Prof. Dr. Michael Eisermann • Topologie

Kapitel D

Topologische Räume

In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor.

Egbert Brieskorn (1936–2013)

Vollversion • eiserm.de/lehre/Topologie • 01.09.2020

Inhalt dieses Kapitels D

Rückblick und Motivation

Kapitel A: Einführung in und Ausblick auf dieses Semester

Kapitel B: Grundlagen und Aufbau des Zahlensystems

Kapitel C: von metrischen Räumen zur Topologie

$$\text{Skalarprodukt} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{Norm} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{Metrik} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{Topologie}$$

Damit ist die Bühne bereitet für die Topologie:

- Ausblick und Motivation,
- Fundierung und Beispielfundus,
- analytisch-geometrische Intuition!

Wenn du ein Schiff bauen willst,
lehre deine Leute nicht nur ihr Handwerk,
sondern erwecke ihre Sehnsucht nach dem Meer!

Rückblick und Motivation

Topologien und topologische Räume

☺ Wir erheben die grundlegenden Eigenschaften nun zur Definition:

Definition D1A: topologischer Raum

Eine **Topologie** auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen in X, das folgende Bedingungen erfüllt:

O1: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.

O2: Aus $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ folgt $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}$.

O3: Aus $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt dann ein **topologischer Raum**.
Er besteht aus der **Trägermenge** X und darauf der **Topologie** $\mathcal{T}$.
Die Elemente $x \in X$ nennen wir auch die **Punkte** des Raumes $(X, \mathcal{T})$.

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ nennen wir eine Teilmenge $U \subset X$ **offen**, falls $U \in \mathcal{T}$, und $A \subset X$ **abgeschlossen**, falls ihr Komplement offen ist, also $X \smallsetminus A \in \mathcal{T}$ gilt.

⚠ Die Trägermenge X allein bestimmt noch nicht die Topologie $\mathcal{T}$!
Wir sagen „der Raum X“ nur wenn die Topologie $\mathcal{T}$ im Kontext klar ist.

Diskrete und indiskrete Topologie

Beispiel D1B: diskrete Topologie

Auf jeder Menge X ist $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ eine Topologie, die wir die **diskrete Topologie** nennen. In dieser Topologie ist jede Teilmenge von X offen (und abgeschlossen). Dies ist die größte (= feinste) Topologie auf X.

Beispiel D1C: indiskrete Topologie

Auf jeder Menge X ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie, die wir die **indiskrete Topologie** nennen. Hier sind nur die Teilmengen $\emptyset$ und X offen (und abgeschlossen). Dies ist die kleinste (= gröbste) Topologie auf X.

Kleinste Beispiele: Auf $X = \emptyset$ ist $\mathcal{T} = \{\emptyset\}$ die einzige Topologie.
Ebenso auf der Menge $X = \{a\}$ ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ die einzige Topologie.

Auf der Menge $X = \{a \neq b\}$ gibt es zwischen der indiskreten $\{\emptyset, X\}$ und der diskreten $\mathfrak{P}(X)$ genau zwei Topologien: $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\{\emptyset, \{b\}, X\}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
t_n	1	1	4	29	355	6942	209527	9535241

Metrische Topologie und Metrisierbarkeit

Beispiel D1D: metrische Topologie

Jede Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$ auf X definiert ihre **metrische Topologie**

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}(X, d) := \left\{ O \subset X \;\middle|\; \forall a \in O\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\; \forall x \in X \;:\; d(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x \in O \right\}.$$

Dies ist tatsächlich eine Topologie, siehe C2M.

Beispiel: Die Menge $\mathbb{R}^n$, allgemein jede beliebige Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$, trägt die **euklidische Topologie** $\mathcal{T}_d$ dank der Metrik $d(x, y) = |x - y|$.

Definition D1E: metrisierbare Topologie

Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf eine Menge X heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$ existiert, für die $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ gilt.

Beispiele: Die diskrete Topologie $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ auf X ist metrisierbar, etwa durch die diskrete Metrik (C2C) mit $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$.

Die indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ auf X mit $\sharp X \geq 2$ wird von keiner Metrik induziert, denn $\mathcal{T}$ fehlt hierzu die Hausdorff–Eigenschaft C2O.

Vergleich von Topologien

Definition D1F: Vergleich von Topologien

Sind $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathfrak{P}(X)$ Topologien auf X, dann heißt $\mathcal{T}_1$ **gröber** als $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$ **feiner** als $\mathcal{T}_1$. Wir sagen, $\mathcal{T}_2$ ist **echt feiner** als $\mathcal{T}_1$, falls $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$ gilt.

Einfachste Beispiele:

- Auf jeder Menge X ist die diskrete Topologie $\mathfrak{P}(X)$ die feinste und die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ die gröbste aller Topologien auf X.
- Auf $X = \{a, b\}$ ist $\{\emptyset, X\}$ die gröbste und $\mathfrak{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ die feinste Topologie, während die beiden Topologien $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ unvergleichbar sind.

Erste Beispiele aus der Analysis:

- Auf $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ist für $1 \leq p < q \leq \infty$ die L^q–Topologie echt feiner als die L^p–Topologie (C3K).
- Auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ hingegen sind für $1 \leq p < q \leq \infty$ die L^p–Topologie und die L^q–Topologie unvergleichbar (C3K).

Koendliche und koabzählbare Topologie

Beispiel D1H: koendliche Topologie

Sei X eine beliebige Menge. In der **koendlichen Topologie** sind die abgeschlossenen Mengen genau X und alle endlichen Teilmengen:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\, O \subset X \mid X \smallsetminus O \text{ ist endlich} \,\}.$$

Diese Topologie ist genau dann diskret, wenn X endlich ist.

Beispiel D1I: koabzählbare Topologie

In der **koabzählbaren Topologie** auf X sind die abgeschlossenen Mengen genau X und alle abzählbaren Teilmengen:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\, O \subset X \mid X \smallsetminus O \text{ ist abzählbar} \,\}.$$

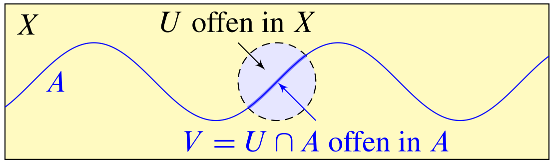
Diese Topologie ist genau dann diskret, wenn X abzählbar ist.

$$\mathcal{T}_{\text{indiskret}} \subset \mathcal{T}_{\text{koendlich}} \subset \mathcal{T}_{\text{koabzählbar}} \subset \mathcal{T}_{\text{diskret}}$$

$\xleftarrow{\text{gröber: weniger offene Mengen}}$ $\xrightarrow{\text{feiner: mehr offene Mengen}}$

Teilraumtopologie: Definition

Wir konstruieren neue topologische Räume aus alten.



Definition D1K: Teilraumtopologie

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge mit der Inklusion $\iota_A : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$. Die **Teilraumtopologie** von A in $(X, \mathcal{T}_X)$ ist

$$\mathcal{T}_A := \{\, V = A \cap U \mid U \in \mathcal{T}_X \,\} \quad = \quad \{\, \iota_A^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_X \,\} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X.$$

Wir nennen $(A, \mathcal{T}_A)$ den **Teilraum** von $(X, \mathcal{T}_X)$ auf der Teilmenge $A \subset X$.

Soweit nichts anderes vereinbart wird, statten wir jede Teilmenge $A \subset X$ mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A$ aus: Statt „$V \subset A$ ist offen / abgeschlossen im Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$“ sagen wir kurz „V ist offen / abgeschlossen in A“.

Teilraumtopologie: Eigenschaften

Beispiele: (1) Für $O \subset X$ offen, also $O \in \mathcal{T}_X$, gilt $\mathcal{T}_O = \{\, U \in \mathcal{T}_X \mid U \subset O \,\}$.
(2) Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ diskret / indiskret / koendlich / koabzählbar, so auch $(A, \mathcal{T}_A)$.
(3) Die Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ ist die euklidische (E2I). Allgemein:

$$\begin{tikzcd}
(X, d_X) \arrow[r, mapsto, "\text{metrische Topologie}"] & (X, \mathcal{T}_X) \\
(A, d_A) \arrow[u, mapsto, "\text{metrischer Teilraum}"] \arrow[r, mapsto, "\text{metrische Topologie}"] & (A, \mathcal{T}_A) \arrow[u, mapsto, "\text{topologischer Teilraum}"']
\end{tikzcd}$$

Satz D1L: Teilräume von metrischen Räumen

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum mit der zugehörigen metrischen Topologie $\mathcal{T}_X := \mathcal{T}(X, d_X)$ (D1D). Die Teilraummetrik d_A auf A (C2E) induziert ebenso die Topologie $\mathcal{T}(A, d_A)$ auf A. Diese stimmt überein mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A := \iota_A^* \mathcal{T}_X$ (D1K), das heißt $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}(A, d_A)$.

Ist also $(X, \mathcal{T}_X)$ metrisierbar, dann auch jeder Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$.

Ordnungstopologie

Definition D1M: Ordnungstopologie

Jede Totalordnung $<$ auf X definiert die zugehörige **Ordnungstopologie**

$$\mathcal{T}_< = \mathcal{T}(X, <) := \{\, O \subset X \mid \forall x \in O \ \exists a, b \in X \sqcup \{\pm\infty\} \ : \ x \in \,]a, b[\, \subset O \,\}.$$

Beispiele: (1) Die Ordnungstopologie auf $X = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ ist die euklidische.

(2) Die Teilmengen $A = \{-1\} \cup \{\, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ und $B = \{0\} \cup \{\, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ sind ordnungsisomorph und haben folglich dieselbe Ordnungstopologie. Die metrisch-euklidischen Topologien hingegen sind sehr verschieden!

(3) Für $A \subset X$ gilt $\mathcal{T}(A, <) \subset \mathcal{T}_A$, aber nicht immer Gleichheit:

$$\begin{tikzcd}
(X, <) \arrow[rr, mapsto, "\text{Ordnungstopologie}"] & & (X, \mathcal{T}_X) \\
(A, <) \arrow[u, mapsto, "\text{Ordnungsteilraum}"] \arrow[r, mapsto, "\text{Ord'top.}"] & (A, \mathcal{T}(A, <)) & (A, \mathcal{T}_A) \arrow[l, "\neq"'] \arrow[u, mapsto, "\text{topologischer Teilraum}"']
\end{tikzcd}$$

Stetige Abbildungen: Definition

Definition D2A: stetige Abbildungen

Sei $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume.

Die Abbildung f heißt **stetig**, wenn zu jeder offenen Menge V in $(Y,\mathcal{T}_Y)$ das Urbild $f^{-1}(V)$ in $(X,\mathcal{T}_X)$ offen ist. In Quantorenschreibweise:

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textbf{stetig} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall V\in\mathcal{T}_Y \quad : f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall Y\smallsetminus B\in\mathcal{T}_Y \quad : X\smallsetminus f^{-1}(B)\in\mathcal{T}_X \end{aligned}$$

Die Menge stetiger Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathscr{C}(X,\mathcal{T}_X;Y,\mathcal{T}_Y)$, oder kurz $\mathscr{C}(X,Y)$, wenn die Topologien aus dem Kontext klar sind:

$$\mathscr{C}(X,Y)=\mathscr{C}(X,\mathcal{T}_X;Y,\mathcal{T}_Y):=\left\{ f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y) \text{ stetig} \right\}$$

Hingegen nennen wir f **offen**, wenn zu jeder offenen Menge U in $(X,\mathcal{T}_X)$ die Bildmenge $f(U)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$ offen ist. Entsprechend **abgeschlossen**:

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textbf{offen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U\in\mathcal{T}_X \quad : f(U)\in\mathcal{T}_Y \\ f \text{ ist } \textbf{abgeschlossen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall X\smallsetminus A\in\mathcal{T}_X \quad : Y\smallsetminus f(A)\in\mathcal{T}_Y \end{aligned}$$

Stetige Abbildungen: erste Beispiele

Beispiel: Ist $(X,\mathcal{T}_X)$ diskret, so ist jede Abbildung $f:X\to Y$ stetig, aber i.A. weder offen noch abgeschlossen, zum Beispiel $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}:n\mapsto 2^{-n}$.

Beispiel: Ist $(Y,\mathcal{T}_Y)$ diskret, so ist jede Abbildung $f:X\to Y$ offen und abgeschlossen, aber i.A. nicht stetig, zum Beispiel $\operatorname{sign}:\mathbb{R}\to\{-1,0,1\}$.

