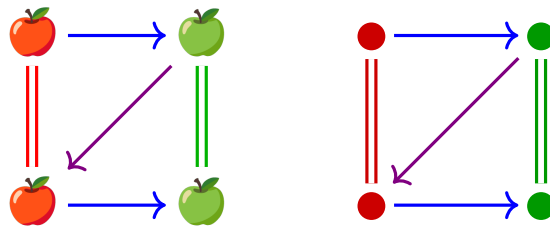


Kapitel H

Die Sprache der Kategorien



Oublions les choses, ne considérons que les rapports.
[Vergessen wir die Dinge, betrachten wir nur die Beziehungen.]
Georges Braques (1882–1963), Mitbegründer des Kubismus

Inhalt dieses Kapitels H

- 1 Kategorien... organisieren die Mathematik.
- 2 Kommutative Diagramme... schaffen Überblick.
- 3 Universelle Objekte... lösen universelle Probleme.
- 4 Funktoren... übersetzen zwischen Kategorien.
- 5 Transformationen... übersetzen zwischen Funktoren.
- 6 Adjungierte Funktoren... begegnen uns überall.

Gewisse Phänomene beobachten wir immer wieder. Das gilt insbesondere in der Mathematik, mit ausreichend Erfahrung und geschultem Blick. Sie verdienen einen Namen, nur so können wir darüber sprechen, präzise danach forschen und effizient damit arbeiten. Erste Beispiele:

Dinge verarbeiten, etwas tun	→	Mengen und Abbildungen
Operationen, Symmetrien	→	Monoide und Gruppen
Addition, Multiplikation	→	Ringe und Körper
Winkel, Längen messen	→	Skalarprodukt, Norm
Abstand und Stetigkeit	→	Metrik und Topologie

😊 Abstraktion hilft konkret! Sie strukturiert, ordnet und vereinfacht. Dadurch werden ihre Einzelfälle effizient und präzise zusammengefasst. Diese ordnende Vorgehensweise ist Kennzeichen jeder Wissenschaft und in der Mathematik besonders klar ausgeprägt und systematisiert. Ein gut verstandenes Beispiel nützt mehr als drei unverstandene Sätze. Ein gut verstandener Satz bündelt 1003 Beispiele. Nutzen Sie beides!

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
Ludwig Wittgenstein (1889–1951), *Tractatus logico-philosophicus* (1921)

Die Sprache der **Kategorien** hilft uns, häufig wiederkehrende Strukturen und Argumente effizient zu formulieren und prägnant zu kommunizieren. Genau dies ist das Ziel und der Nutzen jeder hochentwickelten Sprache: Sie ermöglicht uns, verschiedene Phänomene einheitlich zu beschreiben, Analogien zu erkennen und strukturelle Gemeinsamkeiten zu erfassen. Genau dies erleben und praktizieren Sie in allen Gebieten der Mathematik seit Ihren ersten Semestern. Diese Erfahrung können wir nun bündeln.

Die **Kategorientheorie** ist in diesem Sinne die Grammatik dieser Sprache, damit können wir nicht nur Kategorien in konkreten Beispiele anwenden, sondern auch allgemeine Aussagen und Konstruktionen für Kategorien und Funktoren formulieren und beweisen. Die **Kategorienpraxis** nutzt diese Sprache intuitiv, manchmal bewusst und noch öfter unbewusst. Wir wollen nun unsere guten Erfahrungen systematisieren und unsere erfolgreiche Sprache bewusst machen: von der Praxis zur Theorie!



Category theory takes a bird's eye view of mathematics. From high in the sky, details become invisible, but we can spot patterns that were impossible to detect from ground level.

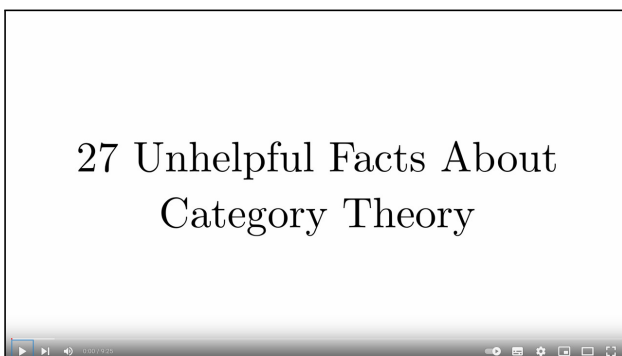
📖 Tom Leinster: Basic Category Theory (2014), online frei erhältlich
 Saunders MacLane: Categories for the Working Mathematician (1998)
 Emily Riehl: Category Theory in Context (2014)

Je mehr Mathematik Sie bereits kennen, desto mehr Struktur können Sie hier wiedererkennen und im Rückblick illustrative Beispiele genießen. Drei Einführungen mit Blick zur funktionalen Programmierung:

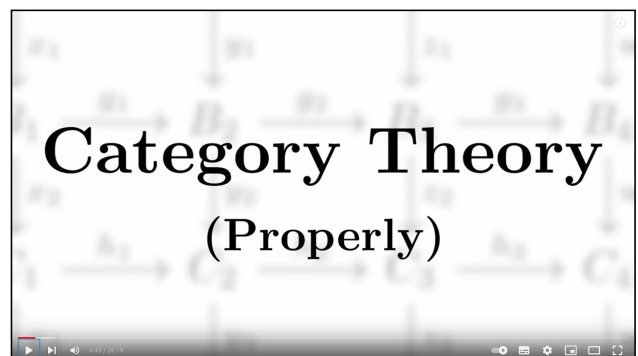
📖 Steve Awodey: Category Theory (2010)
 Bartosz Milewski: Category Theory for Programmers (2019)
 M. Barr, C. Wells: Category Theory for Computer Science (1998)

Die community-basierte Version ist *The nLab*: eine kollaborative Online-Referenz auf Forschungsniveau. Das sollten Sie mal gesehen haben, sehr beeindruckend und auch recht nerdig, auf eine gute Art.

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut. Insbesondere der Mathematik wird oft Abstraktion vorgeworfen, meist aus pauschalem Unverständnis, ohne Grund noch Nutzen zu verstehen. Innerhalb der Mathematik trifft dieser Vorwurf oft die Kategorientheorie. Ihre Adepten empfinden „abstrakt“ als Lob für elegante Einfachheit und sprechen selbst ironisch-aner kennend von „*general abstract nonsense*“. Hierzu zwei amüsante und doch lehrreiche Videos von Oliver Lugg:



youtu.be/H0Ek86IH-3Y



youtu.be/yAi3XWCBkDo

*Viele halten Kategorien für abstrakten Quatsch,
doch nur Wenige haben Recht.*

Auf Nachfrage von Studierenden der Topologie im SoSe 2022 organisierte ich im WiSe 2022/23 ein Seminar zur Kategorientheorie. Gespräche in den Folgesemestern zeigten: Wider alle Erwartungen, Kategorien haben Anwendungen! Wer die Sprache der Kategorien beherrscht, kann diese Struktur überall erkennen und gewinnbringend nutzen, natürlich in der Mathematik, und sogar in der Informatik und der Physik.

Die eine oder der andere ist jetzt enttäuscht, vielleicht sogar alle beide. Versprochen wurde ein wunderschönes Thema allein um seiner Eleganz und der tieferen Erkenntnis willen, reine Mathematik garantiert ohne Anwendungszwang, *pour l'honneur de l'esprit humain*. Nun stellt sich heraus, dass selbst die Kategorientheorie im mathematischen Alltag durchaus nutzbringend eingesetzt wird, zwar nicht muss, aber doch kann. Wir üben uns in Toleranz, auch dieser Kollateralnutzen ist willkommen!

This concept of category is an omni-purpose affair. [...] It frames a possible template for any mathematical theory: the theory should have nouns and verbs, i.e., objects, and morphisms, and there should be an explicit notion of composition related to the morphisms; the theory should, in brief, be packaged by a category.

There is hardly any species of mathematical object that doesn't fit into this convenient, and often enlightening, template.

Barry Mazur, *When is one thing equal to some other thing?* (2007)

Wir Menschen können eine Sprache auf zwei Arten lernen: als Kind typischerweise intuitiv durch Nachahmung und interaktive Erfahrung, später dann ergänzt durch Regeln und eine systematische Grammatik.

Die Sprache der Kategorien ist ein extrem mächtiges Hilfsmittel. Damit können Sie einfache Dinge verblüffend kompliziert ausdrücken, aber glücklicherweise auch sehr komplizierte Dinge einfach formulieren. Das ist mit natürlichen Sprachen nicht anders, ihr Nutzen entsteht durch guten Gebrauch. Üben Sie das rechte Maß an Abstraktion!

Wo begegnen uns Kategorien? Überall!

In der Topologie untersuchen und nutzen wir stetige Abbildungen:

$$\text{Top} = (\underbrace{\text{topologische Räume } A}_{(a) \text{ Objekte}}, \underbrace{\text{stetige Abb. } f : A \rightarrow B}_{(b) \text{ Morphismen}}, \underbrace{\text{Komposition } \circ}_{(c) \text{ Verknüpfung}})$$

(a) Objekte sind topologische Räume A, B, C, D, \dots

(b) Morphismen sind stetige Abb. $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D, \dots$
 Für jeden Raum B ist die Identität $\text{id}_B : B \rightarrow B : b \mapsto b$ stetig.

(c) Sind $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ stetig, so auch ihre Verknüpfung $g \circ f : A \rightarrow C$ gegeben durch die Komposition $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

(0) Jede Abbildung f bestimmt ihren Start $s(f) = A$ und ihr Ziel $t(f) = B$.

$$f : A \rightarrow B$$

(1) Bei Verknüpfung ist id_B neutral: Für alle $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ gilt

$$\text{id}_B \circ f = f \quad \text{und} \quad g \circ \text{id}_B = g.$$

(2) Die Verknüpfung ist assoziativ: Für verknüpfbare Abbildungen gilt

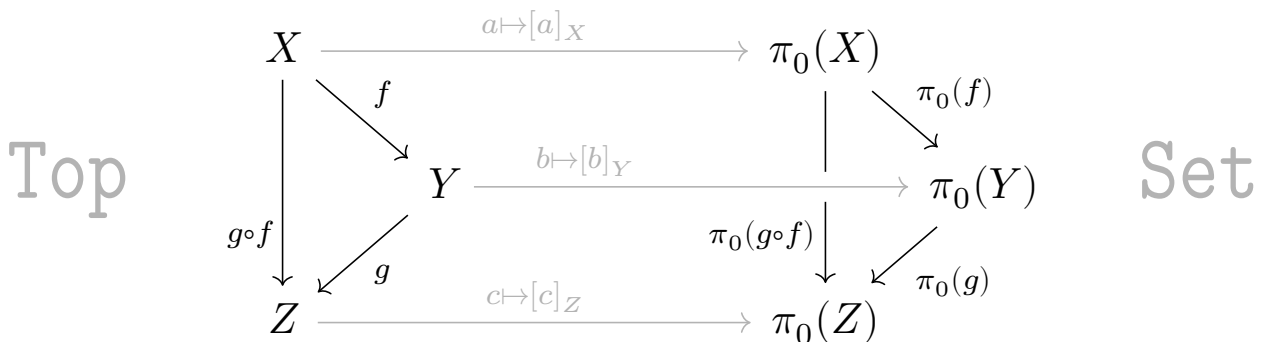
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Wo begegnen uns Kategorien? Überall!

Grundlegend für die gesamte Mathematik sind Mengen und Funktionen:

$$\text{Set} = (\underbrace{\text{Mengen } X}_{(a) \text{ Objekte}}, \underbrace{\text{Abbildungen } f : X \rightarrow Y}_{(b) \text{ Morphismen}}, \underbrace{\text{Komposition } \circ}_{(c) \text{ Verknüpfung}})$$

Auch diese Daten (a,b,c) erfüllen die Rechenregeln (0,1,2) einer **Kategorie!**
 Wir nutzen diese **Kategorien** und zudem **Funktoren** zwischen ihnen:



Der Funktor $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ ordnet jedem topologischen Raum X eine Menge $\pi_0(X)$ zu und jeder stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ und respektiert Identitäten und Kompositionen.

Wo begegnen uns Kategorien? Überall!

Die **Lineare Algebra** untersucht und nutzt lineare Abbildungen:

$$\text{Vec}_K = (\underbrace{K\text{-Vektorräume } V}_{\text{(a) Objekte}}, \underbrace{K\text{-lineare Abb. } f: V \rightarrow W}_{\text{(b) Morphismen}}, \underbrace{\text{Komposition } \circ}_{\text{(c) Verknüpfung}})$$

Die **Analysis** untersucht und nutzt differenzierbare Abbildungen:

$$\mathcal{C}^1 = (\underbrace{U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}}_{\text{(a) Objekte}}, \underbrace{f: U \rightarrow V \text{ stetig differenzierbar}}_{\text{(b) Morphismen}}, \underbrace{\text{Komposition } \circ}_{\text{(c) Verknüpfung}})$$

Auch diese Daten (a,b,c) erfüllen die Rechenregeln (0,1,2) einer **Kategorie!**

Die Ableitung $D: \mathcal{C}_*^1 \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}$ ist dank Kettenregel ein **Funktor!**

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^p \supseteq U, a & & T_a U = \mathbb{R}^p \\
 \downarrow g \circ f & \searrow f & \downarrow D_a(f) \\
 \mathbb{R}^q \supseteq V, b & & T_b V = \mathbb{R}^q \\
 \downarrow g & \swarrow g & \downarrow D_b(g) \\
 \mathbb{R}^r \supseteq W, c & & T_c W = \mathbb{R}^r
 \end{array}
 \quad \text{Vec}_{\mathbb{R}}$$

Wo begegnen uns Kategorien? Überall!

Die Daten von Vec_K und \mathcal{C}^1 definieren die Objekte und ihre Morphismen; die Verknüpfung \circ ist die für Abbildungen übliche Komposition. Es gilt:
 (0) Jede Abbildung f bestimmt ihren Start $s(f)$ und ihr Ziel $t(f)$.
 (1) Die Identität ist neutral. (2) Die Verknüpfung ist assoziativ.

Zur Ableitung $D: \mathcal{C}_*^1 \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}$ müssen wir einen Punkt $a \in U$ angeben, an dem die Ableitung $D_a(f) = f'(a)$ berechnet werden soll.

Dazu besteht \mathcal{C}_*^1 aus Objekten (U, a) mit $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und U offen sowie Morphismen $f: (U, a) \rightarrow (V, b)$ mit $f: U \rightarrow V$ stetig diff'bar und $f(a) = b$.

Die Ableitung D ordnet (U, a) den Tangentialraum $T_a U = \mathbb{R}^n$ zu und $f: (U, a) \rightarrow (V, b)$ die Ableitung $D_a f: T_a U \rightarrow T_b V$, aka Jacobi-Matrix. Dabei gilt $D(\text{id}_{(U,a)}) = \text{id}_{T_a U}$ und die Kettenregel $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$. Das bedeutet kurz gesagt: Die Ableitung D ist ein kovarianter **Funktor!**

😊 Wer hätte das gedacht: Sie benutzen Kategorien und Funktoren nicht nur hier in der Topologie, sondern schon seit einigen Semestern überall in der Mathematik – anfangs noch unbewusst, ohne es zu bemerken. Nun werden Sie sich dieser grundlegenden Struktur bewusst.

😊 Diese Begriffe wollen wir nun präzisieren und nutzen lernen.

Diese ersten Beispiele zeigen bereits eindrücklich: Von Anbeginn Ihres Studiums nutzen Sie ganz natürlich Kategorien und Funktoren. Erst zaghaft und unbewusst, dann zunehmend und selbstbewusst.

Wie ein Fisch im Wasser schwimmt, wie ein Vogel in der Luft fliegt, so bewegen Sie sich in Ihrem Mathematikstudium in Kategorien, auch wenn Sie davon vermutlich lange noch nichts bemerken.

Sie benötigen dafür zunächst keine Sprache, um darüber zu reden, Sie tun es einfach. Die diversen Beispiele sehen alle ähnlich aus, doch erst ab einer kritischen Masse lohnt sich die Abstraktion.

Ich denke, die kritische Masse ist nun erreicht: Wir haben genug eindrückliche Beispiele, um diese in geeignete Begriffe zu fassen. Weitere Beispiele werden folgen, die Investition wird sich lohnen.

Schaffen wir also Ordnung! *Simplify your Math!*



Viele Menschen sind begeistert von Kategorien und bekunden dies auch, daher finden wir überall den Leitspruch: *All Categories Are Beautiful!*



Hier eine kurze Werbung für Kategorien vor der Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen. *Once you know, you cannot unsee it!*



Auch unsere Fachgruppe Mathematik liebt Kategorien, engl. *categories*, liebevoll abgekürzt *cats*. Hier sehen wir zwei *emotional support cats*.

Definition H1A: Kategorie

Eine **Kategorie** $\mathcal{C} = (\text{Ob}, \text{Mor}, \circ)$ besteht aus drei **Daten**:

- (a) eine Klasse Ob , deren Elemente wir **Objekte** von \mathcal{C} nennen,
- (b) zu je zwei Objekten A, B eine Klasse $\text{Mor}(A, B)$ von **Morphismen**,
- (c) zu je drei Objekten $A, B, C \in \text{Ob}$ eine **Verknüpfung** von Morphismen,
 - $\circ : \text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C) : (g, f) \mapsto g \circ f$ „ g nach f “,
 - $\bullet : \text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C) : (f, g) \mapsto f \bullet g$ „ f dann g “.

