

Kapitel I

Simpliziale Komplexe

*I have a dream that one day every valley shall be exalted,
every hill and mountain shall be made low,
the rough places will be made plain,
and the crooked places will be made straight.*

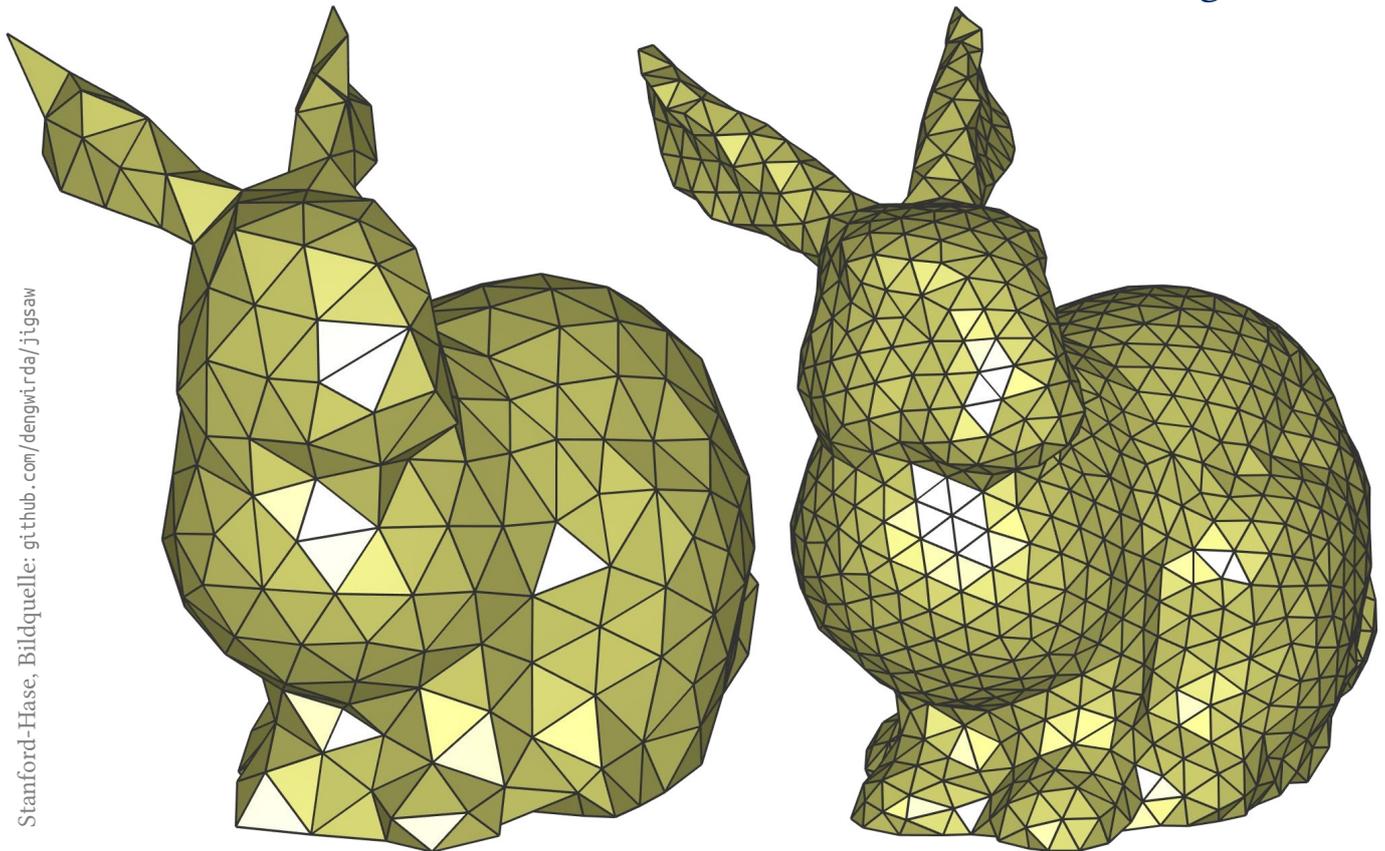
Martin Luther King (1929–1968), Washington 1963

Simpliziale Approximation erfüllt diesen mathematischen Traum,
sie macht stetiges linear, kompliziertes simpel, hässliches schön.

Inhalt dieses Kapitels I

- 1 Affine Simplizialkomplexe
- 2 Kombinatorische Simplizialkomplexe
- 3 Triangulierung und Unterteilungen
- 4 Simpliziale Approximation

Sie kennen, nutzen und lieben lineare Räume und lineare Abbildungen. Unser Ziel sind nun „stückweise lineare“ Räume und Abbildungen.



Simplizialkomplexe: numerische Methoden

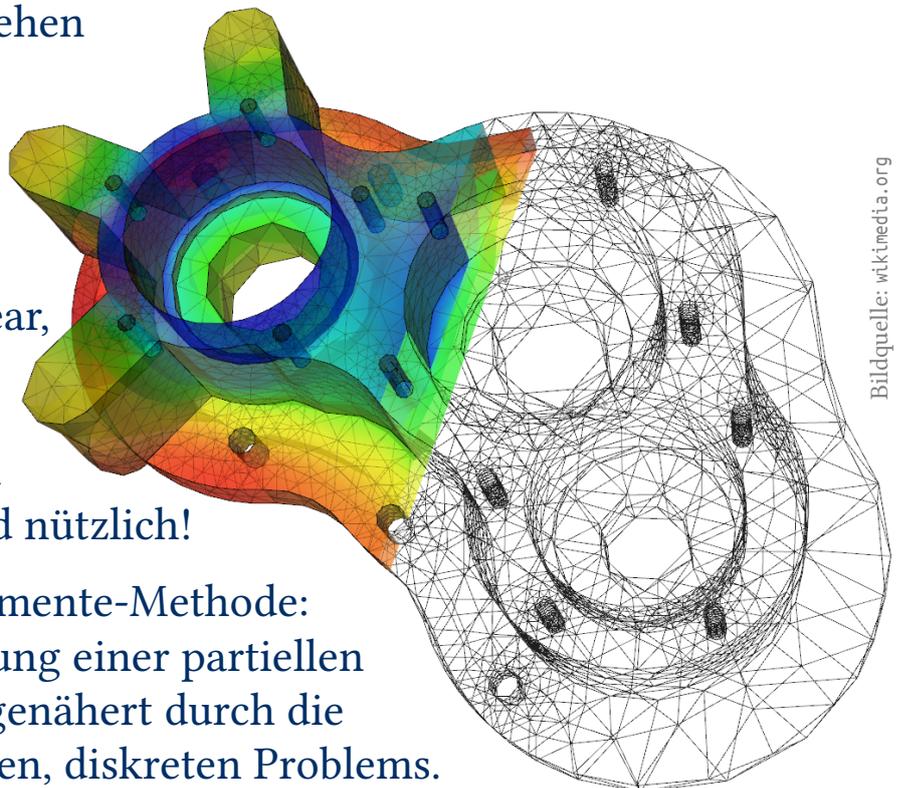
Simplizialkomplexe bestehen aus Simplizes: Punkten, Kanten, Dreiecken, Tetraedern, usw.

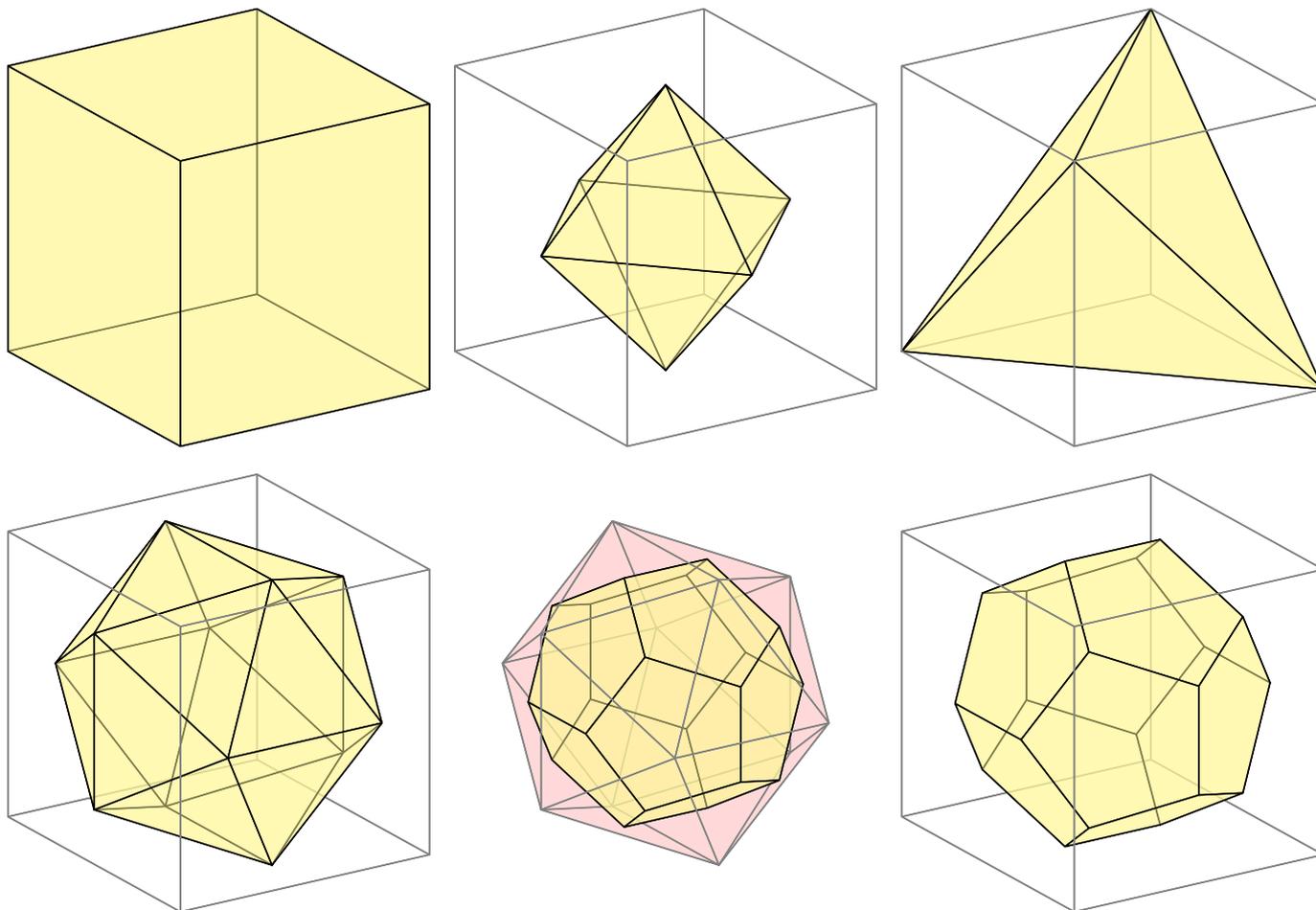
Simpliziale Abbildungen sind stückweise affin-linear, von Simplex auf Simplex.

Solche **Triangulierungen** sind extrem vielseitig und nützlich!

Numerik, insb. Finite-Elemente-Methode: Hier wird die exakte Lösung einer partiellen Differentialgleichung angenähert durch die Lösung eines vereinfachten, diskreten Problems.

Ebenso Computergraphiken, Videospiele, 3D-Druck und Fertigung: Effiziente Datenstruktur für die Geometrie... und die Topologie!

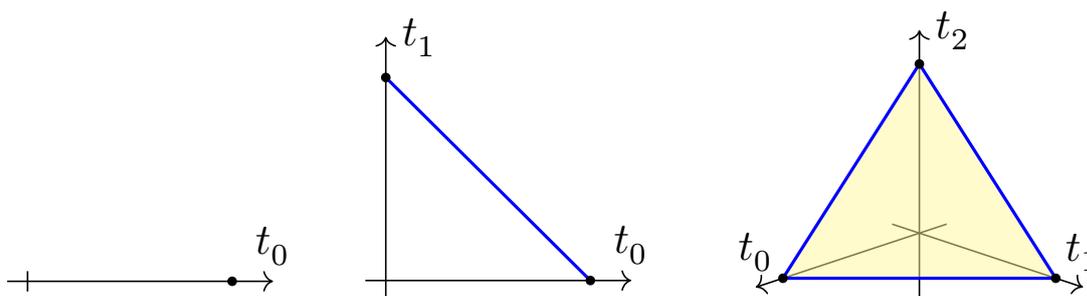




Der Standardsimplex $\Delta^n = [e_0, \dots, e_n] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

I102

Unter allen Polyedern sind Simplexe die allereinfachsten, eben simpel:



Definition 11A: Standardsimplex $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Der n -dimensionale Standardsimplex ist

$$\Delta^n := [e_0, \dots, e_n] = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0, \dots, t_n \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}.$$

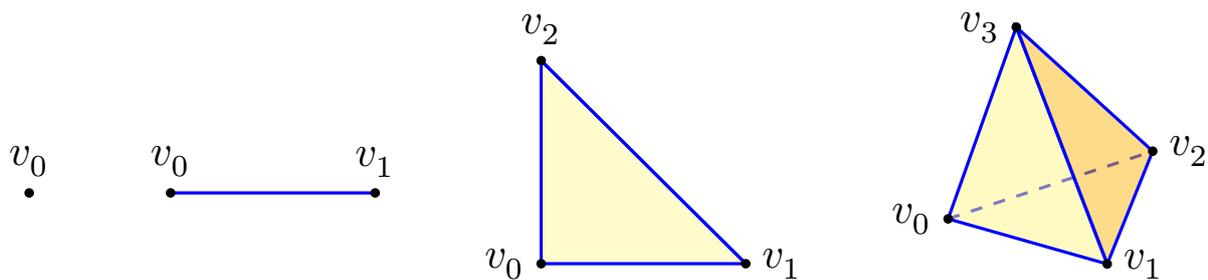
Hierzu haben wir das **(geometrische) Innere**

$$\text{Int } \Delta^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0, \dots, t_n > 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

und den **(geometrischen) Rand** $\partial\Delta^n := \Delta^n \setminus \text{Int } \Delta^n$.

Affine Simplizes $\Delta = [v_0, \dots, v_n] \subseteq V$

Unter allen Polyedern sind Simplizes die allereinfachsten, eben simpel:

**Definition 11A:** affiner Simplex $\Delta \subseteq V$

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Hierin seien die Punkte $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ **affin unabhängig**, also $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0 \in V$ linear unabhängig.

Der **affine n -Simplex** $\Delta := [v_0, v_1, \dots, v_n]$ ist ihre konvexe Hülle.

$$\begin{aligned} h : \Delta^n &\simeq \Delta : (t_0, t_1, \dots, t_n) \mapsto t_0 v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \\ &= v_0 + t_1 (v_1 - v_0) + \dots + t_n (v_n - v_0) \end{aligned}$$

Mittels $h : \Delta^n \simeq \Delta$ versehen wir Δ mit seiner **euklidischen Topologie**.

