Kapitel F

Kompaktheit und Kompaktifizierung

Habe nun, ach! Philosophie, // Juristerei und Medizin,
Und leider auch Topologie // Durchaus studiert, mit heißem Bemühn.
Da steh' ich nun, ich armer Tor, // Und bin so klug als wie zuvor!

Nun sag, wie hast du's mit dem Auswahlaxiom? Du bist ein herzlich guter Mann, allein ich glaub, du hältst nicht viel davon.

frei nach Goethe (1749–1832), *Faust*, zur Gretchen-Grundlagen-Frage:
Zählt Tychonoffs Theorem noch zur Topologie oder schon zur Theologie?

Inhalt dieses Kapitels F

Kompakt heißt topologisch endlich.

🙂 Jede *endliche* Menge $X \neq \emptyset$ erfreut sich besonderer Eigenschaften:

(3) Jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihre Extrema an:
Es existieren $a, b \in X$ mit $f(a) \le f(x) \le f(b)$ für alle $x \in X$.

(2) Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ in X nimmt einen Wert a unendlich oft an:
Es existieren Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ mit $x_{n_0} = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = a$.

(1) Jede Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ enthält eine endliche Teilüberdeckung:
Es existieren Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

🙂 Dem entsprechen topologische Eigenschaften eines Raums $(X, \mathcal{T})$, die Sie in verschiedenen Varianten aus der Analysis kennen und lieben:

(1) **Kompaktheit:** Jede *offene* Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, mit $U_i \in \mathcal{T}$, enthält eine endliche Teilüberdeckung, also $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

(2) **Folgenkompaktheit:** Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ im Raum $(X, \mathcal{T})$ enthält eine *konvergente* Teilfolge, also $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ mit $x_{n_k} \to a$.

(3) **Pseudokompaktheit:** Jede *stetige* Funktion $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ nimmt ihre Extrema an, also $f(a) \le f(x) \le f(b)$ für alle $x \in X$.

Kompakt heißt topologisch endlich.

Nach Vollständigkeit ist Kompaktheit der wichtigste Grundbegriff der Analysis. Viele Sätze gelten nur bei Kompaktheit, siehe obige Beispiele. Andere Sätze sind für kompakte Räume leicht, sonst aber nur schwer zu beweisen. Wir sind daher im Allgemeinen gut beraten, bei der Erkundung schwierigen Terrains zunächst von kompakten Räumen auszugehen.

Umgekehrt kommt es vor, dass kompakte Räume für bestimmte Fragen ungeeignet sind, etwa weil sie für die gewünschten Konstruktionen „zu klein“ sind. Manch wichtiger Raum, wie die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$, ist eben nicht kompakt. Hier leistet lokale Kompaktheit (§F3) gute Dienste, mit Kompaktifizierung (§F4) und eigentlichen Abbildungen (§F5).

Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum X ist genau dann lokal-kompakt, wenn er endlich-dimensional ist, also $n = \dim_{\mathbb{R}} X < \infty$ gilt (F6u). In diesem Fall ist er sogar linear homöomorph zum euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (F6s). Die einzige Vektorraumtopologie auf $\mathbb{R}^n$ ist somit die euklidische (F6o). Dieses schöne Ergebnis bestärkt unsere bisherige Erfahrung, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ besonders gute Eigenschaften hat.

Kompakte topologische Räume

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $U_i \subseteq X$ heißt **Überdeckung** von X, falls $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt. Sie heißt **offen**, falls jede Menge U_i offen in X ist, also $U_i \in \mathscr{T}$. Sie heißt **abzählbar**, wenn I abzählbar ist, und **endlich**, wenn I endlich ist. Eine **Teilüberdeckung** ist eine Teilfamilie $(U_i)_{i\in J}$ mit $J \subseteq I$ und weiter überdeckend, $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Die folgende Definition hat sich als fundamental herauskristallisiert:

Definition F1A: Kompaktheit / Überdeckungseigenschaft

Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{T})$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält:

Zu jeder Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen $U_i \in \mathscr{T}$ mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ existieren endliche viele Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Manche Autoren folgen Bourbaki und nennen F1A nur **quasikompakt**, für kompakte Räume verlangen sie zudem die Hausdorff–Eigenschaft. Ich sage nicht „quasikompakt“, sondern kurz und einfach „kompakt“, und spreche gegebenenfalls von einem kompakten Hausdorff–Raum.

Kompakte topologische Räume

Beispiele: Ein diskreter Raum $(X, \mathfrak{P}(X))$ ist kompakt gdw X endlich ist. Jeder indiskrete Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist kompakt… und laaaaaaangweilig.

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} B(0, r)$ nicht kompakt. Diese offene Überdeckung enthält keine endliche Teilüberdeckung!

Die offene Überdeckung $\mathbb{R} = \,]{-\infty}, -99[\, \cup \,]{+99}, +\infty[\, \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n-1, n+1[$ erlaubt eine endliche Teilüberdeckung. Dennoch ist $\mathbb{R}$ nicht kompakt!

Kompaktheit F1A fordert, dass *jede* offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung erlaubt. *Irgendeine* existiert immer, etwa $X = \bigcup\{X\}$.

Auch das beschränkte Intervall $]0, 1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]2^{-n}, 1]$ ist nicht kompakt. Diese offene (!) Überdeckung enthält keine endliche Teilüberdeckung!

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ gilt eine erfreuliche Charakterisierung:

Satz von Heine–Borel (F10): Ein euklidischer Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt gdw die Menge A in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Das ist nicht die Definition von Kompaktheit, sondern eine Folgerung! Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist es ein bequemes Kriterium, notwendig und hinreichend.

Absolute und relative Kompaktheit in einem Raum

Definition F1B: absolute / relative Kompaktheit einer Teilmenge

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(1) Wir nennen $A \subseteq X$ **kompakt im Raum** $(X, \mathcal{T}_X)$, wenn jede offene Überdeckung von A in $(X, \mathcal{T}_X)$ eine endliche Teilüberdeckung enthält:

Zu $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{T}_X$ existiert $J \subseteq I$ endlich mit $A \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i$.

Dank Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A = \{ U = V \cap A \mid V \in \mathcal{T}_X \}$ ist äquivalent:
(0) Der Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$ ist **kompakt** gemäß obiger Definition F1A:

Zu $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_A$ existiert $J \subseteq I$ endlich mit $A = \bigcup_{i \in J} U_i$.

(2) Wir nennen $A \subseteq X$ **relativ kompakt im Raum** $(X, \mathcal{T}_X)$, falls der Abschluss $\overline{A}$ in $(X, \mathcal{T}_X)$ kompakt ist.

Erfreulicherweise sind die ex- und intrinsische Sichtweise äquivalent, (1) als Teilmenge A in $(X, \mathcal{T})$ und (0) als eigenständiger Raum $(A, \mathcal{T}_A)$. Relative Kompaktheit (2) bezieht sich immer auf den umgebenden Raum.

Absolute und relative Kompaktheit in einem Raum

Beispiele: Jede endliche Teilmenge $A \subseteq X$ ist kompakt in $(X, \mathcal{T})$.

Sind $A_1, \dots, A_n$ (relativ) kompakt in $(X, \mathcal{T})$, so auch $A_1 \cup \dots \cup A_n$ (D5G). Für $A_1 \cap \dots \cap A_n$ benötigen wir die Hausdorff–Eigenschaft! (F1F, F1G)

In $\mathbb{R}$ ist $A = \{ 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ nicht kompakt, siehe $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}]2^{-n}, 2[$. Der Abschluss $\overline{A} = A \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$ ist hingegen kompakt (F1C, F1O).

Beispiel / Übung F1C: Kompaktheit einer konvergenten Folge

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x_\infty$ eine konvergente Folge. Dann ist die Menge $A = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ x_\infty \}$ kompakt in $(X, \mathcal{T})$.

In $\mathbb{R}$ ist das Intervall $A =]0, 1]$ nicht kompakt, siehe $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}]2^{-n}, 2[$, es ist aber relativ kompakt, denn $\overline{]0, 1]} = [0, 1]$ ist kompakt (F1D, F1O).

In $\mathbb{R}^n$ ist der offene Ball $\mathbb{B}^n = B(0, 1) = \bigcup_{r<1} B(0, r)$ zwar nicht kompakt, doch relativ kompakt, denn der Abschluss $\mathbb{D}^n = \bar{B}(0, 1)$ ist kompakt (F1O).

In $\mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ relativ kompakt (F1O), denn $A = \overline{B}$ ist abgeschlossen und immer noch beschränkt.

Kompaktheit von Intervallen

In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $X = [a, b]$ mit $a \le b$ kompakt. Allgemein sei $(X, <)$ eine totalgeordnete Menge, $X \neq \emptyset$, mit Ordnungstopologie $\mathcal{T}_<$ (D1M).

Satz F1D: Kompaktheit von Intervallen

Genau dann ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_<)$ mit $X \neq \emptyset$ kompakt, wenn jede Teilmenge $E \subseteq X$ ein Supremum und ein Infimum in $(X, <)$ besitzt.

Beispiele: Für $X = \{0 < \dots < n\}$ ist $\mathcal{T}_<$ diskret und $(X, \mathcal{T}_<)$ kompakt. In $\mathbb{R}$ ist $[a, b]$ kompakt. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, siehe

$$\mathbb{R} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_{<s} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_{>t} = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \left]-r, r\right[$$

ebensowenig die Halbgeraden $\mathbb{R}_{\ge a} = \bigcup_{s\ge a} [a, s[$ und $\mathbb{R}_{\le b} = \bigcup_{s\le b}]s, b]$.
In $\mathbb{Q}$ ist $[a, b]_\mathbb{Q}$ mit $a < b$ nicht kompakt; für $\xi \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}$ gilt

$$[a, b]_\mathbb{Q} \;=\; \bigcup_{u<\xi} [a, u[_\mathbb{Q} \;\sqcup\; \bigcup_{v>\xi}]v, b]_\mathbb{Q}.$$

Jede endliche Teilüberdeckung liefert nur $[a, u[_\mathbb{Q} \cup]v, b]_\mathbb{Q}$ mit $u < \xi < v$, lässt also eine erhebliche Lücke und überdeckt niemals ganz $[a, b]_\mathbb{Q}$.

Kompaktheit von Intervallen

Satz F1D: Kompaktheit von Intervallen

Genau dann ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_<)$ mit $X \neq \emptyset$ kompakt, wenn jede Teilmenge $E \subseteq X$ ein Supremum und ein Infimum in $(X, <)$ besitzt.

Beweis: Wir zeigen „⇒“ durch Kontraposition (wie in obigen Beispielen).
(1) Hätte $(X, <)$ kein Supremum, so wäre $X = \bigcup_{s\in X} X_{<s}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Infimum entsprechend. Im Folgenden sei also $a = \inf X$ und $b = \sup X$ in X, somit $X = [a, b]$.
(2) Zu $E \subseteq X$ sei $T := \{ t \in X \mid E \le t \}$ die Menge der oberen Schranken. Angenommen T hat kein Minimum. Wir erhalten die offene Überdeckung

$$X \;=\; \bigcup_{u\in E} X_{<u} \;\sqcup\; \bigcup_{v\in T} X_{>v}.$$

(2a) Für $x \in X$ gilt entweder $x \in T = \bigcup_{v\in T} X_{>v}$ oder $x < u$ für ein $u \in E$.
(2b) Diese erlaubt keine endliche Teilüberdeckung, andernfalls hätten wir $T =]t_1, b] \cup \dots \cup]t_n, b] =]t, b]$ mit $t = \min\{t_1, \dots, t_n\} \in T$, Widerspruch!

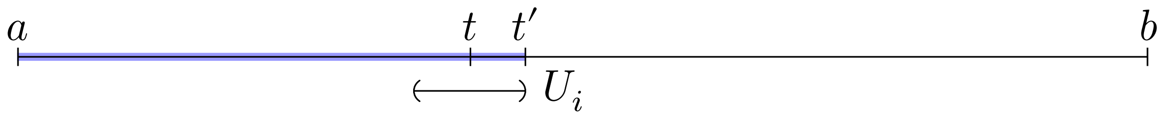
Kompaktheit von Intervallen

Satz F1D: Kompaktheit von Intervallen

Genau dann ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_<)$ mit $X \neq \emptyset$ kompakt, wenn jede Teilmenge $E \subseteq X$ ein Supremum und ein Infimum in $(X, <)$ besitzt.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Wir haben $a = \inf X$ und $b = \sup X$, also $X = [a, b]$.
Sei $X = [a, b] = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_<$ eine offene Überdeckung.

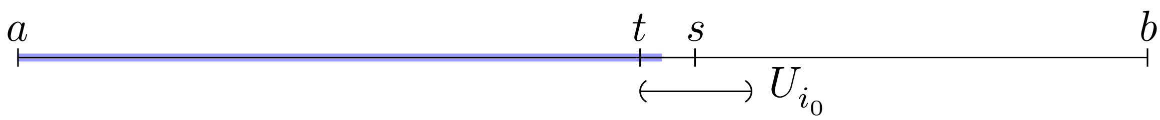
Sei E die Menge aller $t \in [a, b]$, für die $[a, t]$ endlich überdeckt wird, also $[a, t] \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ für geeignete $i_1, \dots, i_n \in I$. Offensichtlich gilt $a \in E$.
Wir zeigen nun $E = [a, b]$ durch „ordnungsvollständige Induktion“.



(3) Zu jedem $t \in E$ mit $a \leq t < b$ existiert $t' \in E$ mit $t < t' \leq b$.

Beweis: Aus $[a, t] \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ folgt $t \in U_i$ für ein $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$.
Da die Menge U_i in $(X, \mathcal{T}_<)$ offen ist, existiert $t' \in]t, b]$ mit $[t, t'[\subseteq U_i$.
Zu t' existiert $i_0 \in I$ mit $t' \in U_{i_0}$. Somit gilt $[a, t'] \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Kompaktheit von Intervallen



(4) Für $s := \sup E$ gilt $s \in E$, also $s = \max E$.

Beweis: Dank (3) gilt $s > a$. Zu $s \in U_{i_0}$ existiert $t \in [a, s[$ mit $]t, s] \subseteq U_{i_0}$.
Es gilt $t \in E$, also $[a, t] \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ für geeignete $i_1, \dots, i_n \in I$.
Somit gilt $[a, s] \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$, also $s \in E$.

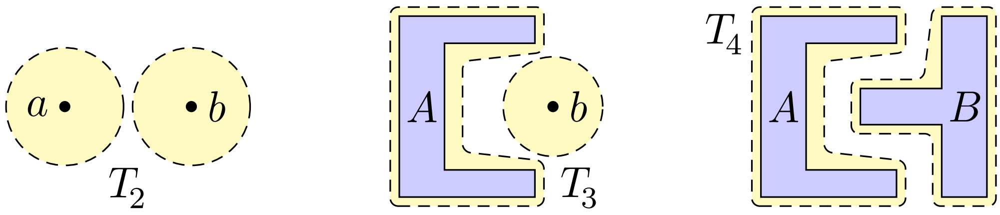
Nach (3) gilt $s = b$. Ganz $X = [a, b]$ wird endlich überdeckt. $\boxed{\text{QED}}$

Illustration: Wir betrachten erneut $[a, b]_\mathbb{Q} = \bigcup_{u<\xi} [a, u[_\mathbb{Q} \sqcup \bigcup_{v>\xi}]v, b]_\mathbb{Q}$.
Hier ist $E = [a, \xi[_\mathbb{Q}$, denn $[a, t]_\mathbb{Q}$ wird endlich überdeckt für $t < \xi$, aber nicht für $t > \xi$. Aussage (3) gilt weiterhin, doch ohne Vollständigkeit schlägt Schritt (4) fehl: Die Menge E erlaubt kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Anwendung: Wir ordnen $Z = [0, 1]^2$ lexikographisch, d.h. $(x, y) < (x', y')$ bedeutet $x < x'$ oder ($x = x'$ und $y < y'$). Ist der Raum $(Z, \mathcal{T}_<)$ kompakt?

Übung: In der geordneten Menge $(Z, <)$ existieren alle Suprema / Infima.
Der zugehörige topologische Raum $(Z, \mathcal{T}_<)$ ist dank Satz F1D kompakt.

