Kapitel H

Die Sprache der Kategorien

Oublions les choses, ne considérons que les rapports.

[Vergessen wir die Dinge, betrachten wir nur die Beziehungen.]

Georges Braques (1882–1963), Mitbegründer des Kubismus

Inhalt dieses Kapitels H

1 Kategorien

2 Kommutative Diagramme

3 Universelle Objekte

4 Funktoren

5 Natürliche Transformationen

Einführung und Überblick

In der Mathematik treten gewisse Phänomene immer wieder auf. Sie verdienen einen Namen, nur so können wir darüber sprechen, präzise danach forschen und effizient damit arbeiten. Erste Beispiele:

Zuordnungen, Funktionen	$\longrightarrow$	Mengen und Abbildungen
Operationen, Symmetrien	$\longrightarrow$	Monoide und Gruppen
Addition, Multiplikation	$\longrightarrow$	Ringe und Körper
Abstände, Stetigkeit	$\longrightarrow$	Metrik und Topologie

☺ Abstraktion hilft konkret! Sie strukturiert, ordnet und vereinfacht. Dadurch werden zahlreiche Einzelfälle effizient zusammengefasst.

Diese ordnende Vorgehensweise ist Kennzeichen jeder Wissenschaft und in der Mathematik ganz extrem ausgeprägt und systematisiert.

Ein gut verstandenes Beispiel nützt mehr als drei unverstandene Sätze. Ein gut verstandener Satz bündelt 1001 Beispiele. Nutzen Sie beides!

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
Ludwig Wittgenstein (1889-1951), *Tractatus logico-philosophicus* (1921)

Die Sprache der **Kategorien** hilft uns, häufig wiederkehrende Strukturen und Argumente effizient zu formulieren und prägnant zu kommunizieren. Dies ist das Ziel jeder hochentwickelten Sprache: Sie ermöglicht uns, verschiedene Phänomene einheitlich zu beschreiben, Analogien zu erkennen und strukturelle Gemeinsamkeiten zu erfassen.

[Category theory] frames a possible template for any mathematical theory: the theory should have nouns and verbs, i.e., objects, and morphisms, and there should be an explicit notion of composition related to the morphisms; the theory should, in brief, be packaged by a category.

There is hardly any species of mathematical object that doesn't fit into this convenient, and often enlightening, template.

Barry Mazur, *When is one thing equal to some other thing?* (2007)

Objekte, Morphismen, Verknüpfung und ihre Rechenregeln

Die **Topologie** untersucht und nutzt stetige Abbildungen:

$$\mathbf{Top} = (\text{ top. Räume } A, \text{ stetige Abb. } f:A\to B, \text{ Komposition } \circ\,)$$

(a) Objekte sind topologische Räume $A, B, C, D, \dots$.

(b) Morphismen sind stetige Abb. $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$, ...

(c) Sind $f:A\to B$ und $g:B\to C$ stetig, so auch ihre Verknüpfung

$$g\circ f \;:\; A\to C \;:\; a\mapsto g(f(a)).$$

(0) Jede Abbildung f bestimmt ihren Startraum und ihren Zielraum.

(1) Für jeden top. Raum B ist die Identität $\mathrm{id}_B : B\to B : b\mapsto b$ stetig.
Bei Verknüpfung ist id_B neutral: Für alle $f:A\to B$ und $g:B\to C$ gilt

$$\mathrm{id}_B\circ f = f \quad \text{und} \quad g\circ \mathrm{id}_B = g.$$

(2) Die Verknüpfung ist assoziativ: Für verknüpfbare Abbildungen gilt

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f.$$

🙂 Solche Daten und Rechenregeln nutzen wir sehr häufig!

Objekte, Morphismen, Verknüpfung und ihre Rechenregeln

Grundlegend für die gesamte Mathematik sind Mengen und Funktionen:

$$\mathbf{Set} = (\text{ Mengen } X,\ \text{Abbildungen } f : X \to Y,\ \text{Komposition } \circ\ )$$

🙂 Diese Daten (a,b,c) erfüllen die Rechenregeln (0,1,2): Kategorie!

(a) Objekte sind Mengen $A, B, C, D, \dots$.

(b) Morphismen sind Funktionen $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, ….

(c) Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so auch $g \circ f : A \to C$.

(0) Jede Funktion f bestimmt ihre Startmenge und ihren Zielmenge.

(1) Zu jeder Menge B ist die Identität $\mathrm{id}_B : B \to B : b \mapsto b$ neutral.

(2) Die Verknüpfung ist assoziativ, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

🙂 Wir nutzen **Funktoren** zwischen diesen **Kategorien**:

topologische Räume

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "a \mapsto [a]_X"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g \circ f"'] & & \pi_0(X) \arrow[dr, "\pi_0(f)"] \arrow[dd, "\pi_0(g \circ f)"'] & \\
& Y \arrow[rr, "b \mapsto [b]_Y"] \arrow[dl, "g"] & & \pi_0(Y) \arrow[dl, "\pi_0(g)"] \\
Z \arrow[rr, "c \mapsto [c]_Z"] & & \pi_0(Z) &
\end{tikzcd}$$

Mengen von Wegkomponenten

Objekte, Morphismen, Verknüpfung und ihre Rechenregeln

Die **Lineare Algebra** untersucht und nutzt lineare Abbildungen:

$$\mathbf{Vec}_K = (\ K\text{–Vektorräume } V,\ K\text{–lineare Abb. } f : V \to W,\ \text{Komposition } \circ\ ).$$

Die **Analysis** untersucht und nutzt differenzierbare Abbildungen:

$$\mathscr{C}^1 = (\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},\ f : U \to V \text{ stetig differenzierbar, Komposition } \circ\ ).$$

Diese Daten (a,b,c) erfüllen die Rechenregeln (0,1,2): Kategorien!
Die Ableitung $D : \mathscr{C}^1_* \to \mathbf{Vec}_\mathbb{R}$ erfüllt die Kettelregel $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$.
Das bedeutet: Die Ableitung D ist ein kovarianter Funktor.

Hier müssen wir zudem angeben, in welchem Punkt $a \in U$ wir ableiten.
Dazu besteht $\mathscr{C}^1_*$ aus Objekten (U, a) mit $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ und U offen sowie Morphismen $f : (U, a) \to (V, b)$ mit $f : U \to V$ stetig diff'bar und $f(a) = b$.

Die Ableitung D ordnet (U, a) den Tangentialraum $T_a U = \mathbb{R}^n$ zu und $f : (U, a) \to (V, b)$ die Ableitung $D_a f : T_a U \to T_b V$, aka Jacobi–Matrix.
Dabei gilt $D(\mathrm{id}_{(U,a)}) = \mathrm{id}_{T_a U}$ und die Kettenregel $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$.

Diese Begriffe wollen wir nun präzisieren und nutzen lernen.

Diese ersten Beispiele zeigen bereits eindrücklich: Von Anbeginn Ihres Studiums nutzen Sie ganz natürlich Kategorien und Funktoren. Erst zaghaft und unbewusst, dann zunehmend und selbstbewusst.

Wie ein Fisch im Wasser schwimmt, wie ein Vogel in der Luft fliegt, so bewegen Sie sich in Ihrem Mathematikstudium in Kategorien – auch wenn Sie davon vermutlich oft gar nichts bemerken.

Sie benötigen dafür zunächst keine Sprache, um darüber zu reden, Sie tun es einfach. Die diversen Beispiele sehen alle ähnlich aus, doch erst ab einer kritischen Masse lohnt sich die Abstraktion.

Ich denke, die kritische Masse ist nun erreicht: Wir haben genug eindrückliche Beispiele, um diese in geeignete Begriffe zu fassen. Weitere Beispiele werden folgen, die Investition wird sich lohnen.

Schaffen wir also Ordnung! *Simplify your Math!*

Kategorien: Daten und Eigenschaften

Definition H1A: Kategorie

Eine **Kategorie** $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ besteht aus drei **Daten**:

(a) eine Klasse Ob, deren Elemente wir **Objekte** von $\mathbf{C}$ nennen,

(b) zu je zwei Objekten A, B eine Klasse $\mathrm{Mor}(A,B)$ von **Morphismen**,

(c) zu je drei Objekten $A, B, C \in \mathrm{Ob}$ eine **Verknüpfung** von Morphismen,

$$\circ \;:\; \mathrm{Mor}(B,C) \times \mathrm{Mor}(A,B) \to \mathrm{Mor}(A,C) \;:\; (g,f) \mapsto g \circ f.$$

Diese drei Daten müssen die folgenden drei **Eigenschaften** erfüllen:

(0) **Disjunktion:** Für $(A,B) \neq (A',B')$ gilt $\mathrm{Mor}(A,B) \cap \mathrm{Mor}(A',B') = \emptyset$.
Jeder Morphismus bestimmt sein Startobjekt und sein Zielobjekt.

