

Kapitel K

Klassifikation kompakter Flächen

*Topology is like modern art: It is easy to draw pictures,
but it takes a lot of sophistication to interpret them.*
Hansjörg Geiges, *How to draw up to five-dimensional manifolds?*

Vollversion

• eiserm.de/lehre/Topologie •

31.07.2024

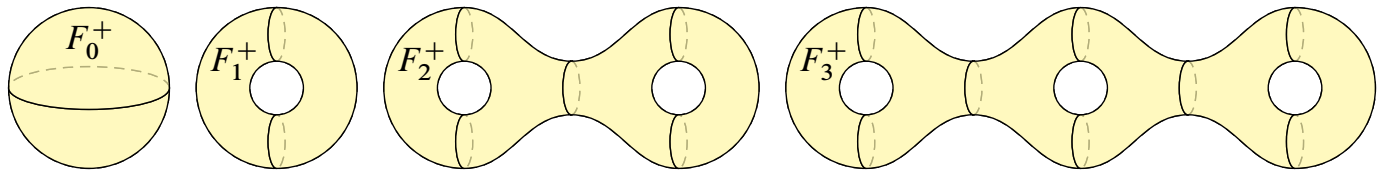
Inhalt dieses Kapitels K

K002

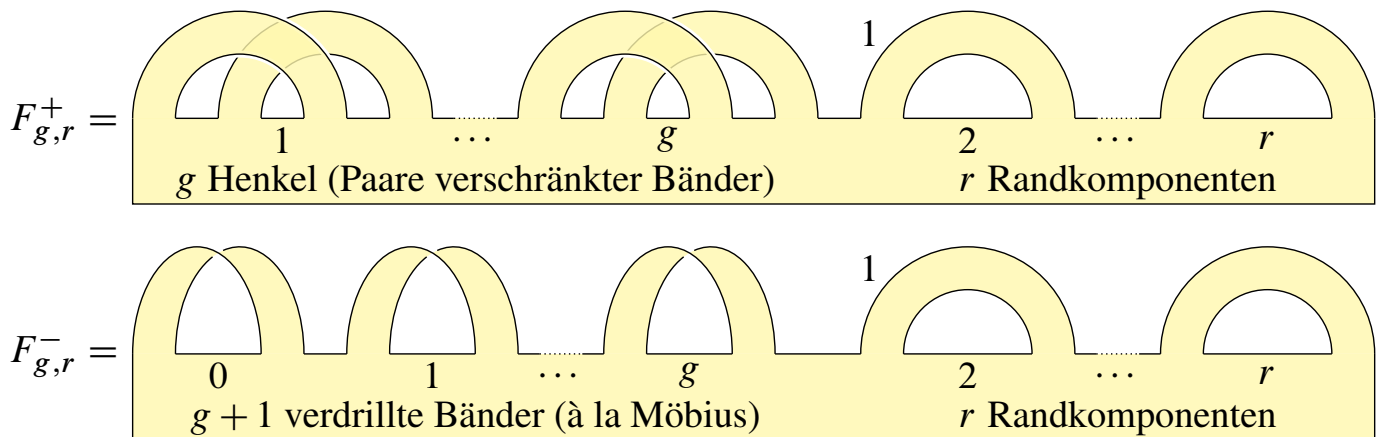
- 1 Mannigfaltigkeiten
- 2 Projektive Räume
- 3 Der Flächenkalkül

Motivation und Zielsetzung

Zur Erinnerung und als Motivation für die folgenden Untersuchungen zeige ich nochmals die Protagonisten dieses Kapitels: kompakte Flächen!



Die Konstruktion der Modellflächen kennen Sie aus Kapitel A. Nun verfügen wir über die nötigen Werkzeuge zur Klassifikation!



Motivation und Zielsetzung

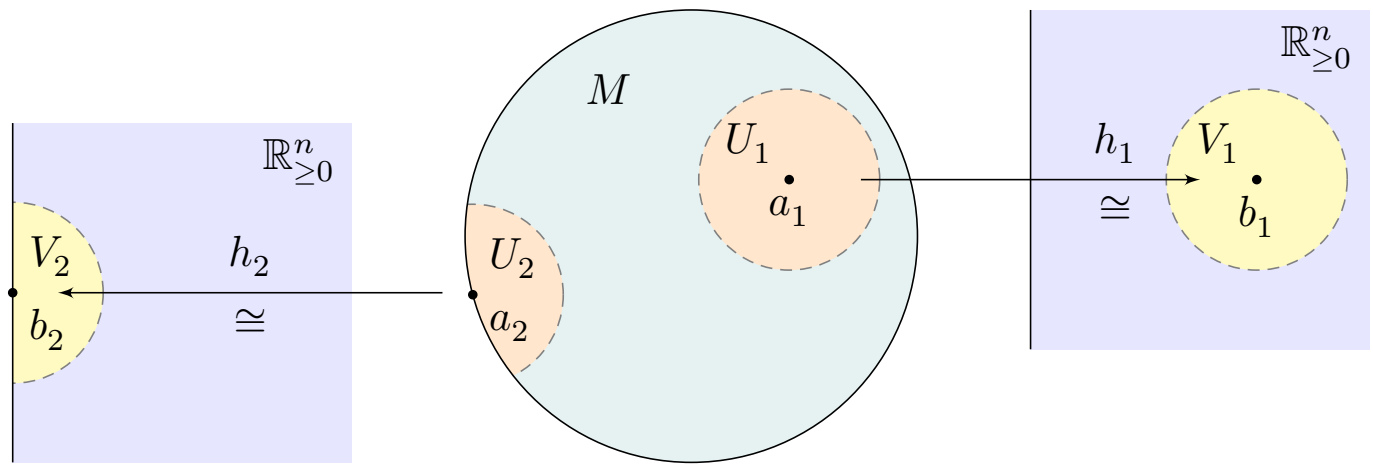
Das Beste kommt zum Schluss! Begonnen haben wir diese Vorlesung in Kapitel A mit Polyedern und Flächen. Nun verfügen wir über die nötigen topologischen Werkzeuge: Wir können die Klassifikation der kompakten triangulierten Flächen nicht nur formulieren, sondern auch beweisen!

Dabei lassen wir nochmals alle Themen in Revue passieren: metrische und topologische Räume, stetige Abbildungen und Homöomorphismen, topologische Konstruktionen wie Teilräume, Quotienten, Summen und Produkte, Eigenschaften wie Kompaktheit und (Weg)Zusammenhang, und *last but not least* die Topologie des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n .

Sie dürfen stolz sein auf Erreichtes und sich freuen auf Anwendungen:

- Mannigfaltigkeiten und insbesondere projektive Räume,
- Flächen und ihre Klassifikation durch den Flächenkalkül.

Leider besteht auch die Gefahr, dass ich Sie unterwegs verloren habe, und Sie mit den Begriffen und Techniken noch etwas hinterherhängen. Das wäre schade! Falls nötig holen Sie die nötigen Grundlagen nach und kommen bitte im zweiten Durchgang auf dieses Kapitel zurück.


Definition K1B: topologische Mannigfaltigkeit

Ein topologischer Raum M heißt n -**Mannigfaltigkeit** (Mfkt), wenn gilt:

(0) Der Raum M ist hausdorffsch und jede Komponente zweitabzählbar. (Unter Bedingung (1) ist Eigenschaft (0) äquivalent zur Metrisierbarkeit.)

(1) Der Raum M ist lokal n -euklidisch, das heißt: Zu jedem Punkt $a \in M$ existiert ein Homöomorphismus $(h, k) : (U, a) \cong (V, b)$ von einer offenen Umgebung $U \subseteq M$ von a auf eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ von b .

Bemerkung: (1) Wir nutzen den euklidischen Raum \mathbb{R}^n als Modell. Damit können wir lokal euklidische Räume untersuchen und eine schöne und umfangreiche Theorie der *Mannigfaltigkeiten ohne Rand* entwickeln. Doch wichtige Beispiele wie der Ball \mathbb{D}^n entziehen sich diesem Begriff solange wir den Rand nicht erfassen. Wir untersuchen daher gleich *Mannigfaltigkeiten mit Rand*, mit dem Halbraum $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ als Modell.

(0a) Lokal euklidisch impliziert die Trennungseigenschaft T_1 , aber nicht die Hausdorff-Eigenschaft T_2 , wie die verzweigte Gerade (E2E) zeigt. Die Hausdorff-Eigenschaft muss daher gesondert gefordert werden!

(0b) Lokal euklidisch impliziert erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar: Es gibt lokal euklidische Hausdorff-Räume ohne abzählbare Basis der Topologie, wie die lange Gerade (F9K). Meist wird man daher neben lokal euklidisch und hausdorffsch auch Zweitabzählbarkeit fordern, zumindest für jede Komponente, oder äquivalent hierzu: Metrisierbarkeit (K1x).

😊 All diese topologischen Erfahrungen antizipieren wir vorausschauend in der sorgsam formulierten unserer zentralen Definition K1B.

Topologische Mannigfaltigkeiten: Definition

Wir nennen $h : M \supseteq U \xrightarrow{\cong} V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ eine **lokale Karte** von M und $k = h^{-1}$ ein **lokales Koordinatensystem** oder eine **lokale Parametrisierung**, mit (jeweils offenem) Kartengebiet $U \subseteq M$ und Parametergebiet $V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$.

Definition K1B: topologische Mannigfaltigkeit

Die Menge der Punkte im Rand / im Inneren von M bezeichnen wir mit

$$\partial M := \{a \in M \mid \exists \text{ Karte } h : h(a) \in \partial \mathbb{R}_{\geq 0}^n\}, \quad (\exists \Rightarrow \forall \text{ dank J7I})$$

$$\text{Int } M := \{a \in M \mid \exists \text{ Karte } h : h(a) \in \text{Int } \mathbb{R}_{\geq 0}^n\}. \quad (\exists \Rightarrow \forall \text{ dank J7I})$$

Eine Mannigfaltigkeit M mit $\partial M = \emptyset$ heißt **unberandet**, sowie **geschlossen** falls zudem kompakt, und **offen** falls nicht-kompakt.

Ein **Atlas** \mathcal{A} von M ist eine Kartenfamilie, die den Raum M überdeckt,

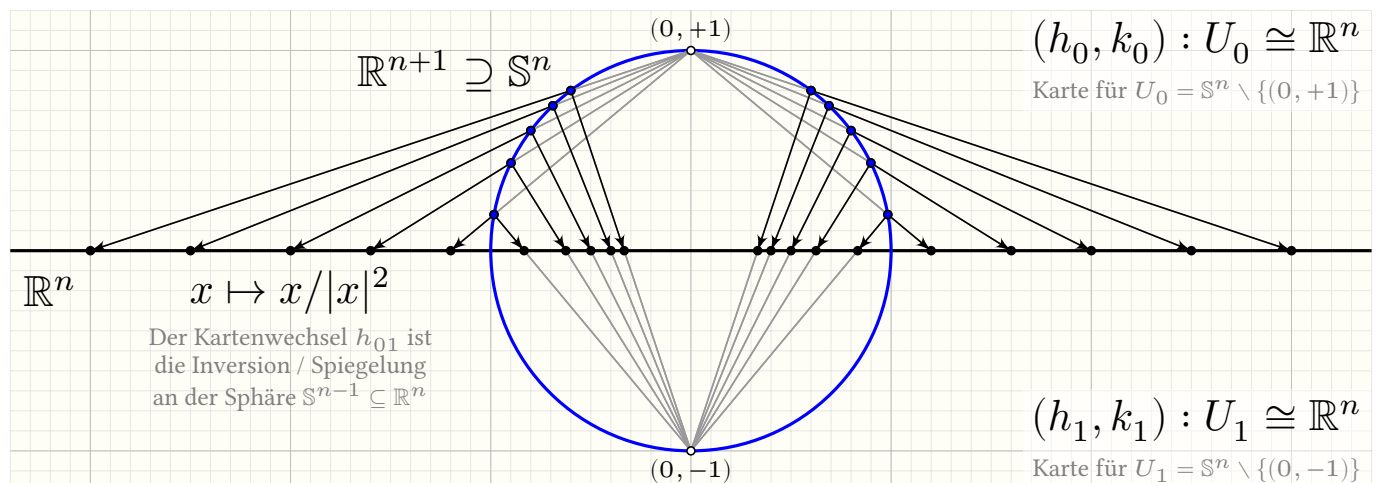
$$\mathcal{A} = (h_i : M \supseteq U_i \xrightarrow{\cong} V_i \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n)_{i \in I} \quad \text{mit} \quad M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Bemerkung: Als Modellraum taugt statt $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ebenso der Ball \mathbb{D}^n (A1M) und der Würfel $[-1, 1]^n$ (A1E), da untereinander lokal homöomorph.

Topologische Mannigfaltigkeiten: erste Beispiele

Beispiele: Der leere Raum \emptyset ist eine n -Mfkt für alle $n \in \mathbb{N}$.

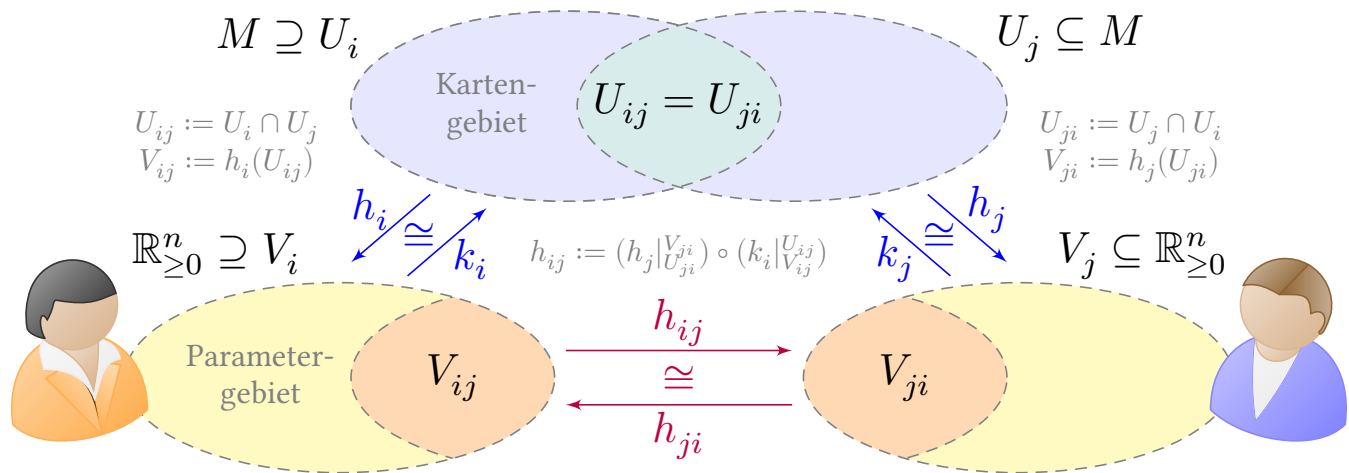
- (0) Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist eine 0-Mannigfaltigkeit.
- (1) Der euklidische Raum \mathbb{R}^n ist eine offene n -Mannigfaltigkeit.
- (2) Der Halbraum $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ist eine n -Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial \mathbb{R}_{\geq 0}^n$.
- (3) Der Ball \mathbb{D}^n ist eine kompakte n -Mannigfaltigkeit mit Rand \mathbb{S}^{n-1} .
- (4) Die Sphäre \mathbb{S}^n ist eine geschlossene n -Mannigfaltigkeit, $\partial \mathbb{S}^n = \emptyset$.



(5) Ist M eine n -Mfkt, so auch $U \subseteq M$ offen, wobei $\partial U = U \cap \partial M$.

(6) Die verzweigte Gerade (E2E) ist lokal euklidisch, aber keine Mfkt.

Kartenwechsel aka Koordinatentransformation



Satz K1c: Dimension, Rand und Inneres sind wohldefiniert.

- (1) Ist der Raum $M \neq \emptyset$ sowohl m -Mfkt als auch n -Mfkt, so folgt $m = n$.
- (2) Für jede n -Mfkt M gilt $M = \text{Int } M \cup \partial M$ und $\text{Int } M \cap \partial M = \emptyset$.

Beweis: (1) Seien $h_1 : M \supseteq U_1 \xrightarrow{\cong} V_1 \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ und $h_2 : M \supseteq U_2 \xrightarrow{\cong} V_2 \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ Karten um $a \in M$. Der Kartenwechsel $(h_{12}, h_{21}) : V_{12} \cong V_{21}$ zeigt $m = n$ dank der topologischen Invarianz der Dimension, siehe Satz J7J.

(2) Gilt $h_1(a) \in \partial \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ in *einer* Karte, dann in *jeder*, siehe Satz J7i. QED

Kartenwechsel aka Koordinatentransformation

😊 Kartenwechsel kennen Sie seit den Anfängen der Linearen Algebra: Sie betrachten einen Vektorraum V über einem Körper \mathbb{K} , etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alice wählt für V eine Basis \mathcal{A} und definiert so ihr (über \mathbb{K} lineares!) Koordinatensystem $k_1 = \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^m \xrightarrow{\cong} V$. Bob wählt davon unabhängig \mathcal{B} und $k_2 = \Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V$. Von Alice zu Bob vermittelt der Kartenwechsel $h_{12} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^m \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n$, umgekehrt $h_{21} = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^m$. Grundstein ist, zunächst linear, die Invarianz der Dimension: $m = n$! Da alles \mathbb{K} -linear ist, codieren wir diese Koordinatentransformation als zueinander inverse Basiswechselformen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Dasselbe sehen Sie hier, mit zwei Unterschieden: (1) Statt Linearität fordern wir Stetigkeit. (2) Statt global sind Karten nur noch lokal.

😊 Auch im Alltag wechseln Sie die Sichtweise bei Bedarf: Alice kennt ihr Gebiet U_i der Realität M und nutzt hier ihre Koordinaten $k_i : V_i \xrightarrow{\cong} U_i$. Bob nutzt seine Koordinaten $k_j : V_j \xrightarrow{\cong} U_j$ für sein Gebiet der Realität. Beide Gebiete können verschieden sein, doch wo sie sich überlappen, dort können sich Alice und Bob durch Koordinatenwechsel verständigen.

Differenzierbare Atlanten und glatte Mannigfaltigkeiten

Lokal können wir in Koordinaten $k_i : \mathbb{R}_{\geq 0}^n \supseteq V_i \xrightarrow{\simeq} U_i \subseteq M$ rechnen, und $h_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\simeq} V_{ji}$ wechseln die Koordinaten. Für diese – und nur für diese! – verfügen wir über die Topologie und Analysis euklidischer Räume!

Wenn wir in lokalen Koordinaten k_i differenzieren wollen, so soll unsere Rechnung auch in allen anderen Koordinaten k_j weiter sinnvoll bleiben. Das führt uns ganz natürlich zu folgender Definition:

Definition K1F: Differenzierbarkeit

Ein Atlas \mathcal{A} von M heißt \mathcal{C}^r -**glatt** oder \mathcal{C}^r -differenzierbar ($1 \leq r \leq \infty$), falls in \mathcal{A} alle Kartenwechsel r -mal stetig differenzierbar sind, $h_{ij} \in \mathcal{C}^r$.

Eine Mfkt M heißt \mathcal{C}^r -**glättbar**, falls sie einen \mathcal{C}^r -Atlas \mathcal{A} erlaubt.

Das Paar (M, \mathcal{A}) nennen wir dann eine \mathcal{C}^r -**glatte Mannigfaltigkeit**.

Eine \mathcal{C}^r -**Diff'barkeitsstruktur** auf M ist ein maximaler \mathcal{C}^r -Atlas \mathcal{A} .

Das ist eine zusätzliche Struktur auf M , geschickt codiert im Atlas \mathcal{A} .

😊 Hier beginnt die Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie, Allgemeine Relativität, ... Freuen Sie sich auf die folgenden Semester!

Differenzierbare Atlanten und glatte Mannigfaltigkeiten

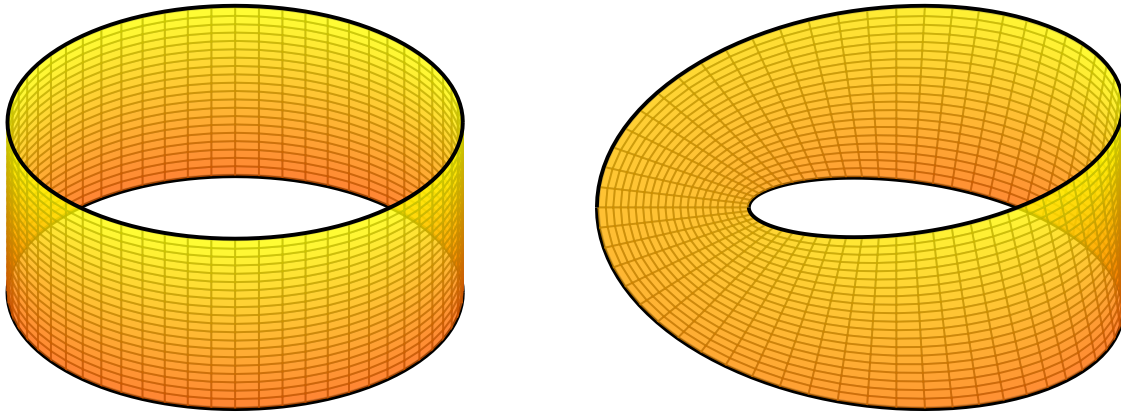
😊 Objektiv relevant ist nur, was unter Kartenwechseln erhalten bleibt. Alice differenziert fröhlich in ihrem Koordinatensystem, Bob in seinem. Beides lässt sich ineinander umrechnen, falls die Kartenwechsel h_{ij} genügend differenzierbar sind, das ist der Grund für diese Definition.

Eine topologische Mannigfaltigkeit zu sein, ist eine *Eigenschaft* des topologischen Raumes M . Hingegen ist die Differenzierbarkeit keine Eigenschaft von M , sondern des gewählten Atlas \mathcal{A} . Die Wahl eines \mathcal{C}^r -Atlas ist eine zusätzliche *Struktur* auf M , daher schreiben wir (M, \mathcal{A}) .

Auf manchen topologischen Mannigfaltigkeiten (der Dimension ≥ 4) existiert gar keine Differenzierbarkeitsstruktur, auf anderen mehrere. Diese Sensation entdeckte John Milnor 1956 (Fields-Medaille 1962). Auf der orientierten Sphäre \mathbb{S}^7 existieren genau 28 paarweise nicht-diffeomorphe Diff'barkeitsstrukturen. Explizit werden diese realisiert durch $\mathbb{S}_k^7 = \{z \in \mathbb{S}^9 \subseteq \mathbb{C}^5 \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^{6k-1} = 0\}$ für $k = 1, \dots, 28$.

📖 Egbert Brieskorn: *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*. Inventiones Mathematicae 2 (1966) 1–14.

Orientierte Atlanten und orientierte Mannigfaltigkeiten



Definition K1E: Orientierung

Ein Atlas \mathcal{A} von M heißt **orientiert**, wenn alle Kartenwechsel h_{ij} in \mathcal{A} orientierungserhaltend sind, also $\text{sign}(h_{ij}) = +1$ erfüllen (J7P).

Eine Mfkt M heißt **orientierbar**, falls ein orientierter Atlas \mathcal{A} existiert. Das Paar (M, \mathcal{A}) nennen wir dann eine **orientierte Mannigfaltigkeit**.

Eine **Orientierung** auf M ist ein maximaler orientierter Atlas \mathcal{A} .

Das ist eine zusätzliche Struktur auf M , geschickt codiert im Atlas \mathcal{A} .

Beispiel: Der Zylindermantel ist orientierbar, das Möbius-Band nicht.

Beispiele für Atlanten: glatt oder orientierbar?

Beispiel / Übung K1G: glatt oder orientierbar?

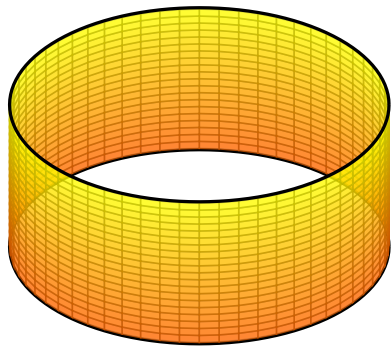
Für den Raum $M =]-1, 1[\subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir die vier Karten

$$h_1, h_2, h_3, h_4 : M \xrightarrow{\simeq}]-1, 1[: x \mapsto +x, -x, +x^3, -x^3.$$

- (1) Ist die Familie $\mathcal{A} = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ ein Atlas für M ? orientiert? glatt?
- (2) Welche Teilatlanten von \mathcal{A} sind orientiert? glatt? beides?

Atlas	glatt?	orientiert?
(h_1, h_2, h_3, h_4)	✗	✗
(h_1, h_2)	✓	✗
(h_1, h_3)	✗	✓
(h_i)	✓	✓

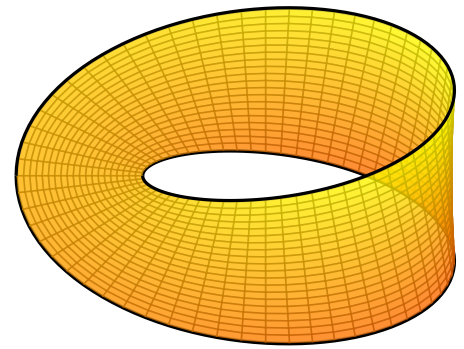
Der Kartenwechsel $h_{31} : x \mapsto x^{1/3}$ ist nicht differenzierbar (im Punkt 0).
Der Kartenwechsel $h_{12} = h_{21} : x \mapsto -x$ ist orientierungsumkehrend.



$$f, g : \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos(\pi s) \\ 3 \sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$

$$g \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [3+t \sin(\pi s/2)] \cos(\pi s) \\ [3+t \sin(\pi s/2)] \sin(\pi s) \\ t \cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$



Aufgabe: Konstruieren Sie zu Zylindermantel Z und Möbius-Band M jeweils einen Atlas aus zwei Karten, beide glatt, für Z zudem orientierbar.

Lösung: Für Z wählen wir die Koordinaten k_1, k_2 als f eingeschränkt auf $V_1 :=]0, 2[\times [-1, 1]$ und $V_2 :=]1, 3[\times [-1, 1]$ mit Ziel $U_i := f(V_i) \subseteq M$. Der Kartenwechsel $h_{12} : V_{12} \xrightarrow{\cong} V_{21}$ von $V_{12} = (]0, 1[\cup]1, 2[) \times [-1, 1]$ nach $V_{21} = (]1, 2[\cup]2, 3[) \times [-1, 1]$ ist $(x, y) \mapsto (x + 2, y)$ für $x \in]0, 1[$ und $(x, y) \mapsto (x, y)$ für $x \in]1, 2[$. Dies ist glatt und orientierungserhaltend.

Für M nutzen wir g genauso und erhalten h_{12} mit $(x, y) \mapsto (x + 2, -y)$ für $x \in]0, 1[$. Dies ist weiterhin glatt, aber orientierungsumkehrend.

Kann das Möbius-Band dennoch orientiert werden? Nein!

Satz K1H: Nachweis der Nicht-Orientierbarkeit

Sei (M, \mathcal{A}) eine orientierte n -Mannigfaltigkeit, $n \geq 2$ und $\mathcal{A} = (h_i)_{i \in I}$.

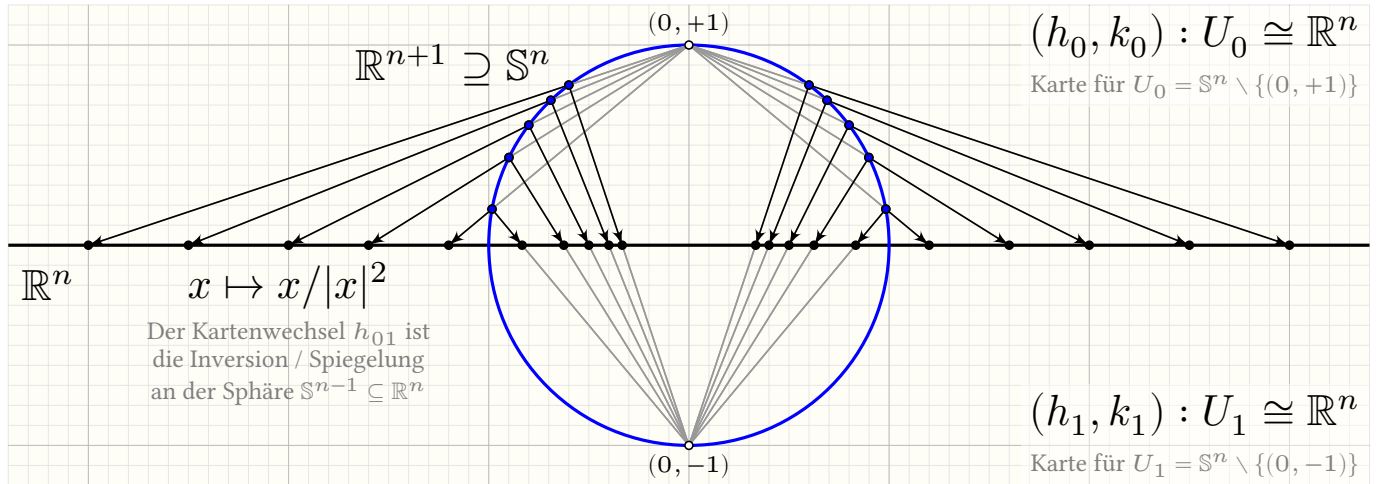
(1) Sei $h_0 : U_0 \xrightarrow{\cong} V_0$ eine weitere Karte, $0 \notin I$ und U_0 zshgd. Dann existiert ein Vorzeichen $s \in \{\pm 1\}$ mit $\text{sign}(h_{0i}, a) = s$ für alle $i \in I$ mit $a \in V_{0i}$.