Beispiel: Stetige Abbildungen $f:\mathbb{R}^m\supset X\to Y\subset\mathbb{R}^n$. Allgemein:

Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume mit den induzierten Topologien $\mathcal{T}_X$ auf X und $\mathcal{T}_Y$ auf Y. Dank Satz C3G wissen wir:

Genau dann ist $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ stetig im metrischen Sinne (C3E), wenn $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig ist im topologischen Sinne (D2A).

Beispiel: Die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\arctan(x)$ ist stetig und offen, aber nicht abgeschlossen, denn $f(\mathbb{R})=\left]-\pi/2,+\pi/2\right[$.

Beispiel: Für $a\in\mathbb{R}$ ist $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^3+ax$ stetig und abgeschlossen, aber offen nur für $a\geq 0$, dann sogar ein Homöomorphismus.

🙂 Stetigkeit, Offenheit und Abgeschlossenheit sind unabhängig.

Stetige Abbildungen: Komposition

Bemerkung D2B: Identität und Komposition

Für jeden topologischen Raum ist die Identität $\mathrm{id}_X:(X,\mathcal{T})\to(X,\mathcal{T})$ stetig.

Sind $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ und $g:(Y,\mathcal{T}_Y)\to(Z,\mathcal{T}_Z)$ stetige Abbildungen, dann ist auch ihre Komposition $g\circ f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Z,\mathcal{T}_Z)$ stetig.

Wir erhalten die Kategorie $\mathbf{Top}$: Ihre Objekte sind topologische Räume $X,Y,Z,\dots$. Die Morphismenmenge $\mathscr{C}(X,Y)$ besteht aus allen stetigen Abbildungen $X\to Y$. Die Komposition $\circ:\mathscr{C}(Y,Z)\times\mathscr{C}(X,Y)\to\mathscr{C}(X,Z)$ ist die für Abbildungen übliche Hintereinanderausführung.

Ebenso bilden topologische Räume und ihre offenen Abbildungen eine Kategorie, ebenso abgeschlossene Abbildungen. Weitere Beispiele:

- Mengen (mit Struktur) und ihre (strukturerhaltenden) Abbildungen.
- Vektorräume über einem Körper K und ihre linearen Abbildungen.
- Offene Mengen $U\subset\mathbb{R}^n$ und ihre differenzierbaren Abbildungen.

In Kapitel H diskutieren wir ausführlich die Sprache der Kategorien.

Stetige Abbildungen: Komposition

Stetige Abbildungen: Homöomorphismen

Definition D2A: stetige Abbildungen, fortgesetzt

Ein **Homöomorphismus** $(f,g) : (X,\mathcal{T}_X) \cong (Y,\mathcal{T}_Y)$ ist ein Paar stetiger Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

In diesem Fall nennen wir die Räume $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ **homöomorph**, geschrieben $(X,\mathcal{T}_X) \cong (Y,\mathcal{T}_Y)$, oder kurz $X \cong Y$, wenn die Topologien aus dem Kontext klar sind, etwa $\mathbb{R} \cong \left]-1,1\right[$ mit euklidischen Topologien.

Bemerkung: Die Kurzschreibweise $X \cong Y$ ist bequem und gefährlich. Die Ausführung $(f,g) : (X,\mathcal{T}_X) \cong (Y,\mathcal{T}_Y)$ ist präzise und informativ!

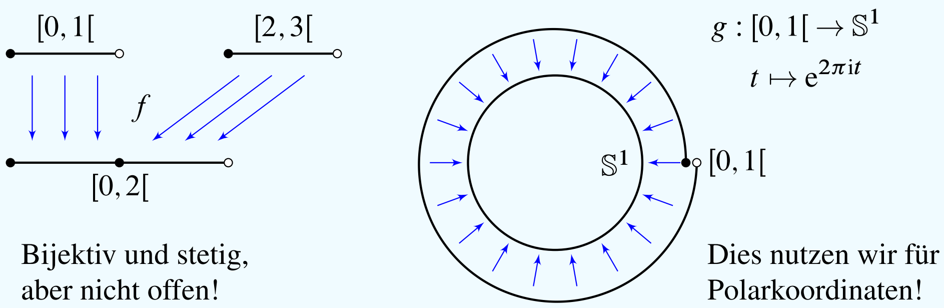
Erinnerung / Übung: Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation. Das gilt allgemein für Isomorphie (strukturerhaltende Bijektion).

Bemerkung: Für jede Bijektion $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ sind äquivalent:
(1) f^{-1} ist stetig, (2) f ist offen, (3) f ist abgeschlossen.

Stetige Bijektionen sind noch keine Homöomorphismen!

Bemerkung D2C: bijektiv und stetig

Ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so kann f^{-1} dennoch unstetig sein!



Bijektiv und stetig, aber nicht offen!

Dies nutzen wir für Polarkoordinaten!

Universelles Gegenbeispiel: Die Identität $\mathrm{id} : (X,\mathcal{T}_1) \to (X,\mathcal{T}_2)$ ist

- genau dann stetig, wenn $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$ gilt,
- genau dann offen, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt, und
- genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ gilt.

Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!

Beispiel D2E: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $\mathscr{C}^k = \mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ der Vektorraum aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Darauf betrachten wir die linearen Abbildungen

$$D : \mathscr{C}^1 \to \mathscr{C}^0 : F \mapsto f, \qquad f(x) = \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x},$$
$$I : \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 : f \mapsto F, \qquad F(x) = \int_{t=x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dank HDI gilt $DI(f) = f$ und $ID(F) = F - F(x_0)$. Wir erhalten so

$$(I,D) : \mathscr{C}^0 \cong \mathscr{C}^1_0 := \{\, F \in \mathscr{C}^1 \mid F(x_0) = 0 \,\}.$$

Bezüglich der Supremumsnormen ist I stetig, genauer gilt

$$|F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \le |a-b| \cdot |f|_{[a,b]}.$$

Hingegen ist D nicht stetig, wie die Folge $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ in $\mathscr{C}^1$ zeigt.

Erst nach Wahl der richtigen Normen wird (I,D) ein Homöomorphismus: Auf $\mathscr{C}^1$ verfeinern wir die Supremumsnorm zu $|F|_{\mathscr{C}^1} := |F|_{[a,b]} + |F'|_{[a,b]}$.

Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!

Den HDI kennen Sie schon lange, sogar schon aus der Schule, richtig erklärt und bewiesen aus dem ersten Semester Analysis.

Auch Beispiele wie $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ sind Ihnen vertraut. Slogan:

Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!

Dieses Beobachtung motiviert, auf den Räumen $\mathscr{C}^k$ nicht einfach nur die Supremumsnorm zu betrachten: Diese ignoriert alle Ableitungen!

Als $\mathscr{C}^k$–Norm nutzt man daher

$$|f|_{\mathscr{C}^k} = \sum_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]} \quad \text{oder} \quad \left(\sum_{i=0}^{k} |f^{(i)}|^p_{[a,b]}\right)^{1/p} \quad \text{oder} \quad \max_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]}.$$

Dies sind Normen auf $\mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ und untereinander äquivalent.

Verallgemeinert für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p \le \infty$ erhalten wir so die Sobolev–Normen und durch Vervollständigung die Sobolev–Räume. Sie sind Grundlage für die Lösung partieller Differentialgleichungen, sie dienen als natürliche Definitionsbereiche der Differentialoperatoren und ebenso zur Fehlerabschätzungen numerischer Näherungsverfahren.

Umgebungen eines Punktes

Definition D3A: Umgebung eines Punktes

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $a \in X$ ein Punkt. Eine Menge $O \subset X$ heißt **offene Umgebung von a** in $(X,\mathcal{T})$, wenn $a \in O \in \mathcal{T}$ gilt.

Das System aller offenen Umgebungen bezeichnen wir mit

$$\mathscr{U}_a^\circ = \mathscr{U}_a^\circ(\mathcal{T}) = \mathscr{U}_a^\circ(X,\mathcal{T}) := \{\, O \in \mathcal{T} \mid a \in O \,\}.$$

Allgemeiner nennen wir $U \subset X$ eine **Umgebung von a** in $(X,\mathcal{T})$, wenn U eine offene Umgebung umfasst, wenn also $O \in \mathcal{T}$ existiert mit $a \in O \subset U$.

Das System aller Umgebungen von a in $(X,\mathcal{T})$ bezeichnen wir mit

$$\mathscr{U}_a = \mathscr{U}_a(\mathcal{T}) = \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T}) := \{\, U \subset X \mid \exists O \in \mathcal{T} : a \in O \subset U \,\}.$$

Ebenso definieren wir (offene) Umgebungen einer Menge $M \subset X$.

Beispiel: In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ist jedes offene Intervall $]s,t[$ mit $s < a < t$ eine offene Umgebung von a. Auch $[s,t]$ sowie $[s,t[$ und $]s,t]$ sind Umgebungen von a, aber nicht offen in $\mathbb{R}$.

Offene Mengen und Umgebungen

Proposition D3C: offene Mengen und Umgebungen

Eine Teilmenge $U \subset X$ in einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte $x \in U$ ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Ist U offen in $(X,\mathcal{T})$, dann ist U Umgebung jedes ihrer Punkte $x \in U$ nach D3A. „$\Leftarrow$“: Ist $U \subset X$ eine Umgebung jedes Punktes $x \in U$, dann existiert zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x \subset U$. Somit ist $U = \bigcup_{x \in X} O_x$ offen dank (O3) in D1A. QED

Definition D3E: Umgebungsbasis

Eine Familie $\mathcal{B}_a \subset \mathscr{U}_a$ heißt **Umgebungsbasis** von a im Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn jede Umgebung $U \in \mathscr{U}_a$ eine Basisumgebung $V \in \mathcal{B}_a$ enthält:

$$\mathscr{U}_a = \{\, U \subset X \mid \exists V \in \mathcal{B}_a : V \subset U \,\}.$$

Somit bestimmt $\mathcal{B}_a$ das gesamte Umgebungssystem $\mathscr{U}_a$ von a in $(X,\mathcal{T})$.

Umgebungsbasen eines Punktes

Beispiele: Ein Punkt $a \in X$ erlaubt i.A. verschiedene Umgebungsbasen:

Das System $\mathcal{B}_a = \mathscr{U}_a$ aller Umgebungen ist eine Umgebungsbasis von a, ebenso das System $\mathcal{B}'_a = \mathscr{U}_a^\circ$ aller offenen Umgebungen.

Im diskreten Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ ist $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$ eine UBasis von $a \in X$. Genau dann ist $\mathcal{B}'_a \subset \mathscr{U}_a$ eine UBasis von a, wenn $\mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}'_a$ gilt.

Im indiskreten Raum $(X,\{\emptyset,X\})$ ist $\mathcal{B}_a = \{X\}$ die einzige UBasis von a.

Im metrischen Raum (X,d) bilden die offenen Bälle (C2L) die UBasis $\mathcal{B}_a = \{\, B(a,r) \mid r \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$, ebenso $\mathcal{B}'_a = \{\, B(a,r_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ für $r_n \searrow 0$ in $\mathbb{R}_{>0}$.

Für $a \in \mathbb{R}$ bilden die Intervalle die UBasis $\mathcal{B}_a = \{\,]s,t[\mid s < a < t \text{ in } \mathbb{R} \,\}$, ebenso $\mathcal{B}'_a = \{\,]s_n,t_n[\mid n \in \mathbb{N} \,\}$ für streng monotone Folgen $s_n \nearrow a \swarrow t_n$.

Ist $(X,<)$ eine total geordnete Menge, dann bilden die Intervalle $]s,t[$ mit $s < a < t$ und $s,t \in \hat{X} = X \sqcup \{\pm\infty\}$ eine UBasis von a im Raum $(X,\mathcal{T}_<)$.

Das erste Abzählbarkeitsaxiom

Definition D3F: das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA)

Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt **erstabzählbar**, wenn jeder Punkt $a \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a \subset \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})$ besitzt.

Beispiel: Jeder diskrete Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ ist erstabzählbar dank $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$, ebenso jeder indiskrete Raum $(X,\{\emptyset,X\})$ dank $\mathcal{B}_a = \{X\}$.

Beispiel: Auf jeder überabzählbaren Menge X, etwa $X = \mathbb{R}$, sind weder die koendliche noch die koabzählbare Topologie erstabzählbar.

Beispiel D3G: Jeder metrische Raum ist erstabzählbar.

