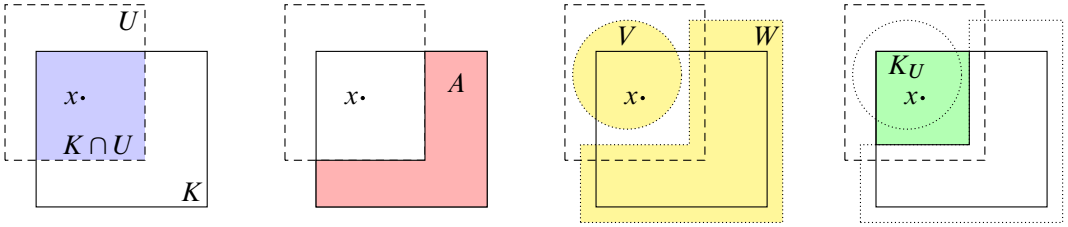
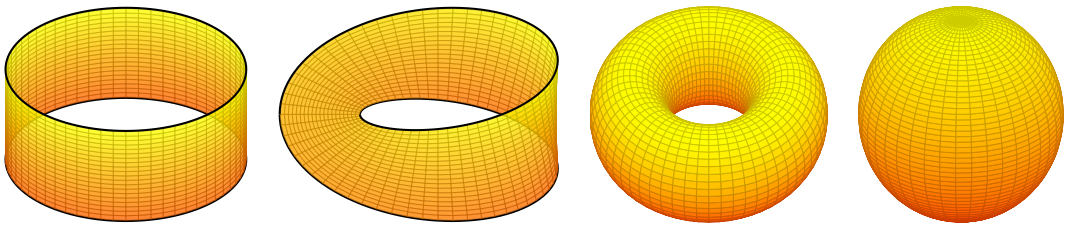
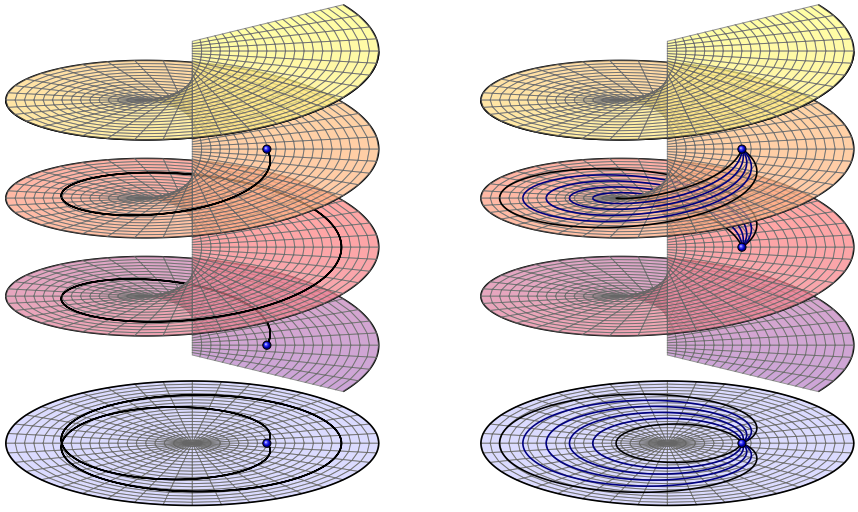
GRUNDLAGEN DER TOPOLOGIE



Michael Eisermann ⟨www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm⟩



Vorläufige Fassung vom 31. Juli 2024
Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern sowie
für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!



Nullum est iam dictum,
quod non dictum sit prius.
Terenz

Tout est dit, il n'y a qu'à le redire,
tout est vécu, il n'y a qu'à le revivre.
Camille Laurens (1957–)

Hobbits delighted in such things, if they were accurate;
they liked to have books filled with things that they already knew,
set out fair and square with no contradictions.
J.R.R. Tolkien, *The Fellowship of the Ring*

Inhaltsverzeichnis

Vorwort vii

Literatur ix

Bezeichnungen xi

Kapitel A. Was ist und was soll die Topologie? 1

§A1. Homöomorphismen: The Good, the Bad and the Ugly. 7 – §A2. Euklidische Geometrie: Polytope und Isometrien. 21 – §A3. Von Geometrie zu Topologie: Eulers Polyederformel. 31 – §A4. Zentrales Anwendungsbeispiel: die Klassifikation kompakter Flächen. 45 – §A5. Von Topologie zu Geometrie: Der Satz von Gauß–Bonnet. 56 – §A6. Wurzeln und Zweige der Topologie. 60 – §A7. Einige Anwendungen der Topologie. 63

I Analytische Topologie

Kapitel B. Grundlagen 71

§B0. Einführung und Überblick. 71 – §B1. Algebraische Grundstrukturen. 72 – §B2. Die reellen Zahlen. 89 – §B3. Die komplexen Zahlen. 100 – §B4. Quaternionen und Oktaven. 107 – §B5. Polynomringe. 114

Kapitel C. Metrische Räume 125

§C0. Einführung und Überblick. 125 – §C1. Skalarprodukte und Normen auf Vektorräumen. 126 – §C2. Metrische Räume und ihre Topologie. 138 – §C3. Konvergenz und Stetigkeit. 153 – §C4. Vollständige metrische Räume. 169 – §C5. Reihen und Potenzreihen. 185 – §C6. Der kleine Horrorladen. 198 – §C7. Wegmetrik und Geodäten. 205 – §C8. Übungen und Ergänzungen. 214

Kapitel D. Topologische Räume 221

§D0. Einführung und Überblick. 221 – §D1. Topologische Räume. 223 – §D2. Stetige Abbildungen. 231 – §D3. Umgebungen und Umgebungsbasen. 239 – §D4. Anwendung auf Funktionenräume. 250 – §D5. Inneres, Abschluss, Rand. 262 – §D6. Basen und Erzeugendensysteme. 276 – §D7. Borel–Mengen und Satz von Baire. 288 – §D8. Netze und Filter. 293 – §D9. Übungen und Ergänzungen. 305

Kapitel E. Topologische Konstruktionen 309

§E0. Einführung und Überblick. 309 – §E1. Teilräume. 310 – §E2. Quotientenräume. 322 – §E3. Summen topologischer Räume. 341 – §E4. Produkte topologischer Räume. 348 – §E5. Trennungsaxiome und Metrisierung. 359 – §E6. Geometrisch-analytische Anwendungen. 374 – §E7. Topologische Gruppen. 378

Kapitel F. Kompaktheit 385

§F0. Einführung und Überblick. 385 – §F1. Kompakte topologische Räume. 387 – §F2. Erste geometrische Anwendungen. 400 – §F3. Kompakte metrische Räume. 417 – §F4. Lokale Kompaktheit. 429 – §F5. Kompaktifizierung. 440 – §F6. Eigentliche Abbildungen. 447 – §F7. Abbildungsräume und die Kompakt-Offen-Topologie. 450 – §F8. Parakompaktheit. 457 – §F9. Übungen und Ergänzungen. 463

Kapitel G. Zusammenhang und Homotopie 467

§G0. Einführung und Überblick. 467 – §G1. Zusammenhang. 468 – §G2. Wegzusammenhang. 475 – §G3. Lokaler Zusammenhang. 487 – §G4. Homotopie stetiger Abbildungen. 495 – §G5. Retrakte und Deformationsretrakte. 503 – §G6. Übungen und Ergänzungen. 510

Kapitel H. Die Sprache der Kategorien 515

§H0. Einführung und Überblick. 515 – §H1. Kategorien. 517 – §H2. Kommutative Diagramme. 527 – §H3. Universelle Objekte. 538 – §H4. Funktoren. 547 – §H5. Natürliche Transformationen. 555

II Geometrische Topologie

Kapitel I. Simpliziale Komplexe 565

§I0. Einführung und Überblick. 565 – §I1. Affine Simplizialkomplexe. 567 – §I2. Kombinatorische Simplizialkomplexe. 573 – §I3. Triangulierung und Unterteilungen. 586 – §I4. Simpliziale Approximation. 608

Kapitel J. Abbildungsgrad auf Sphären und Topologie des $\mathbb{R}^n$ 619

§J0. Einführung und Überblick. 619 – §J1. Die Umlaufzahl ebener Wege. 626 – §J2. Der Satz von Jordan–Schoenflies. 646 – §J3. Der Abbildungsgrad auf Sphären. 664 – §J4. Der Brouwersche Fixpunktsatz. 672 – §J5. Der Satz vom Igel und Vektorfelder auf Sphären. 685 – §J6. Der Satz von Borsuk–Ulam und Anwendungen. 692 – §J7. Invarianz der Dimension, des Randes, des Gebietes, der Orientierung. 698 – §J8. Übungen und Ergänzungen. 708

Kapitel K. Klassifikation kompakter Flächen 711

§K0. Einführung und Überblick. 711 – §K1. Mannigfaltigkeiten. 713 – §K2. Projektive Räume. 732 – §K3. Der Flächenkalkül. 751 – §K4. Verbundene Summe. 767 – §K5. Nicht/Einbettungssätze. 770 – §K6. Übungen und Ergänzungen. 775

III Algebraische Topologie

Kapitel L. Fundamentalgruppen topologischer Räume 793

§L0. Einführung und Überblick. 793 – §L1. Das Fundamentalgruppoid eines Raumes. 797 – §L2. Die Fundamentalgruppe eines punktierten Raumes. 804 – §L3. Präsentationen von Gruppen. 816 – §L4. Polygonale Fundamentalgruppen. 849 – §L5. Wegintegrale und Potentiale von Vektorfeldern. 863 – §L6. Simpliziale Fundamentalgruppen. 877 – §L7. Beispiele und Anwendungen. 900 – §L8. Freie Produkte und Amalgame. 912

Kapitel M. Überlagerungen topologischer Räume 925

§M0. Einführung und Überblick. 925 – §M1. Überlagerungen topologischer Räume. 930 – §M2. Hochhebung von Wegen und Homotopien. 942 – §M3. Gruppenoperationen und Galois–Überlagerungen. 956 – §M4. Kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung. 963 – §M5. Galois–Korrespondenz zwischen Untergruppen und Überlagerungen. 982 – §M6. Das allgemeine Hochhebungskriterium. 995

Nicht dass ich es schon ergriffen habe oder vollendet sei;
ich jage ihm aber nach, ob ich es ergreifen möchte.
Apostel PAULUS an die Philipper, 3:12

Vorwort

Wozu sind diese Notizen gedacht?

In erster Linie sind diese Notizen für mich selbst gedacht. Sie dienen mir als Werkbank, ich notiere mir hier Darstellungen, wie ich sie vortragen möchte oder schon erprobt habe, dazu zahlreiche Beispiele und Übungen, teils mit ausführlichen Lösungen, zudem viele Erläuterungen und mögliche Vertiefungen. Die Mathematik ist großzügig und reichhaltig!

Für die jeweilige Lehrveranstaltung treffe ich eine geeignete Auswahl: Vorlesung und Übung behandeln nur einen kleinen Teil – den für die Lernsituation wesentlichen, so hoffe ich. Natürlich wird anschließend nur geprüft, was behandelt wurde. Ist doch klar.

Parallel zur Vorlesung stelle ich diese Notizen online zur Verfügung. Das ist ein gut gemeintes Angebot: Wer etwas nachlesen möchte, kann dies hier tun, sei es als Ersatz oder zur Wiederholung, Übung oder Vertiefung, als Ergänzung oder Brücke zur angegebenen Literatur. Wer das nicht möchte, kann sich getrost an Vorlesung und Übung halten. Der Bedarf nach Umfang und Tiefe ist individuell sehr unterschiedlich: Dosieren Sie selbst!

Erst in zweiter Linie hoffe ich, diese Notizen mögen auch zur Entlastung meiner Vorlesung beitragen: Ich möchte dort lieber die zentralen Ideen erklären als allzu viele Details. Auch technische Details aber sind wichtig, insbesondere in einer Anfängervorlesung: Gutgelaunt kann ich davon einige an der Tafel ausführen, andere möchte ich in diesen Notizen sozusagen als Sicherheit hinterlegen. Wer möchte, kann sie bei Bedarf hier nachschlagen.

Klaus JÄNICH schreibt hierzu in seinem Buch *Topologie* (Springer 2005, S. 61):

> Wer anschaulich argumentiert, setzt sich leicht dem Vorwurf aus, er würde gar nicht argumentieren, sondern nur gestikulieren; im Englischen spricht man da von „handwaving“. Soll man deshalb allen anschaulichen Argumenten von vorneherein aus dem Wege gehen? Gewiß nicht. Wenn man nur das bare Gold der strengen Beweise immer als Deckung im Hintergrund hat, dann ist das Papiergeld der Gesten ein unschätzbares Hilfsmittel für schnelle Verständigung und raschen Gedankenumlauf.

Besser kann ich es nicht sagen. Das Problem scheint mir in der Topologie besonders akut. Mein persönlicher Versuch einer Lösung sind diese Notizen, dereinst in ihrem fiktiven Endzustand. Bis dahin ist es freilich noch ein weiter Weg. Sehen Sie diese Notizen also lieber als einen iterativen Prozess: Bei der nächsten Vorlesung wird alles besser. . . .

Diese Notizen sind noch Änderungen, Umstellungen und Ergänzungen unterworfen. Korrekturen, Kommentare und Verbesserungsvorschläge nehme ich jederzeit gerne an.

The aim of theory really is, to a great extent, that of systematically organizing past experience in such a way that the next generation [...] will be able to absorb the essential aspects in as painless a way as possible.
Sir Michael ATIYAH (1929–2019), *How research is carried out*

Literatur

Lehrbücher zur Topologie

Es gibt viele gute Lehrbücher zur Topologie. Je nach Ausrichtung behandeln sie mehr analytische, geometrische oder algebraische Topologie. Schauen Sie sich in der Bibliothek bzw. in deren Online-Service Lehrwerke zur Topologie an und wählen Sie das für Sie passende aus. Wenn Sie möchten, können Sie mit folgenden anfangen:

- J. Munkres: *Topology*, Prentice Hall 2000.
- H. Schubert: *Topologie*, Teubner 1971.
- M.A. Armstrong: *Basic Topology*, Springer 1983.
- G. Laures, M. Szymik: *Grundkurs Topologie*, Springer 2009.
- K. Jänich: *Topologie*, Springer 2005.

Als Referenz nenne ich zudem einige Lehrbücher für die Grundlagen der Analysis:

- K. Königsberger: *Analysis*, Springer 2004.
- H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis*, Teubner 2003.
- W. Rudin: *Analysis*, Oldenbourg 2009.
- V.A. Zorich: *Analysis*, Springer 2006.

Spezialisiertere Lehrwerke zur analytischen Topologie:

- J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon 1966.
- B. von Querenburg: *Mengentheoretische Topologie*, Springer 2001.
- R. Engelking: *General Topology*, Heldermann 1989.
- L.A. Steen, J.A. Seebach: *Counterexamples in Topology*, Dover 1995.

Lehrbücher zur algebraischen Topologie und ihren geometrischen Anwendungen:

- G.E. Bredon: *Topology and Geometry*, Springer 1993.
- R. Stöcker, H. Zieschang: *Algebraische Topologie*, Teubner 1994.
- J.J. Rotman: *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer 1998.
- A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2001.
- E.H. Spanier: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill / Springer 1966.
- J. Stillwell: *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer 1992.

Klassiker der Topologie

Ältere Literatur, die immer noch lehrreich ist, aber eher nicht zum Einstieg empfohlen:

- F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig 1914. Die Topologie zählte man damals noch zur Mengenlehre. Sie erfährt hier in Kapitel VII. „Punktmengen in allgemeinen Räumen“ ihre erste systematische Darstellung in einem Lehrbuch. Dem Schöpfer der Mengenlehre, Georg CANTOR, in dankbarer Verehrung gewidmet.
- H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig 1934. Eines der ersten Lehrbücher zur algebraischen Topologie und für viele Jahre die Standardreferenz.
- P. Alexandroff, H. Hopf: *Topologie*, Springer, Berlin 1935. Diesem Lehrwerk gelang erstmals die Zusammenführung von mengentheorerischer und algebraischer Topologie, „keine Darstellung der ganzen Topologie, aber (...) der Topologie als einem Ganzem.“
- N. Bourbaki: *Topologie générale*, Hermann, Paris 1971. Das Autorenkollektiv hat seit 1947 einen enzyklopädischen Klassiker geschaffen und den berühmt-berüchtigten Stil von Bourbaki etabliert. Als Referenz unverzichtbar, als Lehrbuch ungenießbar.

Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.
William Kingdon CLIFFORD (1845–1879)

Bezeichnungen

Zum schnellen Einstieg und als Referenz fasse ich hier einige Bezeichnungen zusammen.

Zahlen. Ich verwende die folgenden Standardbezeichnungen:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen. Die Null gehört dazu.
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ bezeichnet die Menge / die Gruppe / den Ring der ganzen Zahlen.
$\mathbb{Q} = \{\, a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \,\}$ bezeichnet die Menge / den Körper der rationalen Zahlen.
$\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge / den Körper / den topologischen Raum der reellen Zahlen.
$\mathbb{C}$ bezeichnet die Menge / den Körper / den topologischen Raum der komplexen Zahlen.

Für jedem Ring $(R, +, 0, \cdot, 1)$ bezeichnet $R^* = R \setminus \{0\}$ die Menge R ohne die Null und $R^{m\times n}$ die Menge aller $m \times n$–Matrizen. In jedem Monoid $(M, \cdot)$ bezeichnet $M^\times \subset M$ die Gruppe aller invertierbaren Elemente. Beispiele: $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^*$ und $\mathrm{GL}_n(R) = (R^{n\times n}, \cdot)^\times$.

Weniger Standard aber ebenso nützlich ist die Bezeichnung $\mathbb{R}_{>0} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$ und entsprechend $\mathbb{Q}_{>0}$ sowie $\mathbb{Z}_{>0} = \mathbb{N}_{>0}$. Analoge Bezeichnungen wie $\mathbb{R}_{<0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{>1}$, etc. sind selbsterklärend. Exotische Varianten werden erklärt, wo sie gebraucht werden.

Für $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ bezeichne ich das abgeschlossene / offene / halboffene Intervall mit

$$[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}, \qquad]a,b[= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\},$$
$$[a,b[= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}, \qquad]a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}.$$

Intervalle haben auch für $a \geq b$ einen Sinn, und zwar gilt $[a,a] = \{a\}$, alle anderen Intervalle sind für $a \geq b$ leer. Falls $a \leq b$ nötig ist, wird explizit darauf hingewiesen.

Diese Bezeichnungen übertragen sich auf die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Gelegentlich kommen auch Intervalle von rationalen Zahlen vor, diese bezeichne ich mit $[a,b]_{\mathbb{Q}}$, $]a,b[_{\mathbb{Q}}$, $[a,b[_{\mathbb{Q}}$, $]a,b]_{\mathbb{Q}}$. Entsprechende Bezeichnungen gelten für jede geordnete Menge $(X, \leq)$. Die Bezeichnungen ohne Index bleiben für reelle Intervalle reserviert.

Mengen. Die Topologie nutzt hemmungslos die Mengenlehre. Die Bezeichnungen sind heutzutage weitgehend einheitlich, aber Varianten sollten hier besser geklärt werden.

Für Teilmengen schreibe ich $A \subset B$ oder gleichbedeutend $A \subseteq B$, das heißt, aus $a \in A$ folgt $a \in B$. Hingegen bedeutet $A \subsetneq B$, dass zwar $A \subset B$ aber $A \neq B$ gilt.

Ist X eine Menge so bezeichne ich mit $\mathfrak{P}(X) = \{\, A \subset X \,\}$ ihre Potenzmenge: Dies ist die Menge aller Teilmengen von X, das heißt, $A \in \mathfrak{P}(X)$ ist gleichbedeutend mit $A \subset X$.

Seien I und X Mengen. Eine *Familie* $x = (x_i)_{i\in I}$ von Elementen $x_i \in X$ indiziert durch $i \in I$ ist nichts anderes als eine Abbildung $x : I \to X : i \mapsto x_i$. Ebenso ist eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $X_i \subset X$ eine Abbildung $I \to \mathfrak{P}(X) : i \mapsto X_i$. Genau dann gilt x in der *Vereinigung* $\bigcup_{i\in I} X_i$, wenn $x \in X_i$ für mindestens ein $i \in I$. Genau dann gilt x in der *Schnittmenge* $\bigcap_{i\in I} X_i$, wenn $x \in X_i$ für alle $i \in I$. Im Falle $I = \{1,\dots,n\}$ ist die Familie ein n–Tupel $(X_1,\dots,X_n)$ und ich schreibe kurz $X_1 \cup \dots \cup X_n$ bzw. $X_1 \cap \dots \cap X_n$.

Im Spezialfall $I = \emptyset$ erhalten wir die leere Vereinigung $\bigcup_{i\in\emptyset} X_i = \emptyset$. Der leere Durchschnitt $\bigcap_{i\in\emptyset} X_i$ ist im Allgemeinen nicht definiert: Dies wäre wörtlich interpretiert die Menge *aller* Elemente, was logisch bedenklich ist. Arbeiten wir jedoch innerhalb einer festen Grundmenge Ω, so können und werden wir $\bigcap_{i\in\emptyset} X_i = \Omega$ vereinbaren.

Jede Familie $F = (x_i)_{i\in I}$ definiert eine Menge $M = \{\, x_i \mid i \in I \,\}$. Der Unterschied ist die Indizierung: Während in F Elemente mehrfach vorkommen können und durch ihren Index unterschieden werden, wird diese Information bei der Menge M vergessen. Umgekehrt kann man jede Menge M als eine Familie $(x)_{x\in M}$ auffassen, falls dies nützlich sein sollte.

Statt einer Familie $(X_i)_{i\in I}$ ist gelegentlich die Menge $\mathscr{X} = \{\, X_i \mid i \in I \,\}$ praktischer. Wir schreiben dann die Vereinigung als $\bigcup \mathscr{X} = \bigcup_{A\in\mathscr{X}} A = \bigcup_{i\in I} X_i$ und den Durchschnitt als $\bigcap \mathscr{X} = \bigcap_{A\in\mathscr{X}} A = \bigcap_{i\in I} X_i$. Für die leere Vereinigung gilt $\bigcup\emptyset = \emptyset$. Hingegen ist der leere Durchschnitt $\bigcap\emptyset$ im Allgemeinen nicht definiert, wie oben erläutert.

Abbildungen. Mit $f : X \to Y$ bezeichne ich eine *Abbildung* f von der Menge X in die Menge Y. Das bedeutet, f ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zu.

Formal ist dies ein Tripel (X, f, Y) bestehend aus *Startmenge* X und *Zielmenge* Y sowie der Relation $f \subset X \times Y$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ existiert. Diese Zuordnung schreiben wir $f : x \mapsto y$ oder kurz $f(x) = y$.

Mit Y^X bezeichne ich die Menge aller Abbildungen $f : X \to Y$. Für $n = \{0,\dots,n-1\}$ ist somit Y^n die Menge aller n–Tupel, und $Y^{\mathbb{N}}$ ist die Menge aller Folgen $f : \mathbb{N} \to Y$.

Für jede Menge X haben wir die *Identität* $\mathrm{id}_X : X \to X$ mit $x \mapsto x$ für alle $x \in X$. Für jede Teilmenge $A \subset X$ haben wir die *Inklusion* $\iota_A^X : A \hookrightarrow X$ mit $a \mapsto a$ für alle $a \in A$.

Die *Komposition* zweier Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Die Linksreihung ist eher unglücklich aber üblich.

Bezüglich einer Abbildung $f : X \to Y$ bezeichne ich das *Bild* von $A \subset X$ unter f mit $f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$ und das *Urbild* von $B \subset Y$ mit $f^{-1}(B) = \{\, x \in X \mid f(x) \in B \,\}$. Wir nennen f *konstant* mit Wert $y \in Y$, kurz $f = \mathrm{const}_X^y$, falls $f(X) = \{y\}$ gilt.

Gilt $f(A) \subset B$, dann ist die *Einschränkung* $f|_A^B : A \to B$ definiert durch $a \mapsto f(a)$ für alle $a \in A$. Es gilt $f \circ \iota_A^X = \iota_B^Y \circ f|_A^B$. Im Falle $B = Y$ schreibe ich kurz $f|_A : A \to Y$; es gilt $f \circ \iota_A^X = f|_A$. Im Falle $A = X$ schreibe ich auch $f|^B : X \to B$; es gilt $f = \iota_B^Y \circ f|^B$.

Die Schreibweise $f : X \hookrightarrow Y$ bedeutet, dass f *injektiv* ist (bzw. eine *Einbettung*). Entsprechend bedeutet $f : X \twoheadrightarrow Y$, dass f *surjektiv* ist (bzw. ein *Quotient*). Schließlich bedeutet $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, dass f *bijektiv* ist (bzw. ein *Isomorphismus*, *Homöomorphismus*, *Diffeomorphismus*, oder ähnliches, je nach der Kategorie, in der wir gerade arbeiten).

Diese Schreibweise dient zur Betonung oder als Gedächtnisstütze. Eine Abbildung wird nicht dadurch injektiv/surjektiv/bijektiv, dass ich diese Behauptung dekorativ hinschreibe. Was genau gemeint ist, muss im Kontext erläutert und dann auch nachgewiesen werden.

Ihr naht euch wieder, schwankende Gestalten,
Die früh sich einst dem trüben Blick gezeigt.
Versuch ich wohl, euch diesmal fest zu halten?
Fühl ich mein Herz noch jenem Wahn geneigt?
Johann Wolfgang von GOETHE (1749–1832), *Faust*

KAPITEL A

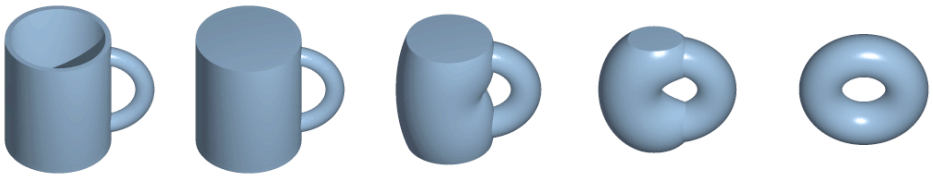
Was ist und was soll die Topologie?

Eine ernsthafte aber abstrakte Antwort lautet: *Topologie ist qualitative Geometrie.*

ABBILDUNG A:1. Homöomorphe und nicht-homöomorphe topologische Räume

Die Topologie nennt man auch *Stetigkeitsgeometrie* oder scherzend *Gummigeometrie*. Während in der Geometrie *quantitative* Angaben wie Länge, Winkel, Flächeninhalt, etc. im Vordergrund stehen, verzichtet man in der Topologie auf derlei Maße und betrachtet rein *qualitativ* nur die Form, die unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt. In diesem Sinne sind ein Dreieck, ein Quadrat und eine Kreisscheibe topologisch äquivalent, denn sie lassen sich stetig ineinander überführen. Wir sagen hierzu genauer, sie sind *homöomorph* (griechisch für 'gleiche Form', zusammengesetzt aus ὁμοῖος [homoios] 'gleich, ähnlich' und μορφή [morphé] 'Form, Gestalt, Anmut'). Ebenso sind ihre Ränder zueinander homöomorph.

A child's first geometrical discoveries are topological. —
If you ask him to copy a square or a triangle, he draws a closed circle.
Jean Piaget (1896–1980)



Eine eher scherzhafte aber prägnante Antwort auf die Eingangsfrage lautet daher: *Ein Topologe unterscheidet nicht zwischen einer Kaffeetasse und einem Doughnut.*

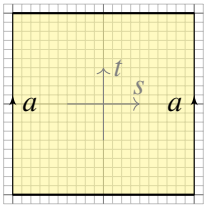
Für einen Geometer sind Tori mit unterschiedlichen Radien verschieden: Sie haben verschiedene Flächeninhalte, Krümmungen, etc. Eine Topologin sieht von *metrischen Eigenschaften* ab und interessiert sich für *topologische Eigenschaften*, also die „abstrakte Form". Dann sind ein Doughnut und eine Kaffeetasse tatsächlich nicht wesentlich verschieden, denn beide lassen sich stetig ineinander überführen, wie die obige Abbildung andeutet. (Wenn nötig sind die meisten Topolog:innen zu einer feineren Unterscheidung fähig.)

Diese Einleitung versucht einen repräsentativen Querschnitt der Vorlesung: Ich möchte erste topologische Fragen vorstellen und auch geeignete Techniken zu ihrer Beantwortung.

In was für einer Welt leben wir eigentlich? Die Welt, in der wir leben, ist dreidimensional, zumindest lokal in unserer unmittelbaren Umgebung scheint diese Idealisierung eine gute Näherung an unsere alltägliche Erfahrung zu sein. Ist der uns umgebende Raum deshalb auch global homöomorph zum Modellraum $\mathbb{R}^3$? Das ist keineswegs zwingend!

Wenn wir ehrlich sind, kennen wir vom Universum nur einen sehr kleinen Ausschnitt: In unserer unmittelbaren Umgebung lässt sich jeder Punkt durch drei Koordinaten eindeutig darstellen, so haben wir es in der Schule gelernt. Eine solche lokale Karte beschreibt unsere Umgebung, nicht aber das gesamte Universum: Verschiedene Räume sind denkbar!

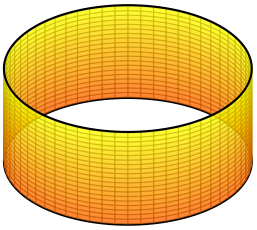
Dieses Phänomen ist zweidimensional leichter fasslich. Beginnen wir also mit Flächen! Die Erdoberfläche um uns herum ist zweidimensional, lokal homöomorph zur Ebene $\mathbb{R}^2$. Ist die Erde deshalb eine Scheibe? Nein, sehr verschiedene Flächen sind denkbar!

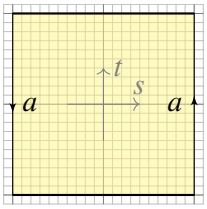


$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 :$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\cos(\pi s) \\ R\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$

mit $R > 0$, in der Skizze $R = 3$

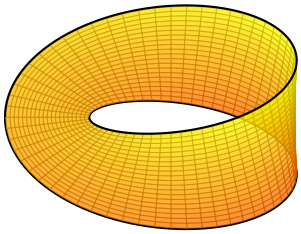


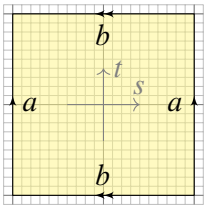


$g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 :$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [R + t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [R + t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$

mit $R > 1$, in der Skizze $R = 3$

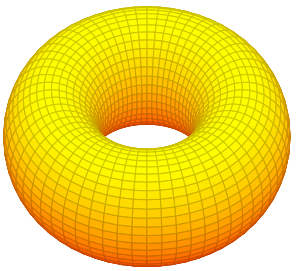


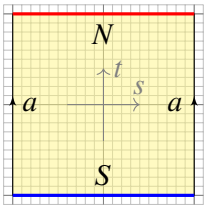


$h : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 :$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [R + r\sin(\pi t)]\cos(\pi s) \\ [R + r\sin(\pi t)]\sin(\pi s) \\ r\cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

mit $0 < r < R$, Skizze $r = 1$, $R = 2$





$k : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 :$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\pi t/2)\cos(\pi s) \\ r\cos(\pi t/2)\sin(\pi s) \\ r\sin(\pi t/2) \end{pmatrix}$$

mit $r > 0$

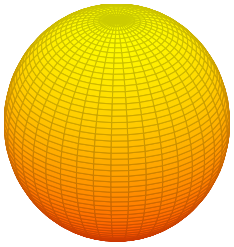


ABBILDUNG A:2. Vier Verheftungen des Quadrates $[-1,1]^2$ zu Zylindermantel, Möbius–Band, Torus und Sphäre, jeweils mit Einbettung im $\mathbb{R}^3$.

Stellen Sie sich zur Illustration vor, Sie lebten als Ameise auf einer solchen Fläche. Ihre Welt erscheint Ihnen lokal wie eine Ebene: Ihre unmittelbare Umgebung können Sie durch zwei Koordinaten beschreiben und so eine Karte erstellen. Sie könnten sich als nächstes fragen, ob die Fläche einen Rand hat, ob sie endlich ist oder sich in unendliche Weiten erstreckt. Um dies herauszufinden, brechen Sie zu einer Expedition auf. Nach einer Weltumrundung bringt diese Sie wieder an ihren Ausgangspunkt – und zu der Überzeugung, dass die Fläche, auf der Sie leben, endlich aber randlos ist. Folgt daraus, dass Sie auf einer Kugeloberfläche leben? Vielleicht auch nicht: Es gibt weitere Flächen, etwa die Torusfläche, die ebenso endlich und randlos sind, sich aber wesentlich von der Kugeloberfläche unterscheiden. Sie brauchen also noch mehr Informationen, um auf die topologische Gestalt Ihrer Welt schließen zu können. Genau dies leistet die Flächenklassifikation (A4J).

Mannigfaltigkeiten. Präzisieren wir zunächst unsere Begriffe. Eine *Fläche* sieht lokal aus wie die Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. am Rand (falls vorhanden) wie die Halbebene $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$. Es bereitet keinerlei Mehraufwand, dies gleich in jeder beliebigen Dimension $m \in \mathbb{N}$ zu formulieren:

Definition A0A (topologische Mannigfaltigkeit)**.** Eine *m–dimensionale Mannigfaltigkeit* (mit Rand), ist ein Raum $M \subset \mathbb{R}^n$, später allgemein ein *metrisierbarer topologischer Raum*, der *lokal homöomorph* ist zu $\mathbb{R}^m$ (oder zu $\mathbb{R}^m_{\geq 0} = \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \geq 0 \,\}$).

Ausführlich bedeutet das: Zu jedem Punkt $a \in M$ existiert ein *lokaler Homöomorphismus* $(M,a) \cong (\mathbb{R}^m, 0)$ oder $(M,a) \cong (\mathbb{R}^m_{\geq 0}, 0)$. Im ersten Falle nennen wir a einen *inneren Punkt*, kurz $a \in \operatorname{Int} M$, im zweiten Falle ist a ein *Randpunkt* von M, kurz $a \in \partial M$.

Eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit ist nichts anderes als eine Menge isolierter Punkte. Eine eindimensionale Mannigfaltigkeit nennen wir auch *Kurve*, eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit nennen wir *Fläche*. Soweit die nüchterne Definition, deren Sinn Sie ohne weiteres erahnen, für die aber Begriffe wie *topologischer Raum*, *metrisierbar* und *lokal homöomorph* noch erklärt werden müssen. Die systematische Konstruktion solcher Räume und die Untersuchung topologischer Eigenschaften wie *Zusammenhang* und *Kompaktheit*, sowie *Dimension*, *Inneres* und *Rand* werden uns noch ausführlich beschäftigen. Anschauliche Beispiele im $\mathbb{R}^n$ sind Untermannigfaltigkeiten (A1S), evtl. mit Rand (A1T).

Beispiel A0B. Abbildung A:2 zeigt vier Flächen: Diese sind explizit als Teilmengen im $\mathbb{R}^3$ dargestellt und zudem parametrisiert. Topologisch gesehen ist die Konstruktion sehr einfach: Wir nehmen ein rechteckiges Blatt Papier, verkleben Randpunkte wie angegeben, und erhalten einen Zylindermantel, ein Möbius–Band, einen Torus oder eine Sphäre. Aus den Parametrisierungen gewinnen wir lokale Homöomorphismen. (Übung: Wie genau?)

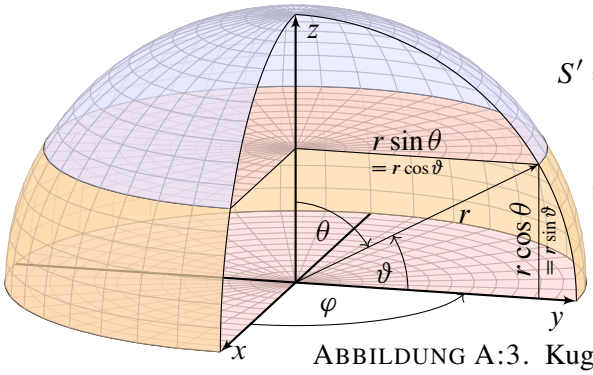
Diese Vorlesung entwickelt grundlegende topologische Begriffe und Methoden. Sie zielt dabei auf eine möglichst allgemeine und vielseitig anwendbare Klasse von Objekten: *Topologische Räume* und *stetige Abbildungen* werden nahezu überall in der Mathematik verwendet, allen voran in der Analysis und der Geometrie. Besonders schöne Räume sind Mannigfaltigkeiten, wie oben skizziert und definiert. Unser bescheidenes aber lohnendes Ziel ist die Klassifikation aller kompakten Flächen bis auf Homöomorphie (A4J). Entlang des Weges können wir viel über Topologie lernen – und ganz allgemein über Mathematik.

The theorem of classification of surfaces is a top-class mathematical achievement, comparable with the discovery of America or X-rays.
Vladimir Arnold (1937–2010), *On teaching mathematics* (1997)

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ Die Mathematik umschrieb man einst als die Wissenschaft der Zahlen und Figuren. ☜ Besonders eindrücklich ist dieses Zusammenspiel bis heute in der analytischen Geometrie.

Übung A0C. Wir betrachten die Vollkugel $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$ vom Radius $r > 0$. Ihr Rand ist die Sphäre $S = \partial V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\}$. Skizzieren Sie die Teilfläche $S' \subset S$ für $0 \le z \le r/2$ und ($x \le 0$ oder $y \le 0$) und parametrisieren Sie S' in Kugelkoordinaten. Hierzu gibt es zwei Konventionen: Mathematisch laufen wir vom Nordpol mit $\theta = 0$ zum Südpol mit $\theta = \pi$ wie in A:3. Alternativ ist $\vartheta = \pi/2 - \theta$ die geographische Breite vom Äquator $\vartheta = 0$ zu den Polen $\vartheta = \pm\pi/2$ wie in A:2.



$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} \pi/3 \le \theta \le \pi/2 \\ \pi/2 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le \vartheta \le \pi/6 \\ \pi/2 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

ABBILDUNG A:3. Kugelkoordinaten

Übung A0D. Zu gegebenen Radien $0 < r < R$ haben wir den Volltorus

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R+\rho\sin\theta)\cos\varphi \\ (R+\rho\sin\theta)\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Für festen Radius $\rho = r$ erhalten wir die Torusfläche $T = \partial V$ wie in A:4. Skizzieren Sie zur Illustration und als Übung die Teilfläche $T' \subset T$ für $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi$ und $0 \le \theta \le \frac{7}{4}\pi$. Solche Fingerübungen trainieren die Übersetzung von Formeln zu Bildern und zurück.

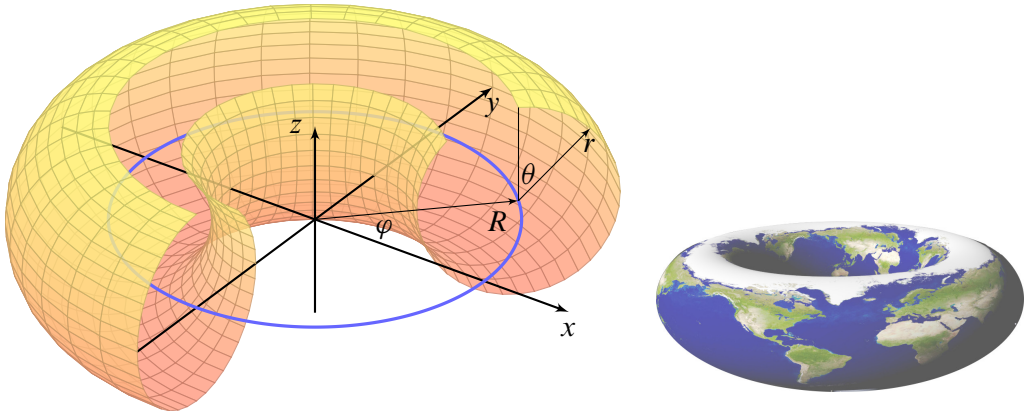
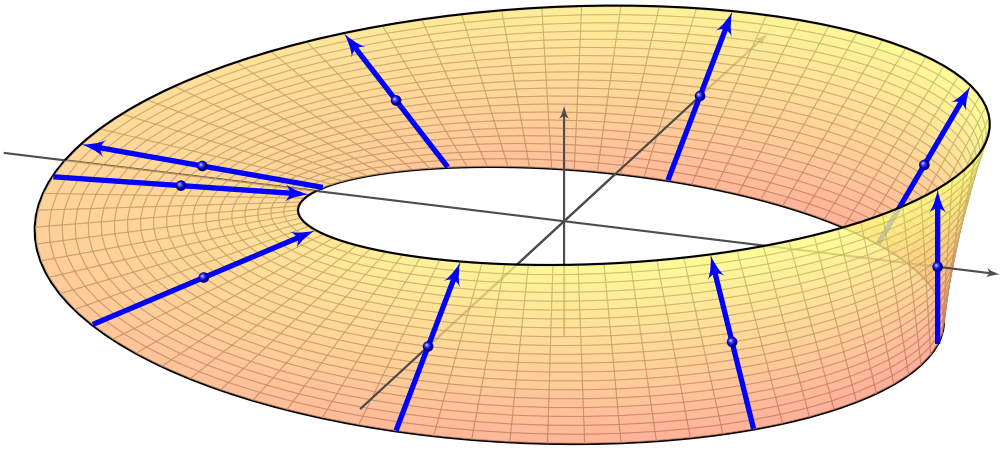


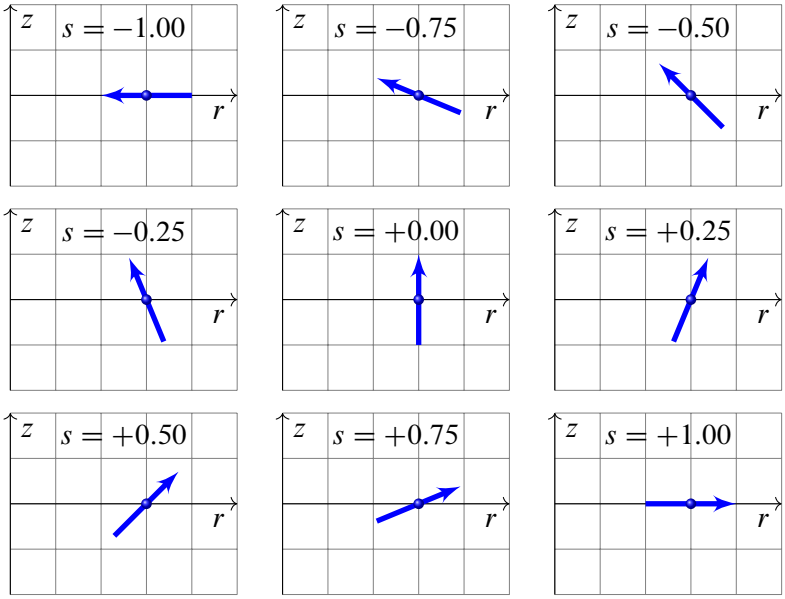
ABBILDUNG A:4. Toruskoordinaten

☞ Wie können Sie die Abbildungen aus A:2 überprüfen, zeichnen, oder gar selbst finden? ☜

Jede Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n : s \mapsto f(s)$ einer reellen Variablen können Sie als Weg betrachten und entsprechend zeichnen (für $n = 2,3$). Bei zwei reellen Variablen, wie hier $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}^n : (s,t) \mapsto f(s,t)$, können Sie jeweils eine Variable s oder t festhalten und die andere laufen lassen. Eventuell helfen auch Variablentransformationen, also die möglichst geschickte Wahl neuer Koordinaten. In unseren vier Beispielen A:2 eignen sich im Bildbereich $\mathbb{R}^3$ Zylinderkoordinaten um die z–Achse; dabei ist s ist die Winkelvariable.



Das Möbius–Band windet sich um seine Mittelachse und vollführt dabei eine Drehung um 180°. Wir erhalten eine Fläche mit nur einer Seite! Diese wurde im Jahr 1858 unabhängig voneinander beschrieben (entdeckt oder erfunden?) von dem Göttinger Mathematiker und Physiker Johann Benedict LISTING und dem Leipziger Mathematiker und Astronomen August Ferdinand MÖBIUS. Es ist das universelle Modell einer nicht-orientierbaren Fläche: Eine beliebige Fläche ist genau dann nicht-orientierbar, wenn sie ein Möbius–Band enthält.



© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Ist Mathematik eine Tätigkeit des Erfindens oder des Entdeckens?** Diese philosophische Frage ist ähnlich alt wie die Mathematik selbst. Sie hat bis heute handfeste rechtliche Auswirkungen. Das Patentrecht unterstellt das Entdecken: Technische *Erfindungen* können patentiert werden, nicht aber *Entdeckungen*. Daher sind wissenschaftliche Theorien grundsätzlich nicht patentierbar. Das betrifft auch mathematische Methoden bis hin zu Algorithmen und Computerprogrammen. Die Grenzziehung ist bisweilen problematisch. ☜

(19) **Bundesrepublik Deutschland**
Deutsches Patent- und Markenamt

(10) **DE 20 2004 005 763 U1** 2004.08.19

(12) **Gebrauchsmusterschrift**

(22) Anmeldetag: **13.04.2004**
(47) Eintragungstag: **15.07.2004**
(43) Bekanntmachung im Patentblatt: **19.08.2004**

(51) Int Cl.[7]: **F16F 1/00**

(71) Name und Wohnsitz des Inhabers:
Haitovs, Leopolds, 60385 Frankfurt, DE

(74) Name und Wohnsitz des Vertreters:
Schweizer, P., Rechtsanw., 86150 Augsburg

Die folgenden Angaben sind den vom Anmelder eingereichten Unterlagen entnommen

(54) Bezeichnung: **Antriebsriemen**

(57) Hauptanspruch: Antriebsriemen, der als ein Ring aus einem Band gemacht ist, dessen Oberfläche für ein Zusammenwirken mit einigen Antriebsscheiben bestimmt ist, dadurch gekennzeichnet, dass der genannte Ring als Möbius-Band (einseitige Fläche) gemacht ist.

Beispiel. Die gezeigte elfseitige Gebrauchsmusterschrift erklärt: „Beschreibung: Die Erfindung gehört zum Maschinenbau, insb. zu den Antriebsriemen. (...) Der Nachteil der bekannten Antriebsriemen ist eine geringe Betriebszeit durch den Verschleiß der Arbeitsflächen. (...) Um den genannten Nachteil zu beseitigen wäre es zweckdienlich, nicht nur eine Oberfläche des Riemens als Arbeitsoberfläche zu benutzen, sondern möglichst alle Oberflächen des Riemens. Dafür sollte man den Riemen nach Art des Möbius–Bandes verdrehen."

Bemerkung. Seit alters her werden zwei gegenläufige Philosophien der Mathematik vertreten. (1) *Die Mathematik existiert unabhängig von uns:* Sie besteht aus objektiven Wahrheiten, wir entdecken sie. (Platonismus, Realismus) (2) *Die Mathematik ist Menschenwerk:* Sie ist unsere Konstruktion, wir erfinden sie. (Konstruktivismus, Formalismus)

Karl POPPER (1902–1994) versuchte, beide Sichtweisen zu versöhnen, und erklärte die Wirklichkeit als Zusammenwirken dreier Welten: Welt 1 sind die materiellen Dinge. Welt 2 sind Erlebnisse und Empfindungen. Welt 3 sind die objektiven Produkte des menschlichen Geistes, wie Bücher, Kunstwerke, Maschinen, Computer, Mathematik. Diese drei Welten überschneiden sich und wechselwirken miteinander. Wir erfinden Mathematik, aber die Objekte unserer Erfindung sind nicht subjektiv, sondern gehorchen eigenen Gesetzen, sie folgen nicht unserem Willen, sondern leisten uns Widerstand, in diesem Sinne existieren sie objektiv und unabhängig von uns, ihre Eigenschaften und Gesetze entdecken wir.

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
Leopold Kronecker (1823–1891)

The typical working mathematician is a platonist on weekdays and a formalist on Sundays.
Philip Davis, Ruben Hersh, *The Mathematical Experience* (1981)

§A1. Homöomorphismen: The Good, the Bad and the Ugly

Wie lässt sich die Idee der „gleichen Form“ präzisieren? Den allgegenwärtigen Begriff der *Stetigkeit* kennen Sie aus der Analysis und schätzen seine zahlreichen Anwendungen. Damit können wir den topologischen Begriff des *Homöomorphismus* wie folgt definieren:

Definition A1A (Homöomorphismus)**.** Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ Teilräume (später auch beliebige topologische Räume; zur Illustration genügen zunächst euklidische Teilräume).

Ein *Homöomorphismus* $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ ist eine Bijektion, für die sowohl f als auch f^{-1} stetig ist. In diesem Fall nennen wir X und Y *homöomorph*, geschrieben $X \cong Y$.

Folgende Umformulierung ist äquivalent und sehr oft nützlich: Ein Homöomorphismus $(f,g) : X \cong Y$ besteht aus zwei stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dann sind nämlich f, g bijektiv mit $g = f^{-1}$ und $f = g^{-1}$.

Beispiel A1B. Es gilt $\mathbb{R} \cong]-1,1[$ vermöge der zueinander inversen Homöomorphismen

$$f \;:\; \mathbb{R} \to]-1,1[\;:\; x \mapsto x/(1+|x|),$$
$$g \;:\;]-1,1[\to \mathbb{R} \;:\; y \mapsto y/(1-|y|).$$

BEWEIS. Die Abbildungen sind wohldefiniert: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x)| = |x|/(1+|x|) < 1$, also $f(x) \in]-1,1[$. Für jedes $y \in]-1,1[$ erfüllt der Nenner die Bedingung $1-|y| \neq 0$. Beide Abbildungen sind stetig, da Komposition stetiger Abbildungen. Schließlich gilt:

$$g(f(x)) = \frac{x/(1+|x|)}{1-\big|x/(1+|x|)\big|} = \frac{x}{1+|x|-|x|} = x, \quad \text{also} \quad g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$
$$f(g(y)) = \frac{y/(1-|y|)}{1+\big|y/(1-|y|)\big|} = \frac{y}{1-|y|+|y|} = y, \quad \text{also} \quad f \circ g = \mathrm{id}_{]-1,1[} \qquad \square$$

Dieselbe Rechnung zeigt $\mathbb{Q} \cong]-1,1[_{\mathbb{Q}}$. Alternativ können wir $\mathbb{R} \cong]-1,1[$ mit anderen Homöomorphismen nachweisen, etwa $f : \mathbb{R} \to]-1,1[: x \mapsto \frac{2}{\pi}\arctan(x)$ und $g :]-1,1[\to \mathbb{R} : y \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)$.

Definition A1C (Bälle und Sphären)**.** Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ nutzen wir je nach Bedarf

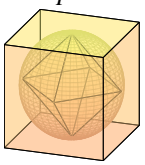
die Taxinorm $\quad |x|_1 := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$

die Maximumsnorm $\quad |x|_\infty := \max\{\,|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\,\},$

und vor allem die euklidische Norm $\quad |x| = |x|_2 := \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}\,.$

Letztere definiert den *abgeschlossenen / offenen Einheitsball* und die *Einheitssphäre*:

$$\mathbb{D}^n := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_2 \leq 1 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \,\},$$
$$\mathbb{B}^n := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_2 < 1 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1 \,\},$$
$$\mathbb{S}^{n-1} := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_2 = 1 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \,\}.$$



Für die Maximumsnorm erhalten wir den *Würfel*, sein Inneres bzw. seinen Rand:

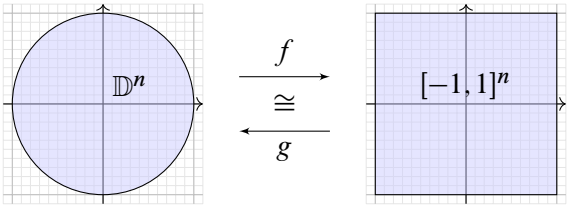
$$[-1,1]^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty \leq 1 \,\}, \qquad]-1,1[^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty < 1 \,\},$$
$$\partial[-1,1]^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty = 1 \,\} \;=\; \{\, x \in [-1,1]^n \mid x_k = \pm 1 \text{ für ein } k \,\}.$$

Für die Taxinorm erhalten wir dual hierzu das *Kreuzpolytop* (siehe A2I).

Übung A1D. Es gilt $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{B}^n$ und $\mathbb{R}^n \cong]-1,1[^n$ dank der Homöomorphismen aus A1B.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A1a. Das Runde muss ins Eckige.** In Dimension $n = 1$ gilt $\mathbb{D}^1 = [-1,1]$. In Dimension $n \geq 2$ hingegen haben Ball $\mathbb{D}^n$ und Würfel $[-1,1]^n$ verschiedene Geometrie, Volumen, Isometrien, etc. Sie haben jedoch dieselbe Topologie, wie eingangs in A:1 behauptet: ☜



✍ **Beispiel A1E.** Es gilt $\mathbb{D}^n \cong [-1,1]^n$. Konstruieren Sie hierzu explizit stetige Abbildungen $f : \mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} [-1,1]^n$ und $g : [-1,1]^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}^n}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{[-1,1]^n}$; anschließend genügt sorgfältiges Nachrechnen. Mathematik verbindet Kreativität und Sorgfalt! ✍

✻ **A1E.** Wie löst man solch eine Aufgabe? Vielleicht sehen Sie sofort eine Lösung, dann prüfen Sie diese. Andernfalls halten wir Rückschau: Welche Definitionen, Sätze und Methoden haben wir im Inventar? Wir kennen die Definition A1A und das Beispiel A1B/A1D: Wir haben $\mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto x/(1-|x|_2)$ und entsprechend $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim}]-1,1[^n : y \mapsto y/(1+|y|_\infty)$. Als Komposition erhalten wir $f : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim}]-1,1[^n$. Das ist fast schon, was wir wollen! Wir rechnen $f(x) = x/(1-|x|_2+|x|_\infty)$ aus und staunen: Das ist genau, was wir wollen!

$$f \;:\; \mathbb{D}^n \to [-1,1]^n \;:\; x \mapsto x/(1-|x|_2+|x|_\infty),$$
$$g \;:\; [-1,1]^n \to \mathbb{D}^n \;:\; y \mapsto y/(1-|y|_\infty+|y|_2).$$

Stehen die Abbildungen erst einmal da, so genügt sorgfältiges Nachrechnen! Die Abbildungen sind wohldefiniert: Für $x \in \mathbb{D}^n$ gilt $|f(x)|_\infty = |x|_\infty/(1-|x|_2+|x|_\infty) \leq 1$, also $f(x) \in [-1,1]^n$. Für $y \in [-1,1]^n$ gilt $|g(y)|_2 = |y|_2/(1-|y|_\infty+|y|_2) \leq 1$, also $g(y) \in \mathbb{D}^n$. Beide Abbildungen f und g sind stetig, da Komposition stetiger Abbildungen. Schließlich sind sie zueinander invers, wie wir geduldig nachrechnen:

$$g(f(x)) = g\Big(\frac{x}{1-|x|_2+|x|_\infty}\Big) = \frac{\frac{x}{1-|x|_2+|x|_\infty}}{\frac{1-|x|_2+|x|_\infty-|x|_\infty+|x|_2}{1-|x|_2+|x|_\infty}} = x \quad \text{und ebenso} \quad f(g(y)) = y$$

Durch Einschränkung erhalten wir $\mathbb{B}^n \cong]-1,1[^n$ und $\mathbb{S}^{n-1} \cong \partial[-1,1]^n$. Insbesondere sind Kreislinie $\mathbb{S}^1$ und Quadratrand $\partial[-1,1]^2$ homöomorph, wie eingangs in A:1 behauptet. Unsere Wahl (f,g) ist keineswegs eindeutig, sondern erlaubt zahlreiche Alternativen, siehe A1K. Die Konstruktion perfektionieren wir in F6G.

☞ **§A1b. Topologische Eigenschaften.** Definition A1A präzisiert die Idee der „gleichen Form“: Die vage zeichnerische Darstellung präzisieren wir mit einem handfesten mathematischen Begriff. Mit diesem können wir nun arbeiten und geeignete Techniken entwickeln: Wir wollen unsere *intuitive Anschauung* in beweisbare *mathematische Aussagen* fassen. ☜

Die Aussage $X \cong Y$, dass es einen Homöomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt, beweisen wir durch *Konstruktion* eines Homöomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$. Wie aber beweisen wir die gegenteilige Aussage $X \ncong Y$, etwa in A:1, dass es keinen Homöomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt? Wir müssen eine topologische Eigenschaft finden, in der sich X und Y unterscheiden.

✍ **Definition A1F.** Eine Eigenschaft von Räumen ($\subset \mathbb{R}^n$, später allgemein topologische Räume) heißt *topologisch invariant*, wenn sie unter Homöomorphismen erhalten bleibt. ✍

☞ **Beispiel.** *Beschränktheit* oder *Abgeschlossenheit* in $\mathbb{R}^n$ sind nicht topologisch invariant (A1B). *Kompaktheit* (F1J) und *Zusammenhang* (G1E) hingegen sind topologisch invariant. ☜

☞ **Beispiel.** Sind $\mathbb{B}^2$ und $\mathbb{R}^2$ homöomorph? Ja, wir haben Homöomorphismen konstruiert! Sind $\mathbb{D}^2$ und $\mathbb{R}^2$ homöomorph? Nein, denn $\mathbb{D}^2$ ist kompakt, $\mathbb{R}^2$ hingegen nicht! ☜

§A1c. Wegzusammenhang. Das Intervall $[0,1]$ und das Quadrat $[0,1]^2$ scheinen nicht homöomorph. Auch $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ scheinen nicht homöomorph, aber wie beweist man das? Da es Homöomorphismen $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^2$ gibt (A1Y), sind wir lieber vorsichtig.

Wir suchen eine topologische Eigenschaft, die $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ unterscheidet. Anschaulich scheint klar: Jeder Punkt trennt $\mathbb{R}$, aber kein Punkt trennt $\mathbb{R}^2$. Ist das schon Beweis genug? Ist hier überhaupt etwas zu beweisen? Oder sind diese Aussagen selbstverständlich?

Diese Aussagen sind nicht selbstverständlich: Wir nutzen hier die besonderen topologischen Eigenschaften der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Andernfalls droht das Gegenbeispiel $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^2$: Hier gilt $\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\} \cong \mathbb{Q}^2 \smallsetminus \{0\}$. Daher müssen wir für $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$ präzise argumentieren.

Definition A1G. Ein Raum $X \neq \emptyset$ (in $\mathbb{R}^n$, später ein beliebiger topologischer Raum) heißt *wegzusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte a, b in X durch einen Weg verbinden lassen, wenn also eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$ existiert.

Beispiel A1H. Mit diesem grundlegenden Werkzeug gewappnet können wir nun zeigen:

(1) Wegzusammenhang ist eine topologisch invariante Eigenschaft (A1F). Stärker:
(2) Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ stetig und surjektiv. Ist X wegzusammenhängend, so auch Y.
(3) Der Raum $\mathbb{R} \smallsetminus \{z\}$ ist nicht wegzusammenhängend dank Zwischenwertsatz (C3R).
(4) Sei $n \geq 2$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar. Dann ist $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ wegzusammenhängend.
(5) Es gilt $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$: Jeder Punkt trennt $\mathbb{R}$, aber kein Punkt trennt $\mathbb{R}^n$.
(6) Ebenso gilt $[0,1] \ncong [0,1]^2$ und allgemein $[0,1] \ncong [0,1]^n$ für alle $n \geq 2$.
(7) Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ sind $]a,b[$, $[a,b[$, $[a,b]$ paarweise nicht homöomorph.
(8) Es gilt $\mathbb{S}^1 \ncong \mathbb{D}^2$: Kreislinie und Kreisscheibe sind nicht homöomorph (A:1).

Bemerkung: Für Aussage (5) ist die Topologie wesentlich. Ohne die Forderung nach Stetigkeit existieren Bijektionen $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$, das heißt, diese Mengen sind gleichmächtig (B2N).

✻ **A1H.** (2) Zu $u, v \in Y$ wählen wir $a, b \in X$ mit $f(a) = u$ und $f(b) = v$; nach Voraussetzung existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$, somit ist $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ ein Weg von u nach v.

(3) Seien $a < z < b$. Angenommen, es gäbe einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R} \smallsetminus \{z\}$ von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$. Zur stetigen Abbildung $\bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R} \smallsetminus \{z\} \hookrightarrow \mathbb{R}$ existiert ein $t \in [0,1]$ mit $\bar{\gamma}(t) = z$. Widerspruch!

(4) Seien $a \neq b$ in $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ und $v = b - a \in \mathbb{R}^n$. Wegen $n \geq 2$ existiert ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ mit $w \neq 0$ und $w \perp v$. Zu $s \in \mathbb{R}$ sei $c_s = \frac{1}{2}(a+b) + sw$ und $\gamma_s : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ der direkte Weg von a über c_s nach b, ausgeschrieben $\gamma_s(t) = a + 2t(c_s - a)$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ und $\gamma_s(t) = c + (2t-1)(b-c)$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Höchstens abzählbar viele Wege γ_s treffen A. Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, verlaufen überabzählbar viele Wege γ_s in $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$.

(5) Gäbe es einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$, so wären $X = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und $Y = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{f(0)\}$ homöomorph vermöge der Einschränkung $f|_X^Y : X \xrightarrow{\sim} Y$. Dies steht aber im Widerspruch zu (1,3,4).

(6,7) Die Anzahl der nicht-trennenden Punkt ist jeweils verschieden bzw. (8) der trennenden Paare.

Übung A1I. Wir betrachten die 26 Großbuchstaben des lateinischen Alphabets:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Jedes dieser Symbole ist eine Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen es als ideal dünn an, etwa als Vereinigung von Geradensegmenten. Klassifizieren Sie sie bis auf Homöomorphie! Warum benötigen wir beim Lesen nicht nur die Topologie, sondern auch die Geometrie? (Wir diskutieren später weitere Varianten und lösen sie sorgfältig in G6F.) *Zusatz:* Die topologische Klassifikation hängt tatsächlich vom gewählten Zeichensatz ab.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A1d. Homöomorphismen vs Diffeomorphismen.** Beim obigen Homöomorphismus $\mathbb{D}^n \cong [-1,1]^n$ (A1E) fällt auf, dass der Ball $\mathbb{D}^n$ „rund“ aber der Würfel $[-1,1]^n$ „eckig“ ist: Dies sind demnach keine topologischen Eigenschaften, da sie unter Homöomorphismen nicht erhalten bleiben. Zu ihrer Behandlung nutzen wir die Differentialrechnung: ☜

Definition A1J (Diffeomorphismus)**.** Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ bilden die Menge $\mathscr{C}^0(X,Y)$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig differenzierbar*, kurz $\mathscr{C}^1$, wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_i f_j : X \to \mathbb{R}$ existieren und stetig sind. Rekursiv für $\alpha = 1,2,3,\dots$ definieren wir $\mathscr{C}^\alpha = \{\, f \in \mathscr{C}^1 \mid \partial_i f_j \in \mathscr{C}^{\alpha-1} \,\}$. Für *glatte* Abbildungen verlangen wir beliebige Ableitungen, also $\mathscr{C}^\infty = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^\alpha$. Für *analytische* Abbildungen $\mathscr{C}^\omega$ verlangen wir stärker, dass f sich um jeden Punkt in eine lokal konvergente Potenzreihe entwickeln lässt. Ein $\mathscr{C}^\alpha$–Diffeomorphismus $(f,g) : X \cong Y$ besteht aus zwei $\mathscr{C}^\alpha$–Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Übung A1K. (1) Es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(\mathbb{D}^n) = [-1,1]^n$.

(2) Hingegen existiert kein $\mathscr{C}^1$–Diffeomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(\mathbb{D}^n) = [-1,1]^n$.

(3) Wir haben jedoch $\mathscr{C}^\omega$–Diffeomorphismen $\mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n \cong \,]-1,1[^n$ vermöge

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n : \qquad x \mapsto x \Big/ \sqrt{1+|x|_2^2} = x \Big/ \sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2},$$

$$g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n : \qquad y \mapsto y \Big/ \sqrt{1-|y|_2^2} = y \Big/ \sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}.$$

$$h : \mathbb{R}^n \to \,]-1,1[^n : \qquad (x_1,\dots,x_n) \mapsto \Big(x_1 \Big/ \sqrt{1+x_1^2},\ \dots,\ x_n \Big/ \sqrt{1+x_n^2}\Big),$$

$$k : \,]-1,1[^n \to \mathbb{R}^n : \qquad (y_1,\dots,y_n) \mapsto \Big(y_1 \Big/ \sqrt{1-y_1^2},\ \dots,\ y_n \Big/ \sqrt{1-y_n^2}\Big).$$

✻ **A1K.** (1) Wir nutzen $h,k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $h(0) = k(0) = 0$ sowie $h(x) = x \cdot |x|_2/|x|_\infty$ und $k(x) = x \cdot |x|_\infty/|x|_2$ für $x \neq 0$. In $x \neq 0$ sind sie stetig als Komposition stetiger Abbildungen. In $x = 0$ sind sie stetig dank der Ungleichungen $|x|_\infty \leq |x|_2 \leq n|x|_\infty$. Es gilt $k \circ h = h \circ k = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und wie gefordert $h(\mathbb{D}^n) = [-1,1]^n$.

(2) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $a \in M$ ein Punkt. Wir betrachten die Menge $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},0;M,a)$ aller stetig differenzierbaren Wege $\gamma : \mathbb{R} \to M$, die durch den Punkt $\gamma(0) = a$ gehen. Die *Tangente* im Punkt a entlang des Weges γ ist die Ableitung $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$. Den *Tangentialraum* von M im Punkt a definieren wir als die Menge $T_aM = \{\, \gamma'(0) \in \mathbb{R}^n \mid \gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},0;M,a) \,\}$ aller Tangentialvektoren. Beim Ball finden wir $T_a\mathbb{D}^n = \mathbb{R}^n$ für $a \in \mathbb{B}^n$ im Inneren und $T_a\mathbb{D}^n = \{\, v \in \mathbb{R}^n \mid \langle\, v \mid a \,\rangle = 0 \,\}$ für $a \in \mathbb{S}^n$ im Rand. (Skizze!) Auch beim Würfel $M = [1,1]^n$ finden wir $T_aM = \mathbb{R}^n$ für $a \in \,]-1,1[^n$ im Inneren. Liegt a im Inneren einer d–dimensionalen Seite des Randes, so ist T_aM nur d–dimensional. In jeder Ecke $a = (\pm1,\dots,\pm1)$ gilt $T_aM = \{0\}$.

Sei $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ ein $\mathscr{C}^1$–Diffeomorphismus mit $h(M) = N$. Für $h(a) = b$ und $\gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},0;M,a)$ gilt $h \circ \gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},0;N,b)$ und $(h\circ\gamma)'(0) = h'(a) \circ \gamma'(0)$. Entsprechend für h^{-1}. Der $\mathbb{R}$–lineare Isomorphismus $h'(a) : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ liefert somit eine Bijektion $T_aM \xrightarrow{\sim} T_bN$. Im obigen Beispiel $M = \mathbb{D}^n$ und $N = [-1,1]^n$ ist dies unmöglich, da für $n \geq 2$ die Tangentialräume in den Ecken des Würfels zu kleine Dimension haben.

(3) Die Abbildungen sind wohldefiniert und stetig. Als Komposition analytischer Abbildungen sind sie analytisch. Sie sind sogar algebraisch, erfüllen also zudem polynomielle Gleichungen. Wie in A1B und A1E rechnet man geduldig $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}$ nach, ebenso $k \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $h \circ k = \mathrm{id}_{]-1,1[^n}$.

Bemerkung: Unsere $\mathscr{C}^\omega$–Diffeomorphismen $f \circ k : \,]-1,1[^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$ und $h \circ g : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} \,]-1,1[^n$ setzen sich leider nicht fort zu Homöomorphismen $[-1,1]^n \cong \mathbb{D}^n$. Es gibt durchaus solche Homöomorphismen, die auf dem Inneren analytisch sind: Für jedes Polygon $P \subset \mathbb{C}$ ist die Schwarz–Christoffel–Transformation ein expliziter Homöomorphismus $h : \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} P$; für allgemeine Gebiete nutzt man den Riemannschen Abbildungssatz. Diese Konstruktionen sind anspruchsvoll aber lohnend, zum Beispiel lösen sie Probleme der ebenen Strömungsdynamik oder Elektrostatik auf analytisch-geometrische Weise.

§A1e. Stereographische Projektion. Ist $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur euklidischen Sphäre $\mathbb{S}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1 \,\}$? Sicher nicht, denn $\mathbb{S}^n$ ist kompakt im Gegensatz zu $\mathbb{R}^n$ (F1J). Dennoch sind sie sehr ähnlich; das Entfernen eines einzigen Punktes genügt:

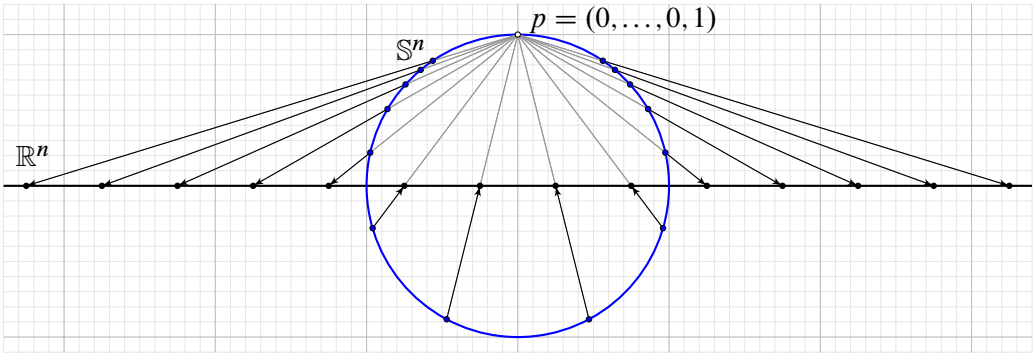


ABBILDUNG A:5. Stereographische Projektion

Übung A1L. Es gilt $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$ dank *stereographischer Projektion*: Nach geeigneter Drehung $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n+1}$ können wir $p = (0,\dots,0,1)$ annehmen und erhalten:

$$f : \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\} \to \mathbb{R}^n : \quad (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1-x_{n+1}}\big(x_1,\dots,x_n\big),$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\} : \quad (y_1,\dots,y_n) \mapsto \frac{1}{|y|^2+1}\big(2y_1,\dots,2y_n,|y|^2-1\big).$$

Dies sind zueinander inverse Homöomorphismen, zudem glatt, analytisch, sogar rational. Insbesondere ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand (A0A).

(1) *Algebra:* Die Formeln liegen explizit vor; prüfen Sie für (f,g) alles Nötige nach!
(2) *Geometrie:* Leiten Sie aus der obigen Skizze A:5 die Formeln geometrisch her!

Bemerkung. Stehen die Abbildungen erst einmal da, so genügt sorgfältiges Nachrechnen. Geeignete Formeln zu finden, ist oft ungleich schwerer. In diesem einfachen Falle genügt Schulgeometrie: Strahlensatz, Geradengleichungen und quadratische Gleichungen. Versuchen Sie es! Nur so lernen Sie, die Kraft und die Eleganz expliziter Formeln zu schätzen.

✻ **A1L.** (1) Zunächst sind die beiden Abbildungen f und g wohldefiniert: Für $x \in \mathbb{S}^n$ gilt $|x_{n+1}| \le 1$, und aus $x_{n+1} = 1$ folgt $x_1 = \cdots = x_n = 0$, also $x = p$. Für $x \in \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\}$ gilt $x_{n+1} < 1$, also erfüllt der Nenner $1 - x_{n+1} \neq 0$, und f ist wohldefiniert. Für g müssen wir nur den Bildbereich prüfen: Für $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|g(y)|^2 = \frac{4y_1^2+\cdots+4y_n^2+(|y|^2-1)^2}{(|y|^2+1)^2} = \frac{4|y|^2+|y|^4-2|y|^2+1}{|y|^4+2|y|^2+1} = 1,$$

also $g(y) \in \mathbb{S}^n$. Zudem gilt $(|y|^2-1)/(|y|^2+1) < 1$, also $g(y) \neq p$ und somit $g(y) \in \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\}$. Zudem sind f und g rationale Funktionen in den Koeffizienten und somit stetig. Wir rechnen schließlich geduldig nach, dass $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\}}$ gilt. (Versuchen Sie es! Aus A1M erhalten wir dies gratis.)

Wir zeigen $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$: Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ finden wir

$$f(g(y_1,\dots,y_n)) = \frac{1}{1-\frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}}\left(\frac{2y_1}{|y|^2+1},\dots,\frac{2y_n}{|y|^2+1}\right) = (y_1,\dots,y_n).$$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Wir zeigen $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n \setminus \{p\}}$: Für alle $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ finden wir

$$|f(x)|^2 = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{(1-x_{n+1})^2} = \frac{1-x_{n+1}^2}{(1-x_{n+1})^2} = \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}},\ |f(x)|^2 + 1 = \frac{2}{1-x_{n+1}},\ |f(x)|^2 - 1 = \frac{2x_{n+1}}{1-x_{n+1}},$$

$$g(f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) = \frac{1}{|f(x)|^2+1}\left(\frac{2x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{2x_n}{1-x_{n+1}}, |f(x)|^2 - 1\right) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

(2) Aufgabe (1) setzt voraus, dass für den erhofften Homöomorphismus bereits Kandidaten (f, g) vorliegen. Wir erklären nun, wie man f und g konstruiert. In jeder realistischen Situation wäre dies der erste Schritt: Um das vorgelegte Homöomorphieproblem zu lösen, müssen Sie die erhofften Formeln zunächst einmal finden!

Konstruktion von f: Durch $p = (0, \dots, 0, 1)$ und $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ verläuft die parametrisierte Gerade

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1} : t \mapsto (1-t)p + tx = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n, 1 - t + tx_{n+1})$$

Sie schneidet die Ebene $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ für $1 + t(x_{n+1} - 1) = 0$, also $t = 1/(1-x_{n+1})$. Der Schnittpunkt ist demnach

$$\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n, 0) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, 0).$$

Wir lassen den letzten Eintrag 0 weg und erhalten $y =: f(x)$. *Alternative:* Dasselbe Ergebnis sehen wir auch direkt in der obigen Abbildung A:5 mit dem Strahlensatz (etwas mehr Geometrie, etwas weniger Rechnung).

Konstruktion von g: Durch $p = (0, \dots, 0, 1)$ und $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n, 0)$ verläuft die parametrisierte Gerade

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1} : t \mapsto (1-t)p + t\tilde{y} = (ty_1, ty_2, \dots, ty_n, 1-t)$$

Für jeden ihrer Schnittpunkte mit der Einheitssphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$1 = |(ty_1, \dots, ty_n, 1-t)|^2 = t^2(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + (1-t)^2 = t^2|y|^2 + (1-t)^2,$$

also $t^2(|y|^2 + 1) - 2t = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $t = 0$ für den trivialen Schnittpunkt p und $t = 2/(|y|^2 + 1)$ für den gesuchten nicht-trivialen Schnittpunkt $(ty_1, \dots, ty_n, 1-t) =: g(y)$.

Bemerkung: Die expliziten Formeln beweisen die Stetigkeit von f und g. Beide Konstruktionen zeigen neben der Existenz der Lösungen zugleich ihre Eindeutigkeit, und somit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n \setminus \{p\}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. In Aufgabe (1) mussten wir dies etwas mühsam nachrechnen, in Aufgabe (2) erhalten wir es gratis obendrein!

☞ **Bemerkung.** Explizite Formeln wie diese haben ihren eigenen ästhetischen Reiz und enthüllen zusätzliche Information: Wir nutzen hier nur rationale Funktionen über $\mathbb{Q}$, sie bilden also rationale Punkte auf rationale Punkte ab. Wir erhalten daher gratis einen ebenso expliziten Homöomorphismus zwischen der rationalen Sphäre $\mathbb{S}^n \cap \mathbb{Q}^{n+1}$ minus Nordpol und dem Raum $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$. Schon der einfachste Fall $n = 1$ hat erstaunliche Konsequenzen: ☜

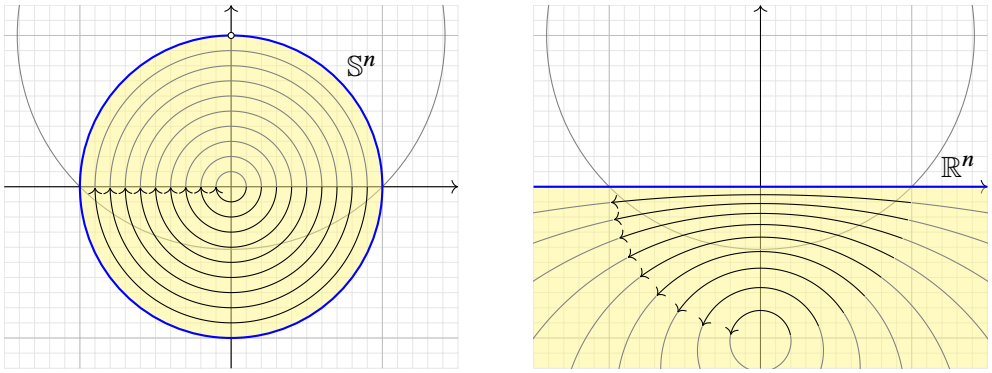
Ein *pythagoreisches Tripel* $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ erfüllt $x^2 + y^2 = z^2$, zum Beispiel $(3, 4, 5)$ und $(5, 12, 13)$. Wir können und werden $z > 0$ und $\mathrm{ggT}(x, y, z) = 1$ annehmen. Diese Tripel entsprechen demnach Punkten $(x/z, y/z) \in \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{Q}$. Wir können solche Tripel naiv durch eine erschöpfende Suche gewinnen. (Versuchen Sie es!) Zudem können wir sie nun bequem parametrisieren: Für $q = u/v \in \mathbb{Q}$ gekürzt gemäß $u, v \in \mathbb{Z}$, $v > 0$, $\mathrm{ggT}(u, v) = 1$, betrachten wir wie oben $g(q) = (2q, q^2 - 1)/(q^2 + 1) = (2uv, u^2 - v^2)/(u^2 + v^2)$. Somit durchläuft $(u, v) \mapsto (x, y, z) = (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$ alle pythagoreischen Tripel!

☞ **Bemerkung.** Karl WEIERSTRASS (1815–1897) entwickelte die *trigonometrische Generalsubstitution* für Integrale $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$: Wir parametrisieren die Kreislinie durch ☜

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \stackrel{!}{=} (\cos x, \sin x).$$

Dies führt zu $\tan x = 2t/(1-t^2)$ und $\tan(x/2) = t$, und somit zur Substitution $x = 2\arctan t$ und $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t/(1+t^2)$. Jede rationale Funktion $R(\cos x, \sin x)$ in $\cos x$, $\sin x$ wird so zu einer rationalen Funktion in t, und somit wird $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ elementar integrierbar!

§A1f. Inversion an einer Sphäre. Wie zuvor sei p der „Nordpol“ der Einheitssphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die stereographische Projektion lässt sich auf ganz $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{p\}$ ausdehnen:



Übung A1M. Es gilt $\mathbb{D}^n \smallsetminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Hierzu nutzen wir folgende *Inversionsabbildung*:

$$h : \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{p\} \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{p\} : \quad x \mapsto p + 2\frac{x-p}{|x-p|^2}.$$

Diese ist wohldefiniert, rational und somit stetig. Sie erfüllt $h \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{p\}}$ sowie

$$\begin{aligned} |h(x)|^2 &= 1 + 4\langle\, x \mid p \,\rangle / |x-p|^2, \text{ also} \\ h(\mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\}) &= \{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \,\}, \\ h(\mathbb{D}^{n+1} \smallsetminus \{p\}) &= \{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \leq 0 \,\}, \\ h(\mathbb{B}^{n+1}) &= \{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} < 0 \,\}. \end{aligned}$$

Durch Einschränkung finden wir erneut die stereographische Projektion aus A1L:

$$f = h\big|^{\mathbb{R}^n \times \{0\}}_{\mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\}} \quad \text{und} \quad g = h\big|^{\mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\}}_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$$

✻ **A1M.** Zunächst ist h wohldefiniert, denn für $x \neq p$ ist der Nenner ungleich Null, und es gilt $h(x) \neq p$. Zudem ist h eine rationale Funktion in den Koeffizienten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, also insbesondere auch stetig. Die Eigenschaft $h \circ h = \mathrm{id}$ rechnen wir durch Einsetzen unmittelbar nach:

$$h(h(x)) = h\big(p + 2(x-p)/|x-p|^2\big) = p + 2\frac{2(x-p)/|x-p|^2}{4|x-p|^2/|x-p|^2} = x$$

Somit ist h ein Homöomorphismus (denn auch die inverse Abbildung $h^{-1} = h$ ist stetig).
Für die letzten Aussagen nutzen wir das euklidische Skalarprodukt und berechnen

$$|h(x)|^2 = \langle\, p \mid p \,\rangle + \frac{4\langle\, x-p \mid p \,\rangle}{|x-p|^2} + \frac{4\langle\, x-p \mid x-p \,\rangle}{|x-p|^4} = 1 + \frac{4\langle\, x \mid p \,\rangle}{|x-p|^2}.$$

Hieraus lesen wir ab: Es gilt $|h(x)| = 1$ genau für $\langle\, x \mid p \,\rangle = 0$, also $x_{n+1} = 0$. Entsprechend gilt $|h(x)| \leq 1$ genau für $\langle\, x \mid p \,\rangle \leq 0$, also $x_{n+1} \leq 0$. Die Umkehrung folgt aus $h \circ h = \mathrm{id}$. Durch Einsetzen und Vereinfachen finden wir die stereographische Projektion f und g aus der vorangegangenen Übung A1L.

Bemerkung. Manchmal ist es leichter, mehr zu zeigen: Die Fortsetzung der stereographischen Projektion A1L zur Inversion A1M liefert stärkere Aussagen und vereinfacht die Rechnung. Alles ist explizit ausformuliert, und ich empfehle die Rechnung nachdrücklich als Übung. Wir wollen einen Schritt weitergehen und die Situation auch *geometrisch* verstehen. Hierzu dienen Spiegelungen an Sphären analog zu Spiegelungen an Hyperebenen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

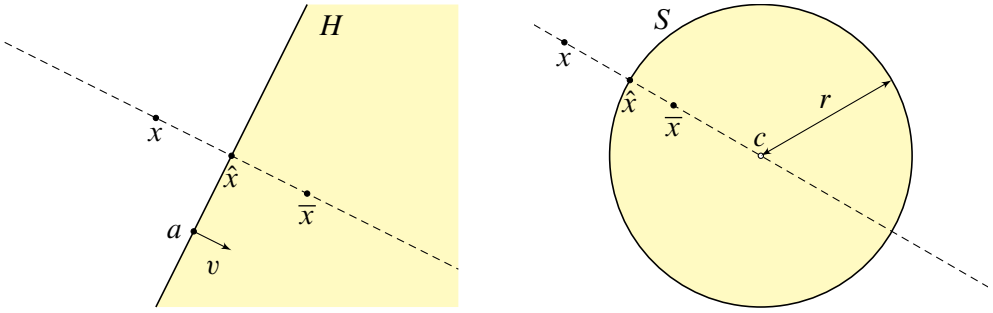
☞ **Definition A1N.** Die *Hyperebene* durch $a \in \mathbb{R}^n$ normal zu $v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ist ☜

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle v \mid x-a \rangle = 0 \}.$$

Sie zerlegt $\mathbb{R}^n \smallsetminus H$ in die offenen Halbräume $H^\pm = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle v \mid x-a \rangle \gtrless 0 \}$.
Die *Spiegelung* an dieser Hyperebene H ist die Abbildung

$$\sigma_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \overline{x} = x - 2\frac{\langle v \mid x-a \rangle}{\langle v \mid v \rangle} \cdot v.$$

Erläuterung. Diese Formel nutzt die gewählten Vektoren a und v, aber σ_H hängt nur von H ab. Der Vektor $u = \langle v \mid x-a \rangle / \langle v \mid v \rangle \cdot v$ ist parallel zu v, also senkrecht zu H. Der *Lotfußpunkt* $\hat{x} = x-u$ liegt in H und minimiert den Abstand $|x-\hat{x}|$. Für die Spiegelung gilt $\overline{x} = \hat{x} - u = x - 2u$ und somit $\sigma_H \circ \sigma_H = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Jeder Punkt von S bleibt fest, die Halbräume H^+ und H^- werden vertauscht.



☞ **Definition A1O.** Die *Sphäre* um den Mittelpunkt $c \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist ☜

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x-c \mid x-c \rangle = r^2 \} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x-c| = r \}.$$

Sie zerlegt $\mathbb{R}^n \smallsetminus S$ in den Ball $B(c,r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x-c| < r \}$ und sein Äußeres.
Die *Spiegelung* oder *Inversion* an dieser Sphäre S ist die Abbildung

$$\sigma_S : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{c\} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{c\}, \quad x \mapsto \overline{x} = c + \frac{r^2(x-c)}{\langle x-c \mid x-c \rangle}.$$

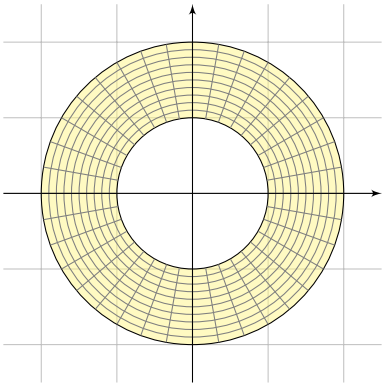
☞ **Übung A1P.** Die Inversion A1M ist die Spiegelung an der Sphäre mit Mittelpunkt $c = e_{n+1}$ und Radius $r = \sqrt{2}$. Sie bildet $\mathbb{D}^n \smallsetminus \{c\}$ auf den Halbraum $\{ x_{n+1} \leq 0 \}$ ab. ☜

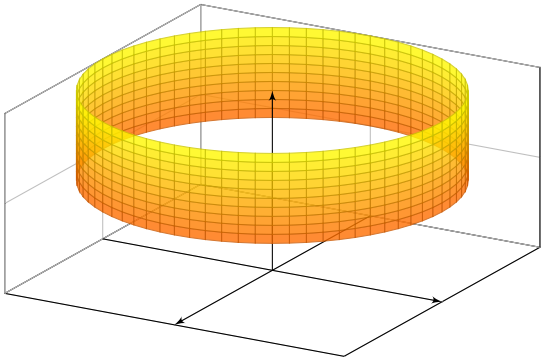
✻ **A1P.** Die Sphäre S bestimmt eindeutig ihren Mittelpunkt c und Radius r. Der Punkt $\overline{x}$ liegt auf der Halbgeraden von c durch x und erfüllt $|x-c| \cdot |\overline{x}-c| = r^2$. Somit gilt $\sigma_S \circ \sigma_S = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \smallsetminus \{c\}}$, jeder Punkt der Sphäre S bleibt fest, Inneres und Äußeres werden vertauscht. Im Mittelpunkt c ist σ_S nicht definiert. Wir fügen den „unendlich fernen Punkt“ ∞ hinzu und setzen σ_S fort durch $c \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto c$. Damit wird σ_S eine Involution auf $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^n$, dank stereographischer Projektion (A1L). Gleiches gilt für $\sigma_H : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ mit $\infty \mapsto \infty$. Hyperebenen und Sphären $H, S \subset \mathbb{R}^n$ entsprechen dann einheitlich $(n-1)$–dimensionalen Sphären $S \subset \mathbb{S}^n$; sie gehen durch den Nordpol ∞ oder eben nicht.

Alle so erklärten Spiegelungen erzeugen die Gruppe Möb($\mathbb{S}^n$) der *Möbius–Transformationen*. Sie bilden Sphären auf Sphären ab und werden in jeder Dimension $n \geq 2$ durch diese Eigenschaft charakterisiert. Die *Möbius–Geometrie* spielt in der komplexen Analysis eine wichtige Rolle ($n = 2$), ebenso in der Lorentz–Geometrie der speziellen Relativitätstheorie ($n = 3$). Möbius–Transformationen sind *konform*, das heißt lokal winkeltreu. In Dimension $n \geq 3$ besagt der Satz von Liouville die Umkehrung: Jede glatte konforme Abbildung $f : U \to V$ nicht-leerer offener Mengen $U, V \subset \mathbb{S}^n$ ist Einschränkung einer Möbius–Transformation. In Dimension $n = 2$ hingegen sind konforme Abbildungen wesentlich flexibler: Jede biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \supset U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{C}$ ist konform.

§A1g. Polarkoordinaten. Polarkoordinaten kennen Sie aus der ebenen Geometrie:

Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ lässt sich schreiben als $x = (r\cos t, r\sin t)$ mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $t \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $(r,t) \mapsto (r\cos t, r\sin t)$ ist stetig und surjektiv. Sie ist allerdings nicht injektiv: Für den Radius $r = 0$ ist der Winkel t unerheblich; für $r > 0$ ist der Winkel t nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. Wollen wir Winkelfunktionen vermeiden, so nutzen wir stattdessen die Schreibweise $x = rs$ mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in \mathbb{S}^1$.





Die Darstellung durch Polarkoordinaten funktioniert ebenso in jeder Dimension $n \geq 1$: Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ schreibt sich $x = rs$ mit Norm $r = |x|$ und Richtung $s \in \mathbb{S}^{n-1}$. Diese Schreibweise ist eindeutig für $x \neq 0$, denn in diesem Fall gilt $s = x/|x|$. Im Nullpunkt $x = 0$ gilt $r = 0$, und $x = rs$ ist unabhängig von der Richtung $s \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Beispiel. Sei $K = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq |x| \leq b \,\}$ die Kugelschale mit Radien $0 < a < b$ und hierzu $[a,b] \times \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Zylinder. Dann haben wir zueinander inverse Homöomorphismen $f : [a,b] \times \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} K : (r,s) \mapsto rs$ und $g : K \xrightarrow{\sim} [a,b] \times \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto (|x|, x/|x|)$.

Auch auf der Kreisscheibe $B(0,\rho) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \rho \,\}$ vom Radius $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ können wir stetige Abbildungen wie folgt mittels Polarkoordinaten konstruieren:

Übung A1Q (Polarkoordinaten)**.** Zu je zwei stetigen Abbildungen $g : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ und $f : [0,\rho[\to [0,\sigma[$ mit $f(0) = 0$ und $\rho, \sigma \in [0,\infty]$ erhalten wir die stetige Abbildung

$$h : \mathbb{R}^m \supset B(0,\rho) \to B(0,\sigma) \subset \mathbb{R}^n : r \cdot s \mapsto f(r) \cdot g(s)$$

für alle $r \in [0,\rho[$ und $s \in \mathbb{S}^{m-1}$. Sind zudem f und g Homöomorphismen, dann auch h. (Die Invarianz der Dimension (J7A) besagt, dass für Homöomorphismen $g : \mathbb{S}^{m-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^{n-1}$ notwendigerweise $m = n$ gilt, aber diese Information benötigen wir hier noch nicht.)

✻ **A1Q.** Die Abbildung $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : rs \mapsto f(r)\,g(s)$ ist wohldefiniert: Für den Radius $r = 0$ ist der Punkt $x = rs$ unabhängig von der gewählten Richtung s, sein Bild $f(x) = f(r)\,g(s) = 0$ aber auch dank $f(0) = 0$.

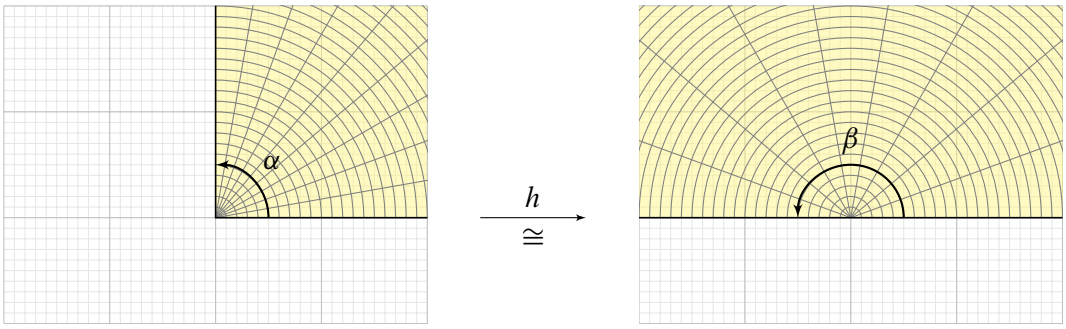
Auf $\mathbb{R}^m \smallsetminus \{0\}$ ist h stetig, denn $h(x) = f(|x|)\,g(x/|x|)$ ist Komposition stetiger Abbildungen. Wegen $|h(x)| = f(|x|)$ ist h auch im Ursprung stetig, denn aus $|x| \to 0$ folgt $|h(x)| \to 0$. Somit ist h stetig.

Sind $f : [0,\rho[\xrightarrow{\sim} [0,\sigma[$ und $g : \mathbb{S}^{m-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^{n-1}$ Homöomorphismen, dann können wir dieselbe Konstruktion anwenden auf die stetigen Umkehrabbildungen $f^{-1} : [0,\sigma[\xrightarrow{\sim} [0,\rho[$ und $g^{-1} : \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^{m-1}$. Die Abbildung $h^{-1} : B(0,\sigma) \to B(0,\rho) : rs \mapsto f^{-1}(r)\,g^{-1}(s)$ ist ebenfalls stetig. Nach Konstruktion gilt dann $h^{-1} \circ h = \mathrm{id}_{B(0,\rho)} : rs \mapsto f(r)\,g(s) \mapsto rs$ und $h \circ h^{-1} = \mathrm{id}_{B(0,\sigma)} : rs \mapsto f^{-1}(r)\,g^{-1}(s) \mapsto rs$.

Beispiel. Wir erhalten erneut den Homöomorphismus $h : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(x) = x/(1-|x|)$ vermöge der Abbildungen $f : [0,1[\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\geq 0} : r \mapsto r/(1-r)$ und $g = \mathrm{id} : \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^{n-1}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A1h. Winkel geradebiegen.** In der Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ sind der Quadrant $A = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ und die Halbebene $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ homöomorph vermöge $z \mapsto z^2$. Die Umkehrfunktion ist der zugehörige Zweig der komplexen Wurzelfunktion $z \mapsto \sqrt{z}$ (C3W). Allgemein vervielfacht $z \mapsto z^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ den Winkel in $z = 0$ und ist winkeltreu (da holomorph) in $z \neq 0$. ☜



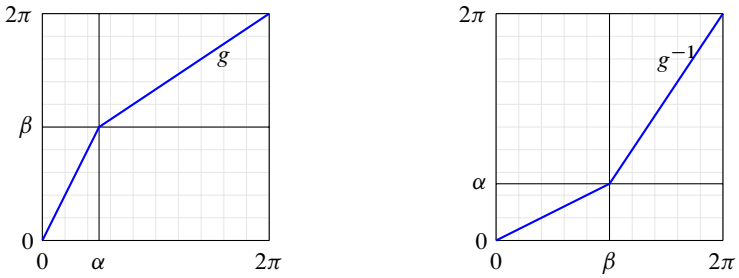
Übung A1R. Für $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ sind die Sektoren $A = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e^{i[0,\alpha]}$ und $B = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e^{i[0,\beta]}$ homöomorph. Genauer gesagt existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ mit $h(A) = B$:

(1) Für $0 < \alpha < \beta < \pi$ oder $\pi < \alpha < \beta < 2\pi$ kann $h : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ linear über $\mathbb{R}$ gewählt werden und ist somit insbesondere ein (reeller) Diffeomorphismus; sonst nicht.
(2) Allgemein für $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ können wir h in Polarkoordinaten darstellen durch $h(r\,e^{it}) = f(r)\,e^{ig(t)}$, etwa $f(r) = r^{\beta/\alpha}$ für $r \geq 0$ und $g(t) = t \cdot \beta/\alpha$ für $0 \leq t \leq \alpha$.
(3) Durch diese Wahl ist $h : A \xrightarrow{\sim} B$ holomorph in $z \neq 0$ (somit glatt und winkeltreu).

In jeder Dimension $n \geq 2$ erhalten wir einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, der den Orthanten $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ auf den Halbraum $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ abbildet, diffeomorph außerhalb der Kanten.

✻ **A1R.** (1) Für $\alpha, \beta \neq \pi$ sind $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$ von 1 linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(1) = 1$ und $h(e^{i\alpha}) = e^{i\beta}$ ist dann ein $\mathbb{R}$–Isomorphismus und somit ein reeller Diffeomorphismus. In den Fällen $0 < \alpha < \beta < \pi$ oder $\pi < \alpha < \beta < 2\pi$ ist er zudem orientierungserhaltend und erfüllt daher $h(A) = B$. Für $\alpha \leq \pi \leq \beta$ ist ein Diffeomorphismus unmöglich (A1K), deshalb betrachten wir die folgende Konstruktion.

(2) Die Radialfunktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist zunächst beliebig. Die Winkelfunktion $g : [0, 2\pi] \xrightarrow{\sim} [0, 2\pi]$ interpoliere affin zwischen den Stützpunkten $g(0) = 0$ und $g(\alpha) = \beta$ und $g(2\pi) = 2\pi$, wie in folgender Skizze. Die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(r\,e^{it}) = f(r)\,e^{ig(t)}$ für $r \geq 0$ und $0 \leq t \leq 2\pi$ ist wohldefiniert und stetig (siehe A1Q). Gleiches gilt für ihre Umkehrfunktion $h^{-1}(r\,e^{it}) = f^{-1}(r)\,e^{ig^{-1}(t)}$.



(3) Zu $\theta = \beta/2 - \pi$ ist der komplexe Logarithmus $\log_\theta : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e^{i\theta} \to \mathbb{C}$ mit $\log_\theta(e^{r+is}) = r + is$ für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $s \in]\theta, \theta + 2\pi[$ wohldefiniert und holomorph. Die Abbildung $h : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{i\theta} \to \mathbb{C}$ mit $h(0) = 0$ und $h(z) = z^{\beta/\alpha} := \exp(\log_\theta(z) \cdot \beta/\alpha)$ für $z \neq 0$ ist stetig und in $z \neq 0$ holomorph. Durch Einschränkung erhalten wir gerade die Funktion $h : A \xrightarrow{\sim} B$ mit $h(r\,e^{it}) = r^{\beta/\alpha}\,e^{ig(t)}$ und $g : [0, \alpha] \xrightarrow{\sim} [0, \beta]$ affin wie in (2).

☞ **§A1i. Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$.** Seien $0 \le m \le n$ in $\mathbb{N}$. Im Raum $\mathbb{R}^n$ ist die Teilmenge $E^m = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_{m+1} = \cdots = x_n = 0 \,\} = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$ ein m–dimensionaler Untervektorraum. Dies ist das Modell einer m–dimensionalen Untermannigfaltigkeit: ☜

ABBILDUNG A:6. Ein lokaler Diffeomorphismus $(\mathbb{R}^n, M, a) \cong (\mathbb{R}^n, E^m, 0)$

Die Idee ist einfach und anschaulich: Eine Untermannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^n$ sieht lokal um jeden Punkt genau so aus wie der Modellraum E^m in $\mathbb{R}^n$. Dies präzisieren wir wie folgt:

Definition A1S (Untermannigfaltigkeit)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine *m–dimensionale Untermannigfaltigkeit der Differenzierbarkeitsklasse $\mathscr{C}^\alpha$*, falls zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von 0 existieren sowie ein $\mathscr{C}^\alpha$–Diffeomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ mit $\varphi(M \cap U) = E^m \cap V$ und $\varphi(a) = 0$.

Wir sagen kurz, die Räume $(\mathbb{R}^n, M, a)$ und $(\mathbb{R}^n, E^m, 0)$ sind *lokal $\mathscr{C}^\alpha$–diffeomorph*.

Bemerkung. Im Falle $\alpha \ge 1$ ist M eine *($\mathscr{C}^\alpha$–)glatte Untermannigfaltigkeit*. Hierzu lässt sich der Satz über implizite Funktionen aus der Analysis wunderbar anwenden; nach Möglichkeit nutzen wir diese starken Werkzeuge. Im schwächeren Falle $\alpha = 0$ verlangen wir nur Homöomorphismen und sprechen dann von einer *topologischen Untermannigfaltigkeit*.

Bemerkung. Jede Untermannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^n$ ist für sich selbst als Teilraum betrachtet eine Mannigfaltigkeit im Sinne der Definition A0A, denn $(M, a) \cong (E^m, 0) \cong (\mathbb{R}^n, 0)$ sind lokal homöomorph, gar $\mathscr{C}^\alpha$–diffeomorph. Untermannigfaltigkeiten liefern uns somit viele anschauliche Beispiele für Mannigfaltigkeiten und sind zudem oft leicht zu konstruieren:

Beispiel. Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$ ist eine $\mathscr{C}^\omega$–Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Anschaulich ist das klar, zumindest für $n = 1, 2, 3$: Machen Sie sich ein paar Skizzen! Um es zu beweisen, benötigen sie eine lokale Karte φ, die $\mathbb{S}^{n-1} \cap U$ auf $E^{n-1} \cap V$ begradigt. Versuchen Sie es zunächst selbst, dann vergleichen Sie Ihre Lösung mit Übung A1M!

Beispiel. Jede offene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine $\mathscr{C}^\omega$–Untermannigfaltigkeit der Dimension n: Zu jedem Punkt $a \in \mathbb{B}^n$ finden wir hinreichend kleine Umgebungen $U = a + \varepsilon\mathbb{B}^n \subset M$ von a und $V = \varepsilon\mathbb{B}^n$ von 0 sowie $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V : x \mapsto x - a$ als Diffeomorphismus.

Beispiel. Der abgeschlossene Ball $\mathbb{D}^n$ in $\mathbb{R}^n$ ist *keine* Untermannigfaltigkeit im Sinne von A1S: In jedem inneren Punkt $a \in \mathbb{B}^n$ finden wir wie zuvor $U = a + \varepsilon\mathbb{B}^n \subset \mathbb{D}^n$ und $V = \varepsilon\mathbb{B}^n$ sowie $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V : x \mapsto x - a$. Das Problem entsteht in den Randpunkten $a \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$!

Unsere Definition A1S greift hierfür noch zu kurz. Um das zu beheben, nutzen wir als Modell neben E^m auch den Halbraum $E^m_1 = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \le 0,\ x_{m+1} = \cdots = x_n = 0 \,\}$.

Definition A1T (Untermannigfaltigkeit mit Rand)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine *m–dimensionale $\mathscr{C}^\alpha$–Untermannigfaltigkeit mit Rand*, falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler $\mathscr{C}^\alpha$–Diffeomorphismus $(\mathbb{R}^n, M, a) \cong (\mathbb{R}^n, E^m, 0)$ oder $(\mathbb{R}^n, M, a) \cong (\mathbb{R}^n, E^m_1, 0)$ existiert. Im ersten Falle nennen wir a einen *inneren Punkt*, kurz $a \in \operatorname{Int} M$, im zweiten Falle ist a ein *Randpunkt* von M, kurz $a \in \partial M$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiel. Der Ball $\mathbb{D}^n$ in $\mathbb{R}^n$ ist eine $\mathscr{C}^\omega$–Untermannigfaltigkeit der Dimension n mit Rand $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ und Innerem $\operatorname{Int}\mathbb{D}^n = \mathbb{B}^n$. Übung A1M liefert einen Diffeomorphismus.

Beispiel. Für $n \geq 2$ und $\alpha \geq 1$ ist der Würfel $[-1,1]^n$ in $\mathbb{R}^n$ *keine* $\mathscr{C}^\alpha$–glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand im Sinne von A1T: Im Inneren gilt $(\mathbb{R}^n, M, a) \cong (\mathbb{R}^n, E^m, 0)$ und in den Facetten gilt $(\mathbb{R}^n, M, a) \cong (\mathbb{R}^n, E^m_1, 0)$, aber in den Ecken gilt keines von beidem.

Der Würfel $[-1,1]^m$ inspiriert uns zu folgender Definition, um auch Ecken, Kanten, Seiten, etc. behandeln zu können. Für $0 \leq k \leq m \leq n$ in $\mathbb{N}$ betrachten wir den Teilraum

$$E^m_k = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \leq 0,\ x_{m+1} = \cdots = x_n = 0 \,\} = (\mathbb{R}_{\leq 0})^k \times \mathbb{R}^{m-k} \times \{0\}^{n-m}.$$

Der Teilraum $E^m = E^m_0 = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_{m+1} = \cdots = x_n = 0 \,\}$ ist ein m–dimensionaler Untervektorrraum in $\mathbb{R}^n$. Im Vektorraum E^m_0 liegt der Halbraum $E^m_1 = \{\, x \in E^m_0 \mid x_1 \leq 0 \,\}$ und der Viertelraum $E^m_2 = \{\, x \in E^m_0 \mid x_1, x_2 \leq 0 \,\}$ usw.

Definition A1U (Untermannigfaltigkeit mit Ecken)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine *m–dimensionale $\mathscr{C}^\alpha$–Untermannigfaltigkeit mit Ecken*, falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler $\mathscr{C}^\alpha$–Diffeomorphismus $(\mathbb{R}^n, M, a) \cong (\mathbb{R}^n, E^m_k, 0)$ existiert, wobei $0 \leq k \leq m$.

In diesem Fall sagen wir, der Punkt $a \in M$ hat *Tiefe* k. Punkte der Tiefe 0 liegen im Inneren $\operatorname{Int} M$, Punkte der Tiefe ≥ 1 liegen im Rand ∂M.

Beispiel. Der Würfel $M = [-1,1]^m \times \{0\}^{n-m}$ in $\mathbb{R}^n$ ist eine $\mathscr{C}^\alpha$–Untermannigfaltigkeit der Dimension m mit Ecken. Das Innere ist $\operatorname{Int} M =]-1,1[^m \times \{0\}^{m-n}$. Die Tiefe jedes Punktes $a \in M$ beschreibt seine Lage: Ecken haben Tiefe m, Kanten haben Tiefe $m-1$, etc.

Übung A1V. Sei $\alpha \geq 1$. Falls ein lokaler $\mathscr{C}^\alpha$–Diffeomorphismus $(\mathbb{R}^n, E^m_k, 0) \cong (\mathbb{R}^n, E^{m'}_{k'}, 0)$ existiert, so gilt $(m,k) = (m',k')$. Für jede $\mathscr{C}^\alpha$–Untermannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^n$ folgt: Die *Dimension* $\dim M = m$ ist wohldefiniert, ebenso das Innere $\operatorname{Int} M$ und der Rand ∂M.

Hinweis: Wiederholen Sie die Übung A1K zum Würfel $[-1,1]^n$.

✻ **A1V.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $a \in M$ ein Punkt. Wir betrachten die Menge $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, 0; M, a)$ aller stetig differenzierbaren Wege $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \to M$, die im Punkt $\gamma(0) = a$ starten. Die *Tangente* im Punkt a entlang des Weges γ ist die Ableitung $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$. Den *Tangentialhalbraum* von M im Punkt a definieren wir als die Menge $H_a M = \{\, \gamma'(0) \in \mathbb{R}^n \mid \gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, 0; M, a) \,\}$ aller Tangentialvektoren. Beim Ball finden wir $H_a\mathbb{D}^n = \mathbb{R}^n$ für $a \in \mathbb{B}^n$ im Inneren und $H_a\mathbb{D}^n = \{\, v \in \mathbb{R}^n \mid \langle\, v \mid a \,\rangle \leq 0 \,\}$ für $a \in \mathbb{S}^n$ im Rand. (Skizze!) Für unsere Modellräume $(\mathbb{R}^n, E^m_k, 0)$ finden wir $H_0 E^m_k = E^m_k$. (Skizze!)

Sei $h : (\mathbb{R}^n, E^m_k, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, E^{m'}_{k'}, 0)$ ein $\mathscr{C}^1$–Diffeomorphismus. Für $\gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, 0; E^m_k, 0)$ gilt $h \circ \gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, 0; E^{m'}_{k'}, 0)$ und $(h \circ \gamma)'(0) = h'(a) \circ \gamma'(0)$. Entsprechend für h^{-1}. Dasselbe gilt lokal. Der $\mathbb{R}$–lineare Isomorphismus $h'(0) : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ liefert somit eine Bijektion der Tangentialhalbräume $H_0 E^m_k \xrightarrow{\sim} H_0 E^{m'}_{k'}$.

Hieraus folgt $(m,k) = (m',k')$ dank Linearer Algebra: m ist die Dimension des aufgespannten affinen Unterraums $\operatorname{aff} E^m_k$, und $m-k$ ist die Dimension des maximalen Untervektorraums, der ganz in E^m_k liegt.

Bemerkung. Für $\alpha = 0$ liegt die Sache anders: Bemerkenswerterweise gibt es Homöomorphismen $(\mathbb{R}^n, E^m_k, 0) \cong (\mathbb{R}^n, E^m_1, 0)$ für alle $1 \leq k \leq m$. Wir können Winkel geradebiegen, siehe A1R. Topologisch gesehen spielen Ecken also keine Rolle. Glücklicherweise sind die Dimension, das Innere und der Rand auch topologisch wohldefiniert, wie wir später zeigen: Falls ein lokaler Homöomorphismus $(\mathbb{R}^n, E^m_k, 0) \cong (\mathbb{R}^n, E^{m'}_{k'}, 0)$ existiert, so gilt $m = m'$ und entweder $k = k' = 0$ oder $k, k' \geq 1$. Das ist allerdings wesentlich schwerer zu beweisen, da wir nun keine Ableitung haben und somit nicht die Lineare Algebra einsetzen können.

☞ **§A1j. Ein unerwarteter Homöomorphismus: $\mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}$.** Mathematik verbindet Sorgfalt und Kreativität, ich wiederhole es gern. Vorbild und Werkzeug sind uns hier die Analysis und die Lineare Algebra. Durch illustrative Beispiele wollen wir unsere topologische Anschauung schulen und gegen naive Trugschlüsse immunisieren. ☜

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
Bertrand Russel (1872–1970)

Beispiele. Die folgenden Fragen sind leicht zu formulieren aber nicht alle leicht zu beantworten. Sie dienen als erster Test für intuitive Anschauung und technische Virtuosität:

(A) Sind das Intervall $[0,1]$ und das Quadrat $[0,1]^2$ homöomorph, kurz $[0,1] \cong [0,1]^2$?
(B) Sind die reelle Gerade $\mathbb{R}$ und die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ homöomorph, kurz $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$?
(C) Sind die rationale Gerade $\mathbb{Q}$ und ihre Ebene $\mathbb{Q}^2$ homöomorph, kurz $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^2$?
(D) Sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und das Gitter $\mathbb{Z}^2$ homöomorph, kurz $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$?

Bevor Sie weiterlesen versuchen Sie bitte zuerst, Antworten selbst zu formulieren und zu begründen. Hierzu benötigen Sie geeignetes mathematisches Werkzeug, und glücklicherweise kennen Sie bereits alle nötigen Techniken aus Ihrem ersten Studienjahr. Die Antworten sind zum Teil überraschend. Den Rest dieses Abschnitts widmen wir der Klärung dieser Testfragen. Wer sich damit nicht aufhalten will, kann dies beim ersten Lesen übergehen.

Übung A1w. Die letzte Frage ist am einfachsten: Es gilt $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$.

✻ **A1w.** Die Räume $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ sind diskret, somit ist jede Bijektion $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2$ ein Homöomorphismus. Wir haben eine Bijektion $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ mit $f(a) = a/2$ für a gerade und $f(a) = -(a+1)/2$ für a ungerade. Zudem haben wir eine Bijektion $g : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ mit $f(a,b) = a + (a+b)(a+b+1)/2$. Ihre Komposition ergibt $h = (f,f) \circ g \circ f^{-1} : \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2$. Alternativ gelingt dies mit folgendem Reißverschlussverfahren:

Übung A1x. Es gibt einen Homöomorphismus $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \times \mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$ vermöge

$$\sum\nolimits_k x_k 3^k \quad \mapsto \quad \Big(\sum\nolimits_k x_{2k} 3^k, \sum\nolimits_k x_{2k+1} 3^k \Big).$$

Für die Ziffern gilt hierbei $x_k \in \{-1,0,1\}$ sowie $x_k = 0$ für $|k|$ hinreichend groß.

Anleitung: Wir wählen eine Basis $B \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Statt $\{0,1,\dots,B-1\}$ wie üblich wählen wir eine Ziffernmenge $X = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ mit $a < 0 < b$ und $|X| = b - a + 1 = B$.

(1) Jede ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k B^k$ mit Ziffern $x_k \in X$ und $x_k = 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$: Es gibt $n \in \mathbb{N}$, sodass $x_k = 0$ für alle $k > n$.
(2) Hieraus erhalten wir eine Bijektion $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2$ durch obiges Reißverschlussverfahren.
(3) Jede B–adische Zahl $x \in \mathbb{Z}[B^{-1}]$, also $x = a/B^m$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k B^k$ mit $x_k \in X$ und $x_k = 0$ für fast alle $k \in \mathbb{Z}$.
(4) Hieraus erhalten wir den Homöomorphismus $\mathbb{Z}[B^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[B^{-1}]^2$ wie oben.

✻ **A1x.** (1) *Eindeutigkeit:* Sei $x = \sum_{k=0}^n x_k B^k = \sum_{k=0}^n x'_k B^k$ mit $x_k, x'_k \in X$. Wir führen Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Für $n = 0$ gilt $x_0 = x'_0$. Für $n \geq 1$ gilt $x = (\sum_{k=1}^n x_k B^{k-1})B + x_0 = (\sum_{k=1}^n x'_k B^{k-1})B + x'_0$, also $x_0 = x'_0$ und $\sum_{k=1}^n x_k B^{k-1} = \sum_{k=1}^n x'_k B^{k-1}$. Per Induktion folgt $x_k = x'_k$ für $k = 1, \dots, n$.

Existenz: Wir führen Induktion über $|x| \in \mathbb{N}$. Für $|x| = 0$ gilt $x = 0$. Für $|x| \geq 1$ dividieren wir durch B mit Rest $x_0 \in X$ und erhalten $x = x'B + x_0$ mit $|x'| < |x|$. (Bei $X = \{0,1,\dots,B-1\}$ scheitert dies für $x = -1$, dies schließen wir daher aus.) Nach Induktionsvoraussetzung gilt $x' = \sum_{k=0}^\infty x'_k B^k$, also $x = \sum_{k=0}^\infty x_k B^k$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

(4) Seien $f : \mathbb{Z}[B^{-1}] \to \mathbb{Z}[B^{-1}]^2$ und $g : \mathbb{Z}[B^{-1}]^2 \to \mathbb{Z}[B^{-1}]$ die Reißverschlussabbildungen. Dank (3) sind sie wohldefiniert und erfüllen $g \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ g = \mathrm{id}$. Wir müssen noch die Stetigkeit nachweisen; hier hilft nur, sorgfältig die Definition anzuwenden. Wir nutzen die Taxinorm auf $\mathbb{R}^2$. Für $x, y \in \mathbb{Z}[B^{-1}]$ gilt:

$$\begin{aligned}
\big|f(x)-f(y)\big|_1 = \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} [x_{2j}-y_{2j}]B^j\right| + \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} [x_{2j+1}-y_{2j+1}]B^j\right| &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big[\big|x_{2j}-y_{2j}\big| + \big|x_{2j+1}-y_{2j+1}\big|\Big] B^j \\
\le 2B^n + \sum_{j=n}^{\infty} \Big[\big|x_{2j}-y_{2j}\big| + \big|x_{2j+1}-y_{2j+1}\big|\Big] B^j &\le 2B^n + B^{-n} \sum_{k=2n}^{\infty} \big|x_k - y_k\big| B^k \\
\le 2B^n + B^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|x_k - y_k\big| B^k &\le 2B^n + B^{-n}\big|x-y\big|
\end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $n \in \mathbb{Z}$ mit $3B^n \le \varepsilon$. Wir setzen $\delta := B^{2n}$. Für alle $x, y \in \mathbb{Z}[B^{-1}]$ mit $|x-y| < \delta$ gilt dann $|f(x)-f(y)|_1 \le 2B^n + B^{-n}\big|x-y\big| < 3B^n \le \varepsilon$. Dies zeigt, dass $f : \mathbb{Z}[B^{-1}] \to \mathbb{Z}[B^{-1}]^2$ stetig ist.

Umgekehrt betrachten wir Punkte $(x', x''), (y', y'') \in \mathbb{Z}[B^{-1}]^2$. Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $|x'|, |x''|, |y'|, |y''| < B^m/2$, also $x' = \sum_k x_{2k} B^k$ und $x'' = \sum_k x_{2k+1} B^k$ sowie $y' = \sum_k y_{2k} B^k$ und $y'' = \sum_k y_{2k+1} B^k$ mit $x_k, y_k \in X$ und $x_k = y_k = 0$ für $k > 2m$. Wir erhalten dann folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\big|g(x',x'')-g(y',y'')\big| = \left|\sum_{k=-\infty}^{2m} x_k B^k - \sum_{k=-\infty}^{2m} y_k B^k\right| &\le \sum_{k=-\infty}^{m} \big|x_k - y_k\big| B^k \\
\le B^m \left[\sum_{k=-\infty}^{m} \big|x_{2k} - y_{2k}\big| B^k + \sum_{k=-\infty}^{m-1} \big|x_{2k+1} - y_{2k+1}\big| B^k\right] &\le B^m \big[|x'-y'| + |x''-y''|\big]
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $g : \mathbb{Z}[B^{-1}]^2 \to \mathbb{Z}[B^{-1}]$ stetig ist. Wir haben also Homöomorphismen $\mathbb{Z}[B^{-1}] \cong \mathbb{Z}[B^{-1}]^2$.

Übung A1Y. Auch für die rationalen Zahlen existiert ein Homöomorphismus $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^2$. Per Induktion folgt hieraus $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^n$ und somit $\mathbb{Q}^m \cong \mathbb{Q}^n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. *Anleitung:*

(1) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar und dicht in $\mathbb{R}$. Umgekehrt gilt: Ist $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar und dicht in $\mathbb{R}$, so existiert eine ordnungstreue Bijektion $f : A \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$. Diese setzt sich eindeutig fort zu einem Homöomorphismus $h : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ mit $h|_A^{\mathbb{Q}} = f$.

(2) Wir erhalten Homöomorphismen $\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\frac{1}{3}]^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^2$ dank (1) und A1X.

(3) Die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \supset \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$ mit $g(a,b) = a + b\sqrt{2}$ ist $\mathbb{Q}$–linear, bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus; sie ist also kein Ersatz für (2).

✻ **A1Y.** (1) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ dicht sowie $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} A$, $k \mapsto a_k$ und $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} B$, $k \mapsto b_k$. Wir konstruieren eine ordnungstreue Bijektion $f : A \xrightarrow{\sim} B$ nach der „Hin-und-Her-Methode“ von Cantor (1895) und Hausdorff (1914). Wir beginnen mit $A_0 = B_0 = f_0 = \emptyset$. Sei $n \ge 0$ und $f_n : A_n \xrightarrow{\sim} B_n$ bereits konstruiert. Für n gerade sei $i \in \mathbb{N}$ minimal mit $a_i \notin A_n$. Hierzu sei $j \in \mathbb{N}$ minimal mit $b_j \notin B_n$, sodass $a_i \mapsto b_j$ die Bijektion $f_n : A_n \xrightarrow{\sim} B_n$ monoton fortsetzt. Dies ist immer möglich, da $f_n(A_n) = B_n$ endlich und B dicht ist. Wir setzen $A_{n+1} := A_n \cup \{a_i\}$ und $B_{n+1} := B_n \cup \{b_j\}$ und $f_{n+1} = f_n \cup \{(a_i, b_j)\}$. Für n ungerade vertauschen wir die Rollen von A und B. Die Vereinigung $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n : A \to B$ ist ordnungstreu, injektiv und surjektiv, Letzteres dank „Hin-und-Her“. (Die Konstruktion „nur Hin“ genügt, man muss aber genauer hinschauen.)

Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ dicht, so setzt sich jede ordnungstreu Bijektion $f : A \xrightarrow{\sim} B$ eindeutig fort zu einem Homöomorphismus $h : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = \sup A_{\le x}$, und wir setzen $h(x) := \sup f(A_{\le x})$. Für $y \in \mathbb{R}$ gilt $y = \sup B_{\le y}$, und wir setzen $k(y) := \sup f^{-1}(B_{\le y})$. Nach Konstruktion gilt $k \circ h = h \circ k = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Schließlich rechnet man die Stetigkeit von h und k nach. Wir erhalten so den Homöomorphismus $h : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ mit $h|_A^B = f$.

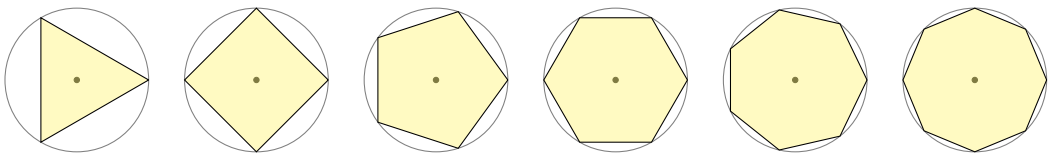
Aussage (2) ist damit klar. Zum Gegenbeispiel (3): Die Zahlen $1, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ sind $\mathbb{Q}$–linear unabhängig, da $\sqrt{2}$ irrational ist. Die Abbildung $g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ mit $g(a,b) = a + b\sqrt{2}$ ist somit ein $\mathbb{Q}$–Vektorraumisomorphismus. Zudem ist g stetig, denn $|a + b\sqrt{2}| \le \sqrt{2}\,|(a,b)|_1$. Die Umkehrabbildung g^{-1} ist jedoch nicht stetig: Wir wählen eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \to \sqrt{2}$ und setzen $b_n := -1$. Dann gilt $|a_n + b_n\sqrt{2}| \to 0$ aber $|(a_n, b_n)|_1 \ge 1$.

§A2. Euklidische Geometrie: Polytope und Isometrien

Die Topologie vereinfacht und vergröbert. Sie verfolgt eine abstrakte Sichtweise, die viele (durchaus interessante) Aspekte ausblendet, aber für manche Probleme gerade den Blick aufs Wesentliche freimacht. Zum Beispiel sind Ball $\mathbb{D}^3$ und Sphäre $\mathbb{S}^2$ nicht homöomorph: Anschaulich umschließt die Sphäre ein Loch, der Ball nicht. In $\mathbb{R}^3$ ist $\mathbb{D}^3$ konvex aber $\mathbb{S}^2$ nicht. Eine topologisch invariante Formulierung erfordert weit mehr Aufwand: Versuchen Sie einmal, den Begriff „umschließt ein Loch“ zu definieren, und zwar so präzise und anwendungsfreundlich, dass Sie damit konkret arbeiten können, gar rechnen… Naja, ein Loch ist da, wo nichts ist, aber was heißt umschließen? Antworten liefern der Abbildungsgrad in Kapitel J und die Fundamentalgruppe in Kapitel L. Zur Vereinfachung beginnen wir hier mit konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$; diese haben sicher keine Löcher.

In Einstein's general relativity the structure of space can change but not its topology. Topology is the property of something that doesn't change when you bend it or stretch it as long as you don't break anything.
Edward Witten

§A2a. Reguläre Vielecke in der Ebene. Für jede ganze Zahl $n \geq 3$ betrachten wir in der Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ die Punkte $v_k = e^{2\pi i k/n} = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n))$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Ihre konvexe Hülle $P_n = [v_1, \dots, v_n]$ ist das *reguläre n–Eck*. Ihre Konstruktion allein mit Zirkel und Lineal für $n = 3, 4, 5, 6, \dots$ ist eine klassische Aufgabe der Geometrie, für $n = 7, 9, \dots$ ist der Beweis der Unmöglichkeit allein mit Zirkel und Lineal ein Triumph der Algebra.



Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein 2–dimensionales Polytop (A2B). Eine *Fahne* $(E < K < P)$ besteht aus einer Ecke $E = \{v_k\}$ in einer Kante $K = [v_k, v_{k\pm1}]$ des Polytops P. Wir nennen P *regulär*, wenn jede Fahne in jede andere überführt werden kann durch eine Isometrie des $\mathbb{R}^2$.

Satz A2A. *Jedes unserer obigen Modelle $P_n \subset \mathbb{R}^2$ erfreut sich dieser Eigenschaft. Bis auf Ähnlichkeit (Isometrie und Streckung) sind dies die einzigen regulären 2–Polytope.* □

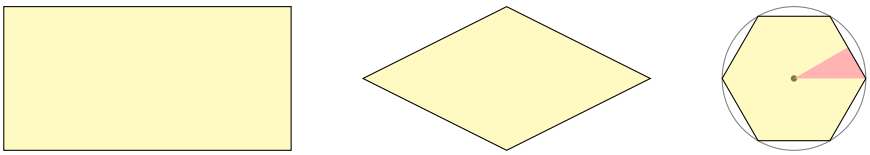


ABBILDUNG A:7. Transitivität der Isometriegruppe auf Ecken, Kanten, Fahnen

Bemerkung. Für jedes 2–dimensionale Polytop $P \subset \mathbb{R}^2$ ist Regularität äquivalent dazu, dass man per Isometrie jede Ecke in jede andere Ecke und jede Kante in jede andere Kante überführen kann. Jedes Rechteck erfüllt die schwächere Transitivität auf den Ecken. Jede Raute erfüllt die schwächere Transitivität auf den Kanten.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A2b. Die platonischen Körper.** Die fünf *platonischen Körper* aus Abbildung A:8 ☜ sind benannt nach dem griechischen Philosophen PLATON (ca. 428–348 v. Chr.). Sie erfreuen sich vollkommener Symmetrie: Wir sprechen von *regulären* 3*–dimensionalen Polytopen*.

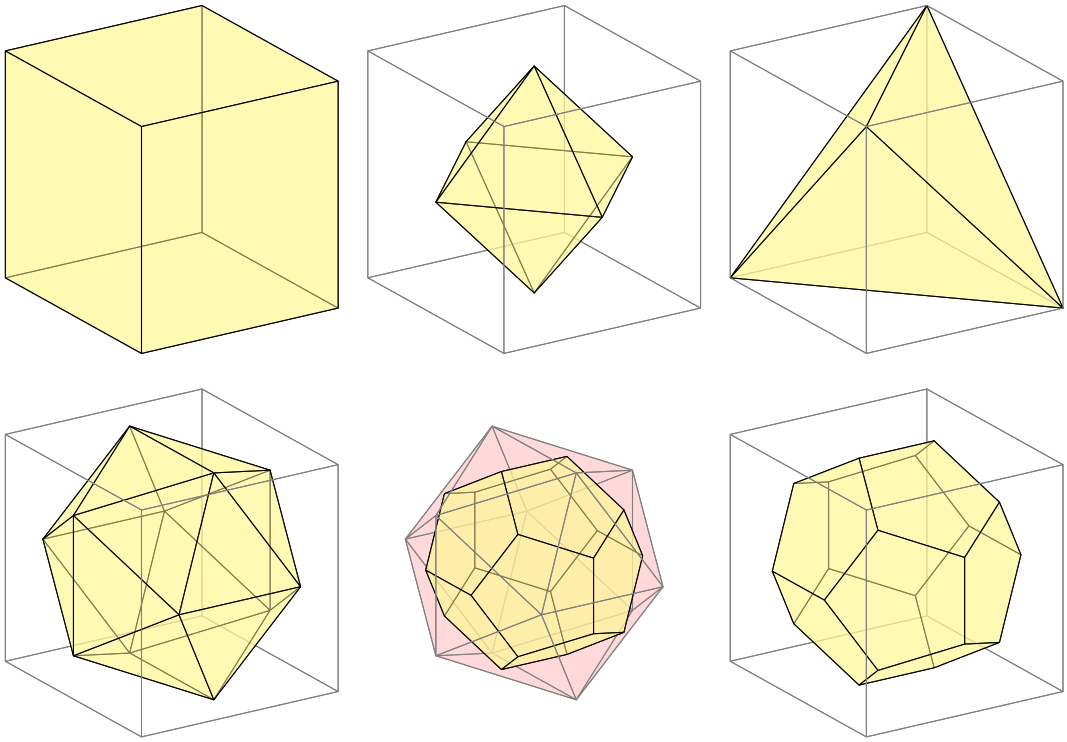


ABBILDUNG A:8. Hexaeder, Oktaeder, Tetraeder, Ikosaeder und Dodekaeder.

Wie konstruiert man diese Objekte? Das einfachste ist das Hexaeder $[(\pm 1, \pm 1, \pm 1)]$. Die Seitenmitten des Hexaeders bilden die Ecken des Oktaeders $[\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3]$. Die Seitenmitten des Oktaeders bilden die Ecken des kleineren Hexaeders $[(\pm 1/3, \pm 1/3, \pm 1/3)]$. Diese beiden Polytope sind in diesem Sinne zueinander *dual*.

Aus vier Ecken des Hexaeders gewinnen wir ein reguläres Tetraeder wie gezeigt. Es ist selbstdual, denn seine vier Seitenmitten sind die Ecken eines kleineren Tetraeders.

Die Konstruktion des Ikosaeders ist trickreicher: In der Seite $[(\pm 1, \pm 1, 1)]$ des Hexaeders wählen wir eine Strecke $[(\pm s, 0, 1)]$, deren Länge anschließend noch zu bestimmen ist. Für die anderen fünf Seiten verfahren wir entsprechend und verbinden diese 12 Ecken wie in Abbildung A:8. Zwecks Regularität wählen wir s so, dass alle Dreiecke regulär sind. Wir finden hier den *goldenen Schnitt* $s = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618$. (Übung!)

Das Dodekaeder erhalten wir zu guter Letzt aus dem Ikosaeder, indem wir die Seitenmitten als Ecken wählen. Auch Ikosaeder und Dodekaeder sind somit zueinander dual.

Wir können auch zuerst das Dodekaeder konstruieren: Wir nutzen die 8 Ecken des Hexaeders; auf jedem der sechs Quadrate errichten wir ein Walmdach, dessen Höhe h und Breite b noch zu bestimmen ist. Wir erhalten 12 weitere Ecken, insgesamt also 20. Zwecks Regularität wählen wir h und b so, dass reguläre Fünfecke entstehen.

§A2c. Doppelkegel, Prismen, Antiprismen. Die platonischen Körper haben größtmögliche Symmetrie, wie wir im Folgenden diskutieren. Daneben gibt es auch weniger reguläre Polytope, die wir durch einige prominente Beispiele illustrieren.

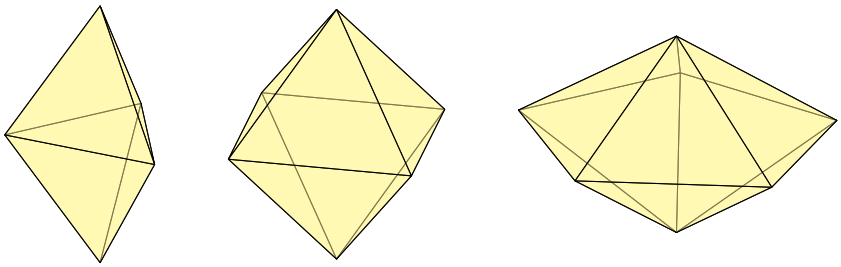


ABBILDUNG A:9. Doppelkegel über einem regulären q–Eck ($q \geq 3$)

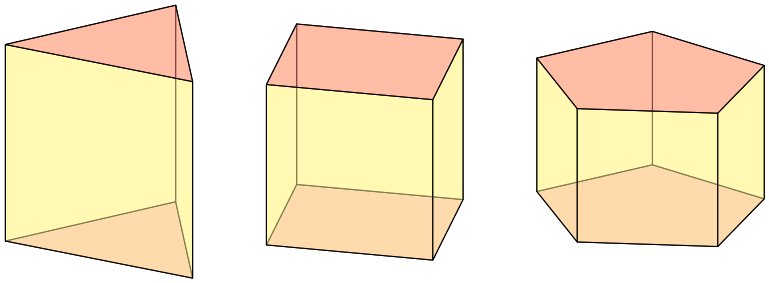


ABBILDUNG A:10. Prisma über einem regulären q–Eck ($q \geq 3$)

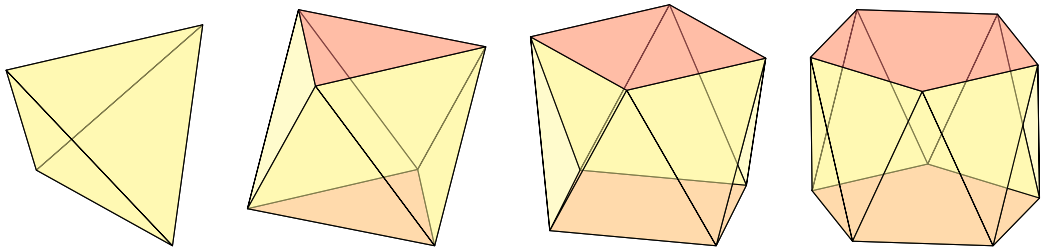


ABBILDUNG A:11. Antiprisma über einem regulären q–Eck ($q \geq 2$)

Der Doppelkegel entsteht aus einem regulären q–Eck $P = [v_1, \dots, v_q]$ mit den Ecken $v_k = (\cos(2\pi k/q), \sin(2\pi k/q), 0)$ durch Hinzunahme der Ecken $(0,0,a)$ und $(0,0,-b)$. Die Höhen $a, b > 0$ können wir hier frei wählen, die Wahl $a = b$ ist besonders symmetrisch. Speziell für $q = 3, 4, 5$ können wir wie skizziert $2q$ reguläre Dreiecke als Facetten erreichen.

Das Prisma ist die konvexe Hülle der Ecken $v_k^{\pm} = (\cos(2\pi k/q), \sin(2\pi k/q), \pm a)$. Beim Antiprisma sind Boden und Deckel gegeneinander verdreht, hier sind die Ecken zueinander versetzt gemäß $v_k^{\pm} = (\cos(2\pi k/q \pm \pi/2q), \sin(2\pi k/q \pm \pi/2q), \pm a)$.

Doppelkegel und Prisma sind zueinander dual. Das Oktaeder ist ein spezieller Doppelkegel, das Hexaeder ein spezielles Prisma, Tetraeder und Oktaeder sind Antiprismen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A2d. Polytope.** Bislang haben wir einzelne, konkrete Beispiele diskutiert. Man sieht ☜ jeweils, was das betrachtete *Polytop* sein soll, sein *Inneres*, sein *Rand*, seine *Dimension*, seine *Ecken* und *Seiten*. Wenn wir nun allgemeine Gesetzmäßigkeiten suchen, formulieren und beweisen wollen, so müssen wir die von uns verwendeten Begriffe präzise definieren. Selbst für scheinbar einfache Objekte wie Polytope erfordert dies Kreativität und Sorgfalt. Glücklicherweise kennen wir alle nötigen Werkzeuge aus der Linearen Algebra:

✍ **Definition A2B.** Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die *Verbindungsstrecke* zwischen $a,b \in V$ ist ✍

$$[a,b] := \big\{ (1-t)a + tb \;\big|\; t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1 \big\}.$$

Wir nennen eine Teilmenge $X \subset V$ *konvex*, wenn für jedes Paar $a,b \in X$ stets $[a,b] \subset X$ gilt. Zum Beispiel ist der gesamte Raum V konvex, ebenso jeder affine Teilraum und jeder Halbraum. Ist $X_i \subset V$ konvex für jedes $i \in I$, so auch der Durchschnitt $X = \bigcap_{i\in I} X_i$.

Das von $v_0, v_1, \dots, v_\ell \in V$ aufgespannte *Polytop* ist ihre konvexe Hülle, also die kleinste konvexe Menge $P \supset \{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$. Diese können wir darstellen als Durchschnitt aller Halbräume, die $v_0, v_1, \dots, v_\ell$ enthalten, oder ebenso als Menge aller Konvexkombinationen:

$$P = [v_0, v_1, \dots, v_\ell] := \big\{ t_0 v_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_\ell v_\ell \;\big|\; t_0, t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}_{\ge 0},\ t_0 + t_1 + \cdots + t_\ell = 1 \big\}$$

Das *(geometrische) Innere* des Polytops P besteht aus den positiven Konvexkombinationen:

$$\operatorname{Int}[v_0, v_1, \dots, v_\ell] := \big\{ t_0 v_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_\ell v_\ell \;\big|\; t_0, t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}_{>0},\ t_0 + t_1 + \cdots + t_\ell = 1 \big\}$$

Die verbleibenden Punkte bilden den *(geometrischen) Rand* des Polytops P:

$$\partial[v_0, v_1, \dots, v_\ell] := [v_0, v_1, \dots, v_\ell] \setminus \operatorname{Int}[v_0, v_1, \dots, v_\ell]$$

Der von $P \subset V$ aufgespannte *affine Teilraum* ist die affine Hülle:

$$\begin{aligned} A = \operatorname{aff}(P) &:= \big\{ s_0 x_0 + \cdots + s_k x_k \;\big|\; x_0, \dots, x_k \in P,\ s_0, \dots, s_k \in \mathbb{R},\ s_0 + \cdots + s_k = 1 \big\} \\ &= \big\{ t_0 v_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_\ell v_\ell \;\big|\; t_0, t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R},\ t_0 + t_1 + \cdots + t_\ell = 1 \big\} \\ &= \big\{ v_0 + t_1(v_1 - v_0) + \cdots + t_\ell(v_\ell - v_0) \;\big|\; t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R} \big\} \\ &= v_0 + \langle\, v_1 - v_0, \dots, v_\ell - v_0 \,\rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Es existiert ein affiner Isomorphismus $A \cong \mathbb{R}^d$; dies bestimmt $d \in \{0, 1, \dots, \ell\}$ eindeutig. Wir nennen $\dim P := \dim A = d$ die *Dimension* des Polytops P. Für das leere Polytop $\emptyset = []$ vereinbaren wir $\dim \emptyset = -\infty$. Damit gilt stets $\dim(P \times Q) = \dim P + \dim Q$.

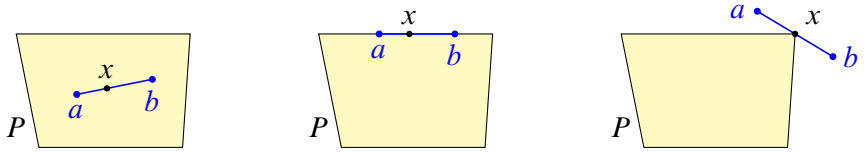
☞ **Beispiel.** Für $\dim P = 0$ gilt $P = \{v_0\}$, das Innere ist $\operatorname{Int} P = \{v_0\}$ und der Rand $\partial P = \emptyset$. ☜

☞ **Beispiel.** Für $\dim P = 1$ gilt $P = [v_0, v_1] = \{\, (1-t)v_0 + t v_1 \mid 0 \le t \le 1 \,\}$ mit $v_0 \neq v_1$. ☜ Dies spannt die affine Gerade $A = v_0 + \mathbb{R}(v_1 - v_0) \cong \mathbb{R}$ auf. Nach obiger Definition ist das Innere $\operatorname{Int}[v_0, v_1] = \{\, (1-t)v_0 + t v_1 \mid 0 < t < 1 \,\}$ und der Rand $\partial[v_0, v_1] = \{v_0, v_1\}$.

☞ **Bemerkung.** Für jedes Polytop $P \subset V$ definieren wir hier das Innere $\operatorname{Int} P$ und den Rand ☜ ∂P als *geometrische* Begriffe. Dies sind zudem auch *topologische* Begriffe, die wir in §D5 eingehend diskutieren werden. Im aufgespannten affinen Raum $A \cong \mathbb{R}^d$ stimmen beide überein: Das geometrische Innere $\operatorname{Int} P$ und der geometrische Rand ∂P stimmen mit dem topologischen Inneren P° und dem topologischen Rand δP von P in A überein.

Dies zeigt insbesondere, dass die Begriffe *Inneres* und *Rand* tatsächlich nur von der Menge P abhängen, und nicht von unserer Wahl der aufspannenden Punkte $v_0, v_1, \dots, v_n$.

§A2e. Ecken und Seiten eines Polytops. Die Darstellung eines Polytops P als konvexe Hülle $P = [v_0, v_1, \dots, v_\ell]$ ist nicht eindeutig: Die Punkte $v_0, v_1, \dots, v_\ell \in V$ bestimmen das von ihnen aufgespannte Polytop P, aber nicht umgekehrt: Wir können die Punkte $v_0, v_1, \dots, v_\ell$ umordnen und einen beliebigen Punkt $v_{\ell+1} \in P$ hinzufügen.



Definition A2c. Sei weiterhin $P \subset V$ ein Polytop in einem $\mathbb{R}$–Vektorraum V wie in A2b.

Eine *Ecke* von P ist ein Punkt $x \in P$, der bezüglich P extrem liegt in folgendem Sinne: Für alle $a, b \in P$ und $0 < t < 1$ gilt $(1-t)a + tb = x$ genau dann, wenn $a = b = x$ gilt.

$$x \in \operatorname{vert}(P) \;:\Longleftrightarrow\; x \in P \wedge \forall t \in]0,1[\;\; \forall a, b \in P \;:\; \big[(1-t)a + tb = x \;\Leftrightarrow\; a = b = x\big]$$

Eine *Seite* von P ist eine Teilmenge $Q \subset P$, die in P extrem liegt in folgendem Sinne: Für alle $a, b \in P$ und $0 < t < 1$ gilt $(1-t)a + tb \in Q$ genau dann, wenn $a, b \in Q$ gilt.

$$Q \leq P \;:\Longleftrightarrow\; Q \subset P \wedge \forall t \in]0,1[\;\; \forall a, b \in P \;:\; \big[(1-t)a + tb \in Q \;\Leftrightarrow\; a, b \in Q\big]$$

Wir schreiben $Q \leq P$, wenn Q eine Seite von P ist, und $Q < P$, wenn Q eine echte Seite von P ist, also zudem $Q \neq P$ gilt oder äquivalent $\dim Q < \dim P$.

Bemerkung. Das leere Polytop $\emptyset$ ist eine Seite von P, die einzige der Dimension $-\infty$. Für jede Ecke x von P ist die Menge $\{x\}$ eine 0–dimensionale Seite, und umgekehrt. Die gesamte Menge P ist eine Seite von P. Dies ist die einzige der Dimension $\dim P$. *Kanten* sind Seiten der Dimension 1, *Facetten* sind Seiten der Dimension $\dim P - 1$.

Beispiel. Für $a, b \in V$ ist die Strecke $[a, b]$ ein Polytop, und a, b sind die beiden Ecken. Für das Produkt $P \times Q$ von Polytopen gilt $\operatorname{vert}(P \times Q) = \{\,(x, y) \mid x \in \operatorname{vert} P,\; y \in \operatorname{vert} Q\,\}$:

Das Quadrat $Q = [(\pm 1, \pm 1)]$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ hat vier 0–dimensionale Seiten (Ecken) $(\pm 1, \pm 1)$, vier 1–dimensionale Seiten (Kanten), nämlich $[(\pm 1, +1)]$, $[(\pm 1, -1)]$, $[(+1, \pm 1)]$, $[(-1, \pm 1)]$, sowie die 2–dimensionale Seite Q. Weitere Seiten gibt es nicht.

Der Würfel $W = [(\pm 1, \pm 1, \pm 1)]$ im Raum $\mathbb{R}^3$ hat genau acht 0–dimensionale Seiten (Ecken) $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, zwölf 1–dimensionale Seiten (Kanten), etwa $[(\pm 1, 1, 1)]$, sechs 2–dimensionale Seiten (Facetten), etwa $[(\pm 1, \pm 1, 1)]$, sowie die 3–dimensionale Seite W.

Bemerkung. Wir betrachten das Polytop $P = [S]$, aufgespannt von $S = \{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$. Zur bequemen Schreibweise sei $\Delta^\ell := \{\,(t_0, t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^{\ell+1} \mid t_0 + t_1 + \cdots + t_\ell = 1\,\}$ das *Standardsimplex*. Damit gilt $P = [v_0, v_1, \dots, v_\ell] = \{\,t_0 v_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_\ell v_\ell \mid t \in \Delta^\ell\,\}$.

Das zeigt: Das Polytop $P \subset V$ ist das Bild des Standardsimplex $\Delta^\ell \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ unter der linearen Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{\ell+1} \to V$ mit $e_0, e_1, \dots, e_\ell \mapsto v_0, v_1, \dots, v_\ell$. Dabei wird der affine Raum $\operatorname{aff}\{e_0, e_1, \dots, e_\ell\}$ der Dimension ℓ abgebildet auf $\operatorname{aff}\{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$ der Dimension $d = \dim P$. Das Innere $\operatorname{Int} \Delta^\ell = \{\,t \in \Delta^\ell \mid t_0, t_1, \dots, t_\ell > 0\,\}$ wird dabei abgebildet auf das Innere $\operatorname{Int} P$. Der Rand $\partial \Delta^\ell$ jedoch trifft im Allgemeinen nicht nur den Rand ∂P, sondern auch das Innere von P, wie zum Beispiel das Quadrat $P = [(\pm 1, \pm 1)] \subset \mathbb{R}^2$ zeigt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Satz A2D.** *Für jedes Polytop $P = [v_0, v_1, \dots, v_\ell]$ ist die Eckenmenge* $\operatorname{vert}(P)$ *die kleinste Teilmenge, die P konvex aufspannt. Insbesondere gilt* $\operatorname{vert}(P) \subset \{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$. ☜

✻ **A2D.** Für $S = \{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$ gilt $P = [S]$. Angenommen, v_k ist keine Ecke, also $v_k = (1-t)a + tb$ mit $0 < t < 1$ und $a, b \in P$, $a \neq v_k$ oder $b \neq v_k$. Es gibt demnach $\alpha, \beta \in \Delta^\ell$, sodass $a = \sum_i \alpha_i v_i \neq v_k$ oder $b = \sum_i \beta_i v_i \neq v_k$, also $\alpha_k < 1$ oder $\beta_k < 1$. Aus $v_k = \sum_i \gamma_i v_i$ mit $\gamma = (1-t)\alpha + t\beta$ folgt $\gamma_k < 1$ und $(1-\gamma_k)v_k = \sum_{i\neq k} \gamma_i v_i$, also $v_k = \sum_{j\neq k} [\gamma_i/(1-\gamma_k)] v_i$. Für $S' = S \smallsetminus \{v_k\}$ gilt weiterhin $P = [S']$. Nach endlich vielen Löschungen erhalten wir schließlich $P = [\operatorname{vert}(P)]$. Umgekehrt, für jedes Polytop $P = [S]$ gilt $\operatorname{vert}(P) \subset S \subset P$, denn keine Ecke v ist Konvexkombination aus $P \smallsetminus \{v\}$.

☞ **Satz A2E.** *(1) Aus $R \leq Q \leq P$ folgt $R \leq P$: Seiten von Seiten von P sind Seiten von P.* ☜

(2) Jede Seite $Q \leq P$ ist selbst ein Polytop, und es gilt $\operatorname{vert}(Q) = \operatorname{vert}(P) \cap Q$.

(3) Es gilt $P = \bigsqcup_{Q \leq P} \operatorname{Int} Q$ und $\partial P = \bigsqcup_{Q < P} \operatorname{Int} Q$.

Zum Polytop P betrachten wir die Familie $\mathscr{K} = \langle P \rangle := \{ Q \leq P \}$ seiner Seiten. Satz A2E garantiert, dass $\mathscr{K}$ ein *polytopaler Komplex* ist gemäß Definition A3B. Ausführlich: Jeder Punkt von P liegt im Inneren von genau einer Seite. Der Rand ∂P ist selbst kein Polytop, aber Vereinigung von endlich vielen Polytopen, nämlich der echten Seiten von P.

BEWEIS. (1) Sei $x \in R$ sowie $t \in]0,1[$ und $a, b \in P$ mit $x = (1-t)a + tb$. Da $Q \leq P$ eine Seite ist, gilt $a, b \in Q$. Da $R \leq Q$ eine Seite ist, gilt $a, b \in R$. Also ist $R \leq P$ eine Seite.

Zu $x, a \in P$ verläuft $g : \mathbb{R} \to V : t \mapsto (1-t)x + ta$ durch $g(0) = x$ und $g(1) = a$. Wir definieren die Relation $x \triangleright a$ durch die Bedingung $g([-\varepsilon, 1]) \subset P$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $b = g(-\varepsilon)$ erhalten wir somit die Konvexkombination $x = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} a + \frac{1}{1+\varepsilon} b$.

Sei $S = \operatorname{vert}(P) = \{ v_0, v_1, \dots, v_\ell \}$. Zu $x \in P$ sei $S_x = \{ v \in S \mid x \triangleright v \}$ der *Träger*.

(4) Für $s \in \Delta^\ell$ gilt $y = s_0 v_0 + s_1 v_1 + \cdots + s_\ell v_\ell \in [S_x]$ gdw $s_i = 0$ für alle $v_i \in S \smallsetminus S_x$.

(5) Das Polytop $Q_x = [S_x]$ ist eine Seite von P, kurz $Q_x \leq P$, und enthält x im Inneren.

(6) Jede Seite $R \leq P$ ist ein Polytop: Es gilt $R = [S_R]$ mit $S_R = \bigcup_{x \in R} S_x \subset S$.

(7) Genau dann gilt $R \leq P$ und $x \in \operatorname{Int} R$, wenn $R = Q_x$. Das beweist (3). □

✻ **A2E.** Zu jedem $v_k \in S_x$ existiert ein $\xi^k \in \Delta^\ell$ mit $x = \xi^k_0 v_0 + \xi^k_1 v_1 + \cdots + \xi^k_\ell v_\ell$ und $\xi^k_k > 0$. Für den Mittelwert $\xi := \frac{1}{|S_x|} \sum_{k : v_k \in S_x} \xi^k$ gilt $x = \xi_0 v_0 + \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_\ell v_\ell$ mit $\xi \in \Delta^\ell$ und $\xi_k > 0$ für alle $v_k \in S_x$, also $x \in \operatorname{Int}[S_x]$. Umgekehrt: Aus $\xi_k > 0$ folgt $v_k \in S_x$. Demnach gilt $\xi_k > 0$ genau dann, wenn $v_k \in S_x$.

(4) Die Implikation „⇐“ ist klar. Wir zeigen „⇒“: Zu $y \in [S_x]$ existiert $t \in \Delta^\ell$ mit $y = t_0 v_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_\ell v_\ell$ und $t_i = 0$ für alle $v_i \in S \smallsetminus S_x$. Für $\lambda > 0$ hinreichend klein gilt $\lambda t_i \leq \xi_i$ für alle $i = 0, 1, \dots, \ell$. Dann gilt $x = (x - \lambda y) + \lambda y = \sum_i [\xi_i - \lambda t_i + \lambda s_i] v_i$. Für $s_i > 0$ gilt $(\xi_i - \lambda t_i) + \lambda s_i > 0$, also $v_i \in S_x$.

(5) Gemäß Definition A2C müssen wir zeigen: Für alle $a, b \in P$ und $0 < t < 1$ gilt $(1-t)a + tb \in Q_x$ genau dann, wenn $a, b \in Q_x$ gilt. Da $Q_x = [S_x]$ konvex ist, folgt „⇐“. Die Umkehrung „⇒“ folgt aus (4): Seien $a = \sum_i \alpha v_i$ und $b = \sum_i \beta_i v_i$ mit $\alpha, \beta \in \Delta^\ell$. Sei $0 < t < 1$ und $s_i = (1-t)\alpha_i + t\beta_i$. Wir setzen voraus, der Punkt $y = (1-t)a + tb = \sum_i s_i v_i$ liegt in Q_x. Dank (4) wissen wir $s_i = 0$ für alle $v_i \in S \smallsetminus S_x$. Demnach gilt auch $\alpha_i = \beta_i = 0$ für alle $v_i \in S \smallsetminus S_x$, also $a, b \in [S_x] = Q_x$. Dies zeigt $Q_x \leq P$, wie behauptet.

(6) Für jeden Punkt $x \in R$ gilt $S_x \subset R$, da $R \leq P$ eine Seite ist. Daraus folgt $S_R \subset R$ und $[S_R] \subset R$. Für jedes $x \in R$ gilt $x \in [S_x] \subset [S_R]$, also $R \subset [S_R]$. Es gilt $S_R = S \cap R$; das beweist (1).

(7) Die Implikation „⇐“ haben wir in (5) gezeigt. Wir zeigen nun die Umkehrung „⇒“: Hierzu sei $R \leq P$ eine Seite mit $x \in \operatorname{Int} R$; wir wollen $R = Q_x$ zeigen. Zunächst „$R \supset Q_x$“: Wir haben $x = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell$ mit $a_k > 0$ für alle $v_k \in S_x$. Da $R \leq P$ eine Seite ist, folgt $S_x \subset R$, also $Q_x = [S_x] \subset R$.

Schließlich „$R \subset Q_x$“: Hierzu sei $a \in R$. Da $R \leq P$ eine Seite ist und $x \in \operatorname{Int} R$ im Inneren liegt, gilt $x \triangleright a$: Für $g : \mathbb{R} \to V : t \mapsto (1-t)x + ta$ gilt $g([-\varepsilon, 1]) \subset P$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir erhalten eine Konvexkombination $x = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} a + \frac{1}{1+\varepsilon} b$. Da $Q_x \leq P$ eine Seite ist, folgt $a, b \in Q_x$. Dies zeigt $R \subset Q_x$.

☞ **§A2f. Dualität.** Wir können Polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ durch affine Ungleichungen beschreiben, geometrisch also als Schnitt von Halbräumen. Diese duale Darstellung ist oft nützlich, nicht zuletzt fördert sie unsere Anschauung. Zur Illustration will ich dies hier kurz erläutern. ☜

Zur Richtung $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ und Abstand $b \in \mathbb{R}$ betrachten wir den Halbraum

$$H(a,b) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid ax \le b \} = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \le b \}.$$

Der Schnitt $H(a_1,b_1) \cap \cdots \cap H(a_k,b_k)$ mehrerer Halbräume ist die Lösungsmenge von

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k \end{matrix}\right\} \iff: Ax \le B \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Lineare *Gleichungen* kennen Sie aus der Linearen Algebra; *Ungleichungen* treten z.B. in der linearen Optimierung oder der Spieltheorie auf. Jedes unserer obigen Polytope P lässt sich so als Lösungsmenge von $Ax \le B$ darstellen. Versuchen Sie es an Beispielen!

☞ **Satz A2F** (Dualitätssatz für Polytope)**.** *Für jede Teilmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:* ☜

(1) P ist ein Polytop, also $P = [v_0, v_1, \dots, v_\ell]$ für geeignete Punkte $v_0, v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$.
(2) P ist beschränkter Durchschnitt von Halbräumen, also $P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le B \}$ für geeignete $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^k$ sowie $P \subset [-r,r]^n$ für ein $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. □

Bemerkung. Satz A2F ist anschaulich plausibel, ein Beweis aber keineswegs offensichtlich. Er erlaubt uns, zwischen beiden äquivalenten Sichtweisen jeweils eine passende auszuwählen. Beide Darstellungen sind dual zueinander, jede hat ihre eigenen Vorzüge. Versuchen Sie etwa für $P = [v_0, v_1, \dots, v_\ell] = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le B \}$ folgende Probleme zu lösen:

(1) Geben Sie ein (beliebiges, willkürliches) Element $x \in P$ explizit an.
(2) Prüfen Sie zu einem (vorgegebenen) Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, ob $x \in P$ gilt.

Folgern Sie aus Satz A2F zwei typische Anwendungen:

(1) Jede affine Projektion eines Polytops P ist ein Polytop.
(2) Der Durchschnitt zweier Polytope P, Q ist ein Polytop.

Die erste Aussage ist klar in der ersten Form, die zweite in der zweiten Form, aber beide sind nicht-trivial in der jeweils anderen Darstellung. Die *Seiten* $Q \le P$ erhalten wir, indem wir einige der Ungleichungen in $Ax \le B$ zu Gleichungen machen, oder alternativ als Schnitt mit einer Stützebene, $Q = \{ x \in P \mid ax = b \}$ wobei $P \subset H(a,b)$. Für $P = [v_0, \dots, v_\ell]$ hingegen sind die Seiten nicht offensichtlich: Jede Seite $Q \le P$ ist von der Form $Q = [S]$ mit $S \subset \{v_0, \dots, v_\ell\}$, aber nicht jede Teilmenge $S \subset \{v_0, \dots, v_\ell\}$ spannt eine Seite auf.

Übung A2G. Die Menge $S = \{(\pm 1, \dots, \pm 1)\} \subset \mathbb{R}^n$ spannt den Würfel $[S] = [-1,1]^n$ auf. Zeigen Sie beide Inklusionen „$\subset$“ und „$\supset$“ sowie explizit $[S] = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le B \}$.

✻ **A2G.** Die Inklusion „$\subset$“ ist klar: Es gilt $S \subset [-1,1]^n$, und $[-1,1]^n$ ist konvex, also $[S] \subset [-1,1]^n$. Die Umkehrung „$\supset$“ ist interessanter und erfordert etwas Geschick: Jeder Punkt $x \in [-1,1]^n$ ist eine Konvexkombination $x = \sum_{s\in S} \lambda_s \cdot s$ mit $\lambda_s = 2^{-n}(1+s_1x_1)\cdots(1+s_nx_n)$. Nachrechnen: In der i–ten Koordinate finden wir $\sum_{s\in S} \lambda_s s_i = \sum_{s\in S, s_i=+1} \lambda_s - \sum_{s\in S, s_i=-1} \lambda_s = (1+x_i)/2 - (1-x_i)/2 = x_i$. Die Darstellung als Konvexkombination von S ist für $n \ge 2$ keineswegs eindeutig: Der Schwerpunkt 0 zum Beispiel lässt sich darstellen durch $0 = \frac{1}{2}\cdot(+s) + \frac{1}{2}\cdot(-s)$ für jedes diametrale Eckenpaar $\pm s \in S$. Eine Darstellung $[S] = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le B \}$ durch Ungleichungen ist nun leicht: $-x_1 \le 1, x_1 \le 1, \dots, -x_n \le 1, x_n \le 1$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung A2H. Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop und $a \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $b \in \mathbb{R}$. Aus $P \subset \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid ax \le b \,\}$ und $Q = \{\, x \in P \mid ax = b \,\}$ folgt $Q \le P$, das heißt, Q ist eine Seite von P gemäß A2C.

✻ **A2H.** Es gilt $Q \subset P$. Für $t \in]0,1[$ und $x, y \in P$ zeigen wir: Es gilt $(1-t)x+ty \in Q$ genau dann, wenn $x, y \in Q$. „⇐“ ist klar: Aus $ax = b$ und $ay = b$ folgt $a[(1-t)x+ty] = (1-t)ax+tay = (1-t)b+tb = b$. Wir zeigen „⇒“ durch Kontraposition: Angenommen $x \in P \smallsetminus Q$ und $y \in P$. Dann gilt $ax < b$ und $ay \le b$, also $a[(1-t)x+ty] = (1-t)ax+tay < (1-t)b+tb = b$ und somit $(1-t)x+ty \notin Q$.

Übung A2I. Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$.

(1) Ist der *Standardsimplex* $\Delta^n := \{\, (t_0, \dots, t_n) \in [0,1]^{n+1} \mid t_0 + \cdots + t_n = 1 \,\}$ ein Polytop? Zeichnen Sie Δ^n für $n = 0, 1, 2$. Bestimmen Sie alle Ecken und Seiten und Isometrien.

(2) Ist der *Orthosimplex* $\Delta_n := \{\, x \in [0,1]^n \mid 1 \ge x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0 \,\}$ ein Polytop? Zeichnen Sie Δ_n für $n = 1, 2, 3$. Bestimmen Sie alle Ecken und Seiten und Isometrien.

(3) Sind $\square^n := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty \le 1 \,\}$ und $\lozenge^n := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_1 \le 1 \,\}$ Polytope? (A1C) Zeichnen Sie beide für $n = 1, 2, 3$. Bestimmen Sie alle Ecken und Seiten und Isometrien.

(4) Ist $P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|, |y|, |z| \le 1,\ |x| + |y| + |z| \le 2 \,\}$ ein Polytop? Skizzieren Sie P und bestimmen Sie graphisch alle Ecken, Seiten $Q \le P$. Operiert $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$ transitiv auf den Ecken? Kanten? Facetten? Konstruieren Sie ein Polytop Q, dessen Isometriegruppe facettentransitiv und kantentransitiv ist, aber nicht eckentransitiv?

✻ **A2I.** (1) Ja, Δ^n ist ein Polytop (A2F): Im affinen Unterraum $A = \{\, t \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 + \cdots + t_n = 1 \,\}$ ist Δ^n die Schnittmenge der Halbräume $t_0 \ge 0$, …, $t_n \ge 0$. Seine Eckenmenge ist $\operatorname{vert} \Delta^n = \{\, e_0, \dots, e_n \,\}$: Jeder Vektor $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ist eine Ecke, denn für $t \in]0,1[$ und $x, y \in \Delta^n$ gilt $(1-t)x+ty = e_k$ nur für $x = y = e_k$. Hingegen ist $t \in \Delta^n \smallsetminus \{\, e_0, \dots, e_n \,\}$ keine Ecke, da *echte* Konvexkombination $t = t_0 e_0 + \cdots + t_n e_n$. Jede Teilmenge $S \subset \{\, e_0, \dots, e_n \,\}$ spannt eine Seite $[S] \le \Delta^n$ auf, und umgekehrt ist jede Seite von dieser Form. Die symmetrische Gruppe S_{n+1} operiert isometrisch auf $\mathbb{R}^{n+1}$ durch Permutation der Koordinaten, $\sigma : (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(0)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$, und lässt Δ^n invariant, wir haben also $S_{n+1} \hookrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, \Delta^n)$. Umgekehrt ist jede Isometrie von $(\mathbb{R}^{n+1}, \Delta^n)$ eine solche Permutation, also $S_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, \Delta^n)$.

(2) Ja, auch Δ_n ist ein Polytop (A2F). Wir nutzen (1) und den affinen Isomorphismus $h : A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : t \mapsto x$ mit $x_k = t_k + \cdots + t_n$ für $k = 1, \dots, n$ und $t_k = x_k - x_{k+1}$ für $k = 0, 1, \dots, n$, wobei $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 0$. Es gilt $h(\Delta^n) = \Delta_n$, insbesondere bildet h Seiten auf Seiten ab. Dank (1) erhalten wir die Eckenmenge $\operatorname{vert} \Delta_n = \{\, 0, e_1, e_1+e_2, \dots, e_1+e_2+\cdots+e_n \,\}$ und die Seiten $[S] \le \Delta_n$ für jede Teilmenge $S \subset \operatorname{vert} \Delta_n$. Neben id ist auch $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1-x_n, \dots, 1-x_1)$ eine Isometrie, als Komposition von n Spiegelungen und einer Permutation, und es gilt $\rho(\Delta_n) = \Delta_n$. Wir zeigen $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \Delta_n) = \{\, \mathrm{id}, \rho \,\}$: In Δ_n gibt es genau zwei Kantenpfade aus n Kanten der Länge 1, nämlich $w = (0, e_1, e_1+e_2, \dots, e_1+e_2+\cdots+e_n)$ und seine Umkehrung $\overline{w}$. Für $\sigma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \Delta_n)$ gilt $\sigma(w) = w$ und somit $\sigma = \mathrm{id}$ oder $\sigma(w) = \overline{w}$ und somit $\sigma = \rho$.

(3) Der *Würfel* $\square^n = [-1,1]^n$ (Hyperkubus) hat 2^n Ecken, $\operatorname{vert} \square^n = \{\, (\pm 1, \dots, \pm 1) \,\}$. Jede d–dimensionale Seite $Q \le \square^n$ entspricht der Fixierung $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{n-d}} \in \{\pm 1\}$ von $n-d$ Koordinaten $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-d} \le n$. Dual zum Würfel $\square^n$ ist das *Kreuzpolytop* $\lozenge^n$: Seine Ecken $\operatorname{vert} \lozenge^n = \{\, \pm e_1, \dots, \pm e_n \,\}$ sind die Facettenmittelpunkte von $\square^n$. Die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \square^n) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \lozenge^n)$ besteht aus den $2^n n!$ Spiegelungspermutationen $(\varepsilon, \sigma) : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varepsilon_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \varepsilon_n x_{\sigma^{-1}(n)})$ mit $\varepsilon \in \{\pm 1\}^n$ und $\sigma \in S_n$.

(4) Ja, auch P ist ein Polytop (A2F). Das *Kuboktaeder* $P = \square^3 \cap 2\lozenge^3$ ist die Schnittmenge des Würfels $\square^3 = [-1,1]^3$ mit dem Oktaeder $2\lozenge^3 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 2 \,\}$; dies ist in Abbildung A:12 skizziert. Die Eckenmenge $\operatorname{vert} P = \{\, (\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1) \,\}$ besteht aus 12 Ecken. Es gibt 24 Kanten und 14 Facetten, nämlich 6 Quadrate und 8 Dreiecke. Die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, P) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, \square^3)$ besteht aus den 48 Spiegelungspermutationen wie in (3) und operiert transitiv auf der Eckenmenge $\mathscr{P}_0$, ebenso auf der Kantenmenge $\mathscr{P}_1$, aber offensichtlich nicht auf der Facettenmenge $\mathscr{P}_2$. Das duale Polyeder Q hat als Ecken die 14 Facettenmittelpunkte von P. Die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, Q) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$ operiert transitiv auf der Facettenmenge $\mathscr{Q}_2$, ebenso auf der Kantenmenge $\mathscr{Q}_1$, aber nicht auf der Eckenmenge $\mathscr{Q}_0$.

☞ **§A2g. Reguläre 3–Polytope.** Wir können jedes gegebene Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ auf Symmetrien untersuchen. Hierzu betrachten wir Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(P) = P$. Aus Definition A2C folgt, dass f Ecken auf Ecken abbildet und ebenso d–Seiten auf d–Seiten. ☜

Jeder der fünf platonischen Körper erfreut sich größter Symmetrie: Jede Ecke lässt sich in jede andere drehen. Bei festgehaltener Ecke lässt sich jede angrenzende Kante in jede andere drehen. Bei festgehaltener Ecke und Kante lassen sich die beiden angrenzenden Facetten ineinander spiegeln. Solche Polytope nennen wir *regulär*.

Fordert man nur Transitivität auf den Facetten, so erfüllt auch jeder Doppelkegel wie in Abbildung A:9 diese schwächere Eigenschaft. Fordert man nur Transitivität auf den Ecken, so erfüllen auch Prismen (A:10) und Antiprismen (A:11) diese schwächere Eigenschaft. Auch das Kuboktaeder aus Abbildung A:12 ist eckentransitiv aber nicht facettentransitiv.

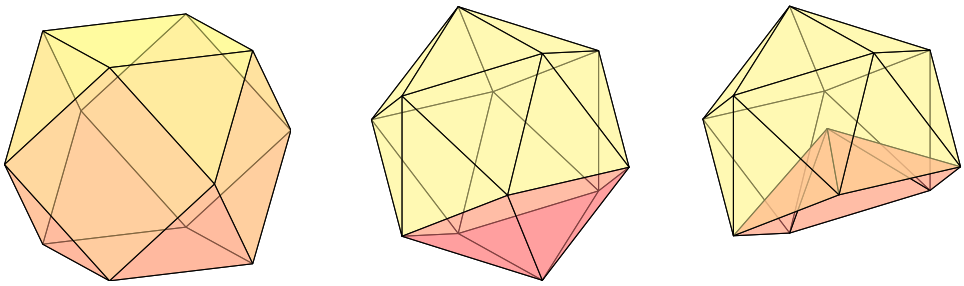


ABBILDUNG A:12. Kuboktaeder; konvexes und nicht-konvexes Ikosaeder

Die nicht-konvexe Variante N des Ikosaeders besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken, je zwei sind isometrisch, aber nur je fünf lassen sich durch eine Isometrie aus $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, N)$ ineinander überführen: Die Menge der 20 Facetten zerfällt in 4 Bahnen zu je 5 Elementen.

☞ **§A2h. Klassifikation regulärer 3–Polytope.** EUKLID erfasste in seinen Werken nahezu das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit. Seine Lebensdaten sind nur vage bekannt, er lebte wahrscheinlich im 3. Jahrhundert vor Christus in Alexandria. Sein Hauptwerk Στοιχεῖα [Stoicheia] 'Grundlagen, Prinzipien, Elemente' ist einer der ältesten überlieferten Texte griechischer Mathematik. Dieses Meisterwerk zeigt einen axiomatischen Aufbau der Geometrie, die man dem Autor zu Ehren bis heute *euklidische Geometrie* nennt. Bis ins 19. Jh. war es als Lehrbuch weit verbreitet und gilt nach der Bibel als das meistverbreitete Werk der Weltliteratur. Es gipfelt in folgendem wunderbaren Satz (in moderner Sprechweise): ☜

☞ **Satz A2J.** *(1) Jeder der fünf platonischen Körper $P \subset \mathbb{R}^3$ ist regulär. Das bedeutet, jede Fahne $(E < K < F < P)$ bestehend aus einer Ecke E in einer Kante K in einer Facette F kann durch eine Isometrie des Raumes $\mathbb{R}^3$ in jede andere Fahne von P überführt werden.* ☜

(2) Umgekehrt: Jedes reguläre 3–Polytop $Q \subset \mathbb{R}^3$ ist zu einem der fünf platonischen Körper ähnlich. Das bedeutet, es existiert eine Ähnlichkeitsabbildung $h : (\mathbb{R}^3, Q) \to (\mathbb{R}^3, P)$ zu einem der obigen fünf Modelle $P \subset \mathbb{R}^3$, das heißt $h(x) = sAx + v$ mit einem Streckfaktor $s \in \mathbb{R}_{>0}$, einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A^\intercal A = 1$, und einer Verschiebung $v \in \mathbb{R}^3$.

Beide Aussagen dieser Klassifikation sind bemerkenswert und keineswegs trivial.

Literatur: Euklids Elemente, `www.opera-platonis.de/euklid` (deutsche Übersetzung). Der moderne Klassiker ist H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover, 1973.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ BEWEIS-SKIZZE. (1) Wir können wie oben skizziert die Koordinaten explizit ausrechnen ☜ und die Drehmatrizen hinschreiben; es genügt jeweils, einige wenige Erzeuger für die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$ anzugeben. Wenn Sie möchten, versuchen Sie es als Übung!

(2) Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres 3–Polytop. Transitivität auf Facetten garantiert, dass je zwei isometrisch sind. Zur Facette $F \leq P$ nutzen wir Transitivität auf Ecken und Kanten, sie ist demnach ein reguläres Vieleck. Diese haben wir bereits klassifiziert (A2A). An jeder Ecke $v \in \mathrm{vert}(F)$ liegt der Winkel $\angle(F,v) = 180° - 360°/q$ (A5C). Jede Ecke $v \in \mathrm{vert}(P)$ liegt in genau $p \geq 3$ Facetten. Die Summe der anliegenden Winkel ist kleiner als 360°. (Warum? Später etwa A5F.) Also gilt $(p/2 - p/q)360° < 360°$. Umgeformt bedeutet das

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}. \tag{A.1}$$

Als Lösungen $(p,q) \in \mathbb{N}_{\geq 3} \times \mathbb{N}_{\geq 3}$ bleiben $(3,3)$, $(4,3)$, $(5,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$. Diese werden von Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder und Dodekaeder realisiert, zudem ist dies jeweils die einzige Möglichkeit: Bis auf Isometrie gibt es nur eine Möglichkeit, p reguläre q–Ecke in einer Ecke regulär zusammenzufügen. So fortfahrend gibt es nur eine Möglichkeit, reguläre q–Ecke zum Rand eines regulären Polytops zusammenzufügen. □

Bemerkung. Transitivität auf Fahnen wird zweimal genutzt: Zuerst um zu zeigen, dass alle Facetten untereinander isometrisch und reguläre q–Ecke sind. Dies allein genügt noch nicht, wie Abbildung A:9 zeigt. Wir nutzen weiterhin, dass in jeder Ecke p reguläre q–Ecke regulär zusammentreffen. Damit schließen wir Beispiele wie in Abbildung A:12 aus.

Bemerkung. Abbildung A:12 zeigt den Rand eines Ikosaeders sowie eine nicht-konvexe Anordnung dieser 20 Dreiecke (ähnlich wie Isomere in der Chemie). Diese wird durch unsere Regularitätsforderung ausgeschlossen. Ohne Regularität besagt CAUCHYs Rigiditätssatz, dass es für die Facetten eines Polytops bis auf Isometrie im $\mathbb{R}^3$ nur eine *konvexe* Anordnung gibt, siehe M. Aigner, G.M. Ziegler: *Proofs from the book* (Springer, 2013). Lässt man nicht-konvexe Konfigurationen zu, so kann es mehrere verschiedene geben, erstaunlicherweise sogar *flexible Polyeder* (`en.wikipedia.org/wiki/Flexible_polyhedron`).

☞ **§A2i. Schwächere Regularität.** Ein 3–Polytop P mit beschrifteten Facetten $1,\dots,n$ ☜ kann bei Glücksspielen als Zufallsgenerator dienen. Facettentransitivität der Isometriegruppe garantiert, dass P auf jeder Facette mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu liegen kommt. Doppelkegel zeigen, dass Facettentransitivität echt schwächer ist als Regularität.

Prismen und Antiprismen zeigen, dass ebenso Eckentransitivität echt schwächer ist als Regularität. Verlangt man statt Regularität nur Eckentransitivität und reguläre Facetten, so erhält man zu den platonischen Körpern, Prismen und Antiprismen noch 13 *archimedische Körper* (`en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid`). Das Kuboktaeder aus Abbildung A:12 ist ein einfaches Beispiel, das abgestumpfte Ikosaeder ist als Fußball populär. Dual hierzu sind die 13 facettentransitiven *catalanschen Körper* (`../Catalan_solid`).

Verlangt man schließlich nur, dass alle Facetten reguläre Vielecke sind, so erhält man noch 92 weitere *Johnson–Körper* (`../Johnson_solid`). Ihre Komplexität ist verblüffend, und dennoch gibt es bis auf Ähnlichkeit nur endlich viele! Einfachstes Beispiel ist die Pyramide mit quadratischem Grundriss und vier gleichseitigen Dreiecken als Seiten.

§A3. Von Geometrie zu Topologie: Eulers Polyederformel

§A3a. Eulers Polyederformel. Zu den obigen Polytopen $P \subset \mathbb{R}^3$ betrachten wir die *Euler–Charakteristik* $\chi(\partial P) = \sharp\text{Ecken} - \sharp\text{Kanten} + \sharp\text{Facetten}$ und bestaunen das Ergebnis:

	$f_0 = \sharp$Ecken	$f_1 = \sharp$Kanten	$f_2 = \sharp$Facetten	$\chi = f_0 - f_1 + f_2$
Hexaeder	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Tetraeder	4	6	4	2
Ikosaeder	12	30	20	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Doppelkegel	$q+2$	$3q$	$2q$	2
Prisma	$2q$	$3q$	$q+2$	2
Antiprisma	$2q$	$4q$	$2q+2$	2

Diese fundamentale *Polyederformel* geht auf Leonhard EULER (1707–1783) im Jahre 1750 zurück. Die Verallgemeinerung für n–dimensionale Polytope und ihre tiefere topologische Bedeutung fand Henri POINCARÉ (1854–1912) erst viel später im Jahre 1895:

Satz A3A (Euler 1750, Poincaré 1895)**.** *Für jedes n–dimensionale Polytop $P \neq \emptyset$ gilt:*

$$\sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(P) = 1 \qquad \textit{also umgeschrieben} \qquad \sum_{\emptyset \neq Q \leq P} (-1)^{\dim Q} = 1$$

Hier ist $f_d(P) = \sharp\{\, Q \leq P \mid \dim Q = d \,\}$ die Anzahl der Seiten der Dimension $d = 0, \ldots, n$. Das Polytop P wird mitgezählt; es ist die einzige n–dimensionale Seite, also gilt $f_n(P) = 1$.

Beispiele. In Dimension $n = 0$ ist jedes Polytop $P = \{a\}$ ein Punkt. In Dimension $n = 1$ ist $P = [a,b]$ ein Intervall, und die Formel gilt: $2 - 1 = 1$. In Dimension $n = 2$ besteht P aus q Ecken und q Kanten sowie der 2–dimensionalen Seite P, also gilt die Formel auch hier: $q - q + 1 = 1$. Der erste nicht-triviale Fall ist Dimension $n = 3$, wie obige Tabelle illustriert.

§A3b. Ironie der Geschichte? Es ist höchst verwunderlich, dass eine so einfache und grundlegende Gleichung erst so spät entdeckt wurde. Ein *Beweis* ist selbst in Dimension 3 nicht leicht zu finden, aber die *Vermutung* drängt sich anhand zahlreicher empirischer Beispiele geradezu auf. David Richeson schreibt hierzu in seinem Buch *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology* (Princeton University Press, 2008):

They all missed it. The ancient Greeks – mathematical luminaries such as Pythagoras, Theaetetus, Plato, Euclid, and Archimedes, who where infatuated with polyhedra – missed it. Johannes Kepler, the great astronomer, so in awe of the beauty of polyhedra that he based an early model of the solar system on them, missed it. In his investigation of polyhedra the mathematician and philosopher René Descartes was but a few logical steps away from discovering it, yet he too missed it. These mathematicians, and so many others, missed a relationship that is so simple that it can be explained to any schoolchild, yet is so fundamental that it is part of the fabric of modern mathematics. The great Swiss mathematician Leonhard Euler did not miss it. On November 14, 1750, in a letter to his friend, the number theorist Christian Goldbach, Euler wrote, "It astonishes me that these general properties of stereometry have not, as far as I know, been noticed by anyone else."

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A3c. Polytopale Komplexe.** *Polytope* sind facettenreich doch topologisch gesehen besonders einfach. Mit diesen Bausteinen konstruieren wir nun allgemein *Polyeder*. ☜

Beispiel. Für jedes Polytop P mit $\dim P \geq 1$ ist der Rand ∂P selbst kein Polytop, denn er ist nicht konvex. Jedoch ist der Rand ∂P Vereinigung von endlich vielen Polytopen: Dank Satz A2E leistet dies zum Beispiel die Familie $\mathscr{K} = \{ Q < P \}$ aller echten Seiten.

✍ **Definition A3B.** Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $\mathscr{K} = \{P_1, \dots, P_m\}$ eine (endliche) Familie von Polytopen $P_1, \dots, P_m \subset V$. Wir nennen $\mathscr{K}$ einen *polytopalen Komplex*, wenn gilt: ✍

(0) Das leere Polytop gehört zu $\mathscr{K}$, kurz $\emptyset \in \mathscr{K}$.
Das ist zwar langweilig, aber als Konvention oft nützlich.

(1) Für je zwei verschiedene Polytope $P \neq Q$ in $\mathscr{K}$ gilt $\operatorname{Int} P \cap \operatorname{Int} Q = \emptyset$.
Verschiedene Polytope in $\mathscr{K}$ schneiden sich demnach höchstens in ihrem Rand.

