

Kapitel C

Distanzlehre: metrische Räume

Alles messen, was messbar ist –
und messbar machen, was noch nicht messbar ist.

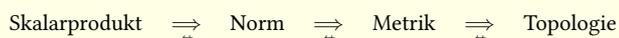
Galileo Galilei (1564–1642)

Inhalt dieses Kapitels C

- 1 Skalarprodukte und Normen auf Vektorräumen
- 2 Metrische Räume und ihre Topologie
- 3 Konvergenz und Stetigkeit
- 4 Vollständige metrische Räume
- 5 Der kleine Horrorladen

Von Linearer Algebra über die Analysis zur Topologie

Lineare Algebra, Geometrie Analysis, Topologie



speziell, rigide, mehr Tiefe mehr Breite, flexibel, allgemein

In diesem Kapitel vollziehen wir den Dreischritt von Skalarprodukten zu Normen zu Metriken zu Topologien. Dies sind vier allgegenwärtige mathematische Grundstrukturen. Sie kennen diese bereits aus der Linearen Algebra und analytischen Geometrie sowie der Analysis, jetzt fortgeführt in der Topologie, später in der Funktionalanalysis.

Meist arbeiten wir allgemein mit Topologien. Oft ist es jedoch sinnvoll, Metriken zu nutzen, oder soweit möglich Normen und Skalarprodukte. Je nach Anwendung nutzen wir dankend passende Werkzeuge: Starke Strukturen erlauben mehr Tiefe, allgemeine Strukturen mehr Breite. Wir schauen uns daher auch jeweils das Umkehrproblem an

Von Linearer Algebra über die Analysis zur Topologie

Dieses Kapitel ist ein Rückblick auf die ersten Semester mit einigen Präzisierungen und Ergänzungen. Ich erstrebe damit eine gemeinsame Grundlage und einen reichhaltigen Beispielfundus für die Topologie. Weniger ist mehr? Nein. Mehr Beispiele helfen zu mehr Verstehen.

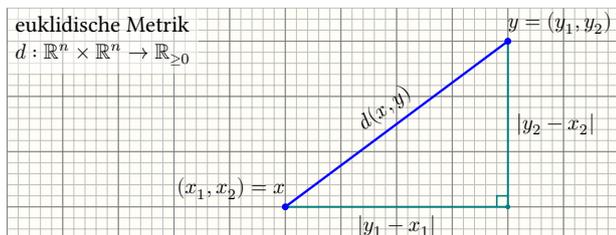
Ich importiere hier freizügig Themen aus der Linearen Algebra und der Analysis, die Sie ja alle gehört haben (sofern Sie Mathematik studieren), manchmal auch aus der Stochastik oder der Numerik oder anschauliche Beispiele aus der Physik, der Informatik oder weiteren Anwendungen.

Vorkenntnisse der Teilnehmer:innen sind naturgemäß unterschiedlich. Wenn Sie dabei schöne Themen wiedererkennen, dürfen Sie sich freuen und stolz sein auf ihre mathematische Allgemeinbildung. Wenn nicht, dann motiviert Sie dieser Ausblick vielleicht, mehr wissen zu wollen.

Ich will und muss mich hier kurz fassen – aber doch nicht zu kurz! Ich versuche dabei, die Mathematik vernetzt darzustellen und hilfreiche Querverbindungen zu zeigen. Ich vertraue auf Ihre Neugier.

Die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n

Wir betrachten die Menge \mathbb{R}^n aller reellen n -Tupel.



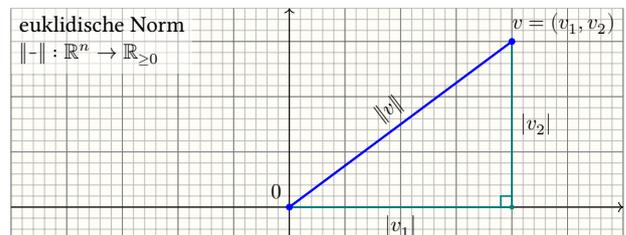
Die **euklidische Metrik** $d(x, y)$ misst den Abstand vom Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ zum Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, also die Länge des Vektors $y - x$. Dank Pythagoras gilt:

$$d(x, y) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + \dots + |y_n - x_n|^2}$$

Unsere Skizze zeigt dies für $n = 2$. **Übung:** Skizzieren und begründen Sie dies ebenso für $n = 3$. Der allgemeine Fall $n \in \mathbb{N}$ gelingt per Induktion.

Die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n

Wir betrachten den Vektorraum \mathbb{R}^n über den reellen Zahlen \mathbb{R} .



Die **euklidische Norm** $\|v\|$ misst die Länge des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ als den Abstand vom Ursprung 0 zum Punkt v . Dank Pythagoras gilt:

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2}$$

Das Normquadrat $\|v\|^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2$ ist eine **quadratische Form**. Die zugehörige Bilinearform ist das **euklidische Skalarprodukt**.

Verallgemeinerung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Wir formulieren Skalarprodukte nicht nur über \mathbb{R} , auch über \mathbb{C} und \mathbb{H} . Zur Erinnerung: Auf dem Körper \mathbb{R} haben wir die **triviale Konjugation**

$$\text{conj}_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \mapsto \bar{\alpha} = \alpha.$$

Demnach gilt $|\alpha|^2 = \bar{\alpha}\alpha = \alpha\bar{\alpha} = \alpha^2 \geq 0$, mit Gleichheit gdw $\alpha = 0$.

Auf $\mathbb{C} = \{z = \alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ haben wir die **komplexe Konjugation**

$$\text{conj}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z = \alpha + i\beta \mapsto \bar{z} = \alpha - i\beta.$$

Demnach gilt $|z|^2 = \bar{z}z = z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, mit Gleichheit gdw $z = 0$.

Auf $\mathbb{H} = \{q = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$ haben wir entsprechend

$$\text{conj}_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : q = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta \mapsto \bar{q} = \alpha - i\beta - j\gamma - k\delta.$$

Es gilt $|q|^2 = \bar{q}q = q\bar{q} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 0$, mit Gleichheit gdw $q = 0$.

Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{\bar{x}} = x$ sowie $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$ und $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$.

Dies setzen wir fort auf Matrizen über \mathbb{K} : Zur Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times J}$ definieren wir die **adjungierte Matrix** $A^\dagger := \bar{A}^T \in \mathbb{K}^{J \times I}$ durch Transkonjugation.

Verallgemeinerung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Wir formulieren systematisch diese drei Fälle gemeinsam. Es lohnt sich! Denkökonomie: Die Arbeit über \mathbb{R}, \mathbb{C} und \mathbb{H} verläuft weitgehend parallel. In ihrem Zusammenspiel und im Kontrast können wir viel lernen!

Grundlegend ist der reelle Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dieser ist insbesondere in kleiner Dimension $n = 2, 3$ wunderbar anschaulich. Davon wollen wir ausgehen und auf beliebige (auch unendliche) Dimension verallgemeinern.

Für viele Anwendungen (in Mathematik, Physik, Ingenieurwesen, ...) reichen die reellen Zahlen \mathbb{R} nicht aus, daher nutzen wir die Erweiterung zu den komplexen Zahlen \mathbb{C} . Das gilt insbesondere für Skalarprodukte.

Die Quaternionen \mathbb{H} werden erfahrungsgemäß nicht so häufig genutzt wie \mathbb{C} oder \mathbb{R} , oft genug sind sie jedoch eine sehr hilfreiche Ergänzung.

Den reellen Fall versteht man besser, wenn man auch komplex denkt, und fürs Komplexe hilft es, die Quaternionen im Hinterkopf zu haben.

Kurzum: Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind oft nicht genug, die Quaternionen \mathbb{H} sind manchmal zu viel, die komplexen Zahlen \mathbb{C} sind meist genau richtig.

Beispiel C1A: das euklidische Skalarprodukt auf dem Raum \mathbb{K}^n

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das **Standardskalarprodukt**

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle := \overline{u_1}v_1 + \dots + \overline{u_n}v_n = u^\dagger v.$$

Für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

- S0: positive Semidefinitheit, $\langle u | u \rangle \geq 0 = \langle 0 | 0 \rangle$
- S1: positive Definitheit, $\langle u | u \rangle > 0$ für $u \neq 0$
- S2: konjugierte Symmetrie, $\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$
- S3: Linearität rechts, $\langle u | v\lambda + w\mu \rangle = \langle u | v \rangle\lambda + \langle u | w \rangle\mu$

Aus (S2) und (S3) folgt konjugierte Linearität in der ersten Variablen:

- S4: konjugierte Linearität links, $\langle u\lambda + v\mu | w \rangle = \overline{\lambda}\langle u | w \rangle + \overline{\mu}\langle v | w \rangle$

Zu (S4) sagen wir kurz **semilinear**, zu (S3&4) demnach **sesquilinear** (lat. *sesqui*, 'anderthalb'). Zu (S2) sagt man **hermitesch**, zu Ehren von Charles Hermite (1822–1901), über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bedeutet das **symmetrisch**.

Wir nennen dies das **euklidische** oder **Standardskalarprodukt** auf \mathbb{K}^n . Allgemein über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist es eine **hermitesche Sesquilinearform**, speziell über \mathbb{R} eine **symmetrische Bilinearform**.

Dank (S2) gilt $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$, wir können also die Ordnung von \mathbb{R} nutzen und von Positivität sprechen: (S0) fordert $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und (S1) ergänzt stärker $\langle u | u \rangle \neq 0$ für alle $u \neq 0$, also $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}_{> 0}$.

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Aussagen (S0–4) nach.

Lösung: Wir nutzen die Anordnung der reellen Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$:

(S0) Für jeden Koeffizienten $u_i \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{u_i}u_i = |u_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für jeden Vektor $u \in \mathbb{K}^n$ folgt $\langle u | u \rangle = |u_1|^2 + \dots + |u_n|^2 \geq 0$.

(S1) Im Falle $u \neq 0$ gilt $u_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Daraus folgt sofort die strikte Ungleichung $\langle u | u \rangle \geq |u_i|^2 > 0$.

Wir nutzen, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ein Ring ist und die Konjugation ein Ringantiautomorphismus. Damit rechnen Sie (S2–4) geduldig nach. Da \mathbb{H} nicht-kommutativ ist, achten wir auf die Reihenfolge der Faktoren.

Bemerkung: Auf dem Vektorraum \mathbb{R}^n ist $(u, v) \mapsto u_1v_1 + \dots + u_nv_n$ positiv definit, auf \mathbb{C}^n und \mathbb{H}^n jedoch nicht, denn $i \cdot i = -1 < 0$.

⚠ Zur Korrektur müssen wir eine der beiden Variablen konjugieren. Ich plädiere entschieden für die erste, dadurch werden Formeln schöner. Diese Konvention ist in der physikalischen Literatur weitgehend üblich.

⚠ Manche Autoren wählen die zweite; das ist eine Geschmacksfrage. So findet es sich vor allem in der älteren, mathematischen Literatur. Beide Konventionen sind per Konjugation ineinander umzurechnen.

😊 Wir legen uns auf eine Konvention fest und befolgen diese fortan.

Bemerkung: Es gilt $\langle u | 0 \rangle = 0$ dank (S3) und $\langle 0 | v \rangle = 0$ dank (S4). Insbesondere gilt demnach immer $\langle 0 | 0 \rangle = 0$, und aus (S1) folgt (S0).

Die Formulierung der Eigenschaften (S0–3) ist daher etwas redundant; ich möchte damit die positive Definitheit (S1) besonders hervorheben.

Gilt in späteren Anwendungen statt positiver Definitheit (S1) nur die schwächere Eigenschaft (S0), so heißt $\langle - | - \rangle$ **positiv semidefinit**.

😊 Mit dem Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ messen wir Winkel und Längen. Daraus gewinnen wir für V wichtige geometrische Werkzeuge:

Norm: Die Länge eines Vektors $v \in V$ ist $|v| = \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$.

Cauchy–Schwarz–Ungleichung: Es gilt $|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Orthogonalität: $u, v \in V$ stehen senkrecht, wenn $\langle u | v \rangle = 0$.

Winkel: $\operatorname{re}\langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$ mit $\alpha = \angle(u, v) \in [0, \pi]$.

Dreiecksungleichung: Es gilt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Metrik: Der Abstand zweier Vektoren u, v ist $\|u - v\|$.

Konvergenz $v_n \rightarrow v$ in V ist definiert durch $\|v_n - v\| \rightarrow 0$.

Vollständigkeit: Jede Cauchy–Folge in V konvergiert in V .

Stetigkeit von Funktionen $f : V \rightarrow W$, linear oder nicht.

Differenzierbarkeit, lineare und höhere Approximation.

