

Kapitel E

Topologische Konstruktionen

*Mathematics is security. Certainty. Truth. Beauty. Insight.
Structure. Architecture. I see mathematics, the part of human knowledge
that I call mathematics, as one thing — one great, glorious thing.
Whether it is differential topology, or functional analysis,
or homological algebra, it is all one thing.*

Paul R. Halmos (1916–2006)

Inhalt dieses Kapitels E

- 1 Teilräume $A \subseteq X$ und Einbettungen $X \hookrightarrow Y$
- 2 Quotientenräume X/R und Identifizierungen $X \twoheadrightarrow Y$
- 3 Summen $X \sqcup Y$ und $\coprod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume
- 4 Produkte $X \times Y$ und $\prod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume
- 5 Trennungsaxiome und Metrisierung
- 6 Geometrische Anwendungen
- 7 Topologische Gruppen

Ausblick und Motivation

Dieses Kapitel folgt dem Leitmotiv: „Neue Räume aus alten!“
Dazu diskutieren wir die vier Grundrechenarten der Topologie:

§E1 Teilräume $A \subseteq X$ eines topologischen Raumes

§E2 Quotienten X/R eines topologischen Raumes

§E3 Summen $X \sqcup Y$ und $\coprod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume

§E4 Produkte $X \times Y$ und $\prod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume

Pars pro toto: Wir nutzen zunehmend freizügig die Abkürzung
„der Raum X “ wo wir vollständig „der Raum (X, \mathcal{T}) “ sagen müssten.
Die implizit gemeinte Topologie \mathcal{T} auf der Grundmenge X muss dann
jeweils aus dem Kontext klar und unmissverständlich hervorgehen.

Für metrische Räume haben wir Teilräume (C2E) und Summen (C2F).
An Quotienten und Produkten hingegen scheitern Metriken meist (E4v).
Für topologische Räume gelingen einheitlich alle vier Konstruktionen!
Abschließend klären wir Metrisierung in §E5: Aus dem Fortsetzungssatz
von Tietze (E5N) erhalten wir den Metrisierungssatz von Urysohn (E5R).

Ausblick und Motivation

Aus alten Räumen, die wir bereits hergestellt haben, wollen wir neue
Räume konstruieren, die die jeweils gewünschten Eigenschaften haben.
Parallel dazu konstruieren wir stetige Funktionen. Aus den Definitionen
von Teilraum, Quotient, Summe und Produkt folgt sofort die zugehörige
universelle Abbildungseigenschaft (UAE) in Form einer Faktorisierung.
Diese abstrakte Charakterisierung ist ein erstes praktisches Werkzeug.

Stetiges Verkleben E1P ist ein universelles Werkzeug zur Konstruktion
stetiger Abbildungen. Wir klären damit in befriedigender Weise, wann
stückweise definierte Funktionen stetig sind. Tietzes Fortsetzungssatz E5N
kommt bescheiden daher, doch entfaltet oft eine erstaunliche Wirkung.
Zur Illustration führe ich in §E6 erste geometrische Anwendungen vor.

Abschließend betrachten wir kurz topologische Gruppen. Topologische
und algebraische Grundbegriffe arbeiten hier wunderbar zusammen und
stärken sich gegenseitig. Hier können wir all unsere Techniken erproben
und schärfen. Dieses wunderschöne Thema verdient eigentlich eine
eigene Vorlesung, doch ich will es hier in §E7 zumindest bewerben.

Satz E1A: Ur/Bilder und Mengenoperationen

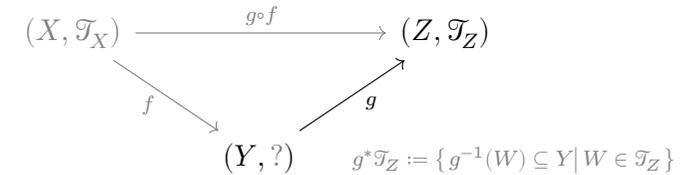
Sei $f : X \rightarrow Y$. Für alle $A, A', A_i \subseteq X$ und $B, B', B_i \subseteq Y$ mit $i \in I \neq \emptyset$ gilt:

$$\begin{array}{ll} f^* : \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X) \text{ Urbild} & f_* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y) \text{ Bild} \\ B \mapsto f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}, & A \mapsto f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}, \\ \\ B \subseteq B' \implies f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B'), & A \subseteq A' \implies f(A) \subseteq f(A'), \\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(Y) = X, & f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(X) \subseteq Y, \\ \\ f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i), & f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \\ f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i), & f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i), \\ \\ f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B'), & f(A \setminus A') \supseteq f(A) \setminus f(A'), \\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subseteq B, & f^{-1}(f(A)) \supseteq A. \end{array}$$

Für jede injektive / surjektive Abbildung f gilt statt „ \subseteq “ / „ \supseteq “ stärker „ \subsetneq “ / „ \supsetneq “.

Übung: Erinnern Sie sich an Ihr erstes Semester? Schön war die Zeit!

Wir transportieren Topologien durch Abbildungen vom Ziel zum Start:

**Definition E1B:** initiale Topologie / Zurückziehen / pull back

(1) Jede Abbildung $g : Y \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ definiert auf Y die **initiale Topologie**

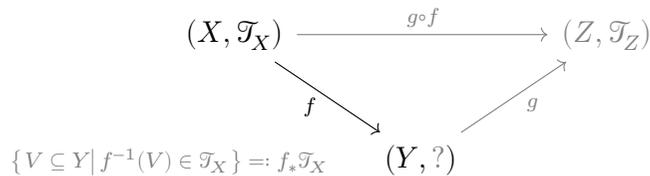
$$g^* \mathcal{T}_Z := \{g^{-1}(W) \subseteq Y \mid W \in \mathcal{T}_Z\}.$$

(1a) Genau dann ist $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \supseteq g^* \mathcal{T}_Z$. (D2A)
Demnach ist $g^* \mathcal{T}_Z$ die größte Topologie auf Y , für die g stetig ist. (D1F)

(1b) Eine Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, g^* \mathcal{T}_Z)$ stetig ist. (UAE)

Aufgabe: Rechnen Sie (a) und (b) sorgsam nach, siehe folgende Skizze.

Wir transportieren Topologien durch Abbildungen vom Start zum Ziel:

**Definition E1B:** finale Topologie / Vorschieben / push forward

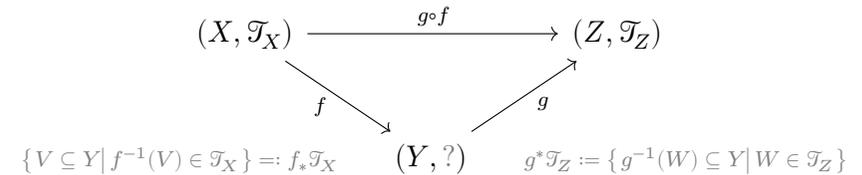
(2) Jede Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$ definiert auf Y die **finale Topologie**

$$f_* \mathcal{T}_X := \{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}.$$

(2a) Genau dann ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \subseteq f_* \mathcal{T}_X$. (D2A)
Demnach ist $f_* \mathcal{T}_X$ die feinste Topologie auf Y , für die f stetig ist. (D1F)

(2b) Eine Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $g : (Y, f_* \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig ist. (UAE)

Aufgabe: Rechnen Sie (a) und (b) sorgsam nach, siehe folgende Skizze.



Beweis: Dies sind tatsächlich Topologien dank des vorigen Satzes E1A.
Die Aussagen (a) sind trivial, da direkte Umformulierung der Definition.

(1b) Ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, g^* \mathcal{T}_Z)$ stetig, so auch $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ als Komposition (D2B) mit der stetigen Abbildung $g : (Y, g^* \mathcal{T}_Z) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$.

Ist umgekehrt $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, so gilt für jedes $W \in \mathcal{T}_Z$ stets $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{T}_X$. Jede offene Menge $V \in g^* \mathcal{T}_Z$ ist von der Form $V = g^{-1}(W)$ für ein $W \in \mathcal{T}_Z$, also gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$, somit ist f stetig.

(2b) Ist $g : (Y, f_* \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, so auch $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ als Komposition mit der stetigen Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, f_* \mathcal{T}_X)$.

Ist umgekehrt $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, so gilt für jedes $W \in \mathcal{T}_Z$ stets $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{T}_X$, also $g^{-1}(W) \in f_* \mathcal{T}_X$, somit ist g stetig. QED

Sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum und $\iota_A : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ die Inklusion einer Teilmenge $A \subseteq X$. Die **Teilraumtopologie** von A in (X, \mathcal{T}_X) ist

$$\mathcal{T}_A := \{A \cap U = \iota_A^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_X\} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X.$$

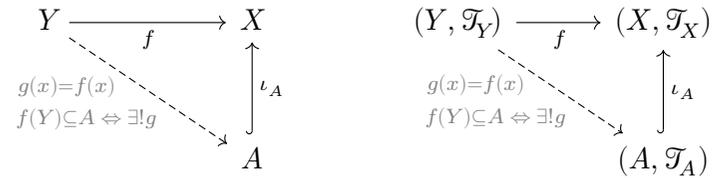
Wir nennen (A, \mathcal{T}_A) den **Teilraum** von (X, \mathcal{T}_X) auf der Teilmenge $A \subseteq X$. Seine Topologie $\mathcal{T}_A = \iota_A^* \mathcal{T}_X$ ist die initiale Topologie bezüglich ι_A (E1B), also die größte Topologie auf A , für die $\iota_A : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ stetig ist.

Beispiel / Übung E1c: zur Erinnerung und Wiederholung

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für den Teilraum (A, \mathcal{T}_A) in (X, \mathcal{T}_X) :

- 0 Ist (X, \mathcal{T}_X) hausdorffsch bzw. metrisierbar, so auch (A, \mathcal{T}_A) .
- 1 Ist (X, \mathcal{T}_X) erstabzählbar, so auch (A, \mathcal{T}_A) : Ist $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T}_X)$ eine UBasis, dann ist $\mathcal{B}'_x = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{B}_x\} \subseteq \mathcal{U}_x(A, \mathcal{T}_A)$ eine UBasis.
- 2 Ist (X, \mathcal{T}_X) zweitabzählbar, so auch (A, \mathcal{T}_A) : Ist $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{T}_X$ eine Basis, dann ist $\mathcal{B}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{B}_X\} \subseteq \mathcal{T}_A$ eine Basis der Topologie \mathcal{T}_A .

Wiederholung: Führen Sie selbst alle nötigen Argumente sorgsam aus.



Satz E1i: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

(0) Auf jeder Teilmenge $A \subseteq X$ von (X, \mathcal{T}_X) ist die Teilraumtopologie

$$\mathcal{T}_A := \{A \cap U = \iota_A^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_X\} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X$$

die größte, für die die Inklusion $\iota_A : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X) : a \mapsto a$ stetig ist.

- (1) Genau dann faktorisiert $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ gemäß $f = \iota_A \circ g$ mit $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (A, \mathcal{T}_A)$ stetig, wenn f stetig ist und $f(Y) \subseteq A$ erfüllt.
- (2) Postkomposition und Faktorisierung $g \dashv\vdash f$ mit $f = \iota_A \circ g$ stiften somit die Bijektion $(\Phi, \Psi) : \mathcal{C}(Y, A) \cong \{f \in \mathcal{C}(Y, X) \mid f(Y) \subseteq A\} : g \dashv\vdash f$.

Beweis: Klar nach Definition E1B der initialen Topologie $\mathcal{T}_A = \iota_A^* \mathcal{T}_X$. QED

Eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ ist stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \supseteq f^* \mathcal{T}_X$ gilt. Für jeden Teilraum $\iota : (Y, \mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ gilt $\mathcal{T}_Y := \iota^* \mathcal{T}_X$. Allgemein:

Definition E1k: Einbettung = Homöomorphismus auf das Bild

Eine injektive Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ topologischer Räume heißt **Einbettung**, wenn $\mathcal{T}_Y = f^* \mathcal{T}_X$ gilt. Äquivalent hierzu: $f = \iota_A \circ \bar{f}$ ist die Inklusion $\iota_A : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ des Teilraums $A = f(Y) \subseteq X$ nach einem Homöomorphismus $\bar{f} : (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{\cong} (A, \mathcal{T}_A)$.

Beispiel: Für $0 < a < 2\pi$ ist $f_a : [0, a[\rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{it}$ einbettend. Hingegen ist $f_{2\pi}$ stetig und injektiv, aber nicht einbettend. Für $a > 2\pi$ ist f_a nicht injektiv, also auch nicht einbettend.

Bemerkung E1l: Einbettungen bilden eine (Unter)Kategorie.

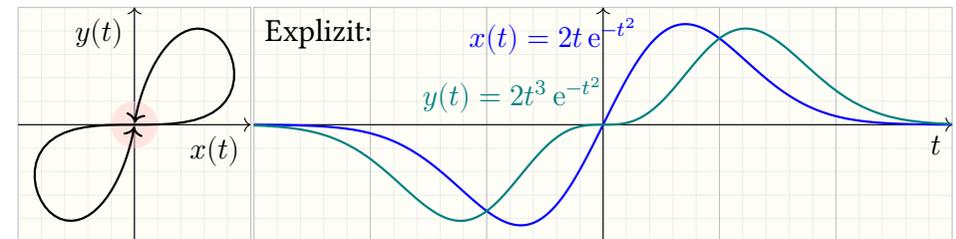
Zu jedem Raum ist die Identität $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ eine Einbettung. Sind $f : (X, \mathcal{T}_X) \hookrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ Einbettungen, ist auch ihre Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$.

Beispiel: Für $m < n$ haben wir die kanonische Einbettung

$$s : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Das können wir schon direkt nachrechnen, noch leichter mit Werkzeug. Dazu entwickeln wir in Satz E2i ein einfaches und effizientes Kriterium.

Es gibt auch stetige Injektionen $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, die nicht einbetten!



Übung: Skizzieren Sie $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t) = 2t e^{-t^2}$ und $y(t) = 2t^3 e^{-t^2}$ sowie $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f = (\text{id}, x)$ und $g = (\text{id}, y)$ und $h = (x, y)$. Welche dieser Abbildungen sind injektiv? Welche sind einbettend?

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $X_i \subseteq X$ heißt **Überdeckung** von X , falls $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ gilt. Wir nennen $(X_i)_{i \in I}$ **offen** bzw. **abgeschlossen**, falls jede Menge X_i in (X, \mathcal{T}) dies ist. Lokal-endliche Familien kennen wir aus D5F und Satz D5G.

Satz E1N: Überdeckungskriterium

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ eine Überdeckung.

(1) Ist eine Abbildung $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, so auch lokal auf X_i jede Einschränkung $f_i = f|_{X_i}: (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$. Die Umkehrung gilt, wenn $(X_i)_{i \in I}$ (a) offen ist oder (b) lokal-endlich abgeschlossen in (X, \mathcal{T}) .

(2) Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ und ihr Komplement $V = X \setminus U$ gilt:

$U \in \mathcal{T}$, offen im Raum (X, \mathcal{T})	\Leftrightarrow	$V \in \mathcal{T}^c$, abgeschlossen
\Downarrow Def. D1K \Uparrow (a) dank (O3)		\Downarrow Def. D1K \Uparrow (b) dank D5G
$\forall i \in I : U_i := X_i \cap U \in \mathcal{T}_i$	\Leftrightarrow	$\forall i \in I : V_i := X_i \cap V \in \mathcal{T}_i^c$

Beweis: (2) Die Äquivalenzen „ \Leftrightarrow “ sind Teil der Definition D1A, und die Implikationen „ \Downarrow “ sind trivial nach Definition D1K der Teilraumtopologie. Wir zeigen die interessante Implikation „ \Uparrow “ in den Fällen (a) und (b):

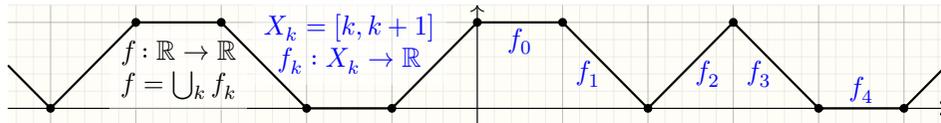
(2a) Wir haben $U = U \cap X = U \cap (\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} (U \cap X_i) = \bigcup_{i \in I} U_i$. Gegeben ist $U_i \in \mathcal{T}_i$. Gemäß D1K existiert $U'_i \in \mathcal{T}$ mit $U'_i \cap X_i = U_i$. Aus $X_i \in \mathcal{T}$ folgt $U_i \in \mathcal{T}$ dank (O2). Also $U = \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ dank (O3).