Diese drei Daten müssen die folgenden drei **Eigenschaften** erfüllen:

- (0) **Disjunktion:** Für $(A, B) \neq (A', B')$ gilt $\text{Mor}(A, B) \cap \text{Mor}(A', B') = \emptyset$.
Für $f \in \text{Mor}(A, B)$ von $A := s(f)$ nach $B := t(f)$ schreiben wir $f : A \rightarrow B$.
- (1) **Identität:** Zu jedem $B \in \text{Ob}$ existiert eine Identität $\text{id}_B \in \text{Mor}(B, B)$ mit $\text{id}_B \circ f = f$ und $g \circ \text{id}_B = g$ für alle $f \in \text{Mor}(A, B)$ und $g \in \text{Mor}(B, C)$.
- (2) **Assoziativität:** Es gilt die Gleichheit $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ für alle $A, B, C, D \in \text{Ob}$ und $f \in \text{Mor}(A, B)$, $g \in \text{Mor}(B, C)$, $h \in \text{Mor}(C, D)$.

Zur Angabe einer Kategorie $\mathcal{C} = (\text{Ob}, \text{Mor}, \circ)$ benötigen wir drei **Daten**:

- (a) Welche Objekte und (b) welche Morphismen gehören zur Kategorie \mathcal{C} ?
- (c) Wie werden die Morphismen in \mathcal{C} verknüpft? Diese drei Daten (a,b,c) müssen dann noch die drei grundlegenden Eigenschaften (0,1,2) erfüllen.

In unserer Definition H1A einer Kategorie \mathcal{C} sprechen wir nicht von der *Menge* $\text{Ob}_{\mathcal{C}}$, sondern vorsichtig von der *Klasse* $\text{Ob}_{\mathcal{C}}$ aller Objekte in \mathcal{C} .

Beispiel: Wir möchten von der Kategorie *Set* aller Mengen sprechen. Diese ist jedoch nachweislich zu groß, um selbst eine Menge zu sein.

Beweis: Die Annahme einer „Menge U aller Mengen“ führt zwangsläufig zu Widersprüchen, insbesondere der **Russelschen Antinomie** (B107):

In der Menge U hätten wir die Teilmenge $R = \{x \in U \mid x \notin x\}$ aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Dies ist eine Menge, also $R \in U$. Für jede Menge $x \in U$ gilt $x \in R \Leftrightarrow x \notin x$, insbesondere $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.

Das ist eine logische Katastrophe: Wahr und Falsch wären äquivalent! Falls die Allmenge U existiert, so bricht unsere gesamte Logik zusammen. Einziger Ausweg: Die Allklasse U ist selbst keine Menge. QED

Konvention: Eine Kategorie $\mathcal{C} = (\text{Ob}, \text{Mor}, \circ)$ heißt **klein**, wenn ihre Objektklasse Ob und ihre Morphismenklasse Mor beides Mengen sind. Die Kategorie \mathcal{C} heißt **lokal klein**, wenn zu je zwei Objekten $A, B \in \text{Ob}$ die zugehörige Morphismenklasse $\text{Mor}(A, B)$ eine Menge ist.

Beispiele: Die Kategorie Set ist nicht klein, aber immerhin lokal klein. Dasselbe gilt für die Kategorien Top und Vec_K . Die Kategorie \mathcal{C}^1 ist klein.

Eigenschaft (0) nutzen wir (unterbewusst) überall in der Mathematik, zuerst bereits wenn wir über Injektivität und Surjektivität sprechen.

Die Eigenschaft (1) bestimmt die Identität id_B zu B eindeutig:

Sind $\text{id}_B, \text{id}'_B \in \text{Mor}(B, B)$ neutral, so folgt $\text{id}'_B = \text{id}_B \circ \text{id}'_B = \text{id}_B$.

Die Assoziativität (2) kennen wir von Abbildungen aus den konkreten Beispielen $\text{Set}, \text{Top}, \text{Vec}_K, \mathcal{C}^1$ etc. und fordern sie nun allgemein

⚠ Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen. Es kommt für Kategorien nicht primär darauf an, was die Objekte und Morphismen konkret sind, sondern dass sie die Rechenregeln erfüllen.

Stehen mehrere Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots$ in Rede, so schreiben wir genauer $A, B, C \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}, f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ und $g \circ_{\mathcal{C}} f$, oder bequem kürzer $A, B, C \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(B, C)$ und $g \circ f$.

Die Linksreihung ist traditionell üblich, aber manchmal unglücklich. Wir sollten zur Betonung genauer von einer **Linkskategorie** sprechen:

$$\circ : \text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C) : (g, f) \mapsto g \circ f \quad \text{„}g \text{ nach } f\text{“}$$

Eine **Rechtskategorie** hat als Verknüpfung entsprechend:

$$\bullet : \text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C) : (f, g) \mapsto f \bullet g \quad \text{„}f \text{ dann } g\text{“}$$

Beide Schreibweisen sind äquivalent und austauschbar und nur eine Frage der gemeinsamen Tradition oder des persönlichen Geschmacks. Ich werde gelegentlich die Schreibweise als Rechtskategorie nutzen, wenn dies der intuitiven Lese- und Schreibrichtung entspricht. (H115) Die erprobte Notation $f \bullet g = g \circ f$ vermeidet dabei Missverständnisse. In jeder konkreten Kategorie gilt $f \bullet g = g \circ f : a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a))$.

Unterkategorien: Idee

Wir beginnen mit einer Kategorie, etwa Top . (A) Darin erhalten wir eine Unterkategorie, indem wir nur gewisse Objekte zulassen, etwa

$\text{Haus} = (\text{Hausdorff-Räume } X, \text{ stetige Abb. } f : X \rightarrow Y, \text{ Komposition } \circ).$

Gleiches gilt für (lokal-)kompakte (Hausdorff-)Räume, oder allgemein für topologische Räume mit bestimmten zusätzlichen Eigenschaften.

(B) Alternativ können wir nur gewisse Morphismen zulassen, etwa

$\text{Emb} = (\text{top. Räume } X, \text{ Einbettungen } f : X \rightarrow Y, \text{ Komposition } \circ).$

Gleiches gilt für Identifizierungen, offene / abgeschlossene / eigentliche Abbildungen, (lokale) Homöomorphismen und viele weitere Beispiele.

Hierbei ist zu prüfen, dass jede Identität diese Eigenschaft erfüllt, und die geforderte Eigenschaft bei Komposition erhalten bleibt.

Damit sind die Unterkategorien Haus , Emb , usw. selbst Kategorien.

Diese grundlegende Forderung formulieren wir nun als Definition.

Unterkategorien: Präzisierung

Definition H1B: Unterkategorie

Eine **Unterkategorie** $S = (\text{Ob}_S, \text{Mor}_S, \circ)$ in $C = (\text{Ob}_C, \text{Mor}_C, \circ)$, geschrieben $S \leq C$, besteht aus (a) einer Teilklasse $\text{Ob}_S \subseteq \text{Ob}_C$ von Objekten sowie (b) für jedes Paar $A, B \in \text{Ob}_S$ einer Teilklasse $\text{Mor}_S(A, B) \subseteq \text{Mor}_C(A, B)$.

Dabei verlangen wir **folgende Eigenschaften**:

- (1) Für jedes Objekt $B \in \text{Ob}_S$ der Unterkategorie gilt $\text{id}_B \in \text{Mor}_S(B, B)$.
- (2) Für alle $f \in \text{Mor}_S(A, B)$ und $g \in \text{Mor}_S(B, C)$ gilt $g \circ f \in \text{Mor}_S(A, C)$.

Damit ist S eine Kategorie mit der von C eingeschränkten Verknüpfung.

Die Unterkategorie $S \leq C$ heißt **weit**, wenn $\text{Ob}_S = \text{Ob}_C$ gilt, also nur die Morphismen eingeschränkt werden, aber nicht die Objekte, und **voll**, wenn $\text{Mor}_S(A, B) = \text{Mor}_C(A, B)$ für alle $A, B \in \text{Ob}_S$ gilt, also nur die Objekte eingeschränkt werden, aber nicht die Morphismen.

Beispiele: Die Unterkategorie $\mathcal{C}^1 \leq \text{Top}$ ist weder weit noch voll.

Die Unterkategorie $\text{Emb} \leq \text{Top}$ aller Einbettungen ist weit, nicht voll.

Die Unterkategorie $\text{Haus} \leq \text{Top}$ aller Hausdorff-Räume ist voll, nicht weit.

😊 Unterkategorien sind eine extrem vielseitige und bequeme Methode, um neue Kategorien aus alten zu konstruieren. Das hilft erfreulich oft. Dieses Vorgehen durch Einschränkung ist sehr natürlich, und in Ihrem Studium haben Sie schon Dutzende von Unter/Kategorien gesehen!

😊 Die Definition von $S \leq C$ ist dann naheliegend: Wir wollen, dass S selbst eine Kategorie ist mit denselben Kompositionen und Identitäten. Sie kennen Unterstrukturen von zahlreichen mathematischen Strukturen wie Unter/Gruppen, Unter/Vektorräumen, etc... nun Unter/Kategorien.

😊 Für eine volle Unterkategorie $S \leq C$ ist nichts weiter zu prüfen: Dank der Gleichheit $\text{Mor}_S(A, B) = \text{Mor}_C(A, B)$ für alle $A, B \in \text{Ob}_S$ sind beide Bedingungen (1) und (2) in H1B automatisch erfüllt. Neutralität und Assoziativität vererben sich von C nach S .

⚠ Nur bei Einschränkung der Morphismen zu $\text{Mor}_S(A, B) \subseteq \text{Mor}_C(A, B)$ müssen wir die beiden Eigenschaften (1) und (2) tatsächlich prüfen. Damit ist S eine Kategorie mit der von C eingeschränkten Verknüpfung: Disjunktion, Neutralität und Assoziativität übertragen sich von C auf S .

Grundlegende Beispiele: Mengen und Relationen

Grundlegend für die gesamte Mathematik sind Mengen und Relationen:

$\text{Rel} = (\text{Mengen } X, \text{Relationen } F \subseteq X \times Y, \text{Komposition } \circ),$

$\text{Set} = (\text{Mengen } X, \text{Abbildungen } f: X \rightarrow Y, \text{Komposition } \circ),$

$\text{Set}_{\subseteq} = (\text{Mengen } X, \text{Inklusionen } \iota: X \subseteq Y, \text{Komposition } \circ).$

$\text{FinSet} = (\text{endliche } X, \text{Abbildungen } f: X \rightarrow Y, \text{Komposition } \circ),$

$\text{NatSet} = (n \in \mathbb{N}, \text{Abbildungen } f: m \rightarrow n, \text{Komposition } \circ).$

Wie üblich ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}$, und rekursiv $n = \{0, \dots, n-1\}$.

In den Kategorien Set und FinSet erhalten wir zudem interessante Unterkategorien durch Injektionen und Surjektionen und Bijektionen. In NatSet haben wir die Unterkategorie der monotonen Abbildungen.

Übung: Warum sind dies Unter/Kategorien? Welche sind weit? voll?

😊 Diese Beispiele sind sehr konkrete und vertraute Kategorien. Darauf aufbauend betrachten wir Mengen mit zusätzlicher Struktur...

Eine **Relation zwischen den Mengen X und Y** ist eine Teilmenge $F \subseteq X \times Y$ des Produkts. Zu jeder Menge X haben wir ihre **Diagonale**

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X.$$

Zu $F \subseteq X \times Y$ haben wir ihre **Inverse** oder **Umkehrung**

$$F^{-1} = F^\top = \{(y, x) \mid (x, y) \in F\} \subseteq Y \times X.$$

Zu $F \subseteq X \times Y$ und $G \subseteq Y \times Z$ ist ihre **Komposition**

$$H =: F \bullet G = G \circ F \subseteq X \times Z \quad \text{definiert durch}$$

$$H = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y: (x, y) \in F \wedge (y, z) \in G\}.$$

Die Linkskomposition \circ ist üblich, die Rechtskomposition \bullet natürlich.

Assoziativität $(F \bullet G) \bullet H = F \bullet (G \bullet H)$ bzw. $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$.

Neutralität $\Delta_X \bullet F = F \bullet \Delta_Y = F$ bzw. $F \circ \Delta_X = \Delta_Y \circ F = F$.

Umkehrung $(F \bullet G)^\top = G^\top \bullet F^\top$ bzw. $(G \circ F)^\top = F^\top \circ G^\top$.

Eine **Relation $f = (X, F, Y)$** besteht aus ihrer **Startmenge X** und ihrer **Zielfmenge Y** sowie ihrem **Graphen $F \subseteq X \times Y$** . Daraus erhalten wir

$$\text{Definitionsmenge} \quad \text{Def}(f) := \text{pr}_1 F = \{x \in X \mid \exists y \in Y: (x, y) \in F\},$$

$$\text{Bildmenge} \quad \text{Im}(f) := \text{pr}_2 F = \{y \in Y \mid \exists x \in X: (x, y) \in F\}.$$

Zu jeder Menge X haben wir ihre **Identität**

$$\text{id}_X = (X, \Delta_X, X) \quad \text{mit} \quad \Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Zu $f = (X, F, Y)$ haben wir ihre **Inverse** oder **Umkehrung**

$$f^{-1} = f^\top = (Y, F^\top, X) \quad \text{mit} \quad F^\top = \{(y, x) \mid (x, y) \in F\}.$$

Zu $f = (X, F, Y)$ und $g = (Y, G, Z)$ haben wir ihre **Komposition**

$$h = (X, H, Z) =: g \circ f = f \bullet g \quad \text{mit}$$

$$H = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y: (x, y) \in F \wedge (y, z) \in G\}.$$

Übung: Dies definiert eine Kategorie!

Wir nennen $f = (X, F, Y)$ **linkstotal**, wenn $\text{pr}_1 F = X$ gilt, also zu jedem $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Wir nennen f **rechtstotal**, wenn $\text{pr}_2 F = Y$ gilt, also zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $(x, y) \in F$.

$$\begin{array}{ll} f \text{ linkstotal} & \iff \text{pr}_1 : F \rightarrow X \text{ surjektiv} \\ f \text{ rechtstotal} & \iff \text{pr}_2 : F \rightarrow Y \text{ surjektiv} \\ f \text{ linkseindeutig} & \iff \text{pr}_1 : F \rightarrow X \text{ injektiv} \\ f \text{ rechtseindeutig} & \iff \text{pr}_2 : F \rightarrow Y \text{ injektiv} \end{array}$$

Wir nennen f **linkseindeutig**, wenn zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ existiert mit $(x, y) \in F$. Das heißt, aus $(x, y), (x', y) \in F$ folgt $x = x'$.

Wir nennen f **rechtseindeutig**, wenn zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Das heißt, aus $(x, y), (x, y') \in F$ folgt $y = y'$.

Eine Relation $f = (X, F, Y)$ heißt **Funktion** oder **Abbildung**, wenn sie linkstotal und rechtseindeutig ist, also zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Wir sagen hierzu, f ordnet dem Element $x \in X$ das Element $y \in Y$ zu, und schreiben kurz $f : x \mapsto y$ oder $f(x) = y$.

Übung: Für jede Relation $f = (X, F, Y)$ haben wir $F \bullet F^\top \subseteq X \times X$ und $F^\top \bullet F \subseteq Y \times Y$. Genauer gelten dabei folgende Äquivalenzen:

$$\begin{array}{ll} F \bullet F^\top \supseteq \Delta_X & \iff f \text{ ist linkstotal} \\ F \bullet F^\top \subseteq \Delta_X & \iff f \text{ ist linkseindeutig} \\ F^\top \bullet F \supseteq \Delta_Y & \iff f \text{ ist rechtstotal} \\ F^\top \bullet F \subseteq \Delta_Y & \iff f \text{ ist rechtseindeutig} \end{array}$$

Genau dann gilt $f \bullet f^\top = \text{id}_X$ und $f^\top \bullet f = \text{id}_Y$, wenn f eine Bijektion ist:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in F & \text{das heißt } f \text{ ist eine Funktion} \\ \forall y \in Y \exists! x \in X : (x, y) \in F & \text{das heißt } f^\top \text{ ist eine Funktion} \end{array} \right.$$

In Worten bedeutet das: Die Relation F zwischen X und Y ordnet jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu und umgekehrt jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$.

Daher heißt F auch **Eins-zu-Eins-Korrespondenz** zwischen X und Y . Diesen älteren Sprachgebrauch finden Sie insbesondere noch in vielen englischsprachigen Büchern und mathematischen Anwendungen.

Einfache Beispiele: Präordnung als Kategorie (*proset*)

😊 Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen.

Beispiel H1G: Jede prägeordnete Menge definiert eine Kategorie.

Jede **prägeordnete Menge** (X, \leq) definiert eine Kategorie

$$(X, \leq, \circ) \text{ mit } \text{Ob} = X \text{ und } \text{Mor}(a, b) = \begin{cases} \{(a, b)\} & \text{falls } a \leq b, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Objekte sind hier die Elemente $a \in X$, Morphismen $a \rightarrow b$ sind die Paare (a, b) mit $a \leq b$, die Komposition ist $(a, b) \bullet (b, c) = (a, c)$.

Dies ist wohldefiniert dank Transitivität und offensichtlich assoziativ. Reflexivität $a \leq a$ sorgt für die Existenz der Identität $\text{id}_a = (a, a)$.

Umgekehrt definiert jede Kategorie \mathcal{C} eine Präordnung auf $\text{Ob}_{\mathcal{C}}$, indem wir $a \leq b$ definieren durch $\text{Mor}(a, b) \neq \emptyset$. Ist jede \mathcal{C} -Morphismenmenge höchstens einelementig, so entspricht $\mathcal{C} = (\text{Ob}_{\mathcal{C}}, \leq, \circ)$ einer Präordnung. Prominentes Beispiel ist die Kategorie Set_{\subseteq} wie oben erklärt, ebenso die Kompaktifizierungen $\kappa : X \rightarrow Y$ eines Raumes X .

