Kapitel F

Kompaktheit

Habe nun, ach! Philosophie, // Juristerei und Medizin,
Und leider auch Topologie // Durchaus studiert, mit heißem Bemühn.
Da steh' ich nun, ich armer Tor, // Und bin so klug als wie zuvor!

Nun sag, wie hast du's mit dem Auswahlaxiom?
Du bist ein herzlich guter Mann,
allein ich glaub, du hältst nicht viel davon.

frei nach Goethe (1749–1832), *Faust*, zur Gretchen-Frage ob
der Kompaktheitssatz von Tychonoff zur Topologie zählt oder zur Theologie

Inhalt dieses Kapitels F

Kompakt heißt topologisch endlich.

Jede **endliche Menge** X erfreut sich folgender Eigenschaften:

(1) Jede Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ enthält eine endliche Teilüberdeckung: Es existieren Indizes $i_1,\dots,i_n \in I$, sodass $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ gilt.

(2) Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ in X nimmt einen Wert $a \in X$ unendlich oft an: Es existieren Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, sodass $x_{n_0} = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = a$.

(3) Jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihre Extrema an: Es existieren $a, b \in X$, sodass $f(a) \le f(x) \le f(b)$ für alle $x \in X$ gilt.

Für unendliche Mengen gilt dies nicht! Für einen topologischen Raum X leistet Kompaktheit die Übertragung dieser Endlichkeitseigenschaften:

(1) **Kompaktheit:** Jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, also $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$

(2) **Folgenkompaktheit:** Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ im Raum X enthält eine konvergente Teilfolge, also $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ mit $x_{n_k} \to a$.

(3) **Pseudokompaktheit:** Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihre Extrema an, also $f(a) \le f(x) \le f(b)$ für alle $x \in X$.

Kompakt heißt topologisch endlich.

Kompakte topologische Räume

F101

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $U_i \subset X$ heißt **Überdeckung** von X, falls $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt. Sie heißt **offen**, falls jede Menge U_i offen in X ist, also $U_i \in \mathcal{T}$. Sie heißt **abzählbar**, wenn I abzählbar ist, und **endlich**, wenn I endlich ist. Eine **Teilüberdeckung** von $(U_i)_{i\in I}$ ist eine Teilfamilie $(U_i)_{i\in J}$ mit $J \subset I$ und weiterhin $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Definition F1A: Kompaktheit / Überdeckungseigenschaft

Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält:

Zu jeder Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen $U_i \in \mathcal{T}$ mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ existieren Indizes $i_1,\dots,i_n \in I$, sodass $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ gilt.

Manche Autoren folgen Bourbaki und nennen F1A nur **quasikompakt**, für kompakte Räume verlangen sie zudem die Hausdorff–Eigenschaft.

Ich sage nicht „quasikompakt“, sondern kurz und einfach „kompakt“, und spreche gegebenenfalls von einem kompakten Hausdorff–Raum.

Kompakte topologische Räume

F102

Beispiele: Ein diskreter Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ ist kompakt gdw X endlich ist. Jeder indiskrete Raum $(X,\{\emptyset,X\})$ ist kompakt... und laaaaaaangweilig.

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} B(0,r)$ ist nicht kompakt für $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$: Diese offene Überdeckung enthält keine endliche Teilüberdeckung!

Die offene Überdeckung $\mathbb{R} = \,]-\infty,-99[\, \cup \,]+99,+\infty[\, \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n-1,n+1[$ erlaubt eine endliche Teilüberdeckung. Dennoch ist $\mathbb{R}$ nicht kompakt!

Auch das beschränkte Intervall $]0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]2^{-n},1]$ ist nicht kompakt. Diese offene (!) Überdeckung enthält keine endliche Teilüberdeckung!

Für Teilräume des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ gilt eine Besonderheit:

Satz F1T: Heine–Borel

Ein euklidischer Teilraum $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn A im Raum $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Das ist nicht die Definition von Kompaktheit, sondern eine Folgerung! Für $A \subset \mathbb{R}^n$ ist es ein bequemes Kriterium, notwendig und hinreichend.

Relative Kompaktheit in einem umgebenden Raum

F103

Definition F1B: Kompaktheit einer Teilmenge

Sei $(X,\mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

(1) Die Teilmenge A ist **kompakt in** $(X,\mathcal{T}_X)$, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält:

Zu jeder Familie $(V_i)_{i\in I}$ offener Mengen $V_i \in \mathcal{T}_X$ mit $A \subset \bigcup_{i\in I} V_i$ existieren $i_1,\dots,i_n \in I$ mit $A \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$. Äquivalent hierzu:

(2) Der Teilraum $(A,\mathcal{T}_A)$ ist **kompakt** (gemäß Definition F1A):

Zu jeder Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen $U_i \in \mathcal{T}_A$ mit $A = \bigcup_{i\in I} U_i$ existieren $i_1,\dots,i_n \in I$ mit $A = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Wir nennen die Teilmenge A **relativ kompakt in** $(X,\mathcal{T}_X)$, falls der Abschluss $\overline{A}$ in $(X,\mathcal{T}_X)$ kompakt ist.

Die Äquivalenz „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“ entspringt direkt unserer Definition D1K der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A = \{\, U = V \cap A \mid V \in \mathcal{T}_X \,\}$. Bitte schreiben Sie es aus!

Relative Kompaktheit in einem umgebenden Raum

F104

Beispiele: Jede endliche Teilmenge $A \subset X$ ist kompakt in $(X,\mathcal{T})$.

Sind $A_1,\dots,A_n \subset X$ (relativ) kompakt in $(X,\mathcal{T})$, so auch $A_1 \cup \dots \cup A_n$. Für $A_1 \cap \dots \cap A_n$ benötigen wir zudem die Hausdorff–Eigenschaft!

In $\mathbb{R}$ ist das Intervall $A = \,]0,1]$ nicht kompakt, siehe $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty}]2^{-n},2[$. Es ist aber relativ kompakt, denn $\overline{]0,1]} = [0,1]$ ist kompakt (F1D, F1T).

In $\mathbb{R}$ ist $A = \{\, 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ nicht kompakt, siehe $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty}]2^{-n},2[$. Der Abschluss $\overline{A} = A \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$ ist hingegen kompakt (F1C, F1T).

Beispiel / Übung F1C: Kompaktheit einer konvergenten Folge

Im Raum $(X,\mathcal{T})$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_\infty$ eine konvergente Folge. Dann ist die Menge $A = \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{x_\infty\}$ kompakt in $(X,\mathcal{T})$.

In $\mathbb{R}^n$ ist der offene Ball $\mathbb{B}^n = B(0,1) = \bigcup_{r<1} B(0,r)$ zwar nicht kompakt, doch relativ kompakt, denn der Abschluss $\mathbb{D}^n = \bar{B}(0,1)$ ist kompakt (F1T).

In $\mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ relativ kompakt (F1T), denn $A = \overline{B}$ ist abgeschlossen und immer noch beschränkt.

Kompaktheit von Intervallen

F105

Jedes reelle Intervall $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ ist kompakt. Allgemeiner gilt:

Satz F1D: Kompaktheit von Intervallen

Sei $<$ eine Totalordnung auf $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T}_<$ die Ordnungstopologie.

Genau dann ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_<)$ kompakt, wenn jede Teilmenge $E \subset X$ ein Supremum (bzw. ein Infimum) in $(X,<)$ besitzt.

Beispiele: Wir betrachten $X = \{0,1,2,\dots,n\}$ mit der üblichen Ordnung. Die Ordnungstopologie $\mathcal{T}_<$ ist diskret, der Raum $(X,\mathcal{T}_<)$ ist kompakt.

In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $X = [a,b]$ mit $a \le b$ in $\mathbb{R}$ kompakt dank Satz F1D. Hingegen ist ganz $\mathbb{R}$ nicht kompakt, siehe $\mathbb{R} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_{<s} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_{>s}$. Ebenso sind $[0,+\infty[= \bigcup_{s\ge 0}[0,s[$ und $]-\infty,0] = \bigcup_{s\le 0}]s,0]$ nicht kompakt.

Anders als reelle Intervalle ist $[a,b]_\mathbb{Q}$ für $a<b$ in $\mathbb{Q}$ nicht kompakt. Zum Beweis konstruieren wir explizit eine offene Überdeckung von $[0,1]_\mathbb{Q}$ ohne endliche Teilüberdeckung: Hierzu sei $\xi \in [0,1] \smallsetminus \mathbb{Q}$ und

$$[0,1]_\mathbb{Q} \;=\; \bigcup_{u<\xi} [0,u[_\mathbb{Q} \;\sqcup\; \bigcup_{v>\xi}]v,1]_\mathbb{Q}.$$

Kompaktheit von Intervallen

F106

Genau dann ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_<)$ kompakt, wenn jede Teilmenge $E \subset X$ ein Supremum (bzw. ein Infimum) in $(X,<)$ besitzt.

Beweis: Wir zeigen „$\Rightarrow$" durch Kontraposition (wie im Beispiel $[0,1]_\mathbb{Q}$): Hätte $(X,<)$ kein Supremum, so wäre $X = \bigcup_{s\in X} X_{<s}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Infimum genauso. Im Folgenden sei also $a = \inf X$ und $b = \sup X$ in X, somit $X = [a,b]$.

Sei $E \subset X$. Wir setzen $T = \{ t \in X \mid E \le t \}$ und $S = \{ s \in X \mid s \le T \}$. Es gilt $X = S \cup T$, denn zu $x \in X$ mit $x \notin T$ existiert $e \in E$ mit $x < e \le T$. Für $x \in X$ sind äquivalent: $x \in S \cap T$, $x = \max S$, $x = \min T$, $x = \sup E$.

Existiert dieses Element nicht, so erhalten wir die offene Überdeckung

$$X \;=\; S \sqcup T \;=\; \bigcup_{s\in S} [a,s[\;\sqcup\; \bigcup_{t\in T}]t,b]$$

Diese erlaubt keine endliche Teilüberdeckung, andernfalls hätten wir $S = [a,s_1[\cup \dots \cup [a,s_n[= [a,x[$ mit $x = \max\{s_1,\dots,s_n\}$ und somit $x \notin S \sqcup T$.

Kompaktheit von Intervallen

F107

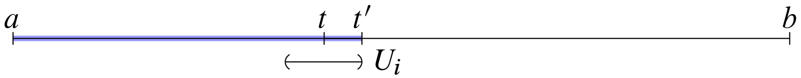
Genau dann ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_<)$ kompakt, wenn jede Teilmenge $E \subset X$ ein Supremum (bzw. ein Infimum) in $(X,<)$ besitzt.

Beweis: „$\Leftarrow$": Es gilt $X = [a,b]$ mit $a = \inf X$ und $b = \sup X$. Sei $[a,b] = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine Überdeckung durch offene Mengen $U_i \in \mathcal{T}_<$.