Kompaktheit und Hausdorff–Eigenschaft



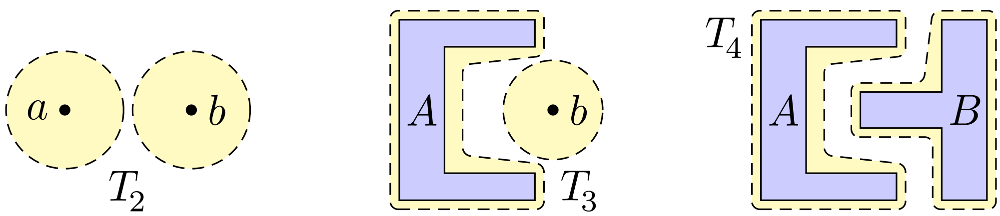
Lemma F1E: $T_2 \Rightarrow T_3$ für kompakte Teilmengen $A \subseteq X$

Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, darin $A \subseteq X$ kompakt und $b \in X \setminus A$.
Dann existieren U, V mit $A \subseteq U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ und $U \cap V = \emptyset$.

Beweis: Dank Hausdorff–Eigenschaft (T_2) existieren zu jedem Punkt $a \in A$ offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $b \in V_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$.
Wir erhalten $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$. Da A kompakt ist, existiert $J \subseteq A$ endlich mit $A \subseteq \bigcup_{a \in J} U_a =: U$. Damit ist $V := \bigcap_{a \in J} V_a \ni b$ offen und $U \cap V = \emptyset$, denn $U \cap V = (\bigcup_{a \in J} U_a) \cap V = \bigcup_{a \in J}(U_a \cap V) \subseteq \bigcup_{a \in J}(U_a \cap V_a) = \emptyset$. QED

☺ Sie kennen diese Technik bereits aus dem Lemma von Tychonoff E5J, dort statt Kompaktheit mit der schwächeren Lindelöf–Eigenschaft D6V. Mit Kompaktheit wird alles endlich und damit erfreulich einfach!

Kompaktheit und Hausdorff–Eigenschaft



Satz F1E: $T_2 \Rightarrow T_4$ für kompakte Teilmengen $A, B \subseteq X$

Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch und darin $A, B \subseteq X$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$.
Dann existieren U, V mit $A \subseteq U \in \mathcal{T}$ und $B \subseteq V \in \mathcal{T}$ und $U \cap V = \emptyset$.

☺ Der Beweis ist wörtlich derselbe wie im vorangegangenen Lemma wobei wir „b“ durch „B“ ersetzen. Dennoch benötigen wir erst einmal das Lemma, um uns damit hochzuarbeiten. Ich führe dies noch einmal aus:

Beweis: Dank dem vorigen Lemma existieren zu jedem Punkt $a \in A$ offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $B \subseteq V_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$.
Wir erhalten $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$. Da A kompakt ist, existiert $J \subseteq A$ endlich mit $A \subseteq \bigcup_{a \in J} U_a =: U$. Damit ist $V := \bigcap_{a \in J} V_a \supseteq B$ offen und $U \cap V = \emptyset$, denn $U \cap V = (\bigcup_{a \in J} U_a) \cap V = \bigcup_{a \in J}(U_a \cap V) \subseteq \bigcup_{a \in J}(U_a \cap V_a) = \emptyset$. QED

Kompakte Teilräume

Satz F1f: Abgeschlossen in Kompaktum ist kompakt.

Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, so ist jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ kompakt.

Beweis: Sei $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung. Diese erweitern wir durch die offene Menge $X \setminus A$: Zu $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ existiert $J \subseteq I$ endlich mit $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in J} U_i$, also $A \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$. QED

Satz F1g: Kompakt in Hausdorff ist abgeschlossen.

Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, so ist jede kompakte Teilmenge A abgeschlossen.

Beweis: Nach Lemma F1e ist das Komplement $C := X \setminus A$ offen, denn die Menge C ist Umgebung jedes ihrer Punkte (D3c). Erinnerung: Zu jedem $b \in C$ existieren offene Umgebungen U_b, V_b mit $A \subseteq U_b \in \mathcal{T}$ und $b \in V_b \in \mathcal{T}$ und $U \cap V = \emptyset$. Demnach ist $C = \bigcup_{b \in C} V_b$ offen. QED

Folgerung: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorff–Raum. Darin sind die kompakten Teilräume $A \subseteq X$ genau die abgeschlossenen Teilmengen. Dank Satz F1e ist demnach $(X, \mathcal{T})$ automatisch ein T_4–Raum.

Kompakte Teilräume

Korollar F1h: Heine–Borel–Lebesgue in $\mathbb{R}$

Ein Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn die Menge A in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen (F1g). Die offene Überdeckung $A \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{N}}]-r, r[= \mathbb{R}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, also $A \subseteq]-r, r[$ für ein $r \in \mathbb{N}$, somit ist A beschränkt.

„$\Leftarrow$“: Da A beschränkt ist, existiert $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $A \subseteq [-r, r]$. Das Intervall ist kompakt (F1d). Hierin ist A abgeschlossen, also kompakt (F1f). QED

Der Satz war der entscheidende Durchbruch zum heutigen Verständnis von Kompaktheit. Seine Entwicklung dauerte 50 Jahre! Dirichlet nutzte die endliche Überdeckungseigenschaft implizit bereits 1852, später Heine, Weierstrass und Pincherle. Borel benannte und bewies sie 1895 als erster explizit, zunächst noch für abzählbare Überdeckungen, anschließend dann Cousin, Lebesgue und Schoenflies für beliebige Überdeckungen.

Stetige Abbildungen kompakter Räume

Satz F1j: Das stetige Bild eines Kompaktums ist kompakt.

Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig. Ist $A \subseteq X$ kompakt, so auch $f(A) \subseteq Y$.

Beweis: Vorgelegt sei $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{T}_Y$. Daraus folgt $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i := f^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}_X$. Hierzu existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Wir schließen $f(A) \subseteq f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_n}) \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$. Das bedeutet, die Bildmenge $f(A) \subseteq Y$ ist kompakt. QED

Satz F1k: Minimum und Maximum reeller Funktionen

Sei $X \neq \emptyset$ kompakt. Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt ihre Extrema an: Es existieren Punkte $a, b \in X$ mit $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Nimmt f ihr Supremum s nicht an, so wäre $X = \bigcup_{a<s} f^{-1}(\mathbb{R}_{<a})$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. (Zu jedem $x \in X$ existiert $a \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) < a < s$, also $x \in f^{-1}(\mathbb{R}_{<a})$. Bei endlicher Teilüberdeckung steht $X \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_{<a})$ im Widerspruch zu $a < s$.) QED

Das Kompakt-Hausdorff-Kriterium: Abgeschlossenheit

Satz F1l: das Kompakt-Hausdorff-Kriterium

Sei X kompakt und Y hausdorffsch. (0) Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen. Die kanonische Faktorisierung ergibt daher:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f : x \mapsto y"] \arrow[d, two heads, "q"'] & Y \\
X/R_f \arrow[r, "\bar{f} : [x] \mapsto y", "\text{Homöo!}"'] & f(X) \arrow[u, hook, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

kompakt **hausdorffsch**

(1) Jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ist ein Homöomorphismus.
(2) Jede stetige Surjektion $f : X \to Y$ ist eine Identifizierung.
(3) Jede stetige Injektion $f : X \to Y$ ist eine Einbettung.

Beweis: (0) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen.
Da X kompakt ist, ist A kompakt (F1f).
Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (F1j).
Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (F1g). QED

Das Kompakt-Hausdorff-Kriterium: Anwendungsbeispiele

Aufgabe: Faktorisieren Sie $p : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$, vergleiche Satz E2T.

$$\begin{tikzcd} \textbf{kompakt} & X=[0,1] \arrow[r, "p:t\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}"] \arrow[d, two heads, "q"'] & Y=\mathbb{C} & \textbf{hausdorffsch} \\ & X/\!\!/\{0,1\} \arrow[r, "\bar p:[t]\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}", "\textbf{Homöo!}"'] & p(X)=\mathbb{S}^1 \arrow[u, hook, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

Aufgabe: Faktorisieren Sie $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$, vergleiche Satz E2P.

$$\begin{tikzcd} \textbf{kompakt} & {[0,1]} \arrow[d, two heads, "q|_{[0,1]}"] & \subseteq & \mathbb{R} \arrow[r, "p:t\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}"] \arrow[d, two heads, "q"] & \mathbb{C} & \textbf{hausdorffsch} \\ & q([0,1]) & = & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[r, "\bar p:[t]\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}", "\textbf{Homöo!}"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[u, hook, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

Der Quotientenraum ist kompakt (F1J) und $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ hausdorffsch (D1K).
Daher ist die stetige Bijektion $\bar p$ sogar ein Homöomorphismus (F1L).
In E2T / E2P haben wir explizit die stetige Umkehrung konstruiert.

Kompakt-Hausdorff-Gleichgewicht

🙂 Lernen Sie das Kompakt-Hausdorff-Kriterium zu nutzen, es lohnt sich!
Es vereinfacht Ihre Arbeit, Konstruktionen und Beweise erheblich.
Wir werden seine wohltuende Einfachheit im Folgenden oft nießen.
Manche Resultate und Techniken beruhen ausschließlich darauf!

🙂 Zur Abrundung noch eine amüsant-lehrreiche Beobachtung:

Die Hausdorff–Eigenschaft benötigt möglichst viele offene Mengen, um je zwei Punkte $a \neq b$ durch disjunkte Umgebungen zu trennen.

Die Kompaktheit hingegen benötigt möglichst wenige offene Mengen, damit jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Aus dem Kompakt–Hausdorff–Kriterium F1L folgt:

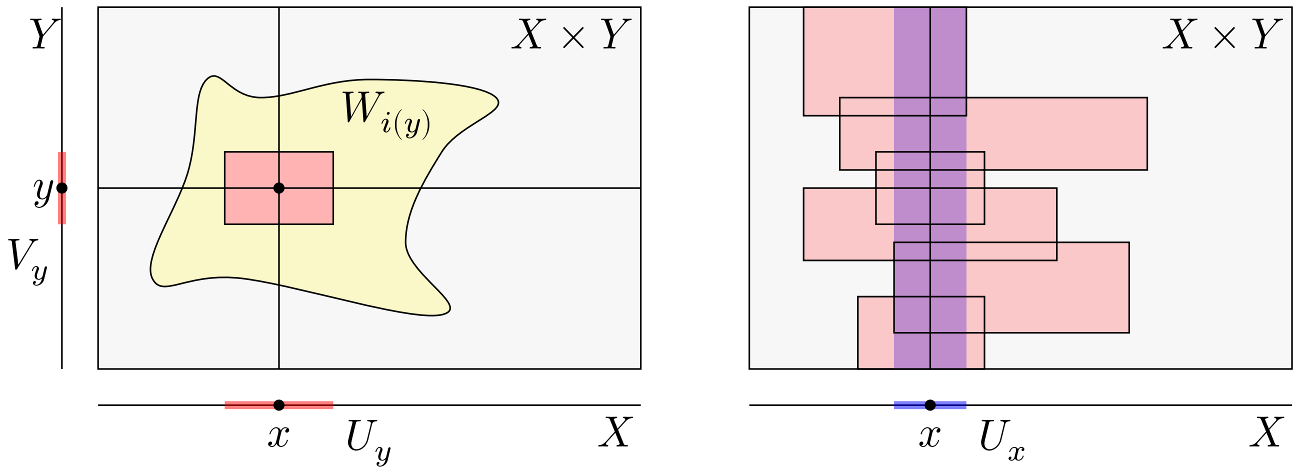
Korollar F1A: Kompakt-Hausdorff-Gleichgewicht

Jeder kompakte Hausdorff–Raum $(X, \mathcal{T})$ ist im perfekten Gleichgewicht:
Jede echt feinere Topologie $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$ ist hausdorffsch, aber nicht kompakt.
Jede echt gröbere Topologie $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$ ist kompakt, aber nicht hausdorffsch.

Der kleine Satz von Tychonoff

Satz F1N: kleiner Satz von Tychonoff

Sind $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ kompakt, so auch $(X \times Y, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$.



Beweis: Sei $X \times Y = \bigcup_{i \in I} W_i$ mit $W_i \in \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung.
Wir fixieren $x \in X$. Zu jedem $y \in Y$ existiert $i(y) \in I$ mit $(x, y) \in W_{i(y)}$.
Hierzu existieren $U_y \in \mathcal{T}_X$ und $V_y \in \mathcal{T}_Y$ mit $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq W_{i(y)}$.
Die offene Überdeckung $Y = \bigcup_{y \in Y} V_y$ enthält $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} = Y$.
Der Durchschnitt $U_x := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ erfüllt $x \in U_x \in \mathcal{T}_X$.

Der kleine Satz von Tychonoff

Für die endliche Indexmenge $J_x := \{i(y_1), \dots, i(y_n)\}$ gilt demnach:

$$U_x \times Y \subseteq (U_x \times V_{y_1}) \cup \dots \cup (U_x \times V_{y_n}) \subseteq \bigcup_{j \in J_x} W_j$$

Die offene Überdeckung $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ enthält $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k} = X$.
Für die endliche Indexmenge $J := J_{x_1} \cup \dots \cup J_{x_k} \subseteq I$ folgt schließlich:

$$X \times Y \subseteq (U_{x_1} \times Y) \cup \dots \cup (U_{x_k} \times Y) \subseteq \bigcup_{j \in J} W_j$$

Damit haben wir zu jeder offenen Überdeckung $(W_i)_{i \in I}$ von $X \times Y$ eine endliche Teilüberdeckung $(W_i)_{i \in J}$ gefunden. QED

Korollar F1N: Kompaktheit endlicher Produkte

(1) Seien $X_1, \dots, X_n \neq \emptyset$ topologische Räume. Genau dann ist das Produkt $X = X_1 \times \dots \times X_n$ kompakt, wenn jeder Faktor $X_1, \dots, X_n$ kompakt ist.

Beweis: „⇒“: Ist X kompakt, so auch das stetige Bild $p_i(X) = X_i$ (F1J).
Die Umkehrung „⇐“ folgt aus Satz F1N per Induktion über n. QED

Der Satz von Heine–Borel

Korollar F1N: kompakte Quader

(2) Jeder Quader $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Beweis: In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $[a, b]$ kompakt bezüglich der euklidischen Topologie (F1D). Auf $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ stimmt die euklidische Topologie mit der Produkttopologie überein. QED

Satz F1O: Heine–Borel–Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

Ein euklidischer Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn die Menge A in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen (F1G). Die offene Überdeckung $A \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{N}} B(0, r) = \mathbb{R}^n$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, also $A \subseteq B(0, r)$ für ein $r \in \mathbb{N}$, somit ist A beschränkt.

„$\Leftarrow$“: Da A beschränkt ist, existiert $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $A \subseteq [-r, r]^n$. Der Würfel ist kompakt (F1N). Hierin ist A abgeschlossen, also kompakt (F1F). QED

Der Satz von Heine–Borel

Beispiel: Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}(a, r)$ kompakt, ebenso die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \}$.

🙂 Sie kennen Heine–Borel als einen wichtigen Satz aus der Analysis. Wir erhalten einen unabhängigen, topologisch strukturierten Beweis: Kompaktheit für Intervalle (F1D), Teilräume (F1F, F1G), stetige Bilder (F1J) und schließlich endliche Produkte (F1N).

⚠ Der Satz F1O von Heine–Borel ist eine Besonderheit des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und gilt nicht für beliebige metrische Räume. Gegenbeispiel: In jedem diskreten metrischen Raum (X, d) ist jede Teilmenge $A \subseteq X$ abgeschlossen und beschränkt, aber nur endliche sind kompakt.

Beispiel: In $X = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ist $A = \bar{B}(0, 1) = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ nicht kompakt, denn $E = \{ e_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq A$ ist abgeschlossen, diskret, aber unendlich. (F1F)

Aufgabe: Konstruieren Sie daraus explizit eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. **Lösung:** Zu $n \in \mathbb{N}$ ist $U_n := X \setminus \{ e_k \mid k \geq n \}$ offen, und $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X$ erlaubt keine endliche Teilüberdeckung.

