen sich mathematische Präzision und Sorgfalt. Das mathematische Modell dient uns als Grundlage und als Maßstab, selbst wo es versagt, für die Abweichung von Prognose und Experiment.

Beispiel: drohen oder nachgeben?

	USA	EU
● Start		
● USA drohen nicht.	5	9
● USA drohen mit Zöllen.		
● Europa gibt nach.	6	7
● Europa droht ebenfalls.		
● USA lenken ein.	4	8
● Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

Aufgabe: Was wird passieren? rational? irrational?

Lösung: \mathcal{R}_0 : Jeder maximiert sein Ergebnis (wie rechts gezeigt).

\mathcal{R}_1 : Vor einem Handelskrieg im 3. Zug lenken die USA ein (vorteilhaft).

\mathcal{R}_2 : Die EU weiß dies, also wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).

\mathcal{R}_3 : Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

Beispiel: drohen oder nachgeben?

Die Zahlen rechts bewerten jeden der möglichen Ausgänge für die USA und die EU auf einer (fiktiven) Werteskala. Wir denken an eine geeignete Gewichtung aus wirtschaftlichem Ertrag und politischem Ansehen.

Solche Zahlen sind schwer zu ermitteln und werden zur Zeit hitzig debattiert. Wir nehmen für unser Modell diese Zahl und analysieren die Situation auf dieser Grundlage. Andere Kalibrierungen sind möglich.

 Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

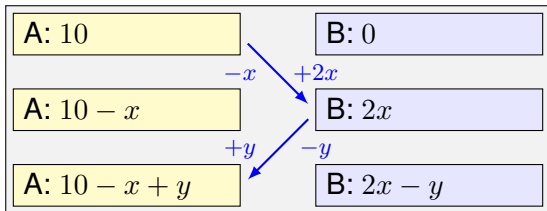
\mathcal{R}_1 : Sind die USA irrational, so könnten sie sich im 3. Zug für einen Handelskrieg entscheiden, obwohl dies zu ihrem Nachteil wäre. Das kann an einer falschen Einschätzung der Situation liegen, anderen Bewertungen, oder allgemein an mangelnder Rationalität.

\mathcal{R}_2 : Im 2. Zug muss die EU daher die Rationalität der USA einschätzen. Gegen einen Wahnsinnigen wäre es tatsächlich besser einzulenken!

\mathcal{R}_3 : Im 1. Zug hätten die USA also Interesse daran, für wahnsinnig gehalten zu werden: Das entspricht einem Bluff. Nur dann wäre es rational, mit einer ersten Drohung die Eskalation einzuleiten.

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

Im Lichte dieser Erkenntnisse spielen wir erneut „Hin-und-Rück“.



Aufgabe: Maximieren Sie Ihre Erträge bei diesem Spiel!
Wie gelingt das rational? für Spieler B ? für Spieler A ?

Sie kennen dieses Spiel aus dem ersten Durchgang. Wir spielen es nun ein zweites Mal. Anders als beim ersten Mal haben Sie nun wesentlich mehr Spielerfahrung und zudem einen genauen Begriff der Rationalität. Sie können beides nutzen: Sie dürfen Ihre vorherige Strategie ändern. Versuchen Sie beim zweiten Durchgang, Ihre Erträge zu maximieren!

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

Die Ergebnisse des Experiments sind lehrreiche Messwerte: Manche Teilnehmer verhalten sich eher egoistisch, andere eher altruistisch.

Was genau die Spielerpopulation tun wird, lässt sich nicht vorhersagen, sondern nur experimentell messen. Die Auswertung zeigt ein Abbild unserer (kleinen) Gesellschaft und misst das gegenseitige Vertrauen.

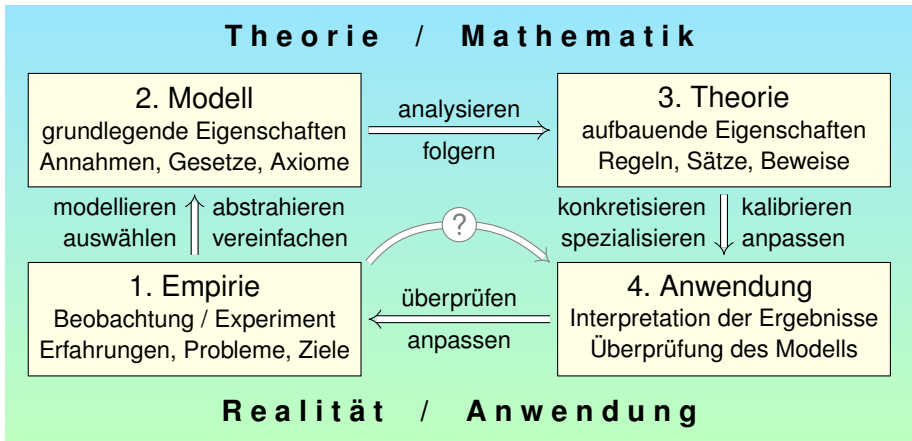
Kaum jemand spielt vollkommen rational, und das ist für alle vorteilhaft: Im Durchschnitt zahlt sich das Wagnis der Kooperation tatsächlich aus! Zumindest ist dies meine bisherige Erfahrung mit diesem Experiment.

Die Veränderung zwischen beiden Durchgängen ist aufschlussreich.

Durch zunehmende praktische Erfahrung und theoretische Kenntnisse verbessert jeder Spieler seine individuelle Strategie. Im Gesamtbild nehmen die Egoisten zu und die Altruisten ab. Der Gesamtertrag sinkt! Dieses Spiel provoziert ein berühmtes Paradox: Jeder einzelne Spieler versucht rational, seinen Profit zu maximieren. Die Gesellschaft wird im Gesamtbild egoistischer, das gegenseitige Vertrauen sinkt, damit auch der Gesamtertrag. Lokale Maximierung führt in ein globales Minimum.

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Wozu dient Mathematik?

Wir beginnen mit der **Empirie**, also konkreten **Beobachtungen** und praktischen **Erfahrungen**. Hieran erkennen wir **Probleme** und formulieren unsere **Ziele**: Wir wollen die vorliegenden Probleme lösen!

Wenn wir bereits eine mögliche Lösung vorliegen haben oder zumindest vermuten, dann können wir sie **überprüfen** und soweit nötig **anpassen**. (Tradition, Erfahrung, Ausbildung, Anleitung, Nachahmung, Erklärvideo)
Meist kennen wir jedoch noch gar keine Lösung. Wir könnten uns durch Versuch-und-Irrtum vortasten, doch blindes Herumprobieren kostet Zeit, oft dauert es zu lange, ist zu aufwändig, gefährlich oder gar unmöglich. Besser wir gehen **planvoll** vor und suchen **systematisch** nach einer Lösung, oder gar nach allen Lösungen, um dann die beste auszuwählen.