Einfache Beispiele: Monoid als Kategorie

Ein **Monoid** (M, \circ, e) besteht aus einer Menge M mit assoziativer Verknüpfung $\circ : M \times M \rightarrow M$ und neutralem Element $e \in M$.

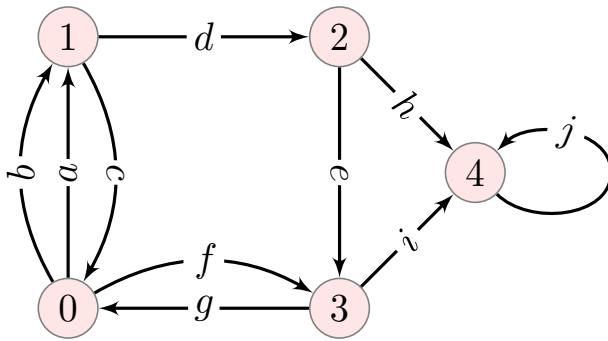
Dies definiert eine Kategorie $\mathbb{M} = (*, M, \circ)$ mit nur einem Objekt $*$, der Morphismenmenge $\mathbb{M}(*, *) = M$ und der Verknüpfung \circ .

Umgekehrt definiert jedes Objekt $X \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ in einer Kategorie \mathcal{C} das Monoid $\text{End}_{\mathcal{C}}(X) = (\mathcal{C}(X, X), \circ, \text{id}_X)$ aller **Endomorphismen** von X . Wir setzen hierbei meist stillschweigend voraus, dass die betrachtete Kategorie \mathcal{C} lokal klein ist: Alle Klassen $\mathcal{C}(X, Y)$ sind also Mengen.

😊 Prominente Beispiele: In Vec_K bzw. Mod_K (siehe unten) erhalten wir den Endomorphismenring $\text{End}_K(X) = \text{Hom}_K(X, X)$. In Mat_K erhalten wir den Matrizenring $\text{End}_K(n) = (K^{n \times n}, \cdot, 1)$. Hier haben wir neben der Verknüpfung \circ zudem eine Addition.

Besteht im folgenden Beispiel der Graph Γ nur aus einer Ecke v und der Kantenmenge A , so hat die Wegekategorie Γ^* nur das Objekt v , und die Morphismenmenge $\text{End}(v) = A^*$ ist das freie Monoid über A . Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen.

Einfache Beispiele: Graph und Wegekategorie



$$C_0 = \{0, 1, \dots, 4\}$$

$$C_1 = \{a, b, \dots, j\}$$

$$(s, t) : a \mapsto (0, 1)$$

$$b \mapsto (0, 1)$$

...

$$j \mapsto (4, 4)$$

Ein **(gerichteter) Graph** $\Gamma = (C_0, C_1, s, t)$ besteht aus einer Eckenmenge C_0 und einer Kantenmenge C_1 und zwei Abbildungen $s, t : C_1 \rightarrow C_0$, die jeder Kante $e \in C_1$ ihren Start $s(e) \in C_0$ und ihr Ziel $t(e) \in C_0$ zuordnen.

Wir definieren die **Wegekategorie** $\Gamma^* = (C_0, C_1^*, s, t, \bullet)$ kurz (C_0, C_1^*, \bullet) :

Ein Morphismus $w = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n) \in \Gamma^*(v_0, v_n)$ vom Start $s(w) = v_0$ zum Ziel $t(w) = v_n$ ist ein Weg endlicher Länge $n \in \mathbb{N}$ mit $s(e_k) = v_{k-1}$ und $t(e_k) = v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$. Die Verknüpfung von Wegen w, w' mit $t(w) = s(w')$ ist ihre Aneinanderhängung gemäß

$$(v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m) \bullet (v_m, e_{m+1}, v_{m+1}, \dots, e_n, v_n) \\ := (v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m, e_{m+1}, v_{m+1}, \dots, e_n, v_n).$$

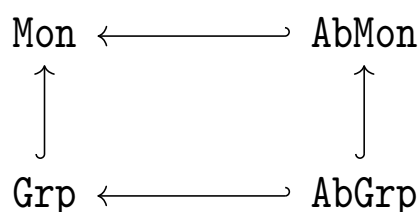
Einfache Beispiele: Graph und Wegekategorie

Graphen haben viele Anwendungen, sie sind grundlegende Datenstrukturen in der Informatik und auch in der Spieltheorie. Dort interpretiert man den Ausgangspunkt v_0 als Startzustand. Im aktuellen Zustand v_i stehen gewisse Aktionen zu Verfügung: Die Kante / Aktion $a : v_i \rightarrow u$ führt zu einem neuen Zustand $v_{i+1} = u$. Der Spielverlauf ist demnach ein Weg vom Start v_0 zum Ziel v_n . Komposition bedeutet anschaulich Hintereinanderausführung.

⚠ Ich habe hier für Wege die Rechtskomposition gewählt; das entspricht der üblichen Schreib- und Leserichtung. Wir sehen daran, dass neben den üblichen Linkskategorien auch Rechtskategorien ebenso natürlich sein können.

Auch in diesem Kapitel werden uns Graphen gute Dienste leisten: Wir können damit elegant kommutative Diagramme erklären (H2A). Schließlich ist jede Kategorie \mathcal{C} ein „Graph mit Komposition“ (H1Q). Die Objekte sind die Ecken, die Morphismen sind die Kanten, und für diese haben wir zusätzlich eine Komposition.

Aus der (Linearen) Algebra kennen Sie Monoide und Gruppen:



Diese bilden Kategorien:

$\text{Mon} = (\text{Monoide}, \text{ Monoidhom.}, \text{ Komposition } \circ)$

$\text{Grp} = (\text{Gruppen}, \text{ Gruppenthom.}, \text{ Komposition } \circ)$

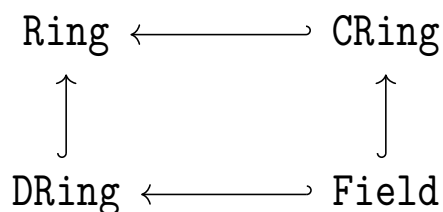
$\text{AbMon} = (\text{abelsche Monoide}, \text{ Monoidhom.}, \text{ Komposition } \circ)$

$\text{Ab} = \text{AbGrp} = (\text{abelsche Gruppen}, \text{ Gruppenthom.}, \text{ Komposition } \circ)$

Aufgabe: Warum sind dies Unter/Kategorien? Welche sind weit? voll?

Lösung: Keine dieser Unterkategorien ist weit: Die Objekte werden echt eingeschränkt. Jede dieser Unterkategorien ist voll: Zwischen Gruppen ist jeder Monoidhomomorphismus auch ein Gruppenthomomorphismus.

Aus der (Linearen) Algebra kennen Sie Ringe und Körper:



Diese bilden Kategorien:

$\text{Ring} = (\text{Ringe } (R, +, 0, \cdot, 1), \text{ Ringhom.}, \text{ Komposition } \circ)$

$\text{DRing} = (\text{Divisionsringe}, \text{ Ringhom.}, \text{ Komposition } \circ)$

$\text{CRing} = (\text{kommutative Ringe}, \text{ Ringhom.}, \text{ Komposition } \circ)$

$\text{CDRing} = \text{Field} = (\text{Körper}, \text{ Körperhom.}, \text{ Komposition } \circ)$

Aufgabe: Warum sind dies Unter/Kategorien? Welche sind weit? voll?

Lösung: Keine dieser Unterkategorien ist weit: Die Objekte werden echt eingeschränkt. Jede dieser Unterkategorien ist voll: Zwischen Körpern ist jeder Ringhomomorphismus auch ein Körperhomomorphismus.

Grundlegende Beispiele: Lineare Algebra

Im Folgenden sei K ein Körper, allgemeiner genügt ein Ring.

Die Lineare Algebra untersucht und nutzt lineare Abbildungen:

$$\begin{aligned}\text{Vec}_K &= (K\text{-Vektorräume } V, K\text{-lineare Abb., Komposition } \circ) \\ \text{FinVec}_K &= (V \text{ endlich erzeugt, } K\text{-lineare Abb., Komposition } \circ) \\ \text{NatVec}_K &= (V = K^n \text{ mit } n \in \mathbb{N}, K\text{-lineare Abb., Komposition } \circ)\end{aligned}$$

Algebra, Analysis, Numerik, Physik und zahlreiche Anwendungen nutzen intensiv, insb. über $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, die Kategorie der Matrizen:

$$\text{Mat}_K = (\text{Objekte } n \in \mathbb{N}, \text{ Matrizen } K^{m \times n}, \cdot : K^{p \times q} \times K^{q \times r} \rightarrow K^{p \times r})$$

Morphismen $A : n \rightarrow m$ sind hier Matrizen $A \in K^{m \times n} := \text{Mat}_K(n, m)$, das entspricht der linearen Abbildung $f_A : K^n \rightarrow K^m : x \mapsto y = Ax$.

Die Komposition ist die Matrizenmultiplikation, wobei jeweils nur Matrizen passender Größe miteinander multipliziert werden können.

😊 Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen. Matrizen sind ein besonders schönes und eindrückliches Beispiel.

Grundlegende Beispiele: Analysis

Die Analysis untersucht und nutzt differenzierbare Abbildungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^1 &= (U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen, } f : U \rightarrow V \text{ stetig diff'bar, Komposition}) \\ \mathcal{C}_*^1 &= ((U, a) \text{ mit } a \in U, f : (U, a) \rightarrow (V, b) \text{ mit } f(a) = b, \text{ Komposition})\end{aligned}$$

Die Ableitung $D : \mathcal{C}_*^1 \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}} : f \mapsto f'(a)$ erfüllt die Kettenregel $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$, erweist sich also als Funktor!

Bemerkung: Ebenso konstruieren wir aus Set und Top die Kategorien Set_* und Top_* durch Auszeichnung eines Fußpunktes.

Übung: Prüfen Sie möglichst viele der obigen Beispiele sorgsam nach. Warum sind dies Unter/Kategorien? Welche Sätze benötigen Sie dazu? Wenn Sie diese Beispiele anschauen, dann stellen Sie erstaunt fest: Schon im ersten Studienjahr lernen Sie ein paar Dutzend Kategorien kennen, anfangs noch ohne zu ahnen, was Kategorien überhaupt sind. Nun endlich wissen Sie es und können die Gemeinsamkeit benennen! Damit strukturieren und vereinfachen Sie wiederkehrende Argumente.

Vielleicht glauben Sie jetzt: Alles und jedes ist eine Kategorie.
Doch nicht alles, was nach einer Kategorie aussieht, ist auch eine!

Aufgabe: Wir betrachten Matrizen $\text{Mat}_{\mathbb{K}}$, wie üblich, nun mit Einträgen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{> 0}, [0, \infty], \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Welche Daten und welche Eigenschaften einer Kategorie gelingen für $\text{Mat}_{\mathbb{K}}$, welche nicht? (Über einem Ring \mathbb{K} gelingt alles. Genügt sogar ein Halbring \mathbb{K} ?)

Aufgabe: Zu jedem topologischen Raum X definieren wir $P(X)$: Die Objekte sind die Punkte $a, b, \dots \in X$. Die Morphismen von a nach b sind die Wege $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Die Verknüpfung $*$ ist Aneinanderhängung (L101). Welche Eigenschaften einer Kategorie gelten für $P(X)$, welche nicht? (Für Graphen gelingt alles, siehe H115.)

Aufgabe: Zu $0 \leq \ell \leq L \leq \infty$ definieren wir $\text{BiLip}(\ell, L)$: Die Objekte sind die (mehrpunktigen) Intervalle $I, J, \dots \subseteq \mathbb{R}$. Die Morphismen sind die Abbildungen $f: I \rightarrow J$ mit $\ell|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in I$. Die Verknüpfung ist die Komposition. Welche Eigenschaften einer Kategorie gelten für $\text{BiLip}(\ell, L)$, welche nicht?

Zusammenfassung: Kategorie als Graph mit Komposition

Die eingangs formulierte Definition H1A können wir abschließend wie folgt strukturieren: Da $\text{Mor}(A, B)$ und $\text{Mor}(A', B')$ für $(A, B) \neq (A', B')$ disjunkt sind, können wir jedem Morphismus $f \in \text{Mor}(A, B)$ eindeutig seinen Start $s(f) = A$ und sein Ziel $t(f) = B$ zuordnen. Statt für jedes Objekt A die Existenz einer Identität $\text{id}_A \in \text{Mor}(A, A)$ zu *fordern* und dann ihre Eindeutigkeit nachzuweisen, können wir A direkt seine Identität id_A *zuordnen*. Wir erhalten zusammenfassend:

Definition H1Q: Kategorie als Graph mit Komposition

Ein (**gerichteter**) **Graph** $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t)$ besteht aus folgenden Daten:
(a) eine Klasse \mathcal{C}_0 ; ihre Elemente heißen **Ecken / Elemente / Objekte**,
(b) eine Klasse \mathcal{C}_1 ; ihre Elemente heißen **Kanten / Pfeile / Morphismen**,
sowie zwei Abbildungen $s, t: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0$, engl. *source* und *target*, die jedem Pfeil $f \in \mathcal{C}_1$ seinen **Start** $s(f) = A \in \mathcal{C}_0$ und **Ziel** $t(f) = B \in \mathcal{C}_0$ zuordnen.

In der Graphentheorie spricht man traditionell von Ecken und Kanten. Alternativ schreiben wir $\text{Ob}_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_0$ und $\text{Mor}_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_1$ wie in Definition H1A.

Für Objekte $A, B \in \mathcal{C}_0$ schreiben wir kurz $A, B \in \mathcal{C}$. Für Morphismen $f \in \mathcal{C}_1$ vom Start $s(f) = A$ zum Ziel $t(f) = B$ schreiben wir kurz $f \in \mathcal{C}(A, B)$ oder $f \in \text{Mor}(A, B)$ oder $f: A \rightarrow B$, wenn \mathcal{C} klar ist. Wir setzen hierzu $\mathcal{C}(A, B) := \{f \in \mathcal{C}_1 \mid s(f) = A, t(f) = B\}$.

Definition H1Q: Kategorie als Graph mit Komposition

Eine **(Links-)Kategorie** $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t, \circ, \text{id})$ hat zudem folgende Daten:
 (c) eine Verknüpfung $\circ: \mathcal{C}_1 \times_t \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1: (g, f) \mapsto g \circ f$ auf der Klasse aller verknüpfbaren Morphismen, $\mathcal{C}_1 \times_t \mathcal{C}_1 = \{(g, f) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \mid s(g) = t(f)\}$,
 (d) eine Abbildung $\text{id}: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_1: A \mapsto \text{id}_A$, die jedem Objekt $A \in \mathcal{C}_0$ einen Morphismus $\text{id}_A \in \mathcal{C}_1$ zuordnet, genannt die **Identität** von A .

Diese Daten müssen folgende Bedingungen erfüllen:

- (1) Es gilt $A = s(\text{id}_A) = t(\text{id}_A)$ für jedes Objekt $A \in \mathcal{C}_0$
 und $f = f \circ \text{id}_{s(f)} = \text{id}_{t(f)} \circ f$ für jeden Morphismus $f \in \mathcal{C}_1$.
- (2) Es gilt $s(g \circ f) = s(f)$ und $t(g \circ f) = t(g)$ für alle $(g, f) \in \mathcal{C}_1 \times_t \mathcal{C}_1$
 und $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ für alle $(h, g, f) \in \mathcal{C}_1 \times_t \mathcal{C}_1 \times_t \mathcal{C}_1$.

Für eine **(Rechts-)Kategorie** $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t, \bullet, \text{id})$ fordern wir analog:
 (c) eine Verknüpfung $\bullet: \mathcal{C}_1 \times_s \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1: (f, g) \mapsto g \bullet f$ auf der Klasse aller verknüpfbaren Morphismen, $\mathcal{C}_1 \times_s \mathcal{C}_1 = \{(f, g) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \mid t(f) = s(g)\}$.
 (1) Es gilt $f = f \bullet \text{id}_{t(f)} = \text{id}_{s(f)} \bullet f$ für jeden Morphismus $f \in \mathcal{C}_1$.
 (2) Es gilt $s(f \bullet g) = s(f)$ und $t(f \bullet g) = t(g)$ für alle $(g, f) \in \mathcal{C}_1 \times_s \mathcal{C}_1$
 und $(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$ für alle $(f, g, h) \in \mathcal{C}_1 \times_s \mathcal{C}_1 \times_s \mathcal{C}_1$.

Rückschau: Kategorien verallgemeinern *Graphen*, und jeder Graph $\Gamma = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t)$ definiert seine *Wegekategorie* $\Gamma^* = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1^*, s, t, \bullet, \text{id})$. Hier entspricht die Rechtsreihung gemäß \bullet bequem der Leserichtung.

Beispiel: Jede Menge X mit einer reflexiven und transitiven Relation \leq auf $X \times X$ definiert als zugehörige Kategorie $(X, \leq, \text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{trans}, \text{refl})$.

Kategorien verallgemeinern ebenso *Monoide* (H2H): In einem Monoid sind je zwei Elemente verknüpfbar, in einer Kategorie gilt dies partiell, wie durch den zugrundeliegenden Graphen $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t)$ formalisiert. Im fundamentalen Beispiel von *Matrizen* ist dies aller Welt vertraut.

Kommutative Diagramme

Wir arbeiten in einer gegebenen Kategorie $\mathcal{C} = (\text{Ob}, \text{Mor}, \circ)$. Die folgende graphische Notation erweist sich als ungemein effizient und hilfreich.

$$\left. \begin{array}{l} f \in \text{Mor}(A, B) \\ g \in \text{Mor}(B, C) \\ h \in \text{Mor}(A, C) \\ h = g \circ f \end{array} \right\} \iff \begin{array}{ccc} & B & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ A & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

Morphismen $f \in \text{Mor}(A, B)$ schreiben wir gerne als Pfeile $f: A \rightarrow B$. Diese setzen wir nun zu (kommutativen) Diagrammen zusammen.