Jeder metrische Raum (X,d) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom: Zu $a \in X$ sind die Bälle $B(a,1/k)$ mit $k = 1,2,3,\dots$ eine Umgebungsbasis.

Bemerkung: Besitzt a in $(X,\mathcal{T})$ eine abzählbare UBasis $\{\, V_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, so auch eine offene UBasis $\{\, V_n^\circ \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Für $U_n = V_0^\circ \cap \dots \cap V_n^\circ$ ist dann die UBasis $\{\, U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \,\}$ abzählbar, offen und monoton fallend.

Konvergenz von Folgen: Definition

Definition D3I: Konvergenz und Häufungspunkte

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und $\mathcal{B}_a \subset \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis, etwa die triviale Wahl $\mathcal{B}_a = \mathcal{U}_a$.

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X **konvergiert** gegen $a \in X$, wenn jede Umgebung U von a in $(X, \mathcal{T})$ schließlich alle Folgenglieder enthält:

$$\begin{aligned}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a(X,\mathcal{T}) \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; x_n \in U \\ &\;\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_a \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; x_n \in U\end{aligned}$$

Schwächer heißt $a \in X$ **Häufungspunkt** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn jede Umgebung U von a in $(X, \mathcal{T})$ unendlich viele Folgenglieder enthält:

$$\begin{aligned}(x_n)_{n\in N} \rightsquigarrow a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a(X,\mathcal{T}) \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\; \exists n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; x_n \in U \\ &\;\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_a \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\; \exists n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; x_n \in U\end{aligned}$$

Statt „$x_n \to a$“ schreibt man auch „$\lim x_n = a$“; das kann gefährlich sein. Ehrlicher wäre die Schreibweise als Menge $\operatorname{Lim} x_n := \{\, a \in X \mid x_n \to a \,\}$.

Konvergenz von Folgen: Beispiele

Beispiele: In jedem metrischen Raum (X, d) ist die Konvergenz $x_n \to a$ bezüglich der Metrik d (C3A) und der metrischen Topologie $\mathcal{T}_d$ (D3I) gleichbedeutend dank der Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \{\, B(a, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$.

In $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit der Ordnungstopologie gilt $x_n \to +\infty$ genau dann, wenn zu jeder Schranke $s \in \mathbb{R}$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n > s$ für alle $n \geq m$ gilt. Entsprechendes gilt für $x_n \to -\infty$.

Im diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}(X))$ ist $\{a\}$ offen und somit eine Umgebung. Hier konvergieren daher nur die schließlich konstanten Folgen.

Im indiskreten Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist die Menge X die einzige Umgebung. Hier konvergiert daher jede Folge gegen jeden Punkt („chaotisch“).

In der koendlichen Topologie gilt $x_n \to a$ genau dann, wenn die Folge (x_n) jeden Wert $x \neq a$ nur endlich oft annimmt. Ist die Menge X unendlich und $n \mapsto x_n$ injektiv, dann konvergiert die Folge (x_n) gegen jeden Punkt aus X.

Hausdorff–Eigenschaft und eindeutige Grenzwerte

Definition D3J: Hausdorff–Eigenschaft

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **hausdorffsch** (T_2) oder **separiert**, wenn zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X disjunkte Umgebungen existieren: Es gibt U, V mit $a \in U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ sowie $U \cap V = \emptyset$.

Satz D3K: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, dann hat jede Folge in $(X, \mathcal{T})$ höchstens einen Grenzwert. Die Umkehrung gilt, wenn $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $x_n \to a$ und $a \neq b$. Dank Hausdorff–Eigenschaft existieren $U \in \mathcal{U}_a$ und $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \to a$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq m$, folglich gilt $x_n \notin V$, somit $x_n \not\to b$.

„$\Leftarrow$“: Seien a, b in $(X, \mathcal{T})$ nicht separiert, das heißt, je zwei Umgebungen von a und b schneiden sich. Ist $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar, so existiert eine Umgebungsbasis $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ von a und eine Umgebungsbasis $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$ von b. Für jeden Index $n \in \mathbb{N}$ können wir einen Punkt $x_n \in U_n \cap V_n$ wählen. Gemäß D3I folgt $x_n \to a$ und $x_n \to b$, also $a = b$. $\boxed{\text{QED}}$

Hausdorff–Eigenschaft und eindeutige Grenzwerte

⚠ Auf Erstabzählbarkeit können wir in Satz D3K nicht verzichten!

Beispiel: Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ die koabzählbare Topologie (D1I). Hierin gilt $x_n \to a$ genau dann, wenn die Folge (x_n) schließlich konstant ist, also ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n = a$ für alle $n \geq m$ gilt.

Ist X überabzählbar, dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht hausdorffsch. Der Folgenbegriff ist aber zu schwach, um dies zu erkennen.

Das liegt an der restriktiven Indexmenge $\mathbb{N}$. Solche Probleme lösen wir, indem wir Folgen verallgemeinern zu **Netzen** (D8D) oder **Filtern** (D8L).

Übung: Ist die Ordnungstopologie $\mathcal{T}$ auf $(X, <)$ hausdorffsch?

Lösung: Ja. Beweis: Seien $a < b$ in $(X, <)$. Wenn es ein $z \in X$ mit $a < z < b$ gibt, so sind $a \in X_{<z} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>z} \in \mathcal{T}$ disjunkte offene Umgebungen; andernfalls genügen $a \in X_{<b} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>a} \in \mathcal{T}$.

Stetigkeit und Offenheit von Abbildungen

Definition D3N: Stetigkeit und Offenheit in einem Punkt

Sei $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume, $x\mapsto y$, sowie $\mathcal{B}_x\subset\mathscr{U}_x=\mathscr{U}_x(X,\mathcal{T}_X)$ und $\mathcal{B}_y\subset\mathscr{U}_y=\mathscr{U}_y(Y,\mathcal{T}_Y)$ Umgebungsbasen.

$$
\begin{aligned}
f \text{ ist } \textbf{stetig in } x \quad &:\Longleftrightarrow\quad \forall V\in\mathscr{U}_y : f^{-1}(V)\in\mathscr{U}_x\\
&\Longleftrightarrow\quad \forall V\in\mathcal{B}_y : f^{-1}(V)\in\mathscr{U}_x\\
f \text{ ist } \textbf{offen in } x \quad &:\Longleftrightarrow\quad \forall U\in\mathscr{U}_x : f(U)\in\mathscr{U}_y\\
&\Longleftrightarrow\quad \forall U\in\mathcal{B}_x : f(U)\in\mathscr{U}_y
\end{aligned}
$$

Für metrische Räume (X,d_X) und (Y,d_Y) nutzen wir die UBasen der offenen Bälle. Wir erhalten damit sofort die übliche ε–δ–Definition:

- Genau dann ist $f:X\to Y$ stetig in $x\mapsto y$, wenn zu jedem $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $f(B(x,\delta))\subset B(y,\varepsilon)$ gilt.
- Genau dann ist $f:X\to Y$ offen in $x\mapsto y$, wenn zu jedem $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$ ein $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $B(y,\varepsilon)\subset f(B(x,\delta))$ gilt.

Beide Eigenschaften bleiben unter Komposition erhalten.

Lokale Homöomorphismen

Definition D3O: lokaler Homöomorphismus

Wir nennen $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ einen **lokalen Homöomorphismus um $x\in X$ und $y=f(x)$**, wenn offene Umgebungen $U\in\mathscr{U}_x^\circ(X,\mathcal{T}_X)$ und $V\in\mathscr{U}_y^\circ(Y,\mathcal{T}_Y)$ existieren, sodass $f(U)=V$ gilt und $f|_U^V:U\to V$ ein Homöomorphismus ist. Wir nennen $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ einen **lokalen Homöomorphismus**, wenn dies in jedem Punkt $x\in X$ gilt.

Beispiele: Jeder lokale Homöomorphismus ist stetig und offen.

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^2$ ist stetig. Sie ist offen in $x\neq 0$, aber nicht in $x=0$. Um jedem Punkt $x\neq 0$ ist sie ein lokaler Homöomorphismus; die lokale Umkehrfunktion $\pm\sqrt{x}$ ist ein Zweig der reellen Wurzelfunktion.

Die Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}:z\mapsto z^2$ ist stetig und offen, auch in $z=0$. Um jeden Punkt $z\neq 0$ ist sie ein lokaler Homöomorphismus; die lokale Umkehrfunktion ist jeweils ein Zweig der komplexen Wurzelfunktion.

Auch $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$ ist ein lokaler Homöomorphismus; die lokale Umkehrfunktion ist jeweils ein Zweig des komplexen Logarithmus.

☺ Sie kennen den lokalen Umkehrsatz aus der Differentialrechnung.

Stetigkeit und Folgenkonvergenz

Satz D3P: Stetigkeit und Folgenstetigkeit

Ist $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig in a, dann sendet f jede konvergente Folge $(x_n)\to a$ in $(X,\mathcal{T}_X)$ auf eine konvergente Folge $(f(x_n))\to f(a)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$. Die Umkehrung gilt, wenn a in $(X,\mathcal{T})$ eine abzählbare UBasis besitzt.

Ist der Startraum $(X,\mathcal{T})$ erstabzählbar, zum Beispiel metrisierbar, dann ist die Stetigkeit von f äquivalent zur Folgenstetigkeit.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei V eine Umgebung von $f(a)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$. Dank der Stetigkeit von f ist dann $U=f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in $(X,\mathcal{T}_X)$. Wegen $x_n\to a$ existiert ein Index $m\in\mathbb{N}$ sodass $x_n\in U$ für alle $n\ge m$. Daher gilt $f(x_n)\in V$ für alle $n\ge m$. Das bedeutet $f(x_n)\to f(a)$.

„$\Leftarrow$“: Ist f in a nicht stetig, so existiert eine Umgebung V von $f(a)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$, deren Urbild $U=f^{-1}(V)$ in $(X,\mathcal{T}_X)$ keine Umgebung von a ist. Sei $U_0\supset U_1\supset U_2\supset\dots$ eine Umgebungsbasis von a. Für jeden Index $n\in\mathbb{N}$ gilt $U_n\not\subset U$, denn andernfalls wäre U eine Umgebung von a. Wir wählen $x_n\in U_n\smallsetminus U$ und erhalten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\to a$ gemäß D3I. Wegen $x_n\notin U$ gilt $f(x_n)\notin V$ für alle $n\in\mathbb{N}$, also $f(x_n)\not\to f(a)$. QED

Stetigkeit und Folgenkonvergenz

⚠ Auf Erstabzählbarkeit können wir in Satz D3P nicht verzichten!

Beispiel: Sei X überabzählbar, etwa $X=\mathbb{R}$. Hierauf sei $\mathcal{T}=\mathfrak{P}(X)$ die diskrete Topologie (D1B) und $\mathcal{T}'\subsetneq\mathcal{T}$ die koabzählbare Topologie (D1I). Die identische Abbildung $f:(X,\mathcal{T}')\to(X,\mathcal{T}):x\mapsto x$ ist nicht stetig, aber dennoch folgenstetig: Konvergiert $x_n\to a$ in $(X,\mathcal{T}')$, so ist (x_n) schließlich konstant gleich a. Daher konvergiert $(f(x_n))$ in $(X,\mathcal{T})$ gegen $f(a)$.

Hier sind Folgen also zu schwach, um die Unstetigkeit zu erkennen. Das liegt an der restriktiven Indexmenge $\mathbb{N}$. Solche Probleme lösen wir, indem wir Folgen verallgemeinern zu **Netzen** (D8D) oder **Filtern** (D8L).

Satz D3S: Konvergenz von Teilfolgen

Wenn eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Indizes $n_0<n_1<n_2<\dots$ gegen a in $(X,\mathcal{T})$ konvergiert, dann ist a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Umkehrung gilt, wenn a in $(X,\mathcal{T})$ eine abzählbare UBasis besitzt.

Übung: Führen Sie dies nach obigem Vorbild aus!

Re/Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Satz D3v: Topologie aus Umgebungsbasen

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zu jedem Punkt $x \in X$ sei $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis. Diese erfreuen sich folgender Eigenschaften:

UB1: Es gilt $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$, und für alle $U \in \mathcal{B}_x$ gilt $x \in U \subset X$.

UB2: Zu $U,V \in \mathcal{B}_x$ existiert $W \in \mathcal{B}_x$, sodass $W \subset U \cap V$.

UB3: Jede Umgebung enthält eine offene Umgebung, das heißt: In jedem $U \in \mathcal{B}_x$ liegt eine Teilmenge $V \subset U$ mit $x \in V$, sodass gilt: Zu jedem Punkt $y \in V$ existiert $W \in \mathcal{B}_y$ mit $W \subset V$.