Affine Simplizes $\Delta = [v_0, \dots, v_n] \subseteq V$

Jeder Simplex bestimmt seine Eckenmenge (als Extrempunkte), damit seine affine Dimension (als Eckenzahl minus 1) und all seine Seiten:

$$\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] \mapsto \text{vert}(\Delta) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\},$$

$$\Delta \mapsto \dim(\Delta) := \dim \text{aff}(\Delta) = n = \# \text{vert}(\Delta) - 1,$$

$$\{Q \leq \Delta\} \cong \mathfrak{P}\{v_0, v_1, \dots, v_n\} : Q \mapsto \text{vert } Q, [S] \leftarrow S, f_d(\Delta) = \binom{n+1}{d+1},$$

$$\Delta = \bigcup_{[S] \leq \Delta} [S] = \bigsqcup_{[S] \leq \Delta} \text{Int}[S], \quad \partial\Delta = \bigcup_{[S] < \Delta} [S] = \bigsqcup_{[S] < \Delta} \text{Int}[S], \quad \text{Int } \Delta = \Delta \setminus \partial\Delta$$

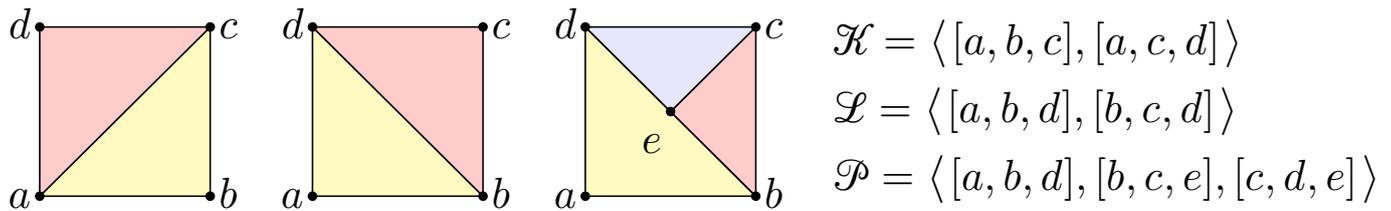
Die Eckpunkte $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ sind affin unabhängig über \mathbb{R} .

Daher ist die Seitenstruktur denkbar einfach. Daraus folgt sofort $f_d(\Delta)$.

Die leere Familie spannt den leeren Simplex $[\emptyset] = \emptyset$ auf, mit $\dim \emptyset = -1$ (per Konvention für Simplizes; für Polytope ist $\dim \emptyset = -\infty$ sinnvollver).

Wie bei jedem Polytop ist insbesondere auch bei jedem Simplex Δ der Rand $\partial\Delta$ die Vereinigung aller echten Seiten $[S] < \Delta$.

Aus Simplizes bauen wir Komplexe, nach simplen aber strengen Regeln!



Beispiel: Die Komplexe \mathcal{K}, \mathcal{L} sind simplizial, doch \mathcal{P} nur polytopal.

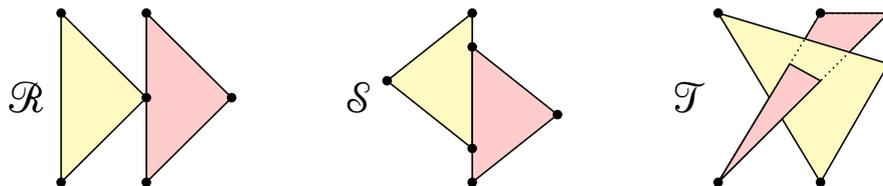
Definition I1c: affiner Simplizialkomplex / aff. SKomplex

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und \mathcal{K} eine Familie affiner Simplizes $\Delta \subseteq V$. Wir nennen \mathcal{K} einen **affinen Simplizialkomplex** in V , wenn gilt:

- 0 Es gilt $\emptyset \in \mathcal{K}$.
- 1 Abschluss: Für alle $\Delta' \leq \Delta \in \mathcal{K}$ gilt $\Delta' \in \mathcal{K}$.
- 2 Schnitt: Für alle $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{K}$ gilt $\Delta_1 \cap \Delta_2 \leq \Delta_1, \Delta_2$.

Für jede Familie \mathcal{M} von Simplizes erreichen wir (0,1) durch Übergang zu $\mathcal{K} = \langle \mathcal{M} \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\Delta' \mid \Delta' \leq \Delta \in \mathcal{M}\}$; so bleibt nur noch (2) zu prüfen.

Beispiel: Welche der folgenden Komplexe $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ sind simplizial?



Durch $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ erreichen wir Forderung (0) und (1), aber (2) schlägt fehl: So wie hier gezeigt sind die drei Komplexe $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ nicht simplizial!

😊 Wir reparieren dies später durch simpliziale Unterteilung (I3L).

Ausformuliert verlangen wir also: (2) Je zwei Simplizes $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{K}$ haben als Schnittmenge $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$ eine gemeinsame Seite, das heißt, Δ ist eine Seite sowohl von Δ_1 als auch von Δ_2 , eventuell leer.

(1) Für jeden Simplex $\Delta \in \mathcal{K}$ in unserer Familie ist auch jede Seite $\Delta' \leq \Delta$ ein Element der Familie \mathcal{K} .

(0) Der leere Simplex gehört zu \mathcal{K} , kurz $\emptyset \in \mathcal{K}$.

Das ist zwar langweilig, aber als Konvention oft nützlich.

Definition 11c: affiner Simplicialkomplex

Die **Dimension** und das **n -Skelett** von \mathcal{K} definieren wir durch

$$\dim \mathcal{K} := \sup \{ \dim \Delta \mid \Delta \in \mathcal{K} \}, \quad \mathcal{K}_{\leq n} := \{ \Delta \in \mathcal{K} \mid \dim \Delta \leq n \},$$

$$\mathcal{K}_{< n} := \{ \Delta \in \mathcal{K} \mid \dim \Delta < n \}, \quad \mathcal{K}_n := \{ \Delta \in \mathcal{K} \mid \dim \Delta = n \}.$$

Die **Eckenmenge** des Simplicialkomplexes \mathcal{K} ist

$$\Omega(\mathcal{K}) := \bigcup \{ \text{vert } \Delta \mid \Delta \in \mathcal{K} \} \quad \text{also} \quad \Omega(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{K}_0 : a \mapsto \{a\}.$$

Das **Polyeder** $|\mathcal{K}| \subseteq V$ ist die Vereinigung aller affinen Simplexe:

$$|\mathcal{K}| := \bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{K}} \Delta = \bigsqcup_{\Delta \in \mathcal{K}} \text{Int } \Delta$$

Wir versehen $|\mathcal{K}|$ mit der **simplicialen Topologie** $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$: Genau dann ist $U \subseteq |\mathcal{K}|$ offen, wenn $U \cap \Delta \subseteq \Delta$ offen ist in jedem Simplex $\Delta \in \mathcal{K}$. Komplementär gilt dasselbe dann für abgeschlossene Mengen $A \subseteq |\mathcal{K}|$.

Das heißt, $f : |\mathcal{K}| \rightarrow X$ ist stetig gdw $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow X$ stetig ist auf jedem Simplex $\Delta \in \mathcal{K}$, also jede Komposition $f \circ h : \Delta^n \simeq \Delta \rightarrow X$ stetig ist.

Übung: Jeder affine Simplicialkomplex \mathcal{K} (I1c) ist ein Polytopalkomplex (I3k), aber nicht umgekehrt, selbst wenn \mathcal{K} nur aus Simplexen besteht.

Lösung: Lesen und vergleichen Sie sorgfältig beide Definitionen! Für simpliciale Komplexe sind wir strenger als für polytopale.

Beispiel: In der obigen Illustration sind die Komplexe \mathcal{K} und \mathcal{L} simplicial, hingegen ist \mathcal{P} nur polytopal, nicht simplicial. (Zur Reparatur siehe I3L)

😊 Wir können also unsere Vorbereitung für polytopale Komplexe hier wunderbar nutzen und auf simpliciale Komplexe übertragen.

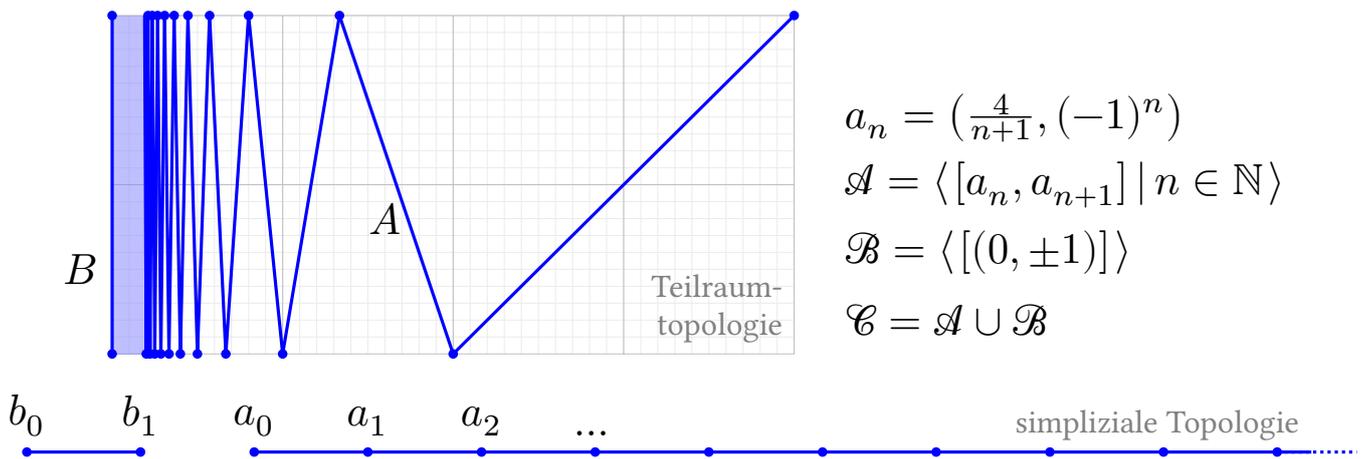
Ist der Komplex \mathcal{K} endlich, so haben wir endliche **Seitenzahlen**

$$f_d(\mathcal{K}) := \#\mathcal{K}_d.$$

Wir definieren dann die **Euler-Charakteristik** als Wechselsumme

$$\chi(\mathcal{K}) := \sum_{d=0}^n (-1)^d f_d(\mathcal{K}) = \sum_{\emptyset \neq \Delta \in \mathcal{K}} (-1)^{\dim \Delta}.$$

⚠ Der Komplex \mathcal{K} bestimmt das Polyeder $|\mathcal{K}|$, aber nicht umgekehrt. Zur Invarianz der Euler-Charakteristik $\chi(\mathcal{K})$ siehe Kapitel A.



$$a_n = \left(\frac{4}{n+1}, (-1)^n\right)$$

$$\mathcal{A} = \langle [a_n, a_{n+1}] \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$

$$\mathcal{B} = \langle [(0, \pm 1)] \rangle$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

Beispiel 11F: simpliziale Topologie vs Teilraumtopologie

Die Abbildung zeigt die Sinuskurve des Topologen in einer simplizialen Version $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mit Polyedern $A = |\mathcal{A}|$ und $B = |\mathcal{B}|$ und $C = |\mathcal{C}|$. In $C = A \cup B$ mit der simplizialen Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ sind A und B beide offen (und abgeschlossen), und somit ist $C = A \sqcup B$ eine topologische Summe. In der Teilraumtopologie \mathcal{T}_C von C in \mathbb{R}^2 hingegen ist A offen, aber nicht abgeschlossen, komplementär ist B abgeschlossen, aber nicht offen.

Satz 11G: simpliziale Topologie vs Teilraumtopologie

- Sei V ein topologischer Vektorraum über \mathbb{R} , zum Beispiel $V = \mathbb{R}^n$.
- (1) Für jeden Simplizialkomplex \mathcal{K} in V ist die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ feiner als die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$ in V , also $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \supseteq \mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$.
 - (2) Ist der Komplex \mathcal{K} in V lokal-endlich, so gilt $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = \mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$. (E1N, I1c)

Beweis: (1) Zum Simplex $\Delta = [v_0, \dots, v_n]$ als Teilraum in V haben wir den Homöomorphismus $h : \Delta^n \xrightarrow{\cong} \Delta : (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 v_0 + \dots + t_n v_n$ dank F1L. Ist $U \subseteq |\mathcal{K}|$ offen in $\mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$, so auch in jedem Simplex, also in $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$.

(2) Jeder Simplex $\Delta \in \mathcal{K}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$ (F1G) und $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ (I1c). In beiden Topologien ist die Überdeckung $|\mathcal{K}| = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{K}} \Delta$ abgeschlossen. Ist sie lokal-endlich, so definiert dies die Topologie (E1N, I1c). QED

😊 Die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ des Polyeders $|\mathcal{K}|$ hängt nur von der kombinatorischen Struktur des Komplexes \mathcal{K} ab, aber nicht von seiner Lage in V . Genau das ist Zweck und Nutzen der simplizialen Topologie.

Definition I1i: simplizialer Teilkomplex

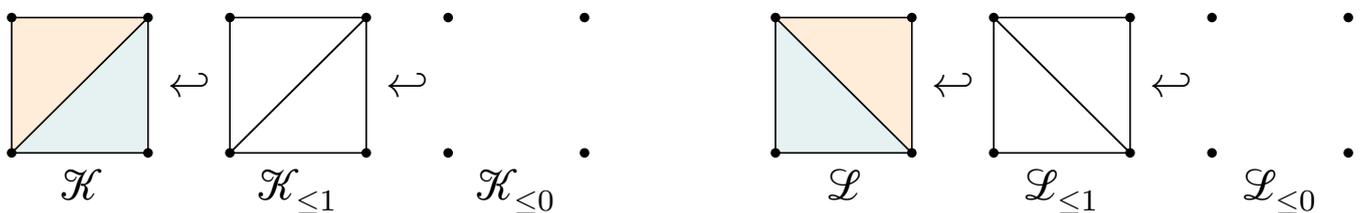
Sei \mathcal{K} ein affiner Simplizialkomplex. Ein **Teilkomplex** $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ mit (0) $\emptyset \in \mathcal{L}$ und (1) $\Delta' \leq \Delta \in \mathcal{L} \Rightarrow \Delta' \in \mathcal{L}$.

Übung: Die Bedingung I1c(2), also $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{K} \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 \leq \Delta_1, \Delta_2$, vererbt sich von \mathcal{K} auf \mathcal{L} , somit ist \mathcal{L} ein affiner Simplizialkomplex.

Beispiele: Jede Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$ erzeugt einen Teilkomplex

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{M} \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\Delta' \mid \Delta' \leq \Delta \in \mathcal{M}\}.$$

Das **n -Skelett** $\mathcal{K}_{\leq n} := \{\Delta \in \mathcal{K} \mid \dim \Delta \leq n\}$ ist ein Teilkomplex in \mathcal{K} :



Bemerkung: In $(|\mathcal{K}|, \mathcal{T}_{\mathcal{K}})$ ist $(|\mathcal{L}|, \mathcal{T}_{\mathcal{L}})$ ein Teilraum und abgeschlossen wie immer dank simplizialer Topologie I1c auf beiden Polyedern.

Definition I1k: simpliziale Abbildung

Eine **simpliziale Abbildung** $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ affiner Simplizialkomplexe ist eine Abbildung $f : \Omega(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega(\mathcal{L})$ der Eckenmengen, sodass gilt:

$$\Delta = [s_0, s_1, \dots, s_n] \in \mathcal{K} \implies \Delta' = [f(s_0), f(s_1), \dots, f(s_n)] \in \mathcal{L}$$

Wir erhalten die affin-lineare Fortsetzung $|f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow \Delta' \hookrightarrow |\mathcal{L}|$ durch

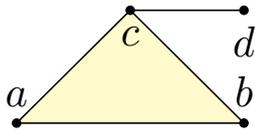
$$f(t_0 s_0 + t_1 s_1 + \dots + t_n s_n) = t_0 f(s_0) + t_1 f(s_1) + \dots + t_n f(s_n)$$

für alle $t \in \Delta^n$. Durch Verkleben auf allen Simplizes $\Delta \in \mathcal{K}$ erhalten wir die **geometrische Realisierung** $|f| : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$.

Wir nennen $|f|$ **stückweise affin** oder **simplizial** bezüglich \mathcal{K} und \mathcal{L} . Diese Abbildung $|f|$ ist stetig... dank simplizialer Topologie (I1c).

Beispiel: Für jeden Teilkomplex $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ ist $\iota : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{K} : s \mapsto s$ simplizial und $|\iota| : |\mathcal{L}| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$ eine Einbettung... dank simplizialer Topologie!

