Grundlagen der Topologie

analytisch – geometrisch – algebraisch

erkennen.
beweisen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
eiserm.de/lehre/Topologie

Universität Stuttgart

Sommersemester 2024
Stand 24. April 2024

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Urheberrecht und Haftungsausschluss

Die hier angebotenen Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen zu nicht-kommerziellen Zwecken in der Lehre verwendet werden, sofern die Quelle wie folgt vollständig angegeben wird.

> Prof. Dr. Michael Eisermann: Vorlesungsunterlagen zur Topologie,
> Institut für Geometrie und Topologie (IGT), Universität Stuttgart,
> michael-eisermann.de/lehre/Topologie

Diese Unterlagen werden genutzt zur Vorlesung *Topologie* und richten sich vornehmlich an Studierende der Mathematik. Sie vermitteln einschlägiges mathematisches Grundlagenwissen.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich. Bitte betrachten Sie alle Quellen kritisch, wie immer; nicht alles ist wahr und gut und hilfreich.

Wie nutzen Sie diese Notizen?

Diese Vortragsfolien sind ein Extrakt meines Skripts zur Topologie, das durch Vorlesungen der letzten Jahre gewachsen und erprobt ist. Vortrag und Skript haben verschiedene Ziele und ergänzen sich: Der Vortrag gibt einen Überblick, das Skript dient zur Vertiefung.

Ich bemühe mich in der Vorlesung, die zentralen Ideen zu motivieren und die wesentlichen Definitionen, Sätze und Beweise präzise auszuführen. Diese Darstellung ist so ausführlich wie nötig und so knapp wie möglich; einiges verstehen Sie sofort, für anderes benötigen Sie Zeit und Muße.

Um diese Ideen und Werkzeuge wirklich zu begreifen, müssen Sie alles selbst in die Hand nehmen, erproben, anwenden, vertiefen, kurz: üben! Das Skript bietet Ihnen hierzu passende Übungen mit Lösungen sowie zahlreiche weitere Illustrationen, Erläuterungen und Ergänzungen.

Auf unserer Lernplattform Ilias finden Sie neben den Vorlesungsvideos zudem unser wöchentliches Topologie-Quiz und die Übungsblätter mit Hausaufgaben sowie unsere Lösungen nach Abgabe der Aufgaben. Forum und Umfrage runden das Gesamtpaket ab.

Wie nutzen Sie diese Notizen?

Ich möchte Vortrag und Skript synchron halten, soweit dies möglich ist. Die Nummerierung der Abschnitte, Definitionen, Sätze, Beispiele usw. habe ich daher beibehalten, auch wenn dadurch Sprünge entstehen. Der Übergang zwischen Vortrag und Skript wird dadurch nahtlos.

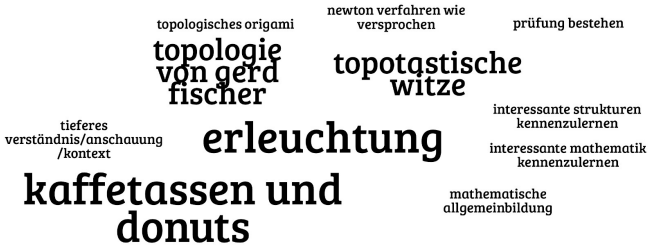
Diese Vorlesung ist eine Einführung, zwar gründlich doch begrenzt. Mit dem ausführlicheren Skript bietet sie eine Brücke zur Literatur, sie ist in sich geschlossen und zugleich offen, ein erster Anfang. Bitte lesen Sie Lehrbücher, sobald Sie sich sicher genug fühlen!

Es gibt wahrlich viele exzellente Bücher zur Mathematik, insbesondere auch zur Topologie und ihren vielfältigen Ausprägungen, Vertiefungen und Anwendungen etwa als analytisch-mengentheoretische Topologie, algebraische, geometrische, differentielle, ….

Nur durch eigenständige Lektüre lernen Sie verschiedene Sichtweisen kennen in mathematischem Stil und Inhalt, Auswahl und Aufbau, …. Selbst wenn Sie manche Lehrbücher zunächst nur anlesen, sind dies doch wichtige Kondensationskeime um später darauf zurückzukommen.

Topologie 2022 – Worauf freuen und was erhoffen Sie sich?

Bevor ich über die Topologie spreche, beginnen wir bei Ihnen:
Was erhoffen Sie sich von dieser Veranstaltung zur Topologie?



Willkommen zur Topologie!

Meine Ziele und Wünsche für diese Veranstaltung:

1. Freude an Mathematik! Wir wollen unseren Spaß haben.
   Das klingt egoistisch, doch vielleicht springt der Funke über.
2. Sie engagieren sich kontinuierlich, wir betreuen Sie bestens.
   Das ist Ihr Schlüssel zu Ihrem Erfolg. Gestalten Sie Ihr Studium!
3. Sie lernen wunderschöne und nützliche Mathematik.
   Gemeinsam schaffen wir dafür beste Voraussetzungen.

Sie sind jung, lernfähig, wissbegierig. Die mathematischen Werkzeuge, die Sie hier in Ihrem Studium erlernen, nützen Ihnen ein Leben lang. Ihre Investition lohnt sich, jetzt schon kurzfristig, noch mehr langfristig.

Ich bin zu alt, um nur zu spielen,
zu jung, um ohne Wunsch zu sein.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust* (1808)

Wir bieten Ihnen eine sensationell gute, preisgekrönte Veranstaltung. Diese verlangt Ihr volles Engagement. Prüfen und entscheiden Sie sich!

Was macht die Topologie so einzigartig?

Viele halten die Topologie für abstrakt und schwierig,
doch nur Wenige haben Recht!

Sie wissen aus Erfahrung: Analysis ist konkret… und dadurch beliebig kompliziert. Lineare Algebra ist abstrakt… und dadurch meist einfach. Die Topologie ist beides: wunderbar abstrakt und vollkommen konkret! Mathematik zu studieren ist harte, ehrliche Arbeit… und es lohnt sich.

Erfahrungsgemäß bereitet die Topologie Teilnehmer:innen nachhaltig Freude, deshalb wurde unsere Lehre mehrfach mit Preisen ausgezeichnet.

We choose to study Topology this very semester,
not because it is easy, but because it is hard,
because that goal will serve to organize and
measure the best of our energies and skills.
frei nach John F. Kennedy (1917–1963)

Ich freue mich, dass Sie sich für die Topologie entscheiden. Freuen Sie sich auf ein spannendes und lehrreiches Semester!

Was macht die Topologie so einzigartig?

Ihr Mathematik-Studium hat zwei zentrale, sich ergänzende Ziele: **Wissen und Können**, Verstehen und Anwenden, Theorie und Praxis. Darin liegt der besondere Reiz der Mathematik, und ihre Schwierigkeit. (Ich betone dies, weil es für viele keineswegs selbstverständlich ist.)

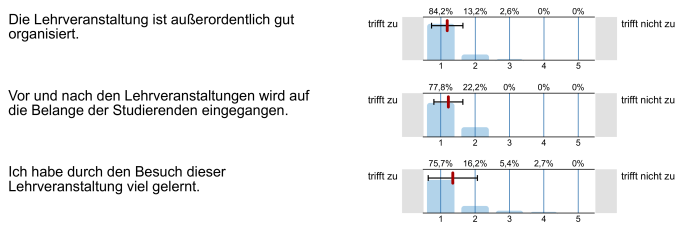
Die Lineare Algebra behandelt Vektoren und Matrizen, lineare Räume und lineare Abbildungen. Das sind sehr einfache Objekte, aber abstrakt. Abstraktion hilft, sie strukturiert und vereinfacht! Ein Vektorraum etwa sieht immer gleich aus, Sie müssen nur seine Dimension kennen.

Die Analysis behandelt reelle Zahlen und Funktionen, Stetigkeit und Konvergenz, Ableitungen und Integrale, uvm. Das ist ganz konkret, kann aber beliebig kompliziert werden: Eine reelle Funktion, selbst stetig, kann die verrücktesten Dinge tun! Diese Komplexität liegt in der Natur.

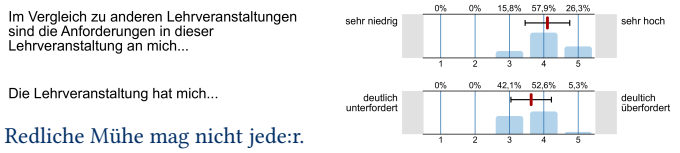
Meine scherzhafte Formulierung entspricht jahrzehntelanger Erfahrung: Die Topologie vereint beide Aspekte: Sie ist sehr konkret und hilft direkt. Sie kann auch beliebig kompliziert und sehr abstrakt sein. Das ist gut so: Abstrakt heißt nicht anwendungsfern, sondern vielseitig anwendbar!

Unsere Topologie ist sensationell gut.

009



⚠ Seien wir klar und ehrlich: Studieren heißt sich bemühen!



Redliche Mühe mag nicht jede:r.
Ein einsamer Hater schrieb: „Alles in allem eine Vorlesung, für die man sehr viel selbst tun musste, und die ich niemandem empfehlen würde."

Unsere Topologie ist sensationell gut.

010 Erläuterung

Wir müssen uns entscheiden zwischen dem richtigen Weg und dem leichten.
Albus Dumbledore zu Harry Potter auf die Frage der Topologie

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!
[Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!]

Warum erzähle ich Ihnen das? Sie können mit uns rechnen!
Die Mathematik bietet viel und verlangt viel, das gilt insbesondere für die Topologie. Diese Veranstaltung ist unser Angebot an Sie.
Ich möchte, dass Sie vernünftig handeln und erfolgreich studieren.

Ich kann Ihnen den Weg zeigen, doch gehen müssen Sie ihn selbst.
Die Rückmeldungen sind insgesamt sehr positiv, die Befragungen sind sensationell gut, besonders für eine Grundvorlesung am Studienanfang.
Unser Gesamtpaket zur Topologie ist hervorragend.

Dafür arbeite ich extrem hart, genauer: Ihr gesamtes Topologie-Team!
Von Ihnen erwarte ich dasselbe: ernsthaftes Engagement und Mitarbeit.
Mir ist wichtig, diese Grundfrage anfangs ein für alle mal zu klären.
Anschließend können wir uns auf Inhalte konzentrieren.

Full disclosure: Was sagt der einsame Hater?

011 Erläuterung

Die meisten Rückmeldungen sind begeistert. Doch es gibt den gelegentlichen Hater, den ich zu verstehen suche, so wie diese verlorene Seele: (1) *„In den Vorlesungsvideos wurde größtenteils nur der Text auf den Folien vorgelesen…"* Bitte lösen Sie sich von pauschalen Vorurteilen und nutzen Sie hilfreiche Angebote. Um Sie zu unterstützen, gehe ich Schritt für Schritt alles mit Ihnen durch. Zur visuellen Unterstützung erstelle ich sorgfältig meine Folien. Ich finde es nur fair und ehrlich, diese ganz bewusst vorzulesen und anschließend zu erklären. (2) *„… und Hinweise zu unzähligen Dingen gegeben, die man selbst leicht nachrechnet."* Ja, Erläuterung sind mir sehr wichtig. (3) *„Es wurden zwar zahlreiche Beispiele gegeben, diese verwirrten allerdings oft noch mehr als dass sie zum Verständnis des Stoffes beitrugen."* Genau da hilft das eigenständige Nachrechnen. (4) *„Insgesamt erscheint das Ziel der behandelten Inhalte oftmals nicht klar."* Das ist schade, denn darauf achte ich sehr. Zuhören hilft. (5) *„Allgemein sind die Scheinkriterien in dieser Vorlesung vergleichsweise hoch."* Aber nein, jede ernsthafte Veranstaltungen erfordert Arbeit. (6) *„Die Übungsblätter wirken mit Text überflutet."* Die motivierenden Erläuterungen auf der Rückseite finden die meisten hilfreich, man darf sie auch ignorieren. (7) *„Die scheinbar witzig gemeinten Anmerkungen, die sich durch Vorlesung und Übung ziehen, wirken unpassend und lassen Ernsthaftigkeit vermissen (so im übrigen auch noch in keiner Vorlesung erlebt)."* Stimmt, humorlos können andere besser. (8) *„Anstatt in der Übung das aktuelle Übungsblatt zu besprechen, wurde irgendwie über das neue Blatt geredet."* Ja, wichtig ist, im gemeinsamen Takt zu bleiben. (9) *„Alles in allem eine Vorlesung, für die man sehr viel selbst tun musste, und die ich niemandem empfehlen würde."* Ja, Ihre eigene Arbeit ist gut und wichtig. Die Teilnahme ist freiwillig. Überlegen Sie, was Sie wirklich wollen: schöne Mathematik, illustrative Beispiele, gute Erklärungen, intensive Betreuung, eigener Lernerfolg, … oder eben nicht.

Seien wir ehrlich, respektvoll und konstruktiv!

012 Erläuterung

Ich nehme Ihr Lob und Ihre Kritik sehr ernst, ich versuche sehr genau, Ihre Rückmeldungen zu verstehen, daraus zu lernen, besser zu werden. Denselben Ernst und dieselbe Redlichkeit erwarte ich auch von Ihnen. Bitte formulieren Sie daher Ihre Vorschläge ehrlich und konstruktiv.

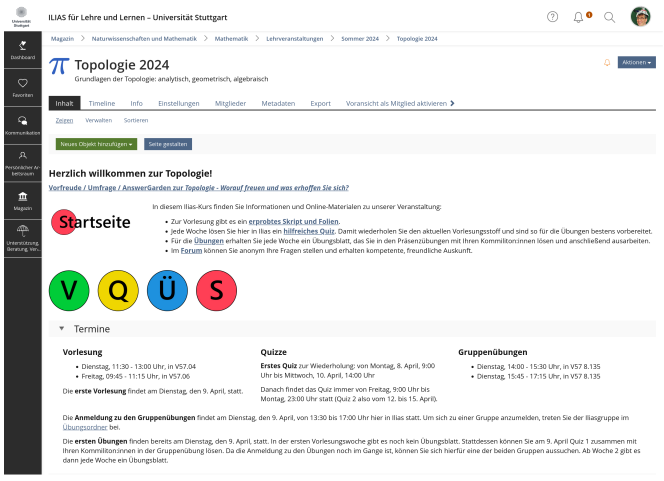
Natürlich ist es schwierig bis unmöglich, es allen genehm zu machen. Bedürfnisse und Möglichkeiten der Studierenden sind sehr heterogen. Wir helfen Ihnen, Schritt für Schritt, das gesamte Semester, und bauen dabei auf Ihr konstantes, aufrichtiges Bemühen. Hierzu sagt Konfuzius:

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.

Viele Faktoren fördern Ihren Erfolg, vor allem jedoch: Ihre Aktivierung!
Man kann ein Pferd zum Brunnen führen, aber trinken muss es selbst.
Darauf antworten leistungspunktdressierte Bachelor-Studierende gerne: *Ein gutes Pferd springt nur so hoch, wie es muss.* Das wäre sehr schade, denn ein Studium kann so viel mehr sein. Machen Sie das beste daraus!

Unser Ilias-Kurs ist informativ und liebevoll gestaltet.

013



Mein Skript und die extrahierten Folien sind frei erhältlich.

014

Lernziele und Inhalte laut Modulhandbuch

015 Erläuterung

Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse der Topologie und ihrer Anwendungen: Sie können sicher mit topologischen Begriffen, Konstruktionen und Argumenten umgehen; die behandelten Methoden selbstständig, sicher, korrekt, kritisch und kreativ anwenden; mathematische Probleme korrekt formulieren und selbständig lösen; Problemstellungen abstrahieren und mathematisch argumentieren.

Inhalte: Grundlagen der allgemeinen Topologie: Metrische Räume, topologische Räume, Konvergenz und Stetigkeit, Unterräume und Quotientenräume, Summenräume und Produkträume, Abzählbarkeit, Trennungsaxiome, Metrisierbarkeit, Kompaktheit, Zusammenhang, Homotopie, Anwendungen. Grundlagen der geometrischen Topologie: Simplizialkomplexe, Euler–Charakteristik, Umlaufzahl / Abbildungsgrad, Topologie des euklidischen Raumes, Klassifikation der geschlossenen Flächen, Anwendungen. Grundlagen der algebraischen Topologie: Fundamentalgruppen und Überlagerungen, Anwendungen.

Ziele Ihrer universitären Ausbildung

016 Erläuterung

Aus dieser ambitionierten Zielsetzung ergibt sich die Vorgehensweise:

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Wir gehen keinen verlockend leichten Irrweg, sondern gleich den einzig richtigen. Der Anstieg ist steil, doch das Ziel ist hehr. Es lohnt sich!

Freuen Sie sich auf schöne und nützliche Mathematik! 017

Einführung: Was ist und was soll die Topologie?

Analytische Topologie	Universelle Werkzeuge	Geometrische Topologie	Algebraische Topologie
Distanzlehre: Metrik	Kompaktheit	Simpliziale Komplexe	Fundamental-gruppen
Stetigkeitslehre: Topologie	Zusammenhang und Homotopie	Abbildungsgrad, Topologie des $\mathbb{R}^n$	Überlagerungen
Topologische Konstruktionen	Die Sprache der Kategorien	Klassifikation der Flächen	... wird fortgesetzt

Zeitplan für dieses Semester 018 Erläuterung

☺ Alle Informationen zur Topologie finden Sie in unserem liebevoll gestalteten Ilias-Kurs sowie ergänzend auf der öffentlichen Webseite.

Vorlesung ab dem 09.04.2024:

VL	wöchentlich	Dienstag	11:30 – 13:00	V 57.04
VL	wöchentlich	Freitag	9:45 – 11:15	V 57.06

Gruppenübungen ab der ersten Vorlesungswoche.
Anmeldung über Ilias ab Dienstag, 09.04. um 13:30

Der **Übungsschein** ist Voraussetzung für die Abschlussklausur: mindestens 50% in den wöchentlichen Quizzen und Hausübungen.

Abschlussklausur: Sep/Okt und Feb/Mrz, siehe C@mpus

Doch vorerst dieses halbe Jahr / Nehmt ja der besten Ordnung wahr.
Fünf Stunden habt ihr jeden Tag; / Seyd drinnen mit dem Glockenschlag!
Habt euch vorher wohl präparirt, / Paragraphos wohl einstudirt,
Damit ihr nachher besser seht, / Daß er nichts sagt, als was im Buche steht.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust* (1808)

Wie gelingt Ihnen die Topologie? 019 Erläuterung

Falls Sie (auch) wegen der Leistungspunkte hier sind, erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich studieren. Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus Ana 1-3 und Lina 1-2
- **wöchentliche Bearbeitung** von Vorlesung, Quiz und Übungen

Die Topologie entspricht 9 Leistungspunkten: insgesamt 270h

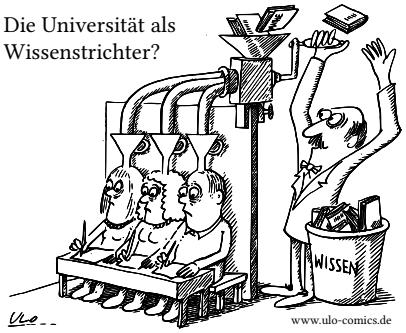
- **Präsenz:** 14 Wochen à 4h Vorlesung + 2h Übung ≈ 80h
- **Individuelle Arbeit:** ein weiterer Tag (8h) pro Woche ≈ 110h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: 2 bis 3 Wochen ≈ 80h

Das ist keine Übertreibung sondern jahrzehntelange Erfahrung:
6 Präsenzstunden pro Woche erfordern 12 Stunden eigene Arbeit.
Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht.
Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.
[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

Wie gelingt Ihnen das Studium? 020 Erläuterung

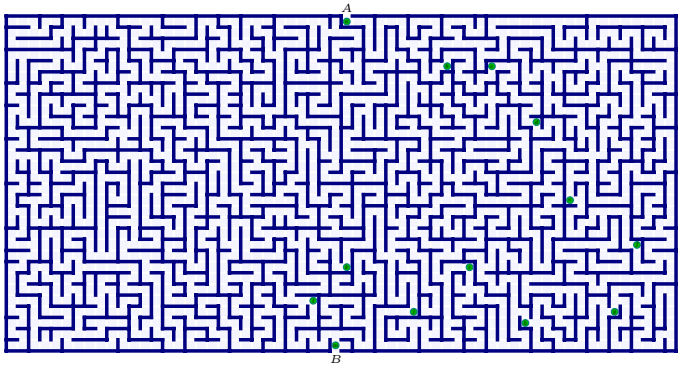
Die Universität als Wissenstrichter?



Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrisische Motivation! Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Sätze erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig durcharbeiten, um es zu beherrschen.

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen 021

Ich führe Argumente sorgsam vor. Sie arbeiten alles gründlich nach.



Ich zeige Ihnen den Weg von A nach B. Dazu teilen wir uns die Arbeit:
Ich erkläre die wesentlichen Etappen. Sie ergänzen und klären Details.

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen 022 Erläuterung

⚠ Ihr Uni-Studium fordert und fördert Ihr selbständiges Arbeiten!
Ich vertraue darauf, dass Sie die nötige Zeit nehmen und lernen wollen.
Der Schlüssel zu Ihrem Erfolg sind Ihre Aktivierung, Ihre Investition, Ihr persönliches Engagement und ihre kontinuierliche, ernsthafte Mitarbeit.

Ich präsentiere Ihnen schöne und nützliche Mathematik und leite Sie durch die Vorlesung. Kleinschrittig oder summarisch? Zu große Schritte frustrieren und entmutigen, zu kleine Schritten bremsen und langweilen. Das richtige Tempo ist eine Frage der Erfahrung und der Verhandlung.

In Vorlesung $n+1$ nutze ich die Ergebnisse der Vorlesungen 1 bis n.
In der Mathematik bauen Begriffe und Techniken stark aufeinander auf, mehr als in jeder anderen Wissenschaft. Das ist Fluch und Segen zugleich, sowohl Herausforderung beim Erlernen als auch Effizienz im Aufbau.

Shakespeares Werke können Sie in nahezu beliebiger Reihenfolge und Auswahl lesen. Für mathematische Lehrwerke gilt dies definitiv nicht! Arbeiten Sie kontinuierlich mit, nach und vor, Vorlesungen und Übungen, bleiben Sie am Ball, nur so kann es gelingen, so macht es allen Freude.

Wie detailliert soll die Darstellung sein? 023 Erläuterung

Beweise in einem Lehrbuch für Studienanfänger sind recht ausführlich, für ein Expertenpublikum werden Beweise deutlich knapper formuliert. Semester für Semester entwickeln Sie sich vom Anfänger zum Experten.

Was also ist ein Beweis genau? Wie detailliert ausgeführt muss er sein? Wie groß dürfen die logischen Schritte maximal sein? Hierzu sind zwei Antworten möglich: formal-dogmatisch oder sozial-pragmatisch.

Dogmatische Antwort: In einem vollständig formalisierten Beweis ist jeder Schritt die Anwendung einer Schlussregel. Wir beginnen mit einer Liste von wahren Aussagen (Axiome, Voraussetzungen) und erweitern diese schrittweise durch logisches Schließen, jeweils mit Angabe der verwendeten Schlussregel. Am Ende steht die ersehnte Behauptung.

Im obigen Bild ist das der vollständig ausgeführte Lösungsweg, etwa als eine lange Folge von kleinen Beweisschritten, jeder davon ist elementar. Die Richtigkeit kann ein Computer mechanisch prüfen (*proof checker*). Für menschliche Leser ist die mechanische Prüfung leider mühsam und wenig lehrreich, sie vermittelt meist keine Idee, Vision oder Inspiration.

Wie detailliert soll die Darstellung sein? 024 Erläuterung

Pragmatische Antwort: Traditionell schreiben wir Beweise nicht für Maschinen, sondern für Menschen. Es gibt immer mehr Ausnahmen, etwa in der Programmierung, aber denken wir an diese Vorlesung.

Für ein menschliches Gegenüber ist es üblich, nicht alle elementaren Schritte auszuführen, sondern den Beweisgang allein durch geeignete Zwischenpunkte abzustecken. Das ist effizienter, sowohl für den Sender als auch für den Empfänger. Die Zwischenpunkte sollen eng genug sein, sodass der Empfänger den Weg dazwischen selbst rekonstruieren kann.

Das rechte Maß, ob detailliert ausgeführt oder nur grob skizziert, hängt somit vom Empfänger ab! Beweise in Lehrbüchern sind recht detailliert, Artikel in Fachzeitschriften sind knapper und Beweise oft nur skizziert. Die Komprimierung verschiebt die Beweislast von Sender zu Empfänger. Die Balance ist eine Kunst, sie beruht auf Konvention und Erfahrung.

Beispiel: Im Aufbau dieser Vorlesung versuche ich, die entscheidenden Zwischenschritte anzugeben. Routinierte Rechnungen hingegen führe ich meist nicht aus, sondern übertrage sie Ihnen. Das ist richtig so!

Legende / Leseanleitung: Folien zur Topologie

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen; dies kennzeichnet die Folien, die in der Vorlesung behandelt werden. Ich möchte Vortrag und Skript synchron halten, soweit dies möglich ist. Die Nummerierung der Abschnitte, Definitionen, Sätze, Beispiele usw. habe ich daher beibehalten, auch wenn dadurch Sprünge entstehen. Der Übergang zwischen Vortrag und Skript wird dadurch nahtlos.

Ich präsentiere hier Ideen, Techniken und Anwendungen, Definitionen und Sätze, Aufgaben und Lösungen. Dabei versuche ich, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung und den Lesern als Erläuterung.

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem ersten Kapitel zur Vorschau; dies gibt zunächst eine Übersicht zentraler Themen der Topologie und dient somit zu einer frühen Orientierung, als Ausblick und Motivation. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Kapitel A: Was ist und was soll die Topologie?

A1 Homöomorphismen und Invarianten
A2 Euklidische Geometrie: Polytope und Isometrien
A3 Von Geometrie zu Topologie: Eulers Polyederformel
A4 Zentrale Anwendung: die Klassifikation kompakter Flächen
A5 Von Topologie zu Geometrie: der Satz von Gauß–Bonnet

Kapitel B: Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$

B1 Geschichte und Literatur
B2 Aufbau des Zahlensystems
B3 Existenz und Einzigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
B4 Die Mächtigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Kapitel C: Distanzlehre: metrische Räume

C1 Skalarprodukte und Normen auf Vektorräumen
C2 Metrische Räume und ihre Topologie
C3 Konvergenz und Stetigkeit
C4 Vollständige metrische Räume

Kapitel D: Stetigkeitslehre: topologische Räume

D1 Topologische Räume
D2 Stetige Abbildungen
D3 Umgebungen und Umgebungsbasen
D4 Anwendung auf Funktionenräume
D5 Inneres, Abschluss, Rand
D6 Basen und Erzeugendensysteme

Kapitel E: Topologische Konstruktionen

E1 Teilräume
E2 Quotientenräume
E3 Summen topologischer Räume
E4 Produkte topologischer Räume
E5 Trennungsaxiome und Metrisierung

Kapitel F: Kompaktheit

F1 Kompakte topologische Räume
F2 Erste geometrische Anwendungen
F3 Kompakte metrische Räume
F4 Lokale Kompaktheit
F5 Kompaktifizierung
F6 Eigentliche Abbildungen

Kapitel G: Zusammenhang und Homotopie

G1 Zusammenhang
G2 Wegzusammenhang
G3 Lokaler Zusammenhang
G4 Homotopie stetiger Abbildungen
G5 Retrakte und Deformationsretrakte

Kapitel H: Die Sprache der Kategorien

H1 Kategorien
H2 Kommutative Diagramme
H3 Universelle Objekte
H4 Funktoren
H5 Natürliche Transformationen

Kapitel I: Simpliziale Komplexe

I1 Affine Simplizialkomplexe
I2 Kombinatorische Simplizialkomplexe
I3 Triangulierung und Unterteilungen
I4 Simpliziale Approximation

Kapitel J: Abbildungsgrad auf Sphären und Topologie des $\mathbb{R}^n$

J1 Die Umlaufzahl ebener Wege
J2 Der Satz von Jordan–Schoenflies
J3 Der Abbildungsgrad auf Sphären
J4 Der Brouwersche Fixpunktsatz
J5 Der Satz vom Igel und Vektorfelder auf Sphären
J6 Der Satz von Borsuk–Ulam und Anwendungen
J7 Die topologische Invarianz der Dimension, des Randes, des Gebietes und der Orientierung

Kapitel K: Klassifikation kompakter Flächen

K1 Mannigfaltigkeiten
K2 Projektive Räume
K3 Der Flächenkalkül

Kapitel A

Was ist und was soll die Topologie?

Ihr naht euch wieder, schwankende Gestalten,
Die früh sich einst dem trüben Blick gezeigt.
Versuch ich wohl, euch diesmal fest zu halten?
Fühl ich mein Herz noch jenem Wahn geneigt?
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust*

Inhalt dieses Kapitels A

1 Homöomorphismen und Invarianten

2 Euklidische Geometrie: Polytope und Isometrien

3 Von Geometrie zu Topologie: Eulers Polyederformel

4 Zentrale Anwendung: die Klassifikation kompakter Flächen

5 Von Topologie zu Geometrie: der Satz von Gauß–Bonnet

Topologie ist qualitative Geometrie.

Topologie ist die ‘Lehre vom Ort und der gegenseitigen Lage’, griechisch τόπος [tópos] ‘Ort, Lage’, λόγος [lógos] ‘Wort, Einsicht, Lehre’, ὅμοιος [homoios] ‘gleich, ähnlich’, μορφή [morphé] ‘Form, Gestalt, Anmut’.

Homöomorph heißt ‘gleiche Form’, *homotop* heißt ‘stetig deformierbar’.
Das beweisen wir durch einen Homöomorphismus bzw. eine Homotopie.

Wie beweisen wir, dass zwei Objekte *nicht* die gleiche Form haben?
Wir nutzen Invarianten: Euler–Charakteristik, Fundamentalgruppe, …

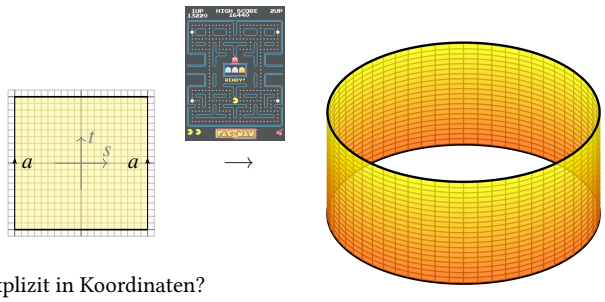
Historische Anfänge der Topologie

📖 Johann Benedict Listing (1808–1882): *Vorstudien zur Topologie* (1848)
Bereits Gauß untersuchte Knoten und Verschlingungen im $\mathbb{R}^3$ etwa als stromdurchflossene Leiter zu Magnetfeld und Induktion. Sein Schüler Listing führte diese topologischen Ideen fort. Das berühmte Band, das Möbius 1858 entdeckte, findet sich bereits zehn Jahre zuvor bei Listing.

📖 Henri Poincaré (1854–1912): *Analysis Situs* (1895 bis 1904)
Poincaré untersuchte insbesondere dreidimensionale Mannigfaltigkeiten und formulierte seine berühmte Vermutung, die hundert Jahre später zum Millenium-Problem wurde und durch Grigori Perelman gelöst: Unter allen geschlossenen, zusammenhängenden 3–Mannigfaltigkeiten gibt es genau eine einfach-zusammenhängende, nämlich die Sphäre $\mathbb{S}^3$.

📖 Felix Hausdorff (1868–1942): *Grundzüge der Mengenlehre* (1914)
Die entstehende Topologie zählte man damals noch zur Mengenlehre. Sie erfährt hier in Kapitel VII. „Punktmengen in allgemeinen Räumen“ ihre erste systematische Darstellung in einem Lehrbuch. Dem Schöpfer der Mengenlehre, Georg Cantor, in dankbarer Verehrung gewidmet.

Beispiel: Zylindermantel

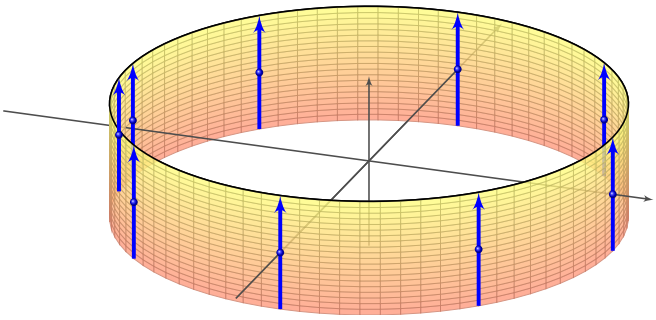


Explizit in Koordinaten?

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = r^2,\ -1 \le z \le 1\}$$

$$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi s) \\ r\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$

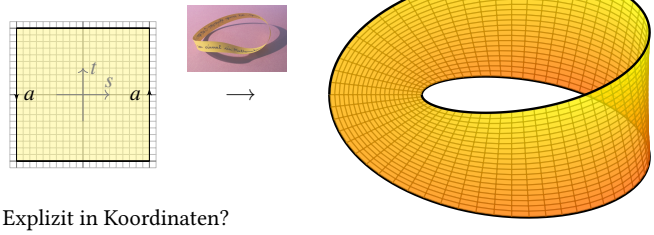
Beispiel: Zylindermantel



$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = r^2,\ -1 \le z \le 1\}$$

$$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi s) \\ r\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$

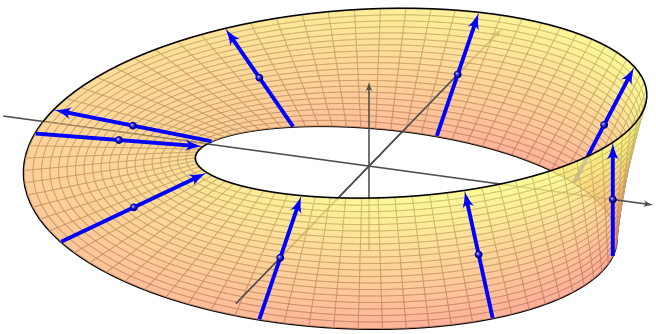
Beispiel: Möbius–Band



Explizit in Koordinaten?

$$g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto g\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r + t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [r + t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$

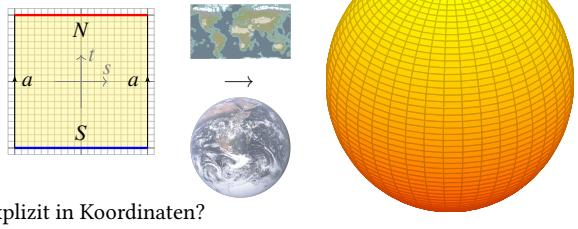
Beispiel: Möbius–Band



$$g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto g\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r + t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [r + t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Sphäre

A009



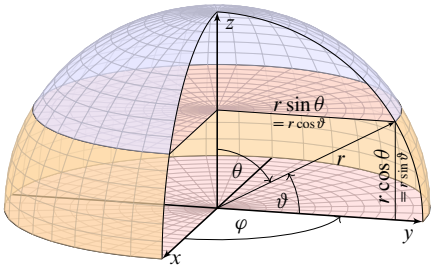
Explizit in Koordinaten?

$$S = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\,\}$$

$$k : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto k\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi t/2)\cos(\pi s) \\ r\cos(\pi t/2)\sin(\pi s) \\ r\sin(\pi t/2) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Sphäre

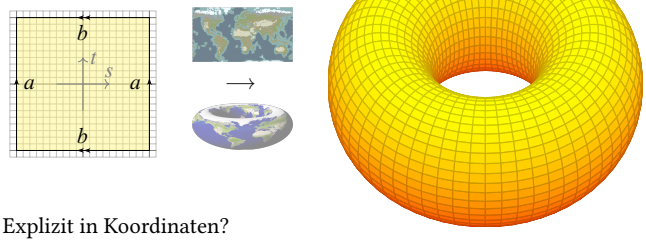
A010



$$V = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2\,\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Beispiel: Torus

A011

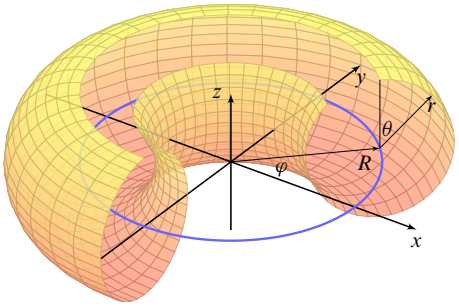


Explizit in Koordinaten?

$$h : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto h\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [R + r\sin(\pi t)]\cos(\pi s) \\ [R + r\sin(\pi t)]\sin(\pi s) \\ r\cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Torus

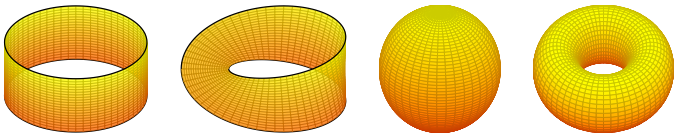
A012



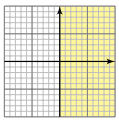
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R+\rho\sin\theta)\cos\varphi \\ (R+\rho\sin\theta)\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Was sind Flächen?

A013



Eine **Kurve** sieht lokal aus wie die reelle Halb/Gerade $\mathbb{R}^1_{\ge 0}$.
Eine **Fläche** sieht lokal aus wie die reelle Halb/Ebene $\mathbb{R}^2_{\ge 0}$.



Als lokale Modelle dienen uns der euklidische Raum $\mathbb{R}^m$
und der euklidische Halbraum $\mathbb{R}^m_{\ge 0} := \{\,x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \ge 0\,\}$.

Definition A0A: topologische Mannigfaltigkeit

Ein Raum $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **m–dimensionale Mannigfaltigkeit**, eventuell mit Rand ∂M, falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler Homöomorphismus $(M,a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m, 0)$ oder $(M,a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m_{\ge 0}, 0)$ existiert.
Im ersten Falle ist a ein **innerer Punkt** von M, kurz $a \in \operatorname{Int} M$,
im zweiten Falle ist a ein **Randpunkt** von M, kurz $a \in \partial M$.

Können wir alle kompakten Flächen klassifizieren?

A014
Erläuterung

The theorem of classification of surfaces is a top-class mathematical achievement, comparable with the discovery of America or X-rays.
Vladimir Arnold (1937–2010), *On teaching mathematics* (1997)

Auf dem Weg werden wir viele faszinierende Themen kennenlernen!

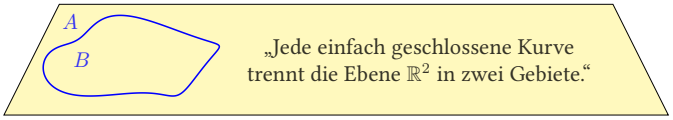
- Grundlagen: topologische Räume und stetige Abbildungen
- Konstruktionen: Teilräume, Quotienten, Produkte, Summen, etc.
- Eigenschaften: Kompaktheit und (Weg)Zusammenhang uvm.
- Struktur: Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexe
- Invarianten: Euler–Charakteristik, Fundamentalgruppe

"Elementary" does not mean easy to understand.
"Elementary" means that very little is required
to know ahead of time in order to understand it,
except to have an infinite amount of intelligence.
Richard P. Feynman (1918–1988, Physiknobelpreis 1965)

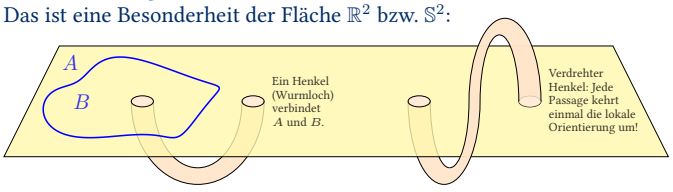
Mannigfaltigkeiten, lokal vs global

A015

Praktische Erfahrung und geometrische Anschauung führen zu Jordans Kurvensatz: einfach zu formulieren, doch notorisch schwer zu beweisen!



Hirten und Burgen nutzen dies seit Jahrhunderten!
Das ist eine Besonderheit der Fläche $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{S}^2$:



In was für einer Welt leben wir eigentlich?

A016
Erläuterung

Wir vergleichen die uns umgebende Welt meist mit dem euklidischen Modellraum $\mathbb{R}^3$. Zumindest lokal in unserer unmittelbaren Umgebung scheint diese Idealisierung eine gute Näherung an unsere alltägliche Erfahrung zu sein. Ist der uns umgebende Raum deshalb auch global homöomorph zum Modellraum $\mathbb{R}^3$? Das ist keineswegs zwingend!

Wenn wir ehrlich sind, kennen wir vom Universum nur einen sehr kleinen Ausschnitt: In unserer unmittelbaren Umgebung lässt sich jeder Punkt durch drei Koordinaten eindeutig darstellen, so haben wir es in der Schule gelernt. Eine solche lokale Karte beschreibt unsere Umgebung, nicht aber das gesamte Universum: Verschiedene Räume sind denkbar!

Dieses Phänomen ist zweidimensional leichter fasslich. Beginnen wir also mit Flächen! Die Erdoberfläche um uns herum ist zweidimensional, lokal homöomorph zur Ebene $\mathbb{R}^2$. Ist die Erde deshalb eine Scheibe? Nein, sehr verschiedene Flächen sind denkbar! Um Ihre Phantasie anzuregen, habe ich oben vier konkrete Beispiele explizit ausgeführt.

Unser Ziel ist die Klassifikation aller kompakten Flächen!

Was bedeutet Homöomorphie?

A101

Definition A1A: Homöomorphismus

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmengen (später: topologische Räume).

Ein **Homöomorphismuspaar** $(f, g) : X \cong Y$ besteht aus zwei stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

In diesem Fall nennen wir X und Y **homöomorph**, geschrieben $X \cong Y$.

⚠ Die Kurzschreibweise $X \cong Y$ ist allzu bequem und daher gefährlich. Die explizite Ausführung $(f, g) : X \cong Y$ ist präzise und informativ!

Aufgabe: Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation. **Nachrechnen:**
Reflexivität: $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : X \cong X$
Symmetrie: $(f, g) : X \cong Y \;\Rightarrow\; (g, f) : Y \cong X$
Transitivität: $(f, f') : X \cong Y \wedge (g, g') : Y \cong Z \Rightarrow (g \circ f, f' \circ g') : X \cong Z$

Was bedeutet Homöomorphie?

A102

Beispiel A1B: reelle Gerade und offenes Intervall

Es gilt $\mathbb{R} \cong]-1,1[$, genauer $(f, g) : \mathbb{R} \cong]-1,1[$ vermöge der Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to]-1,1[\,:\, x \mapsto x/(1+|x|),$$
$$g :]-1,1[\to \mathbb{R} \,:\, y \mapsto y/(1-|y|).$$

Dieselben Formeln liefern einen Homöomorphismus $(f, g) : \mathbb{Q} \cong]-1,1[_{\mathbb{Q}}$.

Beweis: Nachrechnen! (1) Die Abbildungen f und g sind wohldefiniert:
(1a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x)| = |x|/(1+|x|) < 1$, also $f(x) \in]-1,1[$.
(1b) Für jedes $y \in]-1,1[$ erfüllt der Nenner die Bedingung $1 - |y| > 0$.
(2) Beide Abbildungen sind stetig, da Komposition stetiger Abbildungen.
(3) Schließlich sind sie zueinander invers, wie wir geduldig nachrechnen:

$$g(f(x)) \overset{\text{Def}}{=} \frac{x/(1+|x|)}{1-|x/(1+|x|)|} \overset{\mathbb{R}}{=} \frac{x}{1+|x|-|x|} \overset{\mathbb{R}}{=} x, \quad \text{also } g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

$$f(g(y)) \overset{\text{Def}}{=} \frac{y/(1-|y|)}{1+|y/(1-|y|)|} \overset{\mathbb{R}}{=} \frac{y}{1-|y|+|y|} \overset{\mathbb{R}}{=} y, \quad \text{also } f \circ g = \mathrm{id}_{]-1,1[}$$

Bälle und Sphären

A103

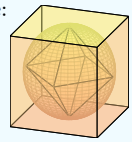
Definition A1C: Bälle und Sphären

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ nutzen wir je nach Anwendung und Bedarf

die Taxinorm	$\lvert x\rvert_1 := \lvert x_1\rvert + \cdots + \lvert x_n\rvert,$
die Maximumsnorm	$\lvert x\rvert_\infty := \max\{\lvert x_1\rvert, \ldots, \lvert x_n\rvert\},$
die euklidische Norm	$\lvert x\rvert_2 := \sqrt{\lvert x_1\rvert^2 + \cdots + \lvert x_n\rvert^2}.$

Letztere definiert den **Einheitsball** und die **Einheitssphäre**:

$$\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 \le 1\}$$
$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 < 1\}$$
$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 = 1\}$$



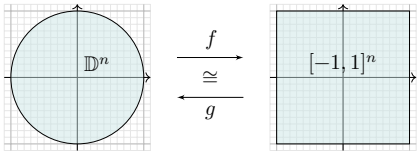
Ebenso erhalten wir **Würfel** $|x|_\infty \le 1$ und **Kreuzpolytop** $|x|_1 \le 1$.

Beispiel / Übung A1D: euklidischer Raum und offene Bälle

Es gilt $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{B}^n$ und $\mathbb{R}^n \cong]-1,1[^n$ dank der Homöomorphismen A1B.

Sind Ball und Würfel homöomorph?

A104



Beispiel / Übung A1E: abgeschlossener Ball und Würfel

Es gilt $\mathbb{D}^n \cong [-1,1]^n$ dank $f : \mathbb{D}^n \to [-1,1]^n : x \mapsto x/(1-|x|_2+|x|_\infty)$ und $g : [-1,1]^n \to \mathbb{D}^n : y \mapsto y/(1-|y|_\infty+|y|_2)$. Rechnen Sie es nach!

Definition A1F: topologische Invarianten

Eine Eigenschaft geometrischer Objekte heißt **topologisch invariant**, wenn sie unter Homöomorphismen erhalten bleibt.

Beispiele: Beschränktheit oder Abgeschlossenheit im Raum $\mathbb{R}^n$ sind *nicht* topologisch invariant, siehe $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{B}^n$. Hingegen sind Kompaktheit (F1L) und Zusammenhang (G1E) invariant, somit $\mathbb{D}^n \ncong \mathbb{B}^n$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ncong \mathbb{R}$.

Wegzusammenhang ist eine topologische Invariante.

A105

Definition A1G: Wegzusammenhang

Ein Raum $X \neq \emptyset$ heißt **wegzusammenhängend**, kurz wegzshgd, wenn sich je zwei Punkte a, b in X durch einen Weg verbinden lassen, das heißt es gibt eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

Beispiel / Übung A1H: Anwendungen des Wegzusammenhangs

(1) Wegzusammenhang ist topologisch invariant. Stärker:
(2) Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ stetig und surjektiv. Ist X wegzshgd, so auch Y.
(3) Der Raum $\mathbb{R} \setminus \{z\}$ ist nicht wegzshgd, dank Zwischenwertsatz.
(4) Für $n \ge 2$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ wegzusammenhängend.
(5) Für $n \ge 2$ gilt $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^n$: Jeder Punkt trennt $\mathbb{R}$, aber keiner trennt $\mathbb{R}^n$.
(6) Ebenso gilt $[0,1] \ncong [0,1]^2$ und allgemein $[0,1] \ncong [0,1]^n$ für alle $n \ge 2$.
(7) Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ sind $]a,b[$, $[a,b[$, $[a,b]$ paarweise nicht homöomorph.
(8) Es gilt $\mathbb{S}^1 \ncong \mathbb{D}^2$: Je zwei Punkte $\{a \neq b\}$ trennen $\mathbb{S}^1$, aber niemals $\mathbb{D}^2$.

Werkzeuge: Homöomorphismen und Invarianten

A106

🙂 Das ist eine erste Klassifikation, wir haben diese vier einfachen Räume in Homöomorphieklassen eingeteilt; später Kurven A4A und Flächen A4J.

🤔 Wie zeigen wir, dass zwei Räume homöomorph sind? Der direkte und meist beste Weg ist, einen expliziten **Homöomorphismus** anzugeben!

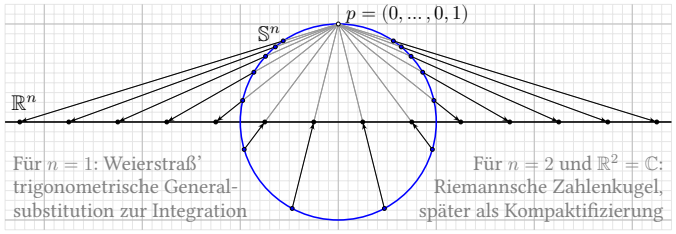
Ein solches Argument ist **konstruktiv**: *Just do it!* (Beispiel A1E)
Dies haben wir oben für Quadrat und Kreisscheibe explizit ausgeführt, ebenso für Quadratrand und Kreislinie. Das zeigt „≅“ für diese Beispiele.

🤔 Wie zeigen wir hingegen, dass zwei Räume nicht homöomorph sind? Aufgeben genügt nicht, wir müssen ein **Hindernis** benennen!

Ein solches Argument ist **obstruktiv**: *No one can!* (Beispiel A1H)
Dies haben wir für Kreisscheibe und Kreisrand explizit ausgeführt.
Das zeigt „≇“ zwischen den linken und rechten Beispielen.

Stereographische Projektion: ein Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$

A107



Beispiel / Übung A1L: stereographische Projektion

Es gilt $(f, g) : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$, explizit für $p = (0, \ldots, 0, 1)$ vermöge

$$f : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n \,:\, (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \,:\, (y_1, \ldots, y_n) \mapsto \frac{1}{|y|_2^2+1}(2y_1, \ldots, 2y_n, |y|_2^2 - 1).$$

Die stereographische Projektion

A108
Erläuterung

Diese Übung hat zwei Varianten / Schwierigkeitsstufen / Härtegrade:

(1) *Ohne die Angabe von Formeln* müssen Sie selbst kreativ werden, um geeignete Funktionen (f, g) zu finden. Hier gelingt das noch relativ leicht anhand der Skizze mit dem Strahlensatz für f und der Mitternachtsformel zur Lösung quadratischer Gleichungen für g. Versuchen Sie es!

(2) *Mit Angabe der Formeln:* Stehen die Formeln erst einmal vor Ihnen, so wie hier, dann genügt sorgfältiges Nachrechnen. Versuchen Sie es!

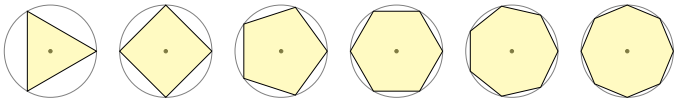
Folgerung: Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit. Wiederholen Sie hierzu noch einmal die zugehörige Definition A0A.

Die stereographische Projektion scheint zunächst recht erstaunlich, mit Übung und Gewöhnung jedoch wird sie einfach und natürlich. Sie ist eine Spezialfall der Inversion an einer Sphäre (A1M).

Im Skript finden Sie weitere Beispiele zu Homöomorphismen, manche praktisch wie „Winkel geradebiegen“, andere unglaublich wie $\mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}$. Erweitern Sie Ihr Repertoire und Ihre technische Fingerfertigkeit!

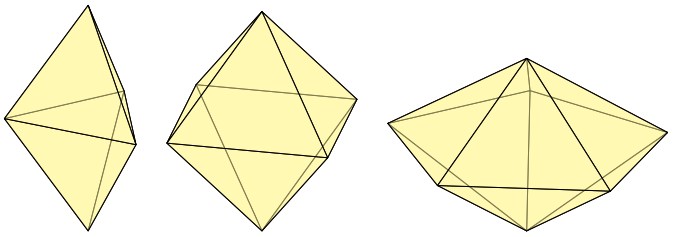
Beispiel: reguläre Vielecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$

A201



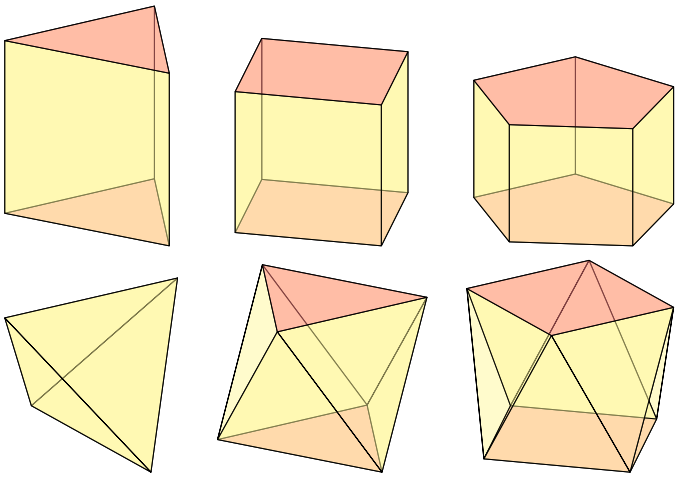
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Die Eckpunkte $v_k = e^{2\pi i k/n} = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n))$ mit $k \in \mathbb{Z}$ haben als konvexe Hülle $P_n = [v_1, \dots, v_n]$ das **reguläre n–Eck**.

Im Raum $\mathbb{R}^3$ bilden wir darüber den Doppelkegel von passender Höhe:



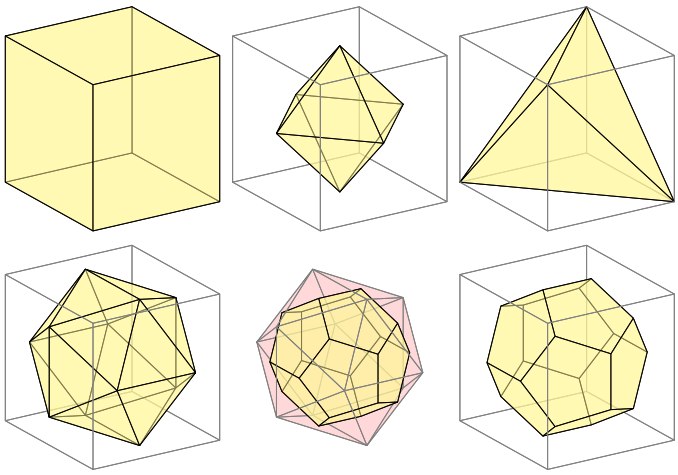
Prisma und Antiprisma über einem regulären n–Eck

A202



Die fünf platonischen Körper im $\mathbb{R}^3$

A203



Euklids Klassifikation regulärer 3–Polytope

A204

Was ist das Besondere an diesen fünf wunderschönen Beispielen? Sie sind offensichtlich besonders symmetrisch. Was heißt das genau? Gibt es weitere Beispiele? Oder kennen wir bereits alle Möglichkeiten? Die Antwort ist der Höhepunkt von Euklids epochalem Werk *Elemente*:

Satz A2J: Klassifikation regulärer 3–Polytope, Euklid 3. Jh. v.u.Z.

(1) Symmetrie: Jeder dieser fünf platonischen Körper $P \subset \mathbb{R}^3$ ist regulär, d.h. die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$ operiert transitiv auf den Fahnen.

Ausführlich: Jede Fahne $(E < K < F < P)$, bestehend aus einer Ecke E in einer Kante K in einer Facette F des Polytops P, kann durch eine Isometrie des Raumes $\mathbb{R}^3$ in jede andere Fahne überführt werden.

(2) Diese Liste ist vollständig: Jedes reguläre 3–Polytop $Q \subset \mathbb{R}^3$ ist ähnlich zu genau einem unserer fünf platonischen Körper.

Ausführlich: Von Q zum Modell P führt eine Ähnlichkeitsabbildung $h : (\mathbb{R}^3, Q) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^3, P) : x \mapsto \lambda A x + v$ mit einem Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und einer Verschiebung $v \in \mathbb{R}^3$.

Was ist ein Polytop?

A205

Definition A2B: Polytop

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen $a, b \in V$ ist

$$[a,b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Wir nennen $X \subseteq V$ **konvex**, falls für $a, b \in X$ stets $[a,b] \subseteq X$ gilt.
(Das impliziert Wegzusammenhang.) Zum Beispiel ist der gesamte Raum V konvex, ebenso jeder Halbraum und jeder affine Teilraum in V, auch $\emptyset$.

Ist $X_i \subseteq V$ konvex für jedes $i \in I$, so auch der Durchschnitt $X = \bigcap_{i\in I} X_i$.
Das von $v_0, \dots, v_\ell \in V$ aufgespannte **Polytop** ist ihre konvexe Hülle:

$$\begin{aligned} P = [v_0, \dots, v_\ell] &:= \bigcap \{X \mid X \subseteq V \text{ konvex mit } \{v_0, \dots, v_\ell\} \subseteq X\} \\ &= \{t_0 v_0 + \dots + t_\ell v_\ell \mid t_0, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ t_0 + \dots + t_\ell = 1\} \end{aligned}$$

Die positiven Konvexkombinationen bilden das **(geometrische) Innere**:

$$\mathrm{Int}[v_0, \dots, v_\ell] := \{t_0 v_0 + \dots + t_\ell v_\ell \mid t_0, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}_{>0},\ t_0 + \dots + t_\ell = 1\}$$

Was ist ein Polytop?

A206

Definition A2B: Polytop

Die verbleibenden Punkte bilden den **(geometrischen) Rand**:

$$\partial[v_0, v_1, \dots, v_\ell] := [v_0, v_1, \dots, v_\ell] \setminus \mathrm{Int}[v_0, v_1, \dots, v_\ell]$$

Der von $P \subseteq V$ aufgespannte **affine Teilraum** ist die affine Hülle:

$$\begin{aligned} A = \mathrm{aff}(P) &:= \bigcap \{X \mid X \subseteq V \text{ affiner Teilraum mit } P \subseteq X\} \\ &= \{s_0 x_0 + \dots + s_k x_k \mid x_0, \dots, x_k \in P,\ s_0, \dots, s_k \in \mathbb{R},\ s_0 + \dots + s_k = 1\} \\ &= \{t_0 v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_\ell v_\ell \mid t_0, t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R},\ t_0 + t_1 + \dots + t_\ell = 1\} \\ &= \{v_0 + t_1(v_1 - v_0) + \dots + t_\ell(v_\ell - v_0) \mid t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}\} \\ &= v_0 + U \ \text{ mit } \ U = \langle v_1 - v_0, \dots, v_\ell - v_0 \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Wir nennen $\dim P := \dim A := \dim U$ die **Dimension** des Polytops P.
Damit gilt $\dim(P \times Q) = \dim P + \dim Q$, wobei wir $\dim \emptyset := -\infty$ setzen.

Was besagt Eulers Polyederformel?

A301

	$f_0 =$ ♯Ecken	$f_1 =$ ♯Kanten	$f_2 =$ ♯Facetten	$\chi = f_0 - f_1 + f_2$
Hexaeder	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Tetraeder	4	6	4	2
Ikosaeder	12	30	20	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Doppelkegel	$q+2$	$3q$	$2q$	2
Prisma	$2q$	$3q$	$q+2$	2
Antiprisma	$2q$	$4q$	$2q+2$	2

Satz A3A: Euler 1750 (für $n = 3$), Poincaré 1895

Für jedes n–dimensionale Polytop $P \neq \emptyset$ gilt:

$$\textstyle\sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(P) = 1$$

Hierbei ist $f_d(P) = \sharp\{Q \leq P \mid \dim Q = d\}$ die Anzahl der d–dim. Seiten.

Warum ist Eulers Polyederformel so phantastisch?

