Kapitel D

Stetigkeitslehre: topologische Räume

In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor.

Egbert Brieskorn (1936–2013)

Inhalt dieses Kapitels D

Rückblick und Motivation

$$\text{Skalarprodukt} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Norm} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Metrik} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Topologie}$$

Wir haben uns in den ersten Vorlesungen viel Zeit genommen.
Kapitel A: Einführung in und Ausblick auf dieses Semester
Kapitel B: Grundlagen und Aufbau des Zahlensystems
Kapitel C: von metrischen Räumen zur Topologie
🙂 Damit ist die Bühne bereitet für die Topologie!

Wir werden die topologischen Begriffe als allgemeine Definitionen extrahieren und damit neue Anwendungsmöglichkeiten eröffnen. Viele Sätze werden klarer, manche Beweise leichter durch Abstraktion, geeignete Verallgemeinerung und Fokussierung auf das Wesentliche. Andere Fragen lassen sich jetzt überhaupt erst formulieren.

Wenn du ein Schiff bauen willst,
lehre deine Leute nicht nur ihr Handwerk,
sondern erwecke ihre Sehnsucht nach dem Meer!

Aus dem vorangegangenen Kapitel C kennen wir den Begriff der *Metrik* $d : X \times X \to [0, \infty]$ und das Vokabular der *metrischen Räume* (X, d). Viele Eigenschaften können wir auf den Grundbegriff der *offenen Mengen* zurückführen, insbesondere die *Konvergenz* von Folgen in X (C3A) und die *Stetigkeit* von Abbildungen $f : X \to Y$ (C3G), später ebenso die Begriffe *Zusammenhang* und *Kompaktheit*. Die dabei wesentlichen Eigenschaften (O1–3) des Systems $\mathcal{T}$ aller offenen Mengen in (X, d) haben wir in Satz C2M wie folgt zusammengefasst:

O1: Die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind offen.
O2: Sind $U_1, \dots, U_n$ offen, dann auch $U_1 \cap \dots \cap U_n$.
O3: Sind alle U_i offen für $i \in I$, dann auch $\bigcup_{i \in I} U_i$.

Für die Topologie verzichten wir nun auf die Messung von Abständen in X und legen allein ein System $\mathcal{T}$ offener Mengen zugrunde (D1A). Die grundlegenden Eigenschaften (O1–3) werden nun zu Axiomen: Ein *topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ besteht aus einer Trägermenge X und einem System $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen, das (O1–3) erfüllt.

Dies ist eine kühne Verallgemeinerung! Es ist bemerkenswert, dass man aus so wenig Struktur noch eine respektable Theorie aufbauen kann.

Mit einem *Skalarprodukt* können wir Geometrie betreiben, etwa Winkel und Längen messen. Eine *Norm* misst keine Winkel, aber noch die Länge von Vektoren; das genügt zur Differentialrechnung. Bei einer *Metrik* verlangen wir keine Vektorraumstruktur mehr, aber wir können noch Isometrien betrachten oder Dehnungsbedingungen. Bei einer *Topologie* schließlich können wir nicht mehr von Abständen sprechen, aber alle topologischen Begriffe stehen zur Verfügung: Konvergenz, Stetigkeit, Homöomorphie, Kompaktheit, Zusammenhang, etc. lassen sich rein topologisch formulieren, das heißt allein mit Hilfe der offenen Mengen.

Die wichtigsten Beispiele topologischer Räume sind die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ und ihre Teilräume $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Diese spielen bereits in der Analysis eine herausragende Rolle und werden auch uns im Folgenden als Modelle dienen, als Fundament und Illustration.

Darüber hinaus eröffnet sich uns eine Fülle weiterer Beispiele: metrische Topologien und Ordnungstopologien, diskrete und indiskrete Topologien, Topologien auf Funktionenräumen, Teilräume und Quotienten, Summen und Produkte, etc. Als *Werkstücke* illustrieren diese zunächst den Begriff der Topologie; im weiteren Verlauf werden sie uns auch als *Werkzeuge* für topologische Untersuchungen dienen.

Metrische Räume sind eine reichhaltige und nützliche Struktur; wo sie uns zur Verfügung steht, werden wir daraus Nutzen ziehen. Wie wir noch sehen werden, sind topologische Räume jedoch wesentlich allgemeiner als metrische Räume und erlauben flexiblere Konstruktionen. Diese größere Flexibilität ist die Hauptmotivation, topologische Räume zu betrachten: Gelegentlich existiert keine geeignete Metrik, oder sie wäre nur mühsam zu konstruieren, oder sie ist gänzlich nebensächlich. Für all diese Fälle bietet die Topologie einen nützlichen allgemeinen Rahmen.

Wozu und warum gerade diese Axiome?

In der Maßtheorie betrachtet man σ–Algebren auf einer Trägermenge X und verlangt Stabilität unter Komplementen, *abzählbaren* Durchschnitten und *abzählbaren* Vereinigungen (D71). In der Topologie hingegen sind die Axiome nicht symmetrisch: Wie oben motivert verlangen wir Stabilität unter (O2) *endlichen* Durchschnitten und (O3) *beliebigen* Vereinigungen. Dass dies für die weitere Theorie die „richtige" Definition ist, kann letztlich nur die Erfahrung zeigen; die erfolgreichen Anwendungen in diesem und folgenden Kapiteln werden dies ausführlich belegen.

Dürfen wir Bildern vertrauen? Können wir Formeln veranschaulichen? Mathematik umschrieb man einst als *die Lehre von Zahlen und Figuren*. Diese beiden Aspekte sind noch immer grundlegend und höchst aktuell. Insbesondere in der Topologie erweisen sie ihren gegenseitigen Nutzen: Bilder betonen die wesentliche Idee, Formeln liefern die unverzichtbare Präzision. Viele mathematische, insbesondere topologische Argumente lassen sich auf beide Weisen darstellen. Die Kunst besteht darin, beide zu beherrschen und ineinander übersetzen zu können.

Anschaulich oder formal? Am besten beides!

Idealerweise soll die Topologie zur Zweisprachigkeit erziehen! Manchem mag die Topologie allzu anschaulich erscheinen, und ja, die Anschauung und ihre Sprechweisen setzen wir bewusst ein. Es lohnt sich in fast allen Fällen, topologische Argumente mit Bildern zu illustrieren. Allerdings dürfen dekorative Beispiele nicht darüber hinwegtäuschen, dass wir ein solides Handwerk von Sätzen und Beweisen erlernen wollen und dafür eine äußerst präzise Ausdrucksweise benötigen. Anderen wiederum mag die Topologie allzu abstrakt erscheinen, und auch das ist sie ganz bewusst, wie die moderne Mathematik allgemein: Gerade ihre Allgemeinheit und Präzision garantieren vielseitige und effiziente Anwendungen.

Die Spannung zwischen diesen beiden Polen ist durchaus produktiv:

C'est par la logique que l'on prouve
et par l'intuition que l'on découvre.
Henri Poincaré (1854–1912)

Definition D1A: topologischer Raum

Eine **Topologie** auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, für das gilt:

O1: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.

O2: Aus $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ folgt $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}$. (Für $n = 0$ also $X \in \mathcal{T}$.)

O3: Aus $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$. (Für $I = \emptyset$ also $\emptyset \in \mathcal{T}$.)

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt dann ein **topologischer Raum** mit **Trägermenge** X und **Topologie** $\mathcal{T}$. Die Elemente $x \in X$ nennen wir **Punkte** des Raumes.

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt eine Teilmenge $U \subseteq X$ **offen**, falls $U \in \mathcal{T}$ gilt, und $A \subseteq X$ **abgeschlossen**, falls ihr Komplement offen ist, $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

$$\mathcal{T} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{T}^c := \{\, A = X \setminus O \mid O \in \mathcal{T} \,\}$$

Die abgeschlossenen Mengen sind komplementär zu den offenen, somit stabil unter A2: endlichen Vereinigungen und A3: beliebigen Schnitten.

⚠ Die Trägermenge X allein bestimmt noch nicht die Topologie $\mathcal{T}$! Wir sagen „der Raum X“ nur, wenn die Topologie $\mathcal{T}$ im Kontext klar ist.

Diskrete und indiskrete Topologie

Beispiel D1b: diskrete Topologie

Auf jeder Menge X ist $\mathscr{T} = \mathfrak{P}(X)$ eine Topologie. Wir nennen sie die **diskrete Topologie**. In dieser Topologie ist jede Teilmenge von X offen (und abgeschlossen). Dies ist die größte, also feinste Topologie auf X.

Beispiel D1c: indiskrete Topologie

Auf jeder Menge X ist $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie. Wir nennen sie die **indiskrete Topologie**. In dieser sind nur die Teilmengen $\emptyset$ und X offen (und abgeschlossen). Dies ist die kleinste, also gröbste Topologie auf X.

Kleinste Beispiele: Auf $X = \emptyset$ ist $\mathscr{T} = \{\emptyset\}$ die einzige Topologie. Ebenso auf der Menge $X = \{a\}$ ist $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$ die einzige Topologie.

Auf der Menge $X = \{a \neq b\}$ gibt es zwischen der indiskreten $\{\emptyset, X\}$ und der diskreten $\mathfrak{P}(X)$ genau zwei Topologien: $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\{\emptyset, \{b\}, X\}$.

$n = \sharp X$	0	1	2	3	4	5	6	7
t_n	1	1	4	29	355	6942	209527	9535241

Metrische Topologie und Metrisierbarkeit

Beispiel D1D: metrische Topologie $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}(X,d)$

Jede Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ auf X definiert ihre **metrische Topologie** $\mathscr{T}(X,d) := \left\{ O \subseteq X \,\middle|\, \forall a \in O\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in X : d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in O \right\}$.

Dies ist tatsächlich eine Topologie, dank C2M. Übung zur Wiederholung!

Beispiel: Die Menge $X = \mathbb{R}^n$, allgemein jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, trägt die **euklidische Topologie** $\mathscr{T}_d$ dank der euklidischen Metrik $d(x,y) = |x-y|$.

Definition D1E: metrisierbare Topologie

Eine Topologie $\mathscr{T}$ auf der Menge X heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ existiert, für die $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}$ gilt.

Beispiele: Die diskrete Topologie $\mathscr{T} = \mathfrak{P}(X)$ auf X ist metrisierbar, etwa durch die diskrete Metrik (C2C) mit $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$.

Die indiskrete Topologie $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$ auf X mit $\sharp X \geq 2$ wird von keiner Metrik induziert, denn $\mathscr{T}$ fehlt hierzu die Hausdorff–Eigenschaft (C2O).

Vergleich von Topologien

Definition D1F: Vergleich von Topologien

Sind $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2 \subseteq \mathfrak{P}(X)$ Topologien auf X, dann heißt $\mathscr{T}_2$ **feiner** als $\mathscr{T}_1$ und entsprechend $\mathscr{T}_1$ **gröber** als $\mathscr{T}_2$. Gilt dabei strikte Inklusion $\mathscr{T}_1 \subsetneq \mathscr{T}_2$, so heißt $\mathscr{T}_2$ **echt feiner** als $\mathscr{T}_1$ und entsprechend $\mathscr{T}_1$ **echt gröber** als $\mathscr{T}_2$.

Einfachste Beispiele:

- Auf jeder Menge X ist die diskrete Topologie $\mathfrak{P}(X)$ die feinste und die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ die gröbste aller Topologien auf X.
- Auf $X = \{a \neq b\}$ haben wir außer $\{\emptyset, X\}$ und $\mathfrak{P}(X)$ zwei Topologien: $\mathscr{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\mathscr{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ sind unvergleichbar.

Interessante Beispiele aus der Analysis (C3K): Sei $1 \leq p < q \leq \infty$.

- Auf $\mathbb{R}^n$ sind die ℓ^p–Topologie und die ℓ^q–Topologie gleich.
- Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die ℓ^p–Topologie echt feiner als die ℓ^q–Topologie.
- Auf $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ ist die L^q–Topologie echt feiner als die L^p–Topologie.
- Auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind die L^p– und die L^q–Topologie unvergleichbar.

Koendliche und koabzählbare Topologie

$$\mathcal{T}_{\text{indiskret}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{koendlich}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{koabzählbar}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{diskret}}$$

← gröber: weniger offene Mengen

feiner: mehr offene Mengen →

Beispiel D1h: koendliche Topologie

In der **koendlichen Topologie** auf der Grundmenge X sind die abgeschlossenen Mengen genau X und alle endlichen Teilmengen:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\, O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ ist endlich} \,\}$$

Diese Topologie ist genau dann diskret, wenn X endlich ist.

Beispiel D1i: koabzählbare Topologie

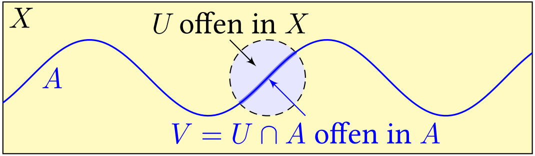
In der **koabzählbaren Topologie** auf der Grundmenge X sind die abgeschlossenen Mengen genau X und alle abzählbaren Teilmengen:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\, O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ ist abzählbar} \,\}$$

Diese Topologie ist genau dann diskret, wenn X abzählbar ist.

Teilraumtopologie: Definition

☺ Wir konstruieren neue topologische Räume aus alten.



Definition D1K: Teilraumtopologie aka Spurtopologie

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Inklusion $\iota_A : A \hookrightarrow X$. Die **Teilraumtopologie** von A in $(X, \mathcal{T}_X)$ ist

$$\mathcal{T}_A := \left\{ A \cap U = \iota_A^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \mathcal{T}_X \right\} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X.$$

Wir nennen $(A, \mathcal{T}_A)$ den **Teilraum** von $(X, \mathcal{T}_X)$ auf der Teilmenge $A \subseteq X$.

Soweit nichts anderes vereinbart wird, statten wir jede Teilmenge $A \subseteq X$ mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A$ aus. Statt „$V \subseteq A$ ist offen / abgeschlossen im Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$“ sagen wir kurz „V ist offen / abgeschlossen in A“.

Teilraumtopologie: Eigenschaften

Beispiele: (1) Für $O \subseteq X$ offen, $O \in \mathcal{T}_X$, gilt $\mathcal{T}_O = \{ U \in \mathcal{T}_X \mid U \subseteq O \}$.
(2) Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ diskret/indiskret/koendlich/koabzählbar, so auch $(A, \mathcal{T}_A)$.
(3) Die Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ ist die euklidische (E2i). Allgemein:

$$\begin{tikzcd}
(X, d_X) \arrow[r, mapsto, "\text{metrische Topologie}"] & (X, \mathcal{T}_X) \\
(A, d_A) \arrow[r, mapsto, "\text{metrische Topologie}"] \arrow[u, hook, "\text{metrischer Teilraum}"] & (A, \mathcal{T}_A) \arrow[u, hook, "\text{topologischer Teilraum}"']
\end{tikzcd}$$

$$B_{(A,d_A)}(a, \varepsilon) = A \cap B_{(X,d_X)}(a, \varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{T}_A = \mathcal{T}(A, d_A)$$

Satz D1l: Teilräume von metrischen Räumen

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum mit Topologie $\mathcal{T}_X := \mathcal{T}(X, d_X)$ (D1d).
Die Teilraummetrik d_A auf A (C2e) induziert die Topologie $\mathcal{T}(A, d_A)$.
Diese stimmt überein mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A := \iota_A^* \mathcal{T}_X$ (D1k).
Ist also der Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ metrisierbar, dann auch jeder Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$.

Ordnungstopologie

Definition D1M: Ordnungstopologie $\mathcal{T}_< = \mathcal{T}(X,<)$

Jede Totalordnung $<$ auf X definiert die zugehörige **Ordnungstopologie** $\mathcal{T}_< = \mathcal{T}(X,<) := \{\, O \subseteq X \,\big|\, \forall x \in O \;\; \exists a,b \in X \sqcup \{\pm\infty\} : x \in\,]a,b[\, \subseteq O \,\}$.

Beispiele: (1) Die Ordnungstopologie auf $X = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ ist die euklidische.

(2) In $(\mathbb{R}, \leq)$ sind $A = \{-1,\, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{0,\, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ordnungsisomorph, haben also dieselbe Ordnungstopologie. Jedoch sind ihre metrisch-euklidischen Teilraumtopologien in $\mathbb{R}$ sehr verschieden!

$$
\begin{tikzcd}
(X,<) \arrow[rr, mapsto, "\text{Ordnungstopologie}"] & & (X,\mathcal{T}_X) \\
(A,<) \arrow[u, hook, "\substack{\text{Ordnungs-}\\\text{Teilraum}}"'] \arrow[r, mapsto, "\text{Ord'top.}"] & (A,\mathcal{T}(A,<)) & (A,\mathcal{T}_A) \arrow[l, "\neq"'] \arrow[u, hook, "\substack{\text{topologischer}\\\text{Teilraum}}"']
\end{tikzcd}
$$

(3) Für $A \subseteq X$ gilt $\mathcal{T}(A,<) \subseteq \mathcal{T}_A$, aber nicht immer Gleichheit: Im Beispiel (2) ist $(A, \mathcal{T}_A)$ diskret, $(A, \mathcal{T}(A,<))$ jedoch nicht.

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Definition

Definition D2A: stetige Abbildungen

Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume. Sie heißt **stetig**, wenn zu jeder offenen Menge V im Zielraum $(Y, \mathcal{T}_Y)$ das Urbild $f^{-1}(V)$ im Startraum $(X, \mathcal{T}_X)$ offen ist. Gleiches gilt für abgeschlossen.

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textbf{stetig} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{T}_Y^c : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X^c \end{aligned}$$

Die Menge aller stetigen Abbildungen bezeichnen wir mit

$$\mathscr{C}(X, \mathcal{T}_X; Y, \mathcal{T}_Y) := \{\, f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ stetig} \,\}.$$

Wir nutzen $\mathscr{C}(X, Y)$, wenn die Topologien aus dem Kontext klar sind.

Hingegen nennen wir f **offen**, wenn zu jeder offenen Menge U in $(X, \mathcal{T}_X)$ die Bildmenge $f(U)$ in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ offen ist. Entsprechend **abgeschlossen**:

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textbf{offen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{T}_X : f(U) \in \mathcal{T}_Y \\ f \text{ ist } \textbf{abgeschlossen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{T}_X^c : f(A) \in \mathcal{T}_Y^c \end{aligned}$$

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Kategorie

Bemerkung D2B: Stetige Abbildungen bilden eine Kategorie.