Kombinatorische Simplizialkomplexe



$$\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] \leftrightarrow \text{vert}(\Delta) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$$

$$\mathcal{K} = \{\Delta \mid \Delta \in \mathcal{K}\} \leftrightarrow K = \{\text{vert}(\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{K}\}$$

$$\mathcal{K} = \langle [a, b, c], [c, d] \rangle = \{\emptyset, [a], [b], [c], [d], [a, b], [a, c], [b, c], [c, d], [a, b, c]\}$$

$$K = \langle \{a, b, c\}, \{c, d\} \rangle = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$$

Definition I2A: kombinatorischer Simplizialkomplex / komb. SKomplex

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine endliche, affin unabhängige Menge $S \subseteq V$ heißt **kombinatorischer Simplex** der Dimension $\dim S := \#S - 1$.

Ein **kombinatorischer Simplizialkomplex** K in V ist eine Familie kombinatorischer Simplexes $S \subseteq V$, für die gilt:

- 0 Es gilt $\emptyset \in K$.
- 1 Abschluss: Für alle $T \subseteq S \in K$ gilt $T \in K$.
- 2 Schnitt: Für alle $S, T \in K$ gilt $[S] \cap [T] = [S \cap T]$.

Für jede Familie M von Simplexes erreichen wir (0,1) durch Übergang zu $K = \langle M \rangle := \{\emptyset\} \cup \{T \mid T \subseteq S \in M\}$; so bleibt nur noch (2) zu prüfen.

Kombinatorische Simplizialkomplexe

Der hier erklärte Übergang vom affinen Simplizialkomplex \mathcal{K} zum kombinatorischen Simplizialkomplex K und zurück ist sehr einfach: Statt des Simplex $\Delta \in \mathcal{K}$ speichern wir nur die Eckenmenge $\text{vert} \Delta \in K$. Diese äquivalente Sichtweise ist wesentlich bequemer und effizienter!

😊 Genau so implementieren wir dies auf einem Computer: Die Menge $\Delta \subseteq V$ enthält unendlich viele Punkte (falls $\dim \Delta \geq 1$) und lässt sich nicht als Aufzählung all ihrer Elemente speichern. Die Eckenmenge $S = \text{vert} \Delta \subseteq V$ hingegen ist endlich und bestimmt $\Delta = [S]$ eindeutig.

😊 Die effiziente Sichtweise als kombinatorischer Simplizialkomplex K ist bequemer, dafür etwas abstrakter. Die Sichtweise als affiner Simplizialkomplex \mathcal{K} ist etwas schwerfälliger, dafür anschaulicher, daher habe ich dies als Einstieg gewählt. Beide sind äquivalent!

😊 Die Buchhaltung ist kombinatorisch für K sogar noch etwas leichter, da wir nun direkt mit den (endlichen) Eckenmengen $S \in K$ arbeiten. Wir übertragen nun alle Begriffe vom affinen Simplizialkomplex \mathcal{K} zum kombinatorischen Simplizialkomplex K . Das gelingt einfach und direkt.

Definition I2A: kombinatorischer Simplicialkomplex

Die **Dimension** und das **n -Skelett** von K definieren wir durch

$$\dim K := \sup\{\dim S \mid S \in K\}, \quad K_{\leq n} := \{S \in K \mid \dim S \leq n\},$$

$$K_{< n} := \{S \in K \mid \dim S < n\}, \quad K_n := \{S \in K \mid \dim S = n\}.$$

Die **Eckenmenge** des Simplicialkomplexes K ist

$$\Omega(K) := \bigcup K = \bigcup_{S \in K} S \quad \text{also} \quad \Omega(K) \simeq K_0 : a \mapsto \{a\}.$$

Jeder kombinatorische SKomplex K definiert einen affinen SKomplex $\mathcal{K} = \{[S] \mid S \in K\}$. Umgekehrt, \mathcal{K} bestimmt $K = \{\text{vert}(\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{K}\}$.

Das **Polyeder** $|K| \subseteq V$ ist die Vereinigung aller affinen Simplizes:

$$|K| := \bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{S \in K} [S] = \bigsqcup_{S \in K} \text{Int}[S]$$

Jeden Simplex $[S]$ versehen wir mit seiner euklidischen Topologie (I1A). Das Polyeder $|K|$ versehen wir mit der **simplizialen Topologie** \mathcal{T}_K (I1c).

Der kombinatorische Simplicialkomplex K bestimmt das Polyeder $|K|$. Dies ist seine geometrische Realisierung, entscheidend ist die Topologie. Wir versehen $|K|$ mit der durch K definierten **simplizialen Topologie** \mathcal{T}_K :

Genau dann ist $U \subseteq |K|$ offen, wenn $U \cap [S] \subseteq [S]$ offen ist in jedem Simplex mit $S \in K$. Dasselbe gilt dann für $A \subseteq |\mathcal{K}|$ abgeschlossen.

Genau dann ist $f : |K| \rightarrow X$ stetig, wenn $f|_{[S]} : [S] \rightarrow X$ für jeden Simplex $S \in K$ stetig ist, also jede Komposition $f \circ h : \Delta^n \simeq [S] \rightarrow X$ stetig ist.

Wie zuvor in I1k definieren wir: Eine **simpliziale Abbildung** $f : K \rightarrow L$ kombinatorischer SKomplexe ist eine Abbildung $f : \Omega(K) \rightarrow \Omega(L)$ der Eckenmengen, sodass für jeden Simplex $S \in K$ gilt $f(S) \in L$.

Durch affine Fortsetzung $|f|_{[S]} : [S] \rightarrow |L|$ und Verkleben über alle $S \in K$ erhalten wir die **geometrische Realisierung** $|f| : |K| \rightarrow |L|$ auf den Polyedern. Sie ist stetig dank simplizialer Topologie.

Definition I2B: abstrakter Simplicialkomplex / abs. SKomplex

Ein **(abstrakter) Simplicialkomplex** K ist eine Familie endlicher Mengen mit den Eigenschaften (0) $\emptyset \in K$ und (1) $T \subseteq S \in K \Rightarrow T \in K$.

Jede beliebige Familie M endlicher Mengen erzeugt einen abstrakten Simplicialkomplex $K = \langle M \rangle := \{\emptyset\} \cup \{T \mid T \subseteq S \in M\}$.

Jede Menge $S \in K$ nennen wir einen **(abstrakten) Simplex** von K der Dimension $\dim S := \#S - 1$. Wie zuvor definieren wir

$$\dim K := \sup\{\dim S \mid S \in K\}, \quad K_{\leq n} := \{S \in K \mid \dim S \leq n\},$$

$$K_{< n} := \{S \in K \mid \dim S < n\}, \quad K_n := \{S \in K \mid \dim S = n\}.$$

Die **Eckenmenge** des Simplicialkomplexes K ist

$$\Omega(K) := \bigcup_{S \in K} S \quad \text{also} \quad \Omega(K) \simeq K_0 : a \mapsto \{a\}.$$

Wir nennen K **lokal-endlich**, wenn jede Ecke $a \in \Omega$ nur in endlich vielen Simplexes enthalten ist, das heißt, die Menge $\{S \in K \mid a \in S\}$ ist endlich.

Jeder affine Simplicialkomplex \mathcal{K} in V wird durch seine Simplexe $\Delta \in \mathcal{K}$ festgelegt, und jeder affine Simplex $\Delta \subseteq V$ ist durch seine Eckenmenge $\text{vert}(\Delta)$ festgelegt. Wie oben erklärt erhalten wir so aus \mathcal{K} in V den kombinatorischen Simplicialkomplex K in V .

Jeder kombinatorische Simplex $S \in K$ ist eine endliche Menge $S \subseteq V$ und affin unabhängig in V , er spannt also einen affinen Simplex $[S]$ in V auf. So rekonstruieren wir \mathcal{K} aus K , es geht keine Information verloren. Dies verdanken wir der Lageinformation jedes Punktes $s \in S$ in V .

😊 Wir können schließlich den umgebenden Vektorraum V vergessen und allein die abstrakte Struktur der Simplexe $S \in K$ betrachten. Diese koordinatenfreie Beschreibung ist äußerst knapp und effizient. Die Geometrie geht dabei verloren, doch die Topologie bleibt erhalten!

Genauer gesagt können wir zu K eine Darstellung $f : K \rightarrow V$ wählen und erhalten so die geometrische Realisierung $|K|_f$ mittels f . Je zwei Realisierungen sind homöomorph (Satz I2E).

Der abstrakte SKomplex K hat Ecken $s \in \Omega(K)$ noch ohne Lagedaten.

Definition I2c: Darstellung und geometrische Realisierung

Eine (**affine**) **Darstellung** $f : K \rightarrow V$ eines abstrakten SKomplexes K in einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine Injektion $f : \Omega(K) \hookrightarrow V$, für die gilt:

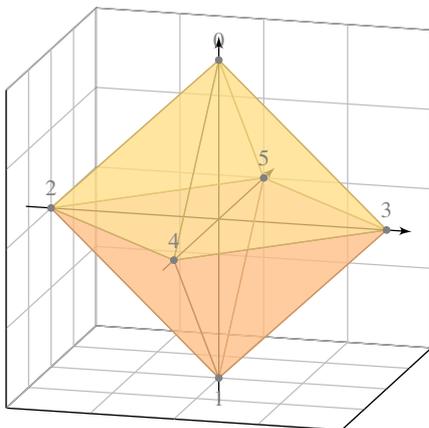
- 1 Für jeden Simplex $S \in K$ ist $f(S) \subseteq V$ affin unabhängig.
Somit ist $|S|_f := [f(S)] \subseteq V$ ein affiner Simplex in V .
- 2 Für alle $S, T \in K$ gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = [f(S \cap T)]$.
Somit ist $\mathcal{K} := \{[f(S)] \mid S \in K\}$ ein affiner Simplizialkomplex in V .

Aus dem **abstrakten** Simplizialkomplex K wird als Bild unter f in V der **kombinatorische** Simplizialkomplex $f(K) = \{f(S) \subseteq V \mid S \in K\}$ und daraus der **affine** Simplizialkomplex $\mathcal{K} := \{[f(S)] \subseteq V \mid S \in K\}$.

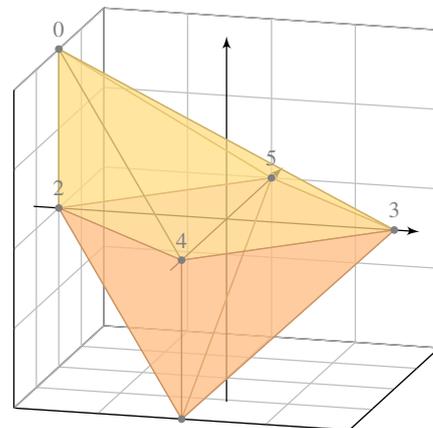
Das Polyeder $|K|_f := |\mathcal{K}|$ nennen wir die **geometrische Realisierung** des abstrakten SKomplexes K mittels der affinen Darstellung $f : K \rightarrow V$.

😊 Wir trennen (K, f) in kombinatorische Daten K und geometrische f .

Anwendungsbeispiel in der Graphiksprache TikZ

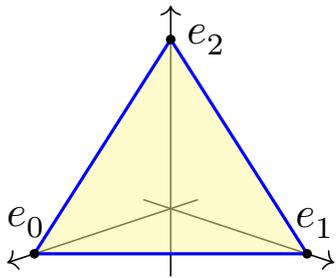


```
\addplot3[ patch, patch type=triangle,
  patch table={ % Liste der 2-Simplizes
    0 2 4 \\ % Dreieck oben links vorne
    0 3 4 \\ % Dreieck oben rechts vorne
    0 2 5 \\ % Dreieck oben links hinten
    0 3 5 \\ % Dreieck oben rechts hinten
    1 2 4 \\ % Dreieck unten links vorne
    1 3 4 \\ % Dreieck unten rechts vorne
    1 2 5 \\ % Dreieck unten links hinten
    1 3 5 \\ % Dreieck unten rechts hinten
  } ]
table{ % Liste der Koordinaten der Eckpunkte
  0 0 +2 \\ % Punkt 0 (oben)
  0 0 -2 \\ % Punkt 1 (unten)
  -2 0 0 \\ % Punkt 2 (links)
  +2 0 0 \\ % Punkt 3 (rechts)
  0 -2 0 \\ % Punkt 4 (vorne)
  0 +2 0 \\ % Punkt 5 (hinten)
};
```



```
\addplot3[ patch, patch type=triangle,
  patch table={ % Liste der 2-Simplizes
    0 2 4 \\ % Dreieck oben links vorne
    0 3 4 \\ % Dreieck oben rechts vorne
    0 2 5 \\ % Dreieck oben links hinten
    0 3 5 \\ % Dreieck oben rechts hinten
    1 2 4 \\ % Dreieck unten links vorne
    1 3 4 \\ % Dreieck unten rechts vorne
    1 2 5 \\ % Dreieck unten links hinten
    1 3 5 \\ % Dreieck unten rechts hinten
  } ]
table{ % Liste der Koordinaten der Eckpunkte
  -2 0 +2 \\ % Punkt 0 (oben links)
  0 -2 -2 \\ % Punkt 1 (unten vorne)
  -2 0 0 \\ % Punkt 2 (links)
  +2 0 0 \\ % Punkt 3 (rechts)
  0 -2 0 \\ % Punkt 4 (vorne)
  0 +2 0 \\ % Punkt 5 (hinten)
};
```

Die kanonische Darstellung



Beispiel: Jeden (abstrakten) Simplizialkomplex K mit endlicher Eckenmenge $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ können wir darstellen durch $e : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : s \mapsto e_s$ auf die Standardbasis e_0, e_1, \dots, e_n . Wir erhalten $|K|$ als Teilkomplex des Standardsimplex $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

😊 Dieselbe Konstruktion gelingt für unendliche Eckenmengen!

Definition I2D: kanonische Darstellung

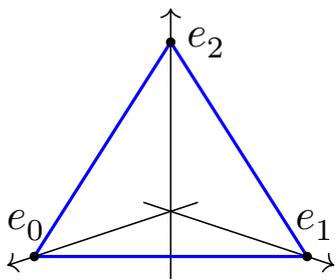
Die **kanonische Darstellung** des Komplexes K ist $e : K \rightarrow \mathbb{R}^{(\Omega)} : s \mapsto e_s$.

Wir nutzen hier den vertrauten Vektorraum $\mathbb{R}^{(\Omega)} \leq \mathbb{R}^{\Omega}$ aller Funktionen $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit endlichem Träger $\text{supp}(x) = \{s \in \Omega \mid x(s) \neq 0\}$.

Kanonische Basis $(e_s)_{s \in \Omega}$ sind die Funktionen $e_s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $e_s(s) = 1$ und $e_s(s') = 0$ für $s' \neq s$. Wir erhalten so die kanonische Darstellung e und den zugehörigen affinen Simplizialkomplex $\mathcal{K} = \{[e(S)] \mid S \in K\}$.

Für Punkte $x \in [e(S)]$ gilt $\text{supp}(x) \subseteq S$ sowie $x \geq 0$ und $\sum_{s \in S} x(s) = 1$.

Die kanonische Realisierung



Beispiel: Wir betrachten $K = \langle \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 0\} \rangle$ und die kanonische Darstellung der Eckenmenge $\Omega = \{0, 1, 2\}$ durch die kanonische Basis e_0, e_1, e_2 in $\mathbb{R}^{(\Omega)}$, also $e : \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}^3 : s \mapsto e_s$.

Definition I2D: kanonische Realisierung

Das zugehörige Polyeder ist die **kanonische Realisierung** von K :

$$\begin{aligned} |K| &:= |K|_e = \bigcup \{[e(S)] \mid S \in K\} = \bigcup_{S \in K} [e(S)] \\ &= \{x : \Omega \rightarrow [0, 1] \mid \text{supp}(x) \in K, \sum_{s \in \Omega} x(s) = 1\}. \end{aligned}$$

Jeder Punkt $x \in |K| \subseteq \mathbb{R}^{(\Omega)}$ schreibt sich eindeutig als endliche Summe $x = \sum_s x(s) e(s)$ mit baryzentrischen Koordinaten $x(s) \geq 0$, $\sum_s x(s) = 1$.