(2) Jeden Atlas $\mathcal{B} = (h_j)_{j \in J}$ zusammenhängender Karten können wir somit orientieren wie \mathcal{A} , indem wir jede negative Karte h_j spiegeln.

(3) Unser obiger Atlas (h_1, h_2) des Möbius-Bandes M erlaubt keine solche Korrektur. Demnach ist das Möbius-Band M nicht orientierbar.

Beweis: (1) Wir definieren $s(a)$ durch $s(a) := \text{sign}(h_{0i}, a)$ mit $i \in I$ und $a \in V_{0i}$. Mindestens ein solcher Index $i \in I$ existiert, dank $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. Für je zwei solche Indizes $i, j \in I$ ist das Ergebnis gleich, da wir \mathcal{A} als orientiert voraussetzen, also $\text{sign} h_{ij} = +1$. Somit ist $s(a)$ wohldefiniert. Zudem ist s lokal konstant auf V_0 . Da wir V_0 als zusammenhängend voraussetzen, ist s konstant. Die weiteren Aussagen (2,3) sind klar. QED

Ein minimaler Atlas für die Sphäre \mathbb{S}^n

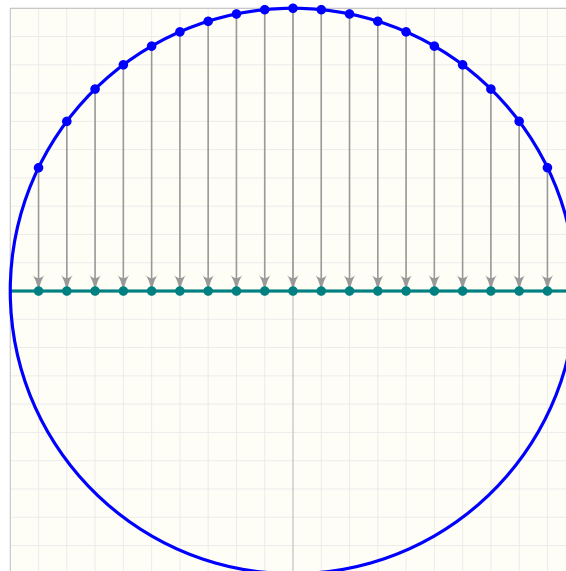


Beispiel / Übung K11: ein minimaler Atlas für die Sphäre \mathbb{S}^n

- (1) Finden Sie für die Sphäre \mathbb{S}^n einen möglichst kleinen (und einfachen) Atlas \mathcal{A} . Gelingt dies glatt? analytisch? algebraisch? gar rational?
- (2) Konstruieren Sie einen nicht-orientierten Atlas von \mathbb{S}^n sowie zwei gegenläufig orientierte Atlanten.

Lösung: Diese Konstruktion haben Sie in Übung E31 bereits ausgeführt! Nun fügt sich alles wunderbar in die Sichtweise der Mannigfaltigkeiten.

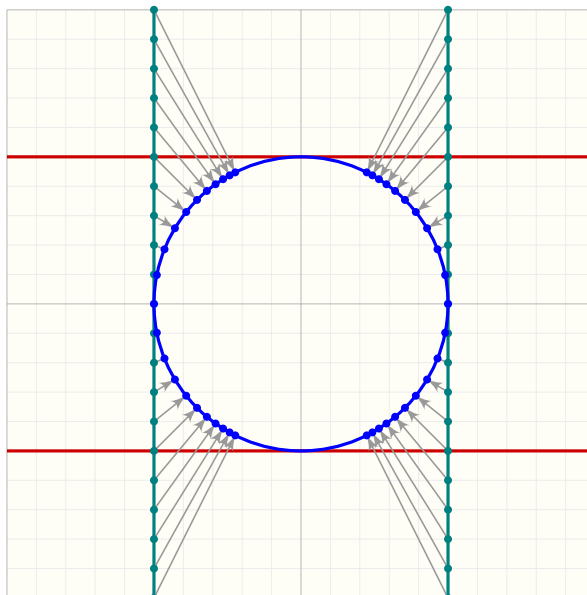
Ein zweiter schöner Atlas für die Sphäre \mathbb{S}^n



Wir betrachten die Sphäre $\mathbb{S}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ mit den lokalen Karten $h_i^\pm : U_i^\pm \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}^n : x \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ auf $U_i^\pm = \{x \in \mathbb{S}^n \mid \pm x_i > 0\}$ für $i = 0, \dots, n$. Ist dies ein Atlas auf \mathbb{S}^n ?

Schreiben Sie die Umkehrabbildungen k_i^\pm und alle Kartenwechsel $h_{ij}^{\pm\pm}$ explizit aus, insbesondere für die einfachsten Beispiele \mathbb{S}^1 und \mathbb{S}^2 .

😊 Dieser schöne Atlas ist naheliegend, leider benötigt er $2n + 2$ Karten.



Auf der Sphäre \mathbb{S}^n betrachten wir für $i = 0, \dots, n$ die lokalen Koordinaten $k_i^\pm : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} U_i^\pm : x \mapsto (x_1, \dots, x_i, \pm 1, x_{i+1}, \dots, x_n) / \sqrt{1 + |x|^2}$.

Was ist das Kartengebiet U_i^\pm ? Wie lauten die Umkehrabbildungen h_i^\pm ? Ist dies ein Atlas auf \mathbb{S}^n ? Schreiben Sie alle Kartenwechsel explizit aus.

😊 Auch dieser schöne Atlas benötigt $2n + 2$ Karten. Wir nutzen ihn für den projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ und seinen Atlas mit $n + 1$ Karten (K2F).

Rekonstruktion der Mannigfaltigkeit aus ihren Karten

Jedes Paar (M, \mathcal{A}) aus einer Mfkt M mit Atlas $\mathcal{A} = (h_i : U_i \xrightarrow{\cong} V_i)_{i \in I}$ bestimmt die Kartenwechsel $(h_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\cong} V_{ji})_{i, j \in I}$. Umgekehrt können wir die Mannigfaltigkeit M rekonstruieren durch das Verkleben der Karten:

Übung K1u: Rekonstruktion

Sei $X = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ die topologische Summe der Parametergebiete $V_i \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Die lokalen Parametrisierungen $k_i : V_i \xrightarrow{\cong} U_i \subseteq M$ definieren $k : X \rightarrow M$. Auf dem Summenraum X wird die Äquivalenzrelation \sim erzeugt durch $(i, x) \sim (j, h_{ij}(x))$ für alle Indizes $i, j \in I$ und $x \in V_{ij}$. Durch Übergang zum Quotienten erhalten wir den Homöomorphismus $\bar{k} : X/\sim \xrightarrow{\cong} M$.

😊 Allein aus den Kartenwechseln $(h_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\cong} V_{ji})_{i, j \in I}$ rekonstruieren wir die gesamte Mannigfaltigkeit M bis auf Homöomorphie; dazu genügt es, die Parametergebiete $(V_i)_{i \in I}$ nach dieser Anleitung zu verkleben.

Dies erklärt noch einmal eindrücklich, wie die Kartenwechsel $(h_{ij})_{i, j \in I}$ die gesamte Information über M codieren. Dies kommt ganz praktisch zum Ausdruck bei Differenzierbarkeit K1F und Orientierbarkeit K1E.

Übung K1τ: Inneres $\text{Int } M$ und Rand ∂M

Für alle n -Mannigfaltigkeiten M und N gilt:

- 0 Inneres und Rand sind disjunkt, hausdorffsch und zweitabzählbar.
- 1 Das Innere $\text{Int } M$ ist eine n -Mannigfaltigkeit ohne Rand.
- 2 Der Rand ∂M ist eine $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand.
- 3 Im Raum M ist die Teilmenge $\text{Int } M$ offen und ∂M abgeschlossen.
- 4 Ist die Mannigfaltigkeit M kompakt, so auch ihr Rand ∂M .
- 5 Jeder Homöomorphismus $f : M \xrightarrow{\cong} N$ induziert $f|_{\partial M} : \partial M \xrightarrow{\cong} \partial N$.
- 6 Für jede kompakte Fläche F gilt $\partial F \cong \{1, \dots, r\} \times \mathbb{S}^1$ für ein $r \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Sind $X = \mathbb{D}^3 \setminus \frac{1}{2}\mathbb{B}^3$ und $Y = \mathbb{D}^3 \setminus ((\frac{1}{4}\mathbb{B}^3 + \frac{1}{2}e_1) \cup (\frac{1}{4}\mathbb{B}^3 - \frac{1}{2}e_1))$ Mannigfaltigkeiten? zshgd? kompakt? berandet? homöomorph?

Lösung: Beides sind 3-dim. Mfkten, zshgd und kompakt. Dabei gilt $\partial X \cong \{1, 2\} \times \mathbb{S}^2$ und $\partial Y = \{1, 2, 3\} \times \mathbb{S}^2$, also $\partial X \not\cong \partial Y$, somit $X \not\cong Y$.

Bitte gehen Sie diese Aussagen sorgsam durch und formulieren Sie Ihre Lösung hierzu. Es ist eine gute Übung zum Verständnis dieser Begriffe.

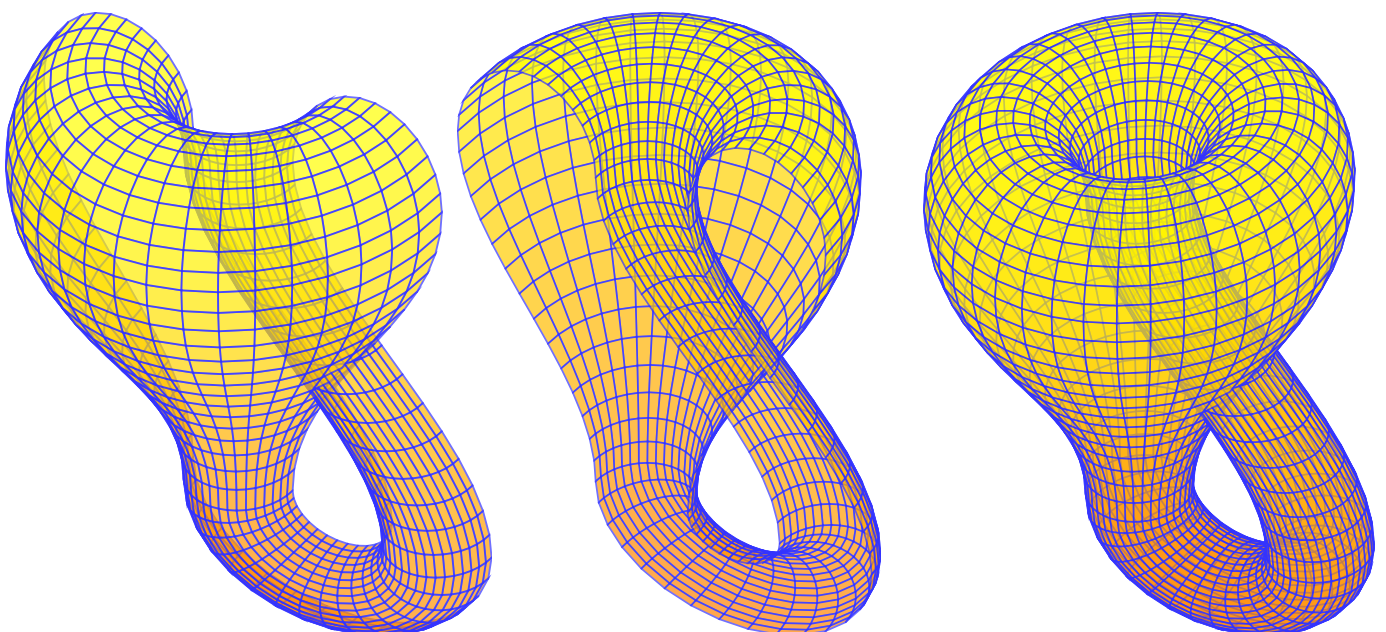
Beweis: Angenommen, $\rho : M \rightarrow \partial M$ wäre eine Retraktion auf den Rand.

(0) Dank $M \neq \emptyset$ gilt $\partial M \neq \emptyset$, also existiert $(U, \partial U) \subseteq (M, \partial M)$ offen mit einer Karte $(U, \partial U) \cong (\mathbb{R}_{\geq 0}^n, \partial \mathbb{R}_{\geq 0}^n)$. Für die Einpunktkompaktifizierung $\hat{U} = U \cup \{\infty\}$ und $\partial \hat{U} = \partial U \cup \{\infty\}$ gilt demnach $(\hat{U}, \partial \hat{U}) \cong (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$.

(1) Der Abschluss \bar{U} in M ist kompakt (F1F). Daher existiert eine stetige Abbildung $f_1 : \bar{U} \rightarrow \hat{U}$, nämlich das Zusammenschlagen $\bar{U} \setminus U \rightarrow \{\infty\}$. Verkleben mit $f_2 : M \setminus U \rightarrow \{\infty\}$ liefert $f : (M, \partial M) \rightarrow (\hat{U}, \partial \hat{U})$ stetig.

Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: Verdopplung

Beispiele: Verdopplung des Einheitsballs ergibt $D(\mathbb{D}^n) \cong \mathbb{S}^n$.
Verdopplung des Möbius-Bandes ergibt die Kleinsche Flasche.



Lösung: Wir betrachten $X = M \times \{\pm 1\}$ mit Involution $\sigma(x, \pm 1) = (x, \mp 1)$ und den Quotienten $M^* := X/\sim$ bezüglich $(x, +1) \sim (x, -1)$ für $x \in \partial M$. Die Komposition $M \hookrightarrow X \twoheadrightarrow M^*$ ist eine Einbettung. Wir identifizieren M mit seinem Bild in M^* und schreiben $M \subseteq M^*$. Die Involution $\sigma : X \rightarrow X$ induziert eine stetige Involution $\sigma : M^* \rightarrow M^*$ mit Fixpunktmenge $\text{fix}(\sigma) = \partial M$, es gilt $M^* = M \cup \sigma M$ und $M \cap \sigma M = \partial M$.

Wir zeigen nun, dass $M^* := X/\sim$ eine n -Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Hausdorff-Eigenschaft und eine abzählbare Basis weist man leicht nach. Jede Karte $(h, k) : M \supseteq U \cong V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ von M setzen wir fort zur Karte $(h^*, k^*) : M^* \supseteq U^* \cong V^* \subseteq \mathbb{R}^n$ von M^* . Hierbei ist U offen in M , also ist $U^* = U \cup \sigma U$ offen in M^* . Weiters ist V offen in $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, also ist $V^* = V \cup \sigma V$ offen in \mathbb{R}^n . Wir setzen $h^*(x) = x$ für $x \in U$ und $h^*(x) = \sigma h \sigma(x)$ für $x \in \sigma U$ sowie $k^*(y) = k(y)$ für $y \in V$ und $k^*(y) = \sigma k \sigma(y)$ für $y \in \sigma V$. Dies ist wohldefiniert dank $U \cap \sigma U \subseteq \partial M$ und $h(\partial M) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Die Abbildungen h^* und k^* sind stetig dank Verklebesatz E1p. Somit ist $(h^*, k^*) : U^* \cong V^*$ ein Homöomorphismus, wie gefordert.

Aus jedem Atlas $\mathcal{A} = (h_i)_{i \in I}$ von M gewinnen wir den Atlas $\mathcal{A}^* = (h_i^*)_{i \in I}$ der Verdopplung M^* . Ist der Atlas \mathcal{A} zudem orientiert, so auch \mathcal{A}^* , und die Involution $\sigma : M^* \rightarrow M^*$ ist orientierungsumkehrend. Somit besteht $M^* = M \cup M'$ aus unserer Mannigfaltigkeit M und ihrem Spiegelbild $M' = \sigma(M)$, verklebt entlang ihres Randes $\partial M = M \cap M' = \partial M'$.

Schließlich sei der Atlas \mathcal{A} glatt, also alle Kartenwechsel h_{ij} in \mathcal{A} seien \mathcal{C}^r -differenzierbar, wobei $r \geq 1$. Hier ist Orthogonalität eine technisch notwendige Vorkehrung: Wir müssen für jede Kartenwechsel h_{ij} in \mathcal{A} voraussetzen bzw. einrichten, dass auf dem Rand ∂M die Ableitung $\partial_1 h_{ij}$ senkrecht steht auf e_2, \dots, e_n . (Andernfalls entstehen Knicke.) Ist dies alles erfüllt, so ist auch der Atlas \mathcal{A}^* glatt, $\sigma : M^* \rightarrow M^*$ ist eine glatte Involution, und $M \hookrightarrow M^*$ ist eine glatte Einbettung.

😊 Diese Konstruktion ist *kanonisch*, kommt also ohne willkürliche Wahlen aus. Sie ist zudem *natürlich*, denn zu $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ erhalten wir die Fortsetzung $f^* : M^* \rightarrow N^*$ mit $f^* \circ \sigma_M = \sigma_N \circ f^*$. Satz K1y zeigt eine schöne Anwendung des Verdopplungstricks.

Übung K1w: Produkt von Mannigfaltigkeiten

Sind M und N Mannigfaltigkeiten, so auch $M \times N$. Wir wählen Atlanten

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (h_i : M \supseteq U_i \xrightarrow{\cong} U'_i \subseteq [-1, 1]^m)_{i \in I} \quad \text{auf } M, \\ \mathcal{B} &= (k_j : N \supseteq V_j \xrightarrow{\cong} V'_j \subseteq [-1, 1]^n)_{j \in J} \quad \text{auf } N.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir auf $M \times N$ den Produktatlas:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := (h_i \times k_j : M \times N \supseteq U_i \times V_j \xrightarrow{\cong} U'_i \times V'_j \subseteq [-1, 1]^{m+n})_{(i,j) \in I \times J}$$

- (1) Für $M \neq \emptyset \neq N$ gilt demnach $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.
- (2) Sind die Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{B} orientiert bzw. \mathcal{C}^r -glatt, so auch $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.
- (3) Für den Rand gilt Leibniz, $\partial(M \times N) = [(\partial M) \times N] \cup [M \times (\partial N)]$ als Verheftung entlang ihres gemeinsamen Randes $(\partial M) \times (\partial N)$.

😊 Zum Beispiel ist $\partial(M \times [-1, 1]) \cong M^*$ die Verdopplung von M (K1v).
Für Komponenten gilt $\pi_0(M \times N) = \{X \times Y \mid X \in \pi_0(M), Y \in \pi_0(N)\}$.

Wir nutzen hier als Modellraum den n -dimensionalen Würfel $[-1, 1]^n$. Als Modell taugt ebenso der abgeschlossene Ball \mathbb{D}^n , da homöomorph (A1E), und der euklidische Halbraum $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, da lokal homöomorph (A1M). Wir haben also die Wahl. Die Würfel haben den Vorteil, dass sie stabil sind unter Produkten, und genau das nutzen wir dankend in K1w.

Für glatte Mannigfaltigkeiten sind noch \mathbb{D}^n und $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ lokal diffeomorph und werden daher gerne als Modellräume genutzt. Sie sind leider nicht abgeschlossen unter Produkten: Es entstehen „glatte Mannigfaltigkeiten mit Ecken“. Auch hier sind Würfel das allgemeinere, flexiblere Modell, daher plädiere ich hier für Würfel $[-1, 1]^n$. *Choose your models wisely!*

Je nach Anwendung mag die volle Allgemeinheit überflüssig sein, Mannigfaltigkeiten mit Ecken werden daher nur behandelt wo nötig. Insbesondere für geschlossene Mannigfaltigkeiten ist der euklidische Raum \mathbb{R}^n das universelle lokale Modell. Ich erkläre Ihnen umsichtig alle gebräuchlichen Varianten, so sind Sie für jede Situation gerüstet.

⚠ Bitte unterscheiden Sie aufmerksam den **topologischen Rand** ∂M eines Teilraums $M \subseteq \mathbb{R}^N$ (dieser ist extrinsisch definiert, relativ zum umgebenden Raum) vom **geometrischen Rand** der Mannigfaltigkeit M (dieser gehört intrinsisch zu M , absolut, unabhängig von Einbettungen).

😊 Letzteres gründen wir auf offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ in unserem Modellraum (J7G) und übertragen alles auf Mannigfaltigkeiten (K1B). Dies gelingt dank der topologischen Invarianz des Randes (J7I).

Beispiel: Für den geometrischen Rand gilt $\partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ und $\partial \mathbb{S}^{n-1} = \emptyset$. Im Raum \mathbb{R}^n ist der topologische Rand $\delta \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ und $\delta \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1}$. Beides heißt „Rand“, bedeutet aber jeweils ganz verschiedene Dinge.

Der Randoperator ∂ ordnet jeder n -Mfkt M eine $(n-1)$ -Mfkt ∂M zu. Dabei gilt $\partial \partial M = \emptyset$ dank K1T, diese $(n-2)$ -Mfkt ist also immer leer!

😊 Diese fundamentale Eigenschaft hat mannigfache Anwendungen, direkt geometrisch in der Bordismustheorie, entsprechend algebraisch in Kettenkomplexen, analytisch in Integralsätzen, damit in der Physik!

Der geometrische Rand als topologische Invariante

Hier eine verblüffend einfache und schöne Illustration, wie effizient wir mit Mannigfaltigkeiten und ihren Eigenschaften rechnen können:

Aufgabe: Wir betrachten den Volltorus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ und die aufgedickte Torusfläche $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$. (0) Skizzieren Sie diese im \mathbb{R}^3 .

- (1) Sind die Räume S und T Mannigfaltigkeiten (eventuell mit Rand)?
- (2) Lassen sie sich durch ihre Euler-Charakteristiken unterscheiden?
- (3) Sind die Räume S und T homöomorph?

Lösung: (1) Ja, das Produkt von Mannigfaltigkeiten (mit Rand) ist eine Mannigfaltigkeit (mit Rand), siehe vorige Übung K1w.

(2) Wir finden $\chi(S) = \chi(\mathbb{S}^1) \times \chi(\mathbb{D}^2) = 0 \cdot 1 = 0$
und $\chi(T) = \chi(\mathbb{S}^1) \times \chi(\mathbb{S}^1) \times \chi(\mathbb{D}^1) = 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$.

☹ Diese algebraische Invariante hilft uns hier leider nicht weiter.

(3) Nein! Aus $S \cong T$ folgt $\partial S \cong \partial T$, dank Invarianz des Randes (J7I). Wir haben hier $\partial S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ zshgd, aber $\partial T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$ unzshgd.

😊 Diese geometrische Eigenschaft unterscheidet diese beiden Räume.

In Kapitel E haben wir Urysohns Metrisierungssatz E5R erarbeitet. Diesen können wir insbesondere auf Mannigfaltigkeiten wunderbar anwenden (Wiederholung von E5T), problemlos nun auch mit Rand:

Übung K1x: Jede Mannigfaltigkeit ist metrisierbar.

Aus lokal euklidisch, hausdorffsch und zweitabzählbar folgt metrisierbar:

- 1 Jeder lokal euklidische Raum (M, \mathcal{T}) hat die Trennungseigenschaft T_1 .
- 2 Es gibt Gegenbeispiele ohne T_2 (E2E). Gilt zudem T_2 , so folgt T_3 und sogar $T_{3^{1/2}}$. *Hinweis:* Diese Konstruktion nutzt lokale Kompaktheit.
- 3 Gilt zudem 2AA (komponentenweise), so ist (M, \mathcal{T}) metrisierbar.

Lösung: (1) Zu $a \neq b$ in M existiert U mit $b \in U \in \mathcal{T}$ und einer Karte $h : (U, b) \xrightarrow{\cong} (V, c)$ auf $V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ offen. Im Falle $a \notin U$ ist alles klar. Im Falle $a \in U$ auch, denn die Eigenschaft T_1 gilt in $U \cong V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$.

(2a) Gegenbeispiele: Die verzweigte Gerade (E2E) oder die Gerade mit doppeltem Ursprung (E2E) sind lokal euklidisch, aber nicht hausdorffsch.

(2b) Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen und $b \notin A$. Wir können $U \cap A = \emptyset$ annehmen, notfalls ersetzen wir U durch $U \setminus A$. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\bar{B}(c, r) \subseteq h(U)$. Die Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \max\{0, 1 - |x - c|/r\}$ ist stetig mit kompaktem Träger $D := \bar{B}(c, r) \subseteq V$ (F1o).

Zu $f_1 := g \circ h : U \rightarrow [0, 1]$ ist der Träger $K = h^{-1}(D)$ kompakt (F1J). Im Hausdorff-Raum (M, \mathcal{T}) ist K demnach abgeschlossen (F1G). (Das wäre falsch ohne T_2 , siehe obige Gegenbeispiele E2E.)

Wir ergänzen f_1 durch die Nullfunktion $f_2 : M \setminus K \rightarrow [0, 1] : x \mapsto 0$. Dank Verklebesatz (E1P) ist $f = f_1 \cup f_2 : M \rightarrow [0, 1]$ stetig. Dabei gilt $f|_A = 0$ und $f(b) = 1$, wie für die Trennungseigenschaft $T_{3^{1/2}}$ gefordert.

(3a) Dank (2) gilt die Trennungseigenschaft T_3 . Ist (M, \mathcal{T}) zweitabzählbar, so können wir unmittelbar Urysohns Metrisierungssatz E5R anwenden.

(3b) Unser Raum (M, \mathcal{T}) ist lokal euklidisch, somit lokal wegzshgd. Daher ist $M = \bigsqcup \pi_0(M)$ die topologische Summe aller Wegkomponenten (G3C). Es genügt also, die Metrisierung für jede Komponente sicherzustellen. Für den Gesamtraum M nutzen wir dann die Summenmetrik (C2F). QED

Beispiel: Wir können die Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ nicht in \mathbb{R}^n einbetten (J6c).

Satz K1Y: Invarianz des Gebietes für Mannigfaltigkeiten

Seien M und N zwei n -Mannigfaltigkeiten und N zusammenhängend.

(1) Sei $M \neq \emptyset$ geschlossen, also kompakt und ohne Rand, $\partial M = \emptyset$.

Dann ist jede stetige Injektion $f : M \hookrightarrow N$ ein Homöomorphismus.

(2) Sei $M \neq \emptyset$ kompakt, eventuell mit Rand ∂M . Dann ist jede stetige Injektion $f : (M, \partial M) \hookrightarrow (N, \partial N)$ ein Homöomorphismus.

Beweis: (1) Dank Invarianz des Gebietes (K1R) ist $f : M \hookrightarrow N$ offen, insbesondere ist $f(M) \subseteq N$ offen. Mit M ist auch $f(M)$ kompakt (F1J), also abgeschlossen in N (F1G), da N hausdorffsch ist. Da $\emptyset \neq f(M) \subseteq N$ offen und abgeschlossen ist, folgt $f(M) = N$, da N zusammenhängend ist. Somit ist f bijektiv, stetig und offen, also ein Homöomorphismus.

(2) Gemäß K1v verdoppeln wir f zu $f^* : M^* \hookrightarrow N^*$ mit $f^* \circ \sigma_M = \sigma_N \circ f^*$. Dank (1) ist f^* ein Homöomorphismus, also auch f . QED

Übung: Jede geschlossene m -Mfkt M lässt sich in einen \mathbb{R}^N einbetten:

(1) Es gibt eine offene Überdeckung $M = U_1 \cup \dots \cup U_\ell$ mit $\varphi_k : U_k \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^m$.

(2) Kompaktifizierung liefert stetige Fortsetzungen $\bar{\varphi}_k : M \rightarrow \mathbb{S}^m$.

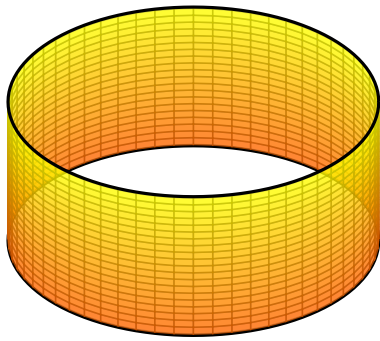
(3) Wir erhalten die Einbettung $\varphi = (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_\ell) : M \hookrightarrow (\mathbb{S}^m)^\ell \subseteq \mathbb{R}^{(m+1)\ell}$.

😊 Genial einfach! Insbesondere folgt daraus erneut Metrisierbarkeit.

Bemerkung: Die Dimension $N = (m + 1)\ell$ ist unnötig groß, was unserem einfachen Beweis geschuldet ist. Eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ ist immer möglich, siehe Munkres, Corollary 50.8: „Every compact m -manifold can be imbedded in \mathbb{R}^{2m+1} .“ Exercise 6 auf Seite 315 zeigt, dass dies sogar für nicht-kompakte, doch zweitabzählbare Mannigfaltigkeiten gilt.