A302 Erläuterung

Es ist verwunderlich, dass eine so einfache und grundlegende Gleichung erst so spät entdeckt wurde. Ein *Beweis* ist selbst in Dimension 3 nicht leicht zu finden, doch die *Vermutung* drängt sich anhand zahlreicher Beispiele geradezu auf. David Richeson schreibt hierzu in seinem Buch *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology* (2008):

> *They all missed it. The ancient Greeks – mathematical luminaries such as Phythagoras, Theaetetus, Plato, Euclid, and Archimedes, who where infatuated with polyhedra – missed it. Johannes Kepler, the great astronomer, so in awe of the beauty of polyhedra that he based an early model of the solar system on them, missed it. In his investigation of polyhedra the mathematician and philosopher René Descartes was but a few logical steps away from discovering it, yet he too missed it. These mathematicians, and so many others, missed a relationship that is so simple that it can be explained to any schoolchild, yet is so fundamental that it is part of the fabric of modern mathematics. The great Swiss mathematician Leonhard Euler did not miss it. On November 14, 1750, in a letter to his friend, the number theorist Christian Goldbach, Euler wrote, "It astonishes me that these general properties of stereometry have not, as far as I know, been noticed by anyone else."*

Polytopale Komplexe: allgemein und einfach

A303

Definition A3B: endlicher polytopaler Komplex

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Eine Familie $\mathscr{K} = \{P_1, \dots, P_m\}$ von (zunächst endlich vielen) Polytopen $P_i \subseteq V$ ist ein **polytopaler Komplex**, falls gilt:

0. Das leere Polytop gehört zu $\mathscr{K}$, kurz $\emptyset \in \mathscr{K}$. (langweilig, aber nützlich)
1. Je zwei Polytope $P \neq Q$ in $\mathscr{K}$ sind innerlich disjunkt, $\operatorname{Int} P \cap \operatorname{Int} Q = \emptyset$.
2. Für jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ gilt $\partial P = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ mit $Q_1, \dots, Q_k \in \mathscr{K}$.

Die **Dimension** und die **Skelette** von $\mathscr{K}$ definieren wir durch

$$\dim \mathscr{K} := n = \sup\{\dim P \mid P \in \mathscr{K}\}, \quad \mathscr{K}_{\leq d} := \{P \in \mathscr{K} \mid \dim P \leq d\},$$
$$f_d(\mathscr{K}) := \sharp \mathscr{K}_d \quad \text{wobei} \quad \mathscr{K}_d := \{P \in \mathscr{K} \mid \dim P = d\}.$$

Die **Euler–Charakteristik** des Komplexes $\mathscr{K}$ ist die Wechselsumme

$$\chi(\mathscr{K}) := \textstyle\sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(\mathscr{K}) = \sum_{\emptyset \neq P \in \mathscr{K}} (-1)^{\dim P}.$$

Der Komplex $\mathscr{K}$ definiert sein **Polyeder** als Vereinigung aller Polytope:

$$|\mathscr{K}| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup_{P \in \mathscr{K}} P = \bigsqcup_{P \in \mathscr{K}} \operatorname{Int} P \subseteq V$$

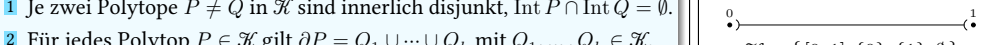
Polytopale Komplexe: erste Beispiele

A304

Der Komplex $\mathscr{K}$ in V beschreibt genau den Aufbau des Polyeders $K \subseteq V$.

$$\{\mathscr{K} \text{ Komplex in } V\} \xrightarrow[\mathscr{K} \mapsto K = \bigcup \mathscr{K}]{|\cdot|} \twoheadrightarrow \{K \subseteq V \text{ Polyeder}\}$$

Beispiel: Das Intervall $K = [0,1]$ können wir auf viele Arten zerlegen:



$\mathscr{K} = \{[0,1], \{0\}, \{1\}, \emptyset\}$, $\chi(\mathscr{K}) = 2 - 1 = 1$

$\mathscr{K}' = \{[0,z], [z,1], \{0\}, \{z\}, \{1\}, \emptyset\}$, $\chi(\mathscr{K}') = 3 - 2 = 1$

Die Zuordnung $|\cdot| : \mathscr{K} \mapsto K$ ist surjektiv, nicht injektiv! Sie vergisst den Aufbau $\mathscr{K}$ und behält als Ergebnis nur die Vereinigungsmenge $K = \bigcup \mathscr{K}$.

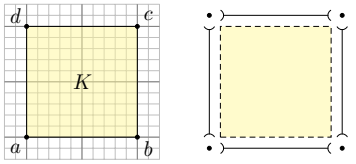
Beispiel: Für jedes Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Familie $\mathscr{K} = \langle P \rangle := \{Q \leq P\}$ aller Seiten ein polytopaler Komplex zu dem Polyeder $|\mathscr{K}| = P$ (A2E). (Hierzu müssen wir den Begriff der *Seite* ausführen, siehe Skript.)

Auch die Familie $\partial\mathscr{K} = \{Q < P\}$ aller echten Seiten ist ein polytopaler Komplex; das zugehörige Polyeder ist demnach der Rand $|\partial\mathscr{K}| = \partial P$. Unsere Beispiele mit $\dim P = 3$ erfüllen $\chi(\mathscr{K}) = 1$ und $\chi(\partial\mathscr{K}) = 2$.

Polytopale Komplexe: erste Beispiele

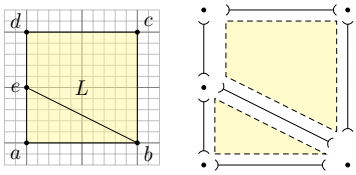
A305

Beispiel: Das Quadrat $K = [-1,1]^2$ können wir auf viele Arten zerlegen:



$\mathscr{K} = \langle [a,b,c,d] \rangle$
$= \{\ \emptyset,\ [a], [b], [c], [d],$
$[a,b], [b,c], [c,d], [d,a],$
$[a,b,c,d]\ \}$

$\chi(\mathscr{K}) = 4 - 4 + 1 = 1$



$\mathscr{L} = \langle [a,b,e], [b,c,d,e] \rangle$
$= \{\ \emptyset,\ [a], [b], [c], [d], [e],$
$[a,b], [b,c], [c,d], [d,e], [e,a],$
$[e,b], [a,b,e], [b,c,d,e]\ \}$

$\chi(\mathscr{L}) = 5 - 6 + 2 = 1$

Satz A3C: Poincaré 1895 (verallgemeinert Eulers Polyederformel)

Für jeden Komplex $\mathscr{K}$ mit konvexem Polyeder $|\mathscr{K}| \neq \emptyset$ gilt $\chi(\mathscr{K}) = 1$.

Polytopale Komplexe: erste Beispiele

A306
Erläuterung

Dieser wunderschöne Satz ist einfach, glasklar und elegant, aber keineswegs leicht zu beweisen. Ganz im Gegenteil!

Mit vielen Beweisen in der Literatur bin ich nicht recht glücklich: Sie beweisen entweder nur einen eingeschränkten Spezialfall oder sind technisch sehr aufwändig — oder schlicht falsch. (Hier gilt tatsächlich: Geht es zu leicht, so ist es falsch.)

Der beste, aber längste Weg führt über die Algebraische Topologie: Die Homologietheorie ist eine wunderbare und produktive Maschine! Sie ist zwar aufwändig aufzubauen, liefert dann aber am Fließband diesen Satz und dazu noch viele weitere quasi gratis.

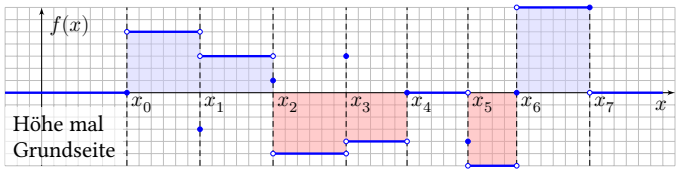
Der folgende schöne Beweis stammt von Hugo Hadwiger (1908–1981), *Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie*, J. Reine Angew. Math. 194 (1955), 101–110. Die Argumente sind vollkommen elementar doch phantastisch raffiniert. Elementar bedeutet nicht unbedingt einfach!

Bereits der Satz ist wunderschön, der Beweis ist sogar noch schöner! Genießen Sie dieses Kleinod mathematischen Scharfsinns.

Eindimensionale Treppenfunktionen und ihr Integral

A307

Für Treppenfunktionen bestimmen wir das Integral / den Flächeninhalt:



Jede **Treppenfunktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stückweise konstant: Zu f existiert eine Unterteilung $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\} \subseteq \mathbb{R}$ und $y_1, \dots, y_\ell \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$ sowie $f(x) = 0$ für $x < x_0$ und für $x > x_k$.

$$f = \textstyle\sum_{k=1}^{\ell} y_k \ \mathbf{1}_{]x_{k-1}, x_k[} + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k)\ \mathbf{1}_{\{x_k\}}$$

Das **Längen-Maß** $\lambda(\emptyset) = \lambda(\{a\}) = 0$ und $\lambda(]a,b[) = b - a$ ist additiv:

$$\lambda(]a,b[) + \lambda(\{b\}) + \lambda(]b,c[) = \lambda(]a,c[) \quad \text{für alle } a < b < c \text{ in } \mathbb{R}$$

Das **Euler–Maß** $\mu(\{a\}) = +1$ und $\mu(]a,b[) = -1$ erfüllt dies ebenfalls! Wir nennen solch eine Abbildung ein **additives Intervallmaß**.

Eindimensionale Treppenfunktionen und ihr Integral

A308

Satz A3D: Existenz und Eindeutigkeit des eindim. Integrals

Die Treppenfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\Lambda_1 = T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, erzeugt von den Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{a\}}$ und $\mathbf{1}_{]a,b[}$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$.

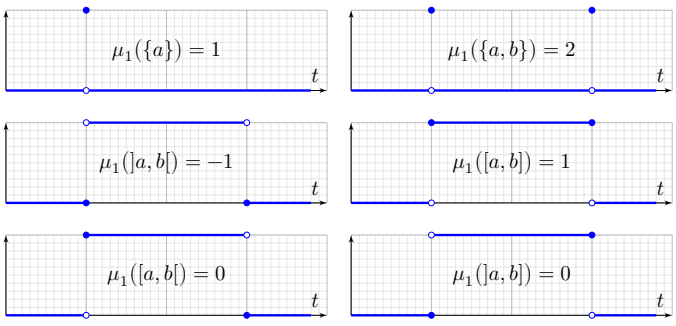
Zu jedem additiven Intervallmaß λ existiert genau eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\lambda_1 : \Lambda_1 \to \mathbb{R}$ mit $\lambda_1(\mathbf{1}_{\{a\}}) = \lambda(\{a\})$ und $\lambda_1(\mathbf{1}_{]a,b[}) = \lambda(]a,b[)$.

Beweis: (1) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise konstant bezüglich P bzw. Q, so auch bezüglich $P \cup Q$. Letzteres gilt dann auch für $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
(2) Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{a\}}$ und $\mathbf{1}_{]a,b[}$ erzeugen Λ_1, wie oben gesehen.
(3) Eindeutigkeit: λ_1 ist auf diesem Erzeugendensystem festgelegt.
(4) Existenz: Wir konstruieren das **Integral** von f bezüglich P vermöge der Formel $\lambda_1(f, P) := \sum_{k=1}^{\ell} y_k\, \lambda(]x_{k-1}, x_k[) + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k)\, \lambda(\{x_k\})$.
(5) Verfeinern $P' = P \cup \{t\}$ ergibt $\lambda_1(f, P') = \lambda_1(f, P)$ dank Additivität.
(6) Zu zwei Unterteilungen P' und P'' ist $P = P' \cup P''$ eine gemeinsame Verfeinerung. Dank (5) folgt $\lambda_1(f, P') = \lambda_1(f, P) = \lambda_1(f, P'')$. Unser Integral $\lambda_1(f) := \lambda_1(f, P)$ ist unabhängig von P, also wohldefiniert. QED

Das Euler–Maß: eindimensionale Beispiele

A309

Beispiel: Jedes Intervall $X \subseteq \mathbb{R}$ ist Euler–messbar: Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_X : \mathbb{R} \to \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion, und wir nutzen Satz A3D.

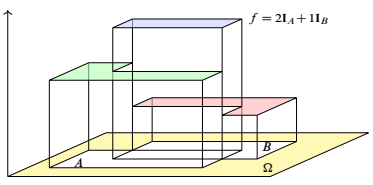


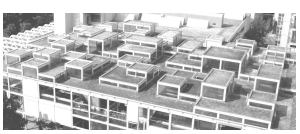
Eindimensionale Treppenfunktionen und ihr Integral kennen Sie bereits vom Anfang der Analysis, als ersten Schritt des Riemann–Integrals. Alles gilt für das Längen-Maß λ ebenso wie für das Euler–Maß μ!

Mehrdimensionale Funktionen und iterierte Integrale

A310

Wir können dies nun auf mehrdimensionale Funktionen fortsetzen: Satz A3E konstruiert zu μ das Integral, das System $\mathscr{M}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ der **Euler–messbaren** Mengen und hierauf das **Euler–Maß** $\mu_n : \mathscr{M}_n \to \mathbb{R}$.





Die Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen aus Sicht der Mathematik

In jeder Dimension $n = 1, 2, 3, \dots$ definieren wir rekursiv das System $\Lambda_n \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der λ–integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und das Integral $\lambda_n : \Lambda_n \to \mathbb{R}$ nach dem Vorbild iterierter Integrale à la Fubini:

$$\lambda_n(f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Mehrdimensionale Funktionen und iterierte Integrale

A311

Satz A3E: Existenz und Eindeutigkeit des mehrdim. Integrals

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennen wir **λ–integrierbar**, falls $f \in \Lambda_1$ gilt.
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, ist **λ–integrierbar**, kurz $f \in \Lambda_n$, wenn zu jedem $t \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_t : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x,t)$ integrierbar ist, $f_t \in \Lambda_{n-1}$, ebenso die Integralfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \lambda_{n-1}(f_t)$, $F \in \Lambda_1$.

(1) Die so definierte Menge $\Lambda_n \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum und das **Integral** $\lambda_n : \Lambda_n \to \mathbb{R} : f \mapsto \lambda_n(f) := \lambda_1(F)$ ist $\mathbb{R}$–linear.
Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nennen wir **λ–messbar**, falls $\mathbf{1}_X \in \Lambda_n$ gilt; in diesem Falle definieren wir ihr **Maß** durch $\lambda_n(X) := \lambda_n(\mathbf{1}_X)$.

(2) Additivität: Die leere Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ ist messbar, mit $\lambda_n(\emptyset) = 0$.
Sind drei der Mengen X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$ messbar, so auch die vierte:
Es gilt $\mathbf{1}_X + \mathbf{1}_Y = \mathbf{1}_{X \cup Y} + \mathbf{1}_{X \cap Y}$, dank Linearität von λ_n folgt daraus

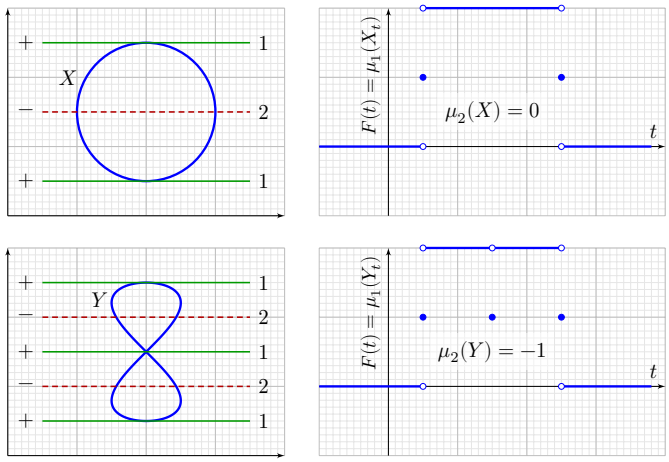
$$\lambda_n(X \cup Y) = \lambda_n(X) + \lambda_n(Y) - \lambda_n(X \cap Y).$$

Bei disjunkter Vereinigung gilt demnach $\lambda_n(X \sqcup Y) = \lambda_n(X) + \lambda_n(Y)$.

Beweis: Aussagen (1) und (2) folgen per Induktion über die Dimension n.

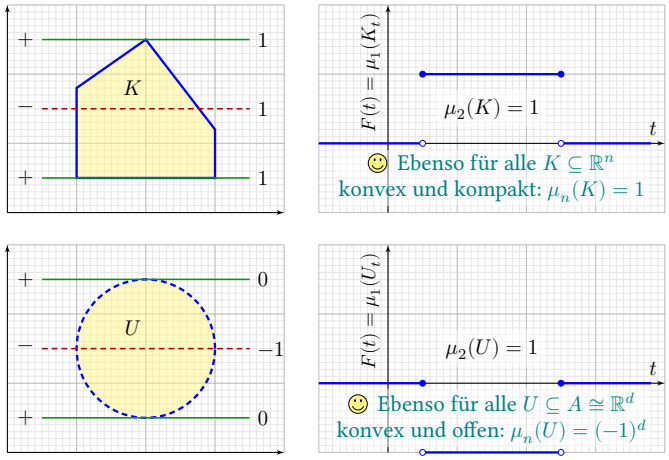
Das Euler–Maß: zweidimensionale Beispiele

A312



Das Euler–Maß: konvexe Mengen

A313

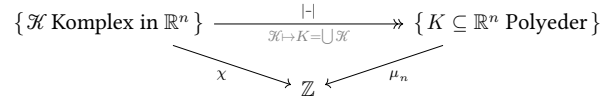


☺ Ebenso für alle $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt: $\mu_n(K) = 1$

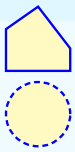
☺ Ebenso für alle $U \subseteq A \cong \mathbb{R}^d$ konvex und offen: $\mu_n(U) = (-1)^d$

Das Euler–Maß berechnet die Euler–Charakteristik!

A314



Satz A3G: Euler–Maß μ_n und Euler–Charakteristik χ



(1) Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer, konvex und kompakt, so ist K Euler–messbar, $K \in \mathscr{M}_n$, und $\mu_n(K) = 1$.
(2) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht–leer, konvex und offen in $A = \mathrm{aff}(U) \cong \mathbb{R}^d$, so gilt ist U Euler–messbar, $U \in \mathscr{M}_n$, und $\mu_n(U) = (-1)^d$.
(3) Für jeden (endlichen) polytopalen Komplex $\mathcal{K}$ in $\mathbb{R}^n$ folgt:

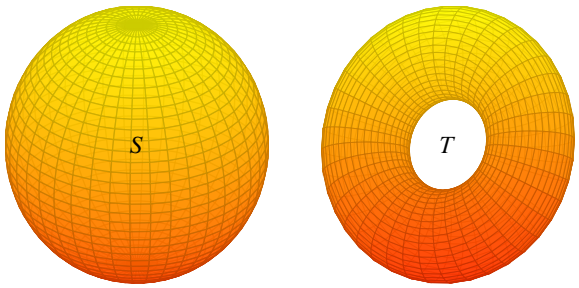
$$K := |\mathcal{K}| = \bigsqcup_{\emptyset \neq P \in \mathcal{K}} \mathrm{Int}\, P \in \mathscr{M}_n \quad \overset{(2)}{\underset{A3E}{\Longrightarrow}} \quad \mu_n(K) = \sum_{\emptyset \neq P \in \mathcal{K}} (-1)^{\dim P} = \chi(\mathcal{K})$$

Ist K konvex, so beweist (1) die Poincaré–Formel $\chi(\mathcal{K}) = 1$ (Satz A3c).

Beweis: Nachrechnen, wie in obigen Beispielen, per Induktion über n.

Effiziente Umformulierung zur Morse–Euler–Formel

A315



Korollar A3H: Morse–Euler–Formel

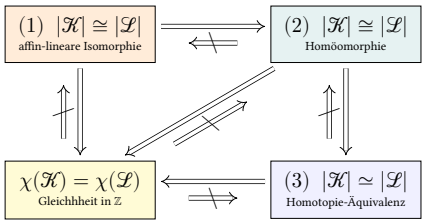
Für jedes (endliche) Polyeder $K = |\mathcal{K}| \subseteq \mathbb{R}^n$ erhalten wir

$$\chi(\mathcal{K}) = \mu_n(K) = \sum_{t \in \mathbb{R}} \mu_{n-1}(K_t) - \frac{1}{2}\Big[\lim_{s \nearrow t} \mu_{n-1}(K_s) + \lim_{s \searrow t} \mu_{n-1}(K_s)\Big].$$

Für Flächen (regulär wie oben) gilt Extremum $\mapsto +1$ und Sattel $\mapsto -1$.

Die Euler–Charakteristik ist topologisch invariant.

A316



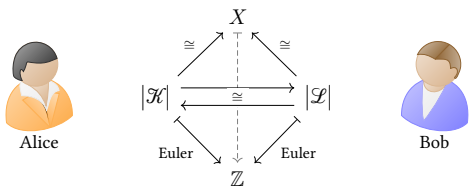
Satz A3J: topologische Invarianz der Euler–Charakteristik

Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ endliche polytopale Komplexe. Existiert zwischen den Polyedern $|\mathcal{K}|$ und $|\mathcal{L}|$ ein Homöomorphismus $(f, g) : |\mathcal{K}| \cong |\mathcal{L}|$, oder auch nur eine Homotopie-Äquivalenz $(f, g) : |\mathcal{K}| \simeq |\mathcal{L}|$, so folgt daraus bereits die Gleichheit $\chi(\mathcal{K}) = \chi(\mathcal{L})$ der Euler–Charakteristiken.

Folgerung: Die Sphäre S und der Torus T sind nicht homöomorph!
Aus den topologischen Invarianten $\chi(S) = 2 \neq 0 = \chi(T)$ folgt $S \ncong T$.

Die Euler–Charakteristik ist wohldefiniert.

A317



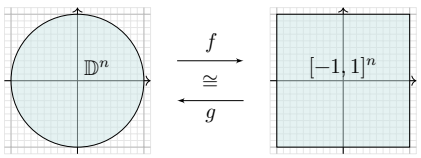
Definition A3L: Euler–Charakteristik

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (später: ein topologischer Raum). Gilt $X \cong |\mathcal{K}|$ für einen (endlichen) polytopalen Komplex $\mathcal{K}$, so setzen wir $\chi(X) := \chi(\mathcal{K})$.
Dies ist wohldefiniert dank der topologischen Invarianz A3J.

Invarianzsätze sind typisch in der Mathematik: Die Rechnung erfordert eine Parametrisierung, das Endergebnis ist jedoch davon unabhängig!
(a) Elementezahl einer Menge X vermöge Abzählung, $X \cong \{1, \ldots, n\}$.
(b) Dimension eines K–Vektorraums V vermöge Basiswahl, $V \cong K^n$.
(c) Integral entlang einer Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ vermöge $\int_\gamma f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, \mathrm{d}t$.

Die Euler–Charakteristik ist wohldefiniert.

A318



Der n–dimensionale Würfel $W^n = [-1,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Polytop.
Der Komplex $\mathscr{W}^n = \langle W^n \rangle := \{ Q \leq W^n \}$ besteht aus allen Seiten, und $\partial\mathscr{W}^n := \{ Q < W^n \}$ aus allen echten Seiten, der Dimension $< n$.

Korollar A3N: Euler–Charakteristik von Bällen und Sphären

Wir haben Homöomorphismen $\mathbb{D}^n \cong [-1,1]^n$ und $\mathbb{S}^{n-1} \cong \partial[-1,1]^n$ (A1E).
Aus topologischer Invarianz A3J und Polyederformel A3c folgt

$$\chi(\mathbb{D}^n) := \chi(\mathscr{W}^n) = 1 \quad \text{und} \quad \chi(\mathbb{S}^{n-1}) := \chi(\partial\mathscr{W}^n) = 1 - (-1)^n.$$

Kleinste Beispiele: $\chi(\mathbb{S}^0) = 2$, $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$, $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, $\chi(\mathbb{S}^3) = 0$, ...

Eindimensionale Mannigfaltigkeiten: Kurven

A401

Ein Raum $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **m–dimensionale Mannigfaltigkeit**, eventuell mit Rand ∂M, falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler Homöomorphismus $(M,a) \cong_{\text{loc}} (\mathbb{R}^m, 0)$ oder $(M,a) \cong_{\text{loc}} (\mathbb{R}^m_{\geq 0}, 0)$ existiert.

Für **Kurven** (also $m = 1$) haben wir sofort vier konkrete Beispiele:

1–Mannigfaltigkeiten	ohne Rand	mit Rand
nicht kompakt	die reelle Gerade $\mathbb{R}$	die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0}$
kompakt	die Kreislinie $\mathbb{S}^1$	das Intervall $[0,1]$

Satz K1N: topologische Klassifikation der Kurven

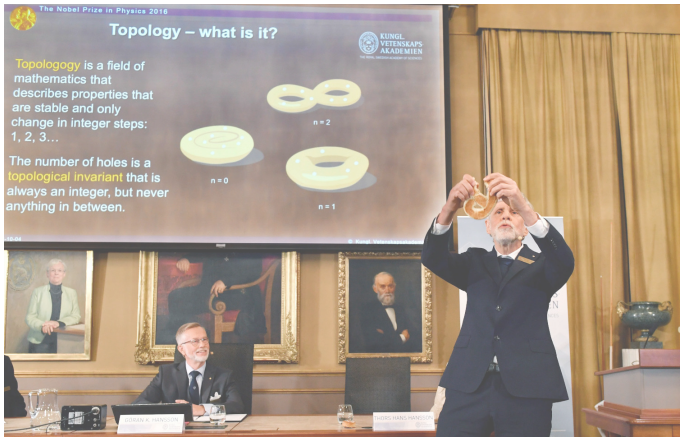
Jede zusammenhängende Kurve (eindimensionale Mannigfaltigkeit) ist homöomorph zu genau einem der Modellräume $[0,1]$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Jede kompakte Kurve besteht somit aus $p \in \mathbb{N}$ Intervallen und $q \in \mathbb{N}$ Kreislinien, ist also homöomorph zu genau einem der Modellräume

$$E_{p,q} = (\{1,\dots,p\} \times [0,1]) \cup (\{p+1,\dots,p+q\} \times \mathbb{S}^1) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^3.$$

Topologie, exotische Phasen und Quantencomputing

A402

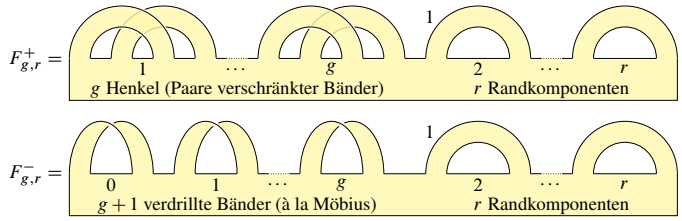


Topologie ist anwendbare Mathematik: nicht nur schön, auch nützlich!

Modelle berandeter Flächen: erstens glatt

A403

Zu Parametern $g \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ konstruieren wir Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$:



Glatte Modelle $F^{\pm}_{g,r} \subseteq \mathbb{R}^3$ berandeter Flächen

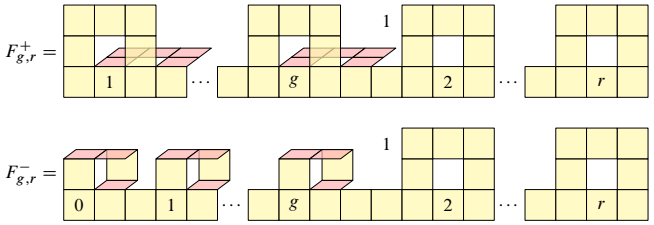
Beispiele: $F^+_{0,1} \cong$ Kreisscheibe, $F^+_{0,2} \cong$ Kreisring $\cong$ Zylindermantel, $F^-_{0,1} \cong$ Möbius–Band, $F^-_{0,2} \cong$ Möbius–Band mit einem Loch, ...

Der Parameter $g \in \mathbb{N}$ heißt **Geschlecht**. Die Fläche $F^+_{g,r}$ ist **orientierbar** (zweiseitig), hingegen ist die Fläche $F^-_{g,r}$ **nicht-orientierbar** (einseitig). Der Parameter r ist die Anzahl der **Randkomponenten**. Diese Begriffe sind anschaulich plausibel, doch die korrekte Definition ist raffiniert.

Modelle berandeter Flächen: zweitens polytopal

A404

Diese Flächen können wir auch als polytopale Komplexe realisieren:



Kubische Modelle $F^{\pm}_{g,r} \subseteq \mathbb{R}^3$ berandeter Flächen

Übung: Erklären Sie Rand und Orientierbarkeit an diesen Modellen! Verstecken sich unter unseren Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ homöomorphe Paare?

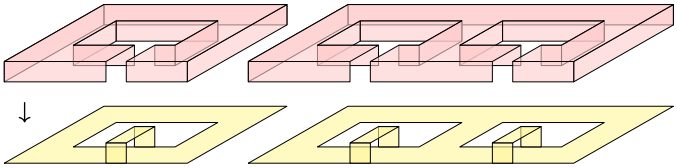
$$\chi(F^+_{g,r}) = 2 - 2g - r, \qquad \chi(F^-_{g,r}) = 1 - g - r$$

Wir nutzen dankend die topologische Invarianz von Euler–Charakteristik, Randkomponenten und Orientierbarkeit: Alle Modelle sind verschieden!

Schließung von $F^+_{g,1}$ zu $F^+_{g,0}$

A405

Die berandete Fläche $F^+_{g,1}$ wird geschlossen zu $F^+_{g,0}$ durch Ankleben einer Kreisscheibe $D \cong F^+_{0,1}$ entlang des gemeinsamen Randes $S \cong \partial F^+_{g,1}$:



Aufgabe: Berechnen Sie auch hier die Euler–Charakteristik $\chi(F^+_{g,0})$!

Lösung: Wir haben $F^+_{g,0} = F^+_{g,1} \cup D$ und $F^+_{g,1} \cap D = S$ mit $D \cong \mathbb{D}^2$ und $S \cong \mathbb{S}^1$, also $\chi(D) = \chi(\mathbb{D}^2) = 1$ und $\chi(S) = \chi(\mathbb{S}^1) = 0$ dank Invarianz A3J. Dank Additivität A3E(2) erhalten wir wunderbar leicht und bequem:

$$\chi(F^+_{g,0}) \;=\; \chi(F^+_{g,1}) + \chi(D) - \chi(S) \;=\; (2-2g-1) + 1 - 0 \;=\; 2 - 2g$$

☺ Wie gut, dass wir bereits die passenden, effizienten Werkzeuge haben!

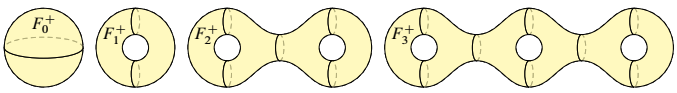
Schließung von $F^+_{g,1}$ zu $F^+_{g,0}$

A406
Erläuterung

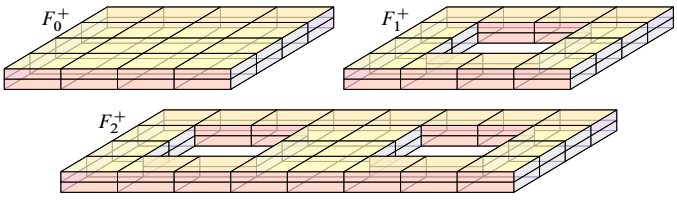
Fun fact: Beim Autobau heißt das „Hochzeit“ von Motor und Karosserie.

Modelle geschlossener Flächen

A407



Glatte Modelle $F^+_g \subseteq \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen



Kubische Modelle $F^{\pm}_g \subseteq \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen

☺ Unsere Modelle sind wunderbar konkret und zudem symmetrisch: Die Punktspiegelung $x \mapsto -x$ operiert auf den Modellflächen $F^+_g = -F^+_g$.

Modelle geschlossener Flächen

A408
Erläuterung

Meist wollen wir die Fläche $F^{\pm}_{g,r}$ nur „bis auf Homöomorphie“ darstellen, dazu genügt ein Repräsentant, etwa ein glattes oder kubisches Modell. Die konkrete Wahl eines Repräsentanten ist willkürlich und unerheblich.

Wenn wir genauer arbeiten wollen, etwa auf der Fläche F Koordinaten einführen oder über die Punktspiegelung $F \to F : x \mapsto -x$ nachdenken, dann müssen wir uns auf ein konkretes und explizites Modell festlegen.

Genau dazu dienen uns die obigen Konstruktionen: Insbesondere kubisch können wir alles vollkommen explizit als Teilmenge im $\mathbb{R}^3$ angeben. Wenn Sie möchten, führen Sie dies aus, etwa als Computer-Graphik.

Wir werden beide Techniken noch weiter vertiefen, und beide spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle: sowohl (polytopale, simpliziale, zelluläre) Komplexe als auch (topologische, glatte) Mannigfaltigkeiten.

Was Sie hier sehen ist also nicht nur eine einmalige *ad hoc* Konstruktion für unsere Flächen, sondern der Anfang einer universellen Sprache zur Beschreibung geometrischer Objekte (Numerik, Gaming, CGI, CAD).

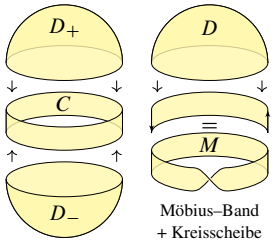
Nicht-orientierbare Flächen: die projektive Ebene

A409

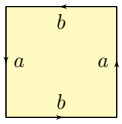
Wir identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$ von F_g^+.
Der Quotientenraum ist die **nicht-orientierbare Fläche** $F_g^- := F_g^+/\{\pm\}$.

Die Anschauung verlässt uns hier, wir brauchen topologische Werkzeuge.
Die Quotientenbildung für topologische Räume erklären wir später,
einstweilen genügt diese Ankündigung als Ausblick und Motivation.
Vielleicht fragen Sie sich, wie F_g^- aussieht. Ich habe Sie gewarnt!

Berühmtestes Beispiel ist die **reell–projektive Ebene** $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm\}$.



Möbius–Band
+ Kreisscheibe

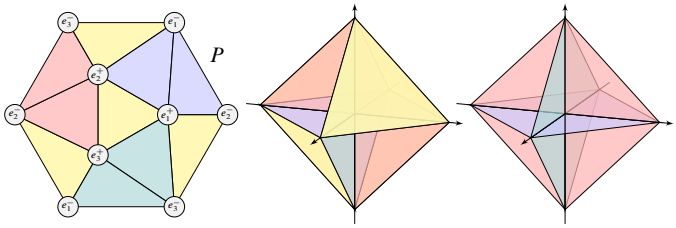


Bastelbogen

Projektive Ebene als polytopaler Komplex

A410

Die Konstruktion ist eigentlich leicht: Wir beginnen mit der Sphäre $\mathbb{S}^2$
und identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$. Vermutlich
können Sie sich das Ergebnis, die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$, dennoch
nicht recht vorstellen. Das liegt ganz einfach daran, dass Sie beschränkt
sind… auf die drei Dimensionen des vertrauten Anschauungsraumes.

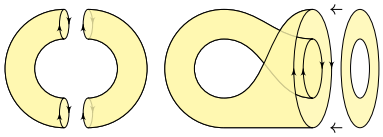


Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ lässt sich nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten!
Werner Boy fand 1901 in seiner Dissertation immerhin eine Immersion
$\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ mit harmlosen Doppelpunkten und nur einem Dreifachpunkt.

Nicht-orientierbare Flächen: die Kleinsche Flasche

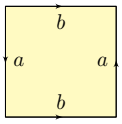
A411

Zweit-berühmtestes Beispiel ist die **Kleinsche Flasche** $F_1^- = F_1^+/\{\pm\}$.



Torus F_1^+ zerlegt
in zwei Halbtori

Kleinsche Flasche
aus einem Halbtorus



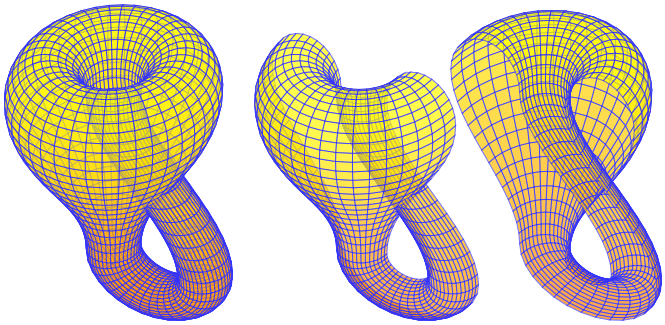
Bastelbogen

Auch hier ist die Konstruktion eigentlich leicht: Wir beginnen mit einem
Torus $T = F_1^+$ und identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$.
Das Ergebnis ist die Kleinsche Flasche $F_1^- = F_1^+/\{\pm\}$. Auch sie lässt sich
nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten. Die Skizze zeigt nur eine Immersion $F_1^- \looparrowright \mathbb{R}^3$,
die fiktiven Selbstdurchdringungen müssen wir dabei ignorieren.

Die abstrakte Konstruktion ist präzise und erfreulich leicht,
die konkrete Visualisierung fällt schwer und bleibt vage.

Kleinsche Flasche als Verklebung zweier Möbius–Bänder

A412



Wir können fast alle Flächen im Raum $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Darüber
sollten wir uns freuen. Einzige Ausnahme sind die nicht-orientierbaren,
geschlossenen Flächen F_g^-. Erst im $\mathbb{R}^4$ ist für diese genügend Platz.

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

A413

Satz A4F: Unterscheidung unserer Flächenmodelle

Für alle $g, r \in \mathbb{N}$ gilt $\chi(F_{g,r}^+) = 2 - 2g - r$ und $\chi(F_{g,r}^-) = 1 - g - r$.
Dank der topologischen Invarianz von Euler–Charakteristik, Rand
und Orientierbarkeit sind keine zwei Modellflächen $F_{g,r}^\pm$ homöomorph.
Anders gesagt, aus $(g, r, \varepsilon) \neq (h, s, \delta)$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{\pm\}$ folgt $F_{g,r}^\varepsilon \ncong F_{h,s}^\delta$.

Existieren außer unseren obigen Beispielen $F_{g,r}^\pm$ noch weitere Flächen?
Erstaunlicherweise nicht! Dazu benötigen wir zwei weitere Ergebnisse:

(1) Jede Fläche X kann trianguliert werden, kurz $X \cong |\mathcal{K}|$ (Radó 1925).

(2) Ist die Fläche $|\mathcal{K}|$ kompakt und zusammenhängend, so können wir sie
durch „Schneiden und Kleben“ umformen in eine der triangulierten
Modellflächen $F_{g,r}^\pm$ (stückweise affin, ganz elementar und explizit).

Satz A4J: Klassifikationssatz für kompakte Flächen

Jede kompakte zusammenhängende Fläche (eventuell mit Rand)
ist homöomorph zu genau einem unserer obigen Modelle $F_{g,r}^\pm$.

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

A414

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

A415
Erläuterung

Das ist der berühmte Klassifikationssatz für kompakte Flächen!
Ich fasse nochmal zusammen und betone unser Vorgehen:

Zunächst haben wir konkrete Beispiele $F_{g,r}^\pm$ konstruiert und untersucht.
Jedes ist tatsächlich eine kompakte Fläche, und Satz A4F garantiert,
dass unsere Liste redundanzfrei ist, also keine Doppelungen enthält:
Je zwei Flächen dieser Liste sind zueinander nicht homöomorph!

Anschließend zeigen wir, das unsere Liste sogar vollständig ist:
Jede kompakte zusammenhängende Fläche, egal wie kompliziert sie auch
sein mag, ist homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen $F_{g,r}^\pm$.
Diese Vollständigkeitsaussage werden wir in Kapitel K ausführen.

Das ist das Musterbeispiel einer Klassifikation: Jede kompakte zshgde
Fläche F wird bis auf Homöomorphie eindeutig durch diese drei Daten
charakterisiert: Ihre Orientierbarkeit $\varepsilon(F) \in \{\pm\}$, die Anzahl $r(F) \in \mathbb{N}$
ihrer Randkomponenten sowie ihre Euler–Charakteristik $\chi(F)$; letztere
lässt sich leicht in das Geschlecht $g(F)$ umrechnen. Dieser einfache
Algorithmus löst das Homöomorphieproblem kompakter Flächen!

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

A416
Erläuterung

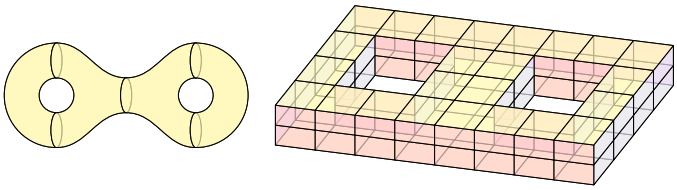
☺ Wenn Sie dieses Einleitungskapitel gründlich durcharbeiten, werden
Sie stolz feststellen, dass erste wichtige Sätze sofort in Ihrer Reichweite
liegen und wir erfreulich viele hier sogar schon beweisen können.
Sie spüren bereits die Mühe, doch nießen auch sofort die Früchte.

Andere Sätze kann ich hier nur als Vorschau ankündigen; ihre Beweise
benötigen die soliden Grundlagen, Begriffe und Techniken der Topologie.
Genau das ist unser Ziel und unsere Motivation für die nächsten Wochen,
diese Verheißungen wollen wir in den Folgekapiteln einlösen.

Nur einige wenige Sätze borge ich mir aus der Algebraischen Topologie:
Die Invarianz der Euler–Charakteristik ist für Rechnungen sehr bequem,
daher will ich Ihnen dieses wunderbare Werkzeug keinesfalls verwehren.
Der Beweis der Invarianz beruht allgemein auf Homologie-Theorie, doch
speziell für Flächen wird uns dies mit der Fundamentalgruppe gelingen.
Ich nehme für Sie einen Kredit auf und zahle ihn nach und nach zurück.
Das explorierende Vorgehen stellt Motivation und Anwendungen voran,
der mathematisch-logische Aufbau erfolgt dann im zweiten Durchgang.

Was ist die Gesamtkrümmung einer Fläche?

A501



Vorgelegt sei eine geschlossene Fläche F. Welche Beziehung besteht zwischen ihrer Gesamtkrümmung $\kappa(F)$ und Euler–Charakteristik $\chi(F)$? Die Antwort ist erstaunlich, ebenso elegant wie richtungsweisend:

Satz A5F: Descartes 1620, Gauß 1825, Bonnet 1848, Dyck 1888

Für jede geschlossene Fläche F gilt die Gleichung $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$.

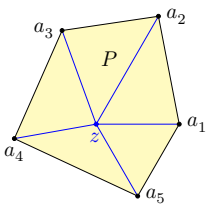
Für **glatte Flächen** lernen Sie die hierzu nötigen Begriffe und Techniken in der Differentialgeometrie. Für **polytopale Flächen** ist alles sehr viel einfacher, vollkommen elementar und sofort in unserer Reichweite!

Erinnerung: Innenwinkel eines n–Ecks

A502

Je drei Punkte $a \neq z \neq b$ in $\mathbb{R}^d$ definieren einen Winkel mit Scheitel z: Das **absolute Winkelmaß** $\angle(a,z,b) \in [0,\pi]$ definieren wir durch

$$\angle(a,z,b) := \arccos\left(\frac{\langle a-z \,|\, b-z\rangle}{|a-z|\cdot|b-z|}\right) \in [0,\pi].$$



Wir betrachten zunächst ein zweidimensionales Polytop $P = [a_1, \dots, a_n]$ im Raum $\mathbb{R}^d$.

Der **Innenwinkel** in $a_k \in \operatorname{vert} P$ ist $\angle(P, a_k) := \angle(a_{k-1}, a_k, a_{k+1})$.

Lemma A5C: Innenwinkel eines n–Ecks

Die Innenwinkelsumme $\angle P := \sum_{k=1}^{n} \angle(P, a_k)$ beträgt $\angle P = (n-2)\pi$.

Beweis: Wir zerlegen P in Dreiecke und summieren deren Innenwinkel.

Wie definieren wir die Krümmung einer polytopalen Fläche?

A503

Definition A5D: Krümmung einer polytopalen Fläche

Sei $F = |\mathcal{K}| \subseteq \mathbb{R}^d$ eine geschlossene polytopale Fläche. Ihre **Krümmung** im Eckpunkt $z \in F$ ist der Vollwinkel 2π minus die anliegenden Winkel:

$$\kappa(F,z) := 2\pi - \sum_{P \gg z} \angle(P,z)$$

Jeder Nicht-Eckpunkt $z \in F$ wird zu einem Eckpunkt nach geeigneter Unterteilung von $\mathcal{K}$ zu $\mathcal{K}'$, wie oben gezeigt, und dann gilt $\kappa(F,z) = 0$. Die Krümmung ist daher immer konzentriert in den Ecken $z \in \operatorname{vert} \mathcal{K}$.

Die **Gesamtkrümmung** der Fläche F ist die Summe

$$\kappa(F) := \sum_{z \in F} \kappa(F,z).$$

Bemerkung: Anschaulich misst die lokale Krümmung κ im Punkt z das Wachstum von Kreisen um z für kleine Radien r, hier ist Umfang $\operatorname{vol}_1 S(z,r) = (2\pi - \kappa)r$ und der Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2 B(z,r) = (\pi - \kappa/2)r^2$.

Der Satz von Gauß–Bonnet mit genial-einfachem Beweis

A504

Satz A5F: Gauß–Bonnet für polytopale Flächen

Für jede geschlossene polytopale Fläche $F = |\mathcal{K}|$ gilt $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$.

Beweis: Der Komplex $\mathcal{K}$ habe f_0 Ecken, f_1 Kanten und f_2 Facetten. Wir summieren die Innenwinkel aller Facetten gemäß Lemma A5C:

$$\sum_{P \in \mathcal{K}_2} \sum_{z \ll P} \angle(P,z) = \sum_{P \in \mathcal{K}_2} [n_P - 2]\pi = \pi\Big[\sum_{P \in \mathcal{K}_2} n_P\Big] - 2\pi f_2 = 2\pi f_1 - 2\pi f_2$$

Jede Facette $P \in \mathcal{K}_2$ hat n_P Ecken und n_P Kanten. Jede Kante liegt in genau zwei Facetten, da die Fläche F keinen Rand hat. Somit gilt:

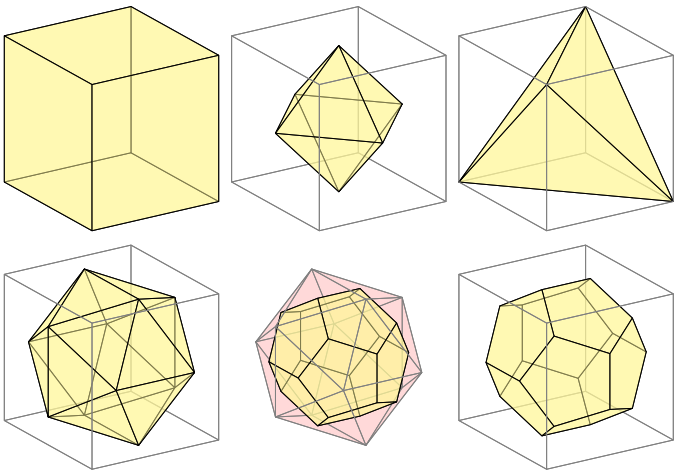
$$\kappa(F) = \sum_{z \in F} \kappa(F,z) = \sum_{\{z\} \in \mathcal{K}_0} \Big[2\pi - \sum_{P \gg z} \angle(P,z)\Big] = 2\pi f_0 - 2\pi f_1 + 2\pi f_2$$

Die Gesamtkrümmung ist also gleich $2\pi \cdot \chi(F)$, wie behauptet. QED

Übung: Gilt das allgemein für kompakte polytopale Flächen mit Rand? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden Satz!

Beispiele zur Krümmung: die fünf platonischen Körper

A505



Was ist so aufregend am Satz von Gauß–Bonnet?

A506
Erläuterung

Der Satz von Gauß–Bonnet ist eine fundamentale Beziehung zwischen lokalen geometrischen Daten (der Krümmung) einerseits und globalen topologischen Daten (wie der Euler–Charakteristik) andererseits.

Sie ist die erste in einer Reihe wichtiger Formeln dieses Typs.

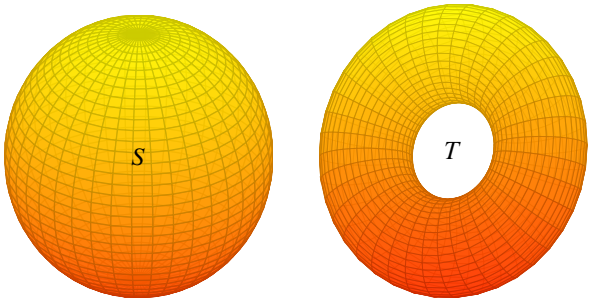
Geometrische Eigenschaften bleiben unter Isometrien erhalten, topologische Eigenschaften allgemein unter Homöomorphismen. Jede Beziehung zwischen diesen beiden Welten ist bemerkenswert!

Aufgabe: Als erste Anwendung, nennen Sie alle geschlossenen zshgden Flächen F mit überall nicht-negativer Krümmung $\kappa \geq 0$.

Lösung: Dank Gauß–Bonnet A5F gilt $\chi(F) \geq 0$. Dank Klassifikation A4J erfüllen dies unter allen denkbaren Flächen nur vier, nämlich die Sphäre $\mathbb{S}^2 \cong F_0^+$ und der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$, sowie ihre nicht-orientierbaren Quotienten, die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm\} \cong F_0^-$ und die Kleinsche Flasche $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm\} \cong F_1^-$. Diese vier Kandidaten lassen sich tatsächlich mit überall nicht-negativer Krümmung $\kappa \geq 0$ realisieren.

Von polytopalen zu glatten Flächen und zurück

A507



Die polytopale Formulierung der Krümmung ist elegant und elementar. Auch den Satz können wir direkt und ohne weitere Hilfsmittel beweisen. Die glatte Formulierung erfordert Werkzeuge der Differentialgeometrie: glatte Mannigfaltigkeiten, Riemannsche Metrik, Krümmung, Integral, ... Beide Sichtweisen gehen durch Approximation ineinander über. Mehr zu diesem schönen Thema lernen Sie in der Geometrie...

Von polytopalen zu glatten Flächen und zurück

A508
Erläuterung

Damit beschließen wir unseren ersten Rundgang durch die Topologie. Diese Verheißungen wollen und werden wir in der Folge einlösen.

Mein Ziel für dieses Kapitel war es, einen ersten Überblick zu geben, und Ihnen zugleich schon erste handfeste Werkzeuge bereitzustellen, sodass Sie nun selbständig und sicher damit arbeiten können.

Unsere gut abgestimmten Übungen geben Ihnen Gelegenheit dazu. Sie werden erfreut feststellen, wie viel Sie nun schon selbst können. Bitte nehmen Sie diese Aufgabe gewissenhaft wahr. Nur so gelingt es.

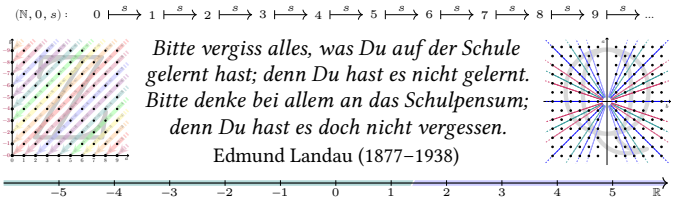
Auch wer Mathematik hauptsächlich für die Anwendungen auf Physik und andere Wissenschaften lernt, also vielfach sich selbst weitere mathematische Hilfssätze zurechtlegen muss, kann auf dem betretenen Pfade nur dann sicher weiterschreiten, wenn er gehen gelernt hat, d.h. zwischen falsch und wahr, zwischen Vermutungen und Beweisen (oder, wie manche so schön sagen, zwischen unstrengen und strengen Beweisen) unterscheiden kann.

Edmund Landau (1877–1938), *Grundlagen der Analysis* (1930)

Kapitel B

Aufbau des Zahlensystems

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$$



Bitte vergiss alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. Bitte denke bei allem an das Schulpensum; denn Du hast es doch nicht vergessen.
Edmund Landau (1877–1938)

Inhalt dieses Kapitels B

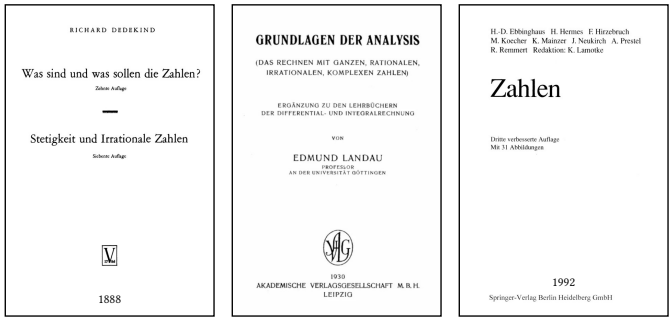
1 Grundlagen: Zahlen, Logik und Mengen
- Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- Mengen, Relationen und Funktionen
- Zermelo–Fraenkel–Axiome

2 Die Mächtigkeit von Mengen
- Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein
- Cantors Diagonalargumente und Hilberts Hotel
- Die Mächtigkeit der reellen Zahlen: $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

3 Intermezzo: Axiome und Modelle
- Hausdorff: die Ordnung der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, \leq)$
- Tarski: die Saga der *high school identities für* $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$
- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ und Quaternionen $\mathbb{H}$ als Matrizen

Was sind und was sollen die Zahlen?

Seit Urzeiten nutzen Menschen Zahlen und entwickeln das Rechnen.
Doch was genau sind Zahlen? Und wie entstehen die Rechenregeln?



Bitte vergiss alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. Bitte denke bei allem an die entsprechenden Stellen des Schulpensums; denn Du hast es doch nicht vergessen. (E. Landau, Vorwort für den Lernenden)

Was sind und was sollen die Zahlen?

Allen ernsthaften Studierenden der Mathematik empfehle ich,
lieber früher als später, den Aufbau des Zahlensystems zu studieren.

Richard Dedekind hat sich in den Jahren 1872–1888 gründlichst mit dem Aufbau der natürlichen Zahlen und ihrer Arithmetik auseinandergesetzt. Als logische Grundlage für sein Unterfangen nutzte er gewinnbringend die damals gerade entstehende Mengenlehre. Diese trägt bis heute!

Auch Edmund Landaus Lehrbuch von 1930 ist ein Klassiker. Hier wurde erstmals der Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den rationalen $\mathbb{Q}$, den reellen $\mathbb{R}$ und schließlich den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ systematisch und präzise ausgeführt. Es ist berühmt für Landaus (von ihm selbst so genannten) „unbarmherzigen Telegrammstil“ und oft zitiert dank seiner beiden prägnanten Vorworte, „Vorwort für den Lernenden“ und „Vorwort für den Kenner“. Auch heute noch erhellend!

Beide Klassiker sind in kommentierten Neuauflagen gut zugänglich. Heutige Studierende finden vielleicht neuere Lehrbücher sympathischer. Ich empfehle das wunderschöne Buch *Zahlen* von Ebbinghaus *et al.*

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Die Grundlage aller Mathematik und Anwendung ist das Zahlensystem:

natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$
rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{z/n \mid z, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$
reelle Zahlen	$\mathbb{R} =$ „$\mathbb{Q}$ und alle Grenzwerte“
komplexe Zahlen	$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Wie können Sie diese Zahlbereiche *definieren* und dann *konstruieren*?
ihre Rechenregeln *formulieren* und ihre Eigenschaften *beweisen*? auf einem Computer korrekt *implementieren* bzw. effizient *approximieren*?
Wie können Sie dies selbst *verstehen* und dann anderen *vermitteln*?

Als logisches Fundament und geeignete Sprache nutzen wir die Mengenlehre – für das Zahlensystem wie auch für alles Weitere.
Ich fasse hier in knappen Worten, doch präzise die grundlegenden Rechenregeln zusammen, die Sie im ersten Semester gelernt haben.

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Satz B1A: Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

(0) Die **natürlichen Zahlen** $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein kommutativer Halbring, und $(\mathbb{N}, 0, s : n \mapsto n + 1)$ erfüllt die Dedekind–Peano–Axiome.

(1) Die **ganzen Zahlen** $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein Integritätsring mit $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$ und entstehen durch Differenzbildung gemäß $\mathbb{Z} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$.

(2) Die **rationalen Zahlen** $(\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein Körper mit $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$ und entstehen durch Bruchbildung gemäß $\mathbb{Q} = \{z/n \mid z, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$.

(3) Die **reellen Zahlen** $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein Körper mit $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$ und vollständig geordnet durch $x \leq y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : x + a^2 = y$.

(4) Die **komplexen Zahlen** $(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein Körper mit $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}] = \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ mit $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{i}^2 = -1$.

(5) Die so definierten Objekte $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ existieren: Es gibt Modelle. Je zwei Modelle sind isomorph, sogar eindeutig isomorph für $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erlauben über $\mathbb{R}$ genau zwei Automorphismen $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \mathrm{conj}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + \mathrm{i}y \mapsto x \pm \mathrm{i}y$, genannt Identität und Konjugation.

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Ich wünsche mir, dass Sie den Aufbau des Zahlensystems kennen.
Schwache Version: Sie verstehen die obigen Definitionen und können damit arbeiten. Das ist meistens der Fall, und darauf werde ich bauen, wir werden im Folgenden diese Strukturen nutzen. Sie sollen daher verstehen, was diese Definitionen genau sagen, und sich überzeugen, dass sie die vertrauten Zahlbereiche zutreffend beschreiben.

Starke Version: Sie haben den Aufbau Schritt für Schritt durchgeführt, also die zugehörigen Konstruktionen und Beweise detailliert ausgeführt. Das ist meist nicht der Fall. Ich bedaure das, werde es aber hier nicht heilen können. Am Anfang des Studiums kann man diese Konstruktion vermutlich nicht recht würdigen, und später im Studium machen sich die meisten dann andere Sorgen. Das ist unglücklich, aber leider typisch.

Ich begnüge mich daher hier mit einer Erinnerung bzw. einem Appell.
Das ist hoffentlich verschmerzlich und folgt dem historischen Vorbild:
Mit jedem Zahlbereich wurde lange gerechnet, ehe er begründet wurde.
Wenn Sie bereit dazu sind, studieren Sie gründlich – die Grundlagen!

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Übung zur Wiederholung: Was bedeuten diese algebraischen Begriffe, kommutativer Halb/Ring, Divisionsring und Körper? Homomorphismen?

Was ist ein geordneter Körper? Was bedeutet hier Vollständigkeit? Welche äquivalenten Formulierungen kennen Sie hierfür?

Warum existieren die genannten Objekte? Wie konstruieren Sie diese? Warum sind sie eindeutig? Wie konstruieren Sie Isomorphismen?

☺ Der obige zusammenfassende Satz ist eine konzise Erinnerung und definiert eine klare Schnittstelle, auf der wir im Folgenden aufbauen.

```
from __experience__ import numbersystem
from __firstyear__  import numbersystem
from __future__     import numbersystem
```

☺ Vielleicht überkommt Sie nun doch die mathematische Neugier...
Ich empfehle das wunderschöne Buch *Zahlen* von Ebbinghaus *et al.*

Universelle Grundlage: Logik und Mengenlehre

B105 Erläuterung

Schon der Aufbau des Zahlensystems zeigt uns eindringlich:
Wir benötigen solide Grundlagen in Logik und Mengenlehre!
Diese benötigen wir überall, insbesondere in der Topologie.

This is not to say that the contents of this book are unusually difficult or profound. What is true is that the concepts are very general and very abstract, and that, therefore, they may take some getting used to. […]

The student's task in learning set theory is to steep himself in unfamiliar but essentially shallow generalities till they become so familiar that they can be used with almost no conscious effort.

Paul Halmos (1916–2006), *Naive set theory*

Universelle Grundlage: Logik und Mengenlehre

B106 Erläuterung

Übung zur Wiederholung: Was genau besagt Russels Antinomie? Warum ist sie eine logische Katastrophe? Wie lösen wir diese ernste Grundlagenkrise durch Rechenregeln / Axiome für die Mengenlehre?

Was ist eine Relation? eine Funktion? Wie erklären Sie ihre Komposition? Was bedeutet injektiv, surjektiv, bijektiv? Wie verhält sich dies zu Links/Rechts/Inversen? Wo benötigen Sie dazu das Auswahlaxiom?

