

Kapitel J

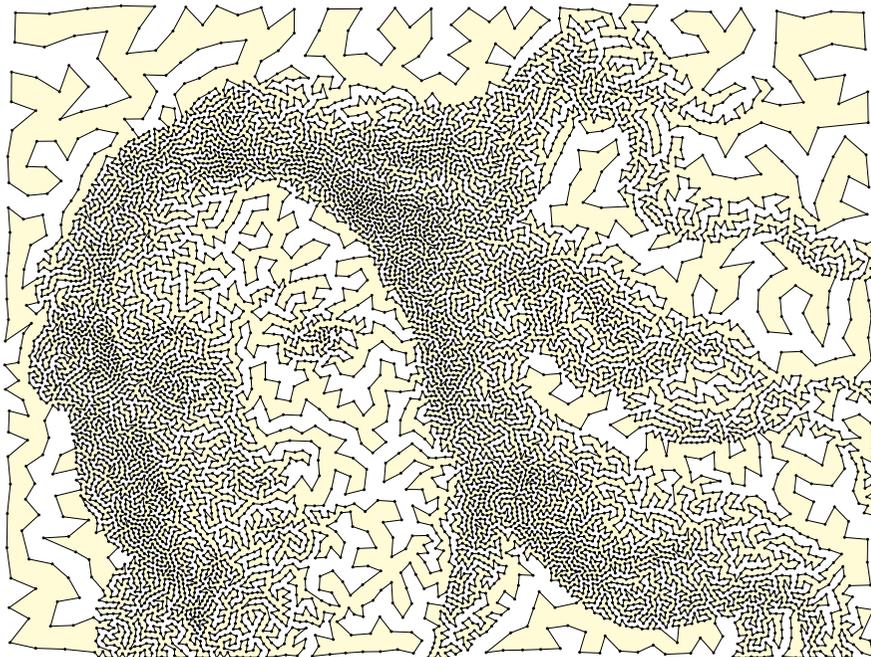
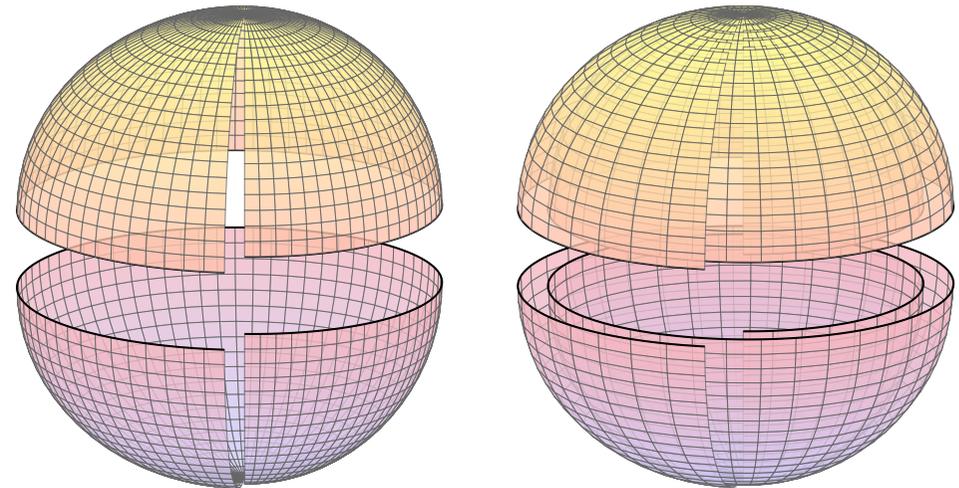
Abbildungsgrad auf Sphären und Topologie des Raumes \mathbb{R}^n

*Algebra is the offer made by the devil to the mathematician.
The devil says: I will give you this powerful machine, it will answer
any question you like. All you need to do is give me your soul:
give up geometry and you will have this marvelous machine.*

Sir Michael Atiyah (1929–2019)

Inhalt dieses Kapitels J

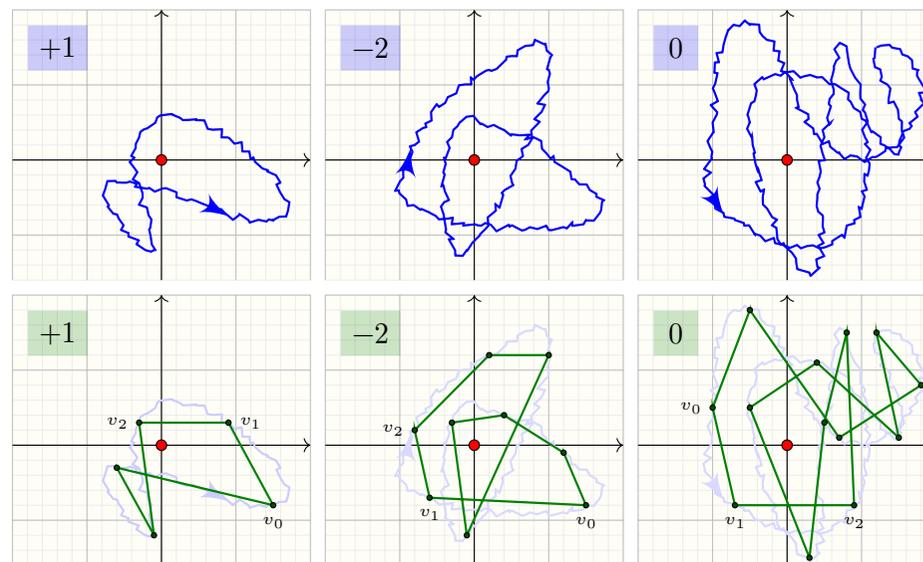
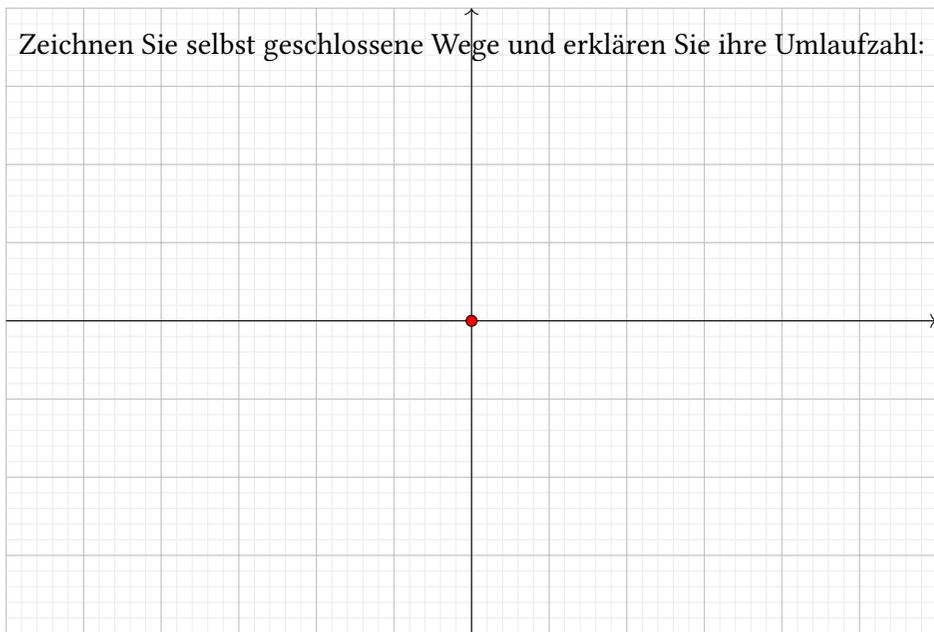
- 1 Die Umlaufzahl ebener Wege
- 2 Der Satz von Jordan–Schoenflies
- 3 Der Abbildungsgrad auf Sphären
- 4 Der Brouwersche Fixpunktsatz
- 5 Der Satz vom Igel und Vektorfelder auf Sphären
- 6 Der Satz von Borsuk–Ulam und Anwendungen
- 7 Topologische Invarianz: Dimension, Rand, Gebiet, Orientierung

Umlaufzahl und Topologie der Ebene \mathbb{R}^2 J003
MotivationAbbildungsgrad und Topologie des Raumes \mathbb{R}^n J004
Motivation

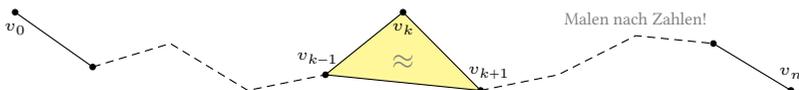
$$\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n : (r \cos t, r \sin t, x_2, \dots, x_n) \mapsto (r \cos(kt), r \sin(kt), x_2, \dots, x_n)$$

In Zylinderkoordinaten: Diese Modellabbildung $\varphi_k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $k \in \mathbb{Z}$ wickelt die x_0 - x_1 -Ebene k -mal um den Nullpunkt, entsprechend wickelt φ_k^n die Sphäre k -mal um sich selbst wie skizziert.

Zeichnen Sie selbst geschlossene Wege und erklären Sie ihre Umlaufzahl:



Stetige Abbildungen $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ können unvorstellbar kompliziert sein. Wir berechnen die Umlaufzahl mit polygonalen Wegen: Approximation!



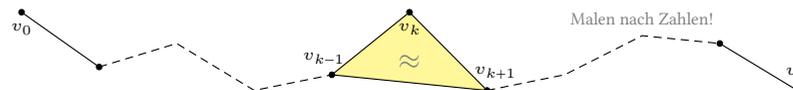
Definition J1A: Polygonzüge

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge, zum Beispiel $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen oder ein Polyeder $X = |K|$.

- (1) Ein **Polygonzug** $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in X ist eine Punktfolge v_0, v_1, \dots, v_n mit $[v_0, v_1], \dots, [v_{n-1}, v_n] \subseteq X$. Wir nennen w **geschlossen** falls $v_0 = v_n$.
- (2) Der **umgekehrte Polygonzug** $\bar{w} = v_n \dots v_1 v_0$ verläuft ebenso in X . Zum Punkt $a \in X$ ist $\text{id}_a = a$ der **konstante Polygonzug** der Länge 0.
- (3) Polygonzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = v'_0 v'_1 \dots v'_m$ sind **verknüpfbar** falls $v_n = v'_0$; ihre **Verknüpfung** ist dann $w * w' := v_0 v_1 \dots v_n v'_1 \dots v'_m$.

- ☺ Wir erhalten die Kategorie $P^{pl}(X)$: (a) Objekte sind $a, b, c, \dots \in X$.
- (b) Morphismen von a nach b sind die Polygonzüge $w : a \rightarrow b$ in X .
- (c) Verknüpfung ist Aneinanderhängung $(w : a \rightarrow b) * (w' : b \rightarrow c)$.

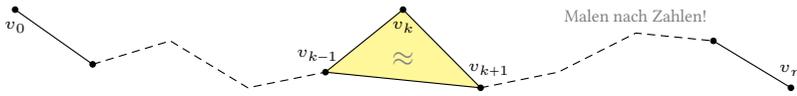
Übung: Was ist hierzu noch zu zeigen? Zeigen Sie es!



Definition J1A: polygonale Homotopie

- (4) Eine **elementare Homotopie** $w \Rightarrow w'$ in X ist eine Umformung von $w = v_0 \dots v_{k-1} v_k v_{k+1} \dots v_n$ zu $w' = v_0 \dots v_{k-1} v_{k+1} \dots v_n$ mit $[v_{k-1}, v_k, v_{k+1}] \subseteq X$. Wir vereinbaren zudem $v_0 v_0 \Rightarrow v_0$ für die **konstanten Polygonzüge**.
- (5) Als Äquivalenzrelation erzeugt dies die **polygonale Homotopie** \approx .

- ☺ **Verträglichkeit:** Aus $w_1 \approx w'_1$ und $w_2 \approx w'_2$ folgt $w_1 * w_2 \approx w'_1 * w'_2$.
 - ☺ Wir erhalten so die Quotientenkategorie $\Pi^{pl}(X) = P^{pl}(X) / \approx$:
 - (a) Objekte sind die Punkte $a, b, c, \dots \in X$ der betrachteten Menge X .
 - (b) Morphismen von a nach b sind die Zugklassen $[w : a \rightarrow b]$ in X .
 - (c) Verknüpfung ist die Aneinanderhängung $[w_1] * [w_2] = [w_1 * w_2]$.
 - ☺ Darin ist jede Zugklasse $[w : a \rightarrow b]$ invertierbar durch $[\bar{w} : b \rightarrow a]$, denn $w * \bar{w} \approx \text{id}_a$ und $\bar{w} * w \approx \text{id}_b$, also $[w] * [\bar{w}] = [\text{id}_a]$ und $[\bar{w}] * [w] = [\text{id}_b]$.
- Eine Kategorie mit dieser Eigenschaft nennen wir ein **Gruppoid**.



Jeder Polygonzug $w = v_0v_1 \dots v_n$ in X definiert einen Weg $|w| : [0, 1] \rightarrow X$. Hierzu wählen wir eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ von $[0, 1]$, kanonisch die äquidistante Unterteilung $t_k = k/n$ für $k = 0, 1, \dots, n$.

An jeder Stützstelle t_k ist der Bildpunkt $v_k = \gamma(t_k)$ vorgegeben. Dazwischen interpolieren wir affin-linear (Verklebesatz E1P):

$$\gamma(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}}v_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}v_k \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n \text{ und } t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Dies nennen wir die geometrische Realisierung von w , geschrieben

$$\gamma = |w| : [0, 1] \rightarrow V \quad \text{mit} \quad |w| = |v_0v_1 \dots v_n| := \begin{bmatrix} 0/n & 1/n & \dots & n/n \\ v_0 & v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}.$$

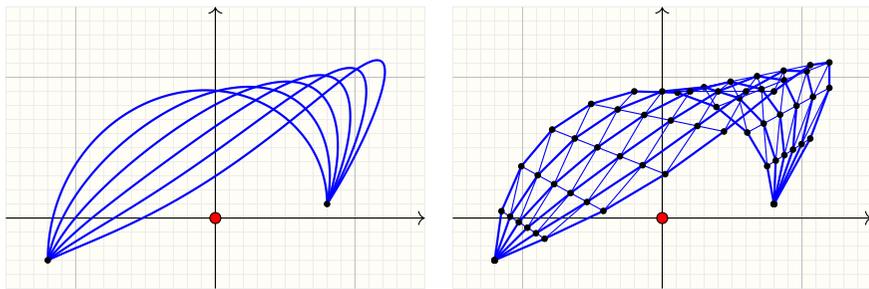
Jede polygonale Homotopie $w \approx w'$ von Polygonzügen in X induziert eine Homotopie $|w| \sim |w'|$ relativ $\{0, 1\}$ der zugehörigen Wege in X .

Aufgabe: Explizieren Sie diese Homotopie $|w| \sim |w'|$ relativ $\{0, 1\}$.

Lösung: (1) Sei $w_0 = v_0 \dots v_{k-1}v_kv_{k+1} \dots v_n$ ein Polygonzug in X und $\Delta = [v_{k-1}, v_k, v_{k+1}] \subseteq X$. Wir verschieben v_k auf v_{k-1} vermöge $[0, 1] \rightarrow X : t \mapsto u_t$ mit $u_t = (1-t)v_k + tv_{k-1}$. Dank $\Delta \subseteq X$ verläuft zu jeder Zeit $t \in [0, 1]$ der Polygonzug $w_t = v_0 \dots v_{k-1}u_tv_{k+1} \dots v_n$ in X . Diese Familie $H_t = |w_t|$ definiert die Homotopie $H : |w_0| \sim |w_1|$ in X .

(2) Anschließend löschen wir den doppelten Punkt aus dem Polygonzug: Für den Polygonzug $w' = v_0 \dots v_{k-1}v_{k+1} \dots v_n$ gilt $w \Rightarrow w'$ in X . Wir haben die Unterteilungen $t_i = i/n$ für $i = 0, \dots, n$ und $t'_j = j/(n-1)$ für $j = 0, \dots, n-1$. Wir bilden t_0, \dots, t_{k-1} ab auf t'_0, \dots, t'_{k-1} und t_k, \dots, t_n auf $t'_{k-1}, \dots, t'_{n-1}$. Dies setzen wir stückweise affin fort zu $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Wir erhalten damit die ersehnte Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $H(t, s) = |w'|((1-t)h(s) + ts)$ von $H_0 = |w|$ nach $H_1 = |w'|$.

☺ Der Aufbau expliziter Formeln erfordert Kreativität und Präzision. Liegen die Formeln erst einmal vor, so genügt sorgfältiges Nachrechnen.



Satz J1B: polygonale Approximation

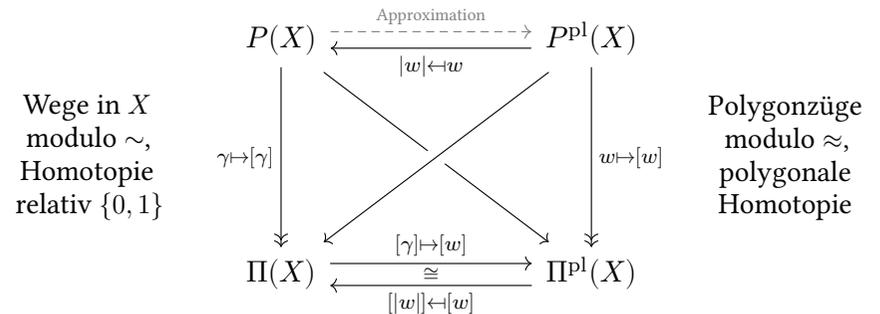
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, oder allgemein $X = |K| \subseteq V$ ein Polyeder.

- (1) Jeder Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ist in X homotop relativ $\{0, 1\}$ zu einem polygonalen Weg $|w|$ in X , kurz $\gamma \sim |w| = |v_0v_1 \dots v_n|$.
- (2) In X gilt $|w| \sim |w'|$ genau dann, wenn $w \approx w'$ gilt.

Beweis: Triangulierung (I3T) und simpliziale Approximation (I4j). QED

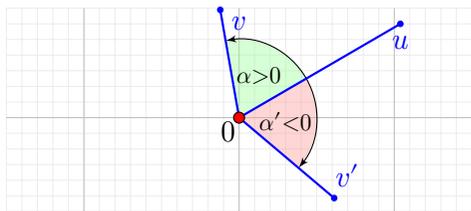
Wir vereinfachen Wege/Homotopie zu polygonalen Wegen/Homotopie. Ab hier ist alles elementar: Für Polygonzüge genügt Schulmathematik.

Jeder Polygonzug w in X definiert einen Weg $|w| : [0, 1] \rightarrow X$. Umgekehrt möchten wir jedem Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ seine polygonale Approximation w in X zuweisen, doch hierzu gibt es leider (unendlich) viele Wahlen.



☺ Wohldefiniert ist dies erst modulo polygonaler Homotopie, $\gamma \mapsto [w]$, denn alle polygonalen Approximationen zu γ sind polygonal homotop.

☺ Erst auf den Quotienten erhalten wir die Bijektion $\Pi(X) \cong \Pi^{\text{pl}}(X)$. Das Ergebnis ist schön und einfach. Sorgfältige Notation klärt und hilft.



Definition J1c: Umlaufzahl als Winkelzuwachs

Für $u, v \in \mathbb{C}^*$ mit $v \notin \mathbb{R}_{<0} \cdot u$ definieren wir den **orientierten Winkel**

$$\sphericalangle(u, v) := \alpha \in]-\pi, \pi[\quad \text{durch die Bedingung} \quad \frac{v}{|v|} = e^{i\alpha} \frac{u}{|u|}.$$

Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ ein Polygonzug in $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir definieren

$$\text{deg}(w) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \sphericalangle(v_{k-1}, v_k) \in \mathbb{R}.$$

Dies ist wohldefiniert, denn $[v_{k-1}, v_k] \subseteq \mathbb{C}^*$ garantiert $v_k \notin \mathbb{R}_{<0} \cdot v_{k-1}$. Wir nennen $\text{deg}(w)$ die **Umlaufzahl** oder **Windungszahl** von w um 0.

☺ Diese Konstruktion liefert zugleich einen effizienten Algorithmus! In reellen Koordinaten $u = (u_1, u_2)$ und $v = (v_1, v_2)$ bedeutet der Winkel

$$\frac{1}{|v|} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|u|} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Für das Skalarprodukt $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$ und das Kreuzprodukt $u \times v = u_1 v_2 - u_2 v_1$ folgt dann

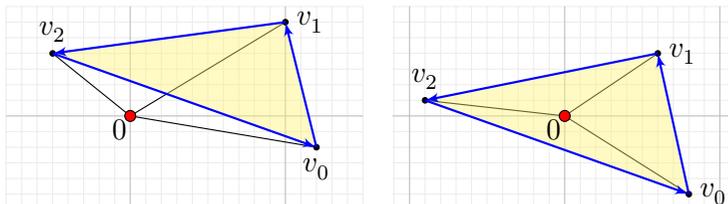
$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}, \quad \sin \alpha = \frac{u \times v}{|u| \cdot |v|}.$$

☺ Die erste Gleichung genügt, um den **absoluten Winkel** $|\alpha| \in [0, \pi]$ zu bestimmen; das beruht allein auf dem Skalarprodukt und gelingt in jedem euklidischen Vektorraum. Das **Vorzeichen** entspricht der Orientierung des Winkels wie oben skizziert. Dies gelingt nur in der Ebene \mathbb{R}^2 , wo wir Links- und Rechtsdrehung unterscheiden können.

☺ Dank polygonaler Approximation genügt eine *Summe* zur Definition der Umlaufzahl. Wir entwickeln später weitere nützliche Formeln.

Beispiel / Übung J1d: Rechenregeln für Umlaufzahlen

- (1) Für den konstanten Polygonzug gilt $\text{deg}(v_0) = 0$, bei Umkehrung $\text{deg}(\bar{w}) = -\text{deg}(w)$, bei Verknüpfung $\text{deg}(w * w') = \text{deg}(w) + \text{deg}(w')$.
- (2) Ist $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in \mathbb{C}^* geschlossen, also $v_0 = v_n$, so gilt $\text{deg}(w) \in \mathbb{Z}$.



Beispiel / Übung J1e: Baby-Jordan für Dreiecke

Sei $\Delta = [v_0, v_1, v_2] \subseteq \mathbb{C}$ ein Dreieck und $w = v_0 v_1 v_2 v_0$.

- (0) Im Falle $0 \notin \Delta$ gilt $\text{deg}(w) = 0$, wie oben skizziert.
- (1) Im Falle $0 \in \text{Int } \Delta$ gilt $\text{deg}(w) = \pm 1$, je nach Orientierung.
- Im Falle $0 \in \partial \Delta$ läuft w durch 0, und die Umlaufzahl ist nicht definiert.

Übung: Beweisen Sie diese einfachen, aber nützlichen Rechenregeln.

Beispiel J1d: (1) Die erste Aussage folgt sofort aus der Definition J1c. (2) Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ ein Polygonzug in \mathbb{C}^* . Für $\ell = 0, \dots, n$ setzen wir $\alpha_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$. Per Induktion erhalten wir $v_\ell / |v_\ell| = e^{i\alpha_\ell} v_0 / |v_0|$, denn $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \cdot) : t \mapsto e^{it}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Gilt $v_n = v_0$, so folgt $e^{i\alpha_n} = 1$, also $\alpha_n \in \mathbb{Z}2\pi$ und $\text{deg}(w) \in \mathbb{Z}$.

Beispiel J1e: (0) Der Punkt 0 liegt in mindestens einer der drei äußeren Halbebenen, die von den Seiten des Dreiecks aufgespannt werden. Durch Drehung können wir $\Delta \subseteq \mathbb{C}_{\text{re}>0}$ erreichen, somit $\text{deg}(w) = 0$.

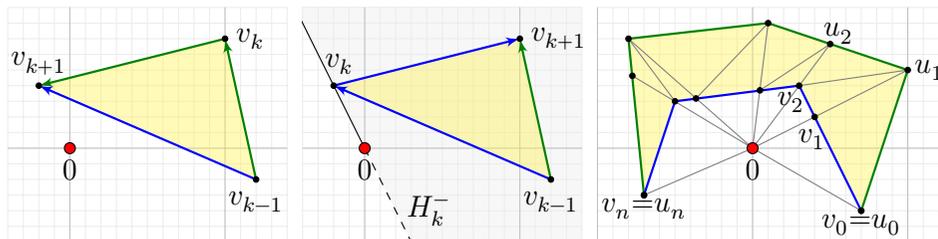
(1) Nach Drehung können wir $v_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ annehmen.

Im Fall (1a) gilt $v_1 \in \mathbb{C}_{\text{im}>0}$ und $v_2 \in \mathbb{C}_{\text{im}<0}$ sowie $\text{deg}(w) = +1$.

Im Fall (1b) gilt $v_1 \in \mathbb{C}_{\text{im}<0}$ und $v_2 \in \mathbb{C}_{\text{im}>0}$ sowie $\text{deg}(w) = -1$.

Die Umlaufzahl unterscheidet das Innere und das Äußere des Dreiecks. (Dies perfektioniert der Satz J2d von Jordan für polygonale Kurven.)

☺ Dies sind anschauliche, einfache, aber grundlegende Rechenregeln. Daraus erhalten wir nun schrittweise immer interessantere Sätze.



J1F: Aus polygonaler Homotopie $w \approx w'$ in \mathbb{C}^* folgt $\deg(w) = \deg(w')$. Dies folgt aus Beispiel J1E(0): Der Winkelzuwachs ändert sich nicht.

J1G: Jeder Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in \mathbb{C}^* ist kürzbar bis alle Winkel $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$ selbes Vorzeichen haben (positiv / negativ / null mit $n \leq 1$). Andernfalls liegen v_{k-1}, v_k, v_{k+1} in einer Halbebene, sind also kürzbar!

Satz J1H: Klassifikation aller Polygonzüge modulo Homotopie

Seien $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = u_0 u_1 \dots u_m$ Polygonzüge mit gleichem Start $v_0 = u_0$ und Ziel $v_n = u_m$. Dann gilt $w \approx w'$ gdw $\deg(w) = \deg(w')$.

Übung: Beweisen Sie diese Klassifikation wie oben skizziert.

Beweis: „ \Rightarrow “: Die Homotopie-Invarianz haben wir in J1F festgestellt.

„ \Leftarrow “: (a) **Kürzen.** Wir kürzen w und w' gemäß J1G.

Im Falle $w = w' = v_0$ oder $v_0 v_1$ ist nichts weiter zu zeigen.

Wir nehmen daher $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k) > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$ an.

Wegen $\deg(w) = \deg(w')$ folgt $\sphericalangle(u_{k-1}, u_k) > 0$ für alle $k = 1, \dots, m$.

(b) **Unterteilen.** Durch Einfügen von Zwischenpunkten erreichen wir

$m = n$ und $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k) = \sphericalangle(u_{k-1}, u_k)$ für alle Indizes $k = 1, \dots, n$.

Per Induktion gilt $v'_k \in \mathbb{R}_{>0} \cdot v_k$ für $k = 0, 1, \dots, n$.

(c) **Homotopie.** Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir die folgenden $2n$ elementaren polygonalen Homotopien (wie in der Skizze illustriert):

$$\begin{aligned}
 w &= v_0 v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n &\approx & v_0 u_1 v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n \\
 &\approx v_0 u_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n &\approx & v_0 u_1 u_2 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n \\
 &\approx v_0 u_1 u_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n &\approx & v_0 u_1 u_2 u_3 v_3 \dots v_{n-1} v_n \\
 &\approx \dots && \\
 &\approx v_0 u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} v_n &= & w'
 \end{aligned}$$

Korollar J1: Klassifikation aller Wege modulo Homotopie

(1) Jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ können wir approximieren durch einen Polygonzug w in \mathbb{C}^* mit $\gamma \sim |w|$ in \mathbb{C}^* und definieren $\deg(\gamma) := \deg(w)$.