Wir betrachten topologische Räume $(X, \mathscr{T}_X)$ und $(Y, \mathscr{T}_Y)$ und $(Z, \mathscr{T}_Z)$. Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{T})$ ist stetig. Sind $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ und $g : (Y, \mathscr{T}_Y) \to (Z, \mathscr{T}_Z)$ stetig, dann ist auch $g \circ f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Z, \mathscr{T}_Z)$.

Wir erhalten die Kategorie $\mathtt{Top}$: Ihre Objekte sind topologische Räume $X, Y, Z, \dots$. Die Morphismenmenge $\mathscr{C}(X, Y)$ besteht aus allen stetigen Abbildungen $X \to Y$. Die Komposition $\circ : \mathscr{C}(Y, Z) \times \mathscr{C}(X, Y) \to \mathscr{C}(X, Z)$ ist die für Abbildungen übliche Hintereinanderausführung.

Ebenso bilden topologische Räume und ihre offenen Abbildungen eine Kategorie, ebenso abgeschlossene Abbildungen. Weitere Beispiele:

- Mengen (mit Struktur) und ihre (strukturerhaltenden) Abbildungen.
- Vektorräume über einem Körper K und ihre linearen Abbildungen.
- Offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ihre differenzierbaren Abbildungen.

In Kapitel H diskutieren wir ausführlich die Sprache der Kategorien.

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Beispiele

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume mit den induzierten metrischen Topologien $\mathscr{T}_X$ auf X und $\mathscr{T}_Y$ auf Y. Satz C3G besagt:

Genau dann ist $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ stetig im metrischen Sinne (C3E), wenn $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ stetig ist im topologischen Sinne (D2A).

🙂 Stetigkeit, Offenheit und Abgeschlossenheit sind unabhängig:

Bei diskretem Startraum ist jede Abbildung $f : (X, \mathfrak{P}X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ stetig, aber i.A. weder offen noch abgeschlossen, z.B. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : k \mapsto 2^{-k}$.

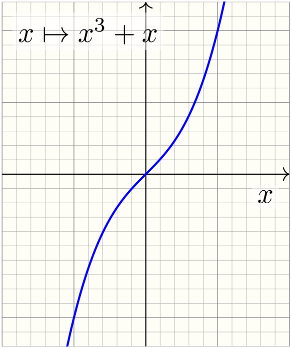
Bei diskretem Zielraum ist jede Abbildung $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathfrak{P}Y)$ offen und abgeschlossen, aber i.A. nicht stetig, z.B. $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$.

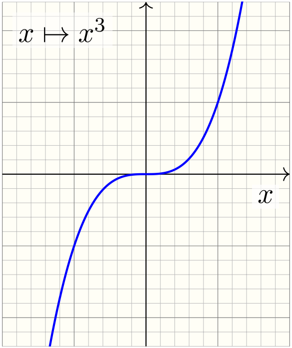
Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan(x)$ ist stetig und offen, aber nicht abgeschlossen, denn $f(\mathbb{R}) = \left]-\pi/2, +\pi/2\right[$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

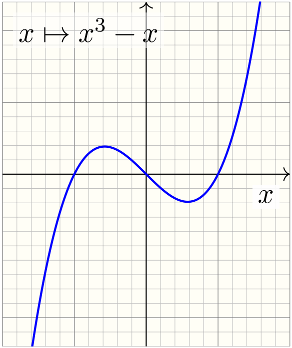
Die Einschränkung $h : \mathbb{R} \to \left]-\pi/2, +\pi/2\right[$ ist ein Homöomorphismus. Hier ist der Zielraum maßgeblich, wie so oft in der Mathematik!

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Beispiele

Zu $a \in \mathbb{R}$ ist $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + ax$ stetig und abgeschlossen (später leicht dank Einpunktkompaktifizierung), aber offen nur für $a \geq 0$, dann sogar ein Homöomorphismus. Für $a > 0$ ist f_a ein Diffeomorphismus.







Für $a < 0$ hat f_a ein lokales Maximum $x_0 < 0$ bzw. Minimum $x_1 > 0$. Darum ist $U =]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subseteq \mathbb{R}$ offen, das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ aber nicht!

Stetige Abbildungen: Homöomorphismen

Definition D2A: Homöomorphismen

Ein **Homöomorphismuspaar** $(f, g) : (X, \mathscr{T}_X) \cong (Y, \mathscr{T}_Y)$ besteht aus stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

In diesem Fall nennen wir die Räume $(X, \mathscr{T}_X)$ und $(Y, \mathscr{T}_Y)$ **homöomorph**, geschrieben $(X, \mathscr{T}_X) \cong (Y, \mathscr{T}_Y)$ oder kurz $X \cong Y$, falls beide Topologien aus dem Kontext klar sind, etwa $\mathbb{R} \cong \left]-1, 1\right[$ mit euklidischen Topologien.

Erinnerung / Übung: Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation. Das gilt allgemein für Isomorphie (etwa strukturerhaltende Bijektion).

Pars pro toto: Die Kurzschreibweise $X \cong Y$ ist bequem, aber gefährlich. Die Ausführung $(f, g) : (X, \mathscr{T}_X) \cong (Y, \mathscr{T}_Y)$ ist präzise und informativ!

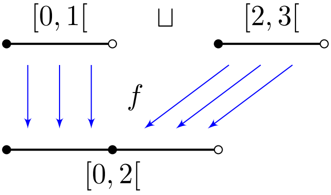
Genau dann definiert $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ einen Homöomorphismus, wenn f stetig und bijektiv ist und auch die Umkehrfunktion f^{-1} stetig ist.

Bemerkung: Für jede Bijektion $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ sind äquivalent:
(1) $f^{-1} : Y \to X$ ist stetig, (2) f ist offen, (3) f ist abgeschlossen.

Stetige Bijektionen sind noch keine Homöomorphismen!

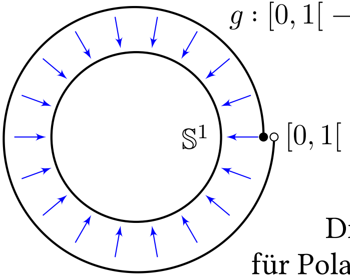
Bemerkung D2c: bijektiv und stetig

Ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so kann f^{-1} dennoch unstetig sein!



Bijektiv und stetig, aber nicht offen!

$g : [0,1[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$



Dies nutzen wir für Polarkoordinaten!

⚠ Wir nutzen hier die euklidischen (Teilraum-)Topologien. Bezüglich der Ordnungstopologien ist f ein Homöomorphismus. Bezüglich der französischen Eisenbahnmetrik d_{SNCF} auf $\mathbb{R}^2$ ist g offen.

Universelles Gegenbeispiel: Die Identität $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ ist genau dann stetig, wenn $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$ gilt, genau dann offen, wenn $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ gilt.

Beispiel D2E: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Auf $\mathscr{C}^k = \mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ betrachten wir die linearen Abbildungen

$$D : \mathscr{C}^1 \to \mathscr{C}^0 : F \mapsto f, \qquad f(x) = \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x},$$
$$I : \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 : f \mapsto F, \qquad F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dank HDI gilt $DI(f) = f$ und $ID(F) = F - F(a)$. Wir erhalten so

$$(I,D) : \mathscr{C}^0 \cong \mathscr{C}^1_0 \quad := \{\, F \in \mathscr{C}^1 \mid F(a) = 0 \,\}.$$

Bezüglich der Supremumsnormen ist I stetig, genauer gilt

$$|F(x)| = \left|\int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{t=a}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le (b-a)\cdot|f|_{[a,b]}.$$

Leider ist D nicht stetig, wie die Folge $G_n(x) = \sin(n^2x)/n$ in $\mathscr{C}^1$ zeigt:
Für große n gilt $|G_n|_{[a,b]} = 1/n \searrow 0$, aber $|G_n'|_{[a,b]} = n \nearrow \infty$. Was tun?
Auf $\mathscr{C}^1$ verfeinern wir die Supremumsnorm zu $|F|_{\mathscr{C}^1} := |F|_{[a,b]} + |F'|_{[a,b]}$.

Den HDI kennen Sie schon lange, sogar schon aus der Schule, richtig erklärt und bewiesen aus dem ersten Semester Analysis. Auch Beispiele wie $G_n(x) = \sin(n^2 x)/n$ sind Ihnen vertraut. Griffiger Slogan: *Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!*

Dieses Beobachtung motiviert, auf den Räumen $\mathscr{C}^k$ nicht einfach nur die Supremumsnorm zu betrachten: Diese ignoriert alle Ableitungen! Für $f \in \mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ nutzt man daher als $\mathscr{C}^k$–Norm

$$|f|_{\mathscr{C}^k} = \sum_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]} \quad \text{oder} \quad \Bigl(\sum_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]}^p\Bigr)^{1/p} \quad \text{oder} \quad \max_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]}.$$

Dies sind Normen auf $\mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ und untereinander äquivalent.

Verallgemeinert für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p \le \infty$ erhalten wir so die Sobolev–Normen und durch Vervollständigung die Sobolev–Räume. Sie sind Grundlage für die Lösung partieller Differentialgleichungen, sie dienen als natürliche Definitionsbereiche der Differentialoperatoren und ebenso zur Fehlerabschätzungen numerischer Näherungsverfahren.

Definition D3A: Umgebung eines Punktes

Sei $(X,\mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $a \in X$ ein Punkt. Eine Menge $O \subseteq X$ heißt **offene Umgebung von a** in $(X,\mathscr{T})$, wenn $a \in O \in \mathscr{T}$ gilt.

Das System aller offenen Umgebungen bezeichnen wir mit

$$\mathscr{U}_a^\circ(X,\mathscr{T}) := \{\, O \in \mathscr{T} \;|\; a \in O \,\}.$$

Allgemeiner nennen wir $U \subseteq X$ eine **Umgebung von a** in $(X,\mathscr{T})$, wenn U eine offene Umgebung umfasst, wenn also $O \in \mathscr{T}$ existiert mit $a \in O \subseteq U$.

Das System aller Umgebungen von a in $(X,\mathscr{T})$ bezeichnen wir mit

$$\mathscr{U}_a(X,\mathscr{T}) := \{\, U \subseteq X \;|\; \exists O \in \mathscr{T} : a \in O \subseteq U \,\}.$$

Ebenso definieren wir (offene) Umgebungen einer Menge $M \subseteq X$.

Beispiel: In $(\mathbb{R},\leq)$ ist $]s,t[$ mit $s < a < t$ eine offene Umgebung von a. Auch $[s,t]$ sowie $[s,t[$ und $]s,t]$ sind Umgebungen von a, aber nicht offen.

Offene Mengen und Umgebungen

Proposition D3c: offene Mengen und Umgebungen

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte $x \in U$ ist.

Beweis: „$\Rightarrow$": Ist U offen in $(X, \mathcal{T})$, dann ist U Umgebung jedes Punktes $x \in U$ nach Definition D3a. „$\Leftarrow$": Ist $U \subseteq X$ eine Umgebung jedes Punktes $x \in U$, dann existiert zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x \subseteq U$. Somit ist $U = \bigcup_{x \in U} O_x$ offen dank (O3) in D1a. $\boxed{\text{QED}}$

Definition D3e: Umgebungsbasis

Eine Familie $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a$ heißt **Umgebungsbasis** von a im Raum $(X, \mathcal{T})$, wenn jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_a$ eine Basisumgebung $V \in \mathcal{B}_a$ enthält:

$$\mathcal{U}_a \stackrel{!}{=} \left\{ U \subseteq X \,\middle|\, \exists V \in \mathcal{B}_a : V \subseteq U \right\}.$$

Somit bestimmt $\mathcal{B}_a$ das gesamte Umgebungssystem $\mathcal{U}_a$ von a in $(X, \mathcal{T})$, die Basisumgebungen $V \in \mathcal{B}_a$ *erzeugen* alle Umgebungen $U \in \mathcal{U}_a$.

Umgebungsbasen eines Punktes

Beispiele: Ein Punkt $a \in X$ erlaubt (i.A. viele) Umgebungsbasen:

Das System $\mathscr{B}_a := \mathscr{U}_a$ *aller* Umgebungen ist eine UBasis von a in $(X, \mathscr{T})$, ebenso das System $\mathscr{B}'_a := \mathscr{U}^\circ_a$ aller *offenen* Umgebungen von a.

Im metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Bälle (C2L) eine UBasis, $\mathscr{B}_a = \{\, B(a, r) \mid r \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$, ebenso $\mathscr{B}'_a = \{\, B(a, r_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ für $r_n \searrow 0$.
Die abgeschlossenen Bälle $\{\, \bar{B}(a, r_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ bilden ebenso eine UBasis.
Im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ sind dies sogar kompakte Umgebungen.

Im diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist $\mathscr{B}_a = \{\{a\}\}$ eine UBasis von $a \in X$.
Genau dann ist $\mathscr{B}'_a \subseteq \mathscr{U}_a$ eine UBasis von a, wenn $\mathscr{B}_a \subseteq \mathscr{B}'_a$ gilt.

Im indiskreten Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist $\mathscr{B}_a = \{X\}$ die einzige UBasis von a.
Das ist die einzige Topologie, für die alle UBasen eindeutig sind.

Für $a \in \mathbb{R}$ bilden die Intervalle die UBasis $\mathscr{B}_a = \{\,]s, t[\mid s < a < t \text{ in } \mathbb{R} \,\}$, ebenso $\mathscr{B}'_a = \{\,]s_n, t_n[\mid n \in \mathbb{N} \,\}$ für monotone Folgen $s_n \nearrow a \swarrow t_n$.

Ist $(X, <)$ eine total geordnete Menge, dann bilden die Intervalle $]s, t[$ mit $s < a < t$ und $s, t \in \hat{X} = X \sqcup \{\pm\infty\}$ eine UBasis von a im Raum $(X, \mathscr{T}_<)$.

Das erste Abzählbarkeitsaxiom

Definition D3F: das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **erstabzählbar im Punkt** $a \in X$, wenn er eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$ besitzt. Gilt dies in jedem Punkt $a \in X$, so heißt $(X, \mathcal{T})$ **erstabzählbar**.

Beispiel: Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist erstabzählbar dank $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$, ebenso jeder indiskrete Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ dank $\mathcal{B}_a = \{X\}$.

Beispiel D3G: Jeder metrische Raum ist erstabzählbar.

Jeder metrische Raum (X, d) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA): Zu $a \in X$ sind die Bälle $B(a, 2^{-k})$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsbasis.

Anwendung: Auf jeder überabzählbaren Menge X ist die koendliche / koabzählbare Topologie nicht erstabzählbar, somit nicht metrisierbar.

Bemerkung: Sei $\{ V_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ eine UBasis von a in $(X, \mathcal{T})$. Gemäß D3A existiert $V_n^\circ \in \mathcal{T}$ mit $a \in V_n^\circ \subseteq V_n$, also eine offene UBasis $\{ V_n^\circ \mid n \in \mathbb{N} \}$. Für $U_n := V_0^\circ \cap \dots \cap V_n^\circ$ ist auch $\{ U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots \}$ eine UBasis.

Konvergenz von Folgen: Definition

Definition D3I: Konvergenz und Häufungspunkte

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis, etwa die triviale Wahl $\mathcal{B}_a = \mathcal{U}_a$.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Raum $(X,\mathcal{T})$ **konvergiert** gegen $a \in X$, wenn jede Umgebung U von a in $(X,\mathcal{T})$ schließlich alle Folgenglieder enthält.

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} : x_n \in U \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_a\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} : x_n \in U \end{aligned}$$

Schwächer heißt $a \in X$ **Häufungspunkt** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn jede Umgebung U von a in $(X,\mathcal{T})$ unendlich viele Folgenglieder enthält:

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\in N} \propto a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}_{\ge m} : x_n \in U \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_a\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}_{\ge m} : x_n \in U \end{aligned}$$

Statt „$x_n \to a$“ schreibt man auch „$\lim x_n = a$“; das kann gefährlich sein. Ehrlicher wäre die Schreibweise als Menge $\operatorname{Lim} x_n := \{\, a \in X \mid x_n \to a \,\}$.

Konvergenz von Folgen: Beispiele

Beispiele: In jedem metrischen Raum (X, d) ist die Konvergenz $x_n \to a$ bezüglich der Metrik d (C3A) und der metrischen Topologie $\mathcal{T}_d$ (D3I) gleichbedeutend dank der Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \{\, B(a, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$.

In $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit der Ordnungstopologie gilt $x_n \to +\infty$ genau dann, wenn zu jeder Schranke $s \in \mathbb{R}$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n > s$ für alle $n \geq m$ gilt. Entsprechendes gilt für $x_n \to -\infty$.

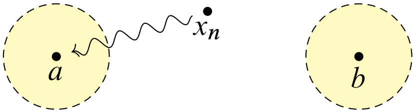
Im diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist $\{a\}$ offen und somit eine Umgebung. Hier konvergieren daher nur die schließlich konstanten Folgen.

Im indiskreten Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist die Menge X die einzige Umgebung. Hier konvergiert daher jede Folge gegen jeden Punkt („chaotisch“).

Definition D3J: Hausdorff–Eigenschaft

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **hausdorffsch** (T_2) oder **separiert**, wenn zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X disjunkte Umgebungen existieren, das heißt, es gibt U, V mit $a \in U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ sowie $U \cap V = \emptyset$.

Hausdorff–Eigenschaft und eindeutige Grenzwerte



Satz D3K: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, dann hat jede Folge in $(X, \mathcal{T})$ höchstens einen Grenzwert. Die Umkehrung gilt, falls $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar ist.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $x_n \to a$. Zu $b \neq a$ existieren dank Hausdorff $U \in \mathcal{U}_a$ und $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \to a$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq m$. Folglich gilt $x_n \notin V$, somit $x_n \not\to b$.

„$\Leftarrow$": Seien a, b nicht separiert in $(X, \mathcal{T})$, das heißt, je zwei Umgebungen von a und b schneiden sich. Ist $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar, so existiert eine UBasis $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ von a und $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ von b. Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x_n \in U_n \cap V_n$. Es folgt $x_n \to a$ und $x_n \to b$, also $a = b$. $\boxed{\text{QED}}$

Hausdorff–Eigenschaft und eindeutige Grenzwerte

⚠ Auf Erstabzählbarkeit können wir in Satz D3K nicht verzichten!