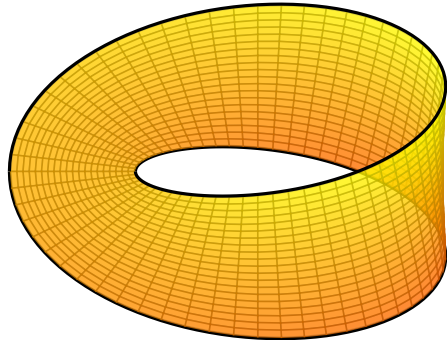
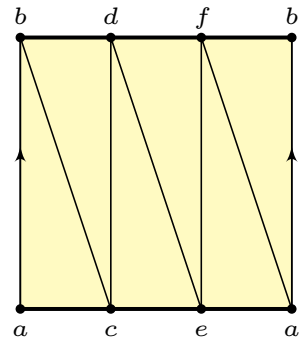
Bemerkung: Es ist eine interessante, schwierige Frage, zu M die kleinste Dimension d zu bestimmen, für die eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ möglich ist.

Beispiel: Wir kennen bereits die Einbettungsdimension $\text{edim}(\mathbb{S}^n) = n + 1$. Für geschlossene Flächen gilt $\text{edim}(F_g^+) = 3$, denn $F_g^+ \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$ dank K1Y, sowie $\text{edim}(F_g^-) = 4$, was allerdings etwas schwieriger zu beweisen ist.



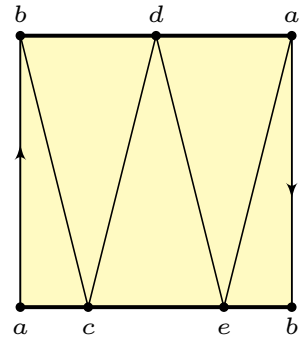
$$f: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow Z \subseteq \mathbb{R}^3 :$$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \cos(\pi s) \\ 3 \sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$



$$g: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3 :$$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [3+t \sin(\pi s/2)] \cos(\pi s) \\ [3+t \sin(\pi s/2)] \sin(\pi s) \\ t \cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$



Übung: Zylindermantel Z und Möbius-Band M erlauben Atlanten mit nur zwei Karten. (Mit einer einzigen Karte gelingt dies nicht, siehe K1y.) Dies gelingt glatt, wie hier zu sehen, für Z sogar orientiert. Beide Flächen lassen sich zudem triangulieren. (Obige Eckenzahl ist minimal. Warum?)

Welche Mannigfaltigkeiten können wir triangulieren?

Triangulierungsvermutung für topologische Mannigfaltigkeiten: Jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit M ist triangulierbar, d.h. es existiert ein endlicher Simplicialkomplex K mit $|K| \cong M$.

☺ Dies gilt für \mathcal{C}^1 -glatte Mannigfaltigkeiten, leider nicht allgemein!

Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie: Seien K und L Simplicialkomplexe mit homöomorphen Realisierungen $|K| \cong |L|$. Dann existieren isomorphe Unterteilungen $K' \preceq K$ und $L' \preceq L$.

☺ Dies gilt glücklicherweise in Dimension ≤ 3 , leider nicht allgemein!

Für Mannigfaltigkeiten der Dimension ≤ 3 gelten beide Vermutungen, für Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 4 hingegen sind beide falsch!

Satz K1L: Triangulierbarkeit für Mfkten der Dimension ≤ 3

Jede topologische Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 3 ist triangulierbar. Je zwei Triangulierungen sind isomorph nach geeigneter Unterteilung.

☺ Triangulierungen vereinfachen unsere Arbeit dramatisch!

Für 1-Mannigfaltigkeiten haben wir zunächst vier konkrete Beispiele:

1-Mannigfaltigkeit	ohne Rand	mit Rand
nicht kompakt	die reelle Gerade \mathbb{R}	die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0}$
kompakt	die Kreislinie S^1	das Intervall $[0, 1]$

Satz K1N: topologische Klassifikation der Kurven

Jede zusammenhängende Kurve (eindimensionale Mannigfaltigkeit) ist homöomorph zu genau einem der Modellräume $[0, 1], S^1, \mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Jede kompakte Kurve K besteht somit aus $p \in \mathbb{N}$ Intervallen und $q \in \mathbb{N}$ Kreislinien, ist also homöomorph zu genau einem der Modellräume

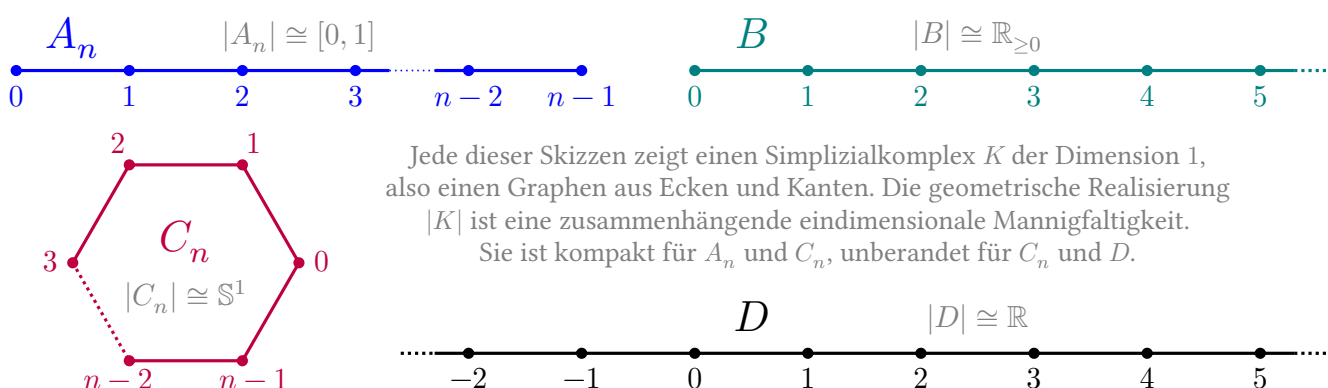
$$E_{p,q} = (\{1, \dots, p\} \times [0, 1]) \cup (\{p+1, \dots, p+q\} \times S^1) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^3.$$

Der Satz ist anschaulich plausibel, doch die Voraussetzung ist schwach. Ohne weitere Hilfsmittel ist der Beweis eher länglich und mühsam... Versuchen Sie es! Eine Anleitung gibt David Gale, *The classification of 1-manifolds: A take-home exam*, Am. Math. Monthly 94 (1987) 170–175.

Klassifikation der simplizialen Kurven

K136

😊 Wir nutzen triangulierte Mfkten, das ist stärker... und damit leichter! Nach Satz K1L ist jede Kurve (eindim. Mannigfaltigkeit) triangulierbar.

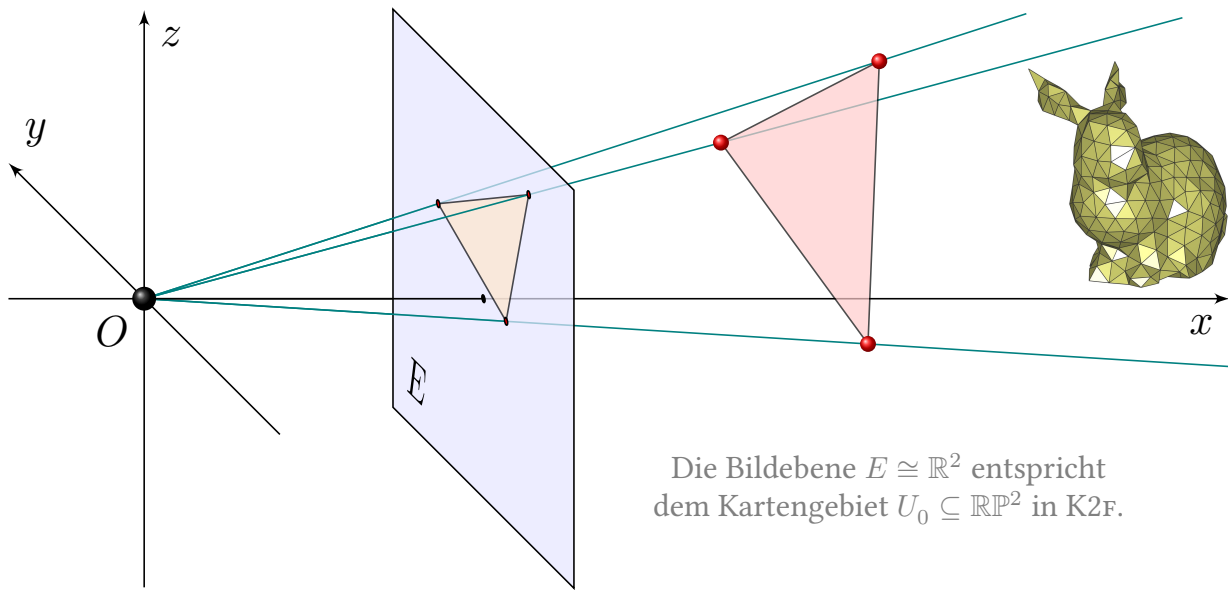


Übung K1o: Klassifikation simplizialer Kurven

Sei K ein Simplizialkomplex und $X = |K|$ seine Realisierung.

- Genau dann ist X eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, wenn $\dim K \leq 1$ gilt, und jede Ecke in genau einer oder zwei Kanten liegt.
- Ist K zudem zshgd, so ist K isomorph zu einem der obigen Modelle. Jede zshgde Kurve ist homöomorph zu einem der vier Modellräume.

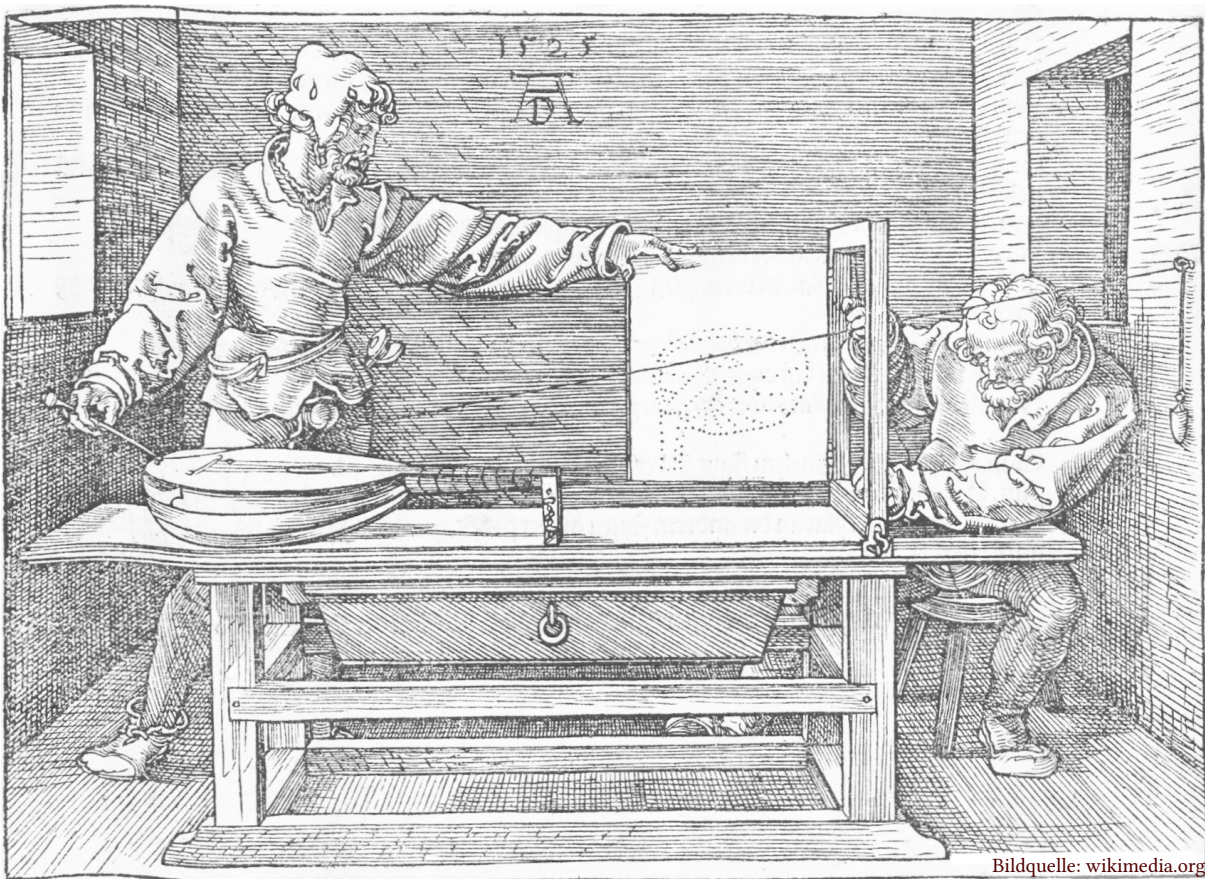
Auge oder Kamera nutzen die Zentralprojektion auf eine Bildebene E :
Alle Punkte auf einer Ursprungsgeraden werden zu einem Bildpunkt.



Die Bildebene $E \cong \mathbb{R}^2$ entspricht dem Kartengebiet $U_0 \subseteq \mathbb{RP}^2$ in $K2F$.

Die Projektion löscht die Tiefeninformation: Die dreidimensionale Szene wird zum zweidimensionalen Bild projiziert, perspektivische Darstellung. Zusätzliche Tiefeninformation ist wichtig für praktische Anwendungen: Astronomie (Parallaxe), Photographie (Tiefenschärfe), Computer Vision.

Erforschung der Grundlagen perspektivischer Darstellung in der Renaissance...



Bildquelle: wikimedia.org

In den letzten Jahrzehnten hat die Computergraphik diese Technik perfektioniert.

Albrecht Dürers *Underweysung zum Perspektivproblem*

Projektive Räume: Geraden sind die neuen Punkte!

Definition K2A: der projektive Raum $\mathbb{P}(V)$

Sei \mathbb{K} ein Körper und $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ seine multiplikative Gruppe. Diese operiert durch Multiplikation $\mathbb{K}^\times \curvearrowright V$ auf jedem \mathbb{K} -Vektorraum V , ebenso $\mathbb{K}^\times \curvearrowright V^\#$ auf der Menge $V^\# = V \setminus \{0\}$ aller Nicht-Null-Vektoren. Jede Bahn / Äquivalenzklasse ist eine Gerade (jeweils ohne Nullpunkt). Wir definieren den **projektiven Raum** $\mathbb{P}(V)$ als den Quotientenraum:

$$\mathbb{K}^\times \curvearrowright V^\# \xrightarrow{q} \mathbb{P}(V) := V^\# / \mathbb{K}^\times : x \mapsto q(x) = [x] = \mathbb{K}^\times \cdot x$$

Der Übergang von V zu $\mathbb{P}(V)$ heißt **Projektiv(is)ierung**.

Genau dann erzeugen zwei Vektoren $x, y \in V^\#$ dieselbe Gerade $\mathbb{K}x = \mathbb{K}y$, geschrieben $x \sim y$, wenn ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ mit $\lambda x = y$ existiert. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $V^\#$. Die Äquivalenzklasse $\mathbb{K}^\times \cdot x$ ist die von x aufgespannte Gerade (hier immer ohne den Nullpunkt 0). Der Quotientenraum $V^\# / \sim$ ist der oben definierte projektive Raum $\mathbb{P}(V)$. Kurz gesagt, als Slogan: Die Punkte von $\mathbb{P}(V)$ sind die Geraden von V .

Projektive Räume: homogene Koordinaten

Als kanonisches Beispiel betrachten wir den **Koordinatenraum**

$$V = \mathbb{K}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}.$$

Den **projektiven Raum** schreiben wir dann $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ mit

$$q : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n : (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \dots : x_n] = \mathbb{K}^\times \cdot x.$$

Diese Schreibweise nennen wir **homogene Koordinaten**, denn

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n] \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{K}^\times.$$

😊 Speziell im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ trägt \mathbb{K}^{n+1} die euklidische Topologie, $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist ein Teilraum, und $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ der Quotientenraum. Diese Räume $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ untersuchen wir im Folgenden genauer.

Diese Quotientenkonstruktion ist wunderbar einfach, konkret, explizit. Schwierig ist allein die globale Form des Quotientenraumes, dazu später. Die Projektivierung können wir auf jeden Vektorraum anwenden, auch auf unendlich-dimensionale Vektorräume und auf Untervektorräume.

Projektive Räume: Teilräume

Projektivierung respektiert Teilräume: Ist $U \leq V$ ein Untervektorraum, so operiert \mathbb{K}^\times auf der Teilmenge $U^\# \subseteq V^\#$, und wir erhalten $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$. Für die Koordinatenräume haben wir die kanonischen Einbettungen

$$\text{inc} : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1} : (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$$

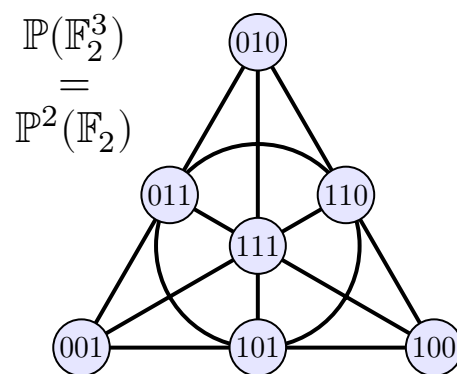
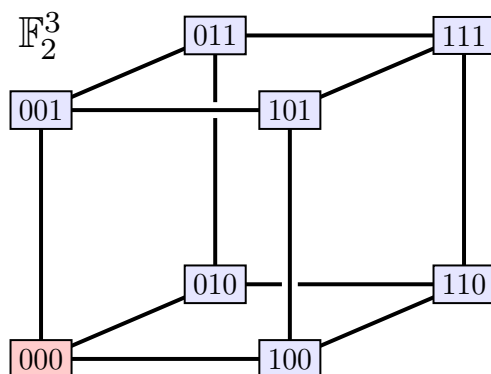
$$\text{inc} : \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n : [x_0 : \dots : x_{n-1}] \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : 0]$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{K}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^4 \longrightarrow \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{K}^1 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^3 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{K}\mathbb{P}^0 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}\mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}\mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}\mathbb{P}^3 \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Die allgemeine lineare Gruppe $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ operiert auf \mathbb{K}^{n+1} durch lineare Abbildungen und somit auch auf $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$. Vielfache operieren dabei gleich, wir erhalten daher eine Operation der **projektiven linearen Gruppe** $PGL_{n+1}(\mathbb{K}) := GL_{n+1}(\mathbb{K})/\mathbb{K}^\times$ auf dem projektiven Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$.

Projektive Räume: die Fano-Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$

Das kleinste Beispiel erhalten wir für den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ und $n = 2$:



Hier besteht $V = \mathbb{F}_2^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ aus acht Vektoren, also $V^\# = \mathbb{F}_2^3 \setminus \{0\}$ aus sieben. Jeder Vektor $v \in V^\#$ spannt die Gerade $\{0, v\} \subseteq \mathbb{F}_2^3$ auf, seine Äquivalenzklasse ist also $\{v\}$. Die sieben Geraden in \mathbb{F}_2^3 sind die Punkte des projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.

Die obige Illustration zeigt \mathbb{F}_2^3 als Würfel und $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$ als **Fano-Ebene**. Die sieben Ebenen in \mathbb{F}_2^3 betrachten wir als Geraden in $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$. Dies ist ein berühmt-elegantes Minimalmodell der **Inzidenzgeometrie**. Je zwei Punkte inzidieren mit genau einer Geraden, und umgekehrt.

Beispiel / Übung K2B: endliche projektive Räume

Wie viele Elemente hat $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$? Wie erklären Sie das geometrisch?

- 😊 Die Menge \mathbb{F}_q^{n+1} hat q^{n+1} Elemente. Jede Gerade $\mathbb{F}_q \cdot v$ hat q Elemente.
 😲 Dies ist keine Zerlegung, da alle Geraden den Nullpunkt enthalten.

Lösung: Die Menge $V^\# = \mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{0\}$ hat genau $q^{n+1} - 1$ Elemente.
 Jede Gerade $\mathbb{F}_q^\times v$ hat genau $q - 1$ Elemente. Dies ist eine Zerlegung!

$$\#\mathbb{P}(V) = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Beispiele:

$$\#\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) = \frac{8 - 1}{2 - 1} = 7 = 1 + 2 + 4$$

$$\#\mathbb{P}^3(\mathbb{F}_5) = \frac{625 - 1}{5 - 1} = 156 = 1 + 5 + 25 + 125$$

Dahinter steckt die Zellzerlegung $\mathbb{K}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{K}^n$.

- 😊 Wir nutzen dankend die Bahnengleichung, hier frei.
 Touristin fragt Schäfer: „Wie zählen Sie so schnell Ihre Schafe?“
 – „Das ist ganz einfach, ich zähle die Beine und teile durch vier.“
 😊 Hinter der geometrischen Summe steckt tatsächlich Geometrie!

$$\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1} = \{ [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n \mid x_n = 0 \},$$

$$\mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1} = \{ [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n \mid x_n = 1 \} \cong \mathbb{K}^n.$$

Aus der kanonischen **Filtrierung** $\mathbb{K}\mathbb{P}^0 \subseteq \mathbb{K}\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{K}\mathbb{P}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{K}\mathbb{P}^n$
 gewinnen wir die **Zellzerlegung** $\mathbb{K}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{K}^n$.

- 😊 Dies erklärt die Formel $\#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ geometrisch:
 Die abstrakten Zahlen $1, q, q^2, \dots, q^n$ entsprechen konkreten Objekte!
 Ja, Sie lesen richtig: Zahlen sind abstrakt, Objekte sind konkret.

- 😊 Das ist eine Illustration für algebraisch-geometrischen Zahlenzauber.
 Diese Art der **Konkretisierung** ist oft nützlich und überaus erfolgreich.
 Vornehm heißt dies **Kategorifizierung**: Unsere abstrakt-algebraische
 Rechnung wird in einer konkreten Kategorie erklärt und interpretiert.

Als motivierenden Ausblick nenne ich die folgenden Ergebnisse als Ziele:

Satz K2c: Lobgesang der projektiven Räume $\mathbb{R}P^n$ und $\mathbb{C}P^n$

Der projektive Raum $\mathbb{K}P^n$ ist eine unberandete Mannigfaltigkeit, zusammenhängend, der Dimension $\dim \mathbb{R}P^n = n$ und $\dim \mathbb{C}P^n = 2n$. (Wir zählen die reelle Dimension; $\mathbb{C}P^n$ ist komplex n -dimensional.)

Er ist ein Sphärenquotient, $\mathbb{R}P^n \cong S^n/S^0$ und $\mathbb{C}P^n \cong S^{2n+1}/S^1$, also kompakt. Die Koordinaten $\kappa : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}P^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$ kompaktifizieren \mathbb{K}^n mit Rand $\mathbb{K}P^{n-1}$ und heften eine einzige Zelle an.

Der kanonische Atlas $\mathcal{A} = (h_0, \dots, h_n)$ ist \mathcal{C}^∞ -glatt, analytisch, rational. Die Mfkt $\mathbb{R}P^n$ ist orientierbar für n ungerade, aber nicht-orientierbar für $n \geq 2$ gerade. Die Mfkt $\mathbb{C}P^n$ ist kanonisch orientiert in jeder Dimension n .

Kleine Beispiele: Für geschlossene Flächen gilt $F_0^+ = S^2$ und $F_0^- = \mathbb{R}P^2$. Für $n \neq 1$ gilt $\mathbb{R}P^n \not\cong S^n$ und $\mathbb{C}P^n \not\cong S^{2n}$, doch $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ und $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. Für Matrixgruppen gilt $GO_1 \mathbb{R} = S^0$ und $SO_2 \mathbb{R} \cong S^1$ und $SO_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{R}P^3$.

Für jeden endlichen Körper \mathbb{K} ist $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ kombinatorisch interessant. Geometrisch-topologisch interessieren wir uns vor allem für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Hier entfalten die projektiven Räume $\mathbb{K}P^n$ eine Vielfalt faszinierender Eigenschaften, sie sind ein idealer Test unserer Begriffe und Werkzeuge.

Jedoch, leicht anschaulich sind die projektiven Räume $\mathbb{K}P^n$ leider nicht. Das mag manche:r als Makel empfinden, einige meiden sie ängstlich oder verteufeln sie gar zu den Schrecken der sieben Weltmeere. Das ist natürlich übertrieben und völlig fehlgeleitet.

Sehen wir es positiv: Da wir $\mathbb{K}P^n$ zwar *global* definieren, aber meist nicht leicht als Ganzes überblicken können, eignet sich die *lokale* Sichtweise der Mannigfaltigkeiten hier als Hilfsmittel und ideales Denkwerkzeug. Dies werden wir daher erfolgreich einsetzen, üben und vertiefen.

Zudem werden hier nahezu alle topologischen Begriffe und Techniken mobilisiert: Einbettungen, Quotienten, Kompakt-Hausdorff-Kriterium, Kompaktifizieren und Verkleben, uvm. Außerdem hat $\mathbb{K}P^n$ neben seiner geometrischen Anwendung auch physikalische Bedeutung.

Die n -dimensionale Sphäre ist der Teilraum

$$S^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Die kanonische Einbettung $\text{inc} : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (x, 0)$ besichert uns:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{R}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\text{inc}} & \dots & (\mathbb{R}\text{-Hyperebene}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\ S^0 & \xrightarrow{\text{inc}} & S^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & S^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & S^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & \dots & (\text{Äquator/Schnitt}) \end{array}$$

Jede Sphäre ungerader Dimension $n = 2m + 1$ erhalten wir als Teilraum

$$S^{2m+1} = \{ (z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} \mid |z_0|^2 + \dots + |z_m|^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{C}^{m+1}.$$

Die kanonische Einbettung $\text{inc} : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} : z \mapsto (z, 0)$ besichert uns:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{C}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^4 & \xrightarrow{\text{inc}} & \dots & (\mathbb{C}\text{-Hyperebene}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\ S^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & S^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & S^5 & \xrightarrow{\text{inc}} & S^7 & \xrightarrow{\text{inc}} & \dots & (\text{Schnittmenge}) \end{array}$$

Im Raum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ nutzen wir Polarkoordinaten $\mathbb{R}_{>0} \times S^n$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightleftharpoons[\text{rs} \mapsto (r,s)]{\text{x} \mapsto (|x|, x/|x|)} & \mathbb{R}_{>0} \times S^n \\ \downarrow q & \swarrow \text{inc} & \downarrow \text{pr}_2 \\ (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\cong} & S^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightleftharpoons[g^{-1}]{g} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \downarrow \text{ret} & \swarrow \text{inc} & \downarrow \text{ret} \\ S^n & \xrightarrow[\cong]{\bar{g}} & S^n \end{array}$$

Jeder lineare Automorphismus $g \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ induziert einen Homöomorphismus $\bar{g} : S^n \rightarrow S^n : x \mapsto g(x)/|g(x)|$ mit $r \circ g = \bar{g} \circ r$. Diese Operation $GL_{n+1}(\mathbb{R}) \curvearrowright S^n$ haben wir in J3E bereits genutzt.

Positive Vielfache $\lambda g \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ operieren dabei gleich, wir erhalten daher eine Operation der Quotientengruppe $GL_{n+1}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$.

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ als Sphärenquotient

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightleftharpoons[\text{inc}]{\text{ret}} & \mathbb{S}^n \\
 \downarrow q & \searrow & \downarrow p \\
 \mathbb{R}\mathbb{P}^n & \xrightleftharpoons[g]{f} & \mathbb{S}^n / \mathbb{S}^0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightleftharpoons[\text{inc}]{\text{ret}} & \mathbb{S}^{2n+1} \\
 \downarrow q & \searrow & \downarrow p \\
 \mathbb{C}\mathbb{P}^n & \xrightleftharpoons[k]{h} & \mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1
 \end{array}$$

😊 Wir nutzen viermal die universelle Eigenschaft des Quotienten: Die obere Zeile faktorisiert wie angegeben und liefert in der unteren $(f, g) : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{S}^n / \mathbb{S}^0$ mit $f : \mathbb{R}^\times \cdot x \mapsto \mathbb{S}^0 \cdot x / |x|$ und $g : \mathbb{S}^0 \cdot a \mapsto \mathbb{R}^\times \cdot a$ bzw. $(h, k) : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$ mit $h : \mathbb{C}^\times \cdot x \mapsto \mathbb{S}^1 \cdot x / |x|$ und $k : \mathbb{S}^1 \cdot a \mapsto \mathbb{C}^\times \cdot a$.

Übung K2D: Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ ist Quotient einer Sphäre.

In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ haben wir $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{S}^n / \mathbb{S}^0$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$. Insbesondere sind alle projektiven Räume $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ kompakt (F1j).

