Spielerisches Übungsblatt

Aufgabe 1: Interpretieren bzw. erklären Sie die Auszahlungsmatrizen in den folgenden Beipielen! Finden Sie in jedem Beispiel alle Nash–Gleichgewichte in reinen Strategien:

(a) **Preiskampf:** Die beiden Firmen *Dreh&Schraub* und *Schraub&Dreh* bieten baugleiche Schraubendreher und Drehschrauber an. Jede hat die Wahl, ihre Produkte zu einem günstigeren oder zu einem teureren Preis zu verkaufen. Die Auszahlungsmatrizen sind:

S&D D&S	teuer	billig
teuer	12 12	15 −5
billig	−5 15	10 10

(b) **Chicken Game:** Sebastian Vettel und Lewis Hamilton rasen aufeinander zu. Wer ausweicht, verliert. Wenn keiner ausweicht, ist's ganz schlecht.

LH SV	Ausweichen	Draufhalten
Ausweichen	0 0	1 −1
Draufhalten	−1 1	−10 −10

(c) **Elfmeter:** WM-Viertelfinale 2006, Deutschland gegen Argentinien: Der Torschütze Roberto Ayala schießt auf das Tor; er hat die Wahl, nach rechts oder nach links zu schießen. Der Torwart Jens Lehmann kann sich ebenfalls entscheiden, nach rechts oder links zu springen. Entscheidet er sich für die richtige Richtung, dann hält er den Ball, sonst nicht.

JL RA	rechts	links
rechts	1 −1	−1 1
links	−1 1	1 −1

Lösungsskizze: — Um anhand der Auszahlungsmatrizen die Nash–Gleichgewichte zu bestimmen, kann man wie folgt vorgehen: Man hält die Strategie für einen Spieler fest und sucht und markiert den Gewinn, der für den anderen Spieler möglichst groß wird. Dies macht man für beide Spieler.
Unten links werden also in jeder Spalte die höchsten Werte markiert, oben rechts in jeder Zeile.
Ein Strategiepaar ist dann ein Nash–Gleichgewicht, wenn beide Einträge markiert sind.
Nun zu den Beispielen:

(a) **Preiskampf:** Bieten beide Firmen ihre Produkte zu demselben Preis an, dann profitieren sie gleichermaßen, beim hohen Preis mehr als beim niedrigen Preis. Hat nur eine den hohen Preis, kaufen die Kunden eher bei der Firma mit dem niedrigen Preis, die dann deutlich mehr verdienen kann. Die Firma mit dem hohen Preis hat evtl. laufende Kosten, die sie mit dem Gewinn nicht decken kann, sodass sie Verlust macht.
Wie die Auszahlungsmatrizen konkret aussehen und damit auch die Nash–Gleichgewichte, hängt natürlich von vielen Faktoren ab (Angebot und Nachfrage, usw.). Sind die Produkte sehr gefragt und die Firmen haben nur eine beschränkte Anzahl auf Lager, dann würden die Auszahlungsmatrizen sicherlich anders aussehen.

Um die Nash–Gleichgewichte zu bestimmen, markieren wir die Einträge wie vorher beschrieben: Wählt S&D den hohen Preis, dann ist D&S mit dem niedrigen Preis besser dran, die 15 unten links wird also markiert. Wählt S&D den niedrigen Preis, dann ist D&S ebenfalls mit dem niedrigen Preis besser dran, die 10 unten links wird markiert. Genauso geht man für die Auszahlung an S&D vor:

D&S \ S&D	teuer	billig
teuer	12 / 12	−5 / **15**
billig	**15** / −5	**10** / **10**

Es gibt also ein Nash–Gleichgewicht, nämlich wenn beide Firmen ihre Produkte zum günstigen Preis anbieten.

Anschaulich: Haben beide Firmen den höheren Preis gewählt, dann ist es für eine Firma verlockend, den Preis einseitig zu senken, weil sich der Gewinn dann erhöht (von 12 auf 15). Dies ist also kein Nash–Gleichgewicht. Hat eine Firma den hohen Preis gewählt, die andere den niedrigen, dann ist es für die Firma mit dem hohen Preis besser, ihren Preis abzuändern (vom Verlust -5 zum Gewinn 10). Dies ist auch kein Nash–Gleichgewicht.