Der Träger $S = \text{supp}(x) \in K$ ist die Eckenmenge des kleinsten Simplex, der den Punkt $x \in |K|$ enthält. Diese Sichtweise ist oft praktisch.

Je zwei Realisierungen sind homöomorph.

Satz I2E: Je zwei Realisierungen sind homöomorph.

Sei K ein abstrakter Simplicialkomplex und $|K| \subseteq \mathbb{R}^{(\Omega)}$ seine kanonische Realisierung. Sei $f : K \rightarrow V$ eine beliebige Darstellung in einem Vektorraum V und $|K|_f \subseteq V$ die so entstehende Realisierung. Dann erhalten wir den stückweise affin-linearen Homöomorphismus

$$h : |K| \xrightarrow{\cong} |K|_f : e(s) \mapsto f(s), \quad \text{also} \quad \sum_{s \in \Omega} x(s) \cdot e(s) \mapsto \sum_{s \in \Omega} x(s) \cdot f(s).$$

Beweis: Da wir f als Darstellung voraussetzen, ist h bijektiv (I2c).

Auf jedem Simplex $S \in K$ ist die Einschränkung $(h, h^{-1}) : [e(S)] \cong [f(S)]$ ein Homöomorphismus (I1A). Auch global ist daher $(h, h^{-1}) : |K| \cong |K|_f$ ein Homöomorphismus bezüglich der simplicialen Topologien (I1c). QED

😊 Die Geometrie hängt von der Darstellung f ab, die Topologie nicht! Ist nichts anderes gegeben, so wählen wir die kanonische Realisierung. In dieser Darstellung identifizieren wir meist $s \in \Omega$ mit $e(s) \in \mathbb{R}^{(\Omega)}$.

Je zwei Realisierungen sind homöomorph.

Die Definitionen I2B und I2C trennen die kombinatorischen Daten K von den geometrischen Daten f . Der Komplex K gibt den Bauplan vor, allerdings noch ohne Angabe von Längen, Winkeln, Volumina etc. Die Darstellung $f : K \rightarrow V$ realisiert dies in einem Vektorraum V .

Bildlich gesprochen ist V der Bauplatz, die Punkte $f(s) \in V$ stecken die Ecken ab. Der abstrakte Bauplan K sagt *was* gebaut wird, die Darstellung $f : K \rightarrow V$ sagt *wo* und *wie* gebaut wird.

Dies präzisiert die genaue Lage und Bemaßung.

Schließlich wird das Polyeder $|K|_f \subseteq V$ mit „kontinuierlicher Raumsoße“ ausgegossen. O, ja, dieses ideale mathematische Wundermaterial! Nachhaltig, umweltfreundlich, kostengünstig und topologisch flexibel.

Wir schauen uns in Stuttgart und der Architekturgeschichte um und denken unwillkürlich an Beton: Seit ca. 1950 baut der *Brutalismus* auf Sichtbeton und folgt damit Le Corbusier (frz. *béton brut*, roher Beton).

😊 Dagegen sind unsere Konstruktionen sehr sparsam und schonend.

Teilkomplexe und simpliziale Abbildungen

Definition I2F: simplizialer Teilkomplex

Sei K ein Simplizialkomplex (kombinatorisch I2A oder abstrakt I2B). Ein **Teilkomplex** $L \leq K$ ist eine Teilmenge $L \subseteq K$ mit den Eigenschaften (0) $\emptyset \in L$ und (1) $T \subseteq S \in L \Rightarrow T \in L$. Somit ist L ein Simplizialkomplex.

Kombinatorische Komplexe (I2A) erben die Schnittbedingung (2). Abstrakte Komplexe (I2B) verlagern dies auf Darstellungen (I2C).

Definition I2G: simpliziale Abbildung

Eine **simpliziale Abbildung** $f : K \rightarrow L$ zwischen Simplizialkomplexen ist eine Abbildung $f : \Omega(K) \rightarrow \Omega(L)$ der Eckenmengen, sodass gilt:

$$S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\} \in K \implies f(S) = \{f(s_0), f(s_1), \dots, f(s_n)\} \in L$$

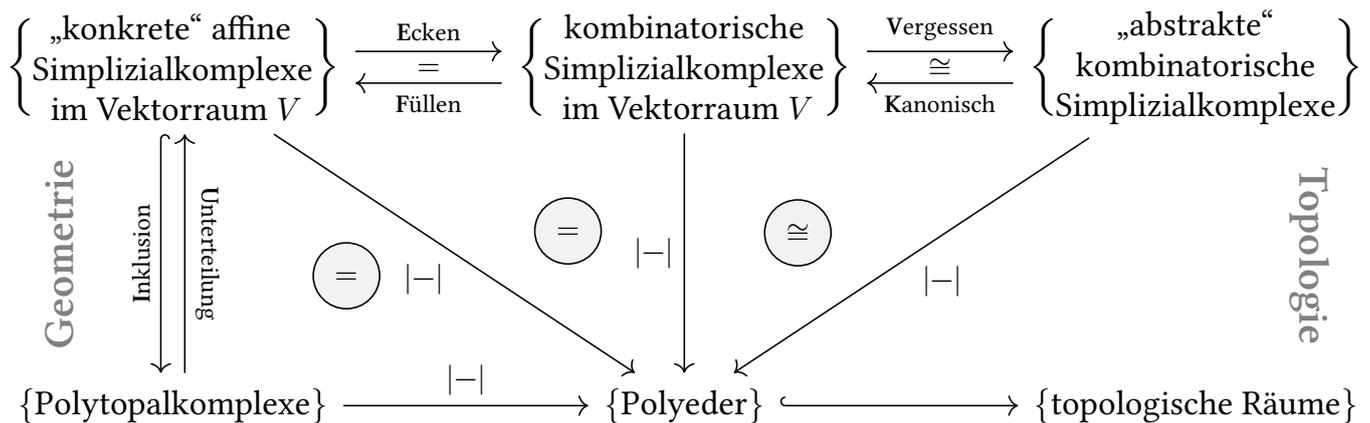
Die **geometrische Realisierung** von $f : K \rightarrow L$ ist die affine Fortsetzung

$$|f| : |K| \rightarrow |L| \quad \text{mit} \quad \sum_{s \in \Omega(K)} x(s) \cdot s \mapsto \sum_{s \in \Omega(K)} x(s) \cdot f(s).$$

Dies ist wohldefiniert (I2E) und stetig dank simplizialer Topologie (I1c).

Zusammenschau der drei Varianten

Simpliziale Komplexe gibt es in drei nützlichen Geschmacksrichtungen:



Übung / Wiederholung: Definieren Sie explizit diese Kategorien und beweisen Sie die für jede Kategorie erforderlichen Eigenschaften (H1A). Die geometrische Realisierung $| - |$ ist ein Funktor in die Kategorie Top. Es gilt $F \circ E = \text{id}$ und $E \circ F = \text{id}$: Diese Kategorien sind isomorph (H5E). Zudem haben wir natürliche Transformationen $V \circ K \rightarrow \text{id}$ dank I2D und $K \circ V \rightarrow \text{id}$ dank I2E: Diese Kategorien sind äquivalent (H5E).

Jeder Simplizialkomplex K definiert sein Polyeder $|K|$ und die simpliziale Topologie \mathcal{T}_K . Zudem können wir $|K|$ mit einer Metrik d_K ausstatten:

Definition I2i: simpliziale Metrik

Sei K ein Simplizialkomplex mit Eckenmenge Ω . Auf $\mathbb{R}^{(\Omega)}$ wählen wir die Supremumsnorm $|\cdot|_\infty$. Auf der kanonischen Realisierung $|K| \subseteq \mathbb{R}^{(\Omega)}$ erhalten wir durch Einschränkung die **simpliziale Metrik**

$$d = d_K : |K| \times |K| \rightarrow [0, 1] : (x, y) \mapsto \max\{|x(s) - y(s)| \mid s \in \Omega\}.$$

Andere Normen, wie die euklidische, sind ebenso möglich: Auf jedem endlich-dim. Teilraum induzieren alle Normen dieselbe Topologie (F6K), und somit auch auf jedem Simplex (Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L).

Mit dem kanonischen Homöomorphismus $h : |K| \simeq |K|_f$ aus Satz I2E übertragen wir die simpliziale Metrik der kanonischen Realisierung $|K|$ zur gleichnamigen Metrik $d_K : |K|_f \times |K|_f \rightarrow [0, 1]$ auf jeder weiteren geometrischen Realisierung $|K|_f$ durch eine beliebige Darstellung f .

Metrisierung der simplizialen Topologie

Satz I2j: Metrisierung der simplizialen Topologie

Auf $|K|$ ist die simpliziale Topologie feiner als die metrische, also $\mathcal{T}_K \supseteq \mathcal{T}_d$. Ist K lokal-endlich, so gilt $\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_d$. Andernfalls ist \mathcal{T}_K nicht metrisierbar.

Beweis: (1) Jeder Ball $B_K(x, r)$ um $x \in |K|$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist offen in \mathcal{T}_K (I1c), denn $B_K(x, r) \cap [S]$ ist offen in jedem Simplex $[S]$. Also gilt $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_K$.

(2) Metrische und simpliziale Topologie sind auf jedem Simplex gleich. Jeder Simplex $[S]$ mit $S \in K$ ist abgeschlossen in der Topologie \mathcal{T}_d (F1G). Ist zudem K lokal-endlich, so ist $\mathcal{K} = \{[S] \mid S \in K\}$ eine lokal-endliche, abgeschlossene Überdeckung von $|K|$ mit der metrischen Topologie \mathcal{T}_d . Dank E1N stimmen metrische \mathcal{T}_d und simpliziale Topologie \mathcal{T}_K überein.

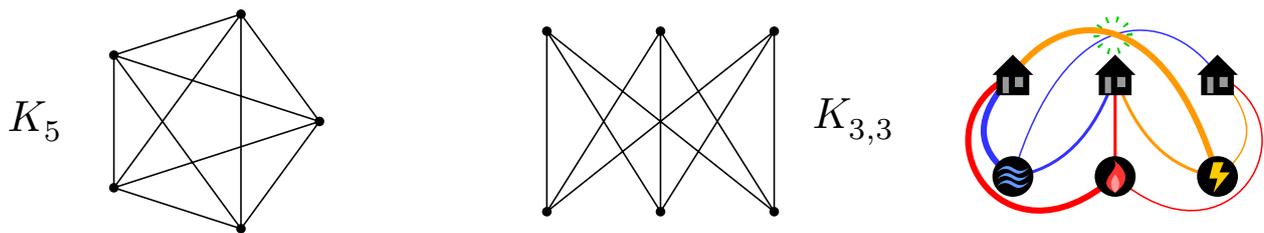
(3) Ist K hingegen nicht lokal-endlich, so ist mindestens eine Ecke $a \in \Omega$ in unendlich vielen Simplizes enthalten: Es existieren unendlich viele Kanten $\{a, a_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dies entspricht einem unendlichen Stern zu a , und hierin hat a keine abzählbare Umgebungsbasis (Übung I2K, siehe unendliches Bouquet). Somit ist $|K_{\leq 1}| \subseteq |K|$ nicht metrisierbar. QED

Wir können jeden SKomplex K kanonisch realisieren durch $|K| \subseteq \mathbb{R}^{(\Omega)}$. Die Dimension $\dim \mathbb{R}^{(\Omega)} = \#\Omega$ ist i.A. jedoch verschwenderisch groß!

Beispiel: Wir können jeden endlichen Graphen ($\dim K \leq 1$) im Raum \mathbb{R}^3 darstellen, dafür ist genug Platz, unabhängig von seiner Eckenzahl $\#\Omega$.

Hierzu genügt $f: \Omega \hookrightarrow \{(k^1, k^2, k^3) \mid k \in \mathbb{N}\}$ entlang der Momentkurve; je vier ihrer Punkte sind affin unabhängig. (Warum? Übung!)

In der Ebene \mathbb{R}^2 gelingt eine solche Einbettung nicht immer:



Satz (van Kampen 1932, Flores 1933): Sei $K = \langle \Delta^{2m+2} \rangle_{\leq m}$ das m -Skelett des $(2m+2)$ -Simplex. Dann lässt sich $|K|$ affin im Raum \mathbb{R}^{2m+1} einbetten, aber nicht im \mathbb{R}^{2m} . Beispiel: Für $K = \langle \Delta^4 \rangle_{\leq 1} = K_5$ gilt $\mathbb{R}^3 \leftarrow |K| \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

Welche endlichen Graphen K lassen sich in die Ebene \mathbb{R}^2 einbetten?

Für einfache Beispiele gelingt dies leicht, für die gezeigten Graphen K_5 und $K_{3,3}$ ist es jedoch unmöglich. Der Beweis ist trickreich und beruht zwangsläufig auf der Topologie der Ebene: Jeder endliche Graph lässt sich in eine Fläche F_g^+ mit hinreichend hohem Geschlecht g einbetten!

Vollständige Auskunft gibt der Satz von Kuratowski (1930): Ein endlicher Graph K lässt sich genau dann in die Ebene \mathbb{R}^2 einbetten, wenn er keinen Teilgraph enthält, der isomorph ist zu K_5 oder $K_{3,3}$ oder eine Unterteilung davon. (en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph)

Die allgemeine Frage lautet: Vorgelegt sei ein endlicher Graph K . Was ist das minimale Geschlecht $g = g(K)$, sodass eine Einbettung $|K| \hookrightarrow F_g^+$ existiert? (en.wikipedia.org/wiki/Graph_embedding)

Planare Graphen haben Geschlecht 0, hier antwortet Kuratowski.

Es gilt $g(K_n) = \lceil (n-3)(n-4)/12 \rceil$ und $g(K_{m,n}) = \lceil (m-2)(n-2)/4 \rceil$.

Der allgemeine Fall ist algorithmisch lösbar, aber nachweislich komplex.

Der Einbettungssatz von Whitney

Satz I2Q: Einbettungssatz von Whitney, simplizial

Sei K ein Simplizialkomplex. (1) Existiert eine Einbettung $|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, so ist K abzählbar und lokal-endlich. (2) Ist K abzählbar und lokal-endlich und $\dim K \leq m$, so existiert eine Darstellung $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $n = 2m + 1$, somit eine affine Einbettung $|f|: |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Für Eckpunkte in allgemeiner Lage sorgt zum Beispiel $f: \Omega \hookrightarrow \{(k^1, k^2, k^3, \dots, k^n) \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Beweis: (1) Als Teilraum ist $|K|$ metrisierbar, also lokal-endlich (I2J). Die Eckenmenge $\Omega \hookrightarrow |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist diskret, also abzählbar (D6J).

(2) Die Momentkurve $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n: t \mapsto (t^1, t^2, t^3, \dots, t^n)$ schneidet jede Hyperebene $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$ höchstens n mal, denn das Polynom $a_0 + a_1 t^1 + \dots + a_n t^n$ hat höchstens n Nullstellen. Somit sind je $n + 1$ Punkte der Momentkurve affin unabhängig.

Für $S, T \in K$ besteht $f(S \cup T)$ aus $\leq 2m + 2$ Punkten. Im Simplex $\Delta = [f(S \cup T)]$ gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = [f(S) \cap f(T)] = [f(S \cap T)]$.