Wie faktorisieren Sie eine Funktion über eine Surjektion? eine Injektion? Was bedeutet eine Funktion ist „wohldefiniert"? Was kann schiefgehen? Was ist also immer zu prüfen, wenn Sie eine Funktion definieren?

Was bedeutet Äquivalenzrelation? Was ist der zugehörige Quotient? Was ist ein Repräsentantensystem? eine wohldefinierte Eigenschaft? Nennen Sie prominente Beispiele, auch aus Schulmathematik und Alltag.

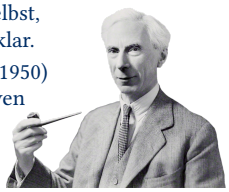
Was ist eine Ordnungsrelation? eine Präordnung? total vs partiell? kleinstes/größtes Element vs minimale/maximale Elemente? Infimum/Supremum? Nennen Sie aussagekräftige Gegen/Beispiele!

Grundlagenkrise: Russels Antinomie (1903)

B107 Erinnerung

Für jede Menge x gilt: Entweder enthält x sich selbst, geschrieben $x \in x$, oder nicht, $x \notin x$. So weit, so klar.
Bertrand Russel (1872–1970, Literaturnobelpreis 1950) veröffentlichte 1903 folgende Antinomie der naiven Mengenlehre: Wir untersuchen die Klasse

$$\mathscr{R} = \{ x \mid x \notin x \}.$$



Für jede Menge x gilt $x \in \mathscr{R} \Leftrightarrow x \notin x$. Ist $\mathscr{R}$ eine Menge? Falls ja, so folgt $\mathscr{R} \in \mathscr{R} \Leftrightarrow \mathscr{R} \notin \mathscr{R}$. Logische Katastrophe: Wahr und Falsch sind äquivalent!
Falls die Menge $\mathscr{R}$ existiert, so bricht unsere gesamte Logik zusammen.

☹ Nicht alles, was wir formulieren können, ist tatsächlich sinnvoll.
Einzig möglicher Ausweg: Diese Klasse $\mathscr{R}$ ist gar keine Menge!
Die allzu naive Frage „Gilt $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$ oder $\mathscr{R} \notin \mathscr{R}$?" ist damit sinnlos.

☺ Wir müssen die Konstruktion von Mengen reglementieren!
So restriktiv wie nötig, um Paradoxien wie die obige zu vermeiden.
So expressiv wie möglich, um alles zu formulieren, was wir brauchen.

Die Zermelo–Fraenkel–Axiome: ZF+AC = ZFC

B108 Erinnerung

Wir arbeiten in einem Mengenuniversum $(\mathcal{U}, \in, =, \{\}, \bigcup, \mathfrak{P}, \mathfrak{A}_\bullet, \mathfrak{B}_\bullet, \omega, \mathfrak{C})$.
Auf dieser virtuellen Maschine führen wir die gesamte Mathematik aus.

(ZF0) **Fundierung:** In $(\mathcal{U}, \in)$ ist jede Kette $M_0 \ni M_1 \ni M_2 \ni \dots$ endlich.
(ZF1) **Extensionalität:** Für $A, B \in \mathcal{U}$ gilt $A = B$, falls $A \subseteq B$ und $A \supseteq B$.
(ZF2) **Aufzählung:** Zu $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{U}$ existiert $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{U}$.
(ZF3) **Vereinigung:** Zu jeder Menge $S \in \mathcal{U}$ existiert $\bigcup S \in \mathcal{U}$.
(ZF4) **Potenz:** Zu jeder Menge $A \in \mathcal{U}$ existiert $\mathfrak{P}(A) \in \mathcal{U}$.
(ZF5) **Aussonderung:** Zu jedem Prädikat $\varphi : \mathcal{U} \to \{0,1\}$ und jeder Menge $B \in \mathcal{U}$ existiert die Aussonderungsmenge $A = \{ x \in B \mid \varphi(x) \} \in \mathcal{U}$.
(ZF6) **Ersetzung:** Zu jeder Zuordnung $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ und jeder Menge $A \in \mathcal{U}$ existiert die Ersetzungsmenge $B = \{ f(x) \mid x \in A \} \in \mathcal{U}$.
(ZF7) **Unendlichkeit:** Es existiert die unendliche Menge $\omega \in \mathcal{U}$ erzeugt durch $\emptyset \in \omega$ und $\forall n \in \omega : (n \cup \{n\}) \in \omega$.
(ZF8) **Auswahl:** Die Zuordnung $\mathfrak{C} : \mathcal{U}^* \to \mathcal{U} : a \mapsto x$ erfüllt $x \in a$.

Übung: Explizieren Sie die Definition aller hier verwendeten Begriffe!

Wie vergleichen wir die Größe von Mengen?

B201

Definition B2Q: Mächtigkeit von Mengen

Die Mächtigkeit von Mengen X und Y vergleichen wir wie folgt durch Abbildungen, mit Hilfe von Bijektionen, Injektionen und Surjektionen:

1. Äquipotenz $X \cong Y$ bedeutet, es existiert eine Bijektion $(h,k) : X \cong Y$. Die Mengen X und Y sind gleich groß / gleichmächtig / äquipotent.
2. Die Relation $X \preceq Y$ bedeutet, es existiert eine Injektion $f : X \hookrightarrow Y$. Interpretation: „Die Menge X ist höchstens so groß wie Y."
3. $Y \succeq X$ bedeutet, es existiert eine Surjektion $g : Y \twoheadrightarrow X$ oder $X = \emptyset$. Interpretation: „Die Menge Y ist mindestens so groß wie X."

Gilt $X \cong \{1, \dots, n\}$, so ist X **endlich**, mit Elementezahl $\sharp X = n$.
Gilt $X \cong \mathbb{N}$, so nennen wir die Menge X **abzählbar unendlich**.
Abzählbar bedeutet $X \preceq \mathbb{N}$, das heißt X ist entweder endlich oder abzählbar unendlich; andernfalls ist X **überabzählbar**.

Wie vergleichen wir die Größe von Mengen?

B202 Erläuterung

Beispiel: Im Hörsaal befinden sich weniger Personen (X) als Sitze (Y): Dazu muss ich weder X noch Y zählen, Hinsetzen $X \hookrightarrow Y$ genügt!

Die Relation $X \preceq Y :\Leftrightarrow \exists f : X \hookrightarrow Y$ ist reflexiv dank $\mathrm{id}_X : X \hookrightarrow X$ und transitiv, denn die Komposition von Injektionen ergibt eine Injektion.

Die Relation $Y \succeq X :\Leftrightarrow (\exists g : Y \twoheadrightarrow X) \vee X = \emptyset$ ist äquivalent zu $X \preceq Y$: Zu jeder Surjektion $g : Y \twoheadrightarrow X$ existiert $f : X \hookrightarrow Y$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (AC). Umgekehrt, zu $f : X \hookrightarrow Y$ existiert $g : Y \twoheadrightarrow X$, oder es gilt $X = \emptyset$.

Strikt kleiner: Wie üblich schreiben wir $X \prec Y$ für $X \preceq Y \wedge Y \not\preceq X$.
Strikt größer: Wie üblich schreiben wir $Y \succ X$ für $Y \succeq X \wedge X \not\succeq Y$.

Die Relation $X \cong Y :\Leftrightarrow \exists (h,k) : X \cong Y$ ist reflexiv dank $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : X \cong X$, symmetrisch dank Vertauschung und transitiv dank Komposition.
Satz von Cantor–Bernstein (B2O): Aus $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$ folgt $X \cong Y$, denn aus $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$ konstruieren wir $(h,k) : X \cong Y$.

Beispiel: endliche Mengen

B203

Für alle natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gelten die vertrauten Beziehungen:

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} &\cong \{1, \dots, n\} &&\Leftrightarrow \quad m = n \\ \{1, \dots, m\} &\preceq \{1, \dots, n\} &&\Leftrightarrow \quad m \leq n \\ \{1, \dots, m\} &\prec \{1, \dots, n\} &&\Leftrightarrow \quad m < n \end{aligned}$$

Das klingt plausibel und leuchtet sofort ein, verdient aber einen Beweis. Führen Sie zur Wiederholung das Argument per Induktion sorgsam aus. Das bedeutet, dass die Mächtigkeit *endlicher* Mengen genau das leistet, was wir uns erhoffen, nämlich den Vergleich nach Elementezahl.

Es gilt $\{1, \dots, n\} \prec \mathbb{N}$. Warum? Zunächst haben wir $\mathrm{inc} : \{1, \dots, n\} \hookrightarrow \mathbb{N}$. Umgekehrt, ist $f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, so ist f nicht surjektiv. Auch das klingt plausibel und leuchtet sofort ein, verdient aber dennoch einen Beweis. Hierzu betrachten $m = \sup(f) \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ gilt $m = 0$. Für $n \geq 1$ gilt induktiv $m = \max\{\, f(n),\ \sup(f|_{\{1,\dots,n-1\}}) \,\} \in \mathbb{N}$.
Das nachfolgende Element $m + 1$ liegt nicht im Bild von f.

Beispiel: unendliche Mengen

B204

Aufgabe: Ist die Menge $Q = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ der Quadratzahlen kleiner als die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ der natürlichen Zahlen?

Lösung: (1) Im Sinne der Inklusion haben wir $Q \subsetneq \mathbb{N}$.
Im Poset $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ist demnach Q strikt kleiner als $\mathbb{N}$.
(2) Wir haben $(h,k) : \mathbb{N} \cong Q$ mit $h(x) = x^2$ und $k(y) = \sqrt{y}$.
Im Sinne der Mächtigkeit sind beide Mengen demnach gleich groß!

⚠ Die Formulierungen „größer als" oder „kleiner als" oder „gleich groß" sind daher missverständlich, solange der Kontext nicht präzisiert wird. Das Ergebnis hängt entscheidend davon ab, welche Ordnungsrelation wir dabei zu Grunde legen, wie hier eindrücklich zu sehen.

☺ Um mögliche Missverständnisse zu vermeiden, sagen wir statt *gleich groß* genauer *gleichmächtig* oder *äquipotent* im Sinne der Definition B2Q. Die Mengen $\mathbb{N}$ und Q sind demnach gleichmächtig, sie haben dieselbe **Mächtigkeit**, wir sagen auch: sie haben dieselbe **Kardinalität**.

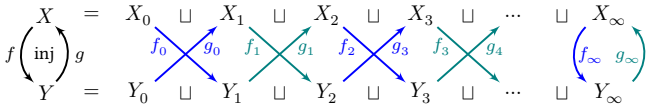
Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

B205

Satz B2o: Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Aus $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$ folgt $X \cong Y$. Genauer: Aus Injektionen $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$ konstruieren wir explizit eine Bijektion $(h, k) : X \cong Y$.

Jedes Element $x_0 \in X$ hat seine Urbildkette $x_0 \overset{f}{\mapsto} y_1 \overset{g}{\mapsto} x_2 \overset{f}{\mapsto} y_3 \overset{g}{\mapsto} \dots$ maximaler Länge $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Die Elemente der Länge n bilden die Menge $X_n \subseteq X$. Entsprechend definieren wir $Y_n \subseteq Y$. Wir erhalten:



Cantors Reißverschluss: Auf $X = \bigsqcup_n X_n$ und $Y = \bigsqcup_n Y_n$ zerlegen wir f und g jeweils in die Bijektionen $f_n : X_n \xrightarrow{\sim} Y_{n+1}$ und $g_n : Y_n \xrightarrow{\sim} X_{n+1}$. So erhalten wir zueinander inverse Bijektionen $(h, k) : X \cong Y$ vermöge $h = f_0 \sqcup g_0^{-1} \sqcup f_2 \sqcup g_2^{-1} \sqcup \dots \sqcup f_\infty$ und $k = g_0 \sqcup f_0^{-1} \sqcup g_2 \sqcup f_2^{-1} \sqcup \dots \sqcup f_\infty^{-1}$.

☺ Cantors Reißverschluss gelingt konstruktiv, ohne das Auswahlaxiom!

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

B206 Erläuterung

Der Äquivalenzsatz B2o hat eine faszinierend turbulente Geschichte. Er wurde 1887 von Georg Cantor formuliert, aber erst zehn Jahre später 1897 bewiesen. Dies gelang dem damals erst 19-jährigen Studenten Felix Bernstein in Cantors Seminar an der Universität Halle. Zeitgleich und unabhängig veröffentlichte Ernst Schröder einen Beweis, der sich jedoch später als fehlerhaft erwies. Bereits 1887 fand Richard Dedekind einen Beweis, den er aber nicht veröffentlichte. Das genial-einfach-konstruktive Reißverschlussverfahren wurde 1906 von Julius König veröffentlicht.

Satz B2o garantiert, dass wir Mengen nach Mächtigkeit ordnen können. Wir definieren die strikte Ordnung $X \prec Y$ durch $X \preceq Y$ und $Y \not\preceq X$ und entsprechend $X \succ Y$ durch $X \succeq Y$ und $Y \not\preceq X$. Demnach gilt also *höchstens* eine der drei Alternativen $X \prec Y$ oder $X \cong Y$ oder $X \succ Y$.

Der Vergleichbarkeitssatz B2ʀ von Cantor–Zermelo vervollständigt dies durch die Aussage, dass sich je zwei Mengen vergleichen lassen; demnach gilt *genau* eine der drei Alternativen $X \prec Y$ oder $X \cong Y$ oder $X \succ Y$. (Letzteres benötigt das Auswahlaxiom, etwa in Form von Zorns Lemma.)

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

B207 Erläuterung

Beweis: Gegeben sind $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$. Die beiden Mengen

$$X_0 := X \setminus g(Y) \quad \text{und} \quad Y_0 := Y \setminus f(X)$$

enthalten alle Elemente ohne Urbild. Per Rekursion enthalten

$$X_{n+1} := g(Y_n) \quad \text{und} \quad Y_{n+1} := f(X_n)$$

alle Elemente mit Urbildfolge der Länge $n + 1$. Schließlich enthalten

$$X_\infty := \bigcap\nolimits_{\ell \in \mathbb{N}} (g \circ f)^\ell(X) \quad \text{und} \quad Y_\infty := \bigcap\nolimits_{\ell \in \mathbb{N}} (f \circ g)^\ell(Y)$$

alle Elemente mit unendlicher Urbildfolge. Wir definieren

$$h : X \to Y : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \bigsqcup_{\ell \in \mathbb{N}} X_{2\ell} \sqcup X_\infty, \\ y & \text{für } x = g(y) \in \bigsqcup_{\ell \in \mathbb{N}} X_{2\ell+1}, \end{cases}$$

$$k : Y \to X : y \mapsto \begin{cases} x & \text{für } y = f(x) \in \bigsqcup_{\ell \in \mathbb{N}} Y_{2\ell+1} \sqcup Y_\infty, \\ g(y) & \text{für } y \in \bigsqcup_{\ell \in \mathbb{N}} Y_{2\ell}. \end{cases}$$

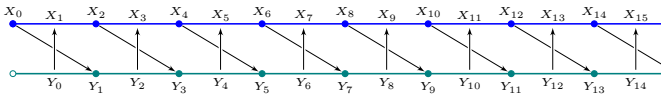
Damit gilt $k \circ h = \mathrm{id}_X$ und $h \circ k = \mathrm{id}_Y$, wie gewünscht. QED

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

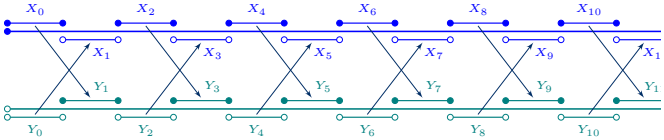
B208 Erläuterung

Beispiel: Die Intervalle $X = [0, \infty[$ und $Y =]0, \infty[$ sind gleichmächtig.

Beweis: Wir haben $f : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x + 1$ und $g = \mathrm{inc} : Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$. Cantor–Bernstein konstruiert daraus die Bijektion $(h, k) : X \cong Y$ mit $(h, k) : \mathbb{N} \cong \mathbb{N}_{\geq 1} : x \leftrightarrow x + 1$ und $h(x) = k(x) = x$ für $x \notin \mathbb{N}$. Skizze:



Alternative: Wir nutzen $f : x \mapsto x + 1$ und $g : y \mapsto y + 1$. Skizze:



Beispiel: Die Intervalle $X = [0, 3]$ und $Y = [0, 2[$ sind gleichmächtig vermöge $f : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x/2$ und $g : Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$. Siehe Satz ??.

Mächtigkeit der Primzahlmenge

B209 Erläuterung

Aufgabe: Ist die Menge $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ der Primzahlen strikt kleiner als die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ der natürlichen Zahlen?

Lösung: (1) Im Sinne der Inklusion haben wir $\mathbb{P} \subsetneq \mathbb{N}$.
Im Poset $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ist demnach $\mathbb{P}$ strikt kleiner als $\mathbb{N}$.

(2) Dennoch existiert eine Bijektion $(h, k) : \mathbb{N} \cong \mathbb{P}$.
Im Sinne der Mächtigkeit sind beide Mengen gleich groß!

Ausführliche Konstruktion: Dank Satz ?? ist die Menge $\mathbb{P}$ unendlich. Ihre Elemente können wir aufsteigend anordnen zu $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$. Dies stiftet die (kanonische, isotone) Bijektion $h : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P} : n \mapsto p_n$.

☺ Computer-Algebra-Systeme implementieren diese Abbildung $h : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}$ als eine Funktion, etwa `Prime[n]` oder `ithprime(n)`.

⚠ Die Bijektion $h : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}$ ist leicht zu *definieren*, aber aufwändig zu *berechnen*. Beispiele: Was ist $h(1000)$? $h(10^6)$? $h(10^9)$? $h(10^{12})$? Immerhin haben wir explizite und recht genaue Schranken für das Wachstum dieser Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ (Primzahlsatz).

Mächtigkeit der Primzahlmenge

B210 Erläuterung

Woher wissen wir, dass es wirklich *unendlich* viele Primzahlen gibt? Das ist ein Satz... wir haben einen Beweis... sogar eine Konstruktion: Zu je gegebenen Primzahlen $p_0, \dots, p_n$ liefert Euklids Konstruktion

$$p_{n+1} := \mathrm{lpf}(p_0 \cdots p_n + 1)$$

eine weitere Primzahl. So erhalten wir eine Injektion $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{P} : n \mapsto p_n$. Es gibt jedoch keinen Grund, dass diese Abbildung f zudem surjektiv ist. Wir haben also nur eine Injektion $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{P}$, das ist schon viel wert. Umgekehrt liefert die Inklusion $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ gratis eine Injektion $g : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{N}$.

Wäre es nicht schön, wenn wir allgemein aus Injektionen $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$ eine Bijektion $(h, k) : X \cong Y$ konstruieren könnten? Genau das leistet der Äquivalenzsatz B2o von Cantor–Bernstein, ebenso einfach wie elegant, ebenso konstruktiv wie explizit.

Zugegeben, die Bijektion $\mathbb{P} \cong \mathbb{N}$ ist dazu nur ein allzu einfaches Beispiel, das wir leicht auch anders lösen können, ganz konkret wie oben gezeigt. Doch es illustriert den konstruktiven Nutzen des Äquivalenzsatzes.

Der Vergleichbarkeitssatz von Cantor–Zermelo

B211 Erläuterung

Ist die Relation $\preceq$ total? Lassen sich also je zwei Mengen X und Y vergleichen gemäß $X \preceq Y$ oder $Y \preceq X$? Das scheint plausibel, erfordert aber einen Beweis. Für endliche Mengen gelingt dies durch Abzählung, für beliebige unendliche Mengen benötigen wir das Auswahlaxiom!

Satz B2ʀ: Vergleichbarkeitssatz von Cantor–Zermelo

Zu je zwei Mengen X und Y existiert eine Injektion $X \hookrightarrow Y$ oder $Y \hookrightarrow X$.

Beweis: Eine **partielle Bijektion** zwischen X und Y ist eine Bijektion $(h, k) : A \cong B$ zwischen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$, also $k \circ h = \mathrm{id}_A$ und $h \circ k = \mathrm{id}_B$. Wir definieren $(h, k) \subseteq (h', k')$ durch $A \subseteq A'$ und $B \subseteq B'$ sowie $h(x) = h'(x)$ für alle $x \in A$ und $k(y) = k'(y)$ für alle $y \in B$.

Ist S eine Kette partieller Bijektionen, so ist auch ihre Vereinigung $\bigcup S$ eine partielle Bijektion. Wir können das Lemma von Zorn anwenden: Es existiert eine maximale partielle Bijektion $(h, k) : A \cong B$.

Wäre $A \subsetneq X$ und $B \subsetneq Y$, so könnten wir (h, k) fortsetzen. Also gilt $A = X$ und somit $h : X \hookrightarrow Y$, oder es gilt $B = Y$ und somit $k : Y \hookrightarrow X$. QED

Der Vergleichbarkeitssatz von Cantor–Zermelo

B212 Erläuterung

Der Vergleich $X \preceq Y$ von Mengen ist eine Präordnung, da reflexiv und transitiv. Nach dem Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein ist er zudem antisymmetrisch bis auf Bijektion: Aus $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$ folgt $X \cong Y$. Wir stellen nun erfreut fest, dass der Vergleich total ist.

Der Vergleichbarkeitssatz B2ʀ von Cantor–Zermelo ist zwar hilfreich, doch notgedrungen nicht-konstruktiv: Er benötigt das Auswahlaxiom, im oben angegebenen Beweis in Form von Zorns Lemma.

Wenn wir also die Mächtigkeit von zwei Mengen vergleichen wollen, so garantiert dieser Satz, dass der Vergleich im Prinzip immer gelingt, gibt uns aber keinen Hinweis, wie dies konkret zu bewerkstelligen sei.

Der Äquivalenzsatz B2o von Cantor–Bernstein hingegen benötigt nicht das Auswahlaxiom: Das oben angegebene Reißverschlussverfahren ist konstruktiv, aus $(f, g) : X \rightleftarrows Y$ konstruieren wir explizit $(h, k) : X \cong Y$.

Wenn wir also die Gleichmächtigkeit von zwei Mengen zeigen wollen, so genügt es, gegenseitige Injektionen herzustellen. Das ist oft wesentlich einfacher und wird uns in der praktischen Anwendung oft nützen.

Mächtigkeit der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

B213 Erläuterung

Satz B2A: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.
Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig, kurz $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$.

Beweisidee: Dies gelingt explizit vermöge $(f, g) : \mathbb{N} \cong \mathbb{Z} : a \leftrightarrows b$ mit

$a \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$b \in \mathbb{Z}$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	...

Aufgabe: Formulieren Sie dieses Bijektionspaar explizit.
Lösung: Wir fassen diese Idee in explizite Formeln:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : a \mapsto \begin{cases} a/2 & \text{falls } a \in 2\mathbb{N}, \\ -(a+1)/2 & \text{falls } a \in 2\mathbb{N}+1, \end{cases}$$

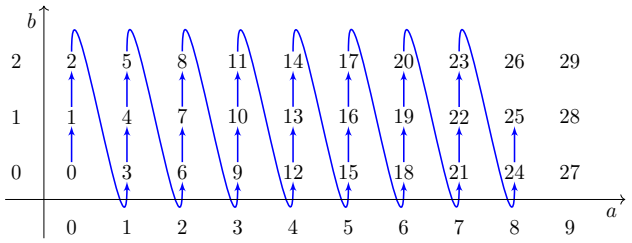
$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : b \mapsto \begin{cases} 2b & \text{falls } b \geq 0, \\ -2b-1 & \text{falls } b < 0. \end{cases}$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert und zueinander invers,
es gilt also $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Nachrechnen! QED

Mächtigkeit des Produkts $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$

B214 Erläuterung

Satz B2B: Auch $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$ ist abzählbar.
Die Mengen $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig.



Aufgabe: Formulieren Sie dieses Bijektionspaar explizit.
Lösung: Wir nutzen zunächst $\{1, \dots, n\} \cong \{0, \dots, n-1\} : k \leftrightarrows k-1$.
Zudem haben wir das Bijektionspaar $(f, g) : \mathbb{N} \times \{0, \dots, n-1\} \cong \mathbb{N}$
mit $f(a, b) = na + b$ und $g(c) = (c \operatorname{quo} n, c \operatorname{rem} n)$. QED

Grundrechenarten für Mächtigkeiten

B215 Erläuterung

Satz B2C: Grundrechenarten für Mächtigkeiten
Gegeben seien Bijektionen $(\alpha, \alpha') : A \cong A'$ und $(\beta, \beta') : B \cong B'$.
Daraus erhalten wir kanonische Bijektionen für Summe und Produkt:

$$(\alpha \sqcup \beta, \alpha' \sqcup \beta') : A \sqcup B \cong A' \sqcup B',$$
$$(\alpha \times \beta, \alpha' \times \beta') : A \times B \cong A' \times B',$$

Für die Abbildungsmengen erhalten wir die kanonische Bijektion

$$(\varphi, \varphi') : \operatorname{Abb}(A, B) \cong \operatorname{Abb}(A', B')$$

vermöge $\varphi(f) = \beta \circ f \circ \alpha'$ und $\varphi'(f') = \beta' \circ f' \circ \alpha$. Zudem haben wir

$$(\psi, \psi') : (Z^X)^Y \cong Z^{X \times Y} : f \leftrightarrows g$$

vermöge $g(x, y) = f(y)(x)$ für $f : Y \to \operatorname{Abb}(X, Z)$ und $g : X \times Y \to Z$.

Beweis: Diese Abbildungen sind wohldefiniert und zueinander invers:
Alles liegt explizit vor, es genügt sorgsames Nachrechnen! QED

Grundrechenarten für Mächtigkeiten

B216 Erläuterung

Für die erste Bijektion $A \sqcup B \cong A' \sqcup B'$ setzen wir Disjunktheit voraus,
also $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$. Dies können wir immer erzwingen durch

$$(\{1\} \times A) \sqcup (\{2\} \times B) \cong (\{1\} \times A') \sqcup (\{2\} \times B')$$

Anschaulich gesagt, wir ersetzen die Menge A durch die Kopie $\{1\} \times A$;
zwischen beiden übersetzen wir durch die kanonische Bijektion (ι_2, pr_2).
Entsprechend verfahren wir für $\{2\} \times B$ sowie $\{1\} \times A'$ und $\{2\} \times B'$.

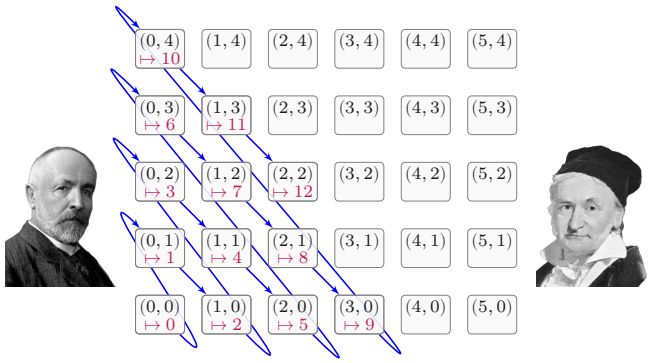
Beispiel: Es gilt $(\{1\} \times \mathbb{N}) \sqcup (\{2\} \times \mathbb{N}) = \{1, 2\} \times \mathbb{N} \cong \{0, 1\} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.
Dies ist die Vereinigung von zwei disjunkten Kopien der Menge $\mathbb{N}$,
die Mächtigkeit bleibt dabei gleich, wie oben gesehen (??).

Beispiel: Aus $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ folgt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dank ??.
Wir werden im Folgenden sehen, dass $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$ gilt (??).

Beispiel: Aus $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ folgt $\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{N}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ dank ??.
Wir zeigen im Folgenden $\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ (??).

Mächtigkeit des Produkts $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

B217



Satz B2D: Cantors erstes Diagonalargument
Die Abbildung $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a, b) \mapsto a + (a+b)(a+b+1)/2$ ist bijektiv.

Cantors Paarungsfunktion $f : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$

B218 Erläuterung

☺ Es ist höchst bemerkenswert, dass uns die Bijektion $f : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ mit
einer so einfachen Funktion gelingt, einem Polynom zweiten Grades!
Aufgabe: Formulieren Sie explizit dieses Bijektionspaar $(f, g) : \mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$.
Lösung: Wir übersetzen die obige Skizze in eine Rekursion:

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 : \quad g(0) = (0, 0) \text{ und } g(n+1) = \varphi(g(n)),$$
$$\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2 : (a, b) \mapsto \begin{cases} (a+1, b-1) & \text{falls } b > 0, \\ (0, a+1) & \text{falls } b = 0. \end{cases}$$

Explizit ausgeschrieben gilt $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 : c \mapsto (\, a,\ b = s - a\,)$
mit $s = \max\{ n \in \mathbb{N} \mid n(n+1)/2 \leq c \}$ und $a = c - s(s+1)/2$.
Die Umkehrfunktion ist erfreulich einfach (dank dem kleinen Gauß):

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a, b) \mapsto a + (a+b)(a+b+1)/2$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert und zueinander invers,
es gilt also $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^2}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Nachrechnen! QED

Abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

B219

Die Vereinigung $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \{i\} \times \mathbb{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar dank ??. Allgemein:

Satz B2E: abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen
Jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar:
Sei I eine abzählbare Indexmenge. Zu jedem Index $i \in I$ sei A_i
eine abzählbare Menge. Dann ist auch $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ abzählbar.

Beweis: Gegeben seien $f : I \hookrightarrow \mathbb{N}$ und $g_i : A_i \hookrightarrow \mathbb{N}$ für jedes $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} A = \bigcup_{i \in I} A_i & \xhookrightarrow{\quad h \quad} & \mathbb{N} \\ \mathrm{pr}_2 \uparrow \downarrow r & & \uparrow \wr \\ A' = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times A_i & \xhookrightarrow{(i,a) \mapsto (f(i), g_i(a))} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}$$

Nach Indexwechsel dürfen wir $I \subseteq \mathbb{N}$ annehmen. Eine Rechtsinverse zu
$\mathrm{pr}_2 : A' \twoheadrightarrow A$ ist $r : a \mapsto (j, a)$ mit $j = \min\{ i \in I \mid a \in A_i \}$ dank ??.
Somit gilt $A \preceq A' \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$. Dank Transitivität folgt $A \preceq \mathbb{N}$. QED

Abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

B220 Erläuterung

Korollar B2F: Mächtigkeit von $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$
(1) Es gilt $\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
(2) Es gilt $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \cong \mathbb{N}$ für die Menge aller Folgen mit endlichem Träger:

$$\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} := \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \sharp\,\mathrm{supp}(f) < \infty \}.$$

(3) Hingegen ist die Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \}$ überabzählbar.

Beweis: (1) Induktion über $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: Für $n = 1$ gilt $\mathbb{N}^1 \cong \mathbb{N}$.
Für $n \geq 2$ finden wir $\mathbb{N}^n = \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ dank ??.
(2) Die Menge $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ ist eine abzählbare Vereinigung (??) gemäß

$$\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq \{0, \dots, n\} \}.$$

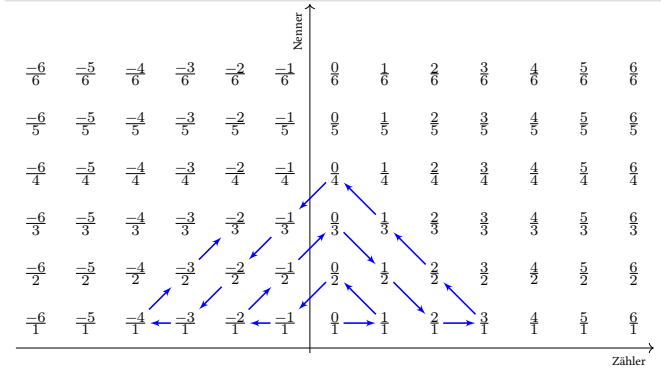
(3) Wir haben $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar;
das beweisen wir unten mit Cantors zweitem Diagonalargument ??.
Beispiel: Der Fundamentalsatz der Arithmetik zeigt $(\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, +) \cong (\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot)$
vermöge der Zuordnung $(a_0, a_1, a_2, \dots) = a \mapsto n = 2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \cdots$.

Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

B221

Satz B2c: Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich, kurz $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$.



Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

B222
Erläuterung

Es gibt viele Möglichkeiten, eine solche Abzählung auszuführen.
Die Skizze zeigt eine anschauliche, graphische Vorgehensweise.
📖 Eine raffiniert-explizite Abzählung konstruieren N. Calkin, H. Wilf: *Recounting the Rationals.* Amer. Math. Monthly 107 (2000) 360-363.

Wir wollen eine Bijektion $\mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{Q}$ konstruieren. Bei der oben skizzierten Abzählung werden tatsächlich alle rationalen Zahlen durchlaufen, jedoch müssen mehrfache Darstellungen derselben Zahl übergangen werden. Die Grundidee ist anschaulich anhand der Skizze vollkommen klar, doch eine vollständige Präzisierung scheint zunächst schwierig.

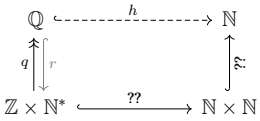
Um dies sorgfältig und explizit auszuformulieren, ist es geschickt, unsere bisherigen Konstruktionen gewinnbringend einzusetzen:
Wir haben einerseits $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, andererseits ist $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\, z/n \mid z \in \mathbb{Z} \,\}$ abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, also abzählbar dank **??**.
Aus $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{N}$ erhalten wir $(h, k) : \mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ dank Satz B2o.
Damit gelingt eine ebenso präzise wie konkrete Konstruktion.
Wir müssen nur den Mut fassen, alles auszuschreiben!

Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

B223
Erläuterung

Beweis: Wir haben einerseits die Inklusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, also $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$.
Die rationalen Zahlen sind also mindestens abzählbar unendlich.

Andererseits haben wir die Surjektion $q : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \twoheadrightarrow \mathbb{Q} : (a, b) \mapsto a/b$.



Somit gilt $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$. Dank Transitivität folgt $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$.
Die rationalen Zahlen sind also höchstens abzählbar unendlich.
☺ Dank Cantor–Bernstein B2o gilt $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$. QED

Bemerkung: Die Quotientenabbildung $q : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \twoheadrightarrow \mathbb{Q} : (a, b) \mapsto a/b$ erlaubt eine schöne explizite Rechtsinverse $r : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : c \mapsto (a, b)$ mit $c = a/b$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$: Dies ist die eindeutige Darstellung als vollständig gekürzter Bruch. Wir haben also $(r, q) : \mathbb{Q} \leftrightarrows \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
☺ *Beautiful is better than ugly. Explicit is better than implicit.*

Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

B224
Erläuterung

Korollar B2h: Mächtigkeit von $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$

(1) Es gilt $\mathbb{Q}^n \cong \mathbb{N}$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
(2) Es gilt $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} \cong \mathbb{N}$ für die Menge aller Folgen mit endlichem Träger:

$$\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} := \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid \sharp\,\mathrm{supp}(f) < \infty \,\}.$$

(3) Hingegen ist die Menge $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \,\}$ überabzählbar.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussagen als Wiederholung und Übung.
Lösung: Dies beweisen wir wörtlich wie in **??** mit Hilfe von Satz **??**.
(1) Wir führen Induktion über $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: Für $n = 1$ gilt $\mathbb{Q}^1 \cong \mathbb{N}$ (**??**).
Für $n \geq 2$ finden wir induktiv $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q}^{n-1} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (**??**).
(2) Die Menge $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ ist eine abzählbare Vereinigung (**??**) gemäß

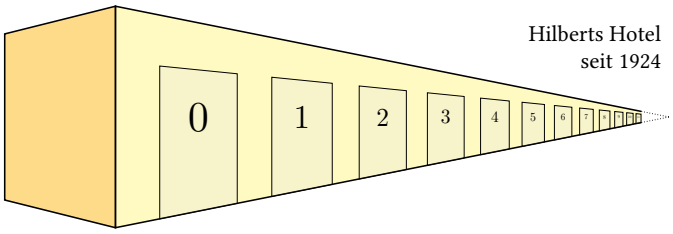
$$\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid \mathrm{supp}(f) \subset \{0, \dots, n\} \,\}$$

(3) Wir haben $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar;
das beweisen wir unten mit Cantors zweitem Diagonalargument **??**.

Hilberts Hotel

B225

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können. (David Hilbert)



Hilberts Hotel hat die Zimmer $0, 1, 2, 3, \dots$. Alle Zimmer sind belegt.
Ein weiterer Gast kommt noch unter, dank $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$,
... auch abzählbar viele neue Gäste, dank $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto 2n$,
... sogar $\mathbb{N}^2 \hookrightarrow \mathbb{N} : (a, b) \mapsto a + (a + b)(a + b + 1)/2$.

Hilberts Hotel

B226
Erläuterung

Wenn in einem **endlichen Hotel** alle Zimmer belegt sind, dann kann kein Gast mehr aufgenommen werden, auch wenn die Managerin die Gäste neu auf die Zimmer verteilt. Es hilft alles nichts! (Invarianz **??**)

Anders in **Hilberts Hotel** mit unendlich vielen Zimmern $0, 1, 2, 3, \dots$:
Sind alle Zimmer belegt, so kann noch ein Gast aufgenommen werden!
Der Gast von Zimmer 0 zieht nach 1, der von 1 nach 2, usw.

Ebenso zwei Gäste, oder drei, oder vier... Nun kommt ein Hilbert–Bus mit unendlich vielen neuen Gästen. Die Managerin quartiert die alten Gäste um vermöge der Bijektion $\mathbb{N} \rightleftharpoons 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$. Die neuen Gäste beziehen ihre Zimmer vermöge $\mathbb{N} \rightleftharpoons 2\mathbb{N} + 1 : n \mapsto 2n + 1$. Zusammen erhalten wir so die Bijektion $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{N} : (i, n) \mapsto 2n + i$ (Satz **??**).

Schließlich kommen unendlich viele Busse, jeder mit unendlich vielen Gästen. Kein Problem, wir haben eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{N}$ (Satz **??**).

Übung: Wie verteilen Sie die Zimmer jeweils neu? Schreiben Sie zur Wiederholung alle relevanten Bijektion möglichst schön und explizit aus!

Hilberts Hotel

B227

Hotel Infinity, lyrics © 2000 by Lawrence Mark Lesser

On a dark desert highway — not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done —
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

[Chorus] "Welcome to the Hotel called Infinity —
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the Hotel called Infinity —
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

Hilberts Hotel

B228

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number:
that frees the odd-numbered rooms." [Chorus]

Last thing I remember at the end of my stay —
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

(`www.math.utep.edu/Faculty/lesser/GreatestLESSERhits.html`)

Mächtigkeit der Potenzmenge

B229

Cantors zweites Diagonalargument: Kann $f : X \to \mathfrak{P}(X)$ surjektiv sein?

$$A := \{\, x \in X \mid x \notin f(x) \,\} \subseteq X.$$

Angenommen, es gäbe ein Element $x \in X$ mit $f(x) = A$.

- Gilt $x \in A$, so folgt $x \notin f(x) = A$, ein Widerspruch.
- Gilt $x \notin A$, so folgt $x \in f(x) = A$, ein Widerspruch.

Wir schließen: Es existiert kein Element $x \in X$ mit $f(x) = A$.

Satz B2ı: Cantors zweites Diagonalargument

Zu jeder Menge X ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ mächtiger, kurz $X \prec \mathfrak{P}(X)$.
Ausführlich gilt $X \preceq \mathfrak{P}(X)$, dank $X \hookrightarrow \mathfrak{P}(X) : x \mapsto \{x\}$, aber $X \not\cong \mathfrak{P}(X)$.

Für endliche Mengen ist das klar, aus $\sharp X = n$ folgt $\mathfrak{P}(X) = 2^n > n$.
Für unendliche Mengen war dies Cantors erschütternde Erkenntnis:
Es gibt verschiedene Unendlichkeiten, insb. überabzählbare Mengen!

Beispiel: Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.

Mächtigkeit der Potenzmenge

B230
Erläuterung

☺ Dieser berühmte Beweis ist genial einfach und einfach genial!
Der Trick heißt traditionell *Cantors zweites Diagonalargument*.
Cantors erstes Diagonalargument beweist $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$, siehe **??**.

Das Argument erinnert uns eindringlich an das Barbier-Paradoxon und die Russelsche Antinomie (B107). Diese logische Katastrophe der allzu naiven Mengenlehre beheben wir durch freiwillige Beschränkung auf die streng reglementierten Mengenkonstruktionen nach Zermelo–Fraenkel und machen seither sehr gute Erfahrungen damit. Hier nun taucht eine Variante dieser Idee erneut auf, als Cantors zweites Diagonalargument.

Im vorliegenden Beweis ist alles kristallklar, alles geht mit rechten Dingen zu: Wir widerlegen die Aussage $A \in \mathrm{Im}(f)$, ganz einfach. Zudem ist dies ein wunderbares Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch zusammen mit einer einfachen Fallunterscheidung.

☺ Ich hoffe, unsere soliden Vorbereitungen zahlen sich hier (und überall) für Sie aus, und Sie genießen die schönen Wow-und-Aha–Erlebnisse.

Illustration zu Cantors Diagonalverfahren

B231
Erläuterung

Aufgabe: Illustrieren Sie diesen Beweis im Spezialfall $X = \mathbb{N}$.

Lösung: Gegeben sei eine Folge von Mengen $A_0, A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$,
etwa $A_0 = \emptyset$, $A_1 = \{0,1,3\}$, $A_2 = \mathbb{N}$, $A_3 = 2\mathbb{N}$, $A_4 = 2\mathbb{N}+1$, ...
Diese Mengen können wir übersichtlich in einer Tabelle anordnen:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
A_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
A_1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	...
A_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
A_3	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...
A_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
...	...										

Als Tabelle schreiben wir $a_{ij} = 1$, falls $A_i \ni j$, und $a_{ij} = 0$, falls $A_i \not\ni j$.
Entlang der Diagonalen bilden wir die Menge $A = \{\, i \in \mathbb{N} \mid a_{ii} = 0 \,\}$.
Sie kommt nicht in unserer Liste vor, denn $i \in A_i \Leftrightarrow i \notin A$. QED

Illustration zu Cantors Diagonalverfahren

B232
Erläuterung

☺ Es gibt keine Abzählung $A_0, A_1, A_2, \ldots$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
Jede solche Folge $A_0, A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$ lässt immer noch Mengen aus.
Dieses Argument ist, wie gesagt, genial einfach und einfach genial!

Satz **??** optimiert diesen schönen Beweis zu der allgemeinen Aussage $X \prec \mathfrak{P}(X)$, also $X \preceq \mathfrak{P}(X)$ und $X \not\cong \mathfrak{P}(X)$. Der Spezialfall $X = \mathbb{N}$ ist besonders wichtig und anschaulich, daher betone ich diese Illustration.

Dieses Argument nutzen wir später nochmal, geschickt abgewandelt, um zu zeigen, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist. Genauer gilt $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, dies erklären wir in Satz B2N.

Bemerkung: Die Menge $\mathbb{N}$ ist unendlich und bereits schwer vorstellbar. Dank der Dedekind-Peano-Axiome haben wir sie jedoch gut im Griff.

Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar und somit unverstellbar viel größer. Damit ist nicht Schluss: Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist noch riesiger.

Lesen und beweisen und würdigen Sie nochmals Satz **??**.
Cantors Diagonalverfahren ist zurecht berühmt.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

B233
Erläuterung

Wir wissen, dank Cantors zweitem Diagonalargument **??**, dass es zu jeder Menge X eine strikt mächtigere Menge Y gibt, etwa $Y = \mathfrak{P}(X)$.
Dies können wir insbesondere anwenden auf die abzählbar unendliche Menge $\mathbb{N}$: Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist demnach überabzählbar.

Die Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^n$ hingegen sind abzählbar, gleichmächtig mit $\mathbb{N}$.
Das ist anfangs überraschend, denn sie enthalten offensichtlich „mehr“ Elemente als $\mathbb{N}$. Tatsächlich haben wir explizite Bijektionen konstruiert, sie sind erste eindrückliche Beispiele an Sorgfalt und Kunstfertigkeit.

Ein gewaltiger Sprung entsteht bei der Vervollständigung vom Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zum Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen: Im Gegensatz zur abzählbaren Menge $\mathbb{Q}$ ist die Menge $\mathbb{R}$ überabzählbar! Genauer konstruieren wir in Satz Satz B2N eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ ist eine überaus erstaunliche Erkenntnis. Wir werden sie auf zwei Arten beweisen: Zunächst als Aufwärmübung die leichtere Aussage, dass die Menge $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Das gelingt direkt als eine raffinierte Variante von Cantors Diagonalverfahren **??**.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

B234
Erläuterung

Aufgabe: Zeigen Sie, nach Vorbild von Cantors Diagonalverfahren **??**, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist.

Beweis-Idee: Vorgelegt sei eine reelle Folge $r_0, r_1, r_2, \ldots \in [0,1]$.
Wir schreiben r_k dezimal und konstruieren per Diagonalverfahren eine weitere Zahl $s \in [0,1]$, die noch nicht in dieser Liste vorkommt.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
r_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
r_1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	...
r_2	4	1	4	2	1	3	5	6	2	3	...
r_3	7	3	2	0	5	0	8	0	7	5	...
r_4	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	...
r_5	7	1	8	2	8	1	8	2	8	4	...
...	...										

In unserem Beispiel konstruieren wir $s = 0.549546\ldots$ mit $s \neq r_k$.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

B235
Erläuterung

Lösung: Wegen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist die Menge $\mathbb{R}$ offensichtlich unendlich.
Wir behaupten, dass bereits das Intervall $[0,1]$ nicht abzählbar ist.

Wir führen einem Widerspruchsbeweis. Angenommen, das Intervall $[0,1]$ wäre abzählbar, das heißt, es gäbe eine Bijektion $\mathbb{N} \cong [0,1] : k \mapsto r_k$.

Wir können jede dieser reellen Zahlen $r_k \in [0,1]$ dezimal darstellen als $r_k = 0.r_{k0}r_{k1}r_{k2}\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r_{kn}10^{-n-1}$ mit Ziffern $r_{kn} \in \mathbb{Z}_{10} = \{0,\ldots,9\}$.
Wir betrachten die reelle Zahl s mit den Ziffern $s_n = (r_{nn} + 5) \bmod 10$.
Somit gilt $|s - r_k| \geq 4 \cdot 10^{-k-1}$, also insbesondere $s \neq r_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wir erhalten $s \in [0,1]$, aber $s \notin \{\, r_k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$. Das ist ein Widerspruch!
Demnach ist das Intervall $[0,1]$ überabzählbar, und somit auch $\mathbb{R}$. QED

☺ Auch dieser Beweis ist genial einfach und einfach genial!

Diese Aussage und ihren schönen Beweis wollen wir nun optimieren.
Dazu untersuchen wir zunächst die hier benutzte Dezimaldarstellung etwas genauer. Die Basis $B = 10$ ist dabei vollkommen willkürlich; es lohnt sich, gleich eine beliebige Basis $B \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ zu betrachten.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

B236
Erläuterung

Wir haben gerade bewiesen, dass die Menge $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.
Jedoch gibt es viele überabzählbare Mengen, neben $\mathbb{R}$ kennen wir $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sowie $\mathfrak{PP}(\mathbb{N})$ und $\mathfrak{PPP}(\mathbb{N})$ und $\mathfrak{PPPP}(\mathbb{N})$ usw.
Genauer wollen wir eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ konstruieren.

☺ Auch hierzu bietet uns das Diagonalverfahren hilfreiche Intuition:
Wenn wir reelle Zahlen in der Basis $B = 2$ entwickeln, so erhalten wir beinahe eine Bijektion $[0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Zusammen mit einer geeigneten Bijektion $\mathbb{R} \cong [0,1]$ erhalten wir so $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, wie ersehnt.

⚠ Leider ist die B–adische Entwicklung für manche reellen Zahlen zweideutig, das müssen wir in unserer Konstruktion berücksichtigen.
Die technische Ausführung nutzt daher den Satz von Cantor–Bernstein.
Damit können wir die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ genau bestimmen, wie erhofft.

Das ist nicht nur eine interessante technische Herausforderung, sondern liefert uns zugleich einige interessante Folgerungen wie $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Wir nehmen also mutig einen zweiten Anlauf und untersuchen genauer die B–adische Entwicklung reeller Zahlen und damit deren Mächtigkeit.

Entwicklung reeller Zahlen in Basis B

B237

Sei $B \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, etwa binär $B = 2$, ternär $B = 3$ oder dezimal $B = 10$:

$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\ldots$$
$$0.1 = 0.09999\,99999\,99999\,99999\,99999\,99999\ldots$$

Satz B2M: B–adische Entwicklung

Jede Ziffernfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0, \ldots, B-1\}$ definiert eine reelle Zahl

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k} \quad \in \quad [0,1].$$

Umgekehrt lässt sich jede reelle Zahl $a \in [0,1]$ so als eine B–adische Entwicklung schreiben (auf mindestens eine, höchstens zwei Weisen).

$$q : \{0, \ldots, B-1\}^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow [0,1] : (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \mapsto a$$

Zu jeder reellen Zahl $a \in]0,1]$ existiert genau eine solche B–adische Entwicklung, bei der unendlich viele Ziffern von 0 verschieden sind.

$$r : [0,1] \hookrightarrow \{0, \ldots, B-1\}^{\mathbb{N}} : a \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Entwicklung reeller Zahlen in Basis B

B238 Erläuterung

Für $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k}$ gilt $0 = s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq 1$, also existiert der Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$, denn $(\mathbb{R}, \leq)$ ist vollständig! Die B–adische Reihe definiert so die Abbildung $q : \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow [0,1]$.

Umgekehrt konstruieren wir $r : [0,1] \to \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} : a \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv: Gegegen sei $a \in]0,1]$ und $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_B^n$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k} < a$. Dazu definieren wir dann $a_{n+1} = \max\{\, z \in \mathbb{Z}_B \mid s_n + zB^{-n-1} < a \,\}$. Im Sonderfall $a = 0$ setzen wir $r(0) = (0,0,0,\ldots) \in \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}}$.

Nach Konstruktion ist r rechtsinvers zu q, das bedeutet $q \circ r = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Insbesondere ist q somit surjektiv, doch leider nicht injektiv: Zahlen wie $a = 0.1000\ldots = 0.0AAA\ldots$ haben zwei Darstellungen, wobei $A = B-1$. Das gilt für alle Brüche $a = z/B^n \in [0,1[$ mit Zähler $z \in \{1, \ldots, B^n\}$.

Daher ist eine Bijektion $\mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} \cong [0,1]$ nicht ganz so einfach zu konstruieren. Immerhin erhalten wir eine Bijektion $(q|_X^Y, r|_Y^X) : X \cong Y$ zwischen den echten Teilmengen $X = \{1, \ldots, B-1\}^{\mathbb{N}} \subsetneq \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}}$ und $Y = q(X) \subsetneq [0,1]$. Der folgende Satz fügt alle diese Vorbereitungen sorgsam zusammen.

Mächtigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

B239

Satz B2N: Mächtigkeit von $\mathbb{R}$

(1) Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, genauer gilt $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
(2) Somit ist $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}^d$ für $d \geq 2$ und zu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\}$.
(3) Strikt mächtiger sind hingegen $\mathfrak{P}(\mathbb{R}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\}$.

Beweis: (1) Wir konstruieren Injektionen $\mathbb{R} \hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Dank Cantor–Bernstein B2O erhalten wir eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Explizit: (1a) Wir haben Bijektionen $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]-1,+1[: x \mapsto x/(1+|x|)$ (A1B) sowie $g :]-1,+1[\xrightarrow{\sim}]0,1[: x \mapsto (x+1)/2$. Die Binärentwicklung stiftet die Injektion $r :]0,1[\hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dank Satz B2M für $B = 2$.

(1b) Satz B2M für $B = 3$ stiftet eine Injektion $q : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow]0,1] \subset \mathbb{R}$.

(2) Wir haben Bijektionen $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \{1, \ldots, d\} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aus $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ folgt $\mathbb{R}^d \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\{1,\ldots,d\}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. QED

Übung: Führen Sie die letzten Rechnungen aus mit Hilfe von Satz **??**. Alle Bijektionen sind wunderbar explizit und im Rückblick genial einfach.

Mächtigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

B240 Erläuterung

Schon das Ergebnis $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$ ist erstaunlich, ebenso $\mathbb{N}^d \cong \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \cong \mathbb{N}$. Ebenso möchte man vermuten, dass $\mathbb{R}^d$ „wesentlich mehr“ Punkte hat als $\mathbb{R}$, doch ganz im Gegenteil finden Bijektionen $\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}$ und sogar $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$.

Dieses Thema wird Sie in Ihrem Studium immer wieder beschäftigen: Natürlich möchten Sie jedem Raum $\mathbb{R}^d$ seine Dimension „$\dim \mathbb{R}^d = d$“ zusprechen. Allein die Mächtigkeit macht jedoch keinen Unterschied! Die Dimension erhält erst durch zusätzliche Struktur ihren Sinn: bezüglich linearer Abbildungen von $\mathbb{R}$–Vektorräumen, oder Diffeomorphismen, oder Homöomorphismen, ... Dazu später mehr im Studium.

Cantors **Kontinuumshypothese** (kurz CH) besagt: Aus $\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ folgt $X \cong \mathbb{N}$ oder $X \cong \mathbb{R}$. **Verallgemeinert** (GCH): Für jede unendliche Menge A und $A \preceq X \preceq \mathfrak{P}(A)$ gilt $X \cong A$ oder $X \cong \mathfrak{P}(A)$. Das heißt, nach A hat $\mathfrak{P}(A)$ die nächst größere Mächtigkeit, es liegt nichts dazwischen. Dies ist unabhängig von ZFC: Ausgehend von einem ZFC-Universum existieren Modelle, in denen GCH gilt (Kurt Gödel 1940), und ebenso Modelle, in denen GCH nicht gilt (Paul Cohen 1963, Fields-Medaille 1966).

Lässt sich jede reelle Zahl berechnen?

B241

Unendlichkeit kommt in verschiedenen Größen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Wie lässt sich das anwenden? Gut, dass Sie fragen!

ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

By A. M. Turing.

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

The "computable" numbers may be described briefly as the real numbers whose expressions as a decimal are calculable by finite means.

📖 A.M. Turing: *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem.* Proc. London Math. Soc. 42 (1937): 230–65.

Alan Turing fragte 1936: Können wir jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ berechnen? Nein! Es gibt nur abzählbar viele Programme, doch $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Ausführlich: Wählen Sie eine Programmiersprache. Diese verwendet zu ihrer Codierung ein endliches Alphabet $\mathcal{A}$. Die Menge $\mathcal{A}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^n$ ist abzählbar (**??**), daher gibt es nur abzählbar viele Programme.

Lässt sich jede reelle Zahl berechnen?

B242 Erläuterung

Dieses Abzählargument ist heute vollkommen plausibel und naheliegend. Berechenbare Zahlen wurden erstmals 1912 von Emile Borel eingeführt, allerdings noch informell-intuitiv formuliert. Auch als Alan Turing 1936 seinen Artikel schrieb, gab es noch gar keine Computer. Sein epochaler Artikel definiert die Turing–Maschine als universelles Rechenmodell und beweist, dass Hilberts berühmtes Entscheidungsproblem unlösbar ist.

🙂 Damit beginnt die Informatik – noch vor den ersten Computer!

Naiv-anschaulich wollen wir unsere Zahl $x \in \mathbb{R}$ durch ein Programm schrittweise dezimal ausschreiben. Für viele wichtige Zahlen gelingt dies:

$$22/7 = 3.14285\,71428\,57142\,85714\ldots$$
$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\ldots$$
$$\mathrm{e} = 2.71828\,18284\,59045\,23536\ldots$$

Lässt sich jede Folge $f : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, 9\}$ oder $g : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, 9\}$ berechnen? Allgemein stellt sich die Frage ebenso für $h : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Antwort: Nein! Die Menge $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar (B2N).

Was genau sind berechenbare reelle Zahlen?

B243 Erläuterung

Zur Vereinfachung verstehen wir „berechenbar“ zunächst halbformal als realisierbar in einer typischen Programmiersprache wie Python oder C++ oder äquivalent hierzu abstrakt auf einer Turing–Maschine. Wir müssen diese „mentalen“ Prozesse formalisieren, um Unmöglichkeit zu beweisen. Damit vereinbaren wir berechenbare reelle Zahlen elegant wie folgt:

Definition B2J: berechenbare reelle Zahl

Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **berechenbar** oder auch **rekursiv**, wenn sie durch eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ approximiert wird gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{f(n)-1}{2^n} < a < \frac{f(n)+1}{2^n}.$$

Übung: Die berechenbaren Zahlen bilden den Teilkörper $\mathrm{REC} \leq (\mathbb{R}, +, \cdot)$: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ berechenbar, so auch $a \pm b$ (leicht) und $a \cdot b$ (interessant) sowie im Falle $b \neq 0$ auch a/b (spannend). Zur Division a/b müssen wir $b \neq 0$ voraussetzen, können es selbst aber nicht effektiv überprüfen:

⚠ Die Gleichheit im Körper $(\mathrm{REC}, +, \cdot)$ ist nicht berechenbar.

Berechenbare Zahlen und das Entscheidungsproblem

B244 Erläuterung

⚠ Die Frage „Gilt $a = 0$?“ lässt sich alleine mit einer Approximation f im Allgemeinen nicht effektiv beantworten. Sie ist nur semi-entscheidbar:

Gilt $a = 0$, so gibt uns keine Approximation $f(n) = 0$ eine Garantie; für $n' > n$ könnte $f(n') = 0$ gelten, oder ein $f(n') \neq 0$ auftauchen.

Gilt $a \neq 0$, so existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) \neq 0$, und das beweist $a \neq 0$. Genauer: Aus $f(n) > 0$ folgt $a > 0$. Aus $f(n) < 0$ folgt $a < 0$.

Beispiel: Wir definieren die Zahl $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$ durch $a_n = 1$ falls $n \geq 4$ gerade ist und nicht Summe zweier Primzahlen, andernfalls $a_n = 0$. Wir können a beliebig genau approximieren, diese Zahl ist berechenbar im Sinne von **??**. Dennoch wissen wir nicht, ob $a = 0$ oder $a > 0$ gilt. Die Goldbach–Vermutung besagt $a = 0$, und sie ist immer noch offen.

Statt Goldbach können Sie hier Ihre Lieblingsvermutung einsetzen. Das Argument gilt für jede Familie von entscheidbaren Aussagen $A(n)$ und ihre Zusammenfassung zu $\exists n \in \mathbb{N} : A(n)$. Dies ist äquivalent zu $a > 0$ für $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$, und ist im Allgemeinen unentscheidbar.

Gibt es transzendente Zahlen?

B245

Ist jede Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ Nullstelle eines rationalen Polynoms $A \in \mathbb{Q}[X]^*$?
Nein! Es gibt nur abzählbar viele rationale Polynome und Nullstellen.

Ausführlich: Erfüllen die Potenzen α^n eine $\mathbb{Q}$–lineare Relation?

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n \stackrel{?}{=} 0$$

Falls nicht, so heißt α **transzendent**. Falls doch, so heißt α **algebraisch**:
Die Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ ist Nullstelle eines Polynoms $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]^*$.

Beispiele: Jede rationale Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist algebraisch, als Nullstelle des Polynoms $X - \alpha \in \mathbb{Q}[X]^*$. Die reelle Zahl $\alpha = \sqrt{3}$ ist nicht rational, aber immerhin algebraisch, denn α ist Nullstelle von $X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]^*$.
Ist $7^{2/3}$ algebraisch? Ja, $A = X^3 - 7^2 \in \mathbb{Q}[X]^*$ erfüllt $A(7^{2/3}) = 0$.

Gibt es transzendente Zahlen? Ja, dank Cantors Abzählargument **??**:
Die algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ sind abzählbar, doch $\mathbb{R}$ ist überabzählbar!

Vereinfacht zusammengefasst: Fast alle reellen Zahlen sind transzendent.
Wenn Sie „zufällig“ eine wählen, so ist sie „fast sicher“ transzendent.