(1) **Identität:** Zu jedem $B \in \mathrm{Ob}$ existiert ein $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}(B,B)$, sodass $\mathrm{id}_B \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_B = g$ gilt für alle $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ und $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$.

(2) **Assoziativität:** Es gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ für alle verknüpfbaren Morphismen, ausführlich also für je vier Objekte $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}$ und je drei Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$, $h \in \mathrm{Mor}(C,D)$.

Kategorien: Daten und Eigenschaften

Zur Angabe einer Kategorie $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ benötigen wir drei **Daten**:
(a) Welche Objekte und (b) welche Morphismen gehören zu $\mathbf{C}$?
(c) Wie werden die Morphismen in $\mathbf{C}$ verknüpft?

In unserer Definition H1A einer Kategorie $\mathbf{C}$ sprechen wir nicht von der **Menge** $\mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$, sondern vorsichtig von der **Klasse** $\mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ aller Objekte in $\mathbf{C}$.

Beispiel: Wir möchten von der Kategorie $\mathbf{Set}$ aller Mengen sprechen. Diese ist jedoch nachweislich zu groß, um selbst eine Menge zu sein.

Beweis: Die Annahme einer „Menge M aller Mengen“ führt zu Widersprüchen, insbesondere der **Russelschen Antinomie**:

In M hätten wir die Teilmenge $R = \{\, x \in M \mid x \notin x \,\}$ aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Dies ist eine Menge, also gilt $R \in M$.

Aus der Annahme $R \notin R$ folgt $R \in R$.
Aus der Annahme $R \in R$ folgt $R \notin R$.

Wir erhalten in jedem Fall einen Widerspruch. $\boxed{\text{QED}}$

Kategorien: Daten und Eigenschaften

Konvention: Eine Kategorie $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ heißt **klein**, wenn ihre Objektklasse Ob und ihre Morphismenklasse Mor beides Mengen sind. Die Kategorie $\mathbf{C}$ heißt **lokal klein**, wenn zu je zwei Objekten $A, B \in \mathrm{Ob}$ die zugehörige Morphismenklasse $\mathrm{Mor}(A, B)$ eine Menge ist.

Beispiele: Die Kategorie $\mathbf{Set}$ ist nicht klein, aber immerhin lokal klein. Dasselbe gilt für die Kategorien $\mathbf{Top}$ und $\mathbf{Vec}_K$. Die Kategorie $\mathscr{C}^1$ ist klein.

Eigenschaft (0) nutzen wir (unterbewusst) überall in der Mathematik, zuerst bereits wenn wir über Injektivität und Surjektivität sprechen.

Die Eigenschaft (1) bestimmt die Identität id_B zu B eindeutig: Sind $\mathrm{id}_B, \mathrm{id}'_B \in \mathrm{Mor}(B, B)$ neutral, so folgt $\mathrm{id}'_B = \mathrm{id}_B \circ \mathrm{id}'_B = \mathrm{id}_B$.

Die Assoziativität (2) kennen wir von Abbildungen aus den konkreten Beispielen $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Top}$, $\mathbf{Vec}_K$, $\mathscr{C}^1$ etc. und fordern sie nun allgemein

⚠ Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen. Es kommt für Kategorien nicht primär darauf an, was die Objekte und Morphismen konkret sind, sondern dass sie die Rechenregeln erfüllen.

Kategorien: Daten und Eigenschaften

Stehen mehrere Kategorien in Rede, so schreiben wir $A,B,C \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(B,C)$ und $g \circ_{\mathbf{C}} f$, oder kürzer $A,B,C \in \mathbf{C}$, $f \in \mathbf{C}(A,B)$, $g \in \mathbf{C}(B,C)$ und $g \circ f$.

Die Linksreihung ist üblich, aber manchmal unglücklich. Wir sollten genauer von einer **Linkskategorie** sprechen.

$$\circ \;:\; \mathrm{Mor}(B,C) \times \mathrm{Mor}(A,B) \to \mathrm{Mor}(A,C) \;:\; (g,f) \mapsto g \circ f.$$

Eine **Rechtskategorie** hat als Verknüpfung entsprechend

$$\bullet \;:\; \mathrm{Mor}(A,B) \times \mathrm{Mor}(B,C) \to \mathrm{Mor}(A,C) \;:\; (f,g) \mapsto f \bullet g.$$

Beide Schreibweisen sind austauschbar und meist nur eine Frage der gemeinsamen Tradition oder des persönlichen Geschmacks.

Ich werde gelegentlich die Schreibweise als Rechtskategorie nutzen, wenn dies der intuitiven Lese- und Schreibrichtung entspricht.

Unterkategorien

Wir beginnen mit einer Kategorie, etwa **Top**. (A) Darin erhalten wir eine Unterkategorie, indem wir nur gewisse Objekte zulassen, etwa

$$\mathbf{Haus} = (\text{ Hausdorff–Räume } X, \text{ stetige Abb. } f : X \to Y, \text{ Komposition } \circ\ ),$$

ebenso für (lokal-)kompakte (Hausdorff–)Räume, oder ganz allgemein für topologische Räume mit bestimmten zusätzlichen Eigenschaften.

(B) Alternativ können wir nur gewisse Morphismen zulassen, etwa

$$\mathbf{Emb} = (\text{ top. Räume } X, \text{ Einbettungen } f : X \to Y, \text{ Komposition } \circ\ ),$$

ebenso Identifizierungen, offene / abgeschlossene / eigentliche Abbildungen, (lokale) Homöomorphismen, etc.

Hierbei ist zu prüfen, dass jede Identität diese Eigenschaft erfüllt, und die geforderte Eigenschaft bei Komposition erhalten bleibt.

Diese grundlegende Forderung formulieren wir nun als Definition.

Definition H1B: Unterkategorie

Eine **Unterkategorie** $\mathbf{S} = (\mathrm{Ob}_{\mathbf{S}}, \mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}, \circ)$ in $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}, \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}, \circ)$, geschrieben $\mathbf{S} < \mathbf{C}$, besteht aus einer Teilklasse $\mathrm{Ob}_{\mathbf{S}} \subset \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ von Objekten sowie für jedes Paar $A, B \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{S}}$ einer Teilklasse $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,B) \subset \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B)$ von Morphismen, sodass gilt:

1. Für jedes Objekt $B \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{S}}$ der Unterkategorie gilt $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(B,B)$.
2. Für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,B)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(B,C)$ gilt $g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,C)$.

Damit ist $\mathbf{S}$ eine Kategorie mit der von $\mathbf{C}$ eingeschränkten Verknüpfung.

Die Unterkategorie $\mathbf{S} < \mathbf{C}$ heißt **weit**, wenn $\mathrm{Ob}_{\mathbf{S}} = \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ gilt, also nur die Morphismen eingeschränkt werden, aber nicht die Objekte, und **voll**, wenn $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{S}}$ gilt, also nur die Objekte eingeschränkt werden, aber nicht die Morphismen.

Beispiele: Die Unterkategorie $\mathscr{C}^1 < \mathbf{Top}$ ist weder weit noch voll.
Die Unterkategorie $\mathbf{Emb} < \mathbf{Top}$ aller Einbettungen ist weit, nicht voll.
Die Unterkategorie $\mathbf{Haus} < \mathbf{Top}$ aller Hausdorff–Räume ist voll, nicht weit.

Unterkategorien

Unterkategorien sind eine bequeme und vielseitige Methode, um neue Kategorien aus alten zu konstruieren. Das hilft oft.

Sie kennen dies von zahlreichen mathematischen Strukturen wie Unter/Gruppen, Unter/Vektorräumen, etc. . . nun Unter/Kategorien.

Im Falle einer vollen Unterkategorie $\mathbf{S} < \mathbf{C}$ ist nichts weiter zu prüfen: Dank der Gleichheit $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B)$ für alle $A,B \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{S}}$ sind beide Bedingungen (1) und (2) automatisch erfüllt.