(2b) Wir haben $V = V \cap X = V \cap (\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} (V \cap X_i) = \bigcup_{i \in I} V_i$. Sei $V_i \subseteq X_i$ abgeschlossen in (X_i, \mathcal{T}_i) . Gemäß D1K existiert $V'_i \subseteq X$ abgeschlossen in (X, \mathcal{T}) mit $V'_i \cap X_i = V_i$. Dank (A2) ist also auch V_i abgeschlossen in (X, \mathcal{T}) . Da $(V_i)_{i \in I}$ lokal-endlich in (X, \mathcal{T}) ist, ist auch $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ abgeschlossen in (X, \mathcal{T}) dank Satz D5G.

(1) „ \Rightarrow “: Sei f stetig. Für $O \in \mathcal{T}_Y$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$, nach D1K also ist $f_i^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap X_i$ offen in (X_i, \mathcal{T}_i) . Somit ist $f_i: X_i \rightarrow Y$ stetig.

„ \Leftarrow “: Sei $f_i: X_i \rightarrow Y$ stetig für jedes $i \in I$. Für $O \in \mathcal{T}_Y$ ist $U_i = f_i^{-1}(O)$ offen in (X_i, \mathcal{T}_i) . Dank (2) ist $f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen in (X, \mathcal{T}) . QED

Wie können wir stetige Funktionen stetig verkleben?



Wir wollen eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ stückweise aus $f_k: X_k \rightarrow Y$ zusammensetzen und dabei zugleich die Stetigkeit von f garantieren.

Beispiele: Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \quad g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 > 2 \\ 1 & \text{für } x^2 < 2 \end{cases},$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}.$$

Jede dieser Funktionen setzt sich zusammen aus zwei stetigen Funktionen, dennoch sind nur g, k stetig, f, h hingegen nicht.

Idealerweise ist unsere Überdeckung des Definitionsbereichs offen oder lokal-endlich abgeschlossen. Damit ist die stetige Verklebung leicht!

Das Verklebelemma

☺ So können wir Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ stückweise zusammensetzen:

Satz E1P: Verkleben stetiger Funktionen

(0) Gegeben sei eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ und darauf Abbildungen $f_i: X_i \rightarrow Y$ für $i \in I$. Genau dann existiert $f: X \rightarrow Y$ mit $f|_{X_i} = f_i$ für alle $i \in I$, wenn Kompatibilität $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$ für alle $i, j \in I$ gilt.

In diesem Falle ist $f = \bigcup_{i \in I} f_i: X \rightarrow Y$ die ersehnte Abbildung.

(1) Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Die Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ sei (a) offen oder (b) lokal-endlich abgeschlossen. Hierauf seien $f_i: X_i \rightarrow Y$ stetig und kompatibel gemäß $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$ für alle $i, j \in I$.

Dann ist $f = \bigcup_{i \in I} f_i: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und stetig.

Beweis: (0) Dank $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ und $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$ ist $f = \bigcup_{i \in I} f_i$ eine Abbildung von X nach Y : Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$. Diese Abbildung $f: X \rightarrow Y$ erfüllt $f|_{X_i} = f_i$ für jedes $i \in I$.

(1) Die Stetigkeit von f folgt aus dem Überdeckungskriterium E1N. QED

In der Mathematik sind **Äquivalenzrelationen** und **Quotienten** überaus nützlich, daher allgegenwärtig, und für viele Konstruktionen unerlässlich.

Eine binäre **Relation** R auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Infix $x R y$ bedeutet $(x, y) \in R$, gesprochen „ x, y stehen in der Relation R “.

Wir nennen R eine **Äquivalenzrelation**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- Reflexivität, **RefI**(X, R): $\Delta_X \subseteq R, \quad x R x$
- Symmetrie, **Sym**(X, R): $R = R^\top, \quad x R y \Rightarrow y R x$
- Transitivität, **Tran**(X, R): $R \cdot R \subseteq R, \quad x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

Die **Äquivalenzklasse** von $x \in X$ bezüglich R ist die Menge

$$[x] = [x]_R = [x]_{X,R} := \{y \in X \mid x R y\}.$$

Dank Reflexivität gilt $[x]_R \ni x$: Jede Äquivalenzklasse ist nicht-leer. Aus $[x]_R \ni y$ folgt $[x]_R \supseteq [y]_R$ dank Transitivität, und $[x]_R \subseteq [y]_R$ dank Symmetrie, also $[x]_R = [y]_R$. Wir erhalten demnach eine Zerlegung!

- ☺ Je zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt.
- ☺ Jedes Element $x \in X$ liegt in genau einer Klasse, nämlich $[x]$.

Der **Quotient** von X bezüglich R ist die Menge aller Äquivalenzklassen:

$$(X, R) \mapsto X/R := \{[x]_R \mid x \in X\}$$

Dies ist eine Zerlegung von X , also $X/R \subseteq \mathfrak{P}(X)^*$ und $X = \bigsqcup X/R$. Umgekehrt definiert jede Zerlegung $X = \bigsqcup P$ eine Äquivalenzrelation $R = \{(x, x') \in X \times X \mid \exists c \in P : c \supseteq \{x, x'\}\}$ mit $P = X/R$. (Übung!) So entsprechen sich die Äquivalenzrelationen und die Zerlegungen.

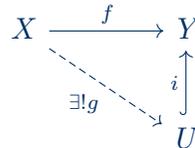
Die zugehörige **Quotientenabbildung** oder **kanonische Surjektion** ist

$$q = q_R = q_{X,R} : X \twoheadrightarrow X/R : x \mapsto [x]_R.$$

Ist $c \in X/R$ eine Äquivalenzklasse, so nennen wir jedes Element $x \in c$ einen **Repräsentanten** der Klasse c . Die Wahl eines Repräsentanten ist im Allgemeinen willkürlich, weder eindeutig noch irgendwie kanonisch... und im Allgemeinen auch nicht erforderlich: Die Quotientenkonstruktion wurde gerade dazu erschaffen, um uns von Repräsentanten zu befreien!

- ☺ Statt mit Elementen $x \in X$ arbeiten wir nun mit Klassen $c \in X/R$.

Vorgelegt sei eine beliebige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und eine Injektion $i : U \hookrightarrow Y$, etwa eine Inklusion. Zu (f, i) suchen wir eine Faktorisierung $f = i \circ g$ mit $g : X \rightarrow U$, also $f(x) = i(g(x))$ für alle $x \in X$.



Eindeutigkeit: Aus $f = i \circ g = i \circ g'$ folgt $g = g'$ dank Injektivität von i .

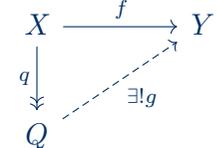
Satz E2A: eindeutige Faktorisierung über eine Injektion

Zu jeder Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und Injektion $i : U \hookrightarrow Y$ existiert $g : X \rightarrow U$ mit $f = i \circ g$ genau dann, wenn $\text{Im } f \subseteq \text{Im } i$; diesenfalls gilt $g = i^\top \circ f$, kurz $\{g : X \rightarrow U\} \cong \{f : X \rightarrow Y \mid \text{Im } f \subseteq \text{Im } i\}$, $g \mapsto i \circ g, i^\top \circ f \leftarrow f$. Dabei gilt $R_g = R_f$ und $\text{Im } g = \text{Im } f$, also g surjektiv gdw $\text{Im } i = \text{Im } f$.

Beweis: „ \Rightarrow “: klar. „ \Leftarrow “: Wir definieren $g : X \rightarrow U$ durch $g(x) = i^{-1}(f(x))$, genauer $g = i^\top \circ f = (X, G, U)$ mit $G = \{(x, u) \in X \times U \mid f(x) = i(u)\}$. Dies ist linkstotal, da $\text{Im } f \subseteq \text{Im } i$, und rechtseindeutig, da i injektiv. **QED**

In Worten: Zu jedem $x \in X$ und seinem Bild $y = f(x)$ wählen wir das (eindeutig existente) Urbild $u \in U$ mit $i(u) = y$ und setzen $g(x) := u$.

Vorgelegt sei eine beliebige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und eine Surjektion $q : X \twoheadrightarrow Q$, etwa ein Quotient. Zu (f, q) suchen wir eine Faktorisierung $f = g \circ q$ mit $g : Q \rightarrow Y$, also $f(x) = g(q(x))$ für alle $x \in X$.



Eindeutigkeit: Aus $f = g \circ q = g' \circ q$ folgt $g = g'$ dank Surjektivität von q .

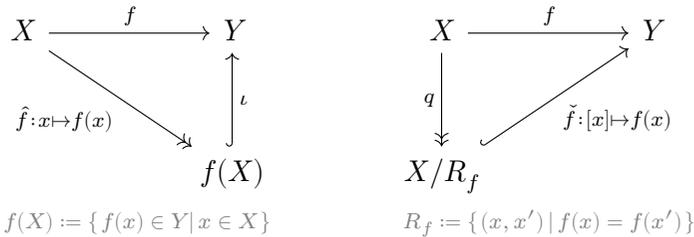
Satz E2B: eindeutige Faktorisierung über eine Surjektion

Zu $f : X \rightarrow Y$ und $q : X \twoheadrightarrow Q$ existiert $g : Q \rightarrow Y$ mit $f = g \circ q$ gdw $R_q \subseteq R_f$, also $q(x) = q(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$; diesenfalls gilt $g = f \circ q^\top$, kurz $\{g : Q \rightarrow Y\} \cong \{f : X \rightarrow Y \mid R_q \subseteq R_f\}$, $g \mapsto g \circ q, f \circ q^\top \leftarrow f$. Dabei gilt $\text{Im } g = \text{Im } f$ und $R_g = R_f/R_q$, also g injektiv gdw $R_q = R_f$.

Beweis: „ \Rightarrow “: klar. „ \Leftarrow “: Die genannte Relation $g = f \circ q^\top = (Q, G, Y)$ mit $G = \{(\bar{x}, y) \in Q \times Y \mid \exists x \in X : q(x) = \bar{x} \wedge f(x) = y\}$ ist linkstotal, da q surjektiv ist, und rechtseindeutig dank Kompatibilität $R_q \subseteq R_f$. **QED**

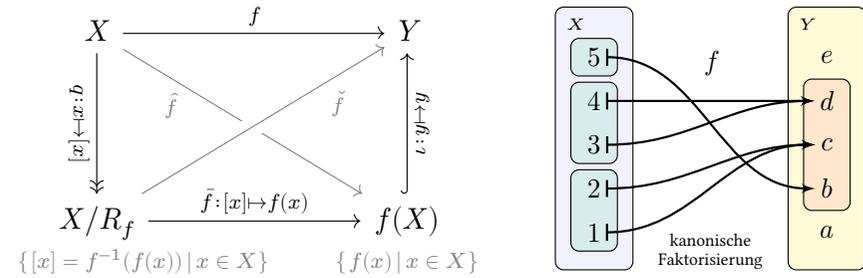
In Worten: Zu jedem $\bar{x} \in Q$ wählen wir willkürlich ein Urbild $x \in X$ mit $q(x) = \bar{x}$ und setzen $g(\bar{x}) := f(x)$. Dies ist wohldefiniert dank $R_q \subseteq R_f$.

Gegeben sei eine beliebige Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Im Allgemeinen ist f weder injektiv noch surjektiv. Dies können wir wie folgt korrigieren:



Surjektiv machen (links): Wir schränken $f : X \rightarrow Y$ zu $\hat{f} : X \rightarrow f(X)$ ein. Dies ist wohldefiniert und surjektiv dank Einschränkung auf das Bild. Wir erhalten die Faktorisierung $f = \iota \circ \hat{f}$ in Surjektion und Inklusion.

Injektiv machen (rechts): Die Abbildung $\check{f} : X/R_f \hookrightarrow Y : [x] \mapsto f(x)$ ist wohldefiniert und injektiv, denn es gilt $[x] = [x']$ gdw $f(x) = f(x')$. Wir erhalten die Faktorisierung $f = \check{f} \circ q$ in Quotient und Injektion.

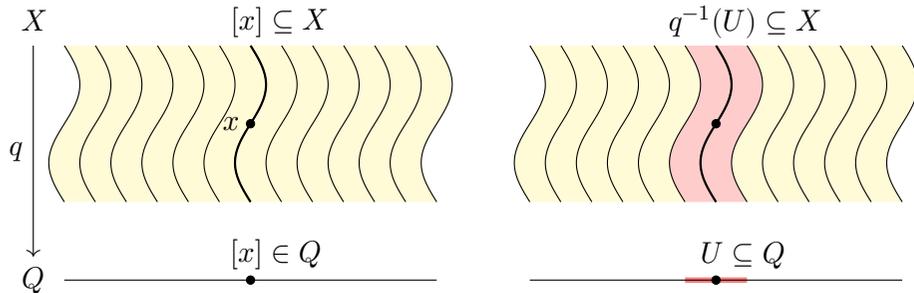


Satz E2A: die kanonische Faktorisierung

Jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ faktorisiert eindeutig gemäß $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$ in die Quotientenabbildung $q : X \rightarrow X/R_f$, die kanonische Bijektion $\bar{f} : X/R_f \xrightarrow{\cong} f(X) : [x] \mapsto f(x)$ und die Inklusion $\iota : f(X) \hookrightarrow Y$.

Beispiel: In obiger Illustration $f : X \rightarrow Y$ gilt $X/R_f = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ und $f(X) = \{b, c, d\}$ sowie $\bar{f} : \{1, 2\} \mapsto c, \{3, 4\} \mapsto d, \{5\} \mapsto b$.

😊 So können wir jede beliebige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ kanonisch zerlegen in die drei einfacheren Abbildungen q, \bar{f}, ι ; diese sind sur/bi/injektiv.



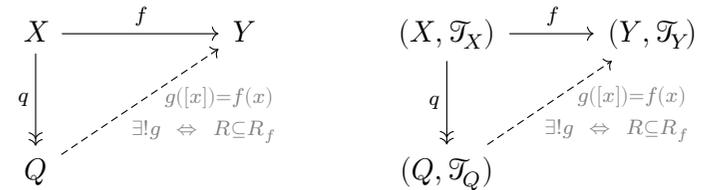
Definition E2B: Quotiententopologie und Quotientenraum

Sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum, $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation und $Q = X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}$ mit $q : X \rightarrow Q : x \mapsto [x]_R$ der Quotient.

Die **Quotiententopologie** auf $Q = X/R$ ist die finale Topologie (E1B)

$$\mathcal{T}_Q := \{U \subseteq Q \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\} =: q_* \mathcal{T}_X.$$

Das Paar $(Q, \mathcal{T}_Q) =: (X, \mathcal{T}_X)/R$ nennen wir den **Quotientenraum**.



Satz E2c: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

(0) Auf jedem Quotienten $Q = X/R$ ist die Quotiententopologie

$$\mathcal{T}_Q := \{U \subseteq Q \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\} =: q_* \mathcal{T}_X$$

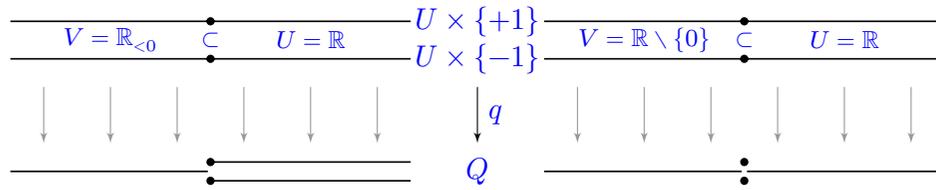
die feinste, für die der Quotient $q : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Q, \mathcal{T}_Q) : x \mapsto [x]_R$ stetig ist.

(1) Genau dann faktorisiert $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ gemäß $f = g \circ q$ mit $g : (Q, \mathcal{T}_Q) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn f stetig ist und $R \subseteq R_f$ erfüllt.

(2) Präkomposition und Faktorisierung $g \dashv\vdash f$ mit $f = g \circ q$ stiften somit die Bijektion $(\Phi, \Psi) : \mathcal{C}(Q, Y) \cong \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid R \subseteq R_f\} : g \dashv\vdash f$.