Gibt es transzendente Zahlen?

B246

Satz B2κ: Die algebraischen Zahlen sind abzählbar.

Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt **algebraisch** über $\mathbb{Q}$, wenn sie Nullstelle eines rationalen Polynoms $P \in \mathbb{Q}[X]^*$ ist. Andernfalls heißt α **transzendent**.

$$\mathbb{A} := \bigcup_{P\in\mathbb{Q}[X]^*} \{\, \alpha \in \mathbb{R} \mid P(\alpha) = 0 \,\}$$

Die Menge $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ der algebraischen Zahlen ist abzählbar, kurz $\mathbb{A} \cong \mathbb{N}$.
Somit ist das Komplement $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ überabzählbar, genauer $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}$.

Beweis: Die Menge aller Polynome vom Grad $< n$ ist abzählbar:

$$\mathbb{Q}[X]_{<n} \underset{\text{Def}}{\cong} \mathbb{Q}^n \underset{??}{\cong} \mathbb{N}^n \underset{??}{\cong} \mathbb{N}$$

Die abzählbare Vereinigung $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}[X]_{<n}$ ist abzählbar (**??**).
Zu jedem Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]^*$ ist die Nullstellenmenge in $\mathbb{R}$ endlich.
Somit ist die abzählbare Vereinigung $\mathbb{A} = \bigcup_P P^{-1}(0)$ abzählbar (**??**).
Wir haben also $\mathbb{A} \preceq \mathbb{N}$. Zusammen mit $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$ folgt $\mathbb{A} \cong \mathbb{N}$ (B2o). QED

Algebraische vs transzendente Zahlen

B247
Erläuterung

Bereits im 18. Jahrhundert entwickelte sich langsam die Vorstellung von Transzendenz und die Vermutung, dass es transzendente Zahlen gibt, so etwa bei Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Leonhard Euler (1707–1783). Euler formulierte zwar keine klare Definition, war aber überzeugt, dass es solche „schwer fassbaren“ Zahlen geben müsse. Ebenso wie „irrational“ für ‘unvernünftig’ ist auch „transzendent“ für ‘jenseits aller Vernunft’ zunächst ein negativer Begriff des Erstaunens, ja des Erschreckens. Diese Zahlen sind algebraisch nicht zugänglich.

Erste Konstruktionen und Nachweise transzendenter Zahlen gelangen 1844 Joseph Liouville (1809–1882), etwa für die Liouville-Konstante

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.11000100000000000000000001000\ldots$$

Georg Cantor bewies 1874 erneut die Existenz transzendenter Zahlen:
Überraschenderweise sind sogar fast alle reellen Zahlen transzendent!
Im Gegensatz zu Liouville ist Cantors Beweis jedoch nicht konstruktiv;
er hilft nicht, einer fest gegebenen Zahl Transzendenz nachzuweisen.

Algebraische vs transzendente Zahlen

B248
Erläuterung

⚠ Die Angabe des betrachteten Grundkörpers ist wichtig.
Wenn wir nichts weiter dazusagen, arbeiten wir in $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$.

Übung: Jede komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ ist algebraisch über $\mathbb{R}$,
nämlich Nullstelle eines quadratischen Polynoms $P \in \mathbb{R}[X]^*$.

Jeder komplexen Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ ordnen wir ihren Grad über $\mathbb{Q}$ zu:

$$\deg_{\mathbb{Q}} : \mathbb{C} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} : \alpha \mapsto \inf\{\, \deg P \mid P \in \mathbb{Q}[X]^* \wedge P(\alpha) = 0 \,\}$$

Die algebraischen Zahlen sind die von endlichem Grad:

$$\mathbb{A} = \{\, \alpha \in \mathbb{C} \mid \deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) < \infty \,\} = \bigcup_{P\in\mathbb{Q}[X]^*} \{\, \alpha \in \mathbb{C} \mid P(\alpha) = 0 \,\}$$

Jede algebraische Zahl hat demnach ein Minimalpolynom:

$$\mu : \mathbb{A} \to \mathbb{Q}[X] : \alpha \mapsto \mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]^1_n,\ n = \deg_{\mathbb{Q}}(\alpha),\ \mu_\alpha(\alpha) = 0$$

Beispiel: Für $\alpha = \pm\sqrt{2}$ gilt $\mu_\alpha = X^2 - 2$. Demnach ist μ nicht injektiv,
denn μ_α hat mehrere Nullstellen, die **konjugierten Elemente** zu α.
(Im Beweis von **??** können wir daher nicht $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{Q}[X]$ nutzen.)

Transzendenz von e und π

B249
Ausführung

Cantors grundlegende Elementezählung hat erstaunliche Konsequenzen:
☺ Wenn Sie zufällig gleichverteilt eine reelle Zahl $\alpha \in [0, 1]$ wählen,
dann ist das Ergebnis mit 100% Wahrscheinlichkeit transzendent.
Das ist Segen und Fluch von elegant-nicht-konstruktiven Beweisen.
☹ Sobald Sie jedoch eine konkrete Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ vorliegen haben,
ist es meist extrem schwierig, ihr Transzendenz nachzuweisen.
Hierzu nenne ich zwei berühmte Ergebnisse:

Beispiel: Die Eulersche Zahl e ist transzendent. (C. Hermite, 1873)

$$\mathrm{e} = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Beispiel: Die Kreiszahl π ist transzendent. (F. Lindemann, 1882)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Allgemein: Ist $\alpha \in \mathbb{C}^*$ algebraisch, so ist $\mathrm{e}^\alpha \in \mathbb{C}$ transzendent.

Transzendenz von e und π

B250
Ausführung

☺ Damit löste Lindemann ein über zweitausend Jahre altes Problem:
Die Quadratur des Kreises allein mit Zirkel und Lineal ist unmöglich!

Bei der Vergeblichkeit der so ausserordentlich zahlreichen Versuche, die Quadratur des Kreises mit Cirkel und Lineal auszuführen, hält man allgemein die Lösung der bezeichneten Aufgabe für unmöglich; es fehlte aber bisher ein Beweis dieser Unmöglichkeit; nur die Irrationalität von π und von π^2 ist festgestellt. Jede mit Cirkel und Lineal ausführbare Construction lässt sich mittelst algebraischer Einkleidung zurückführen auf die Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen, also auch auf die Lösung einer Reihe von quadratischen Gleichungen, deren erste rationale Zahlen zu Coefficienten hat, während die Coefficienten jeder folgenden nur solche irrationale Zahlen enthalten, die durch Auflösung der vorhergehenden Gleichungen eingeführt sind. Die Schlussgleichung wird also durch wiederholtes Quadriren übergeführt werden können in eine Gleichung geraden Grades, deren Coefficienten rationale Zahlen sind. Man wird sonach die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises darthun, wenn man nachweist, dass die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung irgend welchen Grades mit rationalen Coefficienten sein kann. Den dafür nöthigen Beweis zu erbringen, ist im Folgenden versucht worden.

Ferdinand von Lindemann (1852–1939), *Über die Zahl π* (1882)

Transzendenz der eulerschen Zahl e = 2.71828 ...

B251
Ausführung

Ich beweise als Ausblick hier nur die Transzendenz von e und folge dabei
🕮 A. Gelfond: *Transcendental and algebraic numbers.* Dover 1960. 42–44
Hermites Beweis ist eine geniale Kombination aus Analysis und Algebra.

Beweis: Wir zeigen $\mathbb{Q}$–lineare Unabhängigkeit durch Widerspruch.
(0) Bei linearer Abhängigkeit gäbe es $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_0 \neq 0$ und

$$a_0 + a_1\,\mathrm{e} + a_2\,\mathrm{e}^2 + \cdots + a_n\,\mathrm{e}^n = 0.$$

Wir dürfen und werden im Folgenden $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ annehmen, notfalls multiplizieren wir die Gleichung (0) mit einem gemeinsamen Nenner.
(1) Es gilt $\partial_x\, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$. Für $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ folgt dank partieller Integration:

$$\mathrm{e}^x \textstyle\int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x f(0) - f(x) + \mathrm{e}^x \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

(2) Für $f \in \mathbb{R}[t]_{\leq N}$ und $F := f + f' + \cdots + f^{(N)}$ iterieren wir (1) zu:

$$\mathrm{e}^x \textstyle\int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x F(0) - F(x)$$

☺ Das ist Hermites genialer Kunstgriff. Davon profitieren wir.

Transzendenz der eulerschen Zahl e = 2.71828 ...

B252
Ausführung

(3) Wir summieren (2) für $x = k = 0, \ldots, n$ zu:

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k\,\mathrm{e}^k \int_{t=0}^{k} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = F(0)\sum_{k=0}^{n} a_k\,\mathrm{e}^k - \sum_{k=0}^{n} a_k F(k)$$

Sei nun $p > \max\{n, |a_0|\}$ prim und $f(t) = t^{p-1}(t-1)^p \cdots (t-n)^p/(p-1)!$.
(4) Es gilt $F(0) \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, denn wir finden $0 = f(0) = \ldots = f^{(p-2)}(0)$ und $f^{(p-1)}(0) = [(-1)^n n!]^p \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ und schließlich $f^{(i)}(0) \in p\mathbb{Z}$ für $i \geq p$.
(5) Für $k = 1, \ldots, n$ hingegen gilt $F(k) \in p\mathbb{Z}$, denn hier finden wir $0 = f(k) = \ldots = f^{(p-1)}(k)$ und schließlich $f^{(i)}(k) \in p\mathbb{Z}$ für $i \geq p$.
(6) Dank $a_0 \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ liegt $a_0 F(0)$ in $\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, somit auch $\sum_{k=0}^{n} a_k F(k)$.
(7) Die linke Seite von (3) schätzen wir grob nach oben ab durch:

$$\begin{aligned} \left|\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,\mathrm{e}^k \int_{t=0}^{k} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \left[\textstyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,\mathrm{e}^k\right] \int_{t=0}^{n} |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \left[\textstyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,\mathrm{e}^k\right] n^{(n+1)p}/(p-1)! \;=\; a\,b^p/(p-1)! \;\to\; 0 \end{aligned}$$

(8) Damit erreichen wir folgenden Widerspruch für große Primzahlen p:
Die rechte Seite von (3) liegt in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, die linke jedoch in $]-1, 1[$. QED

Satz B2L: unendliches Komplement

Sei U eine unendliche Menge und $E \subset U$ eine endliche Teilmenge.
Dann ist das Komplement $U \setminus E$ unendlich, genauer gilt $U \setminus E \cong U$.

Aufgabe: Konstruieren Sie explizit eine Bijektion $(g, g') : U \setminus E \cong U$.

Lösung: Das Komplement $U \setminus E$ ist unendlich: Wäre $U \setminus E$ endlich, so auch die Vereinigung $U = (U \setminus E) \cup E$; das ist ein Widerspruch.

Seien $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ die Elemente der Menge E. Wir setzen diese Nummerierung fort zu einer Injektion $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow U : k \mapsto x_k$ dank **??**.
Sei $F = \nu(\mathbb{N}_{\geq n}) \subseteq U$. Wir haben $(g', g) : E \cup F \cong F : x_k \overset{g}{\mapsto} x_{n+k}$.
Dies erweitern wir zur ersehnten Bijektion $(g', g) : U \cong U \setminus E$ durch $g'(x) = g(x) = x$ für alle $x \in U \setminus (E \cup F)$.

🙂 Die Konstruktion geeigneter Bijektionen ist eine eigene Kunst. Glücklicherweise verfügen Sie über wirksame, allgemeine Werkzeuge. Jedoch erfordert deren Nutzen in weiteren Konstruktionen etwas Übung.

Satz B2M: überabzählbares Komplement

Sei U eine überabzählbare Menge und $A \subset U$ höchstens abzählbar.
Dann ist das Komplement $U \setminus A$ überabzählbar, genauer gilt $U \setminus A \cong U$.

Aufgabe: Konstruieren Sie explizit eine Bijektion $(g, g') : U \setminus A \cong U$.

Lösung: Das Komplement $U \setminus A$ ist überabzählbar: Wäre $U \setminus A$ abzählbar, so auch $U = (U \setminus A) \cup A$ dank **??**; das ist ein Widerspruch.

Demnach existiert eine Injektion $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow U \setminus A$ dank **??**. Sei $B = \nu(\mathbb{N})$.
Die Vereinigung $A \cup B$ ist abzählbar dank **??** und zudem unendlich.
Somit existiert eine Bijektion $(g', g) : A \cup B \cong B$. Wir erweitern diese zu $(g', g) : U \cong U \setminus A$ durch $g'(x) = g(x) = x$ für alle $x \in U \setminus (A \cup B)$.

Beispiele: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.
Die Menge $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Die Menge $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ der algebraischen Zahlen ist abzählbar, also $\mathbb{A} \cong \mathbb{N}$.
Die transzendenten Zahlen $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ sind überabzählbar, $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}$. **(??)**

Satz B2N: Mächtigkeit von Intervallen

(1) Jedes rationale Invervall $I \subseteq \mathbb{Q}$ ist entweder leer, $I = \emptyset$,
einelementig, $I = \{a\}$, oder abzählbar unendlich, $I \cong \mathbb{Q}$.

(2) Jedes reelle Invervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist entweder leer, $I = \emptyset$,
einelementig, $I = \{a\}$, oder überabzählbar, $I \cong \mathbb{R}$.

(3) Allgemein sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{K}$ mit mindestens zwei Elementen ist gleichmächtig zur Menge $\mathbb{K}$.

Beweis: (3) Gegeben seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Daraus folgt $[a, b]_{\mathbb{K}} \subseteq I$.
Wir haben einerseits die Inklusion $f : I \hookrightarrow \mathbb{K}$. Andererseits haben wir die Bijektion $\mathbb{K} \cong]-1, 1[_{\mathbb{K}}$ aus **??**, somit $g : \mathbb{K} \cong]-1, 1[_{\mathbb{K}} \cong]a, b[_{\mathbb{K}} \hookrightarrow I$.
Der Satz von Cantor–Bernstein B2O konstruiert aus den Injektionen $f : I \hookrightarrow \mathbb{K}$ und $g : \mathbb{K} \hookrightarrow I$ die ersehnte Bijektion $(h, k) : I \cong \mathbb{K}$. QED

🙂 Diese Konstruktion ist kurz und elegant und wunderbar explizit. Die folgende Aufgabe beleuchtet schöne, konkrete Konstruktionen, die sogar ganz ohne den Satz von Cantor–Bernstein auskommen.

Aufgabe: Konstruieren Sie explizit (möglichst einfache) Bijektionen $(f, f') : [a, b] \cong [0, 1]$, $(g, g') : [0, 1] \cong [0, 1[$ und $(h, h') :]0, 1] \cong]0, 1[$.
(Es gelingt natürlich mit dem allgemeinen Satz via Cantor–Bernstein B2O, die Herausforderung ist hier jedoch eine möglichst simple Konstruktion.)

Lösung: (0) Zunächst gilt $(\tau, \tau) : [a, b] \cong [a, b]$ dank $\tau : x \mapsto b + a - x$, und durch Einschränkung $(\tau, \tau) :]a, b[\cong]a, b[$ und $(\tau, \tau) : [a, b[\cong]a, b]$.

(1) Eine Bijektion $(f, f') : [a, b] \cong [0, 1]$ gelingt affin-linear und isoton mit $f(x) = (x - a)/(b - a)$ und $f'(y) = a + y(b - a)$. Damit gilt $f' \circ f = \mathrm{id}_{[a,b]}$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Durch Einschränkung erhalten wir die Bijektionen $(f, f') : [a, b[\cong [0, 1[$ und $(f, f') :]a, b] \cong]0, 1]$ und $(f, f') :]a, b[\cong]0, 1[$.

(2) In $[0, 1]$ betrachten wir $X := \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1/2, 1/4, \dots\}$ und $Y := X/2 = \{1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$. Wir definieren $g : [0, 1] \to [0, 1[$ durch $g(x) = x/2$ für $x \in X$ und $g(x) = x$ sonst, sowie $g' : [0, 1[\to [0, 1]$ durch $g'(y) = 2y$ für $y \in Y$ und $g'(y) = y$ sonst. Damit gilt $g' \circ g = \mathrm{id}_{[0,1]}$ und $g \circ g' = \mathrm{id}_{[0,1[}$. Wörtlich genauso konstruieren wir $(h, h') :]0, 1] \cong]0, 1[$.

Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, \leq)$ haben weder Minimum noch Maximum, sie sind abzählbar und außerdem dicht. Letzteres bedeutet: Zu je zwei Punkten $u < v$ in $\mathbb{Q}$ existiert ein Zwischenpunkt $z \in \mathbb{Q}$ mit $u < z < v$.
Diese Eigenschaften charakterisieren $(\mathbb{Q}, \leq)$ bis auf Ordnungsisomorpie:

Satz B3A: Ordnung der rationalen Zahlen

Seien $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ nicht-leere, total geordnete Mengen, ohne Minimum und Maximum, zudem abzählbar und dicht.
(1) Dann existiert ein Ordnungsisomorphismus $(X, \leq) \cong (Y, \leq)$.

Beispiele: Für $X = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{a/2^n \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ gilt $(X, \leq) \cong (\mathbb{Q}, \leq)$.
Es gilt $(]-1, 1[_{\mathbb{Q}}, \leq) \cong (\mathbb{Q}, \leq)$, dies gelingt wunderbar explizit dank A1B.
Gegenbeispiele: Die geordneten Mengen $([0, 1]_{\mathbb{Q}}, \leq)$ und $([0, 1[_{\mathbb{Q}}, \leq)$ und $(]0, 1]_{\mathbb{Q}}, \leq)$ sind abzählbar und dicht, haben aber Minimum oder Maximum; daher sind sie nicht isomorph zu $(]0, 1[_{\mathbb{Q}}, \leq) \cong (\mathbb{Q}, \leq)$.
Es gilt $(\mathbb{Z}, \leq) \ncong (\mathbb{Q}, \leq)$, denn die Ordnung $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist nicht dicht.
Es gilt $(\mathbb{R}, \leq) \ncong (\mathbb{Q}, \leq)$, denn die Menge $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis: Wir konstruieren eine ordnungstreue Bijektion $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ nach der „Zick-Zack-Methode“ von Cantor (1895) und Hausdorff (1914).

Vorgelegt seien Abzählungen $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} X : k \mapsto a_k$ und $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} Y : k \mapsto b_k$.
Rekursiv konstruieren wir $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$ mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und $\emptyset = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ mit $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ und darauf ordnungstreue Bijektionen $f_n : X_n \to Y_n$ mit $f_{n+1}|_{X_n}^{Y_n} = f_n$. Der Anfang $n = 0$ ist trivial.

Sei $n \geq 0$ und $f_n : X_n \xrightarrow{\sim} Y_n$ bereits konstruiert. Für n gerade sei $i \in \mathbb{N}$ minimal mit $a_i \notin X_n$. Sei $j \in \mathbb{N}$ minimal mit $b_j \notin Y_n$, sodass $a_i \mapsto b_j$ die Bijektion $f_n : X_n \xrightarrow{\sim} Y_n$ monoton fortsetzt. Solch ein b_j existiert, da $f_n(X_n) = Y_n$ endlich ist und $Y \supset Y_n$ dicht ohne Extrema. Wir setzen $X_{n+1} := X_n \cup \{a_i\}$ und $Y_{n+1} := Y_n \cup \{b_j\}$ und $f_{n+1} = f_n \cup \{(a_i, b_j)\}$.

Hausdorffs Kniff: Für n ungerade tauschen wir die Rollen von X und Y.
Das geschickte Hin-und-Her garantiert $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$.
Die Isomorphismen $f_n : X_n \xrightarrow{\sim} Y_n$ erfüllen $f_{n+1}|_{X_n}^{Y_n} = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, vereinigen sich also zum Isomorphismus $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n : X \to Y$. QED

Diese genial-einfache Konstruktion zeigt noch etwas mehr:

Satz B3A: Ordnung der rationalen Zahlen

(2) Jeder Ordnungsisomorphismus $g : (A, \leq) \xrightarrow{\sim} (B, \leq)$ zwischen endlichen Teilmengen $A \subset X$ und $B \subset Y$ lässt sich fortsetzen zu einem Ordnungsisomorphismus $f : (X, \leq) \xrightarrow{\sim} (Y, \leq)$.
(3) Dazu genügt, dass $A \cap [u, v]$ endlich ist für alle $u, v \in X$, ebenso B in Y.

Beweis: Wir beginnen die obige Konstruktion mit $f_n = g : A \xrightarrow{\sim} B$.
Die Ausführung empfehle ich als Übung zur Wiederholung.

⚠ Für beliebige Teilmengen A und B gilt diese Fortsetzbarkeit nicht!
Gegenbeispiel: Zu $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ und $B = \{1 - 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ ist $g : A \xrightarrow{\sim} B : n \mapsto 1 - 2^{-n}$ ein Ordnungsisomorphismus. Er lässt sich nicht fortsetzen zu $f : (\mathbb{Q}, \leq) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}, \leq)$: Angenommen, wir hätten $f : (\mathbb{Q}, \leq) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}, \leq)$ mit $f|_A^B = g$. Zu $y = 1 > 1 - 2^{-n}$ gehört dann $x = f^{-1}(y) \in \mathbb{Q}$ mit $x > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und das ist unmöglich.

Cantor bewies dieses Ergebnis bereits 1884. Sein Artikel zur *Theorie der Ordnungstypen* wurde von der Zeitschrift Acta Mathematica zunächst zur Publikation angenommen, doch der Herausgeber Mittag–Leffler war persönlich von dem Thema nicht überzeugt und bat Cantor, den Artikel zurückzuziehen. So erschien der Satz erst 1895, elf Jahre später.

Aufgabe: Cantor bewies den Satz noch nicht mit der Zick-Zack-Methode, sondern mit der einseitigen Variante. Gelingt die Konstruktion dennoch?

Lösung: In Cantors Konstruktion gilt weiterhin $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.
Wir müssen nur $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ zeigen, also die Surjektivität von f.
Angenommen, es gäbe ein $b_j \in Y \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Wir wählen j minimal.
Sei $n \geq 0$ minimal, sodass $\{b_0, \dots, b_{j-1}\} \subseteq Y_n = \{f(a_0), \dots, f(a_{n-1})\}$.
Sei $i \geq n$ minimal, sodass a_i genauso zu $a_0, \dots, a_{n-1}$ liegt wie b_j zu $f(a_0), \dots, f(a_{n-1})$. In Cantors Konstruktion gilt dann $f_i : a_i \mapsto b_j$.
Das widerspricht unserer Annahme. Also ist f surjektiv.

🙂 Hausdorffs eleganter Zick-Zack-Kniff vereinfacht das Argument, und verleiht dem verblüffenden Satz einen ebenso genialen Beweis.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

B305

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

B306

Wir spielen auf zwei totalen Ordnungen, hier ein konkretes Beispiel:

$$X = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7\}$$
$$Y = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9\}$$

In Runde $n = 1, 2, 3, \dots$ ziehen die Spieler Elemente $(a_n, b_n) \in X \times Y$:
(0) Verfügbar sind $X_n = X \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ und $Y_n = Y \setminus \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$.
(1) Samson (*spoiler*) wählt ein Element, entweder $a_n \in X_n$ oder $b_n \in Y_n$.
(2) Delila (*duplicator*) wählt komplementär dazu $b_n \in Y_n$ oder $a_n \in X_n$.

Dabei muss stets Monotonie gelten, also $a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j$ für alle i, j.
Anschaulich verbinden wir alle Paare (a_i, b_i) ohne Überkreuzungen.

Samson bekommt anfangs 5€ und zahlt 1€ an Delila für jede Antwort.
Samson will einen Unterschied zwischen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ aufdecken.
Delila will dies verhindern oder zumindest möglichst lange verzögern.

Im Casino spielen zwei Teams, Links und Rechts. Um die unglückliche Asymmetrie aufzuheben, spielt Team Links auf der linken Tafel Samson und auf der rechten Tafel Delila, Team Rechts entsprechend umgekehrt.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

B307
Erläuterung

Erfolgreiche Strategien ähneln einer binären Suche: Teile und herrsche! Sie wollen eine nachweislich optimale Strategie? Hier ist die Challenge:

Satz B3B: Isomorphiespiel zwischen endlichen Totalordnungen

Zu $k := |X| < |Y| < \infty$ sei $\nu(k)$ die kleinste Zahl n, für die Samson eine Strategie hat, mit der er spätestens in Runde $n+1$ gewinnt. Dann gilt

$$\nu(k) = \lfloor \log_2(k+1) \rfloor.$$

Aufgabe: Wie findet man dieses schöne Ergebnis? Bestimmen Sie $\nu(k)$ für kleine Werte $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Daraus entsteht eine Vermutung!

Lösung: Kleine Werte können Sie leicht austüfteln. Dabei entsteht die folgende Tabelle, dazu eine allgemeine Vermutung und Beweisidee.

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	...	14	15	...	30	31	...
$\nu(k) =$	0	1	1	2	2	2	2	3	...	3	4	...	4	5	...

Die Werte entstehen aus $\lambda(0) = 0$ rekursiv durch $\lambda(k+1) = \lambda(\lfloor k/2 \rfloor) + 1$.
Inkremente entstehen nur bei $1, 3, 7, 15, \dots$, also gilt $\lambda(k) = \lfloor \log_2(k+1) \rfloor$.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

B308
Erläuterung

Beweis: Wir beweisen (1) $\nu(k) \leq \lambda(k)$ und (2) $\nu(k) \geq \lambda(k)$ per Induktion über $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ gilt $\nu(0) = 0 = \lambda(0)$. Im Folgenden sei also $k \geq 1$.

(1) Samson halbiert $Y = Y_{<b} \sqcup \{b\} \sqcup Y_{>b}$ mit $|Y_{>b}| - |Y_{<b}| \in \{0, 1\}$. Nach Delilas Zug $X = X_{<a} \sqcup \{a\} \sqcup X_{>a}$ gilt $|X_{<a}| \neq |Y_{<b}|$ oder $|X_{>a}| \neq |Y_{>b}|$. Daraus wählt Samson (X', Y') mit $|X'|$ minimal. Damit erreicht Samson $|X'| \leq \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ und spielt weiter auf (X', Y'). Per Induktion folgt:

$$\nu(k) \;\leq\; 1 + \nu(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;\leq\; 1 + \lambda(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;=\; \lambda(k)$$

(2) Egal wie Samson zieht, entweder $a \in X$ oder $b \in Y$, Delila kann stets so parieren, dass jedes der beiden Intervallpaare (X', Y') links und rechts $\lfloor (k-1)/2 \rfloor \leq |X'| < |Y'|$ oder $|X'| = |Y'|$ erfüllt. Per Induktion folgt:

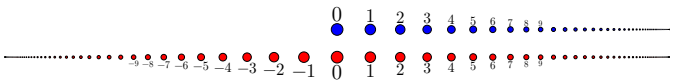
$$\nu(k) \;\geq\; 1 + \nu(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;\geq\; 1 + \lambda(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;=\; \lambda(k)$$

Das beweist den Satz durch Konstruktion optimaler Strategien. QED

Ganz praktisch können Sie diese Strategien direkt erproben: Spielen! Sowohl (1) als auch (2) erfordern einige Fallunterscheidungen: Übung!

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

B309



Wir spielen $(\mathbb{N}, \leq)$ gegen $(\mathbb{Z}, \leq)$. Samsons Gewinnstrategie als Formel:

$$\exists a_1 \in \mathbb{N} \;\; \forall a_2 \in \mathbb{N} : a_1 \leq a_2$$
$$\forall b_1 \in \mathbb{Z} \;\; \exists b_2 \in \mathbb{Z} \;\; : b_1 > b_2$$

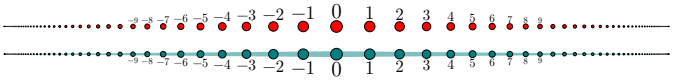
Die erste Aussage ist wahr für $(\mathbb{N}, \leq)$. Die zweite Aussage negiert die erste und ist wahr für $(\mathbb{Z}, \leq)$; wir ersetzen $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und a_n durch b_n. Diese Formel unterscheidet also beide Strukturen! Das übersetzt Samson in seine Gewinnstrategie, indem er jeweils die Existenzquantoren spielt.

Ausführlich: Samson wählt das kleinste Element $a_1 = 0$ in $(\mathbb{N}, \leq)$. Delila antwortet mit irgendeinem Element b_1 in $(\mathbb{Z}, \leq)$. Samson wählt dazu nun b_2 in $(\mathbb{Z}, \leq)$ mit $b_2 < b_1$. Daraufhin muss Delila aufgeben.

☺ Die Anzahl der Runden entspricht der Anzahl der Variablen.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

B310



Wir spielen $(\mathbb{Z}, \leq)$ gegen $(\mathbb{Q}, \leq)$. Samsons Gewinnstrategie als Formel:

$$\exists a_1 \in \mathbb{Z} \;\; \exists a_2 \in \mathbb{Z} \;\; \forall a_3 \in \mathbb{Z} : [\, a_1 < a_2 \wedge (a_1 \geq a_3 \vee a_3 \geq a_2) \,]$$
$$\forall b_1 \in \mathbb{Q} \;\; \forall b_2 \in \mathbb{Q} \;\; \exists b_3 \in \mathbb{Q} : [\, b_1 \geq b_2 \vee (b_1 < b_3 \wedge b_3 < b_2) \,]$$

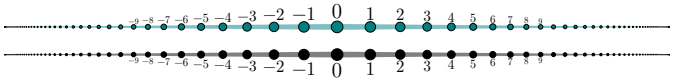
Die zweite Aussage ist wahr für $(\mathbb{Q}, \leq)$; sie besagt, die Ordnung ist dicht. Die erste Aussage negiert die zweite und ist wahr für $(\mathbb{Z}, \leq)$, da nicht dicht. Diese Formel unterscheidet also beide Strukturen! Das übersetzt Samson in seine Gewinnstrategie, indem er die Existenzquantoren spielt.

Ausführlich: Samson wählt zwei Elemente a_1 und $a_2 = a_1 + 1$ in $(\mathbb{Z}, \leq)$. Delila antwortet mit Elementen b_1 und b_2 in $(\mathbb{Q}, \leq)$ mit $b_1 < b_2$. Samson wählt b_3 in $(\mathbb{Q}, \leq)$ mit $b_1 < b_3 < b_3$. Daraufhin muss Delila aufgeben.

☺ Die Anzahl der Runden entspricht der Anzahl der Variablen.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

B311



Wir spielen $(\mathbb{Q}, \leq)$ gegen $(\mathbb{R}, \leq)$. Hier kommt das Spiel nie zum Ende!

Die geordneten Mengen $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind nicht isomorph, schon die zugrundeliegenden Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ erlauben keine Bijektion: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Dennoch führt das Isomorphiespiel (in nur endlicher Zeit) zu keiner Entscheidung: Weder Samson noch Delila kann einen Gewinn erzwingen, da dem jeweils anderen immer noch weitere Zugmöglichkeiten bleiben.

Gleichbedeutend: Diese beiden Ordnungen sind **elementar äquivalent**, jede Aussage der Logik erster Stufe (endlich viele Quantoren je über eine Elementvariable) hat für $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ denselben Wahrheitswert.

☺ Es gibt nicht-isomorphe Modelle, die elementar äquivalent sind!

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

B312
Erläuterung

Wir erklären die n–**Äquivalenz** $(X, \leq) \equiv_n (Y, \leq)$ zweier Ordnungen dadurch, dass Delila immer mindestens n Runden überstehen kann.

Dem gegenüber steht der **Quantorenrang** $\mathrm{qr}(\varphi)$ einer Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\leq)$ als die Schachtelungstiefe der Quantoren: Ist φ atomar, also von der Form $(x \leq y)$, so gilt $\mathrm{qr}(\varphi) := 0$. Rekursiv definieren wir $\mathrm{qr}(\neg\varphi) := \mathrm{qr}(\varphi)$ und $\mathrm{qr}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{qr}(\varphi \wedge \psi) := \max\{\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)\}$ für alle Junktoren sowie $\mathrm{qr}(\forall x : \varphi) = \mathrm{qr}(\exists x : \varphi) := \mathrm{qr}(\varphi) + 1$ für die Quantoren. Wir schreiben $\mathrm{FO}_n(\leq)$ für die Menge aller Formeln von Quantorenrang höchstens n.

Satz B3c: Korrespondenzsatz von Ehrenfeucht–Fraïssé

Genau dann gilt n–Äquivalenz $(X, \leq) \equiv_n (Y, \leq)$, wenn jede Formel $\varphi \in \mathrm{FO}_n(\leq)$, vom Quantorenrang $\leq n$, auf beiden Modellen denselben Wahrheitswert ergibt, formal geschrieben $((X, \leq) \vDash \varphi) \Leftrightarrow ((Y, \leq) \vDash \varphi)$.

Der Beweis gelingt per Induktion über n. Dies wird hier nicht ausgeführt.
📖 N. Immermann: *Descriptive Complexity.* Springer 1999, Thm. 6.10.
L. Libkin: *Elements of Finite Model Theory.* Springer 2012, Thm. 3.9.

Satz B3D: Grundregeln zur Termumformung, Dedekind 1888

(0) In den natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$:

(A1)	$x + y = y + x$	(M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
(A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	(M2)	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(A3)	$x + 0 = x$	(M3)	$x \cdot 1 = x$
(D0)	$x \cdot 0 = 0$	(D1)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
(P0)	$x^0 = 1$	(P1)	$x^{y+z} = x^y \cdot x^z$
(P2)	$x^1 = x$	(P3)	$x^{y \cdot z} = (x^y)^z$
(P4)	$1^x = 1$	(P5)	$(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$
(P6)	$0^x = 0$ für $x \neq 0$		

Dies sind die 15 Grundregeln, die wir aus der Schule kennen und lieben und seither alltäglich in jeder Rechnung gewinnbringend einsetzen. (??). Wie üblich kürzen wir $x \cdot y$ ab zu xy, sparen Klammern gemäß Potenz-vor-Punkt-vor-Strich und nutzen $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $5 = 4 + 1$, ...

Beispiel: Es gelten weitere nützliche Identitäten, für alle $x, y \in \mathbb{N}$ etwa:

$$x + (y \cdot x) = x \cdot (y + 1)$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Übung: Müssen wir diese Identitäten als weitere Axiome hinzufügen? Nein, wir können sie aus den obigen Grundregeln ableiten! Allgemein:

Satz B3D: polynomiale Identitäten

(1) Gilt $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ für zwei Formeln f und g über $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ und alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, so können wir diese Gleichheit bereits aus den ersten acht Grundregeln (A123, M123, D01) ableiten.

Beweisskizze: Beide Seiten der Gleichung sind Polynome in $x_1, \dots, x_n$. Ausmultiplizieren und Monome sammeln bringt sie in Standardform. Für diese genügt es, die Koeffizienten zu vergleichen. (Satz ??) QED

☺ Der Kalkül der obigen Grundregeln ist in diesem Sinne *vollständig* und jede Identität im Halbring $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ ist algorithmisch *entscheidbar*.

Der Logiker Alfred Tarski (1901–1983) vermutete in den 1960er Jahren die Vollständigkeit auch für $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$, mit Potenzierung, konnte dies aber nicht beweisen. Diese Frage wurde berühmt als *Tarski's high school algebra problem:* Lässt sich jede Identität in $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ aus den 15 Grundregeln ableiten? Diese harmlos anmutende Frage beschäftigte viele prominente Logiker und erwies sich als überraschend schwierig.

Alex Wilkie zeigte 1981, dass Tarskis Vermutung falsch ist. Das war eine große Überraschung, und der Beweis ist erfreulich konkret und leicht:

Satz B3D: Wilkie 1981

(2) In $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{N}$ die folgende Identität $W(x, y)$:

$$((1+x)^y + (1+x+x^2)^y)^x \cdot ((1+x^3)^x + (1+x^2+x^4)^x)^y$$
$$= ((1+x)^x + (1+x+x^2)^x)^y \cdot ((1+x^3)^y + (1+x^2+x^4)^y)^x$$

(3) Sie lässt sich jedoch nicht aus Dedekinds 15 Grundregeln (0) ableiten.

Aufgabe: Beweisen Sie zunächst die Gültigkeit von Wilkies Identität (2).

Lösung: (2) Zu $x \in \mathbb{N}$ haben wir $\bar{x} := 1 - x + x^2 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und damit

$$1 + x^3 = (1 - x + x^2)(1 + x),$$
$$1 + x^2 + x^4 = (1 - x + x^2)(1 + x + x^2).$$

Das ist der entscheidende Trick, ab hier genügen Dedekinds Grundregeln. Genauer: Für $x = 0$ setzen wir $\bar{x} = 1$, für $x = v + 1$ setzen wir $\bar{x} = 1 + vx$. Dank (1) folgt die obige Faktorisierung für alle $x \in \mathbb{N}$. (Nachrechnen!) Beide Seiten von Wilkies Identität $W(x, y)$ sind demnach gleich

$$((1+x)^y + (1+x+x^2)^y)^x \cdot \bar{x}^{xy} \cdot ((1+x)^x + (1+x+x^2)^x)^y.$$

Können wir dies allein aus den Grundregeln ableiten? Wilkies zeigte, dass dies unmöglich ist. Wie können wir dies beweisen? Wenn Sie zeigen wollen, dass es möglich ist, dann ist der beste Beweis, es zu tun! Wenn Sie zeigen wollen, dass es nicht möglich ist, dann genügt es nicht, es nicht zu tun... oder erfolglos zu versuchen und frustriert aufzugeben. Die Unmöglichkeit beweisen wir, indem wir ein Hindernis benennen!

📖 S.N. Burris, K.A. Yeats: *The saga of the high school identities.* Algebra Universalis 52 (2004) 325–342. Zum Beweis der Unmöglichkeit (3) zitiere ich ihr verblüffendes Argument in Form eines Gegenmodells:

+	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	2	3	4	4	2	d	3	3	3	3	4	
2	2	3	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
a	a	2	3	4	4	b	4	b	3	h	3	3	4
b	b	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
c	c	d	3	4	4	b	4	b	3	3	3	3	4
d	d	3	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4
e	e	3	4	4	4	h	4	3	4	4	3	h	4
f	f	3	4	4	4	3	4	3	4	3	4	3	4
g	g	3	4	4	4	3	4	3	h	3	4	4	
h	h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

·	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
2	0	2	4	4	4	b	4	b	4	4	4	4	4
3	0	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
a	0	a	b	4	4	c	b	c	b	h	4	4	4
b	0	b	4	4	4	b	4	b	4	4	4	4	4
c	0	c	b	4	4	c	b	c	b	4	4	4	4
d	0	d	4	4	4	b	4	b	4	4	4	4	4
e	0	e	4	4	4	h	4	4	4	4	h	4	4
f	0	f	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
g	0	g	4	4	4	4	4	4	h	4	4	4	4
h	0	h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

^	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	4	4	4	4	4	4	f	4	4	4
3	1	3	4	4	4	e	4	4	4	g	4	e	h
4	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
a	1	a	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
b	1	b	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
c	1	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	1	d	4	4	4	f	4	4	4	4	4	4	4
e	1	e	4	4	4	4	4	4	4	h	4	4	4
f	1	f	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
g	1	g	4	4	4	h	4	4	4	4	4	h	4
h	1	h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Satz B3D: Burris–Yeats 2004

(4) Dieses Modell $(X, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ auf der Menge $X = \{0, 1, 2, 3, 4, a, \dots, h\}$ erfüllt Dedekinds 15 Grundregeln, aber nicht Wilkies Identität $W(a, e)$.

Übung: Schreiben Sie ein Python-Programm, das für $(X, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ alle 15 Grundregeln nachprüft und alle Ausnahmen für $W(x, y)$ findet.

Lösung: Die Elemente der Menge X codieren wir durch $0, 1, \dots, 12$ und hinterlegen die obigen Tabellen als drei Arrays `add`, `mul`, `exp`.

```
print('Axioms', all([ add[x][y] == add[y][x]                              #A1
                and add[add[x][y]][z] == add[x][add[y][z]]                #A2
                and add[x][0] == x                                        #A3
                and mul[x][y] == mul[y][x]                                #M1
                and mul[mul[x][y]][z] == mul[x][mul[y][z]]                #M2
                and mul[x][1] == x                                        #M3
                and mul[x][0] == 0                                        #D0
                and mul[x][add[y][z]] == add[mul[x][y]][mul[x][z]]        #D1
                and exp[x][0] == 1                                        #P0
                and exp[x][add[y][z]] == mul[exp[x][y]][exp[x][z]]        #P1
                and exp[x][1] == x                                        #P2
                and exp[x][mul[y][z]] == exp[exp[x][y]][z]                #P3
                and exp[1][x] == 1                                        #P4
                and exp[mul[x][y]][z] == mul[exp[x][z]][exp[y][z]]        #P5
                and (exp[0][x] == 0 or x == 0)                            #P6
    for x in range(0,13) for y in range(0,13) for z in range(0,13) ]))
```


Im Nachhinein ist das genial einfach. Doch wie kommt man darauf? Das ist Teil einer langen Saga: Wilkies ursprünglicher Beweis (1981) war rein syntaktisch. Gurevič fand 1985 ein Gegenmodell mit 60 Elementen, später ein kleineres mit 34. Burris reduzierte dies 1988 auf 29 Elemente, 1990 auf 17, zusammen mit Yeats 2001 schließlich auf 13; ihre Methode verband monatelange Computersuche mit sachkundiger Optimierung.

Burris und Yeats vermuten, dass sie damit das Minimum gefunden haben, also keine noch kleineren Gegenmodelle existieren. Eine erschöpfende Computersuche könnte hier Klarheit schaffen, ist aber aufwändig und soweit ich weiß bisher noch nicht vollständig durchgeführt worden.

Vermutlich empfinden Sie den Beweis als kurz und einfach, doch das obige Gegenmodell als „künstlich" und wenig erhellend. Völlig zu Recht! Seine Konstruktion durch „brute force" bleibt leider noch unbefriedigend.

Bisher scheint kein „natürliches" oder erhellendes Gegenmodell bekannt. Noch lieber als ein möglichst kleines, aber obskures Gegenmodell wäre mir ein gut verständliches, aussagekräftiges Gegenmodell.

Was passiert, wenn wir zu Dedekinds Grundregeln noch Wilkies Identität hinzufügen? Sind die Umformungsregeln damit vollständig? Nein! Gurevič konstruierte für jedes ungerade n eine Identität $W_n(x, y)$:

$$(A^x + B^x)^y \cdot (C^y + D^y)^x = (A^y + B^y)^x \cdot (C^x + D^x)^y,$$

wobei $A = 1 + x$ und $B = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ sowie $C = 1 + x^n$ und $D = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2}$. Für $n = 3$ ist dies die Identität von Wilkie. Die gesamte Familie dieser Identitäten gilt in $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$, sie kann jedoch aus keiner endlichen Menge von Axiomen abgeleitet werden.

📖 R. Gurevič: *Equational theory of positive numbers with exponentiation is not finitely axiomatizable.* Ann. Pure and Applied Logic 49 (1990) 1–30

☺ Warum erzähle ich das? Es lehrt uns, die sorgsame Konstruktion von $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ zu würdigen, und zeigt, dass selbst Grundlagen wie die *„high school identities"* zu interessanten und kniffligen Forschungsfragen führen, sobald wir nur genau hinsehen. Die hier illustrierten Techniken durch Beweis und Gegenbeispiel verhelfen Ihnen überall zur Klarheit.

Matrixkalkül: komplexe Zahlen als 2×2–Matrizen

B321

Satz B3E: die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Matrizen über $\mathbb{R}$

Im Matrixring $(\mathbb{R}^{2\times2}, +, 0_{2\times2}, \cdot, 1_{2\times2})$ betrachten wir die Teilmenge

$$C := \left\{ z = \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sie bildet einen Teilring. Das bedeutet, sie enthält $0_{2\times2}$ und $1_{2\times2}$ und ist abgeschlossen unter Matrixaddition, Negation und Multiplikation:

$$\left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} u & -v \\ v & u \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} xu-yv & -(yu+xv) \\ yu+xv & xu-yv \end{smallmatrix}\right]$$

Jedes Element $z \neq 0$ in $(C, \cdot)$ ist invertierbar, denn $\det(z) = x^2 + y^2 > 0$:

$$\left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \tfrac{1}{x^2+y^2} \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right]$$

Somit ist $(C, +, \cdot)$ ein Divisionsring. Er ist zudem sogar kommutativ:

$$\left[\begin{smallmatrix} u & -v \\ v & u \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} ux-vy & -(uy+vx) \\ uy+vx & ux-vy \end{smallmatrix}\right]$$

Somit ist C ein Körper. Er ist isomorph zu den komplexen Zahlen:

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \cong (C, +, \cdot) : x + \mathrm{i}y \leftrightarrows \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right]$$

Matrixkalkül: komplexe Zahlen als 2×2–Matrizen

B322
Übung

Wir betrachten hier nicht die gesamte Menge $\mathbb{R}^{2\times2}$ aller reellen 2×2–Matrizen, sondern nur eine spezielle Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^{2\times2}$.

Diese ist abgeschlossen unter Addition, Negation und Multiplikation: Für je zwei Matrizen $z, w \in C$ gilt $z + w \in C$, $-w \in C$ und $z \cdot w \in C$. Zudem gilt $0_{2\times2} \in C$ und $1_{2\times2} \in C$. Wir nennen dies einen **Teilring**.

🙂 Allein daraus folgt bereits, dass $(C, +, 0_{2\times2}, \cdot, 1_{2\times2})$ ein Ring ist.

Übung: Wiederholen Sie die acht Ringaxiome und prüfen Sie jedes einzelne hier nach. Sie werden sehen, dass es *trivialerweise* erfüllt ist.

Struktur $(C, +, \cdot)$	$(C, +)$				$(C, +, \cdot)$		$(C, \cdot)$			
Eigenschaft	Ass	Ntr	Inv	Com	DL	DR	Ass	Ntr	Inv*	Com
erben als Teilring	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	–	–
extra nachrechnen									✓	✓

Trivial bedeutet, es folgt ohne weiteres Zutun sofort aus der Definition. Erst nachdem Sie sich selbst einmal diese notwendige doch lehrreiche Mühe gemacht haben, sind Sie berechtigt auszurufen: „Das ist trivial!“

Matrixkalkül: Quaternionen als 2×2–Matrizen

B323

Satz B3F: die Quaternionen $\mathbb{H}$ als Matrizen über $\mathbb{C}$

Im Matrixring $(\mathbb{C}^{2\times2}, +, 0_{2\times2}, \cdot, 1_{2\times2})$ betrachten wir die Teilmenge

$$H := \left\{ q = \left[\begin{smallmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Sie bildet einen Teilring. Das bedeutet, sie enthält $0_{2\times2}$ und $1_{2\times2}$ und ist abgeschlossen unter Matrixaddition, Negation und Multiplikation:

$$\left[\begin{smallmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} z_1z_2-w_1\overline{w_2} & -z_1w_2-w_1\overline{z_2} \\ \overline{w_1}z_2+\overline{z_1}\overline{w_2} & -\overline{w_1}w_2+\overline{z_1}\overline{z_2} \end{smallmatrix}\right]$$

Jedes Element $q \neq 0$ in $(H, \cdot)$ ist invertierbar, $\det(q) = |z|^2 + |w|^2 > 0$:

$$\left[\begin{smallmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \tfrac{1}{z\overline{z}+w\overline{w}} \left[\begin{smallmatrix} \overline{z} & w \\ -\overline{w} & z \end{smallmatrix}\right]$$

Somit ist $(H, +, \cdot)$ ein Divisionsring. Er ist jedoch nicht kommutativ:

$$E = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right],\ I = \left[\begin{smallmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right],\ J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right] \quad \Rightarrow$$

$\cdot$	I	J	K
I	$-E$	K	$-J$
J	$-K$	$-E$	I
K	J	$-I$	$-E$

Dieser Divisionsring ist isomorph zu Hamiltons Quaternionen:

$$(\mathbb{H}, +, \cdot) \cong (H, +, \cdot) : \alpha + \beta\mathrm{i} + \gamma\mathrm{j} + \delta\mathrm{k} \leftrightarrows \alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K.$$

Matrixkalkül: Quaternionen als 2×2–Matrizen

B324
Übung

Die Teilmenge $H \subset \mathbb{C}^{2\times2}$ ist ein Teilring: Es gilt $0_{2\times2} \in H$ und $1_{2\times2} \in H$. Für je zwei Matrizen $z, w \in H$ gilt $z + w \in H$, $-w \in H$ und $z \cdot w \in H$.

🙂 Allein daraus folgt bereits, dass $(H, +, 0_{2\times2}, \cdot, 1_{2\times2})$ ein Ring ist.

Struktur $(H, +, \cdot)$	$(H, +)$				$(H, +, \cdot)$		$(H, \cdot)$			
Eigenschaft	Ass	Ntr	Inv	Com	DL	DR	Ass	Ntr	Inv*	Com
erben als Teilring	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	–	–
extra nachrechnen									✓	–

🙂 Unsere sorgsame Vorbereitung zum Matrixkalkül zahlt sich hier aus! Die Ringaxiome haben wir für $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$ allgemein nachgewiesen. Das können wir immer wieder wunderbar nutzen, so auch hier.

🙂 Ohne weitere Mühe sehen wir sofort, dass H ein Schiefkörper ist. Das ist eine explizite, doch sparsame Konstruktion der Quaternionen. Die direkte, naive Konstruktion ist möglich, aber eher mühsamer.

Aufgabe: Lassen sich so auch die Oktaven in $\mathbb{H}^{2\times2}$ darstellen? **Lösung:** Nein, die Multiplikation in $\mathbb{H}^{2\times2}$ ist assoziativ, die Oktaven jedoch nicht.

Kapitel C

Distanzlehre: metrische Räume

Alles messen, was messbar ist –
und messbar machen, was noch nicht messbar ist.
Galileo Galilei (1564–1642)

Inhalt dieses Kapitels C

1 Skalarprodukte und Normen auf Vektorräumen

2 Metrische Räume und ihre Topologie

3 Konvergenz und Stetigkeit

4 Vollständige metrische Räume

5 Der kleine Horrorladen

Von Linearer Algebra über die Analysis zur Topologie

Lineare Algebra, Geometrie ... ... Analysis, Topologie

$$\text{Skalarprodukt} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Norm} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Metrik} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Topologie}$$

speziell, rigide, mehr Tiefe ... ... mehr Breite, flexibel, allgemein

In diesem Kapitel vollziehen wir den Dreischritt von Skalarprodukten zu Normen zu Metriken zu Topologien. Dies sind vier allgegenwärtige mathematische Grundstrukturen. Sie kennen diese bereits aus der Linearen Algebra und analytischen Geometrie sowie der Analysis, jetzt fortgeführt in der Topologie, später in der Funktionalanalysis.

Meist arbeiten wir allgemein mit Topologien. Oft ist es jedoch sinnvoll, Metriken zu nutzen, oder soweit möglich Normen und Skalarprodukte. Je nach Anwendung nutzen wir dankend passende Werkzeuge: Starke Strukturen erlauben mehr Tiefe, allgemeine Strukturen mehr Breite. Wir schauen uns daher auch jeweils das Umkehrproblem an

Von Linearer Algebra über die Analysis zur Topologie

Dieses Kapitel ist ein Rückblick auf die ersten Semester mit einigen Präzisierungen und Ergänzungen. Ich erstrebe damit eine gemeinsame Grundlage und einen reichhaltigen Beispielfundus für die Topologie. Weniger ist mehr? Nein. Mehr Beispiele helfen zu mehr Verstehen.

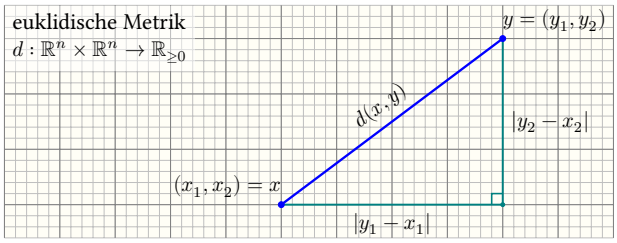
Ich importiere hier freizügig Themen aus der Linearen Algebra und der Analysis, die Sie ja alle gehört haben (sofern Sie Mathematik studieren), manchmal auch aus der Stochastik oder der Numerik oder anschauliche Beispiele aus der Physik, der Informatik oder weiteren Anwendungen.

Vorenntnisse der Teilnehmer:innen sind naturgemäß unterschiedlich. Wenn Sie dabei schöne Themen wiedererkennen, dürfen Sie sich freuen und stolz sein auf ihre mathematische Allgemeinbildung. Wenn nicht, dann motiviert Sie dieser Ausblick vielleicht, mehr wissen zu wollen.

Ich will und muss mich hier kurz fassen — aber doch nicht zu kurz! Ich versuche dabei, die Mathematik vernetzt darzustellen und hilfreiche Querverbindungen zu zeigen. Ich vertraue auf Ihre Neugier.

Die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^n$ aller reellen n–Tupel.



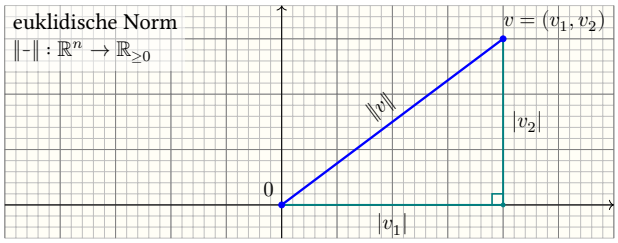
Die **euklidische Metrik** $d(x,y)$ misst den Abstand vom Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ zum Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, also die Länge des Vektors $y - x$. Dank Pythagoras gilt:

$$d(x,y) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + \cdots + |y_n - x_n|^2}$$

Unsere Skizze zeigt dies für $n = 2$. **Übung:** Skizzieren und begründen Sie dies ebenso für $n = 3$. Der allgemeine Fall $n \in \mathbb{N}$ gelingt per Induktion.

Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.



Die **euklidische Norm** $\|v\|$ misst die Länge des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ als den Abstand vom Ursprung 0 zum Punkt v. Dank Pythagoras gilt:

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2}$$

Das Normquadrat $\|v\|^2 = v_1^2 + \cdots + v_n^2$ ist eine **quadratische Form**. Die zugehörige Bilinearform ist das **euklidische Skalarprodukt**.

Verallgemeinerung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Wir formulieren Skalarprodukte nicht nur über $\mathbb{R}$, auch über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$. Zur Erinnerung: Auf dem Körper $\mathbb{R}$ haben wir die **triviale Konjugation**

$$\operatorname{conj}_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \overline{\alpha} = \alpha.$$

Demnach gilt $|\alpha|^2 = \overline{\alpha}\alpha = \alpha\overline{\alpha} = \alpha^2 \geq 0$, mit Gleichhheit gdw $\alpha = 0$.
Auf $\mathbb{C} = \{ z = \alpha + \mathrm{i}\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$ haben wir die **komplexe Konjugation**

$$\operatorname{conj}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = \alpha + \mathrm{i}\beta \mapsto \overline{z} = \alpha - \mathrm{i}\beta.$$

Demnach gilt $|z|^2 = \overline{z}z = z\overline{z} = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, mit Gleichhheit gdw $z = 0$.
Auf $\mathbb{H} = \{ q = \alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{k}\delta \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}$ haben wir entsprechend

$$\operatorname{conj}_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : q = \alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{k}\delta \mapsto \overline{q} = \alpha - \mathrm{i}\beta - \mathrm{j}\gamma - \mathrm{k}\delta.$$

Es gilt $|q|^2 = q\overline{q} = \overline{q}q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 0$, mit Gleichhheit gdw $q = 0$.
Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{\overline{x}} = x$ sowie $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ und $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$
Dies setzen wir fort auf Matrizen über $\mathbb{K}$: Zur Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times J}$ definieren wir die **adjungierte Matrix** $A^\dagger := \overline{A}^\top \in \mathbb{K}^{J \times I}$ durch Transkonjugation.

Verallgemeinerung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Wir formulieren systematisch diese drei Fälle gemeinsam. Es lohnt sich! Denkökonomie: Die Arbeit über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ verläuft weitgehend parallel. In ihrem Zusammenspiel und im Kontrast können wir viel lernen!

Grundlegend ist der reelle Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dieser ist insbesondere in kleiner Dimension $n = 2, 3$ wunderbar anschaulich. Davon wollen wir ausgehen und auf beliebige (auch unendliche) Dimension verallgemeinern.

Für viele Anwendungen (in Mathematik, Physik, Ingenieurwesen, ...) reichen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht aus, daher nutzen wir die Erweiterung zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Das gilt insbesondere für Skalarprodukte.

Die Quaternionen $\mathbb{H}$ werden erfahrungsgemäß nicht so häufig genutzt wie $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, oft genug sind sie jedoch eine sehr hilfreiche Ergänzung.

Den reellen Fall versteht man besser, wenn man auch komplex denkt, und fürs Komplexe hilft es, die Quaternionen im Hinterkopf zu haben.

Kurzum: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind oft nicht genug, die Quaternionen $\mathbb{H}$ sind manchmal zu viel, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind meist genau richtig.

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ C105

Beispiel C1A: das euklidische Skalarprodukt auf dem Raum $\mathbb{K}^n$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das **Standardskalarprodukt**

$$\langle \text{-} | \text{-} \rangle : V \times V \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u \,|\, v \rangle := \overline{u_1} v_1 + \cdots + \overline{u_n} v_n = u^\dagger v.$$

Für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

S0: positive Semidefinitheit, $\langle u \,|\, u \rangle \geq 0 = \langle 0 \,|\, 0 \rangle$

S1: positive Definitheit, $\langle u \,|\, u \rangle > 0$ für $u \neq 0$

S2: konjugierte Symmetrie, $\langle v \,|\, u \rangle = \overline{\langle u \,|\, v \rangle}$

S3: Linearität rechts, $\langle u \,|\, v\lambda + w\mu \rangle = \langle u \,|\, v \rangle \lambda + \langle u \,|\, w \rangle \mu$

Aus (S2) und (S3) folgt konjugierte Linearität in der ersten Variablen:

S4: konjugierte Linearität links, $\langle u\lambda + v\mu \,|\, w \rangle = \overline{\lambda} \langle u \,|\, w \rangle + \overline{\mu} \langle v \,|\, w \rangle$

Zu (S4) sagen wir kurz **semilinear**, zu (S3&4) demnach **sesquilinear** (lat. *sesqui*, 'anderthalb'). Zu (S2) sagt man **hermitesch**, zu Ehren von Charles Hermite (1822–1901), über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bedeutet das **symmetrisch**.

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ C106 Erläuterung

Wir nennen dies das **euklidische** oder **Standardskalarprodukt** auf $\mathbb{K}^n$. Allgemein über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist es eine **hermitesche Sesquilinearform**, speziell über $\mathbb{R}$ eine **symmetrische Bilinearform**.

Dank (S2) gilt $\langle u \,|\, u \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$, wir können also die Ordnung von $\mathbb{R}$ nutzen und von Positivität sprechen: (S0) fordert $\langle u \,|\, u \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und (S1) ergänzt stärker $\langle u \,|\, u \rangle \neq 0$ für alle $u \neq 0$, also $\langle u \,|\, u \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Aussagen (S0–4) nach.

Lösung: Wir nutzen die Anordnung der reellen Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$:

(S0) Für jeden Koeffizienten $u_i \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{u_i} u_i = |u_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Für jeden Vektor $u \in \mathbb{K}^n$ folgt $\langle u \,|\, u \rangle = |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0$.

(S1) Im Falle $u \neq 0$ gilt $u_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$.
Daraus folgt sofort die strikte Ungleichung $\langle u \,|\, u \rangle \geq |u_i|^2 > 0$.

Wir nutzen, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ein Ring ist und die Konjugation ein Ringantiautomorphismus. Damit rechnen Sie (S2–4) geduldig nach.
Da $\mathbb{H}$ nicht-kommutativ ist, achten wir auf die Reihenfolge der Faktoren.