Nur bei der Einschränkung von Morphismen zu $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A,B) \subset \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B)$ müssen wir die beiden Eigenschaften (1) und (2) tatsächlich prüfen.

Damit ist $\mathbf{S}$ eine Kategorie mit der von $\mathbf{C}$ eingeschränkten Verknüpfung: Disjunktion, Neutralität und Assoziativität übertragen sich von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{S}$.

Grundlegende Beispiele: Mengen und Relationen

Grundlegend für die gesamte Mathematik sind Mengen und Relationen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Rel} &= (\text{ Mengen } X, && \text{Relationen } F \subset X \times Y, && \text{Komposition } \circ\,),\\
\mathbf{Set} &= (\text{ Mengen } X, && \text{Abbildungen } f : X \to Y, && \text{Komposition } \circ\,),\\
\mathbf{Set}_{\subset} &= (\text{ Mengen } X, && \text{Inklusionen } \iota_X^Y : X \subset Y, && \text{Komposition } \circ\,).\\
\mathbf{FinSet} &= (\text{ endliche Mengen } X, && \text{Abbildungen } f : X \to Y, && \text{Komposition } \circ\,),\\
\mathbf{NatSet} &= (\text{ Mengen } n \in \mathbb{N}, && \text{Abbildungen } f : m \to n, && \text{Komposition } \circ\,).
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, und rekursiv $n = \{0, \dots, n-1\}$.

In den Kategorien **Set** und **FinSet** erhalten wir zudem interessante Unterkategorien durch Injektionen und Surjektionen und Bijektionen. In **NatSet** haben wir die Unterkategorie der monotonen Abbildungen.

Übung: Sind dies Unterkategorien? Welche sind voll? und weit?

☺ Diese Beispiele sind sehr konkrete und vertraute Kategorien. Darauf aufbauend betrachten wir Mengen mit zusätzlicher Struktur…

Relationen und Abbildungen

Eine **Relation zwischen den Mengen X und Y** ist eine Teilmenge $F \subseteq X \times Y$ des Produkts. Zu jeder Menge X haben wir ihre **Diagonale**

$$\Delta_X = \{\, (x,x) \mid x \in X \,\} \subseteq X \times X.$$

Zu $F \subseteq X \times Y$ haben wir ihre **Inverse** oder **Umkehrung**

$$F^{-1} = F^\intercal = \{\, (y,x) \mid (x,y) \in F \,\} \subseteq Y \times X.$$

Zu $F \subseteq X \times Y$ und $G \subseteq Y \times Z$ haben wir ihre **Komposition**

$$H =: F \bullet G = G \circ F \subseteq X \times Z \quad \text{definiert durch}$$
$$H = \{\, (x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \;:\; (x,y) \in F \wedge (y,z) \in G \,\}.$$

Die Linkskomposition $\circ$ ist üblich, die Rechtskomposition $\bullet$ natürlich.

Assoziativität $(F \bullet G) \bullet H = F \bullet (G \bullet H)$ bzw. $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$.
Neutralität $\Delta_X \bullet F = F \bullet \Delta_Y = F$ bzw. $F \circ \Delta_X = \Delta_Y \circ F = F$.
Umkehrung $(F \bullet G)^\intercal = G^\intercal \bullet F^\intercal$ bzw. $(G \circ F)^\intercal = F^\intercal \circ G^\intercal$.

Relationen und Abbildungen

Eine **Relation** $f = (X, F, Y)$ besteht aus ihrer **Startmenge** X und ihrer **Zielmenge** Y sowie ihrem **Graphen** $F \subseteq X \times Y$. Daraus erhalten wir

$$\begin{array}{ll} \text{Definitionsmenge} & \operatorname{Def}(f) := \operatorname{pr}_1 F = \{\, x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in F \,\}, \\ \text{Bildmenge} & \operatorname{Im}(f) \;\; := \operatorname{pr}_2 F = \{\, y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in F \,\}. \end{array}$$

Zu jeder Menge X haben wir ihre **Identität**

$$\mathrm{id}_X = (X, \Delta_X, X) \quad \text{mit} \quad \Delta_X = \left\{\, (x, x) \,\middle|\, x \in X \,\right\}.$$

Zu $f = (X, F, Y)$ haben wir ihre **Inverse** oder **Umkehrung**

$$f^{-1} = f^{\intercal} = (Y, F^{\intercal}, X) \quad \text{mit} \quad F^{\intercal} = \left\{\, (y, x) \,\middle|\, (x, y) \in F \,\right\}.$$

Zu $f = (X, F, Y)$ und $g = (Y, G, Z)$ haben wir ihre **Komposition**

$$\begin{gathered} h = (X, H, Z) =: g \circ f = f \bullet g \qquad \text{mit} \\ H = \{\, (x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \; : \; (x, y) \in F \wedge (y, z) \in G \,\}. \end{gathered}$$

Übung: Dies definiert eine Kategorie!

Relationen und Abbildungen

Wir nennen $f = (X, F, Y)$ **linkstotal**, wenn $\operatorname{pr}_1 F = X$ gilt, also zu jedem $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Wir nennen f **rechtstotal**, wenn $\operatorname{pr}_2 F = Y$ gilt, also zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $(x, y) \in F$. Hierzu müssen wir die Startmenge X und die Zielmenge Y kennen!

Wir nennen f **rechtseindeutig**, wenn zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Das heißt, aus $(x, y), (x, y') \in F$ folgt $y = y'$. Wir nennen f **linkseindeutig**, wenn zu jedem $y \in X$ höchstens ein $x \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Das heißt, aus $(x, y), (x', y) \in F$ folgt $x = x'$.

Eine Relation $f = (X, F, Y)$ heißt **Funktion** oder **Abbildung**, wenn sie linkstotal und rechtseindeutig ist, also zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Wir sagen hierzu, f ordnet dem Element $x \in X$ das Element $y \in Y$ zu, und schreiben kurz $f(x) = y$.

Übung: Für jede Relation $f = (X, F, Y)$ haben wir $F \bullet F^\intercal \subseteq X \times X$ und $F^\intercal \bullet F \subseteq Y \times Y$. Genauer gelten dabei folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
F \bullet F^\intercal \supseteq \Delta_X &\quad\iff\quad f \text{ ist linkstotal}\\
F \bullet F^\intercal \subseteq \Delta_X &\quad\iff\quad f \text{ ist linkseindeutig}\\
F^\intercal \bullet F \supseteq \Delta_Y &\quad\iff\quad f \text{ ist rechtstotal}\\
F^\intercal \bullet F \subseteq \Delta_Y &\quad\iff\quad f \text{ ist rechtseindeutig}
\end{aligned}$$

Genau dann gilt $f \bullet f^\intercal = \mathrm{id}_X$ und $f^\intercal \bullet f = \mathrm{id}_Y$, wenn f eine Bijektion ist:

$$\begin{cases}
\forall x \in X \;\; \exists! y \in Y \;:\; (x, y) \in F & \text{das heißt } f \text{ ist eine Funktion}\\
\forall y \in Y \;\; \exists! x \in X \;:\; (x, y) \in F & \text{das heißt } f^\intercal \text{ ist eine Funktion}
\end{cases}$$

In Worten bedeutet das: Die Relation F zwischen X und Y ordnet jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu und umgekehrt jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$.

Grundlegende Beispiele: Präordnung als Kategorie

Eine **Präordnung** $\le$ auf einer Menge X ist reflexiv und transitiv.

Dies definiert eine Kategorie

$$(\,X,\,\le,\,\circ\,) \quad \text{mit} \quad \mathrm{Ob} = X, \quad \mathrm{Mor}(a,b) = \begin{cases} \{\,(a,b)\,\} & \text{falls } a \le b, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Objekte sind hier die Elemente $a \in X$, Morphismen $a \to b$ sind die Paare (a,b) mit $a \le b$, die Komposition von (a,b) und (b,c) ist (a,c). Dies ist wohldefiniert dank Transitivität und offensichtlich assoziativ. Reflexivität $a \le a$ sorgt für die Existenz der Identität $\mathrm{id}_a = (a,a)$.

🙂 Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen.

Umgekehrt definiert jede Kategorie $\mathbf{C}$ eine Präordnung auf $\mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$, indem wir $a \le b$ definieren durch $\mathrm{Mor}(a,b) \ne \emptyset$. Ist jede $\mathbf{C}$–Morphismenmenge höchstens einelementig, so entspricht $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}, \le, \circ)$ einer Präordnung.

