Grundlagen der Topologie

analytisch – geometrisch – algebraisch

erkennen.
beweisen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann

eiserm.de/lehre/Topologie

Universität Stuttgart

Sommersemester 2024

Stand 17. April 2024

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Urheberrecht und Haftungsausschluss

Die hier angebotenen Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen zu nicht-kommerziellen Zwecken in der Lehre verwendet werden, sofern die Quelle wie folgt vollständig angegeben wird.

> Prof. Dr. Michael Eisermann: Vorlesungsunterlagen zur Topologie,
> Institut für Geometrie und Topologie (IGT), Universität Stuttgart,
> `michael-eisermann.de/lehre/Topologie`

Diese Unterlagen werden genutzt zur Vorlesung *Topologie* und richten sich vornehmlich an Studierende der Mathematik. Sie vermitteln einschlägiges mathematisches Grundlagenwissen.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich. Bitte betrachten Sie alle Quellen kritisch, wie immer; nicht alles ist wahr und gut und hilfreich.

Wie nutzen Sie diese Notizen?

Diese Vortragsfolien sind ein Extrakt meines Skripts zur Topologie,
das durch Vorlesungen der letzten Jahre gewachsen und erprobt ist.
Vortrag und Skript haben verschiedene Ziele und ergänzen sich:
Der Vortrag gibt einen Überblick, das Skript dient zur Vertiefung.

Ich bemühe mich in der Vorlesung, die zentralen Ideen zu motivieren und die wesentlichen Definitionen, Sätze und Beweise präzise auszuführen.
Diese Darstellung ist so ausführlich wie nötig und so knapp wie möglich;
einiges verstehen Sie sofort, für anderes benötigen Sie Zeit und Muße.

Um diese Ideen und Werkzeuge wirklich zu begreifen, müssen Sie alles selbst in die Hand nehmen, erproben, anwenden, vertiefen, kurz: üben!
Das Skript bietet Ihnen hierzu passende Übungen mit Lösungen sowie zahlreiche weitere Illustrationen, Erläuterungen und Ergänzungen.

Auf unserer Lernplattform Ilias finden Sie neben den Vorlesungsvideos zudem unser wöchentliches Topologie-Quiz und die Übungsblätter mit Hausaufgaben sowie unsere Lösungen nach Abgabe der Aufgaben.
Forum und Umfrage runden das Gesamtpaket ab.

Wie nutzen Sie diese Notizen?

Ich möchte Vortrag und Skript synchron halten, soweit dies möglich ist.
Die Nummerierung der Abschnitte, Definitionen, Sätze, Beispiele usw.
habe ich daher beibehalten, auch wenn dadurch Sprünge entstehen.
Der Übergang zwischen Vortrag und Skript wird dadurch nahtlos.

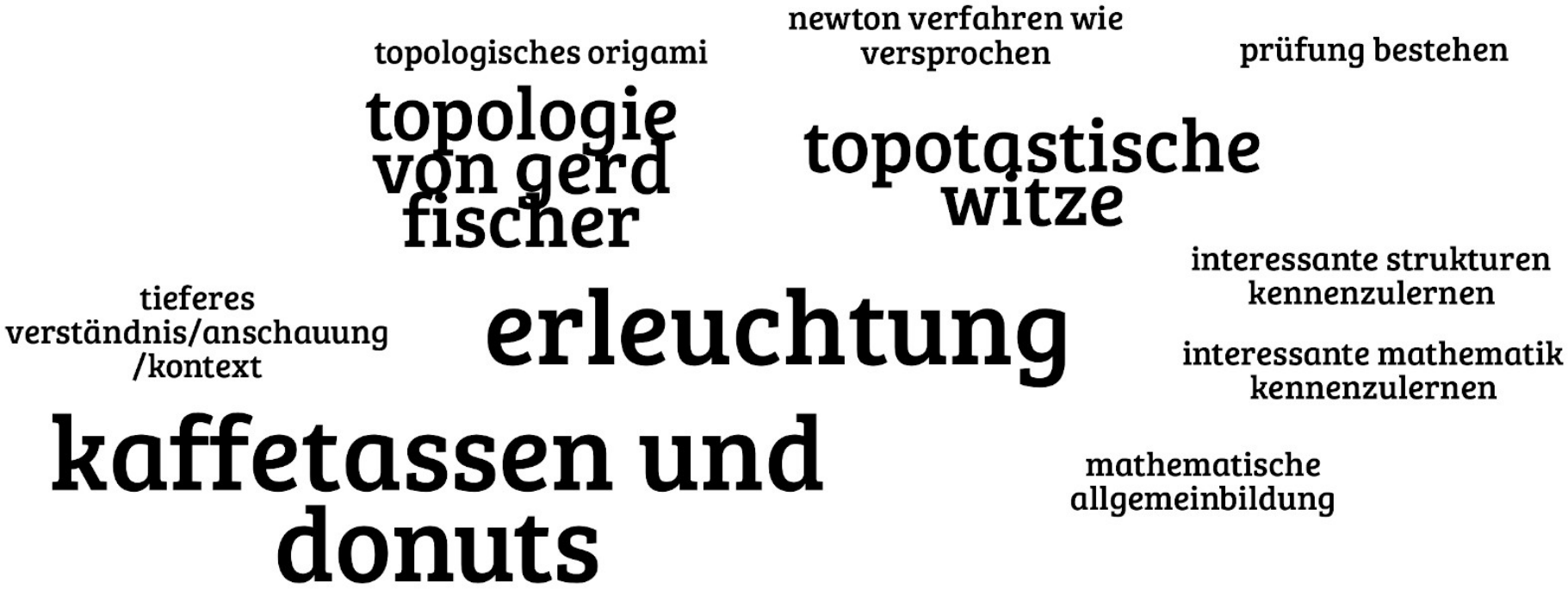
Diese Vorlesung ist eine Einführung, zwar gründlich doch begrenzt.
Mit dem ausführlicheren Skript bietet sie eine Brücke zur Literatur,
sie ist in sich geschlossen und zugleich offen, ein erster Anfang.
Bitte lesen Sie Lehrbücher, sobald Sie sich sicher genug fühlen!

Es gibt wahrlich viele exzellente Bücher zur Mathematik, insbesondere
auch zur Topologie und ihren vielfältigen Ausprägungen, Vertiefungen
und Anwendungen etwa als analytisch-mengentheoretische Topologie,
algebraische, geometrische, differentielle, ...

Nur durch eigenständige Lektüre lernen Sie verschiedene Sichtweisen
kennen in mathematischem Stil und Inhalt, Auswahl und Aufbau, ...
Selbst wenn Sie manche Lehrbücher zunächst nur anlesen, sind dies doch
wichtige Kondensationskeime um später darauf zurückzukommen.

Topologie 2022 – Worauf freuen und was erhoffen Sie sich?

Bevor ich über die Topologie spreche, beginnen wir bei Ihnen:
Was erhoffen Sie sich von dieser Veranstaltung zur Topologie?



Willkommen zur Topologie!

Meine Ziele und Wünsche für diese Veranstaltung:

1. Freude an Mathematik! Wir wollen unseren Spaß haben.
   Das klingt egoistisch, doch vielleicht springt der Funke über.
2. Sie engagieren sich kontinuierlich, wir betreuen Sie bestens.
   Das ist Ihr Schlüssel zu Ihrem Erfolg. Gestalten Sie Ihr Studium!
3. Sie lernen wunderschöne und nützliche Mathematik.
   Gemeinsam schaffen wir dafür beste Voraussetzungen.

Sie sind jung, lernfähig, wissbegierig. Die mathematischen Werkzeuge, die Sie hier in Ihrem Studium erlernen, nützen Ihnen ein Leben lang. Ihre Investition lohnt sich, jetzt schon kurzfristig, noch mehr langfristig.

Ich bin zu alt, um nur zu spielen,
zu jung, um ohne Wunsch zu sein.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust* (1808)

Wir bieten Ihnen eine sensationell gute, preisgekrönte Veranstaltung. Diese verlangt Ihr volles Engagement. Prüfen und entscheiden Sie sich!

Was macht die Topologie so einzigartig?

Viele halten die Topologie für abstrakt und schwierig,
doch nur Wenige haben Recht!

Sie wissen aus Erfahrung: Analysis ist konkret… und dadurch beliebig kompliziert. Lineare Algebra ist abstrakt… und dadurch meist einfach. Die Topologie ist beides: wunderbar abstrakt und vollkommen konkret! Mathematik zu studieren ist harte, ehrliche Arbeit… und es lohnt sich.

Erfahrungsgemäß bereitet die Topologie Teilnehmer:innen nachhaltig Freude, deshalb wurde unsere Lehre mehrfach mit Preisen ausgezeichnet.

We choose to study Topology this very semester,
not because it is easy, but because it is hard,
because that goal will serve to organize and
measure the best of our energies and skills.
frei nach John F. Kennedy (1917–1963)

Ich freue mich, dass Sie sich für die Topologie entscheiden.
Freuen Sie sich auf ein spannendes und lehrreiches Semester!

Was macht die Topologie so einzigartig?

Ihr Mathematik-Studium hat zwei zentrale, sich ergänzende Ziele: **Wissen und Können**, Verstehen und Anwenden, Theorie und Praxis. Darin liegt der besondere Reiz der Mathematik, und ihre Schwierigkeit. (Ich betone dies, weil es für viele keineswegs selbstverständlich ist.)

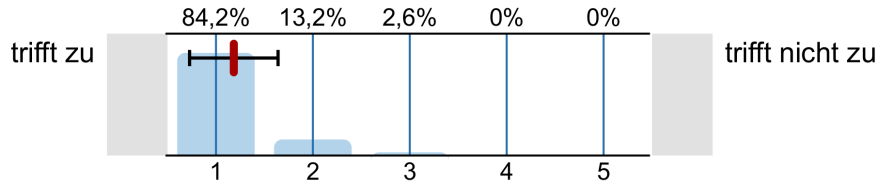
Die Lineare Algebra behandelt Vektoren und Matrizen, lineare Räume und lineare Abbildungen. Das sind sehr einfache Objekte, aber abstrakt. Abstraktion hilft, sie strukturiert und vereinfacht! Ein Vektorraum etwa sieht immer gleich aus, Sie müssen nur seine Dimension kennen.

Die Analysis behandelt reelle Zahlen und Funktionen, Stetigkeit und Konvergenz, Ableitungen und Integrale, uvm. Das ist ganz konkret, kann aber beliebig kompliziert werden: Eine reelle Funktion, selbst stetig, kann die verrücktesten Dinge tun! Diese Komplexität liegt in der Natur.

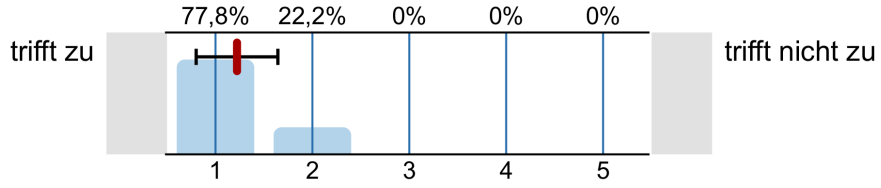
Meine scherzhafte Formulierung entspricht jahrzehntelanger Erfahrung: Die Topologie vereint beide Aspekte: Sie ist sehr konkret und hilft direkt. Sie kann auch beliebig kompliziert und sehr abstrakt sein. Das ist gut so: Abstrakt heißt nicht anwendungsfern, sondern vielseitig anwendbar!

Unsere Topologie ist sensationell gut.

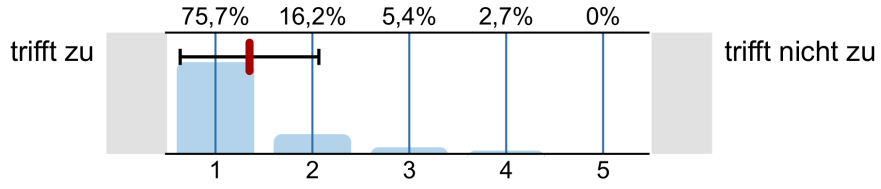
Die Lehrveranstaltung ist außerordentlich gut organisiert.



Vor und nach den Lehrveranstaltungen wird auf die Belange der Studierenden eingegangen.

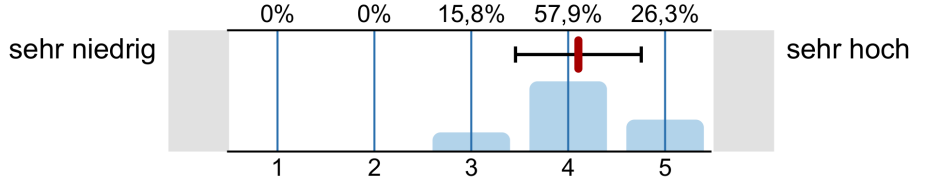


Ich habe durch den Besuch dieser Lehrveranstaltung viel gelernt.

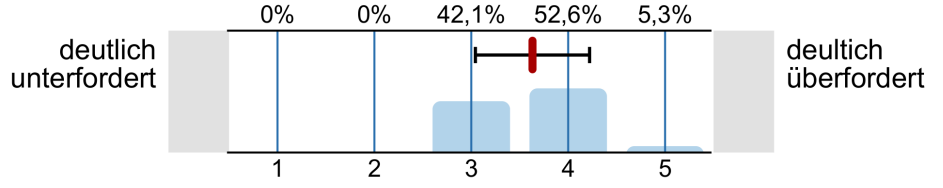


⚠ Seien wir klar und ehrlich: Studieren heißt sich bemühen!

Im Vergleich zu anderen Lehrveranstaltungen sind die Anforderungen in dieser Lehrveranstaltung an mich...



Die Lehrveranstaltung hat mich...



Redliche Mühe mag nicht jede:r.
Ein einsamer Hater schrieb: „Alles in allem eine Vorlesung, für die man sehr viel selbst tun musste, und die ich niemandem empfehlen würde.“

Unsere Topologie ist sensationell gut.

Wir müssen uns entscheiden zwischen dem richtigen Weg und dem leichten.
Albus Dumbledore zu Harry Potter auf die Frage der Topologie

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!
[Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!]

Warum erzähle ich Ihnen das? Sie können mit uns rechnen!
Die Mathematik bietet viel und verlangt viel, das gilt insbesondere für die Topologie. Diese Veranstaltung ist unser Angebot an Sie.
Ich möchte, dass Sie vernünftig handeln und erfolgreich studieren.

Ich kann Ihnen den Weg zeigen, doch gehen müssen Sie ihn selbst.
Die Rückmeldungen sind insgesamt sehr positiv, die Befragungen sind sensationell gut, besonders für eine Grundvorlesung am Studienanfang.
Unser Gesamtpaket zur Topologie ist hervorragend.

Dafür arbeite ich extrem hart, genauer: Ihr gesamtes Topologie-Team!
Von Ihnen erwarte ich dasselbe: ernsthaftes Engagement und Mitarbeit.
Mir ist wichtig, diese Grundfrage anfangs ein für alle mal zu klären.
Anschließend können wir uns auf Inhalte konzentrieren.

Full disclosure: Was sagt der einsame Hater?

Die meisten Rückmeldungen sind begeistert. Doch es gibt den gelegentlichen Hater, den ich zu verstehen suche, so wie diese verlorene Seele: (1) *„In den Vorlesungsvideos wurde größtenteils nur der Text auf den Folien vorgelesen…“* Bitte lösen Sie sich von pauschalen Vorurteilen und nutzen Sie hilfreiche Angebote. Um Sie zu unterstützen, gehe ich Schritt für Schritt alles mit Ihnen durch. Zur visuellen Unterstützung erstelle ich sorgfältig meine Folien. Ich finde es nur fair und ehrlich, diese ganz bewusst vorzulesen und anschließend zu erklären. (2) *„… und Hinweise zu unzähligen Dingen gegeben, die man selbst leicht nachrechnet.“* Ja, Erläuterung sind mir sehr wichtig. (3) *„Es wurden zwar zahlreiche Beispiele gegeben, diese verwirrten allerdings oft noch mehr als dass sie zum Verständnis des Stoffes beitrugen.“* Genau da hilft das eigenständige Nachrechnen. (4) *„Insgesamt erscheint das Ziel der behandelten Inhalte oftmals nicht klar.“* Das ist schade, denn darauf achte ich sehr. Zuhören hilft. (5) *„Allgemein sind die Scheinkriterien in dieser Vorlesung vergleichsweise hoch.“* Aber nein, jede ernsthafte Veranstaltungen erfordert Arbeit. (6) *„Die Übungsblätter wirken mit Text überflutet.“* Die motivierenden Erläuterungen auf der Rückseite finden die meisten hilfreich, man darf sie auch ignorieren. (7) *„Die scheinbar witzig gemeinten Anmerkungen, die sich durch Vorlesung und Übung ziehen, wirken unpassend und lassen Ernsthaftigkeit vermissen (so im übrigen auch noch in keiner Vorlesung erlebt).“* Stimmt, humorlos können andere besser. (8) *„Anstatt in der Übung das aktuelle Übungsblatt zu besprechen, wurde irgendwie über das neue Blatt geredet.“* Ja, wichtig ist, im gemeinsamen Takt zu bleiben. (9) *„Alles in allem eine Vorlesung, für die man sehr viel selbst tun musste, und die ich niemandem empfehlen würde.“* Ja, Ihre eigene Arbeit ist gut und wichtig. Die Teilnahme ist freiwillig. Überlegen Sie, was Sie wirklich wollen: schöne Mathematik, illustrative Beispiele, gute Erklärungen, intensive Betreuung, eigener Lernerfolg, … oder eben nicht.

Seien wir ehrlich, respektvoll und konstruktiv!

Ich nehme Ihr Lob und Ihre Kritik sehr ernst, ich versuche sehr genau, Ihre Rückmeldungen zu verstehen, daraus zu lernen, besser zu werden. Denselben Ernst und dieselbe Redlichkeit erwarte ich auch von Ihnen. Bitte formulieren Sie daher Ihre Vorschläge ehrlich und konstruktiv.

Natürlich ist es schwierig bis unmöglich, es allen genehm zu machen. Bedürfnisse und Möglichkeiten der Studierenden sind sehr heterogen. Wir helfen Ihnen, Schritt für Schritt, das gesamte Semester, und bauen dabei auf Ihr konstantes, aufrichtiges Bemühen. Hierzu sagt Konfuzius:

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.

Viele Faktoren fördern Ihren Erfolg, vor allem jedoch: Ihre Aktivierung! *Man kann ein Pferd zum Brunnen führen, aber trinken muss es selbst.* Darauf antworten leistungspunktdressierte Bachelor-Studierende gerne: *Ein gutes Pferd springt nur so hoch, wie es muss.* Das wäre sehr schade, denn ein Studium kann so viel mehr sein. Machen Sie das beste daraus!

Unser Ilias-Kurs ist informativ und liebevoll gestaltet.

Topologie 2024

Grundlagen der Topologie: analytisch, geometrisch, algebraisch

Aktionen

Inhalt | Timeline | Info | Einstellungen | Mitglieder | Metadaten | Export | Voransicht als Mitglied aktivieren

Zeigen | Verwalten | Sortieren

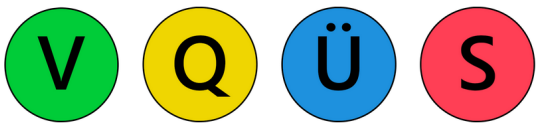
Neues Objekt hinzufügen | Seite gestalten

Herzlich willkommen zur Topologie!

Vorfreude / Umfrage / AnswerGarden zur *Topologie - Worauf freuen und was erhoffen Sie sich?*

In diesem Ilias-Kurs finden Sie Informationen und Online-Materialen zu unserer Veranstaltung:

- Zur Vorlesung gibt es ein **erprobtes Skript und Folien**.
- Jede Woche lösen Sie hier in Ilias ein **hilfreiches Quiz**. Damit wiederholen Sie den aktuellen Vorlesungsstoff und sind so für die Übungen bestens vorbereitet.
- Für die **Übungen** erhalten Sie jede Woche ein Übungsblatt, das Sie in den Präsenzübungen mit Ihren Kommiliton:innen lösen und anschließend ausarbeiten.
- Im **Forum** können Sie anonym Ihre Fragen stellen und erhalten kompetente, freundliche Auskunft.



Termine

Vorlesung

- Dienstag, 11:30 - 13:00 Uhr, in V57.04
- Freitag, 09:45 - 11:15 Uhr, in V57.06

Die **erste Vorlesung** findet am Dienstag, den 9. April, statt.

Quizze

Erstes Quiz zur Wiederholung: von Montag, 8. April, 9:00 Uhr bis Mittwoch, 10. April, 14:00 Uhr

Danach findet das Quiz immer von Freitag, 9:00 Uhr bis Montag, 23:00 Uhr statt (Quiz 2 also vom 12. bis 15. April).

Gruppenübungen

- Dienstag, 14:00 - 15:30 Uhr, in V57 8.135
- Dienstag, 15:45 - 17:15 Uhr, in V57 8.135

Die **Anmeldung zu den Gruppenübungen** findet am Dienstag, den 9. April, von 13:30 bis 17:00 Uhr hier in Ilias statt. Um sich zu einer Gruppe anzumelden, treten Sie der Iliasgruppe im Übungsordner bei.

Die **ersten Übungen** finden bereits am Dienstag, den 9. April, statt. In der ersten Vorlesungswoche gibt es noch kein Übungsblatt. Stattdessen können Sie am 9. April Quiz 1 zusammen mit Ihren Kommiliton:innen in der Gruppenübung lösen. Da die Anmeldung zu den Übungen noch im Gange ist, können Sie sich hierfür eine der beiden Gruppen aussuchen. Ab Woche 2 gibt es dann jede Woche ein Übungsblatt.

Mein Skript und die extrahierten Folien sind frei erhältlich.

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen.
JOHANN WOLFGANG VON GOETHE (1749–1832), *Faust*

TOPOLOGIE

Vorlesungsfolien zur Topologie

Auf Wunsch von Studierenden stelle ich parallel zur Vorlesung und zusätzlich zum Skript meine daraus extrahierten Vorlesungsfolien zur Verfügung. Formate: 1x1 (Bildschirm), 1x2 (Broschüre), 2x2 (Spiralbindung), 2x4 (Adlerauge).

Die Kapitel werden Woche für Woche frisch erstellt und die Dateien dann aktualisiert hier hochgeladen. Auch Verbesserungen der unvermeidlichen Fehler werden schnellstmöglich eingepflegt. Es ist noch nicht alles perfekt, aber vermutlich jetzt schon eine brauchbare Hilfe für diejenigen, die damit arbeiten wollen. Möge es nützen!

- *Wie kann ich einzelne Kapitel herunterladen?*

Skript zur Topologie

Lernziele und Inhalte laut Modulhandbuch

Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse der Topologie und ihrer Anwendungen: Sie können sicher mit topologischen Begriffen, Konstruktionen und Argumenten umgehen; die behandelten Methoden selbstständig, sicher, korrekt, kritisch und kreativ anwenden; mathematische Probleme korrekt formulieren und selbständig lösen; Problemstellungen abstrahieren und mathematisch argumentieren.

Inhalte: Grundlagen der allgemeinen Topologie: Metrische Räume, topologische Räume, Konvergenz und Stetigkeit, Unterräume und Quotientenräume, Summenräume und Produkträume, Abzählbarkeit, Trennungsaxiome, Metrisierbarkeit, Kompaktheit, Zusammenhang, Homotopie, Anwendungen. Grundlagen der geometrischen Topologie: Simplizialkomplexe, Euler–Charakteristik, Umlaufzahl / Abbildungsgrad, Topologie des euklidischen Raumes, Klassifikation der geschlossenen Flächen, Anwendungen. Grundlagen der algebraischen Topologie: Fundamentalgruppen und Überlagerungen, Anwendungen.

Ziele Ihrer universitären Ausbildung

Aus dieser ambitionierten Zielsetzung ergibt sich die Vorgehensweise:

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen,
  sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren,
  sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion,
  sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben.
  Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte,
  sondern um eigenständige Anwendung.

Wir gehen keinen verlockend leichten Irrweg, sondern gleich den einzig richtigen. Der Anstieg ist steil, doch das Ziel ist hehr. Es lohnt sich!

Freuen Sie sich auf schöne und nützliche Mathematik!

Einführung: Was ist und was soll die Topologie?

Analytische Topologie	**Universelle Werkzeuge**	**Geometrische Topologie**	**Algebraische Topologie**
Distanzlehre: Metrik	Kompaktheit	Simpliziale Komplexe	Fundamental-gruppen
Stetigkeitslehre: Topologie	Zusammenhang und Homotopie	Abbildungsgrad & Topologie des $\mathbb{R}^n$	Überlagerungen
Topologische Konstruktionen	Die Sprache der Kategorien	Klassifikation der Flächen	… wird fortgesetzt

Zeitplan für dieses Semester

☺ Alle Informationen zur Topologie finden Sie in unserem liebevoll gestalteten Ilias-Kurs sowie ergänzend auf der öffentlichen Webseite.

Vorlesung ab dem 09.04.2024:

VL	wöchentlich	Dienstag	11:30 – 13:00	V 57.04
VL	wöchentlich	Freitag	9:45 – 11:15	V 57.06

Gruppenübungen ab der ersten Vorlesungswoche.
Anmeldung über Ilias ab Dienstag, 09.04. um 13:30

Der **Übungsschein** ist Voraussetzung für die Abschlussklausur: mindestens 50% in den wöchentlichen Quizzen und Hausübungen.

Abschlussklausur: Sep/Okt und Feb/Mrz, siehe C@mpus

Doch vorerst dieses halbe Jahr / Nehmt ja der besten Ordnung wahr.
Fünf Stunden habt ihr jeden Tag; / Seyd drinnen mit dem Glockenschlag!
Habt euch vorher wohl präparirt, / Paragraphos wohl einstudirt,
Damit ihr nachher besser seht, / Daß er nichts sagt, als was im Buche steht.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust* (1808)

Wie gelingt Ihnen die Topologie?

Falls Sie (auch) wegen der Leistungspunkte hier sind, erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich studieren. Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus Ana 1-3 und Lina 1-2
- **wöchentliche Bearbeitung** von Vorlesung, Quiz und Übungen

Die Topologie entspricht 9 Leistungspunkten: insgesamt 270h

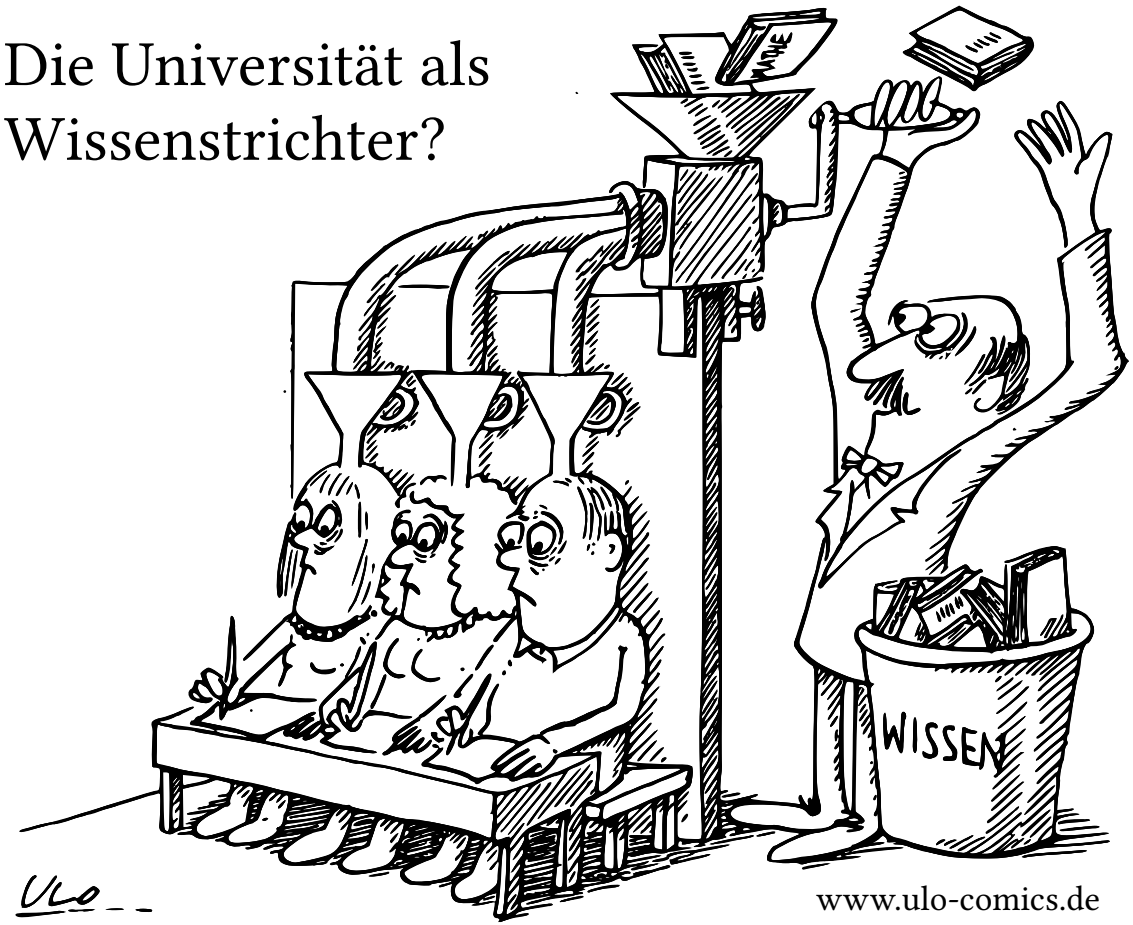
- **Präsenz:** 14 Wochen à 4h Vorlesung + 2h Übung $\approx$ 80h
- **Individuelle Arbeit:** ein weiterer Tag (8h) pro Woche $\approx$ 110h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: 2 bis 3 Wochen $\approx$ 80h

Das ist keine Übertreibung sondern jahrzehntelange Erfahrung:
6 Präsenzstunden pro Woche erfordern 12 Stunden eigene Arbeit.

Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht.
Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.
[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

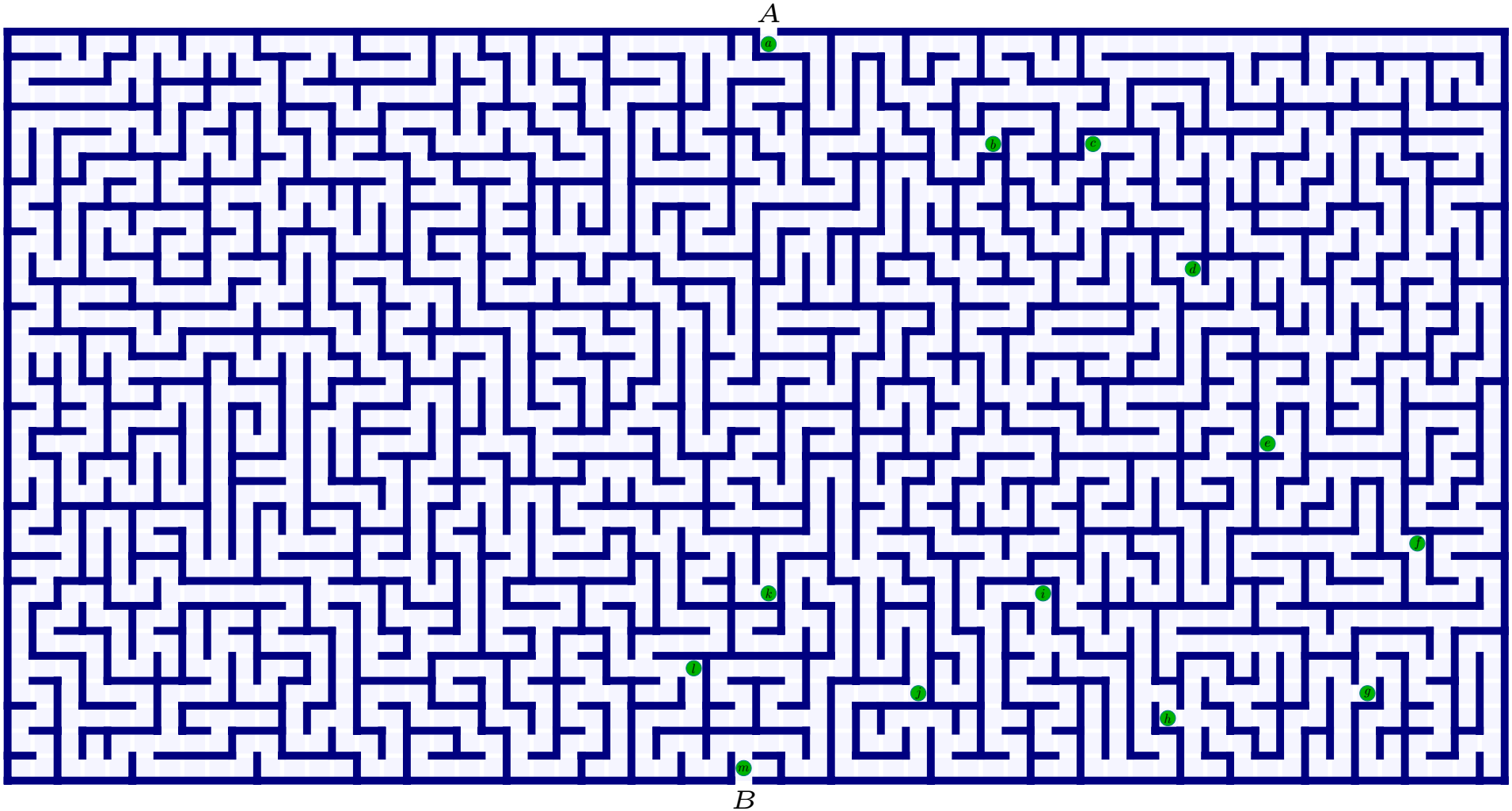
Wie gelingt Ihnen das Studium?



Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrisische Motivation! Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Sätze erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig durcharbeiten, um es zu beherrschen.

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

Ich führe Argumente sorgsam vor. Sie arbeiten alles gründlich nach.



Ich zeige Ihnen den Weg von A nach B. Dazu teilen wir uns die Arbeit:
Ich erkläre die wesentlichen Etappen. Sie ergänzen und klären Details.

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

⚠ Ihr Uni-Studium fordert und fördert Ihr selbständiges Arbeiten!
Ich vertraue darauf, dass Sie die nötige Zeit nehmen und lernen wollen.
Der Schlüssel zu Ihrem Erfolg sind Ihre Aktivierung, Ihre Investition, Ihr persönliches Engagement und ihre kontinuierliche, ernsthafte Mitarbeit.

Ich präsentiere Ihnen schöne und nützliche Mathematik und leite Sie durch die Vorlesung. Kleinschrittig oder summarisch? Zu große Schritte frustrieren und entmutigen, zu kleine Schritten bremsen und langweilen. Das richtige Tempo ist eine Frage der Erfahrung und der Verhandlung.

In Vorlesung $n+1$ nutze ich die Ergebnisse der Vorlesungen 1 bis n.
In der Mathematik bauen Begriffe und Techniken stark aufeinander auf, mehr als in jeder anderen Wissenschaft. Das ist Fluch und Segen zugleich, sowohl Herausforderung beim Erlernen als auch Effizienz im Aufbau.

Shakespeares Werke können Sie in nahezu beliebiger Reihenfolge und Auswahl lesen. Für mathematische Lehrwerke gilt dies definitiv nicht!
Arbeiten Sie kontinuierlich mit, nach und vor, Vorlesungen und Übungen, bleiben Sie am Ball, nur so kann es gelingen, so macht es allen Freude.

Wie detailliert soll die Darstellung sein?

Beweise in einem Lehrbuch für Studienanfänger sind recht ausführlich, für ein Expertenpublikum werden Beweise deutlich knapper formuliert. Semester für Semester entwickeln Sie sich vom Anfänger zum Experten.

Was also ist ein Beweis genau? Wie detailliert ausgeführt muss er sein? Wie groß dürfen die logischen Schritte maximal sein? Hierzu sind zwei Antworten möglich: formal-dogmatisch oder sozial-pragmatisch.

Dogmatische Antwort: In einem vollständig formalisierten Beweis ist jeder Schritt die Anwendung einer Schlussregel. Wir beginnen mit einer Liste von wahren Aussagen (Axiome, Voraussetzungen) und erweitern diese schrittweise durch logisches Schließen, jeweils mit Angabe der verwendeten Schlussregel. Am Ende steht die ersehnte Behauptung.

Im obigen Bild ist das der vollständig ausgeführte Lösungsweg, etwa als eine lange Folge von kleinen Beweisschritten, jeder davon ist elementar. Die Richtigkeit kann ein Computer mechanisch prüfen (*proof checker*). Für menschliche Leser ist die mechanische Prüfung leider mühsam und wenig lehrreich, sie vermittelt meist keine Idee, Vision oder Inspiration.

Wie detailliert soll die Darstellung sein?

Pragmatische Antwort: Traditionell schreiben wir Beweise nicht für Maschinen, sondern für Menschen. Es gibt immer mehr Ausnahmen, etwa in der Programmierung, aber denken wir an diese Vorlesung.

Für ein menschliches Gegenüber ist es üblich, nicht alle elementaren Schritte auszuführen, sondern den Beweisgang allein durch geeignete Zwischenpunkte abzustecken. Das ist effizienter, sowohl für den Sender als auch für den Empfänger. Die Zwischenpunkte sollen eng genug sein, sodass der Empfänger den Weg dazwischen selbst rekonstruieren kann.

Das rechte Maß, ob detailliert ausgeführt oder nur grob skizziert, hängt somit vom Empfänger ab! Beweise in Lehrbüchern sind recht detailliert, Artikel in Fachzeitschriften sind knapper und Beweise oft nur skizziert. Die Komprimierung verschiebt die Beweislast von Sender zu Empfänger. Die Balance ist eine Kunst, sie beruht auf Konvention und Erfahrung.

Beispiel: Im Aufbau dieser Vorlesung versuche ich, die entscheidenden Zwischenschritte anzugeben. Routinierte Rechnungen hingegen führe ich meist nicht aus, sondern übertrage sie Ihnen. Das ist richtig so!

Legende / Leseanleitung: Folien zur Topologie

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen;
dies kennzeichnet die Folien, die in der Vorlesung behandelt werden.
Ich möchte Vortrag und Skript synchron halten, soweit dies möglich ist.
Die Nummerierung der Abschnitte, Definitionen, Sätze, Beispiele usw.
habe ich daher beibehalten, auch wenn dadurch Sprünge entstehen.
Der Übergang zwischen Vortrag und Skript wird dadurch nahtlos.

Ich präsentiere hier Ideen, Techniken und Anwendungen, Definitionen und Sätze, Aufgaben und Lösungen. Dabei versuche ich, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier schriftlich ausgeführt;
sie nützen mir als Erinnerung und den Lesern als Erläuterung.

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem ersten Kapitel zur Vorschau;
dies gibt zunächst eine Übersicht zentraler Themen der Topologie und
dient somit zu einer frühen Orientierung, als Ausblick und Motivation.
Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Kapitel A: Was ist und was soll die Topologie?

A1 Homöomorphismen und Invarianten
A2 Euklidische Geometrie: Polytope und Isometrien
A3 Von Geometrie zu Topologie: Eulers Polyederformel
A4 Zentrale Anwendung: die Klassifikation kompakter Flächen
A5 Von Topologie zu Geometrie: der Satz von Gauß–Bonnet

Kapitel B: Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$

B1 Geschichte und Literatur

B2 Aufbau des Zahlensystems

B3 Existenz und Einzigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

B4 Die Mächtigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Kapitel C: Distanzlehre: metrische Räume

C1 Skalarprodukte und Normen auf Vektorräumen

C2 Metrische Räume und ihre Topologie

C3 Konvergenz und Stetigkeit

C4 Vollständige metrische Räume

Kapitel D: Stetigkeitslehre: topologische Räume

D1 Topologische Räume

D2 Stetige Abbildungen

D3 Umgebungen und Umgebungsbasen

D4 Anwendung auf Funktionenräume

D5 Inneres, Abschluss, Rand

D6 Basen und Erzeugendensysteme

Kapitel E: Topologische Konstruktionen

E1 Teilräume
E2 Quotientenräume
E3 Summen topologischer Räume
E4 Produkte topologischer Räume
E5 Trennungsaxiome und Metrisierung

Kapitel F: Kompaktheit

F1 Kompakte topologische Räume
F2 Erste geometrische Anwendungen
F3 Kompakte metrische Räume
F4 Lokale Kompaktheit
F5 Kompaktifizierung
F6 Eigentliche Abbildungen

Kapitel G: Zusammenhang und Homotopie

G1 Zusammenhang
G2 Wegzusammenhang
G3 Lokaler Zusammenhang
G4 Homotopie stetiger Abbildungen
G5 Retrakte und Deformationsretrakte

Kapitel H: Die Sprache der Kategorien

H1 Kategorien

H2 Kommutative Diagramme

H3 Universelle Objekte

H4 Funktoren

H5 Natürliche Transformationen

Kapitel I: Simpliziale Komplexe

I1 Affine Simplizialkomplexe
I2 Kombinatorische Simplizialkomplexe
I3 Triangulierung und Unterteilungen
I4 Simpliziale Approximation

Kapitel J: Abbildungsgrad auf Sphären und Topologie des $\mathbb{R}^n$

J1 Die Umlaufzahl ebener Wege

J2 Der Satz von Jordan–Schoenflies

J3 Der Abbildungsgrad auf Sphären

J4 Der Brouwersche Fixpunktsatz

J5 Der Satz vom Igel und Vektorfelder auf Sphären

J6 Der Satz von Borsuk–Ulam und Anwendungen

J7 Die topologische Invarianz der Dimension, des Randes, des Gebietes und der Orientierung

Kapitel K: Klassifikation kompakter Flächen

K1 Mannigfaltigkeiten
K2 Projektive Räume
K3 Der Flächenkalkül

Kapitel A

Was ist und was soll die Topologie?

Ihr naht euch wieder, schwankende Gestalten,
Die früh sich einst dem trüben Blick gezeigt.
Versuch ich wohl, euch diesmal fest zu halten?
Fühl ich mein Herz noch jenem Wahn geneigt?

Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust*

Inhalt dieses Kapitels A

1 Homöomorphismen und Invarianten

2 Euklidische Geometrie: Polytope und Isometrien

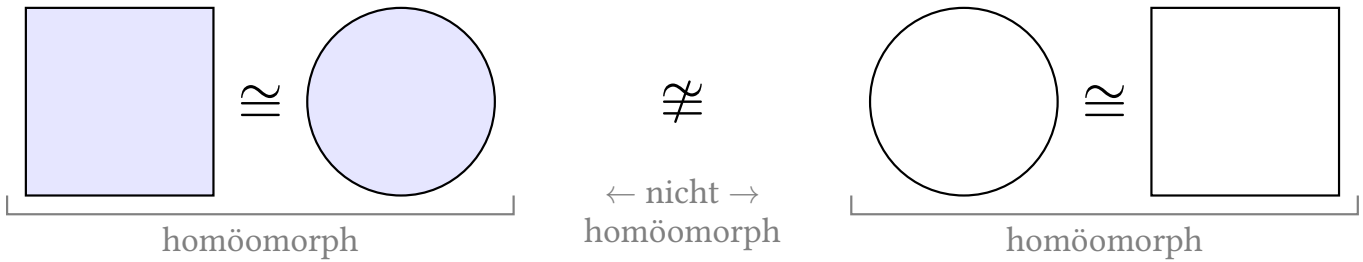
3 Von Geometrie zu Topologie: Eulers Polyederformel

4 Zentrale Anwendung: die Klassifikation kompakter Flächen

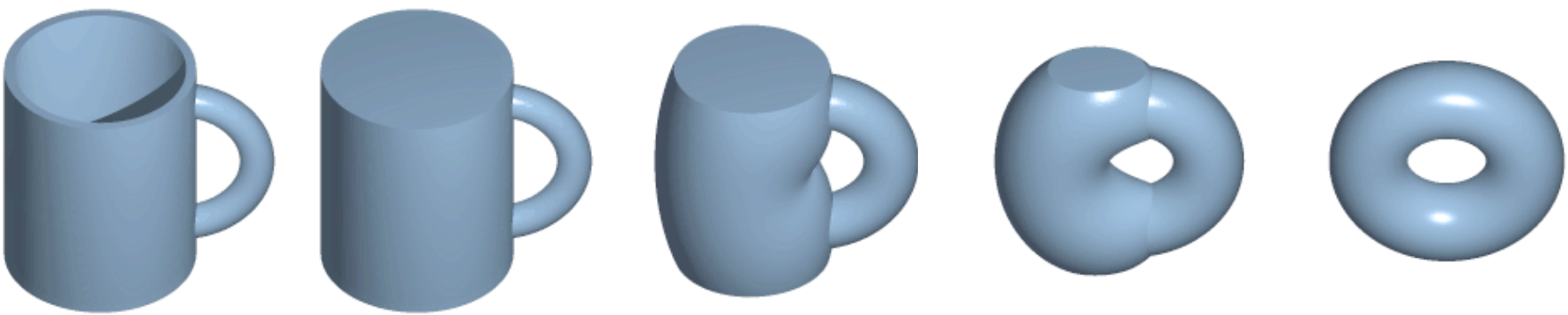
5 Von Topologie zu Geometrie: der Satz von Gauß–Bonnet

Topologie ist qualitative Geometrie.

Topologie ist die ‘Lehre vom Ort und der gegenseitigen Lage’, griechisch τόπος [tópos] ‘Ort, Lage’, λόγος [lógos] ‘Wort, Einsicht, Lehre’, ὅμοιος [homoios] ‘gleich, ähnlich’, μορφή [morphé] ‘Form, Gestalt, Anmut’.



Homöomorph heißt ‘gleiche Form’, *homotop* heißt ‘stetig deformierbar’.
Das beweisen wir durch einen Homöomorphismus bzw. eine Homotopie.



Wie beweisen wir, dass zwei Objekte *nicht* die gleiche Form haben?
Wir nutzen Invarianten: Euler–Charakteristik, Fundamentalgruppe, …

Historische Anfänge der Topologie

📖 Johann Benedict Listing (1808–1882): *Vorstudien zur Topologie* (1848)

Bereits Gauß untersuchte Knoten und Verschlingungen im $\mathbb{R}^3$ etwa als stromdurchflossene Leiter zu Magnetfeld und Induktion. Sein Schüler Listing führte diese topologischen Ideen fort. Das berühmte Band, das Möbius 1858 entdeckte, findet sich bereits zehn Jahre zuvor bei Listing.

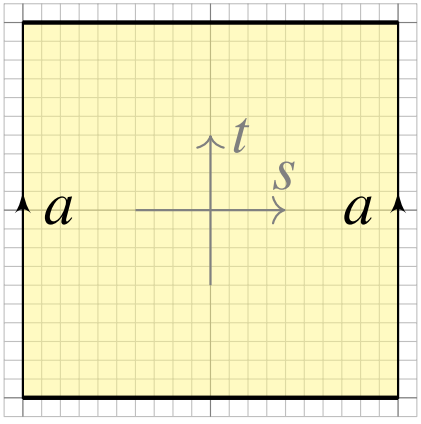
📖 Henri Poincaré (1854–1912): *Analysis Situs* (1895 bis 1904)

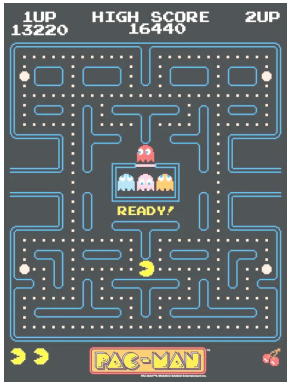
Poincaré untersuchte insbesondere dreidimensionale Mannigfaltigkeiten und formulierte seine berühmte Vermutung, die hundert Jahre später zum Millenium-Problem wurde und durch Grigori Perelman gelöst: Unter allen geschlossenen, zusammenhängenden 3–Mannigfaltigkeiten gibt es genau eine einfach-zusammenhängende, nämlich die Sphäre $\mathbb{S}^3$.

📖 Felix Hausdorff (1868–1942): *Grundzüge der Mengenlehre* (1914)

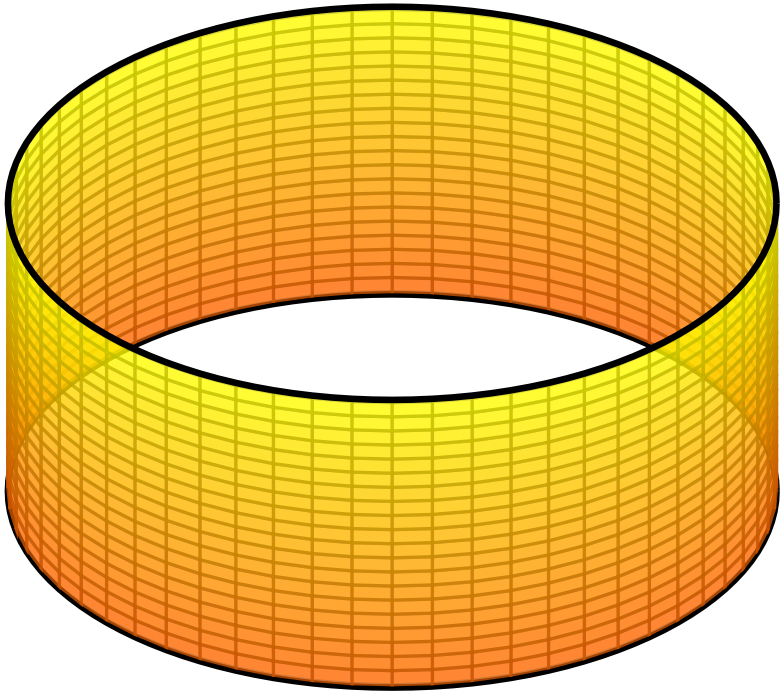
Die entstehende Topologie zählte man damals noch zur Mengenlehre. Sie erfährt hier in Kapitel VII. „Punktmengen in allgemeinen Räumen“ ihre erste systematische Darstellung in einem Lehrbuch. Dem Schöpfer der Mengenlehre, Georg Cantor, in dankbarer Verehrung gewidmet.

Beispiel: Zylindermantel





$\longrightarrow$

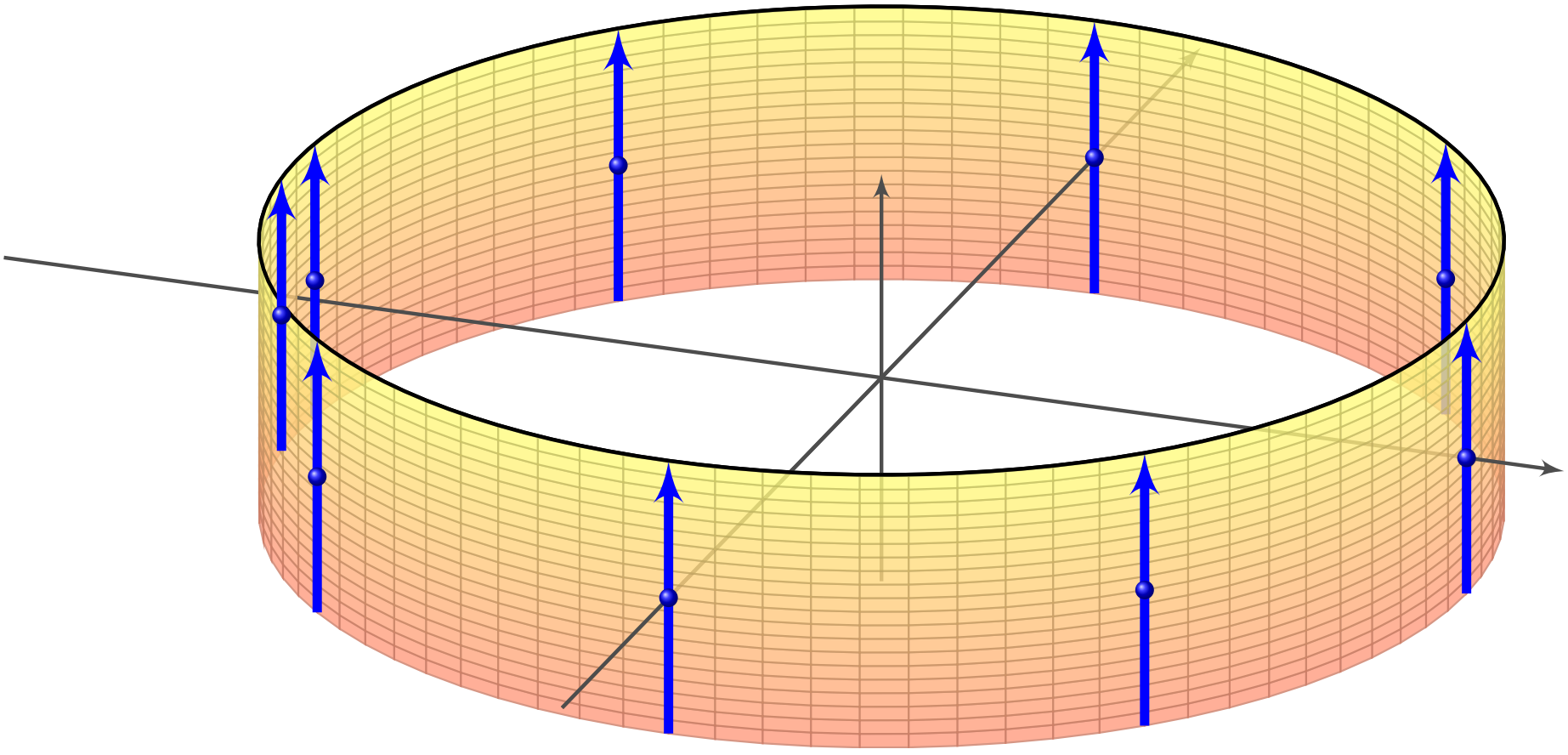


Explizit in Koordinaten?

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = r^2,\ -1 \leq z \leq 1 \right\}$$

$$f : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi s) \\ r\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$

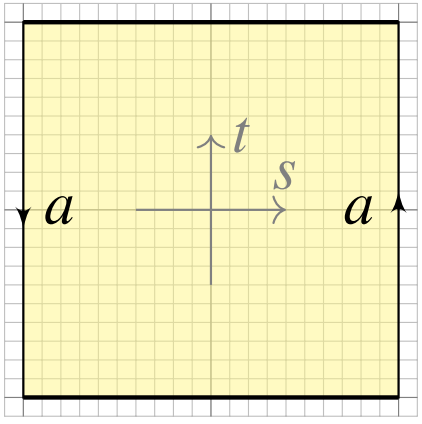
Beispiel: Zylindermantel

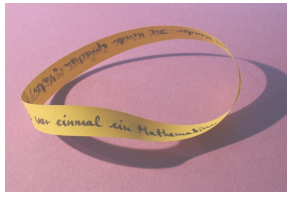


$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = r^2,\ -1 \leq z \leq 1 \right\}$$

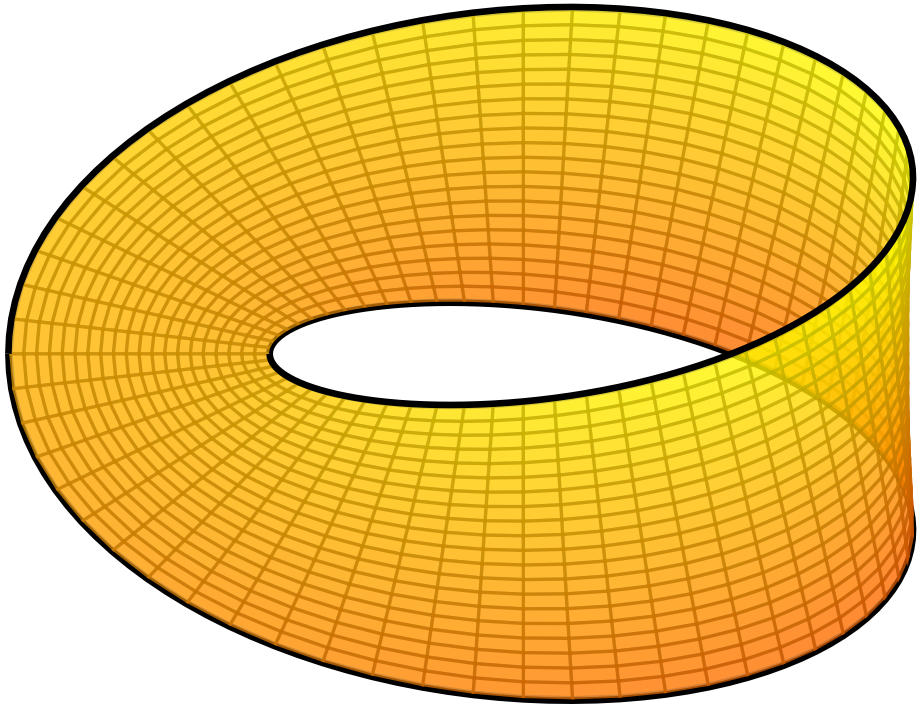
$$f : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi s) \\ r\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$

Beispiel: Möbius–Band





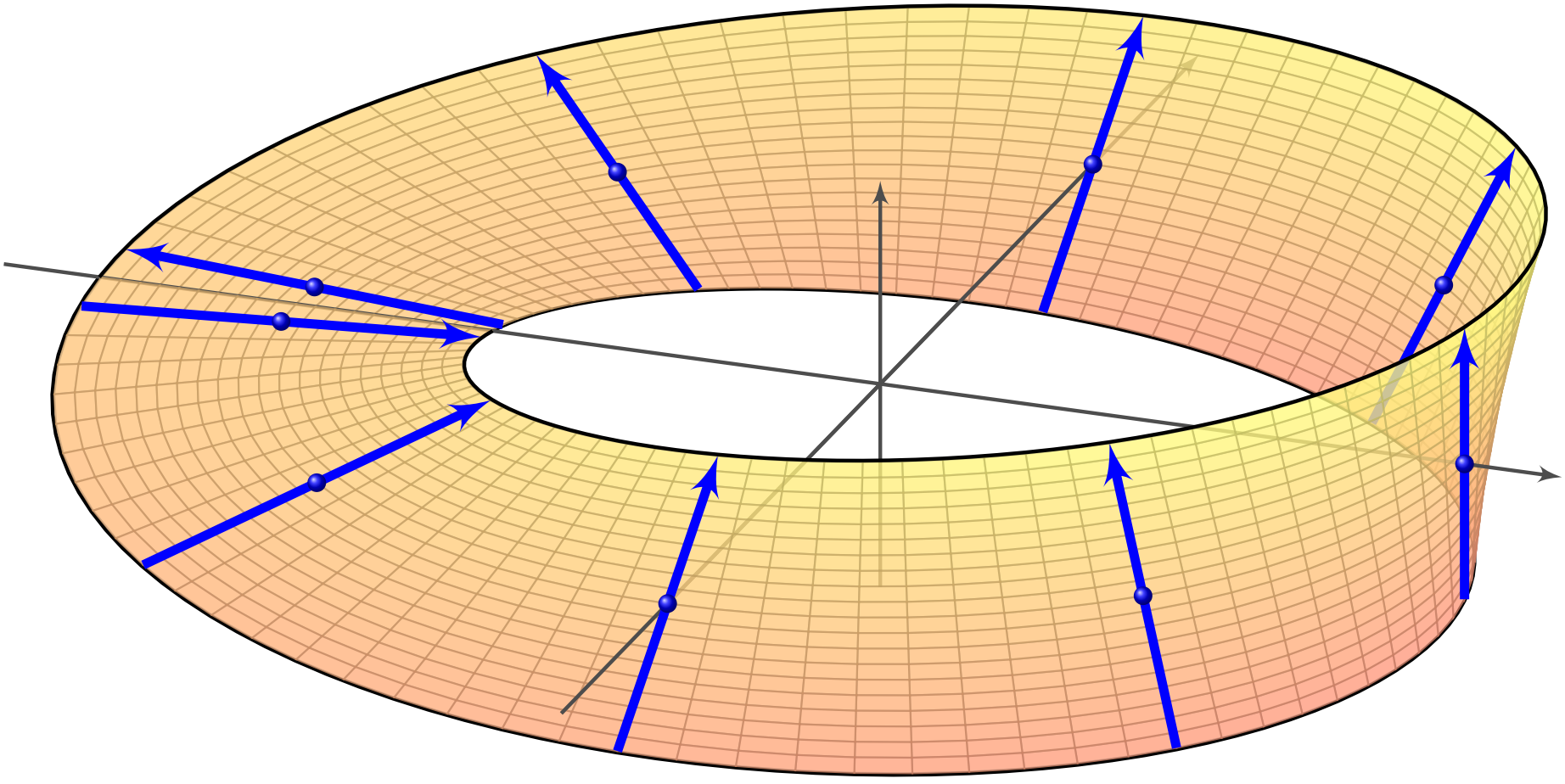
$\longrightarrow$



Explizit in Koordinaten?