Haben nun beide den niedrigen Preis gewählt, dann würde jeder schlechter fahren, wenn nur er den höheren Preis wählt und der andere beim niedrigen Preis bleibt: Er würde sich vom Gewinn (10) zum Verlust (-5) verschlechtern.

(b) **Chicken Game:** Die Auszahlungsmatrix besagt: Falls niemand gewinnt, gibt es keine Auszahlung. Falls einer draufhält, der andere ausweicht, erhält der Gewinner vom Verlierer (dem Chicken) 1. Falls keiner ausweicht, kommt es zur Kollision. Das ist für beide sehr schlecht, daher bekommt jeder -10. Hier ist natürlich die Frage, ob -10 wenig genug ist, oder man lieber -10000000. . . hätte wählen sollen.

Markieren wir die Einträge:

SV \ LH	Ausweichen	Draufhalten
Ausweichen	0 / 0	**−1** / **1**
Draufhalten	**1** / **−1**	−10 / −10

Wir erhalten Nash–Gleichgewichte, wenn einer ausweicht, der andere draufhält.

Anschaulich: Weichen beide aus, dann ärgert sich jeder, dass er ausgewichen ist, denn wäre der andere beim Ausweichen geblieben, hätte er mit Draufhalten gewinnen können.

Ebenso haben wir kein Nash–Gleichgewicht, wenn beide draufhalten. Hätten einer sich anders entschieden, wäre es nicht zur Kollision gekommen.

Hält aber einer drauf, der andere weicht aus, dann würden beide bei ihrer Entscheidung bleiben. Derjenige, der drauf hält, weil er sonst nicht gewinnen würde, und derjenige, der ausweicht, weil es sonst zur Kollision kommen würde.

(c) **Elfmeter:** Die Auszahlungsmatrix besagt: Falls Ayala ein Tor schießt, ist er der Gewinner. Hält Lehmann den Ball, dann ist er der Gewinner. Der Gewinner erhält 1 vom Verlierer.

Markieren wir nun die Einträge:

RA \ JL	rechts	links
rechts	−1 / **1**	**1** / −1
links	**1** / −1	−1 / **1**

Man sieht: es gibt kein Nash–Gleichgewicht. Anschaulich ist das ebenfalls klar: Egal wie die beiden sich verhalten: der Verlierer wird immer unzufrieden mit seiner Wahl sein, denn hätte er die andere Richtung gewählt, hätte er gewonnen.
Im Falle des Elfmeters im Viertelfinale 2006 war es Ayala, der unzufrieden war. Es mag daran gelegen haben, dass er vermutlich nicht die Strategie 50% rechts, 50% links verfolgt hat, sondern wie viele Fußballspieler eine bevorzugte Ecke hatte und Jens Lehmann einen Spickzettel hatte, auf dem all dies drauf stand.

Bemerkung: Man mag natürlich in diesen Beispielen bezweifeln, ob die vereinfachten Modelle die Realität gut wiedergeben. Eine Firma wird sich wahrscheinlich nicht zwischen zwei Preisen, sondern zwischen vielen Preisen entscheiden müssen. Beim Chicken Game spielt es eine Rolle, wann die zwei sich entscheiden, auszuweichen, und ein Elfmeterschießen ist in der Regel doch nicht so, dass beide nur zwei Optionen haben.
Aber: Diese Beispiele verdeutlichen ganz gut, was passieren kann. Z.B. lässt sich jetzt erklären, warum es in (a) zum Preiskampf kommt, wenn die beiden Firmen sich nicht absprechen.
Und: Beispiele illustrieren, worum es geht und machen Sachverhalte anschaulicher. Aber letztendlich ist es der Mathematik egal, welche Beispiele hinter den Zahlen stehen. Ein Nash–Gleichgewicht lässt sich bestimmen, wenn man nur die Zahlen in den Auszahlungsmatrizen kennt. Es spielt keinerlei Rolle, wie die Akteure heißen, und welche Optionen jeder hat.

—

Aufgabe 2: Sie spielen **Hin und Rück**, `spiele/hin-und-rueck`.

(a) Wie viele Strategien hat Spieler A? Spieler B? Welche Größe hat die Auszahlungsmatrix?