Beispiel: Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ die koabzählbare Topologie (D1I). Hierin gilt $x_n \to a$ genau dann, wenn die Folge (x_n) schließlich konstant ist, also ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n = a$ für alle $n \ge m$ gilt. Ist X überabzählbar, dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht hausdorffsch.

⚠ Der Folgenbegriff ist also zu schwach, um Hausdorff zu garantieren. Das liegt an der restriktiven Indexmenge $\mathbb{N}$. Solche Probleme lösen wir, indem wir Folgen verallgemeinern zu **Netzen** (D8D) oder **Filtern** (D8L).

☺ Für jeden metrischen Raum (X, d) ist die Topologie $\mathcal{T}_d$ hausdorffsch (C2O) und erstabzählbar (D3G). Diese hilfreichen Eigenschaften sind wir gewohnt vom Raum $\mathbb{R}^n$. Allgemein müssen wir sie prüfen oder fordern.

Übung: Ist die Ordnungstopologie $\mathcal{T}$ auf $(X, <)$ hausdorffsch?

Lösung: Ja. Beweis: Seien $a < b$ in $(X, <)$. Wenn es ein $z \in X$ mit $a < z < b$ gibt, so sind $a \in X_{<z} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>z} \in \mathcal{T}$ disjunkte offene Umgebungen; andernfalls genügen $a \in X_{<b} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>a} \in \mathcal{T}$.

Stetigkeit und Offenheit von Abbildungen

Definition D3N: Stetigkeit und Offenheit in einem Punkt

Sei $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume, $x\mapsto y$, sowie $\mathscr{B}_x\subseteq\mathscr{U}_x(X,\mathscr{T}_X)$ und $\mathscr{B}_y\subseteq\mathscr{U}_y(Y,\mathscr{T}_Y)$ Umgebungsbasen.

$$\begin{aligned}
f \text{ ist \textbf{stetig in} } x \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall V\in\mathscr{U}_y : f^{-1}(V)\in\mathscr{U}_x\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall V\in\mathscr{B}_y : f^{-1}(V)\in\mathscr{U}_x\\
f \text{ ist \textbf{offen in} } x \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U\in\mathscr{U}_x : f(U)\in\mathscr{U}_y\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall U\in\mathscr{B}_x : f(U)\in\mathscr{U}_y
\end{aligned}$$

Beispiel: Für metrische Räume (X,d_X) und (Y,d_Y) nutzen wir UBasen der offenen Bälle. Wir erhalten damit sofort die übliche ε–δ–Definition:

- Genau dann ist $f:X\to Y$ stetig in $x\mapsto y$, wenn zu jedem $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $f(B(x,\delta))\subseteq B(y,\varepsilon)$ gilt.
- Genau dann ist $f:X\to Y$ offen in $x\mapsto y$, wenn zu jedem $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$ ein $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $B(y,\varepsilon)\subseteq f(B(x,\delta))$ gilt.

Lokale Homöomorphismen

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}_X) \arrow[r, "f"', "\text{stetig}"] & (Y, \mathcal{T}_Y) \\
(U, \mathcal{T}_U) \arrow[u, hook, "\text{inc}"] \arrow[r, "f|_U^V", "\text{homöo}"'] & (V, \mathcal{T}_V) \arrow[u, hook, "\text{inc}"']
\end{tikzcd}$$

Definition D3o: lokaler Homöomorphismus

Wir nennen $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ einen **lokalen Homöomorphismus um $x \in X$** mit Bild $y = f(x)$, falls $U \in \mathcal{U}_x^\circ(X, \mathcal{T}_X)$ und $V \in \mathcal{U}_y^\circ(Y, \mathcal{T}_Y)$ existieren mit $f(U) = V$, sodass $f|_U^V : U \to V$ ein Homöomorphismus ist. Gilt dies um jeden Punkt $x \in X$, so ist f ein **lokaler Homöomorphismus**.

Beispiele: Jeder lokale Homöomorphismus ist stetig und offen.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist um $x \neq 0$ ein lokaler Homöo, lokale Umkehrung $y \mapsto \pm\sqrt{y}$. In $x = 0$ ist f nicht offen, auch nicht lokal injektiv.

Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ ist stetig und offen, auch in $z = 0$. Um jeden Punkt $z \neq 0$ ist sie ein lokaler Homöo, nicht jedoch in $z = 0$. Lokale Umkehrfunktionen sind Zweige der komplexen Wurzelfunktion.

Stetigkeit vs Folgenstetigkeit

Satz D3p: Stetigkeit vs Folgenstetigkeit

Ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig in $a \in X$, dann sendet f jede konvergente Folge $(x_n) \to a$ in X auf eine konvergente Folge $(f(x_n)) \to b = f(a)$ in Y.

Die Umkehrung gilt, falls a in $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare UBasis besitzt.

Ist der Startraum $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar, zum Beispiel metrisierbar, dann ist die Stetigkeit von f äquivalent zur Folgenstetigkeit.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Zu $V \in \mathcal{U}_b$ gilt $U := f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_a$. Zu $x_n \to a$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq m$, somit $f(x_n) \in V$. Also $f(x_n) \to f(a)$.

„$\Leftarrow$“: Ist f in a nicht stetig, so existiert $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U := f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}_a$. Sei $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ eine Umgebungsbasis von a. Für jeden Index $n \in \mathbb{N}$ gilt $U_n \nsubseteq U$, denn andernfalls wäre U eine Umgebung von a. Wir wählen $x_n \in U_n \setminus U$ und erhalten $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to a$ gemäß D3i. Wegen $x_n \notin U$ gilt $f(x_n) \notin V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f(x_n) \not\to f(a)$. $\boxed{\text{QED}}$

Stetigkeit vs Folgenstetigkeit

⚠ Auf Erstabzählbarkeit können wir in Satz D3P nicht verzichten!

Beispiel: Sei X überabzählbar, etwa $X = \mathbb{R}$. Hierauf sei $\mathscr{T} = \mathfrak{P}(X)$ die diskrete Topologie (D1B) und $\mathscr{T}' \subsetneq \mathscr{T}$ die koabzählbare Topologie (D1I). Die identische Abbildung $f : (X, \mathscr{T}') \to (X, \mathscr{T}) : x \mapsto x$ ist nicht stetig, doch folgenstetig: Konvergiert $x_n \to a$ in $(X, \mathscr{T}')$, so ist (x_n) schließlich konstant gleich a. Daher konvergiert $(f(x_n))$ in $(X, \mathscr{T})$ gegen $f(a)$.

⚠ Hier sind Folgen also zu schwach, um die Unstetigkeit zu erkennen. Das liegt an der restriktiven Indexmenge $\mathbb{N}$. Solche Probleme lösen wir, indem wir Folgen verallgemeinern zu **Netzen** (D8D) oder **Filtern** (D8L).

Satz D3S: Konvergenz von Teilfolgen

Wenn eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ gegen a in $(X, \mathscr{T})$ konvergiert, dann ist a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Umkehrung gilt, falls a in $(X, \mathscr{T})$ eine abzählbare UBasis besitzt.

Übung: Führen Sie dies nach obigem Vorbild aus!

Re/Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Satz D3v: Re/Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zu jedem $x\in X$ sei $\mathcal{B}_x\subseteq\mathcal{U}_x(X,\mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis. Diese erfreuen sich folgender Eigenschaften.

UB1: Es gilt $\mathcal{B}_x\ne\emptyset$, und für alle $U\in\mathcal{B}_x$ gilt $x\in U\subseteq X$.

Umgebungen sind stabil unter (paarweisen, also endlichen) Schnitten:

UB2: Zu $U,V\in\mathcal{B}_x$ existiert $W\in\mathcal{B}_x$ mit $W\subseteq U\cap V$.

Jede Umgebung enthält eine offene Umgebung, das heißt ausführlich:

UB3: In jeder Menge $U\in\mathcal{B}_x$ liegt eine Teilmenge V mit $x\in V\subseteq U$, sodass gilt: Zu jedem Punkt $y\in V$ existiert $W\in\mathcal{B}_y$ mit $W\subseteq V$. (D3c)

Erfüllt umgekehrt eine Familie $(\mathcal{B}_x\subseteq\mathfrak{P}X)_{x\in X}$ die Bedingungen (UB1–2), dann definiert sie auf X eine Topologie

$$\mathcal{T}:=\left\{O\subseteq X\;\middle|\;\forall x\in O\;\;\exists U\in\mathcal{B}_x : U\subseteq O\right\}.$$

Die letzte Bedingung (UB3) garantiert $\mathcal{B}_x\subseteq\mathcal{U}_x(X,\mathcal{T})$, somit ist $\mathcal{B}_x$ tatsächlich eine Umgebungsbasis des Punktes x im Raum $(X,\mathcal{T})$.

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

☺ Das ist ein sehr einfaches, doch oft nützliches Konstruktionsprinzip!

Aufgabe: Was ist hier zu zeigen? Zeigen Sie es!
Alles liegt explizit vor, rechnen Sie es sorgfältig nach.

Beweis: Ist $\mathscr{B}_x \subseteq \mathfrak{P}X$ eine Umgebungsbasis des Punktes x in $(X, \mathscr{T})$, dann folgen die Eigenschaften (UB1–3) unmittelbar aus der Definition.

Nehmen wir umgekehrt an, die Familie $(\mathscr{B}_x \subseteq \mathfrak{P}X)_{x \in X}$ erfüllt (UB1–2).
Das so definierte Mengensystem $\mathscr{T} \subseteq \mathfrak{P}X$ erfüllt dann (O1) dank (UB1).
Für (O2) ist nachzuweisen, dass für $U, V \in \mathscr{T}$ auch $W = U \cap V$ in $\mathscr{T}$ liegt.
Zu jedem $x \in W$ existieren $U_x, V_x \in \mathscr{B}_x$ mit $U_x \subseteq U$ und $V_x \subseteq V$.
Dank (UB2) existiert $W_x \in \mathscr{B}_x$ mit $W_x \subseteq U_x \cap V_x \subseteq U \cap V = W$.
Also gilt $W \in \mathscr{T}$. Axiom (O3) ist trivialerweise erfüllt.

Somit ist $\mathscr{T}$ tatsächlich eine Topologie auf X. Die dritte Bedingung (UB3) garantiert $\mathscr{B}_x \subseteq \mathscr{U}_x(X, \mathscr{T})$. Nach Konstruktion von $\mathscr{T}$ ist demnach $\mathscr{B}_x$ eine Umgebungsbasis von x in $(X, \mathscr{T})$. $\boxed{\text{QED}}$

Beispiel D3w: metrische Topologie aus Umgebungsbasen

Jede Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$ definiert eine Topologie $\mathscr{T}_d$ gemäß D1d:
Als Umgebungsbasis jedes Punktes $x \in X$ wählen wir die offenen Bälle,

$$\mathscr{B}_x = \{\, B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}.$$

Die Bedingung (UB1) ist trivialerweise erfüllt, und (UB2) gilt dank

$$B(x, \varepsilon) \cap B(x, \varepsilon') \stackrel{\supseteq}{=} B(x, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Dank Satz D3v erhalten wir daraus die Topologie

$$\mathscr{T}_d = \{\, O \subseteq X \,\big|\, \forall x \in O \;\; \exists B(x, \varepsilon) \in \mathscr{B}_x : B(x, \varepsilon) \subseteq O \,\}.$$

Dank Dreiecksungleichung ist jeder offene Ball offen (C2m), somit gilt auch die letzte Bedingung (UB3), und daher ist $\mathscr{B}_x$ eine Umgebungsbasis des Punktes x im Raum $(X, \mathscr{T}_d)$.

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Beispiel D3x: Ordnungstopologie aus Umgebungsbasen

Jede Totalordnung $<$ auf X definiert eine Topologie $\mathcal{T}_<$ gemäß D1M:

Als Umgebungsbasis jedes Punktes $x \in X$ wählen wir offene Intervalle,

$$\mathcal{B}_x = \{\,]a,b[\mid a,b \in X \sqcup \{\pm\infty\},\ a < x < b \,\}.$$

Trivialerweise gelten (UB1) und (UB3), und (UB2) gilt dank

$$]a,b[\cap]a',b'[\ \stackrel{\supseteq}{=}\ ]\max\{a,a'\}, \min\{b,b'\}[.$$

Dank Satz D3v erhalten wir daraus die Topologie

$$\mathcal{T}_< = \{\, O \subseteq X \,\big|\, \forall x \in O \ \ \exists]a,b[\in \mathcal{B}_x :]a,b[\subseteq O \,\}.$$

🙂 Die Konstruktion einer Topologie aus vorgegebenen UBasen ist oft sehr natürlich und bequem, so wie hier in diesen Beispielen. Wir wollen dies nun auf erste wichtige Funktionenräume anwenden.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Aufgabe: Lässt sich auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die punktweise / kompakte / gleichmäßige Konvergenz topologisieren / metrisieren / normieren? Wir wollen also eine Topologie / Metrik / (Pseudo/Halb)Norm auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ finden, die genau die gewünschte Konvergenz induziert, oder ihre Unmöglichkeit beweisen.

Vorgelegt sei eine Folge reeller Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ punktweise} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to f(x) \\ \Leftrightarrow \quad &\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Zu $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die (x, ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$U(f; x, \varepsilon) := \left\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; |f(x) - g(x)| < \varepsilon \right\}.$$

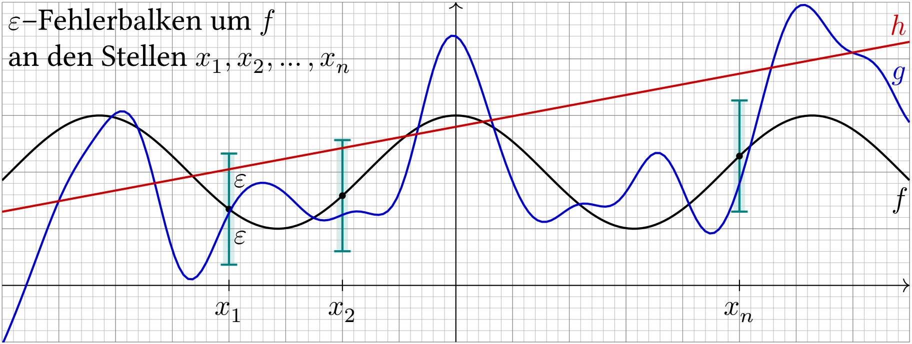
Hier gilt (UB1,3), nicht (UB2). Zu $J = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$U(f; J, \varepsilon) := \left\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; |f - g|_J < \varepsilon \right\} = \bigcap\nolimits_{x \in J} U(f; x, \varepsilon).$$

Diese Umgebungen erfüllen nun sowohl (UB1,3) als auch (UB2), denn

$$U(f; J, \varepsilon) \cap U(f; J', \varepsilon') \quad \supseteq \quad U(f;\, J \cup J',\, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Die Topologie der punktweisen Konvergenz



Definition D4a: Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f; J, \varepsilon)$ definieren gemäß D3v auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ der **punktweisen Konvergenz**: Genau dann ist eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen in $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$, wenn sie zu jedem $f \in O$ eine Umgebung $U(f; J, \varepsilon)$ enthält.

$$\left\{ O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;\middle|\; \forall f \in O \;\; \exists J = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : U(f; J, \varepsilon) \subseteq O \right\}$$

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Satz D4B: Punktweise Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist nicht metrisierbar.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}[x]$ ist hausdorffsch, aber nicht erstabzählbar, also nicht metrisierbar.

Beweis: (T_2) Zu $f \neq g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x_0) - g(x_0)| > 0$ gilt dann $U(f; x_0, \varepsilon) \cap U(g; x_0, \varepsilon) = \emptyset$.

(1AA) Seien $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Umgebungen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $U(f; J_n, \varepsilon_n) \subseteq U_n$ mit $J_n \subseteq \mathbb{R}$ endlich und $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$. Somit ist $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar, aber $\mathbb{R}$ überabzählbar (B2N), also $J \subsetneq \mathbb{R}$.

Wir wählen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus J$ und zeigen $U_n \nsubseteq U(f; x_0, 1)$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $g_n = f + h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|h_n(x_0)| \geq 1$ und $h_n|_{J_n} = 0$. Somit gilt $g_n \in U(f; J_n, \varepsilon_n) \subseteq U_n$, aber $g_n \notin U(f; x_0, 1)$, also $U_n \nsubseteq U(f; x_0, 1)$. Demnach ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Umgebungsbasis von f in $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathscr{T}_{\mathrm{pw}})$. $\boxed{\text{QED}}$

Ist X überabzählbar, so ist $\mathbb{R}^X$ nicht erstabzählbar, also nicht metrisierbar. Hingegen sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ erstabzählbar, sogar metrisierbar, siehe D4E.

Unsere Konstruktion der Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist im Rückblick zwar recht direkt und einfach, doch sie scheint etwas mühselig. Wir fragen uns daher: Geht es auch einfacher, etwa durch eine geeignete Metrik? Die erstaunliche und lehrreiche Antwort ist: Nein!

Wie beweisen wir, dass ein Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht metrisierbar ist? Aufgeben genügt nicht, wir müssen ein Hindernis benennen!

Jede metrische Topologie hat zwei wichtige Eigenschaften: Sie ist hausdorffsch (D3J) und erstabzählbar (D3F).

Diese Kriterien sind also notwendig zur Metrisierbarkeit (D1E): Ist $\mathcal{T}$ nicht hausdorffsch oder nicht erstabzählbar, so auch nicht metrisierbar!

Das erste Kriterium, die Hausdorff–Eigenschaft, ist für $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\mathrm{pw}})$ erfüllt, das zweite Kriterium, die Erstabzählbarkeit, jedoch nicht! Das gilt selbst auf den Teilräumen $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathbb{R}[x]$. Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}[x]$ wird von keiner Metrik induziert.

Wir verallgemeinern dies später zu Produkttopologien.