Somit ist $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Darstellung. In \mathbb{R}^n ist $([f(S)])_{S \in K}$ lokal-endlich, also $|f|: |K| \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung (I1G). QED

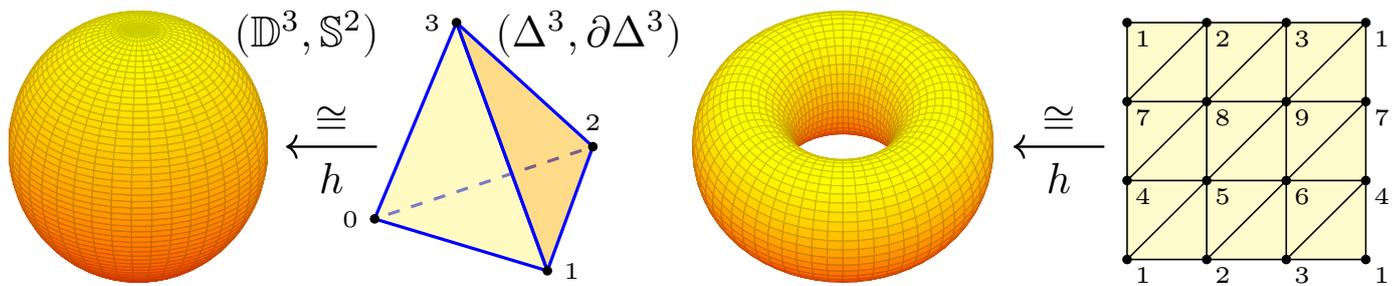
Der Einbettungssatz von Whitney

Whitneys klassischer Einbettungssatz stammt ursprünglich aus der Differentialtopologie: Zu jeder glatten m -dim. Mannigfaltigkeit M existieren glatte Einbettungen $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$. Hier lässt sich sogar noch eine Dimension sparen: Der starke Einbettungssatz garantiert $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$. Die Aussage $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ heißt daher auch schwacher Einbettungssatz. (en.wikipedia.org/wiki/Whitney_embedding_theorem)

Ich habe hier den Einbettungssatz für Simplizialkomplexe ausgeführt und ihm ebenfalls den Namen Whitney angedichtet: Das ist nur eine griffige mathematische Analogie, keine akkurate historische Zuordnung. Whitney hätte dies vermutlich als Übungsaufgabe eingestuft, zu Recht! Es ist eine sehr schöne Übung, daher empfehle ich sie hier.

Der simpliziale Fall ist – wie so oft – sehr direkt und technisch leicht: Alle vorgegebenen Daten sind hier bereits stückweise affin-linear. Statt Differentialrechnung benötigen wir daher nur lineare Algebra (affine Unabhängigkeit) und Kombinatorik (Dimensionen zählen). Dieser Satz ist ein würdiger Abschluss dieses Abschnitts.

Was sind Triangulierungen?



Definition I3A: Triangulierung eines topologischen Raumes

Sei X ein topologischer Raum. Eine **Triangulierung** (K, h, k) von X ist ein Simplizialkomplex K mit einem Homöomorphismus $(h, k) : |K| \cong X$. Wir nennen X **triangulierbar**, falls eine Triangulierung existiert.

Beispiel: $\Delta^n \cong \mathbb{D}^n$ und $\partial\Delta^n \cong S^{n-1}$ dank radialer Projektion (Satz F6G). Hierzu haben wir affine bzw. kombinatorische Simplizialkomplexe:

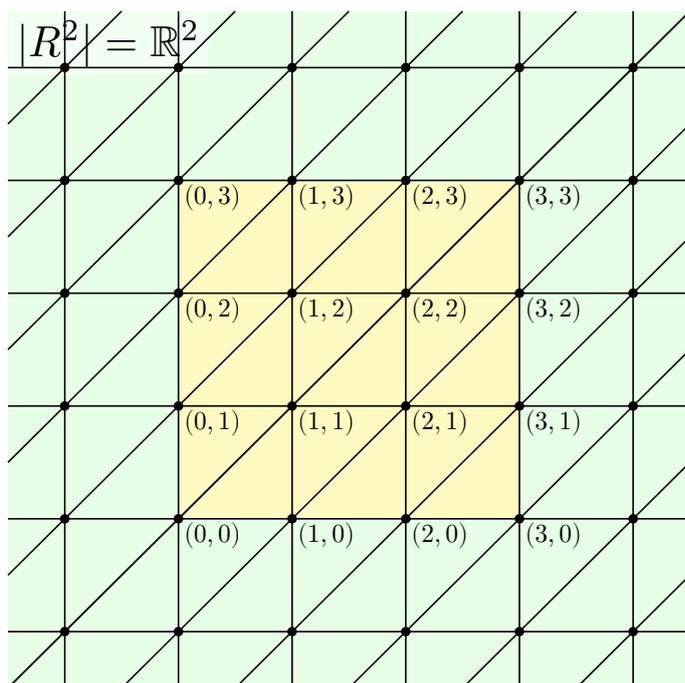
$$\mathcal{D}^n = \langle \Delta^n \rangle = \{ \Delta' \mid \Delta' \leq \Delta^n \} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}^{n-1} = \{ \Delta' \mid \Delta' < \Delta^n \}$$

$$D^n = \mathfrak{P}\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \quad \text{und} \quad S^{n-1} = D^n \setminus \{\{e_0, e_1, \dots, e_n\}\}$$

Wir erhalten $|D^n| = |\mathcal{D}^n| = \Delta^n \cong \mathbb{D}^n$ und $|S^{n-1}| = |\mathcal{S}^{n-1}| = \partial\Delta^n \cong S^{n-1}$.

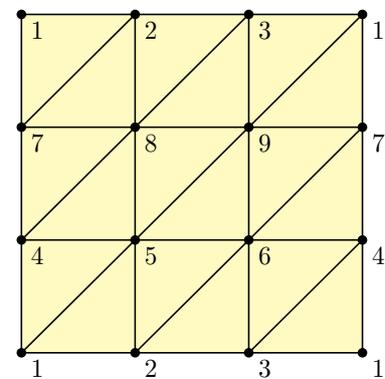
Triangulierung der Ebene \mathbb{R}^2 und des Torus $S^1 \times S^1$

Wir triangulieren $\mathbb{R} = |R|$ mit $R = \langle \{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z} \rangle$, ebenso $\mathbb{R}^2 = |R^2|$, $R^2 = \langle \{(a, b), (a, b+1), (a+1, b+1)\}, \{(a, b), (a+1, b), (a+1, b+1)\} \mid a, b \in \mathbb{Z} \rangle$.



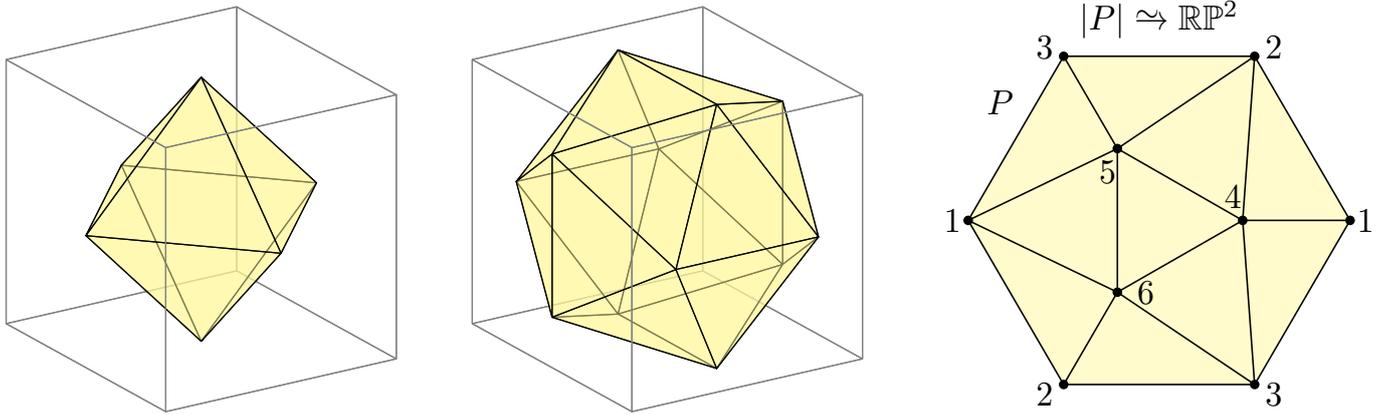
$$(3\mathbb{Z})^2 \simeq R^2 \twoheadrightarrow T$$

$$(3\mathbb{Z})^2 \simeq |R^2| \twoheadrightarrow |T|$$



$$|T| \simeq S^1 \times S^1$$

- ☺ Durch $\mathbb{R}^2 / (3\mathbb{Z})^2$ erhalten wir die 9-Ecken-Triangulierung des Torus.
- ☺ Es genügen 8, sogar 7 Ecken, ... weniger geht nicht! (Heawood K3B)



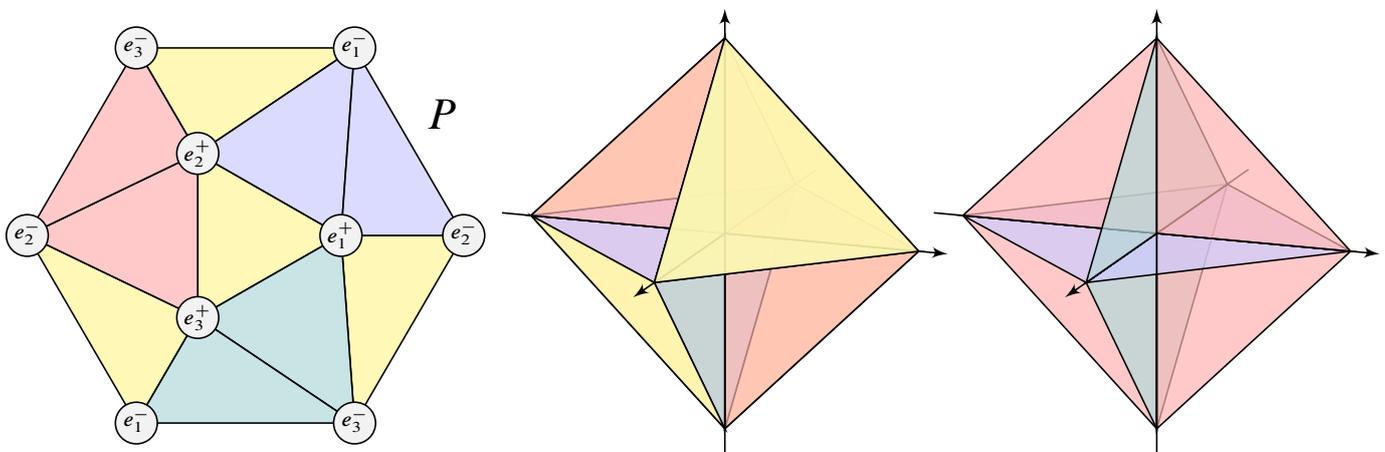
Beispiel / Übung I3D: die 6-Ecken-Triangulierung des $\mathbb{R}P^2$

In Dimension $n = 2$ nutzen wir den Ikosaederrand K zu $h : |K| \simeq S^2$. Der Quotient $P = K / \{\pm\}$ ist ein Simplizialkomplex wie oben gezeigt. Wir erhalten die 6-Ecken-Triangulierung $|P| \simeq S^2 / \{\pm\} = \mathbb{R}P^2$ der projektiven Ebene. Die Polyeder $|K|, |P|$ sind geschlossene Flächen mit $\chi(K) = 12 - 30 + 20 = 2$ und $\chi(P) = 6 - 15 + 10 = \frac{1}{2}\chi(K) = 1$.

- 😊 Hier bewähren sich *abstrakte* Simplizialkomplexe ganz wunderbar!
- ⚠ Das Oktaeder hingegen genügt noch nicht für diese Konstruktion.

Triangulierung der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$

Diese Konstruktion ist sehr elegant und recht natürlich. Wir erhalten einen abstrakten Simplizialkomplex P mit 6 Ecken, daher können wir P kanonisch in \mathbb{R}^6 realisieren. Dank $\dim P = 2$ können wir P schon in \mathbb{R}^5 einbetten (Whitney I2Q), mit etwas mehr Mühe sogar in \mathbb{R}^4 .



Die reell-projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ lässt sich nicht in den \mathbb{R}^3 einbetten! Werner Boy fand 1901 in seiner Dissertation immerhin eine Immersion $\mathbb{R}P^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ mit harmlosen Doppelpunkten und nur einem Dreifachpunkt. Diese Immersion ist hier als „simpliziales Origami“ dargestellt.

Erinnerung: polytopale Komplexe

Definition I3k: polytopaler Komplex

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und \mathcal{K} eine Familie von Polytopen in V .

Wir nennen \mathcal{K} einen **polytopalen Komplex**, falls gilt:

- 0 Das leere Polytop gehört zu \mathcal{K} , kurz $\emptyset \in \mathcal{K}$. (langweilig, aber nützlich)
- 1 Je zwei Polytope $P \neq Q$ in \mathcal{K} sind innerlich disjunkt, $\text{Int } P \cap \text{Int } Q = \emptyset$.
- 2 Für jedes Polytop $P \in \mathcal{K}$ gilt $\partial P = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ mit $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{K}$.

Das **Polyeder** $|\mathcal{K}| \subseteq V$ ist die Vereinigung aller Polytope:

$$|\mathcal{K}| := \bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{P \in \mathcal{K}} P = \bigsqcup_{P \in \mathcal{K}} \text{Int } P$$

Jedes Polytop $P \in \mathcal{K}$ versehen wir mit seiner euklidischen Topologie im aufgespannten Raum $\text{aff } P \cong \mathbb{R}^n$, alternativ durch $\Delta^\ell \twoheadrightarrow P$ dank F1L.

Wir versehen $|\mathcal{K}|$ mit der **polytopalen Topologie** $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$: Genau dann ist $U \subseteq |\mathcal{K}|$ offen, wenn $U \cap P \subseteq P$ offen ist in jedem Polytop $P \in \mathcal{K}$.

$$\mathcal{K} \text{ simplizial (I1c)} \Rightarrow \mathcal{K} \text{ polytopal (I3k)} \Rightarrow \beta(\mathcal{K}) \text{ simplizial (I3M)}$$

Erinnerung: polytopale Komplexe

 In der Einleitung (A3B) haben wir zwecks Vereinfachung zunächst nur *endliche* polytopale Komplexe untersucht. Wir erlauben fortan auch unendliche Komplexe. Dazu erklären wir hier die polytopale Topologie; für endliche Komplexe in \mathbb{R}^n ist dies die Teilraumtopologie, siehe I1G.

Wir zuvor definieren wir die **Dimension** und das **n -Skelett** durch

$$\dim \mathcal{K} := \sup \{ \dim P \mid P \in \mathcal{K} \}, \quad \mathcal{K}_{\leq n} := \{ P \in \mathcal{K} \mid \dim P \leq n \},$$

Manchmal sind auch folgende Bezeichnungen nützlich:

$$\mathcal{K}_{< n} := \{ P \in \mathcal{K} \mid \dim P < n \}, \quad \mathcal{K}_n := \{ P \in \mathcal{K} \mid \dim P = n \}.$$

 Alle polytopalen und simplizialen Bezeichnungen stimmen überein.

Es gibt dabei allerdings eine kleine Diskrepanz der Konventionen:

Für das leere Polytop \emptyset vereinbaren wir die polytopale Dimension

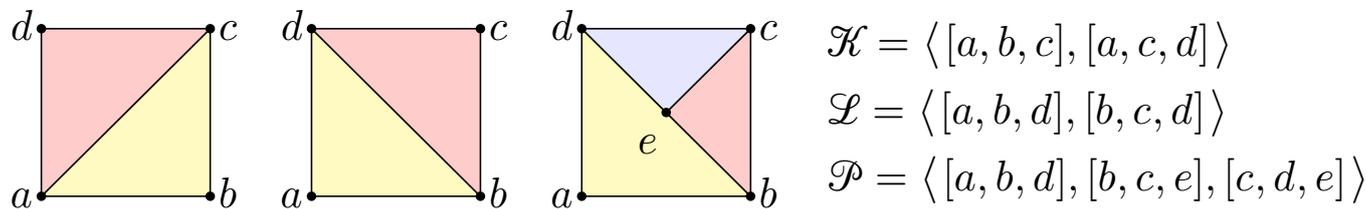
$\dim \emptyset = -\infty$. Damit gilt die Produktformel $\dim(P \times Q) = \dim P + \dim Q$.

Für den leeren Simplex \emptyset vereinbaren wir die simpliziale Dimension

$\dim \emptyset = -1$. Das ist für simpliziale Konstruktionen natürlicher.