Das ist der **Nutzen der Theorie**: Sie erweitert unseren Werkzeugkasten, wo bloßes Probieren nicht genügt. Theorie und Anwendung ergänzen sich: Proben sind weiterhin gut und richtig, doch erst die Theorie liefert neue Ansätze, die sich lohnen auszuprobieren. Die Trefferquote steigt. Probieren geht über studieren? **Studieren erweitert probieren!**

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Modelle können **deskriptiv** aber auch **normativ** eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetterbericht). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Umwelt- und Klimaschutz).

Das Kiosk-Problem haben wir durch systematische Untersuchung aller Fälle gelöst. Bei drei Spielern erfordert dies $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ Fälle; hier sind Systematik und Sorgfalt unbedingt erforderlich, um keinen Fall zu vergessen oder falsch auszuwerten. Das ist mühsam, aber es lohnt sich!

Diese Genauigkeit ist typisch für wissenschaftliche Vorgehensweise. Logik und Systematik, Ehrlichkeit und Sorgfalt sind die grundlegenden Techniken der Mathematik — und jeder ernsthaften Wissenschaft.

Dieses Anwendungsproblem ist vereinfacht, doch halbwegs realistisch. Die Analyse gibt einen klaren Ratschlag, gar eine Handlungsanweisung: Bei drei Lizenzen sollte der erste Platz 8 wählen. Das ist keineswegs offensichtlich, sogar eher überraschend. Hier ist die Theorie normativ, sie schreibt vor, was optimales Verhalten ist. Entspricht dies auch dem tatsächlich beobachteten Verhalten? Hier kommt die Empirie ins Spiel!

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Spieltheorie kann nicht nur normativ, sondern auch deskriptiv genutzt werden, um beobachtetes Verhalten zu beschreiben und zu erklären. Hier ist unser Spiel „Hin-und-Rück“ lehrreich und überraschend!

Die Theorie untersucht wie immer zunächst das rationale Verhalten.

\mathcal{R}_1 : Spieler B schickt nichts zurück. \mathcal{R}_2 : Spieler A schickt nichts hin.

Das beobachtete Verhalten sieht jedoch ganz anders aus! Hierzu ist entscheidend, ehrliche und ausgeklügelte Experimente durchzuführen. Nur so können wir unsere Theorie mit der Realität vergleichen.

Wie ist die Abweichung zu erklären? Einerseits gehen die Spieler nicht streng rational vor, etwa weil die Zeit oder der Wille für eine genauere Analyse fehlt, oder weil Überzeugungen von Moral und Gerechtigkeit mitschwingen. Eine verbesserte Theorie sollte dies berücksichtigen!

Andererseits können wir das Experiment verbessern und erweitern. Durch wiederholtes Spielen gewinnen die Teilnehmer an Erfahrung: Probieren ergänzt studieren! Das beobachtete Verhalten nähert sich dann tatsächlich der theoretischen Vorhersage. Unsere Theorie macht also doch zutreffende Vorhersagen, aber auf etwas subtilere Weise.

Mengen und Elemente

Sie kennen Mengen wie die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ oder die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b > 0\}$, die reellen Zahlen \mathbb{R} , etc.

Eine **Menge** $A = \{a, b, c, \dots\}$ ist die Zusammenfassung ihrer **Elemente** a, b, c, \dots . Wir schreiben $a \in A$ für „ a ist Element von A “, kurz „ a in A “. Zum Beispiel gilt $x \in \{a, b\}$ genau dann, wenn $x = a$ oder $x = b$ gilt. Die **leere Menge** schreiben wir \emptyset oder $\{\}$; sie enthält keine Elemente.

Wir nennen B eine **Teilmenge** von A , geschrieben $B \subseteq A$, wenn jedes Element von B auch in A liegt, also für jedes $x \in B$ auch $x \in A$ gilt. Im Falle $B \subseteq A$ und $A \subseteq B$ gilt $A = B$: Beide haben dieselben Elemente. Demnach gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$. Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ aber nicht $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$, kurz $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$.

Aussonderung: Mit $\{x \in A \mid p(x)\}$ bezeichnen wir die Teilmenge aller Elemente $x \in A$, die eine gegebene Eigenschaft $p(x)$ haben. Beispiele sind Lösungsmengen wie $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ sowie $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\} = \emptyset$.

Operationen: **Vereinigung** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$, **Schnitt** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$, **Differenz** $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Paare und Funktionen

Ein **Paar** (a, b) fasst zwei Elemente a, b in dieser Reihenfolge zusammen: Genau dann gilt $(a, b) = (c, d)$, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt. Wir schreiben $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$ für die Menge all dieser Paare, und nennen sie das **kartesische Produkt** der Mengen A und B . Als Beispiel: $\{0, 1, 2\} \times \{a, b\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$.

Ist A eine endliche Menge mit n Elementen, so schreiben wir $\#A = n$. Es gilt $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ und $\#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B)$.

Sie kennen Funktionen wie $q(x) = x^2$, ausführlich $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}: x \mapsto x^2$, sowie $r: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{x}$ und $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]: x \mapsto \sin(x)$; wir nutzen die Notation $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ und $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$.

Eine **Funktion** $f: X \rightarrow Y$ von der Startmenge X in die Zielmenge Y ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zu, kurz $x \mapsto y$, gelesen „ x wird abgebildet auf y “, oder $f(x) = y$, „ f von x ist gleich y “.

Formal wird f festgelegt durch alle Paare $(x, y) \in X \times Y$ mit $f(x) = y$. Dies entspricht dem **Graphen** $F = \{ (x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y \}$ von f . Umgekehrt definiert $F \subseteq X \times Y$ genau dann eine Funktion $f: X \rightarrow Y$, wenn gilt: Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$.

Funktionen von zwei Variablen

Wir betrachten die Mengen $X = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ und $Y = \{B, D, K\}$.
Ihr kartesisches Produkt $X \times Y$ ist dann, wie oben erklärt, die Menge

$$X \times Y = \{ \clubsuit B, \clubsuit D, \clubsuit K, \spadesuit B, \spadesuit D, \spadesuit K, \heartsuit B, \heartsuit D, \heartsuit K, \diamondsuit B, \diamondsuit D, \diamondsuit K \}.$$

Allgemein ist das **kartesische Produkt** definiert als Menge aller Paare:

