Kapitel B

Grundlagen: Aufbau des Zahlensystems

Wer hohe Türme bauen will,
muss lange beim Fundament verweilen.
Anton Bruckner (1824–1896)

Inhalt dieses Kapitels B

Was sind und was sollen die Zahlen?

Seit Urzeiten nutzen Menschen die Zahlen und entwickeln das Rechnen.
Doch was sind Zahlen? Und woher kommen die Rechenregeln?

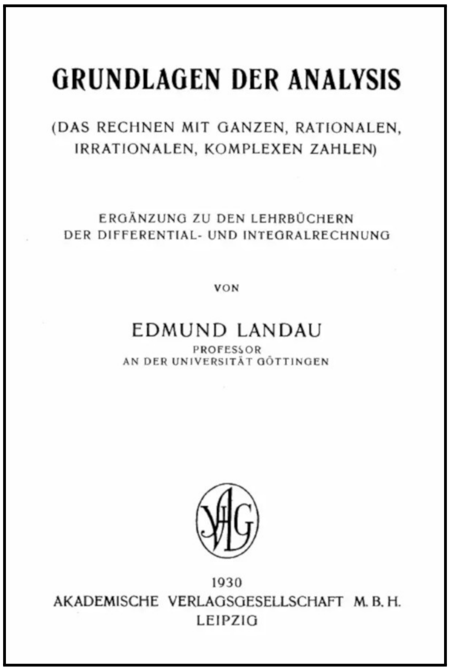

RICHARD DEDEKIND

Was sind und was sollen die Zahlen?

Zehnte Auflage

Stetigkeit und Irrationale Zahlen

Siebente Auflage


GRUNDLAGEN DER ANALYSIS

(DAS RECHNEN MIT GANZEN, RATIONALEN, IRRATIONALEN, KOMPLEXEN ZAHLEN)

ERGÄNZUNG ZU DEN LEHRBÜCHERN DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

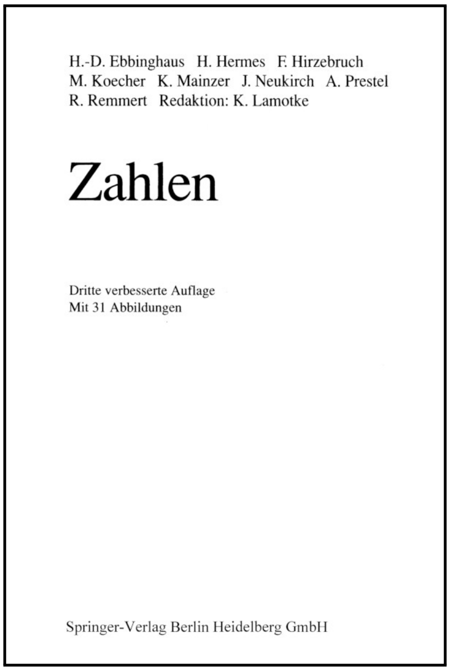
VON

EDMUND LANDAU

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

1930

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H. LEIPZIG


H.-D. Ebbinghaus H. Hermes F. Hirzebruch
M. Koecher K. Mainzer J. Neukirch A. Prestel
R. Remmert Redaktion: K. Lamotke

Zahlen

Dritte verbesserte Auflage
Mit 31 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Bitte vergiss alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. Bitte denke bei allem an die entsprechenden Stellen des Schulpensums; denn Du hast es doch nicht vergessen. (Landau, Vorwort für den Lernenden)

Was sind und was sollen die Zahlen?

Allen ernsthaften Studierenden der Mathematik empfehle ich, lieber früher als später, den Aufbau des Zahlensystems zu studieren.

Richard Dedekind hat sich schon 1888 sehr gründlich mit dem Aufbau der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und ihrer Arithmetik auseinandergesetzt. Als logische Grundlage für dieses Unterfangen nutzte er gewinnbringend die damals gerade entstehende Mengenlehre. Dies trägt bis heute!