Beweis: Klar nach Definition E1B der finalen Topologie $\mathcal{T}_Q = q_* \mathcal{T}_X$. QED

Die verzweigte Gerade und die Gerade mit doppeltem Ursprung:



Beispiel / Übung E2E: lokal euklidisch aber nicht hausdorffsch

Seien $\emptyset \neq V \subsetneq U = \mathbb{R}^n$ offen. In \mathbb{R}^{n+1} besteht $X = U \times \{\pm 1\}$ aus zwei Kopien $U_{\pm} = U \times \{\pm 1\}$ von U . Wir verheften die beiden Kopien V_{\pm} :

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \vee x = x' \in V.$$

Die Äquivalenzklassen sind hier also $[(x, y)] = \{(x, y)\}$ für $x \in U \setminus V$ und $[(x, y)] = \{(x, \pm y)\}$ für $x \in V$. Damit ist der Quotient $q : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Q, \mathcal{T}_Q)$ ein lokaler Homöomorphismus vermöge $(q_{\pm}, s_{\pm}) : U_{\pm} \cong Q_{\pm}$. Der Raum Q ist lokal homöomorph zum Raum \mathbb{R}^n , aber dennoch nicht hausdorffsch!

Sie kennen unsere (vorläufige) Definition A0A einer Mannigfaltigkeit: Ein Raum $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **m-dimensionale Mannigfaltigkeit**, eventuell mit Rand ∂M , falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler Homöomorphismus $(M, a) \cong_{loc} (\mathbb{R}^m, 0)$ oder $(M, a) \cong_{loc} (\mathbb{R}_{\geq 0}^m, 0)$ existiert.

Wir wollen uns von Teilräumen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ lösen und Mannigfaltigkeiten auf der Grundlage allgemeiner topologischer Räume erklären. Dabei wird klar, welche Bedingungen wir wirklich benötigen. Die Hausdorff-Eigenschaft gehört jedenfalls dazu!

⚠ Aller Erfahrung nach vermuten Lernende an dieser Stelle, dass lokal euklidisch automatisch auch hausdorffsch nach sich zieht. Das ist ganz verständlich, die Phantasie muss erst geschult werden, anfangs fehlt es an einem Fundus konkreter Gegenbeispiele. Das ändert sich nun:

Obige Gegenbeispiele sind lokal euklidisch, aber nicht hausdorffsch! Solch exotische Konstruktionen gelingen uns nur als Quotienten; als Teilräume $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ lässt sich dies sicher nicht realisieren.

Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist stetig, wenn $f_* \mathcal{T}_X \supseteq \mathcal{T}_Y$ gilt. Für jeden Quotienten $q : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ gilt $q_* \mathcal{T}_X =: \mathcal{T}_Y$. Allgemein:

Definition E2F: Identifizierung = Homöo auf dem Quotienten

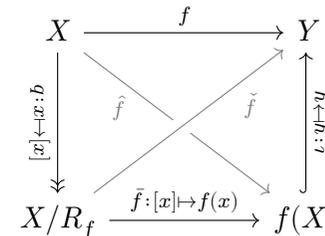
Eine surjektive Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologischer Räume heißt **Identifizierung**, wenn $\mathcal{T}_Y = f_* \mathcal{T}_X$ gilt. Äquivalent hierzu: $f = \bar{f} \circ q$ ist der Quotient $q : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Q, \mathcal{T}_Q)$ bezüglich der Relation R_f gefolgt von einem Homöomorphismus $\bar{f} : (Q, \mathcal{T}_Q) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$.

Beispiel: Für $a > 2\pi$ ist $f_a : [0, a[\rightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{it}$ identifizierend (E2Q). Hingegen ist $f_{2\pi}$ stetig und surjektiv, aber nicht identifizierend (D2c). Für $0 < a < 2\pi$ ist f_a nicht surjektiv, also auch nicht identifizierend.

Bemerkung E2G: Identifizierungen bilden eine (Unter)Kategorie.

Zu jedem Raum ist die Identität $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ identifizierend. Sind $f : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \twoheadrightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ identifizierend, so auch ihre Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$.

Wir machen f injektiv durch Quotient des Startraums von X zu X/R_f und erhalten die stetige Injektion $\bar{f} : X/R_f \hookrightarrow Y$. Bijektiv machen liefert \tilde{f} .



Wir machen f surjektiv durch Einschränkung des Zielraums von Y zu $f(X)$ und erhalten die stetige Surjektion $\bar{f} : X/R_f \twoheadrightarrow f(X)$. Bijektiv machen liefert f .

Satz E2H: kanonische Faktorisierung stetiger Abbildungen

Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ faktorisiert gemäß $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$ in die Quotientenabbildung $q : X \twoheadrightarrow X/R_f : x \mapsto [x]$, die stetige Bijektion $\bar{f} : X/R_f \cong f(X) : [x] \rightarrow f(x)$ und die Inklusion $\iota : f(X) \hookrightarrow Y : y \mapsto y$.

- Im Allgemeinen ist \bar{f} kein Homöomorphismus. Äquivalent sind:
- (1) Die stetige Bijektion $\bar{f} : X/R_f \rightarrow f(X)$ ist ein Homöomorphismus.
 - (2) Die stetige Surjektion $\bar{f} : X/R_f \twoheadrightarrow f(X)$ ist eine Identifizierung.
 - (3) Die stetige Injektion $\tilde{f} : X/R_f \hookrightarrow Y$ ist eine Einbettung.

Ist f zudem offen / abgeschlossen, so auch \bar{f} , \tilde{f} , \hat{f} , und es gilt (1–3).

Beispiel: Zwischen der n -Sphäre $X = S^n$ und dem Raum $Y = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ haben wir die Inklusion $\iota : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x$ und die radiale Projektion $\rho : Y \twoheadrightarrow X : y \mapsto y/|y|$. Beide sind stetig und erfüllen $\rho \circ \iota = \text{id}_{S^n}$.

Eine **Retraktion** des Raums Y auf einen Teilraum $X \subseteq Y$ ist eine stetige Abbildung $\rho : Y \rightarrow X$ mit $\rho|_X = \text{id}_X$, kurz $(\iota, \rho) : X \xrightarrow{\cong} Y$ mit $\rho \circ \iota = \text{id}_X$.

Satz E2i: Schnitt und Retraktion

Ein **Retraktionspaar** $(s, p) : (X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{\cong} (Y, \mathcal{T}_Y)$ besteht aus $s : X \rightarrow Y$ und $p : Y \rightarrow X$ stetig mit $p \circ s = \text{id}_X$. Daraus folgt $\mathcal{T}_X = s^* \mathcal{T}_Y = p_* \mathcal{T}_Y$.

Wir nennen $s : X \hookrightarrow Y$ eine **Einbettung mit Retraktion** $p : Y \twoheadrightarrow X$ und $p : Y \twoheadrightarrow X$ eine **Identifizierung mit (globalem) Schnitt** $s : X \hookrightarrow Y$.

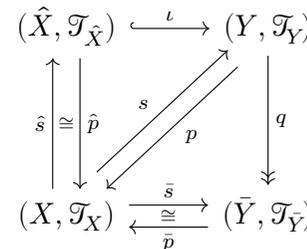
Beispiel: Zwischen den Räumen \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n mit $m < n$ haben wir die Einbettung $s : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ und die Projektion $p : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$.

Den Satz können wir auf zwei Arten beweisen: (1) Direkt Nachrechnen; Versuchen Sie es selbst, Sie lernen viel und schätzen die Abkürzung... (2) Geschickt die kanonische Faktorisierung nutzen! Das gelingt so:

Die Abbildung $s = \iota \circ \hat{s}$ ist die stetige Bijektion \hat{s} gefolgt von der Inklusion ι .

Linksinvers zu \hat{s} ist $\hat{p} = p \circ \iota$, denn $\hat{p} \circ \hat{s} = p \circ s = \text{id}_X$.

Es folgt $\hat{s}^{-1} = \hat{p} \circ \hat{s} \circ \hat{s}^{-1} = \hat{p}$. Die Umkehrung ist stetig!



Die Abbildung $p = \bar{p} \circ q$ ist der Quotient q gefolgt von der stetigen Bijektion \bar{p} .

Rechtsinvers zu \bar{p} ist $\bar{s} = q \circ \bar{p}$, denn $\bar{p} \circ \bar{s} = p \circ s = \text{id}_X$.

Es folgt $\bar{p}^{-1} = \bar{p}^{-1} \circ \bar{p} \circ \bar{s} = \bar{s}$. Die Umkehrung ist stetig!

Übung E2j: Let factorization do the work for you!

Jedes Retraktionspaar $(s, p) : X \xrightarrow{\cong} Y$ induziert Homöomorphismen $(\hat{s}, \hat{p}) : X \cong \hat{X} := \text{Im}(s)$ sowie $(\bar{s}, \bar{p}) : X \cong \bar{Y} := Y/R_p$.

Beispiel / Übung E2k: Schnitt und Retraktion

(1) Die Inklusion $s : \{-1, 1\} \hookrightarrow [-1, 1]$ ist eine Einbettung, erlaubt aber keine Retraktion, also $p : [-1, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$ stetig mit $p \circ s = \text{id}_{\{-1, 1\}}$. Beweis: Nach dem Zwischenwertsatz C3A müsste p konstant sein.

(2) Die Kreislinie S^1 können wir in \mathbb{R}^2 einbetten, aber nicht in \mathbb{R}^1 ; zu jeder stetigen Abbildung $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ existiert $x \in S^1$ mit $f(x) = f(-x)$, dank ZWS für $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(e^{it}) - f(e^{i(t+\pi)})$ mit $g(\pi) = -g(0)$.

(3) Die Abbildung $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist eine Identifizierung (dank E2p), erlaubt aber keinen Schnitt $s : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Als Schnitt wäre $s : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, also nicht injektiv nach (2).

(4) Ist $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, so existiert keine stetige Injektion $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$. Zu $a \in U$ existiert $r > 0$ mit $B(a, 2r) \subseteq U$, also $g : S^1 \hookrightarrow U : s \mapsto a + rs$; mit $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$ ergäbe dies eine stetige Injektion $f \circ g : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^1$.

Wir erhalten erneut $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^1$: Diese Räume sind nicht homöomorph. In höherer Dimension folgt dies aus dem Abbildungsgrad, siehe Kapitel J.

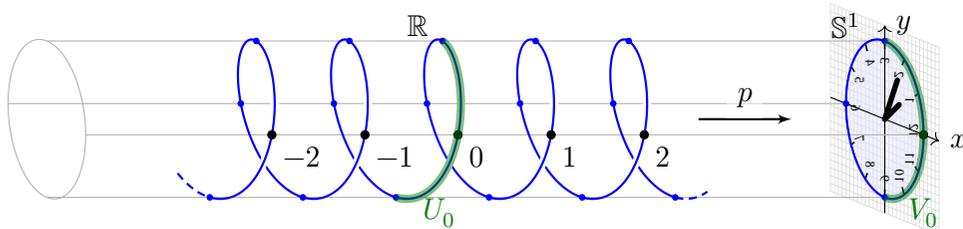
Gegenbeispiele wie (1) und (3) bewahren Sie vor naivem Irrglauben: Nicht jede Einbettung $s : X \hookrightarrow Y$ erlaubt eine Retraktion $p : Y \twoheadrightarrow X$. Nicht jede Identifizierung $p : X \twoheadrightarrow Y$ erlaubt einen Schnitt $s : Y \hookrightarrow X$. (So verhält es sich in vielen Kategorien / Gebieten der Mathematik.)

Die Folgerungen (2) und (4) sind interessant und hier schon erfreulich elegant beweisbar. In höherer Dimension benötigen wir dazu stärkere Werkzeuge, in Kapitel J gelingt uns dies mit dem Abbildungsgrad (als einer ersten spektakulären Anwendung der algebraischen Topologie).

Freuen Sie sich auf diese fundamentalen Ergebnisse der (geometrischen) Topologie: Zur Inklusion $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ existiert keine Retraktion des Balls \mathbb{D}^n auf seinen Rand S^{n-1} (Brouwer J4E). Zu jeder stetigen Funktion $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$ (Borsuk-Ulam J6C).

Die Abbildung $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi it}$ untersuchen wir gleich genauer. Es gibt immerhin lokale Schnitte, und wir erhalten so $(\bar{p}, \bar{s}) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. Dies ist später das typische Beispiel einer Überlagerung, siehe M1B, und ermöglicht die Berechnung und Untersuchung von Fundamentalgruppen.

Aufgabe: Faktorisieren Sie $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.



Lösung: Die Abbildung p ist stetig, aber weder injektiv noch surjektiv. Ihr Bild ist $p(\mathbb{R}) = S^1$. Genau dann gilt $p(t) = p(t')$, wenn $t - t' \in \mathbb{Z}$. Global ist „ $p^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln(z)$ “ grober Unfug! Dies gelingt nur lokal:

$$U_0 :=]-1/4, 1/4[, \quad V_0 := \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\},$$

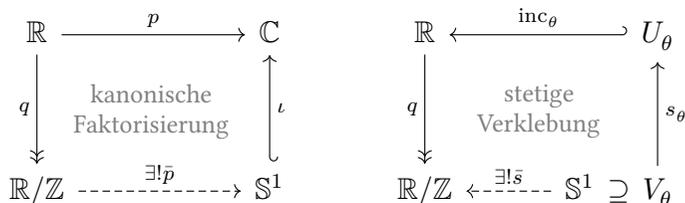
$$p_0 : U_0 \xrightarrow{\cong} V_0 : t \mapsto e^{2\pi it}, \quad s_0 : V_0 \xrightarrow{\cong} U_0 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wir verschieben U_0 um $\theta \in \mathbb{R}$ und drehen V_0 um $e^{2\pi i\theta} \in S^1$:

$$U_\theta := U_0 + \theta, \quad V_\theta := V_0 \cdot e^{2\pi i\theta},$$

$$p_\theta : U_\theta \xrightarrow{\cong} V_\theta : t \mapsto e^{2\pi it}, \quad s_\theta : V_\theta \xrightarrow{\cong} U_\theta : z \mapsto s_0(z \cdot e^{-2\pi i\theta}) + \theta.$$

Polarkoordinaten nützen überall in der Mathematik und Anwendungen. Der folgende Satz fügt all diese lokalen Daten elegant zusammen:



Satz E2P: Polarkoordinaten und universelle Überlagerung der Kreislinie

Dank kanonischer Faktorisierung E2H induziert die stetige Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi it}$ die stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 : t + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi it}$.

(1) Dies ist ein Homöomorphismus, denn p ist offen und somit auch \bar{p} . Somit ist $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} S^1$ ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

(2) Die inverse Abbildung $\bar{s} : S^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ entsteht durch Verkleben E1P der lokalen Schnitte $\bar{s}_\theta = q \circ \text{inc}_\theta \circ s_\theta : V_\theta \xrightarrow{\cong} U_\theta \hookrightarrow \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Genau dann gilt $p(t) = p(t')$, wenn $t - t' \in \mathbb{Z}$. Für $t, t' \in \mathbb{R}$ definieren wir daher die Äquivalenz $t \sim t'$ durch $t - t' \in \mathbb{Z}$ und setzen $\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \mathbb{R}/\sim$. Die Schreibweise \mathbb{R}/\mathbb{Z} entspricht der Untergruppe $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$.

Die Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist nicht surjektiv, ihr Bild ist $p(\mathbb{R}) = S^1 \subsetneq \mathbb{C}$. Ausführlich: Aus $|p(t)| = 1$ folgt $p(\mathbb{R}) \subseteq S^1$. Die Inklusion $p(\mathbb{R}) \supseteq S^1$ folgt implizit dank Zwischenwertsatz C3A für \cos und \sin , noch besser explizit:

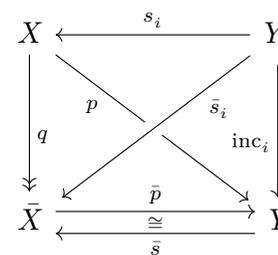
Wir konstruieren offene Überdeckungen $\mathbb{R} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} U_\theta$ und $S^1 = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} V_\theta$, auf denen p den lokalen Homöomorphismus $(p_\theta, s_\theta) : U_\theta \xrightarrow{\cong} V_\theta$ stiftet: Es gilt $s_\theta \circ p_\theta = \text{id}_{U_\theta}$ und $p_\theta \circ s_\theta = \text{id}_{V_\theta}$ für $\theta = 0$ und damit für alle $\theta \in \mathbb{R}$.

Die lokalen Schnitte $\text{inc}_\theta \circ s_\theta : V_\theta \rightarrow U_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ für $\theta \in \mathbb{R}$ lassen sich *nicht* zu einem globalen Schnitt $s : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ verkleben; maximal erreichen wir

$$(\tilde{p}_\theta, \tilde{s}_\theta) :]\theta - 1/2, \theta + 1/2[\xrightarrow{\cong} S^1 \setminus \{-e^{2\pi i\theta}\}.$$

Das Hindernis verschwindet für $\bar{s}_\theta = q \circ \text{inc}_\theta \circ s_\theta : V_\theta \xrightarrow{\cong} U_\theta \hookrightarrow \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Anders als $(s_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ erfüllt $(\bar{s}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ nun $\bar{s}_\theta|_{V_\theta \cap V_\xi} = \bar{s}_\xi|_{V_\xi \cap V_\theta}$ für alle $\theta, \xi \in \mathbb{R}$. Verklebung E1P liefert die stetige Abbildung $\bar{s} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit $\bar{s}|_{V_\theta} = \bar{s}_\theta$.