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$$

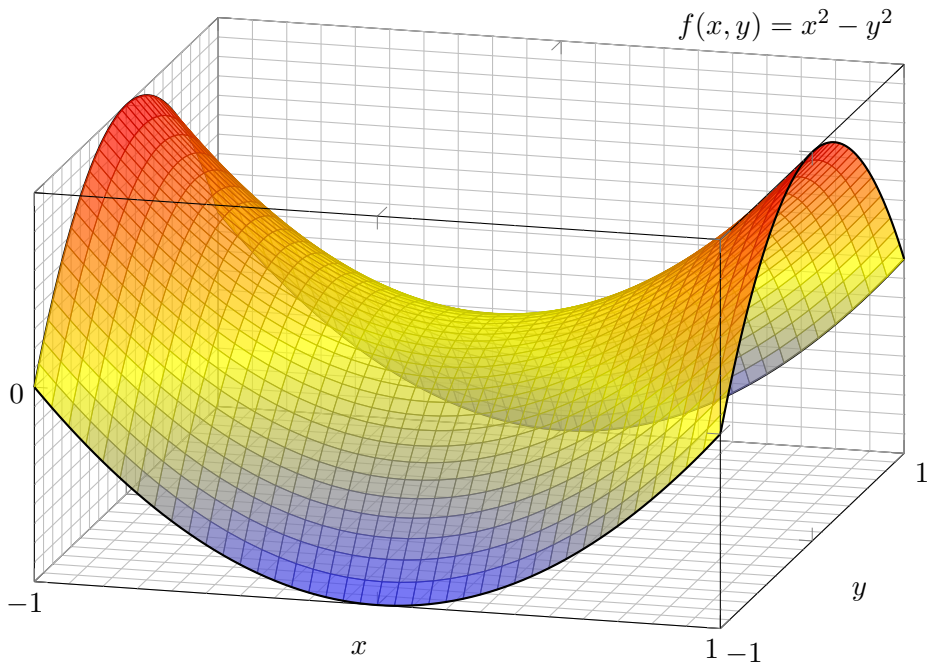
Eine Funktion $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Paar $(x, y) \in X \times Y$ eine Zahl $f(x, y) \in \mathbb{R}$ zu. Typisches Beispiel aus Schule und Universität:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Der Funktionswert $f(x, y)$ hängt hier von zwei Parametern x und y ab. Als konkretes Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$. Zu jedem festem y ist $x \mapsto f(x, y)$ eine nach oben geöffnete Parabel. Zu jedem festem x ist $y \mapsto f(x, y)$ eine nach unten geöffnete Parabel. Solche Beispiele können wir uns als Fläche im Raum bildlich vorstellen.

Funktionen von zwei Variablen



Koordinatenweises Minimum und Maximum

Aufgabe: Sei $X = Y = [-1, 1] = \{ t \in \mathbb{R} \mid -1 \leq t \leq 1 \}$ das reelle Intervall von -1 bis $+1$. Das kartesische Produkt ist somit das Quadrat

$$X \times Y = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1 \}.$$

Hierauf betrachten wir analog zur obigen Skizze die Funktion

$$f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = 3x^2 - 5y^2.$$

(1) Bestimmen Sie für jedes $x \in X$ bzw. $y \in Y$ die Funktionen

$$g_*(x) = \min_{y \in Y} f(x, y), \quad h_*(y) = \min_{x \in X} f(x, y),$$

$$g^*(x) = \max_{y \in Y} f(x, y), \quad h^*(y) = \max_{x \in X} f(x, y).$$

(2) Berechnen und vergleichen Sie die folgenden Werte:

$$\min_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \stackrel{?}{=} \min_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y), \quad \max_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) \stackrel{?}{=} \max_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y),$$

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \stackrel{?}{=} \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y), \quad \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) \stackrel{?}{=} \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y).$$

Welche Beziehungen vermuten Sie zwischen diesen acht Werten?

Koordinatenweises Minimum und Maximum

Lösung: (1) Wir finden (graphisch oder rechnerisch):

$$g_*(x) = \min_{y \in Y} f(x, y) = 3x^2 - 5, \quad h_*(y) = \min_{x \in X} f(x, y) = -5y^2,$$

$$g^*(x) = \max_{y \in Y} f(x, y) = 3x^2, \quad h^*(y) = \max_{x \in X} f(x, y) = 3 - 5y^2.$$

(2) Daraus folgern wir:

$$\min_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{x \in X} g_*(x) = -5, \quad \min_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = \min_{y \in Y} h_*(y) = -5,$$

$$\max_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} g^*(x) = 3, \quad \max_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{y \in Y} h^*(y) = 3,$$

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} g_*(x) = -2, \quad \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \min_{y \in Y} h^*(y) = -2,$$

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \min_{x \in X} g^*(x) = 0, \quad \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = \max_{y \in Y} h_*(y) = 0.$$

Allgemein ist $\max_x \max_y f(x, y) = \max_y \max_x f(x, y) = \max_{(x,y)} f(x, y)$ und $\min_x \min_y f(x, y) = \min_y \min_x f(x, y) = \min_{(x,y)} f(x, y)$ das globale Maximum / Minimum der Funktion $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Die vier gemischten min-max-Terme liegen dazwischen, aber sie stimmen im Allgemeinen nicht überein! Das schauen wir uns nun genauer an...

Funktionen von zwei Variablen: ein Paraboloid

Aufgabe: Wie zuvor sei $X = Y = [-1, 1]$. Skizzieren Sie die Funktion

$$f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = 3x^2 + 5y^2.$$

Berechnen Sie alle min–max–Terme wie in der vorigen Aufgabe.

Lösung: Wir finden (graphisch oder rechnerisch):

$$g_*(x) = \min_{y \in Y} f(x, y) = 3x^2,$$

$$h_*(y) = \min_{x \in X} f(x, y) = 5y^2,$$

$$g^*(x) = \max_{y \in Y} f(x, y) = 3x^2 + 5,$$

$$h^*(y) = \max_{x \in X} f(x, y) = 3 + 5y^2.$$

Daraus folgern wir:

$$\min_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{x \in X} g_*(x) = 0,$$

$$\min_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = \min_{y \in Y} h_*(y) = 0,$$

$$\max_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} g^*(x) = 8,$$

$$\max_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{y \in Y} h^*(y) = 8,$$

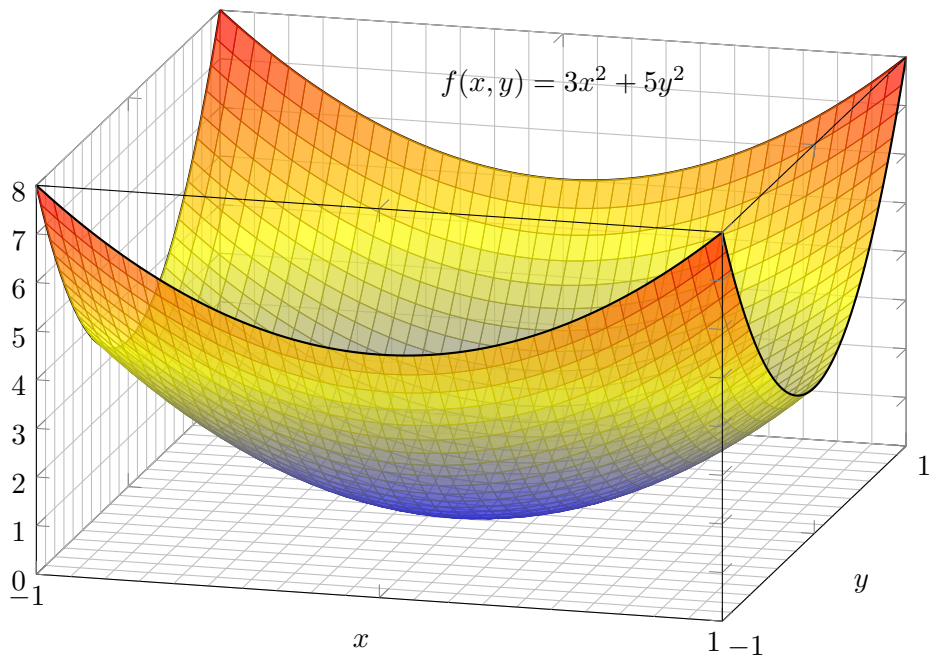
$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} g_*(x) = 3,$$

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \min_{y \in Y} h^*(y) = 3,$$

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \min_{x \in X} g^*(x) = 5,$$

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = \max_{y \in Y} h_*(y) = 5.$$

Funktionen von zwei Variablen: ein Paraboloid



Funktionen von zwei Variablen: ein Sattel

Aufgabe: Sei $X = [-2, 2]$ und $Y = [-3, 3]$. Skizzieren Sie die Funktion

$$f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = xy.$$

Berechnen Sie alle min–max–Terme wie in den vorigen Aufgaben.