😊 Wir wollen dies möglichst allgemein erklären und effizient nutzen. Dazu erheben wir die wesentlichen Eigenschaften (S1–3) zur Definition.

😊 Allein aus den grundlegenden Eigenschaften (S1–3) folgt:

Satz C1B: Cauchy–Schwarz–Ungleichung (CSU)

(1) Für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**:

$$|\langle u | v \rangle|^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle \quad \text{bzw.} \quad |\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v über \mathbb{K} linear abhängig sind.

(2) Für alle Vektoren $u, v \in V$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- N0: Positivität, $\|u\| \geq 0 = \|0\|$
- N1: Definitheit, $\|u\| > 0$ für $u \neq 0$
- N2: Homogenität, $\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda|$
- N3: Dreiecksungleichung, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Aufgabe: Beweisen Sie die Cauchy–Schwarz–Ungleichung und damit N3! Früher hieß es, man erkenne eine Mathematiker:in daran, ob sie die Cauchy–Schwarz–Ungleichung beweisen könne. Probieren Sie es!

Es gibt viele Beweisvarianten für die Cauchy–Schwarz–Ungleichung. Der folgende Beweis ist geometrisch motiviert und leicht zu merken.

Lösung: (0) Wir erinnern zunächst an die **orthogonale Zerlegung**. Sei $u \in V$ mit $\|u\|^2 \neq 0$. Wir können jeden Vektor $v \in V$ eindeutig zerlegen in $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ mit $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ wobei $v_{\parallel} \in u\mathbb{K}$ und $\langle u | v_{\perp} \rangle = 0$. Explizit gilt:

$$v_{\perp} = v - v_{\parallel} \quad \text{und} \quad v_{\parallel} = u\lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = \langle u | v \rangle / \langle u | u \rangle.$$

Dies folgt aus $0 \stackrel{!}{=} \langle u | v_{\perp} \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u | v - u\lambda \rangle \stackrel{\text{(S3)}}{=} \langle u | v \rangle - \langle u | u \rangle\lambda$.

(1) **Cauchy–Schwarz:** Für $u = 0$ ist alles klar. Im Folgenden sei $u \neq 0$. Wir nutzen die orthogonale Zerlegung $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$, wie oben vorbereitet.

$$\|v\|^2 \stackrel{\text{(0)}}{=} \|v_{\parallel}\|^2 + \|v_{\perp}\|^2 \geq \|v_{\parallel}\|^2 \stackrel{\text{(0)}}{=} |\langle u | v \rangle|^2 / \|u\|^2$$

Daraus folgt die erste Ungleichung, und die zweite dank Monotonie der Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gleichheit entspricht Parallelität. QED

😊 Wir erheben die grundlegenden Eigenschaften nun zur Definition:

Definition C1c: Skalarprodukt und Norm

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, die die Eigenschaften (S1–3) erfüllt. Das Paar $(V, \langle - | - \rangle)$ heißt dann **\mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt**, oder auch **Prä–Hilbert–Raum** und bei Vollständigkeit **Hilbert–Raum**.

Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die (N1–3) erfüllt. Das Paar $(V, \| \cdot \|)$ heißt **normierter \mathbb{K} -Vektorraum**, **normierter Raum**, oder auch **Prä–Banach–Raum** und bei Vollständigkeit **Banach–Raum**.

Jedes Skalarprodukt definiert eine zugehörige Norm $\|u\| := \sqrt{\langle u | u \rangle}$: Aus (S1–3) folgt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung und somit (N1–3).

In Anwendungen tritt auch $\|u\| = \infty$ auf. Wir nennen $\| \cdot \| : V \rightarrow [0, \infty]$ mit (N1–3) eine **Pseudonorm**. Eine (**Pseudo**)**Halbnorm** erfüllt nur (N2,3).

Aufgabe: Rechnen Sie hierzu die folgende hilfreiche Konstruktion nach.

Proposition C1c: von Pseudohalbnorm zu Norm

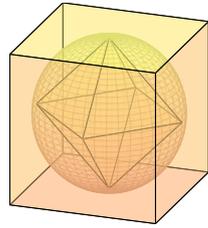
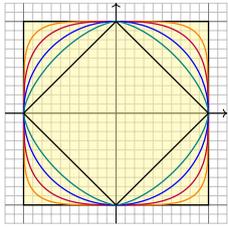
Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Pseudohalbnorm $\| \cdot \| : V \rightarrow [0, \infty]$. Dann sind $V_{< \infty} = \{v \in V \mid \|v\| < \infty\}$ und $V_0 = \{v \in V \mid \|v\| = 0\}$ Untervektorräume. Auf dem Quotientenvektorraum $V_{< \infty} / V_0$ induziert $\| \cdot \|$ eine echte Norm.

😊 Diese genial-einfache Idee finden Sie insbesondere bei der L^p -Norm und der Konstruktion des Raumes $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Beweis: Gilt $\|u\| < \infty$ und $\|v\| < \infty$, so folgt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| < \infty$ und $\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda| < \infty$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist $V_{< \infty}$ ein Untervektorraum.

Gilt $\|u\| = 0$ und $\|v\| = 0$, so folgt entsprechend $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| = 0$ und $\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda| = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist V_0 ein Untervektorraum.

Für $u, v \in V_{< \infty}$ mit $u - v \in V_0$ gilt $\|u\| = \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| = \|v\|$ und $\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u\|$, insgesamt folgt also $\|u\| = \|v\|$. Auf dem Quotienten $V_{< \infty} / V_0$ ist somit $|u + v_0| := \|u\|$ wohldefiniert und zudem endlich. Homogenität und Dreiecksungleichung vererben sich, zudem ist $| \cdot |$ auf $V_{< \infty} / V_0$ nun positiv definit, also eine echte Norm. QED



Beispiel / Übung: Auf dem Vektorraum \mathbb{K}^n haben wir die

p -Norm	$ x _p := (x_1 ^p + \dots + x_n ^p)^{1/p}$,
Taxinorm	$ x _1 := x_1 + \dots + x_n $,
euklidische Norm	$ x _2 := \sqrt{ x_1 ^2 + \dots + x_n ^2}$,
Maximumsnorm	$ x _\infty := \max\{ x_1 , \dots, x_n \}$.

Für alle $p \in [1, \infty]$ und $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $|x|_\infty \leq |x|_p \leq |x|_1 \leq n|x|_\infty$.
 Für $p \searrow 1$ gilt $|x|_p \nearrow |x|_1$. Für $p \nearrow \infty$ gilt $|x|_p \searrow |x|_\infty$.

☺ Skalarprodukte sind sehr nützlich, Normen gibt es noch viel mehr!

Dies sind tatsächlich Normen! Die Eigenschaften (N0–2) sind klar, der interessante Punkt ist der Nachweis der Dreiecksungleichung! Für $p = 2$ folgt dies aus der Cauchy–Scharz–Ungleichung (C1B). Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist es eine leichte Übung. (Versuchen Sie es!) Allgemein benötigen Sie hierzu die Hölder–Minkowski–Ungleichung.

Die p -Normen bilden eine überabzählbare Familie von Normen auf \mathbb{K}^n . Für $p \in [1, \infty]$ interpoliert diese Familie von der Taxinorm ($p = 1$) über die euklidische Norm ($p = 2$) bis zur Maximumsnorm ($p = \infty$). Noch spannender sind unendlich-dimensionale Räume, ℓ^p und L^p , deren Konstruktion wir anschließend in groben Zügen zusammenfassen.

Die Skizze zeigt die Bälle um den Nullpunkt mit Radius 1. Für $p = 2$ ist die der vertraute euklidische Ball, für $p = \infty$ der Würfel, für $p = 1$ das Kreuzpolytop. Sicher fragen Sie sich jetzt, ob auch diese p -Normen von einem Skalarprodukt herkommen. Das gilt tatsächlich nur für $p = 2$! Der folgende Satz beantwortet genau diese Frage.

Lemma C1J: Parallelogrammgleichung und Polarisierung

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

(1) Die Norm $|u| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$ erfüllt die **Parallelogrammgleichung**

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2 \quad \text{für alle } u, v \in V.$$



(2) Das Skalarprodukt rekonstruieren wir dank der **Polarisationsformel**

$$\langle u | v \rangle = \sum_{\varepsilon \in B} \frac{|u + \varepsilon v|^2 - |u - \varepsilon v|^2}{4\varepsilon} \quad \text{mit } B = \{1\}, \{1, i\}, \{1, i, j, k\}.$$

Beispiel: Es gilt $2|e_1|_p^2 + 2|e_2|_p^2 = 4$, aber $|e_1 + e_2|_p^2 + |e_1 - e_2|_p^2 = 2 \cdot 2^{2/p}$.

Satz C1k: Jordan–von Neumann 1935

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Erfüllt eine beliebige Norm $|\cdot|$ auf V die Parallelogrammgleichung, so definiert die Polarisationsformel ein Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf V , und zwar das einzige mit Norm $|\cdot|$.



☺ Mit der Parallelogrammgleichung haben wir ein einfaches Kriterium um festzustellen, ob eine vorgelegte Norm von einem Skalarprodukt induziert wird oder nicht. Bemerkenswerterweise ist diese Bedingung nicht nur notwendig (C1J), sondern auch hinreichend (C1k).

☺ Dieses Ergebnis dient Ihrer mathematische Kultur und Inspiration, außerdem ist es als Werkzeug für konkrete Beispiele oft hilfreich. Für einen ersten Durchgang genügt es, die Aussage zu verstehen und anwenden zu können. Anschließend möchten Sie vielleicht mehr:

Übung: Beweisen Sie das Lemma, und wenn Sie mutig sind, den Satz. Eine Lösung finden Sie im Skript oder bei den Meistern selbst:

□□ P. Jordan, J.v. Neumann: *On inner products in linear metric spaces.* Annals of Mathematics 36 (1935) 719–723

Beispiel / Übung C1D: der Hilbert–Raum ℓ^2

Für jede Menge Ω ist der **Funktionsraum** $\mathbb{K}^\Omega = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}\}$ über \mathbb{K} ein Vektorraum mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation.

(1) Der **Träger** von f ist $\text{supp}(f) := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$. Die Teilmenge

$$\mathbb{K}^{(\Omega)} := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \text{supp}(f) \text{ endlich}\}$$

ist ein Untervektorraum in \mathbb{K}^Ω . Hierauf haben wir das **Skalarprodukt**

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{K}^{(\Omega)} \times \mathbb{K}^{(\Omega)} \rightarrow \mathbb{K} : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \sum_{x \in \Omega} \overline{f(x)} g(x).$$

Die kanonische Basis $(e_a)_{a \in \Omega}$ von $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ ist orthonormal bzgl. $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

(2) Vervollständigt erhalten wir aus $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ den **Hilbert–Raum**

$$\ell^2(\Omega, \mathbb{K}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2 < \infty\}.$$

Es gilt $\mathbb{K}^{(\Omega)} \leq \ell^2 \leq \mathbb{K}^\Omega$, und das obige Skalarprodukt setzt sich auf ℓ^2 fort.

Beispiel / Übung C1E: der Hilbert–Raum L^2

(1) Sei $a < b$ in \mathbb{R} . Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{C} = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Hierauf haben wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{x=a}^b \overline{f(x)} g(x) dx \quad \text{mit } \tau = b - a.$$

(2) Die Funktionen $e_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto e^{ik\omega x}$ mit $\omega = 2\pi/\tau$ und $k \in \mathbb{Z}$ sind orthonormal und eine Basis der **trigonometrischen Polynome**:

$$T = T([a, b], \mathbb{C}) := \left\{ f = \sum_{k=-n}^n c_k e_k \mid n \in \mathbb{N}, c_{-n}, \dots, c_n \in \mathbb{C} \right\}$$

(3) Reell betrachten wir $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Beide Basen lassen sich ineinander umrechnen dank der Euler–Formel $e^{ik\omega x} = \cos(k\omega x) + i \sin(k\omega x)$.

☺ Die komplexe Formulierung ist einfacher und schöner!

Beispiel / Übung C1E: der Hilbert–Raum L^2

(4) Vervollständigt erhalten wir aus $T < \mathcal{C}$ den Raum

$$\mathcal{L}^2([a, b], \mathbb{K}) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar} \mid \int_{x=a}^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Hierbei gilt $T < \mathcal{C} < \mathcal{L}^2 < \mathbb{K}^{[a, b]}$, und das obige Skalarprodukt setzt sich auf \mathcal{L}^2 fort, allerdings ist es hier nur noch semidefinit:

Aus $\int |f(x)|^2 dx = 0$ folgt $f(x) = 0$ nicht unbedingt für alle x , sondern nur für fast alle $x \in [a, b]$. Das heißt, es existiert eine Teilmenge $N \subseteq [a, b]$ vom Lebesgue–Maß $\text{vol}_1(N) = 0$, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b] \setminus N$.