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ als Sphärenquotient

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir die folgenden kanonischen Einbettungen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^4 \longrightarrow \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{S}^0 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^3 \longrightarrow \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{R}\mathbb{P}^0 & \xrightarrow{+1\text{-Zelle}} & \mathbb{R}\mathbb{P}^1 & \xrightarrow{+2\text{-Zelle}} & \mathbb{R}\mathbb{P}^2 & \xrightarrow{+3\text{-Zelle}} & \mathbb{R}\mathbb{P}^3 \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Hierbei entsteht $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ aus $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ durch Anheften einer n -Zelle \mathbb{D}^n .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{C}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^4 \longrightarrow \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^5 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^7 \longrightarrow \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}\mathbb{P}^0 & \xrightarrow{+2\text{-Zelle}} & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & \xrightarrow{+4\text{-Zelle}} & \mathbb{C}\mathbb{P}^2 & \xrightarrow{+6\text{-Zelle}} & \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Hierbei entsteht $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ aus $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ durch Anheften einer $2n$ -Zelle \mathbb{D}^{2n} .

Für die Euler-Charakteristik folgt $\chi(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \frac{1+(-1)^n}{2}$ und $\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 1 + n$.

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ als euklidischer Teilraum

Zu jedem Vektor $s \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ definieren wir $F(s) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ als

- (a) die orthogonale Projektion $F(s) : x \mapsto \frac{s \langle s | x \rangle}{\langle s | s \rangle},$
 (b) die orthogonale Projektion $F(s) : x \mapsto x - \frac{s \langle s | x \rangle}{\langle s | s \rangle},$
 (c) die Hyperebenenspiegelung $F(s) : x \mapsto x - 2 \frac{s \langle s | x \rangle}{\langle s | s \rangle}.$

Die Abbildung $F(s) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ entspricht folgender Matrix:

- (a) $f(s) = \frac{s \cdot \bar{s}^\top}{\langle s | s \rangle}$ mit $\mathbb{K}s = \text{Ker}[f(s) - 1_{n \times n}],$
 (b) $f(s) = 1_{n \times n} - \frac{s \cdot \bar{s}^\top}{\langle s | s \rangle}$ mit $\mathbb{K}s = \text{Ker } f(s),$
 (c) $f(s) = 1_{n \times n} - 2 \frac{s \cdot \bar{s}^\top}{\langle s | s \rangle}$ mit $\mathbb{K}s = \text{Ker}[f(s) + 1_{n \times n}].$

Die so definierte Abbildung $f : \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ ist demnach stetig!

Übung K2E: der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ als euklidischer Teilraum

Wir erhalten die euklidische Einbettung $\bar{f} : \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{K}^{n \times n} : [s] \mapsto f(s)$ dank kanonischer Faktorisierung und Kompakt-Hausdorff-Kriterium. Insbesondere ist der Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ hausdorffsch und zweitabzählbar (E1G), sogar metrisierbar durch $d([s], [s']) = |f(s) - f(s')|$ dank Norm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ als euklidischer Teilraum

Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ eine Mannigfaltigkeit ist. Lokale Karten ergeben sich kanonisch und sind erfreulich leicht, wie wir gleich sehen. Zur Definition K1B gehört aber auch die Hausdorff-Eigenschaft und die Zweitabzählbarkeit. Der Raum $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ hat diese guten Eigenschaften offensichtlich, doch diese können bei Quotientenbildung verloren gehen!

Erinnerung: Der Raum $X = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}$ ist hausdorffsch, nicht jedoch die verzweigte Gerade $Y = X / \sim$ (E2E). Der Raum \mathbb{R} ist zweitabzählbar, das unendliche Bouquet $\mathbb{R} // \mathbb{Z}$ jedoch ist nicht einmal erstabzählbar (E2w).

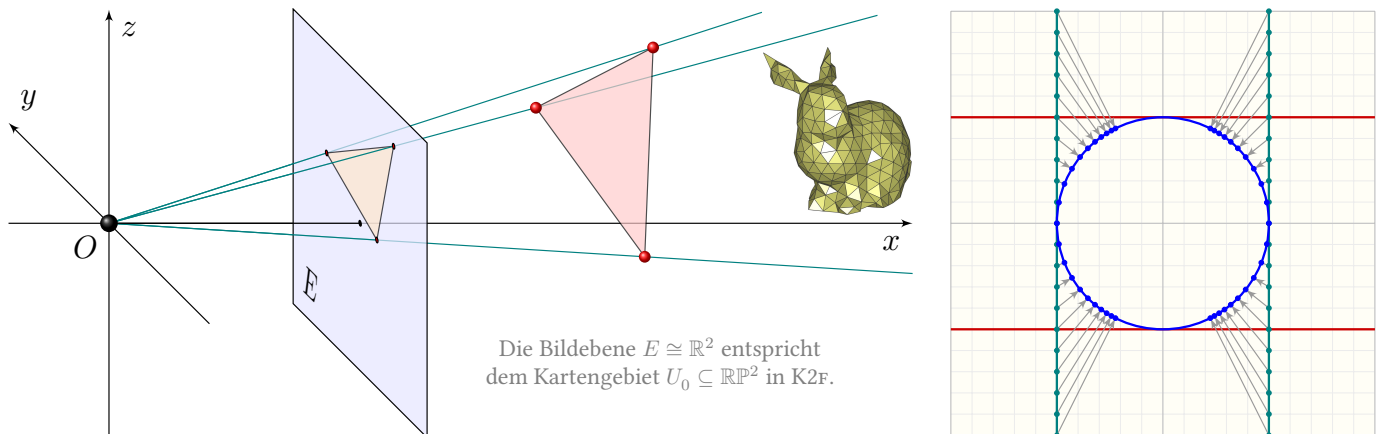
Für den projektiven Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / (\mathbb{K} \setminus \{0\})$ müssen wir daher befürchten, dass auch bei diesem Quotienten gute topologische Eigenschaften zerbrechen könnten. Dies tritt glücklicherweise nicht ein, genau das beweisen wir effizient-elegant durch die obige Einbettung

$$\bar{f} : \mathbb{K}\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{(n+1) \times (n+1)} : [s] \mapsto f(s).$$

Die kanonische Faktorisierung E2H von f liefert die stetige Injektion \bar{f} . Dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L ist \bar{f} eine Einbettung.

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ als Mannigfaltigkeit

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zeigen, dass der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ eine wunderschöne Mannigfaltigkeit ist!



Die ursprüngliche Idee der Projektivierung liefert uns Karten für die Sphäre \mathbb{S}^n , siehe K115, und den projektiven Raum $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, siehe K2F. Die folgende Übung führt dies in epischer Schönheit aus.

Die Fragen leiten Sie schrittweise an und bieten Ihnen die wunderbare Gelegenheit, alle nötigen Begriffe hier zu wiederholen und einzuüben. Fingerfertigkeit und Verständnis trainieren Sie mit Stift und Papier!

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ als Mannigfaltigkeit

Übung K2F: Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit.

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit:

- 0 Er ist kompakt (K2D), hausdorffsch und zweitabzählbar (K2E).
- 1 Darin ist $U_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i = 1\}$ offen.
- 2 Es gilt $\mathbb{K}\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ mit den kanonischen Karten $(h_i, k_i) : U_i \cong \mathbb{K}^n$ gegeben durch $k_i : (y_1, \dots, y_n) \mapsto [y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n]$ und $h_i : [x_0 : \dots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \dots : x_n] \mapsto x_i^{-1}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.
- 3 Als Komplement von U_n im Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ erhalten wir $\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$.

Wir schauen noch etwas genauer hin:

- 4 Bestimmen Sie explizit die Kartenwechsel $h_{ij} : \mathbb{K}^n \supseteq V_{ij} \xrightarrow{\cong} V_{ji} \subseteq \mathbb{K}^n$.
- 5 Ist $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ mit dem Atlas $\mathcal{A} = (h_0, \dots, h_n)$ eine glatte Mannigfaltigkeit?
- 6 Ist der Atlas \mathcal{A} orientiert? Ist die Mannigfaltigkeit $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ orientierbar?
- 7 Für $0 \leq m \leq n$ ist $\mathbb{K}\mathbb{P}^m \subseteq \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit.

😊 Alle Daten liegen explizit vor: Es genügt sorgsames Nachrechnen!

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ als Kompaktifizierung

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ ist kompakt (K2D) und hausdorffsch (K2E).

Übung K2c: der projektive Raum als Kompaktifizierung $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n$

Die Einbettung $\kappa = k_n : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} U_n \subseteq \mathbb{K}\mathbb{P}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$ ist eine Hausdorff-Kompaktifizierung (F4A) mit $\mathbb{K}\mathbb{P}^n = \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1} \cup \kappa(\mathbb{K}^n)$.

Im Falle $n = 1$ ist dies Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung (F4D):

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\cong} U_1 \hookrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1 = \mathbb{R}\mathbb{P}^0 \cup \kappa(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{R}} \cong S^1$$

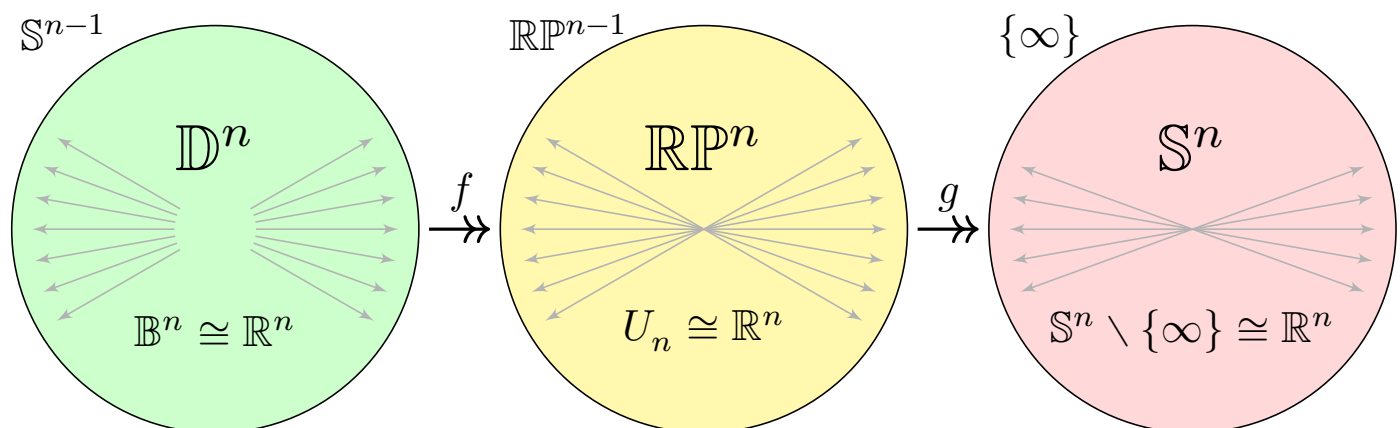
$$\mathbb{C} \xrightarrow{\cong} U_1 \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}\mathbb{P}^0 \cup \kappa(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}} \cong S^2$$

Lösung: Das Bild $\kappa(\mathbb{K}^n)$ ist dicht in $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$: Jeder Punkt in $\mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus \kappa(\mathbb{K}^n)$ ist von der Form $[x_1 : \dots : x_n : 0]$ mit $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ und somit Grenzwert (Fernpunkt) der Geraden $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n : \lambda \mapsto [\lambda x_1 : \dots : \lambda x_n : 1]$ für $\lambda \rightarrow \infty$.

Besonders übersichtlich ist $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$: Hier wird nur ein Punkt $\infty = [1 : 0]$ hinzugefügt. Wir erhalten die Einpunktkompaktifizierung (F4D)!

😊 Die Homöomorphie $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \cong S^1$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2$ wollen wir noch genauer untersuchen und dazu noch schönere Homöomorphismen konstruieren!

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ als Kompaktifizierung



Zu \mathbb{R}^n kennen Sie die Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}^n \setminus \{\infty\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ sowie die Ballkompaktifizierung $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ mit ihrem „unendlich fernen Rand“ $\mathbb{D}^n \setminus \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Genau dazwischen sitzt der projektive Raum $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} U_n \hookrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ mit seinen „Fernpunkten“ $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus U_n = \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$.

Wir haben $\mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n$, jeweils durch Identifikation auf dem Rand. Die Einpunktkompaktifizierung ist terminal, siehe F4G, speziell F1R.

Bei $\mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ identifizieren wir gegenüberliegende Punkte $\pm x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

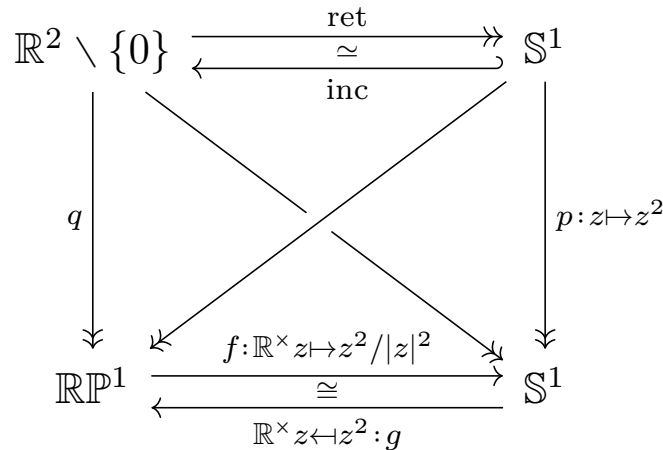
Genauso für $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ mit $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}^{2n} \hookrightarrow \mathbb{D}^{2n}$, auf dem Rand \mathbb{S}^{2n-1} operiert S^1 .

Übung K2κ: der reell-eindimensionale Sonderfall $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$

Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, möglichst glatt.

⚠ Der Fall $n = 1$ ist die Ausnahme. Für $n \neq 1$ gilt $S^n / \{\pm\} \not\cong S^n$!

Lösung: Besonders elegant und einfach ist folgende Konstruktion:

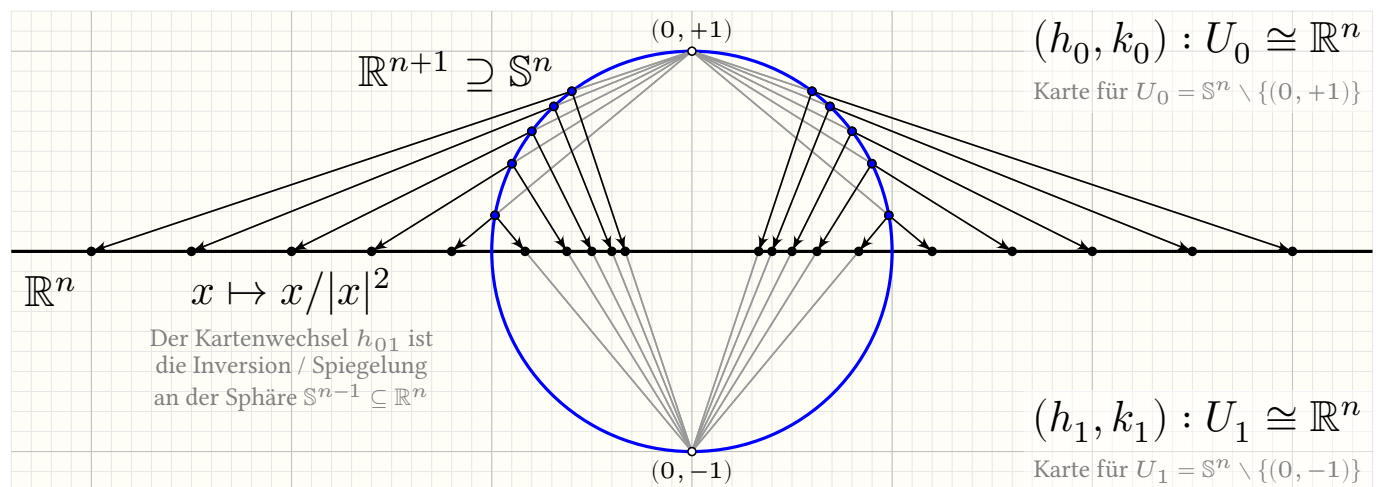


Alternativ gelingt Zusammenschlagen $[-1, 1] // \{-1, 1\} \cong S^1$ (K2J).
 Leider erhalten wir damit zunächst nur einen Homöomorphismus.

Erinnerung: ein minimaler Atlas für die Sphäre S^n

Beispiel / Übung K1: ein minimaler Atlas für die Sphäre S^n

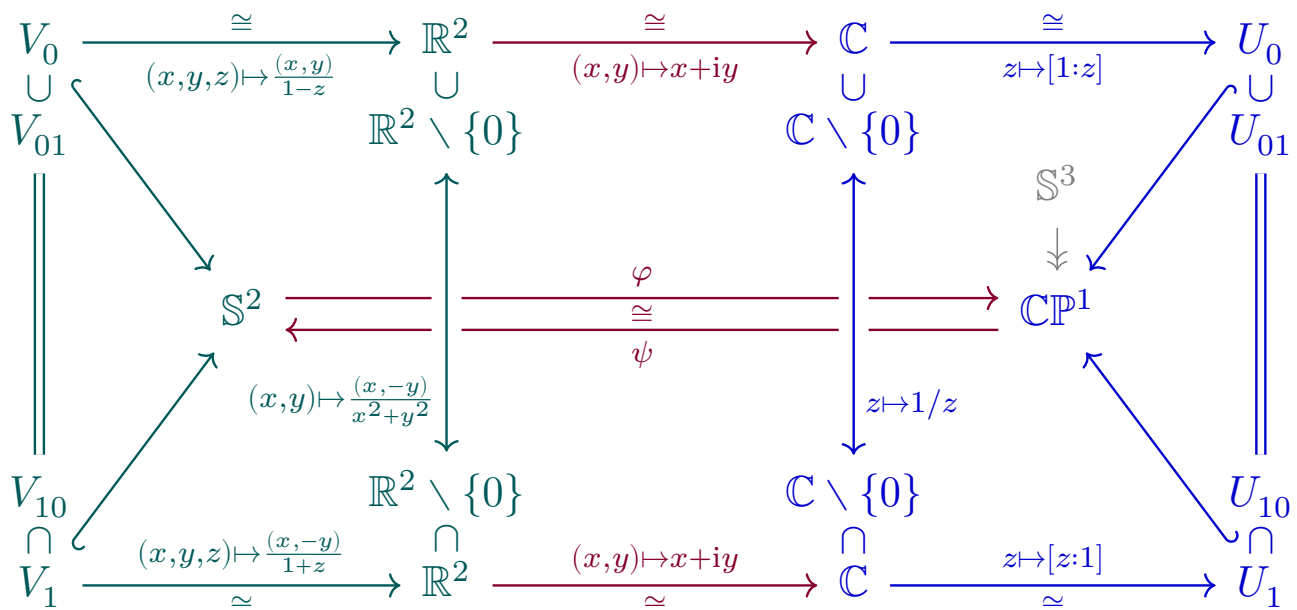
Konstruieren Sie für die Sphäre S^n einen glatten und orientierten Atlas.



Lösung: Unser Atlas $\mathcal{A} = (h_0, h_1)$ besteht aus zwei stereographischen Projektionen $h_0 : V_0 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ bzgl. Nordpol und $h_1 : V_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ bzgl. Südpol. Der Kartenwechsel $x \mapsto x / |x|^2$ ist glatt, zudem analytisch, sogar rational. Zur Orientierung müssen wir eine der beiden spiegeln, sagen wir h_1 .

Übung K2L: der komplex-eindimensionale Sonderfall $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$

Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$, möglichst glatt.



Links steht ein Atlas für S^2 (K1I), rechts steht ein Atlas für $\mathbb{C}P^1$ (K2F). Verkleben (E1P) ergibt $(\varphi, \psi) : S^2 \cong \mathbb{C}P^1$. Dasselbe gilt für $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

Die Hopf-Faserung $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$ aka Bloch-Sphäre

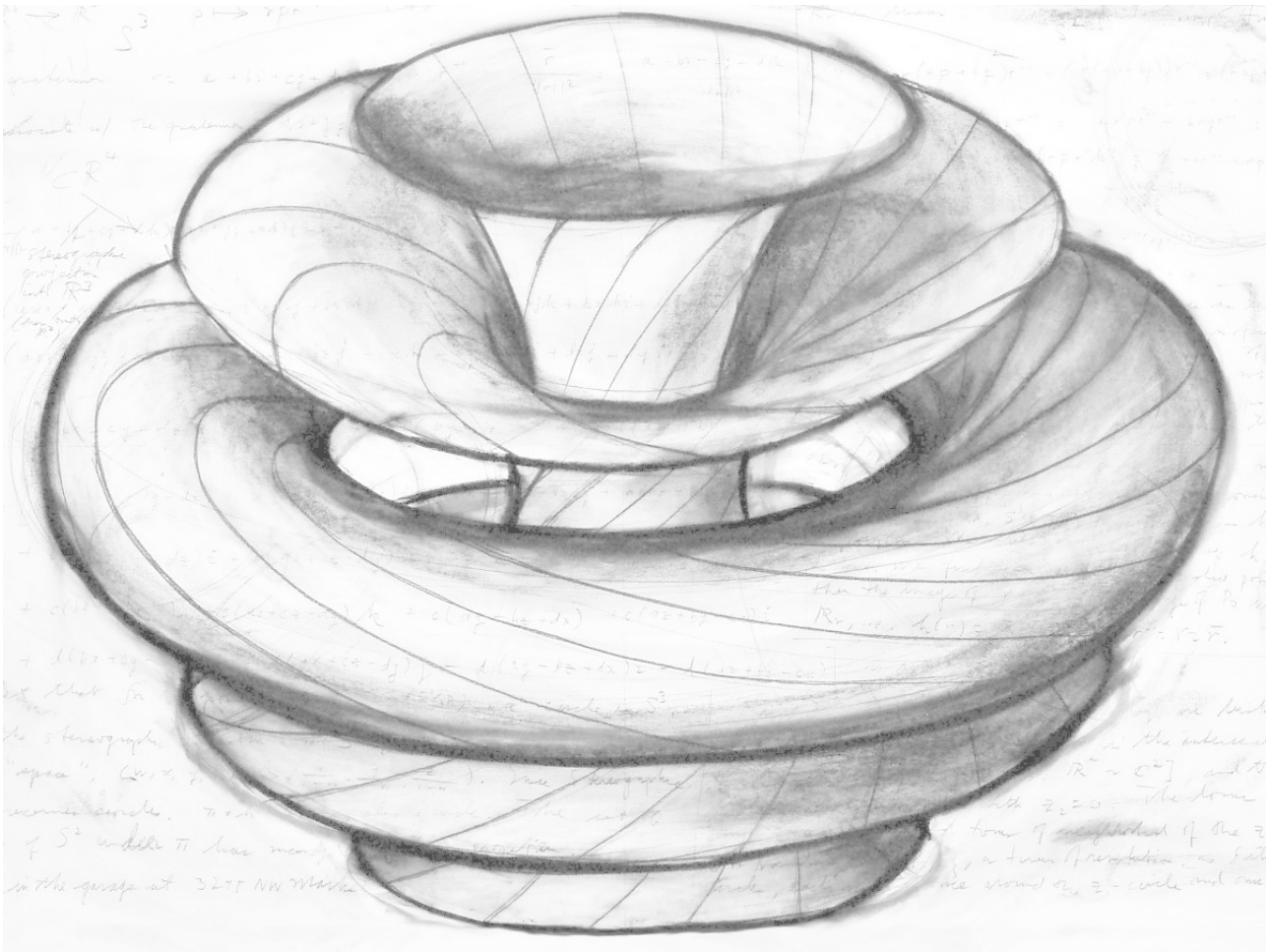
Übung: Global und wunderbar explizit erhalten wir $p : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \cong S^2$,

$$p(a, b, c, d) = (2ac + 2bd, 2ad - 2bc, c^2 + d^2 - a^2 - b^2).$$

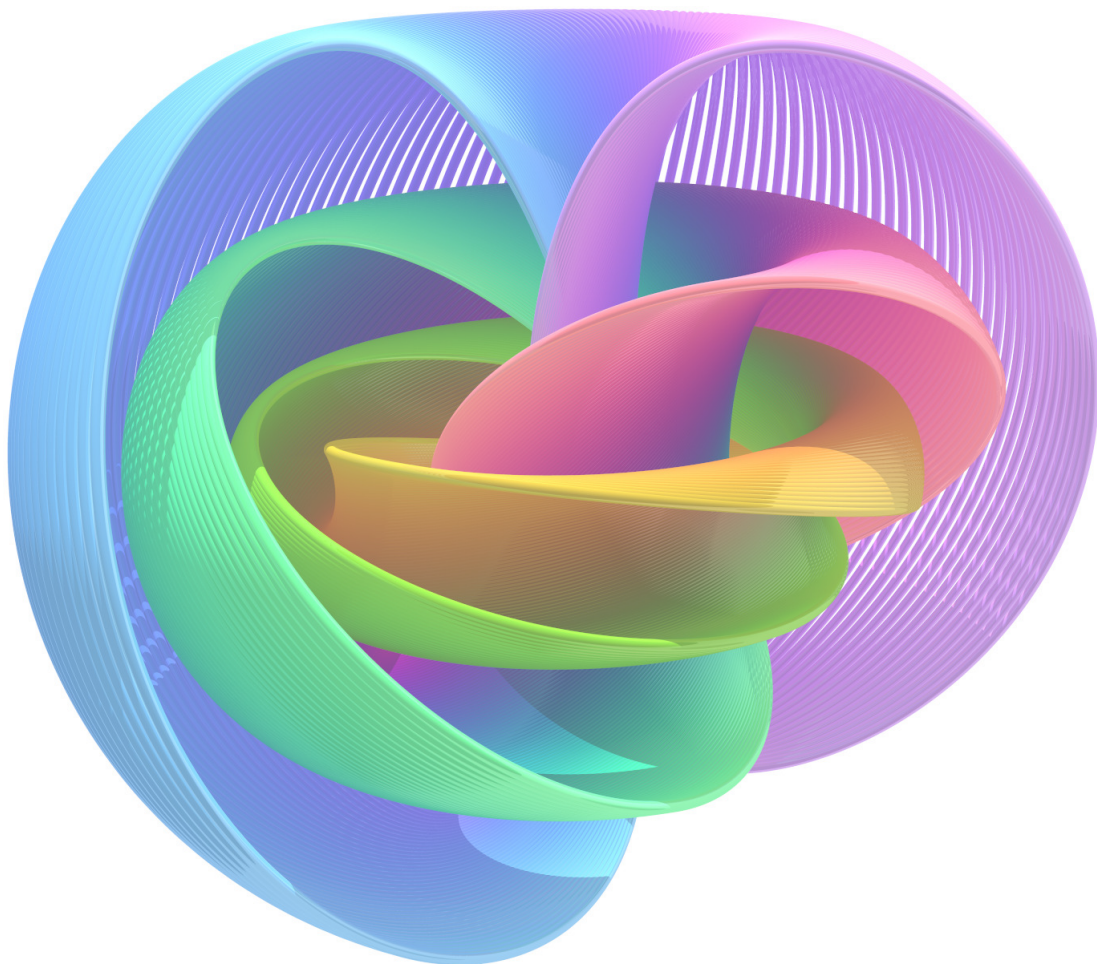
Diese Polynomfunktion $p : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist stetig. Die S^1 -Invarianz ist klar: Sie erhält das Skalarprodukt $ac + bd$, das Kreuzprodukt $ad - bc$ und die Normquadrate $a^2 + b^2$ und $c^2 + d^2$. Die Bildmenge erfüllt $p(S^3) \subseteq S^2$, denn $(2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 1$. Die Surjektivität $p(S^3) = S^2$ und Homöomorphie $\bar{p} : S^3/S^1 \cong S^2$ scheinen zunächst schwer... doch dann rettet uns $p = \psi \circ q$. Rechnen Sie es nach!

Bemerkung: Für $k < n$ wissen wir bereits $[S^k, S^n] = \{*\}$ (I4B).