Edmund Landaus Lehrbuch von 1930 ist ein Klassiker. Hier wurde zum ersten Mal der Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen Zahlen zu den rationalen, den reellen und schließlich den komplexen Zahlen systematisch und präzise ausgeführt. Es ist berühmt für Landaus (selbst so genannten) „unbarmherzigen Telegrammstil“ und oft zitiert dank seiner beiden prägnanten Vorworte „Vorwort für den Lernenden“ und „Vorwort für den Kenner“. Landaus Büchlein ist nach wie vor erhellend!

Beide Klassiker sind in kommentierten Neuauflagen gut zugänglich. Heutige Studierende finden vielleicht neuere Lehrbücher sympathischer. Ich empfehle das wunderschöne Buch *Zahlen* von Ebbinghaus *et al.*

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Wie erklären / definieren / konstruieren wir die Zahlbereiche?

natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\dots\}$
ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$
rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\, z/n \mid z,n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \,\}$
reelle Zahlen	$\mathbb{R} =$ „$\mathbb{Q}$ und alle Grenzwerte“
komplexe Zahlen	$\mathbb{C} = \{\, x + \mathrm{i}y \mid x,y \in \mathbb{R} \,\}$

Definition B2A: Die natürlichen Zahlen erfüllen die Peano–Axiome.

Die **natürlichen Zahlen** $(\mathbb{N},+,0,\cdot,1)$ sind ein kommutativer Halbring. Als charakteristische Eigenschaft erfüllen sie die **Dedekind–Peano–Axiome**, das heißt, für die Nachfolgerabbildung $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n+1$ gilt:

0. Null ist kein Nachfolger: $0 \notin s(\mathbb{N})$, also $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 \neq 0$.
1. Die Abbildung s ist injektiv: $\forall p,q \in \mathbb{N} : p \neq q \Rightarrow p+1 \neq q+1$.
2. Prinzip der vollständigen Induktion: Vorgelegt sei $E \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in E$ und $s(E) \subseteq E$, das heißt $\forall n \in E : n+1 \in E$. Dann gilt bereits $E = \mathbb{N}$.

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Definition B2B: Die ganzen Zahlen erweitern die natürlichen.

Die **ganzen Zahlen** $(\mathbb{Z},+,0,\cdot,1)$ sind ein kommutativer Ring mit $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$, und dabei gilt $\mathbb{Z} = \{\, z = a - b \mid a,b \in \mathbb{N} \,\}$.

Definition B2C: Die rationalen Zahlen erweitern die ganzen.

Die **rationalen Zahlen** $(\mathbb{Q},+,0,\cdot,1)$ sind ein Körper mit $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$, und dabei gilt $\mathbb{Q} = \{\, q = z/n \mid z,n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \,\}$.

Definition B2D: Die reellen Zahlen vervollständigen die rationalen.

Die **reellen Zahlen** $(\mathbb{R},+,0,\cdot,1)$ sind ein Körper mit $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ und vollständig geordnet durch $x \leq y \;\Leftrightarrow\; \exists a \in \mathbb{R} : x + a^2 = y$.

Definition B2E: Die komplexen Zahlen erweitern die reellen.

Die **komplexen Zahlen** $(\mathbb{C},+,0,\cdot,1)$ sind ein Körper mit $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, und dabei gilt $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \{\, z = x + \mathrm{i}y \mid x,y \in \mathbb{R} \,\}$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$.

Existenz und Einzigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ich fasse hier in knappen doch präzisen Worten die grundlegenden Rechenregeln zusammen, die Sie im ersten Semester gelernt haben.

Als logisches Fundament und geeignete Sprache nutzen wir die Mengenlehre – hier für das Zahlensystem wie auch für alles Weitere.

Wir nutzen die obigen Eigenschaften als Definitionen. Legen diese die gewünschten Objekte eindeutig fest? Existieren solche Modelle?