(b) Die folgende Tabelle zeigt in jeder Zeile eine Strategie h für Spieler A und eine Strategie $r = (r_0, r_1, \dots, r_{10})$ für Spieler B. Welche der Beispiele (i)-(v) sind Nash–Gleichgewichte? Welche Spieler können ihr Ergebnis aus eigener Kraft verbessern?

	h	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
(i)	1	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(ii)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(iii)	5	0	0	2	0	4	0	6	0	8	0	20
(iv)	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(v)	1	0	1	3	3	4	5	6	7	8	9	10

Lösungsskizze: —

(a) Spieler A kann 0 bis 10€ schicken, hat damit 11 Wahlmöglichkeiten.
Spieler B muss elf Zahlen $r_0, \dots, r_{10}$ wählen, und zwar $0 \le r_i \le 2i$. Damit hat B für r_i jeweils $2i + 1$ Möglichkeiten, insgesamt hat B also $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 21 = 13749310575$ Strategien zur Verfügung. Die Auszahlungsmatrizen haben somit 11 Zeilen und 13749310575 Spalten.

(b)
(i) Spieler A schickt 1€ an B, Spieler B bekommt 2€, die er wieder zurückschickt. Der Endstand ist also: Spieler A hat 11€, Spieler B 0€.
Spieler A kann sich nicht verbessern: Schickt er 0€, dann hat er am Ende 10€, schickt er mehr als 0€, bekommt er von Spieler B immer 1€ mehr zurück, als er geschickt hat, hat also am Ende wieder 11€.
Spieler B kann sich verbessern, indem er $r_1 = 0$ setzt, dann bekommt er die 2€, die A ihm schickt.
Es handelt sich also nicht um ein Nash–Gleichgewicht.
(ii) Endstand: Spieler A hat 10€, Spieler B 0€. Keiner der Spieler kann sich verbessern, es handelt sich um ein Nash–Gleichgewicht.
(iii) Endstand: Spieler A hat 5€, Spieler B 10€. Würde A nichts schicken, dann hätte er 10€, kann sich also verbessern. Spieler B kann sich nicht verbessern, mehr als die 10€, die er von A bekommt, sind nicht drin.
Es handelt sich also nicht um ein Nash–Gleichgewicht.
(iv) Endstand: Spieler A hat 10€, Spieler B 0€. Spieler A kann sich nicht verbessern: egal, wie viel er schickt, er bekommt es wieder zurück. Spieler B kann sich nicht verbessern, da er nichts bekommt.
Es handelt sich also um ein Nash–Gleichgewicht.

(v) Endstand: Spieler A hat 10€, Spieler B 1€.
Spieler A kann sich verbessern, wenn er 2€ schickt, dann bekommt er 3€ zurück, hat also 11€. Spieler B kann sich verbessern, indem er $r_1 = 0$ setzt, und damit 2€ bekommt.
Es handelt sich also nicht um ein Nash–Gleichgewicht.

—

Aufgabe 3: Sie spielen das **Kartenduell**, `spiele/kartenduell`. Jeder Spieler sucht eine gemischte Strategie, die seinen garantierten Mindestgewinn maximiert.

(a) Geben Sie die Auszahlungsmatrizen für Gustav und Uschi an:

G \ U	♦A	♣A	♦2
♦A	1 / -1	-1 /	1 /
♣A	/	/	/
♣2	/	/	/

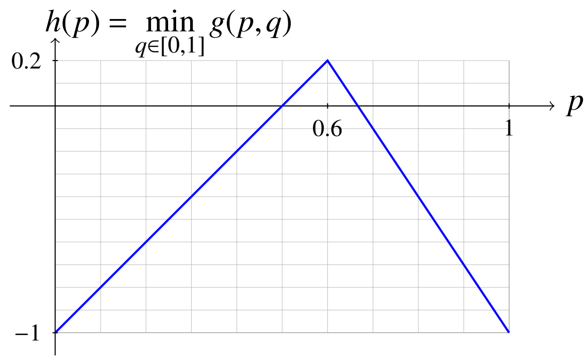
(b) Es gibt eine Karte, die Gustav nie spielen wird. Welche? Welche Karte ist nie schlechter als diese, egal was Uschi spielt? Streichen Sie die Zeile dieser dominierten Karte.

(c) Uschi nimmt an, dass Gustav diese Karte nicht spielt. Daher wird auch sie eine ihrer Karten nie spielen. Welche? Warum? Streichen Sie die Spalte dieser dominierten Karte.