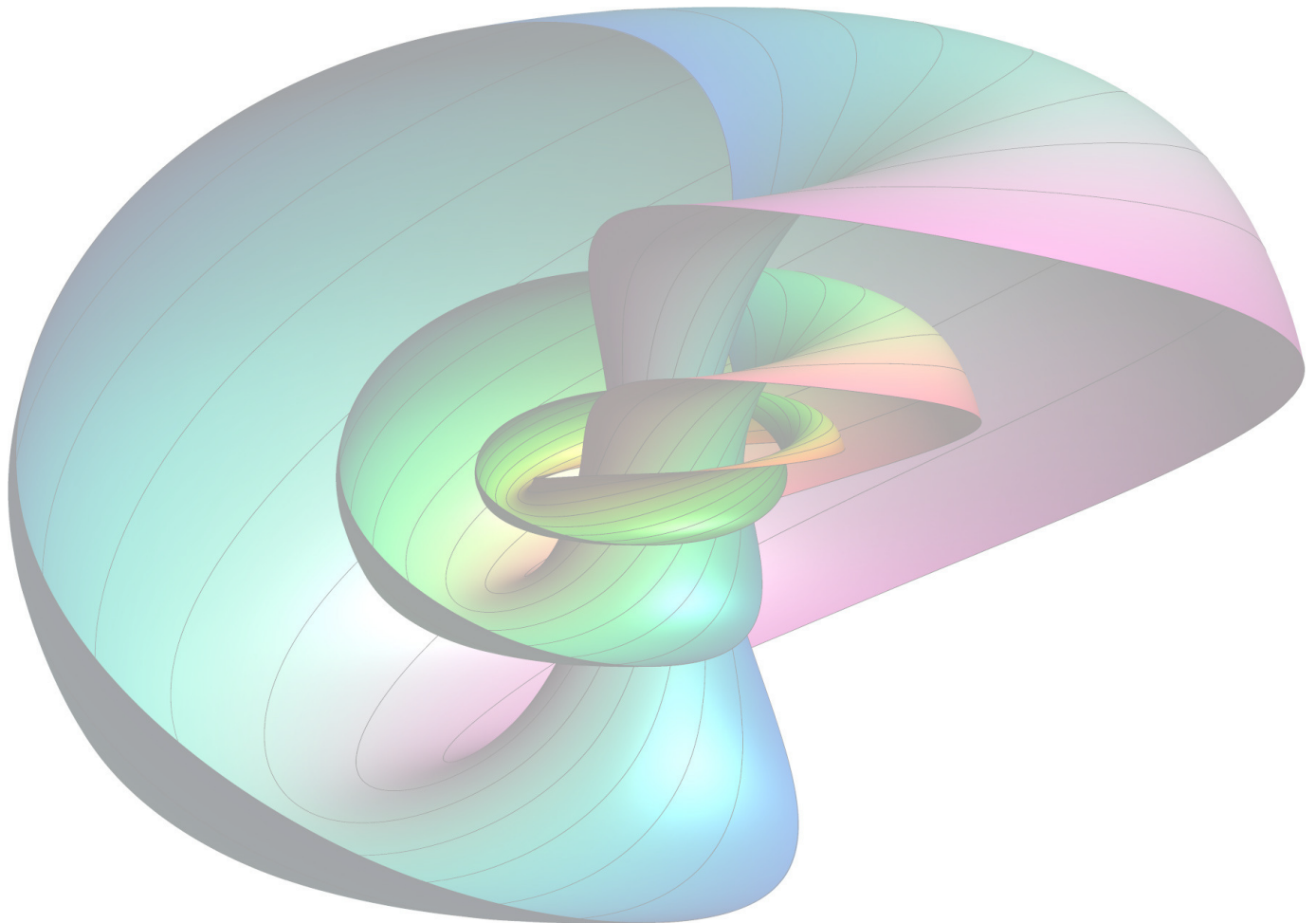
Im Falle $k = n$ haben wir $\deg : [S^n, S^n] \cong \mathbb{Z}$ (J3A). Für $k > n$ wurde zunächst $[S^k, S^n] = \{*\}$ vermutet. Für $n = 1$ stimmt dies tatsächlich, dank Hochhebung auf die universelle Überlagerung $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi it}$. Für $n \geq 2$ blieb die Frage zunächst offen. Heinz Hopf zeigte 1931, dass $p : S^3 \rightarrow S^2$ nicht zusammenziehbar ist, kurz $p \neq *$, somit $[S^3, S^2] \neq \{*\}$. Diese Sensation öffnete der Homotopietheorie eine neue Welt.



Bildquelle: Lun-Yi Tsai / news.tufts.edu/magazine/fall2009



Bildquelle: wikimedia / nilesjohnson.net / animiert youtu.be/AkotMPGFJYK



Die Konstruktion der komplex-projektiven Geraden $\mathbb{C}P^1 = S^3/S^1$ führt zur **Hopf-Faserung** $S^1 \simeq S^3 \twoheadrightarrow S^2$. Zuerst beschrieben und untersucht wurde dieses faszinierende Objekt von Heinz Hopf: *Über die Abbildungen der dreidim. Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. 104 (1931) 637–665.

Übung: (1) Wie liegen die S^1 -Orbits in S^3 ? un/verschlungen? Zeichnen Sie einige Orbits in stereographischer Projektion $S^3 \setminus \{(0, 0, 0, 1)\} \simeq \mathbb{R}^3$, so wie in obigen Graphiken so eindrucklich und ästhetisch dargestellt.

(2) Zum Kontrast: Zerlegen Sie die Sphäre S^3 in Kreislinien, die sich nicht paarweise verschlingen. (Konkret: Zerlegen Sie \mathbb{R}^3 in eine Gerade und darum unverschlungene Kreislinien wie beim Magnetfeld eines Leiters.)

(3) Wer sich das bildgewaltig vorführen lassen möchte, dem empfehle ich die wunderschönen Videos von Étienne Ghys *et al.*, youtu.be/SxDxUrBSZBM, und von Niles Johnson, youtu.be/AKotMPGFJYk. Auch in der Erzeugung der Graphiken steckt viel schöne Mathematik: Wie würden Sie das anstellen? Versuchen Sie es gerne, dabei lernen Sie Projektivierung, homogene Koordinaten und alle obigen Techniken aus eigener Erfahrung.

Die **klassische Physik** beschreibt den Zustand eines Systems durch deterministische Größen, etwa Massen $m_k \in \mathbb{R}$ mit Positionen $u_k \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeiten $v_k \in \mathbb{R}^3$. **Newtons Himmelsmechanik** können wir so elegant als ein Differentialgleichungssystem formulieren:

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Die **Quantenmechanik** beschreibt jeden Zustand durch einen Vektor in einem \mathbb{C} -Vektorraum und projiziert diese zu Wahrscheinlichkeiten. Damit modelliert sie Zufall mit Superposition, Wellenphänomene, etc. Warum diese Beschreibung? Weil sie erfolgreich erklärt und vorhersagt!

Als kleinste Informationseinheit kann ein **Bit** nur den Zustand 0 oder 1 annehmen. Die Quantenmechanik erlaubt zudem **Überlagerungen**: Jeder Zustand ist eine Linearkombination $s = a|0\rangle + b|1\rangle$ mit komplexen Amplituden $a, b \in \mathbb{C}$, wobei $(a, b) \neq (0, 0)$. Die möglichen Zustände und der Nullvektor bilden somit einen zweidimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum.

Physikalisch **messbar** sind jedoch nicht der Zustand $s = a|0\rangle + b|1\rangle$ oder die Amplituden $a, b \in \mathbb{C}$, sondern nur die Absolutquadrate $|a|^2, |b|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: Diese bestimmen die Wkt, dass der Zustand 0 bzw. 1 gemessen wird.

Das Längenquadrat des Zustandsvektors $s \neq 0$ ist $|s|^2 = |a|^2 + |b|^2 > 0$. Normiert zu $|s| = 1$ erhalten wir Wahrscheinlichkeiten: $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Der **normierte Zustand** s mit $|s| = 1$ liegt demnach auf der 3-Sphäre:

$$\mathbb{S}^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\} \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{R}_{>0}$$

Auch die Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{S}^1$ ändert den Zustand nur unwesentlich; sie bewirkt eine **globale Phasenverschiebung** und ist nicht messbar. Wir bilden den Quotienten nicht nur modulo $\mathbb{R}_{>0}$, sondern modulo \mathbb{C}^\times :

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{S}^3 / \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$$

Die komplex-projektive Gerade $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ aka **Bloch-Sphäre** beschreibt den Quantenzustand jedes Systems mit genau zwei Basiszuständen. Dies ist die Grundeinheit der Quanteninformation und heißt **Qubit**. Für $n + 1$ orthogonale Basiszuständen erhalten wir entsprechend $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

So manche:r stöhnt an dieser Stelle: „Jetzt übertreibt der gute Prof: Erst sollen wir Mathematik lernen, jetzt auch noch Quantenmechanik!“

Ja, bitte nehmen Sie mögliche Anwendungen interessiert zur Kenntnis! Der Blick über den Tellerrand lohnt sich, gerade an der Uni Stuttgart. Sind solche Exkurse übertrieben? ablenkend? oder gar überfordernd? Ich nenne drei Gründe für akademische Neugier und Abenteuerlust:

1. Wir sollten uns freuen, dass mathematische Begriffe und Techniken so überraschend vielseitig anwendbar sind: Was Sie in einem Gebiet lernen, hier Topologie, können Sie in anderen Gebieten wiederverwenden.
2. Speziell im Fall des Quantencomputing ist realistisch absehbar, dass dies Ihr Leben nachhaltig beeinflussen wird. Ich will daher nicht kommentarlos an diesem wichtigen Anwendungsbeispiel vorübergehen.
3. Das Studium mathematischer Grundlagen ist fundamental wichtig. Wir wollen abstrahieren, um zahlreiche Einzelfälle zusammenzufassen, zugleich auch motivieren, konkretisieren, illustrieren. Nur so geht es!

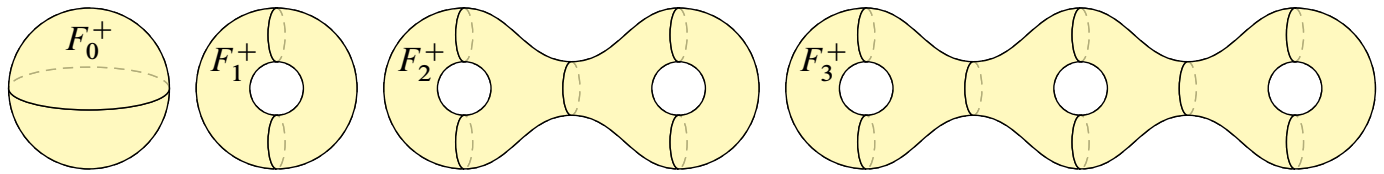
Der Spagat zwischen diesen beiden Polen ist eine fragile Kunst: Einerseits die abstrakten Grundlagen: einfach, elegant, allgemein. Andererseits die konkreten Einzelfälle: verwirrend, sonderbar, speziell.

Manche vertauschen hier die Adjektive, das halte ich für einen Fehler. Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle. Studierende wünschen zu Recht motivierende Beispiele, Querverbindung zwischen den Themen und auch Bezug zu möglichen Anwendungen. Wir sollten uns also über jede Gelegenheit freuen, wo dies gelingt!

Wird der Wunsch nach Beispielen und Anwendungen jedoch ernsthaft erfüllt, so fangen erfahrungsgemäß auch immer einige an zu jammern: Der Ruf nach Anwendungsbeispielen entsprang nicht ihrer Neugier, sondern der naiven Sehnsucht nach Einfachheit. Die ist oft unerfüllbar: Ehrliche Anwendungen sind meist nicht leichter zu verstehen, sondern komplizierter als die übergeordnete Theorie. Sie benötigen beides!

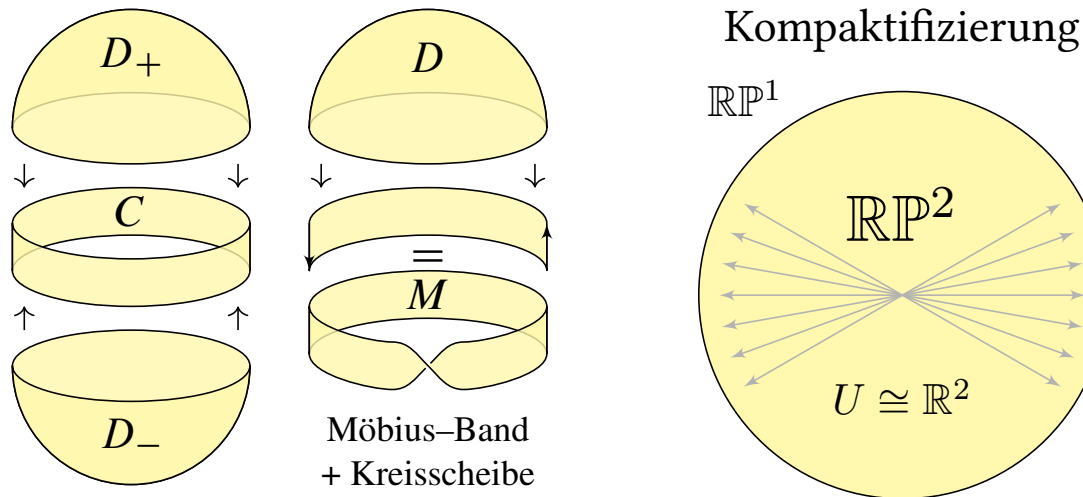
Be careful what you wish for, it might just come true!

Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \{\pm\}$



Wir identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$ von F_g^+ .
Der Quotientenraum ist die **nicht-orientierbare Fläche** $F_g^- := F_g^+ / \{\pm\}$.

Berühmtestes Beispiel ist die **reell-projektive Ebene** $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2 / \{\pm\}$.



Anheften von Zellen und Euler-Charakteristik

Übung K2j: rekursiver Aufbau durch Anheften von Zellen

- (1) Wir erhalten die Räume $\{*\} = \mathbb{RP}^0 \subseteq \mathbb{RP}^1 \subseteq \mathbb{RP}^2 \subseteq \mathbb{RP}^3 \subseteq \dots$ durch Anheften je einer Zelle \mathbb{D}^n längs ihres Randes, $\mathbb{D}^n \supseteq \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$.
- (2) Für $n = 1$ erhalten wir erneut $\mathbb{S}^1 \leftarrow \mathbb{D}^1 // \mathbb{S}^0 \simeq \mathbb{RP}^1$ (Satz E2T, K2G).
- (3) Wir erhalten die Räume $\{*\} = \mathbb{CP}^0 \subseteq \mathbb{CP}^1 \subseteq \mathbb{CP}^2 \subseteq \mathbb{CP}^3 \subseteq \dots$ durch Anheften je einer Zelle \mathbb{D}^{2n} längs des Randes, $\mathbb{D}^{2n} \supseteq \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$.
- (4) Für $n = 1$ erhalten wir erneut $\mathbb{S}^2 \leftarrow \mathbb{D}^2 // \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{CP}^1$ (Satz F1R, K2G).
- (5) Die Euler-Charakteristik ist $\chi(\mathbb{RP}^n) = \frac{1+(-1)^n}{2}$ und $\chi(\mathbb{CP}^n) = 1 + n$. Insbesondere gilt $\mathbb{RP}^n \not\cong \mathbb{S}^n$ für n gerade und $\mathbb{CP}^n \not\cong \mathbb{S}^{2n}$ für alle $n \neq 1$.

😊 Der Aufbau eines Raumes X als **Zellkomplex** durch sukzessives Anheften von Zellen ist eine extrem effiziente Beschreibung. Für \mathbb{RP}^2 und \mathbb{CP}^n haben wir dies oben graphisch dargestellt. Solche Zellkomplexe nutzen wir in der Algebraischen Topologie, etwa zur Berechnung der Fundamentalgruppe $\pi(X, x_0)$ sowie später der Homologie $H_*(X)$ und der Cohomologie $H^*(X)$. Hiervon kündigt die Euler-Charakteristik.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{+n\text{-Zelle}} & \mathbb{S}_+^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n & & \mathbb{S}^{2n-1} & \xrightarrow{+2n\text{-Zelle}} & \mathbb{S}_+^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{2n+1} \\
 \downarrow q_{n-1} & & \downarrow q_n & & \downarrow q_n & & \downarrow q_{n-1} & & \downarrow q_n & & \downarrow q_n \\
 \mathbb{R}P^{n-1} & \xrightarrow{+n\text{-Zelle}} & \mathbb{R}P^n & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R}P^n & & \mathbb{C}P^{n-1} & \xrightarrow{+2n\text{-Zelle}} & \mathbb{C}P^n & \xlongequal{\quad} & \mathbb{C}P^n
 \end{array}$$

Lösung: (1) Reeller Fall: In \mathbb{S}^n betrachten wir die obere Hemisphäre:

$$\mathbb{S}_+^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$$

$$\mathbb{D}^n \cong \mathbb{S}_+^n : (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - |x_0|^2 - \dots - |x_{n-1}|^2})$$

$$\partial\mathbb{S}_+^n = \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^n = \{ (x_0, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{S}^n \}$$

Die Einschränkung der Quotientenabbildung $q_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ auf die n -Zelle $\mathbb{S}_+^n \cong \mathbb{D}^n$ ist stetig und surjektiv, also eine Identifizierung dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium (F1L). Sie identifiziert dabei nur Punkte auf dem Rand $\partial\mathbb{S}_+^n = \mathbb{S}^{n-1}$, und zwar gemäß $q_{n-1} : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$.

Wir erhalten so die behauptete Verheftung einer n -Zelle (E3J):

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup q_n(\mathbb{S}_+^n) \cong \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{q_{n-1}} \mathbb{D}^n$$

😊 Oben haben wir das Anheften als Kompaktifizierung gesehen (K220). Die Skizze macht das Vorgehen anschaulich, die Formel liefert Präzision. Ebenso wie den reell-projektiven Raum $\mathbb{R}P^n \supseteq \mathbb{R}P^{n-1}$ erhalten wir auch den komplex-projektiven Raum $\mathbb{C}P^n \supseteq \mathbb{C}P^{n-1}$ durch Verheften:

(2) Komplexer Fall: In $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ betrachten wir ebenso

$$\mathbb{S}_+^{2n} = \{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n+1} \mid z_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$$

$$\mathbb{D}^{2n} \cong \mathbb{S}_+^{2n} : (z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto (z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - |z_0|^2 - \dots - |z_{n-1}|^2})$$

$$\partial\mathbb{S}_+^{2n} = \partial\mathbb{D}^{2n} = \mathbb{S}^{2n-1} = \mathbb{S}^{2n+1} \cap \mathbb{C}^n = \{ (z_0, \dots, z_{n-1}, 0) \in \mathbb{S}^{2n+1} \}.$$

Die Einschränkung der Quotientenabbildung $q_n : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ auf die $2n$ -Zelle $\mathbb{S}_+^{2n} \cong \mathbb{D}^{2n}$ ist stetig und surjektiv, also eine Identifizierung dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium (F1L). Sie identifiziert dabei nur Punkte auf dem Rand $\partial\mathbb{S}_+^{2n} = \mathbb{S}^{2n-1}$, und zwar gemäß $q_{n-1} : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$.

Wir erhalten so die behauptete Verheftung einer $2n$ -Zelle (E3J):

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n-1} \cup q_n(\mathbb{S}_+^{2n}) \cong \mathbb{C}P^{n-1} \cup_{q_{n-1}} \mathbb{D}^{2n}$$

Erinnerung an die Lineare Algebra: Drehungen im \mathbb{R}^3

Wir wollen $SO_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$ zeigen. Zunächst die anschauliche Erklärung, die nötigen Beweise entnehmen wir dankend der Linearen Algebra:

Es gilt $SO_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$. **Aufgabe:** Warum? **Lösung:** Jedes Element in $SO_3 \mathbb{R}$ ist eine Drehung $\rho(s, \theta)$ um eine Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit Drehwinkel $\theta \in [0, \pi]$. Dabei gilt $\rho(s, 0) = \text{id}$ für alle $s \in \mathbb{S}^2$ sowie $\rho(s, \pi) = \rho(-s, \pi)$, ansonsten ist die Darstellung eindeutig. Das Paar (s, θ) stellen wir durch den Punkt $s \cdot \theta/\pi \in \mathbb{D}^3$ dar. Mit $s \sim -s$ für $s \in \mathbb{S}^2$ erhalten wir $SO_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{D}^3/\sim \cong \mathbb{RP}^3$.

Aufgabe: Formulieren Sie die Drehung $\rho(s, \theta) \in SO_3 \mathbb{R}$ explizit!

Lösung: Dies leistet die wunderbar praktische Rodrigues-Formel:

$$\rho(s, \theta) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta) \cdot s \times x + (1 - \cos(\theta)) \cdot s \times (s \times x)$$

Wir nutzen hier das beliebte Kreuzprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (a, b) \mapsto a \times b$. Diese Formel zu *finden* erfordert Kreativität. Steht sie erst einmal vor uns, so können wir sie leicht *beweisen*; zum Nachrechnen genügt Handwerk: Wir ergänzen $s \in \mathbb{S}^2$ zu einer Orthonormalbasis $s, u, v \in \mathbb{R}^3$ mit $s \times u = v$. Dann gilt $s \mapsto s$ sowie $u \mapsto \cos(\theta)u + \sin(\theta)v$ und $v \mapsto -\sin(\theta)u + \cos(\theta)v$.

Die orthogonale Gruppe $SO_3 \cong \mathbb{RP}^3$

Übung K2P: Die Rodrigues-Formel beweist $SO_3 \cong \mathbb{RP}^3$.

Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $SO_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$, direkt mit der Rodrigues-Formel oder elegant mit Quaternionen $\mathbb{H} \supseteq \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow SO_3 \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 \times [0, \pi] & \xrightarrow{p} & \mathbb{D}^3 \\ \downarrow \rho \text{ Rodrigues} & \swarrow h & \downarrow q \\ SO_3 \mathbb{R} & \xleftarrow{\cong \bar{h}} & \mathbb{RP}^3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 \times [0, 2\pi] & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^3 \\ \downarrow \rho \text{ Rodrigues} & \swarrow h & \downarrow q \\ SO_3 \mathbb{R} & \xleftarrow{\cong \bar{h}} & \mathbb{RP}^3 \end{array}$$

(1) Wir haben die stetige Surjektion ρ dank der Rodrigues-Formel $\rho(s, \theta) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta) \cdot s \times x + (1 - \cos(\theta)) \cdot s \times (s \times x)$.

Diese explizite Formel zeigt die Stetigkeit von $\rho : \mathbb{S}^2 \times [0, 2\pi] \rightarrow SO_3 \mathbb{R}$. Surjektivität und Identifizierungen entnehmen wir der Linearen Algebra.

(2) Wir faktorisieren ρ über Kugelkoordinaten $p : \mathbb{S}^2 \times [0, 2\pi] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^3$ mit $p(s, \theta) = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)s)$ zu $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO_3 \mathbb{R} : p(s, \theta) \mapsto \rho(s, \theta)$.

Die kanonische Faktorisierung (E2H) liefert $\bar{h} : \mathbb{RP}^3 \simeq SO_3 \mathbb{R}$ (F1L).

Die Übung für Sie besteht darin, wie immer, die angegebenen Daten und Argumente sorgfältig nachzuvollziehen: Was ist zu zeigen? Warum und wie genügen hierzu die obigen expliziten Angaben? Welche topologischen Werkzeuge erleichtern dabei Ihre Arbeit?

Variante 1: Wir betrachten $S^2 \times [0, \pi] = X \rightarrow SO_3 \mathbb{R}$ wie oben erklärt. Die kanonische Faktorisierung nutzt die Identifikationen $(s, 0) \sim (s', 0)$ und $(s, \pi) \sim (-s, \pi)$ und führt zu $\mathbb{D}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^3 \cong X/\sim \cong SO_3 \mathbb{R}$. Das ist kurz und anschaulich, leider nicht ganz glatt, da \mathbb{D}^3 berandet ist.

Variante 2: Wir betrachten $S^2 \times [0, 2\pi] = Y \rightarrow SO_3 \mathbb{R}$ wie in der Übung. Die kanonische Faktorisierung nutzt die Identifikationen $(s, 0) \sim (s', 0)$ und $(s, 2\pi) \sim (s', 2\pi)$ sowie $(s, \theta) \sim (-s, 2\pi - \theta)$. Auch dies führt zu $S^3 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^3 \cong Y/\sim \cong SO_3 \mathbb{R}$. Das ist ebenso einfach, zudem fast glatt.

Variante 3: Wir betrachten Quaternionen $\mathbb{H} \supseteq S^3 \twoheadrightarrow SO_3 \mathbb{R}$ und nutzen hier bequem die Konjugation $\psi : S^3 \simeq \text{Im } \mathbb{H} : (A, Y) \mapsto AYA^{-1}$, siehe Skript (K2s). Das ist am elegantesten und liefert eine glatte Überlagerung,

Lobgesang der projektiven Räume \mathbb{RP}^n und \mathbb{CP}^n

K240

Als Rückblick fasse ich die erreichten Ergebnisse feierlich zusammen:

Satz K2c: Lobgesang der projektiven Räume \mathbb{RP}^n und \mathbb{CP}^n

Der projektive Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ ist eine unberandete Mannigfaltigkeit, zusammenhängend, der Dimension $\dim \mathbb{RP}^n = n$ und $\dim \mathbb{CP}^n = 2n$. (Wir zählen die reelle Dimension; \mathbb{CP}^n ist komplex n -dimensional.)

Er ist ein Sphärenquotient, $\mathbb{RP}^n \cong S^n/S^0$ und $\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/S^1$, also kompakt. Die Koordinaten $\kappa : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$ kompaktifizieren \mathbb{K}^n mit Rand $\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$ und heften eine einzige Zelle an.

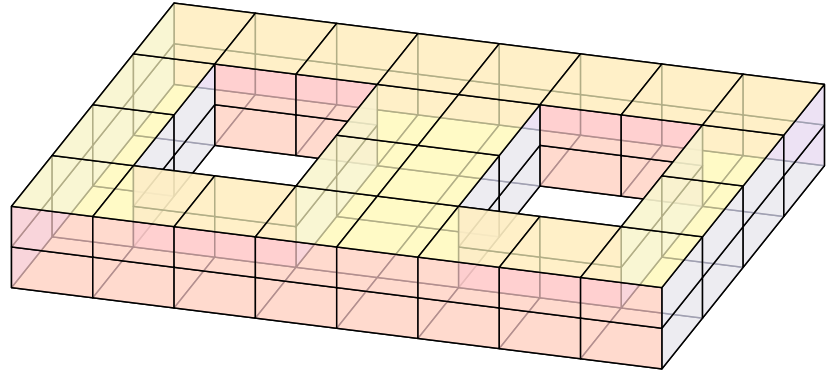
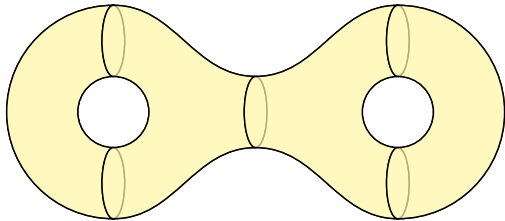
Der kanonische Atlas $\mathcal{A} = (h_0, \dots, h_n)$ ist \mathcal{C}^∞ -glatt, analytisch, rational. Die Mfkt \mathbb{RP}^n ist orientierbar für n ungerade, aber nicht-orientierbar für $n \geq 2$ gerade. Die Mfkt \mathbb{CP}^n ist kanonisch orientiert in jeder Dimension n .

Kleine Beispiele: Für geschlossene Flächen gilt $F_0^+ = S^2$ und $F_0^- = \mathbb{RP}^2$. Für $n \neq 1$ gilt $\mathbb{RP}^n \not\cong S^n$ und $\mathbb{CP}^n \not\cong S^{2n}$, doch $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ und $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$. Für Matrixgruppen gilt $GO_1 \mathbb{R} = S^0$ und $SO_2 \mathbb{R} \cong S^1$ und $SO_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$.

Klassifikation der kompakten Flächen

Wir wollen alle kompakten Flächen F klassifizieren (zweidim. Mfkten).
Wir dürfen, können und werden F als zusammenhängend annehmen.
Die Fläche F darf berandet sein oder unberandet (geschlossen).

Jede Fläche kann trianguliert werden, kurz $F \cong |K|$. (Radó 1925, K1L)

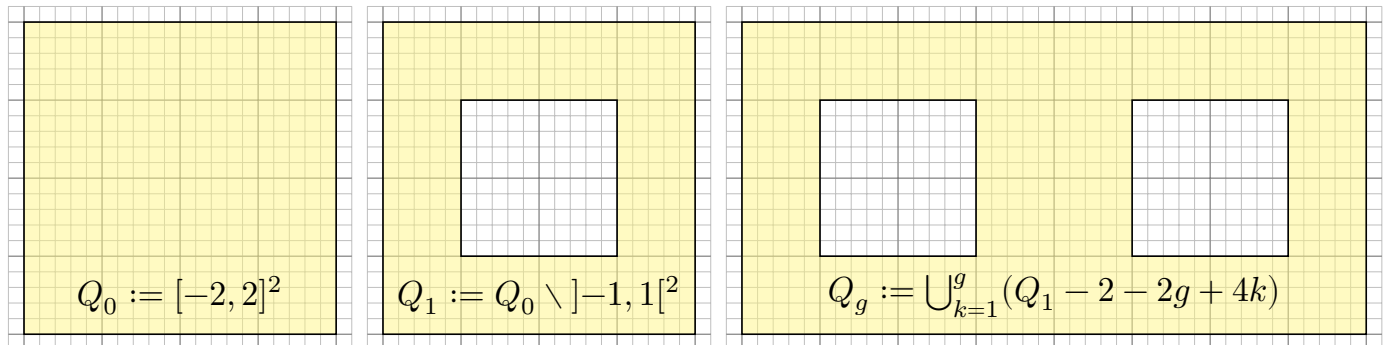


Vorgehen zur Klassifikation:

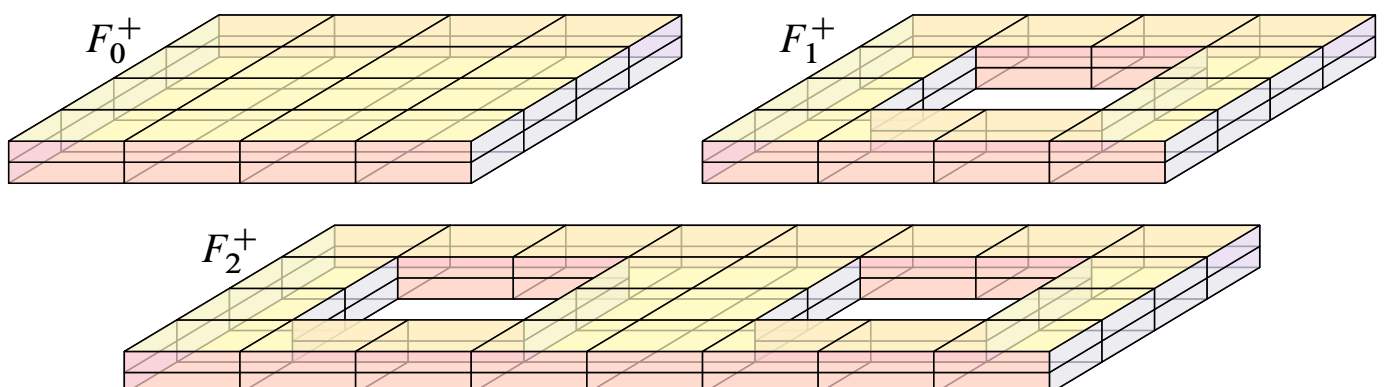
Wir vollenden nun die Klassifikation in voller Pracht und Schönheit!