Gleichmäßige Konvergenz

Gegeben sei eine Folge reeller Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \; \big[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\exists m \in \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} : |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon \big]$$

Gleichmäßige Konvergenz ist die Konvergenz in der Supremumsmetrik:

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad :\Leftrightarrow \quad |f - f_n|_{\mathbb{R}} \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\exists m \in \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \; \big[\forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon \big]$$

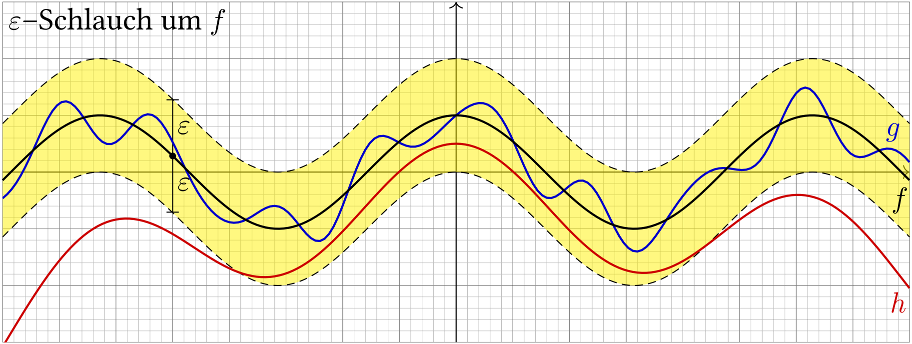
Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir daher die ε–Umgebung von $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f, \varepsilon) := \big\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\big|\; |f - g|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \big\}.$$

Diese Umgebungen erfüllen die erforderlichen Bedingungen (UB1–3), insbesondere gilt (UB2) dank $U(f, \varepsilon) \cap U(f, \varepsilon') = U(f, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\})$.

🙂 Das geht erfreulich leicht. Warum? Normen sind ein wunderbares Werkzeug; wo sie uns zur Verfügung stehen, nutzen wir sie gerne!

Gleichmäßige Konvergenz



Definition D4c: Topologie $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f, \varepsilon)$ definieren gemäß D3v auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ der **gleichmäßigen Konvergenz**: Genau dann ist $O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f, \varepsilon)$ enthält.

$$\mathcal{T}_{\text{uni}} = \left\{ O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;\middle|\; \forall f \in O \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : U(f, \varepsilon) \subseteq O \right\}$$

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition C3p: punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Gegeben sei eine Menge X und ein metrischer Raum (Y, d_Y) sowie eine Folge von Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots, f : X \to Y$. Wir definieren:

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in X : d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad :\Leftrightarrow \quad d(f_n, f) = |d_Y(f_n, f)|_X \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;\; \forall x \in X : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

⚠ Bei punktweiser Konvergenz kann die Stetigkeit zerbrechen!

Beispiel: Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$.

Die Konvergenz $f_n \to f$ gilt punktweise, aber nicht gleichmäßig: Das Supremum des Abstandes ist $|f_n - f|_{[0,1]} = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Satz C3q: Die gleichmäßige Konvergenz erhält Stetigkeit.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f_n : X \to Y$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f : X \to Y$ konvergiert.

1. Sind alle f_n stetig in $a \in X$ / auf ganz X, dann auch f.
2. Sind alle f_n gleichmäßig stetig auf X, dann auch f.
3. Sind alle f_n sogar L–lipschitz–stetig, dann auch f.

Übung: Wiederholen Sie hierzu den $\varepsilon/3$–Beweis aus der Analysis!

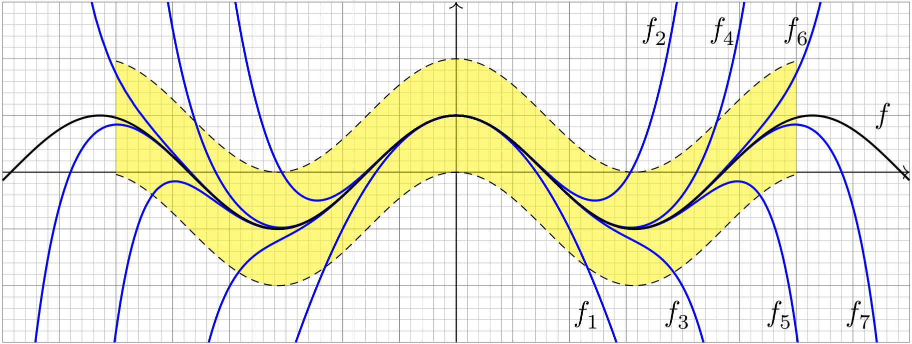
Beweis: (1) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $d(f_n, f) \to 0$ existiert ein Index $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n, f) \le \varepsilon/3$. Da f_n stetig ist, existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, a) < \delta$ die Ungleichung $d_Y(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3$ gilt. Daraus folgt:

$$d_Y(f(x), f(a)) \le d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(a)) + d_Y(f_n(a), f(a)) < \varepsilon$$

Die Aussagen (2) und (3) beweist man genauso. Übung! QED

Kompakte Konvergenz

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$



Eine Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **konvergiert kompakt** gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn auf jedem kompakten Intervall $K = [-r, r]$ gleichmäßige Konvergenz gilt:

$$f_n \to f \text{ kompakt} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f - f_n|_{[-r,r]} \to 0$$

Übung: Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiert kompakt im Inneren ihres Konvergenzkreises $B(z_0, \rho)$ mit $\rho = 1/\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}$.

Kompakte Konvergenz

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die (K,ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f;K,\varepsilon) := \left\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, |f-g|_K < \varepsilon \right\}.$$

Diese Umgebungen erfüllen (UB1–3), insbesondere gilt (UB2) dank

$$U(f;K,\varepsilon) \;\cap\; U(f;K',\varepsilon') \quad \supseteq \quad U(f;\; K \cup K',\; \min\{\varepsilon,\varepsilon'\}).$$

Für $K \subset \mathbb{R}$ endlich ist dies zu schwach, für $K = \mathbb{R}$ oft zu stark.
Für $K \Subset \mathbb{R}$ kompakt erhalten wir den ausgewogenen Kompromiss!

Definition D4d: Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f;K,\varepsilon)$ definieren gemäß D3v auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{kpkt}}$ der **kompakten Konvergenz**: Genau dann ist eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f;K,\varepsilon)$ enthält:

$$\mathcal{T}_{\mathrm{kpkt}} = \left\{ O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, \forall f \in O \;\; \exists r \in \mathbb{R}_{\ge 0} \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;:\; U(f;[-r,r],\varepsilon) \subseteq O \right\}$$

🙂 Ebenso für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Ist X lokal-kompakt, so heißt dies auch **lokal gleichmäßige Konvergenz**. Sie erhält die Stetigkeit! (C3q)

Übung D4F: Die kompakte Konvergenz ist nicht normierbar.

(1) Es gelten strikte Inklusionen $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}} \subsetneq \mathcal{T}_{\mathrm{kpkt}} \subsetneq \mathcal{T}_{\mathrm{uni}}$ (von gröber zu feiner). Hier ist $\mathcal{T}_{\mathrm{uni}}$ sogar pseudonormierbar, aber $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ ist nicht metrisierbar.

(2) Es gilt (a) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \ell^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und (b) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}[x]$. Auf welchen dieser Räume ist die kompakte Konvergenz normierbar?

Lösung: (2) Auf keinem! (2a) Sei $\|{-}\| : \mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ eine Pseudonorm. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f_n \ne 0$ und Träger in $[n-1, n+1]$. Es gilt $\|f_n\| \ne 0$, skaliert $\|f_n\| \ge 1$, also $\|f_n\| \not\to 0$, aber $f_n \to 0$ kompakt.

(2b) Angenommen, eine Pseudonorm $\|{-}\| : \mathbb{R}[x] \to [0,\infty]$ induziert die kompakte Konvergenz. Für jede Polynomfunktion $f \in \mathbb{R}[x]$ gilt $\|f\| < \infty$, denn $2^{-n} f \to 0$ kompakt, also $\|2^{-n} f\| = 2^{-n}\|f\| \to 0$, somit $\|f\| < \infty$.

Sei $a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f_n(x) = a_n x^n$ und $\|f_n\| = 1$. Wegen $\|f_n\| \not\to 0$ gilt $f_n \not\to 0$ kompakt: Es gibt ein Intervall $[-r, r] \subseteq \mathbb{R}$ mit $|f_n|_{[-r,r]} = a_n r^n \not\to 0$. Für $g_n = 2^{-n} f_n$ gilt $\|g_n\| = 2^{-n} \to 0$, aber $|g_n|_{[-2r,2r]} = a_n r^n \not\to 0$. $\boxed{\text{QED}}$

Die kompakte Konvergenz ist metrisierbar.

Zu $r \in \mathbb{N}$ ist die gleichmäßige Konvergenz auf $[-r, r]$ metrisierbar, sogar (pseudohalb)normierbar durch die Supremumsnorm $|\text{-}|_{[-r,r]}$. Auf $\mathscr{C}([-r, r], \mathbb{R})$ ist dies eine Norm, auf $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nur eine Halbnorm.

Wir stutzen dies zur äquivalenten, aber endlichen Metrik (C3L)
$d_r(f, g) = |f - g|^*_{[-r,r]} = \sup\{\, |f(x) - g(x)|^* \,|\, x \in [-r, r] \,\} \in [0, 1]$.
Auf $\mathscr{C}([-r, r], \mathbb{R})$ ist dies eine Metrik, auf $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nur eine Halbmetrik.

Satz D4E: Metrisierung der kompakten Konvergenz

Auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ fassen wir die Halbmetriken $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zusammen zu

$$d : \mathbb{R}^\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\mathbb{R} \to [0, 1] : d(f, g) = \textstyle\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} d_k(f, g).$$

Dies ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, und es gilt $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_\text{kpkt}$.

Übung: Zeigen Sie (M0–3) sowie $\mathscr{T}_d \subseteq \mathscr{T}_\text{kpkt}$ und $\mathscr{T}_d \supseteq \mathscr{T}_\text{kpkt}$.

Beispiel: Der Vektorraum $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\mathscr{T}_\text{kpkt}$ ist hausdorffsch, metrisiert durch eine abz. Familie von Halbnormen (D4E), und vollständig (C3Q). Dies verallgemeinert Banach–Räume und heißt ein **Fréchet–Raum**.

🙂 Die Konstruktion des obigen Satzes D4E ist flexibel und vielseitig anwendbar, daher will ich das allgemeine Prinzip würdig ausführen.

Sei $D = (d_i)_{i \in I}$ eine Familie von Halbmetriken $d_i : X \times X \to [0, \infty]$ auf einer gemeinsamen Trägermenge X. Darauf wollen wir eine gemeinsame Topologie $\mathcal{T}_D$ definieren, als die gröbste Topologie, in der alle d_i–Bälle für $i \in I$ offen sind. Zu jedem Punkt $a \in X$ und jeder endlichen Menge $J \subseteq I$ und jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir dazu die Basisumgebung durch

$$U(a; J, \varepsilon) := \left\{ x \in X \,\middle|\, \forall i \in J : d_i(x, a) < \varepsilon \right\} = \bigcap\nolimits_{i \in J} B_i(a, \varepsilon)$$

sowie die Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \{ U(a; J, \varepsilon) \mid J \subseteq I \text{ endlich}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}$. Diese Umgebungen erfüllen die Umgebungsaxiome (UB1–3), denn

$$U(a; J, \varepsilon) \cap U(a; J', \varepsilon') \quad \supseteq \quad U(a;\ J \cup J',\ \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Dank Satz D3v erhalten wir so zu $D = (d_i)_{i \in I}$ die Topologie

$$\mathcal{T}_D := \left\{ O \subseteq X \,\middle|\, \forall a \in O \;\; \exists J \subseteq I \text{ endlich } \; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : U(a; J, \varepsilon) \subseteq O \right\}.$$

Metrisierung durch eine Familie von Halbmetriken

Diese elegante Konstruktion fasst unsere Beispiele zu $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ zusammen: Punktweise Konvergenz entspricht $d_x(f,g) = |f(x) - g(x)|$ für $x \in \mathbb{R}$. Für gleichmäßige Konvergenz genügt eine Metrik, $d(f,g) = |f-g|_\mathbb{R}$. Kompakte Konvergenz entspricht $d_k(f,g) = |f-g|_{[-k,k]}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Für die kompakte Konvergenz einer komplexen Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_0)^k$ betrachten wir den Konvergenzradius $\rho \in [0,\infty]$. Die gleichmäßige Konvergenz auf dem Ball $\bar{B}(z_0,r)$ mit $0 \le r < \rho$ wird induziert von der Supremumsmetrik $d_r(f,g) = |f-g|_{\bar{B}(z_0,r)}$. Es genügt dann eine abzählbare Familie von Radien $r_k \nearrow \rho$ zu betrachten.

Diese allgemeine Konstruktion von $\mathcal{T}_D$ und die folgende Metrisierung ist sehr flexibel. Wir werden sie später auch für die Produkttopologie nutzen (E4v), insbesondere für die Metrisierbarkeit des Hilbert–Würfels $[0,1]^\mathbb{N}$ und somit schließlich für den Metrisierbarkeitssatz von Urysohn (E5r).

Bemerkung: Jede Halbmetrik $d_i : X \times X \to [0,\infty]$ können wir stutzen (C3l) zur äquivalenten Halbmetrik $d_i^* : X \times X \to [0,1]$, das ist vorteilhaft.

Metrisierung durch eine Familie von Halbmetriken

Satz D4G: Metrisierung

Sei $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Halbmetriken $d_i : X \times X \to [0,1]$. Wir wählen $a_i > 0$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$, etwa $a_i = 2^{-i-1}$, und definieren

$$d : X \times X \to [0,1] \quad \text{durch} \quad d(x,y) = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} a_i d_i(x,y).$$

(a) Die Abbildung d ist wohldefiniert und eine Halbmetrik auf X.

(b) Es gilt $\mathcal{T}_D = \mathcal{T}_d$: Die Halbmetrik d erzeugt die Topologie $\mathcal{T}_D$.

(c) Äquivalent sind dann: (c1) Die Halbmetrik d ist eine Metrik. (c2) Die Topologie $\mathcal{T}_D$ ist metrisierbar. (c3) $\mathcal{T}_D$ ist hausdorffsch. (c4) Zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $d_i(x,y) > 0$.

Übung: Zeigen Sie diesen Satz; er optimiert den vorigen Satz D4E, bereitet aber kaum zusätzliche Mühe. Aussagen (a) und (c) sind leicht. Spannend ist Aussage (b), also die Inklusionen $\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{T}_d$ und $\mathcal{T}_D \supseteq \mathcal{T}_d$.

Zum Beweis vergleichen Sie in (b) die beiden Umgebungsbasen:

(b1) Sei $a \in X$. Zu jeder endlichen Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}$ und jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_d(a, \delta) \subseteq U(a; J, \varepsilon)$. Das zeigt $\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{T}_d$.

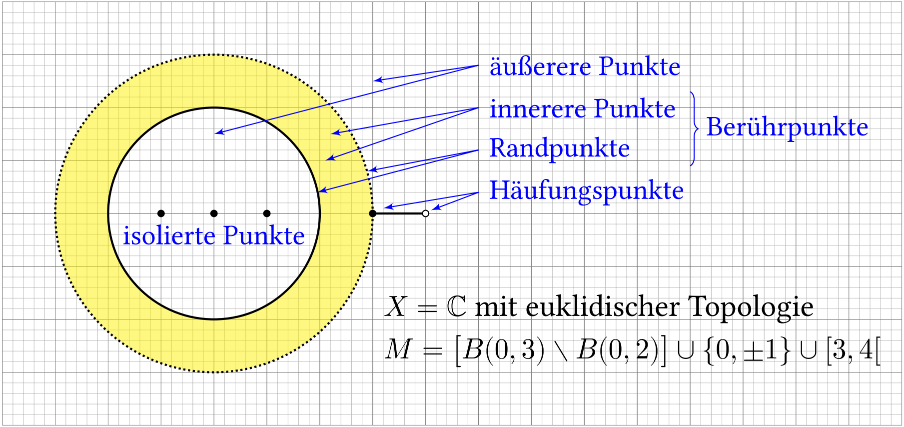
(b2) Umgekehrt gibt es zu jedem $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ eine endliche Menge $J \subseteq \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $U(a; J, \varepsilon) \subseteq B_d(a, \delta)$ gilt. Das zeigt $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_D$.

Sie wiederholen und festigen hier nochmals das nötige Vokabular. Die Aufgabe ist knifflig, da hilft nur, sie selbständig sorgfältig auszuführen! Die gute Nachricht: Wenn Sie das können, dann werden ε und δ Sie nie mehr schrecken! „Epsilon, wo ist dein Stachel? Delta, wo ist dein Sieg?“

Diese raffinierte Metrisierung begegnet Ihnen zum Beispiel in der Funktionalanalysis bei lokalkonvexen Räumen, speziell Fréchet–Räumen, das sind topologische Vektorräume, die durch eine abzählbare Familie von Halbnormen vollständig topologisiert werden. Meist erlaubt diese Topologie keine Norm, aber immerhin eine Metrik, wie hier konstruiert.

Topologische Grundbegriffe

Geometrisch-topologische Begriffe wie innerer Punkt und äußerer Punkt und Randpunkt scheinen anschaulich klar, etwa für Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Wie definiert man sie? Das ist wichtig, um damit sicher zu arbeiten, insbesondere in Situationen, wo unsere Anschauung versagt.



Definition D5a: topologische Grundbegriffe

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Ein Punkt $a \in X$ heißt...

innerer Punkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad M \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$
(Die Menge M ist eine Umgebung von a.)

äußerer Punkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad (X \setminus M) \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$
(Das Komplement $X \setminus M$ ist eine Umgebung von a.)

Randpunkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a : U \cap M \neq \emptyset \neq U \setminus M$
(Jede Umgebung von a trifft sowohl M als auch $X \setminus M$.)

Berührpunkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a : U \cap M \neq \emptyset$
(Jede Umgebung von a trifft die Menge M.)

isolierter Punkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \exists U \in \mathcal{U}_a : U \cap M = \{a\}$
(Eine genügend kleine Umgebung von a hat mit M nur a gemeinsam.)

Häufungspunkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a : (U \setminus \{a\}) \cap M \neq \emptyset$
(Jede Umgebung von a trifft außer a mindestens einen Punkt von M.)

Inneres, Abschluss, Rand

Die Menge aller inneren Punkte von M in $(X, \mathscr{T})$ heißt das **Innere** oder auch der **offene Kern** von M in $(X, \mathscr{T})$, geschrieben

$$\mathring{M} = K_{(X,\mathscr{T})}(M) := \{\, a \in X \,|\, M \in \mathscr{U}_a(X,\mathscr{T}) \,\} \stackrel{!}{=} \bigcup \{\, U \subseteq M \,|\, U \in \mathscr{T} \,\}.$$

Das Innere ist demnach die größte offene Menge, die in M enthalten ist. Es gilt $M \supseteq M^\circ = (M^\circ)^\circ$. Genau dann ist M offen, wenn $M = M^\circ$ gilt.