Übung: Jeder affine Simplizialkomplex \mathcal{K} (I1c) ist ein Polytopalkomplex (I3k), aber nicht umgekehrt, selbst wenn \mathcal{K} nur aus Simplizes besteht.

Lösung: Lesen und vergleichen Sie sorgfältig beide Definitionen! Für simpliziale Komplexe sind wir strenger als für polytopale.



Beispiel: In der obigen Illustration sind die Komplexe \mathcal{K} und \mathcal{L} simplizial, hingegen ist \mathcal{P} nur polytopal, nicht simplizial. (Zur Reparatur siehe I3L)

Übung: (nach dem simplizialen Vorbild von Satz I1G)

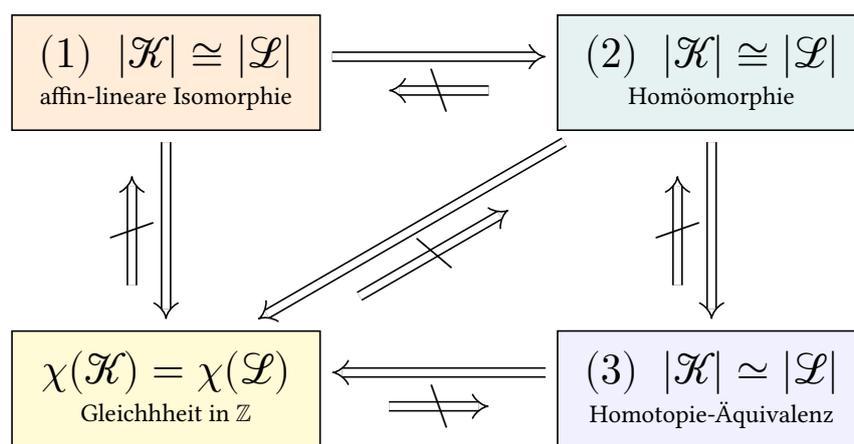
Sei V ein topologischer Vektorraum, zum Beispiel $V = \mathbb{R}^n$.

Darin sei \mathcal{K} ein Polytopalkomplex. (1) Die polytopale Topologie

$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ ist feiner als die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$ in V , also $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \supseteq \mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$.

(2) Ist der Komplex \mathcal{K} in V lokal-endlich, so gilt $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = \mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$.

Wir erinnern an die topologische Invarianz der Euler-Charakteristik. Für endliche polytopale (speziell: simpliziale) Komplexe \mathcal{K} und \mathcal{L} gilt:



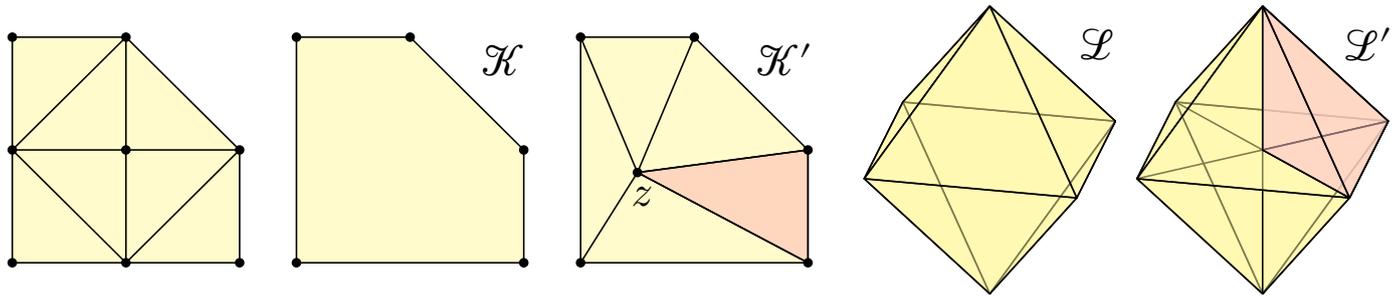
☺ Wir können alle Ergebnisse, Sätze und Techniken für polytopale Komplexe auch für den Spezialfall der simplizialen Komplexe nutzen.

☺ Wir zeigen nun folgende Umkehrung durch simpliziale Unterteilung:

$$\mathcal{K} \text{ simplizial (I1c)} \Rightarrow \mathcal{K} \text{ polytopal (I3k)} \Rightarrow \beta(\mathcal{K}) \text{ simplizial (I3M)}$$

Simpliziale Unterteilungen

Für jeden polytopalen Komplex \mathcal{K} können wir das Polyeder $|\mathcal{K}|$ triangulieren durch zentrische Unterteilung und erhalten \mathcal{K}' :



Definition I3L: Unterteilung, polytopal und simplizial

Eine **Unterteilung** $\mathcal{K}' \preceq \mathcal{K}$ ist ein Komplex \mathcal{K}' mit $|\mathcal{K}'| = |\mathcal{K}|$, und jedes Polytop $P \in \mathcal{K}$ ist Vereinigung endlich vieler Polytope $P' \in \mathcal{K}'$. Ist \mathcal{K}' simplizial, so nennen wir $\mathcal{K}' \preceq \mathcal{K}$ **simpliziale Unterteilung**.

Eine Unterteilung $(\mathcal{K}', \mathcal{L}) \preceq (\mathcal{K}, \mathcal{L})$ **relativ** zum Teilkomplex $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ bedeutet $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}' \preceq \mathcal{K}$: Nur Polytope $P \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ werden unterteilt.

Für $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ ist $(\mathcal{K}', \mathcal{L}) \preceq (\mathcal{K}, \mathcal{L})$ eine absolute Unterteilung $\mathcal{K}' \preceq \mathcal{K}$. Allgemein identifizieren wir den Komplex \mathcal{K} mit dem Paar $(\mathcal{K}, \{\emptyset\})$.

Zentrische Unterteilung

Satz I3M: zentrische Unterteilung

Sei \mathcal{K} ein polytopaler Komplex, $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ ein simplizialer Teilkomplex, etwa $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ oder $\mathcal{L} = \mathcal{K}_{\leq 1}$, sowie $z : \mathcal{K} \setminus \mathcal{L} \rightarrow |\mathcal{K}| : P \mapsto z_P \in \text{Int } P$.

Daraus konstruieren wir rekursiv den Simplizialkomplex \mathcal{K}' als relative **zentrische Unterteilung**, $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}' \preceq \mathcal{K}$, gemäß $\mathcal{K}_{\leq 0}' = \mathcal{K}_{\leq 0}$ und

$$\mathcal{K}_{\leq n}' = \mathcal{K}_{<n}' \cup \mathcal{L}_n \cup \left\{ [v_0, \dots, v_k, z_P] \mid \begin{array}{l} P \in \mathcal{K}_n \setminus \mathcal{L}_n, \\ \partial P \supseteq [v_0, \dots, v_k] \in \mathcal{K}'_{<n} \end{array} \right\} \preceq \mathcal{K}_{\leq n}.$$

Die **baryzentrische Unterteilung** $\beta(\mathcal{K}, \mathcal{L}) := (\mathcal{K}', \mathcal{L})$ erhalten wir mit

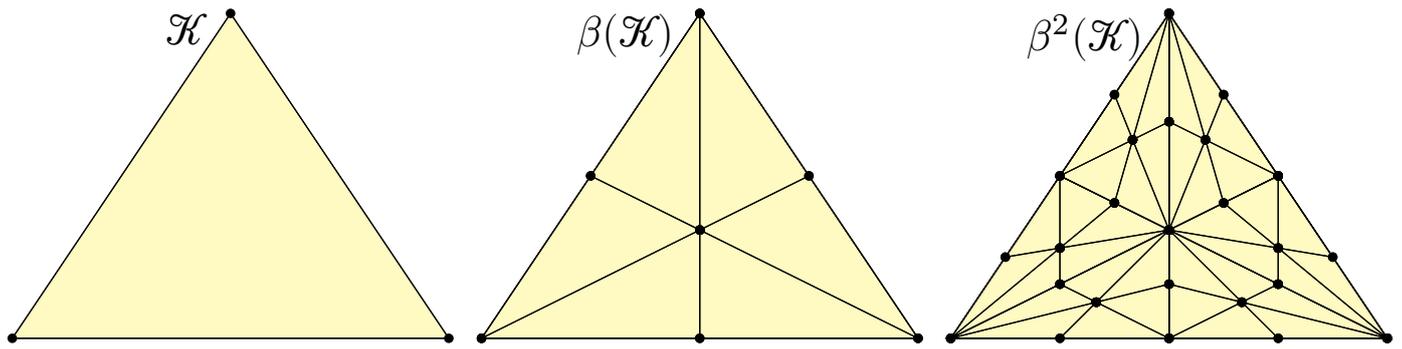
$$P \mapsto \text{vert}(P) = \{x_1, \dots, x_n\} \mapsto z_P = \frac{1}{n}x_1 + \dots + \frac{1}{n}x_n \in \text{Int } P.$$

Im absoluten Falle $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ schreiben wir kurz $\beta(\mathcal{K}) := \beta(\mathcal{K}, \{\emptyset\})$.

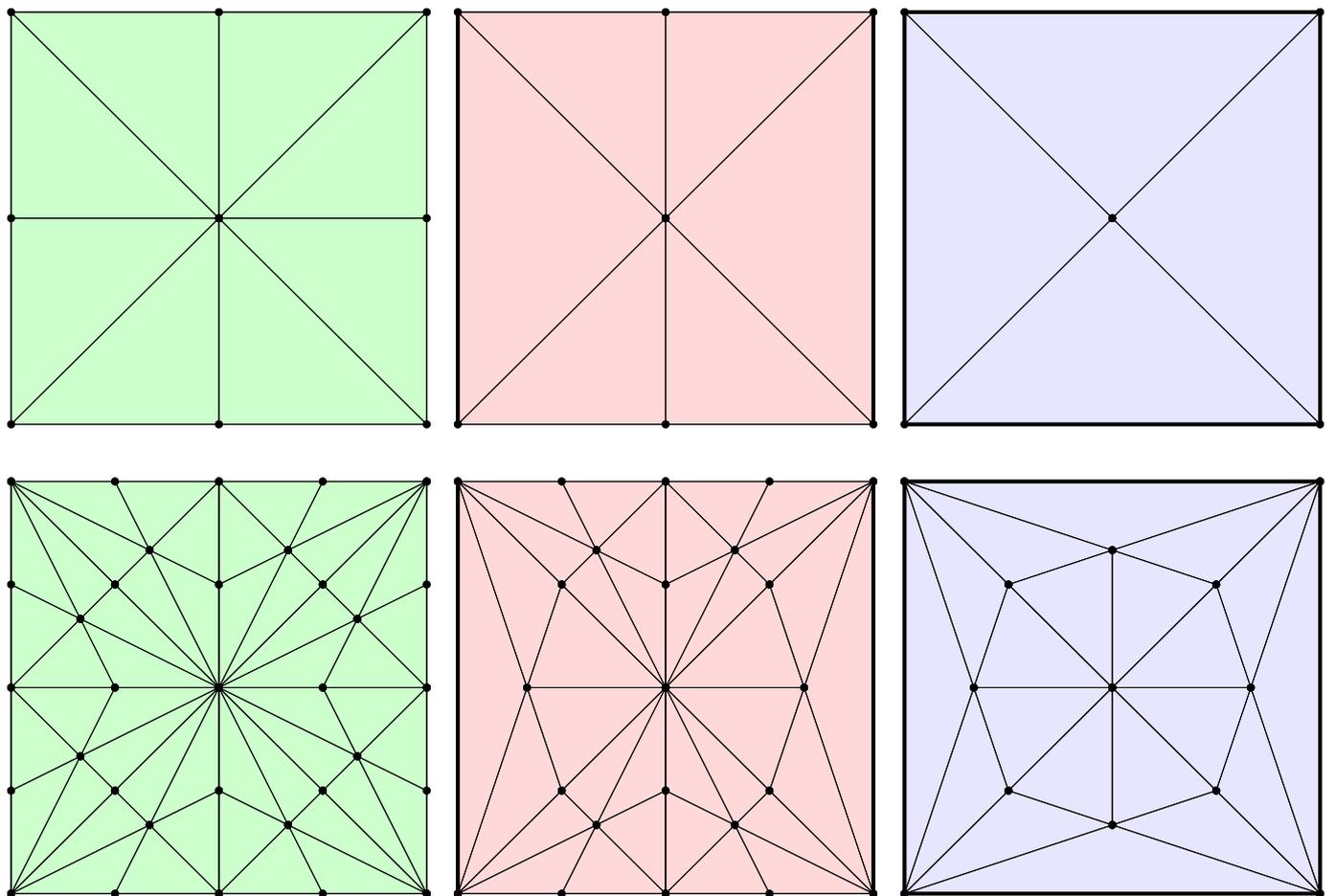
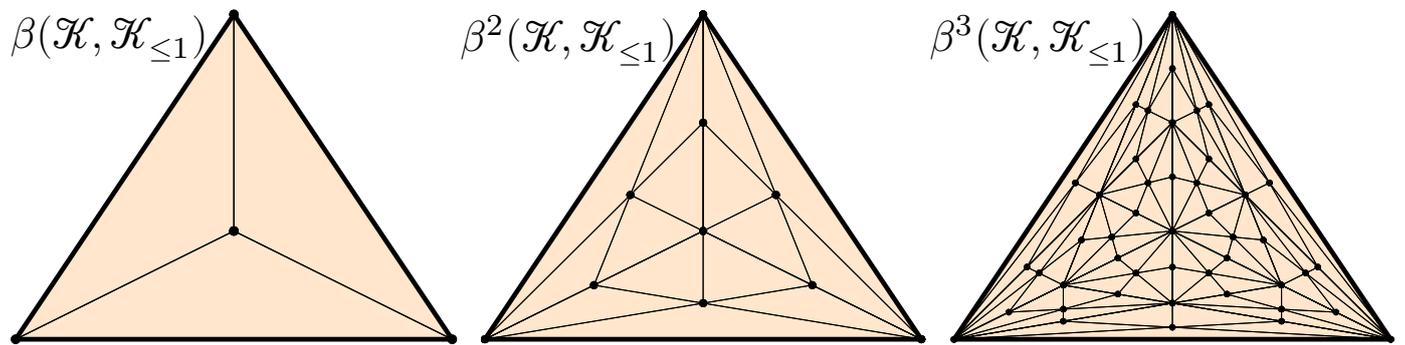
Beweis: Alles ist explizit angegeben, es genügt induktives Nachprüfen! Für (affine) simpliziale und polytopale Komplexe gilt folgende Beziehung:

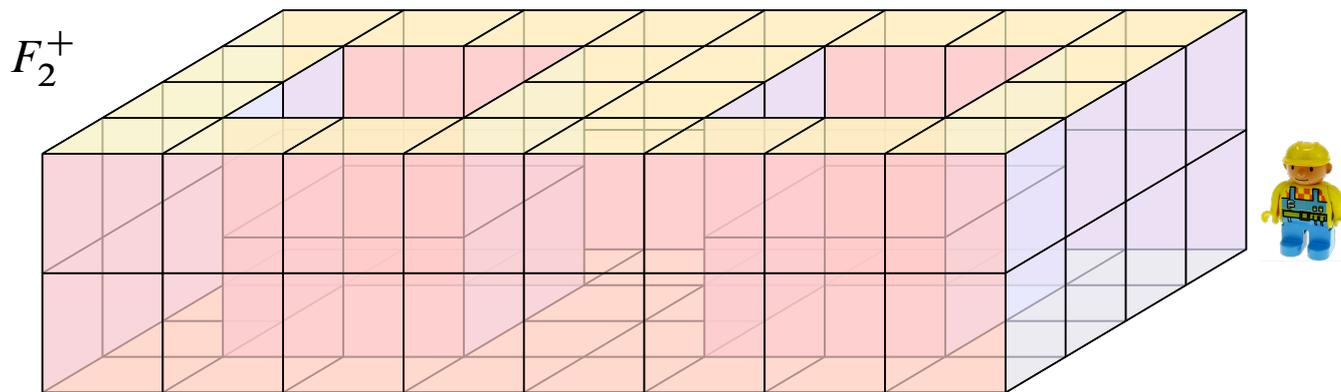
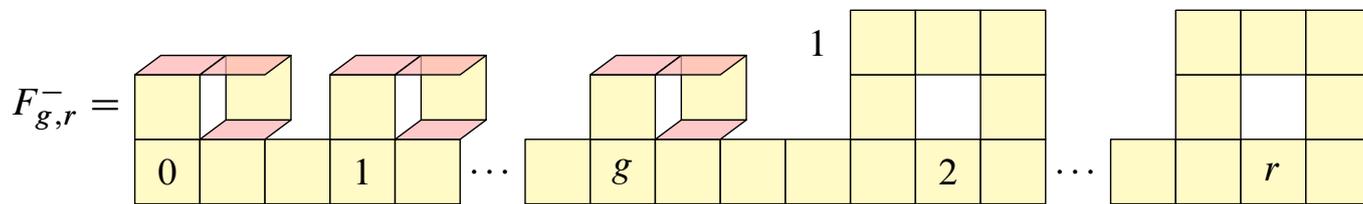
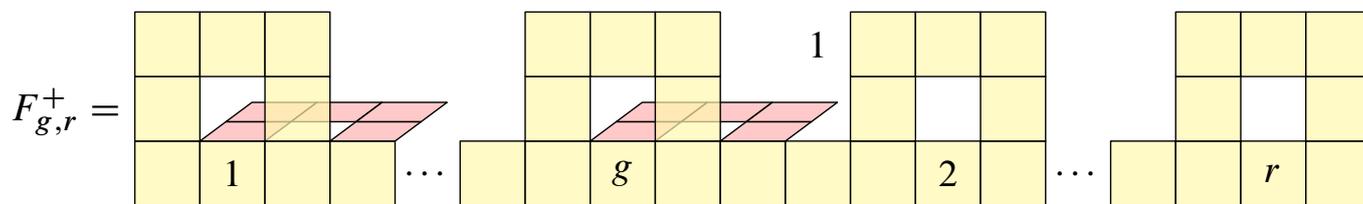
$$\mathcal{K} \text{ simplizial (I1c)} \Rightarrow \mathcal{K} \text{ polytopal (I3K)} \Rightarrow \beta(\mathcal{K}) \text{ simplizial (I3M)}$$

Baryzentrische Unterteilung eines Dreiecks $\mathcal{K} = \langle \Delta^2 \rangle$:



Baryzentrische Unterteilung eines Dreiecks \mathcal{K} relativ zum Rand $\mathcal{K}_{\leq 1}$:





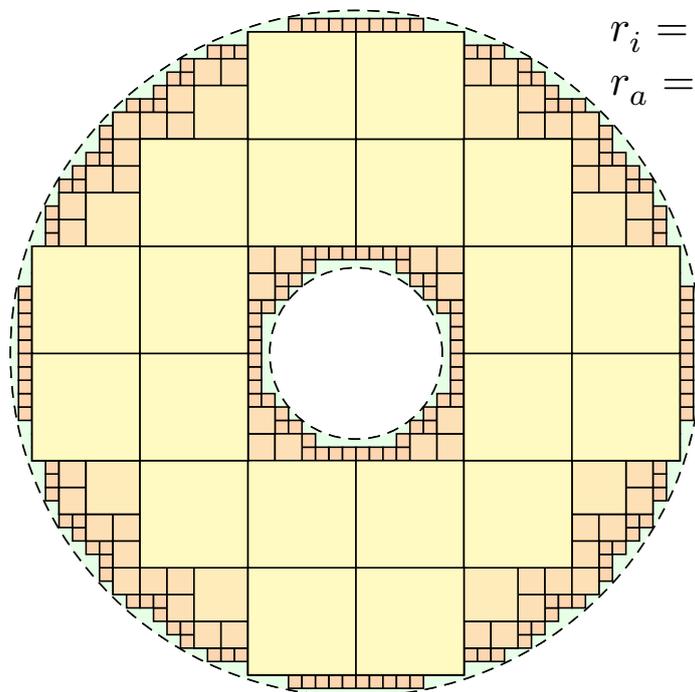
Jede offene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist triangulierbar.

Satz I3T: Runge 1884

Jede offene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ lässt sich affin triangulieren.

Beweis: Wir überdecken X mit immer kleiner werdenden Würfeln.

Fliesenerteis für die Menge X :
 Da X in \mathbb{R}^n offen ist, wird jeder
 Punkt $x \in X$ irgendwann überdeckt.



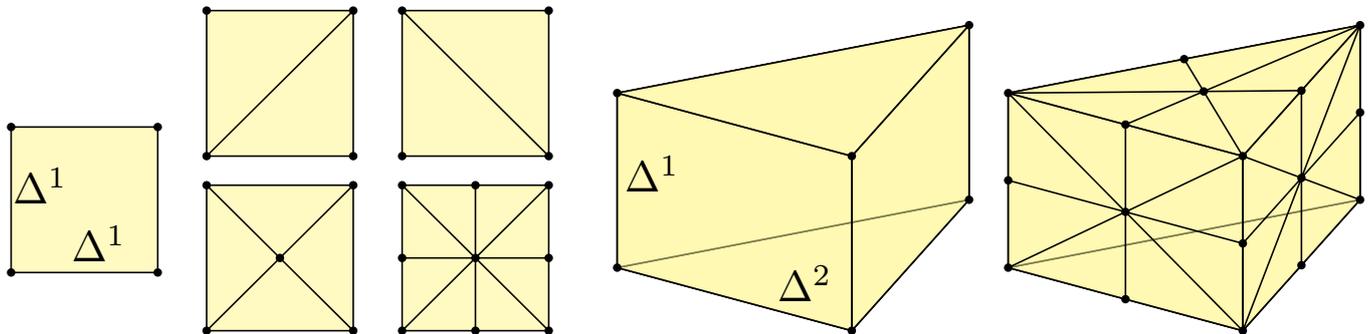
$r_i = 0.8$
 $r_a = 3.2$

Wir erhalten zu $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine
 lokal-endliche Überdeckung
 durch abgeschlossene Würfel.

Produkt von Simplizes und von Polytopen

Simplizes sind, wie ihr Name sagt, sehr einfache Objekte und haben viele gute Eigenschaften – aber leider auch einen Schönheitsfehler:

Das Produkt $\Delta^p \times \Delta^q$ mit $p, q \geq 1$ ist kein Simplex, sondern ein Polytop!



😊 Polytope sind stabil unter Produktbildung, Simplizes leider nicht.

Bereits für die bequeme Behandlung von Produkten lohnt sich unsere Investition in die Untersuchung polytopaler Komplexe. Zudem sind viele natürliche Beispiele nicht simplizial, sondern zunächst nur polytopal.

😊 Unterteilung liefert einen simplizialen Komplex.

Produkt von simplizialen / polytopalen Komplexen

Satz I3v: Produkt von simplizialen / polytopalen Komplexen

(1) Sind \mathcal{K} in V und \mathcal{L} in W polytopale Komplexe, so auch ihr Produkt

$$\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L} := \{P \times Q \mid P \in \mathcal{K}, Q \in \mathcal{L}\} \quad \text{in } V \times W.$$

Unterteilung $\mathcal{M} = \beta(\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L})$ trianguliert $|\mathcal{M}| = |\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}| = |\mathcal{K}| \times |\mathcal{L}|$.

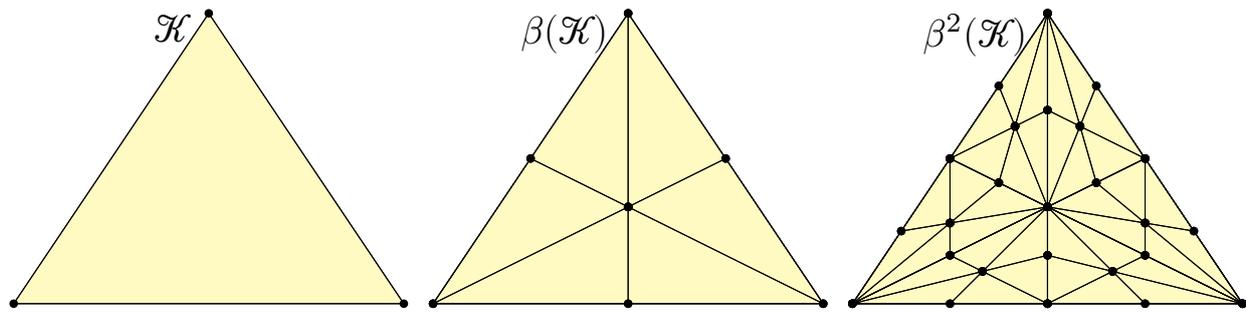
(2) Sind die Komplexe \mathcal{K} und \mathcal{L} lokal-endlich, so auch $\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}$ und \mathcal{M} , und die polytopale Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = \mathcal{T}_{\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}}$ auf $|\mathcal{M}| = |\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}|$ stimmt überein mit der Produkttopologie \mathcal{T} auf $|\mathcal{K}| \times |\mathcal{L}|$ (E1N).

Andernfalls ersetze \mathcal{T} durch die kompakt erzeugte Topologie $k\mathcal{T}$ (F3R).

Wir erhalten so $|\mathcal{K}| \times |\mathcal{L}| = |\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}| = |\mathcal{M}|$ als topologische Räume.

(3) Verträglichkeit: Für alle Teilkomplexe $\mathcal{A} \leq \mathcal{K}$ und $\mathcal{B} \leq \mathcal{L}$ wird das Produkt $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$ trianguliert durch den Teilkomplex $\beta(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}) \leq \mathcal{M}$.

(4) Es gilt $\dim(\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}) = \dim(\mathcal{K}) + \dim(\mathcal{L})$, sogar für $\dim\{\emptyset\} = -\infty$. Für endliche Polytopalkomplexe gilt zudem $\chi(\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}) = \chi(\mathcal{K}) \cdot \chi(\mathcal{L})$.

**Satz 14A:** simpliziale Approximation, Vorschau und Kurzfassung

Seien K und L Simplizialkomplexe. Jede stetige Abbildung $f : |K| \rightarrow |L|$ ist homotop zu einer simplizialen Abbildung $|\varphi| : |K'| \rightarrow |L|$ auf $K' \preceq K$.

Genauer: Es existiert eine Unterteilung $K' \preceq K$ desselben Polyeders $|K'| = |K|$ sowie eine simpliziale Abbildung $\varphi : K' \rightarrow L$ mit Realisierung $g = |\varphi| : |K'| \rightarrow |L|$ und eine affine Homotopie $H : f \simeq g$ vermöge

$$H : [0, 1] \times |K'| \rightarrow |L| : (t, x) \mapsto (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Ist der Komplex K endlich, so genügt hierzu iterierte baryzentrische Unterteilung, also $K' = \beta^m K$ für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$.

Simpliziale Approximation, Vorschau und Kurzfassung

Wir haben bislang vorrangig topologische Räume X untersucht und in vielen wichtigen Fällen Triangulierungen $|K| \cong X$ konstruiert.

😊 Wir ersetzen einen komplizierten Raum X durch einen simplen $|K|$.

Der nächste wichtige Schritt ist nun, stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ bzw. äquivalent hierzu $f : |K| \rightarrow |L|$ auf Polyedern zu untersuchen.

Eine solche stetige Abbildung $f : |K| \rightarrow |L|$ wird im Allgemeinen nicht die durch K und L definierten simplizialen Strukturen respektieren.

Hier müssen wir korrigieren: Wir ersetzen $f : |K| \rightarrow |L|$ durch eine simpliziale Abbildung $|\varphi| : |K| \rightarrow |L|$, per simplizialer Approximation. Dabei machen wir einen Fehler – *ganz bewusst, zur Approximation* – doch er ist klein: Unsere beiden Abbildungen $f \simeq |\varphi|$ sind homotop.

Genauer liegen f und $g = |\varphi|$ so nah beieinander, dass eine affine Homotopie sie verbinden kann, also die denkbar einfachste Lösung:

$$H : [0, 1] \times |K'| \rightarrow |L| : (t, x) \mapsto (1 - t)f(x) + tg(x).$$

😊 Wir ersetzen eine komplizierte Abbildung f durch eine simple g .

Kleine Sphären in großen: $[S^k, S^n] = \{*\}$ für $k < n$

Satz I4B: kleine Sphären in großen zusammenziehen

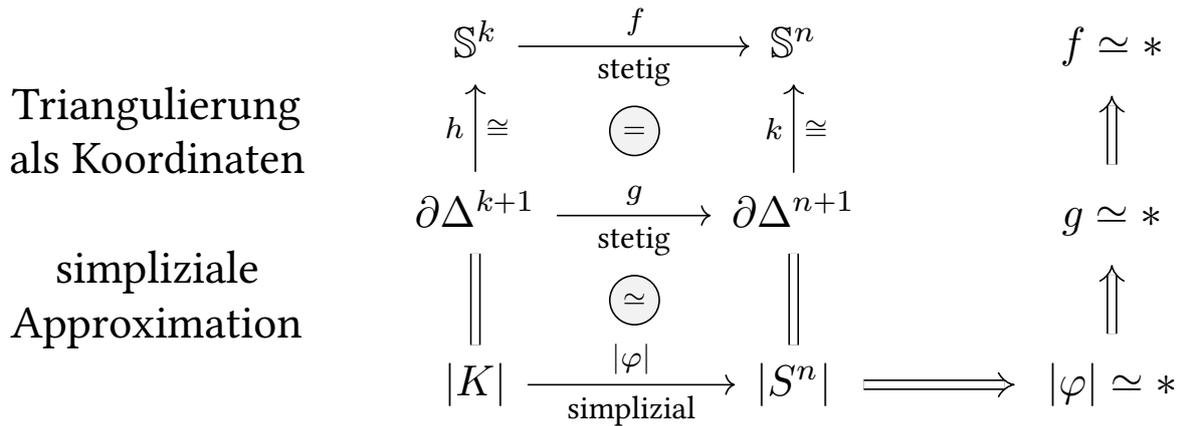
Für alle $0 \leq k < n$ gilt $[S^k, S^n] = \{*\}$.

Beweis: (1) Verfehlt $f : S^k \rightarrow S^n$ einen Punkt $y \in S^n$, so gilt $f \simeq *$ (G4D).

⚠ Es gibt flächenfüllende Wege $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ (Peano, Hilbert, ...)

Somit existieren stetige Surjektionen $f : S^k \rightarrow S^n$ für alle $1 \leq k < n$.

(2) Hier rettet uns der simpliziale Approximationssatz I4A!



Aus Dimensionsgründen ist $|\varphi|$ nicht surjektiv, also $|\varphi| \simeq *$ (G4D).