Lösung: Wir finden (graphisch oder rechnerisch):

$$g_*(x) = \min_{y \in Y} f(x, y) = -3|x|, \quad h_*(y) = \min_{x \in X} f(x, y) = -2|y|,$$

$$g^*(x) = \max_{y \in Y} f(x, y) = +3|x|, \quad h^*(y) = \max_{x \in X} f(x, y) = +2|x|,$$

Daraus folgern wir:

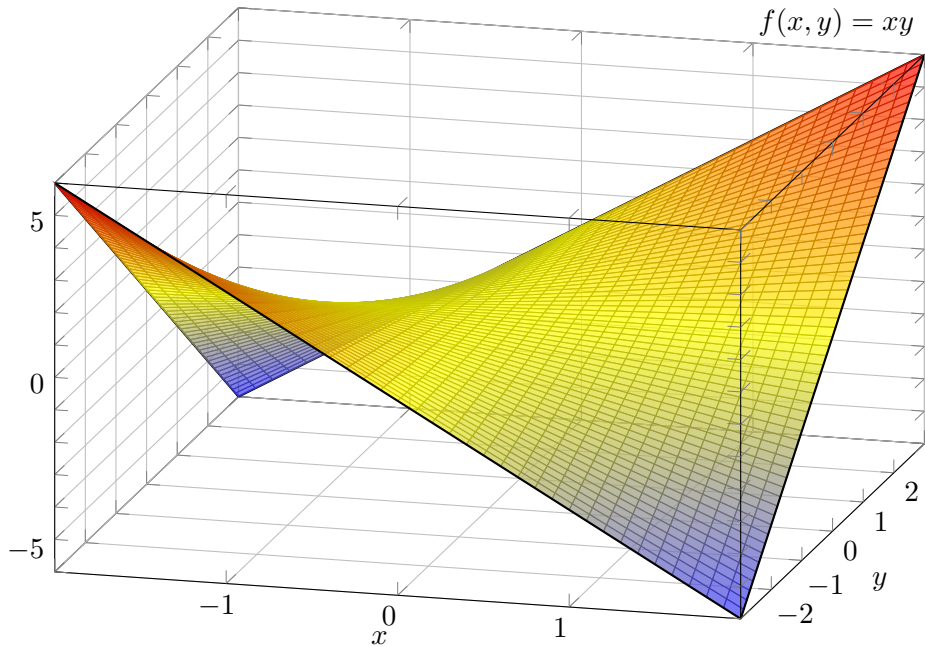
$$\min_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{x \in X} g_*(x) = -6, \quad \min_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = \min_{y \in Y} h_*(y) = -6,$$

$$\max_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} g^*(x) = 6, \quad \max_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{y \in Y} h^*(y) = 6,$$

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} g_*(x) = 0, \quad \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \min_{y \in Y} h^*(y) = 0,$$

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \min_{x \in X} g^*(x) = 0, \quad \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = \max_{y \in Y} h_*(y) = 0.$$

Funktionen von zwei Variablen: ein Sattel



Ein warnendes Gegenbeispiel

Vielleicht vermuten Sie für *jede* Funktion $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \stackrel{?}{=} \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y),$$

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) \stackrel{?}{=} \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y).$$

Es gibt Gegenbeispiele, auf den ersten Blick ist keines offensichtlich. Suchen ist schwer! Diese Aufgabe erfordert Kreativität und Sorgfalt:

Aufgabe: Seien Sie kreativ: Finden Sie ein Gegenbeispiel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$! Seien Sie sorgfältig: Untersuchen Sie Ihre Funktion f genau wie zuvor!

Lösung: Als ein geeignetes Gegenbeispiel betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = \sin(x + y).$$

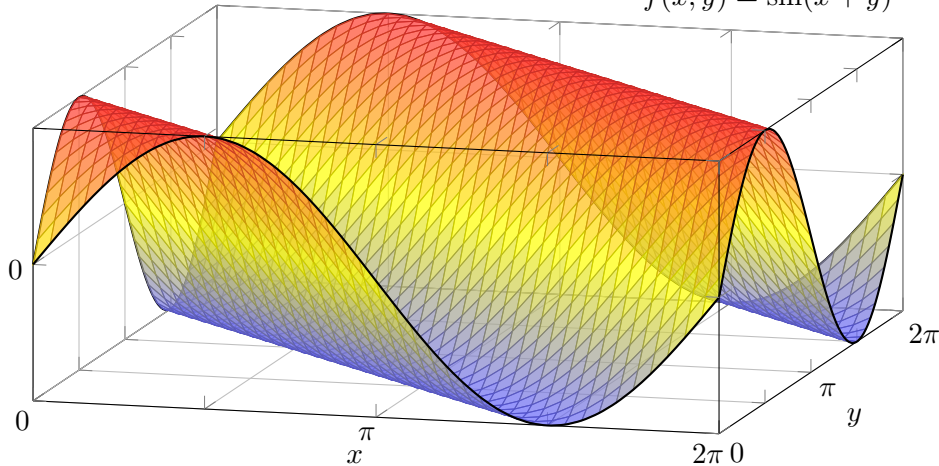
Wir finden (graphisch oder rechnerisch) die gemischten min–max–Werte

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = -1, \quad \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = +1,$$

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = -1, \quad \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = +1.$$

Ein warnendes Gegenbeispiel

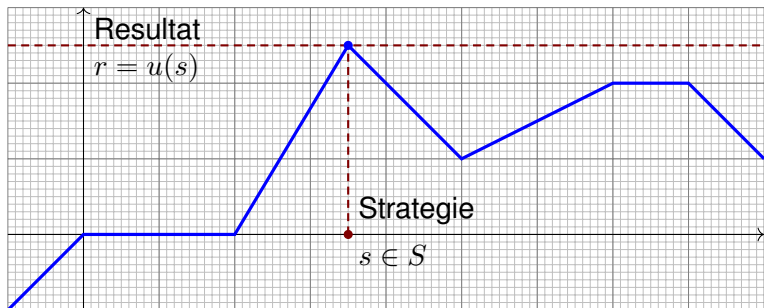
$$f(x, y) = \sin(x + y)$$



Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ bzw. $y \in \mathbb{R}$ gilt in diesem Beispiel:

$$\min_{y \in [0, 2\pi]} f(x, y) = \min_{x \in [0, 2\pi]} f(x, y) = -1, \quad \max_{y \in [0, 2\pi]} f(x, y) = \max_{x \in [0, 2\pi]} f(x, y) = +1$$

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?