Die Menge aller Berührpunkte von M in $(X, \mathscr{T})$ heißt der **Abschluss** oder auch die **abgeschlossene Hülle** von M in $(X, \mathscr{T})$, geschrieben

$$\overline{M} = H_{(X,\mathscr{T})}(M) := \{\, a \in X \,|\, \forall U \in \mathscr{U}_a(X,\mathscr{T}) : U \cap M \neq \emptyset \,\} \stackrel{!}{=} \bigcap \{\, A \supseteq M \,|\, X \setminus A \in \mathscr{T} \,\}.$$

Der Abschluss ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst. Es gilt $M \subseteq \overline{M} = \overline{\overline{M}}$. Genau dann ist M abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ gilt. Kern und Hülle sind dual unter Komplementen, also $X \setminus M^\circ = \overline{X \setminus M}$.

Die Menge aller Randpunkte von M in $(X, \mathscr{T})$ ist der topologische **Rand**

$$\delta_{(X,\mathscr{T})}(M) := \overline{M} \setminus M^\circ = H_{(X,\mathscr{T})}(M) \setminus K_{(X,\mathscr{T})}(M).$$

Inneres, Abschluss, Rand

⚠ Diese topologischen Begriffe sind **relativ**: Sie hängen nicht nur von der Menge M ab, sondern auch vom umgebenden Raum $(X, \mathscr{T})$. Daher ist die ausführliche Schreibweise $K_{(X,\mathscr{T})}(M)$ und $H_{(X,\mathscr{T})}(M)$ unter Angabe des Raumes $(X, \mathscr{T})$ präziser und vermeidet Missverständnisse. Die Kurzschreibweise M° und $\overline{M}$ ist oft bequemer, setzt jedoch voraus, dass der umgebende Raum aus dem Kontext eindeutig hervorgeht.

Beispiel: Wir betrachten die Teilmenge $M = \left]0,1\right[\cup \left]1,2\right] \cup \{3\}$ in jedem der drei Räume $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ jeweils mit der euklidischen Topologie:

In $\mathbb{R}_{>0}$ gilt: $\mathring{M} = \left]0,1\right[\cup \left]1,2\right[$, $\overline{M} = \left]0,2\right] \cup \{3\}$, $\delta M = \{1,2,3\}$.

In $\mathbb{R}$ gilt: $\mathring{M} = \left]0,1\right[\cup \left]1,2\right[$, $\overline{M} = [0,2] \cup \{3\}$, $\delta M = \{0,1,2,3\}$.

In $\mathbb{C}$ gilt: $\mathring{M} = \emptyset$, $\overline{M} = [0,2] \cup \{3\}$, $\delta M = [0,2] \cup \{3\}$.

Bemerkung: Sind zu $(X, \mathscr{T})$ Umgebungsbasen $(\mathscr{B}_x)_{x \in X}$ gegeben, oder eine Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$, die die Topologie $\mathscr{T}$ induziert, so gilt:

$$\mathring{M} = \left\{ x \in X \,\middle|\, \exists U \in \mathscr{B}_x : U \subseteq M \right\} = \left\{ x \in X \,\middle|\, d(x, X \setminus M) > 0 \right\}$$

$$\overline{M} = \left\{ x \in X \,\middle|\, \forall U \in \mathscr{B}_x : U \cap M \neq \emptyset \right\} = \left\{ x \in X \,\middle|\, d(x, M) = 0 \right\}$$

Abschluss und Folgengrenzwerte

In der Analysis haben Sie den Abschluss $\overline{A}$ einer Menge A im Raum (X, d) vielleicht definiert als die Menge aller Folgengrenzwerte von Folgen in A mit Grenwerten in X. Die Äquivalenz stiftet der folgende Satz:

Satz D5c: Abschluss und Folgengrenzwerte

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, mit $a_n \to x$ in $(X, \mathcal{T})$, so gilt $x \in \overline{A}$. Die Umkehrung gilt, falls x eine abzählbare Umgebungsbasis erlaubt.

Beweis: „$\Rightarrow$": Es gelte $a_n \to x$. Jede Umgebung U von x in $(X, \mathcal{T})$ enthält schließlich alle Folgenglieder a_n, also $U \cap A \neq \emptyset$. Gemäß D5A gilt $x \in \overline{A}$.

„$\Leftarrow$": Sei $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ eine UBasis von x. Aus $x \in \overline{A}$ folgt $A \cap U_n \neq \emptyset$. Wir wählen $a_n \in A \cap U_n$. Gemäß D3I gilt $a_n \to x$. $\boxed{\text{QED}}$

Korollar D5D: abgeschlossen und folgenabgeschlossen

Jede (topologisch) abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist folgenabgeschlossen. Die Umkehrung gilt, falls der umgebende Raum $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar ist.

Lokal-endliche Familien

Für jede endliche Familie zeigen wir gleich $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$.
Für unendliche Familien gilt dies nicht, $\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \overline{\{x\}} = \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} = \overline{\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}}$.
Der gute Kompromiss sind *lokal-endliche* Familien in folgendem Sinne:

Definition D5F: lokal-endliche Familien

Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $A_i \subseteq X$ nennen wir...

- **endlich**, wenn die Indexmenge I endlich ist,
- **endlich** im Punkt $x \in X$, wenn $I_x = \{\, i \in I \mid x \in A_i \,\}$ endlich ist,
- **punktweise endlich**, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ endlich ist,
- **lokal-endlich** um x im Raum $(X, \mathcal{T})$, wenn eine offene Umgebung U existiert, also $x \in U \in \mathcal{T}$, sodass $I_U = \{\, i \in I \mid A_i \cap U \neq \emptyset \,\}$ endlich ist,
- **lokal-endlich** im Raum $(X, \mathcal{T})$, falls dies um jedem Punkt $x \in X$ gilt.

Trivialerweise gilt $I \supseteq I_U \supseteq I_x$. Daraus folgen die Implikationen

$$\text{endlich} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad \text{lokal-endlich} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad \text{punktweise endlich.}$$

Die Umkehrungen gelten nicht, siehe $([n, n+1])_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(\{x\})_{x \in \mathbb{Q}}$ in $\mathbb{R}$.

Lokal-endliche Vereinigung

Beispiel: In $\mathbb{R}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty}[1/n, 1] = \,]0, 1]$ und $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \overline{\{x\}} = \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} = \overline{\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}}$. Die Vereinigung der Abschlüsse ist nicht der Abschluss der Vereinigung, sondern nur eine (evtl. strikte) Teilmenge. Das untersuchen wir genauer:

Satz D5G: lokal-endliche Vereinigung

(1) In jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt die Inklusion

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \quad \supseteq \quad \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

(2) Gleichheit gilt gdw $A := \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ abgeschlossen ist. Insbesondere gilt

$$\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} \quad = \quad \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}.$$

(3) Ist die Familie $(A_i)_{i\in I}$ lokal-endlich, so auch $(\overline{A_i})_{i\in I}$, (4) und es gilt

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \quad = \quad \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Ist eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen lokal-endlich, dann ist auch ihre Vereinigung $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.

Lokal-endliche Vereinigung

Beweis: Wir vergleichen $A := \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ mit $B := \bigcup_{i \in I} A_i$.

(1) Aus $A_i \subseteq B \subseteq \overline{B}$ folgt $\overline{A_i} \subseteq \overline{B}$, also $A \subseteq \overline{B}$.

(2) Es gilt $B \subseteq A$. Ist A abgeschlossen, so folgt $\overline{B} \subseteq A$.
Dies gilt insbesondere, falls die Indexmenge I endlich ist, dank (A2).

(3) Sei $x \in U \in \mathcal{T}$ und $I_U := \{\, i \in I \mid A_i \cap U \neq \emptyset \,\}$.
Aus $A_i \subseteq X \setminus U$ folgt $\overline{A_i} \subseteq X \setminus U$. Demnach gilt $I_U = \{\, i \in I \mid \overline{A_i} \cap U \neq \emptyset \,\}$.
Die Menge I_U wird also durch den Abschluss $A_i \mapsto \overline{A_i}$ nicht größer.

(4) Wir zeigen: $X \setminus A$ ist offen. Zu jedem Punkt $x \in X \setminus A$ existiert eine offene Umgebung U, also $x \in U \in \mathcal{T}$, sodass I_U endlich ist. Wir betrachten

$$U' := U \setminus A \stackrel{\text{Def}}{=} U \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \stackrel{(3)}{=} U \setminus \bigcup_{i \in I_U} \overline{A_i} \stackrel{(2)}{=} U \setminus \overline{\bigcup_{i \in I_U} A_i}.$$

Demnach ist $U' \subseteq X \setminus A$ eine offene Umgebung von x in $X \setminus A$.

Das Komplement $X \setminus A$ ist Umgebung jedes seiner Punkte, also offen (D3c), somit ist $A = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ abgeschlossen. $\boxed{\text{QED}}$

Dichte vs diskrete Teilmengen

Definition D5J: dichte vs diskrete Teilmengen

Wir nennen $M \subseteq X$ **diskret** in $(X, \mathcal{T})$, falls jeder Punkt $x \in M$ isoliert ist, das heißt, es existiert eine offene Umgebung $U \in \mathcal{T}$ mit $M \cap U = \{x\}$. Äquivalent hierzu: Der Teilraum $(M, \mathcal{T}_M)$ ist diskret (D1K, D1B).

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **dicht** in $(X, \mathcal{T})$, falls $\overline{M} = X$ gilt. Das heißt $M \cap U \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$.

Hingegen heißt M **nirgends dicht** in $(X, \mathcal{T})$, wenn $\overline{M}^\circ = \emptyset$ gilt. Äquivalent: In keiner offenen Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ ist $M \cap U$ dicht.

Beispiele: In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ dicht, aber nicht diskret, ebenso $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ für $n \ge 1$. In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Z}$ diskret, abgeschlossen, doch nirgends dicht, ebenso $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

In $(\mathbb{R}, +)$ ist jede diskrete Untergruppe von der Form $\mathbb{Z}a$ für ein $a \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. In $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ ist $X = \{\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k\xi} \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ diskret für $\xi \in \mathbb{Q}$, dicht für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

In $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit $1 \le p < \infty$ sind $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ und $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ dicht, in $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ nicht. Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ ist $\{\, \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \text{ endlich} \,\}$ diskret. Im Banach–Raum $\ell^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ ist $\{\, \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \,\}$ diskret.

Stetige Funktionen sind auf dichten Teilmengen festgelegt.

Satz D5L: Vergleich stetiger Funktionen auf dichten Teilmengen

Seien $f, g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ hausdorffsch. Dann ist $O = \{\, x \in X \mid f(x) \neq g(x) \,\}$ offen, $\{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}$ abgeschlossen. Aus $A \subseteq X$ und $f|_A = g|_A$ folgt $f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$; ist A dicht in X, so folgt $f = g$.

Beweis: Sei $x \in O$. Zu $f(x) \neq g(x)$ in Y existieren $U, V \in \mathcal{T}_Y$ mit $f(x) \in U$ und $g(x) \in V$ mit $U \cap V = \emptyset$. Für $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ gilt $x \in W \in \mathcal{T}_X$. Für jeden Punkt $x' \in W$ gilt $f(x') \in U$ und $g(x') \in V$, also $f(x') \neq g(x')$. Somit gilt $W \subseteq O$. Also ist O offen (D3c). $\boxed{\text{QED}}$

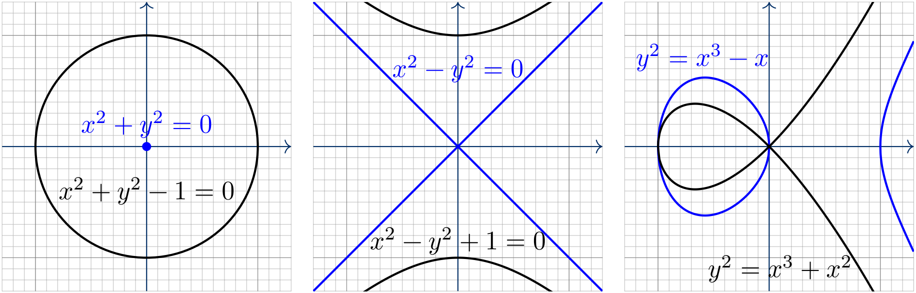
Beispiel / Übung D5M: stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$

Ist die Einschränkung $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ injektiv? surjektiv?

Die Einschränkung $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv dank D5L, aber nicht surjektiv: Funktionen wie $x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2)$ sind stetig auf $\mathbb{Q}$.

Mächtigkeit: Es gilt $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, also $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, hingegen nur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$.

Polynome vs Polynomfunktionen



Zum Multiindex $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ gehört das **Monom** $X^\nu = X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$.
Jede Linearkombination ist ein **Polynom** $P = \sum_\nu p_\nu X^\nu$ in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.
Dies definiert die **Polynomfunktion** $f_P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : x \mapsto P(x) = \sum_\nu p_\nu x^\nu$.

Dürfen wir P mit f_P identifizieren? Ist $P \mapsto f_P$ injektiv?

⚠ Für jeden endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen schlägt das fehl!
Die Polynomalgebra $\mathbb{F}_q[X]$ ist unendlich, doch $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_q)$ ist endlich.
Konkret: Für $P = X^q - X \in \mathbb{F}_q[X]$ gilt $P \neq 0$, aber $f_P = 0$ dank Lagrange.
Speziell für $P = X^2 + X \in \mathbb{F}_2[X]$ gilt $P(0) = 0$ und $P(1) = 0$, also $f_P = 0$.

Polynomiale Nullstellenmengen sind magere Nullmengen.

Lemma D5n: Polynome vs Polynomfunktionen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sowie $U \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $a \in U$. Dann ist die Zuordnung

$$\Phi_U : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \to \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{K}) : P = \textstyle\sum_\nu p_\nu X^\nu \mapsto f_P|_U$$

injektiv: Wir dürfen $a = 0$ annehmen und erhalten $p_\nu = \partial^\nu f_P(0)/\nu!$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist es somit möglich, und weitgehend üblich, die Polynome aus $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ als Funktionen in $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathscr{C}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ aufzufassen.

Satz D5o: Polynomiale Nullstellenmengen sind magere Nullmengen.

Zu jedem Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ mit $P \neq 0$ ist die Nullstellenmenge $N = f_P^{-1}(0)$ in $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen, zudem nirgends dicht, $N^\circ = \emptyset$ (dank D5n) und hat Lebesgue–Maß $\operatorname{vol}_n(N) = 0$ (dank Fubini und Induktion). Demnach ist $f_P^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

Das ist eine Besonderheit von Polynomen! Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist Nullstellenmenge einer *stetigen* Funktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ (C3n).

Über $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ sind fast alle Matrizen invertierbar.

Beispiel D5p: Determinante

Die **Determinante** ist eine Polynomfunktion in den Matrixeinträgen:

$$\det_n \,:\, \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} \,:\, A=(a_{ij}) \mapsto \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

Für $n=2$ gilt $\det_2\left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right] = ad-bc$. Für $n=3$ gilt Sarrus' Jägerzaunregel:

$$\det_3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{cases}$$

Im Raum $\mathbb{K}^{n\times n}$ der $n\times n$–Matrizen ist die **allgemeine lineare Gruppe**

$$\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} := \left\{\, A\in\mathbb{K}^{n\times n} \,\middle|\, A \text{ ist invertierbar} \,\right\} \stackrel{!}{=} \det_n^{-1}(\mathbb{K}\setminus\{0\})$$

offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

🙂 Anschaulich: Fast alle Matrizen sind invertierbar, nicht-invertierbare Matrizen werden invertierbar durch geeignete beliebig kleine Störung, invertierbare bleiben es bei jeder hinreichend kleinen Störung.

Vergleich stetiger Funktionen auf dichten Teilmengen

Das charakteristische Polynom ist eine stetige Abbildung

$$\chi_n \;:\; \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}[X]_n^1 \;:\; M \mapsto P_M(X) = \det(X1_{n\times n} - M).$$

Es ist invariant unter Konjugation durch $B \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} P_{B^{-1}MB} &\overset{\text{Def}}{=} \det(X1_{n\times n} - B^{-1}MB) \overset{\text{Mat}}{=} \det(B^{-1}\cdot(X1_{n\times n} - M)\cdot B) \\ &\overset{\text{Mult}}{=} \det B^{-1}\cdot\det(X1_{n\times n} - M)\cdot\det B \overset{\text{Com}}{=} P_M \end{aligned}$$

Speziell für $M = BA$ erhalten wir die Gleichung $P_{AB} = P_{BA}$.

Satz D5q: charakteristische Polynome

Für jedes Paar quadratischer Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ stimmen die charakteristischen Polynome P_{AB} und P_{BA} überein.

Beweis: Die Abbildungen $f, g : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}[X]_n^1$, $f(B) = P_{AB}$, $g(B) = P_{BA}$ sind stetig und stimmen auf der dichten Menge $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ überein. $\boxed{\text{QED}}$

Paul Halmos, *Finite dimensional vector spaces* (1958), §53, exercise 13.

Übung: Der Satz gilt sogar allgemein über jedem kommutativen Ring.

Über $\mathbb{C}$ sind fast alle Matrizen diagonalisierbar.

Fundamentalsatz der Algebra: Zu $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{C}[X]^1_n$ existieren Nullstellen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $P = (X - z_1) \cdots (X - z_n)$.

Wir nennen P **separabel**, wenn alle n Nullstellen verschieden sind.

Die **Diskriminante** $\Delta_n(P) := \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2$ ist symmetrisch in $z_1, \dots, z_n$, also ein Polynom in $a_1, \dots, a_n$. (Hauptsatz der symmetrischen Polynome)

Den Fall $n = 2$ kennen Sie aus der Schule: $\Delta_2(X^2 + pX + q) = p^2 - 4q$

Satz D5R: Fast alle Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Wir nutzen das charakteristische Polynom $\chi_n : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}[X]^1_n$ wie oben und die Diskriminante $\Delta_n : \mathbb{K}[X]^1_n \to \mathbb{K}$. Beides sind Polynomfunktionen.

(1) Im Raum $\mathbb{K}[X]^1_n \cong \mathbb{K}^n$ aller Polynome ist die Menge $\Sigma := \Delta_n^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ der separablen Polynome offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

(2) Im Raum $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist die Menge $S := \chi_n^{-1}(\Sigma) = (\Delta_n \circ \chi_n)^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ der separablen Matrizen offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

(3) In $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist die Menge D der über $\mathbb{C}$ diagonalisierbaren Matrizen dicht, $\overline{D} = \mathbb{K}^{n \times n}$, ihr Inneres ist die Menge der separablen Matrizen, $D^\circ = S$.