- (0) Als Beispiele konstruieren wir zunächst unsere Modellflächen $F_{g,r}^\varepsilon$.
- (1) Wir zeigen, dass unsere Liste keine Dopplungen enthält: Invarianten!
- (2) Wir zeigen, dass unsere Liste vollständig ist: Schneiden und Kleben!

Kubische Modelle geschlossener Flächen



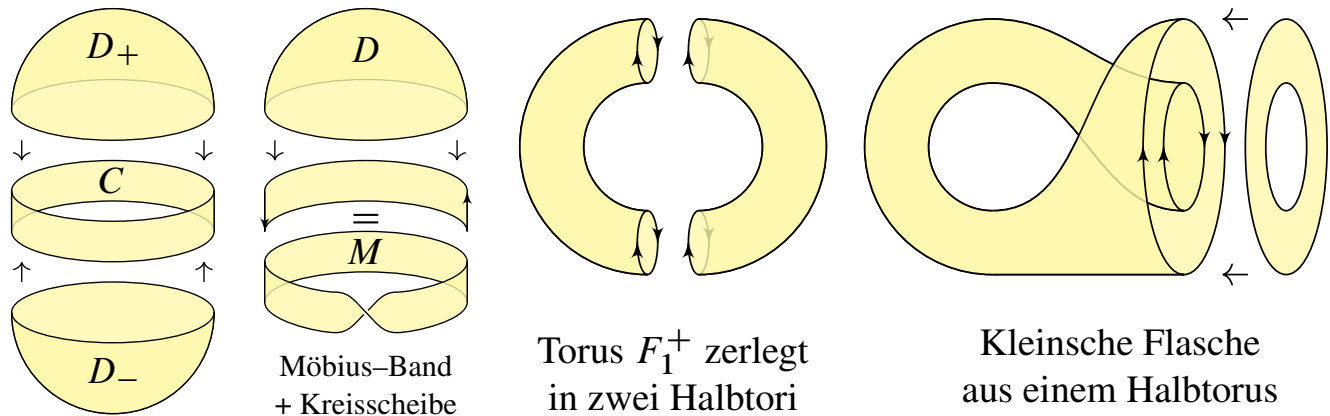
Der Grundriss $Q_g \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt den Henkelkörper $H_g = Q_g \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$
und dieser die Randfläche $F_g^+ = \partial H_g = (\partial Q_g \times [-1, 1]) \cup (Q_g \times \{-1, 1\})$.



Wir erhalten die Modellfläche F_g^+ explizit als kubischen Komplex \mathcal{K} . Unterteilung (I3M) ergibt den simplizialen Komplex $K_g^+ = \beta(\mathcal{K}, \mathcal{K}_{\leq 1})$.

Durch Identifikation gegenüberliegender Punkte von F_g^+ erhalten wir als Quotientenraum die **nicht-orientierbare Fläche** $F_g^- = F_g^+ / \{\pm\}$.

Unsere Triangulierung K_g^+ auf F_g^+ überträgt sich zu K_g^- auf F_g^- .



Berühmtestes Beispiel ist die **reell-projektive Ebene** $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2 / \{\pm\}$.

Zweit-berühmtestes Beispiel ist die **Kleinsche Flasche** $F_1^- = F_1^+ / \{\pm\}$.

Zusammenfassung unserer Modellflächen F_g^\pm

Satz K3A: unsere Modellflächen F_g^\pm mit $g \in \mathbb{N}$

(1) Der Grundriss $Q_g \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine kompakte Fläche mit Rand ∂Q_g . Der Henkelkörper $H_g = Q_g \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist demnach eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand $F_g^+ := \partial H_g = (\partial Q_g \times [-1, 1]) \cup (Q_g \times \{\pm 1\})$. Dies ist eine zusammenhängende geschlossene orientierte Fläche.

Die Räume Q_g, H_g, F_g^+ sind kubuliert und nach Unterteilung trianguliert, mit Euler-Charakteristik $\chi(Q_g) = \chi(H_g) = 1 - g$ und $\chi(F_g^+) = 2 - 2g$.

(2) Die Punktspiegelung $x \mapsto -x$ erhält $H_g = -H_g$ und $F_g^+ = \partial H_g$. Ihr einziger Fixpunkt ist 0, auf der Randfläche F_g^+ ist sie fixpunktfrei.

Der Quotientenraum $F_g^- := F_g^+ / \{\pm\}$ ist eine zshgde geschlossene nicht-orientierbare Fläche, ebenso trianguliert, mit $\chi(F_g^-) = 1 - g$.

Hierbei sind F_g^\pm untereinander nicht homöomorph dank topologischer Invarianz der Orientierbarkeit (J7P) und der Euler-Charakteristik (A3J).

Beweis: Alle Daten liegen explizit vor, nun sorgfältig nachrechnen!
Dies ist eine schöne und lehrreiche Übung zu all diesen Begriffen.

Verständnisfrage: Warum ist F_g^- nicht orientierbar? Wie erkennen und beweisen Sie das möglichst effizient? **Lösung:** Wir betrachten im Rand ∂Q_g die äußere Kreislinie C . Der Zylindermantel $C \times [-1, 1] \subseteq F_g^+$ ergibt im Quotienten modulo Antipoden ein Möbius-Band $C/\{\pm 1\}$. Voilà!

😊 Diese Konstruktion präzisiert die Einleitung mit handfesten Begriffen und Techniken: Sie können jetzt alles explizit nachprüfen!

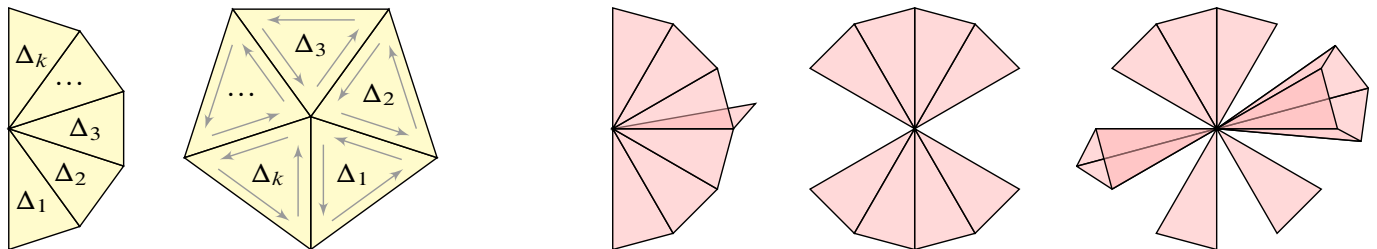
Damit haben wir zwei der drei Klassifikationsschritte bereits vollzogen:

- (0) Wir konstruieren zunächst unsere Modellflächen $F_{g,r}^\varepsilon$ als Beispiele.
- (1) Wir zeigen, dass unsere Liste keine Dopplungen enthält: Invarianten!
- (2) Wir zeigen, dass unsere Liste vollständig ist: Schneiden und Kleben!

Wir wollen nun die Klassifikation mit Schritt (2) krönen und abschließen. Hierzu nutzen wir Triangulierungen und ihre besonderen Eigenschaften. Sei K ein Simplicialkomplex mit Polyeder $|K|$. Genau dann ist $|K|$ eine Fläche, wenn jeder Eckenstern wie links in folgender Abbildung aussieht:

Eigenschaften triangulierter Flächen

K306



😊 Wir übersetzen topologische Eigenschaften in kombinatorische:

Satz K3B: simpliciale Flächen, Charakterisierung

Sei K ein Simplicialkomplex. Ist das Polyeder $|K|$ eine Fläche, so gilt:

(a) Jeder Simplex von K liegt in einem 2-Simplex:

Dies ist notwendig wegen Invarianz der Dimension (J7C).

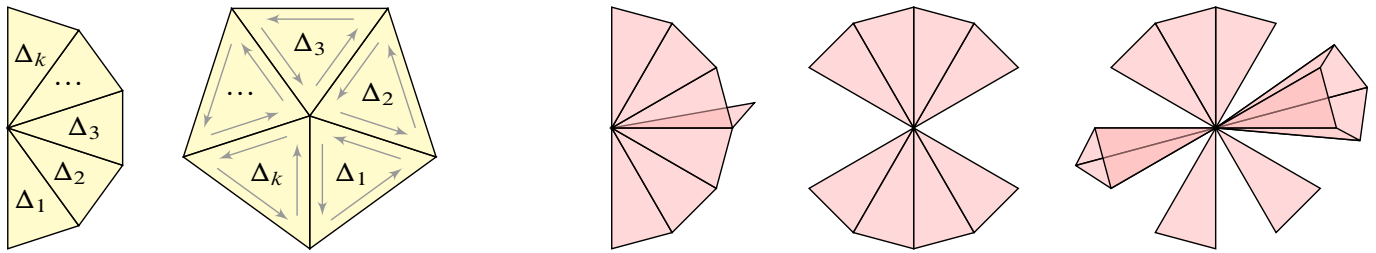
(b) Jede Kante liegt in genau einem oder zwei 2-Simplizes:

Dies ist notwendig wegen Jordanschem Kurvensatz (J2A).

(c) Jede Ecke liegt in endlich vielen 2-Simplizes $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$, wobei jeweils Δ_i und Δ_{i+1} eine Kante teilen: lokaler Zusammenhang (G3A).

Sind umgekehrt (a,b,c) erfüllt, so ist das Polyeder $|K|$ eine Fläche.

Eigenschaften triangulierter Flächen

**Satz K3B:** simpliziale Flächen, Eigenschaften

Die so triangulierte Fläche $|K|$ hat dann folgende Eigenschaften:

- (1) Genau dann ist die Fläche $|K| \neq \emptyset$ zusammenhängend, wenn sich je zwei 2-Simplizes $\Delta, \Delta' \in K_2$ verbinden lassen durch eine Galerie von 2-Simplizes $\Delta = \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_\ell = \Delta' \in K_2$ mit $\Delta_{i-1} \cap \Delta_i \in K_1$.
- (2) Eine Orientierung der Fläche $|K|$ entspricht einer Orientierung für jeden 2-Simplex $\Delta \in K_2$, sodass je zwei benachbarte 2-Simplizes **kompatibel orientiert sind, wie skizziert, also ihre gemeinsame Kante $\Delta \cap \Delta' = \{a, b\} \in K_1$ gegenläufig orientieren.**
- (3) Den Rand $\partial|K| = |\partial K|$ bilden alle Kanten, die in genau einem 2-Simplex liegen, also $\partial K = \langle \{a, b\} \in K_1 \mid \exists! c \in \Omega : \{a, b, c\} \in K_2 \rangle$.

Eigenschaften triangulierter Flächen

Satz K3B: simpliziale Flächen, Heawood-Ungleichung

- (4) Genau dann ist $|K|$ kompakt, wenn K endlich ist, und geschlossen, wenn jede Kante in genau zwei 2-Simplizes liegt, also $\partial K = \{\emptyset\}$ gilt.
- (5) Für $|K| \neq \emptyset$ geschlossen folgt daraus die **Heawood-Ungleichung:**

$$2f_0 \geq 7 + \lceil \sqrt{49 - 24\chi} \rceil$$

Beweis: (5) Hier gilt $2f_1 = 3f_2$. Immer gilt $f_1 \leq \binom{f_0}{2} = \frac{f_0(f_0-1)}{2}$. Für die Euler-Charakteristik folgt $\chi = f_0 - f_1 + f_2 = f_0 - \frac{1}{3}f_1 \geq f_0 - \frac{1}{6}f_0(f_0-1)$, also $f_0^2 - 7f_0 + 6\chi \geq 0$. Dank Mitternachtsformel folgt Heawood.

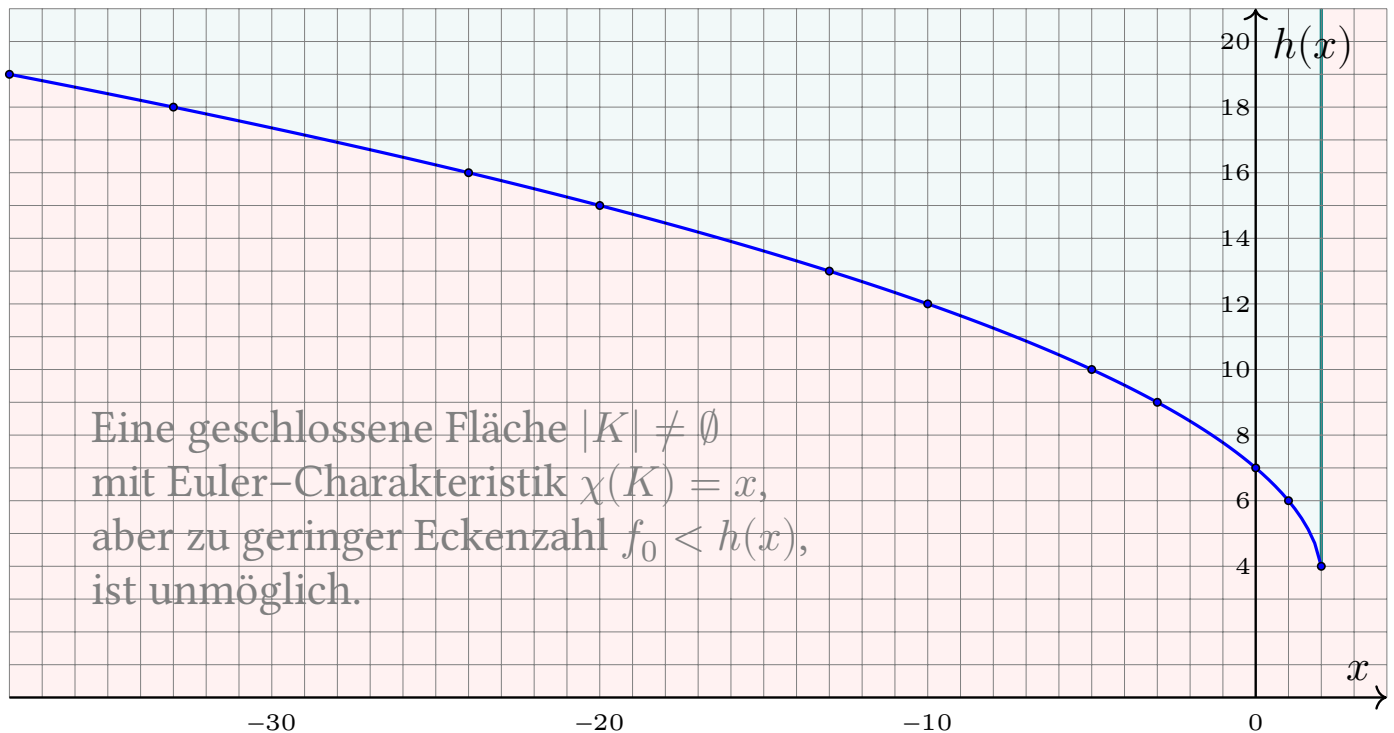
Der zweite Fall „ $2f_0 \leq 7 - \lceil \dots \rceil$ “ ist geometrisch nicht realisierbar, da mit $f_0 \leq 3$ Ecken keine geschlossene Fläche $|K| \neq \emptyset$ möglich ist. QED

Beispiele für kleine Euler-Charakteristik:

$\chi =$	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$f_0 \geq$	4	6	7	8	9	9	10	10	11	11	12

Die Heawood–Ungleichung

Skizze der Heawood–Funktion $h : \mathbb{R}_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24x})$.
Diese Funktion verläuft bemerkenswert oft durch ganzzahlige Punkte.



Die Heawood–Ungleichung

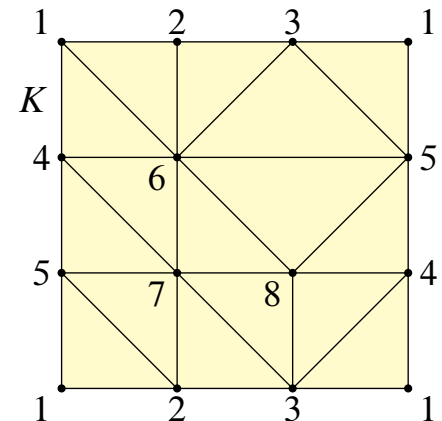
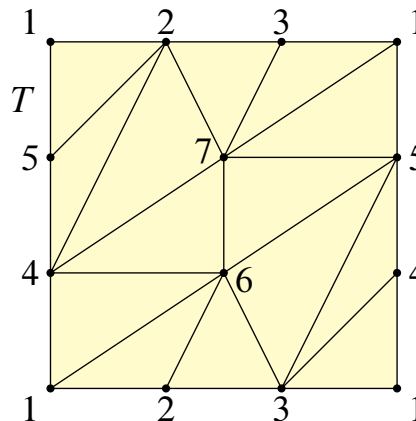
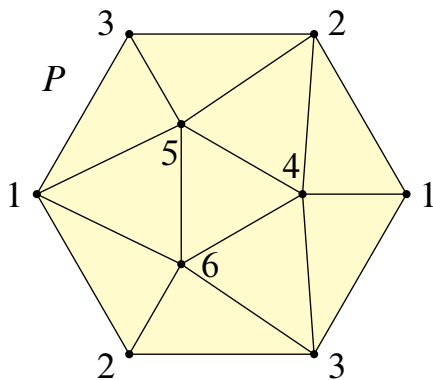
😊 Die Heawood–Ungleichung $2f_0 \geq 7 + \sqrt{49 - 24\chi}$ folgt sofort aus der beliebten Mitternachtsformel zur Lösung quadratischer Gleichungen. Bitte rechnen Sie es selbst nach, es macht Freude... und Aha!
Vier Unbekannte und drei Un/Gleichungen, einsetzen, voilà!

1950 formulierte Ernst Peschl (1906–1986) in seinem Seminar an der Universität Bonn folgende Frage: Was ist die minimale Eckenzahl zur Triangulierung der Flächen F_g^\pm ? Die Frage hatten sich vermutlich schon viele zuvor gestellt, er präsentierte sie wissensdurstigen Studierenden, darunter Gerhard Ringel. Diesen sollte die Frage nicht mehr loslassen, bis er sie 30 Jahre später vollständig lösen konnte. Auch heute noch im Rückblick ist das ein sensationelles Ergebnis: Die minimale Eckenzahl ist überhaupt nur für ganz wenige Mannigfaltigkeiten bekannt.

Wie finden wir minimale Triangulierungen der Fläche F_g^\pm ?
Wie können wir sicher sein, dass sie wirklich minimal sind?
Zunächst scheint die untere Schranke sehr einfach und allzu grob.
Wir schauen deshalb genauer hin... und erleben ein Wunder!

Minimale Triangulierungen

$\chi =$	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$f_0 \geq$	4	6	7	8	9	9	10	10	11	11	12



☺ Die Heawood-Ungleichung ist scharf für die Sphäre $F_0^+ \cong \mathbb{S}^2 \cong \partial\Delta^3$ und die projektive Ebene $F_0^- \cong \mathbb{RP}^2$ sowie den Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$: Diese lassen sich mit 4, 6, 7 Ecken triangulieren, wie oben gezeigt.

☹ Die Kleinsche Flasche $F_1^- = F_1^+ / \{\pm 1\}$ hingegen lässt sich nicht mit 7 Ecken triangulieren, dies gelingt erst mit 8 Ecken. Der Nachweis erfolgt durch systematisches Ausprobieren.

Minimale Triangulierungen

Die Konstruktion minimaler Triangulierungen ist überraschend schwer. Die Vorgaben sind extrem knapp! Heawood-Ungleichung für Flächen:

$g =$	0	1	2	3	10	20	50	100	200	500
F_g^+	4	7	9	10	15	19	28	39	53	81
F_g^-	6	7	8	9	12	15	21	29	39	59

☺ Für die ersten drei Flächen F_0^+, F_0^-, F_1^+ ist die Ungleichung scharf.

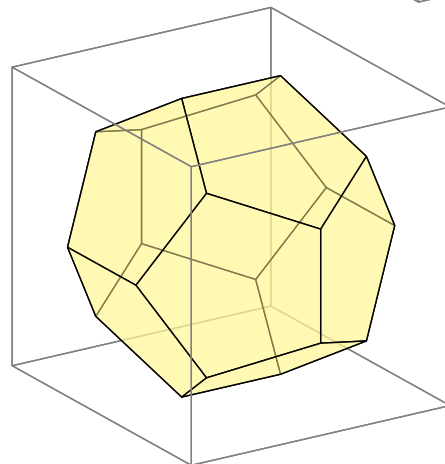
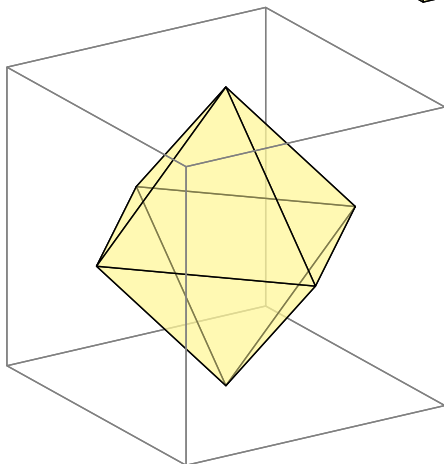
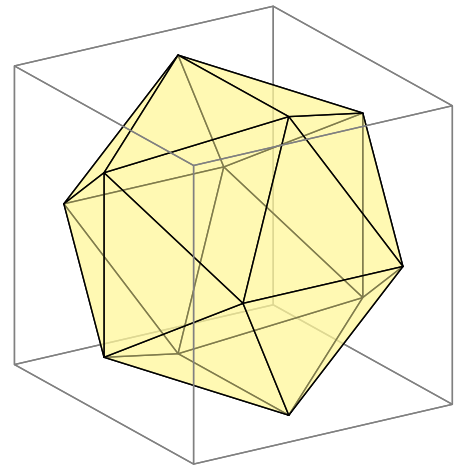
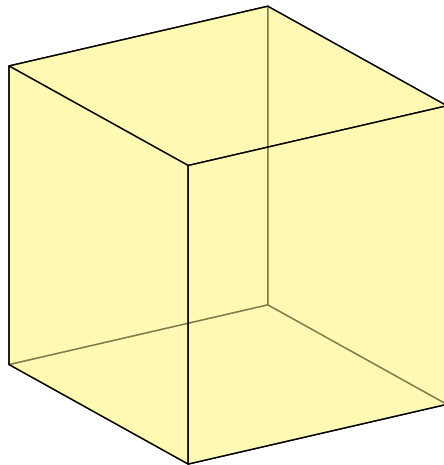
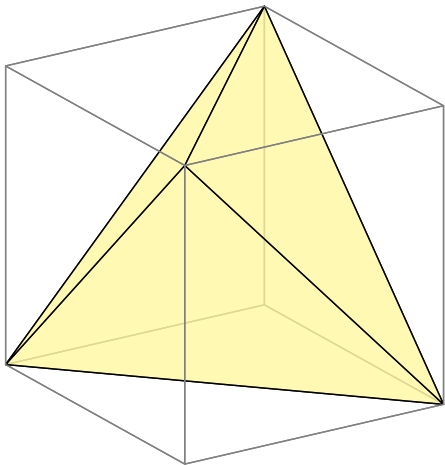
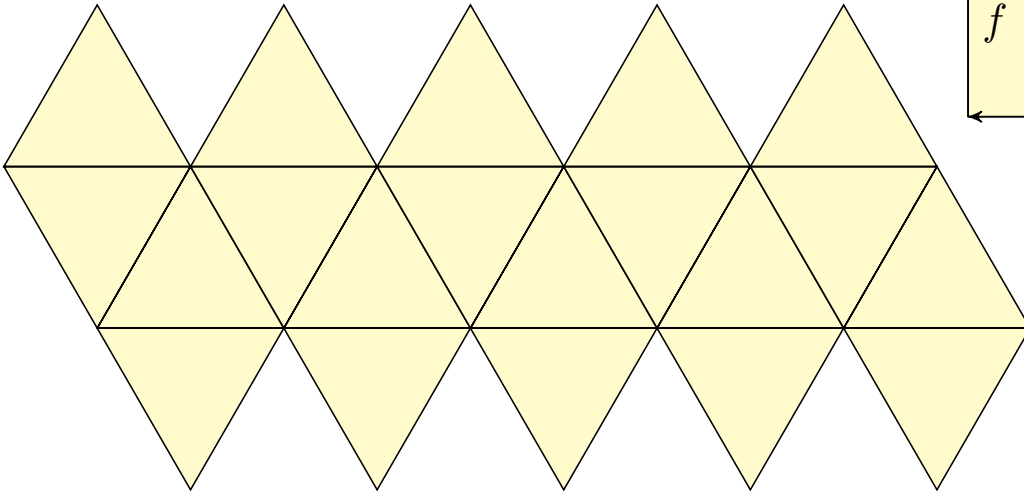
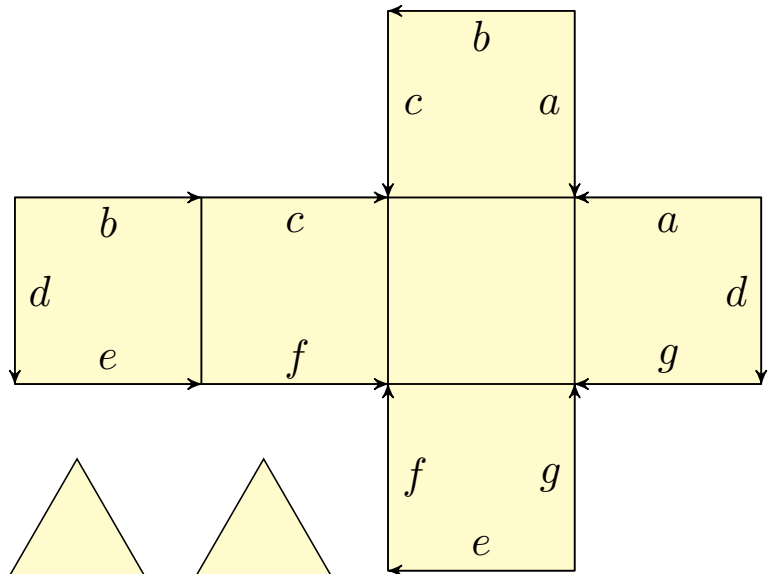
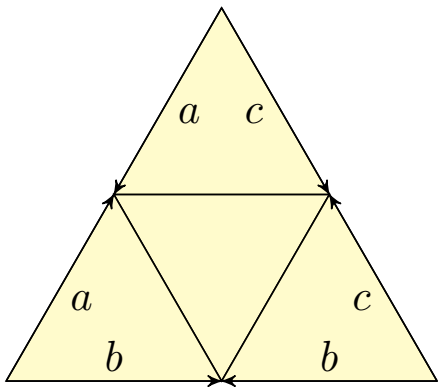
☹ Die nächsten drei F_1^-, F_2^+, F_2^- benötigen jeweils eine Ecke mehr.