Definition H2A: kommutatives Diagramm

Ein **Diagramm** in der Kategorie \mathcal{C} ist ein (gerichteter) Graph, wobei jede Ecke mit einem Objekt aus \mathcal{C} beschriftet ist und jede Kante mit einem hierzu passenden Morphismen aus \mathcal{C} .

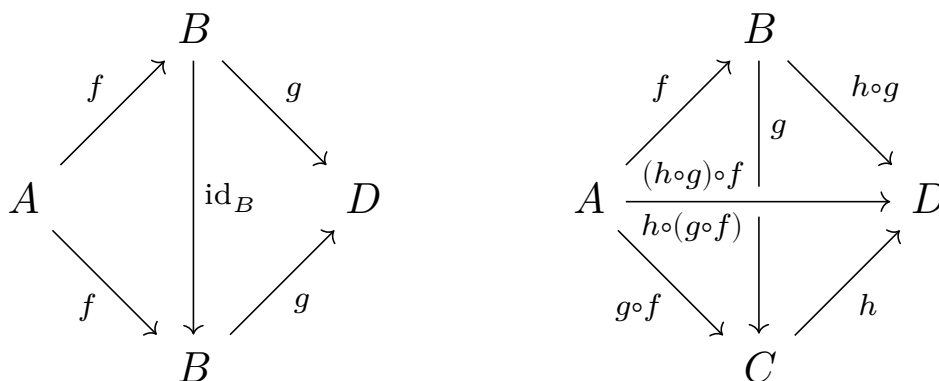
Ein solches Diagramm heißt **kommutativ**, wenn zwischen je zwei Ecken die Komposition entlang aller Wege denselben Morphismus in \mathcal{C} ergibt.

Kommutative Diagramme

😊 „Alle Wege führen nach Rom“, hier also zum selben Morphismus: Kommutative Diagramme sind eine sehr intuitive, graphische Sichtweise!

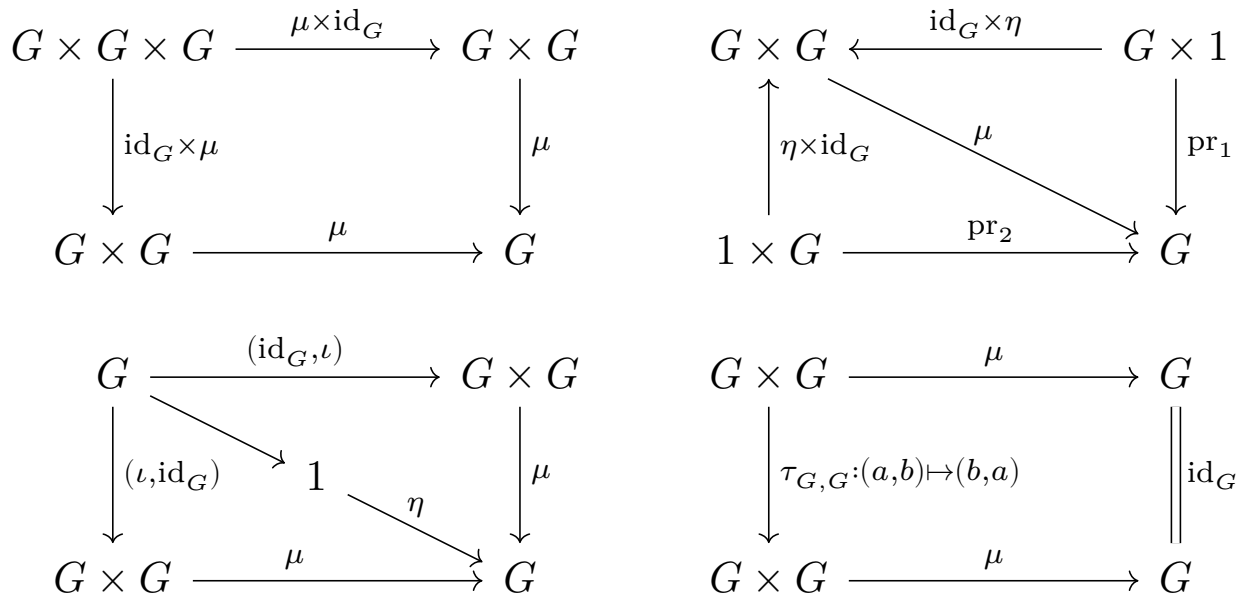
Im obigen Beispiel: Es ist egal, ob wir den Pfeilen f und g folgen oder die Abkürzung h nehmen, beide Wege ergeben dasselbe Ergebnis in C .

Beispiel: Identität $\text{id}_B \circ f = f$ und $g \circ \text{id}_B = g$ sowie Assoziativität $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ besagen, dass folgende Diagramme kommutieren:



Aufgabe: Eine **Gruppe** (G, μ, η, ι) ist eine Menge G zusammen mit einem Produkt $\mu : G \times G \rightarrow G$, einem neutralen Element $\eta : 1 = \{*\} \rightarrow G$ und einer Inversion $\iota : G \rightarrow G$, sodass die Gruppenaxiome erfüllt sind. Schreiben Sie diese Axiome als kommutative Diagramme in Set.

Lösung: Assoziativität, Neutrales, Inversion, Kommutativität:



😊 Kommutative Diagramme in Set (Top, Grp, ...) codieren **All-Aussagen**: Zwischen zwei Ecken A und Z verlaufen Morphismen $f, g : A \rightarrow Z$. Die Kommutativitätsbedingung lautet dann: Für alle $a \in A$ gilt $f(a) = g(a)$. Das gilt insbesondere für algebraische Strukturen, wie hier zu sehen.

Existenz-Aussagen wie „Es gibt ein neutrales Element $e \in G$.“ oder „Zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in G$.“ codieren wir nicht implizit, sondern durch Abbildungen, als explizit gegebene Daten, hier das neutrale Element $\eta : 1 \rightarrow G$ und die Inversion $\iota : G \rightarrow G$.

Das ist für die konkrete Arbeit vorteilhaft, etwa auf dem Computer (CAS). Sie fordern: „Gib mir das Neutrale!“ oder „Gib mir das Inverse zu a !“. Als Antwort möchten Sie nicht bloß die Zusage „Es gibt eine Lösung.“, sondern tatsächlich das ersehnte Element. *Explicit is beautiful.*

😊 Diese Sichtweise ergibt eine wunderbar explizite Datenstruktur. Dieselben Diagramme statt wie oben in Set nun in Haus definieren eine **topologische Gruppe**. In der Kategorie Diff der \mathcal{C}^∞ -glatten Mannigfaltigkeiten definieren sie eine **Lie-Gruppe**. So elegant!

Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{id}_X \downarrow & \swarrow g & \\ X & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{id}_X \downarrow & \swarrow g & \downarrow \text{id}_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Definition H2c: Isomorphismen

Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ Morphismen in einer Kategorie \mathcal{C} .

Gilt $g \circ f = \text{id}_X$, so nennen wir g **linksinvers** zu f (oder eine **Retraktion**) und f **rechtsinvers** zu g (oder einen **Schnitt**, auch **Coretraktion**).

(1) Gilt $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$ in \mathcal{C} , so nennen wir $(f, g): X \cong Y$ **zueinander invers** oder ein **\mathcal{C} -Isomorphismuspaar**.

Eindeutigkeit: Ist g linksinvers zu f und g' rechtsinvers, so folgt $g = g'$:

$$g \stackrel{\text{rNtr}}{=} g \circ \text{id}_Y \stackrel{\text{rInv}}{=} g \circ (f \circ g') \stackrel{\text{Ass}}{=} (g \circ f) \circ g' \stackrel{\text{lInv}}{=} \text{id}_X \circ g' \stackrel{\text{lNtr}}{=} g'.$$

Dann nennen wir g *den* inversen Morphismus zu f , geschrieben $g =: f^{-1}$.

Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{id}_X \downarrow & \swarrow g & \downarrow \text{id}_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\cong]{f} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X' & \xrightarrow[\cong]{f'} & Y' \end{array}$$

Definition H2c: Isomorphismen

(2) Wir nennen $f: X \rightarrow Y$ **invertierbar** oder einen **\mathcal{C} -Isomorphismus**, geschrieben $f: X \simeq Y$, wenn in \mathcal{C} ein inverser Morphismus $g: Y \simeq X$ existiert, somit also $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$ erfüllt ist.

(3) Zwei Objekte X und Y in \mathcal{C} heißen **\mathcal{C} -isomorph**, geschrieben $X \cong Y$, wenn \mathcal{C} -Isomorphismen $(f, g): X \cong Y$ existieren, also ein Paar von Morphismen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$.

(4) Morphismen $p: X \rightarrow X'$ und $q: Y \rightarrow Y'$ in \mathcal{C} heißen **\mathcal{C} -isomorph**, wenn in \mathcal{C} Isomorphismen $f: X \simeq Y$ und $f': X' \simeq Y'$ existieren mit $f' \circ p = q \circ f$, geschrieben $(f, f'): p \simeq q$.

Prominente Beispiele

Zur Illustration nenne ich einige einfache, aber prominente Beispiele:

Kategorie	Isomorphismen $(f, g) : X \cong Y$	Isomorphie $X \cong Y$
(X, \leq)	$(a \leq b, b \leq a) : a \cong b$	mit Antisymmetrie: $a = b$
$(*, M, \circ)$	invertierbare Elemente	einziges Objekt $* = *$
Set_{\subseteq}	$(\text{id}_X, \text{id}_Y) : X = Y$	Gleichheit $X = Y$
Set	Bijektionen $(f, g) : X \cong Y$	$\text{card}(X) = \text{card}(Y)$
Mat_K	invertierbare Matrizen	Gleichheit $m = n$
Vec_K	K -lineare Isomorphismen	$\dim_K(X) = \dim_K(Y)$
Grp	Gruppenisomorphismen	Isomorphie $X \cong Y$
\mathcal{C}^k	Diffeomorphismen	Diffeomorphie $X \cong Y$
Top	Homöomorphismen	Homöomorphie $X \cong Y$
hTop	Homotopie-Äquivalenzen	Homotopie-Äquivalenz $X \simeq Y$

Übung: Nennen Sie mindestens zehn weitere Kategorien und erklären Sie in jeder davon möglichst explizit die Isomorphismen.

Prominente Beispiele

Aufgabe: Sei $\Gamma = (C_0, C_1, s, t)$ ein Graph und $\Gamma^* = (C_0, C_1^*, s, t, \circ)$ seine Wegekategorie (H115). Bestimmen Sie alle Isomorphismen in Γ^* .

Lösung: Für jede Ecke v ist $\text{id}_v = (v)$ der Weg von v nach v der Länge 0. Dieser ist trivialerweise in Γ^* invertierbar, denn es gilt $\text{id}_v \circ \text{id}_v = \text{id}_v$.

Jeder andere Weg hat Länge ≥ 1 . Bei Komposition in Γ^* addieren sich die Weglängen in \mathbb{N} . Daher gibt es in Γ^* keine weiteren Isomorphismen.

Vornehm gesagt, die Weglänge ist ein Funktor von Γ^* in das Monoid $(\mathbb{N}, +, 0)$, und in Letzterem ist nur das neutrale Element 0 invertierbar.

Aufgabe: Ist jede invertierbare Matrix $A \in R^{p \times q}$ quadratisch, also $p = q$?

Lösung: Über jedem Körper oder Divisionsring R gilt dies tatsächlich dank Gauß-Algorithmus. Es gilt auch über jedem kommutativen Ring mit $1 \neq 0$ dank Determinante. (Führen Sie es zur Übung sorgsam aus!)

Bizarres ist über nicht-kommutativen Ringen möglich, siehe G206:

Sei K ein Körper, hierüber $V = K^{(\mathbb{N})}$ und $R = \text{End}_K(V)$. Für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $R^p \cong R^q$, dazu gehören invertierbare Matrizen $A \in R^{q \times p}$.

Beispiel: die Gauß–Normalform

Sei R ein Divisionsring. Gegeben seien $m, n, r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq \min\{m, n\}$. Die **Modellmatrix** der Größe $m \times n$ vom Rang r über dem Ring R ist

$$D = D_{m \times n}^r := \begin{bmatrix} 1_{r \times r} & 0_{r \times k} \\ 0_{\ell \times r} & 0_{\ell \times k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in R^{m \times n}.$$

Die zugehörige R -lineare **Modellabbildung** ist die Projektion-Inklusion

$$f_D : R^n \rightarrow R^m : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n)^\top \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)^\top.$$

Daran lesen wir Bild und Kern ab, zudem Rang und Defekt falls definiert:

$$\begin{aligned} \text{Im} &= \langle e_1, \dots, e_r \rangle_R^! \leq R^m \quad \implies \quad \text{rang} = \dim \text{Im} = r \\ \text{Ker} &= \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle_R^! \leq R^n \quad \implies \quad \text{def} = \dim \text{Ker} = n - r \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\text{rang} + \text{def} = n$, wie allgemein vom Rangsatz garantiert.

Gauß–Normalform eines Vektorraumhomomorphismus

😊 Die Modellabbildung f_D ist besonders einfach und übersichtlich. Erstaunlicherweise lässt sich *jede* R -lineare Abbildung so darstellen!

$$\begin{array}{ccc} R^n & \xrightarrow{\quad f_D \quad} & R^m \\ & \begin{array}{c} f_D : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \\ \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \end{array} & \\ \Phi_{\mathcal{V}} \cong \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{U}} \cong \\ V & \xrightarrow{\quad f \quad} & U \\ & \begin{array}{c} f : \begin{cases} v_i \mapsto u_i & \text{für } i = 1, \dots, r, \\ v_i \mapsto 0 & \text{für } i = r + 1, \dots, n \end{cases} \end{array} & \end{array}$$

Satz H2D: Gauß–Normalform eines Vektorraumhomomorphismus

Sei R ein Divisionsring, zum Beispiel ein Körper wie $R = \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$

Sei $f : V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung von R -Vektorräumen endlicher Dimension $n := \dim_R(V)$ und $m := \dim_R(U)$ mit Rang $r := \text{rang}_R(f)$.

Dazu existieren Basen $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_m)$ von U und $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, \dots, r$ und $f(v_i) = 0$ für alle $i = r + 1, \dots, n$.

Somit wird f dargestellt durch die Modellmatrix $D_{m \times n}^r$.

☺ Der lokale Umkehrsatz ist ein zentrales Ergebnis und ein universelles Werkzeug der Analysis. Er erlaubt uns unter gewissen Voraussetzungen, eine differenzierbare Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal als eine lineare Abbildung zu betrachten. Das ist eine wunderbare Vereinfachung!

Wir wollen diesen Satz hier in kategorieller Sprechweise ausformulieren. Lokalisierung auf „beliebig kleine Umgebungen“ führt uns zur Kategorie

$$g\mathcal{C}_*^k = (\mathbb{N}, \mathcal{C}^k\text{-Funktionskeime } [f] : (U \subseteq \mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, b), \circ).$$

In der Kategorie \mathcal{C}_*^k nennen wir Funktionen $f_1 : (U_1 \subseteq \mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, b)$ und $f_2 : (U_2 \subseteq \mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, b)$ **äquivalent**, wenn eine offene Umgebung $U \subseteq U_1 \cap U_2$ von a in \mathbb{R}^m existiert mit $f_1|_U = f_2|_U$. Die Äquivalenzklasse $[f]$ von $f : (U, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, b)$ heißt **\mathcal{C}^k -Funktionskeim**, engl. *germ*.

Wir komponieren Keime $[f : (\mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, b)]$ und $[g : (\mathbb{R}^n, b) \rightarrow (\mathbb{R}^p, c)]$ zum Keim $[g] \circ [f] = [g \circ f|_{U'}]$ mit $U' = f^{-1}(V)$. Dies ist wohldefiniert. Genau dann ist ein Keim $[f] : (\mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, b)$ invertierbar, wenn ein Keim $[g] : (\mathbb{R}^n, b) \rightarrow (\mathbb{R}^m, a)$ existiert mit $[g] \circ [f] = [\text{id}]$ und $[f] \circ [g] = [\text{id}]$.

Satz H2F: der lokale Umkehrsatz (für alle $k \geq 1$)

Ein \mathcal{C}^k -Funktionskeim $[f] : (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, b)$ ist invertierbar, also ein lokaler \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus, gdw $f'(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar ist.

☺ Der Ableitungsfunktor $D : g\mathcal{C}_*^k \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}$ **reflektiert Isomorphismen**. Analogie: Die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ reflektiert Invertierbarkeit.

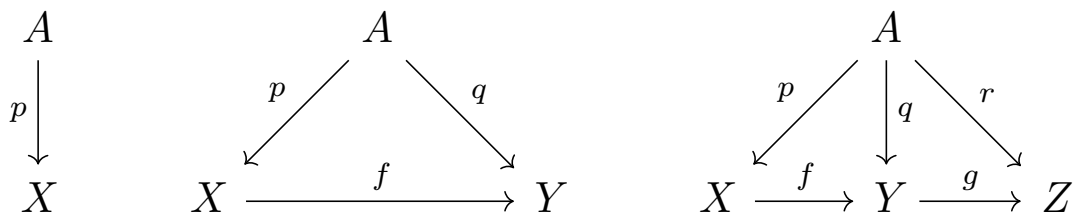
Wir sagen, $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat **konstanten Rang r** , wenn $\text{rang } f'(x) = r$ für alle $x \in U$ gilt. Der Keim $[f]$ hat **konstantem Rang r** , wenn dies für einen Repräsentanten gilt, also auf einer hinreichend kleinen Umgebung U von a in \mathbb{R}^m . Dann sieht f lokal aus wie die lineare Abbildung $f'(0)$:

Satz H2G: der lokale Rangatz (für alle $k \geq 1$)

Zu jedem \mathcal{C}^k -Funktionskeim $[f] : (\mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, b)$ von konstantem Rang r existieren $[\varphi] : (\mathbb{R}^m, 0) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^m, a)$ und $[\psi] : (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^n, b)$ mit $[\psi]^{-1} \circ [f] \circ [\varphi] : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

☺ Geometrisch formuliert: In den Koordinaten $[\varphi], [\psi]$ wird $[f]$ linear.