Für jede andere Approximation w' mit $\gamma \sim |w'|$ folgt $|w| \sim |w'|$, somit $w \approx w'$ dank J1B(2), also $\deg(w) = \deg(w')$ dank J1F.

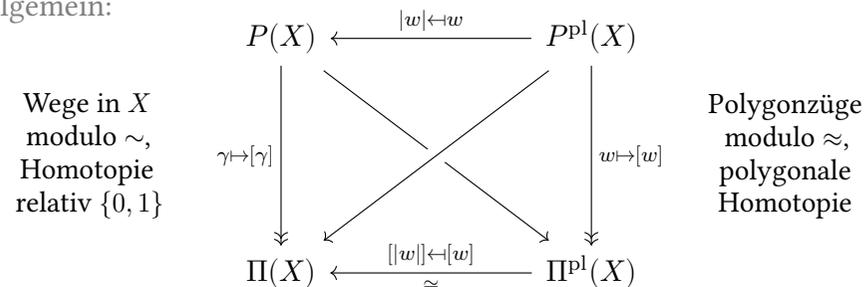
(2) Seien $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ Wege mit gleichem Start $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und Ziel $\gamma(1) = \gamma'(1)$. Genau dann gilt $\gamma \sim \gamma'$, wenn $\deg(\gamma) = \deg(\gamma')$ gilt.

Wir approximieren $\gamma \sim |w|$ und $\gamma' \sim |w'|$ durch Polygonzüge w, w' :

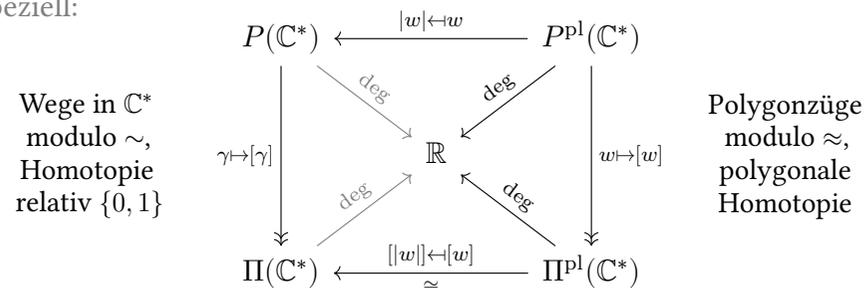
$$\begin{array}{ccccc}
 \deg(\gamma) = \deg(\gamma') & \stackrel{(1)}{\iff} & \deg(w) = \deg(w') & \stackrel{J1H}{\iff} & w \approx w' \\
 & & \stackrel{J1B}{\iff} & & \stackrel{(1)}{\iff} \\
 & & |w| \sim |w'| & & \gamma \sim \gamma'.
 \end{array}$$

😊 Das vollendet die Klassifikation der Wege in \mathbb{C}^* modulo Homotopie. In \mathbb{R}^n sind je zwei Wege mit gleichem Start und Ziel homotop rel $\{0, 1\}$. Der Raum $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist der erste interessante, nicht-triviale Fall, und die Umlaufzahl löst das Homotopie-Problem vollständig, wie hier erklärt.

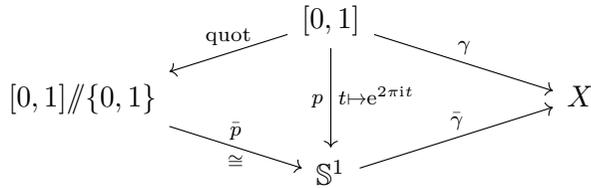
Allgemein:



Speziell:



Für geschlossene Wege nutzen wir $[0, 1] // \{0, 1\} \cong \mathbb{S}^1$ (E2T):



Zu jeder ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir die **Modellabbildung**

$$\varphi_k^1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^k, \text{ reell also } (\cos t, \sin t) \mapsto (\cos(kt), \sin(kt)).$$

Satz J1j: Umlaufzahl für geschlossene Wege

Die Umlaufzahl stiftet die Bijektion $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$.

Die inverse Bijektion ist $\mathbb{Z} \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] : k \mapsto [\varphi_k^1 : z \mapsto z^k]$.

Übung: Gleiches gilt für $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*] \cong [\mathbb{C}^*, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*]$. Genauer: Die Homotopie-Äquivalenz $(\iota, \rho) : \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^*$ (G4o) induziert die Bijektion $(\iota_*, \rho_*) : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*]$ mit $\iota_* : [f] \mapsto [\iota \circ f]$ und $\rho_* : [g] \mapsto [\rho \circ g]$. (G4T)

Für stückweise stetig diff'bare Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt:

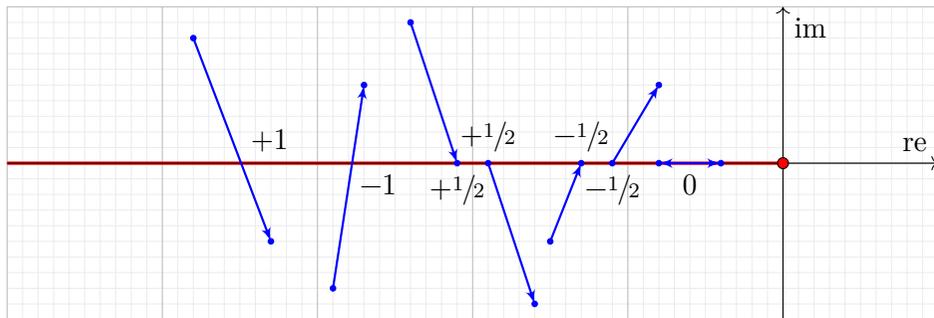
$$\deg(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} f \cdot d\gamma$$

Das berühmte-berühmte Wirbelfeld...

$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto \frac{(-y, x)}{(x^2 + y^2)}$

ist rotationsfrei, dennoch existiert hierzu kein Potential!

$\text{rot } f(x, y) = 0$
 $\int_{\mathbb{S}^1} f(s) \cdot ds = 2\pi$



Für jede Kante $[u, v] \subseteq \mathbb{C}^*$ zählen wir den Achsübergang durch

$$\eta(u, v) := \begin{cases} 0 & \text{falls } [u, v] \cap \mathbb{R}_{<0} = \emptyset, \\ \frac{1}{2} [\text{sign } \text{im}(u) - \text{sign } \text{im}(v)] & \text{falls } [u, v] \cap \mathbb{R}_{<0} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Für jeden geschlossenen Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in \mathbb{C}^* gilt dann

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \sphericalangle(v_{k-1}, v_k) =: \deg(w) \stackrel{!}{=} \eta(w) := \sum_{k=1}^n \eta(v_{k-1}, v_k).$$

😊 Diese Konstruktion liefert einen sehr effizienten Algorithmus!

Als bildliche Analogie beobachten wir eine Uhr nur mit Minutenzeiger: Wie viele Stunden vergehen? Dies können wir messen, indem wir die Winkeländerung des Zeiger integrieren bzw. summieren. Hier genügen zur Approximation Beobachtungen in Abständen von $[0, 60[$ Minuten. Ist das Ergebnis ganzzahlig, so genügt es, die Übergänge des Zeigers über 12 Uhr zu zählen, oder 6 Uhr oder 9 Uhr oder jede andere Stelle.

Aufgabe: Beweisen Sie die oben formulierte Gleichheit.

Lösung: Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ mit $v_0 = v_n = 1$, notfalls multipliziere mit v_0^{-1} . Für $\ell = 0, \dots, n$ zählen wir Winkel $\alpha_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$ und Übergänge $\eta_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} \eta(v_{k-1}, v_k)$. Per Induktion gilt $\alpha_\ell \in]2\pi\eta_\ell - \pi, 2\pi\eta_\ell + \pi[$. Schließlich haben wir $\alpha_n \in \mathbb{Z}2\pi$ und $\eta_n \in \mathbb{Z}$, also $\alpha_n = 2\pi\eta_n$. QED

😊 Die Umlaufzahl ist sehr einfach und doch fundamental. Sie tritt in der Mathematik und ihren Anwendungen vielfach auf, neben Topologie vor allem in der reellen Analysis (als Wegintegral von Vektorfeldern in der Ebene \mathbb{R}^2 , siehe oben) und der komplexen Analysis / Funktionentheorie als Cauchy-Index geschlossener Wege in der komplexen Ebene \mathbb{C} .

Satz J1τ: Fundamentalsatz der Algebra

Zu jedem Polynom $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$ mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ existieren Nullstellen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass $F(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n)$.

Dank Polynomdivision genügt uns *eine* Nullstelle $z_n \in \mathbb{C}$ mit $F(z_n) = 0$.

Anschaulich: Sei $n \geq 1$ und $c_n \neq 0$. Zum Radius $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren wir $\gamma_r : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C} : s \mapsto F(rs)$. Für große r dominiert $r^n s^n$, mit Umlaufzahl n .

Für kleine r dominiert der konstante Term c_n : Die Umlaufzahl ist 0.

Die Homotopie von γ_0 zu γ_r muss über 0 laufen: F hat eine Nullstelle!

Beweis / Übung J1υ: Zu F definieren wir die Abbildung

$$H : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C} : (t, z) \mapsto \begin{cases} t^n F(z(1-t)/t) & \text{für } t > 0, \\ z^n & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

(1) Die Abbildung H ist ein Polynom in t und z , also insbesondere stetig.

(2) Die Umlaufzahlen sind $\deg(H_0) = n$ und $\deg(H_1) = 0$, wobei $c_n \neq 0$.

(3) Hat F keine Nullstellen in \mathbb{C} , so gilt $H : z^n \simeq *$ in \mathbb{C}^* , also $n = 0$. QED

☺ Dieses genial-einfache Argument zeigt die **Existenz** einer Nullstelle. Zudem können wir mit diesem Verfahren alle **Nullstellen lokalisieren!**

Übung J1υ: Beweisen Sie folgende Präzisierungen und Anwendungen.

(4) Sind $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ geschlossene Wege, so auch ihr Produkt $\gamma = \alpha \cdot \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^* : t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)$, und $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.

(5) Sei $R = [a, b, c, d] \subseteq \mathbb{C}$ ein Rechteck und $\gamma = |a, b, c, d, a|$ der Weg längs des Randes ∂R , positiv orientiert. Hat F keine Nullstellen auf ∂R , so gilt

$$\#_{\text{mult}} \{z \in R \mid F(z) = 0\} = \deg(F \circ \gamma).$$

Der Fall $n = 1$ ist leicht, für $n \geq 2$ hilft (4) und der Fundamentalsatz J1τ.

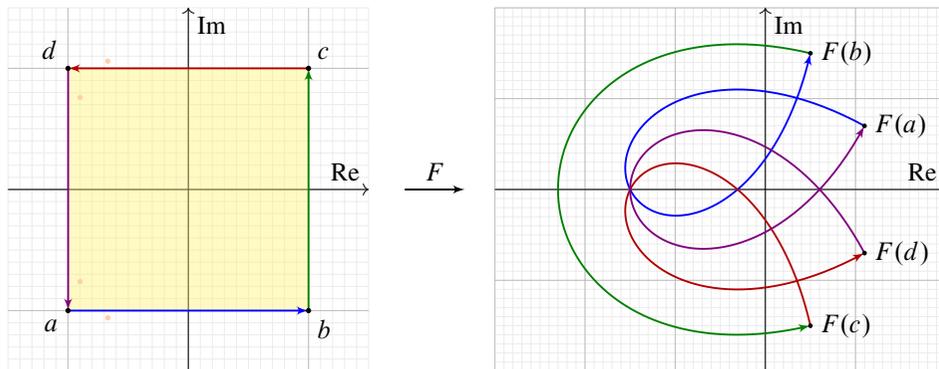
(6) Die folgenden Abbildungen zeigen Wege γ und ihre Bilder $F \circ \gamma$. Bestimmen Sie $\deg(F \circ \gamma)$ und lokalisieren Sie Nullstellen von F .

(7) Erklären und vergleichen Sie die beiden Lokalisierungsverfahren:

☺ Reelle Nullstellen von $P \in \mathbb{R}[x]$ finden wir durch Intervallhalbierung, komplexe Nullstellen von $F \in \mathbb{C}[z]$ finden wir durch Rechteckviertelung!

Lokalisierung komplexer Nullstellen

Die Umlaufzahl von $F(z) = z^5 - 5z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 3z - 12$ entlang γ :



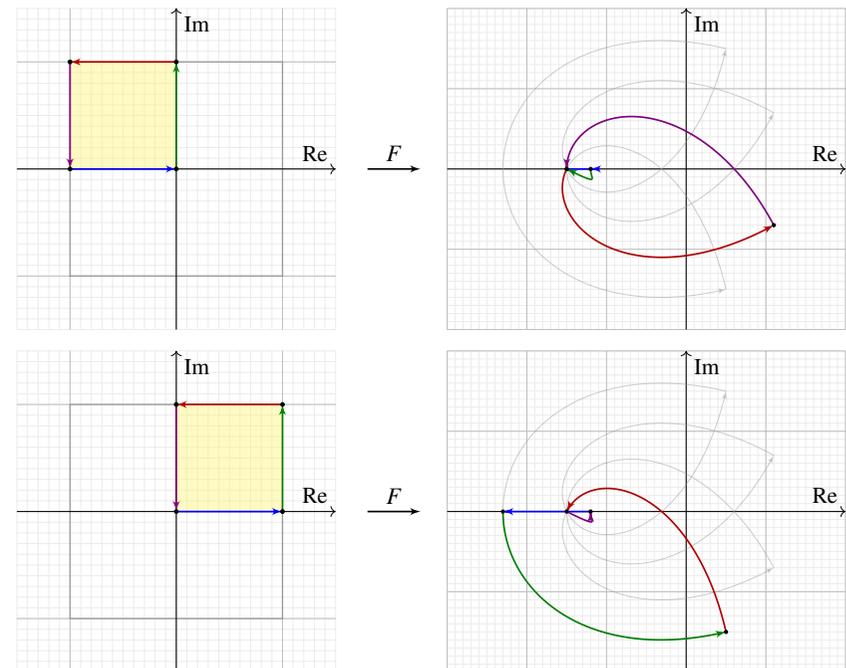
Fundamentalsatz / Übung J1υ: Sei $R = [a, b, c, d] \subseteq \mathbb{C}$ ein Rechteck und $\gamma = |a, b, c, d, a|$ der Weg längs des Randes ∂R , positiv orientiert.

Wenn $F \in \mathbb{C}[z]$ keine Nullstellen auf dem Rand ∂R hat, so gilt

$$\#_{\text{mult}} \{z \in R \mid F(z) = 0\} = \deg(F \circ \gamma).$$

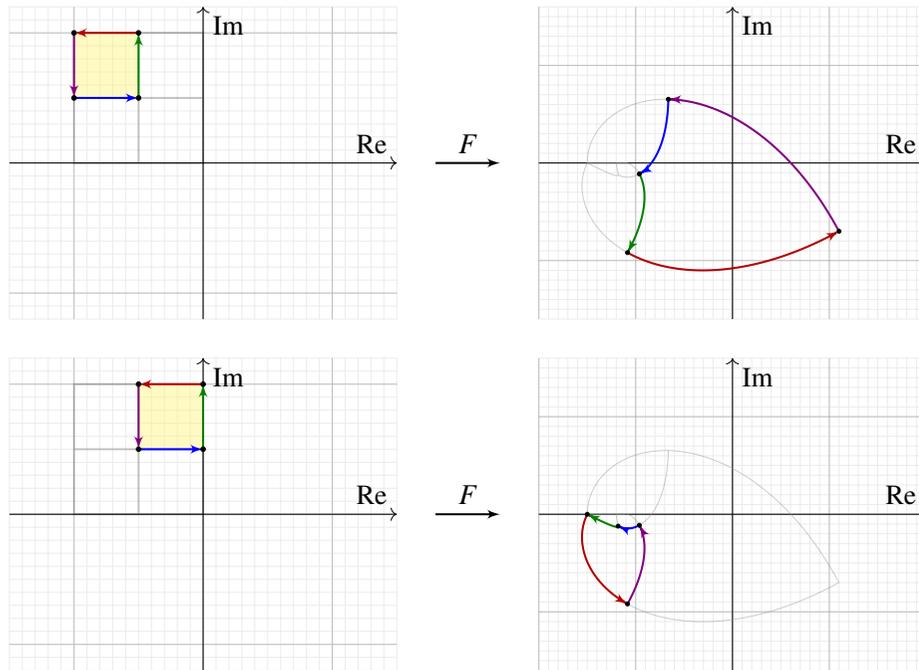
☺ Aus Intervallhalbierung in \mathbb{R} wird Rechteckviertelung in \mathbb{C} .

Lokalisierung komplexer Nullstellen



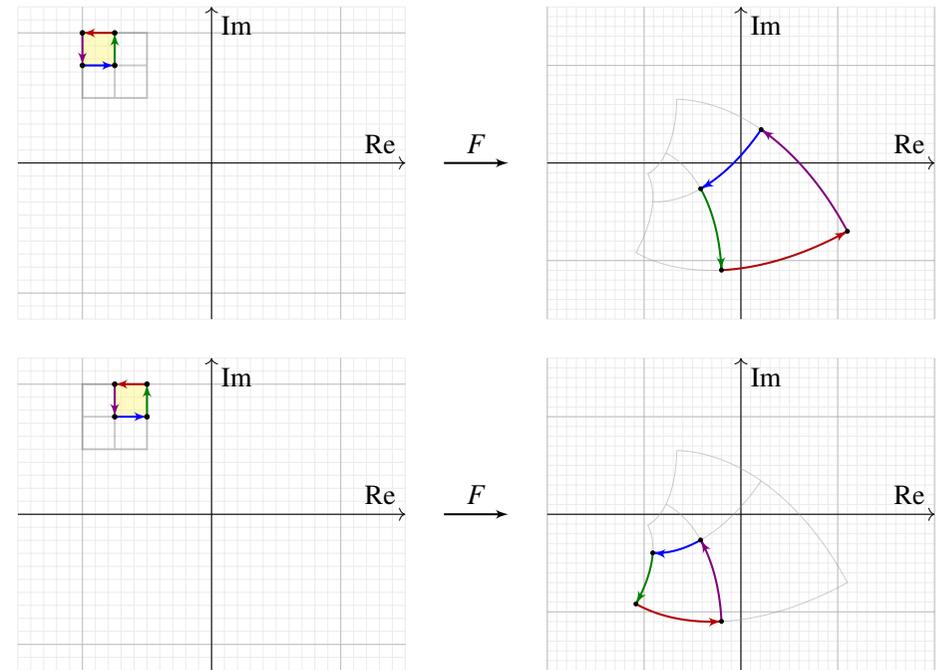
Lokalisierung komplexer Nullstellen

J125
Erläuterung



Lokalisierung komplexer Nullstellen

J126
Erläuterung



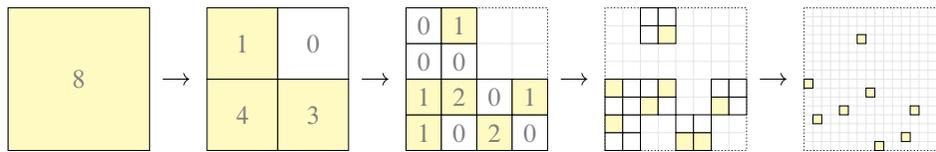
Lokalisierung komplexer Nullstellen

J127
Erläuterung

Hermann Weyl schrieb hierzu in seinem Artikel *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* 1921 die weisen Worte:

*Ein Existenzsatz verkündet
„das Vorhandensein eines Schatzes,
ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. [...] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle,
sondern die im Beweise geführte Konstruktion.“*

😊 Das oben erklärte Verfahren erlaubt uns, den Schatz zu heben!



Algebraische Berechnung durch euklidische Division / Sturm-Ketten oder numerische Näherung der Winkelsumme / des Wegintegrals, Optimierung zu schnellsten Nullstellenfindern (Schönhage 1982)

Lokalisierung komplexer Nullstellen

J128
Erläuterung

😊 Reelle Nullstellen von $P \in \mathbb{R}[x]$ finden wir durch Intervallhalbierung, komplexe Nullstellen von $F \in \mathbb{C}[z]$ finden wir durch Rechteckviertelung!

Verfahren: Zum Polynom $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n \in \mathbb{C}[z]$ wählen wir ein Startquadrat $D = [-r, r]^2$, das alle n Nullstellen enthält, etwa $r = \sum_{k=1}^n |c_k|$, siehe C3Y. Dieses unterteilen wir in vier Teilquadrate. In jedem können wir nun die Umlaufzahl berechnen (J1s) und somit die Anzahl der Nullstellen (J1u). Wir behalten nur die nicht-leeren.

Auf diese Weise können wir alle Nullstellen beliebig genau lokalisieren. Haben wir alle Nullstellen ausreichend genau voneinander getrennt, so können wir schließlich zum Newton-Verfahren übergehen (J1z): Es muss in unmittelbarer Nähe einer Nullstelle z_0 gestartet werden, konvergiert dann aber blitzschnell gegen die anvisierte Nullstelle.

Der Fundamentalsatz der Algebra und seine effiziente Implementierung sind ein Höhepunkt der Mathematik in schönster Einheit: Algebra und Topologie verbinden sich mit Analysis und Numerik. Ist das „rein“ oder „angewandt“? Beides! Es ist Mathematik, wunderschön und nützlich!

Die Technik der Nullstellensuche ist nicht auf komplexe Polynome $F \in \mathbb{C}[z]$ beschränkt, sondern funktioniert allgemein für jede stetige Funktion $F: \mathbb{R}^2 \supseteq R \rightarrow \mathbb{R}^2$, insbesondere Polynomfunktionen.

Lemma J1v: ebene Nullstellensuche

Sei $R = [a, b, c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $\gamma = |a, b, c, d, a|$ der Randweg.

- 1 Sei $F: R \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig. Hat F keine Nullstelle, so folgt $\deg(F \circ \gamma) = 0$.
- 2 Hat F keine Nullstelle auf dem Rand δR und gilt $\deg(F \circ \gamma) \neq 0$, so hat F eine Nullstelle im Innere $\text{Int } R$ unseres Rechtecks.
- 3 Ein solche Nullstelle kann durch wiederholte Rechteckviertelung beliebig genau lokalisiert werden.

Konkret für Polynomfunktionen $F: \mathbb{R}^2 \supseteq R \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ mit $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ können wir die Umlaufzahl $\deg(F \circ \gamma)$ algebraisch durch Sturm-Ketten berechnen (siehe Skript, J1s).

Beweis: (1) Hat $F: R \rightarrow \mathbb{R}^2$ keine Nullstelle, so haben wir die Homotopie $H: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $H_t = F \circ ((1-t)a + t\gamma)$, also $H: \text{const} \simeq F \circ \gamma$ und $\deg(F \circ \gamma) = 0$. Per Kontraposition folgt die Aussage (2).

(3) Wir beginnen mit einem Rechteck $R_0 \subseteq \mathbb{R}^2$, so dass $F|_{\partial R_0}$ keine Nullstelle hat und $\deg(F|_{\partial R_0}) \neq 0$ erfüllt. Wir unterteilen unser Rechteck $R_0 = A \cup B \cup C \cup D$ in vier gleichgroße Teilrechtecke. Dabei gilt

$$1 = \deg(F|_{\partial R_0}) = \deg(F|_{\partial A}) + \deg(F|_{\partial B}) + \deg(F|_{\partial C}) + \deg(F|_{\partial D}).$$

Also existiert ein $R_1 \in \{A, B, C, D\}$ mit $\deg(F|_{R_1}) \neq 0$. (Jede Nullstelle auf dem Rand löst ebenfalls unser Problem, sollte aber bei diesem Verfahren abgefangen und gesondert behandelt werden, wie in J1r.)

So fortfahrend erhalten wir $R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq R_n$ mit $\deg(F|_{R_n}) \neq 0$, also existiert eine Nullstelle von F in R_n . Wir können R_n bis zu jeder gewünschten Präzision verkleinern. QED

Brouwers Fixpunktsatz J4H in Dimension $n \in \mathbb{N}$ besagt: Jede stetige Abbildung $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ hat einen Fixpunkt $a \in \mathbb{D}^n$, mit $f(a) = a$. In Dimension $n = 1$ folgt dies leicht aus dem Zwischenwertsatz. Mit der Umlaufzahl können wir jetzt bereits den Fall $n = 2$ beweisen.

Ich formuliere diesen berühmten Satz hier konstruktiv, als Algorithmus zur Lokalisierung eines Fixpunkts, etwa für polynomielle Abbildungen. Statt der Kreisscheibe \mathbb{D}^2 betrachten wir lieber das Quadrat $[-1, 1]^2$; das ist topologisch äquivalent, aber algorithmisch vorteilhaft.

Satz J1w: Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f: [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]^2$ hat einen Fixpunkt; ein solcher kann durch iterierte Rechteckviertelung lokalisiert werden.

Bemerkung: Für jede kontraktive Abbildung $f: [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]^2$ garantiert der Banachsche Fixpunktsatz (C4Q) Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes und liefert zudem ein effizientes Näherungsverfahren. Voraussetzung und Folgerung sind hier wesentlich stärker.

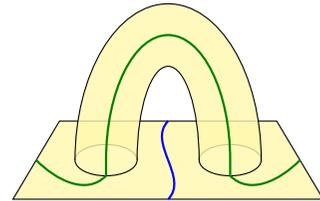
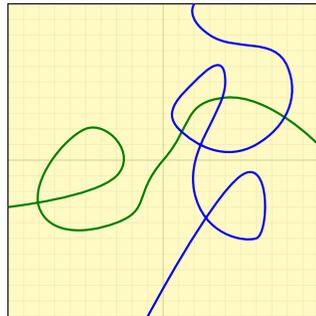
Beweis: Wir nutzen die Maximumsnorm $|(x, y)| := \max\{|x|, |y|\}$, denn für diese haben wir $R := [-1, 1]^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| \leq 1\}$. Darauf betrachten wir die affine Homotopie $H: [0, 1] \times R \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $H_t(z) = z - tf(z)$ von $H_0 = \text{id}_R$ nach $H_1 = F$ mit $F(z) = z - f(z)$.

(a) Es gilt $|H_t(z)| = |z - tf(z)| \geq |z| - t|f(z)| = 1 - t|f(z)|$ für jeden Randpunkt $z \in \partial R$. Hier gilt $H_t(z) = 0$ genau dann, wenn $t = 1$ und $z = f(z)$, also einen Fixpunkt auf dem Rand vorliegt.

(b) Andernfalls gilt $H_t(z) \neq 0$ für alle $z \in \partial R$ und $t \in [0, 1]$. Dank Homotopie-Invarianz (J1j) gilt $\deg(F|_{\partial R}) = \deg(\text{id}|_{\partial R}) = 1$. Dank Lemma J1v hat F eine Nullstelle $z \in \text{Int } R$, es gilt also $0 = F(z) = z - f(z)$, und somit hat f einen Fixpunkt.

Das beweist die Existenz eines Fixpunktes $z \in R$. Darüber hinaus liefert Lemma J1v ein Verfahren zur Lokalisierung eines Fixpunktes. QED

Als eine weitere schöne Anwendung der Umlaufzahl beweisen wir nun: Je zwei Wege in einem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$, die gegenüberliegende Seiten verbinden, sich also „kreuzen“, haben einen Schnittpunkt.