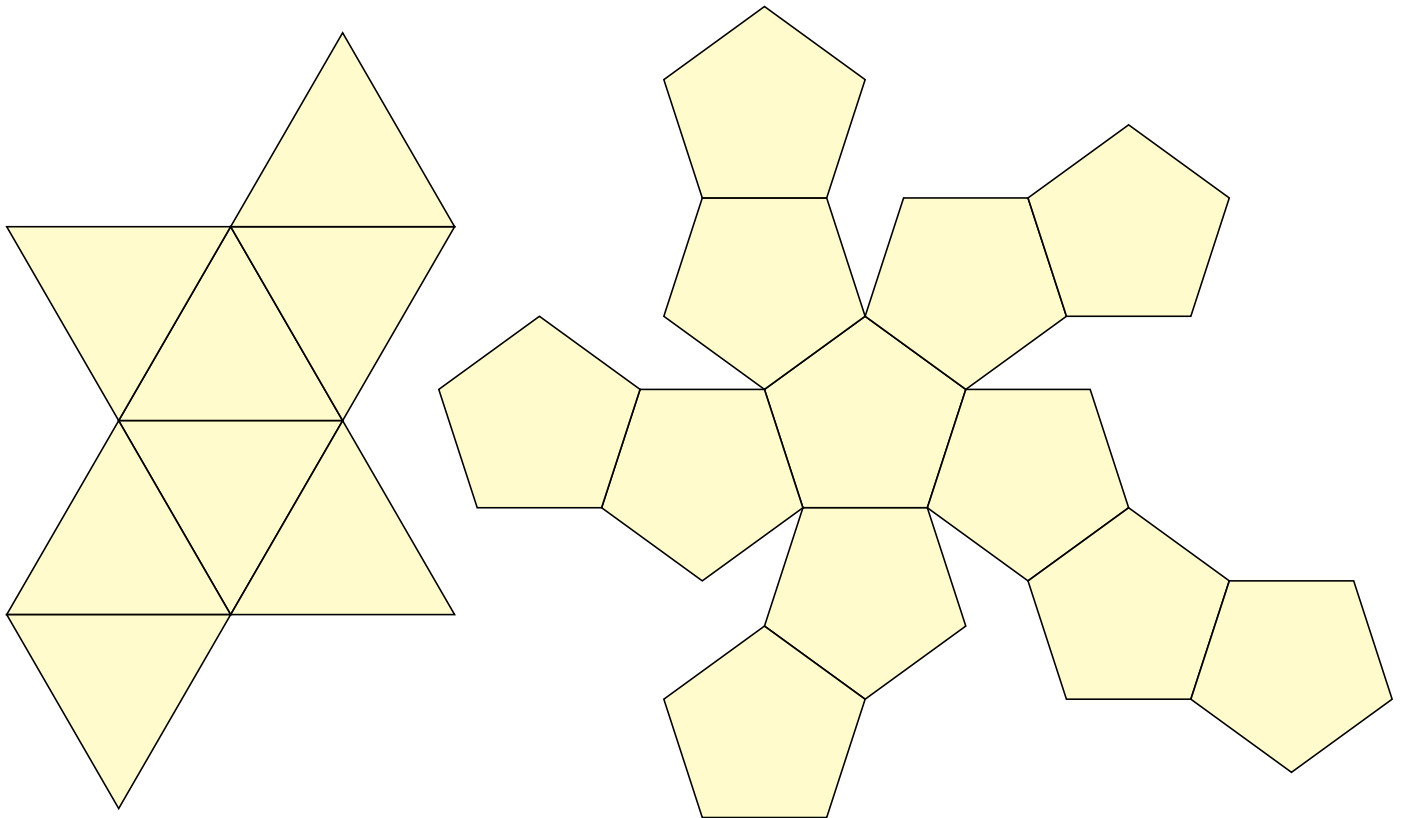
Wie geht es weiter? Sensation: Die Heawood-Ungleichung ist scharf für *alle* geschlossenen Flächen mit nur diesen drei Ausnahmen!

Gerhard Ringel fand 1955 minimale Triangulierungen für die Flächen F_g^- , und zusammen mit Mark Jungerman 1980 schließlich für die Flächen F_g^+ .

„Die Formel ist zu kurz, um richtig zu sein“, argwöhnte ein Kollege.

„Die Formel ist zu schön, um nicht wahr zu sein“, entgegnete Ringel.





😊 Sie kennen diese Bastelanleitungen vermutlich aus der Schule: Dort betrachtet man Polyeder, die fünf regulären und vielleicht weitere. Als praktische Bastelanleitung und mathematische Beschreibung kann man solch ein Polyeder aufschneiden und in die Ebene legen. Umgekehrt können wir aus der ebenen Darstellung das Polyeder rekonstruieren, durch Verkleben entlang der gleich beschrifteten Kanten.

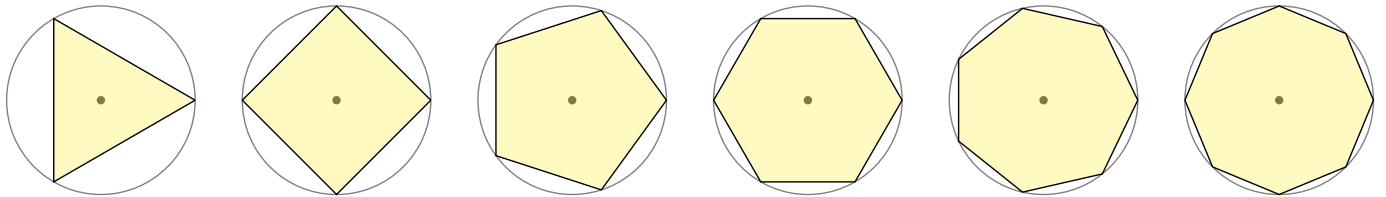
😊 Bei diesen Bastelanleitungen nutzen wir implizit die Geometrie: Diese schreibt eindeutig vor, welche Kanten wir miteinander verkleben. Topologisch gesehen ist alles flexibel und wir können jede Verklebung willkürlich vorgeben. Daher werden wir diese zusätzliche Daten explizit als Verklebevorschrift codieren. Dies führt uns zu Flächenwörtern und somit zu einer sehr effizienten Beschreibung geschlossener Flächen.

Polygonmodell und Verklebevorschrift

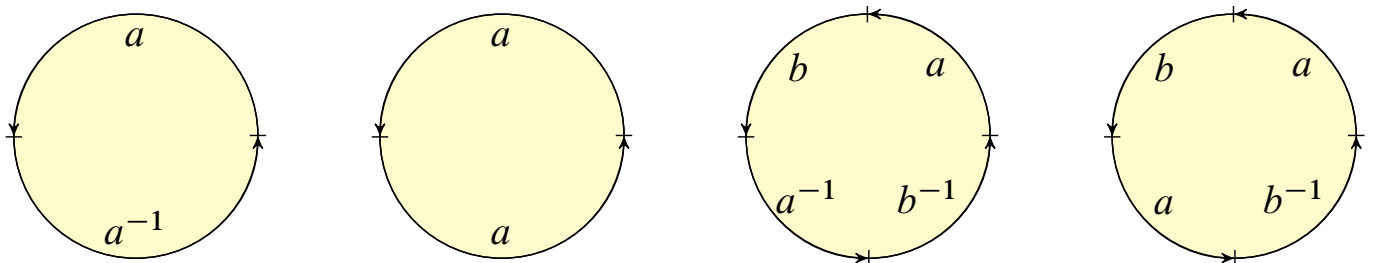
Wir benennen die Verklebevorschrift nun explizit! Kanten mit gleichem Buchstaben verkleben wir entsprechend der angegebenen Orientierung:



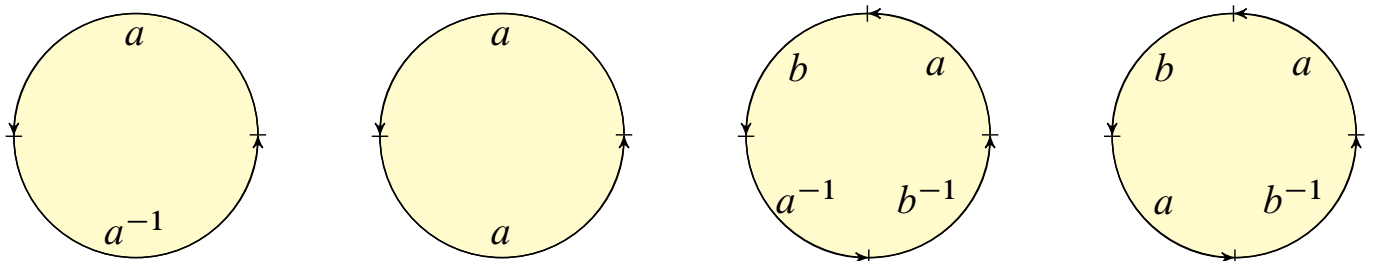
Geometrisch gelingt dies sehr leicht mit einem regulären n -Eck:



Ein topologisch äquivalentes Modell (F6G) ist die Kreisscheibe \mathbb{D}^2 :



Polygonmodell und Verklebevorschrift



Definition K3c: Polygonmodell und Flächenwort

Die Kreislinie $S^1 = \partial\mathbb{D}^2$ teilen wir in $n \geq 1$ gleichlange Kreisbögen $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow S^1 : t \mapsto \exp\left[\frac{2\pi i}{n}(k-1+t)\right]$ für $k = 1, 2, \dots, n$.

Gegeben sei ein Alphabet $A = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}, \dots\}$ mit fixpunktfreier Involution $A \rightarrow A : x \mapsto x^{-1}$. Hierüber sei $w = w_1 \cdots w_n \in A^n$ ein Wort.

- Bei $w_k = w_\ell$ identifizieren wir $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(t)$ für jedes $t \in [0, 1]$.
- Bei $w_k = w_\ell^{-1}$ identifizieren wir $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(1-t)$ für jedes $t \in [0, 1]$.

Dies erzeugt eine Äquivalenzrelation \sim auf der Kreisscheibe \mathbb{D}^2 .

Den Quotientenraum bezeichnen wir mit $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle := \mathbb{D}^2 / \sim$.

Im Sonderfall $n = 0$ vereinbaren wir $\mathbb{D}^2 / \langle \rangle := S^2$. Dies entspricht der Zusammenschlagung $\mathbb{D}^2 // S^1 \cong S^2$ des Randes zu einem Punkt (F1R).

Wir wollen alle geschlossenen Flächen F beschreiben und klassifizieren. Eine universelle Darstellung sind simpliziale oder zelluläre Komplexe. Speziell für Flächen ist das Polygonmodell aus K3C extrem effizient, es reduziert die Notation auf das absolute Minimum.

Die gesamte Konstruktion von $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ codieren wir präzise und kurz durch das Wort w als Verklebevorschrift entlang des Randes.

Das ist wieder einmal eine genial einfache Notation!

Ihren Nutzen werden wir gleich genießen können.

Welche Flächen können wir so darstellen? Alle!

Das folgende Beispiel K3D zeigt die kleinsten Fälle, der anschließende Satz K3E klärt den allgemeinen Fall:

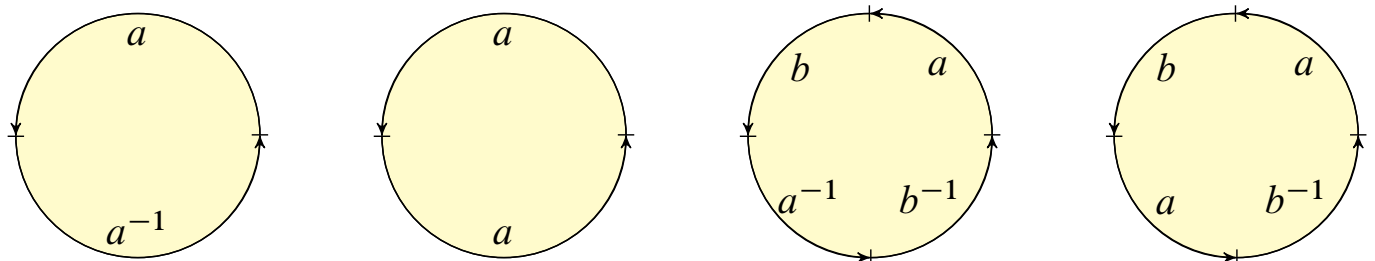
Alle Flächen lassen sich im Polygonmodell $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ schreiben!

Dies führt uns zu den Flächenwörtern w wie in K3E erklärt.

Mit diesen Wörtern können wir wunderbar rechnen (Satz K3F).

Dies beschert uns schließlich den effizienten Flächenkalkül und nach einfacher Rechnung die lang ersehnte Flächenklassifikation!

Polygonmodell und Verklebevorschrift



Beispiel / Übung K3D: kleinste Beispiele

Konstruieren Sie möglichst explizit folgende Homöomorphismen:

- 1 $\mathbb{D}^2 / \langle aa^{-1} \rangle \cong \mathbb{S}^2$ (zweidimensionale Sphäre)
- 2 $\mathbb{D}^2 / \langle aa \rangle \cong \mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \mathbb{S}^0$ (reell-projektive Ebene)
- 3 $\mathbb{D}^2 / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (zweidimensionaler Torus)
- 4 $\mathbb{D}^2 / \langle abab^{-1} \rangle \cong (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) / \{\pm 1\}$ (Kleinsche Flasche)

Die Kreisscheibe \mathbb{D}^2 ist kompakt (F1O), und der rechts stehende Raum X ist hausdorffsch. Wir nutzen das Kompakt-Hausdorff-Kriterium (F1L).

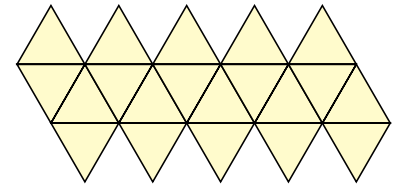
Skizzieren und formalisieren Sie eine geeignete Abbildung $\mathbb{D}^2 \twoheadrightarrow X$ mit dem ersehnten Zielraum und den angegebenen Identifizierungen.

Satz K3E: Darstellung einer Fläche durch ein Flächenwort

(0) Der Quotientenraum $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ ist zusammenhängend, kompakt und triangulierbar durch einen endlichen zweidimensionalen Komplex.

(1) Jede triangulierte, zusammenhängende, kompakte Fläche F ist homöomorph zu $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ für ein geeignetes Wort w .

Beweis: (1) Wir nutzen die Triangulierung $|K| \simeq F$. Ihr dualer Graph Γ hat als Ecken die Dreiecke von K , Kanten von Γ sind benachbarte Dreiecke in K mit gemeinsamer Kante. Nach K3B ist Γ zshgd.



Wir wählen einen Spannbaum $T \subseteq \Gamma$ und verkleben alle Dreiecke von K entlang der Kanten in T zu einem Polyeder D . Es gilt $D \cong \mathbb{D}^2$ durch Einklappen wie beim simplizialen Satz von Schoenflies (J2I).

Die verbleibenden Kanten in $\Gamma \setminus T$ codieren die abschließende Verklebung auf dem Rand von D , sodass $D / \langle w \rangle \simeq |K| \simeq F$.

QED

😊 Viele von Ihnen dürften dieselbe Idee bereits aus der Schule kennen: Dort betrachtet man Polyeder (die fünf regulären und vielleicht weitere). Als praktische Bastelanleitung und mathematische Beschreibung kann man solch ein Polyeder aufschneiden und in die Ebene legen.

😊 Genau das tun wir hier: Polyeder schneiden und kleben!

Um dies möglichst allgemein und doch präzise formulieren zu können, nutzen wir die Darstellung durch polytopale / simpliziale Komplexe. Das ist ein Beispiel für Schulmathematik vom höheren Standpunkt.

😊 Anders als zu Schulzeiten verfügen wir nun über alle nötigen Begriffe und Techniken, um die Sachlage allgemein und präzise zu behandeln. Aussage (1) beruht auf Satz K3B, der Charakterisierung simplizialer Flächen, denn wir benötigen diese kombinatorischen Eigenschaften.

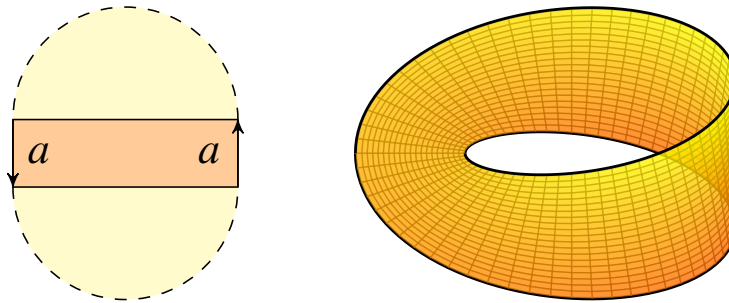
Darstellung von Flächen durch Flächenwörter

Satz K3E: Darstellung einer Fläche durch ein Flächenwort

(2) Für unsere Modellflächen F_g^\pm finden wir als Standarddarstellung $F_g^+ \cong \mathbb{D}^2 / \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ und $F_g^- \cong \mathbb{D}^2 / \langle c_0 c_0 \cdots c_g c_g \rangle$.

(3) Genau dann ist der Quotient $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ eine geschlossene Fläche, wenn jeder Buchstabe im Wort w exakt zweimal auftritt (K3B/K3F). In diesem Falle nennen wir w ein (geschlossenes) **Flächenwort**.

(4) Tritt ein Buchstabe im Flächenwort w zweimal mit gleichen Exponenten auf, dann ist die Fläche $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ nicht orientierbar. Andernfalls ist die Fläche **orientierbar** (K3B/K3F).



Darstellung von Flächen durch Flächenwörter

Beweis: (2) Man kann geeignete Homöomorphismen anschaulich skizzieren bzw. explizit konstruieren; das ist eine lehrreiche Übung. Die vier einfachsten Beispiele sind Gegenstand der vorigen Übung K3D. Bequemer: Jede unserer Modellflächen F_g^\pm können wir dank (1) als Polygonmodell darstellen und dank Satz K3F in Normalform bringen. Das ist formal richtig und kürzer, aber weniger anschaulich.

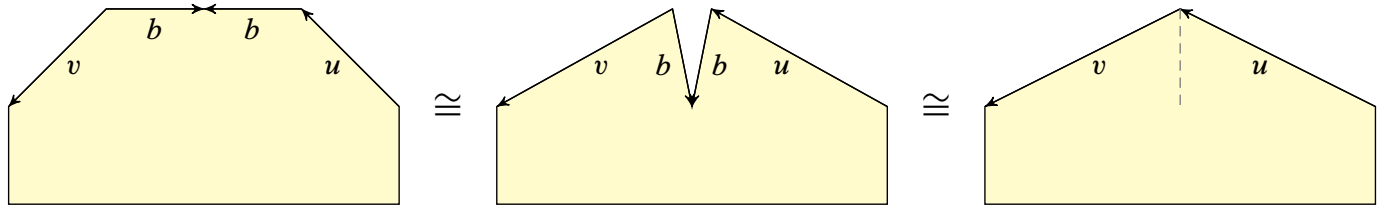
(3) „ \Rightarrow “: Ist $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ eine geschlossene Fläche, so muss nach Satz K3B jeder Buchstabe, der im Wort w auftritt, genau zweimal vorkommen. (Einmal erzeugt Rand, dreimal oder mehr ist nicht lokal euklidisch.)

„ \Leftarrow “: Jedes Flächenwort w überführen wir dank Satz K3F in Normalform (2), und diese ist leicht als Fläche erkennbar, genauer: $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle \cong F_g^\pm$.

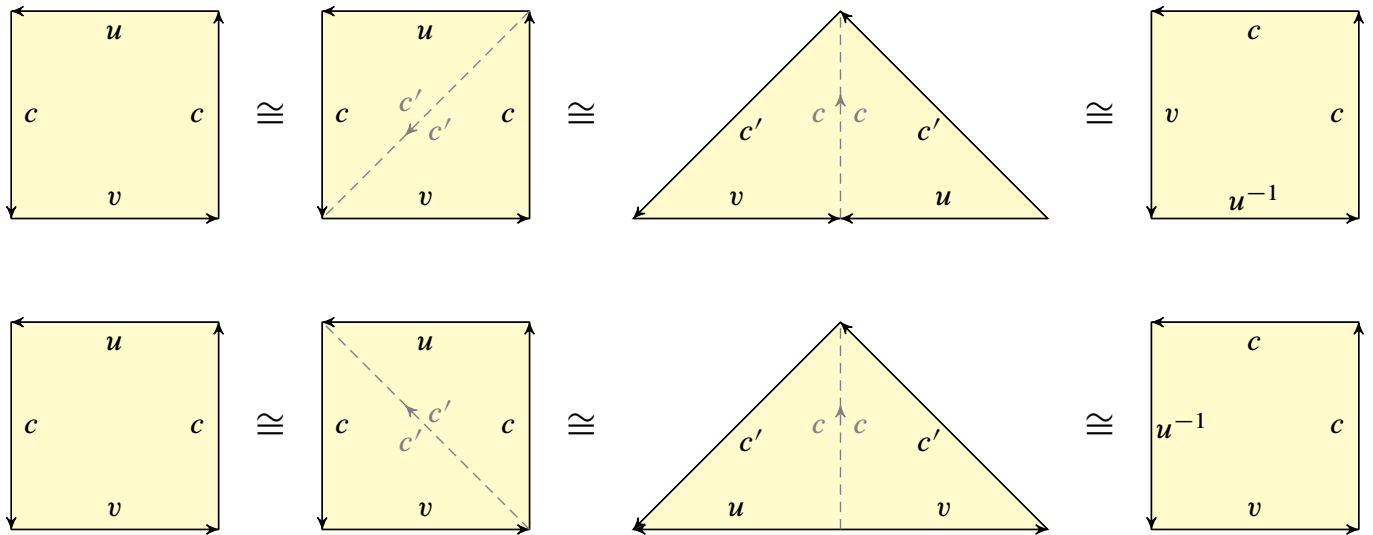
(4) Tritt im Flächenwort w ein Buchstabe zweimal mit den gleichen Exponenten auf, so lässt sich ein Möbius-Band in die Fläche $\mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ einbetten, diese ist somit nicht-orientierbar. Andernfalls überführen wir das Wort w dank K3F in Normalform (2), und F_g^+ ist orientierbar. QED

Flächenkalkül: Umformung von Flächenwörtern

Wir können inverse Nachbarn bb^{-1} einklappen:

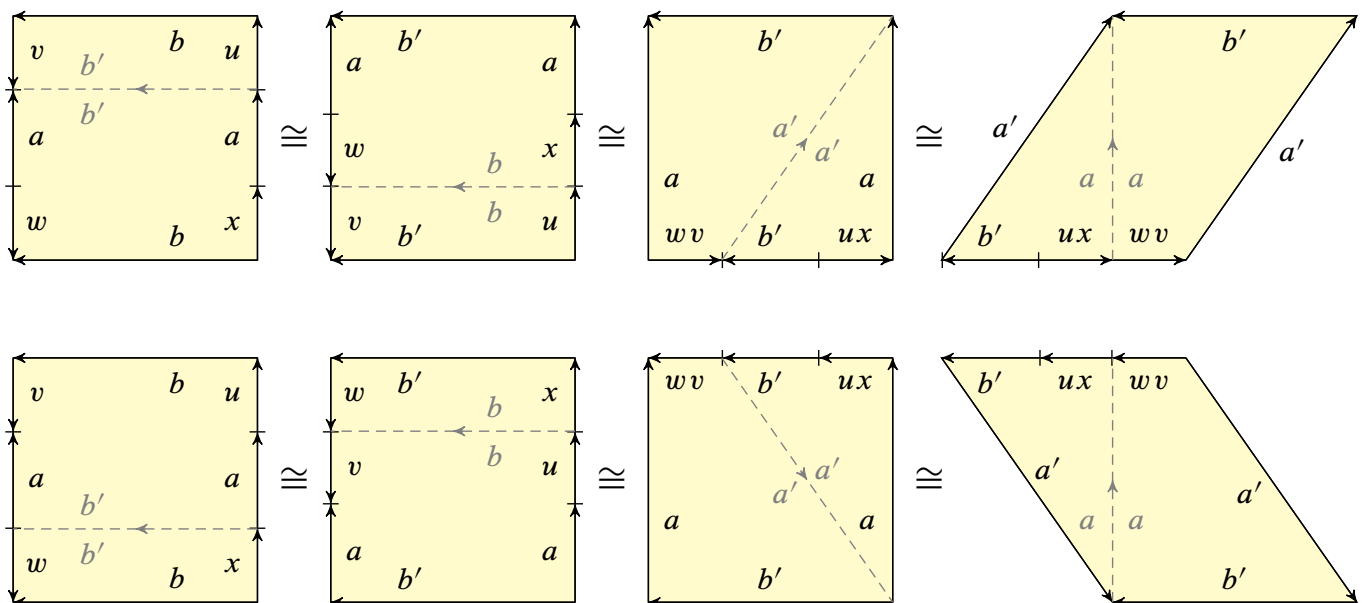


Wir können jede Kreuzhaube cc zusammenfassen:



Flächenkalkül: Umformung von Flächenwörtern

Wir können jeden Henkel $aba^{-1}b^{-1}$ zusammenfassen:



😊 Dieser Flächenkalkül ist sehr einfach, konzise und effizient.
 Die Regeln gelten, sobald a, b, c im restlichen Wort nicht vorkommen.
 Das **Inverse** des Wortes $w = w_1 w_2 \dots w_\ell$ ist $w^{-1} = w_\ell^{-1} \dots w_2^{-1} w_1^{-1}$.
 Sein **Träger** $\text{supp } w = \{w_1^\pm, w_2^\pm, \dots, w_\ell^\pm\}$ sammelt alle Buchstaben.

Reduktion von Flächenwörtern auf Normalform

Satz K3F: Reduktion von Flächenwörtern auf Normalform

Folgende Umformungen liefern homöomorphe Quotienten $\mathbb{D}/\langle \dots \rangle$:

- 1 $uvw \equiv vwu$ (zyklische Umordnung)
- 2 $ua^\varepsilon va^\delta w \equiv ub^\varepsilon vb^\delta w \equiv ub^{-\varepsilon} vb^{-\delta} w$ (Austauschen freier Buchstaben)
- 3 $ubb^{-1}v \equiv uv$ (Einklappen inverser Nachbarn)
- 4 $cucv \equiv u^{-1}ccv$ (Gruppieren einer Kreuzhaube)
- 5 $uvccw \equiv uccvw$ (Verschieben einer Kreuzhaube)
- 6 $aubva^{-1}wb^{-1}x \equiv aba^{-1}b^{-1}xwvu$ (Gruppieren eines Henkels)
- 7 $uvaba^{-1}b^{-1}w \equiv uaba^{-1}b^{-1}vw$ (Verschieben eines Henkels)
- 8 $uaba^{-1}b^{-1}ccv \equiv uaabbccv$ (Kreuzhaube transformiert Henkel)

Hierbei sind $a, b, c, \dots \in A$ Buchstaben, $u, v, w, x, \dots \in A^*$ Teilwörter und $w \mapsto w^{-1}$ die Inversion. In (2) dürfen a, b sonst nirgends vorkommen.

Beweis: Umformungen (1–2) sind klar, (3–7) haben wir oben gezeigt. Eine Kreuzhaube und einen Henkel verwandelt (4) in drei Kreuzhauben gemäß $aba^{-1}b^{-1}cc \stackrel{(4)}{\equiv} aba^{-1}cbc \stackrel{(4)}{\equiv} abbc^{-1}ac \stackrel{(4)}{\equiv} aacb^{-1}b^{-1}c \stackrel{(4)}{\equiv} aabbcc$.

Reduktion von Flächenwörtern auf Normalform

Satz K3F: Reduktion von Flächenwörtern auf Normalform

Damit können wir jedes Flächenwort überführen in eine Normalform, $\mathbb{D}^2/\langle a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} \rangle \cong F_g^+$ oder $\mathbb{D}^2/\langle c_0c_0 \dots c_gc_g \rangle \cong F_g^-$.

Somit ist jede zusammenhängende geschlossene Fläche homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen F_g^\pm .

Beweis: Wir können jede Kreuzhaube zusammenfassen (4) und an den Anfang des Wortes schieben (5), ebenso jeden Henkel (6,7). Wir erhalten ein Flächenwort $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1} c_1c_1 \dots c_\ell c_\ell u$.

In u hat jedes Buchstabenpaar entgegengesetzte Exponenten (keine Kreuzhauben) und je zwei Paare sind unverschränkt (keine Henkel). Ist das Wort u nicht leer, so gibt es ein innerstes Paar $u = \dots xx^{-1} \dots$; dieses können wir löschen (3). So fortfahrend löschen wir ganz u .

Kreuzhauben fressen Henkel auf (8). Wir erreichen also eine der beiden Normalformen. Verschiedene Normalformen liefern nicht-homöomorphe Flächen dank Orientierbarkeit und Euler-Charakteristik. QED

Satz K3G: simpliziale Klassifikation geschlossener Flächen

Sei K ein Simplicialkomplex und $F = |K|$ eine zshgde geschlossene Fläche. Dann existiert ein stückweise affiner Homöomorphismus $(h, k) : F \cong F_g^\varepsilon$ zu genau einer unserer Modellflächen $F_g^\varepsilon = |L|$.

Somit gilt die Hauptvermutung für geschlossene Flächen:
Zwischen geeigneten Unterteilungen $K' \preceq K$ und $L' \preceq L$ existiert ein simplicialer Isomorphismus $K' \cong L'$.

Korollar K3H: topologische Klassifikation geschlossener Flächen

Sei F eine (topologische) Fläche. Dank Satz K1L ist F triangulierbar. Gemäß K3G ist F homöomorph zu einer unserer Modellflächen F_g^ε , und zwar zu genau einer dank der topologischen Invarianten (χ, ε) .

Demnach sind zwei zusammenhängende geschlossene Flächen F und F' genau dann homöomorph, wenn sie übereinstimmen in Orientierbarkeit $\varepsilon(F) = \varepsilon(F')$ und Euler-Charakteristik $\chi(F) = \chi(F')$.

😊 Sie sehen, wie zu Beginn dieses Kapitels angekündigt:
Triangulierungen vereinfachen unsere Arbeit dramatisch!
Simplizialkomplexe sind eine universelle und effiziente Datenstruktur.
Damit beschreiben wir auch simpliziale Flächen präzise und bequem.
Den Klassifikationssatz können wir damit sehr leicht beweisen,
schließlich sogar rein kombinatorisch-algebraisch und gänzlich
unbeschwert von geometrisch-topologischen Komplikationen.
Dieser Ansatz und sein Erfolg sind überaus bemerkenswert.