Erfüllt umgekehrt eine Familie $(\mathcal{B}_x)_{x\in X}$ von Mengensystemen $\mathcal{B}_x \subset \mathfrak{P}(X)$ die Bedingungen (UB1–2), dann definiert dies auf X eine Topologie

$$\mathcal{T} := \{\, O \subset X \mid \forall x \in O \;\; \exists U \in \mathcal{B}_x \,:\, U \subset O \,\}.$$

Die letzte Bedingung (UB3) garantiert $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$, somit ist $\mathcal{B}_x$ tatsächlich eine Umgebungsbasis des Punktes x im Raum $(X,\mathcal{T})$.

Übung: Rechnen Sie dies sorgfältig nach!

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Beweis: Ist $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis des Punktes x in $(X,\mathcal{T})$, dann folgen die Eigenschaften (UB1–3) unmittelbar aus der Definition.

Nehmen wir umgekehrt an, die Familie $(\mathcal{B}_x)_{x\in X}$ erfüllt (UB1–2). Das so definierte Mengensystem $\mathcal{T}$ erfüllt dann (O1) dank (UB1). Für (O2) ist nachzuweisen, dass für alle $U,V \in \mathcal{T}$ auch der Durchschnitt $W = U \cap V$ in $\mathcal{T}$ liegt. Zu jedem $x \in W$ existieren $U_x, V_x \in \mathcal{B}_x$ mit $U_x \subset U$ und $V_x \subset V$. Dank (UB2) existiert $W_x \in \mathcal{B}_x$ mit $W_x \subset U_x \cap V_x \subset U \cap V = W$. Also gilt $W \in \mathcal{T}$. Axiom (O3) ist trivialerweise erfüllt.

Somit ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Bedingung (UB3) garantiert $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x(X,\mathcal{T})$. Nach Konstruktion von $\mathcal{T}$ ist demnach $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis von x in $(X,\mathcal{T})$. $\boxed{\text{QED}}$

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Beispiel D3w: metrische Topologie aus Umgebungsbasen

Jede Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ definiert eine Topologie $\mathcal{T}_d$ wie folgt (D1d): Als Umgebungsbasis jedes Punktes $x \in X$ wählen wir die offenen Bälle,

$$\mathcal{B}_x = \{\, B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}.$$

Die Bedingung (UB1) ist trivialerweise erfüllt, und (UB2) gilt dank

$$B(x,\varepsilon) \cap B(x,\varepsilon') = B(x, \min\{\varepsilon,\varepsilon'\}).$$

Dank Satz D3v erhalten wir daraus die Topologie

$$\mathcal{T}_d = \{\, O \subset X \mid \forall x \in O \;\; \exists B(x,\varepsilon) \in \mathcal{B}_x : B(x,\varepsilon) \subset O \,\}.$$

Dank Dreiecksungleichung ist jeder offene Ball offen (C2m), somit gilt auch die letzte Bedingung (UB3), und daher ist $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis des Punktes x im Raum $(X,\mathcal{T}_d)$.

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Beispiel D3x: Ordnungstopologie aus Umgebungsbasen

Jede Totalordnung $<$ auf X definiert eine Topologie $\mathcal{T}_<$ wie folgt (D1m): Als Umgebungsbasis jedes Punktes $x \in X$ wählen wir offene Intervalle,

$$\mathcal{B}_x = \{\,]a,b[\mid a,b \in X \sqcup \{\pm\infty\},\ a < x < b \,\}.$$

Trivialerweise gelten (UB1) und (UB3), und (UB2) gilt dank

$$]a,b[\cap]a',b'[=]\max\{a,a'\}, \min\{b,b'\}[.$$

Dank Satz D3v erhalten wir daraus die Topologie

$$\mathcal{T}_< = \{\, O \subset X \mid \forall x \in O \;\; \exists]a,b[\in \mathcal{B}_x :]a,b[\subset O \,\}.$$

🙂 Die Konstruktion einer Topologie aus vorgegebenen UBasen ist oft sehr natürlich und bequem, so wie hier in diesen Beispielen. Wir wollen dies nun auf erste wichtige Funktionenräume anwenden.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Gegeben sei eine Folge reeller Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \,:\, f_n(x) \to f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \,:\, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Wir suchen hierzu die **Topologie der punktweisen Konvergenz**.
Zu $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die (x,ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$U(f;x,\varepsilon) := \big\{\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\big|\; |f(x) - g(x)| < \varepsilon \,\big\}.$$

Hier gilt zwar (UB1,3), aber noch nicht (UB2). Zu $J = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir daher die (J,ε)–Umgebung

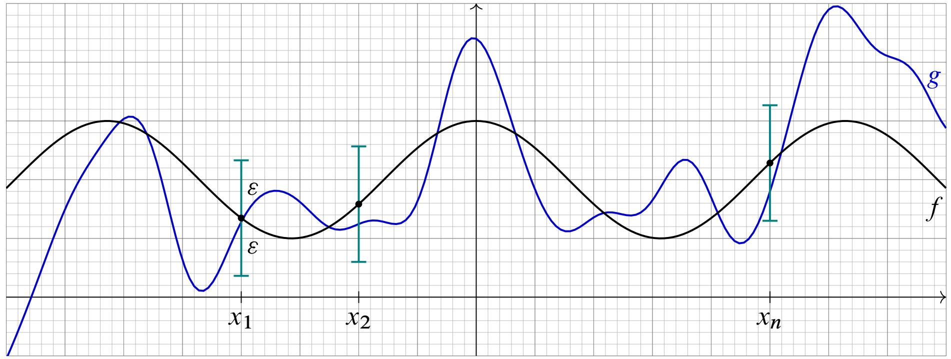
$$U(f;J,\varepsilon) := \big\{\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\big|\; |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in J \,\big\} = \bigcap\nolimits_{x \in J} U(f;x,\varepsilon).$$

Diese Umgebungen erfüllen nun sowohl (UB1,3) als auch (UB2), denn

$$U(f;J,\varepsilon) \cap U(f;J',\varepsilon') \quad \supset \quad U(f;\, J \cup J',\, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Skizze der Umgebung $U(f;J,\varepsilon)$ von f für $J = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:



Definition D4A: Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f;J,\varepsilon)$ definieren gemäß D3V auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ der **punktweisen Konvergenz**: Genau dann ist eine Menge $O \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen in $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$, wenn sie mit jedem $f \in O$ eine Umgebung $U(f;J,\varepsilon)$ enthält.

$$\mathcal{T}_{\mathrm{pw}} = \big\{\, O \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;\big|\; \forall f \in O \;\; \exists J = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,:\, U(f;J,\varepsilon) \subset O \,\big\}$$

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Satz D4B: Punktweise Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist nicht metrisierbar.

Die Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist zwar hausdorffsch, aber nicht erstabzählbar, also nicht metrisierbar.

Dasselbe gilt für für die Teilräume $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supset \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset \mathbb{R}[x]$.

Beweis: (T_2) Seien $f \ne g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Also existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \ne g(x_0)$. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x_0) - g(x_0)| > 0$ gilt dann $U(f;x_0,\varepsilon) \cap U(g;x_0,\varepsilon) = \emptyset$.

(1AA) Seien $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Umgebungen von f. Zu n existiert $U(f;J_n,\varepsilon_n) \subset U_n$ mit $J_n \subset \mathbb{R}$ endlich und $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$. Somit ist $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \subset \mathbb{R}$ abzählbar, aber $\mathbb{R}$ überabzählbar (B2N), also $J \ne \mathbb{R}$. Wir wählen ein $x_0 \in \mathbb{R} \smallsetminus J$.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n = f + h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|h_n(x_0)| \ge 1$ und $h_n|_{J_n} = 0$. Dann gilt $g_n \in U(f;J_n,\varepsilon_n) \subset U_n$, aber $g_n \notin U(f;x_0,1)$, also $U_n \not\subset U(f;x_0,1)$. Demnach ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Umgebungsbasis von f. $\boxed{\text{QED}}$

Ist X überabzählbar, so ist $\mathbb{R}^X$ nicht erstabzählbar, also nicht metrisierbar. Hingegen sind die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ erstabzählbar, sogar metrisierbar.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Unsere Konstruktion der Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ scheint mühsam. Wir fragen uns daher: Geht es auch einfacher, etwa durch eine geeignete Metrik? Die erstaunliche Antwort ist: Nein!

Wie beweisen wir, dass ein Raum $(X,\mathcal{T})$ nicht metrisierbar ist? Aufgeben genügt nicht, wir müssen ein Hindernis benennen!

Jede metrische Topologie hat zwei wichtige Eigenschaften: Sie ist hausdorffsch (D3J) und erstabzählbar (D3F).

Diese Kriterien sind also notwendig zur Metrisierbarkeit (D1E): Ist $\mathcal{T}$ nicht hausdorffsch oder nicht erstabzählbar, so ist $\mathcal{T}$ sicher nicht metrisierbar!

Das erste Kriterium, die Hausdorff–Eigenschaft, ist hier erfüllt, das zweite Kriterium, die Erstabzählbarkeit, jedoch nicht!

Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wird daher von keiner Metrik induziert.

Gleichmäßige Konvergenz

Gegeben sei eine Folge reeller Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \;:\; f_n(x) \to f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \;:\; |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$$

Gleichmäßige Konvergenz ist Konvergenz in der Supremumsmetrik:

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad :\Leftrightarrow \quad |f - f_n|_{\mathbb{R}} \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;:\; |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$$

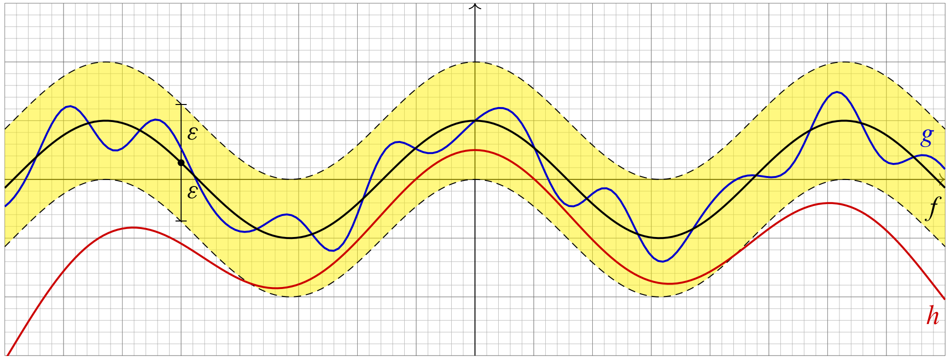
Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir daher die ε–Umgebung von $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f, \varepsilon) := \left\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; |f - g|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \right\}.$$

Diese Umgebungen erfüllen die erforderlichen Bedingungen (UB1–3), insbesondere gilt (UB2) dank $U(f, \varepsilon) \cap U(f, \varepsilon') = U(f, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\})$.

Gleichmäßige Konvergenz

Skizze der Umgebung $U(f, \varepsilon)$ einer Funktion f:



Definition D4C: Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f, \varepsilon)$ definieren gemäß D3V auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ der **gleichmäßigen Konvergenz**: Genau dann ist $O \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f, \varepsilon)$ enthält.

$$\mathcal{T}_{\text{uni}} = \left\{ O \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;\middle|\; \forall f \in O \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;:\; U(f, \varepsilon) \subset O \right\}$$

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition C3P: punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Gegeben sei eine Menge X und ein metrischer Raum (Y, d_Y) sowie eine Folge von Funktionen $f_n : X \to Y$. Wir definieren:

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \;:\; d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \;:\; d_Y(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon$$

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad :\Leftrightarrow \quad d(f_n, f) = |d_Y(f_n, f)|_X \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \;\; \forall x \in X \;:\; d_Y(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon$$

⚠ Bei punktweiser Konvergenz kann die Stetigkeit zerbrechen!

Beispiel: Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \le x < 1$ und $f(1) = 1$.

Die Konvergenz $f_n \to f$ gilt punktweise, aber nicht gleichmäßig: Das Supremum des Abstandes ist $|f_n - f|_{[0,1]} = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Satz C3Q: Die gleichmäßige Konvergenz erhält Stetigkeit.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f_n : X \to Y$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f : X \to Y$ konvergiert.

1. Sind alle f_n stetig in $a \in X$, dann auch f.
2. Sind alle f_n stetig auf ganz X, dann auch f.
3. Sind alle f_n gleichmäßig stetig auf X, dann auch f.
4. Sind alle f_n sogar L–lipschitz–stetig, dann auch f.