(2) Für jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ gilt $\partial P = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ mit $Q_1, \dots, Q_k \in \mathscr{K}$.
Der Rand jedes Polytops in $\mathscr{K}$ ist endliche Vereinigung von Polytopen aus $\mathscr{K}$.

Die *Dimension* und die *Skelette* des polytopalen Komplexes $\mathscr{K}$ definieren wir durch

$$\dim \mathscr{K} := n = \sup\{ \dim P \mid P \in \mathscr{K} \}, \qquad \mathscr{K}_{\leq d} := \{ P \in \mathscr{K} \mid \dim P \leq d \},$$
$$\mathscr{K}_{<d} := \{ P \in \mathscr{K} \mid \dim P < d \}, \qquad \mathscr{K}_d := \{ P \in \mathscr{K} \mid \dim P = d \}.$$

In Dimension $d = 0, 1, 2, \dots, n$ zählt $f_d(\mathscr{K}) := \sharp \mathscr{K}_d$ die d–dimensionalen Polytope.

Die *Euler–Charakteristik* des Komplexes $\mathscr{K}$ ist die Wechselsumme

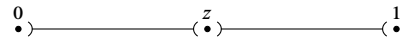
$$\chi(\mathscr{K}) := \sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(\mathscr{K}) = \sum_{\emptyset \neq P \in \mathscr{K}} (-1)^{\dim P}.$$

Das durch den Komplex $\mathscr{K}$ definierte *Polyeder* ist die Vereinigung all seiner Polytope:

$$|\mathscr{K}| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup_{P \in \mathscr{K}} P = \bigsqcup_{P \in \mathscr{K}} \operatorname{Int} P \ \subset V$$

✍ **Beispiel.** Das Intervall $K = [0,1]$ können wir auf unendliche viele Arten zerlegen: ✍

$$\mathscr{K} = \{ [0,1], \{0\}, \{1\}, \emptyset \}$$
$$\chi(\mathscr{K}) = 2 - 1 = 1$$



$$\mathscr{K}' = \{ [0,z], [z,1], \{0\}, \{z\}, \{1\}, \emptyset \}$$
$$\chi(\mathscr{K}') = 3 - 2 = 1$$

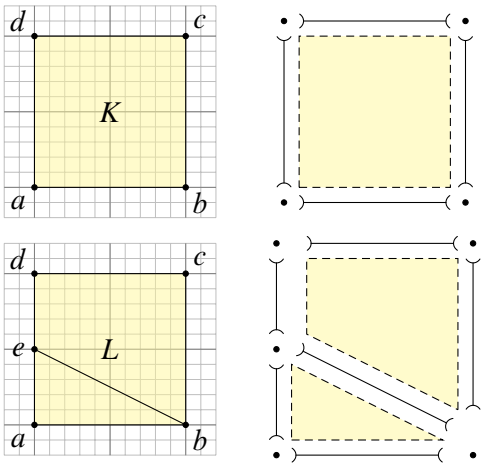
Insbesondere hängen die Zahlen $f_0, f_1, f_2, \dots$ von der gewählten Unterteilung $\mathscr{K}$ ab. Wie wir in Satz A3G sehen werden, hängt die Wechselsumme $\chi(\mathscr{K})$ nur vom Polyeder K ab.

$$\{ \mathscr{K} \mid \text{Komplex in } V \} \xrightarrow[\mathscr{K} \mapsto K]{|-|} \{ K \mid \text{Polyeder in } V \}$$

Der *Komplex* $\mathscr{K}$ in V beschreibt den Aufbau der *Menge* $K = |\mathscr{K}| \subset V$. Die Abbildung $|-|$ ist surjektiv aber nicht injektiv: K vergisst die polytopale Unterteilung $\mathscr{K}$.

☞ **Beispiel.** Für jedes Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ bildet die Familie $\mathscr{K} = \langle P \rangle := \{ Q \leq P \}$ aller Seiten einen polytopalen Komplex mit $|\mathscr{K}| = P$ (A2E). Demnach gilt $f_d(\mathscr{K}) = f_d(P)$ für alle $d = 0, \dots, n$ und somit $\chi(\mathscr{K}) = \chi(P)$. Auch die Familie $\partial\mathscr{K} = \{ Q < P \}$ aller echten Seiten ist ein polytopaler Komplex; das zugehörige Polyeder ist hier der Rand $|\partial\mathscr{K}| = \partial P$. ☜

§A3d. Beispiele für polytopale Komplexe. Abbildung A:13 illustriert zweidimensional, dass ein und dasselbe Polyeder durch verschiedene Komplexe dargestellt werden kann.

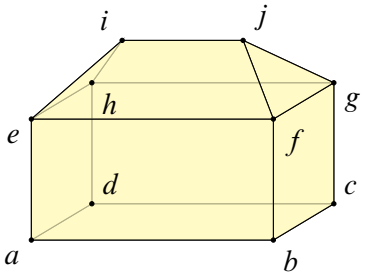


$\mathscr{K} = \langle\, [a,b,c,d] \,\rangle$
$= \{\, \emptyset,\ [a],[b],[c],[d],$
$[a,b],[b,c],[c,d],[d,a],$
$[a,b,c,d] \,\}$
$\chi(\mathscr{K}) = 4-4+1 = 1$

$\mathscr{L} = \langle\, [a,b,e],[b,c,d,e] \,\rangle$
$= \{\, \emptyset,\ [a],[b],[c],[d],[e],$
$[a,b],[b,c],[c,d],[d,e],[e,a],$
$[e,b],[a,b,e],[b,c,d,e] \,\}$
$\chi(\mathscr{L}) = 5-6+2 = 1$

ABBILDUNG A:13. Polytopale Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ in Explosionszeichnung

Bedingungen (1) und (2) sichern den korrekten Aufbau polytopaler Komplexe. Abbildung A:14 realisiert die Hausoberfläche $K = |\mathscr{K}|$ durch den Komplex $\mathscr{K}$. Mit Antenne erhalten wir das Polyeder $L = K \cup [j,k]$ und den Komplex $\mathscr{L} = \mathscr{K} \cup \{[k],[j,k]\}$. Doch wie realisiert man $K \cup [p,q]$ mit $p \in \mathrm{Int}[e,f,j,i]$? Die Familie $\mathscr{K} \cup \{[p,q]\}$ erfüllt (1) aber nicht (2). Gleiches gilt für die Familie $\mathscr{K} \cup \{[p,q],[q]\}$. Die Familie $\mathscr{K} \cup \{[p],[q],[p,q]\}$ erfüllt (2) aber nicht (1). Man muss daher die Dachfläche unterteilen, zum Beispiel wie skizziert: $(\mathscr{K} \smallsetminus \{[e,f,j,i]\}) \cup \{[p],[q],[p,q],[e,p],[f,p],[i,p],[j,p],[p,e,f],[p,f,j],[p,j,i],[p,e,i]\}$.



$\mathscr{K} = \{\, \emptyset,\ [a],[b],[c],[d],[e],[f],[g],[h],[i],[j],$
$[a,b],[b,c],[c,d],[d,a],[a,e],[b,f],[c,g],[d,h],$
$[e,f],[f,g],[g,h],[h,e],[e,i],[f,j],[g,j],[h,i],[i,j],$
$[a,b,c,d],[c,d,h,g],[a,d,h,e],[b,c,g,f],$
$[a,b,f,e],[g,h,i,j],[e,h,i],[f,g,j],[e,f,j,i] \,\}$
$\chi(\mathscr{K}) = 10-17+9 = 2$

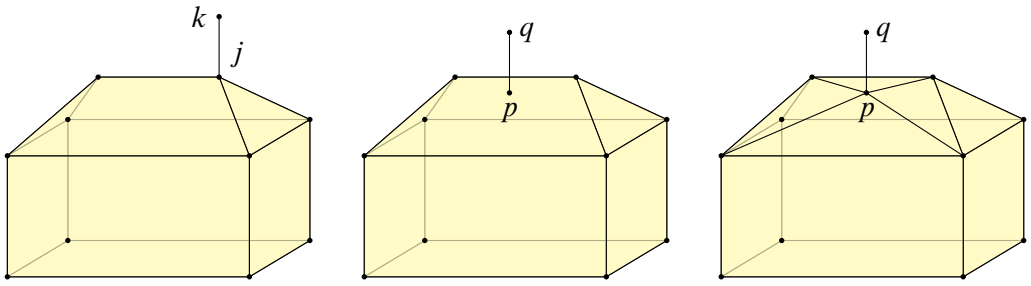


ABBILDUNG A:14. Aus Polytopen bauen wir Komplexe

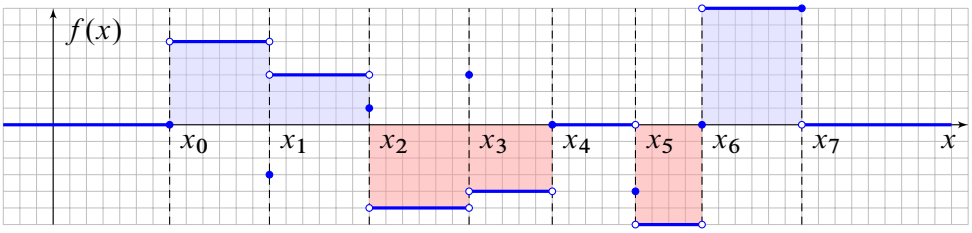
© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§A3e. Die Euler–Poincaré–Formel. Die Seitenzahlen jedes Polytops erfüllen eine berühmte Relation (A3A), die in Dimension 3 auf Euler zurückgeht. Wir formulieren sie allgemeiner als Euler–Poincaré–Formel für konvexe Polyeder und in beliebiger Dimension:

Satz A3C (Poincaré 1895). *Ist das Polyeder* $|\mathscr{K}| \neq \emptyset$ *konvex, so gilt* $\chi(\mathscr{K}) = 1$.

Dies verallgemeinert Satz A3A von Polytopen zu Polyedern, denn in Satz A3C sind nun beliebige polytopale Unterteilungen erlaubt. Der folgende Beweis stammt von Hugo HADWIGER (1908–1981), *Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie*, J. Reine Angew. Math. 194 (1955), 101–110. Die Argumente sind vollkommen elementar doch phantastisch raffiniert. Bereits der Satz ist wunderschön, der Beweis ist sogar noch schöner!

Aus der Analysis kennen Sie eine ebenso elementare wie raffinierte, rekursive Konstruktion: das Integral reeller Treppenfunktionen. Ich beginne mit dieser schönen Analogie.



§A3f. Analogie zum Integral von Treppenfunktionen. Der leeren Menge $\emptyset \subset \mathbb{R}$ weisen wir das Maß $\lambda(\emptyset) = 0$ zu, jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ ein Maß $\lambda(\{a\}) \in \mathbb{R}$ und jedem Paar $a < b$ in $\mathbb{R}$ ein Maß $\lambda(]a,b[) \in \mathbb{R}$, sodass Additivität gilt:

$$\lambda(]a,b[) + \lambda(\{b\}) + \lambda(]b,c[) = \lambda(]a,c[) \quad \text{für alle } a < b < c \text{ in } \mathbb{R} \tag{A.2}$$

Eine *Treppenfunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stückweise konstant: Es existiert eine Unterteilung $P = \{ x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell \} \subset \mathbb{R}$ und Konstanten $y_1, \dots, y_\ell$ in $\mathbb{R}$, sodass $f(x) = y_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$ gilt, sowie $f(x) = 0$ für $x < x_0$ und für $x > x_k$. Wir haben also:

$$f = \sum\nolimits_{k=1}^{\ell} y_k \, \mathbf{I}_{]x_{k-1},x_k[} + \sum\nolimits_{k=0}^{\ell} f(x_k) \, \mathbf{I}_{\{x_k\}}, \quad P = \{ x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell \} \tag{A.3}$$

Mit Hilfe der Unterteilung P definieren wir das *Integral* der Treppenfunktion f:

$$\lambda_1(f) := \lambda_1(f,P) := \sum\nolimits_{k=1}^{\ell} y_k \, \lambda(]x_{k-1},x_k[) + \sum\nolimits_{k=0}^{\ell} f(x_k) \, \lambda(\{x_k\}) \tag{A.4}$$

Wie hängt dieser Wert von P ab? Gar nicht! Zu f gibt es unendlich viele Unterteilungen: Wir können P durch Hinzunahme eines weiteren Teilungspunktes zu $P' = P \cup \{t\}$ verfeinern. Dank (A.2) gilt $\lambda_1(f,P) = \lambda_1(f,P')$. Zu zwei Unterteilungen P' und P'' ist $P = P' \cup P''$ eine gemeinsame Verfeinerung, also gilt $\lambda_1(f,P') = \lambda_1(f,P) = \lambda_1(f,P'')$.

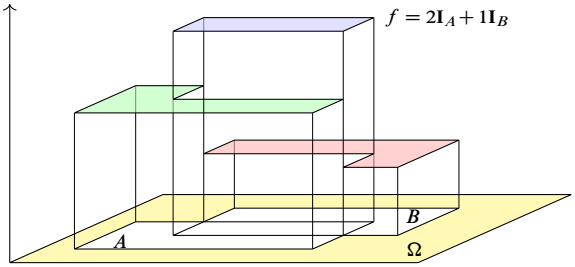
Satz A3D. *Sei* λ *ein additives Maß reeller Intervalle wie in* (A.2). *Die Treppenfunktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *wie in* (A.3) *bilden einen* $\mathbb{R}$*–Vektorraum* $\Lambda_1 = T(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Hierauf definiert* (A.4) *die* $\mathbb{R}$*–lineare Abbildung* $\lambda_1 : \Lambda_1 \to \mathbb{R}$ *mit* $\lambda_1(\mathbf{I}_{\{a\}}) = \lambda(\{a\})$ *und* $\lambda_1(\mathbf{I}_{]a,b[}) = \lambda(]a,b[)$.

BEWEIS. Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen zur Unterteilung P bzw. Q, so auch zur gemeinsamen Unterteilung $P \cup Q$. Letzteres gilt dann auch für $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Eigenschaft (A.4) legt λ_1 eindeutig fest. Sie beweist zudem die Existenz von λ_1: Dank (A.2) ist $\lambda_1(f)$ wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Wahl der Unterteilung. □

§A3g. Iterierte Integrale. In Dimension $n = 1,2,3,\dots$ definieren wir rekursiv das System $\Lambda_n \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ der λ*–integrierbaren Funktionen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und hierauf das *Integral* $\lambda_n : \Lambda_n \to \mathbb{R}$ nach dem Vorbild iterierter Integrale à la Fubini:

$$\lambda_1(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1)\,\mathrm{d}x_1, \qquad \lambda_n(f) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_n.$$



Die Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen aus Sicht der Mathematik

Konstruktion des mehrdimensionalen Integrals. Für das Riemann–Integral gilt $\lambda(\{a\}) = 0$ und $\lambda(]a,b[) = b-a$ für $a < b$ in $\mathbb{R}$. Intervalle $A_1,\dots,A_n \subset \mathbb{R}$ bilden den *Quader* $Q = A_1\times\cdots\times A_n \subset \mathbb{R}^n$. Sein Volumen ist $\lambda_n(Q) = \lambda(A_1)\cdots\lambda(A_n)$. Jede Linearkombination $f = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \mathbf{I}_{Q_k}$ mit Quadern $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ und Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ wie in obiger Abbildung nennen wir eine *Treppenfunktion*. Die Menge $T(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ aller Treppenfunktionen ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Das *Integral* $\lambda_n : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ soll $\mathbb{R}$–linear sein und $\lambda_n(\mathbf{I}_Q) = \lambda_n(Q)$ erfüllen. Wir möchten also das Integral jeder Treppenfunktion $f = \sum_k a_k \mathbf{I}_{Q_k}$ definieren durch $\lambda_n(f) = \sum_k a_k \lambda_n(Q_k)$. Hier ergibt sich allerdings ein logisches Problem: Ist das wohldefiniert? Die für f gewählte Linearkombination ist keineswegs eindeutig, selbst Zerlegungen in disjunkte Quader gibt es viele. Es ist zunächst nicht offensichtlich, warum die gewünschte Formel von diesen Wahlen unabhängig ist.

Das Problem haben wir in Dimension 1 bereits gesehen und gelöst: Die Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_{\{a\}}$ und $\mathbf{I}_{]a,b[}$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$ erzeugen den Vektorraum $T(\mathbb{R},\mathbb{R})$; wir müssen daher nur ihre Integrale $\lambda_1(\mathbf{I}_{\{a\}}) = \lambda(\{a\})$ und $\lambda_1(\mathbf{I}_{]a,b[}) = \lambda(]a,b[)$ vorgeben. Sie sind aber keine Basis: Für $a < b < c$ gilt $\mathbf{I}_{]a,b[} + \mathbf{I}_{\{b\}} + \mathbf{I}_{]b,c[} = \mathbf{I}_{]a,c[}$, demnach sind diese vier Funktionen linear abhängig. Dank Satz A3D ist $\lambda_1(f)$ wohldefiniert. Satz A3E setzt $\lambda_1 : T(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ fort zum Integral $\lambda_n : T(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. In der Integrationstheorie ist dies der erste wichtige Schritt. Durch Einschachtelung à la Riemann und Ausschöpfung à la Lebesgue setzt man das Integral auf weitere Funktionen fort, wie in §B3f erklärt.

Satz A3E. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennen wir* λ–integrierbar, *kurz $f \in \Lambda_n$, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}$ die partielle Funktion $f_t : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x,t)$ integrierbar ist und ebenso die Integralfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \lambda_{n-1}(f_t)$. Wir setzen dann $\lambda_n(f) := \lambda_1(F)$.*

Die Menge $\Lambda_n \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum und $\lambda_n : \Lambda_n \to \mathbb{R}$ ist linear.

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt λ–messbar, *wenn ihre Indikatorfunktion integrierbar ist, also $\mathbf{I}_X \in \Lambda_n$ erfüllt. In diesem Falle definieren wir ihr* Maß *durch $\lambda_n(X) := \lambda_n(\mathbf{I}_X)$.*

Die leere Menge $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar, und es gilt $\lambda_n(\emptyset) = 0$.

Sind drei der vier Mengen X, Y, $X\cap Y$, $X\cup Y \subset \mathbb{R}^n$ messbar, so auch die vierte: Aus $\mathbf{I}_X + \mathbf{I}_Y = \mathbf{I}_{X\cup Y} + \mathbf{I}_{X\cap Y}$ folgt $\lambda_n(X\cup Y) = \lambda_n(X) + \lambda_n(Y) - \lambda_n(X\cap Y)$.

Jeder Quader $Q = A_1\times\cdots\times A_n$ in $\mathbb{R}^n$ ist messbar, und es gilt $\lambda_n(Q) = \lambda(A_1)\cdots\lambda(A_n)$. Jede Treppenfunktion $f = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \mathbf{I}_{Q_k}$ ist integrierbar und $\lambda_n(f) = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \lambda_n(Q_k)$.

BEWEIS. Dies folgt per Induktion über die Dimension n. Die Argumente sind allesamt leicht und ein Musterbeispiel für mathematische Sorgfalt. Ich empfehle sie als Übung! □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§A3h. Das Euler–Maß. Wir variieren nun die Konstruktion des Integrals wie folgt:

Der leeren Menge weisen wir das Maß $\mu(\emptyset) = 0$ zu, jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ das Maß $\mu(\{a\}) = 1$ und jedem Paar $a < b$ in $\mathbb{R}$ das Maß $\mu(]a,b[) = -1$. Dies erfüllt die obige Bedingung (A.2): Für alle $a < b < c$ in $\mathbb{R}$ gilt $\mu(]a,b[) + \mu(\{b\}) + \mu(]b,c[) = \mu(]a,c[)$.

Satz A3E erklärt hierzu die Euler–integrierbaren Funktionen und ihr Integral, sowie das System $\mathscr{M}_n \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ der *Euler–messbaren* Mengen und das *Euler–Maß* $\mu_n : \mathscr{M}_n \to \mathbb{R}$.

Die Analogie zum Riemann–Integral von Treppenfunktionen ist lehrreich aber nicht notwendig. Das Euler–Maß $\mu_n : \mathscr{M}_n \to \mathbb{Z}$ können wir wie folgt auch direkt konstruieren:

Definition A3F. Wir erklären rekursiv in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ das System $\mathscr{M}_n \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ der *Euler–messbaren* Mengen und hierauf das *Euler–Maß* $\mu_n : \mathscr{M}_n \to \mathbb{Z}$ wie folgt:

In Dimension $n = 0$ setzen wir $\mathscr{M}_0 = \{\emptyset, \{0\}\}$ und hierauf $\mu_0(\emptyset) = 0$ und $\mu_0(\{0\}) = 1$.

Sei $n \geq 1$ und die Abbildung $\mu_{n-1} : \mathscr{M}_{n-1} \to \mathbb{Z}$ bereits konstruiert. Für $X \subset \mathbb{R}^n$ sei $X_t := \{\, (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in X \,\}$ die Schnittmenge auf Höhe $t \in \mathbb{R}$.

Genau dann gilt $X \in \mathscr{M}_n$, wenn $X_t \in \mathscr{M}_{n-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, und $F : t \mapsto \mu_{n-1}(X_t)$ stückweise konstant ist, d.h. es gibt $P = \{ -\infty = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{2\ell} = +\infty \}$ sodass die Funktion F konstant ist auf jedem der Intervalle $]t_{2k-2}, t_{2k}[$ für $k = 1, \dots, \ell$.

Mit Hilfe der Unterteilung P definieren wir das *Euler–Maß* von X:

$$\mu_n(X) := \mu_n(X, P) := \sum_{k=1}^{2\ell-1} (-1)^k \, \mu_{n-1}(X_{t_k}). \tag{A.5}$$

Dies ist wohldefiniert, d.h. das Ergebnis $\mu_n(X)$ hängt nur von X ab und nicht von der Wahl der Unterteilung P: Jede Verfeinerung liefert dank Wechselsumme dasselbe Ergebnis, und je zwei Unterteilungen haben mit ihrer Vereinigung eine gemeinsame Verfeinerung.

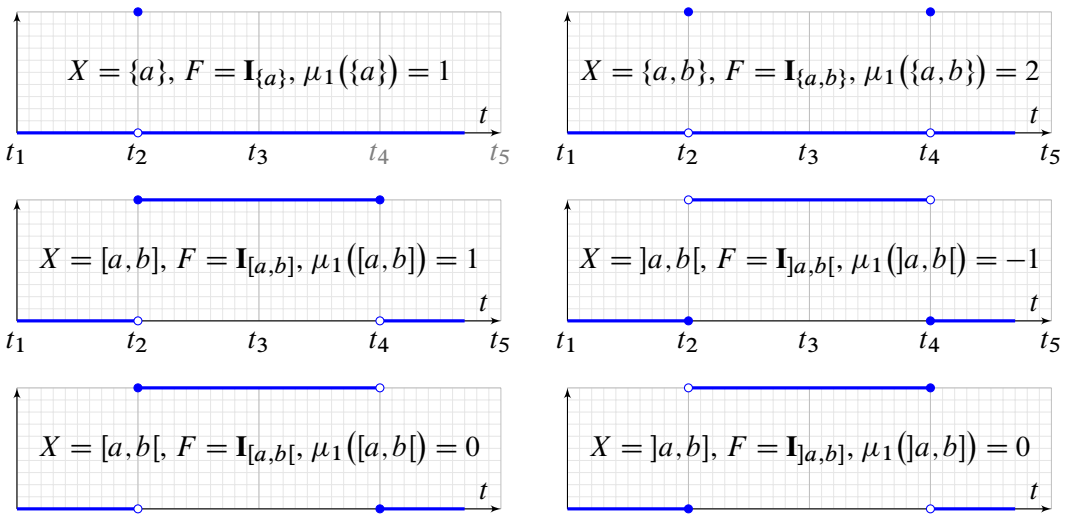


ABBILDUNG A:15. Eindimensionale Beispiele zum Euler–Maß

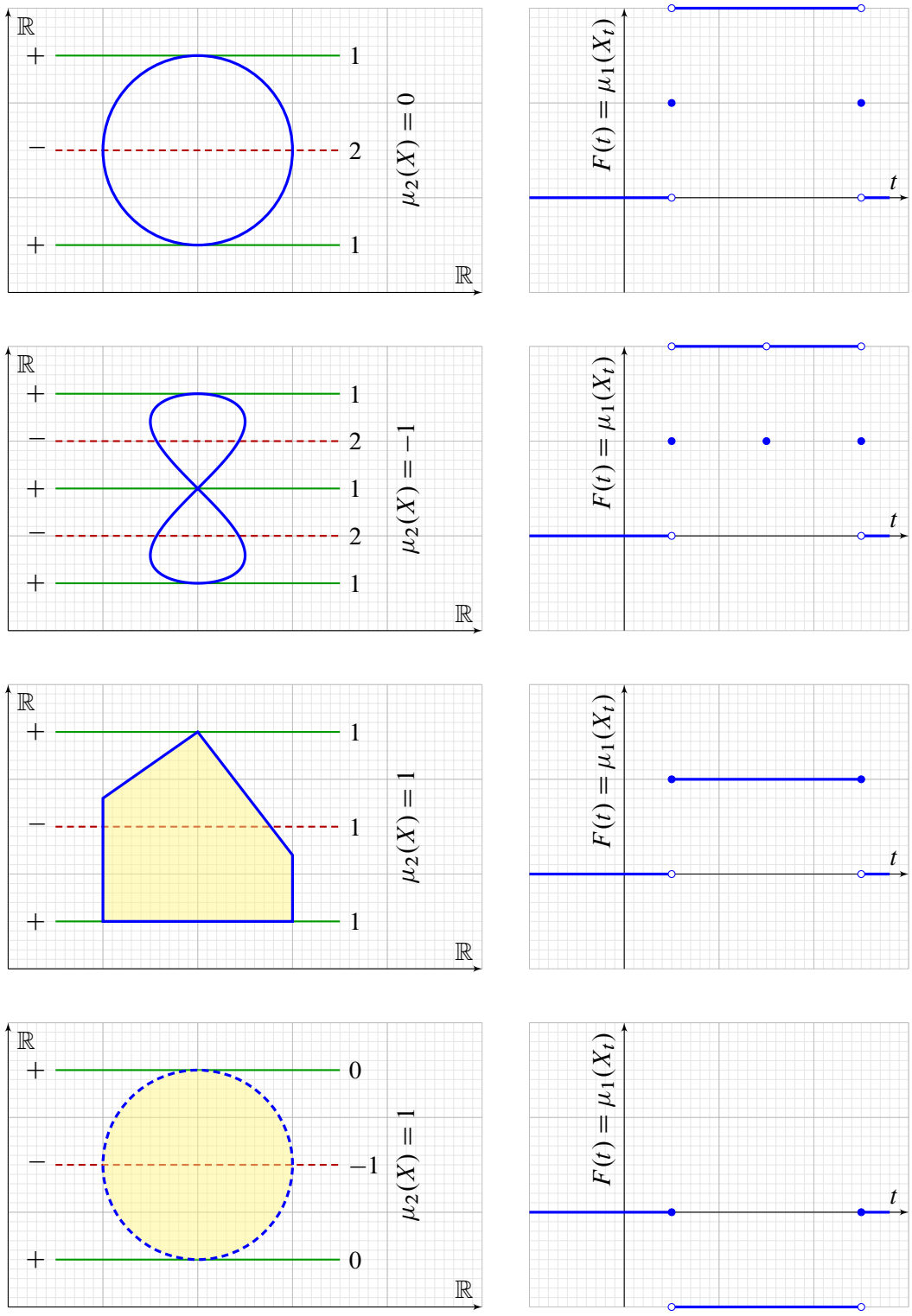


ABBILDUNG A:16. Zweidimensionale Beispiele zum Euler–Maß

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Satz A3G. *(0) Das Euler–Maß $\mu_n : \mathscr{M}_n \to \mathbb{Z}$ ist additiv:*

(a) Die leere Menge $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar, also $\emptyset \in \mathscr{M}_n$, und es gilt $\mu_n(\emptyset) = 0$.

(b) Sind $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ messbar und disjunkt, so ist auch $Z = X \sqcup Y$ messbar:

$$\mathbf{I}_Z = \mathbf{I}_X + \mathbf{I}_Y \quad \Longrightarrow \quad \mu_n(Z) = \mu_n(X) + \mu_n(Y)$$

(c) Sind drei der vier Mengen X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$ messbar, so auch die vierte:

$$\mathbf{I}_X + \mathbf{I}_Y = \mathbf{I}_{X\cup Y} + \mathbf{I}_{X\cap Y} \quad \Longrightarrow \quad \mu_n(X \cup Y) + \mu_n(X \cap Y) = \mu_n(X) + \mu_n(Y)$$

(1) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$, konvex und kompakt, so ist K messbar und $\mu_n(K) = 1$.
Kompakt heißt beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, ebenso in $A = \operatorname{aff}(K)$.

(2) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$, konvex und offen, so ist U messbar und $\mu_n(U) = (-1)^{\dim U}$.
Hierbei sei U offen im affinen Unterraum $A = \operatorname{aff}(U) \cong \mathbb{R}^d$ und $\dim U = d$.

Anwendung: Für jeden (endlichen) polytopalen Komplex $\mathscr{K}$ in $\mathbb{R}^n$ folgt:

$$K := |\mathscr{K}| = \bigsqcup_{\emptyset \neq P \in \mathscr{K}} \operatorname{Int} P \ \in \mathscr{M}_n \quad \overset{(0,2)}{\Longrightarrow} \quad \mu_n(K) = \sum_{\emptyset \neq P \in \mathscr{K}} (-1)^{\dim P} = \chi(\mathscr{K})$$

Das heißt: Auf Polyedern im $\mathbb{R}^n$ ergibt das Euler–Maß μ_n die Euler–Charakteristik χ:

$$\begin{array}{ccc} \{\, \mathscr{K} \mid \textit{Komplex in } \mathbb{R}^n \,\} & \xrightarrow[\mathscr{K} \mapsto K = |\mathscr{K}|]{|-|} & \{\, K \mid \textit{Polyeder in } \mathbb{R}^n \,\} \\ & \searrow^{\chi} \quad \swarrow_{\mu_n} & \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Ist K zudem konvex, so beweist (1) die Euler–Poincaré–Formel $\chi(\mathscr{K}) = \mu_n(K) = 1$.

Diese bemerkenswerte Beziehung hat über den Beweis der Euler–Poincaré–Formel hinaus noch weitere nützliche Konsequenzen, die wir anschließend ausführen wollen.

BEWEIS. Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Aussage (0) ist klar, etwa dank Linearität des Integrals μ_n (A3E), oder leicht mit der rekursiven Definition des Euler–Maßes (A3F). Die Aussagen (1) und (2) beweisen wir wie in Abbildung A:16. Versuchen Sie es! □

✻ **A3G.** Der Beweis des Satzes steckt hier bereits in seiner Formulierung: Es genügt sorgfältiges Nachrechnen!

(1) In Dimension $n = 0$ gilt $K = \{0\}$, also $K \in \mathscr{M}_0$ und $\mu_0(K) = 1$.

In Dimension $n \geq 1$ betrachten wir die Höhenfunktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $h(x_1, \ldots, x_n) = x_n$. Das Bild $h(K) \subset \mathbb{R}$ ist nicht-leer, konvex und kompakt, also ein Intervall $h(K) = [u, v]$. Für $t < u$ und $t > v$ gilt $K_t = \emptyset$, also $K_t \in \mathscr{M}_{n-1}$ und $\mu_{n-1}(K_t) = 0$. Für $u \leq t \leq v$ ist der Schnitt $K_t \subset \mathbb{R}^{n-1}$ nicht-leer, konvex und kompakt. Dank Induktionsannahme wissen wir $K_t \in \mathscr{M}_{n-1}$ und $\mu_{n-1}(K_t) = 1$. Hieraus folgt $K \in \mathscr{M}_n$ und $\mu_n(K) = 1$.

(2) In Dimension $n = 0$ gilt $U = \{0\}$, also $U \in \mathscr{M}_0$ und $\mu_0(U) = 1 = (-1)^{\dim U}$.

In Dimension $n \geq 1$ unterscheiden wir zwei Fälle: Entweder gilt $h(A) = \mathbb{R}$ oder $h(A) = \{a\}$.

(2a) Im Falle $h(A) = \mathbb{R}$ ist das Bild $h(U) \subset \mathbb{R}$ konvex und offen, also $h(U) =]u, v[$ mit $u < v$. Für $t \leq u$ und $t \geq v$ gilt $U_t = \emptyset$, also $U_t \in \mathscr{M}_{n-1}$ und $\mu_{n-1}(U_t) = 0$. Für $u < t < v$ ist der Schnitt $U_t \subset \mathbb{R}^{n-1}$ nicht-leer, konvex und offen, also $U_t \in \mathscr{M}_{n-1}$ und $\mu_{n-1}(U_t) = (-1)^{\dim U_t}$ mit $\dim U_t = \dim U - 1$. Dies zeigt $U \in \mathscr{M}_n$ und $\mu_n(U) = -\dim U_t = (-1)^{\dim U}$. Abbildung A:16 zeigt genau diesen Fall. Die Sonderfälle $u = -\infty$ oder $v = +\infty$ sind zugelassen und führen zum selben Ergebnis.

(2b) Im Falle $h(A) = \{a\}$ liegt U ganz in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{a\}$. Für $t < a$ und für $t > a$ gilt $U_t = \emptyset$, also $U_t \in \mathscr{M}_{n-1}$ und $\mu_{n-1}(U_t) = 0$. Für $t = a$ ist $U_a \subset \mathbb{R}^{n-1}$ konvex offen mit $\dim U_a = \dim U$. Dies zeigt $U \in \mathscr{M}_n$ und $\mu_{n-1}(U) = \mu_{n-1}(U_a) = (-1)^{\dim U_a} = (-1)^{\dim U}$.

§A3i. Die Morse–Euler–Formel. Wir wollen unsere Konstruktion des Euler–Maßes auf besonders schöne Räume anwenden, insbesondere auf Flächen wie in Abbildung A:17. Glatte Flächen sind schöner, doch polytopale sind für uns zunächst technisch einfacher.

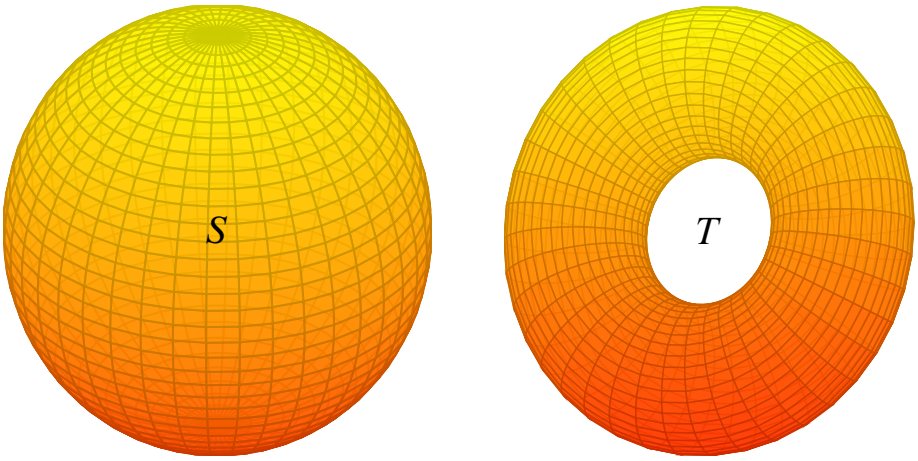


ABBILDUNG A:17. Die Morse–Euler–Formel ergibt $\mu_3(S) = 2$ und $\mu_3(T) = 0$.

Korollar A3H. *Für jedes (endliche) Polyeder $K = |\mathscr{K}| \subset \mathbb{R}^n$ wird die Summe* (A.5) *zu*

$$\chi(\mathscr{K}) = \mu_n(K) = \sum_{t\in\mathbb{R}} \mu_{n-1}(K_t) - \frac{1}{2}\Big[\lim_{s\nearrow t} \mu_{n-1}(K_s) + \lim_{s\searrow t} \mu_{n-1}(K_s)\Big]. \tag{A.6}$$

Diese Morse–Euler–Formel zählt nur die *kritischen* Werte $t \in \mathbb{R}$, an denen sich die Topologie des Schnittes K_t ändert, genauer gesagt seine Euler–Charakteristik. Dies sind meist nur wenige Stellen, daher ist diese Formel für praktische Berechnungen überaus nützlich.

Beispiel. Für die Sphäre S erhalten wir $\mu_3(S) = 2$, für den Torus T hingegen $\mu_3(T) = 0$. Als Übung skizziere man in A:17 die Niveaulinien K_t an kritischen Werten und dazwischen.

Für polytopale Flächen im $\mathbb{R}^3$ erhalten wir eine einfache Summationsregel: Minima $+1$, Sattelpunkte -1, Maxima $+1$. Diese *kritischen Punkte* sollen lokal von der einfachsten Form sein, also Minimum $x_1^2 + x_2^2$ oder Sattel $x_1^2 - x_2^2$ oder Maximum $-x_1^2 - x_2^2$. Dies lässt sich durch eine kleine Drehung leicht einrichten und ist Ausgangspunkt der *Morse–Theorie*, einem weitreichenden und effizienten Werkzeug zur Untersuchung von Mannigfaltigkeiten.

§A3j. Die Euler–Charakteristik ist für Polyeder wohldefiniert. Zunächst ist die Euler–Charakteristik $\chi(\mathscr{K}) = \sum_{\emptyset\neq P\in\mathscr{K}} (-1)^{\dim P}$ für *polytopale Komplexe* $\mathscr{K}$ definiert. Das Euler–Maß $\mu_n(K)$ hingegen definieren wir als iteriertes Integral für *Euler–messbare Teilmengen* $K \subset \mathbb{R}^n$. Satz A3G garantiert: Für jedes Polyeder $K = |\mathscr{K}|$ sind beide definiert und gleich, $\mu_n(K) = \chi(\mathscr{K})$. Diese Gleichung ist in beide Richtungen nützlich:

Bemerkung. Seien $\mathscr{K}, \mathscr{L}$ polytopale Komplexe in $\mathbb{R}^n$ zum selben Polyeder $|\mathscr{K}| = |\mathscr{L}|$. Dank Satz A3G folgt $\chi(\mathscr{K}) = \mu_n(|\mathscr{K}|) = \mu_n(|\mathscr{L}|) = \chi(\mathscr{L})$. Die Euler–Charakteristik $\chi(\mathscr{K})$ hängt also nur vom Polyeder $|\mathscr{K}|$ ab, und nicht von dem zu seinem Aufbau gewählten Komplex $\mathscr{K}$. Wir dürfen jeden beliebigen Komplex zur Darstellung wählen!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Bemerkung. Sei $h : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine Einbettung. Im Spezialfall $m = n$ ist h ein affiner Isomorphismus, man denke etwa an Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen, etc. Ist $K = |\mathscr{K}| \subset \mathbb{R}^m$ ein Polyeder, so auch das Bild $h(K) = L = |\mathscr{L}|$, etwa für den Komplex $\mathscr{L} = \{ h(P) \mid P \in \mathscr{K} \}$. Dank Satz A3G folgt $\mu_m(K) = \chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L}) = \mu_n(L)$.

Zusammenfassend können wir somit die Euler–Charakteristik für Polyeder definieren:

☞ **Definition A3I.** Sei $K \subset V$ ein Polyeder in einem $\mathbb{R}$–Vektorraum V. Wir können dann ☜ eine beliebige Unterteilung wählen, also einen polytopalen Komplex $\mathscr{K}$ mit $|\mathscr{K}| = K$, und $\chi(K) := \chi(\mathscr{K})$ definieren. Dank Satz A3G ist das Ergebnis wohldefiniert.

BEWEIS. Das Polyeder $K \subset V$ erzeugt einen affinen Unterraum $A \subset V$ endlicher Dimension $\dim A = n < \infty$. Wir wählen einen affinen Isomorphismus $h : A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ und setzen $L := h(K)$ sowie $\mathscr{L} := \{ h(P) \mid P \in \mathscr{K} \}$. Dann gilt $\chi(K) := \chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L}) = \mu_n(L)$. Der Wert $\chi(\mathscr{K})$ ändert sich nicht bei anderer Wahl des Isomorphismus h. Der Wert $\mu_n(L)$ ändert sich nicht bei anderer Wahl des Komplexes $\mathscr{K}$. Somit ist $\chi(K)$ wohldefiniert. □

☞ **§A3k. Topologische Invarianz der Euler–Charakteristik.** Eine Eigenschaft nennen ☜ wir *geometrisch*, *topologisch*, *(stückweise) affin*, etc., wenn sie erhalten bleibt unter Isometrien, Homöomorphismen, (stückweise) affinen Homöomorphismen, etc.

Die Euler–Charakteristik von Polyedern $K, L \subset \mathbb{R}^n$ ist eine wunderbare Eigenschaft, und wir fragen uns, inwiefern sie invariant ist, eventuell sogar topologisch?

Ist $h : K \xrightarrow{\sim} L$ *stückweise affin*, so ist die Antwort leicht: Angenommen, es gibt geeignete Unterteilungen $\mathscr{K}$ mit $|\mathscr{K}| = K$ und $\mathscr{L}$ mit $|\mathscr{L}| = L$, sodass h jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ affin auf ein Polytop $Q \in \mathscr{L}$ abbildet. Dann gilt $\chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L})$, und somit $\chi(K) = \chi(L)$.

Die Invarianz der Euler–Charakteristik gilt nicht nur für stückweise affine, sondern auch für beliebige Homöomorphismen (A1A), sogar für jede Homotopie-Äquivalenz (G4N)!

✍ **Satz A3J** (topologische Invarianz der Euler–Charakteristik, Poincaré 1895)**.** *Seien $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ endliche polytopale Komplexe. Existiert zwischen den so dargestellten Polyedern ein Homöomorphismus $|\mathscr{K}| \cong |\mathscr{L}|$, oder auch nur eine Homotopie-Äquivalenz $|\mathscr{K}| \simeq |\mathscr{L}|$, so folgt hieraus bereits die Gleichheit $\chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L})$ der Euler–Charakteristiken.* ✍ □

Das ist höchst bemerkenswert: Die Euler–Charakteristik $\chi(\mathscr{K})$ des Komplexes $\mathscr{K}$ ist kombinatorisch definiert, aber das Ergebnis hängt nur vom topologischen Raum $|\mathscr{K}|$ ab!

$$\underset{\text{affin-lineare Isomorphie}}{(1)\ |\mathscr{K}| \cong |\mathscr{L}|} \implies \underset{\text{Homöomorphie}}{(2)\ |\mathscr{K}| \cong |\mathscr{L}|} \implies \underset{\text{Homotopie-Äquivalenz}}{(3)\ |\mathscr{K}| \simeq |\mathscr{L}|} \implies \underset{\text{Gleichhheit in } \mathbb{Z}}{(4)\ \chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L})}$$

Die affin-lineare Invarianz „(1) ⇒ (4)“ verdanken wir Satz A3G. Die Implikationen „(1) ⇒ (2) ⇒ (3)“ sind klar. Die Invarianz unter Homöomorphie „(2) ⇒ (4)“ und Homotopie „(3) ⇒ (4)“ beweist man am besten mit Homologie-Theorie in der algebraischen Topologie. In kleiner Dimension, für Graphen und Flächen, wird uns dies mit der Fundamentalgruppe gelingen (Kapitel L). Einstweilen wollen wir sie vorab schon als Werkzeug nutzen.

✍ **Beispiel A3K.** Es gilt $S \ncong T$. Wir vergleichen die einfachsten geschlossenen Flächen: Sind die Sphäre S und der Torus T homöomorph? Wir berechnen $\chi(S) = 2$ und $\chi(T) = 0$, etwa geometrisch wie in Abbildung A:17 oder kombinatorisch wie in Abbildung A:26. Satz A3J garantiert, dass die topologischen Räume S und T nicht homöomorph sein können. (Auch nicht homotopie-äquivalent, was eine wesentlich stärkere Aussage ist.) ✍

§A3l. Bälle und Sphären. Den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ kennen wir gut aus Linearer Algebra und Analysis. Hierin betrachten wir den *abgeschlossenen Einheitsball*

$$\mathbb{D}^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \right\}.$$

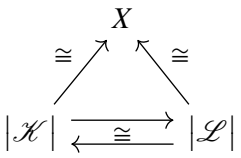
Er ist kompakt und konvex. Sein Inneres ist der n-dimensionale *offene Einheitsball*

$$\mathbb{B}^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1 \right\}.$$

Der Rand von $\mathbb{D}^n$ wie auch von $\mathbb{B}^n$ ist die $(n-1)$–dimensionale *Einheitssphäre*

$$\mathbb{S}^{n-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\}.$$

Wir wollen solchen Räumen eine Euler–Charakteristik zuordnen. Wie soll das gelingen, wenn für den Raum X noch keine Zerlegung in Polytope vorliegt? Wir können versuchen, X willkürlich in solche Zellen zu zerlegen, müssen aber fürchten, dass die Euler–Charakteristik von unserer Willkür abhängt. Satz A3J rettet unser Vorhaben:



Definition A3L. Gilt $X \cong |\mathscr{K}|$, so setzen wir $\chi(X) := \chi(\mathscr{K})$. Dies ist wohldefiniert dank der topologischen Invarianz der Euler–Charakteristik (A3J), das heißt unabhängig von der gewählten Darstellung $X \cong |\mathscr{K}|$: Aus $X \cong |\mathscr{L}|$ folgt $|\mathscr{K}| \cong |\mathscr{L}|$ und $\chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L})$.

Bemerkung. Sie kennen das Problem seit Ihrer Kindheit: Zum Zählen einer endlichen Menge X konstruieren Sie eine Bijektion $f : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\sim} X$ und sagen „X hat n Elemente“. Das ist wohldefiniert, denn für jede andere Bijektion $g : \{1, \ldots, m\} \xrightarrow{\sim} X$ gilt $m = n$.

In der Linearen Algebra lernen Sie, jedem $\mathbb{K}$–Vektorraum X eine Dimension zuzuordnen: Sie können eine Basis B wählen, also $\mathbb{K}^{(B)} \xrightarrow{\sim} X$, und definieren $\dim_{\mathbb{K}}(X) := \operatorname{card}(B)$. Das ist wohldefiniert, denn jede andere Basis B' von X hat dieselbe Kardinalität!

Satz A3M. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nicht-leerem Inneren, $0 \in K^\circ$. Dann existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(K) = \mathbb{D}^n$, $h(K^\circ) = \mathbb{B}^n$ und $h(\delta K) = \mathbb{S}^{n-1}$.*

Beispiel. Für den Würfel $K = [-1, 1]^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$ haben wir A1E oder $h(x) = x \cdot |x|_\infty / |x|_2$.

Zur Illustration und Motivation skizziere ich hier schon den allgemeinen Beweis (F6G):

BEWEIS-SKIZZE. Die Radialprojektion $h : \delta K \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $h(x) = x/|x|$ ist stetig, surjektiv dank Beschränktheit von K und injektiv dank Konvexität von K. Da δK kompakt und $\mathbb{S}^{n-1}$ hausdorffsch ist, ist die stetige Bijektion $h : \delta K \to \mathbb{S}^{n-1}$ ein Homöomorphismus, das heißt, die Umkehrfunktion $g = h^{-1} : \mathbb{S}^{n-1} \to \delta K$ ist ebenfalls stetig. Diese setzt sich fort zum Homöomorphismus $g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $g(r \cdot s) = r \cdot g(s)$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in \mathbb{S}^{n-1}$. Somit erfüllt $h = g^{-1} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ dann $h(K) = \mathbb{D}^n$ und $h(K^\circ) = \mathbb{B}^n$ wie gewünscht. □

Korollar A3N. *Für jedes n–dimensionale Polytop P erhalten wir so Homöomorphismen $P \cong \mathbb{D}^n$ und $\partial P \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Aus topologischer Invarianz A3J und Polyederformel A3C folgt*

$$\chi(\mathbb{D}^n) = \chi(P) = 1 \quad \textit{und} \quad \chi(\mathbb{S}^{n-1}) = \chi(\partial P) = 1 - (-1)^n.$$

Damit schließt sich der Kreis: Wir haben nun allgemeine Werkzeuge für Anwendungen wie in Abbildung A:1. Satz A3M zeigt, das Dreieck, Quadrat und Kreisscheibe untereinander homöomorph sind, ebenso ihre Ränder. Die Invarianz der Euler–Charakteristik A3J zeigt, dass Kreisscheibe und Kreislinie nicht homöomorph sind, allgemein $\mathbb{S}^{n-1} \not\cong \mathbb{D}^n$. Diese Techniken und Beispiele illustrieren das Wechselspiel von Konstruktion und Obstruktion.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A3m. Polykonvexe Mengen.** Euler–Messbarkeit A3F ist ein zerbrechlicher Begriff. ☜ Seien $X, Y \in \mathbb{R}^n$ Euler–messbar. Im Falle $X \cap Y = \emptyset$ ist $X \cup Y$ messbar dank Satz A3G. Im Allgemeinen gilt dies jedoch nicht: Zwar sind die Mengen $X = \{\,(\sin(y), y) \mid y \in \mathbb{R}\,\}$ und $Y = \{\,(-\sin(y), y) \mid y \in \mathbb{R}\,\}$ Euler–messbar, nicht jedoch $X \cap Y$ und $X \cup Y$. (Skizze!) Auch die gedrehten Mengen $\{\,(x, \pm\sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\,\}$ sind nicht Euler–messbar. (Warum?)

Das ist nicht schön; wir würden uns zumindest wünschen, dass die messbaren Mengen stabil sind unter Vereinigung und Durchschnitt, also einen Mengenverband bilden:

(0) Es gilt $\emptyset \in \mathscr{M}$ und $\mu(\emptyset) = 0$.
(1) Für $X, Y \in \mathscr{M}$ gilt $X \cup Y, X \cap Y \in \mathscr{M}$ und $\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.

Dies beinhaltet die Additivität bei disjunkter Vereinigung $X \cup Y$ mit $X \cap Y = \emptyset$.

Wir erhalten die gewünschte Eigenschaft (1), wenn wir das Euler–Maß einschränken auf die *polykonvexen Mengen*, die ich hier kurz erläutern möchte. Diese Familie enthält insbesondere alle Polyeder und hat viele weitere schöne Eigenschaften. Literatur: G.-C. Rota, D.A. Klain, *Introduction to Geometric Probability*, Cambridge University Press, 1997.

Zur Erinnerung: Dank Satz A3G sind alle konvexen Kompakta $K \subset \mathbb{R}^n$ Euler–messbar mit $\mu(K) = 1$ für $K \neq \emptyset$ bzw. $\mu(\emptyset) = 0$ für die leere Menge.

Im $\mathbb{R}^n$ ist der Schnitt konvexer Mengen konvex, und der Schnitt kompakter Mengen ist kompakt. Somit ist die Familie aller konvexen Kompakta stabil unter Schnittbildung.

Auch die Vereinigungen zweier Kompakta ist kompakt, aber die Vereinigung zweier konvexer Mengen ist im Allgemeinen nicht konvex. Wir lassen uns davon nicht entmutigen:

Definition A3O. Wir nennen $P \subset \mathbb{R}^n$ *polykonvex*, wenn konvexe Kompakta $K_1, \dots, K_p \subset \mathbb{R}^n$ existieren, sodass $P = K_1 \cup \dots \cup K_p$ gilt; die minimale Anzahl p heißt *Komplexität* von P. Insbesondere gilt $p = 0$ für $P = \emptyset$, und $p = 1$ für $P \neq \emptyset$ konvex und kompakt.

Zum Beispiel ist jedes endliche Polyeder $|\mathscr{K}| = \bigcup_{P \in \mathscr{K}} P \subset \mathbb{R}^n$ polykonvex (A3B). Wir erhalten noch weit mehr, etwa Bälle, Ellipsoide, etc. und ihre Vereinigungen.

Übung A3P. Die Familie $\mathscr{P} = \{\, P \subset \mathbb{R}^n \text{ polykonvex} \,\}$ bildet einen Verband $(\mathscr{P}, \cap, \cup)$. Hierauf existiert genau eine Abbildung $\mu : \mathscr{P} \to \mathbb{Z}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(0) μ ist normiert gemäß $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(K) = 1$ für $K \neq \emptyset$ konvex und kompakt.
(1) μ ist additiv: Für alle $X, Y \in \mathscr{P}$ gilt $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cap Y)$.

Jedes endliche Polyeder $P = |\mathscr{K}|$ ist polykonvex, und hier gilt $\mu(P) = \chi(\mathscr{K})$ dank A3G.

✻ **A3P.** Die Menge $\mathscr{P}$ ist stabil unter Vereinigung (nach Definition) und glücklicherweise auch unter Schnitt:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{p} K_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{q} L_j\right) = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} (K_i \cap L_j)$$

Das Euler–Maß $\mu : \mathscr{M}_n \to \mathbb{Z}$ erfüllt die Forderungen (0) und (1) dank Satz A3G. Wir zeigen $\mathscr{P} \subset \mathscr{M}_n$ per Induktion über die Komplexität p. Hierzu sei $\mathscr{P}_{\leq p} = \{\, K_1 \cup \dots \cup K_p \mid K_i \subset \mathbb{R}^n \text{ konvex und kompakt} \,\}$. Die Inklusion $\mathscr{P}_{\leq 1} \subset \mathscr{M}_n$ folgt aus Satz A3G. Sei also $p \geq 2$ und $\mathscr{P}_{<p} \subset \mathscr{M}_n$ bereits bewiesen. Für jede polykonvexe Menge $P = K_1 \cup \dots \cup K_p \subset \mathbb{R}^n$ enthält $\mathscr{P}_{<p} \subset \mathscr{M}_n$ die Mengen $P' := K_1 \cup \dots \cup K_{p-1}$ und K_p sowie ihren Schnitt $P' \cap K_p = (K_1 \cap K_p) \cup \dots \cup (K_{p-1} \cap K_p)$, dank A3G folgt $P \in \mathscr{M}_n$, also $\mathscr{P}_{\leq p} \subset \mathscr{M}_n$. Aussagen (0,1) folgen aus Satz A3G; dies zeigt die Existenz. Eindeutigkeit folgt ebenso per Induktion über p: Dank (0) ist μ auf $\mathscr{P}_{\leq 1}$ eindeutig festgelegt. Sei also $p \geq 2$ und die Eindeutigkeit von μ auf $\mathscr{P}_{<p}$ bereits bewiesen. Für jede polykonvexe Menge $P = K_1 \cup \dots \cup K_p \subset \mathbb{R}^n$ ist dann der Wert $\mu(P) = \mu(K_1 \cup \dots \cup K_{p-1}) + \mu(K_p) - \mu((K_1 \cap K_p) \cup \dots \cup (K_{p-1} \cap K_p))$ dank (1) eindeutig festgelegt, denn rechts stehen drei polykonvexe Mengen der Komplexität $< p$.

☞ **§A3n. Sternförmige Polyeder.** Der Satz A3C von Euler–Poincaré besagt, dass jedes *konvexe* Polyeder $|\mathscr{K}| \neq \emptyset$ die Euler–Charakteristik $\chi(\mathscr{K}) = 1$ hat. Wir wollen beweisen, dass dies allgemeiner sogar für jedes *sternförmige* Polyeder gilt. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* zum Zentrum $a \in X$, wenn $[a,b] \subset X$ für jeden Punkt $b \in X$ gilt. ☜

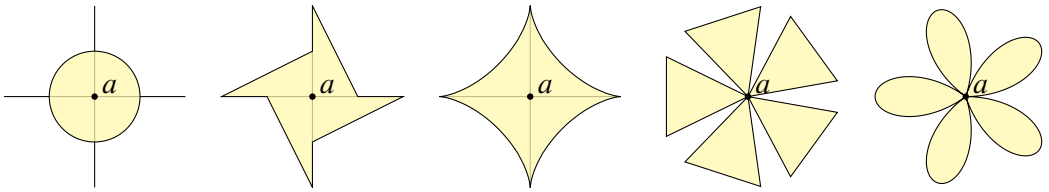


ABBILDUNG A:18. Konvexe und sternförmige Mengen

Anschaulich heißt konvex, dass man von jedem Punkt in X jeden anderen sehen kann. Sternförmig heißt, dass man vom gegebenen Zentrum $a \in X$ jeden anderen Punkt sehen kann. Genau dann ist X konvex, wenn X sternförmig bezüglich jedes Punktes $a \in X$ ist.

Übung A3Q. (1) Seien $K_1, K_2, \dots, K_p \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Ist ihre Vereinigung $P = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_p$ sternförmig zum Zentrum a, so erfüllt das Euler–Maß $\mu(P) = 1$.

(2) Ist das Polyeder $P = |\mathscr{K}| \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so gilt $\chi(\mathscr{K}) = \mu(P) = 1$.

✻ **A3Q.** (1) Wir können $p \geq 1$ als minimal annehmen, insbesondere $K_1, K_2, \dots, K_p \neq \emptyset$. Der Fall $p = 0$ ist hier ausgeschlossen, da $P = \emptyset$ nicht sternförmig ist. (Die Schlussfolgerung gilt hier nicht, denn $\mu(\emptyset) = 0$.)

(a) Wir setzen stärker $a \in K_i$ für alle $i = 1, \dots, p$ voraus. Für $p \geq 1$ ist P kompakt und sternförmig zu a, denn aus $b \in P$ folgt $b \in K_i$ für ein i und somit $[a,b] \subset K_i \subset P$. Wir zeigen $\mu(P) = 1$ per Induktion über p. Für $p = 1$ folgt $\mu(P) = 1$ aus Satz A3G. Sei also $p \geq 2$ und $P = K_1 \cup \dots \cup K_p$. Per Induktionsvoraussetzung wissen wir $\mu(K_1 \cup \dots \cup K_{p-1}) = 1$ und $\mu(K_p) = 1$. Auch die Schnittmenge $Q = (K_1 \cup \dots \cup K_{p-1}) \cap K_p = (K_1 \cap K_p) \cup \dots \cup (K_{p-1} \cap K_p)$ erfüllt $\mu(Q) = 1$, denn für jedes $i = 1, \dots, p-1$ ist $K_i \cap K_p$ ist kompakt, konvex und sternförmig zu a. Dank A3G folgt $\mu(P) = \mu(K_1 \cup \dots \cup K_{p-1}) + \mu(K_p) - \mu(Q) = 1$.

(b) Seien nun allgemein $K_1, \dots, K_p \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, und $P = K_1 \cup \dots \cup K_p$ sei sternförmig zu a. Jeder Kegel $C_a K_i := \bigcup_{x \in K_i} [a,x]$ ist kompakt und konvex und enthält a. Zudem gilt $K_i \subset C_a K_i \subset P$, aus $P = K_1 \cup \dots \cup K_p$ folgt also $P = C_a K_1 \cup \dots \cup C_a K_p$. Dank (a) schließen wir $\mu(P) = 1$.

(2) Sternförmige Polyeder $P = |\mathscr{K}| = \bigcup_{Q \in \mathscr{K}} Q$ sind ein Spezialfall von (1). Für jedes Polytop $Q = [v_0, v_1, \dots, v_\ell] \in \mathscr{K}$ ist der Kegel $C_a Q := [a, v_0, v_1, \dots, v_\ell]$ kompakt und konvex und enthält a. Zudem gilt $Q \subset C_a Q \subset P$, aus $P = \bigcup_{Q \in \mathscr{K}} Q$ folgt also $P = \bigcup_{Q \in \mathscr{K}} C_a Q$. Dank (1) schließen wir $\mu(P) = 1$. Die Gleichung $\chi(\mathscr{K}) = \mu(P)$ von Euler–Charakteristik und Euler–Maß entnehmen wir Satz A3G.

☞ **§A3o. Reguläre Polytope in jeder Dimension: Simplex, Würfel, Kreuzpolytop.** ☜

Übung A3R. (1) Sei $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der n–dimensionale Standardsimplex (A2I). Bestimmen Sie seine Seitenzahlen $f_d = f_d(\Delta^n)$ sowie seine Euler–Charakteristik $\chi = \sum_{d=0}^n (-1)^d f_d$. Bestimmen Sie das Poincaré–Polynom $\mathrm{P}(t) := \sum_{d=0}^n f_d t^d$ in geschlossener Form und überprüfen Sie das Ergebnis an der Stelle $t = -1$ mit $\mathrm{P}(-1) = \chi$.

(2) Selbe Frage für den n–dimensionalen Würfel $\square^n = [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ (Hyperkubus).

(3) Selbe Frage für das n–dimensionale Kreuzpolytop $\Diamond^n = [\pm e_1, \dots, \pm e_n] \subset \mathbb{R}^n$.

(4) Zeigen Sie, dass Δ^n, $\square^n$, $\Diamond^n$ regulär sind. *Zur Information:* In Dimension $n = 3$ gibt es zwei weitere (A2J), in Dimension $n = 4$ drei weitere, in Dimension $n \geq 5$ sind dies bis auf Ähnlichkeit die einzigen regulären Polytope (Schläfli 1901, Coxeter 1948).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **A3R.** (1) Es gilt $f_d = \binom{n+1}{d+1}$, denn jede d–dimensionale Seite entspricht der Wahl von $d+1$ der $n+1$ Ecken. Wie für jedes konvexe kompakte Polyeder gilt $\chi = 1$ (A3C). Wir können dies hier explizit nachrechnen:

$$\mathrm{P}(t) = \sum_{d=0}^{n} f_d t^d = \sum_{d=0}^{n} \binom{n+1}{d+1} t^d = t^{-1}\left(-1 + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} t^k\right) = \big((1+t)^{n+1} - 1\big)/t, \quad \mathrm{P}(-1) = 1$$

(2) Es gilt $f_d = \binom{n}{n-d} 2^{n-d}$: Jede d–dimensionale Seite entspricht der Wahl $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-d} \le n$ von $n-d$ der n möglichen Richtungen sowie der Koordinaten $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{n-d}} \in \{\pm 1\}$. Wie für jedes konvexe kompakte Polyeder gilt $\chi = 1$ (A3C). Wir können dies hier explizit nachrechnen:

$$\mathrm{P}(t) = \sum_{d=0}^{n} f_d t^d = \sum_{d=0}^{n} \binom{n}{n-d} 2^{n-d} t^d = \big(2+t\big)^n, \quad \mathrm{P}(-1) = 1$$

(3) Es gilt $f_d = \binom{n}{d+1} 2^{d+1}$ für $d = 0, 1, \ldots, n-1$ und $f_n = 1$. Das Kreuzpolytop ist dual zum Würfel: Ecken von $\Diamond^n$ entsprechen Facetten von $\square^n$ usw., daher gilt $f_d(\Diamond^n) = f_{n-1-d}(\square^n)$, inklusive der Spezialfälle $1 = f_n = f_{-1}$. Wir erwarten daher $\mathrm{P}_\Diamond(t) = t^{n-1} P_\square(t^{-1}) - t^{-1} + t^n$. Wie für jedes konvexe kompakte Polyeder gilt $\chi = 1$ (A3C). Wir können dies hier explizit nachrechnen:

$$\mathrm{P}(t) = t^n + \sum_{d=0}^{n-1} \binom{n}{d+1} 2^{d+1} t^d = t^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k t^{k-1} = t^n + \big((1+2t)^n - 1\big)/t, \quad \mathrm{P}(-1) = 1$$

(4) Die symmetrische Gruppe S_{n+1} operiert isometrisch auf $\mathbb{R}^{n+1}$ durch Permutation der Koordinaten und lässt Δ^n invariant, $S_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, \Delta^n)$ (A2I). Die Fahne $\{e_0\} < \{e_0, e_1\} < \cdots < \{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ wird durch $\tau \in S_{n+1}$ abgebildet auf die Fahne $\{e_{\tau 0}\} < \{e_{\tau 0}, e_{\tau 1}\} < \cdots < \{e_{\tau 0}, e_{\tau 1}, \ldots, e_{\tau n}\}$. Demnach operiert $\mathrm{Isom}(\Delta^n)$ transitiv auf der Menge der Fahnen von Δ^n, das heißt, Δ^n ist regulär. Für Würfel $\square^n$ und Kreuzpolytop $\Diamond^n$ haben wir die Spiegelungspermutationen, $\{\pm 1\}^n \times S_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \square^n) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \Diamond^n)$ (A2I). Damit operiert auch hier Isom transitiv auf den Fahnen, das heißt, $\square^n$ und $\Diamond^n$ sind regulär.

☞ **§A3p. Produkte und Faserbündel.** Topologie ist zugleich vollkommen konkret und wunderbar abstrakt. Die folgende Übung mag auf den ersten Blick abstrakt und schwierig erscheinen, bei genauerem Hinsehen handelt es sich um sorgfältige Buchführung. ☜

Übung A3S. Euler–Charakteristik bzw. Euler–Maß sind verträglich mit Produkten:

(1) Sind $\mathscr{K}$ in V und $\mathscr{L}$ in W polytopale Komplexe, so auch in $V \times W$ ihr Produkt $\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L} := \{\, P \times Q \mid P \in \mathscr{K},\ Q \in \mathscr{L} \,\}$. Genauer gilt hierbei $\mathscr{K} = \bigsqcup_p \mathscr{K}_p$ und $\mathscr{L} = \bigsqcup_q \mathscr{L}_q$, somit $(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L})_n = \bigsqcup_{p+q=n} \{\, P \times Q \mid P \in \mathscr{K}_p,\ Q \in \mathscr{L}_q \,\}$, also Multiplikativität $\chi(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}) = \chi(\mathscr{K}) \cdot \chi(\mathscr{L})$ und $\mathrm{P}(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}) = \mathrm{P}(\mathscr{K}) \cdot \mathrm{P}(\mathscr{L})$.

(2) Berechnen Sie hiermit das Poincaré–Polynom $\mathrm{P}(\square^n)$ des n–dimensionalen Würfels $\square^n = [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$, genauer des Komplexes $\mathscr{K} = \{\, Q \le \square^n \,\}$, wie in Übung A3R.

(3) Sind zwei Mengen $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \times \mathbb{R}^n$ messbar, so auch $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$, und es gilt auch hier die *Produktformel* $\mu(X \times Y) = \mu(X) \cdot \mu(Y)$. Allgemeiner gilt:

(4) Sei $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \supset E \to B \subset \mathbb{R}^m$ die Projektion $p(x,y) = x$. Ist E ein Polyeder, so auch B und jede Faser $F = p^{-1}(x)$ für $x \in B$. Ist $\chi(F)$ unabhängig von x, so gilt auch hier die Produktformel $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$. Noch allgemeiner:

(5) Sei $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_\ell$ mit $B_1, \ldots, B_\ell$ messbar, für jedes $x \in B_k$ sei $F_x = p^{-1}(x)$ messbar und $c_k = \mu(F_x)$ konstant. Dann ist E messbar, und $\mu(E) = \sum_k c_k\, \mu(B_k)$.

Diese *Integration längs der Fasern* diente zur Konstruktion des Euler–Maßes μ in Dimension $n = 1$ über $B = \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall $n \ge 2$ folgt nun per Induktion über n.

§A4. Zentrales Anwendungsbeispiel: die Klassifikation kompakter Flächen

Definition A0A erklärt, was wir unter einer n–dimensionalen Mannigfaltigkeit verstehen. Als nächstes wollen wir systematisch Beispiele sammeln und klassifizieren.

Abstraktion vereinfacht, denn eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen, zu erklären und zu beweisen als ihre zahlreichen Spezialfälle. Abstraktion sollten wir jedoch nicht als Selbstzweck auffassen: Das notwendige Gegenstück sind konkrete Beispiele und Anwendungen, an denen wir unsere Werkzeuge testen und schärfen können.

§A4a. Nulldimensionale Mannigfaltigkeiten: Punkte. Jede nulldimensionale Mannigfaltigkeit X ist ein diskreter Raum. Ist X zusammenhängend so gilt $X \cong \{*\}$. Zwischen diskreten Räumen X, Y ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig. Daher sind sie homöomorph genau dann, wenn sie gleichmächtig sind. Jede kompakte 0–Mannigfaltigkeit ist demnach homöomorph zu genau einem der Modellräume $\{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

§A4b. Eindimensionale Mannigfaltigkeiten: Kurven. Wir haben vier Beispiele:

1–Mannigfaltigkeiten	ohne Rand	mit Rand
nicht kompakt	die reelle Gerade $\mathbb{R}$	die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0}$
kompakt	die Kreislinie $\mathbb{S}^1$	das Intervall $[0,1]$

Dies sind 1*–Mannigfaltigkeiten:* Die Räume $\mathbb{R}^n$ werden metrisiert durch die euklidische Norm. Somit werden auch die Teilräume $[0,1]$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ sowie $\mathbb{S}^1$ in $\mathbb{R}^2$ metrisiert. Man sieht unmittelbar, dass sie lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ sind (A0A): Für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist dies trivial, für $[0,1]$ klar, und für $\mathbb{S}^1$ folgt es aus der stereographischen Projektion (A1L).

Ist unsere Liste redundanzfrei? Sind die vier Modellräume topologisch verschieden? Oder sind zwei davon homöomorph? Sobald wir Kompaktheit (F1J) und Rand (J7I) als topologische Invarianten nachgewiesen haben, ist die Antwort offensichtlich!

Alternativ nutzen wir die topologische Eigenschaft des Wegzusammenhangs (A1G): Jeder unserer vier Modellräume ist wegzusammenhängend. Im Raum $\mathbb{R}$ trennt jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$, das heißt, das Komplement $\mathbb{R} \smallsetminus \{x\}$ ist nicht wegzusammenhängend (A1H). In $\mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt dies für jeden Punkt bis auf einen, in $[0,1]$ gilt dies für jeden Punkt bis auf zwei, und in $\mathbb{S}^1$ trennt gar kein Punkt (A1L). Somit unterscheidet die Anzahl $0, 1, 2, \infty$ nicht-trennender Punkte diese vier Räume topologisch, denn sie bleibt bei Homöomorphismen erhalten.

Kompakt unterscheidet auch die Euler–Charakteristik: $\chi([0,1]) = 1$ und $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$.

Ist unsere Liste vollständig? Unsere vier konkreten Beispiele verstehen wir recht gut, insbesondere sehen wir, warum sie topologisch verschieden sind. Weniger offensichtlich ist, dass wir damit bereits alle Beispiele kennen. Diese Aussage verlangt nach einer Konstruktion: Zu jeder Kurve X müssen wir einen Homöomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ konstruieren zu einem unserer vier Modellräume $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{S}^1, [0,1]\}$. Wie immer im Leben ist das *Konstruieren* eines Objekts mitunter schwierig, so auch hier. Aber es geht! (Übung K1O)

Satz A4A (Klassifikation der Kurven)**.** *Jede zusammenhängende Kurve (= eindimensionale Mannigfaltigkeit) ist homöomorph zu genau einem der Modellräume* $[0,1]$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Korollar. *Jede kompakte Kurve ist homöomorph zu genau einem der Modellräume* $E_{p,q} = (\{1, \dots, p\} \times [0,1]) \cup (\{p+1, \dots, p+q\} \times \mathbb{S}^1) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^3$ *mit* $p, q \in \mathbb{N}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A4c. Was bedeutet Klassifikation?** Die Klassifikation einer Familie mathematischer ☜ Objekte ist immer dann ein lohnendes Unterfangen, wenn Anwendung und Theorie so weit gediehen sind, dass man zu einem Begriff systematisch Inventur halten will und kann.

Am Anfang einer Klassifikation steht die Definition, welche Objekte zugelassen sind, und welche dabei als gleich betrachtet werden. Dies legt eine Klasse $\mathscr{O}$ von Objekten fest sowie hierauf eine Äquivalenzrelation $\cong$. Im obigen Falle ist $\mathscr{O}$ die Klasse der kompakten Kurven, und die Äquivalenz wird durch die Homöomorphie definiert.

Sodann versuchen wir, eine möglichst vollständige Liste von Modellen zu erstellen, die diese Definition erfüllen. Während die Definition eine *Eingrenzung* der Objekte leistet, versucht unsere Liste eine *Ausschöpfung*. Im obigen Beispiel der kompakten Kurven ist diese Liste $(E_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ unendlich aber doch übersichtlich. Allgemein entspricht diese Liste einer Parametrisierung $\mathscr{P} \to \mathscr{O}$, wobei $\mathscr{P}$ eine leichter verstandene Parametermenge ist.

Nach Definition und Beispielen beginnt die Klassifikation im engeren Sinne:

☞ **Vollständigkeit:** Ist unsere Liste vollständig? (Oder fehlen noch weitere Beispiele?) ☜
Formal fragt dies nach der Surjektivität der Abbildung $\mathscr{P} \to \mathscr{O}/\cong$.

☞ **Redundanzfreiheit:** Ist unsere Liste redundanzfrei? (Oder enthält sie Wiederholungen?) ☜
Formal fragt dies nach der Injektivität der Abbildung $\mathscr{P} \to \mathscr{O}/\cong$.

Typischerweise verwendet man zum Nachweis der Redundanzfreiheit geeignete Invarianten, also Kenngrößen $\mathscr{O} \to \mathscr{Q}$ in irgendeine Menge $\mathscr{Q}$, die unter der betrachteten Äquivalenz $\cong$ invariant sind. Diese Sichtweise ist somit dual zur Liste $\mathscr{P} \to \mathscr{O}$. Für kompakte Kurven sind diese Invarianten die Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$: Hier ist p die Anzahl der geschlossenen Komponenten ($\cong \mathbb{S}^1$) und q die Anzahl der berandeten Komponenten ($\cong [0,1]$).

Je nach Kontext sollten die Aufzählung $\mathscr{P} \to \mathscr{O}$ und die Invarianten $\mathscr{O} \to \mathscr{Q}$ berechenbar sein, also eine möglichst explizite Behandlung erlauben. Sind die Invarianten vollständig, so erlauben sie die Unterscheidung aller Objekte bis auf Äquivalenz. Zusammen mit der Lokalisierung jedes Objektes in unserer (redundanzfreien und vollständigen) Liste von Modellen erhalten wir somit als Krönung eine vollständige Parametrisierung $\mathscr{P} \to \mathscr{O}$ sowie eine vollständige Invariante $\mathscr{O} \to \mathscr{P}$, die zueinander inverse Bijektionen sind.

☞ **Beispiel.** Über einem Körper K klassifizieren wir endlich erzeugte K–Vektorräume bis auf ☜ Isomorphie. Konkrete Modelle sind die Räume K^n mit $n \in \mathbb{N}$. Diese Liste ist vollständig: Jeder endlich-erzeugte K–Vektorraum V erlaubt eine Basis $v_1, \dots, v_n \in V$ und somit einen Isomorphismus $K^n \xrightarrow{\sim} V$. Die Liste ist redundanzfrei: Je zwei Basen eines Vektorraums V haben dieselbe Länge, diese definiert die Dimension $\dim_K(V)$. Dank dieser Invariante $\dim_K(K^n) = n$ sind die Vektorräume $K^0, K^1, K^2, \dots$ untereinander nicht isomorph.

Beispiel. Wir klassifizieren vollständig geordnete Körper $(K, +, \cdot, <)$, die Äquivalenz ist hier durch Körperisomorphismen definiert. Ein konkretes Modell ist der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen. Jeder vollständige geordnete Körper $(K, +, \cdot, <)$ ist hierzu isomorph, und zwar durch einen eindeutigen Körperisomorphismus $K \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$. (B2C)

Beispiel. Wir klassifizieren archimedisch geordnete Körper bis auf Isomorphie. Konkrete Modelle sind die Teilkörper $K < \mathbb{R}$. Das ist eine große Klasse von Beispielen, aber so explizit wie möglich. Jeder archimedisch geordnete Körper $(K, +, \cdot, <)$ ist zu einem solchen Teilkörper isomorph, und zwar durch einen eindeutigen Isomorphismus. (B2D)

Übung A4B. Betrachten Sie alle reellen Quadriken in $\mathbb{R}^1$ und in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$.

Welche dieser Quadriken sind Kurven? Flächen? allgemein Mannigfaltigkeiten? Was ist ihre Dimension? Was ist ihr (geometrischer) Rand? Welche Quadriken sind keine Mannigfaltigkeiten? Welche Quadriken sind kompakt? Welche sind (weg)zusammenhängend?

Welche Paare von Quadriken sind homöomorph? Wie können Sie explizit Homöomorphismen konstruieren? Welche Homöomorphieklassen von Quadriken erhalten Sie? Welche topologischen Invarianten unterscheiden zwischen diesen Klassen?

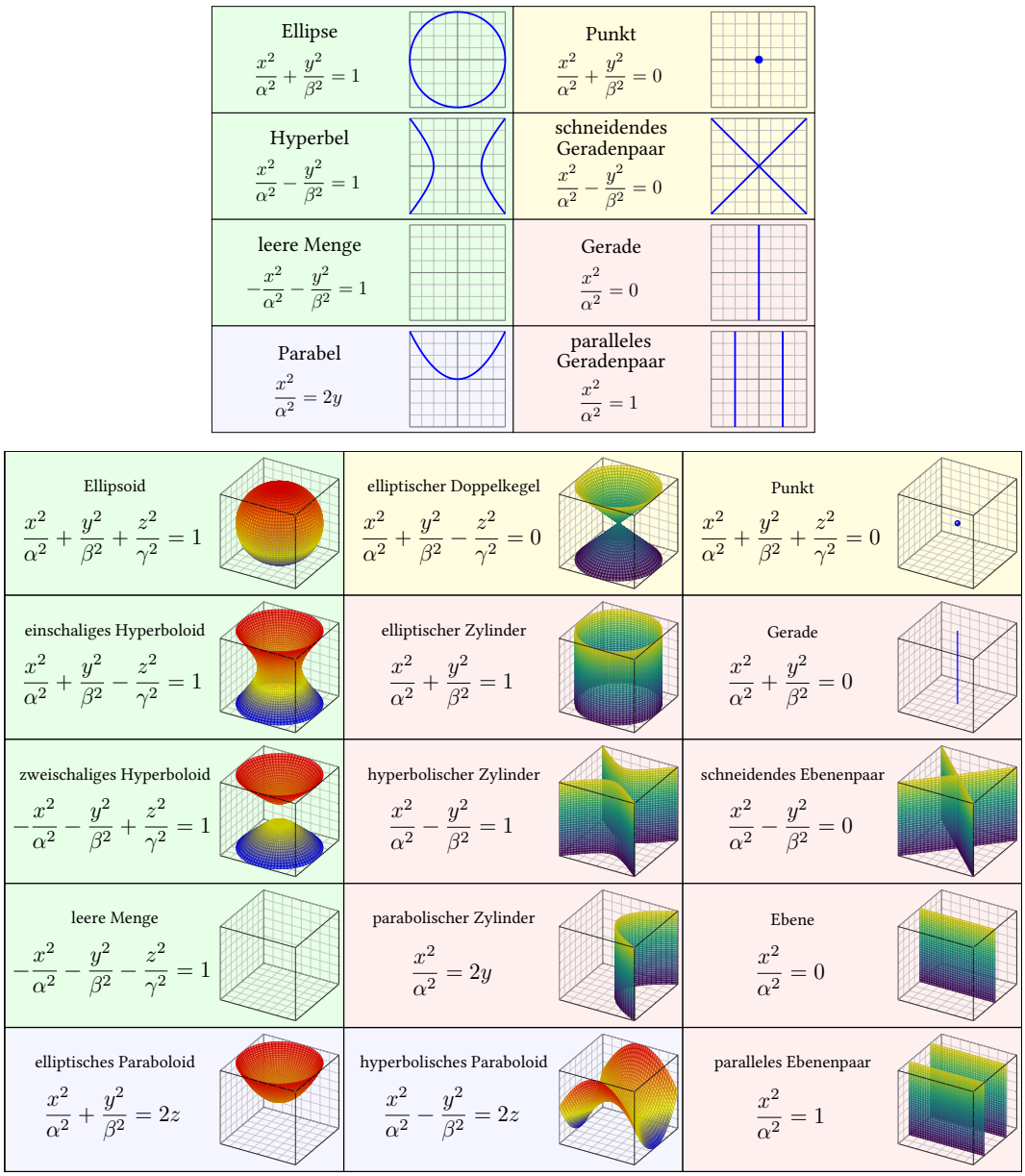


ABBILDUNG A:19. Die Klassifikation der reellen Quadriken im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A4d. Exotische Flächenwesen und wo sie zu finden sind.** Flächen begegnen uns überall im Alltag, bemerkenswerterweise ebenso in Wissenschaft (A:20) und Kunst (A:21). ☜

Bildquelle: Associated Press / Reuters

ABBILDUNG A:20. Der Physik-Nobelpreis 2016 ging an die britischen Quantenphysiker David Thouless, Duncan Haldane und Michael Kosterlitz für die Erforschung exotischer Materiezustände, insbesondere topologischer Phasen und Phasenübergänge. Die Topologie von Bällen, Doughnuts und Bretzeln schaffte es damit erstmalig in die Abendnachrichten.

Bildquelle: wikipedia.org

ABBILDUNG A:21. Die Skulptur *Rubato* in Malmö der schwedischen Bildhauerin Eva Hild. Welche Fläche ist das? Die Klassifikation der kompakten Flächen (Satz A4J) gibt vollständige Auskunft: Hierzu genügen Randkomponenten, Geschlecht, Orientierbarkeit.

§A4e. Modelle berandeter Flächen. Abbildung A:2 zeigt glatte Flächen im $\mathbb{R}^3$, die man sich leicht vorstellen kann. Wir wollen uns möglichst systematisch weitere Beispiele verschaffen. Dabei wollen wir Flächen nicht nur als Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ betrachten, sondern als eigenständige *topologische Räume* begreifen. Das ist der Sinn der Definition A0A.

Ich beginne mit berandeten Flächen, da wir hierfür Modelle besonders leicht konstruieren können. Zu jedem Paar $g \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ konstruieren wir die *Modellfläche* $F^{\pm}_{g,r}$ aus einem Rechteck, an dessen Rand wir wie skizziert Bänder ankleben.

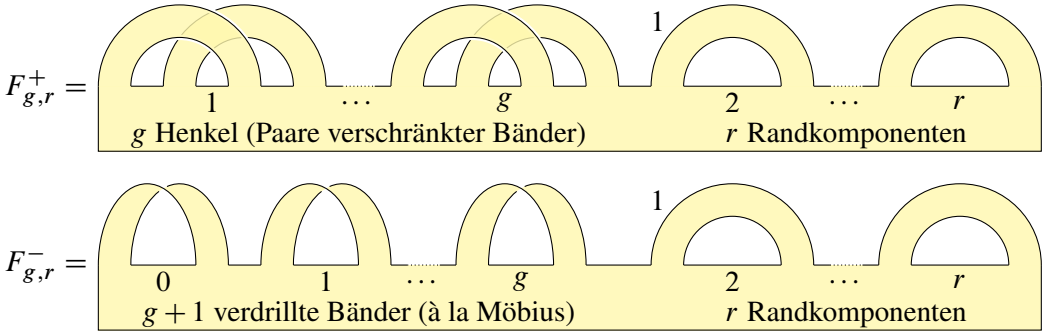


ABBILDUNG A:22. Glatte Modelle $F^{\pm}_{g,r} \subset \mathbb{R}^3$ berandeter Flächen

Hierbei ist r die Anzahl der *Randkomponenten*: $F^+_{0,1}$ ist eine Kreisscheibe und $F^+_{0,2}$ eine Kreisscheibe mit einem Loch und somit homöomorph zum Zylindermantel aus A:2. Der Parameter g heißt *Geschlecht*. Die Fläche $F^+_{g,r}$ ist *orientierbar*, anschaulich also zweiseitig.

Hingegen ist $F^-_{g,r}$ *nicht-orientierbar*: Man kann auf dieser Fläche von der „einen Seite“ auf die „andere Seite“ herumlaufen; diese Begriffe haben nur lokal eine Bedeutung, global gesehen gibt es nur eine Seite. Im einfachsten Falle ist $F^-_{0,1}$ das Möbius–Band aus A:2.

Bemerkung. Meine Nummerierung folgt einer gewissen Logik; bei $F^+_{g,r}$ ist sie Standard, bei $F^-_{g,r}$ beginne ich mit Geschlecht 0, wo üblicherweise Geschlecht 1 vereinbart wird.

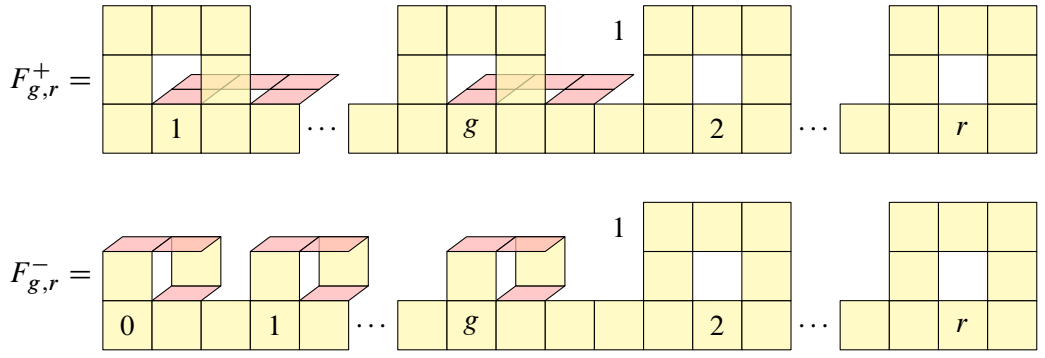


ABBILDUNG A:23. Kubische Modelle $F^{\pm}_{g,r} \subset \mathbb{R}^3$ berandeter Flächen

Übung A4C. Verstecken sich unter unseren Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ homöomorphe Paare? Sie haben die Werkzeuge: Berechnen Sie $\chi(F^+_{g,r}) = 2-2g-r$ und $\chi(F^-_{g,r}) = 1-g-r$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§A4f. Modelle geschlossener Flächen. Die obigen Flächen $F^{\pm}_{g,r}$ sind kompakt und haben $r \geq 1$ Randkomponenten. Es gibt auch kompakte Flächen ohne Rand, *geschlossene Flächen* genannt. Für jedes Geschlecht $g \in \mathbb{N}$ haben wir folgende Modellfläche $F^+_g = F^+_{g,0}$:

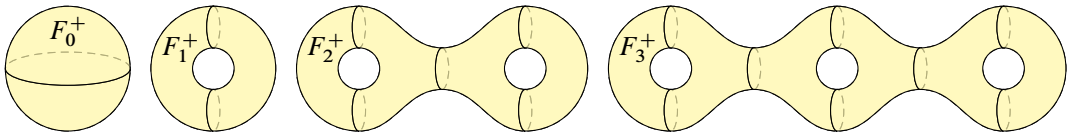


ABBILDUNG A:24. Glatte Modelle $F^+_g \subset \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen.
Nach der Topologie sehen Sie diverse Backwaren mit anderen Augen!

Hier ist $F^+_0 \cong \mathbb{S}^2$ die Sphäre (eine Kugeloberfläche), $F^+_1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der Torus (eine Reifenoberfläche), F^+_2 der Doppeltorus usw. Wir wollen ein kubisches Modell mit Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ angeben. Als Grundriss in der Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten wir folgende Teilräume:

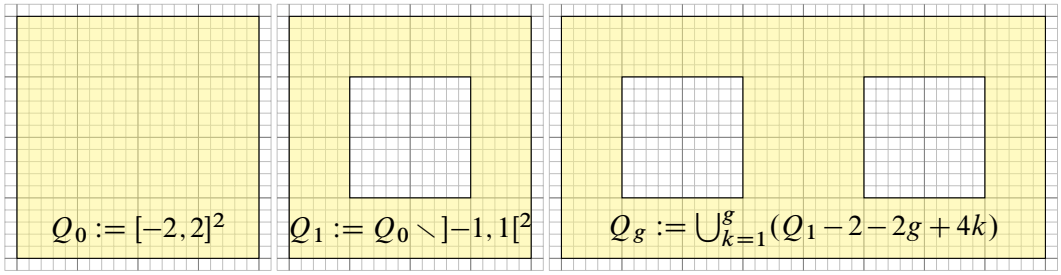


ABBILDUNG A:25. Grundriss $Q_g \subset \mathbb{R}^2$ des Henkelkörpers $H_g = Q_g \times [-1,1]$

Hier ist $Q_g \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck mit g Löchern. Es handelt sich um eine kompakte Fläche mit Rand, homöomorph zu $F^+_{0,g+1}$. Der Produktraum $H_g := Q_g \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$ ist der *Henkelkörper* vom Geschlecht g. Dies ist ein Quader mit g Löchern. Es handelt sich um eine 3–Mannigfaltigkeit; der Rand ist eine zusammenhängende geschlossene Fläche:

$$H_g := Q_g \times [-1,1], \qquad F^+_g := \partial H_g = (Q_g \times \{\pm 1\}) \cup (\partial Q_g \times [-1,1])$$

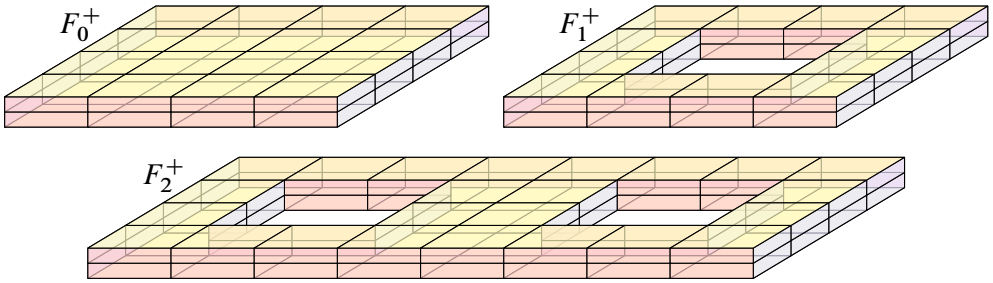


ABBILDUNG A:26. Kubische Modelle $F^+_g \subset \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen.
Nach der Topologie sehen Sie auch Schokoladentafeln mit anderen Augen!

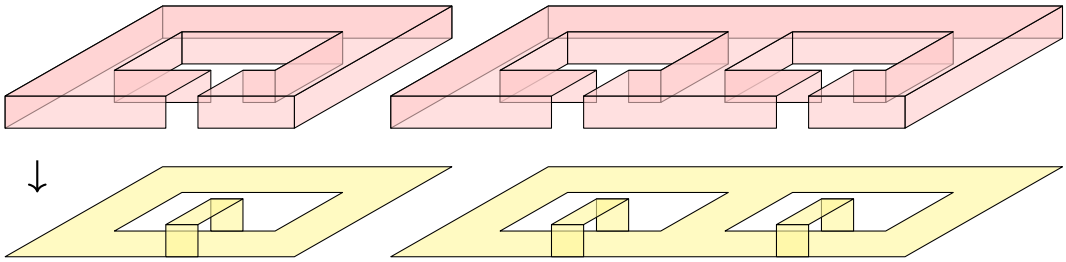


ABBILDUNG A:27. Die berandete Fläche $F^+_{g,1}$ wird geschlossen zu F^+_g.

☞ **Übung A4D.** Verstecken sich unter unseren Modellflächen F^+_g homöomorphe Paare? Sie haben die Werkzeuge: Berechnen Sie $\chi(Q_g) = 1-g$ sowie $\chi(F^+_g) = 2-2g$. ☜

☞ **Übung A4E.** Entfernt man aus der geschlossenen Fläche F^+_g das Innere eines Rechtecks so erhält man eine berandete Fläche. Diese erweist sich als homöomorph zu $F^+_{g,1}$ wie in Abbildung A:27. Umgekehrt: Verklebt man die Randkurve der berandeten Fläche $F^+_{g,1}$ mit einem Rechteck, so erhält man die geschlossene Fläche F^+_g. Das ist zunächst keineswegs offensichtlich, und ich empfehle es nachdrücklich als Übung in räumlicher Anschauung. ☜

☞ **§A4g. Modelle für nicht-orientierbare geschlossene Flächen.** Wir haben oben nicht-orientierbare Flächen $F^-_{g,r}$ mit $r \geq 1$ Randkomponenten kennengelernt, die berühmteste ist das Möbius–Band $F^-_{0,1}$. Es gibt daneben auch geschlossene nicht-orientierbare Flächen. Diese erhalten wir am einfachsten durch folgende Quotientenkonstruktion. ☜

✍ Unsere Modellfläche $F^+_g = \partial H_g \subset \mathbb{R}^3$ ist orientierbar, anschaulich gesagt zweiseitig. ✍
Die Punktspiegelung $x \mapsto -x$ erhält den Henkelkörper $H_g = -H_g$, somit $F^+_g = -F^+_g$.
Ihr Fixpunkt 0 liegt im Inneren / Äußeren, auf dem Rand $\partial H_g = F^+_g$ ist sie fixpunktfrei.

Durch Identifikation gegenüberliegender Punkte erhalten wir $F^-_g = F^+_g/\{\pm\}$. Dies ist eine *nicht-orientierbare Fläche*. (Quotienten sind sehr nützlich, mehr dazu in Kapitel E.)

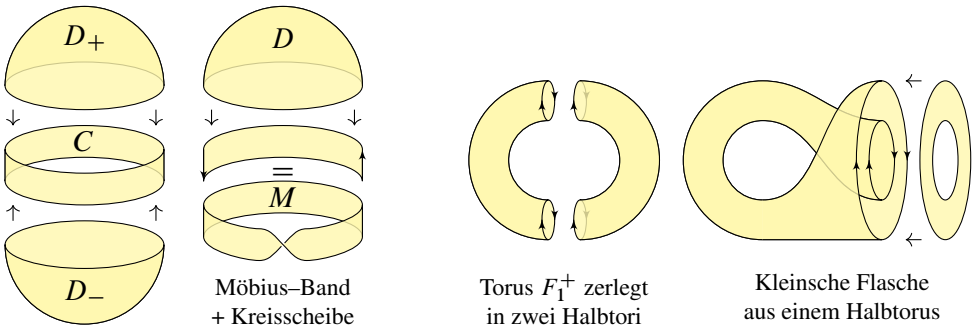


ABBILDUNG A:28. Bastelanleitung für projektive Ebene und Kleinsche Flasche

☞ **Beispiel.** Die projektive Ebene $F^-_0 = \mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm\}$ entsteht aus der Sphäre $\mathbb{S}^2$, indem wir je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$ identifizieren. Ein Zylindermantel C um den Äquator wird hierbei zum Möbius–Band M. Wir erhalten $\mathbb{RP}^2$, indem wir an M die Kreisscheibe D ankleben. Dies ist das kleinste Beispiel für eine nicht-orientierbare, geschlossene Fläche. Die Kleinsche Flasche $F^-_1 = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm\}$ entsteht analog aus dem Torus. ☜

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A4h. Realisierungen im Raum.** Abbildung A:29 skizziert die Kleinsche Flasche. ☜

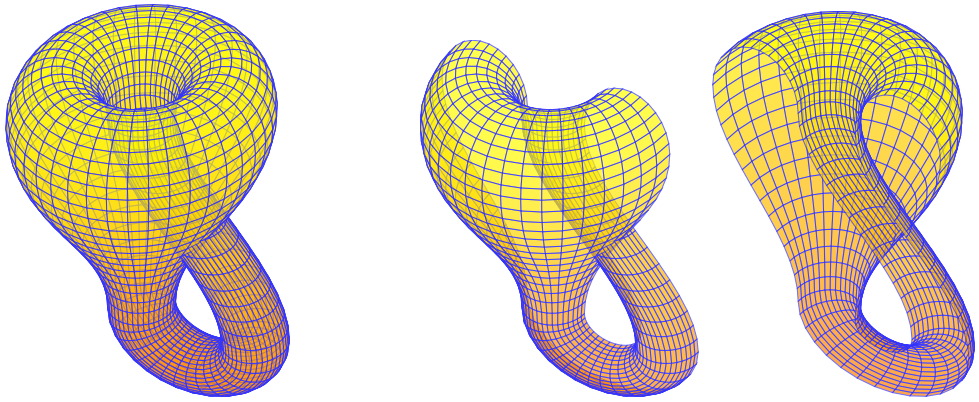


ABBILDUNG A:29. Kleinsche Flasche als Verklebung zweier Möbius–Bänder

Bemerkung. Dies ist eine glatte Immersion $F_1^- \looparrowright \mathbb{R}^3$. Notgedrungen entstehen dabei Mehrfachpunkte, doch nur harmlose. Erst im $\mathbb{R}^4$ ist genug Platz, um lokal einen der beiden Teile in die vierte Raumrichtung zu verschieben und so die Selbstdurchdringung aufzulösen.

Bemerkung. Graphik A:29 macht anschaulich, dass die Kleinsche Flasche nicht orientierbar ist: Wenn man einmal über den Henkel läuft, gelangt man spiegelverkehrt an den Ausgangspunkt zurück. Immersiert im $\mathbb{R}^3$ transportiert man einen Normalenvektor längs dieses Weges und kehrt mit dem umgekehrten Normalenvektor zum Ausgangspunkt zurück: Die Umgebung des umlaufenen Weges ist ein Möbius–Band. Genauer zeigt A:29, wie die Kleinsche Flasche als Verklebung zweier Möbius–Bänder längs ihres Randes entsteht.

Bemerkung. Unter den nicht-orientierbaren Flächen hat es das Möbius–Band zu populärer Berühmtheit gebracht, aber auch die Kleinsche Flasche erfreut sich großer Beliebtheit, siehe A:30 links. Die rechte Abbildung zeigt die projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ als Boysche Fläche im $\mathbb{R}^3$. Diese Skulptur steht vor dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, wunderbar idyllisch im Schwarzwald gelegen etwa ein Drittel der Luftlinie von Freiburg nach Stuttgart.

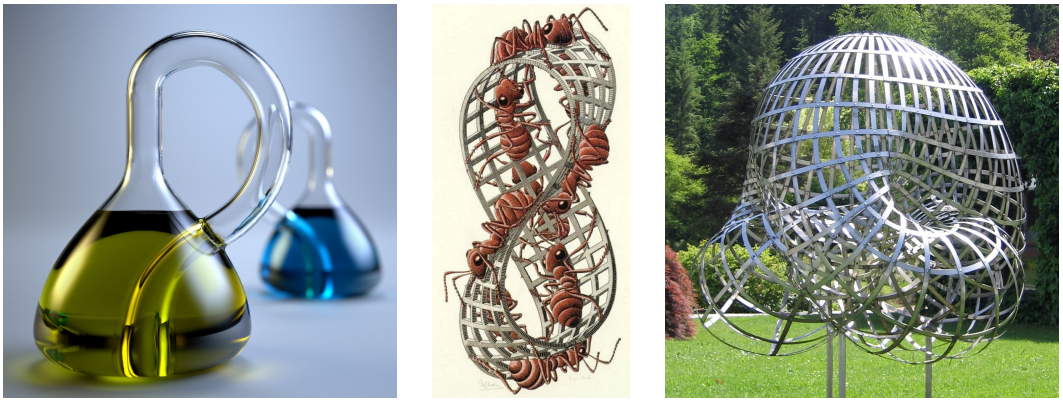


ABBILDUNG A:30. Kleinsche Flasche und Möbius–Band und Boysche Fläche

§A4i. Warum existiert keine Einbettung $F_g^- \hookrightarrow \mathbb{R}^3$? Alle berandeten Flächen $F_{g,r}^{\pm}$ und alle orientierbaren geschlossenen Flächen F_g^+ können wir uns leicht vorstellen, denn sie lassen sich im $\mathbb{R}^3$ realisieren und sind somit unserer Anschauung direkt zugänglich.

Die nicht-orientierbaren geschlossenen Flächen F_g^- hingegen sind zunächst unvertraut und wenig anschaulich. Das hat einen handfesten, mathematisch beweisbaren Grund: Die nicht-orientierbaren Flächen F_g^- lassen sich nicht im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten!

Wie beweisen wir die *Unmöglichkeit* einer Einbettung? Wie immer, indem wir explizit ein *Hindernis* angeben! Die Beweis-Idee ist ganz anschaulich und überraschend einfach:

Bemerkung (Zerlegungssatz K5D)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine zusammenhängende kompakte Fläche. Ist S geschlossen, also ohne Rand, so zerfällt das Komplement $\mathbb{R}^3 \smallsetminus S = A \sqcup B$ in zwei Gebiete, A unbeschränkt, B beschränkt, und für den Rand gilt $\delta A = \delta B = S$. Somit wird S orientiert durch die (von B nach A) nach außen weisende Normale, also $S \cong F_g^+$.

Hieraus folgt die Unmöglichkeit einer Einbettung $F_g^- \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

§A4j. Die Boysche Fläche. Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 = F_0^-$ und allgemein F_g^- lässt sich nicht in den Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten. Für die Kleinsche Flasche existiert immerhin eine Immersion $F_1^- \looparrowright \mathbb{R}^3$ mit harmlosen Mehrfachpunkten wie in A:29 gezeigt. David HILBERT vermutete, dass für $\mathbb{RP}^2$ keine Immersion $\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ existiert und schlug dies Werner BOY (1879–1914) als Promotionsthema vor. Boy gelang es daraufhin, eine Immersion $\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ zu konstruieren. Ich skizziere hier eine simpliziale Realisierung:

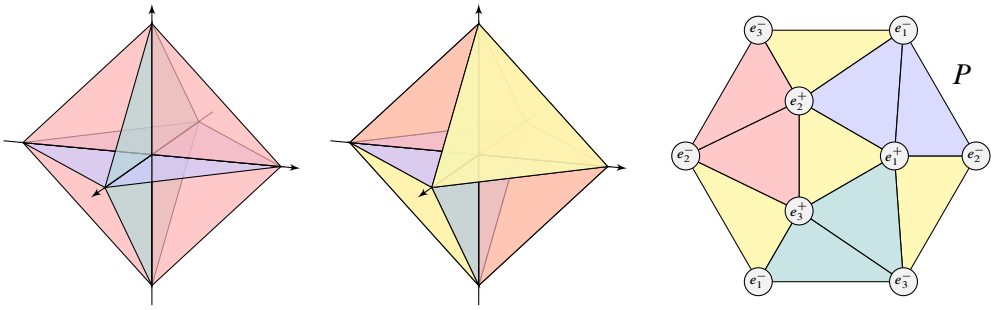


ABBILDUNG A:31. Boysche Fläche $\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$, simplizial realisiert

Die sechs Eckpunkte $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$ im $\mathbb{R}^3$ spannen ein reguläres Oktaeder auf. Wir beginnen mit den Quadraten $[\pm e_1, \pm e_2]$ (blau), $[\pm e_2, \pm e_3]$ (rot), $[\pm e_3, \pm e_1]$ (grün). Die Selbstdurchdringungen wollen wir ignorieren. Wir fügen vier der acht Dreiecke des Oktaeders hinzu: $[+e_1, +e_2, +e_3]$, $[+e_1, -e_2, -e_3]$, $[-e_1, +e_2, -e_3]$, $[-e_1, -e_2, +e_3]$ (gelb).

Ist das eine geschlossene Fläche, also lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^2$? Ja! Jede Kante liegt in zwei Facetten. An jeder Ecke liegen zyklisch Quadrat-Dreieck-Quadrat-Dreieck. Welche Fläche ist es? Wir teilen das erste Quadrat $[\pm e_1, \pm e_2]$ in zwei Dreiecke $[+e_1, -e_1, +e_2]$, $[+e_1, -e_1, -e_2]$, ebenso zyklisch die anderen beiden Quadrate. Wir finden 6 Ecken, 15 Kanten, 10 Dreiecken, also $\chi(P) = 1$. Zusammen mit der folgenden Flächenklassifikation (Satz A4J) folgt daraus bereits $|P| \cong F_0^- \cong \mathbb{RP}^2$. Wir können dies auch direkt sehen (A:31 rechts): Unser Simplizialkomplex P entspricht dem Ikosaederrand $|K| \cong \mathbb{S}^2$, wobei wir gegenüberliegende Punkte identifizieren, also $|P| \cong \mathbb{RP}^2$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§A4k. Ist unsere Beispielliste redundanzfrei? Sorgfalt und Ökonomie gebieten, unsere Liste der Flächen soweit möglich zu kürzen, indem wir unter unseren Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ homöomorphe Paare erkennen und sodann als redundante Dopplungen aussortieren.

Warum ist das so schwer? Zum einen, weil wir hier mit sehr wenig Struktur arbeiten: Stetige Abbildungen, die als Homöomorphismen in Frage kämen, gibt es unvorstellbar viele! Zum anderen, weil es sich um ein negatives Ergebnis handelt: Um zu beweisen, dass ein Homöomorphismus existiert, genügt es, einen zu konstruieren. (Satz A3M ist ein prototypisches Beispiel.) Um hingegen zu beweisen, dass es keinen Homöomorphismus gibt, genügt es nicht, keinen zu finden und nach verzweifelter Suche aufzugeben. Wir müssen das Hindernis verstehen und erklären, *warum* es keinen Homöomorphismus geben kann. (Satz A3J ist ein prototypisches Beispiel.) Das ist die Aufgabe der *topologischen Invarianten* (A1F).

Hierzu haben wir oben die Euler–Charakteristik für kompakte Polyeder definiert. Dies ist zunächst eine geometrische Konstruktion, doch sie erweist sich tatsächlich als topologisch invariant (Satz A3J). Erst damit wird sie zu einem topologischen Werkzeug:

Satz A4F. *Für alle $g,r \in \mathbb{N}$ gilt $\chi(F^{+}_{g,r}) = 2-2g-r$ und $\chi(F^{-}_{g,r}) = 1-g-r$. Dank der topologischen Invarianz von Euler–Charakteristik, Rand und Orientierbarkeit sind keine zwei Flächen $F^{\pm}_{g,r}$ homöomorph. Anders gesagt, aus $(g,r,\varepsilon) \neq (h,s,\delta)$ folgt $F^{\varepsilon}_{g,r} \ncong F^{\delta}_{h,s}$.*

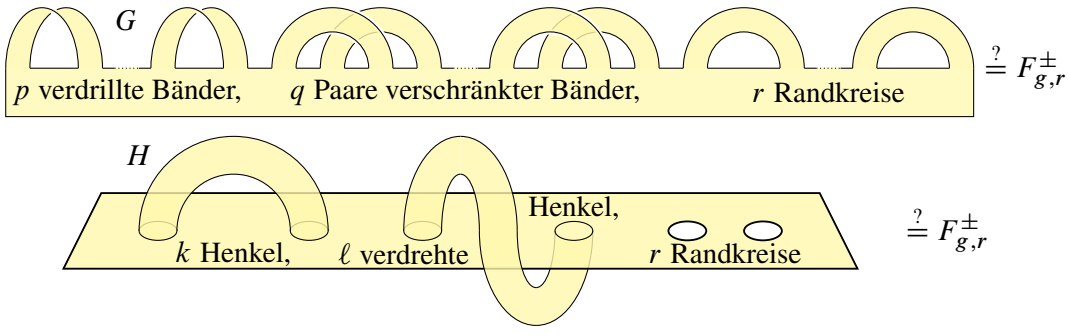
Übung A4G. Zur Einübung der Begriffe rechne man die Euler–Charakteristik $\chi(F^{\pm}_{g,r})$ nach: (1) direkt, (2) mit dem Euler–Maß, (3) durch Ankleben von Henkeln bzw. Bändern.

✻ **A4G.** *Direkte Methode:* Man kann die Euler–Charakteristik geduldig abzählen. (Das ist allerdings mühsam.) Der Quotient $F^{-}_{g} = F^{+}_{g}/\{\pm\}$ identifiziert je zwei d–Polytope, die Euler–Charakteristik wird somit halbiert.

Euler–Maß: Wir scannen die Modellfläche aus Abbildung A:26 mit Ebenen $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ und bilden die Wechselsumme (A.5). Das Ergebnis ist $\chi(F^{+}_{g}) = g-0+g$ wie zuvor, aber die Rechnung ist viel effizienter!

Schneiden und Kleben: Die Sphäre F^{+}_{0} hat Euler–Charakteristik 2. Ausschneiden eines Loches addiert -1 zur Euler–Charakteristik, Ankleben eines Henkels im Inneren addiert -2, Ankleben eines Bandes an den Rand addiert -1. Damit können wir die Euler–Charakteristik $\chi(F^{\pm}_{g,r})$ für alle Modellflächen leicht berechnen.

§A4l. Ist unsere Beispielliste vollständig? Unsere Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ sind zunächst eine Sammlung repräsentativer Beispiele; wir schulen daran unsere Anschauung und topologischen Argumente. Wir können versuchen, weitere Flächen herzustellen, etwa folgende:



Jede dieser Flächen erweist sich als homöomorph zu einer der bereits gefundenen: Zu welcher Fläche $F^{\pm}_{g,r}$ gelangen Sie? Gibt es hierbei mehrere Möglichkeiten? Versuchen Sie zeichnerisch, die gezeigte Fläche in diese Modellfläche zu deformieren; das ist nicht leicht!

§A4m. Der Klassifikationssatz für kompakte Flächen. Nach vielen Versuchen wird man vermuten, dass unsere Liste vollständig ist. Das ist nützlich zu wissen, denn damit kennen wir *alle* Flächen, ganz egal welchem Kontext sie entspringen und in welcher Verkleidung sie daherkommen. Zum Beweis verfahren wir wie folgt:

Satz A4H. *Jede Fläche X kann trianguliert werden: $X \cong |\mathcal{K}|$, d.h. X ist homöomorph zu einem Polyeder $|\mathcal{K}|$; hierbei ist der Komplex $\mathcal{K}$ genau dann endlich, wenn X kompakt ist.*

Dieser Satz gilt allgemein für Mannigfaltigkeiten in Dimension ≤ 3, aber nicht mehr in Dimension ≥ 4. Sein Beweis ist technisch aufwändig und wird hier nicht durchgeführt. Wir werden voraussetzen, dass unsere Flächen bereits trianguliert vorliegen, und zeigen dann:

Satz A4I (Homöomorphie durch Schneiden und Kleben)**.** *Jede kompakte zusammenhängende triangulierte Fläche F können wir durch einen stückweise affinen Homöomorphismus in eine unserer triangulierten Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ überführen.*

Zusammenfassend erhalten wir die folgende Klassifikation kompakter Flächen:

Satz A4J (Klassifikationssatz für kompakte Flächen)**.** *Jede kompakte zusammenhängende Fläche (eventuell mit Rand) ist homöomorph zu genau einem unserer obigen Modelle $F^{\pm}_{g,r}$.*

Das heißt, unsere Liste $F^{\pm}_{g,r}$ ist bis auf Homöomorphie vollständig und redundanzfrei. Das ist ein Musterbeispiel einer Klassifikation: Jede kompakte zusammenhängende Fläche F wird bis auf Homöomorphie eindeutig durch drei Daten charakterisiert: Ihre Orientierbarkeit $\varepsilon(F) \in \{\pm\}$, die Anzahl $r(F) \in \mathbb{N}$ ihrer Randkomponenten sowie ihre Euler–Charakteristik $\chi(F)$. Letztere lässt sich leicht in das Geschlecht $g(F)$ umrechnen. Dieser einfache Algorithmus löst das Homöomorphieproblem kompakter Flächen!

§A4n. Vorgehensweise. Der Klassifikationssatz kompakter Flächen ist ein schönes Beispiel und eine erste wichtige Anwendung unserer topologischen Techniken. Formulierung und Beweis beinhalten im Keim bereits die drei Teile dieser Vorlesung:

Zunächst legt die *analytische Topologie* die Grundlagen der *topologischen Räume* und *stetigen Abbildungen*, aus denen sich der Begriff des *Homöomorphismus* ableitet. Dieser Rahmen erlaubt insbesondere, topologische Begriffe wie *Kompaktheit* und *Zusammenhang* präzise und ausreichend allgemein zu behandeln, und ebenso topologische Konstruktionen wie die oben bereits genutzten *Teilräume*, *Produkträume* und *Quotientenräume*.

Die *geometrische Topologie* nutzt den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ als Modell und erklärt Begriffe wie *Mannigfaltigkeit* und *Rand* und *Orientierbarkeit*. Wir nutzen hier insbesondere *simpliziale Komplexe* und *Triangulierungen*, das heißt, wir konstruieren topologische Räume aus einfachen Grundobjekten wie Punkten, Geradenstücken, Dreiecken, etc.

Die *algebraische Topologie* konstruiert Invarianten, mit denen wir topologische Räume unterscheiden und wesentliche Eigenschaften ablesen können. Im obigen Beispiel kann man etwa eine Sphäre und einen Torus durch die Euler–Charakteristik unterscheiden, oder dadurch, ob sich jeder geschlossene Weg zu einem Punkt zusammenziehen lässt. Der letzte Teil der Vorlesung baut diese plausible Beobachtung zu einer hübschen Theorie aus und diskutiert die Fundamentalgruppe und das hierzu duale Konzept der Überlagerungen.

Satz A4J und seine Anwendung können Sie jetzt schon verstehen, seinen Beweis noch nicht. Diese Vorlesung legt hierzu ein solides topologisches Fundament.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A4o. Können wir auch nicht-kompakte Flächen klassifizieren?** Wir haben bisher ☜ nur kompakte Flächen diskutiert. In polytopaler Darstellung bestehen kompakte Flächen nur aus endlich vielen Polytopen, das erleichtert alles. Nicht-kompakte Flächen können wesentlich komplizierter sein; hiervon können und sollten Sie sich selbst überzeugen, indem Sie möglichst vielgestaltige Beispiele von Flächen $X \subset \mathbb{R}^3$ skizzieren, etwa die folgenden:

Beispiel. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine nicht-kompakte Fläche, ebenso jede offene Teilmenge wie $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{Z}^2$ oder $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C^2$, wobei C die Cantor–Menge und C^2 der Cantor–Staub ist (C:15).

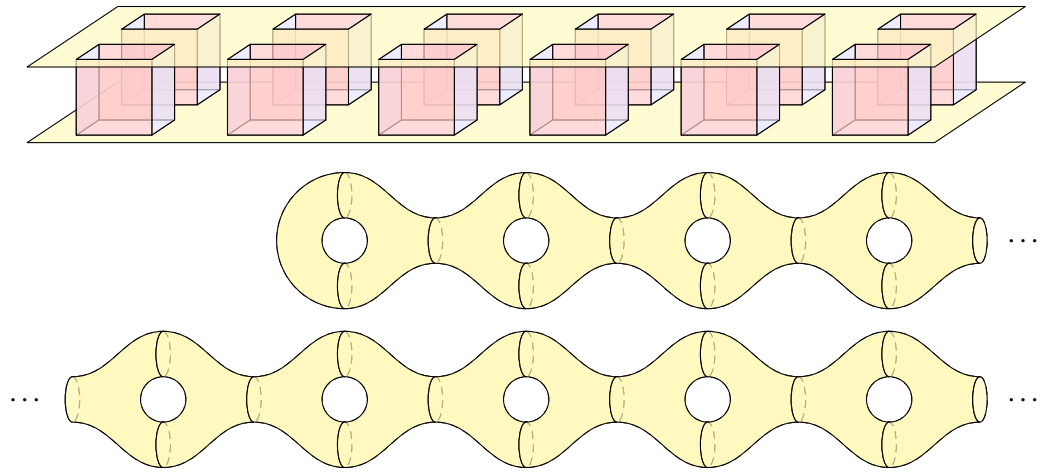


ABBILDUNG A:32. Offene Flächen unendlichen Geschlechts

Beispiel. Die Teilmenge $Q = \mathbb{R}^2 \smallsetminus (\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}]a - 1/4, a + 1/4[)^2$ ist eine ebene Fläche mit Rand ∂Q. Das Produkt $H = Q \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$ ist ein unendlicher Henkelkörper und sein Rand $F = \partial H = (Q \times \{\pm 1\}) \cup (\partial Q \times [-1, 1])$ ist die offene Fläche unendlichen Geschlechts aus Abbildung A:32 (oben). Entsprechend konstruiert man die beiden anderen Beispiele: das Monster von Loch Ness (mittig) und die Jakobsleiter (unten). Diese drei Flächen sind offen, zusammenhängend, orientierbar, und haben unendliches Geschlecht. Das Loch-Ness-Monster hat nur ein Ende, die Jakobsleiter hingegen hat zwei Enden. Sind diese Flächen homöomorph? Oder welche topologischen Unterschiede verhindern dies?

Diese Beispiele lassen erahnen, dass *nicht-kompakte* Flächen in großer Vielfalt existieren. Eine kompakte randlose Fläche heißt *geschlossen*, eine nicht-kompakte randlose Fläche heißt *offen*. Erstaunlicherweise lassen sich trotz aller Komplexität auch offene Flächen noch klassifizieren. Auch wenn wir die benutzten Begriffe erst im Verlauf der Vorlesung entfalten, so will ich doch das Ergebnis nennen, als Illustration und um Ihre Phantasie anzuregen.

Der Satz von Béla KERÉKJÁRTÓ (1898–1946) besagt: Jede zusammenhängende offene Fläche wird bis auf Homöomorphie klassifiziert durch Orientierbarkeit und Geschlecht (eventuell unendlich) sowie ihren *idealen Rand*. Letzterer ist ein Tripel $E \supset E' \supset E''$ kompakter, separabler, total unzusammenhängender Räume, nämlich dem Raum E aller Enden, dem Raum E' der nicht-planaren Enden, und dem Raum E'' der nicht-orientierbaren Enden. Einen Beweis und die Konstruktion von Modellen finden Sie bei Ian Richards, *On the classification of non-compact surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963) 259–269.

§A5. Von Topologie zu Geometrie: Der Satz von Gauß–Bonnet

§A5a. Der Satz von Gauß–Bonnet. Ich schließe diese Einleitung zu Flächen mit dem wunderbaren Satz von Gauß–Bonnet, auch als Ausblick auf die Differentialgeometrie:

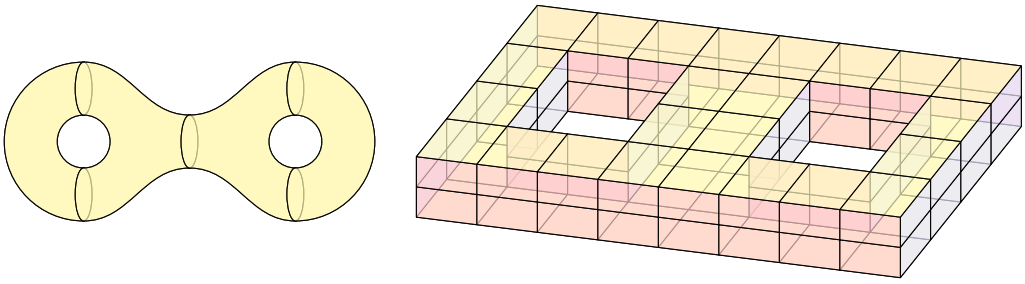


ABBILDUNG A:33. Vorgelegt ist eine geschlossene Fläche F. Welche Beziehung gilt zwischen ihrer Gesamtkrümmung $\kappa(F)$ und ihrer Euler–Charakteristik $\chi(F)$?

Satz A5A (Gauß–Bonnet)**.** *Für jede geschlossene Fläche F gilt $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$.*

In Worten: Die Gesamtkrümmung der Fläche ist gleich 2π mal der Euler–Charakteristik. Diese Gleichung ist eine fundamentale Beziehung zwischen lokalen geometrischen Daten (der Krümmung) und einer globalen topologischen Eigenschaft (der Euler–Charakteristik). Sie ist die erste in einer Reihe wichtiger Formeln dieses Typs. Geometrische Eigenschaften bleiben unter Isometrien erhalten, topologische Eigenschaften bleiben unter Homöomorphismen erhalten. Jede Beziehung zwischen beiden Welten ist bemerkenswert!

Bemerkung. Für *glatte Flächen* ist dieser Satz $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$ ein erster Triumph der Differentialgeometrie. Der Weg dorthin ist lang, aber lohnend, und ein schönes Programm für eine einführende Vorlesung zur Differentialgeometrie: Hierzu muss zunächst der Begriff der *glatten Fläche* oder allgemein einer *glatten Mannigfaltigkeit* erklärt werden (siehe Kapitel K). Um hierauf Längen und Winkel zu messen, benötigen wir sodann eine *Riemannsche Metrik*. Schließlich muss die *Krümmung* erklärt und der obige Satz bewiesen werden. Dies erfordert Integration, denn die Krümmung ist stetig über die gesamte Fläche verteilt.

Bemerkung. Für *polytopale Flächen* $F \subset \mathbb{R}^d$ sind Formulierung und Beweis des Satzes viel einfacher. Ich möchte dies im Folgenden ausführen, denn alle Begriffe sind elementar:

- Die Krümmung ist in den Ecken konzentriert und kann somit leicht summiert werden.
- Der Beweis des Satzes $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$ gelingt durch geschickte doppelte Summation.

Bemerkung. René DESCARTES (1596–1650) bewies die Gleichung $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$ bereits um 1620 im Spezialfall der Randfläche $F = \partial P$ eines konvexen 3–Polytops $P \subset \mathbb{R}^3$. Sein Ergebnis ging jedoch verloren und wurde erst über zweihundert Jahre später in Leibniz' Handschriften wiederentdeckt und 1860 veröffentlicht.

Carl–Friedrich GAUSS (1777–1855) untersuchte um 1825 glatte Flächen und ihre differentialgeometrische Krümmung und formulierte den Satz für geodätische Dreiecke. Pierre BONNET (1819–1892) leitete 1848 hieraus die Gauß–Bonnet–Formel für glatte Sphären ab. Walther DYCK (1856–1934) hat 1888 den Satz für glatte Flächen beliebigen Geschlechts formuliert; er scheint als erster diese Allgemeinheit erkannt zu haben.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§A5b. Die Krümmung polytopaler Flächen. Für polytopale Flächen $F = |\mathscr{K}| \subset \mathbb{R}^d$ definieren wir nun die Krümmung $\kappa(F)$ und beweisen damit den Satz von Gauß–Bonnet.

Definition A5B. Je drei Punkte $a \neq z \neq b$ in $\mathbb{R}^d$ definieren einen Winkel mit Scheitel z. Das *absolute Winkelmaß* $\alpha = \angle(a,z,b) \in [0,\pi]$ definieren wir dank Cauchy–Schwarz–Ungleichung (C1B) über das Skalarprodukt $\langle a-z \mid b-z \rangle = \cos(\alpha) \cdot |a-z| \cdot |b-z|$, also

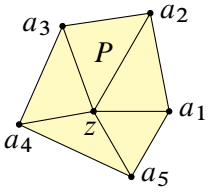
$$\angle(a,z,b) := \arccos\left(\frac{\langle a-z \mid b-z \rangle}{|a-z| \cdot |b-z|}\right) \in [0,\pi].$$

Bemerkung. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ haben wir zudem die kanonische Orientierung und können ein Winkelmaß mit Vorzeichen definieren, siehe §J1g. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 3$ gelingt dies nur absolut, ohne Orientierung und ohne Vorzeichen: Warum?

Sei $P = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \subset \mathbb{R}^d$ ein zweidimensionales Polytop mit Ecken $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in dieser Reihenfolge; als Konvention setzen wir $a_0 = a_n$ und $a_{n+1} = a_1$ zyklisch fort. Der *Innenwinkel* in der Ecke $a_k \in \operatorname{vert} P$ ist dann gegeben durch $\angle(P, a_k) := \angle(a_{k-1}, a_k, a_{k+1})$. Aus der ebenen Geometrie wissen wir:

Lemma A5C. *Für die Innenwinkelsumme* $\angle P := \sum_{k=1}^{n} \angle(P, a_k)$ *gilt* $\angle P = (n-2)\pi$.

BEWEIS. Da P in einer affinen Ebene $A \subset \mathbb{R}^d$ liegt, genügt es, den ebenen Fall $d = 2$ zu betrachten. Für $n = 3$ ist $P = [a_1, a_2, a_3]$ ein Dreieck und hier gilt $\angle P = \pi$ nach Euklid. Für $n \geq 4$ wählen wir einen inneren Punkt z, etwa das Baryzentrum, und triangulieren P durch die n Dreiecke $[a_{k-1}, a_k, z]$ für $k = 1, \ldots, n$. Die Summe aller Innenwinkel ist $n\pi$, abzuziehen ist der volle Winkel 2π um z. □



Im Falle der *ebenen* Fläche P liegt im inneren Punkt z keine Krümmung vor: Die Summe der anliegenden Winkel ergibt 2π. Dies veranlasst uns zu folgender Definition:

Definition A5D. Sei $F = |\mathscr{K}| \subset \mathbb{R}^d$ eine geschlossene polytopale Fläche. Wir definieren ihre *Krümmung* im Punkt $z \in F$ als 2π minus die Summe der anliegenden Winkel:

$$\kappa(F,z) := 2\pi - \sum_{P \gg z} \angle(P,z)$$

Für Facetten $P \in \mathscr{K}_2$ und ihre Ecken $z \in \operatorname{vert} P$ schreiben wir kurz $P \gg z$ bzw. $z \ll P$. Für $z \in \operatorname{Int} P$ im Inneren einer Kante oder Facette P gilt $\kappa(F,z) = 0$ nach Triangulierung. Die Krümmung ist demnach konzentriert in den Ecken $z \in \operatorname{vert} \mathscr{K}$ des polytopalen Komplexes. Die *Gesamtkrümmung* der polytopalen Fläche F definieren wir als die Summe

$$\kappa(F) := \sum_{z \in F} \kappa(F,z).$$

Bemerkung A5E. Die Krümmung $\kappa = \kappa(F,z)$ im Punkt z hat die folgende geometrische Bedeutung: Sei $B(r) = \{ x \in F \mid d(x,z) \leq r \}$ der Ball und $S(r) = \{ x \in F \mid d(x,z) = r \}$ die Sphäre um z in F mit Radius $r > 0$. Für hinreichend kleine Radien $0 < r \leq r_0$ gilt $\operatorname{vol}_1 S(r) = (2\pi - \kappa)r$ und $\operatorname{vol}_2 B(r) = (\pi - \kappa/2)r^2$. Im flachen Fall $\kappa = 0$ sind dies die vertrauten Formeln $\operatorname{vol}_1(r\mathbb{S}^1) = 2\pi r$ und $\operatorname{vol}_2(r\mathbb{D}^2) = \pi r^2$. Bei positiver Krümmung wachsen Umfang und Flächeninhalt langsamer, bei negativer Krümmung schneller. Diese Formeln definieren die Krümmung $\kappa(F,z)$ *lokal* und *intrinsisch*, unabhängig vom Komplex $\mathscr{K}$.

☞ **Beispiel.** Die Würfelfläche F hat 8 Ecken mit Krümmung $\kappa(F,z) = \pi/2$, also $\kappa(F) = 4\pi$. ☜ Tetraederfläche: 4 Ecken mit $\kappa(F,z) = \pi$. Oktaederfläche: 6 Ecken mit $\kappa(F,z) = 2\pi/3$. Ikosaeder: 12 Ecken mit $\kappa(F,z) = \pi/3$. Dodekaeder: 20 Ecken mit $\kappa(F,z) = \pi/5$. In all diesen sphärischen Fällen erhalten wir als Gesamtkrümmung $\kappa(F) = 4\pi = 2\pi \cdot \chi(F)$.

☞ **Beispiel.** Wir betrachten die kubische Modellfläche $F = F_g^+$ aus Abbildung A:23. In jeder ☜ der 8 äußeren Ecken liegen drei 90°–Winkel an, also $\kappa(F,z) = \pi/2$. In jeder der $8g$ inneren Ecken liegen fünf 90°–Winkel an, also $\kappa(F,z) = -\pi/2$. Alle anderen Punkte sind flach, mit Krümmung $\kappa(F,z) = 0$. Die Gesamtkrümmung ist $\kappa(F) = 4\pi - 4\pi g = 2\pi \cdot \chi(F)$.

✍ **Satz A5F** (Gauß–Bonnet). *Für jede geschlossene polytopale Fläche $F = |\mathscr{K}| \subset \mathbb{R}^d$ gilt* ✍

$$\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F).$$

Das zeigt insbesondere: Die Euler–Charakteristik $\chi(F)$ hängt nur von F ab und nicht von der gewählten polytopalen Unterteilung $\mathscr{K}$. Die Gesamtkrümmung $\kappa(F)$ hängt nur von der topologischen Gestalt der Fläche F ab und nicht von der gewählten Geometrie.

✍ BEWEIS. Der polytopale Komplex $\mathscr{K}$ habe f_0 Ecken, f_1 Kanten und f_2 Facetten. Wir ✍ summieren zunächst die Innenwinkel aller Facetten $P \in \mathscr{K}_2$ mit Hilfe von Lemma A5C:

$$\sum_{P\in\mathscr{K}_2} \sum_{z\ll P} \angle(P,z) = \sum_{P\in\mathscr{K}_2} \big[n(P)-2\big]\pi = \pi\Big[\sum_{P\in\mathscr{K}_2} n(P)\Big] - 2\pi f_2 = 2\pi f_1 - 2\pi f_2.$$

Jede Facette $P \in \mathscr{K}_2$ hat $n(P)$ Ecken und $n(P)$ Kanten. Jede Kante liegt in genau zwei Facetten, da die Fläche F keinen Rand hat. Bei der letzten Summe wird also jede Kante doppelt gezählt. Wir erhalten hieraus die Gesamtkrümmung als Summe über alle Ecken:

$$\kappa(F) = \sum_{z\in F} \kappa(F,z) = 2\pi f_0 - \sum_{\{z\}\in\mathscr{K}_0} \sum_{P\gg z} \angle(P,z) = 2\pi f_0 - 2\pi f_1 + 2\pi f_2 = 2\pi \cdot \chi(F) \,\square$$

☞ **Übung A5G.** Eine erste Anwendung: Nennen Sie alle geschlossenen zusammenhängenden ☜ Flächen, die sich polytopal realisieren lassen mit überall nicht-negativer Krümmung $\kappa \geq 0$.

✻ **A5G.** Wir nutzen Gauß–Bonnet (A5F): Nicht-negative Krümmung $\kappa \geq 0$ impliziert nicht-negative Euler–Charakteristik $\chi \geq 0$. Dank der Flächenklassifikation A4J gibt es nur vier geschlossene zusammenhängende Flächen mit $\chi \geq 0$: die Sphäre $\mathbb{S}^2 \cong F_0^+$ und den Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$ sowie ihre nicht-orientierbaren Quotienten, die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm\} \cong F_0^-$ und die Kleinsche Flasche $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm\} \cong F_1^-$.

Wir haben also höchstens diese vier Kandidaten. Es stellt sich nun umgekehrt die Frage: Welche dieser vier Flächen können wir so realisieren, dass ihre Krümmung überall nicht-negativ ist? Für die Sphäre ist dies klar, etwa als Rand ∂K eines konvexen Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$, besonders schön und konkret als einer der fünf platonischen Körper (siehe Abbildung A:8). Ebenso gelingt dies für die projektive Ebene, etwa ausgehend vom Ikosaeder.

Für den Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ gelingt dies nicht im $\mathbb{R}^3$: In unseren kubischen Modellen gibt es immer auch Ecken mit negativer Krümmung. Wir betrachten daher ein vierdimensionales Modell, zunächst den Quadratrand $S = \partial[-1,+1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ und dann das Produkt $T = S \times S \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Nun sind alle Ecken flach, also die Krümmung überall Null. Ebenso gelingt dies für die Kleinsche Flasche, nach geeigneter Unterteilung.

☞ **Bemerkung.** Die Gauß–Bonnet–Formel $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$ gilt auch für *glatte* Flächen ☜ F und ist ein erster Höhepunkt der Differentialgeometrie. Hier ist die *Gauß–Krümmung* $K(F,z)$ differentialgeometrisch definiert; sie ist kontinuierlich über die Fläche F verteilt, daher ergibt sich die Gesamtkrümmung nicht als Summe wie oben, sondern als Flächenintegral $\kappa(F) = \int_{z\in F} K(F,z)\,\mathrm{d}F$. Hierzu muss F kompakt und orientiert sein. Die polyedrale und glatte Version gehen durch Approximation und Grenzübergang ineinander über.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§A5c. Die Gauß–Bonnet–Formel für berandete Flächen.** Zwecks Vereinfachung haben wir hier zunächst nur *geschlossene* Flächen diskutiert. Die Gauß–Bonnet–Formel A5F gilt aber ebenso für jede kompakte Fläche F *mit Rand* ∂F. ☜

In inneren Punkten $z \in \operatorname{Int} F$ definieren wir die Krümmung $\kappa(F,z)$ wie zuvor (A5D). In jedem Randpunkt $z \in \partial F$ hingegen definieren wir die Krümmung durch

$$\kappa(F,z) := \pi - \sum_{P \gg z} \angle(P,z).$$

Wie zuvor ist die Krümmung $\kappa(F,z)$ konzentriert in den Ecken $z \in \operatorname{vert}\mathscr{K}$ des polytopalen Komplexes und kann als Volumenwachstum interpretiert werden (A5E).

Die *Gesamtkrümmung* der polytopalen Fläche F definieren wir als die Summe

$$\kappa(F) := \sum_{z \in F} \kappa(F,z) = \sum_{z \in \operatorname{Int} F} \kappa(F,z) + \sum_{z \in \partial F} \kappa(F,z).$$

☞ **Beispiel.** Sei $F = P = [a_1, a_2, \dots, a_n] \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes n–Eck mit den Innenwinkeln $\angle(P,a_k) = \angle(a_{k-1}, a_k, a_{k+1})$. Die Krümmung $\kappa(F,a_k) = \pi - \angle(P,a_k)$ misst hier die Abweichung von der Geraden. Die Gesamtkrümmung ist dank A5C also ☜

$$\kappa(F) = \sum_{k=1}^{n} \kappa(F,a_k) = n\pi - \sum_{k=1}^{n} \angle(P,a_k) = n\pi - (n-2)\pi = 2\pi = 2\pi \cdot \chi(F).$$

☞ **Satz A5H** (Gauß–Bonnet)**.** *Für jede kompakte polytopale Fläche* $F = |\mathscr{K}| \subset \mathbb{R}^d$ *gilt* ☜

$$\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F).$$

BEWEIS. Wir verallgemeinern sorgsam Satz A5F für geschlossene Flächen auf den allgemeinen Fall kompakter Flächen mit Rand. Versuchen Sie es als Übung! □

☞ ✻ **A5H.** Der polytopale Komplex $\mathscr{K}$ habe f_2 Facetten, $f_1 = f_1^\circ + f_1^\partial$ Kanten und $f_0 = f_0^\circ + f_0^\partial$ Ecken, davon f_1°, f_0° im Inneren und $f_1^\partial, f_0^\partial$ im Rand. Die Randkurve ∂F ist geschlossen, daher gilt $f_0^\partial = f_1^\partial$. ☜

Wir summieren zunächst die Innenwinkel aller Facetten $P \in \mathscr{K}_2$ mit Hilfe von Lemma A5C:

$$\sum_{P \in \mathscr{K}_2} \sum_{z \ll P} \angle(P,z) = \sum_{P \in \mathscr{K}_2} \big[n(P)-2\big]\pi = \pi\Big[\sum_{P \in \mathscr{K}_2} n(P)\Big] - 2\pi f_2 = 2\pi f_1^\circ + \pi f_1^\partial - 2\pi f_2.$$

Jede Facette $P \in \mathscr{K}_2$ hat $n(P)$ Ecken und $n(P)$ Kanten. Jede innere Kante liegt in genau zwei Facetten, jede Randkante liegt in genau einer Facette. Bei der letzten Summe wird also jede innere Kante doppelt gezählt, jede Randkante nur einfach. Wir erhalten hieraus die Gesamtkrümmung als Summe über alle Ecken $z \in \operatorname{vert}\mathscr{K}$:

$$\begin{aligned}
\kappa(F) &= \sum_{z \in \operatorname{Int} F} \kappa(F,z) + \sum_{z \in \partial F} \kappa(F,z) && = 2\pi f_0^\circ - \sum_{z \in \operatorname{Int} F} \sum_{P \gg z} \angle(P,z) + \pi f_0^\partial - \sum_{z \in \partial F} \sum_{P \gg z} \angle(P,z) \\
&= 2\pi f_0^\circ + \pi f_0^\partial - \sum_{P \in \mathscr{K}_2} \sum_{z \ll P} \angle(P,z) && = 2\pi f_0^\circ + \pi f_0^\partial - 2\pi f_1^\circ - \pi f_1^\partial + 2\pi f_2 \\
&= 2\pi f_0^\circ + 2\pi f_0^\partial - 2\pi f_1^\circ - 2\pi f_1^\partial + 2\pi f_2 && = 2\pi f_0 - 2\pi f_1 + 2\pi f_2 \;=\; 2\pi \cdot \chi(F)
\end{aligned}$$

Übung A5I. Gilt die Formel A5C für beliebige n–Ecke? Ja: Triangulierung / Gauß–Bonnet.

Muss eine geschlossene Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ irgendwo negativ gekrümmt sein, wenn sie ein nicht-konvexes Polyeder $P \subset \mathbb{R}^3$ berandet? Nein, das gilt nicht, wie Abbildung A:12 zeigt.

Wie viele Ecken hat ein klassischer Fußball (abgestumpftes Ikosaeder) und welche Krümmung haben diese? Alle 60 Ecken haben $\kappa(F,z) = \pi/15 = 12°$, sind also recht flach.

§A6. Wurzeln und Zweige der Topologie

§A6a. Etymologie. Die *Topologie* (griechisch τόπος [tópos] ‘Ort’ und λόγος [lógos] ‘Lehre’) ist wörtlich übersetzt die „Lehre vom Ort“ und handelt von der Form und gegenseitigen Lage geometrischer Objekte, wie Kurven und Flächen im Raum. Der Begriff geht zurück auf Johann Benedict LISTING, einen Schüler von Carl Friedrich GAUSS, der 1847 seine *Vorstudien zur Topologie* veröffentlichte. Bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts war auch die lateinische Bezeichnung *Analysis Situs* üblich, so etwa bei Henri POINCARÉs gleichnamigen Werk (1895–1904), dem Grundstein der algebraischen Topologie.

Als Geburtsmoment der Topologie gilt gemeinhin das Königsberger Brückenproblem: Durch die Stadt Königsberg fließt der Fluss Pregel, darin zwei Inseln liegen, die zu Eulers Zeiten durch sieben Brücken zu beiden Ufern und untereinander verbunden waren. Gibt es einen Weg, gar einen Rundweg, der alle sieben Brücken genau einmal überquert?

ABBILDUNG A:34. Das Königsberger Brückenproblem

Euler löste das Brückenproblem im Jahre 1736, indem er zunächst die geographischen Daten auf ihren topologischen Kern reduzierte: Nicht die genaue Form der Inseln und der Ufergebiete ist wichtig, ebensowenig der genaue Verlauf der Brücken und Spaziergänge. Was bleibt als wesentliche Information? Es genügt, die beiden Ufergebiete und die beiden Inseln als vier Ecken zu betrachten mit sieben verbindenden Kanten, wie oben skizziert. Das ist eine naheliegende doch mutige Vereinfachung; Abstraktion bedeutet, das Wesentliche vom Unwesentlichen zu trennen. Eulers effiziente Beschreibung algebraisiert und löst das Problem: Da zu allen vier Ecken eine ungerade Zahl von Kanten führt, so erkannte Euler, kann es keinen Weg geben, der jede der sieben Brücken genau einmal überquert.

Allgemein gesagt darf es maximal zwei Ecken mit einer ungeraden Kantenzahl geben; diese zwei können dann als Start- und Zielpunkt eines Weges dienen, während alle anderen Ecken eine gerade Kantenzahl haben müssen, um sie nicht nur betreten, sondern auch wieder verlassen zu können. Dieses Resultat ist die Geburtsurkunde der Topologie und zugleich der Graphentheorie, die in der Informatik viel genutzt wird. (Als amüsante Übung formuliere man möglichst präzise den allgemeinen Satz, seinen Beweis und einen Algorithmus zur Konstruktion solcher Euler–Wege. Es ist im Detail nicht ganz so einfach, wie es aussieht. Beliebt ist dies als Kinderspiel und Reim „Das ist das Haus vom Nikolaus.“)

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§A6b. Geschichte und Gegenwart. Die Mathematik umschrieb man einst als die Wissenschaft der Zahlen und Figuren. Im Kern, so finde ich, trifft dies die Sache immer noch recht gut, wenn auch die mathematisch untersuchten Objekte heute viel umfassender sind.

Ein Leitmotiv der Topologie ist die Übersetzung von Formeln zu Bildern und zurück, von geometrisch-topologischer Situation zu analytisch-algebraischer Formulierung.

Die hierzu entwickelten Techniken bauen eine tragfähige Brücke zwischen geometrischer Anschauung und formaler Argumentation, zwischen qualitativer und quantitativer Beschreibung. Das historische Brückenproblem von Königsberg ist hierzu ein schönes Beispiel, ebenso Eulers Polyederformel und die hieraus entstandene Euler–Charakteristik, und die in §A4 skizzierte Flächenklassifikation ist eine erste wichtige Anwendung.

Erste topologische Ideen und Techniken wurden bereits im 19. Jahrhundert von Mathematikern und Physikern formuliert, darunter nach EULER vor allem GAUSS, KELVIN, MAXWELL und ihre Schüler. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts war eine kritische Masse erreicht, und so begründete POINCARÉ in einer Reihe bahnbrechender Artikel 1895–1904 die Topologie als einen eigenen Zweig der Mathematik.

Als mathematische Disziplin ist die Topologie eine Schöpfung des 20. Jahrhunderts – und damit relativ jung. Sie wurde schnell zum mathematischen Grundvokabular, vor allem Dank ihrer spektakulären Erfolge in vielfältigen Anwendungen und Verzweigungen, wie analytische, geometrische, algebraische Topologie. . . . In vielen Fällen beruht der Erfolg auf einer glücklichen Verbindung sehr allgemeiner, abstrakter Werkzeuge mit konkreten, geometrisch-topologischen Fragestellungen und Lösungen.

Dank ihrer vielseitig einsetzbaren Begriffe und Methoden ist die Topologie neben Analysis und Algebra eine der Grundstrukturen der modernen Mathematik und liefert Werkzeuge, um eine Vielzahl sehr unterschiedlicher Phänomene zu behandeln. Sie untersucht fundamentale Konzepte wie Konvergenz und Stetigkeit, offene und abgeschlossene Mengen, Zusammenhang und Kompaktheit, usw. Hierdurch steht sie in enger Wechselwirkung mit der Analysis, der Geometrie und auch der Algebra. Die folgenden Beispiele in §A7 illustrieren geometrische Fragestellungen und erfolgreiche Anwendungen der Topologie.

§A6c. Was ist analytische Topologie? In der Analysis verwendet man eine *Norm* oder *Metrik* zum Messen von Abständen und gewinnt daraus die zentralen Begriffe der *Konvergenz* von Folgen und der *Stetigkeit* von Abbildungen. Für viele Begriffsbildungen braucht man aber gar keine Metrik: Es genügt, die Umgebungen eines Punktes bzw. die offenen Mengen zu kennen. So abstrahiert man von metrischen zu topologischen Räumen, die oft flexibler zu handhaben sind. Der erste, analytische Teil der Vorlesung widmet sich wichtigen Eigenschaften topologischer Räume, wie Kompaktheit und Zusammenhang, sowie grundlegenden Konstruktionen, wie Produkten und Quotienten.

Der hierzu nötige Begriffsapparat bereitet anfänglich etwas Mühe, aber als universelles Werkzeug leistet er überall gute Dienste. Dazu ist ein hinreichend großes Repertoire an Beispielen und Gegenbeispielen unerlässlich, um die Werkzeuge zu schärfen und ihre Verwendung einzuüben – und gelegentlich unsere Anschauung zu korrigieren.

Point set topology is a disease
from which the human race will soon recover.
Henri Poincaré (1854–1912)

§A6d. Was ist geometrische Topologie? Je nach Anwendung interessieren wir uns für spezielle, besonders schöne topologische Räume, wie zum Beispiel *Mannigfaltigkeiten* oder *simpliziale Komplexe*. Dies sind topologische Räume mit zusätzlichen, „geometrischen“ Strukturen, die maßgeschneiderte Techniken erlauben und erfordern. Als lokales Modell beginnt man hierbei mit einem besonders einfachen Raum, wie dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ oder einem Simplex Δ^n (Punkt, Strecke, Dreieck, Tetraeder, etc.), und gewinnt kompliziertere Räume durch geeignetes Zusammensetzen dieser elementaren Bausteine.

In dieser Vorlesung werden wir uns der Einfachheit halber zumeist auf simpliziale Komplexe konzentrieren. Als wichtige Anwendung werden wir den Klassifikationssatz für (triangulierte) Flächen beweisen. Des Weiteren möchte ich den Abbildungsgrad von Sphären behandeln, der eine erstaunliche Vielfalt von tiefliegenden Anwendungen eröffnet.

Die Kräftigung des räumlichen Vorstellungsvermögens
und der räumlichen Gestaltungskraft gehört unbestritten
zu den wichtigsten Zielen eines jeden geometrischen Unterrichts.
Arthur Schönflies (1853–1928)

§A6e. Was ist algebraische Topologie? Die algebraische Topologie untersucht topologische Räume und stetige Abbildungen mit algebraischen Hilfsmitteln. Jedem topologischen Raum wird hierbei eine Gruppe zugeordnet (oder eine andere algebraische Struktur), und jeder stetigen Abbildung wird ein Gruppenhomomorphismus zugeordnet. So entsteht ein algebraisches Abbild des ursprünglich topologischen Sachverhalts. Oft ist das algebraische Abbild leichter zu verstehen und erlaubt so eine Lösung des topologischen Problems. In günstigen Fällen funktioniert die Übersetzung auch umgekehrt, und die Topologie erleuchtet die Algebra. (So etwa beim Satz von Nielsen–Schreier, siehe unten.)

Mit dem allgegenwärtigen Begriff der Fundamentalgruppe und dem dualen Konzept der Überlagerung beschäftigt sich der dritte Teil der Vorlesung.

In these days the angel of topology and the devil of abstract algebra
fight for the soul of every individual discipline of mathematics.
Hermann Weyl (1885–1955)

§A6f. Zielsetzung. Das Grundvokabular der Topologie gehört zur mathematischen Allgemeinbildung und in vielen Gebieten der Mathematik zum universellen Werkzeugkasten, und sei es bloß als kleines aber nützliches Schweizer Taschenmesser. Anwendungen und Vertiefungen bieten sich insbesondere in der Differentialgeometrie und Differentialtopologie, in der algebraischen Topologie, der geometrischen Topologie und Knotentheorie, usw.

Diese Vorlesung erarbeitet hierzu die nötigen Grundlagen. Ziel sind dabei – wie immer – zwei komplementäre Fähigkeiten: sowohl das solide Verständnis der grundlegenden Theorie als auch die sorgfältige Lösung konkreter Anwendungen. Das eine ist ohne das andere kaum denkbar, und diese allgemeine Weisheit gilt insbesondere auch für die Topologie.

People cry, people moan
Look for a dry place to call their home
Try to find some place to rest their bones
While the angels and the devils try to make them their own
Nirvana, *Lake of Fire*

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§A7. Einige Anwendungen der Topologie

§A7a. Warnhinweise und Nebenwirkungen. Abstraktion ist eine starke Droge, doch wohldosiert erlaubt sie phantastische Anwendungserfolge. Eine Unterdosierung verlängert das Leiden an undurchsichtigen Beispielen und kann Stumpfsinn verursachen. Eine Überdosierung hingegen kann zu Schwindelgefühl und Realitätsverlust führen. Bei Zweifeln sprechen Sie bitte mit Ihrem Dozenten oder Tutor oder einem Topologen ihres Vertrauens.

Zur Erheiterung und als Vorgeschmack will ich hier kurz ein paar anschauliche Anwendungen der Topologie vorstellen. Es gibt, wie für jede erfolgreiche Theorie, unzählige weitere Anwendungen, aber ich wähle hier nur wenige aus, die eine besonders hübsche Einkleidung erlauben und darunter den technischen Apparat zu verstecken vermögen. Ihre Darstellung mag daher scherzhaft sein, doch der mathematische Kern ist durchaus ernst.

Bildquelle: wikipedia.org

Bildquelle: wikipedia.org

§A7b. Wie Luitzen Brouwer seinen Kaffee umrührt. Können Sie eine Tasse Kaffee so gründlich umrühren, dass kein Punkt bleibt wo er war? Natürlich soll dabei der Kaffee in der Tasse bleiben und die Tasse am selben Ort… Also, geht das?

Erstaunlich aber wahr: Das ist unmöglich! Brouwers berühmter Fixpunktsatz besagt nämlich, dass jede stetige Abbildung $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ einen Fixpunkt besitzt, also einen Punkt $x \in [0,1]^n$ für den $f(x) = x$ gilt. Dies ist eine topologische Eigenschaft und gilt daher für jede konvexe, beschränkte, abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^n$, wie der Kaffee in Ihrer Tasse, vorausgesetzt diese hat keine allzu unübliche Form.

Ich mache hier stillschweigend eine Reihe von Annahmen über die physikalische Beschaffenheit des Raumes und des Kaffees – darüber ließe sich streiten. Das mathematische Modell hingegen besticht durch seine Einfachheit und Allgemeinheit, und die mathematische Schlussfolgerung ist unumstößlich, so unglaublich sie auch erscheinen mag.

In Dimension $n = 1$ folgt Brouwers Satz leicht aus dem Zwischenwertsatz für stetige reelle Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. (Versuchen Sie es!) In Dimension $n \geq 2$ gelingt der Beweis allerdings nicht so einfach. (Versuchen Sie auch dies!)

Brouwers Fixpunktsatz und seine Verallgemeinerungen haben über das Kaffeetrinken hinaus mannigfaltige Anwendungen: Sie sichern die Existenz von Lösungen nicht-linearer Gleichungssysteme, etwa von Gleichgewichten in ökonomischen Modellen, oder von Nash–Gleichgewichten in der Spieltheorie, etc. Ein einfaches Beispiel: Zu jeder stochastischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, also $a_{ij} \geq 0$ und $\sum_i a_{ij} = 1$, existiert ein stochastischer Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, also $v_i \geq 0$ und $\sum_i v_i = 1$, sodass $Av = v$ gilt. Wer das Umrühren von Kaffee allzu albern findet, untersuche und beweise dies als ernsthafte Illustration!

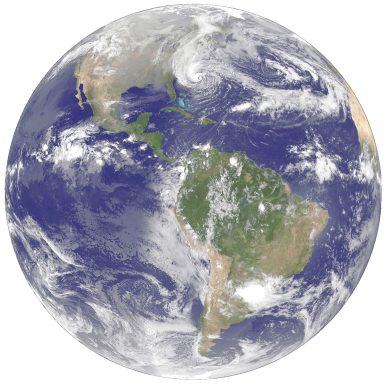
§A7c. Wie Karol Borsuk und Stanisław Ulam ein Stück Marmorkuchen teilen. Jedes Stück Kuchen kann man durch einen geraden senkrechten Schnitt in zwei gleich große Teile zerlegen. Was aber, wenn es sich um einen Marmorkuchen handelt, und in beiden Teilen auch noch gleich viel Schokolade sein soll? Geht das auch mit einem geraden senkrechten Schnitt? Erstaunlich aber wahr: Das geht tatsächlich immer!

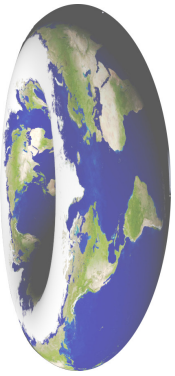
Hier sorgt die Mathematik für Gerechtigkeit… Zumindest garantiert Sie die Möglichkeit, gerecht zu teilen. Alles andere ist – wie immer – Menschenwerk.

Eine Dimension höher nennt man dieses Ergebnis den Satz vom Schinkenbrot (engl. *ham sandwich theorem*). Der Satz gilt ganz allgemein in beliebiger Dimension und folgt aus dem schönen Satz von Borsuk–Ulam. Eine seiner zahlreichen Formulierungen lautet:

Zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ von der Einheitssphäre $\mathbb{S}^n$ in den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ existiert ein Paar antipodaler Punkte x und $-x$ in $\mathbb{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$. Insbesondere existiert keine Einbettung $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Versuchen Sie, dies für $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ zu illustrieren! In Dimension $n = 1$ folgt der Satz für $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ leicht aus dem Zwischenwertsatz. (Versuchen Sie es!) In Dimension $n \geq 2$ gelingt der Beweis allerdings nicht so einfach. (Versuchen Sie auch dies!) Die Auflösung folgt in der Vorlesung.

§A7d. Wie kämmt man einen Igel? Kann man einen Igel wirbelfrei kämmen? Etwas ernsthafter gefragt: Herrscht jederzeit an mindestens einem Ort der Erde Windstille?





Ja, Letzteres ist in der Tat immer der Fall: Auf der zweidimensionalen Sphäre hat jedes stetige tangentiale Vektorfeld mindestens eine Nullstelle. Dies nennt man auch den *Satz vom gekämmten Igel* (auf englisch auch *hairy ball theorem*), denn bildlich gilt: Jeder stetig gekämmte Igel hat mindestens eine kahle Stelle. Die meteorologische Anwendung betrachtet die horizontale Windgeschwindigkeit, und der Satz besagt dann, dass es mindestens einen windstillen Punkt geben muss, zum Beispiel das Auge eines Zyklons oder Antizyklons.

Inwiefern hängt die Antwort von der Form der Erde ab? Ich nehme hier natürlich an, dass die Erde eine dreidimensionale Kugel und demnach die Erdoberfläche eine zweidimensionale Sphäre ist. Die Geometrie spielt hierbei jedoch keine Rolle (Abmessungen, Berge, Täler, etc.) allein die topologische Gestalt der Sphäre ist entscheidend. Und was, wenn die Erde eine andere Form hätte? Auf dem Torus gilt die obige Aussage jedenfalls nicht.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§A7e. Was bedeutet die Dimension? Bei Kaffee und Kuchen philosophieren vier Mathematiker:innen über den Begriff der Dimension: Sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ isomorph?

(1) Linear, vermöge eines $\mathbb{R}$–Vektorraumisomorphismus?
(2) Differenzierbar, vermöge eines Diffeomorphismus?
(3) Topologisch, vermöge eines Homöomorphismus?
(4) Als bloße Mengen, vermöge einer Bijektion?

Zunächst zur ersten und einfachsten Frage: Unter welchen Bedingungen sind die $\mathbb{R}$–Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ isomorph? Richtig, das geht nur für $m = n$. Dieses wichtige Ergebnis beweist man in den ersten Vorlesungen der Linearen Algebra, und es begründet die *Dimension* von $\mathbb{R}$–Vektorräumen (oder allgemeiner von Vektorräumen über einem beliebigen Körper). Dieser fundamentale Begriff ist, wie Sie wissen, ungemein nützlich.

Allgemeiner gilt: Ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ surjektiv, dann gilt $m \geq n$; ist sie injektiv, dann gilt $m \leq n$. (Dies ist ein Spezialfall des Rangsatzes der Linearen Algebra.)

Der Übergang von linearen zu differenzierbaren Abbildungen ist naheliegend und das Erfolgsrezept der Differentialrechnung: Unter welcher Bedingung sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ diffeomorph? Richtig, auch das geht nur für $m = n$: Jede in einem Punkt x differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ erlaubt ein Differential, also eine lineare Abbildung $D_x f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Dies definiert einen *Funktor* von differenzierbaren zu linearen Abbildungen, und man benutzt ganz bequem und selbstverständlich das obige Ergebnis der Linearen Algebra.

Allgemeiner gilt: Ist eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (lokal) surjektiv, dann gilt $m \geq n$; ist sie (lokal) injektiv, dann gilt $m \leq n$. (Dies ist ein Spezialfall des Rangsatzes der Differentialrechnung: In geeigneten lokalen Karten ist f linear.)

Gehen wir schließlich von glatten zu stetigen Abbildungen: Unter welcher Bedingung sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ homöomorph? Sie vermuten richtig, auch das geht nur für $m = n$. Aber wie beweist man eine so allgemeine Aussage? Stetige Abbildungen können sehr irregulär sein! Es kommt noch schlimmer: Es gibt stetige surjektive Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ auch für $m < n$! Ausführlicher: Für jedes $n \geq 2$ existieren stetige surjektive Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Die so überaus nützliche Lineare Algebra und Differentialrechnung stehen uns hier nicht mehr zur Verfügung, da sie sich auf so allgemeine, stetige Funktionen gar nicht erst anwenden lassen: Es gibt stetige Funktionen, die nirgends differenzierbar sind. Hier brauchen wir raffiniertere Werkzeuge der Topologie. Die *topologische Invarianz der Dimension* wurde erstmals 1910 von Brouwer bewiesen. Vor 1910 war der Satz ein berühmtes Problem, das als sehr beunruhigend empfunden wurde. Sie ahnen jetzt vielleicht warum.

In der topologischen Frage ist nicht alles verloren: Ist $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und (lokal) injektiv, so gilt $m \leq n$. Für jeden Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ gilt somit $m = n$.

Mit dem obigen Satz von Borsuk–Ulam ist der Beweis übrigens leicht: Ist $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so auch $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{S}^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, und dies geht nur für $m - 1 < n$, also $m \leq n$.

Als Warnung zum Schluss: Für Mengen ohne weitere Struktur sieht die Situation ganz anders aus! Für jedes Paar $m, n \geq 1$ existieren Bijektionen $f : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$: Beide Mengen sind gleichmächtig, enthalten also gleichviele Elemente. Entgegen unserer vagen Intuition ist für $1 \leq m < n$ die Menge $\mathbb{R}^m$ also keineswegs kleiner als $\mathbb{R}^n$. Den Unterschied macht nicht die Menge, sondern allein die zusätzliche Struktur: linear, differenzierbar, topologisch.

§A7f. Freiheit für alle Gruppen – Nieder mit den Relationen! Der Satz von Nielsen–Schreier besagt, dass in einer freien Gruppe jede Untergruppe frei ist. (Das ist keine politische, sondern eine mathematische Aussage.) Den Beweis kann man rein algebraisch führen, er endet dann aber leicht in einer heillosen Rechnerei. Man kann den Beweis auch topologisch führen, indem man freie Gruppen als Fundamentalgruppen von Graphen darstellt – und alles löst sich in Wohlgefallen auf. In der Vorlesung wird dies eine schöne Anwendung der Überlagerungstheorie sein.

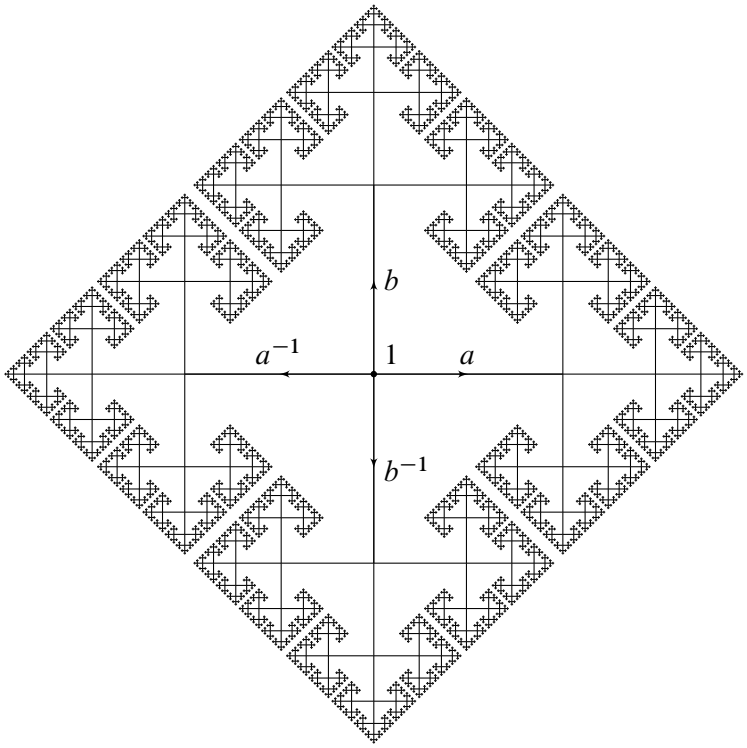


ABBILDUNG A:35. Der Cayley–Graph der freien Gruppe auf zwei Erzeugern a und b, geschrieben $F_2 = \langle a, b \mid - \rangle$. Er ist ein einfaches Fraktal.

§A7g. Ausweg aus dem Labyrinth – Freiheit für Theseus! Auch wenn die Topologie eine sehr junge Wissenschaft ist, so spielen topologische Beobachtungen und Anwendungen schon seit der Antike eine gewisse Rolle. Das Labyrinth von Minos zum Beispiel erinnert jeden topologisch geschulten Leser an die Fundamentalgruppe und mit etwas Phantasie an die universelle Überlagerung:

Ariadne gab Theseus ein Knäuel Faden, dessen Ende er am Eingange des Labyrinthes festknüpfte und den er während des Hinschreitens durch die verwirrenden Irrgänge in der Hand ablaufen lassen sollte, bis er an die Stelle gelangt wäre, wo der Minotauros seine Wache hielt. Theseus ward mit seinen Gefährten in das Labyrinth geschickt, erlegte den Minotauros und wand sich mit Hilfe des abgespulten Zwirns aus den Höhlengängen des Labyrinthes glücklich heraus. (Aus dem Theseus-Mythos)

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

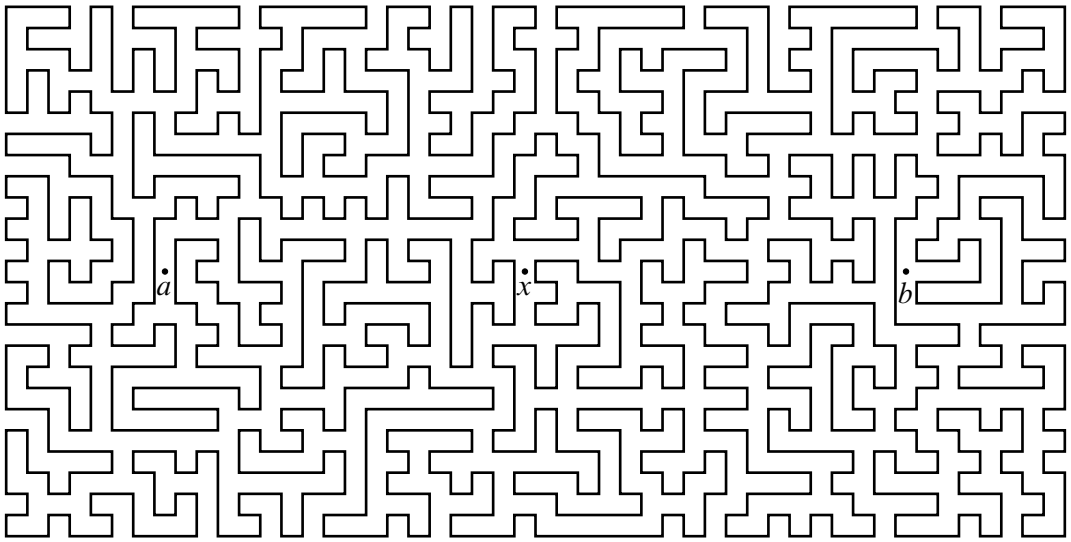


ABBILDUNG A:36. Eine Jordan–Kurve $\mathbb{S}^1 \cong C \subset \mathbb{R}^2$. Können Sie a mit b im Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ verbinden? und a mit x? und b mit x? Wie können Sie das effizient feststellen bzw. leicht nachprüfbar zertifizieren?

Zum Thema Labyrinth gab eine Kindersendung (*Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua?*) folgende „unfehlbare“ Methode, um sich aus einem Labyrinth zu befreien: Man gehe immer mit der rechten Hand an der Wand entlang. Das klingt so schön einfach – und ist im Allgemeinen doch falsch. Sehen Sie ein Gegenbeispiel? Hingegen ist es für ein „zykelfreies“ Labyrinth richtig. Wir werden im Zusammenhang mit dem Satz von Jordan (§J2) darauf zurückkommen. Auch Lösungsalgorithmen für Irrgärten sind ein spannendes Thema.

§A7h. Zu guter Letzt. Wem die Topologie allzu abstrakt erscheint, den mögen die weisen Worte von John von NEUMANN trösten:

> *If people do not believe that mathematics is simple,*
> *it is only because they do not realize how complicated life is.*
> John von NEUMANN (1903–1957)

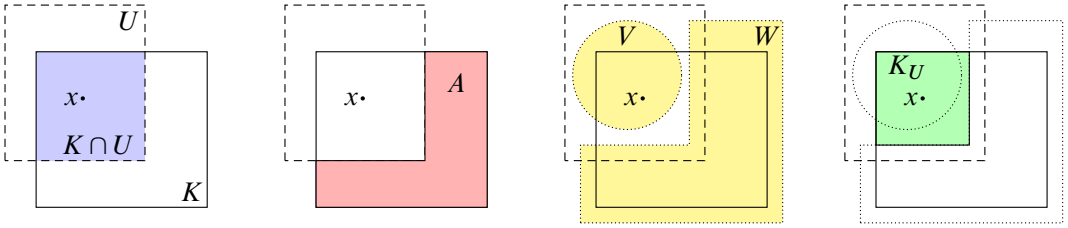
Zur Illustration zitiere ich eine seltene topologische Zwangshandlung:

> *Heinz (29 Jahre alt): Ich ziehe so eine Art unsichtbare Linie hinter mir her, und ich habe den Zwang, diese Linie gerade hinter mir herlaufen zu lassen. Die darf nicht verwurstelt sein. Zum Beispiel kann ich kein Karussell fahren, weil ich mich nicht zurückdrehen kann. […]*
>
> *Und dann habe ich einmal probiert, um eine Litfaßsäule herumzugehen, und schon hatte ich den Salat. Die Linie war verwickelt. Also musste ich zurückgehen. […]*
>
> *Wenn ich zum Beispiel zur Arbeit fahre, morgens, dann versuche ich abends exakt denselben Weg zurückzufahren, um die Linie wieder aufzusammeln.*
> Aus Jürgen DOMIAN, Extreme Leben (1996)

Ob diese Zwangsvorstellung durch den Besuch einer Topologie-Vorlesung oder das Selbststudium der Fundamentalgruppe ausgelöst wurde, ist mir nicht bekannt.

TEIL I

Analytische Topologie



Wer hohe Türme bauen will,
muss lange beim Fundament verweilen.
Anton Bruckner (1824–1896)

KAPITEL B

Grundlagen

§B0. Einführung und Überblick

Bevor wir zur allgemeinen Topologie gelangen, möchte ich möglichst konkret Konvergenz und Stetigkeit im Kontext normierter Vektorräume (§C1) und metrischer Räume (§C2) behandeln. Der Ehrlichkeit halber beginne ich hierzu mit den reellen Zahlen, der unentbehrlichen Grundlage, deren Diskussion leider häufig der Zeitökonomie geopfert wird.

Die Grundlage aller Mathematik ist das Zahlensystem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ausgangsmaterial für die Topologie ist insbesondere der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und die hieraus gebildeten euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$. Diese sind Grundlage für die Analysis und die Geometrie, für die Topologie sind sie sowohl Motivation als auch Hilfsmittel.

Formal ließe sich sehr viel Topologie mit sehr wenig Analysis betreiben, vielleicht sogar „abstrakt verstehen“, aber noch lange nicht konkret anwenden. Das wäre recht fade, insbesondere für eine Einführung, denn es fehlten sowohl die ursprüngliche Motivation als auch interessante Beispiele und Anwendungen. Beherzigen wir also lieber den Grundsatz:

Ein gut verstandenes Beispiel ist mehr wert als drei schlecht verstandene Theoreme.

Ich versuche daher im Folgenden, die topologischen Begriffe soweit möglich aus der Analysis zu entwickeln und unmittelbar mit ehrlichen Beispielen zu illustrieren. Um dies zu ermöglichen, setze ich die grundlegenden Ergebnisse aus Analysis und Algebra voraus:

- **Analysis:** Funktionen, Folgen, Reihen, Grenzwerte, Vollständigkeit, Potenzreihen, insb. die Exponentialfunktion, Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$.
- **Lineare Algebra:** Gruppen, Ringe und Körper, Vektorräume und lineare Abbildungen, Matrizen, Determinanten, Eigenvektoren, Skalarprodukte, Orthonormalisierung.

Diese Grundlagen gehören zum Inhalt des ersten Studienjahres der Mathematik; je nach Betrachtungsweise ist dies viel oder wenig. Meine Darstellung der Topologie ist hierauf aufbauend so angelegt, dass sie ab dem dritten Semester gehört werden kann.

Um tieferliegende Konzepte der Topologie bequem formulieren zu können, nutzen wir zudem folgende Begriffe, zunächst rein pragmatisch, später zunehmend systematisch

- das Vokabular der Kategorien (wie in Kapitel H zusammengefasst),
- das Vokabular der Gruppen (wie in Kapitel L zusammengefasst).

§B1. Algebraische Grundstrukturen

§B1a. Das Zahlensystem. Die Grundlage aller Mathematik ist das Zahlensystem

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \overset{!}{\hookrightarrow} \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{O}.$$

Bereits dieses Fundament ist eine intellektuelle Errungenschaft, die mehrere Jahrhunderte hart erarbeitet wurde, und die auch heute jeden nachhaltig beschäftigt, der sich der Mathematik widmet. Ich erinnere in aller Kürze an den langen Marsch der Vervollständigung:

- Ausgehend von der Mengenlehre und den Dedekind–Peano–Axiomen der natürlichen Zahlen konstruieren wir auf der Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$ sowie die Anordnung $<$ und beweisen ihre grundlegenden Eigenschaften. Wir gelangen so zum *geordneten Halbring* $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$ der natürlichen Zahlen.
- In $\mathbb{N}$ sind manche Gleichungen der Form $a = b + x$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ nicht lösbar, etwa $3 = 5 + x$. Dieses Problem lösen wir durch die Erweiterung von $\mathbb{N}$ zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, indem wir negative Zahlen hinzufügen. Wir gelangen so zum *geordneten Ring* $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ der ganzen Zahlen.
- In $\mathbb{Z}$ sind manche Gleichungen der Form $a = bx$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ nicht lösbar, etwa $3 = 5x$. Dieses Problem lösen wir durch die Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$, indem wir Brüche konstruieren. Wir gelangen so zum *geordneten Körper* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ der rationalen Zahlen.
- In $\mathbb{Q}$ haben manche Intervallschachtelungen leeren Durchschnitt, etwa die Approximationen von $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ oder $\mathrm{e} = 2.7182\dots$ oder $\pi = 3.1415\dots$. Dieses Problem lösen wir durch die Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Wir gelangen so zum *vollständig geordneten Körper* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen.
- In $\mathbb{R}$ ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar. Dieses Problem lösen wir durch Einführung der „imaginären“ Zahl i mit $\mathrm{i}^2 = -1$. So erweitern wir $\mathbb{R}$ zum Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der komplexen Zahlen auf der Menge $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Dieser erlaubt wegen $\mathrm{i}^2 = -1$ keine Anordnung, die mit der Körperstruktur verträglich wäre.

Bei diesem stufenweisen Aufbau wird jeder Schritt durch Probleme motiviert, die sich auf der vorherigen Stufe zwar formulieren aber noch nicht lösen lassen. Die Konstruktionen sind allesamt nicht schwer, erfordern aber Sorgfalt und Ausdauer. Einen Einstieg und historische Hintergründe bietet das schöne Buch *Zahlen* von Ebbinghaus *et al*.

Bemerkung. Die Erweiterungen $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ sind algebraischer Natur. Die Anordnung erhalten wir jeweils gratis obendrein, als die einzige mit der algebraischen Struktur verträgliche. Hingegen ist die Erweiterung $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ keine algebraische Vervollständigung, sondern eine ordnungstheoretische / topologische. Anders als $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R}$ nicht mehr abzählbar (B2N). Während man noch jede ganze oder rationale Zahl explizit hinschreiben kann, und damit zum Beispiel auch auf einem binären Computer darstellen kann, ist dies aus Abzählbarkeitsgründen für fast alle reellen Zahlen unmöglich. Dennoch ist der Technologiesprung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ notwendig: Erst dank dieser Vervollständigung gewinnen wir wirksame Werkzeuge.

Bemerkung. Die Erweiterung $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}]$ ist wieder algebraisch und vergleichsweise leicht. Für den Neuling scheint sie die schwerste, da die Anordnung und damit etwas Anschauung verloren geht. Letztere wird durch die *komplexe Zahlenebene* $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ wiederhergestellt. Man kann dann mutig weiter schreiten zu Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ und Oktaven $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$.

§B1b. Körper und Ringe. Wir wiederholen und präzisieren die nötigen algebraischen Grundbegriffe. Für die rationalen Zahlen $K = \mathbb{Q}$ kennen Sie die vier Grundrechenarten:

Addition	$+ : K \times K \to K,$	$(a,b) \mapsto a+b,$
Multiplikation	$\cdot : K \times K \to K,$	$(a,b) \mapsto a \cdot b.$

Die Null $0 \in K$ und die Eins $1 \in K$ dienen uns hier als neutrale Elemente, wobei $0 \neq 1$. Für die Subtraktion $a-b = a+(-b)$ und die Division $a/b = a \cdot b^{-1}$ genügen uns:

Negation	$- : K \to K,$	$a \mapsto -a,$
Inversion	$^{-1} : K^* \to K^*,$	$a \mapsto a^{-1}.$

Letztere ist nur auf der Menge $K^* = K \smallsetminus \{0\}$ definiert, da 0 nicht invertierbar ist: Es gilt $0 \cdot a = 0 \neq 1$ für alle $a \in K$; kein Element $0^{-1} \in K$ erfüllt demnach $0 \cdot 0^{-1} = 1$.

Für diese Verknüpfungen gelten die folgenden zehn grundlegenden Eigenschaften:

(A) Die Addition $(K,+,0,-)$ ist eine kommutative Gruppe; für alle $a,b,c \in K$ gilt:

(A1) Assoziativität:	$(a+b)+c = a+(b+c)$
(A2) Neutrales Element:	$a+0 = 0+a = a$
(A3) Inverse Elemente:	$a+(-a) = (-a)+a = 0$
(A4) Kommutativität:	$a+b = b+a$

(D) Die Multiplikation ist distributiv über die Addition:

(DL) Distributivität links:	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
(DR) Distributivität rechts:	$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

(M) Die Multiplikation $(K,\cdot,1,^{-1})$ ist eine kommutative Gruppe auf $K^* = K \smallsetminus \{0\}$:

(M1) Assoziativität:	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(M2) Neutrales Element:	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
(M3) Inverse Elemente:	$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ falls $a \neq 0$
(M4) Kommutativität:	$a \cdot b = b \cdot a$

Wir erheben diese grundlegenden Eigenschaften nun zur allgemeinen Definition:

Definition B1A (Körper, explizit)**.** Ein Körper $(K,+,0,-,\cdot,1,^{-1})$ besteht aus einer Menge K mit zwei ausgezeichneten Elementen $0 \neq 1$ und vier Abbildungen

$$+ : K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto a+b, \qquad \cdot : K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto a \cdot b,$$
$$- : K \to K, \quad a \mapsto -a, \qquad ^{-1} : K^* \to K^*, \quad a \mapsto a^{-1},$$

die alle obigen Forderungen (A,D,M) erfüllen.

Konvention. All diese Daten sind wesentlich für unsere Rechnungen. Wir fassen sie zusammen durch $(K,+,0,-,\cdot,1,^{-1})$, kürzer $(K,+,0,\cdot,1)$, kürzest $(K,+,\cdot)$, allzu kurz K.

Bemerkung. Aus der Addition $+ : K \times K \to K$ lassen sich das Nullelement 0 und die Negation $-$ rekonstruieren. Aus der Multiplikation $\cdot : K \times K \to K$ lassen sich das Einselement 1 und die Inversion $^{-1}$ rekonstruieren. Aber allein aus der Menge K lassen sich weder Addition noch Multiplikation rekonstruieren; sie müssen als Daten von $(K,+,\cdot)$ gegeben sein. Je nach Situation ist es bequem, die daraus abgeleiteten Informationen explizit zu nennen, also jeweils die neutralen Elemente 0 und 1 sowie die Negation $-$ und Inversion $^{-1}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Die folgende äquivalente Definition kommt allein mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ aus.

Definition B1B (Körper, implizit)**.** Ein Körper $(K,+,\cdot)$ besteht aus einer Menge K mit zwei Verknüpfungen $+,\cdot : K\times K\to K$, die folgende zehn Axiome erfüllen:

(A) Die Addition $(K,+)$ ist eine kommutative Gruppe:

(A1) Assoziativität:	$\forall a,b,c\in K : (a+b)+c = a+(b+c)$
(A2) Neutrales Element:	$\exists 0\in K\ \ \forall a\in K : a+0=0+a=a$
(A3) Inverse Elemente:	$\forall a\in K\ \ \exists b\in K : a+b=b+a=0$
(A4) Kommutativität:	$\forall a,b\in K : a+b=b+a$

Das neutrale Element $0\in K$, dessen Existenz in Axiom (A2) gefordert wird, ist eindeutig: Sind 0 und $0'$ neutral, so gilt $0=0+0'=0'$. Wir nennen daher 0 *das* Nullelement. Dies garantiert, dass das nachfolgende Axiom (A3) eindeutig formuliert ist.

Das negative Element zu $a\in K$, dessen Existenz in (A3) gefordert wird, ist eindeutig: Sind b und c negativ zu a, so folgt $b=b+0=b+(a+c)=(b+a)+c=0+c=c$ dank Assoziativität (A1). Wir nennen daher b *das* negative Element zu a, geschrieben $b=:-a$. Dies definiert die Negation als Abbildung $-:K\to K : a\mapsto -a$ sowie die Subtraktion $-:K\times K\to K : (a,b)\mapsto a-b := a+(-b)$. Aus $(K,+)$ rekonstruieren wir so $(K,+,0,-)$.

Die Gleichung $a+(-a)=(-a)+a=0$ besagt, dass $-a$ negativ zu a ist, aber auch, dass a negativ zu $-a$ ist. Dank Eindeutigkeit folgt die Gleichung $-(-a)=a$.

(D) Die Multiplikation ist distributiv über die Addition:

(DL) Distributivität links:	$\forall a,b,c\in K : a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$
(DR) Distributivität rechts:	$\forall a,b,c\in K : (a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$

Aus (DL) folgt $0\cdot a=(0+0)\cdot a=(0\cdot a)+(0\cdot a)$. Nach Addition von $-(0\cdot a)$ folgt $0\cdot a=0$ für jedes $a\in K$. Aus (DR) folgt ebenso $a\cdot 0=0$.

Es gilt $(a\cdot b)+((-a)\cdot b)=(a+(-a))\cdot b=0\cdot b=0$, also $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$. Ebenso folgt $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$. Schließlich gilt $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.

(M) Die Multiplikation $(K,\cdot)$ ist eine kommutative Gruppe auf $K^*=K\smallsetminus\{0\}$:

(M1) Assoziativität:	$\forall a,b,c\in K : (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
(M2) Neutrales Element:	$\exists 1\in K^*\ \ \forall a\in K : 1\cdot a=a\cdot 1=a$
(M3) Inverse Elemente:	$\forall a\in K^*\ \ \exists b\in K^* : a\cdot b=b\cdot a=1$
(M4) Kommutativität:	$\forall a,b\in K : a\cdot b=b\cdot a$

Das neutrale Element $1\in K^*$, dessen Existenz in Axiom (M2) gefordert wird, ist eindeutig: Sind 1 und $1'$ neutral, so gilt $1=1\cdot 1'=1'$. Wir nennen daher 1 *das* Einselement. Dies garantiert, dass das nachfolgende Axiom (M3) eindeutig formuliert ist.