Diese Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$ hat als Rand $\partial F = \partial[-1, 1]^2$, aber hier kann man gegenüberliegende Seiten auch ohne Kreuzung verbinden. (Lötbrücke!)

Die Existenz eines Schnittpunktes ist keineswegs selbstverständlich. Sie beruht *lokal* auf der Vollständigkeit von \mathbb{R} (J1y) sowie *global* auf der Form der Fläche: Andere Flächen haben diese Eigenschaft nicht!

Satz J1x: Kreuzende Wege schneiden sich.

Seien $f, g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]^2$ stetig mit $f_1(\pm 1) = \pm 1$ und $g_2(\pm 1) = \pm 1$. Dann kreuzen sich diese Wege: Es existieren $s, t \in [-1, 1]$ mit $f(s) = g(t)$. Eine solche Lösung kann durch Rechteckviertelung lokalisiert werden.

Beweis: Für $h : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (s, t) \mapsto (f_1(s) - g_1(t), g_2(t) - f_2(s))$ gilt $h(s, t) = 0$ gdw $f(s) = g(t)$: Die Kreuzungspunkte sind die Nullstellen!
 (a) Hat h eine Nullstelle auf dem Rand, so ist dies ein Kreuzungspunkt.
 (b) Hat h keine Nullstellen auf dem Rand, so gilt $\deg(h|\partial[-1, 1]^2) = 1$.

Genauer: Die affine Homotopie $H : [0, 1] \times \partial[-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $H(r, s, t) := (1 - r)(s, t) + rh(s, t)$ geht von $H_0(s, t) = (s, t)$ nach $H_1(s, t) = h(s, t)$ und verläuft in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: In jedem Randpunkt $(s, t) \in \partial[-1, 1]^2$ weist der Vektor $h(s, t)$ nicht in das Quadrat $[-1, 1]^2$ hinein, denn $f_1(-1) \leq g_1(t) \leq f_1(1)$ und $g_2(-1) \leq f_2(s) \leq g_2(1)$. Dank Homotopie-Invarianz folgt $\deg(h|\partial[-1, 1]^2) = \deg(H_0) = 1$.

Dank Lemma J1v hat h eine Nullstelle $(s, t) \in \text{Int}[-1, 1]^2$.



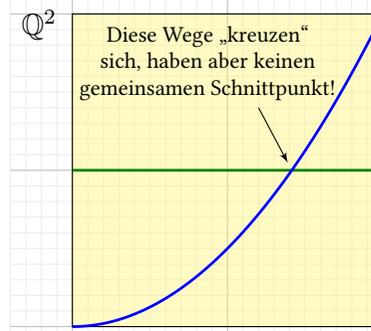
Der Satz beruht auf der Vollständigkeit von \mathbb{R} . Es ist immer wieder heilsam, sich drastische Gegenbeispiele über \mathbb{Q} vor Augen zu führen:

Übung J1y: Vollständigkeit ist wesentlich!

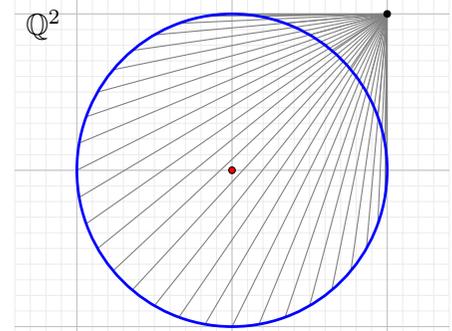
- (1) Über \mathbb{Q} gibt es stetige Abbildungen $f, g : [-1, 1]_{\mathbb{Q}} \rightarrow [-1, 1]_{\mathbb{Q}}^2$ mit $f_1(\pm 1) = \pm 1$ und $g_2(\pm 1) = \pm 1$, aber $f(s) \neq g(t)$ für alle $s, t \in [-1, 1]_{\mathbb{Q}}$.
- (2) Über \mathbb{Q} gibt es Homotopien $H : [0, 1] \times \mathbb{S}_{\mathbb{Q}}^1 \rightarrow \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$ von $H_0 = \text{id}$ nach $H_1 = \text{const}$, wobei $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}^1 := \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Anders als über \mathbb{R} gibt es über \mathbb{Q} keine homotopie-invariante Umlaufzahl!

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ sind ordnungsvollständig. Daraus folgen insbesondere alle topologischen Eigenschaften, wie Zusammenhang und Kompaktheit von $[a, b]$. Über $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ jedoch gilt all dies nicht! Unsere topologische Anschauung wird über \mathbb{R} bestätigt, doch über \mathbb{Q} enttäuscht. Dieser Kontrast betont erneut, wie wichtig ein sorgsamer Aufbau ist, sowohl Werkzeuge (Definitionen, Sätze, Beweise) als auch Beispiele.

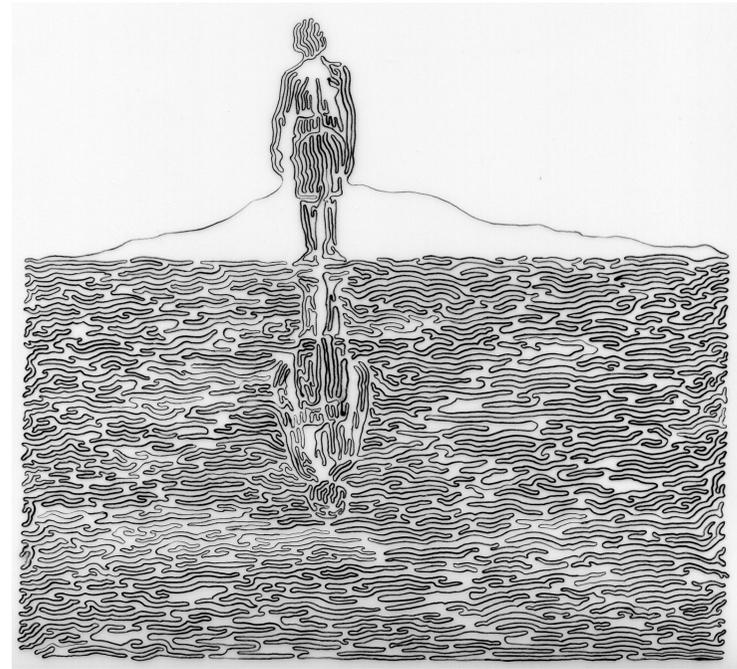
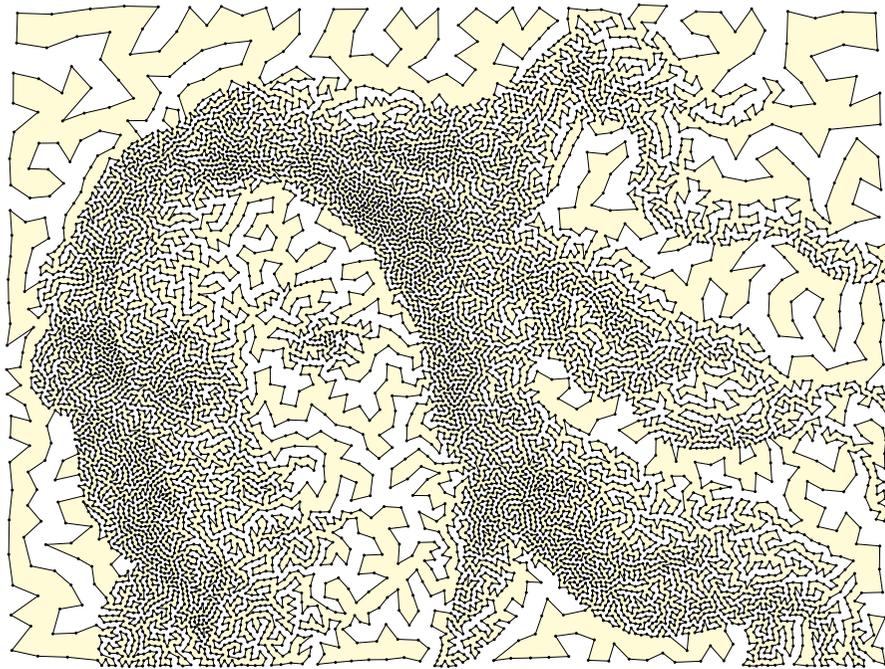


Diese Wege „kreuzen“ sich, haben aber keinen gemeinsamen Schnittpunkt!



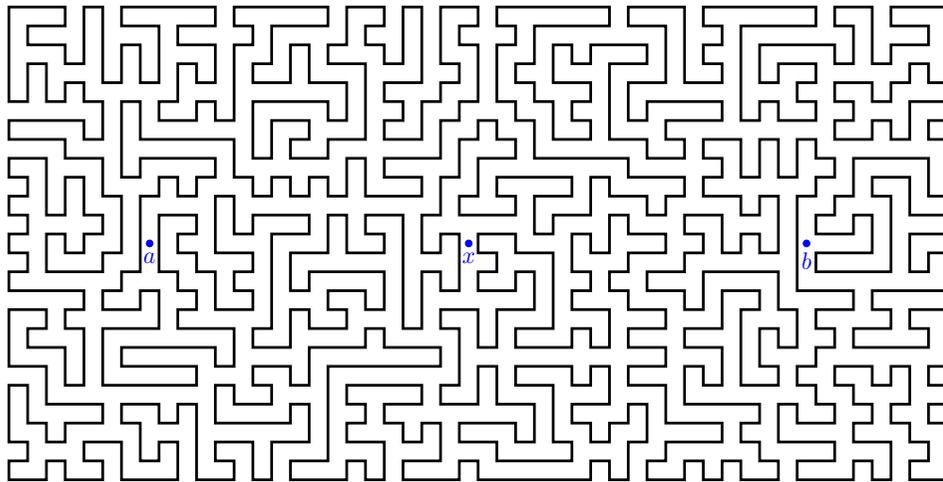
Lösung: (1) Die Abbildungen $f, g : [-1, 1]_{\mathbb{Q}} \rightarrow [-1, 1]_{\mathbb{Q}}^2$ mit $f(s) = (s, 0)$ und $g(t) = (t, (t + 1)^2/2 - 1)$ erfüllen $f_1(\pm 1) = \pm 1$ und $g_2(\pm 1) = \pm 1$. Dennoch gilt $f(s) \neq g(t)$ für alle $s, t \in [-1, 1]_{\mathbb{Q}}$, denn $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(2) Die affine Abbildung $H(s, q) = (1 - s)q + s(1, 1)$ ist stetig und erfüllt $H(0, q) = q$ und $H(1, q) = (1, 1)$. Wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}^1 \cap \mathbb{R} \cdot (1, 1) = \emptyset$, also $H(s, q) \neq 0$ für alle $s \in [0, 1]$ und $q \in \mathbb{S}_{\mathbb{Q}}^1$.



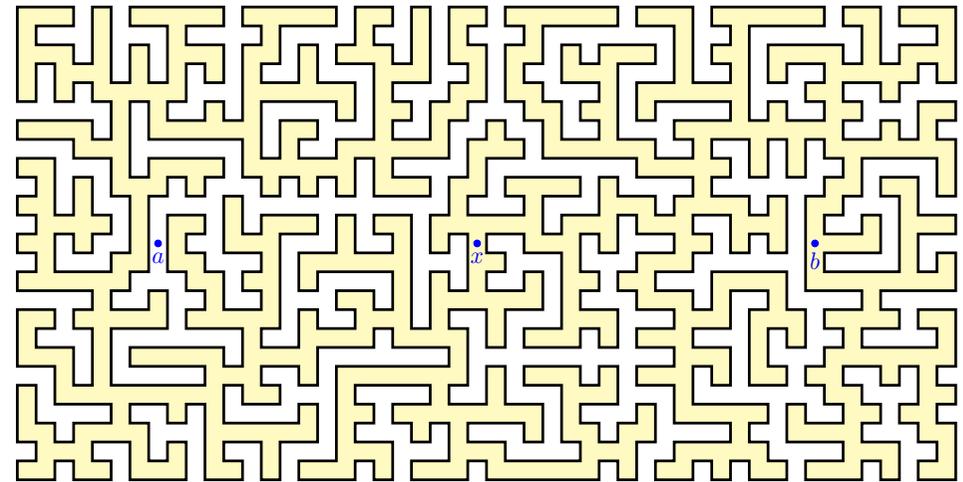
F. Ross, W.T. Ross, *The Jordan curve theorem is non-trivial*,
Journal of Mathematics and the Arts 5 (2011) 213–219.

Die folgende Abbildung zeigt eine polygonale Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $C \cong \mathbb{S}^1$.



Können Sie x, a, b durch Wege im Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ verbinden?
Wie können Sie das effizient feststellen, berechnen, zertifizieren?

Innere und äußere Punkte unterscheiden wir durch ihre Umlaufzahl!



Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ besteht aus zwei Gebieten A (weiß) und B (gelb);
das innere Gebiet B ist homöomorph zur Kreisscheibe, $B \cong \mathbb{B}^2$, $\bar{B} \cong \mathbb{D}^2$.

Satz J2A: Jordan–Schoenflies

Für jede Einbettung $f : S^1 \hookrightarrow C \subseteq \mathbb{R}^2$, ganz egal wie kompliziert, gilt:

(1) Jordan: Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ zerfällt in genau zwei Gebiete, ein unbeschränktes „Äußeres“ A und ein beschränktes „Inneres“ B ,

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus C \mid \deg_2(f - x) = 0\} \quad \text{unbeschränkt in } \mathbb{R}^2,$$

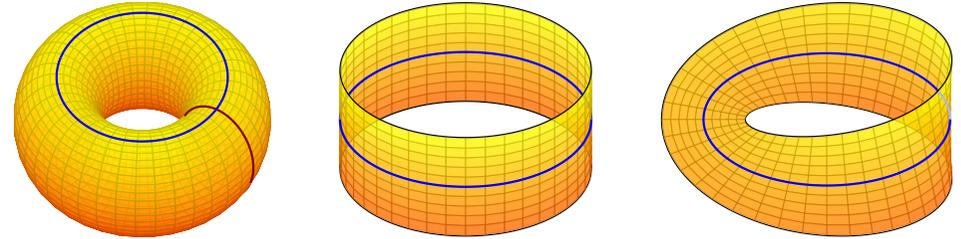
$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus C \mid \deg_2(f - x) = 1\} \quad \text{beschränkt in } \mathbb{R}^2.$$

(2) Somit ist $\nu : \pi_0(X) \cong \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg_2(f - x)$ bijektiv, $A \mapsto 0, B \mapsto 1$. Zu ihrer Unterscheidung nutzen wir die Umlaufzahl $\deg_2 = \deg \bmod 2$.

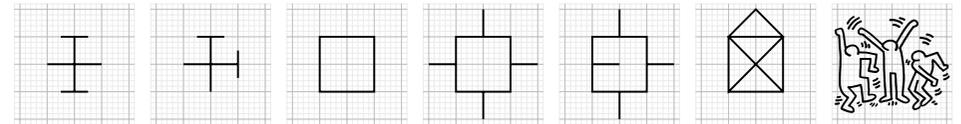
(3) Der gemeinsame Rand dieser beiden Gebiete ist $\delta A = \delta B = C$. Ihre Abschlüsse in \mathbb{R}^2 sind demnach $\bar{A} = A \cup C$ und $\bar{B} = B \cup C$.

(4) Schoenflies: Es existiert ein Homöomorphismus $h : (\mathbb{R}^2, C) \cong (\mathbb{R}^2, S^1)$, das heißt $h : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ mit $h(C) = S^1$, somit $h(B) = \mathbb{B}^2$ und $h(\bar{B}) = \mathbb{D}^2$.

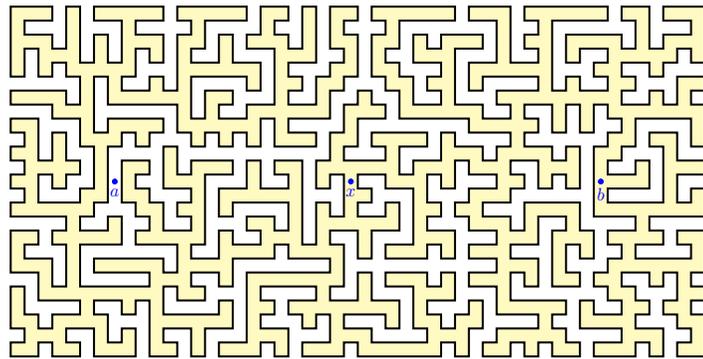
Der Satz von Jordan–Schoenflies ist eine Besonderheit der Ebene \mathbb{R}^2 . Je nach Fläche F ist das Trennungsverhalten von $S^1 \hookrightarrow F$ verschieden:



Auch die Kurve $C \cong S^1$ ist wesentlich. Für Graphen sieht es anders aus:



Auch dieses Thema verbindet „reine“ und „angewandte“ Mathematik, „abstrakte“ Theorie innen und „konkrete“ Anwendungen außen!



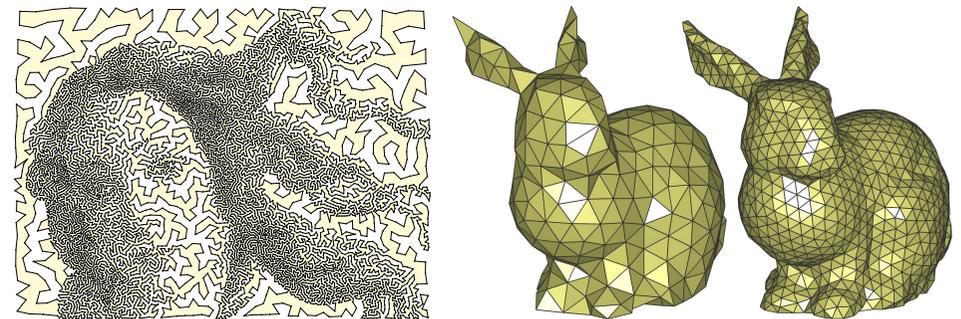
Wir betrachten $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ als die komplexe Ebene und nutzen so die starken Werkzeuge der komplexen Analysis (aka Funktionentheorie):

Satz J2B: Riemann–Carathéodory Abbildungssatz

In obiger Situation existiert eine komplexe Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, die auf ganz \mathbb{D}^2 konvergiert und einen Homöomorphismus $g : \mathbb{D}^2 \cong \bar{B}$ stiftet sowie einen biholomorphen Diffeomorphismus $g : \mathbb{B}^2 \cong B$.

Wir arbeiten im Folgenden polygonal statt nur stetig oder stückw. glatt.

☺ Das bedeutet stärkere Voraussetzungen und stärkere Folgerungen.

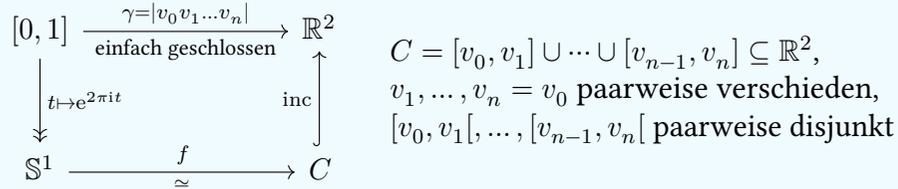


☺ Zu gegebenen Daten erhalten wir explizite Formeln und Algorithmen! Das ist Grundlage aller graphischen Oberflächen (GUI, CAD, GIS, etc): Jeder Mausklick, jedes touch event löst eine solche Berechnung aus!

☺ In Computergraphiken und Videospielen werden Objekte simplizial gespeichert und zur Darstellung auf die Bildebene projiziert; dabei müssen Überschneidungen erkannt und korrekt behandelt werden.

Satz J2D: Satz von Jordan für polygonale Kurven

Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in \mathbb{R}^2 ein einfach geschlossener Polygonzug.
Für die so beschriebene polygonale Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$ bedeutet das:

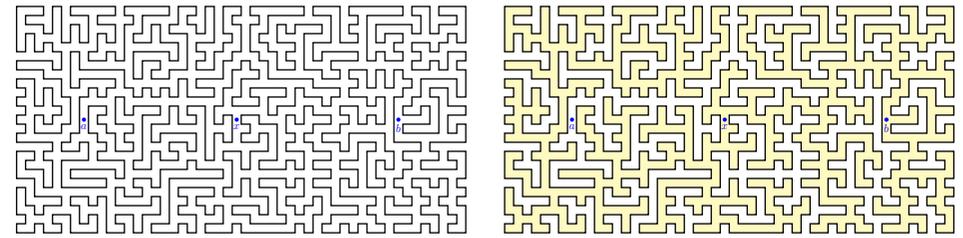


Dann zerfällt $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ in genau zwei Gebiete A und B , explizit

$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus C \mid \deg_2(\gamma - x) = 0\}$ unbeschränkt in \mathbb{R}^2 ,
 $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus C \mid \deg_2(\gamma - x) = 1\}$ beschränkt in \mathbb{R}^2 .

Somit ist $\nu : \pi_0(X) \cong \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg_2(\gamma - x)$ bijektiv, $A \mapsto 0, B \mapsto 1$.

Für den Rand gilt $\delta A = \delta B = C$, also $\bar{A} = A \cup C$ und $\bar{B} = B \cup C$.



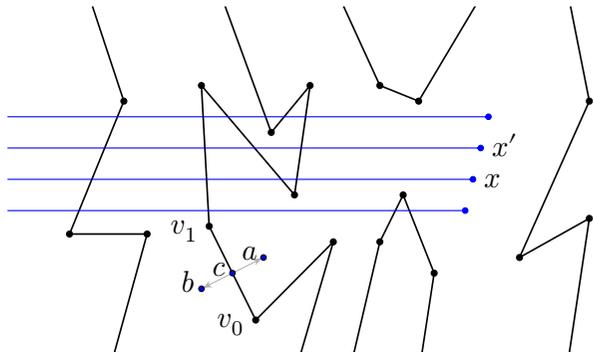
Beweis: Die Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt (F1J), da Bild von $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (F1o). Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ ist offen, somit lokal wegzshgd (G3A).

Somit ist $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ eine topologische Summe: Jede Komponente $U \in \pi_0(X)$ ist ein Gebiet, also offen und zusammenhängend (G3c).

Da C beschränkt ist, hat X genau eine unbeschränkte Komponente. Wir bestimmen nun explizit die Zerlegung $\pi_0(X)$. Dazu zeigen wir:

- 1 X hat mindestens zwei Komponenten A und B .
- 2 X hat höchstens zwei Komponenten.

😊 Der Beweis ist konstruktiv und liefert einen effizienten Algorithmus: Zu jedem Punkt $x \in X$ können wir berechnen, ob $x \in A$ oder $x \in B$ gilt.

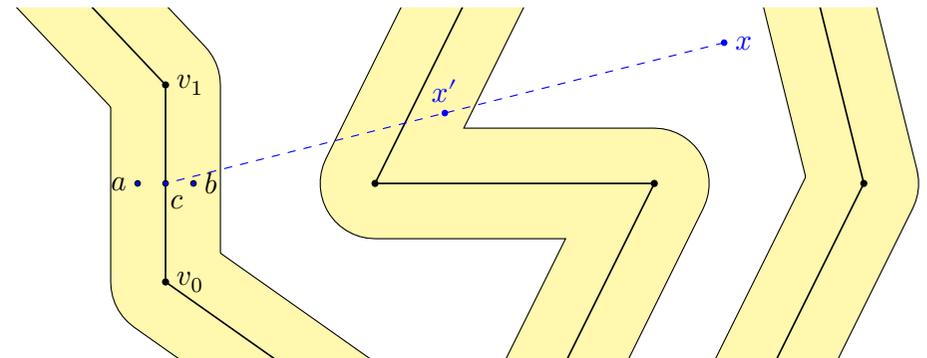


(1a) Wir haben $\nu : \pi_0(X) \rightarrow \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg(\gamma - x) \bmod 2$.

Elegante Begründung: Die Umlaufzahl ist homotopie-invariant! (J1J)

Alternativ nach obiger Skizze: $\deg(\gamma - x)$ ist lokal konstant auf X .

(1b) Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ hat mindestens zwei Komponenten: Die Funktion ν ist surjektiv, da verschieden auf beiden Seiten jeder Kante: Jeder Punkt $c \in C$ der Kurve berührt A und B . Wir wählen $c = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1$ und nahe Punkte $a, b \in X$ so, dass $\nu([a]) = 0$ und $\nu([b]) = 1$ gilt.



(2a) Um C legen wir einen engen Schlauch $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, C) \leq \varepsilon\}$. Dabei gilt $(U, C) \cong (\mathbb{S}^1 \times [-1, 1], \mathbb{S}^1 \times \{0\})$ oder $(U, C) \cong$ Möbius-Band.

(2b) Das Komplement $V = U \setminus C$ hat höchstens zwei Komponenten, nämlich $\pi_0(V) = \{[a]_V, [b]_V\}$: „Gehe immer an der Wand entlang.“

(2c) Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ hat höchstens zwei Komponenten, nämlich $\pi_0(X) = \{[a]_X, [b]_X\}$: „Gehe zur Wand, dann (2b).“

QED

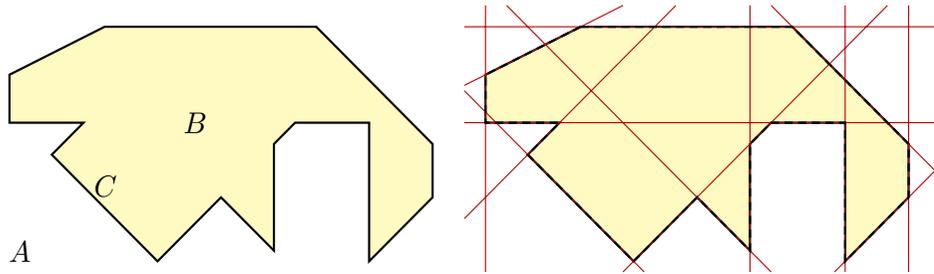
Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan-Kurven

J213

Wir nutzen weiterhin die obigen Bezeichnungen $\mathbb{R}^2 \setminus C = A \sqcup B$.

Lemma J2F: Triangulierung

Das Kompaktum $\bar{B} = B \cup C$ können wir affin triangulieren, $\bar{B} = |\mathcal{K}|$.

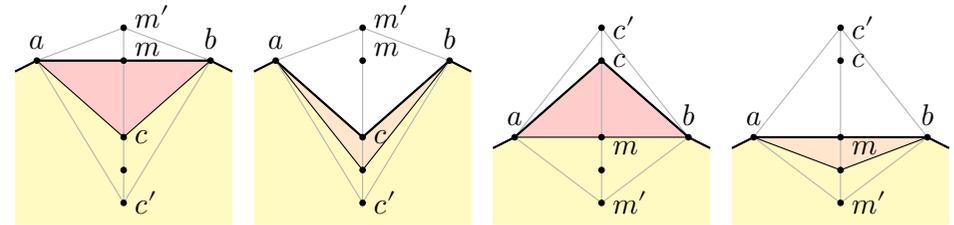


Beweis: Die Kanten definieren Geraden, diese zerlegen \bar{B} polytopal, baryzentrische Unterteilung liefert eine simpliziale Zerlegung \mathcal{K} . QED

😊 Es geht auch sparsamer: Allein die Eckpunkte v_0, v_1, \dots, v_n genügen! Versuchen Sie es in konkreten Beispielen, allgemein siehe Übung J2K.

Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan-Kurven

J214



Definition J2G: einklappbares Dreieck

Wir nennen $\Delta \in \mathcal{K}_2$ ein **Randdreieck**, wenn mindestens eine Seite im Rand C liegt, und **einklappbar**, wenn $\Delta \cap C$ aus genau einer oder zwei Kanten besteht, also $\Delta = [a, b, c]$ mit $\Delta \cap C = [a, b]$ oder $[a, c] \cup [c, b]$.