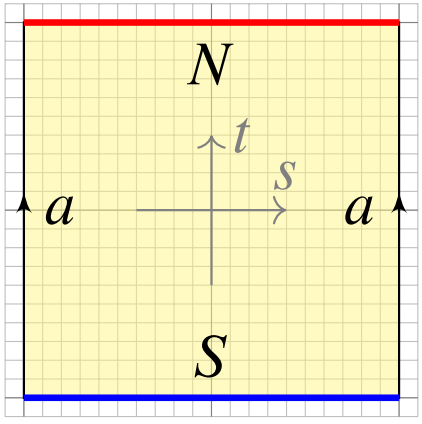
$$g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto g\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r + t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [r + t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$

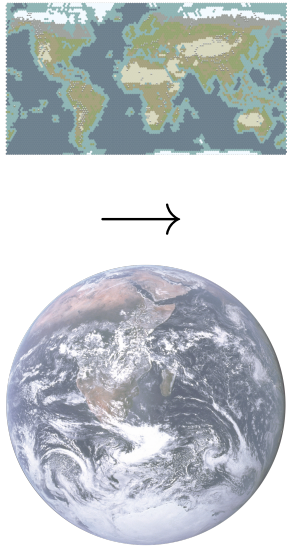
Beispiel: Möbius–Band

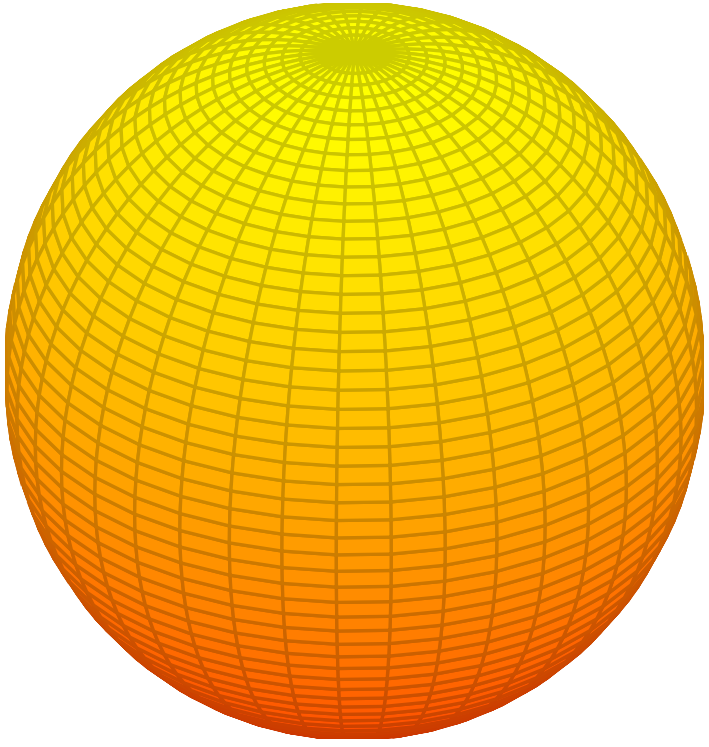


$$g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto g\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r + t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [r + t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Sphäre





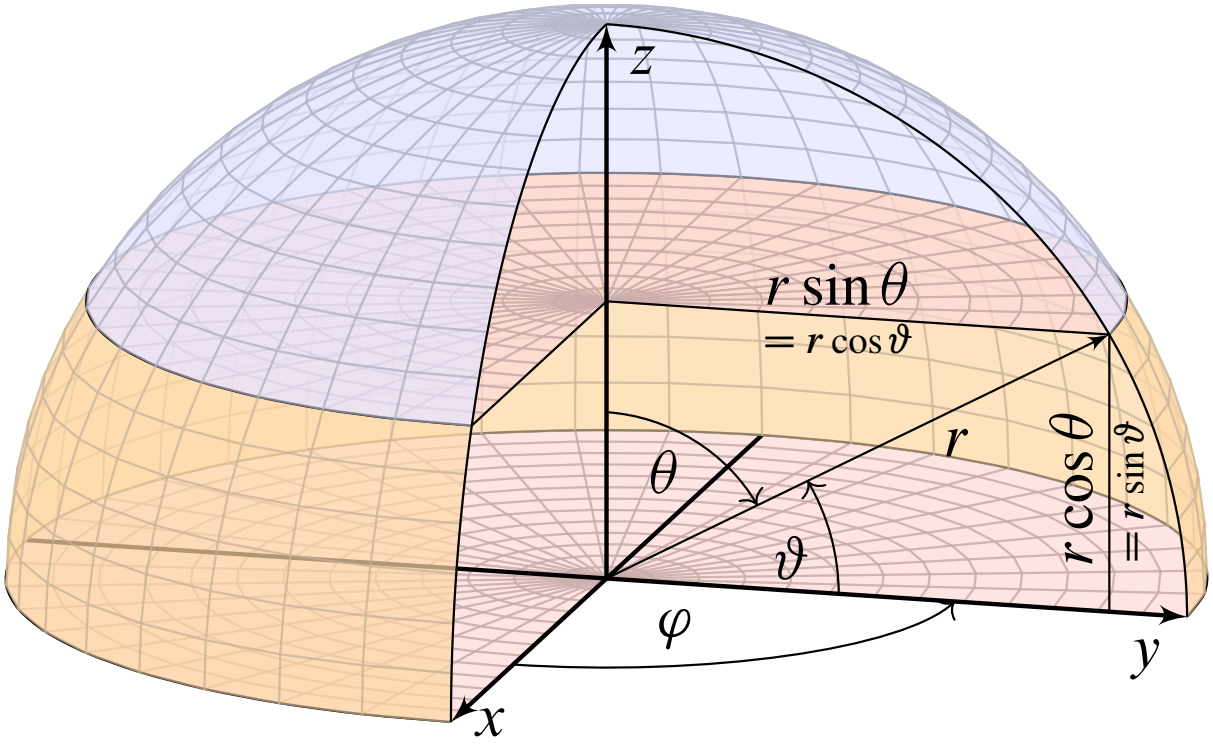


Explizit in Koordinaten?

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \}$$

$$k : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto k\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi t/2)\cos(\pi s) \\ r\cos(\pi t/2)\sin(\pi s) \\ r\sin(\pi t/2) \end{pmatrix}$$

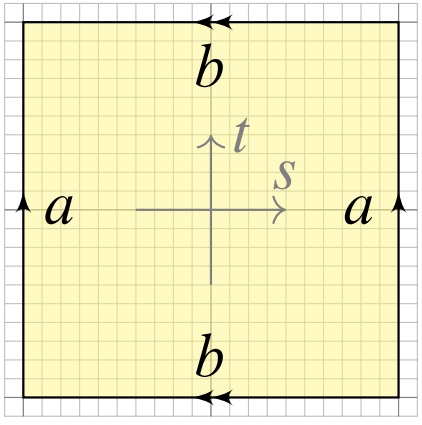
Beispiel: Sphäre

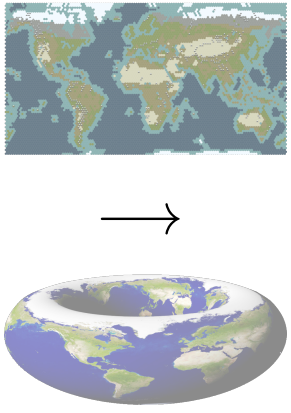


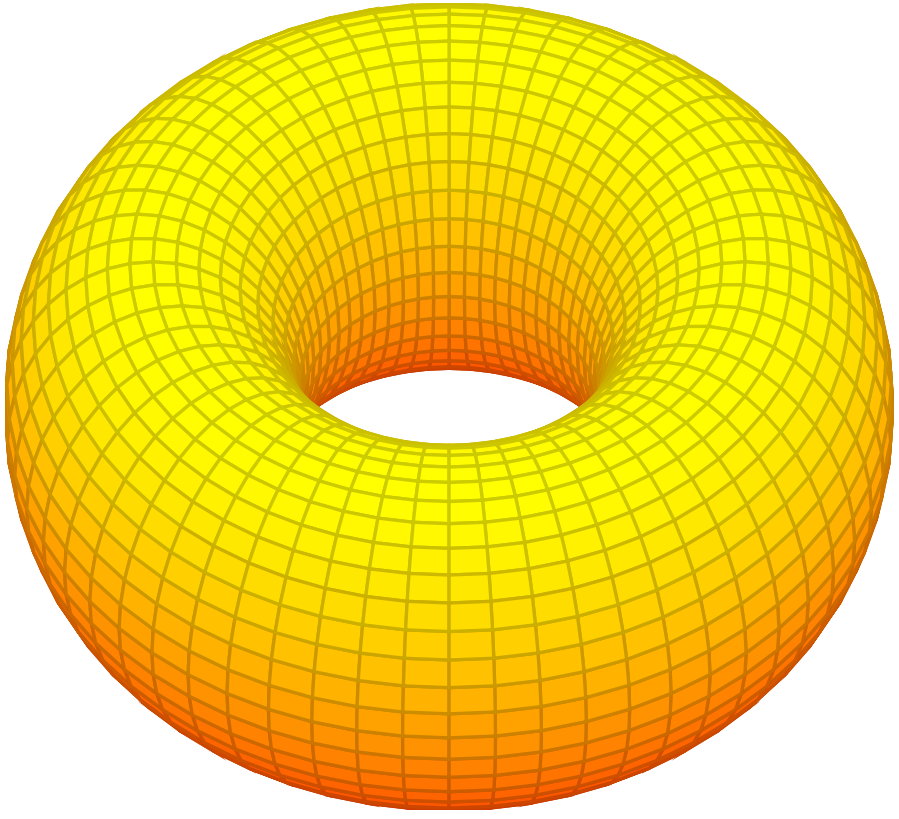
$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Beispiel: Torus



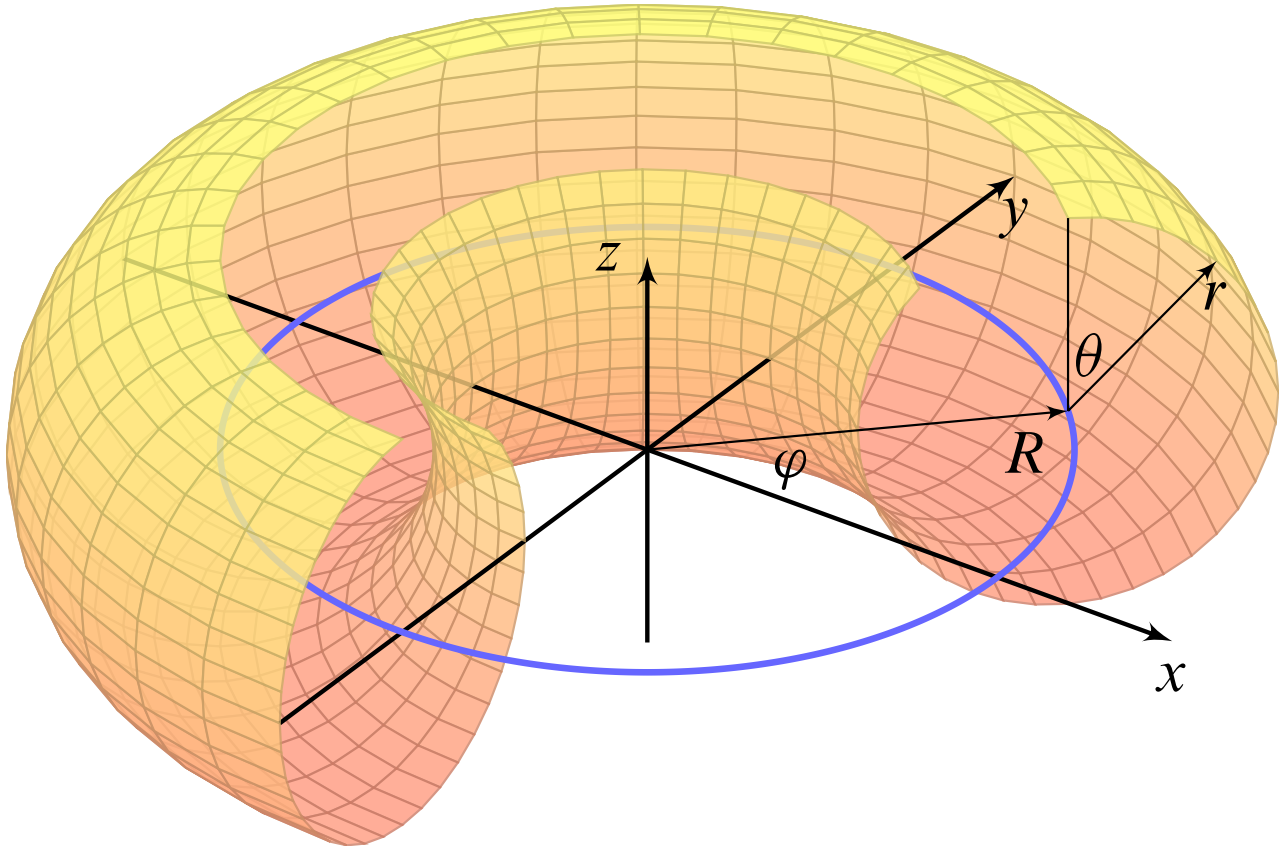




Explizit in Koordinaten?

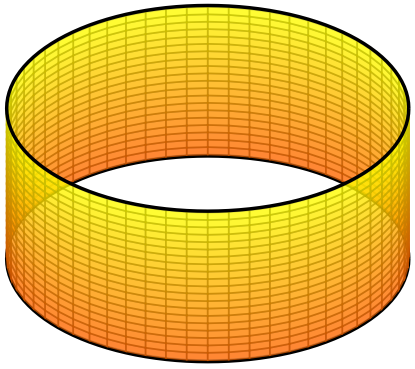
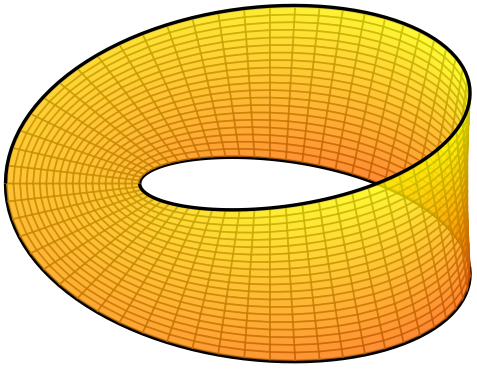
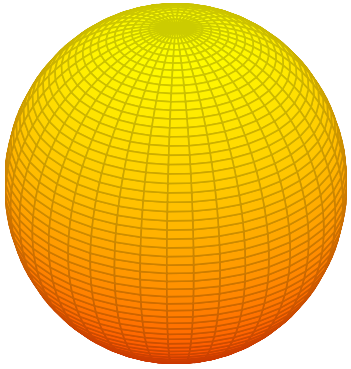
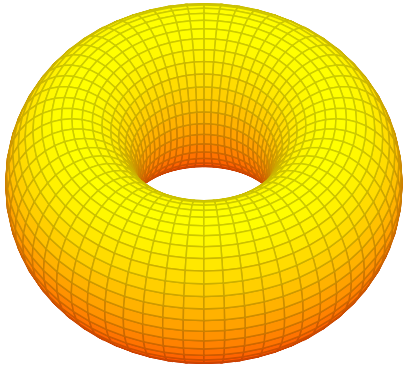
$$h : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto h\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [R + r\sin(\pi t)]\cos(\pi s) \\ [R + r\sin(\pi t)]\sin(\pi s) \\ r\cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Torus



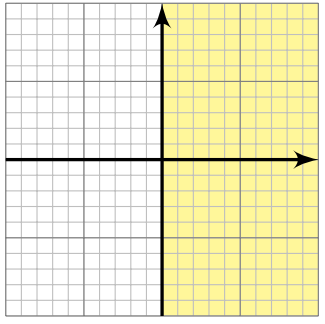
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \rho \sin\theta) \cos\varphi \\ (R + \rho \sin\theta) \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Was sind Flächen?

Eine **Kurve** sieht lokal aus wie die reelle Halb/Gerade $\mathbb{R}^1_{\geq 0}$.
Eine **Fläche** sieht lokal aus wie die reelle Halb/Ebene $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$.

Als lokale Modelle dienen uns der euklidische Raum $\mathbb{R}^m$
und der euklidische Halbraum $\mathbb{R}^m_{\geq 0} := \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \geq 0 \,\}$.



Definition A0A: topologische Mannigfaltigkeit

Ein Raum $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **m–dimensionale Mannigfaltigkeit** eventuell mit Rand ∂M, falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler Homöomorphismus $(M, a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m, 0)$ oder $(M, a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m_{\geq 0}, 0)$ existiert.

Im ersten Falle ist a ein **innerer Punkt** von M, kurz $a \in \operatorname{Int} M$,
im zweiten Falle ist a ein **Randpunkt** von M, kurz $a \in \partial M$.

Können wir alle kompakten Flächen klassifizieren?

The theorem of classification of surfaces is a top-class mathematical achievement, comparable with the discovery of America or X-rays.
Vladimir Arnold (1937–2010), *On teaching mathematics* (1997)

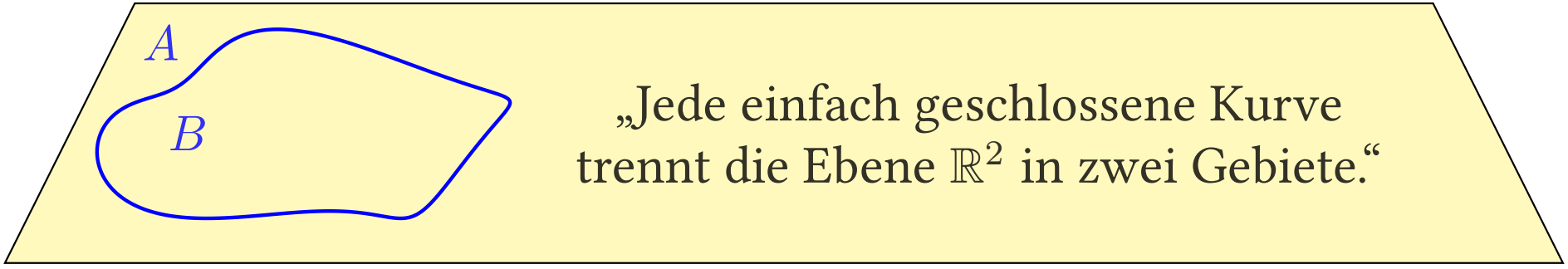
Auf dem Weg werden wir viele faszinierende Themen kennenlernen!

- Grundlagen: topologische Räume und stetige Abbildungen
- Konstruktionen: Teilräume, Quotienten, Produkte, Summen, etc.
- Eigenschaften: Kompaktheit und (Weg)Zusammenhang uvm.
- Struktur: Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexe
- Invarianten: Euler–Charakteristik, Fundamentalgruppe

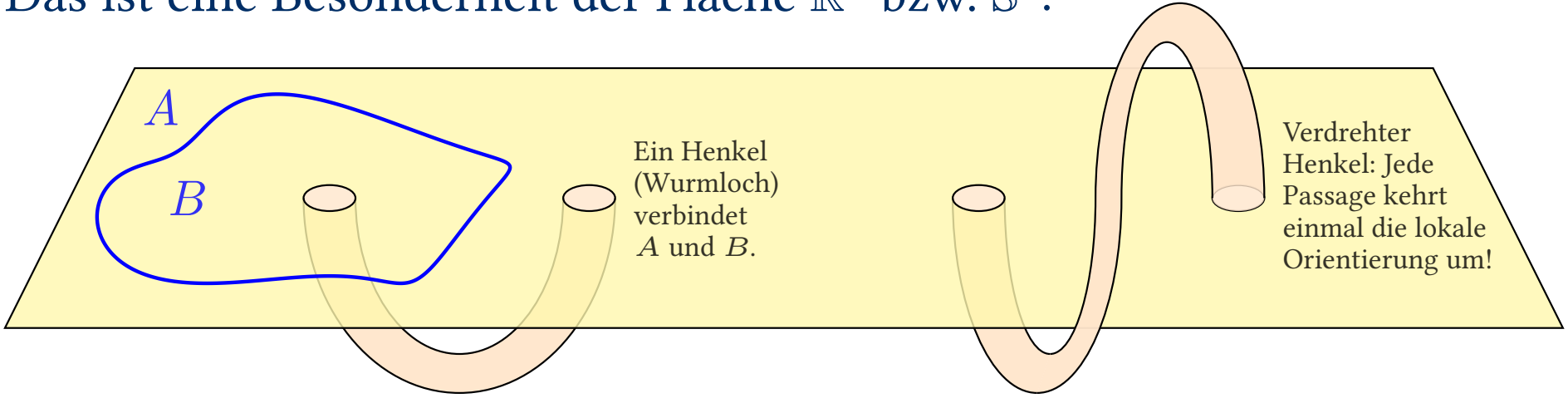
"Elementary" does not mean easy to understand.
"Elementary" means that very little is required
to know ahead of time in order to understand it,
except to have an infinite amount of intelligence.
Richard P. Feynman (1918–1988, Physiknobelpreis 1965)

Mannigfaltigkeiten, lokal vs global

Praktische Erfahrung und geometrische Anschauung führen zu Jordans Kurvensatz: einfach zu formulieren, doch notorisch schwer zu beweisen!



Hirten und Burgen nutzen dies seit Jahrhunderten!
Das ist eine Besonderheit der Fläche $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{S}^2$:



In was für einer Welt leben wir eigentlich?

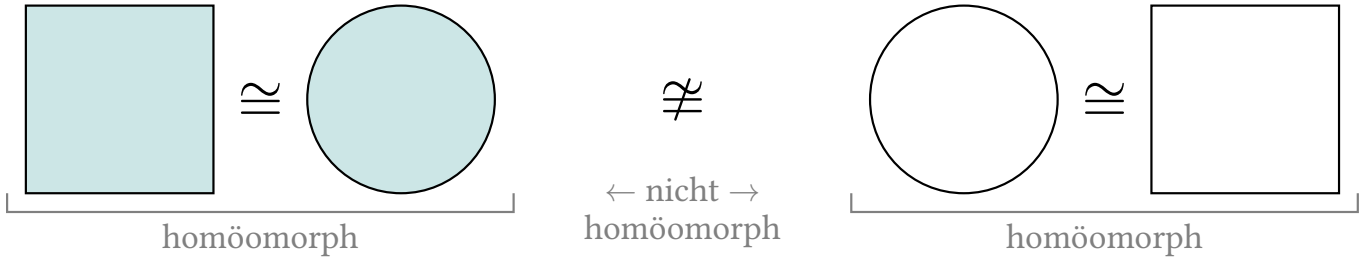
Wir vergleichen die uns umgebende Welt meist mit dem euklidischen Modellraum $\mathbb{R}^3$. Zumindest lokal in unserer unmittelbaren Umgebung scheint diese Idealisierung eine gute Näherung an unsere alltägliche Erfahrung zu sein. Ist der uns umgebende Raum deshalb auch global homöomorph zum Modellraum $\mathbb{R}^3$? Das ist keineswegs zwingend!

Wenn wir ehrlich sind, kennen wir vom Universum nur einen sehr kleinen Ausschnitt: In unserer unmittelbaren Umgebung lässt sich jeder Punkt durch drei Koordinaten eindeutig darstellen, so haben wir es in der Schule gelernt. Eine solche lokale Karte beschreibt unsere Umgebung, nicht aber das gesamte Universum: Verschiedene Räume sind denkbar!

Dieses Phänomen ist zweidimensional leichter fasslich. Beginnen wir also mit Flächen! Die Erdoberfläche um uns herum ist zweidimensional, lokal homöomorph zur Ebene $\mathbb{R}^2$. Ist die Erde deshalb eine Scheibe? Nein, sehr verschiedene Flächen sind denkbar! Um Ihre Phantasie anzuregen, habe ich oben vier konkrete Beispiele explizit ausgeführt.

Unser Ziel ist die Klassifikation aller kompakten Flächen!

Was bedeutet Homöomorphie?



Definition A1A: Homöomorphismus

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmengen (später: topologische Räume).

Ein **Homöomorphismuspaar** $(f, g) : X \cong Y$ besteht aus zwei stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

In diesem Fall nennen wir X und Y **homöomorph**, geschrieben $X \cong Y$.

⚠ Die Kurzschreibweise $X \cong Y$ ist allzu bequem und daher gefährlich. Die explizite Ausführung $(f, g) : X \cong Y$ ist präzise und informativ!

Aufgabe: Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation. **Nachrechnen:**
Reflexivität: $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : X \cong X$
Symmetrie: $(f, g) : X \cong Y \;\Rightarrow\; (g, f) : Y \cong X$
Transitivität: $(f, f') : X \cong Y \wedge (g, g') : Y \cong Z \Rightarrow (g \circ f, f' \circ g') : X \cong Z$

Was bedeutet Homöomorphie?

Beispiel A1B: reelle Gerade und offenes Intervall

Es gilt $\mathbb{R} \cong]-1,1[$, genauer $(f,g) : \mathbb{R} \cong]-1,1[$ vermöge der Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to]-1,1[: x \mapsto x/(1+|x|),$$
$$g :]-1,1[\to \mathbb{R} : y \mapsto y/(1-|y|).$$

Dieselben Formeln liefern einen Homöomorphismus $(f,g) : \mathbb{Q} \cong]-1,1[_{\mathbb{Q}}$.

