

Kapitel G

Zusammenhang und Homotopie

*Every step of the way, we walk the line.
Your days are numbered, so are mine. [...]
Got nothing for you, I had nothing before.
Don't even have anything for myself anymore. [...]
You can always come back, but you can't come back all the way.*
Bob Dylan, *Mississippi*

Inhalt dieses Kapitels G

- 1 Zusammenhang
- 2 Wegzusammenhang
- 3 Lokaler Zusammenhang
- 4 Homotopie stetiger Abbildungen
- 5 Retrakte und Deformationsretrakte

Einführung und Überblick

Die Zahlengerade \mathbb{R} ist zusammenhängend, nicht jedoch $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Ebene \mathbb{R}^2 ist zusammenhängend, auch $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, nicht jedoch $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$. Offenbar ist \mathbb{Z} unzusammenhängend, doch wie steht es mit dem Raum \mathbb{Q} ? Schon bei diesen einfachen und erst recht bei komplexeren Beispielen müssen wir unsere Intuition durch eine tragfähige Definition stützen!

Dieses Kapitel diskutiert **Zusammenhang** und **Wegzusammenhang** und beweist ihre grundlegenden Eigenschaften. Zwei Punkte a, b im Raum X heißen **verbindbar** durch einen Weg in X , wenn eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \rightarrow X$ existiert mit $h(0) = a$ und $h(1) = b$. Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen **Wegkomponenten** von X und dienen häufig als praktisches Unterscheidungsmerkmal.

Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen **homotop**, wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen, durch $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ stetig mit $H(0, x) = f(x)$ und $H(1, x) = g(x)$ für alle $x \in X$. Dies interpretieren wir als einen Weg $H : f \simeq g$ von f nach g im Abbildungsraum $\mathcal{C}(X, Y)$. Auch Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Einführung und Überblick

Durch Übergang von stetigen Abbildungen zu ihren Homotopieklassen gelangen wir zur **Homotopiekategorie**. Abstraktion hilft konkret! Sie strukturiert, ordnet und vereinfacht. Sie ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen, und Homotopie ist hierzu eine gute Hilfe.

Die Aussage „die Räume X und Y sehen topologisch *gleich* aus“ wird präzisiert durch **Homöomorphie** $(f, g) : X \cong Y$, also stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$, die zusammen $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$ erfüllen. Dies ist eine sehr starke Forderung, doch leider oft allzu starr. Zum Beispiel sieht die punktierte Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ recht ähnlich aus wie die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$: Beide haben ein Loch. Sie sind jedoch nicht homöomorph: Je zwei Punkte trennen \mathbb{S}^1 , nicht aber \mathbb{C}^* .

Die Aussage „die Räume X und Y sehen topologisch *ähnlich* aus“ wird durch den Begriff der **Homotopie-Äquivalenz** $(f, g) : X \simeq Y$ präzisiert: Dies sind stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ mit Homotopien $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Das bedeutet anschaulich, die Räume X und Y lassen sich stetig ineinander deformieren. Das ist oft hilfreich.

Proposition G1A: äquivalente Zusammenhangseigenschaften

Für jedes nicht-leere Intervall $X \subseteq \mathbb{R}$ gilt dank Zwischenwertsatz (C3A):

- (1) Jede stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Zwischenwerteigenschaft: Zu $a, b \in X$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ existiert $x \in X$ mit $f(x) = y$.
 - (2) Jede stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ hat als Bild $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.
 - (3) Jede stetige Funktion $f: X \rightarrow \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ist konstant. Allgemein: Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in einen diskreten Zielraum Y ist konstant.
 - (4) Für jede offene Zerlegung $X = A \sqcup B$ gilt entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.
- Für jeden nicht-leeren Raum (X, \mathcal{T}) sind Aussagen (1-4) äquivalent.

Beweis: Die Implikationen „(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)“ sind klar.

„(3) \Rightarrow (4)“: Ist $X = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung, so ist $f = \mathbf{1}_B$ stetig (E1P). Dank (3) gilt dann entweder $A = f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ oder $B = f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

„(4) \Rightarrow (1)“: Angenommen für $y \in \mathbb{R}$ gilt $f(a) < y < f(b)$ aber $y \notin f(X)$. Dann folgt $X = A \sqcup B$ mit $A = f^{-1}(\mathbb{R}_{<y}) \ni a$ und $B = f^{-1}(\mathbb{R}_{>y}) \ni b$. QED

Definition G1B: un/zusammenhängend

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt **zusammenhängend**, falls (4) gilt: Für jede offene Zerlegung $X = A \sqcup B$ gilt entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Äquivalent hierzu: Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ ist konstant.

Gilt $X = A \sqcup B$ mit $A, B \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, so heißt X **unzusammenhängend**.

Äquivalent hierzu: Es existiert eine stetige Surjektion $f: X \twoheadrightarrow \{0, 1\}$.

Beispiele: Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist unzhgd gdw $\#X \geq 2$, zshgd gdw $\#X = 1$, und leer falls $\#X = 0$. Der leere Raum \emptyset ist neutral, weder unzhgd noch zshgd; er enthält nichts, was zusammenhängen könnte. Algebraische Analogie: Im Monoid $(\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot, 1)$ ist das Element 1 neutral, 2, 3, 5, 7, 11, ... sind prim / unzerlegbar, und 4, 6, 8, 9, 10, ... sind zerlegbar.

Jeder indiskrete Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ mit $X \neq \emptyset$ ist zusammenhängend.

Jedes reelle Intervall $X \subseteq \mathbb{R}$ mit $X \neq \emptyset$ ist zusammenhängend (G1A).

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $X = \mathbb{R} \setminus \{t\} = \mathbb{R}_{<t} \sqcup \mathbb{R}_{>t}$ unzusammenhängend.

Ebenso ist \mathbb{Q} unzusammenhängend, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<\xi} \sqcup \mathbb{Q}_{>\xi}$ mit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Wir arbeiten vor allem mit reellen Intervallen. Zu Ihrer Information:

Satz G1D: zusammenhängende Intervalle

Sei $(X, <)$ eine totalgeordnete Menge, $X \neq \emptyset$ mit Ordnungstopologie \mathcal{T} .

- (1) Ist ein Teilraum I in (X, \mathcal{T}) zusammenhängend, so ist I ein Intervall.
- (2) Genau dann ist jedes nicht-leere Intervall $I \subseteq X$ zusammenhängend, wenn $(X, <)$ ordnungsvollständig und dicht ist, d.h. zu je zwei Punkten $x < y$ in X existiert ein Zwischenpunkt $z \in X$ mit $x < z < y$ (ZPE).

Beweis: Skript / Übung!

Beispiele: Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, <)$ sind vollständig geordnet.

Dank G1D/G1A ist jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $I \neq \emptyset$ zusammenhängend.

Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, <)$ haben die Zwischenpunkteigenschaft, sind aber nicht vollständig geordnet. Wie gesehen ist \mathbb{Q} unzhgd.

Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, <)$ sind vollständig geordnet, haben aber nicht die Zwischenpunkteigenschaft. Die Topologie ist diskret und unzhgd.

Satz G1E: Stetige Surjektionen erhalten den Zusammenhang.

Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so auch das Bild $f(X)$.

Beweis: Sei $f(X) = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung. Dann gilt $X = U \sqcup V$ mit $U = f^{-1}(A)$ und $V = f^{-1}(B)$. Ist X zusammenhängend, so folgt entweder $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$, also entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. QED

Alternativer Beweis: Ist $f(X)$ unzusammenhängend, so gibt es eine stetige Surjektion $g: f(X) \twoheadrightarrow \{0, 1\}$, somit auch $g \circ f: X \twoheadrightarrow \{0, 1\}$. QED

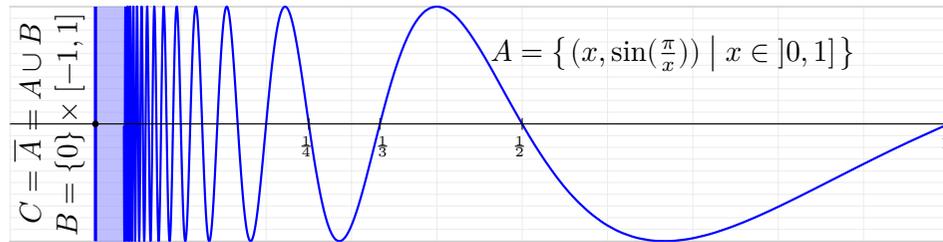
Beispiel: Ist die Gruppe $GL_n \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ zusammenhängend? Nein!

Für $n = 1$ ist $GL_1 \mathbb{R} = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ unzusammenhängend.

Für $n \geq 1$ ist $\det: GL_n \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$ stetig und surjektiv, $\text{diag}(a, 1, \dots, 1) \mapsto a$.

Wir erhalten die offene Zerlegung in $GL_n^\pm \mathbb{R} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \gtrless 0\}$.

☺ Noch feiner lässt sich $GL_n \mathbb{R}$ nicht zerlegen. Das bedeutet, die beiden Weg/Komponenten von $GL_n \mathbb{R}$ sind $GL_n^\pm \mathbb{R}$, siehe G2N. Dazu müssen wir nur noch zeigen, dass $GL_n^\pm \mathbb{R}$ weg/zusammenhängend ist.

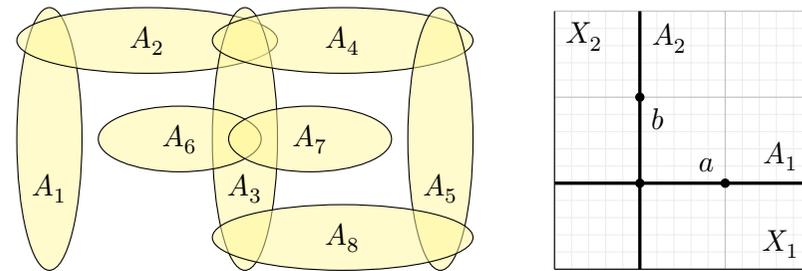


Sinuskurve des Topologen: Sind $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend? Die Teilräume A, B sind stetige Bilder von Intervallen, also zshgd. Und C ?

Lemma G1c: Der Abschluss erhält den Zusammenhang

In einem Raum X sei $A \subseteq Y \subseteq \bar{A}$. Ist A zusammenhängend, so auch Y .

Beweis: Sei $f: Y \rightarrow \{0, 1\}$ stetig. Dann ist die Einschränkung $f|_A$ stetig und somit konstant, $f|_A = \text{const}_A^c$, denn A ist zusammenhängend (G1A). Die beiden stetigen Abbildungen f und const_Y^c stimmen auf A überein. In Y ist A dicht, $\{0, 1\}$ ist hausdorffsch, also $f = \text{const}_Y^c$ (D5L). QED



Lemma G1i: zusammenhängende Vereinigung

Im Raum (X, \mathcal{T}) seien $(A_i)_{i \in I}$ mit $I \neq \emptyset$ zusammenhängende Teilräume. Zu jedem Indexpaar $i, j \in I$ existiere eine Kette $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$ mit $A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k} \neq \emptyset$ für $k = 1, \dots, n$. Dann ist $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

Beweis: Sei $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ stetig. Jede Einschränkung $f|_{A_i}: A_i \rightarrow \{0, 1\}$ ist stetig und somit konstant, $f|_{A_i} = c_i$, denn A_i ist zusammenhängend. Für jede Kette $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$ folgt $c_i = c_{i_0} = c_{i_1} = \dots = c_{i_n} = c_j$. Also ist f konstant. Das zeigt, dass A zusammenhängend ist. QED

Beispiel: Es gilt $\mathfrak{Z}(\mathbb{R} \setminus \{t\}) = \{\mathbb{R}_{<t}, \mathbb{R}_{>t}\}$ und $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q}) = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

Definition G1j: Zerlegung in Zusammenhangskomponenten

Zwei Punkte $a, b \in X$ heißen **zusammenhängend im Raum X** , wenn beide in einem zusammenhängenden Teilraum $C \subseteq X$ liegen.

Dank G1i ist dies eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse $\langle a \rangle_X$ von a in X heißt die **(Zusammenhangs-)Komponente** von a in X .

Dies zerlegt den Raum X in Komponenten, $\mathfrak{Z}(X) := \{\langle a \rangle_X \mid a \in X\}$.

Der Raum X ist zshgd gdw $\mathfrak{Z}(X) = \{X\}$, und unzshgd gdw $\#\mathfrak{Z}(X) \geq 2$. Für den leeren Raum \emptyset gilt $\mathfrak{Z}(\emptyset) = \emptyset$; er ist weder zshgd noch unzshgd.

Beispiel: Für jeden diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ gilt $\mathfrak{Z}(X) = \{\{a\} \mid a \in X\}$. Es gilt $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}\}$, $\mathfrak{Z}(\mathbb{R} \setminus \{t\}) = \{\mathbb{R}_{<t}, \mathbb{R}_{>t}\}$ und $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q}) = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

Obwohl \mathbb{Q} nicht diskret ist, besteht jede Komponente $\langle a \rangle_{\mathbb{Q}} = \{a\}$ nur aus einem Punkt (G1c). Ein unzusammenhängender Raum X mit dieser Eigenschaft $\mathfrak{Z}(X) = \{\{a\} \mid a \in X\}$ heißt **total unzusammenhängend**.

Satz G1k: topologische Eigenschaften der Komponenten

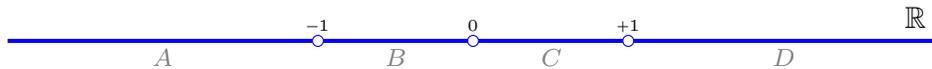
- 1 Zu jedem Punkt $a \in X$ ist seine Komponente $\langle a \rangle_X$ der größte zshgd Teilraum von X , der a enthält.
- 2 Jede Komponente $\langle a \rangle_X$ ist abgeschlossen in X .
- 3 Ist $\mathfrak{Z}(X)$ (lokal-)endlich, so ist jede Komponente $\langle a \rangle_X$ offen.

Letzteres bedeutet $X = \bigsqcup_{i \in I} \langle a_i \rangle_X$ mit der Summentopologie, wie etwa für $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Für \mathbb{Q} und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ erhalten wir keine top. Summe.