Nicht einklappbar ist $\Delta \cap C = [a, b] \cup \{c\}$ oder $\Delta \cap C = [a, b] \cup [b, c] \cup [c, a]$.
Einklappbare Dreiecke können wir tatsächlich einklappen:

Lemma J2H: Dreiecke einklappen

Zu jedem einklappbaren Dreieck $\Delta \in \mathcal{K}_2$ existiert ein stückweise affiner Homöomorphismus $k: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $k(\bar{B}) = \bar{B} \setminus \Delta = |\mathcal{K}'|$ wie gezeigt.

Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan-Kurven

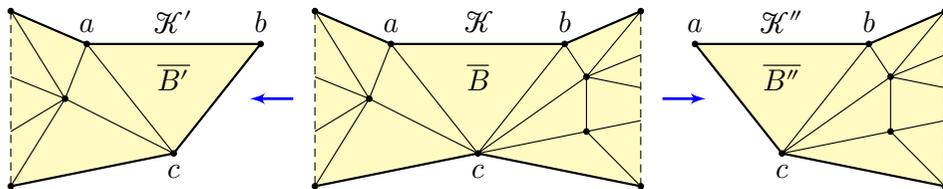
J215

Lemma J2I: Es gibt einklappbare Dreiecke.

Hat \mathcal{K} mindestens zwei Dreiecke, so ist mindestens **eins** einklappbar.

Versuch: Wir führen Induktion über die Anzahl $n = \#\mathcal{K}_2$ der Dreiecke. Für $n = 2$ sind beide Dreiecke einklappbar. Sei also fortan $n \geq 3$.

Es gibt ein Randdreieck $\Delta \in \mathcal{K}_2$. Ist Δ einklappbar, so sind wir fertig. Andernfalls haben wir $\Delta = [a, b, c]$ mit $\Delta \cap C = [a, b] \cup \{c\}$:



Wir erhalten Jordan-Kurven C' und C'' sowie Triangulierungen $\mathcal{K}' \leq \mathcal{K}$ von \bar{B}' und $\mathcal{K}'' \leq \mathcal{K}$ von \bar{B}'' mit $\mathcal{K}' \cap \mathcal{K}'' = \langle \Delta \rangle$ und $\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'' = \mathcal{K}$.

Nach Induktionsvoraussetzung existieren jeweils einklappbare Dreiecke $\Delta' \in \mathcal{K}'$ und $\Delta'' \in \mathcal{K}''$... schlimmstenfalls $\Delta = \Delta' = \Delta''$... 😞 Sackgasse!

Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan-Kurven

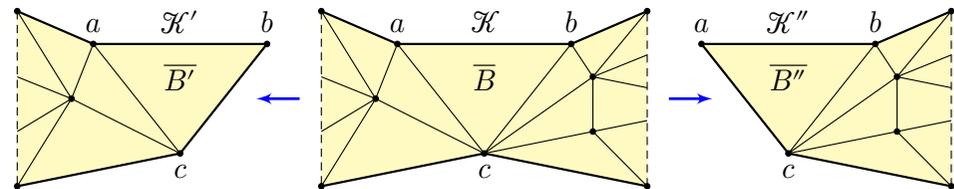
J216

Lemma J2I: Es gibt einklappbare Dreiecke.

Hat \mathcal{K} mindestens zwei Dreiecke, so sind mindestens **zwei** einklappbar.

Beweis: Wir führen Induktion über die Anzahl $n = \#\mathcal{K}_2$ der Dreiecke. Für $n = 2$ sind beide Dreiecke einklappbar. Sei also fortan $n \geq 3$.

Es gibt mind. zwei Randdreiecke. Sind sie einklappbar, so sind wir fertig. Andernfalls haben wir $\Delta = [a, b, c]$ mit $\Delta \cap C = [a, b] \cup \{c\}$:



Wir erhalten Jordan-Kurven C' und C'' sowie Triangulierungen $\mathcal{K}' \leq \mathcal{K}$ von \bar{B}' und $\mathcal{K}'' \leq \mathcal{K}$ von \bar{B}'' mit $\mathcal{K}' \cap \mathcal{K}'' = \langle \Delta \rangle$ und $\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'' = \mathcal{K}$.

Nach Induktionsvoraussetzung existieren jeweils einklappbare Dreiecke $\Delta' \in \mathcal{K}' \setminus \{\Delta\}$ und $\Delta'' \in \mathcal{K}'' \setminus \{\Delta\}$. Diese bleiben einklappbar in \mathcal{K} . QED

Die *stärkere* Aussage ist hier *einfacher* zu beweisen. Wie kann das sein? Das ist bei vollständiger Induktion ein häufiges, ja typisches Phänomen! George Pólya nannte dies treffenderweise das **inventor's paradox**:

The typical proposition A accessible to proof by mathematical induction has an infinity of cases $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. The case A_0 is often easy; at any rate, A_0 has to be handled by specific means.

Once A_0 is established, we have to prove A_{n+1} assuming A_n .

A proposition A' stronger than A may be easier to prove than A .

In fact, let A' consist of the cases $A'_0, A'_1, A'_2, \dots, A'_n, \dots$.

In passing from A to A' we make the burden of the proof heavier:

we have to prove the stronger A'_{n+1} instead of A_{n+1} .

Yet we make also the support of the proof stronger:

we may use the more informative A'_n instead of A_n .

Lernen ist induktiv: Ihre Investition von gestern ist Ihr Ertrag von heute. Ihre Investition von heute ist Ihr Ertrag von morgen. So geht es weiter... Jetzt mehr zu leisten, erlaubt anschließend mehr zu nutzen, usw.

[I]n trying to devise a proof by mathematical induction, you may fail for two opposite reasons.

You may fail because you try to prove too much:

[given A_n ,] your A_{n+1} is too heavy a burden.

Yet you may also fail because you try to prove too little:

your A_n is too weak a support [to deduce A_{n+1}].

You have to balance the statement of your theorem so that the support is just enough for the burden.

George Pólya, 1887–1985, *Mathematics and plausible reasoning*, vol. I, *Induction and analogy in mathematics*, 1954, p. 119

Wenn Sie eigenständig Induktionsbeweise führen, müssen Sie also (1) die Behauptung $A(n)_{n \geq m}$ geeignet formulieren und ausbalancieren (2) und damit anschließend den Induktionsbeweis sorgfältig ausführen. Viele Übungsaufgaben verlangen nur (2), das ist leichter, aber künstlich. Aufgabe (1) erfordert verzweigtes Erkunden und planvolles Probieren. Für (1) benötigen Sie meist Kreativität, für (2) nur solides Handwerk.

Ich *konnte* an dieser besonderen Gelegenheit nicht achtlos vorbeigehen, ich *musste* Ihnen den ersten, erfolglosen Beweisversuch zeigen, damit Sie den zweiten, erfolgreichen Beweis würdigen können. Ich wünsche Ihnen ein lebenslang wirksames Aha!

In Ihrem Studium sehen und lösen Sie viele Aufgaben, von folgender künstlicher Form: „Zeigen Sie Aussage A_n per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.“ Wie Sie aus Ihrer Erfahrung wissen, kann das leicht oder schwer sein. Immerhin wissen Sie sofort und genau, welche Aussage A_n zu zeigen ist.

In der Praxis stehen Sie vor einem zusätzlichen, natürlichen Problem: Wenn Ihnen niemand die Aufgabe hilfreich entlastend vorformuliert, dann müssen Sie sich selbst vortasten und irgendwann entscheiden: Welche Aussagenfamilie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wollen Sie überhaupt zeigen?

Dasselbe gilt insgesamt für Ihr Studium: Solide Grundlagen kosten anfangs Mühe, doch dann tragen sie reiche Früchte. Das lohnt sich! Leben allgemein ist ein Balanceakt zwischen Investition und Konsum. Ihre Vorbereitung von heute ist Ihr Nutzen von morgen!

Beispiel: Wir betrachten $s_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2 = 1/1 + 1/4 + 1/9 + \dots + 1/n^2$. Beweisen Sie die Schranke $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Gelingt Induktion?

Erste Beweisversuche per Induktion schlagen fehl: Der Schritt misslingt. Es ist leichter, eine stärkere Aussage zu beweisen, etwa $s_n \leq 2 - 1/n$.

Beweis: Induktionsanfang: $s_1 = 1 \leq 2 - 1/1$. Induktionsschritt:

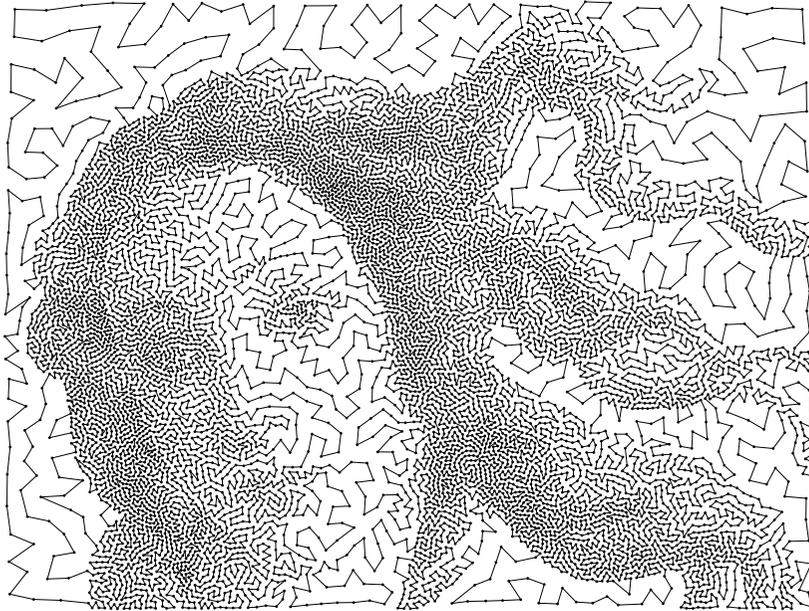
$$s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{n}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} = 2 - \frac{1}{n}$$

Alternative: Für alle $k \geq 2$ gilt $1/k^2 \leq 1/k(k-1) = 1/(k-1) - 1/k$, also $\sum_{k=2}^n 1/k^2 \leq \sum_{k=2}^n 1/(k-1) - 1/k = 1 - 1/n$ (Teleskopsumme).

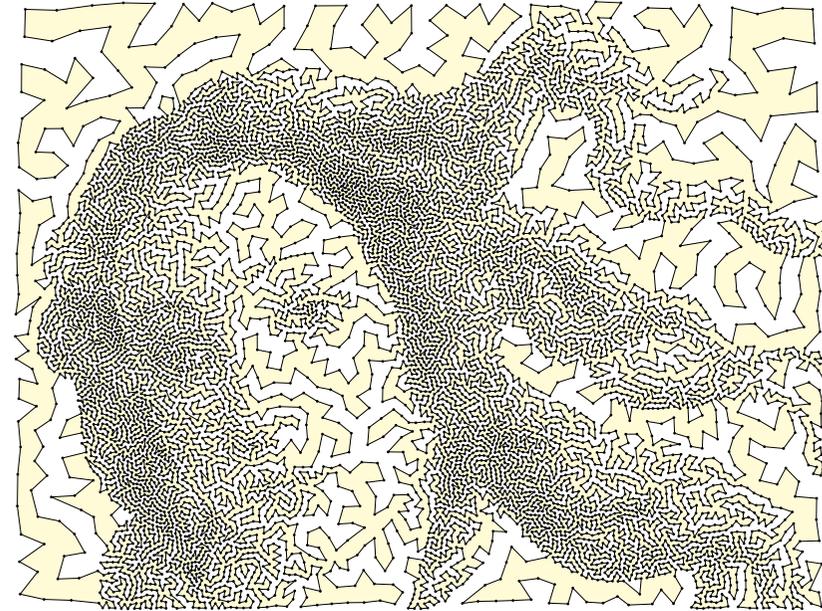
Monotonie und oberer Schranke garantieren Konvergenz $s_n \nearrow s \in [1, 2]$. Es war lange ein berühmtes Problem, den Grenzwert s zu berechnen. Euler fand 1735 den richtigen Wert $s = \pi^2/6 = 1.64493 \dots$

Das Problem der Balance entsteht nicht nur bei vollständiger Induktion, sondern bereits in endlichen Argumentationsketten und Rechnungen. Wir formulieren Übungsaufgaben daher wohlüberlegt und detailliert!

Jordan: Jede Kurve $S^1 \cong C \subseteq \mathbb{R}^2$ trennt \mathbb{R}^2 in zwei Gebiete A und B .



Schoenflies: Das innere Gebiet ist homöomorph zu einer Kreisscheibe.



Satz J2j: Schoenflies für polygonale Jordan-Kurven

(0) Für jede polygonale Kurve $S^1 \cong C \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt $(\mathbb{R}^2, C) \cong (\mathbb{R}^2, S^1)$, d.h. es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$ mit $h(C) = S^1$.

(1) Genauer: Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C = A \sqcup B$ zerfällt in zwei Gebiete, A unbeschränkt und B beschränkt, mit $\bar{A} = A \cup C$ und $\bar{B} = B \cup C$.

Sei \mathcal{K} eine affine Triangulierung von \bar{B} und $D \in \mathcal{K}_2$ ein Dreieck.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung des Kompaktums $\bar{B} \setminus D$.

Dann existiert ein stückweiser affiner Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$ mit $h(\bar{B}) = D$ und Träger $\text{supp}(h) \subseteq U$.

Beweis: (1) Induktion über $n = \#\mathcal{K}_2$: Für $n = 1$ genügt $h = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Für $n \geq 2$ können wir ein Dreieck $\Delta \in \mathcal{K}_2 \setminus \{D\}$ einklappen (J2i) durch einen stückweise affinen Homöomorphismus mit Träger in U (J2H).

(0) Dank (1) haben wir zunächst $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$ mit $h(\bar{B}) = D$.

Radiale Projektion (F6G) liefert $k : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$ mit $k(D) = \mathbb{D}^2$.

Komposition ergibt $k \circ h : (\mathbb{R}^2, \bar{B}) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^2, D) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^2, \mathbb{D}^2)$.

QED

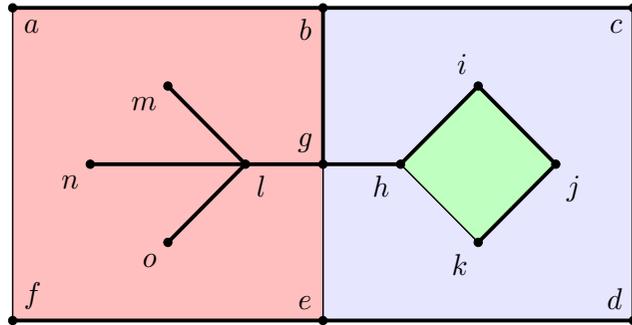
☺ Die genauere und ausführliche Formulierung (1) besagt anschaulich: Wir müssen in der Ebene nur so viel bewegen wie offensichtlich nötig, eine beliebig kleine offene Umgebung U genügt hierzu.

☺ Der Satz von Jordan-Schoenflies gilt nicht nur für polygonale Einbettungen $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ sondern ganz allgemein für alle Einbettungen! Die beiden Sätze sind dann allerdings weit schwieriger zu beweisen.

Ich gehe hier den leichteren Weg und setze polygonale Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ voraus. Daran können Sie die kombinatorisch-topologischen Grundideen gut erlernen und müssen sich im ersten Durchgang nicht mit technischen Schwierigkeiten belasten. Alles ist wunderbar explizit!

In der komplexen Analysis (aka Funktionentheorie) lernen Sie später den wunderbaren Riemannschen Abbildungssatz (J2B), der das Problem vollkommen allgemein und extrem elegant löst. Freuen Sie sich drauf!

Einstweilen arbeiten wir ganz elementar mit simplizialen Methoden.



Sei $|K|$ in \mathbb{R}^2 ein simplicialer Graph, endlich und zusammenhängend.
 Sei $T \leq K$ ein Spannbaum und $S = K \setminus T$ die zusätzlichen Kanten.
 Dann besteht das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus |K|$ aus $1 + \#S$ Gebieten,
 nämlich ein unbeschränktes und $\#S$ beschränkte Gebiete.
 Für jedes beschränkte Gebiet $B \in \pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus |K|)$ gilt $B \cong \mathbb{B}^2$.
 Weiterhin gilt $\delta B \subseteq C = |K|$, im Allgemeinen jedoch $\delta B \subsetneq C$.
 Weiterhin gilt $\mathbb{D}^2 \twoheadrightarrow \bar{B}$, im Allgemeinen jedoch nicht $\mathbb{D}^2 \simeq \bar{B}$.

Übung: Beweisen Sie diese Verallgemeinerung nach obigem Vorbild.

Lösung: Induktion über die Anzahl $n = \#S$ zusätzlicher Kanten.
 Im Falle $n = 0$ ist K ein endlicher Baum und das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus |K|$
 ist zusammenhängend: K hat Blätter, diese können wir einklappen.

Jede weitere Kante $s = \{a, b\} \in S$ läuft durch eine Gebiet U und trennt
 dieses in zwei. Höchstens zwei ist klar wie zuvor. Mindestens zwei dank
 Umlaufzahl: Es existiert ein Weg u von b nach a im Spannbaum T .
 Somit ist $w = ab * u$ geschlossen. Die Umlaufzahl $\deg_2(\gamma - x)$ nimmt
 verschiedene Werte an auf beiden Seiten der Kante $[a, b]$.

Der Graph K hat $f_0 \geq 1$ Ecken und $f_1 = f_0 - 1 + \#S$ Kanten.
 Zusammen mit $f_2 = 1 + \#S$ Gebieten erhalten wir $f_0 - f_1 + f_2 = 2$.
 😊 Das ist genau die Euler–Charakteristik der Sphäre, $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

Die Schoenflies–Konstruktion verläuft wie zuvor, aber trickreicher:
 Wir erhalten $\mathbb{D}^2 \twoheadrightarrow \bar{B}$, allerdings mit Identifizierungen am Rand.
 Das genügt für einen Homöomorphismus $\mathbb{B}^2 \simeq B$ im Inneren.

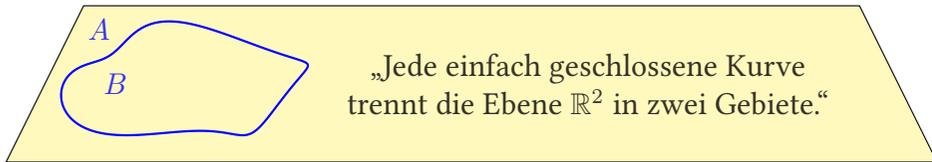
📖 H. Rademacher, O. Toeplitz: *Von Zahlen und Figuren*. Springer 1933

*[...] stellen wir uns vor, die Figur bedeute [...] ein System von Äckern,
 die Grenzen seien Deiche, die sie voneinander trennen, im äußeren Gebiete
 rundherum fließe Wasser, und nun solle Deich nach Deich so niedergelegt
 werden, daß der Reihe nach alle Äcker unter Wasser kommen. Dazu braucht
 man durchaus nicht alle Deiche niederzulegen; vielmehr soll es vermieden
 werden, irgendeinen Deich zu öffnen, der bereits von beiden Seiten bespült
 ist; jeweils sollen nur solche Deiche eingerissen werden, die auf der einen
 Seite bespült sind, auf der anderen noch nicht, so daß sie wirklich jedesmal
 einen neuen Acker erschließen. Es ist klar, daß man jedenfalls $f - 1$ Deiche
 niederlegen muß, um alle die $f - 1$ Äcker, die außer dem Außengebiet
 vorhanden sind, zu bewässern. Es ist aber auch klar, daß der Prozeß
 tatsächlich fortgeführt werden kann, so lange noch irgendein Acker
 unbewässert ist, also bis alle $f - 1$ Äcker bewässert sind; der Prozeß
 kann also nicht enden, ehe volle $f - 1$ Deiche niedergelegt sind.
 Die Zahl der niedergelegten Deiche ist daher genau $f - 1$.*

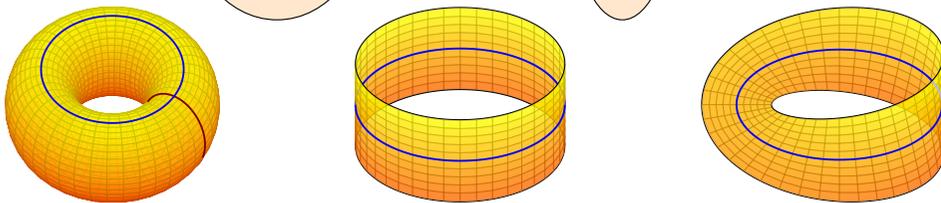
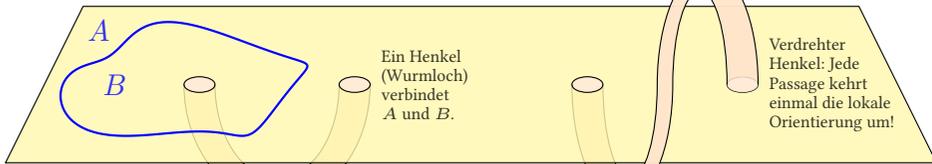
Das ist höchst erstaunlich: Nicht die genauen Lagedaten, sondern allein
 die recht groben topologischen Eigenschaften des Graphen $|K| \subseteq \mathbb{R}^2$
 bestimmen die Anzahl der Komponenten des Komplements $\mathbb{R}^2 \setminus |K|$.
 Hat der Graph $|K| \subseteq \mathbb{R}^2$ die Euler–Charakteristik $\chi(K) = 1 - \#S$,
 so hat das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus |K|$ genau $1 + \#S$ Komponenten.
 In der Summe erhalten wir $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ für $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Wir sehen die Anfänge einer bemerkenswerten Dualität! In schönster
 Allgemeinheit ist dies die Poincaré–Alexander–Lefschetz–Dualität
 zwischen Homologie und Cohomologie in der Algebraischen Topologie.
 Dies konnten wir oben recht leicht per Induktion über $\#S$ beweisen.
 Zur Vereinfachungen nutzen wir zwei wesentliche Einschränkungen:
 $|K| \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein endlicher Graph und zudem affin-linear eingebettet.

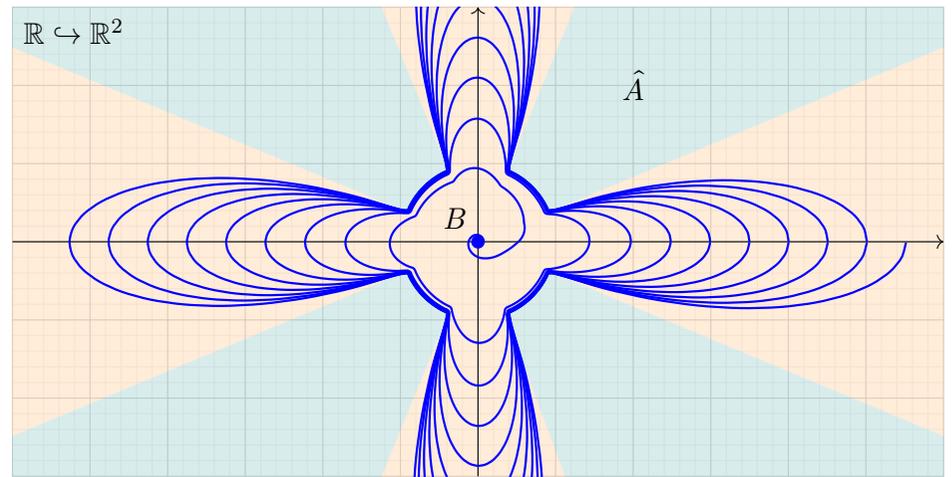
Übung: Sei K in \mathbb{R}^2 ein lokal-endlicher zusammenhängender Graph.
 Erklären Sie eine Bijektion zwischen den Kanten $S = K \setminus T$ und den
 beschränkten Komponenten $B \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus |K|$, sowohl allgemein als auch
 an konkreten Beispielen wie $|K| = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{R}^2$.



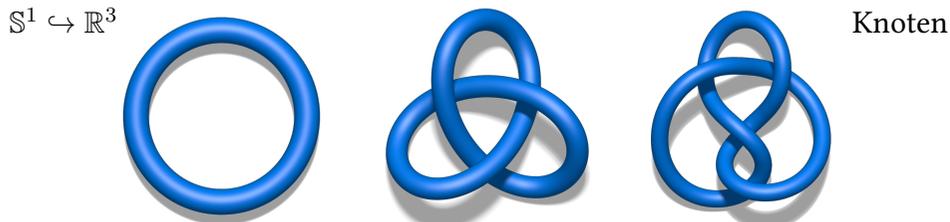
Das ist eine Besonderheit der Fläche $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{S}^2$!



Übung: Welche der Flächen $X = F_{g,r}^+$ haben die Jordan-Eigenschaft?



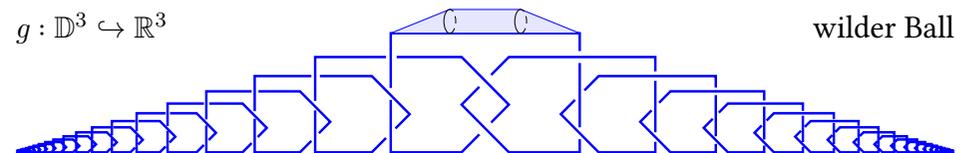
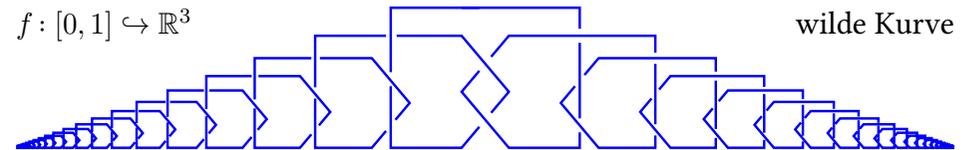
- ☺ Jede Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ trennt die Ebene in genau zwei Gebiete.
- ⚠ Für Einbettungen $g : \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ hingegen kann das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus g(\mathbb{R}^1)$ beliebig viele Wegkomponenten haben, etwa 1, 2, 3, ... sogar überabzählbar viele, siehe Cantors Karussell G2T.



Seien C und V topologische Räume, etwa $C = \mathbb{D}^k, \mathbb{S}^k, \dots$ und $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$. Wir betrachten Einbettungen $f_0, f_1 : C \hookrightarrow V$. Ihre Bilder $C_0 = f_0(C)$ und $C_1 = f_1(C)$ sind homöomorph, können aber verschieden in V liegen:

- (a) Haben $X_0 = V \setminus C_0$ und $X_1 = V \setminus C_1$ gleich viele Komponenten?
- (b) Existiert ein Homöomorphismus $V \setminus C_0 \cong V \setminus C_1$ der Komplemente?
- (c) Existiert ein Homöomorphismus $(V, C_0) \cong (V, C_1)$ der Raumpaare?

Hier gilt (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a). Für $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ gilt (c) dank Jordan-Schoenflies. Für die oben gezeigten Knoten $f_0, f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ sind die Komplemente nicht homöomorph, sie haben nicht-isomorphe Fundamentalgruppen π_1 . Die Knotentheorie ist ein aktives mathematisches Forschungsgebiet.