Der Satz von Cayley–Hamilton

🙂 Anschaulich: Fast alle Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind separabel, somit über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, separable Matrizen bleiben es bei hinreichend kleiner Störung, nicht-separable werden es nach geeigneter kleiner Störung.

🙂 Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) eine Matrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$ wählen, so ist sie mit Wahrscheinlichkeit 100% separabel, somit über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, ebenso alle Matrizen in einer Umgebung. Die verbleibenden Fälle sind so gesehen vernachlässigbar. Die Jordan–Form ist trotzdem wichtig, um *alle* Fälle behandeln zu können; nicht jede Matrix ist zufällig gewählt!

Satz D5s: Cayley–Hamilton

Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ annulliert ihr char. Polynom, kurz $P_A(A) = 0_{n\times n}$.

Beweis: Die Aussage gilt (1) für jede Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, (2) damit dank Konjugations-Invarianz für jede diagonalisierbare Matrix, (3) damit dank Dichtheit D5r für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. $\boxed{\text{QED}}$

🙂 Bitte bewundern Sie, wie herrlich einfach manche Argumente werden durch die geschickte Verwendung der Stetigkeit, hier von Polynomen.

Basis einer Topologie

Definition D6a: Basis einer Topologie

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ offener Mengen ist eine **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} = \{ \bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \}$ gilt: Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist Vereinigung geeigneter basisoffener Mengen $B \in \mathcal{B}$.

Beispiele: Jede Topologie $\mathcal{T}$ erlaubt (i.A. viele) Basen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$:

Jeder Raum $(X, \mathcal{T})$ hat als Basen trivialerweise $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. Für jede indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ sind dies die beiden einzigen.

Für jeden diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist $\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ eine Basis der Topologie. Hier ist $\mathcal{B}$ die kleinste Basis, also in jeder Basis enthalten.

Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ ist zugleich die Ordnungstopologie. Hier ist $\mathcal{B} = \{ \,]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \}$ eine Basis, ebenso $\mathcal{B}' = \{ \,]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q} \}$.

Für jeden metrischen Raum (X, d) ist $\mathcal{B} = \{ B(x, \varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$, ebenso $\mathcal{B}' = \{ B(x, 2^{-n}) \mid x \in X,\ n \in \mathbb{N} \}$.

Für den euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ ist auch $\{ B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{Q}^n,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \}$ eine Basis der Topologie, zudem abzählbar (siehe D6h).

Basis einer Topologie

Hilfreiche Sprachkonvention: Wir nennen $U \in \mathscr{T}$ eine **offene Menge** und entsprechend $B \in \mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ eine **basisoffene** Menge (bezüglich $\mathscr{B}$).

Proposition D6B: äquivalente Umformulierungen

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Für $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ sind äquivalent:

(1) Jede offene Menge $U \in \mathscr{T}$ ist die Vereinigung *geeigneter* $B \in \mathscr{B}$:

$$\mathscr{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{S} \,\middle|\, \mathcal{S} \subseteq \mathscr{B} \right\} \quad \text{das heißt} \quad \forall U \in \mathscr{T}\ \exists \mathcal{S} \subseteq \mathscr{B} : U = \bigcup \mathcal{S}.$$

(2) Jede offene Menge $U \in \mathscr{T}$ ist die Vereinigung *aller* $B \in \mathscr{B}$ mit $B \subseteq U$:

$$\forall U \in \mathscr{T} : U = \bigcup \mathcal{S} \quad \text{mit} \quad \mathcal{S} = \{ B \in \mathscr{B} \mid B \subseteq U \}.$$

(3) Jede offene Menge $U \in \mathscr{T}$ enthält zu $x \in U$ eine Umgebung $B \in \mathscr{B}$:

$$\forall U \in \mathscr{T}\ \forall x \in U\ \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq U.$$

(4) Jeder Punkt x in $(X, \mathscr{T})$ hat als eine Umgebungsbasis das System

$$\mathscr{B}_x = \{ B \in \mathscr{B} \mid x \in B \}.$$

Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

Satz D6c: Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

Jede Basis $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ einer Topologie $\mathscr{T}$ auf X hat folgende Eigenschaften:

B1: Es gilt $X = \bigcup \mathscr{B}$.

B2: Zu $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ existiert $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}$ mit $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathscr{S}$.

Äquivalent hierzu sind die folgenden lokalen Umformulierungen:

B1': Für jeden Punkt $x \in X$ existiert ein $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B$.

B2': Zu $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ existiert $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Erfüllt umgekehrt ein beliebiges Mengensystem $\mathscr{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ diese Bedingungen, dann ist $\mathscr{B}$ eine Basis der so definierten Topologie

$$\mathscr{T} := \left\{ \bigcup \mathscr{S} \,\middle|\, \mathscr{S} \subseteq \mathscr{B} \right\} = \left\{ U \subseteq X \,\middle|\, \forall x \in U \;\; \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq U \right\}.$$

Nachrechnen: Ist $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ eine Basis der Topologie $\mathscr{T}$, so gilt (O1) $\Rightarrow$ (B1) und (O2) $\Rightarrow$ (B2). Die Äquivalenz (B1) $\Leftrightarrow$ (B1') und (B2) $\Leftrightarrow$ (B2') ist klar. Umgekehrt für $\mathscr{B} \mapsto \mathscr{T}$ gilt: (B1) $\Rightarrow$ (O1), (B2) $\Rightarrow$ (O2), (O3) ist klar. $\boxed{\text{QED}}$

Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

Bitte schreiben Sie zur Übung alle genannten Implikationen selbst aus. Prüfen Sie sorgsam, dass Sie Definitionen und Argumente verstehen, angefangen bei den Äquivalenzen (B1) ⇔ (B1') und (B2) ⇔ (B2'). Solche Fingerübungen sind zwar leicht, aber dennoch notwendig.

Bei der Konstruktion $\mathscr{B} \mapsto \mathscr{T}$ ist die Implikation (B1) ⇒ (O1) klar, lediglich die Implikation (B2) ⇒ (O2) ist nicht ganz offensichtlich.

Wir zeigen stattdessen (B2') ⇒ (O2): Seien $U_1, U_2 \in \mathscr{T}$ und $U := U_1 \cap U_2$. Zu jedem Punkt $x \in U$ existieren Mengen $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ mit $x \in B_1 \subseteq U_1$ und $x \in B_2 \subseteq U_2$. Dank (B2') existiert hierzu eine Menge $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2 = U$. Das bedeutet $U \in \mathscr{T}$.

Das Axiom (O3) schließlich ist klar nach Konstruktion. Ausführlich: Sei $U_i \in \mathscr{T}$ und $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Zu jedem Punkt $x \in U$ existiert $i \in I$ mit $x \in U_i$, und somit ein $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq U_i \subseteq U$. Das bedeutet $U \in \mathscr{T}$. Nach Konstruktion gilt $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$, somit ist $\mathscr{B}$ eine Basis der Topologie $\mathscr{T}$.

Die Fürstenberg–Topologie

Zur Erheiterung und Allgemeinbildung diskutieren wir als Anwendung Fürstenbergs topologischen Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen: *On the infinitude of primes*, American Mathematical Monthly 62 (1955).

ON THE INFINITUDE OF PRIMES

HARRY FURSTENBERG, Yeshiva University

In this note we would like to offer an elementary "topological" proof of the infinitude of the prime numbers. We introduce a topology into the space of integers S, by using the arithmetic progressions (from $-\infty$ to $+\infty$) as a basis. It is not difficult to verify that this actually yields a topological space. In fact, under this topology, S may be shown to be normal and hence metrizable. Each arithmetic progression is closed as well as open, since its complement is the union of other arithmetic progressions (having the same difference). As a result, the union of any finite number of arithmetic progressions is closed. Consider now the set $A = \bigcup A_p$, where A_p consists of all multiples of p, and p runs through the set of primes $\geqq 2$. The only numbers not belonging to A are -1 and 1, and since the set $\{-1, 1\}$ is clearly not an open set, A cannot be closed. Hence A is not a finite union of closed sets which proves that there are an infinity of primes.

Behauptung: Die Menge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ der Primzahlen ist unendlich. **Beweis:**

(0) Eine **arithmetische Progression** in $\mathbb{Z}$ ist eine Menge der Form

$$P(a,b) = a + b\mathbb{Z} = \{\, a + nb \,|\, n \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \geq 1.$$

(1) Die Familie $\mathscr{B} = \{\, P(a,b) \,|\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \geq 1 \,\}$ ist Basis einer Topologie $\mathscr{T}$. Wir prüfen für $\mathscr{B}$ die Basisaxiome direkt nach: (B1') Es gilt $\mathbb{Z} = P(0,1)$. (B2') Für $x \in P(a,b) \cap P(c,d)$ gilt $x \in P(x,bd) \subseteq P(a,b) \cap P(c,d)$.

(2) In der so erzeugten **Fürstenberg–Topologie** $\mathscr{T}$ ist $P(a,b)$ offen und zudem abgeschlossen, denn $\mathbb{Z} \setminus P(a,b) = \bigcup_{0<k<b} P(a+k,b)$.

(3) Jede Zahl $v \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ wird von einer Primzahl $p \in \mathbb{P}$ geteilt. Die Vereinigung $V = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} (p\mathbb{Z})$ hat als Komplement $\mathbb{Z} \setminus V = \{\pm 1\}$.

(4) Wäre die Menge $\mathbb{P}$ endlich, so wäre V zudem abgeschlossen, also $\{-1, +1\}$ offen, was offensichtlich falsch ist. QED

? Euklids Beweis ist ebenso instruktiv und zudem konstruktiv. Wiederholen Sie diesen Beweis und vergleichen Sie die beiden!

Erzeugung von Topologien

Satz D6F: Erzeugung einer Topologie

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein beliebiges System von Teilmengen in X. Wir setzen $\mathscr{B} := \{ E_1 \cap \dots \cap E_n \mid n \in \mathbb{N},\ E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E} \}$ und $\mathscr{T} := \{ \bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathscr{B} \}$.

Für $n = 0$ interpretieren wir hier den leeren Durchschnitt als $X \in \mathscr{B}$.

Das System $\mathscr{B}$ erfüllt (B1–2), dank Satz D6C ist $\mathscr{T}$ eine Topologie auf X.

Genauer ist $\mathscr{T} =: \tau(\mathcal{E})$ die gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ enthält; $\mathscr{T}$ heißt die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie**, $\mathscr{B}$ die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Basis**, und $\mathcal{E}$ ein **Erzeugendensystem** oder eine **Subbasis** der Topologie $\mathscr{T}$.

In der Linearen Algebra bedeutet „Basis“ erzeugend und minimal. Für eine Basis der Topologie fordern wir keinerlei Minimalität.

Satz D6G: Stetigkeitskriterium auf einem Erzeugendensystem

Eine Abbildung $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ topologischer Räume mit $\mathscr{T}_Y = \tau(\mathcal{E})$ ist genau dann stetig, wenn für alle $U \in \mathcal{E}$ stets $f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_X$ gilt.

Übung: Rechnen Sie dies sorgfältig nach, mit Hilfe von Satz E1A.

Erzeugung von Topologien

Beispiele: (0) Für $\mathcal{E} = \emptyset$ erhalten wir $\mathcal{B} = \{X\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Für $n = 0$ interpretieren wir den leeren Durchschnitt als $X \in \mathcal{B}$.

(1) Ist $\mathcal{E}$ selbst schon eine Topologie auf X, so gilt $\mathcal{E} = \mathcal{B} = \mathcal{T}$, da stabil unter endlichen Schnitten (O2) und beliebigen Vereinigungen (O3).

(2) Sei $(X, <)$ total geordnet und $\mathcal{E} = \{\,]a, +\infty[, \,]{-\infty}, b[\mid a, b \in X \,\}$. Wir erhalten daraus die Basis $\mathcal{B} = \{X\} \cup \mathcal{E} \cup \{\,]a, b[\mid a, b \in X \,\}$ und die Ordnungstopologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_<$ auf der Menge X (D1M).

(3) Jeder Vektor $a \in \mathbb{S}^n$ definiert den zugehörigen offenen Halbraum

$$H_a = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n > a_0 \,\}.$$

Das System $\mathcal{H} = \{\, H_a \mid a \in \mathbb{S}^n \,\}$ erzeugt die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Hierzu genügen bereits für $i = 1, \dots, n$ und $a \in \mathbb{R}$ die offenen Halbräume $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > a \,\}$ und $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i < a \,\}$, also $\operatorname{pr}_i^{-1}(U)$ mit $U \in \mathcal{E}$ aus (2).

Beweis: Es gilt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, also $\tau(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Umgekehrt enthält $\tau(\mathcal{H})$ alle offenen Würfel (ℓ^∞–Bälle), also gilt $\tau(\mathcal{H}) \supseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Zur Erinnerung: Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle ℓ^p–Normen äquivalent dank $|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le n \cdot |x|_\infty$.

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom

Definition D6H: das zweite Abzählbarkeitsaxiom (2AA)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **zweitabzählbar**,
wenn die Topologie eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ erlaubt.

Beispiele: Für die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$ bilden die offenen Intervalle die Basis $\mathcal{B} = \{\,]a,b[\mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$. Mit rationalen Endpunkten erhalten wir hierin die abzählbare Basis $\mathcal{B}' = \{\,]a,b[\mid a, b \in \mathbb{Q} \,\}$.

Für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden die offenen Quader die Basis

$$\mathcal{B} = \{\,]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[\mid a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{R} \,\}.$$

Mit rationalen Eckpunkten erhalten wir hierin die abzählbare Basis

$$\mathcal{B}' = \{\,]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[\mid a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{Q} \,\}.$$

Bemerkung: Es gilt 2AA $\Rightarrow$ 1AA dank $\mathcal{B}_x = \{\, B \in \mathcal{B} \mid x \in B \,\}$ in D6B(4).
Die Umkehrung gilt nicht, wie wir gleich an Beispielen sehen, etwa D6K.
Zweitabzählbarkeit ist global, Erstabzählbarkeit lokal um jeden Punkt.

Kardinalität einer zweitabzählbaren Topologie

Satz D6I: Kardinalität einer zweitabzählbaren Topologie

(0) Ist $\mathscr{B}$ eine Basis der Topologie $\mathscr{T}$, so erhalten wir die Injektion

$$\Phi : \mathscr{T} \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathscr{B}) : U \mapsto \{ B \in \mathscr{B} \mid B \subseteq U \} \qquad \text{mit Retraktion}$$

$$\Psi : \mathfrak{P}(\mathscr{B}) \twoheadrightarrow \mathscr{T} : \mathcal{S} \mapsto \bigcup \mathcal{S} \qquad \text{denn } \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathscr{T}} \text{ dank D6B.}$$

(1) Ist $\mathscr{B}$ abzählbar, $\mathscr{B} \hookrightarrow \mathbb{N}$, so folgt $\operatorname{card}(\mathscr{T}) \le \operatorname{card}(\mathbb{R})$, denn

$$\mathscr{T} \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathscr{B}) \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R} \quad \text{dank B2N.}$$

(2) Für die euklidische Topologie $\mathscr{T}$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, gilt $\operatorname{card}(\mathscr{T}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$.

Beweis: Die Aussagen (0) und (1) sind klar wie im Satz ausgeführt.

(2) Die euklidische Topologie $\mathscr{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt eine abzählbare Basis $\mathscr{B}$, also gilt $\mathscr{T} \hookrightarrow \mathbb{R}$. In Dimension $n \ge 1$ haben wir umgekehrt eine Injektion $\mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow \mathscr{T} : r \mapsto B(0,r)$ mit $r = \operatorname{diam} B(0,r)/2$. Dank Cantor–Bernstein B2O erhalten wir eine Bijektion $\mathscr{T} \cong \mathbb{R}$, also $\operatorname{card}(\mathscr{T}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{QED}}$

⚠ Hingegen ist die diskrete Topologie $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ wesentlich größer als $\mathbb{R}$.

Diskrete Teilmengen und Basen

Aufgabe: In $\mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{Z}^2$ diskret. Geht diskret auch überabzählbar?

Lemma D6J: diskrete Teilmengen und Basen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ diskret und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine Basis. Zu jedem $a \in A$ existiert $U_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap A = \{a\}$. Dazu existiert $B_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in B_a \subseteq U_a$, also $B_a \cap A = \{a\}$. Somit ist $A \hookrightarrow \mathcal{B} : a \mapsto B_a$ injektiv.

Ist $(X, \mathcal{T})$ zweitabzählbar, so ist jede diskrete Teilmenge $A \subseteq X$ abzählbar. Ist $A \subseteq X$ diskret und überabzählbar, so ist $(X, \mathcal{T})$ nicht zweitabzählbar.

Beispiel: Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ ist zweitabzählbar. Also ist jede diskrete Teilmenge A in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ ist demnach abzählbar.

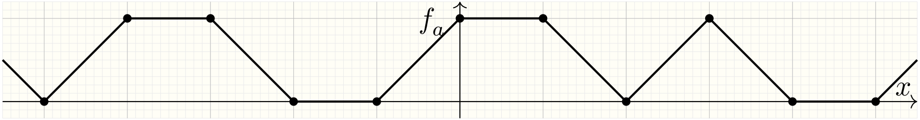
Aufgabe: Es gilt 2AA $\Rightarrow$ 1AA. Gilt auch umgekehrt 1AA $\Rightarrow$ 2AA?

Satz D6K: der Vektorraum $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Supremumsnorm

Der Raum $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist erstabzählbar (D3G), aber nicht zweitabzählbar, denn er enthält eine überabzählbare diskrete Teilmenge $F \subseteq \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.

Beweis: Die Menge $A = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ist überabzählbar, genauer $A \cong \mathbb{R}$ (B2N).
Zu $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ sei $f_a : \mathbb{R} \to [0,1]$ die stückweise affine Interpolation,
also $f_a(x) = (1-t)a_k + t a_{k+1}$ für alle $x = k + t$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in [0,1]$.



Die Zuordnung $A \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) : a \mapsto f_a$ ist injektiv, denn $a = f_a|_{\mathbb{Z}}$.
Mit A ist daher auch $F = \{ f_a \mid a \in A \} \subseteq \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ überabzählbar.