(d) Gustav wählt also eine gemischte Strategie $p \cdot$♦A$+ (1-p) \cdot$♣2 mit $p \in [0,1]$. Ebenso wählt Uschi die Strategie $q \cdot$♦A$+ (1-q) \cdot$♣A. Für die erwartete Auszahlung an Gustav gilt dann:

$$g(p,q) = (5p-3)q + (2-3p).$$

Angenommen, Uschi kennt Gustavs Strategie p. Dann wählt sie ihre Strategie q so, dass Gustavs erwartete Auszahlung $g(p,q)$ möglichst klein wird. Der folgende Graph zeigt dies:



Rechnen Sie dies nach für die Werte $p = 0$, $p = 0.2$, $p = 0.4$, $p = 0.6$, $p = 0.8$ und $p = 1$: Setzen Sie p jeweils in $g(p,q)$ ein. Welcher Typ von Funktion entsteht? Für welches $q \in [0,1]$ wird der kleinste Funktionswert angenommen und wie groß ist dieser?

(e) Gustav sucht nun p, sodass egal, was Uschi spielt, sein erwarteter Mindestgewinn möglichst groß ist. Welche Strategie p sollte er hierzu wählen? Welcher Mindestgewinn ist ihm dann garantiert? Durch diese sorgfältige Diskussion berechnen Sie den Maximin-Wert

$$\max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} g(p,q).$$

(f) Nun werden die Rollen vertauscht: Uschi will verhindern, dass Gustav viel gewinnt. Welche Strategie q sollte sie wählen, damit Gustavs maximale Gewinnerwartung möglichst klein wird (und damit ihr Mindestgewinn möglichst groß)? Auf diese Weise berechnen Sie

$$\min_{q\in[0,1]} \max_{p\in[0,1]} g(p,q).$$

(g) Ist dieses Spiel fair? Können Sie die Antwort sofort aus der Aufgabenstellung (a) ablesen?

Lösungsskizze: —

(a) Die Auszahlungsmatrizen sind

U G	♦A	♣A	♦2
♦A	-1 1	1 -1	-1 1
♣A	1 -1	-1 1	2 -2
♣2	1 -1	-2 2	0 0

(b) Gustav wird niemals ♣A spielen, da er mit der ♣2 nie schlechter dran ist: Spielt Uschi das ♦A, dann ist Gustavs Gewinn bei beiden Karten gleich hoch, nämlich -1, spielt Uschi allerdings eine der anderen beiden Karten, dann ist Gustavs Gewinn mit ♣2 höher (2 statt 0 bzw. 0 statt -2).
Man sagt auch, dass die Strategie ♣2 die Strategie ♣A dominiert, da egal, was Uschi spielt, die Auszahlung an Gustav mindestens genau so hoch ist. Wir streichen daher die zweite Zeile der Auszahlungsmatrizen:

U G	♦A	♣A	♦2
♦A	-1 1	1 -1	-1 1
♣2	1 -1	-2 2	0 0

(c) Uschi tut nun gut daran, die ♦2 nicht auszuspielen, da sie mit ♦A nie schlechter dran ist. Die neue Auszahlungsmatrix ist

U G	♦A	♣A
♦A	-1 1	1 -1
♣2	1 -1	-2 2

Bemerkung: Wir haben hier einfach erst eine Zeile, dann eine Spalte gestrichen. Dabei ist es zuerst gar nicht klar, ob man das ohne Weiteres tun darf. Unser Ziel ist es, für beide Spieler eine Strategie zu finden, sodass egal was der andere tut, ein Mindestgewinn (der auch negativ sein kann und es in diesem Falle für Uschi auch ist) garantiert ist. Ziel ist es also, ein Nash–Gleichgewicht in gemischten Strategien zu finden. Man kann sich leicht überlegen, dass ein Nash–Gleichgewicht für die kleinere Matrix dann auch eines für die größere Matrix sein muss. Wenn es also darum geht, ein (nicht unbedingt alle) Nash–Gleichgewicht zu finden, ist es erlaubt, sukzessive dominierte Zeilen bzw. Spalten zu streichen.