Beweis: Nachrechnen! (1) Die Abbildungen f und g sind wohldefiniert:
(1a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x)| = |x|/(1+|x|) < 1$, also $f(x) \in]-1,1[$.
(1b) Für jedes $y \in]-1,1[$ erfüllt der Nenner die Bedingung $1-|y| > 0$.
(2) Beide Abbildungen sind stetig, da Komposition stetiger Abbildungen.
(3) Schließlich sind sie zueinander invers, wie wir geduldig nachrechnen:

$$g(f(x)) \overset{\text{Def}}{=} \frac{x/(1+|x|)}{1-|x/(1+|x|)|} \overset{\mathbb{R}}{=} \frac{x}{1+|x|-|x|} \overset{\mathbb{R}}{=} x, \quad \text{also } g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

$$f(g(y)) \overset{\text{Def}}{=} \frac{y/(1-|y|)}{1+|y/(1-|y|)|} \overset{\mathbb{R}}{=} \frac{y}{1-|y|+|y|} \overset{\mathbb{R}}{=} y, \quad \text{also } f \circ g = \mathrm{id}_{]-1,1[}$$

Bälle und Sphären

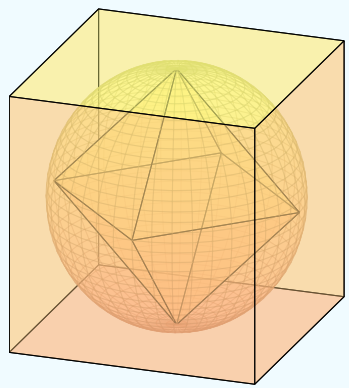
Definition A1c: Bälle und Sphären

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ nutzen wir je nach Anwendung und Bedarf

$$\begin{aligned}
&\text{die Taxinorm} && |x|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|, \\
&\text{die Maximumsnorm} && |x|_\infty := \max\{\,|x_1|, \dots, |x_n|\,\}, \\
&\text{die euklidische Norm} && |x|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}\,.
\end{aligned}$$

Letztere definiert den **Einheitsball** und die **Einheitssphäre**:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^n &:= \{\, x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 \leq 1 \,\} \\
\mathbb{B}^n &:= \{\, x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 < 1 \,\} \\
\mathbb{S}^{n-1} &:= \{\, x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 = 1 \,\}
\end{aligned}$$

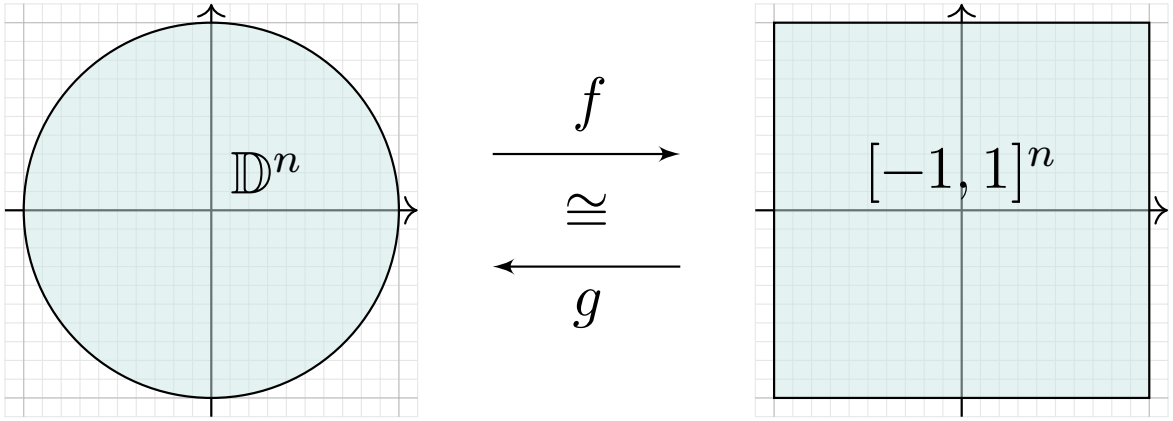


Ebenso erhalten wir **Würfel** $|x|_\infty \leq 1$ und **Kreuzpolytop** $|x|_1 \leq 1$.

Beispiel / Übung A1d: euklidischer Raum und offene Bälle

Es gilt $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{B}^n$ und $\mathbb{R}^n \cong \,]-1,1[^n$ dank der Homöomorphismen A1b.

Sind Ball und Würfel homöomorph?



Beispiel / Übung A1E: abgeschlossener Ball und Würfel

Es gilt $\mathbb{D}^n \cong [-1,1]^n$ dank $f : \mathbb{D}^n \to [-1,1]^n : x \mapsto x/(1-|x|_2+|x|_\infty)$ und $g : [-1,1]^n \to \mathbb{D}^n : y \mapsto y/(1-|y|_\infty+|y|_2)$. Rechnen Sie es nach!

Definition A1F: topologische Invarianten

Eine Eigenschaft geometrischer Objekte heißt **topologisch invariant**, wenn sie unter Homöomorphismen erhalten bleibt.

Beispiele: Beschränktheit oder Abgeschlossenheit im Raum $\mathbb{R}^n$ sind *nicht* topologisch invariant, siehe $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{B}^n$. Hingegen sind Kompaktheit (F1L) und Zusammenhang (G1E) invariant, somit $\mathbb{D}^n \ncong \mathbb{B}^n$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ncong \mathbb{R}$.

Wegzusammenhang ist eine topologische Invariante.

Definition A1G: Wegzusammenhang

Ein Raum $X \neq \emptyset$ heißt **wegzusammenhängend**, kurz wegzshgd, wenn sich je zwei Punkte a, b in X durch einen Weg verbinden lassen, das heißt es gibt eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

Beispiel / Übung A1H: Anwendungen des Wegzusammenhangs

(1) Wegzusammenhang ist topologisch invariant. Stärker:

(2) Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ stetig und surjektiv. Ist X wegzshgd, so auch Y.

(3) Der Raum $\mathbb{R} \setminus \{z\}$ ist nicht wegzshgd, dank Zwischenwertsatz.

(4) Für $n \geq 2$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ wegzusammenhängend.

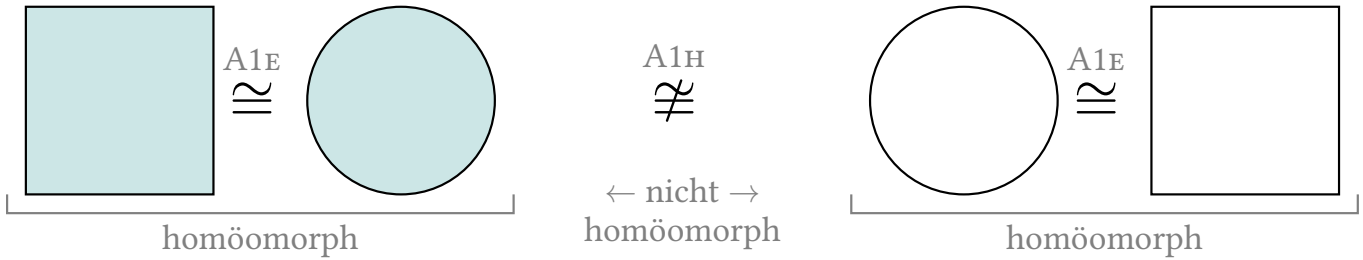
(5) Für $n \geq 2$ gilt $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n$: Jeder Punkt trennt $\mathbb{R}$, aber keiner trennt $\mathbb{R}^n$.

(6) Ebenso gilt $[0,1] \not\cong [0,1]^2$ und allgemein $[0,1] \not\cong [0,1]^n$ für alle $n \geq 2$.

(7) Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ sind $]a,b[$, $[a,b[$, $[a,b]$ paarweise nicht homöomorph.

(8) Es gilt $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{D}^2$: Je zwei Punkte $\{a \neq b\}$ trennen $\mathbb{S}^1$, aber niemals $\mathbb{D}^2$.

Werkzeuge: Homöomorphismen und Invarianten



☺ Das ist eine erste Klassifikation, wir haben diese vier einfachen Räume in Homöomorphieklassen eingeteilt; später Kurven A4A und Flächen A4J.

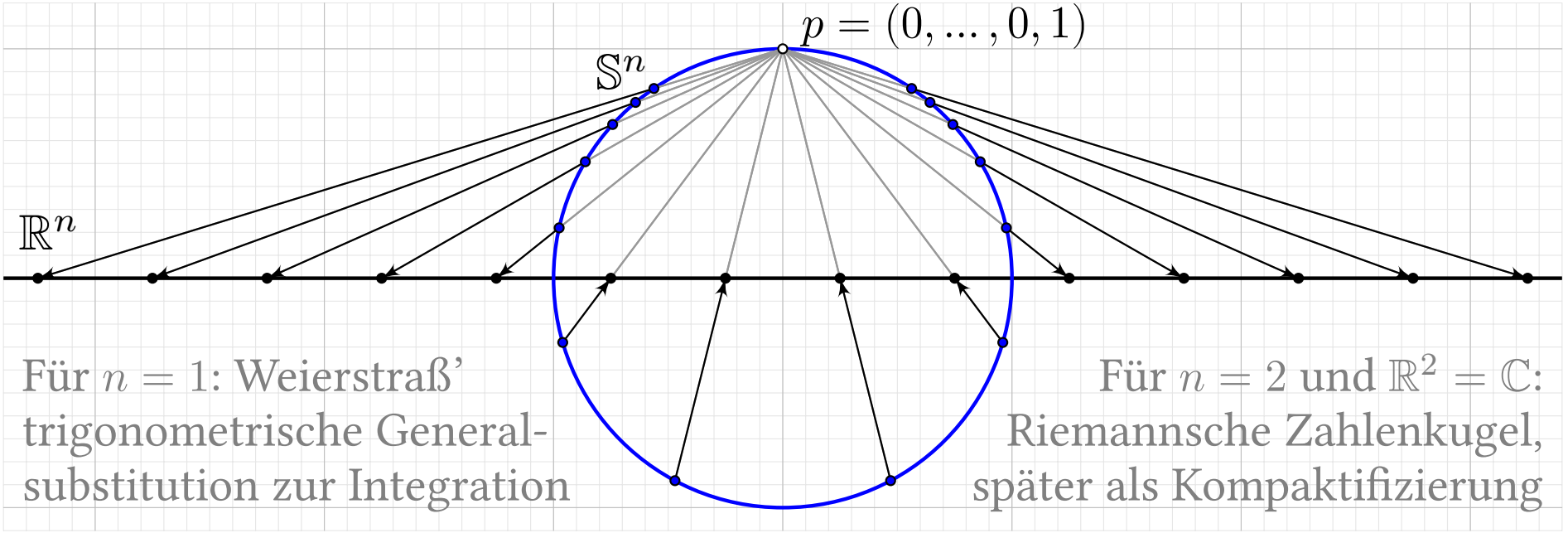
? Wie zeigen wir, dass zwei Räume homöomorph sind? Der direkte und meist beste Weg ist, einen expliziten **Homöomorphismus** anzugeben!

Ein solches Argument ist **konstruktiv**: *Just do it!* (Beispiel A1E)
Dies haben wir oben für Quadrat und Kreisscheibe explizit ausgeführt, ebenso für Quadratrand und Kreislinie. Das zeigt „≅“ für diese Beispiele.

? Wie zeigen wir hingegen, dass zwei Räume nicht homöomorph sind? Aufgeben genügt nicht, wir müssen ein **Hindernis** benennen!

Ein solches Argument ist **obstruktiv**: *No one can!* (Beispiel A1H)
Dies haben wir für Kreisscheibe und Kreisrand explizit ausgeführt.
Das zeigt „≇“ zwischen den linken und rechten Beispielen.

Stereographische Projektion: ein Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$



Beispiel / Übung A1L: stereographische Projektion

Es gilt $(f, g) : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$, explizit für $p = (0, \dots, 0, 1)$ vermöge

$$f : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n),$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{p\} : (y_1, \dots, y_n) \mapsto \frac{1}{|y|_2^2 + 1}(2y_1, \dots, 2y_n, |y|_2^2 - 1).$$

Die stereographische Projektion

Diese Übung hat zwei Varianten / Schwierigkeitsstufen / Härtegrade:

(1) *Ohne die Angabe von Formeln* müssen Sie selbst kreativ werden, um geeignete Funktionen (f, g) zu finden. Hier gelingt das noch relativ leicht anhand der Skizze mit dem Strahlensatz für f und der Mitternachtsformel zur Lösung quadratischer Gleichungen für g. Versuchen Sie es!

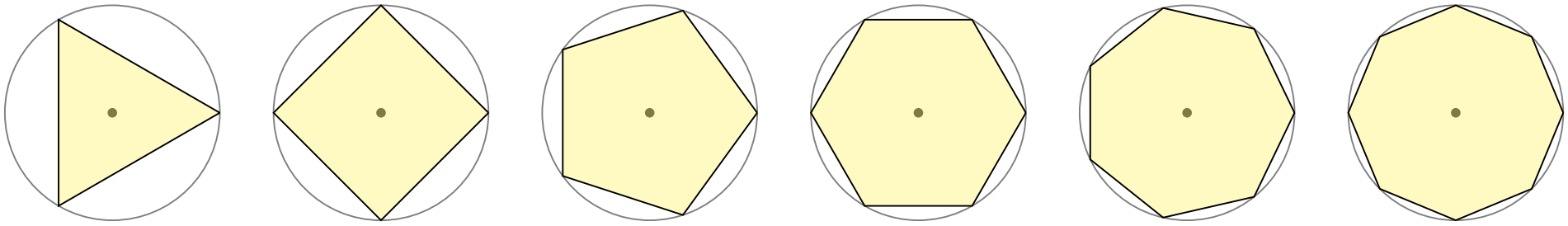
(2) *Mit Angabe der Formeln:* Stehen die Formeln erst einmal vor Ihnen, so wie hier, dann genügt sorgfältiges Nachrechnen. Versuchen Sie es!

Folgerung: Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit. Wiederholen Sie hierzu noch einmal die zugehörige Definition A0A.

Die stereographische Projektion scheint zunächst recht erstaunlich, mit Übung und Gewöhnung jedoch wird sie einfach und natürlich. Sie ist eine Spezialfall der Inversion an einer Sphäre (A1M).

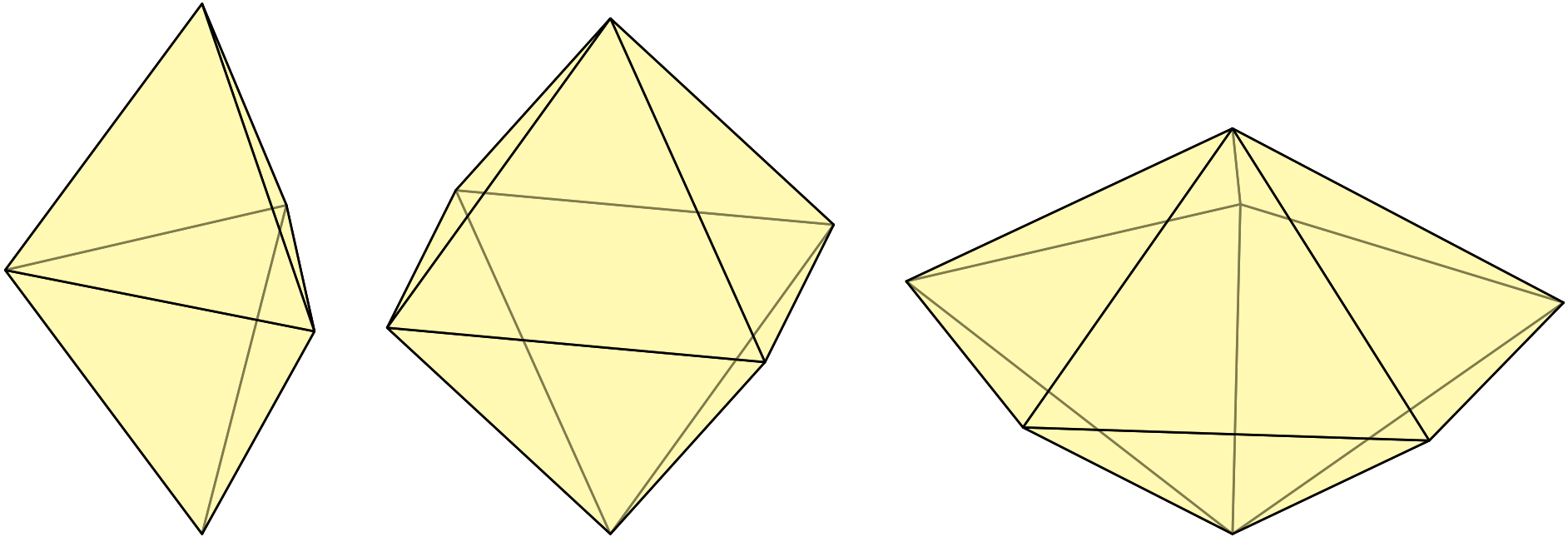
Im Skript finden Sie weitere Beispiele zu Homöomorphismen, manche praktisch wie „Winkel geradebiegen“, andere unglaublich wie $\mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}$. Erweitern Sie Ihr Repertoire und Ihre technische Fingerfertigkeit!

Beispiel: reguläre Vielecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$

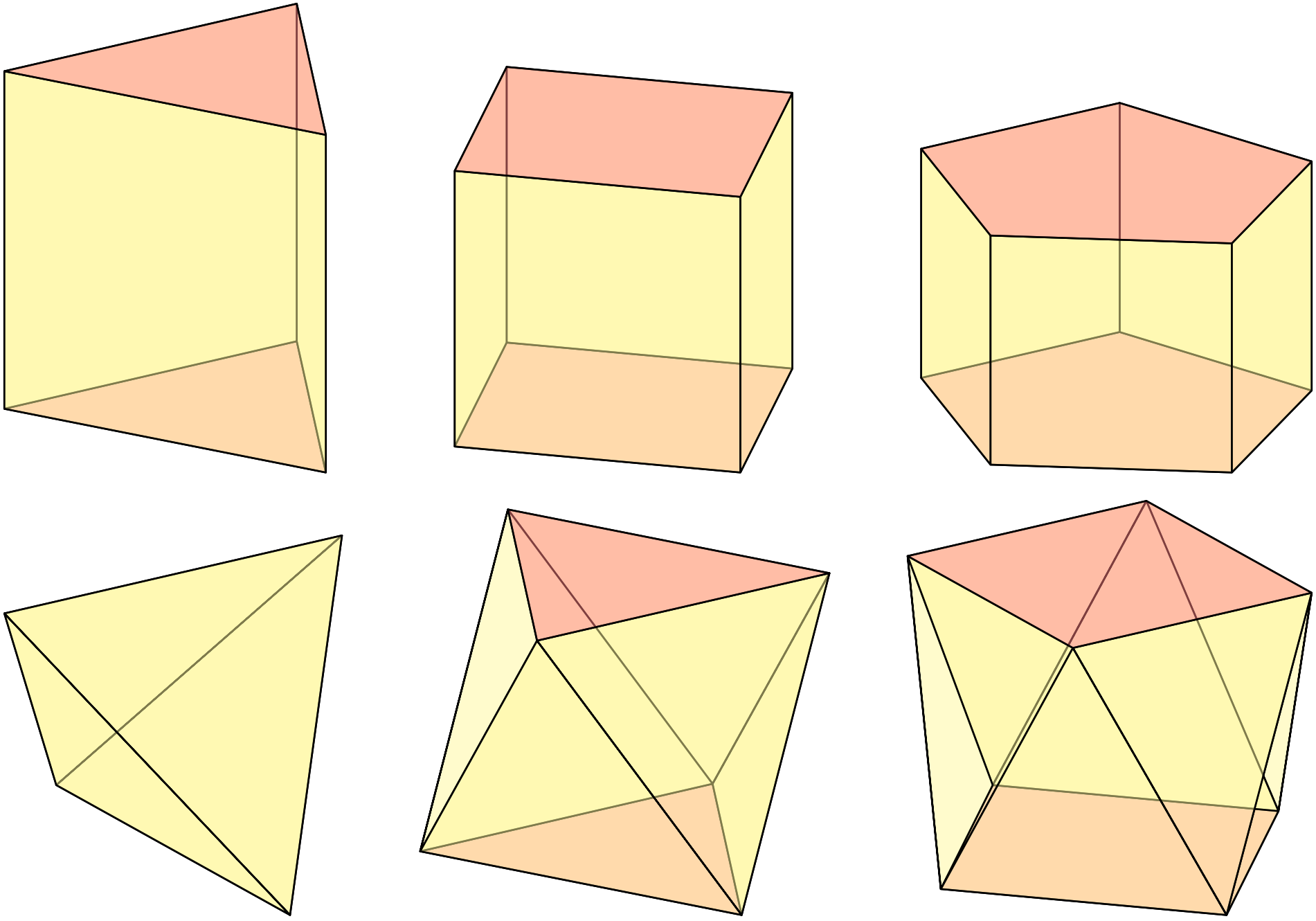


Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Die Eckpunkte $v_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n} = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n))$ mit $k \in \mathbb{Z}$ haben als konvexe Hülle $P_n = [v_1, \ldots, v_n]$ das **reguläre n–Eck**.

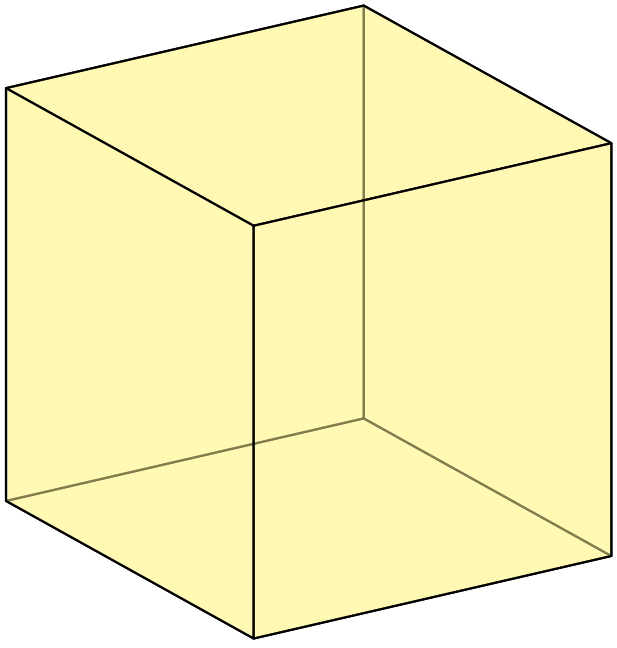
Im Raum $\mathbb{R}^3$ bilden wir darüber den Doppelkegel von passender Höhe:

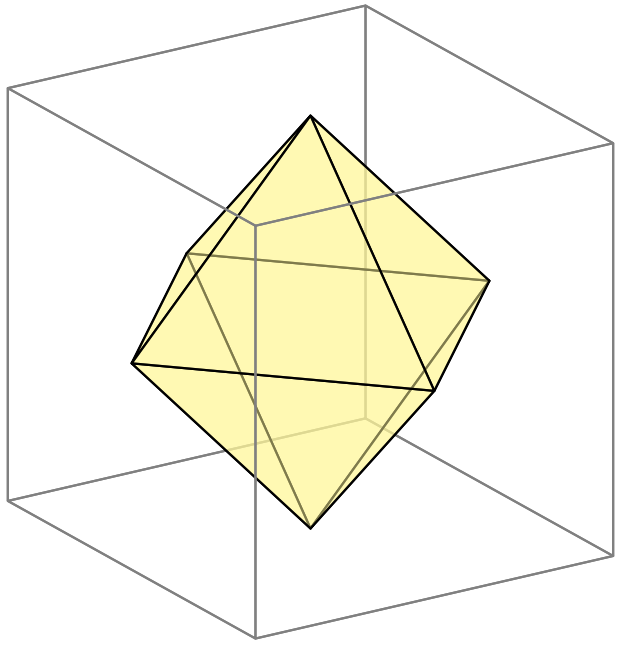


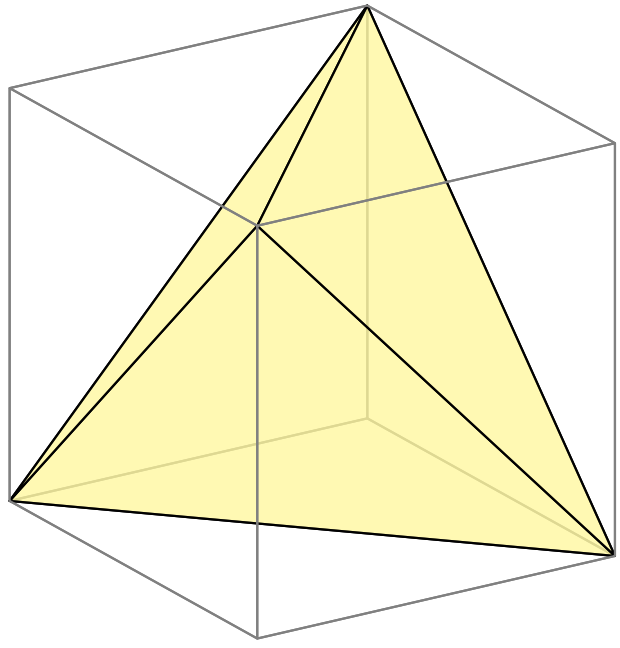
Prisma und Antiprisma über einem regulären n–Eck

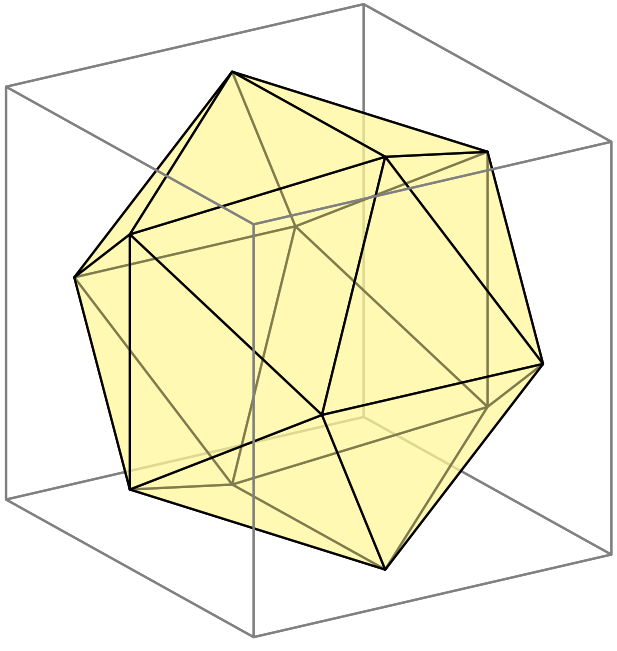


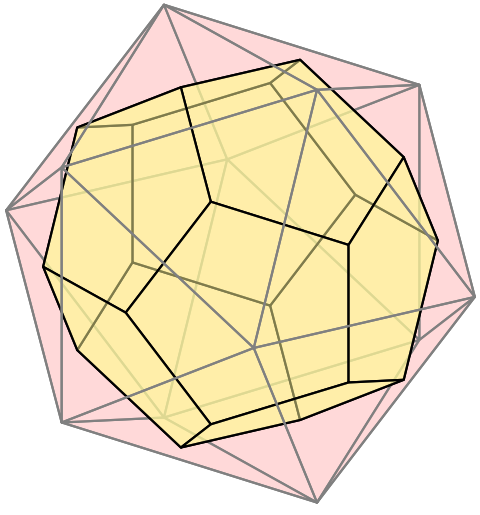
Die fünf platonischen Körper im $\mathbb{R}^3$

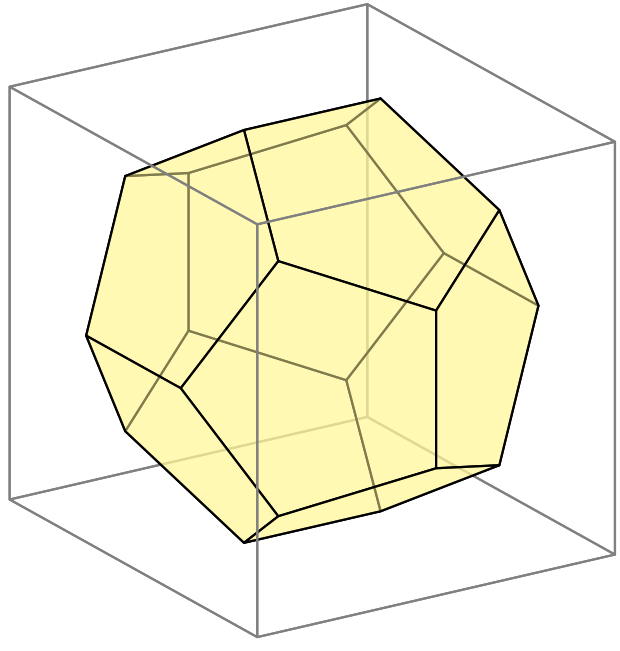












Euklids Klassifikation regulärer 3–Polytope

Was ist das Besondere an diesen fünf wunderschönen Beispielen? Sie sind offensichtlich besonders symmetrisch. Was heißt das genau? Gibt es weitere Beispiele? Oder kennen wir bereits alle Möglichkeiten? Die Antwort ist der Höhepunkt von Euklids epochalem Werk *Elemente*:

Satz A2J: Klassifikation regulärer 3–Polytope, Euklid 3. Jh. v.u.Z.

(1) Symmetrie: Jeder dieser fünf platonischen Körper $P \subset \mathbb{R}^3$ ist regulär, d.h. die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$ operiert transitiv auf den Fahnen.

Ausführlich: Jede Fahne $(E < K < F < P)$, bestehend aus einer Ecke E in einer Kante K in einer Facette F des Polytops P, kann durch eine Isometrie des Raumes $\mathbb{R}^3$ in jede andere Fahne überführt werden.

(2) Diese Liste ist vollständig: Jedes reguläre 3–Polytop $Q \subset \mathbb{R}^3$ ist ähnlich zu genau einem unserer fünf platonischen Körper.

Ausführlich: Von Q zum Modell P führt eine Ähnlichkeitsabbildung $h : (\mathbb{R}^3, Q) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^3, P) : x \mapsto \lambda A x + v$ mit einem Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und einer Verschiebung $v \in \mathbb{R}^3$.

Was ist ein Polytop?