Diese Nullfunktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathcal{N} := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \mid f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in [a, b]\}.$$

☺ Nullfunktionen wollen und können und werden wir vernachlässigen. Sie liefern bei der Integration keinen Beitrag, sind somit masselos.

Beispiel / Übung C1E: der Hilbert–Raum L^2

(5) Der relevante Vektorraum ist demnach der Quotientenvektorraum

$$L^2([a, b], \mathbb{K}) := \mathcal{L}^2([a, b], \mathbb{K}) / \mathcal{N}.$$

Hierauf ist das obige Skalarprodukt $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$ wohldefiniert und nun auch tatsächlich positiv-definit. Zudem ist $L^2([a, b], \mathbb{K})$ vollständig, wir erhalten also schließlich einen Hilbert–Raum.

(6) Die Räume ℓ^2 und L^2 sehen verschieden aus, sind aber isometrisch: Es gilt die bemerkenswerte Fourier–Isometrie $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \cong L^2([a, b], \mathbb{C})$!

$$\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})} \cong T([a, b], \mathbb{C}) : e_k \leftrightarrow e_k$$

$$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \cong L^2([a, b], \mathbb{C}) : e_k \leftrightarrow e_k$$

☺ Das ist die abstrakte Grundlage der L^2 –Theorie für Fourier–Reihen.

☺ Entsprechendes gilt für die Räume ℓ^p und L^q mit $p, q \in [1, \infty]$.

Vektorräume mit Norm: ℓ^p C121
Erläuterung

Beispiel / Übung C11: der Banach-Raum ℓ^p

(1) Sei Ω eine Menge. Auf dem Funktionenraum $\mathbb{K}^\Omega = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}\}$ definieren wir die **Supremumsnorm**, auch ℓ^∞ -Norm genannt, durch

$$\|f\|_\infty := |f|_\Omega = \sup\{|f(x)| \mid x \in \Omega\}.$$

Die beschränkten Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\ell^\infty(\Omega, \mathbb{K}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_\infty < \infty\}.$$

(2) Entsprechend definieren wir die ℓ^p -Norm für $1 \leq p < \infty$ durch

$$\|f\|_p := (\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^p)^{1/p}.$$

Die p -summierbaren Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\ell^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_p < \infty\}.$$

Hierauf ist $\|\cdot\|_p$ tatsächlich eine Norm dank **Minkowski-Ungleichung**. Besonders einfach und prominent sind die drei Spezialfälle $p = 1, 2, \infty$.

Vektorräume mit Norm: ℓ^p C122
Erläuterung

Beispiel / Übung C11: der Banach-Raum ℓ^p

(3) Der Raum $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ ist vollständig, also ein Banach-Raum.

(4) Für je zwei konjugierte Exponenten $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir das **Produkt** $\cdot : \ell^p \times \ell^q \rightarrow \ell^1$ und daraus die **Paarung**

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \ell^p \times \ell^q \rightarrow \mathbb{K} : \langle f | g \rangle = \sum_{x \in \Omega} \overline{f(x)} g(x).$$

Das Produkt $\overline{f}g$ ist absolut summierbar dank der **Hölder-Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{\ell^1} \leq \|f\|_{\ell^p} \cdot \|g\|_{\ell^q}$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**, und die Paarung ist das oben diskutierte Skalarprodukt auf ℓ^2 . Für alle $1 < p < \infty$ ist dies eine **duale Paarung**, das heißt $(\ell^p)' \cong \ell^q$.

(5) Für $\Omega \geq 2$ und $p \neq 2$ erfüllt $\|\cdot\|_{\ell^p}$ nicht die **Parallelogrammgleichung**, denn $\|e_a + e_b\|_{\ell^p}^2 + \|e_a - e_b\|_{\ell^p}^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} \neq 2\|e_a\|_{\ell^p}^2 + 2\|e_b\|_{\ell^p}^2 = 2 + 2$.

Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski C123
Erläuterung

Satz C10: die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski

(0) Für $s, t \geq 0$ mit $s + t = 1$ und $a, b > 0$ gilt die **Young-Ungleichung**:

$$a^s \cdot b^t \leq sa + tb$$

(1) Für $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ folgt die **Hölder-Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

(2) Für $p \in [1, \infty]$ folgt hieraus die **Minkowski-Ungleichung**:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis: (0) Wir nutzen $(\exp, \ln) : (\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Die Funktion \exp ist streng wachsend und konvex, also ist \ln streng wachsend und konkav.

$$\ln(a^s \cdot b^t) = \ln(a^s) + \ln(b^t) = s \ln(a) + t \ln(b) \leq \ln(sa + tb)$$

Anwendung von \exp ergibt die behauptete Ungleichung $a^s \cdot b^t \leq sa + tb$.

Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski C124
Erläuterung

(1) Für die Randfälle $p = 1$ und $q = \infty$ bzw. $p = \infty$ und $q = 1$ prüft man die Hölder-Ungleichung direkt nach. Sie ist zudem erfüllt, wenn f oder g eine Nullfunktion ist. Wir können also $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ annehmen. Die Ungleichung ist homogen in f und g , nach Division durch die Norm können wir also $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ annehmen. In jedem Punkt $x \in \Omega$ gilt:

$$|f(x) \cdot g(x)| = (|f(x)|^p)^{1/p} \cdot (|g(x)|^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

Durch Summation / Integration über $x \in \Omega$ wird hieraus:

$$\sum_{x \in \Omega} |f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{p} \sum_{x \in \Omega} |f(x)|^p + \frac{1}{q} \sum_{x \in \Omega} |g(x)|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(2) Für $p \in \{1, \infty\}$ prüft man die Minkowski-Ungleichung direkt nach. Sei also $1 < p, q < \infty$ und zudem $\|f + g\|_p > 0$. Dank Hölder (1) gilt:

$$\|f + g\|_p^p = \| |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \|_1 \leq \| |f| \cdot |f + g|^{p-1} \|_1 + \| |g| \cdot |f + g|^{p-1} \|_1$$

$$\leq \|f\|_p \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_q \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_q = [\|f\|_p + \|g\|_q] \| |f + g|^{p-1} \|_1^{1/q}$$

Aus $1/p + 1/q = 1$ folgt $(p-1)q = p$, der letzte Faktor ist also $\| |f + g| \|_1^{1/q}$. Nach Division erhalten wir die erhoffte Minkowski-Ungleichung. QED

Vektorräume mit Norm: L^p C125
Erläuterung

Beispiel / Übung C11: der Banach-Raum L^p

(1) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, etwa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit Lebesgue-Maß μ oder Ω diskret mit Zählmaß $\mu(A) = \#A$. Für $1 \leq p < \infty$ definieren wir die **L^p -Halbnorm** und jede messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$\|f\|_p := (\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx)^{1/p}.$$

Die p -integrierbaren Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_p < \infty\}.$$

Der relevante Vektorraum ist der Quotientenvektorraum

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

Hierauf ist $\|\cdot\|_p$ tatsächlich eine Norm dank **Minkowski-Ungleichung**.

⚠ Wir unterscheiden Funktionen f und Äquivalenzklassen $\bar{f} = f + \mathcal{N}$. Eine solche „ L^p -Funktion“ $\bar{f} \in L^p$ hat keine punktweisen Werte „ $\bar{f}(x)$ “.

Vektorräume mit Norm: L^p C126
Erläuterung

Beispiel / Übung C11: der Banach-Raum L^p

(2) Die **L^∞ -Halbnorm** definieren wir durch das **essentielle Supremum**:

$$|f|_\Omega = \sup|f(x)| := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \{x \mid |f(x)| > a\} = \emptyset\},$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}|f(x)| := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x \mid |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

Die essentiell beschränkten Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Der relevante Vektorraum ist der Quotientenvektorraum

$$L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

Hierauf ist $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich eine Norm, genannt die **L^∞ -Norm**.

Für das Zählmaß gilt $L^p(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \#) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \#) = \ell^p(\Omega)$. Für $1 < p < q < \infty$ gilt $\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq \ell^\infty$, im Allgemeinen strikt. Für $\text{vol}(\Omega) < \infty$ gilt $L^1 \supset L^p \supset L^q \supset L^\infty$, im Allgemeinen strikt.

Vektorräume mit Norm: L^p C127
Erläuterung

Beispiel / Übung C11: der Banach-Raum L^p

(3) Der Raum $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist vollständig, also ein Banach-Raum.

(4) Für je zwei konjugierte Exponenten $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir das **Produkt** $\cdot : L^p \times L^q \rightarrow L^1$ und daraus die **Paarung**

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{K} : \langle f | g \rangle := \int_{x \in \Omega} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Das Produkt $\overline{f}g$ ist absolut integrierbar dank der **Hölder-Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**, und die Paarung ist das oben diskutierte Skalarprodukt auf L^2 . Für alle $1 < p < \infty$ ist dies eine **duale Paarung**, das heißt $(L^p)' \cong L^q$.

😊 Die L^p -Räume sind zentral für Analysis, Numerik und Stochastik: Erwartungswert, Co/Varianz, höhere Momente, Grenzwertsätze, ...

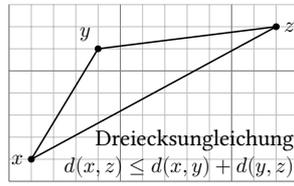
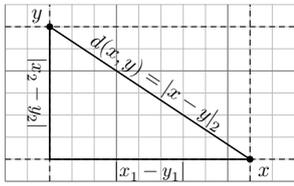
Vektorräume mit Norm: L^p C128
Erläuterung

Die L^p -Räume spielen eine zentrale Rolle in der **Analysis**, insb. der Maß- und Integrationstheorie. Der Buchstabe L erinnert an Henri Lebesgue (1875–1941) und seinen grundlegenden Integralbegriff.

Die L^p -Norm sind ebenso wichtig in der **Numerik** und **Optimierung**: sie wertet Abweichungen / bestraft Fehler mit dem Exponenten p . Besonders prominent sind auch hier die Fälle $p = 1, 2, \infty$: L^1 -, quadratische, gleichmäßige Approximation.

Die L^p -Räume finden sich auch ganz natürlich in der **Stochastik**: Dort ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also $\mu(\Omega) = 1$, und messbare Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ modellieren Zufallsvariablen. Das Integral $m_1 = \int_{x \in \Omega} f(x) dx$ ist der Erwartungswert, dazu ist offensichtlich absolute Integrierbarkeit $f \in \mathcal{L}^1$ die Minimalforderung.

Quadratische Integrierbarkeit $f \in \mathcal{L}^2$ sichert die Existenz der Varianz $m_2 = \int_{x \in \Omega} |f(x) - m_1|^2 dx$, das Skalarprodukt misst die Kovarianz. Entsprechend nutzt man die höheren Momente $m_p = \int_{x \in \Omega} |f(x) - m_1|^p dx$, zum Beispiel im zentralen Grenzwertsatz mit expliziten Fehlerschranken.



Satz C2A: die euklidische Metrik

Auf $X = \mathbb{R}^n$ definieren wir die **euklidische Metrik** $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d(x, y) := \sqrt{\langle x - y | x - y \rangle} = |x - y|_2 = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}.$$

Diese Abbildung erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$:

- M0: Positivität, $d(x, y) \geq 0 = d(x, x)$
- M1: Definitheit, $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$
- M2: Symmetrie, $d(x, y) = d(y, x)$
- M3: Dreiecksungleichung, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

☺ Wir erheben diese grundlegenden Eigenschaften nun zur Definition:

Definition C2B: Metrik

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$, die (M0-3) erfüllt. Das Paar (X, d) nennen wir einen **metrischen Raum** mit Trägermenge X und Metrik d . (Der Wert ∞ ist erlaubt und meist unproblematisch, siehe unten die gestutzte / gestauchte Metrik.)

Ausführlich fordern wir demnach für alle $x, y, z \in X$:

- M0: Positivität, $d(x, y) \geq 0 = d(x, x)$
- M1: Definitheit, $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$
- M2: Symmetrie, $d(x, y) = d(y, x)$
- M3: Dreiecksungleichung, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Für eine **Halbmetrik** d fordern wir nur (M0,2,3), nicht unbedingt (M1). Allgemeiner als eine Metrik darf eine Halbmetrik also durchaus zwei verschiedenen Punkten $x \neq y$ in X den Abstand $d(x, y) = 0$ beimessen.

$$\text{Skalarprodukt} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \neq \end{matrix} \text{Norm} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \neq \end{matrix} \text{Metrik} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \neq \end{matrix} \text{Topologie}$$

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf V definiert durch $|u| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$ eine zugehörige Norm auf V (Satz C1B). Jede Halb/Norm $|\cdot| : V \rightarrow [0, \infty]$ definiert eine zugehörige Halb/Metrik $d : V \times V \rightarrow [0, \infty] : (x, y) \mapsto |x - y|$, denn aus (N0-3) folgt sofort (M0-3): $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$. Prominente Beispiele sind \mathbb{K}^n sowie $\ell^p(\Omega)$ und $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für $p \in [1, \infty]$.