Beweis: (1) Nach Definition G1j ist die Komponente $\langle a \rangle_X$ Vereinigung aller zshgden Teilräume $C \subseteq X$ mit $a \in C$, nach Lemma G1i also zshgd.

(2) Dank (1) und Lemma G1G ist $\overline{\langle a \rangle_X} \ni a$ zshgd, also $\overline{\langle a \rangle_X} \subseteq \langle a \rangle_X$.

(3) Das Komplement $\bigsqcup_{j \neq i} \langle a_j \rangle_X$ ist (lokal-)endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen, also abgeschlossen (D5G). QED



Beispiel: Berechnen Sie \mathfrak{Z} für den Raum $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. **Lösung:**
 $\mathfrak{Z}(X) = \{ A =]-\infty, -1[, B =]-1, 0[, C =]0, +1[, D =]+1, +\infty[\}$
 Wir haben die offene Zerlegung $X = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$. Hier sind A, B, C, D zshgd, da nicht-leere reelle Intervalle (G1A, G1D). Allgemein gilt hierzu:

Satz G1L: Zusammenhang in einem Summenraum

- (1) Im Summenraum $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ gilt $\langle a \rangle_X = \langle a \rangle_{X_i}$ für $a \in X_i$.
- (2) Für die Zerlegung in Komponenten folgt $\mathfrak{Z}(\bigsqcup_{i \in I} X_i) = \bigsqcup_{i \in I} \mathfrak{Z}(X_i)$.

Beweis: (1) „ \supseteq “: Der Teilraum $\langle a \rangle_{X_i}$ ist zshgd, also enthalten in $\langle a \rangle_X$.
 „ \subseteq “: Wir haben die offene Zerlegung $X = X_i \sqcup X'_i$ mit $X'_i = \bigcup_{j \neq i} X_j$.
 Zu $C = \langle a \rangle_X$ erhalten wir die offene Zerlegung $C = (C \cap X_i) \sqcup (C \cap X'_i)$.
 Aus $a \in C \cap X_i$ folgt $C \cap X'_i = \emptyset$, also $C \subseteq X_i$, somit $\langle a \rangle_X \subseteq \langle a \rangle_{X_i}$.

(2) Für die Komponenten des Summenraums $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \{ \langle a \rangle_X \mid a \in X \} \\ &\stackrel{(0)}{=} \bigcup_{i \in I} \{ \langle a \rangle_X \mid a \in X_i \} \\ &\stackrel{(1)}{=} \bigcup_{i \in I} \{ \langle a \rangle_{X_i} \mid a \in X_i \} \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{Z}(X_i) \end{aligned}$$

Hierbei gilt (0) für jede Vereinigung $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, doch (1) erst für den Summenraum $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$. Die letzte Vereinigung ist disjunkt. **QED**

☺ Diese Summenregel ist sehr einfach und intuitiv und oft praktisch. Für diesen Satz ist wesentlich, dass die Zerlegung $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ *offen* ist. Einfaches Gegenbeispiel: Für die disjunkte Zerlegung $X = [0, 2] = A \sqcup B$ in die zusammenhängenden Mengen $A = [0, 1[$ und $B = [1, 2]$ gilt nicht etwa $\mathfrak{Z}(X) = \{A, B\}$, sondern schlicht $\mathfrak{Z}(X) = \{X\}$.

Raffinierter: Für die Sinuskurve des Topologen $C = \bar{A} = A \sqcup B$ sind A und B zshgd, aber es gilt nicht $\mathfrak{Z}(C) = \{A, B\}$, sondern $\mathfrak{Z}(C) = \{C\}$.



Satz G1M: Zusammenhang eines Produktraums

- (1) Genau dann ist $X = \prod_{i \in I} X_i$ zusammenhängend, wenn alle X_i es sind.
- (2) Also $\langle a \rangle_X = \prod_{i \in I} \langle a_i \rangle_{X_i}$ und $\mathfrak{Z}(\prod_{i \in I} X_i) = \{ \prod_{i \in I} A_i \mid A_i \in \mathfrak{Z}(X_i) \}$.

Beweis: (1) „ \Rightarrow “: Ist X zusammenhängend, so auch $X_i = p_i(X)$ dank G1E.
 „ \Leftarrow “: (a) Sei I endlich, etwa $I = \{1, \dots, n\}$, also $X = X_1 \times \dots \times X_n$.
 Zu $a, b \in X$ ist $A_i := \{b_1\} \times \dots \times \{b_{i-1}\} \times X_i \times \{a_{i+1}\} \times \dots \times \{a_n\} \cong X_i$.
 Es gilt $a \in A_1$ und $b \in A_n$ sowie $A_i \cap A_{i+1} \ni (b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$.
 Dank Lemma G1I ist $A := A_1 \cup \dots \cup A_n$ zusammenhängend.
 (b) Sei I unendlich und $a \in X$. Zu $J \subseteq I$ endlich sei $A_i = X_i$ für $i \in J$ und $A_i = \{a_i\}$ für $i \in I \setminus J$. Dann ist $A_J := \prod_{i \in J} A_i \cong \prod_{i \in J} X_i$ zshgd. Auch $A := \bigcup \{ A_J \mid J \subseteq I \text{ endlich} \}$ ist zshgd dank G1I, denn $a \in A_J$ für alle J . Somit ist auch der Abschluss $\bar{A} = X$ zshgd dank G1G.

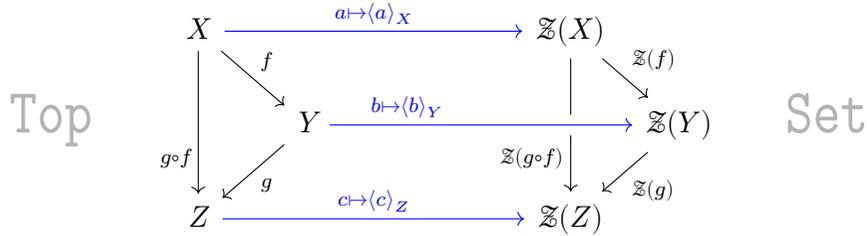
☺ Für endliche Produkte ist der Beweis intuitiv und naheliegend. Die obige Skizze zu Lemma G1I illustriert den Fall $X = X_1 \times X_2$. Für I endlich, etwa $I = \{1, \dots, n\}$, folgt die Aussage per Induktion. Für unendliche Produkte ist der Abschluss der entscheidende Kniff!

Aufgabe: Zeigen Sie die letzte Aussage $\bar{A} = X$. Folgern Sie Aussage (2).

Lösung: In $X = \prod_{i \in I} X_i$ zeigen wir $\bar{A} = X$ in der Produkttopologie. Jede offene Menge $\emptyset \neq U \subseteq X$ enthält $\prod_{i \in I} U_i$ mit $\emptyset \neq U_i \subseteq X_i$ offen und $U_i = X_i$ für alle Indizes $i \in I \setminus J$ außerhalb einer endlichen Menge $J \subseteq I$. Demnach gilt $U \cap A \supseteq U \cap A_J \neq \emptyset$. Somit ist A dicht in X , kurz $\bar{A} = X$.

(2) Für jeden Punkt $a \in X$ gilt die Inklusion $\langle a \rangle_X \supseteq \prod_{i \in I} \langle a_i \rangle_{X_i}$, denn dieses Produkt enthält den Punkt a und ist zshgd dank (1).

Umgekehrt gilt $\langle a \rangle_X \subseteq \prod_{i \in I} \langle a_i \rangle_{X_i}$, denn das stetige Bild $p_i(\langle a \rangle_X)$ ist zshgd (G1E) und enthält a_i , also $p_i(\langle a \rangle_X) \subseteq \langle a_i \rangle_{X_i}$ für alle $i \in I$. **QED**



Satz G1N: Funktorialität der Komponentenerlegung

Die Zuordnung $X \mapsto \mathcal{Z}(X)$ hat folgende schöne Eigenschaften:

- 1 Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und $a \in X$, so gilt $f(\langle a \rangle_X) \subseteq \langle f(a) \rangle_Y$.
- 2 Somit ist $\mathcal{Z}(f) : \mathcal{Z}(X) \rightarrow \mathcal{Z}(Y) : \langle a \rangle_X \mapsto \langle f(a) \rangle_Y$ wohldefiniert.
- 3 Es gilt $\mathcal{Z}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{Z}(X)}$ und $\mathcal{Z}(g \circ f) = \mathcal{Z}(g) \circ \mathcal{Z}(f)$.

Jeder Homöomorphismus $(f, g) : X \cong Y$ topologischer Räume induziert eine Bijektion $(\mathcal{Z}(f), \mathcal{Z}(g)) : \mathcal{Z}(X) \cong \mathcal{Z}(Y)$ der Komponenten.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgsam nach!

Lösung: (1) Die Komponente $\langle a \rangle_X$ ist zusammenhängend dank G1K, demnach auch ihr stetiges Bild $f(\langle a \rangle_X)$ im Zielraum Y dank G1E. Dieses enthält $f(a)$, also gilt $f(\langle a \rangle_X) \subseteq \langle f(a) \rangle_Y$ dank G1K.

(2) Die Vergrößerung von $a \mapsto f(a)$ zu $\langle a \rangle_X \mapsto \langle f(a) \rangle_Y$ ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von dem willkürlich gewählten Repräsentanten a : Aus $\langle a \rangle_X = \langle b \rangle_X$ folgt $f(\langle a \rangle_X) = f(\langle b \rangle_X)$, also $\langle f(a) \rangle_Y = \langle f(b) \rangle_Y$.

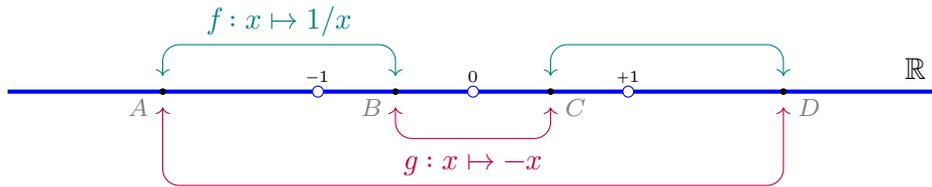
(3) Die Aussage $\mathcal{Z}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{Z}(X)}$ ist klar:

$$\mathcal{Z}(\text{id}_X)(\langle a \rangle_X) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \text{id}_X(a) \rangle_X \stackrel{\text{Def}}{=} \langle a \rangle_X$$

Für die Komposition von $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(g \circ f)(\langle a \rangle_X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle (g \circ f)(a) \rangle_Z \stackrel{\text{Def}}{=} \langle g(f(a)) \rangle_Z \stackrel{\text{Def}}{=} \mathcal{Z}(g)(\langle f(a) \rangle_Y) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \mathcal{Z}(g)(\mathcal{Z}(f)(\langle a \rangle_X)) \stackrel{\text{Def}}{=} (\mathcal{Z}(g) \circ \mathcal{Z}(f))(\langle a \rangle_X) \end{aligned}$$

Das zeigt $\mathcal{Z}(g \circ f) = \mathcal{Z}(g) \circ \mathcal{Z}(f) : \mathcal{Z}(X) \rightarrow \mathcal{Z}(Z)$. QED



Aufgabe: Berechnen Sie \mathcal{Z} für $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ und $f, g, h, k : X \rightarrow X$ mit $f(x) = 1/x$ und $g(x) = -x$ und $h(x) = x^2$ und $k(x) = x^3$.

Lösung: Der Raum $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ zerfällt in die vier Komponenten $A =]-\infty, -1[, B =]-1, 0[, C =]0, 1[, D =]1, +\infty[$. Wir haben also:

$\mathcal{Z}(X)$	A	B	C	D
$\mathcal{Z}(f)$	B	A	D	C
$\mathcal{Z}(g)$	D	C	B	A
$\mathcal{Z}(h)$	D	C	C	D
$\mathcal{Z}(k)$	A	B	C	D

Ausführlich: Wie finden wir die Zerlegung $\mathcal{Z}(X)$ in Komponenten?

Wir haben die offene Zerlegung $X = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$. Hier sind A, B, C, D zusammenhängend, da nicht-leere reelle Intervalle (siehe G1A, G1D). Dank G1L gilt $\mathcal{Z}(X) = \mathcal{Z}(A) \sqcup \mathcal{Z}(B) \sqcup \mathcal{Z}(C) \sqcup \mathcal{Z}(D) = \{A, B, C, D\}$.

Wie finden wir $\mathcal{Z}(f)$? Wir nutzen einfach die Definition aus Satz G1N!

Für $f : X \rightarrow X : x \mapsto 1/x$ gilt $\mathcal{Z}(f) : A \mapsto B, B \mapsto A, C \mapsto D, D \mapsto C$. Warum? Wir wählen dazu irgendeinen Repräsentanten $a \in A$, etwa $a = 2$ und finden $f(a) = 1/2 \in B$. Damit gilt $\mathcal{Z}(f) : A \mapsto B$. Ebenso finden wir $B \mapsto A$ und $C \mapsto D$ und $D \mapsto C$. Die Berechnung ist unabhängig vom willkürlich gewählten Repräsentanten, also wohldefiniert!

Es gilt $f \circ f = \text{id}_X$, also $\mathcal{Z}(f) \circ \mathcal{Z}(f) = \text{id}_{\mathcal{Z}(X)}$. Weitere Beispiele:

Für $g : X \rightarrow X : x \mapsto -x$ gilt $\mathcal{Z}(g) : A \mapsto D, B \mapsto C, C \mapsto B, D \mapsto A$.

Für $h : X \rightarrow X : x \mapsto x^2$ gilt $\mathcal{Z}(h) : A \mapsto D, B \mapsto C, C \mapsto C, D \mapsto D$.

Übung: Berechnen Sie \mathcal{Z} zu $X = \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$ und $f : X \rightarrow X : a \mapsto a/3$.

Definition G2A: Wegzusammenhang

Ein **Weg** in einem Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Dabei heißt $a = \gamma(0)$ der *Startpunkt* und $b = \gamma(1)$ der *Zielpunkt* von γ . Wir sagen, γ *läuft von a nach b in X* , oder γ *verbindet a mit b in X* .
Wir nennen X **wegzusammenhängend**, falls $X \neq \emptyset$ gilt und zu jedem Paar $a, b \in X$ ein Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$ existiert.