Der Triangulierungssatz K1L garantiert: *Jede* Fläche ist triangulierbar,
also als ein Simplicialkomplex realisierbar. Sein Beweis ist sehr technisch
und wesentlich aufwändiger. Wir beweisen diesen Satz
daher hier nicht, nutzen ihn aber dennoch dankend zur Abrundung.

Zur Betonung, Klarstellung und Redlichkeit, formuliere ich daher den
simplicialen und den topologischen Fall getrennt. Dies offenbart eine
Finesse: Die simpliziale Klassifikation hat stärkere Voraussetzungen, aber
auch stärkere Folgerungen, nämlich die Hauptvermutung.

😊 Der Weg war lang, doch das Ergebnis ist schön, einfach und elegant. Wir übersetzen das ursprüngliche geometrisch-topologische Problem in einen kombinatorisch-algebraischen Kalkül – und verlustfrei zurück!

😊 Das ist typisch für gute Notation, insbesondere in der Mathematik: Wir können damit alles präzise benennen und effizient berechnen.

By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems, and in effect increases the mental power of the race. Before the introduction of the Arabic notation, multiplication was difficult, and the division even of integers called into play the highest mathematical faculties. Probably nothing in the modern world would have more astonished a Greek mathematician than to learn that, under the influence of compulsory education, the whole population of Western Europe, from the highest to the lowest, could perform the operation of division for the largest numbers. (...) Our modern power of easy reckoning with decimal fractions is the almost miraculous result of the gradual discovery of a perfect notation.

Alfred North Whitehead (1861–1947), *An Introduction to Mathematics* (1911)

Sie kennen bereits einige sehr erfolgreiche mathematische Kalküle, diese beruhen auch und vor allem auf einer zweckmäßigen Notation:

Die **Stellenschreibweise** für natürliche Zahlen \mathbb{N} und ganze Zahlen \mathbb{Z} , sowie die **Bruchrechnung** für die rationalen Zahlen \mathbb{Q} . Das kostet in der Schulmathematik erst einige Jahre, doch es lohnt sich und hilft überall: Die Rechenregeln sind nicht willkürlich, sondern effizient und nützlich.

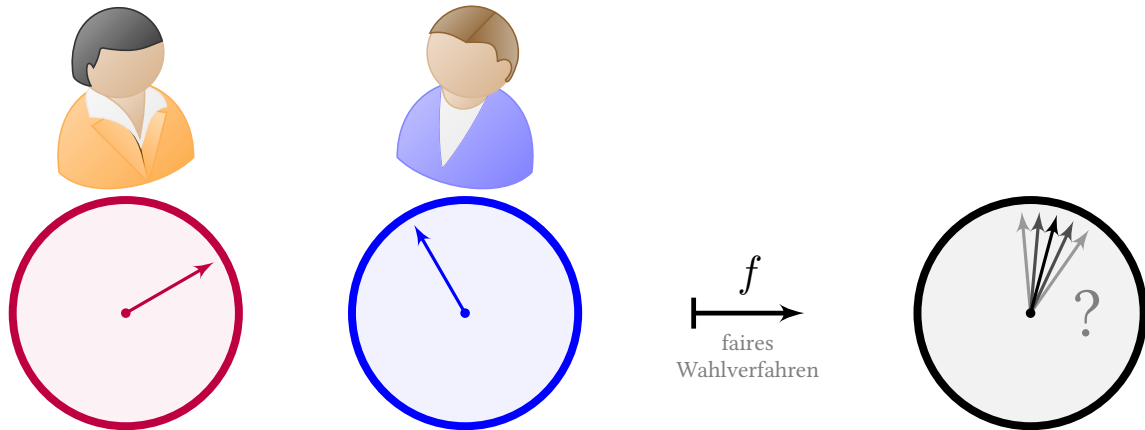
Später lernen Sie **Differenzieren und Integrieren**, und auch dies kann man formal als einen Kalkül auffassen und kommt damit recht weit – bis zum Abitur! Das ist nicht bloß formal, dahinter steckt eine wichtige Bedeutung, nämlich Grenzwerte, wie Sie aus der Analysis wissen.

Der **Matrizenkalkül** ist eine wichtige Technik für die Lineare Algebra und die Numerik. Eine Vielzahl mathematischer Objekte lässt sich durch Matrizen beschreiben und behandeln, zum Beispiel lineare Abbildungen, quadratische Formen, gewichtete Graphen, stochastische Prozesse, etc.

Der **stochastische Kalkül** formalisiert das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten. Es ist bemerkenswert, dass sich das kalkülisieren lässt!

Anwendung der Topologie: stetige Richtungswahl

Alice und Bob wählen frei und unabhängig voneinander jeweils eine Richtung in der Ebene: Alice wählt $x \in \mathbb{S}^1$, und Bob wählt $y \in \mathbb{S}^1$. Sie suchen nun einen Kompromiss $z = f(x, y)$, also ein Wahlverfahren, das aus ihren Stimmabgaben ein gemeinsames Endergebnis extrahiert.



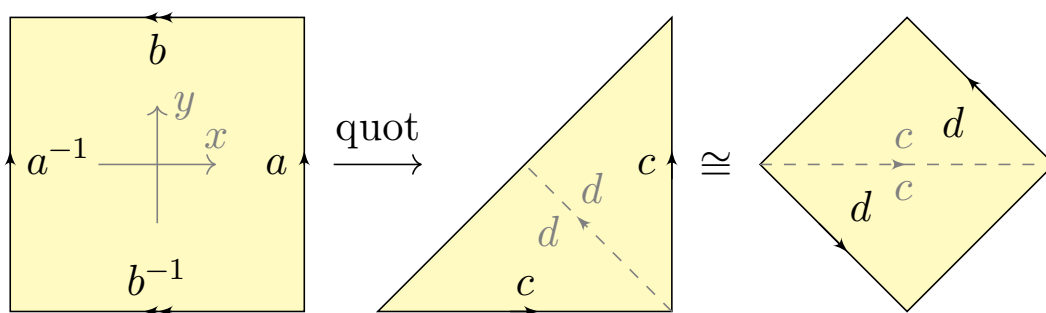
Als Wahlverfahren suchen wir eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Wir fordern Symmetrie, $f(x, y) = f(y, x)$, und Einhelligkeit, $f(x, x) = x$.

Aufgabe: Finden Sie alle in diesem Sinne fairen Wahlverfahren!

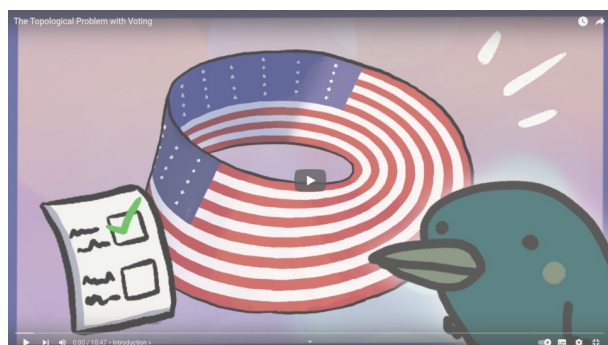
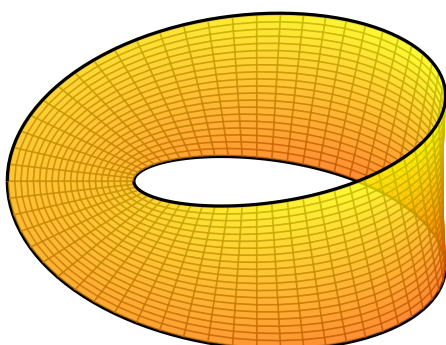
Naive Beispiele: Genügt $(x, y) \mapsto \text{const}$? oder xy ? oder \sqrt{xy} ?

Anwendung der Topologie: stetige Richtungswahl

Lösung: (1) Symmetrie bedeutet, f faktorisiert über den Quotienten $M = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) / (x, y) \sim (y, x)$ zu $g : M \rightarrow \mathbb{S}^1$. Dies ist ein Möbius-Band!



(2) Einhelligkeit bedeutet Retraktion $(i, g) : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\cong} M$ auf den Rand.



Behauptung: Es existiert keine Retraktion $(i, g) : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\neq} M$ auf den Rand. Gegeben ist $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow M : x \mapsto [x, x]$, gesucht $g : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ mit $g \circ i = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$.

Wir haben den Deformationsretrakt $(\iota, \rho) : \mathbb{S}^1 \simeq M$ auf die Mittelachse. Explizit in Formeln? Gerne! $\iota : z \mapsto [+ \sqrt{z}, - \sqrt{z}]$ und $\rho(x, y) = -xy$.

Wir hätten $(\varphi, \psi) : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\neq} \mathbb{S}^1$ mit $\varphi = \rho \circ i$ und $\psi = g \circ \iota$ und $\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_{\mathbb{S}^1}$, somit $1 = \deg(\text{id}_{\mathbb{S}^1}) = \deg(\psi \circ \varphi) = \deg(\psi) \cdot \deg(\varphi)$, also $\deg(\varphi) = \pm 1$.

Es gilt jedoch $\deg(\varphi) = \pm 2$. Daran zerbricht unsere Annahme:

Es gibt keine Retraktion g , somit kein faires Wahlverfahren f . QED

😊 Dieses Argument ist verblüffend raffiniert und doch einfach elegant. Unsere topologischen Werkzeuge glänzen durch effiziente Anwendung: (1) Flächenkalkül und (2) Umlaufzahl sowie Stetigkeit, Quotienten, etc.

Kaum macht man es richtig, schon funktioniert's!

Dieses schöne topologische Anwendungsbeispiel verdanken wir Graciela Chichilnisky, einer argentinisch-US-amerikanischen Mathematikerin und Wirtschaftswissenschaftlerin, en.wikipedia.org/wiki/Graciela_Chichilnisky.

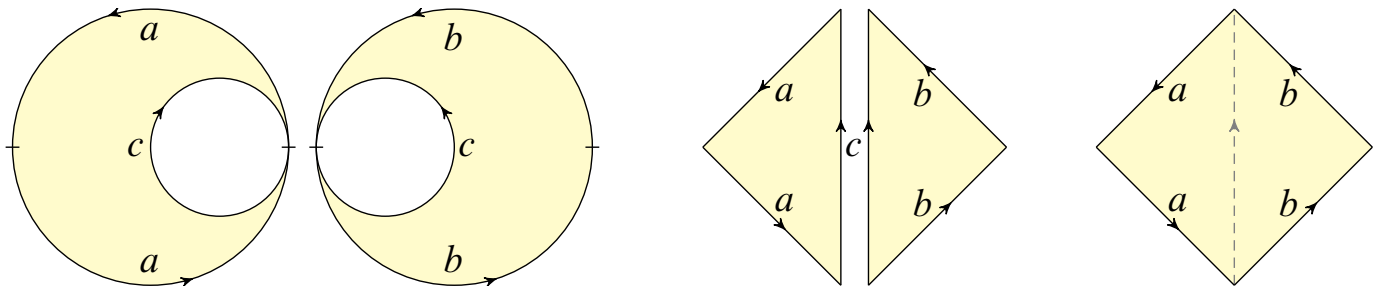
Sie sehen hier ein erstes schönes und durchaus typisches Ergebnis der Sozialwahltheorie [*social choice theory*], auch Theorie kollektiver Entscheidungen [*theory of collective choice*]. Diese untersucht Wahlen und Abstimmungen, also ganz allgemein Gruppenentscheidungen durch Aggregation individueller Präferenzen zu einer kollektiven Präferenz.

Meist sucht man nach bestimmten „fairen“ Wahlverfahren, so wie hier. Der erste Schritt ist die mathematische Präzisierung der Fragestellung! Oft erweisen sich jedoch die naiv-gutgemeinten Forderungen als in sich widersprüchlich und erlauben somit nachweislich keine Lösung, so wie oben gezeigt. Daher beschäftigt sich die Sozialwahltheorie nicht nur mit der Konstruktion von Lösungen, sondern auch mit Unmöglichkeitssätzen.

Mathematik hilft überall, sogar in weit entfernt geglaubten Gebieten... Die Sozialwahltheorie verbindet Mathematik mit Volkswirtschaftslehre, Politikwissenschaft, Psychologie, Philosophie, Rechtswissenschaft, uvm. Berühmt ist der „Satz vom Diktator“ nach Kenneth Arrow (1921–2017); für diese und weitere Arbeiten erhielt er 1972 den Wirtschaftsnobelpreis.

Anwendungsbeispiel: Verdopplung des Möbius-Bandes

Mit dem Flächenkalkül können Sie rechnen, effizient und sicher!



Beispiel / Übung K3M: die verbundene Summe $\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$

Entfernen Sie aus \mathbb{RP}^2 eine Kreisscheibe; schreiben Sie das so entstehende Möbius-Band als Flächenwort aus drei Buchstaben. Welche Fläche F entsteht, wenn Sie zwei Möbius-Bänder an ihrem Rand verkleben?

Anleitung: Verschiedene Lösungswege stehen Ihnen nun offen:

- (1) Formulieren Sie F als Flächenwort und bringen Sie es in Normalform.
- (2) Berechnen Sie χ , r , ε und nutzen Sie den Flächenklassifikationssatz.
- (3) Versuchen Sie es anschaulich / zeichnerisch / ohne Theorie (A412).

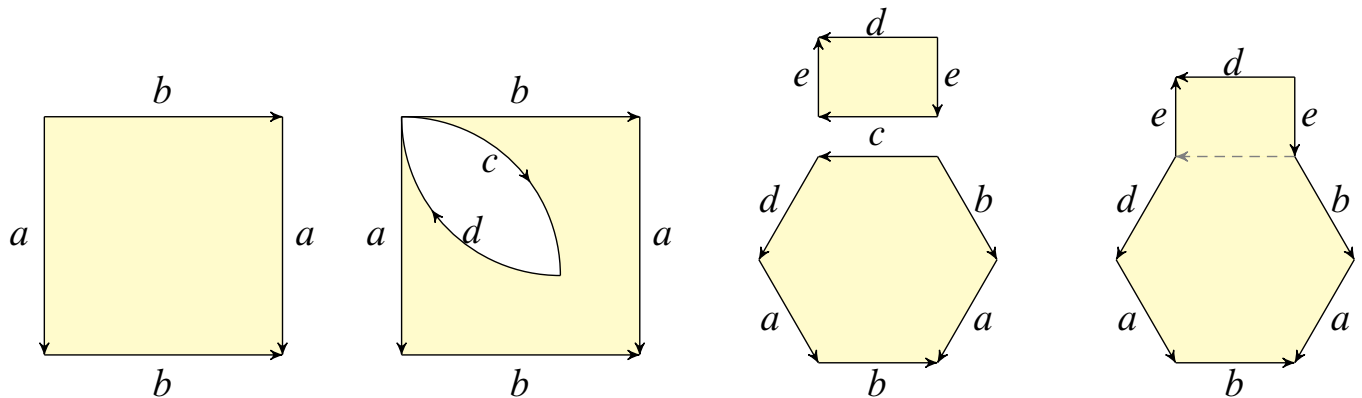
Anwendungsbeispiel: Verdopplung des Möbius-Bandes



😊 Geometrische Intuition und Anschauung sind willkommene Hilfen. Nun sind Sie nicht mehr darauf allein angewiesen, sie können rechnen!

Anwendungsbeispiel: der Satz von Dyck

Walther Dyck (1856–1934) löste 1888 folgendes Problem:


Beispiel / Übung K3N: die verbundene Summe $\text{Torus} \sharp \mathbb{RP}^2$

Entfernen Sie aus einem Torus eine Kreisscheibe und kleben Sie am so geschaffenen Rand ein Möbius-Band ein. Welche Fläche F entsteht?

Anleitung: *Kreuzhaube fressen Henkel auf.* (R.W. Fassbinder, 1974)

- (1) Formulieren Sie F als Flächenwort und bringen Sie es in Normalform.
- (2) Berechnen Sie χ , r , ε und nutzen Sie den Flächenklassifikationsatz.
- (3) Versuchen Sie es anschaulich / zeichnerisch / ohne Theorie.

Anwendungsbeispiel: der Satz von Dyck

Der Flächenkalkül erweitert Ihren Werkzeugkasten ganz wesentlich. Sie verfügen nun über beides: geometrisch-anschauliche Skizzen und kombinatorisch-algebraische Rechnungen. Das ist schön und gut, beide sind nützlich, sie stützen und ergänzen sich gegenseitig.

In einfachen Fällen führt die Anschauung schneller und leichter zum Ziel. In den meisten Fällen jedoch führt der Kalkül weiter als die Intuition. Ideal ist es daher, beides zu entwickeln, sowohl die Anschauung zu schulen als auch den Kalkül zu perfektionieren. So geht Mathematik!

Ich hoffe sehr, dass diese Vorlesung Ihnen beides vermitteln konnte: intuitive Anschauung und präzise Rechnung. Beides wird Ihnen nützen.

*C'est par la logique que l'on prouve
et par l'intuition que l'on découvre.*

[Mit der Logik beweisen wir,
mit der Intuition entdecken wir.]

Henri Poincaré (1854–1912)



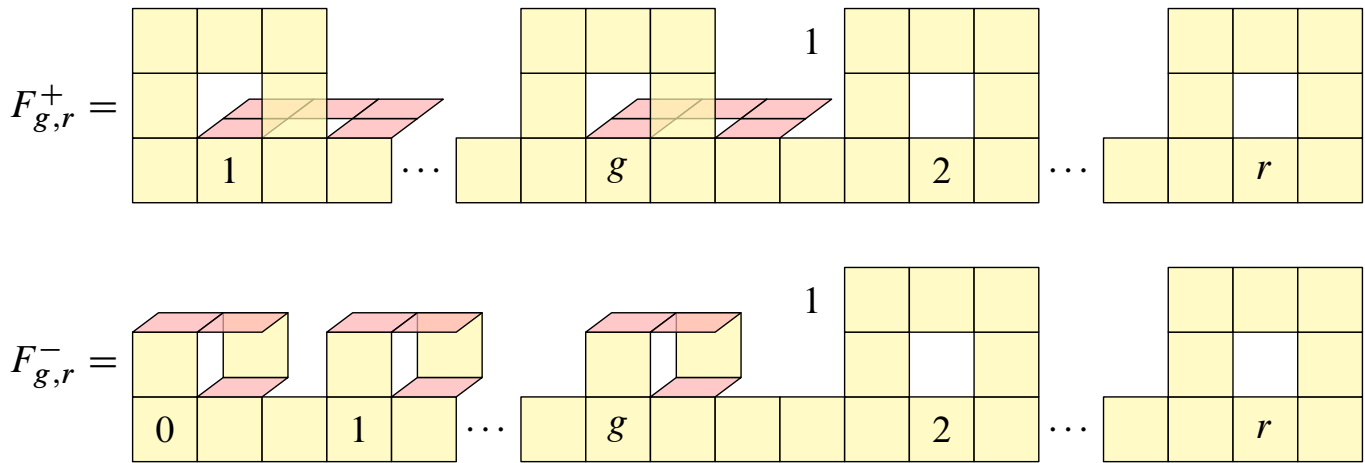
In Natur und Mathematik begegnen Ihnen nicht nur geschlossene Flächen, sondern häufig auch Flächen mit Rand. Zur Vereinfachung haben wir zunächst geschlossene Flächen klassifiziert, nun kostet es kaum Mehraufwand, die Flächen mit Rand ebenso zu klassifizieren.

Wir gehen wie oben vor und beginnen mit konkreten Modellflächen $F_{g,r}^{\pm}$. Allgemein betrachten wir schließlich eine beliebige kompakte Fläche F , trianguliert, zusammenhängend, kompakt und eventuell mit Rand. Durch Schneiden und Kleben können wir F in $F_{g,r}^{\pm}$ überführen!

Für diese naheliegende Erweiterung bieten sich zwei Beweiswege: Wir erweitern den Flächenkalkül um Buchstaben, die nicht in Paaren, sondern auch einzeln auftreten dürfen. Das codiert einem Teil des Randes. Die entsprechenden Rechenregeln können wir entsprechend erweitern.

Alternativ und einfacher: Wir schließen jede Randkomponente durch Anheften einer Kreisscheibe und nutzen dann die Klassifikation der geschlossenen Flächen. (Übung: Formulieren Sie dies genau aus.) Auf allen Wege erhalten wir den folgenden eleganten Satz.

Klassifikation kompakter Flächen mit / ohne Rand

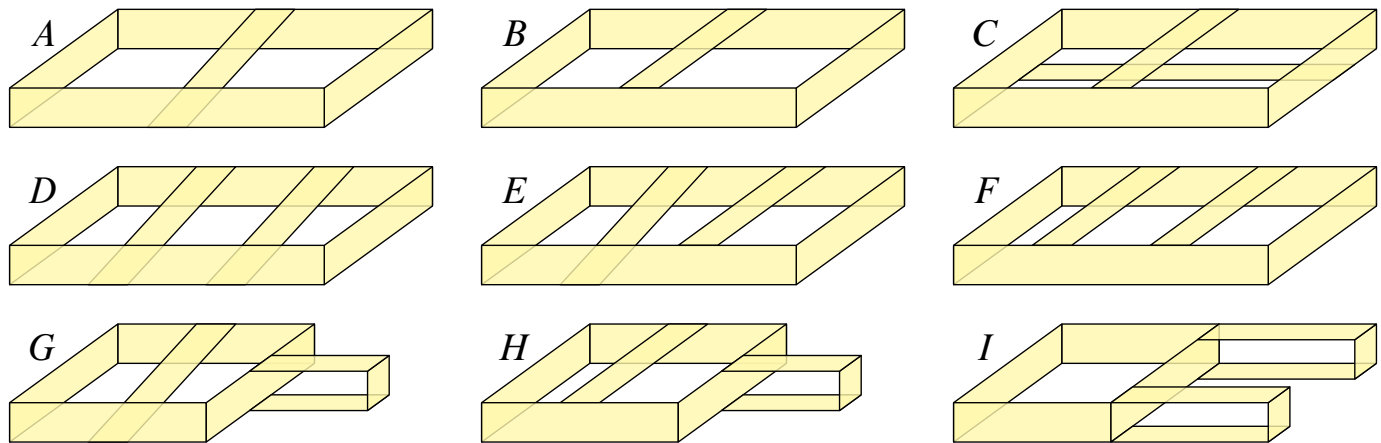


Satz K31: simpliziale Klassifikation kompakter Flächen

Sei K ein Simplicialkomplex und $F = |K|$ eine zshgde kompakte Fläche, eventuell mit Rand. Dann existiert ein stückw. affiner Homöomorphismus $(h, k) : F \cong F_{g,r}^\varepsilon$ zu genau einer unserer obigen Modellflächen $F_{g,r}^\varepsilon$.

Für alle $g, r \in \mathbb{N}$ gilt dabei $\chi(F_{g,r}^+) = 2 - 2g - r$ und $\chi(F_{g,r}^-) = 1 - g - r$. Allein aus den drei Daten (χ, r, ε) , oder äquivalent hierzu (g, r, ε) , folgt bereits die Homöomorphie $F \cong F_{g,r}^\varepsilon$ zur obigen Modellfläche.

Klassifikation kompakter Flächen mit / ohne Rand



😊 Mit unseren topologischen und kombinatorischen Werkzeugen können Sie alle kompakten Flächen beschreiben und klassifizieren.

Das Gelingen dieser Klassifikation ist keineswegs selbstverständlich, sondern überaus glücklich. Mathematik schafft Ordnung und Klarheit!

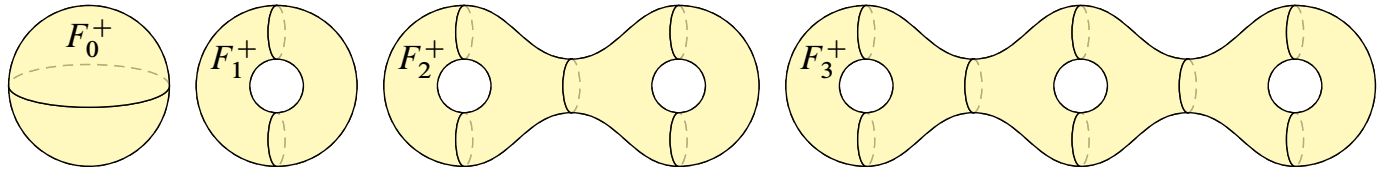
Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.

Ludwig Wittgenstein (1889–1951), *Tractatus logico-philosophicus* (1922)

In Dimension $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir n -Mannigfaltigkeiten M , zusammenhängend und geschlossen (also kompakt und ohne Rand).

Dimension $n = 1$: Hier gibt es nur die Kreislinie, $M \cong \mathbb{S}^1$ (K1N).

$n = 2$: Dank Klassifikation K3G kennen wir alle Möglichkeiten:



Wie können wir die Sphäre charakterisieren / leicht erkennen?

Für $M \cong \mathbb{S}^2$ gilt $[\mathbb{S}^1, M] = \{*\}$. Für $M \not\cong \mathbb{S}^2$ gilt $[\mathbb{S}^1, M] \neq \{*\}$.

Charakterisierung der 2-Sphäre bis auf Homöomorphie

Für jede geschlossene 2-Mfkt M mit $[\mathbb{S}^0, M] = [\mathbb{S}^1, M] = \{*\}$ gilt $M \cong \mathbb{S}^2$.

Poincaré–Vermutung (1904), Satz von Hamilton–Perelman (2003)

Für jede geschlossene 3-Mfkt M mit $[\mathbb{S}^0, M] = [\mathbb{S}^1, M] = \{*\}$ gilt $M \cong \mathbb{S}^3$.

„In was für einer Welt leben wir eigentlich?“, so fragten wir uns in der Einleitung. Sie kennen nun das nötige Vokalubar der Mannigfaltigkeiten und die Klassifikation der kompakten Flächen. Die topologischen Eigenschaften bestimmen die (Erdober-)Fläche, auf der wir leben!

Grundannahme: Wir leben auf einer zshgden, orientierten geschlossenen Fläche, also kompakt, doch ohne Rand. (Flacherdler verabschieden sich.)

Wir müssen also „nur“ noch unter den Modellen F_g^+ unterscheiden:

Leben wir auf einer Sphäre oder einem Torus oder Doppeltorus usw?

Wenn die Krümmung überall positiv ist, oder zumindest in ihrer Summe, dann bleibt nur die Sphäre! Der Satz von Gauß–Bonnet sagt allgemein

$\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$ und bestimmt somit χ und die Fläche eindeutig.

Aus lokalen (Krümmungs-)Daten schließen wir die globale Form!

Alternative: Die Bedingung $[\mathbb{S}^1, X] = \{*\}$ bedeutet, in X lässt sich jedes (beliebig elastische) Gummiband zusammenziehen. Dies ist für die Sphäre F_0^+ erfüllt, für alle anderen Flächen F_g^+ mit $g \geq 1$ hingegen nicht.

Mehr hierzu im nächsten Kapitel zu Fundamentalgruppen!

Allzu naive Verallgemeinerung

Für jede geschlossene 4–Mfkt M mit $[S^0, M] = [S^1, M] = \{*\}$ gilt $M \cong S^4$?

Das ist falsch, ein einfaches Gegenbeispiel ist $M = S^2 \times S^2$. (Übung!)

Wir fordern daher stärker $[S^0, M] = [S^1, M] = \dots = [S^{n-1}, M] = \{*\}$.

Homotopie–Charakterisierung der n –Sphäre

Sei M eine geschlossene n –Mfkt mit $[S^k, M] = \{*\}$ für $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Dann folgt Homotopie–Äquivalenz $M \simeq S^n$.

Verallgemeinerte Poincaré–Vermutung (in drei Varianten)

Sei M eine geschlossene n –Mfkt mit $[S^k, M] = \{*\}$ für $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Dann folgt Homöomorphie / PL–Isomorphie / Diffeomorphie $M \cong S^n$.

Top: Wahr für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. PL: Wahr für $n \neq 4$, unbekannt für $n = 4$.

Diff: Wahr für $n = 1, 2, 3, 5, 6$. Falsch für $n = 7$. Unbekannt für $n = 4$.

Antworten auf diese grundlegenden Fragen markieren mathematische Höhepunkte des 20. Jahrhunderts und wirken auch in das 21. hinein. Diese beeindruckenden, tiefliegenden Arbeiten wurden mit einer Reihe von Fields–Medaillen ausgezeichnet und haben neue Gebiete erschlossen.

„In was für einer Welt leben wir eigentlich?“, so fragen sich auch heute noch Astronom:innen mit Blick auf unser Universum. Seine globale Gestalt ist zuerst eine Frage der Phantasie, dann eine mathematische Frage nach Beispielen und Klassifikationen. Das suggeriert eine Reihe von Möglichkeiten und drängt schließlich zur physikalischen Frage nach diskriminierenden Beobachtungen und Messungen.

Ich erwähne dies vor allem, um die Flächenklassifikation in das rechte, selbstbewusst–bescheidene Licht zu rücken. Sie dürfen stolz sein auf diese Errungenschaft. Sie markiert kein Ende, sondern einen Anfang.

The theorem of classification of surfaces is a top-class mathematical achievement, comparable with the discovery of America or X-rays.

Vladimir Arnold (1937–2010), *On teaching mathematics* (1997)