☞ R.H. Fox, E. Artin: *Some wild cells and spheres in three-dimensional space*. Ann. of Math. 49 (1948) 979–990. Ich zitiere die obigen Monster. Das Komplement $X = \mathbb{S}^3 \setminus f([0, 1])$ ist nicht zusammenziehbar, denn $\pi_1(X) \neq \{1\}$. Gleiches gilt für das Äußere der Aufdickung $g : \mathbb{D}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Verdopplung dieser Konstruktion liefert eine beidseitig wilde Einbettung $h : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ mit $\pi_0(\mathbb{S}^3 \setminus h(\mathbb{S}^2)) = \{A, B\}$, aber $A \not\cong \mathbb{B}^3 \cong B$. Schoenflies gilt nicht für wilde Einbettungen $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, nur für zahme, etwa glatte.

Satz J2R: Nicht-Trennungssatz

Für jede einfache Kurve $[0, 1] \cong C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $n \geq 2$ gilt:

- 1 Das Komplement $A = \mathbb{R}^n \setminus C$ ist wegzusammenhängend.
 - 2 Der Rand des Komplements $\mathbb{R}^n \setminus C$ in \mathbb{R}^n ist die Menge C .
- In kleiner Dimension $n \leq 2$ oder für polygonale Kurven C gilt stärker:
- 3 Es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \setminus C \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
 - 4 Es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ mit $h(C) = [0, 1]$.

Die Schwierigkeit dieses Satzes liegt in der schwachen Voraussetzung: Zwar ist der Teilraum $C \cong [0, 1]$ sehr einfach, aber er kann kompliziert im Raum \mathbb{R}^n liegen, etwa wie obige Artin-Fox-Kurve. Wir denken auch an Osgood-Kurven $C \subseteq \mathbb{R}^2$ (C6H) mit positivem Flächeninhalt $\text{vol}_2(C) > 0$.

Übung: Beweisen Sie Satz J2R, beginnend mit (4), für polygonale Kurven $C = [v_0, v_1] \cup \dots \cup [v_{\ell-1}, v_\ell]$ per Induktion über die Länge $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Satz J2T: der Jordansche Nicht-Trennungssatz

Für jede Einbettung $f : [0, 1]^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \text{Im } f$ wegzusammenhängend.

Für die Topologie der Ebene interessiert uns zunächst $n = 2$, und hier insbesondere Einbettungen $[0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Der Beweis verläuft jedoch in allen Dimensionen gleich, daher formuliere ich ihn hier allgemein. Als Hilfsmittel benötigen wir folgendes Ergebnis, auf das ich hier vorgreife:

Lemma J4E:

Es gibt keine stetige Retraktion $r : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ des Balls auf seinen Rand.

Für $n = 1$ genügt der Zwischenwertsatz, für $n = 2$ die Umlaufzahl:

Beweis: Die Inklusion $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2 : s \mapsto s$ ist zusammenziehbar vermöge $H : \iota \simeq *$ mit $H(t, s) = (1-t)s$. Gäbe es $r : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ stetig mit $r \circ \iota = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$, so folgt $\text{id}_{\mathbb{S}^1} = r \circ \iota \simeq \text{const}$. Dies widerspricht der Homotopie-Invarianz der Umlaufzahl J1J, denn $\deg(\text{id}_{\mathbb{S}^1}) = 1$ aber $\deg(\text{const}) = 0$. ◻

Beweis des Satzes: Die Bildmenge $C = f([0, 1]^k) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt (F1J), demnach in \mathbb{R}^n beschränkt und abgeschlossen dank Heine-Borel (F1O). Wir wenden Tietzes Fortsetzungssatz an (E5L): Die stetige Abbildung $g = f^{-1} : C \rightarrow [0, 1]^k$ erlaubt eine stetige Fortsetzung $G : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]^k$. Wir erhalten eine Retraktion $q := f \circ G : \mathbb{R}^n \rightarrow C$, denn $q|_C = \text{id}_C$.

Das Komplement $X = \mathbb{R}^n \setminus C$ ist offen, somit lokal wegzshgd, daher ist $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ topologische Summe von Gebieten (G3c). Sei $A \in \pi_0(X)$ die unbeschränkte und B die Vereinigung aller anderen Komponenten. Es gilt $\bar{A} \subseteq A \cup C$ und $\bar{B} \subseteq B \cup C$, also $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq C$. Wir verkleben (E1P)

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in \bar{A} \cup C, \\ q(x) & \text{für } x \in \bar{B}. \end{cases}$$

Angenommen, es existierte ein Punkt $b \in B$. Nach Verschieben sei $b = 0$, nach Stauchen zudem $C \subseteq \mathbb{B}^n$. Wegen $0 \notin \text{Im}(h)$ ist $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ mit $r(x) = h(x)/|h(x)|$ wohldefiniert und stetig. Zudem gilt $r(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq A$. Diese Retraktion widerspricht Lemma J4E. ◻

Einbettungen $[0, 1]^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ können erschreckend kompliziert sein, wie zum Beispiel Osgood-Kurven $[0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ mit positiven Flächeninhalt oder Artin-Fox-Kurven $[0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ mit verknotetem Komplement. Ein möglichst großes Beispielrepertoire schult unsere Anschauung.

Jedoch trennt keine noch so komplizierte Einbettung $f : [0, 1]^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ den Raum, das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \text{Im } f$ bleibt wegzusammenhängend! Diese Tatsache mag anschaulich plausibel sein, doch obige Beispiele lassen an der Verlässlichkeit unserer topologischen Intuition zweifeln.

Zum Glück müssen wir uns nicht allein auf unsere Intuition verlassen, wir können diesen Satz beweisen, und sogar vergleichsweise leicht. Das verdanken wir unseren starken Werkzeugen aus der analytischen Topologie (Heine-Borel, Tietze, Verklebesatz, ...) und ersten Werkzeugen der algebraischen Topologie (hier Umlaufzahl, Abbildungsgrad, ...).

- ☺ Die Beweisidee ist raffiniert, doch die Ausführung gelingt nun leicht.
- ⚠ Die obigen Beispiele zeigen, dass es nicht noch leichter gelingen kann.

Der Jordansche Trennungssatz ist wunderbar einfach und übersichtlich für polygonale Kurven (J2D). Wir beweisen nun den allgemeinen Fall.

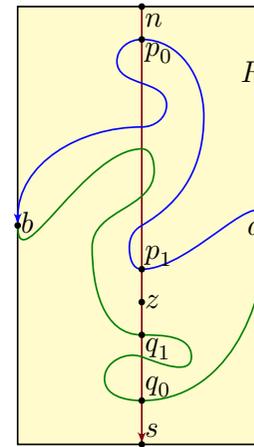
Satz J2v: Jordanscher Trennungssatz

- (1) Für jede Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ zerfällt das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C = A \sqcup B$ in zwei Gebiete, A unbeschränkt, B beschränkt.
- (2) Wir haben $\pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus C) = \{A, B\} \cong \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg(f - x) \pmod 2$.
- (3) Für den Rand gilt $\delta A = \delta B = C$, also $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$.

Beweis: (0) Die Abstandsfunktion $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto |f(s_1) - f(s_2)|$ ist stetig. Da $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ kompakt ist, nimmt sie ihr Maximum an: Es gibt $s_1, s_2 \in \mathbb{S}^1$ sodass $a = f(s_1)$ und $b = f(s_2)$ maximalen Abstand haben, kurz $|a - b| = \text{diam}(C)$. Nach Umparametrisierung von \mathbb{S}^1 können wir $s_1 = 1$ und $s_2 = -1$ annehmen. Nach Drehung und Skalierung und Verschiebung von \mathbb{R}^2 können wir $a = (1, 0)$ und $b = (-1, 0)$ annehmen. Damit liegt C im Rechteck $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ und $\partial R \cap C = \{a, b\}$.

(2a) Wir berechnen $\deg(f - z) = 1$. Zunächst approximieren wir den Weg $np_0 \xrightarrow{\alpha} p_1 z$ im Komplement von $[z, s]$ und β durch einen Polygonzug $w = np_0 \dots p_1 z$ in R . Falls nötig machen wir $|w|$ doppeltpunktfrei, indem wir an jedem Doppelpunkt die unnötige Schleife abschneiden. Nach dem polygonalen Jordan-Satz (J2D) zerlegt $\gamma^* = |w * zs|$ das Rechteck R in zwei Komponenten. Wir approximieren β im Komplement von $|w|$ polygonal durch β^* . Der Weg β^* überschreitet γ^* ungeradzahlig oft, und zwar ausschließlich über $[z, s]$. Das zeigt $\deg(f - z) = 1$ dank J1M.

- (1a) Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ hat somit mindestens zwei Komponenten.
- (3) Für jede Komponente $U \in \pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus C)$ gilt $\delta U = C$: Hierzu sei A die unbeschränkte und B eine beschränkte Komponente; eine solche existiert dank (1a). Es gilt $\overline{A} \subseteq A \cup C$ und $\overline{B} \subseteq B \cup C$, also $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq C$. Wir nehmen $\overline{A} \cap \overline{B} \subsetneq C$ an. Dann existiert eine Kurve $[0, 1] \cong C' \subseteq C$ mit $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq C'$. Damit wären $A \neq B$ zwei verschiedene Wegkomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus C'$, im Widerspruch zum Nicht-Trennungssatz J2T.



Nach dieser Vorbereitung vereinbaren wir:
 Der Weg $\alpha : [0, 1] \cong C_+ : t \mapsto f(e^{\pi i t})$ führt von a nach b längs des oberen Halbkreises, der Weg $\beta : [0, 1] \cong C_- : t \mapsto f(-e^{\pi i t})$ von b zurück nach a längs des unteren Halbkreises. Vom „Nordpol“ $n = (0, 2)$ zum „Südpol“ $s = (0, -2)$ führt der Weg $\gamma : [0, 1] \cong [n, s]$ mit $\gamma(t) = (1 - t)n + ts$ und schneidet sowohl α als auch β (ZWS).

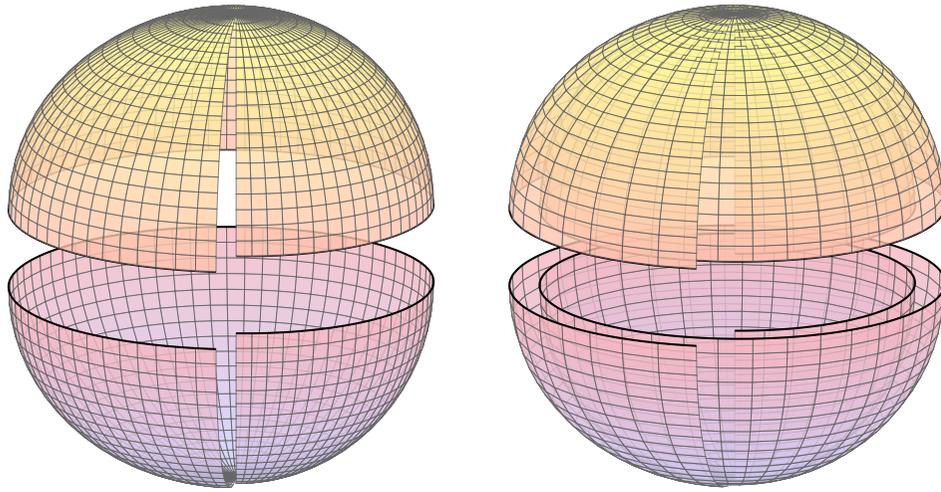
Wir können annehmen, dass γ zuerst α schneidet, andernfalls ersetzen wir $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ durch $f \circ \text{conj}$.

Sei p_0 der erste und p_1 der letzte Schnittpunkt von γ mit α ; eventuell gilt $p_0 = p_1$. Nach p_1 muss γ noch β schneiden: Andernfalls führt der Weg $np_0 \xrightarrow{\alpha} p_1 s$ von n nach s , ohne β zu schneiden, im Widerspruch zu J1x. Nach p_1 sei q_1 der erste und q_0 der letzte Schnittpunkt von γ mit β ; eventuell gilt $q_0 = q_1$. Sei $z = (p_1 + q_1)/2$ der Mittelpunkt.

- (1) Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ hat genau zwei Komponenten und
- (2) die Abbildung $\nu : \pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus C) \rightarrow \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg_2(f - x)$ ist bijektiv.

Hierzu sei A die unbeschränkte und $B = [z]$ die beschränkte Komponente aus (1a). Angenommen, es gäbe eine weitere Komponente U von $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Diese ist ebenfalls beschränkt, $U \subseteq \text{Int } R$. Der Weg δ verlaufe gemäß $np_0 \xrightarrow{\alpha} p_1 q_1 \xrightarrow{\beta} q_0 s$ in $A \cup B \cup C$, weder durch U noch a oder b . Seien $B(a, \varepsilon)$ und $B(b, \varepsilon)$ disjunkt von δ . Nach (3) gilt $a, b \in \delta U$, also existieren $a' \in B(a, \varepsilon) \cap U$ und $b' \in B(b, \varepsilon) \cap U$. Da U wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\eta' : [0, 1] \rightarrow U$ von a' nach b' . Der Weg η gemäß $aa' \xrightarrow{\eta'} b'b$ schneidet δ nicht, erneut im Widerspruch zu J1x. Daran zerbricht unsere Annahme, somit gibt es keine weitere Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$. QED

☺ Dieser Beweis ist extrem raffiniert. Soviel Sorgfalt ist wirklich nötig, denn Jordan-Kurven in der Ebene können phantastisch kompliziert sein. Sie verstehen jetzt, warum ich den polygonalen Fall vorangestellt habe. Den allgemeinen Fall empfehle ich zum gewissenhaften Selbststudium.



$\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n : (r \cos t, r \sin t, x_2, \dots, x_n) \mapsto (r \cos(kt), r \sin(kt), x_2, \dots, x_n)$
 In Zylinderkoordinaten: Diese Modellabbildung $\varphi_k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $k \in \mathbb{Z}$ wickelt die x_0-x_1 -Ebene k -mal um den Nullpunkt, entsprechend wickelt φ_k^n die Sphäre k -mal um sich selbst wie skizziert.

Zur Erinnerung: $[X, Y] = \mathcal{C}(X, Y)/\sim = \{[f] \mid f : X \rightarrow Y\}$ ist die Menge aller Homotopieklassen $[f]$ stetiger Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, siehe G4H. Das vergrößert unsere Sichtweise und vereinfacht die Klassifikation:

Satz J3A: Brouwer 1912, Hopf 1927

In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ stiftet $k \mapsto [\varphi_k^n]$ eine Bijektion $\mathbb{Z} \cong [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$. Die Inverse ist der Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \rightarrow \mathbb{Z} : [f] \mapsto \deg(f)$.

$$[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightleftharpoons[\varphi_k^n \leftarrow k]{\deg} \mathbb{Z}$$

Das bedeutet: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, egal wie kompliziert, ist homotop zu genau einer Modellabbildungen φ_k^n , mit $k =: \deg(f)$.

Die eindeutige Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $f \simeq \varphi_k^n$ heißt der Abbildungsgrad von f . Anschaulich zählt er also, wie oft f die Sphäre um sich selbst wickelt.

Die Homotopie-Äquivalenz $(\iota, \rho) : \mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ stiftet die Bijektionen $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong [\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}] \cong [\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbb{S}^n] \cong [\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}]$.

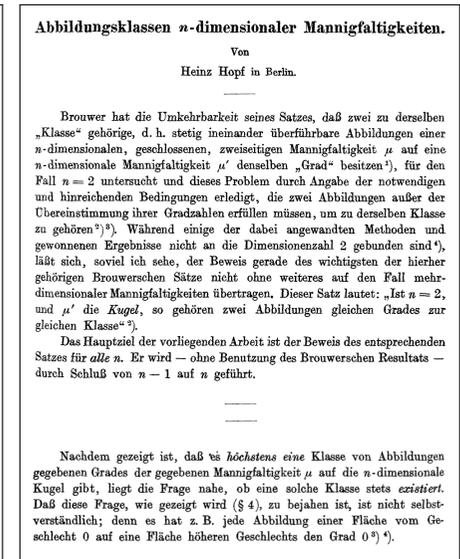
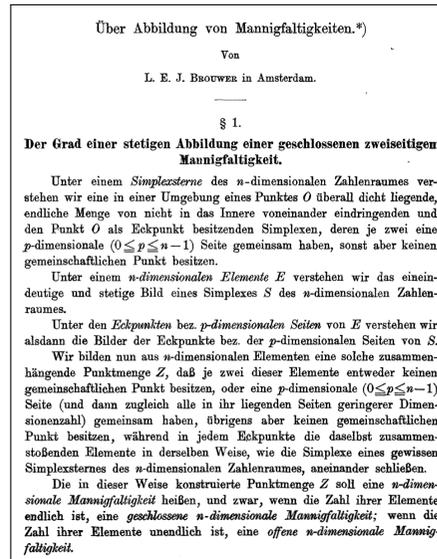
😊 Homotopie vereinfacht dramatisch und extrahiert das Wesentliche: Die Menge $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n)$ aller stetigen Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ist riesig und sehr unübersichtlich. Der Abbildungsgrad destilliert hieraus eine wichtige Kennzahl: $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ zählt, wie oft f die Sphäre umwickelt.

Beweis-Ideen: In Dimension $n = 1$ haben wir den Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$ durch die Umlaufzahl ganz elementar konstruiert: als Winkelsumme J1j, Wegintegral J1k und durch Achsübergänge J1m.

Jeder dieser Ansätze funktioniert auch in beliebiger Dimension $n \in \mathbb{N}$. Die Konstruktion ist technisch aufwändiger, ich führe dies hier nicht aus.

📖 J.W. Milnor: *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton 1965
 Ein wunderschönes Thema für ein Pro/Seminar im 3./4. Semester!

😊 Uns genügt im Folgenden die axiomatische **Definition** von \deg . Die **Eindeutigkeit** von \deg ist unmittelbar klar aufgrund der Definition. Daraus werden wir alle für uns interessanten **Eigenschaften** ableiten. Die **Konstruktion** verschiebe ich auf die Algebraische Topologie.



Brouwer konstruierte 1912 den Abbildungsgrad mit simplizialer Technik. Hopf bewies 1927 die Bijektivität per Induktion über die Dimension n .

Satz J3A garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Abbildungsgrades. Wie in der Informatik erklärt dies eine *black box* mit wohldefinierter Schnittstelle. Der erhoffte didaktische Vorteil ist, möglichst schnell zu interessanten Anwendungen vorzudringen. Dinge zu *postulieren*, ohne sie zu beweisen, ist natürlich nicht die feine mathematische Art. Laut Bertrand Russell hat diese Methode dennoch viele Vorteile, und zwar dieselben wie Diebstahl gegenüber ehrlicher Arbeit:

The method of "postulating" what we want has many advantages; they are the same as the advantages of theft over honest toil.

Bertrand Russel (1872–1970)

Versöhnlicher will ich es so sagen: Ich nehme hier einen Kredit auf, den ich später begleichen muss, indem ich den Abbildungsgrad nachträglich *konstruiere* und die gewünschten Eigenschaften sorgsam *nachweise*, (1) in der Algebraischen Topologie / Homologie, (2) in der Analysis oder (3) in der Differentialtopologie. Einstweilen nutzen wir ihn als *Werkzeug*.

Life is uncertain. Eat dessert first!

Für $n = 0$ gilt $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$. Der Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0] \rightarrow \{\pm 1, 0\}$ ist das Signum / die Signatur, mit $\deg(\pm \text{id}) = \pm 1$ und $\deg(\text{const}_{\mathbb{S}^0}^{\pm 1}) = 0$.

Zu jeder endlichen Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ und Abbildung $f : X \rightarrow X$ haben wir

$$\text{sign}(f) = \prod_{\{i < j\} \subseteq X} \frac{f(i) - f(j)}{i - j} = \prod_{\{i \neq j\} \subseteq X} \frac{f(i) - f(j)}{i - j} \in \{\pm 1, 0\}.$$

Es gilt $\text{sign}(f) = 0$, falls f nicht bijektiv ist, und $\text{sign}(f) = \pm 1$, falls f eine gerade / ungerade Permutation ist. Die Abbildung $\text{sign} : X^X \rightarrow \{\pm 1, 0\}$ ist multiplikativ, das heißt $\text{sign}(f \circ g) = \text{sign}(f) \cdot \text{sign}(g)$ für alle $f, g : X \rightarrow X$.

😊 Diese Eigenschaft *charakterisiert* die Signatur eindeutig: Für $|X| \geq 2$ ist sign die einzige multiplikative Surjektion $(X^X, \circ, \text{id}_X) \twoheadrightarrow (\{\pm 1, 0\}, \cdot, 1)$.

😊 Die Signatur dient zur *Konstruktion* der Determinante $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$. Dies ist die einzige multilineare, alternierende, normierte Abbildung.

😊 Der Abbildungsgrad $\deg(f)$ stetiger Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ (J0A) ist ebenso grundlegend wie die Signatur $\text{sign}(f)$ von Abbildungen $f : X \rightarrow X$ und die Determinante $\det(f)$ linearer Abbildungen $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Satz B1v: Definition und Eigenschaften der Determinante

Sei K ein kommutativer Ring. In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine multilineare, alternierende, normierte Abbildung $\det_{\mathbb{K}}^n : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$.

Diese **Determinante** erfreut sich folgender Eigenschaften:

- 1 Es gilt $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$ (Leibniz)
- 2 Die Determinante ist transpositionsinvariant: $\det(A^T) = \det(A)$.
- 3 Die Determinante ist multiplikativ: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- 4 Genau dann ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, wenn $\det(A) \in \mathbb{K}$ dies ist.
- 5 Genauer gilt $AA' = A'A = \det(A)E$, also $A^{-1} = \det(A)^{-1}A'$. (Cramer)

Zu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definieren wir hierbei die adjunkte Matrix A' durch ihre Koeffizienten $a'_{ij} := \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

- 😊 Explizite polynomielle Formel. 😊 Sofort praktisch für kleine n .
- 😞 Naive Anwendung der Leibniz-Formel ist für große n aufwändig ($n!$).
- 😊 Eine effiziente Berechnung gelingt mit dem Gauß-Algorithmus (n^3).

Der Satz besteht aus drei wichtigen Aussagen: Zunächst (1) Existenz und (2) Eindeutigkeit, dann erst (3) zahlreiche gute Eigenschaften wie Formeln, Symmetrien, Multiplikativität, verschiedene Algorithmen, ... Unsere obige Liste ist dabei noch keineswegs abschließend!

Um hier Ordnung und Klarheit zu schaffen, ist es sinnvoll, zu allererst zu definieren, was die Determinante genau *ist*, und dann nach und nach auszuführen, was Sie für uns *tut*. Die Anwendungen sind überaus vielfältig, wie sie wissen: vom charakteristischen Polynom in der Linearen Algebra bis zur Volumenverzerrung bei der mehrdimensionalen Integration.

Wir bauen unsere Definition und Sätze auf: logisch und didaktisch! Nachdem wir uns die Formulierung der Ziele genau überlegt haben, müssen wir die Aussagen beweisen: (1) Existenz: Die Leibniz-Formel definiert eine Abbildung und erfüllt alle Forderungen! (2) Eindeutigkeit: Jede multilineare, alternierende, normierte Abbildung $\det_{\mathbb{K}}^n : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ erfüllt die Leibniz-Formel! (3) Eigenschaften: sorgfältiges Nachrechnen!

Die folgenden Sätze verdanken wir den nützlichen Modellabbildungen φ_k^n und der vollständigen Homotopieklassifikation J3A nach Brouwer–Hopf.

Korollar J3B: Surjektivität

Ist $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig und $\deg(f) \neq 0$, so ist f surjektiv.

Beweis: Aus $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ folgt $f \simeq * \simeq \varphi_0^n$, also $\deg(f) = 0$. QED

Korollar J3c: Multiplikativität

Für $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig gilt $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$. Somit ist der Abbildungsgrad $([\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n], \circ, \text{id}) \simeq (\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ ein Monoidisomorphismus.

Beweis: Für $k = \deg(f)$ und $\ell = \deg(g)$ gilt $f \simeq \varphi_k^n$ und $g \simeq \varphi_\ell^n$ dank J3A. Hieraus folgt $f \circ g \simeq \varphi_k^n \circ \varphi_\ell^n = \varphi_{k\ell}^n$, also $\deg(f \circ g) = k\ell$ erneut dank J3A. Zudem gilt $\text{id} = \varphi_1$ und somit $\deg(\text{id}) = 1$. QED

😊 Auch das Monoid $([\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n], \circ, \text{id})$ ist demnach kommutativ: Für alle stetigen Abbildungen $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ gilt $f \circ g \simeq g \circ f$.

Korollar J3D: Homotopie-Äquivalenzen

Vorgelegt sei eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ in Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
 (1) Genau dann ist f eine Homotopie-Äquivalenz, wenn $\deg(f) = \pm 1$ gilt.
 (2) Speziell für jeden Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^n$ folgt $\deg(f) = \pm 1$.

Beweis: (1) „ \Rightarrow “: Aus $f \circ g \simeq \text{id}_{\mathbb{S}^n}$ folgt $\deg(f) \cdot \deg(g) = \deg(\text{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$. Auch umgekehrt aus $g \circ f \simeq \text{id}_{\mathbb{S}^n}$ folgt $\deg(g) \cdot \deg(f) = \deg(\text{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$.

In $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ hat die Gleichung $a \cdot b = 1$ nur die Lösungen $a = b = \pm 1$. Aus Topologie wird Algebra, und letztere ist hier viel einfacher!

„ \Leftarrow “: Gilt $\deg(f) = \pm 1$, so folgt $f \simeq \varphi_{\pm 1}^n$, also $f \circ f \simeq \varphi_1^n = \text{id}_{\mathbb{S}^n}$.

In diesem glücklichen Fall wird aus Algebra wieder Topologie! QED

Beispiel: Für Identität φ_1^n und Spiegelung φ_{-1}^n gilt $\deg(\varphi_{\pm 1}^n) = \pm 1$. Ein Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^n$ heißt **orientierungserhaltend**, falls $\deg(f) = +1$, und **orientierungsumkehrend**, falls $\deg(f) = -1$. Orientierung untersuchen wir zum Ende des Kapitels noch genauer.

Korollar J3E: lineare Isomorphismen

Für $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ definieren wir $f_A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n : x \mapsto Ax/|Ax|$. Dank $Ax \neq 0$ für alle $x \neq 0$ ist f_A wohldefiniert und stetig.

- (0) Für $E_{\pm} = \text{diag}(1, \pm 1, 1, \dots, 1)$ gilt $f_{E_{\pm}} = \varphi_{\pm 1}^n$, also $\deg(f_{E_{\pm}}) = \pm 1$.
- (1) Allgemein gilt $\deg(f_A) = \text{sign det}(A)$, somit $\deg(-\text{id}) = (-1)^{n+1}$.
- (2) Für $A \in \text{GO}_{n+1}(\mathbb{R})$ gilt $f_A(x) = Ax$ und $\deg(A) = \det(A) \in \{\pm 1\}$.

Wir nutzen die Zerlegung in Wegkomponenten (G2N):

$$\pi_0(\text{GL}_{n+1} \mathbb{R}) = \{ \text{GL}_{n+1}^+ \mathbb{R} = [E_+], \text{GL}_{n+1}^- \mathbb{R} = [E_-] \}$$

Beweis: (1) Dank Gauß (G2N) existiert ein Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_{n+1} \mathbb{R}$ von $\gamma(0) = A$ nach $\gamma(1) = E_{\pm}$, somit eine Homotopie $\Gamma : f_A \simeq f_{E_{\pm}} : t \mapsto f_{\gamma(t)}$,

$$\Gamma : [0, 1] \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n : (t, x) \mapsto \gamma(t)(x)/|\gamma(t)(x)|.$$

Hieraus folgt $\deg(f_A) = \deg(f_{E_{\pm}}) = \pm 1 = \text{sign det}(A)$. QED

😊 Mit diesen Rechenregeln können wir den Abbildungsgrad $\deg(f)$ unmittelbar für viele relevante Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ berechnen! Das folgt, Schritt für Schritt, allein aus der axiomatischen Definition. Diese ist bereits handfest genug für alle nötigen Rechnungen.