Die stetige Surjektion p faktorisiert über den Quotienten q zur stetigen Bijektion \bar{p} . Für jede Rechtsinverse \bar{s} mit $\bar{p} \circ \bar{s} = \text{id}_Y$ folgt $\bar{p}^{-1} = \bar{p}^{-1} \circ \bar{p} \circ \bar{s} = \bar{s}$.



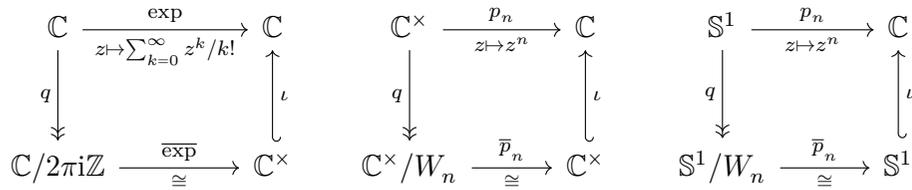
Wir verlängern die lokalen Schnitte $s_i : Y_i \rightarrow X$ zu $\bar{s}_i = q \circ s_i : Y_i \rightarrow X\text{-bar}$ und verkleben diese zur stetigen Abbildung $\bar{s} : Y\text{-bar} \rightarrow X\text{-bar}$. Dies liefert $\bar{p} \circ \bar{s} = \text{id}_{Y\text{-bar}}$.

Satz E2Q: Verkleben lokaler Schnitte

Sei $p : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig. Die Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ sei offen oder lokal-endlich abgeschlossen. Für jeden Index $i \in I$ sei $s_i : Y_i \rightarrow X$ stetig mit $p \circ s_i = \text{inc}_i : Y_i \hookrightarrow Y$. Über den Quotienten $q : X \twoheadrightarrow X\text{-bar} = X/R_p$ induzieren p und $(s_i)_{i \in I}$ das Homöomorphismuspaar $(\bar{p}, \bar{s}) : X\text{-bar} \xrightarrow{\cong} Y\text{-bar}$.

Beweis: Die Verklebung $\bar{s} = \bigcup_{i \in I} \bar{s}_i : Y\text{-bar} \rightarrow X\text{-bar}$ ist wohldefiniert und stetig und erfüllt $\bar{p} \circ \bar{s} = \text{id}_{Y\text{-bar}}$. Daraus folgt $\bar{p}^{-1} = \bar{p}^{-1} \circ \bar{p} \circ \bar{s} = \bar{s}$. QED

Ähnlich wichtige und ebenso schöne Anwendungsbeispiele:



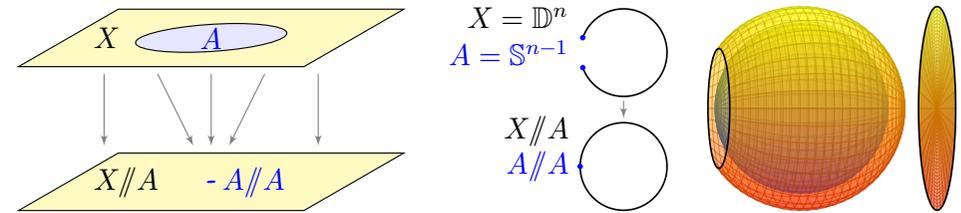
Beispiel / Übung E2r: komplexe Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot) : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist ein Gruppenhomomorphismus, periodisch gemäß $\text{Ker}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$ und zudem ein lokaler Homöomorphismus, also identifizierend.

Die kanonische Faktorisierung E2H von $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ liefert demnach den Homöomorphismus $\overline{\exp} : \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^\times : z + 2\pi i\mathbb{Z} \mapsto \exp(z)$. Dies ist somit ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Entsprechendes gilt für $p_n : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ und $p_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^n$ und $\text{Ker}(p_n) = W_n := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = 1\} = \{e^{2\pi i k/n} \mid k = 0, \dots, n-1\} \cong \mathbb{Z}/n$.

Wir wollen einen Teilraum $A \subseteq X$ zu einem Punkt zusammenschlagen:



Beispiel: Wenn Sie eine Schnur an ihren Enden zusammenkleben, so erhalten Sie eine Kreislinie. Wenn Sie im Ball \mathbb{D}^n den Rand \mathbb{S}^{n-1} zusammenschlagen, dann erhalten Sie die Sphäre $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{D}^n // \mathbb{S}^{n-1}$.

Definition E2s: Zusammenschlagung $X//A$ eines Teilraumes $A \subseteq X$

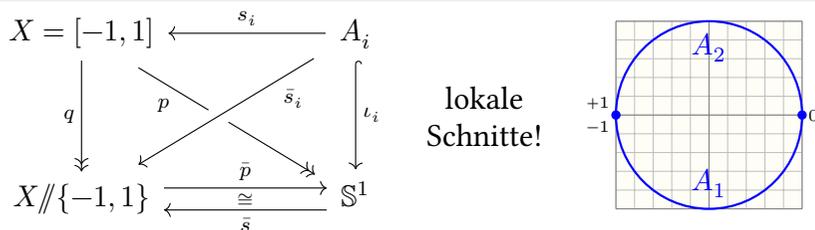
Zu $\emptyset \neq A \subseteq X$ definieren wir auf X die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $x = y$ oder $\{x, y\} \subseteq A$. Als Quotientenraum erhalten wir

$$X//A := X/\sim = \{A, \{x\} \mid x \in X \setminus A\}.$$

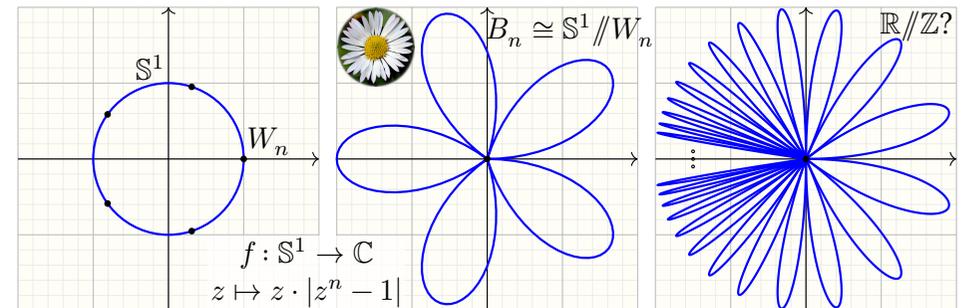
⚠ Unterscheide Gruppenoperation \mathbb{R}/\mathbb{Z} und Zusammenschlagen $\mathbb{R}//\mathbb{Z}$!

Beispiel / Übung E2t: Verkleben eines Intervalls an den Endpunkten

Die Abbildung $p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{\pi i t}$ ist identifizierend, induziert also kanonisch einen Homöomorphismus $\bar{p} : [-1, 1]//\{-1, 1\} \cong \mathbb{S}^1 : [t] \mapsto e^{\pi i t}$.



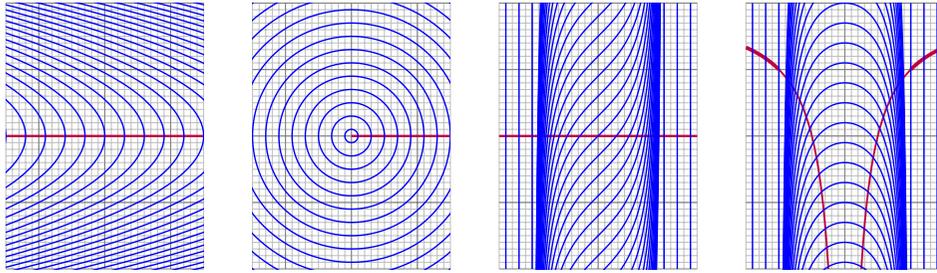
Beweis: Wie in E2P nutzen wir stetige Abbildungen $s_i : A_i \rightarrow [-1, 1]$ mit $A_1 = \{z \in \mathbb{S}^1 \mid \text{Im}(z) \leq 0\} = \{e^{\pi i t} \mid t \in [-1, 0]\}$ mit $s_1(e^{\pi i t}) = t \in [-1, 0]$, $A_2 = \{z \in \mathbb{S}^1 \mid \text{Im}(z) \geq 0\} = \{e^{\pi i t} \mid t \in [0, +1]\}$ mit $s_2(e^{\pi i t}) = t \in [0, +1]$. Sie lassen sich *nicht* verkleben, aufgrund $s_1(-1) = -1$ und $s_2(-1) = +1$, doch für $\bar{s}_i = q \circ s_i : A_i \rightarrow [-1, 1]//\{-1, 1\}$ verschwindet dieses Problem. Dank Verklebelemma E1P ist $\bar{s} : \mathbb{S}^1 \rightarrow [-1, 1]//\{-1, 1\}$ mit $\bar{s}|_{A_i} = \bar{s}_i$ stetig. Wir erhalten $\bar{p} \circ \bar{s} = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $\bar{s} \circ \bar{p} = \text{id}_{[-1, 1]//\{-1, 1\}}$ wie in E2Q. QED



Beispiel / Übung E2w: unendliches Bouquet von Kreislinien

Der Quotient $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}//\mathbb{Z}$ (nicht \mathbb{R}/\mathbb{Z} !) entsteht durch Verheften aller ganzzahligen Punkte in \mathbb{R} , vermöge $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee \{x, y\} \subseteq \mathbb{Z}$. Dies nennen wir das **unendliche Bouquet von Kreislinien**.

- (1) In $\mathbb{R}//\mathbb{Z}$ konvergieren $[n]_{n \in \mathbb{N}}$ und $[2^{-n}]_{n \in \mathbb{N}}$, nicht aber $[n + 2^{-n}]_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (2) Beide Abzählbarkeitsaxiome gelten für \mathbb{R} , aber keines für $\mathbb{R}//\mathbb{Z}$.
 - (3) Der Quotientenraum $\mathbb{R}//\mathbb{Z}$ ist hausdorffsch, aber nicht metrisierbar.
- Anders als $\mathbb{S}^1//W_n$ lässt sich $\mathbb{R}//\mathbb{Z}$ nur schlecht zeichnen. Warum?



Beispiel / Übung E2y: Blätterungen à la Georges Reeb

Welche Quotienten $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow Q = \mathbb{R}^2 / \sim$ ergeben folgende Äquivalenzen?

- (1) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$.
- (2) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.
- (3) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $|x_1| = |x_2| \geq 1$, oder $|x_1| < 1$ und $|x_2| < 1$ und $y_1 - x_1/(1 - x_1^2) = y_2 - x_2/(1 - x_2^2)$.
- (4) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $|x_1| = |x_2| \geq 1$, oder $|x_1| < 1$ und $|x_2| < 1$ und $y_1 + 1/(1 - x_1^2) = y_2 + 1/(1 - x_2^2)$.

Welche dieser Räume sind lokal euklidisch? Welche sind hausdorffsch?

Obige Skizze zeigt die Äquivalenzklassen in Blau und mögliche Repräsentanten in Rot.

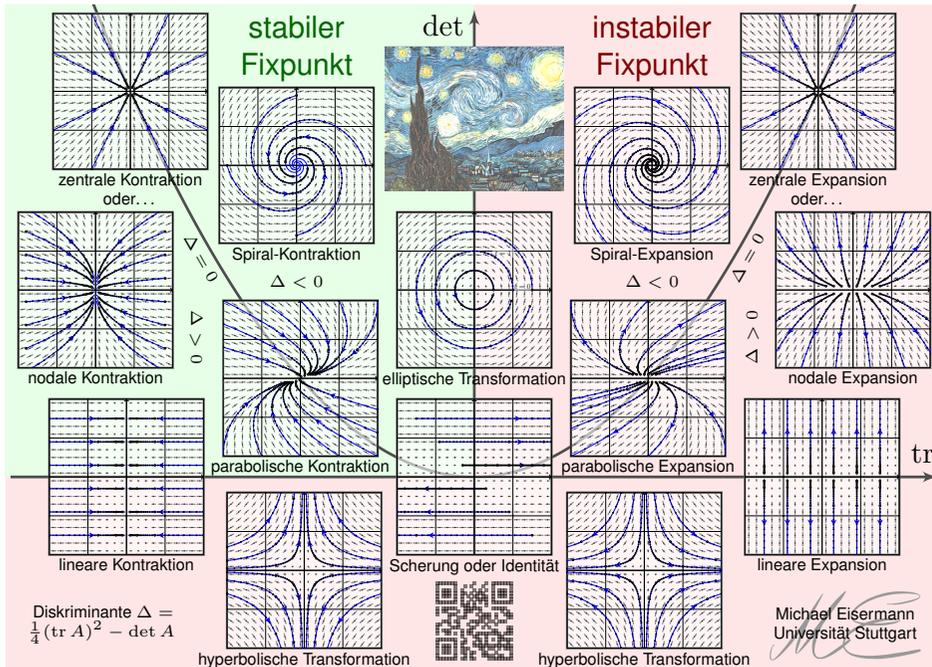
(1) Die stetige Surjektion $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y^2$ erfüllt $p(x_1, y_1) = p(x_2, y_2)$ gdw $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$. Gemäß E2H induziert p eine stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p = \bar{p} \circ q$. Der stetige Schnitt $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$ liefert $(\bar{p}, \bar{s}) : \mathbb{R}^2 / \sim \cong \mathbb{R}$ gemäß E2J.

(2) Die stetige Surjektion $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ erfüllt $p(x_1, y_1) = p(x_2, y_2)$ gdw $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$. Gemäß E2H induziert p eine stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Der stetige Schnitt $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$ liefert $(\bar{p}, \bar{s}) : \mathbb{R}^2 / \sim \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ gemäß E2J.

(3) Analog zu (1) finden wir auch hier $(\bar{p}, \bar{s}) : \mathbb{R}^2 / \sim \cong \mathbb{R}$. Rechnen Sie dies explizit aus!

(4) Äquivalenzklassen sind senkrechte Geraden mit Abszisse $x \geq 1$ oder $x \leq -1$, sowie die Funktionsgraphen F_c von $f_c(x) = c - 1/(1 - x^2)$ für $-1 < x < 1$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten zudem den Graphen G der Funktion $g(x) = -1/|x|$ für $x \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jede der Geraden schneidet G in genau einem Punkt $(x, g(x))$ mit $|x| \geq 1$, und jede Kurve F_c schneidet G in genau zwei Punkten $(\pm x, g(x))$ mit $|x| < 1$. Wir gehen deshalb zum Quotienten \mathbb{R}^* / \sim über bezüglich der Äquivalenz $x \approx x$ für $|x| \geq 1$ und $x \approx \pm x$ für $0 < |x| < 1$. Damit erhalten wir die stetige Surjektion $p : \mathbb{R}^2 / \sim \cong \mathbb{R}^* / \sim$. Umgekehrt haben wir die stetige Surjektion $s : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow Q : x \mapsto [x, g(x)]$. Nach Faktorisierung wie in E2J erhalten wir den Homöomorphismus $(\bar{p}, \bar{s}) : \mathbb{R}^2 / \sim \cong \mathbb{R}^* / \sim$. Dies ist die verzweigte Gerade aus Beispiel E2E!

Alle vier Quotientenräume sind lokal euklidisch der Dimension 1, also lokal homöomorph zu \mathbb{R} bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Der letzte Quotientenraum ist jedoch erstaunlicherweise nicht hausdorffsch. So ganz exotisch ist diese Situation gar nicht, wie wir jetzt sehen. Sie tritt jedenfalls in der Natur auf.



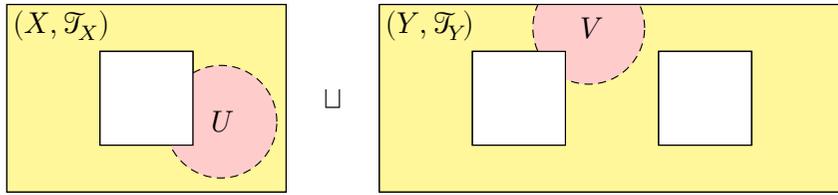
Auf dem euklidischen Raum $X = \mathbb{R}^n$ bzw. $X^* = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ untersuchen wir die lineare Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit konstanter Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Lösungskurve durch $x \in X$ ist gegeben durch $t \mapsto e^{tA}x$. Dies sind die Flusslinien der Operation der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ durch

$$\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X : (t, x) \mapsto e^{tA}x.$$

Übung: Skizzieren Sie für die Matrizen $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ und $K = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ die Bahnen. Bestimmen Sie die Quotientenräume X / \sim und X^* / \sim durch explizite Homöomorphismen zu vertrauteren Räumen, Teilräume des \mathbb{R}^n oder Quotientenräume wie der verzweigten Geraden (E2E). Welche dieser Räume sind lokal euklidisch? Welche sind hausdorffsch? Sehen Sie einen Zusammenhang zur obigen Reeb-Blätterung?