Übung: Wiederholen Sie hierzu den $\varepsilon/3$–Beweis aus der Analysis!

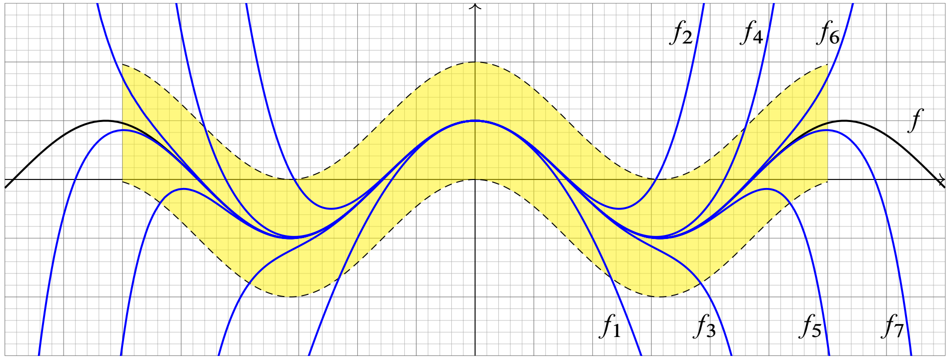
Beweis: (1) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $d(f_n, f) \to 0$ existiert ein Index $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n, f) \le \varepsilon/3$. Da f_n stetig ist, existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, a) < \delta$ die Ungleichung $d_Y(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3$ gilt. Daraus folgt:

$$d_Y(f(x), f(a)) \le d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(a)) + d_Y(f_n(a), f(a)) < \varepsilon$$

Die Aussagen (2,3,4) beweist man genauso. QED

Kompakte Konvergenz

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$



Eine Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **konvergiert kompakt** gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn auf jedem kompakten Intervall $K = [-r, r]$ gleichmäßige Konvergenz vorliegt:

$$f_n \to f \text{ kompakt} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall r \in \mathbb{R}_{\ge 0} \; : \; |f - f_n|_{[-r,r]} \to 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall r \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \;\; \forall x \in [-r, r] \; : \; |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$$

Kompakte Konvergenz

Für $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir das kompakte Intervall $K = [-r, r]$ und definieren die (K, ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f; K, \varepsilon) := \left\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; |f - g|_K < \varepsilon \right\}.$$

Diese Umgebungen erfüllen (UB1–3), insbesondere gilt (UB2) dank

$$U(f; K, \varepsilon) \cap U(f; K', \varepsilon') \quad \supset \quad U(f;\, K \cup K',\, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Definition D4D: Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f; K, \varepsilon)$ definieren gemäß D3V auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ der **kompakten Konvergenz**: Genau dann ist eine Menge $O \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f; K, \varepsilon)$ enthält:

$$\mathcal{T}_{\text{kpkt}} = \left\{ O \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;\middle|\; \forall f \in O \;\; \exists r \in \mathbb{R}_{\ge 0} \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; : \; U(f; [-r, r], \varepsilon) \subset O \right\}$$

☺ Ebenso für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Ist X lokal-kompakt, so heißt dies auch **lokal gleichmäßige Konvergenz**. Sie erhält Stetigkeit! (Satz C3Q)

Die kompakte Konvergenz ist nicht normierbar.

Übung D4F: Die kompakte Konvergenz ist nicht normierbar.

(1) Es gelten strikte Inklusionen $\mathcal{T}_{\text{pw}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{kpkt}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{uni}}$ (von gröber zu feiner). Hierbei ist $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ normierbar, aber $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ nicht metrisierbar. Was gilt für $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$?

(2) Wir haben $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supset \ell^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sowie $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supset \mathbb{R}[x]$. Auf welchen dieser Räume ist die kompakte Konvergenz normierbar?

Lösung: (2) Auf keinem! (2a) Sei $\|-\| : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ eine Norm. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f_n \ne 0$ und Träger in $[n-1, n+1]$. Dann gilt $\|f_n\| \ne 0$, nach geeigneter Skalierung $\|f_n\| = 1$. Es folgt $f_n \to 0$ kompakt, aber $\|f_n\| \not\to 0$.

(2b) Angenommen, $\|-\| : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ wäre eine Norm für die kompakte Konvergenz. Sei $f_n(x) = a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ mit $\|f_n\| = 1$. Wegen $\|f_n\| \not\to 0$ gilt $f_n \not\to 0$ kompakt: Es gibt ein Intervall $[-r, r] \subset \mathbb{R}$ mit $|f_n|_{[-r,r]} = a_n r^n \not\to 0$. Für $g_n = f_n / n$ gilt demnach $\|g_n\| = 1/n \to 0$, also $g_n \to 0$ kompakt. Auf $[-2r, 2r] \subset \mathbb{R}$ jedoch gilt $|g_n|_{[-2r,2r]} = a_n r^n \cdot 2^n / n \not\to 0$. $\boxed{\text{QED}}$

Die kompakte Konvergenz ist metrisierbar.

Für jeden Radius $r \in \mathbb{N}$ ist die gleichmäßige Konvergenz auf $[-r, r]$ metrisierbar, sogar normierbar durch die Supremumsnorm $|-|_{[-r,r]}$. Wir stutzen dies zur einer äquivalenten, aber endlichen Metrik:

$$d_r(f, g) = |f - g|^*_{[-r,r]} = \sup\left\{ |f(x) - g(x)|^* \;\middle|\; x \in [-r, r] \right\} \quad \in \quad [0, 1]$$

Für Funktionen $f, g : [-r, r] \to \mathbb{R}$ ist dies eine Metrik, für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedoch nur eine Halbmetrik (C2B).

Satz D4E: Metrisierung der kompakten Konvergenz

Die Halbmetriken $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fassen wir zusammen zu

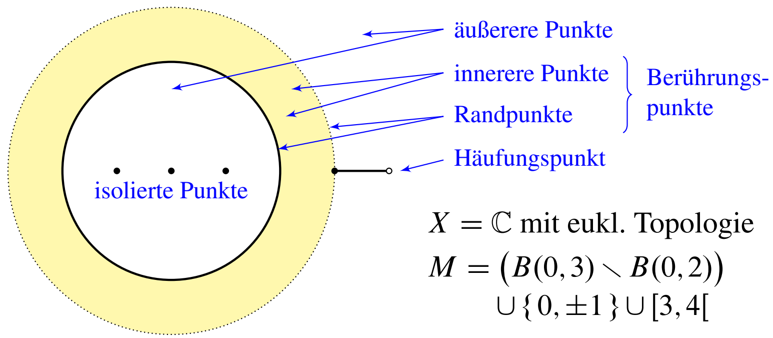
$$d \; : \; \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to [0, 1] \; : \; d(f, g) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} d_k(f, g).$$

Dies ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, und es gilt $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\text{kpkt}}$.

Übung: Zeigen Sie (M0–3) sowie $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ und $\mathcal{T}_d \supset \mathcal{T}_{\text{kpkt}}$.

☺ Ein solcherart metrisierbarer Vektorraum heißt **Fréchet–Raum**.

Topologische Grundbegriffe



$X = \mathbb{C}$ mit eukl. Topologie

$M = \big(B(0,3) \smallsetminus B(0,2)\big)$
$\cup \{0, \pm 1\} \cup [3,4[$

Topologische Grundbegriffe

Definition D5A: topologische Grundbegriffe

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt...

innerer Punkt von M in $(X,\mathcal{T})$ $:\Longleftrightarrow M \in \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T})$
(Die Menge M ist eine Umgebung von x.)

äußerer Punkt von M in $(X,\mathcal{T})$ $:\Longleftrightarrow (X \smallsetminus M) \in \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T})$
(Das Komplement $X \smallsetminus M$ ist eine Umgebung von x.)

Berührungspunkt von M in $(X,\mathcal{T})$ $:\Longleftrightarrow \forall U \in \mathscr{U}_x : U \cap M \neq \emptyset$
(Jede Umgebung von x trifft die Menge M.)

Randpunkt von M in $(X,\mathcal{T})$ $:\Longleftrightarrow \forall U \in \mathscr{U}_x : U \cap M \neq \emptyset \neq U \cap (X \smallsetminus M)$
(Jede Umgebung von x trifft sowohl M als auch $X \smallsetminus M$.)

Häufungspunkt von M in $(X,\mathcal{T})$ $:\Longleftrightarrow \forall U \in \mathscr{U}_x : (U \smallsetminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$
(Jede Umgebung von x trifft außer x mindestens einen Punkt von M.)

isolierter Punkt von M in $(X,\mathcal{T})$ $:\Longleftrightarrow \exists U \in \mathscr{U}_x : U \cap M = \{x\}$
(Eine genügend kleine Umgebung von x hat mit M nur x gemeinsam.)

Inneres, Abschluss, Rand

Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das **Innere** oder auch der **offene Kern** von M in $(X,\mathcal{T})$, geschrieben

$$\mathring{M} = K_{\mathcal{T}}(M) = K_{(X,\mathcal{T})}(M) := \big\{\, x \in X \;\big|\; M \in \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T}) \,\big\}$$
$$\stackrel{!}{=} \bigcup \big\{\, U \subset M \;\big|\; U \in \mathcal{T} \,\big\}$$

Es gilt $M \supset M^\circ = (M^\circ)^\circ$. Genau dann ist M offen, wenn $M = M^\circ$ gilt.

Die Menge aller Berührungspunkte von M heißt der **Abschluss** oder auch die **abgeschlossene Hülle** von M in $(X,\mathcal{T})$, geschrieben

$$\overline{M} = H_{\mathcal{T}}(M) = H_{(X,\mathcal{T})}(M) := \big\{\, x \in X \;\big|\; \forall U \in \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T}) : U \cap M \neq \emptyset \,\big\}$$
$$\stackrel{!}{=} \bigcap \big\{\, A \supset M \;\big|\; X \smallsetminus A \in \mathcal{T} \,\big\}.$$

Es gilt $M \subset \overline{M} = \overline{\overline{M}}$. Genau dann ist M abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ gilt.

Die Menge aller Randpunkte von M heißt der **Rand** von M, geschrieben

$$\delta M := \overline{M} \smallsetminus M^\circ \quad \text{bzw. ausführlich}$$
$$\delta_{(X,\mathcal{T})}(M) = H_{(X,\mathcal{T})}(M) \smallsetminus K_{(X,\mathcal{T})}(M).$$

Inneres, Abschluss, Rand

⚠ Diese topologischen Begriffe sind **relativ**: Sie hängen nicht nur von der Menge M ab, sondern auch vom umgebenden Raum $(X,\mathcal{T})$.

Beispiel: Wir betrachten die Teilmenge $M =]0,1[\cup]1,2] \cup \{3\}$ in jedem der drei Räume $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ jeweils mit der euklidischen Topologie:

In $\mathbb{R}_{>0}$ gilt:	$\mathring{M} =]0,1[\cup]1,2[$,	$\overline{M} =]0,2] \cup \{3\}$,	$\delta M = \{1,2,3\}$.
In $\mathbb{R}$ gilt:	$\mathring{M} =]0,1[\cup]1,2[$,	$\overline{M} = [0,2] \cup \{3\}$,	$\delta M = \{0,1,2,3\}$.
In $\mathbb{C}$ gilt:	$\mathring{M} = \emptyset$,	$\overline{M} = [0,2] \cup \{3\}$,	$\delta M = [0,2] \cup \{3\}$.

Sind Umgebungsbasen $(\mathcal{B}_x)_{x \in X}$ für $(X,\mathcal{T})$ gegeben, oder sogar eine Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert, so können wir Abschluss und Inneres der Menge $M \subset X$ wie folgt charakterisieren:

$$\overline{M} = \big\{\, x \in X \;\big|\; \forall U \in \mathcal{B}_x \,:\, U \cap M \neq \emptyset \,\big\} = \big\{\, x \in X \;\big|\; d(x,M) = 0 \,\big\}$$
$$\mathring{M} = \big\{\, x \in X \;\big|\; \exists U \in \mathcal{B}_x \,:\, U \subset M \,\big\} = \big\{\, x \in X \;\big|\; d(x, X \smallsetminus M) > 0 \,\big\}$$

Abschluss und Folgengrenzwerte

Satz D5C: Abschluss und Folgengrenzwerte

Im Raum $(X,\mathcal{T})$ sei $A \subset X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A gibt, die gegen x in X konvergiert, dann gilt $x \in \overline{A}$. Die Umkehrung gilt, wenn x eine abzählbare Umgebungsbasis erlaubt.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen x konvergiert: Jede Umgebung U von x enthält schließlich alle Folgenglieder a_n, also mindestens einen Punkt von A. Somit gilt $x \in \overline{A}$.