🙂 Prominentes Beispiel ist die Kategorie $\mathbf{Set}_{\subset}$ wie oben erklärt. Interessant sind die Kompaktifizierungen $\kappa : X \to Y$ eines Raumes X.

Grundlegende Beispiele: Monoid als Kategorie

Ein **Monoid** $(M,\circ,e)$ besteht aus einer Menge M mit assoziativer Verknüpfung $\circ : M\times M\to M$ und neutralem Element $e\in M$.

Dies definiert eine Kategorie $\mathbf{M}$ mit nur einem Objekt X, der Morphismenmenge $\mathbf{M}(X,X)=M$ und der Verknüpfung $\circ$.

Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen.

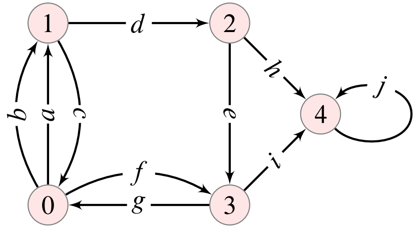
Umgekehrt definiert jedes Objekt $X\in\mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ in einer Kategorie $\mathbf{C}$ das Monoid $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(X)=(\mathbf{C}(X,X),\circ,\mathrm{id}_X)$ aller **Endomorphismen** von X. Wir setzen hierbei meist stillschweigend voraus, dass die betrachtete Kategorie $\mathbf{C}$ lokal klein ist: Alle Klassen $\mathbf{C}(X,Y)$ sind also Mengen.

Prominente Beispiele: In $\mathbf{Vec}_K$ bzw. $\mathbf{Mod}_K$ (siehe unten) erhalten wir den Endomorphismenring $\mathrm{End}_K(X)=\mathrm{Hom}_K(X,X)$. In $\mathbf{Mat}_K$ erhalten wir den Matrizenring $\mathrm{End}_K(n)=(K^{n\times n},\cdot,1)$. Hier haben wir neben der Verknüpfung $\circ$ zudem eine Addition.

Besteht im folgenden Beispiel der Graph Γ nur aus einer Ecke v und der Kantenmenge A, so hat auch die Wegekategorie Γ^* nur das Objekt v, und die Morphismenmenge $\mathrm{End}(v)=A^*$ ist das freie Monoid über A.

Grundlegende Beispiele: Graph und Wegekategorie

Ein **(gerichteter) Graph** $\Gamma = (C_0, C_1, s, t)$ besteht aus einer Eckenmenge C_0, einer Kantenmenge C_1 und zwei Abbildungen $s, t : C_1 \to C_0$, die jeder Kante $e \in C_1$ ihren Start $s(e) \in C_0$ und ihr Ziel $t(e) \in C_0$ zuordnen.



$$
\begin{aligned}
C_0 &= \{0, 1, \dots, 4\}\\
C_1 &= \{a, b, \dots, j\}\\
(s,t) : a &\mapsto (0,1)\\
b &\mapsto (0,1)\\
&\dots\\
j &\mapsto (4,4)
\end{aligned}
$$

Wir definieren die **Wegekategorie** $\Gamma^* = (C_0, C_1^*, s, t, \circ)$ kurz $(C_0, C_1^*, \circ)$: Ein Morphismus $w = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n) \in \Gamma^*(v_0, v_n)$ vom Start $s(w) = v_0$ zum Ziel $t(w) = v_n$ ist ein Weg endlicher Länge $n \in \mathbb{N}$ mit $s(e_k) = v_{k-1}$ und $t(e_k) = v_k$ für alle $k = 1, 2, \dots, n$. Die Verknüpfung von Wegen w, w' mit $t(w) = s(w')$ ist ihre Aneinanderhängung gemäß

$$
\begin{aligned}
&(v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m) \circ (v_m, e_{m+1}, v_{m+1}, \dots, e_n, v_n)\\
&:= (v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m, e_{m+1}, v_{m+1}, \dots, e_n, v_n).
\end{aligned}
$$

Grundlegende Beispiele: Graph und Wegekategorie

Graphen haben viele Anwendungen, sie sind grundlegende Datenstrukturen in der Informatik und auch in der Spieltheorie. Dort interpretiert man den Ausgangspunkt v_0 als Startzustand. Im aktuellen Zustand v_i stehen gewisse Aktionen zu Verfügung: Die Kante / Aktion $a : v_i \to u$ führt zu einem neuen Zustand $v_{i+1} = u$. Der Spielverlauf ist demnach ein Weg vom Start v_0 zum Ziel v_n. Komposition bedeutet anschaulich Hintereinanderausführen.

Ich habe hier für Wege die Rechtskomposition gewählt; das entspricht der üblichen Schreib- und Leserichtung.

Grundlegende Beispiele: Monoide und Gruppen

Aus der (linearen) Algebra kennen Sie Monoide und Gruppen:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Mon} & \mathbf{AbMon} \arrow[l, hook'] \\
\mathbf{Grp} \arrow[u, hook] & \mathbf{AbGrp} \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

Wir nutzen hierzu folgende sinnfällige Abkürzungen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Mon} &= (\text{ Monoide, } && \text{Monoidhom.,} && \text{Komposition }) \\
\mathbf{AbMon} &= (\text{ abelsche Monoide, } && \text{Monoidhom.,} && \text{Komposition }) \\
\mathbf{Grp} &= (\text{ Gruppen, } && \text{Gruppenhom.,} && \text{Komposition }) \\
\mathbf{Ab} = \mathbf{AbGrp} &= (\text{ abelsche Gruppen, } && \text{Gruppenhom.,} && \text{Komposition })
\end{aligned}
$$

Übung: Welche dieser Unterkategorien sind voll? und weit?

Grundlegende Beispiele: Ringe und Körper

Aus der (linearen) Algebra kennen Sie Ringe und Körper:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ring} & \mathbf{CRing} \arrow[l, hook'] \\ \mathbf{DRing} \arrow[u, hook] & \mathbf{Field} \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Wir nutzen hierzu folgende sinnfällige Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ring} &= (\text{ Ringe } (R,+,0,\cdot,1), && \text{Ringhom.}, && \text{Komposition }) \\ \mathbf{CRing} &= (\text{ kommutative Ringe}, && \text{Ringhom.}, && \text{Komposition }) \\ \mathbf{DRing} &= (\text{ Divisionsringe}, && \text{Ringhom.}, && \text{Komposition }) \\ \mathbf{Field} = \mathbf{CDRing} &= (\text{ Körper}, && \text{Körperhom.}, && \text{Komposition }) \end{aligned}$$

Übung: Welche dieser Unterkategorien sind voll? und weit?

Grundlegende Beispiele: Matrizen bilden eine Kategorie

Im Folgenden sei K ein Körper (oder allgemeiner ein Ring).
Die Lineare Algebra untersucht und nutzt lineare Abbildungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Vec}_K &= (\, K\text{–Vektorräume } V,\ K\text{–lineare Abb. } f : V \to W,\ \text{Komposition}\,),\\
\mathbf{FinVec}_K &= (\, V \text{ endlich erzeugt},\ K\text{–lineare Abb. } f : V \to W,\ \text{Komposition}\,),\\
\mathbf{NatVec}_K &= (\, V = K^n \text{ mit } n \in \mathbb{N},\quad K\text{–lineare Abb. } f : V \to W,\ \text{Komposition}\,).
\end{aligned}$$

Algebra, Analysis, Numerik, Physik und zahlreiche Anwendungen nutzen intensiv die Kategorie der Matrizen, insb. für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

$$\mathbf{Mat}_K = (\, \text{Objekte } m \in \mathbb{N},\ \text{Matrizen } K^{n\times m},\ \text{Multiplikation } \cdot\,),$$

$$\cdot : K^{r\times n} \times K^{n\times m} \to K^{r\times m} \quad \text{also} \quad \mathrm{Mat}_K(n,r) \times \mathrm{Mat}_K(m,n) \to \mathrm{Mat}_K(m,r)$$

Morphismen $A : m \to n$ sind hier Matrizen $A \in K^{n\times m} := \mathrm{Mat}_K(m,n)$.
Die Komposition ist die Matrizenmultiplikation, wobei jeweils nur Matrizen passender Größe miteinander multipliziert werden können.

🙂 Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen.

Kommutative Diagramme

Wir arbeiten in einer gegebenen Kategorie $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$. Die folgende graphische Notation erweist sich als ungemein effizient und hilfreich.