Beispiel / Übung C2c: die diskrete Metrik

Auf jeder Menge X lässt sich eine besonders einfache Metrik definieren, die nur die Werte 0 und 1 annimmt: Die **diskrete Metrik** auf X ist

$$d : X \times X \rightarrow \{0, 1\} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die für jede Metrik geforderten Eigenschaften (M0-3) prüft man leicht.

Beispiel / Übung C2E: Teilraum

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Die Einschränkung $d_A := d|_{A \times A} : A \times A \rightarrow [0, \infty]$ ist eine Metrik auf A . Wir nennen (A, d_A) einen **Teilraum** von (X, d) mit **Teilraummetrik** d_A .

Soweit nicht anders vereinbart, statten wir jede Teilmenge $A \subseteq X$ mit dieser Metrik aus und machen sie so zu einem Teilraum (A, d_A) . Insbesondere erbt somit jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ die euklidische Metrik.

Beispiel / Übung C2F: Summenraum

Sei $(X_i, d_i)_{i \in I}$ eine Familie metrischer Räume (X_i, d_i) mit $i \in I$. Auf ihrer disjunkten Vereinigung $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ definieren wir die **Summenmetrik**

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty] : d(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & \text{falls } x, y \in X_i, \\ \infty & \text{falls } x \in X_i, y \in X_j, i \neq j. \end{cases}$$

Wir nennen $(X, d) =: \bigsqcup_{i \in I} (X_i, d_i)$ den **Summenraum** zu $(X_i, d_i)_{i \in I}$.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussagen für die euklidischen Metrik:

Lösung: Klar sind (M0-2), einzig die Dreiecksungleichung (M3) ist nicht trivial. Sie folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (C1B) dank der Dreiecksungleichung (N3): $|x - z|_2 = |x - y + y - z|_2 \leq |x - y|_2 + |y - z|_2$.

☺ Dies formuliert anschauliche Eigenschaften des Abstands: (M0) Der Abstand von x nach x ist Null, der von x nach y ist Null oder positiv. (M1) Der Abstand zwischen $x \neq y$ ist positiv. Umgekehrt: Ist der Abstand von x nach y gleich Null, so ist dies nur für $x = y$ möglich. Anders gesagt: Aus $d(x, y) = 0$ folgt $x = y$. (M2) Der Abstand von x nach y ist gleich dem Abstand von y nach x . (M3) Die Dreiecksungleichung besagt, dass in einem Dreieck die Summe der Längen von zwei Seiten nicht kleiner sein kann als die Länge der dritten Seite, siehe Abbildung.

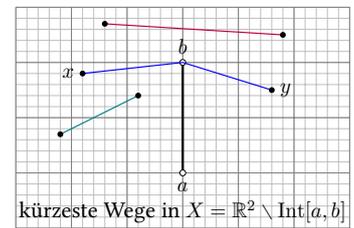
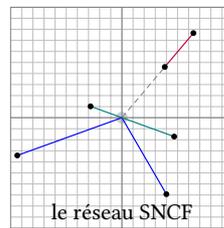
Anschaulich gesagt: Der Weg von x nach z wird nicht kürzer, wenn wir einen Umweg über y machen, sondern möglicherweise nur länger.

Gilt $d(x, y) < \infty$ für alle $x, y \in X$, so nennen wir d eine **endliche Metrik**. Das benötigen wir insbesondere für metrische Eigenschaften wie Dehnungsschranken, Lipschitz-Stetigkeit und Kontraktionen.

Topologisch gesehen ist es oft bequem, den Begriff der Metrik wie in C2B weiter zu fassen und den Wert $d(x, y) = \infty$ zunächst zuzulassen. Manche Autor:innen nennen dies eine **Pseudometrik** oder **erweiterte Metrik**. Hierdurch wird keines der folgenden (topologischen!) Argumente komplizierter, doch viele Konstruktionen einfacher und einheitlicher.

Für die nötigen Rechnungen in $[0, \infty]$ vereinbaren wir $0 \leq a \leq \infty$ sowie $a + \infty = \infty + a = \infty$ für alle $a \in [0, \infty]$; dies entspricht den üblichen Konvention der erweiterten Zahlengeraden $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Durch Weglassen der Forderung (M1) schwächen wir den Begriff der Metrik zur Halbmetrik ab. Halbmetriken sind weniger wirkungsvoll, kommen aber in manchen Anwendungen natürlich vor und sind daher ein sinnvoller Hilfsbegriff. Auch wenn man ihn schließlich vermeiden will, so ist es meist bequem ihn zunächst zuzulassen.



Beispiel / Übung C2D: die französische Eisenbahnmetrik

Die **französische Eisenbahnmetrik** ist

$$d = d_{\text{SNCF}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto \begin{cases} |x - y| & \text{falls } \mathbb{R}x = \mathbb{R}y, \\ |x| + |y| & \text{falls } \mathbb{R}x \neq \mathbb{R}y. \end{cases}$$

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein euklidischer Teilraum, allgemein ein metrischer Raum (X, d) . Wir definieren die **Wegmetrik** $\hat{d} : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ für je zwei Punkte $x, y \in X$ als die infimale Länge aller Wege von x nach y .

Beispiel / Übung C2G: Produktraum

Sei $(X_i, d_i)_{i \in I}$ eine Familie metrischer Räume (X_i, d_i) mit $i \in I$. Auf dem Produkt $X = \prod_{i \in I} X_i$ definieren wir die **Supremumsmetrik**

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty] : d(x, y) = \sup\{d_i(x_i, y_i) \mid i \in I\}.$$

Wir nennen $(X, d) =: \prod_{i \in I} (X_i, d_i)$ den **Produktraum** zu $(X_i, d_i)_{i \in I}$.

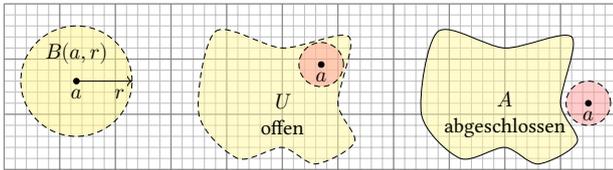
Allgemein haben wir auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ die ℓ^p -**Metrik** für $1 \leq p \leq \infty$. Ist I endlich und sind alle Metriken d_i endlich, so ist auch d endlich. Allgemein haben wir auf Y^X ebenso die ℓ^p -Metrik für $1 \leq p \leq \infty$:

Beispiel / Übung C2H: Abbildungsraum

Sei X eine Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Auf der Menge $Y^X = \text{Abb}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\}$ definieren wir die **Supremumsmetrik**

$$d(f, g) = |d_Y(f, g)|_X = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Wir nennen $(Y^X, d) =: (Y, d_Y)^X$ den **Abbildungsraum**.



Definition C2L: metrische Topologie

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zum Punkt $a \in X$ und Radius $r \in [0, \infty]$ definieren wir den **offenen** / **abgeschlossenen Ball** / die **Sphäre** durch

$$B_{(X,d)}(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\},$$

$$\bar{B}_{(X,d)}(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\},$$

$$S_{(X,d)}(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) = r\}.$$

Anschaulich im \mathbb{R}^n , wie oben skizziert. Die Sphäre $S(a, r)$ gehört zum abgeschlossenen Ball $\bar{B}(a, r)$, nicht aber zum offenen Ball $B(a, r)$.

Definition C2L: metrische Topologie

Wir nennen $U \subseteq X$ **Umgebung** von a , falls $B(a, \varepsilon) \subseteq U$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in X : [d(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U]$$

Das System aller Umgebungen von a in (X, d) bezeichnen wir mit

$$\mathcal{U}_a(X, d) := \{U \subseteq X \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : B(a, \varepsilon) \subseteq U\}.$$

Eine Menge $U \subseteq X$ ist **offen**, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist:

$$\forall a \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : B(a, \varepsilon) \subseteq U$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in X : [d(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U]$$

Das System aller offenen Mengen im Raum (X, d) ist die **Topologie**:

$$\mathcal{T}(X, d) := \{U \subseteq X \mid U \text{ offen in } (X, d)\}$$

$$= \{U \subseteq X \mid \forall a \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : B(a, \varepsilon) \subseteq U\}$$

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Metrische Topologie: erste Eigenschaften

Proposition C2M: Eigenschaften der metrischen Topologie

Sei (X, d) ein metrischer Raum (oder allgemeiner d eine Halbmetrik).

Jeder offene Ball $B(a, r)$ ist offen in der Topologie von (X, d) , jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}(a, r)$ ist abgeschlossen in (X, d) .

Die offenen Mengen in (X, d) erfreuen sich folgender Eigenschaften:

O1: Die leere Menge \emptyset und der gesamte Raum X sind offen:

$$\emptyset, X \in \mathcal{T}$$

O2: Sind U_1, \dots, U_n offen, dann auch $U_1 \cap \dots \cap U_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} : U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$$

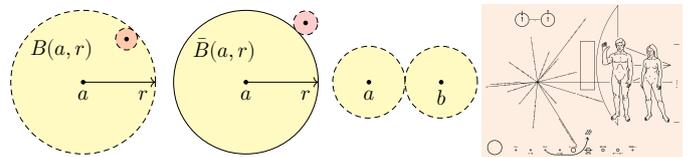
O3: Sind alle U_i offen für $i \in I$, dann auch $\bigcup_{i \in I} U_i$:

$$\forall (I \rightarrow \mathcal{T} : i \mapsto U_i) : \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$$

Die abgeschlossenen Mengen sind komplementär zu den offenen, somit stabil unter A2: endlichen Vereinigungen und A3: beliebigen Schnitten.

Metrische Topologie: erste Eigenschaften

Hier die graphische Beweisidee für die ersten beiden Behauptungen: Jeder offene Ball ist offen, jeder abgeschlossene Ball ist abgeschlossen. Steht die Hausdorff-Eigenschaft sogar auf der Pioneer-Plakette?

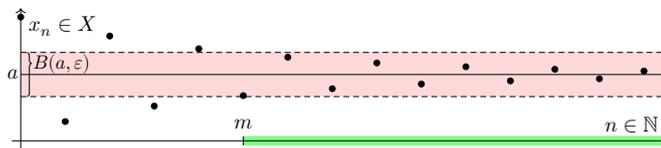


Proposition C2o: die Hausdorff-Eigenschaft

In jedem metrischen Raum (X, d) gilt die Hausdorff-Eigenschaft (T_2): Zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X existieren disjunkte offene Umgebungen.

Beweis: Es gilt $r := d(a, b) > 0$ dank (M1). Die Bälle $U = B(a, r/2) \ni a$ und $V = B(b, r/2) \ni b$ sind offen (C2M) und disjunkt: Aus $x \in U \cap V$ folgt $r = d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r/2 + r/2 = r$, Widerspruch! QED

Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum



Definition C3A: Konvergenz einer Folge

Gegeben seien eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein Punkt a in einem metrischen Raum (X, d) . Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen a , falls $d(x_n, a) \rightarrow 0$:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a \text{ in } (X, d) \quad \Leftrightarrow \quad d(x_n, a) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : d(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in B(a, \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \text{Jede Umgebung } U \in \mathcal{U}_a \text{ enthält schließlich alle Folgenglieder } x_n.$$

😊 Die letzte Formulierung verwendet die Metrik nicht explizit, sondern nur offene Mengen: Konvergenz ist somit eine topologische Eigenschaft!

Kann eine Folge mehrere Grenzwerte haben?

Konvergenz in (X, d) ist eine **zweistellige Relation** zwischen Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Punkten a . Wir schreiben kurz $x_n \rightarrow a$ oder $x_n \xrightarrow{d} a$. Zur Betonung der Indizes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir „ $x_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ “.

⚠ Die bequeme Schreibweise $\lim x_n = a$ ist problematisch, solange die Konvergenz nicht geklärt ist: eventuell existiert kein Grenzwert „ $\lim x_n$ “! Kann eine Folge in (X, d) womöglich mehrere Grenzwerte haben?