Sei E die Menge aller $t \in [a,b]$, für die $[a,t]$ endlich überdeckt wird, also $[a,t] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ für geeignete Indizes $i_1,\dots,i_n \in I$.

Offensichtlich gilt $a \in E$. Wir zeigen nun $E = [a,b]$.

(1) Zu jedem $t \in E$ mit $a \le t < b$ existiert $t' \in E$ mit $t < t' \le b$.



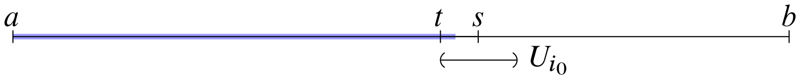
Beweis: Aus $[a,t] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ folgt $t \in U_i$ für ein $i \in \{i_1,\dots,i_n\}$. Da die Menge U_i in $(X,\mathcal{T}_<)$ offen ist, existiert $t' \in]t,b]$ mit $[t,t'[\subset U_i$. Zu t' existiert $i_0 \in I$ mit $t' \in U_{i_0}$. Somit gilt $[a,t'] \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Aussage (1) gilt für alle geordneten Mengen $(X,<)$. Wir nutzen nun die Supremums-Vollständigkeit und das Element $s \in E$ mit $s = \sup E$.

Kompaktheit von Intervallen

F108

(2) Für $s = \sup E$ gilt $s \in E$, also $s = \max E$.



Beweis: Dank (1) gilt $s > a$. Zu $s \in U_{i_0}$ existiert $t \in [a,s[$ mit $]t,s] \subset U_{i_0}$. Es gilt $t \in E$, also $[a,t] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ für geeignete $i_1,\dots,i_n \in I$. Somit gilt $[a,s] \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$, also $s \in E$.

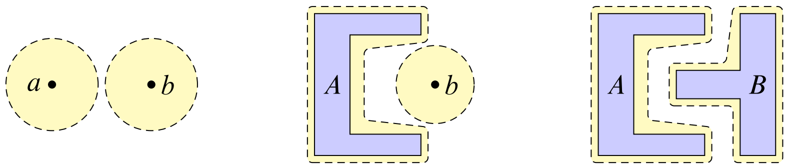
Aussage (2) garantiert, dass E ein größtes Element s hat. Nach (1) gilt $s = b$: Ganz $X = [a,b]$ wird endlich überdeckt. QED

Illustration: Wir betrachten erneut $[0,1]_\mathbb{Q} = \bigcup_{u<\xi}[0,u[_\mathbb{Q} \sqcup \bigcup_{v>\xi}]v,1]_\mathbb{Q}$. Hier ist $E = [0,\xi[_\mathbb{Q}$, denn $[0,t]_\mathbb{Q}$ wird endlich überdeckt für $t<\xi$, aber nicht für $t>\xi$. Aussage (1) gilt weiterhin, aber ohne Vollständigkeit schlägt Schritt (2) fehl: Die Menge E erlaubt kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Beispiel / Übung F9H: lexikographisch, quadratisch, gut

Wir betrachten $Z = [0,1]^2$ mit lexikographischer Ordnung: $(x,y) < (x',y')$ bedeutet $x < x'$ oder ($x = x'$ und $y < y'$). Ist der Raum $(Z,\mathcal{T}_<)$ kompakt?

Kompaktheit und Hausdorff–Eigenschaft



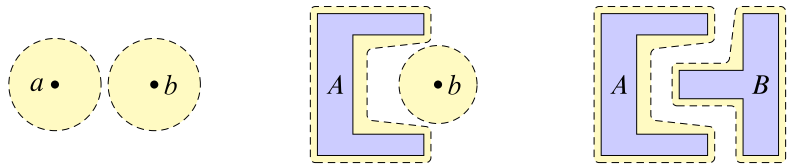
Lemma F1E: $T_2 \Rightarrow T_3$ für kompakte Teilmengen $A \subset X$

Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, darin $A \subset X$ kompakt und $b \in X \smallsetminus A$.
Dann existieren U, V mit $A \subset U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ und $U \cap V = \emptyset$.

Beweis: Dank Hausdorff–Eigenschaft (T_2) gilt: Zu jedem Punkt $a \in A$ existieren offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $b \in V_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$. Wir erhalten $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$. Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n} =: U$. Damit ist auch der endliche Durchschnitt $V := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n} \ni b$ offen, und es gilt $U \cap V = \emptyset$. QED

Sie kennen diese Technik bereits aus dem Lemma von Tychonoff E5J, dort statt Kompaktheit mit der schwächeren Lindelöf–Eigenschaft D6V.

Kompaktheit und Hausdorff–Eigenschaft



Satz F1F: $T_2 \Rightarrow T_4$ für kompakte Teilmengen $A, B \subset X$

Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch und darin $A, B \subset X$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$.
Dann existieren U, V mit $A \subset U \in \mathcal{T}$ und $B \subset V \in \mathcal{T}$ und $U \cap V = \emptyset$.

Der Beweis ist wörtlich derselbe, wobei wir „b“ durch „B“ ersetzen.

Beweis: Wir nutzen das vorige Lemma F1E: Zu jedem Punkt $a \in A$ existieren offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $B \subset V_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$. Wir erhalten $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$. Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n} =: U$. Damit ist auch der endliche Durchschnitt $V := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n} \supset B$ offen, und es gilt $U \cap V = \emptyset$. QED

Kompaktheit und Teilräume

Satz F1G

Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, so ist jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ kompakt.

Beweis: Gegeben sei die Überdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}$.
Diese erweitern wir zur offenen Überdeckung $X = (X \smallsetminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$.
Da X kompakt ist, enthält diese eine endliche Teilüberdeckung von X, also $X = (X \smallsetminus A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ und somit $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. QED

Satz F1H

Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, so ist jeder kompakte Teilraum A abgeschlossen.

Beweis: Nach Lemma F1E ist das Komplement $X \smallsetminus A$ offen. QED

Bemerkung: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorff–Raum. Darin sind die kompakten Teilräume $A \subset X$ genau die abgeschlossenen Teilmengen.

Kompaktheit und Teilräume

Korollar F1I: Heine–Borel in $\mathbb{R}$

Ein Teilraum $A \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt,
wenn A in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Dank Beschränktheit existiert $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $A \subset [-r, r]$.
Das abgeschlossene Intervall $[-r, r]$ ist kompakt (F1D).
Darin ist A abgeschlossen, also kompakt (F1G).

„$\Rightarrow$“: Ist $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, so ist A in $\mathbb{R}$ abgeschlossen (F1H).
Die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{r \in \mathbb{N}}]-r, r[= \mathbb{R}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, also ist A beschränkt. QED

Stetige Abbildungen kompakter Räume

Satz F1L: Das stetige Bild eines Kompaktums ist kompakt.

Sei $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig. Ist $A\subset X$ kompakt, so auch $f(A)\subset Y$.

Beweis: Sei $f(A)\subset\bigcup_{i\in I}V_i$ mit $V_i\in\mathcal{T}_Y$.
Daraus folgt $A\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ mit $U_i:=f^{-1}(V_i)\in\mathcal{T}_X$.
Hierzu existiert eine endliche Teilüberdeckung $A\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_n}$.
Wir schließen $f(A)\subset f(U_{i_1})\cup\dots\cup f(U_{i_n})\subset V_{i_1}\cup\dots\cup V_{i_n}$.
Das bedeutet, $f(A)\subset Y$ ist kompakt. $\boxed{\text{QED}}$

Satz F1M: Minimum und Maximum reeller Funktionen

Sei X kompakt und $f:X\to\mathbb{R}$ stetig.
Dann existieren $a,b\in X$ mit $f(a)\le f(x)\le f(b)$ für alle $x\in X$.

Beweis: Das Bild $f(X)\subset\mathbb{R}$ ist kompakt (F1L), somit beschränkt und abgeschlossen (F1I). Insbesondere ist das Infimum $\inf f(X)$ endlich und wird angenommen, es existiert also $a\in X$ mit $f(a)=\inf f(X)$. Ebenso existiert $b\in X$ mit $f(b)=\sup f(X)$. $\boxed{\text{QED}}$

Abgeschlossene Abbildungen

Satz F1N: das Kompakt–Hausdorff–Kriterium

Sei X kompakt und Y hausdorffsch. Dann ist jede stetige Abbildung $f:X\to Y$ abgeschlossen. Somit induziert f einen Homöomorphismus:

$$\begin{tikzcd}
\text{kompakt} & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & Y & \text{hausdorffsch} \\
& X/R_f \arrow[r, "\bar f", "\text{Homöo!}"'] & f(X) \arrow[u, hook, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

(1) Jede stetige Bijektion $f:X\to Y$ ist ein Homöomorphismus.
(2) Jede stetige Surjektion $f:X\to Y$ ist eine Identifizierung.
(3) Jede stetige Injektion $f:X\to Y$ ist eine Einbettung.

Beweis: Sei $A\subset X$ abgeschlossen.
Da X kompakt ist, ist A kompakt (F1G).
Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (F1L).
Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (F1H). $\boxed{\text{QED}}$

Das Kompakt–Hausdorff–Kriterium

Beispiel: Die Abbildung $p:\mathbb{R}\to\mathbb{C}:t\mapsto e^{2\pi it}$ ist stetig und induziert in der kanonischen Faktorisierung die stetige Bijektion $\bar p:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}\mathbb{S}^1$.

$$\begin{tikzcd}
& {[0,1]} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "q|_{[0,1]}"] & \mathbb{R} \arrow[r, "p", "t\mapsto e^{2\pi it}"'] \arrow[d, two heads, "q"] & \mathbb{C} & \\
\text{kompakt} & q([0,1]) \arrow[r, equal] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[r, "\bar p", "{[t]\mapsto e^{2\pi it}}"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[u, hook, "\iota"] & \text{hausdorffsch}
\end{tikzcd}$$

Hier ist $\mathbb{R}/\mathbb{Z}=q([0,1])$ kompakt (F1L) und $\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2$ hausdorffsch (D1K). Daher ist die stetige Bijektion $\bar p$ sogar ein Homöomorphismus (F1N).

☺ Kompaktheit vereinfacht unsere Argumente erheblich! Ebenso:

Satz E2T: Verkleben eines Intervalls an den Endpunkten

Die Abbildung $p:[-1,1]\to\mathbb{S}^1:t\mapsto e^{\pi it}$ ist identifizierend und induziert demnach den Homöomorphismus $\bar p:[-1,1]/\!\!/\{-1,1\}\xrightarrow{\sim}\mathbb{S}^1:[t]\mapsto e^{\pi it}$.

Das Kompakt–Hausdorff–Kriterium

Die Hausdorff–Eigenschaft benötigt möglichst viele offene Mengen, um je zwei Punkte $a\ne b$ durch disjunkte Umgebungen zu trennen.

