Spielerisches Übungsblatt

Aufgabe 1: Interpretieren bzw. erklären Sie die Auszahlungsmatrizen in den folgenden Beipielen! Finden Sie in jedem Beispiel alle Nash–Gleichgewichte in reinen Strategien:

(a) **Preiskampf:** Die beiden Firmen *Dreh&Schraub* und *Schraub&Dreh* bieten baugleiche Schraubendreher und Drehschrauber an. Jede hat die Wahl, ihre Produkte zu einem günstigeren oder zu einem teureren Preis zu verkaufen. Die Auszahlungsmatrizen sind:

S&D D&S	teuer	billig
teuer	12 12	15 −5
billig	−5 15	10 10

(b) **Chicken Game:** Sebastian Vettel und Lewis Hamilton rasen aufeinander zu. Wer ausweicht, verliert. Wenn keiner ausweicht, ist's ganz schlecht.

LH SV	Ausweichen	Draufhalten
Ausweichen	0 0	1 −1
Draufhalten	−1 1	−10 −10

(c) **Elfmeter:** WM-Viertelfinale 2006, Deutschland gegen Argentinien: Der Torschütze Roberto Ayala schießt auf das Tor; er hat die Wahl, nach rechts oder nach links zu schießen. Der Torwart Jens Lehmann kann sich ebenfalls entscheiden, nach rechts oder links zu springen. Entscheidet er sich für die richtige Richtung, dann hält er den Ball, sonst nicht.

JL RA	rechts	links
rechts	1 −1	−1 1
links	−1 1	1 −1

Aufgabe 2: Sie spielen **Hin und Rück**, `spiele/hin-und-rueck`.

(a) Wie viele Strategien hat Spieler A? Spieler B? Welche Größe hat die Auszahlungsmatrix?

(b) Die folgende Tabelle zeigt in jeder Zeile eine Strategie h für Spieler A und eine Strategie $r = (r_0, r_1, \dots, r_{10})$ für Spieler B. Welche der Beispiele (i)-(v) sind Nash–Gleichgewichte? Welche Spieler können ihr Ergebnis aus eigener Kraft verbessern?

	h	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
(i)	1	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(ii)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(iii)	5	0	0	2	0	4	0	6	0	8	0	20
(iv)	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(v)	1	0	1	3	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 3: Sie spielen das **Kartenduell**, `spiele/kartenduell`. Jeder Spieler sucht eine gemischte Strategie, die seinen garantierten Mindestgewinn maximiert.

(a) Geben Sie die Auszahlungsmatrizen für Gustav und Uschi an:

U G	♦A	♣A	♦2
♦A	-1 1	 -1	 1
♣A			
♣2			

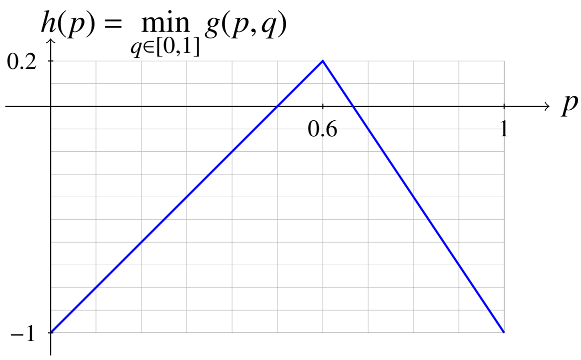
(b) Es gibt eine Karte, die Gustav nie spielen wird. Welche? Welche Karte ist nie schlechter als diese, egal was Uschi spielt? Streichen Sie die Zeile dieser dominierten Karte.

(c) Uschi nimmt an, dass Gustav diese Karte nicht spielt. Daher wird auch sie eine ihrer Karten nie spielen. Welche? Warum? Streichen Sie die Spalte dieser dominierten Karte.

(d) Gustav wählt also eine gemischte Strategie $p \cdot ♦A + (1-p) \cdot ♣2$ mit $p \in [0,1]$. Ebenso wählt Uschi die Strategie $q \cdot ♦A + (1-q) \cdot ♣A$. Für die erwartete Auszahlung an Gustav gilt dann:

$$g(p,q) = (5p-3)q + (2-3p).$$

Angenommen, Uschi kennt Gustavs Strategie p. Dann wählt sie ihre Strategie q so, dass Gustavs erwartete Auszahlung $g(p,q)$ möglichst klein wird. Der folgende Graph zeigt dies:



Rechnen Sie dies nach für die Werte $p = 0$, $p = 0.2$, $p = 0.4$, $p = 0.6$, $p = 0.8$ und $p = 1$: Setzen Sie p jeweils in $g(p,q)$ ein. Welcher Typ von Funktion entsteht? Für welches $q \in [0,1]$ wird der kleinste Funktionswert angenommen und wie groß ist dieser?

(e) Gustav sucht nun p, sodass egal, was Uschi spielt, sein erwarteter Mindestgewinn möglichst groß ist. Welche Strategie p sollte er hierzu wählen? Welcher Mindestgewinn ist ihm dann garantiert? Durch diese sorgfältige Diskussion berechnen Sie den Maximin-Wert

$$\max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} g(p,q).$$

(f) Nun werden die Rollen vertauscht: Uschi will verhindern, dass Gustav viel gewinnt. Welche Strategie q sollte sie wählen, damit Gustavs maximale Gewinnerwartung möglichst klein wird (und damit ihr Mindestgewinn möglichst groß)? Auf diese Weise berechnen Sie

$$\min_{q\in[0,1]} \max_{p\in[0,1]} g(p,q).$$

(g) Ist dieses Spiel fair? Können Sie die Antwort sofort aus der Aufgabenstellung (a) ablesen?