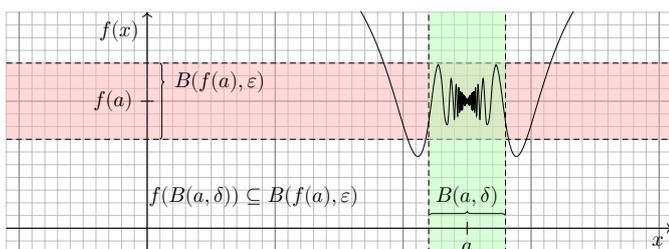


Satz C3B: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (X, d) hat höchstens einen Grenzwert: Aus $x_n \rightarrow a$ und $x_n \rightarrow b$ folgt $a = b$.

Beweis: Sei $x_n \rightarrow a$ und $a \neq b$. Dank Hausdorff-Eigenschaft existieren $U \in \mathcal{U}_a$ und $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \rightarrow a$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq m$. Folglich gilt $x_n \notin V$, somit $x_n \not\rightarrow b$. QED

Stetigkeit von Abbildungen



😊 Für eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ umschreibt man Stetigkeit gemeinhin so, dass der Graph von f „keine Sprünge macht“, oder sich „ohne abzusetzen in einem Zug zeichnen lässt“.

☹ Das mag der Intuition nützen, ist aber keine tragfähige Definition! Anschauung kann die Definition motivieren, sie aber nicht ersetzen. Probieren Sie es: Ist die Funktion $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \text{sign}(x^2 - 2)$ stetig?

😊 Wir brauchen nicht nur Intuition, sondern tragfähige Definitionen!

Stetigkeit von Abbildungen

Definition C3E: Stetigkeit von Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig im Punkt** $a \in X$, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $f(B_X(a, \delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$ gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in X : d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

Gilt dies in jedem Punkt $a \in X$, so nennen wir $f : X \rightarrow Y$ **stetig** (auf X):

$$\forall a \in X \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in X : d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

Strenger nennen wir $f : X \rightarrow Y$ **gleichmäßig stetig** (auf X), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall a \in X \forall x \in X : d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

Die Menge der stetigen Abbildungen bezeichnen wir mit

$$\mathcal{C}(X, d_X; Y, d_Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\} \text{ bzw.}$$

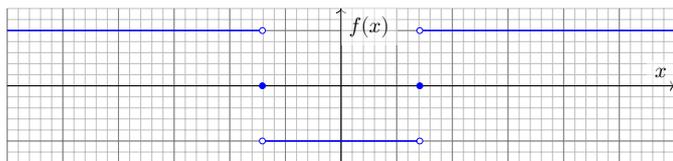
$$\mathcal{C}_u(X, d_X; Y, d_Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ gleichmäßig stetig}\}.$$

😊 Diese Begriffe und zahlreiche Beispiele kennen Sie aus der Analysis!

Aufgabe: Untersuchen Sie punktweise und gleichmäßige Stetigkeit von

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \text{sign}(x^2 - 2),$$

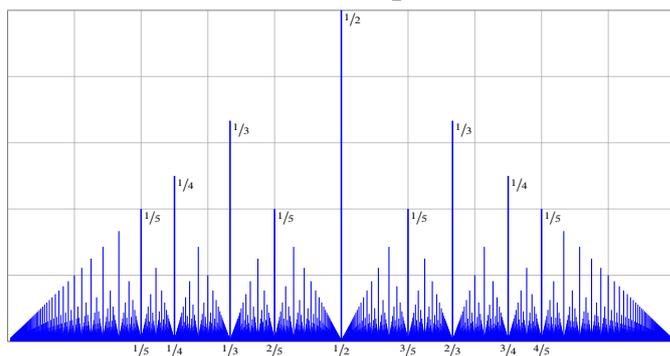
$$g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \mapsto \text{sign}(x^2 - 2).$$



Lösung: (1) Die Funktion f ist stetig bis auf die Sprungstellen $a = \pm\sqrt{2}$: Zu allen $\delta > 0$ existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $|a - x| < \delta$ und $|g(a) - g(x)| \geq 1$. Da f nicht stetig ist, kann f auch nicht gleichmäßig stetig sein.
 (2) Die Funktion g hingegen hat keine solchen Sprungstellen, sie ist sogar lokal konstant, somit stetig, aber nicht gleichmäßig: Zu $0 < \varepsilon \leq 2$ und $\delta > 0$ existieren $a, x \in \mathbb{Q}$ mit $|a - x| < \delta$ und $|g(a) - g(x)| \geq \varepsilon$.

Gibt es eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die (1) überall unstetig ist? (2) nur in \mathbb{Q} ?

Lösung: (1) Ja, die **Dirichlet-Funktion** $1_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nirgends stetig.
 (2) Ja, die **kleine Dirichlet-Funktion** $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(p/q) = 1/q$ für jeden gekürzten Bruch $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Satz C3G: Charakterisierungen der Stetigkeit

Für jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ metrischer Räume sind äquivalent:

- (1) f ist folgenstetig: Aus $x_n \rightarrow a$ in X folgt $f(x_n) \rightarrow f(a)$ in Y .
- (2) f ist stetig auf X (im Sinne der obigen ε - δ -Definition C3E).
- (3) Für jede offene Menge V in Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X :

$$\forall V \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$$

Lokal um jeden Punkt $a \in X$ sind äquivalent:

- (4) f ist folgenstetig in a : Aus $x_n \rightarrow a$ in X folgt $f(x_n) \rightarrow f(a)$ in Y .
- (5) f ist stetig im Punkt a (im Sinne der obigen ε - δ -Definition C3E).
- (6) Für jede Umgebung V von $f(a)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a :

$$\forall V \in \mathcal{U}_{f(a)} : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_a$$

Die Formulierungen (3,6) verwenden die Metrik nicht explizit, sondern nur offene Mengen: Stetigkeit ist somit eine topologische Eigenschaft!

Konvergenz C3A und Stetigkeit C3G sind topologische Eigenschaften!

In der Analysis geht es über die **qualitativen** Fragen der Konvergenz und Stetigkeit hinaus auch **quantitativ** darum, wie schnell eine Folge konvergiert oder wie stark $f(x)$ mit x variiert. Im euklidischen Raum \mathbb{R}^n oder in jedem normierten \mathbb{K} -Vektorraum ist das wichtigste Instrument die Differenzierbarkeit zur linearen Approximation, oder noch höhere Ableitungen zur polynomialen Approximation (Taylor-Entwicklung).

Zur feineren Untersuchung dienen ebenso die Lipschitz-Stetigkeit (§C2f) oder die Hölder-Stetigkeit (§C2g). Speziell in der Numerik wird eine geeignete Metrik explizit für praktische Fehlerschranken genutzt. Dies sind daher keine topologischen, sondern metrische Eigenschaften. Hierbei kommt es wirklich auf die Abstände an, auf die Streckung bzw. Stauchung, auf den Fehler, also die Distanz zum gesuchten Grenzwert.

Qualitativ-topologische Methoden ersetzen nicht, sondern ergänzen die quantitativ-metrischen, je nach Anwendung und Sichtweise.

In vielen Fällen kommt es uns nicht auf die Metrik selbst an, sondern nur auf Konvergenz und Stetigkeit, also insbesondere auf offene Mengen!

Definition C3I: topologischer Vergleich von Metriken

Zwei Metriken $d, e: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ heißen (**topologisch**) **äquivalent**, wenn sie dieselben offenen Mengen definieren, kurz $\mathcal{T}(X, d) = \mathcal{T}(X, e)$.

Gilt $\mathcal{T}(X, d) \supseteq \mathcal{T}(X, e)$, so nennen wir d **feiner** als e , oder **größer** als d . Der Kürze halber bedeutet „feiner“ hierbei „mindestens so fein wie“.

Äquivalent, jeder ε -Ball bezüglich e enthält einen δ -Ball bezüglich d :

$$\forall a \in X \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : B_{(X,d)}(a, \delta) \subseteq B_{(X,e)}(a, \varepsilon).$$

Äquivalenz bedeutet also, d ist feiner als e , und e ist feiner als d . Wir nennen d **echt feiner** als e , falls $\mathcal{T}(X, d) \supsetneq \mathcal{T}(X, e)$ gilt.

Dieselben Begriffe verwenden wir ebenso für Normen: Zwei Normen sind topologisch äquivalent, wenn Sie dieselbe Topologie induzieren.

Beispiel / Übung C3K: Vergleich von L^p -Normen

Als konkrete Illustration einige klassische Beispiele: Sei $1 \leq p < q \leq \infty$.

- 1 Auf \mathbb{R}^n sind die ℓ^p -Norm und die ℓ^q -Norm äquivalent:

$$|x|_{\infty} \leq |x|_p \leq |x|_1 \leq n \cdot |x|_{\infty}$$

- 2 Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die ℓ^p -Norm echt feiner als die ℓ^q -Norm:

$$\|f\|_{\ell^q} \leq \|f\|_{\ell^p}$$

- 3 Auf $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ist die L^q -Norm echt feiner als die L^p -Norm:

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}$$

- 4 Auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind die L^p - und die L^q -Norm unvergleichbar, das heißt, keine ist feiner als die andere.

Proposition C3J: topologischer Vergleich von Metriken

Für je zwei Metriken d, e auf X sind gleichbedeutend:

- 1 Die Metrik d ist feiner als die Metrik e (im Sinne der Definition C3I).
- 2 Jede Umgebung bezüglich e ist auch eine Umgebung bezüglich d .
- 3 Jede offene Menge bezüglich e ist auch offen bezüglich d .
- 4 Die Identität $\text{id}_X: (X, d) \rightarrow (X, e): x \mapsto x$ ist stetig.
- 5 Gilt $x_n \rightarrow a$ bezüglich d , dann gilt auch $x_n \rightarrow a$ bezüglich e .
- 6 Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig bezüglich e , dann ist f stetig bezüglich d .
- 7 Ist $f: Y \rightarrow X$ stetig bezüglich d , dann ist f stetig bezüglich e .

Seien $|\cdot|$ und $\|\cdot\|$ Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V .

- 8 Genau dann ist $|\cdot|$ feiner als $\|\cdot\|$, falls $\|x\| \leq L|x|$ für alle $x \in V$ und eine geeignete Konstante $L \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.
- 9 Topologische Äquivalenz bedeutet $\ell|x| \leq \|x\| \leq L|x|$ für alle $x \in V$ und geeignete Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beispiel / Übung C3L: gestauchte & gestutzte Metrik

Ist $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ eine Metrik, so auch die **gestauchte Metrik**

$$d' : X \times X \rightarrow [0, 1] : (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Hieraus lässt sich die ursprüngliche Metrik d rekonstruieren gemäß

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty] : (x, y) \mapsto \frac{d'(x, y)}{1 - d'(x, y)}$$

Hierbei entspricht $d(x, y) = \infty$ dem Wert $d'(x, y) = 1$ und umgekehrt.

Entsprechend erhalten wir aus d die **gestutzte Metrik**

$$d^* : X \times X \rightarrow [0, 1] : (x, y) \mapsto \min\{d(x, y), 1\}$$

Die drei Metriken d, d' und d^* sind topologisch äquivalent. Insbesondere können wir von d stets zu einer endlichen Metrik d' oder d^* übergehen.

Beispiel / Übung C3L: gestauchte & gestutzte Metrik

Die hierbei verwendete Skalierung $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ mit $f(t) = t/(1 \pm t)$ bzw. $f(t) = \min\{t, 1\}$ erfreut sich folgender drei Eigenschaften:

- (1) f ist positiv definit: Es gilt $f(0) = 0$ und $f(t) > 0$ für $t > 0$.
- (2) f ist monoton wachsend: Für alle $s \leq t$ in $[0, \infty]$ gilt $f(s) \leq f(t)$.
- (3) f ist subadditiv: Für alle $s, t \in [0, \infty]$ gilt $f(s + t) \leq f(s) + f(t)$.

In diesem Fall ist mit d auch $d' = f \circ d$ eine Metrik und feiner als d . Ist f zudem stetig in 0, dann sind d und d' topologisch äquivalent.

Beweis: Definition einsetzen und nachrechnen!

Eine konkrete Anwendung und ein Gegen/Beispiel:

Mit d ist auch d^α für $0 < \alpha \leq 1$ eine Metrik und topologisch äquivalent. Diese **Schneeflockenmetrik C71** führt zu einer völlig anderen Geometrie.

Die Funktion $f = \mathbf{1}_{[0, \infty]} : [0, \infty] \rightarrow \{0, 1\}$ erfüllt (1-3). Für jede Metrik d ist $d' = f \circ d$ die diskrete Metrik, und i.A. nicht topologisch äquivalent.