Der Spieler sucht seine Strategie $s \in S$ so, dass sein Resultat $r = u(s)$ maximal ist, also $u(x) \leq u(s)$ für alle alternativen Strategien $x \in S$ gilt.

Definition C1 (Spiel mit nur einem Spieler: Gewinnmaximierung)

Ein **Spiel** mit nur einem Spieler ist eine Funktion $u: S \rightarrow R: s \mapsto u(s)$.

Hierbei ist S die Menge der **Strategien**, die der Spieler wählen kann, und R ist die Menge möglicher **Resultate**, linear geordnet durch \leq .

Meist sind R die reellen Zahlen, und wir nennen u die **Nutzenfunktion**.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall eines einzigen Spielers. Gegeben ist die Menge S der möglichen Strategien und hierauf die Nutzenfunktion $u: S \rightarrow \mathbb{R}$. Der Spieler will nun $s \mapsto u(s)$ maximieren. Wenn die Menge S klein ist, dann genügt ausprobieren. Ist die Menge S hingegen groß und unübersichtlich, dann kann die Optimierung beliebig schwierig werden.

Sie kennen einfache Beispiele aus der Schule und lernen Optimierung durch Kurvendiskussion. Als Kontrast hierzu: Unser Kiosk-Beispiel ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem; bei einer Lizenz ist es klar und langweilig, bei zweien leicht, bei dreien bereits knifflig und überraschend. Optimierte wurde dort übrigens keine reelle Zahl, sondern das Ergebnis (Marktanteil, Nähe zur Straße) in lexikographischer Ordnung, also wie im Lexikon: Wir maximieren zuerst den Marktanteil, dann erst die Nähe.

Allgemein kann u alles mögliche messen: Geld, Gewinn maximieren, Kosten minimieren, aber auch Einfluss, Ansehen, soziale Stellung, Gerechtigkeit, Umweltschutz, Tierschutz, Glück, Zufriedenheit, etc. Nahezu jede menschliche Aktivität lässt sich so betrachten!

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

		$s_2 \in S_2 =$			
		B	Schere	Stein	Papier
$s_1 \in S_1 =$	A				
	Schere	0	-1	+1	$u_2(s_1, s_2)$
	Stein	+1	0	-1	$u_1(s_1, s_2)$
	Papier	-1	+1	0	

Definition C2 (strategisches Spiel in Normalform)

Ein **Spiel** mit n Spielern ist eine Funktion

$$u : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \rightarrow R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$$

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \mapsto (u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)).$$

Hierbei ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler i wählen kann, und R_i ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch \leq_i .

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir wollen Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, knapp, präzise. Jeder Spieler wählt seine Strategie $s_i \in S_i$ unabhängig von den anderen. Sein Gewinn ist $u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$, diesen versucht er zu maximieren. Meist sind R_i die reellen Zahlen, und wir nennen u_i die **Nutzenfunktion** für Spieler i . Allerdings kontrolliert der Spieler i nur den Parameter s_i , nicht jedoch die Strategien $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ der anderen Spieler!

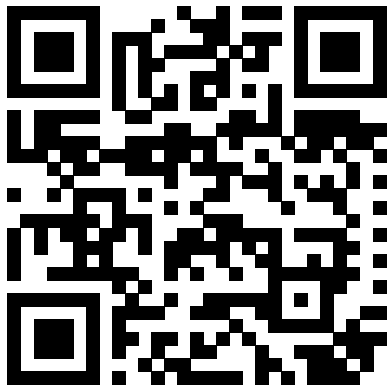
Als konkretes, einfaches Beispiel betrachten wir *Schere-Stein-Papier*. Dies ist ein **Nullsummenspiel**, d.h. stets gilt $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$. Es ist zudem **symmetrisch**, d.h. $S_1 = S_2$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$.

Vorteile dieses Modells: Unsere Definition fasst alle zuvor betrachteten Spiele zusammen. Wir haben nun einen gemeinsamen Rahmen, um allgemeine Begriffe und Werkzeuge zu entwickeln! Gewisse Argumente, Rechnungen und Tricks treten immer wieder auf. Wir können sie nun allgemein erklären, präzise formulieren, und ihre Gültigkeit beweisen.

Einschränkungen: Unsere Definition berücksichtigt noch nicht den zeitlichen Verlauf, zufällige Einflüsse oder unvollständige Information.

Ein zweites Experiment: „Kartenduell“

Wir haben für Sie ein zweites Online-Spiel implementiert:



www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/spiele

Ein zweites Experiment: „Kartenduell“

Bitte spielen Sie gleich mal munter drauflos.
Am besten, Sie experimentieren ein wenig.

Ein zweites Experiment: „Kartenduell“

Anschließend haben wir Übungen für Sie vorbereitet:
Sie können Ihre Strategie mit einer Rechnung optimieren!

Ein zweites Experiment: „Kartenduell“

Nach erfolgreicher Übung spielen wir nochmal.
Ich bin gespannt, wie sich Ihre Spielweise ändert.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Wir untersuchen ein Spiel $u: S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in Normalform.

Wir nennen $s = (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ einen **Strategievektor**.

Spieler i kann sich aus eigener Kraft verbessern, wenn für ein $x \in S_i$ gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Andernfalls ist s ein **Maximum** bezüglich seiner Strategien $x \in S_i$:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n) \leq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Hier kann sich Spieler i **aus eigener Kraft** nicht weiter verbessern:

Somit ist s_i eine **beste Antwort** auf $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Definition C3 (Nash–Gleichgewichte eines Spiels)

Der Strategievektor s ist im **Gleichgewicht für Spieler i** , wenn gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) = \max_{x \in S_i} u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Gilt dies für jeden Spieler i , so nennen wir s ein **Nash–Gleichgewicht**.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Ein Nash–Gleichgewicht ist genau das, was die Definition sagt: Für jeden Spieler i ist seine Strategie s_i eine beste Antwort auf die gegnerischen Strategien $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Anders gesagt: Ausgehend von einem solchen Nash–Gleichgewicht (s_1, \dots, s_n) hat keiner der Spieler Anlass, seine Strategie zu ändern.

Umgekehrt erwarten wir rational gesehen, dass ein Ungleichgewicht nicht gespielt wird, zumindest nicht auf Dauer, denn mindestens ein Spieler wird wechseln. Dies interpretieren wir normativ oder deskriptiv:

(1) Gibt es nur genau ein Nash–Gleichgewicht, so wird dieses gespielt. Rationale Interpretation: Sind alle Spieler rational, so werden sie ihr Verhalten auf dieses einzige Nash–Gleichgewicht koordinieren.