Allgemein: Wiederholen Sie die Klassifikation der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ bis auf Konjugation durch die allgemeine lineare Gruppe $GL_2 \mathbb{R}$. Diskutieren Sie die so entstehenden Quotientenräume $Q_A = X / \sim$ und $Q_A^* = X^* / \sim$. Dies ist ein erster, einfacher Schritt zur **topologischen Klassifikation** der Fixpunkte dynamischer Systeme, hier zweidimensional skizziert.

Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume und disjunkt, $X \cap Y = \emptyset$.



Definition E3a: Summe zweier topologischer Räume

Wir bilden die **disjunkte Vereinigung** $X \sqcup Y := X \cup Y$ mit $X \cap Y = \emptyset$ und erhalten die Inklusionen $i : X \hookrightarrow X \sqcup Y : x \mapsto x$ und $j : Y \hookrightarrow X \sqcup Y : y \mapsto y$. Hierauf definieren wir die **Summentopologie** durch

$$\mathcal{T} := \{U \sqcup V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\} = i_*\mathcal{T}_X \cap j_*\mathcal{T}_Y.$$

Wir erhalten den **Summenraum** $(X \sqcup Y, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{T}_X) \sqcup (Y, \mathcal{T}_Y)$, genannt die **Summe** oder **disjunkte Vereinigung** der Räume (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) .

In diesem Raum sind die Teilmengen X und Y offen und abgeschlossen.

Beispiel: Es gilt $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ und $GL_n \mathbb{R} = GL_n^+ \mathbb{R} \sqcup GL_n^- \mathbb{R}$ nicht nur als Mengen, sondern auch als Räume mit der Summentopologie.

Es gilt $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<0} \sqcup \mathbb{Q}_{\geq 0}$ als Mengen, aber nicht als topologische Räume, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}} \sqcup \mathbb{Q}_{>\sqrt{2}}$ als offene Mengen, somit als topologische Räume.

Bemerkung: Im Raum (Z, \mathcal{T}_Z) seien $X, Y \subseteq Z$ disjunkt. Äquivalent sind:
 (1) Die Teilraumtopologie auf $X \sqcup Y$ in (Z, \mathcal{T}_Z) ist die Summentopologie.
 (2) In (Z, \mathcal{T}_Z) existieren $A \supseteq X$ und $B \supseteq Y$ offen mit $A \cap B = \emptyset$.

Bemerkung: Sei $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen. In diesem Falle ist ihre **Summe** oder (**interne**) **disjunkte Vereinigung** nichts weiter als ihre Vereinigung – mit der Zusage der Disjunktheit:

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \quad \text{wobei} \quad X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset \text{ für } \lambda \neq \mu.$$

Was tun, wenn die vorgegebene Familie $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ nicht disjunkt ist? Dann machen wir sie disjunkt, indem wir jede Menge X_λ durch ihre Kopie $\{\lambda\} \times X_\lambda$ ersetzen. *Was nicht disjunkt ist, wird disjunkt gemacht!*

Definition E3c: Summe einer Familie topologischer Räume

Sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie topologischer Räume. Wir definieren die (**externe**) **disjunkte Vereinigung** der Trägermengen $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ durch

$$X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{\lambda\} \times X_\lambda.$$

Hierzu gehören die **kanonischen Injektionen** $i_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X : x \mapsto (\lambda, x)$. Der Index $\lambda \in \Lambda$ unterscheidet die disjunkten Teilräume $\{\lambda\} \times X_\lambda$ in X . Sind alle $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ disjunkt, so können wir ebenso $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ nutzen.

Die **Summentopologie** auf X definieren wir durch

$$\mathcal{T} = \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \mid U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \right\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (i_\lambda)_*\mathcal{T}_\lambda.$$

Die Eigenschaften (O1–3) prüft man leicht nach. Auf X ist \mathcal{T} die feinste Topologie, für die alle Injektionen $i_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig sind (E3b).

Wir nennen $(X, \mathcal{T}) =: \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ den **Summenraum** zu $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Mit der Summentopologie ist $i_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ eine Einbettung, also ein Homöomorphismus auf den Bildraum $i_\lambda(X_\lambda) = \{\lambda\} \times X_\lambda$.

Meist identifizieren wir X_λ mit seiner Kopie $X'_\lambda = i_\lambda(X_\lambda) := \{\lambda\} \times X_\lambda$ und somit die externe Summe $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ mit der internen $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda$.

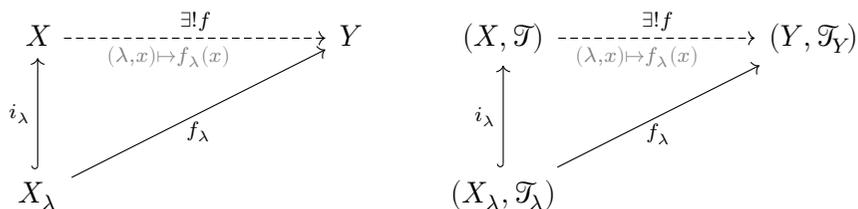
Im Summenraum (X, \mathcal{T}) ist jeder Teilraum X'_λ offen, denn $X'_\lambda \in \mathcal{T}$, und abgeschlossen, denn das Komplement $X \setminus X'_\lambda = \bigsqcup_{\mu \neq \lambda} X'_\mu$ ist offen.

Beispiel: Es gilt $\mathbb{Q} = \bigsqcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$ als Mengen, nicht als topologische Räume: die Topologie links ist euklidisch, die Summentopologie rechts ist diskret.

Es gilt $\mathbb{Q} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} (\xi_k, \xi_{k+1} \cap \mathbb{Q})$ als Räume, rechts mit Summentopologie, wobei $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : k \mapsto \xi_k$ strikt monoton und beidseitig unbeschränkt.

Bemerkung: Sei $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ eine Zerlegung in Teilräume $X_\lambda \subseteq X$. Genau dann trägt X die Summentopologie, wenn alle X_λ offen sind.

Zu $X_\lambda \subseteq X$ existiere $U_\lambda \supseteq X_\lambda$ offen, sodass $U_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ für alle $\lambda \neq \mu$. Dann ist die Teilraumtopologie auf $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ die Summentopologie.

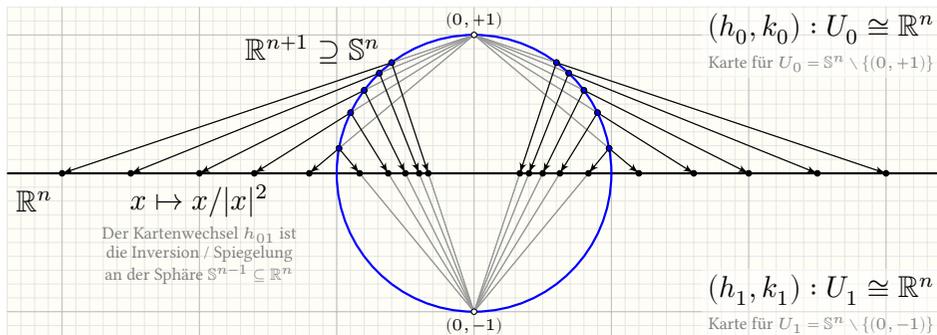


Satz E3f: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

- (0) Die Summentopologie \mathcal{T} auf $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ist die feinste, die alle Injektionen $i_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}) : x \mapsto (\lambda, x)$ stetig macht.
- (1) Zu jeder Familie $(f_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y))_{\lambda \in \Lambda}$ stetiger Abbildungen existiert genau eine stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ mit $f \circ i_\lambda = f_\lambda$.
- (2) Zerlegung und Summe $f \mapsto (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $f_\lambda = f \circ i_\lambda$ und $f = \coprod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ stiften somit die Bijektion $(\Phi, \Psi) : \mathcal{C}(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, Y) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}(X_\lambda, Y)$.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition E3c der Summentopologie. Stetigkeit von f : Für $V \in \mathcal{T}_Y$ gilt $f^{-1}(V) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. QED

Die Konstruktion des Summenraums ist natürlich und recht einfach. Die universelle Abbildungseigenschaft ist der einfachste Spezialfall des Verklebelemmas E1f: Die Teilräume $X_\lambda \subseteq X$ mit $\lambda \in \Lambda$, genauer ihre homöomorphen Kopien $X'_\lambda \subseteq X$, sind eine offene Zerlegung von X . Jede Familie $(f_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y))_{\lambda \in \Lambda}$ stetiger Abbildungen lässt sich zur stetigen Abbildung $f = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \circ \iota_\lambda^{-1} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ verkleben, denn jede paarweise Überlappung ist leer und somit kein Hindernis.



Beispiel / Übung E3i: Verheften von Hemisphären

- Wir erhalten explizite Homöomorphismen $(f, g) : X/\sim \cong S^n$.
- (1) Sei $X_0 = X_1 = \mathbb{R}^n$. Auf dem Summenraum $X = X_0 \sqcup X_1$ sei die Äquivalenzrelation \sim erzeugt durch $(0, x) \sim (1, x/|x|^2)$ für alle $x \neq 0$.
 - (2) Sei $X_0 = X_1 = \mathbb{D}^n$. Auf dem Summenraum $X = X_0 \sqcup X_1$ sei die Äquivalenzrelation \sim erzeugt durch $(0, x) \sim (1, x)$ für alle $x \in S^{n-1}$.

Definition E3j: Verheften zweier Räume entlang einer Abbildung

Sei $f : Y \supseteq B \rightarrow A \subseteq X$ stetig. Die **Verheftung** von X und Y entlang f ist

$$q : X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y := \frac{X \sqcup Y}{f(y) \sim y, y \in B}$$

Äquivalenzklassen sind $\{x\} \sqcup f^{-1}(x)$ für $x \in A$ sowie $\{z\}$ für $z \notin A \sqcup B$.

Beispiele: (0) Für $A = B = \emptyset$ ist $X \cup_f Y \cong X \sqcup Y$ die topologische Summe.

(1) Für $f : Y \supseteq \{y_0\} \rightarrow \{x_0\} \subseteq X$ erhalten wir das **Bouquet**

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := \frac{X \sqcup Y}{x_0 \sim y_0} = X \cup_f Y.$$

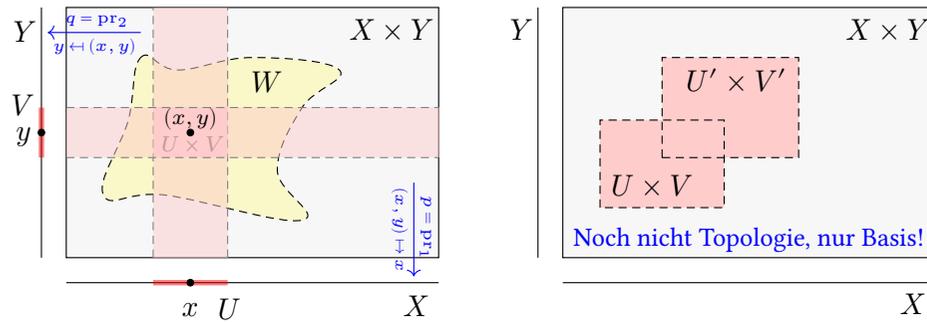
(2) Für $X = \{x_0\}$ erhalten wir die **Zusammenschlagung**

$$Y // B := \frac{\{x_0\} \sqcup Y}{x_0 \sim y, y \in B} = X \cup_f Y.$$

Vorige Beispiele: (3) Für $f = \text{id}_{S^{n-1}}$ erhalten wir $\mathbb{D}^n \cup_f \mathbb{D}^n \cong S^n$. (E3i)

(4) Für $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x \mapsto x/|x|^2$ erhalten wir $\mathbb{R}^n \cup_g \mathbb{R}^n \cong S^n$.

(5) Für $h = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ ist $\mathbb{R}^n \cup_h \mathbb{R}^n$ der Raum mit doppeltem Ursprung. (E2E)



Zu Räumen (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) betrachten wir das kartesische **Produkt**

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

der Trägermengen, also die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$. Hierzu gehören die **Projektionen** $p = \text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X : (x, y) \mapsto x$ und $q = \text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y : (x, y) \mapsto y$. Wir möchten nun das Produkt $X \times Y$ mit der **Produkttopologie** \mathcal{T} ausstatten, sodass p und q stetig werden. Die feinste Topologie hierzu wäre die diskrete. Wie wählen die größte!

Definition E4a: Produkt zweier topologischer Räume

Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Auf der Trägermenge $X \times Y$ definieren wir die Produkttopologie \mathcal{T} durch die **Produktbasis**

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\} \\ &= \{p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}. \end{aligned}$$

Anschaulich besteht die Basis \mathcal{B} aus den offenen Kästchen $U \times V$. Dies ist noch nicht die gesamte Topologie \mathcal{T} , sondern nur eine Basis: Diese Familie erfüllt die Basisaxiome (B1-2) aus D6c und definiert so die **Produkttopologie** $\mathcal{T} := \{\bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}\}$, punktweise ausgeschrieben:

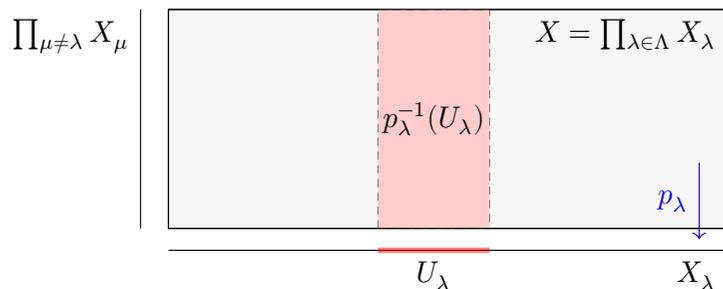
$$\mathcal{T} = \{W \subseteq X \times Y \mid \forall (x, y) \in W \exists U \in \mathcal{T}_X \exists V \in \mathcal{T}_Y : (x, y) \in U \times V \subseteq W\}$$

Wir erhalten den **Produktraum** $(X \times Y, \mathcal{T}) =: (X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$.

Im Folgenden sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie topologischer Räume. Wir definieren das **Produkt** der Trägermengen $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ durch

$$\begin{aligned} X &= \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \{x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid \forall \lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_\lambda\} \\ &= \{x : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : \lambda \mapsto x_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_\lambda\}. \end{aligned}$$

Hierzu gehören die **kanonischen Projektionen** $p_\lambda : X \rightarrow X_\lambda : x \mapsto x_\lambda$.



Wir möchten das Produkt X mit einer Topologie \mathcal{T} ausstatten, sodass alle Projektionen p_λ stetig sind. Die feinste, $\mathfrak{P}(X)$? Wie wählen die größte: Die offenen Zylinder $p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ mit $U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$ erzeugen die Produkttopologie.

Definition E4c: Produkt einer Familie topologischer Räume

Die **Produkttopologie** \mathcal{T} auf $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ wird erzeugt von

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^* \mathcal{T}_\lambda = \{p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda\} \\ &= \{\prod_{\mu \in \Lambda} U_\mu \mid U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda, \text{ sonst } U_\mu = X_\mu \text{ für alle } \mu \neq \lambda\}. \end{aligned}$$

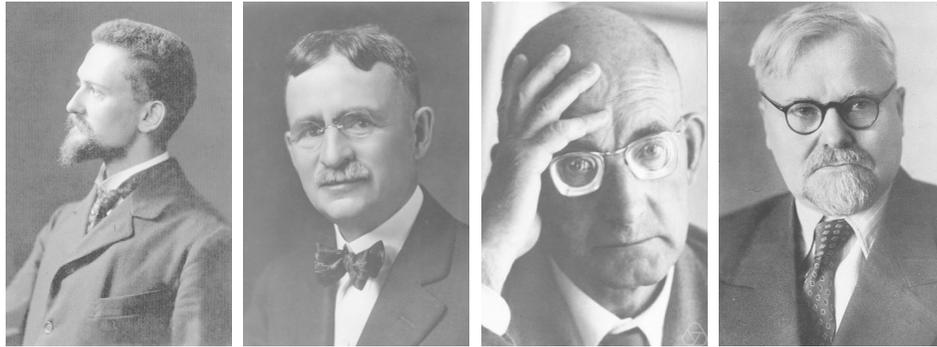
Nach Satz D6F erhalten wir eine Basis \mathcal{B} für \mathcal{T} mittels endlicher Schnitte:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda := \{p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \dots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \Lambda, U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i}\} \\ &= \{\prod_{\mu \in \Lambda} U_\mu \mid U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \text{ für endlich viele } \lambda \in \Lambda; \text{ sonst } U_\mu = X_\mu\} \end{aligned}$$

Diese erfüllt die Basisaxiome (B1-2) und definiert so die Topologie

$$\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}\} = \{W \subseteq X \mid \forall x \in W \exists n \in \mathbb{N} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda \exists U_{\lambda_1} \in \mathcal{T}_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n} \in \mathcal{T}_{\lambda_n} : x \in p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \dots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \subseteq W\}.$$

Wir nennen $(X, \mathcal{T}) =: \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ den **Produktraum** zu $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.