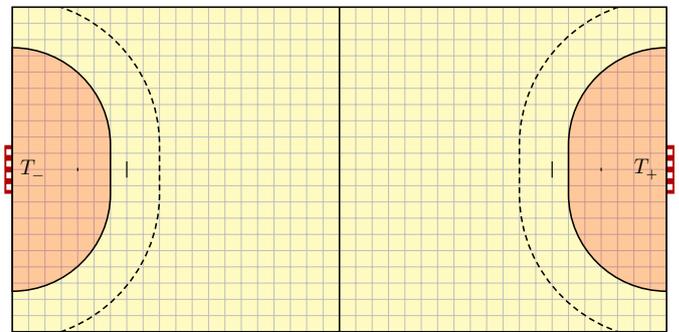
Definition C3M: Abstand zwischen Punkten und Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir messen den Abstand zwischen Punkten und Mengen als das Infimum der punktweisen Abstände:

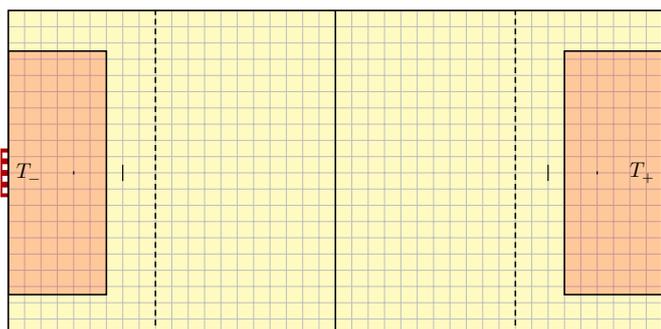
$$\begin{aligned} d : X \times \mathfrak{P}X &\rightarrow [0, \infty], & d(a, B) &:= \inf\{d(a, y) \mid y \in B\} \\ d : \mathfrak{P}X \times X &\rightarrow [0, \infty], & d(A, b) &:= \inf\{d(x, b) \mid x \in A\} \\ d : \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X &\rightarrow [0, \infty], & d(A, B) &:= \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \\ \text{diam} : \mathfrak{P}X &\rightarrow [0, \infty], & \text{diam}(A) &:= \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \end{aligned}$$

Aufgabe: Zeichnen Sie ein Handballfeld gemäß Regel 1 der *International Handball Federation (IHF, www.thf.info)*, aber jeweils in der ℓ^p -Metrik:

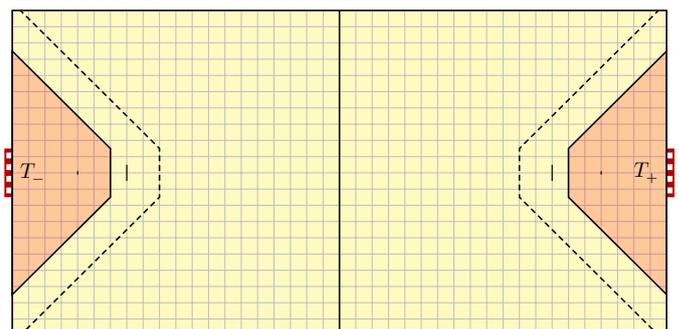
- $X = [-20, 20] \times [-10, 10] \subseteq \mathbb{R}^2$ die Spielfläche
- $T = \{-20, 20\} \times [-1.5, 1.5]$ die beiden Torlinien
- $S = \{x \in X \mid d(x, T) = 6\}$ Sechs-Meter-Linie („Kreis“)
- $N = \{x \in X \mid d(x, T) = 9\}$ Neun-Meter-Linie („Freiwurflinie“)



☺ Der sogenannte „Kreis“ ist gar keiner! Die Sechs-Meter-Linie besteht gemäß Regel 1:4 aus zwei Viertelkreisen und einem Geradenstück.



☺ In der Maximumsmetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Rechteck. *Fun fact:* Im Fußball folgen Tor- und Strafraum dieser Konvention.



☺ In der Taximetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Trapez. Das sieht ulkig aus und illustriert eindrücklich diese Metrik.

Proposition C3n: Abstand und Abschluss

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen.

(1) Für $f : X \rightarrow [0, \infty] : x \mapsto d(x, A)$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.

Das bedeutet f ist 1-lipschitz-stetig, und somit insbesondere stetig.

(2) Für $x \in A$ gilt $d(x, A) = 0$. Genau dann ist A abgeschlossen, wenn auch die Umkehrung gilt: Für alle $x \in X$ mit $d(x, A) = 0$ folgt $x \in A$.

Als direkte Folgerung erhalten wir folgende Trennungseigenschaft:

(3) Trennungseigenschaft $T_{5/1/2}$: Zu $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt existiert $f : X \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $f^{-1}(\{0\}) = A$ und $f^{-1}(\{1\}) = B$.

Für $A \neq \emptyset \neq B$ gelingt dies explizit durch die **Urysohn-Funktion**

$$f_{A,B} : X \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

Beweis: Definition einsetzen und nachrechnen!

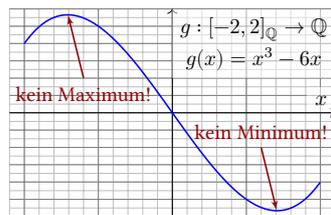
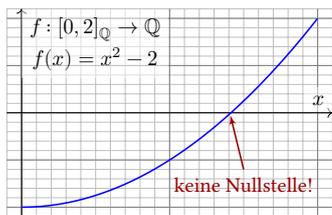
☺ Jeder metrische Raum (X, d) hat viele stetige Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Besonders einfach und nützlich sind Abstandsfunktionen $f(x) = d(x, A)$.

☺ Mit stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ können wir alle Punkte $a \neq b$ in X trennen und sogar alle disjunkten abgeschlossenen Mengen A, B .

Die Konstruktion in Aussage (3) ist leicht und wunderbar explizit, denn wir gehen von einer vorhandenen Metrik d auf X aus.

Dies garantiert Reichhaltigkeit: Allein die Anwesenheit der Metrik d erlaubt die Konstruktion von maßgeschneiderten stetigen Funktionen.

Wir werden später umgekehrt versuchen, eine gegebene Topologie zu metrisieren (Metrisierungssatz E5r von Urysohn) dank geeigneter Trennungseigenschaften (E5A). Die Hausdorff-Eigenschaft $(T_2, C2o)$ ist eine der schwächsten, die Existenz von Urysohn-Funktionen $(T_{5/1/2})$ ist die stärkste dieser Trennungseigenschaften.



Satz C3A: Zwischenwertsatz / Zusammenhang

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Zwischenwertsacheigenschaft: Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ existiert $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Satz C3B: Minimum und Maximum / Kompaktheit

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt Infimum und Supremum an: Es existieren $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$.

Übung: Intervallschachtelung und Ordnungsvollständigkeit von \mathbb{R} .

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ bilden das Fundament der Analysis. Ihre entscheidende Eigenschaft ist die Supremums-Vollständigkeit. Ohne diese Eigenschaft stehen wichtige Werkzeuge nicht zur Verfügung, etwa der Zwischenwertsatz oder das Satz von Minimum und Maximum.

Die obigen Beispiele zeigen dieses „Fehlverhalten“ drastisch:

- Eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, sogar eine Polynomfunktion, kann das Vorzeichen wechseln, ohne eine Nullstelle zu haben!
- Eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, sogar eine Polynomfunktion, kann von wachsend zu fallend übergehen, ohne ein Maximum zu haben!

Übung: Für stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kann dies nicht passieren! Beweisen Sie die beiden obigen Sätze durch Intervallschachtelung. An welcher Stelle und wie nutzen Sie die Vollständigkeit von \mathbb{R} ?

☺ Die Vollständigkeit von \mathbb{R} ist etwas Besonderes und sehr Wertvolles! Die Löchrigkeit von \mathbb{Q} illustriert den Kontrast eindrucklich. Die Vervollständigung von \mathbb{Q} zu \mathbb{R} löst auf einen Schlag all diese Probleme.

Erinnerung: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (X, d) **konvergiert** gegen einen Punkt $a \in X$, wenn der Abstand $d(x_n, a)$ schließlich beliebig klein wird.

$$\begin{aligned} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a \text{ in } (X, d) & \iff d(x_n, a) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \\ & \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : d(x_n, a) < \varepsilon \end{aligned}$$

Konvergenz in (X, d) ist eine **zweistellige Relation** zwischen Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Punkten a in X . Wir schreiben hierfür kurz $x_n \rightarrow a$.

Oft noch praktischer wäre ein Kriterium für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ allein: Wir möchten Konvergenz nachweisen, ohne den Grenzwert zu kennen!

Definition C4A: Cauchy-Folge

Wir nennen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **Cauchy-Folge** in (X, d) , wenn der Durchmesser $\delta_n := \sup_{p, q \geq n} d(x_p, x_q)$ des Folgenendstücks beliebig klein wird:

$$\begin{aligned} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy in } (X, d) & \iff \delta_n \searrow 0 \\ & \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists n \in \mathbb{N} \forall p, q \in \mathbb{N}_{\geq n} : d(x_p, x_q) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

⚠ Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, aber nicht umgekehrt.

Lemma C4B: Konvergenz impliziert Cauchy.

Jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dank Konvergenz $x_n \rightarrow a$ existiert $n \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_p, a) < \varepsilon/2$ für alle $p \geq n$. Für alle $p, q \geq n$ folgt somit $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, a) + d(a, x_q) < \varepsilon$. Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. **QED**

Definition C4c: vollständiger metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (X, d) konvergiert, also ein Punkt $a \in X$ existiert mit $x_n \rightarrow a$.

Beispiel: Im Raum $X =]0, 1]$ mit euklidischer Metrik ist $x_n = 2^{-n}$ eine Cauchy-Folge, aber nicht konvergent. (Im Raum $[0, 1]$ gilt $x_n \rightarrow 0$.)

Beispiel: Im Raum \mathbb{Q} mit euklidischer Metrik ist $x_n = \sum_{k=0}^n 1/k!$ eine Cauchy-Folge, hat aber in \mathbb{Q} keinen Grenzwert. (In \mathbb{R} gilt $x_n \rightarrow e$.)

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent** in (X, d) , wenn ein Punkt $a \in X$ mit der Eigenschaft $x_n \rightarrow a$ existiert. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$(1) \exists a \in X \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : d(x_n, a) < \varepsilon$$

Übung: Zur Cauchy-Bedingung für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (X, d) ist äquivalent:

$$(2) \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists a \in X \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : d(x_n, a) < \varepsilon$$

Somit gilt die Abschwächung „(1) \Rightarrow (2)“ durch Quantorentausch!

Warum formulieren wir die Cauchy-Bedingung dennoch traditionell wie in Definition C4A? Ich denke, C4A ist die bessere Sichtweise: Der Durchmesser des Folgenendstücks $(x_n)_{n \geq m}$ wird beliebig klein. Die Einführung eines geeigneten „Mittelpunkts“ $a \in X$ ist zwar immer möglich, doch eher künstlich und lenkt daher vom Wesentlichen ab. Die Präsentation mathematischer Ideen und Argumente ist immer auch eine Frage des Stils, der Didaktik und der Akzentsetzung.

Satz C4D: Vollständigkeit der reellen Zahlen

Der Raum (\mathbb{R}, d) mit euklidischer Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ist vollständig. Ebenso sind \mathbb{R}^m und \mathbb{C}^m vollständig bezüglich jeder p -Metrik, $p \in [1, \infty]$.

Beweis: (1) Die definierende Eigenschaft des geordneten Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen ist die Supremums-Vollständigkeit (B2C).

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Sie ist insbesondere beschränkt, also liegen $a = \liminf x_n$ und $b = \limsup x_n$ in \mathbb{R} . Dabei gilt $a \leq b$.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $|x_p - x_q| \leq \varepsilon$ für alle $p, q \geq n$. Insbesondere gilt $x_n - \varepsilon \leq x_p \leq x_n + \varepsilon$ für alle $p \geq n$, also $x_n - \varepsilon \leq a \leq b \leq x_n + \varepsilon$, somit $b - a \leq 2\varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, folgt $a = b$, also $x_n \rightarrow a$.

(2) Erinnerung: Für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt $|x|_\infty \leq |x|_p \leq |x|_1 \leq m \cdot |x|_\infty$.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^m . Für die k -te Koordinate ist dann $(x_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Dank Vollständigkeit (1) existiert ein Punkt $a_k \in \mathbb{R}$ mit $x_{n,k} \rightarrow a_k$. Daraus folgt $x_n \rightarrow a$ in \mathbb{R}^m . QED

☺ Erst dank Vollständigkeit von \mathbb{R} greifen die Werkzeuge, die Sie aus der Analysis kennen und lieben: Grenzwerte, Ableitungen, Integrale, etc. Wichtige Funktionenräume der Analysis sind vollständig, insbesondere alle ℓ^p -Räume und L^p -Räume. Dies sind also Banach-Räume. (C1C)

Lemma C4E: abgeschlossene Teilräume

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Genau dann ist (A, d_A) vollständig, wenn A abgeschlossen in (X, d) ist.