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ C107 Erläuterung

Bemerkung: Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist $(u, v) \mapsto u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ positiv definit, auf $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{H}^n$ jedoch nicht, denn $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1 < 0$.

⚠ Zur Korrektur müssen wir eine der beiden Variablen konjugieren. Ich plädiere entschieden für die erste, dadurch werden Formeln schöner. Diese Konvention ist in der physikalischen Literatur weitgehend üblich.

⚠ Manche Autoren wählen die zweite; das ist eine Geschmacksfrage. So findet es sich vor allem in der älteren, mathematischen Literatur. Beide Konventionen sind per Konjugation ineinander umzurechnen.

🙂 Wir legen uns auf eine Konvention fest und befolgen diese fortan.

Bemerkung: Es gilt $\langle u \,|\, 0 \rangle = 0$ dank (S3) und $\langle 0 \,|\, v \rangle = 0$ dank (S4). Insbesondere gilt demnach immer $\langle 0 \,|\, 0 \rangle = 0$, und aus (S1) folgt (S0).

Die Formulierung der Eigenschaften (S0–3) ist daher etwas redundant; ich möchte damit die positive Definitheit (S1) besonders hervorheben.

Gilt in späteren Anwendungen statt positiver Definitheit (S1) nur die schwächere Eigenschaft (S0), so heißt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ **positiv semidefinit**.

Anwendungen von Skalarprodukt, Norm und Metrik C108 Erläuterung

🙂 Mit dem Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ messen wir Winkel und Längen. Daraus gewinnen wir für V wichtige geometrische Werkzeuge:

Norm: Die Länge eines Vektors $v \in V$ ist $|v| = \|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$.

Cauchy–Schwarz–Ungleichung: Es gilt $|\langle u \,|\, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Orthogonalität: $u, v \in V$ stehen senkrecht, wenn $\langle u \,|\, v \rangle = 0$.

Winkel: $\mathrm{re}\langle u \,|\, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$ mit $\alpha = \angle(u, v) \in [0, \pi]$.

Dreiecksungleichung: Es gilt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Metrik: Der Abstand zweier Vektoren u, v ist $\|u - v\|$.

Konvergenz $v_n \to v$ in V ist definiert durch $\|v_n - v\| \to 0$.

Vollständigkeit: Jede Cauchy–Folge in V konvergiert in V.

Stetigkeit von Funktionen $f : V \to W$, linear oder nicht.

Differenzierbarkeit, lineare und höhere Approximation.

🙂 Wir wollen dies möglichst allgemein erklären und effizient nutzen. Dazu erheben wir die wesentlichen Eigenschaften (S1–3) zur Definition.

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung C109

🙂 Allein aus den grundlegenden Eigenschaften (S1–3) folgt:

Satz C1B: Cauchy–Schwarz–Ungleichung (CSU)

(1) Für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**:

$$|\langle u \,|\, v \rangle|^2 \leq \langle u \,|\, u \rangle \langle v \,|\, v \rangle \qquad \text{bzw.} \qquad |\langle u \,|\, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v über $\mathbb{K}$ linear abhängig sind.

(2) Für alle Vektoren $u, v \in V$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

N0: Positivität, $\|u\| \geq 0 = \|0\|$

N1: Definitheit, $\|u\| > 0$ für $u \neq 0$

N2: Homogenität, $\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda|$

N3: Dreiecksungleichung, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Aufgabe: Beweisen Sie die Cauchy–Schwarz–Ungleichung und damit N3! Früher hieß es, man erkenne eine Mathematiker:in daran, ob sie die Cauchy–Schwarz–Ungleichung beweisen könne. Probieren Sie es!

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung C110 Erläuterung

Es gibt viele Beweisvarianten für die Cauchy–Schwarz–Ungleichung. Der folgende Beweis ist geometrisch motiviert und leicht zu merken.

Lösung: (0) Wir erinnern zunächst an die **orthogonale Zerlegung**. Sei $u \in V$ mit $\|u\|^2 \neq 0$. Wir können jeden Vektor $v \in V$ eindeutig zerlegen in $(v_\parallel, v_\perp)$ mit $v = v_\parallel + v_\perp$ wobei $v_\parallel \in u\mathbb{K}$ und $\langle u \,|\, v_\perp \rangle = 0$. Explizit gilt:

$$v_\perp = v - v_\parallel \quad \text{und} \quad v_\parallel = u\lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = \langle u \,|\, v \rangle / \langle u \,|\, u \rangle.$$

Dies folgt aus $0 \overset{!}{=} \langle u \,|\, v_\perp \rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle u \,|\, v - u\lambda \rangle \overset{(S3)}{=} \langle u \,|\, v \rangle - \langle u \,|\, u \rangle \lambda$.

(1) **Cauchy–Schwarz:** Für $u = 0$ ist alles klar. Im Folgenden sei $u \neq 0$.
Wir nutzen die orthogonale Zerlegung $v = v_\parallel + v_\perp$, wie oben vorbereitet.

$$\|v\|^2 \overset{(0)}{=} \|v_\parallel\|^2 + \|v_\perp\|^2 \geq \|v_\parallel\|^2 \overset{(0)}{=} |\langle u \,|\, v \rangle|^2 / \|u\|^2$$

Daraus folgt die erste Ungleichung, und die zweite dank Monotonie der Wurzelfunktion $\sqrt{} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gleichheit entspricht Parallelität. QED

Vektorräume mit Skalarprodukt und mit Norm C111

🙂 Wir erheben die grundlegenden Eigenschaften nun zur Definition:

Definition C1C: Skalarprodukt und Norm

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung $\langle \text{-} | \text{-} \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, die die Eigenschaften (S1–3) erfüllt. Das Paar $(V, \langle \text{-} | \text{-} \rangle)$ heißt dann **$\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt**, oder auch **Prä–Hilbert–Raum** und bei Vollständigkeit **Hilbert–Raum**.

Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\text{-}\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die (N1–3) erfüllt. Das Paar $(V, \|\text{-}\|)$ heißt **normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum**, **normierter Raum**, oder auch **Prä–Banach–Raum** und bei Vollständigkeit **Banach–Raum**.

Jedes Skalarprodukt definiert eine zugehörige Norm $\|u\| := \sqrt{\langle u \,|\, u \rangle}$: Aus (S1–3) folgt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung und somit (N1–3).

In Anwendungen tritt auch $\|u\| = \infty$ auf. Wir nennen $\|\text{-}\| : V \to [0, \infty]$ mit (N1–3) eine **Pseudonorm**. Eine **(Pseudo)Halbnorm** erfüllt nur (N2,3).

Aufgabe: Rechnen Sie hierzu die folgende hilfreiche Konstruktion nach.

Vektorräume mit Skalarprodukt und mit Norm C112

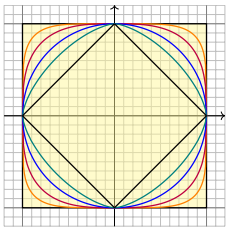
Proposition C1C: von Pseudohalbnorm zu Norm

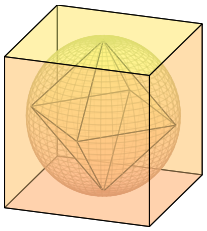
Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Pseudohalbnorm $\|\text{-}\| : V \to [0, \infty]$. Dann sind $V_{<\infty} = \{ v \in V \,|\, \|v\| < \infty \}$ und $V_0 = \{ v \in V \,|\, \|v\| = 0 \}$ Untervektorräume. Auf dem Quotientenvektorraum $V_{<\infty}/V_0$ induziert $\|\text{-}\|$ eine echte Norm.

🙂 Diese genial-einfache Idee finden Sie insbesondere bei der L^p–Norm und der Konstruktion des Raumes $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Beweis: Gilt $\|u\| < \infty$ und $\|v\| < \infty$, so folgt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| < \infty$ und $\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda| < \infty$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist $V_{<\infty}$ ein Untervektorraum.
Gilt $\|u\| = 0$ und $\|v\| = 0$, so folgt entsprechend $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| = 0$ und $\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda| = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist V_0 ein Untervektorraum.
Für $u, v \in V_{<\infty}$ mit $u - v \in V_0$ gilt $\|u\| = \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| = \|v\|$ und $\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u\|$, insgesamt folgt also $\|u\| = \|v\|$.
Auf dem Quotienten $V_{<\infty}/V_0$ ist somit $|u + V_0| := \|u\|$ wohldefiniert und zudem endlich. Homogenität und Dreiecksungleichung vererben sich, zudem ist $|\text{-}|$ auf $V_{<\infty}/V_0$ nun positiv definit, also eine echte Norm. QED

Prominente Normen auf $\mathbb{K}^n$ C113





Beispiel / Übung: Auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^n$ haben wir die

p–Norm	$\lvert x\rvert_p := (\lvert x_1\rvert^p + \cdots + \lvert x_n\rvert^p)^{1/p},$
Taxinorm	$\lvert x\rvert_1 := \lvert x_1\rvert + \cdots + \lvert x_n\rvert,$
euklidische Norm	$\lvert x\rvert_2 := \sqrt{\lvert x_1\rvert^2 + \cdots + \lvert x_n\rvert^2},$
Maximumsnorm	$\lvert x\rvert_\infty := \max\{\lvert x_1\rvert, \dots, \lvert x_n\rvert\}.$

Für alle $p \in [1,\infty]$ und $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le n|x|_\infty$.
Für $p \searrow 1$ gilt $|x|_p \nearrow |x|_1$. Für $p \nearrow \infty$ gilt $|x|_p \searrow |x|_\infty$.

Prominente Normen auf $\mathbb{K}^n$ C114 Erläuterung

☺ Skalarprodukte sind sehr nützlich, Normen gibt es noch viel mehr!

Dies sind tatsächlich Normen! Die Eigenschaften (N0–2) sind klar, der interessante Punkt ist der Nachweis der Dreicksungleichung! Für $p = 2$ folgt dies aus der Cauchy–Scharz–Ungleichung (C1B). Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist es eine leichte Übung. (Versuchen Sie es!) Allgemein benötigen Sie hierzu die Hölder–Minkowski–Ungleichung.

Die p–Normen bilden eine überabzählbare Familie von Normen auf $\mathbb{K}^n$. Für $p \in [1,\infty]$ interpoliert diese Familie von der Taxinorm ($p = 1$) über die euklidische Norm ($p = 2$) bis zur Maximumsnorm ($p = \infty$). Noch spannender sind unendlich-dimensionale Räume, ℓ^p und L^p, deren Konstruktion wir anschließend in groben Zügen zusammenfassen.

Die Skizze zeigt die Bälle um den Nullpunkt mit Radius 1. Für $p = 2$ ist die der vertraute euklidische Ball, für $p = \infty$ der Würfel, für $p = 1$ das Kreuzpolytop. Sicher fragen Sie sich jetzt, ob auch diese p–Normen von einem Skalarprodukt herkommen. Das gilt tatsächlich nur für $p = 2$! Der folgende Satz beantwortet genau diese Frage.

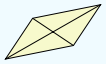
Vom Skalarprodukt zur Norm und zurück C115

Lemma C1J: Parallelogrammgleichung und Polarisation

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$.

(1) Die Norm $|u| = \sqrt{\langle u \,|\, u\rangle}$ erfüllt die **Parallelogrammgleichung**

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2 \quad \text{für alle } u, v \in V.$$



(2) Das Skalarprodukt rekonstruieren wir dank der **Polarisationsformel**

$$\langle u \,|\, v\rangle = \sum_{\varepsilon\in B} \frac{|u+v\varepsilon|^2 - |u-v\varepsilon|^2}{4\varepsilon} \quad \text{mit } B = \{1\}, \{1,\mathrm{i}\}, \{1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}.$$

Beispiel: Es gilt $2|e_1|_p^2 + 2|e_2|_p^2 = 4$, aber $|e_1+e_2|_p^2 + |e_1-e_2|_p^2 = 2\cdot 2^{2/p}$.

Satz C1K: Jordan–von Neumann 1935

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Erfüllt eine beliebige Norm $|\text{-}|$ auf V die Parallelogrammgleichung, so definiert die Polarisationsformel ein Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ auf V, und zwar das einzige mit Norm $|\text{-}|$.

Vom Skalarprodukt zur Norm und zurück C116

Skalarprodukt $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Norm $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Metrik $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Topologie

☺ Mit der Parallellogrammgleichung haben wir ein einfaches Kriterium um festzustellen, ob eine vorgelegte Norm von einem Skalarprodukt induziert wird oder nicht. Bemerkenswerterweise ist diese Bedingung nicht nur notwendig (C1J), sondern auch hinreichend (C1K).

☺ Dieses Ergebnis dient Ihrer mathematische Kultur und Inspiration, außerdem ist es als Werkzeug für konkrete Beispiele oft hilfreich. Für einen ersten Durchgang genügt es, die Aussage zu verstehen und anwenden zu können. Anschließend möchten Sie vielleicht mehr:

Übung: Beweisen Sie das Lemma, und wenn Sie mutig sind, den Satz. Eine Lösung finden Sie im Skript oder bei den Meistern selbst:

🕮 P. Jordan, J.v. Neumann: *On inner products in linear metric spaces.* Annals of Mathematics 36 (1935) 719–723

Vektorräume mit Skalarprodukt: ℓ^2 C117

Beispiel / Übung C1D: der Hilbert–Raum ℓ^2

Für jede Menge Ω ist der **Funktionenraum** $\mathbb{K}^\Omega = \{f : \Omega \to \mathbb{K}\}$ über $\mathbb{K}$ ein Vektorraum mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation.

(1) Der **Träger** von f ist $\operatorname{supp}(f) := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$. Die Teilmenge

$$\mathbb{K}^{(\Omega)} := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \operatorname{supp}(f) \text{ endlich } \}$$

ist ein Untervektorraum in $\mathbb{K}^\Omega$. Hierauf haben wir das **Skalarprodukt**

$$\langle\text{-}|\text{-}\rangle : \mathbb{K}^{(\Omega)} \times \mathbb{K}^{(\Omega)} \to \mathbb{K} : (f,g) \mapsto \langle f \,|\, g\rangle := \textstyle\sum_{x\in\Omega} \overline{f(x)}\, g(x).$$

Die kanonische Basis $(e_a)_{a\in\Omega}$ von $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ ist orthonormal bzgl. $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$.

(2) Vervollständigt erhalten wir aus $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ den **Hilbert–Raum**

$$\ell^2(\Omega,\mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \textstyle\sum_{x\in\Omega} |f(x)|^2 < \infty \}.$$

Es gilt $\mathbb{K}^{(\Omega)} \le \ell^2 \le \mathbb{K}^\Omega$, und das obige Skalarprodukt setzt sich auf ℓ^2 fort.

Vektorräume mit Skalarprodukt: L^2 C118 Erläuterung

Beispiel / Übung C1E: der Hilbert–Raum L^2

(1) Sei $a < b$ in $\mathbb{R}$. Wir betrachten den Vektorraum $\mathscr{C} = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Hierauf haben wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} \overline{f(x)}\, g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad \tau = b-a.$$

(2) Die Funktionen $e_k : [a,b] \to \mathbb{C} : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x}$ mit $\omega = 2\pi/\tau$ und $k \in \mathbb{Z}$ sind orthonormal und eine Basis der **trigonometrischen Polynome**:

$$T = T([a,b],\mathbb{C}) := \left\{ f = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ c_{-n}, \dots, c_n \in \mathbb{C} \right\}$$

(3) Reell betrachten wir $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Beide Basen lassen sich ineinander umrechnen dank der Euler–Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x} = \cos(k\omega x) + \mathrm{i}\sin(k\omega x)$.

☺ Die komplexe Formulierung ist einfacher und schöner!

Vektorräume mit Skalarprodukt: L^2 C119 Erläuterung

Beispiel / Übung C1E: der Hilbert–Raum L^2

(4) Vervollständigt erhalten wir aus $T < \mathscr{C}$ den Raum

$$\mathscr{L}^2([a,b],\mathbb{K}) := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{K} \text{ messbar} \;\middle|\; \int_{x=a}^{b} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Hierbei gilt $T < \mathscr{C} < \mathscr{L}^2 < \mathbb{K}^{[a,b]}$, und das obige Skalarprodukt setzt sich auf $\mathscr{L}^2$ fort, allerdings ist es hier nur noch semidefinit:

Aus $\int |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$ folgt $f(x) = 0$ nicht unbedingt für alle x, sondern nur für fast alle $x \in [a,b]$. Das heißt, es existiert eine Teilmenge $N \subseteq [a,b]$ vom Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_1(N) = 0$, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus N$.

Diese Nullfunktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathscr{N} := \{ f : [a,b] \to \mathbb{K} \mid f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in [a,b] \}.$$

☺ Nullfunktionen wollen und können und werden wir vernachlässigen. Sie liefern bei der Integration keinen Beitrag, sind somit masselos.

Vektorräume mit Skalarprodukt: L^2 C120 Erläuterung

Beispiel / Übung C1E: der Hilbert–Raum L^2

(5) Der relevante Vektorraum ist demnach der Quotientenvektorraum

$$L^2([a,b],\mathbb{K}) := \mathscr{L}^2([a,b],\mathbb{K})/\mathscr{N}.$$

Hierauf ist das obige Skalarprodukt $(f,g) \mapsto \langle f \,|\, g\rangle$ wohldefiniert und nun auch tatsächlich positiv-definit. Zudem ist $L^2([a,b],\mathbb{K})$ vollständig, wir erhalten also schließlich einen Hilbert–Raum.

(6) Die Räume ℓ^2 und L^2 sehen verschieden aus, sind aber isometrisch: Es gilt die bemerkenswerte Fourier–Isometrie $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \cong L^2([a,b],\mathbb{C})$!

$$\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})} \cong T([a,b],\mathbb{C}) \;:e_k \leftrightarrow e_k$$
$$\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \cong L^2([a,b],\mathbb{C}) : e_k \leftrightarrow e_k$$

☺ Das ist die abstrakte Grundlage der L^2–Theorie für Fourier–Reihen.

☺ Entsprechendes gilt für die Räume ℓ^p und L^q mit $p, q \in [1,\infty]$.

Vektorräume mit Norm: ℓ^p C121

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum ℓ^p

(1) Sei Ω eine Menge. Auf dem Funktionenraum $\mathbb{K}^\Omega = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \}$ definieren wir die **Supremumsnorm**, auch **ℓ^∞–Norm** genannt, durch

$$\|f\|_\infty := |f|_\Omega = \sup\{ |f(x)| \mid x \in \Omega \}.$$

Die beschränkten Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\ell^\infty(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \|f\|_\infty < \infty \}.$$

(2) Entsprechend definieren wir die **ℓ^p–Norm** für $1 \le p < \infty$ durch

$$\|f\|_p := \left(\sum_{x\in\Omega} |f(x)|^p\right)^{1/p}.$$

Die p–summierbaren Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\ell^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \|f\|_p < \infty \}.$$

Hierauf ist $\|\text{-}\|_p$ tatsächlich eine Norm dank **Minkowski–Ungleichung**.
Besonders einfach und prominent sind die drei Spezialfälle $p = 1, 2, \infty$.

Vektorräume mit Norm: ℓ^p C122 Erläuterung

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum ℓ^p

(3) Der Raum $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ ist vollständig, also ein Banach–Raum.

(4) Für je zwei konjugierte Exponenten $1 \le p, q \le \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir das **Produkt** $\cdot : \ell^p \times \ell^q \to \ell^1$ und daraus die **Paarung**

$$\langle \text{-} | \text{-} \rangle : \ell^p \times \ell^q \to \mathbb{K} : \langle f \,|\, g \rangle = \textstyle\sum_{x\in\Omega} \overline{f(x)}\, g(x).$$

Das Produkt $\bar f g$ ist absolut summierbar dank der **Hölder–Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{\ell^1} \le \|f\|_{\ell^p} \cdot \|g\|_{\ell^q}$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung, und die Paarung ist das oben diskutierte Skalarprodukt auf ℓ^2.
Für alle $1 < p < \infty$ ist dies eine duale Paarung, das heißt $(\ell^p)' \cong \ell^q$.

(5) Für $\sharp\Omega \ge 2$ und $p \ne 2$ erfüllt $\|\text{-}\|_{\ell^p}$ nicht die Parallelogrammgleichung, denn $\|e_a + e_b\|_{\ell^p}^2 + \|e_a - e_b\|_{\ell^p}^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} \;\ne\; 2\|e_a\|_{\ell^p}^2 + 2\|e_b\|_{\ell^p}^2 = 2 + 2.$

Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski C123 Erläuterung

Satz C1o: die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski

(0) Für $s, t \ge 0$ mit $s + t = 1$ und $a, b > 0$ gilt die **Young–Ungleichung**:

$$a^s \cdot b^t \le sa + tb$$

(1) Für $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ folgt die **Hölder–Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

(2) Für $p \in [1, \infty]$ folgt hieraus die **Minkowski–Ungleichung**:

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis: (0) Wir nutzen $(\exp, \ln) : (\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Die Funktion $\exp$ ist streng wachsend und konvex, also ist $\ln$ streng wachsend und konkav.

$$\ln(a^s \cdot b^t) = \ln(a^s) + \ln(b^t) = s \ln(a) + t \ln(b) \le \ln(sa + tb)$$

Anwendung von $\exp$ ergibt die behauptete Ungleichung $a^s \cdot b^t \le sa + tb$.

Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski C124 Erläuterung

(1) Für die Randfälle $p = 1$ und $q = \infty$ bzw. $p = \infty$ und $q = 1$ prüft man die Hölder–Ungleichung direkt nach. Sie ist zudem erfüllt, wenn f oder g eine Nullfunktion ist. Wir können also $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ annehmen. Die Ungleichung ist homogen in f und g, nach Division durch die Norm können wir also $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ annehmen. In jedem Punkt $x \in \Omega$ gilt:

$$|f(x) \cdot g(x)| = \left(|f(x)|^p\right)^{1/p} \cdot \left(|g(x)|^q\right)^{1/q} \le \tfrac{1}{p}|f(x)|^p + \tfrac{1}{q}|g(x)|^q$$

Durch Summation / Integration über $x \in \Omega$ wird hieraus:

$$\textstyle\sum_{x\in\Omega} |f(x) \cdot g(x)|\, \mathrm{d}x \le \frac{1}{p} \sum_{x\in\Omega} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{q} \sum_{x\in\Omega} |g(x)|^q \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(2) Für $p \in \{1, \infty\}$ prüft man die Minkowski–Ungleichung direkt nach. Sei also $1 < p, q < \infty$ und zudem $\|f + g\|_p > 0$. Dank Hölder (1) gilt:

$$\begin{aligned} \left\| |f+g|^p \right\|_1 &= \left\| |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \right\|_1 \le \left\| |f| \cdot |f+g|^{p-1} \right\|_1 + \left\| |g| \cdot |f+g|^{p-1} \right\|_1 \\ &\le \|f\|_p \cdot \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \cdot \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q = [\|f\|_p + \|g\|_p] \left\| |f+g|^{(p-1)q} \right\|_1^{1/q} \end{aligned}$$

Aus $1/p + 1/q = 1$ folgt $(p-1)q = p$, der letzte Faktor ist also $\left\| |f+g|^p \right\|_1^{1/q}$.
Nach Division erhalten wir die ersehnte Minkowski–Ungleichung. QED

Vektorräume mit Norm: L^p C125 Erläuterung

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum L^p

(1) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, etwa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit Lebesgue–Maß μ oder Ω diskret mit Zählmaß $\mu(A) = \sharp A$. Für $1 \le p < \infty$ definieren wir die **L^p–Halbnorm** und jede messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ durch

$$\|f\|_p := \left(\textstyle\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Die p–integrierbaren Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \|f\|_p < \infty \}.$$

Der relevante Vektorraum ist der Quotientenvektorraum

$$L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) / \mathscr{N}(\Omega, \mathscr{A}, \mu).$$

Hierauf ist $\|\text{-}\|_p$ tatsächlich eine Norm dank **Minkowski–Ungleichung**.

⚠ Wir unterscheiden Funktionen f und Äquivalenzklassen $\bar f = f + \mathscr{N}$.
Eine solche „L^p–Funktion“ $\bar f \in L^p$ hat keine punktweisen Werte „$\bar f(x)$“.

Vektorräume mit Norm: L^p C126 Erläuterung

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum L^p

(2) Die **L^∞–Halbnorm** definieren wir durch das **essentielle Supremum**:

$$\begin{aligned} |f|_\Omega &= \sup|f(x)| &&:= \inf\{ a \in \mathbb{R} \mid \{ x \mid |f(x)| > a \} = \emptyset \}, \\ \|f\|_\infty &= \operatorname{ess\,sup}|f(x)| &&:= \inf\{ a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{ x \mid |f(x)| > a \}) = 0 \}. \end{aligned}$$

Die essentiell beschränkten Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \|f\|_\infty < \infty \}.$$

Der relevante Vektorraum ist der Quotientenvektorraum

$$L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) / \mathscr{N}(\Omega, \mathscr{A}, \mu).$$

Hierauf ist $\|\text{-}\|_\infty$ tatsächlich eine Norm, genannt die **L^∞–Norm**.

Für das Zählmaß gilt $L^p(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \sharp) = \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \sharp) = \ell^p(\Omega)$.
Für $1 < p < q < \infty$ gilt $\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq \ell^\infty$, im Allgemeinen strikt.
Für $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ gilt $L^1 \supset L^p \supset L^q \supset L^\infty$, im Allgemeinen strikt.

Vektorräume mit Norm: L^p C127 Erläuterung

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum L^p

(3) Der Raum $L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ist vollständig, also ein Banach–Raum.

(4) Für je zwei konjugierte Exponenten $1 \le p, q \le \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir das **Produkt** $\cdot : L^p \times L^q \to L^1$ und daraus die **Paarung**

$$\langle \text{-} | \text{-} \rangle : L^p \times L^q \to \mathbb{K} : \langle f \,|\, g \rangle := \textstyle\int_{x\in\Omega} \overline{f(x)}\, g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Das Produkt $\bar f g$ ist absolut integrierbar dank der **Hölder–Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**, und die Paarung ist das oben diskutierte Skalarprodukt auf L^2.
Für alle $1 < p < \infty$ ist dies eine **duale Paarung**, das heißt $(L^p)' \cong L^q$.

☺ Die L^p–Räume sind zentral für Analysis, Numerik und Stochastik: Erwartungswert, Co/Varianz, höhere Momente, Grenzwertsätze, …

Vektorräume mit Norm: L^p C128 Erläuterung

Die L^p–Räume spielen eine zentrale Rolle in der **Analysis**, insb. der Maß- und Integrationstheorie. Der Buchstabe L erinnert an Henri Lebesgue (1875–1941) und seinen grundlegenden Integralbegriff.

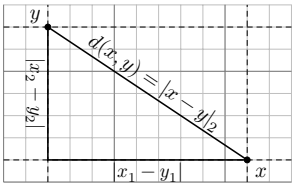
Die L^p–Norm sind ebenso wichtig in der **Numerik** und **Optimierung**: sie wertet Abweichungen / bestraft Fehler mit dem Exponenten p.
Besonders prominent sind auch hier die Fälle $p = 1, 2, \infty$:
L^1-, quadratische, gleichmäßige Approximation.

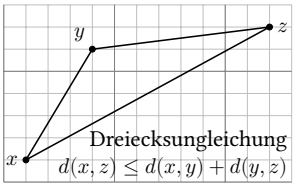
Die L^p–Räume finden sich auch ganz natürlich in der **Stochastik**:
Dort ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also $\mu(\Omega) = 1$,
und messbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ modellieren Zufallsvariablen.
Das Integral $m_1 = \int_{x\in\Omega} f(x) \,\mathrm{d}x$ ist der Erwartungswert, dazu ist offensichtlich absolute Integrierbarkeit $f \in \mathscr{L}^1$ die Minimalforderung.

Quadratische Integrierbarkeit $f \in \mathscr{L}^2$ sichert die Existenz der Varianz $m_2 = \int_{x\in\Omega} |f(x) - m_1|^2 \,\mathrm{d}x$, das Skalarprodukt misst die Covarianz.
Entsprechend nutzt man die höheren Momente $m_p = \int_{x\in\Omega} |f(x) - m_1|^p \,\mathrm{d}x$, zum Beispiel im zentralen Grenzwertsatz mit expliziten Fehlerschranken.

Metrische Räume: die euklidische Metrik

C201





Satz C2A: die euklidische Metrik

Auf $X = \mathbb{R}^n$ definieren wir die **euklidische Metrik** $d : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \sqrt{\langle x-y \,|\, x-y\rangle} = |x-y|_2 = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \cdots + |x_n-y_n|^2}.$$

Diese Abbildung erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$:

M0: Positivität,	$d(x,y) \geq 0 = d(x,x)$
M1: Definitheit,	$d(x,y) > 0$ für $x \neq y$
M2: Symmetrie,	$d(x,y) = d(y,x)$
M3: Dreiecksungleichung,	$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Metrische Räume: die euklidische Metrik

C202
Erläuterung

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussagen für die euklidischen Metrik:

Lösung: Klar sind (M0–2), einzig die Dreiecksungleichung (M3) ist nicht trivial. Sie folgt aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung (C1B) dank der Dreiecksungleichung (N3): $|x-z|_2 = |x-y+y-z|_2 \leq |x-y|_2 + |y-z|_2$.

🙂 Dies formuliert anschauliche Eigenschaften des Abstands: (M0) Der Abstand von x nach x ist Null, der von x nach y ist Null oder positiv. (M1) Der Abstand zwischen $x \neq y$ ist positiv. Umgekehrt: Ist der Abstand von x nach y gleich Null, so ist dies nur für $x = y$ möglich. Anders gesagt: Aus $d(x,y) = 0$ folgt $x = y$. (M2) Der Abstand von x nach y ist gleich dem Abstand von y nach x. (M3) Die Dreiecksungleichung besagt, dass in einem Dreieck die Summe der Längen von zwei Seiten nicht kleiner sein kann als die Länge der dritten Seite, siehe Abbildung.

Anschaulich gesagt: Der Weg von x nach z wird nicht kürzer, wenn wir einen Umweg über y machen, sondern möglicherweise nur länger.

Metrische Räume: allgemeine Definition

C203

🙂 Wir erheben diese grundlegenden Eigenschaften nun zur Definition:

Definition C2B: Metrik

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0,\infty]$, die (M0–3) erfüllt. Das Paar (X,d) nennen wir einen **metrischen Raum** mit Trägermenge X und Metrik d. (Der Wert ∞ ist erlaubt und meist unproblematisch, siehe unten die gestutzte / gestauchte Metrik.)

Ausführlich fordern wir demnach für alle $x, y, z \in X$:

M0: Positivität,	$d(x,y) \geq 0 = d(x,x)$
M1: Definitheit,	$d(x,y) > 0$ für $x \neq y$
M2: Symmetrie,	$d(x,y) = d(y,x)$
M3: Dreiecksungleichung,	$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Für eine **Halbmetrik** d fordern wir nur (M0,2,3), nicht unbedingt (M1). Allgemeiner als eine Metrik darf eine Halbmetrik also durchaus zwei verschiedenen Punkten $x \neq y$ in X den Abstand $d(x,y) = 0$ beimessen.

Metrische Räume: allgemeine Definition

C204
Erläuterung

Gilt $d(x,y) < \infty$ für alle $x, y \in X$, so nennen wir d eine **endliche Metrik**. Das benötigen wir insbesondere für metrische Eigenschaften wie Dehnungsschranken, Lipschitz-Stetigkeit und Kontraktionen.

Topologisch gesehen ist es oft bequem, den Begriff der Metrik wie in C2B weiter zu fassen und den Wert $d(x,y) = \infty$ zunächst zuzulassen. Manche Autor:innen nennen dies eine **Pseudometrik** oder *erweiterte Metrik*. Hierdurch wird keines der folgenden (topologischen!) Argumente komplizierter, doch viele Konstruktionen einfacher und einheitlicher.

Für die nötigen Rechnungen in $[0,\infty]$ vereinbaren wir $0 \leq a \leq \infty$ sowie $a + \infty = \infty + a = \infty$ für alle $a \in [0,\infty]$; dies entspricht den üblichen Konvention der erweiterten Zahlengeraden $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Durch Weglassen der Forderung (M1) schwächen wir den Begriff der Metrik zur Halbmetrik ab. Halbmetriken sind weniger wirkungsvoll, kommen aber in manchen Anwendungen natürlich vor und sind daher ein sinnvoller Hilfsbegriff. Auch wenn man ihn schließlich vermeiden will, so ist es meist bequem ihn zunächst zuzulassen.

Euklidische und diskrete Metrik

C205

Skalarprodukt $\implies$ Norm $\implies$ Metrik $\implies$ Topologie

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Jedes Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ auf V definiert durch $|u| = \sqrt{\langle u \,|\, u\rangle}$ eine zugehörige Norm auf V (Satz C1B).
Jede Halb/Norm $|\text{-}| : V \to [0,\infty]$ definiert eine zugehörige Halb/Metrik $d : V \times V \to [0,\infty] : (x,y) \mapsto |x-y|$, denn aus (N0–3) folgt sofort (M0–3): $d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$.
Prominente Beispiele sind $\mathbb{K}^n$ sowie $\ell^p(\Omega)$ und $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für $p \in [1,\infty]$.

Beispiel / Übung C2C: die diskrete Metrik

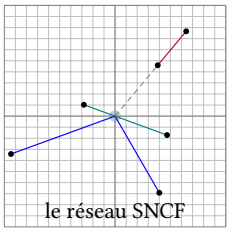
Auf jeder Menge X lässt sich eine besonders einfache Metrik definieren, die nur die Werte 0 und 1 annimmt: Die **diskrete Metrik** auf X ist

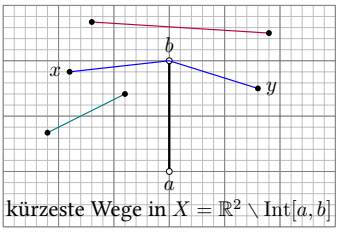
$$d : X \times X \to \{0,1\} : (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die für jede Metrik geforderten Eigenschaften (M0–3) prüft man leicht.

Eisenbahnmetrik und Wegmetrik

C206


le réseau SNCF



kürzeste Wege in $X = \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Int}[a,b]$

Beispiel / Übung C2D: die französische Eisenbahnmetrik

Die **französische Eisenbahnmetrik** ist

$$d = d_{\text{SNCF}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x,y) \mapsto \begin{cases} |x-y| & \text{falls } \mathbb{R}x = \mathbb{R}y, \\ |x| + |y| & \text{falls } \mathbb{R}x \neq \mathbb{R}y. \end{cases}$$

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein euklidischer Teilraum, allgemein ein metrischer Raum (X,d). Wir definieren die **Wegmetrik** $\bar{d} : X \times X \to [0,\infty]$ für je zwei Punkte $x, y \in X$ als die infimale Länge aller Wege von x nach y.

Neue Räume aus alten: Teil und Summe

C207

Beispiel / Übung C2E: Teilraum

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Die Einschränkung $d_A := d|_{A\times A} : A \times A \to [0,\infty]$ ist eine Metrik auf A. Wir nennen (A, d_A) einen **Teilraum** von (X,d) mit **Teilraummetrik** d_A.

Soweit nicht anders vereinbart, statten wir jede Teilmenge $A \subseteq X$ mit dieser Metrik aus und machen sie so zu einem Teilraum (A, d_A). Insbesondere erbt somit jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ die euklidische Metrik.

Beispiel / Übung C2F: Summenraum

Sei $(X_i, d_i)_{i\in I}$ eine Familie metrischer Räume (X_i, d_i) mit $i \in I$. Auf ihrer disjunkten Vereinigung $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ definieren wir die **Summenmetrik**

$$d : X \times X \to [0,\infty] : d(x,y) = \begin{cases} d_i(x,y) & \text{falls } x, y \in X_i, \\ \infty & \text{falls } x \in X_i, y \in X_j, i \neq j. \end{cases}$$

Wir nennen $(X,d) =: \bigsqcup_{i\in I}(X_i, d_i)$ den **Summenraum** zu $(X_i, d_i)_{i\in I}$.

Neue Räume aus alten: Produkt und Potenz

C208

Beispiel / Übung C2G: Produktraum

Sei $(X_i, d_i)_{i\in I}$ eine Familie metrischer Räume (X_i, d_i) mit $i \in I$.
Auf dem Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ definieren wir die **Supremumsmetrik**

$$d : X \times X \to [0,\infty] : d(x,y) = \sup\{\, d_i(x_i, y_i) \mid i \in I \,\}.$$

Wir nennen $(X,d) =: \prod_{i\in I}(X_i, d_i)$ den **Produktraum** zu $(X_i, d_i)_{i\in I}$.

Allgemein haben wir auf $X = \prod_{i\in I} X_i$ die **ℓ^p–Metrik** für $1 \leq p \leq \infty$.
Ist I endlich und sind alle Metriken d_i endlich, so ist auch d endlich.
Allgemein haben wir auf Y^X ebenso die ℓ^p–Metrik für $1 \leq p \leq \infty$:

Beispiel / Übung C2H: Abbildungsraum

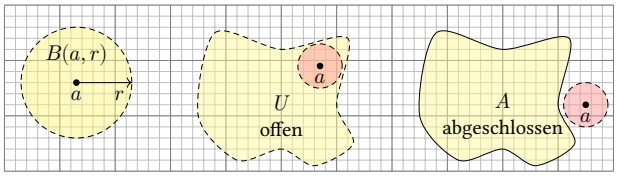
Sei X eine Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Auf der Menge $Y^X = \operatorname{Abb}(X,Y) = \{\, f : X \to Y \}$ definieren wir die **Supremumsmetrik**

$$d(f,g) = |d_Y(f,g)|_X = \sup\{\, d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X \,\}.$$

Wir nennen $(Y^X, d) =: (Y, d_Y)^X$ den **Abbildungsraum**.

Offene und abgeschlossene Mengen

C209



Definition C2L: metrische Topologie

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zum Punkt $a \in X$ und Radius $r \in [0,\infty]$ definieren wir den **offenen** / **abgeschlossenen Ball** / die **Sphäre** durch

$$B_{(X,d)}(a,r) := \{x \in X \mid d(a,x) < r\},$$
$$\bar{B}_{(X,d)}(a,r) := \{x \in X \mid d(a,x) \le r\},$$
$$S_{(X,d)}(a,r) := \{x \in X \mid d(a,x) = r\}.$$

Anschaulich im $\mathbb{R}^n$, wie oben skizziert. Die Sphäre $S(a,r)$ gehört zum abgeschlossenen Ball $\bar{B}(a,r)$, nicht aber zum offenen Ball $B(a,r)$.

Offene und abgeschlossene Mengen

C210

Definition C2L: metrische Topologie

Wir nennen $U \subseteq X$ **Umgebung** von a, falls $B(a,\varepsilon) \subseteq U$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X : [\, d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U \,]$$

Das System aller Umgebungen von a in (X,d) bezeichnen wir mit

$$\mathcal{U}_a(X,d) := \{U \subseteq X \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : B(a,\varepsilon) \subseteq U\}.$$

Eine Menge $U \subseteq X$ ist **offen**, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist:

$$\forall a \in U \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : B(a,\varepsilon) \subseteq U$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall a \in U \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X : [\, d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U \,]$$

Das System aller offenen Mengen im Raum (X,d) ist die **Topologie**:

$$\mathcal{T}(X,d) := \{U \subseteq X \mid U \text{ offen in } (X,d)\}$$
$$= \{U \subseteq X \mid \forall a \in U \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : B(a,\varepsilon) \subseteq U\}$$

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Metrische Topologie: erste Eigenschaften

C211

Proposition C2M: Eigenschaften der metrischen Topologie

Sei (X,d) ein metrischer Raum (oder allgemeiner d eine Halbmetrik).
Jeder offene Ball $B(a,r)$ ist offen in der Topologie von (X,d),
jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}(a,r)$ ist abgeschlossen in (X,d).
Die offenen Mengen in (X,d) erfreuen sich folgender Eigenschaften:

O1: Die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind offen:

$$\emptyset, X \in \mathcal{T}$$

O2: Sind $U_1, \dots, U_n$ offen, dann auch $U_1 \cap \dots \cap U_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} : U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$$

O3: Sind alle U_i offen für $i \in I$, dann auch $\bigcup_{i\in I} U_i$:

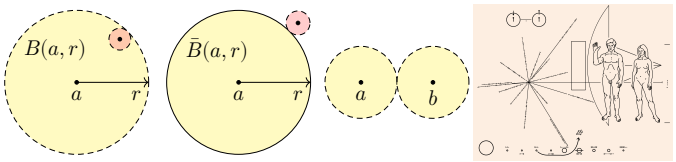
$$\forall (I \to \mathcal{T} : i \mapsto U_i) : \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$$

Die abgeschlossenen Mengen sind komplementär zu den offenen, somit stabil unter A2: endlichen Vereinigungen und A3: beliebigen Schnitten.

Metrische Topologie: erste Eigenschaften

C212

Hier die graphische Beweisidee für die ersten beiden Behauptungen:
Jeder offene Ball ist offen, jeder abgeschlossene Ball ist abgeschlossen.
Steht die Hausdorff–Eigenschaft sogar auf der Pioneer-Plakette?



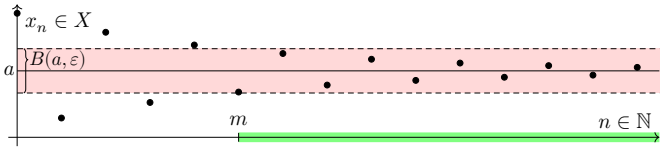
Proposition C2O: die Hausdorff–Eigenschaft

In jedem metrischen Raum (X,d) gilt die Hausdorff–Eigenschaft (T_2):
Zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X existieren disjunkte offene Umgebungen.

Beweis: Es gilt $r := d(a,b) > 0$ dank (M1). Die Bälle $U = B(a,r/2) \ni a$ und $V = B(b,r/2) \ni b$ sind offen (C2M) und disjunkt: Aus $x \in U \cap V$ folgt $r = d(a,b) \le d(a,x) + d(x,b) < r/2 + r/2 = r$, Widerspruch! QED

Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum

C301



Definition C3A: Konvergenz einer Folge

Gegeben seien eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein Punkt a in einem metrischen Raum (X,d). Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen a, falls $d(x_n,a) \to 0$:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,d) \quad :\Leftrightarrow \quad d(x_n,a) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} : d(x_n,a) < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} : x_n \in B(a,\varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{Jede Umgebung } U \in \mathcal{U}_a \text{ enthält schließlich alle Folgenglieder } x_n.$$

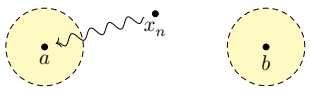
☺ Die letzte Formulierung verwendet die Metrik nicht explizit, sondern nur offene Mengen: Konvergenz ist somit eine topologische Eigenschaft!

Kann eine Folge mehrere Grenzwerte haben?

C302

Konvergenz in (X,d) ist eine **zweistellige Relation** zwischen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Punkten a. Wir schreiben kurz $x_n \to a$ oder $x_n \xrightarrow{d} a$.
Zur Betonung der Indizes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir „$x_n \to a$ für $n \to \infty$“.

⚠ Die bequeme Schreibweise $\lim x_n = a$ ist problematisch, solange die Konvergenz nicht geklärt ist: eventuell existiert kein Grenzwert „$\lim x_n$“!
Kann eine Folge in (X,d) womöglich mehrere Grenzwerte haben?



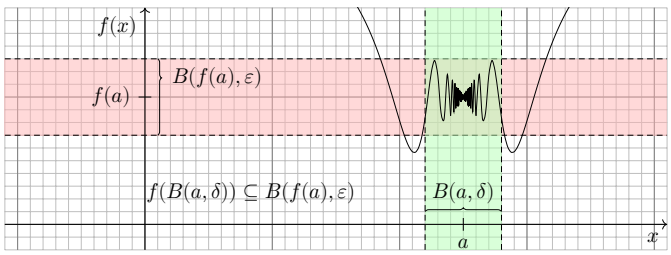
Satz C3B: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) hat höchstens einen Grenzwert: Aus $x_n \to a$ und $x_n \to b$ folgt $a = b$.

Beweis: Sei $x_n \to a$ und $a \neq b$. Dank Hausdorff–Eigenschaft existieren $U \in \mathcal{U}_a$ und $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \to a$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \ge m$. Folglich gilt $x_n \notin V$, somit $x_n \not\to b$. QED

Stetigkeit von Abbildungen

C303



☺ Für eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umschreibt man Stetigkeit gemeinhin so, dass der Graph von f „keine Sprünge macht“, oder sich „ohne abzusetzen in einem Zug zeichnen lässt“.

☹ Das mag der Intuition nützen, ist aber keine tragfähige Definition! Anschauung kann die Definition motivieren, sie aber nicht ersetzen. Probieren Sie es: Ist die Funktion $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2)$ stetig?

☺ Wir brauchen nicht nur Intuition, sondern tragfähige Definitionen!

Stetigkeit von Abbildungen

C304

Definition C3E: Stetigkeit von Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig im Punkt** $a \in X$, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a),\varepsilon)$ gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \; \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon$$

Gilt dies in jedem Punkt $a \in X$, so nennen wir $f : X \to Y$ **stetig** (auf X):

$$\forall a \in X \; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \; \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon$$

Strenger nennen wir $f : X \to Y$ **gleichmäßig stetig** (auf X), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \; \forall a \in X \; \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon$$

Die Menge der stetigen Abbildungen bezeichnen wir mit

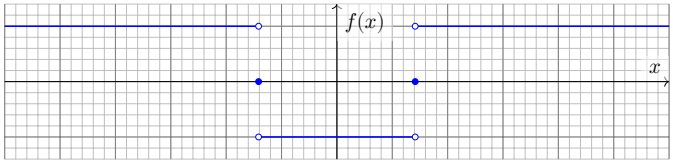
$$\mathcal{C}(X,d_X;Y,d_Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig}\} \quad \text{bzw.}$$
$$\mathcal{C}_u(X,d_X;Y,d_Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ gleichmäßig stetig}\}.$$

☺ Diese Begriffe und zahlreiche Beispiele kennen Sie aus der Analysis!

Mahnende Beispiele für un/stetige Funktionen

Aufgabe: Untersuchen Sie punktweise und gleichmäßige Stetigkeit von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2),$$
$$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2).$$

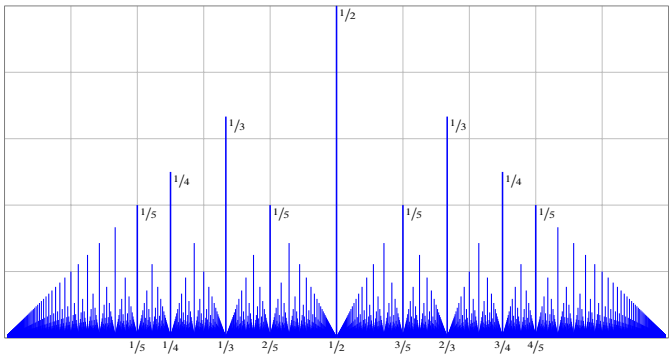


Lösung: (1) Die Funktion f ist stetig bis auf die Sprungstellen $a = \pm\sqrt{2}$: Zu allen $\delta > 0$ existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $|a - x| < \delta$ und $|g(a) - g(x)| \geq 1$.
Da f nicht stetig ist, kann f auch nicht gleichmäßig stetig sein.

(2) Die Funktion g hingegen hat keine solchen Sprungstellen, sie ist sogar lokal konstant, somit stetig, aber nicht gleichmäßig: Zu $0 < \varepsilon \leq 2$ und $\delta > 0$ existieren $a, x \in \mathbb{Q}$ mit $|a - x| < \delta$ und $|g(a) - g(x)| \geq \varepsilon$.

Mahnende Beispiele für un/stetige Funktionen

Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die (1) überall unstetig ist? (2) nur in $\mathbb{Q}$?
Lösung: (1) Ja, die **Dirichlet–Funktion** $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nirgends stetig.
(2) Ja, die **kleine Dirichlet–Funktion** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(p/q) = 1/q$ für jeden gekürzten Bruch $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Stetigkeit ist eine topologische Eigenschaft.

Satz C3G: Charakterisierungen der Stetigkeit

Für jede Abbildung $f : X \to Y$ metrischer Räume sind äquivalent:
(1) f ist folgenstetig: Aus $x_n \to a$ in X folgt $f(x_n) \to f(a)$ in Y.
(2) f ist stetig auf X (im Sinne der obigen ε–δ–Definition C3E).
(3) Für jede offene Menge V in Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X:

$$\forall V \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$$

Lokal um jeden Punkt $a \in X$ sind äquivalent:
(4) f ist folgenstetig in a: Aus $x_n \to a$ in X folgt $f(x_n) \to f(a)$ in Y.
(5) f ist stetig im Punkt a (im Sinne der obigen ε–δ–Definition C3E).
(6) Für jede Umgebung V von $f(a)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a:

$$\forall V \in \mathcal{U}_{f(a)} : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_a$$

Die Formulierungen (3,6) verwenden die Metrik nicht explizit, sondern nur offene Mengen: Stetigkeit ist somit eine topologische Eigenschaft!

Stetigkeit ist eine topologische Eigenschaft.

Konvergenz C3A und Stetigkeit C3G sind topologische Eigenschaften!

In der Analysis geht es über die **qualitativen** Fragen der Konvergenz und Stetigkeit hinaus auch **quantitativ** darum, wie schnell eine Folge konvergiert oder wie stark $f(x)$ mit x variiert. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ oder in jedem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum ist das wichtigste Instrument die Differenzierbarkeit zur linearen Approximation, oder noch höhere Ableitungen zur polynomialen Approximation (Taylor–Entwicklung).

Zur feineren Untersuchung dienen ebenso die Lipschitz–Stetigkeit (§C2f) oder die Hölder–Stetigkeit (§C2g). Speziell in der Numerik wird eine geeignete Metrik explizit für praktische Fehlerschranken genutzt.
Dies sind daher keine topologischen, sondern metrische Eigenschaften. Hierbei kommt es wirklich auf die Abstände an, auf die Streckung bzw. Stauchung, auf den Fehler, also die Distanz zum gesuchten Grenzwert.

Qualitativ-topologische Methoden ersetzen nicht, sondern ergänzen die quantitativ-metrischen, je nach Anwendung und Sichtweise.

Topologisch äquivalente Metriken

In vielen Fällen kommt es uns nicht auf die Metrik selbst an, sondern nur auf Konvergenz und Stetigkeit, also insbesondere auf offene Mengen!

Definition C3I: topologischer Vergleich von Metriken

Zwei Metriken $d, e : X \times X \to [0, \infty]$ heißen **(topologisch) äquivalent**, wenn sie dieselben offenen Mengen definieren, kurz $\mathcal{T}(X, d) = \mathcal{T}(X, e)$.
Gilt $\mathcal{T}(X, d) \supseteq \mathcal{T}(X, e)$, so nennen wir d **feiner** als e, oder e **gröber** als d.
Der Kürze halber bedeutet „feiner“ hierbei „mindestens so fein wie“.
Äquivalent, jeder ε–Ball bezüglich e enthält einen δ–Ball bezüglich d:

$$\forall a \in X \ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : B_{(X,d)}(a, \delta) \subseteq B_{(X,e)}(a, \varepsilon).$$

Äquivalenz bedeutet also, d ist feiner als e, und e ist feiner als d.
Wir nennen d **echt feiner** als e, falls $\mathcal{T}(X, d) \supsetneq \mathcal{T}(X, e)$ gilt.

Dieselben Begriffe verwenden wir ebenso für Normen: Zwei Normen sind topologisch äquivalent, wenn Sie dieselbe Topologie induzieren.

Topologisch äquivalente Metriken

Beispiel / Übung C3K: Vergleich von L^p–Normen

Als konkrete Illustration einige klassische Beispiele: Sei $1 \leq p < q \leq \infty$.

1. Auf $\mathbb{R}^n$ sind die ℓ^p–Norm und die ℓ^q–Norm äquivalent:
$$|x|_\infty \leq |x|_p \leq |x|_1 \leq n \cdot |x|_\infty$$
2. Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die ℓ^p–Norm echt feiner als die ℓ^q–Norm:
$$\|f\|_{\ell^q} \leq \|f\|_{\ell^p}$$
3. Auf $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ ist die L^q–Norm echt feiner als die L^p–Norm:
$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}$$
4. Auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind die L^p– und die L^q–Norm unvergleichbar, das heißt, keine ist feiner als die andere.

Topologisch äquivalente Metriken

Proposition C3J: topologischer Vergleich von Metriken

Für je zwei Metriken d, e auf X sind gleichbedeutend:

1. Die Metrik d ist feiner als die Metrik e (im Sinne der Definition C3I).
2. Jede Umgebung bezüglich e ist auch eine Umgebung bezüglich d.
3. Jede offene Menge bezüglich e ist auch offen bezüglich d.
4. Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, e) : x \mapsto x$ ist stetig.
5. Gilt $x_n \to a$ bezüglich d, dann gilt auch $x_n \to a$ bezüglich e.
6. Ist $f : X \to Y$ stetig bezüglich e, dann ist f stetig bezüglich d.
7. Ist $f : Y \to X$ stetig bezüglich d, dann ist f stetig bezüglich e.

Seien $|\text{-}|$ und $\|\text{-}\|$ Normen auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum V.

8. Genau dann ist $|\text{-}|$ feiner als $\|\text{-}\|$, falls $\|x\| \leq L\,|x|$ für alle $x \in V$ und eine geeignete Konstante $L \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.
9. Topologische Äquivalenz bedeutet $\ell\,|x| \leq \|x\| \leq L\,|x|$ für alle $x \in V$ und geeignete Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$.

Topologisch äquivalente Metriken

Skalierung von Metriken

Beispiel / Übung C3L: gestauchte & gestutzte Metrik

Ist $d : X \times X \to [0,\infty]$ eine Metrik, so auch die **gestauchte Metrik**

$$d' : X \times X \to [0,1] : (x,y) \mapsto \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Hieraus lässt sich die ursprüngliche Metrik d rekonstruieren gemäß

$$d : X \times X \to [0,\infty] : (x,y) \mapsto \frac{d'(x,y)}{1-d'(x,y)}.$$

Hierbei entspricht $d(x,y) = \infty$ dem Wert $d'(x,y) = 1$ und umgekehrt.
Entsprechend erhalten wir aus d die **gestutzte Metrik**

$$d^* : X \times X \to [0,1] : (x,y) \mapsto \min\{\, d(x,y), 1 \,\}.$$

Die drei Metriken d, d' und d^* sind topologisch äquivalent. Insbesondere können wir von d stets zu einer endlichen Metrik d' oder d^* übergehen.

Skalierung von Metriken

Beispiel / Übung C3L: gestauchte & gestutzte Metrik

Die hierbei verwendete Skalierung $f : [0,\infty] \to [0,\infty]$ mit $f(t) = t/(1 \pm t)$ bzw. $f(t) = \min\{t, 1\}$ erfreut sich folgender drei Eigenschaften:
(1) f ist positiv definit: Es gilt $f(0) = 0$ und $f(t) > 0$ für $t > 0$.
(2) f ist monoton wachsend: Für alle $s \le t$ in $[0,\infty]$ gilt $f(s) \le f(t)$.
(3) f ist subadditiv: Für alle $s, t \in [0,\infty]$ gilt $f(s+t) \le f(s) + f(t)$.
In diesem Fall ist mit d auch $d' = f \circ d$ eine Metrik und feiner als d.
Ist f zudem stetig in 0, dann sind d und d' topologisch äquivalent.

Beweis: Definition einsetzen und nachrechnen!
Eine konkrete Anwendung und ein Gegen/Beispiel:
Mit d ist auch d^α für $0 < \alpha \le 1$ eine Metrik und topologisch äquivalent.
Diese *Schneeflockenmetrik* C7I führt zu einer völlig anderen Geometrie.
Die Funktion $f = \mathbf{1}_{]0,\infty]} : [0,\infty] \to \{0,1\}$ erfüllt (1–3). Für jede Metrik d ist $d' = f \circ d$ die diskrete Metrik, und i.A. nicht topologisch äquivalent.

Skalierung von Metriken

Skalierung von Metriken

Abstand zwischen Mengen

Definition C3M: Abstand zwischen Punkten und Mengen

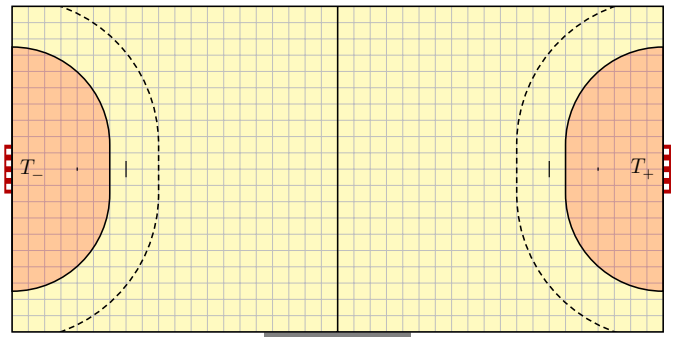
Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $a \in X$ und $A, B \subseteq X$ definieren wir

$$d(a,B) := \inf\{\, d(a,y) \mid y \in B \,\},$$
$$d(A,B) := \inf\{\, d(x,y) \mid x \in A,\ y \in B \,\},$$
$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{\, d(x,y) \mid x,y \in A \,\}.$$

Aufgabe: Zeichnen Sie ein Handballfeld gemäß Regel 1 der *International Handball Federation* (IHF, `www.ihf.info`), aber in der ℓ^p–Metrik:

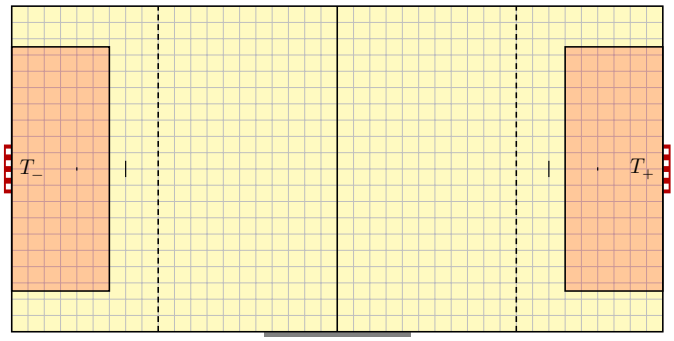
$X = [-20,20] \times [-10,10] \subseteq \mathbb{R}^2$	die Spielfläche
$M = \{0\} \times [-10,10]$	die Mittellinie
$T = \{-20,20\} \times [-1.5,1.5]$	die beiden Torlinien
$S = \{\, x \in X \mid d(x,T) = 6 \,\}$	Sechs-Meter-Linie („Kreis“)
$N = \{\, x \in X \mid d(x,T) = 9 \,\}$	Neun-Meter-Linie („Freiwurflinie“)

Handballfeld in der euklidischen Metrik, ℓ^2



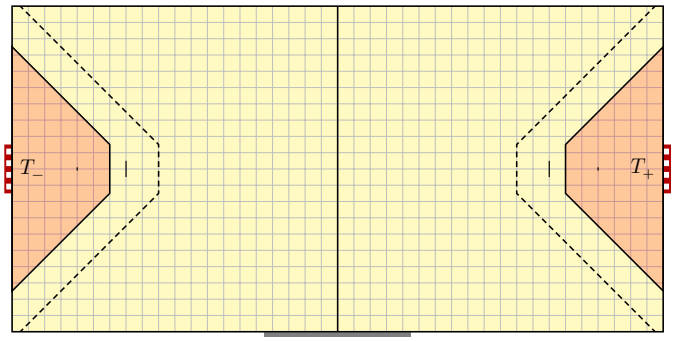
☺ Der sogenannte „Kreis“ ist gar keiner! Die Sechs-Meter-Linie besteht gemäß Regel 1:4 aus zwei Viertelkreisen und einem Geradenstück.

Handballfeld in der Maximumsmetrik, ℓ^∞



☺ In der Maximumsmetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Rechteck.
Fun fact: Im Fußball folgen Tor- und Strafraum dieser Konvention.