Die Kategorie $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ aller **Morphismen mit Start A** entsteht wie folgt:



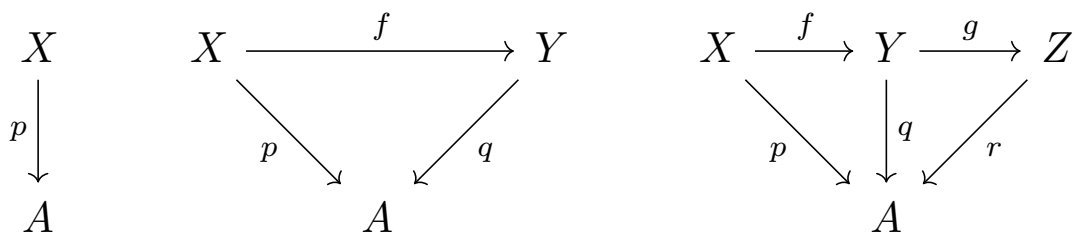
- (a) Objekte in $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ sind die \mathcal{C} -Morphismen $p : A \rightarrow X$. („Objekte unter A “)
- (b) In $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ ist jeder Morphismus $f : p \rightarrow q$ von $p : A \rightarrow X$ nach $q : A \rightarrow Y$ gegeben durch einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} , der $f \circ p = q$ erfüllt.
- (c) Die Verknüpfung von Morphismen in $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ ist die Verknüpfung in \mathcal{C} .

Das obige Diagramm zeigt, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Isomorphismus $f : p \simeq q$ in $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ bedeutet $f : X \simeq Y$ in \mathcal{C} mit $f \circ p = q$.

Beispiel: Isomorph zum Quotienten $X \twoheadrightarrow Q$ sind Identifizierungen (E2F).

Beispiel: $\text{Field}_{\downarrow}^K$ ist die Kategorie der Körpererweiterungen $K \hookrightarrow L$. Traditionell sagt man hier *über* K , das entspricht $\text{Field}_{\uparrow}^K$.

Die Kategorie $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ aller **Morphismen mit Ziel A** entsteht wie folgt:



- (a) Objekte in $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ sind die \mathcal{C} -Morphismen $p : X \rightarrow A$. („Objekte über A “)
- (b) In $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ ist jeder Morphismus $f : p \rightarrow q$ von $p : X \rightarrow A$ nach $q : Y \rightarrow A$ gegeben durch einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} , der $p = q \circ f$ erfüllt.
- (c) Die Verknüpfung von Morphismen in $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ ist die Verknüpfung in \mathcal{C} .

Das obige Diagramm zeigt, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Isomorphismus $f : p \simeq q$ in $\mathcal{C}_{\downarrow}^A$ bedeutet $f : X \simeq Y$ in \mathcal{C} mit $p = q \circ f$.

Beispiel: Isomorph zur Inklusion $A \hookrightarrow X$ sind Einbettungen (E1κ).

Beispiel: $\text{Top}_{\downarrow}^X$ ist die Kategorie der *topologischen Räume über X* . Hierin sind die *Überlagerungen von X* eine Unterkategorie (§M1).

Für jede Kategorie $\mathcal{C} = (\text{Ob}_{\mathcal{C}}, \text{Mor}_{\mathcal{C}}, \circ_{\mathcal{C}})$ wird $\mathcal{D} = \text{Mor}_{\mathcal{C}}$ zu einer Kategorie:

$$\begin{array}{ccc}
 X & X \xrightarrow{f} Y & X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \\
 \downarrow p & \downarrow p \quad \downarrow q & \downarrow p \quad \downarrow q \quad \downarrow r \\
 X' & X' \xrightarrow{f'} Y' & X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'
 \end{array}$$

- (a) Objekte in \mathcal{D} sind die \mathcal{C} -Morphismen $p : X \rightarrow X'$.
 (b) Jeder \mathcal{D} -Morphismus $(f, f') : p \rightarrow q$ ist ein Paar von \mathcal{C} -Morphismen $f : X \rightarrow Y$ und $f' : X' \rightarrow Y'$ mit der Kommutativität $f' \circ_{\mathcal{C}} p = q \circ_{\mathcal{C}} f$.
 (c) Die Verknüpfung in \mathcal{D} ist $(g, g') \circ_{\mathcal{D}} (f, f') = (g \circ_{\mathcal{C}} f, g' \circ_{\mathcal{C}} f')$.

Das obige Diagramm zeigt, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Die Isomorphismen $(f, f') : p \simeq q$ in \mathcal{D} kennen wir bereits aus H2c: Dies ist die Isomorphie (oder Äquivalenz) von \mathcal{C} -Morphismen.

😊 Die elegante Sprache der Kategorien erlaubt konzise Formulierungen. Das Erlernen kostet anfangs Mühe, doch auf lange Sicht lohnt es sich.

Übung H2E:

Führen Sie die Definition H2c wie folgt aus:

- 0 Die Komposition zweier Isomorphismen ist ein Isomorphismus.
- 1 Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf den Objekten von \mathcal{C} .
- 2 Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf den Morphismen von \mathcal{C} .
- 3 Nennen Sie die Isomorphieklassen von Objekten und Morphismen in FinVec_K durch eine (möglichst einfaches) Repräsentantensystem.
- 4 Nennen Sie ebenso diese Isomorphieklassen in FinSet .

Kategorien formulieren universelle Gesetzmäßigkeiten und blenden dazu bewusst die Feinstruktur aus. Sie trennen die allgemeine Struktur von speziellen Eigenschaften. Diese Abstraktion vergrößert und vereinfacht, sie verschafft uns einen ersten Überblick, die eigentliche Arbeit steckt weiterhin in den Feinheiten: Gauß-Algorithmus und lokaler Umkehrsatz sind wesentlich tiefsinniger als unsere bescheidene Kategorientheorie!

Universelle Objekte

Beispiel: In der Kategorie **Set** gilt: Zu jeder Menge X existiert genau eine Abbildung $0 = \emptyset \rightarrow X$ sowie genau eine Abbildung $X \rightarrow \{0\} = 1$.

Definition H3A: initial, terminal, Nullobjekt

Sei $\mathcal{C} = (\text{Ob}, \text{Mor}, \circ)$ eine Kategorie. Wir vereinbaren:

$I \in \text{Ob}$ ist **initial** in \mathcal{C} $\iff \forall X \in \text{Ob} \exists! u \in \text{Mor}(I, X)$

$T \in \text{Ob}$ ist **terminal** in \mathcal{C} $\iff \forall X \in \text{Ob} \exists! v \in \text{Mor}(X, T)$

$N \in \text{Ob}$ ist **Nullobjekt** in \mathcal{C} $\iff N$ ist initial und terminal in \mathcal{C}

Ausführlich: Ein Objekt I ist **initial** in \mathcal{C} , wenn zu jedem Objekt X in \mathcal{C} genau ein Morphismus $u : I \rightarrow X$ existiert, also $\text{Mor}(I, X) = \{u\}$ gilt.

Ein Objekt T ist **terminal** (oder **final**) in \mathcal{C} , wenn zu jedem Objekt X genau ein Morphismus $v : X \rightarrow T$ existiert, also $\text{Mor}(X, T) = \{v\}$ gilt.

Ein **Nullobjekt** N in \mathcal{C} ist sowohl initial als auch terminal, also $|\text{Mor}(N, X)| = |\text{Mor}(X, N)| = 1$ für jedes Objekt X in \mathcal{C} .

Prominente Beispiele

Zur Illustration nenne ich einige einfache, aber prominente Beispiele:

Kategorie	initiale	terminale	Nullobjekte
(X, \leq)	kleinste	größte	—
$(\mathbb{N}, _{\mathbb{N}})$	1	0	—
Rel	\emptyset	\emptyset	\emptyset
Set, Top	\emptyset	$\{e\}$	—
Set _* , Top _* , Grp	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$
Vec _K , Mod _K , Ab	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
dyn. Systeme (A, a, α)	$(\mathbb{N}, 0, s)$	$(\{0\}, 0, c)$	—
Ring (immer mit Eins)	$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$	$(\{0\}, +, \cdot)$	—
Field _p (Charakteristik p)	\mathbb{F}_p bzw. \mathbb{Q}	—	—
archimedische Körper	$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$	$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$	—
Kompaktifizierungen	Stone–Čech	Alexandroff	—

Übung: Prüfen Sie möglichst viele der obigen Beispiele sorgsam nach.

Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus

Satz H3c: Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus

Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Zwischen je zwei initialen Objekten I, J existiert genau ein Isomorphismus $(f, g) : I \cong J$. Ebenso für terminale Objekte.

Eine Kategorie \mathcal{C} braucht im Allgemeinen kein initiales Objekt zu haben. Wenn eines existiert, so ist es im Allgemeinen nicht eindeutig, wie oben zu sehen, aber je zwei sind eindeutig isomorph! Nachrechnen dank „*general abstract nonsense*“:

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{f} & J \\
 \text{id}_I \downarrow ! & \swarrow g \exists! & \downarrow ! \text{id}_J \\
 I & \xrightarrow{f} & J
 \end{array}$$

Beweis: Es existiert genau ein Morphismus $f : I \rightarrow J$, denn I ist initial, und ebenso genau ein Morphismus $g : J \rightarrow I$, denn auch J ist initial.

Wir haben nun die beiden Morphismen $g \circ f : I \rightarrow I$ und $\text{id}_I : I \rightarrow I$. Es folgt $g \circ f = \text{id}_I$, denn dies ist der einzige Morphismus $I \rightarrow I$.

Ebenso ist $f \circ g = \text{id}_J : J \rightarrow J$ der einzige Morphismus $J \rightarrow J$.

Somit ist $(f, g) : I \cong J$ ein Isomorphismus, und zwar der einzige. QED

Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus

Diese **Eindeutigkeit bis auf Isomorphie** rechtfertigt unseren üblichen Sprachgebrauch: Wir sagen *die* triviale Gruppe, *der* Nullvektorraum, *der* einelementige topologische Raum, *der* Ring der ganzen Zahlen, *der* Körper der rationalen Zahlen, *der* Körper der reellen Zahlen, *der* Körper mit p Elementen, etc. Diese Objekte sind nicht eindeutig, aber immerhin eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus. Das ist genau die Erleuchtung des obigen allgemeinen Satzes.

Sie kennen diesen Trick von der Einpunktkompaktifizierung F4G.

Der Beweis ist wunderbar elegant und vollkommen trivial, somit ein schönes Beispiel für die ordnende Kraft von „*general abstract nonsense*“. Nehmen Sie sich Stift und Papier und beweisen Sie es nochmal selbst. Dann erst dürfen Sie ausrufen: „Ja, das ist trivial... und doch genial.“

Die Feststellung nützt in jeder der zahlreichen Situationen, in denen wir ein Objekt durch eine **universelle Abbildungseigenschaft** definieren: Wenn überhaupt eine Lösung existiert, so ist sie automatisch eindeutig – bis auf einen eindeutigen Isomorphismus. Noch besser geht es nicht!

Wir charakterisieren Produkte und Summen (Coproducte) durch ihre universelle Abbildungseigenschaft / UAE (in Top siehe E4D und E3F).

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xleftarrow{p_1} & P & \xrightarrow{p_2} & X_2 \\
 \parallel & & \uparrow \exists! f & & \parallel \\
 X_1 & \xleftarrow{p'_1} & P' & \xrightarrow{p'_2} & X_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{i_1} & S & \xleftarrow{i_2} & X_2 \\
 \parallel & & \downarrow \exists! f & & \parallel \\
 X_1 & \xrightarrow{i'_1} & S' & \xleftarrow{i'_2} & X_2
 \end{array}$$

Das allgemeine Muster formulieren wir nun wie folgt als Definition. Sei $\mathcal{C} = (\text{Ob}, \text{Mor}, \circ)$ eine Kategorie und $X_1, X_2 \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ zwei Objekte.

Ein **Produkt** von X_1, X_2 in \mathcal{C} ist eine terminale Familie $(X_1 \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} X_2)$ in der Kategorie all dieser Familien, geschrieben $\mathcal{C}(X_1 \leftarrow \bullet \rightarrow X_2)$

Eine **Summe** von X_1, X_2 in \mathcal{C} ist eine initiale Familie $(X_1 \xrightarrow{i_1} S \xleftarrow{i_2} X_2)$ in der Kategorie all dieser Familien, geschrieben $\mathcal{C}(X_1 \rightarrow \bullet \leftarrow X_2)$.

Die Lösung ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Produkt in einer Kategorie

Vorgegeben sei eine Familie $X = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Objekten $X_\lambda \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$.

$$\begin{array}{ccc}
 P' & \xrightarrow{\exists! f} & P \\
 & \searrow p'_\lambda & \downarrow p_\lambda \\
 & & X_\lambda \\
 (\lambda \in \Lambda) & &
 \end{array}$$

universelle
Eigenschaft
des Produkts

Die Kategorie \mathcal{C}_X^\downarrow hat als **Objekte über X** alle Familien $(P, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ mit $P \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ und $p_\lambda \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(P, X_\lambda)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Ein Morphismus $f : (P', (p'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) \rightarrow (P, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ ist ein \mathcal{C} -Morphismus $f : P' \rightarrow P$ mit $p_\lambda \circ f = p'_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Die Verknüpfung in \mathcal{C}_X^\downarrow ist die aus \mathcal{C} .

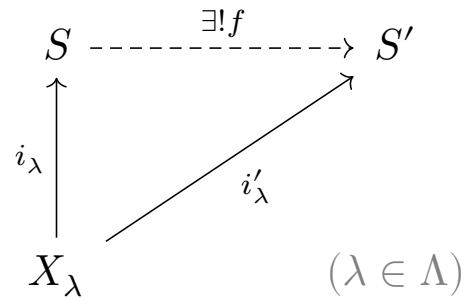
Definition H3D: Produkt in einer Kategorie \mathcal{C}

Ein **Produkt** der Objekte $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in \mathcal{C} ist ein terminales Objekt $(P, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ in \mathcal{C}_X^\downarrow : Zu jedem Konkurrenzobjekt $(P', (p'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ in \mathcal{C}_X^\downarrow existiert genau ein Morphismus $(P', (p'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) \rightarrow (P, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ in \mathcal{C}_X^\downarrow .

Summe / Coprodukt in einer Kategorie

Vorgegeben sei eine Familie $X = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Objekten $X_\lambda \in \text{Ob}_C$.

universelle
Eigenschaft
der Summe



Die Kategorie C_\downarrow^X hat als **Objekte unter X** alle Familien $(S, (i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ mit $S \in \text{Ob}_C$ und $i_\lambda \in \text{Mor}_C(X_\lambda, S)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Ein Morphismus $f : (S, (i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) \rightarrow (S', (i'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ ist ein C -Morphismus $f : S \rightarrow S'$ mit $f \circ i_\lambda = i'_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Die Verknüpfung in C_\downarrow^X ist die aus C .

Definition H3E: Summe / Coprodukt in einer Kategorie C

Eine **Summe** der Objekte $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in C ist ein initiales Objekt $(S, (i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ in C_\downarrow^X : Zu jedem Konkurrenzobjekt $(S', (i'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ in C_\downarrow^X existiert genau ein Morphismus $(S, (i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) \rightarrow (S', (i'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ in C_\downarrow^X .

Produkte und Summen in einer Kategorie

😊 Dank H3C ist das Produkt eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie! Falls dies existiert, so wählen wir eines, $(P = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, p_\lambda : P \rightarrow X_\lambda)$, und nennen p_λ die kanonischen Morphismen (aka „Projektionen“).

Die universelle Eigenschaft entspricht für $A \in \text{Ob}_C$ der Bijektivität von

$$\Phi : \text{Mor}(A, \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \xrightarrow{\cong} \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Mor}(A, X_\lambda) : f \mapsto (p_\lambda \circ f)_{\lambda \in \Lambda}.$$

😊 Dank H3C ist das Coprodukt eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie! Falls dies existiert, so wählen wir eines, $(S = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, i_\lambda : X_\lambda \rightarrow S)$, und nennen i_λ die kanonischen Morphismen (aka „Injektionen“).

Die universelle Eigenschaft entspricht für $Z \in \text{Ob}_C$ der Bijektivität von

$$\Psi : \text{Mor}(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, Z) \xrightarrow{\cong} \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Mor}(X_\lambda, Z) : f \mapsto (f \circ i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}.$$

😊 Für $\Lambda = \emptyset$ ist das Co/Produkt das initiale/terminale Objekte in C .

Für $\Lambda = \{1\}$ gilt $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = X_1$ mit $p_1 = \text{id}_{X_1}$ und $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = X_1$ mit $i_1 = \text{id}_{X_1}$. (Dies ist jeweils nur eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.)

Produkte und Summen in einer Kategorie

😊 Kurz und prägnant als Slogan zusammengefasst:

Das Produkt $(P = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, (p_\lambda : P \rightarrow X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ ist terminal *über* X .

Die Summe $(S = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, (i_\lambda : X_\lambda \rightarrow S)_{\lambda \in \Lambda})$ ist initial *unter* X .