(2) Die Nash–Gleichgewichte erklären das beobachtete Spielerverhalten. Evolutionäre Interpretation bei wiederholten Spielen, Schwarmintelligenz bei großen Populationen: Ungleichgewichte bleiben nicht lange erhalten.

In allen Fällen sind die Nash–Gleichgewichte eines Spiels besondere Strategievektoren, die zur weiteren Analyse dienen: Mögliche rationale Lösungen, beobachtetes Spielverhalten, evolutionäre Entwicklung, etc.

Beispiel: das Gefangenendilemma

Dieses Spiel ist berühmt wegen seines paradoxen Ausgangs. Es wurde 1950 von Albert Tucker (1905–1995) vorgestellt und popularisiert.

		B	
		schweigen	gestehen
A	schweigen	-1, -1	-5, 0
	gestehen	0, -5	-4, -4

Als Funktion $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bedeutet das ausgeschrieben:

$$(\text{schweigen}, \text{schweigen}) \mapsto (-1, -1)$$

$$(\text{schweigen}, \text{gestehen}) \mapsto (-5, 0)$$

$$(\text{gestehen}, \text{schweigen}) \mapsto (0, -5)$$

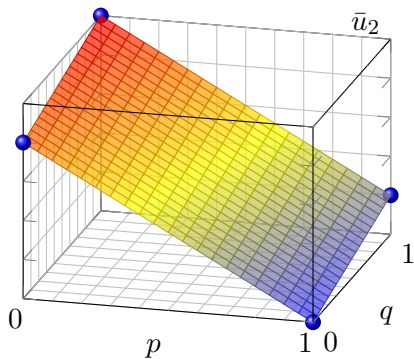
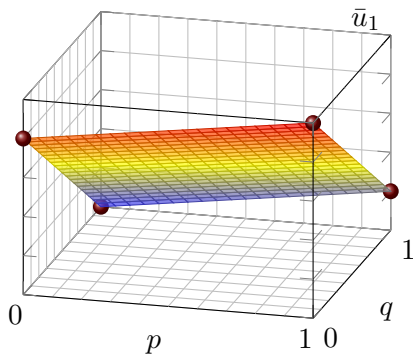
$$(\text{gestehen}, \text{gestehen}) \mapsto (-4, -4)$$

Nash-Gleichgewicht ist hier einzig (gestehen, gestehen).

Beispiel: das Gefangenendilemma

Zwei Komplizen werden geschnappt und in getrennten Zellen verhört. Wenn beide schweigen, dann reichen die wenigen Beweise vor Gericht vermutlich zur Verurteilung für ein Jahr Gefängnis. Wenn einer gesteht, so wird ihm die Strafe erlassen, aber der andere wird zu fünf Jahren verurteilt. Gestehen beide, so drohen jedem vier Jahre Gefängnis.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Spieler A wählt $p \in \{0, 1\}$ und Spieler B wählt $q \in \{0, 1\}$.



Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Ein Paar möchte ein Konzert besuchen: Alice mag lieber Strawinsky, Bob mag lieber Bach. Gar kein Konzert wäre für beide enttäuschend.

		B	
		Bach	Strawinsky
A	Bach	2, 0	0, 1
	Strawinsky	0, 1	1, 2

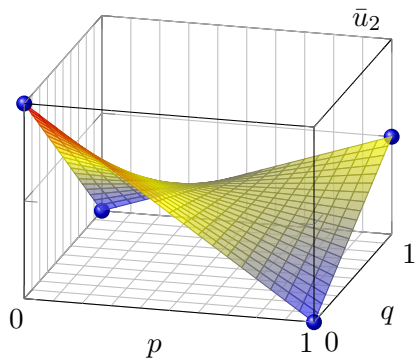
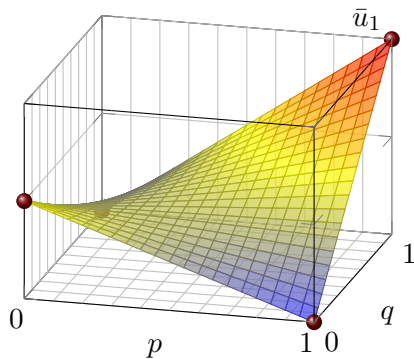
In diesem berühmten Spiel gibt es genau zwei Nash-Gleichgewichte: Einerseits (Bach, Bach) und andererseits (Strawinsky, Strawinsky). Die Ungleichgewichte (Bach, Strawinsky) und (Strawinsky, Bach) wären nicht rational, sie werden erwartungsgemäß nicht gespielt, oder nur selten, vorübergehend als Ausrutscher, und dann alsbald korrigiert. Hingegen können beide Nash-Gleichgewichte gleichermaßen gespielt werden, hier ist keines bevorzugt. Das Spiel ist hierin symmetrisch.

Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Wir denken an folgendes Szenario: Alice und Bob haben sich vage für das Bach-Konzert verabredet. Sie können nun nicht mehr miteinander kommunizieren, doch jeder muss individuell seine Karte kaufen.

Bob will nicht wechseln, er ist wunschlos glücklich. Alice möchte zwar lieber in das Strawinsky-Konzert, aber alleine wird sie nicht wechseln. (Die umgekehrte Situation ist natürlich genauso gut vorstellbar.)

Sobald beide eine Einigung erzielt haben, sind sie daran gebunden!



Beispiel: bleiben oder gehen?

Sie hören einen schrecklich langweiligen Vortrag zur Spieltheorie und möchten lieber gehen, aber alleine aufzustehen wäre peinlich. Wenn Sie zu zweit aufstehen und gehen, dann wäre alles gut. Leider können Sie sich unter dem strengen Blick des Vortragenden nicht absprechen.

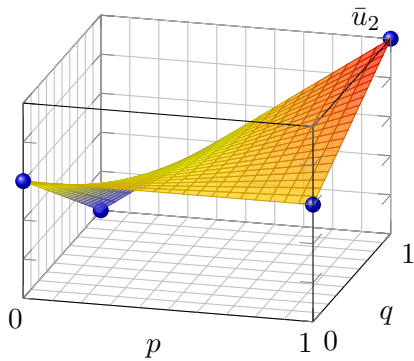
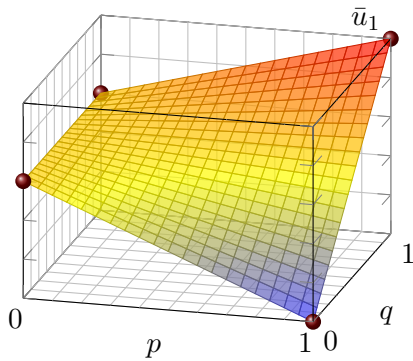
		B	
		bleiben	gehen
A	bleiben	-2, -2	-5, -2
	gehen	-5, -2	0, 0

In diesem bekannten Spiel gibt es genau zwei Nash-Gleichgewichte: Einerseits (bleiben, bleiben) und andererseits (gehen, gehen).

Ihre gute Erziehung versetzt beide Spieler zunächst in die Ausgangslage (bleiben, bleiben). Beide möchten eigentlich lieber gehen, aber ohne Absprache wird keiner den ersten Zug wagen. *Teile und herrsche!*

Beispiel: bleiben oder gehen?