Klassische Matrixgruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ haben wir die $\mathbb{K}$–Algebra $\mathbb{K}^{n\times n}$ aller $n \times n$–Matrizen über $\mathbb{K}$ mit der euklidischen Norm (C1P) und hierin die **allgemeine/spezielle lineare/orthogonale/unitäre Gruppe**:

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} &= \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,\middle|\, \det A \neq 0 \right\}, & \mathrm{SL}_n\,\mathbb{K} &= \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,\middle|\, \det A = 1 \right\} \\ \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} &= \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, A^\top A = 1_{n\times n} \right\}, & \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} &= \left\{ A \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \,\middle|\, \det A = 1 \right\} \\ \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} &= \left\{ A \in \mathbb{C}^{n\times n} \,\middle|\, \overline{A}^\top A = 1_{n\times n} \right\}, & \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} &= \left\{ A \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} \,\middle|\, \det A = 1 \right\} \end{aligned}$$

Sind diese Teilmengen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ dicht? offen? abgeschlossen? kompakt?

Die Determinante ist eine Polynomfunktion, also insbesondere stetig: $\det_n : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

Orthogonalität $A^\top A = AA^\top = 1_{n\times n}$ und Unitärität $\overline{A}^\top A = A\overline{A}^\top = 1_{n\times n}$ entsprechen Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$, diese sind insbesondere stetig.

Die Zeilen (bzw. Spalten) jeder Matrix $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ sind eine Orthonormalbasis, insbesondere gilt $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{S}^{n-1}$. Somit ist $\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt dank Heine–Borel.

Klassische Matrixgruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Satz F1q: Klassische Matrixgruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

In $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} = \det_n^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ offen und dicht, hingegen ist die Untergruppe $\mathrm{SL}_n\,\mathbb{K} = \det_n^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen und nirgends dicht. Für $n \ge 2$ ist $\mathrm{SL}_n\,\mathbb{K}$ nicht beschränkt, da $\operatorname{diag}(a, a^{-1}, 1, \dots, 1) \in \mathrm{SL}_n\,\mathbb{K}$.

Die Untergruppen $\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} > \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ sowie $\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} > \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$ sind kompakt, dank Heine–Borel F1o, da abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^\times &= \mathrm{GL}_1\,\mathbb{R} > \mathrm{GO}_1\,\mathbb{R} = \left\{ a \in \mathbb{R} \,\middle|\, a^2 = 1 \right\} = \{\pm 1\} = \mathbb{S}^0 \\ \mathbb{C}^\times &= \mathrm{GL}_1\,\mathbb{C} > \mathrm{GU}_1\,\mathbb{C} = \left\{ a + ib \in \mathbb{C} \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1 \right\} = \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

Hierin sind $\mathrm{SL}_1\,\mathbb{R} = \mathrm{SO}_1\,\mathbb{R} = \mathrm{SL}_1\,\mathbb{C} = \mathrm{SU}_1\,\mathbb{C} = \{1\}$ trivial. Für $n = 2$ gilt:

$$\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{S}^1$$

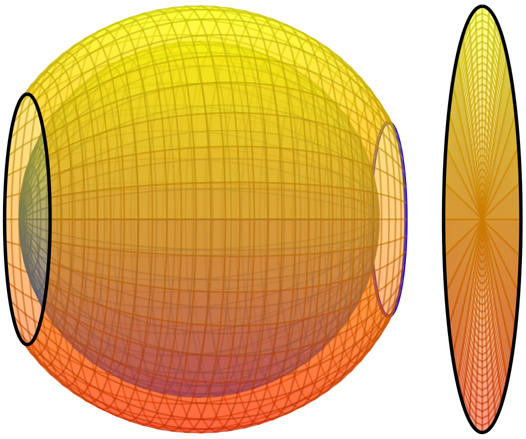
$$\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a + ib & -c + id \\ c + id & a - ib \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{matrix} \right\} \cong \mathbb{S}^3$$

Rand eines Balles zusammenschlagen

Bemerkenswert: Die drei Sphären $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ sind topologische Gruppen.
Sensationell: Dies sind die einzigen Sphären mit top. Gruppenstruktur!

Satz F1R: Rand eines Balles zusammenschlagen

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\big([0,1] \times \mathbb{S}^{n-1}\big) /\!\!/ \big(\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}\big) \cong \mathbb{D}^n$ und $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$.



$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times \mathbb{S}^{n-1}} \arrow[r, "\tilde{p}:(r,s)\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)", "\text{Kugelkoordinaten}"'] \arrow[d, two heads, "\tilde{q}:(r,s)\mapsto rs \text{ abgeschlossen dank F1L}"] & \mathbb{R}^{n+1} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{D}^n \arrow[r, "p:rs\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)", "\substack{\text{wohldefiniert und stetig}\\ \text{abgeschlossen dank F1L}}"'] \arrow[d, two heads, "q:rs\mapsto[rs]"] & \mathbb{R}^{n+1} \\
\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\bar{p}:[rs]\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)", "\text{Homöomorphismus dank F1L!}"'] & \mathbb{S}^n \arrow[u, hook, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Wir nutzen Polarkoordinaten $\tilde{q}$. Die Kugelkoordinaten $\tilde{p}$ induzieren somit p, und deren kanonische Faktorisierung liefert den Homöomorphismus $\bar{p}$. Wir wenden hier zweimal das Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L an!

Rand eines Balles zusammenschlagen

Übung: Führen Sie dies aus! Wie hilft das Kompakt-Hausdorff-Kriterium?

Skizze: Wir nutzen hier Polarkoordinaten $\tilde{q}$, also „Radius mal Richtung". Dabei schlägt $\tilde{q}$ den Boden $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ zusammen. Das Bild ist $\mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L ist $\tilde{q}$ identifizierend.

Die Kugelkoordinaten $\tilde{p}$ induzieren somit $p : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ wie angegeben. Die kanonische Faktorisierung von p liefert dann die stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$. Diese ist ein Homöomorphismus, erneut dank F1L.

Anschauung oder Formalisierung? Beides! Dies ist ein Paradebeispiel: Die geometrische Aussage ist anschaulich plausibel, aber wir müssen beweisen, dass sie in unserem topologischen Modell tatsächlich gilt. Die technisch sorgfältige Ausführung erfordert eine Reihe nicht-trivialer Begriffe und Techniken: metrische und allgemeiner topologische Räume, stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen und Homöomorphismen, kanonische Faktorisierung und das Kompaktheit-Hausdorff-Kriterium. Das Zusammenspiel dieser Begriffe und Techniken beschert uns klare, präzise Aussagen und leichte, tragfähige Argumente, so wie hier.

Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{Q}$

Wir betrachten eine reelle vs rationale Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{ll}
A_0 = [1, 2]_{\mathbb{R}} & B_0 = [1, 2]_{\mathbb{Q}} \\
A_1 = [1.4, 1.5]_{\mathbb{R}} & B_1 = [1.4, 1.5]_{\mathbb{Q}} \\
A_2 = [1.41, 1.42]_{\mathbb{R}} & B_2 = [1.41, 1.42]_{\mathbb{Q}} \\
A_3 = [1.414, 1.415]_{\mathbb{R}} & B_3 = [1.414, 1.415]_{\mathbb{Q}} \\
A_4 = [1.4142, 1.4143]_{\mathbb{R}} & B_4 = [1.4142, 1.4143]_{\mathbb{Q}} \\
A_5 = [1.41421, 1.41422]_{\mathbb{R}} & B_5 = [1.41421, 1.41422]_{\mathbb{Q}} \\
\dots & \dots \\
\implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\sqrt{2}\} & \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset
\end{array}$$

In $\mathbb{R}$ entspricht (3) dem beliebten Intervallschachtelungsprinzip: Zu $\mathbb{R} \supseteq [a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$ existiert $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Gilt zudem $b_n - a_n \searrow 0$, so ist x eindeutig, also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$.

Für offene Intervalle kann der Schnitt leer sein: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0, 2^{-n}[= \emptyset$

Ebenso für abgeschlossene Intervalle in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Was fehlt? Kompaktheit ist genau die richtige Forderung!

Die Endliche-Schnitt-Eigenschaft

Eine Familie $(F_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $F_i \subseteq X$ erfüllt die **Endliche-Schnitt-Eigenschaft**, falls $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset$ gilt für jede endliche Indexmenge $J \subseteq I$.

Lemma F1s: *finite intersection property (FIP)*

Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind äquivalent:

(1) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist kompakt: Jede Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ durch offene Mengen $U_i \in \mathcal{T}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung,

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

(2) Hat eine Familie $(F_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen $F_i \in \mathcal{T}^c$ leeren Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, so ist bereits ein endlicher Durchschnitt leer,

$$F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = \emptyset.$$

(3) Hat $(F_i)_{i\in I}$ mit $F_i \in \mathcal{T}^c$ die Endliche-Schnitt-Eigenschaft (FIP) $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \neq \emptyset$ für alle $i_1, \dots, i_n \in I$, so gilt insgesamt $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Beweis: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Komplementbildung, (2) $\Leftrightarrow$ (3) Kontraposition. QED

Der Satz von Tychonoff

Nach dem kleinen Satz F1N hier nun der große Satz von Tychonoff:

Satz F1T: Tychonoff 1930

Seien $(X_i, \mathscr{T}_i)_{i\in I}$ topologische Räume mit $a_i \in X_i$ für alle $i \in I$.
Das Produkt $(X, \mathscr{T}) = \prod_{i\in I}(X_i, \mathscr{T}_i)$ ist genau dann kompakt,
wenn jeder Faktor $(X_i, \mathscr{T}_i)$ für $i \in I$ kompakt ist.

Beispiele: Der diskrete Raum $\{0,1\}$ ist kompakt, also auch $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
Diesen Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kann man sich besser vorstellen, wenn man ihn in $\mathbb{R}$ einbettet; er ist homöomorph zur Cantor–Menge $C \subseteq [0,1]$, siehe E4W.

Jeder Quader $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt, siehe F1N.
Jeder Quader $\prod_{k\in\mathbb{N}}[a_k, b_k]$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt, insbesondere $[0,1]^{\mathbb{N}}$.
Jeder Quader $\prod_{x\in\mathbb{R}}[a_x, b_x]$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist kompakt, insbesondere $[0,1]^{\mathbb{R}}$.

Beweis des Satzes: „$\Rightarrow$“: Ist X kompakt, so auch $p_i(X) = X_i$.
Dies ist der leichte Teil: Jede Projektion $p_i : X \to X_i$ ist stetig (E4D).
Zudem ist p_i surjektiv: Zu $x_i \in X_i$ gilt $p_i(x) = x_i$ mit $x_j = a_j$ für $j \ne i$.
Ist der Raum X kompakt, so auch das stetige Bild $p_i(X) = X_i$ (F1J).

Der Satz von Tychonoff

„$\Leftarrow$“: Sei $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}^c$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit FIP (F1S).
Zur Kompaktheit von $(X, \mathscr{T})$ zeigen wir $\bigcap \mathscr{A} \ne \emptyset$, kurz und elegant;
wenige Zeilen destillieren hundert Jahre bis Tychonoff und Bourbaki.

Wir setzen $\mathscr{F}_0 := \{ V_1 \cap \dots \cap V_n \mid n \in \mathbb{N},\ V_1, \dots, V_n \in \mathscr{A} \} \supseteq \mathscr{A}$; zu $n = 0$ vereinbaren wir wie üblich $X \in \mathscr{F}_0$. Wir betrachten alle Familien $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ und Eigenschaft (a): Für $U, V \in \mathscr{F}$ gilt $\emptyset \ne U \cap V \in \mathscr{F}$.
Dank Zorns Lemma existiert ein maximales $\mathscr{F}$; für dieses gilt zudem (b):
Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ mit $U \cap V \ne \emptyset$ für alle $V \in \mathscr{F}$ gilt $U \in \mathscr{F}$.

FIP gilt für $\mathscr{F}$, dank E1A auch für $\{ p_i(V) \mid V \in \mathscr{F} \}$ und $\{ \overline{p_i(V)} \mid V \in \mathscr{F} \}$.
Da der Raum $(X_i, \mathscr{T}_i)$ kompakt ist, existiert $x_i \in \bigcap_{V\in\mathscr{F}} \overline{p_i(V)}$ dank F1S.
Wir zeigen nun, dass der Punkt $x = (x_i)_{i\in I}$ im Durchschnitt $\bigcap \mathscr{A}$ liegt.
Für $x_i \in U_i \in \mathscr{T}_i$ gilt $U_i \cap p_i(V) \ne \emptyset$ für alle $V \in \mathscr{F}$, also $p_i^{-1}(U_i) \cap V \ne \emptyset$.
Dank (b) gilt $p_i^{-1}(U_i) \in \mathscr{F}$. Dank (a) $U = p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \in \mathscr{F}$.

Jede Umgebung $U' \in \mathscr{T}$ von $x = (x_i)_{i\in I}$ enthält eine solche Menge U (E4C), schneidet also jedes $V \in \mathscr{F}$, somit gilt $x \in \overline{V}$. Speziell für jedes $V \in \mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$ bedeutet das $x \in \overline{V} = V$, also $x \in \bigcap \mathscr{A}$. $\boxed{\text{QED}}$

Abstand zwischen Teilmengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wie in C3M vereinbart, messen wir den Abstand zwischen Mengen als das Infimum der punktweisen Abstände:

$$d : \mathfrak{P}X \times X \to [0, \infty], \quad d(A, b) := \inf\{\, d(x, b) \mid x \in A \,\}$$
$$d : \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X \to [0, \infty], \quad d(A, B) := \inf\{\, d(x, y) \mid x \in A,\ y \in B \,\}$$

Existiert $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, so folgt $d(A, B) = 0$. Die Umkehrung gilt nicht:

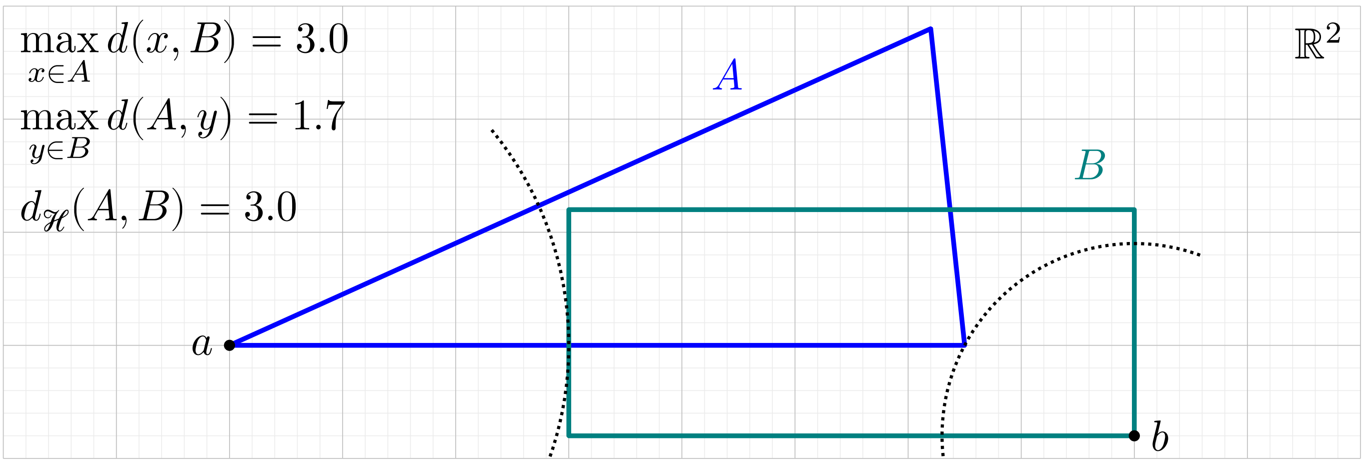
Beispiel: In $\mathbb{R}^2$ sind die Achse $A = \{\, (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$ und die Hyperbel $B = \{\, (x, 1/x) \mid x \neq 0 \,\}$ abgeschlossen und disjunkt, doch $d(A, B) = 0$.

Satz F2A: positiver Abstand von kompakt zu abgeschlossen

Sind $A, B \subseteq X$ disjunkt, A abgeschlossen, B kompakt, so gilt $d(A, B) > 0$.