Handballfeld in der Taximetrik, ℓ^1



☺ In der Taximetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Trapez.
Das sieht ulkig aus und illustriert eindrücklich diese Metrik.

Abstand und Abschluss

Proposition C3N: Abstand und Abschluss

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A,B\subseteq X$ Teilmengen.
(1) Für $f:X\to[0,\infty]:x\mapsto d(x,A)$ gilt $|f(x)-f(y)|\leq d(x,y)$.
Das bedeutet f ist 1–lipschitz-stetig, und somit insbesondere stetig.

(2) Für $x\in A$ gilt $d(x,A)=0$. Genau dann ist A abgeschlossen, wenn auch die Umkehrung gilt: Für alle $x\in X$ mit $d(x,A)=0$ folgt $x\in A$.
Als direkte Folgerung erhalten wir folgende Trennungseigenschaft:

(3) Trennungseigenschaft $T_{5^1/_2}$: Zu $A,B\subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt existiert $f:X\to[0,1]$ stetig mit $f^{-1}(\{0\})=A$ und $f^{-1}(\{1\})=B$.
Für $A\neq\emptyset\neq B$ gelingt dies explizit durch die **Urysohn–Funktion**

$$f_{A,B}:X\to[0,1]:x\mapsto\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}.$$

Beweis: Definition einsetzen und nachrechnen!

Abstand und Abschluss

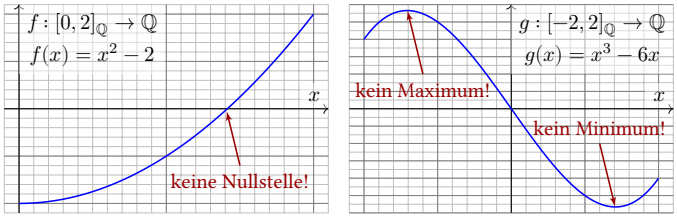
☺ Jeder metrische Raum (X,d) hat viele stetige Funktionen $f:X\to\mathbb{R}$. Besonders einfach und nützlich sind Abstandsfunktionen $f(x)=d(x,A)$.

☺ Mit stetigen Funktionen $f:X\to\mathbb{R}$ können wir alle Punkte $a\neq b$ in X trennen und sogar alle disjunkten abgeschlossenen Mengen A,B.

Die Konstruktion in Aussage (3) ist leicht und wunderbar explizit, denn wir gehen von einer vorhandenen Metrik d auf X aus.
Dies garantiert Reichhaltigkeit: Allein die Anwesenheit der Metrik d erlaubt die Konstruktion von maßgeschneiderten stetigen Funktionen.

Wir werden später umgekehrt versuchen, eine gegebene Topologie zu metrisieren (Metrisierungssatz E5R von Urysohn) dank geeigneter Trennungseigenschaften (E5A). Die Hausdorff–Eigenschaft (T_2, C2O) ist eine der schwächsten, die Existenz von Urysohn–Funktionen ($T_{5^1/_2}$) ist die stärkste dieser Trennungseigenschaften.

Zwischenwerte, Minimum und Maximum



Satz C3A: Zwischenwertsatz / Zusammenhang

Jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ hat die Zwischenwerteigenschaft:
Zu jedem $y\in\mathbb{R}$ mit $f(a)\leq y\leq f(b)$ existiert $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.

Satz C3B: Minimum und Maximum / Kompaktheit

Jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nimmt Infimum und Supremum an:
Es existieren $x_0,x_1\in[a,b]$ mit $f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_1)$ für alle $x\in[a,b]$.

Übung: Intervallschachtelung und Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Zwischenwerte, Minimum und Maximum

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ bilden das Fundament der Analysis.
Ihre entscheidende Eigenschaft ist die Supremums-Vollständigkeit.
Ohne diese Eigenschaft stehen wichtige Werkzeuge nicht zur Verfügung, etwa der Zwischenwertsatz oder das Satz von Minimum und Maximum.

Die obigen Beispiele zeigen dieses „Fehlverhalten“ drastisch:

- Eine stetige Funktion $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, sogar eine Polynomfunktion, kann das Vorzeichen wechseln, ohne eine Nullstelle zu haben!
- Eine stetige Funktion $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, sogar eine Polynomfunktion, kann von wachsend zu fallend übergehen, ohne ein Maximum zu haben!

Übung: Für stetige Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ kann dies nicht passieren! Beweisen Sie die beiden obigen Sätze durch Intervallschachtelung.
An welcher Stelle und wie nutzen Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$?

☺ Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist etwas Besonderes und sehr Wertvolles! Die Löchrigkeit von $\mathbb{Q}$ illustriert den Konstrast eindrücklich. Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ löst auf einen Schlag all diese Probleme.

Konvergente Folgen und Cauchy–Folgen

Erinnerung: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) **konvergiert** gegen einen Punkt $a\in X$, wenn der Abstand $d(x_n,a)$ schließlich beliebig klein wird.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\to a\text{ in }(X,d)\quad:\Leftrightarrow\quad d(x_n,a)\to 0\text{ für }n\to\infty$$
$$:\Leftrightarrow\quad\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}_{\geq m}:d(x_n,a)<\varepsilon$$

Konvergenz in (X,d) ist eine **zweistellige Relation** zwischen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Punkten a in X. Wir schreiben hierfür kurz $x_n\to a$.

Oft noch praktischer wäre ein Kriterium für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allein: Wir möchten Konvergenz nachweisen, ohne den Grenzwert zu kennen!

Definition C4A: Cauchy–Folge

Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Cauchy–Folge** in (X,d), wenn der Durchmesser $\delta_n:=\sup_{p,q\geq n}d(x_p,x_q)$ des Folgenendstücks beliebig klein wird:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ ist Cauchy in }(X,d)\quad:\Leftrightarrow\quad\delta_n\searrow 0$$
$$:\Leftrightarrow\quad\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\ \exists n\in\mathbb{N}\ \forall p,q\in\mathbb{N}_{\geq n}:d(x_p,x_q)\leq\varepsilon$$

Vollständige metrische Räume

⚠ Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge, aber nicht umgekehrt.

Lemma C4B: Konvergenz impliziert Cauchy.

Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\to a$ ist eine Cauchy–Folge.

Beweis: Sei $\varepsilon>0$. Dank Konvergenz $x_n\to a$ existiert $n\in\mathbb{N}$, sodass $d(x_p,a)<\varepsilon/2$ für alle $p\geq n$. Für alle $p,q\geq n$ folgt somit $d(x_p,x_q)\leq d(x_p,a)+d(a,x_q)<\varepsilon$. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge. QED

Definition C4C: vollständiger metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X,d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy–Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) konvergiert, also ein Punkt $a\in X$ existiert mit $x_n\to a$.

Beispiel: Im Raum $X=]0,1]$ mit euklidischer Metrik ist $x_n=2^{-n}$ eine Cauchy–Folge, aber nicht konvergent. (Im Raum $[0,1]$ gilt $x_n\to 0$.)

Beispiel: Im Raum $\mathbb{Q}$ mit euklidischer Metrik ist $x_n=\sum_{k=0}^n 1/k!$ eine Cauchy–Folge, hat aber in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert. (In $\mathbb{R}$ gilt $x_n\to\mathrm{e}$.)

Konvergente Folgen und Cauchy–Folgen

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** in (X,d), wenn ein Punkt $a\in X$ mit der Eigenschaft $x_n\to a$ existiert. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$(1)\quad\exists a\in X\ \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}_{\geq m}:d(x_n,a)<\varepsilon$$

Übung: Zur Cauchy–Bedingung für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) ist äquivalent:

$$(2)\quad\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\ \exists a\in X\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}_{\geq m}:d(x_n,a)<\varepsilon$$

Somit gilt die Abschwächung „(1) ⇒ (2)“ durch Quantorentausch!

Warum formulieren wir die Cauchy–Bedingung dennoch traditionell wie in Definition C4A? Ich denke, C4A ist die bessere Sichtweise:
Der Durchmesser des Folgenendstücks $(x_n)_{n\geq m}$ wird beliebig klein.
Die Einführung eines geeigneten „Mittelpunkts“ $a\in X$ ist zwar immer möglich, doch eher künstlich und lenkt daher vom Wesentlichen ab.
Die Präsentation mathematischer Ideen und Argumente ist immer auch eine Frage des Stils, der Didaktik und der Akzentsetzung.

Konvergente Folgen und Cauchy–Folgen

Vollständige metrische Räume

C405

Satz C4D: Vollständigkeit der reellen Zahlen

Der Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit euklidischer Metrik $d(x,y) = |x-y|$ ist vollständig. Ebenso sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{C}^m$ vollständig bezüglich jeder p–Metrik, $p \in [1,\infty]$.

Beweis: (1) Die definierende Eigenschaft des geordneten Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen ist die Supremums-Vollständigkeit (B2C).

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$. Sie ist insbesondere beschränkt, also liegen $a = \liminf x_n$ und $b = \limsup x_n$ in $\mathbb{R}$. Dabei gilt $a \le b$.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $|x_p - x_q| \le \varepsilon$ für alle $p, q \ge n$. Insbesondere gilt $x_n - \varepsilon \le x_p \le x_n + \varepsilon$ für alle $p \ge n$, also $x_n - \varepsilon \le a \le b \le x_n + \varepsilon$, somit $b - a \le 2\varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, folgt $a = b$, also $x_n \to a$.

(2) Erinnerung: Für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt $|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le m \cdot |x|_\infty$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}^m$. Für die k–te Koordinate ist dann $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$. Dank Vollständigkeit (1) existiert ein Punkt $a_k \in \mathbb{R}$ mit $x_{n,k} \to a_k$. Daraus folgt $x_n \to a$ in $\mathbb{R}^m$. QED

Vollständige metrische Räume

C406 Erläuterung

☺ Erst dank Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ greifen die Werkzeuge, die Sie aus der Analysis kennen und lieben: Grenzwerte, Ableitungen, Integrale, etc. Wichtige Funktionenräume der Analysis sind vollständig, insbesondere alle ℓ^p–Räume und L^p–Räume. Dies sind also Banach–Räume. (C1C)

Lemma C4E: abgeschlossene Teilräume

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Genau dann ist (A, d_A) vollständig, wenn A abgeschlossen in (X,d) ist.

Satz C4F: Produkträume

Ist $(X_i, d_i)_{i\in I}$ eine Familie vollständiger metrischer Räume, dann ist $(X,d) = \prod_{i\in I}(X_i, d)$ vollständig bezüglich der Supremumsmetrik C2G.

Satz C4G: stetige Abbildungen

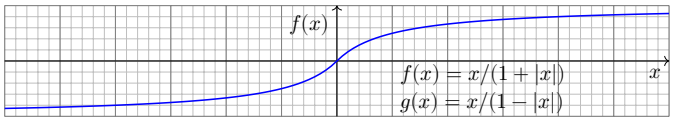
Der Teilraum $\mathscr{C}(X, d_X; Y, d_Y) \subseteq (Y, d_Y)^X$ ist abgeschlossen und somit ebenfalls vollständig bezüglich der Supremumsmetrik.

Ist Vollständigkeit eine topologische Eigenschaft?

C407

Aufgabe: (1) Ist Vollständigkeit eine topologische Eigenschaft?
(2) Bleiben Cauchy–Folgen unter Homöomorphismen erhalten?
(3) Bleibt Vollständigkeit erhalten unter äquivalenten Metriken?

Lösung: (1) Nein! Ein Gegenbeispiel ist $(f,g) : \mathbb{R} \cong]-1,+1[$ (A1B).
Mit der euklidischen Metrik ist $\mathbb{R}$ vollständig, $]-1,+1[$ jedoch nicht.



(2) Nein! Die Folge $y_n = n/(1+n) \nearrow 1$ in $]-1,+1[$ ist Cauchy bezüglich der euklidischen Metrik, nicht jedoch $x_n = g(y_n) = n \nearrow +\infty$ in $\mathbb{R}$.

(3) Nein! Mit der euklidischen Metrik $e(x,y) = |x-y|$ ist $\mathbb{R}$ vollständig, nicht jedoch mit der äquivalenten Metrik $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$.

Ist Vollständigkeit eine topologische Eigenschaft?

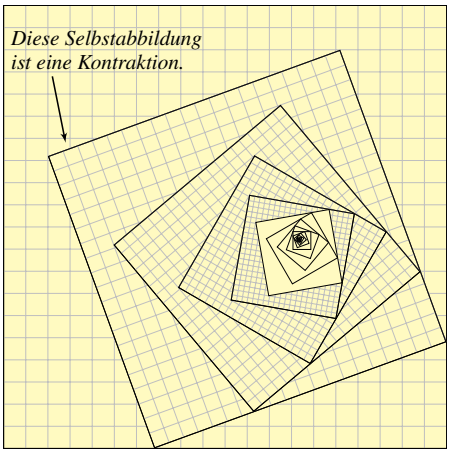
C408 Erläuterung

Allein mit der Topologie können wir Konvergenz (C3A) und Stetigkeit (C3G) formulieren. Dies sind daher topologische Eigenschaften.

Die Cauchy–Bedingung hingegen ist keine topologische Invariante, wie oben gezeigt, sondern eine genuin metrische Eigenschaft.

Illustration zu Banachs Fixpunktsatz

C409



Legen Sie im Hörsaal eine Karte des Campus auf den Tisch. Dann fällt genau ein Punkt der Karte exakt auf den geographischen Punkt, den er bezeichnet.

Nicht jede Kontraktion $f : (X,d) \to (X,d)$ hat einen Fixpunkt!

Ein Gegenbeispiel ist $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x \mapsto x/2$.

Wir benötigen zudem, dass der Raum (X,d) vollständig ist!

Banachs Fixpunktsatz ist ein universelles Werkzeug.

C410 Erläuterung

Aufgabe: (1) Illustrieren Sie Iterationen und Banachs Fixpunktsatz.
(2) Sie kennen bereits spektakuläre Anwendungen: Nennen Sie einige!
(3) Wiederholung: Formulieren und beweisen Sie Banachs Fixpunktsatz.

Lösung: (1) Bildhaftes Beispiel: Wenn Sie von Ihrer geographischen Umgebung X eine Landkarte im Maßstab $k = 1 : n$ (mit $n > 1$) vor sich auf den Tisch legen, dann definiert die Zuordnung jedes realen Punktes zu seinem Bildpunkt eine k–kontraktive Abbildung $f : X \to X$. Genau ein Punkt der Karte liegt auf dem geographischen Punkt, den er bezeichnet.

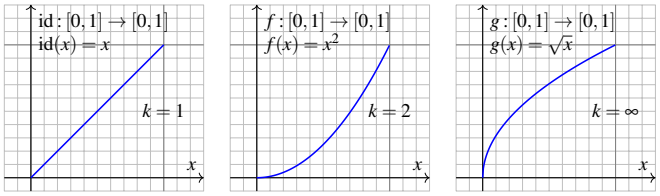
(2) Mit dem Iterationsverfahren können Sie viele Gleichungen numerisch lösen wie $x = \cos(x)$ für $x \in [0,1]$. Das **Newton–Verfahren** baut darauf auf und verbessert ganz wesentlich die Konvergenzgeschwindigkeit.

Weitere Anwendungen sind der **Satz von Picard–Lindelöf** zur Lösung von Differentialgleichungen $y' = f(x,y)$ und der **lokale Umkehrsatz** zur Konstruktion lokaler Diffeomorphismen $(f,g) : \mathbb{R}^n \supseteq U \cong V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Das ist schon spektakulär – und doch nur die ersten Anwendungen im Grundstudium, als Spitze des Eisbergs! Wir fügen noch weitere hinzu.

Dehnungsschranken und Kontraktionen

C411 Erläuterung



Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) Räume mit endlichen Metriken und $k \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Eine Abbildung $f : (X,d_Y) \to (Y,d_Y)$ heißt **k–lipschitz–stetig**, falls gilt:

$$d_Y(f(a), f(b)) \le k\, d_X(a,b) \qquad \text{für alle } a, b \in X$$

Im Falle $0 \le k < 1$ nennen wir f **kontraktiv** oder eine **k–Kontraktion**.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f(x) - f(y)| = |A(x-y)| \le \|A\| \cdot |x-y|$ bezüglich der Operatornorm.

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : X \to \mathbb{R}^m$ diff'bar mit $\|f'\| \le k$. Für alle $x, y \in X$ existiert $z \in [x,y]$, sodass $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$. Demnach gilt $|f(x) - f(y)| \le \|f'(z)\| \cdot |x-y| \le k|x-y|$.

Dehnungsschranken und Kontraktionen

C412 Erläuterung

Wir nennen eine solche Funktion f auch **dehnungsbeschränkt**.
Der **metrische Differenzenquotient** ist hier beschränkt gemäß

$$\frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a,b)} \le k \qquad \text{für alle } a \ne b \text{ in } X.$$

Für $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ definieren wir daher die **Lipschitz–Norm**

$$\|f\| = \|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f) := \sup\left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a,b)} \;\middle|\; a \ne b \text{ in } X \right\}.$$

Die folgende Formulierung vereinheitlicht Ausnahmen und Sonderfälle:

$$\|f\| := \inf\{\, k \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid \forall a, b \in X : d_Y(f(a), f(b)) \le k\, d_X(a,b) \,\}.$$

Dies entspricht der **Operatornorm** von linearen Abbildungen normierter Vektorräume. Genau dann gilt $\|f\| < \infty$, wenn f lipschitz–stetig ist.

Genau dann gilt $\|f\| = 0$, wenn f konstant ist. Speziell für die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ gilt $\|\mathrm{id}_X\| = 1$, im Sonderfall $X = \{x\}$ jedoch nur $\|f\| = 0$.

Für die Komposition von Abbildungen gilt $\|g \circ f\| \le \|g\| \cdot \|f\|$.

Banachs Fixpunktsatz

Satz C4q: Fixpunktsatz von Banach, 1922

Sei (X, d) ein metrischer Raum, nicht-leer und vollständig. Hierauf sei $f : X \to X$ eine k–Kontraktion: Wir haben eine Kontraktionskonstante $k \in [0, 1[$, und für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \le k\, d(x, y)$. Dann folgt:

(1) Zur Abbildung f existiert genau ein Fixpunkt $a \in X$, mit $f(a) = a$.

(2) Jede Iteration mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert gegen a.

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ gelten dabei die beiden Fehlerschranken

$$d(a, x_n) \;\le\; \underbrace{\frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1})}_{\text{a posteriori}} \;\le\; \underbrace{\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)}_{\text{a priori}} \;\searrow\; 0.$$

(4) Allgemeiner genügt $d(f^n(x), f^n(y)) \le k_n\, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\sum_{n=0}^\infty k_n < \infty$. Damit gilt die feinere Fehlerschranke

$$d(a, x_n) \;\le\; d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^\infty k_j \;\searrow\; 0.$$

Banachs Fixpunktsatz: Erläuterung

S. Banach: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fund. Math. 3 (1922) 133–181

Die Aussage (1) garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes. Die Konstruktion (2) liefert eine extrem praktische Approximation.

Gemäß (3) ist die Konvergenz $x_n \to a$ hierbei mindestens so schnell wie die Konvergenz der geometrischen Folge $k^n \searrow 0$: Dies nutzen wir bei iterativen Berechnungen als *a priori* Abschätzung des Zeitaufwandes.

Dieser wunderbare Satz geht auf Stefan Banach (1892–1945) zurück, der nützliche Zusatz (4) stammt von Johannes Weissinger (1913–1995).

Zum Beispiel genügt es, dass eine gewisse Iteration f^m kontraktiv ist, also $d(f^m(x), f^m(y)) \le k\, d(x, y)$ für eine Konstante $k \in [0, 1[$ erfüllt.

Ebenso kommt es vor, dass höhere Iterationen f^n stärker kontrahieren, und die Reihe $\sum k_n$ somit viel kleiner ausfällt als die geometrische $\sum k^n$.

Für die qualitative Konvergenzaussage ist dies zunächst unwesentlich, doch für die praktische Fehlerabschätzung ist es ungemein hilfreich.

Banachs Fixpunktsatz: Beweis der Konvergenz

Beweis: *Eindeutigkeit:* Für je zwei Fixpunkte $a = f(a)$ und $b = f(b)$ gilt $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \le k\, d(a, b)$ mit $k < 1$, also $d(a, b) = 0$, somit $a = b$.

Die *Existenz* beweisen wir durch die iterative Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Wir wählen $x_0 \in X \ne \emptyset$ und setzen $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Per Induktion gilt $d(x_{n+1}, x_n) \le k^n d(x_1, x_0)$: Für $n = 0$ ist dies trivial, für $n \ge 1$ gilt $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le k\, d(x_n, x_{n-1}) \le k^n d(x_1, x_0)$.

Dank Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $n \le p < q$:

$$\begin{aligned} d(x_q, x_p) &\le d(x_q, x_{q-1}) + \dots + d(x_{p+2}, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_p) \\ &\le (k^{q-p-1} + \dots + k + 1)\, d(x_{p+1}, x_p) \;=\; \frac{1-k^{q-p}}{1-k} d(x_{p+1}, x_p) \\ &\le \frac{k^p - k^q}{1-k} d(x_1, x_0) \;\le\; \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \;\searrow\; 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Demnach ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge im metrischen Raum (X, d).
Da (X, d) vollständig ist, existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$.

Da f kontraktiv und somit stetig ist, folgt aus $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Grenzübergang $a = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$.

Banachs Fixpunktsatz: Beweis der Fehlerschranke

Die Ungleichung für $n = p$ und $q \to \infty$ ergibt die Fehlerabschätzung (3):

$$d(a, x_n) \;\le\; \underbrace{\frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1})}_{\text{a posteriori}} \;\le\; \underbrace{\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)}_{\text{a priori}} \;\searrow\; 0$$

Aussage (4) beweisen wir genauso: Wegen $\sum_{n=0}^\infty k_n < \infty$ gilt $k_n \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass $k_n \le 1/2$ für alle $n \ge m$, das heißt f^n ist kontraktiv für alle $n \ge m$. Sind $a = f(a)$ und $b = f(b)$ Fixpunkte von f, so auch von f^n, also folgt $a = b$ wie oben.

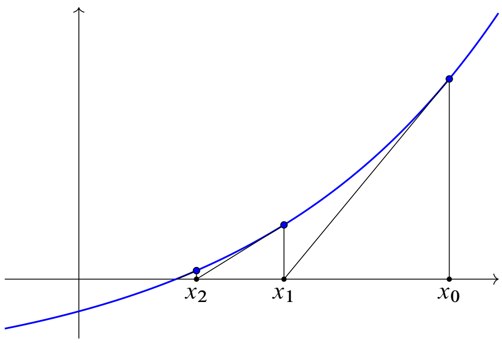
Für jede iterative Folge mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ erhalten wir für $n \le p < q$ wie oben $d(x_q, x_p) \le d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^\infty k_j$. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X, d), also existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$.

Für $n = p$ und $q \to \infty$ erhalten wir die feinere Fehlerabschätzung

$$d(a, x_n) \le d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^\infty k_j \;\searrow\; 0.$$

Wie immer bei Konvergenz gilt auch hier: Ende gut, alles gut. QED

Das Newton–Verfahren: zunächst eindimensional



Newton–Verfahren: Wir approximieren $f(x)$ um x_n linear durch die Tangente $t_n(x) := f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Wir wählen dann x_{n+1} als Lösung der Gleichung $t_n(x) = 0$, also $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n)$.
Newton-Iteration: $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ mit $\Phi(x) = x - f'(x)^{-1} f(x)$.

Das Newton–Verfahren: zunächst eindimensional

Beispiel: Wir wollen $f(x) = 0$ lösen für $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^2 - 5$.
Hier gilt $\Phi(x) = x - f'(x)^{-1} f(x) = \frac{1}{2}(x + 5x^{-1})$. Bei Start in $x_0 = 3$ gilt:

x_1 = 2.3333333333 3333333333 3333333333 3333333333 3333333333 3333333333 3333333333 3333333333 3333333333 3333333333 ...
x_2 = 2.2380952380 9523809523 8095238095 2380952380 9523809523 8095238095 2380952380 9523809523 8095238095 2380952380 ...
x_3 = 2.2360688895 6433637284 7011144883 4853090172 2391084093 2117527862 2087132725 4305977710 2330293819 6555217831 ...
x_4 = 2.2360679774 9979781940 9459355858 1450106481 6791373492 0068732213 8411033512 6926436974 7359075319 4335606197 ...
x_5 = 2.2360679774 9978969640 9173667667 6333757435 4077823754 2075538822 8773452271 4630972268 1785602169 6469834141 ...
x_6 = 2.2360679774 9978969640 9173668731 2762354406 1835961152 5738385839 1127831376 5508396910 6154343609 4499778892 ...
x_7 = 2.2360679774 9978969640 9173668731 2762354406 1835961152 5724270897 2454105209 2563780489 9414414408 3787822744 ...

🙂 In günstigen Fällen konvergiert das Newton–Verfahren, und dann meist sehr schnell. Wir sprechen hier von quadratischer Konvergenz: Die Zahl der gültigen Dezimalstellen verdoppelt sich bei jeder Iteration!

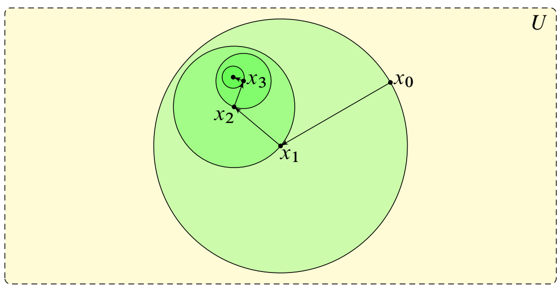
🙂 Aus der Analysis kennen Sie erste Konvergenzsätze, zum Beispiel:

Satz C4v: Newton, eindimensional

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0 < f(b)$ stetig differenzierbar und konvex.
Dann gilt: (1) Es existiert genau eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$.
(2) Bei Start in $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$ ist die Newton–Folge $(\Phi^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert, konvergiert gegen ξ, und die Konvergenz ist quadratisch.

Das Newton–Verfahren: Konvergenzsatz von Kantorovich

Das Newton–Verfahren lässt sich nicht nur auf Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anwenden, sondern ebenso auf $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oder ganz allgemein auf differenzierbare Selbstabbildungen $f : E \to E$ eines Banach–Raums E.



🙂 Der folgende raffinierte Satz perfektioniert das Newton–Verfahren. Für wenig mehr Aufwand werden wir reichlich belohnt durch einfach berechenbare Voraussetzungen und starke explizite Fehlerschranken.

Das Newton–Verfahren: Konvergenzsatz von Kantorovich

Satz C4x: Newton–Verfahren nach Kantorovich, 1948

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ diff'bar und $\Phi(x) = x - f'(x)^{-1} f(x)$ die Newton–Abbildung. Zum Startpunkt $x_0 \in U$ fordern wir:

$\mathbf{A}(x_0)$: Die Ableitung $f'(x_0)$ ist invertierbar. Sei $x_1 := \Phi(x_0)$ der nächste Punkt der Newton–Iteration und $r_1 := |x_1 - x_0|$ die erste Schrittlänge.

$\mathbf{B}(x_0)$: Der abgeschlossene Ball $V_1 := \bar{B}(x_1, r_1)$ liegt ganz in U. Hierauf gilt die Lipschitz–Bedingung $|f'(v) - f'(u)| \le L_1 |v - u|$ für ein $L_1 \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.

$\mathbf{C}(x_0)$: Auch $f'(x_1)$ ist invertierbar, und es gilt $k_1 := L_1 r_1 |f'(x_1)^{-1}| \le 1$.

Dann hat f in V_1 genau eine Nullstelle ξ. Es gilt $x_n = \Phi^n(x_0) \to \xi$ gemäß

$$\big|x_n - \xi\big| \le 2\big|x_n - x_{n+1}\big| \le \underbrace{k_n \big|x_n - x_{n-1}\big|}_{\text{a posteriori}} \le \underbrace{2^{1-n} \cdot k_1^{2^n - 1} \cdot \big|x_1 - x_0\big|}_{\text{a priori}} \searrow 0.$$

Per Induktion gelten für jeden Punkt $x_n = \Phi^n(x_0)$ die Aussagen $\mathbf{A}(x_n)$, $\mathbf{B}(x_n)$, $\mathbf{C}(x_n)$ mit $r_{n+1} \le \frac{k_n}{2} r_n$ und $L_{n+1} \le L_n$ und $k_{n+1} \le k_n^2$.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

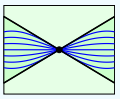
C421 Erläuterung

Wir erklären eine allgemeine Lösungsmethode, um 1890 entwickelt von Picard und Lindelöf, für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Der folgende Satz garantiert (1) die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und zudem (2) ein Konstruktionsverfahren zur Approximation dieser Lösung mit (3) expliziter Fehlerschranke. Was will man mehr?

Geometrische Voraussetzungen für die Picard–Lindelöf–Iteration:



Sei $I = [t_0 - a, t_0 + b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall um t_0 mit $a, b \le T$.
Sei $K = \bar{B}(y_0, r) \subseteq \mathbb{K}^n$ der Ball um y_0 mit Radius $r > 0$.
Sei $f : I \times K \to \mathbb{K}^n$ stetig, somit beschränkt, also $|f| \le M$.
Hierbei gelte $T \cdot M \le r$, notfalls verkleinern wir T und I.
Zudem erfülle f für alle $t \in I$ und $u, v \in K$ die **Lipschitz–Bedingung**

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le L\,|u - v|.$$

Ist etwa $f(t,y)$ stetig differenzierbar nach y, so genügt $|\partial f/\partial y| \le L$.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

C422 Erläuterung

Satz C4R: Picard–Lindelöf–Iteration

Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:
(1) Das Anfangswertproblem hat genau eine Lösung $y : I \to K$.
(2) Die Lösung y ist die Grenzfunktion der Picard–Lindelöf–Iteration

$$u_0 = y_0, \quad u_{n+1}(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, u_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in I$ gilt die gleichmäßige Fehlerschranke

$$|y(t) - u_n(t)| \;\le\; \max_I |u_1 - u_0|\,\mathrm{e}^{LT} \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \;\to\; 0.$$

(4) Die Lösung y hängt stetig vom Anfangswert y_0 ab: Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \to K$ eine Lösung zum Startwert $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$ auf einem Intervall $\tilde{I}$ mit $t_0 \in \tilde{I}$, so laufen die Lösungen y und $\tilde{y}$ höchstens exponentiell auseinander:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \;\le\; |y_0 - \tilde{y}_0| \cdot \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \quad \text{für alle } t \in I \cap \tilde{I}$$

Lösung des AWP durch iterierte Integration

C423 Erläuterung

Aufgabe: Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1.$$

Lösung: Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$u_0(t) = 1$$
$$u_1(t) = 1 + \textstyle\int_{\tau=0}^{t} u_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t$$
$$u_2(t) = 1 + \textstyle\int_{\tau=0}^{t} u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$
$$u_3(t) = 1 + \textstyle\int_{\tau=0}^{t} u_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3$$
$$u_4(t) = 1 + \textstyle\int_{\tau=0}^{t} u_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4$$

Per Induktion und Grenzübergang $n \to \infty$ finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \quad \to \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \exp(t)$$

☺ Probe! Dieselbe Lösung finden wir alternativ durch Separation.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

C424 Erläuterung

Aufgabe: Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$y'(t) = -t\,y(t), \quad y(0) = 1.$$

Lösung: Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$u_0(t) = 1$$
$$u_1(t) = 1 - \textstyle\int_{\tau=0}^{t} \tau\,u_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2$$
$$u_2(t) = 1 - \textstyle\int_{\tau=0}^{t} \tau\,u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4$$
$$u_3(t) = 1 - \textstyle\int_{\tau=0}^{t} \tau\,u_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{48}t^6$$
$$u_4(t) = 1 - \textstyle\int_{\tau=0}^{t} \tau\,u_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{48}t^6 + \frac{1}{384}t^8$$

Per Induktion und Grenzübergang $n \to \infty$ finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} \quad \to \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \exp(-t^2/2)$$

☺ Probe! Dieselbe Lösung finden wir alternativ durch Separation.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

C425 Erläuterung

Aufgabe: (A) Sei $y : I \to K$ stetig. Unsere **Differentialgleichung**

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I \text{ und } y(t_0) = y_0$$

ist äquivalent zu folgender (für uns vorteilhaften) **Integralgleichung**:

$$y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \text{für alle } t \in I$$

Somit sind Lösungen $y : I \to K$ genau die **Fixpunkte** der Abbildung

$$\Psi : C(I,K) \to C(I,\mathbb{K}^n), \quad (\Psi u)(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

(B) Tatsächlich gilt $\Psi : C(I,K) \to C(I,K)$: Wir können Ψ also **iterieren**!
(C) Für je zwei Funktionen $u, v \in C(I,K)$ gilt die **Fehlerschranke**

$$|\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)| \;\le\; \max_{[t_0,t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \;\le\; \max_I |u - v| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

Für $n \to \infty$ gilt $(LT)^n/n! \to 0$. Demnach ist Ψ^n schließlich **kontraktiv**:
Zu $0 < \alpha < 1$ existiert $n \in \mathbb{N}$ sodass $|\Psi^n u - \Psi^n v|_I \le \alpha |u - v|_I$ gilt.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

C426 Erläuterung

Lösung: (A) Dank HDI. Die Integralgleichung besagt $y = \Psi y$.
(B) Für $u \in C(I,K)$ zeigen wir $\Psi u \in C(I,K)$ durch Nachrechnen:

$$|\Psi u(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, u(\tau))|\,\mathrm{d}\tau \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} M\,\mathrm{d}\tau \right|$$
$$= |t - t_0| M \qquad \le TM \qquad \le r$$

(C) Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Für $n \ge 1$ folgt sie induktiv:

$$|\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \Psi^{n-1}u(\tau)) - f(\tau, \Psi^{n-1}v(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right|$$
$$\le \left| \int_{t_0}^{t} L\,|\Psi^{n-1}u(\tau) - \Psi^{n-1}v(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \right|$$
$$\le \left| \int_{t_0}^{t} \max_{[t_0,t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |\tau - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}\tau \right|$$
$$= \max_{[t_0,t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \quad \le \quad \max_I |u - v| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}$$

Lösung des AWP durch iterierte Integration

C427 Ausführung

Diese Rechnungen beweisen den Satz C4R von Picard–Lindelöf:

Der Raum $C(I,K)$ ist vollständig bezüglich der Supremumsnorm.
Daher können wir auf Ψ den **Fixpunktsatz von Banach** anwenden:
(1) Die Abbildung $\Psi : C(I,K) \to C(I,K)$ hat genau einen Fixpunkt y.
☺ Dank (A) hat unser AWP somit genau eine Lösung $y : I \to K$.
(2) Wir erhalten die Lösung y durch sukzessive Approximation.
☺ Für jede Funktion $u_0 \in C(I,K)$ konvergiert $u_n = \Psi^n u_0$ gegen y.
Für den Fixpunkt $v_0 = y$ liefert die Iteration $v_n = \Psi^n v_0 = y$.
Dank der Fehlerschranke (D) erhalten wir also:

$$|y(t) - u_n(t)| \;\le\; \max_{[t_0,t]} |y - u| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \;\le\; \max_I |y - u| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

☺ Die Konvergenz $u_n \to y$ der Approximationen u_n gegen die Lösung y ist demnach mindestens so schnell wie die Konvergenz $(LT)^n/n! \to 0$.
☺ Die in (3) angegebene Verschärfung nutzt nur u_0, u_1:
Auf der rechten Seite stehen also nur bekannte Daten.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

C428 Ausführung

(3) Wir formulieren die Fehlerschranke nur mit u_0 und u_1:

$$|u_n(t) - u_{n+1}(t)| = |\Psi^n u_0(t) - \Psi^n u_1(t)| \le \max_{[t_0,t]} |u_0 - u_1| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!}$$
$$|u_n(t) - u_{n+p}(t)| \le |u_n(t) - u_{n+1}(t)| + \cdots + |u_{n+p-1}(t) - u_{n+p}(t)|$$
$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \max_{[t_0,t]} |u_0 - u_1| \cdot \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \;\le\; \max_{[t_0,t]} |u_1 - u_0|\,\mathrm{e}^{L|t-t_0|} \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!}$$

Für $p \to \infty$ erhalten wir die gewünschte Ungleichung für $|u_n(t) - y(t)|$.
(4) Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \to K$ eine Lösung zum Startwert $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$, so gilt dank (A) $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \tilde{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau$. Wir beginnen die Picard–Lindelöf–Iteration mit der Funktion $u_0 = \tilde{y}$ und erhalten im ersten Schritt die Verschiebung

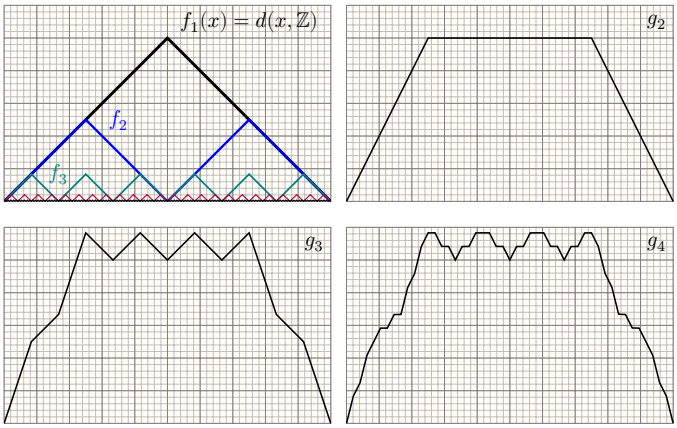
$$u_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \tilde{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau = y_0 - \tilde{y}_0 + u_0(t), \quad \text{dank (3) also}$$

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \le |y_0 - \tilde{y}_0| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} = |y_0 - \tilde{y}_0|\,\mathrm{e}^{L|t-t_0|}.$$

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

C601

Aufgabe: Skizzieren Sie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ sowie $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.



Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

C602
Ergänzung

Diese genial-einfache doch verblüffende Konstruktion wurde 1901 von Teiji Takagi (1875–1960) veröffentlicht, einem Schüler von David Hilbert.
📖 Teiji Takagi: *A Simple Example of the Continuous Function without Derivative.* Proc. Phys. Math. Japan 1 (1901) 176–177

Aufgabe: Konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise? monoton? gleichmäßig?
Lösung: Wegen $f_n \geq 0$ gilt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$. Wegen $|f_n| \leq \frac{1}{2n!}$ gilt

$$g_n(x) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k!} \;=\; \frac{\mathrm{e}-1}{2} \;\approx\; 0.85914.$$

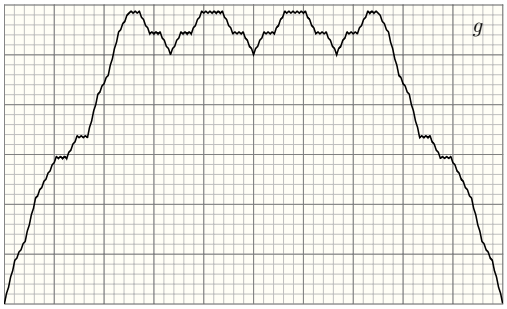
In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert bezeichnen wir mit $g(x)$. Die Konvergenz $g_n \to g$ ist monoton und gleichmäßig, denn es gilt

$$0 \;\leq\; g(x) - g_n(x) \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k!} \;\leq\; \frac{1}{k!} \;\searrow\; 0.$$

Somit ist g stetig – wenn auch extrem rau, wie wir gleich sehen.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

C603



Satz C6A: Takagi 1901

Für die **Takagi–Funktion** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} d(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ gilt:
(1) Die Funktion g ist stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.
(2) Die Funktion g ist auf keinem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ monoton.
(3) Sie nimmt in jedem Punkt $x \in \mathbb{Q}$ ein striktes lokales Minimum an.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

C604
Ergänzung

Beweis: (1a) Die Funktion $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig für jedes $k \in \mathbb{N}$, also auch $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Zudem gilt $0 \leq g(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k!} \leq \frac{1}{k!} \searrow 0$. Die Konvergenz $g_n \to g$ ist also gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Daher ist auch die Grenzfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

(1b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion f_n zwischen den Punkten $\frac{1}{2n!}\mathbb{Z}$ stückweise affin mit Steigung ± 1. Somit ist f_n affin auf $[x - \frac{1}{4n!}, x]$ oder auf $[x, x + \frac{1}{4n!}]$. Für $n \geq 3$ wählen wir $h_n = \pm\frac{1}{(n+1)!}$ so, dass f_n zwischen x und $x + h_n$ affin ist. Gleiches gilt dann für alle f_k mit $1 \leq k \leq n$. Für $k \geq n+1$ hingegen gilt $f_k(x + h_n) = f_k(x)$. Der Differenzenquotient ist

$$q_n \;:=\; \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \pm 1.$$

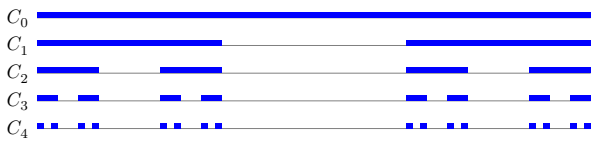
Daher hat die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert. Das heißt, f ist in x nicht differenzierbar.

Aus (3) folgt (2); es reicht also, Aussage (3) zu beweisen. Jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ lässt sich schreiben als $x = a/n!$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. (Warum?) Wir zeigen $g(u) > g(x)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $0 < |u - x| < r := 1/(2n)!$. Die Funktion $g_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f_k$ ist auf $[x - r, x + r]$ stückweise affin, und die Steigung liegt überall zwischen $1 - n$ und $n - 1$. Die Funktion $h = \sum_{k=n}^{2n-1} f_k$ hingegen erfüllt $h(u) = n|u - x|$ für alle $u \in [x - r, x + r]$. Demnach ist die Summe $g_{2n-1} = g_{n-1} + h$ streng fallend auf $[x - r, x]$ und streng wachsend auf $[x, x + r]$. Insbesondere ist x das strikte Minimum von g_{2n-1} eingeschränkt auf $[x - r, x + r]$. Für alle $k \geq 2n$ gilt $f_k(x) = 0$ und $f_k(u) \geq 0$ für alle u. Deshalb ist x das strikte Minimum auch von g eingeschränkt auf die hinreichend kleine Umgebung $[x - r, x + r]$. QED

Cantor-Mitteldrittel-Wischmenge

C605

Cantor–Menge $C = \bigcap_n C_n$ mit $C_0 = [0, 1]$ und $C_{n+1} = (\frac{1}{3}C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$



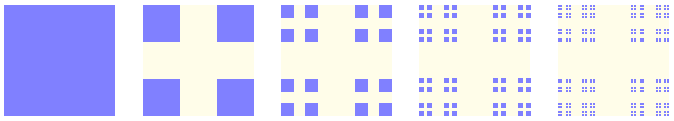
Satz C6D: bemerkenswerte Eigenschaften der Cantor–Menge

(1) Die Cantor–Menge C ist kompakt und hat Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_1(C) = 0$, ihr Komplement $[0, 1] \setminus C$ ist offen und dicht in $[0, 1]$, doch $C + C = [0, 2]$.
(2) Wir haben die Bijektion $\varphi : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} C : (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 3^{-k-1}$ und stetige Surjektion $f : C \twoheadrightarrow [0, 1] : \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 3^{-k-1} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 2^{-k-2}$.
(3) Die Teufelstreppe $g : [0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1]$ setzt f monoton fort und ist stetig, stückweise konstant auf $[0, 1] \setminus C$, somit fast überall diff'bar mit $g'(x) = 0$.
(4) Sei $\varepsilon > 0$ und $h : [0, 1] \to [0, 1 + \varepsilon] : h(x) = g(x) + \varepsilon x$. Dies ist ein Homöomorphismus und bildet C von Maß 0 ab auf $h(C)$ vom Maß 1.

Fette Cantor–Mengen

C606
Erläuterung

Diese Eigenschaften rechnet man geduldig nach, mit den Begriffen und Techniken dieses Kapitels. Wir veranschaulichen $C + C = [0, 2]$ wie folgt:



Der **Cantor–Staub** $C \times C = \bigcap_n C_n \times C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ ist diagonal blickdicht!

Die **fette Cantor–Menge** $C(q)$ zu $q \in]0, 1[^{\mathbb{N}}$: Wie zuvor sei $C_0 := [0, 1]$. Aus $C_n = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} [a_k, b_k]$ konstruieren wir $C_{n+1} := \bigsqcup_{k=1}^{2^n} [a_k, t_k^-] \sqcup [t_k^+, b_k]$ durch $t_k^{\pm} = \frac{1}{2}(a_k + b_k) \pm \frac{1-q_n}{2}(b_k - a_k)$ und erhalten $C(q) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Nach Konstruktion gilt $C_n \searrow C$ und $\mathrm{vol}_1(C_n) = q_1 q_2 \cdots q_n \searrow \mathrm{vol}_1(C)$.
Für $p = (2/3)_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir Cantors Wischmenge mit $\mathrm{vol}_1 C(p) = 0$.
Für $q = (a^{(2^{-n})})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a \in]0, 1[$ gilt $\mathrm{vol}_1 C(q) = \prod_{n=1}^{\infty} a^{(2^{-n})} = a$.

Alle Cantor–Mengen sind homöomorph: Zu je zwei Folgen $p, q \in]0, 1[^{\mathbb{N}}$ existiert ein Homöomorphismus $h : [0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ mit $h(C(p)) = C(q)$.

Cantor und Netto: Gilt $[0, 1] \cong [0, 1]^2$?

C607

Gibt es Bijektionen $[0, 1] \cong [0, 1]^2$? — Ja! (Cantor 1878, siehe B2N)
Homöomorphismen $[0, 1] \cong [0, 1]^2$? — Nein! (Netto 1879, siehe A1H)

Georg Cantor bewies 1878 den erstaunlichen Satz, dass das Intervall $[0, 1]$ und das Quadrat $[0, 1]^2$ gleich viele Punkte haben, also eine Bijektion $[0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, 1]^2$ existiert. (Wir haben dies bereits in Satz B2N gezeigt.) Dies warf die Frage auf, ob *stetige* Bijektionen $[0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, 1]^2$ existieren. Eugen Netto beantwortete diese Frage ein Jahr später 1879 negativ.

Beweis: Wäre die Bijektion $f : [0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, 1]^2$ stetig, so wäre f dank der Kompaktheit des Startraums $[0, 1]$ und der Hausdorff–Eigenschaft des Zielraums $[0, 1]^2$ ein Homöomorphismus (F1N). Das widerspricht A1H.

Es blieb die Frage, ob statt stetiger Bijektionen noch stetige Surjektionen $[0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1]^2$ möglich sind. Dies scheint zunächst kaum vorstellbar, doch Giuseppe Peano (1858–1932) überraschte 1890 die Fachwelt mit der ersten Konstruktion einer flächenfüllenden Kurve. Ebenso existieren Einbettungen $[0, 1] \hookrightarrow [0, 1]^2$ mit positivem Frächeninhalt. Für all diese Konstruktionen nutzen wir dankend die gleichmäßige Konvergenz.

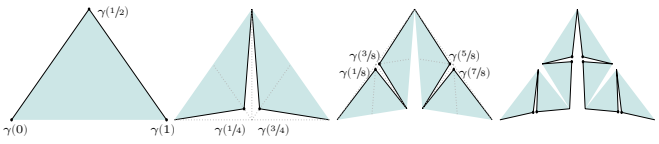
Peano und Osgood: flächenfüllende Wege

C608

Satz C6G: Peano 1890

Es gibt stetige Surjektionen $\gamma : [0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1]^2$.

Wir beweisen dies mit der eleganten Konstruktion von William Osgood (1864–1943) und erhalten zudem das folgende bemerkenswerte Ergebnis.



Satz C6H: Osgood 1903

Es gibt stetige Injektionen $\gamma : [0, 1] \hookrightarrow [0, 1]^2$ mit positivem Flächeninhalt: Für das Bild $\Gamma = \gamma([0, 1]) \subset [0, 1]^2$ ist jedes Maß $\mathrm{vol}_2(\Gamma) \in [0, 1[$ erreichbar.

Cantor selbst schrieb einst: „Je le vois, mais je ne le crois pas!“ [Ich sehe es, aber ich kann es nicht glauben!] Besser, wir können es nachrechnen!

Kapitel D

Stetigkeitslehre: topologische Räume

In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor.
Egbert Brieskorn (1936–2013)

Inhalt dieses Kapitels D

1 Topologische Räume

2 Stetige Abbildungen

3 Umgebungen und Umgebungsbasen

4 Anwendung auf Funktionenräume

5 Inneres, Abschluss, Rand

6 Basen und Erzeugendensysteme

7 Baire–Räume und Borel–Mengen

Rückblick und Motivation

Skalarprodukt $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Norm $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Metrik $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Topologie

Wir haben uns in den ersten Vorlesungen viel Zeit genommen.
Kapitel A: Einführung in und Ausblick auf dieses Semester
Kapitel B: Grundlagen und Aufbau des Zahlensystems
Kapitel C: von metrischen Räumen zur Topologie
🙂 Damit ist die Bühne bereitet für die Topologie!

Wir werden die topologischen Begriffe als allgemeine Definitionen extrahieren und damit neue Anwendungsmöglichkeiten eröffnen.
Viele Sätze werden klarer, manche Beweise leichter durch Abstraktion, geeignete Verallgemeinerung und Fokussierung auf das Wesentliche.
Andere Fragen lassen sich jetzt überhaupt erst formulieren.

Wenn du ein Schiff bauen willst,
lehre deine Leute nicht nur ihr Handwerk,
sondern erwecke ihre Sehnsucht nach dem Meer!

Ausblick und Motivation

Aus dem vorangegangenen Kapitel C kennen wir den Begriff der *Metrik* $d : X \times X \to [0, \infty]$ und das Vokabular der *metrischen Räume* (X, d). Viele Eigenschaften können wir auf den Grundbegriff der *offenen Mengen* zurückführen, insbesondere die *Konvergenz* von Folgen in X (C3A) und die *Stetigkeit* von Abbildungen $f : X \to Y$ (C3G), später ebenso die Begriffe *Zusammenhang* und *Kompaktheit*. Die dabei wesentlichen Eigenschaften (O1–3) des Systems $\mathcal{T}$ aller offenen Mengen in (X, d) haben wir in Satz C2M wie folgt zusammengefasst:

O1: Die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind offen.
O2: Sind $U_1, \dots, U_n$ offen, dann auch $U_1 \cap \dots \cap U_n$.
O3: Sind alle U_i offen für $i \in I$, dann auch $\bigcup_{i \in I} U_i$.

Für die Topologie verzichten wir nun auf die Messung von Abständen in X und legen allein ein System $\mathcal{T}$ offener Mengen zugrunde (D1A). Die grundlegenden Eigenschaften (O1–3) werden nun zu Axiomen: Ein *topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ besteht aus einer Trägermenge X und einem System $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen, das (O1–3) erfüllt.

Abstraktion: strukturelle Klarheit und vielseite Anwendung

Dies ist eine kühne Verallgemeinerung! Es ist bemerkenswert, dass man aus so wenig Struktur noch eine respektable Theorie aufbauen kann.

Mit einem *Skalarprodukt* können wir Geometrie betreiben, etwa Winkel und Längen messen. Eine *Norm* misst keine Winkel, aber noch die Länge von Vektoren; das genügt zur Differentialrechnung. Bei einer *Metrik* verlangen wir keine Vektorraumstruktur mehr, aber wir können noch Isometrien betrachten oder Dehnungsbedingungen. Bei einer *Topologie* schließlich können wir nicht mehr von Abständen sprechen, aber alle topologischen Begriffe stehen zur Verfügung: Konvergenz, Stetigkeit, Homöomorphie, Kompaktheit, Zusammenhang, etc. lassen sich rein topologisch formulieren, das heißt allein mit Hilfe der offenen Mengen.

Die wichtigsten Beispiele topologischer Räume sind die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ und ihre Teilräume $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Diese spielen bereits in der Analysis eine herausragende Rolle und werden auch uns im Folgenden als Modelle dienen, als Fundament und Illustration.

Abstraktion: strukturelle Klarheit und vielseite Anwendung

Darüber hinaus eröffnet sich uns eine Fülle weiterer Beispiele: metrische Topologien und Ordnungstopologien, diskrete und indiskrete Topologien, Topologien auf Funktionenräumen, Teilräume und Quotienten, Summen und Produkte, etc. Als *Werkstücke* illustrieren diese zunächst den Begriff der Topologie; im weiteren Verlauf werden sie uns auch als *Werkzeuge* für topologische Untersuchungen dienen.

Metrische Räume sind eine reichhaltige und nützliche Struktur; wo sie uns zur Verfügung steht, werden wir daraus Nutzen ziehen. Wie wir noch sehen werden, sind topologische Räume jedoch wesentlich allgemeiner als metrische Räume und erlauben flexiblere Konstruktionen. Diese größere Flexibilität ist die Hauptmotivation, topologische Räume zu betrachten: Gelegentlich existiert keine geeignete Metrik, oder sie wäre nur mühsam zu konstruieren, oder sie ist gänzlich nebensächlich. Für all diese Fälle bietet die Topologie einen nützlichen allgemeinen Rahmen.

Wozu und warum gerade diese Axiome?

In der Maßtheorie betrachtet man σ–Algebren auf einer Trägermenge X und verlangt Stabilität unter Komplementen, *abzählbaren* Durchschnitten und *abzählbaren* Vereinigungen (D7I). In der Topologie hingegen sind die Axiome nicht symmetrisch: Wie oben motivert verlangen wir Stabilität unter (O2) *endlichen* Durchschnitten und (O3) *beliebigen* Vereinigungen. Dass dies für die weitere Theorie die „richtige“ Definition ist, kann letztlich nur die Erfahrung zeigen; die erfolgreichen Anwendungen in diesem und folgenden Kapiteln werden dies ausführlich belegen.

Dürfen wir Bildern vertrauen? Können wir Formeln veranschaulichen? Mathematik umschrieb man einst als *die Lehre von Zahlen und Figuren*. Diese beiden Aspekte sind noch immer grundlegend und höchst aktuell. Insbesondere in der Topologie erweisen sie ihren gegenseitigen Nutzen: Bilder betonen die wesentliche Idee, Formeln liefern die unverzichtbare Präzision. Viele mathematische, insbesondere topologische Argumente lassen sich auf beide Weisen darstellen. Die Kunst besteht darin, beide zu beherrschen und ineinander übersetzen zu können.

Anschaulich oder formal? Am besten beides!

Idealerweise soll die Topologie zur Zweisprachigkeit erziehen! Manchem mag die Topologie allzu anschaulich erscheinen, und ja, die Anschauung und ihre Sprechweisen setzen wir bewusst ein. Es lohnt sich in fast allen Fällen, topologische Argumente mit Bildern zu illustrieren. Allerdings dürfen dekorative Beispiele nicht darüber hinwegtäuschen, dass wir ein solides Handwerk von Sätzen und Beweisen erlernen wollen und dafür eine äußerst präzise Ausdrucksweise benötigen. Anderen wiederum mag die Topologie allzu abstrakt erscheinen, und auch das ist sie ganz bewusst, wie die moderne Mathematik allgemein: Gerade ihre Allgemeinheit und Präzision garantieren vielseitige und effiziente Anwendungen.

Die Spannung zwischen diesen beiden Polen ist durchaus produktiv:

C'est par la logique que l'on prouve
et par l'intuition que l'on découvre.
Henri Poincaré (1854–1912)

Topologien und topologische Räume

D101

Definition D1A: topologischer Raum

Eine **Topologie** auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, für das gilt:

O1: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.

O2: Aus $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ folgt $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}$. (Für $n = 0$ also $X \in \mathcal{T}$.)

O3: Aus $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ folgt $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$. (Für $I = \emptyset$ also $\emptyset \in \mathcal{T}$.)

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt dann ein **topologischer Raum** mit **Trägermenge** X und **Topologie** $\mathcal{T}$. Die Elemente $x \in X$ nennen wir **Punkte** des Raumes.

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt eine Teilmenge $U \subseteq X$ **offen**, falls $U \in \mathcal{T}$ gilt, und $A \subseteq X$ **abgeschlossen**, falls ihr Komplement offen ist, $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

$$\mathcal{T} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{T}^c := \{ A = X \setminus O \mid O \in \mathcal{T} \}$$

Die abgeschlossenen Mengen sind komplementär zu den offenen, somit stabil unter A2: endlichen Vereinigungen und A3: beliebigen Schnitten.

⚠ Die Trägermenge X allein bestimmt noch nicht die Topologie $\mathcal{T}$!
Wir sagen „der Raum X“ nur, wenn die Topologie $\mathcal{T}$ im Kontext klar ist.

Diskrete und indiskrete Topologie

D102

Beispiel D1B: diskrete Topologie

Auf jeder Menge X ist $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ eine Topologie. Wir nennen sie die **diskrete Topologie**. In dieser Topologie ist jede Teilmenge von X offen (und abgeschlossen). Dies ist die größte, also feinste Topologie auf X.

Beispiel D1C: indiskrete Topologie

Auf jeder Menge X ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie. Wir nennen sie die **indiskrete Topologie**. In dieser sind nur die Teilmengen $\emptyset$ und X offen (und abgeschlossen). Dies ist die kleinste, also gröbste Topologie auf X.

Kleinste Beispiele: Auf $X = \emptyset$ ist $\mathcal{T} = \{\emptyset\}$ die einzige Topologie.
Ebenso auf der Menge $X = \{a\}$ ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ die einzige Topologie.

Auf der Menge $X = \{a \neq b\}$ gibt es zwischen der indiskreten $\{\emptyset, X\}$ und der diskreten $\mathfrak{P}(X)$ genau zwei Topologien: $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\{\emptyset, \{b\}, X\}$.

$n = \sharp X$	0	1	2	3	4	5	6	7
t_n	1	1	4	29	355	6942	209527	9535241

Metrische Topologie und Metrisierbarkeit

D103

Beispiel D1D: metrische Topologie $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}(X, d)$

Jede Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$ auf X definiert ihre **metrische Topologie** $\mathcal{T}(X, d) := \{ O \subseteq X \mid \forall a \in O\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in X : d(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x \in O \}$.

Dies ist tatsächlich eine Topologie, dank C2M. Übung zur Wiederholung!

Beispiel: Die Menge $X = \mathbb{R}^n$, allgemein jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, trägt die **euklidische Topologie** $\mathcal{T}_d$ dank der euklidischen Metrik $d(x, y) = |x - y|$.

Definition D1E: metrisierbare Topologie

Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf der Menge X heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$ existiert, für die $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ gilt.

Beispiele: Die diskrete Topologie $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ auf X ist metrisierbar, etwa durch die diskrete Metrik (C2C) mit $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$.

Die indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ auf X mit $\sharp X \geq 2$ wird von keiner Metrik induziert, denn $\mathcal{T}$ fehlt hierzu die Hausdorff–Eigenschaft (C2O).

Vergleich von Topologien

D104

Definition D1F: Vergleich von Topologien

Sind $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \subseteq \mathfrak{P}(X)$ Topologien auf X, dann heißt $\mathcal{T}_2$ **feiner** als $\mathcal{T}_1$ und entsprechend $\mathcal{T}_1$ **gröber** als $\mathcal{T}_2$. Gilt dabei strikte Inklusion $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$, so heißt $\mathcal{T}_2$ **echt feiner** als $\mathcal{T}_1$ und entsprechend $\mathcal{T}_1$ **echt gröber** als $\mathcal{T}_2$.

Einfachste Beispiele:

- Auf jeder Menge X ist die diskrete Topologie $\mathfrak{P}(X)$ die feinste und die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ die gröbste aller Topologien auf X.
- Auf $X = \{a \neq b\}$ haben wir außer $\{\emptyset, X\}$ und $\mathfrak{P}(X)$ zwei Topologien: $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ sind unvergleichbar.

Interessante Beispiele aus der Analysis (C3K): Sei $1 \leq p < q \leq \infty$.