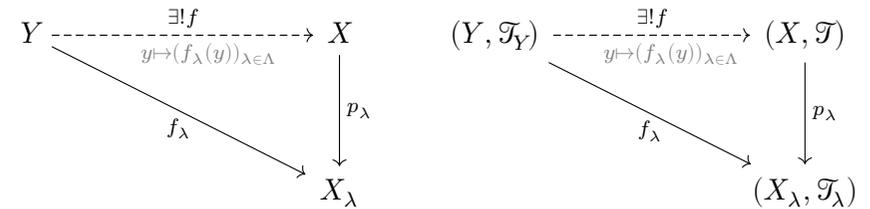
Felix Hausdorff
(1868–1942)

Eliakim H. Moore
(1862–1932)

Pawel Alexandroff
(1896–1982)

Andrei Tychonoff
(1906–1993)

Die Teilraumtopologie wurde 1914 von Felix Hausdorff eingeführt, die Quotiententopologie 1925 von Eliakim Moore und zeitgleich 1926 von Pawel Alexandroff, die Produkttopologie 1930 von Andrei Tychonoff. Die topologische Summe wurde von Nicolas Bourbaki (1940) eingeführt. Seine *Topologie générale* (1947) etablierte die kategorielle Sichtweise und universelle Abbildungseigenschaft von Initial- und Finaltopologien.



Satz E4d: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

- (0) Die Produkttopologie \mathcal{T} auf $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ist die größte, die alle Projektionen $p_\lambda : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) : x \mapsto x_\lambda$ stetig macht.
- (1) Zu jeder Familie $(f_\lambda : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ stetiger Abbildungen existiert genau eine stetige Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ mit $p_\lambda \circ f = f_\lambda$.
- (2) Zerlegung und Produkt $f \Leftrightarrow (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $f_\lambda = p_\lambda \circ f$ und $f = \prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ stiften somit die Bijektion $(\Phi, \Psi) : \mathcal{C}(Y, \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}(Y, X_\lambda)$.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition E4c der Produkttopologie. Stetigkeit dank D6g: Für $U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$ gilt $f^{-1}(p_\lambda^{-1}(U_\lambda)) = f_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{T}_Y$. QED

Endliche Produkte $(X, \mathcal{T}) = (X_1, \mathcal{T}_1) \times \dots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$ sind etwas einfacher zu beschreiben. Auf der Produktmenge $X = X_1 \times \dots \times X_n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= p_1^* \mathcal{T}_1 \cup \dots \cup p_n^* \mathcal{T}_n = \{p_i^{-1}(U_i) \mid i = 1, \dots, n, U_i \in \mathcal{T}_i\} \\ &= \{X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \dots \times X_n \mid i = 1, \dots, n, U_i \in \mathcal{T}_i\}, \\ \mathcal{B} &= \{p_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(U_n) \mid U_1 \in \mathcal{T}_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_n\} \\ &= \{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_1 \in \mathcal{T}_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_n\} = \mathcal{T}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{T}_n, \\ \mathcal{T} &= \{\cup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}\} \\ &= \{W \subseteq X \mid \forall x \in W \exists U_1 \in \mathcal{T}_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_n : x \in U_1 \times \dots \times U_n \subseteq W\}. \end{aligned}$$

Allgemeiner: Aus Basen $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{T}_n$ erhalten wir die Basis $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n = \{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, U_n \in \mathcal{B}_n\} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

Beispiel: Der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$ hat als eine mögliche Basis die offenen Quader, $\mathcal{B}_n = \{]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[\mid a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{R}\}$. Somit gilt $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_1) \times \dots \times (\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_1) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$ dank $\mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_n$. Für $k + \ell = n$ gilt $\mathcal{B}_k \otimes \mathcal{B}_\ell = \mathcal{B}_n$, also $(\mathbb{R}^k, \mathcal{T}_k) \times (\mathbb{R}^\ell, \mathcal{T}_\ell) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$.

Wird \mathcal{T}_λ erzeugt von $\mathcal{E}_\lambda \subseteq \mathcal{T}_\lambda$, für jedes $\lambda \in \Lambda$, so wird \mathcal{T} erzeugt von

$$\mathcal{E} = \cup_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^* \mathcal{E}_\lambda = \left\{ \prod_{\mu \in \Lambda} U_\mu \mid \begin{array}{l} U_\lambda \in \mathcal{E}_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda, \\ U_\mu = X_\mu \text{ für alle } \mu \neq \lambda \end{array} \right\}.$$

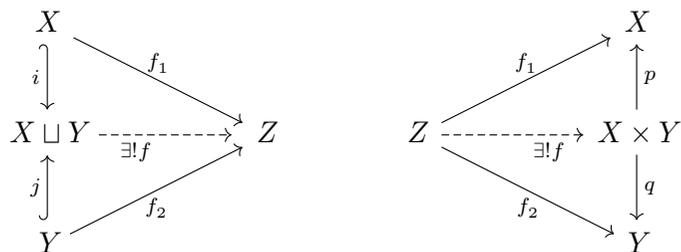
Hat \mathcal{T}_λ als Basis $\mathcal{B}_\lambda \subseteq \mathcal{T}_\lambda$, für jedes $\lambda \in \Lambda$, so hat \mathcal{T} als Basis

$$\mathcal{B} = \otimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda = \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \mid \begin{array}{l} U_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda \text{ für endlich viele } \lambda \in \Lambda, \\ U_\lambda = X_\lambda \text{ sonst} \end{array} \right\}.$$

Die Endlichkeitsbedingung ist wesentlich: Wir fordern $U_\lambda = X_\lambda$ für fast alle $\lambda \in \Lambda$. Dies ergibt sich zwangsläufig aus unserem Wunsch, dass \mathcal{T} die größte Topologie sein soll, die alle Projektionen p_λ stetig macht.

Ohne die Endlichkeitsbedingung erhalten wir statt der Produkttopologie die sogenannte **Boxtopologie**; sie hat ganz anderen Eigenschaften! (E4q)

Beispiel: Auf der Menge $\mathbb{R}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)\} = \prod_{x \in X} \mathbb{R}$ ist die Produkttopologie E4c die Topologie der punktweisen Konvergenz D4A, denn aus $\mathcal{B}_x = \{]a, b[\mid a < b \text{ in } \mathbb{R}\}$ wird $\mathcal{B} = \otimes_{x \in X} \mathcal{B}_x$ und $\tau(\mathcal{B}) = \mathcal{T}_{pw}$.



Die universelle Abbildungseigenschaft von Summe und Produkt:

$$\mathcal{C}(X \sqcup Y, Z) \cong \mathcal{C}(X, Z) \times \mathcal{C}(Y, Z) : f \mapsto (f_1 = f \circ i, f_2 = f \circ j)$$

$$\mathcal{C}(Z, X \times Y) \cong \mathcal{C}(Z, X) \times \mathcal{C}(Z, Y) : f \mapsto (f_1 = p \circ f, f_2 = q \circ f)$$

Die Schreibweise $B^A := \mathcal{C}(A, B)$ und $X + Y := X \sqcup Y$ ist suggestiv:

$$Z^{(X+Y)} \cong Z^X \times Z^Y \quad \text{und} \quad (X \times Y)^Z \cong X^Z \times Y^Z$$

Diese Rechenregeln gelten für beliebige Summen und Produkte, zudem Neutralität, Kommutativität, Assoziativität und Distributivität.

😊 Übung / Frage aus dem Publikum: Gilt damit die binomische Formel?

Für jede Bijektion $\varphi : \Lambda' \cong \Lambda$ gilt das allgemeine Kommutativgesetz:

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda' \in \Lambda'} X_{\varphi(\lambda')} : (\varphi(\lambda'), x) \mapsto (\lambda', x)$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda' \in \Lambda'} X_{\varphi(\lambda')} : (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto (x_{\varphi(\lambda')})_{\lambda' \in \Lambda'}$$

Für jede Zerlegung $\Lambda = \coprod_{i \in I} \Lambda_i$ gilt das allgemeine Assoziativgesetz:

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{i \in I} \left(\prod_{\lambda \in \Lambda_i} X_\lambda \right) : ((i, \lambda), x) \mapsto (i, (\lambda, x))$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{i \in I} \left(\prod_{\lambda \in \Lambda_i} X_\lambda \right) : (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto ((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_i})_{i \in I}$$

Für $\Lambda = \prod_{i \in I} \Lambda_i$ gilt das allgemeine Distributivgesetz:

$$\prod_{i \in I} \left(\prod_{\lambda_i \in \Lambda_i} X_{\lambda_i} \right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(\prod_{i \in I} X_{\lambda_i} \right) : (\lambda_i, x_{\lambda_i})_{i \in I} \mapsto ((\lambda_i)_{i \in I}, (x_{\lambda_i})_{i \in I})$$

All diese Abbildungen sind stetig dank UAE, also Homöomorphismen.

Übung E4s: Hausdorff-Eigenschaft und Diagonale

Der topologische Raum (X, \mathcal{T}) ist hausdorffsch gdw die Diagonale $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ im Produktraum $X \times X$ abgeschlossen ist.

Beweis: Der Raum (X, \mathcal{T}) ist hausdorffsch, wenn gilt:

Zu $x \neq y$ in X existieren $U, V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Das Komplement $(X \times X) \setminus \Delta_X$ ist offen in der Produkttopologie:

Zu $x \neq y$ in X existieren $U, V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U, y \in V$ und $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$.

Übung E4t: Vergleich stetiger Funktionen

Sind $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen und der Zielraum Y hausdorffsch, so ist die Menge $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen im Startraum X . Aus $A \subseteq X$ und $f|_A = g|_A$ folgt $f|_{\bar{A}} = g|_{\bar{A}}$; ist A dicht in X , so folgt $f = g$.

Beweis: Die Abbildung $h : X \rightarrow Y \times Y : x \mapsto (f(x), g(x))$ ist stetig (UAE). Somit ist $h^{-1}(\Delta_Y) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X . QED

Satz E4v: Metrisierung von Produkträumen

Sei $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$ das Produkt topologischer Räume (X_i, \mathcal{T}_i) , und jeder enthalte mindestens zwei Elemente $x_i \neq x'_i$. Dann sind äquivalent:

- 1 Der Produktraum (X, \mathcal{T}) ist metrisierbar.
- 2 Jeder Faktor (X_i, \mathcal{T}_i) ist metrisierbar, und I ist abzählbar.

Beweis: „(2) \Rightarrow (1)“: Für $i \in I$ sei $d_i : X_i \times X_i \rightarrow [0, 1]$ eine Metrik für \mathcal{T}_i . Da I abzählbar ist, können wir $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen mit $\sum_{i \in I} a_i \leq 1$. Dank Satz D4G wird die Produkttopologie \mathcal{T} auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ erzeugt durch die Metrik $d : X \times X \rightarrow [0, 1] : (x, y) \mapsto \sum_{i \in I} a_i d_i(x_i, y_i)$.

„(1) \Rightarrow (2)“: Wir haben $(s_i, p_i) : X_i \cong X'_i := \prod_{j \in I} A_j$ mit $A_i = X_i$ und $A_j = \{x_j\}$ für $j \neq i$. Ist X metrisierbar, so auch jeder Teilraum X'_i (D1L).

Wie in Satz D4B für $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ folgt: Ist die Indexmenge I überabzählbar, so ist der Produktraum $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$ nicht erstabzählbar. QED

Übung D6v: Zweitabzählbarkeit impliziert die Lindelöf-Eigenschaft.

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und \mathcal{B} eine abzählbare Basis. Dann enthält jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung:
Zu $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}$ existiert $J \subseteq I$ abzählbar mit $X = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Bemerkung: Kompaktheit von (X, \mathcal{T}) fordert stärker J endlich, siehe F1A.

Beweis: Die Teilmenge $\mathcal{C} := \{V \in \mathcal{B} \mid \exists i \in I : V \subseteq U_i\} \subseteq \mathcal{B}$ ist abzählbar. Hierauf wählen wir eine Zuordnung $j : \mathcal{C} \rightarrow I : V \mapsto j(V)$ mit $V \subseteq U_{j(V)}$. Es gilt $X = \bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} U_{j(V)}$: Zu $x \in X$ existiert $i \in I$ mit $x \in U_i$. Dazu existiert $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subseteq U_i$. Somit gilt $V \in \mathcal{C}$ und $x \in V \subseteq U_{j(V)}$. QED

Lemma E5j: Tychonoff

Sei (X, \mathcal{T}) lindelöf, etwa zweitabzählbar. Dann impliziert T_3 bereits T_4 .

Beweis: Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Wir konstruieren $A \subseteq U \in \mathcal{T}$ und $B \subseteq V \in \mathcal{T}$ mit $U \cap V = \emptyset$.

(1) Nach Voraussetzung T_3 existieren zu jedem Punkt $a \in A$ disjunkte offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $B \subseteq U'_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap U'_a = \emptyset$.

Die offene Überdeckung $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{a \in A} U_a$ erlaubt eine abzählbare Teilüberdeckung dank D6v (Lindelöf-Eigenschaft).

Nach Nummerierung mit $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir daher $\tilde{U}_n, \tilde{U}'_n \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n$ sowie $B \subseteq \tilde{U}'_n$ und $\tilde{U}_n \cap \tilde{U}'_n = \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(2) Sei $U_n := \bigcup_{k=0}^n \tilde{U}_k$ und $U'_n := \bigcap_{k=0}^n \tilde{U}'_k$. Damit gilt $U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ mit $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ und $U'_0 \supseteq U'_1 \supseteq U'_2 \supseteq \dots \supseteq B$ sowie $U_n \cap U'_n = \emptyset$.

Mit vertauschten Rollen von A und B erhalten wir $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$ mit $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ und $V'_0 \supseteq V'_1 \supseteq V'_2 \supseteq \dots \supseteq A$ mit $V_n \cap V'_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Schließlich gilt $A \subseteq U := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (U_k \cap V'_k)$ und $B \subseteq V := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} (V_\ell \cap U'_\ell)$. Nach Konstruktion sind U und V offen und disjunkt, denn

$$U \cap V = \bigcup_{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2} (U_k \cap V'_k) \cap (V_\ell \cap U'_\ell).$$

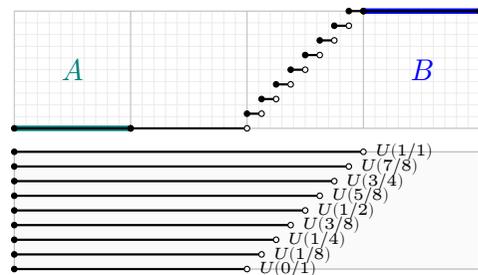
Für $k \leq \ell$ gilt $U_k \cap U'_\ell = \emptyset$. Für $\ell \leq k$ gilt $V_\ell \cap V'_k = \emptyset$. QED

Lemma E5k: Urysohn, 1925

Für jeden topologischen Raum (X, \mathcal{T}) gilt: Aus T_4 folgt $T_{4^{1/2}}$.

Ausgeschrieben: Sei (X, \mathcal{T}) ein T_4 -Raum; zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Mengen $A, B \subseteq X$ existieren disjunkte offene Umgebungen. Dann gilt $T_{4^{1/2}}$: Es existiert $f : X \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

Beweisidee:



Beweis: (1) Die dichte Teilmenge $D = [0, 1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ in $[0, 1]$ können wir abzählen durch die Folge $(r_k)_{k \in \mathbb{N}} = (0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, \dots)$.