Die Menge F ist diskret in $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm,
denn für $a \ne b$ in A gilt $|f_a - f_b|_{\mathbb{R}} = 1$, also $B(f_a, 1) \cap F = \{f_a\}$.

Demnach ist $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nicht zweitabzählbar. Gemäß D6J gilt genauer:
Jede Basis der Topologie ist mindestens so mächtig wie $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. $\boxed{\text{QED}}$

So lernen Sie Mathematik: Definitionen, Sätze, Beweise, Gegen/Beispiele.
Schrittweise wächst Ihr topologisches Repertoire und Ihr Beispielfundus;
damit können Sie grundlegende Fragen wie die obigen beantworten.

Dichte Teilmengen und Separabilität

Definition D6l: separabler topologischer Raum

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält, d.h. es existiert $A \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$.

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist separabel, denn $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar und dicht.

Satz D6m: Zweitabzählbar impliziert separabel.

Ist $(X, \mathcal{T})$ zweitabzählbar, d.h. es existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, so ist $(X, \mathcal{T})$ separabel, d.h. es existiert A abzählbar und dicht in $(X, \mathcal{T})$.

Beweis: Zu jeder Menge $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ wählen wir einen Punkt $a_B \in B$. Mit $\mathcal{B}$ ist auch $A = \{\, a_B \mid B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\} \,\}$ abzählbar. Zudem ist A dicht: Jede offene Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ enthält eine Menge $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, somit gilt $a_B \in B \subseteq U$, also $A \cap U \neq \emptyset$. QED

Aufgabe: Gilt die Umkehrung? **Lösung:** Nein, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ ist separabel dank $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, erfüllt aber nicht 1AA (D4b) / 2AA (D6b).

Dichte Teilmengen und Separabilität

Ausführung: Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dicht ist in der Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ der punktweisen Konvergenz. Zu jeder Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und jeder Umgebung $U = U(f; \{x_1, \dots, x_n\}, \varepsilon)$ existiert zuerst ein reelles Polynom $g = \sum_{k=0}^{n-1} g_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ mit $g(x_i) = f(x_i)$ dank Lagrange–Interpolation. Wir können nun g approximieren durch $h = \sum_{k=0}^{n-1} h_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$\max_{i=1}^{n} |h(x_i) - g(x_i)| \;\le\; \max_{k=0}^{n-1} |h_k - g_k| \cdot \max_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} |x_i^k| \;\stackrel{!}{<}\; \varepsilon.$$

Somit gilt $h \in U$, wie gewünscht. Die Teilmenge $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist demnach dicht, zudem abzählbar, also ist unser Raum $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\mathrm{pw}})$ separabel.

⚠ Unterscheide **separabel** und **separiert** (= hausdorffsch, siehe D3J). Leider klingt beides sehr ähnlich, bedeutet aber völlig Verschiedenes.

Anschaulich besagt Zweitabzählbarkeit und ebenso Separabilität, dass die betrachtete Topologie $\mathcal{T}$ gewissermaßen „nicht allzu groß“ ist.

Das werden wir daher in vielen Anwendungen als Bedingung nutzen. Eine erste schöne Anwendungen bietet bereits der obige Satz D6I.

Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Die ersehnte Umkehrung gilt immerhin für alle metrischen Räume:

Satz D6n: Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Sei (X, d) ein metrischer Raum und darin $A \subseteq X$ abzählbar und dicht. Dann erlaubt die metrische Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X die abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{\, B(a, r_k) \,|\, a \in A,\ k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Radien $r_k \searrow 0$, etwa $r_k = 2^{-k}$.

Beispiel: Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt die abzählbaren Basen

$$\{\, B(a, 2^{-k}) \,|\, a \in \mathbb{Q}^n,\ k \in \mathbb{N} \,\},$$
$$\{\, B(a, r) \,|\, a \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}_{>0} \,\}.$$

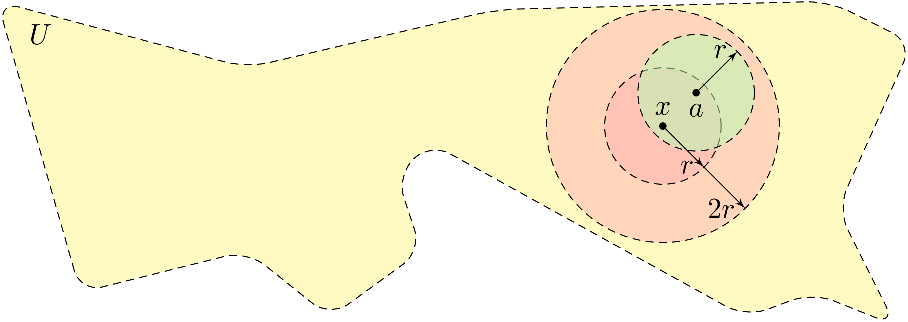
Zweitabzählbarkeit haben wir eingangs gesehen, nun noch schöner. Daraus folgt die Mächtigkeit $\operatorname{card}(\mathcal{T}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$ dank D6i.

Korollar D6o: separabel und zweitabzählbar

Ein metrisierbarer topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann separabel, wenn er zweitabzählbar ist („$\Rightarrow$“ dank D6n und „$\Leftarrow$“ dank D6m). $\boxed{\text{QED}}$

Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Beweis von D6n: Gegeben ist $\mathscr{B} = \{\, B(a, r_k) \mid a \in A,\ k \in \mathbb{N} \,\} \subseteq \mathscr{T}_d$.
Für jede offene Menge $U \in \mathscr{T}_d$ behaupten wir $U = \bigcup \{\, B \in \mathscr{B} \mid B \subseteq U \,\}$.
Die Inklusion „$\supseteq$" ist klar, wir zeigen „$\subseteq$": Hierzu sei $x \in U$.



Da U offen ist in (X, d), existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.
Dank $r_k \searrow 0$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $r_k < \varepsilon/2$, also $B(x, 2r_k) \subseteq U$.
Da A dicht ist in (X, d), existiert $a \in A \cap B(x, r_k)$.
Somit gilt $x \in B(a, r_k) \subseteq B(x, 2r_k) \subseteq U$.

QED

Erste Beispiele zur Separabilität

Satz D6p: separable Räume stetiger Funktionen

Der Banach–Raum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Supremumsnorm ist nicht zweitabzählbar (D6k) und somit auch nicht separabel (D6n).

Hingegen ist $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ separabel und somit zweitabzählbar (D6n): Dank Weierstraß–Approximation ist $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ dicht.

🙂 Auch die ℓ^p–Räume bieten einen reichhaltigen Beispielfundus, an dem Sie Ihre Intuition schulen und Ihre Werkzeuge schärfen:

Satz D6q: separable ℓ^p–Räume

Sei $1 \le p < \infty$. Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ ist $D = \mathbb{Q}^{(\Omega)}$ bzw. $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q})^{(\Omega)}$ dicht und $\{ \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \text{ endlich} \}$ diskret. Genau dann ist der Raum $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ separabel und zweitabzählbar, wenn Ω abzählbar ist.

Hingegen ist $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ weder separabel noch zweitabzählbar, denn hierin ist $\{ \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \mathbb{N} \}$ überabzählbar und diskret.

Beweis: Der Raum $\ell^p(\Omega) = \ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ trägt die ℓ^p–Norm $|{-}|_p$ (C1L). Hierin ist D eine dichte Teilmenge (D5K). Ist Ω abzählbar, so auch D. Dank D6N erfüllt der Raum $\ell^p(\Omega)$ dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Umgekehrt ist $\{\, \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \text{ endlich} \,\}$ diskret. Ist also Ω überabzählbar, so erfüllt $\ell^p(\Omega)$ nach D6J nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom, und nach Satz D6N besitzt $\ell^p(\Omega)$ auch keine dichte abzählbare Teilmenge.

Für $p = \infty$ verhält sich der Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ grundlegend anders:
Wir haben die injektive Abbildung $\iota : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N}) : A \mapsto \mathbf{1}_A$.
Das Bild ist überabzählbar und diskret, denn $|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|_\infty = 1$ für $A \neq B$.

Nach D6J erlaubt die Topologie auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ somit keine abzählbare Basis. Nach D6N besitzt $\ell^\infty(\mathbb{N})$ auch keine dichte abzählbare Teilmenge. QED

☺ So lernen Sie Mathematik: Definitionen, Sätze, Gegen/Beispiele. Schritt für Schritt wächst Ihr topologisches Repertoire.

Satz D6R: separable Hilbert–Räume

Jeder separable Hilbert–Raum $(V, \langle - | - \rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist isometrisch zu einem euklidischen Raum $\mathbb{K}^n = \ell^2(\{1, \dots, n\})$ oder zu $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Beweis: Im Falle $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ existiert eine Basis $b_1, \dots, b_n \in V$, dank Gram–Schmidt C1H eine Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n \in V$. Diese ONB stiftet die lineare Isometrie $V \cong \mathbb{K}^n : e_i \leftrightarrows e_i$.

Im Falle $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$ nutzen wir die vorausgesetzte Separabilität: Es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq V$. Gram–Schmidt bildet daraus eine orthonormale Familie $e_0, e_1, e_2, \dots$.

Die Abbildung $f : \ell^2(\mathbb{N}) \to V$ mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$ ist wohldefiniert, da V vollständig ist und somit die angegebene Reihe konvergiert.

Nach Konstruktion ist f linear. Dank Orthonormalität ist f isometrisch und somit injektiv. Der Aufspann $U = \langle e_0, e_1, e_2, \dots \rangle_{\mathbb{K}}$ enthält A, der Abschluss ist also $\overline{U} = V$. Somit ist f surjektiv. $\boxed{\text{QED}}$

Eine schöne Anwendung zur Separabilität

☺ Das ist ein sehr elegantes und auch beruhigendes Ergebnis!

Die euklidischen Räume $\mathbb{K}^n = \ell^2(\{1,\dots,n\})$ und $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ sind recht einfach strukturiert, sehr übersichtlich und uns seit langem vertraut. In diesen „Koordinatenräumen“ können wir wie gewohnt rechnen. Manche nennen sie daher die „kanonischen Hilbert–Räume“.

Der Satz garantiert, dass jeder Hilbert–Raum genau so aussieht – im unendlich-dimensionalen Fall unter der vorsichten Einschränkung, dass der Raum separabel sein soll, also wie gesagt „nicht allzu groß“. Sie sehen hier sehr schön, wie wohltuend alles zusammenwirkt.

Natürlich gibt es auch nicht-separable Hilbert–Räume, etwa $\ell^2(\Omega,\mathbb{K})$ für jede beliebige überabzählbare Menge Ω. Genau hierzu haben wir den vorangegangenen Satz D6Q.

In der Analysis und vielen Anwendungen, insbesondere in der Physik, sind jedoch die separablen Hilbert–Räume besonders interessant, in der Fourier–Theorie etwa $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ oder $\ell^2(\mathbb{Z}^n,\mathbb{K})$.

Offen und dicht bedeutet „fast alles“.

Dichte Mengen sind nicht schnitt-stabil, siehe $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Besser:
Aufgabe: Sind $V_1, \dots, V_n$ offen und dicht in $(X, \mathcal{T})$, so auch $V_1 \cap \dots \cap V_n$.

Lösung: Offen ist klar dank (O2), zu dicht sei $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}$.
Da V_1 in $(X, \mathcal{T})$ dicht und auch offen ist, gilt $\emptyset \neq U \cap V_1 \in \mathcal{T}$.
So fortfahrend erhalten wir induktiv $\emptyset \neq U \cap V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{T}$.

Hingegen geht für *abzählbare* Schnitte $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$ in $(X, \mathcal{T})$ die Offenheit meist verloren, in günstigen Fällen bleibt die Dichtheit jedoch erhalten. Diese besondere topologische Eigenschaft verdient einen Namen:

Definition D7B: Baire–Raum

Ein Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Baire–Raum**, wenn für jede Familie $V_1, V_2, V_3, \dots$ offener und dichter Teilmengen in $(X, \mathcal{T})$ auch $V = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$ dicht ist.

Beispiele: Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}X)$, etwa $\mathbb{Z}^n$, ist Baire, denn $V_k = X$.
Für $n \geq 1$ ist $\mathbb{Q}^n$ hingegen kein Baire–Raum, denn $\bigcap_{x \in \mathbb{Q}^n} (\mathbb{Q}^n \setminus \{x\}) = \emptyset$.

Glücklicherweise ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ein Baire–Raum, ebenso jeder vollständig metrisierbare Raum, dank folgendem Satz von Baire.

Satz von Baire

Satz D7c: Baire 1899

Jeder vollständige metrische Raum (X, d) ist ein Baire–Raum, das heißt:
Sind $V_1, V_2, V_3, \dots$ offen und dicht in (X, d), so ist auch $V = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$ dicht.

Beweis: Zu $a_0 \in X$ und $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ zeigen wir $B(a_0, r_0) \cap V \neq \emptyset$. Sei $k \geq 1$.
Da V_k in $(X, \mathcal{T})$ dicht und offen ist, gilt $\emptyset \neq V_k \cap B(a_{k-1}, r_{k-1}) =: U_k \in \mathcal{T}$.
Wir wählen $a_k \in U_k$ und $r_k \in \,]0, r_{k-1}/2]$ mit $\bar{B}(a_k, r_k) \subseteq B(a_k, 2r_k) \subseteq U_k$.

Wir erhalten:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & V_1 & & V_2 & & V_3 & & \dots \\ & & \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid & & \\ B(a_0, r_0) & \supseteq & B(a_1, r_1) & \supseteq & B(a_2, r_2) & \supseteq & B(a_3, r_3) & \supseteq & \dots \end{array} \quad \text{mit } r_k \searrow 0$$

Für alle $k \geq n$ gilt $a_k \in B(a_n, r_n)$. Somit ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge.
Dank Vollständigkeit von (X, d) existiert $a \in X$ mit $a_k \to a$ für $k \to \infty$.
Es folgt $a_k \to a \in \bar{B}(a_n, r_n) \subseteq U_n \subseteq V_n$, also $a \in B(a_0, r_0) \cap V$. $\boxed{\text{QED}}$

Beispiel: Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist nicht abzählbare Vereinigung von Geraden A_k;
die Komplemente $V_k := \mathbb{R}^2 \setminus A_k$ sind offen und dicht, also $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$ dicht.
Anders als $\mathbb{Q}^n$ ist $\mathbb{R}^n$ nicht abz. Vereinigung affiner Teilräume $A_k \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Anwendung: die Banach–Dimensionslücke

Mit der ℓ^p–Norm ist $\mathbb{R}[x]_{<n} \cong \mathbb{R}^n$ vollständig, doch $\mathbb{R}[x] \cong \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ nicht.
Aufgabe: Ist der Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ aller Polynome vollständig normierbar?

Satz D7D: die Dimensionslücke bei Banach–Räumen

Die Dimension jedes Banach–Raums ist endlich oder überabzählbar.

Beweis: Sei $(V, |\text{-}|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum mit abz. Basis $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Für $A_k := \langle b_0, \dots, b_k \rangle^!_{\mathbb{K}}$ gilt $V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ sowie $\overline{A_k} = A_k$ und $A_k^\circ = \emptyset$.
Das Komplement $V_k := V \setminus A_k$ ist offen und dicht und $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} V_k = \emptyset$.
Nach dem Satz von Baire ist $(V, |\text{-}|)$ nicht vollständig. $\boxed{\text{QED}}$

Eine Teilmenge A in $(X, \mathcal{T})$ mit $\overline{A}^\circ = \emptyset$ heißt **nirgends dicht**, das heißt, $B = X \setminus A$ enthält mit $B^\circ = X \setminus \overline{A}$ eine offene dichte Teilmenge, $\overline{B^\circ} = X$.

Jede abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen heißt **mager** (von erster Baire–Kategorie); das Komplement heißt **komager** (oder **residuell**).
Ist eine Menge nicht mager, so heißt sie **fett** (zweite Baire–Kategorie).

Beispiele: In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$ mager, somit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ komager und fett.
Die Menge $\mathbb{R}$ ist fett in $\mathbb{R}$, aber mager in $\mathbb{C}$. Es kommt auf den Raum an!

Interpretation als Baire–Maß

Mager ist stabil bezüglich Teilmengen und abzählbaren Vereinigungen. Auf jedem Raum $(X, \mathcal{T})$ erhalten wir daher das σ–additive **Baire–Maß**

$$\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty] : M \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } M \text{ mager in } (X, \mathcal{T}) \text{ ist,} \\ \infty & \text{sonst, } M \text{ ist fett in } (X, \mathcal{T}). \end{cases}$$

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Baire–Raum, so gilt $\mu(V) > 0$ für alle $V \subseteq X$ mit $V^\circ \neq \emptyset$. Gilt zudem $X \neq \emptyset$, so ist eine komagere Teilmenge $C \subseteq X$ nicht mager, andernfalls wäre ganz $X = C \sqcup (X \setminus C)$ mager, ein Widerspruch.

Übung D7G: Baire und Lebesgue sind orthogonal.

Für $n \geq 1$ ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n = M \sqcup N$ disjunkte Vereinigung einer Baire–mageren Menge M und einer Lebesgue–Nullmenge N.

Beweis: Sei $\mathbb{Q}^n = \{\, q_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}^!$. Dann ist $U_k = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(q_i, 2^{-i-1}/k)$ offen und dicht und hat Lebesgue–Maß $\operatorname{vol}_n(U_k) \leq 2/k$. Der abzählbare Schnitt $N = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ hat demnach Lebesgue–Maß $\operatorname{vol}_n(N) = 0$, ist aber dennoch komager. Sein Komplement $M = \mathbb{R}^n \setminus N$ ist also mager. $\boxed{\text{QED}}$

Borel–Mengen, zunächst G_δ und F_σ

Offene Mengen sind stabil unter *endlichen* Schnitten, abgeschlossene stabil unter *endlichen* Vereinigungen. Abzählbar gilt dies nicht mehr:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a-2^{-n}, b+2^{-n}[, \qquad & \bar{B}(a,r) &= \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(a, r+2^{-n}) \\
]a,b[&= \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+2^{-n}, b-2^{-n}], \qquad & B(a,r) &= \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(a, r-2^{-n})
\end{aligned}
$$

Definition D7H: G_δ und F_σ

In $(X,\mathcal{T})$ ist eine **G_δ–Menge** abzählbarer Durchschnitt offener Mengen, eine **F_σ–Menge** ist abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen.