Die Kompaktheit hingegen benötigt möglichst wenige offene Mengen, damit jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Übung F1O: Kompakt–Hausdorff–Gleichgewicht

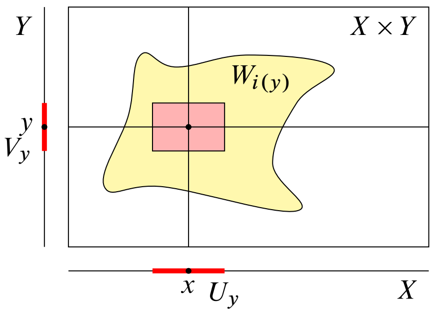
Kompakte Hausdorff–Räume $(X,\mathcal{T})$ sind im perfekten Gleichgewicht:
Jede echt feinere Topologie $\mathcal{T}'\supsetneq\mathcal{T}$ ist hausdorffsch, aber nicht kompakt.
Jede echt gröbere Topologie $\mathcal{T}'\subsetneq\mathcal{T}$ ist kompakt, aber nicht hausdorffsch.

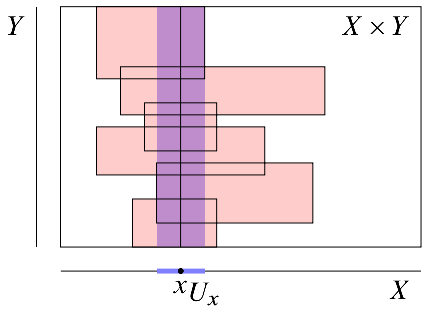
☺ Lernen Sie das Kompakt–Hausdorff–Kriterium zu nutzen!
Es vereinfacht Ihre Arbeit und Beweisführung erheblich.

Der kleine Satz von Tychonoff

Satz F1Q: kleiner Satz von Tychonoff

Sind $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ kompakt, so auch $(X\times Y,\mathcal{T}) = (X,\mathcal{T}_X)\times(Y,\mathcal{T}_Y)$.





Beweis: Sei $X\times Y = \bigcup_{i\in I} W_i$ mit $W_i \in \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung.
Wir fixieren $x\in X$. Zu jedem $y\in Y$ existiert $i(y)\in I$ mit $(x,y)\in W_{i(y)}$.
Hierzu existieren $U_y\in\mathcal{T}_X$ und $V_y\in\mathcal{T}_Y$ mit $(x,y)\in U_y\times V_y \subset W_{i(y)}$.
Die offene Überdeckung $Y=\bigcup_{y\in Y} V_y$ enthält $Y = V_{y_1}\cup\dots\cup V_{y_n}$.
Der Durchschnitt $U_x := U_{y_1}\cap\dots\cap U_{y_n}$ erfüllt $x\in U_x\in\mathcal{T}_X$.

Der kleine Satz von Tychonoff

Der gesamte Streifen $U_x\times Y$ wird endlich überdeckt:

$$\begin{aligned} U_x\times Y &= U_x\times(V_{y_1}\cup\dots\cup V_{y_n}) = (U_x\times V_{y_1})\cup\dots\cup(U_x\times V_{y_n}) \\ &\subset (U_{y_1}\times V_{y_1})\cup\dots\cup(U_{y_n}\times V_{y_n}) \subset W_{i(y_1)}\cup\dots\cup W_{i(y_n)}. \end{aligned}$$

Sei $J_x := \{i(y_1),\dots,i(y_n)\}$. Die Überdeckung $X=\bigcup_{x\in X} U_x$ enthält eine endliche Teilüberdeckung $X = U_{x_1}\cup\dots\cup U_{x_p}$.
Somit ist $J = J_{x_1}\cup\dots\cup J_{x_p}\subset I$ endlich und erfüllt

$$\begin{aligned} X\times Y &= (U_{x_1}\cup\dots\cup U_{x_p})\times Y = (U_{x_1}\times Y)\cup\dots\cup(U_{x_p}\times Y) \\ &\subset \big(\textstyle\bigcup_{j\in J_{x_1}} W_j\big)\cup\dots\cup\big(\textstyle\bigcup_{j\in J_{x_p}} W_j\big) = \textstyle\bigcup_{j\in J} W_j. \end{aligned}$$

Korollar F1R: Kompaktheit endlicher Produkte

Seien $X_1,\dots,X_n\neq\emptyset$ topologische Räume. Genau dann ist das Produkt $X = X_1\times\dots\times X_n$ kompakt, wenn jeder Faktor $X_1,\dots,X_n$ kompakt ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Ist X kompakt, so auch das stetige Bild $p_i(X) = X_i$ (F1L).
„$\Leftarrow$“: Die Kompaktheit paarweiser Produkte $X_1\times X_2$ (F1Q) überträgt sich per Induktion über $n\in\mathbb{N}$ auf endliche Produkte $X_1\times\dots\times X_n$. $\boxed{\text{QED}}$

Der Satz von Heine–Borel

Korollar F1S: kompakte Quader

Jeder Quader $[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Beweis: In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $[a,b]$ kompakt bezüglich der euklidischen Topologie (F1D). Auf $[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^n$ stimmt die euklidische Topologie mit der Produkttopologie überein. $\boxed{\text{QED}}$

Satz F1T: Heine–Borel

Ein euklidischer Teilraum $A\subset\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn A im Raum $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Da A beschränkt ist, existiert $r\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ sodass $A\subset\bar{B}(0,r)\subset[-r,r]^n$. Der Würfel $[-r,r]^n$ ist kompakt (F1S).
Hierin ist A abgeschlossen, also ist A kompakt (F1G).
„$\Rightarrow$“: Ist $A\subset\mathbb{R}^n$ kompakt, dann ist A abgeschlossen (F1H).
Die offene Überdeckung $A\subset\bigcup_{r\in\mathbb{N}} B(0,r)=\mathbb{R}^n$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, also ist A beschränkt. $\boxed{\text{QED}}$

Der Satz von Heine–Borel

Beispiel: In $\mathbb{R}^n$ ist jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}(a,r)$ kompakt, ebenso die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\dots+x_n^2 = 1 \,\}$.

☺ Sie kennen Heine–Borel als einen wichtigen Satz aus der Analysis. Wir erhalten einen unabhängigen, topologisch strukturierten Beweis:
Aus der Supremums-Vollständigkeit von $(\mathbb{R},<)$ folgt Kompaktheit von Intervallen (F1D). Allgemein untersuchen wir Teilräume (F1G, F1H), stetige Bilder (F1L) und schließlich Produkte (F1Q).

⚠ Der Satz F1T von Heine–Borel ist eine Besonderheit des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und gilt nicht für beliebige metrische Räume.
In jedem diskreten metrischen Raum (X,d) ist jede Teilmenge $A\subset X$ abgeschlossen und beschränkt, aber nur endliche sind kompakt.

⚠ In $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ist der Ball $\bar{B}(0,1) = [-1,1]^{\mathbb{N}}\subset\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ nicht kompakt. Die Menge $\{\, e_n \mid n\in\mathbb{N}\,\}$ ist diskret und abgeschlossen, demnach ist jede Menge $U_n = \ell^\infty\smallsetminus\{\, e_k \mid k\geq n\,\}$ offen. Es gilt $\bar{B}(0,1)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \ell^\infty$, aber es existiert keine endliche Teilüberdeckung.

Die Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft

Eine Familie von Mengen $F_i \subset X$ mit $i \in I \neq \emptyset$ erfüllt die **Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft** (engl. *finite intersection property*, *FIP*), wenn $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \neq \emptyset$ für jede endliche Familie $i_1, \dots, i_n \in I$ gilt.

Lemma F1V: finite intersection property (FIP)

Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind äquivalent:

(1) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist kompakt: Jede Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch offene Mengen $U_i \subset X$ enthält eine endliche Teilüberdeckung

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

(2) Hat eine Familie $(F_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen $F_i \subset X$ leeren Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, so ist bereits ein endlicher Durchschnitt leer,

$$F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = \emptyset.$$

(3) Hat eine Familie $(F_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen $F_i \subset X$ die Eigenschaft (FIP) $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \neq \emptyset$ für alle $i_1, \dots, i_n \in I$, so gilt $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Beweis: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Komplementbildung, (2) $\Leftrightarrow$ (3) Kontraposition. $\boxed{\text{QED}}$

Die Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft

In $\mathbb{R}$ entspricht (3) dem beliebten Intervallschachtelungsprinzip: Zu $\mathbb{R} \supset [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ existiert $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$; gilt zudem $b_n - a_n \searrow 0$, so ist x eindeutig, also $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$.

Für offene Intervalle kann der Schnitt leer sein: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]0, 2^{-n}[= \emptyset$

Ebenso für abgeschlossene Intervalle in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
A_0 &= [1, 2]_{\mathbb{Q}}, & B_0 &= [1, 2]_{\mathbb{R}} \\
A_1 &= [1.4, 1.5]_{\mathbb{Q}}, & B_1 &= [1.4, 1.5]_{\mathbb{R}} \\
A_2 &= [1.41, 1.42]_{\mathbb{Q}}, & B_2 &= [1.41, 1.42]_{\mathbb{R}} \\
A_3 &= [1.414, 1.415]_{\mathbb{Q}}, & B_3 &= [1.414, 1.415]_{\mathbb{R}} \\
A_4 &= [1.4142, 1.4143]_{\mathbb{Q}}, & B_4 &= [1.4142, 1.4143]_{\mathbb{R}} \\
A_5 &= [1.41421, 1.41422]_{\mathbb{Q}} & B_5 &= [1.41421, 1.41422]_{\mathbb{R}} \\
&\dots & &\dots \\
\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n &= \emptyset & \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n &= \{\sqrt{2}\}
\end{aligned}$$

Der Satz von Tychonoff

Satz F1W: Tychonoff 1930

Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ nicht-leere topologische Räume.
Unter der Annahme des Auswahlaxioms gilt:

Das Produkt $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$ ist genau dann kompakt, wenn jeder Faktor $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für $i \in I$ kompakt ist.

Beispiele: Der diskrete Raum $\{0, 1\}$ ist kompakt, also auch $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
Jeder Quader $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt, siehe F1Q.
Jeder Quader $\prod_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt, insbesondere $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.
Jeder Quader $\prod_{x \in \mathbb{R}} [a_x, b_x]$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist kompakt, insbesondere $[0, 1]^{\mathbb{R}}$.

Beweis des Satzes: „$\Rightarrow$“: Jede Projektion $p_i : X \to X_i$ ist stetig (E4D).
Zudem ist p_i surjektiv, da alle Räume X_j nicht-leer sind, somit auch X.
Ist der Raum X kompakt, so auch das stetige Bild $p_i(X) = X_i$ (F1L).