(d) **Bemerkung:** Die erwartete Auszahlung berechnet man wie folgt: Jedes Feld der Auszahlungsmatrix entspricht einem Ereignis, das eintreten kann. Die Auszahlung, falls dieses Ereignis eintritt, wird mit der Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis eintritt, multipliziert und aufsummiert, also

$$g(p,q) = 1 \cdot p \cdot q + (-1) \cdot p \cdot (1-q) + (-1) \cdot (1-p) \cdot q + 2 \cdot (1-p) \cdot (1-q)$$

Umgeformt ergibt sich die gegebene Funktion.
Setzt man $p = 0$ ein, dann entsteht die lineare Funktion $g(0,q) = -3q+2$ mit $q \in [0,1]$, der Graph dieser Funktion ist ein Geradenstück. Der kleinste Funktionswert wird an der Stelle $q = 1$ angenommen, da die Steigung negativ ist. Der Funktionswert ist $g(0,1) = -1$, wie man auch im abgebildeten Graphen erkennt.
Für $p = 0.2$ ist $g(0.2,q) = -2q+1.4$. Wieder ist die Steigung negativ, der kleinste Funktionswert -0.6 wird an der Stelle $q = 1$ angenommen.
Für $p = 0.4$ ist der kleinste Funktionswert $-1+0.8 = -0.2$, wieder für $q = 1$.
Für $p = 0.6$ ist die Steigung gleich 0, d.h. die Funktion ist konstant und nimmt den kleinsten Funktionswert 0.2 an allen Stellen $q \in [0,1]$ an.
Für $p = 0.8$ bzw. $p = 1$ ist die Steigung positiv, der kleinste Funktionswert (-0.4 bzw. -1) wird an der Stelle $q = 0$ angenommen.
Nun sieht man, wie die Abbildung h entstanden ist: Für $p < 0.6$ ist die Steigung negativ, der kleinste Funktionswert wird an der Stelle $q = 1$ angenommen, der Funktionswert ist $h(p) = g(p,1) = 5p-3+2-3p = 2p-1$. Den Fall $q = 0.6$ haben wir oben diskutiert und für $p > 0.6$ ist die Steigung positiv, d.h. der kleinste Funktionswert wird an der Stelle $q = 0$ angenommen: $h(p) = g(p,0) = 2-3p$. Es gilt also

$$h(p) = \min_{q\in[0,1]} g(p,q) = \begin{cases} 2p-1 & \text{falls } p < 0.6 \\ 2-3p & \text{falls } p \geq 0.6 \end{cases}$$

Dies ist genau die Funktion, die abgebildet ist.

(e) Die Abbildung zeigt die Mindestauszahlung an G in Abhängigkeit von p. Diese sollte möglichst groß sein, und das ist sie an der Stelle $p = 0.6$. Die Mindestauszahlung hier ist 0.2. Gustav sollte also mit Wahrscheinlichkeit 0.6 das ♦A und mit Wahrscheinlichkeit 0.4 die ♣2 spielen, dann ist egal wie Uschi spielt, ein Gewinn von 0.2 garantiert.

(f) Nun rechnet man wie in (d) und (e) mit vertauschten Rollen: Uschi und Gustav werden vertauscht, klein und groß, Minimum und Maximum.
Es ist $g(p,q) = (5q-3)p+(2-3q)$. Setzt man konkreze Werte für q ein, dann erhält man eine lineare Funktion in p. Für $q < 0.6$ ist die Steigung dieser Funktion negativ, d.h. der größte Wert wird für $p = 0$ angenommen, usw. Man erhält

$$\max_{p\in[0,1]} g(p,q) = \begin{cases} 2-3q & \text{falls } q < 0.6 \\ 2q-1 & \text{falls } q \geq 0.6 \end{cases}$$

Für $q = 0.6$ ist dieser Wert am kleinsten, nämlich 0.2. Mit der Wahl $q = 0.6$ kann Uschi also erzwingen, dass ihr erwarteter Gewinn mindestens -0.2 ist, d.h. dass der erwartete Gewinn von Gustav höchstens 0.2 ist.

(g) Das Spiel ist nicht fair. Gustav kann so spielen, dass er mindestens 0.2 gewinnt, und Uschi kann mit ihrer Wahl nur dafür sorgen, dass sein Gewinn nicht größer wird.
Anhand der Auszahlungsmatrix wird man nicht vermuten, dass das Spiel unfair ist. Das Spiel ist so konstruiert, dass es auf den ersten Blick sehr symmetrisch aussieht. Wenn man genauer hinschaut, merkt man erst, dass Gustav einen Vorteil hat.

—