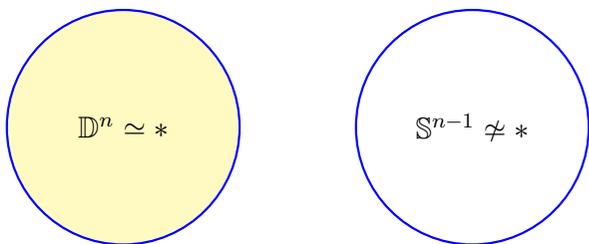
Wir können den Abbildungsgrad präzise *definieren*, dieser Schritt ist leicht und sichert immerhin die *Eindeutigkeit*. Jedoch haben wir ihn nicht *konstruiert*, also seine *Existenz* noch nicht bewiesen. Dazu vertrauen wir einstweilen auf die Homotopieklassifikation J3A nach Brouwer–Hopf.

Falls Ihnen diese Rechnungen noch Kopfzerbrechen bereiten, seien Sie voll Vorfriede und ohne Sorge, mutig und frohgemut:

Auch an die Signatur $\text{sign} : (\text{End}(X), \circ, \text{id}_X) \rightarrow (\{\pm 1, 0\}, \cdot, 1)$ und die Determinante $\det : (\text{End}_K(V), \circ, \text{id}_V) \rightarrow (K, \cdot, 1)$, ihre *Definition* und hilfreiche *Rechenregeln* mussten Sie sich am Anfang der Linearen Algebra erst gewöhnen, dann konnten Sie mit diesen Werkzeugen reich ernten.

Für den Abbildungsgrad, seine Definition und seine Rechenregeln ist es ganz genauso: Sie werden sich rasch gewöhnen und dann reich ernten.

Der Ball \mathbb{D}^n ist zusammenziehbar, die Randsphäre \mathbb{S}^{n-1} hingegen nicht!



Satz J4A: $\mathbb{S}^n \not\approx *$

Die Sphäre \mathbb{S}^n ist nicht zusammenziehbar: Die Identität $\text{id}_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ist nicht homotop zur konstanten Abbildung $\text{const} : \mathbb{S}^n \rightarrow \{*\} \subseteq \mathbb{S}^n$.

Beweis: Wir wenden den Abbildungsgrad (J3A) an:

Es gilt $\text{deg}(\text{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$ und $\text{deg}(\text{const}) = 0$, also $\text{id}_{\mathbb{S}^n} \not\approx \text{const}$. QED

Alternative: Wir wenden den Funktor $[\mathbb{S}^n, -]$ (G4L) an:

Es gilt $[\mathbb{S}^n, \{*\}] = \{*\}$, aber $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$ dank J3A. QED

Die anschaulich-geometrische Frage, ob ein „Loch“ vorliegt oder nicht, ist nicht bloß Spielerei, sondern hat handfeste Konsequenzen für die Lösung von Gleichungssystemen. Zur Erinnerung:

Satz J4B: eindimensionaler Zwischenwertsatz (ZWS, C3A)

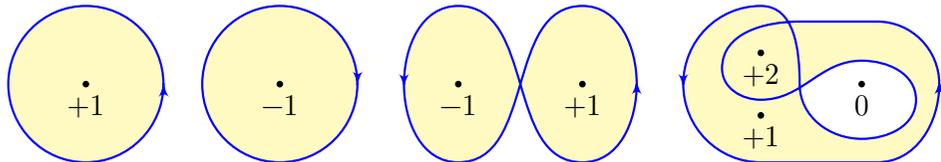
Zu jeder stetigen Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(-1)f(1) < 0$ existiert (mindestens) ein Punkt $x \in]-1, 1[$ mit $f(x) = 0$.

Das ist klar für $f(x) = ax + b$, mit der expliziten Lösung $x = -b/a$. Schon für Polynomfunktionen $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ist die Aussage über \mathbb{Q} falsch, und über \mathbb{R} äußerst bemerkenswert! Der Zwischenwertsatz ist äquivalent zur Vollständigkeit der reellen Zahlen (G1s).

Satz J4c: eindimensionaler Zwischenwertsatz (ZWS, C3A)

Sei $f : \mathbb{D}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für $y \in \mathbb{R}$ zwischen $a = f(-1)$ und $b = f(1)$ existiert $x \in \mathbb{B}^1$ mit $f(x) = y$, kurz $(y - a)(b - y) > 0 \Rightarrow y \in f(\mathbb{B}^1)$.

Für stetige Funktionen $f : \mathbb{D}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ kontrolliert demnach das Verhalten auf dem Rand $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ das Verhalten im Inneren $\mathbb{B}^1 =]-1, 1[$: Alle Zwischenwerte *müssen* angenommen werden. (Weitere Werte *können* angenommen werden.)



In Dimension $n \geq 2$ betrachten wir den Ball \mathbb{D}^n mit Randsphäre \mathbb{S}^{n-1} und den Abbildungsgrad $\text{deg} : [\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}] \cong [\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}] \cong \mathbb{Z}$. Für $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zählt $\text{deg}(f)$, wie oft f die Sphäre um den Nullpunkt wickelt. Allgemein für $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $y \notin f(\mathbb{S}^{n-1})$ zählt $\text{deg}(f - y)$, wie oft f die Sphäre um den Punkt y wickelt.

Der eindimensionaler Zwischenwertsatz (C3A) ist, wie Sie bereits wissen, ein allgegenwärtiges Werkzeug der reellen Analysis. Der Abbildungsgrad erweitert dies wie folgt zum mehrdimensionalen Zwischenwertsatz; dieser wird sich als ebenso vielseitig und nützlich erweisen.

Satz J4D: mehrdimensionaler Zwischenwertsatz

Sei $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit Rand $g = f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Zu jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Im } g$ mit $\text{deg}(g - y) \neq 0$ existiert $x \in \mathbb{B}^n$ mit $f(x) = y$, kurz $y \in f(\mathbb{B}^n)$.

Beweis: *Kontraposition:* Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$ zeigen wir $\text{deg}(g - y) = 0$. Nach Verschiebung können wir $y = 0$ annehmen, das vereinfacht.

Die Abbildung $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $H(r, s) := f(rs)$ ist stetig, also eine Homotopie von $H_0(s) = f(0)$ nach $H_1(s) = f(s)$. Sie verläuft ganz in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ aufgrund unserer Annahme $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}^n$.

Dank Homotopie-Invarianz folgt $\text{deg}(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \text{deg}(H_0) = 0$. QED

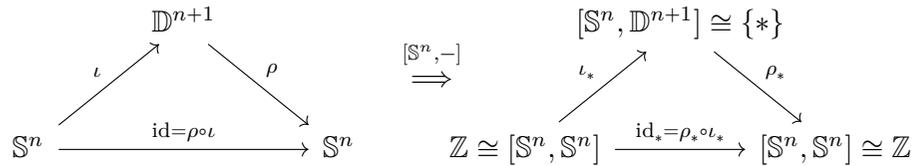
Lemma J4E:

Es gibt keine stetige Retraktion $\rho : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ des Balls auf seinen Rand.

Für $n = 0$ und $[-1, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$ folgt dies dank Zwischenwertsatz (C3A). Für $n = 1$ und $\mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ gelingt der Beweis mit der Umlaufzahl, siehe J234.

Beweis: Die Inklusion $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ ist zusammenziehbar (G4B). Gäbe es ρ , so folgt $\text{id}_{\mathbb{S}^n} = \rho \circ \iota \simeq *$. Das widerspricht $\mathbb{S}^n \not\cong *$ (J4A). QED

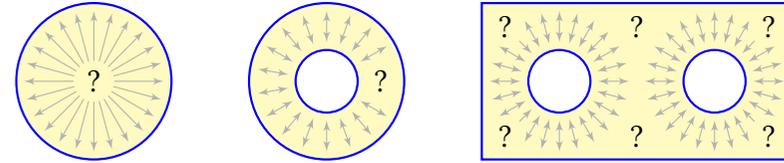
Alternative: Wir wenden den Funktor $[\mathbb{S}^n, -]$ (G4L) an:



Das Diagramm rechts in Set ist unmöglich, also auch links in Top. QED

Dieses geniale, funktorielle Argument findet sich bereits in der Bibel: „Eher geht ein Kamel durch ein Nadelöhr, als $\text{id}_{\mathbb{Z}}$ durch 0 faktorisiert.“

Es existiert eine Retraktion von $A = [0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$ auf den Rand $\delta A = \{0\}$, sogar eine starke Deformationsretraktion. Was gilt hierzu allgemein?



Satz J4F:

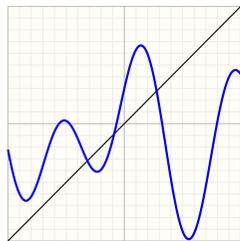
Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit $A^\circ \neq \emptyset$, so existiert keine Retraktion $\rho : A \rightarrow \delta A$.

Beweis: Nach Verschiebung gilt $0 \in A^\circ$, nach Skalierung zudem $A \subseteq \mathbb{D}^n$. Angenommen, es gäbe eine Retraktion $\rho : A \rightarrow \delta A$. Daraus erhalten wir

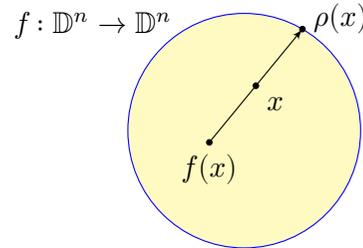
$$g : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto \begin{cases} \rho(x)/|\rho(x)| & \text{für } x \in A, \\ x/|x| & \text{für } x \in \mathbb{D}^n \setminus A. \end{cases}$$

Dank Verklebesatz E1P ist g stetig. Zudem gilt $g(x) = x$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Eine solche Retraktion von \mathbb{D}^n auf \mathbb{S}^{n-1} ist nach J4E unmöglich. QED

Jede stetige Abbildung $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ hat (mindestens) einen Fixpunkt.



$f : [a, b] \rightarrow [a, b]$
 $g(x) = x - f(x)$



Satz J4H: Fixpunktsatz von Brouwer, 1909

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ hat (mindestens) einen Fixpunkt, das heißt, es existiert mindestens ein Punkt $a \in \mathbb{D}^n$ mit $f(a) = a$.

Beweis: Angenommen, für alle $x \in \mathbb{D}^n$ gälte $f(x) \neq x$. Zu $x \in \mathbb{D}^n$ existiert genau ein $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $x + t(x - f(x)) =: \rho(x)$ im Rand \mathbb{S}^{n-1} liegt. Die so definierte Abbildung $\rho : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ ist stetig. (Ausrechnen!) Für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt $\rho(x) = x$. Das widerspricht J4E. QED

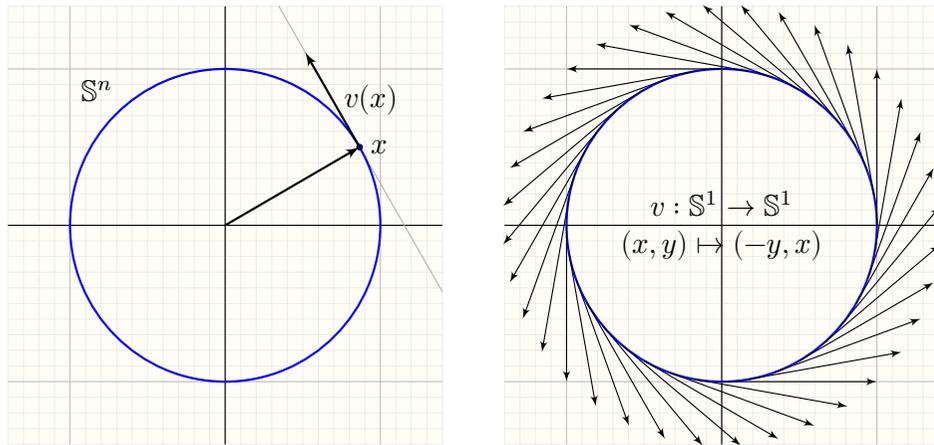
Ausführung: Zu $y = f(x)$ finden wir $|x + t(x - y)|^2 - 1 = at^2 - 2bt - c$ mit $a = \sum_i (x_i - y_i)^2 > 0$ und $b = \sum_i x_i (y_i - x_i)$ und $c = 1 - \sum_i x_i^2 \geq 0$. Die Lösung $t(x) := (b + \sqrt{b^2 + ac})/a \geq 0$ ist stetig, und somit auch die gesuchte Abbildung $\rho : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x + t(x) \cdot (x - f(x))$. Für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt $\rho(x) = x$, denn $c = 0$ und $b < 0$, also $t(x) = 0$.

⚠ Fälschlicherweise wird der Strahl manchmal umgekehrt von x über $f(x)$ in den Rand geführt. Das liefert keine Retraktion auf den Rand!

Zum Kontrast: Für jede kontraktive Abbildung $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ garantiert der Banachsche Fixpunktsatz (C4Q) Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes und liefert zudem ein effizientes Näherungsverfahren.

Ausblick: Der Brouwersche Fixpunktsatz hat zahlreiche Anwendungen, etwa zur Existenz von Gleichgewichten in den Wirtschaftswissenschaften, insbesondere Nash-Gleichgewichte in der Spieltheorie.

Bemerkung: Für die Praxis stellt sich die schwierigere Frage, einen solchen Fixpunkt zu finden, oder wenigstens zu approximieren. Das gelingt allgemein wie im Fall $n = 2$ durch Rechteckviertelung, siehe J1w.



Definition J5A: Vektorfeld auf S^n

Ein tangentes **Vektorfeld** auf der Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid x \rangle = 1\}$ ist eine stetige Abbildung $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle x \mid v(x) \rangle = 0$ für alle $x \in S^n$.

Statt „tangentes Vektorfeld“ sagen wir vereinfacht kurz „Vektorfeld“. In jedem Punkt $x \in S^n$ steht $v(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ senkrecht auf den Ortsvektor x . Die obige Skizze illustriert diese Definition im einfachsten Fall $n = 1$.

Satz J5B: Satz vom gekämmten Igel

Für tangente Vektorfelder, $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle x \mid v(x) \rangle = 0$, gilt:

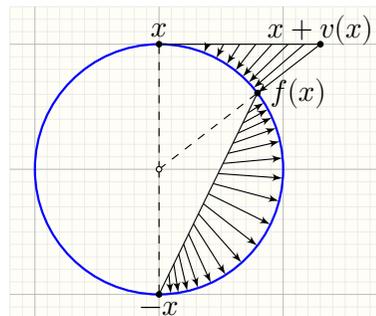
- (1) Ist n ungerade, so existieren nirgends-verschwindende Vektorfelder v .
- (2) Ist n gerade, so hat jedes Vektorfeld v mindestens eine Nullstelle.

Beweis: (1) Sei $n = 2k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann haben wir

$$v : S^n \rightarrow S^n : (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \mapsto (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und stetig mit $\langle x \mid v(x) \rangle = 0$ und $v(x) \neq 0$ für alle $x \in S^n$, also ein nirgends-verschwindendes Vektorfeld!

Dieses *konstruktive* Argument ist leicht. Für (2) benötigen wir wesentlich *raffinierter* ein *obstruktives* Argument: Für n gerade ist ein Vektorfeld ohne Nullstelle unmöglich. Hier hilft der Abbildungsgrad als Invariante!



(2) Jedes tangente Vektorfeld $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definiert eine Homotopie

$$H : \text{id}_{S^n} \simeq f \text{ vermöge } H : [0, 1] \times S^n \rightarrow S^n : (t, x) \mapsto \frac{x + tv(x)}{|x + tv(x)|}.$$

Aus $v(x) \neq 0$ folgt $f(x) \neq x$. Gilt dies für alle $x \in S^n$, so folgt (G4c)

$$K : f \simeq -\text{id}_{S^n} \text{ vermöge } K : [0, 1] \times S^n \rightarrow S^n : (t, x) \mapsto \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}.$$

Aus $\text{id}_{S^n} \simeq f \simeq -\text{id}_{S^n}$ folgt $1 = \text{deg}(\text{id}_{S^n}) = \text{deg}(-\text{id}_{S^n}) = (-1)^{n+1}$ (J3E).

Das ist nur für ungerades n möglich. QED

Der Satz vom Igel (engl. *hairy ball theorem*) hat einen klangvollen und sprechenden Namen: Kann man einen Igel wirbelfrei kämmen? Nein! Herrscht jederzeit an mindestens einem Ort der Erde Windstille? Ja!

Die meteorologische Anwendung macht stillschweigend die Annahme, dass wir nur die horizontale Windgeschwindigkeit betrachten. Der Satz besagt dann, dass es mindestens einen windstillen Punkt geben muss.

Hierzu müssen wir die globale Form der Erdoberfläche kennen, also S^2 . Auf der Torusfläche $F_1^+ = S^1 \times S^2$ hingegen existieren Vektorfelder ganz ohne Nullstellen: Versuchen Sie, ein solches zu zeichnen, es ist leicht! Auf geschlossenen Flächen F_g^+ mit Geschlecht $g \neq 1$ gelingt dies nicht.

Hierzu gilt allgemein der erstaunliche Satz von Poincaré–Hopf:

Satz J5c: Poincaré–Hopf

Sei M eine glatte zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeit. Genau dann existiert auf M ein nirgends-verschwindendes Vektorfeld $f : M \rightarrow TM$, wenn die Euler–Charakteristik $\chi(M)$ verschwindet.

Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ oder $f: \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$ heißt

- 0 gerade, falls $f(-x) = +f(x)$ für alle x gilt,
z.B. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^{2k}$ und $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} / (2k)!$,
- 1 ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt,
z.B. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^{2k+1}$ und $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} / (2k+1)!$.

Beispiel: Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir wie zuvor $\varphi_k^1: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1: z \mapsto z^k$.

- 0 Ist k gerade, so ist φ_k^1 gerade: $\varphi_k^1(-z) = +\varphi_k^1(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$.
- 1 Ist k ungerade, so ist φ_k^1 ungerade: $\varphi_k^1(-z) = -\varphi_k^1(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$.

Satz J6A: Borsuk–Ulam

Sei $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig.

- 0 Ist f gerade, $f(-x) = +f(x)$, dann ist $\deg(f)$ gerade;
möglicherweise gilt $\deg(f) = 0$ und somit $f \simeq *$.
- 1 Ist f ungerade, $f(-x) = -f(x)$, dann ist $\deg(f)$ ungerade;
insbesondere gilt $\deg(f) \neq 0$ und somit $f \not\simeq *$.

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir die Modellabbildung $\varphi_k: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\varphi_k(r \cos(t), r \sin(t), x_2, \dots, x_n) = (r \cos(kt), r \sin(kt), x_2, \dots, x_n).$$

Es gilt $|\varphi_k(x)| = |x|$, durch Einschränkung erhalten wir $\varphi_k^n: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$.

- 0 Ist k gerade und $n \geq 2$, so ist φ_k^n weder gerade noch ungerade.
 - ☹ Der gerade Fall ist in Dimension $n \geq 2$ leider widerspenstiger.
- 1 Ist k ungerade, so ist φ_k^n ungerade: $\varphi_k^n(-x) = -\varphi_k^n(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$.
 - ☺ Der ungerade Falle gelingt in jeder Dimension n genau gleich!

Wir interessieren uns im Folgenden vor allem für ungerade Abbildungen $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$. Hier gilt $f \not\simeq *$, dies führt zu erstaunlichen Anwendungen. Gerade Abbildungen nennen ich hier zur didaktischen Abrundung.

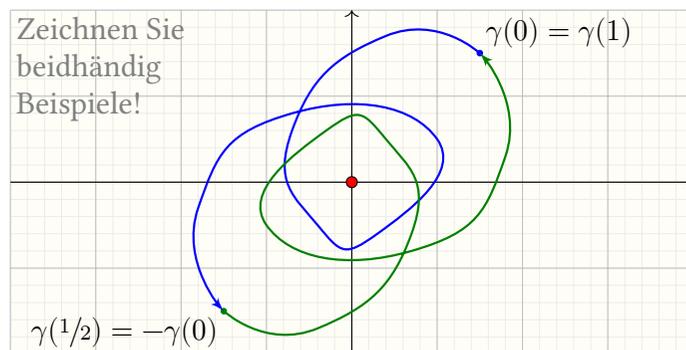
Statt $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ betrachte ich homotopie-äquivalent $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: Das lässt sich leichter visualisieren, wie im Folgenden für $n = 1$ gezeigt.

Allgemein sei $f: X \rightarrow Y$ stetig mit $X \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $-X = X$ und $-Y = Y$. Wir nennen f un/gerade, falls $f(-x) = \mp f(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Der Satz von Borsuk–Ulam

Der Fall $n = 0$ ist klar: Hier gilt $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$, und $\deg(f)$ ist die Signatur:

(0) Für $f = \text{const}_{\pm 1}^{\pm 1}$ gilt $\deg(f) = 0$. (1) Für $f = \pm \text{id}$ gilt $\deg(f) = \pm 1$.



Fall $n = 1$: Statt $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ betrachten wir $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*: t \mapsto f(e^{2\pi it})$.

- (1) Wir haben $\gamma(t + 1/2) = -\gamma(t)$, somit $\deg(\gamma|_{[0, 1/2]}) = k + 1/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Dank Symmetrie folgt $\deg(\gamma|_{[1/2, 1]}) = k + 1/2$, in Summe $\deg(\gamma) = 2k + 1$.
- (0) Es gilt $\gamma(t + 1/2) = \gamma(t)$, also $\deg(\gamma|_{[0, 1/2]}) = k = \deg(\gamma|_{[1/2, 1]})$. QED

Der Satz von Borsuk–Ulam

Alternativer Beweis im Fall $n = 1$: Wir wählen eine Richtung $s \in \mathbb{S}^1$, so dass die Gerade $A = \mathbb{R}s$ die beiden Punkte $\pm \gamma(0)$ nicht enthält.

(1) Wir haben $\gamma(t + 1/2) = -\gamma(t)$. Der Weg $\gamma|_{[0, 1/2]}$ überquert somit die Gerade $2k + 1$ mal, da sich $\gamma(0)$ und $\gamma(1/2) = -\gamma(0)$ gegenüberliegen. Dank Symmetrie überquert auch $\gamma|_{[1/2, 1]}$ die Gerade $2k + 1$ mal. Die Umlaufzahl von γ ist die halbe Summe, also $\deg(\gamma) = 2k + 1$.

(0) Für $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ gerade haben wir $\gamma(t + 1/2) = \gamma(t)$ für alle t . Der Weg $\gamma|_{[0, 1/2]}$ überquert die Gerade $2k$ mal, da $\gamma(1/2) = \gamma(0)$. Dank Symmetrie überquert auch $\gamma|_{[1/2, 1]}$ die Gerade $2k$ mal. Die Umlaufzahl von γ ist die halbe Summe, also $\deg(\gamma) = 2k$. QED

Beweise im allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$ verlaufen sinngemäß genauso, erfordern allerdings genaue Buchführung und sind aufwändiger.

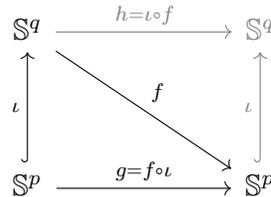
Übung: Ist n gerade und $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ gerade, so folgt $f \simeq *$.

Lösung: Für $\sigma: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n: x \mapsto -x$ gilt $\deg(\sigma) = (-1)^{n+1} = -1$. (J3E)
Aus $f = f \circ \sigma$ folgt $\deg(f) = \deg(f \circ \sigma) = \deg(f) \cdot \deg(\sigma) = -\deg(f)$. (J3c)
In der Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0)$ impliziert dies $\deg(f) = 0$. Somit gilt $f \simeq *$. (J3A)

Für $p < q$ in \mathbb{N} gibt es ungerade stetige Abbildungen $\mathbb{S}^p \rightarrow \mathbb{S}^q$, etwa

$$\iota : (x_0, \dots, x_p) \mapsto (x_0, \dots, x_p, 0, \dots, 0).$$

Umgekehrt ist dies für $f : \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^p$ nicht möglich!



Korollar J6B:

Für $p < q$ in \mathbb{N} gibt es keine ungerade stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^p$.

Beweis: Ist $f : \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^p$ stetig und ungerade, so auch $g = f \circ \iota : \mathbb{S}^p \rightarrow \mathbb{S}^p$. Dank J6A ist $\deg(g)$ ungerade. Andererseits gilt $\iota \simeq *$ (G4D), also $g \simeq *$ und somit $\deg(g) = 0$ (J3A). Daran zerbricht unsere Annahme. QED

Alternative: Auch $h = \iota \circ f : \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^q$ ist ungerade. Dank J6A ist $\deg(h)$ ungerade. Andererseits ist mit ι auch h zusammenziehbar, also $h \simeq *$ und $\deg(h) = 0$. An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme. QED

Das erste Argument nutzt nur den Abbildungsgrad $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^p] \rightarrow \mathbb{Z}$, das zweite dagegen nutzt ihn höherdimensional für $[\mathbb{S}^q, \mathbb{S}^q] \rightarrow \mathbb{Z}$.

Wenn man nur mit der Umlaufzahl arbeiten möchte, also $p = 1$, etwa aus didaktischen Gründen, so bietet sich der erste Beweis an.

Daher habe ich den einfacheren und sparsameren Beweis vorangestellt.

Allein mit der Umlaufzahl $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \rightarrow \mathbb{Z}$ erhalten wir immerhin: Für $1 = p < q$ in \mathbb{N} gibt es keine ungerade stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^1$. Diese technische Beschränkung scheint mir unnatürlich und willkürlich. Ich nutze daher den Abbildungsgrad, als Kredit, wie oben erklärt. Das macht unsere Argumente nicht schwerer, sondern einfacher: Sätze und Beweise lauten so in allen Dimensionen gleich.

Existieren zu jedem Zeitpunkt auf der Erde $\cong \mathbb{S}^2$ gegenüberliegende Punkte $\pm x$ mit derselben Temperatur f_1 und demselben Luftdruck f_2 ? Für $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ genügt bereits der Zwischenwertsatz, siehe Übung E2κ.

Korollar J6c: Borsuk-Ulam

Ist $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so existiert ein Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Insbesondere gilt $\mathbb{S}^n \not\hookrightarrow \mathbb{R}^n$: Es existiert keine Einbettung $f : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

Beweis: Angenommen, es gälte $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Dann wäre

$$g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

wohldefiniert und stetig und ungerade. Dies widerspricht J6B. QED

Die **Einbettungsdimension** $\text{edim}(X) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \exists f : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n\}$ eines topologischen Raumes X ist $n \in \mathbb{N}$, falls $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und $X \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$.

Beispiel: Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ hat die Einbettungsdimension $n + 1$.

Jedes Gebiet $V \subseteq \mathbb{R}^q$ hat die Einbettungsdimension q . Genauer:

Korollar J6D: Einbettungsdimension euklidischer Gebiete

Sei $p < q$. Zu $V \subseteq \mathbb{R}^q$ offen, $a \in V$, existiert keine stetige Injektion $V \hookrightarrow \mathbb{R}^p$.