Das inverse Element zu $a\in K$, dessen Existenz in (M3) gefordert wird, ist eindeutig: Sind b und c invers zu a, so folgt $b=b\cdot 1=b\cdot(a\cdot c)=(b\cdot a)\cdot c=1\cdot c=c$ dank Assoziativität (M1). Wir nennen daher b *das* inverse Element zu a, geschrieben $b=:a^{-1}$. Dies definiert die Inversion als Abbildung $^{-1}:K^*\to K^* : a\mapsto a^{-1}$ sowie die Division $/:K\times K^*\to K : (a,b)\mapsto a/b := a\cdot(b^{-1})$. Aus $(K,+,\cdot)$ rekonstruieren wir so $(K,+,0,-,\cdot,1,^{-1})$.

Die Gleichung $a\cdot(a^{-1})=(a^{-1})\cdot a=1$ besagt, dass a^{-1} invers zu a ist, aber auch, dass a invers zu a^{-1} ist. Dank Eindeutigkeit folgt sofort $(a^{-1})^{-1}=a$.

Beispiele. Die rationalen Zahlen bilden einen Körper $(\mathbb{Q},+,\cdot)$. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ hingegen sind kein Körper, da (M3) nicht erfüllt ist: Zu $2\in\mathbb{Z}$ existiert in $\mathbb{Z}$ kein Inverses.

Konvention. Wir schreiben statt $(a\cdot b)+c$ kurz $a\cdot b+c$ und weiters statt $a\cdot b$ kurz ab. Im Folgenden nutzen wir diese gängige Konvention *Punkt vor Strich*, um Klammern zu sparen, und lassen meist das Produktzeichen weg, um auch noch Punkte zu sparen.

Übung B1C. Aus den Körperaxiomen folgen alle Regeln der Bruchrechnung, insbesondere

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

für alle Körperelemente $a,b,c,d\in K$ wobei $b\neq 0$ und $d\neq 0$.

✻ **B1C.** Wir rechnen die behaupteten Gleichungen geduldig nach, allein durch Anwendung der Axiome:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot(bd)=(ab^{-1})(bd)+(cd^{-1})(bd)=ad+cb$$
$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot(bd)=\left[(ab^{-1})b\right]\cdot\left[(cd^{-1})d\right]=ac$$

Wir erhalten das Gewünschte nach Division durch (bd), also Multiplikation mit $(bd)^{-1}$ auf beiden Seiten. Hier werden Kommutativität und Assoziativität gleich mehrfach angewendet. Schreiben Sie's zur Übung einmal aus!

Definition B1D. Für einen *Ring* $(K,+,\cdot)$ fordern wir nur (A), (D), (M1-2); dies nennt man zur Betonung auch einen *Ring mit Eins*. Er heißt *kommutativ*, wenn zudem (M4) gilt. Weitere Verallgemeinerungen durch Abschwächen der Forderungen nennt folgende Tabelle:

Struktur $(K,+,\cdot)$		$(K,+)$				$(K,+,\cdot)$		$(K,\cdot)$			
Name	Beispiele	Ass	Ntr	Inv	Com	DL	DR	Ass	Ntr	Inv	Com
(kommut.) Körper	$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
kommutativer Ring	$\mathbb{Z}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓
Divisionsring	$\mathbb{H}\subset\mathbb{C}^{2\times 2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Ring (mit Eins)	$\mathbb{Z}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Halbkörper	$\mathbb{Q}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Halbring	$\mathbb{N}$, $[0,\infty]$	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓		

Bemerkung. Die Axiomatik des Körperbegriffs geht zurück auf Ernst STEINITZ, *Algebraische Theorie der Körper*, J. reine angew. Math., vol. 137 (1910), 167–309. Zur Benennung gibt es zwei Traditionen: Manche Autoren (wie BOURBAKI) nennen alle Divisionsringe kurz Körper und unterscheiden dann kommutative und nicht-kommutative Körper, analog zu kommutativen und nicht-kommutativen Ringen. Andere (wie VAN DER WAERDEN) fordern für *Körper* generell die Kommutativität der Multiplikation (M4), andernfalls sagen sie *Divisionsring* oder *Schiefkörper*. Dieser Bezeichnung folge ich hier.

Übung B1E. Die Axiome sind teilweise redundant: In jedem Ring mit Eins $(K,+,0,\cdot,1)$ folgt die Kommutativität der Addition (A4) bereits aus den Axiomen (A1–3), (D), (M2).

✻ **B1E.** Für je zwei Elemente $a,b\in K$ gilt:

$$\begin{aligned} a+b+a+b &= (a+b)+(a+b) &&= 1\cdot(a+b)+1\cdot(a+b) &&= (1+1)\cdot(a+b)\\ &= (1+1)\cdot a+(1+1)\cdot b &&= (1a+1a)+(1b+1b) &&= (a+a)+(b+b) &&= a+a+b+b. \end{aligned}$$

Hierbei verwenden wir der Reihe nach (A1), (M2), (DR), (DL), (DR), (M2), (A1). Dank (A2) und (A3) können wir von links $-a$ und von rechts $-b$ addieren, und erhalten so schließlich $b+a=a+b$, wie behauptet.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B1c. Ordnungen und geordnete Mengen. Eine *Relation* R auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$. Statt $(a,b) \in R$ schreiben wir kurz $a\ R\ b$. Diese *Infixnotation* ist insbesondere für Ordnungsrelationen $\leq, <, \geq, >$ etc. bequem und üblich.

Eine Relation $\leq$ auf der Menge X heißt *(partielle) Ordnung*, wenn gilt:

Reflexivität:	$\forall a \in X : a \leq a$
Antisymmetrie:	$\forall a,b \in X : (a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$
Transitivität:	$\forall a,b,c \in X : (a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

Wir nennen dann das Paar $(X, \leq)$ eine *(partiell) geordnete Menge*.

Wir nennen $\leq$ eine *totale Ordnung*, wenn zudem je zwei Elemente vergleichbar sind:

Totalität:	$\forall a,b \in X : a \leq b \vee b \leq a$

Wir nennen dann $(X, \leq)$ eine *total geordnete Menge*, auf englisch *toset* für *totally ordered set*. Fordert man keine Totalität, so sagt man zur Betonung auch *partielle Ordnung* und nennt $(X, \leq)$ eine *partiell geordnete Menge*, englisch *poset* für *partially ordered set*.

Die *umgekehrte Ordnung* definieren wir durch $a \geq b :\Leftrightarrow b \leq a$; die obigen Axiome übertragen sich wörtlich. Die logische Negation schreiben wir $a \not\leq b :\Leftrightarrow \neg(a \leq b)$.

Aus $\leq$ gewinnen wir die *strikte Ordnung* $<$ durch $a < b :\Leftrightarrow (a \leq b) \wedge \neg(a = b)$.

Aus der strikten Ordnung $<$ rekonstruieren wir $\leq$ durch $a \leq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$.

Die Reflexivität von $\leq$ ersetzen wir für $<$ entsprechend durch die

Irreflexivität:	$\forall a \in X : a \not< a$

Die Antisymmetrie der Ordnung $\leq$ ist für $<$ äquivalent zur

Asymmetrie:	$\forall a,b \in X : a < b \Rightarrow b \not< a$

Die Transitivität der Ordnung $\leq$ ist für $<$ äquivalent zur

Transitivität:	$\forall a,b,c \in X : (a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$

Genau dann ist $\leq$ eine Totalordnung, wenn $<$ Transitivität erfüllt und folgende

Trichotomie:	Es gilt entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.

Zur Betonung nennt man $\leq$ auch *laxe Ordnung* im Gegensatz zur *strikten Ordnung* $<$. Beide Konzepte unterscheiden sich in der Reflexivität, sind aber im obigen Sinne äquivalent. Je nach Situation ist die eine oder die andere Formulierung bequemer. Häufig werden Ihnen beide begegnen, daher tun wir gut daran, präzise Begriffe bereitzustellen.

Beispiel. Die Zahlbereiche $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\mathbb{Z}, \leq)$ sowie $(\mathbb{Q}, \leq)$ sind total geordnet. Die zugehörigen strikten Ordnungen sind ebenso nützlich, geschrieben $(\mathbb{N}, <)$ und $(\mathbb{Z}, <)$ und $(\mathbb{Q}, <)$.

Beispiel. Für jede Menge M ist die Potenzmenge $X = \mathfrak{P}(M)$ durch Inklusion $A \subset B$ geordnet, allerdings nicht total: Hat X mindestens zwei Elemente $a \neq b$, so sind die Mengen $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ nicht vergleichbar, denn es gilt weder $A \subset B$ noch $B \subset A$.

Die zugehörige strikte Ordnung schreibe ich $\subsetneq$: Hierbei bedeutet $A \subsetneq B$, dass A eine *echte* Teilmenge von B ist, also $A \subset B$ und $A \neq B$. Die Notation ist nicht ganz glücklich: Statt $\subset, \subsetneq$ schreiben manche lieber $\subseteq, \subset$, redundant und narrensicher ist $\subseteq, \subsetneq$.

Für eine *Präordnung* $\leq$ verlangen wir nur Reflexivität und Transitivität. Wenn sowohl $a \leq b$ als auch $b \leq a$ gilt, so können wir mangels Antisymmetrie nicht $a = b$ schließen. Wir nennen solche Elemente a, b *assoziiert*, geschrieben $a \doteq b$. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Auf der Quotientenmenge $X/_{\doteq}$ induziert $\leq$ eine Ordnung durch $[a] \leq [b] :\Leftrightarrow a \leq b$.

Übung B1F. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wir definieren die Teilbarkeitsrelation $|_R$, kurz $|$, durch

$$b \mid a \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists c \in R : a = bc$$

(1) Auf $\mathbb{N}$ ist $|_{\mathbb{N}}$ ist eine Ordnung, aber sie ist nicht total.

(2) Auf $\mathbb{Z}$ ist $|_{\mathbb{Z}}$ ist nur eine Präordnung: Es gilt weder Antisymmetrie noch Totalität. Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}$ sind die Assoziierten genau die beiden Elemente $\pm a$. Die Quotientenabbildung modulo ± 1 entspricht dem Absolutbetrag $|-| : (\mathbb{Z}, \cdot, 1) \to (\mathbb{N}, \cdot, 1)$, und die Präordnung $|_{\mathbb{Z}}$ auf $\mathbb{Z}$ induziert die zuvor betrachtete Ordnung $|_{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}$.

(3) Eine Präordnung kann durchaus total sein, auf $\mathbb{Z}$ zum Beispiel $a \sqsubseteq b :\Leftrightarrow |a| \leq |b|$.

§B1d. Monotonie. Eine Abbildung $f : (X, \leq) \to (Y, \sqsubseteq)$ geordneter Mengen heißt *(monoton) wachsend*, auch *ordnungserhaltend* oder *isoton*, wenn für alle $a, b \in X$ gilt: Aus $a \leq b$ folgt $f(a) \sqsubseteq f(b)$. Sie heißt *(monoton) fallend*, auch *ordnungsumkehrend* oder *antiton*, wenn für $a, b \in X$ gilt: Aus $a \leq b$ folgt $f(b) \sqsubseteq f(a)$. Sie heißt monoton, wenn sie isoton oder antiton ist. Beides kann zugleich gelten: Jede konstante Abbildung ist isoton *und* antiton; ist die Ordnung $\leq$ total, so gilt hierzu auch die Umkehrung.

Für die strikten Ordnungen $<$ und $\sqsubset$ gilt entsprechend: Wir nennen $f : (X, <) \to (Y, \sqsubset)$ *streng (monoton) wachsend* oder *strikt isoton*, wenn für $a, b \in X$ gilt: Aus $a < b$ folgt $f(a) \sqsubset f(b)$. Sie heißt *streng (monoton) fallend* oder *strikt antiton*, wenn für $a, b \in X$ gilt: Aus $a < b$ folgt $f(b) \sqsubset f(a)$. Sie heißt strikt monoton, wenn sie strikt isoton oder strikt antiton ist. Strikt isoton impliziert isoton, letzteres nennt man zur Betonung daher auch *schwach (monoton) wachsend* oder *lax isoton*. Entsprechend für antiton.

Ist die Abbildung $f : (X, \leq) \to (Y, \sqsubseteq)$ bijektiv und sind sowohl f als auch ihre Inverse f^{-1} isoton, so nennen wir f einen *Ordnungsisomorphismus*, kurz $f : (X, \leq) \xrightarrow{\sim} (Y, \sqsubseteq)$.

Beispiele. Die Abbildung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto x^3$ ist strikt isoton. Sie ist kein Ordnungsisomorphismus: Sie ist zwar injektiv aber nicht surjektiv, und somit nicht bijektiv. Auch $\mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{Q}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ ist strikt isoton, und $\mathbb{Q}_{\leq 0} \to \mathbb{Q}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ ist strikt antiton. Hingegen ist die Abbildung $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ nicht monoton, weder wachsend noch fallend.

Beispiele. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \leq) \to (X, \leq)$ ist isoton (sogar strikt isoton). Sind die Abbildungen $f : (X, \leq) \to (Y, \sqsubseteq)$ und $g : (Y, \sqsubseteq) \to (Z, \preccurlyeq)$ isoton (bzw. strikt isoton), so auch ihre Komposition $(g \circ f) : (X, \leq) \to (Z, \preccurlyeq)$.

Übung B1G. (1) Sei $f : (X, \leq) \to (Y, \sqsubseteq)$ strikt isoton. Ist f injektiv? falls $\leq$ total ist?
(2) Sei $f : (X, \leq) \to (Y, \sqsubseteq)$ isoton und bijektiv. Ist $g = f^{-1}$ isoton? falls $\leq$ total ist?

✻ **B1G.** (1) Im Allgemeinen ist f nicht injektiv. Kleinstes Gegenbeispiel ist $X = \{a, b\}$ mit zwei unvergleichbaren Elementen $a \not\leq b$ und $b \not\leq a$ und $Y = \{c\}$. Die Abbildung $f : (X, \leq) \to (Y, \sqsubseteq)$ ist strikt isoton aber nicht injektiv. Ist $\leq$ eine Totalordnung, so gilt: Aus $a \neq b$ folgt $a < b$ oder $b < a$, also $f(a) < f(b)$ oder $f(b) < f(a)$.

(2) Im Allgemeinen ist f^{-1} nicht isoton. Wir betrachten $X = \{a, b\}$ wie zuvor und $Y = \{c, d\}$ mit $c \leq d$. Die Bijektion $f : X \to Y : a \mapsto c, b \mapsto d$ ist strikt isoton, aber f^{-1} nicht. Ist $\leq$ eine Totalordnung, so gilt: Für $c < d$ in Y gilt $g(a) < g(b)$ oder $g(b) < g(a)$. Letzteres ist ausgeschlossen dank Isotonie von f.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B1e. Geordnete Körper. Die algebraische Struktur $(K,+,\cdot)$ eines Körpers können wir nun verbinden mit der ordnungstheoretischen Struktur $(K,<)$ einer geordneten Menge.

Definition B1H. Ein *geordneter Körper* $(K,+,\cdot,<)$ besteht aus einem Körper $(K,+,\cdot)$ und einer strikten Totalordnung $<$ auf der Menge K, sodass jede Addition mit $c \in K$ und jede Multiplikation mit $c > 0$ strikt isoton ist. Das bedeutet, für alle $a,b,c \in K$ gilt:

(O1) Transitivität:	Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.
(O2) Trichotomie:	Es gilt entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.
(O3) Isotonie der Addition:	Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.
(O4) Isotonie der Multiplikation:	Aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$.

Wörtlich genauso definieren wir die Begriffe *geordneter Ring* und *geordneter Halbring*.

Wie üblich schreiben wir $a \leq b$ falls $a < b$ oder $a = b$, sowie $a > b$ für $b < a$ und $a \geq b$ für $b \leq a$. Wir nennen $c \in K$ *positiv*, falls $c > 0$, und *negativ*, falls $c < 0$. Wir nutzen die Bezeichnungen $K_{>0} = \{\, c \in K \mid c > 0 \,\}$ und entsprechend $K_{<0} = \{\, c \in K \mid c < 0 \,\}$.

Übung B1I. Die Axiome (A,D,M,O) implizieren die üblichen Rechenregeln, insbesondere:

(1) Die Negation $-: K \to K$ ist strikt antiton: Aus $a < b$ folgt $-b < -a$.
(2) Die Multiplikation mit $c > 0$ ist strikt isoton, mit $c < 0$ hingegen strikt antiton.
(3) Für alle $a \in K$ gilt $a^2 \geq 0$, für $a \neq 0$ sogar $a^2 > 0$. Insbesondere gilt $-1 < 0 < 1$.
(4) Bei Inversion gilt: Aus $0 < a$ folgt $0 < a^{-1}$, und aus $a < 0$ folgt $a^{-1} < 0$.
(5) Die Inversion $^{-1} : K_{>0} \to K_{>0}$ bzw. $^{-1} : K_{<0} \to K_{<0}$ ist strikt antiton:
Aus $0 < a < b$ folgt $0 < b^{-1} < a^{-1}$. Aus $a < b < 0$ folgt $b^{-1} < a^{-1} < 0$.

✻ **B1I.** (1) Sei $a < b$. Wir nutzen (O3) und (A): Addition von $-a-b$ ergibt $-b < -a$. (2) Sei $a < b$ und $c < 0$, also $0 < -c$. Multiplikation ergibt $-ac < -bc$, also $bc < ac$. (3) Wir unterscheiden drei Fälle: Für $0 = a$ gilt $0 = a^2$, insbesondere also $0 \leq a^2$. Für $0 < a$ gilt dank Isotonie $0 = 0 \cdot a < a \cdot a = a^2$. Für $a < 0$ gilt dank Antitonie $0 = 0 \cdot a < a \cdot a = a^2$. (4) Wir multiplizieren $0 < a$ bzw. $a < 0$ mit $(a^{-1})^2 > 0$ und erhalten $0 < a^{-1}$ bzw. $a^{-1} < 0$. (5) Im Falle $0 < a < b$ multiplizieren wir mit $a^{-1} > 0$ und $b^{-1} > 0$ und erhalten $0 < b^{-1} < a^{-1}$. Im Falle $a < b < 0$ gilt $0 < -b < -a$, also $0 < -a^{-1} < -b^{-1}$, und somit $b^{-1} < a^{-1} < 0$.

Übung B1J (Alternative Definition)**.** Sei $(K,+,\cdot,\leq)$ ein Körper $(K,+,\cdot)$ mit einer (laxen) Totalordnung $\leq$ auf der Menge K, sodass jede Addition mit $c \in K$ und jede Multiplikation mit $c \geq 0$ (lax) isoton ist. Das bedeutet, für alle $a,b,c \in K$ gilt:

(O3') Monotonie der Addition:	Aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$.
(O4') Monotonie der Multiplikation:	Aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist zur Definition B1H.

Übung B1K (Alternative Definition)**.** Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper bzw allgemeiner ein Ring. Hierin sei eine Teilmenge $K_{>0} \subset K$ ausgezeichnet, sodass gilt: (1) $K = -K_{>0} \sqcup \{0\} \sqcup K_{>0}$ sowie (2) $K_{>0} + K_{>0} \subset K_{>0}$ und (3) $K_{>0} \cdot K_{>0} \subset K_{>0}$. Wir definieren die Relation $a < b$ durch $b - a \in K_{>0}$. Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist zur Definition B1H.

Soweit die Grundbegriffe zu Körpern und Ringen sowie Ordnungen; das ist länglich aber nötig. Damit gewappnet können wir nun die Definition bzw. Konstruktion der grundlegenden Zahlbereiche $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ wie im folgenden Satz formulieren. Die letzten beiden Erweiterungen $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ untersuchen wir anschließend genauer.

Satz B1L (Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$)**.** *(1) Die natürlichen Zahlen* $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, <)$ *sind ein geordneter, kommutativer Halbring mit* $0 \neq 1$*. Dieser wird (bis auf Isomorphie) eindeutig festgelegt durch die folgenden drei Dedekind–Peano–Axiome:*

(N1) Additive Inverse: Aus $m + n = 0$ *folgt* $m = n = 0$*.*
(N2) Additive Kürzbarkeit: Aus $m + k = n + k$ *folgt* $m = n$*.*
(N3) Vollständige Induktion: Enthält eine Menge $E \subset \mathbb{N}$ *des Nullelement* $0 \in E$ *und mit jedem Element* $n \in E$ *auch seinen Nachfolger* $n + 1 \in E$*, dann gilt* $E = \mathbb{N}$*.*

Die Addition $n \mapsto n + 1$ *formalisiert demnach den Vorgang des Zählens:*

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 2+1,\ 4 = 3+1,\ 5 = 4+1,\ \ldots\}$$

Addition, Multiplikation und Ordnung sind damit per Rekursion eindeutig festgelegt:

- *Es gilt* $m + 0 = m$ *und* $m + (n + 1) = (m + n) + 1$ *für alle* $m, n \in \mathbb{N}$*.*
- *Es gilt* $m \cdot 0 = 0$ *und* $m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + n$ *für alle* $m, n \in \mathbb{N}$*.*
- *Die Relation* $m \leq n$ *bedeutet, es gibt ein* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $m + k = n$*.*

(2) Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1, <)$ *sind ein geordneter, kommutativer Ring. Er enthält den Halbring* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ *und wird eindeutig festgelegt durch folgende Fortsetzungseigenschaft: Für jede ganze Zahl* $z \in \mathbb{Z}$ *gilt* $z = a - b$ *für geeignete* $a, b \in \mathbb{N}$*. Das bedeutet:*

$$\mathbb{Z} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

(3) Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1, <)$ *sind ein geordneter Körper. Er enthält den Ring* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ *und wird eindeutig festgelegt durch folgende Fortsetzungseigenschaft: Für jede rationale Zahl* $r \in \mathbb{Q}$ *gilt* $r = a/b$ *für geeignete* $a, b \in \mathbb{Z}$ *mit* $b \neq 0$*. Das bedeutet:*

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

(4) Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1, <)$ *sind ein geordneter Körper. Er enthält den Körper* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *und ist ordnungs-vollständig: Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge* $M \subset \mathbb{R}$ *besitzt ein Supremum (kleinste obere Schranke), das heißt, es existiert eine Schranke* $s \in \mathbb{R}$ *mit* $M \leq s$*, sodass für jede weitere Schranke* $t \in \mathbb{R}$ *mit* $M \leq t$ *gilt* $s \leq t$*.*

(5) Die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ *sind ein Körper. Er enthält den Körper* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *sowie ein Element* $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{i}^2 = -1$*. Er wird eindeutig festgelegt durch folgende Eigenschaft: Jede komplexe Zahl* $z \in \mathbb{C}$ *schreibt sich eindeutig als* $z = x + y\mathrm{i}$ *mit* $x, y \in \mathbb{R}$*:*

$$\mathbb{C} = \{x + y\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ *gibt es wegen* $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$ *keine Anordnung auf* $\mathbb{C}$*, die mit der Multiplikation verträglich wäre. Im Gegensatz zu* $\mathbb{N}$*,* $\mathbb{Z}$*,* $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$ *erlaubt* $\mathbb{C}$ *Automorphismen. Die komplexe Konjugation* $\overline{x + y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$ *ist ein* $\mathbb{R}$*–linearer Körperautomorphismus.*

(6) Diese Strukturen lassen sich sukzessive konstruieren mit den Mitteln der Mengenlehre; das beweist ihre Existenz und somit die Widerspruchsfreiheit unserer Forderungen. Zudem sind die so beschriebenen Strukturen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *durch die angegebenen Eigenschaften jeweils eindeutig festgelegt (bis auf einen eindeutigen Isomorphismus).*

(7) Im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$ *ist der Körper* $\mathbb{C}$ *algebraisch vollständig: Jedes Polynom* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *mit Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *zerfällt in Linearfaktoren, das heißt, es existieren Nullstellen* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *sodass* $p(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$*.* □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B1f. Gruppen und Monoide. Oft ist es sinnvoll eine einzelne Verknüpfung $+$ oder $\cdot$ zu untersuchen, etwa zur Vereinfachung oder weil überhaupt nur eine Verknüpfung vorliegt.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

ABBILDUNG B:1. Addition und Multiplikation der kleinsten Körper $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$

Eine (zweistellige) *Verknüpfung* ist eine Abbildung $* : A \times B \to C$, das heißt, jedem Paar von Elementen $a \in A$ und $b \in B$ wird ihr Produkt $c = a * b$ in C zugeordnet. Dies entspricht einer Verknüpfungstabelle; kleine Tabellen können wir explizit aufzählen.

Konvention. Die Verknüpfung $* : A \times B \to C$ setzen wir auf Teilmengen fort gemäß

$$\begin{aligned} * : A \times \mathfrak{P}(B) \to \mathfrak{P}(C), &\qquad (a,T) \mapsto a * T &&:= \{\, a * t \mid t \in T \,\} \\ * : \mathfrak{P}(A) \times B \to \mathfrak{P}(C), &\qquad (S,b) \mapsto S * b &&:= \{\, s * b \mid s \in S \,\} \\ * : \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B) \to \mathfrak{P}(C), &\qquad (S,T) \mapsto S * T &&:= \{\, s * t \mid s \in S,\ t \in T \,\} \end{aligned}$$

Beispiel. In $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist $2 \cdot \mathbb{Z}$ bzw. $1 + (2 \cdot \mathbb{Z})$ die Menge der geraden / ungeraden Zahlen.

Im wichtigen Spezialfall $A = B = C$ nennen wir $* : A \times A \to A$ *innere* Verknüpfung.

Definition B1M (Gruppe, explizit)**.** Ein *Magma* $(G, *)$ besteht aus einer Menge G mit einer inneren Verknüpfung $* : G \times G \to G : (a,b) \mapsto a * b$. Eine *Halbgruppe* $(G, *)$ erfüllt zudem die Assoziativität. Ein *Monoid* $(G, *, e)$ besitzt zudem ein neutrales Element $e \in G$. Eine *Gruppe* $(G, *, e, \iota)$ besitzt zudem eine Inversion $\iota : G \to G$.

Das bedeutet: Für alle $a, b, c \in G$ gilt $a * (b * c) = (a * b) * c$ sowie $e * a = a * e = a$ und $a * \iota(a) = \iota(a) * a = e$. Statt $a * b$ schreiben wir kurz ab, statt $\iota(a)$ auch a^{-1}.

Dank Assoziativität $a * (b * c) = (a * b) * c$ ist die Klammerung unerheblich, und wir schreiben für mehrfache Produkte kurz $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ oder noch kürzer $a_1 a_2 \cdots a_n$.

Im Allgemeinen ist die Reihenfolge der Faktoren wesentlich, da $a * b \neq b * a$ gelten kann. Das Produkt $*$ heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$ gilt. In diesem Falle können wir die Faktoren umordnen ohne das Ergebnis zu ändern, das heißt $a_1 a_2 \cdots a_n = a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \cdots a_{\pi(n)}$ für jede Permutation $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bemerkung. Jedes Magma $(G, *)$ hat höchstens ein neutrales Element: Ist $e \in G$ linksneutral und $e' \in G$ rechtsneutral, also $e * a = a = a * e'$ für alle $a \in G$, so folgt $e = e * e' = e'$. Im Gegensatz zur Eindeutigkeit muss die Existenz gesondert gefordert werden (G2).

In jedem Monoid $(G, *, e)$ hat $a \in A$ höchstens ein Inverses: Ist $a' \in G$ linksinvers und $a'' \in G$ rechtsinverse zu a, also $a' * a = e = a * a''$, so folgt $a' = a'(aa'') = (a'a)a'' = a''$. Im Gegensatz zur Eindeutigkeit muss die Existenz gesondert gefordert werden (G3).

Anders gesagt: In jedem Monoid $(G, *, e)$ ist das neutrale Element $e \in G$ eindeutig durch $*$ bestimmt. In jeder Gruppe $(G, *, e, \iota)$ ist zu jedem $a \in G$ das Inverse a^{-1} eindeutig bestimmt. Es genügt daher, die Gruppe $(G, *, e, \iota)$ nur durch das Produkt $*$ anzugeben.

Definition B1N (Gruppe, implizit)**.** Sei G eine Menge und $* : G \times G \to G$ eine zweistellige innere Verknüpfung. Wir nennen $(G, *)$ eine *Halbgruppe*, wenn gilt:

(G1) Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$

Die Halbgruppe $(G, *)$ ist ein *Monoid*, wenn zudem gilt:

(G2) Neutrales Element: $\exists e \in G \;\; \forall a \in G : e * a = a * e = a$

Das Monoid $(G, *)$ ist eine *Gruppe*, wenn zudem gilt:

(G3) Inverse Elemente: $\forall a \in G \;\; \exists b \in G : a * b = b * a = e$

Die Verknüpfung $* : G \times G \to G$ heißt *kommutativ* oder *abelsch* wenn gilt:

(G4) Kommutativität: $\forall a, b \in G : a * b = b * a$

Die Anzahl $|G|$ der Elemente heißt die *Ordnung* von G.

Konvention. Geht das Produkt unzweifelhaft aus dem Kontext hervor, so sagt man auch kurz „die Gruppe G“, meint damit aber implizit $(G, *)$ bzw. explizit $(G, *, e, \iota)$.

In der Schreibweise $(G, *)$ sind das neutrale Element $e \in G$ und die Inversion $\iota : G \to G$ nur implizit. Dank der obigen Bemerkung lassen sie sich eindeutig aus $(G, *)$ rekonstruieren. Manchmal ist es vorteilhaft, explizit $(G, *, e)$ oder $(G, *, e, \iota)$ zu schreiben.

Üblich sind insbesondere die multiplikative Schreibweise $(G, \cdot, 1, ^{-1})$ sowie die additive Schreibweise $(G, +, 0, -)$. Die Unterscheidung ist besonders nützlich, wenn mehr als eine Verknüpfung vorliegt, etwa die Addition und die Multiplikation eines Ringes oder Körpers.

Beispiele.
- Auf jeder einelementigen Menge $\{e\}$ existiert genau eine Verknüpfung, nämlich $e * e = e$, und diese erfüllt offensichtlich alle obigen Bedingungen.
- Abbildung B:1 zeigt Gruppen $(K, +)$ und Monoide $(K, \cdot)$ der Ordnung $2, 3, 4$.
- Es sind $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}, +)$ abelsche Gruppen. Ebenso sind $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ abelsche Gruppen.
- Hingegen sind $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ zwar Monoide aber keine Gruppen. Zudem sind $(\mathbb{N}_{\geq 1}, +)$ und $(2\mathbb{Z}, \cdot)$ sogar nur Halbgruppen aber keine Monoide.

Mit der Definition B1N von Monoiden und Gruppen können wir insbesondere die Definition B1B von Ringen und Körpern strukturieren und bequemer formulieren:

Beispiel. Genau dann ist $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring mit $1 \neq 0$ / ein Divisionsring / ein Körper, wenn $(K, +, 0)$ eine (abelsche) Gruppe ist, die Multiplikation distributiv über die Addition ist und $(K^*, \cdot, 1)$ ein Monoid / eine Gruppe / eine abelsche Gruppen bildet. (Siehe B1E)

Abbildung B:1 zeigt die Körper $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$, $(\mathbb{F}_3, +, \cdot)$, $(\mathbb{F}_4, +, \cdot)$ der Ordnung $2, 3, 4$.

Definition B1O. Sei $(G, *)$ ein Magma. Eine Teilmenge $H \subset G$ nennen wir *Untermagma*, wenn $H * H \subset H$ gilt. In diesem Falle können wir die Verknüpfung $* : G \times G \to G$ einschränken zu $*_H := *|^H_{H \times H} : H \times H \to H$, und damit ist $(H, *_H)$ selbst ein Magma.

Ist die Verknüpfung $*$ assoziativ / kommutativ, so auch ihre Einschränkung $*_H$.

Sei $(G, *, e)$ ein Monoid. Wir nennen $H \subset G$ ein *Untermonoid*, wenn $H * H \subset H$ und $e \in H$ gilt. In diesem Fall ist $(H, *_H, e)$ selbst ein Monoid. Wir nennen $H \subset G$ eine *Untergruppe*, wenn zudem $(H, *_H, e)$ eine Gruppe ist.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Proposition B1P. *In jedem Monoid $(M,*,e)$ ist die Teilmenge $M^\times \subset M$ der invertierbaren Elemente eine Untergruppe. Genau dann ist $(M,*,e)$ eine Gruppe, wenn $M^\times = M$ gilt.*

BEWEIS. Es genügt sorgfältiges Nachrechnen. Versuchen Sie es als Übung! □

✻ **B1P.** Ein Element $a \in M$ heißt *invertierbar* im Monoid $(M,*,e)$, wenn ein Element $a^{-1} \in M$ existiert, das $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ erfüllt. Dies definiert die Teilmenge $M^\times = \{\, a \in M \mid a \text{ ist invertierbar} \,\}$. Durch a ist a^{-1} eindeutig bestimmt und selbst invertierbar gemäß $(a^{-1})^{-1} = a$. Aus $a \in M^\times$ folgt somit $a^{-1} \in M^\times$, und wir erhalten so die Inversion $^{-1} : M^\times \to M^\times$. Dank $e*e = e$ ist e invertierbar gemäß $e^{-1} = e$, also gilt $e \in M^\times$. Sind a,b invertierbar, so auch ihr Produkt gemäß $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$, denn $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) = a*(b*b^{-1})*a^{-1} = a*a^{-1} = e$ und ebenso $(b^{-1}*a^{-1})*(a*b) = b^{-1}*(a^{-1}*a)*b = b^{-1}*b = e$. Aus $a,b \in M^\times$ folgt somit $a*b \in M^\times$, und wir erhalten so die eingeschränkte Verknüpfung $* : M^\times \times M^\times \to M^\times$. Auf der Teilmenge $M^\times \subset M$ erhalten wir somit die Untergruppe $(M^\times,*,e,^{-1})$.

Beispiel. Sei X eine Menge und $\mathrm{End}(X) = \mathrm{Abb}(X,X)$ die Menge aller Selbstabbildungen $f : X \to X$. Mit der Komposition erhalten wir das Monoid $(\mathrm{End}(X),\circ,\mathrm{id}_X)$. Hierin ist die *symmetrische Gruppe* $\mathrm{Sym}(X) := (\mathrm{End}(X),\circ,\mathrm{id}_X)^\times$ die Untergruppe aller invertierbaren Abbildungen, also Bijektionen $f : X \xrightarrow{\sim} X$, auch *Permutationen* genannt.

Beispiel. Ist $(R,+,0,\cdot,1)$ ein Ring, so ist $R^\times = (R,\cdot,1)^\times$ die multiplikative Untergruppe der invertierbaren Elemente in $(R,\cdot,1)$. Genau dann ist $(R,+,0,\cdot,1)$ ein Divisionsring, wenn $R^\times = R^*$ gilt. Für die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ zum Beispiel gilt $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\} \subsetneq \mathbb{Z}^*$.

§B1g. Homomorphismen. Für jede mathematische Struktur, wie Monoide, Gruppe, Ringe, Körper, etc., betrachten wir immer auch ihre *strukturerhaltenden Abbildungen*:

Definition B1Q. Ein *Homomorphismus* $f : (G,*) \to (H,\cdot)$ zwischen Magmen $(G,*)$ und $(H,\cdot)$ ist eine Abbildung $f : G \to H$, die $f(a*b) = f(a)\cdot f(b)$ für alle $a,b \in G$ erfüllt.

Sind $(G,*)$ und $(H,\cdot)$ Gruppen, so folgt hieraus $f(e_G) = e_H$ und $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ für alle $a \in G$. Wir nennen $f : (G,*) \to (H,\cdot)$ dann einen *Gruppenhomomorphismus*.

Für einen *Monoidhomomorphismus* $f : (G,*,e_G) \to (H,\cdot,e_H)$ fordern wir explizit $f(e_G) = e_H$. Für die invertierbaren Elemente folgt $f(G^\times) \subset H^\times$ und $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Ein *Homomorphismus* $f : (R,+,\cdot) \to (S,+,\cdot)$ zwischen Ringen $(R,+,\cdot)$ und $(S,+,\cdot)$, oder insbesondere Körpern, ist eine Abbildung $f : R \to S$, die $f(a+b) = f(a)+f(b)$ und $f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$ für alle $a,b \in G$ erfüllt sowie $f(1_R) = 1_S$.

Beispiel. Ist $(G,*)$ ein Magma / Monoid / Gruppe und $H \subset G$ ein Untermagma / -monoid / -gruppe, so ist die Inklusion $\iota : (H,*_H) \hookrightarrow (G,*)$ ein Homomorphismus.

Beispiel. Die Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ist ein Ringhomomorphismus, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ sind Körperhomomorphismen. Die Konjugation $\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist ein Körperautomorphismus

Beispiel. Die reelle Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ und ihr Umkehrfunktion, der natürlich Logarithmus $\ln : (\mathbb{R}_{>0},\cdot) \to (\mathbb{R},+)$, sind Gruppenisomorphismen.

Übung B1R. Sei $f : (G,*) \to (H,\cdot)$ ein surjektiver Homomorphismus zwischen Magmen.

(1) Ist $(G,*)$ assoziativ / kommutativ, so auch $(H,\cdot)$.
(2) Ist e neutral in $(G,*)$, so ist $f(e)$ neutral in $(H,\cdot)$.
(3) Sind zudem a und b invers in $(G,*)$, so sind $f(a)$ und $f(b)$ invers in $(H,\cdot)$.

Ist also $(G,*)$ eine Halbgruppe / ein Monoid / eine Gruppe, so auch $(H,\cdot)$.

Satz B1s. *Für jede endliche Menge X ist die* Signatur $\operatorname{sign} : (\operatorname{End}(X), \circ) \to (\{0, \pm 1\}, \cdot)$ *ein Monoidhomomorphismus. Speziell für $X \subset \mathbb{R}$ gilt die elegant-knappe Formel*

$$\operatorname{sign}(f) = \prod_{i<j} \frac{f(i)-f(j)}{i-j} = \prod_{\{i\neq j\}} \frac{f(i)-f(j)}{i-j}.$$

Genau dann ist $\operatorname{sign}(f)$ *invertierbar, also* ± 1*, wenn f invertierbar ist, also bijektiv. Eingeschränkt auf $S_n := \operatorname{Sym}(X)$ erhalten wir den Gruppenhomomorphismus* $\operatorname{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$.

BEWEIS. Es genügt sorgfältiges Nachrechnen. Versuchen Sie es als Übung! □

✻ **B1s.** Das zweite Produkt erstreckt sich über alle *ungeordneten Paare* $\{i \neq j\}$, also zweielementige Mengen $\{i, j\} \subset X$ mit $i \neq j$. Hier ist $\{i, j\} \mapsto (f(i) - f(j))/(i - j)$ wohldefiniert, da invariant unter Vertauschung. Ist f nicht injektiv, so gibt es $i \neq j$ mit $f(i) = f(j)$, also $\operatorname{sign}(f) = 0$. Im Folgenden sei f injektiv; da wir X als endlich voraussetzen, ist f bijektiv. Dann bildet f die Menge aller Paare $\{i \neq j\}$ bijektiv auf sich ab, also $|\operatorname{sign}(f)| = \prod_{\{i\neq j\}} |f(i) - f(j)|/|i - j| = 1$. Somit ist $\operatorname{sign}(f) = \pm 1$, die Abbildung sign also wohldefiniert.

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(g \circ f) = \prod_{\{i\neq j\}} \frac{g(f(i))-g(f(j))}{i-j} &= \prod_{\{i\neq j\}} \frac{g(f(i))-g(f(j))}{f(i)-f(j)} \cdot \prod_{\{i\neq j\}} \frac{f(i)-f(j)}{i-j} \\ &= \prod_{\{k\neq \ell\}} \frac{g(k)-g(\ell)}{k-\ell} \quad \cdot \prod_{\{i\neq j\}} \frac{f(i)-f(j)}{i-j} = \operatorname{sign}(g)\cdot\operatorname{sign}(f)\end{aligned}$$

Allgemein: Ist X eine beliebige endliche Menge, so wählen wir eine Bijektion $\varphi : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} X$. Für $g : X \to X$ setzen wir $f := \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ und definieren $\operatorname{sign}(g) := \operatorname{sign}(f)$. Dies ist wohldefiniert, also unabhängig von der willkürlich gewählten Bijektion φ: Ist nämlich $\tilde{\varphi} : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} X$ eine weitere Bijektion und $\tilde{f} = \tilde{\varphi}^{-1} \circ g \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$, so folgt $\operatorname{sign}(\tilde{f}) = \operatorname{sign}(f)$.

§B1h. Isomorphismen. Im Folgenden sei $(G, *)$ ein Magma / ein Monoid / eine Gruppe. Alles gilt sinngemäß ebenso für Ringe und Körper und weitere algebraische Strukturen.

Die Identität $\mathrm{id}_G : (G, *) \to (G, *)$ ist ein Homomorphismus. Sind $f : (G, *) \to (H, \cdot)$, $g : (H, \cdot) \to (K, \star)$ Homomorphismen, so auch ihre Komposition $g \circ f : (G, *) \to (K, \star)$. Die Menge aller Homomorphismen $f : (G, *) \to (H, \cdot)$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Hom}(G, *; H, \cdot)$ oder kurz $\operatorname{Hom}(G, H)$. Die Komposition definiert hierauf eine (äußere) Verknüpfung:

$$\circ : \operatorname{Hom}(H, \cdot; K, \star) \times \operatorname{Hom}(G, *; H, \cdot) \to \operatorname{Hom}(G, *; K, \star) : (g, f) \mapsto g \circ f$$

Ist ein Homomorphismus $f : (G, *) \to (H, \cdot)$ bijektiv, so ist seine Umkehrabbildung $g = f^{-1} : (H, \cdot) \to (G, *)$ ebenfalls ein Homomorphismus, denn für alle $x, y \in H$ gilt

$$g(x \cdot y) = g(f(g(x)) \cdot f(g(y))) = g(f(g(x) * g(y))) = g(x) * g(y).$$

Wir nennen dann f einen *Isomorphismus*, geschrieben $f : (G, *) \xrightarrow{\sim} (H, \cdot)$, die beiden Strukturen $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ nennen wir dann *isomorph*, geschrieben $(G, *) \cong (H, \cdot)$.

Umformulierung: Ein Isomorphismus $(f, g) : (G, *) \cong (H, \cdot)$ besteht aus zwei Homomorphismen $f : (G, *) \to (H, \cdot)$ und $g : (H, \cdot) \to (G, *)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_G$ und $f \circ g = \mathrm{id}_H$.

Für einen Homomorphismus $f : (G, *) \to (G, *)$ stimmen Start und Ziel überein; wir nennen dann f einen *Endomorphismus* und im bijektiven Fall einen *Automorphismus*.

Als bequeme Abkürzung schreiben wir $\operatorname{End}(G, *) := \operatorname{Hom}(G, *; G, *)$ und erhalten so das Monoid $(\operatorname{End}(G, *), \circ, \mathrm{id}_G)$. Die Automorphismen von $(G, *)$ bilden hierin die Untergruppe $\operatorname{Aut}(G, *) := \operatorname{End}(G, *)^\times$ aller invertierbaren Endomorphismen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B1i. Vektorräume. Sei K eine Menge. Für $n \in \mathbb{N}$ besteht die Menge

$$K^n = \{\, (a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in K \,\}$$

aus allen n–Tupeln von Elementen in K. Somit ist $K^n = K \times \cdots \times K$ das n–fache Produkt. Ist $* : K \times K \to K$ gegeben, so definieren wir auf K^n die komponentenweise Verknüpfung

$$* : K^n \times K^n \to K^n, \qquad (a_1, \dots, a_n) * (b_1, \dots, b_n) := (a_1 * b_1, \dots, a_n * b_n).$$

Ist $(K, *)$ assoziativ / kommutativ, so auch $(K^n, *)$. Ist $(K, *, e)$ ein Monoid, so auch $(K^n, *, \bar{e})$ mit $\bar{e} = (e, \dots, e)$. Genau dann ist $a = (a_1, \dots, a_n)$ in $(K^n, *, \bar{e})$ invertierbar, wenn jedes $a_1, \dots, a_n$ in $(K, *, e)$ invertierbar ist; in diesem Falle gilt $a^{-1} = (a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$. Wir erhalten $(K^n, *)^\times = (K^\times, *)^n$. Demnach gilt: Ist $(K, *)$ eine Gruppe, so auch $(K^n, *)$.

Ist $(K, +, \cdot)$ ein Ring, so ist auch $(K^n, +, \cdot)$ ein Ring mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Doch Vorsicht: Ist K ein Körper, so ist K^n für $n \geq 2$ kein Körper! In K^2 gilt $(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$, also lassen sich diese Elemente sicher nicht invertieren.

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, etwa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, oder allgemeiner ein Ring, etwa $\mathbb{Z}$. Auf K^n betrachten wir die komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation durch

$$\begin{aligned} + &: K^n \times K^n \to K^n, & (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &:= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \\ \cdot &: K \times K^n \to K^n, & \lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) &:= (\lambda \cdot a_1, \dots, \lambda \cdot a_n). \end{aligned}$$

Mit diesen beiden Verknüpfungen erfreut sich $V = K^n$ folgender Eigenschaften:

(V1) Das Paar $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(V2) Die Multiplikation $\cdot : K \times V \to V$ erfüllt $1 \cdot x = x$ und $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$.
(V3) Es gilt Distributivität $(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$ und $\lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$.

Diese Bedingungen gelten jeweils für alle *Skalare* $\lambda, \mu \in K$ und alle *Vektoren* $x, y \in V$.

In vielen Situationen kommt es nur auf diese Rechenregeln an, und nicht auf die genaue Konstruktion oder Beschaffenheit von $(V, +, \cdot)$. Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition B1T. Sei K ein Körper. Ein *K–Vektorraum* ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V mit zwei Verknüpfungen, einer Addition $+ : V \times V \to V$ und eine Skalarmultiplikation $\cdot : K \times V \to V$, die obige Bedingungen (V1–3) erfüllen.

Allgemeiner: Ist K ein Ring, so nennt man zur Betonung $(V, +, \cdot)$ einen *K–Modul*.

Beispiele. Über dem Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen erhalten wir so den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ nennt man auch einen *reellen Vektorraum*.

Über dem Körper $K = \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen erhalten wir so den $\mathbb{C}$–Vektorraum $\mathbb{C}^n$. Einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ nennt man auch einen *komplexen Vektorraum*.

Über dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen erhalten wir so den $\mathbb{Z}$–Modul $\mathbb{Z}^n$.

Konvention. Wie zuvor für Körper und Ringe vereinbart, nutzen wir auch für Vektorräume die gängige Konvention *Punkt vor Strich*, um Klammern zu sparen, und lassen meist das Produktzeichen weg, um auch noch Punkte zu sparen.

Dieser abstrakte Begriff des Vektorraums und seine theoretische Untersuchung sind Gegenstand der Linearen Algebra. Seine zahlreichen Anwendungen begegnen uns überall.

§B1j. Funktionenräume. Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper, etwa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, oder allgemeiner ein Ring, etwa $\mathbb{Z}$. Auf der Menge K^Ω aller Funktionen $f,g:\Omega\to K$ definieren wir die Addition $f+g:\Omega\to K$ und die Skalarmultiplikation $\lambda f:\Omega\to K$ punktweise durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{für alle } x\in\Omega.$$

Damit wird $(K^\Omega,+,\cdot)$ zu einem K–Vektorraum, bzw. im Falle eines Ringes K zu einem K–Modul. Typische und häufige Beispiele, etwa für den reellen Körper $K=\mathbb{R}$, sind:

- Für $\Omega=\{1,\dots,n\}$ erhalten wir den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^n$ wie oben.
- Für $\Omega=\mathbb{N}$ erhalten wir den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ aller Folgen $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.
- Für $\Omega=\mathbb{R}$ erhalten wir den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ aller Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Ebenso definieren wir das Produkt $f\cdot g:\Omega\to K$ punktweise durch

$$(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x) \quad \text{für alle } x\in\Omega.$$

Hierdurch wird $(K^\Omega,+,\cdot)$ zu einem Ring. Doch Vorsicht, auch wenn K ein Körper ist, so ist K^Ω für $|\Omega|\geq 2$ nur ein Ring und kein Körper, wie oben bereits gesehen: In K^2 gilt $(1,0)\cdot(0,1)=(0,0)$, also lassen sich diese Elemente sicher nicht invertieren.

Ist $(K,\leq)$ geordnet, so definieren wir die Relation $f\leq g$ punktweise durch

$$f\leq g \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x)\leq g(x) \quad \text{für alle } x\in\Omega.$$

Getreu unseren Konventionen ist $f<g$ äquivalent zu $f\leq g$ und $f\neq g$. Das bedeutet hier $f(x)\leq g(x)$ für alle $x\in\Omega$ und $f(x)<g(x)$ für mindestens ein $x\in\Omega$. Ist $(K,\leq)$ total geordnet, so definieren wir $\min(f,g),\max(f,g):\Omega\to\mathbb{R}$ punktweise durch

$$\min(f,g)(x)=\min(f(x),g(x)), \quad \max(f,g)(x)=\max(f(x),g(x)).$$

Auch hier ist Vorsicht angebracht: Selbst wenn $(K,\leq)$ total geordnet ist, so ist $(K^\Omega,\leq)$ im Allgemeinen nur partiell geordnet: Gilt $0<1$ in K, so gilt $(0,0)<(0,1)<(1,1)$ und $(0,0)<(1,0)<(1,1)$ in K^2, aber die Elemente $(1,0)$ und $(0,1)$ sind unvergleichbar.

Beispiel. Für jede Teilmenge $A\subset\Omega$ definieren wir die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A:\Omega\to\{0,1\}$ durch $\mathbf{I}_A(x)=1$ falls $x\in A$ und $\mathbf{I}_A(x)=0$ sonst, falls $x\in\Omega\smallsetminus A$. Umgekehrt definieren wir zu $f:\Omega\to K$ die *Trägermenge* $\operatorname{supp}(f):=\{x\in\Omega\mid f(x)\neq 0\}$. Es gilt $\operatorname{supp}\mathbf{I}_A=A$. Für je zwei Teilmengen $A,B\subset\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{I}_A\leq\mathbf{I}_B \iff A\subset B, && \mathbf{I}_A<\mathbf{I}_B \iff A\subsetneq B,\\
&\mathbf{I}_{A\cap B}=\min(\mathbf{I}_A,\mathbf{I}_B)=\mathbf{I}_A\cdot\mathbf{I}_B, && \mathbf{I}_{A\cup B}=\max(\mathbf{I}_A,\mathbf{I}_B)=\mathbf{I}_A+\mathbf{I}_B-\mathbf{I}_A\cdot\mathbf{I}_B,\\
&\mathbf{I}_A+\mathbf{I}_B=\mathbf{I}_{A\cup B}+\mathbf{I}_{A\cap B}, && \mathbf{I}_{A\times B}(x,y)=\mathbf{I}_A(x)\cdot\mathbf{I}_B(y).
\end{aligned}$$

Beispiel. In K^Ω betrachten wir die Teilmenge $K^{(\Omega)}$ der Funktionen mit endlichem Träger. Dank $\operatorname{supp}(f+g)\subset\operatorname{supp}(f)\cup\operatorname{supp}(g)$ gilt für $f,g\in K^{(\Omega)}$ stets $f+g\in K^{(\Omega)}$. Dank $\operatorname{supp}(\lambda f)\subset\operatorname{supp}(f)$ gilt für $\lambda\in K$ und $f\in K^{(\Omega)}$ stets $\lambda f\in K^{(\Omega)}$. Somit ist $(K^{(\Omega)},+,\cdot)$ ein Untervektorraum von $(K^\Omega,+,\cdot)$. Zu jedem Element $a\in\Omega$ definieren wir die Funktion $e_a:=\mathbf{I}_{\{a\}}:\Omega\to K$ durch $e_a(a)=1$ und $e_a(x)=0$ für $x\neq a$. Die Familie $(e_a)_{a\in\Omega}$ ist eine Basis des Vektorraums $K^{(\Omega)}$, genannt die *kanonische Basis*: Jedes Element $f\in K^{(\Omega)}$ schreibt sich eindeutig als (endliche!) Linearkombination $f=\sum_a f(a)e_a$. Speziell für K^n erhalten wir die kanonische Basis $e_k=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ für $k=1,\dots,n$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B1k. Lineare Abbildungen. Seien V, W Vektorräume über dem Körper K (oder allgemeiner Moduln über dem Ring K). Wir nennen $f : V \to W$ *linear über* K, wenn gilt:

(1) Additivität: Für alle $u, v \in V$ gilt $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
(2) Homogenität: Für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Anders gesagt, $f : (V, +, \cdot) \to (W, +, \cdot)$ ist ein Homomorphismus der additiven Gruppen und verträglich mit den Skalarmultiplikationen. Dies nennen wir kurz *K–linear* oder lang einen *Homomorphismus von K–Vektorräumen*. Mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ bezeichnen wir die Menge aller Homomorphismen, also K–linearen Abbildungen $f : V \to W$.

Beispiele. • Die Nullabbildung $\mathrm{const}_V^0 : V \to W : v \mapsto 0$ ist K–linear.
• Ebenso ist K–linear jede Abbildung $f : K^n \to K^m$ der Form

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Jede lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ lässt sich so darstellen, wie wir gleich sehen.
• Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein Intervall und $C^k = C^k(I, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller k–mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$. Für $k = 0$ ist C^0 der Vektorraum aller stetigen Funktionen. Für $k \geq 1$ haben wir die Ableitung $\partial : C^k \to C^{k-1} : f \mapsto f'$ wobei $f'(x) = \lim_{h \to 0}(f(x+h) - f(x))/h$. Die Ableitung ist linear über $\mathbb{R}$.

Bemerkung. Bedingungen (1) und (2) sind äquivalent zu $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ für alle $\lambda, \mu \in K$ und $u, v \in V$. Per Induktion folgt dies für alle Linearkombinationen:

$$f\left(\sum\nolimits_{i \in I} \lambda_i v_i\right) = \sum\nolimits_{i \in I} \lambda_i f(v_i)$$

mit $\lambda_i \in K$ und $v_i \in V$ für alle $i \in I$. Hierbei ist die Indexmenge I endlich, oder zumindest der Träger $J = \{ i \in I \mid \lambda_i \neq 0 \}$, sodass die (stets endliche!) Summe definiert ist.

Übung B1U. Die Identität $\mathrm{id}_V : V \to V$ ist K–linear. Sind $f : U \to V$ und $g : V \to W$ linear über K, so auch ihre Komposition $g \circ f : U \to W$.

Die Menge $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ wird eine additive Gruppe $(\mathrm{Hom}_K(V, W), +, 0)$ mit punktweiser Addition, zudem ein K–Vektorraum mit punktweiser Skalarmultiplikation.

(Allgemeiner: Über einem kommutativen Ring K wird $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein K–Modul. Ist hingegen K nicht kommutativ, so bleibt es nur bei der additiven Gruppenstruktur.)

Die Komposition $\circ : \mathrm{Hom}_K(V, W) \times \mathrm{Hom}_K(U, V) \to \mathrm{Hom}_K(U, W) : (g, f) \mapsto (g \circ f)$ ist K–bilinear, das heißt, K–linear in jedem Argument (hier g und f).

Ist der Homomorphismus $f : V \to W$ bijektiv, so nennen wir f einen *Isomorphismus*. Dies ist äquivalent zur Existenz eines K–Homomorphismus $g : W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ und $f \circ g = \mathrm{id}_W$. Wir nennen dann V und W isomorph, geschrieben $V \cong W$.

Die Endomorphismenmenge $\mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V, V)$ wird ein Ring, ausgeschrieben $(\mathrm{End}_K(V), +, 0, \circ, \mathrm{id}_V)$, und als K–Vektorraumstruktur zudem eine Algebra über K.

Hierin ist die Automorphismenmenge $\mathrm{Aut}_K(V) = (\mathrm{End}_K(V), \circ, \mathrm{id}_V)^\times$ eine Gruppe.

§B1l. Basis und Dimension. Sei V ein K–Vektorraum und $v = (v_i)_{i\in I} \in V^I$ eine Familie von Vektoren $v_i \in V$. Dies ist nichts anderes als eine Abbildung $v : I \to V : i \mapsto v_i$, die jedem Index $i \in I$ einen Vektor $v_i \in V$ zuordnet. Die Indexmenge I ist hierbei beliebig. Im endlichen Falle denken wir vor allem an $I = \{1, 2, \dots, n\}$ und schreiben die Familie $v = (v_i)_{i\in I}$ meist bequem als n–Tupel $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Aber auch unendliche Mengen wie $I = \mathbb{N}$ sind erlaubt und kommen vor. Wir nutzen den uns bereits vertrauten K–Vektorraum

$$K^{(I)} = \big\{ \lambda : I \to K : i \mapsto \lambda_i \;\big|\; \lambda \text{ hat endlichen Träger} \big\}.$$

Eine *K–Linearkombination* von v ist eine (stets endliche!) Summe der Form

$$\textstyle\sum_{i\in I} \lambda_i v_i \quad \text{mit} \quad \lambda \in K^{(I)}.$$

Endlich bedeutet: Nur endlich viele Koeffizienten $\lambda_i \in K$ sind ungleich Null, daher sind nur endlich viele der Vektoren $\lambda_i v_i \in V$ ungleich Null, und ihre Summe in V ist definiert. Wir nutzen hier also die Abbildung $K^{(I)} \times V^I \to V : (\lambda, v) \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$.

Im Spezialfall $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ist die Familie $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ein n–Tupel von Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Wir haben dann $K^{(I)} = K^n$, und Linearkombinationen sind

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K.$$

Die Menge aller Linearkombinationen von v bezeichnen wir

$$\langle v \rangle = \langle v \rangle_K = \big\langle (v_i)_{i\in I} \big\rangle_K = \big\langle v_i : i \in I \big\rangle_K = \big\{ \textstyle\sum_{i\in I} \lambda_i v_i \;\big|\; \lambda \in K^{(I)} \big\}.$$

Dies ist ein K–Untervektorraum von V. Wir nennen ihn daher den *von $v = (v_i)_{i\in I}$ erzeugten K–Untervektorraum*. Er ist das Bild der K–linearen Abbildung

$$\Phi_v : K^{(I)} \to V, \quad (\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \textstyle\sum_{i\in I} \lambda_i v_i.$$

Definition B1v. (1) Die Familie v ist ein *Erzeugendensystem* des Vektorraums V über K.
$:\Leftrightarrow$ Jeder Vektor $u \in V$ lässt sich als mindestens eine Linearkombination von v darstellen.
$\Leftrightarrow$ Φ_v ist surjektiv. $\quad\Leftrightarrow\quad \langle v \rangle_K = V$

(2) Die Familie v ist *linear unabhängig* im Vektorraum V über K.
$:\Leftrightarrow$ Jeder Vektor $u \in V$ lässt sich als höchstens eine Linearkombination von v darstellen.
$\Leftrightarrow$ Φ_v ist injektiv. $\quad\Leftrightarrow\quad \ker(\Phi_v) = \{0\}$

(3) Die Familie v ist eine *Basis* des Vektorraums V über K.
$:\Leftrightarrow$ Jeder Vektor $u \in V$ lässt sich als genau eine Linearkombination von v darstellen.
$\Leftrightarrow$ Φ_v ist bijektiv. $\quad\Leftrightarrow\quad \langle v \rangle_K = V$ und $\ker(\Phi_v) = \{0\}$

Es gilt nun der wichtige und überaus nützliche Satz:

Satz B1w. *Sei K ein Körper und V ein K–Vektorraum. Dann gilt:*

(1) Jedes Erzeugendensystem von V lässt sich zu einer Basis von V verkürzen.
(2) Jede linear unabhängige Familie in V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.
(3) Es gibt K–Basen von V, und je zwei dieser Basen haben dieselbe Mächtigkeit.

Definition B1x. Sei K ein Körper und V ein K–Vektorraum. Die *Dimension* $\dim_K(V)$ ist die Mächtigkeit einer K–Basis von V. Dank des vorigen Satzes ist dies wohldefiniert.

Beispiel. Es gilt $\dim_K(K^n) = n$, allgemein $\dim_K(K^{(I)}) = \operatorname{card}(I)$, eventuell unendlich. Es genügt dank des Satzes, eine beliebige Basis zu finden, etwa die kanonische $(e_i)_{i\in I}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B1m. Matrizen. Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper, etwa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, oder allgemeiner ein Ring, etwa $\mathbb{Z}$. Seien $m,n \in \mathbb{N}$. Eine *Matrix* A der Größe $m \times n$ über K ist eine Abbildung

$$A : \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \to K, \quad (i,j) \mapsto a_{ij}.$$

Die Menge aller $m \times n$–Matrizen bezeichnen wir mit $K^{m\times n}$. Für praktische Rechnungen ist es bequem, die Matrix A wie folgt als rechteckiges Schema zu schreiben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{z.B.} \quad 1_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In dieser Schreibweise ist $v \in K^{m\times 1}$ ein *Spaltenvektor* mit m Zeilen, und $w \in K^{1\times n}$ ein *Zeilenvektor* mit n Spalten. Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ können wir auffassen als Familie von n Spaltenvektoren in $K^{m\times 1}$, und ebenso als Familie von m Zeilenvektoren in $K^{1\times n}$.

Zu $A = (a_{ij})_{ij}$ ist $A^\intercal = (a_{ij})_{ji}$ die *transponierte Matrix*. Dies definiert eine Bijektion $K^{m\times n} \to K^{n\times m}$. Genau dann gilt $A^\intercal = A$, wenn A symmetrisch ist, also $a_{ij} = a_{ji}$.

Matrizen passender Größe können wir addieren und multiplizieren gemäß

$$+ : K^{m\times n} \times K^{m\times n} \to K^{m\times n}, \quad (A,B) \mapsto C = A+B, \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij},$$
$$\cdot : K^{m\times n} \times K^{n\times r} \to K^{m\times r}, \quad (A,B) \mapsto C = A\cdot B, \quad c_{ik} := \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}.$$

Die Addition definiert eine abelsche Gruppe $(K^{m\times n},+)$. Die Multiplikation ist assoziativ und distributiv über die Addition. Zu jeder Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist $1_{m\times m}$ links-neutral, also $1_{m\times m}\cdot A = A$, und $1_{n\times n}$ ist rechts-neutral, also $A\cdot 1_{n\times n} = A$. Bei Transposition gilt $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$. Ist $\overline{\ }: K \to K$ ein Körperautomorphismus, zum Beispiel die Konjugation $\overline{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so definieren wir $\overline{(a_{ij})} = (\overline{a_{ij}})$ und erhalten $\overline{A+B} = \overline{A}+\overline{B}$ sowie $\overline{A\cdot B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$. Zudem können wir jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ multiplizieren mit einem Skalar $\lambda \in K$:

$$\cdot : K \times K^{m\times n} \to K^{m\times n}, \qquad (\lambda, A) \mapsto B = \lambda\cdot A, \qquad b_{ij} := \lambda\cdot a_{ij}.$$

Matrizen gleicher Größe bilden den Vektorraum $(K^{m\times n},+,\cdot)$ über dem Körper K bzw. einen Modul über dem Ring K. Die Matrixmultiplikation $\cdot : K^{m\times n} \times K^{n\times r} \to K^{m\times r}$ ist eine (äußere) Verknüpfung. Quadratische Matrizen mit $m = n$ bilden den Ring $(K^{n\times n},+,\cdot)$. Die invertierbaren Matrizen bilden die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K) := (K^{n\times n},\cdot)^\times$, genannt *allgemeine lineare Gruppe* der $n\times n$–Matrizen über K, englisch *general linear group*.

Satz B1Y. *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine multilineare, alternierende, normierte Abbildung* $\det : K^{n\times n} \to K$*, genannt* Determinante*. Diese erfreut sich folgender Eigenschaften:*

(1) Es gilt $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}$.
(2) Die Determinante ist transpositionsinvariant: $\det(A^\intercal) = \det(A)$.
(3) Die Determinante ist multiplikativ: $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
(4) Genau dann ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, wenn $\det(A) \in K^\times$ *dies ist.*
(5) Genauer gilt $A\cdot\tilde{A} = \tilde{A}\cdot A = \det(A)\cdot 1_{n\times n}$, also $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$.

Hierzu schreiben wir $A = (a_1,\dots,a_n)$ mit Spaltenvektoren $a_i \in K^n$ und definieren die adjunkte Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{ij}$ durch $\tilde{a}_{ij} := \det(a_1,\dots,a_{i-1},e_j,a_{i+1},\dots,a_n)$. □

§B2. Die reellen Zahlen

§B2a. Unvollständigkeit von $\mathbb{Q}$. Ich setze im Folgenden die Konstruktion der natürlichen Zahlen $(\mathbb{N},+,\cdot,<)$, ganzen Zahlen $(\mathbb{Z},+,\cdot,<)$, und rationalen Zahlen $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ sowie den Nachweis ihrer grundlegenden Eigenschaften voraus. Zur Erinnerung:

Satz B2A. *Es gibt keine rationale Zahl $r\in\mathbb{Q}$, die $r^2=2$ erfüllt.*

BEWEIS. Angenommen es gäbe $r\in\mathbb{Q}$ mir $r^2=2$. Dann ist $r=a/b$ mit $a,b\in\mathbb{Z}$ und $b>0$, gekürzt gemäß $\operatorname{ggT}(a,b)=1$. Aus $(a/b)^2=2$ folgt $a^2=2b^2$. Daher muss a gerade sein, also $a=2\tilde{a}$ mit $\tilde{a}\in\mathbb{Z}$. Aus $4\tilde{a}^2=2b^2$ folgt $2\tilde{a}^2=b^2$, also muss auch b gerade sein. Dann aber lassen sich a und b kürzen, im Widerspruch zu unserer Annahme $\operatorname{ggT}(a,b)=1$. □

Erläuterung. Die wesentliche Unvollständigkeit der rationalen Zahlen war griechischen Mathematikern bereits um 500 v. Chr. bekannt. Der elegante Beweis stammt von EUKLID aus dem 3. Jahrhundert v. Chr und gilt als der erste bekannte Widerspruchsbeweis in der Geschichte der Menschheit.

Mit etwas Mut kann man diese fehlende „irrationale“ Zahl r mit $r^2=2$ als neue Größe einführen und zum Körper $\mathbb{Q}$ hinzufügen; wir erhalten den geordneten Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. Allerdings ist das Problem damit nur verschoben, denn $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ enthält keine Zahl s mit $s^2=3$. Hinzufügen von „$\sqrt{3}$“ liefert den Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$, aber diesem fehlt „$\sqrt{5}$“ usw. Man kann sich so jeweils neue Zahlen beschaffen und zu einem Körper zusammenführen, aber dieser bleibt doch unvollständig. Können wir uns einen geordneten Körper beschaffen, der alle je nötigen Zahlen auf einmal enthält? Ja, dieser Wunsch lässt sich erfüllen: Der Körper $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ der reellen Zahlen leistet genau dies!

§B2b. Vollständigkeit, Infimum und Supremum. Sei $(K,\leq)$ eine geordnete Menge, $E\subset K$ eine Teilmenge und $s\in K$ ein Element. Wir schreiben $E\leq s$, wenn $x\leq s$ für alle $x\in E$ gilt; in diesem Fall nennen wir s eine *obere Schranke* von E. Dies ist die *kleinste obere Schranke* von E in K, wenn $E\leq s$ gilt sowie $s\leq t$ für alle $t\in K$ mit $E\leq t$; wir nennen dann s das *Supremum* von E in K, geschrieben $s=\sup E$. Wir sagen $(K,\leq)$ ist *sup-vollständig*, wenn jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge $E\subset K$ ein Supremum in K hat. Entsprechend definieren wir *untere Schranke*, *Infimum* und *inf-vollständig*. Ist die geordnete Menge $(K,\leq)$ sup- und inf-vollständig, so nennen wir sie *vollständig geordnet*.

Beispiel. Die geordneten Mengen $(\mathbb{N},<)$ und $(\mathbb{Z},<)$ sind sup- und inf-vollständig. Hingegen ist $(\mathbb{Q},<)$ weder sup- noch inf-vollständig: Die Teilmenge $E=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2\leq 2\}$ ist beschränkt, aber es existiert weder Supremum noch Infimum in $\mathbb{Q}$. Dieses müsste nämlich $s^2=2$ erfüllen, was für keine rationale Zahl $s\in\mathbb{Q}$ möglich ist (B2A).

Beispiel. Zu jeder Menge X ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}X$ durch Inklusion partiell geordnet. Für jede Teilmenge $E\subset X$ ist $\sup E=\bigcup E$ die kleinste obere Schranke und $\inf E=\bigcap E$ die größte untere Schranke in $\mathfrak{P}X$, wobei $\bigcap\emptyset:=X$. Somit ist $(\mathfrak{P}X,\subset)$ vollständig geordnet.

Proposition B2B. *Genau dann ist $(K,<)$ sup-vollständig, wenn $(K,<)$ inf-vollständig ist.*

BEWEIS. Wir nehmen an, dass $(K,<)$ inf-vollständig ist, und zeigen, dass $(K,<)$ dann auch sup-vollständig ist. (Die umgekehrte Implikation folgt dann formal durch Umkehrung der Ordnungsrelation.) Sei $S\subset K$ nicht-leer und nach oben beschränkt. Dann ist die Menge $T=\{t\in K\mid S\leq t\}$ nicht-leer und nach unten beschränkt. Nach Voraussetzung existiert $s=\inf T$ in K, und wir zeigen nun $s=\sup S$. Für jedes $x\in S$ gilt $x\leq T$, und da s die größte untere Schranke von T ist, folgt $x\leq s$. Somit gilt $S\leq s$. Zudem wissen wir $s\leq t$ für jedes $t\in K$ mit $S\leq t$. Demnach ist s das Supremum von S, wie behauptet. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B2c. Die reellen Zahlen. Die Unvollständigkeit von $\mathbb{Q}$ haben wir oben gesehen und kurz diskutiert. Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ können wir wie folgt zusammenfassen:

Satz B2C (Existenz und Einzigkeit des Körpers der reellen Zahlen)**.** *Es existiert ein vollständig geordneter Körper* $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$*. Je zwei vollständig geordnete Körper sind isomorph mittels eines eindeutig bestimmten Körperisomorphismus.* □

Die Existenz beweist man durch sorgfältige Konstruktion, etwa durch Intervallschachtelungen (§B2e) oder Cauchy–Folgen (§B2f) oder Dedekind–Schnitte (§B2g).

Die folgende Konstruktion beweist, dass es bis auf Isomorphie höchstens einen solchen Körper gibt: Je zwei vollständig geordnete Körper sind isomorph mittels eines eindeutig bestimmten Körperisomorphismus. Nebenbei erhalten wir als Dreingabe weitere nützliche Isomorphismen, insbesondere die Exponentialabbildung $\exp_a : (\mathbb{R},+) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ und den Logarithmus $\log_a : (\mathbb{R}_{>0},\cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R},+)$. Allein dafür lohnt sich jede Mühe!

Übung B2D. Die folgenden Konstruktionen werde ich nur skizzieren. Wenn Sie möchten, können Sie diese ausführen und die behaupteten Eigenschaften nachweisen. Die so konstruierten Abbildungen sind so oder so auch in anderen Zusammenhängen notwendig.

(1) Zu jedem Monoid $(K,\cdot,e)$ und vorgegebenem Element $a \in K$ existiert genau ein Monoidhomomorphismus $f_a : (\mathbb{N},+,0) \to (K,\cdot,e) : 1 \mapsto a$: Dies definiert die Abbildung $K \times \mathbb{N} \to K : (a,n) \mapsto a^n := f_a(n)$. Es gilt $a^0 = e$ und $a^1 = a$ sowie rekursiv $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Die Homomorphismuseigenschaft ist nichts anderes als das Potenzgesetz $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. Kommutieren a,b in $(K,\cdot)$, also $a \cdot b = b \cdot a$, so gilt zudem $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Ist a in $(K,\cdot,e)$ invertierbar, so setzt sich f_a eindeutig fort zum Gruppenhomomorphismus $f_a : (\mathbb{Z},+) \to (K,\cdot)$ mit $f_a(1) = a$. Für jede Gruppe $(K,\cdot)$ erhalten wir so die Abbildung $K \times \mathbb{Z} \to K : (a,n) \mapsto a^n := f_a(n)$. Es gelten die obigen Potenzgesetze.

Für eine additive Gruppe $(K,+)$ schreiben wir entsprechend $\mathbb{Z} \times K \to K : (n,a) \mapsto na$.

Ist $(K,+,<)$ eine geordnete Gruppe und $0 < a$, so gilt $ma < na$ für alle $m < n$ in $\mathbb{Z}$; für $a < 0$ gilt entsprechend $ma > na$ für alle $m < n$ in $\mathbb{Z}$; in beiden Fällen ist f_a injektiv.

Vollständigkeit impliziert, dass $(K,+,<)$ archimedisch ist, das heißt, für alle $a,b > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ sodass $na > b$. Man betrachtet hierzu $A = \{\, na \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Wäre $A \leq b$, so gäbe es ein Supremum $s = \sup A$. Dann ist $s - a < s$ kein Supremum, also gilt $na > s - a$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt $(n+1)a > s$, im Widerspruch zu $A \leq s$. Also ist A ist unbeschränkt.

(2) Neben $(\mathbb{N},+,0,\cdot,1)$ sei $(K,+,0,\cdot,1)$ ein weiterer Halbring. Der Monoidhomomorphismus $f : (\mathbb{N},+) \to (K,+) : 1 \mapsto 1$ ist dann zudem multiplikativ, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x,y \in \mathbb{N}$, also ein Homomorphismus von Halbringen.

Neben $(\mathbb{Z},+,0,\cdot,1)$ sei $(K,+,0,\cdot,1)$ ein weiterer Ring. Der Gruppenhomomorphismus $f : (\mathbb{Z},+) \to (K,+) : 1 \mapsto 1$ ist dann zudem multiplikativ, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x,y \in \mathbb{Z}$, also ein Homomorphismus von Ringen.

Ist $(K,+,0,\cdot,1,<)$ ein geordneter Körper, so ist $f : (\mathbb{N},+,0,\cdot,1) \to (K,+,0,\cdot,1)$ injektiv, und vermöge f können wir den Halbring der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Teilmenge von K auffassen. Somit enthält K auch den Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\, a - b \mid a,b \in \mathbb{N} \,\}$ sowie den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\, a/b \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \,\}$. In diesem Sinne ist $(\mathbb{Q},+,0,\cdot,1,<)$ der kleinste geordnete Körper, da er in jedem anderen enthalten ist.

(3) Die Vollständigkeit eines geordneten Körpers $(K,+,0,\cdot,1,<)$ impliziert folgende drei, untereinander äquivalente Eigenschaften:

- Für jedes $x \in K$ existiert $n \in \mathbb{N}$ sodass $n > x$. (K ist *archimedisch*.)
- Für jedes $x \in K$ existiert $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$. (K ist *archimedisch*.)
- Für jedes $x \in K$ und $\varepsilon \in K_{>0}$ existiert $a \in \mathbb{Q}$ mit $|x-a| < \varepsilon$. ($\mathbb{Q}$ ist *dicht* in K.)

(4) Zu jedem archimedisch geordneten Körper $(K,+,0,\cdot,1,<)$ existiert genau ein Homomorphismus $f : K \to \mathbb{R}$, das heißt $f(a+b) = f(a)+f(b)$ und $f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$ für alle $a,b \in K$ sowie $f(1) = 1$ und $f(a) < f(b)$ für alle $a < b$. Wir können somit K als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen. In diesem Sinne ist $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ der größte archimedisch geordnete Körper. Insbesondere sind je zwei vollständig geordnete Körper eindeutig isomorph.

(5) Dank Vollständigkeit gilt: Zu jedem $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt $\sqrt{x} := \sup\{a \in \mathbb{R} \mid a^2 \leq x\}$ die Gleichung $(\sqrt{x})^2 = x$. Somit lässt sich die Ordnungsrelation von $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ algebraisch charakterisieren: Genau dann gilt $x \geq 0$, wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $r^2 = x$ gibt. Anders gesagt: Es gibt auf $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nur eine Anordnung, die mit der Körperstruktur verträglich ist.

(6) Zwischen je zwei vollständig geordneten Körpern $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ und $(\mathbb{R}',+,\cdot,<)$ existiert genau ein Körperhomomorphismus, das heißt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ mit $f(a+b) = f(a)+f(b)$ und $f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$ sowie $f(1) = 1$. Dieser ist automatisch ordnungserhaltend, und folglich ein Isomorphismus geordneter Körper.

Insbesondere ist die Identität der einzige Körperautomorphismus von $(\mathbb{R},+,\cdot)$. Anders gesagt, die Automorphismengruppe ist trivial, geschrieben $\mathrm{Aut}(\mathbb{R},+,\cdot) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$.

§B2d. Vollständig geordnete Gruppen. Wir nennen folgende Verallgemeinerung:

(7) Sei $(A,\cdot,<)$ eine vollständig geordnete Gruppe und $a = \inf \mathrm{A}_{>0}$. Gilt $a > 0$, so heißt A *diskret*, und $f : (\mathbb{Z},+,<) \to (A,\cdot,<) : n \mapsto a^n$ ist ein Isomorphismus. Andernfalls lässt sich für $a \in A_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die n–te Wurzel definieren durch $\sqrt[n]{a} := \sup\{r \in A \mid r^n \leq a\}$. Hierdurch lässt sich der Homomorphismus $f : (\mathbb{Z},+,<) \to (A,\cdot,<) : n \mapsto a^n$ fortsetzen zu $f : (\mathbb{Q},+,<) \to (A,\cdot,<) : x \mapsto a^x$ vermöge $a^{m/n} := (\sqrt[n]{a})^m$. Zusammen mit der Vollständigkeit von $(\mathbb{R},+,<)$ erhalten wir schließlich $f : (\mathbb{R},+,<) \to (A,\cdot,<) : x \mapsto a^x$.

(8) Ebenso wie $(\mathbb{R},+,<)$ ist auch $(\mathbb{R}_{>0},\cdot,<)$ eine vollständig geordnete Gruppe und nicht diskret. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}_{>1}$ existiert daher genau ein isotoner Homomorphismus $f : (\mathbb{R},+,<) \to (\mathbb{R}_{>0},\cdot,<) : 1 \mapsto a$. also $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$ sowie $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. In dieser Konstruktion können wir nun die Rollen vertauschen: Es existiert genau ein isotoner Homomorphismus $g : (\mathbb{R}_{>0},\cdot,<) \to (\mathbb{R},+,<) : a \mapsto 1$, also $g(x\cdot y) = g(x)+g(y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $x < y \Rightarrow g(x) < g(y)$. Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$, somit sind die additive Gruppe $(\mathbb{R},+)$ und die multiplikative Gruppe $(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ isomorph. Damit werden die vier Grundrechenarten $+,-,\cdot,/$ in $\mathbb{R}$ ergänzt durch die Exponentiation $f = \exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} : x = a^x$ und ihre Umkehrung, den Logarithmus $g = \log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Dies sind wichtige Abbildungen, und ihre Konstruktion ist raffiniert.

(9) Die Existenz dieser nützlichen Isomorphismen verdanken wir der Vollständigkeit von $(\mathbb{R},<)$. Eine solche Konstruktion ist auf $\mathbb{Q}$ unmöglich: Anders als $(\mathbb{R},+) \cong (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ sind die Gruppen $(\mathbb{Q},+)$ und $(\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$ nicht isomorph. Angenommen, $h : (\mathbb{Q},+) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$ wäre ein Isomorphismus. Zu $h(x) = 2$ erhalten wir $h(x/2) =: r \in \mathbb{Q}$. Dieses Element ergäbe $r^2 = h(x/2)\cdot h(x/2) = h(x/2+x/2) = h(x) = 2$, was B2A widerspricht.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B2e. Konstruktion der reellen Zahlen durch Intervallschachtelung. Dass ein vollständig geordneter Körper tatsächlich existiert, muss man beweisen. Eine für Anschauung und Rechenpraxis nützliche Konstruktion gelingt durch Intervallschachtelungen in $\mathbb{Q}$ wie im Folgenden erklärt. (Das ist meine persönliche Vorliebe, aber die Geschmäcker sind sehr verschieden. Die gute Nachricht, wie oben gesehen: Alle Wege führen zum selben Ziel!)

Jede reelle Zahl können wir uns als Intervallschachtelung vorstellen, und viele tun dies auch: Die beliebte Dezimalschreibweise „$\pi = 3.1415\ldots$“ bedeutet nichts anderes als

$$[3,4] \supset [3.1,3.2] \supset [3.14,3.15] \supset [3.141,3.142] \supset [3.1415,3.1416] \supset \cdots \ni \pi.$$

Diese sehr praktische Idee formalisieren wir wie folgt und konstruieren so $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

Übung B2E. Es scheint möglich, auch ohne Beweis an die Existenz von $\mathbb{R}$ glauben… Wenn Sie den Dingen gerne auf den Grund gehen, dann empfehle ich, die skizzierten Konstruktionsschritte auszuführen und die behaupteten Eigenschaften nachzuweisen.

(1) Zu jedem Paar $(\underline{a},\overline{a})$ rationaler Zahlen $\underline{a} \leq \overline{a}$ definieren wir das rationale Intervall $a = [\underline{a},\overline{a}]_{\mathbb{Q}} = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid \underline{a} \leq x \leq \overline{a} \,\}$. Umgekehrt gilt $\underline{a} = \min a$ und $\overline{a} = \max a$.

Die Menge $\mathbb{IQ}$ dieser rationalen Intervalle wird zu einem Halbring durch die Addition $a + b = \{\, x + y \mid x \in a,\ y \in b \,\}$ und die Multiplikation $a \cdot b = \{\, x \cdot y \mid x \in a,\ y \in b \,\}$.

Für die Länge $\operatorname{len} a := \overline{a} - \underline{a}$ und den Betrag $|a| = \max\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}$ gilt dann bei Addition $\operatorname{len}(a+b) = \operatorname{len}(a) + \operatorname{len}(b)$ und bei Multiplikation $\operatorname{len}(a \cdot b) \leq |b| \cdot \operatorname{len} a + |a| \cdot \operatorname{len} b$.

Für Intervalle $a, b \in \mathbb{IQ}$ schreiben wir $a < b$, wenn $\overline{a} < \underline{b}$, und $a > b$, wenn $\underline{a} > \overline{b}$, und $a \approx b$, wenn $a \cap b \neq \emptyset$ gilt. Es gilt entweder $a < b$ oder $a > b$ oder $a \approx b$.

Warnung: Die Relation $\approx$ ist leider *keine* Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{IQ}$ aller Intervalle. Reflexivität und Symmetrie gelten offensichtlich, aber nicht die Transitivität.

Die Einbettung $\mathbb{Q} \to \mathbb{IQ}$ mit $x \mapsto [x,x]$ ist ein Isomorphismus zwischen dem Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ und dem Teilkörper $(\mathbb{I}_0\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ aller Intervalle der Länge Null.

(2) Eine *Intervallschachtelung* in $\mathbb{Q}$ ist eine Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rationalen Intervallen $x_n = [\underline{x}_n, \overline{x}_n]_{\mathbb{Q}}$, sodass $x_{n+1} \subset x_n$ und $\operatorname{len} x_{n+1} \leq \frac{1}{2} \operatorname{len} x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Für Intervallschachtelungen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind die Addition $x + y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Multiplikation $x \cdot y = (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erneut Intervallschachtelungen.

Wir schreiben $x < y$, wenn $x_n < y_n$ für ein n gilt (und damit für alle folgenden), und $x > y$, wenn $x_n > y_n$ für ein n. Andernfalls gilt $x_n \cap y_n \neq \emptyset$ für alle n, geschrieben $x \approx y$.

Die Relation $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Intervallschachtelungen. Reflexivität und Symmetrie sind klar, die Transitivität ist der wesentliche Punkt.

Aus $x \approx x'$ und $y \approx y'$ folgt $x + y \approx x' + y'$ und $x \cdot x' \approx y \cdot y'$. Die Menge $\mathbb{R}$ aller Intervallschachtelungen modulo der Äquivalenzrelation $\approx$ ist ein geordneter Körper.

(3) Die Vollständigkeit schließlich sieht man so: Ist $E \neq \emptyset$ eine Menge von Intervallschachtelungen, so gibt es ein $a_0 \in \mathbb{Q}$ mit $E \not\leq a_0$. Wir nehmen zudem Beschränktheit $E \leq b_0$ an. Das Intervall $[a_0, b_0]_{\mathbb{Q}}$ halbieren wir schrittweise. Sei $[a_n, b_n]_{\mathbb{Q}}$ gegeben mit $E \not\leq a_n$ und $E \leq b_n$. Für den Mittelpunkt $c := (a_n + b_n)/2$ gilt entweder $E \not\leq c$, und wir setzen $[a_{n+1}, b_{n+1}]_{\mathbb{Q}} := [c, b_n]_{\mathbb{Q}}$, oder es gilt $E \leq c$, und wir setzen $[a_{n+1}, b_{n+1}]_{\mathbb{Q}} := [a_n, c]_{\mathbb{Q}}$. Dies definiert eine Intervallschachtelung $s = ([a_n, b_n]_{\mathbb{Q}})_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Konstruktion ist dies das Supremum von E, das heißt, es gilt $E \leq s$, und aus $E \leq t$ folgt $s < t$ oder $s \approx t$.

§B2f. Konstruktion der reellen Zahlen durch Cauchy–Folgen in $\mathbb{Q}$. Alternativ zu Intervallschachtelungen gelingt die Konstruktion von $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ auch mit Cauchy–Folgen. (Auch sie hat ihre Vorteile, Anschaulichkeit und Rechenpraxis gehören eher nicht dazu.)

(1) Auf der Menge $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $x,y:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ erklären wir Addition und Multiplikation punktweise durch $(x_n)+(y_n):=(x_n+y_n)$ und $(x_n)\cdot(y_n):=(x_n\cdot y_n)$.

Hierdurch wird $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$ zu einen kommutativen Ring. Neutral für die Addition ist die Nullfolge $(0,0,0,\dots)$. neutral für die Multiplikation die Einsfolge $(1,1,1,\dots)$.

Die Einbettung $\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ mit $a\mapsto(a)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Ringhomomorphismus. Der Bequemlichkeit halber identifizieren wir jede rationale Zahl $a\in\mathbb{Q}$ mit der konstanten Folge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$.

Im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ kein Körper, da nicht alle Elemente $x\neq 0$ invertierbar sind. Zum Beispiel ist $x=(0,1,1,\dots)$ verschieden von $0=(0,0,0,\dots)$, hat aber kein Inverses.

(2) Auf $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ definieren wir die Relation $(x_n)\lesssim(y_n)$ durch folgende Bedingung: Für alle $\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}$ existiert ein $m\in\mathbb{N}$ sodass für alle $n\geq m$ gilt $x_n<y_n+\varepsilon$.

Dies ist eine partielle Präordnung, das heißt, für alle Folgen $x,y,z\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ gilt $(x_n)\lesssim(x_n)$ (Reflexivität) und aus $(x_n)\lesssim(y_n)$ und $(y_n)\lesssim(z_n)$ folgt $(x_n)\lesssim(z_n)$ (Transitivität).

Gilt sowohl $(x_n)\lesssim(y_n)$ als auch $(x_n)\gtrsim(y_n)$, so schreiben wir $(x_n)\approx(y_n)$. Das bedeutet: Für alle $\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}$ existiert ein $m\in\mathbb{N}$ sodass für alle $n\geq m$ gilt $|x_n-y_n|<\varepsilon$.

Diese Präordnung ist nicht total: Für $x_n=(-1)^n$ gilt weder $(x_n)\lesssim 0$ noch $(x_n)\gtrsim 0$.

Die umgekehrte Präordnung $(x_n)\gtrsim(y_n)$ ist definiert durch $(y_n)\lesssim(x_n)$ und bedeutet demnach: Zu jedem $\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}$ existiert ein $m\in\mathbb{N}$, sodass für alle $n\geq m$ gilt $x_n\geq y_n-\varepsilon$.

(3) Eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ist eine *Nullfolge*, kurz $(x_n)\approx 0$, wenn zu jeder noch so kleinen Schranke $\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}$ ein $m\in\mathbb{N}$ existiert, sodass $|x_n|<\varepsilon$ für alle $n\geq m$ gilt.

Eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ist *beschränkt*, wenn eine Schranke $s\in\mathbb{Q}_{>0}$ mit $-s\lesssim(x_n)\lesssim s$ existiert. Das ist gleichbedeutend mit $|x_n|\leq s$ für ein $s\in\mathbb{Q}_{>0}$ und alle $n\in\mathbb{N}$.

Eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ist eine *Cauchy–Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}$ ein $m\in\mathbb{N}$ existiert, sodass $|x_p-x_q|<\varepsilon$ für alle $p,q\geq m$ gilt. Jede Cauchy–Folge ist beschränkt.

(4) In $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ bildet die Menge B der beschränkten Folgen einen *Teilring*, ebenso die Menge C der Cauchy–Folgen. In B und somit in C bildet die Menge N der Nullfolgen ein *Ideal*.

Weder B noch C sind Körper, denn das obige Gegenbeispiel gilt weiterhin. Allerdings gilt: Zu jeder Cauchy–Folge $(x_n)\not\approx 0$ existiert eine Cauchy–Folge (y_n) mit $(x_n)\cdot(y_n)\approx 1$.

Für je zwei Cauchy–Folgen (x_n) und (y_n) gilt $(x_n)\lesssim(y_n)$ oder $(x_n)\gtrsim(y_n)$.

Das bedeutet, $(C,+,\cdot,\lesssim)$ erfüllt alle Bedingungen eines geordneten Körpers, lediglich die Gleichheit $=$ ist noch durch die Äquivalenz $\approx$ zu ersetzen.

(5) Diesen Makel beheben wir nun, indem wir zur Quotientenmenge $\mathbb{R}:=C/_{\approx}$ übergehen; diese besteht also aus Äquivalenzklassen $[x_n]$ von Cauchy–Folgen modulo Nullfolgen.

Die Addition $[x_n]+[y_n]:=[x_n+y_n]$ und die Multiplikation $[x_n]\cdot[y_n]:=[x_n\cdot y_n]$ auf $\mathbb{R}$ sind wohldefiniert, da N ein Ideal ist. Damit wird $(\mathbb{R},+,\cdot)$ zu einem Körper.

Die partielle Ordnung $(x_n)\lesssim(y_n)$ auf $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ schränkt sich ein zu einer totalen Ordnung auf C. Diese induziert auf $\mathbb{R}$ die Ordnung $[x_n]\leq[y_n]$, definiert durch $(x_n)\lesssim(y_n)$.

(6) Die so definierte Ordnung $<$ auf $\mathbb{R}$ erfüllt das Supremumsaxiom.

Damit ist $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ ein vollständig geordneter Körper.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B2g. Konstruktion der reellen Zahlen durch Dedekind–Schnitte. Jede Zahl $a \in \mathbb{Q}$ definiert einen Schnitt der rationalen Zahlengerade durch $A_* = \mathbb{Q}_{<a}$ und $A^* = \mathbb{Q}_{>a}$. Es gibt neben diesen rationalen auch irrationale Schnitte, etwa $A_* = \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}$ und $A^* = \mathbb{Q}_{>\sqrt{2}}$. Beide Fälle fassen wir in folgender einheitlichen Definition zusammen:

Ein *Schnitt* $A = (A_*, A^*)$ ist eine Zerlegung $\mathbb{Q} = A_* \sqcup A_0 \sqcup A^*$ wie folgt: A_* und A^* sind nicht-leer und erfüllen $A_* < A^*$, zudem hat A_* kein größtes und A^* kein kleinstes Element, die Restmenge A_0 ist leer oder einelementig mit $A_* < A_0$ und $A_0 < A^*$. Die gesamte Zerlegung $\mathbb{Q} = A_* \sqcup A_0 \sqcup A^*$ wird daher bereits durch A_* bzw. A^* bestimmt.

Sei $\mathbb{R} := \{\, (A_*, A^*) \,\}$ die Menge aller Schnitte der rationalen Zahlengerade. Wie oben erklärt haben wir die Einbettung $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $a \mapsto (\mathbb{Q}_{<a}, \mathbb{Q}_{>a})$. Wir nennen $A = (A_*, A^*)$ einen *rationalen Schnitt*, wenn $\mathbb{Q} \smallsetminus (A_* \sqcup A^*) = \{a\}$; in diesem Falle ist $a = \sup A_* = \inf A^*$ und $A = \iota(a)$. Andernfalls gilt $\mathbb{Q} = A_* \sqcup A^*$, und der Schnitt A heißt *irrational*.

Wir definieren $A < B$ wenn $A_* \subsetneq B_*$ gilt; äquivalent hierzu ist $A^* \supsetneq B^*$. Dies definiert eine lineare Ordnung auf $\mathbb{R}$: Für je zwei Schnitte $A, B \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen $A < B$ oder $B < A$ oder $A = B$. Zudem gilt Transitivität: Aus $A < B$ und $B < C$ folgt $A < C$. Damit ist $\iota : (\mathbb{Q}, <) \hookrightarrow (\mathbb{R}, <)$ eine Einbettung geordneter Mengen. Der Bequemlichkeit halber identifizieren wir $a \in \mathbb{Q}$ mit $\iota(a) \in \mathbb{R}$ und betrachten so $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ als Teilmenge.

Nach Konstruktion ist $(\mathbb{R}, <)$ vollständig, das heißt, jede beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum: Ist $E \subset \mathbb{R}$ nicht-leer, $A \in E$, und nach oben beschränkt, $E \leq B$, so gilt $\sup E = S$ mit $S_* = \bigcup \{\, X_* \mid X \in E \,\} \supset A_* \neq \emptyset$ und $S^* = \bigcap \{\, X^* \mid X \in E \,\} \supset B^* \neq \emptyset$.

Die Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(A_*, A^*) + (B_*, B^*) := (A_* + B_*, A^* + B^*)$ ist wohldefiniert. Assoziativität und Kommutativität von $(\mathbb{R}, +)$ sind klar. Neutrales Element ist $\iota(0) = (\mathbb{Q}_{<0}, \mathbb{Q}_{>0})$. Inverse sind gegeben durch $-(A_*, A^*) = (-A^*, -A_*)$. Damit ist $\iota : (\mathbb{Q}, +, <) \hookrightarrow (\mathbb{R}, +, <)$ eine Einbettung geordneter abelscher Gruppen.

Das Produkt $A \cdot B = C$ definieren wir zunächst für $A, B \geq 0$ durch $C^* := A^* \cdot B^*$. Assoziativität und Kommutativität von $(\mathbb{R}, \cdot)$ sind klar. Neutrales Element ist $\iota(1) = (\mathbb{Q}_{<1}, \mathbb{Q}_{>1})$. Inverse sind gegeben durch $(A^{-1})^* = \{\, a^{-1} \mid 0 < a \in A_* \,\}$. Damit ist die eingeschränkte Abbildung $\iota : (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot, <) \hookrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, <)$ eine Einbettung geordneter abelscher Gruppen.

In $\mathbb{Q}$ ist die Multiplikation distributiv über die Addition, daher auch in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, das heißt $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ für alle $A, B, C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir dehnen dies nun auf $\mathbb{R}$ aus:

Für $A > 0$ setzen wir $|A| := A$ und $\operatorname{sign}(A) := +1$, für $A < 0$ setzen wir $|A| := -A$ und $\operatorname{sign}(A) := -1$, und für $A = 0$ setzen wir $|A| := 0$ und $\operatorname{sign}(A) := 0$. Damit definieren wir die Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $A \cdot B := \operatorname{sign}(A) \operatorname{sign}(B)\, |A| \cdot |B|$. Man rechnet nun geduldig nach, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Die folgende Differenzdarstellung vermeidet lästige Fallunterscheidungen: Jedes $A \in \mathbb{R}$ schreibt sich $A = A' - A''$ mit $A', A'' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gilt entsprechend $B = B' - B''$, so haben wir $A \cdot B = (A'B' + A''B'') - (A'B'' + A''B')$, und das Ergebnis ist von den willkürlich gewählten Differenzdarstellungen unabhängig. Damit ist $\iota : (\mathbb{Q}, +, \cdot, <) \to (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ eine Einbettung in einen vollständig geordneten Körper.

Bemerkung. Jede der drei Konstruktionen hat ihre Vorzüge: Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ über Dedekind–Schnitte betont die Ordnung, die über Cauchy–Folgen die Metrik, die über Intervallschachtelungen verbindet beide Aspekte und rechnet mit Fehlerschranken.

Dedekind–Schnitte suggerieren zudem die folgende Erweiterung $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $+\infty = (\mathbb{Q}, \emptyset)$ und $-\infty = (\emptyset, \mathbb{Q})$ sowie die angegebenen Verknüpfungen.

§B2h. Die erweiterte Zahlengerade. Nachdem Existenz und Einzigkeit des Körpers $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ geklärt sind, wollen wir nun beginnen, mit reellen Zahlen zu arbeiten und weitere Konstruktionen durchzuführen. Gelegentlich ist es nützlich, über den Körper $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ der reellen Zahlen hinaus auch mit den „unendlichen Werten“ $\pm\infty$ zu rechnen. Dies ist ein Beispiel einer „Kompaktifizierung“, wir werden in Kapitel F darauf zurückkommen.

Hierzu definieren wir die *erweiterte Zahlengerade* durch $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und setzen die Ordnung fort durch $-\infty < a < +\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Diese Erweiterung macht $+\infty$ zum größten und $-\infty$ zum kleinsten Element der geordneten Menge $(\bar{\mathbb{R}},<)$.

Der unmittelbare Vorteil ist, dass nun *jede* Teilmenge $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$ hat, das heißt, auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\bar{\mathbb{R}})$ erhalten wir Abbildungen

$$\sup, \inf : \mathfrak{P}(\bar{\mathbb{R}}) \to \bar{\mathbb{R}}.$$

Für $A \subset \mathbb{R}$ gilt $\sup A = +\infty$, wenn A in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt ist, und $\sup \emptyset = -\infty$. Ebenso gilt $\inf A = -\infty$, wenn A in $\mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt ist, und $\inf \emptyset = +\infty$.

Addition und Multiplikation setzen wir für $\pm\infty$ und $a,b \in \mathbb{R}$ wie folgt fort:

$+$	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
a	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

$\cdot$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	$a\cdot b$	0	$a\cdot b$	$-\infty$
$a=0$	0	0	0	0	0
$a>0$	$-\infty$	$a\cdot b$	0	$a\cdot b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

In grün sind die Verknüpfung in $\mathbb{R}$ gezeigt. Die gelb hinterlegten Verknüpfungen sind für die Grenzwertrechnung in $\bar{\mathbb{R}}$ sinnvoll. Die rot hinterlegten hingegen dienen allein dazu, die Verknüpfungstabelle durchgängig zu definieren. Sie sind insbesondere in der Integralrechnung gebräuchlich, aber in jedem Fall mit Vorsicht zu verwenden. Für $x \in \bar{\mathbb{R}}$ definieren wir $-x$ wie üblich durch $-(\pm\infty) = \mp\infty$, sowie $|x| = x$ für $x \geq 0$ und $|x| = -x$ für $x \leq 0$.

Übung B2F. Welche der Axiome eines geordneten Körpers gelten noch für $(\bar{\mathbb{R}},+,\cdot,<)$? Zum Beispiel ist die Addition nicht assoziativ, denn $(-\infty+\infty)+1 \neq -\infty+(\infty+1)$.

Man zeige, dass $([0,\infty],+,\cdot,<)$ ein geordneter Halbring ist, das heißt, es gelten alle Körperaxiome bis auf die Existenz von additiven bzw. multiplikativen Inversen. Das macht diesen Zahlbereich besonders praktisch für die Grenzwert- und Integralrechnung.

§B2i. Reelle Intervalle. Intervalle definieren wir allgemein wie folgt:

Definition B2G. Sei $(K,<)$ eine (total) geordnete Menge. Eine Teilmenge $I \subset K$ heißt *Intervall*, wenn für alle $a < x < b$ in K mit $a,b \in I$ auch $x \in I$ gilt.

Zu gegebenen Randpunkten $a < b$ in K definieren wir die elementaren Intervalle durch

$$\begin{aligned}
[a,b]_K &:= \{\, x \in K \mid a \leq x \leq b \,\}, & [a,+\infty[_K &:= \{\, x \in K \mid x \geq a \,\} = K_{\geq a},\\
[a,b[_K &:= \{\, x \in K \mid a \leq x < b \,\}, &]a,+\infty[_K &:= \{\, x \in K \mid x > a \,\} = K_{>a},\\
]a,b]_K &:= \{\, x \in K \mid a < x \leq b \,\}, &]-\infty,b]_K &:= \{\, x \in K \mid x \leq b \,\} = K_{\leq b},\\
]a,b[_K &:= \{\, x \in K \mid a < x < b \,\}, &]-\infty,b[_K &:= \{\, x \in K \mid x < b \,\} = K_{<b}.
\end{aligned}$$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Auch $\emptyset$ und K sind als Intervalle zugelassen. Zur besseren Unterscheidung nennt man die linksstehenden, beschränkten Intervalle auch *eigentliche Intervalle*, die rechtsstehenden, nach oben bzw. unten unbeschränkten entsprechend *uneigentliche Intervalle*. Diese Unterscheidung verschwindet in $\bar{K} = K \cup \{\pm\infty\}$ mit der Fortsetzung $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in K$. Meist betrachten wir $K = \mathbb{R}$ und lassen die Indizierung der Intervalle durch $\mathbb{R}$ weg.

Proposition B2H. *Jedes Intervall I in $\mathbb{R}$ stimmt mit einem dieser zehn Modelle überein.*

Diese Aussage ist entgegen dem ersten Anschein nicht trivial: In $(\mathbb{Q}, <)$ gibt es mehr Intervalle als die obigen zehn Modelle. Zum Beispiel ist $\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \} = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ein rationales Intervall, lässt sich aber nicht als $]a,b[_{\mathbb{Q}}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ schreiben.

BEWEIS. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die leere Menge ist die einfachste (und langweiligste) Möglichkeit. Wir können fortan $I \neq \emptyset$ annehmen. Für alle $a \leq b$ in I gilt dann $[a,b] \subset I$. Da $(\mathbb{R}, <)$ vollständig ist, können wir $a = \inf I$ und $b = \sup I$ in $\bar{\mathbb{R}}$ betrachten. Im Falle $a, b \in I$ erhalten wir $I = [a,b]$, in den anderen Fällen bleiben $[a,b[$, eventuell mit $b = +\infty$, und $]a,b]$, eventuell mit $a = -\infty$, sowie $]a,b[$, eventuell mit $a = -\infty$ oder $b = +\infty$. Damit sind alle Möglichkeiten ausgeschöpft, und jede entspricht einem der zehn Modelle. □

§B2j. Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$. Eine *Folge* in einer Menge X ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ mit $n \mapsto x_n$, das heißt, jedem Index $n \in \mathbb{N}$ wird ein Element $x_n \in X$ zugeordnet. Diese Folge schreiben wir auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz (x_n), wenn die Indexmenge $\mathbb{N}$ klar ist.

Definition B2I. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen $x_n \in \mathbb{R}$ heißt *Nullfolge*, geschrieben $x_n \to 0$, wenn zu jeder noch so kleinen Schranke $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle folgenden Indizes $n \geq m$ die Ungleichung $|x_n| < \varepsilon$ gilt. Mit Quantoren geschrieben:

$$x_n \to 0 \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq m \;:\; |x_n| < \varepsilon$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* $a \in \mathbb{R}$, geschrieben $x_n \to a$, wenn $|x_n - a| \to 0$, also der Abstand von x_n zu a gegen Null konvergiert. In diesem Fall nennen wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *konvergente Folge* in $\mathbb{R}$ und a ihren *Grenzwert*, geschrieben $x_n \to a$ oder $\lim x_n = a$.

$$x_n \to a \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq m \;:\; |x_n - a| < \varepsilon$$

Wir erhalten äquivalente Bedingungen, wenn wir „$< \varepsilon$“ ersetzen durch „$\leq \varepsilon$“ oder „$< \varepsilon/2$“ etc. Zur Betonung des Index $n \in \mathbb{N}$ schreibt man „$x_n \to a$ für $n \to \infty$“, oder auch „$\lim_{n\to\infty} x_n = a$“. Ohne explizite Nennung des Grenzwertes sagen wir, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert in* $\mathbb{R}$, wenn es einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ gibt, für den $x_n \to a$ gilt. Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ nicht konvergiert, so sagen wir, sie *divergiert*.

Beispiele.
- Die Folge $x_0 = 0$, $x_1 = 0.9$, $x_2 = 0.99$, $x_3 = 0.999$, …, $x_n = 1 - 10^{-n}$, konvergiert gegen 1. Das ist das Geheimnis hinter der Gleichung $0.999999\ldots = 1$.
- Weitere Standardbeispiele: Für $a > 0$ gilt $1/n^a \to 0$. Für $|q| < 1$ gilt $q^n \to 0$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^n/n! \to 0$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$ gilt $n^a/b^n \to 0$. Für $a > 0$ gilt $\sqrt[n]{a} \to 1$.
- Es gibt in $\mathbb{R}$ auch divergente Folgen: $(-1)^n$, ebenso q^n für $|q| > 1$, und n^a für $a > 0$.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn ein $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $a_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und *nach unten beschränkt*, wenn $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $a_n \geq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und *beschränkt*, wenn $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Jede konvergente Folge ist beschränkt, aber die Umkehrung gilt nicht, wie $(-1)^n$ zeigt.

§B2k. Bestimmte Divergenz. Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ erlaubt es, für divergente Folgen in $\mathbb{R}$ zwei nützliche Spezialfälle der Divergenz, die *bestimmten Divergenz*, zu definieren:

Definition B2J. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ *divergiert gegen* $+\infty$, geschrieben $x_n \to +\infty$ oder $\lim x_n = +\infty$, wenn sie jede reelle Schranke schließlich überschreitet:

$$x_n \to +\infty \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall s \in \mathbb{R}\ \ \exists m \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq m\ :\ x_n \geq s$$

Entsprechend: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ *divergiert gegen* $-\infty$, geschrieben $x_n \to -\infty$ oder $\lim x_n = -\infty$, wenn sie jede reelle Schranke schließlich unterschreitet:

$$x_n \to -\infty \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall s \in \mathbb{R}\ \ \exists m \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq m\ :\ x_n \leq s$$

Statt „x_n divergiert gegen $\pm\infty$“ sagen wir auch „x_n konvergiert gegen $\pm\infty$“, als Konvergenz $x_n \to \pm\infty$ in der hierzu eingeführten erweiterten Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Beispiele.
- Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$ divergiert gegen $+\infty$.
- Die Folge $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, aber weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$.
- Die Folge $(1 - 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ wächst streng monoton, divergiert aber nicht gegen $+\infty$.
- Die Folge $((1 + (-1)^n)n/4)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ divergiert nicht gegen $+\infty$.

§B2l. Monotone Konvergenz. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ gilt, also $a_m \leq a_n$ für alle $m \leq n$. Dies kürzen wir durch $a_n \nearrow$ ab.

Entsprechend heißt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ *monoton fallend*, wenn $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ gilt, also $b_m \geq b_n$ für alle $m \leq n$. Dies kürzen wir durch $b_n \searrow$ ab. Wir erhalten nun einheitlich:

Satz B2K. *Für jede wachsende Folge $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ gilt* $\lim a_n = \sup a_n$.
Für jede fallende Folge $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ gilt entsprechend $\lim b_n = \inf b_n$.

BEWEIS. Wir betrachten die Menge $A := \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Gilt $\sup A = +\infty$, so existiert zu jeder Schranke $s \in \mathbb{R}$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \geq s$. Dank Monotonie gilt dann $a_n \geq s$ für alle $n \geq m$. Dies bedeutet $a_n \to +\infty$. Gilt hingegen $\sup A = -\infty$, so ist dies wegen Monotonie nur für die konstante Folge $a_n = -\infty$ möglich, also gilt $a_n \to -\infty$.

Gilt $\sup A = a \in \mathbb{R}$, so zeigen wir $a_n \to a$ wie folgt. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da a die kleinste obere Schranke von A ist, kann $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von A sein. Es gibt also $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m > a - \varepsilon$. Dank Monotonie folgt $a - \varepsilon < a_n \leq a$ für alle $n \geq m$. Dies bedeutet $a_n \to a$. □

§B2m. Limes superior und Limes inferior. Sei (x_n) eine Folge in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Die Folge der Infima $a_n = \inf\{\, x_k \mid k \geq n \,\}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ wächst, also existiert $a := \lim a_n$ in $\bar{\mathbb{R}}$. Die Folge der Suprema $b_n = \sup\{\, x_k \mid k \geq n \,\}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ fällt, also existiert $b := \lim b_n$ in $\bar{\mathbb{R}}$. Aus der Ungleichung $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt für die Grenzwerte zudem $a \leq b$.

Definition B2L. Zu jeder Folge (x_n) in $\bar{\mathbb{R}}$, egal ob konvergent oder nicht, definieren wir

$$\begin{aligned} \liminf x_n &:= \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} x_k\big) = \sup_{n\geq 0} \big(\inf_{k\geq n} x_k\big) \in \bar{\mathbb{R}}, \\ \limsup x_n &:= \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} x_k\big) = \inf_{n\geq 0} \big(\sup_{k\geq n} x_k\big) \in \bar{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Beispiele.
- Für $x_n = n$ gilt $\liminf x_n = \limsup x_n = +\infty$.
- Für $x_n = (-1)^n$ gilt $\liminf x_n = -1$ und $\limsup x_n = +1$.
- Für $x_n = (-1)^n n$ gilt $\liminf x_n = -\infty$ und $\limsup x_n = +\infty$.
- Für $x_n = (1 + (-1)^n)n$ gilt $\liminf x_n = 0$ und $\limsup x_n = +\infty$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B2n. Die B–adische Entwicklung reeller Zahlen. Sei $B \in \mathbb{N}$ und $B \geq 2$. Zum Beispiel wählen wir $B = 10$ für die Dezimalentwicklung und $B = 2$ für die Binärentwicklung. Die natürlichen Zahlen $0, \dots, B-1$ nennen wir die *Ziffern* bezüglich der Basis B.

Jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ schreibt sich eindeutig als *B–adische Entwicklung*

$$a = a_{-\ell} B^{\ell} + a_{1-\ell} B^{\ell-1} + \cdots + a_{-2} B^2 + a_{-1} B + a_0$$

mit Ziffern $a_k \in \{0, \dots, B-1\}$, wobei wir für die höchste Ziffer $a_{-\ell} \neq 0$ vereinbaren. Für jede Zahl $a \in B^{-n}\mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt eine entsprechende Entwicklung

$$a = a_{-m} B^m + a_{1-m} B^{m-1} + \cdots + a_{n-1} B^{1-n} + a_n B^{-n}.$$

Alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}_{>0}$ erhält man nun durch den Grenzübergang $n \to \infty$. Genauer:

Satz B2M. *Jede Ziffernfolge $a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, \dots, B-1\}$ definiert eine reelle Zahl*

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-k} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k} \quad \in \quad [0,1].$$

Umgekehrt lässt sich jede reelle Zahl $a \in [0,1]$ so als B–adische Entwicklung schreiben.

Genauer gilt dabei folgendes: Zu jeder reellen Zahl $a \in]0,1]$ existiert genau eine solche B–adische Entwicklung, bei der unendlich viele Ziffern von 0 verschieden sind.

BEWEIS. Die Folge $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ ist monoton wachsend und beschränkt durch $s_n \leq \sum_{k=1}^{n} (B-1) B^{-k} = 1 - B^{-n} \leq 1$, konvergiert also gegen ein $a \in [0,1]$.

Sei nun $a \in]0,1]$. Wir suchen Ziffern $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, \dots, B-1\}$ sodass für die Summe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k}$ der Rest $r_n = a - s_n$ die Bedingung $0 < r_n \leq B^{-n}$ erfüllt. Für $n = 0$ beginnen wir mit $s_0 = 0$ und $r_0 = a$. Sei s_n konstruiert und $0 < r_n B^{n+1} \leq B$; dann existiert $a_{n+1} \in \{0, \dots, B-1\}$ mit $a_{n+1} < r_n B^{n+1} \leq a_{n+1} + 1$. Für s_{n+1} gilt dann $0 < a - \sum_{k=1}^{n+1} a_k B^{-k} \leq B^{-n-1}$. Dies liefert die Konvergenz $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k} \to a$.

Eindeutigkeit zeigen wir genauso: Angenommen $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k B^{-k}$, wobei unendlich viele a_k und unendliche viele a'_k von Null verschieden seien. Dann gilt $a_1 < aB \leq a_1 + 1$ sowie $a'_1 < aB \leq a'_1 + 1$, und somit ist $a_1 = a'_1$. Wir setzen nun $\bar{a} = aB - a_1$ und erhalten erneut $0 < \bar{a} \leq 1$ sowie $\bar{a} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} B^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k+1} B^{-k}$. Wie zuvor zeigen wir nun $a_2 = a'_2$. So fortfahrend erhalten wir $a_k = a'_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. □

Wie kann man sich reelle Zahlen vorstellen? Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen ist ebenso fundamental wie subtil. Wenn in der Lehre eine präzise Definition oder gar Konstruktion außer Reichweite scheint, behilft man sich meist mit der Anschauung, entweder geometrisch als „Zahlengerade“ oder rechnerisch mit „unendlichen Dezimalentwicklungen“. Letztere Sichtweise folgt der gutgemeinten aber allzu vagen Definition: „Eine reelle Zahl ist alles, was man als Dezimalentwicklung schreiben kann.“ Das ist, wie Satz B2M zeigt, nicht falsch. Aber als Zugang ist dies auch nicht gerade einfach. Hierbei ist nämlich zunächst nicht klar, wann zwei Dezimalentwicklungen die gleiche reelle Zahl darstellen. Das muss bei diesem Zugang erst einmal erklärt werden und führt erfahrungsgemäß zu endlosen Verwirrungen warum „$0.999999\dots$“ gleich „1“ sein soll. Zudem sind Addition und Multiplikation von Dezimalentwicklungen ganz und gar nicht offensichtlich, ganz zu schweigen von der Gültigkeit der Körperaxiome. Wir sind den umgekehrten Weg gegangen: Wir haben zunächst das eigentliche Ziel definiert, nämlich den vollständig geordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, und anschließend gezeigt, dass und wie wir es erreichen können. Mathematische Mühe lohnt sich.

§B2o. Die reellen Zahlen sind überabzählbar. Die rationalen Zahlen sind abzählbar, das heißt, es gibt Bijektionen $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}$. Für die reellen Zahlen gilt dies nicht:

Satz B2N. *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar, genauer* $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$. *Insbesondere sind die Menge* $\mathbb{R}$ *und die Menge* $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$ *aller* n*–Tupel für* $n \geq 1$ *sowie die Menge* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ *aller Folgen gleichmächtig.*

Die Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ folgt im Wesentlichen aus der B–adischen Entwicklung (B2M) für $B = 2$. Leider ist diese Darstellung nicht eindeutig, daher fällt uns die Bijektion nicht in den Schoß, sondern wir müssen noch ein bisschen arbeiten:

BEWEIS. Zunächst haben wir Bijektionen $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]-1,+1[$ mit $f(x) = x/(1+|x|)$ und $g :]-1,+1[\xrightarrow{\sim}]0,1[$ mit $g(x) = (x+1)/2$ sowie $]0,1[\hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dank B2M für $B = 2$.

Umgekehrt haben wir eine Bijektion $\{0,1\} \xrightarrow{\sim} \{1,2\}$ und somit $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \{1,2\}^{\mathbb{N}}$. Die B–adische Entwicklung für $B = 3$ stiftet eine Injektion $\{1,2\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow]0,1] \subset \mathbb{R}$.

Insgesamt haben wir also Injektionen $\mathbb{R} \hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Der Satz von Cantor–Bernstein (B2O) garantiert, dass es eine Bijektion $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ gibt.

Die zweite Aussage folgt aus den Bijektionen $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \{1,\dots,n\} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, denn aus $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ folgt $\mathbb{R}^n \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\{1,\dots,n\}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. □

Satz B2O (Cantor–Bernstein)**.** *Zu Injektionen* $f : X \hookrightarrow Y$ *und* $g : Y \hookrightarrow X$ *können wir eine Bijektion* $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ *konstruieren, das heißt, beide Mengen sind gleichmächtig.*

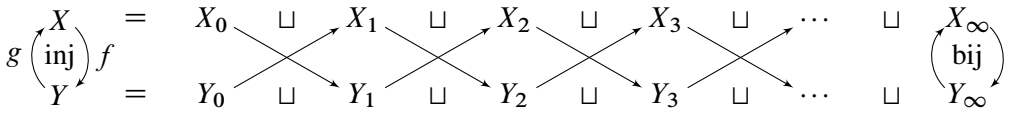


ABBILDUNG B:2. Cantors Reißverschluss: Jeder Pfeil rechts ist eine Bijektion!

BEWEIS. Die Mengen $X_0 := X \smallsetminus g(Y)$ und $Y_0 := Y \smallsetminus f(X)$ enthalten alle Elemente ohne Urbild, $X_{k+1} := g(Y_k)$ und $Y_{k+1} := f(X_k)$ diejenigen mit Urbildfolge der Länge k, sowie $X_\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (g\circ f)^k(X)$ und $Y_\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (f\circ g)^k(Y)$ alle mit unendlicher Urbildfolge. Wir definieren $h : X \to Y$ durch $h(x) = f(x)$ für $x \in X_\infty \sqcup \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} X_{2j}$ und $h(x) = g^{-1}(x)$ für $x \in \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} X_{2j+1}$, und umgekehrt $k : Y \to X$ durch $k(y) = f^{-1}(y)$ für $y \in Y_\infty \sqcup \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} Y_{2j+1}$ und $k(y) = g(y)$ für $y \in \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} Y_{2j}$. Es gilt $k \circ h = \mathrm{id}_X$ und $h \circ k = \mathrm{id}_Y$. □

Bemerkung. Dieser Beweis ist konstruktiv, ohne Auswahlaxiom! Er ordnet jedem Injektionspaar (f,g) das Bijektionspaar (h,k) zu. Leider gibt es keinen Algorithmus, um $h(x)$ zu berechnen, dazu müssten wir in endlich vielen Schritten entscheiden können, ob x in $X_0, X_1, X_2, \dots$ oder X_∞ liegt.

Übung B2P. (Banachscher Zerlegungssatz) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen. Dazu existieren Zerlegungen $X = X' \sqcup X''$ und $Y = Y' \sqcup Y''$ mit $f(X') = Y'$ und $g(Y'') = X''$. Sind zudem f, g injektiv, so folgt hieraus der Satz von Cantor–Bernstein (B2O).

✻ **B2P.** Wir setzen $A_0 := X$ und $B_0 := Y$ und rekursiv $A_{k+1} = g(B_k)$ und $B_{k+1} = f(A_k)$: Die Mengen A_k und B_k enthalten alle Elemente mit Urbildfolgen der Länge $\geq k$. Die Mengen $X_k := A_k \smallsetminus g(B_k)$ und $Y_k := B_k \smallsetminus f(A_k)$ enthalten alle Elemente mit Urbildfolgen der Länge k aber nicht der Länge $> k$. Die Mengen $X_\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und $Y_\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$ enthalten alle Elemente, die Urbildfolgen beliebiger endlicher Länge erlauben. Es gilt $f(X_k) = Y_{k+1}$ und $g(Y_k) = X_{k+1}$ sowie $f(X_\infty) = Y_\infty$ und $g(Y_\infty) = X_\infty$. Die Behauptung gilt für $X' = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_{2j} \cup X_\infty$ und $X'' = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_{2j+1}$ sowie $Y' = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Y_{2j+1} \cup Y_\infty$ und $Y'' = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Y_{2j}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Definition B2Q (Mächtigkeit)**.** Die Mächtigkeit von Mengen X und Y vergleichen wir wie folgt durch Abbildungen, mit Hilfe von Bijektionen, Injektionen und Surjektionen:

(1) Äquipotenz $X \cong Y$ bedeutet, es existiert eine Bijektion $(h,k) : X \cong Y$.
Die Mengen X und Y sind gleich groß / gleichmächtig / äquipotent.
(2) Die Relation $X \preccurlyeq Y$ bedeutet, es existiert eine Injektion $f : X \hookrightarrow Y$.
Interpretation: „Die Menge X ist höchstens so groß wie Y."
(3) $Y \succcurlyeq X$ bedeutet, es existiert eine Surjektion $g : Y \twoheadrightarrow X$ oder $X = \emptyset$.
Interpretation: „Die Menge Y ist mindestens so groß wie X."

Gilt $X \cong \{1,\dots,n\}$, so ist X *endlich*, mit Elementezahl $\sharp X = n$. Gilt $X \cong \mathbb{N}$, so nennen wir die Menge X *abzählbar unendlich*. *Abzählbar* bedeutet $X \preccurlyeq \mathbb{N}$, das heißt X ist entweder endlich oder abzählbar unendlich; andernfalls ist X *überabzählbar*.

Ist die Relation $\preccurlyeq$ total? Lassen sich also je zwei Mengen X und Y vergleichen gemäß $X \preccurlyeq Y$ oder $Y \preccurlyeq X$? Das scheint plausibel, erfordert aber einen Beweis. Für endliche Mengen gelingt dies durch Abzählung, allgemein benötigen wir das Auswahlaxiom!

Satz B2R (Vergleichbarkeitssatz von Cantor–Zermelo)**.** *Zu je zwei Mengen X und Y existiert eine Injektion $X \hookrightarrow Y$ oder $Y \hookrightarrow X$.*

BEWEIS. Eine *partielle Bijektion* zwischen X und Y ist eine Bijektion $(h,k) : A \cong B$ zwischen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$, also $k \circ h = \mathrm{id}_A$ und $h \circ k = \mathrm{id}_B$. Wir definieren $(h,k) \subseteq (h',k')$ durch $A \subseteq A'$ und $B \subseteq B'$ sowie $h(x) = h'(x)$ für alle $x \in A$ und $k(y) = k'(y)$ für alle $y \in B$. Ist S eine Kette partieller Bijektionen, so ist auch ihre Vereinigung $\bigcup S$ eine partielle Bijektion. Wir können das Lemma von Zorn anwenden: Es existiert eine maximale partielle Bijektion $(h,k) : A \cong B$. Wäre $A \subsetneq X$ und $B \subsetneq Y$, so könnten wir (h,k) fortsetzen. Also gilt $A = X$ und somit $h : X \hookrightarrow Y$, oder es gilt $B = Y$ und somit $k : Y \hookrightarrow X$. □

§B3. Die komplexen Zahlen

§B3a. Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$. Insbesondere existiert kein $x \in \mathbb{R}$, das der Gleichung $x^2 = -1$ genügen könnte. Indem wir die „imaginäre“ Zahl i mit $\mathrm{i}^2 = -1$ einführen, erhalten wir aus $\mathbb{R}$ den Körper $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}]$:

Satz B3A (Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen)**.** *Auf der Menge* $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ *sei*

$$+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x_1,x_2)+(y_1,y_2) := (x_1+y_1, x_2+y_2),$$
$$\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) := (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Damit ist $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *ein Körper, und* $\mathrm{i} = (0,1)$ *erfüllt* $\mathrm{i}^2 = -1$. *Hierin ist* $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *ein Teilkörper dank der Einbettung* $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto (x,0)$. *Jede komplexe Zahl* $z \in \mathbb{C}$ *schreibt sich eindeutig* $z = x + \mathrm{i}y$ *mit* $x, y \in \mathbb{R}$. *Die Konjugation* $\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit* $z = (x,y) \mapsto \overline{z} = (x,-y)$ *ist ein Automorphismus des Körpers* $\mathbb{C}$ *mit Fixpunktmenge* $\mathbb{R}$. *Die Körperstruktur* $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *erlaubt keine Ordnung, denn in jedem geordneten Körper gilt* $x^2 \geq 0$ *für alle* x.

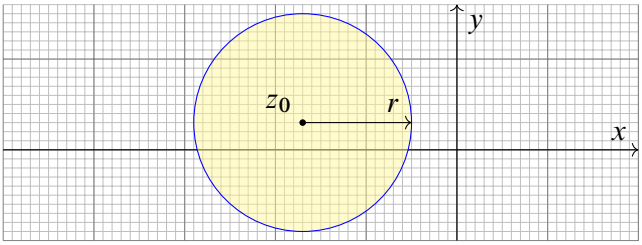


ABBILDUNG B:3. Die komplexe Ebene $\mathbb{C} = \{ x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ und hierin der offene Ball $B(z_0,r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$ für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$

Der Körper $\mathbb{C}$ trägt eine *Norm*: Den *Betrag* $|-| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $|x| := x$ für $x \geq 0$ und $|x| := -x$ für $x < 0$ setzen wir auf die komplexen Zahlen fort zu $|-| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}}, \quad \text{also} \quad |x+\mathrm{i}y| := \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Die Existenz der Wurzelfunktion $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ verdanken wir B2D(5). Um $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ im Folgenden einheitlich behandeln zu können, führen wir folgende Sprechweise ein:

Definition B3B. Ein *normierter Körper* $(\mathbb{K},+,\cdot,|-|)$ besteht aus einem Körper $(\mathbb{K},+,\cdot)$ und einer Norm $|-| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die für alle $a,b,c \in \mathbb{K}$ folgende Bedingungen erfüllt:

(N0)	$\lvert 0\rvert = 0$ und $\lvert 1\rvert = 1$	(Null und Eins)
(N1)	$\lvert a\rvert > 0$ für $a \neq 0$	(Definitheit)
(N2)	$\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$	(Multiplikativität)
(N3)	$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	(Dreiecksungleichung)

Den *Abstand* zwischen $a,b \in \mathbb{K}$ definieren wir dann durch $d(a,b) := |a-b|$. Es gilt:

(M0)	$d(a,a) = 0 \leq d(a,b)$	(Positivität)
(M1)	$d(a,b) > 0$ für $a \neq b$	(Definitheit)
(M2)	$d(a,b) = d(b,a)$	(Symmetrie)
(M3)	$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$	(Dreiecksungleichung)

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung B3C. Mithilfe der Axiome des geordneten Körpers $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ weise man die Körperaxiome für $(\mathbb{C},+,\cdot)$ nach. Man zeige zudem, dass $(\mathbb{C},+,\cdot,|-|)$ ein normierter Körper ist, also die oben genannten Eigenschaften besitzt. Auch jeder Teilkörper ist normiert.

✻ **B3C.** Die Körperaxiome für $(\mathbb{C},+,\cdot)$ kann man geduldig nachrechnen. Leichter geht es mit etwas Algebra: Wie in jedem geordneten Körper gilt für $x\in\mathbb{R}$ die Ungleichung $x^2\geq 0$, also $x^2+1>0$. Das Polynom X^2+1 hat demnach keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, ist also irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$. Der Quotientenring $\mathbb{C}=\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ ist daher ein Körper. Wir schreiben $\mathbb{C}=\mathbb{R}[\mathrm{i}]$ mit $\mathrm{i}^2=-1$. Jedes Element $z\in\mathbb{C}$ schreibt sich eindeutig als $z=x+y\mathrm{i}$ mit $x,y\in\mathbb{R}$. Wir können so $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ identifizieren vermöge $(x,y)\mapsto z=x+y\mathrm{i}$, und wir setzen $\mathrm{Re}(z):=x$ und $\mathrm{Im}(z):=y$. Für die Addition und die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ gelten dann die obigen Formeln.

Der Ringautomorphismus $\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$ mit $X\mapsto -X$ fixiert X^2+1. Auf $\mathbb{C}$ induziert dies den Körperautomorphismus $\mathbb{C}\to\mathbb{C}:z=x+y\mathrm{i}\mapsto\bar z=x-y\mathrm{i}$. Wir haben $\mathrm{Re}(z)=(z+\bar z)/2$ und $\mathrm{Im}(z)=(z-\bar z)(2\mathrm{i})$. Das Produkt $z\bar z=x^2+y^2\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ verschwindet nur für $z=0$. Für $z\neq 0$ finden wir somit

$$z^{-1}=\frac{\bar z}{z\bar z}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}.$$

Jedes Element $x\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ hat eine Quadratwurzel $\sqrt{x}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, und die Funktion $x\mapsto\sqrt{x}$ ist wachsend. Für $z\in\mathbb{C}$ können wir also den Betrag $|z|:=\sqrt{z\bar z}=\sqrt{x^2+y^2}$ definieren, der den Betrag auf $\mathbb{R}$ fortsetzt, und es gilt $|\mathrm{Re}(u)|\leq|u|$ und $|\mathrm{Im}(u)|\leq|u|$. Aussagen (N0–1) sind damit klar. Für alle $a,b\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=ab$, wegen Eindeutigkeit also $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. Hieraus folgt (N2) gemäß $|uv|=\sqrt{uv\cdot\overline{uv}}=\sqrt{u\bar u\cdot v\bar v}=\sqrt{u\bar u}\cdot\sqrt{v\bar v}=|u|\cdot|v|$. Für $u+v=0$ ist (N3) klar. Für $u+v\neq 0$ gilt $1=\frac{u}{u+v}+\frac{v}{u+v}$, und mit (N2) finden wir

$$1=\mathrm{Re}\Big(\frac{u}{u+v}\Big)+\mathrm{Re}\Big(\frac{v}{u+v}\Big)\leq\Big|\frac{u}{u+v}\Big|+\Big|\frac{v}{u+v}\Big|=\frac{|u|}{|u+v|}+\frac{|v|}{|u+v|}.$$

Multiplikation mit $|u+v|$ liefert die gewünschte Ungleichung. Aus diesen Eigenschaften (N0–3) der Norm folgen nun unmittelbar die Eigenschaften (M0–3) des Abstands $d(a,b)=|a-b|$.

§B3b. Der Fundamentalsatz der Algebra. Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ beschert dem eingangs betrachteten Polynom z^2+1 eine Nullstelle, nämlich i. Dieses zerfällt gemäß $z^2+1=(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$ in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$. Man könnte nun befürchten, dass auch über $\mathbb{C}$ hinaus noch Erweiterungen nötig sind, zum Beispiel, um alle Nullstellen von z^3+1 zu gewinnen, etc. Glücklicherweise jedoch ist der Körper $\mathbb{C}=\mathbb{R}[\mathrm{i}]$ *algebraisch abgeschlossen*: Dieser Satz vollendet den langen Marsch der Vervollständigung des Zahlensystems.

Satz B3D. *Jedes Polynom $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ mit Koeffizienten $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ zerfällt in Linearfaktoren, das heißt, es existieren Nullstellen $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ sodass*

$$p(z)=a_n(z-z_1)\cdots(z-z_n).$$

Die Nullstellen $z_1,\dots,z_n$ sind durch p eindeutig bestimmt bis auf Umordnung.

Bemerkung. Im Gegensatz zu $\mathbb{R}[\mathrm{i}]$ ist der Körper $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ nicht algebraisch abgeschlossen. Der Fundamentalsatz B3D beruht auf dem subtilen Zusammenspiel der *algebraischen* Erweiterung $\mathbb{C}=\mathbb{R}[\mathrm{i}]$ mit der *topologischen* Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung mehrere Beweise für den Fundamentalsatz kennenlernen, den ersten gleich im nächsten Kapitel (§C3o) allein mit Hilfe des Zwischenwertsatzes und Maximumssatzes. Ein geometrischer Beweis gelingt uns mit der Umlaufzahl (J1U); dies liefert zudem einen Algorithmus zur Lokalisierung der Nullstellen.

§B3c. Summen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$. Sei Ω eine Menge, etwa $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$, und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \Omega$ endlich, so definieren wir die Summe

$$\sum_{x\in E} f(x) := f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

Dank Assoziativität und Kommutativität ist dies wohldefiniert, das heißt unabhängig von Klammerung und Reihenfolge der Addition. Wir wollen soweit möglich auch unendliche Summen definieren, zur Vereinfachung zunächst in $[0,\infty]$. Die Addition ist hier assoziativ und kommutativ, neutrales Element für die Addition ist 0, die üblichen Rechenregeln gelten also bis auf Inverse. Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ, neutrales Element für die Multiplikation ist 1, und die Multiplikation ist distributiv über die Addition.

Die Summe von $f : \Omega \to [0,\infty]$ über Ω ist das Supremum aller endlichen Teilsummen:

$$\sum_{x\in\Omega} f(x) := \sup\left\{ \sum_{x\in E} f(x) \;\middle|\; E \subset \Omega \text{ endlich} \right\} \quad \in \quad [0,\infty].$$

Eine besondere Summationsreihenfolge wird nicht benötigt! Gilt $\sum_{x\in\Omega} f(x) < \infty$, so sind alle Summanden $f(x)$ endlich und nur abzählbar viele sind von 0 verschieden, das heißt, die Trägermenge $\operatorname{supp}(f) := \{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \,\}$ ist abzählbar. Im endlichen Falle haben wir eine endliche Summe wie oben. Ist $\operatorname{supp} f = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ eine beliebige Abzählung, so gilt $\sum_{x\in\Omega} f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

Jede Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ können wir zerlegen in Positivteil $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ und Negativteil $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$. Es gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$ sowie

$$\sum_{x\in\Omega} \big|f(x)\big| = \sum_{x\in\Omega} f^+(x) + \sum_{x\in\Omega} f^-(x).$$

Ist dieser Wert endlich, so nennen wir f *absolut summierbar* und definieren

$$\sum_{x\in\Omega} f(x) := \sum_{x\in\Omega} f^+(x) - \sum_{x\in\Omega} f^-(x).$$

Jede Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ können wir zerlegen gemäß $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$ in Realteil $\operatorname{Re} f$ und Imaginärteil $\operatorname{Im} f$. Wir nennen f *absolut summierbar*, wenn $\sum_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty$; dann definieren wir die Summe durch $\sum_{x\in\Omega} f(x) := \sum_{x\in\Omega} \operatorname{Re} f(x) + \mathrm{i} \sum_{x\in\Omega} f(x)$.

Satz B3E. *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Die Menge aller absolut summierbaren Funktionen*

$$\ell^1(\Omega, \mathbb{K}) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \;\middle|\; \textstyle\sum_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty \right\}$$

ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Hierauf ist die Summe eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung

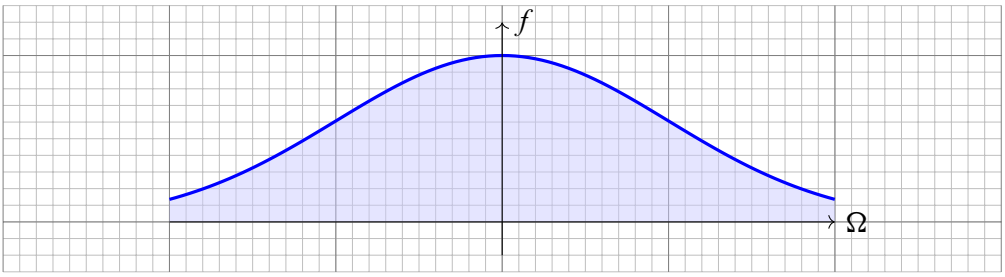
$$\ell^1(\Omega, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} : \; f \mapsto \textstyle\sum_{x\in\Omega} f(x).$$

Diese Abbildung ist normiert durch $\int_\Omega e_a = 1$ für $a \in \Omega$. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist sie zudem monoton und erfüllt die Ausschöpfung, und wird hierdurch eindeutig bestimmt. □

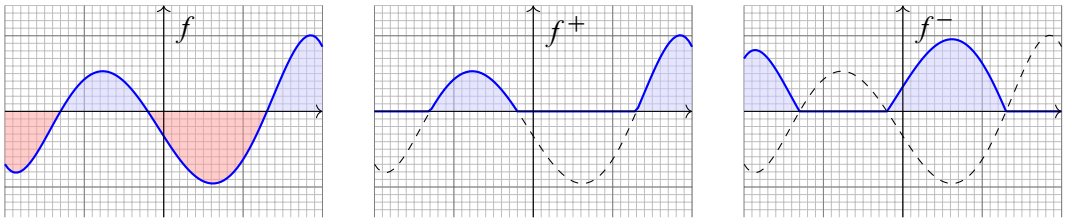
Der Übergang von endlichen zu unendlichen Summen ist ein allgegenwärtiges Werkzeug. Ich verweise auf die Analysis für die Ausführung dieser Konstruktion sowie die üblichen Konvergenzkriterien und Rechenregeln. Summation in normierten Vektorräumen werden wir in §C5a fortführen, insbesondere die absolute Summierbarkeit §C5b.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B3d. Integration. In der Integrationstheorie möchte man, anschaulich gesagt, die „Fläche unter Funktionsgraphen“ messen. Zu einer gegebenen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ suchen wir also die Fläche der Menge $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Sei nun allgemeiner $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar, so misst das Integral $\int_\Omega f = \int_{x\in\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x$ das Volumen unter dem Graphen von f. Für Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die auch negative Werte annehmen, ist das Volumen dort negativ in Ansatz zu bringen.



Die Maß- und Integrationstheorie versucht mit einer einheitlichen Methodik, möglichst viele Mengen zu messen und möglichst viele Funktionen zu integrieren. Besonders exotische Objekte zu messen ist dabei eher ein Nebeneffekt. Das Hauptziel ist vielmehr, Vollständigkeit und kraftvolle Konvergenzsätze zu sichern. Diese Errungenschaft ist von überragender Bedeutung für den Erfolg der Maß- und Integrationstheorie.

Das Integral ist ein wichtiges Werkzeug der Analysis und grundlegend für die Wahrscheinlichkeitstheorie. Wir werden den Integralbegriff im Folgenden nicht vertiefen, sondern vor allem zur Illustration in Beispielen verwenden. Wer möchte kann alle diesbezüglichen Beispiele bei der ersten Lektüre übergehen, sie sollen jedoch die Brücke zu fortgeschrittenen Anwendungen wenigstens andeuten.

Die definierenden Grundregeln der Integration will ich im Folgenden skizzieren. Für die Ausführung dieser raffinierten Konstruktion verweise ich auf die Analysis, ebenso für die kunstvollen Rechenregeln wie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ($n = 1$), den Satz von Fubini ($n \geq 2$), den Transformationssatz und Konvergenzsätze.

Alles messen, was messbar ist –
und messbar machen, was noch nicht messbar ist.
Galileo Galilei (1564–1642)

§B3e. Messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ und ihr Volumen. In der Maßtheorie will man die „Größe“ von Mengen messen. Als Beispiele denke man in $\mathbb{R}$ an die Länge eines Intervalls, im $\mathbb{R}^2$ an die Fläche einer Figur, im $\mathbb{R}^3$ an das Volumen eines Körpers, etc. Die Maßtheorie geht weit über diese Beispiele der elementaren Geometrie hinaus und misst (atemberaubend) allgemeine Mengen. Sie spielt in der Analysis eine tragende Rolle, ist Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie, und auch in Geometrie und Topologie ein nützliches Werkzeug.

Definition B3F (Quadervolumen)**.** Das leere Intervall $\emptyset \subset \mathbb{R}$ hat Länge $\mathrm{vol}_1(\emptyset) := 0$, jedes nicht–leere Intervall $I \subset \mathbb{R}$ hat Länge $\mathrm{vol}_1(I) := \sup I - \inf I$. Ein (achsenparalleler) *Quader* $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist von der Form $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ mit Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$. Sein Volumen definieren wir als $\mathrm{vol}_n(Q) := \mathrm{vol}_1(I_1) \cdot \mathrm{vol}_1(I_2) \cdots \mathrm{vol}_1(I_n)$. Für $Q \neq \emptyset$ gilt $I_k = \mathrm{pr}_k(Q)$ und somit ist $\mathrm{vol}_n(Q)$ wohldefiniert. Für $Q = \emptyset$ gilt $\mathrm{vol}_n(\emptyset) = 0$.

Auch für endliche Vereinigungen von Quadern kann man leicht ein sinnvolles Volumen konstruieren. Viele interessante Mengen sind allerdings nicht von dieser Form, daher wollen wir den Maßbegriff geeignet ausdehnen. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ denke man an Dreiecke, Polygone, Kompakta mit glattem Rand wie etwa Kreise, etc. Im Raum $\mathbb{R}^3$ denke man an Polyeder, Kompakta mit glattem Rand wie etwa Kugeln, etc. Für viele Anwendungen muss man auch noch viel allgemeinere Mengen messen können. Es wird im Allgemeinen aber nicht möglich und auch nicht nötig sein, *jeder* Teilmenge $A \subset \Omega$ ein Maß zuzuordnen.

Definition B3G. Nach folgenden Regeln wollen wir Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ *messbar* nennen und ihnen ihr *Volumen* $\mathrm{vol}_n(A) \in [0, \infty]$ zuweisen:

(L1) *Normierung:* Jeder n–dimensionale Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar,
und sein Volumen $\mathrm{vol}(Q)$ ist das Produkt seiner Seitenlängen.
(L2) *Additivität:* Sind A, B messbar, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$,
und es gilt $\mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(A \cup B) + \mathrm{vol}(A \cap B)$.
(L3) *Monotonie:* Sind A, B messbar, so auch $C = B \smallsetminus A$.
Dank Additivität folgt aus $A \subset B$ dann $\mathrm{vol}(A) \leq \mathrm{vol}(B)$.
(L4) *Einschachtelung:* Gilt $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset C \subset \ldots \subset B_2 \subset B_1 \subset B_0$
mit A_k, B_k messbar und $\mathrm{vol}(B_k \smallsetminus A_k) \searrow 0$, so ist auch C messbar.
(L5) *Ausschöpfung:* Sind $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ messbar, so auch
ihre Vereinigung $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, und es gilt $\mathrm{vol}(A_k) \nearrow \mathrm{vol}(A)$.

Diese Grundregeln sind zunächst nur Wünsche, und es ist keineswegs selbstverständlich, dass sie zu einem wohldefinierten Maß führen. Dies ist glücklicherweise tatsächlich der Fall (B3I), bedarf aber eines Beweises: Mit diesen fünf Regeln können wir jeder messbaren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ eindeutig ihr Volumen $\mathrm{vol}_n(A) \in [0, \infty]$ zuweisen und ausrechnen.

Bemerkung. Im Falle $A \cap B = \emptyset$ nennen wir $A \sqcup B := A \cup B$ ihre *disjunkte Vereinigung*. Sind zudem $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, so gilt $\mathrm{vol}(A \sqcup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$ nach (L2). Sind $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ messbar, so auch die Komplemente $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \smallsetminus A_0$, $B_2 = A_2 \smallsetminus A_1, \ldots$. Dank Additivität gilt $\mathrm{vol}(A_\ell) = \mathrm{vol}(B_0 \sqcup \cdots \sqcup B_\ell) = \mathrm{vol}(B_0) + \cdots + \mathrm{vol}(B_\ell)$. Für $\ell \to \infty$ gilt $\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(B_k)$ dank Ausschöpfung (L5).

Seien $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset C \subset \ldots \subset B_1 \subset B_0$ wie in (L4). Dank Monotonie (L3) folgt $\mathrm{vol}(A_0) \leq \mathrm{vol}(A_1) \leq \ldots \leq \mathrm{vol}(C) \leq \ldots \leq \mathrm{vol}(B_1) \leq \mathrm{vol}(B_0)$. Zudem sind die Differenzmengen $D_k = B_k \smallsetminus A_k$ messbar (L3), und aus $D_0 \supset D_1 \supset \ldots$ folgt $\mathrm{vol}(D_0) \geq \mathrm{vol}(D_1) \geq \ldots$. Aus $\mathrm{vol}(B_k \smallsetminus A_k) \searrow 0$ folgt schließlich $\mathrm{vol}(A_k) \nearrow \mathrm{vol}(C) \swarrow \mathrm{vol}(B_k)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B3f. Integration auf $\mathbb{R}^n$. Wie für messbare Mengen und ihr Maß formulieren wir Axiome für messbare Funktionen und ihr Integral.

Definition B3H. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, etwa $\Omega = \mathbb{R}^n$. Nach folgenden Regeln wollen wir $f : \Omega \to [0,\infty]$ *messbar* nennen und das *Integral* $\int_\Omega f \in [0,\infty]$ definieren:

(I1) *Normierung:* Für jeden Quader $Q \subset \Omega$ ist die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_Q : \Omega \to [0,\infty]$ messbar, und ihr Integral ist $\int_\Omega \mathbf{I}_Q = \mathrm{vol}_n(Q)$.
(I2) *Linearität:* Sind f, g messbar, so auch jede Linearkombination $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und es gilt $\int_\Omega (af + bg) = a\int_\Omega f + b\int_\Omega g$.
(I3) *Monotonie:* Sind f, g messbar, so auch $h = \max(g - f, 0) : \Omega \to [0,\infty]$. Dank Additivität folgt aus $f \leq g$ dann $\int_\Omega f \leq \int_\Omega f + \int_\Omega h = \int_\Omega g$.
(I4) *Einschachtelung:* Gilt $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq h \leq \cdots \leq g_2 \leq g_1 \leq g_0$ mit f_k, g_k messbar und $\int_\Omega (g_k - f_k) \searrow 0$, dann ist auch h messbar.
(I5) *Ausschöpfung:* Seien $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ messbar und $f_k \nearrow f$, dann ist auch f messbar, und das Integral erfüllt $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$.

Bemerkung. Axiome (I2–5) lassen sich trivial erfüllen, indem man alle Funktionen f als messbar erklärt und ihnen das Integral $\int_\Omega f = 0$ zuweist. Axiom (I1) dient zur Normierung und schließt diese triviale Lösung aus. Axiome (I2,3) sind algebraischer Natur, während (I4,5) zwei wichtige Grenzprozesse beschreiben. Ihr Zusammenspiel erzeugt eine enorm große Klasse messbarer Funktionen. Es ist allerdings keineswegs selbstverständlich, dass sie zu einem wohldefinierten Integral führen. Dies ist wahr, bedarf aber eines Beweises!

Henri LEBESGUE verdanken wir die folgende geniale Konstruktion: Zu jeder Funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ definieren wir das Unterintegral $I(f)$ und das Oberintegral $J(f)$ durch

$$I(f) := \sup\Big\{ \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a_k \,\mathrm{vol}_n(A_k) \;\Big|\; f \geq \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{I}_{A_k} \Big\},$$
$$J(f) := \inf\Big\{ \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} b_k \,\mathrm{vol}_n(B_k) \;\Big|\; f \leq \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} b_k \mathbf{I}_{B_k} \Big\},$$

wobei $A_k, B_k \subset \Omega$ endliche Quader sind und $a_k, b_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz B3I. *Eine Funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ heißt* Lebesgue–messbar, *wenn $I(f) = J(f)$ gilt. In diesem Fall definieren wir ihr Integral durch $\int_\Omega f := I(f) = J(f)$. Die Menge $\mathscr{L}^+(\Omega)$ aller Lebesgue–messbaren Funktionen und ihr Integral $\int_\Omega : \mathscr{L}^+(\Omega) \to [0,\infty]$ erfüllen die Axiome (I1–5). Dies ist die kleinste solche Menge, und das Integral ist hierauf eindeutig.* □

Wir werden diesen Satz hier nicht beweisen, aber die Strategie ist klar vorgezeichnet: Mit Geschick und Geduld weist man die Axiome (I1–5) nach. Ein Vergleich mit den Axiomen (L1–5) zeigt: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn ihre Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ messbar ist, und in diesem Fall gilt $\mathrm{vol}_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_A$. Der Satz beweist somit die Erfüllbarkeit der Axiome (I1–5) und zugleich die der Axiome (L1–5).

Bemerkung. Die Axiome sind mit Bedacht formuliert. Mit (I1–3) erhält man die Treppenfunktionen über Quadern und ihr Integral (A3E), mit (I1–3,4) die Riemann–messbaren, mit (I1–3,5) die Borel–messbaren, und mit (I1–5) schließlich die Lebesgue–messbaren Funktionen. In jedem dieser Fälle ist das Integral eindeutig durch die jeweiligen Axiome festgelegt, aber die Menge der messbaren Funktionen wird bei jedem Schritt wesentlich erweitert.

§B3g. Maßräume und Integration. Wir wollen die Integration auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenfassen und abstrahieren. Für die Familie $\mathscr{A}$ aller messbaren Mengen $A \subset \Omega$ gilt:

($\sigma 1$) Es gilt $\Omega \in \mathscr{A}$, und aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $\Omega \smallsetminus A \in \mathscr{A}$.
($\sigma 2$) Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ gilt $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$.

Das heißt, die Familie $\mathscr{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ist nicht-leer und stabil unter Komplementbildung sowie abzählbaren Vereinigungen. Durch Komplementbildung ist $\mathscr{A}$ dann auch stabil unter abzählbaren Schnitten. Für das Maß $\mu = \mathrm{vol}_n : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ gilt:

($\mu 1$) Die leere Menge $\emptyset \in \mathscr{A}$ hat das Maß $\mu(\emptyset) = 0$.
($\mu 2$) Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disjunkter Mengen in $\mathscr{A}$ gilt

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Definition B3J. Sei Ω eine Menge. Ein Mengensystem $\mathscr{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften $(\sigma 1,2)$ heißt *σ–Algebra*. Eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ mit den Eigenschaften $(\mu 1,2)$ heißt *(σ–additives) Maß*. Ein solches Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ nennt man einen *Maßraum*.

Die Mengen $A \in \mathscr{A}$ nennen wir *messbar* und $\mu(A) \in [0,\infty]$ ihr *Maß*. Eine Funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ heißt *messbar*, wenn $f^{-1}([a,b]) \in \mathscr{A}$ für alle $a,b \in [0,\infty]$ gilt. Sie heißt *Treppenfunktion*, wenn sie zudem nur endlich viele Werte $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ annimmt. In diesem Falle definieren wir ihr Integral durch $\int_\Omega f := \sum_{k=1}^n a_k\, \mu\big(f^{-1}\{a_k\}\big)$.

Jede messbare Funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ ist monotoner Limes von Treppenfunktionen $f_k \nearrow f$. Zu $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0,\dots,N = k2^k\}$ sei $h_j := j/2^k$ und $A_j := f^{-1}([h_j, h_{j+1}[)$ und $A_N := f^{-1}([h_N,\infty])$. Für $f_k := \sum_{k=0}^N h_j \cdot \mathbf{I}_{A_j}$ gilt $\int_\Omega f = \sum_{j=0}^N a_j\, \mu(A_j)$. Zudem erhalten wir $f_k \nearrow f$, und wir definieren $\int_\Omega f := \lim \int_\Omega f_k$. Dies ist wohldefiniert.

Jede Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zerlegen wir gemäß $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Es gilt $\int_\Omega |f| = \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^-$. Ist dieser Wert endlich, so nennen wir f *absolut integrierbar* und definieren $\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-$. Jede komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ zerlegen wir gemäß $f = \mathrm{Re}\, f + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, f$. Wir nennen f *absolut integrierbar*, wenn $\int_\Omega |f| < \infty$ gilt. In diesem Falle können wir das Integral von f definieren durch $\int_\Omega f = \int_\Omega \mathrm{Re}\, f + \mathrm{i} \int_\Omega \mathrm{Im}\, f$.

Satz B3K. *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Die Menge aller absolut integrierbaren Funktionen*

$$\mathscr{L}^1(\Omega,\mathbb{K}) = \big\{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; \textstyle\int_\Omega |f| < \infty \,\big\}$$

ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung

$$\mathscr{L}^1(\Omega,\mathbb{K}) \to \mathbb{K} : \; f \mapsto \textstyle\int_\Omega f.$$

Diese Abbildung ist normiert durch $\int_\Omega \mathbf{I}_A = \mu(A)$ für $A \in \mathscr{A}$. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist sie zudem monoton und erfüllt die Ausschöpfung, und wird hierdurch eindeutig bestimmt.

Beispiel. Sei Ω eine Menge, $\mathscr{A} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge und $\mu(A) = \sharp A$ das Zählmaß. Genau dann ist $f : \Omega \to \mathbb{K}$ integrierbar, wenn $\sum_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty$ gilt. In diesem Fall ist das Integral $\mathscr{L}^1(\Omega,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ die (absolut konvergente) Summe $\int f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{x\in\Omega} f(x)$.

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue–messbare Menge und $\mathscr{A}$ das System aller Lebesgue–messbaren Teilmengen $A \subset \Omega$ sowie μ das Lebesgue–Maß eingeschränkt auf $\mathscr{A}$. In diesem Fall ist das Integral $\mathscr{L}^1(\Omega,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ das Lebesgue–Integral.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B4. Quaternionen und Oktaven

§B4a. Algebren. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definition B4A. Eine $\mathbb{K}$–*Algebra* $(A, \cdot)$ ist ein Vektorraum A über $\mathbb{K}$ mit einer bilinearen Abbildung $\cdot : A \times A \to A$: Je zwei Elementen $u, v \in A$ wird ihr Produkt $u \cdot v \in A$ zugeordnet, wobei $(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$ und $u \cdot (v + w) = (u \cdot v) + (u \cdot w)$ für alle $u, v, w \in A$ sowie $(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

Die Algebra $(A, \cdot)$ nennen wir *assoziativ*, wenn $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$ für alle $u, v, w \in A$ gilt, und *kommutativ*, wenn $u \cdot v = v \cdot u$ für alle $u, v \in A$ gilt. Ein *neutrales Element* $e \in A$ erfüllt $e \cdot u = u \cdot e = u$ für alle $u \in A$. Falls ein solches existiert, so ist es eindeutig durch das Produkt bestimmt: Sind e und e' neutral, so folgt $e' = e' \cdot e = e$. In diesem Falle nennen wir die Algebra $(A, \cdot)$ *unitär* oder $(A, \cdot, e)$ eine *Algebra mit Eins(element)*.

Ein *Homomorphismus* $f : (A, \cdot) \to (B, \bullet)$ von $\mathbb{K}$–Algebren ist eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $f : A \to B$, die die Produkte respektiert, also $f(u \cdot v) = f(u) \bullet f(v)$ für alle $u, v \in A$ erfüllt. Bei unitären $\mathbb{K}$–Algebren fordern wir für $f : (A, \cdot, e_A) \to (B, \bullet, e_B)$ zudem $f(e_A) = e_B$.

Eine $\mathbb{K}$–*Unteralgebra* U von $(A, \cdot)$ ist ein $\mathbb{K}$–Untervektorraum $U \subset A$, sodass für alle $u, v \in U$ auch $u \cdot v \in U$ gilt. Damit ist $(U, \cdot)$ eine $\mathbb{K}$–Algebra durch Einschränkung des Produkts von A auf $\cdot : U \times U \to U$, und die Inklusion $U \hookrightarrow A$ ist ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$–Algebren. Ist $(A, \cdot)$ assoziativ / kommutativ, so auch jede Unteralgebra $(U, \cdot)$.

Beispiel. Über jedem Körper $\mathbb{K}$ bilden die Matrizen $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit ihrer Addition und Multiplikation eine $\mathbb{K}$–Algebra der Dimension n^2. Diese ist assoziativ und hat $E = \operatorname{diag}(1, \dots, 1)$ als neutrales Element. Für $n \geq 2$ ist diese Algebra nicht kommutativ.

Bemerkung. Der Grundring $(\mathbb{K}, \cdot, 1)$ ist eine unitäre $\mathbb{K}$–Algebra. Sei $(A, \cdot, e)$ eine weitere unitäre $\mathbb{K}$–Algebra. Dann ist $\iota : (\mathbb{K}, +, \cdot) \to (A, +, \cdot) : \lambda \mapsto \lambda e$ ein Algebrenhomomorphismus. Wird $\mathbb{K}$ als Körper vorausgesetzt, so ist ι injektiv. Wir können so den Grundkörper $\mathbb{K}$ in die Algebra A einbetten und sogar $\mathbb{K} \subset A$ als Unteralgebra betrachten. (Ist $\mathbb{K}$ nur ein Ring, so ist ι im Allgemeinen nicht injektiv, daher unsere allgemeine Formulierung.)

Beispiel. Der Körper $\mathbb{C}$ ist eine zweidimensionale $\mathbb{R}$–Algebra; sie ist assoziativ und kommutativ und besitzt ein neutrales Element. In der Algebra $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist die Teilmenge

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Unteralgebra mit Eins $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Bijektion $\varphi : \mathbb{C} \to A$ mit $x + \mathrm{i}y \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ ist ein Isomorphismus von unitären $\mathbb{R}$–Algebren, denn φ ist $\mathbb{R}$–linear und erfüllt $\varphi(1) = E$ sowie $\varphi(z \cdot w) = \varphi(z) \cdot \varphi(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$. (Nachrechnen!) Die Matrix $\varphi(z)$ entspricht der Multiplikation von z auf der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit Basis $(1, \mathrm{i})$.

Bemerkung. Wie oben erklärt $\mathbb{C}^{n\times n}$ eine $\mathbb{C}$–Algebra der Dimension $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n\times n}) = n^2$. Zudem ist $\mathbb{C}^{n\times n}$ eine $\mathbb{R}$–Algebra der Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^{n\times n}) = 2n^2$. Drei Daten sind wichtig: der zugrundeliegende Körper $\mathbb{K}$ sowie die Vektorraumstruktur und das Produkt auf A.

Bemerkung. Wörtlich genauso definiert man eine Algebra $(A, \cdot)$ über einem kommutativen Ring $\mathbb{K}$. Im Falle eines Körpers $\mathbb{K}$ ist A ein $\mathbb{K}$–Vektorraum, im Falle eines Rings spricht man vorsichtigerweise von einem $\mathbb{K}$–Modul. Ansonsten übertragen sich alle Begriffe wörtlich.

§B4b. Lie–Algebren. Assoziativität ist eine schöne und nützliche Eigenschaft. Aber auch nicht-assoziative Algebren haben ernsthafte Anwendungen: Die prominentesten Beispiele sind Lie–Algebren; sie spielen in Mathematik und Physik eine wichtige Rolle.

Beispiel. Auf $\mathbb{R}^3$ definieren wir das *Kreuzprodukt* oder *Vektorprodukt* $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $(u_1,u_2,u_3)\times(v_1,v_2,v_3) = (u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1)$. Es ist bilinear aber weder unitär noch assoziativ noch kommutativ, sondern antikommutativ $u\times v = -(v\times u)$, erfüllt $u\times u = 0$ und die *Jacobi-Identität* $u\times(v\times w)+v\times(w\times u)+w\times(u\times v)=0$.

Beispiel. Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $L=\mathbb{R}^{n\times n}$ erhalten wir aus dem üblichen Matrixprodukt die *Lie–Klammer* $[,]: L\times L\to L$ durch $[A,B]=AB-BA$. Diese bilineare Verknüpfung ist weder assoziativ noch kommutativ, sondern antikommutativ, erfüllt $[A,A]=0$ und die *Jacobi-Identität*: $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$.

Beispiel. Allgemeiner induziert jede assoziative Algebra $(A,\cdot)$ eine Lie–Algebra $(A,[,])$ durch den Kommutator $[a,b]=ab-ba$. Umgekehrt lässt sich jede Lie–Algebra $(L,[,])$ in eine assoziative Algebra einbetten mit der Lie–Klammer als Kommutator; die allgemeine Konstruktion ist die sogenannte universelle einhüllende Algebra $U(L,[,])$.

Konvention. Wir nutzen die gängige Konvention *Punkt vor Strich*, um Klammern zu sparen, und lassen meist das Produktzeichen weg, um auch noch Punkte zu sparen.

§B4c. Strukturkonstanten. Die Lineare Algebra gibt uns ein einfaches Verfahren an die Hand, jede endlich-dimensionale Algebra $(A,\cdot)$ über $\mathbb{K}$ zu beschreiben bzw. zu konstruieren. Wir fixieren hierzu eine Basis $(e_1,\dots,e_n)$ von A über $\mathbb{K}$. Vektoren $x,y\in A$ schreiben sich dann eindeutig als Linearkombinationen $x=\sum_i x_i e_i$ und $y=\sum_i y_i e_j$ mit $x_i,y_i\in\mathbb{K}$, und für ihr Produkt gilt $x\cdot y=\sum_{i,j} x_i y_i (e_i\cdot e_j)$ dank Distributivität. Man muss also nur die Produkte $e_i\cdot e_j$ kennen. Als unmittelbare Folgerung halten wir fest:

Bemerkung. Genau dann ist $(A,\cdot)$ kommutativ, wenn $e_i\cdot e_j = e_j\cdot e_i$ für alle i,j gilt, und assoziativ, wenn $(e_i\cdot e_j)\cdot e_k = e_i\cdot(e_j\cdot e_k)$ für alle i,j,k gilt. Dies nachzurechnen mag mühsam sein, reduziert das Problem aber auf endliche viele (n^2 bzw. n^3) Gleichungen.

Für jedes Paar (e_i,e_j) schreibt sich das Produkt $e_i\cdot e_j$ eindeutig als Linearkombination $e_i\cdot e_j=\sum_k c_{ijk}e_k$ mit den sogenannten *Strukturkonstanten* $c_{ijk}\in\mathbb{K}$. Diese bestimmen das Produkt eindeutig; umgekehrt können wir uns Konstanten $c_{ijk}\in\mathbb{K}$ für $i,j,k=1,\dots,n$ beliebig vorgeben und erhalten dann auf $A=\mathbb{K}^n$ als Produkt die bilineare Abbildung

$$\cdot : \mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad (x_i)_{i=1}^n\cdot(y_j)_{j=1}^n = \left(\textstyle\sum_{i,j} c_{ijk}x_iy_j\right)_{k=1}^n.$$

Für großes n wird das leicht unübersichtlich, aber diese explizite Darstellung ist zumindest immer möglich. Meist wird man versuchen, eine geschickte Basis zu finden, bezüglich derer die Konstanten c_{ijk} eine besonders einfache und aussagekräftige Form annehmen. Dieses Vorgehen illustrieren die Übungen B4D, B4E und B4F. Nach Möglichkeit nutzt man zur Vereinfachung bereits vorhandene algebraische oder geometrische Struktur.

Bemerkung. Die Strukturkonstanten einer Algebra $(A,\cdot)$ haben eine vertraute Bedeutung: Bezüglich der Basis $(e_1,\dots,e_n)$ hat die Linksmultiplikation $L_i : x\mapsto e_i\cdot x$ die darstellende Matrix $(c_{ijk})_{kj}$, Die Rechtsmultiplikation $R_j : x\mapsto x\cdot e_j$ entsprechend $(c_{ijk})_{ki}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B4d. Divisionsalgebren. In einer Algebra $(A,\cdot)$ können wir multiplizieren aber im Allgemeinen nicht dividieren. Hierzu vereinbaren wir folgenden Sprachgebrauch:

Definition B4B. Wir nennen $(A,\cdot)$ eine *Divisionsalgebra*, wenn für jedes Paar $u,v \in A$ mit $u \neq 0$ zu den Gleichungen $u\cdot x = v$ und $y\cdot u = v$ eindeutige Lösungen $x,y \in A$ existieren. Das bedeutet, dass $L_u : A \to A : x \mapsto u\cdot x$ und $R_u : A \to A : y \mapsto y\cdot u$ Bijektionen sind.

Ein Paar $u,v \in A$ heißt *Nullteiler*, wenn $u \neq 0$ und $v \neq 0$ aber $u\cdot v = 0$ gilt. Das bedeutet, dass die $\mathbb{K}$–linearen Abbildungen L_u, R_v nicht-trivialen Kern haben. Demnach heißt $(A,\cdot)$ *nullteilerfrei*, wenn L_u und R_u injektiv sind für alle $u \neq 0$. Gilt zudem $\dim_{\mathbb{K}} A < \infty$, so sind L_u und R_u für alle $u \neq 0$ invertierbar, und $(A,\cdot)$ ist eine Divisionsalgebra.

Beispiel. Die Matrixalgebra $\mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$ hat für $n \geq 2$ Nullteiler und ist somit keine Divisionsalgebra. Im Beispiel $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt $a \neq 0$ und $b \neq 0$, aber $ab = 0$. Man beachte hierbei die Reihenfolge, denn $ba = a \neq 0$. Genau dann ist $a \in \mathbb{K}^{n\times n} \smallsetminus \{0\}$ ein Nullteiler, wenn die Determinante verschwindet, $\det(a) = 0$. (Warum?)

Beispiel. Die Algebra $\mathbb{K}[X]$ der Polynome über einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine assoziative, kommutative, unitäre Algebra. Dank der Gradformel $\deg(P\cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ hat sie keine Nullteiler, ist aber auch keine Divisionsalgebra.

Beispiel. Der $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{C}$ mit dem Produkt $z * w = \overline{z\cdot w}$ ist eine zweidimensionale kommutative Divisionsalgebra, aber nicht assoziativ und ohne neutrales Element. Dieses einfache Beispiel ist eher eine Kuriosität und dient hier nur zur Illustration.

Übung B4C. Für jede *assoziative* Algebra $(A,\cdot)$ sind äquivalent:

(1) Die Algebra $(A,\cdot)$ ist eine Divisionsalgebra im Sinne von Definition B4B.
(2) Es existiert ein eindeutiges neutrales Element $e \in A$ und zu jedem $u \in A$ mit $u \neq 0$ ein eindeutiges inverses Element $u^{-1} \in A$, sodass $u\cdot u^{-1} = u^{-1}\cdot u = e$ gilt.

Gilt zudem $A \neq \{0\}$, so folgt $e \neq 0$, und auf der Teilmenge $A^\times = A \smallsetminus \{0\}$ erhalten wir die multiplikative Gruppe $(A^\times, \cdot, e, {}^{-1})$ durch Einschränkung der Multiplikation von $(A,\cdot)$.

Spezialfall: Jede assoziative kommutative Divisionsalgebra mit $e \neq 0$ ist ein Körper.

Gelegentlich lässt man die Forderung der Kommutativität fallen: Eine assoziative Divisionsalgebra heißt auch *Divisionsring* oder *Schiefkörper*. Wichtigstes Beispiel sind die hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$ (Satz B4G), die wir anschließend diskutieren.

✻ **B4C.** „(2) ⇒ (1)“: Wir lösen die Gleichung $u\cdot x = v$ durch Linksmultiplikation mit u^{-1} und erhalten $u^{-1}\cdot v = u^{-1}\cdot(u\cdot x) = (u^{-1}\cdot u)\cdot x = e\cdot x = x$. Ebenso $y\cdot u = v$ durch Rechtsmultiplikation mit u^{-1}.

„(1) ⇒ (2)“: Sei $(A,\cdot)$ eine assoziative Divisionsalgebra. Für $A = \{0\}$ ist Aussage (2) trivialerweise wahr. Sei also $A \neq \{0\}$ und $u \in A$ mit $u \neq 0$. Dank Bijektivität von R_u, L_u existiert ein Linksneutrales $e' \in A$ mit $e'\cdot u = u$ und ein Rechtsneutrales $e'' \in A$ mit $u\cdot e'' = u$. Dank Assoziativität sind diese neutral für jedes $v \in A$, denn $e'\cdot v = e'\cdot(u\cdot L_u^{-1}(v)) = (e'\cdot u)\cdot L_u^{-1}(v) = u\cdot L_u^{-1}(v) = v$ und ebenso für $v\cdot e'' = v$. Insbesondere stimmen beide überein, denn $e'' = e'\cdot e'' = e'$. Wir schreiben e für dieses neutrale Element der Algebra $(A,\cdot)$.

Zu jedem Element $u \in A$ mit $u \neq 0$ existiert dank Bijektivität von R_u, L_u ein Linksinverses $u' \in A$ mit $u'\cdot u = e$ und ein Rechtsinverses $u'' \in A$ mit $u\cdot u'' = e$. Dank Assoziativität stimmen beide überein, denn es gilt $u'' = e\cdot u'' = (u'\cdot u)\cdot u'' = u'\cdot(u\cdot u'') = u'\cdot e = u'$. Dies zeigt auch, dass dieses inverse Element eindeutig durch u bestimmt ist. Wir schreiben hierfür $u^{-1} := u' = u''$. Dies definiert die Inversion ${}^{-1} : A^\times \to A^\times$.

§B4e. $\mathbb{R}$–Algebren der Dimension $0,1,2,3$. Der Vektorraum $A=\{0\}$ hat Dimension 0 über dem Körper $\mathbb{K}$. Die einzig mögliche Verknüpfung $\cdot : A\times A\to A$ ist hier $0\cdot 0=0$.

Für 1–dimensionale Algebren gibt es genau zwei Möglichkeiten:

Übung B4D. Zwei nicht-isomorphe Beispiele für eindimensionale $\mathbb{K}$–Algebren:

(1) $(A_1,+,\cdot)=(\mathbb{K},+,\cdot)$ mit $u\cdot v=uv$, das gewöhnliche Produkt in $\mathbb{K}$.
(2) $(A_2,+,\cdot)=(\mathbb{K},+,\cdot)$ mit $u\cdot v=0$, das triviale Produkt.

Jede eindimensionale $\mathbb{K}$–Algebra $(A,+,\cdot)$ ist isomorph zu einem dieser beiden Modelle.

✻ **B4D.** Zunächst ist es hilfreich, die beiden einfachsten Beispiele A_1,A_2 zu verstehen. Jede ist assoziativ und kommutativ. Die erste ist der Körper $\mathbb{K}$. Die zweite hat kein Einselement, dafür aber Nullteiler, nämlich alle Elemente $u,v\in\mathbb{K}^*$. Insbesondere sind diese beiden $\mathbb{K}$–Algebren untereinander nicht isomorph.

Sei $(A,+,\cdot)$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit $\dim_{\mathbb{K}} A=1$, das heißt, es existiert eine Basis $v\in A$. Für das Produkt gilt dann $v\cdot v=\alpha v$ für ein $\alpha\in\mathbb{K}$. (1) Im Falle $\alpha\neq 0$ setzen wir $e:=\alpha^{-1}v$ und erhalten die Basis $e\in A$ mit $e\cdot e=e$. Damit ist $\mathbb{K}\xrightarrow{\sim} A:\lambda\mapsto\lambda e$ ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$–Algebren. (2) Für $\alpha=0$ ist das Produkt trivial.

Übung B4E. Drei nicht-isomorphe Beispiele für zweidimensionale unitäre $\mathbb{R}$–Algebren:

(1) $(A_1,+,\cdot)=(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ mit $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=(x_1y_1-x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)$.
(2) $(A_2,+,\cdot)=(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ mit $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_1y_2+x_2y_1)$.
(3) $(A_3,+,\cdot)=(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ mit $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2)$.

Jede zweidimensionale $\mathbb{R}$–Algebra mit Einselement ist isomorph zu einer dieser drei.

✻ **B4E.** Wir untersuchen zunächst die drei einfachsten Beispiele A_1,A_2,A_3. Jede ist assoziativ und kommutativ. Die erste ist der Körper der komplexen Zahlen mit Einselement $e=(1,0)$ und $\mathrm{i}=(0,1)$. Die zweite hat das Einselement $(1,0)$, und $w=(0,1)$ ist nilpotent, denn $w^2=0$. Die dritte hat das Einselement $e=(1,1)$, keine nilpotenten Elemente aber Nullteiler wie $(1,0)\cdot(0,1)=(0,0)$. Diese drei sind demnach nicht isomorph.

Sei $(A,+,\cdot)$ eine zweidimensionale $\mathbb{R}$–Algebra mit Einselement e. Wir ergänzen e durch $u\in A$ zu einer Basis (e,u). Für das Produkt gilt dann $u\cdot u=\alpha e+\beta u$ mit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Wir setzen $v:=\beta e-2u$ und erhalten die Basis (e,v) mit $v\cdot v=\gamma e$ und $\gamma=4\alpha+\beta^2$. Für $\gamma\neq 0$ setzen wir $w:=\sqrt{1/|\gamma|}\,v$. Wir erhalten so die Basis (e,w) mit $w\cdot w=\delta e$ und $\delta=\operatorname{sign}\gamma\in\{-1,0,1\}$. Fall (1): Für $\delta=-1$ ist die Bijektion $\varphi:\mathbb{R}^2\xrightarrow{\sim} A$ mit $\varphi(x_1,x_2)=x_1e+x_2w$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$–Algebren. Fall (2): Gleiches gilt für $\delta=0$. Fall (3): Für $\delta=1$ setzen wir $a:=\frac{1}{2}(e+w)$ und $b:=\frac{1}{2}(e-w)$ und finden $a\cdot a=a$ und $b\cdot b=b$ sowie $a\cdot b=b\cdot a=0$. Wir erhalten somit den Isomorphismus $\varphi:\mathbb{R}^2\xrightarrow{\sim} A:\varphi(x_1,x_2)=x_1a+x_2b$.

Bemerkung. Die Voraussetzung eines Einselements in B4E ist wesentlich. Es gib unendlich viele nicht-isomorphe kommutative zweidimensionale Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$, zum Beispiel $\mathbb{C}$ mit dem Produkt $z*w=\overline{z\cdot w}$. Ihre Klassifikation diskutieren wir hier nicht.

Bemerkung. In B4E nutzen wir die Ordnung $(\mathbb{R},<)$ und die Existenz von Quadratwurzeln. Zum Kontrast: Über dem Körper $\mathbb{Q}$ gibt es unendlich viele nicht-isomorphe 2–dimensionale Körpererweiterungen, zum Beispiel $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ für jede Primzahl $p=2,3,5,7,\dots$.

Übung B4F. Jede unitäre $\mathbb{R}$–Algebra $(A,\cdot)$ ungerader Dimension $\dim_{\mathbb{R}} A\geq 3$ hat Nullteiler.

✻ **B4F.** Wir können $A=\mathbb{R}^n$ annehmen. Zu $a\in A$ betrachten wir die Linksmultiplikation $L_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n:x\mapsto a\cdot x$. Diese stellen wir als Matrix $L_a\in\mathbb{R}^{n\times n}$ dar bezüglich der kanonischen Basis. Für das Einselement $e\in A$ ist $L_e=E$ die Einheitsmatrix. Sei $a\in A\smallsetminus\mathbb{R}e$ ein hierzu linear unabhängiges Element. Für $t\in\mathbb{R}$ betrachten wir das Polynom $P(t)=\det(L_a+tL_e)\in\mathbb{R}[t]$. Da sein Grad $\deg P=n$ ungerade ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $\lambda\in\mathbb{R}$. Für $u:=a+\lambda e\neq 0$ gilt demnach $\det(L_u)=0$, also existiert $v\in A$ mit $v\neq 0$ und $L_u(v)=0$, das heißt $u\cdot v=0$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B4f. Die Algebra $\mathbb{H}$ der hamiltonschen Quaternionen. Komplexe Zahlen $x+\mathrm{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ und $\mathrm{i}^2=-1$ begründen wir heute ganz selbstverständlich auf der Menge $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ und der in B3A angegebenen Addition und Multiplikation von Zahlenpaaren. Mit dieser nüchternen Sichtweise stellte Sir William HAMILTON 1835 die Konstruktion auf ein solides Fundament. Nach diesem Vorbild suchte er in den Folgejahren eine ebensolche Körperstruktur auf der Menge $\mathbb{R}^3$ als „hyperkomplexe Zahlen“. Das gelang jedoch trotz anhaltender Bemühungen nicht. Aus heutiger Sicht folgt mit Determinante und Zwischenwertsatz sofort, dass eine unitäre Divisionsalgebra auf $\mathbb{R}^3$ unmöglich ist (B4F). Das bedeutet nicht etwa, dass Hamilton sich ungeschickt anstellte, sondern betont vielmehr die Kraft und Schönheit der hieraus entwickelten Techniken der Linearen Algebra.

Der entscheidende Durchbruch gelang Hamilton 1843, als er auf $\mathbb{R}^4$ eine überaus interessante Multiplikation entdeckte. Aus dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen haben wir in B3A den Körper $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ der komplexen Zahlen konstruiert. Wir konstruieren nun den Schiefkörper $\mathbb{H}\cong\mathbb{R}^4$ der hamiltonschen Quaternionen:

Satz B4G. *Die Matrixalgebra $(\mathbb{C}^{2\times2},+,\cdot)$ über $\mathbb{R}$ enthält die Unteralgebra*

$$\mathbb{H}=\left\{\begin{pmatrix}a+\mathrm{i}b & -c-\mathrm{i}d\\ c-\mathrm{i}d & a-\mathrm{i}b\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2}\;\middle|\;a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}.$$

Dies ist eine vierdimensionale assoziative Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$.

BEWEIS. Zunächst ist $\mathbb{H}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2\times2}$ über $\mathbb{R}$. Als Basis wählen wir

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&0\end{pmatrix}.$$

Die Menge $\mathbb{H}$ ist abgeschlossen unter Matrixmultiplikation, denn es gilt

$\cdot$	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	$-J$
J	J	$-K$	$-E$	I
K	K	J	$-I$	$-E$

.

Somit ist $\mathbb{H}$ eine Unteralgebra von $\mathbb{C}^{2\times2}$ über $\mathbb{R}$. Für die Determinante gilt

$$\det\begin{pmatrix}a+\mathrm{i}b & -c-\mathrm{i}d\\ c-\mathrm{i}d & a-\mathrm{i}b\end{pmatrix}=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Für jede Matrix A in $\mathbb{H}$ liegt die adjungierte Matrix $A^\dagger=\overline{A}^{\mathsf{T}}$ ebenfalls in $\mathbb{H}$:

$$A=\begin{pmatrix}a+\mathrm{i}b & -c-\mathrm{i}d\\ c-\mathrm{i}d & a-\mathrm{i}b\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad A^\dagger=\begin{pmatrix}a-\mathrm{i}b & c+\mathrm{i}d\\ -c+\mathrm{i}d & a+\mathrm{i}b\end{pmatrix},\quad AA^\dagger=\det(A)E$$

Daher ist jede Matrix $A\in\mathbb{H}$ mit $A\neq0$ invertierbar gemäß $A^{-1}=\det(A)^{-1}A^\dagger$, also

$$\begin{pmatrix}a+\mathrm{i}b & -c-\mathrm{i}d\\ c-\mathrm{i}d & a-\mathrm{i}b\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix}a-\mathrm{i}b & c+\mathrm{i}d\\ -c+\mathrm{i}d & a+\mathrm{i}b\end{pmatrix}.$$

Somit ist $\mathbb{H}$ eine assoziative Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$, □

Bemerkung. Ohne Verwendung von Matrizen können wir die Algebra $(\mathbb{H},\cdot)$ definieren als die vierdimensionale $\mathbb{R}$–Algebra mit Basis e,i,j,k und der eindeutigen Multiplikation mit $i^2=j^2=k^2=ijk=1$. Der rechnerische Nachweis der Assoziativität ist dann allerdings mühsamer. Die Existenz von Inversen ergibt sich wie oben durch die explizite Formel

$$(ae+bi+cj+dk)^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(ae-bi-cj-dk).$$

Bemerkung. Wie zuvor $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, so können wir $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ als Unteralgebren von $\mathbb{H}$ betrachten. Die Algebra $\mathbb{H}$ ist nicht kommutativ, denn $ij=k$ und $ji=-k$ sind verschieden. Das *Zentrum* $Z(\mathbb{H})$ besteht aus den Quaternionen $u=ae+bi+cj+dk$ mit $uv=vu$ für alle $v\in\mathbb{H}$. Rechnet man dies speziell für $v=i,j,k$ nach, so findet man $Z(\mathbb{H})=\mathbb{R}e$.