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{Mor}(A,B) \\ g \in \mathrm{Mor}(B,C) \\ h \in \mathrm{Mor}(A,C) \\ h = g \circ f \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "="] & & C \end{tikzcd}$$

Definition H2A: kommutatives Diagramm

Ein **Diagramm** in der Kategorie $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ ist ein gerichteter Graph, wobei die Ecken mit Objekten aus $\mathbf{C}$ beschriftet sind und die Kanten mit hierzu passenden Morphismen aus $\mathbf{C}$.

Ein solches Diagramm heißt **kommutativ**, wenn zwischen je zwei Ecken die Komposition entlang aller Wege denselben Morphismus in $\mathbf{C}$ ergibt.

Kommutative Diagramme

Im obigen Beispiel: Es ist egal, ob wir den Pfeilen f und g folgen oder die Abkürzung h nehmen, beide Wege ergeben dasselbe Ergebnis in $\mathbf{C}$.

„Alle Wege führen nach Rom“, hier also zum selben Morphismus: Kommutative Diagramme sind eine sehr intuitive, graphische Sichtweise!

Beispiel: Identität $\mathrm{id}_B \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_B = g$ sowie Assoziativität $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ besagen, dass folgende Diagramme kommutieren:

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dd, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & D \\
 & B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dd, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "(h\circ g)\circ f", "h\circ(g\circ f)"'] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & D \\
 & C \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Gruppenaxiome als kommutative Diagramme

Aufgabe: Eine *Gruppe* (G,μ,η,ι) ist eine Menge G zusammen mit einem Produkt $\mu : G\times G\to G$, einem neutralen Element $\eta : 1=\{*\}\to G$ und einer Inversion $\iota : G\to G$, sodass die Gruppenaxiome erfüllt sind.

Schreiben Sie diese Axiome als kommutative Diagramme in $\mathbf{Set}$.

Lösung: Assoziativität, Neutrales, Inversion, Kommutativität:

$$\begin{tikzcd}
G\times G\times G \arrow[r, "\mu\times\mathrm{id}_G"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G\times\mu"] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\
G\times G \arrow[r, "\mu"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[dr, "\mu"] & G\times 1 \arrow[l, "\mathrm{id}_G\times\eta"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
1\times G \arrow[u, "\eta\times\mathrm{id}_G"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "(\mathrm{id}_G{,}\iota)"] \arrow[dd, "(\iota{,}\mathrm{id}_G)"] \arrow[dr] & & G\times G \arrow[dd, "\mu"] \\
& 1 \arrow[dr, "\eta"] & \\
G\times G \arrow[rr, "\mu"] & & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tau_{G,G} : (a{,}b)\mapsto(b{,}a)"] & G \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_G"] \\
G\times G \arrow[r, "\mu"] & G
\end{tikzcd}$$

Gruppenaxiome als kommutative Diagramme

☺ Kommutative Diagramme in $\mathbf{Set}$ codieren **All-Aussagen**:
Zwischen zwei Ecken A und Z verlaufen Morphismen $f, g : A \to Z$.
Die Bedingung lautet dann: Für alle $a \in A$ gilt $f(a) = g(a)$.
Das gilt insbesondere für algebraische Strukturen.

Existenz-Aussagen wie „Es gibt ein neutrales Element $e \in G$."
oder „Zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in G$."
codieren wir nicht implizit, sondern durch explizite Abbildungen,
hier das neutrale Element $\eta : 1 \to G$ und die Inversion $\iota : G \to G$.

☺ Diese Sichtweise ergibt eine wunderbar explizite Datenstruktur.

Das ist auch für die konkrete Arbeit vorteilhaft, etwa für Sie als Benutzer eines Computer-Algebra-Systems (CAS): Sie können fragen: „Gib mir das Neutrale!" oder „Gib mir das Inverse zu a!". Als Antwort möchten Sie nicht bloß die Zusage „Es gibt eine Lösung.", sondern tatsächlich das ersehnte Element. Genau das ist die Aufgabe der Funktionen η und ι.

☺ Wie so oft gilt auch hier: *Explicit is beautiful.*

Isomorphismen

In der Kategorie $\mathbf{C}$ betrachten wir folgende kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[dl, "g"'] \\ X & \end{tikzcd}$$

$g \circ f = \mathrm{id}_X$:
g linksinvers zu f,
f rechtsinvers zu g

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$:
$(f,g) : X \cong Y$ zueinander
inverse Isomorphismen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[d, "q"] \\ X' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & Y' \arrow[l, shift left, "g'"] \end{tikzcd}$$

Die Morphismen
p und q sind
isomorph.

Definition H2C: Isomorphismen

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Morphismen in einer Kategorie $\mathbf{C}$.

Gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so nennen wir g **linksinvers** zu f (oder eine **Retraktion**) und f **rechtsinvers** zu g (oder einen **Schnitt**, auch **Coretraktion**).

(1) Gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ in $\mathbf{C}$, so nennen wir (f,g)ein **Paar zueinander inverser $\mathbf{C}$–Isomorphismen**, geschrieben $(f,g) : X \cong Y$.

Isomorphismen

Eindeutigkeit: Sind $g, g' : Y \to X$ beide invers zu $f : X \to Y$, so folgt

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathrm{id}_X \circ g' = g'.$$

Wir nennen g *den* inversen Morphismus zu f, geschrieben $g = f^{-1}$.

Definition H2c: Isomorphismen

(2) Wir nennen $f : X \to Y$ **invertierbar** oder einen **$\mathbf{C}$–Isomorphismus**, geschrieben $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, wenn in $\mathbf{C}$ ein inverser Morphismus $g : Y \xrightarrow{\sim} X$ existiert, also $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ erfüllt ist.

(3) Zwei Objekte X und Y in $\mathbf{C}$ heißen **$\mathbf{C}$–isomorph**, geschrieben $X \cong Y$, wenn $\mathbf{C}$–Isomorphismen $(f, g) : X \cong Y$ existieren, also Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(4) Morphismen $p : X \to X'$ und $q : Y \to Y'$ in $\mathbf{C}$ heißen **$\mathbf{C}$–isomorph**, wenn in $\mathbf{C}$ Isomorphismen $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ und $f' : X' \xrightarrow{\sim} Y'$ existieren mit $f' \circ p = q \circ f$, geschrieben $(f, f') : p \xrightarrow{\sim} q$ oder kurz $p \cong q$.

Prominente Beispiele

Zur Illustration einige einfache, aber prominente Beispiele:

Kat.	Isomorphismen $(f,g): X \cong Y$	Isomorphie $X \cong Y$
$(X, \leq)$	$(a \leq b, b \leq a): a \cong b$	mit Antisymmetrie: $a = b$
$\mathbf{Set}_{\subset}$	$(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y): X = Y$	Gleichheit $X = Y$
$\mathbf{Set}$	Bijektionen $(f,g): X \cong Y$	$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$
Mat_K	invertierbare Matrizen $A \in K^{m \times n}$	Gleichheit $m = n$
$\mathbf{Vec}_K$	K–lineare Isomorphismen	$\dim_K(X) = \dim_K(Y)$
$\mathbf{Grp}$	Gruppenisomorphismen	Isomorphie $X \cong Y$
$\mathscr{C}^k$	Diffeomorphismen	Diffeomorphie $X \cong Y$
$\mathbf{Top}$	Homöomorphismen	Homöomorphie $X \cong Y$
$\mathbf{hTop}$	Homotopie-Äquivalenzen	Homotopie-Äquivalenz $X \simeq Y$

Prominente Beispiele

Universelle Objekte

Erinnerung an die Kategorie $\mathbf{Set}$ der Mengen: Zu jeder Menge X existiert genau eine Abbildung $\emptyset \to X$ sowie genau eine Abbildung $X \to \{0\}$.

Definition H3A: initial, terminal, Nullobjekt

Sei $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ eine Kategorie. Wir vereinbaren:

$I \in \mathrm{Ob}$ ist **initial** in $\mathbf{C}$	$:\Longleftrightarrow$	$\forall X \in \mathrm{Ob} \;\; \exists! u \in \mathrm{Mor}(I, X)$
$T \in \mathrm{Ob}$ ist **terminal** in $\mathbf{C}$	$:\Longleftrightarrow$	$\forall X \in \mathrm{Ob} \;\; \exists! v \in \mathrm{Mor}(X, T)$
$N \in \mathrm{Ob}$ ist **Nullobjekt** in $\mathbf{C}$	$:\Longleftrightarrow$	N ist initial und terminal in $\mathbf{C}$

Ausgeschrieben bedeutet das:

Ein Objekt I ist **initial** in $\mathbf{C}$, wenn zu jedem Objekt X in $\mathbf{C}$ genau ein Morphismus $u : I \to X$ existiert, also $\mathrm{Mor}(I, X) = \{u\}$ gilt.