„$\Leftarrow$": Sei $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x. Aus $x \in \overline{A}$ folgt $A \cap U_n \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in A \cap U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gemäß D3I gilt $a_n \to x$. QED

Korollar D5D: abgeschlossen und folgenabgeschlossen

Jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ ist folgenabgeschlossen. Die Umkehrung gilt, wenn $(X,\mathcal{T})$ erstabzählbar ist.

Lokal-endliche Familien

Definition D5F: lokal-endliche Familien

Eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $A_i \subset X$ nennen wir...

endlich, wenn die Indexmenge I endlich ist,

endlich im Punkt $x \in X$, wenn $I_x = \{\, i \in I \mid x \in A_i \,\}$ endlich ist,

punktweise endlich, wenn dies in jedem Punkt $x \in X$ gilt,

lokal-endlich um x im Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn eine offene Umgebung U existiert, also $x \in U \in \mathcal{T}$, sodass $I_U = \{\, i \in I \mid A_i \cap U \neq \emptyset \,\}$ endlich ist,

lokal-endlich im Raum $(X,\mathcal{T})$, falls dies um jedem Punkt $x \in X$ gilt.

Trivialerweise gilt $I \supset I_U \supset I_x$, somit gelten die Implikationen

$$\text{endlich} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad \text{lokal-endlich} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad \text{punktweise endlich.}$$

Die Umkehrungen gelten nicht, siehe $([n,n+1])_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(\{x\})_{x\in\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{R}$.

Lokal-endliche Vereinigung

Satz D5G: lokal-endliche Vereinigung

(1) In jedem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ gilt die Inklusion

$$\overline{\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i} \quad \supset \quad \textstyle\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

(2) Genau dann gilt Gleichheit, wenn $A := \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ abgeschlossen ist, insb.

$$\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} \quad = \quad \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}.$$

(3) Ist die Familie $(A_i)_{i\in I}$ lokal-endlich, so auch $(\overline{A_i})_{i\in I}$. (4) Dann gilt

$$\overline{\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i} \quad = \quad \textstyle\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Ist eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen $A_i \subset X$ lokal-endlich in $(X,\mathcal{T})$, dann ist ihre Vereinigung $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$.

Gleichheit gilt nicht für beliebige Vereinigungen: In $\mathbb{R}$ gilt $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \overline{\{x\}} = \mathbb{Q}$ aber $\overline{\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}} = \mathbb{R}$. Ein weiteres Gegenbeispiel ist $]0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1]$.

Lokal-endliche Vereinigung

Beweis: Wir vergleichen $A := \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ mit $B := \bigcup_{i\in I} A_i$.

(1) Aus $A_i \subset B \subset \overline{B}$ folgt $\overline{A_i} \subset \overline{B}$, also $A \subset \overline{B}$.

(2) Es gilt $B \subset A$. Ist A abgeschlossen, so folgt $\overline{B} \subset A$, also $\overline{B} = A$. Dies gilt insbesondere für I endlich dank (A2).

(3) Sei $x \in U \in \mathcal{T}$ mit $I_U := \{\, i \in I \mid A_i \cap U \neq \emptyset \,\}$ endlich. Das Komplement $X \smallsetminus U$ ist abgeschlossen: Aus $A_i \subset X \smallsetminus U$ folgt demnach $\overline{A_i} \subset X \smallsetminus U$. Also gilt $I_U = \{\, i \in I \mid \overline{A_i} \cap U \neq \emptyset \,\}$.

(4) Zu zeigen ist: A ist abgeschlossen, also $X \smallsetminus A$ offen. Zu jedem $x \in X \smallsetminus A$ existiert eine offene Umgebung $x \in U \in \mathcal{T}$ mit I_U endlich. Daher gilt:

$$U' := U \smallsetminus A \quad = \quad U \smallsetminus \textstyle\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \overset{(3)}{=} \quad U \smallsetminus \textstyle\bigcup_{i\in I_U} \overline{A_i} \quad \overset{(2)}{=} \quad U \smallsetminus \overline{\textstyle\bigcup_{i\in I_U} A_i}$$

Demnach ist U' eine offene Umgebung des Punktes x in $X \smallsetminus A$. Das Komplement $X \smallsetminus A$ ist Umgebung jedes seiner Punkte, also offen (D3C), und $A = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ ist abgeschlossen. QED

Dichte und diskrete Teilmengen

D509

Definition D5J: dichte und diskrete Teilmengen

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **diskret** in $(X,\mathcal{T})$, falls jeder Punkt $x \in M$ isoliert ist, also eine offene Umgebung $U \in \mathcal{T}$ existiert mit $M \cap U = \{x\}$. Das heißt, der Teilraum $(M, \mathcal{T}_M)$ ist diskret (D1K, D1B).

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **dicht** in $(X,\mathcal{T})$, falls $\overline{M} = X$ gilt. Das heißt $M \cap U \ne \emptyset$ für jede nicht-leere offene Menge $U \in \mathcal{T} \smallsetminus \{\emptyset\}$.

Hingegen heißt M **nirgends dicht** in $(X,\mathcal{T})$, wenn $\overline{M}^\circ = \emptyset$ gilt. Äquivalent: In keiner offenen Menge $O \subset X$ ist $O \cap M$ dicht.

Beispiele: In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ dicht, aber nicht diskret, ebenso $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$. In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Z}$ diskret und abgeschlossen, nirgends dicht, ebenso $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

In $(\mathbb{R},+)$ ist jede diskrete Untergruppe von der Form $\mathbb{Z}a$ für ein $a \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Für $\xi \in \mathbb{Q}$ ist $X = \{ e^{2\pi i k \xi} \mid k \in \mathbb{Z} \}$ diskret in $\mathbb{S}^1$, für $\xi \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ jedoch dicht.

In $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ mit $1 \le p < \infty$ sind $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ und $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ dicht, in $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ nicht. Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ ist $\{ \mathbf{I}_A \mid A \subset \Omega \text{ endlich} \}$ diskret. Im Banach–Raum $\ell^\infty(\Omega,\mathbb{K})$ ist $\{ \mathbf{I}_A \mid A \subset \Omega \}$ diskret.

Stetige Funktionen sind auf dichten Teilmengen festgelegt.

D510

Satz D5L: Vergleich stetiger Funktionen auf dichten Teilmengen

Seien $f, g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ hausdorffsch. Dann ist $O = \{ x \in X \mid f(x) \ne g(x) \}$ offen und $\{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$ abgeschlossen. Aus $A \subset X$ und $f|_A = g|_A$ folgt $f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$; ist A dicht in $(X,\mathcal{T})$, so folgt $f = g$.

Beweis: Sei $x \in O$. Zu $f(x) \ne g(x)$ in Y existieren Umgebungen U, V mit $f(x) \in U \in \mathcal{T}_Y$ und $g(x) \in V \in \mathcal{T}_Y$ mit $U \cap V = \emptyset$. Für $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ gilt $x \in W \in \mathcal{T}_X$. Für $x' \in W$ gilt $f(x') \in U$ und $g(x') \in V$, also $f(x') \ne g(x')$. Somit gilt $W \subset O$. Also ist O offen (D3C). $\boxed{\text{QED}}$

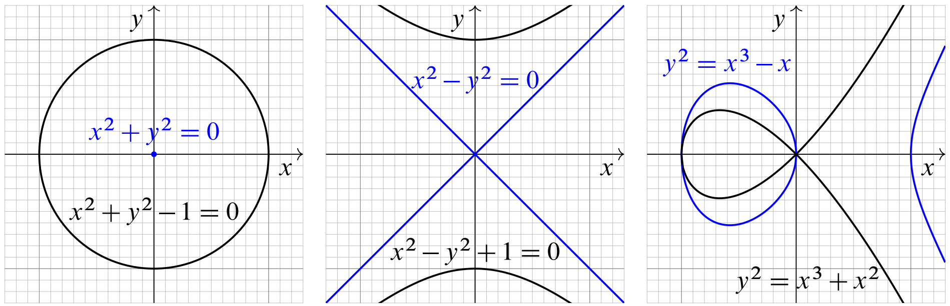
Beispiel / Übung D5M: stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$

Ist die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}) : f \mapsto f|_\mathbb{Q}$ injektiv? surjektiv?

Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}) : f \mapsto f|_\mathbb{Q}$ ist injektiv dank D5L, aber nicht surjektiv: Funktionen wie $x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2)$ sind stetig auf $\mathbb{Q}$. Wir haben $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^\mathbb{N}$, also $\mathbb{R}^\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}} \cong \{0,1\}^\mathbb{R} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, jedoch $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{Q} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} \cong \{0,1\}^\mathbb{N} \cong \mathbb{R}$.

Polynome und Polynomfunktionen

D511



Erinnerung: Jedes **Polynom** $P = \sum_\nu p_\nu X^\nu$ in $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ definiert die zugehörige **Polynomfunktion** $f_P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : x \mapsto P(x) = \sum_\nu p_\nu x^\nu$.

Dürfen wir beide identifizieren? Wie? Wann? Warum? Ist $P \mapsto f_P$ injektiv?

⚠ Für jeden endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen schlägt das fehl! Die Polynomalgebra $\mathbb{F}_q[X]$ ist unendlich, doch $\operatorname{Abb}(\mathbb{F}_q,\mathbb{F}_q)$ ist endlich. Konkret: Für $P = X^q - X \in \mathbb{F}_q[X]$ gilt $P \ne 0$, aber $f_P = 0$ dank Lagrange. Speziell für $P = X^2 + X \in \mathbb{F}_2[X]$ gilt $P(0) = 0$ und $P(1) = 0$, also $f_P = 0$.

Nullstellenmengen sind nirgends dicht.

D512

Lemma D5N: Polynome und Polynomfunktionen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sowie $U \subset \mathbb{K}^n$ offen und $a \in U$. Dann ist die Zuordnung

$$\Phi_U \;:\; \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n] \to \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{K}) \;:\; P = \textstyle\sum_\nu p_\nu X^\nu \mapsto f_P|_U$$

injektiv: Verschoben nach $a = 0$ gilt $p_\nu = \frac{1}{\nu!}\partial^\nu f_P(0)$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist es somit möglich, und auch üblich, die Polynomalgebra $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ als Unteralgebra von $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}) \subset \mathscr{C}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K})$ aufzufassen.

Satz D5O: Nullstellenmengen sind nirgends dicht.

Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]^*$ ist die Nullstellenmenge $N = f_P^{-1}(0)$ in $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen, nirgends dicht und hat Lebesgue–Maß $\operatorname{vol}_n(N) = 0$ (dank Fubini und Induktion). Ihr Komplement $f_P^{-1}(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\}) \subset \mathbb{K}^n$ ist offen und dicht (dank Lemma D5N) und hat volles Lebesgue–Maß.

☺ Dies ist eine Besonderheit von Polynomen! Jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{K}^n$ ist Nullstellenmenge einer stetigen Funktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

Fast alle Matrizen sind invertierbar.

Beispiel D5P: Determinante

Die **Determinante** ist eine Polynomfunktion in den Matrixeinträgen:

$$\det_n \;:\; \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} \;:\; A=(a_{ij}) \mapsto \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

Speziell für $n=2$ gilt $\det_2\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$ und für $n=3$ entsprechend

$$\det_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{cases}$$

Im Raum $\mathbb{K}^{n\times n}$ der $n\times n$–Matrizen ist die **allgemeine lineare Gruppe**

$$\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} := \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A \text{ ist invertierbar} \right\} \stackrel{!}{=} \det_n^{-1}(\mathbb{K}\smallsetminus\{0\})$$

offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

☺ Anschaulich: Fast alle Matrizen sind invertierbar,
invertierbare Matrizen bleiben invertierbar bei kleiner Störung,
nicht-invertierbare Matrizen werden invertierbar nach kleiner Störung.

Vergleich stetiger Funktionen auf dichten Teilmengen

Paul Halmos, *Finite dimensional vector spaces* (1958), §53, exercise 13.

Satz D5Q: charakteristische Polynome

Für jedes Paar quadratischer Matrizen $A,B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ stimmen die charakteristischen Polynome P_{AB} und P_{BA} überein.