Beweis: Seien A und B nicht leer und die Metrik d endlich.
Die Abstandsfunktion $f : B \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto d(A, x)$ ist stetig (C3N).
Da B kompakt ist, existiert $b \in B$ mit $d(A, B) = d(A, b) > 0$ (F1K).
Die Funktion f nimmt ihr Infimum in einem Punkt $b \in B$ an.
Da A abgeschlossen ist und $b \notin A$ gilt, folgt $d(A, b) > 0$. QED

Hausdorff–Abstand zwischen Teilmengen



Für Teilmengen A, B in (X, d) definieren wir den **Hausdorff–Abstand**

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) := \sup\{\, d(x, B),\ d(A, y) \mid x \in A,\ y \in B \,\}.$$

Dies misst anschaulich, wie „nahe“ oder „ähnlich“ sich A und B sind.
Für Kompakta gilt $d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\max_{a\in A} \min_{b\in B} d(a, b), \max_{b\in B} \min_{a\in A} d(a, b)\}$.

Aufgabe: Auf $\mathfrak{P}(X)$ ist $d_{\mathcal{H}}$ eine Halbmetrik, mit $d_{\mathcal{H}}(A, B) = 0$ gdw $\overline{A} = \overline{B}$.
Auf der Menge $\mathcal{T}_d^c$ aller abgeschlossenen Teilmengen ist $d_{\mathcal{H}}$ eine Metrik.
Wir erhalten die isometrische Einbettung $\iota : (X, d) \hookrightarrow (\mathcal{T}_d^c, d_{\mathcal{H}}) : x \mapsto \{x\}$.

Hausdorff–Abstand zwischen Teilmengen

Lösung: Symmetrie ist klar. Definitheit ist interessant:

$$\begin{aligned} d(x,B)=0 &\overset{\text{C3N}}{\iff} x\in\overline{B} \\ \sup_{x\in A} d(x,B)=0 &\iff A\subseteq\overline{B} \\ d_{\mathscr{H}}(A,B)=0 &\iff \overline{A}=\overline{B} \end{aligned}$$

Auch die Dreiecksungleichung ist etwas raffiniert: Seien $A,B,C\subseteq X$. Für alle $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$ gelten dann die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} & d(a,C) \le d(a,c) \le d(a,b)+d(b,c) \\ \implies\ & d(a,C) \le d(a,b)+d(b,C) \le d(a,b)+d_{\mathscr{H}}(B,C) \\ \implies\ & d(a,C) \le d(a,B)+d_{\mathscr{H}}(B,C) \le d_{\mathscr{H}}(A,B)+d_{\mathscr{H}}(B,C) \end{aligned}$$

Per Symmetrie gilt $\{\, d(a,C),\ d(A,c)\,\} \le d_{\mathscr{H}}(A,B)+d_{\mathscr{H}}(B,C)$. Daraus folgt $d_{\mathscr{H}}(A,C)\le d_{\mathscr{H}}(A,B)+d_{\mathscr{H}}(B,C)$, wie behauptet.

Bemerkung: Per Definition gilt $d_{\mathscr{H}}(\emptyset,\emptyset)=0$ und $d_{\mathscr{H}}(A,\emptyset)=\infty$ für $A\ne\emptyset$. Wir können $\emptyset$ daher getrost ausschließen, das ist traditionell üblich.

Hausdorff–Abstand zwischen Teilmengen

🙂 Für nicht-leere Kompakta $A,B\subseteq X$ gilt Definitheit und Endlichkeit. Wir erhalten so die (endliche) **Hausdorff–Metrik** $d_{\mathscr{H}} : \mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ auf der Menge $\mathscr{H}\subseteq\mathscr{T}_d^c$ aller nicht-leeren Kompakta in (X,d).

Die Maximin-Definition ist raffiniert und liefert genau das Richtige. Ihre Berechnung ist selbst für Polytope nicht ganz offensichtlich. Die Hausdorff–Metrik ist ein zentrales Werkzeug in fraktaler Geometrie und Bilderkennung. Sie hat exzellente mathematische Eigenschaften:

🙂 Ist (X,d) vollständig / totalbeschränkt / kompakt, so auch $(\mathscr{H},d_{\mathscr{H}})$:

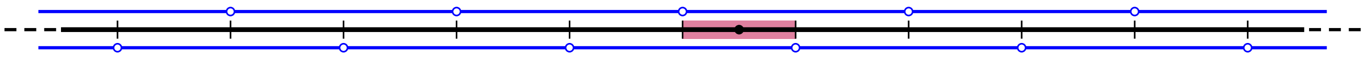
(1) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $(\mathscr{H},d_{\mathscr{H}})$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gelte $d_{\mathscr{H}}(A_n,A_{n+1})\le 2^{-n}$. Sei $A\subseteq X$ die Menge der Grenzwerte $x=\lim x_n$ mit $x_n\in A_n$ und $d(x_n,x_{n+1})\le 2^{-n}$. Dann gilt $d_{\mathscr{H}}(A,A_n)\to 0$.

(2) Totalbeschränktheit von (X,d) bedeutet: Zu $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ existiert $E\subseteq X$ endlich mit $X=\bigcup_{x\in E} B(x,\varepsilon/2)$. Sei $F=\mathfrak{P}(E)^*=\{\,A\subseteq E \mid A\ne\emptyset\,\}$. Dann wird $(\mathscr{H},d_{\mathscr{H}})$ überdeckt von den $d_{\mathscr{H}}$–Bällen $B(A,\varepsilon)$ mit $A\in F$.

(3) Kompaktheit von $(\mathscr{H},d_{\mathscr{H}})$ folgt aus (1) und (2) dank Satz F2E.

Lebesgue–Zahl einer Überdeckung

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zur Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ ist $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ eine **Lebesgue–Zahl**, falls gilt: Zu jedem $a \in X$ existiert $i \in I$ mit $B(a, \delta) \subseteq U_i$.
Anwendung: Für $a \in A \subseteq X$ mit $\operatorname{diam}(A) < \delta$ gilt $A \subseteq B(a, \delta) \subseteq U_i$.



Beispiel: Zur offenen Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+2[$ genügt $\delta \in]0, 1/2]$.
Hingegen hat $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]x_k, x_{k+2}[$ mit $x_k = \ln k$ keine Lebesguezahl $\delta > 0$.

Satz F2B: Lebesgue–Zahl einer Überdeckung

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann erlaubt jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X eine Lebesgue–Zahl $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert ein Index $i(x) \in I$ mit $x \in U_{i(x)}$ und somit $\varepsilon_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x, 2\varepsilon_x) \subseteq U_{i(x)}$. Zur offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon_x)$ existiert $E \subseteq X$ endlich mit $X = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon_x)$.
Sei $\delta := \min\{\varepsilon_x \mid x \in E\} > 0$. Jeder Punkt $a \in X$ erfüllt $a \in B(x, \varepsilon_x)$ für ein $x \in E$. Also gilt $B(a, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon_x + \delta) \subseteq B(x, 2\varepsilon_x) \subseteq U_{i(x)}$. QED

Lebesgue–Zahl einer Überdeckung

Ist $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Lebesgue–Zahl zur Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ so auch jede kleinere Zahl δ', mit $0 < \delta' \leq \delta$. Im obigen Beispiel ist $\delta = 1/2$ maximal.

⚠ Die Existenz einer Lebesgue–Zahl hängt von der Metrik d ab, sie ist tatsächlich eine *metrische* Eigenschaft und keine *topologische*:

Beispiel: Auf $\mathbb{R}$ haben wir neben der euklidischen Metrik $d(x, y) = |x - y|$ die äquivalente Metrik $e(x, y) := |\exp(x) - \exp(y)|$: Da $(\exp, \ln) : \mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{>0}$ ein Homöomorphismus ist, definieren d und e dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}$. Bezüglich e erlaubt $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]x_n, x_{n+2}[$ die Lebesgue–Zahl $\delta = 1/2$.

⚠ Für Kompaktheit ist die Existenz einer Lebesgue–Zahl $\delta > 0$ zu jeder offenen Überdeckung notwendig, aber nicht hinreichend:

Beispiel: In (X, d) mit diskreter Metrik ist $\delta \in]0, 1]$ eine Lebesgue–Zahl zu jeder Überdeckung, auch wenn X unendlich ist, somit nicht kompakt. (Hingegen ist $\delta \geq 1$ nur dann eine Lebesgue–Zahl für eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, wenn $U_i = X$ für ein $i \in I$ gilt.)

☺ Hierzu fehlt noch die Totalbeschränktheit, die wir jetzt erklären.

Totalbeschränkte metrische Räume

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **beschränkt**, wenn gilt: Für einen bzw. jeden Punkt $a \in X$ ist die Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto d(x, a)$ beschränkt. Für $r \in \mathbb{R}$ mit $f < r$ folgt $X = B(a, r)$. Wir verschärfen diese Bedingung:

Definition F2c: totalbeschränkter metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **totalbeschränkt**, wenn gilt:
Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wird X überdeckt von endlich vielen ε–Bällen.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exists A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq X \ : \ X = B(a_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(a_n, \varepsilon)$$

D.h. die Abstandsfunktion $f(x) = d(x, A)$ erfüllt $f(x) < \varepsilon$ für alle $x \in X$.

Beispiel: Jeder kompakte metrische Raum (X, d) ist totalbeschränkt.

Totalbeschränkt impliziert beschränkt: Aus $X = B(a_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(a_n, \varepsilon)$ folgt $d(x, a_1) < r := \varepsilon + \max d(a_1, a_k)$. Die Umkehrung gilt nicht:

Beispiel: Jeder Raum (X, d) mit diskreter Metrik ist beschränkt, aber totalbeschränkt nur genau dann, wenn X endlich ist.

Totalbeschränkte metrische Räume

Beispiel: In $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist $\bar{B}(0, 1)$ beschränkt, aber nicht totalbeschränkt: Die kanonische Basis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt $|e_k - e_\ell|_\infty = 1$ für alle $k \neq \ell$. Zu $\varepsilon = 1/2$ überdecken endlich viele Bälle $B(a_k, \varepsilon)$ nicht $\bar{B}(0, 1)$, denn jeder Ball $B(a_k, \varepsilon)$ enthält höchstens einen der Punkte e_n.

Beispiel: In $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik ist $[-r, r]^n$ totalbeschränkt. Genau dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ totalbeschränkt, wenn A beschränkt ist:

Proposition F2d:

Ist (X, d) totalbeschränkt, so auch jeder Teilraum $A \subset X$.

Beweis: Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $X = \bigcup_{i \in I} B(x_i, \varepsilon/2)$ mit I endlich.
Sei $J = \{ i \in I \mid \exists a_i \in A \cap B(x_i, \varepsilon/2) \}$. Aus $x_i \in B(a_i, \varepsilon/2)$ folgt $B(x_i, \varepsilon/2) \subset B(a_i, \varepsilon)$, also $A \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, \varepsilon/2) \subset \bigcup_{i \in I} B(a_i, \varepsilon)$. $\boxed{\text{QED}}$

⚠ Für Kompaktheit ist Totalbeschränktheit nicht hinreichend:

Beispiel: Das rationale Intervall $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ mit euklidischer Metrik ist totalbeschränkt (F2d), aber nicht kompakt (F1d).

Kompaktheit für metrische Räume

Satz F2E: siebenfache Kompaktheit für metrische Räume

Für jeden nicht-leeren metrischen Raum (X, d) sind äquivalent:

1. **Kompaktheit**: Jede (beliebige) offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.
2. **Abzählbare Kompaktheit:** Jede abzählbare offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.
3. **Häufungskompaktheit:** Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt.
4. **Folgenkompaktheit:** Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat eine konvergente Teilfolge; es gibt $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ und $x \in X$ sodass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to x$.
5. **Pseudokompaktheit:** Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt ihre Extrema an; es gibt $a, b \in X$ mit $f(a) \le f(x) \le f(b)$ für alle $x \in X$.
6. **Lebesgue–Kompaktheit:** (X, d) ist totalbeschränkt und jede offene Überdeckung von X erlaubt eine Lebesgue–Zahl $\delta > 0$.
7. **Heine–Borel–Lebesgue–Kompaktheit:** Der metrische Raum (X, d) ist vollständig und totalbeschränkt.

Kompaktheit für topologische Räume

Die ersten fünf dieser Kompaktheitsbegriffe können wir auf topologische Räume übertragen. Dort sind sie im Allgemeinen nicht äquivalent!

Satz F2F: fünffache Kompaktheit für topologische Räume

Für topologische Räume gelten folgende Beziehungen:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{(1) kompakt}} \arrow[r, Rightarrow, shift left] & \boxed{\text{(2) abzählbar kompakt}} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\substack{\text{Lindelöf}\\ \text{2AA (D6v)}}"] \arrow[r, Rightarrow, shift right, "\text{1AA}"'] \arrow[dl, Rightarrow, shift right] \arrow[dr, Rightarrow, shift right] & \boxed{\text{(4) folgenkompakt}} \arrow[l, Rightarrow, shift right] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\
\boxed{\text{(5) pseudokompakt}} \arrow[ur, Rightarrow, shift right, "\substack{\text{normal}\\ (T_1\&T_4)}"'] & & \boxed{\text{(3) häufungskompakt}} \arrow[ul, Rightarrow, shift right] \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\text{1AA}"']
\end{tikzcd}
$$

⚠ Anders als für metrische Räume sind für topologische Räume Kompaktheit und Folgenkompaktheit unabhängige Eigenschaften: Das heißt: Ein kompakter Raum muss nicht folgenkompakt sein (F2G). Umgekehrt muss ein folgenkompakter Raum nicht kompakt sein (F2H). Schließlich braucht ein pseudokompakter Raum nicht abzählbar kompakt zu sein (F2I), also auch nicht kompakt oder folgenkompakt.

Kompaktheit für topologische Räume

Hier später mehr, vorerst siehe Skript.

Kompaktheit für topologische Räume

Kompaktheit für topologische Räume

F215
Erläuterung

Kompaktheit für topologische Räume

F216
Erläuterung

Lokal-kompakte Räume

Definition F3A: lokale Kompaktheit

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **lokal-kompakt** im Punkt $a \in X$, wenn jede Umgebung U von a eine kompakte Umgebung V enthält:

$$\forall U \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T}) \;\; \exists V \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T}) \, : \, V \subseteq U \text{ und } V \text{ kompakt}$$

Das heißt, der Punkt a erlaubt beliebig kleine kompakte Umgebungen: Die kompakten Umgebungen von a bilden eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}_a^{\mathrm{k}}$.

Gilt dies in jedem Punkt $a \in X$, so nennen wir $(X, \mathcal{T})$ **lokal-kompakt**.

Aufgabe: Ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt und hausdorffsch, so erlaubt die Topologie eine Basis aus relativ kompakten Mengen.

Lösung: Jede kompakte Umgebung $V \in \mathcal{U}_a^{\mathrm{k}}$ ist abgeschlossen (F1G). Jede Teilmenge $W \subseteq V$ ist also relativ kompakt, denn $\overline{W} \subseteq V$ ist abgeschlossen und somit kompakt (F1F). Ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt, das heißt in jedem Punkt $a \in X$, so erhalten die Basis $\mathcal{B} = \{\, V^\circ \mid V \in \mathcal{U}_a^{\mathrm{k}},\, a \in X \,\}$.

Lokal-kompakte Räume

Beispiele: Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sind die kompakten Umgebungen $\bar{B}(x, \varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine UBasis. Jeder diskrete Raum ist lokal-kompakt, zum Beispiel der Teilraum $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist demnach lokal-kompakt dank $\bar{B}(x, \varepsilon) \subseteq U$. Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt dank $\bar{B}(x, \varepsilon) \cap A$. Auch $U \cap A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt, zur Umkehrung siehe Satz F3F.

⚠ Der Teilraum $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht lokal-kompakt: Jede Umgebung U von x in $\mathbb{Q}$ enthält ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]_{\mathbb{Q}}$ mit $a < x < b$. Wäre U kompakt, so auch I (F1F), was jedoch falsch ist (F1D).