Ein Objekt T ist **terminal** (oder **final**) in $\mathbf{C}$, wenn zu jedem Objekt X genau ein Morphismus $v : X \to T$ existiert, also $\mathrm{Mor}(X, T) = \{v\}$ gilt.

Ein **Nullobjekt** N in $\mathbf{C}$ ist sowohl initial als auch terminal, also $|\mathrm{Mor}(N, X)| = |\mathrm{Mor}(X, N)| = 1$ für jedes Objekt X in $\mathbf{C}$.

Prominente Beispiele

Zur Illustration einige einfache, aber prominente Beispiele:

Kategorie	initiale	terminale	Nullobjekte
$(X, \leq)$	kleinste	größte	—
$(X, \geq)$	größte	kleinste	—
Rel	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
Set, **Top**, $\mathscr{C}^k$	$\emptyset$	$\{e\}$	—
$\mathbf{Set}_*$, $\mathbf{Top}_*$, $\mathscr{C}^k_*$, **Grp**	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$
$\mathbf{Vec}_K$, $\mathbf{Mod}_K$, **Ab**	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
Ring mit 1, evtl. $1 = 0$	$\mathbb{Z}$	$\{0\}$	—
Ring mit $1 \neq 0$	$\mathbb{Z}$	—	—
$\mathbf{Field}_p$ (Char. $p \geq 0$)	$\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{F}_p$	—	—
archimedische Körper	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	—
Kompaktifizierungen	Stone–Čech	Alexandroff	—

Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus

Eine Kategorie $\mathbf{C}$ braucht im Allgemeinen kein initiales Objekt zu haben. Wenn eines existiert, so ist es im Allgemeinen nicht eindeutig, aber je zwei sind eindeutig isomorph:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f", "\exists!"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_I"', "!"] & J \arrow[dl, "g"', "\exists!"] \arrow[d, "!"', "\mathrm{id}_J"] \\ I \arrow[r, "f"] & J \end{tikzcd}$$

Satz H3C: Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus

Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie. Zwischen je zwei initialen Objekten I, J existiert genau ein Isomorphismus $(f, g) : I \cong J$. Ebenso für terminale Objekte.

Beweis: Es existiert genau ein Morphismus $f : I \to J$, weil I initial ist, und ebenso genau ein Morphismus $g : J \to I$, weil auch J initial ist.

Wir haben nun die beiden Morphismen $g \circ f : I \to I$ und $\mathrm{id}_I : I \to I$.
Es folgt $g \circ f = \mathrm{id}_I : I \to I$, denn dies ist der einzige Morphismus $I \to I$.
Ebenso ist $f \circ g = \mathrm{id}_J : J \to J$ der einzige Morphismus $J \to J$.

Somit ist $(f, g) : I \cong J$ ein Isomorphismus, und zwar der einzige. $\boxed{\text{QED}}$

Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus

Diese **Eindeutigkeit bis auf Isomorphie** rechtfertigt unseren üblichen Sprachgebrauch: Wir sagen *die* triviale Gruppe, *der* Nullvektorraum, *der* einelementige topologische Raum, *der* Ring der ganzen Zahlen, *der* Körper der rationalen Zahlen, *der* Körper der reellen Zahlen, *der* Körper mit p Elementen, etc. Diese Objekte sind nicht eindeutig, aber immerhin eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Der Beweis ist wunderbar elegant, vollkommen trivial und ein schönes Beispiel für die ordnende Kraft von „**general abstract nonsense**“.

Die Feststellung nützt in jeder der zahlreichen Situationen, in denen wir ein Objekt durch eine **universelle Abbildungseigenschaft** definieren: Wenn überhaupt eine Lösung existiert, so ist sie automatisch eindeutig – bis auf einen eindeutigen Isomorphismus. Besser geht es nicht.

Produkte und Summen in einer Kategorie

Wir haben Produkte und Summen (Coprodukte) durch ihre universelle Abbildungseigenschaft charakterisiert (für $\mathbf{Top}$ siehe E4D und E3F).

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, equal] & P \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & X_2 \arrow[d, equal] \\
X_1 & P' \arrow[l, "p_1'"] \arrow[r, "p_2'"'] \arrow[u, dashed, "\exists!"', "f"] & X_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & S \arrow[d, dashed, "\exists!"', "f"] & X_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, equal] \\
X_1 \arrow[r, "i_1'"] & S' & X_2 \arrow[l, "i_2'"']
\end{tikzcd}
$$

Das allgemeine Muster formulieren wir nun wie folgt als Definition. Sei $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ eine Kategorie und $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ zwei Objekte.

Ein **Produkt** von X_1, X_2 in $\mathbf{C}$ ist eine terminale Familie $(X_1 \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} X_2)$ in der Kategorie all dieser Familien, geschrieben $\mathbf{C}(X_1 \leftarrow \bullet \rightarrow X_2)$

Eine **Summe** von X_1, X_2 in $\mathbf{C}$ ist eine initiale Familie $(X_1 \xrightarrow{i_1} S \xleftarrow{i_2} X_2)$ in der Kategorie all dieser Familien, geschrieben $\mathbf{C}(X_1 \rightarrow \bullet \leftarrow X_2)$.

Die Lösung ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Produkt in einer Kategorie

Vorgegeben sei eine Familie $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Objekten $X_\lambda \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$.

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, equal] & P \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & X_2 \arrow[d, equal] \\
X_1 & P' \arrow[l, "p'_1"] \arrow[r, "p'_2"'] \arrow[u, dashed, "\exists!", "f"'] & X_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_\lambda"] & X_\lambda \arrow[d, equal] & (\lambda\in\Lambda) \\
P' \arrow[r, "p'_\lambda"] \arrow[u, dashed, "\exists!", "f"'] & X_\lambda & (\lambda\in\Lambda)
\end{tikzcd}
$$

Die Kategorie $\mathbf{C}(\bullet \to X)$ hat als **Objekte über X** Familien $(P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ mit $P \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ und $p_\lambda \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(P, X_\lambda)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Ein Morphismus $f : (P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ist ein $\mathbf{C}$–Morphismus $f : P' \to P$ mit $p'_\lambda = p_\lambda \circ f$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Die Verknüpfung ist die aus $\mathbf{C}$.

Definition H3D: Produkt in einer Kategorie $\mathbf{C}$

Ein **Produkt** der Objekte $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathbf{C}$ ist eine terminale Familie $(P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathbf{C}(\bullet \to X)$: Zu jeder Familie $(P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathbf{C}(\bullet \to X)$ existiert genau ein Morphismus $f : (P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$.

Summe / Coprodukt in einer Kategorie

Vorgegeben sei eine Familie $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Objekten $X_\lambda \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & S \arrow[d, dashed, "\exists!" left, "f"] & X_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, equal] \\
X_1 \arrow[r, "i'_1"] & S' & X_2 \arrow[l, "i'_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[d, dashed, "\exists!" left, "f"] & X_\lambda \arrow[l, "i_\lambda"'] \arrow[d, equal] & (\lambda \in \Lambda) \\
S' & X_\lambda \arrow[l, "i'_\lambda"'] & (\lambda \in \Lambda)
\end{tikzcd}$$

Die Kategorie $\mathbf{C}(X \to \bullet)$ hat als **Objekte unter X** Familien $(S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ mit $S \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ und $i_\lambda \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X_\lambda, S)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Ein Morphismus $f : (S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (S', (i'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ist ein $\mathbf{C}$–Morphismus $f : S \to S'$ mit $f \circ i_\lambda = i'_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Die Verknüpfung ist die aus $\mathbf{C}$.

Definition H3E: Summe / Coprodukt in einer Kategorie $\mathbf{C}$

Eine **Summe** der Objekte $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathbf{C}$ ist eine initiale Familie $(S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathbf{C}(X \to \bullet)$: Zu jeder Familie $(S', (i'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathbf{C}(X \to \bullet)$: existiert genau ein Morphismus $f : (S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (S', (i'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$.