Zur Illustration nenne ich einige prominente und vertraute Beispiele:

Kategorie	Produkt	Summe / Coprodukt
(X, \leq)	$\inf\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$	$\sup\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$
$(\mathbb{N}, \mid_{\mathbb{N}})$	$\text{ggT}(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$	$\text{kgV}(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$
Set_{\subseteq}	$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$	$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$
Set, Top	$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$	$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$
$\text{Set}_*, \text{Top}_*$	$\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$	$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$
Grp	$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$	$*_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$
$\text{Ab, Vec}_K, \text{Mod}_K$	$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$	$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$
CRing	$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$	$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$

Produkte und Summen in einer Kategorie

Nicht jede Kategorie \mathcal{C} hat initiale / terminale Objekte. Selbst wenn diese vorliegen, existieren in \mathcal{C} vielleicht nicht alle Summen / Produkte.

Beispiel: In (\mathbb{N}, \leq) existiert ein initiales Objekt 0, aber kein terminales.

Es existieren beliebige Produkte $\inf\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \min\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, aber i.A. nur endliche Summen $\sup\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \max\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Es ist daher eine besondere Auszeichnung einer Kategorie \mathcal{C} , wenn diese universellen Objekte immer als Lösungen existieren, also die Kategorie \mathcal{C} diese universellen Konstruktionen unterstützt.

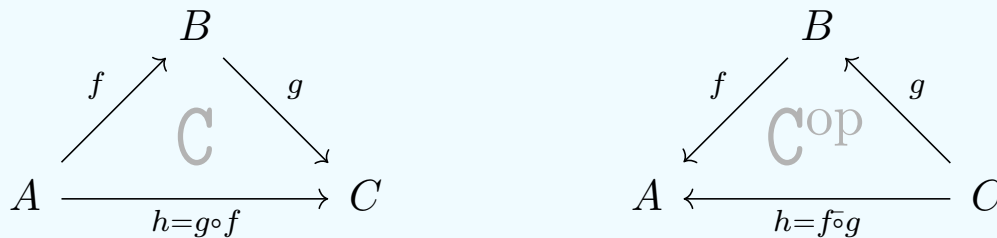
Auch deshalb haben wir in der Kategorie Top große Sorgfalt auf die universellen Konstruktionen verwendet. Anschließend haben wir diese genauer untersucht, innere Eigenschaften formuliert und bewiesen.

Das ist typisch: Die kategorielle Sichtweise ordnet und strukturiert, sie gibt einen Anfang vor, anschließend untersuchen wir die Feinstruktur.

😊 Zur Übung können Sie dies für Ihre Lieblingskategorien ausführen, zum Beispiel Set , Vec_K , Top , Grp ,

Definition H30: entgegengesetzte Kategorie

Zu jeder Kategorie \mathcal{C} können wir formal alle Pfeile umdrehen und erhalten die **entgegengesetzte Kategorie** \mathcal{C}^{op} mit $\mathcal{C}^{\text{op}}(B, A) = \mathcal{C}(A, B)$:



Diese hat dieselben Objekte und dieselben Morphismen wie \mathcal{C} , aber alle Morphismen werden umgedreht notiert, also $\mathcal{C}^{\text{op}}(B, A) = \mathcal{C}(A, B)$ und

$$\bar{\circ} : \mathcal{C}^{\text{op}}(B, A) \times \mathcal{C}^{\text{op}}(C, B) \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}(C, A) : (f, g) \mapsto f \bar{\circ} g = g \circ f.$$

Mit $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t, \circ, \text{id})$ ist auch $\mathcal{C}^{\text{op}} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, t, s, \bar{\circ}, \text{id})$ eine Kategorie.

Beispiel: Zur Kategorie (X, \leq) entgegengesetzt ist (X, \geq) .

Durch zweimaliges Umdrehen erhalten wir $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$.

Entgegengesetzte Kategorie

Übung: Schreiben Sie die Dualisierung von \mathcal{C} zu \mathcal{C}^{op} vollständig aus als „Graph mit Komposition“ im Sinne von Definition H1Q.

Jedes kommutative Diagramm in \mathcal{C} entspricht durch Umdrehen aller Pfeile einem kommutativen Diagramm in \mathcal{C}^{op} , und umgekehrt.

Insbesondere haben \mathcal{C} und \mathcal{C}^{op} genau dieselben Isomorphismen.

Für das Dualisieren erhalten wir folgende Übersetzungen:

Eigenschaft in \mathcal{C}	Eigenschaft in \mathcal{C}^{op}
invertierbar – Isomorphismus	Isomorphismus – invertierbar
links-/rechtsinvertierbar	rechts-/linksinvertierbar
links-/rechtskürzbar	rechts-/linkskürzbar
Nullobjekt	Nullobjekt
initial / terminal	terminal / initial
Coprodukt / Produkt	Produkt / Coprodukt
ko-/kontravarianter Funktor	kontra-/kovarianter Funktor
$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$	$F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$

Aufgabe: (1) Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Darin existiere ein Nullobjekt 0 sowie zu jeder Familie $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ eine Summe $S = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$ und ein Produkt $P = A_1 \times \dots \times A_n$. Dies definiert den kanonischen Morphismus

$$f: A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n \quad \text{durch die Matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Schreibweise bedeutet ausführlich: Für jedes Paar $(\ell, k) \in \{1, \dots, n\}^2$ ist $f_{\ell k} = p_\ell \circ f \circ i_k: A_k \rightarrow A_\ell$ gegeben durch die Identität $f_{\ell k} = \text{id}_{A_k}$ falls $k = \ell$ sowie den Nullmorphismus $f_{\ell k}: A_k \rightarrow 0 \rightarrow A_\ell$ falls $k \neq \ell$.

Beispiel: In Mod_K ist f ein Isomorphismus: Summe gleich Produkt! Dieser besonderen Eigenschaft wollen wir nun auf den Grund gehen.

Aufgabe: Von einer **additiven Kategorie** \mathcal{C} verlangen wir (1) und zudem: (2) Für je zwei Objekte $A, B \in \mathcal{C}$ ist $(\mathcal{C}(A, B), +, 0)$ eine abelsche Gruppe, und alle Kompositionen $\circ: \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$ sind \mathbb{Z} -bilinear. Folgern Sie daraus, dass obiger Morphismus f ein Isomorphismus ist.

Lösung: Wir konstruieren $g: P \rightarrow S$ durch $g := \sum_{k=1}^n i_k \circ p_k \in \mathcal{C}(P, S)$.

Es gilt $g \circ f = \text{id}_S$, denn $g \circ f \circ i_k = \sum_{\ell=1}^n i_\ell \circ p_\ell \circ f \circ i_k = i_k$ für alle k .

Aus $g \circ f \circ i_k = \text{id}_S \circ i_k$ folgt $g \circ f = \text{id}_S$ dank UAE gemäß Definition H3E.

Es gilt $f \circ g = \text{id}_P$, denn $p_\ell \circ f \circ g = \sum_{k=1}^n p_\ell \circ f \circ i_k \circ p_k = p_\ell$ für alle ℓ .

Aus $p_\ell \circ f \circ g = p_\ell \circ \text{id}_P$ folgt $f \circ g = \text{id}_P$ dank UAE gemäß Definition H3D.

In jeder additiven Kategorie sind *endliche* Summen und Produkte gleich! (Zunächst nur *isomorph*, daher können wir beide gleich *wählen*.)

Aufgabe: (3) Für das Biproduct (= Summe = Produkt) schreiben wir \oplus . Jeder \mathcal{C} -Morphismus f von $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ nach $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$ schreibt sich als Matrix $F = (f_{\ell k})$ mit Koeffizienten $f_{\ell k} = p_\ell \circ f \circ i_k$. Welche der üblichen Rechenregeln für Matrizen gelten hier?

Lösung: Alle! Rechnen Sie Addition und Multiplikation sorgsam nach.

😊 Das erklärt, wo die Rechenregeln für Matrizen eigentlich herkommen. Jeder endlich erzeugte K -Vektorraum V erlaubt eine Basis (b_1, \dots, b_n) , zerfällt gemäß $V = Kb_1 \oplus \dots \oplus Kb_n$ mit $Kb_i \cong K$, und $\text{End}_K(K, K) \cong K$. Zudem erweitern wir mögliche Anwendungen, etwa auf Blockmatrizen!

Wir betrachten die Kategorie $\text{Set}_*^{\text{end}}$: Objekte sind Tripel (A, a, α) bestehend aus einer Menge A , einem Fußpunkt $a \in A$, und einer Selbstabbildung $\alpha : A \rightarrow A$. Morphismen $f : (A, a, \alpha) \rightarrow (B, b, \beta)$ sind Abbildungen $f : A \rightarrow B$ mit $f(a) = b$ und $f \circ \alpha = \beta \circ f$.

$$\begin{array}{ccccc} \{a\} & \xrightarrow{\text{inc}} & A & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & & \downarrow f & & \downarrow f \\ \{b\} & \xrightarrow{\text{inc}} & B & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

Anwendung: Jedes Objekt (A, a, α) beschreibt ein *dynamisches System* mit Zustandsmenge A , Startzustand $a \in A$ und Dynamik $\alpha : A \rightarrow A$. In $\text{Set}_*^{\text{end}}$ liegen die vollen Unterkategorien $\text{Set}_*^{\text{bij}}$ und $\text{Set}_*^{\text{inj}}$ und $\text{Set}_*^{\text{sur}}$: Für ihre Objekte (A, a, α) verlangen wir dabei noch zusätzlich, dass die Selbstabbildung $\alpha : A \rightarrow A$ bijektiv / injektiv / surjektiv ist.

Aufgabe: Bestimmen Sie initiale Objekte in jeder dieser Kategorien. *Hinweis:* Wiederholen Sie hierzu die Dedekind–Peano–Axiome für die natürlichen Zahlen und darauf aufbauend Dedekinds Rekursionsatz.

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{N} & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{N} & & \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ \{a_0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & A & \xrightarrow{\alpha} & A & & \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ & & a_0 & \xrightarrow{\alpha} & a_1 & \xrightarrow{\alpha} & a_2 & \xrightarrow{\alpha} & a_3 & \xrightarrow{\alpha} & \dots \end{array}$$

Lösung: (1) Initial in $\text{Set}_*^{\text{end}}$ sind die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ mit der Nachfolgerabbildung $\nu : n \mapsto n + 1$. Das ist die Aussage von Dedekinds Rekursionsatz: Zu jedem Objekt $(A, a, \alpha) \in \text{Set}_*^{\text{end}}$ konstruieren wir $f : \mathbb{N} \rightarrow A : n \mapsto a_n$ durch die Rekursion $a_0 = a$ und $a_{n+1} = \alpha(a_n)$.

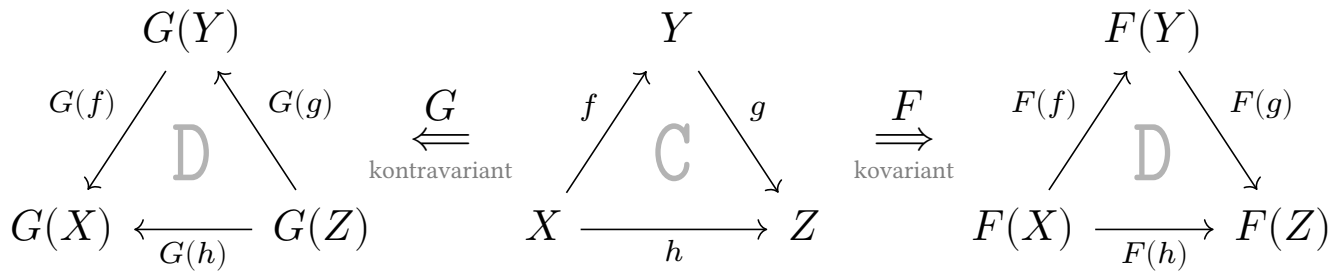
😊 Als Korollar erhalten wir die Einzigkeit der natürlichen Zahlen: Zu je zwei Modellen $(N, 0, \nu)$ und $(N', 0', \nu')$ der natürlichen Zahlen existiert genau ein Isomorphismus $(f, f') : (N, 0, \nu) \cong (N', 0', \nu')$.



Jede:r darf sich ihre natürlichen Zahlen vorstellen, wie sie mag. Zwischen je zwei Modellen übersetzt der eindeutige Isomorphismus.

- (2) Initial in $\text{Set}_*^{\text{bij}}$ sind die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, 0, \zeta)$ mit $\zeta : n \mapsto n + 1$.
- (3) Initial in $\text{Set}_*^{\text{inj}}$ ist $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ genau wie in (1), denn ν ist injektiv.
- (4) Die Kategorie $\text{Set}_*^{\text{sur}}$ hat kein initiales Objekt! (Übung / Skript)

Kovariante und kontravariante Funktoren



Eine Kategorie $\mathcal{C} = (\text{Ob}, \text{Mor}, \circ)$ besteht aus Objekten und Morphismen und ihrer Komposition. Ein **Funktor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist eine strukturerhaltende Abbildung: Er übersetzt kommutative Diagramme der Startkategorie \mathcal{C} in kommutative Diagramme der Zielkategorie \mathcal{D} . Entsprechend $G : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

Beispiele: (1) Wir haben den **kovarianten Potenzmengenfunktor**

$$\mathfrak{P}_* : \text{Set} \rightarrow \text{Set} : X \mapsto \mathfrak{P}(X) \text{ mit Verschieben auf die Bildmenge}$$

$$(f : X \rightarrow Y) \mapsto (f_* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y) : A \mapsto \{f(a) \in Y \mid a \in A\}).$$

(2) Wir haben den **kontravarianten Potenzmengenfunktor**

$$\mathfrak{P}^* : \text{Set} \rightarrow \text{Set} : X \mapsto \mathfrak{P}(X) \text{ mit Zurückziehen auf die Urbildmenge}$$

$$(f : X \rightarrow Y) \mapsto (f^* : \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X) : B \mapsto \{x \in X \mid f(x) \in B\}).$$

Kovariante und kontravariante Funktoren

Beweis: (1) Für jede Menge X gilt offensichtlich $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\mathfrak{P}(X)}$.
Für Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$:

$$(g \circ f)_*(A) \stackrel{\text{Def}}{=} \{g(f(a)) \mid a \in A\}$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \{g(b) \mid b \in f_*(A)\} \stackrel{\text{Def}}{=} g_*(f_*(A)) \stackrel{\text{Def}}{=} (g_* \circ f_*)(A).$$

(2) Für jede Menge X gilt offensichtlich $(\text{id}_X)^* = \text{id}_{\mathfrak{P}(X)}$.
Für Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$:

$$(g \circ f)^*(C) \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in X \mid g(f(x)) \in C\}$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in g^*(C)\} \stackrel{\text{Def}}{=} f^*(g^*(C)) \stackrel{\text{Def}}{=} (f^* \circ g^*)(C).$$

Für Ur/Bildmengen schreibt man kurz $f(A) = f_*(A)$ und $f^{-1}(B) = f^*(B)$. Dieser Missbrauch der Notation ist bequem, aber unglücklich, denn er unterscheidet weder f_* von der ursprünglichen Abbildung f , noch f^* von der (eventuell existierenden) inversen Abbildung f^{-1} . Der Kontext sagt, was gemeint ist, doch die Doppelbedeutung verwirrt Anfänger:innen. Wie so oft gilt es zwischen Bequemlichkeit und Klarheit abzuwägen.

Kovariante und kontravariante Funktoren

Definition H4c: Funktor

Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien. Ein **(kovarianter) Funktor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ordnet jedem \mathcal{C} -Objekt $X \in \mathcal{C}$ ein \mathcal{D} -Objekt $F(X) \in \mathcal{D}$ zu und jedem \mathcal{C} -Morphismus $f : X \rightarrow Y$ einen \mathcal{D} -Morphismus $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$, wobei $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \mathcal{C}$ gilt sowie $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle verknüpfbaren \mathcal{C} -Morphismen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$.

Ein **kontravarianter Funktor** $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist ein Funktor $G : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$. Ausführlich heißt das: G ordnet jedem \mathcal{C} -Objekt $X \in \mathcal{C}$ ein \mathcal{D} -Objekt $G(X) \in \mathcal{D}$ zu und jedem \mathcal{C} -Morphismus $f : X \rightarrow Y$ einen \mathcal{D} -Morphismus $G(f) : G(Y) \rightarrow G(X)$, wobei $G(\text{id}_X) = \text{id}_{G(X)}$ für alle $X \in \mathcal{C}$ gilt sowie $G(g \circ f) = G(f) \circ G(g)$ für alle \mathcal{C} -Morphismen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$.

Beispiele: Ein Funktor $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ ist eine monotone Abbildung. Die Funktoren $\pi_0, \mathbb{Z} : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ sind kovariant, ebenso die (Vergiss-)Funktoren $\text{Met} \rightarrow \text{Top} : (X, d) \mapsto (X, \mathcal{T}_d)$ und $\text{Top} \rightarrow \text{Set} : (X, \mathcal{T}) \mapsto X$. Transposition ${}^\top : \text{Mat}_K \rightarrow \text{Mat}_K$ ist kontravariant, $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$.

Einfache Beispiele zu Funktoren

Beispiel: Wir können prägeordnete Mengen (X, \leq) und (Y, \leq) als Kategorien auffassen (H1G). Ein kovarianter Funktor $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ ist eine monoton wachsende Abbildung, das heißt, $x \leq y$ impliziert $f(x) \leq f(y)$. Ein kontravarianter Funktor $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ ist eine monoton fallende Abbildung, das heißt, $x \leq y$ impliziert $f(x) \geq f(y)$.