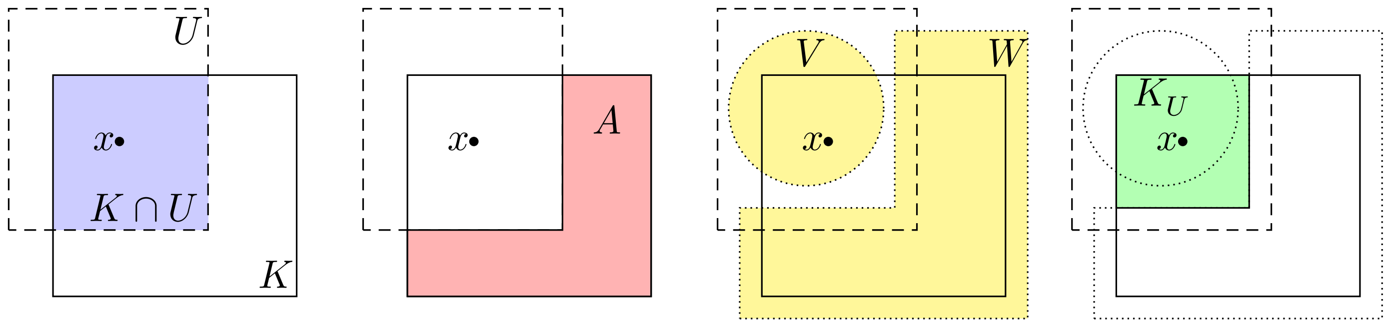
Die Menge $X = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \cup \{X\}$ ist kompakt, aber nicht lokal-kompakt. Jeder Punkt hat *eine* kompakte Umgebung, X, aber nicht *beliebig kleine*. Hierzu verhilft uns die Hausdorff–Eigenschaft:

Satz F3C: Jeder kompakte Hausdorff–Raum ist lokal-kompakt.

Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch. Existiert zum Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung $K \in \mathcal{U}_x^{\mathrm{k}}$, dann ist $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt im Punkt x.

F303

Jeder kompakte Hausdorff–Raum ist lokal-kompakt.



Beweis: Zu jeder offenen Umgebung $U \in \mathscr{U}_x^\circ$ konstruieren wir eine kompakte Umgebung $K_U \subseteq U$ von x wie oben skizziert: Im Teilraum K ist $K \cap U$ offen, also $A := K \setminus U$ abgeschlossen, somit kompakt (F1F).

Im Hausdorff–Raum X gibt es offene disjunkte Umgebungen V von x und W von A (F1E). Im Teilraum K ist $K \cap W$ offen, also $K_U := K \setminus W$ abgeschlossen, somit kompakt (F1F). Zudem gilt $K \cap V \subseteq K_U \subseteq U$.

(Warum? Siehe Skizze! Aus $V \cap W = \emptyset$ folgt $K \cap V \subseteq K \setminus W = K_U$. Aus $W \supseteq A$ folgt $K_U = K \setminus W \subseteq K \setminus A = K \cap U \subseteq U$.)

Mit K und V sind auch $K \cap V$ und K_U Umgebungen von x in X. $\boxed{\text{QED}}$

F304
Erläuterung

Welche Teilräume sind lokal-kompakt?

Lokale Kompaktheit vererbt sich nicht auf *jeden* Teilraum, siehe $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, doch zum Beispiel im $\mathbb{R}^n$ auf jeden offenen / abgeschlossenen Teilraum. Diesem interessanten Phänomen wollen wir auf den Grund gehen:

Lemma F3E: Lokale Kompaktheit vererbt sich...

Ist der topologische Raum X lokal-kompakt, so auch
(1) jeder offene und (2) jeder abgeschlossene Teilraum $Y \subseteq X$.

Beispiele: $[0, 1]$ und $]0, 1[$ sind lokal-kompakt, aber auch $[0, 1[\subset]{-1}, 1[$.

Beweis: (1) Jede Umgebung V von x in Y ist auch eine Umgebung von x in X (D1K). Nach Voraussetzung enthält V eine kompakte Umgebung U von x in X. Somit ist $U \subseteq V$ eine kompakte Umgebung von x in Y.

(2) Jede Umgebung V von x in Y ist von der Form $V = \tilde{V} \cap Y$, wobei $\tilde{V}$ eine Umgebung von x in X ist (D1K). Die Umgebung $\tilde{V}$ enthält eine kompakte Umgebung $\tilde{U}$ von x in X. In $\tilde{U}$ ist $U := \tilde{U} \cap Y$ abgeschlossen, also kompakt (F1F). Somit ist $U \subseteq V$ eine kompakte Umgebung von x in Y. $\boxed{\text{QED}}$

Satz F3F: … auf lokal-abgeschlossene Teilräume.

Sei $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch. Für $Y \subseteq X$ sind äquivalent:

1. Der Teilraum Y ist lokal-kompakt (im Sinne der Definition F3A).
2. Jeder Punkt $x \in Y$ hat eine kompakte Umgebung in Y (F3C).
3. Jeder Punkt $x \in Y$ hat eine offene Umgebung U in X, sodass $Y \cap U$ in U abgeschlossen ist.
4. Es gilt $Y = U \cap A$ mit $U \subseteq X$ offen und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Hierzu sagen wir: Y ist **lokal-abgeschlossen** im Raum $(X, \mathcal{T})$.

Bemerkung: Der Satz enthält das vorige Lemma F3E als Spezialfall: Jeder offene Teilraum $U \subseteq X$ ist lokal-kompakt (wähle $A = X$) ebenso jeder abgeschlossene Teilraum $A \subseteq X$ (wähle $U = X$).

Beweis: Die Implikation „(1) ⇒ (2)“ ist trivial. Die Umkehrung „(2) ⇒ (1)“ verdanken wir Satz F3C.

„(1) ⇒ (3)“: Sei V eine kompakte Umgebung von x in Y, also $V = Y \cap W$ für eine Umgebung W in X. Somit ist $U = W^\circ$ offen in X und $Y \cap U = V \cap U$ in U abgeschlossen, denn V ist abgeschlossen in X (F1G).

„(3) ⇒ (4)“: Zu jedem $x \in Y$ sei $x \in U_x \in \mathcal{T}$ und $Y \cap U$ abgeschlossen in U_x. Das bedeutet $Y \cap U_x = \overline{Y} \cap U_x$. Somit ist $Y \cap U$ abgeschlossen in U, denn $Y = Y \cap (\bigcup_{x \in Y} U_x) = \bigcup_{x \in Y} (\overline{Y} \cap U_x) = \overline{Y} \cap (\bigcup_{x \in Y} U_x)$.

„(4) ⇒ (1)“: In X ist die abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ lokal-kompakt und hierin ist die offene Teilmenge $Y \subseteq A$ lokal-kompakt (F3E). $\boxed{\text{QED}}$

Bemerkung: Der Satz zeigt für $A \subseteq X$ die erstaunliche Äquivalenz zwischen der intrinsischen Eigenschaft „lokal-kompakt“ des Teilraums A und der extrinsischen Eigenschaft „lokal-abgeschlossen“ im Raum X.

🙂 Der Satz F1O von Heine–Borel stiftet für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine ähnlich verblüffende Beziehung zwischen der intrinsischen Eigenschaft „kompakt“ des Teilraums A und der extrinsischen Eigenschaft „abgeschlossen und beschränkt“ im umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$.

Eine Inklusion / Einbettung $\iota : A \to X$ heißt **Umgebungsretrakt**, wenn eine $\rho : U \to A$ auf einer Umgebung U von $\iota(A)$ in X existiert.

Beispiel: Zu $A = \mathbb{S}^n$ sei $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $\rho : U \to \mathbb{S}^n : x \mapsto x/|x|$.

Im euklidischen Raum $X = \mathbb{R}^n$ nennen wir dies einen **euklidischen Umgebungsretrakt**, engl. *euclidean neighbourhood retract*, kurz **ENR**.

Übung F3H: euklidische Umgebungsretrakte

Wir nutzen die lokale Kompaktheit (F3F) des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$:

1 Jeder ENR $A \subset \mathbb{R}^n$ ist lokal-abgeschlossen und somit lokal-kompakt.

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph vermöge $h : A \xrightarrow{\sim} B$.

2 Ist A in $\mathbb{R}^m$ lokal-abgeschlossen, so auch B in $\mathbb{R}^n$.

3 Ist A in $\mathbb{R}^m$ ein ENR, so auch B in $\mathbb{R}^n$. *Hinweis:* Tietze (E5N)

Die Eigenschaft ENR ist also topologisch invariant: Ist *eine* Einbettung $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ ein ENR, so ist *jede* Einbettung $j : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ein ENR.

Lösung: (1) Sei U eine Umgebung von A in $\mathbb{R}^m$ und $\rho : U \to A$ eine Retraktion. Dann ist $A = \{\, x \in U^\circ \mid x = \rho(x) \,\}$ abgeschlossen in U°, also lokal-abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ (eine extrinsische Eigenschaft).

(2) Dank Satz F3F gelten folgende Äquivalenzen:
A in $\mathbb{R}^m$ ist lokal-abgeschlossen. $\Leftrightarrow$ A ist lokal-kompakt.
$\Leftrightarrow$ B ist lokal-kompakt. $\Leftrightarrow$ B in $\mathbb{R}^n$ ist lokal-abgeschlossen.
(Lokale Kompaktheit ist eine intrinsisch topologische Eigenschaft!)

(3) Es existiert $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit Inklusionen $i : A \hookrightarrow U$ und $j : U \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ sowie eine Retraktion $r : U \to A$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Nach (2) ist B in $\mathbb{R}^n$ lokal-abgeschlossen, also $B = O \cap C$ mit $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und somit ist B in O abgeschlossen. Die Abbildung $f = j \circ i \circ h^{-1} : B \to \mathbb{R}^m$ ist stetig. Dank des Fortsetzungssatzes von Tietze (E5N) existiert eine stetige Fortsetzung $F : O \to \mathbb{R}^m$ mit $F|_B = f$. Die Menge $U' = F^{-1}(U)$ ist offen in O und somit in $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung $r' = h^{-1} \circ r \circ F : U' \to B$ ist stetig und erfüllt $r'|_B = \mathrm{id}_B$. $\boxed{\text{QED}}$

Kompaktifizierung

Kompaktheit und Hausdorff–Eigenschaft sind wunderschön und nützlich. Daher unser Ziel: Was noch nicht kompakt ist, wird kompakt gemacht!

Beispiele: Die Inklusionen $[0,1[\hookrightarrow [0,1]$ und $]-1,1[\hookrightarrow [-1,1]$ sind Kompaktifizierungen, ebenso $\mathbb{R}_{\ge 0} \hookrightarrow [0,\infty]$ und $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, denn der Zielraum ist hausdorffsch und kompakt (F1D) und Abschluss des Startraums. Ebenso ist $\mathbb{N} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Kompaktifizierung.

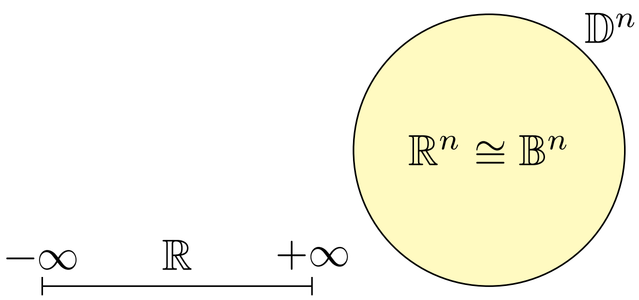
Ist ein topologischer Raum X nicht kompakt, so wollen wir ihn möglichst **kompaktifizieren**, das heißt, in einen kompakten Raum Y einbetten. In Y ist dann der Abschluss $\overline{X}$ kompakt (F1F), daher genügt $Y = \overline{X}$. Zudem wollen wir fortan immer die Hausdorff–Eigenschaft fordern.

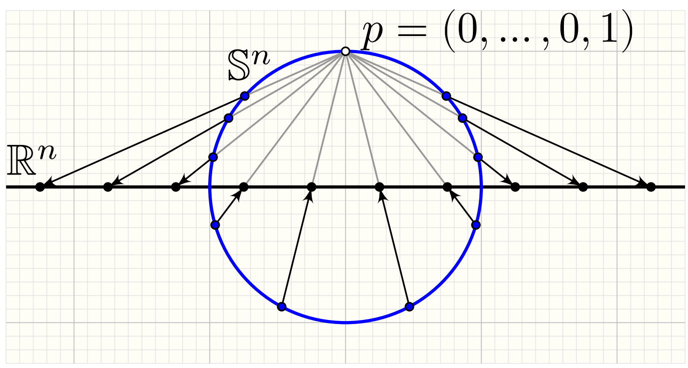
Dies motiviert die folgende Zielsetzung und Vereinbarung:

Definition F4A: (Hausdorff–)Kompaktifizierung

Sei X ein topologischer Raum. Eine (Hausdorff–)**Kompaktifizierung** von X ist ein Paar (Y,κ) aus einem kompakten (Hausdorff–)Raum Y zusammen mit einer Einbettung $\kappa : X \hookrightarrow Y$, wobei $Y = \overline{\kappa(X)}$ gilt.

Kompaktifizierung





Beispiel: Die Inklusion $\mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ ist eine Kompaktifizierung (F1O), ebenso die Komposition $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n : x \mapsto x/(1+|x|)$.

Speziell in Dimension $n = 1$ ist $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]-1,1[\hookrightarrow [-1,1]$ topologisch äquivalent zur obigen Kompaktifizierung $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Beispiel: Stereographische Projektion $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ (A1L) kompaktifiziert mit nur einen Punkt, kurz „$\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$“.

Für $n = 1,2$ erhalten wir die Kreislinie $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \cong \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und die Riemannsche Zahlensphäre $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \cong \widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Diese sind optimal sparsam: Ein einziger Punkt „∞“ genügt zur Kompaktifizierung!

Die Einpunktkompaktifizierung nach Alexandroff

Satz F4D: Einpunktkompaktifizierung nach Alexandroff, 1924

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\infty \notin X$ ein weiterer Punkt. Auf $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ definieren wir die **Alexandroff–Topologie**

$$\widehat{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \cup \{\, \widehat{X} \setminus K \,|\, K \subseteq X \text{ kompakt und abgeschlossen in } (X, \mathcal{T}) \,\}.$$

Letzteres sind die offenen Umgebungen des Punktes ∞ im Raum $\widehat{X}$. Damit ist $\widehat{\mathcal{T}}$ tatsächlich eine Topologie auf $\widehat{X}$: Es gilt (O1–3).

Der Raum $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ ist kompakt, und hierin ist $(X, \mathcal{T})$ ein offener Teilraum. Die Topologie $\widehat{\mathcal{T}}$ auf $\widehat{X}$ ist die feinste mit diesen beiden Eigenschaften.

Wir nennen $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ die **Einpunktkompaktifizierung** von $(X, \mathcal{T})$ oder die **Alexandroff–Kompaktifizierung**. Genau dann ist $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ hausdorffsch, wenn $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch ist. In diesem Fall ist $\widehat{\mathcal{T}}$ auf $\widehat{X}$ die einzige kompakte Hausdorff–Topologie mit Teilraum $(X, \mathcal{T})$.

Beweis: Sorgfältig nachrechnen. Das ist eine lehrreiche Übung!

Die Einpunktkompaktifizierung nach Alexandroff

Bemerkung: Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, so ist jede kompakte Teilmenge K in X abgeschlossen (F1G) und die Konstruktion vereinfacht sich zu

$$\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\, \widehat{X} \setminus K \,|\, K \subseteq X \text{ kompakt} \,\}.$$

Bemerkung: Ist der Startraum $(X, \mathcal{T})$ bereits kompakt, so ist jede abgeschlossene Teilmenge K in X kompakt (F1F), und somit ist

$$\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\, U \cup \{\infty\} \,|\, U \in \mathcal{T} \,\}$$

gerade die Summentopologie auf $\widehat{X} = X \sqcup \{\infty\}$ (E3A).