Satz B3A: Existenz und Einzigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Die so definierten Objekte $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ existieren: Es gibt Modelle.
Je zwei Modelle sind isomorph, sogar eindeutig isomorph für $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erlauben über $\mathbb{R}$ genau zwei Automorphismen: die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ und die Konjugation $\bar{}: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,:\, z = x + \mathrm{i}y \mapsto \bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

Dies ist eine konzise Erinnerung und definiert eine klare Schnittstelle.

```
from __experience__ import numbersystem
from __firstyear__  import numbersystem
from __future__     import numbersystem
```


Existenz und Einzigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Wir werden im Folgenden diese Strukturen nutzen. Sie sollen daher verstehen, was diese Definitionen genau sagen, und sich überzeugen, dass sie die vertrauten Zahlbereiche zutreffend beschreiben.

Ich wünsche mir, dass Sie den Aufbau des Zahlensystems kennen. Schwache Version: Sie verstehen die obigen Definitionen und können damit arbeiten. Das ist meistens der Fall, und darauf werde ich bauen.

Starke Version: Sie haben den Aufbau Schritt für Schritt durchgeführt, also die zugehörigen Konstruktionen und Beweise detailliert ausgeführt. Das ist meist nicht der Fall. Ich bedaure das, werde es aber hier nicht heilen können. Am Anfang des Studiums kann man diese Konstruktion vermutlich nicht recht würdigen, und später im Studium machen sich die meisten dann andere Sorgen. Das ist unglücklich, aber leider typisch.

Ich begnüge mich daher hier mit einer Erinnerung bzw. einem Appell. Das ist hoffentlich verschmerzlich und folgt dem historischen Vorbild: Mit jedem Zahlbereich wurde lange gerechnet, ehe er begründet wurde. Wenn Sie bereit dazu sind, studieren Sie gründlich – die Grundlagen!

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Seien X und Y zwei Mengen. Wir schreiben $X \preccurlyeq Y$, falls eine Injektion $f : X \hookrightarrow Y$ existiert, und $X \cong Y$, falls eine Bijektion $(h,k) : X \cong Y$ existiert.

Hierzu wollen wir nun zeigen: Aus $X \preccurlyeq Y$ und $Y \preccurlyeq X$ folgt $X \cong Y$.

Satz B2O: Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Gegeben seien Injektionen $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$.
Dann existiert eine Bijektion $(h,k) : X \cong Y$.

Cantors Reißverschluss: Jede Abbildung rechts ist eine Bijektion!

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, bend left, "f"] \arrow[d, phantom, "\text{inj}"] & = & X_0 \arrow[drr] & \sqcup & X_1 \arrow[drr] & \sqcup & X_2 \arrow[drr] & \sqcup & X_3 \arrow[drr] & \sqcup & \cdots & \sqcup & X_\infty \arrow[d, bend left] \arrow[d, phantom, "\text{bij}"] \\
Y \arrow[u, bend left, "g"] & = & Y_0 \arrow[urr] & \sqcup & Y_1 \arrow[urr] & \sqcup & Y_2 \arrow[urr] & \sqcup & Y_3 \arrow[urr] & \sqcup & \cdots & \sqcup & Y_\infty \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Wir lesen $X \preccurlyeq Y$ als „Die Menge X ist höchstens so groß wie Y."
Wir lesen $Y \succcurlyeq X$ als „Die Menge Y ist mindestens so groß wie X."
Wir lesen $X \cong Y$ als „Die Mengen X und Y sind gleich groß",
hierzu sagen wir traditionell **gleichmächtig** oder **äquipotent**.
Der Satz garantiert, dass wir Mengen nach Mächtigkeit ordnen können.
Wir definieren die strikte Ordnung $X \preccurlyeq Y$ durch $X \preccurlyeq Y$ und $Y \not\preccurlyeq X$. und entsprechend $X \preccurlyeq Y$ durch $X \preccurlyeq Y$ und $Y \not\preccurlyeq X$.
Es gilt also höchstens eine der drei Alternativen XY oder $X \cong Y$ oder XY.