Proposition G2B: erste einfache aber wichtige Beispiele

- (0) Weg/Zusammenhang ist invariant unter Homöomorphismen.
- (1) Jeder topologische \mathbb{R} -Vektorraum V , etwa $V = \mathbb{R}^n$, ist wegzshgd.
- (2) Jede bezüglich x_0 sternförmige Menge $X \subseteq V$ ist wegzshgd (F6F).
- (3) Für $\dim V \geq 2$ ist $V \setminus \{0\}$ wegzshgd (G2o), nicht jedoch für $\dim V = 1$.
- (4) Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist wegzshgd für $n \geq 1$, nicht jedoch $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$.

Übung: Beweisen Sie dies durch Konstruktion geeigneter Wege.

Lösung: Zum Aufwärmen als Fingerübung empfohlen! Für (0) siehe G2G. Für (1) genügt ein Geradenstück, für (2) zwei Geradenstücke und G2F. Für (3) siehe G2o. Für (4) genügt $n = 1$ und Polarkoordinaten.

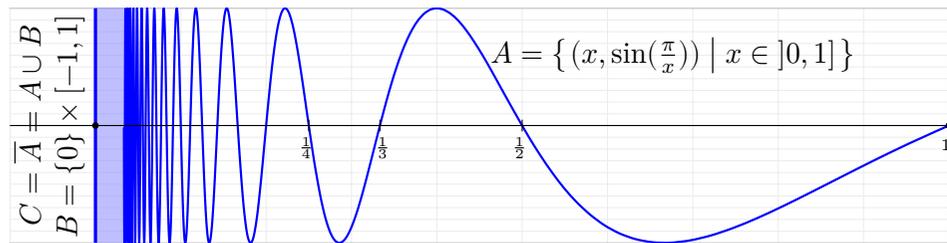
Wir haben zwei Zusammenhangsbegriffe in unserem Werkzeugkasten und nutzen effizient ihr Zusammenspiel:

Satz G2c: logischer Zusammenhang der Zusammenhangsbegriffe

Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang, aber nicht umgekehrt.

Beweis: Sei X wegzshgd und $X = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung. Zu $a \in A$ und $b \in B$ existiert ein Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von a nach b . Die offene Zerlegung $[0, 1] = \gamma^{-1}(A) \sqcup \gamma^{-1}(B)$ mit $0 \in \gamma^{-1}(A)$ und $1 \in \gamma^{-1}(B)$ widerspricht G1A. Also gilt entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. QED

⚠ Die Umkehrung gilt nicht! Sehen Sie ein Gegenbeispiel? Wie überall lohnt sich auch hier ein großes Beispielrepertoire...



Sinuskurve des Topologen: C ist zshgd, aber nicht wegzshgd! (G2L)
Es gibt keinen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ von $\gamma(0) = (1, 0)$ nach $\gamma(1) = (0, 0)$. Das scheint anschaulich plausibel: Jeder Versuch müsste unendlich vielen Oszillationen folgen und kann daher stetig (!) niemals B erreichen.

Eine präzise Ausführung erweist sich als knifflig... und daher lehrreich!
Sei $s := \inf\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in B\}$ und $b := \gamma(s)$. Zu $\varepsilon = 1$ existiert $r \in [0, s[$ mit $\gamma([r, s]) \subseteq B(b, \varepsilon) =: U$. Die Projektion $\text{pr}_1 U \subseteq \mathbb{R}$ zerfällt in unendlich viele Intervalle nahe $\{0\}$. In U verbindet der Weg $\gamma|_{[r, s]}$ somit $\gamma(r) \in A$ und $\gamma(s) \in B$ in *verschiedenen* Komponenten. Widerspruch!

Konkret ausgeführt: Für $U = C \cap (\mathbb{R} \times]-2, +1[)$ besteht $\text{pr}_1 U \subseteq \mathbb{R}$ aus $[0, 1]$ ohne die Maximalstellen $x \in]0, 1]$ mit $\sin(\pi/x) = +1$. Explizit also:

$$\text{pr}_1 U = [0, 1] \setminus \{2/(1 + 4k) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Im Falle $b \in U$ existiert $r \in [0, s[$ mit $\gamma([r, s]) \subseteq U$. Der projizierte Weg $\alpha := \text{pr}_1 \circ \gamma|_{[r, s]} : [r, s] \rightarrow \text{pr}_1 U$ verbindet $\alpha(r) > 0$ mit $\alpha(s) = 0$ in U . Das widerspricht dem Zwischenwertsatz!

Für $V = C \cap (\mathbb{R} \times]-1, +2[)$ besteht $\text{pr}_1 V \subseteq \mathbb{R}$ aus $[0, 1]$ ohne die Minimalstellen $x \in]0, 1]$ mit $\sin(\pi/x) = -1$. Explizit also:

$$\text{pr}_1 V = [0, 1] \setminus \{2/(3 + 4k) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Im Falle $b \in V$ existiert $r \in [0, s[$ mit $\gamma([r, s]) \subseteq V$. Der projizierte Weg $\alpha := \text{pr}_1 \circ \gamma|_{[r, s]} : [r, s] \rightarrow \text{pr}_1 V$ verbindet $\alpha(r) > 0$ mit $\alpha(s) = 0$. Das widerspricht dem Zwischenwertsatz!

☺ Sie sehen hier exemplarisch, wie nützlich die Funktorialität ist, um stetige Abbildungen geschickt zur Berechnung einzusetzen.

Wann sind \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q isomorph, also $(f, g) : \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^q$? Wann existiert $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ surjektiv? injektiv? Das hängt von der Struktur ab!

- 1 Linear, in $\text{Lin}_{\mathbb{R}}$, vermöge eines \mathbb{R} -Vektorraumisomorphismus?
- 2 Differenzierbar, in \mathcal{C}^1 , vermöge eines Diffeomorphismus?
- 3 Topologisch, in Top , vermöge eines Homöomorphismus?
- 4 Als bloße Mengen, in Set , vermöge einer Bijektion?

(1) Gauß-Algorithmus, Basis-Auswahl-und-Ergänzung sowie Steinitz' Austauschatz begründen den Begriff der (*linearen*) Dimension: Über jedem Körper \mathbb{K} sind die \mathbb{K} -Vektorräume \mathbb{K}^p und \mathbb{K}^q isomorph gdw $p = q$. Der Rangsatz für lineare Abbildungen $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^q$ garantiert noch mehr: Genau dann existiert f surjektiv / injektiv, wenn $p \geq q$ bzw. $p \leq q$ gilt. Wiederholung: Formulieren und beweisen Sie diese fundamentalen Sätze. Gelten Sie über jedem Körper? DRing? CRing? sogar über jedem Ring? Äquivalent: Ist jede invertierbare Matrix zwangsläufig quadratisch? Überraschung: Über $R = \text{End}_K(K[X])$ gilt $R^p \cong R^q$ für $p, q \geq 1$.

Ein gut verstandenes Beispiel ist mehr wert als drei schlecht verstandene Theoreme.

Sei K ein Körper, etwa $\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$, und hierüber $V = K^{(\mathbb{N})} = K[X]$ der Vektorraum der Folgen $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ mit endlichem Träger.

(a) Im Ring $R = (\text{End}_K(V), +, \circ)$ seien $a, b, c, d : V \rightarrow V$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a(x) &= (x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \dots), & c(x) &= (x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, \dots), \\ b(x) &= (0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots), & d(x) &= (x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots). \end{aligned}$$

Dies zerlegt jedes Polynom $P \in K[X]$ in seinen geraden und ungeraden Anteil, $(c, d) : P \mapsto (P_0, P_1)$ mit $P = P_0(X^2) + X P_1(X^2)$. Reißverschluss:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cb \\ da & db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd = 1.$$

(b) Die Matrizen $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ stiften einen Isomorphismus $R^1 \cong R^2$.

(c) Per Induktion folgt $R^1 \cong R^n$ und somit $R^p \cong R^q$ für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(2) Unter welcher Bedingung sind \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q diffeomorph? Nun stehen wesentlich mehr Abbildungen als mögliche Kandidatinnen zur Auswahl. Dennoch gelingt auch Diffeomorphismen nur für $p = q$. Wie können Sie das beweisen? Die Differentialrechnung nutzt die Lineare Algebra!

Das Wechselspiel von differenzierbaren und linearen Abbildungen ist das genial-einfache Erfolgsrezept der Differentialrechnung: Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^p \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^q$ im Punkt a diff'bar, so haben wir als Ableitung in a die lineare Abbildung $D_a f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Bei Komposition gilt die Kettenregel. So nutzt man ganz bequem und selbstverständlich die obigen Ergebnisse der Linearen Algebra. **Aufgabe:** Führen Sie dies sorgsam aus! **Lösung:**

Sei $(F, G) : U \cong V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$, also stetig diff'bar mit $G \circ F = \text{id}_U$ und $F \circ G = \text{id}_V$. Sei $a \in U$ und $b = F(a) \in V$. Die Ableitungen $f = D_a F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ und $g = D_b G : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ sind linear und erfüllen $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^p}$ und $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^q}$. Dank (1) folgt $p = q$. Stärker noch gilt der Umkehrsatz und der Rangsatz: Lokale Koordinaten machen „stetig diff'bar“ und „linear“ äquivalent.

(4) Als Warnung: Für Mengen ohne weitere Struktur sieht die Situation ganz anders aus! Für jedes Paar $p, q \geq 1$ existieren Bijektionspaare $(f, g) : \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^q$: Beide Mengen sind gleichmächtig, enthalten also gleichviele Elemente. Zur Erinnerung und Wiederholung:

Satz B2N: Mächtigkeit von \mathbb{R}

- (1) Die Menge \mathbb{R} ist überabzählbar, genauer gilt $\mathbb{R} \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
- (2) Somit ist \mathbb{R} gleichmächtig zu \mathbb{R}^d für $d \geq 2$ und zu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$.
- (3) Strikt mächtiger sind hingegen $\mathfrak{P}(\mathbb{R}) \cong \{0, 1\}^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Entgegen unserer vagen Intuition ist für $1 \leq p < q$ die Menge \mathbb{R}^q also keineswegs größer als \mathbb{R}^p . Den Unterschied macht nicht die „Größe“ der Menge, sondern allein die zusätzliche Struktur darauf: zunächst linear als Vektorraum, dann differenzierbar wie oben gesehen.

Es bleibt die Frage: Was gilt topologisch?

(3) Das bringt uns schließlich zu stetigen Abbildungen: Unter welcher Bedingung sind \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q homöomorph? Sie vermuten richtig, auch das gelingt nur für $p = q$. Doch wie beweist man eine so schwindelerregend allgemeine Aussage? Stetige Abbildungen können sehr irregulär sein!

⚠️ Erstaunlich: Es gibt stetige Surjektionen $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ für $1 \leq p < q$. Warum sollte es also nicht auch stetige Bijektionen $\mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^q$ geben? Allgemeiner gefragt: Wenn eine stetige Abbildung $\mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^q$ (zumindest lokal) injektiv ist, folgt dann bereits $p \leq q$? Für jeden Homöomorphismus $\mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^q$ folgt dann sowohl $p \leq q$ als auch $q \leq p$, also $p = q$ wie vermutet.

😞 Die so überaus nützliche Lineare Algebra und Differentialrechnung stehen uns hier nicht mehr zur Verfügung, da wir sie auf lediglich stetige Funktionen gar nicht erst anwenden können: Es gibt stetige Funktionen, die nirgends differenzierbar sind. Spätestens hier spüren wir, wie leicht die Dimensionsfrage in der Linearen Algebra und der Analysis doch ist (zumindest rückblickend, damals empfanden Sie es vielleicht schwer).

Das erhoffte Ergebnis gilt tatsächlich und lautet ganz allgemein:

Satz J7c: topologische Invarianz der Dimension, Brouwer 1911

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$ offen und nicht-leer.

Wenn eine stetige Injektion $U \hookrightarrow V$ existiert, dann gilt $p \leq q$.

Wenn ein Homöomorphismus $(f, g) : U \cong V$ existiert, dann gilt $p = q$.

Für diese topologische Frage benötigen wir raffiniertere Werkzeuge! Dies gelingt uns in Kapitel J mit Hilfe des Abbildungsgrades.

Die *topologische Invarianz der Dimension* wurde erstmals 1911 von Brouwer bewiesen. Vor 1911 war der Satz ein berühmtes Problem, das als sehr beunruhigend empfunden wurde. Sie ahnen jetzt vielleicht warum.

😊 Unsere geometrische Anschauung und stille Hoffnung ist gerettet! Erst dieser fundamentale Satz ermöglicht uns, die Dimension einer (topologischen) Mannigfaltigkeit zu definieren. Das ist unverzichtbare Grundlage, schon für die Definition und Klassifikation von Flächen.

😊 In kleiner Dimension verfügen wir bereits über genügend Werkzeuge:

Satz G2D: topologische Invarianz der Dimension 1

Es existiert kein Homöomorphismus $(f, g) : \mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$.

Beweis: Andernfalls wären die Räume $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ homöomorph vermöge $(f|_X, g|_Y) : X \cong Y$. Das widerspricht G2B. QED

Übung: Für $n \geq 2$ existieren stetige Surjektionen $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, aber keine stetigen Injektionen $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^1$. Zeigen Sie die folgende Verschärfung:

Satz G2D: topologische Invarianz der Dimension 1

Sei $n \geq 2$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht-leer.

Dann existiert keine stetige Injektion $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$.

Lösung: Dank $n \geq 2$ existiert eine stetige Injektion $g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow U$. Explizit: Zu $a \in U$ existiert $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a, 2r) \subseteq U$. Wir wählen $g(s) = (rs, 0)$. Komposition ergäbe $f \circ g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^1$, im Widerspruch zu E2κ. QED

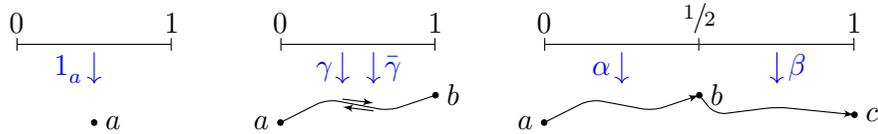
Wie definieren wir „Dimension“ und wie verhält sie sich?

Die vier Eingangsfragen erweisen sich als erstaunlich vielfältig! Sie sind ein wunderschönes Beispiel für Querverbindungen innerhalb Ihres Mathematikstudiums. Das ist gut und richtig, so soll es sein.