Beispiel: In jedem metrischen Raum (X,d) gilt dank Proposition C3N:

$$
\begin{aligned}
A \in \mathcal{T}_d^c \quad &\Longrightarrow \quad A = \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\, x\in X \mid d(x,A) < 2^{-n} \,\} && \text{ist } G_\delta \\
U \in \mathcal{T}_d \quad &\Longrightarrow \quad U = \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\, x\in X \mid d(x, X\setminus O) \ge 2^{-n} \,\} && \text{ist } F_\sigma
\end{aligned}
$$

Der Buchstabe F steht für *abgeschlossen* (frz. *fermé*) und σ für abzählbare Vereinigung (*Summe*). Entsprechend steht G für *offen* (*Gebiet*) und δ steht für abzählbaren Durchschnitt. Diese Bezeichnungen sind traditionell.

Borel–Mengen, zunächst G_δ und F_σ

Das Komplement jeder F_σ–Menge ist eine G_δ–Menge und umgekehrt. Die G_δ–Mengen in $(X, \mathcal{T})$ sind stabil unter abzählbaren Schnitten und endlichen Vereinigungen: Für alle offene Mengen $G_{i,j} \in \mathcal{T}$ gilt

$$\bigcap_{i=0}^{\infty}\Big[\bigcap_{j=0}^{\infty} G_{i,j}\Big] = \bigcap\big\{\, G_{i,j} \,\big|\, (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\big\},$$
$$\bigcup_{i=0}^{n}\Big[\bigcap_{j=0}^{\infty} G_{i,j}\Big] = \bigcap\big\{\, G_{0,j_0} \cup \dots \cup G_{n,j_n} \,\big|\, (j_0,\dots,j_n) \in \mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N} \,\big\}.$$

Die F_σ–Mengen in $(X, \mathcal{T})$ sind stabil unter abzählbaren Vereinigungen und endlichen Schnitten: Für alle abgeschlossenen Mengen $F_{i,j} \in \mathcal{T}^c$ gilt

$$\bigcup_{i=0}^{\infty}\Big[\bigcup_{j=0}^{\infty} F_{i,j}\Big] = \bigcup\big\{\, F_{i,j} \,\big|\, (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\big\},$$
$$\bigcap_{i=0}^{n}\Big[\bigcup_{j=0}^{\infty} F_{i,j}\Big] = \bigcup\big\{\, F_{0,j_0} \cap \dots \cap F_{n,j_n} \,\big|\, (j_0,\dots,j_n) \in \mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N} \,\big\}.$$

Allerdings sind F_σ–Mengen nicht stabil unter *abzählbaren* Schnitten. Durch abzählbare Schnitte von F_σ–Mengen erhält man die $F_{\sigma\delta}$–Mengen. Durch abzählbare Vereinigungen $F_{\sigma\delta}$–Mengen erhält man dann die $F_{\sigma\delta\sigma}$–Mengen, usw. Ebenso gewinnt man aus den G_δ–Mengen durch abzählbare Vereinigungen die $G_{\delta\sigma}$–Mengen, dann $G_{\delta\sigma\delta}$–Mengen usw.

Abzählbare Mengenoperationen: σ–Algebren

Definition D7I: σ–Algebra

Eine **σ–Algebra** auf einer Menge X ist ein System $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, für das gilt:
$\sigma 1$: Es gilt $X \in \mathscr{A}$, und aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $X \setminus A \in \mathscr{A}$.
$\sigma 2$: Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ gilt $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$.

Beispiel: Auf der σ–Algebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ aller Lebesgue–messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir das Lebesgue–Maß $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty] : A \mapsto \operatorname{vol}_n(A)$.

Proposition D7J: erzeugte σ–Algebra

Ist $\mathscr{A}_\lambda \subseteq \mathfrak{P}(X)$ für $\lambda \in \Lambda$ eine σ–Algebra auf X, so auch $\mathscr{A} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{A}_\lambda$.
So erzeugt jedes Mengensystem $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ die zugehörige σ–Algebra

$$\sigma(X,\mathscr{E}) := \bigcap \left\{ \mathscr{A} \,\middle|\, \mathscr{E} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(X) \text{ und } \mathscr{A} \text{ ist eine } \sigma\text{–Algebra auf } X \right\}.$$

Nach Konstruktion ist dies die kleinste σ–Algebra auf X, die $\mathscr{E}$ enthält.

Beweis: Eigenschaften ($\sigma 1$–2) übertragen sich sofort von $\mathscr{A}_\lambda$ auf $\mathscr{A}$.
Beispiel: Zum Raum $(X,\mathscr{T})$ ist $\sigma(X,\mathscr{T}) \subseteq \mathfrak{P}(X)$ die **Borel–σ–Algebra**.

Die Borel–σ–Algebra $\sigma(X, \mathcal{T})$ wird erzeugt von den offenen Mengen, $\mathcal{T}$, von den abgeschlossenen, $\mathcal{T}^c$, und vielen weiteren Mengensystemen. Erste Schritte von $\mathcal{T}$ zu $\sigma(X, \mathcal{T})$ sind die oben beschriebenen Mengen vom Typ F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$, etc. Diese Konstruktion durch *Ausschöpfung* erfordert überabzählbar viele Schritte bis zur Stabilität. Proposition D7J erreicht dieselbe Konstruktion durch *Eingrenzung* auf einen Schlag.

Die Borel–Mengen sind zwar bereits schwindelerregend allgemein, doch $\sigma(X, \mathcal{T})$ bleibt erstaunlich klein: Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$ (D6I). Diese wird nicht erhöht durch abzählbare Operationen, und so hat schließlich auch $\sigma(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ die Kardinalität von $\mathbb{R}$. Hingegen ist die Menge $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \cong 2^{\mathbb{R}}$ aller Teilmengen wesentlich größer! Schon die σ–Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ aller Lebesgue–messbaren ist gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{R}) \cong 2^{\mathbb{R}}$; sie enthält alle Teilmengen der Cantor–Menge $C \cong \mathbb{R}$.

In diesem Sinne sind „die allermeisten“ $M \subseteq \mathbb{R}^n$ keine Borel–Mengen. Die Borel–Hierarchie erlaubt induktiv ein Mindestmaß an Kontrolle. Dies wollen wir in den folgenden Beispielen illustrieren.

Beispiel für nicht G_δ

Übung D7κ:

In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ keine G_δ–Menge (abzählbarer Durchschnitt offener Mengen).

Lösung: Wäre $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ mit $U_n \subseteq \mathbb{R}$ offen, dann wäre U_n dicht in $\mathbb{R}$, also komager, somit auch $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Doch in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ mager. QED

Erinnerung: Jede komagere Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ ist fett, also nicht mager, sonst wäre $\mathbb{R} = C \sqcup (\mathbb{R} \setminus C)$ mager, doch das widerspricht Baires Satz D7c.

Alternative: Sei $\mathbb{Q} = \{ q_n \mid n \in \mathbb{N} \}^!$ eine Abzählung. Auch $U'_n = U_n \setminus \{q_n\}$ ist offen und dicht in $\mathbb{R}$, doch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U'_n = \emptyset$ widerspricht Baires Satz D7c.

Damit können wir die folgende Frage (c) beantworten: Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Stetigkeitsmenge S_f eine G_δ–Menge (D7l), also $S_f \neq \mathbb{Q}$. Diese scheinbar einfache Frage erfordert eine erstaunlich tiefsinnige Untersuchung. Dies ist der Beginn der *deskriptiven Mengenlehre.*

📖 J.C. Oxtoby: *Measure and Category.* Springer 2012.
A.S. Kechris: *Classical Descriptive Set Theory.* Springer 1995.

Welche Stetigkeitsmengen sind möglich?

Aufgabe: Existiert $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig genau in (a) $\emptyset$? (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? (c) $\mathbb{Q}$?

Lösung: (a) Ja, die Dirichlet–Funktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (b) Ja, die kleine Dirichlet–Funktion $f(p/q) = 1/q$ für $p/q \in \mathbb{Q}$ gekürzt, sonst $f(x) = 0$.
Frage (c) ist härter und erfordert einen anderen, obstruktiven Ansatz:

Satz D7L: Jede Stetigkeitsmenge S_f ist G_δ.

Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine beliebige Abbildung metrischer Räume. Dann ist $S_f := \{\, a \in X \mid f \text{ ist stetig im Punkt } a \,\}$ eine G_δ–Menge.

Beweis: Wir definieren die **Oszillation** von f im Punkt $a \in X$ durch

$$\omega(a) := \inf_{\delta > 0} \operatorname{diam} f(B(a, \delta)).$$

Genau dann ist f stetig in a, wenn $\omega(a) = 0$ gilt. Wir haben also

$$S_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\, a \in X \mid \omega(a) < 2^{-n} \,\}.$$

Die letzteren Mengen sind offen: Gilt $\omega(a) < \varepsilon$, so existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\operatorname{diam} f(B(a, \delta)) < \varepsilon$. Für alle $x \in B(a, \delta)$ folgt daraus $\omega(x) < \varepsilon$. $\boxed{\text{QED}}$

Baire–Osgood: Stetigkeit nach punktweiser Konvergenz

Aufgabe: Ist $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ punktweiser Limes stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Lösung: Die Dirichlet–Funktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nirgends stetig.
Nach dem folgenden Satz von Baire–Osgood ist das zu wenig Stetigkeit.
(Für die kleine Dirichlet–Funktion hingegen gelingt es. Übung!)

Satz D7M: Baire–Osgood

Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, zudem (X, d) vollständig.
Seien $(f_n : X \to Y)_{n \in \mathbb{N}}$ stetig mit punktweisem Grenzwert $f_n \to f$.
Dann ist $S_f \subseteq X$ komager, also f „fast überall" stetig.

Erinnerung (C3Q): Bei gleichmäßiger Konvergenz $f_n \to f$ gilt $S_f = X$.
Bei punktweiser Konvergenz geht Stetigkeit im Allgemeinen verloren,
doch erstaunlich viel bleibt erhalten, denn $S_f \subseteq X$ ist komager.

Beispiel: Die Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren
punktweise gegen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \le x < 1$ und $f(1) = 1$.
Hier ist $S_f = [0, 1[$ komager in $[0, 1]$, wie von Baire–Osgood vorhergesagt.

Beweis: Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir $F := \{ a \in X \mid \omega(a) \ge 5\varepsilon \}$. Wir haben oben gesehen, dass F abgeschlossen ist. Wir zeigen, dass F nirgends dicht ist, also $F^\circ = \emptyset$. Damit ist $X \setminus S_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{ a \in X \mid \omega(a) \ge 2^{-n} \}$ mager.

(0) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist $C_n := \bigcap_{i,j\ge n} \{ x \in X \mid e(f_i(x), f_j(x)) \le \varepsilon \}$ in (X,d) abgeschlossen. Es gilt $C_n \subseteq C_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$: Dank punktweiser Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ in (Y,e) ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge.

(1) Wir nehmen an, F° wäre nicht leer, somit auch nicht mager in (X,d). Dank $F^\circ = \bigcup_n (F^\circ \cap C_n)$ existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\emptyset \ne F^\circ \cap C_n^\circ =: U$. (Andernfalls wäre $F^\circ \cap C_n$ nirgends dicht in F° und somit F° mager. Das widerspricht Baires Satz, siehe hierzu die nachfolgende Aufgabe.)

(2) Für alle $x \in U$ gilt $e(f_n(x), f(x)) = \lim_{k\to\infty} e(f_n(x), f_k(x)) \le \varepsilon$. Die Funktion f_n ist stetig: Zu jedem $a \in U$ existiert also ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $e(f_n(a), f_n(x)) \le \varepsilon$ für alle $x \in B(a,\delta)$ gilt.

(3) Dank Dreiecksungleichung folgt $e(f_n(a), f(x)) \le 2\varepsilon$ für alle $x \in B(a,\delta)$, also $\omega(a) \le 4\varepsilon$. Das widerspricht $a \in B(a,\delta) \subseteq U \subseteq F$. QED

Offen in Baire ist Baire.

Die Baire–Eigenschaft vererbt sich auf offene Teilräume. Das hilft im vorigen Beweis und auch sonst häufig, daher führen wir dies nun aus:

Aufgabe: Ist $Y \subseteq X$ offen und $(X, \mathcal{T})$ ein Baire–Raum, so auch $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Lösung: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n \subseteq Y$ offen und dicht im Teilraum $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wir zeigen, dass die Schnittmenge $U := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ dicht ist in $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Dank $Y \in \mathcal{T}$ gilt $U_n \in \mathcal{T}$ und $V_n := U_n \cup (X \setminus \overline{Y}) \in \mathcal{T}$. Zudem ist V_n dicht in $(X, \mathcal{T})$: Für $\emptyset \neq O \in \mathcal{T}$ gilt entweder $O \cap Y = \emptyset$, somit $O \subseteq X \setminus \overline{Y}$, oder $\emptyset \neq O \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, somit $O \cap Y \cap U_n \neq \emptyset$, also jedenfalls $O \cap V_n \neq \emptyset$.

Nach Voraussetzung ist $(X, \mathcal{T})$ ein Baire–Raum, also ist die Schnittmenge $V := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cup (X \setminus \overline{Y})$ dicht in $(X, \mathcal{T})$. Jede offene Menge $O \in \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$ schneidet also V. Da O und $X \setminus \overline{Y}$ disjunkt sind, schneidet O demnach $U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Das bedeutet, U ist dicht in $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Die Baire–Eigenschaft vererbt sich nicht auf abgeschlossene Teilräume! **Übung:** In $\mathbb{C}$ hat der Teilraum $H = \mathbb{C}_{\mathrm{im}>0}$ die Baire–Eigenschaft, daher auch $X = H \cup \mathbb{Q}$, der darin abgeschlossene Teilraum $\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

☺ „Fast jede“ stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist nirgends differenzierbar: Auf $I = [0,1]$ betrachten wir dazu den Raum $\mathscr{C}(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$ aller stetigen reellen Funktionen mit der Supremumsnorm. Darin sei

$$A_n := \left\{ f \in \mathscr{C}(I) \;\middle|\; \exists x \in I \;\; \forall y \in B(x, 2^{-n}) \,:\, |f(x) - f(y)| \le n|x - y| \right\}.$$

Ist f in irgendeinem Punkt $x \in I$ diff’bar, so gilt $f \in A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Aufgabe: Jede Menge A_n ist (a) abgeschlossen und (b) nirgends dicht. Somit ist A mager in $\mathscr{C}(I)$: „Fast keine“ stetige Funktion ist diff’bar.

☺ Diese Abschätzung liefert einen Überblick und beweist erneut die Existenz stetiger Funktionen, die nirgends diff’bar sind. Dabei wird allerdings kein einziges konkretes Beispiel konstruiert. Eine elegante Konstruktion liefert Takagi C6A mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} d(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$.

Vergleichen Sie dies mit Cantors elegant-abstraktem Existenzbeweis „fast alle reellen Zahlen sind transzendent“ und dagegen mühsam-explizite Transzendenzbeweise für einzelne Zahlen, etwa für $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$.

E. Corominas, F. Sunyer: *Sur des conditions pour qu'une fonction infiniment dérivable soit un polynôme.* CRAS 238 (1954) 558–559.

Aufgabe: Für jede glatte Funktion $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{R}[x] \quad &\overset{\text{(a)}}{\iff} \quad \exists n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \; : \; f^{(n)}(x) = 0 \\ &\overset{\text{(b)}}{\iff} \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; f^{(n)}(x) = 0 \end{aligned}$$

Lösung: (a) „$\Rightarrow$“: Für $f \in \mathbb{R}[X]_{<n}$ gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k x^k$, also $\partial^n f = 0$. „$\Leftarrow$“: Dies folgt aus dem Satz von Taylor durch Verschwinden des Rests.

(b) Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist trivial, formal durch Quantorentausch. Erstaunlich ist die Umkehrung „$\Leftarrow$“, sie ist höchst raffinierte Kunst.

(1) Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A_n := \{\, x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) = 0 \,\}$ abgeschlossen. Für das Innere gilt $A_n^\circ = \bigcup_{i \in I_n}]s_i, t_i[$ mit $[s_i, t_i] \cap [s_j, t_j] = \emptyset$ für $i \neq j$.

(2) Wir haben $A_n^\circ \subseteq A_{n+1}^\circ$, dabei kommen disjunkte Intervalle hinzu. Es genügt, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^\circ = \mathbb{R}$ zu zeigen: Dann gilt $A_n^\circ \neq \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $A_n^\circ = \mathbb{R}$, sonst erschienen Randpunkte $x \in \delta A_n^\circ$ nicht in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^\circ = \mathbb{R}$.

Wir wollen zeigen, dass die Menge $X := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ$ leer ist.

(3) Zunächst ist X abgeschlossen und ohne isolierte Punkte. Wir wenden Baires Satz D7c auf X an: Nach Voraussetzung gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$, also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \cap A_n)$. Demnach muss für ein $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X \cap A_n$ nicht-leeres Inneres in X haben. Das heißt $\emptyset \neq X \cap J \subseteq X \cap A_n$ für ein Intervall $J = \,]a, b[$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$, also $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in X \cap J$.

(4) Da alle $x \in X \cap J$ Häufungspunkte sind, folgt $f^{(k)}(x) = 0$ für $k \geq n$ per Induktion durch $f^{(k+1)}(x) = \lim_{x'\to x}(f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x'))/(x - x')$.

(5) Unser Intervall J enthält auch Intervalle K komplementär zu X. Dort gilt $f^{(m)}|_K = 0$ für ein m abhängig von K. Für $m \leq n$ gilt $f^{(n)}|_K = 0$. Für $m > n$ gilt $f^{(n)}(x) = \ldots = f^{(m)}(x) = 0$ an den Endpunkten, denn diese gehören zu $J \cap X$. Durch Integration gelangen wir von $f^{(m)}|_K = 0$ zu $f^{(n)}|_K = 0$. Dies gilt für jedes Intervall K in $J \setminus X$, also schließlich $f^{(n)}|_J = 0$. Somit gilt $J \subseteq A_n$ und $J \cap X = \emptyset$, ein Widerspruch.

🙂 Die Äquivalenz (b) scheint unglaublich, ist aber wahr. Ihr Beweis ist ein Lehrstück mathematischen Scharfsinns und technischer Virtuosität.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly
was some unprocessed data that should have been added to the
this extra page has been added to receive it.
If you rerun the document (without altering it) this surplus p
away, because LaTeX now knows how many pages to expect fo
document.