Beweis: Für $M\in\mathbb{K}^{n\times n}$ ist das charakteristische Polynom

$$P_M(X) := \det(X1_{n\times n} - M) \in \mathbb{K}[X]$$

invariant unter Konjugation durch jede invertierbare Matrix $B\in\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} P_{B^{-1}MB} = \det(X1_{n\times n} - B^{-1}MB) &= \det(B^{-1}(X1_{n\times n} - M)B) \\ &= \det B^{-1}\cdot\det(X1_{n\times n}-M)\cdot\det B = P_M \end{aligned}$$

Speziell für $M=BA$ erhalten wir die ersehnte Gleichung $P_{AB}=P_{BA}$.
Wir statten die Vektorräume $\mathbb{K}^{n\times n}$ und $\mathbb{K}[X]$ mit ihrer ℓ^2–Norm aus.
Die Abbildungen $f,g:\mathbb{K}^{n\times n}\to\mathbb{K}[X]$ mit $f:B\mapsto P_{AB}$ und $g:B\mapsto P_{BA}$
sind stetig und stimmen auf der dichten Menge $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ überein. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Der Satz gilt sogar ganz allgemein über jedem kommutativen Ring.

Fast alle Matrizen sind diagonalisierbar.

Im Raum $\mathbb{K}[X]\cong\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ aller Polynome betrachten wir die Teilmenge
$\mathbb{K}[X]_n^1 := \left\{ P(X) = a_0 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \;\middle|\; a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{K} \right\} \cong \mathbb{K}^n$.
Fundamentalsatz der Algebra: Zu jedem Polynom $P\in\mathbb{C}[X]_n^1$ existieren Nullstellen $z_1,z_2,\dots,z_n\in\mathbb{C}$, sodass $P(X)=(X-z_1)(X-z_2)\cdots(X-z_n)$ gilt.
Wir nennen P **separabel**, wenn alle n Nullstellen verschieden sind.

Die **Diskriminante** $\Delta_n(P) := \prod_{i<j}(z_i-z_j)^2$ ist symmetrisch in $z_1,\dots,z_n$,
also ein Polynom in den Koeffizienten $a_0,\dots,a_{n-1}$ des Polynoms P.
Beispiel: Aus der Schule kennen Sie $\Delta_2(X^2+pX+q) = p^2-4q$.

Satz D5R: Fast alle Matrizen sind diagonalisierbar.

Wir nutzen die Diskriminante $\Delta_n : \mathbb{K}[X]_n^1 \to \mathbb{K}$ und das char. Polynom

$$\chi_n \;:\; \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}[X]_n^1 \;:\; M\mapsto P_M(X) = \det(X1_{n\times n}-M).$$

(1) In $\mathbb{K}[X]_n^1$ ist die Menge $\Sigma = \Delta_n^{-1}(\mathbb{K}\smallsetminus\{0\})$ aller separablen Polynome offen und dicht, und ihr Komplement hat Lebesgue–Maß Null.

(2) In $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Menge $S = (\Delta_n^{-1}\circ\chi_n)(\mathbb{K}\smallsetminus\{0\})$ aller separablen Matrizen offen und dicht, und ihr Komplement hat Lebesgue–Maß Null.

Und die Moral von der Geschicht?

☺ Bitte bewundern Sie, wie herrlich einfach alle Argumente werden durch die geschickte Verwendung von stetigen Funktionen, hier speziell Polynomfunktionen! Polynome kommen natürlich mit ihrer Diskriminante, quadratische Matrizen kommenebenso natürlich mit ihrer Determinante. Diese Abbildungen werden uns geschenkt, wir müssen sie nur nutzen!

☺ Anschaulich: Fast alle Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind separabel, somit über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, separable Matrizen bleiben's bei kleiner Störung, nicht-separable werden's nach kleiner Störung.

Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) eine Matrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$ wählen, so ist diese mit Wahrscheinlichkeit 1 separabel und somit über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, ebenso alle Matrizen in einer Umgebung. Die verbleibenden Fälle sind so gesehen vernachlässigbar. Die Jordan–Form ist trotzdem wichtig, um *alle* Fälle behandeln zu können. Nicht alle Matrizen sind zufällig!

☺ Der Satz von Cayley–Hamilton folgt ebenso topologisch.
Die behauptung gilt offensichtlich für jede diagonale Matrix,
damit auch für jede diagonlisierbare, und diese sind dicht!

Definition D6A: Basis einer Topologie

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ offener Mengen ist eine **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} = \{ \bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \}$ gilt. Das heißt: Jede offene Menge in $(X,\mathcal{T})$ ist Vereinigung von Mengen der Basis $\mathcal{B}$.

Beispiele: Jede Topologie $\mathcal{T}$ erlaubt (viele) Basen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$:

Jeder Raum $(X,\mathcal{T})$ hat als Basen trivialerweise $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. Für jede indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ sind dies die beiden einzigen.

Für jeden diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}(X))$ ist $\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ eine Basis der Topologie. Hier ist $\mathcal{B}$ die kleinste Basis, also in jeder Basis enthalten.

Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ ist zugleich die Ordnungstopologie. Hier ist $\mathcal{B} = \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R} \}$ eine Basis, ebenso $\mathcal{B}' = \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{Q} \}$.

Für jeden metrischen Raum (X,d) ist $\mathcal{B} = \{ B(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$, ebenso $\mathcal{B}' = \{ B(x, 2^{-n}) \mid x \in X,\ n \in \mathbb{N} \}$.

Proposition D6B: äquivalente Umformulierungen

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ sind äquivalent:

(1) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist die Vereinigung gewisser offenen Mengen $B \in \mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} = \{ \textstyle\bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \} \quad \text{das heißt} \quad \forall U \in \mathcal{T}\ \exists \mathcal{S} \subset \mathcal{B} : U = \textstyle\bigcup \mathcal{S}.$$

(2) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset U$:

$$\forall U \in \mathcal{T} : U = \textstyle\bigcup \mathcal{S} \quad \text{mit} \quad \mathcal{S} = \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subset U \}.$$

(3) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ enthält zu jedem $x \in U$ auch eine offene Umgebung $B \in \mathcal{B}$:

$$\forall U \in \mathcal{T}\ \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U.$$

(4) Jeder Punkt x in $(X,\mathcal{T})$ hat als eine Umgebungsbasis das System

$$\mathcal{B}_x = \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \}.$$

Satz D6C: Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

Jede Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X hat folgende Eigenschaften:

B1: Es gilt $X = \bigcup \mathcal{B}$.

B2: Für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existiert $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ sodass $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{S}$.

Äquivalent hierzu sind die folgenden lokalen Umformulierungen:

B1': Für jeden Punkt $x \in X$ existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$.

B2': Zu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Erfüllt umgekehrt ein beliebiges Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ diese Bedingungen, dann erhalten wir mit

$$\mathcal{T} := \{ \textstyle\bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \} = \{ U \subset X \mid \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U \}$$

eine Topologie auf X, und $\mathcal{B}$ ist eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$.

Nachrechnen: Ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, so gilt (O1) $\Rightarrow$ (B1) und (O2) $\Rightarrow$ (B2). Die Äquivalenz (B1) $\Leftrightarrow$ (B1') und (B2) $\Leftrightarrow$ (B2') ist klar. Umgekehrt für $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{T}$ gilt: (B1) $\Rightarrow$ (O1), (B2) $\Rightarrow$ (O2), (O3) ist klar. QED

Bitte schreiben Sie zur Übung alle genannten Implikationen selbst aus. Prüfen Sie sorgsam, dass Sie Definitionen und Argumente verstehen, angefangen bei den Äquivalenzen (B1) $\Leftrightarrow$ (B1') und (B2) $\Leftrightarrow$ (B2').

Bei der Konstruktion $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{T}$ ist die Implikation (B1) $\Rightarrow$ (O1) klar, lediglich die Implikation (B2) $\Rightarrow$ (O2) ist nicht ganz offensichtlich.

Wir zeigen stattdessen (B2') $\Rightarrow$ (O2): Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ und $U := U_1 \cap U_2$. Zu jedem Punkt $x \in U$ existieren Mengen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_1 \subset U_1$ und $x \in B_2 \subset U_2$. Dank (B2') existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 = U$. Das bedeutet $U \in \mathcal{T}$.

Das Axiom (O3) schließlich ist klar nach Konstruktion. Ausführlich: Sei $U_i \in \mathcal{T}$ und $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Zu jedem Punkt $x \in U$ existiert $i \in I$ mit $x \in U_i$, und somit ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset U_i \subset U$. Das bedeutet $U \in \mathcal{T}$.

Nach Konstruktion gilt $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, somit ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$.

Die Fürstenberg–Topologie

Zur Erheiterung und Allgemeinbildung diskutieren wir als Anwendung Fürstenbergs topologischen Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen: *On the infinitude of primes*, American Mathematical Monthly 62 (1955).

ON THE INFINITUDE OF PRIMES

HARRY FURSTENBERG, Yeshiva University

In this note we would like to offer an elementary "topological" proof of the infinitude of the prime numbers. We introduce a topology into the space of integers S, by using the arithmetic progressions (from $-\infty$ to $+\infty$) as a basis. It is not difficult to verify that this actually yields a topological space. In fact, under this topology, S may be shown to be normal and hence metrizable. Each arithmetic progression is closed as well as open, since its complement is the union of other arithmetic progressions (having the same difference). As a result, the union of any finite number of arithmetic progressions is closed. Consider now the set $A = \cup A_p$, where A_p consists of all multiples of p, and p runs through the set of primes $\geqq 2$. The only numbers not belonging to A are -1 and 1, and since the set $\{-1, 1\}$ is clearly not an open set, A cannot be closed. Hence A is not a finite union of closed sets which proves that there are an infinity of primes.

Die Fürstenberg–Topologie

Behauptung: Die Menge $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ der Primzahlen ist unendlich. **Beweis:**

(0) Eine **arithmetische Progression** in $\mathbb{Z}$ ist eine Menge der Form

$$P(a,b) = a + b\mathbb{Z} = \{\, a + nb \mid n \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{mit } a,b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \geq 1.$$

(1) Die Familie $\mathcal{B} = \{\, P(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z},\ b \geq 1 \,\}$ ist Basis einer Topologie $\mathcal{T}$. Wir prüfen für $\mathcal{B}$ die Basisaxiome direkt nach: (B1') Es gilt $\mathbb{Z} = P(0,1)$. (B2') Für $x \in P(a,b) \cap P(c,d)$ gilt $x \in P(x,bd) \subset P(a,b) \cap P(c,d)$.

(2) In der so erzeugten **Fürstenberg–Topologie** $\mathcal{T}$ ist $P(a,b)$ offen und zudem abgeschlossen, denn $\mathbb{Z} \smallsetminus P(a,b) = \bigcup_{0<k<b} P(a+k,b)$.

(3) Jede Zahl $v \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{\pm 1\}$ wird von einer Primzahl $p \in \mathbb{P}$ geteilt. Die Vereinigung $V = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} (p\mathbb{Z})$ hat als Komplement $\mathbb{Z} \smallsetminus V = \{\pm 1\}$.

(4) Wäre die Menge $\mathbb{P}$ endlich, so wäre V zudem abgeschlossen, also $\{-1,+1\}$ offen, was offensichtlich falsch ist. QED

☺ Euklids Beweis ist ebenso instruktiv und zudem konstruktiv!

Erzeugung von Topologien

Satz D6F: Erzeugung einer Topologie

Sei $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein beliebiges System von Teilmengen in X. Wir setzen

$$\mathcal{B} := \{\, E_1 \cap \dots \cap E_n \mid n \in \mathbb{N},\ E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E} \,\} \quad \text{und} \quad \mathcal{T} := \{\, \textstyle\bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \,\}.$$

Dann ist $\mathcal{T} =: \tau(\mathcal{E})$ die gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ enthält. Daher heißt $\mathcal{T}$ die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie**, $\mathcal{B}$ die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Basis**, und $\mathcal{E}$ ein **Erzeugendensystem** oder eine **Subbasis** der Topologie $\mathcal{T}$.

Beweis: Das System $\mathcal{B} \supset \mathcal{E}$ ist stabil unter endlichen Durchschnitten. Für $n = 0$ interpretieren wir den leeren Durchschnitt als $X \in \mathcal{B}$.
Das System $\mathcal{T} \supset \mathcal{B}$ ist zudem stabil unter beliebigen Vereinigungen. Für $\mathcal{S} = \emptyset$ erhalten wir die leere Vereinigung $\bigcup \mathcal{S} = \emptyset \in \mathcal{T}$.
Das System $\mathcal{B}$ erfüllt (B1–2), somit ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. QED

Satz D6G: Stetigkeitskriterium auf einem Erzeugendensystem

Eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ topologischer Räume mit $\mathcal{T}_X = \tau(\mathcal{E})$ ist genau dann stetig, für alle $U \in \mathcal{E}$ stets $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$ gilt.