Der Satz von Tychonoff

„$\Leftarrow$“: Sei $\mathscr{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Familie abgeschlossener Mengen in $(X, \mathcal{T})$ mit der Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft (kurz FIP).
Zur Kompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ zeigen wir $\bigcap \mathscr{A} \neq \emptyset$.

Wir setzen $\mathscr{F}_0 := \{ A_1 \cap \dots \cap A_n \mid n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A} \} \supset \mathscr{A}$; zu $n = 0$ vereinbaren wir wie üblich $X \in \mathscr{F}_0$. Wir betrachten alle Familien $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ und Eigenschaft (a): Für $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ gilt $\emptyset \neq F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$.
Dank Zorns Lemma existiert ein maximales $\mathscr{F}$. Für dieses gilt zudem (b): Für jede Teilmenge $U \subset X$ mit $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathscr{F}$ gilt $U \in \mathscr{F}$.

FIP gilt für die Familie $\{ p_i(F) \mid F \in \mathscr{F} \}$ und ebenso $\{ \overline{p_i(F)} \mid F \in \mathscr{F} \}$.
Da der Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt ist, existiert $x_i \in \bigcap_{F \in \mathscr{F}} \overline{p_i(F)}$ dank F1V.
Für $x_i \in U_i \in \mathcal{T}_i$ gilt $U_i \cap p_i(F) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathscr{F}$, also $p_i^{-1}(U_i) \cap F \neq \emptyset$.
Dank (b) gilt $p_i^{-1}(U_i) \in \mathscr{F}$. Dank (a) $U = p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \in \mathscr{F}$.

Jede Umgebung V von $x = (x_i)_{i \in I}$ enthält eine solche Menge U (E4C), schneidet also jedes $F \in \mathscr{F}$, insbesondere jedes $A \in \mathscr{A} \subset \mathscr{F}$.
Das bedeutet $x \in \overline{A} = A$ für jedes $A \in \mathscr{A}$ (D5A), also $x \in \bigcap \mathscr{A}$. $\boxed{\text{QED}}$

Klassische Matrixgruppen

Sei $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$. Zu jeder Dimension $n\in\mathbb{N}_{\ge 1}$ haben wir die $\mathbb{K}$–Algebra $\mathbb{K}^{n\times n}$ aller $n\times n$–Matrizen über $\mathbb{K}$ mit der euklidischen Norm (C1O) und hierin die **allgemeine/spezielle lineare/orthogonale/unitäre Gruppe**:

$$\mathrm{GL}_n\mathbb{K}=\{A\in\mathbb{K}^{n\times n}\mid \det A\neq 0\},\qquad \mathrm{SL}_n\mathbb{K}=\{A\in\mathbb{K}^{n\times n}\mid \det A=1\},$$
$$\mathrm{O}_n\mathbb{R}=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid A^{\intercal}A=AA^{\intercal}=1_{n\times n}\},\quad \mathrm{SO}_n\mathbb{R}=\{A\in\mathrm{O}_n\mathbb{R}\mid \det A=1\},$$
$$\mathrm{U}_n\mathbb{C}=\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid \bar{A}^{\intercal}A=A\bar{A}^{\intercal}=1_{n\times n}\},\quad \mathrm{SU}_n\mathbb{C}=\{A\in\mathrm{U}_n\mathbb{C}\mid \det A=1\}.$$

Die Determinante ist eine Polynomfunktion, also insbesondere stetig:

$$\det_n\,:\,\mathbb{K}^{n\times n}\to\mathbb{K}\,:\,A=(a_{ij})\mapsto\textstyle\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sign}(\sigma)\,a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

Die Orthogonalität $A^{\intercal}A=AA^{\intercal}=1_{n\times n}$ bzw. $\bar{A}^{\intercal}A=A\bar{A}^{\intercal}=1_{n\times n}$ entspricht Polynomfunktionen $A\mapsto A^{\intercal}A,\ AA^{\intercal},\ \bar{A}^{\intercal}A,\ A\bar{A}^{\intercal}$ über $\mathbb{R}$, diese sind stetig.

Die Zeilen (bzw. Spalten) jeder Matrix $A=(a_1,\dots,a_n)\in\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ bilden eine Orthonormalbasis, insbesondere gilt $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{S}^{n-1}$. Somit ist $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt dank Heine–Borel (F1T).

Klassische Matrixgruppen

Satz F2A: orthogonale und unitäre Gruppen

In $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ der invertierbaren Matrizen offen und dicht. Hingegen ist die Untergruppe $\mathrm{SL}_n\mathbb{K}$ abgeschlossen und nirgends dicht.

In $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ sind $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ kompakte Untergruppen, ebenso $\mathrm{U}_n\mathbb{C}$ und $\mathrm{SU}_n\mathbb{C}$ in $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$. Für $n=1$ haben wir $\mathrm{GL}_1\mathbb{K}=\mathbb{K}^{\times}$ sowie hierin jeweils

$$\begin{aligned}\mathrm{O}_1\mathbb{R}&=\{a\in\mathbb{R}\mid a^2=1\}=\{\pm1\}&&=\mathbb{S}^0,\\ \mathrm{U}_1\mathbb{C}&=\{a+ib\in\mathbb{C}\mid a^2+b^2=1\}&&=\mathbb{S}^1.\end{aligned}$$

Hierin sind $\mathrm{SL}_1\mathbb{R}=\mathrm{SO}_1\mathbb{R}=\mathrm{SL}_1\mathbb{C}=\mathrm{SU}_1\mathbb{C}=\{1\}$ trivial. Für $n=2$ gilt

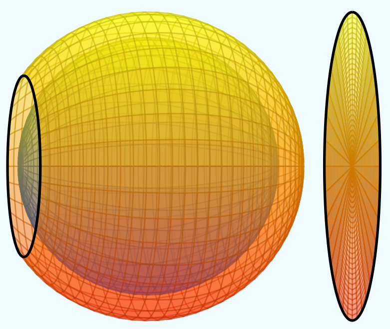
$$\mathrm{SO}_2\mathbb{R}=\left\{\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}a,b\in\mathbb{R},\\a^2+b^2=1\end{matrix}\right\}\cong\mathbb{S}^1,$$
$$\mathrm{SU}_2\mathbb{C}=\left\{\begin{pmatrix}a+ib&-c+id\\c+id&a-ib\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}a,b,c,d\in\mathbb{R},\\a^2+b^2+c^2+d^2=1\end{matrix}\right\}\cong\mathbb{S}^3.$$

Bemerkenswert: Die Sphären $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ sind topologische Gruppen. Erstaunlich: Diese drei sind die einzigen Sphären mit Gruppenstruktur!

Rand eines Balles zusammenschlagen

Satz F2E: Rand eines Balles zusammenschlagen

In jeder Dimension $n\in\mathbb{N}$ gilt $\mathbb{D}^n/\!\!/\mathbb{S}^{n-1}\cong\mathbb{S}^n$.

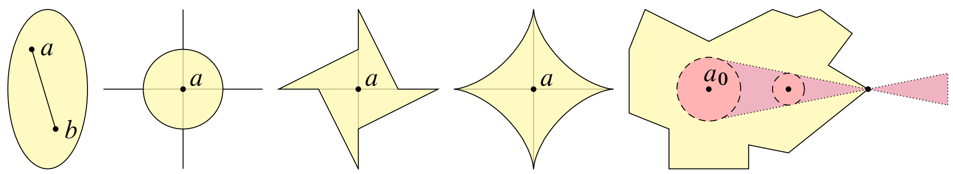


$$\begin{tikzcd}
{[0,1]\times\mathbb{S}^{n-1}} \arrow[d, two heads, "{(r,s)\mapsto rs}"'] \arrow[dr, "\tilde{p}"] & \\
\mathbb{D}^n \arrow[r, "p", "{rs\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)}"'] \arrow[d, two heads, "q"'] & \mathbb{R}^{n+1} \\
\mathbb{D}^n/\!\!/\mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\bar{p}", "\cong"'] & \mathbb{S}^n \arrow[u, hook, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Ausführlich: Wir nutzen Polarkoordinaten $[0,1]\times\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{D}^n:(r,s)\mapsto rs$. Die stetige Abbildung $\tilde{p}:[0,1]\times\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n+1}:(r,s)\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)$ induziert $p:\mathbb{D}^n\to\mathbb{R}^{n-1}:rs\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)$, und ihre kanonische Faktorisierung liefert den Homöomorphismus $\bar{p}:\mathbb{D}^n/\!\!/\mathbb{S}^{n-1}\xrightarrow{\sim}\mathbb{S}^n$.

Rand eines Balles zusammenschlagen

Konvexe und sternförmige Kompakta



Definition F2I: konvex und sternförmig

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen $a,b \in V$ ist

$$[a,b] := \left\{ (1-t)a + tb \;\middle|\; t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1 \right\}.$$

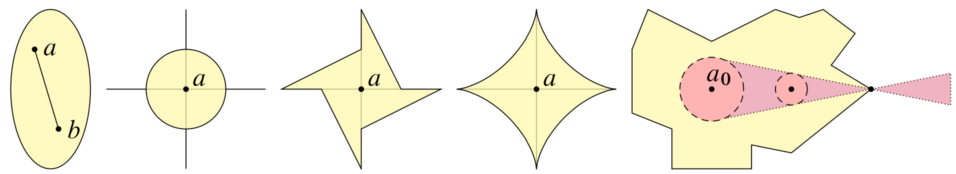
Eine Teilmenge $X \subset V$ ist **konvex**, wenn gilt:

$$\forall a,b \in X \;:\; [a,b] \subset X$$

Die Menge X ist **sternförmig** zum Zentrum $a \in X$, wenn gilt:

$$\forall b \in X \;:\; [a,b] \subset X$$

Konvexe und sternförmige Kompakta



Satz F2J: sternförmige Kompakta

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig zum Zentrum $a \in X^\circ$.
Für jeden Randpunkt $b \in \delta X$ gelte die Bedingung $[a,b] \cap \delta X = \{b\}$.

Dann stiftet die Zentralprojektion einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^n$ von der Form $h(x) = x/\rho(x/|x|)$ für $x \ne 0$ und $h(0) = 0$.

Verschärfung: Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig bezüglich jedes Punktes $a \in B(a_0, \varepsilon)$, so existiert $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bilipschitz mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.

Konvexe und sternförmige Kompakta

Beweis: Nach Translation können wir $a = 0$ annehmen. Wir haben $B(0,\varepsilon) \subset X \subseteq \bar{B}(0,R)$ für geeignete Konstanten $0 < \varepsilon \le R$ und somit $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \to [\varepsilon, R] : s \mapsto \sup\{ r \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid rs \in X \}$ mit $\delta X \cap \mathbb{R}_{\ge 0} \cdot s = \{ \rho(s) \cdot s \}$.