Zu jedem $r \in D$ konstruieren wir rekursiv eine offene Menge $U(r) \in \mathcal{T}$, sodass für $r < s$ stets $\overline{U(r)} \subseteq U(s)$ gilt. Wir beginnen mit $U(1) := X \setminus B$. Dank T_4 existiert $U(0) \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1) = X \setminus B$.

Seien $U(r_0), \dots, U(r_{n-1}) \in \mathcal{T}$ bereits konstruiert. Seien $k, \ell < n$ die Indizes der direkten Nachbarn $r_k < r_n < r_\ell$; für alle $i < n$ gelte also $r_i \notin]r_k, r_\ell[$. Dank T_4 existiert $U(r_n) \in \mathcal{T}$ mit $\overline{U(r_k)} \subseteq U(r_n) \subseteq \overline{U(r_n)} \subseteq U(r_\ell)$.

(2) Wir definieren

$$f : X \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \begin{cases} \inf\{r \in D \mid x \in U(r)\} & \text{falls } x \in U(1), \\ 1 & \text{falls } x \in B = X \setminus U(1). \end{cases}$$

Wegen $A \subseteq U(0)$ gilt $f|_A = 0$. Wegen $B = X \setminus U(1)$ gilt $f|_B = 1$.

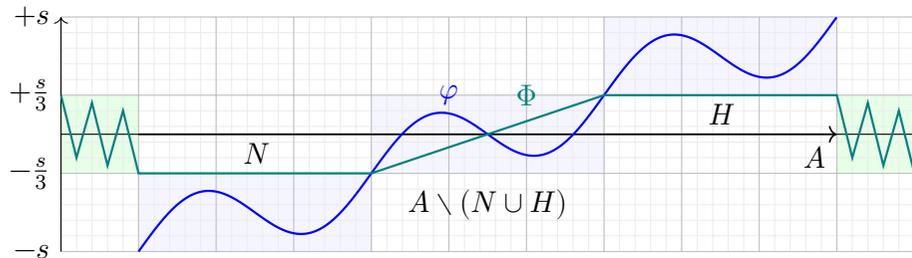
(3) Die Intervalle $[0, a[$ und $]b, 1]$ mit $a, b \in [0, 1]$ erzeugen die euklidische Topologie auf $[0, 1]$. Dank Satz D6G genügt es, die Stetigkeit von f damit zu testen: Es gilt $f(x) < a$ gdw $x \in U(r)$ für ein $r \in D$ mit $r < a$; also ist $f^{-1}([0, a[) = \bigcup_{r < a} U(r)$ offen. Es gilt $f(x) > b$ gdw $x \notin \overline{U(s)}$ für ein $s \in D$ mit $s > b$; also ist $f^{-1}(]b, 1]) = \bigcup_{s > b} X \setminus U(s) = \bigcup_{r > b} X \setminus \overline{U(r)}$ offen. QED

Satz E5L: Fortsetzungssatz von Tietze

Sei (X, \mathcal{T}) ein T_4 -Raum und darin $A \subseteq X$ abgeschlossen.
 Zu $f : A \rightarrow [a, b]$ stetig existiert $F : X \rightarrow [a, b]$ stetig mit $F|_A = f$.

Lemma E5M: Konstruktion einer Näherungsfortsetzung

Zu $\varphi : A \rightarrow [-s, s]$ stetig existiert $\Phi : X \rightarrow [-\frac{s}{3}, \frac{s}{3}]$ stetig mit $|\varphi - \Phi|_A \leq \frac{2}{3}s$.



Beweis: In A sind $N = \varphi^{-1}([-s, -\frac{s}{3}])$ und $H = \varphi^{-1}([\frac{s}{3}, s])$ abgeschlossen, also auch in X . Dank Urysohn (E5κ) existiert $\Phi : X \rightarrow [-\frac{s}{3}, \frac{s}{3}]$ stetig mit $\Phi|_N = -\frac{s}{3}$ und $\Phi|_H = \frac{s}{3}$. Somit gilt $|\varphi(a) - \Phi(a)| \leq \frac{2}{3}s$ für alle $a \in A$. QED

Satz E5L: Fortsetzungssatz von Tietze

Sei (X, \mathcal{T}) ein T_4 -Raum und darin $A \subseteq X$ abgeschlossen.
 Zu $f : A \rightarrow [a, b]$ stetig existiert $F : X \rightarrow [a, b]$ stetig mit $F|_A = f$.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $[a, b] = [-1, 1]$. Zu $\varphi_0 = f : A \rightarrow [-1, 1]$ existiert dank Lemma E5M eine Näherungsfortsetzung $\Phi_0 : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Der Fehler auf A ist eine stetige Funktion $\varphi_1 = f - \Phi_0|_A : A \rightarrow [-1, 1] \cdot \frac{2}{3}$. Hierzu wiederum existiert $\Phi_1 : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \cdot \frac{2}{3}$. Rekursiv erhalten wir

- (1) $\Phi_n : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \cdot (\frac{2}{3})^n$ stetig mit
- (2) $\varphi_{n+1} = f - (\Phi_0 + \dots + \Phi_n)|_A : A \rightarrow [-1, 1] \cdot (\frac{2}{3})^{n+1}$.

Dank (1) konvergiert $F_n = \sum_{k=0}^n \Phi_k$ gleichmäßig auf X , denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_k|_X \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^k = 1.$$

Die Grenzfunktion $F : X \rightarrow [-1, 1]$ ist demnach stetig (C3Q).

Dank (2) gilt $|f - F_n|_A \leq (\frac{2}{3})^{n+1} \rightarrow 0$, also $F|_A = f$. QED

Korollar E5N: Fortsetzungssatz von Tietze

- Sei (X, \mathcal{T}) ein T_4 -Raum und darin $A \subseteq X$ abgeschlossen.
- (1) Zu $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig existiert $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $F|_A = f$.
 - (2) Dasselbe gilt statt \mathbb{R}^n für jeden euklidischen Retrakt $(\iota, \rho) : Y \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$.

Beweis: (1) Wir setzen $f = (f_1, \dots, f_n)$ stetig fort zu $F = (F_1, \dots, F_n)$. Dank UAE (E4D) genügt $n = 1$. Wir nutzen den Homöomorphismus (A1B)

$$h : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong}]-1, 1[: x \mapsto x/(1 + |x|).$$

Die Komposition $\varphi := h \circ f : A \rightarrow]-1, 1[$ ist stetig. Dank E5L existiert $\Phi : X \rightarrow]-1, 1[$ stetig mit $\Phi|_A = \varphi$. Die Menge $B = \Phi^{-1}(\{-1, 1\})$ ist in X abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Dank E5κ existiert $g : X \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $g|_A = 1$ und $g|_B = 0$. Somit ist das Produkt $\Psi = g \cdot \Phi : X \rightarrow]-1, 1[$ stetig und $\Psi|_A = \varphi$. Schließlich ist $F = h^{-1} \circ \Psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F|_A = f$.

(2) Sei $f : A \rightarrow Y$ stetig. Zu $g := \iota \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert $G : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $G|_A = g$. Wir erhalten $F := \rho \circ G : X \rightarrow Y$ stetig mit $F|_A = f$. QED

Brouwer und Lebesgue bewiesen die Fortsetzungseigenschaft E5N zunächst nur für euklidische Räume $X = \mathbb{R}^n$, Tietze (1915) dann für metrische Räume (E5Q), Urysohn (1925) schließlich für alle T_4 -Räume.

Übung E5o: Die Fortsetzungseigenschaft impliziert T_4 .

Erlaubt (X, \mathcal{T}) zu $C \subseteq X$ abgeschlossen und $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ stetig immer eine stetige Fortsetzung $G : X \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist (X, \mathcal{T}) ein T_4 -Raum.

Lösung: Seien $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen in (X, \mathcal{T}) . Dann ist $C = A \sqcup B$ abgeschlossen und $g = \mathbf{1}_B : C \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Hierzu existiert $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $G|_C = g$. Für $f = (G \wedge 1) \vee 0$ gilt dann $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$, wie für $T_{4^{1/2}}$ gefordert (E5A). QED

Auf der anderen Seite ist der Zielraum \mathbb{R}^n wesentlicher Teil des Satzes:

Übung E5p: topologisches Hindernis zur Fortsetzung

In $X = [-1, 1]$ ist $A = \{-1, 1\}$ abgeschlossen. Sei $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Erlaubt die stetige Abbildung $f : A \rightarrow Y : a \mapsto a$ eine stetige Fortsetzung $F : X \rightarrow Y$?

Satz E5R: Metrisierungssatz von Urysohn, 1924

Sei (X, \mathcal{T}) ein zweitabzählbarer Raum. Dann sind äquivalent:

- (1) Der Raum (X, \mathcal{T}) ist metrisierbar.
- (2) Der Raum (X, \mathcal{T}) ist regulär $(T_1 \ \& \ T_3)$.
- (3) Der Raum (X, \mathcal{T}) ist normal $(T_1 \ \& \ T_4)$.
- (4) Der Raum (X, \mathcal{T}) erfüllt T_1 und $T_{4^{1/2}}$.
- (5) (X, \mathcal{T}) ist homöomorph zu einem Teilraum im Hilbert-Würfel $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Beweis: „(5) \Rightarrow (1)“: Der Hilbert-Würfel ist metrisierbar (E4v) etwa durch $d : [0, 1]^{\mathbb{N}} \times [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1] : (x, y) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} |x_k - y_k|$. Jede Einbettung $f : X \hookrightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ liefert somit eine Teilraummetrik $d_X(a, b) = d(f(a), f(b))$.

„(1) \Rightarrow (2,3,4)“: E5A. „(2) \Rightarrow (3)“: Tychonoff E5J. „(3) \Rightarrow (4)“: Urysohn E5K.

„(4) \Rightarrow (5)“: Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine abzählbare Basis der Topologie \mathcal{T} .

Sei I die Menge aller Paare $i = (U, V)$ mit $U, V \in \mathcal{B}$ und $\bar{U} \subseteq V$.

Zu $i \in I$ existiert $f_i : X \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $f_i|_{\bar{U}} = 0$ und $f_i|_{X \setminus V} = 1$.

Die Abbildung $f : X \rightarrow [0, 1]^I : x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}$ ist eine Einbettung. QED

Lemma E5s: Einbettung in einen Produktraum

Sei $F = (f_i)_{i \in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_i : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$.

- 1 Die Abbildung $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ mit $f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$ ist stetig.
- 2 Genau dann ist f injektiv, wenn F alle Punkte von X trennt, also zu $a \neq b$ in X ein Index $i \in I$ existiert mit $f_i(a) \neq f_i(b)$.
- 3 Die Abbildung $f : X \rightarrow f(X)$ ist offen, wenn die Familie F alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$ von Punkten $b \in X \setminus A$ trennt, also jeweils ein Index $i \in I$ existiert mit $f_i(b) \notin \overline{f_i(A)}$.

Gelten alle drei Bedingungen, so ist f eine Einbettung.

Beweis: Stetigkeit (1) ist die universelle Abbildungseigenschaft des Produkts (E4D). Injektivität (2) folgt nach Definition der Menge $\prod_{i \in I} X_i$.

(3) Sei $U \in \mathcal{T}$ und $A = X \setminus U$. Zu $b \in U$ existiert $i \in I$ mit $f_i(b) \notin \overline{f_i(A)}$.

Demnach ist $f(X) \setminus \overline{f(A)} \subseteq f(U)$ offene Umgebung von $f(b)$ in $f(X)$.

In $f(X)$ ist $f(U)$ Umgebung jedes ihrer Punkte, also offen (D3c). QED

Bemerkung: Der Hilbert-Würfel $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ ist metrisierbar und zudem separabel dank $[0, 1]_{\mathbb{Q}}^{(\mathbb{N})} \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}$ und somit zweitabzählbar (D6o).

Der Hilbert-Würfel ist somit ein universeller metrischer Raum:

Jeder separable metrisierbare Raum lässt sich hierin einbetten.

Damit haben wir sehr einfache, notwendige und hinreichende Kriterien!

$$T_2 \ \& \ 1AA \iff \text{Metrisierbarkeit} \iff T_1 \ \& \ T_3 \ \& \ 2AA$$

Bemerkung: Dies können wir direkt auf Mannigfaltigkeiten anwenden: Lokal euklidisch & hausdorffsch & zweitabzählbar impliziert metrisierbar.

- 1 Jeder lokal euklidische Raum (X, \mathcal{T}) erfüllt T_1 :
Jeder Punkt $x \in X$ hat eine offene Umgebung $(U, x) \cong (\mathbb{R}^n, 0)$.
- 2 Es gibt exotische Gegenbeispiele ohne T_2 , siehe E2E. Gilt zudem T_2 , so folgt T_3 und sogar $T_{3^{1/2}}$ (später dank lokaler Kompaktheit).
- 3 Es gibt exotische Gegenbeispiele ohne 2AA.
Gilt zudem 2AA, so ist (X, \mathcal{T}) metrisierbar.

Urysohns Metrisierungssatz löst die allermeisten praktischen Probleme. Wir betrachten dabei nur „kleine“ Räume (2AA) und lassen zwischen notwendig $(T_2 \ \& \ 1AA)$ und hinreichend $(T_1 \ \& \ T_3 \ \& \ 2AA)$ eine Lücke. Eine Generation nach Urysohn wurde sein Werk vollendet:

Satz E5u: Bing-Nagata-Smirnov, 1950–51

Für jeden topologischen Raum (X, \mathcal{T}) sind äquivalent:

- (1) Der Raum (X, \mathcal{T}) ist metrisierbar.
- (2) Der Raum (X, \mathcal{T}) ist regulär $(T_1 \ \& \ T_3)$, und die Topologie \mathcal{T} erlaubt eine σ -lokal-endliche Basis $\mathcal{B} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(k)$, d.h. jede Familie $\mathcal{B}(k)$ ist lokal-endlich: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U , also $x \in U \in \mathcal{T}$, die nur endlich viele Mengen aus $\mathcal{B}(k)$ schneidet.
- (3) Der Raum (X, \mathcal{T}) ist regulär $(T_1 \ \& \ T_3)$, und die Topologie \mathcal{T} erlaubt eine σ -diskrete Basis $\mathcal{B} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(k)$, d.h. jede Familie $\mathcal{B}(k)$ ist diskret: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U , also $x \in U \in \mathcal{T}$, die höchstens eine Menge aus $\mathcal{B}(k)$ schneidet.

Vorgelegt sei eine Inklusion / Einbettung $\iota : Y \hookrightarrow X$. Eine **Retraktion** ist eine stetige Abbildung $\rho : X \rightarrow Y$ mit $\rho \circ \iota = \text{id}_Y$. Dann heißt $(\iota, \rho) : Y \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\rho} Y$ ein **Retraktionspaar** und der Teilraum $A := \iota(Y) \subseteq X$ ein **Retrakt**.

Aufgabe: (1) Hat $X = \mathbb{R}^n$ zweipunktige Retrakte $Y = \{a, b\}$?

Nein! Anschaulich: $\rho : X \rightarrow Y$ mit $\rho \circ \iota = \text{id}_Y$ müsste X „zerreißen“.

Formal: Der Raum X ist wegzusammenhängend, aber Y nicht.

Demnach gibt es keine stetige Surjektion $\rho : X \rightarrow Y$. (A1H)

(2) Ist $Y = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ in $X = \mathbb{R}^n$ ein Retrakt? auch $Z = \mathbb{R}_{> 0} \times \{0\}$?

(a) Ja! Eine Retraktion zu ι ist $\rho : X \rightarrow Y : x \mapsto (\max\{0, x_1\}, 0, \dots, 0)$.

(b) Nein, denn Z ist nicht abgeschlossen in X , nach (3) also kein Retrakt.

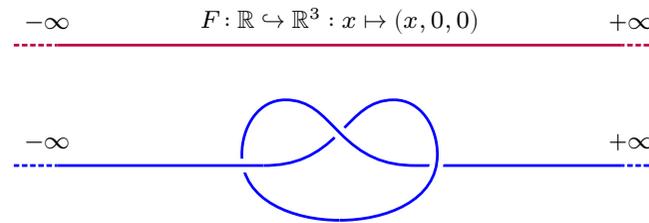
(3) Ist jeder Retrakt $A \subseteq X$ in einem Hausdorff-Raum X abgeschlossen?

Ja! Für $\rho : X \rightarrow A$ stetig mit $\rho \circ \iota = \text{id}_A$ gilt $A = \{x \in X \mid \text{id}(x) = \rho(x)\}$.

Dank Satz D5L ist die Teilmenge A in X abgeschlossen.

(4) Erlaubt die Gerade $F : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x, 0, 0)$ eine Retraktion?

Ja! Hierzu genügt $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x$.