- Auf $\mathbb{R}^n$ sind die ℓ^p–Topologie und die ℓ^q–Topologie gleich.
- Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die ℓ^p–Topologie echt feiner als die ℓ^q–Topologie.
- Auf $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ ist die L^q–Topologie echt feiner als die L^p–Topologie.
- Auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind die L^p– und die L^q–Topologie unvergleichbar.

Koendliche und koabzählbare Topologie

D105

$$\mathcal{T}_{\text{indiskret}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{koendlich}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{koabzählbar}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{diskret}}$$

gröber: weniger offene Mengen ← — → feiner: mehr offene Mengen

Beispiel D1H: koendliche Topologie

In der **koendlichen Topologie** auf der Grundmenge X sind die abgeschlossenen Mengen genau X und alle endlichen Teilmengen:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{ O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ ist endlich} \}$$

Diese Topologie ist genau dann diskret, wenn X endlich ist.

Beispiel D1I: koabzählbare Topologie

In der **koabzählbaren Topologie** auf der Grundmenge X sind die abgeschlossenen Mengen genau X und alle abzählbaren Teilmengen:

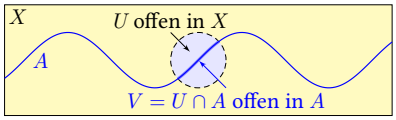
$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{ O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ ist abzählbar} \}$$

Diese Topologie ist genau dann diskret, wenn X abzählbar ist.

Teilraumtopologie: Definition

D106

☺ Wir konstruieren neue topologische Räume aus alten.



Definition D1K: Teilraumtopologie

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Inklusion $\iota_A : A \hookrightarrow X$. Die **Teilraumtopologie** von A in $(X, \mathcal{T}_X)$ ist

$$\mathcal{T}_A := \{ A \cap U = \iota_A^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_X \} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X.$$

Wir nennen $(A, \mathcal{T}_A)$ den **Teilraum** von $(X, \mathcal{T}_X)$ auf der Teilmenge $A \subseteq X$.

Soweit nichts anderes vereinbart wird, statten wir jede Teilmenge $A \subseteq X$ mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A$ aus. Statt „$V \subseteq A$ ist offen / abgeschlossen im Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$“ sagen wir kurz „V ist offen / abgeschlossen in A“.

Teilraumtopologie: Eigenschaften

D107

Beispiele: (1) Für $O \subseteq X$ offen, $O \in \mathcal{T}_X$, gilt $\mathcal{T}_O = \{ U \in \mathcal{T}_X \mid U \subseteq O \}$.
(2) Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ diskret/indiskret/koendlich/koabzählbar, so auch $(A, \mathcal{T}_A)$.
(3) Die Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ ist die euklidische (E2I). Allgemein:

$$\begin{array}{ccc} (X, d_X) & \xmapsto{\text{metrische Topologie}} & (X, \mathcal{T}_X) \\ \text{metrischer Teilraum} \uparrow & & \uparrow \text{topologischer Teilraum} \\ (A, d_A) & \xmapsto{\text{metrische Topologie}} & (A, \mathcal{T}_A) \end{array}$$

$$B_{(A,d_A)}(a, \varepsilon) = A \cap B_{(X,d_X)}(a, \varepsilon) \implies \mathcal{T}_A = \mathcal{T}(A, d_A)$$

Satz D1L: Teilräume von metrischen Räumen

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum mit Topologie $\mathcal{T}_X := \mathcal{T}(X, d_X)$ (D1D). Die Teilraummetrik d_A auf A (C2E) induziert die Topologie $\mathcal{T}(A, d_A)$. Diese stimmt überein mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A := \iota_A^* \mathcal{T}_X$ (D1K). Ist also der Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ metrisierbar, dann auch jeder Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$.

Ordnungstopologie

D108

Definition D1M: Ordnungstopologie $\mathcal{T}_< = \mathcal{T}(X, <)$

Jede Totalordnung $<$ auf X definiert die zugehörige **Ordnungstopologie** $\mathcal{T}_< = \mathcal{T}(X, <) := \{ O \subseteq X \mid \forall x \in O\ \exists a, b \in X \sqcup \{\pm\infty\} : x \in]a, b[\subseteq O \}$.

Beispiele: (1) Die Ordnungstopologie auf $X = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ ist die euklidische.
(2) In $(\mathbb{R}, \leq)$ sind $A = \{-1, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{0, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ordnungsisomorph, haben also dieselbe Ordnungstopologie. Ihre metrisch-euklidischen Teilraumtopologien sind jedoch sehr verschieden!

$$\begin{array}{ccc} (X, <) & \xmapsto{\text{Ordnungstopologie}} & (X, \mathcal{T}_X) \\ \text{Ordnungs-Teilraum} \uparrow & & \uparrow \text{topologischer Teilraum} \\ (A, <) & \xmapsto{\text{Ord'top.}} (A, \mathcal{T}(A, <)) & \xleftarrow{\neq} (A, \mathcal{T}_A) \end{array}$$

(3) Für $A \subseteq X$ gilt $\mathcal{T}(A, <) \subseteq \mathcal{T}_A$, aber nicht immer Gleichheit:
Im Beispiel (2) ist $(A, \mathcal{T}_A)$ diskret, $(A, \mathcal{T}(A, <))$ jedoch nicht.

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Definition

D201

Definition D2A: stetige Abbildungen

Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume. Sie heißt **stetig**, wenn zu jeder offenen Menge V im Zielraum $(Y, \mathcal{T}_Y)$ das Urbild $f^{-1}(V)$ im Startraum $(X, \mathcal{T}_X)$ offen ist. Gleiches gilt für abgeschlossen.

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig} &:\iff \forall V \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \\ &\iff \forall B \subseteq \mathcal{T}_Y^c : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X^c \end{aligned}$$

Die Menge aller stetigen Abbildungen bezeichnen wir mit

$$\mathcal{C}(X, \mathcal{T}_X; Y, \mathcal{T}_Y) := \{ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ stetig} \}.$$

Wir nutzen $\mathcal{C}(X, Y)$, wenn die Topologien aus dem Kontext klar sind.

Hingegen nennen wir f **offen**, wenn zu jeder offenen Menge U in $(X, \mathcal{T}_X)$ die Bildmenge $f(U)$ in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ offen ist. Entsprechend **abgeschlossen**:

$$\begin{aligned} f \text{ ist offen} &:\iff \forall U \in \mathcal{T}_X : f(U) \in \mathcal{T}_Y \\ f \text{ ist abgeschlossen} &:\iff \forall A \in \mathcal{T}_X^c : f(A) \in \mathcal{T}_Y^c \end{aligned}$$

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Kategorie

D202

Bemerkung D2B: Stetige Abbildungen bilden eine Kategorie.

Wir betrachten topologische Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$. Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ ist stetig. Sind $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, dann ist auch $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$.

Wir erhalten die Kategorie Top: Ihre Objekte sind topologische Räume $X, Y, Z, \ldots$. Die Morphismenmenge $\mathcal{C}(X, Y)$ besteht aus allen stetigen Abbildungen $X \to Y$. Die Komposition $\circ : \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Z)$ ist die für Abbildungen übliche Hintereinanderausführung.

Ebenso bilden topologische Räume und ihre offenen Abbildungen eine Kategorie, ebenso abgeschlossene Abbildungen. Weitere Beispiele:

- Mengen (mit Struktur) und ihre (strukturerhaltenden) Abbildungen.
- Vektorräume über einem Körper K und ihre linearen Abbildungen.
- Offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ihre differenzierbaren Abbildungen.

In Kapitel H diskutieren wir ausführlich die Sprache der Kategorien.

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Beispiele

D203

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume mit den induzierten metrischen Topologien $\mathcal{T}_X$ auf X und $\mathcal{T}_Y$ auf Y. Satz C3G besagt:

Genau dann ist $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ stetig im metrischen Sinne (C3E), wenn $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig ist im topologischen Sinne (D2A).

☺ Stetigkeit, Offenheit und Abgeschlossenheit sind unabhängig:

Bei diskretem Startraum ist jede Abbildung $f : (X, \mathfrak{P}X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, aber i.A. weder offen noch abgeschlossen, z.B. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : k \mapsto 2^{-k}$.

Bei diskretem Zielraum ist jede Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathfrak{P}Y)$ offen und abgeschlossen, aber i.A. nicht stetig, z.B. $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$.

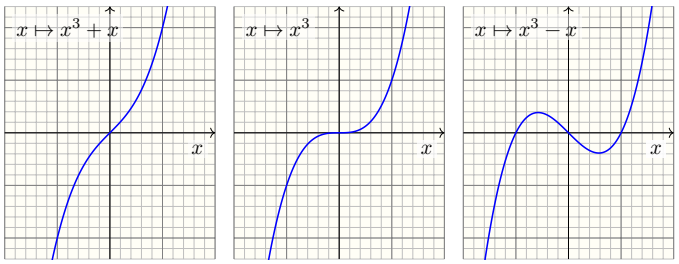
Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan(x)$ ist stetig und offen, aber nicht abgeschlossen, denn $f(\mathbb{R}) =]-\pi/2, +\pi/2[$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Die Einschränkung $h : \mathbb{R} \to]-\pi/2, +\pi/2[$ ist ein Homöomorphismus. Hier ist der Zielraum maßgeblich, wie so oft in der Mathematik!

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Beispiele

D204

Zu $a \in \mathbb{R}$ ist $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + ax$ stetig und abgeschlossen (später leicht dank Einpunktkompaktifizierung), aber offen nur für $a \geq 0$, dann sogar ein Homöomorphismus. Für $a > 0$ ist f_a ein Diffeomorphismus.



Für $a < 0$ hat f_a ein lokales Maximum $x_0 < 0$ bzw. Minimum $x_1 > 0$. Darum ist $U =]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subseteq \mathbb{R}$ offen, das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ aber nicht!

Stetige Abbildungen: Homöomorphismen

D205

Definition D2A: Homöomorphismen

Ein **Homöomorphismuspaar** $(f, g) : (X, \mathcal{T}_X) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$ besteht aus stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

In diesem Fall nennen wir die Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ **homöomorph**, geschrieben $(X, \mathcal{T}_X) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$ oder kurz $X \cong Y$, falls beide Topologien aus dem Kontext klar sind, etwa $\mathbb{R} \cong]-1, 1[$ mit euklidischen Topologien.

Erinnerung / Übung: Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation. Das gilt allgemein für Isomorphie (etwa strukturerhaltende Bijektion).

Pars pro toto: Die Kurzschreibweise $X \cong Y$ ist bequem, aber gefährlich. Die Ausführung $(f, g) : (X, \mathcal{T}_X) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist präzise und informativ!

Genau dann definiert $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ einen Homöomorphismus, wenn f stetig und bijektiv ist und auch die Umkehrfunktion f^{-1} stetig ist.

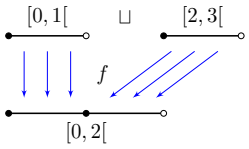
Bemerkung: Für jede Bijektion $f : X \leftrightarrows Y$ sind äquivalent:
(1) $f^{-1} : Y \to X$ ist stetig, (2) f ist offen, (3) f ist abgeschlossen.

Stetige Bijektionen sind noch keine Homöomorphismen!

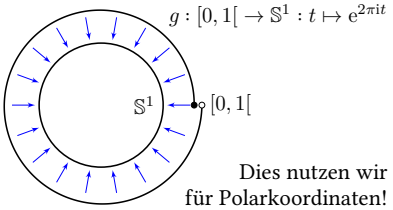
D206

Bemerkung D2C: bijektiv und stetig

Ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so kann f^{-1} dennoch unstetig sein!



Bijektiv und stetig, aber nicht offen!



Dies nutzen wir für Polarkoordinaten!

⚠ Wir nutzen hier die euklidischen (Teilraum-)Topologien. Bezüglich der Ordnungstopologien ist f ein Homöomorphismus. Bezüglich der französischen Eisenbahnmetrik d_{SNCF} auf $\mathbb{R}^2$ ist g offen.

Universelles Gegenbeispiel: Die Identität $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ ist genau dann stetig, wenn $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$ gilt, genau dann offen, wenn $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ gilt.

Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!

D207

Beispiel D2E: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Auf $\mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})$ betrachten wir die linearen Abbildungen

$$D : \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^0 : F \mapsto f, \qquad f(x) = \lim_{t \to x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x},$$

$$I : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 : f \mapsto F, \qquad F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dank HDI gilt $DI(f) = f$ und $ID(F) = F - F(a)$. Wir erhalten so

$$(I, D) : \mathcal{C}^0 \cong \mathcal{C}^1_0 \quad := \{ F \in \mathcal{C}^1 \mid F(a) = 0 \}.$$

Bezüglich der Supremumsnormen ist I stetig, genauer gilt

$$|F(x)| = \left| \textstyle\int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{t=a}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq (b - a) \cdot |f|_{[a,b]}.$$

Leider ist D nicht stetig, wie die Folge $G_n(x) = \sin(n^2 x)/n$ in $\mathcal{C}^1$ zeigt: Für große n gilt $|G_n|_{[a,b]} = 1/n \searrow 0$, aber $|G_n'|_{[a,b]} = n \nearrow \infty$. Was tun? Auf $\mathcal{C}^1$ verfeinern wir die Supremumsnorm zu $|F|_{\mathcal{C}^1} := |F|_{[a,b]} + |F'|_{[a,b]}$.

Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!

D208
Erläuterung

Den HDI kennen Sie schon lange, sogar schon aus der Schule, richtig erklärt und bewiesen aus dem ersten Semester Analysis. Auch Beispiele wie $G_n(x) = \sin(n^2 x)/n$ sind Ihnen vertraut. Griffiger Slogan: *Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!*

Dieses Beobachtung motiviert, auf den Räumen $\mathcal{C}^k$ nicht einfach nur die Supremumsnorm zu betrachten: Diese ignoriert alle Ableitungen! Für $f \in \mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})$ nutzt man daher als $\mathcal{C}^k$–Norm

$$|f|_{\mathcal{C}^k} = \sum_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]} \quad \text{oder} \quad \left(\sum_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]}^p \right)^{1/p} \quad \text{oder} \quad \max_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]}.$$

Dies sind Normen auf $\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})$ und untereinander äquivalent.

Verallgemeinert für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$ erhalten wir so die Sobolev–Normen und durch Vervollständigung die Sobolev–Räume. Sie sind Grundlage für die Lösung partieller Differentialgleichungen, sie dienen als natürliche Definitionsbereiche der Differentialoperatoren und ebenso zur Fehlerabschätzungen numerischer Näherungsverfahren.

Umgebungen eines Punktes

D301

Definition D3A: Umgebung eines Punktes

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $a \in X$ ein Punkt. Eine Menge $O \subseteq X$ heißt **offene Umgebung von** a in $(X, \mathcal{T})$, wenn $a \in O \in \mathcal{T}$ gilt.

Das System aller offenen Umgebungen bezeichnen wir mit

$$\mathcal{U}_a^\circ(X, \mathcal{T}) := \{ O \in \mathcal{T} \mid a \in O \}.$$

Allgemeiner nennen wir $U \subseteq X$ eine **Umgebung von** a in $(X, \mathcal{T})$, wenn U eine offene Umgebung umfasst, wenn also $O \in \mathcal{T}$ existiert mit $a \in O \subseteq U$.

Das System aller Umgebungen von a in $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{U}_a(X, \mathcal{T}) := \{ U \subseteq X \mid \exists O \in \mathcal{T} : a \in O \subseteq U \}.$$

Ebenso definieren wir (offene) Umgebungen einer Menge $M \subseteq X$.

Beispiel: In $(\mathbb{R}, \leq)$ ist $]s, t[$ mit $s < a < t$ eine offene Umgebung von a. Auch $[s, t]$ sowie $[s, t[$ und $]s, t]$ sind Umgebungen von a, aber nicht offen.

Offene Mengen und Umgebungen

D302

Proposition D3C: offene Mengen und Umgebungen

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte $x \in U$ ist.

Beweis: „⇒“: Ist U offen in $(X, \mathcal{T})$, dann ist U Umgebung jedes Punktes $x \in U$ nach Definition D3A. „⇐“: Ist $U \subseteq X$ eine Umgebung jedes Punktes $x \in U$, dann existiert zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x \subseteq U$. Somit ist $U = \bigcup_{x \in U} O_x$ offen dank (O3) in D1A. QED

Definition D3E: Umgebungsbasis

Eine Familie $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a$ heißt **Umgebungsbasis** von a im Raum $(X, \mathcal{T})$, wenn jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_a$ eine Basisumgebung $V \in \mathcal{B}_a$ enthält:

$$\mathcal{U}_a \overset{!}{=} \{ U \subseteq X \mid \exists V \in \mathcal{B}_a : V \subseteq U \}.$$

Somit bestimmt $\mathcal{B}_a$ das gesamte Umgebungssystem $\mathcal{U}_a$ von a in $(X, \mathcal{T})$, die Basisumgebungen $V \in \mathcal{B}_a$ *erzeugen* alle Umgebungen $U \in \mathcal{U}_a$.

Umgebungsbasen eines Punktes

D303

Beispiele: Ein Punkt $a \in X$ erlaubt (i.A. viele) Umgebungsbasen:

Das System $\mathcal{B}_a := \mathcal{U}_a$ *aller* Umgebungen ist eine UBasis von a in $(X, \mathcal{T})$, ebenso das System $\mathcal{B}'_a := \mathcal{U}_a^\circ$ aller *offenen* Umgebungen von a.

Im metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Bälle (C2L) eine UBasis, $\mathcal{B}_a = \{ B(a, r) \mid r \in \mathbb{R}_{>0} \}$, ebenso $\mathcal{B}'_a = \{ B(a, r_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ für $r_n \searrow 0$.

Die abgeschlossenen Bälle $\{ \bar{B}(a, r_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ bilden ebenso eine UBasis. Im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ sind dies sogar kompakte Umgebungen.

Im diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$ eine UBasis von $a \in X$. Genau dann ist $\mathcal{B}'_a \subseteq \mathcal{U}_a$ eine UBasis von a, wenn $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{B}'_a$ gilt.

Im indiskreten Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist $\mathcal{B}_a = \{X\}$ die einzige UBasis von a. Das ist die einzige Topologie, für die alle UBasen eindeutig sind.

Für $a \in \mathbb{R}$ bilden die Intervalle die UBasis $\mathcal{B}_a = \{]s, t[\mid s < a < t \text{ in } \mathbb{R} \}$, ebenso $\mathcal{B}'_a = \{]s_n, t_n[\mid n \in \mathbb{N} \}$ für monotone Folgen $s_n \nearrow a \swarrow t_n$.

Ist $(X, <)$ eine total geordnete Menge, dann bilden die Intervalle $]s, t[$ mit $s < a < t$ und $s, t \in \hat{X} = X \sqcup \{\pm\infty\}$ eine UBasis von a im Raum $(X, \mathcal{T}_<)$.

Das erste Abzählbarkeitsaxiom

D304

Definition D3F: das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **erstabzählbar im Punkt** $a \in X$, wenn er eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$ besitzt. Gilt dies in jedem Punkt $a \in X$, so heißt $(X, \mathcal{T})$ **erstabzählbar**.

Beispiel: Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist erstabzählbar dank $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$, ebenso jeder indiskrete Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ dank $\mathcal{B}_a = \{X\}$.

Beispiel D3G: Jeder metrische Raum ist erstabzählbar.

Jeder metrische Raum (X, d) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA): Zu $a \in X$ sind die Bälle $B(a, 2^{-k})$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsbasis.

Anwendung: Auf jeder überabzählbaren Menge X ist die koendliche / koabzählbare Topologie nicht erstabzählbar, somit nicht metrisierbar.

Bemerkung: Sei $\{ V_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ eine UBasis von a in $(X, \mathcal{T})$. Gemäß D3A existiert $V_n^\circ \in \mathcal{T}$ mit $a \in V_n^\circ \subseteq V_n$, also eine offene UBasis $\{ V_n^\circ \mid n \in \mathbb{N} \}$. Für $U_n := V_0^\circ \cap \cdots \cap V_n^\circ$ ist auch $\{ U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots \}$ eine UBasis.

Konvergenz von Folgen: Definition

D305

Definition D3I: Konvergenz und Häufungspunkte

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis, etwa die triviale Wahl $\mathcal{B}_a = \mathcal{U}_a$.

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Raum $(X, \mathcal{T})$ **konvergiert** gegen $a \in X$, wenn jede Umgebung U von a in $(X, \mathcal{T})$ schließlich alle Folgenglieder enthält.

$$\begin{aligned} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to a \text{ in } (X, \mathcal{T}) \quad &:\iff \quad \forall U \in \mathcal{U}_a \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U \\ &\iff \quad \forall U \in \mathcal{B}_a \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U \end{aligned}$$

Schwächer heißt $a \in X$ **Häufungspunkt** der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn jede Umgebung U von a in $(X, \mathcal{T})$ unendlich viele Folgenglieder enthält:

$$\begin{aligned} (x_n)_{n \in N} \nrightarrow a \text{ in } (X, \mathcal{T}) \quad &:\iff \quad \forall U \in \mathcal{U}_a \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U \\ &\iff \quad \forall U \in \mathcal{B}_a \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U \end{aligned}$$

Statt „$x_n \to a$“ schreibt man auch „$\lim x_n = a$“; das kann gefährlich sein. Ehrlicher wäre die Schreibweise als Menge $\operatorname{Lim} x_n := \{ a \in X \mid x_n \to a \}$.

Konvergenz von Folgen: Beispiele

D306

Beispiele: In jedem metrischen Raum (X, d) ist die Konvergenz $x_n \to a$ bezüglich der Metrik d (C3A) und der metrischen Topologie $\mathcal{T}_d$ (D3I) gleichbedeutend dank der Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \{ B(a, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}$.

In $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit der Ordnungstopologie gilt $x_n \to +\infty$ genau dann, wenn zu jeder Schranke $s \in \mathbb{R}$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n > s$ für alle $n \geq m$ gilt. Entsprechendes gilt für $x_n \to -\infty$.

Im diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist $\{a\}$ offen und somit eine Umgebung. Hier konvergieren daher nur die schließlich konstanten Folgen.

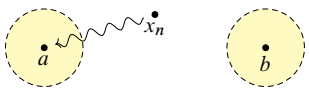
Im indiskreten Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist die Menge X die einzige Umgebung. Hier konvergiert daher jede Folge gegen jeden Punkt („chaotisch“).

Definition D3J: Hausdorff–Eigenschaft

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **hausdorffsch** (T_2) oder **separiert**, wenn zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X disjunkte Umgebungen existieren, das heißt, es gibt U, V mit $a \in U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ sowie $U \cap V = \emptyset$.

Hausdorff–Eigenschaft und eindeutige Grenzwerte

D307



Satz D3K: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, dann hat jede Folge in $(X, \mathcal{T})$ höchstens einen Grenzwert. Die Umkehrung gilt, falls $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar ist.

Beweis: „⇒“: Sei $x_n \to a$. Zu $b \neq a$ existieren dank Hausdorff $U \in \mathcal{U}_a$ und $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \to a$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq m$. Folglich gilt $x_n \notin V$, somit $x_n \not\to b$.

„⇐“: Seien a, b nicht separiert in $(X, \mathcal{T})$, das heißt, je zwei Umgebungen von a und b schneiden sich. Ist $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar, so existiert eine UBasis $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ von a und $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots$ von b. Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x_n \in U_n \cap V_n$. Es folgt $x_n \to a$ und $x_n \to b$, also $a = b$. QED

Hausdorff–Eigenschaft und eindeutige Grenzwerte

D308
Erläuterung

⚠ Auf Erstabzählbarkeit können wir in Satz D3K nicht verzichten!

Beispiel: Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ die koabzählbare Topologie (D1I). Hierin gilt $x_n \to a$ genau dann, wenn die Folge (x_n) schließlich konstant ist, also ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n = a$ für alle $n \geq m$ gilt. Ist X überabzählbar, dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht hausdorffsch.

⚠ Der Folgenbegriff ist also zu schwach, um Hausdorff zu garantieren. Das liegt an der restriktiven Indexmenge $\mathbb{N}$. Solche Probleme lösen wir, indem wir Folgen verallgemeinern zu **Netzen** (D8D) oder **Filtern** (D8L).

☺ Für jeden metrischen Raum (X, d) ist die Topologie $\mathcal{T}_d$ hausdorffsch (C2O) und erstabzählbar (D3G). Diese hilfreichen Eigenschaften sind wir gewohnt vom Raum $\mathbb{R}^n$. Allgemein müssen wir sie prüfen oder fordern.

Übung: Ist die Ordnungstopologie $\mathcal{T}$ auf $(X, <)$ hausdorffsch?

Lösung: Ja. Beweis: Seien $a < b$ in $(X, <)$. Wenn es ein $z \in X$ mit $a < z < b$ gibt, so sind $a \in X_{<z} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>z} \in \mathcal{T}$ disjunkte offene Umgebungen; andernfalls genügen $a \in X_{<b} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>a} \in \mathcal{T}$.

Stetigkeit und Offenheit von Abbildungen

D309

Definition D3n: Stetigkeit und Offenheit in einem Punkt

Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume, $x \mapsto y$, sowie $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T}_X)$ und $\mathcal{B}_y \subseteq \mathcal{U}_y(Y, \mathcal{T}_Y)$ Umgebungsbasen.

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textbf{stetig in } x &:\iff \forall V \in \mathcal{U}_y : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \\ &\iff \forall V \in \mathcal{B}_y : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \\ f \text{ ist } \textbf{offen in } x &:\iff \forall U \in \mathcal{U}_x : f(U) \in \mathcal{U}_y \\ &\iff \forall U \in \mathcal{B}_x : f(U) \in \mathcal{U}_y \end{aligned}$$

Beispiel: Für metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) nutzen wir UBasen der offenen Bälle. Wir erhalten damit sofort die übliche ε–δ–Definition:

- Genau dann ist $f : X \to Y$ stetig in $x \mapsto y$, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $f(B(x,\delta)) \subseteq B(y,\varepsilon)$ gilt.
- Genau dann ist $f : X \to Y$ offen in $x \mapsto y$, wenn zu jedem $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $B(y,\varepsilon) \subseteq f(B(x,\delta))$ gilt.

Lokale Homöomorphismen

D310

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}_X) & \xrightarrow[\text{stetig}]{f} & (Y, \mathcal{T}_Y) \\ {\scriptstyle \text{inc}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \text{inc}} \\ (U, \mathcal{T}_U) & \xrightarrow[\text{homöo}]{f|_U^V} & (V, \mathcal{T}_V) \end{array}$$

Definition D3o: lokaler Homöomorphismus

Wir nennen $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ einen **lokalen Homöomorphismus um** $x \in X$ mit Bild $y = f(x)$, falls $U \in \mathcal{U}^\circ_x(X, \mathcal{T}_X)$ und $V \in \mathcal{U}^\circ_y(Y, \mathcal{T}_Y)$ existieren mit $f(U) = V$, sodass $f|_U^V : U \to V$ ein Homöomorphismus ist. Gilt dies um jeden Punkt $x \in X$, so ist f ein **lokaler Homöomorphismus**.

Beispiele: Jeder lokale Homöomorphismus ist stetig und offen.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist um $x \neq 0$ ein lokaler Homöo, lokale Umkehrung $y \mapsto \pm\sqrt{y}$. In $x = 0$ ist f nicht offen, auch nicht lokal injektiv.

Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ ist stetig und offen, auch in $z = 0$.
Um jeden Punkt $z \neq 0$ ist sie ein lokaler Homöo, nicht jedoch in $z = 0$.
Lokale Umkehrfunktionen sind Zweige der komplexen Wurzelfunktion.

Stetigkeit vs Folgenstetigkeit

D311

Satz D3p: Stetigkeit vs Folgenstetigkeit

Ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig in $a \in X$, dann sendet f jede konvergente Folge $(x_n) \to a$ in X auf eine konvergente Folge $(f(x_n)) \to b = f(a)$ in Y.

Die Umkehrung gilt, falls a in $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare UBasis besitzt.

Ist der Startraum $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar, zum Beispiel metrisierbar, dann ist die Stetigkeit von f äquivalent zur Folgenstetigkeit.

Beweis: „⇒“: Zu $V \in \mathcal{U}_b$ gilt $U := f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_a$. Zu $x_n \to a$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq m$, somit $f(x_n) \in V$. Also $f(x_n) \to f(a)$.

„⇐“: Ist f in a nicht stetig, so existiert $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U := f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}_a$. Sei $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ eine Umgebungsbasis von a. Für jeden Index $n \in \mathbb{N}$ gilt $U_n \not\subseteq U$, denn andernfalls wäre U eine Umgebung von a. Wir wählen $x_n \in U_n \setminus U$ und erhalten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ gemäß D3i. Wegen $x_n \notin U$ gilt $f(x_n) \notin V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f(x_n) \not\to f(a)$. QED

Stetigkeit vs Folgenstetigkeit

D312 Erläuterung

⚠ Auf Erstabzählbarkeit können wir in Satz D3p nicht verzichten!

Beispiel: Sei X überabzählbar, etwa $X = \mathbb{R}$. Hierauf sei $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ die diskrete Topologie (D1b) und $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$ die koabzählbare Topologie (D1i). Die identische Abbildung $f : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}) : x \mapsto x$ ist nicht stetig, doch folgenstetig: Konvergiert $x_n \to a$ in $(X, \mathcal{T}')$, so ist (x_n) schließlich konstant gleich a. Daher konvergiert $(f(x_n))$ in $(X, \mathcal{T})$ gegen $f(a)$.

⚠ Hier sind Folgen also zu schwach, um die Unstetigkeit zu erkennen. Das liegt an der restriktiven Indexmenge $\mathbb{N}$. Solche Probleme lösen wir, indem wir Folgen verallgemeinern zu **Netzen** (D8d) oder **Filtern** (D8l).

Satz D3s: Konvergenz von Teilfolgen

Wenn eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ gegen a in $(X, \mathcal{T})$ konvergiert, dann ist a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Umkehrung gilt, falls a in $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare UBasis besitzt.

Übung: Führen Sie dies nach obigem Vorbild aus!

Re/Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

D313

Satz D3v: Re/Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zu jedem $x \in X$ sei $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis. Diese erfreuen sich folgender Eigenschaften.

UB1: Es gilt $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$, und für alle $U \in \mathcal{B}_x$ gilt $x \in U \subseteq X$.

Umgebungen sind stabil unter (paarweisen, also endlichen) Schnitten:

UB2: Zu $U, V \in \mathcal{B}_x$ existiert $W \in \mathcal{B}_x$, sodass $W \subseteq U \cap V$.

Jede Umgebung enthält eine offene Umgebung, das heißt ausführlich:

UB3: In jeder Menge $U \in \mathcal{B}_x$ liegt eine Teilmenge V mit $x \in V \subseteq U$, sodass gilt: Zu jedem Punkt $y \in V$ existiert $W \in \mathcal{B}_y$ mit $W \subseteq V$. (D3c)

Erfüllt umgekehrt eine Familie $(\mathcal{B}_x \subseteq \mathfrak{P}X)_{x\in X}$ die Bedingungen (UB1–2), dann definiert sie auf X eine Topologie

$$\mathcal{T} := \{ O \subseteq X \mid \forall x \in O \;\; \exists U \in \mathcal{B}_x : U \subseteq O \}.$$

Die letzte Bedingung (UB3) garantiert $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T})$, somit ist $\mathcal{B}_x$ tatsächlich eine Umgebungsbasis des Punktes x im Raum $(X, \mathcal{T})$.

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

D314 Erläuterung

☺ Das ist ein sehr einfaches, doch oft nützliches Konstruktionsprinzip!

Aufgabe: Was ist hier zu zeigen? Zeigen Sie es!
Alles liegt explizit vor, rechnen Sie es sorgfältig nach.

Beweis: Ist $\mathcal{B}_x \subseteq \mathfrak{P}X$ eine Umgebungsbasis des Punktes x in $(X, \mathcal{T})$, dann folgen die Eigenschaften (UB1–3) unmittelbar aus der Definition.

Nehmen wir umgekehrt an, die Familie $(\mathcal{B}_x \subseteq \mathfrak{P}X)_{x\in X}$ erfüllt (UB1–2). Das so definierte Mengensystem $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}X$ erfüllt dann (O1) dank (UB1). Für (O2) ist nachzuweisen, dass für $U, V \in \mathcal{T}$ auch $W = U \cap V$ in $\mathcal{T}$ liegt. Zu jedem $x \in W$ existieren $U_x, V_x \in \mathcal{B}_x$ mit $U_x \subseteq U$ und $V_x \subseteq V$. Dank (UB2) existiert $W_x \in \mathcal{B}_x$ mit $W_x \subseteq U_x \cap V_x \subseteq U \cap V = W$. Also gilt $W \in \mathcal{T}$. Axiom (O3) ist trivialerweise erfüllt.

Somit ist $\mathcal{T}$ tatsächlich eine Topologie auf X. Die dritte Bedingung (UB3) garantiert $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T})$. Nach Konstruktion von $\mathcal{T}$ ist demnach $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis von x in $(X, \mathcal{T})$. QED

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

D315

Beispiel D3w: metrische Topologie aus Umgebungsbasen

Jede Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$ definiert eine Topologie $\mathcal{T}_d$ gemäß D1d:
Als Umgebungsbasis jedes Punktes $x \in X$ wählen wir die offenen Bälle,

$$\mathcal{B}_x = \{ B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}.$$

Die Bedingung (UB1) ist trivialerweise erfüllt, und (UB2) gilt dank

$$B(x,\varepsilon) \cap B(x,\varepsilon') \;\supseteq\; B(x, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Dank Satz D3v erhalten wir daraus die Topologie

$$\mathcal{T}_d = \{ O \subseteq X \mid \forall x \in O \;\; \exists B(x,\varepsilon) \in \mathcal{B}_x : B(x,\varepsilon) \subseteq O \}.$$

Dank Dreiecksungleichung ist jeder offene Ball offen (C2m), somit gilt auch die letzte Bedingung (UB3), und daher ist $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis des Punktes x im Raum $(X, \mathcal{T}_d)$.

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

D316

Beispiel D3x: Ordnungstopologie aus Umgebungsbasen

Jede Totalordnung $<$ auf X definiert eine Topologie $\mathcal{T}_<$ gemäß D1m:
Als Umgebungsbasis jedes Punktes $x \in X$ wählen wir offene Intervalle,

$$\mathcal{B}_x = \{]a,b[\mid a, b \in X \sqcup \{\pm\infty\},\; a < x < b \}.$$

Trivialerweise gelten (UB1) und (UB3), und (UB2) gilt dank

$$]a,b[\cap]a',b'[\;\supseteq\;]\max\{a,a'\}, \min\{b,b'\}[.$$

Dank Satz D3v erhalten wir daraus die Topologie

$$\mathcal{T}_< = \{ O \subseteq X \mid \forall x \in O \;\; \exists]a,b[\in \mathcal{B}_x :]a,b[\subseteq O \}.$$

☺ Die Konstruktion einer Topologie aus vorgegebenen UBasen ist oft sehr natürlich und bequem, so wie hier in diesen Beispielen. Wir wollen dies nun auf erste wichtige Funktionenräume anwenden.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

D401

Aufgabe: Lässt sich auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die punktweise / kompakte / gleichmäßige Konvergenz topologisieren / metrisieren / normieren? Wir wollen also eine Topologie / Metrik / (Pseudo/Halb)Norm auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ finden, die genau die gewünschte Konvergenz induziert, oder ihre Unmöglichkeit beweisen.

Vorgelegt sei eine Folge reeller Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \ \exists m \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Zu $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die (x,ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$U(f; x, \varepsilon) := \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid |f(x) - g(x)| < \varepsilon \}.$$

Hier gilt (UB1,3), nicht (UB2). Zu $J = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ definieren wir

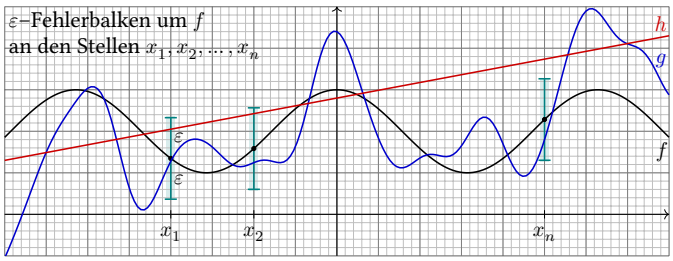
$$U(f; J, \varepsilon) := \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid |f - g|_J < \varepsilon \} = \textstyle\bigcap_{x \in J} U(f; x, \varepsilon).$$

Diese Umgebungen erfüllen nun sowohl (UB1,3) als auch (UB2), denn

$$U(f; J, \varepsilon) \ \cap\ U(f; J', \varepsilon') \quad \supseteq \quad U(f;\ J \cup J',\ \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

D402



Definition D4A: Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f; J, \varepsilon)$ definieren gemäß D3v auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ der **punktweisen Konvergenz**: Genau dann ist eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen in $\mathcal{T}_{\text{pw}}$, wenn sie zu jedem $f \in O$ eine Umgebung $U(f; J, \varepsilon)$ enthält.

$$\{ O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall f \in O\ \ \exists J = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}\ \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : U(f; J, \varepsilon) \subseteq O \}$$

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

D403

Satz D4B: Punktweise Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist nicht metrisierbar.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}[x]$ ist hausdorffsch, aber nicht erstabzählbar, also nicht metrisierbar.

Beweis: (T_2) Zu $f \neq g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x_0) - g(x_0)| > 0$ gilt dann $U(f; x_0, \varepsilon) \cap U(g; x_0, \varepsilon) = \emptyset$.

(1AA) Seien $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Umgebungen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $U(f; J_n, \varepsilon_n) \subseteq U_n$ mit $J_n \subseteq \mathbb{R}$ endlich und $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$. Somit ist $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar, aber $\mathbb{R}$ überabzählbar (B2N), also $J \subsetneq \mathbb{R}$.
Wir wählen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus J$ und zeigen $U_n \not\subseteq U(f; x_0, 1)$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $g_n = f + h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|h_n(x_0)| \geq 1$ und $h_n|_{J_n} = 0$. Somit gilt $g_n \in U(f; J_n, \varepsilon_n) \subseteq U_n$, aber $g_n \notin U(f; x_0, 1)$, also $U_n \not\subseteq U(f; x_0, 1)$.
Demnach ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Umgebungsbasis von f in $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\text{pw}})$. QED

Ist X überabzählbar, so ist $\mathbb{R}^X$ nicht erstabzählbar, also nicht metrisierbar. Hingegen sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ erstabzählbar, sogar metrisierbar, siehe D4E.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

D404
Erläuterung

Unsere Konstruktion der Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist im Rückblick zwar recht direkt und einfach, doch sie scheint etwas mühselig. Wir fragen uns daher: Geht es auch einfacher, etwa durch eine geeignete Metrik? Die erstaunliche und lehrreiche Antwort ist: Nein!

Wie beweisen wir, dass ein Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht metrisierbar ist? Aufgeben genügt nicht, wir müssen ein Hindernis benennen!

Jede metrische Topologie hat zwei wichtige Eigenschaften:
Sie ist hausdorffsch (D3J) und erstabzählbar (D3F).

Diese Kriterien sind also notwendig zur Metrisierbarkeit (D1E): Ist $\mathcal{T}$ nicht hausdorffsch oder nicht erstabzählbar, so auch nicht metrisierbar!

Das erste Kriterium, die Hausdorff–Eigenschaft, ist für $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\text{pw}})$ erfüllt, das zweite Kriterium, die Erstabzählbarkeit, jedoch nicht! Das gilt selbst auf den Teilräumen $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathbb{R}[x]$. Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}[x]$ wird von keiner Metrik induziert.

Wir verallgemeinern dies später zu Produkttopologien.

Gleichmäßige Konvergenz

D405

Gegeben sei eine Folge reeller Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \ \exists m \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

Gleichmäßige Konvergenz ist die Konvergenz in der Supremumsmetrik:

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad :\Leftrightarrow \quad |f - f_n|_{\mathbb{R}} \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \ \exists m \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}\ \ \forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir daher die ε–Umgebung von $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

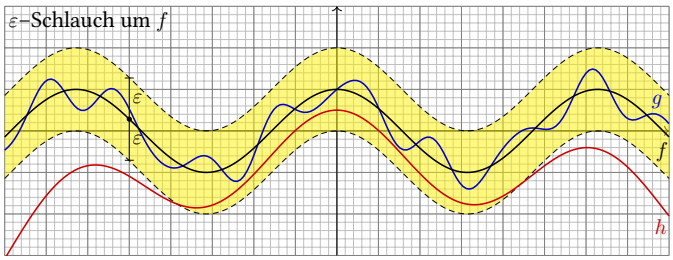
$$U(f, \varepsilon) := \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid |f - g|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \}.$$

Diese Umgebungen erfüllen die erforderlichen Bedingungen (UB1–3), insbesondere gilt (UB2) dank $U(f, \varepsilon) \cap U(f, \varepsilon') = U(f, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\})$.

☺ Das geht erfreulich leicht. Warum? Normen sind ein wunderbares Werkzeug; wo sie uns zur Verfügung stehen, nutzen wir sie gerne!

Gleichmäßige Konvergenz

D406



Definition D4C: Topologie $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f, \varepsilon)$ definieren gemäß D3v auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ der **gleichmäßigen Konvergenz**: Genau dann ist $O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f, \varepsilon)$ enthält.

$$\mathcal{T}_{\text{uni}} = \{ O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall f \in O\ \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : U(f, \varepsilon) \subseteq O \}$$

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

D407
Erläuterung

Definition C3P: punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Gegeben sei eine Menge X und ein metrischer Raum (Y, d_Y) sowie eine Folge von Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots, f : X \to Y$. Wir definieren:

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in X : d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in X\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \ \exists m \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad :\Leftrightarrow \quad d(f_n, f) = |d_Y(f_n, f)|_X \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \ \exists m \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}\ \ \forall x \in X : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

⚠ Bei punktweiser Konvergenz kann die Stetigkeit zerbrechen!

Beispiel: Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$.
Die Konvergenz $f_n \to f$ gilt punktweise, aber nicht gleichmäßig:
Das Supremum des Abstandes ist $|f_n - f|_{[0,1]} = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

D408
Erläuterung

Satz C3Q: Die gleichmäßige Konvergenz erhält Stetigkeit.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f_n : X \to Y$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f : X \to Y$ konvergiert.

1. Sind alle f_n stetig in $a \in X$ / auf ganz X, dann auch f.
2. Sind alle f_n gleichmäßig stetig auf X, dann auch f.
3. Sind alle f_n sogar L–lipschitz–stetig, dann auch f.

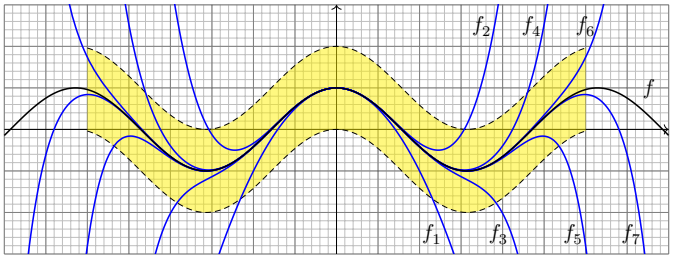
Übung: Wiederholen Sie hierzu den $\varepsilon/3$–Beweis aus der Analysis!

Beweis: (1) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $d(f_n, f) \to 0$ existiert ein Index $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n, f) \leq \varepsilon/3$. Da f_n stetig ist, existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, a) < \delta$ die Ungleichung $d_Y(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3$ gilt. Daraus folgt:
$d_Y(f(x), f(a)) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(a)) + d_Y(f_n(a), f(a)) < \varepsilon$
Die Aussagen (2) und (3) beweist man genauso. Übung! QED

Kompakte Konvergenz

D409

$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$



Eine Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **konvergiert kompakt** gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn auf jedem kompakten Intervall $K = [-r, r]$ gleichmäßige Konvergenz gilt:

$$f_n \to f \text{ kompakt} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f - f_n|_{[-r,r]} \to 0$$

Übung: Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiert kompakt im Inneren ihres Konvergenzkreises $B(z_0, \rho)$ mit $\rho = 1/\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}$.

Kompakte Konvergenz

D410

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die (K, ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f; K, \varepsilon) := \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid |f - g|_K < \varepsilon \}.$$

Diese Umgebungen erfüllen (UB1–3), insbesondere gilt (UB2) dank

$$U(f; K, \varepsilon) \cap U(f; K', \varepsilon') \quad \supseteq \quad U(f;\ K \cup K',\ \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Für $K \subset \mathbb{R}$ endlich ist dies zu schwach, für $K = \mathbb{R}$ oft zu stark.
Für $K \Subset \mathbb{R}$ kompakt erhalten wir den ausgewogenen Kompromiss!

Definition D4D: Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f; K, \varepsilon)$ definieren gemäß D3V auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ der **kompakten Konvergenz**: Genau dann ist eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f; K, \varepsilon)$ enthält:

$$\mathcal{T}_{\text{kpkt}} = \{ O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall f \in O\ \ \exists r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\ \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : U(f; [-r, r], \varepsilon) \subseteq O \}$$

☺ Ebenso für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Ist X lokal-kompakt, so heißt dies auch **lokal gleichmäßige Konvergenz**. Sie erhält die Stetigkeit! (C3Q)

Die kompakte Konvergenz ist nicht normierbar.

D411

Übung D4F: Die kompakte Konvergenz ist nicht normierbar.

(1) Es gelten strikte Inklusionen $\mathcal{T}_{\text{pw}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{kpkt}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{uni}}$ (von gröber zu feiner). Hier ist $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ sogar pseudonormierbar, aber $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ ist nicht metrisierbar.
(2) Es gilt (a) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \ell^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supseteq \mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und (b) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}[x]$. Auf welchen dieser Räume ist die kompakte Konvergenz normierbar?

Beweis: (2) Auf keinem! (2a) Sei $\|\text{-}\| : \mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Pseudonorm. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f_n \neq 0$ und Träger in $[n-1, n+1]$. Es gilt $\|f_n\| \neq 0$, skaliert $\|f_n\| \geq 1$, also $\|f_n\| \not\to 0$, aber $f_n \to 0$ kompakt.

(2b) Angenommen, die Pseudonorm $\|\text{-}\| : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ induziert kompakte Konvergenz. Für jede Polynomfunktion $f \in \mathbb{R}[x]$ gilt $\|f\| < \infty$, denn für $\lambda_n \searrow 0$ gilt $\lambda_n f \to 0$ kompakt, also $\|\lambda_n f\| = |\lambda_n| \|f\| \searrow 0$, somit $\|f\| < \infty$.
Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) = a_n x^n$ mit $\|f_n\| = 1$. Wegen $\|f_n\| \not\to 0$ gilt $f_n \not\to 0$ kompakt: Es gibt ein Intervall $[-r, r] \subseteq \mathbb{R}$ mit $|f_n|_{[-r,r]} = a_n r^n \not\to 0$.
Für $g_n = f_n / 2^n$ gilt $\|g_n\| = 1/2^n \to 0$, aber $|g_n|_{[-2r,2r]} = a_n r^n \not\to 0$. QED

Die kompakte Konvergenz ist metrisierbar.

D412

Zu $r \in \mathbb{N}$ ist die gleichmäßige Konvergenz auf $[-r, r]$ metrisierbar, sogar pseudohalbnormierbar durch die Supremumsnorm $|\text{-}|_{[-r,r]}$.
Auf $\mathscr{C}([-r, r], \mathbb{R})$ ist dies eine Norm, auf $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nur eine Halbnorm.
Wir stutzen dies zur der äquivalenten, aber endlichen Metrik (C3L)
$d_r(f, g) = |f - g|^*_{[-r,r]} = \sup\{ |f(x) - g(x)|^* \mid x \in [-r, r] \} \in [0, 1]$.
Auf $\mathscr{C}([-r, r], \mathbb{R})$ ist dies eine Metrik, auf $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nur eine Halbmetrik.

Satz D4E: Metrisierung der kompakten Konvergenz

Die Halbmetriken $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fassen wir zusammen zu

$$d : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to [0, 1] : d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} d_k(f, g).$$

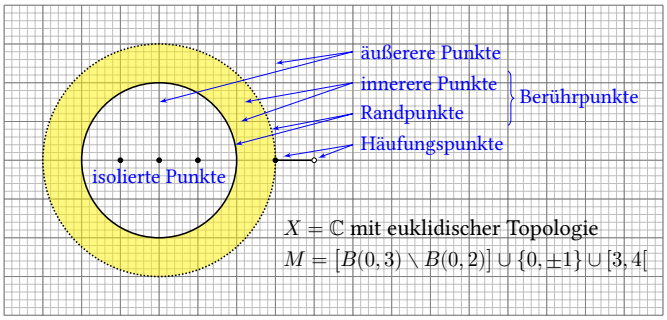
Dies ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, und es gilt $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\text{kpkt}}$.

Übung: Zeigen Sie (M0–3) sowie $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ und $\mathcal{T}_d \supseteq \mathcal{T}_{\text{kpkt}}$.
Beispiel: Der Vektorraum $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ ist hausdorffsch, metrisiert durch eine abz. Familie von Halbnormen (D4E), und vollständig (C3Q). Dies verallgemeinert Banach–Räume und heißt ein **Fréchet–Raum**.

Topologische Grundbegriffe

D501

Geometrisch-topologische Begriffe wie innerer Punkt und äußerer Punkt und Randpunkt scheinen anschaulich klar, etwa für Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Wie definiert man sie? Das ist wichtig, um damit sicher zu arbeiten, insbesondere in Situationen, wo unsere Anschauung versagt.



Topologische Grundbegriffe

D502

Definition D5A: topologische Grundbegriffe

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt...

innerer Punkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad M \in \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T})$
(Die Menge M ist eine Umgebung von x.)

äußerer Punkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad (X \setminus M) \in \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T})$
(Das Komplement $X \setminus M$ ist eine Umgebung von x.)

Randpunkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap M \neq \emptyset \neq U \setminus M$
(Jede Umgebung von x trifft sowohl M als auch $X \setminus M$.)

Berührpunkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap M \neq \emptyset$
(Jede Umgebung von x trifft die Menge M.)

isolierter Punkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \exists U \in \mathcal{U}_x : U \cap M = \{x\}$
(Eine genügend kleine Umgebung von x hat mit M nur x gemeinsam.)

Häufungspunkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_x : (U \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$
(Jede Umgebung von x trifft außer x mindestens einen Punkt von M.)

Inneres, Abschluss, Rand

D503

Die Menge aller inneren Punkte von M in $(X, \mathcal{T})$ heißt das **Innere** oder auch der **offene Kern** von M in $(X, \mathcal{T})$, geschrieben

$$\mathring{M} = K_{(X,\mathcal{T})}(M) := \{ x \in X \mid M \in \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T}) \} \overset{!}{=} \bigcup \{ U \subseteq M \mid U \in \mathcal{T} \}.$$

Das Innere ist demnach die größte offene Menge, die in M enthalten ist. Es gilt $M \supseteq M^\circ = (M^\circ)^\circ$. Genau dann ist M offen, wenn $M = M^\circ$ gilt.
Die Menge aller Berührpunkte von M in $(X, \mathcal{T})$ heißt der **Abschluss** oder auch die **abgeschlossene Hülle** von M in $(X, \mathcal{T})$, geschrieben

$$\overline{M} = H_{(X,\mathcal{T})}(M) := \{ x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T}) : U \cap M \neq \emptyset \} \overset{!}{=} \bigcap \{ A \supseteq M \mid X \setminus A \in \mathcal{T} \}.$$

Der Abschluss ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst. Es gilt $M \subseteq \overline{M} = \overline{\overline{M}}$. Genau dann ist M abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ gilt.
Kern und Hülle sind dual unter Komplementen, also $X \setminus M^\circ = \overline{X \setminus M}$.
Die Menge aller Randpunkte von M in $(X, \mathcal{T})$ ist der topologische **Rand**

$$\delta_{(X,\mathcal{T})}(M) := \overline{M} \setminus M^\circ = H_{(X,\mathcal{T})}(M) \setminus K_{(X,\mathcal{T})}(M).$$

Inneres, Abschluss, Rand

D504

⚠ Diese topologischen Begriffe sind **relativ**: Sie hängen nicht nur von der Menge M ab, sondern auch vom umgebenden Raum $(X, \mathcal{T})$. Daher ist die ausführliche Schreibweise $K_{(X,\mathcal{T})}(M)$ und $H_{(X,\mathcal{T})}(M)$ unter Angabe des Raumes $(X, \mathcal{T})$ präziser und vermeidet Missverständnisse. Die Kurzschreibweise M° und $\overline{M}$ ist oft bequemer, setzt jedoch voraus, dass der umgebende Raum aus dem Kontext eindeutig hervorgeht.

Beispiel: Wir betrachten die Teilmenge $M =]0,1[\cup]1,2] \cup \{3\}$ in jedem der drei Räume $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ jeweils mit der euklidischen Topologie:

In $\mathbb{R}_{>0}$ gilt:	$\mathring{M} =]0,1[\cup]1,2[,$	$\overline{M} =]0,2] \cup \{3\},$	$\delta M = \{1,2,3\}.$
In $\mathbb{R}$ gilt:	$\mathring{M} =]0,1[\cup]1,2[,$	$\overline{M} = [0,2] \cup \{3\},$	$\delta M = \{0,1,2,3\}.$
In $\mathbb{C}$ gilt:	$\mathring{M} = \emptyset,$	$\overline{M} = [0,2] \cup \{3\},$	$\delta M = [0,2] \cup \{3\}.$

Bemerkung: Sind zu $(X, \mathcal{T})$ Umgebungsbasen $(\mathcal{B}_x)_{x \in X}$ gegeben, oder eine Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert, so gilt:

$$\mathring{M} = \{ x \in X \mid \exists U \in \mathcal{B}_x : U \subseteq M \} = \{ x \in X \mid d(x, X \setminus M) > 0 \}$$
$$\overline{M} = \{ x \in X \mid \forall U \in \mathcal{B}_x : U \cap M \neq \emptyset \} = \{ x \in X \mid d(x, M) = 0 \}$$

Abschluss und Folgengrenzwerte

D505

In der Analysis haben Sie den Abschluss $\overline{A}$ einer Menge A im Raum (X, d) vielleicht definiert als die Menge aller Folgengrenzwerte von Folgen in A mit Grenwerten in X. Die Äquivalenz stiftet der folgende Satz:

Satz D5C: Abschluss und Folgengrenzwerte

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt.
Gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A, mit $a_n \to x$ in $(X, \mathcal{T})$, so gilt $x \in \overline{A}$.
Die Umkehrung gilt, falls x eine abzählbare Umgebungsbasis erlaubt.

Beweis: „⇒“: Es gelte $a_n \to x$. Jede Umgebung U von x in $(X, \mathcal{T})$ enthält schließlich alle Folgenglieder a_n, also $U \cap A \neq \emptyset$. Gemäß D5A gilt $x \in \overline{A}$.
„⇐“: Sei $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ eine UBasis von x. Aus $x \in \overline{A}$ folgt $A \cap U_n \neq \emptyset$. Wir wählen $a_n \in A \cap U_n$. Gemäß D3I gilt $a_n \to x$. QED

Korollar D5D: abgeschlossen und folgenabgeschlossen

Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist folgenabgeschlossen.
Die Umkehrung gilt, falls $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar ist.

Lokal-endliche Familien

D506

Definition D5F: lokal-endliche Familien

Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $A_i \subseteq X$ nennen wir...
endlich, wenn die Indexmenge I endlich ist,
endlich im Punkt $x \in X$, wenn $I_x = \{ i \in I \mid x \in A_i \}$ endlich ist,
punktweise endlich, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ endlich ist,
lokal-endlich um x im Raum $(X, \mathcal{T})$, wenn eine offene Umgebung U existiert, also $x \in U \in \mathcal{T}$, sodass $I_U = \{ i \in I \mid A_i \cap U \neq \emptyset \}$ endlich ist,
lokal-endlich im Raum $(X, \mathcal{T})$, falls dies um jedem Punkt $x \in X$ gilt.

Trivialerweise gilt $I \supseteq I_U \supseteq I_x$. Daraus folgen die Implikationen

$$\text{endlich} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{lokal-endlich} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{punktweise endlich}.$$

Die Umkehrungen gelten nicht, siehe $([n, n+1])_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(\{x\})_{x \in \mathbb{Q}}$ in $\mathbb{R}$.

Lokal-endliche Vereinigung

D507

Beispiel: In $\mathbb{R}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1] =]0,1]$ und $\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \overline{\{x\}} = \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} = \overline{\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}}$.
Die Vereinigung der Abschlüsse ist nicht der Abschluss der Vereinigung, sondern nur eine (evtl. strikte) Teilmenge. Das schauen wir genauer an:

Satz D5G: lokal-endliche Vereinigung

(1) In jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt die Inklusion

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \quad \supseteq \quad \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

(2) Gleichheit gilt gdw $A := \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ abgeschlossen ist. Insbesondere gilt

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \quad = \quad \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}.$$

(3) Ist die Familie $(A_i)_{i \in I}$ lokal-endlich, so auch $(\overline{A_i})_{i \in I}$. (4) Dann gilt

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \quad = \quad \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Ist eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen lokal-endlich, dann ist auch ihre Vereinigung $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.

Lokal-endliche Vereinigung

D508

Beweis: Wir vergleichen $A := \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ mit $B := \bigcup_{i \in I} A_i$.

(1) Aus $A_i \subseteq B \subseteq \overline{B}$ folgt $\overline{A_i} \subseteq \overline{B}$, also $A \subseteq \overline{B}$.

(2) Es gilt $B \subseteq A$. Ist A abgeschlossen, so folgt $\overline{B} \subseteq A$.
Dies gilt insbesondere, falls die Indexmenge I endlich ist, dank (A2).

(3) Sei $x \in U \in \mathcal{T}$ und $I_U := \{ i \in I \mid A_i \cap U \neq \emptyset \}$.
Aus $A_i \subseteq X \setminus U$ folgt $\overline{A_i} \subseteq X \setminus U$, also $I_U = \{ i \in I \mid \overline{A_i} \cap U \neq \emptyset \}$.

(4) Wir zeigen: $X \setminus A$ ist offen. Zu jedem Punkt $x \in X \setminus A$ existiert eine offene Umgebung U, also $x \in U \in \mathcal{T}$, sodass I_U endlich ist. Wir betrachten

$$U' := U \setminus A \overset{\text{Def}}{=} U \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \overset{(3)}{=} U \setminus \bigcup_{i \in I_U} \overline{A_i} \overset{(2)}{=} U \setminus \overline{\bigcup_{i \in I_U} A_i}.$$

Demnach ist $U' \subseteq X \setminus A$ eine offene Umgebung von x in $X \setminus A$.
Das Komplement $X \setminus A$ ist Umgebung jedes seiner Punkte, also offen (D3c), somit ist $A = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ abgeschlossen. QED

Dichte vs diskrete Teilmengen

D509

Definition D5J: dichte vs diskrete Teilmengen

Wir nennen $M \subseteq X$ **diskret** in $(X, \mathcal{T})$, falls jeder Punkt $x \in M$ isoliert ist, das heißt, es existiert eine offene Umgebung $U \in \mathcal{T}$ mit $M \cap U = \{x\}$.
Äquivalent hierzu: Der Teilraum $(M, \mathcal{T}_M)$ ist diskret (D1K, D1B).

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **dicht** in $(X, \mathcal{T})$, falls $\overline{M} = X$ gilt.
Das heißt $M \cap U \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$.

Hingegen heißt M **nirgends dicht** in $(X, \mathcal{T})$, wenn $\overline{M}^\circ = \emptyset$ gilt.
Äquivalent: In keiner offenen Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ ist $M \cap U$ dicht.