Der Dimensionsbegriff ist nur scheinbar „offensichtlich“. Schon in der Linearen Algebra müssen wir dazu ernsthaft arbeiten, ebenso in Analysis und Topologie und Mengenlehre. Vermutlich kann man das erst im Rückblick würdigen, jedenfalls kann man dabei viel Schönes lernen!

Der Rangatz für lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ über \mathbb{R} garantiert: Genau dann existiert f surjektiv / injektiv, wenn $p \geq q$ bzw. $p \leq q$ gilt. Genau dann existiert ein linearer Isomorphismus, wenn $p = q$ gilt.

Topologisch gilt die entsprechende Aussage nicht mehr für stetige Surjektionen, aber glücklicherweise immer noch für stetige Injektionen, und somit insbesondere für Homöomorphismen.



Definition G2F: Operationen auf Wegen

Die Menge aller Wege von a nach b im Raum X bezeichnen wir mit:

$$P(X, a, b) := \{ \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ stetig} \mid \gamma(0) = a, \gamma(1) = b \}$$

- (1) Der **konstante Weg** $1_a \in P(X, a, a)$ ist $1_a : t \mapsto a$.
- (2) Die **Wegumkehr** $\bar{\cdot} : P(X, a, b) \rightarrow P(X, b, a)$ ist $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$.
- (3) Die **Aneinanderhängung** $* : P(X, a, b) \times P(X, b, c) \rightarrow P(X, a, c)$ ist

$$\alpha * \beta : [0, 1] \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Abbildung $\alpha * \beta$ ist wohldefiniert dank $\alpha(1) = \beta(0) = b$ und stetig dank Verklebesatz E1P, denn $[0, 1/2]$ und $[1/2, 1]$ sind abgeschlossen.

Definition G2F: Verbindbarkeit und Wegkomponenten

Wir nennen zwei Punkte $a, b \in X$ **verbindbar** in X , falls $P(X, a, b) \neq \emptyset$. Dank obiger Konstruktionen (1–3) ist dies eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzklasse $[a]_X$ des Punktes a im Raum X nennen wir die **Weg(zusammenhangs)komponente** von a im Raum X . Dies definiert die Zerlegung $\pi_0(X) := \{ [a]_X \mid a \in X \}$ von X in seine Wegkomponenten.

Genau dann ist X wegzusammenhängend, wenn $\pi_0(X) = \{ X \}$ gilt. Die Wegkomponente $[a]_X$ des Punktes a im Raum X ist der größte wegzusammenhängende Teilraum von X , der a enthält (analog zu G1K).

Beispiele: Jeder Punkt $t \in \mathbb{R}$ trennt \mathbb{R} gemäß $\pi_0(\mathbb{R} \setminus \{t\}) = \{ \mathbb{R}_{<t}, \mathbb{R}_{>t} \}$. Für $n \geq 2$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist $X = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ wegzshgd, also $\pi_0(X) = \{ X \}$.

Es gilt $\pi_0(\mathbb{Z}) = \{ \{z\} \mid z \in \mathbb{Z} \}$ und $\pi_0(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \{ [k, k+1] \mid k \in \mathbb{Z} \}$ sowie $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q}) = \pi_0(\mathbb{Q}) = \{ \{x\} \mid x \in \mathbb{Q} \}$: Der Raum \mathbb{Q} ist total (weg)unzshgd.

Für die Sinuskurve des Topologen $C = \bar{A} = A \cup B$ gilt $\mathfrak{Z}(C) = \{ C \}$, aber $\pi_0(C) = \{ A, B \}$. Die Zerlegung $\pi_0(X)$ ist echt feiner als $\mathfrak{Z}(X)$.

Satz G2c: Stetige Surjektionen erhalten den Wegzusammenhang.

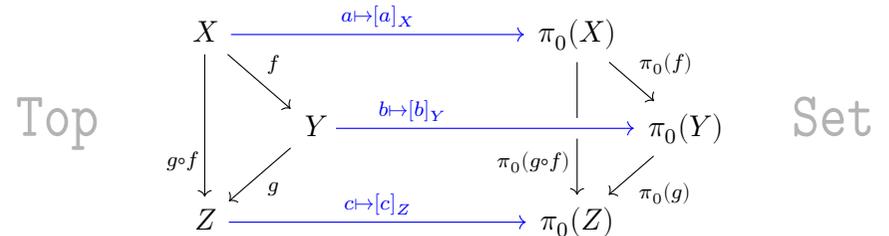
Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so auch das Bild $f(X)$.

Beweis: Zu $a, b \in f(X)$ existieren $x, y \in X$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$ und hierzu ein Weg $\gamma \in P(X, x, y)$. Wir erhalten $f \circ \gamma \in P(Y, a, b)$. QED

Beispiel: Ist die Gruppe $GL_n \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ wegzusammenhängend? Nein! Für $n = 1$ ist $GL_1 \mathbb{R} = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ nicht wegzusammenhängend. Für $n \geq 1$ ist $\det : GL_n \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$ stetig und surjektiv, $\text{diag}(a, 1, \dots, 1) \mapsto a$.

Explizit: In der Gruppe $GL_n \mathbb{R}$ gibt es keinen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow GL_n \mathbb{R}$ von der Identität $I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ zur Spiegelung $S = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$: Dann wäre nämlich $\det \gamma(0) = +1$ und $\det \gamma(1) = -1$, also nach ZWS $\det \gamma(t) = 0$ für ein $t \in [0, 1]$. Die Matrix $\gamma(t)$ wäre nicht invertierbar!

😊 In G2N zeigen wir $\pi_0(GL_n \mathbb{R}) = \{ GL_n^- \mathbb{R}, GL_n^+ \mathbb{R} \}$: In der offenen Zerlegung $GL_n \mathbb{R} = GL_n^- \mathbb{R} \sqcup GL_n^+ \mathbb{R}$ sind beide Summanden wegzsgd.



Satz G2H: Funktorialität der Wegkomponentenzerlegung

Die Zuordnung $X \mapsto \pi_0(X)$ hat folgende schöne Eigenschaften:

- 1 Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und $a \in X$, so gilt $f([a]_X) \subseteq [f(a)]_Y$.
- 2 Somit ist $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y) : [a]_X \mapsto [f(a)]_Y$ wohldefiniert.
- 3 Es gilt $\pi_0(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_0(X)}$ und $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$.

Jeder Homöomorphismus $(f, g) : X \cong Y$ topologischer Räume induziert eine Bijektion $(\pi_0(f), \pi_0(g)) : \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$ der Wegkomponenten.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgsam nach, wie zu Satz G1N!

Satz G2i: Wegzusammenhang in einem Summenraum

- (1) Im Summenraum $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ gilt $[a]_X = [a]_{X_i}$ für $a \in X_i$.
- (2) Die Zerlegung in Wegkomponenten ist $\pi_0(\bigsqcup_{i \in I} X_i) = \bigsqcup_{i \in I} \pi_0(X_i)$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies für π_0 nach dem Vorbild von Satz G1L für \mathbb{Z} .

Lösung: (1) „ \supseteq “: Der Teilraum $[X]_{X_i}$ ist zshgd, also enthalten in $[a]_X$.
 „ \subseteq “: Wir haben die offene Zerlegung $X = X_i \sqcup X'_i$ mit $X'_i = \bigcup_{j \neq i} X_j$.
 Demnach liegt $[a]_X$ ganz im Summanden X_i , also ganz in $[a]_{X_i}$.

(2) Für die Wegkomponenten des Summenraums $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ folgt:

$$\begin{aligned} \pi_0(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \{[a]_X \mid a \in X\} \\ &\stackrel{(0)}{=} \bigcup_{i \in I} \{[a]_X \mid a \in X_i\} \\ &\stackrel{(1)}{=} \bigcup_{i \in I} \{[a]_{X_i} \mid a \in X_i\} \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{i \in I} \pi_0(X_i) \end{aligned}$$

Hierbei gilt (0) für jede Vereinigung $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, doch (1) erst für den Summenraum $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$. Die letzte Vereinigung ist disjunkt. QED

Das ist ein sehr anschauliches Ergebnis, darauf wären Sie bei Bedarf auch ganz alleine gekommen. Tatsächlich wird es oft einfach verwendet und nicht explizit ausgeführt. Ich betone diesen Satz hier auch nicht, weil er schwierig oder tiefsinnig wäre, sondern aus zwei didaktischen Gründen. Erstens möchte ich die Dualität von Summe und Produkt hervorheben. Zweitens sehen Sie hier, wie wichtig und hilfreich gute Notation ist.

Ich schreibe ganz bewusst $[a]_X$ für die Wegkomponente des Punktes a im umgebenden Raum X . Dies kürzt man später gerne ab zu $[a]$, falls hier nur ein Raum in Frage kommt. Doch vorerst üben wir Genauigkeit.

In der Formulierung des obigen Satzes und Beweises betrachten wir nämlich a sowohl in X_i als auch in X . Hier zahlt sich unsere umsichtige Notation bestens aus, die Argumente werden dadurch klar und einfach.



Satz G2j: Wegzusammenhang eines Produktraumes

- (1) Genau dann ist $X = \prod_{i \in I} X_i$ wegzshgd, wenn alle Faktoren X_i es sind.
- (2) Es gilt $[a]_X = \prod_{i \in I} [a_i]_{X_i}$, also $\pi_0(\prod_{i \in I} X_i) = \{\prod_{i \in I} A_i \mid A_i \in \pi_0(X_i)\}$.

Beweis: (1) „ \Rightarrow “: Ist X wegzshgd, so auch jeder Faktor $X_i = p_i(X)$ (G2G).
 „ \Leftarrow “: Sei $a, b \in X$. Zu jeder Koordinate $i \in I$ existiert $\gamma_i \in P(X_i, a_i, b_i)$.
 Daraus erhalten wir den Weg $\gamma = \prod_{i \in I} \gamma_i \in P(X, a, b)$ dank UAE (E4D).

(2) Für jeden Punkt $a \in X$ gilt die Inklusion $[a]_X \supseteq \prod_{i \in I} [a_i]_{X_i}$, denn dieses Produkt enthält a und ist wegzshgd dank (1).

Umgekehrt gilt $[a]_X \subseteq \prod_{i \in I} [a_i]_{X_i}$, denn das stetige Bild $p_i([a]_X) \ni a_i$ ist wegzshgd (G2G), und somit gilt $p_i([a]_X) \subseteq [a_i]_{X_i}$ für alle $i \in I$. QED

Hier habe ich die Argumente möglichst knapp und effizient dargestellt. In Worten ausgeführt lautet das entscheidende Argument (1):

„ \Leftarrow “: Vorgegeben seien beliebige Punkte $a, b \in X$. Da jeder Raum X_i wegzusammenhängend ist, existiert darin ein Weg $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow X_i$ von $\gamma_i(0) = a_i$ nach $\gamma_i(1) = b_i$. Daraus konstruieren wir die stetige Abbildung $\gamma = \prod_{i \in I} \gamma_i : [0, 1] \rightarrow X$ mit $p_i \circ \gamma = \gamma_i$ dank UAE (E4D) des Produktraums. Dies ist ein Weg in X von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$. Somit ist auch der Produktraum $X = \prod_{i \in I} X_i$ wegzusammenhängend.

Vergleich: Warum ist Satz G2j für π_0 so viel leichter als Satz G1M für \mathbb{Z} ?
 Das Produkt $X = \prod_{i \in I} X$ verträgt sich besonders gut mit Abbildungen $f : Y \rightarrow X$ in das Produkt X hinein, genau dafür haben wir die *universelle Abbildungseigenschaft*, $\mathcal{C}(Y, \prod_{i \in I} X_i) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{C}(Y, X_i)$ mit $f \mapsto (f_i)_{i \in I}$.
 Für Abbildungen $X \rightarrow Y$ aus X heraus haben wir kein solch allgemeines Werkzeug. Der Zusammenhang fragt aber nach stetigen Abbildungen $X \rightarrow \{0, 1\}$, daher mussten wir dort für Satz G1M etwas mehr arbeiten

Wie viele Komponenten haben die Matrixgruppen $GL_n \mathbb{R}$ und $GL_n \mathbb{C}$?

Satz G2n: Wegkomponenten der Matrixgruppe $GL_n \mathbb{K}$

Es gilt $\pi_0(GL_n \mathbb{R}) = \{GL_n^+ \mathbb{R}, GL_n^- \mathbb{R}\}$ und $\pi_0(GL_n \mathbb{C}) = \{GL_n \mathbb{C}\}$.

Beweis: (1) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $n = 1$ ist klar dank $GL_1 \mathbb{R} = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ebenso hat $GL_n \mathbb{R} = GL_n^- \mathbb{R} \sqcup GL_n^+ \mathbb{R}$ *mindestens* zwei Wegkomponenten.

Zunächst sei $n = 2$: Wir verbinden die Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ durch Wege in $GL_2^+ \mathbb{R}$ mit allen *positiven* Elementarmatrizen $R_{12}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$ und $R_{21}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$ sowie $S_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und schließlich $T_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dank Gauß-Algorithmus können wir jede *positive* Matrix $A \in GL_2^+ \mathbb{R}$ als Produkt dieser *positiven* Elementarmatrizen darstellen. Somit ist $GL_2^+ \mathbb{R}$ wegzusammenhängend.

Der allgemeine Fall $n \geq 2$ über \mathbb{R} verläuft wörtlich genauso!
Der komplexe Fall ist leichter, da $GL_1 \mathbb{C} = \mathbb{C}^\times$ wegzshgd ist.

QED

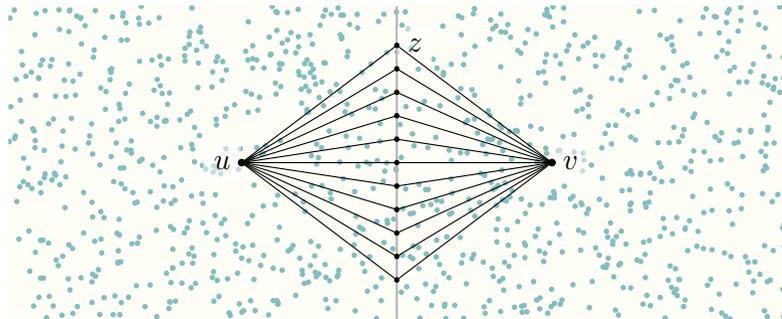
Erinnerung: Dank Satz G2i gilt allgemein $\pi_0(\bigsqcup_{i \in I} X_i) = \bigsqcup_{i \in I} \pi_0(X_i)$. Wir haben hier $GL_n \mathbb{R} = GL_n^- \mathbb{R} \sqcup GL_n^+ \mathbb{R}$ vorliegen. Daher genügt es, Wegzusammenhang für jeden der beiden Summanden nachzuweisen.