Beispiel: Ein konstanter Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt X in \mathcal{C} ein festes Objekt Y in \mathcal{D} zu und jedem Morphismus in \mathcal{C} die Identität id_Y . Dieser ist kovariant und kontravariant (als seltene Ausnahme).

Beispiel: Für jede Kategorie \mathcal{C} ist die Identität $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Sind $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ Funktoren, so auch ihre Komposition $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$. Kategorien und Funktoren bilden eine Kategorie!

Fußnote: Die Kategorie aller kleinen Kategorien bereitet keine Probleme. Die „Kategorie aller Kategorien“ hingegen ist in sich widersprüchlich wie die „Menge aller Mengen“ in Russels Antinomie (B107). Grothendieck schlug dazu vor, jeweils vom aktuellen ZFC-Mengenuniversum zu einem größeren übergehen, in dem die aktuellen Klassen zu Mengen werden.

Funktoren erhalten Isomorphie.

Satz H4F: Funktoren erhalten Isomorphie.

- Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor (kovariant, ebenso kontravariant $G : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$).
- (0) Ist f in \mathcal{C} links-/rechtsinvertierbar, so auch $F(f)$ in \mathcal{D} , getauscht für G .
 - (1) Ist f in \mathcal{C} ein Isomorphismus, dann ist $F(f)$ in \mathcal{D} ein Isomorphismus.
 - (2) Sind zwei Objekte $X \cong Y$ in \mathcal{C} isomorph, so auch $F(X) \cong F(Y)$ in \mathcal{D} .
 - (3) Sind Morphismen $p \cong q$ in \mathcal{C} isomorph, so auch $F(p) \cong F(q)$ in \mathcal{D} .

Beweis: Das folgt unmittelbar aus den Definitionen:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \text{id}_X \downarrow & \nearrow g & \downarrow \text{id}_Y \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array} & \xRightarrow{F} & \begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\
 \text{id}_{F(X)} \downarrow & \nearrow F(g) & \downarrow \text{id}_{F(Y)} \\
 F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y)
 \end{array} \\
 \\
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 p \downarrow & \cong & \downarrow q \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y'
 \end{array} & \xRightarrow{F} & \begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\
 F(p) \downarrow & \cong & \downarrow F(q) \\
 F(X') & \xrightarrow{F(f')} & F(Y')
 \end{array}
 \end{array}$$

Die Funktoren $\pi_0, \mathcal{Z} : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$

Weg/Komponenten (G2H/G1N) definieren die kovarianten Funktoren

$$\begin{aligned}
 \pi_0 : \text{Top} &\rightarrow \text{Set} : X \mapsto \pi_0(X), \\
 (f : X \rightarrow Y) &\mapsto (\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y) : [a]_X \mapsto [f(a)]_Y), \\
 \mathcal{Z} : \text{Top} &\rightarrow \text{Set} : X \mapsto \mathcal{Z}(X), \\
 (f : X \rightarrow Y) &\mapsto (\mathcal{Z}(f) : \mathcal{Z}(X) \rightarrow \mathcal{Z}(Y) : \langle a \rangle_X \mapsto \langle f(a) \rangle_Y).
 \end{aligned}$$

Jeder Homöomorphismus $(f, g) : X \cong Y$ topologischer Räume, also ein Top-Isomorphismus, induziert Bijektionen $(\pi_0(f), \pi_0(g)) : \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$ und $(\mathcal{Z}(f), \mathcal{Z}(g)) : \mathcal{Z}(X) \cong \mathcal{Z}(Y)$, also Set-Isomorphismen.

Der Quotient zur Homotopiekategorie (G4L) ist der Funktor

$$\begin{aligned}
 \text{quot} : \text{Top} &\rightarrow \text{hTop} : X \mapsto X, \\
 (f : X \rightarrow Y) &\mapsto ([f] : X \rightarrow Y).
 \end{aligned}$$

Homotopie-Invarianz (G4M) induziert $\bar{\pi}_0 : \text{hTop} \rightarrow \text{Set} : [f] \mapsto \pi_0(f)$ als Faktorisierung $\pi_0 = \bar{\pi}_0 \circ \text{quot}$. Auch für $\bar{\pi}_0$ schreiben wir kurz π_0 .

Hom-Funktoren

Sei \mathcal{C} eine *lokal kleine* Kategorie. Zu jedem Paar von Objekten $X, Y \in \mathcal{C}$ ist dann $\mathcal{C}(X, Y) \in \text{Set}$ die *Menge* aller Morphismen von X nach Y .

Übung H4j: Hom-Funktor, kovariant und kontravariant

(1) Zu jedem festen Objekt $Z \in \mathcal{C}$ erhalten wir den kovarianten Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(Z, -) : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} : X \mapsto \mathcal{C}(Z, X), \\ (f : X \rightarrow Y) &\mapsto (f_* : \mathcal{C}(Z, X) \rightarrow \mathcal{C}(Z, Y) : h \mapsto f \circ h). \end{aligned}$$

(2) Dual hierzu erhalten wir den kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-, Z) : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} : X \mapsto \mathcal{C}(X, Z), \\ (f : X \rightarrow Y) &\mapsto (f^* : \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z) : h \mapsto h \circ f). \end{aligned}$$

Beispiel: Sie kennen bereits den Funktor $\pi_0 = [\{*\}, -] : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$. In Kapitel J untersuchen wir den Funktor $[\mathbb{S}^n, -] : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$.

Aus der Linearen Algebra kennen Sie über jedem Körper K den Dualisierungs-Funktor $\text{Hom}_K(-, K) : \text{Vec}_K \rightarrow \text{Vec}_K$.

Hom-Funktoren

(1) Wir rechnen geduldig nach, dass $\mathcal{C}(Z, -)$ ein kovarianter Funktor ist:

(a) Für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ gilt $\mathcal{C}(Z, \text{id}_X) = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\mathcal{C}(Z, X)}$, denn für $h \in \mathcal{C}(Z, X)$ gilt $(\text{id}_X)_*(h) = \text{id}_X \circ h = h$ dank Neutralität.

(b) Für je zwei Morphismen $f : V \rightarrow X$ und $g : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} gilt

$$\mathcal{C}(Z, g \circ f) = (g \circ f)_* = g_* \circ f_* = \mathcal{C}(Z, g) \circ \mathcal{C}(Z, f),$$

denn für jeden Morphismus $h \in \mathcal{C}(Z, V)$ gilt dank Assoziativität

$$(g \circ f)_*(h) = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g_*(f \circ h) = g_*(f_*(h)) = (g_* \circ f_*)(h).$$

(2) Genauso zeigen wir, dass $\mathcal{C}(-, Z)$ ein kontravarianter Funktor ist:

(a) Für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ gilt $\mathcal{C}(\text{id}_X, Z) = (\text{id}_X)^* = \text{id}_{\mathcal{C}(X, Z)}$, denn für $h \in \mathcal{C}(X, Z)$ gilt $(\text{id}_X)^*(h) = h \circ \text{id}_X = h$ dank Neutralität.

(b) Für je zwei Morphismen $f : V \rightarrow X$ und $g : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} gilt

$$\mathcal{C}(g \circ f, Z) = (g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \mathcal{C}(f, Z) \circ \mathcal{C}(g, Z),$$

denn für jeden Morphismus $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$ gilt dank Assoziativität

$$(g \circ f)^*(h) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = f^*(h \circ g) = f^*(g^*(h)) = (f^* \circ g^*)(h).$$

Was ist eine natürliche Transformationen?

Wir beginnen mit einem vertrauten Beispiel aus der Topologie.

Es gilt $X = \bigsqcup \pi_0(X) = \bigsqcup \mathbb{Z}(X)$. Die Zerlegung $\pi_0(X)$ ist feiner als $\mathbb{Z}(X)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_0(X) & \xrightarrow{\pi_0(f)} & \pi_0(Y) \\
 \uparrow \llbracket \! \! \! \rfloor_X & & \uparrow \llbracket \! \! \! \rfloor_Y \\
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow \langle \! \! \! \rangle_X & & \downarrow \langle \! \! \! \rangle_Y \\
 \mathbb{Z}(X) & \xrightarrow{\mathbb{Z}(f)} & \mathbb{Z}(Y)
 \end{array}$$

$t_X: [a]_X \mapsto \langle a \rangle_X$ $t_Y: [b]_Y \mapsto \langle b \rangle_Y$

Zwischen den Funktoren $\pi_0, \mathbb{Z} : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ besteht die obige Beziehung.

Wir nennen die **Transformation** $t : \pi_0 \rightarrow \mathbb{Z} : [a] \mapsto \langle a \rangle$ **natürlich** (H5B):

Zu $f : X \rightarrow Y$ gilt $t_Y \circ \pi_0(f) = \mathbb{Z}(f) \circ t_X$, das obige Rechteck kommutiert.

Auf der vollen Unterkategorie lcTop der lokal wegzusammenhängenden Räume ist t sogar eine **natürliche Äquivalenz**, geschrieben $t : \pi_0 \simeq \mathbb{Z}$, denn gemäß Satz G3c gilt hier sogar die Gleichheit $\pi_0(X) = \mathbb{Z}(X)$.

Natürliche Transformationen: Morphismen von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc}
 X & F(X) & \xrightarrow{t_X} & G(X) & F(X) & \xrightarrow{t_X} & G(X) & \xrightarrow{s_X} & H(X) \\
 f \downarrow & F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow & F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow & & H(f) \downarrow \\
 Y & F(Y) & \xrightarrow{t_Y} & G(Y) & F(Y) & \xrightarrow{t_Y} & G(Y) & \xrightarrow{s_Y} & H(Y)
 \end{array}$$

Definition H5B: natürliche Transformation

(1) Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Eine **Transformation** $t : F \rightarrow G$ ordnet jedem \mathcal{C} -Objekt X einen \mathcal{D} -Morphismus $t_X : F(X) \rightarrow G(X)$ zu.

(2) Wir nennen t **natürlich**, wenn für jeden \mathcal{C} -Morphismus $f : X \rightarrow Y$ die Kommutativität $t_Y \circ F(f) = G(f) \circ t_X$ gilt.

(3) Funktoren $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und nat. Transformationen $t : F \rightarrow G$, $s : G \rightarrow H$ bilden eine Kategorie mit $(s \circ t)_X = s_X \circ t_X$ für alle $X \in \mathcal{C}$.

Eine **natürliche Äquivalenz** $(t, s) : F \cong G$ von Funktoren besteht aus nat. Transformationen $t : F \rightarrow G$ und $s : G \rightarrow F$ mit $s \circ t = \text{id}_F$ und $t \circ s = \text{id}_G$. Für jedes \mathcal{C} -Objekt X ist $(t_X, s_X) : F(X) \cong G(X)$ ein \mathcal{D} -Isomorphismus.

Beispiel: Die Determinante ist natürlich.

$$\begin{array}{ccc}
 R = M_1(R) \xleftarrow{\det_R^n} M_n(R) & & R^\times = GL_1(R) \xleftarrow{\det_R^n} GL_n(R) \\
 \downarrow f & \text{Ring} & \downarrow M_n(f) & & \downarrow GL_1(f) & \text{Grp} & \downarrow GL_n(f) \\
 S = M_1(S) \xleftarrow{\det_S^n} M_n(S) & & S^\times = GL_1(S) \xleftarrow{\det_S^n} GL_n(S)
 \end{array}$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir den Funktor $M_n : \text{Ring} \rightarrow \text{Ring} : R \mapsto R^{n \times n}$; zu $f : R \rightarrow S$ definieren wir $M_n(f) : M_n(R) \rightarrow M_n(S) : (a_{ij}) \mapsto (f(a_{ij}))$.

Für R in $\text{CRing} \leq \text{Ring}$ haben wir die Determinante $\det_R^n : M_n(R) \rightarrow R$. Diese ist überall durch dieselbe Formel definiert und somit natürlich!

Zu $M_n : \text{CRing} \rightarrow \text{Ring}$ erhalten wir so die natürliche Transformation $\det : M_n \rightarrow M_1$, und zu $GL_n : \text{CRing} \rightarrow \text{Grp}$ ebenso $\det : GL_n \rightarrow GL_1$.

Beispiel: Es ist egal, ob Sie $\det(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix})$ in $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \dots$ berechnen, das Ergebnis $\det(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}) = -2$ ist über jedem Ring „natürlich“ dasselbe!

Aufgabe: Über welchen endlichen Körpern ist $A = (\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix})$ invertierbar?

Lösung: Wir nutzen $\det_{\mathbb{Z}}^2(A) = -2$ und $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p$: invertierbar gdw $p \neq 2$.

Beispiel: Potenzmenge und Indikatorfunktionen

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \mathfrak{P}(X) & \xrightleftharpoons[t_X]{s_X} & \{0, 1\}^X \\
 \downarrow f & & \uparrow f^* & & \uparrow \text{Set}(f, \{0, 1\}) \\
 & B \mapsto f^{-1}(B) & & \text{Set} & h \mapsto h \circ f \\
 Y & & \mathfrak{P}(Y) & \xrightleftharpoons[t_Y]{s_Y} & \{0, 1\}^Y
 \end{array}$$

Die Transformation $t_X : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$ ordnet jeder Teilmenge $A \subseteq X$ ihre **Indikatorfunktion** $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ zu, und $s_X : \{0, 1\}^X \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ ordnet jeder Funktion $h : X \rightarrow \{0, 1\}$ ihren **Träger** $\text{supp}(h) \subseteq X$ zu.

😊 Besser noch: Dies erweist sich nun als eine natürliche Äquivalenz! Eleganter zusammengefasst: Der *kontravariante* Potenzmengenfunktor \mathfrak{P}^* lässt sich als Hom-Funktor darstellen, dank $(t, s) : \mathfrak{P}^* \cong \text{Set}(-, \{0, 1\})$.

⚠ Für den *kovarianten* Potenzmengenfunktor \mathfrak{P}_* gelingt das nicht! Zur Darstellung suchen wir eine Menge A mit $(t, s) : \mathfrak{P}_* \cong \text{Set}(A, -)$. Wir finden $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, aber $\text{Set}(A, \emptyset) = \emptyset$ für jede Menge $A \neq \emptyset$. Es gilt $\text{Set}(\emptyset, X) = \{\emptyset\}$, aber $\mathfrak{P}(X) \neq \{\emptyset\}$ für jede Menge $X \neq \emptyset$.

Wie für mathematische Objekte üblich haben wir auch für Kategorien einen Isomorphiebegriff, zudem einen schwächeren Äquivalenzbegriff:

Definition H5E: Isomorphie vs Äquivalenz

Eine **Isomorphie** $(F, G) : \mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ zwischen zwei Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} besteht aus Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$.

Für eine **Äquivalenz** $(F, G) : \mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ verlangen wir etwas schwächer nur natürliche Äquivalenzen $(t, t') : G \circ F \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$ und $(s, s') : F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$.

😊 Die Lineare Algebra nutzt höchst effizient die Matrizenrechnung, und dies beruht auf der folgenden Äquivalenz zu linearen Abbildungen.

Aufgabe: Erklären Sie die Isomorphie / Äquivalenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen. **Lösung:** Folgender Satz ist der erste Schritt:

Satz H5F: Matrizen und lineare Abbildungen

Für jeden Ring K haben wir die Isomorphie $(L, M) : \text{Mat}_K \cong \text{NatMod}_K$. Hingegen gilt $\text{FinMod}_K \not\cong \text{Mat}_K$, denn die Objekte sind über/abzählbar.

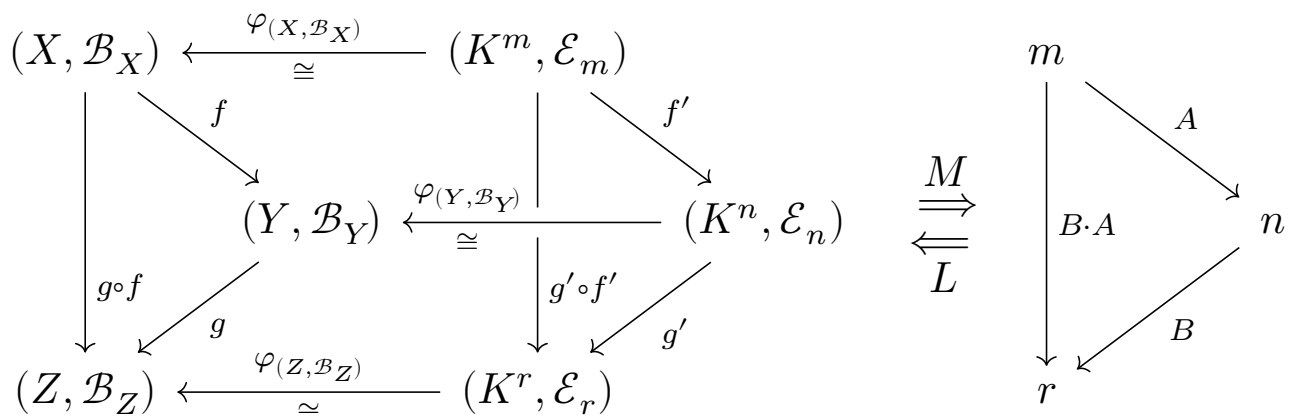
Äquivalenz von Matrizen und linearen Abbildungen

Beweis: Der Funktor $L : \text{Mat}_K \rightarrow \text{NatMod}_K$ ordnet jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ den Koordinatenraum $L(n) = K^n$ zu und jeder Matrix $A \in K^{n \times m}$ die lineare Abbildung $L(A) : K^m \rightarrow K^n : v \mapsto Av$. Die Matrixmultiplikation wurde vorausschauend so definiert, dass hier $L(B \cdot A) = L(B) \circ L(A)$ gilt.