(5) Erlaubt jede abgeschlossene Einbettung $F : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Retraktion? Selbst für einen Knoten, egal wie kompliziert? Das ist keineswegs klar!

Ja! Wir haben $A := F(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F = \iota_A \circ f$ mit $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} A$. Tietze E5n:

Zu $g = f^{-1} : A \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$ existiert $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G|_A = g$, also $G \circ F = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

(6) Elegant und allgemein: Sei $(\iota, \rho) : K \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$ ein euklidischer Retrakt.

Ist dann jede abgeschlossene Einbettung $F : K \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Retrakt?

Ja! Wir haben $A := F(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F = \iota_A \circ f$ mit $f : K \xrightarrow{\cong} A$. Tietze E5n:

Zu $g = \iota \circ f^{-1} : A \xrightarrow{\cong} K \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $G|_A = g$.

Für $\rho \circ G : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ gilt also $\rho \circ G \circ F = \rho \circ G|_A \circ f = \rho \circ \iota = \text{id}_K$.

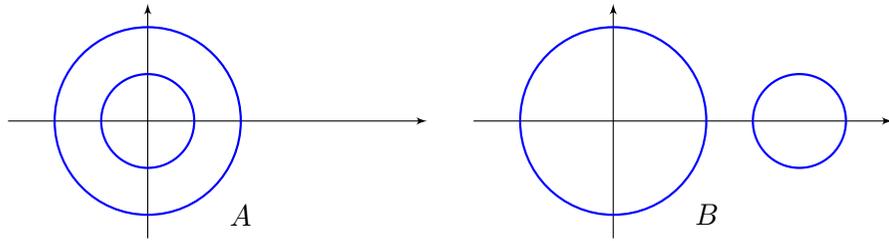
Für die Gerade $F(x) = (x, 0, 0)$ ist eine Retraktion offensichtlich. Aber für einen beliebigen Knoten $F : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, etwa wie oben skizziert, sieht man zunächst keine Retraktion, vielleicht glaubt man überhaupt nicht daran. Mit den Werkzeugen der Vorlesung können Sie diese Frage kurz und elegant lösen: Wenn die Phantasie versagt, hilft der Fortsetzungssatz von Tietze! Er garantiert uns die Existenz stetiger Abbildungen, die wir sonst nur mühsam beschaffen können. Wenn Sie zusätzlich Anschauung oder Intuition wollen, so kann ich zwei Geschichten anbieten:

Physikalische Intuition: Wir denken uns $A = F(\mathbb{R})$ als Draht mit stetiger Temperaturverteilung $u : A \xrightarrow{\cong}]-1, 1[$, strikt monoton längs A , zudem zeitlich konstant gehalten. Der umgebende Raum $\mathbb{R}^3 \setminus A$ habe anfangs die Temperatur 0. Nun lassen wir die Wärme im \mathbb{R}^3 fließen. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ herrscht schließlich eine Temperatur $U(x) \in]-1, 1[$. In $x \in A$ ist dabei $U(x) = u(x)$ die vorgegebene Temperatur; damit ist $G = u^{-1} \circ U : \mathbb{R}^3 \rightarrow A$ eine Retraktion. Was beweist das? Noch gar nichts. Aber es ist eine schöne Geschichte.

Geometrische Intuition: Ist die abgeschlossene Einbettung $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ zahm (etwa stückweise affin oder glatt), so können wir f aufdicken zu einer Schlauchumgebung $F : \mathbb{R} \times \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(x, 0, 0) = f(x)$. Dabei ist $B = F(\mathbb{R} \times \mathbb{D}^2)$ eine abgeschlossene Umgebung von A in \mathbb{R}^3 sowie $F(\mathbb{R} \times \mathbb{B}^2)$ offen und $F(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ der Rand: Hier können wir es explizit so herstellen, später können wir diese Eigenschaften allgemein folgern aus der Invarianz des Gebietes (J7k).

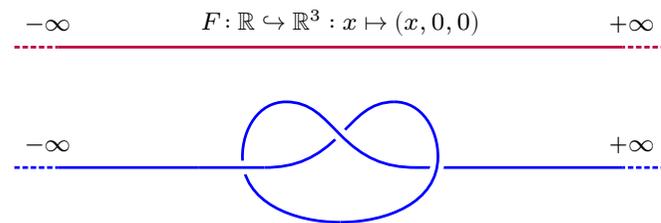
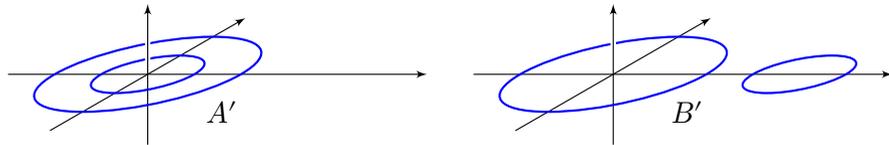
Wir konstruieren damit $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: Außerhalb von B setzen wir $G = 0$. Auf B setzen wir $G \circ F(x, y, z) = x(1 - y^2 - z^2)$. Die Verklebung ist stetig und erfüllt $G \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Was beweist das? Wesentlich mehr als nötig! Die Konstruktion von F benötigt Sorgfalt und gelingt nur für zahme Knoten, nicht für wilde. Eine weitere Anregung Ihrer Phantasie...

Sie sehen daran vor allem, wie einfach und elegant und durchschlagend wirkungsvoll Tietzes Fortsetzungssatz ist: Er beschert uns die Existenz stetiger Abbildungen, die wir sonst nur mühsam beschaffen können. Mit jeder weiteren Anwendung lernt man ihn noch mehr zu schätzen.



Gegeben sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismuspaar $(\varphi, \psi) : A \cong B$. Existiert ein **ambienter Homöomorphismus** $(\Phi, \Psi) : (\mathbb{R}^n, A) \cong (\mathbb{R}^n, B)$?

⚠️ Oben gelingt dies nicht! Anschaulich: In A liegen die beiden Kreise ineinander, in B nebeneinander. Formal: In $\mathbb{R}^2 \setminus B$ kann man jeden Punkt x mit ∞ verbinden und muss höchstens einmal durch B laufen; in $\mathbb{R}^2 \setminus A$ gelingt das nicht. In \mathbb{R}^3 ist mehr Spielraum, hier gilt $(\mathbb{R}^3, A') \cong (\mathbb{R}^3, B')$:



Seien $f, g : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ abgeschlossene Einbettungen („lange Knoten“). Existiert ein ambienter Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ mit $\varphi \circ f = g$?

⚠️ Im obigen Beispiel gelingt dies nicht. (Ein Beweis ist keineswegs offensichtlich und gelingt uns später mit der Fundamentalgruppe.)

Aufgabe: Zu $F, G : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ existiert $\Phi : \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$ mit $\Phi \circ F = G$.

Lösung: Es genügt, dies speziell für $G(x) = (0, 0, 0, x)$ zu beweisen. Wie im vorigen Satz betrachten wir $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und $g = \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^1$ und stabilisieren diese zu $F(x) = (f(x), 0)$ und $G(x) = (0, 0, 0, x)$. Wir erhalten $(\Phi, \Psi) : \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$ mit $\Phi \circ F = G$ und $\Psi \circ G = F$. QED

Satz E6D: euklidische Stabilisierung

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen sowie $(\varphi, \psi) : A \cong B$. In $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s$ betrachten wir $A' = A \times \{0\}$ und $B' = \{0\} \times B$. Hierzu existiert ein Homöomorphismus $(\Phi, \Psi) : (\mathbb{R}^s, A') \cong (\mathbb{R}^s, B')$ mit $\Phi(a, 0) = (0, \varphi(a))$ für $a \in A$ und $\Psi(0, b) = (\psi(b), 0)$ für $b \in B$.

Beweis: Wir nutzen auch hier den Fortsetzungssatz von Tietze (E5N):

Zu $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq A \cong B \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $h|_A = \varphi$.

Zu $\psi : \mathbb{R}^n \supseteq B \cong A \subseteq \mathbb{R}^m$ existiert $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit $k|_B = \psi$.

Daraus erhalten wir die ersehnten Homöomorphismen wie folgt:

$$H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : H(x, y) = (x, y + h(x))$$

$$K : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : K(x, y) = (x + k(y), y)$$

Wir betrachten $a \in A$ und $b \in B$ mit $(\varphi, \psi) : a \not\cong b$.

Für $\Phi := K^{-1} \circ H : \mathbb{R}^s \cong \mathbb{R}^s$ gilt $(a, 0) \mapsto (a, b) \mapsto (0, b)$.

Für $\Psi := H^{-1} \circ K : \mathbb{R}^s \cong \mathbb{R}^s$ gilt $(0, b) \mapsto (a, b) \mapsto (a, 0)$. QED

Bemerkung: Wir können Satz E6D zur euklidischen Stabilisierung hier direkt auf $F, G : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ anwenden und erhalten dann einen ambienten Homöomorphismus $(\Phi, \Psi) : \mathbb{R}^6 \cong \mathbb{R}^6$. Die Dimension 6 ist unnötig groß. Wenn wir sparsam sind, dann genügt \mathbb{R}^4 , so wie hier erklärt. Ambiente Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation, wir wählen als einfachsten Repräsentanten den trivialen Knoten $x \mapsto (x, 0, 0)$.

Übung: Versuchen Sie, das Entknotungsproblem im \mathbb{R}^4 direkt und explizit für die beiden oben skizzierten langen Knoten zu lösen, gerne zunächst anschaulich, dann formal. Wie überführen Sie F in G im \mathbb{R}^4 ? Um bequem zu rechnen, seien die Einbettungen stückweise affin-linear. Die zusätzliche Dimension erlaubt Kreuzungswechsel, damit können Sie jeden Knoten aus dem \mathbb{R}^3 im \mathbb{R}^4 entknoten.

☺ Im \mathbb{R}^3 ist die oben gezeigte Kleeblattschlinge nicht entknotbar. Das ist anschaulich glaubwürdig, doch nicht leicht zu beweisen. Es gelingt uns später mit der Fundamentalgruppe, siehe L443

Definition E7A: topologische Gruppe

Eine **T -Gruppe** $(G, \mathcal{T}, \mu, e, \iota)$ ist ein topologischer Raum (G, \mathcal{T}) und eine Gruppe (G, μ, e, ι) , sodass Multiplikation $\mu : G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto a \cdot b$ und Inversion $\iota : G \rightarrow G : a \mapsto a^{-1}$ stetig sind. Wir nennen dies eine **topologische Gruppe**, wenn zudem $\{e\}$ abgeschlossen ist, $G \setminus \{e\} \in \mathcal{T}$. Letzteres ist äquivalent zur Hausdorff-Eigenschaft T_2 , siehe unten.

Für je zwei Elemente $a, b \in G$ und jede Umgebung W von $a \cdot b$ existieren Umgebungen U von a und V von b mit $U \cdot V \subseteq W$. Zu jedem $a \in G$ und jeder Umgebung V von a^{-1} existiert eine Umgebung U von a mit $U^{-1} \subseteq V$.

Beispiele: Jede Gruppe (G, μ, e, ι) mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, G\}$ ist eine T -Gruppe, besser noch mit $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(G)$ eine **diskrete topologische Gruppe**.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_{\mathbb{K}}, +, 0, -)$ und $(\mathbb{K}^{\times}, \mathcal{T}_{\mathbb{K}^{\times}}, \cdot, 1, ^{-1})$. In \mathbb{C}^{\times} haben wir $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{\mathbb{S}^1}, \cdot, 1, ^{-1})$ als topologische Untergruppe.

Vektorgruppe $(\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{K}^n}, +, 0, -)$, Matrixgruppe $(\text{GL}_n \mathbb{K}, \mathcal{T}_{\text{GL}_n \mathbb{K}}, \cdot, 1, ^{-1})$.

Übung: Warum sind Matrixmultiplikation und Inversion stetig?

Sei (G, μ, e, ι) eine Gruppe. Für jede Topologie \mathcal{T} auf G sind äquivalent:

- (1) Das Produkt $\mu : G \times G \rightarrow G$ und die Inversion $\iota : G \rightarrow G$ sind stetig.
- (2) Das Inversionsprodukt $\alpha : G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto a^{-1} \cdot b$ ist stetig.
- (3) Das Inversionsprodukt $\beta : G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ ist stetig.

Damit ist ι ein Homöomorphismus, ebenso $x \mapsto ax$ und $x \mapsto xa$ sowie $h : x \mapsto ax^{-1}b$ mit $h(a) = b$ und $h(b) = a$. Äquivalent sind:

$\{e\}$: Die Teilmenge $\{e\}$ ist abgeschlossen in (G, \mathcal{T}) , also $G \setminus \{e\} \in \mathcal{T}$.

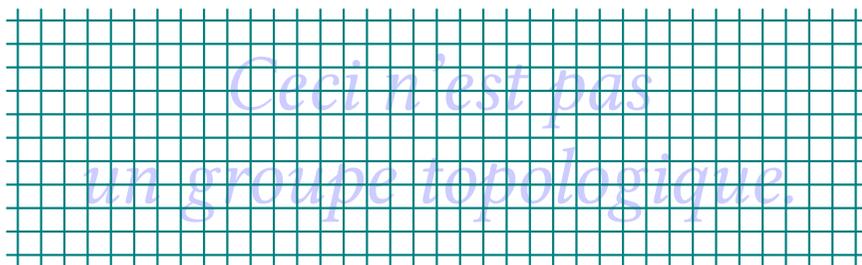
T_0 : Zu $a \neq b$ hat einer eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.

T_1 : Zu $a \neq b$ hat jeder eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.

T_2 : Zu $a \neq b$ existieren disjunkte Umgebungen. (Hausdorff-Eigenschaft)

Beweis: „ $\{e\} \in \mathcal{T}^c \Rightarrow T_2$ “: Für $a \neq b$ gilt $a^{-1}b \in G \setminus \{e\}$. Dank Stetigkeit existieren $a \in U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ mit $U^{-1}V \subseteq G \setminus \{e\}$, also $U \cap V = \emptyset$. Es gilt „ $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ “ und „ $T_1 \Rightarrow \{e\} \in \mathcal{T}^c$ “, und h zeigt „ $T_0 \Rightarrow T_1$ “. QED

Bemerkung: Jede endliche topologische Gruppe ist somit diskret. Erst für unendliche Gruppen wird die Topologie interessant.



Aufgabe: Der euklidische Raum \mathbb{R}^2 lässt sich zu einer topologischen Gruppe machen, ebenso $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Auch $C = A \cup B$?

Lösung: Für jede topologische Gruppe $(G, \mathcal{T}, \mu, e, \iota)$ ist der zugrunde liegende Raum (G, \mathcal{T}) **homogen**: Zu je zwei Punkten $a, b \in G$ existiert ein Homöomorphismus $h : G \rightarrow G$ mit $h(a) = b$, etwa $h(x) = ax^{-1}b$.

Unser Raum C ist nicht homogen: Jeder Punkt $a \in \mathbb{Z}^2 \subsetneq C$ trennt kleine zusammenhängende Umgebungen in vier Komponenten, jeder Punkt $b \in C \setminus \mathbb{Z}^2$ nur in zwei. Demnach existiert kein Homöomorphismus $h : C \rightarrow C : a \mapsto b$, somit keine topologische Gruppenstruktur auf C .

Zur Metrisierung haben wir notwendige und hinreichende Kriterien:

$$T_2 \ \& \ 1AA \quad \Leftarrow \quad \text{Metrisierbarkeit} \quad \Leftarrow \quad T_1 \ \& \ T_3 \ \& \ 2AA$$

Für topologische Gruppen hingegen ist alles einfacher und viel besser: Die notwendigen Bedingungen sind für Gruppen bereits hinreichend!

Satz E7J: Metrisierung topologischer Gruppen

Eine topologische Gruppe $(G, \mathcal{T}, \mu, e, \iota)$ ist genau dann metrisierbar, wenn sie eine abzählbare Umgebungsbasis $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots \supseteq \{e\}$ erlaubt. In diesem Fall kann die Topologie wahlweise durch eine linksinvariante oder eine rechtsinvariante Metrik definiert werden. Eine biinvariante Metrik existiert genau dann, wenn es eine abzählbare Umgebungsbasis $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die zudem $gU_n g^{-1} = U_n$ für alle $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Eine Metrik $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **linksinvariant**, wenn $d(zx, zy) = d(x, y)$ für alle $x, y, z \in G$ gilt, und **rechtsinvariant**, wenn $d(xz, yz) = d(x, y)$ gilt, sowie **biinvariant**, wenn beides gilt. Zur Konstruktion siehe Skript.