Übung: Bestimmen Sie $\pi_0 GL_n \mathbb{R}$ und $\pi_0 GL_n \mathbb{C}$ wie oben skizziert:

(1) Finden Sie in $GL_n \mathbb{R}$ je einen Weg von $I = 1_{n \times n}$ zu den Matrizen $S_i(\lambda) = I + (\lambda - 1)E_{ii}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, zu $R_{ij}(\mu) = I + \mu E_{ij}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $i \neq j$, und zu $T_{ij} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji}$. Dies sind die guten alten Elementarmatrizen mit positiver Determinante.

(2) Zeigen Sie, dass der (positiv modifizierte) Gauß-Algorithmus mit den obigen Operationen $S_i(\lambda)$, $R_{ij}(\mu)$, T_{ij} einen Weg von jeder Matrix $A \in GL_n \mathbb{R}$ nach $\text{diag}(\pm 1, 1, \dots, 1)$ liefert.

(3) Bestimmen Sie damit $\pi_0(GL_n \mathbb{R})$. *Zugabe:* Ebenso $\pi_0(GL_n \mathbb{C})$.
Alternative: Speziell über \mathbb{C} hilft der folgende, ganz allgemeine Satz.



Satz G2o: Jede komplexe Nichtnullstellenmenge ist wegzshgd.

(1) Sei $n \geq 2$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar, etwa $A = \mathbb{Q}^n$. Dann ist $X = \mathbb{R}^n \setminus A$ wegzusammenhängend (durch „fast gerade“, polygonale Wege in X).

(2) Sei $P \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n] \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto P(z)$. Dann ist die Nichtnullstellenmenge $X := f^{-1}(\mathbb{C}^\times) \subseteq \mathbb{C}^n$ wegzusammenhängend, somit zusammenhängend (G2c), sowie offen und dicht in \mathbb{C}^n (D5o).

Zusatz: Weg/Zusammenhang und Dichtheit gelten noch allgemeiner sogar für abzählbare Durchschnitte $X := \bigcap_{k=0}^\infty f_k^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ in \mathbb{C}^n .

Beweis: (1) Sei $u \neq v$ in X und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Mittelsenkrechte auf $[u, v]$. Es gibt überabzählbar viele Wege $\gamma = |u, z, v|$ von u über $z \in G$ nach v . Höchstens abzählbar viele davon treffen die Menge A .

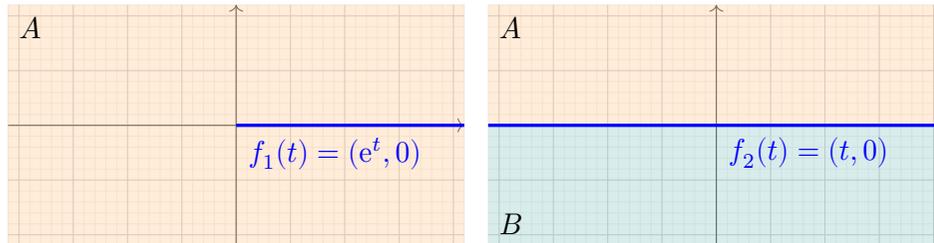
(2) Zu $u \neq v$ in X sei $g : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ die komplexe Gerade durch $g(0) = u$ und $g(1) = v$, also $g(z) = u + z(v - u)$. Die Polynomfunktion $h = f \circ g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(0) \neq 0 \neq h(1)$ hat nur endlich viele Nullstellen. Wie in (1) erhalten wir einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ von $\gamma(0) = 0$ nach $\gamma(1) = 1$ in $h^{-1}(\mathbb{C}^\times) \subseteq \mathbb{C}$. Somit läuft $g \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$ von u nach v in $f^{-1}(\mathbb{C}^\times) \subseteq \mathbb{C}^n$. QED

Beispiel: $GL_n \mathbb{C} = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ ist wegzusammenhängend.

☺ Der Teilraum $X := f^{-1}(\mathbb{C}^\times) \subseteq \mathbb{C}^n$ ist wegzusammenhängend, zudem lassen sich je zwei Punkte $u \neq v$ in X „fast gerade“ verbinden, durch einen Weg, der nur beliebig wenig vom Geradenstück abweicht.

⚠ Für reelle Polynome gilt die Aussage (2) nicht! So sind etwa die Nichtnullstellenmengen $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$ und $GL_n \mathbb{R} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ unzusammenhängend.

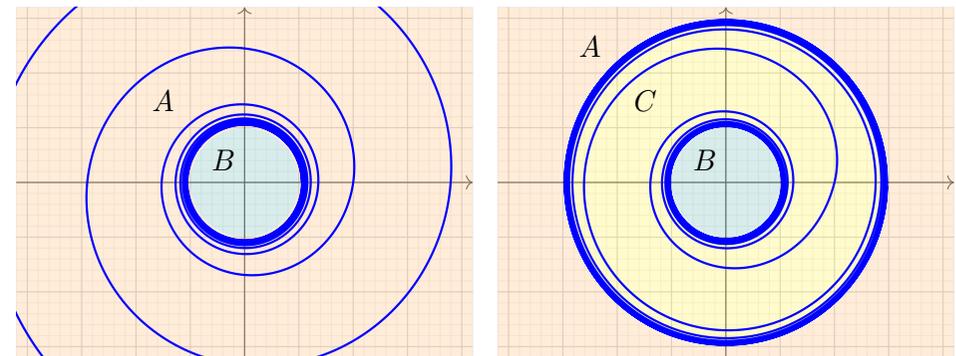
Gibt es eine Einbettung $f_k : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, deren Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus f_k(\mathbb{R})$ genau k Wegkomponenten hat? Für $k = 1, 2, 3, \dots$? unendlich? überabzählbar?



Beispiel: Die Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (e^t, 0)$ ist eine Einbettung. Sie trennt die Ebene \mathbb{R}^2 nicht: Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus f_1(\mathbb{R})$ ist sternförmig, hat also genau eine Wegkomponente: $\pi_0(X) = \{X\}$.

Beispiel: Die Standardeinbettung $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, 0)$ zerlegt \mathbb{R}^2 in zwei offene Halbebenen: $\pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus f_2(\mathbb{R})) = \{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}\}$ dank Zwischenwertsatz (C3A) für $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

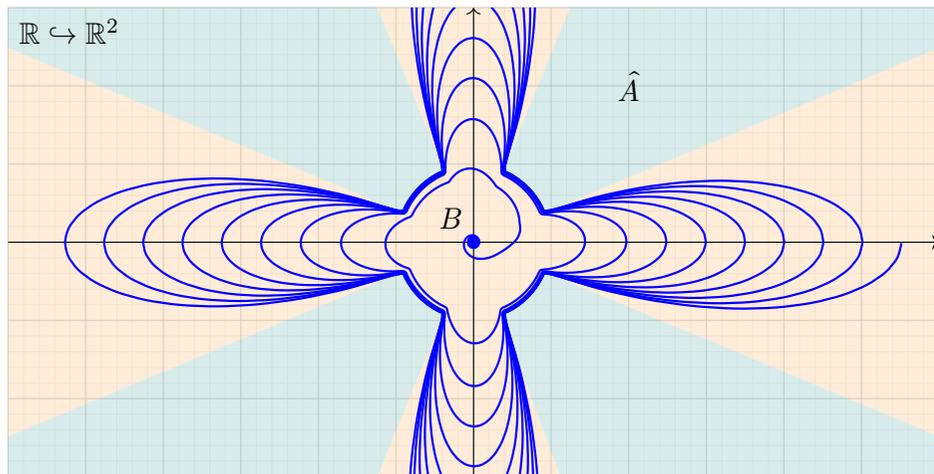
☝ Hier sind Komponenten gleich Wegkomponenten. Gilt dies immer? Die Fälle $k = 1, 2$ waren leicht. Gelingt $k = 3$? Oder ist das unmöglich?



Beispiel: Auch $f_2^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 + e^t)(\cos t, \sin t)$ ist eine Einbettung. Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus f_2^*(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, $\mathfrak{Z}(X) = \{X\}$, hat aber zwei Wegkomponenten: $\pi_0(X) = \{A, B\}$.

Beispiel: Auch $f_3(t) = [2 + t/(1 + |t|)] \cdot (\cos t, \sin t)$ ist eine Einbettung. Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus f_3(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, $\mathfrak{Z}(X) = \{X\}$, hat aber drei Wegkomponenten: $\pi_0(X) = \{A, B, C\}$.

☝ Geht noch mehr? Sogar unendlich? überabzählbar?



Versuchen Sie, eine geeignete Einbettung $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ auszuschreiben! Mathematisches Schaffen ist sowohl Handwerk als auch Kunst. Mathematik erfordert sowohl Kreativität als auch Präzision.

Beispiel / Übung G27: Cantors Karussell

Sei $g : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}_{>0}$ ein Homöomorphismus, etwa $g(t) = e^t$. Sei $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig mit Nullstellenmenge $N = h^{-1}(0)$, etwa N eine Cantor-Menge mit Abstandsfunktion $h(s) = d(s, N)$. Damit konstruieren wir die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times : t \mapsto \frac{1 + g(t)h(e^{it})}{1 + g(-t)} \cdot e^{it}.$$

Dies ist eine Einbettung. Sind zudem g, h glatt, so auch f . Das Komplement $X = \mathbb{C}^\times \setminus f(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, aber im Allgemeinen nicht wegzusammenhängend:

$$\pi_0(X) = \{B, \hat{A} \mid A \in \pi_0(N)\}$$

Die Menge $A \subseteq \mathcal{A}^\times$ hat den Schatten $\hat{A} := \mathbb{R}_{\geq 1} \cdot A = \{ta \mid t \geq 1, a \in A\}$.

☺ Wir können h so wählen, dass N beliebig viele Wegkomponenten hat, sogar überabzählbar viele sind möglich, wie bei der Cantor-Menge.

Definition G3A: lokaler Weg/Zusammenhang

(1) Ein Raum X heißt **lokal weg/zusammenhängend** im Punkt $a \in X$, wenn jede Umgebung U von a eine weg/zusammenhängende offene Umgebung V enthält. (2) Gilt diese Eigenschaft in jedem Punkt $a \in X$, so nennen wir den Raum X **lokal weg/zusammenhängend**.

Diese Festlegung der Begriffe besagt: (1) Im Raum X hat der Punkt a eine Umgebungsbasis bestehend aus weg/zshgden offenen Mengen. (2) Die Topologie hat eine Basis aus weg/zshgden offenen Mengen.

Erinnerung: Wegzshgd impliziert zshgd (G2c), und dies gilt auch lokal.

Beispiele: Der Raum \mathbb{R}^n ist lokal weg/zshgd, denn zu jedem $a \in \mathbb{R}^n$ ist der offene Ball $B(a, \varepsilon)$ sternförmig zu a , also weg/zshgd (G2B).

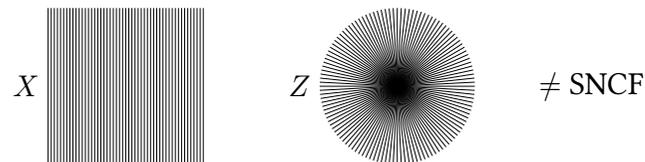
Ebenso ist jeder topologische \mathbb{R} -Vektorraum V lokal weg/zshgd (F6Q). Ist X lokal weg/zshgd, so auch jeder offene Teilraum $U \subseteq X$.

Der Raum \mathbb{Q} ist weder weg/zshgd noch lokal weg/zshgd.

Lokaler und globaler Weg/Zusammenhang sind unabhängig:

In \mathbb{R} sind die Teilräume $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$ und $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ zwar nicht weg/zshgd, doch immerhin lokal weg/zshgd.

Die Sinuskurve des Topologen $C = A \cup B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht lokal. Lokaler Weg/Zshg gilt nur in $a \in A$, nicht in $b \in B$.



Der **rationale Kamm** $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ in \mathbb{R}^2 ist weg/zshgd, aber nicht lokal; lokaler Weg/Zshg gilt nur in $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

Der **rationale Stern** $Z = \{r e^{2\pi i t} \mid r \in \mathbb{R}_{>0}, t \in \mathbb{Q}\}$ in \mathbb{R}^2 ist weg/zshgd, aber nicht lokal zshgd. Lokaler Weg/Zshg gilt nur im Nullpunkt.

Die Menge \mathbb{R}^n mit der französischen Eisenbahnmetrik ist weg/zshgd und auch lokal weg/zshgd, im Gegensatz zum vorigen Beispiel Z .

Jeden topologischen Raum X zerlegen wir in seine Weg/Komponenten:

$$X = \bigsqcup \mathfrak{Z}(X) \quad \text{und} \quad X = \bigsqcup \pi_0(X)$$

Die Komponenten sind abgeschlossen (G1k) aber i.A. nicht offen, siehe Q. Ist die Zerlegung $\mathfrak{Z}(X)$ endlich / lokal-endlich, dann ist jede Komponente offen (G1k), und $X = \bigsqcup \mathfrak{Z}(X)$ ist eine topologische Summe.

Die Wegkomponenten sind i.A. weder offen noch abgeschlossen, selbst wenn die Zerlegung endlich ist (Sinuskurve des Topologen G2t).

Satz G3c: offene Zerlegung in Weg/Komponenten

(1) Ist X lokal zusammenhängend, so ist jede Komponente offen (D3c), also die Zerlegung $X = \bigsqcup \mathfrak{Z}(X)$ offen, somit eine topologische Summe.

(2) Ist X lokal wegzusammenhängend, so ist die Zerlegung $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ offen, also eine topologische Summe. Daraus folgt $\pi_0(X) = \mathfrak{Z}(X)$.