Umgekehrt haben wir den Funktor $M : \text{NatMod}_K \rightarrow \text{Mat}_K$: Dem Raum K^n wird seine Dimension $n \in \mathbb{N}$ zugeordnet und jeder linearen Abbildung $f : K^m \rightarrow K^n$ die zugehörige Matrix $M(f) \in K^{n \times m}$: Bezüglich der kanonischen Basen gilt $f(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i a_{ij}$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_{ij} , und wir setzen $M(f) := (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$. Auch hier gilt $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$. Wir sehen $M \circ L = \text{id}_{\text{Mat}_K}$ und $L \circ M = \text{id}_{\text{NatMod}_K}$. So erhalten wir den Isomorphismus $(L, M) : \text{Mat}_K \cong \text{NatMod}_K$. QED

Nach diesem Erfolg möchten wir den Funktor $M : \text{NatMod}_K \rightarrow \text{Mat}_K$ auf FinMod_K ausdehnen: Wir wollen jeder K -linearen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine Matrix $A \in K^{n \times m}$ zuordnen. Hierzu müssen wir allerdings Basen von X und Y wählen. Nicht immer existiert eine Basis, und falls eine existiert, so gibt es meist viele und darunter keine kanonische Wahl.

Wir machen die Not zur Tugend und betrachten Paare (X, \mathcal{B}_X) , wobei X ein K -Modul ist und $\mathcal{B}_X = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von X . Als Morphismen $f: (X, \mathcal{B}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{B}_Y)$ betrachten wir K -lineare Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ wie zuvor. Wir erhalten so die Kategorie FinMod_K^b der endlich-basierten K -Moduln und die volle Unterkategorie NatMod_K^b mit Objekten (K^n, \mathcal{E}_n) , wobei $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis ist. (Speziell hier gibt es eine kanonische Wahl!) Zu jedem Objekt (X, \mathcal{B}_X) mit $\mathcal{B}_X = (x_1, \dots, x_n)$ haben wir den Koordinatenisomorphismus $\varphi: (K^n, \mathcal{E}_n) \xrightarrow{\cong} (X, \mathcal{B}_X)$ mit $e_k \mapsto x_k$. Elegant zusammengefasst:



Das steckt hinter dem Kochrezept: „Jede lineare Abbildung können wir als Matrix darstellen... nach Wahl je einer Basis von Start und Ziel!“

Satz H5G: Matrizen und lineare Abbildungen

Es gilt $(L, M) : \text{Mat}_K \simeq \text{FinMod}_K^b$: Die Kategorie der Matrizen ist (nicht isomorph, aber) äquivalent zur Kategorie der endlich-basierten Moduln.

Beweis: Dank Satz H5F haben wir $L : \text{Mat}_K \xrightarrow{\cong} \text{NatMod}_K \hookrightarrow \text{FinMod}_K^b$ und $M : \text{FinMod}_K^b \rightarrow \text{Mat}_K$ wie oben im Diagramm erklärt. Nach Konstruktion gilt $M \circ L = \text{id}_{\text{Mat}_K}$. Umgekehrt gilt jedoch $L \circ M \neq \text{id}_{\text{FinMod}_K^b}$, denn für jeden basierten Modul (X, \mathcal{B}_X) mit $\mathcal{B}_X = (x_1, \dots, x_n)$ bekommen wir $(L \circ M)(X, \mathcal{B}_X) = L(n) = (K^n, \mathcal{E}_n)$. Dank der gegebenen Basen haben wir den Koordinatenisomorphismus $\varphi : (K^n, \mathcal{E}_n) \xrightarrow{\cong} (X, \mathcal{B}_X) : e_k \mapsto x_k$. Das stiftet die natürliche Äquivalenz $\varphi : L \circ M \xrightarrow{\cong} \text{id}_{\text{FinMod}_K^b}$. QED

😊 Das Geschäft der Basiswahl ist anfangs verwirrend, dann sehr einfach. Sie verstehen jetzt vielleicht etwas besser, was hierbei genau passiert: Die Lineare Algebra konstruiert und nutzt eine natürliche Äquivalenz!

Adjungierte Funktoren

Wir betrachten den topologischen Vergissfunktoren:

$$F : \text{Top} \rightarrow \text{Set} : Y = (M_Y, \mathcal{T}_Y) \mapsto M_Y, f \mapsto f$$

Umgekehrt stellen wir jede Menge X mit der in/diskreten Topologie aus:

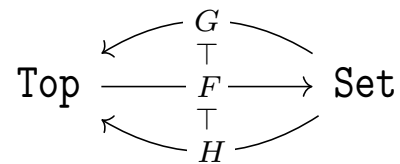
$$G : \text{Set} \rightarrow \text{Top} : X \mapsto (X, \{\emptyset, X\}), f \mapsto f$$

$$H : \text{Set} \rightarrow \text{Top} : X \mapsto (X, \mathfrak{P}(X)), f \mapsto f$$

Für jeden topologischen Raum $X \in \text{Top}$ und jede Menge $Y \in \text{Set}$ gilt:

$$\text{Set}(FX, Y) \cong \text{Top}(X, GY) : f \mapsto f$$

$$\text{Set}(Y, FX) \cong \text{Top}(HY, X) : f \mapsto f$$



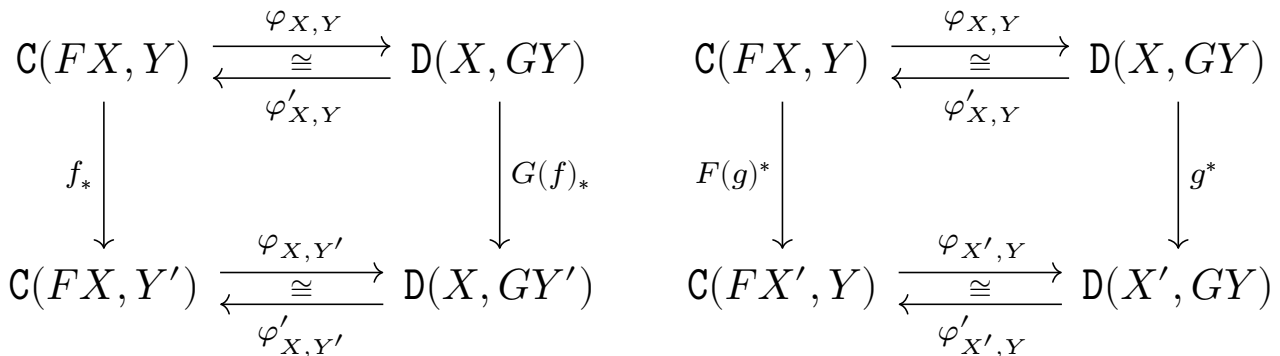
Definition H6c: Adjunktion

Eine **Adjunktion** $(\varphi, \varphi') : F \dashv G : D \rightleftarrows C$ besteht aus zwei gegenläufigen Funktoren $F : D \rightarrow C$ und $G : C \rightarrow D$ und einer natürlichen Bijektion $(\varphi_{X,Y}, \varphi'_{X,Y}) : C(FX, Y) \cong D(X, GY)$ für jedes Paar $X \in D$ und $Y \in C$.

Adjungierte Funktoren

Wir schreiben $(\varphi, \varphi') : F \dashv G$ kurz $\varphi : F \dashv G$ oder noch kürzer $F \dashv G$. Wir nennen auch kurz das Paar (F, G) eine Adjunktion, dabei ist F **linksadjungiert** zu G , und entsprechend G **rechtsadjungiert** zu F .

Die Natürlichkeit von (φ, φ') bedeutet: Für jeden Morphismus $f : Y \rightarrow Y'$ in C bzw. $g : X' \rightarrow X$ in D kommutieren die folgenden Diagramme:



$$f_* : C(A, Y) \rightarrow C(A, Y') : \alpha \mapsto f \circ \alpha,$$

$$G(f)_* : D(A, GY) \rightarrow D(A, GY') : \alpha \mapsto G(f) \circ \alpha,$$

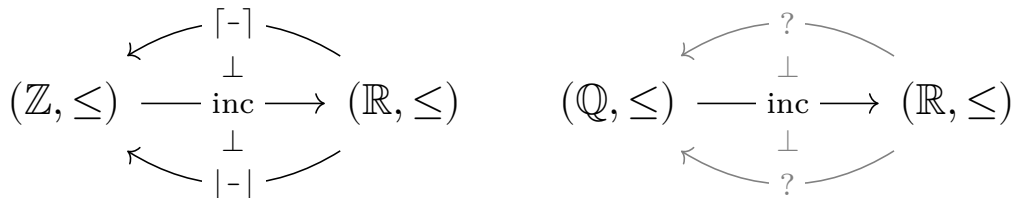
$$g^* : C(X, B) \rightarrow C(X', B) : \beta \mapsto \beta \circ g,$$

$$F(g)^* : D(FX, B) \rightarrow D(FX', B) : \beta \mapsto \beta \circ F(g).$$

The slogan is “Adjoint functors arise everywhere.”

Saunders Mac Lane (1909–2005), *Categories for the Working Mathematician*

Der Name kommt von der Adjunktionsformel für Skalarprodukte. Die kategorielle Adjunktion begegnet uns häufig in der Mathematik, meist unter verschiedenen Namen. Hier ein erstes amüsantes Beispiel:



Aufgabe: (1) Wir betrachten $\text{inc} : (\mathbb{Z}, \leq) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ als Funktor. (H1G) Existiert hierzu ein linksadjungierter Funktor? ein rechtsadjungierter Funktor? Ist die Lösung eindeutig? Geben Sie sie möglichst explizit an!
 (2) Dieselben Fragen für den Funktor $\text{inc} : (\mathbb{Q}, \leq) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$. Dies zeigt: Nicht jeder Funktor erlaubt einen links- oder rechtsadjungierten Funktor. Adjunktion ist eine ganz besondere und sehr wertvolle Eigenschaft.

Lösung: (1a) Zum Inklusionsfunktor $g = \text{inc} : (\mathbb{Z}, \leq) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \leq) : y \mapsto y$ suchen wir einen Linksadjungierten $f : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow (\mathbb{Z}, \leq) : x \mapsto f(x)$. Das bedeutet $(\mathbb{Z}, \leq)(f(x), y) \cong (\mathbb{R}, \leq)(x, g(y))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{Z}$. Zu festem $x \in \mathbb{R}$ heißt das: Für alle $y \in \mathbb{Z}$ gilt $f(x) \leq y$ genau dann, wenn $x \leq y$. Das bedeutet ganzzahlig Aufrunden, $f(x) = \lceil x \rceil$.

(1b) Wir suchen einen Rechtsadjungierten $h : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow (\mathbb{Z}, \leq) : x \mapsto h(x)$. Das bedeutet $(\mathbb{R}, \leq)(g(y), x) \cong (\mathbb{Z}, \leq)(y, h(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{Z}$. Wie in (1a) finden wir nun ganzzahliges Abrunden, $h(x) = \lfloor x \rfloor$.

(2) Zu festem $x \in \mathbb{R}$ suchen wir ein $\bar{x} \in \mathbb{Q}$, sodass für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt: (a) $\bar{x} \leq y \Leftrightarrow x \leq y$ bzw. (b) $y \leq \bar{x} \Leftrightarrow y \leq x$. Da \mathbb{Q} in \mathbb{R} dicht liegt, müsste dazu $\bar{x} = x$ gelten. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist daher keine solche Wahl $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ möglich.

😊 Auf- und Abrunden ist die Grundlage der **Fließkomma-Arithmetik** und somit jeder Computer-Implementierung numerischer Mathematik. Allgemein für partiell geordnete Mengen (*posets*) erhalten wir den Begriff der **Galois-Verbindung** (*Galois connection*), etwa in der Galois-Theorie.

Das freie Monoid X^* über dem Alphabet X

Beispiel: Wir betrachten den Vergissfunktork (engl. *underlying set*)

$$U : \text{Mon} \rightarrow \text{Set} : Y = (M, \cdot, e) \mapsto M, \quad h \mapsto h.$$

Zu jeder Menge X sei $FX = (X^*, \cdot, e)$ das freie Monoid über X . Jede Abbildung $g : X \rightarrow X'$ setzen wir multiplikativ fort zu $F(g) : FX \rightarrow FX'$.

$$F : \text{Set} \rightarrow \text{Mon} : X \mapsto (X^*, \cdot, e), \quad g \mapsto F(g)$$

Damit gilt das **Prinzip der multiplikativen Fortsetzung / PMF**:

$$\text{Set}(X, UY) \cong \text{Mon}(FX, Y) : g \mapsto h$$

Zu $g : X \rightarrow UY$ gehört die multiplikative Fortsetzung $h : FX \rightarrow Y$.

Dies ist der eindeutige Monoidhomomorphismus h mit $h|_X = g$.

Übung: Rechnen Sie die Natürlichkeit von $(\varphi, \varphi') : g \mapsto h$ geduldig nach.

Wiederholung: Wie konstruiert man zu X das freie Monoid (X^*, \cdot, e) ?

Die Menge $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ besteht aus allen Wörtern $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ endlicher Länge mit der Aneinanderhängung \cdot und dem leeren Wort e .

Die freie Gruppe $\langle X \rangle$ über dem Alphabet X

Beispiel: Wir betrachten den Vergissfunktork (engl. *underlying set*)

$$U : \text{Grp} \rightarrow \text{Set} : Y = (G, \cdot, e, {}^{-1}) \mapsto G, \quad h \mapsto h$$

Zu jeder Menge X sei $FX = (\langle X \rangle, \cdot, e, {}^{-1})$ die freie Gruppe über X . Jede Abbildung $g : X \rightarrow X'$ setzen wir multiplikativ fort zu $F(g) : FX \rightarrow FX'$.

$$F : \text{Set} \rightarrow \text{Grp} : X \mapsto (\langle X \rangle, \cdot, e, {}^{-1}), \quad g \mapsto F(g)$$

Damit gilt das **Prinzip der multiplikativen Fortsetzung / PMF**:

$$\text{Set}(X, UY) \cong \text{Grp}(FX, Y) : g \mapsto h$$

Zu $g : X \rightarrow UY$ gehört die multiplikative Fortsetzung $h : FX \rightarrow Y$.

Dies ist der eindeutige Gruppenhomomorphismus h mit $h|_X = g$.

Übung: Rechnen Sie die Natürlichkeit von $(\varphi, \varphi') : g \mapsto h$ geduldig nach.

Wiederholung: Wie konstruiert man die freie Gruppe $(\langle X \rangle, \cdot, e, {}^{-1})$?

Über dem Alphabet $A = X \times \{\pm\} = \{x^\pm \mid x \in X\}$ bilden wir das Monoid A^* und daraus den Quotienten modulo der Kongruenz $x^+x^- = e = x^-x^+$.

Der lineare Raum KX zu einer vorgegebenen Basis X

Beispiel: Sei K ein Körper. Wir betrachten den Vergissfunktork:

$$U : \text{Vec}_K \rightarrow \text{Set} : Y = (V, +, \cdot) \mapsto V, \quad h \mapsto h$$

Zu jeder Menge X sei $FX = (KX, +, \cdot)$ der K -Vektorraum mit Basis X . Jede Abbildung $g : X \rightarrow X'$ setzen wir linear fort zu $F(g) : FX \rightarrow FX'$.

$$F : \text{Set} \rightarrow \text{Vec}_K : X \mapsto (KX, +, \cdot), \quad g \mapsto F(g)$$

Damit gilt das **Prinzip der linearen Fortsetzung / PLF:**

$$\text{Set}(X, UY) \cong \text{Vec}_K(FX, Y) : g \mapsto h$$

Zu $g : X \rightarrow UY$ gehört die lineare Fortsetzung $h : FX \rightarrow Y$ mit $h|_X = g$.

Übung: Rechnen Sie die Natürlichkeit von $(\varphi, \varphi') : g \mapsto h$ geduldig nach.

Wiederholung: Wie konstruiert man zu X den Raum $(KX, +, \cdot)$?

Der Koordinatenraum $(K^{(X)}, +, \cdot)$ hat die kanonische Basis $(e_x)_{x \in X}$.

Wir erhalten $KX := K^{(X)}$, wobei wir $x \in X$ mit $e_x \in K^{(X)}$ identifizieren. (Alles gelingt wörtlich genauso über jedem beliebigen Ring K mit $1 \neq 0$.)

Der Polynomring $K[X]$ zu vorgegebener Variablenmenge X

Beispiel: Sei K ein CRing. Wir betrachten den Vergissfunktork:

$$U : \text{CAlg}_K \rightarrow \text{Set} : Y = (A, +, \cdot) \mapsto A, \quad h \mapsto h$$

Hier ist CAlg_K die Kategorie der kommutativen K -Algebren, also CRinge $(A, +, \cdot)$ mit Eins und festem Ringhomomorphismus $K \rightarrow A : a \mapsto a1$.

Zu jeder Menge X sei $FX = (K[X], +, \cdot)$ der Polynomring über K . Jede Abbildung $g : X \rightarrow X'$ setzen wir fort zu $F(g) : FX \rightarrow FX'$.

$$F : \text{Set} \rightarrow \text{CAlg}_K : X \mapsto (K[X], +, \cdot), \quad g \mapsto F(g)$$

Damit gilt die **universelle Eigenschaft des Polynomrings:**

$$\text{Set}(X, UY) \cong \text{CAlg}_K(FX, Y) : g \mapsto h$$

Zu $g : X \rightarrow UY$ gehört die Fortsetzung $h : FX \rightarrow Y$ mit $h|_X = g$.

Es existiert genau ein solcher K -Algebrenhomomorphismus h .

Wiederholung: Wie konstruiert man den Polynomring $(K[X], +, \cdot)$?

Wir nutzen $K[X] := KM$ über dem abelschen Monoid $M = (\mathbb{N}^{(X)}, +, 0)$.