Satz C4F: Produkträume

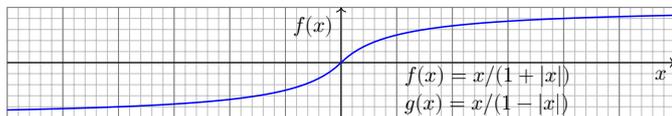
Ist $(X_i, d_i)_{i \in I}$ eine Familie vollständiger metrischer Räume, dann ist $(X, d) = \prod_{i \in I} (X_i, d)$ vollständig bezüglich der Supremumsmetrik C2G.

Satz C4G: stetige Abbildungen

Ist (Y, d_Y) vollständig, so auch $(Y, d_Y)^X$ bezüglich der Supremumsmetrik (C4F) und somit auch der abgeschlossene Teilraum $\mathcal{C}(X, d_X; Y, d_Y)$ (C4E).

- (1) Ist Vollständigkeit eine topologische Eigenschaft?
- (2) Bleiben Cauchy-Folgen unter Homöomorphismen erhalten?
- (3) Bleibt Vollständigkeit erhalten unter äquivalenten Metriken?

Lösung: (1) Nein! Ein Gegenbeispiel ist $(f, g) : \mathbb{R} \cong]-1, +1[$ (A1B). Mit der euklidischen Metrik ist \mathbb{R} vollständig, $]-1, +1[$ jedoch nicht.



(2) Nein! Die Folge $y_n = n/(1+n) \nearrow 1$ in $]-1, +1[$ ist Cauchy bezüglich der euklidischen Metrik, nicht jedoch $x_n = g(y_n) = n \nearrow +\infty$ in \mathbb{R} .

(3) Nein! Mit der euklidischen Metrik $e(x, y) = |x - y|$ ist \mathbb{R} vollständig, nicht jedoch mit der äquivalenten Metrik $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

Allein mit der Topologie können wir Konvergenz (C3A) und Stetigkeit (C3G) formulieren. Dies sind daher topologische Eigenschaften.

Die Cauchy-Bedingung hingegen ist keine topologische Invariante, wie oben gezeigt, sondern eine genuin metrische Eigenschaft.



Beispiel: Legen Sie im Hörsaal eine Karte des Campus auf den Tisch. Dann fällt genau ein Punkt der Karte auf den geographischen Punkt, den er bezeichnet.

Hat jede Kontraktion $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ einen Fixpunkt?

Nein, etwa $f(x) = x/2$ auf $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Der Raum (X, d) muss dazu vollständig sein!

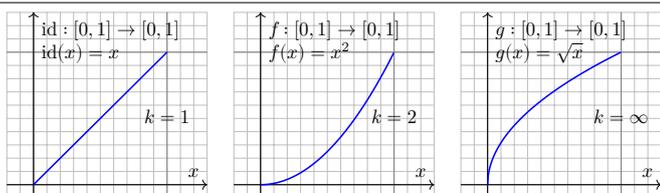
- (1) Illustrieren Sie Iterationen und Banachs Fixpunktsatz.
- (2) Sie kennen bereits spektakuläre Anwendungen: Nennen Sie einige!
- (3) Wiederholung: Formulieren und beweisen Sie Banachs Fixpunktsatz.

Lösung: (1) Bildhaftes Beispiel: Wenn Sie von Ihrer geographischen Umgebung X eine Landkarte im Maßstab $k = 1 : n$ (mit $n > 1$) vor sich auf den Tisch legen, dann definiert die Zuordnung jedes realen Punktes zu seinem Bildpunkt eine k -kontraktive Abbildung $f : X \rightarrow X$. Genau ein Punkt der Karte liegt auf dem geographischen Punkt, den er bezeichnet.

(2) Mit dem Iterationsverfahren können Sie viele Gleichungen numerisch lösen wie $x = \cos(x)$ für $x \in [0, 1]$. Das **Newton-Verfahren** baut darauf auf und verbessert ganz wesentlich die Konvergenzgeschwindigkeit.

Weitere Anwendungen sind der **Satz von Picard-Lindelöf** zur Lösung von Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ und der **lokale Umkehrsatz** zur Konstruktion lokaler Diffeomorphismen $(f, g) : \mathbb{R}^n \supseteq U \cong V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Diese Sätze sind schon spektakulär, doch nur die ersten Anwendungen im Grundstudium, als Spitze des Eisbergs! Viele weitere kommen hinzu.



Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) Räume mit endlichen Metriken und $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Eine Abbildung $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ heißt **k -Lipschitz-stetig**, falls gilt:

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq k d_X(a, b) \quad \text{für alle } a, b \in X$$

Im Falle $0 \leq k < 1$ nennen wir f **kontraktiv** oder eine **k -Kontraktion**.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt $|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| \leq \|A\| \cdot |x - y|$ bezüglich der Operatornorm.

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ diff'bar mit $\|f'\| \leq k$. Für alle $x, y \in X$ existiert $z \in [x, y]$, sodass $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$. Demnach gilt $|f(x) - f(y)| \leq \|f'(z)\| \cdot |x - y| \leq k |x - y|$.

Wir nennen eine solche Funktion f auch **dehnungsbeschränkt**. Der **metrische Differenzenquotient** ist hier beschränkt gemäß

$$\frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} \leq k \quad \text{für alle } a \neq b \text{ in } X.$$

Für $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ definieren wir daher die **Lipschitz-Norm**

$$\|f\|_{\text{Lip}} = \text{Lip}(f) := \sup \left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} \mid a \neq b \text{ in } X \right\}.$$

Die folgende Formulierung vereinheitlicht Ausnahmen und Sonderfälle:

$$\|f\|_{\text{Lip}} := \inf \{ k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \forall a, b \in X : d_Y(f(a), f(b)) \leq k d_X(a, b) \}$$

Dies entspricht der **Operatornorm** von linearen Abbildungen normierter Vektorräume. Genau dann gilt $\|f\| < \infty$, wenn f Lipschitz-stetig ist.

Genau dann gilt $\|f\| = 0$, wenn f konstant ist. Speziell für die Identität $\text{id}_X : X \rightarrow X$ gilt $\|\text{id}_X\| = 1$, im Sonderfall $X = \{x\}$ jedoch nur $\|f\| = 0$.

Für die Komposition von Abbildungen gilt $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

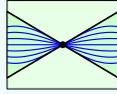
Wir erklären eine allgemeine Lösungsmethode, um 1890 entwickelt von Picard und Lindelöf, für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Der folgende Satz garantiert (1) die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und zudem (2) ein Konstruktionsverfahren zur Approximation dieser Lösung mit (3) expliziter Fehlerschranke. Was will man mehr?

Geometrische Voraussetzungen für die Picard-Lindelöf-Iteration:

Sei $I = [t_0 - a, t_0 + b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall um t_0 mit $a, b \leq T$.
 Sei $K = \bar{B}(y_0, r) \subseteq \mathbb{K}^n$ der Ball um y_0 mit Radius $r > 0$.
 Sei $f: I \times K \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig, somit beschränkt, also $|f| \leq M$.
 Hierbei gelte $T \cdot M \leq r$, notfalls verkleinern wir T und I .



Zudem erfülle f für alle $t \in I$ und $u, v \in K$ die **Lipschitz-Bedingung**

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|.$$

Ist etwa $f(t, y)$ stetig differenzierbar nach y , so genügt $|\partial f / \partial y| \leq L$.

Satz C4R: Picard-Lindelöf-Iteration

Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

- (1) Das Anfangswertproblem hat genau eine Lösung $y: I \rightarrow K$.
- (2) Diese ist die Grenzfunktion der Picard-Lindelöf-Iteration

$$u_0 = y_0, \quad u_{n+1}(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, u_n(\tau)) d\tau$$

- (3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in I$ gilt die gleichmäßige Fehlerschranke

$$|y(t) - u_n(t)| \leq \max_I |u_1 - u_0| e^{LT} \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \rightarrow 0.$$

- (4) Die Lösung y hängt stetig vom Anfangswert y_0 ab: Ist $\tilde{y}: \tilde{I} \rightarrow K$ eine Lösung zum Startwert $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$ auf einem Intervall \tilde{I} mit $t_0 \in \tilde{I}$, so laufen die Lösungen y und \tilde{y} höchstens exponentiell auseinander:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| \cdot e^{L|t-t_0|} \quad \text{für alle } t \in I \cap \tilde{I}$$

Aufgabe: Lösen Sie durch Picard-Lindelöf-Iteration das AWP

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1.$$

Lösung: Sukzessive Approximation gemäß Picard-Lindelöf:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1 \\ u_1(t) &= 1 + \int_{\tau=0}^t u_0(\tau) d\tau = 1 + t \\ u_2(t) &= 1 + \int_{\tau=0}^t u_1(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \\ u_3(t) &= 1 + \int_{\tau=0}^t u_2(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 \\ u_4(t) &= 1 + \int_{\tau=0}^t u_3(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 \end{aligned}$$

Per Induktion und Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \rightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \exp(t)$$

⚠ Das erfordert Vollständigkeit! Auf $\mathbb{K}[t]$ gelingt die Konstruktion nicht.

Aufgabe: Lösen Sie durch Picard-Lindelöf-Iteration das AWP

$$y'(t) = -t y(t), \quad y(0) = 1.$$

Lösung: Sukzessive Approximation gemäß Picard-Lindelöf:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1 \\ u_1(t) &= 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_0(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 \\ u_2(t) &= 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_1(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 \\ u_3(t) &= 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_2(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{48}t^6 \\ u_4(t) &= 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_3(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{48}t^6 + \frac{1}{384}t^8 \end{aligned}$$

Per Induktion und Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} \rightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \exp(-t^2/2)$$

⚠ Das erfordert Vollständigkeit! Auf $\mathbb{K}[t]$ gelingt die Konstruktion nicht.

Aufgabe: (A) Sei $y: I \rightarrow K$ stetig. Unsere **Differentialgleichung**

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I \text{ und } y(t_0) = y_0$$

ist äquivalent zu folgender (für uns vorteilhaften) **Integralgleichung:**

$$y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad \text{für alle } t \in I$$

Somit sind Lösungen $y: I \rightarrow K$ genau die **Fixpunkte** der Abbildung

$$\Psi: C(I, K) \rightarrow C(I, \mathbb{K}^n), \quad (\Psi u)(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

(B) Tatsächlich gilt $\Psi: C(I, K) \rightarrow C(I, K)$: Wir können Ψ also **iterieren!**

(C) Für je zwei Funktionen $u, v \in C(I, K)$ gilt die **Fehlerschranke**

$$|\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)| \leq \max_{[t_0, t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \max_I |u - v| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt $(LT)^n/n! \rightarrow 0$. Demnach ist Ψ^n schließlich **kontraktiv**:
 Zu $0 < \alpha < 1$ existiert $n \in \mathbb{N}$ sodass $|\Psi^n u - \Psi^n v| \leq \alpha |u - v|$ gilt.

Lösung: (A) Dank HDI. Die Integralgleichung besagt $y = \Psi y$.

(B) Für $u \in C(I, K)$ zeigen wir $\Psi u \in C(I, K)$ durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} |\Psi u(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, u(\tau))| d\tau \leq \int_{t_0}^t M d\tau \\ &= |t - t_0| M \leq T M \leq r \end{aligned}$$

(C) Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Für $n \geq 1$ folgt sie induktiv:

$$\begin{aligned} |\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \Psi^{n-1} u(\tau)) - f(\tau, \Psi^{n-1} v(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t L |\Psi^{n-1} u(\tau) - \Psi^{n-1} v(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \max_{[t_0, t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |\tau - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} d\tau \\ &= \max_{[t_0, t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \max_I |u - v| \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \end{aligned}$$

Diese Rechnungen beweisen den Satz C4R von Picard-Lindelöf:

Der Raum $C(I, K)$ ist vollständig bezüglich der Supremumsnorm. Daher können wir auf Ψ den **Fixpunktsatz von Banach** anwenden:

(1) Die Abbildung $\Psi: C(I, K) \rightarrow C(I, K)$ hat genau einen Fixpunkt y .

😊 Dank (A) hat unser AWP somit genau eine Lösung $y: I \rightarrow K$.

(2) Wir erhalten die Lösung y durch sukzessive Approximation.

😊 Für jede Funktion $u_0 \in C(I, K)$ konvergiert $u_n = \Psi^n u_0$ gegen y .