Produkte und Summen in einer Kategorie

🙂 Das Produkt ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie (H3C). Falls eines existiert, so wählen wir eines $P =: \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ und nennen $p_\lambda : \prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu \to X_\lambda$ die kanonischen Morphismen (aka „Projektionen").

Die universelle Eigenschaft entspricht für alle $A \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ der Bijektivität von

$$\Phi \;:\; \mathrm{Mor}\Big(A, \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\Big) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Mor}(A, X_\lambda) \;:\; f \mapsto (p_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda}.$$

🙂 Das Coprodukt ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie (H3C). Falls eines existiert, so wählen wir eines $S =: \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ und nennen $i_\lambda : X_\lambda \to \coprod_{\mu\in\Lambda} X_\mu$ die kanonischen Morphismen (aka „Injektionen").

Die universelle Eigenschaft entspricht für alle $Z \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ der Bijektivität von

$$\Psi \;:\; \mathrm{Mor}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Z\Big) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Mor}(X_\lambda, Z) \;:\; f \mapsto (f \circ i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}.$$

🙂 Für $\Lambda = \emptyset$ ist das Co/Produkt das initiale/terminale Objekte in $\mathbf{C}$.

🙂 Für $\Lambda = \{1\}$ gilt $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = X_1$, $p_1 = \mathrm{id}_{X_1}$ und $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = X_1$, $i_1 = \mathrm{id}_{X_1}$.

Produkte und Summen in einer Kategorie

Anschaulich als Slogan zusammengefasst:

- Das Produkt $(P = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, p_\lambda : P \to X_\lambda)$ ist das kleinste Objekt über $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
- Die Summe $(S = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, i_\lambda : X_\lambda \to S)$ ist das größte Objekt unter $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Zur Illustration einige prominente und vertraute Beispiele:

Kategorie	Produkt	Summe / Coprodukt
$(X, \geq)$	$\sup\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$	$\inf\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$
$(X, \leq)$	$\inf\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$	$\sup\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$
$\mathbf{Set}_\subset$	$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
Set, **Top**	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathbf{Set}_*$, $\mathbf{Top}_*$	$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
Grp	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\ast_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
Ab, $\mathbf{Vec}_K$, $\mathbf{Mod}_K$	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
CRing (mit $1\neq 0$)	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$

Produkte und Summen in einer Kategorie

Nicht jede Kategorie $\mathbf{C}$ hat initiale / terminale Objekte. Selbst wenn dies gegeben ist, kann es vorkommen, dass in $\mathbf{C}$ nicht alle Summen / Produkte existieren.

Beispiel: In $(\mathbb{N}, \le)$ existiert ein initiales Objekt 0, aber kein terminales. Es existieren beliebige Produkte $\inf\{\, x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \,\} = \min\{\, x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \,\}$, aber i.A. nur endliche Summen $\sup\{\, x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \,\} = \max\{\, x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \,\}$.

Es ist daher eine besondere Auszeichnung einer Kategorie $\mathbf{C}$, wenn diese universellen Objekte immer als Lösungen existieren, also die Kategorie $\mathbf{C}$ diese universellen Konstruktionen unterstützt.

Auch deshalb haben wir in der Kategorie $\mathbf{Top}$ große Sorgfalt auf die universellen Konstruktionen verwendet. Anschließend haben wir diese genauer untersucht, innere Eigenschaften formuliert und bewiesen.

Das ist typisch: Die kategorielle Sichtweise ordnet und strukturiert, sie gibt einen Anfang vor, anschließend untersuchen wir die Feinstruktur.

☺ Zur Übung können Sie dies für Ihre Lieblingskategorie ausführen.

Entgegengesetzte Kategorie

Definition H3O: entgegengesetzte Kategorie

Wir betrachten eine Kategorie $\mathbf{C}$. Wir können formal alle Pfeile umdrehen und erhalten die **entgegengesetzte Kategorie** $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$:

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h=g\circ f"] & & C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "f"'] & \\
A & & C \arrow[ul, "g"'] \arrow[ll, "h=f\bar{\circ}g"']
\end{tikzcd}
$$

Diese hat dieselben Objekte und dieselben Morphismen wie $\mathbf{C}$, aber alle Morphismen werden umgedreht notiert, also $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}(B,A) = \mathbf{C}(A,B)$ und

$$\bar{\circ} \;:\; \mathbf{C}^{\mathrm{op}}(B,A) \times \mathbf{C}^{\mathrm{op}}(C,B) \to \mathbf{C}^{\mathrm{op}}(C,A) \;:\; (f,g) \mapsto f \mathbin{\bar{\circ}} g = g \circ f.$$

Diese Verknüpfung $\bar{\circ}$ erfüllt die Forderungen nach Identität und Assoziativität, somit ist $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ tatsächlich eine Kategorie.

Beispiel: Zur Kategorie $(X,\leq)$ entgegengesetzt ist $(X,\geq)$. Durch zweimaliges Umdrehen erhalten wir $(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathbf{C}$.

Entgegengesetzte Kategorie

Jedes kommutative Diagramm in $\mathbf{C}$ entspricht durch Umdrehen aller Pfeile einem kommutativen Diagramm in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, und umgekehrt. Insbesondere haben $\mathbf{C}$ und $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ dieselben Isomorphismen.

Für das Dualisieren erhalten wir folgende Übersetzungen:

Eigenschaft in $\mathbf{C}$	Eigenschaft in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$
invertierbar – Isomorphismus	Isomorphismus – invertierbar
links-/rechtsinvertierbar	rechts-/linksinvertierbar
links-/rechtskürzbar	rechts-/linkskürzbar
Nullobjekt	Nullobjekt
initial / terminal	terminal / initial
Coprodukt / Produkt	Produkt / Coprodukt
ko-/kontravarianter Funktor	kontra-/kovarianter Funktor
$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$	$F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}$

Kovariante und kontravariante Funktoren

Eine Kategorie $\mathbf{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ besteht aus Objekten und Morphismen und ihrer Komposition. Ein **Funktor** $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ist eine strukturerhaltende Abbildung: Er überführt kommutative Diagramme in der Kategorie $\mathbf{C}$ in kommutative Diagramme in der Kategorie $\mathbf{D}$:

$$\begin{tikzcd}
& G(Y) \arrow[dl, "G(f)"'] \arrow[d, phantom, "="] & & & & Y \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "="] & & & & F(Y) \arrow[dr, "F(g)"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
G(X) & & G(Z) \arrow[ul, "G(g)"'] \arrow[ll, "G(h)"] & \underset{\text{kontravariant}}{\overset{G}{\Longleftarrow}} & X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z & \underset{\text{kovariant}}{\overset{F}{\Longrightarrow}} & F(X) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(h)"'] & & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Beispiele: Der **kovariante Potenzmengenfunktor** ist

$$\mathfrak{P}_* : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set} : X \mapsto \mathfrak{P}(X) = \{ A \mid A \subset X \},$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (f_* : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y) : A \mapsto f_*(A) = \{ f(a) \in Y \mid a \in A \}).$$

Der **kontravariante Potenzmengenfunktor** ist

$$\mathfrak{P}^* : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set} : X \mapsto \mathfrak{P}(X) = \{ A \mid A \subset X \},$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (f^* : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X) : B \mapsto f^*(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}).$$

Kovariante und kontravariante Funktoren

Definition H4C: Funktor

Seien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ Kategorien. Ein **(kovarianter) Funktor** $F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ ordnet jedem $\mathbf{C}$–Objekt $X\in\mathbf{C}$ ein $\mathbf{D}$–Objekt $F(X)\in\mathbf{D}$ zu und jedem $\mathbf{C}$–Morphismus $f:X\to Y$ einen $\mathbf{D}$–Morphismus $F(f):F(X)\to F(Y)$, wobei $F(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{F(X)}$ für alle $X\in\mathbf{C}$ gilt sowie $F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$ für alle Morphismen $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ in $\mathbf{C}$.

Ein **kontravarianter Funktor** $G:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ ist ein Funktor $G:\mathbf{C}\to\mathbf{D}^{\mathrm{op}}$.