Der Äquivalenzsatz wurde 1887 von Georg Cantor formuliert, aber erst zehn Jahre später 1897 bewiesen. Dies gelang dem damals 19-jährigen Studenten Felix Bernstein in Cantors Seminar an der Universität Halle. Zeitgleich und unabhängig veröffentlichte Ernst Schröder einen Beweis, der sich jedoch später als fehlerhaft erwies. Bereits 1887 fand Richard Dedekind einen Beweis, den er nicht veröffentlichte. Daher trägt der Äquivalenzsatz oft eine Kombination dieser Namen. Wir präsentieren im Folgenden eine Konstruktion, die ohne das Auswahlaxiom auskommt.

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Beweis: Gegeben sind $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$. Die beiden Mengen

$$X_0 := X \smallsetminus g(Y) \quad \text{und} \quad Y_0 := Y \smallsetminus f(X)$$

enthalten alle Elemente ohne Urbild. Rekursiv enthalten

$$X_{n+1} := g(Y_n) \quad \text{und} \quad Y_{n+1} := f(X_n)$$

alle Elemente mit Urbildfolge der Länge $n+1$. Schließlich enthalten

$$X_\infty := \bigcap\nolimits_{k\in\mathbb{N}} (g\circ f)^k(X) \quad \text{und} \quad Y_\infty := \bigcap\nolimits_{k\in\mathbb{N}} (f\circ g)^k(Y)$$

alle Elemente mit unendlicher Urbildfolge. Wir definieren damit

$$h : X \to Y : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} X_{2k} \sqcup X_\infty, \\ g^{-1}(x) & \text{für } x \in \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} X_{2k+1}, \end{cases}$$

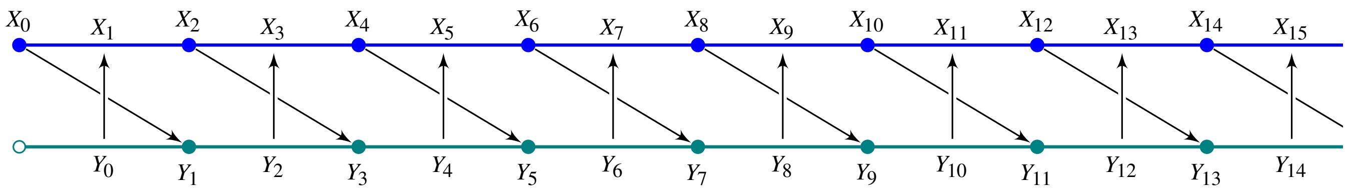
$$k : Y \to X : y \mapsto \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{für } y \in \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} Y_{2k+1} \sqcup Y_\infty, \\ g(y) & \text{für } y \in \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} Y_{2k}. \end{cases}$$

Diese Abbildungen erfüllen $k\circ h = \mathrm{id}_X$ und $h\circ k = \mathrm{id}_Y$. $\boxed{\text{QED}}$

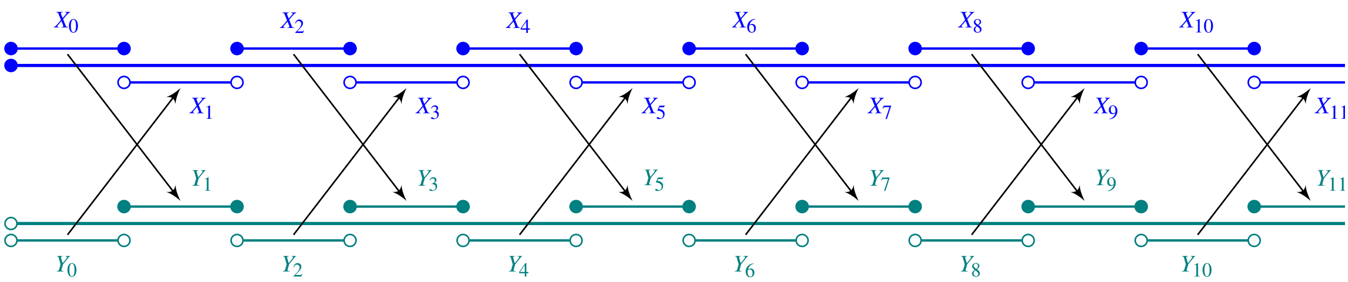
Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Beispiel: Die Intervalle $X = [0,\infty[$ und $Y =]0,\infty[$ sind gleichmächtig.