Beispiele: In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ dicht, aber nicht diskret, ebenso $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$.
In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Z}$ diskret, abgeschlossen, doch nirgends dicht, ebenso $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

In $(\mathbb{R}, +)$ ist jede diskrete Untergruppe von der Form $\mathbb{Z}a$ für ein $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
In $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ ist $X = \{ e^{2\pi i k\xi} \mid k \in \mathbb{Z} \}$ diskret für $\xi \in \mathbb{Q}$, dicht für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

In $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit $1 \leq p < \infty$ sind $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ und $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ dicht, in $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ nicht.
Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ ist $\{ \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \text{ endlich} \}$ diskret.
Im Banach–Raum $\ell^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ ist $\{ \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \}$ diskret.

Stetige Funktionen sind auf dichten Teilmengen festgelegt.

D510

Satz D5L: Vergleich stetiger Funktionen auf dichten Teilmengen

Seien $f, g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ hausdorffsch. Dann ist $O = \{ x \in X \mid f(x) \neq g(x) \}$ offen, $\{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$ abgeschlossen. Aus $A \subseteq X$ und $f|_A = g|_A$ folgt $f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$; ist A dicht in X, so folgt $f = g$.

Beweis: Sei $x \in O$. Zu $f(x) \neq g(x)$ in Y existieren $U, V \in \mathcal{T}_Y$ mit $f(x) \in U$ und $g(x) \in V$ mit $U \cap V = \emptyset$. Für $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ gilt $x \in W \in \mathcal{T}_X$. Für jeden Punkt $x' \in W$ gilt $f(x') \in U$ und $g(x') \in V$, also $f(x') \neq g(x')$. Somit gilt $W \subseteq O$. Also ist O offen (D3C). QED

Beispiel / Übung D5M: stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$

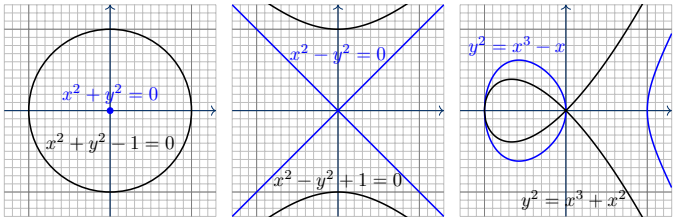
Ist die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ injektiv? surjektiv?

Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv dank D5L, aber nicht surjektiv: Funktionen wie $x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2)$ sind stetig auf $\mathbb{Q}$.

Mächtigkeit: Es gilt $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, also $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, hingegen nur $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$.

Polynome vs Polynomfunktionen

D511



Zum Multiindex $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ gehört das **Monom** $X^\nu = X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$.
Jede Linearkombination ist ein **Polynom** $P = \sum_\nu p_\nu X^\nu$ in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.
Dies definiert die **Polynomfunktion** $f_P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : x \mapsto P(x) = \sum_\nu p_\nu x^\nu$.

Dürfen wir P mit f_P identifizieren? Wann? Warum? Ist $P \mapsto f_P$ injektiv?

⚠ Für jeden endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen schlägt das fehl!
Die Polynomalgebra $\mathbb{F}_q[X]$ ist unendlich, doch $\operatorname{Abb}(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_q)$ ist endlich.
Konkret: Für $P = X^q - X \in \mathbb{F}_q[X]$ gilt $P \neq 0$, aber $f_P = 0$ dank Lagrange.
Speziell für $P = X^2 + X \in \mathbb{F}_2[X]$ gilt $P(0) = 0$ und $P(1) = 0$, also $f_P = 0$.

Polynomiale Nullstellenmengen sind magere Nullmengen.

D512

Lemma D5N: Polynome vs Polynomfunktionen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sowie $U \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $a \in U$. Dann ist die Zuordnung

$$\Phi_U : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \to \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{K}) : P = \textstyle\sum_\nu p_\nu X^\nu \mapsto f_P|_U$$

injektiv: Wir dürfen $a = 0$ annehmen und erhalten $p_\nu = \partial^\nu f_P(0)/\nu!$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist es somit möglich, und üblich, die Polynome aus $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ als Funktionen in $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathscr{C}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ aufzufassen.

Satz D5O: Polynomiale Nullstellenmengen sind magere Nullmengen.

Zu jedem Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ mit $P \neq 0$ ist die Nullstellenmenge $N = f_P^{-1}(0)$ in $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen, zudem nirgends dicht, $N^\circ = \emptyset$ (dank D5N) und hat Lebesgue–Maß $\operatorname{vol}_n(N) = 0$ (dank Fubini und Induktion).
Demnach ist $f_P^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

Das ist eine Besonderheit von Polynomen! Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist Nullstellenmenge einer *stetigen* Funktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ (C3N).

Fast alle Matrizen sind invertierbar.

D513

Beispiel D5P: Determinante

Die **Determinante** ist eine Polynomfunktion in den Matrixeinträgen:

$$\det_n : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K} : A = (a_{ij}) \mapsto \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Für $n = 2$ gilt $\det_2 \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right] = ad - bc$. Für $n = 3$ gilt Sarrus' Jägerzaunregel:

$$\det_3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{cases} +\, a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -\, a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{cases}$$

Im Raum $\mathbb{K}^{n \times n}$ der $n \times n$–Matrizen ist die **allgemeine lineare Gruppe**

$$\mathrm{GL}_n \mathbb{K} := \{ A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A \text{ is invertierbar} \} \overset{\downarrow}{=} \det_n^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$$

offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

☺ Anschaulich: Fast alle Matrizen sind invertierbar, nicht-invertierbare Matrizen werden invertierbar durch geeignete beliebig kleine Störung, invertierbare bleiben es bei jeder hinreichend kleinen Störung.

Vergleich stetiger Funktionen auf dichten Teilmengen

D514

Das charakteristische Polynom ist eine stetige Abbildung

$$\chi_n : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}[X]_n^1 : M \mapsto P_M(X) = \det(X 1_{n \times n} - M).$$

Es ist invariant unter Konjugation durch $B \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$:

$$P_{B^{-1}MB} \overset{\text{Def}}{=} \det(X 1_{n\times n} - B^{-1}MB) \overset{\text{Mat}}{=} \det(B^{-1} \cdot (X 1_{n\times n} - M) \cdot B)$$
$$\overset{\text{Mult}}{=} \det B^{-1} \cdot \det(X 1_{n\times n} - M) \cdot \det B \overset{\text{Com}}{=} P_M$$

Speziell für $M = BA$ erhalten wir die Gleichung $P_{AB} = P_{BA}$.

Satz D5Q: charakteristische Polynome

Für jedes Paar quadratischer Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ stimmen die charakteristischen Polynome P_{AB} und P_{BA} überein.

Beweis: Die Abbildungen $f, g : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}[X]_n^1$, $f(B) = P_{AB}$, $g(B) = P_{BA}$ sind stetig und stimmen auf der dichten Menge $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ überein. QED

Paul Halmos, *Finite dimensional vector spaces* (1958), §53, exercise 13.
Übung: Der Satz gilt sogar allgemein über jedem kommutativen Ring.

Fast alle Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

D515

Fundamentalsatz der Algebra: Zu jedem Polynom $P \in \mathbb{C}[X]_n^1$ existieren Nullstellen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass $P(X) = (X - z_1) \cdots (X - z_n)$ gilt.

Wir nennen P **separabel**, wenn alle n Nullstellen verschieden sind.

Die **Diskriminante** $\Delta_n(P) := \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2$ ist symmetrisch in $z_1, \dots, z_n$, und somit ein Polynom in den Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1}$ des Polynoms P.

Beispiel: Aus der Schule kennen Sie $\Delta_2(X^2 + pX + q) = p^2 - 4q$.

Satz D5R: Fast alle Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Wir nutzen das charakteristische Polynom $\chi_n : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}[X]_n^1$ wie oben und die Diskriminante $\Delta_n : \mathbb{K}[X]_n^1 \to \mathbb{K}$. Beides sind Polynomfunktionen.

(1) Im Raum $\mathbb{K}[X]_n^1 \cong \mathbb{K}^n$ aller Polynome ist die Menge $\Sigma := \Delta_n^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ der separablen Polynome offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

(2) Im Raum $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist die Menge $S := \chi_n^{-1}(\Sigma) = (\Delta_n \circ \chi_n)^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ der separablen Matrizen offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

(3) In $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist die Menge D der über $\mathbb{C}$ diagonalisierbaren Matrizen dicht, $\overline{D} = \mathbb{K}^{n \times n}$, ihr Inneres ist die Menge der separablen Matrizen, $D^\circ = S$.

Und die Moral von der Geschicht?

D516
Erläuterung

☺ Anschaulich: Fast alle Matrizen in $\mathbb{K}^{n \times n}$ sind separabel, also über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, separable Matrizen bleiben es bei hinreichend kleiner Störung, nicht-separable werden es nach geeigneter kleiner Störung.

☺ Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) eine Matrix in $\mathbb{K}^{n \times n}$ wählen, so ist sie mit Wahrscheinlichkeit 1 separabel und somit über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, ebenso alle Matrizen in einer Umgebung. Die verbleibenden Fälle sind so gesehen vernachlässigbar. Die Jordan–Form ist trotzdem wichtig, um *alle* Fälle behandeln zu können. Nicht alle Matrizen sind zufällig!

☺ Bitte bewundern Sie, wie herrlich einfach alle Argumente werden durch die geschickte Verwendung von stetigen Funktionen, hier speziell Polynomfunktionen! Zu Polynomen haben wir ihre Diskriminante, quadratische Matrizen kommen ebenso natürlich mit ihrer Determinante. Diese Abbildungen werden uns geschenkt, wir müssen sie nur nutzen!

☺ Der Satz von Cayley–Hamilton folgt ebenso topologisch (D5S):
Die Behauptung gilt offensichtlich für jede diagonale Matrix,
damit auch für jede diagonlisierbare, und diese sind dicht!

Basis einer Topologie

D601

Definition D6A: Basis einer Topologie

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ offener Mengen ist eine **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} = \{ \bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \}$ gilt. Das heißt: Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist Vereinigung geeigneter Mengen der Basis $\mathcal{B}$.

Beispiele: Jede Topologie $\mathcal{T}$ erlaubt (i.A. viele) Basen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$:

Jeder Raum $(X, \mathcal{T})$ hat als Basen trivialerweise $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$.

Für jede indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ sind dies die beiden einzigen.

Für jeden diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist $\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ eine Basis der Topologie. Hier ist $\mathcal{B}$ die kleinste Basis, also in jeder Basis enthalten.

Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ ist zugleich die Ordnungstopologie. Hier ist $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \}$ eine Basis, ebenso $\mathcal{B}' = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q} \}$.

Für jeden metrischen Raum (X, d) ist $\mathcal{B} = \{ B(x, \varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$, ebenso $\mathcal{B}' = \{ B(x, 2^{-n}) \mid x \in X,\ n \in \mathbb{N} \}$.

Für den euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ ist auch $\{ B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{Q}^n,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \}$ eine Basis der Topologie, zudem abzählbar (siehe D6H).

Basis einer Topologie

D602

Hilfreiche Sprachkonvention: Wir nennen $U \in \mathcal{T}$ eine **offene Menge** und entsprechend $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine **basisoffene** Menge (bezüglich $\mathcal{B}$).

Proposition D6B: äquivalente Umformulierungen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sind äquivalent:

(1) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist die Vereinigung *geeigneter* $B \in \mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} = \{ \textstyle\bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \} \quad \text{das heißt} \quad \forall U \in \mathcal{T}\ \exists \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} : U = \textstyle\bigcup \mathcal{S}.$$

(2) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist die Vereinigung *aller* $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$:

$$\forall U \in \mathcal{T} : U = \textstyle\bigcup \mathcal{S} \quad \text{mit} \quad \mathcal{S} = \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U \}.$$

(3) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ enthält zu $x \in U$ eine Umgebung $B \in \mathcal{B}$:

$$\forall U \in \mathcal{T}\ \ \forall x \in U\ \ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U.$$

(4) Jeder Punkt x in $(X, \mathcal{T})$ hat als eine Umgebungsbasis das System

$$\mathcal{B}_x = \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \}.$$

Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

D603

Satz D6C: Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

Jede Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X hat folgende Eigenschaften:

B1: Es gilt $X = \bigcup \mathcal{B}$.

B2: Zu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existiert $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ mit $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{S}$.

Äquivalent hierzu sind die folgenden lokalen Umformulierungen:

B1': Für jeden Punkt $x \in X$ existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$.

B2': Zu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Erfüllt umgekehrt ein beliebiges Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ diese Bedingungen, dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis der so definierten Topologie

$$\mathcal{T} := \{ \textstyle\bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \} = \{ U \subseteq X \mid \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U \}.$$

Nachrechnen: Ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, so gilt (O1) ⇒ (B1) und (O2) ⇒ (B2). Die Äquivalenz (B1) ⇔ (B1') und (B2) ⇔ (B2') ist klar. Umgekehrt für $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{T}$ gilt: (B1) ⇒ (O1), (B2) ⇒ (O2), (O3) ist klar. QED

Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

D604
Erläuterung

Bitte schreiben Sie zur Übung alle genannten Implikationen selbst aus. Solche Fingerübungen sind zwar leicht, aber dennoch notwendig.

Prüfen Sie sorgsam, dass Sie Definitionen und Argumente verstehen, angefangen bei den Äquivalenzen (B1) ⇔ (B1') und (B2) ⇔ (B2').

Bei der Konstruktion $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{T}$ ist die Implikation (B1) ⇒ (O1) klar, lediglich die Implikation (B2) ⇒ (O2) ist nicht ganz offensichtlich.

Wir zeigen stattdessen (B2') ⇒ (O2): Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ und $U := U_1 \cap U_2$. Zu jedem Punkt $x \in U$ existieren Mengen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_1 \subseteq U_1$ und $x \in B_2 \subseteq U_2$. Dank (B2') existiert hierzu eine Menge $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2 = U$. Das bedeutet $U \in \mathcal{T}$.

Das Axiom (O3) schließlich ist klar nach Konstruktion. Ausführlich: Sei $U_i \in \mathcal{T}$ und $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Zu jedem Punkt $x \in U$ existiert $i \in I$ mit $x \in U_i$, und somit ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq U_i \subseteq U$. Das bedeutet $U \in \mathcal{T}$.

Nach Konstruktion gilt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, somit ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$.

Die Fürstenberg–Topologie

D605
Erläuterung

Zur Erheiterung und Allgemeinbildung diskutieren wir als Anwendung Fürstenbergs topologischen Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen: *On the infinitude of primes*, American Mathematical Monthly 62 (1955).

ON THE INFINITUDE OF PRIMES

HARRY FURSTENBERG, Yeshiva University

In this note we would like to offer an elementary "topological" proof of the infinitude of the prime numbers. We introduce a topology into the space of integers S, by using the arithmetic progressions (from $-\infty$ to $+\infty$) as a basis. It is not difficult to verify that this actually yields a topological space. In fact, under this topology, S may be shown to be normal and hence metrizable. Each arithmetic progression is closed as well as open, since its complement is the union of other arithmetic progressions (having the same difference). As a result, the union of any finite number of arithmetic progressions is closed. Consider now the set $A = \bigcup A_p$, where A_p consists of all multiples of p, and p runs through the set of primes $\geqq 2$. The only numbers not belonging to A are -1 and 1, and since the set $\{-1, 1\}$ is clearly not an open set, A cannot be closed. Hence A is not a finite union of closed sets which proves that there are an infinity of primes.

Die Fürstenberg–Topologie

D606
Erläuterung

Behauptung: Die Menge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ der Primzahlen ist unendlich. **Beweis:**

(0) Eine **arithmetische Progression** in $\mathbb{Z}$ ist eine Menge der Form

$$P(a, b) = a + b\mathbb{Z} = \{ a + nb \mid n \in \mathbb{Z} \} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \geq 1.$$

(1) Die Familie $\mathcal{B} = \{ P(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \geq 1 \}$ ist Basis einer Topologie $\mathcal{T}$. Wir prüfen für $\mathcal{B}$ die Basisaxiome direkt nach: (B1') Es gilt $\mathbb{Z} = P(0, 1)$. (B2') Für $x \in P(a, b) \cap P(c, d)$ gilt $x \in P(x, bd) \subseteq P(a, b) \cap P(c, d)$.

(2) In der so erzeugten **Fürstenberg–Topologie** $\mathcal{T}$ ist $P(a, b)$ offen und zudem abgeschlossen, denn $\mathbb{Z} \setminus P(a, b) = \bigcup_{0<k<b} P(a + k, b)$.

(3) Jede Zahl $v \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ wird von einer Primzahl $p \in \mathbb{P}$ geteilt. Die Vereinigung $V = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} (p\mathbb{Z})$ hat als Komplement $\mathbb{Z} \setminus V = \{\pm 1\}$.

(4) Wäre die Menge $\mathbb{P}$ endlich, so wäre V zudem abgeschlossen, also $\{-1, +1\}$ offen, was offensichtlich falsch ist. QED

Euklids Beweis ist ebenso instruktiv und zudem konstruktiv. Wiederholen Sie diesen Beweis und vergleichen Sie die beiden!

Erzeugung von Topologien

D607

Satz D6F: Erzeugung einer Topologie

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein beliebiges System von Teilmengen in X. Wir setzen $\mathcal{B} := \{ E_1 \cap \cdots \cap E_n \mid n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E} \}$ und $\mathcal{T} := \{ \bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \}$.

Für $n = 0$ interpretieren wir den leeren Durchschnitt als $X \in \mathcal{B}$.

Das System $\mathcal{B}$ erfüllt (B1–2), somit ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X.

Genauer ist $\mathcal{T} =: \tau(\mathcal{E})$ die gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ enthält; $\mathcal{T}$ heißt die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie**, $\mathcal{B}$ die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Basis**, und $\mathcal{E}$ ein **Erzeugendensystem** oder eine **Subbasis** der Topologie $\mathcal{T}$.

Beweis: Klar, dank Satz D6C.

Satz D6G: Stetigkeitskriterium auf einem Erzeugendensystem

Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologischer Räume mit $\mathcal{T}_Y = \tau(\mathcal{E})$ ist genau dann stetig, wenn für alle $U \in \mathcal{E}$ stets $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ gilt.

Beweis: Nachrechnen, siehe Satz E1A.

Erzeugung von Topologien

D608

Beispiele: (0) Für $\mathcal{E} = \emptyset$ erhalten wir $\mathcal{B} = \{X\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

(1) Ist $\mathcal{E}$ selbst schon eine Topologie auf X, so gilt $\mathcal{E} = \mathcal{B} = \mathcal{T}$.

(2) Sei $(X, <)$ total geordnet und $\mathcal{E} = \{]a, +\infty[,]-\infty, b[\mid a, b \in X \}$. Wir erhalten daraus die Basis $\mathcal{B} = \{X\} \cup \mathcal{E} \cup \{]a, b[\mid a, b \in X \}$ und die Ordnungstopologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_<$ auf der Menge X (D1M).

(3) Jeder Vektor $a \in \mathbb{S}^n$ definiert den zugehörigen offenen Halbraum

$$H_a = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n > a_0 \}.$$

Das System $\mathcal{H} = \{ H_a \mid a \in \mathbb{S}^n \}$ erzeugt die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Hierzu genügen bereits für $i = 1, \ldots, n$ und $a_0 \in \mathbb{R}$ die offenen Halbräume

$$H_i^{<a_0} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i < a_0 \} \quad \text{und} \quad H_i^{>a_0} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > a_0 \}.$$

Beweis: Es gilt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, also $\tau(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Umgekehrt enthält $\tau(\mathcal{H})$ alle offenen Quader, insbesondere also alle offenen Würfel (ℓ^∞–Bälle). Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle ℓ^p–Normen äquivalent dank $|x|_\infty \leq |x|_p \leq |x|_1 \leq n \cdot |x|_\infty$. Die von $\mathcal{H}$ erzeugte Topologie enthält demnach die euklidische $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom

D609

Definition D6H: das zweite Abzählbarkeitsaxiom (2AA)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **zweitabzählbar**, wenn die Topologie eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ erlaubt.

Beispiele: Für die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$ bilden die offenen Intervalle die Basis $\mathcal{B} = \{\,]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R}\,\}$. Mit rationalen Endpunkten erhalten wir hierin die abzählbare Basis $\mathcal{B}' = \{\,]a,b[\mid a,b \in \mathbb{Q}\,\}$.

Für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden die offenen Quader die Basis

$$\mathcal{B} = \{\,]a_1,b_1[\times \cdots \times]a_n,b_n[\;\big|\; a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{R}\,\}.$$

Mit rationalen Eckpunkten erhalten wir hierin die abzählbare Basis

$$\mathcal{B}' = \{\,]a_1,b_1[\times \cdots \times]a_n,b_n[\;\big|\; a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{Q}\,\}.$$

Bemerkung: Es gilt 2AA $\Rightarrow$ 1AA dank $\mathcal{B}_x = \{\,B \in \mathcal{B} \mid x \in B\,\}$ in D6B. Die Umkehrung gilt nicht, wie wir gleich an Gegenbeispielen sehen.

Kardinalität einer zweitabzählbaren Topologie

D610

Satz D6I: Kardinalität einer zweitabzählbaren Topologie

(0) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, so erhalten wir die Injektion

$$\Phi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{B}) \;:\; U \mapsto \{\,B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\,\} \qquad \text{mit Retraktion}$$
$$\Psi : \mathfrak{P}(\mathcal{B}) \twoheadrightarrow \mathcal{T} : \mathcal{S} \mapsto \bigcup \mathcal{S} \qquad \text{denn } \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{T}} \text{ dank D6B.}$$

(1) Ist $\mathcal{B}$ abzählbar, $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathbb{N}$, so folgt $\mathrm{card}(\mathcal{T}) \leq \mathrm{card}(\mathbb{R})$, denn

$$\mathcal{T} \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R} \quad \text{dank B2N.}$$

(2) Für die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, gilt $\mathrm{card}(\mathcal{T}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

Beweis: Die Aussagen (0) und (1) sind klar wie im Satz ausgeführt.

(2) Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$, also gilt $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathbb{R}$. In Dimension $n \geq 1$ haben wir umgekehrt eine Injektion $\mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow \mathcal{T} : r \mapsto B(0,r)$ mit $r = \mathrm{diam}\, B(0,r)/2$. Dank Cantor–Bernstein B2O erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{T} \cong \mathbb{R}$, also $\mathrm{card}(\mathcal{T}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$. QED

Diskrete Teilmengen und Basen

D611

Aufgabe: In $\mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{Z}^2$ diskret. Geht diskret auch überabzählbar?

Lemma D6J: diskrete Teilmengen und Basen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ diskret und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine Basis. Zu jedem $a \in A$ existiert $U_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap A = \{a\}$. Dazu existiert $B_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in B_a \subseteq U_a$, also $B_a \cap A = \{a\}$. Somit ist $A \hookrightarrow \mathcal{B} : a \mapsto B_a$ injektiv.

Ist $(X, \mathcal{T})$ zweitabzählbar, so ist jede diskrete Teilmenge $A \subseteq X$ abzählbar. Ist $A \subseteq X$ diskret und überabzählbar, so ist $(X, \mathcal{T})$ nicht zweitabzählbar.

Beispiel: Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ ist zweitabzählbar. Also ist jede diskrete Teilmenge A in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ ist demnach abzählbar.

Beispiel: Wir betrachten den Vektorraum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm.

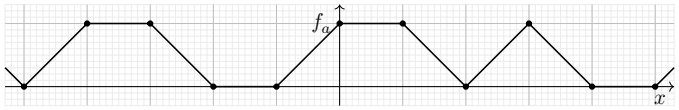
Satz D6K: $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.

Der Raum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist erstabzählbar (D3G), aber nicht zweitabzählbar, denn er enthält eine überabzählbare diskrete Teilmenge $F \subseteq \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.

D612

Beweis: Die Menge $A = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ist überabzählbar, genauer $A \cong \mathbb{R}$ (B2N). Zu $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ sei $f_a : \mathbb{R} \to [0,1]$ die stückweise affine Interpolation, also $f_a(x) = (1-t)a_k + t a_{k+1}$ für $x = k + t$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in [0,1]$.



Die Zuordnung $A \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) : a \mapsto f_a$ ist injektiv, denn $a = f_a|_{\mathbb{Z}}$. Mit A ist daher auch $F = \{\, f_a \mid a \in A\,\} \subseteq \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ überabzählbar.

Die Menge F ist diskret in $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm, denn für $a \neq b$ in A gilt $|f_a - f_b|_{\mathbb{R}} = 1$, also $B(f_a, 1) \cap F = \{f_a\}$.

Demnach ist $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nicht zweitabzählbar. Gemäß D6J gilt genauer: Jede Basis dieser Topologie ist mindestens so mächtig wie $\mathbb{R}$. QED

☺ So lernen Sie Mathematik: Definitionen, Sätze, Gegen/Beispiele. Schritt für Schritt wächst Ihr topologisches Repertoire.

Dichte Teilmengen und Separabilität

D613

Definition D6L: separabler topologischer Raum

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält, d.h. es existiert $A \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$.

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist separabel, denn $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar und dicht.

Satz D6M: Zweitabzählbar impliziert separabel.

Ist $(X, \mathcal{T})$ zweitabzählbar, d.h. es existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, so ist $(X, \mathcal{T})$ separabel, d.h. es existiert A abzählbar und dicht in $(X, \mathcal{T})$.

Beweis: Zu jeder Menge $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ wählen wir einen Punkt $a_B \in B$. Mit $\mathcal{B}$ ist auch $A = \{\, a_B \mid B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}\,\}$ abzählbar. Zudem ist A dicht: Jede offene Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ enthält eine Menge $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, somit gilt $a_B \in B \subseteq U$, also $A \cap U \neq \emptyset$. QED

⚠ Die Umkehrung gilt nicht: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist separabel dank $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, erfüllt aber nicht 1AA / 2AA.

Dichte Teilmengen und Separabilität

D614
Erläuterung

Aufgabe: Führen Sie das letzte Beispiel aus. Was ist hier zu zeigen?

Lösung: Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dicht ist. Zu jeder Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und jeder Umgebung $U = U(f; \{x_1, \dots, x_n\}, \varepsilon)$ existiert ein rationales Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ in U. Hierzu wählen wir rationale Werte $y_i \in \mathbb{Q} \cap B(f(x_i), \varepsilon)$ und das Lagrange–Interpolationspolynom $g \in \mathbb{Q}[X]^1_n$ mit $g(x_i) = y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Damit ist $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ separabel!

⚠ Unterscheide **separabel** und **separiert** (= hausdorffsch, siehe D3J). Leider klingt beides sehr ähnlich, bedeutet aber völlig verschiedenes.

Anschaulich besagt Zweitabzählbarkeit und ebenso Separabilität, dass die betrachtete Topologie $\mathcal{T}$ „nicht allzu groß“ ist.

Das werden wir daher in vielen Anwendungen als Bedingung nutzen. Eine erste schöne Anwendungen bietet bereits der obige Satz D6I.

Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

D615

Die ersehnte Umkehrung gilt immerhin für alle metrischen Räume:

Satz D6N: Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Sei (X, d) ein metrischer Raum und darin $A \subseteq X$ abzählbar und dicht. Dann erlaubt die metrische Topologie $\mathcal{T}_d$ die abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{\, B(a, r_k) \mid a \in A,\ k \in \mathbb{N}\,\}$ mit Radien $r_k \searrow 0$, etwa $r_k = 2^{-k}$.

Beispiel: Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt die abzählbare Basis

$$\mathcal{B} = \{\, B(a, 2^{-k}) \mid a \in \mathbb{Q}^n,\ k \in \mathbb{N}\,\}.$$

Dass $\mathcal{T}$ zweitabzählbar ist, haben wir eingangs bereits gesehen. Daraus folgt die Mächtigkeit $\mathrm{card}(\mathcal{T}) = \mathrm{card}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ dank D6I: Im Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ gibt es nur genauso viele offene Mengen wie Punkte!

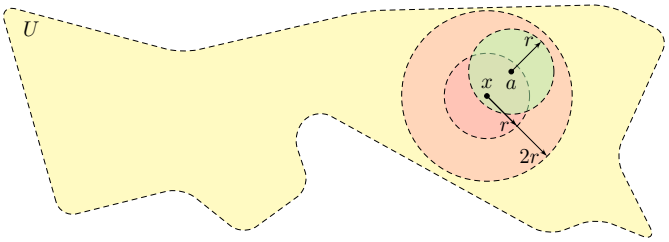
Korollar D6O: separabel und zweitabzählbar

Ein metrisierbarer topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann separabel, wenn er zweitabzählbar ist („$\Rightarrow$“ dank D6N und „$\Leftarrow$“ dank D6M). QED

Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

D616

Beweis von D6N: Gegeben ist $\mathcal{B} = \{\, B(a, r_k) \mid a \in A,\ k \in \mathbb{N}\,\} \subseteq \mathcal{T}_d$. Für jede offene Menge $U \in \mathcal{T}_d$ behaupten wir $U = \bigcup\{\, B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\,\}$. Die Inklusion „$\supseteq$“ ist klar, wir zeigen „$\subseteq$“: Hierzu sei $x \in U$.



Da U offen ist in (X, d), existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Dank $r_k \searrow 0$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $r_k < \varepsilon/2$, also $B(x, 2r_k) \subseteq U$. Da A dicht ist in (X, d), existiert $a \in A \cap B(x, r_k)$. Somit gilt $x \in B(a, r_k) \subseteq B(x, 2r_k) \subseteq U$. QED

Erste Beispiele zur Separabilität

D617

Satz D6P: separable Räume stetiger Funktionen

Der Banach–Raum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm ist nicht zweitabzählbar (D6K) und somit auch nicht separabel (D6N).

Hingegen ist $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ separabel und somit zweitabzählbar (D6N): Dank Weierstraß–Approximation ist $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ dicht.

☺ Auch die ℓ^p–Räume bieten einen reichhaltigen Beispielfundus, an dem Sie Ihre Intuition schulen und Ihre Werkzeuge schärfen:

Satz D6Q: separable ℓ^p–Räume

Sei $1 \leq p < \infty$. Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ ist $D = \mathbb{Q}^{(\Omega)}$ bzw. $(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^{(\Omega)}$ dicht und $\{\mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \text{ endlich}\}$ diskret. Genau dann ist der Raum $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ separabel und zweitabzählbar, wenn Ω abzählbar ist.

Hingegen ist $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ weder separabel noch zweitabzählbar, denn hierin ist $\{\mathbf{1}_A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ überabzählbar und diskret.

Erste Beispiele zur Separabilität

D618
Erläuterung

Beweis: Der Raum $\ell^p(\Omega) = \ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ trägt die ℓ^p–Norm $|\text{-}|_p$ (C1L). Hierin ist D eine dichte Teilmenge (D5K). Ist Ω abzählbar, so auch D. Dank D6N erfüllt der Raum $\ell^p(\Omega)$ dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Umgekehrt ist $\{\mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \text{ endlich}\}$ diskret. Ist also Ω überabzählbar, so erfüllt $\ell^p(\Omega)$ nach D6J nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom, und nach Satz D6N besitzt $\ell^p(\Omega)$ auch keine dichte abzählbare Teilmenge.

Für $p = \infty$ verhält sich der Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ grundlegend anders: Wir haben die injektive Abbildung $\iota : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N}) : A \mapsto \mathbf{1}_A$. Das Bild ist überabzählbar und diskret, denn $|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|_\infty = 1$ für $A \neq B$.

Nach D6J erlaubt die Topologie auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ somit keine abzählbare Basis. Nach D6N besitzt $\ell^\infty(\mathbb{N})$ auch keine dichte abzählbare Teilmenge. QED

☺ So lernen Sie Mathematik: Definitionen, Sätze, Gegen/Beispiele. Schritt für Schritt wächst Ihr topologisches Repertoire.

Eine schöne Anwendung zur Separabilität

D619

Satz D6R: separable Hilbert–Räume

Jeder separable Hilbert–Raum $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C}$ ist isometrisch zu einem euklidischen Raum $\mathbb{K}^n = \ell^2(\{1,\dots,n\})$ oder zu $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

Beweis: Im Falle $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ existiert eine Basis $b_1,\dots,b_n \in V$, dank Gram–Schmidt C1H eine Orthonormalbasis $e_1,\dots,e_n \in V$. Diese ONB stiftet die lineare Isometrie $V \cong \mathbb{K}^n : e_i \leftrightarrows e_i$.

Im Falle $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$ nutzen wir die vorausgesetzte Separabilität: Es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq V$. Gram–Schmidt bildet daraus eine orthonormale Familie $e_0, e_1, e_2, \dots$.

Die Abbildung $f : \ell^2(\mathbb{N}) \to V$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ ist wohldefiniert, da V vollständig ist und somit die angegebene Reihe konvergiert.

Nach Konstruktion ist f linear. Dank Orthonormalität ist f isometrisch und somit injektiv. Der Aufspann $U = \langle e_0, e_1, e_2, \dots\rangle_{\mathbb{K}}$ enthält A, der Abschluss ist also $\overline{U} = V$. Somit ist f surjektiv. QED

Eine schöne Anwendung zur Separabilität

D620
Erläuterung

☺ Das ist ein sehr elegantes und auch beruhigendes Ergebnis!

Die euklidischen Räume $\mathbb{K}^n = \ell^2(\{1,\dots,n\})$ und $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ sind recht einfach strukturiert, sehr übersichtlich und uns seit langem vertraut. In diesen „Koordinatenräumen“ können wir wie gewohnt rechnen. Manche nennen sie daher die „kanonischen Hilbert–Räume“.

Der Satz garantiert, dass jeder Hilbert–Raum genau so aussieht – im unendlich-dimensionalen Fall unter der vorsichten Einschränkung, dass der Raum separabel sein soll, also wie gesagt „nicht allzu groß“. Sie sehen hier sehr schön, wie wohltuend alles zusammenwirkt.

Natürlich gibt es auch nicht-separable Hilbert–Räume, etwa $\ell^2(\Omega,\mathbb{K})$ für jede beliebige überabzählbare Menge Ω. Genau hierzu haben wir den vorangegangenen Satz D6Q.

In der Analysis und vielen Anwendungen, insbesondere in der Physik, sind jedoch die separablen Hilbert–Räume besonders interessant, in der Fourier–Theorie etwa $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ oder $\ell^2(\mathbb{Z}^n,\mathbb{K})$.

Offen und dicht bedeutet „fast alles“. D701

Dichte Mengen sind nicht schnitt-stabil, siehe $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Besser:
Aufgabe: Sind $V_1,\dots,V_n$ offen und dicht in $(X,\mathcal{T})$, so auch $V_1\cap\dots\cap V_n$.

Lösung: Offen ist klar dank (O2), zu dicht sei $\emptyset\neq U\in\mathcal{T}$.
Da V_1 in $(X,\mathcal{T})$ dicht und auch offen ist, gilt $\emptyset\neq U\cap V_1\in\mathcal{T}$.
So fortfahrend erhalten wir induktiv $\emptyset\neq U\cap V_1\cap\dots\cap V_n\in\mathcal{T}$.

Hingegen geht für *abzählbare* Schnitte $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$ in $(X,\mathcal{T})$ die Offenheit meist verloren, in günstigen Fällen bleibt die Dichtheit jedoch erhalten. Diese besondere topologische Eigenschaft verdient einen Namen:

Definition D7B: Baire–Raum

Ein Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt **Baire–Raum**, wenn für jede Familie $V_1,V_2,V_3,\dots$ offener und dichter Teilmengen in $(X,\mathcal{T})$ auch $V=\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ dicht ist.

Beispiele: Jeder diskrete Raum $(X,\mathfrak{P}X)$, etwa $\mathbb{Z}^n$, ist Baire, denn $V_n=X$.
Für $n\geq 1$ ist $\mathbb{Q}^n$ hingegen kein Baire–Raum, denn $\bigcap_{x\in\mathbb{Q}^n}(\mathbb{Q}^n\setminus\{x\})=\emptyset$.
Glücklicherweise ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ein Baire–Raum, ebenso jeder vollständig metrisierbare Raum, dank folgendem Satz von Baire.

Satz von Baire D702

Satz D7C: Baire 1899

Jeder vollständige metrische Raum (X,d) ist ein Baire–Raum, das heißt:
Sind $V_1,V_2,V_3,\dots$ offen und dicht in (X,d), so ist $V=\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ dicht.

Beweis: Zu $a_0\in X$ und $r_0\in\mathbb{R}_{>0}$ zeigen wir $B(a_0,r_0)\cap V\neq\emptyset$. Sei $k\geq 1$.
Da V_k in $(X,\mathcal{T})$ dicht und offen ist, gilt $\emptyset\neq V_k\cap B(a_{k-1},r_{k-1})=:U_k\in\mathcal{T}$.
Wir wählen $a_k\in U_k$ und $r_k\in\,]0,r_{k-1}/2]$ mit $\bar B(a_k,r_k)\subseteq B(a_k,2r_k)\subseteq U_k$.
So konstruieren wir $B(a_0,r_0)\supseteq B(a_1,r_1)\supseteq B(a_2,r_2)\supseteq\dots$ mit $r_k\searrow 0$.
Die Punkte $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bilden demnach eine Cauchy–Folge in (X,d). Dank Vollständigkeit von (X,d) existiert $a\in X$ mit $d(a_k,a)\to 0$ für $k\to\infty$.
Für alle $k\geq n$ gilt $a_k\in B(a_n,r_n)$, also $a_k\to a\in\bar B(a_n,r_n)\subseteq U_n\subseteq V_n$.
Da dies für alle $n=1,2,3,\dots$ gilt, schließen wir $a\in B(a_0,r_0)\cap V$. QED

Beispiel: Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist nicht abzählbare Vereinigung von Geraden A_n; die Komplemente $V_n:=\mathbb{R}^2\setminus A_n$ sind offen und dicht, also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$ dicht.
Der Raum $\mathbb{Q}^n$ ist eine abzählbare Vereinigung affiner Teilräume $A_k\subsetneq\mathbb{Q}^n$.
Hingegen ist $\mathbb{R}^n$ nicht abzählbare Vereinigung affiner Teilräume $A_k\subsetneq\mathbb{R}^n$.

Anwendung: die Banach–Dimensionslücke D703

Mit der ℓ^p–Norm ist $\mathbb{R}[x]_{<n}\cong\mathbb{R}^n$ vollständig, doch $\mathbb{R}[x]\cong\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ nicht.
Aufgabe: Ist der Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ aller Polynome vollständig normierbar?

Satz D7D: die Dimensionslücke bei Banach–Räumen

Die Dimension jedes Banach–Raums ist endlich oder überabzählbar.

Beweis: Sei $(V,|\text{-}|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum mit abz. Basis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Für $A_n:=\langle b_0,\dots,b_n\rangle_{\mathbb{K}}^!$ gilt $V=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ sowie $\overline{A_n}=A_n$ und $A_n^\circ=\emptyset$.
Das Komplement $V_n:=V\setminus A_n$ ist offen und dicht und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n=\emptyset$.
Nach dem Satz von Baire ist $(V,|\text{-}|)$ nicht vollständig. QED

Eine Teilmenge A in $(X,\mathcal{T})$ mit $\overline{A}^\circ=\emptyset$ heißt **nirgends dicht**, das heißt, $B=X\setminus\overline{A}$ enthält mit $B^\circ=X\setminus\overline{A}$ eine offene dichte Teilmenge, $\overline{B^\circ}=X$.
Jede abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen heißt **mager** (von erster Baire–Kategorie); das Komplement heißt **komager** (oder **residuell**).
Ist eine Menge nicht mager, so heißt sie **fett** (zweite Baire–Kategorie).
Beispiele: In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}=\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$ mager, somit $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ komager und fett.
Die Menge $\mathbb{R}$ ist fett in $\mathbb{R}$, aber mager in $\mathbb{C}$. Es kommt auf den Raum an!

Interpretation als Baire–Maß D704

Mager ist stabil bezüglich Teilmengen und abzählbaren Vereinigungen.
Auf jedem Raum $(X,\mathcal{T})$ erhalten wir daher das σ–additive **Baire–Maß**

$$\mu:\mathfrak{P}(X)\to[0,\infty]:M\mapsto\begin{cases}0 & \text{falls } M \text{ mager in } (X,\mathcal{T}) \text{ ist,}\\ \infty & \text{sonst, } M \text{ ist fett in } (X,\mathcal{T}).\end{cases}$$

Ist $(X,\mathcal{T})$ ein Baire–Raum, so gilt $\mu(V)>0$ für alle $V\subseteq X$ mit $V^\circ\neq\emptyset$.
Gilt zudem $X\neq\emptyset$, so ist eine komagere Teilmenge $C\subseteq X$ nicht mager, andernfalls wäre ganz $X=C\sqcup(X\setminus C)$ mager, ein Widerspruch.

Übung D7G: Baire und Lebesgue sind orthogonal.

Für $n\geq 1$ ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n=M\sqcup N$ disjunkte Vereinigung einer Baire–mageren Menge M und einer Lebesgue–Nullmenge N.

Beweis: Sei $\mathbb{Q}^n=\{q_i\mid i\in\mathbb{N}\}^!$. Dann ist $U_k=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B(q_i,2^{-i-1}/k)$ offen und dicht und hat Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_n(U_k)\leq 2/k$. Der abzählbare Schnitt $N=\bigcap_{k=1}^\infty U_k$ hat demnach Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_n(N)=0$, ist aber dennoch komager, das heißt, $M=\mathbb{R}^n\setminus N$ ist mager. QED

Borel–Mengen, zunächst G_δ und F_σ D705

Offene Mengen sind stabil unter *endlichen* Schnitten, abgeschlossene stabil unter *endlichen* Vereinigungen. Abzählbar gilt dies nicht mehr:

$$[a,b]=\textstyle\bigcap_{k=1}^\infty]a-1/k,b+1/k[,\qquad \bar B(a,r)=\bigcap_{k=1}^\infty B(a,r+1/k)$$
$$]a,b[=\textstyle\bigcup_{k=1}^\infty[a+1/k,b-1/k],\qquad B(a,r)=\bigcup_{k=1}^\infty\bar B(a,r-1/k)$$

Definition D7H: G_δ und F_σ

In $(X,\mathcal{T})$ ist eine **G_δ–Menge** abzählbarer Durchschnitt offener Mengen, eine **F_σ–Menge** ist abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen.

Der Buchstabe F steht für *abgeschlossen* (frz. *fermé*) und σ für abzählbare Vereinigung (*Summe*). Entsprechend steht G für *offen* (*Gebiet*) und δ steht für abzählbaren Durchschnitt. Diese Bezeichnungen sind traditionell.

Beispiel: Sei (X,d) ein metrischer Raum. Jede abgeschlossene Menge $A\subseteq X$ ist eine G_δ–Menge, denn $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x\in X\mid d(x,A)<2^{-n}\}$.
Komplementär hierzu ist jede offene Menge $O\subseteq X$ eine F_σ–Menge, denn $O=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in X\mid d(x,X\setminus O)\geq 2^{-n}\}$, siehe Proposition C3N.

Borel–Mengen, zunächst G_δ und F_σ D706 Erläuterung

Das Komplement jeder F_σ–Menge ist eine G_δ–Menge und umgekehrt.
Die G_δ–Mengen sind in $(X,\mathcal{T})$ stabil unter abzählbaren Schnitten und endlichen Vereinigungen: Für alle offene Mengen $G_{i,j}\in\mathcal{T}$ gilt

$$\textstyle\bigcap_{i=0}^\infty[\bigcap_{j=0}^\infty G_{i,j}]=\bigcap\{G_{i,j}\mid(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\},$$
$$\textstyle\bigcup_{i=0}^n[\bigcap_{j=0}^\infty G_{i,j}]=\bigcap\{G_{0,j_0}\cup\dots\cup G_{n,j_n}\mid(j_0,\dots,j_n)\in\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N}\}.$$

Die F_σ–Mengen in $(X,\mathcal{T})$ sind stabil unter abzählbaren Vereinigungen und endlichen Schnitten: Für alle abgeschlossenen Mengen $F_{i,j}\in\mathcal{T}^c$ gilt

$$\textstyle\bigcup_{i=0}^\infty[\bigcup_{j=0}^\infty F_{i,j}]=\bigcup\{F_{i,j}\mid(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\},$$
$$\textstyle\bigcap_{i=0}^n[\bigcup_{j=0}^\infty F_{i,j}]=\bigcup\{F_{0,j_0}\cap\dots\cap F_{n,j_n}\mid(j_0,\dots,j_n)\in\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N}\}.$$

Allerdings sind F_σ–Mengen nicht stabil unter *abzählbaren* Schnitten.
Durch abzählbare Schnitte von F_σ–Mengen erhält man die $F_{\sigma\delta}$–Mengen.
Durch abzählbare Vereinigungen $F_{\sigma\delta}$–Mengen erhält man dann die $F_{\sigma\delta\sigma}$–Mengen, usw. Ebenso gewinnt man aus den G_δ–Mengen durch abzählbare Vereinigungen die $G_{\delta\sigma}$–Mengen, dann $G_{\delta\sigma\delta}$–Mengen usw.

Borel–σ–Algebra D707

Definition D7I: σ–Algebra

Eine **σ–Algebra** auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{A}\subseteq\mathfrak{P}(X)$, für das gilt:
σ1: Es gilt $X\in\mathcal{A}$, und aus $A\in\mathcal{A}$ folgt $X\setminus A\in\mathcal{A}$.
σ2: Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k\in\mathcal{A}$.

Proposition D7J: erzeugte σ–Algebra

Ist $\mathcal{A}_\lambda\subseteq\mathfrak{P}(X)$ für $\lambda\in\Lambda$ eine σ–Algebra auf X, so auch $\mathcal{A}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$.
So erzeugt jedes Mengensystem $\mathcal{E}\subseteq\mathfrak{P}(X)$ die zugehörige σ–Algebra

$$\sigma(X,\mathcal{E}):=\bigcap\{\mathcal{A}\mid\mathcal{E}\subseteq\mathcal{A}\subseteq\mathfrak{P}(X)\text{ und }\mathcal{A}\text{ ist eine }\sigma\text{–Algebra auf }X\}.$$

Nach Konstruktion ist dies die kleinste σ–Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält.

Zu jedem topologischen Raum ist $\sigma(X,\mathcal{T})\subseteq\mathfrak{P}(X)$ die **Borel–σ–Algebra**.
Sie wird von den offenen Mengen erzeugt, ebenso den abgeschlossenen.
Sie enthält alle Mengen der Form G_δ und F_σ sowie $G_{\delta\sigma}$ und $F_{\sigma\delta}$ usw.
Für den euklidischen Raum sind $\mathcal{T}$ und $\sigma(\mathbb{R}^n,\mathcal{T})$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Borel–σ–Algebra D708 Erläuterung

Übung: Beweisen Sie die Proposition. Was ist zu zeigen? Zeigen Sie es!
Eigenschaften (σ1–2) übertragen sich sofort von $\mathcal{A}_\lambda$ auf $\mathcal{A}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$.

Erste Schritte von $\mathcal{T}$ zu $\sigma(X,\mathcal{T})$ sind die oben beschriebenen Mengen vom Typ F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$, etc. Diese Konstruktion durch *Ausschöpfung* erfordert überabzählbar viele Schritte bis zur Stabilität. Proposition D7J erreicht dieselbe Konstruktion durch *Eingrenzung* auf einen Schlag.

Die Borel–Mengen sind zwar bereits schwindelerregend allgemein, doch $\sigma(X,\mathcal{T})$ bleibt erstaunlich klein: Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$ (D6I). Diese wird nicht erhöht durch abzählbare Operationen, und so hat schließlich auch $\sigma(\mathbb{R}^n,\mathcal{T})$ die Kardinalität von $\mathbb{R}$.
Hingegen ist die Menge $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)\cong 2^{\mathbb{R}}$ aller Teilmengen wesentlich größer!
Auch die σ–Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ aller Lebesgue–messbaren ist gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{R})\cong 2^{\mathbb{R}}$; sie enthält alle Teilmengen der Cantor–Menge $C\cong\mathbb{R}$.

In diesem Sinne sind „die meisten“ $M\subseteq\mathbb{R}^n$ keine Borel–Mengen.
Die Borel–Hierarchie erlaubt noch ein Mindestmaß an Kontrolle.
Dies wollen wir in den folgenden Beispielen illustrieren.

In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ keine G_δ–Menge. D709

Übung D7K:
In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ keine G_δ–Menge (abzählbarer Durchschnitt offener Mengen). Insbesondere existiert keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die genau in $\mathbb{Q}$ stetig ist.

Lösung: Wäre $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ mit $U_n \subseteq \mathbb{R}$ offen, dann wäre U_n dicht in $\mathbb{R}$, also komager, somit auch $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Doch in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ mager. QED

Erinnerung: Jede komagere Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ ist fett, also nicht mager, sonst wäre $\mathbb{R} = C \sqcup (\mathbb{R} \setminus C)$ mager, doch das widerspricht Baires Satz D7C.

Alternative: Sei $\mathbb{Q} = \{ q_n \mid n \in \mathbb{N} \}^!$ eine Abzählung. Auch $U'_n = U_n \setminus \{q_n\}$ ist offen und dicht in $\mathbb{R}$, doch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U'_n = \emptyset$ widerspricht Baires Satz D7C.

Damit können wir die folgende Frage (c) beantworten: Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Stetigkeitsmenge S_f eine G_δ–Menge (D7L), also $S_f \neq \mathbb{Q}$.

Diese scheinbar einfache Frage erfordert eine erstaunlich tiefsinnige Untersuchung, insbesondere Baires Satz und die ersten Schritte in der Borel–Hierarchie. Dies ist der Beginn der *deskriptiven Mengenlehre*.

Welche Stetigkeitsmengen sind möglich? D710

Aufgabe: Existiert $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig genau in (a) $\emptyset$? (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? (c) $\mathbb{Q}$?

Lösung: (a) Ja, die Dirichlet–Funktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (b) Ja, die kleine Dirichlet–Funktion $f(p/q) = 1/q$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ und $q > 0$. Frage (c) ist härter und erfordert einen anderen, obstruktiven Ansatz:

Satz D7L: Jede Stetigkeitsmenge S_f ist G_δ.

Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine beliebige Abbildung metrischer Räume. Dann ist $S_f := \{ a \in X \mid f \text{ ist stetig im Punkt } a \}$ eine G_δ–Menge.

Beweis: Wir definieren die **Oszillation** von f im Punkt $a \in X$ durch

$$\omega(a) = \inf_{\delta>0} \operatorname{diam} f(B(a, \delta)).$$

Genau dann ist f stetig in a, wenn $\omega(a) = 0$ gilt. Wir haben also

$$S_f = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{ a \mid \omega(a) < 2^{-n} \}.$$

Die letzteren Mengen sind offen: Gilt $\omega(a) < \varepsilon$, so existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\operatorname{diam} f(B(a, \delta)) < \varepsilon$, also gilt $\omega(x) < \varepsilon$ für alle $x \in B(a, \delta)$. QED

Baire–Osgood: Stetigkeit nach punktweiser Konvergenz D711

Aufgabe: Ist $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ punktweiser Limes stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Lösung: Die Dirichlet–Funktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nirgends stetig. Nach dem folgenden Satz von Baire–Osgood ist das zu wenig Stetigkeit. (Für die kleine Dirichlet–Funktion hingegen gelingt es. Übung!)

Satz D7M: Baire–Osgood

Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, zudem (X, d) vollständig. Seien $(f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ stetig mit punktweisem Grenzwert $f_n \to f$. Dann ist $S_f \subseteq X$ komager, also f „fast überall“ stetig.

Erinnerung (C3Q): Bei gleichmäßiger Konvergenz $f_n \to f$ gilt $S_f = X$. Bei punktweiser Konvergenz geht Stetigkeit im Allgemeinen verloren, doch erstaunlich viel bleibt erhalten, denn $S_f \subseteq X$ ist komager.

Beispiel: Die Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren punktweise gegen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$. Hier ist $S_f = [0, 1[$ komager in $[0, 1]$, wie von Baire–Osgood vorhergesagt.

Baire–Osgood: Stetigkeit nach punktweiser Konvergenz D712 Erläuterung

Beweis: Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir $F := \{ a \in X \mid \omega(a) \geq 5\varepsilon \}$. Wir haben oben gesehen, dass F abgeschlossen ist. Wir zeigen, dass F nirgends dicht ist, also $F^\circ = \emptyset$. Damit ist $X \setminus S_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{ a \in X \mid \omega(a) \geq 2^{-n} \}$ mager.

(0) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist $C_n := \bigcap_{i,j\geq n} \{ x \in X \mid e(f_i(x), f_j(x)) \leq \varepsilon \}$ in (X, d) abgeschlossen. Es gilt $C_n \subseteq C_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$: Dank punktweiser Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ in (Y, e) ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge.

(1) Wir nehmen an, F° wäre nicht leer, somit auch nicht mager in (X, d). Dank $F^\circ = \bigcup_n (F^\circ \cap C_n)$ existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\emptyset \neq F^\circ \cap C_n^\circ =: U$. (Andernfalls wäre $F^\circ \cap C_n$ nirgends dicht in F° und somit F° mager. Das widerspricht Baires Satz, siehe hierzu die nachfolgende Aufgabe.)

(2) Für alle $x \in U$ gilt $e(f_n(x), f(x)) = \lim_{k\to\infty} e(f_n(x), f_k(x)) \leq \varepsilon$. Die Funktion f_n ist stetig: Zu jedem $a \in U$ existiert also ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $e(f_n(a), f_n(x)) \leq \varepsilon$ für alle $x \in B(a, \delta)$ gilt.

(3) Dank Dreiecksungleichung folgt $e(f_n(a), f(x)) \leq 2\varepsilon$ für alle $x \in B(a, \delta)$, also $\omega(a) \leq 4\varepsilon$. Das widerspricht $a \in B(a, \delta) \subseteq U \subseteq F$. QED

Offen in Baire ist Baire. D713 Erläuterung

Die Baire–Eigenschaft vererbt sich auf offene Teilräume. Das hilft im vorigen Beweis und auch sonst häufig, daher führen wir dies nun aus:

Aufgabe: Ist $Y \subseteq X$ offen und $(X, \mathcal{T})$ ein Baire–Raum, so auch $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Lösung: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n \subseteq Y$ offen und dicht im Teilraum $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wir zeigen, dass die Schnittmenge $U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht ist in $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Dank $Y \in \mathcal{T}$ gilt $U_n \in \mathcal{T}$ und $V_n := U_n \cup (X \setminus \overline{Y}) \in \mathcal{T}$. Zudem ist V_n dicht in $(X, \mathcal{T})$: Für $\emptyset \neq O \in \mathcal{T}$ gilt entweder $O \cap Y = \emptyset$, somit $O \subseteq X \setminus \overline{Y}$, oder $\emptyset \neq O \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, somit $O \cap Y \cap U_n \neq \emptyset$, also jedenfalls $O \cap V_n \neq \emptyset$.

Nach Voraussetzung ist $(X, \mathcal{T})$ ein Baire–Raum, also ist die Schnittmenge $V := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cup (X \setminus \overline{Y})$ dicht in $(X, \mathcal{T})$. Jede offene Menge $O \in \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$ schneidet also V. Da O und $X \setminus \overline{Y}$ disjunkt sind, schneidet O demnach $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Das bedeutet, U ist dicht in $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Die Baire–Eigenschaft vererbt sich nicht auf abgeschlossene Teilräume! **Übung:** In $\mathbb{C}$ hat der Teilraum $H = \mathbb{C}_{\mathrm{im}>0}$ die Baire–Eigenschaft, daher auch $X = H \cup \mathbb{Q}$, der darin abgeschlossene Teilraum $\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

Baire: Differenzierbarkeit ist selten. D714 Erläuterung

☺ „Fast jede“ stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist nirgends differenzierbar: Auf $I = [0, 1]$ betrachten wir dazu den Raum $\mathscr{C}(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$ aller stetigen reellen Funktionen mit der Supremumsnorm. Darin sei

$$A_n := \{ f \in \mathscr{C}(I) \mid \exists x \in I \ \forall y \in B(x, 2^{-n}) : |f(x) - f(y)| \leq n|x - y| \}.$$

Ist f in irgendeinem Punkt $x \in I$ diff'bar, so gilt $f \in A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Aufgabe: Jede Menge A_n ist (a) abgeschlossen und (b) nirgends dicht. Somit ist A mager in $\mathscr{C}(I)$: „Fast keine“ stetige Funktion ist diff'bar.

☺ Diese Abschätzung liefert einen Überblick und beweist erneut die Existenz stetiger Funktionen, die nirgends diff'bar sind. Dabei wird allerdings kein einziges konkretes Beispiel konstruiert. Eine elegante Konstruktion liefert Takagi C6A mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} d(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$.

Vergleichen Sie dies mit Cantors elegant-abstraktem Existenzbeweis „fast alle reellen Zahlen sind transzendent“ und dagegen mühsam-explizite Transzendenzbeweise für einzelne Zahlen, etwa für $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$.

Corominas–Sunyer: Charakterisierung reeller Polynome D715 Erläuterung

📖 E. Corominas, F. Sunyer: *Sur des conditions pour qu'une fonction infiniment dérivable soit un polynôme.* CRAS 238 (1954) 558–559.

Aufgabe: Für jede glatte Funktion $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{R}[x] &\overset{(a)}{\iff} \exists n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0 \\ &\overset{(b)}{\iff} \forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = 0 \end{aligned}$$

Lösung: (a) „⇒“: Für $f \in \mathbb{R}[X]_{<n}$ gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k x^k$, also $\partial^n f = 0$. „⇐“: Dies folgt aus dem Satz von Taylor durch Verschwinden des Rests.

(b) Die Implikation „⇒“ ist trivial, formal durch Quantorentausch. Erstaunlich ist die Umkehrung „⇐“, sie ist höchst raffinierte Kunst.

(1) Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A_n := \{ x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) = 0 \}$ abgeschlossen. Für das Innere gilt $A_n^\circ = \bigcup_{i\in I_n}]s_i, t_i[$ mit $[s_i, t_i] \cap [s_j, t_j] = \emptyset$ für $i \neq j$.

(2) Wir haben $A_n^\circ \subseteq A_{n+1}^\circ$, dabei kommen disjunkte Intervalle hinzu. Es genügt, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ = \mathbb{R}$ zu zeigen: Dann gilt $A_n^\circ \neq \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $A_n^\circ = \mathbb{R}$, sonst erschienen Randpunkte $x \in \delta A_n^\circ$ nicht in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ = \mathbb{R}$.

Corominas–Sunyer: Charakterisierung reeller Polynome D716 Erläuterung

Wir wollen zeigen, dass die Menge $X := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ$ leer ist.

(3) Zunächst ist X abgeschlossen und ohne isolierte Punkte. Wir wenden Baires Satz D7C auf X an: Nach Voraussetzung gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$, also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \cap A_n)$. Demnach muss für ein $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X \cap A_n$ nicht-leeres Inneres in X haben. Das heißt $\emptyset \neq X \cap J \subseteq X \cap A_n$ für ein Intervall $J =]a, b[$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$, also $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in X \cap J$.

(4) Da alle $x \in X \cap J$ Häufungspunkte sind, folgt $f^{(k)}(x) = 0$ für $k \geq n$ per Induktion durch $f^{(k+1)}(x) = \lim_{x' \to x} (f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x'))/(x - x')$.

(5) Unser Intervall J enthält auch Intervalle K komplementär zu X. Dort gilt $f^{(m)}|_K = 0$ für ein m abhängig von K. Für $m \leq n$ gilt $f^{(n)}|_K = 0$. Für $m > n$ gilt $f^{(n)}(x) = \ldots = f^{(m)}(x) = 0$ an den Endpunkten, denn diese gehören zu $J \cap X$. Durch Integration gelangen wir von $f^{(m)}|_K = 0$ zu $f^{(n)}|_K = 0$. Dies gilt für jedes Intervall K in $J \setminus X$, also schließlich $f^{(n)}|_J = 0$. Somit gilt $J \subseteq A_n$ und $J \cap X = \emptyset$, ein Widerspruch.

☺ Die Äquivalenz (b) scheint unglaublich, ist aber wahr. Ihr Beweis ist ein Lehrstück mathematischen Scharfsinns und technischer Virtuosität.