Für den Fixpunkt $v_0 = y$ liefert die Iteration $v_n = \Psi^n v_0 = y$.

Dank der Fehlerschranke (D) erhalten wir also:

$$|y(t) - u_n(t)| \leq \max_{[t_0, t]} |y - u| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \max_I |y - u| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

😊 Die Konvergenz $u_n \rightarrow y$ der Approximationen u_n gegen die Lösung y ist demnach mindestens so schnell wie die Konvergenz $(LT)^n/n! \rightarrow 0$.

😊 Die in (3) angegebene Verschärfung nutzt nur u_0, u_1 :
 Auf der rechten Seite stehen also nur bekannte Daten.

(3) Wir formulieren die Fehlerschranke nur mit u_0 und u_1 :

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_{n+1}(t)| &= |\Psi^n u_0(t) - \Psi^n u_1(t)| \leq \max_{[t_0, t]} |u_0 - u_1| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \\ |u_n(t) - u_{n+p}(t)| &\leq |u_n(t) - u_{n+1}(t)| + \dots + |u_{n+p-1}(t) - u_{n+p}(t)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \max_{[t_0, t]} |u_0 - u_1| \cdot \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \leq \max_{[t_0, t]} |u_0 - u_1| e^{L|t-t_0|} \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \end{aligned}$$

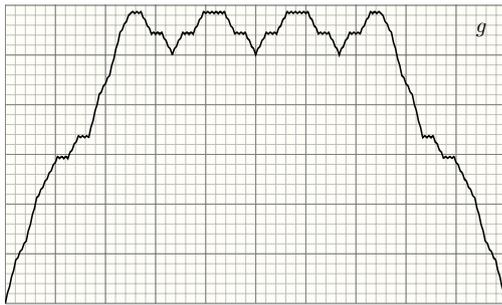
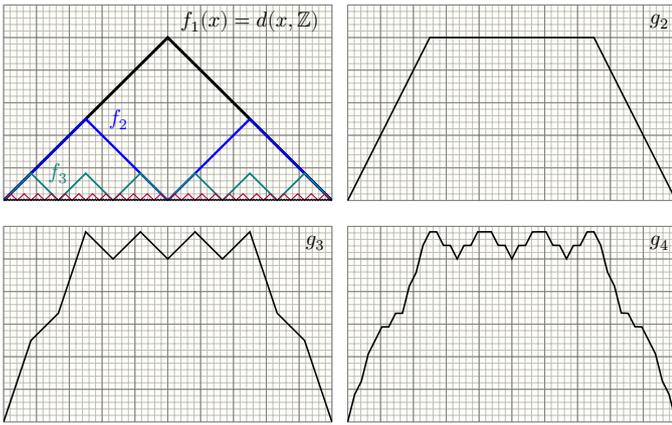
Für $p \rightarrow \infty$ erhalten wir die gewünschte Ungleichung für $|u_n(t) - y(t)|$.

(4) Ist $\tilde{y}: \tilde{I} \rightarrow K$ eine Lösung zum Startwert $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$, so gilt dank (A) $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau$. Wir beginnen die Picard-Lindelöf-Iteration mit der Funktion $u_0 = \tilde{y}$ und erhalten im ersten Schritt die Verschiebung

$$u_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau = y_0 - \tilde{y}_0 + u_0(t), \quad \text{dank (3) also}$$

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} = |y_0 - \tilde{y}_0| e^{L|t-t_0|}.$$

Aufgabe: Skizzieren Sie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d(x, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$ sowie $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$.



Satz C6A: Takagi 1901

Für die **Takagi-Funktion** $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} d(x, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$ gilt:

- (1) Die Funktion g ist stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.
- (2) Die Funktion g ist auf keinem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ monoton.
- (3) Sie nimmt in jedem Punkt $x \in \mathbb{Q}$ ein striktes lokales Minimum an.

Diese genial-einfache doch verblüffende Konstruktion wurde 1901 von Teiji Takagi (1875–1960) veröffentlicht, einem Schüler von David Hilbert.
 □ Teiji Takagi: *A Simple Example of the Continuous Function without Derivative*. Proc. Phys. Math. Japan 1 (1901) 176–177

Aufgabe: Konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise? monoton? gleichmäßig?

Lösung: Wegen $f_n \geq 0$ gilt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$. Wegen $|f_n| \leq \frac{1}{2^n}$ gilt

$$g_n(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{e-1}{2} \approx 0.85914.$$

In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert bezeichnen wir mit $g(x)$. Die Konvergenz $g_n \rightarrow g$ ist monoton und gleichmäßig, denn es gilt

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^n} \searrow 0.$$

Somit ist g stetig – wenn auch extrem rau, wie wir gleich sehen.

Beweis: (1a) Die Funktion $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig für jedes $k \in \mathbb{N}$, also auch $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Zudem gilt $0 \leq g(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^n} \searrow 0$. Die Konvergenz $g_n \rightarrow g$ ist also gleichmäßig auf \mathbb{R} . Daher ist auch die Grenzfunktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

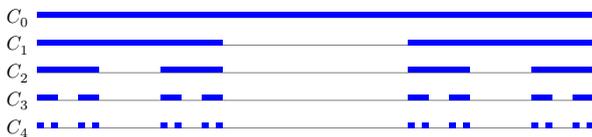
(1b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion f_n zwischen den Punkten $\frac{1}{2^n}\mathbb{Z}$ stückweise affin mit Steigung ± 1 . Somit ist f_n affin auf $[x - \frac{1}{2^n}, x]$ oder auf $[x, x + \frac{1}{2^n}]$. Für $n \geq 3$ wählen wir $h_n = \pm \frac{1}{2^{n+1}}$ so, dass f_n zwischen x und $x + h_n$ affin ist. Gleiches gilt dann für alle f_k mit $1 \leq k \leq n$. Für $k \geq n+1$ hingegen gilt $f_k(x + h_n) = f_k(x)$. Der Differenzenquotient ist

$$q_n := \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x + h_n) - f_k(x)}{h_n} = \sum_{k=1}^n \pm 1.$$

Daher hat die Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Grenzwert. Das heißt, f ist in x nicht differenzierbar.

Aus (3) folgt (2); es reicht also, Aussage (3) zu beweisen. Jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ lässt sich schreiben als $x = a/n!$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. (Warum?) Wir zeigen $g(u) > g(x)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $0 < |u - x| < r := 1/(2n)!$. Die Funktion $g_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f_k$ ist auf $[x - r, x + r]$ stückweise affin, und die Steigung liegt überall zwischen $1 - n$ und $n - 1$. Die Funktion $h = \sum_{k=n}^{\infty} f_k$ hingegen erfüllt $h(u) = n|u - x|$ für alle $u \in [x - r, x + r]$. Demnach ist die Summe $g_{2n-1} = g_{n-1} + h$ streng fallend auf $[x - r, x]$ und streng wachsend auf $[x, x + r]$. Insbesondere ist x das strikte Minimum von g_{2n-1} eingeschränkt auf $[x - r, x + r]$. Für alle $k \geq 2n$ gilt $f_k(x) = 0$ und $f_k(u) \geq 0$ für alle u . Deshalb ist x das strikte Minimum auch von g eingeschränkt auf die hinreichend kleine Umgebung $[x - r, x + r]$. □

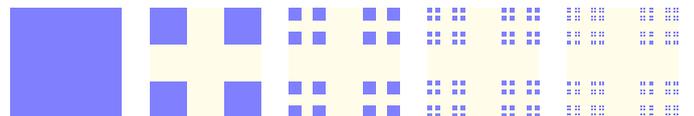
Cantor-Menge $C = \bigcap C_n$ mit $C_0 = [0, 1]$ und $C_{n+1} = (\frac{1}{3}C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$



Satz C6D: bemerkenswerte Eigenschaften der Cantor-Menge

- (1) Die Cantor-Menge C ist kompakt und hat Lebesgue-Maß $\text{vol}_1(C) = 0$, ihr Komplement $[0, 1] \setminus C$ ist offen und dicht in $[0, 1]$, doch $C + C = [0, 2]$.
- (2) Wir haben die Bijektion $\varphi : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\cong} C : (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k 3^{-k-1}$ und stetige Surjektion $f : C \rightarrow [0, 1] : \sum_{k=0}^{\infty} x_k 3^{-k-1} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-2}$.
- (3) Die Teufelstreppe $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ setzt f monoton fort und ist stetig, stückweise konstant auf $[0, 1] \setminus C$, somit fast überall diff'bar mit $g'(x) = 0$.
- (4) Sei $\varepsilon > 0$ und $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1 + \varepsilon] : h(x) = g(x) + \varepsilon x$. Dies ist ein Homöomorphismus und bildet C von Maß 0 ab auf $h(C)$ vom Maß 1.

Diese Eigenschaften rechnet man geduldig nach, mit den Begriffen und Techniken dieses Kapitels. Wir veranschaulichen $C + C = [0, 2]$ wie folgt:



Der **Cantor-Staub** $C \times C = \bigcap C_n \times C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ ist diagonal blickdicht!

Die **fette Cantor-Menge** $C(q)$ zu $q \in]0, 1[$: Wie zuvor sei $C_0 := [0, 1]$. Aus $C_n = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} [a_k, b_k]$ konstruieren wir $C_{n+1} := \bigsqcup_{k=1}^{2^n} [a_k, t_k] \sqcup [t_k^+, b_k]$ durch $t_k^{\pm} = \frac{1}{2}(a_k + b_k) \pm \frac{1-2q}{2}(b_k - a_k)$ und erhalten $C(q) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Nach Konstruktion gilt $C_n \searrow C$ und $\text{vol}_1(C_n) = q_1 q_2 \dots q_n \searrow \text{vol}_1(C)$. Für $p = (2/3)_{n \in \mathbb{N}}$ erhalten wir Cantors Wischmenge mit $\text{vol}_1 C(p) = 0$. Für $q = (a^{2^{-n}})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a \in]0, 1[$ gilt $\text{vol}_1 C(q) = \prod_{n=1}^{\infty} a^{2^{-n}} = a$.

Alle Cantor-Mengen sind homöomorph: Zu je zwei Folgen $p, q \in]0, 1[$ existiert ein Homöomorphismus $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $h(C(p)) = C(q)$.

Gibt es Bijektionen $[0, 1] \cong [0, 1]^2$? – Ja! (Cantor 1878)
 Gibt es stetige Bijektionen $[0, 1] \cong [0, 1]^2$? – Nein! (Netto 1879)

Georg Cantor bewies 1878 den erstaunlichen Satz, dass das Intervall $[0, 1]$ und das Quadrat $[0, 1]^2$ gleich viele Punkte haben, also eine Bijektion $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ existiert. (Wir haben dies bereits in Satz B2N gezeigt.) Dies warf die Frage auf, ob *stetige* Bijektionen $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ existieren.

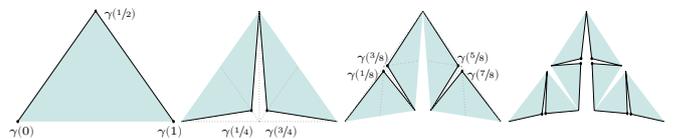
Beweis: Wäre die Bijektion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ stetig, so wäre f dank der Kompaktheit des Startraums $[0, 1]$ und der Hausdorff-Eigenschaft des Zielraums $[0, 1]^2$ ein Homöomorphismus (F1L). Das widerspricht A1H.

Es blieb die Frage, ob statt stetiger Bijektionen noch stetige Surjektionen $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ möglich sind. Dies scheint zunächst kaum vorstellbar, doch Giuseppe Peano (1858–1932) überraschte 1890 die Fachwelt mit der ersten Konstruktion einer flächenfüllenden Kurve. Ebenso existieren Einbettungen $[0, 1] \hookrightarrow [0, 1]^2$ mit positivem Flächeninhalt. Für all diese Konstruktionen nutzen wir dankend die gleichmäßige Konvergenz.

Satz C6c: Peano 1890

Es gibt stetige Surjektionen $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$.

Wir beweisen dies mit der eleganten Konstruktion von William Osgood (1864–1943) und erhalten zudem das folgende bemerkenswerte Ergebnis.



Satz C6h: Osgood 1903

Es gibt stetige Injektionen $\gamma : [0, 1] \hookrightarrow [0, 1]^2$ mit positivem Flächeninhalt: Für das Bild $\Gamma = \gamma([0, 1]) \subset [0, 1]^2$ ist jedes Maß $\text{vol}_2(\Gamma) \in [0, 1[$ erreichbar.

Cantor selbst schrieb einst: „Je le vois, mais je ne le crois pas!“ [Ich sehe es, aber ich kann es nicht glauben!] Besser, wir können es nachrechnen!