Definition A2B: Polytop

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen $a, b \in V$ ist

$$[a,b] := \{ (1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1 \}.$$

Wir nennen $X \subseteq V$ **konvex**, falls für $a, b \in X$ stets $[a,b] \subseteq X$ gilt.
(Das impliziert Wegzusammenhang.) Zum Beispiel ist der gesamte Raum V konvex, ebenso jeder Halbraum und jeder affine Teilraum in V, auch $\emptyset$.

Ist $X_i \subseteq V$ konvex für jedes $i \in I$, so auch der Durchschnitt $X = \bigcap_{i \in I} X_i$.
Das von $v_0, \dots, v_\ell \in V$ aufgespannte **Polytop** ist ihre konvexe Hülle:

$$\begin{aligned} P = [v_0, \dots, v_\ell] &:= \bigcap \{ X \mid X \subseteq V \text{ konvex mit } \{v_0, \dots, v_\ell\} \subseteq X \} \\ &= \{ t_0 v_0 + \dots + t_\ell v_\ell \mid t_0, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}_{\ge 0},\ t_0 + \dots + t_\ell = 1 \} \end{aligned}$$

Die positiven Konvexkombinationen bilden das **(geometrische) Innere**:

$$\operatorname{Int}[v_0, \dots, v_\ell] := \{ t_0 v_0 + \dots + t_\ell v_\ell \mid t_0, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}_{>0},\ t_0 + \dots + t_\ell = 1 \}$$

Was ist ein Polytop?

Definition A2B: Polytop

Die verbleibenden Punkte bilden den **(geometrischen) Rand**:

$$\partial[v_0, v_1, \dots, v_\ell] := [v_0, v_1, \dots, v_\ell] \setminus \operatorname{Int}[v_0, v_1, \dots, v_\ell]$$

Der von $P \subseteq V$ aufgespannte **affine Teilraum** ist die affine Hülle:

$$\begin{aligned} A = \operatorname{aff}(P) &:= \bigcap \{ X \mid X \subseteq V \text{ affiner Teilraum mit } P \subseteq X \} \\ &= \{ s_0 x_0 + \dots + s_k x_k \mid x_0, \dots, x_k \in P,\ s_0, \dots, s_k \in \mathbb{R},\ s_0 + \dots + s_k = 1 \} \\ &= \{ t_0 v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_\ell v_\ell \mid t_0, t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R},\ t_0 + t_1 + \dots + t_\ell = 1 \} \\ &= \{ v_0 + t_1(v_1 - v_0) + \dots + t_\ell(v_\ell - v_0) \mid t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R} \} \\ &= v_0 + U \ \text{ mit } \ U = \langle v_1 - v_0, \dots, v_\ell - v_0 \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Wir nennen $\dim P := \dim A := \dim U$ die **Dimension** des Polytops P.
Damit gilt $\dim(P \times Q) = \dim P + \dim Q$, wobei wir $\dim \emptyset := -\infty$ setzen.

Was besagt Eulers Polyederformel?

	$f_0 =$ ♯Ecken	$f_1 =$ ♯Kanten	$f_2 =$ ♯Facetten	$\chi = f_0 - f_1 + f_2$
Hexaeder	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Tetraeder	4	6	4	2
Ikosaeder	12	30	20	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Doppelkegel	$q+2$	$3q$	$2q$	2
Prisma	$2q$	$3q$	$q+2$	2
Antiprisma	$2q$	$4q$	$2q+2$	2

Satz A3A: Euler 1750 (für $n = 3$), Poincaré 1895

Für jedes n–dimensionale Polytop $P \neq \emptyset$ gilt:

$$\sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(P) = 1$$

Hierbei ist $f_d(P) = \sharp\{ Q \leq P \mid \dim Q = d \}$ die Anzahl der d–dim. Seiten.

Warum ist Eulers Polyederformel so phantastisch?

Es ist verwunderlich, dass eine so einfache und grundlegende Gleichung erst so spät entdeckt wurde. Ein *Beweis* ist selbst in Dimension 3 nicht leicht zu finden, doch die *Vermutung* drängt sich anhand zahlreicher Beispiele geradezu auf. David Richeson schreibt hierzu in seinem Buch *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology* (2008):

> *They all missed it. The ancient Greeks – mathematical luminaries such as Phythagoras, Theaetetus, Plato, Euclid, and Archimedes, who where infatuated with polyhedra – missed it. Johannes Kepler, the great astronomer, so in awe of the beauty of polyhedra that he based an early model of the solar system on them, missed it. In his investigation of polyhedra the mathematician and philosopher René Descartes was but a few logical steps away from discovering it, yet he too missed it. These mathematicians, and so many others, missed a relationship that is so simple that it can be explained to any schoolchild, yet is so fundamental that it is part of the fabric of modern mathematics. The great Swiss mathematician Leonhard Euler did not miss it. On November 14, 1750, in a letter to his friend, the number theorist Christian Goldbach, Euler wrote, "It astonishes me that these general properties of stereometry have not, as far as I know, been noticed by anyone else."*

Polytopale Komplexe: allgemein und einfach

Definition A3B: endlicher polytopaler Komplex

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Eine Familie $\mathscr{K} = \{P_1, \dots, P_m\}$ von (zunächst endlich vielen) Polytopen $P_i \subseteq V$ ist ein **polytopaler Komplex**, falls gilt:

0. Das leere Polytop gehört zu $\mathscr{K}$, kurz $\emptyset \in \mathscr{K}$. (langweilig, aber nützlich)
1. Je zwei Polytope $P \neq Q$ in $\mathscr{K}$ sind innerlich disjunkt, $\operatorname{Int} P \cap \operatorname{Int} Q = \emptyset$.
2. Für jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ gilt $\partial P = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ mit $Q_1, \dots, Q_k \in \mathscr{K}$.

Die **Dimension** und die **Skelette** von $\mathscr{K}$ definieren wir durch

$$\dim \mathscr{K} := n = \sup\{\dim P \mid P \in \mathscr{K}\}, \quad \mathscr{K}_{\leq d} := \{P \in \mathscr{K} \mid \dim P \leq d\},$$
$$f_d(\mathscr{K}) := \sharp \mathscr{K}_d \quad \text{wobei} \quad \mathscr{K}_d := \{P \in \mathscr{K} \mid \dim P = d\}.$$

Die **Euler–Charakteristik** des Komplexes $\mathscr{K}$ ist die Wechselsumme

$$\chi(\mathscr{K}) := \textstyle\sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(\mathscr{K}) = \sum_{\emptyset \neq P \in \mathscr{K}} (-1)^{\dim P}.$$

Der Komplex $\mathscr{K}$ definiert sein **Polyeder** als Vereinigung aller Polytope:

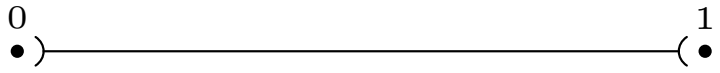
$$\big|\mathscr{K}\big| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup_{P \in \mathscr{K}} P = \bigsqcup_{P \in \mathscr{K}} \operatorname{Int} P \subseteq V$$

Polytopale Komplexe: erste Beispiele

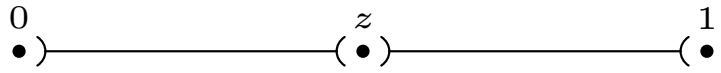
Der Komplex $\mathscr{K}$ in V beschreibt genau den Aufbau des Polyeders $K \subseteq V$.

$$\{\mathscr{K} \text{ Komplex in } V\} \xrightarrow[\mathscr{K} \mapsto K = \bigcup \mathscr{K}]{|\text{-}|} \twoheadrightarrow \{K \subseteq V \text{ Polyeder}\}$$

Beispiel: Das Intervall $K = [0,1]$ können wir auf viele Arten zerlegen:



$$\mathscr{K} = \{[0,1], \{0\}, \{1\}, \emptyset\}$$
$$\chi(\mathscr{K}) = 2 - 1 = 1$$



$$\mathscr{K}' = \{[0,z], [z,1], \{0\}, \{z\}, \{1\}, \emptyset\}$$
$$\chi(\mathscr{K}') = 3 - 2 = 1$$

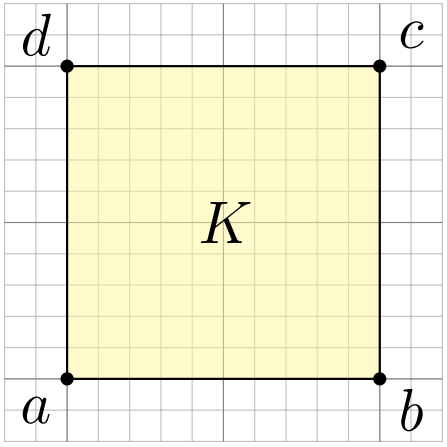
Die Zuordnung $|\text{-}| : \mathscr{K} \mapsto K$ ist surjektiv, nicht injektiv! Sie vergisst den Aufbau $\mathscr{K}$ und behält als Ergebnis nur die Vereinigungsmenge $K = \bigcup \mathscr{K}$.

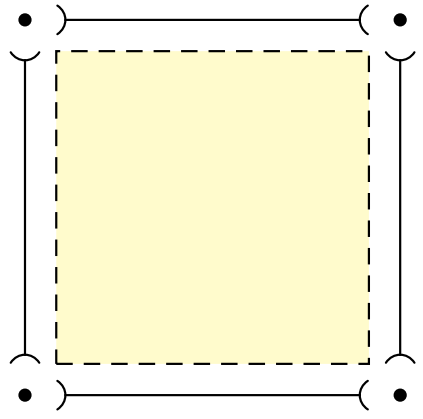
Beispiel: Für jedes Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Familie $\mathscr{K} = \langle P \rangle := \{Q \leq P\}$ aller Seiten ein polytopaler Komplex zu dem Polyeder $|\mathscr{K}| = P$ (A2E). (Hierzu müssen wir den Begriff der *Seite* ausführen, siehe Skript.)

Auch die Familie $\partial\mathscr{K} = \{Q < P\}$ aller echten Seiten ist ein polytopaler Komplex; das zugehörige Polyeder ist demnach der Rand $|\partial\mathscr{K}| = \partial P$. Unsere Beispiele mit $\dim P = 3$ erfüllen $\chi(\mathscr{K}) = 1$ und $\chi(\partial\mathscr{K}) = 2$.

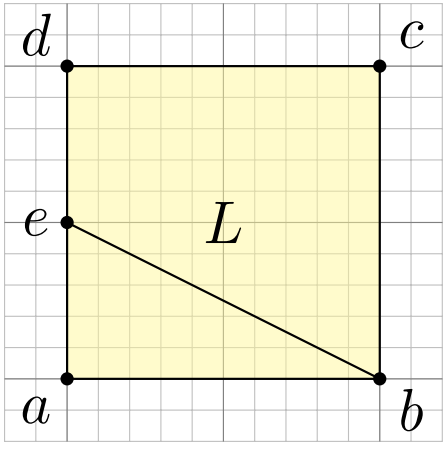
Polytopale Komplexe: erste Beispiele

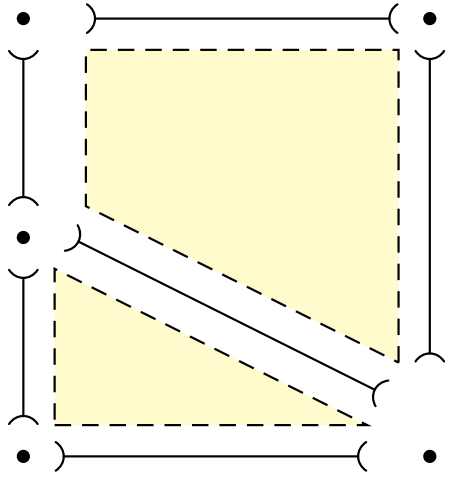
Beispiel: Das Quadrat $K = [-1,1]^2$ können wir auf viele Arten zerlegen:





$$\mathscr{K} = \langle\, [a,b,c,d] \,\rangle$$
$$= \{\, \emptyset,\ [a],[b],[c],[d],$$
$$[a,b],[b,c],[c,d],[d,a],$$
$$[a,b,c,d] \,\}$$
$$\chi(\mathscr{K}) = 4 - 4 + 1 = 1$$





$$\mathscr{L} = \langle\, [a,b,e],[b,c,d,e] \,\rangle$$
$$= \{\, \emptyset,\ [a],[b],[c],[d],[e],$$
$$[a,b],[b,c],[c,d],[d,e],[e,a],$$
$$[e,b],[a,b,e],[b,c,d,e] \,\}$$
$$\chi(\mathscr{L}) = 5 - 6 + 2 = 1$$

Satz A3c: Poincaré 1895 (verallgemeinert Eulers Polyederformel)

Für jeden Komplex $\mathscr{K}$ mit konvexem Polyeder $|\mathscr{K}| \neq \emptyset$ gilt $\chi(\mathscr{K}) = 1$.

Polytopale Komplexe: erste Beispiele

Dieser wunderschöne Satz ist einfach, glasklar und elegant,
aber keineswegs leicht zu beweisen. Ganz im Gegenteil!

Mit vielen Beweisen in der Literatur bin ich nicht recht glücklich:
Sie beweisen entweder nur einen eingeschränkten Spezialfall
oder sind technisch sehr aufwändig — oder schlicht falsch.
(Hier gilt tatsächlich: Geht es zu leicht, so ist es falsch.)

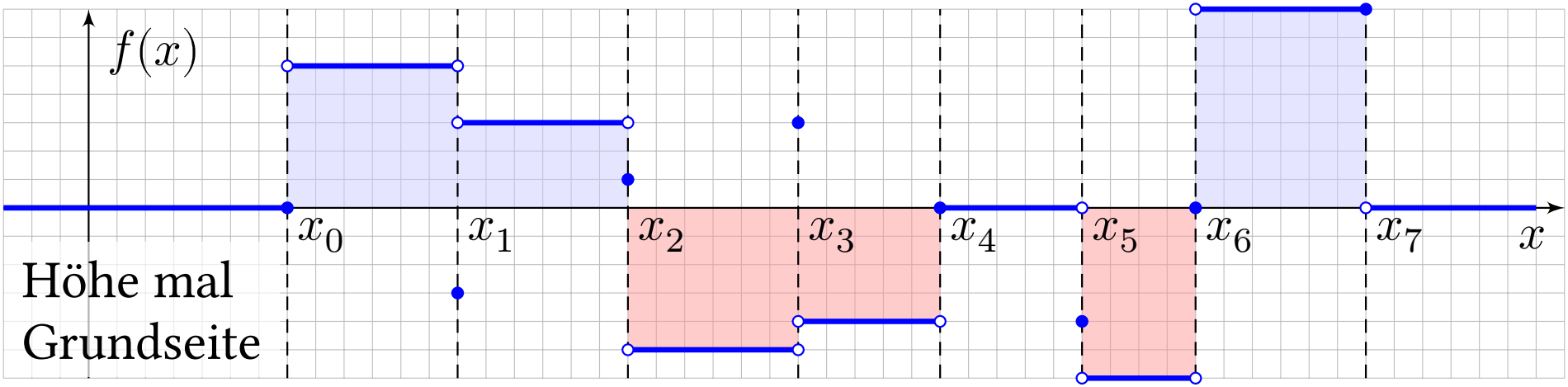
Der beste, aber längste Weg führt über die Algebraische Topologie:
Die Homologietheorie ist eine wunderbare und produktive Maschine!
Sie ist zwar aufwändig aufzubauen, liefert dann aber am Fließband diesen Satz und dazu noch viele weitere quasi gratis.

Der folgende schöne Beweis stammt von Hugo Hadwiger (1908–1981), *Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie*, J. Reine Angew. Math. 194 (1955), 101–110. Die Argumente sind vollkommen elementar doch phantastisch raffiniert. Elementar bedeutet nicht unbedingt einfach!

Bereits der Satz ist wunderschön, der Beweis ist sogar noch schöner!
Genießen Sie dieses Kleinod mathematischen Scharfsinns.

Eindimensionale Treppenfunktionen und ihr Integral

Für Treppenfunktionen bestimmen wir das Integral / den Flächeninhalt:



Jede **Treppenfunktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stückweise konstant: Zu f existiert eine Unterteilung $P = \{ x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell \} \subseteq \mathbb{R}$ und $y_1, \ldots, y_\ell \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$ sowie $f(x) = 0$ für $x < x_0$ und für $x > x_k$.

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} y_k \; \mathbf{1}_{]x_{k-1},x_k[} + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k) \; \mathbf{1}_{\{x_k\}}$$

Das **Längen-Maß** $\lambda(\emptyset) = \lambda(\{a\}) = 0$ und $\lambda(]a,b[) = b - a$ ist additiv:

$$\lambda(]a,b[) + \lambda(\{b\}) + \lambda(]b,c[) = \lambda(]a,c[) \quad \text{für alle } a < b < c \text{ in } \mathbb{R}$$

Das **Euler–Maß** $\mu(\{a\}) = +1$ und $\mu(]a,b[) = -1$ erfüllt dies ebenfalls!
Wir nennen solch eine Abbildung ein **additives Intervallmaß**.

Eindimensionale Treppenfunktionen und ihr Integral

Satz A3D: Existenz und Eindeutigkeit des eindim. Integrals

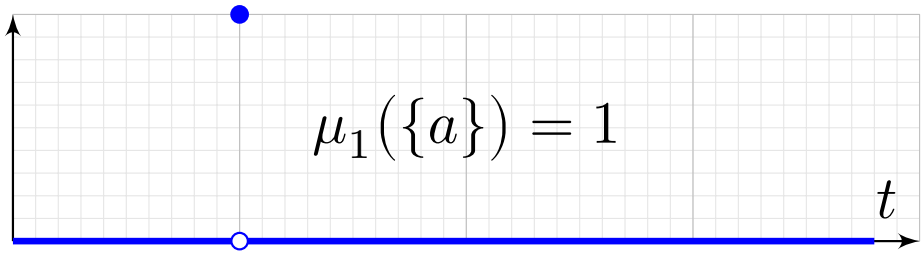
Die Treppenfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\Lambda_1 = T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, erzeugt von den Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{a\}}$ und $\mathbf{1}_{]a,b[}$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$.

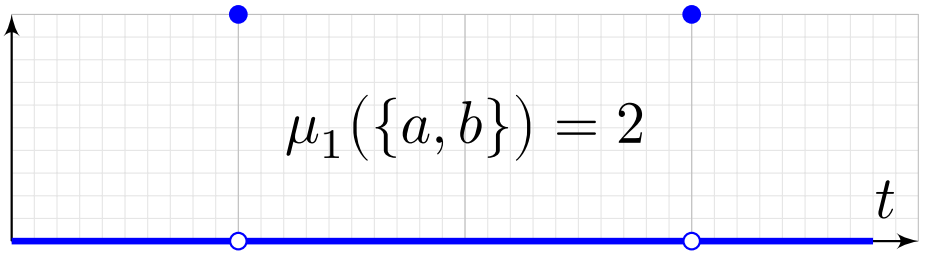
Zu jedem additiven Intervallmaß λ existiert genau eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\lambda_1 : \Lambda_1 \to \mathbb{R}$ mit $\lambda_1(\mathbf{1}_{\{a\}}) = \lambda(\{a\})$ und $\lambda_1(\mathbf{1}_{]a,b[}) = \lambda(]a, b[)$.

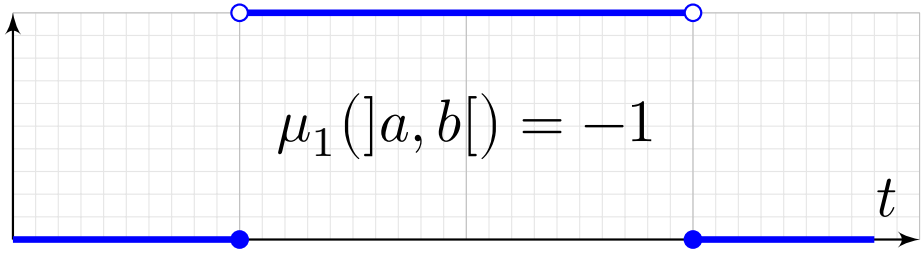
Beweis: (1) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise konstant bezüglich P bzw. Q, so auch bezüglich $P \cup Q$. Letzteres gilt dann auch für $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
(2) Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{a\}}$ und $\mathbf{1}_{]a,b[}$ erzeugen Λ_1, wie oben gesehen.
(3) Eindeutigkeit: λ_1 ist auf diesem Erzeugendensystem festgelegt.
(4) Existenz: Wir konstruieren das **Integral** von f bezüglich P vermöge der Formel $\lambda_1(f, P) := \sum_{k=1}^{\ell} y_k \, \lambda(]x_{k-1}, x_k[) + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k) \, \lambda(\{x_k\})$.
(5) Verfeinern $P' = P \cup \{t\}$ ergibt $\lambda_1(f, P') = \lambda_1(f, P)$ dank Additivität.
(6) Zu zwei Unterteilungen P' und P'' ist $P = P' \cup P''$ eine gemeinsame Verfeinerung. Dank (5) folgt $\lambda_1(f, P') = \lambda_1(f, P) = \lambda_1(f, P'')$. Unser Integral $\lambda_1(f) := \lambda_1(f, P)$ ist unabhängig von P, also wohldefiniert. QED

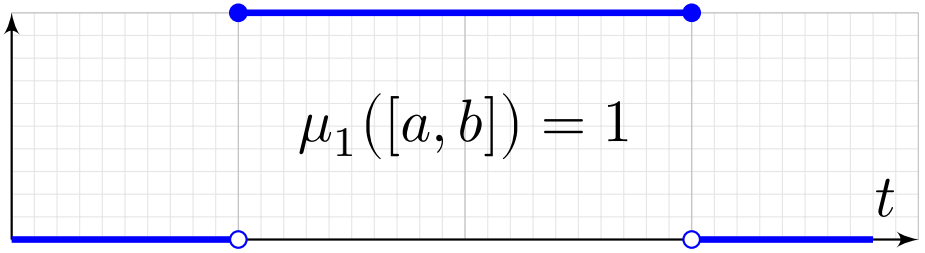
Das Euler–Maß: eindimensionale Beispiele

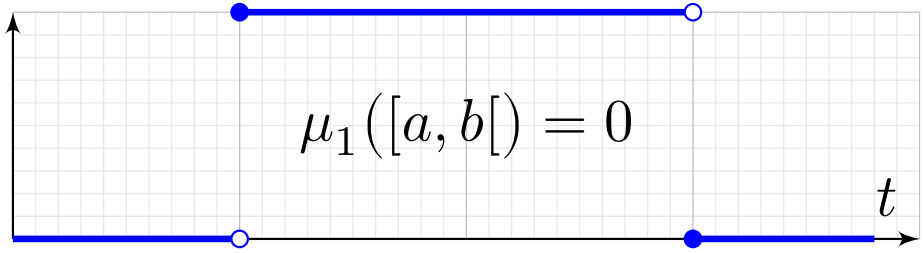
Beispiel: Jedes Intervall $X \subseteq \mathbb{R}$ ist Euler–messbar: Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_X : \mathbb{R} \to \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion, und wir nutzen Satz A3D.

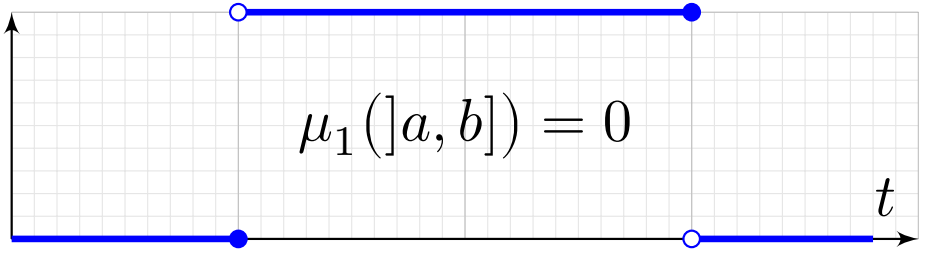








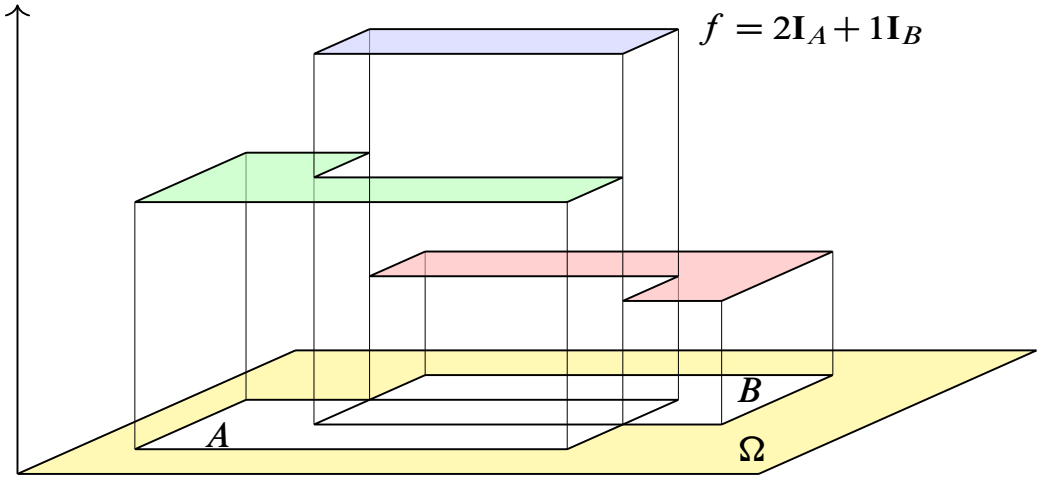


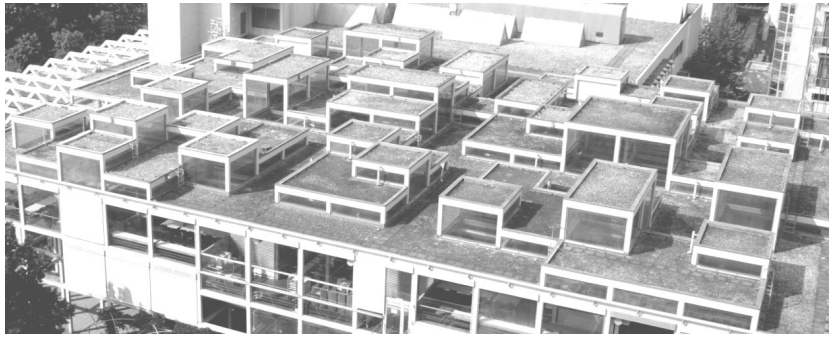


Eindimensionale Treppenfunktionen und ihr Integral kennen Sie bereits vom Anfang der Analysis, als ersten Schritt des Riemann–Integrals. Alles gilt für das Längen-Maß λ ebenso wie für das Euler–Maß μ!

Mehrdimensionale Funktionen und iterierte Integrale

Wir können dies nun auf mehrdimensionale Funktionen fortsetzen: Satz A3E konstruiert zu μ das Integral, das System $\mathscr{M}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ der **Euler–messbaren** Mengen und hierauf das **Euler–Maß** $\mu_n : \mathscr{M}_n \to \mathbb{R}$.





Die Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen aus Sicht der Mathematik

In jeder Dimension $n = 1, 2, 3, \ldots$ definieren wir rekursiv das System $\Lambda_n \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der λ–integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und das Integral $\lambda_n : \Lambda_n \to \mathbb{R}$ nach dem Vorbild iterierter Integrale à la Fubini:

$$\lambda_n(f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Mehrdimensionale Funktionen und iterierte Integrale

Satz A3E: Existenz und Eindeutigkeit des mehrdim. Integrals

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennen wir **λ–integrierbar**, falls $f \in \Lambda_1$ gilt.
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, ist **λ–integrierbar**, kurz $f \in \Lambda_n$, wenn zu jedem $t \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_t : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x,t)$ integrierbar ist, $f_t \in \Lambda_{n-1}$, ebenso die Integralfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \lambda_{n-1}(f_t)$, $F \in \Lambda_1$.

(1) Die so definierte Menge $\Lambda_n \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum und das **Integral** $\lambda_n : \Lambda_n \to \mathbb{R} : f \mapsto \lambda_n(f) := \lambda_1(F)$ ist $\mathbb{R}$–linear.
Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nennen wir **λ–messbar**, falls $\mathbf{1}_X \in \Lambda_n$ gilt; in diesem Falle definieren wir ihr **Maß** durch $\lambda_n(X) := \lambda_n(\mathbf{1}_X)$.