Die Projektion $f : \delta X \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$ ist wohldefiniert dank $0 \notin \delta X$, stetig, bijektiv dank $f^{-1}(s) = \rho(s) \cdot s$, also ein Homöomorphismus (F1N). Insbesondere ist $\rho : s \mapsto |f^{-1}(s)|$ stetig. Wir erhalten inverse Bijektionen

$$h \;:\; \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \;:\; x \mapsto \begin{cases} x/\rho(x/|x|) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$k \;:\; \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \;:\; x \mapsto \begin{cases} x \cdot \rho(x/|x|) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beide sind stetig in $x \ne 0$, als Komposition stetiger Abbildungen.
Stetigkeit im Punkt 0 gilt dank $|h(x)| \le |x|/\varepsilon$ und $|k(x)| \le |x| \cdot R$.
Somit ist $(h,k) : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus.
Nach Konstruktion gilt $h(X) \subset \mathbb{D}^n$ und $k(\mathbb{D}^n) \subset X$. $\boxed{\text{QED}}$

Konvexe und sternförmige Kompakta

Satz F2K: Homöomorphie der konvexen Körper

(1) Jeder konvexe Körper $X \subset \mathbb{R}^n$, das heißt konvex und kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \ne \emptyset$, ist bilipschitz homöomorph zu $\mathbb{D}^n$.

(2) Allgemein für $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex gilt $X = \emptyset$ oder $X \cong \mathbb{D}^k$ mit einer geeigneten Dimension $0 \le k \le n$. Genauer existiert ein bilipschitz Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^k \times \{0\}$.

Beweis: Das ist ein (einfacher aber wichtiger) Spezialfall von F2J. $\boxed{\text{QED}}$

Satz F2L: sternförmige offene Mengen

(1) Jede sternförmige offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

(2) Genauer: Wir können $0 \in U \subset \mathbb{B}^n$ annehmen. Dann existiert $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ lipschitz-stetig mit $g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ und $g|_U : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$.

Beweis: Selbe Idee, sorgfältig Nachrechnen! $\boxed{\text{QED}}$

Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Satz F2M: Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

(1) Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum V sind je zwei Normen $|-|$ und $\|-\|$ äquivalent: Es gibt Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass

$$\ell\,|x| \le \|x\| \le L\,|x| \quad \text{für alle} \quad x \in V.$$

Insbesondere induzieren sie auf V dieselbe Topologie $\mathcal{T}_{|-|} = \mathcal{T}_{\|-\|}$.

(2) Speziell für $V = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm $|-|$ ist die euklidische Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \,\}$ kompakt, hierauf ist die Abbildung $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ stetig, und somit genügen die Konstanten

$$\ell = \min\{\, \|x\| \mid x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\} \quad \text{und} \quad L = \max\{\, \|x\| \mid x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\}.$$

Beweis: Es genügt, (2) zu beweisen. Sei $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die kanonische Basis: $\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \le |x_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |x_n| \cdot \|e_n\| \le c|x|_\infty \le c|x|$ mit $c := \|e_1\| + \dots + \|e_n\| > 0$. Ebenso gilt $\|x - y\| \le c|x - y|$, also ist $\|-\|$ stetig bezüglich $|-|$. Der Rest ist klar dank Heine–Borel (F1T). $\boxed{\text{QED}}$

Auf $\mathbb{Q}^2$ gibt es überabzählbar viele Normen.

Satz F2N: überabzählbar viele Normen auf $\mathbb{Q}^2$

Der $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ erbt die euklidische Norm $|(a,b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zu $\xi \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ haben wir die Norm $|-|_\xi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}_{\ge 0} : (a,b) \mapsto |a + b\xi|$.

Das sind überabzählbar viele Normen: Sie sind paarweise verschieden und definieren sogar paarweise verschiedene Topologien!

Beweis: Zur Einschränkung der euklidischen Norm ist alles klar. Für $|-|_\xi$ gilt (N1), denn aus $|a + b\xi| = 0$ folgt $b = 0$ und $a = 0$. (Aus $a + b\xi = 0$ und $b \ne 0$ folgt $\xi = -a/b \in \mathbb{Q}$, Widerspruch!) Homogenität (N2) und Dreiecksungleichung (N3) erbt $|-|_\xi$ von $|-|$.

Für $\xi \ne \zeta$ wählen wir eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \to \xi$ und setzen $b_n := -1$. Dann gilt $|(a_n, b_n)|_\xi = |a_n + b_n \xi| \to 0$ aber $|(a_n, b_n)|_\zeta \to |\xi - \zeta| > 0$ und $|(a_n, b_n)| \to \sqrt{\xi^2 + 1} \ge 1$. Somit sind alle Topologien $\mathcal{T}(\mathbb{Q}^2, |-|_\xi)$ paarweise verschieden, und keine ist die euklidische. $\boxed{\text{QED}}$

Topologische Vektorräume

Definition F2Q: topologischer Vektorraum

Ein **topologischer $\mathbb{K}$–Vektorraum** $(X, \mathcal{T}, +, \cdot)$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum $(X, +, \cdot)$ zusammen mit einer Hausdorff–Topologie $\mathcal{T}$, für die Addition $+ : X \times X \to X$ und Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ stetig sind.

Wir nennen dann $\mathcal{T}$ eine **Vektorraumtopologie** auf $(X, +, \cdot)$.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist die Produkttopologie die euklidische auf $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$.

Jeder normierte $\mathbb{K}$–Vektorraum $(X, |-|)$ ist ein topologischer Vektorraum.

Auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ definieren punktweise, gleichmäßige und kompakte Konvergenz jeweils eine Vektorraumtopologie, und diese drei sind sehr verschieden.

Satz F2R: die Vektorraumtopologie auf $\mathbb{R}^n$

Die einzige Vektorraumtopologie auf $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ über $\mathbb{R}$ ist die euklidische.

Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum existiert genau eine Vektorraumtopologie, nämlich die euklidische übertragen durch $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$.

Topologische Vektorräume

Auf $\mathbb{R}^n$ und jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum X sind alle Normen äquivalent (F2M), induzieren also dieselbe Topologie. Satz F2R ist wesentlich stärker und beweist die Eindeutigkeit ohne die Voraussetzung der Normierbarkeit.

Dieses Ergebnis bestärkt unsere Erfahrung, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ besonders gute Eigenschaften hat, die sie unter allen denkbaren Topologien auf $\mathbb{R}^n$ auszeichnen. Die Aussage scheint geometrisch plausibel, beruht aber ganz wesentlich auf der Kompaktheit und somit letztlich auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

Als Kontrast betrachten wir den geordneten Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ mit seiner Ordnungstopologie; dies ist zugleich die Teilraumtopologie in $\mathbb{R}$. Für $\mathbb{Q}^n$ gilt der Satz von Heine–Borel nicht, zum Beispiel ist der Einheitsball $\{\, x \in \mathbb{Q}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1 \,\}$ beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{Q}^n$, aber nicht kompakt; schon das Intervall $[-1,1]_\mathbb{Q}$ ist nicht kompakt (F1D). Unsere Beweise für $\mathbb{R}^n$ beruhen auf lokaler Kompaktheit, für $\mathbb{Q}^n$ brechen sie zusammen. Tatsächlich existieren auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ überabzählbar viele verschiedene Vektorraumtopologien (F2N).

Abstand zwischen Mengen

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

$$d: \quad X \times \mathfrak{P}X \to [0,\infty], \quad d(a,B) := \inf\{\, d(a,b) \mid b \in B \,\}$$
$$d: \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X \to [0,\infty], \quad d(A,B) := \inf\{\, d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B \,\}$$

Aus $d(A,B) > 0$ folgt $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Die Umkehrung jedoch gilt nicht: In $\mathbb{R}^2$ sind die Mengen $A = \{\,(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\,\}$ und $B = \{\,(x,1/x) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\,\}$ abgeschlossen und disjunkt, also $A \cap B = \emptyset$, dennoch gilt $d(A,B) = 0$.

Für kompakte Mengen ist alles besser:

Satz F3A: positiver Abstand von kompakt zu abgeschlossen

Sind $A, B \subset X$ disjunkt, A abgeschlossen, B kompakt, so gilt $d(A,B) > 0$.

Beweis: Die Funktion $f : B \to \mathbb{R} : x \mapsto d(A,x)$ ist stetig (C3N). Aus $x \in B$ folgt $x \notin A$, also $f(x) = d(A,x) > 0$, da A abgeschlossen ist (C3N). Da B kompakt ist, nimmt f ein Minimum an (F1M), das heißt, es existiert $b \in B$ mit $d(A,B) = \inf f = f(b) > 0$. QED

Abstand zwischen Mengen

Lebesgue–Zahl einer Überdeckung

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung. Wir nennen $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ eine **Lebesgue–Zahl** zu $(U_i)_{i\in I}$, falls gilt: Für jeden Punkt $a \in X$ gilt $B(a,\delta) \subset U_i$ für mindestens ein $i \in I$.

Jede Teilmenge $A \subset X$ vom Durchmesser $\operatorname{diam}(A) < \delta$ liegt dann ganz in einer der Mengen U_i, denn $A \subset B(a,\delta)$ für jeden Punkt $a \in A$.

Satz F3B: Lebesgue–Zahl einer Überdeckung

Sei (X,d) ein metrischer Raum und kompakt. Dann erlaubt jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine **Lebesgue–Zahl** $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert ein Index $i_x \in I$ mit $x \in U_{i_x}$ und somit ein Radius $\varepsilon_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x,2\varepsilon_x) \subset U_{i_x}$. Zur offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X} B(x,\varepsilon_x)$ existiert $E \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{x\in E} B(x,\varepsilon_x)$. Wir setzen $\delta := \min\{\, \varepsilon_x \mid x \in E \,\} > 0$. Jeder Punkt $a \in X$ erfüllt $a \in B(x,\varepsilon_x)$ für ein $x \in E$. Also gilt $B(a,\delta) \subset B(x,\varepsilon_x+\delta) \subset B(x,2\varepsilon_x) \subset U_{i_x}$. QED

Lebesgue–Zahl einer Überdeckung

Totalbeschränkte metrische Räume

Ein metrischer Raum (X,d) heißt **beschränkt**, wenn gilt: Für einen bzw. jeden Punkt $a \in X$ ist die Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto d(x,a)$ beschränkt. Für $r \in \mathbb{R}$ mit $f < r$ folgt $X = B(a,r)$. Wir verschärfen diese Bedingung:

Definition F3C: totalbeschränkter metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X,d) heißt **totalbeschränkt**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X \; : \; X = B(a_1,\varepsilon) \cup \dots \cup B(a_n,\varepsilon)$$

D.h. die Abstandsfunktion $f(x) = d(x,A)$ erfüllt $f(x) < \varepsilon$ für alle $x \in X$.