§B4g. Die Algebra $\mathbb{O}$ der cayleyschen Oktaven. Das folgende *Verdopplungsverfahren* von Cayley–Dickson erweitert nach einem einheitlichem Muster $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{H}$ zu $\mathbb{O}$.

Sei $(A,+,\cdot,\bar{\ })$ eine $\mathbb{R}$–Algebra mit Einselement e und einer *Konjugation*, also einer $\mathbb{R}$–linearen Abbildung $\bar{\ }:A\to A$ mit $\overline{x\cdot y}=\overline{y}\cdot\overline{x}$ sowie $\overline{e}=e$ und $\overline{\overline{x}}=x$ für alle $x,y\in A$.

Das erste Beispiel ist der Körper $(\mathbb{R},+,\cdot,\bar{\ })$ mit trivialer Konjugation $\overline{x}=x$.

Auf der Menge $B=A\times A$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$\begin{aligned}(x_1,x_2)+(y_1,y_2)&:=(x_1+y_1,x_2+y_2),\\(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)&:=(x_1y_1-\overline{y_2}x_2,x_2\overline{y_1}+y_2x_1).\end{aligned}$$

Damit ist $(B,+,\cdot)$ eine $\mathbb{R}$–Algebra mit Einselement $e_B=(e,0)$. Hierin ist A eine Unteralgebra dank der Einbettung $A\hookrightarrow B:x\mapsto(x,0)$. Die Konjugation $\bar{\ }:B\to B$ mit $\overline{(x_1,x_2)}:=(\overline{x_1},-x_2)$ ist $\mathbb{R}$–linear und erfüllt $\overline{x\cdot y}=\overline{y}\cdot\overline{x}$ sowie $\overline{e_B}=e_B$ und $\overline{\overline{x}}=x$. Die Konstruktion kann also iteriert werden. Man erhält so die vier klassischen Algebren:

(1) $(\mathbb{R},+,\cdot,\bar{\ })$ mit $\overline{x}=x$,
(2) $(\mathbb{C},+,\cdot,\bar{\ })$ auf $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$,
(3) $(\mathbb{H},+,\cdot,\bar{\ })$ auf $\mathbb{H}=\mathbb{R}^4$,
(4) $(\mathbb{O},+,\cdot,\bar{\ })$ auf $\mathbb{O}=\mathbb{R}^8$.

Satz B4H. *Die Algebra $\mathbb{O}$ der cayleyschen Oktaven ist eine unitäre Divisionsalgebra.*

Durch $\mathbb{R}^8\xrightarrow{\sim}\mathbb{O}:(x_1,\dots,x_8)\mapsto(x_1e+x_2i+x_3j+x_4k,x_5e+x_6i+x_7j+x_8k)$ definieren wir die Multiplikation auf $\mathbb{R}^8$ und erhalten folgende Multiplikationstafel:

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$	e_6	$-e_5$	$-e_8$	e_7
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	$-e_7$	$-e_8$	$-e_1$	e_2	e_3	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_8$	e_7	$-e_2$	$-e_1$	$-e_4$	e_3
e_7	e_7	e_8	e_5	$-e_6$	$-e_3$	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_8	e_8	$-e_7$	e_6	e_5	$-e_4$	$-e_3$	e_2	$-e_1$

Die Konjugation ist gegeben durch $\overline{(x_1,x_2,\dots,x_8)}=(x_1,-x_2,\dots,-x_8)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Die Multiplikation ist nicht kommutativ, denn $e_2e_3 = e_4$ aber $e_3e_2 = -e_4$, und nicht assoziativ, zum Beispiel gilt $(e_2e_6)e_7 = (-e_5)e_7 = -e_3$ aber $e_2(e_6e_7) = e_2(-e_4) = e_3$.

Wir rechnen direkt nach, dass $\mathbb{O}$ eine Divisionsalgebra ist. Für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\overline{(x_1,x_2)}\cdot\big[(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)\big] = (\overline{x_1},-x_2)\cdot(x_1\,y_1-\overline{y_2}\,x_2, x_2\,\overline{y_1}+y_2\,x_1).\\
&= (\overline{x_1}\,x_1\,y_1-\overline{x_1}\,\overline{y_2}\,x_2+y_1\,\overline{x_2}\,x_2+\overline{x_1}\,\overline{y_2}\,x_2, -x_2\,\overline{y_1}\,\overline{x_1}+x_2\,\overline{x_2}\,y_2+x_2\,\overline{y_1}\,\overline{x_1}+y_2\,x_1\,\overline{x_1})\\
&= (x_1\,\overline{x_1}+x_2\,\overline{x_2})(y_1,y_2)
\end{aligned}$$

Der zentrale Faktor $x_1\,\overline{x_1}+x_2\,\overline{x_2} \in \mathbb{R}$ verschwindet nicht für $u = (x_1,x_2) \neq 0$. Somit wird die Linksmultiplikation mit u invertiert durch die Linksmultiplikation mit $(u\overline{u})^{-1}\,\overline{u}$. Für die Rechtsmultiplikation verläuft die Rechnung genauso dank $\overline{u\cdot v} = \overline{v}\cdot\overline{u}$.

Bemerkung. Von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ geht die Anordnung verloren, von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{H}$ die Kommutativität, von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{O}$ die Assoziativität. Alle vier sind Divisionsalgebren. Die Konstruktion kann beliebig fortgesetzt werden, aber jede der nach $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$ folgenden Algebren hat Nullteiler: Die obige Rechnung in $\mathbb{O}$ verwendet die Assoziativität von $\mathbb{H}$ und gilt bei Verdopplung nicht mehr. Stattdessen findet man Nullteiler, und diese bleiben bei Verdopplung.

Bemerkung. Die Quaternionen wurden 1843 von William Rowan HAMILTON entdeckt, nachdem er etwa zehn Jahre lang versucht hatte, die Multiplikation der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auf höherdimensionale Gebilde zu übertragen. Diese Entdeckung löste eine stürmische Entwicklung aus. Die Oktaven wurden 1843 von John GRAVES und hiervon unabhängig 1845 von Arthur CAYLEY entdeckt. Die Möglichkeit, neue „hyperkomplexe" Zahlensysteme zu schaffen, hat der Algebra entscheidende Impulse gegeben, die Grundlagen des Zahlbegriffs zu hinterfragen und allgemeine algebraische Strukturen zu erforschen.

§B4h. Klassifikation der reellen Divisionsalgebren. Die Konstruktion von Algebren erlaubt uns große Freiheiten, die meisten Algebren haben jedoch keine besonders schönen Eigenschaften. Man könnte hoffen, dass auch zur Konstruktion von Divisionsalgebren noch viele Möglichkeiten bestehen. Erstaunlicherweise ist die Situation hier sehr rigide:

Satz B4I. *Sei $(A,\cdot)$ über $\mathbb{R}$ eine endlich-dimensionale Divisionsalgebra.*

(1) Ist A assoziativ und kommutativ, so ist A isomorph zu $\mathbb{R},\mathbb{C}$. (Gauß 1799)
(2) Ist A assoziativ, so ist A isomorph zu $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$. (Frobenius 1877)
(3) Ist A unitär, so ist A isomorph zu $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$. (Kervaire–Milnor–Bott 1958) □

Aussage (1) ist der Fundamentalsatz der Algebra: Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen. Aussage (2) ist eine nicht-kommutative Erweiterung. Aussage (3) ist wesentlich schwieriger zu beweisen und beruht auf tiefliegenden Ergebnissen der algebraischen Topologie: Die Existenz der Divisionsalgebren $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ hat geometrische Konsequenzen, insbesondere sind die Sphären $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ und $\mathbb{S}^7$ parallelisierbar (§J5). Umgekehrt bewiesen Michel KERVAIRE und von John MILNOR 1958 mit dem Periodizitätssatz von Raoul BOTT, dass dies die einzigen parallelisierbaren Sphären sind und somit auch keine weiteren Divisionsalgebren existieren. Für eine schöne Darstellung verweise ich auf das Buch *Zahlen* von Heinz-Dieter Ebbinghaus *et al*.

§B5. Polynomringe

Im Folgenden sei $(K,+,0,\cdot,1)$ ein kommutativer Ring mit Eins, abgekürzt K. Ein *Polynom* über dem Ring K in der Variablen X ist ein „formaler Ausdruck“

$$P = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + \cdots + p_n X^n$$

mit Koeffizienten $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n \in K$. Dabei gelten „die üblichen Rechenregeln“, insbesondere der Koeffizientenvergleich: Zwei solche Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Die Polynome über K in X bilden den Ring $K[X]$.

Auch Polynome in zwei Variablen sind nützlich, etwa $Q = X^2 + 3XY + 5Y^2$; diese bilden den Ring $K[X,Y]$. Wir betrachten auch Polynomringe wie $K[X,Y,Z]$ in drei oder mehr Variablen, eventuell auch $K[X_0, X_1, X_2, \ldots]$ in unendlich vielen Variablen.

Die Motivation ist klar und einleuchtend, doch was bedeuten „formale Ausdrücke“ und „die üblichen Rechenregeln“? Dies wollen wir nun präzise in eine Definition fassen.

Definition B5A. Sei $(R,+,0,\cdot,1)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Hierin sei $K \subset R$ ein Teilring mit $1 \in K$. Gegeben sei zudem eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Elementen $X_i \in R$. Zur Vereinfachung trage die Indexmenge I eine Totalordnung $<$, etwa $I = \{1,\ldots,n\}$.

Für jedem Multiindex $\nu \in \mathbb{N}^{(I)}$ ist der Träger $\operatorname{supp}\nu = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell\} \subset I$ endlich. Wir definieren das zugehörige *Monom* durch $X^\nu := \prod_{i\in I} X_i^{\nu_i} = X_{i_1}^{\nu_{i_1}} X_{i_2}^{\nu_{i_2}} \cdots X_{i_\ell}^{\nu_{i_\ell}}$.

Ist die Familie der Monome $(X^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}}$ eine Basis von R über K, so nennen wir R einen *Polynomring* über K in den Variablen $(X_i)_{i\in I}$, geschrieben $R = K[X_i : i \in I]$.

Bemerkung B5B. Das bedeutet, $R \supset K$ ist eine Ringerweiterung, und jedes Element $P \in R$ schreibt sich eindeutig als K–Linearkombination von Monomen in $(X_i)_{i\in I}$, also

$$P = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}} p_\nu X^\nu \quad \text{mit Koeffizienten} \quad p_\nu \in K,$$

wobei nur endlich viele Koeffizienten ungleich Null sind, also $p \in K^{(\mathbb{N}^{(I)})}$. Basis bedeutet zweierlei: Erstens, die Familie der Monome $(X^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}}$ erzeugt R über K, wir schreiben dies kurz $R = K[X_i : i \in I]$, andernfalls hätten wir nur $R \supsetneq K[X_i : i \in I]$. Zweitens, die Monome sind K–linear unabhängig. Dies begründet den *Koeffizientenvergleich*:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}} p_\nu X^\nu = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}} q_\nu X^\nu \quad\Longleftrightarrow\quad p_\nu = q_\nu \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N}^{(I)}.$$

Zudem legt die Definition B5A fest, wie *Summe* und *Produkt* von Polynomen berechnet werden. Wie in jedem kommutativen Ring gilt auch in R:

$$\Big[\sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}} p_\nu X^\nu\Big] + \Big[\sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}} q_\nu X^\nu\Big] = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}} \big[p_\nu + q_\nu\big] X^\nu,$$

$$\Big[\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} p_\alpha X^\alpha\Big] \cdot \Big[\sum_{\beta\in\mathbb{N}^{(I)}} p_\beta X^\beta\Big] = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}} \Big[\sum_{\alpha+\beta=\nu} p_\alpha q_\beta\Big] X^\nu.$$

Dies sind genau „die üblichen Rechenregeln“ für Polynome, nun explizit ausformuliert. Sinn und Zweck der Definition B5A ist, diese Rechenregeln knapp und präzise festzuhalten. Wir brauchen solide Grundbegriffe, um anschließend darauf aufbauen zu können.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B5a. Universelle Eigenschaft. Im Polynomring $K[X_i : i \in I]$ bilden die Monome $(X^\nu)_\nu$ eine Basis. Wir sagen dazu, die Variablen X_i sind *algebraisch unabhängig* über K.

Wir können daher in jede Variable X_i einen beliebigen Wert x_i einsetzen. Genauer: Jede Abbildung $\sigma : \{ X_i \mid i \in I \} \to E : X_i \mapsto x_i$ ist eine *Belegung* der Variablen X_i durch den Wert x_i. Dies definiert den *Einsetzungshomomorphismus* $\Phi : K[X_i : i \in I] \to E$.

$$\begin{array}{ccccc} K & \hookrightarrow & K[X_i : i \in I] & \hookleftarrow & \{ X_i \mid i \in I \} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\exists!\Phi}\downarrow & & {\scriptstyle\sigma}\downarrow \\ E & = & E & = & E \end{array}$$

Satz B5c. *Sei $\varphi : K \to E$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe mit Eins und eine Abbildung $\sigma : \{ X_i \mid i \in I \} \to E : X_i \mapsto x_i$. Dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $\Phi : K[X_i : i \in I] \to E$ mit $\Phi|_K = \varphi$ und $\Phi(X_i) = x_i$. Dieser ist explizit gegeben durch*

$$\Phi\Big(\sum\nolimits_\nu p_\nu X^\nu\Big) = \sum\nolimits_\nu \varphi(p_\nu) x^\nu.$$

Beweis. Jeder Ringhomomorphismus $\Phi : K[X_i : i \in I] \to E$ mit $\Phi|_K = \varphi$ und $\Phi(X_i) = x_i$ erfüllt $\Phi(\sum_\nu p_\nu X^\nu) = \sum_\nu \varphi(p_\nu) x^\nu$. Dies beweist die Eindeutigkeit. Umgekehrt schreibt sich jedes Element $P \in K[X_i : i \in I]$ eindeutig als K–Linearkombination $P = \sum_\nu p_\nu X^\nu$. Daher können wir $\Phi : K[X_i : i \in I] \to E$ definieren durch $\Phi(\sum_\nu p_\nu X^\nu) = \sum_\nu \varphi(p_\nu) x^\nu$. Gemäß B5b ist mit φ auch Φ ein Homomorphismus von Ringen mit Eins. □

Notation. Für ein Polynom $P \in K[X_i : i \in I]$ schreiben wir auch ausführlicher $P(X)$ zur Betonung der Variablen $X = (X_i)_{i \in I}$. Die Bedeutung ist strikt dieselbe, nämlich

$$P(X) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{(I)}} p_\nu X^\nu,$$

wobei wie immer nur endlich viele Koeffizienten ungleich Null sind. Sei nun $E \supset K$ ein kommutativer Ring mit Eins und $\varphi : K \hookrightarrow E$ die Inklusion, im einfachsten Falle $E = K$ und $\varphi = \mathrm{id}_K$. Zu jeder Familie $x = (x_i)_{i \in I}$ von Elementen $x_i \in E$ erhalten wir

$$P(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{(I)}} p_\nu x^\nu.$$

Diese Summe ist endlich, definiert also ein Element im Ring E. Dies ist der oben erklärte *Einsetzungshomomorphismus* $\Phi : K[X_i : i \in I] \to E : P(X) \mapsto P(x)$. Sein Bild ist der über K von $(x_i)_{i \in I}$ erzeugte Teilring $\mathrm{im}(\Phi) = K[x_i : i \in I]$. Sein Kern $\ker(\Phi)$ besteht aus allen Polynomen $P(X) \in K[X_i : i \in I]$ für die $P(x) = 0$ gilt: Dies sind alle *algebraischen Relationen*, die zwischen den Elementen $(x_i)_{i \in I}$ gelten. Ist der Kern trivial, $\ker(\Phi) = \{0\}$, so ist $\Phi : K[X_i : i \in I] \xrightarrow{\sim} K[x_i : i \in I]$ ein Isomorphismus.

Im endlichen Falle $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ schreiben wir den Polynomring $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. Für ein Polynom $P \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ schreiben wir auch ausführlicher zur Betonung

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} p_\nu X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \cdots X_n^{\nu_n}.$$

Zu jeder Familie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ erhalten wir durch Einsetzen

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} p_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}.$$

§B5b. Existenz und Eindeutigkeit. Mit Definition B5A legen wir fest, was genau ein Polynomring über K in den Variablen $(X_i)_{i\in I}$ sein soll. Es stellt sich die Frage, ob ein solcher Ring tatsächlich existiert und inwiefern er eindeutig ist.

Beispiel B5D. Vorgelegt seien Polynomringe E über K in den Variablen $(X_i)_{i\in I}$ und E' über K in den Variablen $(X'_i)_{i\in I}$. Dann existiert ein eindeutiger Ringisomorphismus $(\Phi,\Phi') : E \cong E'$ mit $\Phi|_K = \Phi'|_K = \mathrm{id}_K$ sowie $\Phi(X_i) = X'_i$ und $\Phi'(X'_i) = X_i$ für $i \in I$.

BEWEIS. Ringhomomorphismen $\Phi : E \to E'$ und $\Phi' : E' \to E$ mit den geforderten Eigenschaften existierten (dank Satz B5C) und sind hierdurch eindeutig festgelegt. Für diese gilt $\Phi' \circ \Phi = \mathrm{id}_E$ dank der Eindeutigkeitsaussage von Satz B5C, denn beide Seiten sind Ringhomomorphismen und fixieren K und $\{ X_i \mid i \in I \}$. Ebenso gilt $\Phi \circ \Phi' = \mathrm{id}_E$. □

Meist beginnen wir mit dem Koeffizientenring K und wollen hierauf aufbauend den Polynomring $R = K[X_i : i \in I]$ konstruieren. Diese Konstruktion gelingt wie folgt:

Satz B5E. *Sei $(K,+,0,\cdot,1)$ ein kommutativer Ring mit Eins und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie; wir fordern lediglich $X_i \notin K$ für alle $i \in I$ sowie $X_i \neq X_j$ für alle $i \neq j$.*

Dann existiert ein Polynomring $R = K[X_i : i \in I]$ über K in den Variablen $(X_i)_{i\in I}$. Kanonisches Modell ist der Monoidring KM über dem Monoid $M = \{ X^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}^{(I)} \}$.

Dieser Ring ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Ringisomorphismus.

BEWEIS. Wir wünschen uns einen Polynomring $R = K[X_i : i \in I]$ über dem vorgegebenen Ring K in den Variablen $(X_i)_{i\in I}$. Die Konstruktion aus B5D garantiert die Eindeutigkeit.

Konstruktion: Zur Vereinfachung wählen wir eine Totalordnung $<$ auf der Indexmenge I. Für jedem Multiindex $\nu \in \mathbb{N}^{(I)}$ ist der Träger $\operatorname{supp}\nu = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell\}$ endlich.

Wir definieren das Monom $X^\nu = X_{i_1}^{\nu_{i_1}} X_{i_2}^{\nu_{i_2}} \cdots X_{i_\ell}^{\nu_{i_\ell}}$ als formales Symbol, genauer als endliches Wort über dem Alphabet $\{ X_i \mid i \in I \}$, in der gewählten Sortierung.

Wir erhalten so die Menge $M = \{ X^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}^{(I)} \}$. Die Abbildung $\mathbb{N}^{(I)} \to M : \nu \mapsto X^\nu$ ist bijektiv, dank unserer Voraussetzung $X_i \neq X_j$ für alle $i \neq j$.

Die Multiplikation $\cdot : M \times M \to M$ definieren wir durch $X^\mu \cdot X^\nu = X^{\mu+\nu}$. Wir erhalten so den Monoidisomorphismus $(\mathbb{N}^{(I)},+,0) \xrightarrow{\sim} (M,\cdot,X^0) : \nu \mapsto X^\nu$.

Sei $R = KM$ der freie Modul über K mit Basis M. Jedes Element schreibt sich eindeutig als K–Linearkombination von Monomen in $(X_i)_{i\in I}$, also $P = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^{(I)}} p_\nu X^\nu$ mit Koeffizienten $p_\nu \in K$, wobei nur endlich viele Koeffizienten ungleich Null sind.

Die Addition erfolgt also wie oben in B5B erklärt. Da der Modul $R = KM$ frei ist über K mit Basis M, können wir auch die Multiplikation wie in B5B definieren. Man rechnet nun geduldig nach, dass damit $(R,+,0,\cdot,X^0)$ tatsächlich ein kommutativer Ring ist.

Wir identifizieren jedes Element $a \in K$ im Grundring mit dem Polynom aX^0 im Ring R. Somit wird $K \subset R$ zu einem Teilring, und es gilt $R = K[X_i : i \in I]$. □

Bemerkung. Satz B5E ist eine beruhigende Garantie: Definition B5A ist erfüllbar und legt den ersehnten Polynomring $K[X_i : i \in I]$ eindeutig fest. Erst die Eindeutigkeit rechtfertigt, von *dem* Polynomring über K in den Variablen $(X_i)_{i\in I}$ zu sprechen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B5c. Polynome versus Polynomfunktionen. Weiterhin sei $E \supset K$ ein kommutativer Ring mit Eins und $\varphi : K \hookrightarrow E$ die Inklusion, zum Beispiel $E = K$ und $\varphi = \mathrm{id}_K$.

Korollar B5F. *Die Auswertung von Polynomen definiert die Abbildung*

$$K[X_i : i \in I] \times E^I \to E : (P, x) \mapsto P(x).$$

Für festes x erhalten wir den Ringhomomorphismus $\Phi : K[X_i : i \in I] \to E : P \mapsto P(x)$.
Für festes P erhalten wir die Polynomfunktion $f_P : E^I \to E : x \mapsto P(x)$. Dabei gilt

$$f_{P+Q} = f_P + f_Q \quad \textit{und} \quad f_{P \cdot Q} = f_P \cdot f_Q.$$

Dies definiert einen Ringhomomorphismus $K[X_i : i \in I] \to \mathrm{Abb}(E^I, E) : P \mapsto f_P$. □

Zur Erinnerung: Für jede Menge M ist die Menge $\mathrm{Abb}(M, E) = \{ f : M \to E \}$ aller Abbildungen von M nach E ein Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation. Speziell für $M = E^I$ erhalten wir hier den Ring $\mathrm{Abb}(E^I, E)$.

Beispiel. Speziell für $E = K$ und $I = \{1\}$ erhalten wir $K[X] \to \mathrm{Abb}(K, K)$. Für jedes $a \in K$ ist $f_a = a$ die konstante Abbildung mit Wert a, und $f_X = \mathrm{id}_K$ ist die Identität. Zum Polynom $P = aX^2 + bX + c$ gehört die Abbildung $f_p : K \to K : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Beispiel. Für $K = \mathbb{R}$ und $I = \{1, \dots, n\}$ erhalten wir $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dieser Ringhomomorphismus ist injektiv: Dank Analysis gilt $p_\nu = \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f_P(0)$.

Der Fall der reellen Zahlen $K = \mathbb{R}$ lässt die Angewohnheit entstehen, jedes Polynom $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ mit seiner Polynomfunktion $f_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu identifizieren. Das ist allerdings nur zulässig, solange die Zuordnung $P \mapsto f_P$ injektiv ist. Für unendliche Körper werden dies später beweisen (Satz B5Q). Für endliche Körper gilt dies jedoch nicht:

Beispiel. Wir betrachten einen endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen. Im Polynomring $\mathbb{F}_q[X]$ betrachten wir das Polynom $P = X^q - X$. Es gilt $P \neq 0$, aber dennoch $f_P = f_0$ nach dem Satz von Lagrange. Alternativ kann man dies für kleine Primzahlen $q = 2, 3, 5, \dots$ durch Einsetzen direkt nachrechnen: Für jedes Element $x \in \mathbb{F}_q$ gilt $P(x) = 0$.

§B5d. Polynome in einer Variablen. Wir betrachten nun den Fall $I = \{1\}$, also nur einer Variablen $X = X_1$. Jedes Polynom $P \in K[X]$ schreibt sich eindeutig als Summe

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} p_k X^k \quad \text{mit Koeffizienten} \quad p_k \in K$$

wobei nur endlich viele Koeffizienten ungleich Null sind, also $p \in K^{(\mathbb{N})}$. Somit schreibt sich jedes Polynom $P \in K[X]$ eindeutig entweder als Nullpolynom $P = 0$ oder

$$P = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n \quad \text{wobei} \quad n \in \mathbb{N},\ p_0, p_1, \dots, p_n \in K,\ p_n \neq 0.$$

In diesem Fall definieren seinen *Grad* $\deg P := n$ und *Leitkoeffizient* $\mathrm{lc}\, P := p_n$. Für das Nullpolynom 0 setzen wir $\deg 0 := -\infty$ und $\mathrm{lc}\, 0 := 0$. In dieser Schreibweise gilt

$$\deg P = \sup\{ k \in \mathbb{N} \mid p_k \neq 0 \}$$

mit der üblichen Konvention $\sup \emptyset = -\infty$. Für den Nullring $K = \{0\}$ besteht $K[X]$ nur aus dem Nullpolynom. Erfüllt K hingegen $1 \neq 0$, so gilt dies auch für $K[X] \supset K$.

§B5e. Eigenschaften des Grades. Es sei weiterhin K ein kommutativer Ring.

Proposition B5G. *Der Grad* $\deg : K[X] \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ *erfreut sich folgender Eigenschaften:*

(a) Für alle $P, Q \in K[X]$ *gilt* $\deg(P+Q) \leq \sup\{\deg P, \deg Q\}$.
Gleichheit gilt genau dann, wenn $\deg P \neq \deg Q$ *oder* $\operatorname{lc} P + \operatorname{lc} Q \neq 0$.
(b) Für alle $P, Q \in K[X]$ *gilt* $\deg(PQ) \leq \deg P + \deg Q$.
Gleichheit gilt genau dann, wenn $P = 0$ *oder* $Q = 0$ *oder* $\operatorname{lc} P \cdot \operatorname{lc} Q \neq 0$.
In diesem Fall gilt für die Leitkoeffizienten $\operatorname{lc}(PQ) = \operatorname{lc} P \cdot \operatorname{lc} Q$.

BEWEIS. Dies folgt aus den Formeln für Summe und Produkt in Bemerkung B5B. □

Beispiel. Wider Erwarten gilt nicht immer $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$. In $\mathbb{Z}_6[X]$ zum Beispiel sind $P = \bar{1} + \bar{2}X$ und $Q = \bar{1} + \bar{3}X$ vom Grad 1 aber ihr Produkt

$$PQ = (\bar{1} + \bar{2}X) \cdot (\bar{1} + \bar{3}X) = \bar{1} + \bar{5}X + \bar{6}X^2 = \bar{1} + \bar{5}X$$

ist nur vom Grad 1 und nicht 2. Dies liegt offenbar an der Anwesenheit von Nullteilern:

Korollar B5H. *Für jeden kommutativen Ring* K *sind äquivalent*

(1) Der Ring K *ist nullteilerfrei.*
(2) Es gilt $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ *für alle* $P, Q \in K[X]$.
(3) Der Polynomring $K[X]$ *ist nullteilerfrei.*

BEWEIS. „(1) ⇒ (2)“ folgt aus obigen Eigenschaften des Grades (B5G): Für $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ gilt $\deg P \geq 0$ und $\deg Q \geq 0$, also $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q \geq 0$. Ebenso folgt „(2) ⇒ (3)“: Dank $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q \geq 0$ gilt $PQ \neq 0$. Auch “(3) ⇒ (1)” ist klar, denn jeder Teilring eines Integritätsrings ist selbst ein Integritätsring. □

Beispiel. Wider Erwarten können auch Polynome vom Grad ≥ 1 invertierbar sein. In $\mathbb{Z}_4[X]$ zum Beispiel ist $P = \bar{1} + \bar{2}X$ invertierbar, denn

$$P \cdot P = (\bar{1} + \bar{2}X) \cdot (\bar{1} + \bar{2}X) = \bar{1} + \bar{4}X + \bar{4}X^2 = \bar{1}.$$

Über einem Integritätsring kann dies nicht passieren:

Korollar B5I. *Für jeden Integritätsring* K *gilt* $K[X]^\times = K^\times$.

BEWEIS. Offenbar gilt stets $K^\times \subset K[X]^\times$. Es bleibt $K[X]^\times \subset K^\times$ zu zeigen: Gilt $PQ = 1$ mit $P, Q \in K[X]$, so folgt $0 = \deg 1 = \deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ dank B5H. In $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ ist dies nur für $\deg P = \deg Q = 0$ möglich. Das bedeutet $P, Q \in K$, also $P, Q \in K^\times$. □

§B5f. Division mit Rest. Es sei weiterhin K ein kommutativer Ring. Die folgende Definition präzisiert, was wir unter der *Division mit Rest* von Polynomen verstehen, auch *euklidische Division* genannt. Hierzu zunächst der grundlegende Satz:

Satz B5J. *Sei* $P \in K[X]$ *ein Polynom mit invertierbarem Leitkoeffizienten* $\operatorname{lc} P \in K^\times$. *Dann existiert zu jedem Polynom* $S \in K[X]$ *genau ein Paar* $Q, R \in K[X]$, *für das gilt*

$$S = PQ + R \quad \textit{und} \quad \deg R < \deg P.$$

In diesem Fall nennt man S quo $P := Q$ *den* Quotienten *und* S rem $P := R$ *den* Rest *der euklidischen Division von* S *durch* P *(auf Englisch* quotient *und* remainder*).*

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

BEWEIS. *Eindeutigkeit:* Gilt $S = PQ + R = PQ' + R'$ und $\deg R, \deg R' < \deg P$, dann folgt $P(Q - Q') = R' - R$. Dank unserer Voraussetzung $\operatorname{lc} P \in R^\times$ erhalten wir

$$\deg P + \deg(Q - Q') = \deg[P(Q - Q')] = \deg(R - R') < \deg P.$$

Dies ist nur für $\deg(Q - Q') < 0$ möglich, also $Q - Q' = 0$. Daraus folgt $Q = Q'$ und $R = R'$. Wenn es also eine Lösung (Q, R) gibt, dann nur diese einzige.

Existenz: Im Falle $\deg S < \deg P$ genügen $Q = 0$ und $R = S$. Für $\deg S \geq \deg P$ führen wir Induktion über $\deg S$. Wir nehmen an, die Aussage gelte für alle $\tilde{S} \in K[X]$ mit $\deg \tilde{S} < \deg S$. Wir setzen $M = \operatorname{lc}(P)^{-1} \operatorname{lc}(S) \cdot X^{\deg S - \deg P} \in K[X]$ und $\tilde{S} = S - PM$. Aus B5G folgt $\deg(PM) = \deg S$ und $\operatorname{lc}(PM) = \operatorname{lc} S$, also $\deg \tilde{S} < \deg S$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\tilde{Q}, R \in R[X]$ mit $\tilde{S} = P\tilde{Q} + R$ und $\deg R < \deg P$. Daher gilt $S = \tilde{S} + PM = PQ + R$ für $Q = \tilde{Q} + M$. □

Die euklidische Division von Polynomen lässt sich sehr einfach und effizient ausführen. Wir wollen zur Ergänzung den Algorithmus B-1 explizit ausformulieren, hier in iterativer Form. Er formalisiert das aus der Schule bekannte Divisionsverfahren.

Algorithmus B-1 Division mit Rest von zwei Polynomen

Eingabe: zwei Polynome $S, P \in K[X]$ wobei $\operatorname{lc} P \in K^\times$.
Ausgabe: zwei Polynome $Q, R \in K[X]$ sodass $S = PQ + R$ und $\deg R < \deg P$.

```
Q ← 0;  R ← S                                  // Invariante: S = PQ + R
while deg R ≥ deg P do
  M ← lc(P)^{-1} lc(R) · X^{deg R − deg P}
  Q ← Q + M;  R ← R − PM                       // Invariante: S = PQ + R
return (Q, R)                                  // S = PQ + R und deg R < deg P
```

Proposition B5K. *Algorithmus B-1 ist korrekt.*

BEWEIS. *Der Algorithmus terminiert:* Das Monom M ist so gewählt, dass R und PM denselben Grad und denselben Leitkoeffizienten haben. Also gilt $\deg(R - PM) < \deg R$. Der Algorithmus endet demnach nach höchstens $1 + \deg S - \deg P$ Iterationen.

Das Ergebnis erfüllt die geforderten Bedingungen: Die Initialisierung $Q \leftarrow 0$, $R \leftarrow S$ garantiert, dass $S = PQ + R$. Jede Iteration $Q \leftarrow Q + M$, $R \leftarrow R - PM$ erhält diese Gleichung. Zum Schluss gilt also $S = PQ + R$ mit $\deg R < \deg P$, wie gewünscht. □

Bemerkung. Dieser Algorithmus und sein Korrektheitsbeweis beweisen erneut die Existenz von $Q, R \in K[X]$ mit $S = PQ + R$ und $\deg R < \deg P$. Wir können also den obigen Induktionsbeweis durch die iterative Konstruktion ersetzen. Beide sind logisch äquivalent; die erste Form ist in der Mathematik geläufiger, die zweite Form in der Informatik.

Bemerkung. Für P mit $\deg P = n \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{lc} P \in K^\times$ erhalten wir also eine Bijektion

$$K[X] \times K[X]_{<n} \xrightarrow{\sim} K[X] : (Q, R) \mapsto S = PQ + R.$$

Die Voraussetzung $\operatorname{lc} P \in K^\times$ ist hierbei wesentlich. Gegenbeispiel: In $K = \mathbb{Z}$ ist 2 nicht invertierbar, und $\mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[X]_{<0} \to \mathbb{Z}[X] : (Q, 0) \mapsto 2Q$ ist injektiv aber nicht bijektiv.

§B5g. Anwendung auf Quotientenringe. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$K[X]_{<n} = \left\{ P \in K[X] \,\middle|\, \deg P < n \right\}$$

die Menge der Polynome mit Grad $< n$. Jedes Polynom $P \in K[X]_{<n}$ schreibt sich demnach eindeutig als $P = a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$. Ebenso definieren wir:

$$K[X]_{\leq n} = \left\{ P \in K[X] \,\middle|\, \deg P \leq n \right\}$$

Offenbar gilt $K[X]_{<0} = \{0\}$ und $K[X]_{\leq 0} = K$. Für $n \geq 1$ ist $K[X]_{\leq n}$ eine Untergruppe von $(K[X], +)$, aber kein Unterring von $(K[X], +, \cdot)$, wegen $X^n \cdot X^n = X^{2n} \notin K[X]_{\leq n}$.

Korollar B5L. *Sei $P \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $\deg P = n \in \mathbb{N}$ mit invertierbarem Leitkoeffizient, $\operatorname{lc} P \in K^\times$. Dann ist die Abbildung*

$$K[X]_{<n} \to K[X]/(P) \quad \textit{mit} \quad A \mapsto \mathfrak{cl}(A)$$

eine Bijektion, und sogar ein Gruppenisomorphismus bezüglich der Addition. Dieser wird zu einem Ringisomorphismus wenn wir auf $K[X]_{<n}$ die Multiplikation

$$A \underset{P}{\cdot} B := (A \cdot B) \operatorname{rem} P$$

definieren. Anders gesagt, das Rechnen mit Restklassen $\mathfrak{cl}(A) \in K[X]/(P)$ entspricht dem Rechnen mit Elementen $A \in K[X]$, wobei man stets nur den Rest der Division mit P behält.

BEWEIS. In jeder Äquivalenzklasse $\mathfrak{cl}(S) \in K[X]/(P)$ existiert genau ein Repräsentant $R \in \mathfrak{cl}(S)$ mit $\deg R < \deg P$, nämlich $R = S \operatorname{rem} P$ (der Rest der Division durch P). □

Übung B5M. Sei $\mathbb{F}_4 := \mathbb{Z}_2[X]/(X^2 + X + 1)$.

(1) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathbb{F}_4$ und zählen sie diese auf.
(2) Erstellen Sie die Additions- und Multiplikationstafeln von $\mathbb{F}_4$.
(3) Ist der Quotientenring $\mathbb{F}_4$ ein Körper?

Sei $P \in \mathbb{Z}_m[X]$ ein Polynom mit $\deg P = d$ und $\operatorname{lc} P = 1$.

(4) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathbb{Z}_m[X]/(P)$.
(5) Wenn $\mathbb{Z}_m[X]/(P)$ ein Körper ist, dann ist m eine Primzahl und das Polynom P ist irreduzibel, das heißt $P = QR$ ist nur mit entweder $Q \in \mathbb{Z}_m^\times$ oder $R \in \mathbb{Z}_m^\times$ möglich.

Warnung. Für die besonders einfache Form des Quotienten $K[X]/(P)$ ist die Invertierbarkeit des Leitkoeffizienten, $\operatorname{lc} P \in K^\times$, wesentlich. Andernfalls kann der Quotient sehr viel unübersichtlicher ausfallen. Hier eines der einfachsten Beispiele:

Beispiel B5N. Im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ betrachten wir $P = kX^n$ mit $k, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Jede Restklasse im Quotientenring $\mathbb{Z}[X]/(kX^n)$ hat genau einen Repräsentanten der Form

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} \quad + \quad a_n X^n + a_{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ sowie $a_n, a_{n+1}, \cdots \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Die Addition in den ersten n Koeffizienten ist die in $\mathbb{Z}$, die Addition in allen weiteren Koeffizienten entspricht der in $\mathbb{Z}_k$. Ähnliches gilt für die Multiplikation solcher Restklassen, die wir hier nicht ausschreiben.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§B5h. Nullstellen eines Polynoms. Sei K ein kommutativer Ring, $a \in K$ ein Element und $P \in K[X]$ ein Polynom über K. Gilt $P(a) = 0$, so nennen wir a eine *Nullstelle* des Polynoms P, oder eine *Wurzel* der Gleichung $P(X) = 0$.

Proposition B5O. *Genau dann ist $a \in K$ eine Nullstelle von $P \in K[X]$, wenn die Faktorisierung $P = (X-a)Q$ für ein $Q \in K[X]$ gilt. In diesem Fall ist Q eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Dank B5J gibt es genau ein Paar $Q, R \in K[X]$ so dass $P = (X-a)Q + R$ und $\deg R < \deg(X-a) = 1$, also $R \in K$. Demnach verschwindet $P(a) = R$ genau dann, wenn $R = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit $P = (X-a)Q$. □

Korollar B5P. *Für jedes Polynom $P \in K[X]^*$ und $a \in K$ gibt es genau eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ und genau ein Polynom $Q \in K[X]$ so dass $P = (X-a)^m Q$ mit $Q(a) \neq 0$ gilt.*

Im Falle $m \geq 1$ nennen wir a eine Nullstelle der Vielfachheit *m. Wir nennen a eine* einfache Nullstelle*, wenn $m = 1$ gilt, und eine* mehrfache Nullstelle*, wenn $m \geq 2$ gilt.*

Per Induktion folgt: Jedes Polynom $P \in K[X]^*$ schreibt sich als Produkt

$$P = (X-a_1)^{m_1} \cdots (X-a_k)^{m_k} Q \tag{B.1}$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen $a_1, \ldots, a_k \in K$ und Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_k \geq 1$ sodass das verbleibende Polynom $Q \in K[X]^*$ keine Nullstellen in K hat.

BEWEIS. Wir führen Induktion über $\deg P$. Für $\deg P = 0$ hat P keine Nullstellen und $P = Q$ genügt. Für $\deg P \geq 1$ unterscheiden wir zwei Fälle. Wenn P keine Nullstellen hat, dass genügt $P = Q$; wenn P mindestens eine Nullstelle hat, dann gilt $P = (X-a_1)^{m_1} P^*$ mit $m_1 \geq 1$ und $P^* \in K[X]$ erfüllt $P^*(a_1) \neq 0$ und $0 \leq \deg P^* < \deg P$. Nach Induktionsannahme wissen wir, dass $P^* = (X-a_2)^{m_2} \cdots (X-a_k)^{m_k} Q$ wobei $a_1, a_2, \ldots, a_k \in K$ paarweise verschiedenen Nullstellen sind mit $m_1, m_2, \ldots, m_k \geq 1$, und $Q \in K[X]$ hat keine Nullstellen in K. Daraus folgt $P = (X-a_1)^{m_1} \cdots (X-a_k)^{m_k} Q$. □

§B5i. Anzahl der Nullstellen. Wir klären nun den Zusammenhang zwischen dem Grad eines Polynoms $P \in K[X]$ und der möglichen Anzahl seiner Nullstellen in K.

Ist eine Zerlegung wie in (B.1) gegeben, so hat P *mindestens* die Nullstellen $a_1, \ldots, a_k$, und deren Anzahl ist $m_1 + \cdots + m_k \leq n$. Im Allgemeinen ist die Zerlegung (B.1) jedoch *nicht* eindeutig und bedeutet auch nicht, das P nur die angegebenen Nullstellen hat:

Beispiel. Über $\mathbb{Z}_8$ erlaubt das Polynom $P = X^2 - \bar{1}$ vier verschiedene Nullstellen, nämlich $\pm\bar{1}$ und $\pm\bar{3}$. Tatsächlich finden wir $P = (X-\bar{1})(X+\bar{1}) = (X-\bar{3})(X+\bar{3})$.

Beispiel. Seien $2 < p < q$ Prinzahlen. Die Gleichung $x^2 = 1$ hat in $\mathbb{Z}_p$ nur zwei Lösungen, ± 1, ebenso in $\mathbb{Z}_q$, im Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ ($\cong \mathbb{Z}_{pq}$) hingegen vier, nämlich $(\pm 1, \pm 1)$.

Das Problem liegt hier offenbar in der Anwesenheit von Nullteilern.

Beispiel. Im Matrizenring $\mathbb{C}^{2\times 2}$ hat das Polynom $X^2 + 1$ unendlich viele Nullstellen: Für jedes Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erfüllt die Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{smallmatrix}\right)$ die Gleichung $M^2 = -1$. Dies gilt ebenso im Divisionsring der Quaternionen (B4G).

Das Problem liegt hier offenbar in der Nicht-Kommutativität.

Der folgende Satz besagt, dass diese beiden Hindernisse die einzigen sind:

Satz B5Q. *Sei K ein Integritätsring. Für jedes Polynom $P \in K[X]^*$ ist die Zerlegung* (B.1) *eindeutig bis auf Umordnung der Faktoren. Insbesondere kann ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad n höchstens n Nullstellen haben (mit Vielfachheiten gezählt).*

BEWEIS. Wir vergleichen zwei solche Zerlegungen

$$P = (X-a_1)^{m_1}\cdots(X-a_k)^{m_k}Q = (X-b_1)^{n_1}\cdots(X-b_\ell)^{n_\ell}R.$$

Wir zeigen $k=\ell$ sowie nach Umordnung $a_1=b_1,\dots,a_k=b_k$ und $m_1=n_1,\dots,m_k=n_k$. Wir führen Induktion über k. Für $k=0$ hat $P=Q$ keine Nullstellen in K, daher gilt auch $\ell=0$ und $P=R$. Wenn $k\geq 1$, dann folgt aus $P(a_k)=0$ und der Nullteilerfreiheit von K, dass einer der Faktoren $(a_k-b_1),\dots,(a_k-b_\ell)$ gleich 0 sein muss. Durch Umordnung erreichen wir $a_k=b_\ell$. Dank B5P folgt $m_k=n_\ell$ und $(X-a_1)^{m_1}\cdots(X-a_{k-1})^{m_{k-1}}Q = (X-b_1)^{n_1}\cdots(X-b_{\ell-1})^{n_{\ell-1}}R$. Nach Induktionsannahme folgt dann $k-1=\ell-1$ und $a_1=b_1,\dots,a_{k-1}=b_{k-1}$ und $m_1=n_1,\dots,m_{k-1}=n_{k-1}$.

Ist $a\in K$ eine Nullstelle, also $P(a)=0$, dann muss $a\in\{a_1,\dots,a_k\}$ gelten. Die Gesamtzahl der Nullstellen, mit Vielfachheiten gezählt, ist demnach $m_1+\cdots+m_k\leq n$. □

§B5j. Interpolation. In manchen Anwendungen sucht man ein Polynom $P\in\mathbb{R}[X]$, dessen Polynomfunktion $f_P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ exakt durch vorgegebene Punkte $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$ läuft, in der Numerik zum Beispiel die Werte einer Messreihe. Man sagt, f_P *interpoliert* zwischen den gegebenen Punkten. Die naheliegende Frage, wie dies effizient gelingt und wo welche Abweichungen zu befürchten sind, führt zu ersten Techniken und schönen Ergebnissen der Numerik. Wir betrachten hier als ersten Schritt nur die algebraische Grundlage:

Satz B5R. *Sei K ein Körper und $x_0,x_1,\dots,x_n\in K$ paarweise verschieden.*

(1) Zu beliebigen Werten $y_0,y_1,\dots,y_n\in K$ existiert genau ein Polynom $P\in K[X]$ vom Grad $\leq n$, das $P(x_0)=y_0, P(x_1)=y_1,\dots,P(x_n)=y_n$ erfüllt. Anders gesagt:

Die Auswertung $K[X]_{\leq n}\to K^{n+1}: P\mapsto(P(x_0),P(x_1),\dots,P(x_n))$ ist bijektiv.

(2) Der Ringhomomorphismus $K[X]\to K^{n+1}: P\mapsto(P(x_0),P(x_1),\dots,P(x_n))$ ist surjektiv und hat als Kern das von $P_0=(X-x_0)(X-x_1)\cdots(X-x_n)$ erzeugte Ideal (P_0).

BEWEIS. *Eindeutigkeit:* Sind P_1 und P_2 zwei solche Polynome, dann ist auch die Differenz P_1-P_2 vom Grad $\leq n$, hat aber mindestens die $n+1$ Nullstellen $x_0,x_1,\dots,x_n$. Das ist nach Satz B5Q nur für das Nullpolynom möglich. Also gilt $P_1=P_2$.

Existenz: Nach Voraussetzung gilt $x_k-x_j\neq 0$ für alle $k\neq j$. Da wir über einem Körper arbeiten, sind diese Elemente invertierbar. Das *Lagrange–Polynom*

$$L_k=\prod_{j\neq k}\frac{X-x_j}{x_k-x_j}\quad\in K[X]$$

hat Grad n. Es erfüllt $L_k(x_k)=1$ und $L_k(x_j)=0$ für alle $j\neq k$. Daher ist

$$P=\sum_{k=0}^{n}y_kL_k\quad\in K[X]$$

vom Grad $\leq n$ und erfüllt $P(x_k)=y_k$ für alle $k=0,1,\dots,n$.

(2) Für jedes Polynom P im Kern gilt $P=P_0Q$ mit $Q\in K[X]$ gemäß Satz B5Q. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Bemerkung. Sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K in der Variablen X. Für jedes Polynom $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ist die zugehörige Polynomfunktion $f_P : K \to K$ definiert durch $x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Dies stiftet einen Ringhomomorphismus $\Phi : K[X] \to K^K$.

(1) Wenn K unendlich viele Elemente hat, dann ist Φ injektiv, aber nicht surjektiv.
(2) Wenn K nur endlich viele Elemente hat, dann ist Φ surjektiv, aber nicht injektiv.

Genauer: (1) Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring mit Eins, kommutativ, ohne Nullteiler, und mit unendlich vielen Elementen. Dann ist der Φ injektiv (B5Q), jedoch nicht surjektiv: Die Funktion $f : K \to K$ mit $f(0) = 1$ und $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ ist nicht polynomial (B5Q).

(2) Für jeden endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen ist *jede* Abbildung $f : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ polynomial: Dank B5R gibt es genau ein Polynom $P \in \mathbb{F}_q[X]$ mit $\deg(P) < q$ und $f_P = f$.

Das Polynom $P_0 = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (X - a)$ hat Grad q und induziert die Nullfunktion $f_P = 0$. Ebenso $P_1 = X^q - X$: Es gilt $P \neq 0$, aber dennoch $f_P = f_0$ nach dem Satz von Lagrange. Nach Satz B5Q gilt $P_1 = P_0 Q$, und aus Gradgründen folgt $\prod_{a \in \mathbb{F}_q} (X - a) = X^q - X$.

Wir erhalten so den Ringisomorphismus $\mathbb{F}_q[X]/(X^q - X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_q) : P \mapsto f_P$.

§B5k. Charakterisierung des Polynomrings über einem Körper.

Übung B5S. Ist $R = K[X]$ der Polynomring über einem Körper K, dann definiert der Grad $\nu = \deg$ eine surjektive Abbildung $\nu : R \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(A) Für alle $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren $c, d \in R$, so dass $a = bc + d$ mit $\nu(d) < \nu(b)$.
(B) Für alle $a, b \in R$ gilt $\nu(a + b) \leq \sup\{\nu(a), \nu(b)\}$; Gleichheit gilt wenn $\nu(a) \neq \nu(b)$.
(C) Für alle $a, b \in R$ gilt $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$.

Sei nun umgekehrt $(R, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring mit Eins und einer Surjektion $\nu : R \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, die obige Eigenschaften (A,B,C) erfüllt. Folgern Sie:

(1) Es gilt (i) $\nu(a) = -\infty \Leftrightarrow a = 0$ und (ii) $\nu(a) = 0 \Leftrightarrow a \in R^\times$.
(2) Die Teilmenge $K = \{ a \in R \mid \nu(a) \leq 0 \}$ ist ein Unterkörper des Rings R.
(3) Für $X \in R$ mit $\nu(X) = 1$ ist $R = K[X]$ der Polynomring in X über K und $\nu = \deg$.

✻ **B5S.** Für $R = K[X]$ und $\nu = \deg$ kennen wir (A) aus Satz B5J und (B,C) aus Proposition B5G. Wir zeigen nun umgekehrt, dass diese Eigenschaften für (R, ν) einen Polynomring beschreiben, also $(R, \nu) = (K[X], \deg)$:

(1i) Für $b \in R$ mit $b \neq 0$ gilt $\nu(b) \geq 0$ dank (A), denn es gibt $c, d \in R$ mit $0 = bc + d$ und $\nu(d) < \nu(b)$. Da ν surjektiv ist, bleibt nur $\nu(0) = -\infty$. (1ii) Aus $1 = 1 \cdot 1$ folgt $\nu(1) = \nu(1) + \nu(1)$ dank (C); in $\mathbb{N}$ wird diese Gleichung nur von $\nu(1) = 0$ gelöst. Sei $a \in R$ invertierbar, das heißt, es gibt $b \in R$ mit $ab = 1$, also $\nu(a) + \nu(b) = 0$ dank (C); in $\mathbb{N}$ wird dies nur von $\nu(a) = \nu(b) = 0$ gelöst. Umgekehrt, zu jedem $a \in R$ mit $\nu(a) = 0$ existieren $b, c \in R$ mit $1 = ab + c$ und $\nu(c) < \nu(a) = 0$ dank (A), also $c = 0$ und $ab = 1$.

(2) Die Teilmenge K ist ein Unterring, denn wir haben $0, 1 \in K$ dank (1), und aus $a, b \in K$ folgt $a + b \in K$ dank (B) und $ab \in K$ dank (C). Nach (1ii) ist jedes Element $a \in K^*$ invertierbar, demnach ist K ein Körper.

(3) Da ν surjektiv ist, existiert $X \in R$ mit $\nu(X) = 1$. Dank (C) gilt $\nu(X^n) = n$. Jedes Element $P_n \in R$ mit $\nu(P_n) \leq n$ schreibt sich $P_n = a_n X^n + P_{n-1}$ mit $a_n, P_{n-1} \in R$ und $\deg(P_{n-1}) \leq n - 1$ dank (A). Zudem gilt $a_n \in K$, denn für $\nu(a_n) \geq 1$ wäre $\nu(a_n X^n + P_{n-1}) > n$ dank (B,C). Dabei sind a_n, P_{n-1} eindeutig: Aus $P_n = a_n X^n + P_{n-1} = a'_n X^n + P'_{n-1}$ folgt $0 = (a_n - a'_n) X^n + (P_{n-1} - P'_{n-1})$, doch für $a_n - a'_n \neq 0$ hätte die rechte Seite $\nu(\dots) = n$ dank (B,C), die linke jedoch $\nu(0) = -\infty$. Also gilt $a_n = a'_n$ und $P_{n-1} = P'_{n-1}$. Per Induktion folgt: Jedes Element $P \in R$ mit $\nu(P) \leq n$ schreibt sich eindeutig $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ mit $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in K$. Somit ist R ein Polynomring über K in der Variablen X.

Beispiel: In $R = K[X]$ sei $Y = aX + b$ mit $a \in K^\times$, $b \in K$. Dann ist R ein Polynomring über K in der Variablen Y. Umgekehrt, aus $Y \in K[X]$ und $K[Y] = K[X]$ folgt $Y = aX + b$ mit $a \in K^\times$, $b \in K$.

Alles messen, was messbar ist –
und messbar machen, was noch nicht messbar ist.
Galileo GALILEI (1564–1642)

KAPITEL C

Metrische Räume

§C0. Einführung und Überblick

☞ **§C0a. Motivation.** Der Begriff der *Konvergenz* ist grundlegend für die Analysis. Die Mathematiker des 19. Jahrhunderts vollbrachten die Meisterleistung, ihn rigoros herauszuarbeiten und hierauf eine leistungsfähige Theorie zu errichten, die bis heute trägt und weiter ausgebaut wird. Von ihren Erfolgen legt die Differential- und Integralrechnung beredtes Zeugnis ab, die alle Studenten der Mathematik in ihren ersten Vorlesungen kennenlernen, und die überall in den Natur- und Ingenieurwissenschaften erfolgreich angewendet werden. ☜

Die Entwicklung der metrischen und ersten topologischen Grundbegriffe wollen wir in diesem Kapitel nachvollziehen mit Erinnerungen, Präzisierungen und Ergänzungen.

Der Konvergenzbegriff $x_n \to a$ tritt hierbei in unterschiedlichen Situationen auf: Wir betrachten konvergente Folgen von reellen oder komplexen Zahlen oder von Punkten in einem euklidischen Raum, $x_0, x_1, \ldots, a \in \mathbb{R}^m$, etwa beim Newton–Verfahren C4X.

Allgemeiner betrachten wir auch Folgen von Funktionen, etwa beim Satz von Picard–Lindelöf C4R zur Lösung von Differentialgleichungen. Je nach Anwendung nutzen wir punktweise Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz, oder Konvergenz im Mittel, usw.

Für Funktionen $f : X \to Y$ ist der Begriff der *Stetigkeit* von zentraler Bedeutung und eng mit der Konvergenz verknüpft: f ist stetig, wenn sie jede konvergente Folge $x_n \to a$ im Definitionsbereich in eine konvergente Folge $f(x_n) \to f(a)$ im Bildbereich überführt.

☞ **§C0b. Vorgehensweise.** Unser Ziel in den ersten Kapiteln ist es, die für Konvergenz und Stetigkeit notwendigen Begriffe in ausreichender Allgemeinheit bereitzustellen. Hierzu betrachten wir Mengen mit einer geeigneten zusätzlichen Struktur: in diesem Kapitel C zunächst eine *Metrik*, ab Kapitel D allgemeiner eine *Topologie*. Die Elemente einer solchen Menge nennen wir *Punkte* und entlehnen auch alle weiteren Begriffe wie etwa *Umgebung* unserer geometrischen Anschauung. Es kann dabei durchaus sein, dass die Punkte einer solchen Menge selbst Funktionen auf einer anderen Menge sind, oder noch ganz andere mathematische Objekte. Um an die geometrische Intuition anzuknüpfen, empfiehlt es sich, zunächst Punktmengen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ als Beispiele vor Augen zu halten. ☜

Damit wollen wir nun beginnen: Vorhang auf!

§C1. Skalarprodukte und Normen auf Vektorräumen

☞ Wir wollen vom Körper $\mathbb{R}$ zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ übergehen. Dieser spielt sowohl in der Linearen Algebra und Geometrie eine grundlegende Rolle, als auch in der Analysis im Rahmen der Differential- und Integralrechnung. Auch für die Topologie wird er uns als wichtigstes Modell dienen. Bei dieser Gelegenheit werden wir auch einige seiner unendlichdimensionalen Verwandten kennenlernen. Wir formulieren alle Definitionen gleichzeitig für Vektorräume über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$, da beide gleichermaßen wichtig sind, sowie über $\mathbb{H}$. ☜

☞ **§C1a. Skalarprodukt und Norm.** Im Folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{H}$. ☜

✍ **Beispiel C1A.** Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das *euklidische Skalarprodukt* ✍

$$\langle - \mid - \rangle : V \times V \to \mathbb{K}, \quad \langle (u_1, \dots, u_n) \mid (v_1, \dots, v_n) \rangle := \overline{u_1}\, v_1 + \cdots + \overline{u_n}\, v_n.$$

Dieses erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

(S0)	$\langle u \mid u \rangle \geq 0$	(Positivität)
(S1)	$\langle u \mid u \rangle > 0$ für $u \neq 0$	(Definitheit)
(S2)	$\langle u \mid v \rangle = \overline{\langle v \mid u \rangle}$	(Symmetrie)
(S3)	$\langle u \mid v\lambda + w\mu \rangle = \langle u \mid v \rangle\lambda + \langle u \mid w \rangle\mu$	(Linearität)

✍ **Satz C1B.** *Aus (S0–3) folgt für alle $u, v \in V$ die* Cauchy–Schwarz–Ungleichung *(CSU):* ✍

$$|\langle u \mid v \rangle|^2 \leq \langle u \mid u \rangle \langle v \mid v \rangle \qquad \textit{bzw.} \qquad |\langle u \mid v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

für die Norm $\|u\| = |u| := \sqrt{\langle u \mid u \rangle}$. *Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v linear abhängig über $\mathbb{K}$ sind. Die Norm erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:*

(N0)	$\|u\| \geq 0$	*(Positivität)*
(N1)	$\|u\| > 0$ *für* $u \neq 0$	*(Definitheit)*
(N2)	$\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda|$	*(Homogenität)*
(N3)	$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$	*(Dreiecksungleichung)*

BEWEIS. Zeigen Sie dies zur Wiederholung! (Ein jeder prüfe sich selbst.) □

☞ ✻ **C1B.** Die Eigenschaften (S0-3) und (N0-2) folgen sofort aus den Rechenregeln in $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$: Nachrechnen! ☜ Die CSU gilt für $v = 0$. Wir dürfen daher $v \neq 0$ annehmen, und somit $\langle v \mid v \rangle > 0$ dank (S1). Der reelle Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist besonders leicht, dank Mitternachtsformel ist er ein Einzeiler! Dank (S0,2,3) finden wir:

$$\forall t \in \mathbb{R} : 0 \leq \langle u + vt \mid u + vt \rangle = \langle u \mid u \rangle + 2\langle u \mid v \rangle t + \langle v \mid v \rangle t^2 \quad \Rightarrow \quad 4\langle u \mid v \rangle^2 - 4\langle v \mid v \rangle\langle u \mid u \rangle \leq 0$$

Allgemein und ausführlich: Wir setzen $z = u\lambda - v\mu$ mit $\lambda = \langle v \mid v \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mu = \langle v \mid u \rangle \in \mathbb{K}$ und rechnen:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle z \mid z \rangle &= \langle u\lambda - v\mu \mid u\lambda - v\mu \rangle = \overline{\lambda}\langle u \mid u \rangle\lambda - \overline{\lambda}\langle u \mid v \rangle\mu - \overline{\mu}\langle v \mid u \rangle\lambda + \overline{\mu}\langle v \mid v \rangle\mu \\ &= \langle v \mid v \rangle\big[\langle u \mid u \rangle\langle v \mid v \rangle - 2|\langle u \mid v \rangle|^2 + |\langle u \mid v \rangle|^2\big] = \langle v \mid v \rangle\big[\langle u \mid u \rangle\langle v \mid v \rangle - |\langle u \mid v \rangle|^2\big] \end{aligned}$$

Wegen $\langle v \mid v \rangle > 0$ folgt hieraus $\langle u \mid u \rangle\langle v \mid v \rangle - |\langle u \mid v \rangle|^2 \geq 0$, wie behauptet. Bei Gleichheit gilt $\langle z \mid z \rangle = 0$, dank positiver Definitheit also $z = u\lambda - v\mu = 0$, somit $u = (\mu/\lambda)v$. Umgekehrt folgt aus linearer Abhängigkeit $u = v\mu$ direkt die Gleichheit $|\langle u \mid v \rangle|^2 = |\langle v\mu \mid v \rangle|^2 = |\mu|^2\langle v \mid v \rangle^2 = \langle \mu v \mid \mu v \rangle\langle v \mid v \rangle = \langle u \mid u \rangle\langle v \mid v \rangle$. Die Aussagen (N0,1,2) sind klar. Die Dreiecksungleichung (N3) folgt aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 = \langle u + v \mid u + v \rangle &= \langle u \mid u \rangle + \langle u \mid v \rangle + \langle v \mid u \rangle + \langle v \mid v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle u \mid v \rangle) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u \mid v \rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ folgt somit dank Monotonie der Wurzelfunktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto \sqrt{x}$.

§C1b. Vektorräume mit Skalarprodukt. Im obigen Beweis der Cauchy–Schwarz–Ungleichung haben wir nur die Eigenschaften (S0–3) benutzt und hieraus (N0–3) abgeleitet. Wir erheben diese grundlegenden Eigenschaften nun zur allgemeinen Definition:

Definition C1C. Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung $\langle - \mid - \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, die (S1–3) erfüllt.

Das Paar $(V, \langle - \mid - \rangle)$ heißt dann $\mathbb{K}$*–Vektorraum mit Skalarprodukt*, in der Analysis auch *Prä–Hilbert–Raum* und bei Vollständigkeit *Hilbert–Raum* (C4I).

Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $|-| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die (N1–3) erfüllt.

Das Paar $(V, |-|)$ heißt dann *normierter* $\mathbb{K}$*–Vektorraum*, oder kurz *normierter Raum*, oder auch *Prä–Banach–Raum* und bei Vollständigkeit *Banach–Raum* (C4I).

Sprechweise. Eigenschaften (S0,1) besagen, dass das Skalarprodukt *positiv-definit* ist. Ohne (S1) nennen wir $\langle - \mid - \rangle$ *positiv semidefinit*; dann gibt es möglicherweise Vektoren $x \neq 0$ mit $\langle x \mid x \rangle = 0$. Aus (S1–3) folgt (S0), und aus (N1–3) folgt (N0); unsere Liste ist redundant und dient zur Betonung.

Im reellen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Konjugation $\overline{x} = x$ die Identität; wir dürfen und werden Sie daher in obigen Formeln und allen Rechnungen weglassen. Eigenschaften (S2,3) besagen, dass das Skalarprodukt eine *symmetrische Bilinearform* ist, denn die Linearität im zweiten Faktor impliziert dank Symmetrie auch die Linearität im ersten Faktor. Eine positiv-definite symmetrische Bilinearform wird *euklidisches Skalarprodukt* genannt. Das Paar $(V, \langle - \mid - \rangle)$ nennen wir einen *euklidischen Vektorraum*.

Im komplexen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nutzen wir die Konjugation $z = x + \mathrm{i}y \mapsto \overline{z} = x - \mathrm{i}y$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Eigenschaften (S2,3) besagen, dass das Skalarprodukt eine *hermitesche Sesquilinearform* ist: Sie ist linear im zweiten Faktor, aber konjugiert-linear im ersten Faktor. (Sesquilinear bedeutet anderthalbfach linear.) Eine positiv-definite hermitesche Sesquilinearform wird *hermitesches Skalarprodukt* genannt. Das Paar $(V, \langle - \mid - \rangle)$ nennen wir einen *hermiteschen Vektorraum*. Entsprechend für $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.

Beispiel C1D. Weiterhin sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Für jede Menge Ω ist der Funktionenraum

$$\mathbb{K}^\Omega = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \}$$

ein Vektorraum mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation. Die Teilmenge

$$\mathbb{K}^{(\Omega)} := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \;\middle|\; \operatorname{supp}(f) \text{ endlich} \right\}$$

aller Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$ mit endlichem Träger ist ein Untervektorraum in $\mathbb{K}^\Omega$.
Zur Erinnerung: Die Trägermenge von f ist $\operatorname{supp}(f) := \{ x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \}$.

Hierauf ist ein Skalarprodukt $\mathbb{K}^{(\Omega)} \times \mathbb{K}^{(\Omega)} \to \mathbb{K}$ gegeben durch

$$\langle f \mid g \rangle := \sum_{x \in \Omega} \overline{f(x)}\, g(x).$$

Die kanonische Basis $(e_a)_{a \in \Omega}$ ist orthonormal bzgl. $\langle - \mid - \rangle$, das heißt $\langle e_a \mid e_a \rangle = 1$ und $\langle e_a \mid e_b \rangle = 0$ für $a \neq b$. Speziell für $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ erhalten wir den Vektorraum $\mathbb{K}^n$ mit seiner kanonischen Basis und dem oben erklärten euklidischen Skalarprodukt.

Vervollständigt erhalten wir den Hilbert–Raum der quadrat-summierbaren Funktionen,

$$\ell^2(\Omega, \mathbb{K}) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2 < \infty \right\}.$$

Dies ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^\Omega$, er enthält $\mathbb{K}^{(\Omega)}$, und das obige Skalarprodukt setzt sich auf $\ell^2(\Omega, \mathbb{K})$ fort. Als Übung zur Analysis versuche man dies zu beweisen!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **C1D.** (0) Die Menge $\mathbb{K}^\Omega$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit punktweiser Addition $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und Skalarmultiplikation $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$: Nachrechnen! Über $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ müssen wir links und rechts unterscheiden; wir nutzen daher systematisch die Skalarmultiplikation von rechts und definieren $f\lambda$ durch $(f\lambda)(x) = f(x)\lambda$. In $\mathbb{K}^\Omega$ ist die Teilmenge $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ ein Untervektorraum, dank $\operatorname{supp}(f+g) \subset \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$ und $\operatorname{supp}(f\lambda) = \operatorname{supp}(\lambda f) \subset \operatorname{supp}(f)$. Endlicher Träger garantiert, dass die obige Summe endlich ist. In $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ liegt $e_a : \Omega \to \mathbb{K}$ mit $e_a(a) = 1$ und $e_a(x) = 0$ für $x \neq a$. Die Familie $(e_a)_{a\in\Omega}$ ist eine Basis von $\mathbb{K}^\Omega$ und orthonormal bezüglich unseres Skalarprodukts. So weit, so klar, so algebraisch.

(1) Wir zeigen nun, dass die Teilmenge $\ell^2 = \ell^2(\Omega,\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^\Omega$ ein Untervektorraum ist. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f \in \ell^2$ gilt $|f|_2^2 = \sum_x |f(x)|^2 < \infty$, also $|f\lambda|_2^2 = \sum_x |f(x)\lambda|^2 = \sum_x |f(x)|^2|\lambda|^2 = |f|_2^2|\lambda|^2 < \infty$.

Für $f,g \in \mathbb{K}^{(\Omega)}$ gilt $|f+g|_2^2 \leq (|f|_2 + |g|_2)^2$ dank Cauchy–Schwarz C1B. Diese Ungleichung gilt dann auch allgemein für $f,g \in \ell^2$: zunächst für die Summation über jede endliche Teilmenge $E \subset \Omega$, dann auch für die volle Summe durch Übergang zum Supremum rechts und links. Somit ist ℓ^2 in $\mathbb{K}^\Omega$ ein Untervektorraum.

(2) Wir wollen für $f,g \in \ell^2$ das obige Skalarprodukt $\langle f \mid g \rangle = \sum_{x\in\Omega} \overline{f(x)}\, g(x)$ erklären. Dazu müssen wir die absolute Konvergenz dieser Reihe garantieren: Erneut dank Cauchy–Schwarz C1B finden wir $\sum_x |\overline{f(x)}\, g(x)| = \sum_x |f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f|_2 \cdot |g|_2 < \infty$: zunächst für die Summation über jede endliche Teilmenge $E \subset \Omega$, dann auch für die volle Summe durch Übergang zum Supremum rechts und links.

(3) Die Eigenschaften (S0-3) folgen sofort aus den Rechenregeln für Reihen: Nachrechnen!

Beispiel C1E. Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ betrachten wir den Vektorraum $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ aller stetigen Funktionen $f,g : [a,b] \to \mathbb{K}$. Hierauf ist ein Skalarprodukt gegeben durch das Integral

$$\langle f,g \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{x=a}^{b} \overline{f(x)}\, g(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad \tau = b-a.$$

Die Funktionen $e_k : [a,b] \to \mathbb{C} : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x}$ mit $\omega = 2\pi/\tau$ und $k \in \mathbb{Z}$ sind orthonormal: Nachrechnen! Sie bilden die kanonische Basis der *trigonometrischen Polynome*:

$$T = \left\{ f = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ c_{-n},\dots,c_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Im reellen Fall betrachtet man entsprechend $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Beide Basen lassen sich dank der Euler–Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x} = \cos(k\omega x) + \mathrm{i}\sin(k\omega x)$ leicht ineinander umrechnen. Komplex ist einfacher!

Vervollständigt erhalten wir den Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen,

$$\mathscr{L}^2([a,b],\mathbb{K}) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{K} \text{ messbar} \;\middle|\; \int_{x=a}^{b} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Auch dies ist ein Vektorraum, er enthält $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, und das obige Skalarprodukt setzt sich auf $\mathscr{L}^2$ fort, allerdings ist es hier nur noch semidefinit: Aus $\int |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = 0$ folgt $f(x) = 0$ nicht unbedingt für alle x, sondern nur für fast alle $x \in [a,b]$. Das bedeutet, es existiert eine Teilmenge $N \subset [a,b]$ vom Maß 0, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \smallsetminus N$ gilt.

Diese Nullfunktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathscr{N} = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{K} \;\middle|\; f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in [a,b] \right\}.$$

Der eigentlich relevante Vektorraum ist demnach der Quotientenvektorraum

$$L^2([a,b],\mathbb{K}) = \mathscr{L}^2([a,b],\mathbb{K})/\mathscr{N}.$$

Hierauf ist das Skalarprodukt $(f,g) \mapsto \langle f \mid g \rangle$ wohldefiniert und nun auch tatsächlich positiv-definit. Wir erhalten so schließlich den Hilbert–Raum $L^2([a,b],\mathbb{K})$.

✻ **C1E.** Die Eigenschaften (S0-3) folgen sofort aus den Rechenregeln für Integrale: Nachrechnen!

Wir berechnen das Skalarprodukt $\langle 1 \mid e_n \rangle$. Für $n = 0$ ist dies besonders leicht:

$$\langle 1 \mid e_0 \rangle = \frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} 1\,\mathrm{d}x = 1$$

Für jeden Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ nutzen wir den HDI und $\omega\tau = 2\pi$:

$$\langle 1 \mid e_n \rangle = \frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\tau}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}}{\mathrm{i}n\omega}\right]_{x=a}^{b} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega b} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega a}}{2\pi\mathrm{i}n} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega a}}{2\pi\mathrm{i}n}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega(b-a)} - 1\right] = 0$$

Hieraus folgt sofort die behauptete Orthonormalität:

$$\langle e_k \mid e_\ell \rangle = \frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} \overline{e_k(x)}\, e_\ell(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)\omega x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell, \\ 0 & \text{für } k \neq \ell. \end{cases}$$

Die Räume ℓ^2 und L^2 sehen auf den ersten Blick vollkommen verschieden aus, bei genauerem Hinsehen enthüllen sie jedoch ähnliche geometrische Eigenschaften. Ich erzähle diese beiden zentralen Beispiele hier im Detail, um den folgenden Satz in voller Schönheit aussprechen zu können. Es gilt die bemerkenswerte Fourier–Isometrie $\ell^2 \cong L^2$:

☞ **Satz C1F** (Fischer–Riesz 1907)**.** *Die Räume $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ und $L^2([a,b],\mathbb{C})$ sind isometrisch.* ☜
Genauer: Jeder Funktion $f \in L^2$ ordnen wir ihre Fourier–Koeffizienten $\hat{f} \in \ell^2$ zu vermöge

$$\mathscr{F} : L^2 \to \ell^2 : f \mapsto \hat{f} \quad \textit{mit} \quad \hat{f}(k) = \langle e_k \mid f \rangle = \frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert dank der Energiegleichung

$$\frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} \big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|\hat{f}(k)\big|^2.$$

Umgekehrt ordnen wir jeder Koeffizientenfolge $\hat{f} \in \ell^2$ die Funktion $f \in L^2$ zu vermöge

$$\mathscr{F}^{-1} : \ell^2 \to L^2 : \hat{f} \mapsto f \quad \textit{mit} \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x}.$$

Dies ist eine Cauchy–Folge in L^2 und konvergiert daher, denn L^2 ist metrisch vollständig. Die Abbildungen $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^{-1}$ sind zueinander inverse Isomorphismen von $\mathbb{C}$–Vektorräumen und erhalten die Skalarprodukte, das heißt, es gilt die Parseval–Gleichung:

$$\langle f \mid g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f} \mid \hat{g} \rangle_{\ell^2}, \quad \textit{ausgeschrieben} \quad \frac{1}{\tau}\int_{x=a}^{b} \overline{f(x)}\, g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)}\, \hat{g}(k).$$

☞ **Übung C1G.** Zeigen Sie – durch Nachrechnen! – diese Isometrie zwischen trigonometrischen Polynomen $T \subset L^2([a,b],\mathbb{C})$ und Folgen mit endlichem Träger $\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})} \subset \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. ☜

Zusatz: Die Analysis beweist die Energiegleichung für alle absolut integrierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ sowie die Vollständigkeit des Raumes $L^2([a,b],\mathbb{C})$. Folgern Sie hieraus, dass die für $\mathscr{F}^{-1}$ angegebene Reihe konvergiert, dass $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^{-1}$ zueinander inverse Isomorphismen von $\mathbb{C}$–Vektorräumen sind und die Parseval–Gleichung erfüllen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§C1c. Orthonormalbasen.** Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - \mid - \rangle$. Ein ☜ Vektor $v \in V$ heißt *normiert*, wenn $|v| = 1$. Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen *orthogonal*, geschrieben $u \perp v$, wenn $\langle u \mid v \rangle = 0$. Eine Familie $u_1, u_2, u_3, \ldots \in V$ heißt *orthogonal*, wenn $\langle u_i \mid u_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$, und *orthonormal*, wenn zudem $|u_i| = 1$ für alle i gilt.

☞ **Übung C1H.** (1) Satz des Pythagoras: Sind die Vektoren $u_1, \ldots, u_n \in V$ orthogonal, so ☜ gilt $|u_1 + \cdots + u_n|^2 = |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2$. Sind $e_1, \ldots, e_n \in V$ orthonormal, so bestimmt jede Linearkombination $v = \sum v_k e_k$ ihre Koeffizienten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}$ durch $v_k = \langle e_k \mid v \rangle$, und für die Norm gilt $|v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n|^2 = |v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2$.

(2) Gram–Schmidt: Seien $b_1, b_2, b_3, \ldots \in V$ linear unabhängig. Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzen wir rekursiv $b_n^* := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_k \mid b_n \rangle \cdot e_k$ und $e_n := b_n^*/|b_n^*|$. Für den Untervektorraum $U_n = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle_{\mathbb{K}}$ ist dann $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis.

(3) Bestapproximation und Fourier–Koeffizienten: Sei $U < V$ ein Untervektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} U = n < \infty$. Gegeben sei eine Orthonormalbasis $e_1, e_2, \ldots, e_n$, etwa nach (2).

Zu jedem Vektor $v \in V$ existiert genau eine *Bestapproximation* $v^* \in U$, sodass $|v - v^*| \leq |v - u|$ für alle $u \in U$ gilt. Die explizite Berechnung gelingt durch *Orthogonalprojektion* des Vektors v auf den Unterraum U zu

$$v^* = \sum_{k=1}^{n} v_k e_k \quad \text{mit Fourier–Koeffizienten} \quad v_k = \langle e_k \mid v \rangle.$$

(4) Zudem ist v^* der einzige Vektor in U, für den $v - v^*$ senkrecht steht auf allen $u \in U$. (Skizze!) Dank Pythagoras (1) gilt daher die *Bessel–Ungleichung*:

$$|v|^2 = |v^* + v - v^*|^2 = \underbrace{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2}_{\text{Längenquadrat von } v^*} + \underbrace{|v - v^*|^2}_{\text{Approximationsfehler}} \geq |v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2 = |v^*|^2$$

✻ **C1H.** (1) Dies rechnen wir direkt nach: $|\sum_k u_k|^2 = \langle \sum_k u_k \mid \sum_\ell u_\ell \rangle = \sum_k \sum_\ell \langle u_k \mid u_\ell \rangle = \sum_k |u_k|^2$. Speziell für $u_k = v_k e_k$ gilt dabei $|u_k|^2 = |v_k|^2 |e_k|^2 = |v_k|^2$.

(2) Wir führen Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Aussage klar: Der Vektor $b_1^* = b_1 \neq 0$ ist eine Basis des von ihm aufgespannten eindimensionalen Vektorraumes U_1. Wegen $b_1^* \neq 0$ gilt $|b_1^*| \neq 0$, somit normieren wir zu $e_1 = b_1^*/|b_1^*|$. Damit ist e_1 eine Orthonormalbasis von U_1.

Wir nehmen an, die Aussage gilt für $n-1$, das heißt $e_1, \ldots, e_{n-1}$ ist eine Orthonormalbasis von U_{n-1}. Dann ist $e_1, \ldots, e_{n-1}, b_n$ eine Basis von U_n und $e_1, \ldots, e_{n-1}, b_n^*$ eine Orthogonalbasis von U_n, denn nach Definition $b_n^* = b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_k \mid b_n \rangle e_k$ erzeugt $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}, b_n^*$ ebenso U_n, und zudem gilt $\langle e_\ell \mid b_n^* \rangle = \langle e_\ell \mid b_n \rangle - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_k \mid b_n \rangle \langle e_\ell \mid e_k \rangle = \langle e_\ell \mid b_n \rangle - \langle e_\ell \mid b_n \rangle = 0$. Nach Voraussetzung gilt $b_n \notin U_{n-1}$, also bleibt $b_n^* \neq 0$, und wir können $e_n = b_n^*/|b_n^*|$ normieren. Somit ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von U_n.

Variante: Wir setzen hier lineare Unabhängigkeit voraus. Ist b_n linear abhängig von $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, so erhalten wir $b_n^* = 0$. In diesem Falle löschen wir b_n und erhalten eine kürzere Basis von $U_n = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$.

(3) Für jeden Vektor $u \in U$ gilt $u = \sum_{k=1}^{n} u_k e_k$ mit Koeffizienten $u_k \in \mathbb{K}$, und somit

$$\begin{aligned} |v-u|^2 &= \langle v-u \mid v-u \rangle = \langle v \mid v \rangle - \langle v \mid u \rangle - \langle u \mid v \rangle + \langle u \mid u \rangle \\ &= \langle v \mid v \rangle - \langle v \mid \textstyle\sum_k u_k e_k \rangle - \langle \sum_k u_k e_k \mid v \rangle + \langle \sum_k u_k e_k \mid \sum_\ell u_\ell e_\ell \rangle \\ &= \langle v \mid v \rangle - \textstyle\sum_k u_k \overline{v_k} - \sum_k \overline{u_k} v_k + \sum_k |u_k|^2 = |v|^2 - 2\mathrm{Re}\langle u \mid v^* \rangle + |u|^2 \end{aligned}$$

Speziell für $u = v^*$ gilt $|v - v^*|^2 = |v|^2 - |v^*|^2$. Dieser Abstand ist minimal, denn im Vergleich gilt:

$$\begin{aligned} |v-u|^2 - |v-v^*|^2 &= \textstyle\sum_k |u_k|^2 - \sum_k u_k \overline{v_k} - \sum_k \overline{u_k} v_k + \sum_k |v_k|^2 \\ &= \textstyle\sum_k (\overline{u_k} - \overline{v_k})(u_k - v_k) = \sum_k |u_k - v_k|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt hierbei nur für $u = v^*$, andernfalls $|v-u| > |v-v^*|$. (4) Schließlich gilt die Orthogonalität:

$$\langle v - v^* \mid u \rangle = \langle v - \textstyle\sum_k v_k e_k \mid \sum_\ell u_\ell e_\ell \rangle = \sum_k u_k \overline{v_k} - \sum_k u_k \overline{v_k} = 0$$

☞ **§C1d. Normierte Vektorräume.** Jedes Skalarprodukt induziert eine zugehörige Norm. ☜ Darüber hinaus gibt es auch Normen, die nicht von Skalarprodukten herrühren:

☞ **Beispiel C1I.** Die *euklidische Norm* oder ℓ^2*–Norm* auf $\mathbb{K}^n$ ist gegeben durch ☜

$$|x| = |x|_2 := \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Die *Supremumsnorm* oder ℓ^∞*–Norm* auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir durch

$$|x|_\infty := \sup\bigl\{\, |x_1|, \ldots, |x_n| \,\bigr\}.$$

Die *Taxinorm* oder ℓ^1*–Norm* auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir durch

$$|x|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

Allgemein für $1 \le p < \infty$ haben wir die ℓ^p*–Norm*

$$|x|_p := \bigl(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\bigr)^{1/p}.$$

Für $p = 1$ ist dies die Taxinorm, für $p = 2$ die euklidische. Es gelten die Abschätzungen

$$|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le n|x|_\infty.$$

Für $p \searrow 1$ gilt $|x|_p \nearrow |x|_1$. Für $p \nearrow \infty$ gilt $|x|_p \searrow |x|_\infty$.

✻ **C1I.** Dies sind tatsächlich Normen auf $\mathbb{K}^n$: Eigenschaften (N0–2) sind klar, der entscheidende Punkt ist die Dreiecksungleichung (N3). Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist dies leicht; für $p = 2$ nutzen wir die Cauchy–Schwarz–Ungleichung (C1B). Allgemeinen benötigt man die Hölder–Minkowski–Ungleichung (C1O): Für $1 \le p, q \le \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt $|x \cdot y|_1 \le |x|_p \cdot |y|_q$ und damit die Dreiecksungleichung $|x + y|_p \le |x|_p + |y|_p$.

Es gilt $|x_1|, \ldots, |x_n| \le |x|_1$, also $|x|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \le |x|_1$. In der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$ gilt $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ mit Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, dank Dreiecksungleichung also $|x|_p \le |x_1 e_1|_p + \cdots + |x_n e_n|_p = |x_1| + \cdots + |x_n| = |x|_1$. Es gilt $|x_1|, \ldots, |x_n| \le |x|_\infty$, also $|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \le n|x|_\infty$.

Für $p \nearrow \infty$ gilt $|x|_p \searrow |x|_\infty$. Für $x = 0$ ist dies klar. Für $x \neq 0$ dürfen wir $|x|_\infty = 1$ annehmen, dank (N2). Das heißt, es gibt eine Indexmenge J mit $\emptyset \neq J \subset \{1, \ldots, n\}$, sodass $|x_k| = 1$ für $k \in J$ und $|x_k| \le 1$ für $k \notin J$ gilt. Hieraus folgt $|x|_p^p = |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \searrow |J| \in \{1, \ldots, n\}$. Damit erhalten wir $|x|_p \to 1 = |x|_\infty$.

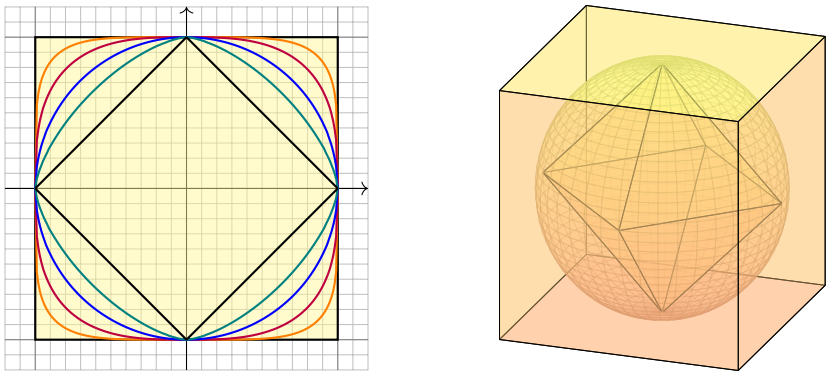


ABBILDUNG C:1. Links ℓ^p–Bälle im $\mathbb{R}^2$ für $p = 1, 3/2, 2, 3, 5, \infty$.
Rechts ℓ^p Bälle im $\mathbb{R}^3$ für $p = 1, 2, \infty$. (Das Runde muss ins Eckige.)

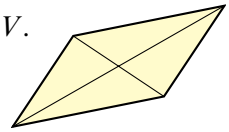
☞ **Bemerkung.** Diese Normen stimmen in Dimension $n = 1$ überein, unterscheiden sich aber für $n \ge 2$: Abbildung C:1 zeigt die Bälle $\bar{B}_p(0,1) = \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \;\bigm|\; |x|_p \le 1 \,\bigr\}$. Für Konvergenz und Stetigkeit sind alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent (Satz F6K, dank lokaler Kompaktheit). ☜

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Die ℓ^2–Norm wird wie gesehen von einem Skalarprodukt induziert, aber dies trifft für keine weitere der ℓ^p–Normen zu ($1 \le p \le \infty$, $p \neq 2$). Allgemein gilt nämlich folgendes:

Lemma C1J. *(1) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit Skalarprodukt $\langle - \mid - \rangle$ und zugehöriger Norm $|u| = \sqrt{\langle u \mid u \rangle}$. Dann gilt die* Parallelogrammgleichung

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2 \qquad \text{für alle } u, v \in V. \tag{C.1}$$



(2) Aus der Norm können wir das Skalarprodukt rekonstruieren. Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ gelingt dies dank der Polarisationsformel

$$\langle u \mid v \rangle = \sum_{\varepsilon \in B} \frac{|u + v\varepsilon|^2 - |u - v\varepsilon|^2}{4\varepsilon} \quad \text{mit } B = \{1\}, \{1, \mathrm{i}\}, \{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}. \tag{C.2}$$

BEWEIS. Stehen die Formeln erst einmal da, so genügt Nachrechnen: Übung! □

✻ **C1J.** (1) Gleichung (C.1) folgt aus der binomischen Formel:

$$\begin{aligned} |u+v|^2 + |u-v|^2 &= \langle u+v \mid u+v \rangle + \langle u-v \mid u-v \rangle \\ &= +\langle u \mid u \rangle + \langle u \mid v \rangle + \langle v \mid u \rangle + \langle v \mid v \rangle \\ &\quad + \langle u \mid u \rangle - \langle u \mid v \rangle - \langle v \mid u \rangle + \langle v \mid v \rangle \;= 2|u|^2 + 2|v|^2 \end{aligned}$$

(2) Wie in (1) finden wir $|u+v|^2 - |u-v|^2 = \ldots = 4\mathrm{Re}\langle u \mid v \rangle$. Im reellen Fall steht rechts $4\langle u \mid v \rangle$, somit gilt (C.2). Im komplexen Fall ergibt dieselbe Rechnung $|u+v\mathrm{i}|^2 - |u-v\mathrm{i}|^2 = 4\mathrm{Re}\langle u \mid v\mathrm{i} \rangle = 4\mathrm{Re}(\langle u \mid v \rangle \mathrm{i})$. Somit gilt (C.2) auch hier für $B = \{1, \mathrm{i}\}$. Entsprechendes gilt im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ für $B = \{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$. Wir nutzen hierbei folgenden Trick: Für jedes Element $q \in \mathbb{K}$ gilt $q = \sum_{\varepsilon \in B} \mathrm{Re}(q\varepsilon)/\varepsilon = \sum_{\varepsilon \in B} \mathrm{Re}(q/\varepsilon)\varepsilon$.

Beispiel. Sei $1 \le p \le \infty$. Im $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, gilt einerseits $2|e_1|_p^2 + 2|e_2|_p^2 = 4$ und andererseits $|e_1 + e_2|_p^2 + |e_1 - e_2|_p^2 = 2 \cdot 2^{2/p}$. Die Parallelogrammgleichung ist nur für $p = 2$ erfüllt. Für alle $p \neq 2$ wird die ℓ^p–Norm demnach nicht von einem Skalarprodukt induziert.

Die Parallelogrammgleichung ist nicht nur notwendig, sondern sogar hinreichend:

Satz C1K (Jordan–von Neumann, 1935)**.** *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Erfüllt eine Norm $|-|$ auf V die Parallelogrammgleichung* (C.1)*, so definiert* (C.2) *ein Skalarprodukt.*

BEWEIS. Gegeben sei die Norm $|-|$. Wir definieren $\langle - \mid - \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ durch (C.1). Zunächst rechnet man (S2) nach. Daraus folgt $\langle u \mid u \rangle = |u|^2$ und somit (S0,1). Die Parallelogrammgleichung (C.1) garantiert Additivität $\langle u \mid v + w \rangle = \langle u \mid v \rangle + \langle u \mid w \rangle$ für alle $u, v, w \in V$. Übung! Hieraus folgt Linearität $\langle u \mid v\lambda \rangle = \langle u \mid v\lambda \rangle$ per Induktion für $\lambda \in \mathbb{N}$, dann für $\lambda \in \mathbb{Z}$, für $\lambda \in \mathbb{Q}$, per Grenzübergang für $\lambda \in \mathbb{R}$, schließlich für $\lambda \in \mathbb{K}$. □

✻ **C1K.** (0) Zunächst gilt $\langle u \mid 0 \rangle = 0$ nach Konstruktion (C.2). (1) Dank Parallelogrammgleichung (C.1) gilt $\langle u \mid v + w \rangle + \langle u \mid v - w \rangle = 2\langle u \mid v \rangle$ für alle $u, v, w \in V$. Wir zeigen dies zunächst für den Realteil:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle u \mid v + w \rangle + \mathrm{Re}\langle u \mid v - w \rangle &= \tfrac{1}{4}\big[|u+v+w|^2 - |u-v-w|^2 + |u+v-w|^2 - |u-v+w|^2\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[|u+v|^2 + |w|^2 - |u-v|^2 - |w|^2\big] = 2\mathrm{Re}\langle u \mid v \rangle \end{aligned}$$

Die Rechnung für den Imaginärteil verläuft genauso, erneut dank $q = \sum_{\varepsilon \in B} \mathrm{Re}(q\varepsilon)/\varepsilon$ für alle $q \in \mathbb{K}$.

(2) Für $v = w$ erhalten wir somit $\langle u \mid 2v \rangle = 2\langle u \mid v \rangle$.

(3) Damit zeigen wir Additivität für alle $u, v, w \in V$:

$$\langle u \mid v \rangle + \langle u \mid w \rangle = \langle u \mid \tfrac{v+w}{2} + \tfrac{v-w}{2} \rangle + \langle u \mid \tfrac{v+w}{2} - \tfrac{v-w}{2} \rangle = 2\langle u \mid \tfrac{v+w}{2} \rangle = \langle u \mid v + w \rangle$$

(4) Hieraus folgt Homogenität $\langle u \mid v\lambda \rangle = \langle u \mid v\lambda \rangle$ per Induktion für $\lambda \in \mathbb{N}$, dann für $\lambda \in \mathbb{Z}$, für $\lambda \in \mathbb{Q}$, per Grenzübergang für $\lambda \in \mathbb{R}$, schließlich für $\lambda \in \mathbb{K}$. Das ist leicht, aber länglich. Führen Sie es aus, zur Übung!

Beispiel C1L. Sei Ω eine Menge. Auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^\Omega = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \}$ (siehe §B1j) definieren wir die *Supremumsnorm*, auch ℓ^∞*–Norm* genannt, durch

$$\| f \|_\infty := |f|_\Omega = \sup\{ |f(x)| \mid x \in \Omega \}.$$

Die beschränkten Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\ell^\infty(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \| f \|_\infty < \infty \}.$$

Entsprechend definieren wir die ℓ^p*–Norm* für $1 \leq p < \infty$ durch

$$\| f \|_p := \left(\sum\nolimits_{x \in \Omega} |f(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Auch hierbei kann $\| f \|_p = \infty$ auftreten. Wir betrachten daher den Untervektorraum

$$\ell^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \| f \|_p < \infty \}$$

der p–summierbaren Funktionen, also solche mit $\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^p < \infty$.

Speziell für $\Omega = \{1, \dots, n\}$ erhalten wir die obigen ℓ^p–Normen auf $\mathbb{K}^n$. Ist Ω unendlich, so erhalten wir für verschiedene $p \in [1, \infty]$ verschiedenen Vektorräume $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$. Sie enthalten alle den Untervektorraum $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ der Funktionen mit endlichem Träger.

Für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir das *Produkt* und die *Paarung*

$$\cdot : \ell^p \times \ell^q \to \ell^1 \quad \text{und} \quad \langle - \mid - \rangle : \ell^p \times \ell^q \to \mathbb{K} : \langle f \mid g \rangle = \sum_{x \in \Omega} \overline{f(x)}\, g(x).$$

Das Produkt $\overline{f} g$ ist hier absolut summierbar dank der *Hölder–Ungleichung* (C1O):

$$\| f \cdot g \|_{\ell^1} \leq \| f \|_{\ell^p} \cdot \| g \|_{\ell^q}$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung, und die Paarung ist das oben diskutierte Skalarprodukt auf ℓ^2. Für alle $1 < p < \infty$ ist dies eine duale Paarung, das heißt, der Dualraum aller stetigen Linearfunktionale auf ℓ^p ist $(\ell^p)' \cong \ell^q$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✍ **Beispiel C1M.** Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum (B3J), etwa eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathscr{A} = \{ A \subset \Omega \text{ messbar} \}$ und Lebesgue–Maß μ. Für jeden Exponenten p mit $1 \leq p < \infty$ definieren wir die *L^p–Halbnorm* einer messbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ durch ✍

$$\|f\|_p := \left(\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Auch hierbei kann $\|f\|_p = \infty$ auftreten. Wir betrachten daher den Untervektorraum

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := \big\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; \|f\|_p < \infty \big\}.$$

der p–integrierbaren Funktionen, also solche mit $\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty$. Jedoch ist $\|-\|_p$ nicht definit, denn aus $\|f\|_p = 0$ folgt $f(x) = 0$ nicht für alle $x \in \Omega$, sondern nur für μ–fast alle. Das bedeutet, es existiert eine messbare Teilmenge $N \subset \Omega$ vom Maß 0, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in \Omega \smallsetminus N$. Diese μ–Nullfunktionen bilden den Untervektorraum $\mathscr{N}$. Der eigentlich relevante Vektorraum ist demnach der Quotientenvektorraum

$$L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) / \mathscr{N}.$$

Hierauf ist $\|-\|_p$ tatsächlich eine Norm, genannt die *L^p–Norm*.

Analog definieren wir das *essentielle Supremum* oder *L^∞–Halbnorm* durch

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)| := \inf \big\{ a \in \mathbb{R} \;\big|\; \mu(\{ x \mid |f(x)| > a \}) = 0 \big\}.$$

Eine Funktion ist *essentiell beschränkt*, wenn $|f|_{\Omega \smallsetminus N} < \infty$ bis auf eine Nullmenge $N \subset \Omega$ gilt, also eine Menge vom Maß $\mu(N) = 0$. Diese Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; \|f\|_\infty < \infty \big\}.$$

Auch hier geht man aus den genannten Gründen zu $L^\infty := \mathscr{L}^\infty / \mathscr{N}$ über.

Für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir das *Produkt* und die *Paarung*

$$\cdot : L^p \times L^q \to L^1 \quad \text{und} \quad \langle - \mid - \rangle : L^p \times L^q \to \mathbb{K} : \langle f \mid g \rangle := \int_{x \in \Omega} \overline{f(x)} \, g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Das Produkt $\overline{f} g$ ist hier absolut integrierbar dank der *Hölder–Ungleichung* (C1O):

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung, und die Paarung ist das oben diskutierte Skalarprodukt auf L^2. Für alle $1 < p < \infty$ ist dies eine duale Paarung, das heißt, der Dualraum aller stetigen Linearfunktionale auf L^p ist $(L^p)' \cong L^q$.

☞ **Bemerkung.** In vielen Anwendungen, wie C1L oder C1M, tritt für die Norm auch der Wert $\|v\| = \infty$ natürlich auf. Auch wenn man ihn schließlich vermeiden will, so ist es meist bequem, ihn zunächst zuzulassen. Manche Autoren nennen dies dann eine *Pseudonorm*. Nimmt die Norm nur reelle Werte an, also nicht ∞, so spricht man zur Betonung von einer *endlichen Norm*. Dank Dreiecksungleichung ist die Menge $V_{<\infty} = \big\{ v \in V \;\big|\; \|v\| < \infty \big\}$ ein Untervektorraum. Hierauf ist die Einschränkung $\|-\| : V_{<\infty} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine endliche Norm. ☜

☞ **Bemerkung.** Eine *Halbnorm* $\|-\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt (N0,2,3), aber eventuell nicht (N1), das heißt, wir erlauben auch $v \neq 0$ mit $\|v\| = 0$. Ihr Kern $V_0 = \big\{ v \in V \;\big|\; \|v\| = 0 \big\}$ ist dann ein Untervektorraum, dank Dreiecksungleichung. Auf dem Quotientenvektorraum V / V_0 induziert die ursprüngliche Halbnorm dann eine Norm $\|-\| : V / V_0 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, das heißt (N1) ist nun erfüllt. Halbnormen treten insbesondere in der Integrationstheorie natürlich auf. ☜

☞ **Bemerkung.** Bezüglich des Zählmaßes gilt $L^p(\Omega,\mathfrak{P}(\Omega),\sharp) = \mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{P}(\Omega),\sharp) = \ell^p(\Omega)$. ☜ Die „Klein–$\ell^p$–Räume“ sind somit ein Spezialfall der „Groß–L^p–Räume“. Diese spielen in der Analysis, insbesondere der Maß- und Integrationstheorie, eine zentrale Rolle. Der Buchstabe L erinnert an Henri LEBESGUE (1875–1941).

Übung C1N. Beweisen Sie alle in diesen Beispielen behaupteten Eigenschaften für die Spezialfälle $p,q \in \{1,2,\infty\}$. Auch im allgemeinen Falle $1 \le p,q \le \infty$ genügt sorgfältiges Nachrechnen, einzig die Hölder–Minkowski–Ungleichung ist nicht trivial, siehe unten.

Für $1 < p < q < \infty$ gilt $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$. Ist die Trägermenge Ω endlich, so gilt hier Gleichheit. Ist die Trägermenge Ω unendlich, so sind alle Inklusionen strikt.

Für $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ gilt $L^1 \supset L^p \supset L^q \supset L^\infty$. Für $\Omega = [0,1]$ sind die Inklusionen strikt.

☞ **Satz C1O.** *Für $s,t \in [0,1]$ mit $s+t=1$ und alle $a,b \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt die* Young–Ungleichung*:* ☜

$$a^s \cdot b^t \le sa + tb$$

Für alle $p,q \in [1,\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ folgt hieraus die Hölder–Ungleichung*:*

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Für alle $p \in [1,\infty]$ folgt hieraus wiederum die Minkowski–Ungleichung*:*

$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

BEWEIS. Wir erinnern an zwei zentrale Funktionen der Analysis (C5J): Die Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ ist ein Gruppenisomorphismus, monoton wachsend und zudem konvex. Die hierzu inverse Logarithmusfunktion $\ln : (\mathbb{R}_{>0},\cdot) \to (\mathbb{R},+)$ ist ebenfalls ein Gruppenisomorphismus, monoton wachsend und zudem konkav. Hieraus erhalten wir:

$$\ln(a^s \cdot b^t) = \ln(a^s) + \ln(b^t) = s\ln(a) + t\ln(b) \le \ln(sa+tb)$$

Anwendung der Exponentialfunktion ergibt die behauptete Ungleichung $a^s \cdot b^t \le sa + tb$.

Für $p = 1$ und $q = \infty$ bzw. $p = \infty$ und $q = 1$ prüft man die Hölder–Ungleichung direkt nach. Sie ist zudem erfüllt, wenn f oder g eine Nullfunktion ist. Wir können also $\|f\|_{L^p} > 0$ und $\|g\|_{L^q} > 0$ annehmen. Die Ungleichung ist homogen in f und g, nach Division durch die Norm können wir also $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$ annehmen. In jedem Punkt $x \in \Omega$ gilt:

$$|f(x)\cdot g(x)| = \big(|f(x)|^p\big)^{1/p} \cdot \big(|g(x)|^q\big)^{1/q} \le \tfrac{1}{p}|f(x)|^p + \tfrac{1}{q}|g(x)|^q$$

Durch Integration wird hieraus, dank Monotonie und Linearität des Integrals:

$$\int_{x\in\Omega} |f(x)\cdot g(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{p}\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{x\in\Omega} |g(x)|^q\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

Für $p = 1$ und $p = \infty$ prüft man die Minkowski–Ungleichung direkt nach. Sei also $1 < p,q < \infty$ und zudem $\|f+g\|_{L^p} > 0$. Wir nutzen die Hölder–Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\big\||f+g|^p\big\|_{L^1} &= \big\||f+g|\cdot|f+g|^{p-1}\big\|_{L^1} \le \big\||f|\cdot|f+g|^{p-1}\big\|_{L^1} + \big\||g|\cdot|f+g|^{p-1}\big\|_{L^1} \\
&\le \big\|f\big\|_{L^p}\big\||f+g|^{p-1}\big\|_{L^q} + \big\|g\big\|_{L^p}\big\||f+g|^{p-1}\big\|_{L^q} \\
&= \big[\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\big]\big\||f+g|^{(p-1)q}\big\|_{L^1}^{1/q}
\end{aligned}$$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Aus $1/p + 1/q = 1$ folgt $(p-1)q = p$, also ist der letzte Faktor gleich $\big\| |f+g|^p \big\|_{L^1}^{1/q}$. Nach Division erhalten wir die ersehnte Minkowski–Ungleichung. □

☞ **§C1e. Matrixnorm.** Matrizen können wir über jedem Körper $\mathbb{K}$ nutzen. Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ können wir zudem eine Norm definieren, etwa die euklidische: ☜

Beispiel C1P. Für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definieren wir die *Frobenius–Norm* durch

$$|A| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(\overline{A}^\intercal A)}.$$

Dies ist tatsächlich eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^{m\times n}$ und submultiplikativ, das heißt $|A\cdot B| \le |A|\cdot|B|$ für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$. Insbesondere ist sie verträglich mit der euklidischen Vektornorm, das heißt es gilt $|A\cdot v| \le |A|\cdot|v|$ für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $v \in \mathbb{K}^n$.

BEWEIS. Dank der Cauchy–Schwarz–Ungleichung gilt $|a\cdot b| \le |a|\cdot|b|$ für alle Zeilenvektoren $a \in \mathbb{K}^{1\times n}$ und Spaltenvektoren $b \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Sind $a_1,\dots,a_m \in \mathbb{K}^{1\times n}$ die Zeilen der Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b_1,\dots,b_r \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ die Spalten der Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$, so gilt nach Definition $A\cdot B = (a_i\cdot b_j)_{ij}$. Hieraus folgt die behauptete Ungleichung:

$$|A\cdot B|^2 = \sum_{ij}|a_i\cdot b_j|^2 \le \sum_{ij}|a_i|^2\cdot|b_j|^2 = \sum_i|a_i|^2\cdot\sum_j|b_j|^2 = |A|^2\cdot|B|^2 \qquad \square$$

☞ **§C1f. Operatornorm.** Seien E, F Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $A : E \to F$ nennt man auch einen *linearen Operator*. Hierfür vereinbaren wir: ☜

Definition C1Q. Seien $(E, |-|_E)$ und $(F, |-|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Für jede $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $A : E \to F$ definieren wir ihre *Operatornorm* durch

$$\|A\| := \sup\big\{\, |Av|_F \;\big|\; v \in E,\ |v|_E \le 1 \,\big\}$$

Im Falle $\|A\| < \infty$ heißt A ein *beschränkter Operator*. Mit $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E,F)$ bezeichnet man die Menge aller beschränkten Operatoren $E \to F$. Hierauf ist $\|-\|$ eine Norm.

Erläuterung. Für jeden Vektor $u \in E \smallsetminus \{0\}$ misst der Quotient $|Au|_F/|u|_E$ die *Längenverzerrung* von A angewendet auf u. Da A linear ist, können wir zu $v = u/|u|_E$ mit Norm $|v|_E = 1$ übergehen, denn es gilt $|Au|_F/|u|_E = |Av|_F$. Die Operatornorm misst also die „maximale Längenverzerrung“. Es ist allerdings im Allgemeinen nötig, statt eines Maximums das Supremum zu betrachten.

Proposition C1R. *Die Menge* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(E,F)$ *aller* $\mathbb{K}$*–linearen Abbildungen* $A : E \to F$ *ist ein* $\mathbb{K}$*–Vektorraum mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation. Hierin ist* $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E,F)$ *ein Untervektorraum und hierauf ist die Operatornorm tatsächlich eine Norm. Zudem gilt:*

- *Für die Identität* $\mathrm{id} : E \to E$ *gilt* $\|\mathrm{id}\| = 1$*, falls* $E \neq \{0\}$*.*
- *Für* $A \in \mathcal{B}(E,F)$ *und* $B \in \mathcal{B}(F,G)$ *gilt* $\|B\circ A\| \le \|B\|\cdot\|A\|$*.*
- *Für jeden Vektor* $v \in E$ *gilt die Ungleichung* $|Av|_F \le \|A\|\cdot|v|_E$*.*
  Hierzu ist die Operatornorm $\|A\|$ *die kleinstmögliche Konstante.*

BEWEIS. Sorgfältiges Nachrechnen. $\square$

Beispiel. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ hat die lineare Abbildung $E \to E$ mit $v \mapsto \lambda v$ die Operatornorm $|\lambda|$. Wir setzen hierzu $E \neq 0$ voraus; die Nullabbildung hat natürlich Norm 0.

Beispiel. Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ hat die Abbildung $A : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (2^{-n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Operatornorm 1. Die Umkehrabbildung $A^{-1} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (2^n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hingegen hat Operatornorm ∞.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung C1S. Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ definiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ mittels $v \mapsto Av$. Umgekehrt lässt sich jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ so eindeutig durch eine Matrix darstellen. Somit erhalten wir einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \cong \mathbb{K}^{n\times m}$.

Bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{K}^n$ berechnet sich die Operatornorm wie folgt:

(1) Ist $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix, so lässt sich die Operatornorm unmittelbar ablesen gemäß $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$.
(2) Jede symmetrische / hermitesche Matrix $A = \overline{A}^\intercal$ ist diagonalisierbar, daher ist also $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$ der größte Absolutbetrag aller Eigenwerte.
(3) Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $\|A\|^2 = \|\overline{A}^\intercal A\|$. So können wir das Quadrat der Operatornorm von A berechnen als den größten Eigenwert von $\overline{A}^\intercal A$.
(4) Insbesondere ist die Operatornorm $\|A\|$ bezüglich der euklidischen Normen stets endlich. Dies gilt dann auch für die hierzu äquivalenten ℓ^p–Normen (C1I).

☞ **§C1g. Normierte Algebren.** Eine (assoziative) $\mathbb{K}$–*Algebra* $(A, \cdot)$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum A zusammen mit einer (assoziativen) $\mathbb{K}$–bilinearen Multiplikation $\cdot : A \times A \to A$. ☜

Eine Algebra mit Eins $(A, \cdot, 1)$ hat zudem ein neutrales Element $1 \in A$, welches $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$ für alle $u \in A$ erfüllt. Eine Algebra kann höchstens ein Einselement haben.

Wie immer nutzen wir die gängige Konvention *Punkt vor Strich*, um Klammern zu sparen, und lassen meist das Produktzeichen weg, um auch noch Punkte zu sparen.

Definition C1T. Eine *normierte* $\mathbb{K}$–*Algebra* $(A, \cdot, |-|)$ ist eine $\mathbb{K}$–Algebra $(A, \cdot)$ zusammen mit einer Norm $|-| : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sodass $|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$ für alle $u, v \in A$ gilt.

Für eine *normierte* $\mathbb{K}$–*Algebra mit Eins* $(A, \cdot, 1, |-|)$ fordern wir zudem $|1| = 1$.

Beispiele.
- Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind normierte $\mathbb{R}$–Algebren mit Eins.
- Die $\mathbb{K}$–Algebra $\mathbb{K}^{n\times n}$ aller $n \times n$–Matrizen über $\mathbb{K}$ wird eine normierte Algebra zusammen mit der Frobenius–Norm $|A| := (\sum_{i,k} |a_{ij}|^2)^{1/2}$. Allerdings gilt hier $|1| = \sqrt{n}$.
- Die $\mathbb{K}$–Algebra $\mathbb{K}^{n\times n}$ aller $n \times n$–Matrizen über $\mathbb{K}$ wird eine normierte Algebra zusammen mit der Operatornorm $\|A\| := \sup\{\, |Av|_2 \mid v \in \mathbb{K}^n,\ |v|_2 \leq 1 \,\}$. Hier gilt $\|1\| = 1$.
- Ist E ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum, so ist die Algebra $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E, E)$ aller beschränkten Operatoren auf E eine normierte Algebra bezüglich der Operatornorm.
- Jeder normierte $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, |-|)$ wird mit der Multiplikation $x \cdot y = 0$ für alle $x, y \in E$ zu einer normierten Algebra (wenn auch einer sehr langweiligen).
- Die Menge $\mathbb{K}[X]$ aller Polynome ist eine Algebra über $\mathbb{K}$ bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation. Eine mögliche Norm ist $|f| = \max\{\, |f(x)| \mid |x| \leq 1 \,\}$.

Beispiel. Sei Ω eine Menge und A eine $\mathbb{K}$–Algebra, etwa $A = \mathbb{K}$. Dann ist der Vektorraum A^Ω aller Funktionen $f : \Omega \to A$ eine $\mathbb{K}$–Algebra bezüglich der punktweisen Addition und Multiplikation. Ist A normiert, so definieren wir die ℓ^p–Normen auf A^Ω durch

$$\|f\|_p := \Big(\sum\nolimits_{x\in\Omega} |f(x)|^p\Big)^{1/p} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_\infty := |f|_\Omega = \sup\{\, |f(x)| \mid x \in \Omega \,\}.$$

Hierbei kann $\|f\|_p = \infty$ auftreten. Wir betrachten daher den Untervektorraum

$$\ell^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \|f\|_p < \infty \,\}.$$

Damit wird $\ell^\infty(\Omega, A)$ eine normierte Algebra bezüglich der Supremumsnorm.

§C2. Metrische Räume und ihre Topologie

§C2a. Metrische Räume. Zur Behandlung von Konvergenz und Stetigkeit müssen wir der vagen Sprechweise „der Punkt x liegt nahe beim Punkt y“ einen mathematisch präzisen Sinn geben. Dies gelingt besonders einfach durch einen Abstandsbegriff wie in einem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$: Der qualitative Begriff der „Nähe“ kann dann durch eine reelle Zahl quantifiziert werden. Wir diskutieren daher zunächst die *quantitative* Beschreibung mittels einer Metrik und anschließend die rein *qualitative* Beschreibung mittels einer Topologie.

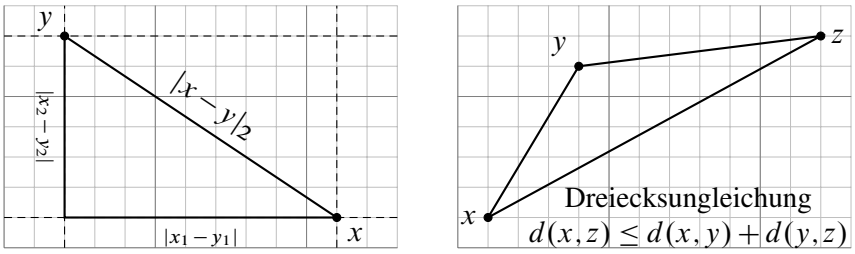


ABBILDUNG C:2. Die euklidische Metrik aus dem Satz des Pythagoras.

Satz C2A. *Auf $X = \mathbb{R}^n$ definieren wir die* euklidische Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *durch*

$$d(x,y) := |x-y|_2 = \sqrt{\langle\, x-y \mid x-y \,\rangle} = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \cdots + |x_n-y_n|^2}.$$

Im Falle $n = 1$ und $n = 2$ erhalten wir den üblichen Abstand auf $\mathbb{R}$ und auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Diese Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$:

(M0)	$d(x,y) \geq 0 = d(x,x)$	*(Positivität)*
(M1)	$d(x,y) > 0$ *für* $x \neq y$	*(Definitheit)*
(M2)	$d(x,y) = d(y,x)$	*(Symmetrie)*
(M3)	$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$	*(Dreiecksungleichung)*

BEWEIS. Klar sind (M0–2), und (M3) folgt aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung (C1B) dank Dreiecksungleichung (N3): $|x-z|_2 = |x-y+y-z|_2 \leq |x-y|_2 + |y-z|_2$. □

Erläuterung. Dies formuliert anschauliche Eigenschaften des Abstands: (M0) Der Abstand von x nach x ist Null, der von x nach y ist Null oder positiv. (M1) Der Abstand zwischen $x \neq y$ ist positiv. Umgekehrt: Ist der Abstand von x nach y gleich Null, so ist dies nur für $x = y$ möglich. Anders gesagt: Aus $d(x,y) = 0$ folgt $x = y$. (M2) Der Abstand von x nach y ist gleich dem Abstand von y nach x. (M3) Die Dreiecksungleichung besagt, dass in einem Dreieck die Summe der Längen von zwei Seiten nicht kleiner sein kann als die Länge der dritten Seite, siehe Abbildung C:2. Anschaulich gesagt: Der Weg von x nach z wird nicht kürzer, wenn wir einen Umweg über y machen.

Wir erheben diese grundlegenden Eigenschaften nun zur allgemeinen Definition:

Definition C2B. Eine *Metrik* auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0,\infty]$, die obige Bedingungen (M0–3) erfüllt. Das Paar (X,d) heißt dann ein *metrischer Raum*.

Für eine *Halbmetrik* d fordern wir nur (M0,2,3), aber nicht (M1): Anders als eine Metrik kann eine Halbmetrik Punkten $x \neq y$ den Abstand $d(x,y) = 0$ beimessen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Endliche Metriken. Üblicherweise erlaubt man für eine Metrik nicht den Wert ∞. Gilt $d(x,y) < \infty$ für alle $x, y \in X$, so nennen wir d zur Betonung eine *endliche Metrik*. Gelegentlich ist es aber bequem, den Begriff der Metrik etwas zu erweitern und auch den Wert $d(x,y) = \infty$ zuzulassen. Hierdurch wird keines der folgenden Argumente komplizierter, aber manche Konstruktionen gelingen leichter. Für die nötigen Rechnungen in $[0,\infty]$ vereinbaren wir $0 \leq a \leq \infty$ sowie $a + \infty = \infty + a = \infty$ für alle $a \in [0,\infty]$; dies entspricht den üblichen Konvention der erweiterten Zahlengeraden.

Halbmetriken. Durch Weglassen der Forderung (M1) schwächen wir den Begriff der Metrik zum Begriff der Halbmetrik ab. Halbmetriken sind meist weniger wirkungsvoll, kommen aber in manchen Anwendungen natürlich vor und sind daher ein sinnvoller Hilfsbegriff. Auch wenn man ihn schließlich vermeiden will, so ist es meist bequem ihn zunächst übergangsweise zuzulassen.

Spitzfindigkeit. Symmetrie (M2) folgt aus (M0) und der umformulierten Dreiecksungleichung (M3') $d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$. Für $x = y$ folgt nämlich $d(x,z) \leq d(x,x) + d(z,x) = d(z,x)$, und durch Vertauschen ebenso $d(z,x) \leq d(x,z)$, also schließlich $d(x,z) = d(z,x)$. Man könnte demnach in obiger Definition (M3) durch (M3') ersetzen und (M2) auf dem Altar der Spitzfindigkeit opfern.

☞ **Beispiel.** (1) Die Menge $\mathbb{R}^n$ wird durch die euklidische Norm (C1B) zu einem metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ mit $d(x,y) = |x-y|_2$, ebenso durch jede der ℓ^p–Normen (C1I). ☜

(2) Jede (Pseudo-)Norm $|-| : V \to [0,\infty]$ auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum V induziert eine Metrik $d : V \times V \to [0,\infty] : (x,y) \mapsto |x-y|$: Aus (N0–3) in C1C folgt (M0–3) in C2B.

Für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt dabei: (M4) Skalierung $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$. (M5) Translationsinvarianz $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

(3) Ist umkegehrt V ein $\mathbb{K}$–Vektrorraum und $d : V \times V \to [0,\infty]$ eine Metrik mit den Eigenschaften (M0–5), so definiert $|u| = d(u,0)$ eine (Pseudo-)Norm auf V.

✻ **C2B.** (2) Wir rechnen nach: (M0) Es gilt $d(x,y) = |x-y| \geq 0$ und $d(x,x) = |x-x| = |0| = 0$. (M1) Für $x \neq y$ gilt $d(x,y) = |x-y| > 0$, da $x - y \neq 0$. (M2) Es gilt $d(y,x) = |y-x| = |-1| \cdot |x-y| = d(x,y)$. (M3) Es gilt $d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$. (M4) und (M5) sind klar.

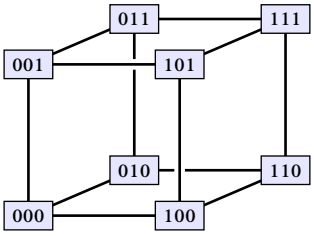
(3) Wir rechnen nach: (N0) Es gilt $|u| = d(u,0) \geq 0$. (N1) Für $u \neq 0$ gilt $|u| = d(u,0) > 0$. (N2) Dank Skalierung (M4) gilt $|\lambda u| = d(\lambda u, 0) = d(\lambda u, \lambda 0) = |\lambda| d(u,0) = |\lambda| \cdot |u|$. (N3) Dank Translationsinvarianz (M5) $|u+v| = d(u+v,0) = d(u,-v) \leq d(u,0) + d(0,-v) = |u| + |v|$.

✍ **Beispiel C2C.** Auf jeder Menge X lässt sich eine besonders einfache Metrik definieren, die nur die Werte 0 und 1 annimmt: Die *diskrete Metrik* auf X ist gegeben durch ✍

$$d \;:\; X \times X \to \{0,1\} \;:\; (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die für jede Metrik geforderten Eigenschaften (M0–3) prüft man direkt nach.

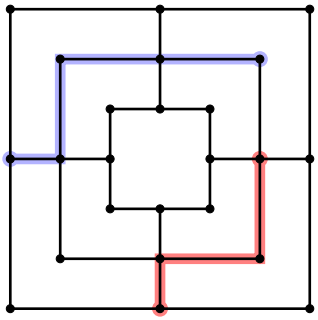
☞ **Beispiel.** Die Informatik, speziell die Informationstheorie, nutzt den *Hamming–Abstand*: Wir betrachten eine Menge A als Alphabet. Sei $X = A^n$ die Menge aller Wörter der Länge n. Für je zwei Wörter $x, y \in X$ misst der Abstand $d(x,y) = \sharp\{\, i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid x_i \neq y_i \,\}$ die Anzahl der Stellen, an denen die Wörter verschieden sind. Ist zum Beispiel x die gesendete Botschaft und y die empfangene, dann ist $d(x,y)$ die Anzahl der Übertragungsfehler. Für $A = \{0,1\}$ ist $X = \{0,1\}^n$ der n–dimensionale binäre Würfel. ☜

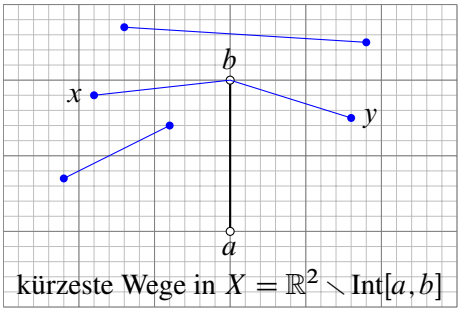


Beispiel. Sei $\Gamma = (X, E)$ ein *gerichteter Graph* bestehend aus einer Eckenmenge X und einer Kantenmenge $E \subset X \times X$. Ein Weg in Γ ist eine Folge $w = x_0 x_1 \ldots x_\ell$ von Ecken $x_0, x_1, \ldots, x_\ell \in X$ und aufeinanderfolgenden Kanten $(x_{k-1}, x_k) \in E$ für $k = 1, 2, \ldots, \ell$.

Für je zwei Punkte $x, y \in X$ sei $d_\Gamma(x, y)$ die Länge des kürzesten Weges von x nach y. Wir setzen $d_\Gamma(x, y) = \infty$, falls kein solcher Weg existiert. Im symmetrischen Falle $E^\intercal = E$ ist d_Γ eine Metrik auf der Eckenmenge X. Bei $E^\intercal \neq E$ ist die Symmetrie (M2) verletzt.

Wir nennen $d_\Gamma : X \times X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die *geodätische Metrik* des Graphen Γ. Speziell auf dem binären Würfel $X = \{0,1\}^n$ wie oben skizziert erhalten wir den Hamming–Abstand. Für den vollständigen Graphen $\Gamma = (X, X^2)$ erhalten wir die diskrete Metrik (C2C).

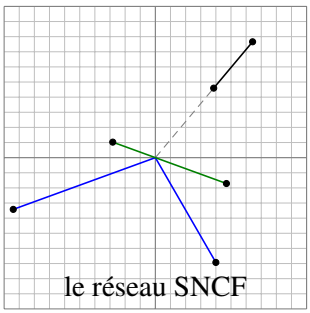




kürzeste Wege in $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \operatorname{Int}[a, b]$

Beispiel. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein euklidischer Teilraum oder allgemein ein metrischer Raum (X, d). Wir definieren die *Wegmetrik* $d' : X \times X \to [0, \infty]$ für je zwei Punkte $x, y \in X$ als die infimale Länge aller Wege von x nach y. Dies verallgemeinert das vorangegangene diskrete Beispiel von Graphen. Weglänge und Wegmetrik führen wir in §C7 genauer aus.

Auf der Menge $\mathbb{R}^n$ sind neben den obigen viele weitere Metriken denkbar, manche davon muten exotisch an:


le réseau SNCF

Beispiel C2D. Die *französische Eisenbahnmetrik* ist

$$d = d_{\mathrm{SNCF}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} :$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} |x - y| & \text{falls } \mathbb{R}x = \mathbb{R}y, \\ |x| + |y| & \text{falls } \mathbb{R}x \neq \mathbb{R}y. \end{cases}$$

Dies ist tatsächlich eine Metrik (Übung C8E).

Anekdote. Die französische Eisenbahnmetrik ist ein klassisches Beispiel für eine ungewöhnliche Metrik auf der Menge $\mathbb{R}^2$. Die historisch-politische Anspielung ist ganz anschaulich folgende: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei französischen Städten x und y führt über Paris, es sei denn beide Städte liegen auf einer gemeinsamen Eisenbahnstrecke nach Paris. (Im Zuge der Dezentralisierung hat sich die Situation etwas verbessert, man kann inzwischen direkt von Strasbourg nach Lyon fahren.)

Anekdote am Rande, um auch die Eigenheiten der Deutschen Bahn zu würdigen. Sei X die Menge der DB-Haltepunkte und $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y)$ der günstigste Fahrpreis von x nach y in Euro. Soweit ich weiß erfüllt dies $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) > 0$ für alle $x \neq y$. Die Symmetrie $d(x, y) = d(y, x)$ ist manchmal verletzt, und erstaunlicherweise auch die Dreiecksungleichung: Manchmal ist es billiger, einen Umweg zu fahren. Demnach ist d keine Metrik!

Zur Parität noch ein schweizer Beispiel: Sei X die Menge der schweizer Berghütten und $d(x, y)$ die Wanderzeit von x nach y; solche Zeitangaben finden Sie auf den Wegweisern entlang der Wanderwege. Dieses realistische und sehr nützliche Abstandsmaß erfüllt (M0,1,3), ist aber nicht symmetrisch!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C2b. Teilräume, Summen, Produkte, Abbildungsräume. In der Mathematik ist es ein generelles und überaus nützliches Prinzip, neue Objekte aus alten zu konstruieren. Viele interessante Räume entstehen zum Beispiel als Teilräume bereits bekannter Räume:

Beispiel C2E (Teilraum)**.** Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist die Einschränkung $d_A := d|_{A\times A} : A \times A \to [0,\infty]$ eine Metrik auf A, die wir die *Teilraummetrik* bezüglich (X,d) nennen, oder die auf der Teilmenge A *induzierte* Metrik.

Hierdurch wird (A,d_A) selbst zu einem metrischen Raum. Soweit nichts anderes vereinbart wird, statten wir Teilräume stillschweigend immer mit dieser Metrik aus.

Insbesondere erbt jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ die euklidische Metrik $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit wird A durch Einschränkung dieser Metrik selbst zu einem metrischen Raum (A,d_A).

Aus gegebenen metrischen Räumen können wir ihre disjunkte Vereinigung bilden:

Beispiel C2F (Summenraum)**.** Sei $(X_i,d_i)_{i\in I}$ eine Familie metrischer Räume. Diese können wir als paarweise disjunkt annehmen, also $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Auf der disjunkten Vereinigung $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ definieren wir $d : X \times X \to [0,\infty]$ durch

$$d(x,y) = \begin{cases} d_i(x,y) & \text{falls } x,y \in X_i, \\ \infty & \text{falls } x \in X_i \text{ und } y \in X_j \text{ mit } i \neq j. \end{cases}$$

Dies ist eine Metrik auf X, die wir die *Summenmetrik* nennen.

Aus gegebenen metrischen Räumen können wir ihr Produkt bilden:

Beispiel C2G (Produktraum)**.** Sei $(X_i,d_i)_{i\in I}$ eine Familie metrischer Räume. Auf ihrem Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ definieren wir die *Supremumsmetrik* $d : X \times X \to [0,\infty]$ durch

$$d(x,y) = \sup\{\, d_i(x_i,y_i) \;\big|\; i \in I \,\}.$$

Alternativ haben wir für $1 \leq p < \infty$ auch die *ℓ^p–Metrik*

$$d(x,y) = \Big(\sum\nolimits_{i\in I} d_i(x_i,y_i)^p\Big)^{1/p}.$$

Zum Beispiel entsteht auf diese Weise aus der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ auf $\mathbb{R}$ die Metrik bezüglich der oben diskutierten ℓ^p–Norm auf dem n–fachen Produkt $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Ist I endlich und sind alle d_i endliche Metriken, so ist auch d eine endliche Metrik. Für unendliche Produkte hingegen können diese Metriken den Wert $d(x,y) = \infty$ annehmen.

Für endliche Produkte stellen sich die Supremums- und die ℓ^p–Metriken als topologisch äquivalent heraus im Sinne von §C3e. Im unendlichen Fall definieren sie jedoch sehr verschiedene Topologien auf $\prod_{i\in I} X_i$, wie wir am Beispiel $\mathbb{R}^I$ sehen (C3K).

Als wichtigen Spezialfall von Produkträumen erhalten wir Abbildungsräume:

Beispiel C2H (Abbildungsräume)**.** Sei X eine Menge und (Y,d_Y) ein metrischer Raum. Wir betrachten die Menge $Y^X = \mathrm{Abb}(X,Y)$ aller Abbildungen $f,g : X \to Y$. Hierauf definieren wir die *Supremumsmetrik* $d : Y^X \times Y^X \to [0,\infty]$ durch

$$d(f,g) = \big|d_Y(f,g)\big|_X = \sup\{\, d_Y(f(x),g(x)) \;\big|\; x \in X \,\}.$$

☞ **Übung C2I.** Weisen Sie nach, dass die in den vorangegangenen Beispielen angegebenen Abbildungen tatsächlich Metriken sind. Allgemeiner überlege man sich hierzu folgendes: ☜

(1) Sei $f : A \to X$ eine Abbildung. Ist $d : X \times X \to [0,\infty]$ eine Halbmetrik, so auch $d_A : A \times A \to [0,1] : (x,y) \mapsto d(f(x),f(y))$. Wann ist d_A eine Metrik?
(2) Beispiel: Ist (X,d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $f : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ die Inklusion, so ist $d_A = d|_{A\times A}$ die eingeschränkte Metrik auf A.
(3) Beispiel: Sind $(X_i,d_i)_{i\in I}$ metrische Räume, so erhalten wir auf $X = \prod_{i\in I} X_i$ durch Zurückziehen längs der Projektionen die Halbmetriken $d_i(x,y) = d_i(x_i,y_i)$.
(4) Halbmetriken $d_i : X \times X \to [0,\infty]$ indiziert durch $i \in I$ können wir wie in C2G zur ℓ^p–Halbmetrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ zusammenfassen. Wann ist d eine Metrik?

☞ **Übung C2J.** Sei $d : X \times X \to [0,\infty]$ eine Metrik (oder Halbmetrik). ☜

(1) Für $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n \in X$ gilt die *verallgemeinerte Dreiecksungleichung*
$$d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n).$$
(2) Für je drei Elemente $x,y,z \in X$ gilt die *umgekehrte Dreiecksungleichung*
$$|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y).$$
(3) Auf X definiert $x \sim y :\Leftrightarrow d(x,y) < \infty$ eine Äquivalenzrelation: Reflexivität folgt aus (M0), Symmetrie aus (M2), Transitivität aus (M3). Auf jeder Äquivalenzklasse $A = [a] = \{\, x \in X \mid d(a,x) < \infty \,\}$ ist d_A eine (Halb-)Metrik, die nur endliche Werte annimmt. Ganz (X,d) ist wie in C2F die Summe dieser Komponenten.
(4) Wir definieren $x \approx y$ durch $d(x,y) = 0$ und erhalten eine Äquivalenzrelation. Auf der Quotientenmenge $\bar X = X/_\approx$ induziert d die Metrik $\bar d : \bar X \times \bar X \to [0,\infty] : ([x],[y]) \mapsto d(x,y)$. Ist bereits d eine Metrik, so gilt $\bar X = X$ und $\bar d = d$.

Anwendungsbeispiel: (3) und (4) werden beim Lebesgue–Integral zur Konstruktion des Raumes $L^p(\Omega)$ genutzt (C1L): Man beschränkt sich auf Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit endlicher Norm $\|f\|_{L^p} < \infty$ und identifiziert Funktionen f,g mit $\|f-g\|_{L^p} = 0$.

✻ **C2J.** (1) Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung folgt per Induktion aus der Dreiecksungleichung.

(2) Gemäß (M3) gilt $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$, also $d(x,y) \ge d(x,z) - d(y,z)$. Nach Vertauschen von x und y gilt auch $d(y,x) \ge d(y,z) - d(x,z)$. Dank Symmetrie (M2) gilt $d(x,y) = d(y,x)$, somit erhalten wir $d(x,y) \ge \sup\{\, d(x,z)-d(y,z),\, d(y,z)-d(x,z) \,\} = |d(x,z)-d(y,z)|$. Dies gilt auch noch, wenn man für die Metrik den Wert ∞ zulässt, wobei $\infty - \infty = 0$ zu setzen ist.

(3) Reflexivität, Symmetrie und Transitivität folgen wie zuvor aus (M0,2,3). Auch die Endlichkeit folgt aus der Dreiecksungleichung: Für alle $x,y \in [a]$ gilt $d(x,y) \le d(x,a) + d(a,y) < \infty$.

(4) Reflexivität folgt aus (M0), Symmetrie folgt aus (M2), Transitivität folgt aus (M3): $x \approx y$ und $y \approx z$ bedeutet $d(x,y) = d(y,z) = 0$, also $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) = 0$, und somit $x \approx z$. Es bleibt zu zeigen, dass für $x \approx x'$ und $y \approx y'$ auch $d(x,y) = d(x',y')$ gilt. Durch zweimalige Anwendung der Dreiecksungleichung gilt $d(x,y) \le d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) = d(x',y')$. Durch Vertauschung der Rollen folgt ebenso $d(x',y') \le d(x,y)$, also schließlich $d(x,y) = d(x',y')$. Damit ist $\bar d : \bar X \times \bar X \to [0,\infty] : ([x],[y]) \mapsto d(x,y)$ wohldefiniert. Symmetrie und Dreiecksungleichung übertragen sich von d unmittelbar auf $\bar d$, und zusätzlich gilt nun (M1): $\bar d([x],[y]) = 0$ bedeutet $d(x,y) = 0$, folglich gilt $x \approx y$, also $[x] = [y]$.

☞ **Übung C2K.** Nach der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^n$ gefragt, gibt der Prüfling die Antwort $d(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1| + \cdots + |x_n-y_n|}$. Huch? Wirklich genau so? Ja, genau so. Na gut, also dann: Welche Axiome (M0–4) gelten hier? (Zur *Schneeflockenmetrik* siehe C3L.) ☜

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§C2c. Offene und abgeschlossene Mengen in einem metrischen Raum.** Aus der Analysis kennen Sie für den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ die zentralen Begriffe der *Umgebung* $U \subset \mathbb{R}^n$ eines Punktes $a \in \mathbb{R}^n$, der *offenen Teilmengen* $U \subset \mathbb{R}^n$ und *abgeschlossenen* Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$. Diese Definitionen übertragen wir wörtlich auf alle metrischen Räume. ☜

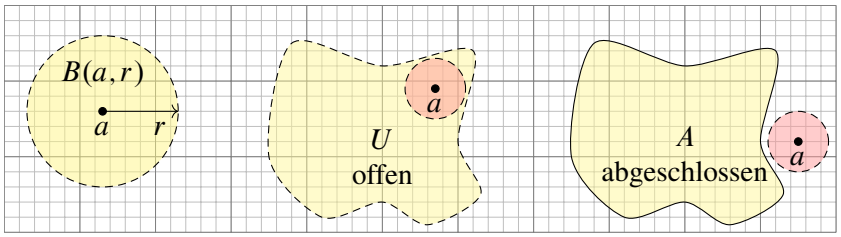


ABBILDUNG C:3. Bälle, Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen

✍ **Definition C2L.** Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zum Punkt $a \in X$ und Radius $r \in [0,\infty]$ definieren wir den *offenen Ball* / den *abgeschlossenen Ball* / die *Sphäre* durch ✍

$$B(a,r) = B_X(a,r) = B_d(a,r) = B_{(X,d)}(a,r) := \{\, x \in X \mid d(a,x) < r \,\},$$
$$\bar{B}(a,r) = \bar{B}_X(a,r) = \bar{B}_d(a,r) = \bar{B}_{(X,d)}(a,r) := \{\, x \in X \mid d(a,x) \leq r \,\},$$
$$S(a,r) = S_X(a,r) = S_d(a,r) = S_{(X,d)}(a,r) := \{\, x \in X \mid d(a,x) = r \,\}.$$

Wir nennen $U \subset X$ *Umgebung* von $a \in X$, wenn $B(a,\varepsilon) \subset U$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

$$U \subset X \text{ ist Umgebung von } a \text{ in } (X,d) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,:\, B(a,\varepsilon) \subset U$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X \,:\, \big[\, d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U \,\big]$$

Das System aller Umgebungen des Punktes a im Raum (X,d) bezeichnen wir mit

$$\mathscr{U}_a(X,d) := \{\, U \subset X \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,:\, B(a,\varepsilon) \subset U \,\}.$$

Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn U Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

$$U \subset X \text{ ist offen in } (X,d) \quad :\Leftrightarrow \quad U \text{ ist Umgebung jedes Punktes } a \in U$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall a \in U \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,:\, B(a,\varepsilon) \subset U$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall a \in U \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X \,:\, \big[\, d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U \,\big]$$

Das System aller offenen Mengen im Raum (X,d) bezeichnen wir als die *Topologie*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(X,d) := \{\, U \subset X \mid U \text{ offen in } (X,d) \,\}$$
$$= \{\, U \subset X \mid \forall a \in U \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,:\, B(a,\varepsilon) \subset U \,\}.$$

Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \smallsetminus A$ offen ist.

$$A \subset X \text{ ist abgeschlossen in } (X,d) \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Das Komplement } X \smallsetminus A \text{ ist offen}$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall a \in X \smallsetminus A \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,:\, B(a,\varepsilon) \subset X \smallsetminus A$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall a \in X \smallsetminus A \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X \,:\, \big[\, d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \notin A \,\big]$$

☞ Man beachte, dass abgeschlossen und offen keine Gegensätze sind. Zum Beispiel sind die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sowohl offen als auch abgeschlossen in (X,d). ☜

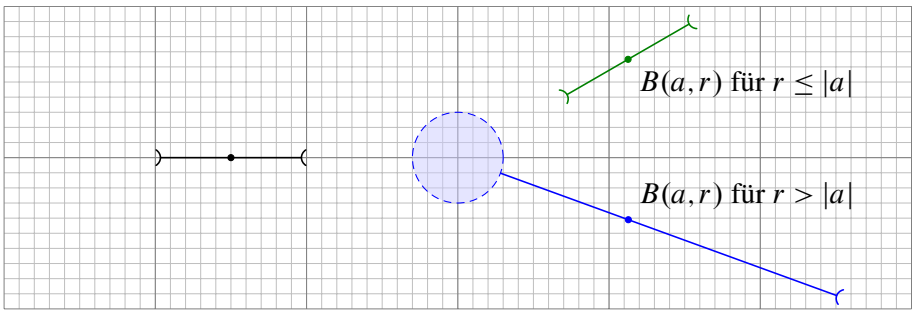
☞ **Beispiel.** Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ erhalten wir den aus der Analysis vertrauten Begriff: Der euklidische Ball $B(a,r)$ besteht aus allen Punkten, die vom Mittelpunkt a euklidischen Abstand kleiner r haben. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, wenn um jedem Punkt $a \in U$ auch noch ein euklidischer Ball $B(a,\varepsilon)$ gänzlich in U liegt, für ein hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. ☜

Bälle müssen nicht immer so schön rund sein wie im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$:

☞ **Beispiel.** Für die ℓ^p–Normen auf $\mathbb{R}^n$ erhalten wir die in Abb. C:1 skizzierten Bälle. Es gilt $|x|_\infty \le |x|_p \le n|x|_\infty$, und somit $B_\infty(a,r) \supset B_p(a,r) \supset B_\infty(a,nr)$. Die offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich jeder ℓ^p–Norm sind also dieselben für alle $p \in [1,\infty]$. Sie stimmen insbesondere mit den offenen Mengen bezüglich der euklidischen Norm überein. Die ℓ^p–Normen bzw. Metriken sind demnach *topologisch äquivalent* im Sinne von §C3e. ☜

☞ **Beispiel.** Sei (X,d) ein Raum mit diskreter Metrik (C2C) und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $0 < r < 1$ gilt $B(a,r) = \bar{B}(a,r) = \{a\}$, für $r > 1$ gilt $B(a,r) = \bar{B}(a,r) = X$, und für $r = 1$ gilt $B(a,1) = \{a\}$ und $\bar{B}(a,1) = X$. In diesem Raum ist jede Menge sowohl offen als auch abgeschlossen. Eine solche Topologie, in der alle Mengen offen sind, heißt *diskret* (D1B). ☜

☞ **Beispiel.** Die Bälle in der französischen Eisenbahnmetrik (C2D) auf $\mathbb{R}^2$ sehen so aus: ☜



☞ **§C2d. Die Topologie eines metrischen Raumes.** Das oben in C2L definierte System $\mathcal{T}(X,d)$ aller offenen Mengen nennen wir die *Topologie* des metrischen Raumes (X,d). Die folgenden Eigenschaften offener Mengen werden uns in §D1 zum allgemeinen Begriff der Topologie und des topologischen Raumes führen: ☜

✍ **Proposition C2M.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum (oder allgemeiner d eine Halbmetrik).* ✍

Jeder offene Ball $B(a,r)$ ist offen, jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}(a,r)$ ist abgeschlossen.

Die offenen Teilmengen in (X,d) erfreuen sich folgender Eigenschaften:

(O1) Die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind offen.
(O2) Sind $U_1,\dots,U_n$ offen, dann auch ihr Durchschnitt $U_1 \cap \dots \cap U_n$.
(O3) Sind alle $U_i \in \mathcal{T}$ offen für $i \in I$, dann auch ihre Vereinigung $\bigcup_{i\in I} U_i$.

Anders als (O3) gilt (O2) im Allgemeinen nicht für unendliche Schnitte. Komplementär zu den offenen Mengen erfreuen sich die abgeschlossenen Mengen folgender Eigenschaften:

(A1) Die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind abgeschlossen.
(A2) Sind $A_1,\dots,A_n$ abgeschlossen, dann auch die Vereinigung $A_1 \cup \dots \cup A_n$.
(A3) Sind alle A_i abgeschlossen für $i \in I$, dann auch der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} A_i$.

Anders als (A3) gilt (A2) im Allgemeinen nicht für unendliche Vereinigungen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

BEWEIS. Zum Verständnis der Definitionen beweise man dies als Übung! □

✻ **C2M.** Für $x \in B(a,r)$ und $\varepsilon = r - d(x,a) > 0$ gilt $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$ wie in C:4: Für $x' \in B(x,\varepsilon)$ gilt $d(x',x) < \varepsilon$, dank Dreiecksungleichung also $d(x',a) \le d(x',x) + d(x,a) < \varepsilon + d(x,a) = r$, somit $x' \in B(a,r)$.

Für $x \notin \bar{B}(a,r)$ und $\varepsilon = d(x,a) - r > 0$ gilt $B(x,\varepsilon) \subset X \smallsetminus B(a,r)$: Für $x' \in B(x,\varepsilon)$ gilt $d(x',x) < \varepsilon$, dank umgekehrter Dreiecksungleichung also $d(a,x') \ge d(a,x) - d(x',x) > d(x,a) - \varepsilon = r$, somit $x' \notin \bar{B}(a,r)$.

(O1) ist trivial und (O3) ist klar: Für $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt $x \in U_i$ für ein $i \in I$. Da U_i offen ist, existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass $B(x,\varepsilon) \subset U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt. Interessant ist vor allem (O2): Seien $U_1, \dots, U_n$ offen und $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$. Wir haben zu zeigen, dass U offen ist, also für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $B(x,\varepsilon) \subset U$ gilt. Wegen $x \in U$ gilt $x \in U_i$ für jedes $i = 1, \dots, n$, und da U_i offen ist existiert $\varepsilon_i \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $B(x,\varepsilon_i) \subset U_i$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ gilt dann $\varepsilon > 0$. Wegen $B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_i) \subset U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt $B(x,\varepsilon) \subset U$.

Für beliebige Durchschnitte gilt dies nicht mehr! Dies zeigen einfache Gegenbeispiele wie etwa folgendes: In $\mathbb{R}$ sind die Intervalle $U_n =]-1/n, 1/n[$ für $n = 1,2,3,\dots$ offen, nicht aber ihr Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$. (Verfolgt man den vorigen Beweis, so ist $\varepsilon_n \le 1/n$ und somit $\inf\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots\} = 0$.)

Aus (O1–3) folgt (A1–3) durch Komplementbildung, wobei Durchschnitt und Vereinigung vertauscht werden. Beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind nicht notwendig abgeschlossen: In $\mathbb{R}$ sind die Intervalle $A_n = [1/n - 1, 1 - 1/n]$ für $n = 1,2,3,\dots$ abgeschlossen, nicht aber ihre Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =]-1,1[$.

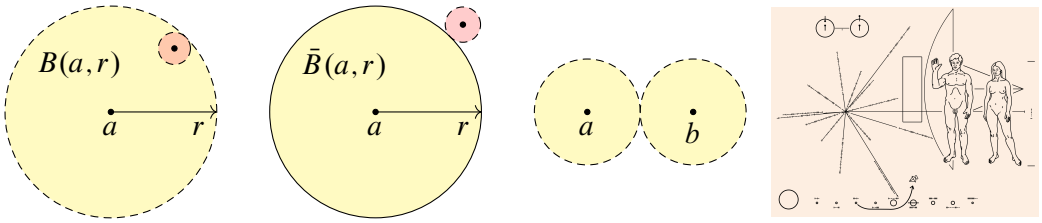


ABBILDUNG C:4. Jeder offene Ball $B(a,r)$ ist offen. Jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}(a,r)$ ist abgeschlossen. Jeder metrische Raum ist hausdorffsch. Dies findet sich als interstellarer Gruß auf der Pioneer-Plakette (rechts).

Das System $\mathcal{T}(X,d)$ aller offenen Mengen im betrachteten metrischen Raum (X,d) wird im Folgenden eine wichtige Rolle spielen, denn es regiert alle Fragen der Konvergenz von Folgen und der Stetigkeit von Abbildungen. Wir vereinbaren daher folgende Begriffe:

Definition C2N (topologischer Raum)**.** Eine *Topologie* auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen von X, das die obigen Bedingungen (O1–3) erfüllt. Das Paar $(X,\mathcal{T})$ heißt dann ein *topologischer Raum* mit der *Trägermenge* X und der *Topologie* $\mathcal{T}$.

Mit allgemeinen topologischen Räumen werden wir uns in den folgenden Kapiteln auseinandersetzen. Jeder metrische Raum (X,d) induziert einen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ durch die oben definierte metrische Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X,d)$. Diese metrische Topologie hat besondere Eigenschaften, von denen wir hier zunächst die vordringlichste nennen:

Proposition C2O. *In jedem metrischen Raum (X,d) erfüllt die Topologie die Hausdorff–Eigenschaft (T_2): Zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X existieren disjunkte offene Umgebungen.*

BEWEIS. Je zwei Punkte $a \neq b$ in X haben Abstand $r := d(a,b) > 0$ dank (M1). Die Bälle $U = B(a,r/2)$ und $V = B(b,r/2)$ sind offen (C2M), erfüllen $a \in U$ und $b \in V$ und sind zudem disjunkt: Wäre $x \in U \cap V$, so führten Symmetrie (M2) und Dreiecksungleichung (M3) zum Widerspruch $r = d(a,b) \le d(a,x) + d(x,b) < r/2 + r/2 = r$. □

☞ **§C2e. Isometrien.** Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume. ☜

Definition C2P. Eine *isometrische Einbettung* $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ ist eine metrikerhaltende Abbildung $f:X\to Y$, das heißt $d_Y(f(a),f(b))=d_X(a,b)$ für alle $a,b\in X$. Damit ist f injektiv, denn für $a\neq b$ in X gilt $d_Y(f(a),f(b))=d_X(a,b)>0$, also $f(a)\neq f(b)$.

Eine *Isometrie* $f:(X,d_X)\xrightarrow{\sim}(Y,d_Y)$ ist eine metrikerhaltende Bijektion. In diesem Falle gilt dies auch für f^{-1}, und wir nennen die Räume (X,d_X) und (Y,d_Y) *isometrisch*.

Sprachgebrauch. Manche Autoren benutzen das Wort *Isometrie* allgemeiner für *isometrische Einbettung*, und sagen im Falle einer bijektiven Abbildung dann *isometrischer Isomorphismus*.

Beispiel. Die Einbettung $\mathbb{R}^m\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ mit $(x_1,\dots,x_m)\mapsto(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$ ist isometrisch bezüglich der euklidischen Metriken auf $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$; ebenso für die ℓ^p–Metriken.

Beispiel. Ist (X,d) ein metrischer Raum, so ist für jeden Teilraum (A,d_A) die Inklusion $A\hookrightarrow X$ eine isometrische Einbettung (C2E). Beim Summenraum $X=\bigsqcup_{i\in I}X_i$ (C2F) ist jede Inklusion $X_i\hookrightarrow X$ isometrisch. Beim Produktraum $X=\prod_{i\in I}X_i$ (C2G) ist jede Einbettung $X_i\hookrightarrow X:x_i\mapsto x=(x_j)_{j\in I}$ isometrisch, mit Konstanten $x_j\in X_j$ für alle $j\neq i$.

Beispiel. Sind (X,d_X) und (Y,d_Y) diskret, so ist $f:X\to Y$ genau dann eine isometrische Einbettung, wenn f injektiv ist, und genau dann eine Isometrie, wenn f bijektiv ist.

Übung C2Q. Metrische Räume und isometrische Einbettungen bilden eine Kategorie (H1A), das heißt: Die Identität $\mathrm{id}_X:(X,d)\to(X,d)$ ist eine isometrische Einbettung, sowie mit $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ und $g:(Y,d_Y)\to(Z,d_Z)$ auch ihre Komposition $g\circ f$.

Gleiches gilt für Isometrien. Isometrie ist daher eine Äquivalenzrelation:

(1) Reflexivität: Die Identität $\mathrm{id}_X:(X,d_X)\xrightarrow{\sim}(X,d_X)$ ist eine Isometrie.
(2) Symmetrie: Aus $f:(X,d_X)\xrightarrow{\sim}(Y,d_Y)$ folgt $f^{-1}:(Y,d_Y)\xrightarrow{\sim}(X,d_X)$.
(3) Transitivität: Aus Isometrien $f:(X,d_X)\xrightarrow{\sim}(Y,d_Y)$ und $g:(Y,d_Y)\xrightarrow{\sim}(Z,d_Z)$ erhalten wir durch Komposition die Isometrie $g\circ f:(X,d_X)\xrightarrow{\sim}(Z,d_Z)$.

Für jeden metrischen Raum (X,d) ist demnach die Menge $\mathrm{Isom}(X,d)$ aller Isometrien $f:(X,d)\xrightarrow{\sim}(X,d)$ eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen.

Beispiel. Die Hilbert–Räume $\ell^2=\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ und $L^2=L^2([a,b],\mathbb{C})$ sind isometrisch (C1F) vermöge der Fourier–Analyse $L^2\to\ell^2$ und der Fourier–Synthese $\ell^2\to L^2$.

Isometrien erhalten die Metrik und verhalten sich in diesem Sinne starr. Liegt diese Art von Rigidität vor, so kann dies sehr nützlich sein, zum Beispiel ist die Gruppe $\mathrm{Isom}(X,d)$ in günstigen Fällen gut überschaubar (C2R), zum Beispiel Isometrien von Polyedern (§A3).

In vielen Anwendungen der Analysis oder der Topologie jedoch ist die Forderung der Isometrie allzu einschränkend. Oft betrachtet man daher den flexibleren Begriff der Dehnungsbeschränktheit, Lipschitz–Stetigkeit genannt (§C2f), oder allgemeiner Hölder–Stetigkeit (§C2g), oder ganz allgemein Stetigkeit §C3b, die wir anschließend diskutieren.

Beispiel. Bezüglich der französischen Eisenbahnmetrik gilt: Jede Bijektion $f:\mathbb{S}^1\xrightarrow{\sim}\mathbb{S}^1$ setzt sich eindeutig fort zur Isometrie $g:\mathbb{R}^2\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^2:\lambda v\mapsto\lambda f(v)$ für $\lambda\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $v\in\mathbb{S}^1$.

Beispiel. Für die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ mit Supremumsmetrik ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2:x\mapsto(x,\sin x)$ eine isometrische Einbettung, ebenso $f(x)=(x,g(x))$ mit $|g(x)-g(y)|\leq|x-y|$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ Für euklidische Räume hingegen sind isometrische Einbettungen wunderbar rigide: ☜

Satz C2R. *Für $m \leq n$ betrachten wir die Räume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit ihrer euklidischen Metrik.*

(1) Jede affin-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist von der Form $f(x) = Ax + b$ mit linearem Anteil $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und Verschiebung $b \in \mathbb{R}^n$. Genau dann ist f eine isometrische Einbettung, wenn die Matrix A orthonormale Spalten hat, also $A^\mathsf{T}A = 1_{m\times m}$ erfüllt.

(2) Jede isometrische Einbettung $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist affin-linear, wie in (1) angegeben.

(3) Für $P \subset \mathbb{R}^m$ mit $\operatorname{aff}(P) = \mathbb{R}^m$ ist jede isometrische Einbettung $g : P \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Einschränkung $g = f|_P$ genau einer isometrischen Einbettung $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

(4) Jede isometrische Einbettung $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist Komposition der Standardeinbettung $\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ und höchstens $m+1$ Spiegelungen.

Beispiel. Insbesondere sind Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen des $\mathbb{R}^n$ Isometrien.

Beispiel. Jede Isometrie $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ ist Komposition von höchstens $n+1$ Spiegelungen.

Beispiel. Aus der Schulgeometrie kennen Sie den Spezialfall der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$:

- Die Komposition von zwei Spiegelungen an parallelen Geraden ergibt eine Verschiebung, und jede Verschiebung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto x + v$ lässt sich so darstellen.
- Die Komposition von zwei Spiegelungen an Geraden, die sich im Winkel α schneiden, ergibt eine Drehung um den Winkel 2α, und jede Drehung lässt sich so darstellen.

Beispiel. Für jedes Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{aff}(P) = \mathbb{R}^n$ ist jede Isometrie $g : P \xrightarrow{\sim} P$ die Einschränkung $g = f|_P$ einer eindeutigen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $f(P) = P$.

Beispiel. Jede isometrische Einbettung $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ der Kreislinie vom Radius 1 in die Sphäre vom Radius 1 ist ein Großkreis: Sie lässt sich eindeutig fortsetzen zu einer isometrischen Einbettung $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax$. Gleiches gilt für $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{S}^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

BEWEIS DES SATZES. (1a) Für $f(x) = Ax + b$ mit $A^\mathsf{T}A = 1_{m\times m}$ rechnen wir's nach:

$$\begin{aligned} d\big(f(x), f(y)\big)^2 = \big|f(x) - f(y)\big|^2 = \big|A(x-y)\big|^2 &= \big(A(x-y)\big)^\mathsf{T}\big(A(x-y)\big) \\ &= (x-y)^\mathsf{T}A^\mathsf{T}A(x-y) = (x-y)^\mathsf{T}(x-y) = |x-y|^2 = d(x,y)^2 \end{aligned}$$

(1b) Ist umgekehrt $f(x) = Ax + b$ eine Isometrie, so zeigen wir nun $A^\mathsf{T}A = 1_{m\times m}$. Verschiebung ist eine Isometrie und ändert A nicht, daher können wir $b = 0$ annehmen.

Sei $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^m$ eine Orthonormalbasis, $\langle u_i \mid u_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle u_i \mid u_i \rangle = 1$ für alle i. Für die Abstände zwischen $0, u_1, \dots, u_m$ gilt $d(u_i, 0)^2 = |u_i|^2 = \langle u_i \mid u_i \rangle = 1$ und $d(u_i, u_j)^2 = |u_i - u_i|^2 = \langle u_i - u_j \mid u_i - u_j \rangle = |u_i|^2 - 2\langle u_i \mid u_j \rangle + |u_j|^2 = 2$. Die Bilder $0 = g(0), v_1 = g(u_1), \dots, v_m = g(u_m) \in \mathbb{R}^n$ haben dieselben Abstände, daher sind $v_1, \dots, v_m$ orthonormal. Somit hat A orthonormale Spalten, also $A^\mathsf{T}A = 1_{m\times m}$.

(2) Ist $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, so auch $g : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto f(x) - b$, und mit $b = f(0)$ gilt $g(0) = 0$. Sind $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^m$ orthonormal, so auch $v_1 = g(u_1), \dots, v_m = g(u_m) \in \mathbb{R}^n$, siehe (1b). Wir ergänzen zu einer Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.

Jeder Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ ist eindeutige Linearkombination $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$: Die Koeffizienten $y_i = \langle y \mid v_i \rangle = (1 + d(y,0)^2 - d(y,v_i)^2)/2$ sind bereits festgelegt durch die Abstände $d(y,0), d(y,v_1), \dots, d(y,v_n)$, denn $\langle y - v_i \mid y - v_i \rangle = \langle y \mid y \rangle - 2\langle y \mid v_i \rangle + \langle v_i \mid v_i \rangle$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = \sum_{i=1}^m x_i u_i$ gilt ebenso $x_i = \langle x \mid u_i \rangle = (1 + d(x,0)^2 - d(x,u_i)^2)/2$.

Da g Abstände erhält, folgt für $y = g(x) = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ und $i = 1, \dots, m$ die Gleichheit

$$x_i = \frac{1 + d(x,0)^2 - d(x,u_i)^2}{2} = \frac{1 + d(g(x),g(0))^2 - d(g(x),g(u_i))^2}{2} = y_i .$$

Zudem gilt $\sum_{i=0}^m x_i^2 = d(x,0)^2 = d(y,0)^2 = \sum_{i=0}^n y_i^2$, also $\sum_{i=m+1}^n y_i^2 = 0$, also $y_i = 0$ für $i = m+1, \dots, n$. Wir schließen $g(x_1u_1 + \cdots + x_mu_m) = x_1v_1 + \cdots + x_mv_m$. Für die Matrix $A = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gilt $g(x) = Ax$ und $A^\top A = 1$, somit $f(x) = Ax + b$.

(3) Da wir $\operatorname{aff}(P) = \mathbb{R}^m$ voraussetzen, existieren affin unabhängige $u_0, u_1, \dots, u_m \in P$.

Ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, so auch die Einschränkung $g = f|_P : P \to \mathbb{R}^n$. Die Zuordnung $f \mapsto f|_P$ ist injektiv, denn jede affin-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist bereits durch die Bilder $v_0 = f(u_0), v_1 = f(u_1), \dots, v_n = f(u_n) \in \mathbb{R}^n$ festgelegt.

Sei umgekehrt $g : P \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine isometrische Einbettung. Hierzu konstruieren wir eine isometrische Fortsetzung $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Nach Verschiebung können wir $u_0 = 0$ und $v_0 = 0$ annehmen, somit $g(0) = 0$. Das Gram–Schmidt–Verfahren (C1H) macht aus $u_1, \dots, u_m$ eine Orthonormalbasis $u_1^*, \dots, u_m^*$ von $\mathbb{R}^m$ und ebenso aus $v_1, \dots, v_m$ eine orthonormale Familie $v_1^*, \dots, v_m^*$ in $\mathbb{R}^n$. Dies definiert die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $u_i^* \mapsto v_i^*$. Nach Konstruktion ist sie eine isometrische Einbettung. Die berechneten Skalarprodukte sind in beiden Verfahren dieselben, daher gilt $f(u_i) = v_i$ für $i = 0, \dots, m$. Wie in (2) folgt daraus $f(x) = g(x)$ für jeden Punkt $x \in P$, also $f|_P = g$. (*Übung:* Führen Sie diese Skizze aus.)

(4) Dank (2) gilt $f(x) = Ax + b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $A^\top A = 1_{m \times m}$. Falls $b = 0$ setzen wir $\sigma_0 := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $f_1 := f$. Falls $b \neq 0$ setzen wir $a = b/2$ und $v = b/|b|$. Die Spiegelung $\sigma_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x - 2\langle\, v \mid x - a \,\rangle \cdot v$ erfüllt $\sigma(b) = 0$. Demnach ist $f_1 = \sigma_0 \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine isometrische Einbettung mit $f_1(0) = 0$.

Sei $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $f_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$ eine isometrische Einbettung mit $f_k(e_1) = e_1, \dots, f_k(e_{k-1}) = e_{k-1}$. Die Abstände der Punkte $0, e_1, \dots, e_{k-1}, e_k$ gleichen denen der Bilder $0, e_1, \dots, e_{k-1}, f(e_k)$; wie in (1b) ist demnach auch $e_1, \dots, e_{k-1}, f(e_k)$ orthonormal. Im Falle $f_k(e_k) \neq e_k$ setzen wir $v = (f_k(e_k) - e_k)/|f_k(e_k) - e_k|$. Die Spiegelung $\sigma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x - 2\langle v \mid x \rangle \cdot v$ erfüllt $(e_1, \dots, e_{k-1}, f(e_k)) \mapsto (e_1, \dots, e_{k-1}, e_k)$. Demnach ist $f_{k+1} = \sigma_k \circ f_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine isometrische Einbettung mit $f_{k+1}(e_1) = e_1, \dots, f_{k+1}(e_k) = e_k$. Im Falle $f_k(e_k) = e_k$ setzen wir $\sigma_k := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $f_{k+1} := f_k$.

Wir erreichen so $\sigma_m \circ \cdots \circ \sigma_0 \circ f = \iota$, also $f = \sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_m \circ \iota$, wie gewünscht. □

Bemerkung. Aussage (4) des Satzes beinhaltet insbesondere den Fall $m = n$:

Jede Isometrie $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ ist Komposition von höchstens $n + 1$ Spiegelungen.

Dies ist ein berühmter Satz von Cartan–Dieudonné und gilt allgemein für jeden Vektorraum V über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$ mit endlicher Dimension $\dim_K = n$ und einer nicht-degenerierten symmetrischen Bilinearform $b : V \times V \to K$: Jede orthogonale Abbildung $f \in \mathrm{O}(V, b)$ ist Komposition von höchstens n Spiegelungen.

Bemerkung. Der Beweis zu (4) nutzt geschickt Spiegelungen zur Erzeugung einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Das ist geometrisch bedeutsam und zudem numerisch vorteilhaft, wie Alston HOUSEHOLDER (1904–1993) erkannte und 1958 als Methode vorschlug. In der numerischen linearen Algebra berechnet man so die QR–Zerlegung von Matrizen; die Spiegelungen heißen dort Householder–Transformationen. Dieses Vorgehen ist numerisch stabiler als das (einfache aber numerisch instabile) Gram–Schmidt–Verfahren (C1H).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C2f. Lipschitz–Stetigkeit. Gegeben seien metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y). Zu $f : X \to Y$ suchen wir Konstanten $\ell, L \in [0, \infty]$, die folgende Ungleichungen erfüllen:

(C.3) $\quad \ell\, d_X(a,b) \quad \leq \quad d_Y(f(a), f(b)) \quad \leq \quad L\, d_X(a,b) \qquad$ für alle $a, b \in X$.

Anders gesagt, der „Differenzenquotient“ ist nach unten und oben beschränkt gemäß

$$\frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a,b)} \in [\ell, L] \qquad \text{für alle } a \neq b \text{ in } X.$$

Diese Bedingung ist trivialerweise immer erfüllt für $\ell = 0$ und $L = \infty$.

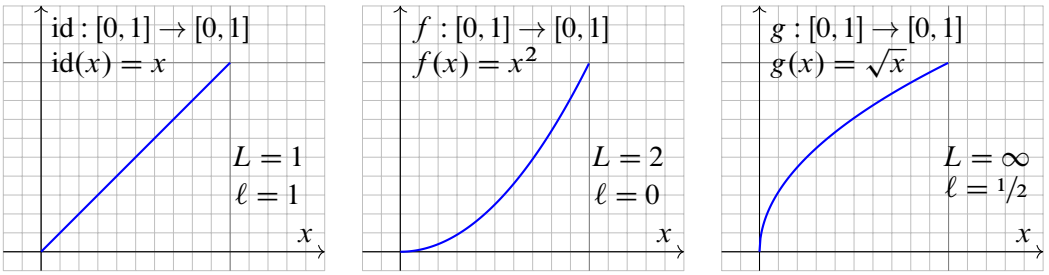


ABBILDUNG C:5. Isometrisch, dehnungsbeschränkt und stauchungsbeschränkt

Beispiele. • Isometrische Einbettungen entsprechen dem Extremfall $\ell = L = 1$.

- Für die Quadratfunktion $f : [0,1] \to [0,1]$ mit $f(x) = x^2$ gilt
$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y \leq 2.$$
Somit ist f dehnungsbeschränkt durch die Konstante $L = 2$. Hingegen ist f nicht stauchungsbeschränkt, denn der Quotient kann (nahe 0) beliebig klein werden.
- Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht dehnungsbeschränkt, denn es gibt keine globale obere Schranke $L < \infty$, aber dies gilt lokal auf jedem Intervall $[a, b]$.
- Für die Wurzelfunktion $g : [0,1] \to [0,1]$ mit $g(x) = \sqrt{x}$ gilt
$$\frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \geq \frac{1}{2}.$$
Somit ist g stauchungsbeschränkt durch die Konstante $\ell = 1/2$. Hingegen ist g nicht dehnungsbeschränkt, denn der Quotient kann (nahe 0) beliebig groß werden.
- Die Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$ ist nicht stauchungsbeschränkt, denn es gibt keine globale untere Schranke $\ell > 0$, aber dies gilt lokal auf jedem Intervall $[a, b]$.

Definition C2s. Die Abbildung f heißt *L–lipschitz–stetig*, wenn (C.3) für ein $L < \infty$ gilt (mit $\ell = 0$). Sie heißt *(ℓ, L)–bilipschitz–stetig*, wenn (C.3) mit $0 < \ell \leq L < \infty$ gilt.

Bemerkung. Die Lipschitz–Bedingung ist eine metrische Eigenschaft (keine topologische). Sie wird für Abbildungen zwischen zwei metrischen Räumen formuliert, und die Metriken d_X und d_Y gehen wesentlich in die Bedingung ein. Lipschitz–Stetigkeit bedeutet, dass f *dehnungsbeschränkt* ist durch eine Konstante $L < \infty$. Bilipschitz–Stetigkeit bedeutet, dass f sowohl dehnungsbeschränkt ist (durch L) als auch stauchungsbeschränkt (durch ℓ). Insbesondere ist f dann injektiv. Ist f zudem bijektiv, so ist auch f^{-1} bilipschitz (zu den Konstanten $1/L$ und $1/\ell$). In diesem Falle nennen wir f einen *Bilipschitz–Homöomorphismus*.

Insbesondere betrachten wir die Lipschitz–Bedingung für $f : \mathbb{R}^m \supset X \to \mathbb{R}^n$.

Beispiel C2T. Jede affin $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist lipschitz–stetig bezüglich der euklidischen Normen. Es gilt nämlich $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$, also $|f(x) - f(y)| = |A(x-y)| \leq \|A\| \cdot |x-y|$ bezüglich der Operatornorm (C1Q).

Hat A nicht-trivialen Kern, also $Av = 0$ für ein $v \neq 0$, so sind A und f nicht injektiv und daher nicht bilipschitz. Gilt hingegen $\ker(A) = \{0\}$ und $m = n$, so sind A und f bijektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = A^{-1}(x-b)$ ist lipschitz–stetig mit der Konstanten $\|A^{-1}\|$. Somit ist f bilipschitz mit den Konstanten $\ell = \|A^{-1}\|^{-1}$ und $L = \|A\|$.

Bemerkung. Diese Schranken sind wichtig für die Numerik linearer Gleichungssysteme, denn sie begrenzen die Verstärkung von Fehlern in den Eingangsdaten. Als Kenngröße betrachtet man daher die *Konditionszahl* $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Für diagonalisierbare Matrizen ist dies das Verhältnis zwischen betragsmäßig größtem und kleinstem Eigenwert: $\kappa(A) = |\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)|$. Für Isometrien ist die Konditionszahl gleich 1 und damit minimal, so dass Fehler nicht verstärkt werden. Für $\lambda_{\min}(A) = 0$ gilt $\kappa(A) = \infty$ und das Problem ist *schlecht gestellt*: Zu manchen Daten existiert keine Lösung, zu anderen unendlich viele.

Beispiel. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'| \leq L$, so ist f lipschitz–stetig. Allgemeiner sei $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : X \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $\|f'\| \leq L$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt $f(a) - f(b) = f'(z)(a-b)$ für alle $a, b \in X$ und einen Zwischenpunkt $z \in [a,b]$, somit also $|f(a) - f(b)| \leq \|f'(z)\| \cdot |a-b| \leq L|a-b|$.

Bemerkung. Für jede Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ definieren wir die *Lipschitz–Norm*

$$\|f\| = \|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f) := \sup\left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a,b)} \;\middle|\; a \neq b \text{ in } X \right\}.$$

Dies entspricht der Operatornorm (C1Q) von linearen Abbildungen normierter Vektorräume. Genau dann gilt $\|f\| < \infty$, wenn f lipschitz–stetig ist. Genau dann gilt $\|f\| = 0$, wenn f konstant ist. Für die Identität gilt $\|\mathrm{id}_X\| = 1$; auch für $X = \{x\}$ setzen wir hier $\|f\| = 1$. Für die Komposition von Abbildungen gilt $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

Bemerkung. Lipschitz–Stetigkeit bedeutet fast soviel wie Differenzierbarkeit. Ein berühmter Satz von Hans RADEMACHER (1892–1969) besagt: Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ lipschitz–stetig, dann ist f fast überall differenzierbar. (Das heißt, die Menge aller Punkte, in denen f nicht differenzierbar ist, hat Maß 0.) Für allgemeine metrische Räume haben wir keinen Differenzierbarkeitsbegriff, da wir keine Differenzenquotienten bilden können. Hier ist aber die Lipschitz–Stetigkeit der nächstbeste Ersatz (und beinahe genauso gut).

Übung C2U. Metrische Räume und lipschitz–stetige Abbildungen bilden eine Kategorie (H1A), das heißt: Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, d_X) \to (X, d_X)$ ist lipschitz–stetig mit $\|f\| = 1$. Sind $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ und $g : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ lipschitz–stetig, dann auch ihre Komposition $g \circ f : (X, d_X) \to (Z, d_Z)$, denn $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$. Ebenso für bilipschitz.

Bilipschitz–Homöomorphie von metrischen Räumen ist daher eine Äquivalenzrelation: Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d)$ ist ein Bilipschitz–Homöomorphismus, Inverse und Komposition von Bilipschitz–Homöomorphismen sind Bilipschitz–Homöomorphismen.

Die Menge $\mathrm{Bilip}(X, d)$ aller Bilipschitz–Homöomorphismen $f : (X, d) \to (X, d)$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen (wie zuvor Isometrien C2Q).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§C2g. Hölder–Stetigkeit.** Wir betrachten $\beta \in]0,1]$ und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\beta$. ☜ Für $\beta = 1$ ist $f(x) = x$ lipschitz–stetig, für $f(x) = x^\beta$ mit $0 < \beta < 1$ gilt dies nicht. Um dennoch die Dehnung zu kontrollieren, führt man folgenden Stetigkeitsbegriff ein.

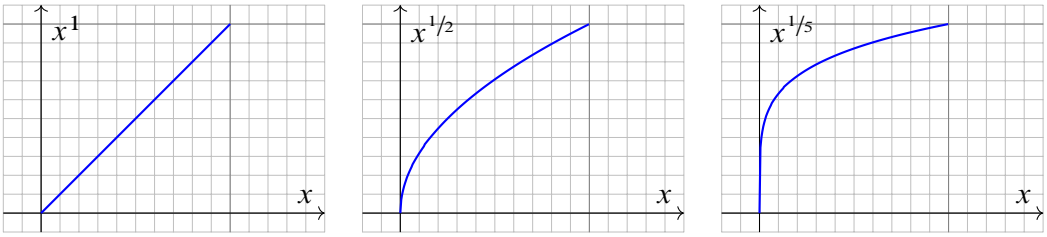


ABBILDUNG C:6. Die Skalierungsfunktionen $f(x) = x^\beta$ zur Hölder–Stetigkeit

Definition C2v. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Wir nennen $f : X \to Y$ *hölder–stetig* zum Exponenten $\alpha \in]0,1]$, wenn eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert sodass

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq C\, d_X(a,b)^\alpha \quad \text{für alle} \quad a, b \in X.$$

Mit $\mathscr{C}^{0,\alpha}(X,Y)$ bezeichnen wir die Menge aller hölder–stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ zum Exponenten α. Für $\alpha = 1$ ist dies die Lipschitz–Bedingung, für $0 < \alpha < 1$ hingegen ist die Hölder–Bedingung echt schwächer: Die obige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\beta$ und $0 < \beta \leq 1$ ist $\mathscr{C}^{0,\alpha}$–stetig für $0 < \alpha \leq \beta$ aber nicht für $\alpha > \beta$. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\beta \ln(x)$ und $f(0) = 0$ ist $\mathscr{C}^{0,\alpha}$–stetig für $0 < \alpha < \beta$ aber nicht für $\alpha \geq \beta$.

Analog zur Lipschitz–Norm definieren wir die *Hölder–Norm* zum Exponenten α durch

$$\| f \|_{\mathscr{C}^{0,\alpha}} := \sup \left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a,b)^\alpha} \;\middle|\; a \neq b \text{ in } X \right\}.$$

Für $\alpha = 1$ ist dies die Lipschitz–Norm. Genau dann gilt $\| f \|_{\mathscr{C}^{0,\alpha}} < \infty$, wenn die Abbildung $\mathscr{C}^{0,\alpha}$–stetig ist. Genau dann gilt $\| f \|_{\mathscr{C}^{0,\alpha}} = 0$, wenn f konstant ist.

Bemerkung. Die Hölder–Bedingung wird häufig auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ angewendet. Sie dient in der Analysis zur feineren Kontrolle, etwa wenn bloße Stetigkeit nicht genügt, aber Differenzierbarkeit zu viel verlangt wäre. Dies nutzt man zum Beispiel für die Regularitätstheorie partieller Differentialgleichungen, in der geometrischen Maßtheorie, für die Regularität Brownscher Pfade, etc. Eine ernsthafte Untersuchung streben wir hier nicht an. Uns dient die Hölder–Stetigkeit vornehmlich zur Illustration der diversen metrischen Stetigkeitsbegriffe: Sie schwächen die Dehnungsbeschränkungen immer weiter ab, bleiben aber doch der Metrik verhaftet. Erst der allgemeine Stetigkeitsbegriff des nächsten Abschnitts (§C3) vollzieht den radikalen Schritt einer rein topologischen Formulierung.

Übung C2w. Metrische Räume und hölder–stetige Abbildungen bilden eine Kategorie: Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, d_X) \to (X, d_X)$ ist lipschitz– und somit hölder–stetig, $\mathrm{id}_X \in \mathscr{C}^{0,1}$. Für $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ in $\mathscr{C}^{0,\alpha}$ und $g : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ in $\mathscr{C}^{0,\beta}$ gilt $g \circ f \in \mathscr{C}^{0,\alpha\beta}$.

Ist $(Y, |-|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, etwa $Y = \mathbb{K}^m$ mit euklidischer Norm, so ist auch $\mathscr{C}^{0,\alpha}(X,Y)$ ein Vektorraum mit punktweiser Verknüpfung, und die Hölder–Norm ist hierauf eine Halbnorm. Ist zudem $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, so können wir ableiten: Der Hölder–Raum $\mathscr{C}^{k,\alpha}(X,Y)$ ist die Menge aller k–mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : X \to Y$, deren k–te Ableitungen alle in $\mathscr{C}^{0,\alpha}(X,Y)$ liegen.

Wir können die Lipschitz– bzw. Hölder–Stetigkeit in einem Punkt $x_0 \in X$ lokalisieren. Wir nennen eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *hölder–stetig* zum Exponenten $\alpha \in]0, 1]$ im Punkt $x_0 \in X$, wenn Konstanten $\varepsilon, C \in R_{>0}$ existieren, sodass gilt:

$$d_Y(f(x_0), f(x)) \leq C\, d_X(x_0, x)^\alpha \quad \text{für alle} \quad x \in B(x_0, \varepsilon).$$

Abbildung C:7 veranschaulicht diese Bedingung für $\alpha = 1/2$ (links). Für $\alpha = 1$ (rechts) erhalten wir die Lipschitz–Bedingung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verläuft in einem Kegel der Steigung C. Für $\alpha > 1$ ist f in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = 0$.

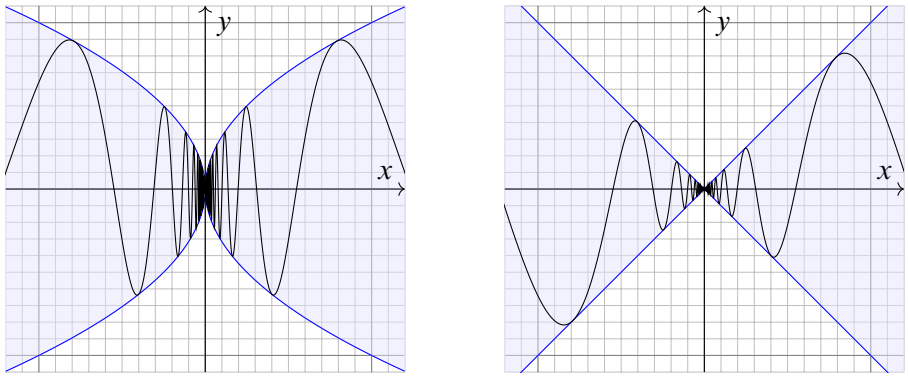


ABBILDUNG C:7. Beispiele zur Hölder–Stetigkeit in einem Punkt

Sinngemäß gilt dieselbe Graphik für beliebige Abbildungen $f : X \to Y$, wenn man $d_X(x_0, x)$ auf der x–Achse und $d_Y(f(x_0), f(x))$ auf der y–Achse abträgt.

Kommt so etwas in der Natur vor? Oder handelt es sich um eine überflüssige Spitzfindigkeit? Die *brownsche Bewegung* beschreibt die Wärmebewegung kleiner Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen, etwa Pollen in einem Wassertropfen. Durch die zahlreichen Stöße mit den winzig kleinen Wassermolekülen entsteht eine extrem unregelmäßige Bewegung. Das mathematische Modell ist der *Wiener–Prozess*, der in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine zentrale Rolle spielt. Er wird auch in der Finanzmathematik verwendet, etwa zur Modellierung von Aktienkursen an der Börse. Ein typischer Pfad dieser Bewegung ist überall hölder–stetig zu jedem Exponenten $\alpha < 1/2$ aber nirgends hölder–stetig zu $\alpha > 1/2$.

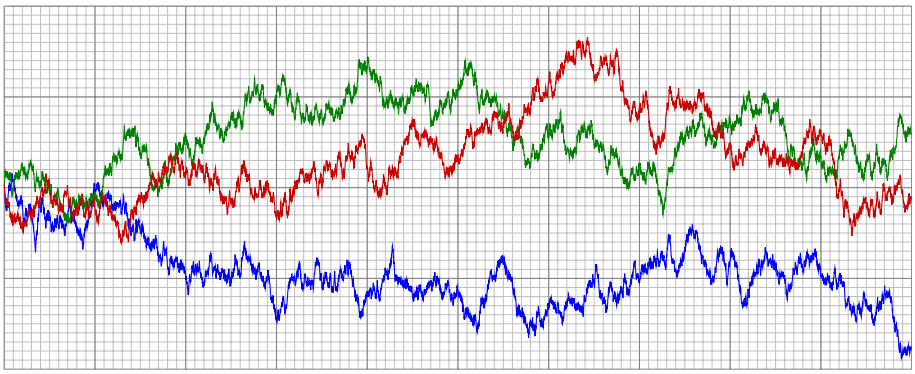
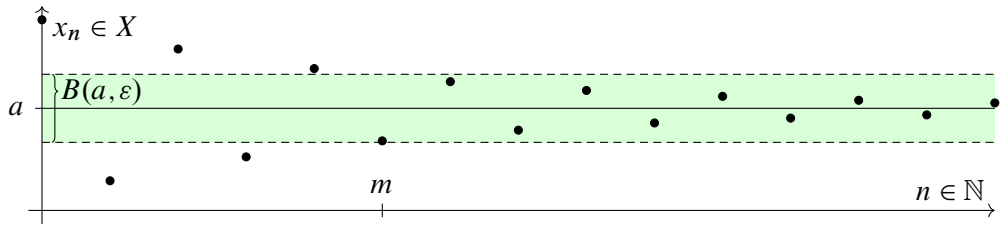


ABBILDUNG C:8. Drei Pfade einer brownschen Bewegung

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C3. Konvergenz und Stetigkeit

§C3a. Konvergenz von Folgen. Der Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}$ (B2I) überträgt sich unmittelbar auf jeden metrischen Raum (X,d): Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) *konvergiert* gegen einen Punkt $a \in X$, wenn der Abstand $d(x_n,a)$ schließlich beliebig klein wird:



Definition C3A. Gegeben seien eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein Punkt a in einem metrischen Raum (X,d). Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen a, wenn $d(x_n,a) \to 0$ gilt. Wir nennen die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann *konvergent* und a ihren *Grenzwert*. Formal schreiben wir dies so:

$$
\begin{aligned}
(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,d) \quad &:\Leftrightarrow \quad d(x_n,a) \to 0 \text{ für } n \to \infty \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : d(x_n,a) < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in B(a,\varepsilon) \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Jede Umgebung } U \text{ von } a \text{ enthält schließlich alle Folgenglieder } x_n.
\end{aligned}
$$

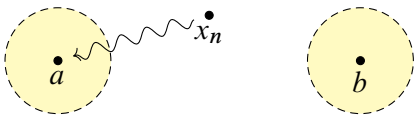
Die letzte Formulierung verwendet die Metrik nicht explizit, sondern nur offene Mengen! Somit ist Konvergenz eine topologische Eigenschaft: Sie hängt nur von der Topologie ab.