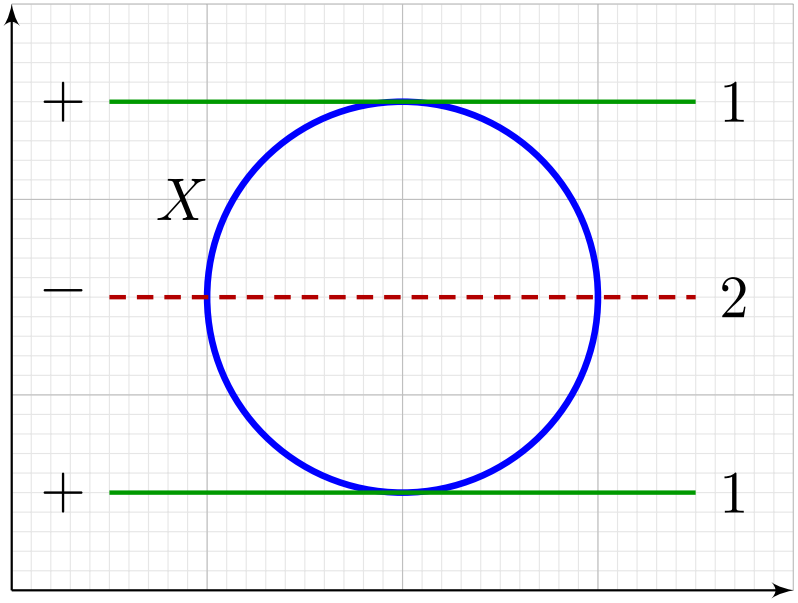
(2) Additivität: Die leere Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ ist messbar, mit $\lambda_n(\emptyset) = 0$.
Sind drei der Mengen X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$ messbar, so auch die vierte:
Es gilt $\mathbf{1}_X + \mathbf{1}_Y = \mathbf{1}_{X \cup Y} + \mathbf{1}_{X \cap Y}$, dank Linearität von λ_n folgt daraus

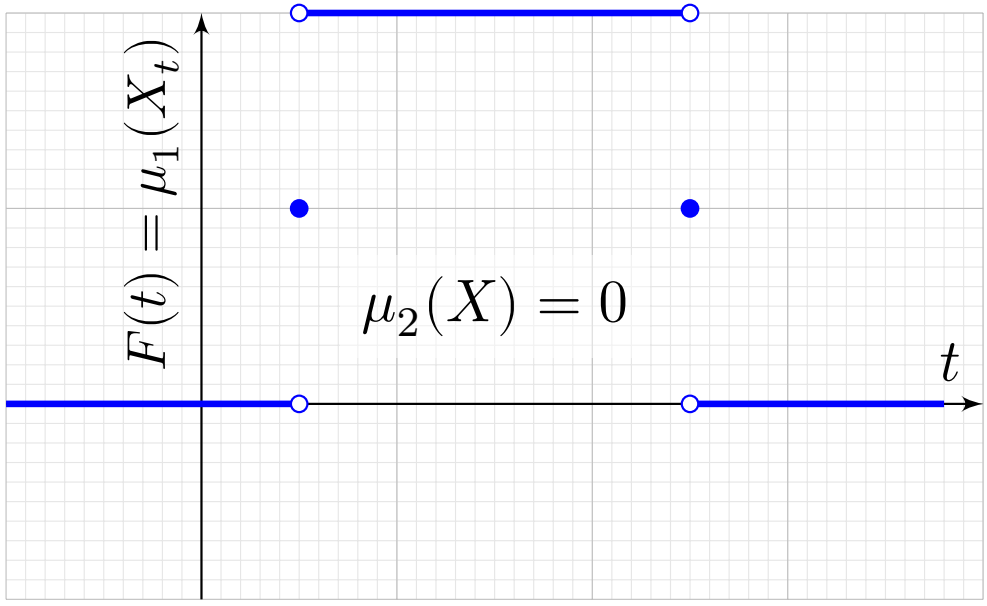
$$\lambda_n(X \cup Y) = \lambda_n(X) + \lambda_n(Y) - \lambda_n(X \cap Y).$$

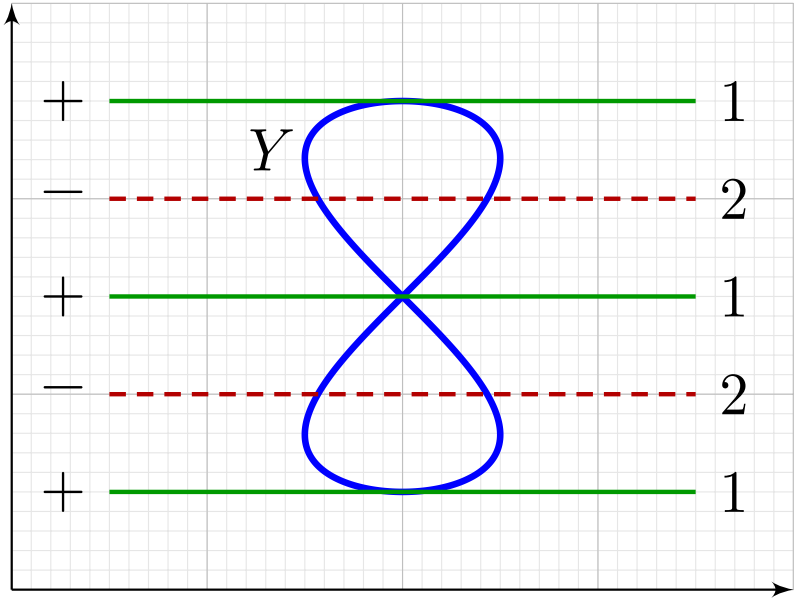
Bei disjunkter Vereinigung gilt demnach $\lambda_n(X \sqcup Y) = \lambda_n(X) + \lambda_n(Y)$.

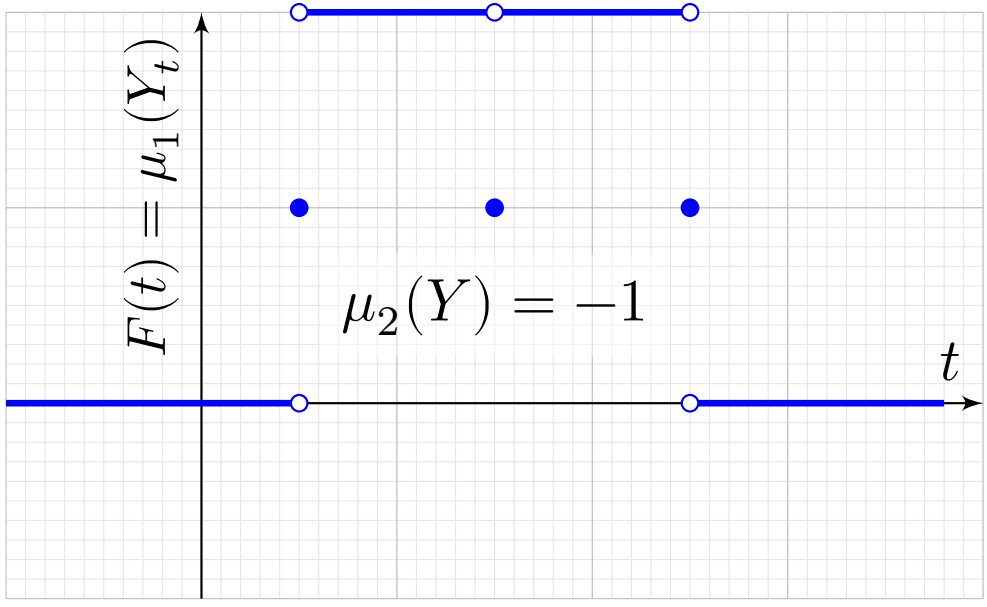
Beweis: Aussagen (1) und (2) folgen per Induktion über die Dimension n.

Das Euler–Maß: zweidimensionale Beispiele

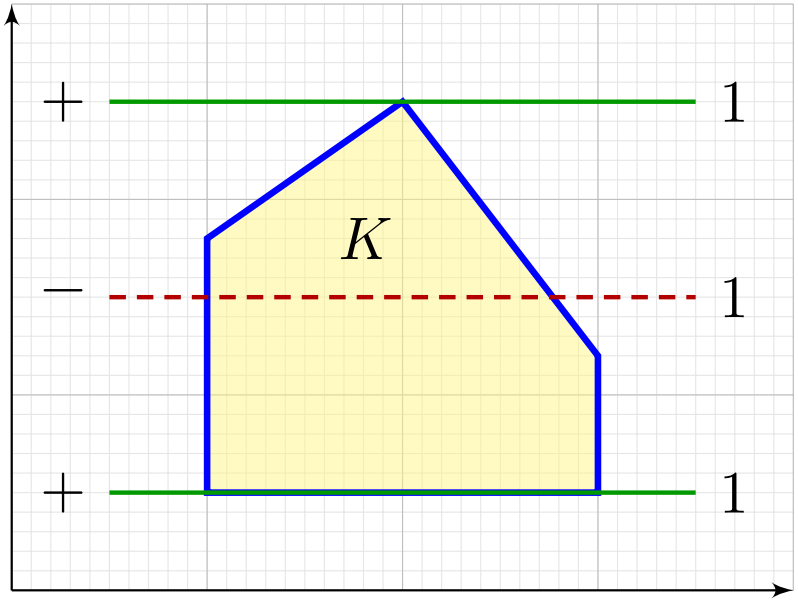


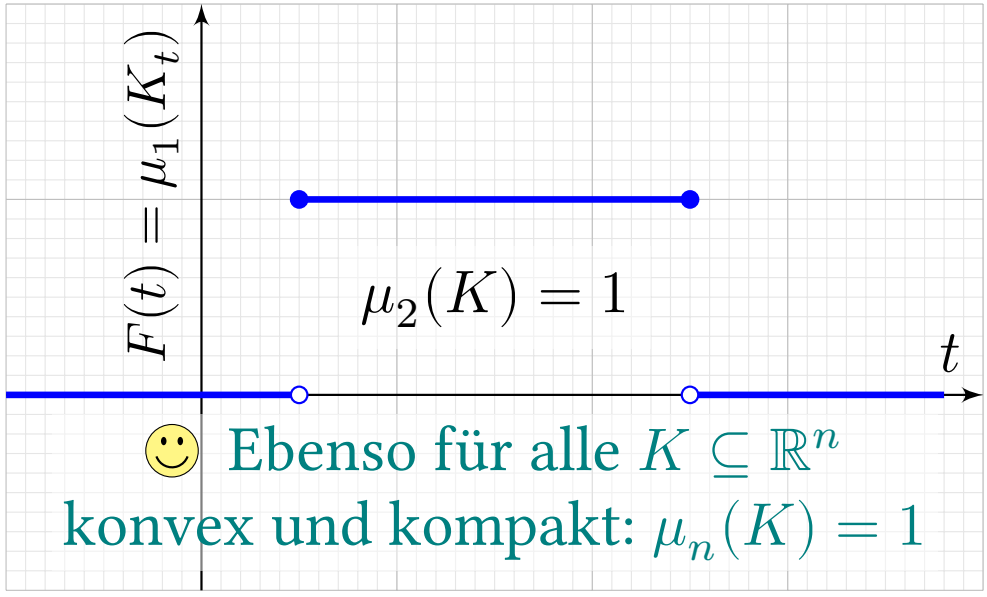




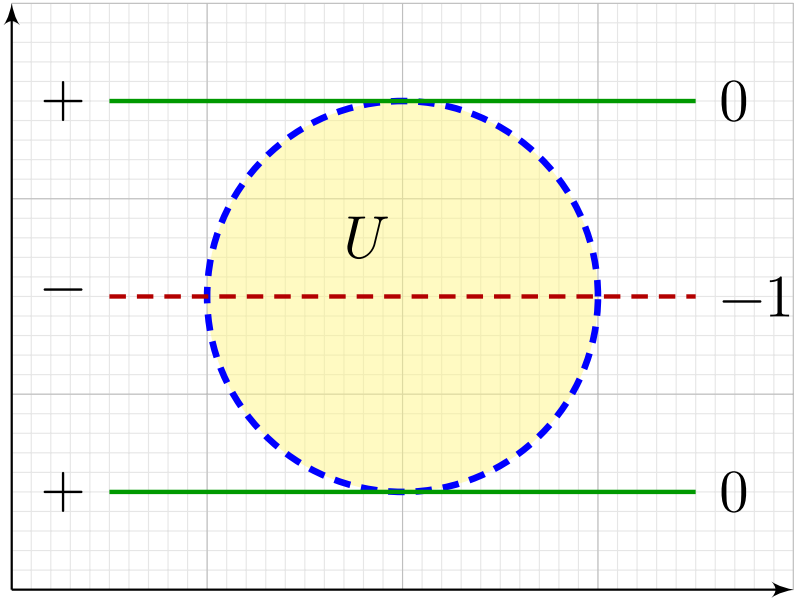


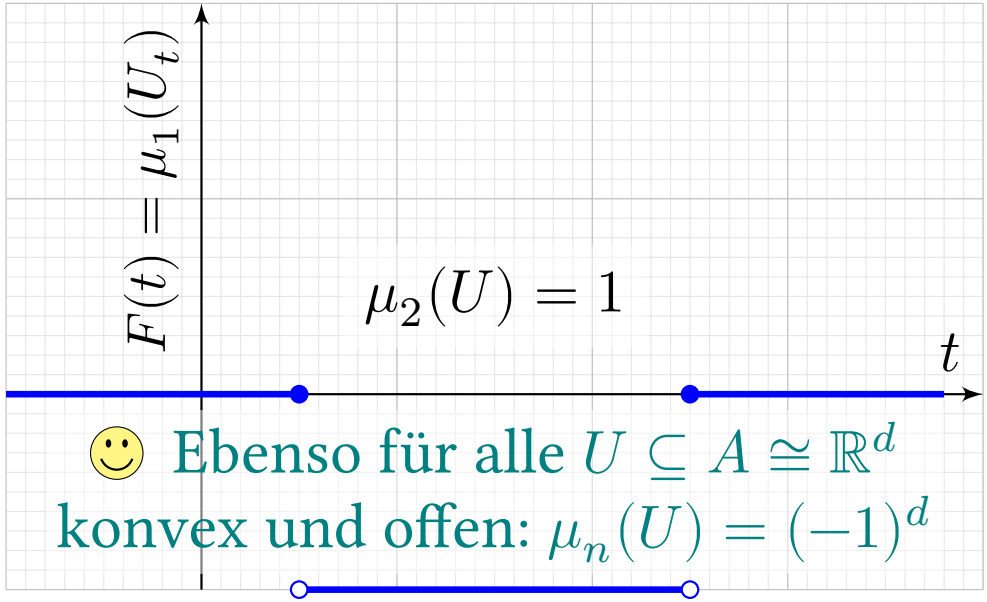
Das Euler–Maß: konvexe Mengen





☺ Ebenso für alle $K \subseteq \mathbb{R}^n$
konvex und kompakt: $\mu_n(K) = 1$





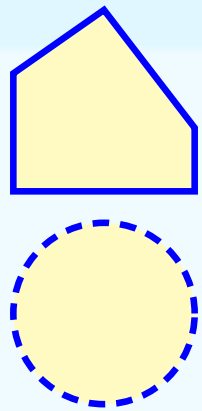
☺ Ebenso für alle $U \subseteq A \cong \mathbb{R}^d$
konvex und offen: $\mu_n(U) = (-1)^d$

Das Euler–Maß berechnet die Euler–Charakteristik!

$$\{\,\mathscr{K} \text{ Komplex in } \mathbb{R}^n\,\} \xrightarrow[\mathscr{K}\mapsto K=\bigcup\mathscr{K}]{|\text{-}|} \{\,K\subseteq\mathbb{R}^n \text{ Polyeder}\,\}$$

$$\chi \searrow \quad \mathbb{Z} \quad \swarrow \mu_n$$

Satz A3G: Euler–Maß μ_n und Euler–Charakteristik χ



(1) Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer, konvex und kompakt,
so ist K Euler–messbar, $K \in \mathscr{M}_n$, und $\mu_n(K) = 1$.

(2) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht–leer, konvex und offen in $A = \operatorname{aff}(U) \cong \mathbb{R}^d$,
so gilt ist U Euler–messbar, $U \in \mathscr{M}_n$, und $\mu_n(U) = (-1)^d$.

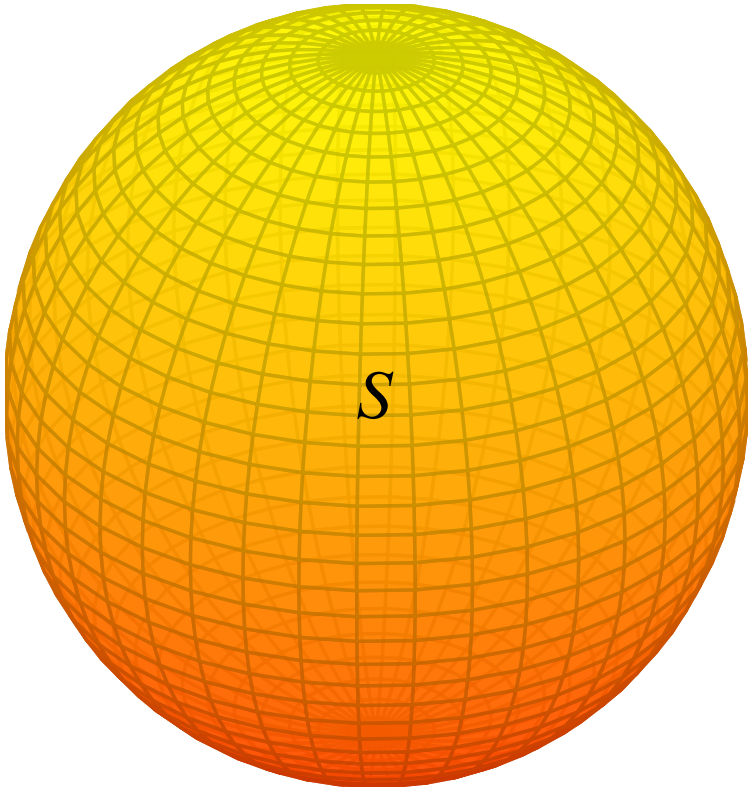
(3) Für jeden (endlichen) polytopalen Komplex $\mathscr{K}$ in $\mathbb{R}^n$ folgt:

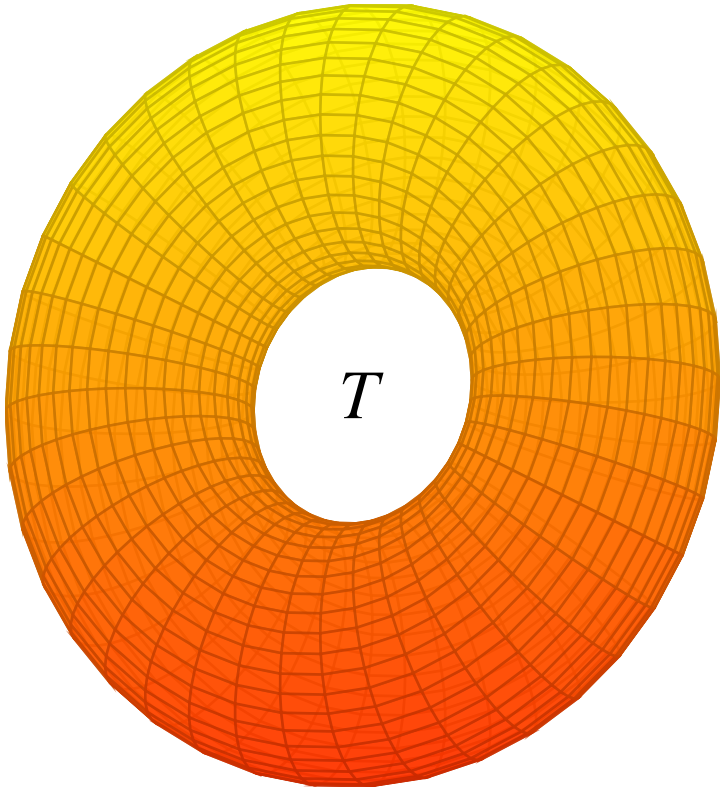
$$K := |\mathscr{K}| = \bigsqcup_{\emptyset\neq P\in\mathscr{K}} \operatorname{Int} P \in \mathscr{M}_n \quad \overset{(2)}{\underset{A3E}{\Longrightarrow}} \quad \mu_n(K) = \sum_{\emptyset\neq P\in\mathscr{K}} (-1)^{\dim P} = \chi(\mathscr{K})$$

Ist K konvex, so beweist (1) die Poincaré–Formel $\chi(\mathscr{K}) = 1$ (Satz A3C).

Beweis: Nachrechnen, wie in obigen Beispielen, per Induktion über n.

Effiziente Umformulierung zur Morse–Euler–Formel





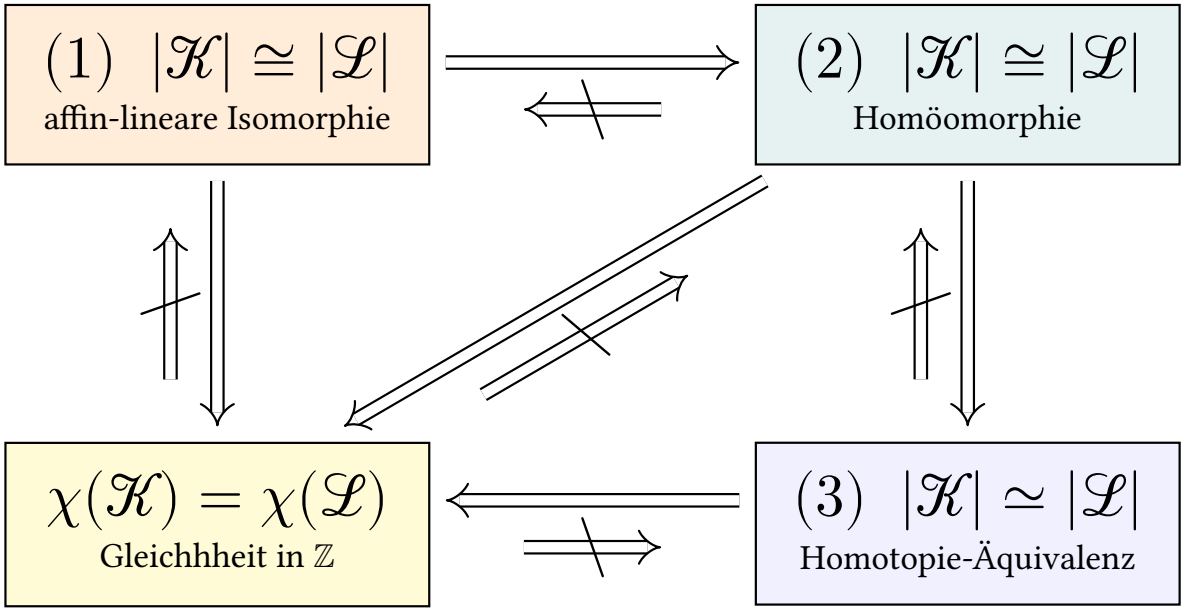
Korollar A3н: Morse–Euler–Formel

Für jedes (endliche) Polyeder $K = |\mathcal{K}| \subseteq \mathbb{R}^n$ erhalten wir

$$\chi(\mathcal{K}) = \mu_n(K) = \sum_{t\in\mathbb{R}} \mu_{n-1}(K_t) - \frac{1}{2}\left[\lim_{s\nearrow t} \mu_{n-1}(K_s) + \lim_{s\searrow t} \mu_{n-1}(K_s)\right].$$

Für Flächen (regulär wie oben) gilt Extremum $\mapsto +1$ und Sattel $\mapsto -1$.

Die Euler–Charakteristik ist topologisch invariant.



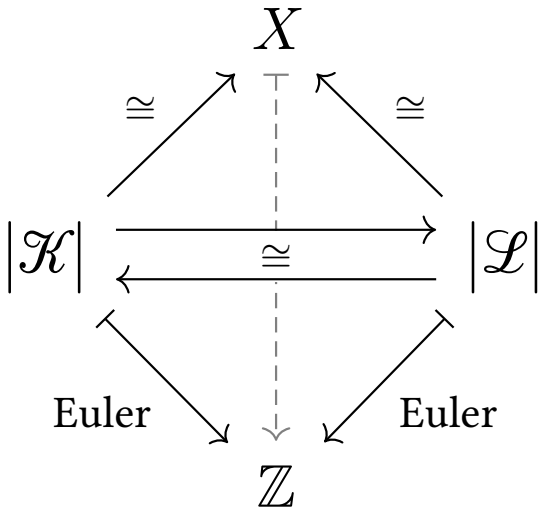
Satz A3J: topologische Invarianz der Euler–Charakteristik

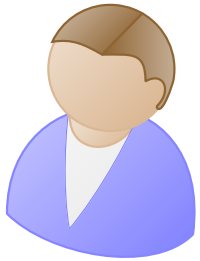
Seien $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ endliche polytopale Komplexe. Existiert zwischen den Polyedern $|\mathscr{K}|$ und $|\mathscr{L}|$ ein Homöomorphismus $(f, g) : |\mathscr{K}| \cong |\mathscr{L}|$, oder auch nur eine Homotopie-Äquivalenz $(f, g) : |\mathscr{K}| \simeq |\mathscr{L}|$, so folgt daraus bereits die Gleichheit $\chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L})$ der Euler–Charakteristiken.

Folgerung: Die Sphäre S und der Torus T sind nicht homöomorph!
Aus den topologischen Invarianten $\chi(S) = 2 \neq 0 = \chi(T)$ folgt $S \ncong T$.

Die Euler–Charakteristik ist wohldefiniert.

Alice



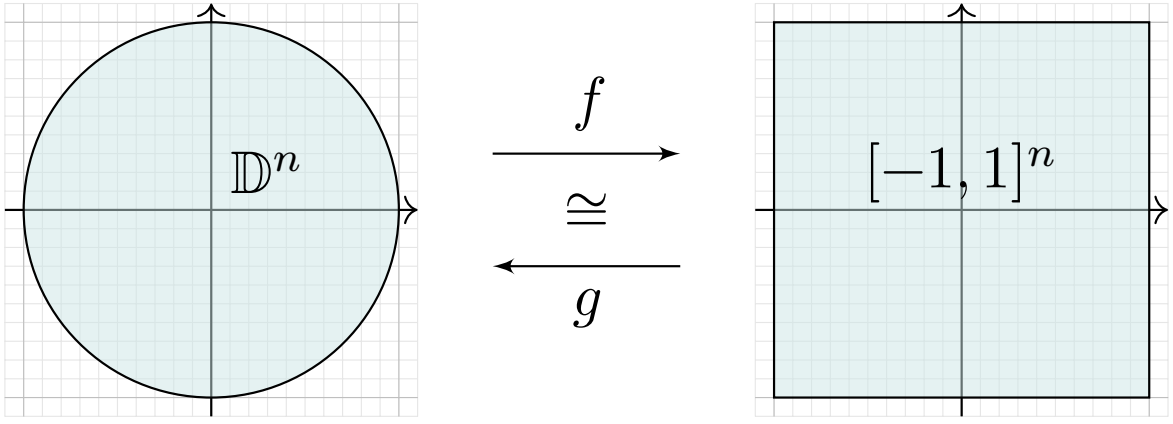

Bob

Definition A3L: Euler–Charakteristik

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (später: ein topologischer Raum). Gilt $X \cong |\mathscr{K}|$ für einen (endlichen) polytopalen Komplex $\mathscr{K}$, so setzen wir $\chi(X) := \chi(\mathscr{K})$.
Dies ist wohldefiniert dank der topologischen Invarianz A3J.

Invarianzsätze sind typisch in der Mathematik: Die Rechnung erfordert eine Parametrisierung, das Endergebnis ist jedoch davon unabhängig!
(a) Elementezahl einer Menge X vermöge Abzählung, $X \cong \{1, \dots, n\}$.
(b) Dimension eines K–Vektorraums V vermöge Basiswahl, $V \cong K^n$.
(c) Integral entlang einer Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ vermöge $\int_\gamma f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Die Euler–Charakteristik ist wohldefiniert.



Der n–dimensionale Würfel $W^n = [-1,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Polytop.
Der Komplex $\mathscr{W}^n = \langle W^n \rangle := \{ Q \leq W^n \}$ besteht aus allen Seiten,
und $\partial\mathscr{W}^n := \{ Q < W^n \}$ aus allen echten Seiten, der Dimension $< n$.

Korollar A3N: Euler–Charakteristik von Bällen und Sphären

Wir haben Homöomorphismen $\mathbb{D}^n \cong [-1,1]^n$ und $\mathbb{S}^{n-1} \cong \partial[-1,1]^n$ (A1E).
Aus topologischer Invarianz A3J und Polyederformel A3C folgt

$$\chi(\mathbb{D}^n) := \chi(\mathscr{W}^n) = 1 \quad \text{und} \quad \chi(\mathbb{S}^{n-1}) := \chi(\partial\mathscr{W}^n) = 1 - (-1)^n.$$

Kleinste Beispiele: $\chi(\mathbb{S}^0) = 2$, $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$, $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, $\chi(\mathbb{S}^3) = 0$, ...

Eindimensionale Mannigfaltigkeiten: Kurven

Ein Raum $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **m–dimensionale Mannigfaltigkeit** eventuell mit Rand ∂M, falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler Homöomorphismus $(M,a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m, 0)$ oder $(M,a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m_{\geq 0}, 0)$ existiert.