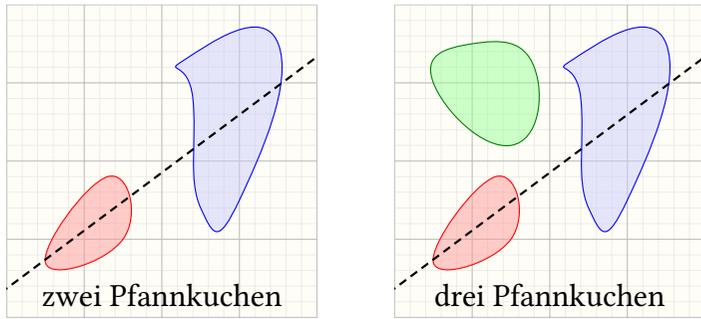
Beweis: Es gibt $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a, 2r) \subseteq V$, also $\mathbb{S}^{q-1} \hookrightarrow V : s \mapsto a + rs$. Die Komposition $\mathbb{S}^{q-1} \hookrightarrow V \hookrightarrow \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ widerspricht J6C. QED

Anwendungsbeispiel: Sind M und N nicht-leere Mannigfaltigkeiten mit $\dim M = p < q = \dim N$, so existiert keine stetige Injektion $f : N \hookrightarrow M$. Zu $f(a) = b$ existieren offene Umgebungen $U \cong \mathbb{R}^p$ von b und $V \cong \mathbb{R}^q$ von a mit $f(V) \subseteq U$. Wäre f injektiv, so hätten wir $\mathbb{R}^q \cong V \hookrightarrow U \cong \mathbb{R}^p$. Als direkte Folgerung erhalten wir den folgenden wichtigen Satz:

Satz J7c: topologische Invarianz der Dimension, Brouwer 1911

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$ nicht-leere offene Teilmengen, wobei $p, q \in \mathbb{N}$. Wenn ein Homöomorphismus $(f, g) : U \cong V$ existiert, dann folgt $p = q$.

Beweis: Aus $\mathbb{R}^q \supseteq V \cong U \subseteq \mathbb{R}^p$ folgt $q \leq p$. Ebenso $p \leq q$. QED



Definition J6E: Schinken-Käse-Brot

Ein Schinken-Käse-Brot besteht aus Brot mit Käse und Schinken.

Kann man ein Schinken-Käse-Brot im \mathbb{R}^3 durch einen geraden Schnitt so teilen, dass jede Hälfte gleich viel Brot, Käse und Schinken enthält?

Satz J6F: Satz vom Schinken-Käse-Brot für Kompakta

Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann existiert eine affine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $\text{vol}_n(A_k \cap H_+) = \text{vol}_n(A_k \cap H_-)$ für alle $k = 1, \dots, n$ gilt.

Vor dem Beweis möchte ich den Satz etwas allgemeiner formulieren. Einschränkung definiert das Borel-Maß μ_k mit $\mu_k(B) := \text{vol}_n(A_k \cap B)$.

Satz J6C: Schinken-Käse-Brot für Borel-Maße

Seien $\mu_1, \dots, \mu_n : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ endliche Borel-Maße auf \mathbb{R}^n , etwa WMaße oder Massen / Ladungen, für die jede affine Hyperebene Maß 0 habe.

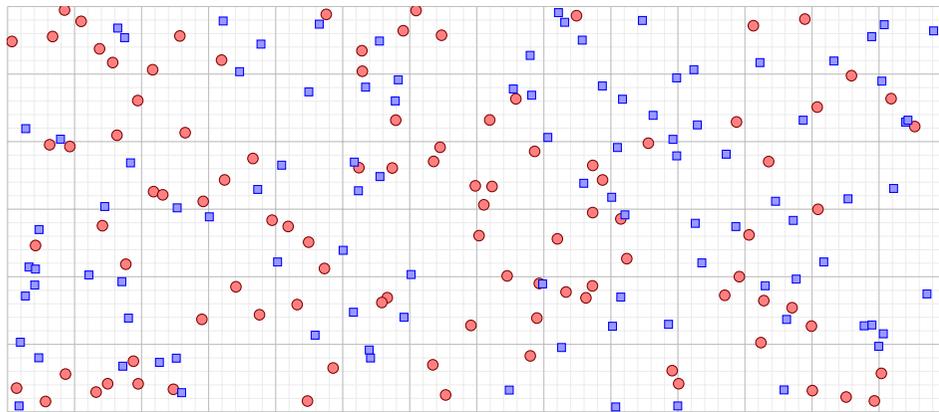
Dann existiert eine affine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$, die den Raum in zwei affine Halbräume H_{\pm} teilt, sodass $\mu_k(H_+) = \mu_k(H_-)$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Beweis: Jeder Vektor $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiert die beiden affinen Halbräume $H_{\pm}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid v_1x_1 + \dots + v_nx_n \gtrless v_0\}$. Dabei gilt $H_+(-v) = H_- (+v)$, sowie $H_+(e_0) = \emptyset$ und $H_-(e_0) = \mathbb{R}^n$.

Die Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f_k(v) := \mu_k(H_+(v))$ ist stetig. (Übung! Das ist anschaulich plausibel; formal mit majorisierter Konvergenz J6H.)

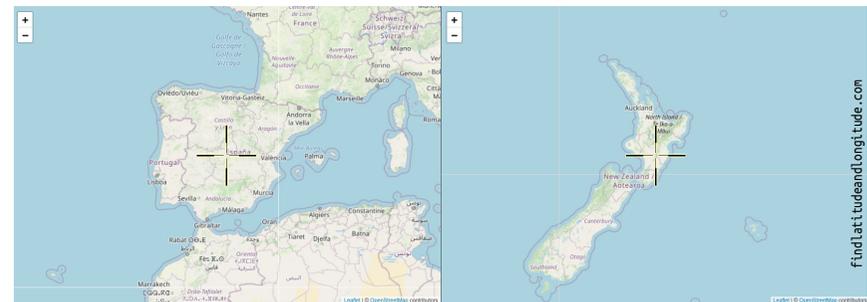
Dank Korollar J6C existiert ein Punkt $v \in \mathbb{S}^n$ mit $f(v) = f(-v)$. Das bedeutet $\mu_k(H_+(v)) = \mu_k(H_-(v))$ für alle $k = 1, \dots, n$. QED

Spieltheorie, faire Teilung eines Kuchens: Wie / Ist dies möglich? Der „Kuchen“ steht für diverse Ressourcen: Land, Güter, Lizenzen, ... *Borsuk-Ulam theorem and stolen necklaces, you2.be/ylVqxCSsE7c.*



Diskret-algorithmisch: Zeichnen Sie rote und blaue Punkte in der Ebene. Finden Sie eine Gerade, die die rote und die blaue Punktwolke halbiert. Warum muss es eine geben? Wie findet man eine? zudem effizient?

Auf $\mathbb{S}^2 \cong$ Erdoberfläche betrachten wir die drei (abgeschlossenen) Mengen $A_0 =$ Land, $A_1 =$ Pazifik, $A_2 =$ andere Meere. Damit gilt $\mathbb{S}^2 = A_0 \cup A_1 \cup A_2$. Enthält eine der Mengen ein Antipodenpaar?



Satz J6L: Lusternik-Schnirelman

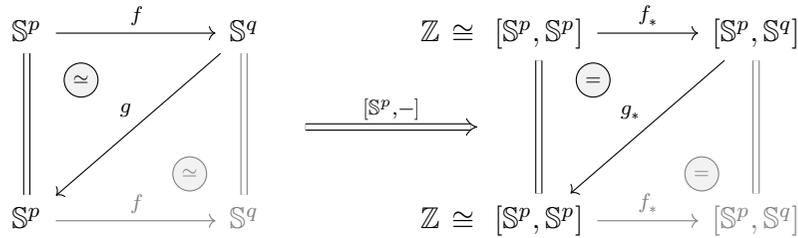
Sei $\mathbb{S}^n = A_0 \cup \dots \cup A_n$ eine abgeschlossene (bzw. offene) Überdeckung, dann enthält mindestens eine der Mengen A_k ein Antipodenpaar $\pm x$.

Übung: $n = 1$ mit ZWS, allgemein Borsuk-Ulam mit $f_k(x) = \text{dist}(x, A_k)$.

Satz J7A: Klassifikation der Sphären \mathbb{S}^n bis auf schwache Retraktion

Für alle $p \neq q$ in \mathbb{N} gilt (1) $\mathbb{S}^p \not\cong \mathbb{S}^q$, sogar (2) $\mathbb{S}^p \not\approx \mathbb{S}^q$. Genauer: (3) Es gibt keine stetigen Abbildungen $f: \mathbb{S}^p \rightarrow \mathbb{S}^q$ und $g: \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^p$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_{\mathbb{S}^p}$.

Beweis: (3a) Im Falle $p < q$ wäre $f \simeq *$ (I4B), also $\text{id}_{\mathbb{S}^p} \simeq *$ (G4L), Widerspruch (J4A)! (3b) Im Falle $p > q$ wäre $g \simeq *$, Widerspruch! QED



Alternative: Wir nutzen den Funktor $[\mathbb{S}^p, -]$ (G4L). Aus $g \circ f \simeq \text{id}_{\mathbb{S}^p}$ folgt $g_* \circ f_* = \text{id}_*$ mit (a) f_* konstant oder (b) g_* konstant. Das ist unmöglich! „Eher geht ein Kamel durch ein Nadelöhr, als $\text{id}_{\mathbb{Z}}$ durch 0 faktorisiert.“

Dieser Satz beantwortet die Frage: *Was ist ein Loch der Dimension n ?* Auch dieser Satz ist anschaulich plausibel, aber keineswegs leicht zu beweisen oder gar selbstverständlich. Erst mit geeigneten Werkzeugen wird der Beweis „trivial“: Wir danken erneut dem Abbildungsgrad!

Alle Begriffe und Werkzeuge greifen hier wunderbar ineinander: Homöomorphismen von Räumen und Homotopie von Abbildungen, die simpliziale Approximation zur Konstruktion und der Abbildungsgrad als Obstruktion. Damit können wir elegant und effizient arbeiten.

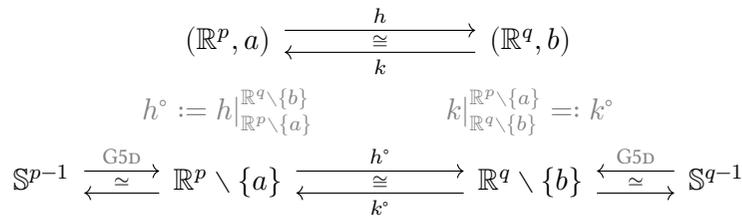
Im Satz J7A sind die Sphären zunächst **Werkstücke**, also Gegenstand unserer Untersuchung: Anschaulich umschließt die Sphäre \mathbb{S}^n ein Loch der Dimension n , und diese sind anschaulich von verschiedener Natur. Wir können nun präzisieren, was wir meinen, und dies auch beweisen!

In den folgenden Sätzen dienen die Sphären als **Werkzeuge**, sie werden Hilfsmittel unserer Untersuchung: Wir analysieren damit die Topologie der euklidischen Räume \mathbb{R}^n und beweisen die topologische Invarianz der Dimension, des Randes, des Gebietes und der Orientierung.

Korollar J7B: Klassifikation der Räume \mathbb{R}^n bis auf Homöomorphie

Für alle $p \neq q$ in \mathbb{N} gilt zwar $\mathbb{R}^p \simeq * \simeq \mathbb{R}^q$, aber dennoch $\mathbb{R}^p \not\cong \mathbb{R}^q$.

Beweis: Sei $(h, k): \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^q$ ein Homöomorphismus, wobei $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Daraus folgern wir $p = q$. Dazu betrachten wir einen Punkt $a \in \mathbb{R}^p$ und den Bildpunkt $b = h(a) \in \mathbb{R}^q$ und erhalten $(h^\circ, k^\circ): \mathbb{R}^p \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^q \setminus \{b\}$:



Daraus folgt $\mathbb{S}^{p-1} \simeq \mathbb{S}^{q-1}$. Dank J7A folgt $p = q$. QED

Alternative: Jeder Homöomorphismus $(h, k): \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^q$ setzt sich fort zu $(\hat{h}, \hat{k}): \mathbb{S}^p \cong \mathbb{S}^q$ auf den Alexandroff-Kompaktifizierungen (F4D). Erneut dank J7A folgt daraus die behauptete Gleichheit $p = q$.

Ich habe das Korollar für die euklidischen Räume \mathbb{R}^n formuliert, das ist technisch einfacher und das Argument wird durchsichtiger. Dasselbe gilt allgemein für euklidische Gebiete $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$:

Satz J7c: topologische Invarianz der Dimension, Brouwer 1911

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$ nicht-leere offene Teilmengen, wobei $p, q \in \mathbb{N}$. Wenn ein Homöomorphismus $(f, g): U \cong V$ existiert, dann folgt $p = q$.

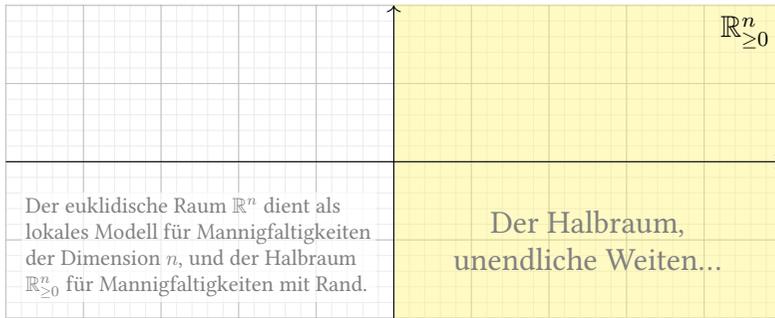
Mit Borsuk-Ulam können wir die Invarianz noch verschärfen (J6D). Ohne Borsuk-Ulam behelfen wir uns mit folgendem Lemma:

Lemma J7d: topologische Charakterisierung der Dimension

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Dann gilt:
 $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall U \in \mathcal{U}_a(X) : [\mathbb{S}^{k-1}, U \setminus \{a\}] \neq \{*\}\}$

Für $n = 1$ ist das ein vertrautes Argument: Jeder Punkt $a \in U \subseteq \mathbb{R}^1$ trennt jede noch so kleine Umgebung. Das Lemma perfektioniert diesen Trick.

Übung: Beweisen Sie dies durch Diskussion der Fälle $k = n$ und $k < n$.



Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachten wir den n -dimensionalen Halbraum

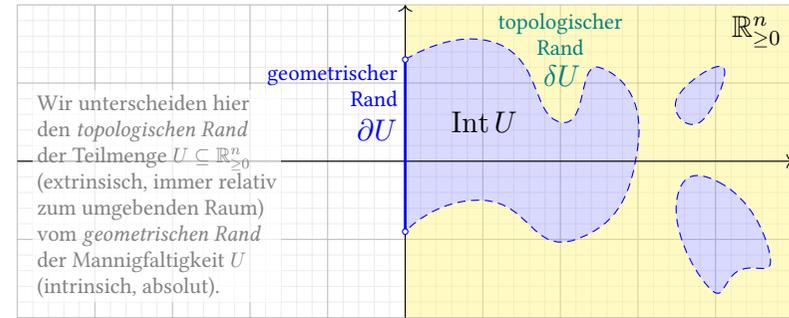
$$\mathbb{R}_{\geq 0}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}.$$

Sein Rand ist die $(n - 1)$ -dimensionale Hyperebene

$$\partial \mathbb{R}_{\geq 0}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}.$$

Sein Inneres ist der offene n -dimensionale Halbraum

$$\text{Int } \mathbb{R}_{\geq 0}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}.$$

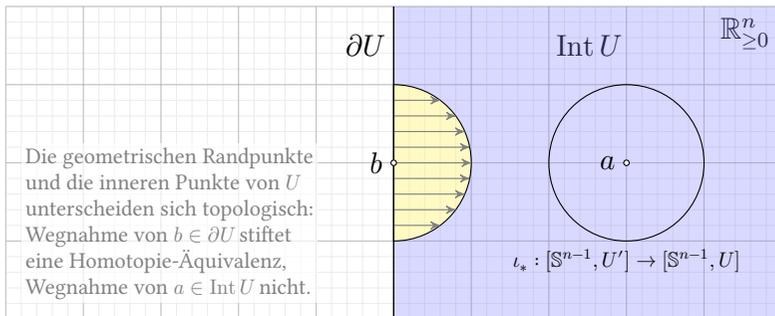


Definition J7c: geometrischer Rand und Inneres

Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ zerlegen wir in

- den **geometrischen Rand** $\partial U := U \cap \partial \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ und
- das **geometrische Innere** $\text{Int } U := U \cap \text{Int } \mathbb{R}_{\geq 0}^n$.

Der topologische Rand $\delta U \supseteq \partial U$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ist im Allgemeinen strikt größer. Diese Definition nutzt zunächst die geometrische Lage von U in \mathbb{R}^n . Diese Zerlegung ist tatsächlich eine topologische Eigenschaft!



Lemma J7h: topologische Charakterisierung innerer Punkte

- (1) Für $b \in \partial U$ ist $\iota : U \setminus \{b\} \rightarrow U'$ eine Homotopie-Äquivalenz.
- (2) Für $a \in \text{Int } U$ ist $\iota : U \setminus \{a\} \rightarrow U'$ keine Homotopie-Äquivalenz.

Satz J7i: topologische Invarianz des geometrischen Randes

Wie zuvor seien $U, V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ offen. Für jeden Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\cong} V$ gilt dann $h(\partial U) = \partial V$ und $h(\text{Int } U) = \text{Int } V$.

Aufgabe: Übersetzen Sie die Skizze sorgfältig in Formeln. Beweisen Sie damit das Lemma und folgern Sie den Satz.

Lösung: (1) Zu $b \in \partial U$ existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(b, 2\varepsilon) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n \subseteq U$. Nach Verschieben gilt $b = 0$, nach Skalieren $\varepsilon = 1$. Sei $V = U \setminus B(0, 1)$ und

$$\rho : U \rightarrow V : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } |x| \geq 1, \\ (\sqrt{1 - x_2^2 - \dots - x_n^2}, x_2, \dots, x_n) & \text{für } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Damit ist V ein starker Deformationsretrakt in U und in $U' = U \setminus \{b\}$, jeweils dank affiner Homotopie. Dank Transitivität folgt $\iota : U' \simeq U$.

(2) Wir wählen $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a, 2r) \subseteq U$ und erhalten $(g, f) : \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\cong} U'$ mit Einbettung $g(s) = a + rs$ und Retraktion $f(x) = (x - a)/|x - a|$.

Wir haben $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}} \neq *$ dank J4A, somit auch $g \neq *$ dank G4L. Hingegen ist $\iota \circ g : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow U$ zusammenziehbar in $B(a, 2r)$ (G4B).

Demnach ist ι keine Homotopie-Äquivalenz. Die induzierte Abbildung $\iota_* : [\mathbb{S}^{n-1}, U'] \rightarrow [\mathbb{S}^{n-1}, U]$ ist nicht injektiv, denn $\{[*] \neq [g]\} \rightarrow \{[*]\}$. QED

Satz J2w: Trennungssatz von Jordan ($n = 2$) und Brouwer ($n \geq 2$)

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Für jede Einbettung $f: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

(1) Das Komplement $X = \mathbb{R}^n \setminus S$ zerfällt in genau zwei Gebiete,

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus S \mid \deg_2(f - x) = 0\} \quad \text{unbeschränkt in } \mathbb{R}^n,$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus S \mid \deg_2(f - x) = 1\} \quad \text{beschränkt in } \mathbb{R}^n.$$

(2) Somit ist $\nu: \pi_0(X) = \{A, B\} \cong \{0, 1\}: [x] \mapsto \deg_2(f - x)$ bijektiv. Zur Unterscheidung nutzen wir den Abbildungsgrad $\deg_2 = \deg \bmod 2$.

(3) Der gemeinsame Rand dieser beiden Gebiete ist $\delta A = \delta B = S$. Ihre Abschlüsse in \mathbb{R}^n sind demnach $\bar{A} = A \cup S$ und $\bar{B} = B \cup S$.

(4) Für $\mathbb{S}^k \hookrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $k \leq n - 2$ ist $\mathbb{R}^n \setminus S$ wegzusammenhängend. Für jede Einbettung $\mathbb{D}^k \hookrightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}^n \setminus D$ wegzusammenhängend.

- ☹ Die Aussagen sind anschaulich plausibel, aber schwer zu beweisen.
- 😊 Erst geeignete Werkzeuge machen den Beweis leicht: Homologie!
- 😊 Der Fall $n = 2$ gelingt elementar (Satz von Jordan, siehe J2v).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein **Gebiet**, das heißt offen und wegzusammenhängend. Stetige Injektionen $U \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ existieren für $m \geq n$, nicht für $m < n$ (J6D). In der kritischen Dimension $m = n$ passiert etwas ganz Besonderes:

Satz J7k: topologische Invarianz des Gebietes

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Jede stetige Injektion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist offen, das heißt, das Bild $V = f(U)$ ist offen in \mathbb{R}^n und $f: U \cong V$ ein Homöomorphismus.

Dies ist eine topologische Entsprechung des lokalen Umkehrsatzes. Für $n = 1$ ist dies eine lehrreiche Übung zum Zwischenwertsatz (G2E). Für $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ müssen Start und Ziel dieselbe Dimension n haben, zum Beispiel ist $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto (x, 0)$ stetig und injektiv, aber nicht offen. In unendlicher Dimension gilt die Aussage nicht: Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ oder $\ell^p(\mathbb{N})$ ist $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$ stetig und injektiv, aber nicht offen. Auch in endlicher Dimension gilt die Aussage nicht für Halbräume: $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}: x \mapsto x + 1$ ist stetig und injektiv, aber nicht offen. Der Satz ist, wie gesagt, eine Besonderheit der euklidischen Räume \mathbb{R}^n .

Beweis: Sei $n \geq 2$ und $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv.

Wir zeigen, dass die Abbildung f offen ist in jedem Punkt $a \in U$. Nach Verschiebung sei $a = 0$ und nach Skalierung $B(0, 2) \subseteq U$.

Die Einschränkung $f: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow S := f(\mathbb{S}^{n-1})$ ist stetig und bijektiv, also ein Homöomorphismus (F1L). Dies definiert zwei Zerlegungen:

$$\mathbb{R}^n \setminus S = \underbrace{A \sqcup B}_{\text{Jordan-Brouwer}} = \underbrace{A' \sqcup B'}_{\text{mit } B' := f(\mathbb{B}^n)}$$

- (1) Dank dem Trennungssatz J2w und $n \geq 2$ zerfällt das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus S = A \sqcup B$ in zwei Gebiete, A unbeschränkt und B beschränkt.
- (2) Andererseits zerlegen wir $\mathbb{R}^n \setminus S$ in $B' = f(\mathbb{B}^n)$ und $A' = \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$. Wir wollen zeigen, dass B' in \mathbb{R}^n offen ist. Hierzu zeigen wir $B' = B$. Mit $\mathbb{B}^n \subseteq U$ ist auch das Bild $B' = f(\mathbb{B}^n)$ wegzusammenhängend (G1E). Dank J2w trennt $f(\mathbb{D}^n)$ den Raum \mathbb{R}^n nicht, also ist $A' = \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$ wegzusammenhängend, zudem offen und unbeschränkt (F1o).

Wir vergleichen die beiden Zerlegungen des Komplements $\mathbb{R}^n \setminus S$:

- (a) Da A' wegzshgd ist, gilt entweder $A' \subseteq A$ oder $A' \subseteq B$. Da A' unbeschränkt ist, aber B beschränkt, folgt $A' \subseteq A$.
- (b) Da B' wegzshgd ist, gilt entweder $B' \subseteq B$ oder $B' \subseteq A$. Letzteres ist unmöglich, da sonst $A' \sqcup B' \subseteq A \subsetneq A \sqcup B$.

Wir erhalten so die Inklusionen $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$. Zusammen mit $A' \sqcup B' = A \sqcup B$ folgt $A' = A$ und $B' = B$.

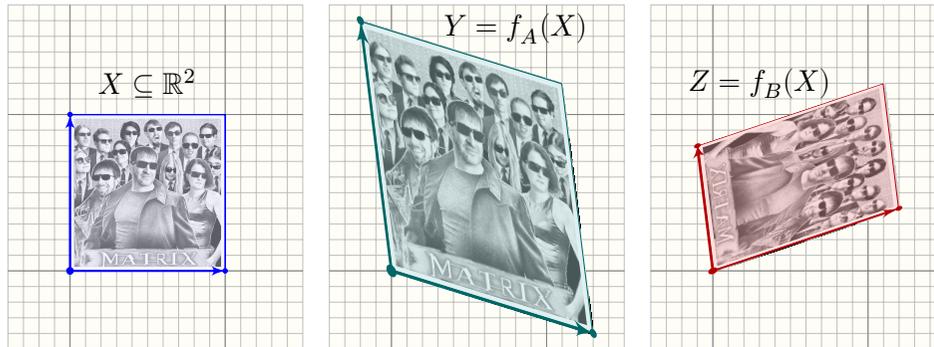
Somit ist $f(\mathbb{B}^n) = B$ offen in \mathbb{R}^n . Ebenso $f(r\mathbb{B}^n)$ für alle $0 < r \leq 1$. Das bedeutet, die Abbildung f ist offen im Punkt a , somit überall. QED

Übung J7m: Invarianz des Gebietes, der Sonderfall $n = 1$

- Gehen Sie den Beweis sorgfältig durch und formulieren Sie ihn für $n = 1$.
- (1) Es gelingt sinngemäß genauso, und die Änderungen sind lehrreich!
 - (0) Es gelingt auch direkt mit dem Zwischenwertsatz! (siehe Satz D2F)

Wie wirken die folgenden Matrizen auf Flächeninhalt und Orientierung?

$$A = \begin{bmatrix} 1.3 & -0.2 \\ -0.4 & 1.6 \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad B = \begin{bmatrix} -0.1 & 1.2 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$



Wir finden hier $\det(f_A) = \det(A) = +2$ und $\det(f_B) = \det(B) = -1$.
Der Flächeninhalt wird von f_A verdoppelt, aber von f_B beibehalten.
Die Orientierung wird von f_A beibehalten, aber von f_B umgekehrt.

Die Verzerrung des Volumens wird gemessen durch den Betrag

$$v : (\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot, 1_{n \times n}) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}, \cdot, 1) \xrightarrow{\text{abs}} (\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot, 1) : A \mapsto |\det(A)|,$$

$$(\text{GL}_n \mathbb{R}, \cdot, 1_{n \times n}) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}^\times, \cdot, 1) \xrightarrow{\text{abs}} (\mathbb{R}_{> 0}, \cdot, 1).$$

Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus v ist die Gruppe

$$\text{SL}_n^{\pm}(\mathbb{R}) := \text{Ker}(v) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = \pm 1\}.$$

Das Orientierungsverhalten wird gemessen durch das Vorzeichen

$$\varepsilon : (\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot, 1_{n \times n}) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}, \cdot, 1) \xrightarrow{\text{sign}} (\{\pm 1, 0\}, \cdot, 1),$$

$$(\text{GL}_n \mathbb{R}, \cdot, 1_{n \times n}) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}^\times, \cdot, 1) \xrightarrow{\text{sign}} (\{\pm 1\}, \cdot, 1).$$

Es zerlegt die allgemeine lineare Gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ in zwei Klassen:

$$\text{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) > 0\} = \text{Ker}(\varepsilon)$$

$$\text{GL}_n^-(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) < 0\} \quad \text{Nebenklasse!}$$

Es gilt $\text{GL}_n = \text{GL}_n^+ \sqcup \text{GL}_n^-$ und $\text{GL}_n^- = B \cdot \text{GL}_n^+$ für jede Matrix $B \in \text{GL}_n^-$.