Bemerkung. Konvergenz in (X,d) ist eine *zweistellige Relation* zwischen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Punkten a. Wir schreiben kurz $x_n \to a$, oder $x_n \xrightarrow{d} a$ zur Betonung der Metrik. Zur Betonung der Indizes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir „$x_n \to a$ für $n \to \infty$“, oder „$\lim_{n\to\infty} x_n = a$“. Die Negation schreiben wir $x_n \not\to a$: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen a.

Ohne explizite Nennung eines Grenzwertes sagen wir, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert in* (X,d), wenn ein Punkt $a \in X$ existiert, für den $x_n \to a$ gilt. Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) nicht konvergiert, also kein Grenzwert in X existiert, so *divergiert* die Folge.

Die bequeme Schreibweise $\lim x_n = a$ ist problematisch, solange die Konvergenz nicht geklärt ist: Der Grenzwert „$\lim x_n$“ ist nicht definiert, falls die Folge x_n divergiert.

Kann eine Folge womöglich mehrere Grenzwerte haben? Nein, das ist in metrischen Räumen unmöglich. Wir erinnern hierzu an die Hausdorff–Eigenschaft (C2O):



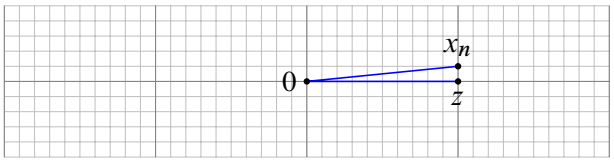
Satz C3B (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** *Sei (X,d) ein ein metrischer Raum. Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) hat höchstens einen Grenzwert: Aus $x_n \to a$ und $x_n \to b$ folgt $a = b$.*

BEWEIS. Sei $x_n \to a$ und $a \neq b$. Es existieren $U \in \mathscr{U}_a$ und $V \in \mathscr{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \to a$ existiert $m \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq m$, also $x_n \notin V$, somit $x_n \not\to b$. □

☞ **Beispiel.** Für jeden normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(V,|-|)$ definiert die Norm eine Metrik durch ☜ $d(x,y)=|x-y|$. Die Konvergenz $x_n\to a$ bedeutet hier also $|x_n-a|\to 0$.

Für $\mathbb{R}^m$ mit ℓ^p–Norm gilt $|u_i-v_i|\le|u-v|_p\le m\max|u_i-v_i|$. Somit ist $|x_n-a|_p\to 0$ gleichbedeutend mit der koordinatenweisen Konvergenz $x_{n,i}\to a_i$ für $i=1,\dots,m$.

Die Analysis untersucht auch die Konvergenzgeschwindigkeit, speziell in der Numerik wird die Metrik explizit für Fehlerschranken genutzt, zum Beispiel bei der Intervallhalbierung $|x_n-a|\le \mathrm{const}/2^n$ (C3R) oder beim Newton–Verfahren $|x_n-a|\le \mathrm{const}/2^{2^n}$ (C4T).



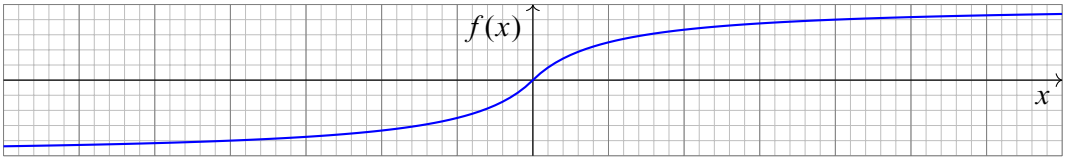
☞ **Beispiel.** Für die Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die übliche, euklidische Metrik d (C2A) und ☜ zum Kontrast die französische Eisenbahnmetrik d_{SNCF} (C2D).

Die Punktfolge $x_n=(1,2^{-n})$ konvergiert gegen $z=(1,0)$ bezüglich der euklidischen Metrik, denn für die Abstände gilt $d(x_n,z)=2^{-n}\to 0$. Hingegen gilt $x_n\not\to z$ bezüglich der französischen Eisenbahnmetrik, denn $d_{\mathrm{SNCF}}(x_n,z)\ge 2$, und somit $d_{\mathrm{SNCF}}(x_n,z)\not\to 0$.

Wir zeigen noch mehr: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert in $(\mathbb{R}^2,d_{\mathrm{SNCF}})$. Hierzu müssen wir $x_n\not\to a$ für jeden Punkt $a\in\mathbb{R}^2$ nachweisen. Wie zeigt man das möglichst geschickt? In unserem Beispiel gelingt es leicht: Wir erkennen $d_{\mathrm{SNCF}}(x_p,x_q)\ge 2$ für alle $p\ne q$. Demnach kann kein Ball $B(a,\varepsilon)$ mit $\varepsilon\le 2$ schließlich alle Folgenglieder enthalten!

Was hier als nützlicher Trick erscheint, ist tatsächlich eine allgemeine Methode: Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy–Folge (C4A), das heißt, $\delta_n=\sup_{p,q\ge n} d(x_p,x_q)$ ist eine Nullfolge. Erfüllt eine Folge dieses notwendige Kriterium nicht, so kann sie nicht konvergieren. In vollständigen Räumen ist dieses Kriterium sogar hinreichend.

☞ **Beispiel C3C.** Konvergenz in $\mathbb{R}$ entspricht dem euklidischen Abstand $d(x,y)=|x-y|$. ☜ Für die Konvergenz in $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ mussten wir die Konvergenz $x_n\to\pm\infty$ gesondert erklären (B2J). Zu einer einheitlichen Definition gelangen wir mit einer geeigneten Metrik:



Die Abbildung $f:\bar{\mathbb{R}}\to[-1,+1]:x\mapsto x/(1+|x|)$, $f(\pm\infty)=\pm 1$, ist bijektiv (A1B); ihre Umkehrabbildung ist $g:[-1,+1]\to\bar{\mathbb{R}}:y\mapsto y/(1-|y|)$, $g(\pm 1)=\pm\infty$. Beide sind ordnungserhaltend, und $x_n\to x$ in $\bar{\mathbb{R}}$ ist äquivalent zu $f(x_n)\to f(x)$ in $[-1,+1]$.

Wir erhalten somit auf der erweiterten Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$ eine Metrik $e:\bar{\mathbb{R}}\times\bar{\mathbb{R}}\to[0,2]$ durch $e(x,y)=|f(x)-f(y)|$. Die Konvergenz von Folgen in $(\bar{\mathbb{R}},<)$ bezüglich der Ordnung entspricht dann der Konvergenz in $(\bar{\mathbb{R}},e)$ bezüglich der Metrik.

Die Metriken d und e induzieren dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}$, sie sind also *topologisch äquivalent* (§C3e). Dennoch sind die metrischen Eigenschaften sehr verschieden: Die Metrik e ist beschränkt, aber d nicht. Auf $\mathbb{R}$ ist die Metrik d vollständig (C4C), aber e nicht.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Bemerkung.** Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ oder in einem normierten Vektorraum $(V,|-|)$ ☜ ist die Unterscheidung zwischen $x_n \to +\infty$ und $x_n \to -\infty$ mangels Anordnung sinnlos.

Es lässt sich aber noch die bestimmte Divergenz $x_n \to \infty$ definieren durch $|x_n| \to +\infty$. Wir werden in Kapitel F auf das Thema „Kompaktifizierung“ zurückkommen.

Für Grenzwerte in metrischen Räumen gelten die vertrauten Rechenregeln aus $\mathbb{R}$:

☞ **Satz C3D.** *In jedem metrischen Raum (X,d) bzw. normierten Vektorraum $(V,|-|)$ gilt:* ☜

(0) Aus $x_n \to a$ folgt $d(x_n,b) \to d(a,b)$ bzw. $|x_n - b| \to |a-b|$, insb. $|x_n| \to |a|$.

Falls ein Grenzwert in (X,d) existiert, so ist er eindeutig:

(1) Aus der Konvergenz $x_n \to a$ und $x_n \to b$ folgt $a = b$.

In jedem normierten Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C}$ gilt die Linearität des Grenzwertes:

(2) Aus $x_n \to a$ und $y_n \to b$ folgt $x_n + y_n \to a + b$ und $\lambda x_n \to \lambda a$ für $\lambda \in \mathbb{K}$.

In $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ und jeder normierten Algebra gilt die Multiplikativität des Grenzwertes:

(3) Aus $x_n \to a$ und $y_n \to b$ folgt $x_n y_n \to ab$. Für alle $x \in A$ mit $|x| < 1$ gilt $x^n \to 0$.

In $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ und jeder normierten Algebra gilt für die Inversion:

(4) Gilt $y_n \to b$ und sind alle y_n und b invertierbar, so folgt $1/y_n \to 1/b$.

In der erweiterten Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$ können wir zudem die Ordnung nutzen:

(5) Aus $x_n \le y_n$ sowie $x_n \to a$ und $y_n \to b$ folgt $a \le b$. (Monotonie)
(6) Aus $a_n \le x_n \le b_n$ sowie $a_n \to a$ und $b_n \to a$ folgt $x_n \to a$. (Gendarmen-Lemma)
(7) Genau dann gilt $x_n \to a$, wenn $\liminf x_n = \limsup x_n = a$ gilt.

☞ BEWEIS. Zur Wiederholung aus der Analysis beweise man dies als Übung! □ ☜

✻ **C3D.** (0) Dank der umgekehrten Dreiecksungleichung C2J gilt $|d(x_n,b) - d(a,b)| \le d(x_n,a) \to 0$.

Im Folgenden genügt es, die Rechenregeln (1–7) in $\mathbb{R}$ nachzuprüfen (Analysis 1), und dank (0) Grenzwerte direkt auf die Abstandswerte in $\mathbb{R}$ anzuwenden. Ich führe zudem die Epsilontik in $\mathbb{R}$ noch einmal aus.

(1) Die Eindeutigkeit haben wir bereits in Satz C3B nachgerechnet. Es folgt auch mit (0): Aus $x_n \to a$ und $x_n \to b$ folgt $d(x_n,b) \to 0$ und $d(x_n,b) \to d(a,b)$. Da Grenzwerte in $\mathbb{R}$ eindeutig sind, folgt $d(a,b) = 0$.

(2) Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren $m',m'' \in \mathbb{N}$ sodass $|a - x_n| < \varepsilon/2$ für $n \ge m'$ und $|b - y_n| < \varepsilon/2$ für $n \ge m''$. Für $m = \max\{m',m''\}$ und alle $n \ge m$ gilt dann $|(a+b) - (x_n + y_n)| = |a - x_n + b - y_n| \le |a - x_n| + |b - y_n| < \varepsilon$.

(3) Es gilt $|ab - x_n y_n| = |(a - x_n)b + x_n(b - y_n)| \le |a - x_n| \cdot |b| + |x_n| \cdot |b - y_n|$. Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \ge m$ zugleich gilt $|a - x_n| < \min\{1, \varepsilon/(2|b|+1)\}$ und $|b - y_n| < \varepsilon/(2|a|+2)$. Hieraus folgt $|ab - x_n y_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge m$. Ebenso behandelt man die Skalarmultiplikation in (2).

(4) Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \ge m$ gilt $|b - y_n| < \min\{|b|/2, \varepsilon|b|^2/2\}$. Hieraus folgt $|1/b - 1/y_n| = |y_n - b|/(|b| \cdot |y_n|) < \varepsilon$ für alle $n \ge m$. Dies zeigt $1/y_n \to 1/b$.

(5) Wir nehmen zunächst $a,b \in \mathbb{R}$ an. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \ge m$ gilt $a - \varepsilon < x_n \le y_n < b + \varepsilon$. Also folgt $a - b < 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dies ist nur für $a - b \le 0$ möglich, also $a \le b$.

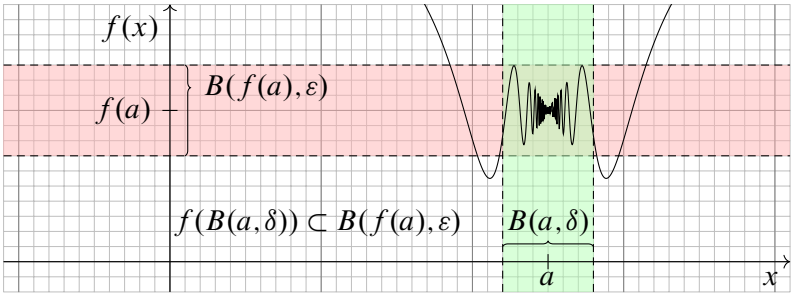
(6) Wir nehmen zunächst $a \in \mathbb{R}$ an. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \ge m$ gilt sodass $a - \varepsilon < a_n \le x_n \le b_n < a + \varepsilon$. Somit gilt $a - \varepsilon \le x_n \le a + \varepsilon$ für alle $n \ge m$, also $x_n \to a$.

(7) Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist ein Spezialfall von (6) mit $a_n = \inf_{k \ge n} x_n$ und $b_n = \sup_{k \ge n} x_n$. Es bleibt „$\Rightarrow$“: Angenommen, es gilt $x_n \to a$ und $a \in \mathbb{R}$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $m \in \mathbb{N}$, sodass $a - \varepsilon \le x_n \le a + \varepsilon$. Somit gilt $a - \varepsilon \le \liminf x_n \le \limsup x_n \le a + \varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, folgt $\liminf x_n = \limsup x_n = a$.

In (5,6,7) beweist man die verbleibenden Fälle $a,b = \pm\infty$ entsprechend.

§C3b. Stetigkeit. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

Anschaulich erklärt ist eine Abbildung $f : X \to Y$ stetig im Punkt $a \in X$, wenn Punkte nahe bei a in X abgebildet werden auf Punkte nahe bei $f(a)$ in Y. Für die Messung von Abständen stehen uns hier die Metriken d_X auf X und d_Y auf Y zur Verfügung, aber was genau bedeutet „nahe bei a“ und „nahe bei $f(a)$“? Wir verlangen genauer, dass Punkte *hinreichend nahe* bei a in X abgebildet werden auf Punkte *beliebig nahe* bei $f(a)$ in Y:



Anschauung und Präzisierung. Für eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umschreibt man die Stetigkeit gemeinhin so, dass der Graph von f „keine Sprünge macht“, oder sich „ohne abzusetzen in einem Zug zeichnen lässt“. Das mag der Intuition nützen, ist aber keine tragfähige Definition: Was ist ein „Sprung“? Können Sie wirklich eine brownsche Bewegung (C:8) zeichnen? Hängt die Stetigkeit von f etwa von Geschick und Tagesform des Zeichners ab? Unsere Anschauung kann die Definition motivieren, sie aber nicht ersetzen. Insbesondere mit stetigen Funktionen tut sich unsere Intuition häufig schwer, daher sind genaue Definitionen und akkurate Beweisführung unentbehrlich! Probieren Sie es und machen Sie den Test: Ist die Funktion $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2)$ stetig oder nicht?

Definition C3E. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig im Punkt* $a \in X$, wenn zu jedem noch so kleinen $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$ gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X \;:\; \big[d_X(a,x) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon\big]$$

Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig* (auf X), wenn sie in jedem Punkt $a \in X$ stetig ist:

$$\forall a \in X \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X \;:\; \big[d_X(a,x) < \delta \;\Rightarrow d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon\big]$$

Strenger nennen wir $f : X \to Y$ *gleichmäßig stetig* auf dem Raum (X, d), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall a \in X \;\; \forall x \in X \;:\; \big[d_X(a,x) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon\big]$$

Mit $\mathscr{C}(X,Y) = \mathscr{C}(X, d_X; Y, d_Y)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Abbildungen. Ist f bijektiv sowie f und f^{-1} stetig, so nennen wir f einen *Homöomorphismus* (A1A).

Übung C3F. Metrische Räume und ihre stetigen Abbildungen bilden eine Kategorie (H1A), das heißt: Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, d_X) \to (X, d_X)$ ist stetig. Sind $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ und $g : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ stetig, dann auch die Komposition $g \circ f : (X, d_X) \to (Z, d_Z)$.

Homöomorphie ist daher eine Äquivalenzrelation: Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d)$ ist ein Homöomorphismus, das Inverse eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus, und die Komposition von zwei Homöomorphismen ist ein Homöomorphismus.

Die Menge $\mathrm{Homeo}(X, d)$ aller Homöomorphismen $f : (X, d) \to (X, d)$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen (wie zuvor Isometrien C2Q).

Dasselbe gilt für gleichmäßig stetige Abbildungen (wie zuvor C2U und C2W).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C3c. Stetigkeit ist eine topologische Eigenschaft. Für $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ sind Lipschitz– und gleichmäßige Stetigkeit metrische Begriffe, denn sie hängen empfindlich von den betrachteten Metriken d_X und d_Y ab. Hingegen ist die wesentlich schwächere Forderung der Stetigkeit ein topologischer Begriff, denn wie schon Konvergenz (C3A) lässt sie sich allein auf offene Mengen zurückführen und so für $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ formulieren:

Satz C3G. *Für jede Abbildung $f : X \to Y$ metrischer Räume sind äquivalent:*

(1) Die Abbildung f ist folgenstetig: Aus $x_n \to a$ in X folgt $f(x_n) \to f(a)$ in Y.
(2) Die Abbildung f ist stetig auf X (im Sinne obiger ε–δ–Definition C3E).
(3) Für jede offene Menge V in Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X.
Für jede abgeschlossene Menge B in Y ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X.

Lokal um jeden Punkt $a \in X$ sind äquivalent:

(4) Die Abbildung f ist folgenstetig in a: Aus $x_n \to a$ in X folgt $f(x_n) \to f(a)$ in Y.
(5) Die Abbildung f ist stetig im Punkt a (im Sinne obiger ε–δ–Definition C3E).
(6) Für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(a)$ ist $f^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von a.

Bemerkung. Man beachte, dass die Formulierungen (3) „das Urbild jeder offenen Menge ist offen“ und (6) „das Urbild einer Umgebung ist eine Umgebung“ die Metrik nicht mehr explizit enthält. Diese Charakterisierungen werden wir ab Kapitel D nutzen, um die Stetigkeit von Abbildungen allein durch offene Mengen bzw. Umgebungen zu definieren.

BEWEIS. Zum Verständnis der Definitionen beweise man dies als Übung! □

✻ **C3G.** Alle 12 Implikationen zwischen (1), (2), (3), (4) sind wahr, aber manche sind umständlich zu beweisen. Auch ist ein Ringschluss hier vielleicht nicht die beste Wahl. Wir zeigen „(1) ⇔ (2) ⇔ (3) ⇔ (4)“.

„(2) ⇒ (1)“: Angenommen f ist stetig und es gilt $x_n \to a$; wir wollen $f(x_n) \to f(a)$ zeigen. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dank Stetigkeit von f existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$. Dank Konvergenz $x_n \to a$ existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq m$ gilt $x_n \in B(a,\delta)$. Somit gilt $f(x_n) \in B(f(a),\varepsilon)$ für alle $n \geq m$, wie gewünscht.

„(1) ⇒ (2)“: Diese Implikation zeigt man am leichtesten per Kontraposition. Wenn f nicht stetig ist, dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass für jedes $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $f(B(a,\delta)) \not\subset B(f(a),\varepsilon)$. Zu $n = 1, 2, 3, \ldots$ wählen wir $x_n \in B(a, 1/n)$ mit $f(x_n) \notin B(f(a),\varepsilon)$. Es gilt dann $x_n \to a$ aber nicht $f(x_n) \to f(a)$.

„(2) ⇒ (3)“: Sei $V \subset Y$ offen sowie $U = f^{-1}(V)$ und $a \in U$. Da V offen ist, existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(f(a),\varepsilon) \subset V$. Da f stetig ist, existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$. Damit gilt $B(a,\delta) \subset U$.

„(3) ⇒ (2)“: Zu $a \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $B(f(a),\varepsilon)$ offen in Y. Nach (3) ist das Urbild $U = f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$ offen in X. Also existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a,\delta) \subset U$. Damit gilt $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$.

Die Äquivalenz „(3a) ⇔ (3b)“ ist klar durch Komplementbildung. Ausführlich geht dies wie folgt. „(3a) ⇒ (3b)“: Ist $B \subset Y$ abgeschlossen, so ist $V = Y \setminus B$ offen, somit auch $f^{-1}(V)$ nach (3), und $f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ ist abgeschlossen. „(3b) ⇒ (3a)“: Ist $V \subset Y$ offen, so ist $B = Y \setminus V$ abgeschlossen, somit auch $f^{-1}(B)$ nach (4), und $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ ist offen.

Die Äquivalenz „(4) ⇔ (5) ⇔ (6)“ zeigt man wörtlich wie „(1) ⇔ (2) ⇔ (3)“.

Bemerkung. In der Analysis geht es über die *qualitative* Stetigkeit hinaus auch *quantitativ* darum, wie schnell $f(x)$ mit x variiert. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ oder in einem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum ist das wichtigste Instrument die Differenzierbarkeit zur linearen Approximation, oder höhere Ableitungen zur polynomialen Approximation. Zur feineren Untersuchung dienen ebenso die Lipschitz–Stetigkeit (§C2f) oder die Hölder–Stetigkeit (§C2g). Speziell in der Numerik wird die Metrik explizit für Fehlerschranken genutzt.

§C3d. Beispiele. Erste Beispiele stetiger Abbildungen erhalten wir wie folgt:

☞ **Beispiel.** Auf jeder normierten $\mathbb{K}$–Algebra A ist jede Polynomfunktion $f : A \to A$ stetig, wobei $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in $\mathbb{K}$ oder in A. ☜

Für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gilt zudem: Jede rationale Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$ mit Polynomen p, q ist stetig in jedem Punkt x mit $q(x) \neq 0$. Aus $x_n \to x$ folgt $f(x_n) \to f(x)$ dank C3D und C3G. Gleiches gilt, wenn wir von Polynomen zu Potenzreihen übergehen (C5F).

Es gibt selbstverständlich auch unstetige Funktionen, hierzu zwei berühmte Beispiele:

☞ **Beispiel.** Die *Dirichlet–Funktion* $\mathbf{I}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $x \mapsto 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist nirgends stetig. Das Produkt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\mathbf{I}_{\mathbb{Q}}(x)$ ist stetig in 0 aber nirgends sonst. Allgemeiner: Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $g\mathbf{I}_{\mathbb{Q}}$ stetig auf $A = g^{-1}(\{0\})$ aber nirgends sonst. ☜

☞ **Beispiel.** Die *kleine Dirichlet–Funktion* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(p/q) = 1/q$ für jeden gekürzten Bruch $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist unstetig in jedem rationalen Punkt $x \in \mathbb{Q}$, aber stetig in jedem irrationalen Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (siehe Abbildung C:9). ☜

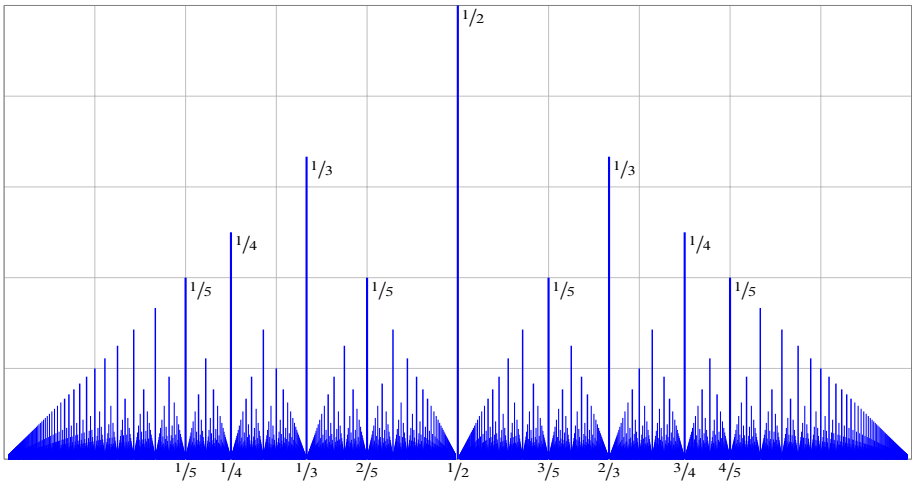


ABBILDUNG C:9. Die kleine Dirichlet–Funktion

☞ **Beispiel.** Auf den rationalen Zahlen betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$ für $x^2 > 2$ und $f(x) = 1$ für $x^2 \leq 2$. Diese „springt“ von 0 nach 1 zurück nach 0, dennoch ist sie in jedem Punkt $a \in \mathbb{Q}$ stetig! Zum Vergleich betrachten wir auf den reellen Zahlen die entsprechende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $x^2 > 2$ und $g(x) = 1$ für $x^2 \leq 2$. Diese ist in den Punkten $\pm\sqrt{2}$ nicht stetig, ganz so wie wir dies erwarten würden. ☜

☞ **Übung C3H.** Unsere metrischen Stetigkeitsbegriffe hängen wie folgt zusammen: ☜

(1) Gleichmäßige Stetigkeit impliziert Stetigkeit. Umgekehrt jedoch nicht:
$f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig.
(2) Hölder–Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit. Umgekehrt ist $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/\ln(x)$ und $f(0) = 0$ gleichmäßig stetig aber nicht hölder–stetig.
(3) Lipschitz–Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit. Umgekehrt jedoch nicht:
$f : [0, 1] \to [0, 1]$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig aber nicht lipschitz–stetig.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Hingegen sind für jede lineare Abbildung $A : E \to F$ normierter Räume äquivalent:

(4) A ist stetig.
(5) A ist stetig in 0.
(6) A ist beschränkt, $\|A\| < \infty$.
(7) A ist lipschitz–stetig.
(8) A ist gleichmäßig stetig.

Insbesondere ist jede $\mathbb{R}$–lineare oder affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$, lipschitz–stetig und somit (gleichmäßig) stetig bezüglich der euklidischen Normen (C2T).

✻ **C3H.** (1) Die Implikation folgt unmittelbar aus der Definition durch Vorziehen eines Allquantors.

Als rationale Funktion ist $f(x) = 1/x$ auf $]0,1]$ stetig. Angenommen, zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass aus $|x-y| < \delta$ stets $|1/x - 1/y| < \varepsilon$ folgt. Wir wählen $x = \min\{1, \delta, 1/\varepsilon\}$ und $y = x/2$. Dann gilt $|x-y| = x/2 < \delta$ aber $|1/x - 1/y| = 1/x \geq \varepsilon$. Somit ist f nicht gleichmäßig stetig.

(2) Angenommen $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ist hölder–stetig, das heißt, es gilt $d_Y(f(x), f(y)) \leq C\, d_X(x,y)^\alpha$ für alle $x, y \in X$, mit Konstanten $C > 0$ und $0 < \alpha \leq 1$. Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen wir $\delta = \varepsilon^{1/\alpha}/C$. Für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x,y) < \delta$ gilt dann $d_Y(f(x), f(a)) \leq C\, d_X(x,y)^\alpha < C\delta^\alpha = \varepsilon$. Die angegebene Funktion f ist stetig, denn für $x \searrow 0$ gilt $f(x) = 1/\ln(x) \nearrow 0 = f(0)$. Dank der Kompaktheit des Intervalls $[0, 1/2]$ ist f sogar gleichmäßig stetig. Wäre f hölder–stetig in 0, so gäbe es Konstanten $C > 0$ und $0 < \alpha \leq 1$ mit $|f(x)| \leq C x^\alpha$ für $x \in [0, 1/2]$, also insbesondere $C \geq \lim_{x \searrow 0} |x^{-\alpha}/\ln x| = \lim_{x \searrow 0} (\alpha x^{-\alpha}) = \infty$ nach der Regel von Hospital.

(3) Angenommen $d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x,y)$ für alle $x, y \in X$, mit einer Konstanten $0 < L < \infty$. Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\delta = \varepsilon/L$. Für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x,y) < \delta$ gilt dann $d_Y(f(x), f(a)) \leq L\, d_X(x,y) < L\delta = \varepsilon$.

Die Funktion f ist gleichmäßig stetig: Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\delta = \varepsilon^2 > 0$ und behaupten, dass für $|x-y| < \varepsilon^2$ stets $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$ gilt. Wir können $0 \leq y \leq x \leq 1$ annehmen: Es gilt dann $y^2 \leq xy$ also $y \leq \sqrt{xy}$ und somit $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 = x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - y < \varepsilon^2$. Dank Monotonie der Wurzelfunktion folgt $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$.

Die Implikation „(4) ⇒ (5)“ ist trivial. Wir zeigen „(5) ⇒ (6)“ durch Kontraposition. Zu $\|A\| = \infty$ existieren $v_n \in E$ mit $|v_n| \leq 1$ und $|Av_n| \geq n$, also $v_n/n \to 0$ aber $Av_n/n \not\to 0$, somit ist A nicht stetig in 0. Die Implikation „(6) ⇒ (7)“ folgt aus $|Au - Av| \leq \|A\| \cdot |u - v|$. Aussagen (3) und (1) zeigen „(7) ⇒ (8) ⇒ (4)“.

☞ **§C3e. Topologisch äquivalente Metriken.** Wie wir gesehen haben lassen sich die Begriffe *Konvergenz* und *Stetigkeit* auf den topologischen Grundbegriff der *offenen Mengen* zurückführen. Es kann dabei durchaus vorkommen, dass sehr unterschiedliche Metriken dieselben offenen Mengen definieren. Dies veranlasst uns zu folgender Definition: ☜

✍ **Definition C3I.** Zwei Metriken $d, e : X \times X \to [0, \infty]$ heißen *(topologisch) äquivalent*, ✍ wenn sie dieselben offenen Mengen definieren, kurz $\mathcal{T}(X,d) = \mathcal{T}(X,e)$.

Wir nennen d *feiner* als e (oder e *gröber* als d), wenn $\mathcal{T}(X,d) \supset \mathcal{T}(X,e)$ gilt. Äquivalent hierzu ist, dass jeder ε–Ball bezüglich e einen δ–Ball bezüglich d enthält:

$$\forall a \in X \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \;:\; B_{(X,d)}(a, \delta) \subset B_{(X,e)}(a, \varepsilon).$$

Zwei Metriken sind topologisch äquivalent wenn d feiner ist als e und zugleich e feiner ist als d. Wir sagen, d ist *echt feiner* als e, wenn d feiner ist als e aber nicht umgekehrt.

☞ **Bemerkung.** In vielen Fällen kommt es uns nicht auf die Metrik selbst an, sondern nur auf ☜ Konvergenz und Stetigkeit. Wir können dann von der betrachteten Metrik zu jeder äquivalenten Metrik übergehen. Die wesentliche Struktur, die hierbei erhalten bleibt, sind die *offenen Mengen*. Ab Kapitel D werden wir den kühnen Schritt wagen, nur noch die offenen Mengen zugrundezulegen. Wir erhalten hieraus den Begriff des *topologischen Raumes* $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einem System $\mathcal{T}$ offener Mengen.

Proposition C3J. *Für je zwei Metriken d, e auf X sind gleichbedeutend:*

(1) Die Metrik d ist feiner als die Metrik e (im Sinne der Definition C3I).
(2) Jede Umgebung bezüglich e ist auch eine Umgebung bezüglich d.
(3) Jede offene Menge bezüglich e ist auch offen bezüglich d.
(4) Die Identität $\mathrm{id}_X : (X,d) \to (X,e) : x \mapsto x$ ist stetig.
(5) Gilt $x_n \to a$ bezüglich d, dann gilt auch $x_n \to a$ bezüglich e.
(6) Ist $f : X \to Y$ stetig bezüglich e, dann ist f stetig bezüglich d.
(7) Ist $f : Y \to X$ stetig bezüglich d, dann ist f stetig bezüglich e.

Seien $|-|$ und $\|-\|$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum V. Genau dann ist $|-|$ feiner als $\|-\|$, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $\|x\| \le L\,|x|$ für alle $x \in V$ gilt.

Aus Symmetrie folgt: Genau dann definieren $|-|$ und $\|-\|$ auf V dieselbe Topologie, wenn es Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass $\ell\,|x| \le \|x\| \le L\,|x|$ für alle $x \in V$ gilt.

BEWEIS. Die Implikationen (1) ⇒ (2) ⇒ (3) folgen unmittelbar aus den Definitionen, und (3) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (1) aus der Charakterisierung C3G stetiger Abbildungen.

Die Implikation (4) ⇒ (6) folgt durch Komposition (C3F) mit $\mathrm{id} : (X,d) \to (X,e)$, die Umkehrung (6) ⇒ (4) erhält man aus der stetigen Abbildung $f = \mathrm{id} : (X,e) \to (X,e)$.

Die Implikation (4) ⇒ (7) folgt durch Komposition (C3F) mit $\mathrm{id} : (X,d) \to (X,e)$, die Umkehrung (7) ⇒ (4) erhält man aus der stetigen Abbildung $f = \mathrm{id} : (X,d) \to (X,d)$.

Die Bälle bezüglich $|-|$ bzw. $\|-\|$ bezeichnen wir mit $B(a,r)$ bzw. $B'(a,r)$.

„⇒“ Ist $|-|$ feiner als $\|-\|$, so existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(0,\delta) \subset B'(0,1)$. Wir setzen $L = 2/\delta$. Für $x \neq 0$ gilt $|x/L|x||| \le \delta/2 < \delta$, somit $\|x/L|x|\| < 1$. Hieraus folgt $\|x\| \le L\,|x|$.

„⇐“ Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ setzen wir $\delta = \varepsilon/L$, und erhalten $B(a,\delta) \subset B'(a,\varepsilon)$. □

Übung C3K. Zur Illustration einige klassische Beispiele: Sei $1 \le p < q \le \infty$.

(1) Auf $\mathbb{R}^n$ sind die ℓ^p–Norm und die ℓ^q–Norm äquivalent.
(2) Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die ℓ^p–Norm echt feiner als die ℓ^q–Norm.
(3) Auf $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ ist die L^q–Norm echt feiner als die L^p–Norm.
(4) Auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind sie unvergleichbar, das heißt keine feiner als die andere.

✻ **C3K.** (1) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt die Ungleichung $|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le n \cdot |x|_\infty$, siehe C1I.

(2) Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zeigen wir $\|f\|_q \le \|f\|_p$. Für $\|f\|_p = 0$ und $\|f\|_p = \infty$ ist dies klar. Andernfalls skalieren wir mit $\lambda = \|f\|_p^{-1}$ und erhalten $\|f\|_p = 1$ und somit $\|f(k)\| \le 1$ für alle k. Hieraus folgt $\|f(k)\|^q \le \|f(k)\|^p$ und somit $\|f\|_q \le \|f\|_p$. Das bedeutet, aus $\|f_n\|_p \to 0$ folgt $\|f_n\|_q \to 0$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Als Gegenbeispiel betrachten wir $f_n(k) = n^{-1/p}$ für $1 \le k \le n$ und $f_n(k) = 0$ sonst. Es gilt $\|f_n\|_p = 1$ und $\|f_n\|_q = n^{1/q-1/p} \to 0$. Somit ist die ℓ^p–Norm echt feiner als die ℓ^q–Norm.

(3) Für messbare Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zeigen wir die Ungleichung $\|f\|_p \le \|f\|_q \cdot |a-b|^{1/p-1/q}$. Hierzu nutzen wir die Hölder–Ungleichung (C1O): Für Exponenten $1 \le r,s \le \infty$ mit $1/r + 1/s = 1$ gilt $\|g \cdot h\|_1 \le \|g\|_r \cdot \|h\|_s$. Wir setzen $g = |f|^p$ und $h = 1$ sowie $r = q/p > 1$ und $s = q/(q-p) > 1$ und erhalten $\|f\|_p^p = \|g\|_1 \le \|g\|_r \cdot \|1\|_s = \|f\|_q^p \cdot |a-b|^{1-p/q}$. Das bedeutet, aus $\|f_n\|_q \to 0$ folgt $\|f_n\|_p \to 0$. Die Umkehrung hingegen gilt nicht: Als Gegenbeispiel definieren wir $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n > 0$ als Dreiecksfunktion der Höhe n und Breite $2/n$ durch $f_n(x) = n - n^2|x|$ für $|x| \le 1/n$ und $f(x) = 0$ sonst. Es gilt $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)^s \,\mathrm{d}x = \frac{2n^{s-1}}{s+1}$. Für $p < q$ gilt dann $\|f_n^{1/q}\|_p \to 0$, aber $\|f_n^{1/q}\|_q = 1$. Dieses Beispiel liegt in $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$; durch Skalierung und Verschieben erhalten wir hieraus dieselbe Aussage für $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

(4) In $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gilt das vorige Beispiel mit $\|f_n^{1/q}\|_p \to 0$ aber $\|f_n^{1/q}\|_q = 1$. Zudem liegen die Funktionen $g_n = f_{1/n}$ alle in $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Für diese gilt $\|g_n^{1/p}\|_q \to 0$ aber $\|g_n^{1/p}\|_p = 1$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C3f. Skalierung von Metriken. Jede Metrik können wir wie folgt skalieren:

Beispiel C3L (gestauchte / gestutzte Metrik)**.** Ist $d : X \times X \to [0,\infty]$ eine Metrik, so auch

$$d' : X \times X \to [0,1] : \qquad (x,y) \mapsto \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},$$

die wir die *gestauchte Metrik* nennen. Hieraus lässt sich d rekonstruieren gemäß

$$d : X \times X \to [0,\infty] : \quad (x,y) \mapsto \frac{d'(x,y)}{1-d'(x,y)}.$$

Hierbei entspricht $d(x,y) = \infty$ dem Wert $d'(x,y) = 1$ und umgekehrt. Ebenso ist

$$d^* : X \times X \to [0,1] : \qquad (x,y) \mapsto \min\{\, d(x,y), 1 \,\}$$

eine Metrik auf X, die wir die *gestutzte Metrik* nennen. Alle drei Metriken d, d' und d^* sind topologisch äquivalent. Das hat einen einfachen und allgemeinen Grund:

Die hierbei verwendete Skalierungsfunktion $f : [0,\infty] \to [0,\infty]$ mit $f(t) = t/(1 \pm t)$ bzw. $f(t) = \min\{t, 1\}$ erfreut sich folgender Eigenschaften:

(1) Es gilt $f(0) = 0$ und $f(t) > 0$ für $t > 0$, das heißt, f ist positiv definit.
(2) Für alle $s \le t$ in $[0,\infty]$ gilt $f(s) \le f(t)$, das heißt, f ist monoton wachsend.
(3) Für alle $s,t \in [0,\infty]$ gilt $f(s+t) \le f(s) + f(t)$, das heißt, f ist subadditiv.

In diesem Fall ist mit d auch $d' = f \circ d$ eine Metrik und feiner als d. Ist die Funktion f zudem stetig in 0, dann sind die Metriken d und d' topologisch äquivalent. *Beispiele:*

Mit d ist auch d^α für $0 < \alpha \le 1$ eine Metrik und topologisch äquivalent zu d (C2K), genannt *Schneeflockenmetrik* (C7I). Genau dann ist $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ hölder–stetig (C2V) zum Exponenten α, wenn $f : (X, d_X^\alpha) \to (Y, d_Y)$ lipschitz–stetig ist (C2S).

Die Funktion $f = \mathbf{I}_{]0,\infty]} : [0,\infty] \to \{0,1\}$ erfüllt die obigen Bedingungen (1–3). Für jede Metrik d ist $d' = f \circ d$ die diskrete Metrik, und i.A. nicht topologisch äquivalent.

BEWEIS. Die Eigenschaften (1–3) prüft man in allen genannten Beispielen leicht nach. Damit übertragen sich die Eigenschaften (M0–3) der Metrik d wie folgt auf $d' = f \circ d$:

(M0) Für $x = y$ gilt $d(x,y) = 0$, also $d'(x,y) = f(d(x,y)) = 0$.
(M1) Für $x \neq y$ gilt $d(x,y) > 0$, also $d'(x,y) = f(d(x,y)) > 0$.
(M2) Aus $d(x,y) = d(y,x)$ folgt $f'(x,y) = f(d(x,y)) = f(d(y,x)) = d'(y,x)$.
(M3) Für (X,d) gilt $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. Dank (2) und (3) folgt

$$d'(x,z) = fd(x,z) \le f(d(x,y) + d(y,z)) \le fd(x,y) + fd(y,z) = d'(x,y) + d'(y,z).$$

Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $\delta = f(\varepsilon) > 0$, sodass aus $0 \le f(t) < \delta$ stets $0 \le t < \varepsilon$ folgt. Aus $d'(a,x) < \delta$ folgt somit $d(a,x) < \varepsilon$, also $B_{(X,d')}(a,\delta) \subset B_{(X,d)}(a,\varepsilon)$.

Ist f stetig in 0, so existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für $0 \le t < \delta$ stets $0 \le f(t) < \varepsilon$ gilt. Aus $d(a,x) < \delta$ folgt $d'(a,x) < \varepsilon$, also $B_{(X,d)}(a,\delta) \subset B_{(X,d')}(a,\varepsilon)$. □

Bemerkung. Die Subadditivität von Funktionen $f, g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist ein interessantes Thema, auch wenn wir dies hier nicht vertiefen. Zum Beispiel gilt: Ist $f(t)/t$ fallend, so ist f subadditiv. Allgemeiner, ist f/g fallend und g subadditiv, etwa $g(t) = t$, so ist auch f subadditiv. Schließlich gilt: Ist eine Skalierung f stetig in 0, so ist sie stetig auf ganz $\mathbb{R}_{\ge 0}$.

§C3g. Abstand zwischen Mengen. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir interessieren uns insbesondere für stetige Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ oder in weitere Räume, die wir bereits gut kennen und verstehen. Die Metrik selbst liefert uns einen reichhaltigen Fundus: Metrische Räume erlauben viele stetige Abbildungen nach $\mathbb{R}$!

Definition C3M. Der Abstand eines Punktes $a \in X$ zu einer Teilmenge $B \subset X$ bzw. zwischen zwei Teilmengen $A, B \subset X$ ist definiert als das Infimum der punktweisen Abstände:

$$d(a,B) := \inf\{\, d(a,b) \mid b \in B \,\}$$
$$d(A,B) := \inf\{\, d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B \,\}$$

Dies erweitert die Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ zu Abbildungen $d : X \times \mathfrak{P}X \to [0,\infty]$ und $d : \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X \to [0,\infty]$. Für $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ gilt dabei $d(A,B) = d(a,B) = d(a,b)$.

Aus $A \cap B \neq \emptyset$ folgt $d(A,B) = 0$. Dank Symmetrie $d(a,b) = d(b,a)$ gilt $d(A,B) = d(B,A)$. Die Dreiecksungleichung hingegen gilt nicht: Für $A = [0,1]$ und $B = [2,3]$ und $C = [4,5]$ zum Beispiel in $\mathbb{R}$ gilt $d(A,C) = 3$ aber $d(A,B) + d(B,C) = 1 + 1 = 2$.

Für $a \in B$ gilt $d(a,B) = 0$. Umgekehrt folgt aus $d(a,B) = 0$ nicht $a \in B$, wie das Beispiel $a = 0$ und $B =]0,1]$ in $\mathbb{R}$ zeigt. Noch drastischer: Für die dichte Teilmenge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt $d(x,\mathbb{Q}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für abgeschlossene Mengen erhalten wir folgendes Ergebnis:

Proposition C3N. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A, B, A_i \subset X$ Teilmengen.*

(1) Die Funktion $f : X \to [0,\infty] : x \mapsto d(x,A)$ erfüllt $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$, ist also lipschitz–stetig. Gleiches gilt für $g(x) = \inf_{i\in I} d(x,A_i)$ und $h(x) = \sup_{i\in I} d(x,A_i)$.

(2) Für jeden Punkt $x \in A$ gilt $d(x,A) = 0$. Genau dann ist A abgeschlossen, wenn auch die Umkehrung gilt, also für alle $x \in X$ mit $d(x,A) = 0$ stets $x \in A$ gilt.

(3) Zu $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt existiert $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f^{-1}(\{0\}) = A$ und $f^{-1}(\{1\}) = B$. Zu $A \neq \emptyset \neq B$ gelingt dies durch die Urysohn–Funktion

$$f = f_{A,B} : X \to [0,1] : x \mapsto \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

BEWEIS. Zum Verständnis der Definitionen beweise man dies als Übung! □

✻ **C3N.** (1) Die Ungleichung gilt für $d(x,y) = \infty$, ebenso für $d(x,y) < \infty$ und $f(x) = f(y) = \infty$. Im Folgenden seien alle drei endlich. Für $a \in A$ gilt $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$. Als Infimum über $a \in A$ erhalten wir $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$, also $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$. Wenn wir x und y vertauschen, so erhalten wir entsprechend $d(y,A) - d(x,A) \leq d(y,x)$. Wir schließen daraus $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$. Dies entspricht der umgekehrten Dreiecksungleichung (C2J), hier für den Abstand von Punkten zu Mengen.

Für das Infimum gilt $g(x) = \inf_{i\in I} d(x,A_i) = d(x,A)$ für $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Für betrachten das Supremum: Für $x, y \in X$ und $a \in A_i$ gilt $d(x,A_i) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$. Als Infimum über $a \in A$ erhalten wir $d(x,A_i) \leq d(x,y) + d(y,A_i) \leq d(x,y) + h(y)$. Das Supremum über $i \in I$ ergibt $h(x) \leq d(x,y) + h(y)$, daher $h(x) - h(y) \leq d(x,y)$. Ebenso für x, y vertauscht. Wir erhalten $|h(x) - h(y)| \leq d(x,y)$.

(2) Ist A abgeschlossen und $x \in X \smallsetminus A$, so existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x,\varepsilon) \subset X \smallsetminus A$, also folgt $d(x,A) \geq \varepsilon$. Sei umgekehrt $f^{-1}(0) = A$: Die Teilmenge $\{0\}$ in $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen, somit auch $A = f^{-1}(\{0\})$ in X (C3G).

(3) Für $B = \emptyset$ setzen wir $f(x) = \min\{d(x,A), 1/2\}$. Für $A = \emptyset$ setzen wir $f(x) = \max\{1 - d(x,B), 1/2\}$. Für $A = B = \emptyset$ erhalten wir $f(x) = 1/2$ für alle $x \in X$. Im Folgenden gelte $A \neq \emptyset \neq B$. Dank C3L dürfen wir d als endlich annehmen. Für alle $x \in X$ gilt $d(x,A) + d(x,B) > 0$, denn für $x \notin A$ gilt $d(x,A) > 0$, und für $x \in A$ gilt $x \notin B$ und somit $d(x,B) > 0$. Die Abbildung f ist also auf ganz X definiert. Als Komposition stetiger Abbildungen ist f stetig. Außerdem gilt $f(x) \in [0,1]$ wie behauptet. Es gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$, und $f(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in B$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§C3h. Abschluss einer Menge.** Der *Abschluss* einer Teilmenge A in (X,d) ist ☜

$$\overline{A} := \{\, x \in X \mid d(x,A) = 0 \,\} = \{\, x \in X \mid \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \,:\, a_n \to x \,\}.$$

„$\subset$“: Gilt $d(x,A) = 0$, so existiert zu $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit $d(x,a_n) \leq 2^{-n}$, also $a_n \to x$.
„$\supset$“: Gilt $a_n \to x$ mit $a_n \in A$, so gilt $d(x,A) \leq d(x,a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $d(x,A) = 0$.

Wir nennen $A \subset X$ *dicht* in (X,d), wenn $\overline{A} = X$ gilt, das heißt: Jeder Punkt $x \in X$ ist Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, lässt sich also beliebig genau approximieren.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die *ε–Umgebung* von A in (X,d) durch

$$U_\varepsilon(A) := \{\, x \in X \mid d(x,A) < \varepsilon \,\} = \bigcup\nolimits_{a\in A} B(a,\varepsilon).$$

Damit gilt $\bigcap_{\varepsilon>0} U_\varepsilon(A) = \{\, x \in X \mid d(x,A) = 0 \,\} = \overline{A}$. Insbesondere sehen wir hieran: Der Abschluss $\overline{A} = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{1/k}(A)$ ist abzählbarer Durchschnitt offener Umgebungen.

☞ **§C3i. Hausdorff–Abstand zwischen Teilmengen.** Sei (X,d) ein metrischer Raum, etwa der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$. Hierin seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Teilmengen. ☜

Wir setzen $\delta(A,B) := \sup\{\, 0, d(a,B) \mid a \in A \,\}$. Dies misst, wie weit sich Punkte $a \in A$ höchstens von der Menge B entfernen. Speziell für die leere Menge gilt $\delta(\emptyset,B) = 0$.

Beispiel. Für $A = [0,3]$ und $B = \mathbb{D}^2$ in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ finden wir $\delta(A,B) = 2$ und $\delta(B,A) = 1$.

Übung C3O. Der *Hausdorff–Abstand* abgeschlossener Mengen $A, B \subset X$ ist

$$d_{\mathrm{H}}(A,B) := \sup\{\, \delta(A,B), \delta(B,A) \,\}.$$

Dies definiert eine Metrik $d_{\mathrm{H}} : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to [0,\infty]$ auf $\mathscr{X} = \{\, A \subset X \mid A \text{ abgeschlossen} \,\}$:

(1) Genau dann gilt $\delta(A,B) = 0$, wenn $A \subset B$, und $d_{\mathrm{H}}(A,B) = 0$, wenn $A = B$.
(2) Per Definition gilt Symmetrie $d_{\mathrm{H}}(A,B) = d_{\mathrm{H}}(B,A)$.
(3) Es gilt die Dreiecksungleichung $d_{\mathrm{H}}(A,B) \leq d_{\mathrm{H}}(A,C) + d_{\mathrm{H}}(C,B)$.

✻ **C3O.** (1) Aus $A \subset B$ folgt $d(a,B) = 0$ für jedes $a \in A$, also $\delta(A,B) = 0$. Gilt umgekehrt $\delta(A,B) = 0$, so folgt $d(a,B) = 0$ für jedes $a \in B$, also $a \in B$ da B abgeschlossen ist (C3N), somit $A \subset B$. Die Bedingung $d_{\mathrm{H}}(A,B) = 0$ bedeutet $\delta(A,B) = \delta(B,A) = 0$, also $A \subset B$ und $B \subset A$, somit $A = B$. Symmetrie (2) ist klar.

(3) Für alle $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ gilt $d(a,B) \leq d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ für die Metrik d. Durch Übergang zum Infimum über $b \in B$ erhalten wir $d(a,B) \leq d(a,c) + d(c,B) \leq d(a,c) + \delta(C,B)$. Durch Übergang zum Infimum über $c \in C$ erhalten wir $d(a,B) \leq d(a,C) + \delta(C,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$. Durch Übergang zum Supremum über $a \in A$ erhalten wir schließlich $\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$. Demnach erfüllt δ die Dreiecksungleichung, und somit auch d_{H}: Wir wissen bereits $\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B) \leq d_{\mathrm{H}}(A,C) + d_{\mathrm{H}}(C,B)$ und ebenso $\delta(B,A) \leq \delta(B,C) + \delta(C,A) \leq d_{\mathrm{H}}(B,C) + d_{\mathrm{H}}(C,A)$; hieraus folgt $d_{\mathrm{H}}(A,B) \leq d_{\mathrm{H}}(A,C) + d_{\mathrm{H}}(C,B)$.

Bemerkung. Der Hausdorff–Abstand von A und B lässt sich wie folgt umformulieren:

$$d_{\mathrm{H}}(A,B) = \inf\{\, r \in \mathbb{R}_{>0} \mid A \subset U_r(B) \wedge B \subset U_r(A) \,\}$$

Bemerkung. Wir können $d_{\mathrm{H}} : \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty] : (A,B) \mapsto d_{\mathrm{H}}(A,B)$ für *alle* Teilmengen $A, B \subset X$ definieren. Wir erhalten dann aber im Allgemeinen nur eine Halbmetrik. Beispiel: Die Mengen $A = [0,1]$ und $B = A \cap \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ erfüllen $A \neq B$ aber $d_{\mathrm{H}}(A,B) = 0$.

Allgemein gilt $d_{\mathrm{H}}(A,B) = d_{\mathrm{H}}(\overline{A},\overline{B})$. Genau dann gilt $d_{\mathrm{H}}(A,B) = 0$, wenn $\overline{A} = \overline{B}$. Es ist daher ausreichend, und traditionell üblich, den Hausdorff–Abstand nur für abgeschlossene Teilmengen in (X,d) zu betrachten.

§C3j. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Es ist ein nützliches Konstruktionsprinzip, eine komplizierte Funktion aus einfachen zu konstruieren durch einen Grenzwertprozess $f_n \to f$. Möchte man aus stetigen f_n auch eine stetige Grenzfunktion f erhalten, so muss man hierzu geeignete Vorkehrungen treffen: Punktweise Konvergenz allein reicht hierzu nicht aus, der richtige Begriff ist hier die gleichmäßige Konvergenz.

Definition C3P. Sei X eine Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Eine Folge von Funktionen $f_n : X \to Y$ *konvergiert punktweise* gegen $f : X \to Y$, wenn für jeden Punkt $x \in X$ Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ in (Y, d) vorliegt. Das bedeutet ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ punktweise} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \,:\, d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \,:\, d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Hingegen sagen wir, f_n *konvergiert gleichmäßig* gegen f, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ für alle $x \in X$ und alle $n \geq m$ gilt. Also:

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad &:\Leftrightarrow \quad d(f_n, f) = |d_Y(f_n, f)|_X \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;\; \forall x \in X \,:\, d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Man beachte die unterschiedliche Position des Allquantors $\forall x \in X$: Der letzte Teil bedeutet $d(f_n, f) \leq \varepsilon$ bezüglich der Supremumsmetrik $d(f, g) = \sup\{ d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X \}$. Genau dann konvergiert $f_n : X \to Y$ gleichmäßig gegen $f : X \to Y$, wenn $d(f_n, f) \to 0$.

Beispiel. Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn für das Supremum des Abstandes gilt $|f_n - f|_{[0,1]} = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. Die Polynome $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}/(2k)!$ konvergieren in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x) = \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}/(2k)!$. Sie konvergieren aber nicht gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$: Das ist hier besonders drastisch, denn f ist beschränkt, aber f_n für $n \geq 1$ nicht! Demnach gilt $|f - f_n|_{\mathbb{R}} = \infty$, und somit $|f - f_n|_{\mathbb{R}} \not\to 0$. Hingegen konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[-r, r]$, siehe C5F.

Satz C3Q. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f_n : X \to Y$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f : X \to Y$ konvergiert, also $d(f_n, f) \to 0$. Dann gilt:*

(1) Sind alle f_n stetig in $a \in X$, dann auch f.
(2) Sind alle f_n stetig auf ganz X, dann auch f.
(3) Sind alle f_n gleichmäßig stetig auf X, dann auch f.
(4) Sind alle f_n sogar L–lipschitz–stetig, dann auch f.

BEWEIS. (1) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $d(f_n, f) \to 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n, f) \leq \varepsilon/3$. Da zudem f_n stetig ist, existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, a) < \delta$ die Ungleichung $d_Y(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3$ gilt. Daraus folgt dank Dreiecksungleichung:

$$d_Y(f(x), f(a)) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(a)) + d_Y(f_n(a), f(a)) < \varepsilon$$

Aussage (2) ist damit klar. Aussage (3) beweist man wörtlich genauso. Bei Aussage (4) nutzen wir, dass alle Funktionen f_n dieselbe lipschitz–Konstante L haben, und erhalten

$$d_Y(f(x), f(a)) \leq \varepsilon/3 + L\, d_X(x, a) + \varepsilon/3.$$

Da dies für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, schließen wir $d_Y(f(x), f(a)) \leq L\, d_X(x, a)$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C3k. Zwischenwerte, Minimum und Maximum. Stetige Funktionen haben viele gute Eigenschaften. Wir erinnern zunächst an den Zwischenwertsatz. Diese topologische Eigenschaft werden wir in Kapitel G zum Begriff des Zusammenhangs ausbauen.

Satz C3R. *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat die Zwischenwerteigenschaft: Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \le y \le f(b)$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \le x \le b$ sodass $f(x) = y$ gilt.*

Hier liefert die *Halbierungsmethode* ein praktisches Näherungsverfahren, und wie immer verdanken wir die Existenz eines Grenzwertes der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$:

BEWEIS. Wir beginnen mit dem Intervall $[a_0,b_0] := [a,b]$ und halbieren es schrittweise. Sei $[a_n,b_n] \subset [a,b]$ gegeben und $f(a_n) \le y \le f(b_n)$. Für den Mittelpunkt $c := (a_n+b_n)/2$ gilt entweder $f(c) \le y$, und wir setzen $[a_{n+1},b_{n+1}] := [c,b_n]$, oder es gilt $f(c) > y$, und wir setzen $[a_{n+1},b_{n+1}] := [a_n,c]$. Dank dieser Konstruktion gilt $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le b$, also $a_n \nearrow x \in [a,b]$, und aus $f(a_n) \le y$ folgt $f(x) \le y$ durch Grenzübergang (C3D). Ebenso gilt $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge a$, also $b_n \searrow x' \in [a,b]$, und aus $f(b_n) \ge y$ folgt $f(x') \ge y$. Aus $a_n \le x \le x' \le b_n$ und $|a_n - b_n| = 2^{-n}|a-b|$ folgt $x = x'$, also $f(x) = y$. □

Als zweites Ergebnis erinnern wir an den Satz vom Minimum und Maximum. Diese topologische Eigenschaft werden wir in Kapitel F zum Begriff der Kompaktheit ausbauen.

Satz C3S. *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt Minimum und Maximum an, das heißt, es existieren $x_0, x_1 \in [a,b]$ sodass $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$ für alle $x \in [a,b]$.*

BEWEIS. Sei $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Wir beginnen mit dem Intervall $[a_0,b_0] := [a,b]$. Sei $[a_n,b_n] \subset [a,b]$ gegeben und $\sup_{x\in[a_n,b_n]} f(x) = M$. Gilt für den Mittelpunkt $c := (a_n+b_n)/2$ die Eigenschaft $\sup_{x\in[a_n,c]} f(x) = M$, so setzen wir $[a_{n+1},b_{n+1}] := [a_n,c]$; andernfalls gilt $\sup_{x\in[c,b_n]} f(x) = M$, und wir setzen $[a_{n+1},b_{n+1}] := [c,b_n]$. Es gilt dann $a_n \nearrow x \swarrow b_n$. Wir wählen $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$ mit $y_n \nearrow M$. Es existiert $x_n \in [a_n,b_n]$ mit $y_n \le f(x_n) \le M$, also $f(x_n) \to M$. Wegen $a_n \le x_n \le b_n$ gilt $x_n \to x$ nach dem Gendarmen-Lemma (C3D). Wegen Stetigkeit von f gilt $f(x_n) \to f(x)$, also $f(x) = M$ dank Eindeutigkeit des Grenzwertes. □

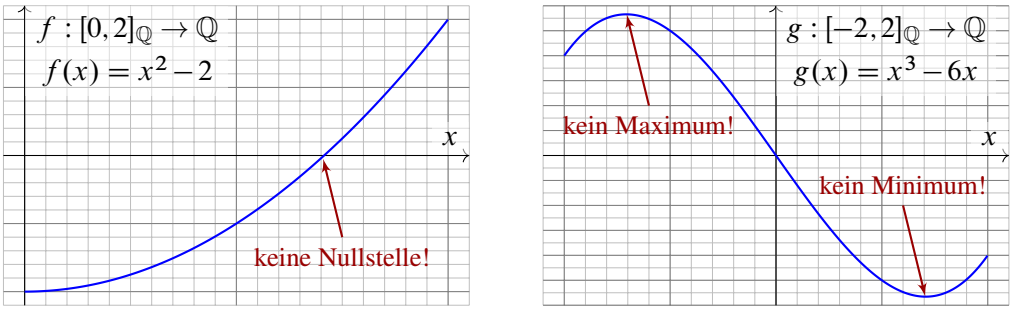


ABBILDUNG C:10. Die Funktionen f, g sind stetig, aber f hat nicht die Zwischenwerteigenschaft, und g hat weder Maximum noch Minimum!

Bemerkung C3T. Maximumssatz C3S und Zwischenwertsatz C3R benötigen die Stetigkeit von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wie das Beispiel $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ und $f(0) = 0$ zeigt. Für beide Sätze ist zudem die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wesentlich siehe C:10.

☞ **§C3l. Zusammenhang.** Den Zwischenwertsatz werden wir in Kapitel G zum Begriff ☜ des Zusammenhangs ausbauen. Einstweilen nutzen wir den Begriff wie folgt:

Übung C3U. Für jeden metrischen Raum (X,d) bzw. allgemein jeden topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ mit $X \neq \emptyset$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ hat die Zwischenwerteigenschaft.
(2) Jede stetige Funktion $f : X \to \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ ist konstant.
(3) Für jede offene Zerlegung $X = A \sqcup B$ gilt entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

In diesem Fall nennen wir den Raum $(X,\mathcal{T})$ *zusammenhängend*.

(4) Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend dank Zwischenwertsatz C3R.
Umgekehrt ist jede zusammenhängende Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.
(5) Sei $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so auch das Bild $f(X)$.
Insbesondere ist Zusammenhang eine Invariante unter Homöomorphismen.

Das folgende Kriterium ist etwas geometrischer und manchmal einfacher anzuwenden: Ein *Weg* im Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$. Dabei heißt $a = \gamma(0)$ der *Anfangspunkt* und $b = \gamma(1)$ der *Endpunkt* von γ. Wir sagen auch, γ *läuft in* X *von* a *nach* b, oder γ *verbindet* a *mit* b *in* X. Der Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu jedem Paar $a,b \in X$ einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$ gibt.

(6) Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.
Die Umkehrung gilt nicht: Das klassische Gegenbeispiel in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist der Teilraum $C = A \cup B$ mit $A = \{\,(x, \sin(\pi/x)) \mid x \in]0,1]\,\}$ und $B = \{0\} \times [-1,+1]$.
(7) Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist (weg)zusammenhängend.
Der Raum $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend für $n \geq 2$ aber nicht für $n = 1$.
Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist wegzusammenhängend für $n \geq 1$ aber nicht für $n = 0$.
(8) Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen sind Zusammenhang und Wegzusammenhang äquivalent.

☞ **§C3m. Kompaktheit.** Einen metrischen bzw. allgemein topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ ☜ nennen wir *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält. Das bedeutet: Zu jeder Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch offene Mengen $U_i \in \mathcal{T}$ existieren Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$, für die $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ gilt. Zum Beispiel ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$ nicht kompakt, denn die offene Überdeckung $(B(0,r))_{r \in \mathbb{N}}$ enthält keine endliche Teilüberdeckung. Aus der Analysis kennen Sie folgende Charakterisierungen:

Übung C3V. Für jede Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Topologie sind äquivalent:

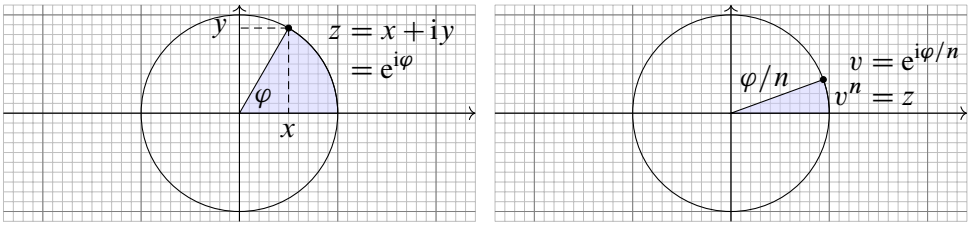
(1) Der Teilraum X mit euklidischer Topologie ist kompakt.
(2) Die Teilmenge X ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.
(3) Jede Folge in X besitzt eine Teilfolge, die in X konvergiert.
(4) Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt Maximum und Minimum an.

Allgemein gilt:

(5) Ein diskreter Raum X ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.
(6) Sei X kompakt. Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ ist kompakt.
In jedem metrischen (oder hausdorffschen) Raum gilt auch die Umkehrung.
(7) Sei $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so auch das Bild $f(X)$.
Insbesondere ist Kompaktheit eine Invariante unter Homöomorphismen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C3n. Existenz reeller und komplexer Wurzeln. Aus dem Zwischenwertsatz C3R folgt insbesondere die Existenz reeller und komplexer Wurzeln:



Lemma C3w. *Sei* $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ *die Einheitskreislinie und* $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(1) Für jedes $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *existiert eine n–te Wurzel* $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit* $u^n = r$.
(2) Für jedes $s \in \mathbb{S}^1$ *existiert eine n–te Wurzel* $v \in \mathbb{S}^1$ *mit* $v^n = s$.
(3) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ *existiert eine n–te Wurzel* $w \in \mathbb{C}$ *mit* $w^n = z$.

BEWEIS. (1) Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : u \mapsto u^n$ ist stetig (C3D), streng wachsend mit $f(0) = 0$ und $f(u) \nearrow +\infty$ für $u \nearrow +\infty$. Dank Zwischenwertsatz (C3R) existiert zu jedem Wert $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ genau ein Urbild $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $u^n = r$. Wir schreiben hierfür $\sqrt[n]{r} := u$

(3) Wir wollen auch zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ eine n–te Wurzel konstruieren, also $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$. Für $n = 2$ gelingt dies explizit wie folgt: Für jede gegebene komplexe Zahl $z = x \pm \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \geq 0$ setzen wir $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und

$$w = \sqrt{\frac{|z| + x}{2}} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}.$$

Man rechnet $w^2 = z$ direkt nach. Wir betrachten nun den allgemeinen Fall $n \geq 1$ und suchen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$. Für $z = 0$ löst dies nur $w = 0$. Für $z \neq 0$ zerlegen wir $z = rs$ in den *Betrag* $r = |z| > 0$ und die *Richtung* $s = z/|z| \in \mathbb{S}^1$. Dank (1) und (2) existieren $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $u^n = r$ und $v \in \mathbb{S}^1$ mit $v^n = s$. Für $w = uv$ folgt $w^n = u^n v^n = rs = z$.

(2) Es bleibt zu $s \in \mathbb{S}^1$ eine Wurzel $v \in \mathbb{S}^1$ mit $v^n = s$ zu konstruieren. Am elegantesten gelingt dies mit der komplexen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (C5K): Jede komplexe Zahl $s \in \mathbb{S}^1$ lässt sich schreiben als $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit einem *Argument* $\varphi \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $v^n = s$ hat dann die n verschiedenen Lösungen $v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/n + 2\pi\mathrm{i}k/n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Alternativ können wir auch ohne die komplexe Exponentialfunktion allein mit dem Zwischenwertsatz die Existenz n–ter Wurzeln beweisen; statt transzendenter Funktionen nutzen wir dabei nur reelle Polynome. Da wir Quadratwurzeln schon konstruieren können, bleibt die Aussage (2) nur noch für ungerades $n = 2m + 1$ zu beweisen. Wir betrachten einen Punkt $v = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{S}^1$ mit $x \in [-1, 1]$ und $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Der Realteil der n–ten Potenz $v^n = (x + \mathrm{i}y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\mathrm{i}y)^k$ ist ein *Polynom* in x, nämlich

$$f(x) := \mathrm{Re}(v^n) = \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{2j} (-1)^j x^{n-2j} y^{2j} = \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{2j} (-1)^j x^{n-2j} (1 - x^2)^j .$$

Es gilt $f(1) = 1$ und $f(-1) = -1$. Für jeden Punkt $s \in \mathbb{S}^1$ gilt $\mathrm{Re}(s) \in [-1, 1]$. Dank Zwischenwertsatz C3R existiert $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = \mathrm{Re}(s)$. Wir setzen $y := \sqrt{1 - x^2}$ und $v := x + \mathrm{i}y$. Aus $v \in \mathbb{S}^1$ folgt $v^n \in \mathbb{S}^1$, und aus $\mathrm{Re}(v^n) = \mathrm{Re}(s)$ folgt $v^n = s$ oder $v^n = \overline{s}$. Im zweiten Falle fehlt eine Konjugation, und für $\overline{v} = x - \mathrm{i}y$ gilt $\overline{v}^n = s$ wie gewünscht. □

§C3o. Der Fundamentalsatz der Algebra. Wir sind nun in der glücklichen Lage, den Fundamentalsatz der Algebra (B3D) zu beweisen. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Polynomfunktion vom Grad $n \geq 1$, also $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Wir zeigen, dass eine komplexe Nullstelle existiert, also $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$.

Den folgenden Beweis fand Jean-Robert ARGAND (1768–1822) im Jahre 1814. Wir zeigen zunächst, dass $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|f(z_0)| > 0$ kein Minimum von $|f|$ sein kann. Genauer:

Lemma C3x. *Zu $|f(z_0)| > 0$ existiert $z_1 \in \mathbb{C}$ beliebig nahe an z_0 mit $|f(z_1)| < |f(z_0)|$.*

BEWEIS. Statt f betrachten wir $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(z_0 + z)/f(z_0)$ und zeigen, dass $|g(0)| = 1$ kein lokales Minimum von $|g|$ ist. Auch g ist ein Polynom vom Grad n, also $g(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n$ mit $b_k, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ und $1 \leq k \leq n$ und $b_k, b_n \neq 0$. Dank C3W gibt es $s \in \mathbb{S}^1$ mit $b_k s^k = -|b_k|$. Für $z = rs$ finden wir $g(rs) = 1 - |b_k| r^k + \cdots + b_n r^n s^n$. Für den Betrag gilt dann $|g(rs)| \leq \big|1 - |b_k| r^k\big| + \cdots + |b_n| r^n$. Für $0 \leq r \leq |b_k|^{-1/k}$ wird hieraus $|g(rs)| \leq 1 - r^k\big(|b_k| - |b_{k+1}| r - \cdots - |b_n| r^{n-k}\big)$. Für $r > 0$ ausreichend klein ist der Term in Klammern positiv. Somit ist $|g(z)| < 1$, also ist $|g(0)| = 1$ nicht minimal. □

Argand schloss hieraus, dass es eine Stelle $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$ geben muss. Wir wissen, dass dieser Schluss im Allgemeinen nicht zulässig ist, denn es gibt Funktionen, die kein Minimum annehmen. Zum Beispiel hat $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{>0} : z \mapsto 1/(1 + |z|^2)$ ebenfalls die Eigenschaft aus dem vorigen Lemma C3X, aber dennoch keine Nullstelle! Dass diese Pathologie für Polynomfunktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht auftritt, mag plausibel scheinen, bedarf aber eines Beweises. Wir wissen zum Beispiel aus C3T, dass Polynome über $\mathbb{Q}$ ihre Maxima und Minima nicht immer annehmen. Wir nutzen daher ein Kompaktheitsargument:

Lemma C3Y. *Der Absolutbetrag $|f| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ nimmt ein Minimum an.*

BEWEIS. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} & a_n z^n = f(z) - a_{n-1} z^{n-1} - \cdots - a_1 z - a_0 \\ \Rightarrow \quad & |a_n z^n| \leq |f(z)| + |a_{n-1} z^{n-1}| + \cdots + |a_1 z| + |a_0| \\ \Rightarrow \quad & |f(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n - |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} - \cdots - |a_1| \cdot |z| - |a_0| \end{aligned}$$

Diese untere Schranke ist ein reelles Polynom in $|z|$ und geht gegen $+\infty$ für $|z| \to +\infty$. Somit existiert $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sodass $|f(z)| \geq |f(0)|$ für $|z| \geq r$. Wie in Satz C3S folgt daraus: Die stetige Funktion $|f| : [-r, r]^2 \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum an: Es existiert $z_0 \in [-r, r]^2$ mit $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ für alle $z \in [-r, r]^2$, und damit auch für alle $z \in \mathbb{C}$. □

Beide Lemmata zusammen beweisen den Fundamentalsatz der Algebra (B3D): Nach C3Y nimmt $|f(z)|$ ein Minimum in $z_0 \in \mathbb{C}$ an. Nach C3X gilt $|f(z_0)| = 0$, also $f(z_0) = 0$.

Bemerkung. Dass die stetige Funktion $|f| : \bar{B}(0, r) \to \mathbb{R}$ ihr Minimum annimmt, zeige ich hier *ad hoc*, um den schönen Fundamentalsatz möglichst direkt und früh zu beweisen. Die Existenz von Minimum und Maximum folgt allgemein aus der Kompaktheit von $\bar{B}(0, r)$ bzw. $[-r, r]^2$, die wir in Kapitel F ausführlich diskutieren wollen.

Bemerkung. Im Gegensatz zu $\mathbb{R}[\mathrm{i}]$ ist der Körper $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ nicht algebraisch abgeschlossen. Der Fundamentalsatz der Algebra beruht auf der Vollständigkeit des geordneten Körpers $\mathbb{R}$: Diese wird im Beweis zweimal benutzt, in Form des Zwischenwertsatzes (C3R) zur Existenz komplexer Wurzeln (C3W) und dann zur Existenz eines Minimums (C3Y).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C4. Vollständige metrische Räume

§C4a. Durchmesser einer Menge. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Den *Durchmesser* einer Teilmenge $A \subset X$ definieren wir als das Supremum aller Abstände in A:

$$\operatorname{diam} A := \sup\bigl\{\, d(x,y) \;\bigm|\; x,y \in A \,\bigr\}.$$

Beispiel. Dank Dreiecksungleichung gilt $\operatorname{diam} \bar B(a,r) \le 2r$, denn für alle $x,y \in \bar B(a,r)$ gilt $d(x,y) \le d(x,a) + d(a,y) \le 2r$. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ gilt $\operatorname{diam} \bar B(a,r) = 2r$.

Für jeden Raum X mit diskreter Metrik (C2C) hingegen gilt $\operatorname{diam} \bar B(a,r) = 1$ falls $r > 1$ und $|X| \ge 2$, und $\operatorname{diam} \bar B(a,r) = 0$ falls $0 \le r < 1$ oder $X = \{a\}$.

Bemerkung. Aus $A \subset B$ folgt $\operatorname{diam} A \le \operatorname{diam} B$. Für $A \subset \bar B(a,r)$ folgt $\operatorname{diam} A \le 2r$. Umgekehrt gilt $A \subset \bar B(a,r)$ für $a \in X$ und $r = d(a,A) + \operatorname{diam} A$, denn für alle $x,y \in A$ gilt $d(a,x) \le d(a,y) + d(y,x) \le d(a,y) + \operatorname{diam} A$; die linke Seite hängt nicht von y ab, wir können also rechts zum Infimum über y übergehen und erhalten $d(a,x) \le d(a,A) + \operatorname{diam} A$.

§C4b. Cauchy–Folgen und Vollständigkeit. Zu einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) hat das *Endstück* $E_n = \{\, x_k \mid k \ge n \,\}$ den Durchmesser $\delta_n = \operatorname{diam} E_n = \sup_{p,q\ge n} d(x_p,x_q)$. Aus $x_n \to a$ folgt $\operatorname{diam} E_n \to 0$, denn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $E_n \subset B(a,\varepsilon)$, also $\operatorname{diam} E_n \le \operatorname{diam} B(a,\varepsilon) \le 2\varepsilon$. Dies motiviert folgende Definition:

Definition C4A. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) heißt *Cauchy–Folge*, wenn $\delta_n := \sup_{p,q\ge n} d(x_p,x_q)$ eine Nullfolge ist. In Quantorenschreibweise:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \forall p,q \ge n\ :\ d(x_p,x_q) \le \varepsilon$$

Lemma C4B. *Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ ist eine Cauchy–Folge.*

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$. Dank Konvergenz $x_n \to a$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\mathrm{d}(x_p,a) < \varepsilon/2$ für alle $p \in \mathbb{N}_{\ge n}$ gilt. Für alle $p,q \in \mathbb{N}_{\ge n}$ folgt $d(x_p,x_q) \le d(x_p,a) + d(a,x_q) < \varepsilon$. □

Die Umkehrung „Cauchy impliziert Konvergenz“ gilt im Allgemeinen nicht, wie die nachfolgenden Beispiel zeigen. Dies ist gerade die Bedingung metrischer Vollständigkeit:

Definition C4C. Ein metrischer Raum (X,d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy–Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) konvergiert, also ein Punkt $a \in X$ existiert mit $x_n \to a$.

Beispiel. Im Raum $X =]0,1]$ mit der üblichen euklidischen Metrik ist $x_n = 2^{-n}$ eine Cauchy–Folge aber nicht konvergent. (Im Raum $[0,1]$ hingegen gilt $x_n \to 0$.)

Beispiel (Euler)**.** Die Folge $x_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ in $\mathbb{Q}$ ist eine Cauchy–Folge, hat aber in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert. (In $\mathbb{R}$ gilt $x_n \to \mathrm{e} = 2.71828\ldots$, aber dieser Grenzwert liegt nicht in $\mathbb{Q}$.)

Beispiel (Leibniz)**.** Die Folge $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots \pm 1/2n+1$ in $\mathbb{Q}$ ist eine Cauchy–Folge, hat aber in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert. (In $\mathbb{R}$ gilt $x_n \to \pi/4 = 0.78539\ldots$.)

Beispiel (Newton)**.** Das Newton–Verfahren liefert eine effiziente Approximation von $\sqrt{5}$ durch eine rasch konvergente Folge $x_n \to \sqrt{5}$ *rationaler Zahlen*: Wir definieren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $x_0 = 3$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 5/x_n)$. Diese Folge ist eine Cauchy–Folge in $\mathbb{Q}$, sie konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$. (In $\mathbb{R}$ gilt wie gewünscht $x_n \to \sqrt{5}$, siehe C4S.)

☞ **Beispiel** (Dezimalentwicklung)**.** Gegeben sei eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Hierzu definieren wir $x_n := \lfloor a \cdot 10^n \rfloor / 10^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dies ist die Dezimalentwicklung von a bis zur n–ten Nachkommastelle, also eine Folge in $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}] \subset \mathbb{Q}$. In $\mathbb{R}$ konvergiert sie gegen a, denn es gilt $|x_n - a| < 10^{-n} \searrow 0$. In $\mathbb{Q}$ hingegen ist sie divergent, sobald a irrational ist. ☜

☞ **Bemerkung.** Solche Beispiele können wir jederzeit künstlich fabrizieren, indem wir einer konvergenten Folge ihren Grenzwert wegnehmen: Sei $x_n \to a$ eine konvergente Folge in (X,d), wobei $x_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte. Wie jede konvergente Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge. Wir betrachten nun $X^* = X \smallsetminus \{a\}$ und $d^* = d_{X^*}$. In (X^*, d^*) ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ immer noch eine Cauchy–Folge, aber sie konvergiert nicht mehr! Gälte $x_n \to b$ in X^*, so hätte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X zwei verschiedene Grenzwerte $a \neq b$, was C3D widerspricht. ☜

☞ **Beispiel.** Jeder Raum (X,d) mit diskreter Metrik ist vollständig: Jede Cauchy–Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist schließlich konstant, $x_n = a$ für alle $n \geq m$, und somit konvergent, $x_n \to a$. ☜

Der Raum $X = \{1 - 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1/2, 3/4, 7/8, \dots\} \subset \mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik e trägt ebenfalls die diskrete Topologie: Für $a = 1 - 2^{-n}$ und $\varepsilon = 2^{-n-1}$ gilt $B(a,\varepsilon) = \{a\}$.

Auf X sind die beiden Metriken d und e demnach topologisch äquivalent. Dennoch gibt es einen entscheidenden Unterschied: (X,d) ist vollständig, (X,e) hingegen nicht!

☞ **§C4c. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.** Mittels Vollständigkeit und Cauchy–Kriterium können wir eine Folge als konvergent erkennen – ohne ihren Grenzwert zu kennen oder erst finden zu müssen! Diese Flexibilität ist die Stärke des Cauchy–Kriteriums. Für die gesamte Analysis (und auch für die Topologie) ist daher folgende Feststellung grundlegend: ☜

✍ **Satz C4D.** *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig bezüglich der Metrik $d(x,y) = |x-y|$. Ebenso sind $\mathbb{C}$ und allgemein $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{C}^m$ vollständig bezüglich der euklidischen Metrik.* ✍

☞ BEWEIS. Die definierende Eigenschaft des geordneten Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen ist die Supremums-Vollständigkeit (B2C). Hieraus folgt die Cauchy–Vollständigkeit: ☜

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$. Diese ist beschränkt, also liegen $a = \liminf x_n$ und $b = \limsup x_n$ in $\mathbb{R}$, und es gilt $a \leq b$. Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $n \in \mathbb{N}$ sodass $|x_p - x_q| \leq \varepsilon$ für alle $p,q \geq n$. Insbesondere gilt $x_n - \varepsilon \leq x_p \leq x_n + \varepsilon$ für alle $p \geq n$, also $x_n - \varepsilon \leq a \leq b \leq x_n + \varepsilon$, somit $b - a \leq 2\varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, folgt $a = b$. Also gilt $x_n \to a$ (C3D).

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}^m$. Für die k–te Koordinate ist dann $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$. Dank der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert ein Grenzwert $a_k \in \mathbb{R}$, sodass $x_{n,k} \to a_k$ gilt. Aus der koordinatenweisen Konvergenz folgt $x_n \to a$. □

✍ **Bemerkung.** Vollständigkeit ist keine topologische, sondern eine metrische Eigenschaft. ✍

(1) Metrische Vollständigkeit bleibt unter Homöomorphismen im Allgemeinen nicht erhalten: Wir haben $(f,g) : \mathbb{R} \cong]-1,+1[$ mit $f(x) = x/(1+|x|)$ und $g(x) = x/(1-|x|)$ aus A1B. Bezüglich der euklidischen Metrik ist $\mathbb{R}$ vollständig, $]-1,+1[$ jedoch nicht.

(2) Cauchy–Folgen bleiben unter stetigen Abbildungen im Allgemeinen nicht erhalten: Die Folge $y_n = n/(1+n) \nearrow 1$ in $]-1,+1[$ ist eine Cauchy–Folge bezüglich der euklidischen Metrik, die Folge $x_n = f^{-1}(y_n) = n \nearrow +\infty$ in $\mathbb{R}$ jedoch nicht.

(3) Vollständigkeit bleibt für äquivalente Metriken im Allgemeinen nicht erhalten: Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ ist vollständig bezüglich der euklidischen Metrik e (C4D) jedoch nicht bezüglich der äquivalenten Metrik $d(x,y) = |x/(1+|x|) - y/(1+|y|)|$ (C3C).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§C4d. Konstruktion vollständiger Räume.** Metrische Vollständigkeit bleibt erhalten ☜ für abgeschlossene Teilräume (C2E), Produkträume (C2G), und Abbildungsräume (C2H):

☞ **Lemma C4E.** *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Genau dann ist der Teilraum (A,d_A) vollständig, wenn A abgeschlossen in (X,d) ist.* ☜

BEWEIS. Auf A betrachten wir die eingeschränkte Metrik $d_A = d|_{A\times A}$.

„⇐“: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (A,d_A), dann auch in (X,d). Da (X,d) vollständig ist, existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$. Da A in X abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert in A (C3N). Somit hat jede Cauchy–Folge in (A,d_A) einen Grenzwert in A.

„⇒“: Sei (A,d_A) vollständig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Konvergiert diese gegen einen Punkt $x \in X$, so ist sie eine Cauchy–Folge in (X,d), also auch in (A,d_A), und dank Vollständigkeit von (A,d_A) existiert ein Grenzwert $a \in A$. Dank Eindeutigkeit des Grenzwertes (C3B) gilt $x = a$, also ist A abgeschlossen (C3N). □

☞ **Satz C4F.** *Seien $(X_i,d_i)_{i\in I}$ eine Familie vollständiger metrischer Räume. Dann ist auch $X = \prod_{i\in I} X_i$ vollständig bezüglich der Supremumsmetrik $d(x,y) = \sup\{\, d_i(x_i,y_i) \mid i \in I \,\}$.* ☜

BEWEIS. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X,d). Für jedes $i \in I$ ist dann $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X_i,d_i). Dank der Vollständigkeit von (X_i,d_i) existiert ein Grenzwert $a_i \in X_i$ mit $x_{n,i} \to a_i$. Dies definiert ein Element $a = (a_i)_{i\in I}$ im Produkt X.

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X,d) ist, existiert zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $m \in \mathbb{N}$ sodass für $n,k \geq m$ und $i \in I$ gilt $d_i(x_{n,i},x_{k,i}) \leq \varepsilon$. Für $k \to \infty$ erhalten wir hieraus $d_i(x_{n,i},a_i) \leq \varepsilon$ für $n \geq m$ und $i \in I$. Das bedeutet $d(x_n,a) \leq \varepsilon$ für $n \geq m$, also $d(x_n,a) \to 0$. □

☞ **Satz C4G.** *Ist (Y,d_Y) vollständig, so auch der Raum $\mathrm{Abb}(X,Y) = Y^X$ aller Abbildungen $f,g : X \to Y$ bezüglich der Supremumsmetrik $d(f,g) = \sup\{\, d_Y(f(x),g(x)) \mid x \in X \,\}$.* ☜

Hierin ist der Teilraum $\mathscr{C}(X,d_X;Y,d_Y)$ aller stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ abgeschlossen und somit ebenfalls vollständig bezüglich der Supremumsmetrik.

BEWEIS. Die erste Aussage ist ein Spezialfall von C4F. Die Teilmenge $\mathscr{C}(X,Y)$ ist abgeschlossen (C3N), denn zu jeder gleichmäßig konvergenten Folge $f_n \to f$ stetiger Funktionen ist auch die Grenzfunktion f stetig (C3Q). Die Vollständigkeit folgt dann aus C4E. □

☞ **Beispiel.** Der Raum $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist vollständig ☜ bezüglich der Supremumsnorm $|-|_{[0,1]}$. Um also nachzuweisen, dass eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, genügt es zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge ist. Das ist oft leichter, da wir hierzu die Grenzfunktion noch nicht kennen müssen; diese wollen wir in vielen Fällen auf diesem Wege erst konstruieren.

☞ **Satz C4H.** *Für jede Menge Ω und $1 \leq p \leq \infty$ ist $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ vollständig.* ☜

BEWEIS. Sei $f_n : X \to \mathbb{K}$ eine Cauchy–Folge bezüglich $|-|_p$. Für jedes $x \in X$ ist dann $f_n(x)$ eine Cauchy–Folge in $(\mathbb{K},|-|)$. Da dieser Raum vollständig ist, existiert ein Grenzwert $f(x) \in \mathbb{K}$, also $f_n(x) \to f(x)$. Dies definiert die Abbildung $f : X \to \mathbb{K}$. Wir zeigen nun $|f_n - f|_p \to 0$. Für $p = \infty$ siehe C4G. Sei also $1 \leq p < \infty$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $|f_n - f_k|_p \leq \varepsilon$ für alle $n,k \geq m$. Für $k \to \infty$ folgt $|f_n - f_k|_p \to |f_n - f|_p \leq \varepsilon$. (Übung!) Das bedeutet $|f_n - f|_p \leq \varepsilon$ für alle $n \geq m$. Dies zeigt $|f_n - f|_p \to 0$. □

☞ **Bemerkung.** Für jeden Maßraum $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist der Raum $L^p(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ ☜ vollständig. Dieses grundlegende Ergebnis beweist und nutzt man in der Analysis (C1F).

§C4e. Hilbert–Räume und Banach–Räume. Wir haben zu Beginn dieses Kapitels in §C1 Vektorräume V mit Skalarprodukt und Normen kennengelernt. Besonders wichtig sind solche, die zudem *vollständig* sind bezüglich der induzierten Metrik, das heißt, jede Cauchy–Folge in V hat einen Grenzwert in V. Zu Ehren von David HILBERT und Stefan BANACH, den Begründern dieser Theorie, vereinbart man folgende Namensgebung:

Definition C4I. Ein *Hilbert–Raum* ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $(V, \langle - \mid - \rangle)$, der vollständig ist bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Metrik.

Ein *Banach–Raum* ist ein vollständiger normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum $(V, |-|)$.

Eine *Banach–Algebra* ist eine vollständige normierte $\mathbb{K}$–Algebra $(A, \cdot, |-|)$.

Beispiele. Viele unserer Beispiele entpuppen sich als Hilbert– oder Banach–Räume:

(1) Der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der üblichen Norm ist eine Banach–Algebra (C4D).
(2) Der $\mathbb{K}$–Vektorraum $\mathbb{K}^n$ mit dem üblichen Skalarprodukt ist ein Hilbert–Raum.
(3) $\ell^p(\Omega)$ und $L^p(\Omega)$ sind Banach–Räume, speziell für $p = 2$ sogar Hilbert–Räume.
(4) Der Matrizen–Ring $\mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist eine Banach–Algebra sowohl bezüglich der Frobenius–Norm (C1P) als auch bezüglich der Operatornorm (C1Q).
(5) Sind $(E, |-|_E)$ und $(F, |-|_F)$ Banach–Räume, dann ist auch $\mathcal{B}(E, F)$ mit der Operatornorm ein Banach–Raum, und $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}(E, E)$ ist eine Banach-Algebra.
(6) Ist (X, d) ein metrischer Raum und E ein Banach–Raum, so ist die Menge $\mathscr{C}_b(X, E)$ aller beschränkten stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm ein Banach–Raum.
(7) Ist E eine Banach–Algebra, so auch $\mathscr{C}_b(X, E)$ mit punktweiser Multiplikation.

In den letzten beiden Fällen zeigt man die Vollständigkeit wie für $\mathscr{C}(X, Y)$ in C4G.

Übung C4J. (1) Der Raum $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ ist nicht vollständig bezüglich der ℓ^p–Norm: Nennen Sie explizit eine Cauchy–Folge, die nicht konvergiert. Der Raum $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ hingegen ist vollständig. Für $1 \le p < \infty$ ist er die *Vervollständigung* von $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ bezüglich der ℓ^p–Norm:

(2) Jedes Element $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ in $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ist ℓ^p–Grenzwert einer Folge $f_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

(3) Für $p = \infty$ gilt dies nicht: Der Abschluss von $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ in $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ist der Teilraum aller Nullfolgen $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid f(n) \to 0 \text{ für } n \to \infty \}$.

✻ **C4J.** (1) Wir betrachten zunächst $p = \infty$. Die Folge $f(n) = 2^{-n}$ liegt in $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Die Approximation $f_n = f \cdot \mathbf{I}_{\{0,1,\dots,n-1\}}$ liegt in $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, da $\operatorname{supp}(f_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$, und erfüllt $|f - f_n|_\infty = 2^{-n} \searrow 0$. Somit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ eine Cauchy–Folge, die in $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ nicht konvergiert. Dasselbe Beispiel $f \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ betrachten wir nun für $1 \le p < \infty$. Hier gilt $|f - f_n|_p = 2^{-n} / \sqrt[p]{1 - 2^{-p}} \searrow 0$ für $n \to \infty$.

(2) Sei $1 \le p < \infty$. Gegeben sei $f \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, also $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=0}^\infty |f(k)|^p < \infty$. Wir approximieren f wie zuvor durch $f_n = f \cdot \mathbf{I}_{\{0,1,\dots,n-1\}}$. Dann gilt $|f - f_n|_p^p = \sum_{k=n}^\infty |f(k)|^p \searrow 0$ für $n \to \infty$.

(3) Der Teilraum $c_0 \subset \ell^p$ ist abgeschlossen: Sei $f_n \to f$ in ℓ^p und $f_n \in c_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(k) \to 0$ für $k \to \infty$. Wir zeigen $f \in c_0$: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Es existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass $|f_n - f|_\infty < \varepsilon/2$ für alle $n \ge m$. Es existiert $\ell \in \mathbb{N}$ sodass $|f_m(k)| < \varepsilon/2$ für alle $k \ge \ell$. Somit gilt $|f(k)| \le |f(k) - f_m(k)| + |f_m(k)| < \varepsilon$ für alle $k \ge \ell$. Wir schließen $f(k) \to 0$ für $k \to \infty$. Anders gesagt, $c_0 \subset \ell^p$ ist abgeschlossen.

Umgekehrt ist jedes Element $f \in c_0$ Grenzwert einer Folge $f_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Hierzu approximieren wir f wie zuvor durch $f_n = f \cdot \mathbf{I}_{\{0,1,\dots,n-1\}}$. Dann gilt $|f - f_n|_\infty = \inf_{k=n}^\infty |f(k)| \searrow 0$ für $n \to \infty$. Das bedeutet zusammenfassend: Der Abschluss von $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ in $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ist der Teilraum $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ aller Nullfolgen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C4f. Cauchy–stetige Funktionen erhalten Cauchy–Folgen.

Übung C4K. Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume.

(1) Sind $f,g : X \to Y$ stetig, so ist $A = \{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}$ abgeschlossen.
(2) Ist $D \subset X$ dicht in (X,d_X), so ist $\mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{C}(D,Y) : f \mapsto f|_D$ injektiv.
(3) Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Wir nennen $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ *cauchy–stetig*, wenn gilt: Für jede Cauchy–Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d_X) ist $(y_n = f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (Y,d_Y).

(4) Jede gleichmäßig stetige Funktion $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ ist cauchy–stetig.
(5) Jede cauchy–stetige Funktion $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ ist stetig.
(6) Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

✻ **C4K.** (1) Für jede konvergente Folge $x_n \to x$ mit $x_0, x_1, x_2, \ldots \in A$ zeigen wir $x \in A$: Dank Stetigkeit gilt $f(x) \leftarrow f(x_n) = g(x_n) \to g(x)$. Dank Eindeutigkeit des Grenzwertes (C3B) folgt $f(x) = g(x)$, also $x \in A$.

(2) Dicht in (X,d_X) bedeutet $\overline{D} = X$. Dank (1) gilt daher: Aus $f|_D = g|_D$ folgt $f = g$.

(3) Die Funktion $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2-2)$ ist stetig, sogar lokal konstant. Sie lässt sich aber nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Fortsetzung $f|_{\mathbb{Q}} = h$. Wir wählen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \nearrow \sqrt{2} \swarrow x'_n$. Dann gilt $f(x_n) \to -1$ und $f(x'_n) \to +1$. Demnach ist f nicht stetig in $\sqrt{2}$.

(4) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X,d_X) Wir zeigen dasselbe für $(y_n = f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in (Y,d_Y). Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $x,x' \in X$ mit $d_X(x,x') \le \delta$ die Ungleichung $d_Y(f(x),f(x')) \le \varepsilon$ gilt. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge ist, existiert $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle $p,q \in \mathbb{N}_{\ge m}$ die Ungleichung $d_X(x_p,x_q) \le \delta$ gilt, und somit $d_Y(y_p,y_q) \le \varepsilon$.

(5) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x in (X,d_X). Dann gilt dies auch für $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x'_{2n} = x_n$ und $x'_{2n+1} = x$. Insbesondere ist $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X,d_X), also auch die Bildfolge $(y'_n = f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in (Y,d_Y), da wir f als cauchy–stetig voraussetzen. Wegen $y'_{2n+1} = y = f(x)$ konvergiert die gesamte Folge $(y_n = f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y. Das bedeutet, die Funktion f ist stetig.

(6) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist cauchy–stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. (Warum?)

Die Funktion $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2-2)$ aus (3) ist stetig, aber nicht cauchy–stetig: Wir wählen $x_{2n+1} \nearrow \sqrt{2} \swarrow x_{2n}$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge, nicht aber die Bildfolge $(y_n = (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz C4L. *(1) Sei $D \subset X$ dicht in (X,d_X). Sei (Y,d_Y) vollständig. Jede gleichmäßig stetige / cauchy–stetige Funktion $h : D \to Y$ lässt sich eindeutig fortsetzen zu einer stetigen Funktion $f : X \to Y$, und auch die Fortsetzung f ist gleichmäßig stetig / cauchy–stetig.*

Anders gesagt: Die Einschränkung $\mathscr{C}_u(X,Y) \to \mathscr{C}_u(D,Y) : f \mapsto f|_D$ ist bijektiv.

(2) Seien $(X,|-|_X)$ und $(Y,|-|_Y)$ normierte Räume, $D \subset X$ ein Untervektorraum und dicht in (X,d_X), sowie (Y,d_Y) vollständig. Jede beschränkte lineare Abbildung $h : D \to Y$ lässt sich eindeutig fortsetzen zu einer beschränkten linearen Abbildung $f : X \to Y$.

Anders gesagt: Die Einschränkung $\mathcal{B}(X,Y) \to \mathcal{B}(D,Y) : f \mapsto f|_D$ ist bijektiv.

BEWEIS. Rechnen Sie dies nach zur Einübung der Begriffe. □

✻ **C4L.** (1) Zu jedem $x \in X$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to x$. Insbesondere ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X,d_X), also auch $y_n = h(x_n)$ in (Y,d_Y), und somit $y_n \to y$ dank Vollständigkeit. Wir setzen $h(x) := y$. Dies ist wohldefiniert, d.h. für $x'_n \to x$ und $y'_n \to y'$ gilt $y = y'$. Für $(x_0,x'_0,x_1,x'_1,\ldots) \to x$ folgt $(y_0,y'_0,y_1,y'_1,\ldots) \to z$, also insbesondere $y_n \to z$ und $y'_n \to z$, und dank Eindeutigkeit des Grenzwertes schließlich $y = y' = z$. Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit bzw. Cauchy–Stetigkeit rechnet man sorgsam nach.

(2) Die Konstruktion von h zu f verläuft wie in (1). Da h linear ist, folgt dies auch für f. (Warum?) Da h beschränkt ist, also gleichmäßig stetig, folgt dies auch für f. (Warum?) Für die Operatornorm gilt $|f| = |h|$.

☞ **§C4g. Vervollständigung.** Bei der Vervollständigung geht es darum, einen noch nicht vollständigen metrischen Raum (X,d) durch Hinzufügen von möglichst wenigen Punkten zu einem vollständigen metrischen Raum $(\hat{X},\hat{d})$ zu machen. Wir wollen daher nur solche Punkte in $\hat{X}$, die Grenzwert einer Folge aus X sind, andernfalls könnten wir sie weglassen. ☜

Definition C4M. Eine *Vervollständigung* eines metrischen Raumes (X,d) ist eine isometrische Einbettung $\iota : (X,d) \to (\hat{X},\hat{d})$ in einen vollständigen metrischen Raum mit $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$.

Wir nutzen hier den topologischen Abschluss $\overline{M}$ einer Teilmenge M in einem metrischen Raum (X,d); dies ist die Menge aller Grenzwerte in X von Folgen in M (§C3h).

Diese Konstruktion kennen Sie aus der Analysis, wir werden sie in §D5 allgemein für topologische Räume noch ausführlicher behandeln.

Beispiele. Die folgenden isometrischen Einbettungen sind Vervollständigungen:

- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Metrik, ebenso $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \hookrightarrow \mathbb{R}$, nicht jedoch $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezüglich der euklidischen Metrik, ebenso $[a,b[$ oder $]a,b[\hookrightarrow [a,b]$.
- $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ bezüglich der Metrik $d(x,y) = |x/(1+|x|) - y/(1+|y|)|$, siehe C3C.
- $X \hookrightarrow \overline{X}$ mit $X = \{\,(x, \sin 1/x) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\,\} \subset \mathbb{R}^2$ und $\overline{X} = X \cup (\{0\} \times [-1,+1])$.
- $\mathbb{K}^{(\Omega)} \hookrightarrow \ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C}$ bezüglich der ℓ^p–Metrik (C1L), $1 \leq p < \infty$.
- $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K}) \hookrightarrow L^p([a,b],\mathbb{K})$ bezüglich der L^p–Metrik (C1M), $1 \leq p < \infty$.

Wie in diesen Beispielen können wir uns die Einbettung $\iota : (X,d) \to (\hat{X},\hat{d})$ stets als Inklusion vorstellen, indem wir jeden Punkt $x \in X$ mit seinem Bild $\iota(x) \in \hat{X}$ identifizieren.

☞ **Satz C4N.** *Zu jedem beliebigen metrischen Raum (X,d) existiert eine Vervollständigung $\iota : (X,d) \to (\hat{X},\hat{d})$. Diese ist eindeutig bis auf Isometrie: Zu jeder anderen Vervollständigungen $\kappa : (X,d) \to (\tilde{X},\tilde{d})$ existiert genau eine Isometrie $h : (\hat{X},\hat{d}) \xrightarrow{\sim} (\tilde{X},\tilde{d})$ mit $h \circ \iota = \kappa$.* ☜

BEWEIS. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie. Wegen $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$ ist jeder Punkt $\hat{x}$ Grenzwert einer Folge $\iota(x_n)$. Dabei ist (x_n) eine Cauchy–Folge in (X,d), also auch $\kappa(x_n)$ in $\tilde{X}$. Wegen Vollständigkeit von $(\tilde{X},\tilde{d})$ existiert somit ein Grenzwert $\tilde{x}$. Für je zwei solche konvergente Folgen $\iota(x_n) \to \hat{x}$ und $\iota(y_n) \to \hat{y}$ gilt dann

$$\hat{d}(\hat{x},\hat{y}) = \lim \hat{d}(\iota(x_n),\iota(y_n)) = \lim d(x_n,y_n) = \lim \tilde{d}(\kappa(x_n),\kappa(y_n)) = \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}).$$

Somit ist die Abbildung $h : \hat{X} \to \tilde{X} : \hat{x} \mapsto \tilde{x}$ wohldefiniert und metrikerhaltend. Die Inverse $h^{-1} : \tilde{X} \to \hat{X}$ konstruiert man ebenso mit vertauschten Rollen. Somit ist h eine Isometrie und erfüllt $h \circ \iota = \kappa$. Ist $\tilde{h} : \hat{X} \to \tilde{X}$ eine weitere Isometrie mit $h \circ \iota = \kappa$, so gilt $\tilde{h} = h$.

Die Existenzaussage folgt aus folgender Konstruktion einer isometrischen Einbettung (C4O) $\iota : X \to \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsmetrik. Da $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ vollständig ist (C4G), gilt dies auch für $\hat{X} = \overline{\iota(X)}$. Somit ist eine Vervollständigung von (X,d) gefunden. □

Bemerkung. Zu jedem metrischen Raum (X,d) können wir eine Vervollständigung $(\hat{X},\hat{d})$ konstruieren, indem wir die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ aus §B2f imitieren: Sei $\tilde{X}$ die Menge aller Cauchy–Folgen $\tilde{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d). Hierauf erhalten wir eine Halbmetrik $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim d(x_n,y_n)$. Wir identifizieren $\tilde{x} \approx \tilde{y}$ falls $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$, siehe C2J. Der Quotient $\hat{X} = \tilde{X}/_{\approx}$ erbt eine Metrik $\hat{d}$, und $(\hat{X},\hat{d})$ ist die gesuchte Vervollständigung von (X,d). Der Nachweis ist eine einfache, längliche aber lehrreiche Übung. Da wir die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ schon haben, nutzen wir dies wie folgt zu einer eleganteren Konstruktion:

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Lemma C4O.** *Zum metrischen Raum (X,d) betrachten wir den Banach–Raum $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsmetrik. Dann erhalten wir eine isometrische Einbettung $\iota : X \to \mathscr{C}(X,\mathbb{R}) : a \mapsto f_a$ mit $f_a : X \to \mathbb{R} : x \mapsto d(a,x)$.* ☜

BEWEIS. Die Abbildung f_a ist stetig (C3N). Die so definierte Abbildung $\iota : a \mapsto f_a$ ist eine isometrische Einbettung, das heißt, für alle $a,b \in X$ gilt

$$\big|f_a - f_b\big|_X = \sup_{x\in X}\big|f_a(x) - f_b(x)\big| = d(a,b).$$

Dank der umgekehrten Dreiecksungleichung (C2J) haben wir zunächst

$$\big|f_a(x) - f_b(x)\big| = \big|d(a,x) - d(b,x)\big| \leq d(a,b).$$

Für $x = a$ und $x = b$ wird der Wert $d(a,b)$ tatsächlich angenommen. □

Bemerkung. Ebenso kann (X,d) isometrisch eingebettet werden in den Teilraum $\mathscr{C}_b(X,\mathbb{R})$ der beschränkten Funktionen, siehe D6S. Man wählt hierzu einen festen Basispunkt $x_0 \in X$ und betrachtet $f_a(x) = d(a,x) - d(x,x_0)$. Wie zuvor zeigt man, dass f_a beschränkt ist und $X \to \mathscr{C}_b(X,\mathbb{R}) : a \mapsto f_a$ eine Isometrie. (Man skizziere diese Funktionen im Beispiel $X = \mathbb{R}$ und $X = \mathbb{R}^2$.) Diese Verfeinerung hat den Vorteil, dass X nun nicht nur in einen vollständigen metrischen Raum, sondern sogar in den Banach–Raum $\mathscr{C}_b(X,\mathbb{R})$ eingebettet wird, also in einen vollständigen normierten Vektorraum.

☞ **§C4h. Iterationsverfahren und der Fixpunktsatz von Banach.** In vielen Anwendungen der Mathematik geht es um das Lösen von Gleichungen. Iterationsverfahren zur sukzessiven Approximation einer Lösung gehören dabei zu den wirksamsten Methoden: ☜

Wir beginnen mit einer Näherungslösung x_0 und verfeinern diese iterativ zu einer Folge immer besserer Näherungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Die Konvergenz dieser Näherungen gegen eine (exakte) Lösung a zeigt nicht nur die Existenz einer Lösung, sondern stellt zudem eine effiziente Konstruktion mit expliziten Fehlerschranken bereit.

Definition C4P. Eine Abbildung $f : X \to X$ eines metrischen Raumes (X,d) heißt *kontraktiv*, wenn eine Konstante $k < 1$ existiert mit $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$ für alle $x, y \in X$.

Dies ist eine quantitative Verschärfung der Lipschitz–Stetigkeit (C2S).

☞ **Beispiel.** Jede affin-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = Ax + b$ und Operatornorm $\|A\| < 1$ ist kontraktiv: Es gilt nämlich $|f(x) - f(y)| = |A(x-y)| \leq \|A\| \cdot |x-y|$. ☜

Bildhaftes Beispiel: Wenn Sie von Ihrer geographischen Umgebung U eine Landkarte im Maßstab $k = 1:n$ (mit $n > 1$) vor sich auf den Tisch legen, dann definiert die Zuordnung jedes realen Punktes zu seinem Bildpunkt eine affine Abbildung $f : U \to U$, und diese ist kontraktiv. Der nachfolgende Fixpunktsatz besagt, dass genau ein Punkt der Karte auf dem geographischen Punkt liegt, den er bezeichnet. Dies gilt nicht nur für affine Abbildungen, sondern auch, wenn die Abbildung leicht „verknüllt“, solange sie nicht überdehnt:

☞ **Beispiel.** Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'| \leq k < 1$, so ist f kontraktiv. ☜

Allgemeiner: Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ konvex und $f : X \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $\|f'\| \leq k < 1$. Zu jedem Paar $x, y \in X$ existiert ein $z \in [x,y]$ mit $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$, somit also $|f(x) - f(y)| \leq \|f'(z)\| \cdot |x-y| \leq k|x-y|$. Das bedeutet, f ist kontraktiv.

Satz C4Q. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, nicht-leer und vollständig, sowie $f : X \to X$ eine kontraktive Abbildung, also $d(f(x),f(y)) \le k\,d(x,y)$ mit $k<1$. Dann gilt:*

(1) Zur Abbildung f existiert genau ein Fixpunkt $a \in X$, das heißt $f(a)=a$.
(2) Jede Folge mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1}=f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen a.
(3) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ gelten dabei die beiden Fehlerschranken

$$d(a,x_n) \;\le\; \underbrace{\frac{k}{1-k}d(x_n,x_{n-1})}_{\text{a posteriori}} \;\le\; \underbrace{\frac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0)}_{\text{a priori}} \;\searrow\; 0.$$

Zusatz: *Allgemeiner genügt $d(f^n(x),f^n(y)) \le k_n\,d(x,y)$ für $x,y \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ sowie $\sum_{n=0}^\infty k_n < \infty$. Dann gelten (1–3) in der Form $d(a,x_n) \le d(x_1,x_0)\sum_{j=n}^\infty k_j \searrow 0$.*

Bemerkung. Der Satz geht auf Stefan BANACH (1892–1945) zurück, der Zusatz stammt von Johannes WEISSINGER (1913–1995). Diese nützliche Verallgemeinerung ist dabei nicht schwieriger zu beweisen und leistet im Satz von Picard–Lindelöf (C4R) gute Dienste.

Bemerkung. Die Aussage (1) garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes. Die Konstruktion (2) liefert zudem ein praktisches Approximationsverfahren. Gemäß (3) ist die Konvergenz $x_n \to a$ mindestens so schnell wie die der geometrischen Folge $k^n \searrow 0$: Dies nutzen wir bei iterativen Berechnungen als *a priori* Abschätzung des Zeitaufwandes.

Bemerkung. Vermöge $d(a,x_n) \le \frac{k}{1-k}d(x_n,x_{n-1})$ kann der verbleibende Fehler *a posteriori* allein aus den Daten k,x_n,x_{n-1} abgeschätzt werden, insbesondere ohne vorherige Kenntnis des Grenzwertes a! Dies nutzen wir in Implementierungen als Abbruchkriterium. Diese Schranke ist mindestens so gut wie die *a priori* Schätzung, oft auch besser.

BEWEIS DES SATZES. Die *Eindeutigkeit* ist leicht: Für je zwei Fixpunkte $a=f(a)$ und $b=f(b)$ gilt $d(a,b)=d(f(a),f(b)) \le k\,d(a,b)$ mit $k<1$, also $d(a,b)=0$, somit $a=b$.

Die *Existenz* beweisen wir durch die iterative Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Wir wählen $x_0 \in X$ und setzen $x_{n+1}=f(x_n)$. Per Induktion gilt $d(x_{n+1},x_n) \le k^n d(x_1,x_0)$: Für $n=0$ ist dies trivial, für $n \ge 1$ gilt $d(x_{n+1},x_n)=d(f(x_n),f(x_{n-1})) \le k\,d(x_n,x_{n-1}) \le k^n d(x_1,x_0)$. Dank Dreiecksungleichung erhalten wir eine geometrische Reihe: Für $n \le p < q$ gilt

$$\begin{aligned} d(x_q,x_p) &\le d(x_q,x_{q-1})+\cdots+d(x_{p+2},x_{p+1})+d(x_{p+1},x_p) \\ &\le (k^{q-p-1}+\cdots+k+1)\,d(x_{p+1},x_p) = \frac{1-k^{q-p}}{1-k}d(x_{p+1},x_p) \\ &\le \frac{k^p-k^q}{1-k}d(x_1,x_0) \le \frac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0) \;\searrow\; 0 \quad \text{für } n\to\infty. \end{aligned}$$

Demnach ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X,d). Da (X,d) vollständig ist, existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$. Da f kontraktiv und somit stetig ist, folgt aus $x_{n+1}=f(x_n)$ per Grenzübergang $a=\lim x_{n+1}=\lim f(x_n)=f(\lim x_n)=f(a)$. Obige Ungleichung für $n=p$ und $q\to\infty$ ergibt die Abschätzung $d(a,x_n) \le \frac{k}{1-k}d(x_n,x_{n-1}) \le \frac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0)$.

Den Zusatz beweisen wir genauso: Wegen $\sum_{n=0}^\infty k_n < \infty$ gilt $k_n \to 0$. Insbesondere existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $k_m \le 1/2$, das heißt f^m ist kontraktiv. Sind $a=f(a)$ und $b=f(b)$ Fixpunkte von f, so auch von f^m, also folgt $a=b$. Für jede iterative Folge mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1}=f(x_n)$ erhalten wir für $n \le p < q$ wie oben $d(x_q,x_p) \le d(x_1,x_0)\sum_{j=n}^\infty k_j \searrow 0$. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X,d), also konvergent. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§C4i. Anwendung auf Differentialgleichungen: Der Satz von Picard–Lindelöf.** ☜
Eine erste spektakuläre Anwendung des Fixpunktsatzes von Banach kennen Sie aus der Analysis: Der Satz von Picard–Lindelöf garantiert die eindeutige Lösbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungen. Gegeben sei hierzu ein Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0. \tag{C.4}$$

Hierzu sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf einer offenen Menge G. Gesucht ist ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ mit $y(x_0) = y_0$ sowie $(x, y(x)) \in G$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$.

Lokal lässt sich dieses Problem immer lösen, dank des folgenden Satzes:

Satz C4R (Picard–Lindelöf)**.** *Sei $I = [x_0 - a, x_0 + b]$ mit $a, b \le s$ und $K = \bar{B}(y_0, r) \subset \mathbb{R}^n$. Sei $f : I \times K \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, $|f| \le M$. Es gelte $s M \le r$; notfalls verkleinern wir I und s. Die Funktion f erfülle die Lipschitz–Bedingung $|f(x,u) - f(x,v)| \le L\,|u - v|$ für alle $x \in I$ und $u, v \in K$. Ist etwa f stetig differenzierbar nach y, so genügt $|\partial f / \partial y| \le L$.*

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

(1) Das Anfangswertproblem (C.4) *hat genau eine Lösung $y : I \to K$. Jede Lösung $\tilde{y} : \tilde{I} \to K$ auf einem Teilintervall $x_0 \in \tilde{I} \subset I$ ist gegeben durch $\tilde{y} = y|_{\tilde{I}}$.*

(2) Die Lösung y ist die gleichmäßige Grenzfunktion der Picard–Lindelöf–Iteration

$$u_0, u_1, u_2, \dots : I \to K, \quad u_0 = y_0, \quad u_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_k(t))\,\mathrm{d}t.$$

(3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt gleichmäßig für alle $x \in I$ die a priori Fehlerabschätzung

$$\big|y(x) - u_n(x)\big| \;\le\; \big|u_1 - u_0\big|_{[x_0,x]} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!} \;\le\; \big|u_1 - u_0\big|_I \, \frac{(sL)^n}{n!}\, \mathrm{e}^{sL} \;\to\; 0.$$

(4) Die Lösung hängt stetig vom Anfangswert ab: Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \to K$ eine Lösung zum Startwert $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0$ auf einem Teilintervall $x_0 \in \tilde{I} \subset I$, so gilt für alle $x \in \tilde{I}$:

$$\big|y(x) - \tilde{y}(x)\big| \;\le\; \big|y_0 - \tilde{y}_0\big|\, \mathrm{e}^{L|x - x_0|} \;\le\; \big|y_0 - \tilde{y}_0\big|\, \mathrm{e}^{sL}$$

Beispiel. Gemäß Picard–Lindelöf–Iteration konstruieren wir die Lösung $y : [-r, r] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$ mit $y(0) = 1$. Wir beginnen mit $u_0(x) = 1$ und finden $u_1(x) = 1 + \int_{t=0}^{x} u_0(t)\,\mathrm{d}t = 1 + x$ und $u_2(x) = 1 + \int_{t=0}^{x} u_1(t)\,\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Per Induktion erhalten wir $u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k / k!$ mit Grenzwert $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / k! = \mathrm{e}^x$.

Bemerkung. Der Satz garantiert (1) Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und zudem (2) ein Konstruktionsverfahren zur Approximation der Lösung mit (3) expliziter Fehlerschranke. Was will man mehr? Dass Lösungen tatsächlich wie in (4) exponentiell auseinanderlaufen können, zeigt die Differentialgleichung $y' = y$ mit den Lösungen $y(x) = y_0\,\mathrm{e}^x$.

Bemerkung. Meist ist die Differentialgleichung definiert durch $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^n$ auf einer Teilmenge G, die nicht notwendigerweise von der Form $I \times K$ ist. Der Satz garantiert dann: Durch jeden inneren Punkt $(x_0, y_0) \in G$ läuft genau eine *lokale* Lösung. Hierzu wählen wir eine kleine Umgebung $I \times K \subset G$ und erhalten $y : I \to K$. Solche lokalen Lösungen können wir zusammensetzen zu einer eindeutigen *globalen* Lösung, die in G von Rand zu Rand läuft (oder nach ∞ entkommt, was wir daher ebenfalls zum Rand zählen sollten).

Der Beweis dieses schönen Satzes beruht auf zwei ebenso einfachen wie fundamentalen Ideen: der Vollständigkeit von $\mathscr{C}(I,K) \subset \mathscr{C}(I,\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Supremumsnorm (C4G) sowie dem Banachschen Fixpunktsatz (C4Q). Der Rest ist gewissenhaftes Nachrechnen:

BEWEIS. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erfüllt eine stetige Funktion $y : I \to K$ genau dann die Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$ mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$, wenn sie die Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{t=x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \tag{C.5}$$

für alle $x \in I$ erfüllt. Somit ist jede Lösung y Fixpunkt der Abbildung

$$T : \mathscr{C}(I,K) \to \mathscr{C}(I,K), \quad (Tu)(x) = y_0 + \int_{t=x_0}^{x} f(t,u(t))\,\mathrm{d}t.$$

Als erstes prüfen wir nach, dass für $u \in \mathscr{C}(I,K)$ tatsächlich $Tu \in \mathscr{C}(I,K)$ gilt:

$$\begin{aligned} |Tu(x) - y_0| &= \left| \int_{t=x_0}^{x} f(t,u(t))\,\mathrm{d}t \right| \le \left| \int_{t=x_0}^{x} \left| f(t,u(t)) \right| \mathrm{d}t \right| \\ &\le \left| \int_{t=x_0}^{x} M\,\mathrm{d}t \right| = |x - x_0| M \le sM \le r \end{aligned}$$

Anschließend untersuchen wir, ob T^n kontraktiv ist: Für $u, v \in \mathscr{C}(I,K)$ zeigen wir

$$\left| T^n u(x) - T^n v(x) \right| \le \frac{L^n |x-x_0|^n}{n!} \left| u - v \right|_{[x_0,x]} \le \frac{(sL)^n}{n!} \left| u - v \right|_I.$$

Für $n = 0$ ist dies trivial, und für $n \ge 1$ folgt induktiv

$$\begin{aligned} \left| T^n u(x) - T^n v(x) \right| &= \left| \int_{t=x_0}^{x} f(t, T^{n-1}u(t)) - f(t, T^{n-1}v(t))\,\mathrm{d}t \right| \\ &\le \left| \int_{t=x_0}^{x} L \left| T^{n-1}u(t) - T^{n-1}v(t) \right| \mathrm{d}t \right| \\ &\le \left| \int_{t=x_0}^{x} \frac{L^n |t-x_0|^{n-1}}{(n-1)!} \left| u - v \right|_{[x_0,x]} \mathrm{d}t \right| \\ &= \frac{L^n |x-x_0|^n}{n!} \left| u - v \right|_{[x_0,x]} \le \frac{(sL)^n}{n!} \left| u - v \right|_I. \end{aligned}$$

Der Raum $\mathscr{C}(I,K)$ ist vollständig bezüglich Supremumsnorm (C4G), sodass wir den Fixpunktsatz von Banach (C4Q) anwenden können. Hieraus folgen die Aussagen (1–3).

Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \to K$ die Lösung derselben Differentialgleichung $\tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x))$, nun aber zum Startwert $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0$, so gilt $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \tilde{y}(t))\,\mathrm{d}t$. Wir beginnen die Picard–Lindelöf–Iteration mit $u_0 = \tilde{y}$ und erhalten im ersten Schritt

$$u_1(x) = y_0 + \int_{t=x_0}^{x} f(t, \tilde{y}(t))\,\mathrm{d}t = y_0 - \tilde{y}_0 + u_0(x).$$

Die Fehlerabschätzung (3) für $\tilde{y} = u_0$ und $u_1 - u_0 = y_0 - \tilde{y}_0$ liefert somit auf einen Schlag

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \le |y_0 - \tilde{y}_0| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k |x-x_0|^k}{k!} = |y_0 - \tilde{y}_0|\, \mathrm{e}^{L|x-x_0|}. \qquad \square$$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C4j. Super-attraktive Fixpunkte. Viele Berechnungen im Raum $\mathbb{R}^m$ lassen sich zurückführen auf die Suche nach Fixpunkten a mit $\varphi(a) = a$ oder Nullstellen ξ mit $f(\xi) = 0$. Zur näherungsweisen Berechnung eignen sich häufig iterative Verfahren. Zwecks Effizienz untersuchen wir nun genauer die Konvergenzgeschwindigkeit:

Beispiel. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\mathscr{C}^1$, das heißt stetig differenzierbar, und $a = \varphi(a)$ ein Fixpunkt mit $|\varphi'(a)| < 1$. In einer Umgebung $V = [a-r, a+r]$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt dann $k := |\varphi'|_V < 1$, somit $\varphi(V) \subset V$, und die Einschränkung $\varphi|_V^V : V \to V$ ist kontraktiv. Zum Startwert $x_0 \in V$ betrachten wir die Iteration $x_n = \varphi^n(x_0)$: Es gilt $x_n \to a$, genauer $|\varphi^n(x_0) - a| \leq k^n |x_0 - a|$.

Gilt zum Beispiel $k \leq \frac{1}{2}$, so fügt jede Iteration ein Bit Genauigkeit hinzu, je drei bis vier Iterationen etwa eine Dezimalstelle. Man spricht daher von *linearer Konvergenz*. Dies finden Sie beim Banachschen Fixpunktsatz C4Q und auch der Intervallhalbierung C3R.

Der Fall $\varphi'(a) = 0$ ist besonders interessant: Die Punkte $x_n = \varphi^n(x_0)$ nähern sich a, und die Funktion φ kontrahiert immer stärker, was die Konvergenz erheblich beschleunigt:

Beispiel. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\mathscr{C}^2$ und $a = \varphi(a)$ ein Fixpunkt mit $\varphi'(a) = 0$. Wir betrachten eine Umgebung $V = [a-r, a+r]$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und setzen $M := |\varphi''|_V$. Dank Taylor–Entwicklung existiert zu jedem $x \in V$ ein Zwischenpunkt z zwischen a und x mit

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\varphi''(z)(x-a)^2.$$

Für $x_0 \in V$ bedeutet das $|\varphi(x_0) - a| \leq \frac{M}{2}|x_0 - a|^2$. Gilt zudem $|x_0 - a| < \frac{1}{M}$, so folgt

$$\tfrac{M}{2}|\varphi^n(x_0) - a| \leq \left[\tfrac{M}{2}|x_0 - a|\right]^{2^n} \leq 1/2^{2^n}.$$

Für Startwerte nahe a ist die Konvergenz also besonders schnell: Jede Iteration verdoppelt die Anzahl der gültigen Stellen. Man spricht daher von *quadratischer Konvergenz*.

Beispiel C4S. Wir betrachten $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto \frac{1}{2}(x + 5x^{-1})$. Einziger Fixpunkt ist $a = \sqrt{5}$. Die Ableitung $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(1 - 5x^{-2})$ erfüllt $\varphi'(a) = 0$. Bei Start in $x_0 = 3$ gilt:

$x_1 = 2.333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333\ldots$
$x_2 = 2.238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238\ldots$
$x_3 = 2.236068895643363728470111448834853090172239108409321175278622087132725430597771023302938196555217831\ldots$
$x_4 = 2.236067977499978194094593558581450106481679137349200687322138411033512692643697473590753194335606197\ldots$
$x_5 = 2.236067977499789696409173676676333757435407782375420755388228773452271463097226817856021696469834141\ldots$
$x_6 = 2.236067977499789696409173668731276235440618359611525738385839112783137655083969106154343609449977892\ldots$
$x_7 = 2.236067977499789696409173668731276235440618359611525724270897245410520925637804899414414408378782274\ldots$

Satz C4T (super-attraktiver Fixpunkt)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar und $a = \varphi(a)$ ein Fixpunkt mit $\varphi'(a) = 0$. Dann existiert eine Umgebung $V = \bar{B}(a, r) \subset U$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $|\varphi''|_V \leq M$, sodass $rM \leq 1$. Auf V gilt dann:*

(1) Es gilt $\varphi(V) \subset V$, und die Einschränkung $\varphi|_V^V : V \to V$ ist kontraktiv.
(2) Für jeden Startwert $x_0 \in V$ konvergiert die Iteration $x_n = \varphi^n(x_0)$ gegen a.
(3) Die Konvergenz ist quadratisch gemäß $|\varphi^n(x_0) - a| \leq |x_0 - a|/2^{2^n - 1}$.

Einen solchen Ball $V = \bar{B}(a, r)$ mit (1–3) nennen wir eine Newton–Umgebung *für φ. Den hierbei maximal möglichen Radius r nennen wir den* Newton–Radius *für φ um a.*

BEWEIS. Rechnen Sie dies sorgfältig nach, wie zuvor im eindimensionalen Vorbild! □

§C4k. Newton–Verfahren. Im Raum $\mathbb{R}^m$ wollen wir eine Gleichung $f(x) = 0$ lösen. Oft verfügen wir über eine Näherungslösung x_n und wollen diese zu x_{n+1} verbessern.

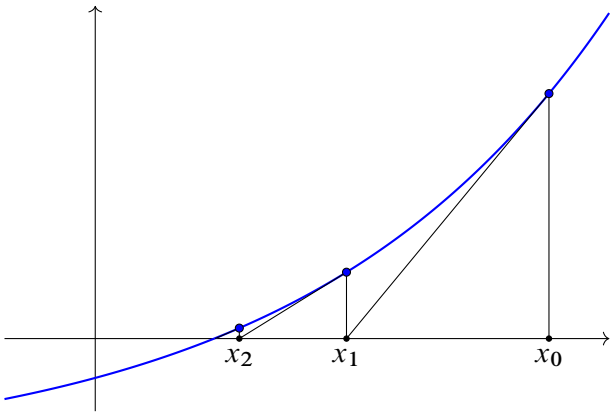


ABBILDUNG C:11. Illustration des Newton–Verfahrens

Newtons Methode nutzt den Funktionswert $f(x_n)$ und die erste Ableitung $f'(x_n)$ zur Taylor–Entwicklung vom Grad 1: Wir approximieren $f(x)$ um x_n linear durch die Tangente $t_n(x) := f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Wir wählen x_{n+1} als Lösung der Gleichung $t_n(x) = 0$, also $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n)$. Zur weiteren Näherung iterieren wir dementsprechend die Abbildung $\Phi(x) = x - f'(x)^{-1} f(x)$. Diese erfreut sich folgender Eigenschaften:

Satz C4U (Newton–Verfahren, qualitativ)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ in $\mathscr{C}^{k+1}$.*

(1) Ist $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in U$, dann ist $\Phi : U \to \mathbb{R}^m : x \mapsto x - f'(x)^{-1} f(x)$ in $\mathscr{C}^k$, die Nullstellen ξ von f sind genau die Fixpunkte von Φ und erfüllen $\Phi'(\xi) = 0$.

(2) Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ in $\mathscr{C}^3$ und $\xi \in U$ eine einfache Nullstelle, also $f(\xi) = 0$ und $f'(\xi)$ invertierbar. Dann existiert eine Newton–Umgebung $V = \bar{B}(\xi, r) \subset U$ für Φ um ξ:

Für alle $x \in V$ ist $f'(x)$ invertierbar, Φ ist in $\mathscr{C}^2$, es gilt $\Phi(V) \subset V$, die Einschränkung $\Phi|_V^V : V \to V$ ist kontraktiv, und die Konvergenz $\Phi^n(x_0) \to \xi$ ist quadratisch.

BEWEIS. Nutzen Sie Satz C4T und rechnen Sie alles sorgfältig nach! □

Bemerkung. Zur kurzen Einführung begnügt man sich meist mit einer solchen *qualitativen* Fassung der Newton–Methode. Für praktische Anwendungen benötigen wir noch mehr:

(1) Wie können wir im weiteren Verlauf der Iteration den Fehler $|x_n - \xi|$ beschränken, zwischen der fehlerbehafteten Näherung x_n und der noch gesuchten Lösung ξ?
(2) Wie können wir sicher sein, dass ein vorgegebener Startwert x_0 in einer Newton–Umgebung $\bar{B}(\xi, r)$ liegt? Typischerweise kennen wir den Grenzwert ξ noch nicht!
(3) Wie sollen wir x_0 wählen? Natürlich würde es genügen, jede gesuchte Nullstelle ξ bis auf ihren Newton–Radius zu approximieren, aber wie soll das gelingen?

Noch einmal zur Betonung: Newtons Methode ist *lokal*. Für quadratische Konvergenz $|\Phi^n(x_0) - \xi| \le |x_0 - \xi| / 2^{2^n - 1}$ müssen wir mit x_0 nahe bei der gesuchten Lösung ξ starten. Dazu wünschen wir uns Kriterien und Schranken, die nur von $x_0, x_1, x_2, \ldots$ abhängen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

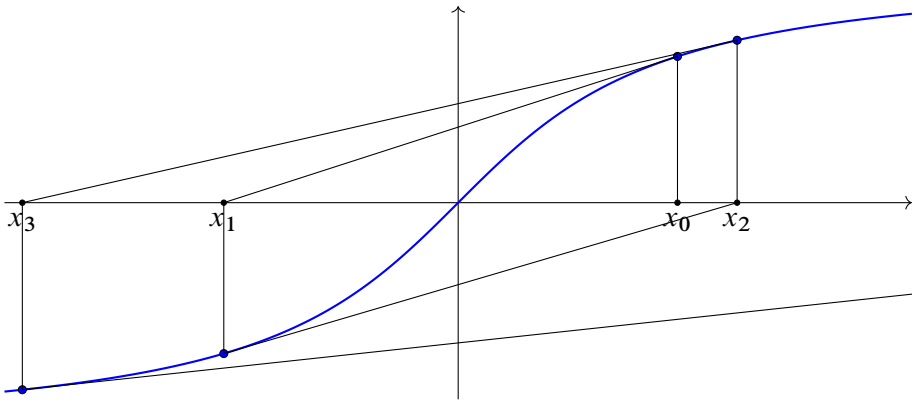


ABBILDUNG C:12. Das Newton–Verfahren kann divergieren!

Für eindimensionale Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nutzen wir neben Vollständigkeit auch die Anordnung: Dank Monotonie können wir bequem genaue Konvergenzkriterien formulieren. Der folgende Satz vergleicht die drei wichtigsten Lösungsmethoden.

Satz C4v (Lösungsmethoden, quantitativ)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0 < f(b)$.*

(0) Ist f streng wachsend, dann hat f genau eine Nullstelle ξ in $[a,b]$.

Intervallhalbierung liefert zu Startwerten $x_0, y_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \le 0 \le f(y_0)$ die Näherungen $x_n, y_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) \le 0 \le f(y_n)$ und der a priori Fehlerschranke

$$|x_n - y_n| \le 2^{-n} |x_0 - y_0|.$$

(1) Es gelte die Bilipschitz-Bedingung $0 \le m < \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le M$ für alle $u < v$ in $[a,b]$; im Falle $f \in \mathscr{C}^1$ ist dies gleichbedeutend mit $0 < m \le f' \le M$.

Dann ist $\varphi(x) = x - f(x)/M$ kontraktiv mit Faktor $k = 1 - m/M$. Für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \ge 0$ gilt $x_n = \varphi^n(x_0) \searrow \xi$ mit den beiden Fehlerschranken

$$|x_n - \xi| \;\le\; \underbrace{\frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|}_{\text{a posteriori}} \;\le\; \underbrace{\frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|}_{\text{a priori}} \;\searrow\; 0.$$

(2) Sei f differenzierbar, $m := f'(a) > 0$ und $0 \le f'(v) - f'(u) \le L(v-u)$ für alle $u < v$ in $[a,b]$; im Falle $f \in \mathscr{C}^2$ ist dies gleichbedeutend mit $f'(a) > 0$ und $0 \le f'' \le L$.

Für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \ge 0$ gilt $x_n = \Phi^n(x_0) \searrow \xi$: Die Newton–Folge $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert und konvergiert monoton gegen ξ.

Dabei gilt die a posteriori Fehlerschranke

$$|x_n - x_{n+1}| \le |x_n - \xi| \le \frac{L}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2.$$

Im Falle $k_1 := \frac{L}{m}|x_1 - x_0| \le 1$ folgt hieraus die a priori Fehlerschranke

$$|x_n - \xi| \le 2^{-n} \cdot k_1^{2^n - 1} \cdot |x_1 - x_0| \searrow 0.$$

Bemerkung. Zur Vereinfachung behandelt der Satz Funktionen, die monoton wachsen und konvex sind. Allgemein für $f \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ gelte $f(a)f(b) < 0$ sowie $f' \neq 0$ auf $[a,b]$.

(1) Für $f'f'' \geq 0$ und $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0)f'(x_0) \geq 0$ gilt $\Phi^n(x_0) \searrow \xi$.
(2) Für $f'f'' \leq 0$ und $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0)f'(x_0) \leq 0$ gilt $\Phi^n(x_0) \nearrow \xi$.

Um jede Nullstelle ξ mit $f(\xi) = 0$ und $f'(\xi)f''(\xi) \neq 0$ existieren $a < \xi < b$, sodass (1) bzw. (2) gilt. Das bedeutet anschaulich: Für $f'(\xi)f''(\xi) > 0$ genügt ein Startwert etwas rechts von ξ, für $f'(\xi)f''(\xi) < 0$ genügt ein Startwert etwas links von ξ.

BEWEIS. Rechnen Sie die Aussagen des Satzes sorgfältig nach! □

⁕ **C4v.** (0) Die Halbierungsmethode haben wir zum Zwischenwertsatz C3R genutzt und bewiesen.

(1) Für $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x - f(x)/M$ und alle $u < v$ in $[a,b]$ finden wir die Dehnungsschranke

$$\frac{\varphi(v)-\varphi(u)}{v-u} = 1 - \frac{f(v)-f(u)}{M(v-u)} \in [0,k] \quad \text{mit } k = 1-m/M < 1,$$

also ist φ kontraktiv. Dank (0) existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = 0$, und die Kontraktion garantiert $\varphi([a,b]) \subset [a,b]$. Wir können daher den Banachschen Fixpunktsatz C4Q anwenden. Schließlich gilt Monotonie: Für $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) \geq 0$ gilt $\xi \leq x_n \leq b$ und nach obiger Rechnung $0 \leq x_{n+1} - \xi \leq k(x_n - \xi)$, also $x_n \searrow \xi$.

(2) Die Ableitung f' ist wachsend auf $[a,b]$ mit $f'(a) > 0$, also $f' > 0$ auf $[a,b]$. Per Induktion zeigen wir: Für $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) \geq 0$ gilt $x_n \geq \xi$, und $x_{n+1} = \Phi(x_n) := x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ erfüllt $\xi \leq x_n \leq x_{n-1}$. Die Tangente $t_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x-x_n)$ erfüllt $t_n(x_n) = f(x_n) \geq 0$. Dank Mittelwertsatz existiert $z \in [\xi, x_n]$ mit $0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(z)(\xi - x_n) \geq f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) = t_n(\xi)$. Daraus folgt $\xi \leq x_{n+1} \leq x_n$.

Wir haben $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq \xi$, also $x_n \searrow x \geq \xi$. Andererseits gilt $f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n-1}) \searrow 0$. Dank Stetigkeit von f folgt $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 0$. Dank Eindeutigkeit der Nullstelle gilt $x = \xi$.

Für die Fehlerschranke betrachten wir die Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - t_n(x) \geq 0$. Es gilt $g(x_n) = 0$ sowie $g'(x) = f'(x) - f'(x_n) \geq L(x - x_n)$ für $x \leq x_n$. Per Integration, weiterhin für $x \leq x_n$, erhalten wir

$$g(x) = \int_{t=x_n}^{x} g'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{t=x_n}^{x} L(x-x_n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}L(x-x_n)^2.$$

Speziell für $x = x_{n+1}$ finden wir die Ungleichung $g(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}L(x_{n+1}-x_n)^2$. Zudem haben wir $f(x_n) = f(x_n) - f(\xi) \geq m(x_n - \xi)$. Daraus folgt $0 \leq x_n - x_{n+1} \leq x_n - \xi \leq \frac{1}{m}f(x_n) \leq \frac{L}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$. Im Falle $k_1 := \frac{L}{m}|x_1 - x_0| \leq 1$ folgt hieraus per Induktion $0 \leq x_n - \xi \leq 2^{-n} \cdot k_1^{2^n-1} \cdot |x_1 - x_0|$.

Übung C4w. (1) Untersuchen Sie das Newton–Verfahren für $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n - a$. Ausführlich: (a) Für welche Startwerte x_0 konvergiert das Verfahren? (b) Wie schnell verringert sich der Fehler? (c) Was ist der Newton–Radius um die betrachtete Nullstelle?

(2) Untersuchen Sie ebenso das Newton–Verfahren für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan(x)$.

(3) Lösen Sie $\cos(x) = x$, zum Vergleich (a) mit Banach und (b) mit Newton.

(4) Lösen Sie $\exp(x) = x^3$, zum Vergleich (a) mit Banach und (b) mit Newton.

(5) Wir untersuchen die Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^3 - 10x^2 - 4x + 8$.

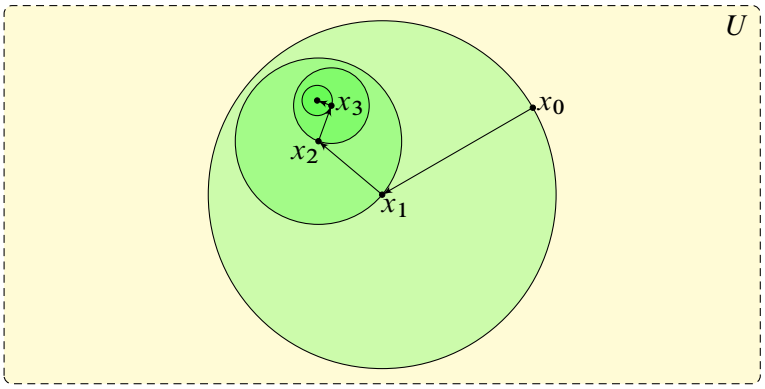
(a) Skizzieren Sie f. Zeigen Sie, dass f drei verschiedene Nullstellen $a < b < c$ in $\mathbb{R}$ hat. Lokalisieren Sie diese in ganzzahligen Intervallen $]k, k+1[$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
(b) Wo ist f wachsend / fallend? konkav / konvex? Leiten Sie daraus einen Wert $c_0 \in \mathbb{Z}$ ab mit $c_n := \Phi^n(c_0) \to c$. Ebenso für $a_n := \Phi^n(a_0) \to a$ und $b_n := \Phi^n(b_0) \to b$.
(c) Berechnen Sie die Näherungen a_3, b_3, c_3, Schranken für die Fehler, sowie zur Probe $f_3(x) = 3(x-a_3)(x-b_3)(x-c_3)$. Was erhalten Sie für zehn Iterationen?
(d) Geben Sie einen Startwert $u_0 \in \mathbb{R}$ an, sodass $u_n = \Phi(u_0)$ nicht konvergiert. Stellt das nicht die phantastisch schnelle Konvergenz des Newton–Verfahrens in Frage?

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C4l. Der Satz von Kantorovich zum Newton–Verfahren. Der folgende raffinierte Satz perfektioniert das Newton–Verfahren. Für wenig mehr Aufwand werden wir reichlich belohnt durch einfach berechenbare Voraussetzungen und starke explizite Fehlerschranken.

Die qualitative Formulierung C4U des Newton–Verfahrens betrachtet die Konvergenz „$x_n = \Phi^n(x_0) \to \xi$“ vom gesuchten Fixpunkt ξ aus: Das ist technisch am einfachsten, aber leider vollkommen unbrauchbar für alle Anwendungen, in denen ξ erst noch gesucht wird.

Wir benötigen daher Sätze, die nur die verfügbaren Daten $x_0, x_1, x_2, \dots$ verwenden, nicht jedoch den ersehnten Grenzwert ξ. Vorbild ist hier der Banachsche Fixpunktsatz C4Q.



Satz C4X (Kantorovich, 1948)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, hierauf $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und $\Phi(x) = x - f'(x)^{-1} f(x)$ die Newton–Abbildung. Zum Startpunkt $x_0 \in U$ fordern wir:*

A(x_0)*: Die Ableitung $f'(x_0)$ ist invertierbar. Sei $x_1 := \Phi(x_0)$ der nächste Punkt der Newton–Iteration und $r_1 := |x_1 - x_0| = |f'(x_0)^{-1} f(x_0)|$ die Schrittlänge.*

B(x_0)*: Der abgeschlossene Ball $V_1 := \bar{B}(x_1, r_1)$ liegt ganz in U. Hierauf gilt die Lipschitz–Bedingung $|f'(v) - f'(u)| \le L_1 |v - u|$ für ein $L_1 \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ und alle $u, v \in V_1$.*

C(x_0)*: Auch $f'(x_1)$ ist invertierbar, und es gilt $k_1 := L_1 r_1 |f'(x_1)^{-1}| \le 1$.*

Dann hat f in V_1 genau eine Nullstelle ξ, und es gilt $x_n = \Phi^n(x_0) \to \xi$ gemäß

$$\big|x_n - \xi\big| \;\le\; 2\big|x_n - x_{n+1}\big| \;\le\; \underbrace{k_n \big|x_n - x_{n-1}\big|}_{\text{a posteriori}} \;\le\; \underbrace{2^{1-n} \cdot k_1^{2^n - 1} \cdot \big|x_1 - x_0\big|}_{\text{a priori}} \;\searrow\; 0.$$

Ausführlich: Per Induktion gelten für jeden Punkt $x_n = \Phi^n(x_0)$ der Newton–Iteration die Aussagen **A**(x_n), **B**(x_n), **C**(x_n) *mit $r_{n+1} \le \frac{k_n}{2} r_n$ und $L_{n+1} \le L_n$ und $k_{n+1} \le k_n^2$.*

Bemerkung. Ich formuliere den Satz hier zunächst für den vertrauten Fall $E = \mathbb{R}^m$. Die Ableitung $f'(x) = (\partial_j f_i(x))_{i,j}$ ist die Jacobi–Matrix, und die Norm $|f'(x)|$ ist eine beliebige Matrixnorm, etwa die Operatornorm. Aussage und Beweis gelten wörtlich genauso für jeden Banach–Raum E. Wenn Sie möchten, führen Sie dies zur Einübung der Begriffe aus.

Bemerkung. Sei $f \in \mathscr{C}^2$ sowie $f(\xi) = 0$ und $f'(\xi) \neq 0$. Dann sind die Bedingungen **A**(x_0), **B**(x_0), **C**(x_0) erfüllt für alle Startwerte $x_0 \in \bar{B}(\xi, r)$ in einer geeigneten Umgebung von ξ mit Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Der Vorteil von Satz C4X ist nun, dass wir ξ und r nicht kennen müssen, wir können die Bedingungen direkt anhand der Punkte x_0 und x_1 prüfen.

Bemerkung. Die Bedingungen $\mathbf{A}(x_0)$ und $\mathbf{C}(x_0)$ sind leicht zu prüfen. Für die Lipschitz–Bedingung $\mathbf{B}(x_0)$ genügt, dass f zweimal stetig differenzierbar ist mit $|f''| \le L_1$ auf V_1.

BEWEIS. Wir nutzen die Taylor–Entwicklung erster Ordnung:

$$f(v) = f(u) + f'(u)(v-u) + R(v)$$

Wegen $[u,v] \subset V_1$ haben wir für den Restterm $R(v)$ dank $\mathbf{B}(x_0)$ die Schranke

$$\begin{aligned}
\big|R(v)\big| &= \big|f(v) - f(u) - f'(u)(v-u)\big| \\
&= \left|\int_{t=0}^{1} \big[f'(tv+(1-t)u) - f'(u)\big](v-u)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_{t=0}^{1} \big|f'(tv+(1-t)u) - f'(u)\big|\,|v-u|\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_{t=0}^{1} L_1\big|tv+(1-t)u-u\big|\,|v-u|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{1} L_1 t|v-u|^2\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{2}L_1|v-u|^2
\end{aligned}$$

Speziell für $u = x_0$ und $v = x_1 := x_0 - f'(x_0)^{-1} f(x_0)$ finden wir somit:

$$\big|f(x_1)\big| = \big|f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1-x_0)\big| = \big|R(x_1)\big| \le \tfrac{1}{2}L_1\big|x_1-x_0\big|^2$$

Gemäß $\mathbf{C}(x_0)$ und $\mathbf{A}(x_1)$ folgt für den nächsten Iterationsschritt $x_2 := \Phi(x_1)$:

$$\begin{aligned}
r_2 = \big|x_2-x_1\big| &= \big|f'(x_1)^{-1} f(x_1)\big| \\
&\le \big|f'(x_1)^{-1}\big| \cdot \big|f(x_1)\big| \le \tfrac{1}{2}L_1 r_1 \big|f'(x_1)^{-1}\big| r_1 = \tfrac{k_1}{2} r_1
\end{aligned}$$

Dank $k_1 \le 1$ gilt $r_2 \le \frac{1}{2}r_1$, also $B(x_2,r_2) \subset B(x_1,r_1)$. Somit gilt $\mathbf{B}(x_1)$ mit $L_2 \le L_1$. Weiterhin haben wir dank der Ungleichung $\mathbf{C}(x_0)$:

$$\big|f'(x_2) - f'(x_1)\big| \le L_2\big|x_2-x_1\big| \le \tfrac{1}{2}L_1 r_1 \le \tfrac{1}{2}\big|f'(x_1)^{-1}\big|^{-1}$$

Dank dem Banach–Lemma C5H ist $f'(x_2)$ invertierbar und

$$\big|f'(x_2)^{-1}\big| \le 2\big|f'(x_1)^{-1}\big|.$$

Damit folgt $\mathbf{C}(x_1)$ mit der Ungleichung

$$k_2 := L_2 r_2 \big|f'(x_2)^{-1}\big| \le L_1 \tfrac{k_1}{2} r_1\, 2\big|f'(x_1)^{-1}\big| \le k_1^2 \le k_1 \le 1.$$

Per Induktion ist $x_n = \Phi^n(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert und bildet eine Cauchy–Folge, denn für $p \ge n$ gilt $x_p \in V_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ mit $r_n \le 2^{1-n} r_1$. Für alle $p,q \ge n$ gilt demnach $|x_q - x_p| \le 2^{2-n} r_1$. Dank Vollständigkeit existiert ein Grenzwert $\xi \in V_1$, also $x_n \to \xi$. Wir erhalten ineinander liegende Bälle $V_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{\xi\}$. Insbesondere gilt:

$$\big|x_n - \xi\big| \le 2r_{n+1} \le k_n r_n \le 2^{1-n} k_n k_{n-1} \cdots k_1 r_1 \le 2^{1-n} \cdot k_1^{2^n-1} \cdot \big|x_1 - x_0\big|$$

Die Funktionswerte $f(x_n)$ gehen gegen Null, denn $|f(x_n)| \le \frac{1}{2}L_n r_n^2 \searrow 0$. Da die Funktion f stetig ist, schließen wir $f(\xi) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 0$. □

Bemerkung. Speziell zur Nullstellensuche komplexer Polynome siehe J1U und J1Z.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C5. Reihen und Potenzreihen

§C5a. Reihen. Sei $(V,|-|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V heißt *summierbar*, wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ in V konvergiert, also ein Grenzwert $s \in V$ existiert mit $|s - s_n| \to 0$. In diesem Fall nennen wir s die *Summe* der Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V, und wir schreiben hierfür kurz $\sum_{k=0}^{\infty} v_k = s$.

Beispiel. Zu $q \in \mathbb{C}$ summieren wir $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$. In diesem glücklichen Falle kennen wir die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ explizit: Die Teleskopsumme $(1-q)s_n = 1-q^{n-1}$ liefert

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für} \quad q \neq 1.$$

Für $|q| < 1$ gilt zudem $q^n \to 0$, denn $|q^n| = |q|^n \to 0$, also konvergiert die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $1/(1-q)$. Dies schreiben wir zusammenfassend als

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1.$$

Für $|q| \geq 1$ hingegen ist $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht summierbar: Die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen $|s_n - s_{n-1}| = |q^n| = |q|^n \geq 1$ keine Cauchy–Folge und somit nicht konvergent.

Konvention. Statt „die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V ist summierbar in V“ sagt man meist bequemer „die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ konvergiert in V“. Hierbei betrachtet man $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ als die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ *konvergiert* gegen s in V, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V einen Grenzwert s hat, also $|s - s_n| \to 0$ gilt.

In diesem Fall schreiben wir auch kurz $\sum_{k=0}^{\infty} v_k = s$.

Diese Sprech- und Schreibweise ist oft bequem und daher weit verbreitet. Man beachte jedoch, dass das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ hierbei eine (mitunter gefährliche) Doppelbedeutung hat: Zum einen bezeichnet es die Reihe (also die Folge der Partialsummen s_n), zum anderen den Grenzwert (falls vorhanden). Das ist sehr praktisch, falls die Reihe konvergiert. Wir müssen allerdings sehr vorsichtig sein, solange die Konvergenz nicht geklärt ist.

Dieselbe Schwierigkeit kennen Sie von der Schreibweise $\lim s_n = s$: Das bequeme und suggestive Symbol „$\lim s_n$“ ist nur definiert, falls die Folge s_n tatsächlich konvergiert.

Bemerkung. Eigenschaften der Konvergenz von Folgen übertragen sich auf Reihen:

(1) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ in V, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda v_k)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} v_k$.
(2) Konvergieren die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ in V, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(u_k + v_k)$, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$.

Reihen nicht-negativer reeller Zahlen entsprechen wachsenden Folgen:

(3) Für jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bilden die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine wachsende Folge. Genau dann ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ summierbar, wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.
(4) Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Letzteres nennt man das *Majoranten–Kriterium* bzw. *Minoranten–Kritrium*.

§C5b. Absolut konvergente Reihen. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ in einem normierten Vektorraum $(V,|-|)$ heißt *absolut konvergent*, falls die Normreihe $\sum_{k=0}^{\infty}|v_k|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Da die Folge $\sum_{k=0}^{n}|v_k|$ in n monoton wächst, ist dies gleichbedeutend mit $\sum_{k=0}^{\infty}|v_k|<\infty$.

Beispiel. Sei $(A,|-|)$ eine normierte Algebra, zum Beispiel $A=\mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$. Für $x\in A$ mit $|x|<1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ absolut konvergent, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty}|x^k|\le\sum_{k=0}^{\infty}|x|^k=\frac{1}{1-|x|}<\infty.$$

Auf dieser einfachen Beobachtung zusammen mit der zusätzlich notwendigen Vollständigkeit von $(A,|-|)$ gründet die Theorie der Potenzreihen, wie wir unten sehen werden.

Beispiel. Nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent. Ein klassisches Beispiel ist die Leibniz–Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ in $\mathbb{R}$: Die Folge $(-1)^{k+1}/k$ ist summierbar aber nicht absolut summierbar, denn für die harmonische Reihe gilt $\sum_{k=1}^{\infty}1/k=\infty$.

Beispiel. Nicht jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Zum Beispiel ist in $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ mit Supremumsnorm und der kanonischen Basis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}e_k$ nicht konvergent, obwohl die Normreihe $\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}=2$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Nur in Banach–Räumen gilt, dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert:

Satz C5A. *Jede absolut konvergente Reihe in $(V,|-|)$ ist eine Cauchy–Folge in $(V,|-|)$. Genau dann konvergiert jede absolut konvergente Reihe in V, wenn V vollständig ist.*

BEWEIS. Sei $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(V,|-|)$ absolut summierbar, das heißt die Normreihe $\sum_{k=0}^{\infty}|v_k|$ konvergiert in $\mathbb{R}$. Demnach ist $a_n:=\sum_{k=0}^{n}|v_k|$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$: Zu jedem $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ existiert $n\in\mathbb{N}$ sodass für $n\le p<q$ gilt $|a_q-a_p|=\sum_{k=p+1}^{q}|v_k|\le\varepsilon$. Damit ist auch $s_n=\sum_{k=0}^{n}v_k$ eine Cauchy–Folge in V, denn

$$|s_q-s_p|=\Big|\sum_{k=p+1}^{q}v_k\Big|\le\sum_{k=p+1}^{q}\big|v_k\big|\le\varepsilon.$$

Daraus folgt: Ist V vollständig, so konvergiert jede absolut konvergente Reihe in V.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass jede absolut konvergente Reihe in V konvergiert, und zeigen, dass jede Cauchy–Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V konvergiert.

Zunächst konstruieren wir eine konvergente Teilfolge: Zu $\varepsilon=1$ existiert $n_0\in\mathbb{N}$ sodass $|u_p-u_q|\le 1$ für alle $p,q\ge n_0$. Seien die Indizes $n_0<n_1<\cdots<n_{k-1}$ bereits konstruiert. Zu $\varepsilon=2^{-k}$ existiert $n_k>n_{k-1}$ sodass $|u_p-u_q|\le 2^{-k}$ für alle $p,q\ge n_k$. Die Folge $v_0:=u_{n_0}$ und $v_k:=u_{n_k}-u_{n_{k-1}}$ für $k\in\mathbb{N}_{\ge 1}$ führt zur Teleskopsumme $\sum_{k=0}^{\ell}v_k=u_{n_\ell}$. Nach Konstruktion ist sie absolut summierbar, denn $\sum_{k=0}^{\infty}|v_k|\le|v_0|+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}=|v_0|+2$.

Nach Voraussetzung konvergiert $u_{n_\ell}=\sum_{k=0}^{\ell}v_k$ für $\ell\to\infty$ gegen einen Grenzwert $u\in V$. Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge ist, folgt hieraus bereits $u_n\to u$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C5c. Umordnung von Reihen. Nicht alle Rechenregeln für endliche Summen übertragen sich uneingeschränkt auf Reihen: Im Allgemeinen gelten weder das Assoziativgesetz noch das Kommutativgesetz. Zum Beispiel gilt $(1-1)+(1-1)+(1-1)\cdots = 0$, nach Umklammern jedoch $1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1$. Weglassen der Klammern liefert die divergente Reihe $1-1+1-1+1-1+\ldots$. Umgekehrt allerdings dürfen wir in einer konvergenten Reihe $a_0+a_1+a_2+\ldots$ beliebig Klammern einfügen, denn dies bedeutet für die Folge der Partialsummen den Übergang zu einer Teilfolge; der Grenzwert bleibt gleich.

Auch die Kommutativität gilt im Allgemeinen nicht, im Gegenteil besagt der Riemannsche Umordnungssatz: Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ summierbar aber nicht absolut summierbar, etwa $a_k = (-1)^{k+1}/k$, so existiert zu jedem vorgegebenen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = a$. Diese Aussage ist verblüffend, doch der Beweis ist einfach: Man summiert solange positive Terme, bis a überschritten wird, dann solange negative, bis a unterschritten wird, usw.

Die Umordnung von Reihen ist in vielen Rechnungen wichtig, erfordert aber wie gesehen Vorsichtsmaßnahmen. Hier rettet uns die absolute Konvergenz:

Satz C5B (kleiner Umordnungssatz)**.** *Sei $(V,|-|)$ ein Banach–Raum und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V. Für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |v_{\sigma(k)}| \qquad \text{in } [0,\infty].$$

Ist dieser Wert endlich, so ist $(v_i)_{i\in I}$ in V summierbar, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} v_{\sigma(k)} \qquad \text{in } V.$$

Definition C5C. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V mit Indexmenge I. Ist I endlich, so wählen wir eine Bijektion $\tau : \{1,\ldots,n\} \xrightarrow{\sim} I$ und setzen $\sum_{i\in I} v_i := v_{\tau(1)} + \cdots + v_{\tau(n)}$. Dank Assoziativität von $(V,+)$ ist dies unabhängig von der gewählten Klammerung, und dank Kommutativität von $(V,+)$ ist dies unabhängig von der Wahl der Bijektion τ.

Ist I abzählbar unendlich, so wählen wir eine Bijektion $\tau : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} I$. Wir nennen $(v_i)_{i\in I}$ *absolut summierbar*, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |v_{\tau(k)}| < \infty$ gilt, und definieren $\sum_{i\in I} v_i := \sum_{k=0}^{\infty} v_{\tau(k)}$. Dank des Satzes C5B ist das Ergebnis unabhängig von der Wahl der Bijektion τ.

Für eine beliebige Indexmenge I gilt schließlich: Für $\sum_{i\in I} |v_i| < \infty$ ist jede Menge $J_n := \{\, i \in I \mid |v_i| \geq \frac{1}{n} \,\}$ endlich, also ist der Träger $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \{\, i \in I \mid v_i \neq 0 \,\}$ abzählbar. Wir ignorieren die Nullen und definieren dann $\sum_{i\in I} v_i := \sum_{i\in J} v_i$ wie zuvor.

Satz C5D (großer Umordnungssatz)**.** *Sei $(v_k)_{i\in I}$ eine Familie in einem Banach–Raum V. Für jede Zerlegung $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ der Indexmenge gilt*

$$\sum_{i\in I} |v_i| = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} |v_i| \qquad \text{in } [0,\infty].$$

Ist dieser Wert endlich, so ist $(v_i)_{i\in I}$ in V summierbar, und es gilt

$$\sum_{i\in I} v_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} v_i \qquad \text{in } V.$$

Beispiel (Doppelreihen)**.** Sei $(v_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge in V. Dies ist eine Abbildung $v : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to V$ mit $(i,j) \mapsto v_{ij}$. Diese kann man sich als eine „unendliche Matrix“ vorstellen:

$$\begin{array}{ccccc} v_{00} & v_{01} & v_{02} & v_{03} & \dots \\ v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{13} & \dots \\ v_{20} & v_{21} & v_{22} & v_{23} & \dots \\ v_{30} & v_{31} & v_{32} & v_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad \text{zum Beispiel} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Für $i,j,k \in \mathbb{N}$ bilden wir die Zeilensumme $z_i := \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij}$, die Spaltensumme $s_j := \sum_{i=0}^{\infty} v_{ij}$, sowie die Diagonalsumme $d_k := \sum_{i+j=k} v_{ij}$. Ist die Doppelfolge $(v_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar, so auch die Folgen $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$, und es gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} v_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}} z_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_k.$$

Bemerkung. Im Allgemeinen gilt dies nicht: Im obigen Beispiel gilt $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_{ij} = 0$ aber $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} v_{ij} = 1$, und $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k} v_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ divergiert!

Doppelfolgen treten insbesondere dann auf, wenn man zwei Reihen $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $b = \sum_{j=0}^{\infty} b_i$ miteinander multipliziert. Wir nehmen hierzu an, V sei nicht nur ein Banach–Raum, sondern eine Banach–Algebra. Aus den Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ können wir dann die Doppelfolge $(a_i \cdot b_j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ bilden. Das Produkt $a \cdot b$ lässt sich berechnen durch

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(a_i \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j$$

oder auch durch

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\cdot b_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_j.$$

Noch interessanter sind oft die Diagonalsummen $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Im Falle endlicher Summen gilt dank Distributivität auch hier $(\sum_i a_i)\cdot(\sum_j b_j) = \sum_k c_k$. Für unendliche Reihen gilt dies unter der Voraussetzung der absoluten Konvergenz:

Satz C5E (Cauchy–Produkt für Reihen)**.** *Sind $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ absolut summierbare Folgen in $(V,|-|)$, dann ist auch $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ absolut summierbar und*

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Bemerkung. Auf die absolute Summierbarkeit können wir hier nicht verzichten. Die Folge $a_i = (-1)^i/\sqrt{i}$ für $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist nach Leibniz summierbar in $\mathbb{R}$, aber nicht absolut summierbar. Das Produkt $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right)$ führt zu $c_k = (-1)^k \sum_{i+j=k} 1/\sqrt{ij}$. Für diese Folge gilt $|c_k| \geq 1$, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ist also nicht konvergent.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C5d. Potenzreihen. Eine *Potenzreihe* über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Sie ist gegeben durch ihre Koeffizienten $a_k \in \mathbb{K}$ für $k \in \mathbb{N}$. Ihr *Konvergenzradius* ist

$$\rho := 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad \in \quad [0,\infty].$$

Satz C5F. *Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \in]0,\infty]$. Sei A eine Banach–Algebra mit Eins. Für jedes Element $x \in A$ mit $|x| < \rho$ konvergiert die Reihe*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

absolut und somit auch in A. Dies definiert eine stetige Funktion $f : B(0,\rho) \to A$. Auf jedem abgeschlossenen Ball $\bar{B}(0,r)$ mit $0 < r < \rho$ ist f zudem beschränkt, und die Polynome $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ konvergieren auf $\bar{B}(0,r)$ gleichmäßig gegen f. Schließlich ist $f : B(0,\rho) \to A$ differenzierbar, und die Ableitung $f' : B(0,\rho) \to A$ ist gegeben durch

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Diese Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius ρ. Daher gelten alle bisherigen Aussagen ebenso für f'. Insbesondere ist die Funktion $f : B(0,\rho) \to A$ beliebig oft differenzierbar und bestimmt die Koeffizientenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gemäß $a_k = f^{(k)}(0)/k!$.

Bemerkung. Wie im reellen Fall nennen wir $f : A \supset U \to A$ in x_0 *differenzierbar* (nach FRÉCHET) wenn sich eine Tangente anlegen lässt, also eine Approximation der Form

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + ax + r(x) \qquad \text{mit } a \in A \text{ und } |r(x)|/|x| \to 0 \text{ für } x \to 0.$$

In diesem Fall gilt nennen wir $f'(x_0) := a$ die *Ableitung* von f in x_0. Alternativ: Gilt $f(x_0 + x) = f(x_0) + g(x)\,x$ mit g stetig in 0, so ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = g(0)$, denn $r(x) = (g(x) - g(0))x$ erfüllt $|r(x)|/|x| \le |g(x) - g(0)| \to 0$.

BEWEIS. Für $0 < s < \rho$ gilt $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 1/\rho < 1/s$. Daher existiert $n \in \mathbb{N}$ sodass für $k > n$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} < 1/s$, also $|a_k| s^k < 1$. Somit ist die Folge $|a_k| s^k$ beschränkt, denn

$$M := \sup\{\, |a_k| s^k \mid k \in \mathbb{N} \,\} \le \max\{\, |a_0|, |a_1| s^1, \dots, |a_n| s^n, 1 \,\} < \infty.$$

Für $|x| \le r < s$ erhalten wir hieraus die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| s^k \Big(\frac{r}{s}\Big)^k \le M \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{r}{s}\Big)^k = \frac{M}{1 - r/s} < \infty.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist somit absolut konvergent. Dank Vollständigkeit von A konvergiert sie in A. Dies definiert eine Funktion $f : B(0,\rho) \to A$. Die Rechnung zeigt ebenfalls, dass f auf $\bar{B}(0,r)$ beschränkt ist, und die Polynome $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ auf $\bar{B}(0,r)$ gleichmäßig gegen f konvergieren. Dank C3Q ist damit auch die Grenzfunktion f stetig.

Die Ableitung in 0 ist klar: Es gilt $f(0+x) - f(0) = g(x)\,x$ mit $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^k$. Auch g ist auf $B(0,\rho)$ stetig. Demnach ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = g(0) = a_1$.

Zur Ableitung in $x_0 \in B(0,\rho)$ gilt zunächst $B(x_0,\sigma) \subset B(0,\rho)$ für $\sigma = \rho - |x_0|$. Daher lässt sich $f(x_0+x)$ für $x \in B(0,\sigma)$ in folgende Potenzreihe entwickeln:

$$f(x_0+x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_0+x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_0^{k-j} x^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} a_k x_0^{k-j} x^j$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{j} a_k x_0^{k-j} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \quad \text{mit} \quad b_j = \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} a_k x_0^{k-j}$$

Die Vertauschung der beiden Reihen ist nach C5D dank absoluter Konvergenz erlaubt: Es gilt $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |x_0|^{k-j} |x|^j = (|x_0|+|x|)^k$, und dank $|x_0|+|x| \le r < \rho$ verläuft die Abschätzung wörtlich wie zuvor. Für die Koeffizienten gilt $b_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k = f(x_0)$, also $f(x_0+x) - f(x_0) = g(x)\,x$ mit $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+1} x^j$. Die Funktion g ist auf $B(0,\sigma)$ stetig. Demnach ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = g(0) = b_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^{k-1}$.

Damit ist auch die Ableitung f' als Potenzreihe dargestellt. Wie in obiger Abschätzung bereits gesehen, konvergiert auch diese Reihe absolut für alle $x_0 \in B(0,\rho)$. □

Definition C5G. Sei A eine Banach–Algebra mit Eins und $U \subset A$ offen. Eine Abbildung $f : U \to A$ heißt *analytisch*, wenn sie sich um jeden Punkt $x_0 \in U$ als Potenzreihe darstellen lässt, das heißt, es gibt $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x_0,r) \subset U$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, sodass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad \text{absolut konvergent für alle } x \in B(x_0,r).$$

§C5e. Die geometrische Reihe. Das grundlegende Beispiel ist folgende Reihe:

Satz C5H (Banach–Lemma)**.** *Sei A eine Banach–Algebra mit Eins. Für jedes $x \in A$ mit $|x| < 1$ ist $a = 1-x$ in A invertierbar dank der geometrischen Reihe:*

$$\iota_1 \,:\, B(1,1) \to A \,:\, a = 1-x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1} = a^{-1}.$$

Die Gruppe $A^\times$ aller in A invertierbaren Elemente ist offen in A, und hierauf ist die Inversion $A^\times \to A^\times : a \mapsto a^{-1}$ analytisch: Für $u \in A^\times$ und $r = |u^{-1}|^{-1}$ haben wir

$$\iota_u \,:\, B(u,r) \to A \,:\, a \mapsto u^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \big[(u-a)u^{-1}\big]^k = u^{-1}(1-(u-a)u^{-1})^{-1} = a^{-1}.$$

Insbesondere gilt für $a \in A$ mit $|(u-a)u^{-1}| \le \theta < 1$ die Abschätzung $|a^{-1}| \le |u^{-1}|/(1-\theta)$.

BEWEIS. Die absolute Konvergenz folgt aus C5F und dem Konvergenzradius $\rho = 1$. Wir können dies direkt nachrechnen: Für $|x| \le r < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |x^k| \le \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{1-|x|} < \infty$.

Dank Vollständigkeit von A konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ in A: Die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ konvergieren gegen ein $s \in A$. Die Teleskopsumme $(1-x)s_n = 1-x^{n+1}$ liefert per Grenzübergang $(1-x)s = 1$. Also ist $(1-x)$ invertierbar und $(1-x)^{-1} = s$.

Dasselbe gilt allgemein um jedes invertierbare Element $u \in A^\times$ dank ι_u: Der Term $x = (u-a)u^{-1}$ erfüllt $|x| < 1$, also konvergiert die obige Reihe wie angegeben. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Bemerkung. Die Vollständigkeit ist wesentlich! Als Gegenbeispiel betrachten wir die Polynomalgebra $\mathbb{R}[x]$. Mit $\|f\| = \sup\{\,|f(x)| \mid x \in [-1,1]\,\}$ ist $\mathbb{R}[x]$ eine normierte Algebra. Aber nur die Konstanten sind invertierbar, und $\mathbb{R}[x]^\times = \mathbb{R}^\times$ ist nicht offen in $\mathbb{R}[x]$. Das Polynom $f(x) = x^2/2$ erfüllt $\|f\| = 1/2 < 1$, dennoch ist $1 - x^2/2$ in $\mathbb{R}[x]$ nicht invertierbar. Zwar ist $s_n = \sum_{k=0}^n f^k$ eine Cauchy–Folge, aber diese hat in $\mathbb{R}[x]$ keinen Grenzwert.

Beispiel. Für jeden Banach–Raum E ist die Menge $A = \mathcal{B}(E)$ der beschränkten Operatoren eine Banach–Algebra mit Eins. Hierin ist die Gruppe $A^\times$ offen und $x \mapsto x^{-1}$ stetig. Speziell für $E = \mathbb{K}^n$ erhalten wir $A = \mathbb{K}^{n\times n}$, hierin ist $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ offen und $x \mapsto x^{-1}$ stetig.

Im endlich-dimensionalen Fall folgt dies direkter und expliziter aus B1Y: Die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist stetig, denn sie ist ein Polynom in den Koeffizienten. Genau dann ist x invertierbar, wenn $\det x \neq 0$ gilt. Also ist $\mathrm{GL}_n \mathbb{K} = \det^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ offen. Die Inversion $x \mapsto x^{-1}$ ist hier sogar eine rationale Funktion in den Koordinaten x_{ij} der Matrix.

§C5f. Die Exponentialfunktion. Wenn man in der Analysis eine Funktion als die wichtigste küren sollte, so müsste die Wahl auf die Exponentialfunktion fallen. Auch in der Topologie spielt sie eine wichtige Rolle, etwa zur Parametrisierung der komplexen Ebene und in der Überlagerungstheorie. Der entscheidende Punkt ist die folgende Konstruktion:

Satz C5I (Existenz und Eigenschaften der Exponentialreihe)**.** *Sei A eine Banach–Algebra mit Eins. Für jedes Element $x \in A$ konvergiert die Exponentialreihe*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut und somit auch in A. Die Funktion $\exp : A \to A$ ist stetig, sogar $\mathscr{C}^\infty$.

(1) Für alle $x, y \in A$ mit $xy = yx$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
(2) Für jedes $x \in A$ gilt insbesondere $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$.
(3) Somit ist $\exp(x)$ in A invertierbar, und es gilt $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$.

Für jedes Element $x \in A$ mit $|x| < 1$ konvergiert die Logarithmusreihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

absolut und somit auch in A. Die Funktion $\ln : B(1,1) \to A$ ist stetig, sogar $\mathscr{C}^\infty$.

(4) Es gilt $\exp'(x) = \exp(x)$ und $\ln'(a) = a^{-1}$.
(5) Für alle $a \in B(1,1)$ gilt $\exp(\ln(a)) = a$.
(6) Die Exponentialfunktion ist somit ein lokaler Diffeomorphismus um 0.

Ist die Banach–Algebra A kommutativ, so gilt zudem:

(7) Um jeden Punkt $x \in A$ ist $\exp : A \to A^\times$ ein lokaler Diffeomorphismus.
(8) $\exp : (A,+) \to (A^\times,\cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit diskretem Kern.
(9) Das Bild $\exp(A) \subset A^\times$ ist eine offene Untergruppe und somit auch abgeschlossen.

BEWEIS. Der Konvergenzradius der Exponentialreihe ist ∞, und 1 bei der Logarithmusreihe. Satz C5F garantiert die Existenz der Funktionen $\exp : A \to A$ und $\ln : B(1,1) \to A$. Diese sind stetig, sogar differenzierbar, mit $\exp'(x) = \exp(x)$ und $\ln'(a) = a^{-1}$ (C5H).

Kommutieren $x, y \in A$ so gilt die binomische Formel $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Dank des Umordnungssatzes für absolut konvergente Reihen (C5E) folgt hieraus:

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^\infty \frac{y^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k+\ell=n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y).\end{aligned}$$

Auch die Komposition $f : B(0,1) \to A$ mit $f(x) = \exp(\ln(1+x))$ lässt sich mittels Einsetzung durch eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ darstellen. Es gilt nun $a_0 = f(0) = 1$, nach Kettenregel $f'(x) = \exp(\ln(1+x))(1+x)^{-1}$, also $a_1 = f'(0) = 1$, und nach Produktregel $f''(x) = 0$. Hieraus erhalten wir alle weiteren Koeffizienten $a_k = f^{(k)}(0)/k! = 0$ für $k \geq 2$. Somit gilt $f(x) = 1 + x$, wie behauptet. Zu Diffeomorphismen siehe §C5m.

Ist $(A, \cdot)$ kommutativ, so gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ für alle $x, y \in A$, und somit ist $\exp : (A,+) \to (A^\times, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus und zudem um jeden Punkt $x_0 \in A$ ein lokaler Diffeomorphismus dank der lokalen Umkehrfunktion $\exp(x_0) \cdot B(1,1) \to A$ mit $\exp(x_0)\cdot(1+x) \mapsto x_0 + \ln(1+x)$. Es gilt $\exp(0) = 1$, aber in der Umgebung $\ln B(1,1)$ von 0 liegen nach (5) keine weiteren Elemente x mit $\exp(x) = 1$. Somit ist der Kern diskret.

Als Diffeomorphismus ist exp eine offene Abbildung. Das Bild $\exp(A) \subset A^\times$ ist somit eine offene Untergruppe. Jede offene Untergruppe $U \subset A^\times$ ist abgeschlossen: Das Komplement $A^\times \smallsetminus U$ ist Vereinigung von Nebenklassen der Form bU mit $b \in A^\times \smallsetminus U$; diese sind alle offen, also auch ihre Vereinigung. Damit ist $\mathrm{A}^\times$ abgeschlossen. □

§C5g. Die reelle Exponentialfunktion. Wir wenden C5I auf $\mathbb{R}$ an:

Satz C5J. *Die reelle Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $\exp(x) = \sum_{k=0}^\infty x^k/k!$ *ist reell differenzierbar mit* $\exp' = \exp$ *und erfreut sich folgender Eigenschaften:*

(1) Es gilt $\exp(x) > 0$ *und* $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
(2) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng wachsend und streng konkav.*
(3) Die Abbildung $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*

Es existiert also eine Umkehrfunktion: Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *erfüllt* $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ *und* $\exp \circ \ln = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$*, und erfreut sich folgender Eigenschaften:*

(4) Die Abbildung $\ln : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*
(5) Die Funktion $\ln$ *ist stetig, differenzierbar, und es gilt* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
(6) Die Funktion $\ln$ *ist demnach streng wachsend und streng konkav.*

BEWEIS. Da $(\mathbb{R}, \cdot)$ kommutativ ist, folgt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ dank C5I. Es gilt $\exp(x) = \exp(x/2)^2 \geq 0$. Wegen $\exp(x)\exp(-x) = 1$ folgt $\exp(x) > 0$. Hieraus folgt auch $0 < \exp(x) = \exp'(x) = \exp''(x)$, also ist exp streng wachsend und streng konvex. (Wachstum folgt ebenso aus $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) > \exp(x)$ für alle $y > 0$.)

Da $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{>0}$ eine offene und abgeschlossene Untergruppe ist und zudem $\mathbb{R}_{>0}$ zusammenhängend, muss $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$ gelten. (Dies folgt ebenso aus Stetigkeit und dem Zwischenwertsatz, denn für $x \nearrow +\infty$ gilt $\exp(x) \nearrow +\infty$ und somit $\exp(-x) \searrow 0$.) □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C5h. Die komplexe Exponentialfunktion. Wir wenden C5I auf $\mathbb{C}$ an:

Satz C5K. *Die komplexe Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ *mit* $\exp(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k/k!$ *ist komplex differenzierbar mit* $\exp' = \exp$ *und erfreut sich folgender Eigenschaften:*

(1) Die Abbildung $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*
(2) Surjektivität: Für alle $w \in \mathbb{C}^\times$ *existiert* $z \in \mathbb{C}$ *sodass* $\exp(z) = w$.
(3) Kern: Es existiert $\pi \in \mathbb{R}_{>0}$ *sodass* $\exp(z) = 1$ *äquivalent ist zu* $z \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

Anders gesagt, der Kern von exp ist die Untergruppe $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Diese Bedingung legt die Zahl $\pi > 0$ eindeutig fest. Somit gilt $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ genau dann, wenn $z_1 - z_2 \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

Die Logarithmusfunktion $\ln : B(1,1) \to \mathbb{C}$ mit $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} z^k/k$ erfüllt $\exp(\ln(1+z)) = 1+z$ für $|z| < 1$. Anders als im reellen Fall ist dies nur eine *lokale* Umkehrfunktion; es gibt keine stetige *globale* Umkehrfunktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ mit $\exp \circ f = \mathrm{id}$. (Mehr hierzu in Kapitel M zum Thema Überlagerungen, wo dies das zentrale Beispiel ist.)

BEWEIS. Da $(\mathbb{C}, \cdot)$ kommutativ ist, folgt (1) aus C5I. Da $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^\times$ nach C5I eine offene und abgeschlossene Untergruppe ist und zudem $\mathbb{C}^\times$ zusammenhängend, muss $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ gelten. Für $z = \exp(x + \mathrm{i}y)$ gilt $|z|^2 = z\overline{z} = \exp(x+\mathrm{i}y)\exp(x-\mathrm{i}y) = \exp(2x)$, also $|\exp(x+\mathrm{i}y)| = \exp(x)$. Wir erhalten hieraus die Zerlegung $\exp(x+\mathrm{i}y) = \exp(x)\exp(\mathrm{i}y)$ mit Gruppenhomomorphismen $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $\exp : (\mathrm{i}\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$. Letzterer ist surjektiv, kann aber nicht injektiv sein, denn $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{S}^1$. (Dies sieht man an Kompaktheit oder am Zusammenhang.) Demnach ist $\ker(\exp) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$ nicht-trivial, zudem diskret (C5I), also von der Form $p\mathbb{Z}$ für ein $p \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. Wir wählen $\pi > 0$ so, dass $\ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{R}$. □

§C5i. Sinus und Cosinus. Wir definieren die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sin(z) := \frac{\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

$$\cos(z) := \frac{\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)}{2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Somit gilt die Eulersche Formel $\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(1) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(\mathrm{i}x))$ und $\sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(\mathrm{i}x))$.
(2) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(\mathrm{i}x)|^2 = 1$ und somit $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.
(3) Sinus und Cosinus sind differenzierbar mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $p(t) = \exp(\mathrm{i}t)$ erfreut sich folgender Eigenschaften:

(4) Es gilt $p(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$, wobei $\mathbb{S}^1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ der Einheitskreis ist.
(5) Die Abbildung $p : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
(6) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $p(x) = p(y)$ genau dann, wenn $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Geometrisch bedeutet dies folgendes: Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $p(t) = (\cos t, \sin t)$ parametrisiert den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit konstanter Geschwindigkeit $|p'(t)| = 1$. Die Bogenlänge dieses Kreises entspricht demnach der Periode 2π. Damit entspricht die oben als Halbperiode eingeführte Zahl π tatsächlich als Kreiszahl eingeführten Konstanten.

§C5j. Zweige des komplexen Logarithmus. Dank C5K sind die beiden Gruppenhomomorphismen $\exp : (\mathbb{C},+) \to (\mathbb{C}^\times,\cdot)$ und $p : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{S}^1,\cdot) : t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ surjektiv.

Geometrisch bedeutet dies: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ können wir in Polarkoordinaten schreiben als $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \mathbb{R}$. Hierbei ist der *Betrag* $r = |z|$ durch z eindeutig bestimmt, das *Argument* t aber nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π.