Dies gilt für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, oder allgemein für jeden lokal euklidischen Raum X , insbesondere für jede Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand).

Beispiel: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. In $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist $GL_n \mathbb{K}$ offen, also lokal wegzshgd. Komponenten und Wegkomponenten von $GL_n \mathbb{K}$ stimmen also überein:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(GL_n \mathbb{R}) &= \pi_0(GL_n \mathbb{R}) = \{GL_n^+ \mathbb{R}, GL_n^- \mathbb{R}\}, \\ \mathfrak{Z}(GL_n \mathbb{C}) &= \pi_0(GL_n \mathbb{C}) = \{GL_n \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Eine offene Zerlegung $X = \bigsqcup \mathfrak{Z}(X)$ bzw. $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ ist sehr nützlich, da wir uns auf weg/zshgde Teilräume in X konzentrieren können.

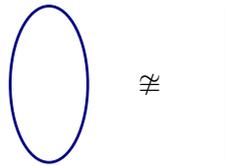
Diese haben einen gebührenden traditionellen Namen:

Definition G3D: Gebiet = offen und zusammenhängend

Sei X ein topologischer Raum, etwa $X = \mathbb{R}^n$ oder eine Mannigfaltigkeit. Ein **Gebiet** U im Raum X ist eine offene zusammenhängende Menge.

☺ Gemäß dieser Vereinbarung ist ein Gebiet U insbesondere niemals leer. Das ist für viele Anwendungen sehr willkommen, da sie \emptyset ausschließen.

Ist X lokal wegzshgd, etwa $X = \mathbb{R}^n$ oder eine Mannigfaltigkeit, so ist jedes Gebiet U nicht nur zshgd, sondern auch wegzshgd.



Der **globale Trennungsgrad** des Punktes a im Raum X ist

$$\text{Deg}_X(a) := \#\mathcal{Z}(\langle a \rangle_X \setminus \{a\}).$$

Beispiele: In \mathbb{R} gilt $\text{Deg}(a) = 2$ für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}$.

In $[0, 1]$ gilt $\text{Deg}(0) = \text{Deg}(1) = 1$, aber $\text{Deg}(a) = 2$ für $0 < a < 1$.

In \mathbb{S}^1 gilt $\text{Deg}(a) = 1$ für jeden Punkt $a \in \mathbb{S}^1$. Somit gilt $\mathbb{S}^1 \not\cong [0, 1]$.

Wir definieren hier $\text{Deg}_X^{\mathbb{Z}}$ durch die Anzahl der *Komponenten*.

Entsprechend definieren wir $\text{Deg}_X^{\pi_0}$ durch *Wegkomponenten*.

Für gutartige Räume stimmen beide Sichtweisen überein.

Buchstabensuppe: Klassifizieren Sie alle 26 lateinischen Großbuchstaben.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

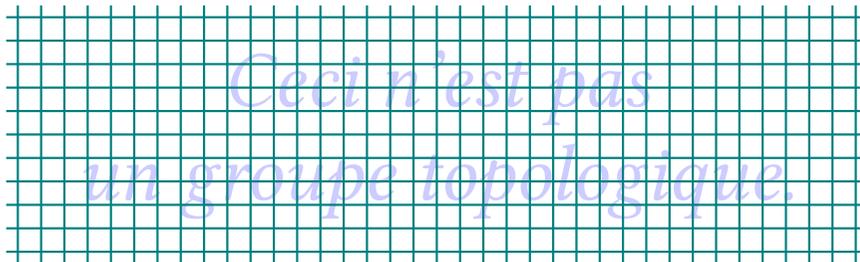
Buchstaben betrachten wir als kompakte Teilräume der Ebene: Nennen Sie Homöomorphieklassen und Invarianten in folgenden Situationen:

- 1 Jeder Buchstabe sei ideal dünn. *Hinweis:* Zusammenhang.
- 2 Jeder Buchstabe sei realistisch dick. *Hinweis:* Flächenklassifikation.
- 3 Welche Klassen ergeben sich bezüglich Homotopie-Äquivalenz?

Hinweis: Die Euler-Charakteristik ist homotopie-invariant.

Sie erledigen diese Klassifikation sehr erfolgreich und treffsicher seit Sie zu lesen lernten. Während Sie diese Zeilen lesen, vollführt Ihr Gehirn eine überaus effiziente Mustererkennung... Das ist erstaunlich robust und funktioniert selbst dann noch, wenn sich der Zeichensatz ändert.

(1) Aus topologischer Sicht können Sie bei dieser Aufgabe sowohl Ihre Anschauung üben, als auch präzise Argumente zum Zusammenhang. Zunächst bilden Sie Klassen und prüfen, dass die Buchstaben einer Klasse tatsächlich homöomorph sind. Umgekehrt sollen Buchstaben aus unterschiedlichen Klassen nicht homöomorph sein: Hierzu benötigen Sie geeignete topologische Invarianten, etwa Zusammenhangseigenschaften.



Sei \mathcal{B} eine UBasis von a in X , und für jedes Paar $U \subseteq V$ in \mathcal{B} gelte:

Die Inklusion $\iota_U^V : U \hookrightarrow V$ induziert eine Bijektion der Komponenten.

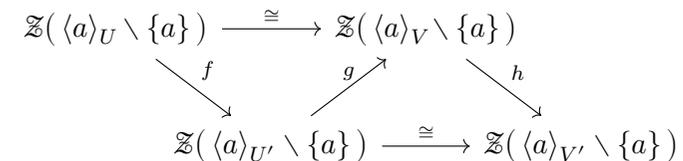
$$\mathcal{Z}(\iota) : \mathcal{Z}(\langle a \rangle_U \setminus \{a\}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{Z}(\langle a \rangle_V \setminus \{a\})$$

Dann ist diese Kardinalität der **lokale Trennungsgrad** von a in X :

$$\text{deg}_X(a) := \#\mathcal{Z}(\langle a \rangle_U \setminus \{a\}) \quad \text{wobei } U \in \mathcal{B}$$

Beispiel: In $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$ gilt $\text{deg}(a) = 4$ für $a \in \mathbb{Z}^2$, sonst $\text{deg}(a) = 2$.

In $\mathbb{R} \subset \widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{S}^1$ gilt $\text{deg}(\infty) = 2$. In $\mathbb{R}^2 \subset \widehat{\mathbb{R}^2} \cong \mathbb{S}^n$ gilt $\text{deg}(\infty) = 1$.



Aufgabe: Warum ist der lokale Grad wohldefiniert? **Lösung:** Für je zwei Umgebungsbasen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ von a in X mit der geforderten Eigenschaft gilt: Zu $V' \in \mathcal{B}'$ existiert $V \in \mathcal{B}$ mit $V \subseteq V'$, sodann $U' \in \mathcal{B}'$ mit $U' \subseteq V$ und schließlich $U \in \mathcal{B}$ mit $U \subseteq U'$. Die zugehörigen Inklusionen induzieren das oben gezeigte kommutative Diagramm Die Abbildung g ist surjektiv, denn $g \circ f$ ist surjektiv. Die Abbildung g ist injektiv, denn $h \circ g$ ist injektiv. Daher ist g eine Bijektion, und somit auch f und h .

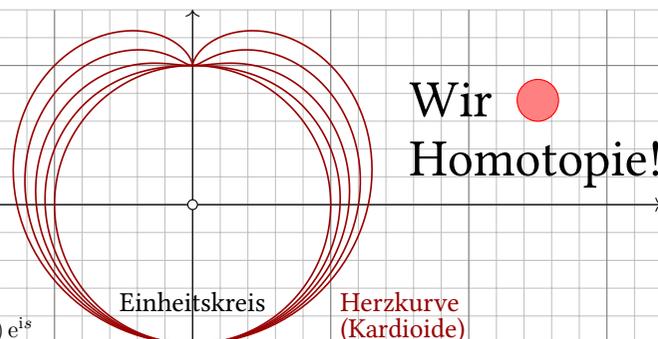
⚠ Die obige Definition des lokalen Trennungsgrades setzt voraus, dass sich dieser für hinreichend kleine Umgebungen nicht mehr ändert. Das muss jedoch nicht immer der Fall sein! Als beliebtes Gegenbeispiel betrachten wir in \mathbb{C} den **Hawaiianischen Ohrring** $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\mathbb{S}^1 - i)$.

Startraum $X = \mathbb{S}^1$
Zielraum $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Deformation zwischen
 $f, g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
von $f(e^{is}) = e^{is}$ zu
 $g(e^{is}) = i + (1 - \sin s) e^{is}$

Dies gelingt hier durch
die affine Homotopie

$H : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
 $H(t, e^{is}) = ti + (1 - t \sin s) e^{is}$



Definition G4A: Homotopie

(0) Eine **Homotopie** ist eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$.

Zu jedem Punkt $x \in X$ ist $H^x : [0, 1] \rightarrow Y : t \mapsto H(t, x)$ stetig, also ein Weg in Y vom Startpunkt $H(0, x)$ zum Zielpunkt $H(1, x)$.

Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ ist $H_t : X \rightarrow Y : x \mapsto H(t, x)$ stetig. Wir betrachten H als eine stetige Deformation von H_0 nach H_1 .

☺ Einfache Idee: Wir wollen f und g stetig ineinander deformieren.

Definition G4A: Homotopie und Zusammenziehung

(1) Seien $f, g : X \rightarrow Y$ stetig. Eine **Homotopie** $H : f \simeq g : X \rightarrow Y$ von f nach g in Y ist eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$, ausgeschrieben $H(0, x) = f(x)$ und $H(1, x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Wir nennen f, g **homotop** in Y , ausführlich $H : f \simeq g$, kurz $f \simeq g$.

(2) Im Fall $f \simeq g$ mit konstanter Abbildung $g = \text{const}_X^a : X \rightarrow \{a\} \subseteq Y$ heißt f **nullhomotop** oder **zusammenziehbar** in Y , geschrieben $f \simeq *$. Der Raum X heißt **zusammenziehbar**, falls $\text{id}_X \simeq *$ gilt, kurz $X \simeq *$: Es existiert $H : \text{id}_X \simeq \text{const}_X^a : X \rightarrow X$, also $H : [0, 1] \times X \rightarrow X$ stetig mit $H(0, x) = x$ und $H(1, x) = a$ für alle $x \in X$ und einen Punkt $a \in X$.

⚠ Der Zielraum Y , in dem sich die Homotopie bewegen darf und muss, ist wesentlicher Bestandteil der Definition und wird explizit benötigt.

Beispiel: In \mathbb{R} sind $f, g : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = -1$ und $g(0) = +1$ homotop, nicht jedoch ihre Einschränkungen $f, g : \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ im Raum $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beispiel G4B: affine Homotopie und Zusammenziehung

(1) Seien $f, g : X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig mit $[f(x), g(x)] \subseteq Y$ für alle $x \in X$. Dann gilt $H : f \simeq g$ dank affiner Homotopie $H(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$.

(2) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig zu a (F6F), zum Beispiel $X = \mathbb{R}^n$ zu $a = 0$. Dann ist X zusammenziehbar auf a vermöge $H(t, x) = (1 - t)x + ta$.

Daraus ergeben sich weitere nützliche Beispiele, siehe Satz G4L:

(3) Sei X zusammenziehbar vermöge $H : \text{id}_X \simeq \text{const}_X^a$, etwa wie in (2). Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ homotop zur konstanten Abbildung $g = \text{const}_Y^b : X \rightarrow \{b\} \subseteq Y$ vermöge $K : f \simeq g$ mit $K_t = f \circ H_t$.

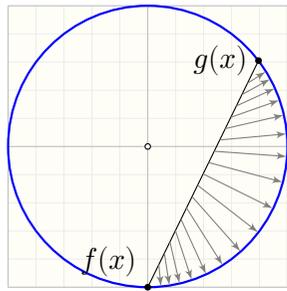
(4) Sei Y zusammenziehbar vermöge $H : \text{id}_Y \simeq \text{const}_Y^b$, etwa wie in (2). Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ homotop zur konstanten Abbildung $g = \text{const}_Y^b : X \rightarrow \{b\} \subseteq Y$ vermöge $K : f \simeq g$ mit $K_t = H_t \circ f$. Die Abbildung $K : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ ist jeweils wohldefiniert und stetig, als Komposition stetiger Abbildungen, und führt von $K_0 = f$ nach $K_1 = g$.

☹ Stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ gibt es meist unüberschaubar viele. Die meisten davon interessieren uns gar nicht weiter, und wenn doch, so genügt uns meist eine homotope Abbildung $g \simeq f$, die im Wesentlichen dasselbe für uns leistet, aber hoffentlich schöner und einfacher ist.

☺ Diese genial-einfache Idee vereinfacht vieles, indem sie stetige Abbildungen zu Homotopieklassen bündelt, siehe Definition G4H. Damit verschaffen wir uns einen sehr effizienten Überblick und extrahieren in vielen günstigen Fällen relevante Informationen.

☺ Die Räume \mathbb{R}^n und $\{0\}$ sind offensichtlich sehr verschieden, doch sie erweisen sich als homotopie-äquivalent, siehe Definition G4N. Die Sphären $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2, \dots$ hingegen sind nicht homotopie-äquivalent. Anschaulich umschließen sie Löcher verschiedener Dimension (J7A).

Vielleicht scheint Ihnen der Homotopie-Begriff anfangs kompliziert, doch das Gegenteil ist der Fall: Er vereinfacht und strukturiert. Fassen Sie also Mut und lernen Sie diese schöne Technik, wir werden sie häufig gewinnbringend nutzen.



Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig mit $d(f, g) < 2$. Das heißt, zu $x \in \mathbb{S}^n$ sind die Bildpunkte $f(x)$ und $g(x)$ in \mathbb{S}^n niemals antipodal.

Die Homotopie $K : (t, x) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x)$ verlässt die Sphäre, bleibt aber in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Wir komponieren K daher mit der radialen Retraktion $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n : y \mapsto y/|y|$.

Satz G4c: Nahe Abbildungen sind homotop.

Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig und nirgends antipodal, also $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt $H : f \simeq g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ vermöge der Homotopie

$$H : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{S}^n : (t, x) \mapsto \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|} \quad \text{„affin-retrahiert“}$$

Beweis: Der Nenner verschwindet nur für $t = 1/2$ und $f(x) = -g(x)$. Letzteres ist ausgeschlossen, also ist H wohldefiniert und stetig. Diese Homotopie H verläuft vom Start $H_0 = f$ zum Ziel $H_1 = g$. QED

Dieser genial-einfache Trick lässt sich wie folgt verallgemeinern, indem wir die benutzten Hilfsmittel nochmal genau anschauen:

Satz G4c: Nahe Abbildungen sind homotop.

Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ein euklidischer Umgebungsretrakt, das heißt, es existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\rho : U \rightarrow Y$ stetig mit $\rho|_Y = \text{id}_Y$.

(1) Ist der Zielraum Y kompakt, so existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $f, g : X \rightarrow Y$ stetig mit $d(f, g) < \varepsilon$ eine Homotopie $H : f \simeq g$ in Y existiert.

(2) Ist X kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $g : X \rightarrow Y$ stetig mit $d(f, g) < \varepsilon$ eine Homotopie $H : f \simeq g$ existiert.

Beweis: (1) Der Abstand $\varepsilon = d(Y, \mathbb{R}^n \setminus U)$ ist positiv dank Satz F2A. Aus $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ folgt $g(x) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$, also $[f(x), g(x)] \subseteq U$. Die affine Homotopie $K : [0, 1] \times X \rightarrow U : (t, x) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x)$ ist demnach wohldefiniert. Komponiert mit der Retraktion ρ erhalten wir die Homotopie $H = \rho \circ K : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$.
(2) Die Konstruktion gelingt ebenso, nun mit $\varepsilon = d(f(X), \mathbb{R}^n \setminus U)$. QED

Satz G4d: zusammenziehbare Abbildung in die Sphäre

Ist $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig und nicht surjektiv, $\exists a \in \mathbb{S}^n \setminus f(X)$, dann gilt $f \simeq *$.

Erster Beweis: Zu f und $g = \text{const}_{\bar{x}^a}$ nutzen wir Satz G4c. QED

Zweiter Beweis: Es gilt $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n \simeq *$ (A1L, G4B). QED

Die Konstruktion einer Homotopie erfordert meist geometrisches Verständnis und technisches Geschick. Ebenso schwierig kann der Nachweis sein, dass zwei Abbildungen nicht homotop sind.

Ausblick: In Kapitel J zeigen wir $\text{id}_{\mathbb{S}^n} \not\simeq *$. Satz J4A garantiert: Die Sphäre \mathbb{S}^n der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist nicht zusammenziehbar. (Dies folgt auch dank Homotopie-Invarianz der Euler-Charakteristik.)

Aufgabe: Zeigen Sie $\text{id}_{\mathbb{S}^0} \not\simeq *$, also den einfachsten Fall $n = 0$.

Lösung: Hier ist $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$. Jede stetige Abbildung $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{S}^0$ ist konstant auf $[0, 1] \times \{x\}$ für $x = \pm 1$, denn der Zielraum \mathbb{S}^0 ist diskret. Aus $H_0 = \text{id}_{\mathbb{S}^0}$ folgt $H_1 = \text{id}_{\mathbb{S}^0} \neq \text{const}$; somit ist H_1 nicht konstant.

😊 Die Sphären \mathbb{S}^n werden im Folgenden eine wichtige Rolle spielen, zunächst als einfache Werkstücke zum Lernen und Üben, dann als universelle Werkzeuge zur Untersuchung komplizierterer Räume.

So ist es auch mit den vorangegangenen Sätzen G4c und G4d: Sie sind zunächst schöne Illustrationen für den Begriff der Homotopie. Zugleich sind sie erste Hilfsmittel für Anwendungen der Homotopie, die wir immer wieder gut nutzen können und später ausbauen werden.

Die letzte Aufgabe lässt sich allgemein formulieren und beweisen, indem wir die benutzten Hilfsmittel nochmal genau anschauen:

Aufgabe: Jede Homotopie $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ in einen diskreten Raum Y ist konstant, erfüllt also $H(t, x) = H(0, x)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $x \in X$. Dazu genügt bereits, dass Y total weguzshgd ist, wie \mathbb{Q} .

Lösung: Für jeden Punkt $x \in X$ ist $[0, 1] \times \{x\}$ wegzusammenhängend. Im Zielraum gilt $\pi_0(Y) = \{\{y\} \mid y \in Y\}$. Also ist H auf $[0, 1] \times \{x\}$ konstant.

Für Homotopien definieren wir drei einfache, aber sehr nützliche Konstruktionen, wie zuvor bereits für Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ in G2F.

Definition G4H: Operationen auf Homotopien

(1) Zu jeder gegebenen stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ definieren wir ihre **konstante Homotopie** $H : f \simeq f$ durch $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y : (t, x) \mapsto f(x)$.

(2) Zu jeder Homotopie $H : f \simeq g$ definieren wir ihre **inverse Homotopie** $\bar{H} : g \simeq f$ durch $\bar{H} : [0, 1] \times X \rightarrow Y : (t, x) \mapsto H(1 - t, x)$.

(3) Zu je zwei verknüpfbaren Homotopien $H : f \simeq g$ und $K : g \simeq h$ definieren wir ihre **Aneinanderhängung** $H * K : f \simeq h$ durch Verkleben:

$$H * K : [0, 1] \times X \rightarrow Y : (t, x) \mapsto \begin{cases} H(2t, x) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(2t - 1, x) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

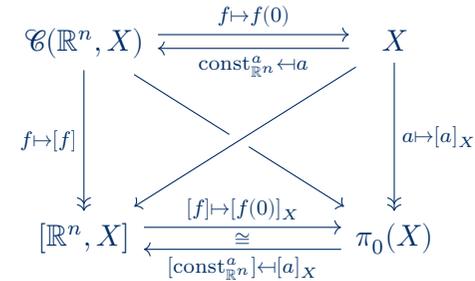
Diese Abbildung ist wohldefiniert wegen $H_1 = K_0 = g$ und stetig dank Verklebesatz (E1P), denn die beiden Mengen $[0, 1/2] \times X$ und $[1/2, 1] \times X$ sind abgeschlossen im Definitionsbereich $[0, 1] \times X$.

Definition G4H: Homotopieklassse einer stetigen Abbildung

Dank der Konstruktionen (1-3) ist Homotopie eine Äquivalenzrelation, geschrieben \simeq , auf der Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ stetiger Abbildungen $f : X \rightarrow Y$. Die Quotientenmenge aller Homotopieklassen $[f]$ bezeichnen wir mit

$$[X, Y] := \mathcal{C}(X, Y) / \simeq = \{ [f] \mid f : X \rightarrow Y \text{ stetig} \}.$$

Beispiele: Es gilt $[X, \mathbb{R}^n] = \{[0]\}$ dank $H : 0 \simeq f$ vermöge $H(t, x) = tf(x)$. Wir haben $[\mathbb{R}^n, X] \cong \pi_0(X)$ vermöge $[f] \mapsto [f(0)]_X$ und $[\text{const}_{\mathbb{R}^n}^a] \mapsto [a]_X$.



Erinnerung: Bislang arbeiten wir in der Kategorie Top (D2B): Ihre Objekte sind alle topologischen Räume X, Y, Z, \dots

Für je zwei topologische Räume X und Y besteht die betrachtete Morphismenmenge $\mathcal{C}(X, Y)$ aus allen stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$.

Die hier verwendete Komposition $\circ : \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ ist die für Abbildungen übliche Hintereinanderausführung $g \circ f$.

Wir fassen nun stetige Abbildungen zu Homotopieklassen zusammen.

😊 Mit diesen Homotopieklassen können wir genauso gut rechnen!

Satz G4L: Konstruktion der Homotopiekategorie hTop

(0) Aus Homotopien $F : f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow Y$ und $G : g_0 \simeq g_1 : Y \rightarrow Z$ erhalten wir die Homotopie $H : g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 : X \rightarrow Z$ mit $H_t = G_t \circ F_t$.

(1) So definieren wir die Quotientenkategorie $\text{hTop} = \text{Top}/\text{Homotopie}$: Objekte sind alle topologischen Räume X, Y, Z, \dots (dieselben wie in Top). Morphismen sind Homotopieklassen $[f : X \rightarrow Y]$ stetiger Abbildungen. Die Komposition $[g : Y \rightarrow Z] \circ [f : X \rightarrow Y] = [g \circ f]$ ist wohldefiniert.

Sie haben in dieser Vorlesung schon einige Kategorien gesehen, noch viele mehr in den anderen Vorlesungen Ihres Mathestudiums. Bisher war jede ein einzelnes Beispiel, doch so langsam werden Sie ungeduldig und wollen endlich wissen, was Kategorien allgemein sind.

Sehr gut! Dann sind Sie bereit für die nächste Stufe der Erkenntnis... und der Abstraktion. Die Einführung mathematischer Begriffe ist allseits delikat und erfahrungsgemäß nicht leicht, insbesondere wenn ich damit Fragen beantworte, die Sie sich noch gar nicht gestellt haben.

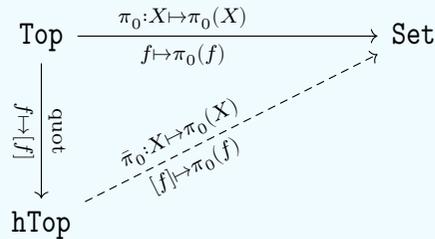
Mein perfider Plan ist der folgende: Wir nutzen Kategorien ja sowieso überall, also spreche ich vorausahnend davon, bis Sie gar nicht mehr anders können, als Ihrer unstillbaren Neugier endlich Bahn zu brechen. Naja, es ist wie gesagt ein Plan. Manchmal gelingt er tatsächlich.

Kurzum, Sie kennen nun genug konkrete Beispiele von Kategorien und im folgenden Kapitel H werden wir diesem Begriff auf den Grund gehen. Vielleicht ist Ihnen das alles egal und Sie spüren keine Neugier mehr, sondern nur noch fremdbestimmtes Pauken. Das fände ich schade.

☺ Homotope Abbildungen $f \simeq g$ bilden Wegkomponenten gleich ab:

Satz G4M: Der Funktor $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ ist homotopie-invariant.

Homotopie $H : f \simeq g : X \rightarrow Y$ impliziert $\pi_0(f) = \pi_0(g) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$.



Somit ist $[X, Y] \rightarrow \text{Abb}(\pi_0(X), \pi_0(Y)) : [f] \mapsto \pi_0(f)$ wohldefiniert.
Der Funktor $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ induziert so den Funktor $\bar{\pi}_0 : \text{hTop} \rightarrow \text{Set}$.

Beweis: (0) Für $a \in X$ ist $t \mapsto H(t, a)$ ein Weg in Y von $f(a)$ nach $g(a)$.
(1) Demnach gilt $\pi_0(f)([a]_X) \stackrel{\text{Def}}{=} [f(a)]_Y \stackrel{\text{hom}}{=} [g(a)]_Y \stackrel{\text{Def}}{=} \pi_0(g)([a]_X)$. QED

Beispiel: Für $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ gilt $\pi_0(X) = \{A < B < C < D\}$ mit den Wegkomponenten $A =]-\infty, -1[, B =]-1, 0[, C =]0, 1[, D =]1, \infty[$.
Für $Y = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ gilt $\pi_0(Y) = \{A < E < D\}$ mit $E =]-1, 1[$.

Für $f : X \rightarrow Y : x \mapsto |x|$ gilt $\pi_0(f) : A \mapsto D, B \mapsto E, C \mapsto E, D \mapsto D$.
Für $g : X \rightarrow Y : x \mapsto x^2$ gilt $\pi_0(g) : A \mapsto D, B \mapsto E, C \mapsto E, D \mapsto D$.
Es gilt $H : f \simeq g$ dank affiner Homotopie $H(t, x) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

☺ Hier sind $f, g : X \rightarrow Y$ homotop gdw $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. Allgemein gilt:

Satz G4s: Wann genügt π_0 zur Homotopie-Klassifikation?

Die Räume $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ und $Y = \bigsqcup \pi_0(Y)$ seien topologische Summen.

- (1) Dank UAE gilt $\mathcal{C}(X, Y) = \prod_{A \in \pi_0(X)} \prod_{B \in \pi_0(Y)} \mathcal{C}(A, B)$.
Modulo Homotopie folgt $[X, Y] = \prod_{A \in \pi_0(X)} \prod_{B \in \pi_0(Y)} [A, B]$.
- (2) Gilt $[A, B] = \{*\}$ für alle $A \in \pi_0(X)$ und $B \in \pi_0(Y)$,
dann ist $[X, Y] \rightarrow \text{Abb}(\pi_0(X), \pi_0(Y)) : [f] \mapsto \pi_0(f)$ bijektiv.

☺ Letzteres gilt dank G4B insbesondere falls $A \simeq *$ für alle $A \in \pi_0(X)$ oder falls $B \simeq *$ für alle $B \in \pi_0(Y)$ gilt, wie in unserem obigen Beispiel.

Erinnerung: Ein **Homöomorphismus** $(f, g) : X \cong Y$ besteht aus stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$.

Die beiden Räume X und Y sind so gesehen **topologisch gleich**:
Die Abbildungen leisten eine (topologisch) verlustfreie Übersetzung.
Dies ist eine sehr starke und oft zu starre Forderung. Die punktierte Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Kreislinie \mathbb{S}^1 sind **topologisch ähnlich**:

Definition G4N: Homotopie-Äquivalenz

Eine **Homotopie-Äquivalenz** $(H, K) : (f, g) : X \simeq Y$ besteht aus stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ mit Homotopien $H : g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $K : f \circ g \simeq \text{id}_Y$, das heißt, f und g sind zueinander **homotopie-invers**.
Meist schreibt man nur kurz $(f, g) : X \simeq Y$, wenn die Homotopien (H, K) aus dem Kontext klar sind oder ihre explizite Nennung unterdrückt wird.
Abkürzend nennen wir allein $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopie-Äquivalenz, wenn hierzu $g : Y \rightarrow X$ stetig existiert mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$.
Wir nennen X und Y dann **homotopie-äquivalent**, geschrieben $X \simeq Y$.

Beispiel G4o: Es gilt $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{C}^\times$, aber $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^\times$.

Für $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \text{GL}_1 \mathbb{C}$ und $\mathbb{S}^1 = \text{GU}_1 \mathbb{C}$ gilt $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{C}^\times$, aber $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^\times$.