Beispiele: Wir haben oben $A \in \text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ und $B \in \text{GL}_n^-(\mathbb{R})$ gesehen.
Zu $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ gehören alle Drehungen (vorerst noch anschaulich).
Zu $\text{GL}_n^-(\mathbb{R})$ gehören alle Spiegelungen (vorerst nur anschaulich).

Ist V ein \mathbb{R} -linearer Raum endlicher Dimension, so setzen wir:

$$\text{GL}^+(V) := \{f : V \rightarrow V \mid \det_V(f) > 0\}$$

$$\text{GL}^-(V) := \{f : V \rightarrow V \mid \det_V(f) < 0\}$$

Jeder Automorphismus $f \in \text{GL}^+(V)$ heißt **orientierungserhaltend**.

Jeder Automorphismus $f \in \text{GL}^-(V)$ heißt **orientierungsumkehrend**.

Hierbei sind $\text{GL}_n^+(\mathbb{R}) \trianglelefteq \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\text{GL}^+(V) \trianglelefteq \text{GL}(V)$ Untergruppen, nicht jedoch $\text{GL}_n^-(\mathbb{R})$ und $\text{GL}^-(V)$. Letztere sind nur die Nebenklassen!

😊 Wir haben nun erklärt, wann ein \mathbb{R} -Automorphismus $f : V \rightarrow V$ „die Orientierung erhält“ oder hingegen „die Orientierung umkehrt“.

🤔 Dabei haben wir noch nicht definiert, was „die Orientierung“ ist. Das ist kein Versehen, sondern die logisch richtige Reihenfolge!

Anschaulich: Die reelle Gerade \mathbb{R} wird orientiert durch ihre Ordnung \leq .
Doch wie orientieren wir die Ebene \mathbb{R}^2 ? oder den Raum \mathbb{R}^3 ? allgemein V ?
Das ist zunächst keineswegs offensichtlich. Es erfordert Scharfsinn!
Nach längerer Überlegung bieten sich folgende Möglichkeiten:

(1) *Geometrische Sichtweise:* Gegeben seien zwei Basen $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ des \mathbb{R}^n . Sie sind **gleichsinnig orientiert**, wenn es einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n \mathbb{R}$ von \mathcal{B} nach \mathcal{C} gibt: Die Spalten von $\gamma(t)$ sind zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ eine Basis des \mathbb{R}^n .

(2) *Algebraische Sichtweise:* Gauß-Algorithmus und Determinante zeigen: Genau dann ist (1) möglich, wenn die Basiswechsellmatrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ von \mathcal{B} nach \mathcal{C} **positive Determinante** hat, also $\det T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} > 0$ erfüllt. Diese algebraische Eigenschaft nutzen wir in der Definition J70.

(3) *Pragmatische Sichtweise:* Wir benötigen ein Entscheidungsverfahren. Eine **Orientierung** sagt zu jeder Basis, ob sie positiv oder negativ ist, wobei gleichsinnig orientierte Basen denselben Wert bekommen und gegensinnig orientierte Basen entgegengesetzte Werte, siehe J70.

Definition J70: Orientierungen eines \mathbb{R} -Vektorraums

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum endlicher Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \in \mathbb{N}$.

(0) Zwei Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} von V über \mathbb{R} heißen **gleichsinnig orientiert**, wenn die Basiswechselmatrix positive Determinante hat, $\varepsilon(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = +1$. Dies ist eine Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch, transitiv.

(1) Eine **Orientierung** von V ist eine Zuordnung $\alpha : \{\text{Basen}\} \rightarrow \{\pm 1\}$ mit $\alpha(\mathcal{C}) = \alpha(\mathcal{B}) \cdot \varepsilon(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})$ für je zwei Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} von V über \mathbb{R} . Das Paar (V, α) nennen wir einen **orientierten \mathbb{R} -Vektorraum**.

(2) Die **Standardorientierung** auf \mathbb{R}^n ist $\varepsilon : \mathcal{B} \mapsto \text{sign det}(\mathcal{B})$. Mit dieser Orientierung ist die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) positiv. Auf jedem \mathbb{R} -Vektorraum V gibt es genau zwei Orientierungen, $\pm\alpha$.

(3) Ein \mathbb{R} -linearer Isomorphismus $h : (V, \alpha) \xrightarrow{\cong} (V', \alpha')$ heißt **orientierungserhaltend/umkehrend**, falls $\alpha' \circ h = \pm\alpha$ gilt, also $\alpha'(h(b_1), \dots, h(b_n)) = \pm\alpha(b_1, \dots, b_n)$ für jede Basis b_1, \dots, b_n von V .

Aufgabe: Beweisen Sie sorgsam alle hier gemachten Behauptungen.

☺ Beachten Sie, dieses raffinierte Vorgehen ist korrekt und notwendig!

Lösung: (0) Dies ist eine Äquivalenzrelation, denn $\varepsilon = \text{sign} \circ \text{det}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, kurz $\varepsilon : (\text{GL}_n \mathbb{R}, \cdot, E) \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot, 1)$.
 (0a) Reflexivität: Es gilt $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = E$ also $\text{det } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = 1 > 0$. (0b) Transitivität: Es gilt $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$. Aus $\text{det } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} > 0$ und $\text{det } T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} > 0$ folgt $\text{det } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} > 0$.
 (0c) Symmetrie: Es folgt $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = E$. Aus $\text{det } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} > 0$ folgt $\text{det } T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} > 0$.
 (2a) Die Abbildung ε ist eine Orientierung, denn die Determinante ist multiplikativ. Auf \mathbb{R}^n gibt es genau zwei Orientierungen, nämlich $\pm\varepsilon$.
 (2b) Jeder \mathbb{R} -Isomorphismus $h : V \xrightarrow{\cong} V'$ transportiert jede Orientierung α auf V zur Orientierung $h_*(\alpha) := \alpha \circ h^{-1}$ auf V' , mit $h_*(-\alpha) = -h_*(\alpha)$.
 (2c) Jede Basis \mathcal{B} von V über \mathbb{R} stiftet einen Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} V$. Auf V erhalten wir genau zwei Orientierungen, nämlich $\pm(\Phi_{\mathcal{B}})_*(\varepsilon)$.

Genau dann sind Basen \mathcal{B}, \mathcal{C} von V über \mathbb{R} gleichsinnig/gegensinnig, wenn $\varepsilon(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = \pm 1$, also $\alpha(\mathcal{B}) = \pm\alpha(\mathcal{C})$. Somit ist (1,2) äquivalent zu (0). Auf der Menge aller Basen von V operiert $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ von rechts frei und transitiv (durch Basiswechsel), ebenso $\text{GL}(V)$ von links (dank PLF).

Beispiele: (0) Auf $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist die Standardorientierung $\varepsilon : () \mapsto +1$.

(1) Die Gerade \mathbb{R}^1 teilt $\varepsilon = \text{sign} : \mathbb{R}^{\times} \rightarrow \{\pm 1\}$ in „links“ und „rechts“.

(2) Auf der Ebene \mathbb{R}^2 besagt $\varepsilon(b_1, b_2) = \pm 1$, ob wir b_1 auf b_2 drehen „entgegen“ oder „im Uhrzeigersinn“. (Rechte-/Linke-Hand-Regel)

Auf dem Raum \mathbb{R}^n teilt ε alle Basen in „rechtshändig“ und „linkshändig“. Jede Basis \mathcal{B} von V definiert eindeutig eine Orientierung $[\mathcal{B}] := \alpha_{\mathcal{B}}$ mit $\alpha_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = +1$; diese ist demnach explizit gegeben durch $\alpha_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) := \varepsilon(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})$. Wir erklären damit unsere Basis \mathcal{B} als positiv, daraus folgt alles weitere. Die Standardbasis von \mathbb{R}^n ergibt die Standardorientierung $\varepsilon = [e_1, \dots, e_n]$.

Zu $[\mathcal{B}] = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ gilt $-[\mathcal{B}] = [-b_1, b_2, \dots, b_n] = [b_2, b_1, \dots, b_n] = \dots$. Jeder \mathbb{R} -lineare Isomorphismus $h : (V, [\mathcal{B}]) \xrightarrow{\cong} (V', [\mathcal{B}'])$ transportiert die Orientierung $[\mathcal{B}] = [b_1, \dots, b_n]$ auf V zu $h_*([\mathcal{B}]) = [h(b_1), \dots, h(b_n)]$ auf V' . Er ist orientierungserhaltend/umkehrend, falls $h_*([\mathcal{B}]) = \pm[\mathcal{B}']$ gilt.

Ein Automorphismus $h : V \xrightarrow{\cong} V$ ist orientierungserhaltend/umkehrend, falls $f([\mathcal{B}]) = \pm[\mathcal{B}]$ gilt für eine (und damit jede) Orientierung $[\mathcal{B}]$ auf V . Das war unser Ausgangspunkt, alles fügt sich schließlich zusammen.

Aufgabe: Wie orientieren Sie folgende Vektorräume?

$$\begin{aligned} (1) \quad U &= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} && \leq \mathbb{R}^4 \\ (2) \quad V &= \langle 1, \cos, \sin \rangle_{\mathbb{R}} && \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

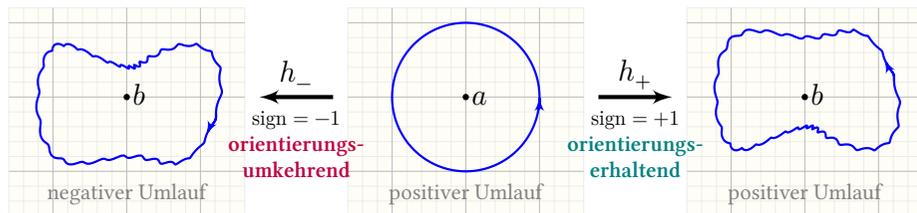
(3) Wie verhält sich die Ableitung $\partial : W \rightarrow W$ auf $W = \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{R}}$? Ist sie orientierungserhaltend oder -umkehrend? zudem volumentreu?

Lösung: (1) Es gibt zwei Orientierungen, keine ist schöner als die andere. Wir müssen eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ wählen, um eine Orientierung $[\mathcal{B}]$ auf U zu vereinbaren. (2) Die beiden möglichen Orientierungen sind $[1, \cos, \sin] = [\cos, \sin, 1] = \dots$ und $[1, \sin, \cos] = [\cos, 1, \sin] = \dots$. (3) Wir wählen eine beliebige Basis von W , etwa $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$.

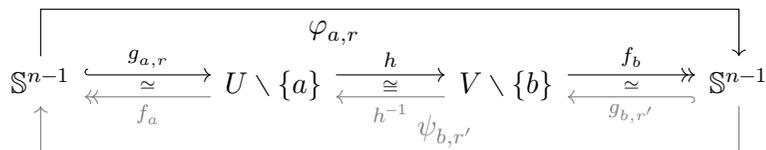
$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \implies \det_W(\partial) = \det_{\mathbb{R}}^2(A) = +1$$

Somit ist $\partial : W \rightarrow W$ orientierungserhaltend und zudem volumentreu, kurz $\partial \in \text{SL}(W)$. Die Rechnung erfordert willkürliche Wahl einer Basis, das Ergebnis ist glücklicherweise davon unabhängig, also wohldefiniert!

Für jeden Diffeomorphismus $h : (U \subseteq \mathbb{R}^n, a) \xrightarrow{\cong} (V \subseteq \mathbb{R}^n, b)$ entscheidet das Vorzeichen $\text{sign det } h'(a) \in \{\pm 1\}$ über das Orientierungsverhalten. Allgemein für Homöomorphismen? Hier rettet uns der Abbildungsgrad!



So definieren und messen wir das **Orientierungsverhalten** von h in a :



Wir komponieren h mit der Einbettung $g_{a,r} : s \mapsto a + rs$ und Projektion $f_b : y \mapsto (y - b)/|y - b|$ und definieren $\text{sign}(h, a) := \text{deg}(\varphi_{a,r}) \in \{\pm 1\}$.

Beachten Sie die Progression der begrifflichen Verallgemeinerung:

- (1) Schon linear ist die Definition des Orientierungsbegriffs raffiniert: Sie benötigen alle Techniken der Linearen Algebra und präzise Begriffe!
- (2) Für differenzierbare Abbildungen nutzen wir dankend die Ableitung (als Funktor) und führen das Problem auf lineare Abbildungen zurück!
- (3) Topologisch wird die technische Schwierigkeit offenbar: Wir haben noch weniger Struktur, insbesondere keine linearen Abbildungen mehr!

Die obige Skizze erklärt, wie wir hierzu den Abbildungsgrad einsetzen: Wir betrachten eine Sphäre um a und ihr Bild unter $h : (U, a) \xrightarrow{\cong} (V, b)$. Dies ergibt eine kleine Sphäre um b , und wir messen ihre Orientierung. Hierzu genügen uns stetige Abbildungen... und der Abbildungsgrad!

Das ist geometrisch wunderbar anschaulich, aber technisch aufwändig. Der größte Aufwand steckt in der Konstruktion des Abbildungsgrades. Wir fügen nun die Puzzleteile zusammen und übersetzen, wieder einmal, die anschauliche Skizze in präzise Formeln. Voilà, alles wird gut.

😊 Besonders schön und einfach ist die Situation in Dimension $n = 1$: Hier sind Stetigkeit und Monotonie engstens verbunden, siehe Satz D2F. Der Abbildungsgrad $\text{deg} : [\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0] \rightarrow \{\pm 1, 0\}$ ist die Signatur, siehe J306. Wir haben $\mathbb{S}^0 = \{-1, +1\}$ und $\text{deg} = \text{sign} : [\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0] \rightarrow \{\pm 1, 0\}$:

$$\text{deg}(\text{id}) = +1, \quad \text{deg}(-\text{id}) = -1, \quad \text{deg}(\text{const}) = 0.$$

Aufgabe: Was bedeutet $\text{sign}(h, a) := \text{deg}(\varphi_{a,r})$ im Fall $n = 1$? **Lösung:** Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen. Jeder Homöomorphismus $h : (U, a) \xrightarrow{\cong} (V, b)$ ist um a streng monoton, entweder (1) wachsend oder (2) fallend.

Global: Auf jeder Komponente ist h streng wachsend / fallend. (Auf verschiedenen Komponenten ist das Verhalten unabhängig.) Ist h ein Diffeomorphismus, so folgt (1) $h'(a) > 0$ oder (2) $h'(a) < 0$. (Wachsend impliziert $h' \geq 0$, fallend $h' \leq 0$, zudem gilt $h'(a) \neq 0$.)

Allgemein, falls h nur ein Homöomorphismus ist, so finden wir:
 (1) $\varphi_{a,r} : \pm 1 \mapsto a \pm r \mapsto h(a \pm r) \gtrless b \mapsto \pm 1$, also $\text{deg}(\varphi_{a,r}) = +1$.
 (2) $\varphi_{a,r} : \pm 1 \mapsto a \pm r \mapsto h(a \pm r) \lesseqgtr b \mapsto \mp 1$, also $\text{deg}(\varphi_{a,r}) = -1$.

Für diesen einfachsten Fall benötigen wir den Abbildungsgrad nicht wirklich, er ist nur eine wunderbar komplizierte (oder doch elegante?) Formulierung der Monotonie. Dennoch ist es sehr schön und beruhigend, dass unsere allgemeine Betrachtung in diesem Spezialfall die vertrauten Begriffe „wachsend“ vs „fallend“ für $h : \mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{\cong} V \subseteq \mathbb{R}$ ergibt.

⚠️ Ab Dimension $n \geq 2$ benötigen wir stärkere Werkzeuge!

😊 In der Analysis setzt man h als Diffeomorphismus voraus und nutzt die Jacobi-Matrix $h'(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Volumenverzerrung $|\det h'(a)|$ spielt eine wichtige Rolle in der Integration, speziell im Transformationsatz. Das Vorzeichen $\text{sign det } h'(a) \in \{\pm 1\}$ misst das Orientierungsverhalten. Hier arbeiten Analysis (Differential- und Integralrechnung im \mathbb{R}^n) und Lineare Algebra (Determinante) wieder einmal wunderbar zusammen!

😊 Oft haben wir den Luxus der Differenzierbarkeit nicht, oder wollen vielleicht gar nicht erst die Last auf uns nehmen, sie nachzuweisen. Die Volumenverzerrung können wir nun nicht mehr kontrollieren, das Orientierungsverhalten hingegen immer noch... dank Abbildungsgrad!

Aufgabe: Formulieren Sie die obige Konstruktion nun allgemein für jeden Homöomorphismus $h : (U, a) \simeq (V, b)$ mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

- (1) Warum ist $\text{sign}(h, a) \in \{\pm 1\}$ wohldefiniert, unabhängig von r ?
- (2) Warum ist $a \mapsto \text{sign}(h, a)$ lokal konstant? anschaulich? formal?

Lösung: (1) Wir nutzen die obigen Abbildungen und schauen genau hin: Sei $\bar{B}(a, r_0) \subseteq U$ und $r \in]0, r_0]$. Dank Homotopie-Invarianz ist $\deg(\varphi_{a,r})$ unabhängig von r . Ebenso für $\psi_{b,r'}$ und $\bar{B}(b, r'_0) \subseteq V$ und $r' \in]0, r'_0]$.

Es gilt $f_a \circ g_{a,r} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, zudem $g_{a,r} \circ f_a \simeq \text{id}_{U'}$ auf $U' = \bar{B}(a, r_0) \setminus \{a\}$.

Es gilt $f_b \circ g_{b,r'} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, zudem $g_{b,r'} \circ f_b \simeq \text{id}_{V'}$ auf $V' = \bar{B}(b, r'_0) \setminus \{b\}$.

Wir wählen $r_1 \in]0, r_0]$ mit $h(\bar{B}(a, r_1)) \subseteq \bar{B}(b, r'_0)$. Für $r \in]0, r_1]$ gilt dann $\psi_{b,r'} \circ \varphi_{a,r} = f_b \circ h^{-1} \circ g_{b,r'} \circ f_a \circ h \circ g_{a,r} \simeq f_a \circ h^{-1} \circ h \circ g_{a,r} = f_a \circ g_{a,r} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$.

Daraus folgt $1 = \deg(\text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg(\psi_{b,r'} \circ \varphi_{a,r}) = \deg(\psi_{b,r'}) \cdot \deg(\varphi_{a,r})$ dank Multiplikativität (J3c), also $\deg(\varphi_{a,r}) = \deg(\psi_{b,r'}) \in \{\pm 1\}$ (J3d).

- (2) Weiterhin sei $\bar{B}(a, r_0) \subseteq U$ für ein $r_0 > 0$. Wir fixieren nun $r = r_0/2$. Für alle $\tilde{a} \in B(a, r)$ gilt $\varphi_{a,r} \simeq \varphi_{\tilde{a},r}$ und somit $\text{sign}(h, a) = \text{sign}(h, \tilde{a})$.

Nach diesen sorgfältigen Vorbereitungen können wir nun feierlich und erfreulich allgemein das Orientierungsverhalten erklären:

Definition J7p: Orientierungsverhalten, topologisch

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $h : (U, a) \simeq (V, b)$ ein Homöomorphismus. Das **Orientierungsverhalten** von $h : (U, a) \simeq (V, b)$ definieren wir durch

$$\text{sign}(h, a) := \deg(\varphi_{a,r}) \quad \text{wobei } r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } \bar{B}(a, r) \subseteq U.$$

Dies ist wohldefiniert, also unabhängig vom gewählten Radius r . Nach obiger Rechnung ist der Abbildungsgrad entweder $+1$ oder -1 .

Im Falle $\text{sign}(h, a) = +1$ nennen wir h in a **orientierungserhaltend**, im Falle $\text{sign}(h, a) = -1$ nennen wir h in a **orientierungsumkehrend**.

Die Abbildung $a \mapsto \text{sign}(h, a)$ ist zudem lokal konstant. Ist sie global konstant, etwa für U zshgd, so schreiben wir diesen Wert kurz $\text{sign}(h)$.

Im letzten Falle ist $h : U \simeq V$ nicht nur lokal um jeden Punkt, sondern global **orientierungserhaltend** oder global **orientierungsumkehrend**.

Unsere allgemeine, topologische Definition deckt sich mit den speziellen, einfacheren Definitionen aus der Linearen Algebra und der Analysis:

Übung J7q: Verbindung zum linearen / glatten Fall

- (1) Für $A \in \text{GL}_n \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$ gilt $\text{sign}(A, 0) = \text{sign det } A$.
- (2) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $h : (U, a) \simeq (V, b)$ ein Homöomorphismus. Ist h in a diff'bar mit $h'(a) \in \text{GL}_n \mathbb{R}$, so gilt $\text{sign}(h, a) = \text{sign det } h'(a)$.

Lösung: (1) Nach Satz G2N zerfällt $\text{GL}_n \mathbb{R}$ in zwei Wegkomponenten: $\pi_0(\text{GL}_n \mathbb{R}) = \{\text{GL}_n^\pm \mathbb{R}\}$. Für $\text{det } A \geq 0$ ist A mit $E_\pm = \text{diag}(1, \pm 1, 1, \dots, 1)$ verbindbar durch einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n \mathbb{R}$, dank Gauß-Algorithmus. Das Orientierungsverhalten ändert sich nicht während der Homotopie $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} : (t, x) \mapsto (\gamma(t)x) / |\gamma(t)x|$. Für E_\pm können wir es schließlich leicht ablesen und erhalten $\text{sign}(A, 0) = \text{sign}(E_\pm, 0) = \pm 1$.

😊 Den linearen Fall (1) nutzen wir auch glatt (2): Differenzierbarkeit bedeutet (affin-)lineare Approximation mit vernachlässigbarem Fehler.

- (2) Durch Verschiebung erreichen wir $a = 0$ und $b = 0$, das ist bequemer. Differenzierbarkeit im Punkt $a = 0$ mit Ableitung $h'(0) = A \in \text{GL}_n \mathbb{R}$ bedeutet $|h(x) - Ax|/|x| \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow 0$. Dank Kompaktheit von \mathbb{S}^{n-1} gilt $c := \min\{|Ax| \mid |x| = 1\} > 0$, also $|Ax| \geq c \cdot |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dank des vorausgesetzten Grenzwerts existiert ein Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\bar{B}(0, r) \subseteq U$ und hierauf die Approximation $|h(x) - Ax| < c \cdot |x|$. Gemäß Definition J7p berechnen wir nun den Abbildungsgrad von

$$\varphi = h \circ g : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow U \setminus \{0\} \rightarrow V \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : s \mapsto h(rs).$$

Die Komposition $\varphi = h \circ g$ ist homotop zu $A \circ g$ vermöge der affinen Homotopie $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $H(t, s) = th(rs) + (1-t)A(rs)$. Unsere obige Abschätzung $|h(x) - Ax| < c \cdot |x| \leq |Ax|$ garantiert nun

$$|H(t, s)| = |A(rs) + t[h(rs) - A(rs)]| \geq |A(rs)| - t|h(rs) - A(rs)| > 0.$$

Demnach haben h und A um 0 dasselbe Orientierungsverhalten! Dank (1) schließen wir $\text{sign}(h, 0) = \deg(H_1) = \deg(H_0) = \text{sign det } A$. QED

hier bereits bewiesen...	später verallgemeinern...
Abbildungsgrad $(\deg, \varphi) : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$	
$n \leq 1$: Satz J1j	$n \geq 2$: Algebraische Topologie
Jordan–Brouwer: Trennungssatz für $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$	
$n \leq 1$: Satz J2v	$n \geq 2$: Algebraische Topologie
Schoenflies: Entknotung von $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ (glatt $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$)	
polygonal: Satz J2j	Funktionentheorie (Knotentheorie)
Borsuk–Ulam: Ist $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ungerade, so auch $\deg(f)$.	
$n \leq 1$: Satz J6A	$n \geq 2$: Algebraische Topologie
Homotopie–Invarianz der Euler–Charakteristik	
Graphen und Flächen: π_1	Algebraische Topologie: H_*

Die Umlaufzahl $\deg(\gamma)$ eines (geschlossenen) Weges $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist anschaulich sofort verständlich, Konstruktion und Beweis gelingen leicht: Polygonal genügt dafür etwas Trigonometrie, im bescheidenen Umfang der Schulmathematik, das scheint mir bemerkenswert und attraktiv.

In der Analysis begegnet Ihnen die Umlaufzahl als Wegintegral von Vektorfeldern in der Ebene, siehe J118, ebenso in der komplexen Analysis (aka Funktionentheorie) als Cauchy–Index geschlossener Wege.

Mit dem so erstellten Werkzeug $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$ können wir schon eine erstaunliche und erfreuliche Vielfalt von Sätzen beweisen, allen voran den Fundamentalsatz der Algebra in effektiver Formulierung! Sodann erhalten wir alle Aussagen dieses Kapitels für die Topologie der Ebene \mathbb{R}^2 .

Auch in höherer Dimension $n \geq 2$ können wir jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ihren Abbildungsgrad $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ zuordnen und dann seine Homotopie–Invarianz nachweisen. Für $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$ setzen sich Aussagen und Beweistechniken von $n = 1$ fort, doch die Argumente zur Konstruktion dieses Werkzeugs werden technisch aufwändiger.

Didaktisch gesehen bestehen hier drei Wahlmöglichkeiten:

(1) Bei einer ersten Präsentation in der Vorlesung (oder bei einer ersten Lektüre) kann man sich auf den Fall $n = 1$ konzentrieren und nur diesen beweisen. Die hiermit erreichbaren Anwendungen genügen bereits für alles, was wir für die Flächenklassifikation in Kapitel K benötigen. Leider lässt dies alle naheliegenden Fragen für $n \geq 2$ offen.

(2) Die vollständige Konstruktion des Abbildungsgrades in Dimension $n \geq 2$ ist etwas aufwändiger, und ihr Kosten–Nutzen–Verhältnis hängt vom Kontext der Vorlesung ab. Am effizientesten gelingt dies in der Algebraischen Topologie im Rahmen der Homologie und Homotopie, durch die erfolgreiche Berechnung von $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$.

(3) Als Mittelweg können wir die Eigenschaften des Abbildungsgrades für $n = 1$ beweisen, und ohne Mehrkosten für $n \geq 1$ bereits formulieren. Mit dieser axiomatischen Einführung können wir die geometrischen Folgerungen ernten. Die Beweise unserer Anwendungen sind dieselben, der allgemeine Fall scheint mir sogar einfacher und durchsichtiger.

Ich folge dem Mittelweg (3). Den allgemeinen Satz $(\deg, \varphi) : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$ von Brouwer–Hopf (J3A) haben wir in diesem Kapitel (nur) für $n = 1$ diskutiert und elegant bewiesen, doch wollen ihn für alle $n \geq 1$ nutzen. Die Umlaufzahl ist erst unser Werkstück in J1, sodann Werkzeug in J2. Für den Abbildungsgrad in Dimension $n \geq 2$ überspringen wir frech die Erstellung als Werkstück und nutzen ihn sofort als Werkzeug.

Für Brouwer–Hopf gibt es schöne und elementare Beweise, sie sind geometrisch erhellend, aber doch mühevoll. Es scheint mir effizienter, diesen Satz später aus Homologie- und Homotopietheorie zu gewinnen. Differentialtopologisch kann man dem Büchlein von Milnor folgen. Der Aufbau der Maschinerie ist umfangreich, doch jedenfalls lohnend, und die Sätze von Brouwer und Hopf erhalten wir als Spezialfälle gratis!

Für ein erstes Kennenlernen der Topologie des Raums \mathbb{R}^n will ich den obigen Satz von Brouwer–Hopf axiomatisch als „black box“ verwenden. Etwas versöhnlicher will ich es so sagen: Ich nehme hier einen Kredit auf, den die Algebraische Topologie / Differentialtopologie begleicht.