Korollar C5L. *Für $\theta \in \mathbb{R}$ setzen wir $\tilde{U}_\theta := \mathbb{R} + \mathrm{i}\cdot]\theta-\pi, \theta+\pi[$ und*

$$U_\theta := \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\le 0}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \left\{ r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \;\middle|\; 0 < r,\ \theta-\pi < t < \theta+\pi \right\}.$$

Hierauf eingeschränkt ist die Exponentialfunktion ein Diffeomorphismus $\exp : \tilde{U}_\theta \xrightarrow{\sim} U_\theta$. Die Umkehrfunktion $\ln_\theta : U_\theta \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_\theta$ nennen wir einen Zweig *des komplexen Logarithmus.*

Beispiel. Der *Hauptzweig* ist $\ln_0 : \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\le 0} \to \mathbb{R} + \mathrm{i}\cdot]-\pi,+\pi[$. Auf $\mathbb{R}_{>0}$ stimmt er mit dem reellen Logarithmus überein, auf $\mathbb{R}_{\le 0}$ ist er nicht definiert. Auf $\mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\}$ ist dies die Winkelfunktion $\ln_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{i}t$ für $-\pi < t < \pi$. Speziell für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x > 0$ finden wir:

$$\ln_0 \;:\; \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} \to \mathbb{C} \;:\; x + \mathrm{i}y \mapsto \ln\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{i}\arctan(y/x)$$

Alle anderen Zweige entstehen durch Drehung aus diesem Hauptzweig: Für $\theta \in \mathbb{R}$ gilt $U_\theta = U_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ und $\tilde{U}_\theta = \tilde{U}_0 + \mathrm{i}\theta$ sowie $\ln_\theta(z) = \ln_0(z\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) + \mathrm{i}\theta$.

Jede der Funktionen $\ln_\theta$ ist stetig, ihre Definitionsbereiche überdecken $\mathbb{C}$, doch lassen sie sich nicht zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ verkleben.

§C5k. Zweige der komplexen Wurzelfunktionen. Sei $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$. Zu $z \in \mathbb{C}^\times$ hat die Gleichung $w^n = z$ genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$: Für $z = 1$ sind dies die *n–ten Einheitswurzeln* $\xi_n^k = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ mit $\xi_n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$.

Im allgemeinen Fall $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \mathbb{R}$ erfüllt $w = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/n}$ die Gleichung $w^n = z$. Allerdings ist die Wahl von t hierbei nicht eindeutig: Insgesamt hat die Gleichung $w^n = z$ somit genau die Lösungen $w = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n + 2\pi\mathrm{i}k/n}$ für $k = 0, \ldots, n-1$.

Korollar C5M. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$. Der Gruppenhomomorphismus $p_n : (\mathbb{C}^\times,\cdot) \to (\mathbb{C}^\times,\cdot)$ mit $p_n(w) = w^n$ ist surjektiv und hat als Kern die Gruppe der n–ten Einheitswurzeln:*

$$\ker(p_n) = \left\{ \xi_n^k \;\middle|\; k = 0, \ldots, n-1 \right\} \quad \textit{mit} \quad \xi_n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}.$$

Über jedem Punkt $z = p_n(w)$ liegt also die Faser $p_n^{-1}(z) = \{\, \xi_n^k\, w \mid k = 0, \ldots, n-1 \,\}$.

Für $\theta \in \mathbb{R}$ setzen wir $U_{\theta,n} := \mathbb{R} + \mathrm{i}/n \cdot]\theta-\pi, \theta+\pi[$ und $U_\theta = U_{\theta,1}$ wie oben in C5L. Hierauf eingeschränkt ist die Potenzabbildung ein Diffeomorphismus $p_n : U_{\theta,n} \xrightarrow{\sim} U_\theta$. Die Umkehrfunktion $r_\theta : U_\theta \xrightarrow{\sim} U_{\theta,n}$ nennen wir einen Zweig *der komplexen Wurzelfunktion.*

Übung C5N. Bereits der einfachste Fall $n = 2$ ist topologisch interessant. Zu $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ lässt sich eine der beiden komplexen Wurzeln (C3W) berechnen durch

$$f : \mathbb{C}_{\mathrm{Im}\ge 0} \to \mathbb{C} : z \mapsto \sqrt{\tfrac{|z|+x}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\tfrac{|z|-x}{2}}, \quad g : \mathbb{C}_{\mathrm{Im}\le 0} \to \mathbb{C} : z \mapsto \sqrt{\tfrac{|z|+x}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\tfrac{|z|-x}{2}}.$$

Die jeweils andere Wurzel erhält man durch $-f(z)$ bzw. $-g(z)$. Beide Funktionen f und g sind stetig, ihre Definitionsbereiche überdecken $\mathbb{C}$, doch lassen sie sich nicht zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ verkleben, dann auf $\mathbb{R}_{<0}$ stimmen beide nicht überein.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C5l. Die Matrix-Exponentialfunktion. Wir wenden C5I auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ an:

Die Matrix-Algebra $\mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ist eine Banach–Algebra, etwa bezüglich der Frobenius–Norm (C1P), und Konvergenz bedeutet koordinatenweise Konvergenz. Jeder Matrix $x\in\mathbb{K}^{n\times n}$ ordnen wir ihre Exponentialfunktion $\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ zu.

Beispiel. Für Diagonalmatrizen gilt $\exp(\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))=\operatorname{diag}(\exp(\lambda_1),\dots,\exp(\lambda_n))$.

Beispiel. Für $x=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ finden wir $x^2=\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ sowie $x^3=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ und $x^4=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ usw. Dies setzt sich periodisch fort. Hieraus erhalten wir $\exp(tx)=\left(\begin{smallmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{smallmatrix}\right)$.

Beispiel. Kommutativität gilt für $n\geq 2$ nicht mehr. Für $x=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $y=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ zum Beispiel finden wir $\exp(x)=\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{e}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\exp(y)=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Hier ist $\exp(x+y)=\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{e}&\mathrm{e}-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ verschieden von $\exp(x)\exp(y)=\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{e}&\mathrm{e}\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und auch von $\exp(y)\exp(x)=\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{e}&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

Bemerkung. Bei Konjugation gilt $\exp(\overline{x})=\overline{\exp(x)}$, bei Transposition $\exp(x^{\intercal})=\exp(x)^{\intercal}$, bei Ähnlichkeit $\exp(sxs^{-1})=s\exp(x)s^{-1}$, für Determinanten $\det(\exp(x))=\exp(\operatorname{tr}(x))$. Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ die Eigenwerte von x, so sind $\exp(\lambda_1),\dots,\exp(\lambda_n)$ die Eigenwerte von $\exp(x)$. Letzteres ist klar für obere Dreiecksmatrizen, und im allgemeinen Fall nutzen wir, dass jede $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ trigonalisierbar ist, also ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.

Mangels Kommutativität ist die Surjektivität nicht mehr automatisch gewährleistet:

Beispiel. Für $y=\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-2\end{smallmatrix}\right)$ gilt $\det y>0$, aber es existiert kein $x\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\exp(x)=y$.

BEWEIS. Angenommen $x\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ erfüllt $\exp(x)=y$. Sind $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ die beiden Eigenwerte von x, so sind $\exp(\lambda_1),\exp(\lambda_2)$ die Eigenwerte von $\exp(x)$. Da x reell ist und somit auch das charakteristische Polynom $\det(x-t1)$, sind λ_1,λ_2 entweder beide reell oder komplex konjugiert. Daher ist $\{\exp(\lambda_1),\exp(\lambda_2)\}=\{-1,-2\}$ unmöglich. □

Satz C5O. *Die Exponentialabbildung* $\exp:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ *ist surjektiv für alle* $n\geq 1$. *Hingegen ist* $\exp:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ *nicht surjektiv für* $n\geq 2$. *Genau dann existiert zu einer reellen Matrix* $y\in\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ *ein reeller Logarithmus* $x\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $\exp(x)=y$, *wenn eine reelle Quadratwurzel* $w\in\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ *mit* $w^2=y$ *existiert.*

Der Fall $n=1$ entspricht $\exp:\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}_{>0}$ aus C5J und $\exp:\mathbb{C}\twoheadrightarrow\mathbb{C}^{\times}$ aus C5K.

BEWEIS. Sei $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$. Zu $y\in\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ sei $A=\mathbb{K}[y]\subset\mathbb{K}^{n\times n}$ die erzeugte $\mathbb{K}$–Algebra. Das bedeutet $A=\{\,p(y)\mid p\in\mathbb{K}[t]\,\}$, wobei $\mathbb{K}[t]$ die Algebra aller Polynome über $\mathbb{K}$ ist. Insbesondere ist A kommutativ. Zudem ist A in $\mathbb{K}^{n\times n}$ abgeschlossen, also selbst eine Banach–Algebra. Somit ist $\exp:(A,+)\to(A^{\times},\cdot)$ dank C5I ein Gruppenhomomorphismus, und das Bild $\exp(A)\subset A^{\times}$ ist eine zusammenhängende, offene und abgeschlossene Untergruppe.

Für $p\in\mathbb{C}[t]^*$ gilt $p(t)=c(t-z_1)\cdots(t-z_m)$ mit $c\in\mathbb{C}^*$ und $z_1,\dots,z_m\in\mathbb{C}$. Genau dann ist $p(y)$ invertierbar, wenn $z_1,\dots,z_m$ keine Eigenwerte von y sind. Der Raum dieser Polynome ist wegzusammenhängend, somit auch $A^{\times}$, also gilt $\exp(A)=A^{\times}$. Das bedeutet, für jede komplexe Matrix $y\in\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ existiert ein Polynom $p\in\mathbb{C}[t]$ sodass $y=\exp(p(y))$.

Für $w\in\mathbb{R}^{n\times n}\subset\mathbb{C}^{n\times n}$ existiert daher ein Polynom $p\in\mathbb{C}[t]$ mit $w=\exp(p(w))$, also $w=\exp(\overline{p}(w))$, daher $w^2=\exp(p(w))\exp(\overline{p}(w))=\exp(q(w))$ mit $q=p+\overline{p}\in\mathbb{R}[t]$.

Wenn zu $y\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ein $w\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $w^2=y$ existiert, dann gilt $y=\exp(x)$ mit $x\in\mathbb{R}[w]\subset\mathbb{R}^{n\times n}$. Umgekehrt folgt aus $y=\exp(x)$ sofort $y=w^2$ mit $w=\exp(x/2)$. □

§C5m. Der lokale Umkehrsatz. Im Folgenden seien $E, F, G, \ldots$ Banach–Räume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, zum Beispiel $E = \mathbb{R}^m$ und $F = \mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$, sowie $X, Y, Z, \ldots$ offene Mengen hierin. Für Funktionen $f : X \to Y$ können wir dann Differenzierbarkeit erklären:

Definition C5P. Eine Abbildung $f : E \supset X \to F$ heißt im Punkt $x_0 \in X$ *differenzierbar*, wenn es eine stetige lineare Abbildung $A : E \to F$ gibt mit $f(x_0+x) = f(x_0)+Ax+r(x)$, sodass $|r(x)|/|x| \to 0$ für $x \to 0$. In diesem Fall ist A eindeutig und wir nennen $f'(x_0) := A$ die *Ableitung*. Ist f differenzierbar in x_0, dann ist f insbesondere stetig in x_0.

Wir nennen f *stetig differenzierbar*, kurz $\mathscr{C}^1$, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar und die Ableitungsfunktion $f' : X \to \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E, F)$ stetig ist. Allgemein nennen wir f eine $\mathscr{C}^0$–Abbildung, wenn f stetig ist, und induktiv eine $\mathscr{C}^k$–Abbildung, wenn f' eine $\mathscr{C}^{k-1}$–Abbildung ist. Wir nennen f eine $\mathscr{C}^\infty$–Abbildung, wenn sie $\mathscr{C}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

Beispiel. Genau dann ist $f : \mathbb{R}^m \supset X \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_i f_j$ existieren und stetig sind. Die Ableitung ist dann $f'(x) = (\partial_i f_j(x))_{ji}$.

Beispiel. Jede konvergente Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ definiert gemäß C5F eine $\mathscr{C}^\infty$–Abbildung $f : B(0,\rho) \to A$ auf einem offenen Ball der Banach–Algebra A.

Bemerkung. Es gilt die Kettenregel: Sind $f : E \supset X \to Y \subset F$ und $g : F \supset Y \to Z \subset G$ stetig differenzierbar, dann auch $g \circ f : U \to W$ und es gilt $g(f(x))' = g'(f(x))\, f(x')$.

Ein *$\mathscr{C}^k$–Diffeomorphismus* (mit $k \geq 1$) ist eine bijektive $\mathscr{C}^k$–Abbildung $f : X \to Y$, deren Umkehrung $g = f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls eine $\mathscr{C}^k$–Abbildung ist.

Beispiel. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist ein $\mathscr{C}^\infty$–Diffeomorphismus.

Beispiel. Die $\mathscr{C}^\infty$–Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ ist ein Homöomorphismus, aber kein Diffeomorphismus, denn die Umkehrabbildung f^{-1} ist in 0 nicht differenzierbar.

Beispiel. Die $\mathscr{C}^\infty$–Abbildung $h : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{p\} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{p\}$ mit $h(x) = p + 2(x-p)/|x-p|^2$ aus A1M ist ein $\mathscr{C}^\infty$–Diffeomorphismus, denn $h^{-1} = h$ ist ebenfalls $\mathscr{C}^\infty$.

Allgemeiner nennen wir $f : X \to Y$ einen *lokalen $\mathscr{C}^k$–Diffeomorphismus* um den Punkt $x_0 \in X$, wenn es offene Umgebungen U von x_0 in X und V von $y_0 = f(x_0)$ in Y gibt, sodass die Einschränkung $f|_U^V : U \to V$ ein $\mathscr{C}^k$–Diffeomorphismus ist.

Beispiel. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ist ein lokaler $\mathscr{C}^\infty$–Diffeomorphismus um jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{C}$. Allerdings ist sie nicht bijektiv, also kein Diffeomorphismus.

Beispiel. Für jede Banach–Algebra A ist die Exponentialabbildung $\exp : (A, +) \to (A^\times, \cdot)$ ein lokaler Diffeomorphismus um 0 mit lokaler Umkehrabbildung $\ln : B(1,1) \to A$. (C5I)

Bemerkung. (0) Sei $(f, g) : X \cong Y$ ein Diffeomorphismenpaar. Sei $x \in X$ und $y = f(x)$. Wir nutzen die Kettenregel der Ableitung: Aus $g(f(x)) = x$ folgt $g'(y) f'(x) = \mathrm{id}_E$. Aus $f(g(y)) = y$ folgt $f'(x)g'(y) = \mathrm{id}_F$. Somit ist $f'(x) \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E, F)$ invertierbar, und die inverse Abbildung ist $f'(x)^{-1} = g(y) \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(F, E)$.

(1) Sei $(f, g) : (X, x_0) \cong (Y, y_0)$ ein lokales Diffeomorphismenpaar. Daraus folgt der Isomorphismus $(f'(x_0), g'(y_0)) : E \cong F$ von Banach–Räumen.

Der lokale Umkehrsatz sagt nun, dass diese Bedingung lokal hinreichend ist:

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Satz C5Q. *Sei $f : E \supset X \to F$ eine $\mathscr{C}^k$–Abbildung mit $k \geq 1$. Genau dann ist f um x_0 ein lokaler $\mathscr{C}^k$–Diffeomorphismus, wenn die Ableitung $f'(x_0)$ in $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E,F)$ invertierbar ist.*

Für $E = \mathbb{R}$ ist der Satz eine schöne Übung der Analysis 1, versuchen Sie es! Allgemein beweist man diesen Satz besonders elegant mit dem Fixpunktsatz von Banach (C4Q).

BEWEIS. Wir können $E = F$ sowie $x_0 = 0$ und $f(0) = 0$ und $f'(0) = \mathrm{id}_E$ annehmen, indem wir f ersetzen durch $\tilde{f}(x) = f'(x_0)^{-1}(f(x_0+x) - f(x_0))$. Um die Gleichung $f(x) = y$ nach x aufzulösen, betrachten wir sie als Fixpunktgleichung der Abbildung

$$T_y(x) = x + y - f(x). \tag{C.6}$$

Wir wählen $r > 0$ mit $\bar{B}(0,2r) \subset X$ und $\|\mathrm{id}_E - f'(x)\| \leq 1/2$ für alle $x \in \bar{B}(0,2r)$. Dies ist möglich, da X offen und f' stetig ist. Insbesondere ist $f'(x)$ invertierbar dank C5H.

Aus (C.6) folgt $T_y' = \mathrm{id}_E - f'$. Für $u, v \in \bar{B}(0,2r)$ gilt also nach Zwischenwertsatz

$$\big|T_y(u) - T_y(v)\big| \leq \big\|T_y'\big\| \cdot |u - v| \leq \frac{1}{2}|u - v| \tag{C.7}$$

Hieraus folgt für $x, y \in E$ mit $|y| < r$ und $|x| \leq 2r$ die Ungleichung

$$|T_y(x)| = |T_y(x) - T_y(0) + T_y(0)| \leq |T_y(x) - T_y(0)| + |T_y(0)| < r + r \leq 2r. \tag{C.8}$$

Für $|y| < r$ bildet demnach T_y die Kugel $\bar{B}(0,2r)$ in sich ab gemäß (C.8) und ist kontraktiv gemäß (C.7). Nach dem Fixpunktsatz von Banach hat also T_y genau einen Fixpunkt $x \in \bar{B}(0,2r)$; nach (C.8) gilt sogar $x \in B(0,2r)$. Dies definiert

$$g : B(0,r) \to B(0,2r), \quad g(y) = x \text{ mit } T_y(x) = x.$$

Nach Konstruktion gilt $f \circ g(y) = y$, denn $T_y(x) = x$ ist gleichbedeutend zu $f(x) = y$. Wir setzen nun $V = B(0,r)$ und $U = \mathrm{Im}(g) = f^{-1}(V) \cap B(0,2r)$ und erhalten zueinander inverse Bijektionen $f : U \to V$ und $g : V \to U$. Wir zeigen nun, dass g stetig ist, sogar lipschitz. Seien $y_1, y_2 \in V$ sowie $x_1 = g(y_1)$ und $x_2 = g(y_2)$. Dank (C.8) gilt dann

$$\big|x_1 - x_2\big| = \big|T_0(x_1) - T_0(x_2) + f(x_1) - f(x_2)\big| \leq \frac{1}{2}\big|x_1 - x_2\big| + \big|f(x_1) - f(x_2)\big|,$$

also $|g(y_1) - g(y_2)| = |x_1 - x_2| \leq 2|y_2 - y_1|$. Für die Ableitung betrachten wir

$$\begin{aligned}\big|g(y_1) - g(y_2) - f'(x_1)^{-1}(y_1 - y_2)\big| &= \big|x_1 - x_2 - f'(x_1)^{-1}(f(x_1) - f(x_2))\big| \\ &\leq \big\|f'(x_1)^{-1}\big\| \cdot \big|f'(x_1)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2)\big|.\end{aligned}$$

Zusammen mit $|x_1 - x_2| \leq 2|y_2 - y_1|$ erhalten wir die Abschätzung

$$\frac{\big|g(y_1) - g(y_2) - f'(x_1)^{-1}(y_1 - y_2)\big|}{|y_1 - y_2|} \leq 2\big\|f'(x_1)^{-1}\big\| \frac{\big|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_1)(x_1 - x_2)\big|}{|x_1 - x_2|}.$$

Aus $y_2 \to y_1$ folgt $x_2 \to x_1$. Da f in x_1 differenzierbar ist, geht die rechte Seite gegen 0, somit auch die linke. Folglich ist g in y_1 differenzierbar mit $g'(y_1) = f'(x_1)^{-1}$.

Dies zeigt $g'(y) = f'(g(y))^{-1}$ für alle $y \in V$, und daher ist g' stetig (C5H). Ist f eine $\mathscr{C}^k$–Abbildung, so zeigt diese Gleichung induktiv, dass auch g eine $\mathscr{C}^k$–Abbildung ist. □

§C6. Der kleine Horrorladen

Dieses Kapitel zu metrischen Räumen und Vollständigkeit stellt grundlegende Werkzeuge und Beispiele bereit. Bereits Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ können sagenhaft kompliziert sein, und schon unter den stetigen reelle Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gibt es schockierende Beispiele. Einige sollten Sie kennen, um einen ungefähren Eindruck der möglichen Komplexität zu erhalten, um Ihre Phantasie anzuregen und naive Trugschlüsse zu vermeiden.

§C6a. Eine überall stetige aber nirgends differenzierbare Funktion. Dass stetige Funktionen nicht überall differenzierbar sein müssen, zeigen schon einfache Beispiele:

Beispiel. Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x| = d(x,0)$ ist stetig, sogar lipschitz–stetig mit $\operatorname{Lip}(f) = 1$, und überall differenzierbar bis auf den Nullpunkt.

Beispiel. Entsprechend ist auch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x, 2\mathbb{Z})$ stetig, sogar lipschitz–stetig mit $\operatorname{Lip}(f) = 1$, und überall differenzierbar bis auf die ganzzahligen Punkte $x \in \mathbb{Z}$.

Beispiel. Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung der Menge $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dann ist die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} |x - q_k|$ stetig (C3Q), sogar lipschitz–stetig zu $L = 2$, in jedem Punkt $x \in X$ nicht differenzierbar, wohl aber in jedem anderen Punkt $x \in \mathbb{R} \smallsetminus X$.

Diese Beispiele sind immerhin noch in fast allen Punkten differenzierbar, und man könnte vermuten, dass dies für jede stetige Funktion gilt. Das ist jedoch nicht der Fall!

Karl WEIERSTRASS (1815-1897) hat 1861 eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angegeben, die überall stetig aber nirgends differenzierbar ist. Die folgende elegante Konstruktion wurde 1901 von Teiji TAKAGI (1875–1960) veröffentlicht, einem Schüler von David HILBERT. Statt Takagis ursprünglicher Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d(x, 2^{-k}\mathbb{Z})$ betrachten wir folgende Variante:

Satz C6A. *Wir betrachten die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} d(x, \frac{1}{k!}\mathbb{Z})$*:*

(1) Die Funktion f ist stetig, aber in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.
(2) Die Funktion f ist auf keinem echten Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ monoton.
(3) Die Funktion f nimmt in jedem Punkt $x \in \mathbb{Q}$ ein striktes lokales Minimum an.

Hätten Sie das gedacht? Das klingt unglaublich, ist aber wahr! Das Beste daran ist: Die Konstruktion ist vollkommen explizit, Sie können alles direkt nachrechnen.

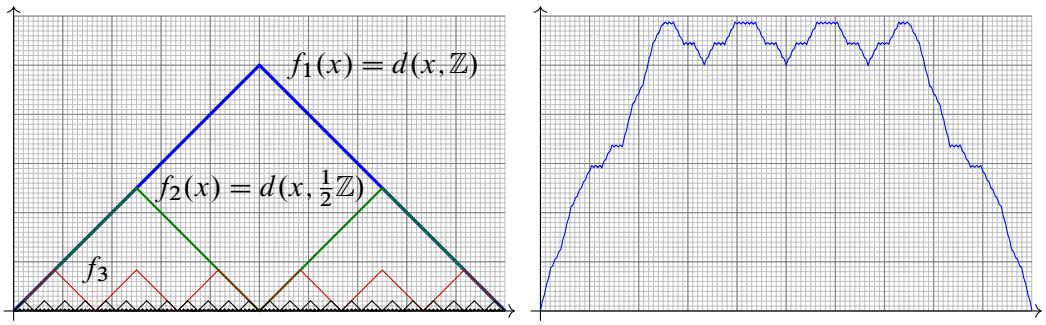


ABBILDUNG C:13. Approximation der Takagi–Funktion

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

BEWEIS. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x, \frac{1}{k!}\mathbb{Z})$ stetig (C3N). Wegen $|f_k|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2k!}$ konvergiert die Normreihe $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_{\mathbb{R}} = \frac{e-1}{2}$ in $\mathbb{R}$. Dank Vollständigkeit (C4G) konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Grenzfunktion f ist stetig (C3Q).

(1) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion f_n zwischen den Punkten $\frac{1}{2n!}\mathbb{Z}$ stückweise affin mit Steigung ± 1. Somit ist f_n affin auf $[x - \frac{1}{4n!}, x]$ oder auf $[x, x + \frac{1}{4n!}]$. Für $n \geq 3$ wählen wir $h_n = \pm\frac{1}{(n+1)!}$ so, dass f_n zwischen x und $x + h_n$ affin ist. Gleiches gilt dann für alle f_k mit $1 \leq k \leq n$. Für $k \geq n+1$ hingegen gilt $f_k(x + h_n) = f_k(x)$. Demnach gilt

$$q_n := \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n} = \sum_{k=1}^{n} \pm 1.$$

Daher hat die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert. Das heißt, f ist in x nicht differenzierbar.

Aus (3) folgt (2), es reicht also, (3) zu zeigen. Jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ lässt sich schreiben als $x = a/n!$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wir zeigen $f(u) > f(x)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $0 < |u - x| < r := 1/(2n)!$. Die Funktion $g = \sum_{k=1}^{n-1} f_k$ ist auf $[x - r, x + r]$ stückweise affin, und die Steigung liegt zwischen $1 - n$ und $n - 1$. Die Funktion $h = \sum_{k=n}^{2n-1} f_k$ hingegen erfüllt $h(u) = n|u - x|$ für alle $u \in [x - r, x + r]$. Demnach ist $g + h$ streng fallend auf $[x - r, x]$ und streng wachsend auf $[x, x + r]$. Insbesondere ist x das strikte Minimum von $g + h$ eingeschränkt auf $[x - r, x + r]$. Für alle $k \geq 2n$ gilt $f_k(x) = 0$ und $f_k(u) \geq 0$ für alle u. Deshalb ist x das strikte Minimum auch von f eingeschränkt auf $[x - r, x + r]$. □

Man könnte nun glauben, solche pathologischen Funktionen seien die Ausnahme. Das Gegenteil ist der Fall: In einem geeigneten Sinne sind „fast alle“ stetigen Funktionen nirgends differenzierbar. Insbesondere liegen sie dicht im Raum aller stetigen Funktionen:

Korollar C6B. *Zu jeder stetigen Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ existieren überall stetige aber nirgends differenzierbare Funktionen $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $|g - g_n|_{[0,1]} \to 0$.*

BEWEIS. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ aus Satz C6A ist überall stetig aber nirgends differenzierbar. Die Differenz $g - f$ ist stetig, nach dem Satz von Weierstraß (F2R) können wir sie durch Polynome p_n approximieren, sodass $|g - f - p_n|_{[0,1]} \to 0$. Die Funktionen $g_n = f + p_n$ erfüllen $|g - g_n|_{[0,1]} \to 0$, sind überall stetig aber nirgends differenzierbar. □

Die Allgegenwart und Unvermeidbarkeit solch irregulärer Funktionen setzte sich im Laufe des 19. Jahrhunderts als schmerzhafte Erkenntnis durch. So schrieb Charles HERMITE (1822–1901) an Thomas STIELTJES (1856–1894) in einem Brief von 1893:

> *Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie*
> *lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.*
> (Mit Entsetzen und Schrecken wende ich mich ab von dieser jammervollen Plage der stetigen Funktionen, die nirgends Ableitungen haben.)

Gerade in kritischen Fällen bleibt statt Differenzierbarkeit nur schwächer die Stetigkeit. Dieser grundlegende Begriff ist eine Errungenschaft des 19. Jahrhunderts, ebenso die Erkenntnis seiner ungeheuren Allgemeinheit und die Werkzeuge zu seiner Beherrschung. Jammervoll ist die Sachlage aus heutiger Sicht also keineswegs.

§C6b. Die Cantor–Menge. Man stellt sich gemeinhin eine kompakte Menge in $\mathbb{R}$ als ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ vor oder als endliche Vereinigung $[a_1,b_1]\cup\cdots\cup[a_n,b_n]$ mit $a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n$. Damit sind die Möglichkeiten aber bei weitem nicht ausgeschöpft. Die folgende erstaunliche Menge wurde 1883 von Georg CANTOR angegeben.

Beispiel C6c. Aus dem Intervall $C_0 = [0,1]$ entfernen wir das offene mittlere Drittel $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$ und erhalten $C_1 = [0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. Ebenso bilden wir $C_2 = [0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{3}{9}]\cup[\frac{6}{9},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$, allgemein $C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right)\cup\left(\frac{1}{3}C_n+\frac{2}{3}\right)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Die *Cantor–Menge* ist $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

ABBILDUNG C:14. Die ersten vier Schritte zur Cantor–Menge C

Wie man per Induktion sofort sieht, besteht C_n aus 2^n kompakten Intervallen, jedes der Länge 3^{-n}. Ebenso konstruiert man in $\mathbb{R}^2$ die Menge $C\times C$, genannt *Cantor–Staub*:

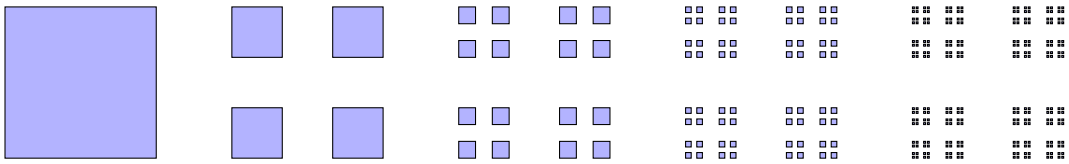


ABBILDUNG C:15. Die ersten vier Schritte zum Cantor–Staub $C\times C$

Satz C6d. *Die Cantor–Menge C erfreut sich staunenswerter Eigenschaften:*

(1) Die Menge C ist kompakt und hat Lebesgue–Maß 0. Insbesondere hat sie keine inneren Punkte und das Komplement $[0,1]\smallsetminus C$ ist offen und dicht in $[0,1]$.

(2) Dennoch gilt $C+C=[0,2]$, wobei wie üblich $C+C := \{\,a+b \mid a,b\in C\,\}$.

(3) Die Menge C ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$: Es gibt eine Bijektion

$$\varphi : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} C : (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 3^{-k-1}.$$

(4) Es gibt eine stetige monoton wachsende Surjektion

$$f : C \twoheadrightarrow [0,1] : \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 3^{-k-1} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 2^{-k-2}.$$

(5) Diese Abbildung erlaubt eine stetige monotone Fortsetzung $g : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$, stückweise konstant auf $[0,1]\smallsetminus C$. Somit ist g fast überall differenzierbar mit $g'(x)=0$.

(6) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $h : [0,1] \to [0,1+\varepsilon]$ mit $h(x) = g(x)+\varepsilon x$ ein Homöomorphismus und bildet die Menge C von Maß 0 ab auf die Menge $h(C)$ vom Maß 1.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Bemerkung. Nach (1) ist die Menge C im maßtheoretischen Sinne vernachlässigbar klein. Gemäß (2) ist C jedoch erstaunlich groß. Dies lässt sich auch so formulieren: Wenn man den Cantor–Staub senkrecht oder waagrecht durchleuchtet, dann wirft er keinen Schatten (genauer: einen Schatten vom Maß 0), aber diagonal betrachtet ist er lichtundurchlässig!

Nach (3) ist die Menge C gleichmächtig zur Menge $\mathbb{R}$ (B2N), insbesondere überabzählbar. Nach (4) gibt es sogar eine *stetige* Surjektion $f : C \to [0,1]$. Die stetige monotone Fortsetzung $g : [0,1] \to [0,1]$ in (5) heißt *Cantor–Funktion* oder auch *Teufelstreppe*. Sie ist ein erstaunliches Gegenbeispiel: Wäre g auf ganz $[0,1]$ differenzierbar mit $g' = 0$, so wäre g konstant. Hingegen reicht hierzu g stetig und $g'(x) = 0$ fast überall nicht aus!

Zu (6): Für stetig differenzierbare Funktionen gilt die Transformationsformel der Integralrechnung. Insbesondere ist das Bild einer Nullmenge wieder eine Nullmenge. Allgemeiner gilt: Lipschitz–stetige Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{R}^n$ sind dehnungsbeschränkt durch eine Konstante L und dehnen daher auch das Volumen höchstens um einen Faktor L^n. Sie überführen also Nullmengen immer in Nullmengen. Hingegen gibt es Homöomorphismen, die eine Menge vom Maß 0 zu einer Menge mit positivem Maß dehnen!

BEWEIS. (1) Die Menge C ist beschränkt und abgeschlossen (C2M), also kompakt (F1O). Für $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C$ gilt $\operatorname{vol}_1(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, also $\operatorname{vol}_1(C) = 0$.

(2) Zunächst gilt $C_0 + C_0 = [0,2]$ und damit per Induktion

$$\begin{aligned} C_{n+1} + C_{n+1} &= \left[\left(\tfrac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}\right)\right] + \left[\left(\tfrac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}\right)\right] \\ &= \left[\tfrac{1}{3}(C_n + C_n)\right] \cup \left[\tfrac{1}{3}(C_n + C_n) + \tfrac{2}{3}\right] \cup \left[\tfrac{1}{3}(C_n + C_n) + \tfrac{4}{3}\right] \\ &= \left[0, \tfrac{2}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}\right] \cup \left[\tfrac{4}{3}, 2\right] = [0,2] \end{aligned}$$

Wir zeigen nun $C + C = [0,2]$. Hierbei ist „$\subset$“ klar, es bleibt „$\supset$“: Für jedes Element $a \in [0,2]$ existiert also ein Paar $z_n = (x_n, y_n) \in C_n^2$ mit $x_n + y_n = a$. Da $[0,1]^2$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $z_{n_k} \to z \in [0,1]^2$, und aus $x_{n_k} \to x$ und $y_{n_k} \to y$ folgt $x + y = a$. Da $(z_k)_{k \geq n}$ in der abgeschlossenen Menge C_n^2 liegt, gilt $z \in C_n^2$. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $z \in C^2$. Also existieren $x, y \in C$ mit $x + y = a$, wie behauptet.

(3) Zu $x \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ liegt die Partialsumme $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k 3^{-k-1}$ in C_n. Der Grenzwert $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 3^{-k-1}$ liegt in allen C_n, also in C. Die Abbildung φ ist injektiv: Für $x \neq y$ in $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ sei n der kleinste Index mit $x_n \neq y_n$. Wir können $x_n = 0$ und $y_n = 2$ annehmen. Dann ist $\varphi(x) \leq \sum_{k=0}^{n} x_k 3^{-k-1} + 3^{-k-1}$ jedenfalls kleiner als $\varphi(y) \geq \sum_{k=0}^{n} y_k 3^{-k-1}$.

Die Abbildung φ ist surjektiv: Zu jedem $x \in C$ gibt es genau ein $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k 3^{-k-1}$ in C_n mit $|x - s_n| \leq 3^{-n}$. Dies definiert eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ mit $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 3^{-k-1}$.

(4) Gemäß der B–adischen Entwicklung für $B = 2$ ist f surjektiv und monoton (B2M).

(5) Auf jedem maximalen Intervall von $[0,1] \smallsetminus C$ stimmt f an den Rändern überein, kann hier also fortgesetzt werden zur stetigen monotonen Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$.

(6) Die Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ ist stetig, wachsend und surjektiv. Somit ist die Funktion $h : [0,1] \to [0,1+\varepsilon]$ mit $h(x) = g(x) + \varepsilon x$ stetig, zudem streng monoton wachsend, und surjektiv nach dem Zwischenwertsatz (C3R). Jedes offene Intervall des Komplements $[0,1] \smallsetminus C$ wird durch h affin abgebildet, da g hier konstant ist, und seine Länge mit ε multipliziert. All diese Längen addieren sich zu 1, nach der Abbildung also zu ε. Da das Bildintervall $[0,1+\varepsilon]$ jedoch Länge $1+\varepsilon$ hat, wird C auf die verbleibende Länge 1 gedehnt. □

§C6c. Fette Cantor–Mengen. Die obige Konstruktion führt uns zur Cantor–Menge $C = C(2/3, 2/3, 2/3, \dots)$ mit Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_1(C) = \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$. Wir variieren diese Konstruktion zur Cantor–Menge $C(q) \subset [0,1]$ mit Maß beliebig nahe an 1.

Beispiel. Zu $a \in]0,1[$ und $q_n = a^{(2^{-n})} \in]0,1[$ erhalten wir die *fette Cantor–Menge* $C(q)$ mit positivem Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_2(C(q)) = q_1 q_2 q_3 \cdots = a^{(2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\dots)} = a$.

Seien $q_1, q_2, q_3, \dots$ reelle Zahlen mit $0 < q_n < 1$. Wir beginnen mit $C_0 = C_0(q) := [0,1]$ und $C_1 = C_1(q) := [0, q_1/2] \cup [1 - q_1/2, 1]$. Die Menge $C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} [a_k, b_k]$ besteht aus 2^n disjunkten Intervallen, wobei $0 = a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_{2^n} < b_{2^n} = 1$. Aus jedem Intervall $[a_k, b_k]$ entfernen wir das Mittelstück der Länge $(1 - q_{n+1})(b_k - a_k)$ und erhalten $[a_k, a'_k] \cup [b'_k, b_k]$ mit $a'_k = a_k + q_{n+1}(b_k - a_k)/2$ und $b'_k = b_k - q_{n+1}(b_k - a_k)/2$. Wir erhalten so die nächste Menge $C_{n+1} = C_{n+1}(q) := \bigcup_{k=1}^{2^n} [a_k, a'_k] \cup [b'_k, b_k]$ bestehend aus 2^{n+1} disjunkten Intervallen mit Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_1(C_{n+1}) = q_{n+1}\,\mathrm{vol}_1(C_n)$.

Als *Cantor–Menge* zur Folge $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir

$$C(q) := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n(q).$$

Nach Konstruktion gilt $C_n \searrow C$ und somit $\mathrm{vol}_1(C_n) = q_1 q_2 \cdots q_n \searrow \mathrm{vol}_1(C)$.

Die so konstruierten Cantor–Mengen $C(q) \subset [0,1]$ sehen zunächst sehr verschieden aus, sie erweisen sich aber als untereinander homöomorph. Genauer gilt sogar:

Satz C6E. *Zu je zwei gegebenen Folgen $p, q \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ existiert ein Homöomorphismus $f : [0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]$ mit $f(C(p)) = C(q)$. Insbesondere ist jede Cantor–Menge $C(q)$ mit beliebiger Folge $q \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ homöomorph zur üblichen Cantor–Menge $C = C(2/3, 2/3, 2/3, \dots)$.*

BEWEIS. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir $C_n(p) = \bigcup_{k=1}^{2^n} [a_k, b_k]$ und $C_n(q) = \bigcup_{k=1}^{2^n} [a'_k, b'_k]$. Es existieren stückweise affine Homöomorphismen $f_n, g_n : [0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]$, die die Punkte $0 = a_1 < b_1 < \cdots < a_{2^n} < b_{2^n} = 1$ abbilden auf $0 = a'_1 < b'_1 < \cdots < a'_{2^n} < b'_{2^n} = 1$. Diese erfüllen $f_n \circ g_n = g_n \circ f_n = \mathrm{id}_{[0,1]}$, $f_n(C_m(p)) = C_m(q)$ und $g_n(C_m(q)) = C_m(p)$ für $0 \le m \le n$. Nach Konstruktion gilt $|f_n - f_{n-1}|_{[0,1]} \le 2^{-n}$, wir haben also gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$. Ebenso erhalten wir $g_n \to g$. Die Gleichung $f_n \circ g_n = g_n \circ f_n = \mathrm{id}_{[0,1]}$ geht für $n \to \infty$ über in $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Die Gleichung $f_n(C_m(p)) = C_m(q)$ geht für $n \to \infty$ über in $f(C_m(p)) = C_m(q)$, also schließlich $f(C(p)) = C(q)$. □

Korollar C6F. *Wir betrachten erneut $p = (2/3)_{n\in\mathbb{N}}$ und $q = (a^{(2^{-n})})_{n\in\mathbb{N}}$. Der Satz liefert einen Homöomorphismus $f : [0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]$, der die Menge $C(p)$ mit verschwindendem Lebesgue–Maß abbildet auf die Menge $C(q)$ mit positivem Lebesgue–Maß $a \in]0,1[$.*

Insbesondere haben alle Mengen $C(q) \subset [0,1]$ dieselben topologischen Eigenschaften:

- Wie $C(p)$ ist auch $C(q)$ kompakt und hat keine inneren Punkte.
- Das Komplement $[0,1] \smallsetminus C(q)$ ist offen und dicht in $[0,1]$.
- Es gibt eine Bijektion $\varphi : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to C(q)$ mit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto f(\sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 3^{-k-1})$.
- Es gibt eine stetige monoton wachsende Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ mit $g(C(q)) = [0,1]$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C6d. Flächenfüllende Kurven nach Osgood. Georg CANTOR bewies 1878 den erstaunlichen Satz, dass das Intervall $[0,1]$ und das Quadrat $[0,1]^2$ gleich viele Punkte haben, also eine Bijektion $[0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$ existiert. (Wir haben dies in Satz B2N gezeigt.)

Dies warf sofort die Frage auf, ob eine solche Bijektion $[0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$ auch stetig möglich ist. Eugen NETTO beantwortete diese Frage ein Jahr später 1879 negativ.

Beweis. Wir benötigen hierzu Kompaktheit (Kapitel F) und Zusammenhang (Kapitel G): Wäre die Bijektion $f : [0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$ stetig, so wäre f dank der Kompaktheit von $[0,1]$ und der Hausdorff–Eigenschaft von $[0,1]^2$ ein Homöomorphismus (F1L). Das aber ist unmöglich, denn alle (bis auf zwei) Punkte $t \in [0,1]$ trennen das Intervall, doch kein Punkt $(x,y) \in [0,1]^2$ trennt das Quadrat (A1H).

Es blieb die Frage, ob statt stetiger Bijektionen noch stetige Surjektionen $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$ möglich sind. Dies scheint zunächst kaum vorstellbar, doch Giuseppe PEANO (1858–1932) überraschte 1890 die Fachwelt mit der ersten Konstruktion einer flächenfüllenden Kurve:

Satz C6G (Peano, 1890)**.** *Es gibt stetige surjektive Abbildungen $\gamma : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$.*

Wir werden dies nachfolgend beweisen und mit derselben Konstruktion auch folgendes bemerkenswerte Ergebnis, das auf William OSGOOD (1864–1943) zurückgeht:

Satz C6H (Osgood, 1903)**.** *Es gibt stetige injektive Abbildungen $\gamma : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, deren Bild $\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ positiven Flächeninhalt hat (im Sinne des Lebesgue–Maßes von $\mathbb{R}^2$).*

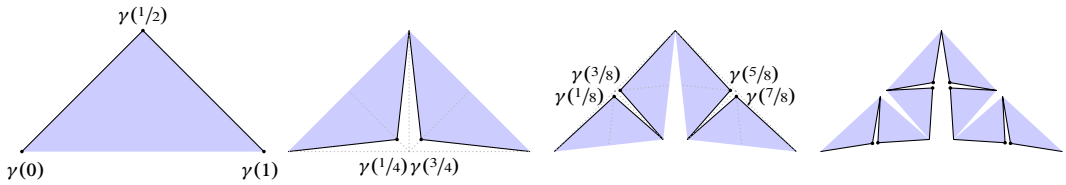


ABBILDUNG C:16. Konstruktion einer Osgood–Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

Konstruktion: Wir geben drei Eckpunkte $\gamma(0), \gamma(1/2), \gamma(1) \in \mathbb{R}^2$ vor. Diese definieren den polygonalen Weg $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch affine Interpolation. Das hiervon aufgespannte Dreieck $C_1 = [\gamma(0), \gamma(1/2), \gamma(1)]$ hat den Flächeninhalt $a_1 := \mathrm{vol}_2(C_1)$. Wenn wir zudem annehmen, die Eckpunkte seien nicht kollinear, so gilt $a_1 > 0$.

Wir konstruieren den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von polygonalen Wegen $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$: Jeder Weg γ_n interpoliert affin zwischen den Punkten $\gamma_n(k/2^n) = \gamma(k/2^n)$ für $k = 0, 1, \ldots, 2^n$. Der Weg γ_{n+1} geht durch dieselben Punkte, fügt aber zwischen je zwei Eckpunkten von γ_n einen neuen Eckpunkt ein (C:16).

Zu vorgegebenem Faktor $0 \le a_2 \le 1$ konstruieren wir $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gemäß

$$\gamma(1/4) = \frac{1}{2}\Big(\gamma(0) + \gamma(1/2)\Big) + \frac{a_2}{2}\Big(\gamma(1) - \gamma(1/2)\Big),$$
$$\gamma(3/4) = \frac{1}{2}\Big(\gamma(1) + \gamma(1/2)\Big) + \frac{a_2}{2}\Big(\gamma(0) - \gamma(1/2)\Big).$$

Für $a_2 = 0$ ist $\gamma(1/4)$ der Mittelpunkt von $\gamma(0)$ und $\gamma(1/2)$; für $a_2 = 1$ ist $\gamma(1/4)$ der Mittelpunkt von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$; für $0 \le a_2 \le 1$ verschieben wir den Punkt $\gamma(1/4)$ zwischen

diesen beiden Extremen. Entsprechendes gilt für $\gamma(3/4)$. Die so entstehende Figur

$$C_2 \quad := \quad \big[\gamma(0),\gamma(1/4),\gamma(1/2)\big] \cup \big[\gamma(1/2),\gamma(3/4),\gamma(1)\big] \quad \subset \quad C_1$$

besteht aus zwei Dreiecken und hat Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(C_2) = a_1 a_2$. So fahren wir nun fort: Aus γ_n gewinnen wir γ_{n+1} durch Einfügen der Zwischenpunkte für $1 \le k \le 2^{n-1}$:

$$\gamma\Big(\frac{4k-3}{2^{n+1}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\gamma\Big(\frac{4k-4}{2^{n+1}}\Big) + \gamma\Big(\frac{4k-2}{2^{n+1}}\Big)\Big) + \frac{a_{n+1}}{2}\Big(\gamma\Big(\frac{4k}{2^{n+1}}\Big) - \gamma\Big(\frac{4k-2}{2^{n+1}}\Big)\Big),$$

$$\gamma\Big(\frac{4k-1}{2^{n+1}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\gamma\Big(\frac{4k}{2^{n+1}}\Big) + \gamma\Big(\frac{4k-2}{2^{n+1}}\Big)\Big) + \frac{a_{n+1}}{2}\Big(\gamma\Big(\frac{4k-4}{2^{n+1}}\Big) - \gamma\Big(\frac{4k-2}{2^{n+1}}\Big)\Big)$$

Den Faktor $0 \le a_{n+1} \le 1$ wählen wir zunächst noch beliebig. Die Figur

$$C_{n+1} \quad := \quad \bigcup_{k=1}^{2^n} \Big[\gamma\Big(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\Big), \gamma\Big(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\Big), \gamma\Big(\frac{2k}{2^{n+1}}\Big)\Big] \quad \subset \quad C_n$$

besteht aus 2^n Dreiecken und hat Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(C_{n+1}) = a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$.

Lemma C6ı. *Für die so ausgeführte Konstruktion gilt:*

(1) Der Durchschnitt $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ hat das Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_2(C) = \prod_{k=1}^{\infty} a_k$.
(2) Die Wege $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ konvergieren gleichmäßig gegen $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.
(3) Diese Grenzfunktion $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist stetig und hat das Bild $\gamma([0,1]) = C$.
(4) Gilt $0 \le a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Abbildung γ injektiv.

BEWEIS. Dank Konstruktion gilt (1), denn aus $C_n \searrow C$ folgt $\mathrm{vol}_2(C_n) \searrow \mathrm{vol}_2(C)$.

Aussage (2) folgt aus der Abschätzung $|\gamma_p - \gamma_q| \le 2^{-p}\,\mathrm{diam}(C_1)$ für alle $1 \le p \le q$. Daher ist $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ eine Cauchy–Folge und somit gleichmäßig konvergent.

(3) Die Stetigkeit von γ folgt aus gleichmäßiger Konvergenz (C3Q). Surjektivität folgt dank Kompaktheit: Sei $x \in C$ ein beliebiger Punkt. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $f(t) = d(x,\gamma(t))$ ist stetig (C3N). Sie nimmt also ihr Minimum m an (C3S). Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $t_n = a_n/2^{-n}$ mit $a_n \in \{0,\ldots,2^n\}$ und $d(x,\gamma(t_n)) \le 2^{-n}\,\mathrm{diam}(C_1)$. Also muss $m = 0$ gelten. Das heißt, es existiert ein $t \in [0,1]$ mit $x = \gamma(t)$.

(4) Für $s \ne t$ in $[0,1]$ existiert $n \in \mathbb{N}$, sodass $\gamma_n(s)$ und $\gamma_n(t)$ in disjunkten abgeschlossenen Dreiecken liegen. Dies bleibt für $n \to \infty$ erhalten und sichert $\gamma(s) \ne \gamma(t)$. □

BEWEIS DES SATZES C6H. Sei C_1 ein Dreieck mit Flächeninhalt $a_1 := \mathrm{vol}_2(C) > 0$ und sei $q \in]0,1[$. Für $n = 2,3,4,\ldots$ setzen wir $a_n = q^{(2^{1-n})} \in]0,1[$. Die obige Konstruktion ergibt eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to C$ mit Bildmenge $C \subset C_1$ und Flächeninhalt

$$\mathrm{vol}_2(C) = a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots = a_1 q^{(2^{-1})} q^{(2^{-2})} q^{(2^{-3})} \cdots = a_1 q^{(2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\ldots)} = a_1 q > 0.$$

Wir behalten so von dem ursprünglich vorgegebenen Dreieck C_1 eine Teilmenge $C \subset C_1$ mit einen beliebig vorgegebenem Flächenanteil q mit $0 < q < 1$. □

Beispiel. Wir zerlegen das Quadrat $[0,1]^2$ diagonal in zwei Dreiecke und führen für beide die Osgood–Konstruktion zum Parameter $q \in [0,1]$ aus. Für $0 \le q < 1$ erhalten wir einen einfach geschlossenen Weg $\gamma : [0,1] \hookrightarrow [0,1]^2$, dessen Bild den Flächeninhalt q hat. Im Grenzfall $q = 1$ erhalten wir eine surjektive stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C7. Wegmetrik und Geodäten

§C7a. Wege und ihre Länge. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to X$. Diesem wollen wir eine Länge $\ell(\gamma) \in [0,\infty]$ zuordnen.

Hierzu betrachten wir zunächst eine Partition $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ des Definitionsintervalls $[a,b]$ und definieren als Näherung der Weglänge die endliche Summe

$$\ell(\gamma, P) := \sum\nolimits_{k=1}^{n} d\big(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)\big).$$

Bei Verfeinerung $P' \supset P$ gilt $\ell(\gamma, P') \geq \ell(\gamma, P)$ dank Dreiecksungleichung der Metrik d. Wir gehen zu immer feineren Partitionen über und definieren die Länge als Supremum:

Definition C7A. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Die *Länge* eines Weges $\gamma : [a,b] \to X$ ist

$$\ell(\gamma) := \sup\Big\{ \sum\nolimits_{k=1}^{n} d\big(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)\big) \;\Big|\; n \in \mathbb{N},\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \Big\}.$$

Ist das Supremum endlich, so nennen wir den Weg γ *rektifizierbar*. (*Rektifizieren* heißt *begradigen*; anschaulich können wir den Weg mit einem Faden abmessen und gerade ziehen.)

Beispiel C7B. Sei X ein Vektorraum mit Norm $|-|$, etwa $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm. Zu $x, y \in X$ sei $\gamma : [0,1] \to X$ gegeben durch $\gamma(t) = (1-t)x + ty = x + t(y-x)$. Für jede Partition P gilt hier $\ell(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})|x-y| = |x-y|$, also auch $\ell(\gamma) = |x-y|$.

In der Analysis und Differentialgeometrie lernen Sie die praktische Integralformel:

Satz C7C. *Sei X ein Vektorraum mit Norm $|-|$, etwa $X = \mathbb{R}^p$ mit euklidischer Norm. Ist $\gamma : [a,b] \to X$ stückweise stetig differenzierbar, so lässt sich die Weglänge berechnen durch*

$$\ell(\gamma) = \int_{t=a}^{b} \big|\gamma'(t)\big| \,\mathrm{d}t.$$

Insbesondere gilt die Abschätzung $\ell(\gamma) \leq (b-a) \max|\gamma'| < \infty$, somit ist γ rektifizierbar.

BEWEIS. Sei $P = \big\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\big\}$, so dass γ auf jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ stetig differenzierbar ist. Dank HDI und Dreiecksungleichung gilt für jedes $k = 1, \ldots, n$:

$$\big|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\big| = \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big|\gamma'(t)\big| \,\mathrm{d}t.$$

Summation über $k = 1, \ldots, n$ beschert uns die Ungleichung $\ell(\gamma, P) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t$.

Für das Supremum über alle Partitionen P erhalten wir $\ell(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$.

Wir zeigen nun, dass die Weglängenfunktion $s : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s(t) := \ell(\gamma|_{[a,t]})$ stückweise stetig differenzierbar ist mit $s'(t) = |\gamma'(t)|$. Für $t_{k-1} \leq t < t+h \leq t_k$ gilt

$$s(t+h) - s(t) = \ell(\gamma|_{[t,t+h]}) \geq |\gamma(t+h) - \gamma(t)|.$$

Zusammen mit der oberen Abschätzung durch das Integral erhalten wir

$$\left| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\gamma'(\tau)| \,\mathrm{d}\tau.$$

Für $h \to 0$ geht die linke Seite gegen $|\gamma'(t)|$, dank HDI auch die rechte. Somit ist s differenzierbar mit $s'(t) = |\gamma'(t)|$. Mit $s(a) = 0$ folgt $s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| \,\mathrm{d}\tau$. □

Die Definition der Weglänge lässt sich auch in metrischen Situationen nutzen, in denen die Differentialrechnung nicht zur Verfügung steht. Hierzu ein klassisches Beispiel:

Beispiel C7D (Koch–Kurve)**.** Wir konstruieren Wege $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ der Länge $\ell(\gamma_n) = (4/3)^n$, die gleichmäßig gegen den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ der Länge $\ell(\gamma) = \infty$ konvergieren.

Der Weg γ_0 interpoliert affin zwischen $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 1$. Sei der Weg γ_n bereits konstruiert; er interpoliert für jedes $k = 1, 2, \ldots, 4^n$ affin zwischen $(k-1)4^{-n} \mapsto a$ und $k4^{-n} \mapsto b$. Wir setzen $v = (b-a)/3$. Der Weg $\gamma_{n+1} : [0,1] \to \mathbb{C}$ interpoliert affin zwischen $(k-1)4^{-n} \mapsto a$ und $k4^{-n} \mapsto b$ mit neuen Zwischenpunkten $(4k-3)4^{-n-1} \mapsto a + v$ und $(4k-2)4^{-n-1} \mapsto a + v + e^{i\pi/3} v$ und $(4k-1)4^{-n-1} \mapsto b - v$.

Nach Konstruktion gilt $\ell(\gamma_n) = (4/3)^n$. Zudem ist γ_n eine Cauchy–Folge bezüglich der Supremumsnorm, denn $|\gamma_n - \gamma_{n+1}|_{[0,1]} = 3^{-n-1}\sqrt{3}/2$. Somit konvergiert $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine stetige Grenzfunktion $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Dieser Weg hat unendliche Länge, $\ell(\gamma) = \infty$, denn die Partition $P_n = \{ k4^{-n} \mid k = 0, 1, \ldots, 4^n \}$ ergibt $\ell(\gamma, P_n) = \ell(\gamma_n) = (4/3)^n \to \infty$.

Der Weg γ ist injektiv und stetig, aber nirgends differenzierbar. Die so entstehende Koch–Kurve $K = \gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ ist homöomorph zum Intervall vermöge $\gamma : [0,1] \xrightarrow{\sim} K$. Sie wurde 1904 von Helge VON KOCH vorgestellt, als eines der historisch ersten Fraktale. Trotz ihrer einfachen Konstruktion zeigt sie bereits eine faszinierende Komplexität.

Wir betrachten auf $[0,1]$ neben der euklidischen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ auch die *Koch–Metrik* $e(x,y) = |\gamma(x) - \gamma(y)|$. Beide definieren dieselbe Topologie auf $[0,1]$, aber ihre metrischen Eigenschaften sind sehr verschieden: In $([0,1], d)$ haben Wege die übliche Länge, in $([0,1], e)$ hingegen hat jeder nicht-konstante Weg unendliche Länge!

Lemma C7E (Weglänge)**.** *Für die Weglänge $\ell : \mathscr{C}([a,b], X) \to [0,\infty]$ gilt:*

(0) Positivität: Für jeden Weg $\gamma : [a,b] \to X$ gilt $\ell(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b)) \geq 0$.
(1) Definitheit: Genau dann gilt $\ell(\gamma) = 0$, wenn der Weg γ konstant ist.
(2) Symmetrie: Es gilt $\ell(\bar\gamma) = \ell(\gamma)$ für $\bar\gamma : [a,b] \to X : t \mapsto \gamma(a+b-t)$
(3) Additivität: Für alle $a \leq t \leq b$ gilt $\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \ell(\gamma|_{[a,t]}) + \ell(\gamma|_{[t,b]})$.
(4) Es gilt $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \varphi)$ für jeden Homöomorphismus $\varphi : [a',b'] \xrightarrow{\sim} [a,b]$, oder allgemeiner für jeder monotone Surjektion $\varphi : [a',b'] \twoheadrightarrow [a,b]$.

BEWEIS. Beweisen Sie diese Aussagen als (technisch leichte) Übung. □

✻ **C7E.** Aussage (0) folgt aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (C2J). Aussage (1) folgt aus der Definitheit der Metrik d: Falls $\gamma(a) \neq \gamma(t)$ für ein $a < t \leq b$, so folgt $\ell(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(t))) > 0$. Aussage (2) Folgt aus der Symmetrie der Metrik d. Aussage (3) folgt, indem man nur Partitionen P mit $t \in P$ betrachtet: Dann gilt $\ell(\gamma|_{[a,b]}, P) = \ell(\gamma|_{[a,t]}, P') + \ell(\gamma|_{[t,b]}, P'')$ mit $P = \{a < \ldots < t < \ldots < b\}$ und $P' = \{a < \ldots < t\}$ und $P'' = \{t < \ldots < b\}$. Genauer: Jede Partition P von $[a,b]$ zerlegen wir in $P' = P \cap [a,t]$ und $P'' = P \cap [t,b]$, und umgekehrt vereinigen wir (P', P'') zu $P = P' \cup P''$. Übergang zum Supremum über alle P bzw. über alle (P', P'') ergibt die ersehnte Gleichung $\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \ell(\gamma|_{[a,t]}) + \ell(\gamma|_{[t,b]})$.

(4) Jeder Homöomorphismus $\varphi : [a',b'] \xrightarrow{\sim} [a,b]$ ist streng monoton (D2F). Für die folgende Rechnung genügt, dass φ eine monotone Surjektion ist, also stetig (D2F) und wachsend mit $\varphi(a') = a$ und $\varphi(b') = b$ oder fallend mit $\varphi(a') = b$ und $\varphi(b') = a$. Aus jeder Partition Q von $[a',b']$ wird eine Partition $P = \varphi(Q)$ von $[a,b]$, somit gilt $\ell(\gamma \circ \varphi, Q) = \ell(\gamma, P) \leq \ell(\gamma)$, und als Supremum über Q erhalten wir $\ell(\gamma \circ \varphi) \leq \ell(\gamma)$. Umgekehrt ist jede Partition P von $[a,b]$ das Bild einer Partition Q von $[a',b']$, somit gilt $\ell(\gamma, P) = \ell(\gamma \circ \varphi, Q) \leq \ell(\gamma \circ \varphi)$, und als Supremum über P erhalten wir $\ell(\gamma) \leq \ell(\gamma \circ \varphi)$. Wir schließen hieraus $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \varphi)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C7b. Parametrisierung nach Weglänge. Jeden Weg $\gamma : [a,b] \to X$ können wir durch Homöomorphismen $\varphi : [a',b'] \xrightarrow{\sim} [a,b]$ umparametrisieren, allgemeiner sogar durch jede beliebige monotone Surjektion $\varphi : [a',b'] \twoheadrightarrow [a,b]$, ohne die Weglänge zu ändern (C7E). Besonders schön und nützlich ist die Parametrisierung nach Weglänge: Der Weg $\gamma : [a,b] \to X$ heißt *nach Weglänge parametrisiert*, wenn $\ell(\gamma|_{[a,t]}) = t - a$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.

Beispiel. Sei $(X, |-|)$ ein normierter Vektorraum, etwa der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$. Für stetig differenzierbare Wege $\gamma : [a,b] \to X$ haben wir die Integralformel C7C. Parametrisierung nach Weglänge bedeutet $|\gamma'(t)| = 1$ für alle $t \in [a,b]$. Anschaulich beschreibt $t \mapsto \gamma(t)$ die Bahn eines Teilchens zur Zeit $t \in [a,b]$, und dieses bewegt sich mit konstanter Absolutgeschwindigkeit $|\gamma'(t)| = 1$, lediglich die Bewegungsrichtung in X kann variieren.

Satz C7F. *Für jeden Weg $\gamma : [a,b] \to X$ endlicher Länge $L := \ell(\gamma) < \infty$ gilt:*

(1) Die Weglänge $s : [a,b] \to [0,L] : t \mapsto \ell(\gamma|_{[a,t]})$ ist stetig, monoton und surjektiv.
(2) Demnach existiert genau ein Weg $\tilde\gamma : [0,L] \to X$ mit $\gamma = \tilde\gamma \circ s$.
(3) Dieser erfüllt $\ell(\tilde\gamma|_{[0,\tau]}) = \tau$ für alle $\tau \in [0,L]$.

Wir sagen, dieser Weg $\tilde\gamma$ entsteht aus γ indem wir nach Weglänge parametrisieren.

BEWEIS. Diese Konstruktion und die nötigen Aussagen sind eine technisch anspruchsvolle Übung. *Hinweis:* Nutzen Sie zur Vorbereitung das vorangegangene Lemma C7E. □

✻ **C7F.** (1) Monotonie folgt aus C7E dank Positivität und Additivität. Stetigkeit ist schwieriger. Es genügt folgender Spezialfall: Für $t \searrow a$ zeigen wir $s(t) \searrow s(a) = 0$. Dank Additivität C7E gilt dann: Aus $t \searrow t_0$ folgt $s(t) \searrow s(t_0)$ für alle $t_0 \in [a,b]$. Dank endlicher Länge L folgt hieraus der linksseitige Grenzwert durch Umkehrung des Weges: Aus $t \nearrow t_0$ folgt $s(t) \nearrow s(t_0)$, denn $s(t) = L - \ell(\gamma|_{[t,b]}) = L - \ell(\bar\gamma|_{[a,a+b-t]})$.

Wir beweisen nun die Behauptung: Für $t \searrow a$ gilt $s(t) \searrow s(a) = 0$. Dank Monotonie existiert der Grenzwert $\lim_{t \searrow a} s(t) =: A$. Wir wollen $A = 0$ zeigen. Wir nehmen $A > 0$ an und führen dies zum Widerspruch.

Es existiert c mit $a < c \le b$ sodass $\ell(\gamma|_{[a,c]}) \le 2A$. Sei $t \in]a,c]$. Wir wissen $A \le \ell(\gamma|_{[a,t]}) = A + \varepsilon$ mit $0 \le \varepsilon \le A$. Im Falle $\varepsilon = 0$ gilt $\ell(\gamma|_{[a,t']}) = A$ für alle $a < t' \le t$, also $\ell(\gamma|_{[t',t]}) = 0$, und somit ist γ konstant auf $]a,t]$. Da γ zudem stetig ist, ist γ konstant auf $[a,t]$. Hieraus folgt $A = 0$. Der Fall $\varepsilon = 0$ ist also unmöglich.

Wir nehmen nun $\varepsilon > 0$ an, also $A \le \ell(\gamma|_{[a,t]}) = A + \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon \le A$. Hierzu existiert eine Partition $P = \{\, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t \,\}$ sodass $\sum_{k=1}^n d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \ge A + \varepsilon/2$. Dabei muss das Summenende $\sum_{k=2}^n d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \le \varepsilon$ erfüllen, andernfalls wäre $\ell(\gamma|_{[t_1,t]}) > \varepsilon$ und dank Additivität $\ell(\gamma|_{[a,t_1]}) < A$. Hieraus folgt $d(\gamma(a), \gamma(t_1)) \ge A - \varepsilon/2 \ge A/2 > 0$. Das bedeutet aber, dass γ im Punkt a nicht stetig ist: Zu jedem $t \in]a,c]$ existiert wie gesehen ein $t_1 \in]a,t]$ mit $d(\gamma(a), \gamma(t_1)) \ge A/2 > 0$. An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme $A > 0$. Wir schließen hieraus $A = 0$: Für $t \searrow a$ gilt also $s(t) \searrow 0 = s(a)$.

(2) Die Weglängenfunktion $s : [a,b] \to [0,L]$ ist stetig und monoton mit $s(a) = 0$ und $s(b) = L$, also surjektiv dank Zwischenwertsatz C3R. Hieraus folgt die Eindeutigkeit: Aus $\gamma = \tilde\gamma \circ s = \hat\gamma \circ s$ folgt $\tilde\gamma = \hat\gamma$, denn zu jedem $\tau \in [0,L]$ existiert $t \in [a,b]$ mit $s(t) = \tau$, also $\tilde\gamma(\tau) = \tilde\gamma \circ s(t) = \hat\gamma \circ s(t) = \hat\gamma(\tau)$.

Die Existenz von $\tilde\gamma$ beweisen wir durch Konstruktion: Zu jedem $\tau \in [0,L]$ existiert $t \in [a,b]$ mit $s(t) = \tau$. Es kann mehrere Werte geben: Dank Monotonie und Stetigkeit bilden diese ein abgeschlossenes Intervall: $s^{-1}(\{\tau\}) = [t',t''] \subset [a,b]$. Hierauf ist die Weglängenfunktion s konstant, also auch der Weg γ, also $\gamma(t) = \gamma(t')$ für alle $t \in [t',t'']$. Wir setzen daher $\tilde\gamma(\tau) := \gamma(t)$ und erhalten $\tilde\gamma : [0,L] \to X$ mit $\gamma = \tilde\gamma \circ s$.

Es bleibt die Stetigkeit der so konstruierten Abbildung $\tilde\gamma$ nachzuweisen. Wir betrachten hierzu eine Folge $\tau_n \nearrow \tau$. In obigen Bezeichnungen sei $s^{-1}(\{\tau_n\}) = [t_n', t_n''] \subset [a,b]$. Dank Monotonie und Stetigkeit von s gilt $t_n' \nearrow t'$. Wir schließen $\tilde\gamma(\tau_n) = \gamma(t_n') \to \gamma(t') = \tilde\gamma(\tau)$ dank Stetigkeit von γ. Der Fall $\tau_n \searrow \tau$ ist analog: Hier gilt $t_n'' \searrow t''$, also $\tilde\gamma(\tau_n) = \gamma(t_n'') \to \gamma(t'') = \tilde\gamma(\tau)$ dank Stetigkeit von γ. Somit ist $\tilde\gamma$ stetig.

(3) Die erhoffte Weglänge $\ell(\tilde\gamma|_{[0,\tau]}) = \tau$ lesen wir nun leicht ab: Zu jedem $\tau \in [0,L]$ existiert ein Urbild $t \in [a,b]$ mit $s(t) = \tau$. Die Einschränkung der Weglängenfunktion zu $s|_{[a,t]} : [a,t] \to [0,\tau]$ ist monoton und surjektiv. Dank C7E folgt nun $\ell(\tilde\gamma|_{[0,\tau]}) = \ell(\tilde\gamma \circ s|_{[a,t]}) = \ell(\gamma|_{[a,t]}) = s(t) = \tau$.

§C7c. Wegmetrik. Zum metrischen Raum (X,d) definieren wir seine *Wegmetrik* durch

$$đ : X \times X \to [0,\infty] : (x,y) \mapsto \inf\{\, \ell(\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to X \text{ stetig}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \,\}.$$

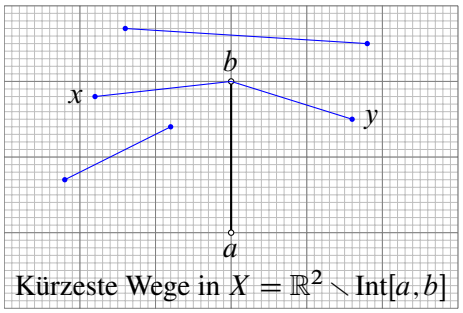
Dies ist tatsächlich eine Metrik dank C7E. Man nennt sie auch die *intrinsische Metrik* des Raumes (X,d). Für jeden Weg γ von x nach y in X gilt $\ell(\gamma) \geq d(x,y)$, folglich gilt $đ(x,y) \geq d(x,y)$. Realisiert ein Weg γ von x nach y das Infimum, also $\ell(\gamma) = đ(x,y)$, so nennen wir γ einen *kürzesten Weg* von x nach y im Raum (X,d).

Wir nennen (X,d) einen *Längenraum*, engl. *length space*, wenn $đ = d$ gilt, das heißt, zu $x,y \in X$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein Weg γ von x nach y in (X,d) mit $\ell(\gamma) \leq d(a,b) + \varepsilon$.

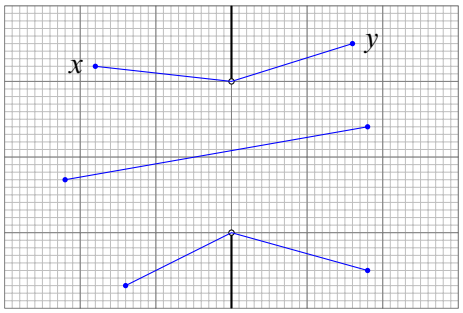
Übung C7G. (1) Sei X ein Vektorraum mit Norm $|-|$ und Metrik $d(x,y) = |x-y|$, etwa der euklidische Raum $X = \mathbb{R}^n$. Dies ist ein Längenraum, also $đ = d$.

(2) Im Raum $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik gibt es zwischen je zwei Punkten $x,y \in \mathbb{R}^n$ genau einen kürzesten Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ bis auf Umparametrisierung, genauer: $\gamma(t) = (1-\varphi(t))x + \varphi(t)$ mit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ monoton wachsend und surjektiv.

(3) Im Raum $\mathbb{R}^n$ mit Taximetrik gibt es zwischen $x,y \in \mathbb{R}^n$ im Allgemeinen unendlich viele kürzeste Wege. Genau dann ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein kürzester Weg von $x = \gamma(0)$ nach $y = \gamma(1)$, erfüllt also $\ell(\gamma) = d(x,y)$, wenn jede Komponente γ_k monoton ist.



Kürzeste Wege in $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathrm{Int}[a,b]$



Bestimmen Sie zu folgenden Teilräumen (X,d) des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ jeweils die Längenmetrik durch eine explizite Formel. Beweisen Sie Ihre Formel. Welche Punkte x,y in (X,d) lassen sich durch einen kürzesten Weg verbinden? sogar eindeutig?

(4) Singularität: $X = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{a\}$.
(5) Hindernis: $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathrm{Int}[a,b]$.
(6) Einzelspalt: $X = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \vee |y| \leq 1 \,\}$.
(7) Sphäre: $X = \mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_2 = 1 \,\}$; es genügt $n = 2,3$.
(8) Würfelrand: $X = \delta[-1,1]^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty = 1 \,\}$ für $n = 2,3$.

✻ **C7G.** (1) Für jeden Weg γ von x nach y im Raum (X,d) gilt $\ell(\gamma) \geq d(x,y)$. Gemäß C7B hat der gerade Weg $\gamma : [0,1] \to X : t \mapsto (1-t)x + ty$ die Länge $\ell(\gamma) = d(x,y)$, realisiert also das Minimum.

(2) Die euklidische Metrik ist invariant unter Drehung und Verschiebung. Wir können daher $x = 0$ und $y = ae_1$ mit $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ annehmen. Dann ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ genau dann ein kürzester Weg von x nach y, wenn $\gamma(t) = (\gamma_1(t), 0, \ldots, 0)$ gilt mit einer monoton wachsenden Funktion $\gamma_1 : [0,1] \to [0,a]$. Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar. Für „$\Rightarrow$“ schließen wir zunächst $\gamma_i(t) \neq 0$ für $i = 2,\ldots,n$ und $t \in [0,1]$ aus, dank strikter Dreiecksungleichung. Schließlich muss γ_1 monoton wachsend sein, da sonst $\ell(\gamma) > a$ gilt.

(3) Die explizite Aussage enthält bereits die Lösung, analog zu (2). Zur Veranschaulichung betrachte man $x = (0,0)$ und $y = (1,1)$ in $\mathbb{R}^2$; hier gibt es unendlich viele verschiendene kürzeste Wege!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

(4) Wir betrachten zwei Punkte x, y in (X,d). Im Falle $a \notin [x,y]$ können wir x und y durch den geraden Weg verbinden, also $đ(x,y) = d(x,y) = |x-y|$. Im Falle $a \in [x,y]$ genügt ein beliebig kleiner Umweg γ_k mit $\ell(\gamma_k) \le d(x,y) + 1/k$, also $đ(x,y) = d(x,y)$. Allerdings gibt es in diesem Falle keinen kürzesten Weg!

(5) Wir können $a \neq b$ annehmen, andernfalls reduziert sich das Problem auf (4). Nach Drehung sei $a = -e_2$ und $b = +e_1$. Wir müssen dem offenen Geradensegment $\mathrm{Int}[a,b]$ ausweichen. Anhand einer Skizze finden wir:

$$đ(x,y) = \begin{cases} d(x,y) = |x-y| & \text{falls } [x,y] \cap \mathrm{Int}[a,b] = \emptyset, \\ \min\{\, d(x,a) + d(a,y),\ d(x,b) + d(b,y) \,\} & \text{falls } [x,y] \cap \mathrm{Int}[a,b] \neq \emptyset, \end{cases}$$

Im ersten Fall $[x,y] \cap \mathrm{Int}[a,b] = \emptyset$ können wir x und y durch den geraden Weg verbinden, also $đ(x,y) = d(x,y)$. Es bleibt der zweite Fall: (a) Sei zunächst $x, y \notin \mathrm{aff}(a,b)$. Die beiden Wege von x über a bzw. b nach y zeigen die Ungleichung „$\le$“. Die Umkehrung „$\ge$“ folgt aus dem Zwischenwertsatz bezüglich der ersten Koordinate: Jeder Weg γ von x nach y schneidet die Gerade $\mathrm{aff}(a,b)$, also $\ell(\gamma) \ge d(x,a) + d(a,y)$ oder $\ell(\gamma) \ge d(x,b) + d(b,y)$. (b) Es bleibt nur noch der Fall $\mathrm{Int}[a,b] \subset [x,y] \subset \mathrm{aff}(a,b)$; dies lösen wir wie in (4).

(6) Die Wegmetrik finden wir genauso wie in (5). In (X,d) können je zwei Punkte x, y durch einen kürzesten Weg verbunden werden, und dieser ist sogar eindeutig (wie immer bis auf Umparametrisierung).

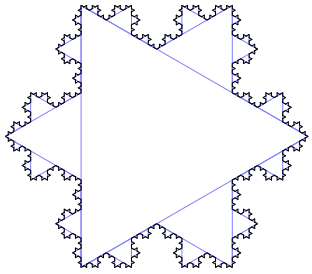
(7) Wir betrachten die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mit der euklidischen Metrik d. Seien $x, y \in \mathbb{S}^1$. Nach Drehung / Spiegelung dürfen wir $x = 1$ und $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ mit $0 \le s \le \pi$ annehmen. Der Weg $\gamma : [0,s] \to \mathbb{S}^1$ mit $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ verbindet x mit y und hat Länge $\ell(\gamma) = s$. Kürzer geht es nicht, also gilt $đ(x,y) = s$.

Für $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ gilt sinngemäß dasselbe: Je zwei Punkte $x \neq y$ in $\mathbb{S}^{n-1}$ spannen eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^n$ auf. Der Schnitt $S = \mathbb{S}^{n-1} \cap E$ ist ein Kreis in $E \cong \mathbb{R}^2$, und die Wegmetrik von x nach y in bestimmt sich wie in $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten. Der Fall $n = 3$ entspricht der sphärischen Geometrie auf der Erdoberfläche. Für diametrale Punkte $y = -x$ gibt es mehrere kürzeste Wege, andernfalls ist die kürzeste Verbindung eindeutig.

(8) Wir betrachten den Quadratrand $X = \delta[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Liegen $x, y \in X$ in derselben oder in benachbarten Kanten, so ist $đ(x,y)$ die Taximetrik, also $đ(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Liegen x, y in gegenüberliegenden Kanten, etwa $x_1 = -1$ und $y_1 = +1$, so kommen zwei Wege in Frage, mit Länge $4 - x_2 - y_2$ bzw. $4 + x_2 + y_2$, und man wählt den kürzeren. Kürzer geht es nicht. Der Würfelrand ist knifflig, siehe C7L.

Bemerkung. Wegen $đ \ge d$ ist die Wegmetrik $đ$ feiner als d (C3I). Genau dann sind d und $đ$ topologisch äquivalent, wenn zu jedem $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass für alle $y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ auch $đ(x,y) < \varepsilon$ gilt, also ein Weg γ von x nach y existiert mit Länge $< \varepsilon$. Zur Äquivalenz von d und $đ$ genügt es nicht, dass (X,d) lokal wegzusammenhängend ist. Die Koch–Kurve (C7D) ist ein Gegenbeispiel: $đ$ ist diskret!

Hier ein noch verblüfferendes Beispiel zur Warnung:



Beispiel C7H (Koch–Kegel)**.** Wir fügen drei Kopien der Koch–Kurve zu einer einfach geschlossenen Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ zusammen, also $C \cong \mathbb{S}^1$. Hierüber betrachten wir den Kegel

$$X = \left\{ (x, xy, xz) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \ge 0,\ (y,z) \in C \right\}.$$

Auf $X \subset \mathbb{R}^3$ haben wir die euklidische Metrik $d = d_X$; die Wegmetrik $đ$ hingegen ist die französische Eisenbahnmetrik!

Radiale Wege in X haben die übliche Länge, alle anderen haben unendliche Länge.

Genauer: Zu jedem Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} C : s \mapsto (y(s), z(s))$ erhalten wir

$$\psi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} X, \quad \psi(rs) = \frac{r}{1 + y(s)^2 + y(s)^2}(1, y(s), z(s))$$

für alle $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $s \in \mathbb{S}^1$. Dies ist ein Homöormorphismus $\psi : (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{Euklid}}) \xrightarrow{\sim} (X,d)$ und zugleich eine Isometrie $\psi : (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}}) \xrightarrow{\sim} (X, đ)$.

§C7d. Schneeflockenmetrik. Äquivalente Metriken sind *topologisch* betrachtet austauschbar, sie können aber *geometrisch* völlig unterschiedliche Eigenschaften haben:

Übung C7I. Zur Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ sind die gestauchte bzw. gestutzte Metrik $d', d^* : X \times X \to [0,1]$ äquivalent, definieren also dieselbe Topologie auf X (C3L).

(1) Wie ändert dies die Länge von Wegen $\gamma : [0,1] \to X$ bezüglich d, d', d^*?

Zu jeder Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ und $0 < \alpha < 1$ ist die *Schneeflockenmetrik* $d' = d^\alpha$ topologisch äquivalent, definiert also dieselbe Topologie auf X (C3I).

(2) Jeder nicht-konstante Weg $\gamma : [0,1] \to X$ hat unendliche Länge bezüglich $d' = d^\alpha$.

Dies zeigt, dass selbst einfache Begriffe wie die Weglänge schnell zerbrechen können.

Umgekehrt nennen wir d' eine *p–Metrik* für $1 \le p < \infty$, wenn $d = d'^p$ eine Metrik ist, also $d'(x,z)^p \le d'(x,y)^p + d'(y,z)^p$ für alle $x, y, z \in X$ gilt. Für $p = 1$ ist dies die übliche Dreiecksungleichung, 1–Metriken sind also schlicht Metriken. Im Falle $p = \infty$ verlangen wir entsprechend $d'(x,z) \le \max\{d'(x,y), d'(y,z)\}$; eine solche ∞–Metrik nennt man üblicherweise *Ultrametrik*. Ist d' eine p–Metrik, so ist d' eine q–Metrik für alle $1 \le q \le p \le \infty$. Ein Raum (X,d) heißt eine *p–Schneeflocke*, für $1 < p \le \infty$, wenn er bilipschitz–homöomorph ist zu einen p–metrischen Raum (X',d').

(3) Untersuchen Sie die Koch–Kurve $K \subset \mathbb{R}^2$ aus Beispiel C7D mit euklidischer Metrik. Ist sie eine Schneeflocke im gerade erklärten Sinne? Für welche Exponenten p?

✻ **C7I.** (1) Die Weglänge ist bezüglich aller drei Metriken d, d', d^* gleich! Zum Beweis vergleichen wir zunächst d und $d^* = f \circ d$ mit $f : [0,\infty] \to [0,1] : t \mapsto \max\{1,t\}$. Es gilt $d^* \le d$, also $\ell_{d^*}(\gamma) \le \ell_d(\gamma)$. (Warum?) Wir zeigen umgekehrt $\ell_d(\gamma) \le \ell_{d^*}(\gamma)$. Im Falle $\ell_{d^*}(\gamma) = \infty$ ist das trivial. Andernfalls ist γ rektifizierbar bezüglich d^*. Nach Umparametrisierung sei $\gamma : [a,b] \to X$ nach d^*–Weglänge parametrisiert. Gegeben sei eine Partition $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$. Nach Einfügen von Zwischenpunkten können wir $|t_{k-1} - t_k| \le 1$ für alle $k = 1,\ldots,n$ annehmen. Es gilt $d^*(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k)) \le \ell_{d^*}(\gamma_{[t_{k-1},t_k]}) = |t_{k-1} - t_k| \le 1$. In diesem Bereich gilt $d(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k)) = d^*(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k))$, also $\ell_d(\gamma,P) = \ell_{d^*}(\gamma,P)$. Wir bilden rechts das Supremum und erhalten $\ell_d(\gamma,P) \le \ell_{d^*}(\gamma)$. Wir bilden links das Supremum und erhalten $\ell_d(\gamma) \le \ell_{d^*}(\gamma)$, wie gewünscht.

Wir vergleichen nun d und $d' = f \circ d$ mit $f : \mathbb{R}_{\ge 0} \to [0,1] : t \mapsto t/(1+t)$. Wie zuvor gilt auch hier $d' \le d$, also $\ell_{d'}(\gamma) \le \ell_d(\gamma)$. Wir zeigen umgekehrt $\ell_d(\gamma) \le \ell_{d'}(\gamma)$. Die Funktion f ist $\mathscr{C}^\infty$–glatt mit Ableitung $f'(t) = (1-t)/(1+t)^2$, also $f(t)/t \nearrow f'(0) = 1$ für $t \searrow 0$. Zu jedem $\lambda \in]0,1[$ existiert demnach ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $\lambda t \le f(t)$ für alle $t \in [0,\delta]$. Wie zuvor sei $\gamma : [a,b] \to X$ nach d'–Weglänge parametrisiert. Sei $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ eine Partition mit $|t_{k-1} - t_k| \le \delta$ für alle $k = 1,\ldots,n$. In diesem Bereich gilt $\lambda d(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k)) \le d'(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k))$, also $\lambda \ell_d(\gamma,P) \le \ell_{d'}(\gamma,P)$. Supremum rechts dann links ergibt $\lambda \ell_d(\gamma) \le \ell_{d'}(\gamma)$. Da dies für alle $\lambda \in]0,1[$ gilt, können wir $\lambda \nearrow 1$ betrachten und erhalten $\ell_d(\gamma) \le \ell_{d'}(\gamma)$.

(2) Sei $\alpha \in]0,1[$. Wir vergleichen d und $d^\alpha = f \circ d$ mit $f : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} : t \mapsto t^\alpha$. Sei $\gamma : [a,b] \to X$ ein Weg, also stetig bezüglich d. Wir haben $f(t)/t = t^{\alpha-1} \nearrow +\infty$ für $t \searrow 0$; zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert demnach ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $f(t) \ge \lambda t$ für alle $t \in [0,\delta]$. Sei $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ eine Partition mit $|t_{k-1} - t_k| \le \delta$ für alle $k = 1,\ldots,n$. In diesem Bereich gilt $d^\alpha(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k)) \ge \lambda d(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k))$, also $\ell_{d^\alpha}(\gamma,P) \ge \lambda \ell_d(\gamma,P)$. Supremum links dann rechts ergibt $\ell_{d^\alpha}(\gamma) \ge \lambda \ell_d(\gamma)$. Im Falle $\ell_d(\gamma) = 0$ ist γ konstant, also nichts zu beweisen. Im Falle $\ell_d(\gamma) = \infty$ folgt sofort $\ell_{d^\alpha}(\gamma) = \infty$. Sei also $\ell_d(\gamma) \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $\ell_{d^\alpha}(\gamma) \ge \lambda \ell_d(\gamma)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, können wir $\lambda \nearrow \infty$ betrachten und erhalten $\ell_{d^\alpha}(\gamma) = \infty$.

(3) Die Koch–Kurve ist eine p–Schneeflocke im Sinne der obigen Definition für $p = \ln(4)/\ln(3)$. Dies ist auch unter anderen Definitionen ihre *fraktale Dimension*, zum Beispiel im Sinne der Hausdorff–Dimension. Ich führe dies hier nicht weiter aus, aber vielleicht haben Sie Freude daran, es auszutüfteln.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C7e. Geodäten. Aus der Geometrie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ haben wir zentrale Begriffe extrahiert, insbesondere *Skalarprodukt* und *Norm* (C1C) sodann *Metrik* (C2B) und *Topologie* (C2L). Diese haben wir bereits analytisch genutzt: Konvergenz (C3A), Stetigkeit (C3E), gleichmäßige Konvergenz stetiger Funktionen (C3Q), etc.

Zum Abschluss dieses Kapitels komme ich auf klassische *geometrische* Anwendungen zurück; sie haben ihren Ursprung wörtlich-historisch in der *Erdvermessung*. Die mathematischen Methoden eignen sich aber ebenso zur Vermessung anderer Flächen, des Weltalls, oder allgemeinerer Räume, insbesondere Riemannscher Mannigfaltigkeiten; diese sind der zentrale Gegenstand der Differentialgeometrie.

Bereits jetzt stehen uns nützliche und sehr anschauliche Begriffe zur Verfügung:

Definition C7J. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine *Geodäte* ist eine stetige Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to X$ auf einem echten Intervall I mit $d(\gamma(s),\gamma(t)) = \lambda|s-t|$ für alle $s,t \in I$. Die Konstante $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennen wir die *Geschwindigkeit* von γ. Im Falle $\lambda = 1$ ist γ eine isometrische Einbettung des Intervalls I in den Raum (X,d).

Der metrische Raum (X,d) heißt *(eindeutig) geodätisch*, wenn sich je zwei Punkte $x,y \in X$ durch eine (eindeutige) Geodäte $\gamma : [0,1] \to X$ verbinden lassen. Anders gesagt: (X,d) ist ein Längenraum, d.h. die Metrik $d = \mathrm{d}\!\!\!^{-}$ ist die Wegmetrik, und zwischen je zwei Punkten wird das Infimum der Weglänge durch (genau) einen kürzesten Weg realisiert.

Eine *lokale Geodäte* ist eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to X$, sodass zu jedem Punkt $t \in I$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $\gamma|_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]\cap I}$ eine Geodäte ist. Die (zunächst nur lokal definierte) Geschwindigkeit $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist dann auf dem ganzen Intervall I konstant.

Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik ist eindeutig geodätisch (C7G): Zwischen je zwei Punkten $x,y \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine Geodäte $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, nämlich den Weg $\gamma(t) = (1-t)x + ty = x + t(y-x)$ mit Geschwindigkeit $\lambda = |y-x|$.

Beispiel. Der Raum $X = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ mit euklidischer Metrik d ist nicht geodätisch (C7G). Genauer: Im Falle $n \geq 2$ ist (X,d) ein Längenraum, $\mathrm{d}\!\!\!^{-} = d$, aber nicht geodätisch, denn x und $-x$ lassen sich nicht durch einen Weg der Länge $d(x,-x) = 2|x|$ verbinden.

Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, mit Taximetrik ist geodätisch, aber nicht eindeutig (C7G).

Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^n$ mit französischer Eisenbahnmetrik (C2D) ist eindeutig geodätisch.

Beispiel. Auf der Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist die intrinsische Metrik d die Bogenlänge: Je zwei Punkte $x,y \in \mathbb{S}^1$ können wir schreiben als $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ und $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $s,t \in \mathbb{R}$ und $|s-t| \leq \pi$, und wir erhalten $d(x,y) = |s-t|$. Der Raum $(\mathbb{S}^1,d)$ ist geodätisch, aber nicht eindeutig. Die lokalen Geodäten sind $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_0+\lambda t)}$ mit Geschwindigkeit $|\lambda|$, sowie ihre Einschränkungen $\gamma|_I$. Genau dann ist $\gamma|_{[a,b]}$ minimierend, wenn $|\lambda|(b-a) \leq \pi$ gilt.

Beispiel. Gleiches gilt sinngemäß für jede euklidische Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Dimension $n \geq 2$. Je zwei Punkte $x,y \in \mathbb{S}^n$ liegen in einer Ebene $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, der Schnitt $\mathbb{S}^n \cap E \cong \mathbb{S}^1$ ist ein Großkreis, und die Wegmetrik $d(x,y)$ berechnet sich wie im vorigen Beispiel. Im Falle $d(x,y) < \pi$ gibt es genau eine Geodäte $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ von x nach y in $\mathbb{S}^n$; im verbleibenden Falle $d(x,y) = \pi$ hingegen gilt $y = -x$; und zwischen zwei solchen Antipoden existieren unendlich viele Geodäten von x nach y in $\mathbb{S}^n$.

Bemerkung. Die Differentialgeometrie untersucht glatte Mannigfaltigkeiten X mit einer (infinitesimalen) Riemannschen Metrik g, das heißt einer positiv definiten, symmetrische Bilinearform $g_p : T_pX \times T_pX \to \mathbb{R}$, die glatt vom Punkt $p \in M$ abhängt. Die Länge eines glatten Weges $\gamma : [a,b] \to X$ wird durch die Integralformel C7C definiert. Geodäten sind dann Lösungen der Geodätengleichung, in lokalen Koordinaten $\ddot{x}_m + \Gamma^m_{k\ell}\dot{x}_k\dot{x}_\ell = 0$. Unter einer *Geodäte* versteht man in der Differentialgeometrie daher allgemeiner einen lokal kürzesten Weg, während man einen global kürzesten Weg eine *minimierende Geodäte* nennt.

Physikalisch ist $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to X$ die Bahn eines Teilchens, das sich kräftefrei bewegt, also mit konstanter Geschwindigkeit, es muss lediglich der (eventuell gekrümmten) Form des Raumes (X,g) folgen. Die Beispiele $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{S}^n$ illustrieren dies eindrücklich.

Zur Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten halten wir folgendes Kriterium fest:

Satz C7K (Mittelpunkteigenschaft)**.** *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum.*

(1) Der Raum (X,d) ist (eindeutig) geodätisch genau dann, wenn für alle $x,y \in X$ (genau) ein Mittelpunkt $z \in X$ existiert mit $d(x,z) = d(y,z) = \frac{1}{2}d(x,y)$.
(2) Genau dann ist (X,d) ein Längenraum, wenn für alle $x,y \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein ε–Zwischenpunkt $z \in X$ existiert mit $d(x,z), d(y,z) \leq \frac{1}{2}d(x,y) + \varepsilon$.

Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik ist eindeutig geodätisch. Hierin ist die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ mit intrinsicher Metrik geodätisch aber nicht eindeutig geodätisch.

BEWEIS. (1) „⇒“: Ist (X,d) geodätisch, so existiert zu $x,y \in X$ mit Abstand $L = d(x,y)$ eine Geodäte $\gamma : [0,L] \to X$ von $\gamma(0) = x$ nach $\gamma(L) = y$. Es gilt $d(\gamma(s),\gamma(t)) = |s-t|$ für alle $s,t \in [0,L]$, also erfüllt $z = \gamma(L/2)$ die Gleichung $d(x,z) = d(y,z) = \frac{1}{2}d(x,y)$.

„⇐“: Angenommen, es gilt die Mittelpunkteigenschaft. Zu gegebenen Punkten $x,y \in X$ mit Abstand $L = d(x,y)$ definieren wir $\gamma : [0,L] \to X$ induktiv für alle Zeitpunkte der Form $t = k2^{-n}L$ für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0,1,\dots,2^n$. Startpunkt $\gamma(0) = x$ und Zielpunkt $\gamma(L) = y$ sind vorgegeben. Wir wählen $z \in X$ mit $d(x,z) = d(y,z) = \frac{1}{2}d(x,y)$ und setzen $\gamma(1/2\,L) = z$. Dies wiederholen wir entsprechend für $\gamma(1/4\,L)$ und $\gamma(3/4\,L)$. So fortfahrend erhalten wir $\gamma : [0,L] \cap \mathbb{Z}[1/2]L \to X$ mit $d(\gamma(s),\gamma(t)) = |s-t|$, also eine isometrische Einbettung. Da (X,d) vollständig ist, können wir γ auf ganz $[0,L]$ fortsetzen: Zu jedem $t \in [0,L]$ existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,L] \cap \mathbb{Z}[1/2]L$ mit $t_n \to t$. Als konvergente Folge ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge, somit auch $\gamma(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dank Vollständigkeit also konvergent in (X,d). Wir setzen $\gamma(t) := \lim \gamma(t_n)$. Diese Fortsetzung $\gamma : [0,L] \to X$ erfüllt ebenfalls $d(\gamma(s),\gamma(t)) = |s-t|$, da die Metrik d stetig ist. Somit ist γ eine Geodäte von x nach y.

Angenommen, zu $x,y \in X$ gibt es zwei verschiedene Mittelpunkte $z \neq \tilde{z}$. Die vorige Konstruktion ergibt dann zwei verschiedene Geodäten $\gamma,\tilde{\gamma} : [0,L] \to X$ von x nach y.

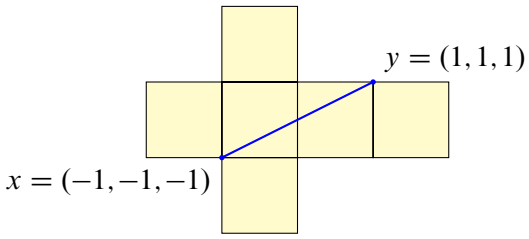
Angenommen, zu je zwei Punkten $x,y \in X$ gibt es genau einen Mittelpunkt z. Zwei Geodäten $\gamma,\tilde{\gamma} : [0,L] \to X$ von x nach y laufen dann durch $\gamma(L/2) = \tilde{\gamma}(L/2) = z$. So fortfahrend gilt $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$ für alle $t \in [0,L] \cap \mathbb{Z}[1/2]L$, dank Stetigkeit für alle $t \in [0,L]$.

(2) „⇒“: Ist (X,d) ein Längenraum, so existiert zu $x,y \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Weg $\gamma : [0,L] \to X$ von $\gamma(0) = x$ nach $\gamma(L) = y$ mit Länge $L = \ell(\gamma) \leq d(x,y) + 2\varepsilon$. Nach Weglänge parametrisiert gilt $d(\gamma(s),\gamma(t)) \leq |s-t|$ für alle $s,t \in [0,L]$, also erfüllt der Punkt $z = \gamma(L/2)$ die Ungleichungen $d(x,z), d(y,z) \leq \frac{1}{2}d(x,y) + \varepsilon$.

Die Umkehrung „⇐“ zeigt man wie in (1). Versuchen Sie dies als Übung. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§C7f. Geodäten auf der Würfelfläche. Die folgende elementare Knobelaufgabe kann mit Schulgeometrie gelöst werden, erfordert jedoch Kreativität und vor allem Sorgfalt.



Übung C7L. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den Würfelrand

$$X = \delta[-1,1]^3 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|_\infty = 1 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = \pm 1 \text{ für ein } i = 1,2,3 \,\}.$$

Sei d die euklidische Metrik und hierzu $\mathring{d}$ die intrinsische Wegmetrik auf X.

(1) Liegen zwei Punkte $x, y \in X$ in einer gemeinsamen Facette von X, so gilt $\mathring{d}(x,y) = d(x,y)$, und es gibt genau eine Geodäte von x nach y in X.
(2) Eine (lokal minimierende) Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to X$ kann in einem der Eckpunkte $x = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ starten oder enden, aber nicht durch ihn hindurchlaufen.
(3) Der Raum (X,d) bzw. $(X,\mathring{d})$ ist lokal isometrisch zur euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ in jedem Punkt $x \in X \smallsetminus \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$, jedoch nicht in den acht Eckpunkten.
(4) Bestimmen Sie den intrinsischen Abstand $\mathring{d}(x,y)$ zwischen den gegenüberliegenden Ecken $x = (-1,-1,-1)$ und $y = (1,1,1)$ sowie alle Geodäten von x nach y.
(5) Erklären Sie, wie man für zwei beliebige Punkte $x, y \in X$ den Abstand $\mathring{d}(x,y)$ bestimmt und alle Geodäten findet.

✻ **C7L.** (1) Allgemein gilt $\mathring{d} \geq d$. Liegen x, y in einer gemeinsamen Facette, so gilt $[x,y] \subset X$, und somit $\mathring{d}(x,y) = d(x,y)$ mit eindeutiger Geodäte (C7G). Das bedeutet: Für x im Inneren einer Facette Q sei $U = Q$. Für x im Inneren einer Kante sei U die Vereinigung der beiden benachbarten Facetten. Für x in einer Ecke sei U die Vereinigung der drei benachbarten Facetten. Für alle $y \in U$ gilt dann $d(x,y) = \mathring{d}(x,y)$.

(2) Angenommen, $\gamma : [a,b] \to X$ mit $-2 \leq a < 0 < b \leq 2$ läuft durch den Eckpunkt $\gamma(0) = (1,1,1)$. Dann sind $\gamma|_{[a,0]}$ und $\gamma|_{[0,b]}$ Geradenstücke in einer gemeinsamen Facette oder in benachbarten Facetten. Machen Sie eine Skizze: In beiden Fällen kann γ nicht minimierend sein.

(3) In jedem Punkt $x \in X \smallsetminus \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ ist (X,x) lokal isometrisch zur euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, 0)$: Liegt x im Inneren einer Facette, so ist dies klar; liegt x im Inneren einer Kante, so können wir die beiden benachbarten Facetten aufklappen und in die Ebene legen. Im Eckpunkt $x = (1,1,1)$ gilt dies nicht: Der Raum X ist hier gekrümmt (A5D). Angenommen, es gäbe eine offene Umgebung U von x in X und eine Isometrie $f : (U,x) \xrightarrow{\sim} (V,0)$ auf eine offene Umgebung V von 0 in $\mathbb{R}^2$. Eigenschaft (2) zeigt, dass dies unmöglich ist, denn in V gibt es Geodäten durch 0. Alternativ sehen wir dies so: Es existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subset U$. Wir wählen $0 < r < \varepsilon$ und betrachten die drei Punkte $p_1 = (1-r,1,1)$ und $p_2 = (1,1-r,1)$ und $p_3 = (1,1,1-r)$. Dank (1) gilt $\mathring{d}(x,p_i) = d(x,p_i) = r$ und $\mathring{d}(p_i,p_j) = d(p_i,p_j) = r\sqrt{2}$ für alle $i \neq j$. Die zugehörigen Punkt $q_i = f(p_i)$ in $\mathbb{R}^2$ haben Abstand r vom Mittelpunkt $f(x) = 0$, liegen also auf $r\mathbb{S}^1$. Jedoch ist $d(q_i,q_j) = r\sqrt{2}$ für alle $i \neq j$ unmöglich, wie man sich leicht überzeugt.

(4) Wir entwickeln die Würfelfläche wie skizziert in der Ebene und finden einen Weg γ von x nach y mit Länge $\ell(\gamma) = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. Jede lokal minimierende Geodäte γ von x nach y lässt sich dank (2) und (3) so darstellen und erfüllt $\ell(\gamma) \geq 2\sqrt{5}$, also $\mathring{d}(x,y) = 2\sqrt{5}$. Es gibt genau sechs Geodäten von x nach y.

(5) Liegen x, y in einer gemeinsamen Facette, so gilt (1). Liegen x, y in benachbarten Facetten, so kommen drei lokal minimierende Geodäten in Betracht, und man wählt eine kürzeste. Liegen x, y in gegenüberliegenden Facetten, so kommen zwölf lokal minimierende Geodäten in Betracht, und man wählt die kürzeste.

§C8. Übungen und Ergänzungen

Übung C8A. Gibt es unstetige additive Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$? Und unstetige multiplikative, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$? Und solche, die beides erfüllen?

✻ **C8A.** Jede $\mathbb{Q}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist additiv. Umgekehrt ist jede additive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $\mathbb{Q}$–linear: Aus $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ folgt $f(0) = 0$. Aus $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$ folgt $f(-x) = -f(x)$. Per Induktion gilt $f(nx) = f(x + \ldots + x) = f(x) + \ldots + f(x) = nf(x)$ für $n \in \mathbb{N}$, sodann für $n \in \mathbb{Z}$. Schließlich gilt $mf(\frac{n}{m}x) = f(nx) = nf(x)$ für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$, also $f(\frac{n}{m}x) = \frac{n}{m}f(x)$.

(1) Wir konstruieren eine unstetige additive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dank Auswahlaxiom erlaubt $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$–Vektorraum eine Basis $\mathscr{B}$; wir können zudem $1 \in \mathscr{B}$ einrichten. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $\mathbb{Q}$–lineare Fortsetzung von $f(1) = 1$ und $f(b) = 0$ für alle $b \in \mathscr{B} \smallsetminus \{1\}$. Sie hat die gesuchte Eigenschaft: f ist additiv, aber nirgends stetig. Zusatz: Der Graph $\{ (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R} \}$ einer unstetigen additiven Abbildung ist dicht in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(2) Die Funktion $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{sign}(x) = 1$ für $x > 0$ und $\operatorname{sign}(x) = -1$ für $x < 0$ sowie $\operatorname{sign}(0) = 0$ ist multiplikativ und überall stetig bis auf den Punkt 0. Wie in (1) können wir sogar multiplikative Funktionen konstruieren, die nirgends stetig sind. Zu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir $g_\times : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g_\times(0) = 0$ und $g_\times(x) = \operatorname{sign}(x)\, \mathrm{e}^{g(\ln|x|)}$ für $x \neq 0$. Ist g additiv, so ist $g_\times$ multiplikativ. Ist g nirgends stetig, so auch $g_\times$.

(3) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additiv ist, so auch $\mathbb{Q}$–linear. Ist f multiplikativ, so gilt $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$, also entweder $f(1) = 0$ oder $f(1) = 1$. Im ersten Fall $f(1) = 0$ ist f die konstante Nullfunktion, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$. Im zweiten Fall $f(1) = 1$ zeigen wir nun $f = \mathrm{id}_\mathbb{R}$.

Wir wissen zunächst $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Dank Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert zu jedem $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Quadratwurzel $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^2 = r$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \geq y$ genau dann, wenn $x - y = a^2$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Es folgt $f(x) - f(y) = f(x-y) = f(a^2) = f(a)^2 \geq 0$, also ist f monoton wachsend. Zusammen mit $f|_\mathbb{Q} = \mathrm{id}_\mathbb{Q}$ folgt $f = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. Dies sieht man so: Für jedes Element $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = \sup\{ a \in \mathbb{Q} \mid a \leq x \} = \inf\{ b \in \mathbb{Q} \mid b \geq x \}$. Dank Monotonie gilt $f(x) \geq \sup f(\mathbb{Q}_{\leq x}) = \sup \mathbb{Q}_{\leq x} = x$ und $f(x) \leq \inf f(\mathbb{Q}_{\geq x}) = \inf \mathbb{Q}_{\geq x} = x$, also $f(x) = x$.

Erläuterung: Es gibt unstetige Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die additiv sind, und solche, die multiplikativ sind, aber additiv und multiplikativ sind nur die Nullfunktion und $\mathrm{id}_\mathbb{R}$. Damit knüpft diese Aufgabe direkt an die Konstruktion und Einzigkeit des Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ an, insbesondere die Aussage $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}, +, \cdot) = \{\mathrm{id}_\mathbb{R}\}$.

Übung C8B. Ein Ausflug in die Quantenmechanik als Übung zu normierten Räumen:

(0) Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum, also $0 < \dim V < \infty$. Dann gibt es auf V keine linearen Abbildungen $P, Q : V \to V$ mit $PQ - QP = \mathrm{id}_V$.
(1) In normierten Algebren mit $1 \neq 0$ gibt es keine Elemente P, Q mit $PQ - QP = 1$.
Hinweis: Induktiv folgt $PQ^n - Q^n P = nQ^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, und hieraus $Q^n = 0$.
(2) Sei $V \neq 0$ ein Vektorraum und $P, Q : V \to V$ linear mit $PQ - QP = \mathrm{id}_V$.
Für keine Norm auf V können P und Q zugleich stetig sein.
(3) Auf $V = \mathscr{C}^\infty(]-r, r[, \mathbb{C})$ betrachten wir die Operatoren $P = \partial_x$ und $Q = x$.
Bestimmen Sie ihre Operatornorm bezüglich der Supremumsnorm $|-|_V$ auf V.

✻ **C8B.** (0) Wir wählen eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V und stellen lineare Abbildungen als Matrizen das. Für die Spur finden wir $\operatorname{tr}(PQ - QP) = \operatorname{tr}(PQ) - \operatorname{tr}(QP) = 0$, denn die Spur erfüllt $\operatorname{tr}(PQ) = \operatorname{tr}(QP)$.

(1) Für $n = 1$ gilt $PQ^1 - Q^1 P = 1 = 1Q^0$. Gilt die behauptete Gleichung für n, dann auch für $n+1$ gemäß $PQ^{n+1} - Q^{n+1}P = (PQ - QP)Q^n + Q(PQ^n - Q^n P) = Q^n + Q\, nQ^{n-1} = (n+1)Q^n$. Dreiecksungleichung und Multiplikativität der Norm ergeben $n\|Q^{n-1}\| \leq 2\|P\| \cdot \|Q\| \cdot \|Q^{n-1}\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n > 2\|P\| \cdot \|Q\|$ folgt $\|Q^{n-1}\| = 0$, also $Q^{n-1} = 0$. Abwärts folgt dann $Q^k = 0$ für alle $1 \leq k < n$.

(2) Angenommen, P und Q wären stetig bezüglich einer Norm $|-|$ auf V. Das ist gleichbedeutend mit der Endlichkeit ihrer Operatornormen $\|P\|$ und $\|Q\|$. Demnach liegen P, Q in der Algebra $\mathcal{B}(V)$ mit Operatornorm mit der Identität $\mathrm{id}_V \neq 0$ als neutralem Element. Dies widerspricht der Rechnung aus (1).

(3) Es gilt $\|Q\| = r$, nach (2) muss $\|P\| = \infty$ gelten. Das können wir auch konkret nachrechnen: Für $f_n(x) = \sin(n\pi x)$ gilt $|f_n|_V = 1$ aber $|Pf_n|_V = n \nearrow \infty$; die Operatornorm ist demnach $\|P\| = \infty$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Erläuterung. In der Quantenmechanik betrachtet man zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ den Ortsoperator $Q = x$ mit $(Qf)(x) = xf(x)$ und den zugehörigen Impulsoperator $P = -\mathrm{i}\partial_x$ mit $(Pf)(x) = -\mathrm{i}f'(x)$; beide sind durch die Fourier–Transformation zueinander konjugiert. Es gilt $PQ - QP = -\mathrm{i}$. Wir können P und Q als Operatoren auf dem Vektorraum $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ aller glatten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ betrachten, denn $Pf, Qf : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind erneut glatt. Besser noch betrachtet man P und Q auf dem *Schwartz–Raum* $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ aller schnell fallenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, das heißt, f ist beliebig oft differenzierbar und für alle $m,n \in \mathbb{N}$ ist $x^m \partial^n f$ beschränkt. Hierzu gehören zum Beispiel alle glatten Funktionen mit kompaktem Träger, und ebenso $f(x) = p(x)\exp(-x^2/2)$ mit einem Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$. Auch auf $\mathscr{S}$ operieren P und Q, denn Pf und Qf sind erneut schnell fallend. Die Operatoren P, Q können jedoch nicht beide zugleich stetig sein, egal welche Norm wir auf $\mathscr{S}$ wählen!

Übung C8c. Sei $\mathbb{C}[z^\pm]$ der $\mathbb{C}$–Vektorraum aller Laurent–Polynome $f(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ mit beliebigem Grad $n \in \mathbb{N}$ und $a_{-n}, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Dieser Ausdruck definiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, und die Einschränkung auf die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ liefert der trigonometrische Polynom $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$. Für $p \in \{1, 2, \infty\}$ vergleichen wir die ℓ^p–Norm auf $\mathbb{C}[z^\pm] = \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$ und die L^p–Norm auf $\mathscr{C}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$:

$$|f|_1 := \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|, \qquad \|f\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \big|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\big|\,\mathrm{d}t,$$

$$|f|_2 := \left(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2\right)^{1/2}, \qquad \|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \big|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\big|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

$$|f|_\infty := \sup\big\{\, |a_k| \;\big|\; k \in \mathbb{Z} \big\}, \qquad \|f\|_\infty := \sup\big\{\, |f(z)| \;\big|\; z \in \mathbb{S}^1 \big\}.$$

(1) Die lineare Abbildung $\mathbb{C}[z^\pm] \to \mathscr{C}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}) : f \mapsto f|_{\mathbb{S}^1}$ hat trivialen Kern.
(2) Die Abbildungen $|-|_p, \|-\|_p : \mathbb{C}[z^\pm] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind tatsächlich Normen.
(3) Ordnen Sie diese sechs Normen durch eine Kette von Un/Gleichungen.

✻ **C8c.** (1) Aus der Fourier–Theorie wissen wir, dass die Funktionen $e_k : [0,2\pi] \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ orthonormal sind bezüglich des L^2–Skalarprodukts $\langle\, f \mid g \,\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,\mathrm{d}t$. (Nachrechnen!) Demnach lassen sich aus der Einschränkung $f|_{\mathbb{S}^1}$ die Koeffizienten $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ zurückgewinnen gemäß

$$\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell t} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = \Big\langle e_\ell \;\Big|\; \sum\nolimits_{k=-n}^{n} a_k e_k \Big\rangle = \sum\nolimits_{k=-n}^{n} a_k \langle\, e_\ell \mid e_k \,\rangle = a_\ell.$$

(2) Wir kennen bereits die ℓ^p–Norm $|-|_p$ auf $\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$ und die L^p–Norm $|-|_p$ auf $\mathscr{C}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$. Somit ist $\|-\|_p$ auf $\mathbb{C}[z^\pm]$ zumindest eine Halbnorm, denn $\mathbb{C}[z^\pm] \to \mathscr{C}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}) : f \mapsto f|_{\mathbb{S}^1}$ ist eine lineare Abbildung. Dies ist tatsächlich eine Norm, denn aus $\|f\|_p = 0$ folgt $f|_{\mathbb{S}^1} = 0$, und dank (1) schließlich $f = 0$.

(3) Es gelten die Ungleichungen $|f|_\infty \leq \|f\|_1 \leq |f|_2 = \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq |f|_1$.

Die Ungleichung $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ rechnet man leicht nach. Die ℓ^2–Norm auf $\mathbb{C}[z^\pm]$ erhalten wir aus dem Skalarprodukt $\langle\, f \mid g \,\rangle_{\ell^2} = \sum_k \overline{a_k} b_k$ für $f(z) = \sum_k a_k z^k$ und $g(z) = \sum_k b_k z^k$, und die L^2–Norm aus dem Skalarprodukt $\langle\, f \mid g \,\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t$. Für beide Skalarprodukte sind die Funktionen z^k mit $k \in \mathbb{Z}$ orthonormal (nachrechnen!), und hieraus folgt die Parseval–Gleichung $\langle\, f \mid g \,\rangle_{\ell^2} = \langle\, f \mid g \,\rangle_{L^2}$.

Die Ungleichungen $|f|_\infty \leq \|f\|_1$ und $\|f\|_\infty \leq |f|_1$ schließlich sieht man so: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$|a_k| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\big| \cdot \big|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\big|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \big|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\big|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1.$$

Durch Übergang zum Supremum über $k \in \mathbb{Z}$ erhalten wir $|f|_\infty \leq \|f\|_1$. Für alle $z \in \mathbb{S}^1$ gilt

$$|f(z)| = \Big|\sum\nolimits_k a_k z^k\Big| \leq \sum\nolimits_k |a_k| \cdot |z|^k = \sum\nolimits_k |a_k| = |f|_1.$$

Durch Übergang zum Supremum über $z \in \mathbb{S}^1$ erhalten wir $\|f\|_\infty \leq |f|_1$.

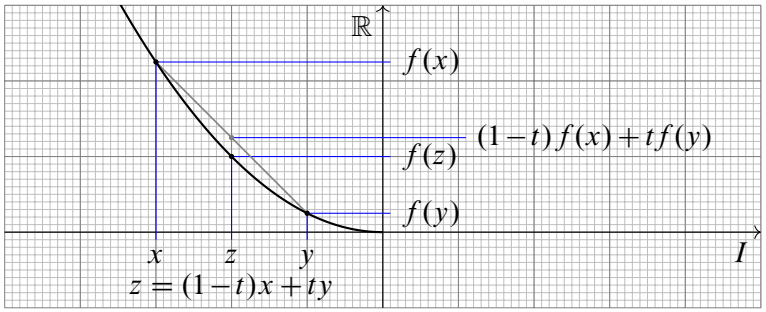
§C8a. Konvexität und Stetigkeit. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, d.h. für alle $x \le y$ in I und $0 \le t \le 1$ in $\mathbb{R}$ gilt $(1-t)x+ty \in I$ Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn

$$f((1-t)x+ty) \le (1-t)\,f(x)+tf(y)$$

für alle $x \le y$ in I und $0 \le t \le 1$ gilt, und *streng konvex*, wenn

$$f((1-t)x+ty) < (1-t)\,f(x)+tf(y)$$

für alle $x < y$ in I und $0 < t < 1$ gilt. Entsprechend heißt f (streng) konkav, wenn $-f$ (streng) konvex ist. Das entspricht den obigen beiden Ungleichungen mit $\ge$ ($>$) statt $\le$ ($<$).



Beispiele. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist streng fallend auf $\mathbb{R}_{\le 0}$ und streng wachsend auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$; sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ konvex. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ ist streng wachsend auf ganz $\mathbb{R}$; sie ist streng konkav auf $\mathbb{R}_{\le 0}$ und streng konvex auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$.

Für jedes $p \in \mathbb{R}_{\ge 1}$ ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|^p$ konvex, für $p \in [0,1[$ hingegen nicht.

Übung C8D. (1) Konvexität von $f : I \to \mathbb{R}$ ist äquivalent zu: Für alle $x < z < y$ in I gilt

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

(2) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig in jedem inneren Punkt $x \in I$. An den Randpunkten gilt Stetigkeit im Allgemeinen nicht. Genauer haben wir:

Auf jedem Intervall $[a,b]$ im Inneren von I existiert eine Lipschitz–Konstante $L \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, das heißt, $f|_{[a,b]}$ ist L–lipschitz–stetig. Auf ganz I gilt dies im Allgemeinen nicht.

✻ **C8D.** Ungleichung (1) ist klar anhand der Skizze. Die Rechnung geht so: Wir setzen $t = (z-x)/(y-x)$ und erhalten $z = (1-t)x+ty$. Wir multiplizieren die Ungleichung (1) mit $(z-x)(y-z)/(y-x) > 0$ und erhalten nach Umstellung die äquivalente Ungleichung $f(z) \le (1-t)\,f(x)+tf(y)$.

(2) Als Warnung zunächst die Gegenbeispiele: Die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_{\{-1,1\}} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist konvex; sie ist stetig in jedem Inneren Punkt $x \in]-1,1[$ aber nicht in den beiden Randpunkten $x \in \{-1,1\}$.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist konvex und stetig, sogar lokal lipschitz–stetig: Es gilt $f'(x) = 2x$, auf dem Intervall $[-r,r]$ wählen wir $L = |f'|_{[-r,r]} = 2r$. Für alle $x, y \in [-r,r]$ gilt dann $|f(x)-f(y)| \le L\,|x-y|$. Aber es gibt keine globale Lipschitz–Konstante L auf ganz $\mathbb{R}$: Die Steigung wird beliebig steil!

Gleiches gilt für $g : [-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$ und $h :]-1,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto -\ln(1-x^2)$. Ausführlich: Machen Sie Skizzen und führen Sie eine Kurvendiskussion durch wie Sie dies aus der Analysis kennen.

Zu jedem inneren Punkt $x \in I$ existieren $a' < a < x < b < b'$ in I. Es genügt daher, die Aussage für jedes Intervall $[a,b]$ im Inneren von I zu beweisen. Für alle $a' < a \le x < y \le b < b'$ in I gilt dank (1):

$$A := \frac{f(a)-f(a')}{a-a'} \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(b)-f(y)}{b-y} \le \frac{f(b')-f(b)}{b'-b} =: B$$

Demnach erfüllt $L = \max\{|A|,|B|\}$ die ersehnte Ungleichung $|f(x)-f(y)| \le L\,|x-y|$ für alle $x, y \in [a,b]$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

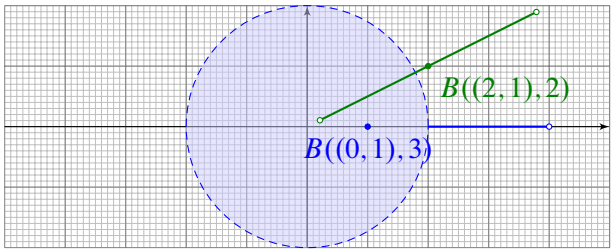
§C8b. Oh là là, der Eisenbahn!

Übung C8E. Wir untersuchen die französische Eisenbahnmetrik (C2D):

(1) Zeigen Sie, dass $d = d_{\mathrm{SNCF}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Metrik ist.
(2) Skizzieren Sie in $\mathbb{R}^2$ die offenen Bälle $B((2,1),2)$ und $B((1,0),3)$.
(3) Gibt es eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, die die Eisenbahnmetrik induziert?
(4) Konvergiert die Folge $a_n = (1/n, 0)$ in $(\mathbb{R}^2, d)$ für $n \to \infty$? und $b_n = (1/n, 1)$?

Wir betrachten $f : X := \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi[\xrightarrow{\sim} Y := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(5) Ist $f : (X, d_{\mathrm{Euklid}}) \to (Y, d_{\mathrm{Euklid}})$ stetig? und $f^{-1} : (Y, d_{\mathrm{Euklid}}) \to (X, d_{\mathrm{Euklid}})$?
(6) Ist $f : (X, d_{\mathrm{Euklid}}) \to (Y, d_{\mathrm{SNCF}})$ stetig? und $f^{-1} : (Y, d_{\mathrm{SNCF}}) \to (X, d_{\mathrm{Euklid}})$?
(7) Gibt es eine Metrik d auf dem Intervall $[0, 2\pi[$, für die unsere Abbildung $f : (X, d_{\mathrm{Euklid}} \times d) \to (Y, d_{\mathrm{SNCF}})$ ein Homöomorphismus ist?



✻ **C8E.** (1) Geduldig prüfen wir die Axiome der Definition C2B: (M0) Es gilt $d(x,x) = |x-x|_2 = |0|_2 = 0$.
(M1) Für $x \neq y$ gilt $d(x,y) > 0$, da sowohl $|x-y|_2 > 0$ als auch $|x|_2 + |y|_2 > 0$.
(M2) Es gilt $d(x,y) = d(y,x)$, da sowohl $|x-y|_2 = |y-x|_2$ als auch $|x|_2 + |y|_2 = |y|_2 + |x|_2$.
(M3) Wir zeigen $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ durch Diskussion aller möglichen Fälle:

- Sei $\mathbb{R}x = \mathbb{R}y$ und $\mathbb{R}y = \mathbb{R}z$: Dann folgt $\mathbb{R}x = \mathbb{R}z$ und
$$d(x,z) = |x-z|_2 = |x-y+y-z|_2 \leq |x-y|_2 + |y-z|_2 = d(x,y) + d(y,z).$$
- Sei $\mathbb{R}x = \mathbb{R}y$ und $\mathbb{R}y \neq \mathbb{R}z$: Dann folgt $\mathbb{R}x \neq \mathbb{R}z$ und
$$d(x,z) = |x|_2 + |z|_2 = |x-y+y|_2 + |z|_2 \leq |x-y|_2 + |y|_2 + |z|_2 = d(x,y) + d(y,z).$$
- Sei $\mathbb{R}x \neq \mathbb{R}y$ und $\mathbb{R}y = \mathbb{R}z$: Dies folgt aus dem vorigen Fall dank der Symmetrie von d.
- Sei $\mathbb{R}x \neq \mathbb{R}y$ und $\mathbb{R}y \neq \mathbb{R}z$ aber $\mathbb{R}x = \mathbb{R}z$: Dann folgt
$$d(x,z) = |x-z|_2 \leq |x|_2 + |z|_2 \leq |x|_2 + |y|_2 + |y|_2 + |z|_2 = d(x,y) + d(y,z).$$
- Sei $\mathbb{R}x \neq \mathbb{R}y$ und $\mathbb{R}y \neq \mathbb{R}z$ und $\mathbb{R}x \neq \mathbb{R}z$: Dann folgt
$$d(x,z) = |x|_2 + |z|_2 \leq |x|_2 + |y|_2 + |y|_2 + |z|_2 = d(x,y) + d(y,z).$$

(2) Die obige Skizze zeigt den offenen Ball $B((2,1),2)$ in grün und $B((1,3),3)$ in blau:

(3) Wenn es eine solche Norm gäbe, so wäre $|x| = d(x,0) = |x|_2$. Also ja für $n = 1$, aber nein für $n \geq 2$. Allgemeiner gilt sogar: Für $n \geq 2$ gibt es auf $\mathbb{R}^n$ keine Vektorraumstruktur mit Norm, die die Metrik d_{SNCF} induziert: Wäre sie von Dimension 1, so trennt jeder Punkt. Wäre sie von Dimension ≥ 2, so trennt kein Punkt.

(4) Wir vermuten $a_n \to (0,0)$ und finden $d(a_n, (0,0)) = 1/n \to 0$ für $n \to \infty$. Die erste naive Vermutung $b_n \to (0,1)$ scheitert an $d(b_n, (0,1)) = \sqrt{n^{-2}+1} + 1 \geq 2$. Wir vermuten daher, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert. Doch wie zeigt man das? Auch hier hilft uns das Cauchy–Kriterium! (C4C) Für $p < q$ in $\mathbb{N}$ finden wir

$$d(b_p, b_q) = d\big((1/p, 1), (1/q, 1)\big) = \big|(1/p, 1)\big|_2 + \big|(1/q, 1)\big|_2 = \sqrt{p^{-2}+1} + \sqrt{q^{-2}+1} > 2.$$

Somit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy–Folge in $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$, und somit nicht konvergent – anders als in $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{Euklid}})$!

(5) Hier ist f stetig, aber f^{-1} nicht. (6) Hier ist f^{-1} stetig, aber f nicht. (7) Ja, die diskrete Metrik.

§C8c. Isometrien. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik d_n.

Übung C8F. (1) Sei $X = \{0,1,2\}$ eine dreielementige Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Metrik. Erinnerung an die Schule: Gibt es eine isometrische Einbettung $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}^2$? Wie konstruieren Sie eine? Ist das Ergebnis eindeutig bis auf Bewegung?

(2) Finden Sie Metriken $d : Y \times Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf $Y = \{0,1,2,3\}$, sodass sich (Y,d) nicht isometrisch in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten lässt; beweisen Sie diese Eigenschaft. Genauer: Finden Sie Beispiele (Y,d) mit $(Y,d) \not\hookrightarrow (\mathbb{R}^2,d_2)$ aber $(Y,d) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3,d_3)$ Gibt es vierpunktige metrische Räume (Y,d), die sich in keinen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ einbetten lassen?

(3) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f,g : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ isometrische Einbettungen. Lassen sich f und g ineinander bewegen? Das heißt: Existiert eine Isometrie $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $f = g \circ h$? Ist diese Isometrie h sogar eindeutig? Im Falle $X \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$?

✻ **C8F.** (1) Dies gelingt mit Zirkel und Lineal, oder algebraisch: Wir setzen $f(0) = (0,0)$ und $f(1) = (c,0)$ mit $c = d(0,1)$ sowie $f(2) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ sodass $x^2 + y^2 = b^2$ mit $b := d(0,2)^2$ und $(x-c)^2 + y^2 = a^2$ mit $a := d(1,2)^2$ gilt. Diese Gleichungen lassen sich leicht nach x und y auflösen.

(2) Mit der diskreten Metrik $d : Y \times Y \to \{0,1\}$ lässt sich (Y,d) nicht isometrisch in die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten. Wir betten die ersten drei Punkte $\{0,1,2\}$ isometrisch ein, wie in (1), als gleichseitiges Dreieck. *Geometrisch:* Um jeden dieser drei Eckpunkte schlagen wir einen Kreis vom Radius 1; diese Kreise schneiden sich paarweise, aber niemals alle drei! *Algebraisch:* Die Koordinaten (x,y) für den vierten Punkt müssen drei Abstandsgleichungen erfüllen; diese sind nicht lösbar. Schreiben Sie's sorgfältig aus!

Dieses Beispiel lässt sich zwar nicht in $\mathbb{R}^2$ aber in $\mathbb{R}^3$ einbetten, nämlich als Ecken eines regulären Tetraeders. Wir können alle Kantenlängen festhalten und nur den Abstand $d(2,3)$ variieren bis maximal $\sqrt{3} \approx 1.732$: Für $d(2,3) \in]0,\sqrt{3}]$ gilt $(Y,d) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3,d_3)$. Für $d(2,3) \in]\sqrt{3},2]$ ist der metrische Raum (Y,d) nicht mehr in den $\mathbb{R}^3$ einbettbar, und somit in gar keinen $\mathbb{R}^n$. (Warum?)

(3) Ja, Satz C2R garantiert Existenz (und Eindeutigkeit) der erhofften Isometrie.

Erläuterung. Diese einfache geometrische Aufgabe betont noch einmal die Definition metrischer Räume und die besonderen Eigenschaften des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$. Alles ist wunderbar klar und einfach, sozusagen Schulmathematik vom höheren Standpunkt.

Übung C8G. Wir versehen den Raum $\mathbb{R}^n$ mit der französischen Eisenbahnmetrik d_n (C2D). Sind $(\mathbb{R}^1,d_1)$ und $(\mathbb{R}^2,d_2)$ homöomorph? Sind $(\mathbb{R}^2,d_2)$ und $(\mathbb{R}^3,d_3)$ sogar isometrisch?

✻ **C8G.** Auf $\mathbb{R}$ ist d_1 die euklidische Metrik. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ trennt $\mathbb{R}$ in zwei Komponenten, d.h. das Komplement $\mathbb{R} \smallsetminus \{x\}$ hat genau zwei Komponenten. In $(\mathbb{R}^2,d_2)$ hingegen gilt das nicht: Der Nullpunkt trennt in unendliche viele Komponenten. Demnach können $(\mathbb{R},d_1)$ und $(\mathbb{R}^2,d_2)$ nicht homöomorph sein.

Die Räume $(\mathbb{R}^2,d_2)$ und $(\mathbb{R}^3,d_3)$ hingegen sind sogar isometrisch. Jede Bijektion $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ setzt sich fort zu einer Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $f(rs) = r\varphi(s)$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in \mathbb{S}^1$. (Nachrechnen!) Es gibt tatsächlich Bijektionen $\varphi : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \{p\} \sqcup \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \{q\} \sqcup \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ dank stereographischer Projektion A1L und B2N.

Erläuterung. Anschaulich ist der Raum $(\mathbb{R}^n,d_n)$ sternförmig zum Ursprung 0: Im Falle $n = 1$ sind hieran zwei Halbgeraden angeklebt, im Falle $n \geq 2$ überabzählbar viele Halbgeraden. Das erklärt, warum diese Räume für $n \geq 2$ untereinander isometrisch sind, der Beweis führt diese Idee aus.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung C8H. (1) Ist der Quadratrand $X = \delta[-1,1]^2$ homöomorph zur Kreislinie $Y = r\mathbb{S}^1$? (2) isometrisch? (3) Wenn wir die euklidische durch die intrinsischen Metriken ersetzen?

(4) Ist der Würfelrand $X = \delta[-1,1]^3$ homöomorph zur Sphäre $Y = r\mathbb{S}^2$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$? (5) isometrisch? (6) Wenn wir die euklidische durch die intrinsischen Metriken ersetzen?

Hinweis: Vergleichen Sie die Funktionen $f : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \sup\{\, d(x,x') \mid x' \in X \,\}$ und $g : Y \to \mathbb{R} : y \mapsto \sup\{\, d(y,y') \mid y' \in Y \,\}$. Was sind jeweils Minimum und Maximum?

✻ **C8H.** (1) Ja, siehe A1E. (2) Nein. Die Funktion f schwankt zwischen $f(1,0) = \sqrt{5}$ und $f(1,1) = \sqrt{8}$. Die Funktion g hingegen ist konstant: Es gilt $g(y) = 2r$ für alle $y \in Y$. Gäbe es eine Isometrie $h : X \xrightarrow{\sim} Y$, so müsste $f(x) = g(h(x))$ für alle $x \in X$ gelten, das ist jedoch unmöglich. Das zeigt, dass es keine solche Isometrie h geben kann.

(3) Mit den intrinsischen Metriken sind der Quadratrand X vom Umfang 8 und die Kreislinie $Y = r\mathbb{S}^1$ vom Radius $r = 4/\pi$ isometrisch: Wir haben lokale Isometrien $h_1 : \mathbb{R} \to r\mathbb{S}^1 : t \mapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/r}$ von Periode $2\pi r$ und entsprechend $h_2 : \mathbb{R} \to X$ von Periode 8. Für $r = 4/\pi$ erhalten wir $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ durch $h(h_2(t)) = h_1(t)$.

(4) Ja, siehe A1E. (5) Nein. Die Funktion f schwankt zwischen $f(1,0,0) = \sqrt{6}$ und $f(1,1,1) = \sqrt{12}$. Die Funktion g hingegen ist konstant: Es gilt $g(y) = 2r$ für alle $y \in Y$.

(6) Selbst mit den intrinsischen Metriken ist der Würfelrand $X = \delta[-1,1]^3$ zu keiner der Sphären $Y = r\mathbb{S}^2$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ isometrisch. Die Funktion f schwankt zwischen $f(1,0,0) = \sqrt{10}$ und $f(1,1,1) = \sqrt{20}$, siehe C7L. Die Funktion g hingegen ist konstant: Es gilt $g(y) = \pi r$ für alle $y \in Y$.

Erläuterung. Anschaulich sieht die Sphäre $Y = r\mathbb{S}^2$ überall gleich aus, genauer: Der Raum (Y,d) ist *homogen*, die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(Y,d) = \mathrm{O}_3\mathbb{R}$ operiert transitiv. Das gilt für (X,d) nicht. Die Kunst besteht nun darin, aus der Metrik relevante Größen zu extrahieren, die einen einfachen Vergleich erlauben; wir haben dies oben *ad hoc* mit den Funktionen f und g gelöst. Wesentlich interessanter kann man für metrische Räume (X,d) eine *lokale Krümmung* definieren, als Verallgemeinerung von polytopalen Flächen (A5D). Der Würfelrand sollte dann nahezu überall „flach“ sein, mit Krümmung Null, da sich die Krümmung in den acht Ecken konzentriert. Die Sphäre ist zudem glatt, und in der Riemannschen Geometrie entwickelt man hierzu einen geeigneten Krümmungsbegriff.

In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor.
Egbert BRIESKORN (1936–2013)

KAPITEL D

Topologische Räume

§D0. Einführung und Überblick

§D0a. Motivation. Aus dem vorangegangenen Kapitel C kennen wir das Vokabular der metrischen Räume (X,d). Viele Eigenschaften können wir auf den Grundbegriff der *offenen Mengen* zurückführen, insbesondere die *Konvergenz* von Folgen in X (C3A) und die *Stetigkeit* von Abbildungen $f : X \to Y$ (C3G). Die wesentlichen Eigenschaften (O1–3) des Systems aller offenen Mengen in (X,d) haben wir in Satz C2M zusammengefasst.

Für die Topologie verzichten wir auf die Messung von Abständen in X und legen allein ein System $\mathcal{T}$ offener Mengen zugrunde (D1A). Die grundlegenden Eigenschaften (O1–3) werden nun zu Axiomen: Ein *topologischer Raum* $(X,\mathcal{T})$ besteht aus einer Trägermenge X und einem System $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen, das (O1–3) erfüllt.

$$\text{Skalarprodukt} \implies \text{Norm} \implies \text{Metrik} \implies \text{Topologie}$$

Dies ist eine kühne Verallgemeinerung! Es ist bemerkenswert, dass man aus so wenig Struktur noch eine respektable Theorie aufbauen kann. Mit einem *Skalarprodukt* können wir Geometrie betreiben, etwa Winkel und Längen messen. Eine *Norm* misst keine Winkel, aber noch die Länge von Vektoren; das genügt zur Differentialrechnung. Bei einer *Metrik* verlangen wir keine Vektorraumstruktur, aber wir können noch Isometrien betrachten oder Dehnungsbedingungen. Bei einer *Topologie* schließlich können wir nicht mehr von Abständen sprechen, aber alle topologischen Begriffe stehen zur Verfügung: Konvergenz, Stetigkeit, Homöomorphie, Kompaktheit, Zusammenhang, etc. lassen sich rein topologisch formulieren, das heißt allein mit Hilfe der offenen Mengen. Alles wird gut!

Die wichtigsten Beispiele topologischer Räume sind die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ für $n = 1,2,3,\ldots$ und ihre Teilräume. Diese spielen bereits in der Analysis eine herausragende Rolle und werden auch uns im Folgenden als Modelle dienen. Darüber hinaus eröffnet sich uns eine Fülle weiterer Beispiele: metrische Topologien und Ordnungstopologien, diskrete und indiskrete Topologien, Topologien auf Funktionenräumen, Teilraumtopologie und Quotiententopologie, Summentopologie und Produkttopologie, etc.

Als *Werkstücke* illustrieren diese zunächst den Begriff der Topologie; im weiteren Verlauf werden sie uns auch als *Werkzeuge* für topologische Untersuchungen dienen.

☞ **§D0b. Wozu dienen topologische Räume?** Metrische Räume sind eine reichhaltige und nützliche Struktur; wo sie uns zur Verfügung steht, werden wir daraus Nutzen ziehen. Wie wir noch sehen werden, sind topologische Räume jedoch wesentlich allgemeiner als metrische Räume und erlauben flexiblere Konstruktionen. Diese größere Flexibilität ist die Hauptmotivation, topologische Räume zu betrachten: Gelegentlich existiert keine geeignete Metrik, oder sie wäre nur mühsam zu konstruieren, oder sie ist gänzlich nebensächlich. Für all diese Fälle bietet die Topologie einen nützlichen allgemeinen Rahmen. ☜

☞ **§D0c. Warum gerade diese Axiome?** In der Maßtheorie betrachtet man σ–Algebren auf einer Trägermenge X und verlangt Stabilität unter Komplementen, *abzählbaren* Durchschnitten und *abzählbaren* Vereinigungen (D7I). In der Topologie sind die Axiome nicht symmetrisch: Wir verlangen Stabilität unter *endlichen* Durchschnitten und *beliebigen* Vereinigungen. Genau dies und nicht mehr haben wir in unserem Modell $\mathbb{R}^n$ benutzt. Dass dies für die weitere Theorie die „richtige“ Definition ist, kann letztlich nur die Erfahrung zeigen; die erfolgreichen Anwendungen der folgenden Kapitel werden dies ausführlich belegen. ☜

☞ **§D0d. Vorgehensweise.** In diesem Kapitel werden wir die Grundbegriffe, die sich für Punktmengen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ und für metrische Räume (X,d) bewährt haben, auf allgemeine topologische Räume übertragen und erweitern. Dies beschert uns eine ebenso präzise wie bequeme Sprechweise, die unsere geometrische Intuition unterstützt. ☜

Zudem benötigen wir ein Repertoire an vielgestaltigen Beispielen und Gegenbeispielen zur Schärfung unserer topologisch-geometrischen Intuition und zur Erprobung unserer Werkzeuge. Ernsthafte Beispiele und Anwendungen verhindern, dass sich die Theorie im Vakuum verliert. So werden wir auf der Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Topologie der punktweisen, der gleichmäßigen, und der kompakten Konvergenz betrachten (§D4). Diese wichtigen Beispiele dienen später als Vorbilder für allgemeinere Funktionenräume.

☞ **§D0e. Dürfen wir Bildern vertrauen? Können wir Formeln veranschaulichen?** Mathematik umschrieb man einst als *die Lehre von Zahlen und Figuren*. Diese beiden Aspekte sind noch immer grundlegend. Insbesondere in der Topologie erweisen sie ihren gegenseitigen Nutzen: Bilder betonen die wesentliche Idee, Formeln liefern die unverzichtbare Präzision. Viele mathematische, insbesondere topologische Argumente lassen sich auf beide Weisen darstellen. Die Kunst besteht darin, beide zu beherrschen und ineinander übersetzen zu können. Idealerweise soll die Topologie zur Zweisprachigkeit erziehen! ☜

Manchem mag die Topologie allzu anschaulich erscheinen, und ja, die Anschauung und ihre Sprechweisen setzen wir bewusst ein. Es lohnt sich in fast allen Fällen, topologische Argumente mit Bildern zu illustrieren. Allerdings dürfen dekorative Beispiele nicht darüber hinwegtäuschen, dass wir ein solides Handwerk von Sätzen und Beweisen erlernen wollen und dafür eine äußerst präzise Ausdrucksweise benötigen. Anderen mag die Topologie daher allzu abstrakt erscheinen, und auch das ist sie ganz bewusst: Gerade ihre Allgemeinheit und Präzision garantieren vielseitige und effiziente Anwendungen.

Die Spannung zwischen diesen beiden Polen ist durchaus produktiv:

C’est par la logique que l’on prouve
et par l’intuition que l’on découvre.
Henri Poincaré (1854–1912)

§D1. Topologische Räume

Wir führen die grundlegenden Begriffe *topologischer Raum* und *stetige Abbildung* ein. Ihre Eigenschaften werden in den folgenden Abschnitten und Kapiteln entwickelt.

§D1a. Topologien. Sei X eine Menge. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}(X)$ ihre *Potenzmenge*: Dies ist die Menge aller Teilmengen von X, das heißt, $A \in \mathfrak{P}(X)$ ist gleichbedeutend mit $A \subset X$. Jede Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ ist demnach eine Menge von Teilmengen in X. Aus poetischen Gründen, um Doppelung zu vermeiden, nennt man $\mathcal{T}$ auch ein *System* von Teilmengen in X. Für solche Mengensysteme formulieren wir folgende Definition:

Definition D1A (topologischer Raum)**.** Eine *Topologie* auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen in X, das folgende Bedingungen erfüllt:

(O1) Es gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.
(O2) Aus $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ folgt $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}$.
(O3) Aus $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ folgt $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt dann ein *topologischer Raum*. Er besteht aus der *Trägermenge* X und der *Topologie* $\mathcal{T}$ auf X. Elemente $x \in X$ nennen wir auch *Punkte* des Raumes $(X, \mathcal{T})$.

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ nennen wir eine Teilmenge $U \subset X$ *offen*, wenn $U \in \mathcal{T}$ gilt, und $A \subset X$ *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist, also $X \smallsetminus A \in \mathcal{T}$ gilt.

Erläuterung. Die Topologie $\mathcal{T}$ ist das System aller offenen Mengen in X, und die Axiome (O1–3) abstrahieren die vertrauten, guten Eigenschaften offener Mengen in metrischen Räumen (C2M):

Bedingung (O1) besagt, dass die leere Menge und der gesamte Raum X offen sind, also zu $\mathcal{T}$ gehören. Man beachte insbesondere, dass *abgeschlossen* nicht das Gegenteil von *offen* ist, denn zumindest die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

Bedingung (O2) besagt, dass $\mathcal{T}$ stabil ist unter endlichen Durchschnitten. Per Induktion genügt bereits die Stabilität unter paarweisen Durchschnitten. Hingegen fordern wir *nicht* beliebige Durchschnitte, nicht einmal abzählbar unendliche: Das wäre für viele Anwendungen zu viel verlangt (siehe C2M).

Bedingung (O3) besagt, dass $\mathcal{T}$ stabil ist unter beliebigen Vereinigungen. Es genügt hierbei nicht, die Stabilität nur für paarweise Vereinigung zu fordern. Nur endliche oder auch abzählbare Vereinigungen wären für viele Anwendungen und die Entwicklung der weiteren Theorie nicht ausreichend (C2M).

In der Maßtheorie sind σ–Algebren (B3J) ein ähnliches Konzept, doch wesentlich verschieden (§D7).

Spitzfindigkeit: Da wir in (O3) unter der leeren Vereinigung (für $I = \emptyset$) die leere Menge $\emptyset$ verstehen, folgt aus (O3) bereits $\emptyset \in \mathcal{T}$. Wenn wir zudem in (O2) unter dem leeren Durchschnitt in X (für $n = 0$) die Gesamtmenge X verstehen, dann folgt aus (O2) bereits $X \in \mathcal{T}$. Demnach ist (O1) redundant. Anders betrachtet: Eine *Topologie* ist ein Mengensystem $\mathcal{T}$ mit den Eigenschaften (O2) und (O3). Hieraus lässt sich die *Trägermenge* $X = \bigcup \mathcal{T}$ rekonstruieren, und $\mathcal{T}$ ist dann eine Topologie auf X. Man kann demnach in obiger Definition die Bedingung (O1) auf dem Altar der Spitzfindigkeit opfern. Ich schreibe sie lieber aus und nehme eine geringe Redundanz und den Spott der Puristen in Kauf.

Konvention. Die Trägermenge X bestimmt noch keineswegs die Topologie $\mathcal{T}$: Da es verschiedene Topologien auf X gibt, ist die Angabe der betrachteten Topologie $\mathcal{T}$ wesentlich.

Nur wenn die in Rede stehende Topologie aus dem Zusammenhang unzweifelhaft hervorgeht, so spricht man abkürzend von dem topologischen Raum X anstelle der korrekten aber oft schwerfälligen Bezeichnung $(X, \mathcal{T})$. Für $U \in \mathcal{T}$ sagt man dann U *ist offen in* $(X, \mathcal{T})$ oder kurz *in* X, und für $X \smallsetminus A \in \mathcal{T}$ sagt man A *ist abgeschlossen in* $(X, \mathcal{T})$ oder kurz *in* X.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D1b. Diskrete und indiskrete Topologien. Wir betonen die extremen Topologien:

Beispiel D1B (diskrete Topologie)**.** Auf jeder Menge X ist die Potenzmenge $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ eine Topologie, die wir die *diskrete Topologie* nennen. In dieser Topologie ist jede Teilmenge von X offen (und abgeschlossen). Dies ist die größte (= feinste) Topologie auf X.

Beispiel D1C (indiskrete Topologie)**.** Auf jeder Menge X ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie, die wir die *indiskrete Topologie* nennen. Hier sind nur die Teilmengen $\emptyset$ und X offen (und abgeschlossen). Dies ist die kleinste (= gröbste) Topologie auf X.

§D1c. Kleinste Beispiele. Auf der leeren Menge $\emptyset$ existiert nur die Topologie $\{\emptyset\}$.

Auf jeder einelementigen Menge $X = \{a\}$ existiert nur die Topologie $\{\emptyset, \{a\}\}$.

Auf jeder zweielementigen Menge $X = \{a, b\}$ existieren genau vier Topologien, nämlich $\{\emptyset, X\}$ und $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\{\emptyset, \{b\}, X\}$ und $\mathfrak{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$.

Auf jeder dreielementigen Menge $X = \{a, b, c\}$ existieren genau 29 verschiedene Topologien. Mit etwas Geduld können Sie diese per Hand aufzählen (Übung D9F).

Die folgende Tabelle wurde von Brinkmann und McKay[1] mit Computerhilfe generiert und zeigt die Anzahl t_n der Topologien auf einer n–elementigen Menge $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.

n	t_n
0	1
1	1
2	4
3	29
4	355
5	6942
6	209527
7	9535241
8	642779354

n	t_n
9	63260289423
10	8977053873043
11	1816846038736192
12	519355571065774021
13	207881393656668953041
14	115617051977054267807460
15	887362691185862444924851 21
16	934111134117100395652104940 95
17	134137950093337880672321868725846

Diese Tabelle soll zunächst nur illustrieren, dass es viele Topologien gibt, selbst auf kleinen Trägermengen. Endliche Topologien sind als kombinatorische Objekte interessant (§D9c). Auch Topologen betrachten solche Objekte, denn von einem höheren Standpunkt betrachtet sind sie äquivalent zu endlichen Simplizialkomplexen (siehe Kapitel I).

Für t_n ist keine geschlossene Formel bekannt. Als leichte Übung überlege man sich die groben Schranken $2^{n-1} \leq t_n \leq 2^{2^n}$; auch $\log_2(t_n) > n^2/4$ ist nicht schwer zu zeigen (D9G). Nach Kleitman und Rothschild[2] gilt die asymptotische Äquivalenz $\log_2(t_n) \sim n^2/4$.

Bemerkung. Endliche Räume gehören zur Kombinatorik. Für analytische und geometrische Anwendungen betrachten wir vor allem topologische Räume $(X, \mathcal{T})$, deren Trägermenge X und Topologie $\mathcal{T}$ unendlich sind. Eine Aufzählung aller offenen bzw. abgeschlossenen Mengen kommt dann nicht mehr in Frage. Wir entwickeln daher im Folgenden raffiniertere Werkzeuge, um auch mit solchen Objekten umgehen zu können.

[1] G. Brinkmann, B.D. McKay, *Posets on up to 16 points*, Order 19 (2002) 147–179

[2] D. Kleitman, B. Rothschild, *The number of finite topologies*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970) 276–282

§D1d. Metrische Topologien. Der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, |-|)$ und ganz allgemein metrische Räume (X,d) liefern eine der wichtigsten Konstruktionen für Topologien (C2L):

Beispiel D1D. Jede Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ auf X definiert ihre *metrische Topologie*

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}(X,d) := \big\{\, O \subset X \;\big|\; \forall a \in O \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X \;:\; d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in O \,\big\}.$$

In Worten heißt das: Eine Teilmenge $O \subset X$ ist genau dann offen in der metrischen Topologie $\mathcal{T}_d$, wenn für jeden Punkt $a \in O$ ein Radius $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass der offene Ball $B(a,\varepsilon) := \{\, x \in X \mid d(a,x) < \varepsilon \,\}$ ganz in O liegt. Dies ist eine Topologie, siehe C2M.

Beispiel. Die Menge $\mathbb{R}^n$ trägt die *euklidische Topologie* $\mathcal{T}_d$ dank der Metrik $d(x,y) = |x-y|$. Soweit nichts anderes präzisiert wird, versehen wir jede Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit der Topologie bezüglich der (eingeschränkten) euklidischen Metrik $d_X : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definition D1E (metrisierbare Topologie)**.** Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X heißt *metrisierbar*, wenn eine Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ existiert, für die $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ gilt.

Beispiele. Auf jeder Menge X ist die diskrete Topologie $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ metrisierbar, etwa durch die diskrete Metrik (C2C) mit $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$. Enthält X mindestens zwei Punkte, so wird die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ von keiner Metrik induziert (C2O).

Bemerkung. Wir werden im weiteren Verlauf notwendige und hinreichende Kriterien für die Metrisierbarkeit aufstellen (E5R). Zunächst folgendes: Ist (X,d) ein metrischer Raum, so hat die induzierte Topologie $\mathcal{T}_d$ die Hausdorff–Eigenschaft (C2O). Ist diese Eigenschaft verletzt, wie etwa bei der indiskreten Topologie, so kann $\mathcal{T}$ nicht metrisierbar sein.

Bemerkung. Falls sich $(X,\mathcal{T})$ metrisieren lässt, so ist die Metrik nicht eindeutig (so denn X mindestens zwei Elemente hat), denn jede zu d äquivalente Metrik induziert dieselbe Topologie (§C3e). Zum Beispiel erzeugen auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen $|-|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ und die zugehörigen Metriken dieselbe Topologie, nämlich die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$.

Selbst für eine metrisierbare Topologie ist es daher manchmal bequemer, die möglichen Metriken hintanzustellen und sich auf die offenen Mengen zu konzentrieren.

§D1e. Vergleich von Topologien. Wie zuvor für Metriken (C3I) vereinbaren wir:

Definition D1F. Sind $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathfrak{P}(X)$ Topologien auf X, dann heißt $\mathcal{T}_1$ *gröber* als $\mathcal{T}_2$ (denn $\mathcal{T}_1$ hat weniger offene Mengen als $\mathcal{T}_2$), und entsprechend heißt $\mathcal{T}_2$ *feiner* als $\mathcal{T}_1$ (denn $\mathcal{T}_2$ hat mehr offene Mengen als $\mathcal{T}_1$). Wir sagen, $\mathcal{T}_2$ ist *echt feiner* als $\mathcal{T}_1$, falls $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$.

Beispiele.
- Auf jeder Menge X ist die diskrete Topologie $\mathfrak{P}(X)$ die feinste und die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ die gröbste aller Topologien auf X.
- Auf $X = \{a,b\}$ ist $\{\emptyset, X\}$ die gröbste und $\mathfrak{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ die feinste Topologie, während $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ unvergleichbar sind.
- Auf einer Menge X heißt eine Metrik d *feiner* als die Metrik e, falls $\mathcal{T}_d \supset \mathcal{T}_e$ gilt, also die von d induzierte Topologie $\mathcal{T}_d$ feiner ist als die von e induzierte Topologie $\mathcal{T}_e$ (C3I).
- Auf $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ ist für $1 \leq p < q \leq \infty$ die L^q–Topologie (Konvergenz im q–ten Mittel) echt feiner als die L^p–Topologie (Konvergenz im p–ten Mittel), siehe C3K.
- Auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ hingegen sind für $1 \leq p < q \leq \infty$ die L^p–Topologie und die L^q–Topologie nicht vergleichbar (C3K), also keine feiner als die andere.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D1f. Axiome für abgeschlossene Mengen. Komplementär zu den offenen Mengen erfreuen sich die abgeschlossenen Mengen folgender grundlegender Eigenschaften:

Bemerkung D1G. In jedem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ gilt:

(A1) Die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind abgeschlossen.
(A2) Jede endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
(A3) Jeder beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Anstelle der offenen Mengen kann man die Topologie $\mathcal{T}$ daher mittels Komplementbildung auch durch Angabe ihrer abgeschlossenen Mengen beschreiben. Das ist in manchen Situationen bequemer, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen.

§D1g. Koendliche und koabzählbare Topologie. Die beiden folgenden Topologien sind etwas exotisch und werden uns wiederholt als mahnende Gegenbeispiele dienen.

Beispiel D1H (koendliche Topologie)**.** In der *koendlichen Topologie* auf X sind die abgeschlossenen Mengen genau die endlichen Mengen sowie X selbst. Diese erfüllen die Bedingungen (A1–3) aus D1G. Die offenen Mengen erhält man hieraus durch Komplementbildung: Die koendliche Topologie $\mathcal{T}\subset\mathfrak{P}(X)$ besteht demnach aus $\emptyset$ und allen *koendlichen* Teilmengen $O\subset X$, also solchen, deren Komplement $X\smallsetminus O$ endlich ist:

$$\mathcal{T}=\{\emptyset\}\cup\{\,O\subset X\mid X\smallsetminus O\text{ ist endlich}\,\}.$$

Die koendliche Topologie auf X ist genau dann diskret, wenn X endlich ist.

Beispiel D1I (koabzählbare Topologie)**.** In der *koabzählbaren Topologie* auf X sind die abgeschlossenen Mengen genau die abzählbaren Mengen sowie X selbst. Diese erfüllen die Bedingungen (A1–3) aus D1G. Die offenen Mengen erhält man hieraus durch Komplementbildung: Die koabzählbare Topologie $\mathcal{T}\subset\mathfrak{P}(X)$ besteht demnach aus $\emptyset$ und allen *koabzählbaren* Teilmengen $O\subset X$, also solchen, deren Komplement $X\smallsetminus O$ abzählbar ist:

$$\mathcal{T}=\{\emptyset\}\cup\{\,O\subset X\mid X\smallsetminus O\text{ ist abzählbar}\,\}.$$

Die koabzählbare Topologie auf X ist genau dann diskret, wenn X abzählbar ist.

$$\mathcal{T}_{\text{indiskret}}\subset\mathcal{T}_{\text{koendlich}}\subset\mathcal{T}_{\text{koabzählbar}}\subset\mathcal{T}_{\text{diskret}}$$
$$\xleftarrow[\text{weniger offene Mengen}]{\text{gröbere Topologien}}\qquad\qquad\xrightarrow[\text{mehr offene Mengen}]{\text{feinere Topologien}}$$

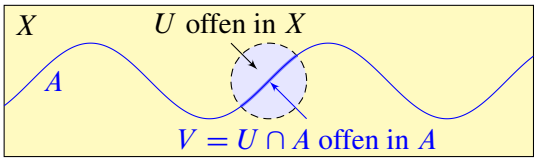
Jede dieser vier Topologien hat die Eigenschaft, dass jede Teilmenge einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist, und somit ist jede Obermenge einer offenen Menge offen.

Übung D1J. Weisen Sie nach, dass diese beiden Beispiele tatsächlich Topologien sind. Allgemeiner: Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, zum Beispiel $\mathcal{T}=\mathfrak{P}(X)$, und c eine unendliche Kardinalzahl, etwa die kleinste $c=\operatorname{card}(\mathbb{N})$. Dann erhalten wir Topologien

$$\mathcal{T}_{<c}:=\{\emptyset\}\cup\{\,O\in\mathcal{T}\mid\operatorname{card}(X\smallsetminus O)<c\,\},$$
$$\mathcal{T}_{\leq c}:=\{\emptyset\}\cup\{\,O\in\mathcal{T}\mid\operatorname{card}(X\smallsetminus O)\leq c\,\}.$$

✻ **D1J.** Die Stabilität unter beliebigen Vereinigungen (O3) vererbt sich unmittelbar von $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{T}_{<c}$ und $\mathcal{T}_{\leq c}$. Für alle Kardinalzahlen $a,b<c$ gilt $a+b<c$, und für $a,b\leq c$ gilt $a+b\leq c$. Hieraus folgt die Stabilität von $\mathcal{T}_{<c}$ und $\mathcal{T}_{\leq c}$ unter paarweisen Durchschnitten (O2). Die Bedingung (O1) ist offensichtlich erfüllt.

§D1h. Teilraumtopologie. In Kapitel E konstruieren wir neue topologische Räume aus alten. Die einfachste Möglichkeit hierzu sind Teilräume. Wir kennen dies bereits gut für metrische Räume (C2E). Für topologische Räume vereinbaren wir nun entsprechendes:



Definition D1K. Sei $(X,\mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und hierzu $\iota_A : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ die Inklusion. Die *Teilraumtopologie* von A in $(X,\mathcal{T}_X)$ ist

$$\mathcal{T}_A := \{ V = A \cap U \mid U \in \mathcal{T}_X \} \quad = \quad \{ \iota_A^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_X \} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X .$$

Wir nennen $(A,\mathcal{T}_A)$ den *Teilraum* von $(X,\mathcal{T}_X)$ auf der Teilmenge $A \subset X$. Soweit nichts anderes vereinbart wird, statten wir jede Teilmenge $A \subset X$ mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A$ aus: Statt „$V \subset A$ ist offen / abgeschlossen im Teilraum $(A,\mathcal{T}_A)$“ sagen wir kurz „V ist offen / abgeschlossen in A“. Nach Definition ist das äquivalent zu: Es existiert eine offene / abgeschlossene Menge $U \subset X$ im umgebenden Raum $(X,\mathcal{T}_X)$ mit $V = A \cap U$.

BEWEIS. Tatsächlich ist $\mathcal{T}_A$ eine Topologie auf A: (O1) Aus $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$ folgt $\emptyset, A \in \mathcal{T}_A$. (O2) Sei $V_1,\dots,V_n \in \mathcal{T}_A$, also $V_i = A \cap U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_X$. Es gilt $U := U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}_X$. Daraus folgt $V_1 \cup \dots \cup V_n = (A \cap U_1) \cup \dots \cup (A \cap U_n) = A \cap (U_1 \cap \dots \cap U_n) = A \cap U \in \mathcal{T}_A$. (O3) Sei $V_i \in \mathcal{T}_A$ für $i \in I$, also $V_i = A \cap U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_X$. Es gilt $U := \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_X$. Daraus folgt $\bigcup_{i\in I} V_i = \bigcup_{i\in I} (A \cap U_i) = A \cap \bigcup_{i\in I} U_i = A \cap U \in \mathcal{T}_A$. □

Beispiel. Das Intervall $]-1,1[\subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist nicht offen in $\mathbb{C}$, aber offen im Teilraum $\mathbb{R}$, dank $]-1,1[= B_{\mathbb{C}}(0,1) \cap \mathbb{R}$. Ebenso ist das Intervall $[0,1[$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$, doch abgeschlossen im Teilraum $A =]-1,1[$, dank $[0,1[= [0,2] \cap A$. Also Obacht!

Beispiele. (1) Ist die Menge $O \subset X$ offen, also $O \in \mathcal{T}_X$, so gilt $\mathcal{T}_O = \{ U \in \mathcal{T}_X \mid U \subset O \}$.
(2) Ist der Raum $(X,\mathcal{T}_X)$ diskret / indiskret / koendlich / koabzählbar, so auch $(A,\mathcal{T}_A)$.
(3) Die Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ ist die euklidische (E2I). Allgemeiner gilt:

$$\begin{array}{ccc} (X,d_X) & \xmapsto{\text{metrische Topologie}} & (X,\mathcal{T}_X) \\ \text{metrischer Teilraum}\uparrow & & \uparrow\text{topologischer Teilraum} \\ (A,d_A) & \xmapsto{\text{metrische Topologie}} & (A,\mathcal{T}_A) \end{array}$$

Satz D1L. *Sei (X,d_X) ein metrischer Raum mit zugehöriger Topologie $\mathcal{T}_X := \mathcal{T}(X,d_X)$ (D1D). Die Teilraummetrik d_A auf A (C2E) induziert ebenso die Topologie $\mathcal{T}(A,d_A)$ auf A. Diese stimmt überein mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A := \iota_A^* \mathcal{T}_X$, das heißt $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}(A,d_A)$. Ist also der topologische Raum $(X,\mathcal{T}_X)$ metrisierbar, dann auch jeder Teilraum $(A,\mathcal{T}_A)$.*

BEWEIS. Wir zeigen $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}(A,d_A)$, zunächst $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}(A,d_A)$: Zu $V \in \mathcal{T}_A$ existiert $U \in \mathcal{T}_X$ sodass $V = U \cap A$. Zu jedem $a \in V$ existiert also $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass $B_X(a,\varepsilon) \subset U$. Daher folgt $B_A(a,\varepsilon) = B_X(a,\varepsilon) \cap A \subset U \cap A = V$. Das zeigt $V \in \mathcal{T}(A,d_A)$.

Umgekehrt gilt $\mathcal{T}(A,d_A) \subset \mathcal{T}_A$: Sei $V \in \mathcal{T}(A,d_A)$. Zu jedem $a \in V$ existiert $\varepsilon_a \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass $B_A(a,\varepsilon_a) \subset V$. Die Menge $U := \bigcup_{a\in V} B_X(a,\varepsilon_a)$ ist offen in $(X,\mathcal{T}_X)$. Sie erfüllt $U \cap A = \bigcup_{a\in V} B_X(a,\varepsilon_a) \cap A = \bigcup_{a\in V} B_A(a,\varepsilon_a) = V$. Das zeigt $V \in \iota_A^* \mathcal{T}_X = \mathcal{T}_A$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D1i. Ordnungstopologien. Die übliche Topologie der reellen Zahlengerade $(\mathbb{R},<)$ lässt sich aus ihrer Ordnung gewinnen. Diese Konstruktion formulieren wir nun allgemein.

Eine *total geordnete Menge* $(X,<)$, englisch *totally ordered set* kurz *toset*, auch *linear geordnete Menge* oder *Kette* genannt, besteht aus einer Menge X und einer (strikten) Totalordnung $<$ auf X. Letzteres ist eine binäre Relation $<$, so dass für alle $a,b,c \in X$ gilt:

(1) Trichotomie: Es gilt entweder $a = b$ oder $a < b$ oder $b < a$.
(2) Transitivität: Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Eine Teilmenge $I \subset X$ heißt *Intervall* (bezüglich $<$), wenn für alle $a < x < b$ in X mit $a,b \in I$ auch $x \in I$ gilt. Für $a,b \in X$ definieren wir die *elementaren offenen Intervalle*

$$]a,+\infty[= \{\, x \in X \mid a < x \,\}, \qquad]a,b[= \{\, x \in X \mid a < x < b \,\},$$
$$]-\infty,b[= \{\, x \in X \mid x < b \,\}, \qquad]-\infty,+\infty[= X.$$

Zwecks bequemerer Notation ergänzen wir hier X um zwei zusätzliche Elemente $\pm\infty$ und setzen die Ordnung auf $X \sqcup \{\pm\infty\}$ fort durch $-\infty < x < +\infty$ für alle $x \in X$. Damit haben alle obigen Intervalle in X die einheitliche Form $]a,b[$ mit $a,b \in X \sqcup \{\pm\infty\}$.

Definition D1M. Jede Totalordnung $<$ auf X definiert die zugehörige *Ordnungstopologie*

$$\mathcal{T}_< = \mathcal{T}(X,<) := \Big\{\, O \subset X \;\Big|\; \forall x \in O \;\; \exists a,b \in X \sqcup \{\pm\infty\} \,:\, x \in]a,b[\subset O \,\Big\}.$$

Übung D1N. Prüfen Sie nach, dass $\mathcal{T}_<$ tatsächlich eine Topologie auf der Menge X ist.

Auf jeder Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ können wir so zwei interessante Topologien konstruieren: einerseits die metrische Topologie $\mathcal{T}(X,d_X)$, andererseits die Ordnungstopologie $\mathcal{T}(X,<)$.

(1) Stimmt die Ordnungstopologie auf $X = \mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z}$ mit der metrischen überein? Ist jedes offene Intervall von $X = \mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z}$ auch elementar?
(2) Nennen Sie eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$, auf der Ordnungstopologie und metrische Topologie verschieden sind. Welche ist feiner? Gilt wenigstens diese Relation immer?

✻ **D1N.** (O1) Die leere Menge $\emptyset =]a,a[$ und ganz $X =]-\infty,+\infty[$ sind elementare offene Intervalle.

(O3) Die Stabilität ordnungsoffener Mengen unter beliebigen Vereinigungen ist klar nach Definition.

(O2) Für $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_<$ und $O = O_1 \cap O_2$ haben wir $O \in \mathcal{T}_<$ zu zeigen. Sei $x \in O$. Wegen $x \in O_1 \in \mathcal{T}_<$ gilt $x \in]a_1,b_1[\subset O_1$, wegen $x \in O_2 \in \mathcal{T}_<$ gilt $x \in]a_2,b_2[\subset O_2$. Dank Totalität der Ordnung $<$ existieren $a = \max\{a_1,a_2\}$ und $b = \min\{b_1,b_2\}$. Wir erhalten $x \in]a,b[\subset]a_1,b_2[\cap]a_2,b_2[\subset O_1 \cap O_2 = O$.

(1) Für jeden der drei Räume $X = \mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z}$ stimmen Ordnungstopologie $\mathcal{T}(X,<)$ und metrische Topologie $\mathcal{T}(X,d)$ überein. Speziell für $X = \mathbb{Z}$ erhalten wir die diskrete Topologie $\mathcal{T}(\mathbb{Z},<) = \mathcal{T}(\mathbb{Z},d) = \mathfrak{P}(\mathbb{Z})$.

In $(\mathbb{R},<)$ ist jedes Intervall elementar (B2H), denn in $\bar{\mathbb{R}}$ existieren Supremum und Infimum. Gleiches gilt in $(\mathbb{Z},<)$. In $(\mathbb{Q},<)$ hingegen gibt es mehr offene Intervalle als die elementaren: Zum Beispiel ist die Teilmenge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \le 2\} = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ ein offenes Intervall, lässt sich aber nicht als $]a,b[_{\mathbb{Q}}$ mit $a,b \in \mathbb{Q}$ schreiben.

(2) Die Teilmengen $A = \{-1\} \cup \{\, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ und $B = \{0\} \cup \{\, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ sind ordnungsisomorph und haben folglich dieselbe Ordnungstopologie. Die metrisch-euklidischen Topologien hingegen sind verschieden: Die Topologie $\mathcal{T}(A,d_A)$ ist diskret, in der Topologie $\mathcal{T}(B,d_B)$ hingegen ist $\{0\}$ nicht offen. Genauer gelten hier die Beziehungen $\mathcal{T}(B,<) = \mathcal{T}(B,d_B) \subsetneq \mathfrak{P}(B)$ und $\mathcal{T}(A,<) \subsetneq \mathcal{T}(A,d_A) = \mathfrak{P}(A)$.

Dies lässt $\mathcal{T}(A,<) \subset \mathcal{T}(A,d_A)$ vermuten für alle Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$. Zum Beweis sei $O \in \mathcal{T}(A,<)$. Zu jedem $x \in O$ existieren $a,b \in X \sqcup \{\pm\infty\}$ mit $x \in]a,b[\subset O$. Wir wählen $\varepsilon := \min\{\,1,\, |x-a|,\, |x-b|\,\} > 0$. Für den offenen Ball $B(x,\varepsilon) =]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$ gilt $x \in B(x,\varepsilon) \subset]a,b[\subset O$. Folglich gilt $O \in \mathcal{T}(A,d_A)$.

Wegen $\mathcal{T}(A,<) \subset \mathcal{T}(A,d_A)$ ist die Ordnungstopologie stets gröber als die metrische Topologie. Das obige Beispiel mit $\mathcal{T}(A,<) \subsetneq \mathcal{T}(A,d)$ zeigt, dass sie echt gröber sein kann.

☞ Ordnungstopologien erweitern unser Repertoire an topologischen Konstruktionen und Beispielen. Auf den reellen Zahlen $(\mathbb{R},<)$ ist uns die Ordnungstopologie sehr vertraut: Sie ist die euklidische. Im Allgemeinen jedoch erleben wir so manche Überraschung. ☜

Übung D1O. Wir versehen $Z=[0,1]^2$ mit der *lexikographischen Ordnung*: $(x,y)<(x',y')$ bedeutet $(x<x')$ oder $(x=x'$ und $y<y')$. Ist die Ordnungstopologie $\mathcal{T}_<$ auf Z gleich der euklidischen Teilraumtopologie $\mathcal{T}$ auf Z? Ist eine feiner als die andere?

✻ **D1O.** Die Menge $\{0\}\times]0,1[$ ist offen in $(Z,\mathcal{T}_<)$ aber nicht offen in $(Z,\mathcal{T})$. Die Menge $[0,1]\times[0,1[$ ist offen in $(Z,\mathcal{T})$ aber nicht offen in $(Z,\mathcal{T}_<)$. Die beiden Topologien sind demnach unvergleichbar.

Anders als bei Metriken (D1L) ist für Ordnungen der Übergang zu Teilräumen nicht ganz unproblematisch. Wir halten unsere Beobachtungen in folgendem Satz fest.

☞ **Satz D1P.** *Jede total geordnete Menge $(X,<)$ trägt die Ordnungstopologie (D1M):* ☜

$$\mathcal{T}_X=\mathcal{T}(X,<):=\big\{\,O\subset X\;\big|\;\forall x\in O\;\;\exists a,b\in X\sqcup\{\pm\infty\}\;:\;x\in\,]a,b[\subset O\,\big\}$$

Auf jeder Teilmenge $A\subset X$ haben wir die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A=\iota_A^*\mathcal{T}_X$. Zudem erbt A die Ordnung $<$ durch Einschränkung und trägt somit selbst eine Ordnungstopologie $\mathcal{T}(A,<)$.

$$\begin{array}{ccccc}
(X,<) & & \xmapsto{\quad\text{Ordnungstopologie}\quad} & & (X,\mathcal{T}_X) \\
\Big\uparrow{\scriptstyle\text{Ordnungsteilraum}} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle\text{topologischer Teilraum}} \\
(A,<) & \xmapsto{\text{Ordnungstopologie}} & (A,\mathcal{T}(A,<)) & \xleftarrow{\quad\neq\quad} & (A,\mathcal{T}_A)
\end{array}$$

(1) Allgemein gilt $\mathcal{T}(A,<)\subset\mathcal{T}_A$, aber nicht immer Gleichheit. (D1N)
(2) Für jedes Intervall $A\subset X$ gilt die Gleichheit $\mathcal{T}(A,<)=\mathcal{T}_A$. (B2G)
Intervall bedeutet: Für alle $a<x<b$ in X mit $a,b\in A$ gilt auch $x\in A$.
(3) Ist $A\subset X$ dicht, so wie $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, dann gilt ebenfalls $\mathcal{T}(A,<)=\mathcal{T}_A$. (D1N)
Dicht bedeutet hier: Zu je zwei Punkten $x<y$ in X existiert $a\in A$ mit $x<a<y$.
(4) Genau dann gilt $\mathcal{T}(A,<)=\mathcal{T}_A$, wenn gilt: Zu jedem $x\in A$ und $a,b\in X\sqcup\{\pm\infty\}$ mit $a<x<b$ existieren $a',b'\in A\sqcup\{\pm\infty\}$ mit $x\in\,]a',b'[_A\subset\,]a,b[_X$.

BEWEIS. Zeigen Sie dies zur Wiederholung und Einübung der Begriffe. □

✻ **D1P.** (1) Wir zeigen $\mathcal{T}(A,<)\subset\mathcal{T}_A$ wie im Beweis die vorigen Satzes. Sei $V\in\mathcal{T}(A,<)$. Zu jedem $x\in V$ existieren $a_x,b_x\in A\sqcup\{\pm\infty\}$ sodass $x\in\,]a_x,b_x[_A\subset V$. Die Menge $U:=\bigcup_{x\in V}]a_x,b_x[_X$ ist offen in $(X,\mathcal{T}_X)$. Sie erfüllt $U\cap A=\bigcup_{x\in V}]a_x,b_x[_X\cap A=\bigcup_{x\in V}]a_x,b_x[_A=V$. Das zeigt $V\in\iota_A^*\mathcal{T}_X=\mathcal{T}_A$.

Die Umkehrung $\mathcal{T}_A\subset\mathcal{T}(A,<)$ gilt im Allgemeinen nicht! Wir betrachten die reelle Gerade $(\mathbb{R},<)$ und die Teilmenge $A=\{-1,\ 1/k\mid k=1,2,3,\dots\}$. Auf A ist die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A$ echt feiner als die Ordnungstopologie $\mathcal{T}(A,<)$: In $(A,\mathcal{T}_A)$ ist der Punkt -1 isoliert, also $\{-1\}\in\mathcal{T}_A$, hingegen gilt $\{-1\}\notin\mathcal{T}(A,<)$.

(4) Die Implikation „⇒“ ist leicht: Wir setzen $\mathcal{T}(A,<)=\mathcal{T}_A$ voraus. Sei $x\in A$ und $a,b\in X\sqcup\{\pm\infty\}$ mit $a<x<b$, also $x\in\,]a,b[_X\in\mathcal{T}(X,<)=\mathcal{T}_X$. Dann ist $]a,b[_X\cap A$ offen bezüglich $\mathcal{T}_A=\mathcal{T}(A,<)$, das heißt, zu $x\in\,]a,b[_X$ existieren $a',b'\in A\sqcup\{\pm\infty\}$ mit $x\in\,]a',b'[_A\subset\,]a,b[_X\cap A\subset\,]a,b[$, wie behauptet.

Wir zeigen nun die umgekehrte Implikation „⇐“: Dank (1) gilt $\mathcal{T}(A,<)\subset\mathcal{T}_A$, wir zeigen $\mathcal{T}_A\subset\mathcal{T}(A,<)$. Sei $V\in\mathcal{T}_A$, also $V=U\cap A$ mit $U\in\mathcal{T}_X$. Zu jedem $x\in V\subset U$ existieren $a,b\in X\sqcup\{\pm\infty\}$ mit $x\in\,]a,b[_X\subset U$. Nach Voraussetzung existieren $a',b'\in A$ mit $x\in\,]a',b'[_A\subset\,]a,b[_X$. Durch Schnitt mit A erhalten wir $x\in\,]a',b'[_A\subset\,]a,b[_X\cap A\subset U\cap A=V$. Dies zeigt $V\in\mathcal{T}(A,<)$.

(2) Wir nutzen (4): Zu $x\in A$ und $a,b\in X\sqcup\{\pm\infty\}$ mit $a<x<b$ setzen wir $a':=a$ falls $a\in Y$, andernfalls $a':=-\infty$, ebenso $b':=b$ falls $b\in Y$, andernfalls $b':=+\infty$. Da A ein Intervall ist, folgt $]a',b'[_A=\,]a,b[_X\cap A$.

(3) Wir nutzen (4): Seien $x\in A$ und $a,b\in X\sqcup\{\pm\infty\}$ mit $a<x<b$. Da $A\subset X$ dicht ist, können wir $a',b'\in A$ mit $a\le a'<x<b'\le b$ wählen und erhalten $]a',b'[_A\subset\,]a',b'[_X\subset\,]a,b[_X$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ Nicht alles, was wie eine Topologie aussieht oder als Topologie angekündigt wird, ist ☜ auch tatsächlich eine. Wir haben Definition D1A zu prüfen, nicht mehr und nicht weniger.

Übung D1Q. Für $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ definieren wir

- $\mathcal{T}_1^K := \{ \emptyset,\ \mathbb{R},\ ]a, +\infty[\mid a \in K \}$
- $\mathcal{T}_2^K := \{ \emptyset,\ \mathbb{R},\ [a, +\infty[\mid a \in K \}$
- $\mathcal{T}_3^K := \{ \emptyset,\ \mathbb{R},\ ]a, +\infty[,\ [a, +\infty[\mid a \in K \}$

Welche dieser Mengensysteme sind Topologien auf $\mathbb{R}$? Gilt (O2)? Gilt (O3)?

✻ **D1Q.** (O1) Alle Mengensysteme $\mathcal{T}_1^K, \mathcal{T}_2^K, \mathcal{T}_3^K$ enthalten $\emptyset$ und $\mathbb{R}$, also ist (O1) jedenfalls erfüllt.

	$\mathcal{T}_1^{\mathbb{Z}}$	$\mathcal{T}_1^{\mathbb{Q}}$	$\mathcal{T}_1^{\mathbb{R}}$	$\mathcal{T}_2^{\mathbb{Z}}$	$\mathcal{T}_2^{\mathbb{Q}}$	$\mathcal{T}_2^{\mathbb{R}}$	$\mathcal{T}_3^{\mathbb{Z}}$	$\mathcal{T}_3^{\mathbb{Q}}$	$\mathcal{T}_3^{\mathbb{R}}$
(O1)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(O2)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(O3)	✓	✘	✓	✓	✘	✘	✓	✘	✓

(O2) Wir prüfen die Stabilität unter paarweisen Schnitten, also $U, V \in \mathcal{T}_i \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_i$. Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ gilt $]a,\infty[\cap\,]b,\infty[=]b,\infty[$; das zeigt (O2) für $\mathcal{T}_1^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{T}_1^{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{T}_1^{\mathbb{R}}$. Ebenso gilt $[a,\infty[\cap\, [b,\infty[= [b,\infty[$; das zeigt (O2) für $\mathcal{T}_2^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{T}_2^{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{T}_2^{\mathbb{R}}$. Schließlich gilt gemischt $]a,\infty[\cap\, [a,\infty[=]a,\infty[$ sowie $]a,\infty[\cap\, [b,\infty[= [b,\infty[$ und $[a,\infty[\cap\,]b,\infty[=]b,\infty[$; das zeigt (O2) für $\mathcal{T}_3^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{T}_3^{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{T}_3^{\mathbb{R}}$.

(O3) Für $S \subset \mathbb{R}$ gilt $\bigcup_{a\in S}]a,\infty[=]b,\infty[$ mit $b = \inf S$. Demnach gilt (O3) für $\mathcal{T}_1^{\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{T}_1^{\mathbb{R}}$, aber nicht für $\mathcal{T}_1^{\mathbb{Q}}$: Für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, etwa $x = \sqrt{2}$, und $\mathbb{Q} \ni a_n \searrow x$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_n,\infty[=]x,\infty[\notin \mathcal{T}_1^{\mathbb{Q}}$.

Für $T \subset \mathbb{R}$ gilt $\bigcup_{a\in T} [a,\infty[=]c,\infty[$ mit $c = \inf S$, bzw. $= [c,\infty[$ falls $c \in T$. Demnach gilt (O3) für $\mathcal{T}_2^{\mathbb{Z}}$, aber nicht für $\mathcal{T}_2^{\mathbb{Q}}$ und $\mathcal{T}_2^{\mathbb{R}}$. Ein konkretes Gegenbeispiel ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [1/n,\infty[=]0,\infty[$.

Für $S, T \subset \mathbb{R}$ gilt $\bigcup_{a\in S}]a,\infty[\cup \bigcup_{a\in T} [a,\infty[= [c,\infty[$ falls $c := \inf T \in T$ und $c \leq b := \inf S$, sonst $=]d,\infty[$ mit $d = \min\{c,b\}$. Demnach gilt (O3) für $\mathcal{T}_3^{\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{T}_3^{\mathbb{R}}$, aber nicht für $\mathcal{T}_3^{\mathbb{Q}}$: Für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, etwa $x = \sqrt{2}$, und $\mathbb{Q} \ni a_n \searrow x$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_n,\infty[=]x,\infty[\notin \mathcal{T}_3^{\mathbb{Q}}$. Die obige Tabelle fasst unsere Ergebnisse zusammen.

Übung D1R. Die diskrete Topologie $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ wird induziert durch die diskrete Metrik $d : X \times X \to \{0,1\} \subset \mathbb{R}$. Wird dementsprechend die indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ induziert durch die indiskrete Metrik $d : X \times X \to \{0\} \subset \mathbb{R}$? Eine ernsthafte Antwort lautet wie folgt:

(1) Jede Halbmetrik d wie in C2B induziert eine Topologie $\mathcal{T}_d$ wie in D1D.

(2) Die indiskrete Topologie wird induziert durch die triviale Halbmetrik $d = 0$.