Alternatives Szenario: Als erfahrene Studenten haben Sie zahlreiche schlechte Vorträge erlitten und gelernt, sich dagegen zu wehren. Sie wissen: Die Höflichkeit gebietet, zunächst zehn Minuten zu bleiben; wenn der Vortrag grottschlecht ist, sollte man sofort danach gehen. Sie wissen das, und Sie wissen, dass alle anderen es auch wissen. In diesem Falle ersetzt das gemeinsame Wissen (*common knowledge*) die explizite Absprache: Nach genau zehn Minuten (gefühlte Ewigkeit) stehen alle gemeinsam auf und gehen. *Einigkeit macht stark!*



Gemischte Strategie: Was ist das?

Beim Spiel Schere-Stein-Papier ist es nicht sinnvoll, sich auf eine der drei **reinen Strategien** festzulegen. Besser ist, eine zufällig zu wählen:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Wir nennen dies eine **gemischte Strategie**. Allgemein:

Definition C4 (gemischte Strategie)

Sei $S_i = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die (endliche) Strategiemenge des Spielers i . Eine **gemischte Strategie** ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S_i :

$$s = p_0 \cdot s_0 + p_1 \cdot s_1 + \dots + p_\ell \cdot s_\ell$$

Hierbei gelte $p_0, p_1, \dots, p_\ell \geq 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$, wie üblich.

Wir schreiben dies formal als Summe, das ist übersichtlich und bequem. Interpretation: Die Strategie $s_k \in S_i$ wird mit Wkt $p_k \in [0, 1]$ ausgewählt. Geometrisch ist das eine Konvexkombination der Punkte s_0, s_1, \dots, s_ℓ .

Gemischte Strategie: Was ist das?

Aus der Menge S_i entsteht so die **Menge aller gemischten Strategien**

$$\bar{S}_i = [s_0, s_1, \dots, s_\ell] := \left\{ \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k \mid p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\ell} p_k = 1 \right\}.$$

Geometrisch ist dies die konvexe Hülle der Eckpunkte s_0, s_1, \dots, s_ℓ , also eine Strecke ($\ell = 1$) oder ein Dreieck ($\ell = 2$) oder ein Tetraeder ($\ell = 3$) oder allgemein ein ℓ -dimensionales Simplex mit $\ell + 1$ Eckpunkten.

Die Nutzenfunktion $u: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ setzen wir auf gemischte Strategien fort zu $\bar{u}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dies geschieht linear in jeder Koordinate, entsprechend dem **Erwartungswert**:

$$\bar{u}(\dots, \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k, \dots) = \sum_{k=0}^{\ell} p_k u(\dots, s_k, \dots)$$

Diese Fortsetzung von den reinen auf die gemischten Strategien haben wir in den vorigen einfachen Spielen bereits durch Graphiken illustriert.

Das folgende Beispiel $u: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zeigt dies nochmal ausführlich. Es ist zudem ein Nullsummenspiel, $u_1 + u_2 = 0$, was die Darstellung und die Untersuchung wesentlich vereinfacht. Auch die affine Fortsetzung $\bar{u}: \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist dann ein Nullsummenspiel. (Übung: Warum?)

Beispiel: Matching Pennies

Alice und Bob legen jeder verdeckt eine Münze auf den Tisch, dann wird aufgedeckt: Bei Gleichheit gewinnt Bob, bei Ungleichheit gewinnt Alice. (Das ähnelt dem Spiel *Schere-Stein-Papier*, ist aber noch simpler.)

	B	Kopf	Zahl
A			
Kopf	-1	+1	+1
Zahl	+1	-1	+1

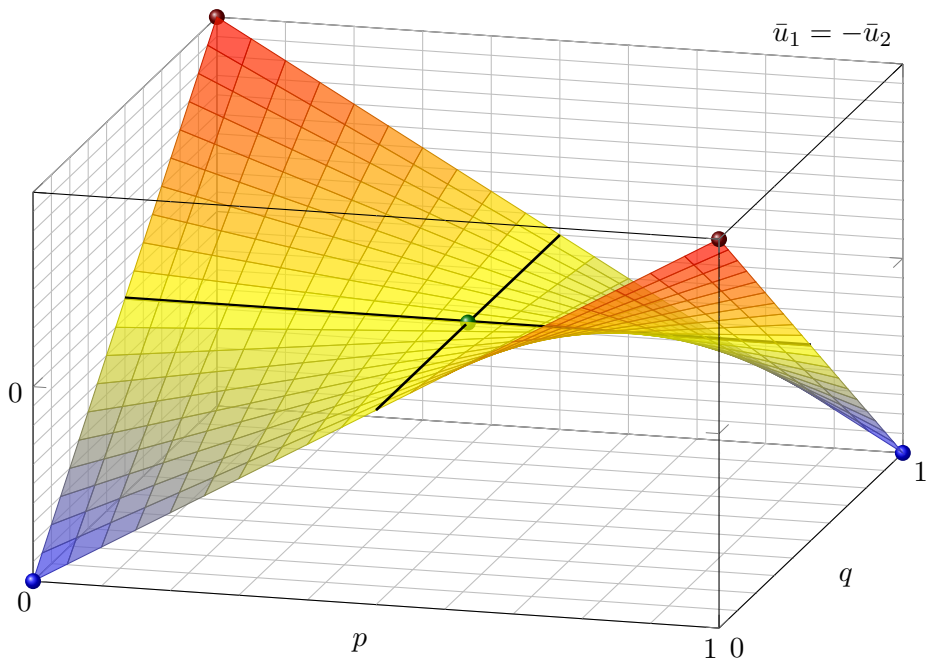
Wie bei *Schere-Stein-Papier* gibt es zunächst kein Nash-Gleichgewicht. Erweiterung: Beide Spieler dürfen nun gemischte Strategien wählen!

$$\text{Spieler A: } [0, 1] \ni p \mapsto s_p = (1 - p) \cdot \text{Kopf} + p \cdot \text{Zahl}$$

$$\text{Spieler B: } [0, 1] \ni q \mapsto s_q = (1 - q) \cdot \text{Kopf} + q \cdot \text{Zahl}$$

Die Nutzenfunktionen $u_1 = -u_2$ sind bilinear, ihr Graph ist eine Quadrik.

Beispiel: Matching Pennies



Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Lemma D1 (Gleichgewichte und Minimax = Maximin)

Sei $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$.

(0) Allgemein gilt „Maximin \leq Minimax“, also ausgeschrieben:

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \leq \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(1) Ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash-Gleichgewicht, so gilt Gleichheit:

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(2) Angenommen, es gilt die Gleichheit „Maximin = Minimax“. Wir wählen einen Min-Maximierer $s_1 \in S_1$ und Max-Minimierer $s_2 \in S_2$:

$$v = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y),$$

$$v = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2).$$

Dann ist das Paar $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash-Gleichgewicht.