Beweis: Wir haben $f : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x+1$ und $g : Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$.
Dank Cantor–Bernstein existiert eine Bijektion $(h,k) : X \xrightarrow{\sim} Y$. Skizze:



Alternative: Wir nutzen $f : x \mapsto x+1$ und $g : y \mapsto y+1$. Skizze:



Übung: Die Intervalle $X = [0,3]$ und $Y = [0,2[$ sind gleichmächtig.
Wir nutzen beispielsweise $f : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x/2$ und $g : Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$.

Entwicklung reeller Zahlen in Basis B

Sei $B \in \mathbb{N}$ und $B \geq 2$. Zum Beispiel wählen wir $B = 10$ für die Dezimalentwicklung und $B = 2$ für die Binärentwicklung. Jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ schreibt sich eindeutig als **B–adische Entwicklung**

$$a = a_{-\ell} B^{\ell} + a_{1-\ell} B^{\ell-1} + \cdots + a_{-2} B^2 + a_{-1} B + a_0$$

mit Ziffern $a_k \in \{0, \dots, B-1\}$, wobei die höchste Ziffer $a_{-\ell} \neq 0$ erfüllt.

Satz B2M: B–adische Entwicklung

Jede Ziffernfolge $a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, \dots, B-1\}$ definiert eine reelle Zahl

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-k} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k} \quad \in \quad [0,1].$$

Umgekehrt lässt sich jede reelle Zahl $a \in [0,1]$ so als B–adische Entwicklung schreiben (auf mindestens eine, höchstens zwei Weisen).

Zu jeder reellen Zahl $a \in]0,1]$ existiert genau eine solche B–adische Entwicklung, bei der unendlich viele Ziffern von 0 verschieden sind.

Entwicklung reeller Zahlen in Basis B

Mächtigkeit der reellen Zahlen

Satz B2N: Kardinalität der Menge $\mathbb{R}$

(1) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.
Genauer konstruieren wir eine Bijektion $\mathbb{R} \cong 2^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

(2) Insbesondere ist die Menge $\mathbb{R}$ gleichmächtig zur Menge $\mathbb{R}^n$ aller n–Tupel für $n \geq 1$ sowie zur Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \}$ aller Folgen.

Beweis: (1a) Wir haben Bijektionen $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]-1,+1[: x \mapsto x/(1+|x|)$ sowie $g :]-1,+1[\xrightarrow{\sim}]0,1[: x \mapsto (x+1)/2$. Die Binärentwicklung stiftet die Injektion $]0,1[\hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (dank Satz B2M für $B=2$).

(1b) Umgekehrt haben wir $\{0,1\} \xrightarrow{\sim} \{1,2\}$ und somit $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \{1,2\}^{\mathbb{N}}$. Satz B2M für $B=3$ stiftet eine Injektion $\{1,2\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow]0,1] \subset \mathbb{R}$.

Insgesamt haben wir also Injektionen $\mathbb{R} \hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Cantor–Bernstein (B2O) liefert eine Bijektion $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

(2) Wir haben Bijektionen $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \{1,\dots,n\} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aus $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ folgt $\mathbb{R}^n \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\{1,\dots,n\}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. $\boxed{\text{QED}}$

Mächtigkeit der reellen Zahlen