Übung D1S. Wir betrachten $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ jeweils mit der euklidischen Topologie und hierin die Teilräume $A = [0,2] \cup]3,4]$ und $B = [0,5[$ mit der Teilraumtopologie. Sind die folgenden Mengen offen / abgeschlossen in $\mathbb{C}$? in $\mathbb{R}$? in A? in B? Begründen Sie Ihre Antwort.

	offen in				abgeschlossen in			
	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	A	B	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	A	B
$[1,2]$	✘	✘	✘	✘	✓	✓	✓	✓
$]1,2]$	✘	✘	✓	✘	✘	✘	✘	✘
$]1,2[$	✘	✓	✓	✓	✘	✘	✘	✘
$[1,2[$	✘	✘	✘	✘	✘	✘	✘	✘
$[0,2]$	✘	✘	✓	✘	✓	✓	✓	✓
$]3,4]$	✘	✘	✓	✘	✘	✘	✓	✘

§D2. Stetige Abbildungen

Für metrische Räume (X,d_X) und (Y,d_Y) haben wir in C3G festgestellt: Genau dann ist $f : X \to Y$ stetig, wenn zu jeder offenen Menge V in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ in X offen ist. Wir erheben diese Eigenschaft nun zur topologischen Definition für die Stetigkeit:

Definition D2A. Sei $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume.

Die Abbildung f heißt *stetig*, wenn zu jeder offenen Menge V in $(Y,\mathcal{T}_Y)$ das Urbild $f^{-1}(V)$ in $(X,\mathcal{T}_X)$ offen ist. Äquivalent dazu ist: Zu jeder abgeschlossenen Menge B in $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ist das Urbild $f^{-1}(B)$ in $(X,\mathcal{T}_X)$ abgeschlossen. In Quantorenschreibweise:

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textit{stetig} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{T}_Y \,:\, f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall B \subset Y \,:\, \big[\, Y \smallsetminus B \in \mathcal{T}_Y \;\Rightarrow\; X \smallsetminus f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \,\big] \end{aligned}$$

Die Menge stetiger Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathscr{C}(X,\mathcal{T}_X;Y,\mathcal{T}_Y)$, oder kurz $\mathscr{C}(X,Y)$, wenn die Topologien aus dem Kontext klar sind. Der Buchstabe $\mathscr{C}$ steht für *continuous*.

$$\mathscr{C}(X,Y) = \mathscr{C}(X,\mathcal{T}_X;Y,\mathcal{T}_Y) := \big\{\, f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y) \text{ stetig} \big\}$$

Hingegen nennen wir f *offen*, wenn zu jeder offenen Menge U in $(X,\mathcal{T}_X)$ die Bildmenge $f(U)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$ offen ist. Entsprechend heißt f *abgeschlossen*, wenn zu jeder abgeschlossenen Menge A in $(X,\mathcal{T}_X)$ die Bildmenge $f(A)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$ abgeschlossen ist.

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textit{offen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{T}_X \,:\, f(U) \in \mathcal{T}_Y \\ f \text{ ist } \textit{abgeschlossen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall A \subset X \,:\, \big[\, X \smallsetminus A \in \mathcal{T}_X \;\Rightarrow\; Y \smallsetminus f(A) \in \mathcal{T}_Y \,\big] \end{aligned}$$

Ein *Homöomorphismus* $(f,g) : (X,\mathcal{T}_X) \cong (Y,\mathcal{T}_Y)$ ist ein Paar stetiger Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Anders gesagt, ein Homöomorphismus $f : (X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{\sim} (Y,\mathcal{T}_Y)$ ist eine Bijektion $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ mit f und f^{-1} stetig. Die Räume $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ heißen dann *homöomorph*, geschrieben $(X,\mathcal{T}_X) \cong (Y,\mathcal{T}_Y)$, oder kurz $X \cong Y$, wenn die Topologien aus dem Kontext klar sind.

Konvention. Die Stetigkeit von $f : X \to Y$ hängt von *beiden* Topologien $\mathcal{T}_X$ und $\mathcal{T}_Y$ ab. Zur Betonung sagen wir daher „$f : X \to Y$ ist stetig bezüglich $\mathcal{T}_X$ und $\mathcal{T}_Y$“ oder „$f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ ist stetig“. Wenn die Topologien unzweifelhaft aus dem Zusammenhang hervorgehen, dann ist die kürzere Sprechweise „$f : X \to Y$ ist stetig“ oft bequemer. Entsprechendes gilt für offene und abgeschlossene Abbildungen und Homöomorphismen.

Bemerkung D2B. Für jeden topologischen Raum ist die Identität $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T})$ stetig. Sind $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (Z,\mathcal{T}_Z)$ stetige Abbildungen, dann ist auch ihre Komposition $g \circ f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Z,\mathcal{T}_Z)$ stetig.

Wir erhalten so die Kategorie `Top`: Die Objekte sind topologische Räume $X, Y, Z, \ldots$. Die Morphismenmenge $\mathscr{C}(X,Y)$ besteht aus allen stetigen Abbildungen $X \to Y$. Die Komposition $\circ : \mathscr{C}(Y,Z) \times \mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{C}(X,Z)$ ist die für Abbildungen von Mengen übliche Hintereinanderausführung $(g,f) \mapsto g \circ f$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ebenso bilden topologische Räume und ihre offenen / abgeschlossenen Abbildungen eine Kategorie. Die Sprache der Kategorien und ihre analogie-stiftende Betrachtungsweise wird sich als sehr nützlich erweisen. Wir führen dies in Kapitel H aus, nachdem wir genügend Beispiele gesammelt haben, um diese Abstraktion zu stützen und zu rechtfertigen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Beispiele.** Als triviale Beispiele nenne ich die diskreten Topologien: ☜

- Ist $(X,\mathcal{T}_X)$ diskret, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig, aber i.A. weder offen noch abgeschlossen, zum Beispiel $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto 2^{-n}$.
- Ist $(Y,\mathcal{T}_Y)$ diskret, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ offen und abgeschlossen, aber i.A. nicht stetig, zum Beispiel $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1,0,+1\}$.

☞ **Beispiel.** Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume mit den induzierten Topologien $\mathcal{T}_X$ auf X und $\mathcal{T}_Y$ auf Y. Genau dann ist $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ stetig im metrischen Sinne wenn $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig ist im topologischen Sinne, wie in C3G nachgewiesen. ☜

Insbesondere sind alle Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \supset X \to Y \subset \mathbb{R}^n$, für die in der Analysis die metrische Stetigkeit nachgewiesen wird, stetig bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$. Zur Illustration lesen Sie erneut die Beispiele der Einleitung (§A1).

☞ **Beispiele.** Die Eigenschaften „stetig“, „offen“, „abgeschlossen“ sind unabhängig: ☜

- Die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, offen und abgeschlossen. Gleiches gilt allgemein für $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T})$ und jeden Homöomorphismus $f : (X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{\sim} (Y,\mathcal{T}_Y)$.
- Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist stetig und abgeschlossen, aber nicht offen, denn die Bildmenge $f(\mathbb{R}) = [0,+\infty[$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$. Entsprechendes gilt für $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan(x)$ ist stetig und offen, aber nicht abgeschlossen, denn die Bildmenge $f(\mathbb{R}) =]-\pi/2,+\pi/2[$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
- Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/(1+x^2)$ ist stetig, aber weder offen noch abgeschlossen, denn $f(\mathbb{R}) =]0,1]$ ist weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
- Für $a \in \mathbb{R}$ ist $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + ax$ stetig und abgeschlossen, aber nur für $a \geq 0$ offen, dann sogar ein Homöomorphismus, für $a > 0$ sogar ein Diffeomorphismus.
- Die Dirichlet–Funktion $\mathbf{I}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ ist nicht stetig, aber sowohl offen als auch abgeschlossen (bezüglich der diskreten Topologie auf der Zielmenge $\{0,1\}$).

☞ **§D2a. Homöomorphismen.** Zwei mathematische Objekte X und Y, genauer: Mengen mit weiterer Struktur, betrachtet man als im Wesentlichen gleich, wenn es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt, welche die betrachteten Strukturen in Übereinstimmung bringt. Für algebraische Strukturen (wie Gruppen, Körper, Vektorräume, ...) erhält man so den Begriff der *Isomorphie*. Für topologische Räume spricht man traditionell von *Homöomorphie*. ☜

☞ **Bemerkung.** Ein Homöomorphismus $f : (X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{\sim} (Y,\mathcal{T}_Y)$ ist nicht nur eine Bijektion $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ der Trägermengen, sondern induziert auch eine Bijektion $f : \mathcal{T}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_Y$ der betrachteten Topologien. Stetigkeit von f bedeutet: Für alle $V \in \mathcal{T}_Y$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Stetigkeit von f^{-1} bedeutet: Für alle $U \in \mathcal{T}_X$ gilt $f(U) \in \mathcal{T}_Y$, also Offenheit von f. ☜

Für jede Bijektion $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ sind somit äquivalent: (1) f^{-1} ist stetig, (2) f ist offen, (3) f ist abgeschlossen. Genau dann ist f ein Homöomorphismus, wenn eine der folgenden (untereinander äquivalenten) Bedingungen erfüllt ist:

- Die Bijektionen f und f^{-1} sind stetig.
- Die Bijektionen f und f^{-1} sind offen.
- Die Bijektionen f und f^{-1} sind abgeschlossen.
- Die Bijektion f ist stetig und offen.
- Die Bijektion f ist stetig und abgeschlossen.

Bemerkung D2C. Ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so kann f^{-1} dennoch unstetig sein:

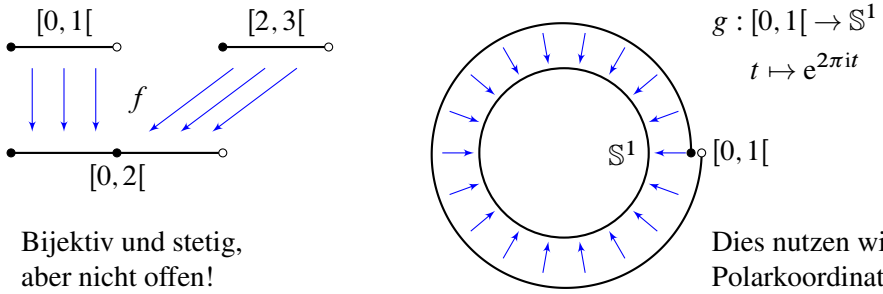


ABBILDUNG D:1. Eine stetige Bijektion ist noch kein Homöomorphismus!

Beispiel. Sei $X = [0,1[\cup [2,3[$ und $Y = [0,2[$. Wir definieren $f : X \to Y$ durch $f(x) = x$ für $0 \le x < 1$ und $f(x) = x - 1$ für $2 \le x < 3$. Die Bijektion f ist stetig, nicht aber f^{-1}: Die Teilmenge $[2,3[$ ist offen in X aber $f([2,3[) = [1,2[$ ist nicht offen in Y. (Schlimmer noch, laut Zwischenwertsatz kann es keine stetige Surjektion $Y \to X$ geben, siehe G1E.)

Beispiel. Die Bijektion $g : [0,1[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist stetig, nicht aber g^{-1}: Die Teilmenge $[0, 1/2[$ ist offen in $[0,1[$, aber $g([0,1/2[)$ ist nicht offen in $\mathbb{S}^1$. (Schlimmer noch, da $\mathbb{S}^1$ kompakt ist aber $[0,1[$ nicht, kann es keine stetige Surjektion $\mathbb{S}^1 \to [0,1[$ geben, siehe F1J.)

Beispiel. Das universelle Gegenbeispiel: Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf derselben Menge X, dann ist die Identität $\mathrm{id} : (X,\mathcal{T}_1) \to (X,\mathcal{T}_2)$ genau dann offen, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt, genau dann stetig, wenn $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$ gilt, und genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ gilt.

Die folgende Bemerkung ist trivial aber als *explizite Beweismethode* oft nützlich (§A1):

Bemerkung. Genau dann ist $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass f und g stetig sind sowie $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ erfüllen. In diesem Falle sind $f = g^{-1}$ und $g = f^{-1}$ ein Paar *zueinander inverser Homöomorphismen*.

Beispiel D2D. Jede affin-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$, ist lipschitzstetig und somit stetig bezüglich der euklidischen Normen (C2T). Hierbei ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix und $v \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor. Ist A quadratisch und zudem invertierbar, so ist auch $f^{-1}(x) = A^{-1}(x-b)$ stetig. Insbesondere ist jeder $\mathbb{R}$–lineare Isomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ demnach ein Homöomorphismus des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, etwa jede Drehung oder Spiegelung $x \mapsto Ax$ mit $A \in \mathrm{O}_n\,\mathbb{R}$, ebenso jede Verschiebung $x \mapsto x + v$

Bemerkung. Gelingt die explizite Konstruktion von $g = f^{-1}$, so ist dies eine effiziente und informative Beweismethode. Ein Paradebeispiel ist die stereographische Projektion (A1L).

Oft ist die Konstruktion von g jedoch mühsam oder explizit kaum möglich. In diesem Falle gibt es *implizite Beweismethoden*, die spezielle Eigenschaften der Abbildung f und der Räume X und Y ausnutzen. In der Differentialrechnung brilliert hier der lokale Umkehrsatz (C5Q). Topologisch entspricht diesem Satz die Invarianz des Gebietes (J7K).

In der allgemeinen Topologie werden wir häufig die Kompaktheit nutzen (F1L): Sei $(X,\mathcal{T}_X)$ kompakt und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ hausdorffsch. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist f abgeschlossen. Jede stetige Bijektion $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ ist in diesem Fall ein Homöomorphismus.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ Wie gesehen gibt es stetige Bijektionen $f : X \to Y$, deren Umkehrung $f^{-1} : Y \to X$ ☜ nicht stetig ist. Vielleicht halten Sie das für eine abstrakte Spitzfindigkeit und möchten es nicht wahr haben. Deshalb sind konkrete, schlagkräftige Beispiele so wichtig! Vielleicht halten Sie die obigen Beispiele für allzu konstruiert, sozusagen pathologische Ausnahmen ohne Relevanz außerhalb der Topologie. Ich möchte Sie vom Gegenteil überzeugen; untersuchen wir hierzu also weitere Beispiele aus der Analysis und der linearen Algebra:

Sei $f : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen normierten $\mathbb{K}$–Vektorräumen. Wenn f bijektiv ist, dann auch die Umkehrfunktion f^{-1} linear (D2H). Wenn f zudem stetig ist, ist dann auch f^{-1} stetig? Das gilt zumindest für endlich-dimensionale Vektorräume (D2D).

Im Allgemeinen gilt dies jedoch nicht! Hierzu ein vertrautes Beispiel: Differentiation und Integration sind zueinander invers (bis auf eine additive Konstante); die Integration ist stetig bezüglich der Supremumsnorm, die Differentiation hingegen nicht!

Anschaulich als griffiger Slogan: *Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!*

✍ **Beispiel D2E** (HDI). Sei $\mathscr{C}^k = \mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ der Vektorraum aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wobei $a < b$, und hierauf die linearen Abbildungen ✍

$$D : \mathscr{C}^1 \to \mathscr{C}^0 : F \mapsto f, \qquad f(x) = \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x},$$

$$I : \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 : f \mapsto F, \qquad F(x) = \int_{t=x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir erhalten die Bijektion $(I,D) : \mathscr{C}^0 \cong \mathscr{C}^1_0$, wobei $\mathscr{C}^1_0 = \{\, F \in \mathscr{C}^1 \mid F(x_0) = 0 \,\}$. Bezüglich der Supremumsnormen ist I stetig, aber D nicht, wie $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ zeigt.

☞ Erst nach Wahl der richtigen Norm (3) sind I und D Homöomorphismen. Ausführlich: ☜

(1) Warum gilt $DI(f) = f$ und $ID(F) = F - F(x_0)$? Zitieren Sie präzise das hierzu benötigte Satzpaar. Was sind demnach Kern und Bild von D und von I?

(2) Wir statten $\mathscr{C}^0$ aus mit der Supremumsnorm $|f|_{\mathscr{C}^0} = |f|_{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$, ebenso den Teilraum $\mathscr{C}^1 \subset \mathscr{C}^0$. Ist die Abbildung I stetig? lipschitz? und D?

(3) Auf $\mathscr{C}^1$ verfeinern wir nun die Supremumsnorm zu $|F|_{\mathscr{C}^1} := |F|_{[a,b]} + |F'|_{[a,b]}$. Ist dies eine Norm? Ist die Abbildung I stetig? lipschitz? Ist D stetig? lipschitz?

✻ **D2E.** (1) Der erste und zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagen $DI(f) = f$ und $ID(F) = F - F(x_0)$. Ausführlich: (a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die Integralfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ differenzierbar mit Ableitung $F' = f$. (b) Ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt $\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(x_0)$. Aus $DI(f) = f$ folgt, dass I injektiv und D surjektiv ist, also $\ker(I) = 0$ und $\mathrm{im}(D) = \mathscr{C}^0$. Aus $ID(F) = F - F(x_0)$ folgt: Der Kern von D besteht aus allen konstanten Funktionen, und das Bild von I besteht aus allen Funktion $F \in \mathscr{C}^1$ mit $F(x_0) = 0$.

(2) Es gilt $|F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \le |a-b| \cdot |f|_{[a,b]}$, also ist die Integration I stetig, sogar lipschitz–stetig mit $L = |a-b|$. Für die Differentiation D gilt dies nicht: Für $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ gilt $|f_n|_{[0,\pi]} = 1/\sqrt{n} \searrow 0$. Für die Ableitung $f_n'(x) = \cos(nx)\sqrt{n}$ gilt $|f_n'|_{[0,\pi]} = \sqrt{n} \nearrow \infty$. Anschaulich: Die Supremumsnorm weiß nichts von der Ableitung, daher sollten wir nicht erwarten, dass D stetig ist.

(3) Auf $\mathscr{C}^0$ ist $f \mapsto |f|_{[a,b]}$ eine Norm. Auf $\mathscr{C}^1$ ist also $f \mapsto |f'|_{[a,b]}$ eine Halbnorm, denn $f \mapsto f'$ ist linear, mit den konstanten Funktionen als Kern. Somit ist $|f|_{\mathscr{C}^1} := |f|_{[a,b]} + |f'|_{[a,b]}$ eine Norm; sie heißt die $\mathscr{C}^1$*–Norm*. Für $f \in \mathscr{C}^0$ gilt $|I(f)|_{\mathscr{C}^1} = |I(f)|_{[a,b]} + |f|_{[a,b]} \le (|a-b|+1)|f|_{[a,b]}$, also ist auch hier die Integration lipschitz–stetig, diesmal mit $L = |a-b|+1$. Für $F \in \mathscr{C}^1$ gilt $|D(F)|_{[a,b]} = |F'|_{[a,b]} \le |F|_{\mathscr{C}^1}$, also ist nun auch die Differentiation lipschitz–stetig mit $L = 1$. Alles wird gut.

☞ **§D2b. Stetigkeit und Monotonie.** Reelle Intervalle (B2H) sind topologisch besonders ☜ einfach, und die Ordnung $(\mathbb{R},<)$ erlaubt stärkere Aussagen als für allgemeine Räume:

Satz D2F. *Seien $X,Y\subset\mathbb{R}$ reelle Intervalle. Dann gilt:*

(1) Jede monotone Surjektion $f:X\to Y$ ist stetig.

Für jede Funktion $f:X\to\mathbb{R}$ sind äquivalent:

(2) f ist stetig und injektiv.
(3) f ist stetig und streng monoton.
(4) f ist streng monoton und das Bild $f(X)$ ist ein Intervall.
(5) f ist ein Homöomorphismus vom Intervall $X\subset\mathbb{R}$ auf sein Bild $f(X)\subset\mathbb{R}$.

Insbesondere ist jede stetige Bijektion $f:X\to Y$ ein monotoner Homöomorphismus.

BEWEIS. Zum Verständnis der Definitionen beweise man dies als Übung! □

✻ **D2F.** (1) Wir nehmen f als wachsend an; f fallend behandelt man analog. Sei $x\in X$ und $y=f(x)$ sowie $[y_1,y_2]\subset Y$ eine Umgebung von y in Y. Ist y kein Randpunkt von Y, so gilt $y_1<y<y_2$. Dank Surjektivität existieren $x_1,x_2\in X$ mit $f(x_1)=y_1$ und $f(x_2)=y_2$. Dank Monotonie gilt $x_1<x<x_2$ und $f([x_1,x_2])\subset[y_1,y_2]$. Randpunkte erfordern eine sorgfältigere Wahl: Ist $y=\min Y$, so gilt $f(x_1)=y$ für alle $x_1\le x$; gilt zudem $x=\min X$, so wählen wir $x_1=x$, andernfalls ein beliebiges $x_1<x$. Ist $y=\max Y$, so gilt $f(x_2)=y$ für alle $x_2\ge x$; gilt zudem $x=\max X$, so wählen wir $x_2=x$, andernfalls ein beliebiges $x_2>x$. In allen Fällen ist dann $[x_1,x_2]$ eine Umgebung von x in X und erfüllt $f([x_1,x_2])\subset[y_1,y_2]$. Somit ist f stetig.

(2) ⇒ (3): Ist X leer oder einpunktig, so ist nichts zu zeigen. Wir wählen $a<b$ in X. Gilt $f(a)<f(b)$ so muss für alle $x\in X$ mit $a<x<b$ gelten $f(a)<f(x)<f(b)$. Andernfalls wäre etwa $f(x)<\min\{f(a),f(b)\}$, dann gäbe es nach dem Zwischenwertsatz C3R zu y mit $f(x)<y<\min\{f(a),f(b)\}$ Elemente $\xi,\zeta\in X$ mit $a<\xi<x<\zeta<b$ und $f(\xi)=f(\zeta)=y$. Ebenso im Falle $f(x)>\max\{f(a),f(b)\}$. Gilt $f(a)>f(b)$ so muss für alle $x\in X$ mit $a<x<b$ gelten $f(a)>f(x)>f(b)$. In beiden Varianten ist f streng monoton.

(3) ⇒ (4): Das folgt aus dem Zwischenwertsatz C3R für stetige reelle Funktionen auf reellen Intervallen.

(4) ⇒ (5): Ist $f:X\to\mathbb{R}$ streng monoton, so ist f injektiv, also eine Bijektion auf das Bild $Y=f(X)$. Da wir X und Y als Intervalle voraussetzen, ist f stetig dank (1). Auch die Umkehrfunktion $f^{-1}:Y\to X$ ist streng monoton und somit stetig dank (1). Also ist $f:X\to Y$ wie behauptet ein Homöomorphismus.

Die Implikation (5) ⇒ (2) schließlich ist trivial.

☞ **§D2c. Homöomorphie-Klassifikation reeller und rationaler Intervalle.** Wir halten ☜ folgende Beobachtung fest… Bei näherem Hinsehen entpuppt sie sich als nicht-trivial:

Übung D2G. Homöomorphie-Klassifikation reeller Intervalle: Jedes reelle Intervall $I\subset\mathbb{R}$ ist homöomorph zu genau einem der fünf Modell-Intervalle $\emptyset$, $\{0\}$, $[0,1]$, $[0,1[$, $]0,1[$.

Dies nutzt wesentlich die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$! Wenn Sie Herausforderungen mögen:

(1) Konstruieren Sie Homöomorphismen $[0,1[_{\mathbb{Q}}\cong\,]-\sqrt{2},1[_{\mathbb{Q}}$ und $[0,1]_{\mathbb{Q}}\cong\,]-\sqrt{2},1]_{\mathbb{Q}}$.
(2) Allgemeiner: Jedes rationale Intervall $I\subset\mathbb{Q}$ ist homöomorph zu $\emptyset$, $\{0\}$ oder $\mathbb{Q}$.

Bemerkung. Manchen verlockt der voreilige Schluss, die negativen Aussagen $]0,1[\,\ncong[0,1[$ und $[0,1[\,\ncong[0,1]$ und $]0,1[\,\ncong[0,1]$ seien „offensichtlich“ und bedürften keines Beweises.

Gegen naive Trugschlüsse immunisieren geeignete Beispiele: Das mahnende Beispiel $[0,1]_{\mathbb{Q}}\cong[0,1[_{\mathbb{Q}}\cong[0,1[_{\mathbb{Q}}$ zeigt eindringlich, dass wirklich etwas bewiesen werden muss.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **D2G.** Zunächst verschaffen wir uns für alle $a<b$ in $\bar{\mathbb{R}}$ (möglichst explizite) Homöomorphismen

$$[0,1]\cong[a,b] \quad \text{und} \quad]0,1[\cong]a,b[\quad \text{sowie} \quad [0,1[\cong[a,b[\cong]a,b].$$

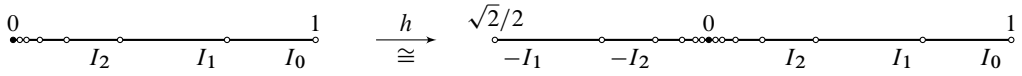
Für $a<b$ in $\mathbb{R}$ leistet die Abbildung $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $h(x)=a+x(b-a)$ bzw. $h(x)=b+x(a-b)$ das Gewünschte. Die Abbildung h ist affin, monoton, stetig, ebenso ihre Umkehrabbildung $h^{-1}(x)=(x-a)/(b-a)$ bzw. $h^{-1}(x)=(x-b)/(a-b)$. Im Falle $a=\pm\infty$ oder $b=\pm\infty$ wenden wir zunächst den Homöomorphismus $h:\bar{\mathbb{R}}\xrightarrow{\sim}[-1,1]$ mit $h(x)=x/(1+|x|)$ an (A1D) und verfahren dann wie zuvor.

Erläuterung: Dies gilt wörtlich für jeden geordneten Körper K, etwa $K\subset\mathbb{R}$, da wir nur rationale Funktionen über $\mathbb{Q}$ benötigen. Es gibt viele weitere Homöomorphismen zwischen Intervallen, etwa $\tan:]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}$ mit Umkehrabbildung $\arctan:\mathbb{R}\to]-\pi/2,\pi/2[$. Hierzu muss man diese Funktionen zuvor konstruieren, was für diesen bescheidenen Zweck deutlich aufwändiger ist – und zudem nur über $\mathbb{R}$ möglich und nicht über $\mathbb{Q}$.

Sei nun $I\subset\mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, das heißt, für alle $a<x<b$ in $\mathbb{R}$ mit $a,b\in I$ gilt $x\in I$. Ist I leer, so gilt $I=\emptyset$. Besteht I nur aus einem Punkt, so gilt $I\cong\{0\}$. Andernfalls ist I elementar dank Vollständigkeit (B2H) und dank obiger Homöomorphismen zu einem der Intervalle $[0,1]$, $[0,1[$, $]0,1[$ homöomorph.

Erläuterung: Es bleibt zu überlegen, warum diese drei Intervalle nicht untereinander homöomorph sein können. Zunächst drängt sich auf, dass $[0,1]$ einen Punkt mehr hat als $[0,1[$. Das stimmt zwar, schließt aber einen Homöomorphismus noch nicht aus. Auch $\mathbb{N}_{\geq 0}$ hat einen Punkt mehr als $\mathbb{N}_{\geq 1}$; beide sind jedoch homöomorph vermöge $x\mapsto x+1$. Tatsächlich sind $[0,1]$ und $[0,1[$ gleichmächtig, das heißt, es gibt Bijektionen $[0,1]\xrightarrow{\sim}[0,1[$ (B2N). Der Unterschied liegt also nicht in der Anzahl der Punkte, sondern allein in den Topologien auf $[0,1]$ und auf $[0,1[$. Zur Unterscheidung helfen uns *topologische Eigenschaften*. Wir nutzen hierzu den Zwischenwertsatz (C3R) und den Wegzusammenhang (A1G, ausgeführt in Kapitel G). Damit gelingt die Unterscheidung leicht:

In $]0,1[$ trennt jeder Punkt x, das heißt $]0,1[\smallsetminus\{x\}$ ist nicht zusammenhängend. In $[0,1[$ gibt es genau einen Punkt, der nicht trennt, nämlich 0. In $[0,1]$ gibt es genau zwei Punkte, die nicht trennen, nämlich 0 und 1. Diese topologische Eigenschaft bleibt bei jedem Homöomorphismus $h:X\xrightarrow{\sim}Y$ erhalten, also sind diese Intervalle nicht homöomorph.



(1) Wir zerlegen $[0,1[_{\mathbb{Q}}=\{0\}\sqcup\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$ in die Intervalle $I_n=]x_{n+1},x_n[_{\mathbb{Q}}$ mit $x_0=1$ und $x_n=\sqrt{2}/2^n$ für $n=1,2,3,\ldots$. Ebenso gilt $]-1,1[_{\mathbb{Q}}=\{0\}\sqcup\bigsqcup_{n\geq 0}I_n\sqcup\bigsqcup_{n\geq 1}(-I_n)$. Hierzu existieren Homöomorphismen $h_{2n}:I_{2n}\xrightarrow{\sim}I_n$ und $h_{2n+1}:I_{2n+1}\xrightarrow{\sim}(-I_{n+1})$; wir wählen sie affin-linear über $\mathbb{Q}$ und ordnungserhaltend. Wir setzen sie zusammen zu $h:[0,1[_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}]-\sqrt{2}/2,1[_{\mathbb{Q}}$ mit $h(0)=0$ und $h(x)=h_n(x)$ für $x\in I_n$. Nach Konstruktion ist h bijektiv und stetig. Gleiches gilt für die Umkehrabbildung h^{-1}, die wir ebenso explizit zusammensetzen können. Dank Stetigkeit im Randpunkt 1 erhalten wir die Fortsetzung $h^*:[0,1]_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}]-\sqrt{2}/2,1]_{\mathbb{Q}}$.

(2) Zur allgemeinen Klassifikation rationaler Intervalle verschaffen wir uns zunächst Homöomorphismen

$$[0,1]_{\mathbb{Q}}\cong[a,b]_{\mathbb{Q}} \quad \text{und} \quad]0,1[_{\mathbb{Q}}\cong]a,b[_{\mathbb{Q}} \quad \text{sowie} \quad [0,1[_{\mathbb{Q}}\cong[a,b[_{\mathbb{Q}}\cong]a,b]_{\mathbb{Q}}.$$

Für rationale Endpunkte $a,b\in\mathbb{Q}\sqcup\{\pm\infty\}$ gelingt dies wie oben im reellen Fall. Keineswegs offensichtlich ist die Konstruktion für irrationale Endpunkte, wenn a oder b oder beide in $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ liegen. Wir nutzen A1Y: Für alle $a<b$ in $\mathbb{R}$ liefert die „Hin-und-Her-Methode“ von Cantor und Hausdorff einen ordnungserhaltenden Homöomorphismus $f:]0,1[_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}]a,b[_{\mathbb{Q}}$. Diesen setzen wir gegebenenfalls in rationale Endpunkte fort.

Wie in (1) zeigen wir $[a,b[_{\mathbb{Q}}\cong]a,b[_{\mathbb{Q}}$ für $a<b$ mit $a\in\mathbb{Q}$ und $b\in\mathbb{R}$. Dank unserer Vorbereitungen komponieren wir die Homöomorphismen $[a,b[_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}[0,1[_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}]-\sqrt{2}/2,1[_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}]a,b[_{\mathbb{Q}}$.

Ebenso zeigen wir $[a,b]_{\mathbb{Q}}\cong]a,b]_{\mathbb{Q}}$ für $a,b\in\mathbb{Q}$ vermöge $[a,b]_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}[0,1]_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}]-\sqrt{2}/2,1]_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}]a,b]_{\mathbb{Q}}$.

Damit ist jedes rationale Intervall $I\subset\mathbb{Q}$ homöomorph zu $\emptyset$, $\{0\}$ oder $\mathbb{Q}$.

Erläuterung: Diese kontraintuitive Eigenschaft (2) gilt für jeden abzählbaren Körper $K\subset\mathbb{R}$, etwa $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ oder $\mathbb{Q}[\pi]$ oder jede abzählbar-dimensionale Erweiterung $\mathbb{Q}\subset K\subset\mathbb{R}$, etwa den reell-algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Die Konstruktionen der hierfür benötigten Homöomorphismen habe ich hier lieber nur für $\mathbb{Q}$ ausgeführt, da manches Argument damit explizit und anschaulich gelingt. Wenn Sie möchten, können Sie alle Argumente leicht auf jeden abzählbaren Körper $K\subset\mathbb{R}$ übertragen.

☞ **§D2d. Homöomorphie.** Ist $f : X \to Y$ eine Bijektion, so schreiben wir $f : X \xrightarrow{\sim} Y$. ☜ Ist f ein Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$, so schreiben wir $f : (X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{\sim} (Y,\mathcal{T}_Y)$, durch Verschweigen der beiden Topologien auch kurz $f : X \xrightarrow{\sim} Y$; die Topologien müssen dann aus dem Kontext erschlossen werden.

Gelegentlich verschweigt man sogar den Homöomorphismus: Die knappe Notation $(X,\mathcal{T}_X) \cong (Y,\mathcal{T}_Y)$ oder $X \cong Y$ ist verführerisch bequem: Sie behauptet die Existenz eines Homöomorphismus, ohne einen konkreten Kandidaten zu nennen. Wenn es einen Homöomorphismus zwischen X und Y gibt, dann ist dieser im Allgemeinen nicht eindeutig, und die Schreibweise $X \cong Y$ macht keinerlei Aussage über eine mögliche Wahl.

Die Schreibweise $X \cong Y$ sollte selbstverständlich nicht dazu missbraucht werden, die eigene Unwissenheit zu kaschieren! Auf Nachfrage muss man einen Homöomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ vorweisen (D2G), besser noch explizit $(f,g) : (X,\mathcal{T}_X) \cong (Y,\mathcal{T}_Y)$ (D2D).

☞ **Bemerkung.** Homöomorphie von topologischen Räumen ist eine Äquivalenzrelation: ☜

- Reflexivität: Es gilt $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : X \cong X$.
- Symmetrie: Aus $(f,g) : X \cong Y$ folgt $(g,f) : Y \cong X$.
- Transitivität: Aus $(f,f') : X \cong Y$ und $(g,g') : Y \cong Z$ folgt $(h,h') : X \cong Z$ vermöge der Kompositionen $h = g \circ f : X \to Z$ und $h' = f' \circ g' : Z \to X$. Es gilt nämlich $(f'g')(gf) = f'(g'g)f = f'\mathrm{id}_Y f = f'f \simeq \mathrm{id}_X$ und ebenso $(gf)(f'g) = \mathrm{id}_Z$.

Für jeden topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ ist die Menge $\mathrm{Homeo}(X,\mathcal{T})$ aller Homöomorphismen $f : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T})$ eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen.

☞ **Beispiele.** ☜
- Zusammenhängende Teilräume $X \subset \mathbb{R}$ bilden fünf Homöomorphieklassen: Nach D2G ist X homöomorph zu genau einem der Modelle $\emptyset$, $\{0\}$, $[0,1]$, $[0,1[$, $]0,1[$.
- Nach F6I ist jeder sternförmige und offene Teilraum $X \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Modulo Homöomorphie gibt es hier also nur eine Homöomorphieklasse.
- Die konvexen Kompakta $X \subset \mathbb{R}^n$ bilden $n+2$ Homöomorphieklassen: Nach F6H gilt entweder $X = \emptyset$ oder es existiert ein Homöomorphismus $X \cong \mathbb{D}^k$ für ein $0 \le k \le n$. Es ist allerdings zunächst nicht offensichtlich, warum $\mathbb{D}^m \ncong \mathbb{D}^n$ für $m \neq n$ gilt; dies folgt aus der topologischen Invarianz der Dimension (J7B) und des Randes (J7I).
- Auf $X = \{a,b\}$ gibt es vier Topologien, diese bilden drei Homöomorphieklassen (D9F). Auf $X = \{a,b,c\}$ gibt es 29 Topologien, diese bilden 9 Homöomorphieklassen (D9F).

☞ **Bemerkung.** Zwei Räume $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ sind *gleich*, geschrieben $(X,\mathcal{T}_X) = (Y,\mathcal{T}_Y)$, ☜ wenn $X = Y$ und $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y$ gilt. Sind sie hingegen *homöomorph*, vermöge der zueinander inversen Homöomorphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$, so sind sie vielleicht nicht gleich aber doch „im Wesentlichen gleich“: Die Strukturen sind gleich, nur die Elemente in X und Y heißen anders, und die Abbildungen f und g leisten die Übersetzung. Zum Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} X = \{1,2,3\} & \leftrightarrow & Y = \{a,b,c\} \\ \mathcal{T}_X = \{\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\} & \leftrightarrow & \mathcal{T}_Y = \{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\} \end{array}$$

Das erinnert an die Unterscheidung zwischen „dasselbe“ und „das Gleiche“: Die Räume $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ sind nicht dieselben, doch sie gleichen sich wie ein Ei dem anderen. Der präzise Ausdruck hierfür ist die *Homöomorphie* und bedeutet wörtlich „gleiche Form“. Mit den Worten der Einleitung: Topologie ist qualitative Geometrie.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§D2e. Homöomorphismen versus Isomorphismen.** Bitte verwechslen Sie niemals ☜ die Begriffe *Homöomorphismus* und *Homomorphismus*! Ein Homöomorphismus ist eine bistetige Bijektion zwischen topologischen Räumen. Hingegen ist ein Homomorphismus eine strukturerhaltende Abbildung algebraischer Objekten, etwa zwischen Vektorräumen.

Übung D2H. Für Vektorräume gilt: Ist eine K–lineare Abbildung $f : V \to W$ bijektiv, so existiert ihre Umkehrabbildung $g = f^{-1} : W \to V$, und diese ist automatisch K–linear. Gleiches gilt für Homomorphismen von Monoiden und Gruppen, von Ringen und Körpern, von K–Algebren, etc. Die Algebra ist bekanntermaßen großzügig: Sie gibt oft mehr, als man verlangt. Die topologische Situation ist meist verzwickter, wie in D2C und D2E gesehen.

✻ **D2H.** Seien $x', y' \in W$ und $\lambda, \mu \in K$. Für $x = g(x')$ und $y = g(y')$ gilt $x' = f(x)$ und $y' = f(y)$, also erhalten wir $g(\lambda x' + \mu y') = g(\lambda f(x) + \mu f(y)) = g(f(\lambda x + \mu y)) = \lambda x + \mu y = \lambda g(x') + \mu g(y')$.

Bemerkung. Das Isomorphie-Problem für K–Vektorräume wird zu Beginn der linearen Algebra vollständig gelöst: Zwei K–Vektorräume V, W sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimensionen gleich sind, kurz $\dim_K V = \dim_K W$. Darüber hinaus lernt man, die Dimension von Vektorräumen tatkräftig auszurechnen, etwa in Form der Matrizenrechnung und des Gauß–Algorithmus. Die Dimension effizent bestimmen zu können, ist auch für Lösungsräume von linearen (Differential-)Gleichungssystemen ungemein praktisch.

Für topologische Räume ist die Fragestellung ungleich komplizierter und lässt sich im Allgemeinen nicht einfach auf die Berechnung einer Zahl zurückführen.

☞ **§D2f. Das Homöomorphie-Problem.** Als Homöomorphie-Problem bezeichnet man ☜ folgenden Aufgabentyp: Gegeben sind zwei topologische Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$, etwa euklidische Teilräume $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$. Zu bestimmen ist, ob diese zueinander homöomorph sind oder nicht. Einfache Beispiele kennen Sie aus A1H und A1I.

Dieses Problem für *alle* topologischen Räume zu lösen ist schlicht unmöglich. Wir werden aber Techniken kennenlernen, die das Problem in wichtigen Spezialfällen lösen:

Beispiel. Mannigfaltigkeiten der Dimension 1 heißen *Kurven*. Nach A4A ist jede zusammenhängende Kurve homöomorph zu genau einem der vier Modelle $\mathbb{S}^1$, $[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Beispiel. Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 heißen *Flächen*. Nach A4J ist jede kompakte zusammenhängende Fläche homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$.

Bemerkung. Wie beweist man Homöomorphie $X \cong Y$? Hierzu müssen wir einen Homöomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ *konstruieren*. Das kann erhebliche Anforderungen an kreativen Erfindungsreichtum und technische Virtuosität stellen, etwa $[0,1]_{\mathbb{Q}} \cong [0,1[_{\mathbb{Q}}$ (D2G).

Wie beweist man hingegen, dass es keinen Homöomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ geben kann? Hierzu genügt es selbstverständlich nicht, keinen Homöomorphismus zu finden und aufzugeben. Wir müssen erklären, *warum* es keinen geben kann, indem wir das topologische Hindernis verstehen. Einfache Beispiele sind $[0,1] \ncong [0,1[$ (D2G) oder $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$ (A1H).

Beispiel. Für Flächen F nutzen wir Triangulierungen (Kapitel I) zur Konstruktion eines Homöomorphismus $F \cong F^{\pm}_{g,r}$ durch Schneiden und Kleben (Kapitel K). Zur Unterscheidung $F^{\varepsilon}_{g,r} \ncong F^{\delta}_{h,s}$ benötigen wir die topologische Invarianz des Randes und der Orientierung (Kapitel J) sowie Euler–Charakteristik (Kapitel A) oder Fundamentalgruppen (Kapitel L).

§D3. Umgebungen und Umgebungsbasen

Die heutige Methode, Topologien durch offene Mengen zu definieren und alle weiteren Begriffe hierauf zu begründen, wurde von Pawel ALEXANDROFF (1925) eingeführt und durch Nicolas BOURBAKI (*Topologie générale*, 1947) propagiert. Wir haben im vorigen Abschnitt erste Beispiele gesehen, insbesondere den Begriff der stetigen Abbildung.

Statt offener Mengen sind gelegentlich Umgebungen (§D3a) praktischer, da sie die Betrachtung in einem Punkt lokalisieren. So hat Felix HAUSDORFF (*Grundzüge der Mengenlehre*, 1914) geeignete Umgebungsaxiome als Ausgangspunkt genommen, die wir nun ausführen (§D3c). Von diesen lassen sich weitere topologische Grundbegriffe (§D5a) wie Inneres, Abschluss, Rand, etc. bequem ableiten. Hausdorff fügte in seiner Axiomatik als weitere Bedingung noch die Separiertheit (D3J) hinzu, die ihm zu Ehren heute auch *Hausdorff–Axiom* genannt wird. Der jüngeren Tradition folgend behandeln wir diese überaus wichtige Eigenschaft jedoch getrennt von den anderen Axiomen (§D3g).

§D3a. Umgebungen eines Punktes. In einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ sind die offenen Mengen die Grundstruktur, aus der wir alle weiteren Begriffe ableiten. Wir haben dies oben schon für abgeschlossene Mengen gesehen: Dies sind genau die Komplemente offener Mengen. Des Weiteren können wir den Begriff der Umgebung ableiten:

Definition D3A (Umgebung eines Punktes)**.** Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $a \in X$. Eine Menge $O \subset X$ heißt *offene Umgebung von a* in $(X,\mathcal{T})$, wenn $a \in O \in \mathcal{T}$ gilt.

Das System aller offenen Umgebungen von a in $(X,\mathcal{T})$ bezeichnen wir mit

$$\mathscr{U}_a^o = \mathscr{U}_a^o(\mathcal{T}) = \mathscr{U}_a^o(X,\mathcal{T}) := \big\{\, O \in \mathcal{T} \;\big|\; a \in O \,\big\}.$$

Allgemeiner: Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung von a* in $(X,\mathcal{T})$, wenn sie eine offene Umgebung von a umfasst, wenn also eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ existiert mit $a \in O \subset U$. Das System aller Umgebungen von a in $(X,\mathcal{T})$ bezeichnen wir mit

$$\mathscr{U}_a = \mathscr{U}_a(\mathcal{T}) = \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T}) := \big\{\, U \subset X \;\big|\; \exists O \in \mathcal{T} : a \in O \subset U \,\big\}.$$

Schreibweise. Die Umgebungen hängen vom Raum $(X,\mathcal{T})$ und insbesondere von der Topologie $\mathcal{T}$ ab, was wir durch $\mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})$ bzw. $\mathscr{U}_a(\mathcal{T})$ ausdrücken. Wenn der Raum und seine Topologie unzweifelhaft aus dem Zusammenhang hervorgehen, dann ist die kürzere Bezeichnung $\mathscr{U}_a$ oft bequemer.

Beispiele. Jede offene Umgebung von a ist eine Umgebung von a. Umgekehrt kann ein Punkt neben seinen offenen Umgebungen auch nicht-offene Umgebung haben.

- In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ist $]s,t[$ mit $s < a < t$ eine offene Umgebung von a. Auch $[s,t]$ sowie $[s,t[$ und $]s,t]$ sind Umgebungen von a, aber nicht offen in $\mathbb{R}$.
- Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $a \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ nennt man den offenen Ball $B(a,\varepsilon)$ auch die (offene) *ε–Umgebung* von a in (X,d). Eine Menge $U \subset X$ ist genau dann eine Umgebung von a, wenn sie eine ε–Umgebung von a enthält.
- In jedem diskreten Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ ist jede Menge $U \subset X$ offen und somit eine offene Umgebung für jeden ihrer Punkte $a \in U$. Hingegen ist in einem indiskreten Raum $(X,\{\emptyset,X\})$ nur die Menge X eine Umgebung von $a \in X$.
- In der koendlichen (bzw. koabzählbaren) Topologie auf X ist $U \subset X$ genau dann eine Umgebung von a, wenn $a \in U$ gilt und das Komplement $X \smallsetminus U$ endlich (bzw. abzählbar) ist. Insbesondere ist hier jede Umgebung offen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§D3b. Umgebungen einer Teilmenge.** Analog zu Umgebungen eines Punktes $a \in X$ ☜ definieren wir Umgebungen einer Teilmenge $A \subset X$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$:

☞ **Definition D3B** (Umgebungen einer Menge)**.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ein $A \subset X$ ☜ eine Teilmenge. Eine Menge O heißt *offene Umgebung von A* in $(X, \mathcal{T})$, wenn $A \subset O \in \mathcal{T}$ gilt. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung von A* in $(X, \mathcal{T})$, wenn sie eine offene Umgebung von A umfasst, wenn also $O \in \mathcal{T}$ mit $A \subset O \subset U$ existiert.

Für $A = \{a\}$ erhalten wir den obigen Begriff der (offenen) Umgebung eines Punktes.

☞ **Beispiele.** ☜
- Ist $A \in \mathcal{T}$ selbst eine offene Menge, so ist A eine offene Umgebung von A. Jede Obermenge $U \supset A$ ist dann ebenfalls eine Umgebung von A.
- In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie betrachten wir die Teilmenge $A =]0,1]$. Genau dann ist $U \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von A, wenn $]0, a[\subset U$ für ein $a > 1$ gilt.
- In $\mathbb{R}$ enthält jede Umgebung von $\mathbb{Q}$ eine offene Menge $O_r = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}}]a - r_a, a + r_a[$ mit $r : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{>0} : a \mapsto r_a$. Die Gesamtlänge $\ell \leq \sum_{a\in\mathbb{Q}} 2r_a$ kann beliebig klein sein.

☞ **§D3c. Umgebungsaxiome.** Die offenen Mengen eines topologischen Raumes und die ☜ Umgebungen seiner Punkte bedingen sich in folgendem Sinne gegenseitig:

☞ **Proposition D3C.** *Eine Teilmenge U eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann* ☜ *offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte $x \in U$ ist.*

BEWEIS. Ist U offen in $(X, \mathcal{T})$, so ist U Umgebung jedes Punktes $x \in U$ nach D3A. Ist umgekehrt $U \subset X$ Umgebung jedes Punktes $x \in U$, so existiert zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x \subset U$. Somit ist $U = \bigcup_{x\in U} O_x$ offen dank (O3) in D1A. □

Aufgrund dieser Beobachtung muss sich unser Axiomensystem für offene Mengen auch in den Umgebungsbegriff übersetzen lassen. Die folgende Übung macht dies explizit: Sie besagt, dass die Umgebungsaxiome (U1–4) zu den Axiomen (O1–3) für offene Mengen gleichwertig sind. Man kann daher genauso gut die Umgebungen als Grundbegriff wählen.

☞ **Satz D3D.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zu jedem Punkt $x \in X$ sei $\mathcal{U}_x$ die Menge* ☜ *aller Umgebungen von x in $(X, \mathcal{T})$. Diese erfreuen sich folgender Eigenschaften:*

(U1) Es gilt $X \in \mathcal{U}_x$ und für alle $U \in \mathcal{U}_x$ gilt $x \in U \subset X$.
(U2) Für alle $U, V \in \mathcal{U}_x$ gilt $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
(U3) Aus $U \in \mathcal{U}_x$ und $U \subset V \subset X$ folgt $V \in \mathcal{U}_x$.
(U4) Zu $V \in \mathcal{U}_x$ existiert $U \in \mathcal{U}_x$, sodass $V \in \mathcal{U}_y$ für alle $y \in U$ gilt.

Ist umgekehrt $(\mathcal{U}_x)_{x\in X}$ eine Familie mit den Eigenschaften (U1–3), dann ist

$$\mathcal{T} = \{\, O \subset X \mid O \in \mathcal{U}_x \text{ für alle } x \in O \,\}$$

eine Topologie auf X, und zwar die feinste, die $\mathcal{U}_x(\mathcal{T}) \subset \mathcal{U}_x$ für jedes $x \in X$ erfüllt. Gilt zudem (U4), so ist $\mathcal{T}$ die einzige Topologie auf X, die $\mathcal{U}_x(\mathcal{T}) = \mathcal{U}_x$ für jedes $x \in X$ erfüllt.

Erläuterung. Die Eigenschaften (U1–3) betreffen jeweils einen einzelnen Punkt x und besagen, dass das System $\mathcal{U}_x$ ein *Filter* im Sinne von §D8d ist. Eigenschaft (U4) formuliert die Kohärenz zwischen den Umgebungssystemen zu verschiedenen Punkten $x, y \in X$. Sie besagt, dass jede Umgebung V von x eine offene Umgebung U von x enthält. Erst diese Eigenschaft stellt sicher, dass eine Topologie $\mathcal{T}$ existiert, die zu jedem Punkt $x \in X$ genau die vorgegebenen Umgebungen $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$ hat.

BEWEIS. Zum Verständnis der Definitionen beweise man dies als Übung! □

✻ **D3D.** Für jeden topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ ergeben sich die Umgebungseigenschaften (U1–3) unmittelbar aus Definition D3A. Eigenschaft (U4) sieht man so: Zu jeder Umgebung $V \in \mathscr{U}_x$ existiert eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U \subset V$; somit gilt $U \in \mathscr{U}_y$ für alle $y \in U$, also $V \in \mathscr{U}_y$ nach (U3).

Nehmen wir nun umgekehrt an, eine Familie $(\mathscr{U}_x)_{x\in X}$ erfüllt die Eigenschaften (U1–3): Für das Mengensystem $\mathcal{T}$ sind dann die Axiome (O1–3) nachzuweisen.

(O1) Dank (U1) gilt $X \in \mathcal{T}$, und $\emptyset \in \mathcal{T}$ folgt trivialerweise aus der Definition von $\mathcal{T}$.

(O2) Es ist zu zeigen, dass mit $U,V \in \mathcal{T}$ auch $W = U \cap V$ in $\mathcal{T}$ liegt. Für alle $x \in W$ gilt $U,V \in \mathscr{U}_x$. Dank (U2) gilt $W \in \mathscr{U}_x$ für alle $x \in W$, und somit $W \in \mathcal{T}$.

(O3) Seien $V_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$ und $V = \bigcup_{i\in I} V_i$. Für jedes $x \in V$ existiert ein Index $i \in I$ mit $x \in V_i$, also $V_i \in \mathscr{U}_x$. Dank (U3) gilt $V \in \mathscr{U}_x$ für alle $x \in V$, und somit $V \in \mathcal{T}$.

Somit ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, und nach Definition und (U3) gilt $\mathscr{U}_x(\mathcal{T}) \subset \mathscr{U}_x$. Jede andere Topologie mit dieser Eigenschaft ist in $\mathcal{T}$ enthalten.

Mit Eigenschaft (U4) haben wir schließlich $\mathscr{U}_x \subset \mathscr{U}_x(\mathcal{T})$ nachzuweisen. Sei $V \in \mathscr{U}_x$; wir wollen $V \in \mathscr{U}_x(\mathcal{T})$ zeigen. Wir betrachten hierzu $O = \{\, y \in X \mid V \in \mathscr{U}_y \,\}$ und zeigen $O \in \mathcal{T}$. Für jeden Punkt $y \in O$ gilt $y \in V$; nach (U4) existiert also $U \in \mathscr{U}_y$ sodass $V \in \mathscr{U}_z$ für alle $z \in U$ gilt. Das bedeutet $U \subset O$, nach (U3) also $O \in \mathscr{U}_y$. Nach Definition der Topologie $\mathcal{T}$ gilt $O \in \mathcal{T}$. Wegen $x \in O \subset V$ erhalten wir so $V \in \mathscr{U}_x(\mathcal{T})$.

Die Eindeutigkeit der so definierten Topologie $\mathcal{T}$ mit $\mathscr{U}_x(\mathcal{T}) = \mathscr{U}_x$ für alle $x \in X$ folgt aus D3C, da die Umgebungen die offenen Mengen bestimmen.

☞ **Bemerkung.** Wir können Satz D3D nutzen, um eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X zu definieren durch Angabe des Umgebungsfilters $\mathscr{U}_x$ für jeden Punkt $x \in X$. Die obigen Axiome (U1–4) stellen dann sicher, dass wir tatsächlich eine Topologie mit den gewünschten Umgebungsfiltern erhalten, und dass diese eindeutig ist. Zur Konstruktion von Topologien ist es jedoch oft bequemer, nur Umgebungsbasen anzugeben. Wir werden daher meist den flexibleren Satz D3V zur Konstruktion von Topologien heranziehen. ☜

§D3d. Umgebungsbasen.

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $a \in X$ ein Punkt.

✍ **Definition D3E.** Eine Familie $\mathcal{B}_a \subset \mathscr{U}_a$ von Umgebungen von a heißt *Umgebungsbasis* von a in $(X,\mathcal{T})$, wenn jede Umgebung $U \in \mathscr{U}_a$ eine Umgebung $V \in \mathcal{B}_a$ enthält, also ✍

$$\mathscr{U}_a = \big\{\, U \subset X \;\big|\; \exists V \in \mathcal{B}_a : V \subset U \,\big\}.$$

Somit bestimmt $\mathcal{B}_a$ das gesamte Umgebungssystem $\mathscr{U}_a$ von a in $(X,\mathcal{T})$.

✍ **Beispiele.** Ein Punkt $a \in X$ erlaubt im Allgemeinen sehr verschiedene Umgebungsbasen: ✍

- Das System $\mathcal{B}_a = \mathscr{U}_a$ aller Umgebungen ist eine Umgebungsbasis von a in $(X,\mathcal{T})$, ebenso das System $\mathcal{B}'_a = \mathscr{U}_a^{\circ}$ aller offenen Umgebungen.
- Im diskreten Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ ist $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$ eine Umgebungsbasis von $a \in X$. Sie ist die kleinste: Genau dann ist $\mathcal{B}'_a \subset \mathscr{U}_a$ eine Umgebungsbasis von a, wenn $\mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}'_a$ gilt.
- Im indiskreten Raum $(X,\{\emptyset,X\})$ ist $\mathcal{B}_a = \{X\}$ die einzige Umgebungsbasis von $a \in X$. Das ist tatsächlich der einzige Fall, in dem alle Umgebungsbasen eindeutig sind.
- In jedem metrischen Raum (X,d) bilden die offenen Bälle (C2L) die Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \{\, B(a,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$, ebenso $\mathcal{B}'_a = \{\, B(a,r_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ für $r_n \searrow 0$ in $\mathbb{R}_{>0}$.
- Für $a \in \mathbb{R}$ bilden die Intervalle die Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \{\,]s,t[\mid s < a < t \text{ in } \mathbb{R} \,\}$, ebenso $\mathcal{B}'_a = \{\,]s_n,t_n[\mid n \in \mathbb{N} \,\}$ für streng monotone Folgen $s_n \nearrow a \swarrow t_n$.
- Ist $(X,<)$ eine total geordnete Menge, dann bilden die Intervalle $]s,t[$ mit $s < a < t$ und $s,t \in \hat{X} = X \sqcup \{\pm\infty\}$ eine Umgebungsbasis von a in der Ordnungstopologie $\mathcal{T}_<$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D3e. Das erste Abzählbarkeitsaxiom. In jedem metrischen Raum (X,d) bilden die offenen Bälle $B(a,\varepsilon)$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Umgebungsbasis von a. Lässt man ε die Werte $1/k$ für $k = 1,2,3,\dots$ durchlaufen, so bilden die offenen Bälle $B(a,1/k)$ eine *abzählbare* Umgebungsbasis. Diese Eigenschaft erweist sich als nützlich und verdient daher einen Namen:

Definition D3F. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist *erstabzählbar*, oder: erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom* (1AA), wenn jeder Punkt $a \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.

Beispiel. Jeder diskrete Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom dank der Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$, ebenso jeder indiskrete Raum $(X,\{\emptyset,X\})$ dank $\mathcal{B}_a = \{X\}$.

Beispiel. Auf jeder überabzählbaren Menge X, etwa $X = \mathbb{R}$, sind weder die koendliche (D1H) noch die koabzählbare Topologie (D1I) erstabzählbar. Noch besseres Beispiel: D4B

Beispiel D3G. Jeder metrische Raum (X,d) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, denn für $a \in X$ bilden die Umgebungen $B(a,1/k)$ für $k = 1,2,3,\dots$ eine Umgebungsbasis.

Bemerkung D3H. Sei $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von a in $(X,\mathcal{T})$. Gemäß D3A existiert $V_n^\circ \in \mathcal{T}$ mit $a \in V_n^\circ \subset V_n$, also eine offene Umgebungsbasis $\{V_n^\circ \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ist $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von a, so können wir zu $U_n = V_0 \cap \dots \cap V_n$ übergehen und erhalten eine Umgebungsbasis $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$.

Axiom oder Eigenschaft? Mancher mag sich über die Wortwahl „Abzählbarkeitsaxiom“ wundern. Diese ist vor allem der Tradition geschuldet und kann bedenkenlos übernommen werden. Genauso könnten wir „Abzählbarkeitseigenschaft“ sagen. Für diejenigen, die sich (und mir) diese Frage stellen, will ich gerne ein paar Erläuterungen zu den Begriffen „Axiom“ und „Eigenschaft“ anbringen.

In der axiomatischen Vorgehensweise bildet das betrachtete Axiomensystem das Fundament der aufzubauenden Theorie: Alle Folgerungen werden mit Hilfe logischer Schlussregeln allein aus den Axiomen abgeleitet. Beispiel: Für die offenen Mengen einer Topologie haben wir das Axiomensystem (O1–3) zugrundegelegt. In diesem Sinne ist ein Axiom eine Voraussetzung: Sie wird nicht aus anderen Aussagen abgeleitet, und kann zumeist auch nicht aus den anderen Axiomen abgeleitet werden. (Falls doch, so ist die in Frage stehende Voraussetzung redundant und kann weggelassen werden.)

Eine axiomatische Theorie besagt also genau genommen nur: Wenn diese und jene Voraussetzungen (Axiome) erfüllt sind, dann gelten diese und jene Folgerungen (Sätze). Diese Art der Theoriebildung macht die logischen Beziehungen besonders deutlich und garantiert zudem maximale Anwendbarkeit bei minimalem Aufwand. Hierin liegen Erfolg und Beliebtheit der axiomatischen Methode.

Im Falle der Topologie sind die Axiome (O1–3) allerdings sehr allgemein und oft noch zu schwach, um interessante Sätze zu erhalten. Durch Hinzunahme weiterer Axiome, etwa zur Abzählbarkeit D3F oder Trennung D3J, erhalten wir eine speziellere Theorie, deren Geltungsbereich eingeschränkt ist (weniger „Breite“), die dafür aber stärkere Folgerungen zulässt (mehr „Tiefe“). Erstabzählbarkeit folgt nicht allein aus den anderen Axiomen (O1–3), wie obige Beispiele zeigen. Wir werden im Folgenden einige Sätze nur unter der Zusatzannahme des ersten Abzählbarkeitsaxioms beweisen.

Nun ist die Mathematik, allem Anschein zum Trotz, nicht nur axiomatisch, sie ist nicht nur Theorie, sondern auch Praxis. Wir wollen auch Beispiele und vor allem Anwendungen! Um etwa zu zeigen, dass die offenen Mengen bezüglich einer Metrik den Axiomen (O1–3) einer Topologie genügen, mussten wir diese Eigenschaften nachweisen (C2M). Gleiches gilt für Ordnungstopologien (D1M) und alle weiteren Beispiele. Bei Vorlage eines konkreten Falls hat es nämlich überhaupt keinen Sinn, Axiome zu *fordern*, man muss sich schon die Mühe machen und nachprüfen, ob die gewünschten Eigenschaften hier *gelten*. In diesem Sinne ist das erste Abzählbarkeitsaxiom eine wünschenswerte Eigenschaft: Bei Vorlage eines konkreten Beispiels beweist man dann, ob sie gilt oder nicht.

§D3f. Konvergenz von Folgen. Wir definieren in diesem Abschnitt die Konvergenz von Folgen in einem topologischen Raum. Die Frage nach der Eindeutigkeit des Grenzwertes wird uns zur Hausdorff–Eigenschaft führen. Auch abgeschlossene Mengen wollen wir durch Folgengrenzwerte charakterisieren. Neben der Nützlichkeit werden wir dabei auch die Unzulänglichkeit des Folgenbegriffs für allgemeine topologische Räume erkennen. Dies werden wir in §D8 durch Netze und Filter beheben.

Definition D3I. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und $\mathcal{B}_a \subset \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X *konvergiert* gegen $a \in X$, wenn jede Umgebung U von a in $(X,\mathcal{T})$ schließlich alle Folgenglieder enthält:

$$\begin{aligned}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}\ :\ x_n \in U \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_a \qquad\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}\ :\ x_n \in U\end{aligned}$$

Schwächer heißt $a \in X$ *Häufungspunkt* der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn jede Umgebung U von a in $(X,\mathcal{T})$ unendlich viele Folgenglieder enthält:

$$\begin{aligned}(x_n)_{n\in N} \nearrow a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}_{\geq m}\ :\ x_n \in U \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_a \qquad\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}_{\geq m}\ :\ x_n \in U\end{aligned}$$

BEWEIS. Wir zeigen „$\forall U \in \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})\ldots$“ ist äquivalent zu „$\forall U \in \mathcal{B}_a\ldots$“. Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist trivial, da $\mathcal{B}_a \subset \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})$. Die Implikation „$\Leftarrow$“ gilt, weil $\mathcal{B}_a \subset \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis ist: Jede Umgebung $U \in \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T})$ enthält eine Umgebung $V \in \mathcal{B}_x$, und diese enthält schließlich alle Folgenglieder x_n. Ebenso für Häufungspunkte. □

Konvention. Konvergenz hängt von der betrachteten Topologie $\mathcal{T}$ auf X ab, und die ausführliche Schreibweise „$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ in $(X,\mathcal{T})$“ drückt dies aus. Wenn die Topologie aus dem Zusammenhang hervorgeht, dann ist die kürzere Schreibweise „$x_n \to a$“ bequemer.

Beispiele.
- In jedem metrischen Raum (X,d) ist Konvergenz bezüglich der Metrik d (C3A) und der Topologie $\mathcal{T}_d$ (D3I) gleichbedeutend dank $\mathcal{B}_a = \{\, B(a,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$.
- In $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit der Ordnungstopologie gilt die Konvergenz $x_n \to +\infty$ genau dann, wenn zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n > s$ für alle $n \geq m$ gilt. Entsprechend gilt $x_n \to -\infty$ genau dann, wenn zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n < s$ für alle $n \geq m$ gilt. Dies entspricht der üblichen Definition aus B2J.
- Im diskreten Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ ist $\{a\}$ offen und somit eine Umgebung von a. Hier konvergieren daher nur die schließlich konstanten Folgen, d.h. $x_n = a$ für alle $n \geq m$.
- Im indiskreten Raum $(X,\{\emptyset,X\})$ ist die Menge X die einzige Umgebung von a. Hier konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt. (Sie heißt daher auch *chaotische* Topologie.)
- In der koendlichen Topologie gilt $x_n \to a$ genau dann, wenn die Folge (x_n) jeden Wert $x \neq a$ nur endlich oft annimmt. Ist die Menge X unendlich und $n \mapsto x_n$ injektiv, dann konvergiert die Folge (x_n) gegen jeden Punkt aus X.
- In der koabzählbaren Topologie gilt $x_n \to a$ genau dann, wenn die Folge (x_n) schließlich konstant ist, also ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n = a$ für alle $n \geq m$ gilt.

Bemerkung. Unser Axiomensystem (O1–3) für Topologien ist sehr allgemein und daher für manche Aussagen noch zu schwach. Es führt zu einem ebenso allgemeinen aber recht schwachen Konvergenzbegriff, den man wohl noch nicht als befriedigend empfinden wird: Anders als in einem metrischen Raum kann eine Folge in einem topologischen Raum durchaus mehrere verschiedene Grenzwerte haben, wie obige Beispiele zeigen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D3g. Eindeutigkeit von Folgengrenzwerten. Konvergenz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ in $(X,\mathcal{T})$ ist eine Relation zwischen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Punkten a im Raum $(X,\mathcal{T})$. Die Schreibweise „$\lim x_n = a$“ ist mit Vorsicht zu verwenden: Sie suggeriert nämlich, man könne jeder Folge (x_n) genau einen Grenzwert „$\lim x_n$“ zuordnen. Ehrlicher wäre die Schreibweise als *Menge* $\operatorname{Lim} x_n = \{\, a \in X \mid x_n \to a \,\}$. Sie ist etwas schwerfällig, macht aber folgendes deutlich:

- Die Menge $\operatorname{Lim} x_n$ kann leer sein, nämlich wenn die Folge (x_n) gegen keinen der Punkte $a \in X$ konvergiert. Dies gilt zum Beispiel für die Folge $x_n = (-1)^n$ in $\mathbb{R}$.
- Die Menge $\operatorname{Lim} x_n$ der Grenzwerte kann auch mehrere Punkte enthalten. Extremes Beispiel: In der indiskreten Topologie konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt.

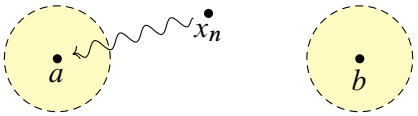
Bemerkung. Mit der Tatsache, dass manche Folgen nicht konvergieren, werden wir leben müssen. Metrische Vollständigkeit (§C4) löst das Problem zumindest für Cauchy–Folgen. Kompaktheit (Kapitel §F2) kann immerhin die Konvergenz einer Teilfolge garantieren.

Die zumeist unangenehme Situation, dass mehrere Grenzwerte existieren können, werden wir vermeiden wollen. Dies gelingt durch folgende topologische Bedingung:

Definition D3J. Wir nennen $(X,\mathcal{T})$ *hausdorffsch* (oder *separiert*), wenn zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X disjunkte Umgebungen existieren, also $a \in U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Verwechslungsgefahr. Die Begriffe *separiert* und *separabel* (D6L) haben rein gar nichts gemeinsam. Die sprachliche Nähe ist unglücklich, aber historisch gewachsen und nicht mehr zu ändern.

Beispiel. Jeder metrische Raum (X,d) ist hausdorffsch (C2O). Eine nicht-separierte Topologie ist demnach nicht metrisierbar, etwa die indiskrete Topologie (D1C). Ist umgekehrt jeder Hausdorff–Raum metrisierbar? So einfach ist es nicht, wie D4B zeigen wird.



Satz D3K. *Ist $(X,\mathcal{T})$ hausdorffsch, dann hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert. Die Umkehrung gilt, wenn $(X,\mathcal{T})$ das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA) erfüllt.*

BEWEIS. „$\Rightarrow$“: Sei $x_n \to a$ und $a \neq b$. Es existieren $U \in \mathcal{U}_a$ und $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \to a$ existiert $m \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq m$, also $x_n \notin V$, somit $x_n \not\to b$.

„$\Leftarrow$“: Seien a,b in $(X,\mathcal{T})$ nicht separiert, das heißt, je zwei Umgebungen von a und b schneiden sich. Ist $(X,\mathcal{T})$ erstabzählbar, so existieren gemäß D3H abzählbare Umgebungsbasen $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ von a und $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$ von b. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ können wir einen Punkt $x_n \in U_n \cap V_n$ wählen. Gemäß D3I folgt $x_n \to a$ und $x_n \to b$, also $a = b$. □

Auf das erste Abzählbarkeitsaxiom können wir in D3K nicht verzichten:

Beispiel. Für eine Menge X mit koabzählbarer Topologie $\mathcal{T}$ (D1I) ist jede konvergente Folge (x_n) schließlich konstant und der Grenzwert somit eindeutig. Ist X überabzählbar, dann ist $(X,\mathcal{T})$ nicht hausdorffsch. Der Folgenbegriff ist aber zu schwach, um dies zu erkennen. Dies gelingt mit dem allgemeineren Begriff des *Netzes* (D8D) oder des *Filters* (D8L).

Übung D3L. Ist zur total geordneten Menge $(X,<)$ die Ordnungstopologie $\mathcal{T}$ hausdorffsch?

✻ **D3L.** Ja. Beweis: Seien $a < b$ in $(X,<)$. Wenn es ein $z \in X$ mit $a < z < b$ gibt, so sind $a \in X_{<z} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>z} \in \mathcal{T}$ disjunkte offene Umgebungen; andernfalls genügen $a \in X_{<b} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>a} \in \mathcal{T}$.

§D3h. Eine Last der Epsilontik: kleiner oder kleiner-gleich? In den Anfängen der Analysis lernen Sie den Begriff der Konvergenz einer Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dieselbe Definition gilt in jedem metrischen Raum (X,d), siehe C3A.

Die Definition lässt sich in überraschend vielen äquivalenten Nuancen formulieren:

$$\begin{aligned}
(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,d) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; d(x_n,a) < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; d(x_n,a) \leq \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; d(x_n,a) < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; d(x_n,a) \leq \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in E \quad\;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; d(x_n,a) < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in E \quad\;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; d(x_n,a) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Für die letzten beiden Formulierungen sei $E \subset \mathbb{R}_{>0}$ eine Menge mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $\varepsilon \in E$ mit $0 < \varepsilon < \delta$. Das heißt, 0 ist Häufungspunkt von E. Mögliche Beispiele sind neben $E = \mathbb{R}_{>0}$ und $E = \mathbb{Q}_{>0}$ auch $E = \{ 1/k \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 1} \}$ oder $E = \{ 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \}$ oder $E = \{ \varepsilon_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ für jede Folge $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \to 0$.

Übung D3M. Zeigen Sie, dass die obigen Formulierungen äquivalent sind. Genauer: Was hat das mit Umgebungsbasen zu tun? Warum sind diese untereinander äquivalent?

Dies ist eine einfache und schöne Übung. Jede dieser sechs Formulierungen ist nützlich, je nach Kontext, daher ergibt es wenig Sinn, sich auf die eine „beste“ festlegen zu wollen. Jede definiert die Konvergenz mit Hilfe einer etwas anderen Umgebungsbasis, nämlich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_a^1 &= \{ B(a,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}, \quad \mathcal{B}_a^3 = \{ B(a,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \}, \quad \mathcal{B}_a^5 = \{ B(a,\varepsilon) \mid \varepsilon \in E \}, \\
\mathcal{B}_a^2 &= \{ \bar{B}(a,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}, \quad \mathcal{B}_a^4 = \{ \bar{B}(a,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \}, \quad \mathcal{B}_a^6 = \{ \bar{B}(a,\varepsilon) \mid \varepsilon \in E \}.
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass je zwei $\mathcal{B}_a^i$ und $\mathcal{B}_a^j$ in folgendem Sinne äquivalent sind: Zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{B}_a^i$ existiert eine Umgebung $V \in \mathcal{B}_a^j$ mit $U \supset V$, und umgekehrt. Für das Paar $(i,j) = (1,2)$, zum Beispiel, sehen wir $\bar{B}(a,\varepsilon) \supset B(a,\varepsilon) \supset \bar{B}(a,\varepsilon/2)$.

Wir könnten dies für alle Paare und alle erdenklichen Beispiele länglich durchrechnen. Die topologische Betrachtungsweise D3I schafft hier Ordnung und Vereinfachung:

$$\begin{aligned}
(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathscr{U}_a(X,\mathcal{T}) \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; x_n \in U \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_a \qquad\;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \;:\; x_n \in U
\end{aligned}$$

Die erste Zeile ist die Definition, kurz und gut formuliert mit *allen* Umgebungen. Außer der Topologie $\mathcal{T}$ ist nichts zu wählen: Die Konvergenz $(x_n) \to a$ in $(X,\mathcal{T})$ ist wohldefiniert.

Die zweite Zeile ist die äquivalente Umformulierung mit einer *beliebigen* Umgebungsbasis. Das beinhaltet insbesondere alle obigen Beispiele und noch viel verrücktere.

Die definierende Eigenschaft D3E der Umgebungsbasis stellt sicher, dass beide Aussagen äquivalent sind. Die zweite Formulierung ist daher unabhängig von der gewählten Umgebungsbasis. Insbesondere sind unsere sechs Beispiele untereinander äquivalent.

Bemerkung. Die Formulierung einer Definition ist eine Frage guten mathematischen Stils und der Denkökonomie: Anstatt paarweise alle $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ Äquivalenzen zu zeigen, genügen n Äquivalenzen zum festen Referenzobjekt $\mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})$. Letzteres sollte daher zur Definition dienen, alle anderen sind bequeme Umformulierungen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D3i. Stetigkeit und Offenheit in einem Punkt. Mit Hilfe des Umgebungsbegriffes lässt sich die Stetigkeit bzw. Offenheit einer Abbildung in einem Punkt lokalisieren:

Definition D3N. Sei $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume, $x \mapsto y$, sowie $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x = \mathcal{U}_x(X,\mathcal{T}_X)$ und $\mathcal{B}_y \subset \mathcal{U}_y = \mathcal{U}_y(Y,\mathcal{T}_Y)$ Umgebungsbasen.

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textit{stetig in } x \quad &:\iff \quad \forall V \in \mathcal{U}_y \,:\, f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \\ &\iff \quad \forall V \in \mathcal{B}_y \,:\, f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \\ f \text{ ist } \textit{offen in } x \quad &:\iff \quad \forall U \in \mathcal{U}_x \,:\, f(U) \in \mathcal{U}_y \\ &\iff \quad \forall U \in \mathcal{B}_x \,:\, f(U) \in \mathcal{U}_y \end{aligned}$$

Die Äquivalenzen folgen unmittelbar aus der Definition D3E von Umgebungsbasen.

Bemerkung. Für metrische Räume (X,d_X) und (Y,d_Y) erhalten wir:

(1) Genau dann ist $f : X \to Y$ stetig in $x \mapsto y$, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $f(B(x,\delta)) \subset B(y,\varepsilon)$ gilt.
(2) Genau dann ist $f : X \to Y$ offen in $x \mapsto y$, wenn zu jedem $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $B(y,\varepsilon) \subset f(B(x,\delta))$ gilt.

Mit den Umgebungsbasen aller offenen Umgebungen erhalten wir:

(3) Genau dann ist $f : X \to Y$ stetig, wenn f stetig in jedem Punkt $x \in X$ ist.
(4) Genau dann ist $f : X \to Y$ offen, wenn f offen in jedem Punkt $x \in X$ ist.

Für die Komposition von Abbildungen gilt unmittelbar nach Definition D3N:

(5) Ist $f : X \to Y$ stetig in x und $g : Y \to Z$ stetig in $f(x)$, so ist $g \circ f$ stetig in x.
(6) Ist $f : X \to Y$ offen in x und $g : Y \to Z$ offen in $f(x)$, so ist $g \circ f$ offen in x.

Definition D3O. Wir nennen $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ einen *lokalen Homöomorphismus um den Punkt* $x \in X$, wenn es offene Umgebungen $U \in \mathcal{U}_x^{\mathrm{o}}(X,\mathcal{T}_X)$ um x und $V \in \mathcal{U}_y^{\mathrm{o}}(Y,\mathcal{T}_Y)$ um $y = f(x)$ gibt, sodass $f(U) = V$ gilt und $f|_U^V : U \to V$ ein Homöomorphismus ist.

Wir nennen f einen *lokalen Homöomorphismus*, wenn dies in jedem Punkt $x \in X$ gilt.

Beispiele. • Jeder lokale Homöomorphismus ist insbesondere stetig und offen. (Übung!)

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist stetig. Sie ist offen in $x \neq 0$, aber nicht in $x = 0$. Um jedem Punkt $x \neq 0$ ist sie ein lokaler Homöomorphismus, jedoch nicht um $x = 0$. Die lokale Umkehrfunktion $\pm\sqrt{x}$ ist jeweils ein Zweig der reellen Wurzelfunktion.
- Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ ist stetig und offen, auch in $z = 0$. Um jeden Punkt $z \neq 0$ ist sie ein lokaler Homöomorphismus, nicht jedoch in $z = 0$. Die lokale Umkehrfunktion ist jeweils ein Zweig der komplexen Wurzelfunktion.
- Jeder Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist ein lokaler Homöomorphismus. Hingegen ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ein lokaler Homöomorphismus (§E2l), sogar ein lokaler $\mathscr{C}^\infty$–Diffeomorphismus, aber kein Homöomorphismus. Gleiches gilt für $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$; die lokale Umkehrfunktion ist jeweils ein Zweig des komplexen Logarithmus.
- Seien E, F Banach–Räume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, zum Beispiel $E = F = \mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$. Sei $X \subset E$ offen und $f : X \to F$ stetig differenzierbar. Genau dann ist f um x_0 ein lokaler Diffeomorphismus, wenn die Ableitung $f'(x_0) \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E,F)$ invertierbar ist (C5Q).

§D3j. Stetigkeit und Folgenkonvergenz. Die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ ist auf folgende Weise mit der Konvergenz von Folgen in X und Y verknüpft:

Satz D3P. *Wenn $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ in a stetig ist, dann bildet f jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ in $(X,\mathcal{T}_X)$ auf eine konvergente Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(a)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ab. Die Umkehrung gilt, wenn a in $(X,\mathcal{T})$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.*

BEWEIS. „⇒“: Sei V eine Umgebung von $f(a)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$. Dank der Stetigkeit von f ist dann $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in $(X,\mathcal{T}_X)$. Wegen $x_n \to a$ existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq m$. Daher gilt $f(x_n) \in V$ für alle $n \geq m$. Das bedeutet $f(x_n) \to f(a)$.

„⇐“: Ist f in a nicht stetig, so existiert eine Umgebung V von $f(a)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$, deren Urbild $U = f^{-1}(V)$ in $(X,\mathcal{T}_X)$ keine Umgebung von a ist. Sei $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ eine Umgebungsbasis von a. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $U_n \not\subset U$, denn andernfalls wäre U eine Umgebung von a. Wir wählen $x_n \in U_n \setminus U$ und erhalten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ gemäß D3I. Wegen $x_n \notin U$ gilt $f(x_n) \notin V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f(x_n) \not\to f(a)$. □

Dies veranlasst zu folgender Vereinbarung: Wir nennen f *folgenstetig*, wenn für jede konvergente Folge $x_n \to a$ in $(X,\mathcal{T}_X)$ die Bildfolge $f(x_n) \to f(a)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$ konvergiert.

Korollar D3Q. *Jede stetige Abbildung $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ ist folgenstetig. Die Umkehrung gilt, wenn $(X,\mathcal{T}_X)$ das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA) erfüllt.* □

Für erstabzählbare Räume, insbesondere metrische Räume, kann die Stetigkeit durch Folgenstetigkeit charakterisiert werden. Ohne das Abzählbarkeitsaxiom gelingt dies nicht:

Beispiel. Auf X betrachten wir die diskrete Topologie $\mathcal{T}$ (D1B) und die koabzählbare Topologie $\mathcal{T}'$ (D1I). Ist die Menge X überabzählbar, so gilt $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$ und die identische Abbildung $f : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ mit $x \mapsto x$ ist demnach nicht stetig. Sie ist jedoch folgenstetig: Konvergiert $x_n \to a$ in $(X,\mathcal{T}')$, so ist die Folge (x_n) konstant gleich a bis auf endlich viele Ausnahmen. Daher konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))$ in $(X,\mathcal{T})$ gegen $f(a)$.

In diesem Beispiel ist der Folgenbegriff zu schwach, um die Unstetigkeit zu erkennen. Dies gelingt mit dem allgemeineren Begriff des *Netzes* (D8C) oder des *Filters* (D8O).

§D3k. Folgenkonvergenz und Stetigkeit. Der folgende Raum gibt der Bezeichnung „$n \to \infty$“ einen Sinn. Wir ergänzen die Menge $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ um ein zusätzliches Element $\infty \notin \mathbb{N}$. Wir setzen $\mathbb{N} < \infty$ und betrachten die Ordnungstopologie (D1M):

$$\mathcal{T} = \big\{ U \subset \hat{\mathbb{N}} \,\big|\, \text{Wenn } \infty \in U, \text{ dann } \mathbb{N}_{\geq m} \subset U \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \big\}.$$

In diesem Beispiel sind alle Teilmengen $U \subset \mathbb{N}$ offen; auf $\mathbb{N}$ erhalten wir so die diskrete Topologie. Hingegen ist $U \subset \hat{\mathbb{N}}$ mit $\infty \in U$ genau dann offen, wenn U fast alle Punkte aus $\mathbb{N}$ enthält. Daher konvergiert die Folge $0,1,2,3,\dots$ gegen den Punkt ∞. Der Raum $(\hat{\mathbb{N}},\mathcal{T})$ ist homöomorph zu $\{1-2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ in $\mathbb{R}$, insbesondere also metrisierbar.

Proposition D3R. *Eine Abbildung $f : (\hat{\mathbb{N}},\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T}_X) : n \mapsto x_n$ ist genau dann stetig, wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Punkt x_∞ in $(X,\mathcal{T}_X)$ konvergiert.* □

Bemerkung. Wir nennen den Raum $(\hat{\mathbb{N}},\hat{\mathcal{T}})$ die *Einpunktkompaktifizierung* von $\mathbb{N}$. Dies ist zunächst nur ein Name, aber ein sprechender. Die Begriffe *Kompaktheit* (§F1) und *Kompaktifizierung* (§F4) werden wir später in Kapitel F ausführlich behandeln.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D3l. Häufungspunkte. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so entsteht eine *Teilfolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ aus einer streng wachsenden Folge von Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ in $\mathbb{N}$.

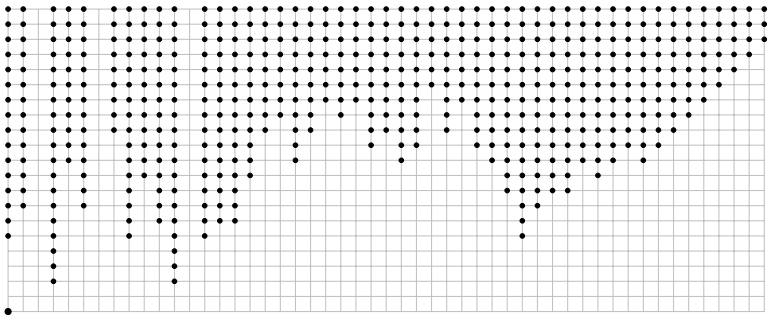
Satz D3s. *Wenn eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a in $(X,\mathcal{T})$ konvergiert, dann ist a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Umkehrung gilt, wenn a in $(X,\mathcal{T})$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.*

BEWEIS. Führen Sie dies als Übung aus! □

✻ **D3s.** „⇒“: Aus der Konvergenz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to a$ folgt, dass jede Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder x_n enthält, also ist a ein Häufungspunkt. „⇐“: Sei a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ eine Umgebungsbasis von a. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $x_{n_0} \in U_0$ gilt. Für jedes $k = 1,2,3,\dots$ wählen wir $n_k > n_{k-1}$ so, dass $x_{n_k} \in U_k$ gilt. Wir erhalten $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to a$.

Korollar D3T. *In jedem erstabzählbaren topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ gilt: Genau dann ist a Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge existiert mit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to a$.* □

§D3m. Der Arens–Fort–Raum. Auf die abzählbare Umgebungsbasis können wir in Satz D3S nicht verzichten. Das folgende frappierende Beispiel von Richard ARENS (1950) und Marion FORT (1955) zählt zu den universellen Gegenbeispielen der Topologie:



Übung D3U. Wir statten die Menge $X = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit folgender Topologie aus: Jede Menge U mit $(0,0) \notin U \subset X$ ist offen. Im Falle $(0,0) \in U \subset X$ verlangen wir, dass U in fast jeder Spalte fast alle Punkte enthält. (Wie üblich bedeutet „fast alle“ hier „alle bis auf endliche viele“.) Das heißt, $(\{m\}\times\mathbb{N}) \smallsetminus U$ ist endlich für alle bis auf endlich viele $m \in \mathbb{N}$. Alternativ erhalten wir eine Basis von Umgebungen $U(f) = \{\,(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid n \geq f(m)\,\} \cup \{(0,0)\}$ für alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, die fast überall endlich sind.

(1) Keine Folge in $X \smallsetminus \{(0,0)\}$ konvergiert gegen den Punkt $(0,0)$.
(2) Dennoch ist $(0,0)$ Häufungspunkt einer Folge in $X \smallsetminus \{(0,0)\}$.
(3) Die Menge X ist abzählbar, aber der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist nicht erstabzählbar (D3S).
(4) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist zwar hausdorffsch, aber dennoch nicht metrisierbar (D3G).

✻ **D3U.** (1) Angenommen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X \smallsetminus \{(0,0)\}$ konvergiert gegen $(0,0)$. Liegen unendlich viele Folgenglieder in einer Spalte $\{m\}\times\mathbb{N}$, so betrachten wir die offene Umgebung $\{(0,0)\} \cup (X \smallsetminus (\{m\}\times\mathbb{N}))$ des Punktes $(0,0)$: Diese enthält unendlich viele Folgenglieder nicht, also gilt nicht $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0)$. Folglich liegen in jeder Spalte $\{m\}\times\mathbb{N}$ nur endlich viele Folgenglieder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit ist $X \smallsetminus \{\,x_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ eine offene Umgebung von $(0,0)$, die kein einziges Folgenglied enthält, also gilt nicht $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0)$.

(2) Sei $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} X \smallsetminus \{(0,0)\} : n \mapsto x_n$ eine Abzählung der Menge $X \smallsetminus \{(0,0)\}$. Jede Umgebung U von $(0,0)$ ist eine unendliche Menge, enthält also unendlich viele Folgenglieder x_n. Somit ist $(0,0)$ ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dennoch gibt es keine Teilfolge, die gegen $(0,0)$ konvergiert.

§D3n. Konstruktion einer Topologie aus vorgegebenen Umgebungsbasen. Oft ist es bequem, eine gewünschte Topologie durch Angabe von Umgebungsbasen zu definieren, so zum Beispiel für metrische Räume (D1D) oder Ordnungstopologien (D1M) oder Funktionenräume (§D4). Der folgende Satz erklärt, welche Bedingungen dabei zu beachten sind:

Satz D3V. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zu jedem Punkt $x \in X$ sei $\mathcal{B}_x \subset \mathscr{U}_x(\mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis von x in $(X,\mathcal{T})$. Diese erfreuen sich folgender Eigenschaften:*

(UB1) Es gilt $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$, und für alle $U \in \mathcal{B}_x$ gilt $x \in U \subset X$.
(UB2) Zu $U,V \in \mathcal{B}_x$ existiert $W \in \mathcal{B}_x$, sodass $W \subset U \cap V$.
(UB3) Jede Umgebung enthält eine offene Umgebung: Zu jedem $U \in \mathcal{B}_x$ existiert $V \subset U$ mit $x \in V$, sodass gilt: Zu jedem Punkt $y \in V$ existiert $W \in \mathcal{B}_y$ mit $W \subset V$.

Erfüllt umgekehrt eine beliebige Familie $(\mathcal{B}_x)_{x\in X}$ von Mengensystemen $\mathcal{B}_x \subset \mathfrak{P}(X)$ die Bedingungen (UB1–2), dann definiert dies auf der Menge X eine Topologie

$$\mathcal{T} := \big\{\, O \subset X \;\big|\; \forall x \in O \;\; \exists U \in \mathcal{B}_x \;:\; U \subset O \,\big\}.$$

Bedingung (UB3) bedeutet $\mathcal{B}_x \subset \mathscr{U}_x(\mathcal{T})$, somit ist $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis von x in $(X,\mathcal{T})$.

BEWEIS. Ist $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis von x in $(X,\mathcal{T})$, dann folgen die Eigenschaften (UB1–3) unmittelbar aus der Definition. Nehmen wir umgekehrt an, die Familie $(\mathcal{B}_x)_{x\in X}$ erfüllt (UB1–2). Das Mengensystem $\mathcal{T}$ erfüllt dann (O1) dank (UB1). Für (O2) ist nachzuweisen, dass für alle $U,V \in \mathcal{T}$ auch der Durchschnitt $W = U \cap V$ in $\mathcal{T}$ liegt. Zu jedem $x \in W$ existieren $U_x, V_x \in \mathcal{B}_x$ mit $U_x \subset U$ und $V_x \subset V$. Dank (UB2) existiert $W_x \in \mathcal{B}_x$ mit $W_x \subset U_x \cap V_x \subset U \cap V = W$. Also gilt $W \in \mathcal{T}$. Axiom (O3) ist trivialerweise erfüllt. □

Beispiel D3W. Jede Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ definiert eine Topologie $\mathcal{T}_d$ wie folgt (D1D): Als Umgebungsbasis des Punktes $x \in X$ wählen wir hier $\mathcal{B}_x = \{\, B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$.

Die Bedingung (UB1) ist trivialerweise erfüllt, und (UB2) gilt dank

$$B(x,\varepsilon) \cap B(x,\varepsilon') = B(x,\min\{\varepsilon,\varepsilon'\}).$$

Dies definiert die Topologie $\mathcal{T}_d = \{\, O \subset X \mid \forall x \in O \;\; \exists B(x,\varepsilon) \in \mathcal{B}_x : B(x,\varepsilon) \subset O \,\}$. Dank Dreiecksungleichung ist jeder offene Ball offen (C2M), somit gilt auch Bedingung (UB3).

Beispiel D3X. Jede Totalordnung $<$ auf X definiert eine Topologie $\mathcal{T}_<$ wie folgt (D1M): Als Umgebungsbasis des Punktes $x \in X$ wählen wir $\mathcal{B}_x = \{\,]a,b[\mid a,b \in \hat{X},\ a < x < b \,\}$.

Die Bedingungen (UB1) und (UB3) sind trivialerweise erfüllt, und (UB2) gilt dank

$$]a,b[\cap]a',b'[=]\max\{a,a'\},\min\{b,b'\}[.$$

Dies definiert die Topologie $\mathcal{T}_< = \{\, O \subset X \mid \forall x \in O \;\; \exists]a,b[\in \mathcal{B}_x :]a,b[\subset O \,\}$.

Beispiel. Ohne (UB3) können wir nicht $\mathcal{B}_x \subset \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T})$ sicherstellen: Für $X = \{a,b,c\}$ betrachte man $\mathcal{B}_a = \{\{a,b\}\}$, $\mathcal{B}_b = \{\{b,c\}\}$, $\mathcal{B}_c = \{\{c,a\}\}$. Diese erfüllen (UB1–2) und definieren die indiskrete Topologie. Es gilt nicht (UB3) und $\mathcal{B}_x$ ist keine Umgebungsbasis.

Bemerkung D3Y. Seien $(\mathcal{B}_x)_{x\in X}$ und $(\mathcal{B}'_x)_{x\in X}$ Umgebungsbasen mit (UB1–3) wie oben sowie $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ die zugehörigen Topologien auf X. Genau dann gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, das heißt $\mathcal{T}'$ ist feiner als $\mathcal{T}$, wenn zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{B}_x$ eine Umgebung $U' \in \mathcal{B}'_x$ mit $U' \subset U$ existiert. Entsprechend gilt die Gleichheit $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, wenn zu jedem $U \in \mathcal{B}_x$ ein $U' \in \mathcal{B}'_x$ mit $U' \subset U$ existiert, und umgekehrt zu jedem $U' \in \mathcal{B}'_x$ ein $U \in \mathcal{B}_x$ mit $U \subset U'$ existiert. Zur Illustration betrachte man noch einmal die ℓ^p–Bälle in Abbildung C:1 und Aufgabe C3K.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D4. Anwendung auf Funktionenräume

§D4a. Funktionenräume. In der Topologie stellt man sich für gewöhnlich Umgebungen vor als Umgebungen von Punkten in der Ebene, oder vielleicht in einem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Das ist für viele Zwecke tatsächlich eine sinnfällige Illustration. Die Topologie umfasst aber auch viel allgemeinere Situationen: Erste Beispiele von (normierten bzw. metrisierten) Funktionenräumen haben wir in Kapitel C gesehen.

Wir greifen im Folgenden drei prominente Beispiele aus der Analysis auf: punktweise, gleichmäßige und kompakte Konvergenz. Diese illustrieren die topologische Sichtweise der Funktionalanalysis: Hier betrachtet man Funktionenräume, etwa die Menge $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller reellen Funktionen oder geeignete Teilräume hiervon. Jeder „Punkt“ $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sich eine Umgebung von f im Raum aller Funktionen vorzustellen, ist keine leichte Aufgabe, weil sie eine gewisse Abstraktion voraussetzt. Aber es lohnt sich, gerade hieran Anschauung und Werkzeuge zu schärfen.

§D4b. Punktweise Konvergenz. Als erste Anwendung unserer topologischen Werkzeuge möchte ich einen topologischen Raum erläutern, der in der Analysis natürlich auftritt.

Seien $f_0, f_1, f_2, \ldots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen f, wenn $f_n(x) \to f(x)$ für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt. In Quantorenschreibweise:

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ punktweise} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : \ f_n(x) \to f(x) \\ \Leftrightarrow \quad &\forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ \ \exists m \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \ : \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Auf der Menge $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ möchten wir die hierzu passende *Topologie der punktweisen Konvergenz* definieren. Dies gelingt wie folgt:

Zu $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die (x,ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f;x,\varepsilon) := \big\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, |f(x) - g(x)| < \varepsilon \big\}.$$

Das ist hier der richtige Umgebungsbegriff, denn punktweise Konvergenz $f_n \to f$ bedeutet: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ enthält die Umgebung $U(f;x,\varepsilon)$ schließlich alle Folgenglieder f_n, d.h. es existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$, sodass $f_n \in U(f;x,\varepsilon)$ für alle $n \geq m$ gilt.

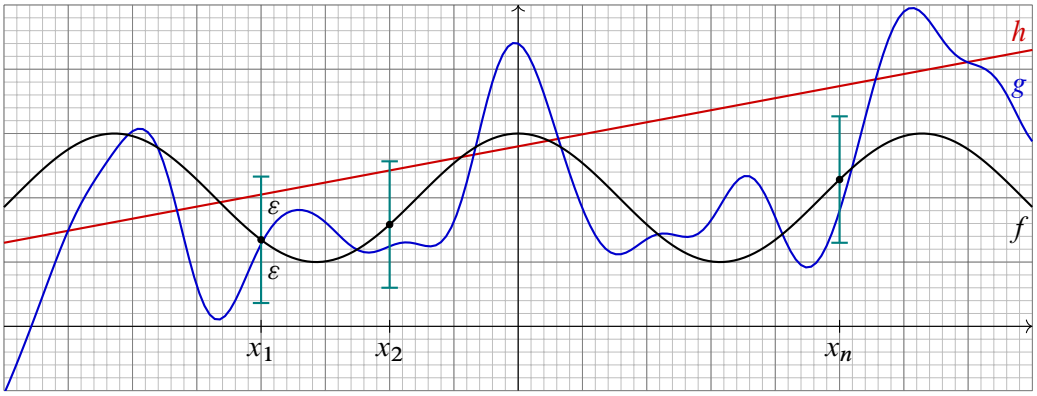


ABBILDUNG D:2. Die Umgebung $U(f;J,\varepsilon)$ von f für $J = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Hier gilt zwar (UB1,3), aber nicht (UB2). Die Umgebungen $U(f;x,\varepsilon)$ bilden noch keine Umgebungsbasis: Hierzu müssen wir auch endliche Durchschnitte kontrollieren.

Zu $J=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subset\mathbb{R}$ und $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die (J,ε)–Umgebung

$$U(f;J,\varepsilon) := \big\{\, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\big|\; |f(x)-g(x)|<\varepsilon \text{ für alle } x\in J \,\big\} = \bigcap\nolimits_{x\in J} U(f;x,\varepsilon).$$

Diese Umgebungen erfüllen nun sowohl (UB1,3) als auch (UB2), denn

$$U(f;J,\varepsilon)\ \cap\ U(f;J',\varepsilon') \quad\supset\quad U(f;\ J\cup J',\ \min\{\varepsilon,\varepsilon'\}).$$

Definition D4A. Die Umgebungen $U(f;J,\varepsilon)$ definieren gemäß D3V auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ der *punktweisen Konvergenz*: Genau dann ist eine Menge $O\subset\mathbb{R}^\mathbb{R}$ offen, wenn sie mit jedem $f\in O$ eine Umgebung $U(f;J,\varepsilon)$ enthält. Als Formel ausgeschrieben heißt das:

$$\mathcal{T}_{\text{pw}} = \big\{\, O\subset\mathbb{R}^\mathbb{R} \;\big|\; \forall\, f\in O\ \ \exists J=\{x_1,\dots,x_n\}\subset\mathbb{R}\ \ \exists\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\ :\ U(f;J,\varepsilon)\subset O \,\big\}$$

Man mag sich wundern, ob diese etwas umständliche Beschreibung für die Topologie der punktweisen Konvergenz (D4A) wirklich nötig ist, oder ob man diese Topologie auch bequemer erzeugen kann, etwa durch eine geeignete Metrik. Dies ist nicht der Fall, denn die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ wird von keiner Metrik induziert:

Satz D4B. *Die Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ist hausdorffsch, aber nicht erstabzählbar, also nicht metrisierbar. Dasselbe gilt für $\mathbb{R}^\mathbb{R}\supset\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\supset\mathbb{R}[X]$.*

BEWEIS. Sind $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verschiedene Funktionen, $f\neq g$, so existiert $x_0\in\mathbb{R}$ mit $f(x_0)\neq g(x_0)$. Für $\varepsilon=\frac{1}{2}|f(x_0)-g(x_0)|>0$ gilt dann $U(f;x_0,\varepsilon)\cap U(g;x_0,\varepsilon)=\emptyset$.

Seien $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Umgebungen von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Umgebungsbasis von f ist. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt $U_n\supset U(f;J_n,\varepsilon_n)$ mit $J_n\subset\mathbb{R}$ endlich und $\varepsilon_n\in\mathbb{R}_{>0}$. Somit ist $J=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}J_n\subset\mathbb{R}$ abzählbar, aber $\mathbb{R}$ überabzählbar (B2N), also $J\neq\mathbb{R}$. Wir wählen $x_0\in\mathbb{R}\smallsetminus J$. Zu $n\in\mathbb{N}$ sei $g_n=f+h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $|h_n(x_0)|\geq 1$ und $h_n|_{J_n}=0$. Dann gilt $g_n\in U(f;J_n,\varepsilon_n)\subset U_n$, aber $g_n\notin U(f;x_0,1)$, also $U_n\not\subset U(f;x_0,1)$. □

Bemerkung. Das Beispiel der punktweisen Konvergenz ist einfach aber lehrreich. Es lohnt sich, den raffinierten Beweis genau zu verstehen und hieran unsere Anschauung zu schulen. In der Umgebung $U(f;x_0,1)$ kontrollieren wir die Funktionswerte nur im Punkt x_0. In allen anderen Punkten $x\neq x_0$ hingegen gilt keinerlei Einschränkung. Ebenso kontrollieren wir in jeder Umgebung $U(f;J_n,\varepsilon_n)$ nur die Funktionswerte in den Punkten $x\in J_n$.

Bemerkung. Ebenso können wir Funktionen $f:X\to\mathbb{R}$ auf einer beliebigen Menge X betrachten und den Raum $\mathbb{R}^X$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Diese ist nicht erstabzählbar sobald X überabzählbar ist. Für $X=\{1,\dots,n\}$ erhalten wir den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, für $X=\mathbb{N}$ erhalten wir $\mathbb{R}^\mathbb{N}$: Beide sind erstabzählbar, sogar metrisierbar (E4V)

Wäre der Raum $(\mathbb{R}^\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{pw}})$ metrisierbar durch irgendeine Metrik d, dann gäbe es für jede Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine abzählbare Umgebungsbasis, etwa $U_n=B(f,1/n)\in\mathcal{T}_{\text{pw}}$. Das ist hier jedoch nicht möglich: Der Raum ist hierfür „zu groß“, denn in der Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ besitzt f zu viele Umgebungen, um das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen zu können.

Die Ursache liegt dabei nicht allein in der Trägermenge: Diese ist zwar groß, dennoch gibt es hierauf vernünftige „kleine“ Topologien, wie etwa die beiden nachfolgend erklärten.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D4c. Gleichmäßige Konvergenz. Eine Folge reeller Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \geq m$ gilt. Letzteres bedeutet in der Supremumsmetrik (C2H) gerade $|f - f_n|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq m$.

Gleichmäßige Konvergenz bedeutet also Konvergenz bezüglich der Supremumsmetrik:

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad &:\Leftrightarrow \quad |f - f_n|_{\mathbb{R}} \to 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \ \forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir daher die ε–Umgebung von $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f, \varepsilon) := \big\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, |f - g|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \big\}.$$

Dies ist der ε–Ball um f in der Supremumsmetrik. Diese Umgebungen erfüllen die Bedingungen (UB1–3), insbesondere gilt (UB2) dank $U(f, \varepsilon) \cap U(f, \varepsilon') = U(f, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\})$.

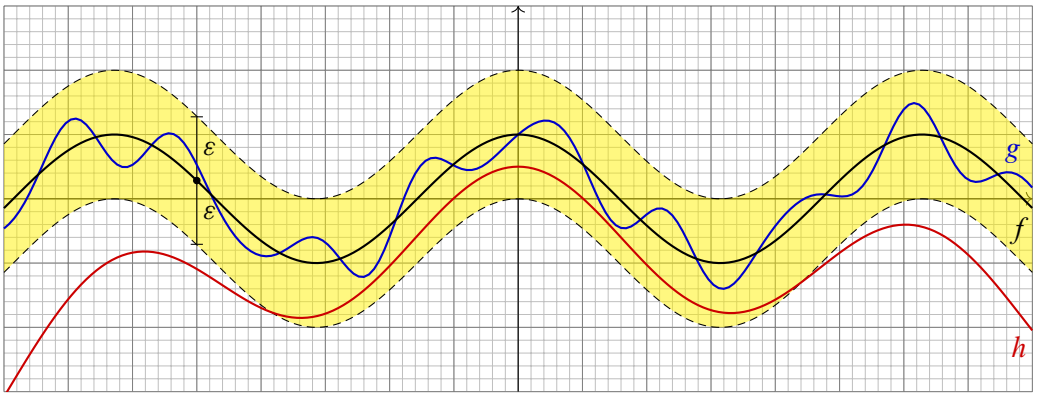


ABBILDUNG D:3. Die Umgebung $U(f, \varepsilon)$ einer Funktion f

Definition D4c. Die Umgebungen $U(f, \varepsilon)$ definieren gemäß D3v auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ der *gleichmäßigen Konvergenz*: Genau dann ist eine Menge $O \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f, \varepsilon)$ enthält. Als Formel ausgeschrieben:

$$\mathcal{T}_{\text{uni}} = \big\{ O \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\big|\, \forall f \in O \ \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ : \ U(f, \varepsilon) \subset O \big\}$$

Bemerkung. Im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ metrisierbar, nach Konstruktion nämlich durch die Supremumsmetrik (C2H). Die naheliegende Lösung ist, $d : X \times X \to [0, \infty]$ zu definieren durch

$$d(f, g) = |f - g|_{\mathbb{R}} = \sup\big\{ |f(x) - g(x)| \,\big|\, x \in \mathbb{R} \big\}.$$

Das Supremum ist im Allgemeinen nicht endlich, zum Beispiel für $f(x) = 0$ und $g(x) = x$, weshalb wir bei Metriken den Wert ∞ zulassen. Will man dies vermeiden, so geht man zur gestutzten Metrik $|a - b|^* = \min\{ |a - b|, 1 \}$ über (siehe C3L):

$$d^*(f, g) = |f - g|^*_{\mathbb{R}} = \sup\big\{ |f(x) - g(x)|^* \,\big|\, x \in \mathbb{R} \big\}.$$

Man prüft unmittelbar nach, dass d, d^* Metriken auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind und $\mathcal{T}_{\text{uni}} = \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d^*}$ gilt.

§D4d. Kompakte Konvergenz. Eine Folge reeller Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvergiert kompakt* gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn auf jedem kompakten Intervall $K = [-r, r]$ gleichmäßige Konvergenz $f_n|_K \to f|_K$ vorliegt. In Quantorenschreibweise formulieren wir dies so:

$$f_n \to f \text{ kompakt} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f - f_n|_{[-r,r]} \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall r \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}\ \forall x \in [-r, r] : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

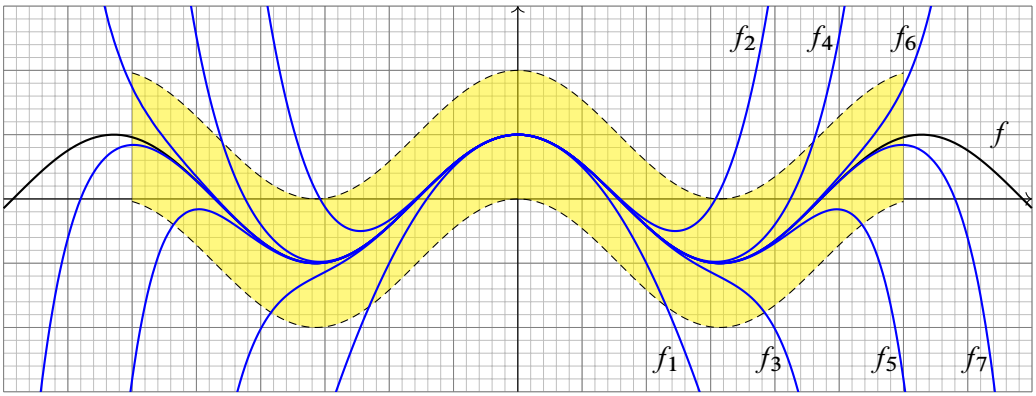


ABBILDUNG D:4. Kompakte aber nicht gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R}$. Gelb: Die Umgebung $U(f; K, \varepsilon)$ von f für $K = [-6, 6]$ und $\varepsilon = 1$.

Dies ist insbesondere für Potenzreihen der angemessene Konvergenzbegriff (C5F): In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Exponentialreihe, ebenso Sinus und Cosinus:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Konvergenz gilt hierbei punktweise in jedem $x \in \mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$! Abbildung D:4 illustriert dies drastisch: Die Polynome $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}/(2k)!$ konvergieren in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x) = \cos(x)$. Sie konvergieren aber nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn f ist beschränkt, f_n für $n \geq 1$ nicht! Also gilt $|f - f_n|_{\mathbb{R}} = \infty \not\to 0$. Hingegen konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig auf jedem Intervall $[-r, r]$, siehe C5F.

Punktweise Konvergenz allein wäre hier also zu schwach, gleichmäßige Konvergenz hingegen zu stark. Die kompakte Konvergenz ist der passende Kompromiss und erweist sich als wichtiges Konzept. Man nennt die kompakte Konvergenz auch *gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum* oder bei lokaler Kompaktheit auch *lokal-gleichmäßige Konvergenz*.

Auf der Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definieren wir die *Topologie der kompakten Konvergenz* wie folgt.

Für $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir das kompakte Intervall $K = [-r, r]$ und definieren die (K, ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f; K, \varepsilon) := \big\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, |f - g|_K < \varepsilon \big\}$$

wie in Abbildung D:4 skizziert. Diese Umgebungen erfüllen (UB1–3), denn

$$U(f; K, \varepsilon) \cap U(f; K', \varepsilon') \quad \supset \quad U(f;\ K \cup K',\ \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Damit können wir D3V anwenden und eine Topologie konstruieren:

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Definition D4D. Die Umgebungen $U(f;K,\varepsilon)$ definieren gemäß D3V auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ der *kompakten Konvergenz*: Genau dann ist eine Menge $O \subset \mathbb{R}^\mathbb{R}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f;K,\varepsilon)$ enthält. Als Formel ausgeschrieben:

$$\mathcal{T}_{\text{kpkt}} = \left\{ O \subset \mathbb{R}^\mathbb{R} \;\middle|\; \forall\, f \in O \;\; \exists r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;:\; U(f;[-r,r],\varepsilon) \subset O \right\}$$

Diese Topologie ist für Abbildungsräume grundlegend und für viele Fragen das richtige Werkzeug. Wir werden sie später zur *Kompakt-Offen-Topologie* (§F7) verallgemeinern.

Bemerkung. Die gleichmäßige Konvergenz erhält die Stetigkeit dank Satz C3Q. Da dies eine lokale Eigenschaft ist, gilt dasselbe für die kompakte Konvergenz. (Warum?)

Bemerkung. Die Umgebung $U(f;K,\varepsilon)$ kontrolliert die Funktionswerte auf der Menge $K \subset \mathbb{R}$. Das ähnelt den vorigen Konstruktionen: Bei punktweiser Konvergenz betrachten wir endliche Mengen $K = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, bei gleichmäßiger Konvergenz hingegen $K = \mathbb{R}$; ersteres ist meist zu schwach, letzteres meist zu stark. Die kompakte Konvergenz betrachtet daher kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}$, und zur Vereinfachung können wir hierzu gleich kompakte Intervalle $K = [-r,r]$ heranziehen, es genügt sogar $r \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

§D4e. Die kompakte Konvergenz auf $\mathbb{R}$ ist metrisierbar, aber nicht normierbar.

Die Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ der punktweisen Konvergenz ist nicht metrisierbar (D4B). Die Topologie $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ der gleichmäßigen Konvergenz hingegen ist metrisierbar unmittelbar durch Konstruktion, im Falle beschränkter Funktionen sogar normierbar. Die Topologie $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ der kompakten Konvergenz liegt dazwischen: Sie ist metrisierbar aber nicht normierbar!

Für jeden Radius $r \in \mathbb{N}$ ist die gleichmäßige Konvergenz auf $[-r,r]$ metrisierbar durch

$$d_r(f,g) = |f-g|^*_{[-r,r]} = \sup\left\{ |f(x)-g(x)|^* \;\middle|\; x \in [-r,r] \right\} \quad \in \quad [0,1].$$

Wir nutzen hier die gestutzte Metrik $|a-b|^* = \min\{|a-b|, 1\}$ aus C3L. Für Funktionen $f,g : [-r,r] \to \mathbb{R}$ ist dies eine Metrik, für $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedoch nur eine Halbmetrik (C2B).

Satz D4E. *Die Halbmetriken $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fassen wir zusammen zu*

$$d \;:\; \mathbb{R}^\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\mathbb{R} \to [0,1] \;:\; d(f,g) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} d_k(f,g).$$

Dies ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, und es gilt $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\text{kpkt}}$.

Es lohnt sich, diese Erkenntnis als Satz D4G allgemein zu formulieren und zu beweisen.

Wir haben die Topologien $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ und $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ und $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ zunächst auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachtet. Dieselben Definitionen ergeben Topologien auf dem Teilraum $\ell^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der beschränkten Funktionen, dem Teilraum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der beschränkten stetigen Funktionen, dem Teilraum $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$, sowie dem Teilraum $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

In Kapitel C haben wir auf Funktionenräumen auch Normen kennen und schätzen gelernt. Man mag sich daher fragen, ob die kompakte Konvergenz auch von einer geeigneten Norm erzeugt wird. Immerhin wird sie auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ induziert durch die abzählbare Familie der Halbnormen $|-|_{[-k,k]}$ mit $k \in \mathbb{N}$; einen Vektorraum mit einer so gestalteten Topologie nennt man *Fréchet–Raum*. Interessanterweise gibt es auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ keine einzelne Norm die dies leistet (D4F). Die Komplexität der oben konstruierten Metrik ist also kein Artefakt unserer (eventuell ungeschickten) Beweisführung, sondern naturgegeben.

Übung D4F. Wir haben drei Topologien $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ und $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ und $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ konstruiert. Zur Einübung der Begriffe und Techniken beweise man ihre grundlegenden Eigenschaften:

(0) Die punktweise Konvergenz $f_n \to f$ ist äquivalent zu $f_n \to f$ bezüglich $\mathcal{T}_{\text{pw}}$.
(1) Es gelten die strikten Inklusionen $\mathcal{T}_{\text{pw}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{kpkt}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{uni}}$ (von gröber zu feiner).
Wenn $f_n \to f$ punktweise konvergiert und alle f_n stetig sind, gilt dies auch für f?
Überträgt sich Stetigkeit bei gleichmäßiger bzw. kompakter Konvergenz?
(2) Wur haben $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supset \ell^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset \mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supset \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset \mathbb{R}[x]$.
Für welche dieser Räume ist die punktweise Konvergenz metrisierbar? normierbar?
Für welche Räume ist die gleichmäßige Konvergenz metrisierbar? normierbar?
Für welche Räume ist die kompakte Konvergenz metrisierbar? normierbar?

✻ **D4F.** (0) Wir rechnen dies für die punktweise Konvergenz nach; gleichmäßig und kompakt sind klar.

„⇒“: Angenommen, es liegt punktweise Konvergenz $f_n \to f$ vor, das heißt, zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $m(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq m(x,\varepsilon)$. Zu $J = \{x_1,\dots,x_\ell\} \subset \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ setzen wir $m := \max\{m(x_1,\varepsilon),\dots,m(x_\ell,\varepsilon)\}$ und erhalten $f_n \in U(f;J,\varepsilon)$ für alle $n \geq m$. Gemäß D3I gilt also $f_n \to f$ bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$. „⇐“: Angenommen, es gilt $f_n \to f$ bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$. Das heißt, für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ enthält die Umgebung $U(f;x,\varepsilon)$ schließlich alle Folgenglieder. Demnach existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq m$. Das bedeutet $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(1) Jede endliche Menge $J = \{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{R}$ liegt in einem kompakten Intervall $K = [-r,r]$, etwa für $r = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$. Daher gilt $U(f;J,\varepsilon) \supset U(f;K,\varepsilon) \supset U(f,\varepsilon)$. Für die erzeugten Topologien gilt daher $\mathcal{T}_{\text{pw}} \subset \mathcal{T}_{\text{kpkt}} \subset \mathcal{T}_{\text{uni}}$. Anderseits ist $U(f;K,\varepsilon)$ offen bezüglich $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$, aber $U(f;J,\delta) \not\subset U(f;K,\varepsilon)$ für alle $J = \{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Dies zeigt $\mathcal{T}_{\text{pw}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{kpkt}}$. Ebenso ist die Umgebung $U(f,\varepsilon)$ offen bezüglich $\mathcal{T}_{\text{uni}}$, aber $U(f;K,\delta) \not\subset U(f,\varepsilon)$ für alle $K = [-r,r] \subset \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Dies zeigt $\mathcal{T}_{\text{kpkt}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{uni}}$.

Die stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren punktweise gegen die unstetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$. Will man Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so setze man fort durch $f_n(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f_n(x) = 1$ für $x \geq 1$. (Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, denn $|f_n - f|_{\mathbb{R}} = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.) Die gleichmäßige Konvergenz hat wesentlich bessere Eigenschaften, siehe C3Q: Konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig und sind alle f_n stetig, so auch die Grenzfunktion f. Die kompakte Konvergenz erbt dies, denn Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft, und lokal ist die Konvergenz hier gleichmäßig.

(2) Die punktweise Konvergenz ist selbst auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nicht metrisierbar, da nicht erstabzählbar. Der Beweis von Satz D4B verläuft hier wörtlich genauso. Der Nachweis von $U(f;J_n,\varepsilon_n) \not\subset U(f;x_0,1)$ gelingt durch Konstruktion von $h_n \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $|h_n(x_0)| \geq 1$ und $h_n|_{J_n} = 0$. Die Funktion $g_n = f + h_n$ erfüllt dann $g_n \in U(f;J_n,\varepsilon_n) \subset U_n$ aber $g_n \notin U(f;x_0,1)$. Dasselbe gilt für den Raum $\mathbb{R}[x]$ der Polynomfunktionen; die Konstruktion einer geeigneten Funktion $h_n \in \mathbb{R}[x]$ gelingt mit Lagrange–Polynomen (B5R).

Nach Definition D4C ist die gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ metrisierbar durch die Supremumsmetrik (C2H). Auf $\ell^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist sie sogar normierbar durch die Supremumsnorm (C1L). Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ oder sogar $\mathbb{R}[x]$ ist dies hingegen nicht möglich: Angenommen, $\|-\| : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ wäre eine solche Norm. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ gilt dann $\|f\| < \infty$, also konvergiert die Folge $f_n = f/n$ gegen 0 bezüglich der Norm aber nicht gleichmäßig.

Die Metrisierbarkeit der kompakten Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ folgt aus Satz D4E, den wir nachfolgend in D4G allgemein ausführen. Hingegen ist die kompakte Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nicht normierbar! Selbst auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$: Angenommen, $\|-\| : \mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ wäre eine Pseudonorm für die kompakte Konvergenz. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine stetige Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n \neq 0$ und Träger in $[n-1,n+1]$. Dann gilt $\|f_n\| \neq 0$ und nach Skalierung können wir $\|f_n\| \geq 1$ annehmen. Nach Konstruktion gilt $f_n \to 0$ kompakt, aber $\|f_n\| \not\to 0$.

Selbst auf dem Raum $\mathbb{R}[x]$ der Polynomfunktionen ist die kompakte Konvergenz nicht normierbar. Wir benötigen hier ein etwas raffinierteres Argument. Angenommen, $\|-\| : \mathbb{R}[x] \to [0,\infty]$ wäre eine Pseudonorm für die kompakte Konvergenz. Dies ist eine Norm, das heißt für jede Polynomfunktion $f \in \mathbb{R}[x]$ gilt $\|f\| < \infty$, denn $2^{-n} f \to 0$ kompakt, also $\|2^{-n} f\| = 2^{-n}\|f\| \to 0$, somit $\|f\| < \infty$. Wir betrachten nun $f_n(x) = a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ und bestimmen $a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\|f_n\| = 1$ gilt. Wegen $\|f_n\| \not\to 0$ gilt nicht kompakte Konvergenz, $f_n \not\to 0$, das heißt, es gibt ein Intervall $[-r,r] \subset \mathbb{R}$ mit $|f_n|_{[-r,r]} = a_n r^n \not\to 0$. Für $g_n = f_n/2^n$ gilt $\|g_n\| = 1/2^n \to 0$, aber $|g_n|_{[-2r,2r]} = a_n r^n \not\to 0$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§D4f. Uniformisierung und Metrisierung.** Sei $D = (d_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbmetriken $d_i : X \times X \to [0,\infty]$ auf einer gemeinsamen Menge X. Eine *Halbmetrik* erfüllt Positivität (M0), Symmetrie (M2) und Dreiecksungleichung (M3), aber nicht notwendig Definitheit (M1). Mit D wollen wir eine Topologie $\mathcal{T}_D$ auf X konstruieren. ☜

Zu $i \in I$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ haben wir den offenen d_i–Ball

$$U(a;i,\varepsilon) := \big\{\, x \in X \;\big|\; d_i(x,a) < \varepsilon \,\big\} = B_i(a,\varepsilon).$$

Diese Umgebungen sind noch keine Umgebungsbasis: Zwar gilt (UB1,3) aber im Allgemeinen nicht (UB2). Für jede endliche Menge $J \subset I$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir daher

$$U(a;J,\varepsilon) := \big\{\, x \in X \;\big|\; d_i(x,a) < \varepsilon \text{ für alle } i \in J \,\big\} = \bigcap\nolimits_{i\in J} B_i(a,\varepsilon).$$

Diese Umgebungen erfüllen nun sowohl (UB1,3) als auch (UB2), denn es gilt

$$U(a;J,\varepsilon) \cap U(a;J',\varepsilon') \quad\supset\quad U(a;\, J\cup J',\, \min\{\varepsilon,\varepsilon'\}).$$

Dank Satz D3v erhalten wir so zu $D = (d_i)_{i\in I}$ die Topologie

$$\mathcal{T}_D = \big\{\, O \subset X \;\big|\; \forall a \in O \;\; \exists J \subset I \text{ endlich } \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,:\, U(a;J,\varepsilon) \subset O \,\big\}.$$

☞ **Beispiele.** Diese elegante Konstruktion fasst alle bisherigen Beispiele zusammen: ☜

- Für die gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R}$ reicht hier eine Metrik $d(f,g) = |f-g|_{\mathbb{R}}$.
- Punktweise Konvergenz auf $\mathbb{R}$ entspricht $d_x(f,g) = |f(x)-g(x)|$ für $x \in \mathbb{R}$.
- Kompakte Konvergenz auf $\mathbb{R}$ entspricht $d_k(f,g) = |f-g|_{[-k,k]}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Für die kompakte Konvergenz einer komplexen Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ betrachten wir den Konvergenzradius $\rho \in [0,\infty]$. Die gleichmäßige Konvergenz auf dem Ball $\bar{B}(z_0,r)$ mit $0 \le r < \rho$ entspricht der Supremumsmetrik $d_r(f,g) = |f-g|_{\bar{B}(z_0,r)}$. Es genügt dann eine abzählbare Familie von Radien $r_k \nearrow \rho$ zu betrachten.

☞ **Bemerkung.** Diese allgemeine Konstruktion ist sehr flexibel. Wir werden sie später auch für die Produkttopologie nutzen (E4v), insbesondere für die Metrisierbarkeit des Hilbert–Würfels $[0,1]^{\mathbb{N}}$ und somit schließlich für den Metrisierbarkeitssatz von Urysohn (E5R). ☜

Jede Halbmetrik $d_i : X \times X \to [0,\infty]$ können wir stutzen oder stauchen (C3L) zu einer äquivalenten Halbmetrik $d_i^* : X \times X \to [0,1]$. Das ist im Folgenden technisch vorteilhaft.

Jede abzählbare Familie von Halbmetriken können wir wie folgt zusammenfassen:

☞ **Satz D4G.** *Sei $D = (d_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbmetriken $d_i : X \times X \to [0,\infty]$. Ist die Indexmenge I abzählbar, so wird die Topologie $\mathcal{T}_D$ induziert durch die Halbmetrik* ☜

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\ge 0} \quad \textit{mit} \quad d(x,y) = \sum\nolimits_{i\in I} a_i d_i^*(x,y).$$

Für $i \in I$ wählen wir hierzu $a_i > 0$ mit $\sum_{i\in I} a_i < \infty$; typischerweise betrachtet man $I \hookrightarrow \mathbb{N}$ und für $i \in \mathbb{N}$ die Koeffizienten $a_i = 2^{-i-1}$ mit Summe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$.

In diesem Falle gilt also $\mathcal{T}_D = \mathcal{T}_d$. Äquivalent sind schließlich: (1) Die Topologie $\mathcal{T}_D$ ist hausdorffsch. (2) Die Topologie $\mathcal{T}_D$ ist metrisierbar. (3) Die Halbmetrik d ist eine Metrik. (4) Zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X existiert $i \in I$ mit $d_i(x,y) \neq 0$.

BEWEIS. Zum Verständnis der Definitionen beweise man dies als Übung! □

☞ *Hinweis:* Für die Gleichheit $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_D$ genügt es, die Umgebungsbasen zu vergleichen: ☜ Jeder Ball $B(x,\delta)$ enthält eine Umgebung $U(x;J,\varepsilon)$ und umgekehrt (D3Y).

✻ **D4G.** Wir nehmen $I \neq \emptyset$ an. Nach Voraussetzung gilt $A := \sum_{i\in I} a_i < \infty$. Nach Division durch A können wir $\sum_{i\in I} a_i = 1$ annehmen. Wegen $0 \leq d_i^*(x,y) \leq 1$ besteht die Reihe $d(x,y) = \sum_{i\in I} a_i d_i^*(x,y)$ aus nichtnegativen Termen und ist nach oben beschränkt durch $\sum_{i\in I} a_i = 1$, sie konvergiert also absolut.

Man prüft leicht nach, dass alle Forderungen an eine (Halb-)Metrik erfüllt sind:

(M0) Für alle $x \in X$ und $i \in I$ gilt $d_i^*(x,x) = 0$, also $d(x,x) = 0$.

(M1) Existiert zu $x \neq y$ in X ein $i \in I$ mit $d_i^*(x,y) > 0$, so gilt $d(x,y) > 0$.

(M2) Symmetrie für alle $x, y \in X$ ist klar:

$$d(x,y) = \sum_{i\in I} a_i d_i^*(x,y) = \sum_{i\in I} a_i d_i^*(y,x) = d(y,x)$$

(M3) Die Dreiecksungleichung für alle $x, y, z \in X$ sieht man so:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sum_{i\in I} a_i d_i^*(x,z) \leq \sum_{i\in I} a_i \big[d_i^*(x,y) + d_i^*(y,z)\big] \\ &= \sum_{i\in I} a_i d_i^*(x,y) + \sum_{i\in I} a_i d_i^*(y,z) = d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Interessant ist der Nachweis von $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_D$. Die Topologie $\mathcal{T}_D$ hat als Umgebungsbasen

$$U(x;J,\varepsilon) = \big\{\, y \in X \;\big|\; d_i^*(x,y) < \varepsilon \text{ für alle } i \in J \,\big\}.$$

Die Topologie der Metrik d hingegen wird erzeugt von den Umgebungsbasen

$$B(x,\delta) = \Big\{\, y \in X \;\Big|\; d(x,y) = \sum_{i\in I} a_i d_i^*(x,z) < \delta \,\Big\}.$$

Die Gleichheit $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_D$ beider Topologien zeigen wir durch zwei Inklusionen wie in D3Y erklärt:

Für die Inklusion $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_D$ zeigen wir: Zu jedem $B(x,\delta)$ existiert ein $U(x;J,\varepsilon) \subset B(x,\delta)$. Hierzu wählen wir $\varepsilon = \delta/2$ und $J \subset I$ so, dass $\sum_{i\in I\smallsetminus J} a_i < \delta/2$ gilt. Für jeden Punkt $y \in U(x;J,\varepsilon)$ folgt $y \in B(x,\delta)$, denn

$$d(x,y) = \sum_{i\in J} a_i d_i^*(x,y) + \sum_{i\in I\smallsetminus J} a_i d_i^*(x,y) \leq \sum_{i\in J} a_i \varepsilon + \sum_{i\in I\smallsetminus J} a_i < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Hieraus folgt $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_D$: Sei $O \in \mathcal{T}_d$. Zu jedem Punkt $x \in O$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x,\delta) \subset O$. Wie gesehen existiert eine Umgebung $U(x;J,\varepsilon) \subset B(x,\delta) \subset O$. Da dies für jeden Punkt $x \in O$ gilt, folgt $O \in \mathcal{T}_D$.

Für die Inklusion $\mathcal{T}_d \supset \mathcal{T}_D$ zeigen wir: Zu jedem $U(x;J,\varepsilon)$ existiert ein $B(x,\delta) \subset U(x;J,\varepsilon)$. Hierzu sei $\delta = \min\{\, a_i\varepsilon \mid i \in J \,\} > 0$. Für jeden Punkt $y \in B(x,\delta)$ gilt $\sum_{i\in I} a_i d_i^*(x,y) < \delta$. Für jedes $i \in J$ folgt $a_i d_i^*(x,y) < \delta \leq a_i\varepsilon$, also $d_i^*(x,y) < \varepsilon$, und somit $y \in U(x;J,\varepsilon)$. Das beweist $\mathcal{T}_D \subset \mathcal{T}_d$.

Die Implikationen (4) ⇒ (3) ⇒ (2) ⇒ (1) ⇒ (4) sind klar.

☞ **Beispiel.** Als *Hilbert–Würfel* bezeichnet man den Folgenraum $[0,1]^{\mathbb{N}}$ mit der Topologie ☜ der punktweisen Konvergenz (wie D4A in jeder Koordinate, oder äquivalent hierzu mit der Produkttopologie, siehe E4C). Der Hilbert–Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist metrisierbar durch

$$d : [0,1]^{\mathbb{N}} \times [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1] \quad \text{mit} \quad d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1} |x_i - y_i|.$$

Jede Halbmetrik $d_i(x,y) = |x_i - y_i|$ misst nur den Abstand in ihrer Koordinate $i \in I$. Erst ihre Zusammenfassung als (absolut konvergente) Reihe ergibt die Metrik d.

☞ **Beispiel.** Allgemeiner nutzen wir diese Konstruktion wie folgt: Sei $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine ab- ☜ zählbare Familie metrischer Räume. Ihr Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ trägt die *Produktmetrik*

$$d : X \times X \to [0,1] \quad \text{mit} \quad d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1} d_i^*(x_i, y_i).$$

Damit gelingt uns die Metrisierung von Produkträumen (E4V).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D4g. Testfunktionen. Wir haben in D2E gesehen, dass das Integral

$$I \,:\, \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \,:\, f \mapsto F, \qquad F(x) = \int_{t=x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

stetig ist bezüglich der Supremumsnormen, nicht jedoch die Ableitung

$$D \,:\, \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \,:\, F \mapsto f, \qquad f(x) = \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x}.$$

Wir haben in D2E auch gezeigt, wie wir dies durch geeignete Normen reparieren können. Dieses Vorgehen wollen wir nun perfektionieren für $\partial_1,\dots,\partial_n : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *beliebig oft differenzierbar*, oder kurz *glatt*, wenn alle Ableitungen $\partial^\nu\varphi = \partial_1^{\nu_1}\cdots\partial_n^{\nu_n}\varphi$ für $\nu \in \mathbb{N}^n$ existieren (A1J).

Die Menge $\mathscr{C}^\infty(\Omega) = \mathscr{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ aller glatten Funktionen ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, sogar eine $\mathbb{R}$–Algebra mit Eins bezüglich der punktweisen Verknüpfungen.

Jede Ableitung $\partial_1,\dots,\partial_n : \mathscr{C}^\infty(\Omega) \to \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ ist eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung. Für das Produkt von $\varphi,\psi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ gilt die Leibniz–Regel $\partial_i(\varphi\cdot\psi) = (\partial_i\varphi)\cdot\psi + \varphi\cdot(\partial_i\psi)$.

Der *Träger* (engl. *support*) einer Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ ist $\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{\, x\in\Omega \mid \varphi(x)\neq 0\,\}}$, also der Abschluss der Teilmenge $\{\, x\in\Omega \mid \varphi(x)\neq 0\,\}$, wo φ nicht verschwindet.

Wir schreiben $K \subset \Omega$, wenn K eine Teilmenge von Ω ist, und $K \Subset \Omega$, wenn K zudem kompakt ist, also in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Für $K \Subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\mathscr{D}(K) := \big\{\, \varphi\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \;\big|\; \operatorname{supp}(\varphi)\subset K \,\big\} \quad \text{und entsprechend}$$
$$\mathscr{D}(\Omega) := \big\{\, \varphi\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \;\big|\; \operatorname{supp}(\varphi)\Subset \Omega \,\big\} = \bigcup\nolimits_{K\Subset\Omega} \mathscr{D}(K).$$

Diese dienen als *Testfunktionen* in der Theorie der Distributionen nach Laurent SCHWARZ.

Dies entspricht der Menge der glatten Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger:

$$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega) := \big\{\, \varphi\in\mathscr{C}^\infty(\Omega) \;\big|\; \operatorname{supp}(\varphi)\Subset\Omega \,\big\}.$$

Genauer gilt $\mathscr{D}(\Omega) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_c^\infty(\Omega) : \varphi \mapsto \varphi|_\Omega$, die Umkehrung ist die Nullfortsetzung.

Dies sind Untervektorräume in $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, sogar Unteralgebren, allerdings ohne Eins.

Definition D4H. Wir nennen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ eine *Nullfolge*, kurz $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, wenn gilt:

(1) $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K$ für ein Kompaktum $K \Subset \Omega$ und alle $k\in\mathbb{N}$,
(2) $|\partial^\nu\varphi_k|_K \to 0$ für jeden Multiindex $\nu\in\mathbb{N}^n$ und $k\to\infty$.

Entsprechend definieren wir die Konvergenz $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$ durch $\varphi_k - \varphi \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$.

(1) Diese Bedingung bedeutet: Alle Träger $\operatorname{supp}(\varphi_k)$ liegen in einem *gemeinsamen* Kompaktum $K \Subset \Omega$; sie dürfen Ω nicht ausschöpfen oder nach Unendlich entkommen.

(2) Die Bedingung $|\varphi_k|_K \to 0$ bedeutet, dass φ_k *gleichmäßig* gegen die Nullfunktion 0 konvergiert. Dies fordern wir zudem für alle Ableitungen $(\partial^\nu\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Übung D4I. (1) Jede Ableitung $\partial^\nu : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ ist linear und (folgen-)stetig,

(2) Konstruieren Sie zur Konvergenz D4H eine Topologie und Metrik auf $\mathscr{D}(K)$. Führen Sie dasselbe anschließend für $\mathscr{D}(\Omega)$ aus, vereinfacht für $\Omega = \mathbb{R}^n = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \bar{B}(0,r)$.

(3) Inwiefern legt die Konvergenz D4H die Topologie eindeutig fest?

§D4h. Distributionen. Angenommen, eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ beschreibt eine physikalische Größe $f(x)$ als Funktion des Ortes $x \in \mathbb{R}^n$, etwa die Temperatur, die Massendichte oder die elektrische Ladungsdichte. Kein Messvorgang ist so präzise, dass er den Wert $f(x)$ genau im Punkt x ermitteln könnte. Vielmehr liefert die Messung einen gemittelten Wert $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, wobei φ dem Messverfahren entspricht. Zur Illustration stellen wir uns $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ vor. Je stärker φ um den Punkt x konzentriert ist, desto genauer entspricht die Messung dem Wert $f(x)$. Wir messen also f, indem wir mit Funktionen φ testen, und dies ist unser einziger Zugang zur Funktion f: Sie äußert sich allein durch ihr Wirkung auf Testfunktionen φ, nur darin besteht f.

Diese anschaulich-physikalische Motivation veranlasst uns zu folgender Definition:

Definition D4J (Distributionen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der *Vektorraum der Testfunktionen* ist

$$\mathscr{D}(\Omega) := \big\{ \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \;\big|\; \operatorname{supp}(\varphi) \Subset \Omega \big\}.$$

Eine *Distribution* auf Ω ist, dual hierzu, ein stetiges lineares Funktional $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, also eine lineare Abbildung von $\mathscr{D}(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$, die folgende Stetigkeitsbedingung erfüllt:

$$\text{Aus } \varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \text{ in } \mathscr{D}(\Omega) \text{ folgt } \Lambda(\varphi_k) \to 0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Den Vektorraum aller Distributionen auf Ω bezeichnen wir mit

$$\mathscr{D}'(\Omega) := \big\{ \Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \;\big|\; \Lambda \text{ ist linear und stetig} \big\}.$$

Eine Folge $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ *konvergiert* gegen $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *im Distributionensinne*, kurz $\Lambda_k \xrightarrow{\mathscr{D}'} \Lambda$, wenn punktweise Konvergenz für alle Testfunktionen gilt:

$$\Lambda_k(\varphi) \to \Lambda(\varphi) \text{ in } \mathbb{R} \text{ für jede Testfunktion } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

Diese Definition entspricht anschaulich dem physikalischen Messvorgang mit einer Testfunktion φ und präzisiert unsere Vorüberlegung als mathematische Definition.

Damit können wir insbesondere erklären, was eine Punktmasse sein soll (D4K) und im Gegensatz dazu eine stetig verteilte Masse (D4L):

Satz D4K (Dirac–Funktionale)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und hierin $p \in \Omega$ ein Punkt. Das* Dirac–Funktional *δ_p ist die Auswertung im Punkt p, also*

$$\delta_p \;:\; \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \;:\; \varphi \mapsto \varphi(p).$$

Dies ist eine Distribution, ebenso für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die Auswertung der Ableitung

$$\delta_p^\alpha \;:\; \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \;:\; \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\,\partial^\alpha \varphi(p).$$

BEWEIS. Zu prüfen sind gemäß D4J Linearität und Stetigkeit. Beide sind klar. □

Falls Sie unsicher sind: Rechnen Sie dies zur Übung sorgfältig nach!

✻ **D4K.** Zur Betonung und Illustration der Definition buchstabiere ich alles ausführlich aus.

Linearität: Für Testfunktionen $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ und reelle Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt dank Linearität der Ableitung $\delta_p^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi)(p) = \lambda(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(p) + \mu(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\psi(p) = \lambda\delta_p^\alpha(\varphi) + \mu\delta_p^\alpha(\psi)$.

Stetigkeit: Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ eine Nullfolge. Das heißt, es gibt ein gemeinsames Kompaktum $K \Subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $|\partial^\nu \varphi_k|_K \to 0$ für jeden Multiindex $\nu \in \mathbb{N}^n$ und $k \to \infty$. Hieraus folgt insbesondere $|\delta_p^\alpha(\varphi_k)| = |\partial^\alpha \varphi_k(p)| \leq |\partial^\alpha \varphi_k|_K \to 0$, also $\delta_p^\alpha(\varphi_k) \to 0$. Somit ist δ_p^α stetig.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Satz D4L (Jede stetige Funktion ist eine Distribution.)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Jede stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert ein Funktional $\Lambda_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ durch*

$$\Lambda_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(1) Hierbei ist $f\varphi$ über Ω absolut integrierbar, also Λ_f wohldefiniert.

(2) Die Abbildung Λ_f ist eine Distribution, also linear und stetig in φ.

(3) Die Zuordnung $\mathscr{C}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega) : f \mapsto \Lambda_f$ ist linear, stetig und injektiv.

Allgemeiner gilt dies auch für lokal integrierbare Funktionen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

BEWEIS. Rechnen Sie dies zur Übung sorgfältig nach! □

✻ **D4L.** (1) Jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ist eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Träger $K := \operatorname{supp}(\varphi) \Subset \Omega$. Angenommen, unsere Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ ist stetig, demnach beschränkt auf K, kurz $|f|_K < \infty$. Wir erhalten hieraus die folgende Schranke bezüglich der Maximumsnorm $|f|_K$:

$$\int_\Omega \big|f(x)\,\varphi(x)\big|\mathrm{d}x = \int_K \big|f(x)\big| \cdot \big|\varphi(x)\big|\mathrm{d}x \leq \mathrm{vol}_n(K) \cdot |f|_K \cdot |\varphi|_K < \infty$$

Allgemeiner sei $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, also $|f|_{L^1(K)} = \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, dann gilt:

$$\int_\Omega \big|f(x)\,\varphi(x)\big|\mathrm{d}x = \int_K \big|f(x)\big| \cdot \big|\varphi(x)\big|\mathrm{d}x \leq \int_K \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \cdot |\varphi|_K < \infty$$

Insbesondere ist das Integral $\Lambda_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ wohldefiniert.

(2) Damit Λ_f eine Distribution ist, haben wir zweierlei sicherzustellen:

(2a) Die Abbildung $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ ist linear in φ dank Linearität des Integrals.

(2b) Die Abbildung $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ ist stetig in φ dank obiger Abschätzung: Aus $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ folgt

$$\big|\Lambda_f(\varphi_k)\big| = \left|\int_\Omega f(x)\,\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega \big|f(x)\,\varphi_k(x)\big|\mathrm{d}x \leq \int_K \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \cdot |\varphi|_K \to 0.$$

(3a) Die Zuordnung $f \mapsto \Lambda_f$ ist linear in f dank Linearität des Integrals.

(3b) Die Zuordnung $f \mapsto \Lambda_f$ ist stetig in f dank der Abschätzung aus (1).

(3c) Wir zeigen schließlich die Injektivität der Zuordnung $\mathscr{C}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega) : f \mapsto \Lambda_f$. Dank Linearität (3a) genügt zu zeigen: Für jede stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda_f = 0$ gilt $f = 0$. Äquivalent hierzu beweisen wir die Kontraposition: Für jede stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f \neq 0$ gilt $\Lambda_f \neq 0$.

Angenommen $f \neq 0$, das heißt $f(a) \neq 0$ für ein $a \in \Omega$. Wir dürfen $f(a) = 2b > 0$ annehmen. (Für $f(a) < 0$ betrachten wir $-f$ statt f.) Da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und hierauf $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert um a ein Ball $B(a, 2\varepsilon) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in B(a, 2\varepsilon)$ gilt. Es existiert eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) = \bar{B}(a, \varepsilon)$. (Kennen Sie die Konstruktion?) Wir erhalten $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\Lambda_f(\varphi) \neq 0$: Dank Monotonie und Linearität des Integrals gilt $\int_\Omega f\varphi = \int_{\bar{B}(a,\varepsilon)} f\varphi \geq \int_{\bar{B}(a,\varepsilon)} b\varphi = b \int_{\bar{B}(a,\varepsilon)} \varphi > 0$.

Auch $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega) : f \mapsto \Lambda_f$ ist injektiv; der Beweis ist naturgemäß etwas technischer.

Definition D4M. Jede Distribution $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, die sich als $\Lambda = \Lambda_f$ durch eine lokal integrierbare Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ darstellen lässt, heißt *regulär*, andernfalls *singulär*.

Beispiel. (1) Das Dirac–Funktional δ_p ist singulär, das heißt: Es gibt keine lokal integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die das Funktional δ_p darstellt, also $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(p)$ für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ erfüllt. Aber δ_p lässt sich so approximieren:

(2) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ ebenso $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \varphi(0)$ für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n)$, also $f_\varepsilon \to \delta_0$ im Distributionensinne.

☞ **§D4i. Das Problem der Metrisierbarkeit.** Als Metrisierbarkeits-Problem bezeichnet ☜ man folgenden Aufgabentyp: Gegeben sei ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$. Zu entscheiden ist, ob die Topologie $\mathcal{T}$ durch eine Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ induziert werden kann oder nicht; falls möglich, so möchte man eine geeignete Metrik d möglichst explizit angeben.

Wie beweist man, dass eine Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge X metrisierbar ist? Es genügt eine geeignete Metrik d auf X explizit anzugeben und $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ nachzuweisen. Das kann erhebliche Anforderungen an den Erfindungsreichtum und die technische Virtuosität stellen, wie das Beispiel der kompakten Konvergenz und der vorige Satz D4G bereits andeuten.

Der Metrisierbarkeitssatz von Urysohn (E5R) nutzt hierzu eine genial einfache Idee: Wir konstruieren eine Einbettung $f : X \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$ in den Hilbert–Würfel. Da wir diesen wie oben gesehen metrisieren können, ist auch jeder Teilraum metrisierbar (D1L).

Wie beweist man hingegen, dass eine Topologie nicht metrisiert werden kann? Hierzu genügt es selbstverständlich nicht, keine Metrik zu finden und aufzugeben. Wir müssen erklären, *warum* es keine Metrik geben kann, indem wir das topologische Hindernis verstehen. Die indiskrete Topologie (D1C) zum Beispiel ist nicht metrisierbar: Dies erkennen wir leicht an der fehlenden Hausdorff–Eigenschaft (D3J). Die Topologie der punktweisen Konvergenz (D4A) von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt zwar die Hausdorff–Eigenschaft, aber nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom (D4B), und ist somit ebenfalls nicht metrisierbar (D3G).

Hausdorff–Eigenschaft (T_2) und Erstabzählbarkeit (1AA) sind notwendige Kriterien zur Existenz einer Metrik. Der Metrisierungssatz von Urysohn (E5R) gibt hinreichende Kriterien, indem er T_2 und 1AA zu den hinreichenden Bedingungen T_3 und 2AA verstärkt.

$$T_2 \;\&\; 1\text{AA} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longleftarrow} \quad \text{Metrisierbarkeit} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longleftarrow} \quad T_2 \;\&\; T_3 \;\&\; 2\text{AA}$$

Zwischen notwendigen Kriterien (links) und hinreichenden Kriterien (rechts) klafft noch eine Lücke, doch für eine erste Orientierung und viele Anwendungen genügen diese Kriterien vollauf. Feinere Kriterien (E5U) schließen auch diese letzte Lücke.

Besonders einfach löst sich das Metrisierungsproblem für jede topologische Gruppe (§E7): Hier sind die notwendigen Kriterien T_2 und 1AA auch bereits hinreichend (E7J).

Die Metrisierungsfrage umspannt diese drei Kapitel wie eine Klammer: Ausgehend von $\mathbb{R}$ und den euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ haben wir in Kapitel C metrische Räume untersucht und sind in Kapitel D zu topologischen Räumen vorgedrungen. Am Ende von Kapitel E schließen wir mit dem Metrisierungssatz wieder den Reigen zu metrischen Räumen.

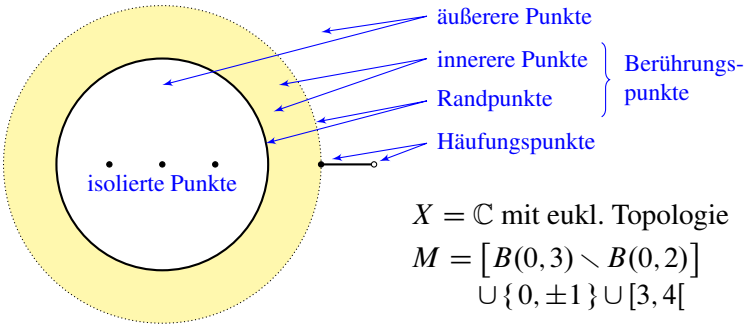
Auf dem Weg dorthin erlernen und nutzen wir unser topologisches Grundvokabular: Inneres, Abschluss, Rand (§D5), Basen und Erzeugendensysteme (§D6), sowie die vier topologischen Grundkonstruktionen: Teilräume (§E1), Quotientenräume (§E2), Summen (§E3) und Produkte (§E4). Zudem legen wir uns ein Repertoire an Beispielen zurecht.

Der Weg ist lang, doch das Ziel ist hehr.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D5. Inneres, Abschluss, Rand

☞ **§D5a. Topologische Grundbegriffe.** Die folgenden Begriffe definieren wir für jede Teilmenge $M \subset X$ relativ zum umgebenden topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$: ☜



✍ **Definition D5A.** Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt... ✍

- *innerer Punkt* von M in $(X,\mathcal{T})$ $\quad:\Longleftrightarrow\quad$ $M \in \mathcal{U}_x(X,\mathcal{T})$
  (Die Menge M ist eine Umgebung von x.)
- *äußerer Punkt* von M in $(X,\mathcal{T})$ $\quad:\Longleftrightarrow\quad$ $(X \setminus M) \in \mathcal{U}_x(X,\mathcal{T})$
  (Das Komplement $X \setminus M$ ist eine Umgebung von x.)
- *Randpunkt* von M in $(X,\mathcal{T})$ $\quad:\Longleftrightarrow\quad$ $\forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap M \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus M)$
  (Jede Umgebung von x trifft sowohl M als auch $X \setminus M$.)
- *Berührungspunkt* von M in $(X,\mathcal{T})$ $\quad:\Longleftrightarrow\quad$ $\forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap M \neq \emptyset$
  (Jede Umgebung von x trifft die Menge M.)
- *isolierter Punkt* von M in $(X,\mathcal{T})$ $\quad:\Longleftrightarrow\quad$ $\exists U \in \mathcal{U}_x : U \cap M = \{x\}$
  (Eine genügend kleine Umgebung von x hat mit M nur x gemeinsam.)
- *Häufungspunkt* von M in $(X,\mathcal{T})$ $\quad:\Longleftrightarrow\quad$ $\forall U \in \mathcal{U}_x : (U \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$
  (Jede Umgebung von x trifft außer x mindestens einen Punkt von M.)

Das sind sechs einfache aber wichtige Vokabeln, und man tut gut daran, sie von Anfang an genau zu verstehen. Folgende Bemerkungen sollen die Definitionen und ihre Beziehungen illustrieren. (Als Übung gebe man jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.)

☞ **Bemerkung.** Innere und isolierte Punkte von M gehören stets zu M. Äußere Punkte gehören nie zu M, sondern zum Komplement $X \setminus M$. Häufungs-, Berührungs-, und Randpunkte können zu M gehören, müssen es aber nicht. Ein isolierter Punkt ist stets ein Berührungspunkt aber nie ein Häufungspunkt. Ein Häufungspunkt ist immer auch Berührungspunkt, umgekehrt jedoch nicht: Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Häufungspunkt von M, wenn x Berührungspunkt von $M \setminus \{x\}$ ist. Ein Punkt berührt M genau dann, wenn er zu M gehört oder ein Häufungspunkt ist. Jeder Berührungspunkt von M ist entweder innerer Punkt oder Randpunkt. Jeder Berührungspunkt von M ist entweder Häufungspunkt oder isolierter Punkt von M. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Randpunkt von M, wenn er weder innerer noch äußerer Punkt von M ist. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Randpunkt von M, wenn er Berührungspunkt sowohl von M als auch von $X \setminus M$ ist. Jeder Punkt von M ist entweder isoliert oder Häufungspunkt von M. Ein innerer Punkt braucht kein Häufungspunkt zu sein: In einem diskreten Raum X ist jeder Punkt von M ein innerer Punkt aber isoliert. ☜

§D5b. Inneres. Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das *Innere* oder auch der *offene Kern* von M in $(X,\mathcal{T})$, geschrieben

$$\mathring{M} = K_{\mathcal{T}}(M) = K_{(X,\mathcal{T})}(M) := \big\{ x \in X \;\big|\; M \in \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T}) \big\} \overset{!}{=} \bigcup \big\{ U \subset M \;\big|\; U \in \mathcal{T} \big\}$$

Es gilt „$\supset$“: Für $x \in U \subset M$ mit $U \in \mathcal{T}$ gilt $M \in \mathscr{U}_x$. Ebenso gilt „$\subset$“: Für $M \in \mathscr{U}_x$ existiert $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U \subset M$. Nach (O3) ist M° offen, also die größte in M enthaltene offene Menge. Es gilt $M \supset M^\circ = (M^\circ)^\circ$. Genau dann ist M offen, wenn $M = M^\circ$ gilt.

§D5c. Abschluss. Die Menge aller Berührungspunkte von M heißt der *Abschluss* oder auch die *abgeschlossene Hülle* von M in $(X,\mathcal{T})$, geschrieben

$$\overline{M} = H_{\mathcal{T}}(M) = H_{(X,\mathcal{T})}(M) := \big\{ x \in X \;\big|\; \forall U \in \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T}) : U \cap M \neq \emptyset \big\} \overset{!}{=} \bigcap \big\{ A \supset M \;\big|\; X \smallsetminus A \in \mathcal{T} \big\}.$$

Hülle und Kern sind komplementär gemäß $X \smallsetminus M^\circ = \overline{X \smallsetminus M}$ und $X \smallsetminus \overline{M} = (X \smallsetminus M)^\circ$. Nach (A3) ist $\overline{M}$ abgeschlossen, also die kleinste M umfassende abgeschlossene Menge.

Es gilt $M \subset \overline{M} = \overline{\overline{M}}$. Genau dann ist M abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ gilt.

§D5d. Rand. Ein Punkt $x \in X$ ist *äußerer Punkt* von M in X, wenn $X \smallsetminus M$ Umgebung von x ist: Die äußeren Punkte von M sind die inneren Punkte des Komplements $X \smallsetminus M$. Ein Punkt $x \in X$ ist *Randpunkt* von M in X, wenn x weder innerer noch äußerer Punkt von M ist. Die Menge aller Randpunkte von M heißt der *Rand* von M, geschrieben

$$\delta M := \overline{M} \smallsetminus M^\circ \quad \text{bzw. ausführlich} \quad \delta_{(X,\mathcal{T})}(M) = H_{(X,\mathcal{T})}(M) \smallsetminus K_{(X,\mathcal{T})}(M).$$

Konvention. Inneres, Abschluss und Rand von $M \subset X$ hängen von der betrachteten Topologie $\mathcal{T}$ auf X ab, daher die ausführlichen Bezeichnungen $M^\circ = K_{\mathcal{T}}(M)$ und $\overline{M} = H_{\mathcal{T}}(M)$ sowie $\delta_{\mathcal{T}}(M) = H_{\mathcal{T}}(M) \smallsetminus K_{\mathcal{T}}(M)$. Wenn die Topologie unzweifelhaft aus dem Zusammenhang hervorgeht, dann sind die kürzeren Bezeichnungen M°, $\overline{M}$, δM oft bequemer.

Beispiele. • In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie gilt für alle $a < b$:

$$\begin{aligned}]a,b[&= [a,b]^\circ = [a,b[^\circ =]a,b]^\circ =]a,b[^\circ \\ [a,b] &= \overline{[a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} \\ \{a,b\} &= \delta[a,b] = \delta[a,b[= \delta]a,b] = \delta]a,b[\end{aligned}$$

- In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie gilt $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ und $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ also $\delta\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
- In $\mathbb{Q}$ mit der euklidischen Topologie gilt $\mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ und $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ also $\delta\mathbb{Q} = \emptyset$.

Beispiele. Wir betrachten die Teilmenge $M =]0,1[\cup]1,2] \cup \{3\}$ in jedem der drei Räume $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ jeweils mit der euklidischen Topologie:

In $\mathbb{R}_{>0}$ gilt:	$\mathring{M} =]0,1[\cup]1,2[$,	$\overline{M} =]0,2] \cup \{3\}$,	$\delta M = \{1,2,3\}$.
In $\mathbb{R}$ gilt:	$\mathring{M} =]0,1[\cup]1,2[$,	$\overline{M} = [0,2] \cup \{3\}$,	$\delta M = \{0,1,2,3\}$.
In $\mathbb{C}$ gilt:	$\mathring{M} = \emptyset$,	$\overline{M} = [0,2] \cup \{3\}$,	$\delta M = [0,2] \cup \{3\}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Beispiel.** Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ betrachten wir den *abgeschlossenen Einheitsball* ☜

$$\mathbb{D}^n = \bar{B}(0,1) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \,\}.$$

Dieser ist abgeschlossen. Sein Inneres ist der n-dimensionale *offene Einheitsball*

$$\mathbb{B}^n = B(0,1) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1 \,\}.$$

Der Rand von $\mathbb{D}^n$ wie auch von $\mathbb{B}^n$ ist die $(n-1)$–dimensionale *Einheitssphäre*

$$\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{D}^n \smallsetminus \mathbb{B}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \,\}.$$

So schön und einfach ist es jedoch nicht für jeden metrischen Raum (X,d): Zwar ist für alle $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ der offene Ball $B(a,r)$ offen bezüglich $\mathcal{T}_d$, und der abgeschlossene Ball $\bar{B}(a,r)$ ist abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_d$, siehe C2M. Aber im Allgemeinen ist der Abschluss von $B(a,r)$ nicht $\bar{B}(a,r)$, und das Innere von $\bar{B}(a,r)$ ist nicht $B(a,r)$:

☞ **Beispiel.** In jedem diskreten Raum (X,d) ist $B(a,1) = \{a\}$ offen und abgeschlossen aber $\bar{B}(a,1) = X$. In jedem diskreten Raum gilt daher $\mathring{M} = \overline{M} = M$ und $\delta M = \emptyset$. ☜

Übung D5B. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge.

(1) Genau dann ist M offen, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält.
(2) Genau dann ist M abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.
(3) Genau dann ist M offen und abgeschlossen, wenn $\delta M = \emptyset$ gilt.
(4) Genau dann ist $(X,\mathcal{T})$ diskret, wenn keine Teilmenge $M \subset X$ Randpunkte besitzt.
(5) Ist M offen oder abgeschlossen, dann hat der Rand δM keine inneren Punkte.

☞ **§D5e. Häufungspunkte.** Ein Punkt $x \in X$ ist ein *Häufungspunkt* von M in X, wenn x Berührungspunkt von $M \smallsetminus \{x\}$ in X ist, das heißt, jede Umgebung von x in X schneidet die Menge $M \smallsetminus \{x\}$ in mindestens einem Punkt. Man beachte, dass x nicht zu M gehören muss. Die Menge aller Häufungspunkte von M bezeichnet man als *abgeleitete Menge* ☜

$$M' = \{\, x \in X \mid \forall U \in \mathscr{U}_x : (U \smallsetminus x) \cap M \neq \emptyset \,\}.$$

Es gilt $M \cup M' = \overline{M}$. Demnach ist M genau dann abgeschlossen, wenn $M' \subset M$ gilt. Das Komplement $M \smallsetminus M' = \overline{M} \smallsetminus M'$ ist die Menge der isolierten Punkte von M. Eine Menge mit $M' = M$ heißt *perfekt*, das heißt, abgeschlossen ohne isolierte Punkte.

☞ **Bemerkung.** In einem metrischen Raum (X,d) sind für $M \subset X$ und $x \in X$ äquivalent: ☜

(1) Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält $(B(x,\varepsilon) \smallsetminus \{x\}) \cap M$ mindestens einen Punkt.
(2) Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält $B(x,\varepsilon) \cap M$ unendlich viele Punkte.
(3) Es existiert eine Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots \in M \smallsetminus \{x\}$ mit $x_n \to x$.

Beispiel. In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie gilt: Die einpunktige Menge $A_0 = \{0\}$ hat keinen Häufungspunkt, also $A_0' = \emptyset$. Die Menge $A_1 = \{0\} \cup \{\, 2^{-k-1} \mid k \in \mathbb{N} \,\} \subset [0, 1/2]$ hat 0 als einzigen Häufungspunkt, alle anderen Punkte sind isoliert, also gilt $A_1' = \{0\}$. Die Menge $A_2 = \{0\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k-1}(A_1 + 1) \subset [0, 3/4]$ hat genau die Punkte aus A_1 als Häufungspunkte, also $A_2' = A_1$. (Skizze!) Die Häufungspunkte selbst häufen sich in 0, denn $A_2'' = A_1' = A_0 = \{0\}$. Allgemein für $A_{n+1} = \{0\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k-1}(A_n + 1)$ gilt $A_{n+1}' = A_n$.

§D5f. Abschluss und Folgengrenzwerte. Sind Umgebungsbasen $(\mathcal{B}_x)_{x\in X}$ für $(X,\mathcal{T})$ gegeben, oder sogar eine Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert, so können wir Inneres und Abschluss einer Menge $M \subset X$ wie folgt charakterisieren:

$$\mathring{M} = \big\{ x \in X \;\big|\; \exists U \in \mathcal{B}_x \,:\, U \subset M \big\} \qquad = \big\{ x \in X \;\big|\; d(x, X \smallsetminus M) > 0 \big\}$$
$$\overline{M} = \big\{ x \in X \;\big|\; \forall U \in \mathcal{B}_x \,:\, U \cap M \neq \emptyset \big\} = \big\{ x \in X \;\big|\; d(x, M) = 0 \big\}$$

Bemerkung. Für jede Menge $A \subset X$ in einem metrischen Raum (X,d) sind äquivalent:

(1) Die Menge A ist abgeschlossen, d.h. ihr Komplement $X \smallsetminus A$ ist offen.
(2) Für jeden Punkt $x \in X$ mit Abstand $d(x,A) = 0$ gilt $x \in A$, siehe C3N.
(3) Es existiert eine stetige Funktion $f : A \to [0,1]$ mit $A = f^{-1}(0)$, siehe C3N.
(4) Für jede Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots \in A$ mit $x_n \to x$ in X gilt $x \in A$, siehe D5C.

In jedem metrischen Raum gibt die Folgenkonvergenz ein treues Abbild der Topologie. Dies gilt auch noch für Räume, die dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen:

Satz D5C. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A gibt, die gegen x in X konvergiert, dann gilt $x \in \overline{A}$. Die Umkehrung gilt, wenn x eine abzählbare Umgebungsbasis erlaubt.*

BEWEIS. „⇒“: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen x konvergiert. Das bedeutet, jede Umgebung U von x enthält schließlich alle Folgenglieder a_n. Insbesondere enthält jede Umgebung U von x mindestens einen Punkt von A, und somit gilt $x \in \overline{A}$.

„⇐“: Nach der zusätzlichen Voraussetzung besitzt x eine abzählbare Umgebungsbasis $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots$. (D3H). Aus $x \in \overline{A}$ folgt $A \cap U_n \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in A \cap U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gemäß D3I gilt dann $a_n \to x$. □

Dies veranlasst uns zu folgender Vereinbarung: Wir nennen $A \subset X$ *folgenabgeschlossen*, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ mit $a_n \in A$ auch $x \in A$ gilt.

Korollar D5D. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ ist folgenabgeschlossen. Die Umkehrung gilt, wenn $(X,\mathcal{T})$ erstabzählbar ist.*

Bemerkung. In jedem erstabzählbaren Raum $(X,\mathcal{T})$ charakterisiert somit die Konvergenz von Folgen bereits die Topologie $\mathcal{T}$: Die Konvergenz legt die abgeschlossenen Mengen fest, und diese wiederum durch Komplementbildung die offenen Mengen, also die Topologie $\mathcal{T}$.

$$\begin{array}{lcl} f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y) \text{ stetig} & \Longrightarrow & f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y) \text{ folgenstetig} \\ & \Longleftarrow_{\text{1AA}} & \\ A \text{ in } (X,\mathcal{T}_X) \text{ abgeschlossen} & \Longrightarrow & A \text{ in } (X,\mathcal{T}_X) \text{ folgenabgeschlossen} \end{array}$$

Bemerkung D5E. Auf das erste Abzählbarkeitsaxiom können wir hierbei nicht verzichten. Für die koabzählbare Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge X ist jede konvergente Folge (x_n) schließlich konstant (D1I) und *jede* Teilmenge $A \subset X$ daher folgenabgeschlossen. Ist X überabzählbar, so ist $\mathcal{T}$ nicht diskret und nicht jede Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen.

Die Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Folgengrenzwerte greift also zu kurz. Sie gelingt mit dem allgemeineren Begriff des *Netzes* (D8B) oder des *Filters* (D8M).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D5g. Lokal-endliche Familien. Wir präzisieren folgenden Sprachgebrauch:

Definition D5F. Eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $A_i \subset X$ nennen wir...

- *endlich*, wenn die Indexmenge I endlich ist,
- *endlich* im Punkt $x \in X$, wenn die Menge $I_x = \{\, i \in I \mid x \in A_i \,\}$ endlich ist,
- *punktweise endlich* im Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn dies in jedem Punkt $x \in X$ gilt,
- *lokal-endlich* um den Punkt x im Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn eine offene Umgebung U existiert, also $x \in U \in \mathcal{T}$, sodass die Menge $I_U = \{\, i \in I \mid A_i \cap U \neq \emptyset \,\}$ endlich ist,
- *lokal-endlich* im Raum $(X,\mathcal{T})$, falls dies um jedem Punkt $x \in X$ gilt.

Bemerkung. Trivialerweise gilt $I \supset I_U \supset I_x$, somit gelten die Inplikationen

$$\text{endlich} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad \text{lokal-endlich} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad \text{punktweise endlich.}$$

Die Umkehrungen gelten nicht, wie $([n,n+1])_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(\{x\})_{x\in\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{R}$ zeigen.

Satz D5G. *(1) In jedem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ gilt die Inklusion*

$$\overline{\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i} \quad \supset \quad \textstyle\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

(2) Genau dann gilt Gleichheit, wenn $A := \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ abgeschlossen ist, insbesondere

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \quad = \quad \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}.$$

(3) Ist die Familie $(A_i)_{i\in I}$ lokal-endlich in $(X,\mathcal{T})$, so auch $(\overline{A_i})_{i\in I}$. (4) Dann gilt

$$\overline{\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i} \quad = \quad \textstyle\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Wichtiger Spezialfall: Ist eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen $A_i \subset X$ lokal-endlich in $(X,\mathcal{T})$, dann ist ihre Vereinigung $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$.

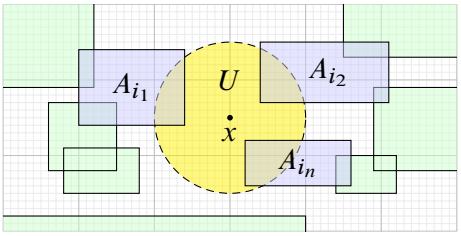
Bemerkung. Für beliebige Vereinigungen gilt diese Gleichheit nicht: In $\mathbb{R}$ zum Beispiel gilt $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \overline{\{x\}} = \mathbb{Q}$ aber $\overline{\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}} = \mathbb{R}$. Ein weiteres Gegenbeispiel ist $]0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1]$.

BEWEIS. (1) Wir vergleichen $A := \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ mit $B := \bigcup_{i\in I} A_i$. Aus $A_i \subset B \subset \overline{B}$ folgt $\overline{A_i} \subset \overline{B}$, also $A \subset \overline{B}$. (2) Es gilt $B \subset A$. Ist A abgeschlossen, so folgt $\overline{B} \subset A$, also $\overline{B} = A$.

(3) Sei $x \in U \in \mathcal{T}$ mit $I_U := \{\, i \in I \mid A_i \cap U \neq \emptyset \,\}$ endlich. Das Komplement $X \smallsetminus U$ ist abgeschlossen: Aus $A_i \subset X \smallsetminus U$ folgt $\overline{A_i} \subset X \smallsetminus U$, also $I_U = \{\, i \in I \mid \overline{A_i} \cap U \neq \emptyset \,\}$.

(4) Zu zeigen ist: A ist abgeschlossen, also $X \smallsetminus A$ offen. Zu jedem $x \in X \smallsetminus A$ existiert eine offene Umgebung $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ und I_U endlich. Damit erhalten wir:

$$U' := U \smallsetminus A \quad = U \smallsetminus \textstyle\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$
$$\overset{(3)}{=} U \smallsetminus \textstyle\bigcup_{i\in I_U} \overline{A_i} \overset{(2)}{=} U \smallsetminus \overline{\textstyle\bigcup_{i\in I_U} A_i}$$



Demnach ist U' eine offene Umgebung von x in $X \smallsetminus A$. Das Komplement $X \smallsetminus A$ ist Umgebung jedes seiner Punkte, also offen (D3C), und $A = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ ist abgeschlossen. □

☞ **§D5h. Kern und Hülle.** Stetigkeit können wir mittels Kern und Hülle formulieren: ☜

Übung D5H. Seien X und Y topologische Räume. Für $f : X \to Y$ sind äquivalent:

(1) Für jede offene Menge V in Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X.
(2) Für jede abgeschlossene Menge B in Y ist das Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X.
(3) Für jede Teilmenge $B \subset Y$ gilt $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$.
(4) Für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

✻ **D5H.** „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“ ist klar: Für alle $A \subset Y$ gilt $f^{-1}(Y \smallsetminus A) = X \smallsetminus f^{-1}(A)$. „(1) $\Rightarrow$ (3)“: Wegen $B^\circ \subset B$ gilt $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)$. Da $f^{-1}(B^\circ)$ nach (1) offen ist, gilt $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$. „(3) $\Rightarrow$ (1)“: Sei V offen in Y, also $V^\circ = V$. Nach (3) gilt $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V))^\circ$, also ist $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V))^\circ$ offen. „(2) $\Rightarrow$ (4)“: Die Menge $\overline{f(A)}$ ist abgeschlossen, nach (2) also auch $f^{-1}(\overline{f(A)})$. Wegen $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ gilt $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Hieraus folgt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. „(4) $\Rightarrow$ (2)“: Sei B abgeschlossen in Y. Nach (4) gilt $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B$, demnach $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subset f^{-1}(B)$, also ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen. Das beweist die Äquivalenz dieser vier Eigenschaften.

Unsere Begriffswahl *Inneres*, *Abschluss*, *Rand*, etc. soll an die geometrische Intuition des Raumes $\mathbb{R}^n$ appellieren. Der sichere Umgang mit diesen Begriffen erfordert jedoch einige Übung. Hierzu stellen die folgenden Übungen einige Eigenschaften zusammen:

Übung D5I. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $M, N \subset X$ Teilmengen.

(1) In jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ definiert der offene Kern $K = K_{\mathcal{T}}$ eine Abbildung $K : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:
   (K1) $K(X) = X$ und $K(M) \subset M$ für alle $M \subset X$.
   (K2) $K(K(M)) = K(M)$ für alle $M \subset X$.
   (K3) $K(M \cap N) = K(M) \cap K(N)$ für alle $M, N \subset X$.
   Gilt auch $K(M \cup N) = K(M) \cup K(N)$? wenigstens „$\supset$“? oder „$\subset$“?
(2) Umgekehrt gilt: Erfüllt $K : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ die Eigenschaften (K1–3), so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit $K = K_{\mathcal{T}}$, nämlich $\mathcal{T} = \{ K(M) \mid M \subset X \}$.
(3) In jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ definiert die abgeschlossene Hülle $H = H_{\mathcal{T}}$ eine Abbildung $H : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:
   (H1) $H(\emptyset) = \emptyset$ und $H(M) \supset M$ für alle $M \subset X$.
   (H2) $H(H(M)) = H(M)$ für alle $M \subset X$.
   (H3) $H(M \cup N) = H(M) \cup H(N)$ für alle $M, N \subset X$.
   Gilt auch $H(M \cap N) = H(M) \cap H(N)$? wenigstens „$\supset$“? oder „$\subset$“?
(4) Umgekehrt gilt: Erfüllt $H : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ die Eigenschaften (H1–3), so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit $H = H_{\mathcal{T}}$, nämlich $\mathcal{T} = \{ X \smallsetminus H(M) \mid M \subset X \}$.
(5) In jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ definiert die abgeleitete Menge $D(M) = M'$ eine Abbildung $D : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:
   (D1) $D(\emptyset) = \emptyset$ und $D(M) = D(M \smallsetminus \{a\})$ für alle $a \in M \subset X$.
   (D2) $D(D(M)) \subset D(M)$ für alle $M \subset X$.
   (D3) $D(M \cup N) = D(M) \cup D(N)$ für alle $M, N \subset X$.
(6) Umgekehrt gilt: Erfüllt $D : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ die Eigenschaften (D1–3), so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit $M' = D(M)$, nämlich $\mathcal{T} = \{ X \smallsetminus M \mid D(M) \subset M \}$.

Anders gesagt, die Bedingungen (K1–3) für den offenen Kern bzw. die Bedingungen (H1–3) für die abgeschlossene Hülle oder auch die Bedingungen (D1–3) für Häufungspunkte bilden ein zu (O1–3) gleichwertiges Axiomensystem.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D5i. Dichte und diskrete Teilmengen. Sei weiterhin $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

Definition D5J. Wir nennen M *diskret* in $(X,\mathcal{T})$, wenn jeder Punkt $x \in M$ isoliert ist, also $U \in \mathcal{T}$ existiert mit $M \cap U = \{x\}$. Das heißt, der Teilraum $(M,\mathcal{T}_M)$ ist diskret (D1K, D1B).

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *dicht* in $(X,\mathcal{T})$, wenn für ihren Abschluss $\overline{M} = X$ gilt. Das ist äquivalent zur Bedingung $M \cap U \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Menge $U \in \mathcal{T} \smallsetminus \{\emptyset\}$.

Hingegen heißt M *nirgends dicht* in $(X,\mathcal{T})$, wenn $\overline{M}^\circ = \emptyset$ gilt. Äquivalent hierzu: In keiner offenen Menge $U \in \mathcal{T} \smallsetminus \{\emptyset\}$ ist $M \cap U$ dicht.

Beispiel D5K. (1) In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ dicht, aber nicht diskret, ebenso $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$.
In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Z}$ diskret und abgeschlossen, nirgends dicht, ebenso $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{R}^n$.
(2) In $(\mathbb{R},+)$ ist jede diskrete Untergruppe G von der Form $G = \mathbb{Z}a$ für ein $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(3) Für $\xi \in \mathbb{Q}$ ist $X = \{\, e^{2\pi i k\xi} \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ diskret in $\mathbb{S}^1$, für $\xi \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ jedoch dicht.
(4) In jedem diskreten Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ ist jede Teilmenge diskret, und nur X ist dicht.
In $(X,\{\emptyset,X\})$ ist jede nicht-leere Teilmenge dicht, und nur $\emptyset$ und $\{x\}$ sind diskret.
(5) In $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ mit $1 \leq p < \infty$ sind $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ und $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ dicht, in $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ hingegen nicht.
(6) Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ ist $\{\, \mathbf{1}_A \mid A \subset \Omega \text{ endlich} \,\}$ eine diskrete Teilmenge.
Im Banach–Raum $\ell^\infty(\Omega,\mathbb{K})$ ist $\{\, \mathbf{1}_A \mid A \subset \Omega \,\}$ eine diskrete Teilmenge.
(7) Sei $M \subset U \subset \mathbb{R}$ mit M dicht in $\mathbb{R}$ und U offen in $\mathbb{R}$. Folgt daraus bereits $U = \mathbb{R}$?
(8) Kann eine diskrete Menge $M \subset \mathbb{R}$ Häufungspunkte haben? falls M abgeschlossen?

✻ **D5K.** (1) Zur Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ siehe B2D: Jede offene Menge $U \neq \emptyset$ in $\mathbb{R}$ enthält ein offenes Intervall $]a,b[$ mit $a < b$ und somit auch rationale Zahlen. Demnach ist auch $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$: Jede offene Menge $U \neq \emptyset$ in $\mathbb{R}^n$ enthält einen offenen Quader $]a_1,b_1[\times \cdots \times]a_n,b_n[$ mit $a_i < b_i$ und somit auch Punkte in $\mathbb{Q}^n$.

Die Menge $\mathbb{Z}$ ist diskret in $\mathbb{R}$ und abgeschlossen, denn $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ ist offen. Dasselbe gilt für $\mathbb{Z}^n$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$: Die Familie $(\{x\})_{x\in\mathbb{Z}^n}$ ist abgeschlossen und lokal-endlich in $\mathbb{R}^n$. Dank D5G ist $\mathbb{Z}^n$ abgeschlossen.

(2) Sei $G < (\mathbb{R},+)$ eine diskrete Untergruppe. Demnach existiert $\varepsilon > 0$ sodass $G \cap]-\varepsilon,+\varepsilon[= \{0\}$. Für jedes Element $x \in G$ gilt dann $G \cap]x-\varepsilon,x+\varepsilon[= \{x\}$. Demnach existiert ein kleinstes Element $a := \min G_{>0}$. Für dieses zeigen wir $G = \mathbb{Z}a$. „$\supset$“: Aus $a \in G$ folgt $G \supset \mathbb{Z}a$. „$\subset$“: Für $x \in G$ nutzen wir Division mit Rest: Im Falle $x = 0$ gilt $x \in \mathbb{Z}a$. Im Falle $x < 0$ gehen wir zu $-x$ über. Wir können daher $x \in G_{>0}$ annehmen. Sei $n := \max\{\, k \in \mathbb{N} \mid ka \leq x \,\}$, also $na \leq x < (n+1)a$. Dann gilt $x - na \in G \cap [0,a[= \{0\}$, also $x = na \in \mathbb{Z}a$.

(3) Ist ξ rational, also $\xi = a/b$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$, so hat $X \subset \mathbb{S}^1$ genau b Elemente, ist also endlich und somit diskret. Im Folgenden sei ξ irrational. Wir beweisen zunächst den folgenden

SATZ VON DIRICHLET: Zu jeder reellen Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ und jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existieren ganze Zahlen $a,b \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq b \leq n$ und $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$, sodass $|b\xi - a| < 1/n$ gilt.

BEWEIS: Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ schreibt sich $x = \lfloor x \rfloor + r(x)$ mit $k = \lfloor x \rfloor := \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x \,\} \in \mathbb{Z}$, also $k \leq x < k+1$ und Rest $r(x) = (x \bmod 1) \in [0,1[$. Die $n+1$ Zahlen $r(0\xi), r(1\xi), \ldots, r(n\xi)$ verteilen sich auf die n Intervalle $[0/n, 1/n[, [1/n, 2/n[, \ldots, [n-1/n, n/n[$. Nach dem Schubfachprinzip enthält mindestens ein Intervall zwei Zahlen, also existieren $0 \leq k < \ell \leq n$ mit $|r(\ell\xi) - r(k\xi)| < 1/n$. Für $b = \ell - k$ und $a = \lfloor \ell\xi \rfloor - \lfloor k\xi \rfloor$ gilt $b\xi - a = r(\ell\xi) - r(k\xi)$, also $|b\xi - a| < 1/n$. Nach Division durch $\mathrm{ggT}(a,b) \geq 1$ erhalten wir $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$.

Damit zeigen wir (3): Sei $\xi \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. Zu $0 \leq \ell < n$ in $\mathbb{N}$ zeigen wir, dass das Intervall $]\ell/n, \ell+1/n[$ von der Folge $(r(k\xi))_{k\in\mathbb{Z}}$ getroffen wird. Wir wählen $a,b \in \mathbb{Z}$ sodass $\rho := b\xi - a \in]0, 1/n[$ gilt. Wir setzen $N := \lfloor 1/\rho \rfloor$. Die endliche Folge $r(kb\xi) = k\rho$ für $k = 0,1,\ldots,N$ trifft jedes Intervall $]\ell/n, \ell+1/n[$.

Aussage (4) ist klar. Für (5) approximieren wir Reihen durch endliche Summen wie in C4J. In (6) gelten die paarweisen Abstände $|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|_p \geq 1$. Die Bälle mit Radius 1 isolieren diese Punkte.

(7) Nein, das gilt nicht! Sei $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} : n \mapsto a_n$ eine Abzählung. Zu $\varepsilon > 0$ sei $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(a_n, \varepsilon 2^{-n-2})$. Nach Konstruktion hat U Gesamtlänge $\mathrm{vol}_1(U) < \varepsilon$. Demnach gilt $\mathbb{Q} \subset U \subsetneq \mathbb{R}$.

(8) Ja, das ist möglich! Die Menge $M = \{\, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ in $\mathbb{R}$ ist diskret, hat aber 0 als Häufungspunkt. Ist M hingegen diskret und abgeschlossen, so läge jeder Häufungspunkt in M und wäre isoliert, Widerspruch!

§D5j. Stetige Funktionen sind auf dichten Teilmengen festgelegt. Folgendes nützliche Vergleichsprinzip kennen Sie aus der Analysis stetiger Funktionen $f,g:\mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}$: Stimmen f und g auf einer dichten Teilmenge $A \subset X$ überein, so sind sie gleich. Anders gesagt, aus $f|_A = g|_A$ folgt $f = g$. Dies gilt wie folgt auch für topologische Räume:

Satz D5L. *Seien $f,g:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ hausdorffsch. Dann ist $O = \{\,x\in X \mid f(x)\neq g(x)\,\}$ offen und $\{\,x\in X \mid f(x)=g(x)\,\}$ abgeschlossen. Für $A\subset X$ gilt: Aus $f|_A = g|_A$ folgt $f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$; ist A dicht in $(X,\mathcal{T})$, so folgt $f=g$ auf ganz X.*

BEWEIS. Sei $x\in O$. Zu $f(x)\neq g(x)$ in Y existieren offene Umgebungen $f(x)\in U\in\mathcal{T}_Y$ und $g(x)\in V\in\mathcal{T}_Y$ mit $U\cap V=\emptyset$. Für $W = f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$ gilt $x\in W\in\mathcal{T}_X$. Für $x'\in W$ gilt $f(x')\in U$ und $g(x')\in V$, also $f(x')\neq g(x')$. Somit $W\subset O$. Das zeigt, O ist offen (D3C). Alle weiteren Aussagen sind damit klar. □

Bemerkung. Die Hausdorff–Eigenschaft wird für diesen Satz wirklich benötigt:

Ein einfaches aber drastisches Gegenbeispiel: Sei $Y=\{0,1\}$ und $\mathcal{T}_Y=\{\emptyset,Y\}$ die indiskrete Topologie. Alle Abbildungen $f,g:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ sind stetig. Zu jeder beliebigen Menge $U\subset X$ sei $f=0$ und $g=\mathbf{I}_U$, also $U=\{\,x\in X\mid f(x)\neq g(x)\,\}$.