- (1) $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{C}^\times$: Je zwei Punkte $a \neq b$ trennen \mathbb{S}^1 , nicht jedoch \mathbb{C}^\times .
Eine weitere topologische Invariante: \mathbb{S}^1 ist kompakt, \mathbb{C}^\times nicht.
- (2) $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^\times$: Inklusion $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times : z \mapsto z$ und radiale Retraktion $g : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{S}^1 : z \mapsto z/|z|$ erfüllen $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $f \circ g : z \mapsto z/|z|$, somit $H : f \circ g \simeq \text{id}_{\mathbb{C}^\times}$ vermöge $H : [0, 1] \times \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times : (t, z) \mapsto tz + (1-t)z/|z|$.

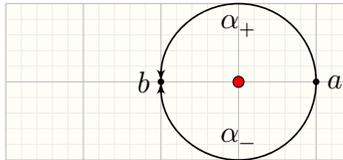
Bemerkung: Für alle stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ gilt:

$$(f, g) : X \cong Y \iff (f, g) : X \simeq Y \iff (\pi_0(f), \pi_0(g)) : \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$$

Dies vergrößert und vereinfacht. Die Umkehrungen gelten nicht!

Es gilt $\mathbb{R}^1 \not\cong \mathbb{R}^2$ (G2D), aber $\mathbb{R}^1 \simeq \mathbb{R}^2 \simeq *$ (G4B). Es gilt $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{S}^2$, etwa dank Homotopie-Invarianz der Euler-Charakteristik $\chi(\mathbb{S}^1) = 0 \neq 2 \neq \chi(\mathbb{S}^2)$, dennoch $(\pi_0(f), \pi_0(g)) : \pi_0(\mathbb{S}^1) \cong \pi_0(\mathbb{S}^2)$ für jedes Paar $(f, g) : \mathbb{S}^1 \rightleftarrows \mathbb{S}^2$.

Wir verfeinern den Homotopie-Begriff für Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, indem wir verlangen, dass sich die Punkte in $A \subseteq X$ nicht bewegen:



$X = [0, 1], Y = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
 $\alpha_\pm : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times : t \mapsto e^{\pm\pi it}$.
 Im Raum Y gilt $\alpha_- \simeq \alpha_+$ aber
 nicht $\alpha_- \simeq \alpha_+$ relativ $A = \{0, 1\}$.

Definition G5A: Homotopie relativ zu einem Teilraum

Eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ heißt **Homotopie relativ zum Teilraum** $A \subseteq X$, wenn $H(t, a) = H(0, a)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $a \in A$ gilt.

Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ mit $f|_A = g|_A$ heißen **homotop relativ A** , wenn es eine Homotopie $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ relativ A gibt von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$, geschrieben $H : f \simeq g : X \rightarrow Y \text{ rel } A$.

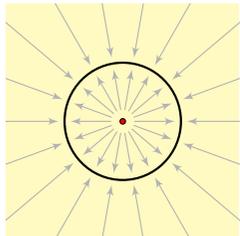
Im Spezialfall $A = \emptyset$ erhalten wir die übliche (absolute) Homotopie. Wie im absoluten Fall ist Homotopie relativ A eine Äquivalenzrelation.

Eine Homotopie $H : f \simeq g : X \rightarrow Y$ ist eine stetige Deformation von der Abbildung $H_0 = f : X \rightarrow Y$ zu der Abbildung $H_1 = g : X \rightarrow Y$. Relativ $A \subseteq X$ verlangen wir, dass Punkte $x \in A$ nicht bewegt werden, das heißt $f(x) = H(t, x) = g(x)$ für alle $t \in [0, 1]$. Damit kontrollieren wir Homotopien genauer und erhalten schärfere Begriffe und Methoden.

Bemerkung: Die Frage nach einer Homotopie $H : f \simeq g \text{ rel } A$ ist ein Problem der stetigen Fortsetzung, vergleiche den Satz E5N von Tietze.

Das skizzierte Beispiel zeigt zwei Wege $\alpha_\pm : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit gleichem Startpunkt $+1$ und gleichem Zielpunkt -1 . Wir fragen nach Homotopie bei festgehaltenen Endpunkten. Physikalisch denken wir an zwei Seile, die an ihren Enden ± 1 fixiert sind. Anschaulich scheint plausibel, dass eine solche Homotopie von α_+ nach α_- wohl nicht möglich ist. Das gilt tatsächlich und wird uns noch viel nützen. Der Nachweis ist erstaunlich knifflig und wird uns in Kapitel J mit der Umlaufzahl gelingen.

Übung: Wenn Sie die Umlaufzahl schon aus der (reellen / komplexen) Analysis kennen, dann können Sie hier sofort $\alpha_+ \not\simeq \alpha_- \text{ rel } A$ zeigen.



Beispiel: Die Kreislinie $A = \mathbb{S}^1$ ist ein Retrakt in $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dank Inklusion $\iota : A \hookrightarrow X$ und radialer Retraktion $\rho : X \rightarrow A : x \mapsto x/|x|$, denn $\rho \circ \iota = \text{id}_A$. Zwar gilt $\iota \circ \rho \neq \text{id}_X$, doch immerhin $H : \iota \circ \rho \simeq \text{id}_X$ dank $H : [0, 1] \times X \rightarrow X : (t, x) \mapsto (1-t)x + tx/|x|$. Die Punkte $a \in A$ werden dabei nicht bewegt.

Definition G5c: Retrakt und Deformationsretrakt

Seien $\iota : A \rightarrow X$ und $\rho : X \rightarrow A$ stetig. Das Paar $(\iota, \rho) : A \rightleftarrows X$ heißt...

Bezeichnung für (ι, ρ)	Bedingung an $\rho \circ \iota$	Bedingung an $\iota \circ \rho$
Retrakt	$\rho \circ \iota = \text{id}_A$	—
schwacher Retrakt	$\rho \circ \iota \simeq \text{id}_A$	—
Homöomorphismus	$\rho \circ \iota = \text{id}_A$	$\iota \circ \rho = \text{id}_X$
Homotopie-Äquivalenz	$\rho \circ \iota \simeq \text{id}_A$	$\iota \circ \rho \simeq \text{id}_X$
Deformationsretrakt	$\rho \circ \iota = \text{id}_A$	$\iota \circ \rho \simeq \text{id}_X$
starker Deformationsretrakt	$\rho \circ \iota = \text{id}_A$	$\iota \circ \rho \simeq \text{id}_X \text{ rel } \iota(A)$

Beispiele: In jedem Raum X ist jeder einpunktige Teilraum $A = \{a\} \subseteq X$ ein Retrakt vermöge $\iota : \{a\} \hookrightarrow X$ und $\rho : X \rightarrow \{a\}$, und ein Deformationsretrakt gdw X zusammenziehbar ist (G5E).

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig zum Zentrum a , so ist $\iota : \{a\} \hookrightarrow X$ ein starker Deformationsretrakt dank $H : \text{id}_X \simeq \rho \circ \iota$ mit $H(t, x) = (1-t)x + ta$.

Satz G5D:

Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist ein Retrakt vermöge $\rho(x) = x/|x|$, sogar ein starker Deformationsretrakt dank $H : \iota \circ \rho \simeq \text{id} \text{ rel } \mathbb{S}^n$ (affin). Der Ball $\mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Retrakt vermöge $\rho(x) = x/|x|$ für $|x| \geq 1$, sogar ein starker Deformationsretrakt dank $H : \iota \circ \rho \simeq \text{id} \text{ rel } \mathbb{D}^n$ (affin).

Auch negative Resultate sind interessant, doch meist schwieriger: Wir benötigen hierzu explizite Hindernisse, typischerweise Invarianten.

Es existiert keine Retraktion $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ oder $\rho : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ (J4E).
 Übung: Für $n = 1$ zeigen Sie dies mit dem Zwischenwertsatz (C3A).

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$. Gegeben sei eine Basis $a_1, \dots, a_n \in V$. Das **Gram-Schmidt-Verfahren** konstruiert hieraus eine Orthonormalbasis $q_1, \dots, q_n \in V$. Ausführlich:

$$\begin{aligned} b_1 &:= a_1, & q_1 &:= b_1/|b_1|, \\ b_2 &:= a_2 - q_1 \langle q_1 | a_2 \rangle, & q_2 &:= b_2/|b_2|, \\ b_3 &:= a_3 - q_2 \langle q_2 | a_3 \rangle - q_1 \langle q_1 | a_3 \rangle, & q_3 &:= b_3/|b_3|, \\ &\vdots & &\vdots \\ b_n &:= a_n - \sum_{k=1}^{n-1} q_k \langle q_k | a_n \rangle, & q_n &:= b_n/|b_n|. \end{aligned}$$

Aus $A = (a_1, \dots, a_n) \in GL_n \mathbb{K}$ gewinnen wir so $Q = (q_1, \dots, q_n) \in GU_n \mathbb{K}$. Dabei gilt $Q = AT$ und $A = QR$ mit oberen Dreiecksmatrizen $R = T^{-1}$.

$$T, R \in B_n^+ \mathbb{K} := \begin{bmatrix} \mathbb{R}_{>0} & \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & \ddots & \mathbb{K} \\ 0 & 0 & \mathbb{R}_{>0} \end{bmatrix} \quad \text{konvex!}$$

Schreiben Sie diese **QR-Zerlegung** $g : A \mapsto (Q, R)$ für $n \leq 3$ explizit aus!

Die allgegenwärtigen Matrixgruppen fordern und fördern die Vernetzung verschiedener Themen in Ihrem umfassenden Mathematikstudium.

Den Gauß-Algorithmus und das Gram-Schmidt-Verfahren kennen und lieben Sie aus der Linearen Algebra. Diese Methoden spielen dort eine zentrale Rolle, sowohl für konkrete Rechnungen in Beispielen und Anwendungen als auch für den Aufbau der Theorie.

Ihre Bedeutung geht jedoch weit darüber hinaus: Diese Methoden und ihre Weiterentwicklungen sind wichtig für die gesamte Mathematik.

Die Numerik untersucht und entwickelt sie unter numerischen Aspekten wie algorithmische Komplexität und Stabilität unter Störungen.

In der Topologie betrachten wir sie unter topologischen Aspekten, sie konstruieren Homöomorphismen und Homotopie-Äquivalenzen.

In Algebra und Analysis und Geometrie sind die klassischen Gruppen, allgemein Lie-Gruppen, zentrale Untersuchungsgegenstände und auch Werkzeuge. Sie sind ein reicher Quell an Beispielen und inspirierenden Fragen, von konkret-kompliziert bis abstrakt-elegant.

Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert Retraktionen $\rho : GL_n \mathbb{K} \rightarrow GU_n \mathbb{K}$ sogar starke Deformationsretraktionen. Ausführlich erhalten wir:

Beispiel / Übung G5g: Gram-Schmidt als Deformationsretraktion

(1) Wir erhalten den Homöomorphismus $(h, g) : GO_n \mathbb{R} \times B_n^+ \mathbb{R} \cong GL_n \mathbb{R}$ aus Multiplikation $h : (Q, R) \mapsto QR$ und QR-Zerlegung $g : A \mapsto (Q, R)$. Unsere expliziten Formeln für h und g zeigen jeweils die Stetigkeit.

(2) Die Gruppe $B_n^+ \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ ist konvex, $B_n^+ \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^m$ mit $m = n(n+1)/2$.

Hierin ist die Untergruppe $\{1\} \subseteq B_n^+ \mathbb{R}$ ein starker Deformationsretrakt, somit auch $GO_n \mathbb{R} \subseteq GL_n \mathbb{R}$ und $SO_n \mathbb{R} \subseteq GL_n^+ \mathbb{R}$. Speziell für $n = 2$ folgt $GL_2^+ \mathbb{R} \simeq SO_2 \mathbb{R} \cong S^1$ und $GL_2 \mathbb{R} \simeq GO_2 \mathbb{R} \cong S^1 \sqcup S^1$ (dank Satz F1q).

Aus $\pi_0 GL_n \mathbb{R} = \{GL_n^\pm \mathbb{R}\}$ folgt $\pi_0 GO_n \mathbb{R} = \{SO_n \mathbb{R} = GO_n^+ \mathbb{R}, GO_n^- \mathbb{R}\}$.

(3) Ebenso ist $GU_n \mathbb{C} \subseteq GL_n \mathbb{C}$ ein starker Deformationsretrakt. Die Gruppe $GL_n \mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend, also auch $GU_n \mathbb{C}$. Speziell für $n = 1$ finden wir erneut $GU_1 \mathbb{C} = S^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^\times = GL_1 \mathbb{C}$.

😊 Wie anfangs versprochen, Homotopie vereinfacht und strukturiert! Wir wenden dies auf die wunderschönen klassischen Gruppen an, die Sie bereits seit der Linearen Algebra kennen, nutzen und lieben. Das sind ehrliche und wichtige Beispiele, sie lohnen jede Mühe.

Die Gruppen $GO_n \mathbb{R} \subseteq GL_n \mathbb{R}$ sind recht verschieden: Die orthogonale Gruppe $GO_n \mathbb{R}$ ist kompakt, die allgemeine lineare Gruppe $GL_n \mathbb{R}$ nicht. Zudem sind beides Mannigfaltigkeiten – verschiedener Dimension! Dasselbe gilt für die Gruppen $GU_n \mathbb{C} \subseteq GL_n \mathbb{C}$ über dem Körper \mathbb{C} .

Wenn wir jedoch stetige Deformationen erlauben, diese Räume also nur bis auf Homotopie-Äquivalenz betrachten, so wird alles viel einfacher und wesentlich übersichtlicher: Wie oben erklärt gilt $GO_n \mathbb{R} \simeq GL_n \mathbb{R}$ und $GU_n \mathbb{C} \simeq GL_n \mathbb{C}$, sogar als starke Deformationsretrakte.

Liebend gerne würde ich Ihnen dies in eindrücklichen Bildern vorführen. Für $GU_1 \mathbb{C} = S^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^\times = GL_1 \mathbb{C}$ gelingt dies wunderbar, doch danach ist unsere leider nur dreidimensionale Anschauung völlig unzureichend. Wo die Anschauung versagt, helfen präzise Begriffe und Techniken.