Für **Kurven** (also $m = 1$) haben wir sofort vier konkrete Beispiele:

1–Mannigfaltigkeiten	ohne Rand	mit Rand
nicht kompakt	die reelle Gerade $\mathbb{R}$	die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0}$
kompakt	die Kreislinie $\mathbb{S}^1$	das Intervall $[0,1]$

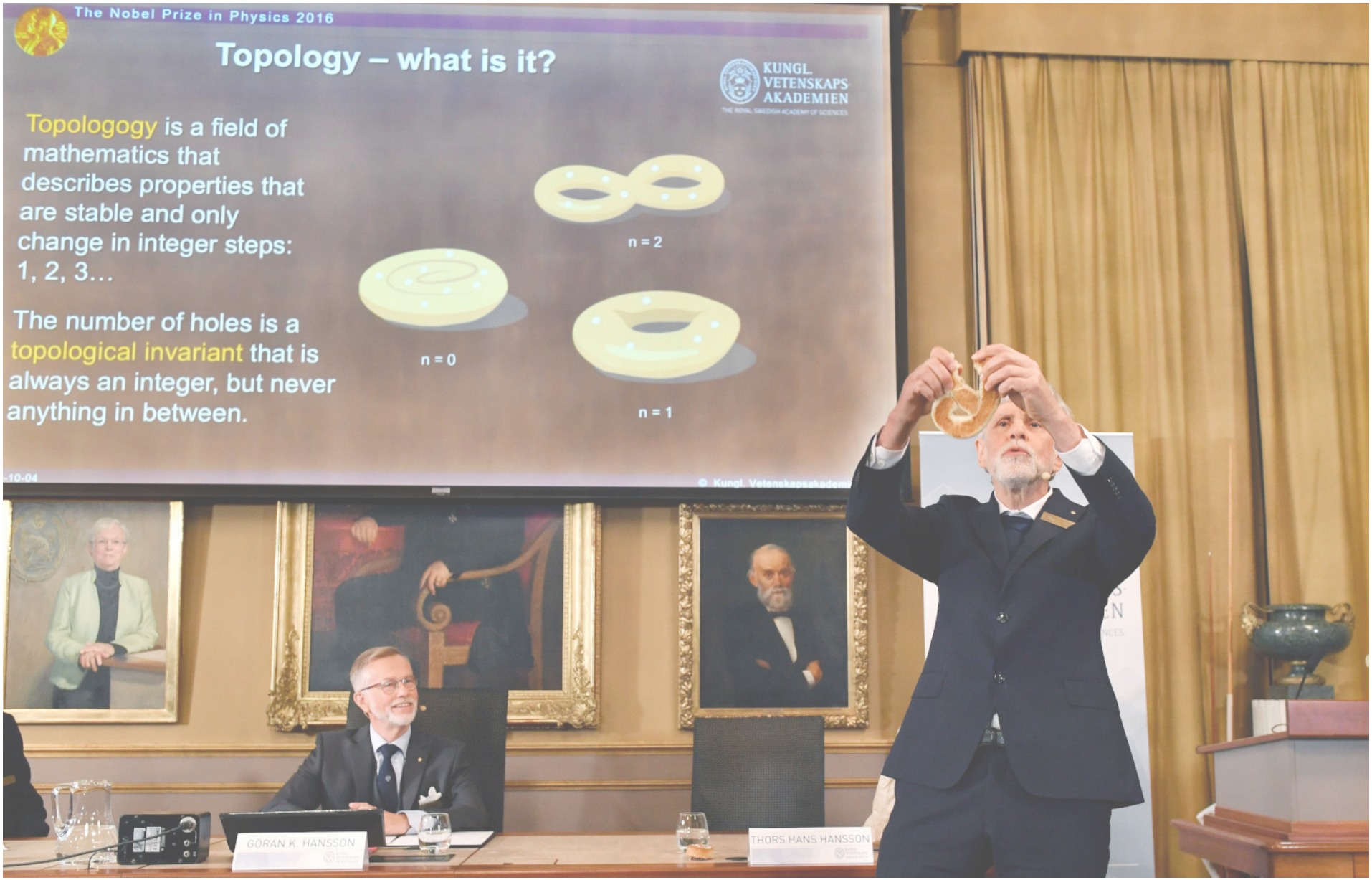
Satz K1N: topologische Klassifikation der Kurven

Jede zusammenhängende Kurve (eindimensionale Mannigfaltigkeit) ist homöomorph zu genau einem der Modellräume $[0,1]$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Jede kompakte Kurve besteht somit aus $p \in \mathbb{N}$ Intervallen und $q \in \mathbb{N}$ Kreislinien, ist also homöomorph zu genau einem der Modellräume

$$E_{p,q} = \big(\{1,\dots,p\} \times [0,1]\big) \cup \big(\{p+1,\dots,p+q\} \times \mathbb{S}^1\big) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^3.$$

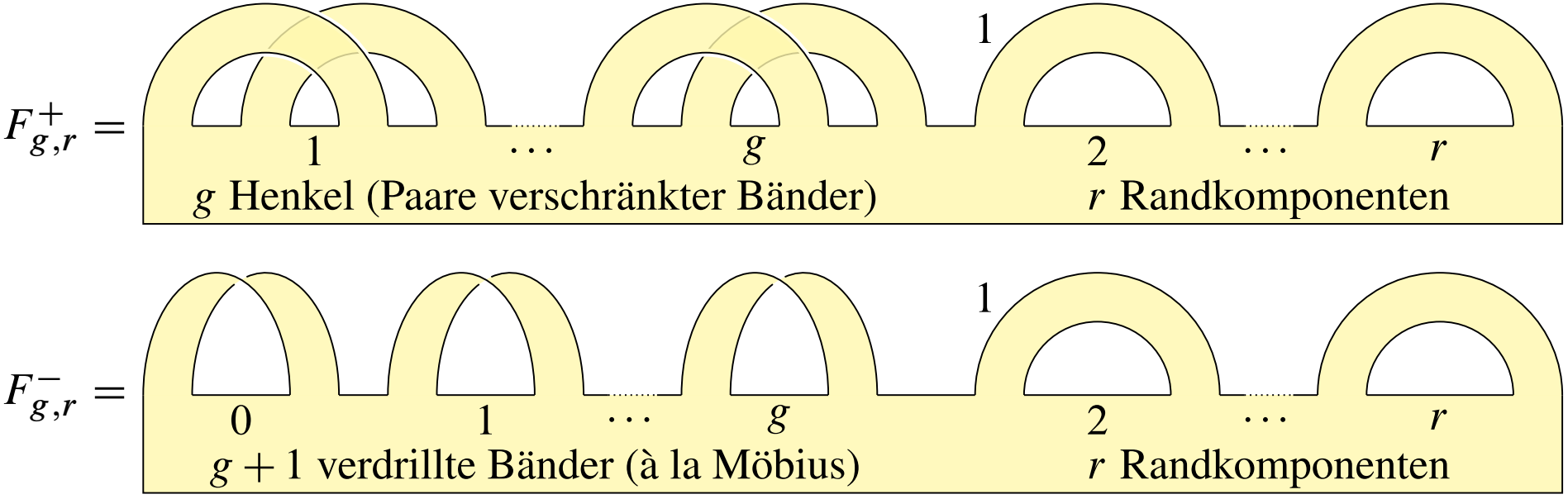
Topologie, exotische Phasen und Quantencomputing



Topologie ist anwendbare Mathematik: nicht nur schön, auch nützlich!

Modelle berandeter Flächen: erstens glatt

Zu Parametern $g \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ konstruieren wir Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$:



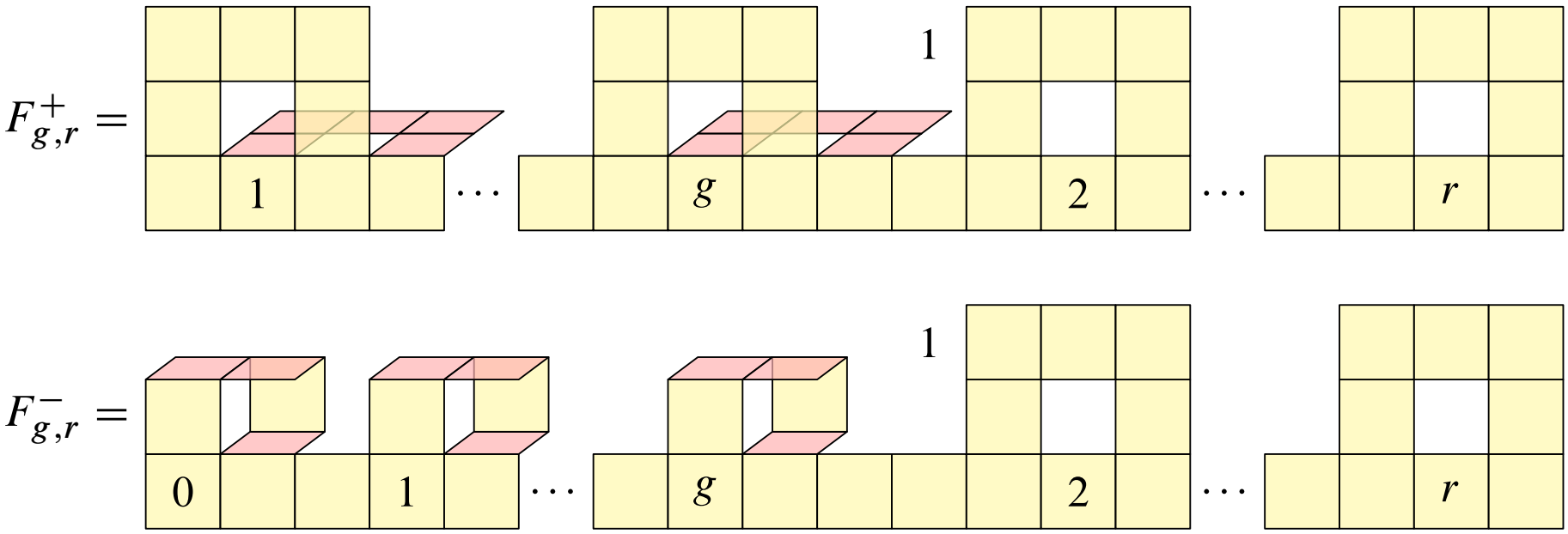
Glatte Modelle $F^{\pm}_{g,r} \subseteq \mathbb{R}^3$ berandeter Flächen

Beispiele: $F^{+}_{0,1} \cong$ Kreisscheibe, $F^{+}_{0,2} \cong$ Kreisring $\cong$ Zylindermantel, $F^{-}_{0,1} \cong$ Möbius–Band, $F^{-}_{0,2} \cong$ Möbius–Band mit einem Loch, …

Der Parameter $g \in \mathbb{N}$ heißt **Geschlecht**. Die Fläche $F^{+}_{g,r}$ ist **orientierbar** (zweiseitig), hingegen ist die Fläche $F^{-}_{g,r}$ **nicht-orientierbar** (einseitig). Der Parameter r ist die Anzahl der **Randkomponenten**. Diese Begriffe sind anschaulich plausibel, doch die korrekte Definition ist raffiniert.

Modelle berandeter Flächen: zweitens polytopal

Diese Flächen können wir auch als polytopale Komplexe realisieren:



Kubische Modelle $F^{\pm}_{g,r} \subseteq \mathbb{R}^3$ berandeter Flächen

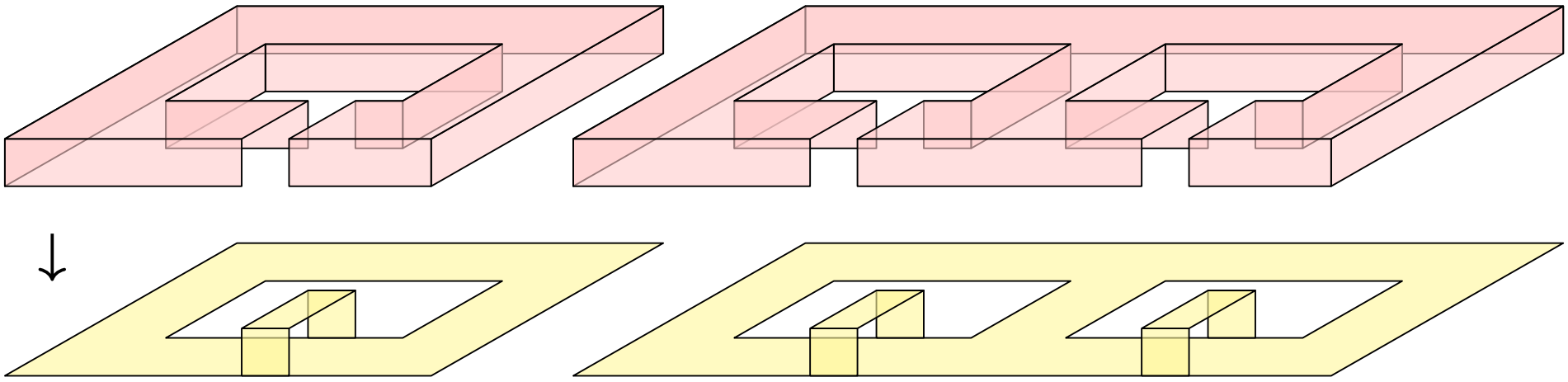
Übung: Erklären Sie Rand und Orientierbarkeit an diesen Modellen!
Verstecken sich unter unseren Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ homöomorphe Paare?

$$\chi(F^+_{g,r}) = 2 - 2g - r, \qquad \chi(F^-_{g,r}) = 1 - g - r$$

Wir nutzen dankend die topologische Invarianz von Euler–Charakteristik, Randkomponenten und Orientierbarkeit: Alle Modelle sind verschieden!

Schließung von $F^+_{g,1}$ zu $F^+_{g,0}$

Die berandete Fläche $F^+_{g,1}$ wird geschlossen zu $F^+_{g,0}$ durch Ankleben einer Kreisscheibe $D \cong F^+_{0,1}$ entlang des gemeinsamen Randes $S \cong \partial F^+_{g,1}$:



Aufgabe: Berechnen Sie auch hier die Euler–Charakteristik $\chi(F^+_{g,0})$!

Lösung: Wir haben $F^+_{g,0} = F^+_{g,1} \cup D$ und $F^+_{g,1} \cap D = S$ mit $D \cong \mathbb{D}^2$ und $S \cong \mathbb{S}^1$, also $\chi(D) = \chi(\mathbb{D}^2) = 1$ und $\chi(S) = \chi(\mathbb{S}^1) = 0$ dank Invarianz A3ɪ. Dank Additivität A3ᴇ(2) erhalten wir wunderbar leicht und bequem:

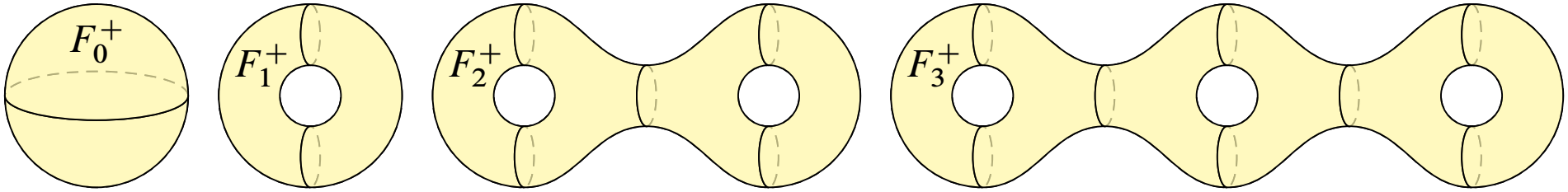
$$\chi(F^+_{g,0}) \;=\; \chi(F^+_{g,1}) + \chi(D) - \chi(S) \;=\; (2-2g-1) + 1 - 0 \;=\; 2-2g$$

☺ Wie gut, dass wir bereits die passenden, effizienten Werkzeuge haben!

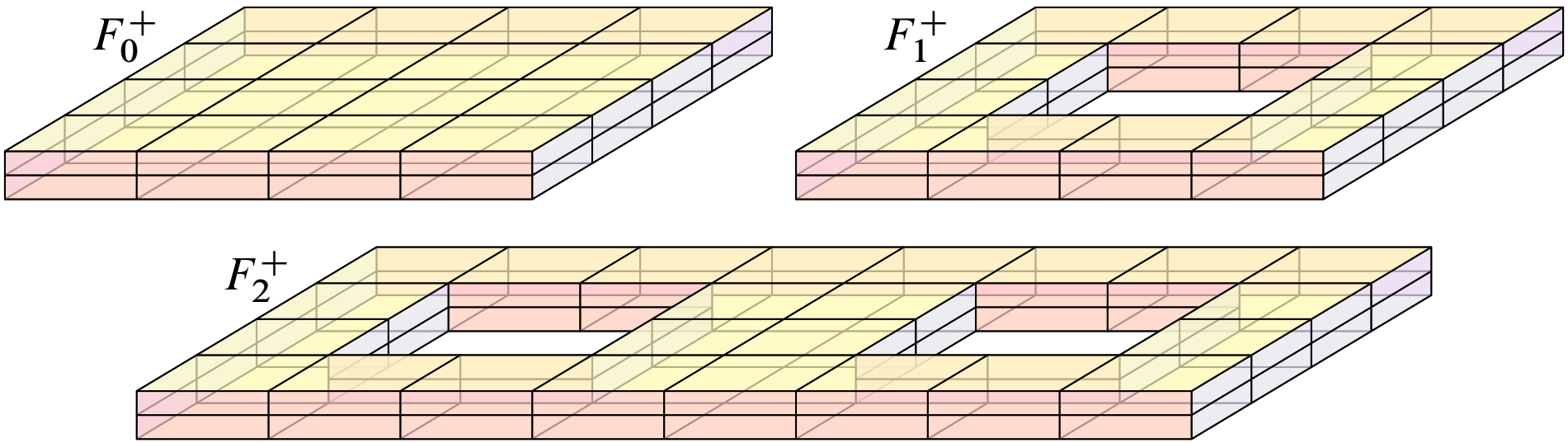
Fun fact: Beim Autobau heißt das „Hochzeit“ von Motor und Karosserie.

Bildquelle: Bundesministerium für Bildung und Forschung, www.bmbf.de

Modelle geschlossener Flächen



Glatte Modelle $F_g^+ \subseteq \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen



Kubische Modelle $F_g^\pm \subseteq \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen

🙂 Unsere Modelle sind wunderbar konkret und zudem symmetrisch:
Die Punktspiegelung $x \mapsto -x$ operiert auf den Modellflächen $F_g^+ = -F_g^+$.

Modelle geschlossener Flächen

Meist wollen wir die Fläche $F^{\pm}_{g,r}$ nur „bis auf Homöomorphie“ darstellen, dazu genügt ein Repräsentant, etwa ein glattes oder kubisches Modell. Die konkrete Wahl eines Repräsentanten ist willkürlich und unerheblich.

Wenn wir genauer arbeiten wollen, etwa auf der Fläche F Koordinaten einführen oder über die Punktspiegelung $F \to F : x \mapsto -x$ nachdenken, dann müssen wir uns auf ein konkretes und explizites Modell festlegen.

Genau dazu dienen uns die obigen Konstruktionen: Insbesondere kubisch können wir alles vollkommen explizit als Teilmenge im $\mathbb{R}^3$ angeben. Wenn Sie möchten, führen Sie dies aus, etwa als Computer-Graphik.

Wir werden beide Techniken noch weiter vertiefen, und beide spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle: sowohl (polytopale, simpliziale, zelluläre) Komplexe als auch (topologische, glatte) Mannigfaltigkeiten.

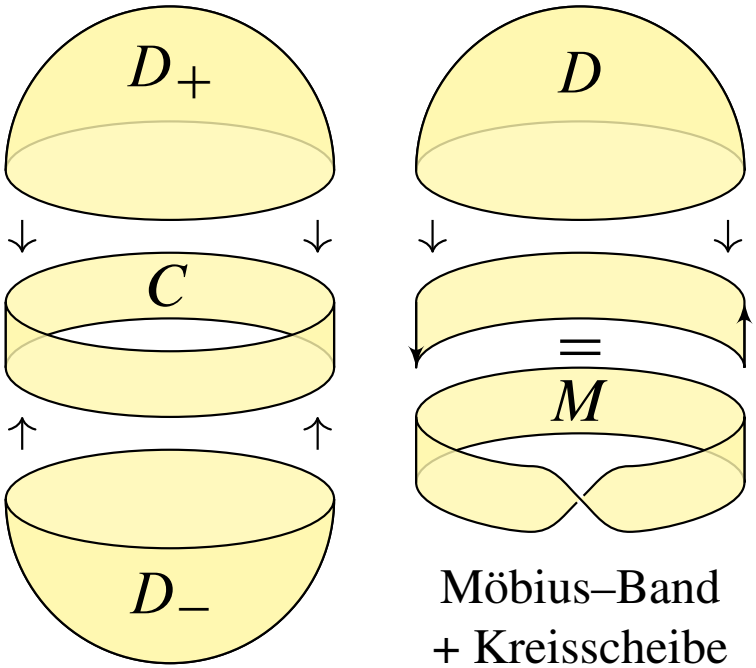
Was Sie hier sehen ist also nicht nur eine einmalige *ad hoc* Konstruktion für unsere Flächen, sondern der Anfang einer universellen Sprache zur Beschreibung geometrischer Objekte (Numerik, Gaming, CGI, CAD).

Nicht-orientierbare Flächen: die projektive Ebene

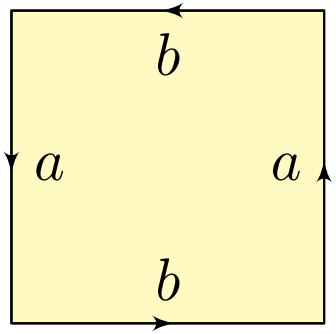
Wir identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$ von F_g^+.
Der Quotientenraum ist die **nicht-orientierbare Fläche** $F_g^- := F_g^+/\{\pm\}$.

Die Anschauung verlässt uns hier, wir brauchen topologische Werkzeuge.
Die Quotientenbildung für topologische Räume erklären wir später,
einstweilen genügt diese Ankündigung als Ausblick und Motivation.
Vielleicht fragen Sie sich, wie F_g^- aussieht. Ich habe Sie gewarnt!

Berühmtestes Beispiel ist die **reell–projektive Ebene** $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm\}$.



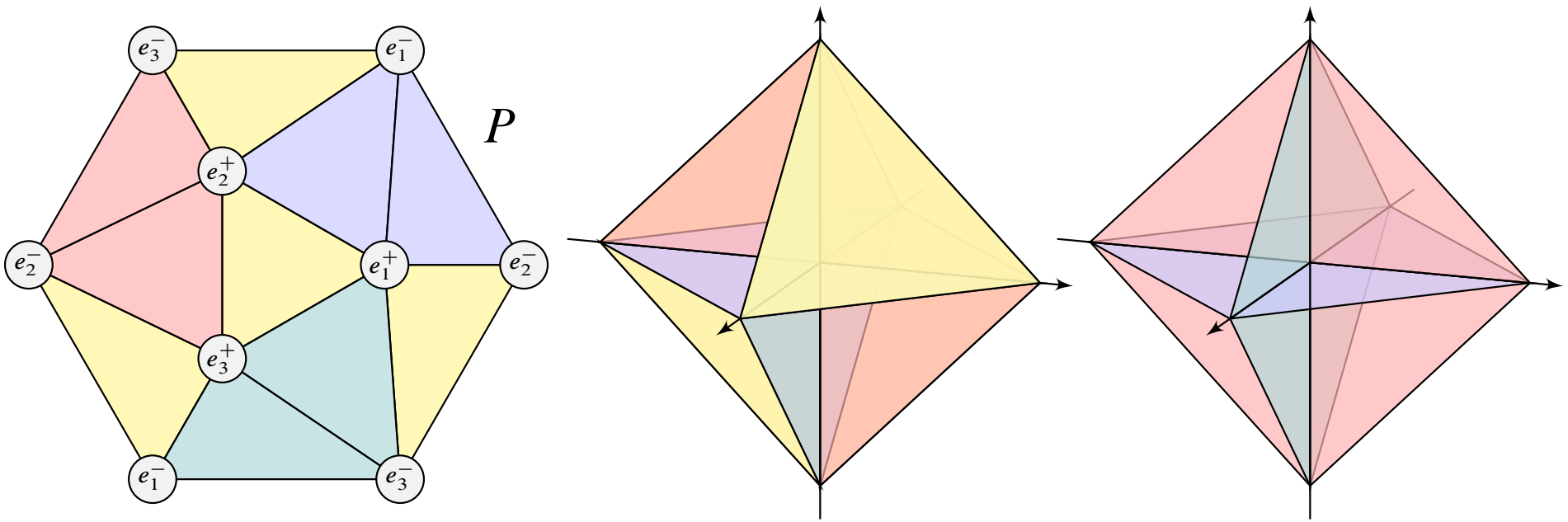
Möbius–Band
+ Kreisscheibe



Bastelbogen

Projektive Ebene als polytopaler Komplex

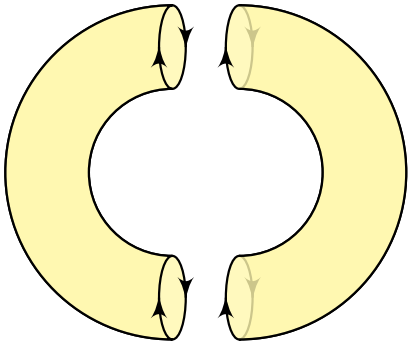
Die Konstruktion ist eigentlich leicht: Wir beginnen mit der Sphäre $\mathbb{S}^2$ und identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$. Vermutlich können Sie sich das Ergebnis, die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$, dennoch nicht recht vorstellen. Das liegt ganz einfach daran, dass Sie beschränkt sind… auf die drei Dimensionen des vertrauten Anschauungsraumes.



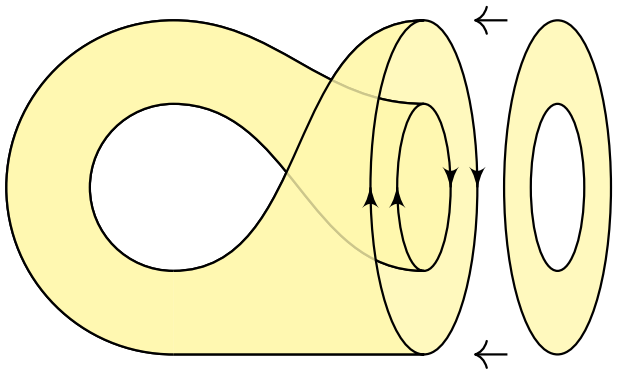
Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ lässt sich nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten! Werner Boy fand 1901 in seiner Dissertation immerhin eine Immersion $\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ mit harmlosen Doppelpunkten und nur einem Dreifachpunkt.

Nicht-orientierbare Flächen: die Kleinsche Flasche

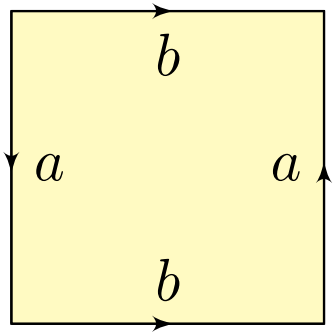
Zweit-berühmtestes Beispiel ist die **Kleinsche Flasche** $F_1^- = F_1^+/\{\pm\}$.



Torus F_1^+ zerlegt
in zwei Halbtori



Kleinsche Flasche
aus einem Halbtorus

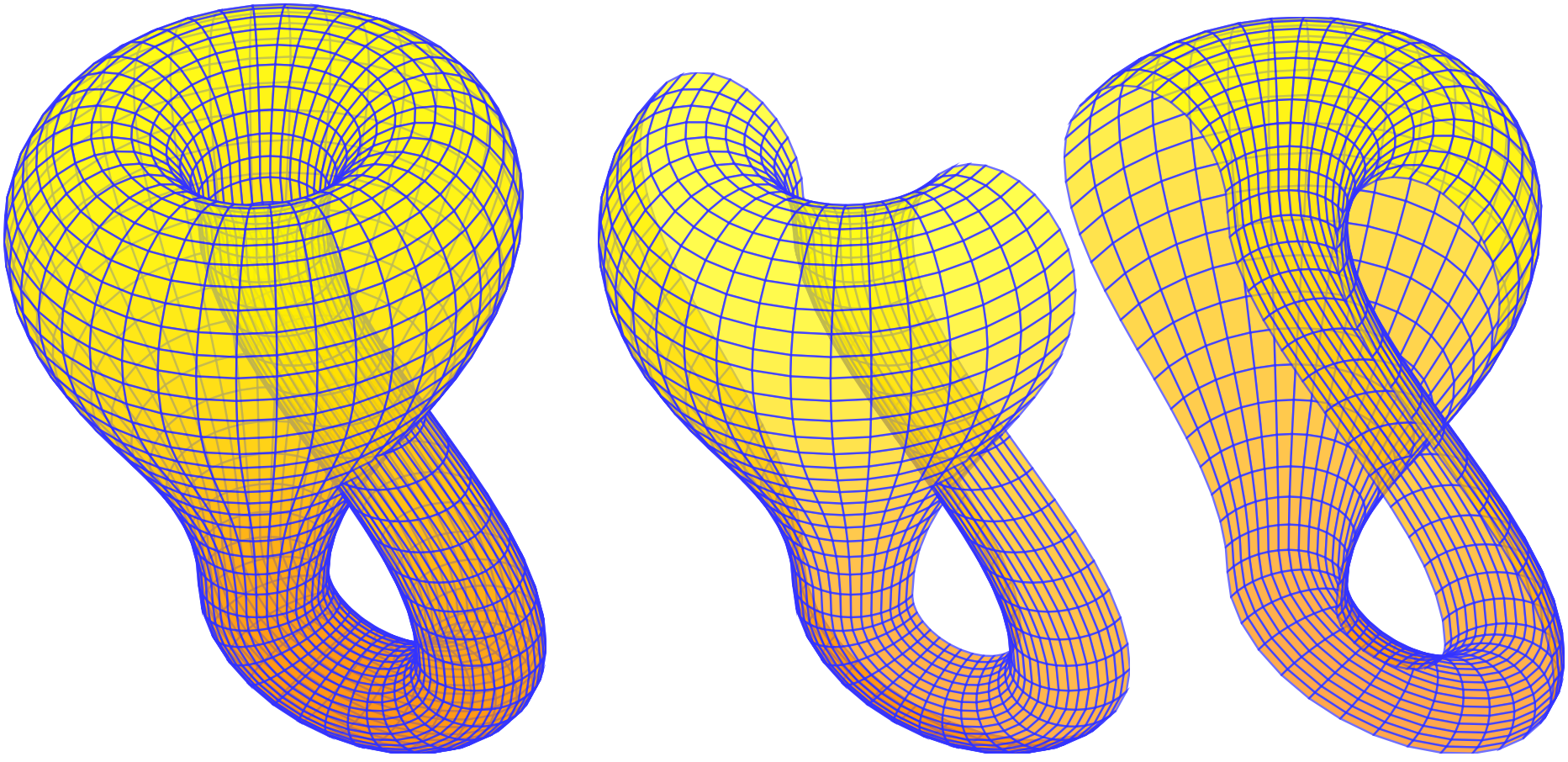


Bastelbogen

Auch hier ist die Konstruktion eigentlich leicht: Wir beginnen mit einem Torus $T = F_1^+$ und identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$. Das Ergebnis ist die Kleinsche Flasche $F_1^- = F_1^+/\{\pm\}$. Auch sie lässt sich nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten. Die Skizze zeigt nur eine Immersion $F_1^- \looparrowright \mathbb{R}^3$, die fiktiven Selbstdurchdringungen müssen wir dabei ignorieren.