Totalbeschränkt impliziert beschränkt: Aus $X = B(a_1,\varepsilon) \cup \dots \cup B(a_n,\varepsilon)$ folgt $d(x,a_1) < r := \varepsilon + \max d(a_1,a_k)$ für $x \in X$. Die Umkehrung gilt nicht:

Beispiel: In $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist $\bar{B}(0,1)$ beschränkt, aber nicht totalbeschränkt: Die kanonische Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $|e_m - e_n|_\infty = 1$ für alle $m \neq n$. Zu $\varepsilon = 1/2$ überdecken also nicht endlich viele Bälle $B(a_k,\varepsilon)$, denn jeder enthält höchstens einen der Punkte e_n

Totalbeschränkte metrische Räume

Kompaktheit für metrische Räume

Satz F3G: siebenfache Kompaktheit

Für jeden metrischen Raum (X,d) sind äquivalent:

1. **Kompaktheit**: Jede (beliebige) offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.
2. **Abzählbare Kompaktheit:** Jede abzählbare offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.
3. **Häufungspunkte:** Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt.
4. **Folgenkompaktheit:** Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat eine konvergente Teilfolge; es gibt $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ und $x \in X$ sodass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to x$.
5. **Pseudokompaktheit:** Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt ihre Extrema an; es gibt $a,b \in X$ mit $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$.
6. **Lebesgue–Kompaktheit:** (X,d) ist totalbeschränkt und jede offene Überdeckung von X erlaubt eine Lebesgue–Zahl $\delta > 0$.
7. **Heine–Borel–Lebesgue–Kompaktheit:** Der metrische Raum (X,d) ist vollständig und totalbeschränkt.

Kompaktheit für topologische Räume

Satz F3H: vierfache Kompaktheit

Für topologische Räume gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{tikzcd}
\textit{kompakt} \arrow[r, Rightarrow, shift left] & \textit{abzählbar kompakt} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\text{2AA / Lindelöf}"] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & \textit{folgenkompakt} \arrow[l, Rightarrow, shift left] \\
 & \textit{pseudokompakt} \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\text{normal } (T_1 \& T_4)"'] &
\end{tikzcd}$$

Anders als für metrische Räume sind für topologische Räume Kompaktheit und Folgenkompaktheit unabhängige Eigenschaften:

Ein kompakter Raum muss nicht folgenkompakt sein (F3I) und ein folgenkompakter Raum muss nicht kompakt sein (F3J).

Schließlich braucht ein pseudokompakter Raum nicht abzählbar kompakt zu sein (F3K), also auch nicht kompakt oder folgenkompakt.

Lokal-kompakte Räume

Definition F4A: lokale Kompaktheit

Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt **lokal-kompakt** im Punkt $x \in X$, wenn jede Umgebung V von x eine kompakte Umgebung U enthält:

$$\forall V \in \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T})\ \ \exists U \in \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T})\ :\ U \subset V \text{ und } U \text{ kompakt}$$

Gilt dies in jedem Punkt $x \in X$, so nennen wir $(X,\mathcal{T})$ **lokal-kompakt**.

Äquivalent sind hierbei folgende Formulierungen:

1. Jeder Punkt $x \in X$ erlaubt beliebig kleine kompakte Umgebungen.
2. Die kompakten Umgebungen bilden eine Umgebungsbasis $\mathscr{U}_x^{\mathsf{k}}$.
3. Die Topologie $\mathcal{T}$ erlaubt eine Basis aus relativ kompakten Mengen.

Lokal-kompakte Räume

Beispiele: Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sind die kompakten Umgebungen $\bar{B}(x,\varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine UBasis. Die offenen Bälle $\mathcal{B} = \{\, B(x,\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$ sind relativ kompakt.

Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist demnach lokal-kompakt dank $\bar{B}(x,\varepsilon) \subset U$. Jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt dank $\bar{B}(x,\varepsilon) \cap A$.

Jeder diskrete Raum ist lokal-kompakt, zum Beispiel der Teilraum $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

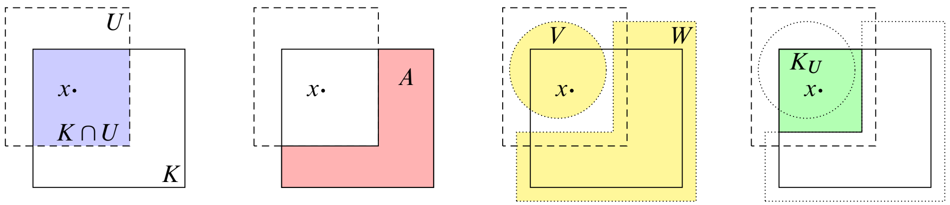
⚠ Der Teilraum $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist nicht lokal-kompakt: Jede Umgebung U von x in $\mathbb{Q}$ enthält ein abgeschlossenes Intervall $I = [a,b]_{\mathbb{Q}}$ mit $a < x < b$. Wäre U kompakt, so auch I (F1G), was jedoch falsch ist (F1D).

⚠ Die Menge $X = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \cup \{X\}$ ist kompakt, aber nicht lokal-kompakt. Hier fehlt die Hausdorff–Eigenschaft:

Satz F4C: Jeder kompakte Hausdorff–Raum ist lokal-kompakt.

Sei $(X,\mathcal{T})$ hausdorffsch. Existiert zum Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung $K \in \mathscr{U}_x^{\mathsf{k}}$, dann ist $(X,\mathcal{T})$ lokal-kompakt im Punkt x.

Jeder kompakte Hausdorff–Raum ist lokal-kompakt.

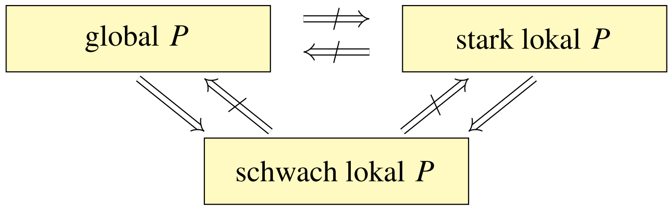


Beweis: Zu jeder offenen Umgebung $U \in \mathscr{U}_x^{\circ}$ konstruieren wir eine kompakte Umgebung $K_U \subset U$ von x wie oben skizziert: Im Teilraum K ist $K \cap U$ offen und $A := K \smallsetminus U$ abgeschlossen, somit kompakt (F1G). Im Hausdorff–Raum X gibt es offene disjunkte Umgebungen V von x und W von A (F1E). Im Teilraum K ist $K \cap W$ offen und $K_U := K \smallsetminus W$ abgeschlossen, somit kompakt (F1G). Daraus folgt $K \cap V \subset K_U \subset U$:

- Aus $V \cap W = \emptyset$ folgt $K \cap V \subset K \smallsetminus W = K_U$.
- Aus $W \supset A$ folgt $K_U = K \smallsetminus W \subset K \smallsetminus A = K \cap U \subset U$.

Mit K und V ist auch $K \cap V$ eine Umgebung von x in X, somit auch $K_U \supset K \cap V$. QED

Starke und schwache Lokalisierung



Wir können eine Eigenschaft $P : \mathfrak{P}(X) \to \{0,1\}$, etwa Kompaktheit, von Teilmengen eines topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$ verschieden lokalisieren:

0. Die Eigenschaft P gilt **global**, wenn X diese Eigenschaft hat.
1. Die Eigenschaft P gilt im Punkt $x \in X$ **lokal im schwachen Sinne**, wenn x mindestens eine Umgebung U mit der Eigenschaft P hat.
2. Die Eigenschaft P gilt im Punkt $x \in X$ **lokal im starken Sinne**, wenn jede Umgebung V von x eine Umgebung U von x enthält, die die Eigenschaft P erfüllt.

Beispiele: Für „lokal euklidisch“ impliziert schwach auch stark. Für „lokal-kompakt“ gilt dies i.A. nicht; für Hausdorff–Räume gilt es!

Lokale-kompakte Teilräume

Lokale Kompaktheit vererbt sich nicht auf jeden Teilraum, siehe $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Lemma F4E: Lokale Kompaktheit vererbt sich...

Ist der topologische Raum X lokal-kompakt,
so auch jeder offene / abgeschlossene Teilraum $Y \subset X$.

Beweis: Sorgfältig nachrechnen, wie oben im $\mathbb{R}^n$. Übung!

Beispiele: $[0,1]$ und $]0,1[$ sind lokal-kompakt, aber auch $[0,1[$.

Satz F4F: ... auf lokal-abgeschlossene Teilräume.

Sei $(X,\mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch. Für $Y \subset X$ sind äquivalent:

1. Der Teilraum Y ist lokal-kompakt (im Sinne der Definition F4A).
2. Es gilt $Y = U \cap A$ mit $U \subset X$ offen und $A \subset X$ abgeschlossen.
   Hierzu sagen wir: Y ist **lokal-abgeschlossen** im Raum $(X,\mathcal{T})$.

Beweis: Geduldig nachrechnen, siehe Skript.
Das ist nicht schwer, aber etwas länglich.

Lokal-kompakte Vektorräume

Satz F4J: lokal-kompakte Vektorräume

Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum $(X,\mathcal{T},+,\cdot)$ ist genau dann
lokal-kompakt, wenn er endlich dimensional ist, also $\dim_{\mathbb{R}} X < \infty$.
In diesem Fall ist er sogar linear homöomorph zu $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n},+,\cdot)$.

Beweis: Siehe Skript oder W. Rudin: *Functional Analysis*, Thm 1.22.

Die Funktionalanalysis untersucht und nutzt normierte Vektorräume
und bei Bedarf auch ganz allgemein topologische Vektorräume.

Für endlich-dimensionale $\mathbb{R}$–Vektorräume genügt die Lineare Algebra.
Für unendlich-dimensionale Vektorräume genügt dies meist nicht,
der Durchbruch gelingt erst in Verbindung mit der Topologie!

Lokal-kompakte Vektorräume

Lemma F4I: Abschluss in topologischem Vektorraum

Sei $(X,\mathcal{T},+,\cdot)$ ein topologischer Vektorraum und $\mathcal{B}_0$ eine UBasis von 0.
Für jede Teilmenge $A \subset X$ ist der Abschluss $\overline{A} = \bigcap\{\, A+U \mid U \in \mathcal{B}_0 \,\}$.

Beweis: Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{B}_x = \{\, x-U \mid U \in \mathcal{B}_0 \,\}$ eine UBasis (F2T).
Genau dann gilt $x \in \overline{A}$, wenn $(x-U) \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{B}_0$ gilt:
Das heißt, für jedes $U \in \mathcal{B}_0$ existiert ein $a \in A$ mit $a \in x-U$,
also $x \in a+U$, kurz $x \in A+U$. QED

Satz F4J: lokal-kompakte Vektorräume

Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum $(X,\mathcal{T},+,\cdot)$ ist genau dann
lokal-kompakt, wenn er endlich dimensional ist, also $\dim_{\mathbb{R}} X < \infty$.
In diesem Fall ist er linear homöomorph zu $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n},+,\cdot)$.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Gilt $\dim_{\mathbb{R}} X = n < \infty$, so existiert ein $\mathbb{R}$–Isomorphismus
$f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X$. Dank F2V (Kompakt–Hausdorff–Kriterium) ist dieser ein
Homöomorphismus. Genau wie $\mathbb{R}^n$ ist dann auch X lokal-kompakt.