Korollar F4F: Charakterisierung lokal-kompakter Hausdorff–Räume

Die lokal-kompakten Hausdorff–Räume sind genau die offenen Teilräume kompakter Hausdorff–Räume.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Lokale Kompaktheit vererbt sich (F3E).
„$\Rightarrow$“: Hierzu genügt die Einpunktkompaktifizierung (F4D). $\boxed{\text{QED}}$

Einpunktkompaktifizierungen sind minimal… und terminal.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\exists! f"] & & \widehat{X} \\ & X \arrow[ul, hook, "\kappa"] \arrow[ur, hook, "\alpha"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, shift left, "\exists! f"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \widehat{X} \arrow[ll, shift left, "\exists! g"] \\ & X \arrow[ul, hook, "\tilde{\alpha}"] \arrow[ur, hook, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Korollar F4G: universelle Abbildungseigenschaft

Sei X lokal-kompakt hausdorffsch, aber selbst noch nicht kompakt. Jede Einpunktkompaktifizierung $\alpha : X \to \widehat{X}$ erfreut sich folgender UAE; sie besagt, dass α terminal ist unter allen Kompaktifizierungen:

Zu jeder Kompaktifizierung $\kappa : X \to Y$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \to \widehat{X}$ mit $f \circ \kappa = \alpha$. Dabei wird der gesamte „Rand“ $Y \setminus \kappa(X)$ in Y zusammengeschlagen auf den einen Punkt ∞ in $\widehat{X}$.

Daraus folgt erneut Eindeutigkeit: Sind $\alpha : X \to \widehat{X}$ und $\tilde{\alpha} : X \to \tilde{X}$ zwei Einpunktkompaktifizierungen, dann existiert genau ein Homöomorphismus $(f, g) : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \widehat{X}$ mit $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ und $g \circ \alpha = \tilde{\alpha}$.

Beweis: Sorgfältig nachrechnen. Auch dies ist eine lehrreiche Übung!

Einpunktkompaktifizierungen sind minimal… und terminal.

Sei X lokal-kompakt hausdorffsch, aber selbst noch nicht kompakt. Wir sehen zwei äquivalente Zugänge zur Einpunktkompaktifizierung:

1. Die konkrete Konstruktion der Grundmenge $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ mit der Alexandroff–Topologie $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\, \widehat{X} \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt} \,\}$.
2. Die abstrakte Charakterisierung als kleinste Kompaktifizierung im Sinne der obigen universellen Abbildungseigenschaft (UAE).

In (1) arbeiten wir konkret mit den *Elementen* von X und $\widehat{X}$ sowie den *offenen Mengen* in $\mathcal{T}$ und $\widehat{\mathcal{T}}$. Die Konstruktion erfordert ehrliche Arbeit. In (2) betrachten wir nicht konkret, wie der Raum $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ *aufgebaut* ist, sondern bequem-abstrakt, was die Kompaktifizierung $\alpha : X \to \widehat{X}$ *leistet*. Auch so lässt sich die Einpunktkompaktifizierung charakterisieren!

🙂 Analogie: Auch in der Informatik trennt man die Implementierung, also den internen Aufbau, von der Funktionaltität, also der nach außen sichtbaren Schnittstelle. Vorteil: Wir können das Objekt jederzeit durch ein anderes ersetzen mit gleichwertiger Funktionalität.

Mathematisch-philosophisches Leitmotiv

Einpunktkompaktifizierung, Produkt, Summe, Quotient, Teilraum, ...
Viele mathematische Objekte lassen sich auf zwei Arten betrachten:

Menge mit Struktur $(X, \dots)$	**Morphismen** $\forall Y\, \exists! f : Y \to X$
interne Beschaffenheit:	externe Eigenschaften:
Beziehung zwischen Elementen	Beziehung zu anderen Objekten
Datenstruktur, Implementierung	Verhalten, Semantik, Axiome
Was ist X? Wie ist X aufgebaut?	Was tut X? Was leistet X für uns?
konkret und theoretisch	abstrakt und angewandt
explizite Bauanleitung	bequeme Bedienungsanleitung
Konstruktion $\Rightarrow$ Existenz	Definition $\Rightarrow$ Eindeutigkeit

Ebenso: Vektorraum V mit Basis $B = (b_i)_{i \in I}$, Polynomring $K[X]$, ...
Auch natürliche Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$, ganze Zahlen $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$, rationale Zahlen $(\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1, <)$, reelle Zahlen $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1, <)$, ...

In Kapitel H formen wir diese Idee zu einer mathematischen Sprache, mit der Sie effizient arbeiten und rechnen können, gar Sätze beweisen!

Mathematisch-philosophisches Leitmotiv

Dieses grundlegende Muster finden Sie nicht nur in der Mathematik, sondern ebenso in der Informatik, der Physik, der Technik, etc.

Die Etiketten „konkret“ und „abstrakt“ gefallen mir nicht besonders; sie sind manchmal hilfreich, doch oft verschleiern sie das Wesentliche!

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung.
Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen!
Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut.

Zur Klarstellung muss und will ich Partei ergreifen für die Abstraktion: Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen.
Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

Wichtigstes Beispiel: Kompaktifizierungen des $\mathbb{R}^n$

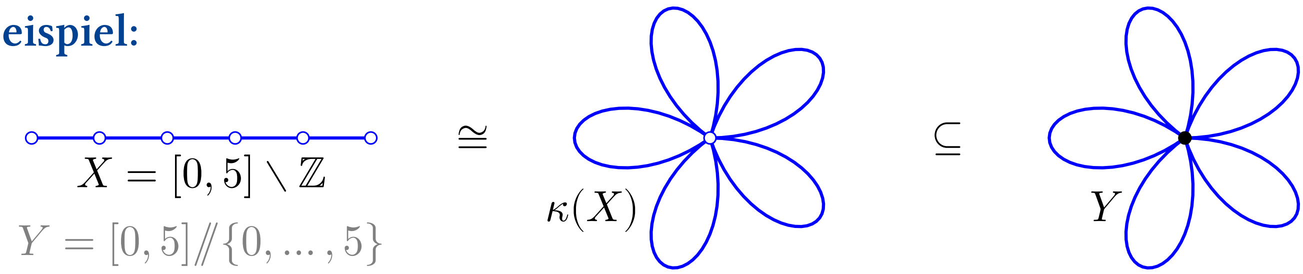
Beispiel F4H: Kompaktifizierungen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$

(0) Die stereographische Projektion $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ (A1L) und Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung $\alpha : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (F4D) sind homöomorph: Es existiert $(f, g) : \mathbb{S}^n \cong \widehat{\mathbb{R}^n}$, sogar eindeutig (F4G).

(1) Von der Zweipunktkompaktifizierung $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \cong [-1, 1]$ zu Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung $\alpha : \mathbb{R} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$ haben wir $f : \bar{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ durch Zusammenschlagen $\pm\infty \mapsto \infty$. (E2T, F1R).

(2) Von der Ballkompaktifizierung $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n : x \mapsto x/(1 + |x|)$ zur Einpunktkompaktifizierung $\alpha : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ haben wir $f : \mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ durch Zusammenschlagen des Randes (F1R).

Beispiel:



Weitere Beispiele zur Einpunktkompaktifizierung

Beispiel / Übung F4I: erste einfache Illustrationen

Bestimmen Sie zu der euklidischen Halbebene $A = \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}$ möglichst explizit eine Einpunktkompaktifizierung $\kappa : A \hookrightarrow K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dieselbe Aufgabe für $B = \,]0, 1[$, $C = [0, 1[\cup [2, 3[$, $D = \,]0, 1[\cup]2, 3[$.
Wenn Sie möchten, denken Sie sich weitere Beispiele dieser Art aus!

Beispiel / Übung F4J: etwas kniffligere Illustrationen

Nennen Sie zu Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung $\alpha_i : X_i \hookrightarrow \widehat{X_i}$ explizit eine homöomorphe Kompaktifizierung $\kappa_i : X_i \hookrightarrow Y_i$ mit $Y_i \subseteq \mathbb{R}^n$:

$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| \le 1\}$, $\quad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le |x| < \infty\}$,
$X_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le |x| < 1\}$, $\quad X_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < 1\}$,
$X_5 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|, |x_2| < 1\}$, $\quad X_6 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| < 1\}$,
$X_7 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \ge 0, |x| < 1\}$, $\quad X_8 \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und sternförmig,
$X_9 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\quad$ Bouquet $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$? hawaiianischer Ohrring $\bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{S}^1 - \mathrm{i})/k$?

Mathematisch-didaktisches Leitmotiv

Sätze formuliere ich möglichst explizit: Alle nötigen Daten liegen vor.
Der Beweis besteht im sorgsamen Nachrechnen aller Behauptungen.

Auch diese Pflicht muss getan werden, es ist ehrliche Arbeit, oft Routine.
Wir leiten Sie zu dieser Sorgfalt an, es wird Ihnen auch selbst gelingen.

Das ist mathematisches Handwerk und hat bekanntlich goldenen Boden.
Als Mathematiker:in wollen Sie genau wissen, wovon Sie sprechen.

Darüber hinaus geht es um zentrale Ideen, Bedeutung und Überblick,
mathematische Intuition, geometrische Anschauung und Beispiele.

Mathematik umschrieb man einst als *die Lehre von Zahlen und Figuren.*
Speziell in der Topologie erweisen beide ihren gegenseitigen Nutzen.

Dürfen wir Bildern vertrauen? Können wir Formeln veranschaulichen?
Lieber Anschauung oder Formalisierung? Sie benötigen beides!

Sie sollen beides beherrschen und ineinander übersetzen können.
C'est par la logique que l'on prouve et par l'intuition que l'on découvre.

Mathematisch-didaktisches Leitmotiv

Vielleicht sind Sie gerade etwas unglücklich, dass ich nicht alles vorführe,
oder unsicher, welche Arbeit Sie genau übernehmen sollen.

Tatsächlich will und kann ich nicht alles vorturnen, das wäre langweilig.
Es geht vielmehr darum, Sie zu mathematischer Arbeit anzuleiten,
Ihnen die nötigen Techniken zu erklären und Werkzeuge mitzugeben,
zu deren eigenständigen Nutzung zu ermutigen, Sie zu aktivieren.

Gib einem Menschen einen Fisch, und du ernährst ihn für einen Tag.
Lehre ihn zu fischen, und er ernährt sich sein Leben lang.

Die Auseinandersetzung mit der Mathematik ist für Sie harte Arbeit,
übrigens auch für mich und alle Beteiligten, doch es lohnt sich!
Unsere Arbeitsteilung ist nicht fix, sondern muss austariert werden.
Die Grenzziehung ist fein, erfahrungsgemäß funktioniert es recht gut.

Sie dürfen der Erfahrung Ihrer Dozenten vertrauen, sie meinen es gut,
doch nicht darauf ausruhen: Werden Sie kritisch und selbstständig!
Wo immer Sie das Leben hinführt, Ihre Lehrer werden nicht mitgehen.
Am Ende zählt allein Ihr solides Wissen und eigenständiges Können.

Definition F5B: eigentliche Abbildung

Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **eigentlich**, engl. *proper*, wenn sie stetig und abgeschlossen ist mit kompakter Faser $f^{-1}(\{y\})$ über jedem $y \in Y$.

Beispiele: (1) Jeder Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist eigentlich.

(2) Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ von einem kompakten Raum X in einen Hausdorff–Raum Y ist eigentlich: f ist abgeschlossen (F1L) und über jedem Punkt $y \in Y$ ist die Faser $f^{-1}(\{y\})$ kompakt (F1F).

Satz F5C: Eigentliche Abbildungen haben starke Eigenschaften.

Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ surjektiv und eigentlich. Dann ist f identifizierend (E2H).

1. Ist X hausdorffsch, dann ist auch Y hausdorffsch.
2. Ist $K \subseteq Y$ kompakt, dann ist auch $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt.
3. Genau dann ist X lokal-kompakt, wenn Y lokal-kompakt ist.

Aus (2) folgt: Die Komposition eigentlicher Abbildungen ist eigentlich. Das ist allein aus der Definition F5B nicht sofort ersichtlich.

Die ausführlichen Beweise dieser Sätze finden Sie im Skript.

Ich möchte zunächst lieber die Begriffe und Eigenschaften erklären, die formalen Beweise stelle ich für später zurück, falls dies nötig wird. Sie haben in der ersten Hälfte dieses Kapitels gesehen, dass dies alles zwar nicht wirklich schwer ist, aber doch Geduld und Mühe kostet.

Sie kennen nun alle nötigen Techniken, um es selbst zu versuchen.
Wo diese Ausführung zu schwer ist, helfen Skript und Literatur.
Aus Zeitgründen scheint mir dies ein guter Kompromiss.
Auf uns warten noch weitere schöne Themen!

Charakterisierung eigentlicher Abbildungen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\alpha_X"'] & Y \arrow[d, hook, "\alpha_Y"] \\ \widehat{X} \arrow[r, "\hat{f}", "\infty_X \mapsto \infty_Y"'] & \hat{Y} \end{tikzcd}$$

Satz F5E: Charakterisierung eigentlicher Abbildungen

Seien X, Y lokal-kompakte Hausdorff–Räume, etwa $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ sind äquivalent:

1. Die Abbildung f ist eigentlich (im Sinne der Definition F5B).
2. Für jedes Kompaktum $K \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt.
3. Die Fortsetzung von $f : X \to Y$ zu $\hat{f} : \widehat{X} \to \hat{Y}$ mit $\infty_X \mapsto \infty_Y$ ist stetig.

Beispiel: Zu $c \in \mathbb{C}$ definieren wir $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ durch $f(t) = \exp(ct)$.
Für $c = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt demnach $f(t) = \mathrm{e}^{at}(\cos bt + \mathrm{i} \sin bt)$.
Für $a \neq 0$ ist dies eine Einbettung, für $a = 0$ identifizierend.
Die Abbildung f ist eigentlich für $a > 0$, nicht für $a \leq 0$.

Charakterisierung eigentlicher Abbildungen

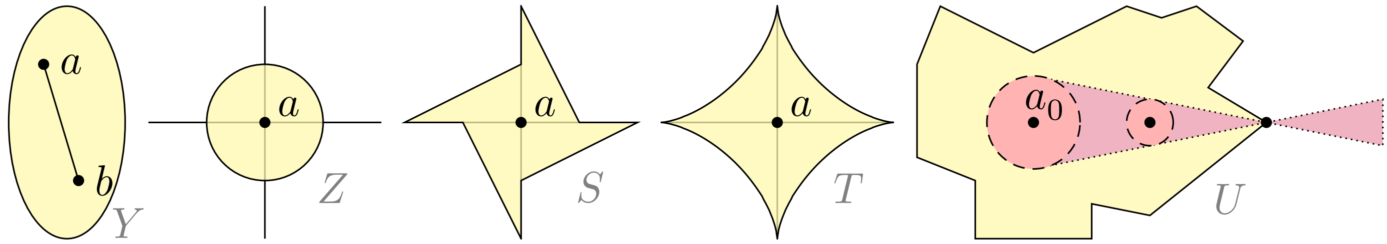
Bemerkung: Wir haben zunächst eigentliche Abbildungen zwischen allgemeinen topologischen Räumen diskutiert. Wenn man sich nur für eigentliche Abbildungen lokal-kompakter Hausdorff–Räume interessiert, dann kann man Bedingung (2) aus Satz F5E als Definition verwenden: Diese ist dann zwar nur auf einen Spezialfall zugeschnitten, aber die allgemeineren Ausführungen werden umgangen. Bei unserem Vorgehen ist F5E ein Satz, der aus der allgemeineren Definition abgeleitet wird. Manche Autoren behandeln ausschließlich diesen einfachen Spezialfall.

Übung F5F: eigentliche Polynomfunktionen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und hierauf $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$
eine Polynomfunktion mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ und $a_n \neq 0$.
Genau dann ist f eigentlich, wenn $n \geq 1$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie Satz F5E zur Charakterisierung eigentlicher Abbildungen! Eine der drei Eigenschaften ist hier leicht zu sehen... Durch Beispiele erfahren Sie den Nutzen topologischer Werkzeuge.