Ausführlich heißt das: G ordnet jedem $\mathbf{C}$–Objekt $X\in\mathbf{C}$ ein $\mathbf{D}$–Objekt $G(X)\in\mathbf{D}$ zu und jedem $\mathbf{C}$–Morphismus $f:X\to Y$ einen $\mathbf{D}$–Morphismus $G(f):G(Y)\to G(X)$, wobei $G(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{G(X)}$ für alle $X\in\mathbf{C}$ gilt sowie $G(g\circ f)=G(f)\circ G(g)$ für alle Morphismen $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ in $\mathbf{C}$.

Beispiele: Die Funktoren $\pi_0,\mathcal{Z}:\mathbf{Top}\to\mathbf{Set}$ sind kovariant, ebenso der Vergissfunktor $\mathbf{Met}\to\mathbf{Top}:(X,d)\mapsto(X,\mathcal{T}_d)$ und $\mathbf{Top}\to\mathbf{Set}:(X,\mathcal{T})\mapsto X$.

Die Transposition $^\intercal:\mathbf{Mat}_K\to\mathbf{Mat}_K$ ist kontravariant, $(A\cdot B)^\intercal=B^\intercal\cdot A^\intercal$.

Funktoren erhalten Inverse und Isomorphie.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\quad \overset{F}{\Longrightarrow} \quad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)}"'] & F(Y) \arrow[dl, "F(g)"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(Y)}"] \\
F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f", "\cong"'] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\
X' \arrow[r, "f'", "\cong"'] & Y'
\end{tikzcd}
\quad \overset{F}{\Longrightarrow} \quad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)", "\cong"'] \arrow[d, "F(p)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(q)"] \\
F(X') \arrow[r, "F(f')", "\cong"'] & F(Y')
\end{tikzcd}
$$

Satz H4F: Funktoren erhalten Inverse und Isomorphie.

Sei $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor (kovariant, ebenso kontraviant als $\mathbf{C} \to \mathbf{D}^{\mathrm{op}}$).

(1) Ist f in $\mathbf{C}$ links-/rechtsinvertierbar, so auch $F(f)$ in $\mathbf{D}$ (bzw. getauscht).

(2) Ist f in $\mathbf{C}$ ein Isomorphismus, dann ist $F(f)$ in $\mathbf{D}$ ein Isomorphismus.

(3) Sind zwei Objekte $X \cong Y$ in $\mathbf{C}$ isomorph, so auch $F(X) \cong F(Y)$ in $\mathbf{D}$.

(4) Sind Morphismen $p \cong q$ in $\mathbf{C}$ isomorph, so auch $F(p) \cong F(q)$ in $\mathbf{D}$.

Funktore im Alltag

Natürliche Transformationen

Wir beginnen mit einem vertrauten Beispiel aus der Topologie.
Es gilt $X = \bigsqcup \pi_0(X) = \bigsqcup \mathcal{Z}(X)$. Die Zerlegung $\pi_0(X)$ ist feiner als $\mathcal{Z}(X)$.

$$
\begin{tikzcd}
& \pi_0(X) \arrow[rr, "\pi_0(f)"] \arrow[dd, "t_X"] & & \pi_0(Y) \arrow[dd, "t_Y"] \\
X \arrow[ur, "{[]_X}"] \arrow[dr, "\mathcal{Z}_X"'] \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ur, "{[]_Y}"] \arrow[dr, "\mathcal{Z}_Y"'] & \\
& \mathcal{Z}(X) \arrow[rr, "\mathcal{Z}(f)"] & & \mathcal{Z}(Y)
\end{tikzcd}
$$

Zwischen den Funktoren $\pi_0, \mathcal{Z} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ besteht obige Beziehung.
Dies nennen wir eine **natürliche Transformation** $t : \pi_0 \to \mathcal{Z}$.

Auf der Unterkategorie der lokal wegzusammenhängenden Räume ist dies sogar eine **natürliche Äquivalenz** $t : \pi_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}$ (Satz G3C).

Ist X lokal wegzusammenhängend, so gilt $\pi_0(X) = \mathcal{Z}(X)$.

Definition H5B: natürliche Transformation

Seien $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ Funktoren. Eine **Transformation** $t : F \to G$ ordnet jedem $\mathbf{C}$–Objekt X einen $\mathbf{D}$–Morphismus $t_X : F(X) \to G(X)$ zu.

Wir nennen t **natürlich**, wenn für jeden $\mathbf{C}$–Morphismus $f : X \to Y$ die Gleichung $t_Y \circ F(f) = G(f) \circ t_X$ gilt, also als Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \\
Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"'] \\
F(Y) \arrow[r, "t_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "s_X"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(X) \arrow[d, "H(f)"'] \\
F(Y) \arrow[r, "t_Y"] & G(Y) \arrow[r, "s_Y"] & H(Y)
\end{tikzcd}
$$

Eine **natürliche Äquivalenz** $(t, s) : F \cong G$ besteht aus natürlichen Transformationen $t : F \to G$ und $s : G \to F$ mit $s \circ t = \mathrm{id}_F$ und $t \circ s = \mathrm{id}_G$.

Für jedes $\mathbf{C}$–Objekt X ist $(t_X, s_X) : F(X) \cong G(X)$ ein $\mathbf{D}$–Isomorphismus, so dass wir nur t oder s angeben müssen. Natürlichkeit von t impliziert die von s und umgekehrt, so dass wir nur eine prüfen müssen.

Potenzmenge und Indikatorfunktion

Die Potenzmenge $\mathfrak{P}X$ entspricht den Indikatorfunktionen $\{0,1\}^X$:

$$\begin{tikzcd} X & & \mathfrak{P}(X) \arrow[r, shift left, "t_X"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \{0,1\}^X \arrow[l, shift left, "s_X"] \end{tikzcd}$$

Die Transformation $t_X : \mathfrak{P}X \to \{0,1\}^X$ ordnet jeder Teilmenge $A \subset X$ ihre **Indikatorfunktion** $\mathbf{I}_A : X \to \{0,1\}$. Die Transformation $s_X : \{0,1\}^X \to \mathfrak{P}X$ ordnet jeder Funktion $h : X \to \{0,1\}$ ihren **Träger** $\operatorname{supp}(h) \subset X$.

So weit, so vertraut. Diese Entsprechung ist tatsächlich noch viel besser: Dies ist eine natürliche Äquivalenz $(t,s) : \mathfrak{P}^* \cong \mathbf{Set}(-,\{0,1\})$ zwischen den kontravarianten Funktoren $\mathfrak{P}^* : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ und $\mathbf{Set}(-,\{0,1\})$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & & \mathfrak{P}(X) \arrow[r, shift left, "t_X"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \{0,1\}^X \arrow[l, shift left, "s_X"] \\ Y & & \mathfrak{P}(Y) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, shift left, "t_Y"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \{0,1\}^Y \arrow[l, shift left, "s_Y"] \arrow[u, "\mathbf{Set}(f,\{0,1\})="', "f^\flat"] \end{tikzcd}$$

Die Determinante als natürliche Transformation

Zu jedem $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir den Funktor $M_n : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ring} : R \mapsto R^{n \times n}$; zu $f : R \to S$ definieren wir $M_n(f) : M_n(R) \to M_n(S) : (a_{ij})_{ij} \mapsto (f(a_{ij}))_{ij}$.

Für R in $\mathbf{CRing} < \mathbf{Ring}$ haben wir die Determinante $\det_R : M_n(R) \to R$. Diese ist überall durch dieselbe Formel definiert und somit natürlich:

$$\begin{tikzcd}
R = M_1(R) \arrow[d, "f"'] & M_n(R) \arrow[l, "\det_R"'] \arrow[d, "M_n(f)"] \\
S = M_1(S) & M_n(S) \arrow[l, "\det_S"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R^\times = \mathrm{GL}_1(R) \arrow[d, "f"'] & \mathrm{GL}_n(R) \arrow[l, "\det_R"'] \arrow[d, "M_n(f)"] \\
S^\times = \mathrm{GL}_1(S) & \mathrm{GL}_n(S) \arrow[l, "\det_S"']
\end{tikzcd}$$

Beispiel: Es ist egal, ob sie $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \dots$ berechnen, das Ergebnis $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = -2$ ist „natürlich“ dasselbe! Über welchen endlichen Körpern ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar? $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p$!

Zu den Funktoren $M_n : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Ring}$ und $M_1 : R \mapsto R$ haben wir die natürliche Transformation $\det : M_n \to M_1$.

Insbesondere erhalten wir zu den Funktoren $\mathrm{GL}_n : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Grp}$ und $\mathrm{GL}_1 : R \mapsto R^\times$ die natürliche Transformation $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$.