Lokal-kompakte Vektorräume

„$\Rightarrow$“: Sei nun umgekehrt X lokal-kompakt. Es existiert eine offene
Umgebung V von 0 in X mit kompaktem Abschluss $\overline{V}$. Nach F2T enthält
jede Umgebung von 0 eine ausgewogene Umgebung U von 0, mit
$U \subset 2U \subset 3U \subset \dots$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^n U$. Dank Kompaktheit folgt
$V \subset \overline{V} \subset 2^n U$ für ein n, also $2^{-n}V \subset U$. Demnach ist $(2^{-n}V)_{n\in\mathbb{N}}$ eine
Umgebungsbasis von 0. Mit V ist auch $x + \frac{1}{2}V$ offen (F2T). Zur offenen
Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X}(x+\frac{1}{2}V)$ existieren $x_1,\dots,x_m \in X$ mit

$$\overline{V} \subset \left(x_1 + \tfrac{1}{2}V\right) \cup \dots \cup \left(x_m + \tfrac{1}{2}V\right).$$

Wir betrachten den erzeugten Vektorraum $Y := \mathbb{R}x_1 + \dots + \mathbb{R}x_m$. Es gilt
$\dim_{\mathbb{R}} Y \le m < \infty$. Aus $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ und $\frac{1}{2}Y = Y$ folgt $\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$, also

$$V \quad\subset\quad Y + \tfrac{1}{2}V \quad\subset\quad Y + Y + \tfrac{1}{4}V \quad=\quad Y + \tfrac{1}{4}V.$$

Per Induktion folgt so $V \subset Y + 2^{-n}V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, nach F4I also

$$V \quad\subset\quad \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} Y + 2^{-n}V \quad=\quad \overline{Y}.$$

Nach F2V ist Y in X abgeschlossen, also $V \subset Y$. Die Umgebung V von 0
in X ist absorbierend (F2T), also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nV \subset Y$ und $X = Y$. QED

Kompaktifizierung

Kompaktheit ist eine schöne und nützliche Eigenschaft.
Was noch nicht kompakt ist, wird kompakt gemacht!

Beispiele: Die Inklusionen $[0,1[\hookrightarrow[0,1]$ und $]-1,1[\hookrightarrow[-1,1]$:
Die Intervalle $[0,1]$ und $[-1,1]$ sind hausdorffsch und kompakt (F1D).

Die Inklusion $\mathbb{R}\hookrightarrow\bar{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ in die erweiterte Zahlengerade:
Der Raum $\bar{\mathbb{R}}$ mit Ordnungstopologie ist hausdorffsch und kompakt (F1D).

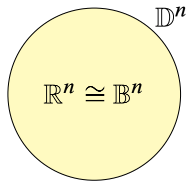
Ist ein topologischer Raum X nicht kompakt, so wollen wir ihn möglichst **kompaktifizieren**, das heißt, in einen kompakten Raum Y einbetten.

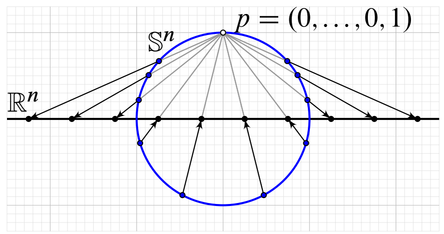
In Y ist dann der Abschluss $\overline{X}$ kompakt (F1G), also genügt $Y=\overline{X}$.
Zudem wollen wir fortan immer die Hausdorff–Eigenschaft fordern.

Definition F5A: (Hausdorff–)Kompaktifizierung

Sei X ein topopologischer Raum. Eine **(Hausdorff–)Kompaktifizierung** von X ist ein Paar (Y,κ) aus einem kompakten (Hausdorff–)Raum Y zusammen mit einer Einbettung $\kappa: X\hookrightarrow Y$, sodass $\overline{\kappa(X)}=Y$ gilt.

Kompaktifizierung





Beispiel: Die Inklusion $\mathbb{B}^n\hookrightarrow\mathbb{D}^n$ ist eine Kompaktifizierung (F1T), ebenso die Komposition $\kappa:\mathbb{R}^n\xrightarrow{\sim}\mathbb{B}^n\hookrightarrow\mathbb{D}^n: x\mapsto x/(1+|x|)$.

Speziell in Dimension $n=1$ ist $\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}]-1,1[\hookrightarrow[-1,1]$ topologisch äquivalent zur obigen Kompaktifizierung $\mathbb{R}\hookrightarrow\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Beispiel: Die stereographische Projektion (A1L) definiert eine Einpunktkompaktifizierung $\kappa:\mathbb{R}^n\xrightarrow{\sim}\mathbb{S}^n\smallsetminus\{p\}\hookrightarrow\mathbb{S}^n$.

In Dimension $n=1,2$ erhalten wir $\mathbb{R}\hookrightarrow\widehat{\mathbb{R}}=\mathbb{S}^1$ die Kreislinie und $\mathbb{C}\hookrightarrow\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{S}^2$ die Riemannsche Zahlensphäre.

Die Einpunktkompaktifizierung nach Alexandroff

Satz F5D: Einpunktkompaktifizierung nach Alexandroff, 1924

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\infty\notin X$ ein weiterer Punkt. Auf der Menge $\widehat{X}=X\cup\{\infty\}$ definieren wir die **Alexandroff–Topologie** durch

$$\widehat{\mathcal{T}}:=\mathcal{T}\cup\big\{\,\widehat{X}\smallsetminus K \;\big|\; K\subset X \text{ kompakt und abgeschlossen in } (X,\mathcal{T})\,\big\};$$

letzteres sind die offenen Umgebungen des Punktes ∞ im Raum $\widehat{X}$.
Damit ist $\widehat{\mathcal{T}}$ tatsächlich eine Topologie auf $\widehat{X}$: Es gilt (O1–3).

Der Raum $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{T}})$ ist kompakt, und hierin ist $(X,\mathcal{T})$ ein offener Teilraum.
Die Topologie $\widehat{\mathcal{T}}$ auf $\widehat{X}$ ist die feinste mit diesen beiden Eigenschaften.

Wir nennen $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{T}})$ die **Einpunktkompaktifizierung** von $(X,\mathcal{T})$ oder die **Alexandroff–Kompaktifizierung**. Genau dann ist $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{T}})$ hausdorffsch, wenn $(X,\mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch ist. In diesem Fall ist $\widehat{\mathcal{T}}$ auf $\widehat{X}$ die einzige kompakte Hausdorff–Topologie mit Teilraum $(X,\mathcal{T})$.

Beweis: Sorgfältig nachrechnen. Übung! $\boxed{\text{QED}}$

Die Einpunktkompaktifizierung nach Alexandroff

Korollar F5F: lokal-kompakte Hausdorff–Räume

Die lokal-kompakten Hausdorff–Räume sind genau die offenen Teilräume kompakter Hausdorff–Räume.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Lokale Kompaktheit vererbt sich (F4E).
„$\Rightarrow$“: Die Einpunktkompaktifizierung genügt (F5D). $\boxed{\text{QED}}$

Bemerkung: Ist $(X,\mathcal{T})$ hausdorffsch, so ist jede kompakte Teilmenge K in X abgeschlossen (F1H) und die Konstruktion vereinfacht sich zu

$$\widehat{\mathcal{T}}=\mathcal{T}\cup\big\{\,\widehat{X}\smallsetminus K \;\big|\; K\subset X \text{ kompakt}\,\big\}.$$

Bemerkung: Ist der Startraum $(X,\mathcal{T})$ bereits kompakt, so ist jede abgeschlossene Teilmenge K in X kompakt (F1G), und somit ist

$$\widehat{\mathcal{T}}=\mathcal{T}\cup\big\{\,U\cup\{\infty\} \;\big|\; U\in\mathcal{T}\,\big\}$$

gerade die Summentopologie auf $\widehat{X}=X\sqcup\{\infty\}$ (E3A).

Einpunktkompaktifizierungen sind minimal / terminal.

Korollar F5G: Einpunktkompaktifizierungen sind minimal / terminal.

Sei X lokal-kompakt hausdorffsch, aber selbst noch nicht kompakt. Jede Einpunktkompaktifizierung $\alpha : X \to \widehat{X}$ erfreut sich folgender UAE:

Zu jeder Kompaktifizierung $\kappa : X \to Y$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \to \widehat{X}$ mit $f \circ \kappa = \alpha$ (terminale Kompaktifizierung).

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\exists! f"] & & \widehat{X} \\ & X \arrow[ul, "\kappa"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, shift left, "\exists! f"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \widehat{X} \arrow[ll, shift left, "\exists! g"] \\ & X \arrow[ul, "\tilde{\alpha}"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Hieraus folgt Eindeutigkeit: Sind $\alpha : X \to \widehat{X}$ und $\tilde{\alpha} : X \to \tilde{X}$ zwei Einpunktkompaktifizierungen, dann existiert genau ein Homöomorphismus $(f,g) : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \widehat{X}$ mit $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ und $g \circ \alpha = \tilde{\alpha}$.

Beweis: Sorgfältig nachrechnen. Übung! $\boxed{\text{QED}}$

Einpunktkompaktifizierungen sind minimal / terminal.

Sei X lokal-kompakt hausdorffsch, aber selbst noch nicht kompakt. Satz F5D konstruiert zu $(X,\mathcal{T})$ die Einpunktkompaktifizierung $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{T}})$.

Alle Schritte in Alexandroffs Konstruktion sind explizit: Die Grundmenge $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ und darauf die Topologie $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\, \widehat{X} \smallsetminus K \mid K \subset X \text{ kompakt} \,\}$.

Zudem haben wir die grundlegende Eindeutigkeitsaussage: Auf $\widehat{X}$ ist $\widehat{\mathcal{T}}$ die einzige kompakte Hausdorff–Topologie mit Teilraum $(X,\mathcal{T})$.

Dual hierzu betrachtet Satz F5G nicht explizit den Raum $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{T}})$, also Punkte und offene Mengen, sondern die stetigen Abbildungen, also die Kompaktifizierung $\alpha : X \to \widehat{X}$ und ihre universelle Abbildungseigenschaft.

Wir betrachten hier nicht konkret, wie der Raum $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{T}})$ *aufgebaut* ist, sondern abstrakt, was die Kompaktifizierung $\alpha : X \to \widehat{X}$ *leistet*.