QED

Kleine Sphären in großen: $[S^k, S^n] = \{*\}$ für $k < n$

Erinnerung: Wir triangulieren $\Delta^n \cong \mathbb{D}^n$ und $\partial\Delta^n \cong S^{n-1}$ durch

$$\mathcal{D}^n = \langle \Delta^n \rangle = \{ \Delta' \mid \Delta' \leq \Delta^n \} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}^{n-1} = \{ \Delta' \mid \Delta' < \Delta^n \}.$$

Dies entspricht den kombinatorischen Simplizialkomplexen

$$D^n = \mathfrak{B}\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \quad \text{und} \quad S^{n-1} = D^n \setminus \{e_0, e_1, \dots, e_n\}.$$

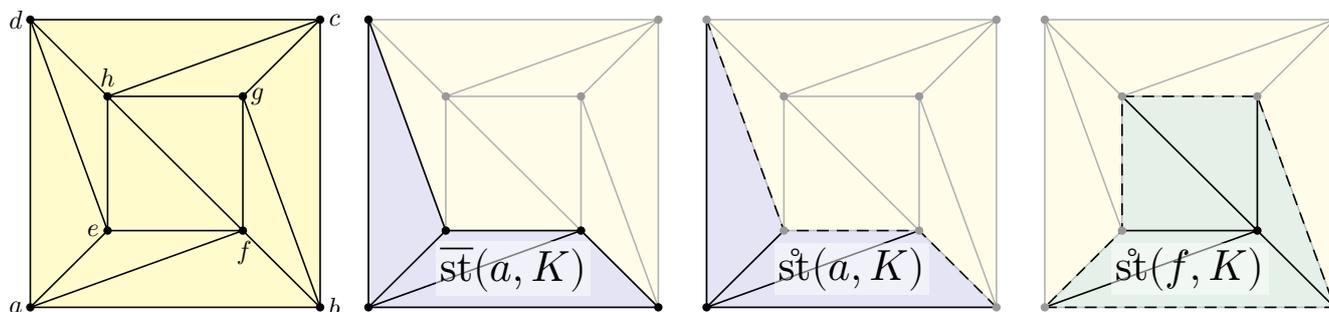
In der vorliegenden Anwendung triangulieren wir unsere Sphären vermöge $h : \partial\Delta^{k+1} \xrightarrow{\simeq} S^k$ und $k : \partial\Delta^{n+1} \xrightarrow{\simeq} S^n$ (I3c). Statt $f : S^k \rightarrow S^n$ betrachten wir äquivalent $g = k^{-1} \circ f \circ h : \partial\Delta^{k+1} \rightarrow \partial\Delta^{n+1}$.

Nun kommt die entscheidende Vereinfachung: Dank Satz I4A existiert zu g eine simpliziale Approximation $\varphi : S^k \xrightarrow{\simeq} K \rightarrow S^n$, also $g \simeq |\varphi|$.

Es gilt $\dim K = \dim S^k = k < n = \dim S^n$. Daher trifft $|\varphi|$ nicht das Innere $\text{Int}[T]$ des n -Simplex $T = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Dank (1) folgt $|\varphi| \simeq *$.

Noch schöner: Das Komplement $\partial\Delta^{n+1} \setminus \text{Int}[T] = \overline{\text{st}}(e_0) \simeq e_0$ ist sternförmig zur Ecke e_0 , damit folgt $f \simeq g \simeq |\varphi| \simeq *$.

QED



Definition I4c: Eckenstern

Der **abgeschlossene Stern** um die Ecke $a \in \Omega$ in K ist

$$\overline{\text{st}}(a) = \overline{\text{st}}(a, K) := \bigcup \{ [S] \mid a \in S \in K \}.$$

Der **offene Stern** um die Ecke $a \in \Omega$ in K ist

$$\begin{aligned} \text{st}(a) = \text{st}(a, K) &:= B_K(a, 1) && \text{in der simplizialen Metrik (I2I)} \\ &= \{ x \in |K| \mid x(a) > 0 \} && \text{in baryzentrischen Koordinaten (I2D)} \\ &= \bigsqcup \{ \text{Int}[S] \mid a \in S \in K \} && \text{als Vereinigung offener Simplexes.} \end{aligned}$$

Letzteres gilt, denn jeder Punkt $x \in |K|$ liegt im Inneren genau eines Simplex $S = \text{supp}(x)$, und $x(a) > 0$ ist gleichbedeutend mit $a \in S$.

Polyeder sind lokal zusammenziehbar.

Die offenen Sterne $\text{st}(a, K)$ überdecken das Polyeder $|K|$. Sowohl in der simplizialen als auch in der metrischen Topologie ist der offene Stern $\text{st}(a, K)$ offen und der abgeschlossene Stern $\overline{\text{st}}(a, K)$ abgeschlossen.

Satz I4d: Polyeder sind lokal zusammenziehbar.

(1) Jede Ecke $a \in \Omega(K)$ ist starker Deformationsretrakt ihres Sterns:

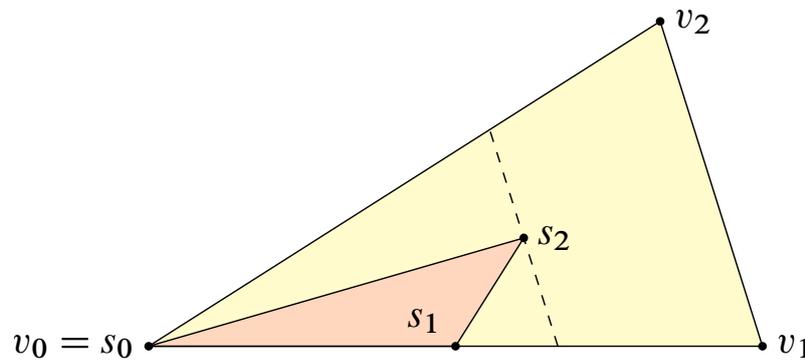
$$H : [0, 1] \times \overline{\text{st}}(a) \rightarrow \overline{\text{st}}(a) : (t, x) \mapsto ta + (1 - t)x$$

Diese Abbildung H ist wohldefiniert und stetig auf jedem Simplex. Gleiches gilt für jeden offenen Ball $B_K(a, r) \subseteq |K|$ mit Radius $r \in]0, 1]$.

(2) Jeder Punkt $a \in |K|$ ist Eckpunkt einer zentrischen Unterteilung (I3M) und dank (1) starker Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in $|K|$ etwa der Eckenstern $\text{st}(a, K') \subseteq |K|$ in der zentrischen Unterteilung K' .

Aufgabe: Die reelle Gerade \mathbb{R} ist triangulierbar, \mathbb{Q} hingegen nicht.

Lösung: Wir triangulieren $\mathbb{R} = |R|$ etwa durch $R = \langle \{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z} \rangle$. Der Raum \mathbb{Q} ist nicht lokal zusammenziehbar / zusammenhängend.

**Lemma I4E:** Schrumpfungsfaktor der baryzentrischen Unterteilung

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Norm $|\cdot|$ und Metrik d . Jeder n -Simplex $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] \subseteq V$ realisiert seinen Durchmesser auf den Ecken:

$$\text{diam}(\Delta) = \max\{d(v_i, v_j) \mid i, j = 0, \dots, n\}.$$

Nach baryzentrischer Unterteilung gilt für jeden Simplex $\Delta' \in \beta\langle \Delta \rangle$:

$$\text{diam}(\Delta') \leq q \text{diam}(\Delta) \quad \text{mit} \quad q = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Iteration liefert somit Durchmesser $\leq q^m \text{diam} \Delta \searrow 0$.

Beliebig feine simpliziale Unterteilung

😊 Damit können wir Simplizes beliebig fein unterteilen! Genauer:

Satz I4F: beliebig feine simpliziale Unterteilung

Gegeben sei ein kombinatorischer Simplizialkomplex K in V und eine offene Überdeckung $U = (U_i)_{i \in I}$, also $|K| = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_K$.

(1) Dann existiert zu K eine U -feine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, das heißt, für jede Ecke $a \in \Omega(K')$ liegt der Stern $\overline{\text{st}}(a, K')$ ganz in einer der Mengen U_i .

(2) Ist $A \leq K$ ein Teilkomplex, sodass für jede Ecke $a \in \Omega(A)$ der Stern $\overline{\text{st}}(a, A)$ bereits ganz in einer der Mengen U_i liegt, so braucht A nicht unterteilt zu werden, es genügt eine relative Unterteilung mit $A \leq K'$.

(3) Ist der Komplex K endlich, so genügt hierzu iterierte baryzentrische Unterteilung, absolut $K' = \beta^m K$ oder relativ $(K', A) = \beta^m(K, A)$.

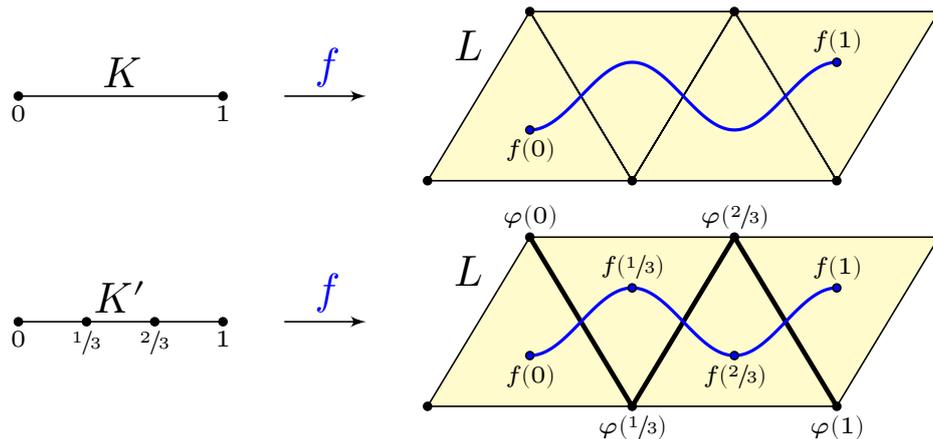
Beweis für K endlich und $A = \{\emptyset\}$: Da $|K|$ kompakt ist, existiert zu der offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eine Lebesgue-Zahl $\lambda > 0$ (F2B).

Iterierte baryzentrische Unterteilung liefert $q^m \searrow 0$ (I4E).

Allgemein: Induktion über Skelette, Lebesgue für jeden Simplex. □ QED

Definition I4H: sternartige Abbildungen

Seien K, L Simplizialkomplexe und $f : |K| \rightarrow |L|$ eine stetige Abbildung. Wir nennen f **sternartig** bezüglich K und L , wenn f jeden offenen Stern $\text{st}(a, K)$ in einen offenen Stern $\text{st}(b, L)$ abbildet. Demnach existiert also $\varphi : \Omega(K) \rightarrow \Omega(L)$ mit $f(\text{st}(a, K)) \subseteq \text{st}(\varphi(a), L)$ für jede Ecke $a \in \Omega(K)$. In diesem Falle nennen wir φ eine **simpliziale Approximation** von f .



Übung: Es gibt zu f bezüglich K' und L drei weitere Approximationen.

Homotopie zur simplizialen Approximation

Lemma I4i: Homotopie zur simplizialen Approximation

Jede simpliziale Approximation $\varphi : \Omega(K) \rightarrow \Omega(L)$ von $f : |K| \rightarrow |L|$ erfüllt:

- (1) Die Abbildung φ ist simplizial (I2G): Für alle $S \in K$ gilt $\varphi(S) \in L$.
- (2) Für jedes $x \in |K|$ liegen $f(x)$ und $|\varphi|(x)$ im Simplex $[\text{supp } f(x)] \subseteq |L|$.
- (3) Es gilt $f \simeq |\varphi|$ vermöge der Homotopie $H(t, x) = (1 - t)f(x) + t|\varphi|(x)$.

Beweis: Es gilt $x \in \text{st}(s_0, K) \cap \dots \cap \text{st}(s_n, K)$ gdw $s_0, \dots, s_n \in \text{supp}(x)$ (I4c).

- (1) Zum Simplex $S = \{s_0, \dots, s_n\} \in K$ wählen wir einen inneren Punkt $x \in \text{Int}[S] \subseteq \text{st}(s_0, K) \cap \dots \cap \text{st}(s_n, K)$. Nach Voraussetzung zu f und φ gilt dann $f(x) \in \text{st}(\varphi(s_0), L) \cap \dots \cap \text{st}(\varphi(s_n), L)$. Das wiederum bedeutet $\varphi(S) = \{\varphi(s_0), \dots, \varphi(s_n)\} \subseteq \text{supp } f(x)$. Mit $\text{supp } f(x) \in L$ folgt $\varphi(S) \in L$.
- (2) Sei $x \in \text{Int}[S]$ mit $S \in K$. Dank (1) gilt $|\varphi|(x) \in [\varphi(S)] \subseteq [\text{supp } f(x)]$.
- (3) Die Abbildung $H : [0, 1] \times |K| \rightarrow |L|$ mit $H(t, x) = (1 - t)f(x) + t|\varphi|(x)$ ist wohldefiniert dank (2) und stetig auf jedem Simplex von $\langle \{0, 1\} \rangle \times K$, somit stetig in der simplizialen Topologie auf $[0, 1] \times |K|$ (I1c). QED

Satz I4J: simpliziale Approximation

(1) Seien K und L Simplizialkomplexe und $f : |K| \rightarrow |L|$ stetig. Dann existiert eine Unterteilung $K' \preceq K$, auf der f sternartig ist zu $\varphi : \Omega(K') \rightarrow \Omega(L)$ und somit homotop zu $g = |\varphi| : |K'| \rightarrow |L|$ vermöge

$$H : [0, 1] \times |K'| \rightarrow |L| : (t, x) \mapsto (1 - t)f(x) + tg(x).$$

(2) Ist die Abbildung f bereits simplizial auf einem Teilkomplex $A \leq K$, so können wir $A \leq K'$ zusichern, also $g|_{|A|} = f|_{|A|}$ und $H : f \simeq g \text{ rel } |A|$.

(3) Ist der Komplex K endlich, so genügt hierzu iterierte baryzentrische Unterteilung, absolut $K' = \beta^m K$ oder relativ $(K', A) = \beta^m (K, A)$.

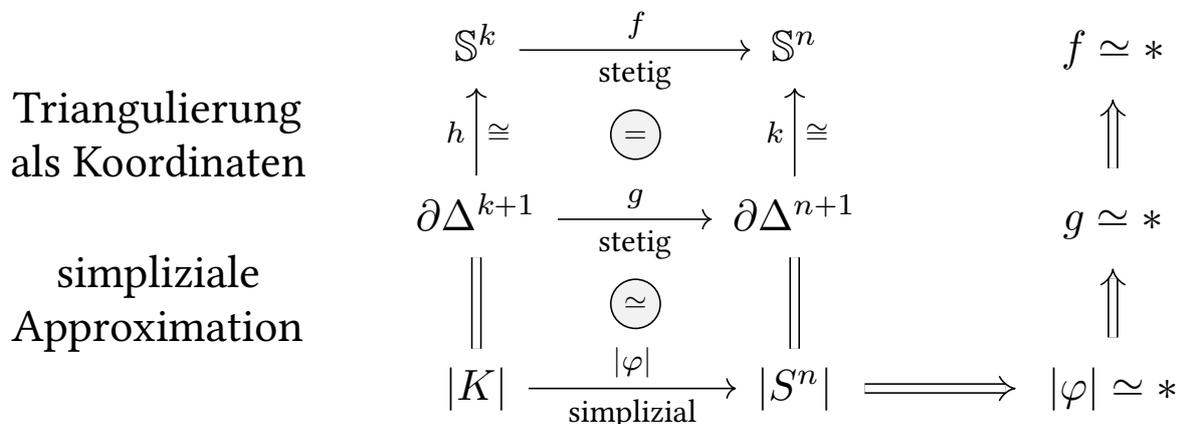
Beweis: Es gilt $|L| = \bigcup_{b \in \Omega(L)} \text{st}(b, L)$, also $|K| = \bigcup_{b \in \Omega(L)} f^{-1}(\text{st}(b, L))$. Dank Satz I4F existiert eine Unterteilung $K' \preceq K$, sodass zu jeder Ecke $a \in \Omega(K')$ ein $\varphi(a) \in \Omega(L)$ existiert mit $\text{st}(a, K') \subseteq f^{-1}(\text{st}(\varphi(a), L))$, also $f(\text{st}(a, K')) \subseteq \text{st}(\varphi(a), L)$. Also ist f sternartig zu $\varphi : \Omega(K') \rightarrow \Omega(L)$. QED

Kleine Sphären in großen: $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ für $k < n$

Satz I4B: kleine Sphären in großen zusammenziehen

Für alle $0 \leq k < n$ gilt $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ ist nullhomotop, $f \simeq *$, also homotop zu einer konstanten Abbildung.

Beweis: Wir nutzen simpliziale Approximation (Satz I4J):



Aus Dimensionsgründen ist $|\varphi|$ nicht surjektiv, also $|\varphi| \simeq *$ (G4D). QED

*Die simpliziale Technik führt uns ins gelobte Land der Topologie:
Sie macht stetiges linear, kompliziertes simpel, hässliches schön!*