Erzeugung von Topologien

Beispiele: (0) Für $\mathcal{E} = \emptyset$ erhalten wir $\mathcal{B} = \{X\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

(1) Ist $\mathcal{E}$ selbst schon eine Topologie auf X, so gilt $\mathcal{E} = \mathcal{B} = \mathcal{T}$.

(2) Sei $(X,<)$ total geordnet und $\mathcal{E} = \{\,]a,+\infty[,]-\infty,b[\mid a,b \in X \,\}$. Wir erhalten daraus die Basis $\mathcal{B} = \{X\} \cup \mathcal{E} \cup \{\,]a,b[\mid a,b \in X \,\}$ und die Ordnungstopologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_<$ auf der Menge X (D1M).

(3) Zum Vektor $a \in \mathbb{S}^n$ betrachten wir den offenen Halbraum

$$H_a = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n > a_0 \,\}.$$

Das System $\mathcal{H} = \{\, H_a \mid a \in \mathbb{S}^n \,\}$ erzeugt die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Hierzu genügen bereits für $i = 1, \dots, n$ und $a_0 \in \mathbb{R}$ die offenen Halbräume

$$H_i^{<a_0} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i < a_0 \,\} \quad \text{und} \quad H_i^{>a_0} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > a_0 \,\}.$$

Beweis: Es gilt $\mathcal{H} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Umgekehrt: Die von $\mathcal{H}$ erzeugte Basis enthält alle offenen Quader, insbesondere also alle offenen Würfel (ℓ^∞–Bälle). Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle ℓ^p–Normen äquivalent dank $|x|_\infty \leq |x|_p \leq |x|_1 \leq n \cdot |x|_\infty$. Die von $\mathcal{H}$ erzeugte Topologie enthält demnach die euklidische $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom

Definition D6H: das zweite Abzählbarkeitsaxiom (2AA)

Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt **zweitabzählbar**, wenn die Topologie eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ erlaubt.

Beispiel: Für die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$ bilden die offenen Intervalle die Basis $\mathcal{B} = \{\,]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R} \,\}$. Mit rationalen Endpunkten erhalten wir hierin die abzählbare Basis $\mathcal{B}' = \{\,]a,b[\mid a,b \in \mathbb{Q} \,\}$.

Für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden die offenen Quader die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{\,]a_1,b_1[\times \cdots \times]a_n,b_n[\;\middle|\; a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{R} \,\right\}.$$

Mit rationalen Eckpunkten erhalten wir hierin die abzählbare Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{\,]a_1,b_1[\times \cdots \times]a_n,b_n[\;\middle|\; a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{Q} \,\right\}.$$

Bemerkung: Es gilt 2AA $\Rightarrow$ 1AA dank $\mathcal{B}_x = \{\, B \in \mathcal{B} \mid x \in B \,\}$ in D6B. Die Umkehrung gilt nicht, wie wir gleich an Gegenbeispielen sehen.

Kardinalität einer zweitabzählbaren Topologie

Satz D6I: Kardinalität einer zweitabzählbaren Topologie

Ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, so erhalten wir die Injektion

$$\Phi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{B}) : U \mapsto \{\, B \in \mathcal{B} \mid B \subset U \,\} \quad \text{mit} \quad U = \bigcup \Phi(U).$$

Ist $\mathcal{B}$ abzählbar, also $\operatorname{card}(\mathcal{B}) \le \operatorname{card}(\mathbb{N})$, so folgt

$$\operatorname{card}(\mathcal{T}) \le \operatorname{card}(\mathfrak{P}(\mathcal{B})) \le \operatorname{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) = \operatorname{card}(\mathbb{R}).$$

Für die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, gilt $\operatorname{card}(\mathcal{T}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$.

Beweis: Wir haben $\Psi : \mathfrak{P}(\mathcal{B}) \to \mathcal{T} : \mathcal{S} \mapsto \bigcup \mathcal{S}$ und $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$ dank D6B. Jede Injektion $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathbb{N}$ impliziert $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$ (B2N). Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$, also gilt $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathbb{R}$. In Dimension $n \ge 1$ haben wir umgekehrt eine Injektion $\mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow \mathcal{T} : r \mapsto B(0,r)$ mit $r = \operatorname{diam} B(0,r)/2$. Dank Cantor–Bernstein B2O erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{T} \cong \mathbb{R}$, also $\operatorname{card}(\mathcal{T}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{QED}}$

Diskrete Teilmengen und Basen

Übung: Die Menge $\mathbb{Z}^2$ ist abzählbar unendlich und diskret in $\mathbb{R}^2$. Können Sie eine überabzählbare diskrete Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ finden?

Lemma D6J: diskrete Teilmengen und Basen

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ diskret und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Basis. Zu jedem $a \in A$ existiert $U_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap A = \{a\}$. Hierzu existiert $B_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in B_a \subset U_a$, also $B_a \cap A = \{a\}$. Somit ist $A \hookrightarrow \mathcal{B} : a \mapsto B_a$ injektiv.

Ist $(X,\mathcal{T})$ zweitabzählbar, so ist jede diskrete Teilmenge $A \subset X$ abzählbar. Ist $A \subset X$ diskret und überabzählbar, so ist $(X,\mathcal{T})$ nicht zweitabzählbar.

Beispiel: Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist zweitabzählbar. Also ist jede diskrete Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar.

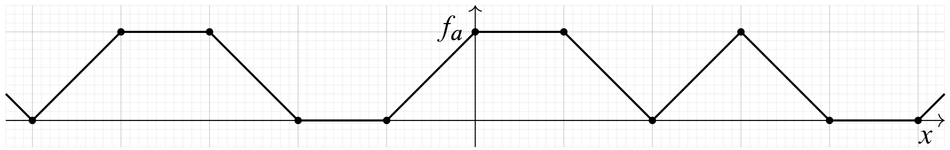
Beispiel: Wir betrachten den Raum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm.

Satz D6K: $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.

Der Raum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ enthält eine überabzählbare diskrete Teilmenge. Er ist erstabzählbar wie jeder metrische Raum, aber nicht zweitabzählbar.

$\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.

Beweis: Die Menge $A = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ist überabzählbar, genauer $A \cong \mathbb{R}$ (B2N).



Zu jeder Folge $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ sei $f_a : \mathbb{R} \to [0,1]$ die affine Interpolation mit $f_a(x) = (1-t)a_k + t a_{k+1}$ für $x = k + t$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in [0,1]$.

Die Zuordnung $A \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) : a \mapsto f_a$ ist injektiv, denn es gilt $a = f_a|_{\mathbb{Z}}$. Mit A ist auch die Menge $F = \{\, f_a \mid a \in A \,\} \subset \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ überabzählbar.

Die Menge F ist diskret in $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm, denn für $a \ne b$ in A gilt $|f_a - f_b|_{\mathbb{R}} = 1$, also $B(f_a,1) \cap F = \{f_a\}$.

Demnach ist $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nicht zweitabzählbar. Gemäß D6J gilt genauer: Jede Basis dieser Topologie ist mindestens so mächtig wie $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{QED}}$.

Dichte Teilmengen und Separabilität

Definition D6L: separabler topologischer Raum

Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält, d.h. es existiert $A \subset X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$.

⚠ Unterscheide **separabel** und **separiert** (= hausdorffsch, siehe D3J). Leider klingt beides sehr ähnlich, bedeutet aber völlig verschiedenes.

Satz D6M: Zweitabzählbar impliziert separabel.

Ist $(X,\mathcal{T})$ zweitabzählbar, d.h. es existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so ist $(X,\mathcal{T})$ separabel, d.h. es existiert A abzählbar und dicht in $(X,\mathcal{T})$.

Beweis: Zu jeder Menge $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ wählen wir einen Punkt $a_B \in B$. Mit $\mathcal{B}$ ist auch $A = \{\, a_B \mid B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\} \,\}$ abzählbar. Zudem ist A dicht: Jede offene Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, enthält eine Menge $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, somit gilt $a_B \in B \subset U$, also $A \cap U \neq \emptyset$. QED

⚠ Die Umkehrung gilt nicht: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist separabel dank $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, erfüllt aber nicht 1AA / 2AA.

Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Die ersehnte Umkehrung gilt immerhin für alle metrischen Räume:

Satz D6N: Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Sei (X,d) ein metrischer Raum und darin $A \subset X$ abzählbar und dicht. Dann erlaubt die metrische Topologie $\mathcal{T}_d$ die abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{\, B(a,r_k) \mid a \in A,\ k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Radien $r_k \searrow 0$, etwa $r_k = 2^{-k}$.

Beispiel: Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt die abzählbare Basis

$$\mathcal{B} = \{\, B(a,2^{-k}) \mid a \in \mathbb{Q}^n,\ k \in \mathbb{N} \,\}.$$

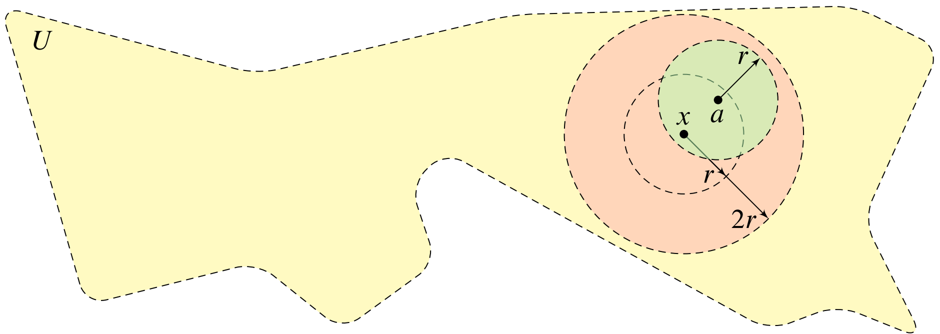
Für ihre Mächtigkeit gilt $\operatorname{card}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$ dank D6I.

Korollar D6O: separabel und zweitabzählbar

Ein metrisierbarer topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist genau dann separabel, wenn er zweitabzählbar ist (dank D6M und D6N). QED

Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Beweis von D6N: Gegeben ist $\mathcal{B} = \{\, B(a,r_k) \mid a \in A,\ k \in \mathbb{N} \,\} \subset \mathcal{T}_d$.



Für $U \in \mathcal{T}_d$ behaupten wir $U = \bigcup \{\, B \in \mathcal{B} \mid B \subset U \,\}$.
Die Inklusion „$\supset$“ ist klar, wir zeigen „$\subset$“: Hierzu sei $x \in U$.
Da U offen ist in (X,d), existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x,\varepsilon) \subset U$.
Dank $r_k \searrow 0$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $r_k < \varepsilon/2$, also $B(x,2r_k) \subset U$.
Da A dicht ist in (X,d), existiert $a \in A \cap B(x,r_k)$.
Somit gilt $x \in B(a,r_k) \subset B(x,2r_k) \subset U$. QED

Erste Anwendungen zur Separabilität

Satz D6P: separable Räume stetiger Funktionen

Der Banach–Raum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm ist nicht zweitabzählbar (D6K) und somit auch nicht separabel (D6N).

Hingegen ist $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ separabel und somit zweitabzählbar (D6N): Hier ist $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ dicht dank Weierstraß–Approximation.

Satz D6Q: separable ℓ^p–Räume

Sei $1 \le p < \infty$. Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ ist $\mathbb{Q}^{(\Omega)}$ bzw. $(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^{(\Omega)}$ dicht und $\{\, \mathbf{I}_A \mid A \subset \Omega$ endlich $\}$ diskret. Genau dann ist $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ separabel und zweitabzählbar, wenn die Grundmenge Ω abzählbar ist.

Hingegen ist $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ weder separabel noch zweitabzählbar, denn hierin ist $\{\, \mathbf{I}_A \mid A \subset \mathbb{N} \,\}$ überabzählbar und diskret.

Satz D6R: separable Hilbert–Räume

Jeder separable Hilbert–Raum $(V, \langle - \mid - \rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C}$ ist isometrisch entweder zu einem euklidischen Raum $\mathbb{K}^n = \ell^2(\{1,\dots,n\})$ oder $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.