Auch auf diese Weise lässt sich die Einpunktkompaktifizierung charakterisieren. Das ist überaus bemerkenswert.

Mathematisch-philosophisches Leitmotiv

Einpunktkompaktifizierung, Produkt, Summe, Quotient, Teilraum, ...
Viele mathematische Objekte lassen sich auf zwei Arten betrachten:

Menge mit Struktur $(X, \dots)$	**Morphismen** $\forall Y\ \exists! f : Y \to X$
interne Beschaffenheit Beziehung zwischen Elementen	externe Eigenschaften Beziehung zu anderen Objekten
Datenstruktur, Implementierung Was ist X? Wie ist X aufgebaut?	Verhalten, Semantik, Axiome Was tut X? Was leistet X für uns?
konkret und theoretisch	abstrakt und angewandt
explizite Bauanleitung Konstruktion $\Rightarrow$ Existenz	bequeme Bedienungsanleitung Definition $\Rightarrow$ Eindeutigkeit

Ebenso: Vektorraum V mit Basis $B = (b_i)_{i \in I}$, Polynomring $K[X]$, ...
Auch natürliche Zahlen $(\mathbb{N},+,0,\cdot,1)$, ganze Zahlen $(\mathbb{Z},+,0,\cdot,1)$, rationale Zahlen $(\mathbb{Q},+,0,\cdot,1,<)$, reelle Zahlen $(\mathbb{R},+,0,\cdot,1,<)$, ...

In Kapitel H formen wir diese Idee zu einer mathematischen Sprache, mit der Sie effizient arbeiten und rechnen können, gar Sätze beweisen!

Mathematisch-philosophisches Leitmotiv

Dieses grundlegende Muster finden Sie nicht nur in der Mathematik, sondern ebenso in der Informatik, der Physik, der Technik, etc.

Die Etiketten „konkret“ und „abstrakt“ gefallen mir nicht besonders; sie sind manchmal hilfreich, oft verschleiern sie das Wesentliche!

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut.

Zur Klarstellung muss und will ich Partei ergreifen für die Abstraktion: Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

Wichtigstes Beispiel: Kompaktifizierungen des $\mathbb{R}^n$

Beispiel F5H: Kompaktifizierungen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$

(0) Die stereographische Projektion (A1L) beschert uns eine explizite und sehr schöne Einpunktkompaktifizierung $\kappa:\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$.

Dank der Eindeutigkeitsaussage des Satzes F5G ist diese homöomorph zur Alexandroff–Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ (wie in Satz F5D konstruiert).

(1) Von der Zweipunktkompaktifizierung $\kappa:\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \cong [-1,1]$ zu Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung $\alpha:\mathbb{R} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$ haben wir $f:\bar{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ durch Zusammenschlagen gemäß $\pm\infty \mapsto \infty$. Dies ist homöomorph zu $[-1,1] \twoheadrightarrow [-1,1] /\!\!/ \{-1,1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ (E2T).

(2) Von der Ballkompaktifizierung $\kappa:\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n : x \mapsto x/(1+|x|)$ zur stereographischen Einpunktkompaktifizierung $\alpha:\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ haben wir die wohlbekannte Identifizierung $f:\mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ durch Zusammenschlagen des Randes (F2E).

Einpunktkompaktifizierungen: Anwendungsbeispiele

Beispiel / Übung F5I: erste einfache Illustrationen

Bestimmen Sie zu der euklidischen Halbebene $A = \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}$ möglichst explizit eine Einpunktkompaktifizierung $\kappa:A \hookrightarrow K \subset \mathbb{R}^n$.

Dieselbe Aufgabe für $B =]0,1[$, $C = [0,1[\cup [2,3[$, $D =]0,1[\cup]2,3[$.

Beispiel / Übung F5J: etwas kniffligere Illustrationen

Nennen Sie zu Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung $\alpha_i : X_i \hookrightarrow \widehat{X}_i$ explizit eine homöomorphe Kompaktifizierung $\kappa_i : X_i \hookrightarrow Y_i$ mit $Y_i \subset \mathbb{R}^n$:

$X_1 = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| \le 1 \,\}$, $X_2 = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le |x| < \infty \,\}$,

$X_3 = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le |x| < 1 \,\}$, $X_4 = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < 1 \,\}$,

$X_5 = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|, |x_2| < 1 \,\}$, $X_6 = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| < 1 \,\}$,

$X_7 = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \ge 0, |x| < 1 \,\}$, $X_8 \subset \mathbb{R}^m$ offen und sternförmig.

Mathematisch-didaktisches Leitmotiv

Sätze formuliere ich möglichst explizit: Alle nötigen Daten liegen vor. Der Beweis besteht im sorgsamen Nachrechnen aller Behauptungen.

Auch diese Pflicht muss getan werden, es ist ehrliche Arbeit, oft Routine. Wir leiten Sie zu dieser Sorgfalt an, es wird Ihnen auch selbst gelingen.

Das ist mathematisches Handwerk und hat bekanntlich goldenen Boden. Als MathematikerIn wollen Sie genau wissen, wovon Sie sprechen.

Darüber hinaus geht es um zentrale Ideen, Bedeutung und Überblick, mathematische Intuition, geometrische Anschauung und Beispiele.

Mathematik umschrieb man einst als *die Lehre von Zahlen und Figuren*. Speziell in der Topologie erweisen beide ihren gegenseitigen Nutzen.

Dürfen wir Bildern vertrauen? Können wir Formeln veranschaulichen? Lieber Anschauung oder Formalisierung? Sie benötigen beides!

Sie sollen beides beherrschen und ineinander übersetzen können.
C'est par la logique que l'on prouve et par l'intuition que l'on découvre.

Mathematisch-didaktisches Leitmotiv

Vielleicht sind Sie gerade etwas unglücklich, dass ich nicht alles vorführe, oder unsicher, welche Arbeit Sie genau übernehmen sollen.

Tatsächlich will und kann ich nicht alles vorturnen, das wäre langweilig. Es geht vielmehr darum, Sie zu mathematischer Arbeit anzuleiten, Ihnen die nötigen Techniken zu erklären und Werkzeuge mitzugeben, zu deren eigenständigen Nutzung zu ermutigen, Sie zu aktivieren.

Gib einem Menschen einen Fisch, und du ernährst ihn für einen Tag.
Lehre ihn zu fischen, und er ernährt sich sein Leben lang.

Die Auseinandersetzung mit der Mathematik ist für Sie harte Arbeit, übrigens auch für mich und alle Beteiligten, doch es lohnt sich! Unsere Arbeitsteilung ist nicht fix, sondern muss austariert werden. Die Grenzziehung ist fein, erfahrungsgemäß funktioniert es recht gut.

Sie dürfen der Erfahrung Ihrer Dozenten vertrauen, sie meinen es gut, doch nicht darauf ausruhen: Werden Sie kritisch und selbstständig! Wo immer Sie das Leben hinführt, Ihre Lehrer werden nicht mitgehen. Am Ende zählt allein Ihr solides Wissen und eigenständiges Können.

Eigentliche Abbildungen

Definition F6B: eigentliche Abbildung

Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **eigentlich**, engl. *proper*, wenn sie stetig und abgeschlossen ist, und für jeden Punkt $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ kompakt ist.

Beispiele: Jeder Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist eigentlich.

Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ von einem kompakten Raum X in einen Hausdorff–Raum Y ist eigentlich: f ist abgeschlossen (F1N) und über jedem Punkt $y \in Y$ ist die Faser $f^{-1}(\{y\})$ kompakt (F1G).

Satz F6C: Eigentliche Abbildungen haben starke Eigenschaften.

Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive eigentliche Abbildung.

1. Ist X hausdorffsch, dann ist auch Y hausdorffsch.
2. Ist $K \subset Y$ kompakt, dann ist auch $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt.
3. Genau dann ist X lokal-kompakt, wenn Y lokal-kompakt ist.

Aus (2) folgt: Die Komposition eigentlicher Abbildungen ist eigentlich.

Eigentliche Abbildungen

Die ausführlichen Beweise dieser Sätze finden Sie im Skript.

Ich möchte zunächst lieber die Begriffe und Eigenschaften erklären, die formalen Beweise stelle ich für später zurück, falls dies nötig wird. Sie haben in der ersten Hälfte dieses Kapitels gesehen, dass dies alles zwar nicht wirklich schwer ist, aber doch Geduld und Mühe kostet.

Sie kennen nun alle nötigen Techniken, um es selbst zu versuchen. Wo diese Ausführung zu schwer ist, helfen Skript und Literatur. Aus Zeitgründen scheint mir dies ein guter Kompromiss. Auf uns warten noch weitere schöne Themen!

Charakterisierung eigentlicher Abbildungen

Satz F6E: Charakterisierung eigentlicher Abbildungen

Seien X und Y lokal-kompakte Hausdorff–Räume. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Abbildung f ist eigentlich (im Sinne der Definition F6B).
2. Für jedes Kompaktum $K \subset Y$ ist das Urbild $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt.
3. Die Fortsetzung von $f : X \to Y$ zu $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ mit $\infty_X \mapsto \infty_Y$ ist stetig.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\alpha_X"'] & Y \arrow[d, hook, "\alpha_Y"] \\
\widehat{X} \arrow[r, "\widehat{f}", "\infty_X \mapsto \infty_Y"'] & \widehat{Y}
\end{tikzcd}$$

Beispiel: Zu $c \in \mathbb{C}$ definieren wir $f : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ durch $f(t) = \exp(ct)$. Für $c = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt demnach $f(t) = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$. Für $a \neq 0$ ist dies eine Einbettung, für $a = 0$ identifizierend. Die Abbildung f ist eigentlich für $a > 0$, nicht für $a \le 0$.

Charakterisierung eigentlicher Abbildungen

Bemerkung: Wir haben zunächst eigentliche Abbildungen zwischen allgemeinen topologischen Räumen diskutiert. Wenn man sich nur für eigentliche Abbildungen lokal-kompakter Hausdorff–Räume interessiert, dann kann man Bedingung (2) aus Satz F6E als Definition verwenden: Diese ist dann zwar nur auf einen Spezialfall zugeschnitten, aber die allgemeineren Ausführungen werden umgangen. Bei unserem Vorgehen ist F6E ein Satz, der aus der allgemeineren Definition abgeleitet wird. Manche Autoren behandeln ausschließlich diesen einfachen Spezialfall.

Übung F6F: eigentliche Polynomfunktionen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und hierauf $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ eine Polynomfunktion mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ und $a_n \neq 0$. Genau dann ist f eigentlich, wenn $n \ge 1$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie Satz F6E zur Charakterisierung eigentlicher Abbildungen! Eine der drei Eigenschaften ist hier leicht zu sehen… Durch Beispiele erfahren Sie den Nutzen topologischer Werkzeuge.