Konvex und sternförmig



Definition F6F: konvex und sternförmig

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen $a, b \in V$ ist

$$[a,b] := \{\, (1-t)a + tb \,\big|\, t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1 \,\}.$$

Eine Teilmenge $X \subseteq V$ ist **konvex**, wenn gilt:

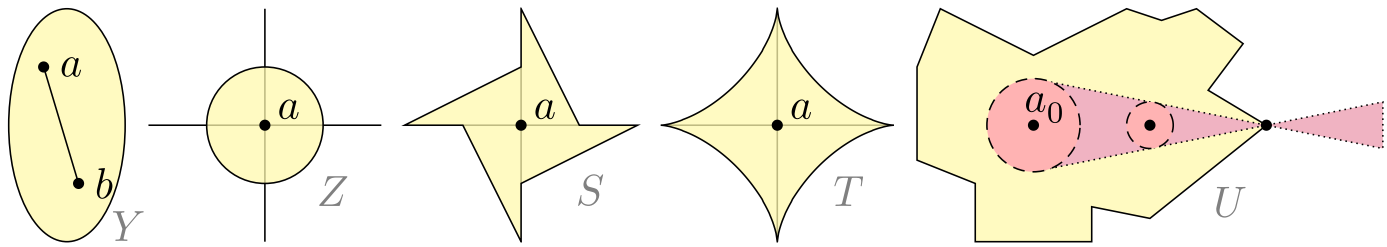
$$\forall a, b \in X \;:\; [a,b] \subseteq X$$

Die Menge X ist **sternförmig** zum Zentrum $a \in X$, wenn gilt:

$$\forall b \in X \;:\; [a,b] \subseteq X$$

Beispiel: In der Skizze sind Y und Z konvex, somit sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte; S und T sind sternförmig bezüglich a (und nur a).

Sternförmige Kompakta



Satz F6G: sternförmige Kompakta

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig zu $a \in X^\circ$. Jeder Randpunkt $b \in \delta X$ sei sichtbar gemäß $[a,b] \cap \delta X = \{b\}$. Dann folgt $X \cong \mathbb{D}^n$. Genauer:

(1) Wir haben den ambienten Homöomorphismus $h : (\mathbb{R}^n, X) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^n)$ dank Zentralprojektion $h(x) = x/\rho(x/|x|)$ für $x \neq 0$ und $h(0) = 0$.

(2) *Verschärfung:* Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig bezüglich jedes Punktes $a \in B(a_0, \varepsilon)$, so ist unser Homöomorphismus h bilipschitz.

Beweis: (1) Nach Translation können wir $a = 0$ annehmen. Wir haben $B(0,\varepsilon) \subseteq X \subseteq \bar{B}(0,R)$ für geeignete Konstanten $0 < \varepsilon \le R$ und somit $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \to [\varepsilon, R] : s \mapsto \sup\{ r \in \mathbb{R}_{\ge 0} \,|\, rs \in X \}$ mit $\delta X \cap \mathbb{R}_{\ge 0} \cdot s = \{\, \rho(s) \cdot s \,\}$.

Sternförmige Kompakta

Die Projektion $f : \delta X \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$ ist wohldefiniert dank $0 \notin \delta X$, stetig, bijektiv dank $f^{-1}(s) = \rho(s) \cdot s$, also ein Homöomorphismus (F1L). Insbesondere ist $\rho : s \mapsto |f^{-1}(s)|$ stetig! Wir erhalten inverse Bijektionen

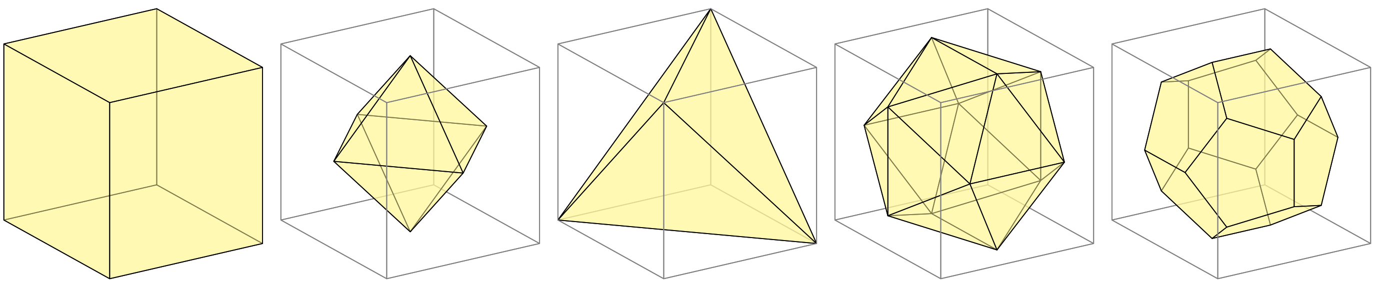
$$h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x/\rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

$$k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x \cdot \rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Beide sind stetig in $x \neq 0$, und in 0 dank $|h(x)| \le |x|/\varepsilon$ und $|k(x)| \le |x| \cdot R$. Das Homöomorphismuspaar (h, k) erfüllt $h(X) \subseteq \mathbb{D}^n$ und $k(\mathbb{D}^n) \subseteq X$.

(2) Wieder sei $a_0 = 0$. Für $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ liegt rs im Inneren von X für $0 \le r < \rho(s)$, wie obige Skizze zeigt, denn für $t := r/\rho(s) < 1$ gilt $B(rs, (1-t)\varepsilon) = \{\, (1-t)a + t\rho(s) \cdot s \mid a \in B(0, \varepsilon) \,\} \subseteq X$. Insbesondere gilt $\delta X \cap \mathbb{R}_{\ge 0} \cdot s = \{\, \rho(s) \cdot s \,\}$ wie in (1) gefordert. Der Rand δX trifft nicht das Innere des Doppelkegels um $\rho(s) \cdot s$, somit ist ρ lipschitz-stetig. QED

Konvexe Körper



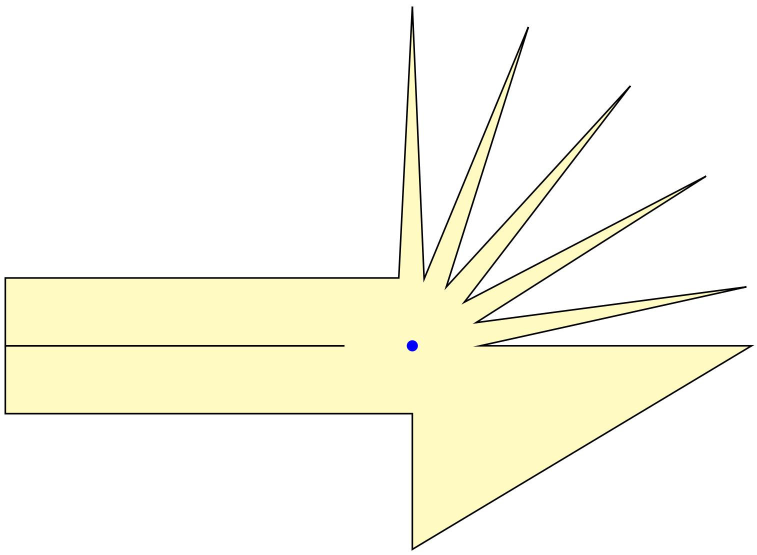
Satz F6H: Homöomorphie der konvexen Körper

(1) Jeder konvexe Körper $X \subseteq \mathbb{R}^n$, das heißt konvex und kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \neq \emptyset$, ist (bilipschitz) homöomorph zum Ball $\mathbb{D}^n$.

(2) Allgemein, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer, kompakt und konvex ist (bilipschitz) homöomorph zu $\mathbb{D}^k$ mit $0 \le k \le n$, vermöge $h : (\mathbb{R}^n, X) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^k)$.

Beweis: Aussage (1) ist ein (einfacher, aber wichtiger) Spezialfall von F6G. (2) Sei $v_0 \in X$. Nach Verschiebung gilt $v_0 = 0$. Seien $v_1, \dots, v_k \in X$ linear unabhängig mit k maximal. Nach Rotation gilt $X \subset \mathbb{R}^k$ mit $X^\circ \neq \emptyset$, denn $t_0 v_0 + \dots + t_k v_k \in X^\circ$ für alle $t_0, \dots, t_k > 0$ mit $t_0 + \dots + t_k = 1$. QED

Sternförmige offene Mengen



Satz F61: sternförmige offene Mengen

Jede sternförmige offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.
Noch besser: Wir können $0 \in U \subseteq \mathbb{B}^n$ annehmen. Dann existiert $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ lipschitz-stetig mit $g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ und $g|_U : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$.

Das beweist man ähnlich wie die Sätze für Kompakta. Versuchen Sie es, so fördern Sie Ihre mathematische Kreativität und technische Virtuosität.

Sternförmige offene Mengen

⚠ Offene Mengen des $\mathbb{R}^n$ können extrem franselig sein und der Rand $\delta U = \overline{U} \setminus U$ extrem irregulär. In unserer Konstruktion wird δU auf $\mathbb{S}^{n-1}$ geworfen. Hier haben wir außer Stetigkeit herzlich wenig Kontrolle. Doch auf dem Inneren U erhalten wir einen Homöomorphismus!

Beweis: Die offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei sternförmig bezüglich $a \in U$. Nach Verschiebung können wir $a = 0$ annehmen. Außerdem dürfen $U \subseteq \mathbb{B}^n$ wir voraussetzen, notfalls wenden wir den Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$ mit $h(x) = x/(1 + |x|)$ an (A1B).

Das Komplement $V = \mathbb{R}^n \setminus U$ ist abgeschlossen. Wir definieren $\psi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ durch $\psi(x) = d([0, x], V)$ und erhalten:

1. Für $x \in U$ gilt $\psi(x) > 0$. (C3N, F2A)
2. Es gilt $|\psi(x) - \psi(y)| \le |x - y|$. (C3N)
3. Für $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\psi(rs)$ fallend in $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.
4. Es gilt $\psi(x) = 0$ für alle $x \in V = \mathbb{R}^n \setminus U$.

Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x/\psi(x)$ ist somit wohldefiniert dank (1), stetig dank (2), injektiv dank (3) und schließlich surjektiv dank (4) und Zwischenwertsatz (C3A) längs jeder Halbgeraden.

Zur stetigen Bijektion $f : \mathbb{B}^n \supseteq U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bleibt schließlich die Stetigkeit von f^{-1} nachzuweisen. (Mit fortgeschrittenen Hilfsmitteln können wir an die Invarianz des Gebietes appellieren, siehe Satz J7K.) Mit folgendem genial-einfachen Trick gelingt es elementar… durch Kompaktifizierung:

Für die Komposition $g = h \circ f : U \to \mathbb{B}^n$ gilt

$$g(x) = \frac{x/\psi(x)}{1 + |x/\psi(x)|} = \frac{x}{\psi(x) + |x|}$$

Die letzte Formel beschert uns eine stetige Fortsetzung $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$, die U bijektiv auf $\mathbb{B}^n$ abbildet und das Komplement $\mathbb{D}^n \setminus U$ auf den Rand $\mathbb{S}^{n-1}$. Da der Ball $\mathbb{D}^n$ kompakt ist, ist g eine abgeschlossene Abbildung (F1L). Dies gilt dann auch für die stetige Bijektion $g|_U^{\mathbb{B}^n} : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$, denn $g(A \cap U) = g(A) \cap \mathbb{B}^n$. Diese ist somit ein Homöomorphismus. QED

Beispiele: Vergleichen Sie die Beispiele aus der Einleitung (A1B, A1D, A1E). In welchen Fällen erhalten Sie dieselben Homöomorphismen?

Bemerkung: Wir können diese elegante Konstruktion auf die vorigen Beispiele anwenden, etwa wie in die obigen Skizzen oder allgemein ein Kompaktum $X \subseteq \mathbb{D}^n$ sternförmig zu $a \in X^\circ$. Ist jeder Randpunkt $b \in \delta X$ von a aus sichtbar gemäß $[a,b] \cap \delta X = \{b\}$, so erhalten wir $g|_K : K \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$. Andernfalls werden alle Randpunkte auf derselben Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot s$ auf denselben Punkt $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ geworfen. Unsere vorige Konstruktion aus F6G und F6H hat etwas stärkere Voraussetzungen, liefert dafür aber auch etwas mehr: einen *ambienten* Homöomorphismus.

🙂 Unsere schöne Konstruktion liefert zwar $g : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$ lipschitz-stetig, aber ohne weiteres Zutun ist g nicht notwendigerweise differenzierbar. Jede sternförmige offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist sogar diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$. Das ist aber, soweit ich weiß, nur wesentlich aufwändiger zu beweisen. Ich fände es recht befriedigend, für einen Diffeomorphismus $g : U \cong \mathbb{B}^n$ eine ebenso elementare und elegante Konstruktion wie oben zu finden.

Sind auf $\mathbb{Q}^n$ über $\mathbb{Q}$ alle Normen äquivalent?

Der $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ erbt die euklidische Norm $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$. Gibt es weitere, nicht-äquivalente Normen? Erstaunlicherweise ja!

Satz F6J: überabzählbar viele Normen auf $\mathbb{Q}^2$

Zu jedem $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $|{-}|_\xi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}_{\ge 0} : (a,b) \mapsto |a + b\xi|$ eine Norm. Das sind überabzählbar viele Normen, alle topologisch verschieden!

Beweis: (1) Für $|{-}|_\xi$ gilt (N1), denn aus $|a+b\xi| = 0$ folgt $b = 0$ und $a = 0$. Ausführlich: Aus $a + b\xi = 0$ und $b \neq 0$ folgt $\xi = -a/b \in \mathbb{Q}$, Widerspruch! Homogenität (N2) und Dreiecksungleichung (N3) erbt $|{-}|_\xi$ von $|{-}|$.

Für $\xi \neq \zeta$ wählen wir eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \to \xi$ und setzen $b_n := -1$. Dann gilt $|(a_n, b_n)|_\xi = |a_n + b_n\xi| \to 0$, aber $|(a_n, b_n)|_\zeta \to |\xi - \zeta| > 0$ und auch $|(a_n, b_n)| \to \sqrt{\xi^2 + 1} \ge 1$. Somit sind alle Topologien $\mathcal{T}(\mathbb{Q}^2, |{-}|_\xi)$ paarweise verschieden, und keine davon ist die euklidische. QED

Auf $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ könnten wir ähnliches vermuten, denn vermeintlich ist dieser Vektorraum noch „größer“ und bietet noch mehr Möglichkeiten. Das Gegenteil ist der Fall: Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ sind äquivalent!

Auf $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ sind alle Normen äquivalent!

Satz F6K: Normäquivalenz

(1) Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum V sind je zwei Normen $|{-}|$ und $\|{-}\|$ äquivalent: Es gibt Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\ell\,|x| \le \|x\| \le L\,|x| \quad \text{für alle} \quad x \in V.$$

Insbesondere induzieren sie auf V dieselbe Topologie $\mathcal{T}_{|-|} = \mathcal{T}_{\|-\|}$.