Die abstrakte Konstruktion ist präzise und erfreulich leicht,
die konkrete Visualisierung fällt schwer und bleibt vage.

Kleinsche Flasche als Verklebung zweier Möbius–Bänder



Wir können fast alle Flächen im Raum $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Darüber sollten wir uns freuen. Einzige Ausnahme sind die nicht-orientierbaren, geschlossenen Flächen F_g^-. Erst im $\mathbb{R}^4$ ist für diese genügend Platz.

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

Satz A4F: Unterscheidung unserer Flächenmodelle

Für alle $g, r \in \mathbb{N}$ gilt $\chi(F^+_{g,r}) = 2 - 2g - r$ und $\chi(F^-_{g,r}) = 1 - g - r$.

Dank der topologischen Invarianz von Euler–Charakteristik, Rand und Orientierbarkeit sind keine zwei Modellflächen $F^\pm_{g,r}$ homöomorph.

Anders gesagt, aus $(g, r, \varepsilon) \neq (h, s, \delta)$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{\pm\}$ folgt $F^\varepsilon_{g,r} \not\cong F^\delta_{h,s}$.

Existieren außer unseren obigen Beispielen $F^\pm_{g,r}$ noch weitere Flächen? Erstaunlicherweise nicht! Dazu benötigen wir zwei weitere Ergebnisse:

(1) Jede Fläche X kann trianguliert werden, kurz $X \cong |\mathcal{K}|$ (Radó 1925).

(2) Ist die Fläche $|\mathcal{K}|$ kompakt und zusammenhängend, so können wir sie durch „Schneiden und Kleben“ umformen in eine der triangulierten Modellflächen $F^\pm_{g,r}$ (stückweise affin, ganz elementar und explizit).

Satz A4J: Klassifikationssatz für kompakte Flächen

Jede kompakte zusammenhängende Fläche (eventuell mit Rand) ist homöomorph zu genau einem unserer obigen Modelle $F^\pm_{g,r}$.

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

Die Skulptur *Rubato* in Malmö der schwedischen Bildhauerin Eva Hild

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

Das ist der berühmte Klassifikationssatz für kompakte Flächen!
Ich fasse nochmal zusammen und betone unser Vorgehen:

Zunächst haben wir konkrete Beispiele $F^{\pm}_{g,r}$ konstruiert und untersucht.
Jedes ist tatsächlich eine kompakte Fläche, und Satz A4F garantiert,
dass unsere Liste redundanzfrei ist, also keine Doppelungen enthält:
Je zwei Flächen dieser Liste sind zueinander nicht homöomorph!

Anschließend zeigen wir, das unsere Liste sogar vollständig ist:
Jede kompakte zusammenhängende Fläche, egal wie kompliziert sie auch sein mag, ist homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$.
Diese Vollständigkeitsaussage werden wir in Kapitel K ausführen.

Das ist das Musterbeispiel einer Klassifikation: Jede kompakte zshgde Fläche F wird bis auf Homöomorphie eindeutig durch diese drei Daten charakterisiert: Ihre Orientierbarkeit $\varepsilon(F) \in \{\pm\}$, die Anzahl $r(F) \in \mathbb{N}$ ihrer Randkomponenten sowie ihre Euler–Charakteristik $\chi(F)$; letztere lässt sich leicht in das Geschlecht $g(F)$ umrechnen. Dieser einfache Algorithmus löst das Homöomorphieproblem kompakter Flächen!

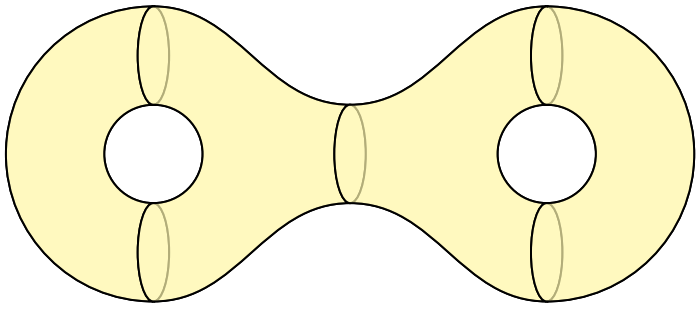
Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

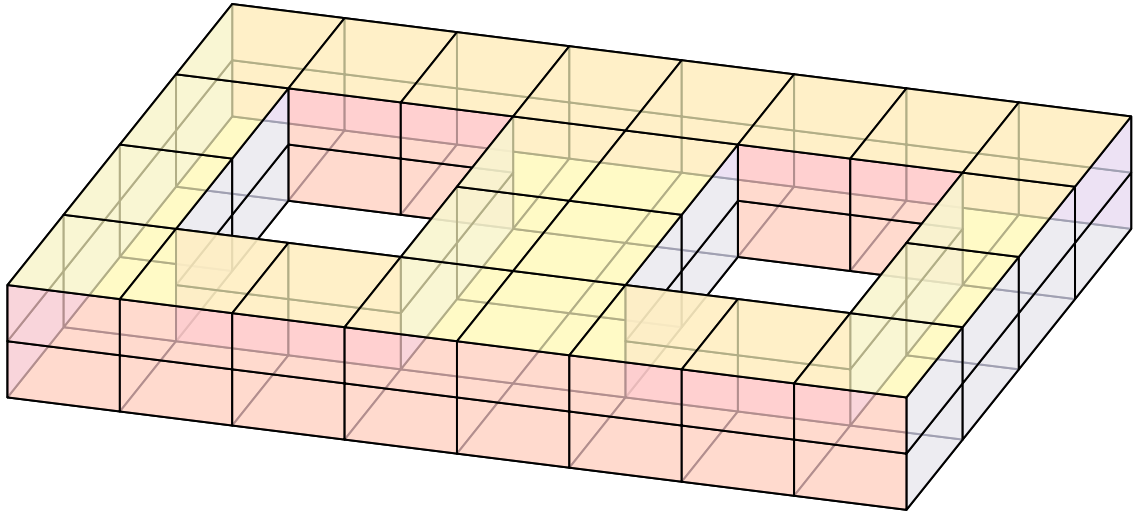
Wenn Sie dieses Einleitungskapitel gründlich durcharbeiten, werden Sie stolz feststellen, dass erste wichtige Sätze sofort in Ihrer Reichweite liegen und wir erfreulich viele hier sogar schon beweisen können.
Sie spüren bereits die Mühe, doch nießen auch sofort die Früchte.

Andere Sätze kann ich hier nur als Vorschau ankündigen; ihre Beweise benötigen die soliden Grundlagen, Begriffe und Techniken der Topologie. Genau das ist unser Ziel und unsere Motivation für die nächsten Wochen, diese Verheißungen wollen wir in den Folgekapiteln einlösen.

Nur einige wenige Sätze borge ich mir aus der Algebraischen Topologie: Die Invarianz der Euler–Charakteristik ist für Rechnungen sehr bequem, daher will ich Ihnen dieses wunderbare Werkzeug keinesfalls verwehren. Der Beweis der Invarianz beruht allgemein auf Homologie-Theorie, doch speziell für Flächen wird uns dies mit der Fundamentalgruppe gelingen. Ich nehme für Sie einen Kredit auf und zahle ihn nach und nach zurück. Das explorierende Vorgehen stellt Motivation und Anwendungen voran, der mathematisch-logische Aufbau erfolgt dann im zweiten Durchgang.

Was ist die Gesamtkrümmung einer Fläche?





Vorgelegt sei eine geschlossene Fläche F. Welche Beziehung besteht zwischen ihrer Gesamtkrümmung $\kappa(F)$ und Euler–Charakteristik $\chi(F)$? Die Antwort ist erstaunlich, ebenso elegant wie richtungsweisend:

Satz A5F: Descartes 1620, Gauß 1825, Bonnet 1848, Dyck 1888

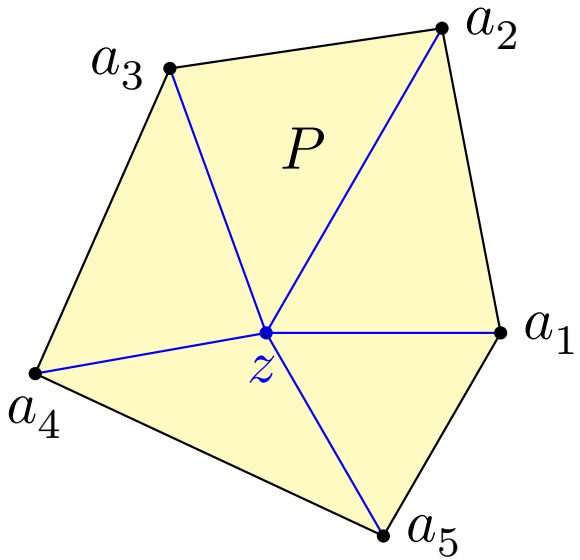
Für jede geschlossene Fläche F gilt die Gleichung $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$.

Für **glatte Flächen** lernen Sie die hierzu nötigen Begriffe und Techniken in der Differentialgeometrie. Für **polytopale Flächen** ist alles sehr viel einfacher, vollkommen elementar und sofort in unserer Reichweite!

Erinnerung: Innenwinkel eines n–Ecks

Je drei Punkte $a \neq z \neq b$ in $\mathbb{R}^d$ definieren einen Winkel mit Scheitel z:
Das **absolute Winkelmaß** $\angle(a,z,b) \in [0,\pi]$ definieren wir durch

$$\angle(a,z,b) := \arccos\left(\frac{\langle a-z \,|\, b-z\rangle}{|a-z|\cdot|b-z|}\right) \in [0,\pi].$$



Wir betrachten zunächst ein zweidimensionales Polytop $P = [a_1, \dots, a_n]$ im Raum $\mathbb{R}^d$.

Der **Innenwinkel** in $a_k \in \operatorname{vert} P$ ist $\angle(P, a_k) := \angle(a_{k-1}, a_k, a_{k+1})$.

Lemma A5c: Innenwinkel eines n–Ecks

Die Innenwinkelsumme $\angle P := \sum_{k=1}^{n} \angle(P, a_k)$ beträgt $\angle P = (n-2)\pi$.

Beweis: Wir zerlegen P in Dreiecke und summieren deren Innenwinkel.

Wie definieren wir die Krümmung einer polytopalen Fläche?

Definition A5D: Krümmung einer polytopalen Fläche

Sei $F = |\mathscr{K}| \subseteq \mathbb{R}^d$ eine geschlossene polytopale Fläche. Ihre **Krümmung** im Eckpunkt $z \in F$ ist der Vollwinkel 2π minus die anliegenden Winkel:

$$\kappa(F, z) := 2\pi - \sum_{P \gg z} \angle(P, z)$$

Jeder Nicht-Eckpunkt $z \in F$ wird zu einem Eckpunkt nach geeigneter Unterteilung von $\mathscr{K}$ zu $\mathscr{K}'$, wie oben gezeigt, und dann gilt $\kappa(F, z) = 0$. Die Krümmung ist daher immer konzentriert in den Ecken $z \in \operatorname{vert} \mathscr{K}$.

Die **Gesamtkrümmung** der Fläche F ist die Summe

$$\kappa(F) := \sum_{z \in F} \kappa(F, z).$$

Bemerkung: Anschaulich misst die lokale Krümmung κ im Punkt z das Wachstum von Kreisen um z für kleine Radien r, hier ist Umfang $\operatorname{vol}_1 S(z, r) = (2\pi - \kappa)r$ und der Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2 B(z, r) = (\pi - \kappa/2)r^2$.

Der Satz von Gauß–Bonnet mit genial-einfachem Beweis

Satz A5F: Gauß–Bonnet für polytopale Flächen

Für jede geschlossene polytopale Fläche $F = |\mathcal{K}|$ gilt $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$.

Beweis: Der Komplex $\mathcal{K}$ habe f_0 Ecken, f_1 Kanten und f_2 Facetten.
Wir summieren die Innenwinkel aller Facetten gemäß Lemma A5C:

$$\sum_{P\in\mathcal{K}_2}\sum_{z\ll P}\angle(P,z) = \sum_{P\in\mathcal{K}_2}[n_P-2]\pi = \pi\Big[\sum_{P\in\mathcal{K}_2} n_P\Big] - 2\pi f_2 = 2\pi f_1 - 2\pi f_2$$

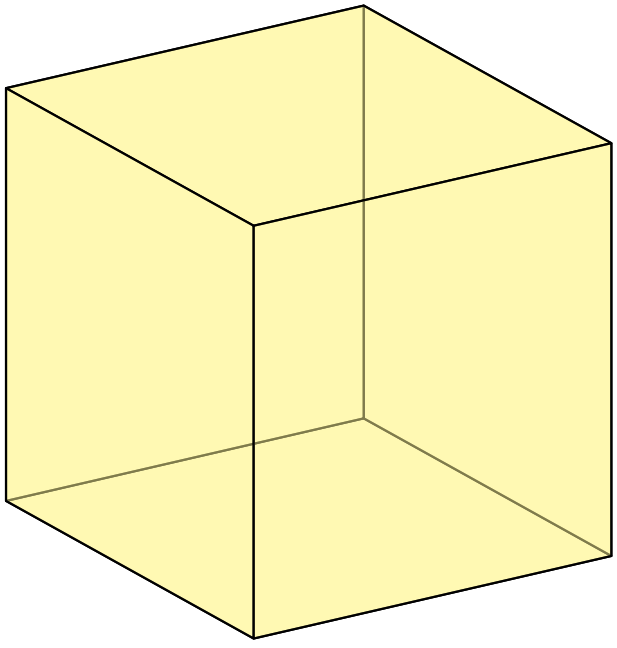
Jede Facette $P \in \mathcal{K}_2$ hat n_P Ecken und n_P Kanten. Jede Kante liegt in genau zwei Facetten, da die Fläche F keinen Rand hat. Somit gilt:

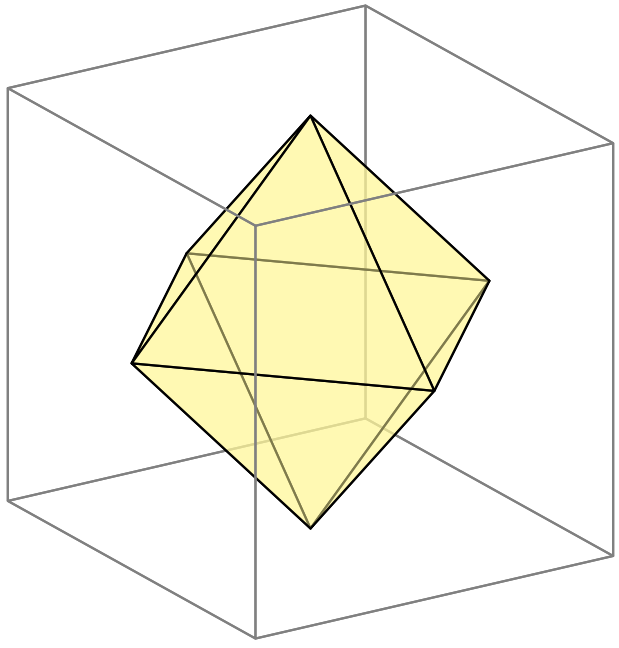
$$\kappa(F) = \sum_{z\in F}\kappa(F,z) = \sum_{\{z\}\in\mathcal{K}_0}\Big[2\pi - \sum_{P\gg z}\angle(P,z)\Big] = 2\pi f_0 - 2\pi f_1 + 2\pi f_2$$

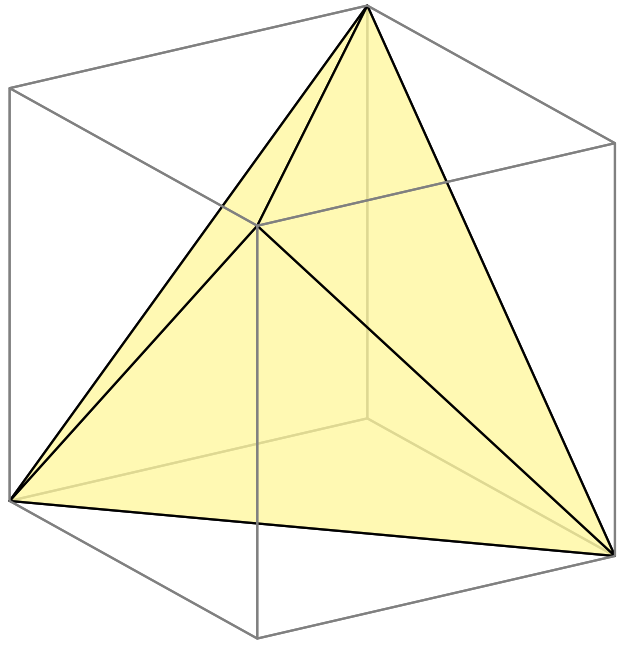
Die Gesamtkrümmung ist also gleich $2\pi \cdot \chi(F)$, wie behauptet. QED

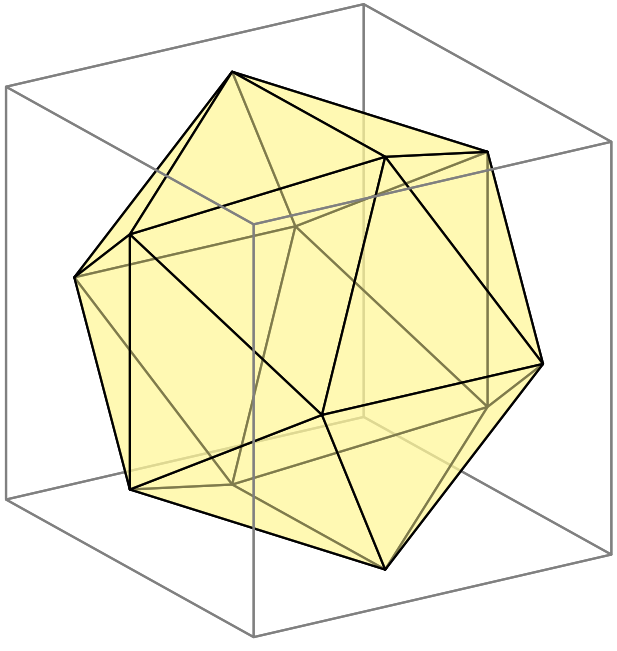
Übung: Gilt das allgemein für kompakte polytopale Flächen mit Rand? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden Satz!

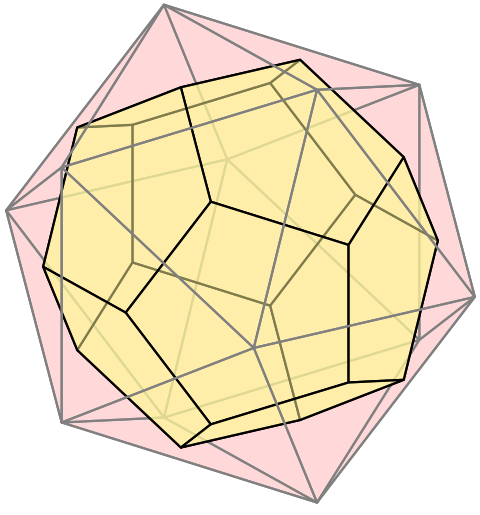
Beispiele zur Krümmung: die fünf platonischen Körper

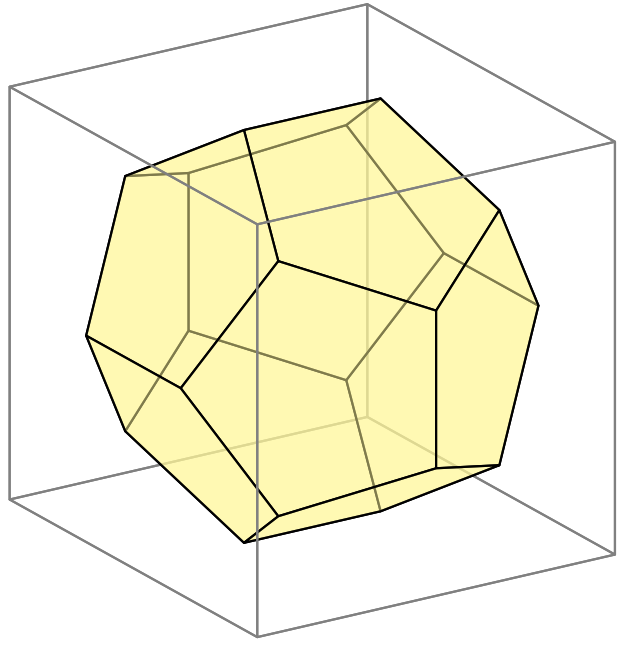












Was ist so aufregend am Satz von Gauß–Bonnet?

Der Satz von Gauß–Bonnet ist eine fundamentale Beziehung zwischen lokalen geometrischen Daten (der Krümmung) einerseits und globalen topologischen Daten (wie der Euler–Charakteristik) andererseits.

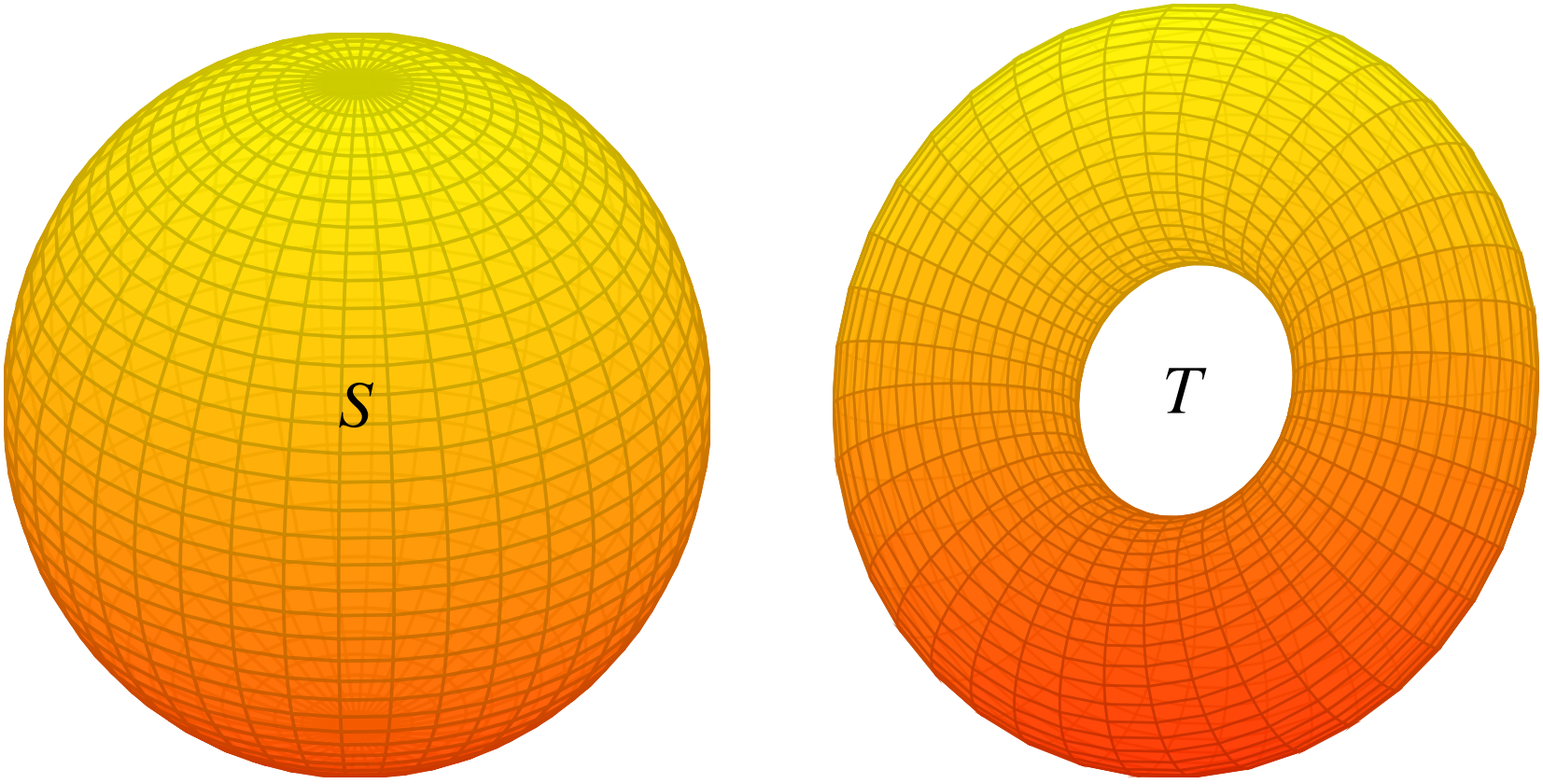
Sie ist die erste in einer Reihe wichtiger Formeln dieses Typs.

Geometrische Eigenschaften bleiben unter Isometrien erhalten, topologische Eigenschaften allgemein unter Homöomorphismen. Jede Beziehung zwischen diesen beiden Welten ist bemerkenswert!

Aufgabe: Als erste Anwendung, nennen Sie alle geschlossenen zshgden Flächen F mit überall nicht-negativer Krümmung $\kappa \geq 0$.

Lösung: Dank Gauß–Bonnet A5F gilt $\chi(F) \geq 0$. Dank Klassifikation A4J erfüllen dies unter allen denkbaren Flächen nur vier, nämlich die Sphäre $\mathbb{S}^2 \cong F_0^+$ und der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$, sowie ihre nicht-orientierbaren Quotienten, die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm\} \cong F_0^-$ und die Kleinsche Flasche $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm\} \cong F_1^-$. Diese vier Kandidaten lassen sich tatsächlich mit überall nicht-negativer Krümmung $\kappa \geq 0$ realisieren.

Von polytopalen zu glatten Flächen und zurück



Die polytopale Formulierung der Krümmung ist elegant und elementar.
Auch den Satz können wir direkt und ohne weitere Hilfsmittel beweisen.
Die glatte Formulierung erfordert Werkzeuge der Differentialgeometrie:
glatte Mannigfaltigkeiten, Riemannsche Metrik, Krümmung, Integral, …
Beide Sichtweisen gehen durch Approximation ineinander über.
Mehr zu diesem schönen Thema lernen Sie in der Geometrie…

Von polytopalen zu glatten Flächen und zurück

Damit beschließen wir unseren ersten Rundgang durch die Topologie.
Diese Verheißungen wollen und werden wir in der Folge einlösen.

Mein Ziel für dieses Kapitel war es, einen ersten Überblick zu geben,
und Ihnen zugleich schon erste handfeste Werkzeuge bereitzustellen,
sodass Sie nun selbständig und sicher damit arbeiten können.

Unsere gut abgestimmten Übungen geben Ihnen Gelegenheit dazu.
Sie werden erfreut feststellen, wie viel Sie nun schon selbst können.
Bitte nehmen Sie diese Aufgabe gewissenhaft wahr. Nur so gelingt es.

Auch wer Mathematik hauptsächlich für die Anwendungen auf Physik und andere Wissenschaften lernt, also vielfach sich selbst weitere mathematische Hilfssätze zurechtlegen muss, kann auf dem betretenen Pfade nur dann sicher weiterschreiten, wenn er gehen gelernt hat, d.h. zwischen falsch und wahr, zwischen Vermutungen und Beweisen (oder, wie manche so schön sagen, zwischen unstrengen und strengen Beweisen) unterscheiden kann.
Edmund Landau (1877–1938), *Grundlagen der Analysis* (1930)

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly
was some unprocessed data that should have been added to the
this extra page has been added to receive it.
If you rerun the document (without altering it) this surplus p
away, because LaTeX now knows how many pages to expect fo
document.