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Beweis: (0) Für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y) &\stackrel{(a)}{\leq} u_1(x, y) \\
 u_1(x, y) &\stackrel{(b)}{\leq} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\
 \min_{y \in S_2} u_1(x, y) &\stackrel{(c)}{\leq} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\
 \min_{y \in S_2} u_1(x, y) &\stackrel{(d)}{\leq} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\
 \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) &\stackrel{(e)}{\leq} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung (a) ist trivial. Wir nehmen rechts das Maximum über x , damit wird die rechte Seite höchstens größer, also gilt (b). Wir nehmen links das Minimum über y , damit wird die linke Seite höchstens kleiner, also gilt (c). Die Ungleichung (c) gilt somit für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$. Dabei hängt allerdings die linke Seite nur noch von x ab und die rechte Seite nur noch von y . Hieraus folgen sofort (d) und (e).

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

(1) Für jedes Nash-Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(s_1, s_2) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) \leq \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \\ u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) \geq \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \end{array} \right\} \implies$$

$$\min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \leq u(s_1, s_2) \leq \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y)$$

Dank (0) gilt auch die umgekehrte Ungleichung, hieraus folgt Gleichheit.

(2) Dank der genannten Voraussetzungen gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(s_1, s_2) \geq \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = v \\ u_1(s_1, s_2) \leq \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) = v \end{array} \right\} \implies$$

$$u_1(s_1, s_2) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2)$$

Demnach ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash-Gleichgewicht.

QED

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Diese genial-einfache Umrechnung klärt die Beziehung zwischen Nash-Gleichgewichten und Min-Maximierern und Max-Minimierern. Hieraus folgen grundlegende Rechenregeln für Nullsummenspiele:

Bemerkung D2 (nützliche Folgerungen)

(1) Genau dann erfüllt unser Nullsummenspiel $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Gleichung „Minimax = Maximin“, wenn Nash-Gleichgewichte existieren.

(2) Alle Nash-Gleichgewichte führen zum selben Ergebnis: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash-Gleichgewichte, dann gilt $u_1(s_1, s_2) = u_1(s_1^*, s_2^*)$.

(3) Alle Nash-Gleichgewichte sind austauschbar: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash-Gleichgewichte, dann auch (s_1, s_2^*) und (s_1^*, s_2) .

😊 Die Aussagen (2) und (3) gelten für alle Nash-Gleichgewichte.

☹️ Es gibt Spiele ohne Nash-Gleichgewichte, wie zuvor gesehen.

Auch für diese sind die Aussagen (2) und (3) wahr, aber eben leer.

Das passiert, wenn wir über die leere Menge reden. Einfache Analogie:

„Alle meine Ferraris sind pink. Und alle meine Ferraris sind grün. Folgt daraus pink gleich grün?“ Nein, daraus folgt: Ich habe gar keinen Ferrari.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Gleichgewichte sind grundlegend. Gibt es sie immer? Ja, oft genug:

Satz D3 (Existenzsatz für Gleichgewichte, John Nash 1950)

Sei $u : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dann besitzt das Spiel \bar{u} mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

Hieraus folgt der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummenspiele: Mit diesem Satz begann die Theorie, als erstes substantielles Ergebnis.

Korollar D4 (Minimax-Satz, John von Neumann 1928)

Sei $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein endliches Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dann besitzt das Spiel \bar{u} mindestens ein Gleichgewicht, und somit gilt

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} \bar{u}_1(x, y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} \bar{u}_1(x, y)$$

*Dies nennen wir den **Wert** des Spiels \bar{u} für Spieler 1.*

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Beispiel: Das Spiel „Schere-Stein-Papier“ hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien. (Zur Wiederholung: Warum?) In der Fortsetzung auf gemischte Strategien haben die Spieler wesentlich mehr Möglichkeiten. Der Satz von Nash sagt die Existenz von Gleichgewichten voraus. Tatsächlich gibt es hier (genau) ein Gleichgewicht, nämlich

$$\frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Aufgabe: Prüfen Sie sorgfältig nach, dass dies ein Gleichgewicht ist. Zeigen Sie anschließend, dass dies das einzige Gleichgewicht ist.

Aufgabe: Finden Sie im Spiel „Matching Pennies“ alle Gleichgewichte in reinen Strategien und dann alle in gemischten Strategien. (Graphik!)

Aufgabe: Untersuchen Sie ebenso alle bisher vorgestellten Spiele. Welche haben konstante Summe, welche sind (strikt) kompetitiv? Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte und vergleichen Sie diese beiderseitig mit Sicherheitsstrategien (also Min-Maximierern).

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Der Existenzsatz von Nash hat zwei wesentliche Funktionen:

(1) Der Satz garantiert, dass jedes endliche Spiel vernünftiges Verhalten ermöglicht. In jedem konkreten Einzelfall kann man dies (mühsam) lösen und überprüfen. Die allgemeine Aussage ist bequem und beruhigend. Wir können sicher sein, dass unsere Suche erfolgreich sein wird. Unsere Mühe lohnt. Unsere Hoffnung wird erfüllt.

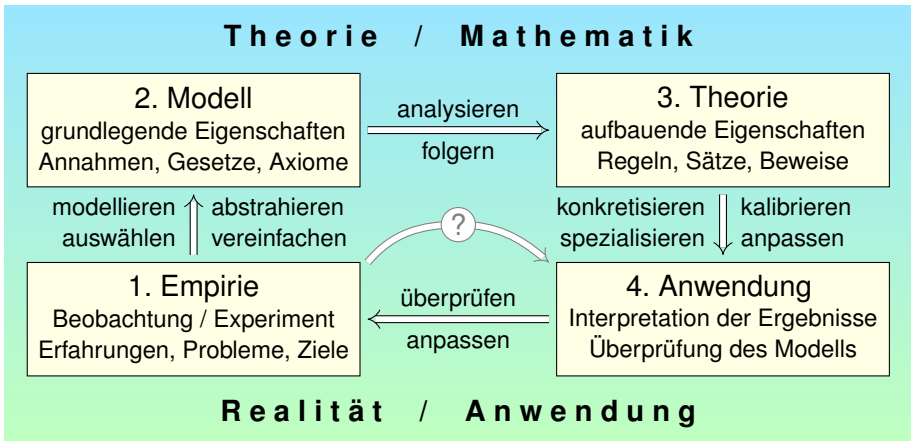
(2) Darauf aufbauend können wir allgemeine Aussagen ableiten. Das prominenteste Beispiel ist von Neumanns Minimax-Satz, als Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele.

Dies gelingt *ohne* jedesmal mühsam explizit rechnen zu müssen. Wir müssen nicht befürchten, über die leere Menge zu sprechen: Wir haben eine gemeinsame *Strukturaussage* für all dieser Spiele!

Wir können durch den Satz Rechenzeit sparen, wo sie nicht nötig ist. Umgekehrt gibt es natürlich viele Situationen, in denen wir schließlich explizit rechnen wollen oder müssen. Auch hier hilft uns das Lemma durch die Umrechnung von Nash-Gleichgewichten in Min-Maximierer und Max-Minimierer. Wir haben nun Werkzeuge. Alles wird gut!

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)