(2) Speziell für $V = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm $|{-}|$ ist die euklidische Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \,\}$ kompakt und die Konkurrenznorm $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ stetig. Somit genügen die Konstanten

$$0 \;<\; \ell := \min\{\, \|x\| \mid x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\} \;\le\; L := \max\{\, \|x\| \mid x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\} \;<\; \infty.$$

Beweis: Es genügt, (2) zu beweisen. Für die kanonische Basis $e_1, \dots, e_n$ in $\mathbb{R}^n$ gilt $\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \le |x_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |x_n| \cdot \|e_n\| \le c|x|$ mit $c := \sqrt{\|e_1\|^2 + \dots + \|e_n\|^2}$, insbesondere $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\| \le c|x - y|$. Somit ist $\|{-}\|$ stetig. Alles Weitere folgt dank Heine–Borel (F1O, F1K). QED

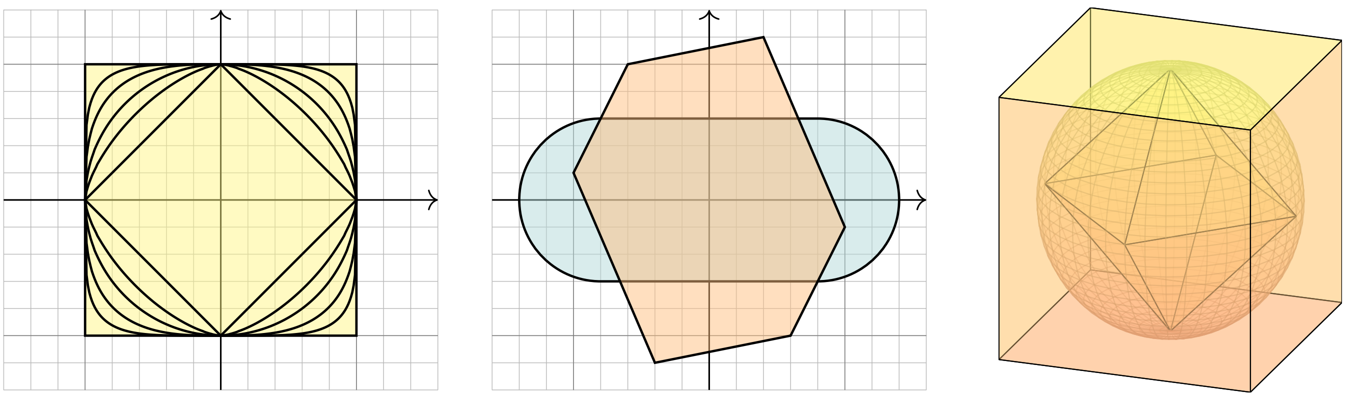
Satz F6L: Skalarprodukte und Normen

(1) Zu je zwei Skalarprodukten $\langle - | - \rangle$ und $\langle\!\langle - | - \rangle\!\rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ existiert ein linearer Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $\langle\, h(u) \,|\, h(v) \,\rangle = \langle\!\langle\, u \,|\, v \,\rangle\!\rangle$.

(2) Zu je zwei Normen $|{-}|$ und $\|{-}\|$ auf $\mathbb{R}^n$ existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, bilipschitz, mit $|h(v)| = \|v\|$ und $h(\lambda v) = \lambda h(v)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis: (1) Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Gram–Schmidt (C1H) liefert eine Orthonormalbasis $u_1, \dots, u_n$ bezüglich $\langle\!\langle - | - \rangle\!\rangle$ und entsprechend $v_1, \dots, v_n$ bezüglich $\langle - | - \rangle$. Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der lineare Isomorphismus mit $h(u_k) = v_k$ für alle k. Dann gilt $\langle\, h(u) \,|\, h(v) \,\rangle = \langle\!\langle\, u \,|\, v \,\rangle\!\rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(2) Wir haben die Bijektion $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(v) = (\|v\|/|v|) \cdot v$ und $h^{-1}(v) = (|v|/\|v\|) \cdot v$ für $v \neq 0$ sowie $h(0) = h^{-1}(0) = 0$. Dank F6K haben wir $0 < \ell \leq \|v\|/|v| \leq L < \infty$, also sind h und h^{-1} bilipschitz-stetig. $\boxed{\text{QED}}$



Satz F6M: Symmetrische konvexe Körper entsprechen Normen.

(1) Zu jeder Norm $\|{-}\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist der abgeschlossene Einheitsball

$$K := \big\{\, x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x\| \leq 1 \,\big\}$$

kompakt und konvex mit $-K = K$ und $K^\circ \neq \emptyset$ (euklidisch offener Kern).

(2) Erfüllt eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ diese Eigenschaften, so existiert genau eine Norm $\|{-}\|$ mit Einheitsball K, nämlich $\|x\| = \inf\{\, r \in \mathbb{R}_{>0} \,|\, x/r \in K \,\}$.

Definition F6N: topologischer Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ein **topologischer $\mathbb{K}$–Vektorraum** $(X, \mathcal{T}, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum $(X, +, \cdot)$ über $\mathbb{K}$ zusammen mit einer Hausdorff–Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass die Addition $+ : X \times X \to X$ und die Skalierung $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ stetig sind.

Wir nennen dann $\mathcal{T}$ eine **$\mathbb{K}$–Vektorraumtopologie** auf $(X, +, \cdot)$.

Beispiele: Jeder normierte Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum. Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definieren punktweise, gleichmäßige und kompakte Konvergenz jeweils eine Vektorraumtopologie, und diese drei sind sehr verschieden.

Satz F6S: die Vektorraumtopologie auf $\mathbb{R}^n$

Sei $\mathbb{R}^n$ der euklidische und X ein beliebiger topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum.

(1) Jede $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to X$ ist stetig.

(2) Ist $f : \mathbb{R}^n \to X$ linear und injektiv, so ist f abgeschlossen.

(3) Ist $f : \mathbb{R}^n \to X$ linear und bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.

Auf $\mathbb{R}^n$ und jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum X sind alle Normen äquivalent (F6K), induzieren also dieselbe Topologie. Satz F6O beweist die Eindeutigkeit ohne die Voraussetzung der Normierbarkeit.

Dieses Ergebnis bestärkt unsere Erfahrung, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ besonders gute Eigenschaften hat, die sie unter allen denkbaren Topologien auf $\mathbb{R}^n$ auszeichnen. Die Aussage scheint geometrisch plausibel, beruht aber ganz wesentlich auf der Kompaktheit und somit letztlich auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

Als Kontrast betrachten wir den geordneten Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ mit seiner Ordnungstopologie; dies ist zugleich die Teilraumtopologie in $\mathbb{R}$. Für $\mathbb{Q}^n$ gilt der Satz von Heine–Borel nicht, zum Beispiel ist der Einheitsball $\{\, x \in \mathbb{Q}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1 \,\}$ beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{Q}^n$, aber nicht kompakt; schon das Intervall $[-1, 1]_{\mathbb{Q}}$ ist nicht kompakt (F1D). Unsere Beweise für $\mathbb{R}^n$ beruhen auf lokaler Kompaktheit, für $\mathbb{Q}^n$ brechen sie zusammen. Tatsächlich existieren auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ überabzählbar viele verschiedene Vektorraumtopologien (F6J).

Hier später mehr, vorerst siehe Skript.

Ohne Injektivität sind lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to X$ nicht abgeschlossen! Das Standardbeispiel ist die Projektion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$. In $\mathbb{R}^2$ ist die Hyperbel $A = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\,\}$ abgeschlossen, aber ihr Bild $f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ nicht.

Satz F6U: lokal-kompakte Vektorräume

Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum X ist genau dann lokal-kompakt, wenn er endlich-dimensional ist, also $n = \dim_{\mathbb{R}} X < \infty$ und $X \cong \mathbb{R}^n$.
In diesem Fall ist er linear homöomorph zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Die Funktionalanalysis untersucht und nutzt je nach Bedarf normierte und auch ganz allgemein topologische Vektorräume.

Für endlich-dimensionale $\mathbb{R}$–Vektorräume genügt die Lineare Algebra.
Für unendlich-dimensionale Vektorräume genügt dies meist nicht, der Durchbruch gelingt erst in Verbindung mit der Topologie!

Lemma F6T: Abschluss in topologischem Vektorraum

Sei $(X, \mathscr{T}, +, \cdot)$ ein topologischer Vektorraum und $\mathscr{B}_0$ eine UBasis von 0.
Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist der Abschluss $\overline{A} = \bigcap\{\, A + U \,|\, U \in \mathscr{B}_0 \,\}$.

Beweis: Für jedes $x \in X$ ist $\mathscr{B}_x = \{\, x - U \,|\, U \in \mathscr{B}_0 \,\}$ eine UBasis (F6Q).
Genau dann gilt $x \in \overline{A}$, wenn $(x - U) \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathscr{B}_0$ gilt:
Das heißt, für jedes $U \in \mathscr{B}_0$ existiert ein $a \in A$ mit $a \in x - U$,
also $x \in a + U$, kurz $x \in A + U$. $\boxed{\text{QED}}$

Beweis von Satz F6U: „$\Leftarrow$“: Gilt $\dim_{\mathbb{R}} X = n < \infty$, so existiert ein $\mathbb{R}$–Isomorphismus $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X$. Dank F6S ist dieser ein Homöomorphismus. Genau wie $\mathbb{R}^n$ ist dann auch X lokal-kompakt.

„$\Rightarrow$“: Sei nun umgekehrt X lokal-kompakt. Es existiert also eine offene Umgebung V von 0 in X mit kompaktem Abschluss $\overline{V}$.

Nach F6Q enthält jede Umgebung von 0 eine ausgewogene Umgebung U von 0, mit $U \subseteq 2U \subseteq 3U \subseteq \dots$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^n U$. Dank Kompaktheit folgt $V \subseteq \overline{V} \subseteq 2^n U$ für ein n, also $2^{-n}V \subseteq U$. Demnach ist $(2^{-n}V)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von 0. Mit V ist auch $x + \frac{1}{2}V$ offen (F6Q). Zur offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X}(x + \frac{1}{2}V)$ existieren $x_1, \dots, x_m \in X$ mit

$$\overline{V} \subseteq \left(x_1 + \tfrac{1}{2}V\right) \cup \dots \cup \left(x_m + \tfrac{1}{2}V\right).$$

Wir betrachten den erzeugten Vektorraum $Y := \mathbb{R}x_1 + \dots + \mathbb{R}x_m$. Es gilt $\dim_{\mathbb{R}} Y \le m < \infty$. Aus $V \subseteq Y + \frac{1}{2}V$ und $\frac{1}{2}Y = Y$ folgt $\frac{1}{2}V \subseteq Y + \frac{1}{4}V$, also

$$V \quad\subseteq\quad Y + \tfrac{1}{2}V \quad\subseteq\quad Y + Y + \tfrac{1}{4}V \quad=\quad Y + \tfrac{1}{4}V.$$

Per Induktion folgt so $V \subseteq Y + 2^{-n}V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, nach F6T also

$$V \quad\subseteq\quad \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} Y + 2^{-n}V \quad=\quad \overline{Y}.$$

Nach F6S ist Y in X abgeschlossen, also $V \subseteq Y$. Die Umgebung V von 0 in X ist absorbierend (F6Q), also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nV \subseteq Y$ und $X = Y$. QED

Cantor und Netto: Gilt $[0,1] \cong [0,1]^2$?

Gibt es Bijektionen $[0,1] \cong [0,1]^2$? — Ja! (Cantor 1878)

Gibt es stetige Bijektionen $[0,1] \cong [0,1]^2$? — Nein! (Netto 1879)

Georg Cantor bewies 1878 den erstaunlichen Satz, dass das Intervall $[0,1]$ und das Quadrat $[0,1]^2$ gleich viele Punkte haben, also eine Bijektion $[0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$ existiert. (Wir haben dies bereits in Satz B2N gezeigt.) Dies warf die Frage auf, ob *stetige* Bijektionen $[0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$ existieren.

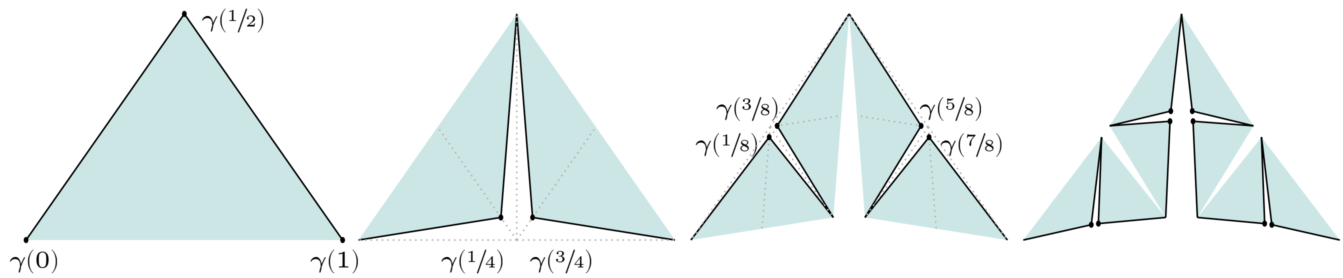
Beweis: Wäre die Bijektion $f : [0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$ stetig, so wäre f dank der Kompaktheit des Startraums $[0,1]$ und der Hausdorff–Eigenschaft des Zielraums $[0,1]^2$ ein Homöomorphismus (F1L). Das widerspricht A1H.

Es blieb die Frage, ob statt stetiger Bijektionen noch stetige Surjektionen $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$ möglich sind. Dies scheint zunächst kaum vorstellbar, doch Giuseppe Peano (1858–1932) überraschte 1890 die Fachwelt mit der ersten Konstruktion einer flächenfüllenden Kurve. Ebenso existieren Einbettungen $[0,1] \hookrightarrow [0,1]^2$ mit positivem Frächeninhalt. Für all diese Konstruktionen nutzen wir dankend die gleichmäßige Konvergenz.

Peano und Osgood: flächenfüllende Wege

Gibt es stetige Surjektionen $\gamma : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$? — Ja! (Peano 1890)

Gibt es stetige Injektionen $\gamma : [0,1] \hookrightarrow [0,1]^2$ mit positivem Flächeninhalt? — Ja, beliebig nahe an 100%! (Osgood 1903, siehe C6H). Konstruktion:



Aufgabe: Kann der volle Flächeninhalt in $X = [0,1]^2$ erreicht werden?

Lösung: Nein! Nach Netto ist γ nicht surjektiv. Das Bild ist kompakt (F1J), also in X abgeschlossen (F1G). Demnach existiert $a \in X \setminus \operatorname{Im}\gamma$ sowie ein Radius $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B = B_{(X,d)}(a,\varepsilon) \subseteq X \setminus \operatorname{Im}\gamma$ und somit $\operatorname{vol}_2 B > 0$.

🙂 Ein kleiner, aber positiver Flächeninhalt geht also immer verloren! Der *gesamte* Flächeninhalt ist niemals ganz erreichbar.

Erinnerung zu Schnitt und Retraktion

Beispiel / Übung E2K: Schnitt und Retraktion

(1) Die Inklusion $s : \{-1, 1\} \hookrightarrow [-1, 1]$ ist eine Einbettung, erlaubt aber keine Retraktion, also $p : [-1, 1] \to \{-1, 1\}$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\{-1,1\}}$.
Beweis: Nach dem Zwischenwertsatz C3A müsste p konstant sein.

(2) Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ können wir in $\mathbb{R}^2$ einbetten, aber nicht in $\mathbb{R}^1$; zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^1$ existiert $x \in \mathbb{S}^1$ mit $f(x) = f(-x)$, dank ZWS für $g : [0, \pi] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\pi)})$ mit $g(\pi) = -g(0)$.

(3) Die Abbildung $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist eine Identifizierung (dank E2P), erlaubt aber keinen Schnitt $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$.
Als Schnitt wäre $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ stetig, also nicht injektiv nach (2).

(4) Ist $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, so existiert keine stetige Injektion $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$.
Zu $a \in U$ existiert $r > 0$ mit $B(a, 2r) \subseteq U$, also $g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow U : s \mapsto a + rs$; mit $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$ ergäbe dies eine stetige Injektion $f \circ g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^1$.

Wir erhalten erneut $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^1$: Diese Räume sind nicht homöomorph.
In höherer Dimension folgt dies aus dem Abbildungsgrad, siehe Kapitel J.

Existiert ein Schnitt zu $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$?

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$ wickelt die Kreislinie $n$mal um sich selbst. In Polarkoordinaten ausgeschrieben gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \big(\cos(t), \sin(t) \big) \quad \mapsto \quad z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \big(\cos(nt), \sin(nt) \big)$$

Aufgabe: (1) Für welche $n \in \mathbb{N}$ erlaubt $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$ einen Schnitt?
(2) Ist jede stetige Injektion $s : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^1$ bereits ein Homöomorphismus?

Lösung: (2) Ja! Wäre s nicht surjektiv, so stünde $s : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ im Widerspruch zu E2K(2). Erinnerung: Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ lässt sich nicht in die Gerade $\mathbb{R}^1$ einbetten. Die stetige Bijektion s ist abgeschlossen, dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L, also ein Homöomorphismus.

(1) Ist $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so ist s dank (2) ein Homöomorphismus, also auch $p = s^{-1}$. Das gilt genau für $n = 1$.

Für $n = 0$ ist $p(z) = 1$ nicht surjektiv, erlaubt also keinen Schnitt.
Für $n = 1$ ist $p = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ ein Homöomorphismus, erlaubt also p^{-1} als Schnitt.
Für $n \geq 2$ ist p nicht injektiv, erlaubt also nach (2) keinen Schnitt.