Übung D5M. Weißt du wieviel ~~Sternlein stehen~~ Funktionen stetig sind?

(1) Ist die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}) : f\mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ injektiv? und surjektiv?
(2) Vergleichen Sie die Kardinalität von $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der von $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
(3) Gibt es mehr unstetige als stetige Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$?

✻ **D5M.** (1) Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ ist injektiv dank D5L, aber nicht surjektiv: Reelle Funktionen wie $h:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}:x\mapsto \operatorname{sign}(x^2-2)$ sind stetig auf $\mathbb{Q}$, lassen sich aber nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen (C4K).

(2) Dank B2N haben wir eine Bijektion $\mathbb{R}\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, also $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}}\cong\{0,1\}^{\mathbb{R}}\cong\mathfrak{P}(\mathbb{R})$. Wir haben $\mathbb{R}\hookrightarrow\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vermöge $a\mapsto \operatorname{const}^a_{\mathbb{R}}$. Dank (1) gilt $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\hookrightarrow\mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R})\hookrightarrow\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}}\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}}\cong\mathbb{R}$. Mit B2O gibt es also genauso viele stetige Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wie reelle Zahlen. Hätten Sie das gedacht?

(3) Es gibt wesentlich mehr unstetige Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ als stetige! Für jede Menge M ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ strikt größer als M, denn wir haben die Injektion $M\hookrightarrow\mathfrak{P}(M):x\mapsto\{x\}$, aber keine Surjektion $M\twoheadrightarrow\mathfrak{P}(M)$, dank Cantors Diagonalargument. Dies gilt hier insbesondere für $M=\mathbb{R}$.

Bemerkung. Wir stoßen hier auf das wichtige *Problem der stetigen Fortsetzung*: Gegeben ist eine dichte Teilmenge $D\subset X$ und eine stetige Funktion $h:D\to Y$, gesucht ist eine stetige Fortsetzung $f:X\to Y$, sodass $f|_D=h$. Wenn eine solche stetige Fortsetzung existiert, dann ist sie eindeutig (D5L). Ihre Existenz ist ungleich schwieriger.

Die Funktion $h:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}:x\mapsto\operatorname{sign}(x^2-2)$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Jede gleichmäßig stetige Funktion $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ lässt sich eindeutig fortsetzen zu einer stetigen Funktion $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, und diese ist selbst gleichmäßig stetig, siehe C4L. Anders gesagt: Die Einschränkung $\mathscr{C}_u(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathscr{C}_u(\mathbb{Q},\mathbb{R}):f\mapsto f|_D$ ist bijektiv.

Gleichmäßige Stetigkeit, Cauchy–Folgen und Vollständigkeit sind naturgemäß metrische Begriffe. Wenn wir nur topologische Strukturen vorliegen haben, so stehen uns diese schönen und wirksamen Werkzeuge zunächst nicht zur Verfügung. In solchen Fällen kann es hilfreich sein, die Topologie zu metrisieren, wenn möglich sogar durch eine vollständige Metrik, um uns damit die metrischen Techniken zu erschließen.

Wo dies nicht nötig oder nicht möglich ist, müssen uns die Werkzeuge der Topologie genügen. Sie sind manchmal schwächer, dafür aber allgemeiner, und oft auch bequemer.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§D5k. Offene dichte Mengen in der Algebra.** Wir betrachten Polynome über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und untersuchen die topologischen Eigenschaften der Nullstellenmengen. ☜

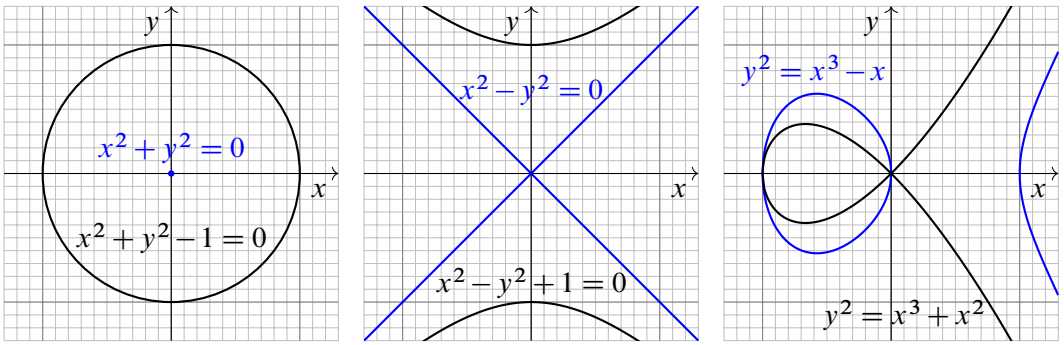


ABBILDUNG D:5. Das Komplement der Nullstellenmenge ist offen und dicht.

☞ **Beispiel.** Das Polynom $P = X_1^2 + \cdots + X_n^2 - 1$ in der Polynomalgebra $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ über $\mathbb{R}$ hat als Nullstellenmenge $N = P^{-1}(\{0\}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0 \} = \mathbb{S}^{n-1}$. ☜

Allgemein ist eine *Quadrik* die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung. Aus der Linearen Algebra kennen Sie die *Hauptachsentransformation*. Durch die Wahl geeigneter Koordinaten können Quadriken in eine Standardform gebracht und so klassifiziert werden.

Die algebraische Geometrie untersucht allgemein Nullstellenmengen beliebiger Polynome. Im regulären Fall ist eine solche Nullstellenmenge eine Kurve in der Ebene, eine Fläche im Raum, allgemein eine algebraische Varietät. Auch Singularitäten sind möglich.

☞ Wir erinnern an den Unterschied zwischen *Polynom* (B5A) und *Polynomfunktion* (B5F): Jedes Polynom $P = \sum_\nu p_\nu X^\nu$ in $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ definiert die zugehörige Polynomfunktion $f_P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : x \mapsto P(x) = \sum_\nu p_\nu x^\nu$. Summiert wird wegen $p \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N}^n)}$ nur über endlich viele Multiindizes $\nu \in \mathbb{N}^n$ mit Koeffizienten $p_\nu \in \mathbb{K}$ und Monomen $X^\nu = X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \cdots X_n^{\nu_n}$. ☜

Die Zuordnung $\Phi : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) : P \mapsto f_P$ ist ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$–Algebren und hier injektiv, das heißt, $f_P = 0$ impliziert $P = 0$. Allgemein gilt:

✍ **Lemma D5N.** *Sei $U \subset \mathbb{K}^n$ offen und $a \in U$. Dann ist $\Phi_U : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{K}) : P = \sum_\nu p_\nu X^\nu \mapsto f_P|_U$ injektiv: Verschoben nach $a = 0$ gilt $p_\nu = \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f_P(0)$.* □ ✍

✻ **D5N.** (1) Wir arbeiten über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Jede Polynomfunktion $f_P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist stetig dank C3D und C3G. Aus der Analysis wissen wir zudem, dass f_P beliebig oft differenzierbar ist. Damit gelingt der Nachweis der Injektivität besonders leicht: Wir verschieben a nach 0 und U nach $V = U - a$ und ersetzen $P(X)$ und $f_P|_U$ durch $Q(X) = P(X + a)$ und $f_Q|_V$. Dies entspricht dem $\mathbb{R}$–Algebrenautomorphismus mit $(X_1, \ldots, X_n) \mapsto (X_1 + a_1, \ldots, X_n + a_n)$. Demnach können wir $a = 0$ annehmen. Hier gilt $p_\nu = \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f_P(0)$.

(2) Wir können Injektivität auch algebraisch nachrechnen. Der Satz lautet allgemein: Für jeden Körper $\mathbb{K}$ mit unendlich vielen Elementen ist die Zuordnung $\Phi : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ injektiv. Für $n = 1$ ist dies leicht: Jedes Polynom $0 \neq P \in \mathbb{K}[X]$ vom Grad $d \in \mathbb{N}$ hat höchstens d Nullstellen in $\mathbb{K}$; dank $|\mathbb{K}| = \infty$ folgt $f_P \neq 0$. Wir führen Induktion über n. Für $n \geq 2$ betrachten wir $P = \sum_{k=0}^d P_k X_n^k$ mit $P_k \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Einsetzen von $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ ergibt $Q(X) = P(x_1, \ldots, x_{n-1}, X) = \sum_{k=0}^d q_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ mit $q_k = P_k(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Aus $f_P = 0$ folgt $f_Q = 0$, also $Q = 0$. Das bedeutet $P_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) = q_k = 0$ für alle $k = 0, \ldots, d$ und alle $x \in \mathbb{K}^{n-1}$. Per Induktion folgt $P_k = 0$, und somit $P = 0$. Das zeigt, dass Φ injektiv ist.

Konvention. Es ist daher möglich, und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ stillschweigend üblich, die Polynomalgebra $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ als Unteralgebra der stetigen Funktionen $\mathscr{C}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ aufzufassen.

Warnung. Für jeden endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen ist $\mathbb{F}_q[X]$ unendlich, doch $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_q)$ ist endlich. Konkret: Für $P = X^q - X \in \mathbb{F}_q[X]$ gilt $P \neq 0$, aber $f_P = 0$ dank Lagrange. Speziell für $P = X^2 + X \in \mathbb{F}_2[X]$ gilt $P(0) = 0$ und $P(1) = 0$, also $f_P = 0$.

Satz D5O. *Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]^*$ ist die Nullstellenmenge $N = f_P^{-1}(\{0\})$ in $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen, nirgends dicht und hat das Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_n(N) = 0$. Das Komplement $f_P^{-1}(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\}) \subset \mathbb{K}^n$ ist offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.*

BEWEIS. Führen Sie dies als Übung aus! (D5N sowie Fubini per Induktion) □

✻ **D5O.** (1) Dank Stetigkeit ist $N = f_P^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen und $f_P^{-1}(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\})$ offen in $\mathbb{K}^n$. Zudem ist $f_P^{-1}(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\})$ dicht, denn dank Lemma D5N gilt $f_P \neq 0$ auf jedem Ball $B(a, \varepsilon)$ mit $a \in \mathbb{K}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

(2) Per Induktion über n zeigen wir $\mathrm{vol}_n(N) = 0$. Für $n = 1$ ist dies klar, denn $N \subset \mathbb{K}$ ist endlich. Für $n \geq 2$ nutzen wir Fubini: Für $t \in \mathbb{K}$ sei $P_t = P(X_1, \ldots, X_{n-1}, t) \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Per Induktion gilt: Für $P_t \neq 0$ hat $N_t = P_t^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{K}^{n-1}$ Maß $\mathrm{vol}_{n-1}(N_t) = 0$. Es gilt $P_t = 0$ für höchstens endlich viele $t \in \mathbb{K}$. Es folgt $\mathrm{vol}_n(N) = \int_{\mathbb{K}^n} \mathbf{1}_N(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\mathbb{K}} \int_{\mathbb{K}^{n-1}} \mathbf{1}_N(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{n-1})\, \mathrm{d}x_n = 0$.

Beispiel D5P. Die Determinante ist eine Polynomfunktion in den Matrixeinträgen:

$$\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A = (a_{ij}) \mapsto \sum\nolimits_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Speziell für $n = 2$ haben wir demnach $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \det(A) = ad - bc$.

Für $n = 3$ gilt: $\det\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{cases}$

Im Raum $\mathbb{K}^{n\times n}$ der $n \times n$–Matrizen ist somit die *allgemeine lineare Gruppe*

$$\mathrm{GL}_n \mathbb{K} = \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A \text{ invertierbar} \right\} = \det^{-1}(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\}),$$

bestehend aus allen invertierbaren Matrizen, offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß. Anschaulich gesagt: Fast alle Matrizen sind invertierbar, invertierbare Matrizen bleiben's bei kleiner Störung, nicht-invertierbare Matrizen werden's nach kleiner Störung.

Erläuterung. Genau dann ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, wenn $\det A \in \mathbb{K}$ invertierbar ist (B1Y). Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) eine Matrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$ wählen, so ist diese mit Wahrscheinlichkeit 1 invertierbar und ebenso alle Matrizen in einer kleinen Umgebung. Die nicht-invertierbaren Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind topologisch und maßtheoretisch gesehen vernachlässigbar. Ihre algebraische Untersuchung ist selbstverständlich trotzdem wichtig, um *alle* Fälle zu behandeln. Nicht alle Matrizen sind zufällig!

Dichtheit bedeutet anschaulich: Ist eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nicht invertierbar, so brauchen wir ihre Koeffzienten nur beliebig wenig abzuändern, um eine invertierbare Matrix $A_\varepsilon = (a_{ij} + \varepsilon_{ij})_{ij}$ zu erhalten. Nach der vorigen Überlegung gilt zudem: Erzeugen wir die Störungen $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{K}$ zufällig (genauer: stetig verteilt um 0), so ist die Matrix A_ε mit Wahrscheinlichkeit 1 invertierbar.

Konkret: Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat das charakteristische Polynom $P(t) = \det(A - tI)$ den Grad n in t und verschwindet somit an höchstens n Stellen. Daher ist $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ dicht in $\mathbb{K}^{n\times n}$, denn es existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass gilt: Für alle t mit $0 < t < \varepsilon$ ist $A - tI$ invertierbar. Allgemein: Für $B \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ ist $Q(t) = \det(A - tB)$ ein Polynom von Grad n mit Leitkoeffizient $(-1)^n \det B \neq 0$.

Die Gruppen $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ werden uns oft beschäftigen. Wir zeigen in Satz G2N, dass $\mathrm{GL}_n \mathbb{C}$ wegzusammenhängend ist, wohingegen $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ genau zwei Wegkomponenten $\mathrm{GL}_n^{\pm} \mathbb{R}$ hat. Dies ist eine einfache topologische Feststellung, hat aber fundamentale Konsequenzen, insbesondere zu allen Fragen der Orientierung: Linke und rechte Hand sind gleich unter Spiegelung, aber nicht unter Drehung.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ Über dem Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ stehen uns starke *topologische* Methoden zur Verfügung. ☜ Manchmal können wir diese auch für den *diskreten* Ring $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ nutzbar machen, oder gar für *jeden* komutativen Ring. Zur Illustration hier ein erstes frappierendes Beispiel:

Satz D5Q. *Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Für jedes Paar quadratischer Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ stimmen die charakteristischen Polynome P_{AB} und P_{BA} überein.*

Wir geben hierfür zwei Beweise, zunächst topologisch-abstrakt-aber-einfach:

TOPOLOGISCHER BEWEIS. Die Aussage gilt

(1) für $A \in \mathrm{GL}_n K$ und für $B \in \mathrm{GL}_n K$,
(2) allgemein über $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dank (1) und Stetigkeit,
(3) zudem für $K = \mathbb{Z}[A_{ij}, B_{ij} : (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2]$ dank (2),
(4) für jeden kommutativen Ring K dank (3) und Spezialisierung. □

✻ **D5Q.** (1) Das charakteristische Polynom $P_M(X) = \det(X1_{n\times n} - M) \in K[X]$ ist invariant unter Konjugation durch jede invertierbare Matrix $B \in \mathrm{GL}_n K$, denn die Determinante $\det : K^{n\times n} \to K$ ist multiplikativ:

$$\begin{aligned} P_{B^{-1}MB} = \det(X1_{n\times n} - B^{-1}MB) &= \det(B^{-1}(X1_{n\times n} - M)B) \\ &= \det B^{-1} \cdot \det(X1_{n\times n} - M) \cdot \det B = P_M \end{aligned}$$

Für jede invertierbare Matrix $B \in \mathrm{GL}_n K$ und $M = BA$ gilt somit $P_{AB} = P_{BA}$. Dasselbe gilt für $A \in \mathrm{GL}_n K$.

(2) Für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ können wir die Gültigkeit der Gleichung $P_{AB} = P_{BA}$ weiter ausdehnen. Wir betrachten $Q : K^{n\times n} \to K[X]^1_n : B \mapsto Q(B) = P_{AB} - P_{BA} = \sum_{k=0}^n Q_k(B)X^k$. Dann ist $Q_k : K^{n\times n} \to K$ eine Polynomfunktion in den Koeffizienten der Matrix $B = (b_{ij})$, sie verschwindet auf der dichten Teilmenge $\mathrm{GL}_n K$ dank (1), also auch auf ganz $K^{n\times n}$ (D5L). Zumindest über $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gilt also $P_{AB} = P_{BA}$ für alle $A, B \in K^{n\times n}$.

(3) Der Polynomring $K = \mathbb{Z}[A_{ij}, B_{ij} : (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2]$ ist für unser Problem universell. Hierüber betrachten wir die Matrizen $A = (A_{ij})_{ij}, B = (B_{ij})_{ij} \in K^{n\times n}$ und $Q = P_{AB} - P_{BA} \in K[X]$. Dank (2) gilt $\Phi(Q) = 0$ für jede Spezialisierung $\Phi : \mathbb{Z}[A_{ij}, B_{ij}] \to \mathbb{C}$. Wir schließen daraus $Q = 0$ (D5N).

(4) Damit gilt $P_{AB} = P_{BA}$ über jedem kommutativen Ring K, dank (3) und Spezialisierung durch den Ringhomomorphismus $\Phi : \mathbb{Z}[A_{ij}, B_{ij}] \to K : A_{ij}, B_{ij} \mapsto a_{ij}, b_{ij}$.

Zum Vergleich ein zweiter Beweis, diesmal algebraisch-konkret-aber-raffiniert:

ALGEBRAISCHER BEWEIS. Wir zeigen mehr: Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für jedes Paar von Matrizen $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times m}$ gilt $P_{AB}(X)\, X^n = P_{BA}(X)\, X^m$. Hierzu betrachten wir:

$$\begin{pmatrix} X1_{m\times m} & -A \\ 0_{n\times m} & 1_{n\times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{m\times m} & A \\ B & X1_{n\times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1_{m\times m} - AB & 0_{n\times m} \\ B & X1_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1_{m\times m} & 0_{m\times n} \\ -B & 1_{n\times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{m\times m} & A \\ B & X1_{n\times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1_{m\times m} & XA \\ 0_{m\times n} & X1_{n\times n} - BA \end{pmatrix}$$

Durch Berechnung aller Determinanten finden wir die Gleichungen

$$\det(X1_{m\times m} - AB)\, X^n = \det \begin{pmatrix} 1_{m\times m} & A \\ B & X1_{n\times n} \end{pmatrix} X^m = \det(X1_{n\times n} - BA)\, X^m. \qquad \square$$

Bemerkung. Die Aussage $P_{AB} = P_{BA}$ findet sich als Übung bei Paul HALMOS, *Finite dimensional vector spaces* (1958), §53, exercise 13. Sie hat sich seither zu einer gefürchteten Klausuraufgabe entwickelt, und zahlreiche Lösungswege wurden ausgetüfftelt. Die beiden hier vorgestellten Beweise scheinen mir als Extreme das Spektrum gut abzustecken. Urteilen Sie selbst: Welcher ist leichter zu finden? leichter zu merken? eleganter? Welche Verallgemeinerungen sehen Sie? Was ist einmaliger Trick, was ist allgemeine Methode?

☞ **§D5l. Separable Polynome und diagonalisierbare Matrizen.** Im Raum $\mathbb{K}[X] \cong \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ ☜ betrachten wir die Teilmenge $\mathbb{K}[X]_n^1$ aller normierten Polynome vom Grad n:

$$\mathbb{K}[X]_n^1 := \left\{ P(X) = a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \;\middle|\; a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K} \right\} \cong \mathbb{K}^n.$$

Dank des Fundamentalsatzes der Algebra (B3D) existieren zu jedem Polynom $P \in \mathbb{C}[X]_n^1$ komplexe Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)\cdots(X - z_n)$ gilt. Wir nennen P *separabel*, wenn alle n Nullstellen verschieden sind. Die *Diskriminante* $\Delta_n(P) := \prod_{i<j}(z_i - z_j)^2$ ist symmetrisch in $z_1, \ldots, z_n$, also ein Polynom in den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ von P. Aus der Schule kennen Sie $\Delta_2(X^2 + pX + q) = p^2 - 4q$.

Übung D5R. (1) In $\mathbb{K}[X]_n^1$ ist die Menge Σ der separablen Polynome offen und dicht.
(2) In $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Menge S der separablen Matrizen (mit n verschiedenen Eigenwerten in $\mathbb{C}$) offen und dicht, und ihr Komplement hat Lebesgue–Maß Null.
(3) In $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Menge D der über $\mathbb{C}$ diagonalisierbaren Matrizen dicht, $\overline{D} = \mathbb{K}^{n\times n}$, und ihr Inneres ist die Menge der separablen Matrizen, $D^\circ = S$.

Und die Moral von der Geschicht? Anschaulich gesagt: Fast alle Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind separabel und somit über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, separable Matrizen bleiben's bei kleiner Störung, nicht-separable werden's nach kleiner Störung. Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) eine Matrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$ wählen, so ist diese mit Wahrscheinlichkeit 1 separabel und somit über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, ebenso alle Matrizen in einer Umgebung. Die verbleibenden Fälle sind so gesehen vernachlässigbar. Die Jordan–Form ist trotzdem wichtig, um *alle* Fälle behandeln zu können. Nicht alle Matrizen sind zufällig!

✻ **D5R.** (1) Die Diskriminante $\Delta_n : \mathbb{K}[X]_n^1 \to \mathbb{K}$ ist ein Polynom in den Koeffizienten. Dank D5O ist die Menge $\Delta_n^{-1}(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\})$ der separablen Polynome offen und dicht, und ihr Komplement hat Lebesgue–Maß Null.

(2) Die Abbildung $\chi : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}[X]_n^1 : A \mapsto P_A = \det(X1_{n\times n} - A)$ ist ein Polynom in den Koeffizienten, ebenso die Komposition mit $\Delta_n : \mathbb{K}[X]_n^1 \to \mathbb{K}$. Auf $S = (\Delta_n \circ \chi)^{-1}(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\})$ wenden wir nun erneut D5O an.

(3) Dank $D \supset S$ ist auch D dicht. Das Beispiel $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ für $\varepsilon \to 0$ zeigt, dass D nicht offen ist, und $D^\circ = S$:

Wir zeigen, dass jede Matrix $A \in D \smallsetminus S$ im Rand δD liegt. Dank $A \in D$ existiert eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{K}^n$, sodass $Av_k = \lambda_k v_k$ mit $\lambda_k \in \mathbb{K}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$. Für die Matrix $T = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ gilt dann $B := T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Im Falle $A \in D \smallsetminus S$ sind manche Eigenwerte gleich.

(3a) Zunächst der komplexe Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ohne Einschränkung gelte $\lambda_1 = \lambda_2$. Zum Parameter $\varepsilon \in \mathbb{C}$ definieren wir $A_\varepsilon = T(B + \varepsilon E_{12})T^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist $A_0 = A$ diagonalisierbar, nicht aber A_ε für $\varepsilon \neq 0$.

Der reelle Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist etwas kniffliger. (3b) Gilt $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so verfahren wir wie zuvor: Zum Parameter $\varepsilon \in \mathbb{R}$ definieren wir $A_\varepsilon = T(B + \varepsilon E_{12})T^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (3c) Für $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ können wir $v_3 = \overline{v_1}$ und $v_4 = \overline{v_2}$ einrichten und setzen $A_\varepsilon = T(B + \varepsilon E_{12} + \overline{\varepsilon} E_{34})T^{-1}$. Dies stellt $A_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sicher.

☞ **§D5m. Der Satz von Cayley–Hamilton für Topologen.** Zur Matrix $A \in K^{n\times n}$ sei ☜ $P_A(X) = \det(X1_{n\times n} - A) \in K[X]_n^1$ ihr charakteristisches Polynom. Wie für jedes Polynom können wir in $P_A(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ für X die Matrix A einsetzen.

Übung D5S. Der Satz von Cayley–Hamilton besagt $P_A(A) = 0$ für alle $A \in K^{n\times n}$. Dies gilt (1) für Diagonalmatrizen, (2) damit dank Konjugations-Invarianz für diagonalisierbare Matrizen, (3) damit dank Dichtheit für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, (4) damit allgemein.

✻ **D5S.** (1) Für $A = \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n)$ gilt $P_A(X) = (X - z_1)\cdots(X - z_n)$. Einsetzen von A ergibt die Matrix $M = P_A(A) = (A - z_1 1_{n\times n})\cdots(A - z_n 1_{n\times n})$. Für diese gilt $Me_k = 0$ für jedes $k = 1, \ldots, n$, also $M = 0$. (2) Für $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n)$ gilt dasselbe, denn diese Gleichungen sind invariant unter Konjugation. (3) Die Abbildungen $f, g : \mathbb{C}^{n\times n} \mapsto \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $f : A \mapsto P_A(A)$ und $g : A \mapsto 0$ sind stetig und stimmen auf der dichten Teilmenge $D \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ überein (D5R). Somit gilt $f = g$ (D5L), also $P_A(A) = 0$ für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. (4) Wie im topologischen Beweis von D5Q überträgt sich die Aussage von $\mathbb{C}$ auf jeden kommutativen Ring K.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§D5n. Die Zariski–Topologie.** Zur Illustration des Dichte-Tricks (D5L) haben wir ☜ zwei algebraische Sätze topologisch bewiesen: Den Satz von Cayley–Hamilton $P_A(A) = 0$ (D5S) und zum Aufwärmen $P_{AB} = P_{BA}$ (D5Q). Das mutet an wie Magie.

Topologische Argumente dieser Art sind oft bequem: Wir zeigen die Aussage lediglich für einfache Spezialfälle, diese müssen nicht alle Fälle ausschöpfen, sondern nur „fast alle“, hier also dicht liegen. Ist die Aussage das Verschwinden eines Polynoms (oder allgemein einer stetigen Funktion), so gilt sie nicht nur auf der dichten Teilmenge, sondern überall.

Auf den ersten Blick funktioniert dieses topologische Argument nur für die Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Wäre es nicht schön und nützlich, diese Technik auf *alle* Körper $\mathbb{K}$ auszudehnen? Die folgende Konstruktion erreicht genau dies. Sie spielt eine wichtige Rolle für die algebraische Geometrie; für die Topologie hat sie hier vor allem dekorativen Charakter.

Definition D5T. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $R = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ der Ring der Polynome in den Variablen $X_1, \dots, X_n$. Für jede Teilmenge $S \subset R$ definieren wir ihre *Nullstellenmenge* durch

$$V(S) = \big\{ x \in \mathbb{K}^n \;\big|\; f(x) = 0 \text{ für alle } f \in S \big\}.$$

Wir nennen diese Mengen *Zariski–abgeschlossen*; sie erfüllen die Bedingungen (A1–3) aus D1G. Ihre Komplemente nennen wir *Zariski–offen*; auf $\mathbb{K}^n$ bilden sie die *Zariski–Topologie*

$$\mathcal{T}_R = \big\{ \mathbb{K}^n \smallsetminus V(S) \;\big|\; S \subset R \big\}.$$

Übung D5U. (0) Die Zariski–Topologie $\mathcal{T}_R$ auf $\mathbb{K}^n$ ist tatsächlich eine Topologie.

(1) In Dimension $n = 1$ ist die Zariski–Topologie die koendliche Topologie auf $\mathbb{K}$.

(2) Für unendliche Körper $\mathbb{K}$ ist die Zariski–Topologie auf $\mathbb{K}^n$ nicht hausdorffsch.

(3) Ist der Körper $\mathbb{K}$ endlich, so ist jede Funktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ eine Polynomfunktion. Insbesondere ist somit die Zariski–Topologie auf $\mathbb{K}^n$ diskret.

(4) Für den Abschluss einer Teilmenge $A \subset X$ im Raum $(X, \mathcal{T}_R)$ gilt

$$\overline{A} = \big\{ x \in X \;\big|\; \forall f \in R : \; f(A) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0 \big\}$$

(5) Allgemeiner können wir statt $\mathbb{K}^n$ eine beliebige Menge X und statt des Polynomrings $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ eine beliebige Funktionenalgebra $R \subset \operatorname{Abb}(X, \mathbb{K})$ betrachten.
   (a) Für $X = \mathbb{K}^n$ und $R = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ erhalten wir die Zariski–Topologie.
   (b) Für $R = \mathbb{K} \cdot \operatorname{const}_X^1$ erhalten wir die indiskrete Topologie $\mathcal{T}_R = \{\emptyset, X\}$.
   (c) Für $R = \operatorname{Abb}(X, \mathbb{K})$ erhalten wir die diskrete Topologie $\mathcal{T}_R = \mathfrak{P}(X)$.
   (d) Für jeden metrischen Raum (X, d) und $R = \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ erhalten wir $\mathcal{T}_R = \mathcal{T}_d$.

✻ **D5U.** (0,5) Um zu zeigen, dass $\mathcal{T}_R = \big\{ X \smallsetminus V(S) \;\big|\; S \subset R \big\}$ eine Topologie ist, weisen wir die komplementären Axiome für für die abgeschlossenen Mengen $V(S)$ nach: (A1) Es gilt $\emptyset = V(1)$ und $X = V(0)$. (A2) Es gilt $\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i)$. (A3) Es gilt $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S)$ mit $S = \{ fg \mid f \in S_1, g \in S_2 \}$.

Aussage (5a) ist die Definition D5T der Zariski–Topologie. Aussagen (5b,c) sind klar. Wir zeigen (5d): Für $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ ist $V(f) = f^{-1}(0) \subset X$ metrisch abgeschlossen, ebenso $V(S) = \bigcap_{f \in S} V(f)$. Ist umgekehrt $A \subset X$ metrisch abgeschlossen, so ist $f : X \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x, A)$ stetig und erfüllt $V(f) = A$ dank C3N

(1) Jedes Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n Nullstellen (Satz B5Q).

(2) Für $n = 1$ ist dies klar, denn die Zariski–Topologie auf $\mathbb{K}$ ist die koendliche Topologie (D1H). Sei nun allgemein $n \geq 1$. Angenommen, zu $a \neq b$ in $X = \mathbb{K}^n$ gäbe es disjunkte Zariski–offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{K}^n$. Hieraus folgt $b \in V \subset X \smallsetminus \overline{U}$, was der Irreduzibilität von $\mathbb{K}^n$ widerspricht, siehe D5V(b).

(3) Zu $x \in \mathbb{K}$ erfüllt $L_x(X) = \prod_{y \neq x} (X - y)/(x - y) \in \mathbb{K}[X]$ die Bedingungen $L_x(x) = 1$ und $L_x(y) = 0$ für $y \neq x$. Zu $x \in \mathbb{K}^n$ definieren wir $L_x = L_{x_1}(X_1) \cdots L_{x_n}(X_n) \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Zu jedem vorgegebenem $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ setzen wir $P = \sum_{x \in \mathbb{K}^n} f(x) L_x$ und erhalten $P(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, also $f_P = f$.

Übung D5v. Sei $\mathbb{K}$ ein unendlicher Körper, $|\mathbb{K}| = \infty$. Die Zariski–Topologie auf $X = \mathbb{K}^n$ ist *irreduzibel*, das heißt, sie hat folgende, untereinander äquivalente Eigenschaften:

(a) Aus $X = A \cup B$ mit $A, B \subset X$ Zariski–abgeschlossen folgt $X = A$ oder $X = B$.
(b) Jede nicht-leere Zariski–offene Menge $U \subset X$ ist Zariski–dicht, also $\overline{U} = X$.

Unsere obigen Anwendungen übertragen sich von der euklidischen in die Zariski–Topologie:

(1) Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ist $P^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{K}^n$ abgeschlossen.
Das Komplement $P^{-1}(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\}) \subset \mathbb{K}^n$ ist offen und für $P \neq 0$ auch dicht.
(2) Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ ist offen und dicht in $\mathbb{K}^{n\times n}$.
(3) Die Menge aller separablen Polynome ist offen und dicht in $\mathbb{K}[X]^1_n$.
(4) Die Menge aller separablen Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist offen und dicht.
(5) Die Menge aller über $\mathbb{K}^a$ diagonalisierbaren Matrizen ist dicht in $\mathbb{K}^{n\times n}$.
Hierbei sei $\mathbb{K}^a \supset \mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, wie zuvor $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.

∗ **D5v.** (a) Sei $\mathbb{K}^n = A \cup B$ mit $A = V(S)$ und $B = V(T)$ Zariski–abgeschlossen. Sei $a \in \mathbb{K}^n \smallsetminus A$. Zu $b \in \mathbb{K}^n$ verläuft die Gerade $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^n$ mit $g(t) = (1-t)a + tb$ durch a und b. Sie liegt nicht ganz in A, also schneidet sie A nur in endlich vielen Punkten. Sie muss ganz in B liegen, also $b \in B$. Hieraus folgt $B = \mathbb{K}^n$.

„(a) ⇒ (b)“: Es gilt $X = \overline{U} \cup (X \smallsetminus U)$. Wegen $U \neq \emptyset$ gilt $X \smallsetminus U \neq X$. Folglich bleibt nur $\overline{U} \neq X$.

§D5o. Exkurs: Hilberts Nullstellensatz. Die *algebraische Geometrie* untersucht die Nullstellenmengen von Polynomen und verbindet so Geometrie und Topologie mit Körpern und Ringen. Jede Teilmenge S in $R = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ erzeugt ein Ideal

$$(S) = \left\{ r_1 f_1 + \cdots + r_k f_k \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ r_1, \dots, r_k \in R,\ f_1, \dots, f_k \in S \right\}.$$

Offenbar haben S und (S) dieselbe Nullstellenmenge. Da jedes Ideal in R endlich erzeugt ist, existieren für jede Zariski–abgeschlossene Menge $V(S)$ Polynome $f_1, \dots, f_\ell \in R$ mit $(S) = (f_1, \dots, f_\ell)$ und somit $V(S) = V(f_1, \dots, f_\ell)$. Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ genügt sogar nur ein einziges Polynom, nämlich $V(S) = V(f_1, \dots, f_\ell) = V(f)$ mit $f = f_1^2 + \cdots + f_\ell^2$.

Die Mengen $V(S)$ heißen *algebraische Mengen* in $\mathbb{K}^n$. Umgekehrt haben wir zu jeder Menge $A \subset \mathbb{K}^n$ das Ideal $I(A) = \{ f \in R \mid \forall x \in A : f(x) = 0 \}$. Es gilt $A \subset \overline{A} = V(I(A))$, und genau dann ist A algebraisch, wenn die Gleichheit $A = \overline{A} = V(I(A))$ gilt.

Für jede Teilmenge $S \subset R$ enthält $I(V(S))$ das von S erzeugte Ideal $\mathfrak{a} = (S)$ und sogar sein *Radikal* $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{ f \in R \mid \exists r \in \mathbb{N} : f^r \in \mathfrak{a} \}$, denn jede Nullstelle von f^r ist auch Nullstelle von f. Demnach gilt $S \subset (S) \subset \sqrt{(S)} \subset I(V(S))$. Die Inklusionen können strikt sein: Für $S = \{X^4 + 2X^2 + 1\}$ über $\mathbb{R}$ gilt $\sqrt{(S)} = (X^2 + 1)$ und $I(V(S)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[X]$.

Hilberts Nullstellensatz gilt über $\mathbb{C}$ (und allgemein über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper) und besagt: Ist $\mathfrak{a} \subsetneq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ein echtes Ideal, so gilt $V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$, das heißt, es existiert ein $x \in \mathbb{C}^n$ mit $f(x) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{a}$. Äquivalent hierzu gilt $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Dies garantiert eine treue Übersetzung von Algebra zu Geometrie und zurück.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D6. Basen und Erzeugendensysteme

☞ In diesem Abschnitt beantworten wir unter anderem eine naheliegende Frage: Wie viele offene Mengen hat die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$? Die Antwort (D6I) ist etwas überraschend, und auf dem Weg dorthin werden wir eine Reihe verwandter Fragen klären. ☜

In der geometrischen Topologie interessieren wir uns besonders für die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ und ihre Teilräume. Hier ist sowohl die Anzahl der Punkte als auch die der offenen Mengen überabzählbar. Das beste, was wir hier hoffen können, ist ein abzählbares Teilsystem zu finden, das genügend Information enthält, um die Topologie zu rekonstruieren, zum Beispiel eine abzählbare dichte Teilmenge $A \subset X$ (D6L) oder eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ der Topologie (D6H). Dies ist die Motivation der Abzählbarkeitsaxiome: Sie garantieren, grob gesprochen, dass die betrachtete Topologie „nicht allzu groß“ ist.

☞ **§D6a. Basis einer Topologie.** Analog zu Umgebungsbasen eines Punktes x in einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ betrachten wir Basen der gesamten Topologie $\mathcal{T}$ auf X: ☜

✍ **Definition D6A.** Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt *Basis* der Topologie $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{S} \;\middle|\; \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \right\}$ gilt. Die Inklusion „$\supset$“ folgt automatisch aus (O3), wir fordern „$\subset$“: Jede offene Menge in $(X,\mathcal{T})$ ist Vereinigung von Mengen der Basis $\mathcal{B}$. ✍

✍ **Beispiele.** Eine Topologie erlaubt im Allgemeinen viele verschiedene Basen: ✍

- Jeder Raum $(X,\mathcal{T})$ hat als Basen zum Beispiel $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ oder $\mathcal{B}' = \mathcal{T} \smallsetminus \{\emptyset\}$.
  Für jede indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ sind $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ und $\mathcal{B}' = \{X\}$ die einzigen Basen.
- Für jeden diskreten Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ ist $\mathcal{B} = \{\,\{x\} \mid x \in X\,\}$ eine Basis der Topologie. Zudem ist $\mathcal{B}$ in jeder Basis der Topologie enthalten, es ist also die kleinste Basis.
- Für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ ist das System $\mathcal{B} = \{\,]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R}\,\}$ eine Basis, ebenso $\mathcal{B}' = \{\,]a,b[\mid a,b \in \mathbb{Q}\,\}$. Gleiches gilt sinngemäß für jede Ordnungstopologie.
- Für jeden metrischen Raum (X,d) ist das System $\mathcal{B} = \{\,B(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\,\}$ aller offenen Bälle eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$, ebenso $\mathcal{B}' = \{\,B(x,1/k) \mid x \in X,\ k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\,\}$.

  Wortklauberei. In der Algebra bedeutet *Basis* sowohl *erzeugend* als auch *unabhängig*. Auch in unserem Fall erzeugt eine Basis die Topologie (durch Vereinigung), aber eine irgendwie geartete Unabhängigkeit oder Minimalität fordern wir hier nicht. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, dann auch jedes System $\mathcal{B}'$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$. Puristen würden $\mathcal{B}$ daher eher ein *Erzeugendensystem* nennen. Diese Bezeichnung reservieren wir allerdings für einen allgemeineren Begriff, siehe §D6c.

✍ **Proposition D6B.** *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ sind äquivalent:* ✍

(1) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist Vereinigung geeigneter offener Mengen $B \in \mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{S} \;\middle|\; \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \right\} \quad \textit{das heißt} \quad \forall U \in \mathcal{T}\ \exists \mathcal{S} \subset \mathcal{B} : U = \bigcup \mathcal{S}.$$

(2) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist Vereinigung aller offenen Mengen $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset U$:

$$\forall U \in \mathcal{T} : U = \bigcup \mathcal{S} \quad \textit{mit} \quad \mathcal{S} = \{\, B \in \mathcal{B} \mid B \subset U \,\}.$$

(3) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ enthält zu $x \in U$ auch eine offene Umgebung $B \in \mathcal{B}$:

$$\forall U \in \mathcal{T}\ \ \forall x \in U\ \ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U.$$

(4) Jeder Punkt x in $(X,\mathcal{T})$ hat $\mathcal{B}_x = \{\, B \in \mathcal{B} \mid x \in B \,\}$ als Umgebungsbasis.

☞ BEWEIS. Die Äquivalenzen „(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)“ sind klar. □ ☜

Erläuterung. Wenn alles klar ist, warum betone ich es dann? Jede dieser Umformulierungen hat jeweils ihre eigenen Vorteile: Die Definition (1) besagt zunächst nur, dass zu $U \in \mathcal{T}$ *irgendein* System $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ existiert, sodass $U = \bigcup \mathcal{S}$ gilt. Bedingung (2) ist hier etwas genauer und benennt explizit das maximale System $\mathcal{S} = \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subset U \}$. Bedingung (3) ergänzt dies durch eine lokale Formulierung für die Umgebungen jedes Punktes $x \in X$. Bedingung (4) klärt die Äquivalenz zu Umgebungsbasen $\mathcal{B}_x$ aller Punkte $x \in X$. Je nach Anwendung ist jede dieser Sichtweisen hilfreich.

Oft ist es bequem, die Topologie durch Angabe einer Basis zu definieren, so zum Beispiel für metrische Räume (D1D), Ordnungstopologien (D1M) oder Funktionenräume (§D4). Der folgende Satz erklärt, welche Bedingungen dabei zu beachten sind:

Satz D6C. *Jede Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X erfreut sich folgender Eigenschaften:*

(B1) Es gilt $X = \bigcup \mathcal{B}$.
(B2) Für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existiert $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ sodass $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{S}$.

Äquivalent hierzu sind die folgenden lokalen Umformulierungen:

(B1') Für jeden Punkt $x \in X$ existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$.
(B2') Für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Erfüllt umgekehrt ein beliebiges Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ diese Bedingungen, dann ist

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup \mathcal{S} \;\middle|\; \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \right\} = \left\{ U \subset X \;\middle|\; \forall x \in U \;\; \exists B \in \mathcal{B} \,:\, x \in B \subset U \right\} \tag{D.1}$$

eine Topologie auf X, und $\mathcal{B}$ ist eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$.

BEWEIS. Ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, so gilt (O1) $\Rightarrow$ (B1) und (O2) $\Rightarrow$ (B2). Die Äquivalenzen (B1) $\Leftrightarrow$ (B1') und (B2) $\Leftrightarrow$ (B2') sind klar, ebenso die Gleichheit in (D.1).

Sei umgekehrt $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ und $\mathcal{T}$ definiert durch (D.1). Offensichtlich gilt (B1) $\Rightarrow$ (O1).

Wir zeigen (B2') $\Rightarrow$ (O2): Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ und $U := U_1 \cap U_2$. Zu jedem $x \in U$ existieren gemäß (D.1) Mengen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_1 \subset U_1$ und $x \in B_2 \subset U_2$. Dank (B2') existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 = U$. Das bedeutet $U \in \mathcal{T}$.

Das Axiom (O3) schließlich ist klar: Sei $U_i \in \mathcal{T}$ und $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Zu $x \in U$ existiert $i \in I$ mit $x \in U_i$, und somit ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset U_i \subset U$. Das bedeutet $U \in \mathcal{T}$.

Nach Konstruktion (D.1) gilt $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, somit ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$. □

Beispiele. Die Konstruktion von Satz D6C haben wir bereits ausgiebig genutzt:

- Jede Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$ definiert die zugehörige metrische Topologie $\mathcal{T}_d$ (D1D): Jede offene Menge $U \subset X$ ist Vereinigung offener Bälle $B(a, \varepsilon)$.
- Jede lineare Ordnung $<$ auf X definiert die zugehörige Ordnungstopologie $\mathcal{T}_<$ (D1M): Jede offene Menge $U \subset X$ ist Vereinigung offener Intervalle $]a, b[$.

§D6b. Die Fürstenberg–Topologie auf $\mathbb{Z}$. Zur Erheiterung und zur Allgemeinbildung möchte ich eine kuriose Topologie auf der Menge $\mathbb{Z}$ vorstellen. Eingeführt wurde sie 1955 von dem damals 20jährigen Studenten Hillel FÜRSTENBERG in seinem nur zwölfzeiligen Artikel *On the infinitude of primes*, American Mathematical Monthly 62 (1955).

Dieses Beispiel illustriert den Begriff der Basis zur Erzeugung einer Topologie. Die Eigenheiten dieser Topologie beweisen auf überraschende Weise den klassischen Satz von EUKLID, dass die Menge $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ der Primzahlen unendlich sein muss. Das gelingt wie folgt:

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiel (Fürstenberg)**.** Eine *arithmetische Progression* in $\mathbb{Z}$ ist eine Menge der Form

$$P(a,b) = a + b\mathbb{Z} = \{\, a + nb \mid n \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{mit } a,b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \geq 1.$$

(1) Die Familie $\mathcal{B} = \{\, P(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z},\ b \geq 1 \,\}$ ist Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{Z}$.
(2) In der so erzeugten *Fürstenberg–Topologie* ist $P(a,b)$ offen und abgeschlossen.
(3) Die Vereinigung $V = \bigcup_{p\in\mathbb{P}}(p\mathbb{Z})$ hat als Komplement $\mathbb{Z} \smallsetminus V = \{-1,+1\}$.
(4) Wäre $\mathbb{P}$ endlich, so wäre $\{-1,+1\}$ offen, was offensichtlich falsch ist.

Übung D6D. Beweisen Sie diese Aussagen. *Variante:* Übertragen Sie die Aussagen auf $\mathbb{N}$. Ist dieser Beweis konstruktiv? Wie führte EUKLID ihn konstruktiv? und ERATOSTHENES?

✻ **D6D.** (1) Wir prüfen für $\mathcal{B}$ die Basisaxiome nach: (B1') Es gilt $\mathbb{Z} = P(0,1)$. (B2') Für $x \in P(a,b) \cap P(c,d)$ gilt $x \in P(x,bd) \subset P(a,b) \cap P(c,d)$. Nach Satz D6C ist somit $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{B}\}$.

(2) Nach Konstruktion ist $P(a,b) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ offen, ebenso $\mathbb{Z} \smallsetminus P(a,b) = \bigcup_{0<k<b} P(a+k,b)$.

(3) Jede ganze Zahl $v \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{\pm 1\}$ wird von mindestens einer Primzahl $p \in \mathbb{P}$ geteilt, also gilt $v \in V$.

(4) Wäre $\mathbb{P}$ endlich, so wäre V abgeschlossen und somit das Komplement $\{\pm 1\}$ offen. Widerspruch!

Variante: Alle Argumente übertragen sich von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{N}$ mit $P(a,b) = a + b\mathbb{N}$ und $0 \leq a < b$. (Wie genau?)

Ausführung zur mathematischen Allgemeinbildung: Eine *Produktzerlegung* einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist eine Familie $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ in $\mathbb{N}$ sodass $n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_\ell$ gilt. Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ erlaubt die trivialen Zerlegungen $n = 1 \cdot n$ und $n = n \cdot 1$. Hingegen nennen wir $n = a \cdot b$ eine *echte Zerlegung*, wenn $a, b > 1$ gilt; in diesem Falle heißt n *zerlegbar* oder *reduzibel*. Wir nennen $n \in \mathbb{N}$ *unzerlegbar* oder *irreduzibel* oder *prim*, wenn aus $n = a \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ stets entweder $a = 1$ oder $b = 1$ folgt. Die Zahlen 0 und 1 sind demnach nicht prim. Prim sind zum Beispiel 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Dies sind alle Primzahlen ≤ 100, alle anderen in diesem Bereich sind zerlegbar. Die Menge $\mathbb{N}$ ist unendlich und enthält offensichtlich unendlich viele zerlegbare Zahlen, zum Beispiel 2^k mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die Teilmenge $\mathbb{P}$ der Primzahlen wird immer dünner, wie man an obigen Beispielen erahnt und durch Ausprobieren empirisch bestätigt. Es stellt sich also die Frage: Bricht die Folge der Primzahlen ab? EUKLID fand heraus, dass dies nie passiert: In *Die Elemente*, Buch IX, Proposition 20, schreibt er: „Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen." Hier sein originalgetreuer Beweis (allerdings in moderner Sprechweise):

Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist entweder selbst Primzahl oder das Produkt mehrerer Primzahlen. Das ist klar per Induktion. (Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung benötigen wir hier nicht, es reicht die Existenz.) Angenommen, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sind Primzahlen. Die Zahl $a = 1 + p_1 p_2 \cdots p_n \geq 2$ lässt sich in Primzahlen zerlegen, es gilt also $a = q_1 q_2 \cdots q_m$ mit $q_1, q_2, \ldots, q_m$ prim und $m \geq 1$. Wäre $p_i = q_j$ für ein Paar (i,j), dann teilte q_j sowohl $p_1 p_2 \ldots p_n$ als auch $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$; somit teilte q_j die Differenz 1, was $q_j = 1$ zur Folge hätte und der Voraussetzung widerspräche, dass q_j prim ist. Also sind die Mengen $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ und $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ disjunkt. Zu jeder endlichen Menge von Primzahlen existiert also mindestens eine weitere.

Dieser genial einfache Beweis verdient angemessene Würdigung! Man beachte insbesondere, dass der Beweis konstruktiv ist: Zu gegebenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ liefert dieses Verfahren weitere, neue Primzahlen. (Diese Methode ist *effektiv*, wenn auch nicht sonderlich *effizient*.) Oft wird statt dieses konstruktiven ein nicht-konstruktiver Beweis durch Widerspruch geführt, was zu einer schwächeren Aussage führt, unnötige Umwege erfordert und oft zu heilloser Verwirrung führt. Manchmal sind die Argumente nicht nur schlecht präsentiert, sondern auch lückenhaft oder gar falsch. Diese unrühmliche Tradition beleuchtet der Artikel von M. Hardy und C. Woodgold: *Prime simplicity*, The Mathematical Intelligencer 31 (2009).

Fürstenbergs Beweis ist korrekt, aber nicht konstruktiv: Er besagt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, aber er sagt nicht, wie man Primzahlen finden kann. Die konstruktive Fassung ist das Sieb des ERATOSTHENES: Die Zahlen 0 und 1 sind nicht prim. Die Folge $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$ der verbleibenden natürlichen Zahlen beginnt mit der Primzahl 2. Streiche alle echten Vielfachen $2\mathbb{N}_{\geq 2} = \{4, 6, 8, \ldots\}$. Die nächste der verbleibenden Zahlen ist die Primzahl 3. Streiche alle echten Vielfachen $3\mathbb{N}_{\geq 2} = \{6, 9, 12, \ldots\}$. Die nächste der verbleibenden Zahlen ist die Primzahl 5. Streiche alle echten Vielfachen $5\mathbb{N}_{\geq 2} = \{5, 10, 15, \ldots\}$. Die nächste der verbleibenden Zahlen ist die Primzahl 7. So fortfahrend konstruiert man alle Primzahlen in aufsteigender Folge.

§D6c. Erzeugung von Topologien. Manchmal muss oder möchte man, ausgehend von einem Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(X)$, die kleinste / gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X betrachten, die $\mathcal{E}$ enthält. Das heißt, wir wollen sparsam vorgehen, und $\mathcal{T}$ soll über $\mathcal{E}$ hinaus möglichst wenige weitere Mengen enthalten. Dass eine solche Topologie existiert, ist eine Formalität:

Proposition D6E (erzeugte Topologie)**.** *Ist $\mathcal{T}_\lambda \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Topologie auf X für jedes $\lambda \in \Lambda$, so auch die Schnittmenge $\mathcal{T} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda$. Für $\Lambda = \emptyset$ vereinbaren wir $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$.*

So erhalten wir für jedes Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ die erzeugte Topologie

$$\tau(\mathcal{E}) := \bigcap \big\{ \mathcal{T} \;\big|\; \mathcal{E} \subset \mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X) \text{ und } \mathcal{T} \text{ ist eine Topologie auf } X \big\}.$$

Nach Konstruktion ist dies die kleinste (gröbste) Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ enthält.

BEWEIS. Die Eigenschaften (O1–3) übertragen sich von den Topologien $\mathcal{T}_\lambda$ auf $\mathcal{T}$:

(O1) Da $\mathcal{T}_\lambda$ eine Topologie ist, gilt $\emptyset, X \in \mathcal{T}_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$, und somit $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(O2) Aus $U, V \in \mathcal{T}$ folgt $U, V \in \mathcal{T}_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Da $\mathcal{T}_\lambda$ eine Topologie ist, gilt $U \cap V \in \mathcal{T}_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$, und somit $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(O3) Aus $U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ folgt $U_i \in \mathcal{T}_\lambda$ für alle $i \in I$ und jedes $\lambda \in \Lambda$. Da $\mathcal{T}_\lambda$ eine Topologie ist, gilt $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$, und somit $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$. □

So weit, so abstrakt: Die so durchgeführte Eingrenzung von außen sagt uns noch nichts über Elemente von $\tau(\mathcal{E})$, also nicht, wie offene Mengen dieser Topologie aussehen! Der folgende Satz beschreibt hierzu die erzeugte Topologie durch Ausschöpfung von innen:

Satz D6F. *Sei $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein beliebiges System von Teilmengen in X. Wir setzen*

$$\mathcal{B} := \big\{ E_1 \cap \cdots \cap E_n \;\big|\; n \in \mathbb{N} \text{ und } E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E} \big\} \quad \text{und} \quad \mathcal{T} := \big\{ \textstyle\bigcup \mathcal{S} \;\big|\; \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \big\}.$$

Dann ist $\mathcal{T} = \tau(\mathcal{E})$ die gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ enthält, und $\mathcal{B}$ ist eine Basis von $\mathcal{T}$.

In diesem Fall heißt $\mathcal{B}$ die *von $\mathcal{E}$ erzeugte Basis* und $\mathcal{T}$ die *von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie*. Die Familie $\mathcal{E}$ nennt man ein *Erzeugendensystem* oder eine *Subbasis* der Topologie $\mathcal{T}$.

Jede Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ umfasst, enthält offensichtlich auch $\mathcal{B}$ und damit $\mathcal{T}$. Es reicht demnach zu zeigen, dass die angegebene Menge $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist:

- Übergang von $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{B}$ sichert die Stabilität unter endlichen Durchschnitten.
  Für $n = 0$ interpretieren wir den leeren Durchschnitt als $X \in \mathcal{B}$.
- Übergang von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{T}$ sichert die Stabilität unter beliebigen Vereinigungen.
  Für $\mathcal{S} = \emptyset$ erhalten wir die leere Vereinigung $\bigcup \mathcal{S} = \emptyset \in \mathcal{T}$.

BEWEIS. Das System $\mathcal{B}$ erfüllt (B1–2) aus D6C, demnach ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. □

Erzeugung von Topologien und von σ–Algebren. Eingrenzung (D6E) ist ein allgemeines Konstruktionsprinzip und lässt sich auf nahezu jede mathematische Struktur anwenden. Ausschöpfung (D6F) konkretisiert dies und gestattet eine übersichtliche Beschreibung der erzeugten Topologie. Um dies zu würdigen, vergleiche man die Erzeugung von Topologien mit der Erzeugung von σ–Algebren: Die Eingrenzung der erzeugten Topologie von außen (D6E) entspricht der Eingrenzung der erzeugten σ–Algebra (D7J). Das Ausschöpfen von innen benötigt für Topologien nur zwei Konstruktionsschritte, nämlich zuerst endliche Durchschnitte und dann beliebige Vereinigungen. Fertig! Für σ–Algebren hingegen erfordert das Ausschöpfen im Allgemeinen überabzählbar viele Schritte, bis schließlich Stabilität unter abzählbaren Durchschnitten und abzählbaren Vereinigungen erreicht ist. Allein schon in dieser Hinsicht ist die Struktur offener Mengen einfacher als die Struktur messbarer Mengen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiele.
- Ist $\mathcal{E}$ selbst schon eine Topologie auf X, so gilt $\mathcal{E} = \mathcal{B} = \mathcal{T}$.
- Für $\mathcal{E} = \emptyset$ erhalten wir $\mathcal{B} = \{X\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, also die indiskrete Topologie (D1C).
- Für jede total geordnete Menge $(X, <)$ und $\mathcal{E} = \{\,]a, +\infty[,]-\infty, b[\mid a, b \in X\,\}$ erhalten wir $\mathcal{B} = \{X\} \cup \mathcal{E} \cup \{\,]a, b[\mid a, b \in X\,\}$ und die Ordnungstopologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_<$ auf X (D1M).
- Die Topologie des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ wird erzeugt von den offenen Halbräumen $H_i^{<a} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i < a\,\}$ und $H_i^{>a} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > a\,\}$ mit $i = 1, \dots, n$ und $a \in \mathbb{R}$.
- Zu $a \in \mathbb{S}^n$ betrachten wir den Halbraum $H_a = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n > a_0\,\}$. Das System $\mathcal{H} = \{\, H_a \mid a \in \mathbb{S}^n\,\}$ erzeugt die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$. (Skizze!)

Bemerkung. Jede Basis $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ ist insbesondere ein Erzeugendensystem von $\mathcal{T}$. Die in Satz D6F konstruierte Basis $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ ist zudem stabil unter Durchschnitten und im Allgemeinen echt feiner als $\mathcal{E}$, wie die Basis $\mathcal{E} = \{\, B(x, r) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}_{>0}\,\}$ zeigt.

Bemerkung. Angenommen $\mathcal{E}$ erzeugt die Topologie $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}X$, und $\mathcal{E}'$ erzeugt die Topologie $\mathcal{T}' \subset \mathfrak{P}X$. Genau dann gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, wenn $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}'$ gilt. Genau dann gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, wenn $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}'$ und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{T}$ gilt. Das ist oft nützlich, um die Gleichheit zweier Topologien zu beweisen.

§D6d. Stetigkeit und Basen. Manchmal ist es praktisch, Stetigkeit nur auf einer Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ oder gar nur auf einem Erzeugendensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ der Topologie nachzuprüfen:

Satz D6G. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $\mathcal{T}_X = \tau(\mathcal{E})$. Eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ ist genau dann stetig, wenn für alle $U \in \mathcal{E}$ stets $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$ gilt.*

Die Topologie $\mathcal{T}_X = \tau(\mathcal{E})$ können wir auf zwei Weisen erzeugen: durch Eingrenzung D6E oder Ausschöpfung D6F. Entsprechend können wir Satz D6G auf zwei Arten beweisen.

Zunächst gebe ich ein kurzes (dafür aber etwas abstrakteres) Argument, das in der Maßtheorie wörtlich genauso auf σ–Algebren und messbare Abbildungen anwendbar ist.

BEWEIS. Das System $f_*\mathcal{T}_Y = \{\, U \subset X \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y\,\}$ ist eine Topologie auf X, denn die Eigenschaften (O1–3) vererben sich von $\mathcal{T}_Y$ auf $f_*\mathcal{T}_Y$ (E1B). Die Stetigkeit von f ist gleichbedeutend zu $\mathcal{T}_X \subset f_*\mathcal{T}_Y$, und dies ist äquivalent zu $\mathcal{E} \subset f_*\mathcal{T}_Y$. □

Für Topologien können wir Satz D6G auch explizit nachrechnen:

AUSFÜHRLICHER BEWEIS. Seien $\mathcal{E} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ wie in Satz D6F. Sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum. Für jede Abbildung $f : Y \to X$ sind dann äquivalent:

(1) Für alle $U \in \mathcal{T}$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, das heißt die Abbildung f ist stetig.
(2) Für alle $U \in \mathcal{B}$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, Kriterium auf einer Basis der Zieltopologie.
(3) Für alle $U \in \mathcal{E}$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, Kriterium auf einem Erzeugendensystem.

„(3) ⇒ (2)“: Für jedes Element $B \in \mathcal{B}$ gilt $B = E_1 \cap \cdots \cap E_n$ mit $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$. Nach (3) gilt $f^{-1}(E_i) \in \mathcal{T}_Y$ für alle $i = 1, \dots, n$, und dank (O2) somit

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(E_1 \cap \cdots \cap E_n) = f^{-1}(E_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(E_n) \in \mathcal{T}_Y.$$

„(2) ⇒ (1)“: Für jedes Element $U \in \mathcal{T}$ gilt $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ mit $B_i \in \mathcal{B}$. Nach (2) gilt $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_Y$ für alle $i \in I$, und dank (O3) somit

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\Big(\bigcup\nolimits_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup\nolimits_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_Y.$$

Die Implikationen „(1) ⇒ (2) ⇒ (3)“ sind trivial. □

§D6e. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Wie der Name bereits erahnen lässt, gibt es neben dem ersten Abzählbarkeitsaxiom (D3F) auch ein zweites Abzählbarkeitsaxiom:

Definition D6H. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist *zweitabzählbar*, oder: erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* (2AA), wenn die Topologie eine abzählbare Basis $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ erlaubt.

Beispiel. Für die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$ bilden die offenen Intervalle die Basis $\mathcal{B}=\{\,]a,b[\mid a,b\in\mathbb{R}\,\}$. Hierin ist $\mathcal{B}'=\{\,]a,b[\mid a,b\in\mathbb{Q}\,\}$ eine abzählbare Basis.

Beispiel. Für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden die offenen Quader die Basis

$$\mathcal{B}=\big\{\,]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_n,b_n[\;\big|\;a_1<b_1,\dots,a_n<b_n \text{ in } \mathbb{R}\,\big\}.$$

Hierin bilden die offenen Quader mit rationalen Eckpunkten die abzählbare Basis

$$\mathcal{B}'=\big\{\,]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_n,b_n[\;\big|\;a_1<b_1,\dots,a_n<b_n \text{ in } \mathbb{Q}\,\big\}.$$

Bemerkung. Definition D6H ist gleichbedeutend damit, dass die Topologie $\mathcal{T}$ von einer abzählbaren Menge $\mathcal{E}\subset\mathcal{T}$ erzeugt wird: Nach Satz D6F erhalten wir dann nämlich eine Basis $\mathcal{B}$ durch Bildung aller *endlichen* Durchschnitte in $\mathcal{E}$, und mit $\mathcal{E}$ ist auch $\mathcal{B}$ abzählbar.

Beispiel. Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ wird erzeugt von den offenen Halbräumen $\{\,x\in\mathbb{R}^n\mid x_k>a\,\}$ und $\{\,x\in\mathbb{R}^n\mid x_k<a\,\}$ für $k=1,\dots,n$ und $a\in\mathbb{R}$. Wir erhalten ein abzählbares Erzeugendensystem, wenn wir hierbei $a\in\mathbb{Q}$ wählen. Die hiervon erzeugte Basis ist abzählbar; dies sind die offenen Quader des vorigen Beispiels.

Beispiel. Für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden die offenen Bälle die Basis

$$\mathcal{B}=\big\{\,B(a,r)\;\big|\;a\in\mathbb{R}^n,\ r\in\mathbb{R}_{>0}\,\big\}.$$

Diese enthält, wie wir in D6N sehen werden, die abzählbare Basis

$$\mathcal{B}'=\big\{\,B(a,r)\;\big|\;a\in\mathbb{Q}^n,\ r\in\mathbb{Q}_{>0}\,\big\}.$$

Bemerkung. Es gilt 2AA $\Rightarrow$ 1AA dank D6B(4). Die Umkehrung gilt nicht (D6K).

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom bedeutet insbesondere, wie eingangs angekündigt, dass die Topologie „nicht allzu groß“ ist, nämlich höchstens so mächtig wie $\mathbb{R}$:

Satz D6I. *Ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, so erhalten wir die Injektion*

$$\Phi:\mathcal{T}\hookrightarrow\mathfrak{P}(\mathcal{B}):U\mapsto\{\,B\in\mathcal{B}\mid B\subset U\,\}\quad\textit{mit}\quad U=\bigcup\Phi(U).$$

Aus $\operatorname{card}(\mathcal{B})\le\operatorname{card}(\mathbb{N})$ *folgt somit* $\operatorname{card}(\mathcal{T})\le\operatorname{card}(\mathfrak{P}(\mathcal{B}))\le\operatorname{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))=\operatorname{card}(\mathbb{R})$.

Insbesondere für die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$, $n\ge1$, gilt $\operatorname{card}(\mathcal{T})=\operatorname{card}(\mathbb{R})$.

Es gibt genauso viele offene Mengen $U\subset\mathbb{R}^n$ wie Punkte $x\in\mathbb{R}^n$. Wenn man's recht bedenkt, sind das erstaunlich wenig; die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ ist jedenfalls viel größer.

BEWEIS. Wir haben $\Psi:\mathfrak{P}(\mathcal{B})\to\mathcal{T}:\mathcal{S}\mapsto\bigcup\mathcal{S}$ und $\Psi\circ\Phi=\mathrm{id}_{\mathcal{T}}$ dank D6B. Jede Injektion $\mathcal{B}\hookrightarrow\mathbb{N}$ impliziert $\mathcal{T}\hookrightarrow\mathfrak{P}(\mathcal{B})\hookrightarrow\mathfrak{P}(\mathbb{N})\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}}\cong\mathbb{R}$ (B2N). Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$, also gilt $\mathcal{T}\hookrightarrow\mathbb{R}$. Für $n\ge1$ haben wir zudem eine Injektion $\mathbb{R}_{>0}\hookrightarrow\mathcal{T}:r\mapsto B(0,r)$ mit $r=\operatorname{diam}B(0,r)/2$. Dank Cantor–Bernstein (B2O) erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{T}\cong\mathbb{R}$, kurz $\operatorname{card}(\mathcal{T})=\operatorname{card}(\mathbb{R})$. □

Beispiel. Auf $\mathbb{N}$ ist die koendliche Topologie $\mathcal{T}$ abzählbar. Jede Basis $\mathcal{B}$ ist abzählbar unendlich, $\Phi:\mathcal{T}\hookrightarrow\mathfrak{P}(\mathcal{B})$ ist injektiv, aber $\mathcal{T}$ hat strikt kleinere Kardinalität als $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D6f. Diskrete Teilmengen. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste gemäß D6B: Ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ auf X, dann ist für jeden Punkt $x \in X$ die Teilmenge $\mathcal{B}_x = \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \}$ eine Umgebungsbasis von x in $(X,\mathcal{T})$. Mit $\mathcal{B}$ ist auch $\mathcal{B}_x$ abzählbar. Umgekehrt impliziert das erste Abzählbarkeitsaxiom aber nicht das zweite:

Beispiel. Für jede Menge X ist die diskrete Topologie $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ metrisierbar (etwa durch die diskrete Metrik) und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Sie erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom genau dann, wenn die Trägermenge X abzählbar ist.

Genauer: In $(X,\mathcal{T})$ ist $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ eine Umgebungsbasis für jeden Punkt x in $(X,\mathcal{T})$. Das System $\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ ist eine Basis der Topologie und zudem in jeder anderen Basis enthalten. Somit erlaubt die diskrete Topologie $\mathcal{T}$ genau dann eine abzählbare Basis, wenn die zugrundeliegende Menge X abzählbar ist.

Dieses Argument gilt ganz allgemein für beliebige diskrete Teilmengen:

Lemma D6J. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ diskret und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Basis. Zu jedem $a \in A$ existiert $U_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap A = \{a\}$. Hierzu existiert $B_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in B_a \subset U_a$, also $B_a \cap A = \{a\}$. Somit ist $A \hookrightarrow \mathcal{B} : a \mapsto B_a$ injektiv, also* $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(\mathcal{B})$.

Ist $(X,\mathcal{T})$ zweitabzählbar, dann ist jede diskrete Teilmenge $A \subset X$ abzählbar.

Ist $A \subset X$ diskret und überabzählbar, so ist $(X,\mathcal{T})$ nicht zweitabzählbar. □

Beispiel. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist jede diskrete Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar.

Hierzu eine Illustration aus der Analysis zu normierten Vektorräumen: Sie zeigt, dass es sehr naheliegende und natürliche Räume gibt ohne abzählbare Basis der Topologie.

Satz D6K. *Sei $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}) = \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt$\}$ mit Supremumsnorm. Dieser Banach–Raum erfüllt das erste, aber nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

BEWEIS. Die Menge $A = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ aller Folgen $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\} : k \mapsto a_k$ ist überabzählbar.

Zur Erinnerung: Die Abbildung $A \to [0,1]$, die jeder Folge $a \in A$ die Binärentwicklung $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}$ zuordnet, ist surjektiv. Genauer gilt $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ und $\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$ (B2N).

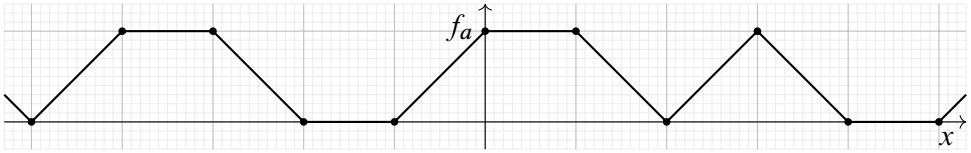


ABBILDUNG D:6. Stückweise affine Interpolation einer Folge $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$

Zu jeder Folge $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ sei $f_a : \mathbb{R} \to [0,1]$ die affine Interpolation mit

$$f_a(x) = (1-t)a_k + t a_{k+1} \qquad \text{für } x = k+t \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ und } t \in [0,1].$$

Jede Funktion f_a ist stetig (E1P). Die Zuordnung $A \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R}) : a \mapsto f_a$ ist injektiv, denn $a = f_a|_{\mathbb{Z}}$. Mit A ist also auch die Menge $F = \{ f_a \mid a \in A \} \subset \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ überabzählbar.

Die Menge F ist diskret in $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ bezüglich der hier vereinbarten Supremumsnorm, denn für $a \neq b$ in A gilt $|f_a - f_b|_{\mathbb{R}} = 1$, also $B(f_a,1) \cap F = \{f_a\}$.

Die Topologie des Raumes $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ erlaubt demnach keine abzählbare Basis. Gemäß D6J gilt genauer: Jede Basis dieser Topologie ist mindestens so mächtig wie $\mathbb{R}$. □

§D6g. Dichte Teilmengen. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie erlaubt nicht nur abzählbare Basen der Topologie, etwa $\{\,]a,b[\mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, sondern auch abzählbare dichte Teilmengen, etwa $\mathbb{Q}$. Wir kommen so zu einer dritten Abzählbarkeitseigenschaft:

Definition D6L. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält, das heißt, es existiert $A \subset X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$.

Verwechslungsgefahr. Die Begriffe *separabel* und *separiert* (= hausdorffsch, siehe D3J) haben rein gar nichts gemeinsam. Die sprachliche Nähe ist unglücklich, aber historisch nicht mehr zu ändern.

Satz D6M. *Ist $(X,\mathcal{T})$ zweitabzählbar, das heißt, es existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so ist $(X,\mathcal{T})$ separabel, das heißt, es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $A \subset X$.*

BEWEIS. Zu jeder Menge $B \in \mathcal{B} \smallsetminus \{\emptyset\}$ wählen wir einen Punkt $a_B \in B$. Mit $\mathcal{B}$ ist auch $A = \{\, a_B \mid B \in \mathcal{B} \smallsetminus \{\emptyset\}\,\}$ abzählbar. Zudem ist A dicht in X: Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$, enthält eine Menge $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$, somit gilt $a_B \in B \subset U$, also $A \cap U \neq \emptyset$. □

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie der Arens–Fort–Raum (D3U) und die Sorgenfrey–Gerade (D6Y) zeigen. Das folgende Kriterium ist oft nützlich, allein schon um die Zweitabzählbarkeit für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ bequem nachzuweisen:

Satz D6N. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und darin $A \subset X$ abzählbar und dicht. Dann erlaubt die metrische Topologie $\mathcal{T}_d$ die abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{\, B(a,r_k) \mid a \in A,\ k \in \mathbb{N}\,\}$, wobei $r_0 > r_1 > r_2 > \ldots > 0$ mit $r_k \searrow 0$, etwa $r_k = 2^{-k}$.*

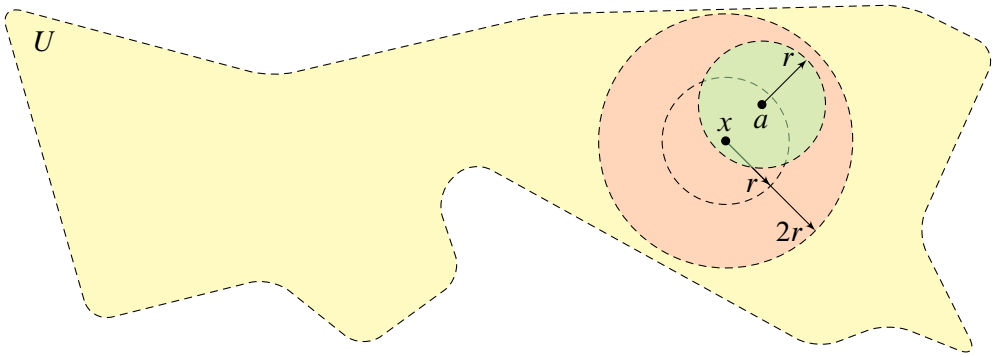


ABBILDUNG D:7. Metrisierbar und separabel impliziert 2AA

BEWEIS. Für $U \in \mathcal{T}_d$ behaupten wir $U = \bigcup\{\, B \in \mathcal{B} \;\big|\; B \subset U\,\}$. Die Inklusion „$\supset$“ ist klar, wir zeigen „$\subset$“: Hierzu sei $x \in U$. Da U offen ist in (X,d), existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x,\varepsilon) \subset U$. Dank $r_k \searrow 0$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $r_k < \varepsilon/2$, also $B(x,2r_k) \subset U$. Da A dicht ist in (X,d), existiert $a \in A \cap B(x,r_k)$. Somit gilt $x \in B(a,r_k) \subset B(x,2r_k) \subset U$. □

Beispiel. Die euklidische Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt $\mathcal{B} = \{\, B(a,1/k) \mid a \in \mathbb{Q}^n,\ k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\,\}$. als abzählbare Basis. Für ihre Mächtigkeit folgt $\operatorname{card}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$ dank D6I.

Beispiel. Ist der Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz separabel? Er ist nicht erstabzählbar, somit weder metrisierbar (D3G) noch zweitabzählbar (D6B). Damit können wir Separabilität weder folgern (mit D6M) noch ausschließen (mit D6N). Wir müssen also genauer hinschauen: Die rationalen Polynome $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind abzählbar und dicht.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D6h. Anwendungen. Die Sätze D6M und D6N ergeben folgende Charakterisierung:

Korollar D6O. *Ein metrisierbarer topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist genau dann separabel, wenn er zweitabzählbar ist (dank D6M und D6N).* □

Zur Illustration und als Kontext etwas allgemeinere Anwendungen aus der Analysis:

Satz D6P. *Der Banach–Raum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller beschränkten stetigen Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit Supremumsnorm ist nicht zweitabzählbar (D6K) und somit auch nicht separabel (D6N).*

Hingegen ist $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ separabel und somit zweitabzählbar (dank D6N): Hier sind die Polynomfunktionen $\mathbb{Q}[x]\hookrightarrow\mathbb{R}[x]\hookrightarrow\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ dicht dank Weierstraß–Approximation.

BEWEIS. Die erste Aussage ist Satz D6K, die zweite folgt aus Satz D6N: Der Approximationssatz von Weierstraß (F2R) besagt, dass die Polynome $\mathbb{R}[x]$ dicht in $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ sind. Die rationalen Polynome $\mathbb{Q}[x]$ sind somit ebenfalls dicht und zudem abzählbar. □

Satz D6Q. *Sei $1\le p<\infty$. Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ ist $D=\mathbb{Q}^{(\Omega)}$ bzw. $(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^{(\Omega)}$ dicht und $\{\mathbf{I}_A \mid A\subset\Omega \text{ endlich}\}$ diskret. Genau dann ist $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ separabel und zweitabzählbar, wenn die Grundmenge Ω abzählbar ist. Insbesondere sind die Hilbert–Räume $\mathbb{K}^n=\ell^2(\{1,\dots,n\})$ und $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ separabel und zweitabzählbar.*

Hingegen ist der Raum $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ weder separabel noch zweitabzählbar, denn hierin ist die Menge $\{\mathbf{I}_A \mid A\subset\mathbb{N}\}$ überabzählbar und diskret.

BEWEIS. Der Raum $\ell^p(\Omega)=\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ wird durch die Norm $|-|_p$ metrisiert (C1L). Hierin ist D eine dichte Teilmenge (D5K). Ist Ω abzählbar, so auch D. Nach Satz D6N erfüllt der Raum $\ell^p(\Omega)$ dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Umgekehrt ist $\{\mathbf{I}_A \mid A\subset\Omega \text{ endlich}\}$ diskret. Ist also Ω überabzählbar, so erfüllt $\ell^p(\Omega)$ nach D6J nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom, und nach Satz D6N besitzt $\ell^p(\Omega)$ auch keine dichte abzählbare Teilmenge.

Der Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ verhält sich grundlegend anders: Wir haben die injektive Abbildung $\iota:\mathfrak{P}(\mathbb{N})\to\ell^\infty(\mathbb{N}):A\mapsto\mathbf{I}_A$. Das Bild ist überabzählbar und diskret, denn für $A\neq B$ gilt $|\mathbf{I}_A-\mathbf{I}_B|_\infty=1$. Nach D6J erlaubt die Topologie auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ somit keine abzählbare Basis. Nach D6N besitzt $\ell^\infty(\mathbb{N})$ auch keine dichte abzählbare Teilmenge. □

Satz D6R. *Jeder separable Hilbert–Raum $(V,\langle-\mid-\rangle)$ über $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ist linear isometrisch zu einem euklidischen Raum $\mathbb{K}^n=\ell^2(\{1,\dots,n\})$ oder zu $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.*

BEWEIS. Im Falle $\dim_{\mathbb{K}} V<\infty$ existiert eine Basis $b_1,\dots,b_n\in V$. Hieraus konstruieren wir eine Orthonormalbasis $e_1,\dots,e_n\in V$ dank des Gram–Schmidt–Verfahrens (C1H). Andernfalls nutzen wir die Voraussetzung der Separabilität: Es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}\subset V$. Das Gram–Schmidt–Verfahren (C1H) bildet daraus eine orthonormale Familie $e_0,e_1,e_2,\dots$, und der aufgespannte Untervektorraum $U=\langle e_0,e_1,e_2,\dots\rangle$ enthält A. Hieraus folgt $V\subset\overline{A}\subset\overline{U}\subset V$, also $\overline{U}=V$. Die Abbildung $f:\ell^2(\mathbb{N})\to V$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}}x_ne_n$ ist wohldefiniert, da V vollständig ist und somit die angegebene Reihe konvergiert. Nach Konstruktion ist f linear. Dank Orthonormalität ist f isometrisch und somit injektiv. Wegen $\overline{U}=V$ ist f surjektiv. □

Beispiel. So weit, so gut, so abstrakt. Die Fourier–Theorie (C1F) stiftet eine konkrete und sehr nützliche Isometrie $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})\xrightarrow{\sim}L^2([0,2\pi],\mathbb{C}):\hat f\mapsto f$ mit $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat f(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

☞ **§D6i. Einbettungssätze von Kuratowski, Fréchet und Banach.** Folgende Einbettung geht auf Kazimierz KURATOWSKI (1896–1980) zurück; wir nutzten sie bereits in C4O: ☜

☞ **Satz D6S** (Kuratowski 1935)**.** *Jeder metrische Raum (X,d) lässt sich isometrisch einbetten in den Banach–Raum $\mathscr{C}_b(X) = \mathscr{C}_b(X,\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm. Hierzu wählen wir $x_0 \in X$ und definieren $\iota : X \to \mathscr{C}_b(X,\mathbb{R}) : a \mapsto f_a$ durch $f_a : X \to \mathbb{R} : x \mapsto d(a,x) - d(x,x_0)$.* ☜

BEWEIS. Die Zuordnung ι ist wohldefiniert, das heißt, es gilt tatsächlich $f_a \in \mathscr{C}_b(X,\mathbb{R})$: Zu jedem $a \in X$ ist die Abbildung f_a stetig (C3N) und beschränkt dank der umgekehrten Dreiecksungleichung (C2J):

$$|f_a(x)| = |d(a,x) - d(x,x_0)| \leq d(a,x_0).$$

Die Abbildung ι ist isometrisch, das heißt $\sup_{x\in X} |f_a(x) - f_b(x)| = d(a,b)$: Dank C2J gilt

$$|f_a(x) - f_b(x)| = |d(a,x) - d(b,x)| \leq d(a,b).$$

Für $x = a$ und $x = b$ wird der Wert $d(a,b)$ tatsächlich angenommen. □

☞ **Bemerkung.** Der Korrekturterm $d(x,x_0)$ garantiert, dass f_a beschränkt ist. Wenn die Metrik d auf X beschränkt ist, so können wir ihn weglassen und $f_a(x) = d(a,x)$ betrachten. ☜

Die Kuratowski–Einbettung $\iota : X \to \mathscr{C}_b(X,\mathbb{R})$ hängt von der Wahl eines Basispunktes $x_0 \in X$ ab, ist aber ansonsten kanonisch. Sie hat jedoch den Nachteil, dass der Zielraum $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ vom vorgegebenen metrischen Raum X abhängt. Bereits 1909 konstruierte Maurice FRÉCHET (1878–1973) folgende Einbettung mit festem Zielraum:

☞ **Satz D6T** (Fréchet 1909)**.** *Jeder separable metrische Raum (X,d) lässt sich isometrisch einbetten in den Banach–Raum $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm.* ☜

BEWEIS. Wir wählen eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ in X und definieren $\iota : X \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ durch die Zuordnung $a \mapsto f_a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f_a(k) = d(a,x_k) - d(x_k,x_0)$. Die Abbildung ι ist isometrisch, das heißt $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_a(k) - f_b(k)| = d(a,b)$: Dank C2J gilt

$$|f_a(k) - f_b(k)| = |d(a,x_k) - d(b,x_k)| \leq d(a,b).$$

Das Supremum wird erreicht durch Approximation $x_{k_n} \to a$ oder $x_{k_n} \to b$. □

☞ Die Einbettung $\iota : X \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ hängt von der Wahl der Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ ab, ist aber ansonsten explizit. Wir haben somit einen universellen Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$, der eine isometrische Kopie jedes *separablen* metrischen Raumes enthält. Der Banach–Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ is jedoch nicht separabel (D6Q). Der folgende Einbettungssatz behebt auch diesen Schönheitsfehler: ☜

☞ **Satz D6U** (Banach)**.** *Jeder separable metrische Raum (X,d) lässt sich isometrisch einbetten in den separablen Banach–Raum $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm.* □ ☜

Wir werden diesen Satz hier nicht beweisen, da die grundlegenden Techniken aus der Funktionalanalysis uns zu weit vom Weg führen würden.

☞ **Bemerkung.** Der Banach–Raum $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ besteht aus stetigen Abbildungen $[0,1] \to \mathbb{R}$, also Wegen auf der reellen Achse und somit sehr konkreten und „einfachen“ Objekten. Der Satz besagt, dass jeder separable metrische Raum in gewissem Sinne „klein“ ist, denn wir können ihn als eine Menge von solchen Wegen realisieren. Andererseits besagt der Satz, dass der Raum $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ „groß“ ist, denn er beherbergt jeden separablen metrischen Raum, zum Beispiel alle Räume $\ell^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ und Ω abzählbar (D6Q). ☜

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D6j. Die Lindelöf–Eigenschaft. Die folgenden Aufgaben dienen dazu, die bisherigen Abzählbarkeitsbegriffe zu wiederholen sowie die hierzu verwendeten Beweistechniken einzuüben. Die Argumente sind elementar, manche raffiniert, aber allesamt lehrreich.

Übung D6V. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(1) Existiert eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{A}_x$ für $x \in X$, so enthält jede Umgebungsbasis $\mathcal{B}_x$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}'_x \subset \mathcal{B}_x$.
(2) Existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{A}$ der Topologie $\mathcal{T}$, gilt also das 2AA, so enthält jede Basis $\mathcal{B}$ der Topologie $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.
(3) Existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{A}$ der Topologie $\mathcal{T}$, so gilt die *Lindelöf–Eigenschaft*: Jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ enthält eine abzählbare Teilüberdeckung.

Anwendung auf Mannigfaltigkeiten: Ist $(X,\mathcal{T})$ lokal euklidisch mit abzählbarer Basis, dann enthält jeder Atlas $\mathscr{A} = (\varphi_i : X \supset U_i \xrightarrow{\sim} V_i \subset \mathbb{R}^n)_{i\in I}$ einen abzählbaren Teilatlas.

✻ **D6V.** (1) Für $U \in \mathcal{A}_x$ wählen wir $W(U) \in \mathcal{B}_x$ mit $W(U) \subset U$. Dann ist $\mathcal{B}'_x := \{ W(U) \mid U \in \mathcal{A}_x \}$ abzählbar und eine Umgebungsbasis: Zu $x \in W \in \mathcal{T}$ existiert $U \in \mathcal{A}_x$ mit $x \in U \subset W$, und somit $x \in W(U) \subset U \subset W$.

(2) Für $U, V \in \mathcal{A}$ wählen wir $W(U,V) \in \mathcal{B}$ mit $U \subset W(U,V) \subset V$, falls dies möglich ist; andernfalls setzen wir willkürlich $W(U,V) := X$. Dann ist $\mathcal{B}' := \{ W(U,V) \mid U,V \in \mathcal{A} \}$ abzählbar und eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$: Zu $x \in W \in \mathcal{T}$ existiert nämlich $V \in \mathcal{A}$ mit $x \in V \subset W$, sodann $W' \in \mathcal{B}$ mit $x \in W' \subset V$, und schließlich $U \in \mathcal{A}$ mit $x \in U \subset W'$. Also haben wir $x \in U \subset W(U,V) \subset V \subset W$.

(3) Die Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ bestehe aus allen $B \in \mathcal{A}$, für die ein Index $j \in I$ existiert mit $B \subset U_j$. Zu jedem $B \in \mathcal{B}$ wählen wir dann ein $j(B) \in I$ so, dass $B \subset U_{j(B)}$ gilt. Mit $\mathcal{A}$ sind auch $\mathcal{B}$ und $J = \{ j(B) \mid B \in \mathcal{B} \}$ abzählbar. Zu jedem $x \in X$ existiert ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da $\mathcal{A}$ eine Basis ist, existiert $B \in \mathcal{A}$ mit $x \in B \subset U_i$. Somit gilt $B \in \mathcal{B}$ und $x \in B \subset U_{j(B)}$, also $x \in \bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{i\in J} U_i$. Dies zeigt $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Bemerkung. Ein Raum ist *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine *endliche* Teilüberdeckung enthält (§F1). Dies verschärft die Lindelöf–Bedingung wesentlich.

Zweitabzählbarkeit impliziert die Lindelöf–Eigenschaft, aber die Umkehrung gilt nicht!

Beispiel. Der Arens–Fort–Raum $(X,\mathcal{T})$ (D3U) hat abzählbare Trägermenge X, dennoch ist (D3U) nicht erstabzählbar und somit auch nicht zweitabzählbar.

Beispiel. Die Sorgenfrey–Gerade $(X,\mathcal{T})$ (D6Y) hat überabzählbare Trägermenge X aber dennoch die Lindelöf–Eigenschaft, $(X,\mathcal{T})$ ist erstabzählbar aber nicht zweitabzählbar.

Für metrische Räume jedoch gilt die erhoffte Umkehrung:

Übung D6W. Für jeden metrischen Raum gilt: Lindelöf $\Rightarrow$ separabel $\Rightarrow$ zweitabzählbar.

✻ **D6W.** Übung D6V zeigt, dass jeder zweitabzählbare Raum die Lindelöf–Bedingung erfüllt. Für die Umkehrung sei (X,d) ein metrischer Raum. Für jedes $n = 1,2,3,\ldots$ gilt $X = \bigcup_{x\in X} B(x, 1/n)$. Dank Lindelöf existiert eine abzählbare Menge $A_n \subset X$ mit $X = \bigcup_{x\in A_n} B(x, 1/n)$. Dann ist auch $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ abzählbar. Zudem ist A dicht in (X,d): Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $x_n \in A_n$ mit $d(x_n,x) < 1/n$. Wir erhalten so eine Folge in A mit $x_n \to x$. Also gilt $\overline{A} = X$. Die Zweitabzählbarkeit folgt nun aus Satz D6N.

Übung D6X. Oft genügt statt einer abzählbaren Basis von $(X,\mathcal{T})$ die schwächere Lindelöf–Bedingung. Zeigen Sie so: Jede diskrete abgeschlossene Menge $A \subset X$ ist abzählbar.

✻ **D6X.** Da A diskret in $(X,\mathcal{T})$ ist, existiert zu jedem $a \in A$ eine offene Umgebung $U_a \in \mathcal{T}$ sodass $U_a \cap A = \{a\}$. Da A abgeschlossen ist, erhalten wir die offene Überdeckung $X = (X \smallsetminus A) \cup \bigcup_{a\in A} U_a$. Hierbei kann keine Menge weggelassen werden, höchstens die erste im Falle $A = X$. Erfüllt der Raum $(X,\mathcal{T})$ die Lindelöf–Bedingung, so existiert eine abzählbare Teilüberdeckung, also muss A abzählbar sein.

§D6k. Die Sorgenfrey–Gerade und die Sorgenfrey–Ebene. Auf der Menge $\mathbb{R}$ existieren neben der euklidischen Topologie noch viele weitere, zum Beispiel die diskrete, die indiskrete, die koendliche und die koabzählbare Topologie. Die meisten muten exotisch an, aber sie schulen unsere Anschauung und mahnen zur Vorsicht: Viele scheinbar plausible Vermutungen erweisen sich anhand solcher Gegenbeispiele als falsch. Wir ergänzen unser Repertoire um zwei weitere exotische Topologien, die häufig als Gegenbeispiele nützen:

Beispiel D6Y. Wir statten die Menge $\mathbb{R}$ mit folgender Topologie $\mathcal{T}$ aus: Als Basis wählen wir halboffene Intervalle der Form $[a,a'[$, also $\mathcal{B} = \{\, [a,a'[\mid a,a' \in \mathbb{R} \,\}$. Diese erfüllt die Bedingungen (B1–2) aus D6C und ist somit die Basis der Topologie $\mathcal{T} = \{\, \bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \,\}$. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ ist genau dann offen in $(X,\mathcal{T})$, wenn für $a \in U$ stets $[a,a+\varepsilon[\subset U$ gilt für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Der Raum $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ heißt die *Sorgenfrey–Gerade*.

In dieser Topologie $\mathcal{T}$ ist $[a,b[$ offen, ebenso $]a,b[$, aber nicht $[a,b]$ und $]a,b]$. Das heißt, die Sorgenfrey–Topologie $\mathcal{T}$ ist echt feiner als die euklidische Topologie $\mathcal{T}_<$, also $\mathcal{T} \supsetneq \mathcal{T}_<$. Jedes Intervall $[a,b[$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen, ebenso $[a,+\infty[$ und $]-\infty,b[$. Bezüglich $\mathcal{T}$ konvergiert die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, nicht aber die Folge $(-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die Sorgenfrey–Gerade ist erstabzählbar vermöge $\mathcal{B}_x = \{\, [x,x+1/k[\mid k = 1,2,3,\dots \,\}$. Sie ist separabel, denn $\mathbb{Q}$ ist dicht: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine rationale Folge $x_n \searrow x$. Sie ist jedoch nicht zweitabzählbar: Zu $\mathcal{B} = \{\, [a_k,a'_k[\mid k \in \mathbb{N} \,\}$ existiert $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{\, a_k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ und $a' > a$, daher ist $[a,a'[$ offen aber nicht Vereinigung von Intervallen aus $\mathcal{B}$. Demnach ist die Sorgenfrey–Gerade $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ nicht metrisierbar (D6N). Dennoch hat sie die Lindelöf–Eigenschaft. (Das ist allerdings etwas mühsamer nachzuweisen.)

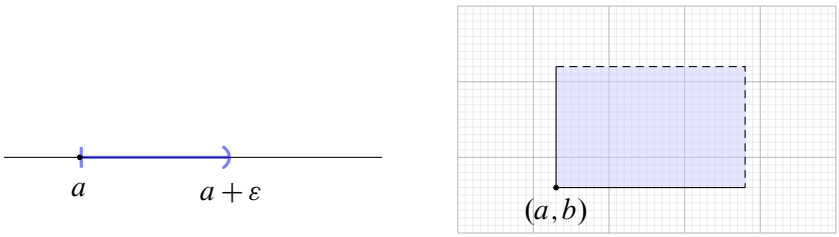


ABBILDUNG D:8. Sorgenfrey–Gerade und Sorgenfrey–Ebene

Beispiel D6Z. Die *Sorgenfrey–Ebene* ist das Produkt der Sorgenfrey–Gerade mit sich selbst: Ausführlich heißt das, wir statten die Menge $\mathbb{R}^2$ mit folgender Topologie $\mathcal{T}$ aus: Als Basis wählen wir $\mathcal{B} = \{\, [a,a'[\times [b,b'[\mid a,a',b,b' \in \mathbb{R} \,\}$. Diese erfüllt die Bedingungen (B1–2) aus D6C und ist somit die Basis der Topologie $\mathcal{T} = \{\, \bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \,\}$. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ ist demnach genau dann offen, wenn sie zu jedem $(a,b) \in U$ auch eine Menge $[a,a+\varepsilon[\times [b,b+\varepsilon[$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ enthält. Der so definierte Raum $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ heißt die *Sorgenfrey–Ebene*.

Die Sorgenfrey–Ebene ist separabel, denn $\mathbb{Q}^2$ ist dicht in $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$. Die Gegendiagonale $A = \{\, (x,-x) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$ ist abgeschlossen und diskret. Da A überabzählbar ist, kann $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ keine abzählbare Basis haben (D6J), ebensowenig die Lindelöf–Eigenschaft (D6X).

Wir sehen erneut, dass die Sorgenfrey–Gerade (D6Y) keine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ hat; andernfalls wäre $\mathcal{B}' = \{\, U \times V \mid U,V \in \mathcal{B} \,\}$ eine abzählbare Basis der Sorgenfrey–Ebene.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D7. Baire–Räume und Borel–Mengen

§D7a. Baire–Räume. Sind $U, V \subset X$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ dicht, so auch $U \cup V$. Hingegen ist $U \cap V$ im Allgemeinen nicht dicht in $(X, \mathcal{T})$, wie das Beispiel $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{Q} + \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ zeigt. Für offene und dichte Teilmengen jedoch gilt:

Übung D7A. Sind $V_0, V_1, \ldots, V_n$ offen und dicht in $(X, \mathcal{T})$, so auch $V = V_0 \cap V_1 \cap \cdots \cap V_n$.

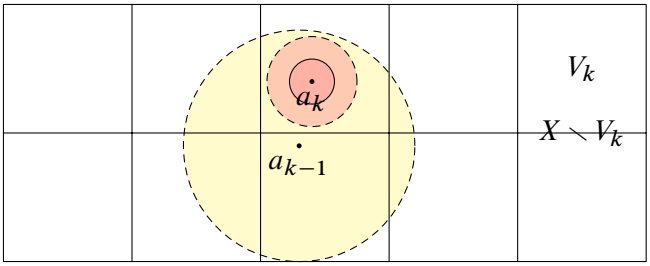
✻ **D7A.** Nach (O2) ist V offen, also $V \in \mathcal{T}$. Wir haben nur zu zeigen, dass V in $(X, \mathcal{T})$ dicht ist. Hierzu sei $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}$. Wir haben $U \cap V \neq \emptyset$ zu zeigen. Da V_0 offen und dicht ist, gilt $\emptyset \neq U \cap V_0 \in \mathcal{T}$. Da auch V_1 offen und dicht ist, gilt $\emptyset \neq (U \cap V_0) \cap V_1 \in \mathcal{T}$. So fortfahrend erhalten wir schließlich $U \cap V_0 \cap \cdots \cap V_n \neq \emptyset$.

Sind $V_0, V_1, V_2, \ldots \subset X$ offen und dicht, so ist ihr Durchschnitt $V = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$ im Allgemeinen nicht mehr offen, aber wir können noch hoffen, dass V dicht ist. Topologische Räume $(X, \mathcal{T})$, die uns diesen Wunsch erfüllen, verdienen einen besonderen Namen:

Definition D7B. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Baire–Raum*, wenn für jede abzählbare Familie offener dichter Teilmengen $V_0, V_1, V_2, \ldots \subset X$ auch $V = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$ dicht ist.

Beispiele. Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}(X))$, etwa $\mathbb{Z}$, ist ein Baire–Raum, denn hier $V_k = X$. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ hingegen sind kein Baire–Raum, wie $\bigcap_{x \in \mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \smallsetminus \{x\}) = \emptyset$ zeigt. Glücklicherweise ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ein Baire–Raum, wie der folgende Satz zeigt.

Anschaulich gesagt muss der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal genügend viele Punkte haben, damit für offene dichte Teilmengen jeder abzählbare Durchschnitt dicht ist. Die wichtigsten Beispiele sind lokal-kompakte Räume (F6V) und vollständig metrisierbare Räume (D7C):



Satz D7C (Baire 1899)**.** *Jeder vollständige metrische Raum (X, d) ist ein Baire–Raum.*

BEWEIS. Seien $V_1, V_2, V_3, \ldots \subset X$ offen und dicht, und $V := \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$. Sei $a_0 \in X$ und $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir zeigen $B(a_0, r_0) \cap V \neq \emptyset$. Sei $k \geq 1$ und $B(a_{k-1}, r_{k-1})$ gegeben. Da V_k dicht ist, gilt $U_k := B(a_{k-1}, r_{k-1}) \cap V_k \neq \emptyset$. Wir wählen $a_k \in U_k$. Da V_k offen ist, gilt dies auch für U_k, also existiert $r_k \in]0, r_{k-1}/2]$ mit $\bar{B}(a_k, r_k) \subset B(a_k, 2r_k) \subset U_k$. Die Punkte $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bilden eine Cauchy–Folge in (X, d). Dank Vollständigkeit von (X, d) existiert $a \in X$, sodass $d(a_k, a) \to 0$ für $k \to \infty$. Aus $a_n \in \bar{B}(a_k, r_k)$ für $n \geq k$ folgt $a \in \bar{B}(a_k, r_k) \subset U_k \subset V_k$. Da dies für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ gilt, schließen wir $a \in B(a_0, r_0) \cap V$. □

Bemerkung. Die Baire–Bedingung D7B ist topologisch, Satz D7C jedoch metrisch formuliert. Das bedeutet: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist bereits dann ein Baire–Raum, wenn die Topologie $\mathcal{T}$ auf X von irgendeiner vollständigen Metrik d induziert werden kann.

Bemerkung. Satz D7C zeigt erneut, dass die Menge $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Ist nämlich $(X, \mathcal{T})$ ein abzählbarer Raum, in dem jeder Punkt $x \in X$ abgeschlossen und Häufungspunkt ist, so ist $(X, \mathcal{T})$ kein Baire–Raum, denn $X \smallsetminus \{x\}$ ist offen und dicht, aber $\bigcap_{x \in X} X \smallsetminus \{x\} = \emptyset$.

§D7b. Anwendung: die Banach–Dimensionslücke. Die Funktionalanalysis untersucht unendlich-dimensionale Vektorräume, etwa Funktionenräume, mit geeigneten Normen bzw. Topologien. Der Bairesche Satz D7C erweist sich in solchen Situationen als unentbehrliches Hilfsmittel. Zur Illustration nenne ich hier erste einfache Anwendungen:

Übung D7D. (1) Für jede abzählbare Familie affiner Teilräume $A_k \subsetneq \mathbb{R}^n$ ist das Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ dicht. Was gilt statt $\mathbb{R}^n$ für $\mathbb{Q}^n$? und für einen Banach–Raum V?

(2) Jede Vektorraumbasis eines Banach–Raumes $(V,|-|)$ ist entweder endlich oder überabzählbar. Prominente Beispiele sind die Banach–Räume $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$ und $L^p([a,b],\mathbb{K})$.

(3) Die Algebra $\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ aller reellen Polynome $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ über $\mathbb{R}$ hat die abzählbare Vektorraumbasis $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Algebra kann normiert werden, aber durch keine noch so raffinierte Norm zu einem Banach–Raum gemacht werden.

✻ **D7D.** (1) Anders als $\mathbb{Q}^n$ ist $\mathbb{R}^n$ nicht abzählbare Vereinigung affiner Teilräume $A_k \subsetneq \mathbb{R}^n$, das Komplement ist sogar dicht. Dies sieht man leicht mit Baire, ebenso mit Lebesgue, auch elementar durch Induktion über n. Für unendlich-dimensionale Banach–Räume versagen Induktion und Lebesgue, aber Baire bleibt bestehen!

Beweis durch Induktion über n: Für $n = 1$ ist die Aussage klar, denn $A_k = \emptyset$ oder $A_k = \{a_k\}$, doch jeder Ball $B(a,\varepsilon) \cong \mathbb{R}$ ist überabzählbar (B2N). Sei nun $n \geq 2$ und die Aussage gelte für $n-1$. Durch jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ verlaufen überabzählbar viele Hyperebenen $H_s = \{a + u \mid \langle u, v\rangle = 0\}$, parametrisiert durch $s \in \mathbb{S}^{n-1}$. Wir wählen H_s mit $H_s \neq A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $A'_k := A_k \cap H_s \subsetneq H_s$ affine Teilräume von $H_s \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $H_s \smallsetminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A'_k$ dicht in H_s, schneidet also jeden Ball $B(a,\varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

(2) Angenommen, V hat eine abzählbar unendliche Basis $b_0, b_1, b_2, \ldots$. Dann ist $V_n = \langle b_0, \ldots, b_n\rangle$ endlich-dimensional, somit abgeschlossen aber nirgends dicht. Nach Annahme gilt $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$, somit wäre V mager. Da V vollständig und somit ein Baire–Raum ist, kann jedoch V nicht mager sein. Hieraus folgt (3).

§D7c. Magere und fette Mengen. In einem Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt $M \subset X$ *nirgends dicht*, wenn das Äußere $X \smallsetminus \overline{M}$ dicht ist. Das ist gleichbedeutend zur Bedingung $\overline{M}^\circ = \emptyset$, das heißt, der Abschluss $\overline{M}$ hat ein leeres Inneres. Abzählbare Vereinigungen nirgends dichter Mengen heißen *mager* (oder von der *ersten Baire–Kategorie*). Falls eine Teilmenge nicht mager ist, so heißt sie *fett* (oder von der *zweiten Baire–Kategorie*). Falls das Komplement einer Menge V mager ist, so heißt V *komager* (oder *residuell*).

Beispiele. Jede offene dichte Teilmenge $V \subset X$ ist komager, denn $X \smallsetminus V$ ist nirgends dicht.

Die Menge $\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$ ist mager in $\mathbb{R}$, das Komplement $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ ist somit komager.

Bemerkung. Die mageren Mengen bilden ein *σ–Ideal* in $(\mathfrak{P}(X), \cup, \cap)$, das heißt: Jede Teilmenge und jede abzählbare Vereinigung von mageren Mengen ist mager.

Die abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen kann durchaus dicht sein, wie die Menge $\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$ in $\mathbb{R}$ zeigt. Aber sie kann keine inneren Punkte haben:

Satz D7E. *In jedem Baire–Raum X hat eine magere Menge M kein Inneres, also $M^\circ = \emptyset$. Somit ist das Komplement $X \smallsetminus M$ nicht mager, somit fett.*

BEWEIS. Sei $M = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$ mit $M_k \subset X$ nirgends dicht in $(X,\mathcal{T})$. Sei $U \in \mathcal{T}$ mit $U \subset M$. Wir haben $U = \emptyset$ zu zeigen. Aus $U \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{M_k}$ folgt $\bigcap_{k=0}^{\infty} X \smallsetminus \overline{M_k} \subset X \smallsetminus U$. Der Durchschnitt der offenen dichten Mengen $X \smallsetminus \overline{M_k}$ ist dicht in $(X,\mathcal{T})$, also auch die abgeschlossene Menge $X \smallsetminus U$. Hieraus folgt $X \smallsetminus U = X$, also $U = \emptyset$.

Wären sowohl M als auch das Komplement $X \smallsetminus M$ mager, so auch $X = M \cup (X \smallsetminus M)$, was der ersten Aussage und $X^\circ = X \neq \emptyset$ widerspricht. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D7d. Interpretation als Baire–Maß. Die mageren Mengen in der Topologie sind ein Analogon zu den Nullmengen in der Maßtheorie. Beide sind stabil unter Bildung von Teilmengen und abzählbaren Vereinigungen. Der Bairesche Satz stellt sicher, dass vollständige Räume nicht mager sind; dem entspricht die Bedingung, dass der Maßraum nicht das Nullmaß trägt. Ausführlich:

Korollar D7F. *Auf jedem Raum $(X,\mathcal{T})$ definieren wir $\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$ durch*

$$\mu(M) = \begin{cases} 0 & \text{falls } M \text{ mager ist,} \\ \infty & \text{falls } M \text{ fett ist.} \end{cases}$$

Dies ist ein σ–additives Maß, denn magere Mengen sind stabil bezüglich Teilmengen und abzählbaren Vereinigungen. Ist $(X,\mathcal{T})$ ein Baire–Raum und $X \neq \emptyset$, so ist dieses Maß nichttrivial, denn es gilt $\mu(U) > 0$ für $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}$, also allgemein $\mu(V) > 0$ falls $V^\circ \neq \emptyset$.

Bemerkung. Das hier definierte Maß μ zu mageren und fetten Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist orthogonal zum Lebesgue–Maß λ^n auf der gemeinsamen σ–Algebra der Borel–Mengen des $\mathbb{R}^n$:

fette Cantor–Mengen (§C6c) sind nirgends dicht, aber von positivem Lebesgue–Maß.

Umgekehrt gibt es Lebesgue–Nullmengen, die nicht mager sind. Genauer gilt:

Übung D7G. Für $n \geq 1$ ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n = M \sqcup N$ disjunkte Vereinigung einer Baire–mageren Menge M und einer Lebesgue–Nullmenge N. (Somit hat M volles Lebesgue–Maß und N ist Baire–komager.) *Hinweis:* Man umhülle $\mathbb{Q}^n$ sparsam.

✻ **D7G.** Sei $\mathbb{Q}^n = \{ q_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ eine Abzählung. Dann ist $U_k = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(q_i, 2^{-i-1}/k)$ offen und dicht und hat Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_n(U_k) \leq 2/k$. Der abzählbare Schnitt $N = \bigcap_{k=1}^\infty U_k$ hat demnach Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_n(N) = 0$, ist aber dennoch komager, das heißt, das Komplement $M = \mathbb{R}^n \smallsetminus N$ ist mager.

§D7e. Die F_σ– und G_δ–Mengen einer Topologie. Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen (O2), aber für abzählbare Durchschnitte gilt dies im Allgemeinen nicht, wie etwa $\bigcap_{k=1}^\infty]a - 1/k, b + 1/k[= [a,b]$ oder $\bigcap_{k=1}^\infty B(a, 1/k) = \{a\}$ zeigen. Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen (A2), aber für abzählbare Vereinigungen gilt dies im Allgemeinen nicht, wie $\bigcup_{k=1}^\infty [a + 1/k, b - 1/k] =]a,b[$ zeigt.

Dennoch sind abzählbare Durchschnitte offener Mengen und abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen nützliche und interessante Objekte; sie treten insbesondere in Analysis und Maßtheorie natürlich auf. Wir vereinbaren hierzu folgende Begriffe:

Definition D7H. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $F \subset X$ heißt *F_σ–Menge*, wenn sie abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen ist. Eine Menge $G \subset X$ heißt *G_δ–Menge*, wenn sie abzählbarer Durchschnitt offener Mengen ist.

Der Buchstabe F steht für *abgeschlossen* (frz. *fermé*) und σ für abzählbare Vereinigung. Entsprechend steht G für *offen* (dt. *Gebiet*) und δ steht für abzählbaren Durchschnitt. Diese etwas willkürlichen Bezeichnungen sind traditionell gewachsen und haben sich bewährt.

Beispiel. Jede abgeschlossene Menge ist eine F_σ–Menge, und jede offene Menge ist eine G_δ–Menge. Die Umkehrung gilt selbstverständlich nicht: Im euklidischen Raum $\mathbb{R}$ ist $]a,b[$ eine F_σ–Menge und $[a,b]$ eine G_δ–Menge, wie die einleitende Konstruktion zeigt.

Beispiel. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$ sind offensichtlich eine F_σ–Menge in $\mathbb{R}$. Hingegen ist $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ keine G_δ–Menge (D7K), das ist jedoch keineswegs offensichtlich. Entsprechend sind die irrationalen Zahlen $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ eine G_δ–Menge, aber keine F_σ–Menge.

Bemerkung. Das Komplement jeder F_σ–Menge ist eine G_δ–Menge und umgekehrt.

Die F_σ–Mengen sind stabil unter abzählbaren Vereinigungen und endlichen Schnitten:

$$\bigcup_{i=0}^{\infty}\Big[\bigcup_{j=0}^{\infty} F_{i,j}\Big] = \bigcup\big\{\, F_{i,j} \;\big|\; (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\big\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{n}\Big[\bigcup_{j=0}^{\infty} F_{i,j}\Big] = \bigcup\big\{\, F_{0,j_0}\cap\cdots\cap F_{n,j_n} \;\big|\; (j_0,\dots,j_n)\in\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}\big\}$$

Die G_δ–Mengen sind stabil unter abzählbaren Schnitten und endlichen Vereinigungen:

$$\bigcap_{i=0}^{\infty}\Big[\bigcap_{j=0}^{\infty} G_{i,j}\Big] = \bigcap\big\{\, G_{i,j} \;\big|\; (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\big\}$$

$$\bigcup_{i=0}^{n}\Big[\bigcap_{j=0}^{\infty} G_{i,j}\Big] = \bigcap\big\{\, G_{0,j_0}\cup\cdots\cup G_{n,j_n} \;\big|\; (j_0,\dots,j_n)\in\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}\big\}$$

Allerdings sind F_σ–Mengen nicht stabil unter *abzählbaren* Schnitten. Durch abzählbare Schnitte von F_σ–Mengen erhält man die $F_{\sigma\delta}$–Mengen. Durch abzählbare Vereinigungen $F_{\sigma\delta}$–Mengen erhält man die $F_{\sigma\delta\sigma}$–Mengen, usw. Ebenso gewinnt man aus den G_δ–Mengen durch abzählbare Vereinigungen die $G_{\delta\sigma}$–Mengen, dann $G_{\delta\sigma\delta}$–Mengen usw.

§D7f. Die Borel–Mengen einer Topologie. Ausgehend von den offenen bzw. abgeschlossenen Menge des topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$ erhält man die F_σ– und G_δ–Mengen, sodann die $F_{\sigma\delta}$– und $G_{\delta\sigma}$–Mengen und so die *Borel–Hierarchie* immer komplizierterer Mengen. Das Ergebnis dieser stufenweisen Konstruktion fassen wir wie folgt zusammen:

Definition D7I. Eine *σ–Algebra* auf einer Menge X ist ein System $\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen in X, das folgende Bedingungen erfüllt:

(σ1) Es gilt $X\in\mathscr{A}$, und aus $A\in\mathscr{A}$ folgt $X\setminus A\in\mathscr{A}$.
(σ2) Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ gilt $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\in\mathscr{A}$.

Proposition D7J (erzeugte σ–Algebra)**.** *Ist $\mathscr{A}_\lambda\subset\mathfrak{P}(X)$ eine σ–Algebra auf X für jedes $\lambda\in\Lambda$, so auch die Schnittmenge $\mathscr{A}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{A}_\lambda$. Für $\Lambda=\emptyset$ vereinbaren wir $\mathscr{A}=\mathfrak{P}(X)$.*

So erhalten wir für jedes Mengensystem $\mathcal{E}\subset\mathfrak{P}(X)$ die erzeugte σ–Algebra

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap\big\{\,\mathscr{A} \;\big|\; \mathcal{E}\subset\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X) \text{ und } \mathscr{A} \text{ ist eine } \sigma\text{–Algebra auf } X\,\big\}.$$

Nach Konstruktion ist dies die kleinste σ–Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält.

BEWEIS. Eigenschaften (σ1–2) übertragen sich von den σ–Algebren $\mathscr{A}_\lambda$ auf $\mathscr{A}$. □

Bemerkung. Die *Borel–σ–Algebra* $\sigma(\mathcal{T})$ eines topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$ ist die von den offenen Mengen erzeugte, also die kleinste σ–Algebra, die die Topologie $\mathcal{T}$ umfasst.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Die ersten Schritte zur Konstruktion sind die oben beschriebenen Mengen vom Typ F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$, etc. Auf diesem Weg der *Ausschöpfung* sind überabzählbar viele Konstruktionsschritte nötig, bis Stabilität erreicht ist. Proposition D7J erreicht dasselbe durch *Eingrenzung* auf einen Schlag. Beide Sichtweisen ergänzen sich und sind nützlich.

§D7g. Sind alle Mengen Borel–Mengen? Die Borel–Mengen sind bereits schwindelerregend allgemein und können nahezu beliebig kompliziert werden, dennoch bleibt das Mengensystem $\sigma(\mathcal{T})$ erstaunlich klein: Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ hat dieselbe Kardinalität wie $\mathbb{R}$ (D6I). Diese wird auch nicht erhöht durch abzählbare Operationen. Wir sehen so schließlich, dass auch $\sigma(\mathcal{T})$ die Kardinalität von $\mathbb{R}$ hat. Hingegen ist die Menge $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ aller Teilmengen viel größer!

In diesem Sinne sind „die meisten“ Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ keine Borel–Mengen; die hierarchisch aufgebauten Borel–Mengen erlauben noch ein Mindestmaß an Kontrolle.

Übung D7K. (1) Ist $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ abzählbarer Durchschnitt offener Mengen (G_δ–Menge)?

(2) Gibt es Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die genau an folgenden Stellen stetig sind?
(a) nirgends? (b) nur in 0? (c) nur auf $[0,1]$? (d) nur auf $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$? (e) nur auf $\mathbb{Q}$?
Wenn möglich gebe man jeweils ein (schönes, einfaches) Beispiel an.

✻ **D7K.** (1) Nein, $\mathbb{Q}$ ist keine G_δ–Menge in $\mathbb{R}$! Angenommen es gäbe eine abzählbare Familie offener Mengen $U_n \subset \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \mathbb{Q}$. Wegen $U_n \supset \mathbb{Q}$ ist U_n dann offen und dicht in $\mathbb{R}$, also komager. Der abzählbare Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ist dann ebenfalls komager. Aber $\mathbb{Q}$ ist mager und nicht komager in $\mathbb{R}$.

(2) (a) Man nehme die Indikatorfunktion für die rationalen Zahlen, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f_1(x) = 0$ sonst. (b) Man nehme $f_2(x) = x \cdot f_1(x)$. (c) Man nehme $f_3(x) = d(x,[0,1]) \cdot f_1(x)$. (d) Man nehme die *kleine Dirichlet–Funktion* $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_4(p/q) = 1/q$ für jeden gekürzten Bruch $p/q \in \mathbb{Q}$ und $f_4(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. Sie ist unstetig in jedem rationalen Punkt $x \in \mathbb{Q}$, aber stetig in jedem irrationalen Punkt $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ (siehe Abbildung C:9). (e) Eine solche Funktion gibt es nicht. In D7L zeigen wir, dass die Stetigkeitsmenge $S_f \subset \mathbb{R}$ eine G_δ–Menge ist. Nach (1) sind aber die rationalen Zahlen keine G_δ–Menge in $\mathbb{R}$.

§D7h. Welche Stetigkeitsmengen sind möglich?

Satz D7L. *Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine beliebige Abbildung metrischer Räume. Dann ist ihre Stetigkeitsmenge $S_f := \{\, x \in X \mid f \text{ ist stetig im Punkt } x \,\}$ eine G_δ–Menge.*

BEWEIS. Wir definieren die *Oszillation* von f im Punkt $a \in X$ durch

$$\omega(a) = \inf_{\delta>0} \operatorname{diam} f(B(a,\delta)).$$

Genau dann ist f stetig in a, wenn $\omega(a) = 0$ gilt. Wir haben also

$$S_f = \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\, a \mid \omega(a) < 2^{-n} \,\}.$$

Die letzteren Mengen sind alle offen: Gilt $\omega(a) < \varepsilon$, so existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\operatorname{diam} f(B(a,\delta)) < \varepsilon$, also gilt $\omega(x) < \varepsilon$ für alle $x \in B(a,\delta)$. □

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^n$ haben wir die *Baire–mageren Mengen* $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(M) = 0$ und daneben *Lebesgue–Nullmengen* $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(N) = 0$. In der Maßtheorie ist folgende Sprechweise üblich und nützlich: Eine Aussage $A(x)$ für Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ gilt *fast überall* oder für *fast alle Punkte* $x \in \mathbb{R}^n$, wenn die Menge $N = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \text{ ist falsch} \,\}$ eine Nullmenge ist. Die Menge $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \text{ ist wahr} \,\}$ hat dann *volles Maß*. In der Stochastik bedeutet das, die Aussage $A(x)$ gilt *fast sicher*, also mit Wahrscheinlichkeit 1.

Baire und Lebesgue zeichnen jeder auf seine Weise gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ als vernachlässigbar aus. Diese Konzepte sind jedoch orthogonal zueinander, wie D7G illustriert. Je nach Anwendung nutzt man das eine oder das andere, die Argumente ähneln sich oft.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D7i. Baire–Osgood: Stetigkeit nach punktweiser Konvergenz.

Satz D7M (Baire–Osgood)**.** *Seien (X,d) und (Y,e) metrische Räume, zudem (X,d) vollständig. Sei $(f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie stetiger Funktionen mit punktweisem Grenzwert $f_n \to f$. Dann ist $S_f \subseteq X$ komager, also f „fast überall" stetig.*

Erinnerung (C3Q): Bei gleichmäßiger Konvergenz $f_n \to f$ ist f stetig, also $S_f = X$. Bei punktweiser Konvergenz geht Stetigkeit im Allgemeinen verloren, doch erstaunlich viel bleibt erhalten, denn $S_f \subseteq X$ ist komager.

Beispiel. Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \le x < 1$ und $f(1) = 1$. Hier ist $S_f = [0,1[$.

BEWEIS. Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir $F := \{\, a \in X \mid \omega(a) \ge 5\varepsilon \,\}$. Wir haben oben gesehen, dass F abgeschlossen ist. Wir zeigen, dass F nirgends dicht ist, also $F^\circ = \emptyset$. Damit ist $X \smallsetminus S_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\, a \in X \mid \omega(a) \ge 2^{-n} \,\}$ mager.

(0) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist $C_n := \bigcap_{i,j\ge n} \{\, x \in X \mid e(f_i(x), f_j(x)) \le \varepsilon \,\}$ abgeschlossen in (X,d). Es gilt $C_n \subseteq C_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$. Dank der vorausgesetzten punktweisen Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ in (Y,e) ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge.

(1) Wir nehmen an, F° wäre nicht leer, also nicht mager. Dank $F^\circ = \bigcup_n (F^\circ \cap C_n)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\emptyset \ne F^\circ \cap C_n^\circ =: U$. (Andernfalls wäre $F^\circ \cap C_n$ nirgends dicht in F° und somit F° mager. Das widerspricht Baires Satz, siehe hierzu die nachfolgende Aufgabe.)

(2) Für alle $x \in U$ gilt $e(f_n(x), f(x)) = \lim_{k\to\infty} e(f_n(x), f_k(x)) \le \varepsilon$. Die Funktion f_n ist stetig: Zu jedem $a \in U$ existiert also ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $e(f_n(a), f_n(x)) \le \varepsilon$ für alle $x \in B(a,\delta)$ gilt.

(3) Dank Dreiecksungleichung folgt $e(f_n(a), f(x)) \le 2\varepsilon$ für alle $x \in B(a,\delta)$, also $\omega(a) \le 4\varepsilon$. Das widerspricht $a \in B(a,\delta) \subseteq U \subseteq F$. □

Die Baire–Eigenschaft vererbt sich auf offene Teilräume. Das hilft im vorigen Beweis und auch sonst häufig, daher führen wir dies nun aus:

Übung D7N. Ist $Y \subseteq X$ offen und $(X,\mathcal{T})$ ein Baire–Raum, so auch $(Y,\mathcal{T}_Y)$.

✻ **D7N.** Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n \subseteq Y$ offen und dicht im Teilraum $(Y,\mathcal{T}_Y)$. Wir zeigen, dass die Schnittmenge $U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht ist in $(Y,\mathcal{T}_Y)$. Dank $Y \in \mathcal{T}$ gilt $U_n \in \mathcal{T}$ und $V_n := U_n \cup (X \smallsetminus \overline{Y}) \in \mathcal{T}$. Zudem ist V_n dicht in $(X,\mathcal{T})$: Für $\emptyset \ne O \in \mathcal{T}$ gilt entweder $O \cap Y = \emptyset$, somit $O \subseteq X \smallsetminus \overline{Y}$, oder $\emptyset \ne O \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, somit $O \cap Y \cap U_n \ne \emptyset$, also jedenfalls $O \cap V_n \ne \emptyset$. Nach Voraussetzung ist $(X,\mathcal{T})$ ein Baire–Raum, also ist die Schnittmenge $V := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cup (X \smallsetminus \overline{Y})$ dicht in $(X,\mathcal{T})$. Jede offene Menge $O \in \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$ schneidet also V. Da O und $X \smallsetminus \overline{Y}$ disjunkt sind, schneidet O demnach $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Das bedeutet, U ist dicht in $(Y,\mathcal{T}_Y)$.

Bemerkung. Die Baire–Eigenschaft vererbt sich nicht auf abgeschlossene Teilräume! In $\mathbb{C}$ hat der Teilraum $H = \mathbb{C}_{\mathrm{im}>0}$ die Baire–Eigenschaft, daher auch $X = H \cup \mathbb{Q}$, der darin abgeschlossene Teilraum $\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

§D7j. „Fast jede“ stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist nirgends differenzierbar.

Übung D7O. Auf $I = [0,1]$ betrachten wir dazu den Raum $\mathscr{C}(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$ aller stetigen reellen Funktionen mit der Supremumsnorm. Darin sei

$$A_n := \big\{ f \in \mathscr{C}(I) \,\big|\, \exists x \in I \;\; \forall y \in B(x, 2^{-n}) \,:\, |f(x) - f(y)| \leq n|x-y| \big\}.$$

Ist f in irgendeinem Punkt $x \in I$ differenzierbar, so gilt $f \in A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Jede Menge A_n ist (a) abgeschlossen und (b) nirgends dicht.

Somit ist A mager in $\mathscr{C}(I)$: „Fast keine“ stetige Funktion ist differenzierbar.

Diese beweist erneut die Existenz stetiger Funktionen, die nirgends differenzierbar sind. Dabei wird allerdings kein einziges konkretes Beispiel konstruiert. Eine elegante Konstruktion liefert Takagi C6A mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} d(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$.

Vergleichen Sie dies mit Cantors elegant-abstraktem Existenzbeweis „fast alle reellen Zahlen sind transzendent“ und dagegen mühsam-explizite Transzendenzbeweise für einzelne Zahlen, etwa für $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$.

§D7k. Corominas–Sunyer: Charakterisierung reeller Polynome.

Übung D7P. Für jede glatte Funktion $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{R}[x] \quad &\overset{\text{(a)}}{\iff} \quad \exists n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \,:\, f^{(n)}(x) = 0 \\ &\overset{\text{(b)}}{\iff} \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \,:\, f^{(n)}(x) = 0 \end{aligned}$$

Dabei ist (a) leichte Routine und (b) raffinierte Kunst. Die Äquivalenz (b) scheint zunächst unglaublich, erweist sich aber als wahr. Ihr Beweis ist ein Lehrstück mathematischen Scharfsinns und technischer Virtuosität.

✻ **D7P.** (a) „⇒“: Für $f \in \mathbb{R}[X]_{<n}$ gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k x^k$, also $\partial^n f = 0$.

„⇐“: Dies folgt aus dem Satz von Taylor durch Verschwinden des Rests.

(b) Die Implikation „⇒“ ist trivial, formal durch Quantorentausch. Erstaunlich ist die Umkehrung „⇐“:

(1) Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A_n := \{ x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) = 0 \}$ abgeschlossen.

Für das Innere gilt $A_n^\circ = \bigcup_{i\in I_n}]s_i, t_i[$ mit $[s_i,t_i] \cap [s_j,t_j] = \emptyset$ für $i \neq j$.

(2) Wir haben $A_n^\circ \subseteq A_{n+1}^\circ$, dabei kommen disjunkte Intervalle hinzu.

Es genügt, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ = \mathbb{R}$ zu zeigen: Dann gilt $A_n^\circ \neq \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $A_n^\circ = \mathbb{R}$, sonst erschienen Randpunkte $x \in \delta A_n^\circ$ nicht in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ = \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass die Menge $X := \mathbb{R} \smallsetminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ$ leer ist.

(3) Zunächst ist X abgeschlossen und ohne isolierte Punkte. Wir wenden Baires Satz D7C auf X an: Nach Voraussetzung gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$, also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \cap A_n)$. Demnach muss für ein $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X \cap A_n$ nicht-leeres Inneres in X haben. Das heißt $\emptyset \neq X \cap J \subseteq X \cap A_n$ für ein Intervall $J =]a,b[$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$, also $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in X \cap J$.

(4) Da alle $x \in X \cap J$ Häufungspunkte sind, folgt $f^{(k)}(x) = 0$ für $k \geq n$ per Induktion, durch den Grenzwert des Differenzenquotienten, $f^{(k+1)}(x) = \lim_{x'\to x} (f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x'))/(x - x')$.

(5) Unser Intervall J enthält auch Intervalle K komplementär zu X. Dort gilt $f^{(m)}|_K = 0$ für ein m abhängig von K. Für $m \leq n$ gilt $f^{(n)}|_K = 0$. Für $m > n$ gilt $f^{(n)}(x) = \ldots = f^{(m)}(x) = 0$ an den Endpunkten, denn diese gehören zu $J \cap X$. Durch Integration gelangen wir von $f^{(m)}|_K = 0$ zu $f^{(n)}|_K = 0$. Dies gilt für jedes Intervall K in $J \smallsetminus X$, also schließlich $f^{(n)}|_J = 0$. Somit gilt $J \subseteq A_n$ und $J \cap X = \emptyset$, ein Widerspruch.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D8. Netze und Filter

In jedem metrischen Raum gibt die Folgenkonvergenz ein treues Abbild der Topologie: Sie charakterisiert den Abschluss einer Menge durch Folgengrenzwerte (C3N) sowie die Stetigkeit einer Funktion durch Folgenstetigkeit (C3G). Folgen sind daher ein oft und gerne benutztes Hilfsmittel. Gleiches leisten Folgenabschluss (D5C) und Folgenstetigkeit (D3P) für alle topologischen Räume, die dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen. Für allgemeine topologische Räume sind Folgen allein jedoch nicht mehr ausreichend. Hierzu werden wir nun den allgemeineren Begriff des Netzes und des Filters bereitstellen.

Im Prinzip verhalten sich Netze und Filter genauso wie Folgen, anders als Folgen jedoch lassen sich Größe und Informationsgehalt dem betrachteten Raum anpassen. Wir werden sie daher als allgemeines Werkzeug kennen und schätzen lernen, zum Beispiel beim Beweis des Satzes von Tychonoff (F1T) über die Kompaktheit von Produkträumen. Insbesondere hierzu soll dieser Abschnitt die notwendigen Grundlagen vorbereiten.

Der Begriff des Netzes wurde 1922 von Eliakim H. MOORE und Herman SMITH eingeführt. Das äquivalente Konzept des Filters wurde 1937 von Henri CARTAN eingeführt und fand durch Nicolas BOURBAKI (*Topologie générale*, 1947) weite Verbreitung.

§D8a. Von Folgen zu Netzen. Zur Erinnerung (D3I): Eine *Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to X : n \mapsto x_n$. Sie *konvergiert* gegen $a \in X$, wenn jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})$ schließlich alle Folgenglieder enthält:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U$$

Hingegen heißt $a \in X$ *Häufungspunkt* der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn folgendes gilt:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \nsubseteq a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U$$

Wir nutzen hier $(\mathbb{N},\leq)$ als geordnete Indexmenge mit folgenden Eigenschaften:

(1) Reflexivität: Für jedes n gilt $n \leq n$.
(2) Transitivität: Aus $n \leq p$ und $p \leq q$ folgt $n \leq q$.
(3) Obere Schranke: Für alle p,q existiert n mit $p \leq n$ und $q \leq n$.

Definition D8A. Eine *gerichtete Menge* $(N,\leq)$ ist eine Menge N mit einer binären Relation $\leq$, die obige Bedingungen (1–3) erfüllt. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt *kofinal*, wenn zu jedem $n \in N$ ein $m \in M$ mit $n \leq m$ existiert. Damit ist $(M,\leq)$ selbst eine gerichtete Menge.

Wir definieren $n \geq m$ durch $m \leq n$, beide Schreibweisen sind je nach Situation bequem. Zum Beispiel ist für jedes Element $m \in N$ die Menge $N_{\geq m} = \{\, n \in N \mid n \geq m \,\}$ kofinal.

Ein *Netz* über der Indexmenge $(N,\leq)$ in einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ ist eine Abbildung $x : N \to X : n \mapsto x_n$, geschrieben $(x_n)_{n\in N}$. Es *konvergiert* gegen den Punkt a im Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})$ schließlich alle Netzglieder enthält:

$$(x_n)_{n\in N} \to a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})\ \exists m \in N\ \forall n \in N_{\geq m} : x_n \in U$$

Hingegen heißt $a \in X$ *Häufungspunkt* des Netzes $(x_n)_{n\in N}$, wenn folgendes gilt:

$$(x_n)_{n\in N} \nsubseteq a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})\ \forall m \in N\ \exists n \in N_{\geq m} : x_n \in U$$

§D8b. Erste Anwendungen von Netzen. Der Schritt von Folgen zu Netzen betrifft nur die Indexmenge: Statt $(\mathbb{N},\leq)$ erlauben wir nun jede beliebige gerichtete Menge $(N,\leq)$.

Beispiele. Zunächst ist natürlich $(\mathbb{N},\leq)$ eine gerichtete Menge, ebenso $(\mathbb{Q},\leq)$ und $(\mathbb{R},\leq)$.

In jedem topologischen Raum ist das Umgebungssystem $\mathscr{U}_a$ eines Punktes a eine gerichtete Menge; als Ordnung $U \leq V$ wählen wir die umgekehrte Inklusion $U \supset V$.

Sind $(N,\leq)$ und $(M,\leq)$ gerichtete Mengen, so auch ihr Produkt $N \times M$; als Ordnung $(n,m) \leq (n',m')$ wählen wir die koordinatenweise Ordnung $n \leq n'$ und $m \leq m'$.

Bei der Anwendung von Folgen in einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ mussten wir oft das erste Abzählbarkeitsaxiom hinzuziehen, für Netze entfällt diese Einschränkung:

Satz D8B. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Genau dann gilt $x \in \overline{A}$, wenn es ein Netz $(a_n)_{n\in N}$ in A gibt, das gegen x konvergiert.*

BEWEIS. (Siehe D5C) „⇐“: Sei $(a_n)_{n\in N}$ ein Netz in A, das gegen x konvergiert. Das bedeutet, jede Umgebung U von x enthält schließlich alle a_n. Insbesondere enthält jede Umgebung U von x mindestens einen Punkt von A, und somit gilt $x \in \overline{A}$.

„⇒“: Als gerichtete Menge $(N,\leq)$ wählen wir das Umgebungssystem $\mathscr{U}_x(X,\mathcal{T})$ mit der umgekehrten Inklusion $U \supset V$. Aus $x \in \overline{A}$ folgt $A \cap U \neq \emptyset$ für jedes $U \in \mathscr{U}_x$. Wir können also einen Punkt $a_U \in A \cap U$ wählen. Das Netz $(a_U)_{U\in\mathscr{U}_x}$ konvergiert gegen x. □

Satz D8C. *Genau dann ist $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig im Punkt $a \in X$, wenn f jedes konvergente Netz $(x_n)_{n\in N} \to a$ im Raum $(X,\mathcal{T}_X)$ abbildet auf ein konvergentes Netz $(f(x_n))_{n\in N} \to f(a)$ im Raum $(Y,\mathcal{T}_Y)$.*

BEWEIS. (Siehe D3P) „⇒“: Sei V eine Umgebung von $f(a)$ in Y. Dank der Stetigkeit von f ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in X. Wegen $x_n \to a$ existiert $m \in N$ sodass $x_n \in U$ für $n \geq m$. Dann gilt aber $f(x_n) \in V$ für $n \geq m$. Das bedeutet $f(x_n) \to f(a)$.

„⇐“: Wenn f in a nicht stetig ist, dann existiert eine Umgebung V von $f(a)$ in Y, deren Urbild $f^{-1}(V)$ in X keine Umgebung von a ist. Als gerichtete Menge $(N,\leq)$ wählen wir das Umgebungssystem $\mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})$ mit der umgekehrten Inklusion $U \supset U'$ als Ordnung. Für $U \in \mathscr{U}_a$ gilt $U \not\subset f^{-1}(V)$, denn andernfalls wäre $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a. Demnach existiert $x_U \in U \smallsetminus f^{-1}(V)$. Das Netz $(x_U)_{U\in\mathscr{U}_a}$ konvergiert gegen a. Wegen $x_U \notin f^{-1}(V)$ gilt aber $f(x_U) \notin V$ für alle $U \in \mathscr{U}_a$, also $(f(x_U))_{U\in\mathscr{U}_a} \not\to f(a)$. □

Satz D8D. *Genau dann ist ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ hausdorffsch, wenn jedes Netz $(x_n)_{n\in N}$ in $(X,\mathcal{T})$ höchstens einen Grenzwert hat.*

BEWEIS. (Siehe D3K) „⇒“: Angenommen X ist hausdorffsch, und es gilt sowohl $x_n \to a$ als auch $x_n \to b$ für zwei Punkte $a \neq b$ in X. Dann existieren Umgebungen $U \ni a$ und $V \ni b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \to a$ existiert $m_1 \in N$, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq m_1$. Wegen $x_n \to b$ existiert $m_2 \in N$, sodass $x_n \in V$ für alle $n \geq m_2$. Es existiert $n \in N$ mit $n \geq m_1, m_2$, daher sowohl $x_n \in U$ als auch $x_n \in V$. Das widerspricht $U \cap V = \emptyset$.

„⇐“: Sind $a \neq b$ in X nicht separiert, dann schneiden sich je zwei Umgebungen U von a und V von b. Als gerichtete Menge $(N,\leq)$ wählen wir $N = \{\, U \cap V \mid U \in \mathscr{U}_a,\ V \in \mathscr{U}_b \,\}$ mit der umgekehrten Inklusion als Ordnung. Für jedes $W \in \mathbb{N}$ können wir also einen Punkt $x_W \in W$ wählen. Das Netz $(x_W)_{W\in N}$ konvergiert dann sowohl gegen a als auch gegen b. Das widerspricht der angenommenen Eindeutigkeit von Grenzwerten für alle Netze. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D8c. Häufungspunkte. Genau dann ist a Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem erstabzählbaren Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn eine Teilfolge existiert mit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to a$ (D3T). Eine solche Teilfolge ist eine streng monotone Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq n$, die Menge $\{n_0, n_1, n_2, \dots\}$ ist also kofinal in $\mathbb{N}$.

Diesen nützlichen Begriff übertragen wir von Folgen auf Netze. Hierbei sind mehrere (nicht äquivalente!) Formulierungen denkbar, die folgende Definition hat sich bewährt:

Definition D8E. Eine Abbildung $\varphi : (K,\leq) \to (N,\leq)$ gerichteter Mengen heißt *monoton*, wenn aus $a \leq b$ in K stets $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ in N folgt.

Sie heißt *kofinal*, wenn zudem gilt: Für alle $n \in N$ existiert ein $k \in K$ mit $\varphi(k) \geq n$. Das bedeutet, die Bildmenge $\varphi(K) \subset N$ ist kofinal in $(N,\leq)$.

Eine *Verfeinerung* eines Netzes $(x_n)_{n\in N}$ über $(N,\leq)$ ist ein Netz $(x_{\varphi(k)})_{k\in K}$ über einer gerichteten Menge $(K,\leq)$ mit einer kofinalen Abbildung $\varphi : (K,\leq) \to (N,\leq)$.

Bemerkung. Für jede kofinale Teilmenge $M \subset N$ ist die Inklusion $\iota : M \hookrightarrow N$ eine kofinale Abbildung. Es ist für Verfeinerungen aber im Allgemeinen nicht ausreichend, nur kofinale Teilmengen zu betrachten (D3U), daher erlauben wir beliebige kofinale Abbildungen.

Satz D8F. *Genau dann ist a Häufungspunkt des Netzes $(x_n)_{n\in N}$ in einem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn eine geeignete Verfeinerung $(x_{\varphi(k)})_{k\in K}$ gegen a konvergiert.*

BEWEIS. Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar: Für jedes Paar (m,U) mit $m \in N$ und $U \in \mathcal{U}_a$ müssen wir ein $n \in N_{\geq m}$ vorweisen mit $x_n \in U$. Dank $(x_{\varphi(k)})_{k\in K} \to a$ existiert $p \in K$ mit $x_{\varphi(k)} \in U$ für alle $k \geq p$. Da φ kofinal ist, existiert $q \in K$ mit $\varphi(q) \geq m$. Da $(K,\leq)$ gerichtet ist, existiert $k \geq p,q$. Für $n := \varphi(k)$ gilt somit $n \geq m$ und $x_n \in U$.

Für die Implikation „$\Rightarrow$“ müssen wir ein geeignetes Netz konstruieren:

Wir betrachten die Menge K aller Paare (n,U) mit $x_n \in U \in \mathcal{U}_a$. Hierauf definieren wir die Ordnung $(n,U) \leq (p,V)$ durch $n \leq p$ und $U \supset V$. Damit ist $(K,\leq)$ eine gerichtete Menge: Bedingungen (1) und (2) sind trivialerweise erfüllt, und Bedingung (3) gilt da a ein Häufungspunkt des Netzes $(x_n)_{n\in N}$ ist: Zu $(p,V),(q,W) \in K$ ist $U = V \cap W$ eine Umgebung von a, also existiert $n \geq p,q$ mit $x_n \in U$. Das zeigt $(n,U) \geq (p,V),(q,W)$.

Die Abbildung $\varphi : (K,\leq) \to (N,\leq)$ mit $\varphi(n,U) = n$ ist kofinal: Monotonie ist trivial. Zu $n \in N$ und $V \in \mathcal{U}_a$ existiert $p \geq n$ mit $x_p \in V$, also $(p,V) \in K$ und $\varphi(p,V) \geq n$.

Die Verfeinerung $(x_{\varphi(k)})_{k\in K}$ konvergiert gegen a: Zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}_a$ existiert $n \in N$ mit $x_n \in U$. Für alle $(p,V) \geq (n,U)$ gilt $x_p \in V \subset U$, also $(x_{\varphi(k)})_{k\in K} \to a$. □

Bemerkung. Diese einfachen Beispiele illustrieren Idee und Anwendung von Netzen: Wir können uns von der festen Indexmenge $(\mathbb{N},\leq)$ befreien und gewinnen auf einen Schlag mehr Handlungsspielraum. Nach MOORE und SMITH 1922 nutzte Garett BIRKHOFF 1937 die Konvergenz von Netzen in topologischen Räumen. Allerdings wählte er als Verallgemeinerung von *Teilfolgen* eine unzulängliche Definition von *Teilnetzen*, die nicht die ersehnten Eigenschaften hat, wie der Arens–Fort–Raum zeigt (D3U). Definition D8E und Satz D8F gab KELLEY 1950 und popularisierte sie 1955 in seinem Lehrbuch.

Man erahnt an diesem kurzen Abriss, dass die Entwicklung der richtigen Begriffe und neuer Werkzeuge ein schwieriger und langsamer Prozess ist, auch und gerade in der Mathematik. Dafür haben einmal errungene Erkenntnisse eine extrem lange Wirksamkeit.

§D8d. Von Folgen zu Filtern. Wie oben gesehen können wir Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über der festen Indexmenge $(\mathbb{N},\leq)$ verallgemeinern zu Netzen $(x_n)_{n\in N}$ über gerichteten Mengen $(N,\leq)$. Das ist wesentlich flexibler, da wir je nach Bedarf eine geeignete Indexmenge wählen können. Diese Wahlmöglichkeit ist Segen und Fluch zugleich, denn die Konstruktion ist manchmal schwerfällig. Als Lösung können wir von der Indexmenge abstrahieren und gelangen so zum Begriff des Filters. Beide Begriffe sind äquivalent (D8J), aber je nach Anwendung (und persönlichem Geschmack) ist die eine oder die andere vorteilhafter.

Wir beginnen erneut mit Folgen und machen folgende einfache Beobachtungen:

Konvergenz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\to a$ in $(X,\mathcal{T})$ bedeutet (D3I): Jede Umgebung $U\in\mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})$ enthält ein Endstück $E_m=\{\,x_n\mid n\geq m\,\}$. Wir betrachten daher das Mengensystem

$$\mathscr{E}=\big\{\,E_m\;\big|\;m\in\mathbb{N}\,\big\}. \tag{D.2}$$

Das System dieser Endstücke erfreut sich folgender Eigenschaften:

(FB1) Es gilt $\mathscr{E}\neq\emptyset$ aber $\emptyset\notin\mathscr{E}$.
(FB2) Zu $U,V\in\mathscr{E}$ existiert $W\in\mathscr{E}$ sodass $W\subset U\cap V$.

Ein solches Mengensystem $\mathscr{E}$ können wir erweitern, indem wir zu jeder Menge $E\in\mathscr{E}$ all ihre Obermengen hinzunehmen. Aus $\mathscr{E}$ erhalten wir so das Mengensystem

$$\mathscr{F}=\langle\mathscr{E}\rangle_X:=\big\{\,F\subset X\;\big|\;E\subset F\text{ für ein }E\in\mathscr{E}\,\big\}. \tag{D.3}$$

Dieses erfreut sich folgender stärkerer Eigenschaften:

(F1) Es gilt $X\in\mathscr{F}$ aber $\emptyset\notin\mathscr{F}$.
(F2) Für alle $U,V\in\mathscr{F}$ gilt $U\cap V\in\mathscr{F}$.
(F3) Aus $U\in\mathscr{F}$ und $U\subset V\subset X$ folgt $V\in\mathscr{F}$.

Definition D8G. Ein Mengensystem $\mathscr{F}\subset\mathfrak{P}(X)$ heißt *Filter* auf X, wenn es (F1–3) erfüllt. Ein Mengensystem $\mathscr{E}\subset\mathfrak{P}(X)$ heißt *Filterbasis*, wenn es (FB1–2) erfüllt.

Beispiel. Das System $\mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})$ aller Umgebungen von a in $(X,\mathcal{T})$ bildet einen Filter: Die Umgebungsaxiome (U1–3) aus D3D entsprechen gerade den Filteraxiomen (F1–3).

Jede Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a\subset\mathcal{U}_a(X,\mathcal{T})$ ist eine Filterbasis: Die Eigenschaften (UB1–2) aus D3V entsprechen den Axiomen (FB1–2), und $\mathcal{U}_a$ ist der von $\mathcal{B}_a$ erzeugte Filter.

Bemerkung. Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X erzeugt eine Filterbasis $\mathscr{E}$ gemäß (D.2) und einen Filter $\mathscr{F}$ auf X gemäß (D.3). Konvergenz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\to a$ in $(X,\mathcal{T})$ bedeutet $\mathscr{F}\supset\mathcal{U}_a$: Jede Umgebung $U\in\mathcal{U}_a$ enthält ein Endstück $E_m\in\mathscr{E}$, also gilt $E_m\subset U\subset X$ und somit $U\in\mathscr{F}$.

Dies veranlasst uns zu folgender Definition:

Definition D8H. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mathscr{F}$ ein Filter auf X und $a\in X$ ein Punkt. Der Filter $\mathscr{F}$ *konvergiert gegen* a, geschrieben $\mathscr{F}\to a$, wenn $\mathscr{F}\supset\mathcal{U}_a$ gilt.

Bemerkung. Für Folgen sind beide Konvergenzbegriffe äquivalent: Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugt einen Filter $\mathscr{F}$. Genau dann gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\to a$ im Sinne der Folgenkonvergenz (D3I), wenn $\mathscr{F}\to a$ gilt im Sinne der Filterkonvergenz (D8H). Insbesondere gibt es konvergente und nicht-konvergente Filter, ganz so wie wir dies schon für Folgen gesehen haben.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiel. Die Menge $\mathscr{E} = \{\, [0, 1+\varepsilon] \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$ ist eine Filterbasis und erzeugt den Filter

$$\mathscr{F} = \left\{\, F \subset \mathbb{R} \;\middle|\; [0,1+\varepsilon] \subset F \text{ für ein } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\right\}.$$

Dieser Filter konvergiert gegen keinen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Die Menge $\mathscr{E}' = \{\, [0, \varepsilon] \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$ ist eine Filterbasis und erzeugt den Filter

$$\mathscr{F}' = \left\{\, F \subset \mathbb{R} \;\middle|\; [0,\varepsilon] \subset F \text{ für ein } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\right\}.$$

Es gilt $\mathscr{F}' \to 0$ bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$, denn $\mathscr{F}' \supset \mathscr{U}_0$.

Beispiel. Auf jeder nicht-leeren Menge X ist $\mathscr{F} = \{X\}$ ein Filter (und zwar der kleinste).

Beispiel. Für jede nicht-leere Teilmenge $A \subset X$ ist $\mathscr{E} = \{A\}$ eine Filterbasis. Den hiervon erzeugten Filter nennen wir den von A auf X erzeugten *Hauptfilter* $\langle A \rangle_X := \{U \subset X \mid A \subset U\}$. Für $A \subset B$ gilt $\langle A \rangle \supset \langle B \rangle$. Für alle $a \in A$ gilt entsprechend $\langle a \rangle \supset \langle A \rangle$.

Konvention. Nur wenn die Trägermenge X aus dem Kontext unmissverständlich hervorgeht, schreibt man abkürzend auch $\langle A \rangle$ statt $\langle A \rangle_X$, und entsprechend $\langle a \rangle$ statt $\langle a \rangle_X$.

Beispiel. Ist $(X, \mathcal{T})$ diskret, so ist jeder Punkt $a \in X$ offen. In diesem Fall ist $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$ eine Umgebungsbasis und $\mathscr{U}_a = \langle a \rangle_X = \{\, U \subset X \mid a \in U \,\}$ das Umgebungssystem.

Beispiel. Im Raum $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Topologie hingegen besitzt für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ der Umgebungsfilter $\mathscr{U}_a$ kein kleinstes Element und ist somit kein Hauptfilter. Der Durchschnitt ist auch in diesem Fall $\bigcap \mathscr{U}_a = \{a\}$, gehört aber nicht zu $\mathscr{U}_a$.

Bemerkung. Aufgrund (F2) ist bezüglich Mengeninklusion jedes minimale Element von $\mathscr{F}$ auch kleinstes Element. Ein kleinstes Element von $\mathscr{F}$ existiert genau dann, wenn die Schnittmenge $A = \bigcap \mathscr{F}$ selbst zu $\mathscr{F}$ gehört. In diesem Fall ist $\mathscr{F} = \langle A \rangle_X$ ein Hauptfilter. Auf einer endlichen Menge ist jeder Filter endlich und somit insbesondere ein Hauptfilter.

Beispiel D8I (koendlicher Filter)**.** Auf jeder unendlichen Menge X, etwa $X = \mathbb{N}$, gibt es stets auch Filter, die keine Hauptfilter sind: Sei $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ das System aller Mengen $F \subset X$ mit endlichem Komplement $X \smallsetminus F$. Dies ist ein Filter auf X, genannt der *koendliche Filter*. Dieser besitzt kein minimales Element, denn es gilt $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$.

Bemerkung. Anschaulich interpretiert man die Axiome (F1–3) so: $\mathscr{F}$ besteht aus immer kleiner werdenden Mengen, die jedoch gemäß $\emptyset \notin \mathscr{F}$ nicht verschwinden. Die Bezeichnung „Filter“ erklärt sich daher so: Der Filter $\mathscr{F}$ enthält alle Mengen $F \in \mathscr{F}$, die „zu groß“ sind, um den Filter zu passieren. Er filtert sozusagen die großen Mengen heraus, oder anders gesagt, die ausreichend großen Mengen bleiben im Filter hängen.

Bemerkung D8J. Netze und Filter sind im folgenden Sinne äquivalent:

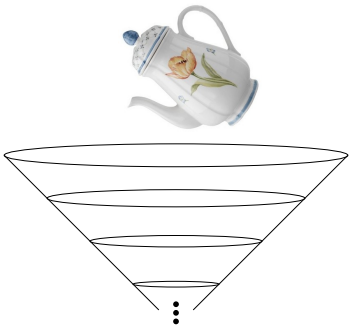
Ist $(x_n)_{n \in N}$ ein Netz in $(X, \mathcal{T})$, so gehört zu jedem Index $m \in \mathbb{N}$ das Endstück $E_m = \{\, x_n \mid n \geq m \,\}$. Das Mengensystem $\mathscr{E} = \left\{\, E_m \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \,\right\}$ ist dann eine Filterbasis und definiert somit einen Filter $\mathscr{F}$. Genau dann gilt $(x_n)_{n \in N} \to a$ im Sinne der Netzkonvergenz (D8A), wenn $\mathscr{F} \to a$ gilt im Sinne der Filterkonvergenz (D8H).

Umgekehrt definiert jeder Filter $\mathscr{F}$ auf $(X, \mathcal{T})$ ein Netz: Als Indexmenge N betrachten wir alle Paare (x, U) mit $x \in U \in \mathscr{F}$ und definieren die Ordnung $(x, U) \geq (y, V)$ durch $U \supset V$. Als Netz erhalten wir $N \to X$ mit $(x, U) \mapsto x$, also $(x_{(x,U)})_{(x,U) \in N}$. Genau dann gilt Netzkonvergenz $(x_n)_{n \in N} \to a$, wenn Filterkonvergenz $\mathscr{F} \to a$ gilt.

§D8e. Exkurs: Filter und Ideale. Anders als Folgen sind Filter leider wenig anschaulich. Sie sind zudem schwindelerregend allgemein, das ist geradezu ihr Daseinszweck. Der folgende Exkurs in die Algebra soll Filter etwas vertrauter erscheinen lassen:

Bemerkung. Ein Filter auf X ist ein echtes Ideal in der Mengenalgebra $(\mathfrak{P}(X), \cap, \cup)$.

Um diesen Zusammenhang zu würdigen, denken wir an einen kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$, etwa den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der ganzen Zahlen. Das neutrale Element der Addition schreiben wir 0, das neutrale Element der Multiplikation schreiben wir 1. Für $m \in R$ hat die Menge $I = \{ rm \mid r \in R \}$ aller Vielfachen von m in R folgende Eigenschaften:



(1) Es gilt $0 \in I$.
(2) Aus $u, v \in I$ folgt $u + v \in I$.
(3) Aus $u \in I$ und $a \in R$ folgt $au \in I$.

Allgemein ist ein *Ideal* eine Teilmenge $I \subset R$ mit diesen drei Eigenschaften. Einfachstes Beispiel ist für jedes Element $m \in R$ die Menge $\langle m \rangle_R = \{ rm \mid r \in R \}$ aller Vielfachen von m in R ein Ideal, genannt das *von m erzeugte Hauptideal*. Zum Beispiel ist $\{0\} = \langle 0 \rangle_R$ ein Ideal in R, genannt Nullideal. Ebenso ist der ganze Ring $R = \langle 1 \rangle_R$ ein Ideal in R. Für ein Ideal I in R gilt $I = R$ genau dann, wenn $1 \in I$ gilt. Um diesen allzu trivialen Fall auszuschließen, nennen wir ein Ideal I in R *echt*, wenn $I \neq R$ gilt, also $1 \notin I$. Echte Ideale $I \subset R$ sind demnach durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

(I1) Es gilt $0 \in I$ aber $1 \notin I$.
(I2) Aus $u, v \in I$ folgt $u + v \in I$.
(I3) Aus $u \in I$ und $a \in R$ folgt $au \in I$.

Wenn wir nun den Ring $(R, +, \cdot)$ durch die Mengenalgebra $(\mathfrak{P}(X), \cap, \cup)$ ersetzen, dann entsprechen die Axiome (I1–3) für echte Ideale in R genau den Axiomen (F1–3) für Filter auf X. Entsprechend der Null ist X das neutrale Element bezüglich $\cap$, und entsprechend der Eins ist $\emptyset$ das neutrale Element bezüglich $\cup$. Wer also Ideale aus der Algebra kennt, der wird die nachfolgend erarbeiteten Aussagen über Filter als gute Bekannte wiedererkennen.

Zu je zwei Idealen I, J in R ist auch ihr Durchschnitt ein Ideal, und ein echtes, wenn I oder J echt ist. Der Durchschnitt ist somit das größte Ideal, das in I und J enthalten ist.

Das kleinste Ideal, das I und J enthält, ist $I + J = \{ u + v \mid u \in I, v \in J \}$. Man prüft unmittelbar nach, dass $I + J$ ein Ideal ist, sowohl I als auch J enthält, und jedes Ideal, das I und J enthält, umfasst auch $I + J$. Somit ist $I + J$ tatsächlich das kleinste Ideal, das I und J enthält. Man nennt es das *von I und J erzeugte Ideal*.

Im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen gilt zum Beispiel $\langle 12 \rangle + \langle 20 \rangle = \langle 4 \rangle$ und $\langle 3 \rangle + \langle 5 \rangle = \langle 1 \rangle$. Im letzten Fall sind $\langle 3 \rangle$ und $\langle 5 \rangle$ echte Ideale, aber nicht das von ihnen erzeugte Ideal $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$. Zwei Ideale I und J in R heißen *teilerfremd*, wenn $I + J = R$ gilt, wenn es also Elemente $u \in I$ und $v \in J$ mit $u + v = 1$ gibt. Teilerfremde Ideale spielen in der Ringtheorie eine wichtige Rolle, zum Beispiel beim chinesischen Restsatz. Aber das hier auszuführen würde nun wirklich zu weit gehen… Es ging mir nur darum, auf die frappierende Analogie der beiden Begriffe *Filter* und *Ideal* hinzuweisen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D8f. Durchschnitt und Vereinigung von Filtern. Seien $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ Filter auf X. Wir sagen $\mathscr{F}_1$ ist *feiner* als $\mathscr{F}_2$, wenn $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}_2$ gilt. In diesem Fall heißt $\mathscr{F}_2$ *gröber* als $\mathscr{F}_1$. Der Kürze halber bedeutet „feiner“ hierbei „mindestens so fein wie“. Der Durchschnitt $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ ist ein Filter auf X, denn die Eigenschaften (F1–3) übertragen sich unmittelbar. Dies ist der feinste Filter, der sowohl $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_1$ als auch $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_2$ erfüllt.

Die Vereinigung $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ ist im Allgemeinen kein Filter: Für $a \neq b$ in X zum Beispiel ist $\mathscr{E} = \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$ kein Filter. Schlimmer noch: $\mathscr{E}$ enthält die Mengen $\{a\}$ und $\{b\}$ aber ihr Durchschnitt ist leer, im Widerspruch zu (F1–2). Aus diesem Grunde kann es keinen Filter geben, der sowohl $\langle a \rangle$ als auch $\langle b \rangle$ umfasst. Dies veranlasst uns zu folgender Vereinbarung:

Definition D8K. Wir nennen zwei Filter $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ *fremd*, wenn es $U_1 \in \mathscr{F}_1$ und $U_2 \in \mathscr{F}_2$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ gibt. In diesem Fall existiert kein Filter, der $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ enthält.

Sind $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ hingegen nicht fremd, gilt also $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ für alle $U_1 \in \mathscr{F}_1$ und $U_2 \in \mathscr{F}_2$, dann existiert ein Filter, der $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ enthält: In diesem Fall ist

$$\langle \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \rangle := \{ U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{F}_1, U_2 \in \mathscr{F}_2 \}$$

der gröbste Filter, der $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ enthält, genannt der *von $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ erzeugte Filter*.

BEWEIS. Wenn es einen Filter $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ gibt, dann gilt für alle $U_1 \in \mathscr{F}_1$ und $U_2 \in \mathscr{F}_2$ auch $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{F}$ nach (F2) und somit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ nach (F1).

Gilt umgekehrt $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ für alle $U_1 \in \mathscr{F}_1$ und $U_2 \in \mathscr{F}_2$, dann ist $\mathscr{F} = \langle \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \rangle$ ein Filter: Eigenschaft (F1) ist klar nach Voraussetzung. Eigenschaft (F2) vererbt sich wie folgt: Für alle $U, V \in \mathscr{F}$ gibt es $U_1, V_1 \in \mathscr{F}_1$ und $U_2, V_2 \in \mathscr{F}_2$ sodass $U = U_1 \cap U_2$ und $V = V_1 \cap V_2$. Wegen $U_1 \cap V_1 \in \mathscr{F}_1$ und $U_2 \cap V_2 \in \mathscr{F}_2$ enthält $\mathscr{F}$ auch

$$(U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) = U \cap V.$$

Es bleibt (F3) zu zeigen. Sei $U \subset V \subset X$ mit $U \in \mathscr{F}$. Dann gilt $U = U_1 \cap U_2$ mit $U_1 \in \mathscr{F}_1$ und $U_2 \in \mathscr{F}_2$. Nach (F3) gilt $U_1 \cup V \in \mathscr{F}_1$ und $U_2 \cup V \in \mathscr{F}_2$. Nach (F2) enthält $\mathscr{F}$ dann

$$(U_1 \cup V) \cap (U_2 \cup V) = (U_1 \cap U_2) \cup V = U \cup V = V. \qquad \square$$

§D8g. Eindeutigkeit von Filtergrenzwerten. Ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, dann sind Folgengrenzwerte eindeutig. Die Umkehrung gilt unter Zuhilfenahme des ersten Abzählbarkeitsaxioms, allgemein jedoch nicht (§D3g). Filter komplettieren dieses Ergebnis und erlauben folgende Charakterisierung der Hausdorff–Eigenschaft:

Satz D8L. *Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) X ist hausdorffsch, das heißt, je zwei Punkte $a \neq b$ haben disjunkte Umgebungen.
(2) Zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X sind die Umgebungsfilter $\mathscr{U}_a$ und $\mathscr{U}_b$ fremd.
(3) Kein Filter auf X konvergiert gegen zwei verschiedene Punkte.

BEWEIS. „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“ ist eine Umformulierung gemäß Definition D8K.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Gilt $\mathscr{F} \to a$ und $\mathscr{F} \to b$, also $\mathscr{F} \supset \mathscr{U}_a$ und $\mathscr{F} \supset \mathscr{U}_b$, so können $\mathscr{U}_a$ und $\mathscr{U}_b$ gemäß D8K nicht fremd sein. Nach Voraussetzung (2) gilt also $a = b$.

„(3) $\Rightarrow$ (2)“: Angenommen, jede Umgebung U von a und jede Umgebung V von b haben nicht-leeren Schnitt, $U \cap V \neq \emptyset$. Nach Lemma D8K ist dann $\mathscr{F} = \langle \mathscr{U}_a, \mathscr{U}_b \rangle$ ein Filter. Dieser konvergiert sowohl gegen a als auch gegen b. Nach (3) gilt also $a = b$. $\square$

§D8h. Abschluss und Filtergrenzwerte. Allgemeiner als Folgengrenzwerte (§D5f) charakterisieren Filtergrenzwerte die abgeschlossenen Mengen wie folgt:

Satz D8M. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Es gilt $x \in \overline{A}$, das heißt, x ist Berührungspunkt von A.
(2) Der Umgebungsfilter $\mathcal{U}_x$ und der Hauptfilter $\langle A \rangle_X$ sind nicht fremd.
(3) Es gibt einen Filter $\mathscr{E}$ auf A, sodass $\mathscr{F} = \langle \mathscr{E} \rangle_X$ auf X gegen x konvergiert.

BEWEIS. „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“ ist eine Umformulierung gemäß Definition D8K.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Für alle $U \in \mathcal{U}_x$ gilt $A \cap U \neq \emptyset$. Also ist $\mathscr{E} = \{ A \cap U \mid U \in \mathcal{U}_x \}$ ein Filter auf A. Der zugehörige Filter $\mathscr{F} = \langle \mathscr{E} \rangle_X$ auf X erfüllt $\mathscr{F} \supset \mathcal{U}_x$, also $\mathscr{F} \to x$.

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Angenommen es gälte $x \notin \overline{A}$. Dann existiert eine Umgebung U von x in X mit $A \cap U = \emptyset$. Wegen $\mathscr{F} \to x$ gilt $\mathscr{F} \supset \mathcal{U}_x$ und insbesondere $U \in \mathscr{F}$. Für $E \in \mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ erhalten wir somit $E \cap U = \emptyset$, was den Filterbedingungen (F1–2) widerspricht. □

§D8i. Bildfilter. Ist $\mathscr{F}$ ein Filter auf X und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist

$$\mathscr{E} = \big\{ f(U) \,\big|\, U \in \mathscr{F} \big\}$$

ein Filter auf dem Bild $f(X) \subset Y$. Falls f surjektiv ist, also $f(X) = Y$ gilt, dann ist $\mathscr{E}$ ein Filter auf Y, genannt der *Bildfilter von $\mathscr{F}$ unter der Abbildung f*. Auch im allgemeinen Fall $f(X) \subsetneq Y$ wollen wir vom Bildfilter auf Y sprechen können. Zunächst bildet $\mathscr{E}$ wegen $Y \notin \mathscr{E}$ aber nur eine Filterbasis, daher gehen wir zum erzeugten Filter $\langle \mathscr{E} \rangle_Y$ auf Y über:

Definition D8N. Sei $\mathscr{F}$ ein Filter auf X. Der *Bildfilter* unter $f : X \to Y$ ist

$$f(\mathscr{F}) := \big\{ V \subset Y \,\big|\, f(U) \subset V \text{ für ein } U \in \mathscr{F} \big\}.$$

Beispiel. Sei $A \subset X$ eine Teilmenge und $\iota : A \hookrightarrow X$ die Inklusion. Für jeden Filter $\mathscr{F}$ auf A gilt dann $\iota(\mathscr{F}) = \langle \mathscr{F} \rangle_X$. Dies haben wir bereits im vorhergehenden Satz D8M benutzt.

§D8j. Stetigkeit und Filterkonvergenz. Allgemeiner als Folgen (§D5f) charakterisieren Filter die stetigen Abbildungen wie folgt:

Satz D8O. *Seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $a \in X$ ein Punkt. Dann sind äquivalent:*

(1) Die Abbildung f ist stetig in $a \in X$.
(2) Für jeden konvergenten Filter $\mathscr{F} \to a$ auf X gilt $f(\mathscr{F}) \to f(a)$.
(3) Für den Umgebungsfilter $\mathcal{U}_a$ von a in X gilt $f(\mathcal{U}_a) \to f(a)$.

BEWEIS. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Sei f stetig in a, das heißt, für jede Umgebung V von $f(a)$ in Y ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in X. Wegen $\mathscr{F} \to a$ gilt $\mathscr{F} \supset \mathcal{U}_a$, also $U \in \mathscr{F}$. Wegen $V \supset f(U)$ gilt $V \in f(\mathscr{F})$, also $\mathcal{U}_{f(a)} \subset f(\mathscr{F})$, und das bedeutet $f(\mathscr{F}) \to f(a)$.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“ ist trivial.

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Sei V eine Umgebung von $f(a)$ in Y. Wegen $f(\mathcal{U}_a) \to f(a)$ gilt $f(\mathcal{U}_a) \supset \mathcal{U}_{f(a)}$. Daraus folgt $V \in f(\mathcal{U}_a)$, also $f(U) \subset V$ für eine Umgebung U von a in X. Damit gilt $U \subset f^{-1}(V)$, also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in X. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D8k. Häufungspunkte. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann ist $a \in X$ Häufungspunkt, wenn in jeder Umgebung U von a unendlich viele Folgenglieder x_n liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn U jedes Endstück $E_m = \{\, x_n \mid n \geq m \,\}$ trifft. Für den von den Endstücken erzeugten Filter $\mathscr{F}$ gilt dann ebenfalls, dass jede Umgebung $U \in \mathscr{U}_a$ jede Menge $F \in \mathscr{F}$ trifft. Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition D8P. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein Punkt $a \in X$ heißt ein *Häufungspunkt* eines Filters $\mathscr{F}$, wenn der Umgebungsfilter $\mathscr{U}_a(X,\mathcal{T})$ und $\mathscr{F}$ nicht fremd sind. Anders gesagt, jede Umgebung U von a in $(X,\mathcal{T})$ schneidet jede Menge $F \in \mathscr{F}$, also $U \cap F \neq \emptyset$.

Beispiel. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Jeder Punkt $a \in X$ ist Häufungspunkt seines Umgebungsfilters $\mathscr{U}_a$. Umgekehrt ist nach D8L der Raum $(X,\mathcal{T})$ genau dann hausdorffsch, wenn jeder Umgebungsfilter $\mathscr{U}_a$ nur den Punkt a als Häufungspunkt hat.

Beispiel. Der Filter $\mathscr{F} = \left\{ F \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : [0, 1+\varepsilon] \subset F \right\}$ hat jeden Punkt $a \in [0,1]$ als Häufungspunkt bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$. Der feinere Filter $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}' = \left\{ F \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : [a, a+\varepsilon] \subset F \right\}$ konvergiert gegen a.

Bemerkung. Konvergenz $\mathscr{F} \to a$ heißt $\mathscr{F} \supset \mathscr{U}_a$, somit ist a auch Häufungspunkt von $\mathscr{F}$.

Bemerkung. Ist a ein Häufungspunkt von $\mathscr{F}$, so auch von jedem gröberen Filter $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$.

Genau dann ist a Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem erstabzählbaren Raum (D3T), wenn eine Teilfolge existiert mit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to a$. Für Filter gilt entsprechend:

Satz D8Q. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Genau dann ist a Häufungspunkt des Filters $\mathscr{F}$, wenn es einen feineren Filter $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ gibt, der gegen a konvergiert.*

BEWEIS. „⇐“: Wenn $\mathscr{F}' \to a$ konvergiert, dann ist a ein Häufungspunkt des Filters $\mathscr{F}'$ und damit auch des gröberen Filters $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$.

„⇒“: Der Umgebungsfilter $\mathscr{U}_a$ und der Filter $\mathscr{F}$ sind nicht fremd. Nach D8K erzeugen diese also einen Filter $\mathscr{F}' = \langle\, \mathscr{F}, \mathscr{U}_a \,\rangle$: Er ist feiner als $\mathscr{F}$ und konvergiert gegen a. □

Bemerkung. Hier zeigt sich die größere Flexibilität der Filter: Für Häufungspunkte von Folgen gilt die einfache Teilfolgenkonstruktion nur in erstabzählbaren Räumen (D3T). Für Häufungspunkte von Filtern entfällt diese technische Schwierigkeit (D8Q). Für Netze gilt entsprechendes (D8F), allerdings verlangt die Verfeinerung von Netzen die nötige Vorsicht. Die mutige Abstraktion zu Filtern vereinfacht die Analyse wesentlich.

Korollar D8R. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein Hausdorffraum. Für jeden konvergenten Filter $\mathscr{F} \to a$ ist dann der Grenzwert a der einzige Häufungspunkt.*

BEWEIS. Ist b ein Häufungspunkt von $\mathscr{F}$, dann existiert nach D8Q ein feinerer Filter $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$, der gegen b konvergiert. Mit $\mathscr{F} \to a$ gilt auch $\mathscr{F}' \to a$, denn $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F} \supset \mathscr{U}_a$. In einem Hausdorff–Raum sind Grenzwerte von Filtern eindeutig (D8L), also gilt $a = b$. □

Warnung. Ein Filter ohne Häufungspunkt *kann nicht* konvergieren, ebensowenig ein Filter mit mehreren separierten Häufungspunkten. Ein Filter mit nur einem Häufungspunkt *muss nicht* konvergieren. Dieses Phänomen kennen wir bereits von Folgen in $\mathbb{R}$: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = a$ für n gerade und $x_n = n$ für n ungerade hat genau einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$, nämlich a, konvergiert aber nicht.

§D8l. Ultrafilter. Hat ein Filter $\mathscr{F}$ einen Häufungspunkt a, so können wir durch Verfeinerung $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ Konvergenz $\mathscr{F}' \to a$ erreichen (D8Q). Wir vereinbaren daher:

Definition D8S. Ein Filter $\mathscr{F}$ auf X heißt *maximal* oder ein *Ultrafilter*, wenn er sich nicht verfeinern lässt. Das heißt, für jeden Filter $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ auf X gilt $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$.

Beispiel. Der von einem Punkt $a \in X$ erzeugte Hauptfilter $\langle a \rangle = \{ U \subset X \mid a \in U \}$ ist maximal: Wäre $\mathscr{F} \supsetneq \langle a \rangle$ ein echt feinerer Filter auf X, dann enthielte er eine Menge $F \in \mathscr{F}$ mit $a \notin F$, nach (F2) also auch $F \cap \{a\} = \emptyset$, was (F1) widerspricht.

Beispiel. Für $\emptyset \neq A \subset X$ ist der Hauptfilter $\langle A \rangle = \{ U \subset X \mid A \subset U \}$ genau dann maximal, wenn $A = \{a\}$ nur aus einem Punkt besteht. Für $\emptyset \neq B \subsetneq A \subset X$ gilt nämlich $\langle B \rangle \supsetneq \langle A \rangle$.

Die folgende Charakterisierung besagt, dass jeder Ultrafilter $\mathscr{F}$ auf X genau die Hälfte aller Teilmengen $A \in \mathfrak{P}(X)$ enthält, und zwar in folgendem Sinne:

Satz D8T. *Ein Filter $\mathscr{F}$ auf X ist genau dann* maximal*, wenn er für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder die Menge A oder ihr Komplement $X \smallsetminus A$ enthält.*

BEWEIS. „⇐“: Wäre $\mathscr{F}' \supsetneq \mathscr{F}$ ein echt feinerer Filter, dann gäbe es $A \in \mathscr{F}'$ mit $A \notin \mathscr{F}$. Nach Voraussetzung liegt dann $X \smallsetminus A$ in $\mathscr{F}$. Somit enthält $\mathscr{F}'$ sowohl A als auch $X \smallsetminus A$, wegen (F2) also auch $A \cap (X \smallsetminus A) = \emptyset$, was (F1) widerspricht.

„⇒“: Sei $\mathscr{F}$ ein maximaler Filter auf X und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wenn $A \cap U = \emptyset$ für ein $U \in \mathscr{F}$, dann ist $X \smallsetminus A \supset U$ in $\mathscr{F}$ enthalten gemäß (F3). Andernfalls gilt $A \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathscr{F}$, und somit sind $\mathscr{F}$ und $\langle A \rangle$ nicht fremd (D8K) und erzeugen den Filter

$$\mathscr{F}' = \langle \mathscr{F}, \langle A \rangle \rangle = \{ U \cap V \mid U \in \mathscr{F},\ A \subset V \subset X \}.$$

Es gilt $A \in \mathscr{F}'$ und $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$. Da wir $\mathscr{F}$ als maximal voraussetzen, gilt $A \in \mathscr{F}' = \mathscr{F}$. □

Satz D8U. *Jeder Filter $\mathscr{F}$ auf X ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Beispiel. Sei X eine endliche Menge. Jeder Filter $\mathscr{F}$ auf X ist ein Hauptfilter, das heißt $\mathscr{F} = \langle A \rangle_X$ für eine nicht-leere Teilmenge $A \subset X$. Ultrafilter, die $\mathscr{F}$ enthalten, sind demnach genau die Filter $\langle a \rangle_X$ mit $a \in A$; ein solcher Ultrafilter ist i.A. nicht eindeutig.

Auf einer *unendlichen* Menge X ist die Sachlage wesentlich komplizierter. Den Satz beweisen wir durch eine typische Anwendung des Zornschen Lemmas:

BEWEIS DES SATZES. Sei S die Menge aller Filter auf X, die $\mathscr{F}$ enthalten. Die Menge S ist durch Inklusion geordnet. Nach dem Lemma von Zorn hat jede geordnete Menge S, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt, ein maximales Element.

Eine *Kette* in S ist eine total geordnete Teilmenge $T \subset S$, das heißt, für $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in T$ gilt $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ oder $\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1$. Wir setzen $\mathscr{E} = \bigcup T$ und zeigen $\mathscr{E} \in S$; damit hat jede Kette T in S eine obere Schranke $\mathscr{E}$ in S. Für $\mathscr{E}$ ist Bedingung (F1) klar. Bedingung (F3) ist leicht: Sei $U \subset V \subset X$ mit $U \in \mathscr{E}$. Dann gilt $U \in \mathscr{F}$ für ein $\mathscr{F} \in T$, also $V \in \mathscr{F}$, und somit $V \in \mathscr{E}$. Bedingung (F2) sieht man wie folgt: Für $U, V \in \mathscr{E}$ gilt $U \in \mathscr{F}_1$ und $V \in \mathscr{F}_2$ für gewisse $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in T$. Nach Voraussetzung gilt $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ oder $\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1$. Wir können $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ annehmen. Dann gilt $U, V \in \mathscr{F}_2$ und somit $U \cap V$ in $\mathscr{F}_2$, also $U \cap V \in \mathscr{F}$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiel. Sei X eine unendliche Menge, etwa $X = \mathbb{N}$, und sei $\mathscr{F}$ der koendliche Filter auf X (D8I). Dieser Filter enthält genau die Mengen $A \subset X$ mit endlichem Komplement, daher ist $\mathscr{F}$ gleichmächtig zu X. Nach Satz D8U ist $\mathscr{F}$ in einem Ultrafilter $\mathscr{F}'$ enthalten. Doch wie sieht solch ein Ultrafilter aus? Das ist selbst auf $\mathbb{N}$ eine knifflige Frage… Nach D8T enthält $\mathscr{F}'$ genau die Hälfte aller Teilmengen $A \in \mathfrak{P}(X)$, ist also gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(X)$ und somit wesentlich größer als $\mathscr{F}$. Sei $A \subset X$. Wenn das Komplement $X \smallsetminus A$ endlich ist, dann gilt $A \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$. Wenn $A \subset X$ endlich ist, dann gilt $(X \smallsetminus A) \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$ und folglich $A \notin \mathscr{F}'$. Wenn sowohl A als auch $X \smallsetminus A$ unendlich sind, dann gilt entweder $A \in \mathscr{F}'$ oder $(X \smallsetminus A) \in \mathscr{F}'$. Welche der beiden Alternativen gilt, ist nicht durch $\mathscr{F}$ festgelegt, sondern muss durch die (willkürliche) Wahl der Verfeinerung $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ entschieden werden. Nun benötigt der Übergang von $\mathscr{F}$ zu $\mathscr{F}'$ aber überabzählbare viele solche Wahlen. Es ist daher nicht verwunderlich, dass hier das Auswahlaxiom (etwa in Form des Zornschen Lemmas) eine tragende Rolle spielt. Der obige Satz besagt, dass diese Wahlen kohärent möglich sind.

Sie ahnen jetzt vielleicht, warum die allgemeine Topologie auch „mengentheoretische Topologie“ genannt wird und anfangs als Teilgebiet der Mengenlehre betrachtet wurde.

Analogie. Das Auswahlaxiom bzw. das hierzu äquivalente Zornsche Lemma begegnet uns bereits in der linearen Algebra, wenn wir beweisen, dass jeder Vektorraum eine Basis hat. Für endlich erzeugte Vektorräume gelingt der Beweis direkt: Wir wählen unabhängige Vektoren einen nach dem anderen, bis wir ein maximales linear unabhängiges System haben, und dieses ist dann eine Basis. Im Allgemeinen jedoch reichen endlich viele Wahlen nicht, und wir nutzen das Zornsche Lemma. So ist zum Beispiel $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, und hat demnach auch eine Basis über $\mathbb{Q}$, aber diese ist notgedrungen überabzählbar. Niemand hat jemals eine solche Basis konkret angegeben. Ganz ähnlich begegnet uns das Auswahlaxiom in der Analysis: In der Maßtheorie nutzen wir ein Repräsentantensystem der Quotientenmenge $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ um zu zeigen, dass es nicht-messbare Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ gibt.

Ist das Auswahlaxiom wahr? Das Auswahlaxiom hat viel kritische Aufmerksamkeit erhalten seit seiner Formulierung durch Ernst ZERMELO (*Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Ann. 59 (1904) 514–516.) Die Klärung der logischen Grundlagen hat bahnbrechende Ergebnisse hervorgebracht: Kurt GÖDEL (*The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis*, PNAS 24 (1938) 556–557) bewies, dass das Auswahlaxiom mit den anderen Zermelo–Fraenkel–Axiomen konsistent ist, also keinen Widerspruch ergibt, wenn man die Widerspruchsfreiheit aller übrigen Axiome annimmt. Hingegen bewies Paul COHEN (*Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York 1963) mit seiner Technik des *Forcing*, dass auch die Negation des Auswahlaxioms konsistent ist. Kurz gesagt sind also beide Annahmen logisch möglich.

Geht es auch ohne Auswahlaxiom? Der Satz „Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.“ (D8U) heißt auf englisch *Boolean prime ideal theorem* (BPIT). Der Name erklärt sich aus der Sichtweise von Filtern als Ideale der Mengenalgebra $(\mathfrak{P}(X), \cap, \cup)$, siehe §D8e. Satz D8U folgt wie gesehen aus dem Auswahlaxiom. Die Zermelo–Fraenkel–Axiome ohne Auswahlaxiom genügen hierzu nicht, nicht einmal für die schwache Aussage „Es existiert ein Ultrafilter, auf einer beliebigen Menge, der kein Hauptfilter ist.“ (A. Blass: *A model without ultrafilters*, Bull. Acad. Polon. Sci. 25 (1977) 329–331). Umgekehrt impliziert BPIT nicht das Auswahlaxiom. Kurz gesagt, ZF+BPIT ist stärker als ZF aber schwächer als ZF+C. Eine gute Referenz für solche Fragen ist das Buch von H. Rubin, J.E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice. II*, North-Holland, Amsterdam 1985.

Ist das Auswahlaxiom unser Freund? Ich denke ja. Es schadet jedenfalls nichts, es zu nutzen. Es vereinfacht viele Argumente, denn es überträgt das Gewohnte und Bewährte vom Endlichen aufs Abzählbare und Unendliche. Es ist allerdings naturgemäß nicht konstruktiv. Daher plädiere ich für einen aufgeklärt-liberalen Standpunkt: Es ist ein ehrbares Unterfangen, das stärkste Ergebnis mit den schwächsten Voraussetzungen zu erzielen, aber in der Not habe ich lieber eine schwache Aussage als

gar keine. Ich versuche daher, das Auswahlaxiom mit Bedacht zu nutzen, wenn es nicht anders geht. Wo ein konstruktiver Beweis möglich ist, kann dieser manchmal länger aber auch lehrreicher sein.

Übung D8v. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist a genau dann Häufungspunkt von $\mathscr{F}$, wenn $\mathscr{F}$ gegen a konvergiert.

✻ **D8v.** Gilt $\mathscr{F} \to a$, so ist a ein Häufungspunkt von $\mathscr{F}$. Ist umgekehrt a ein Häufungspunkt von $\mathscr{F}$, so existiert nach D8Q eine Verfeinerung $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}' \to a$. Da wir $\mathscr{F}$ als maximal voraussetzen, gilt $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$.

Übung D8w. (1) Ist $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter auf X und $f : X \to Y$ eine Abbildung, dann ist der Bildfilter $f(\mathscr{F})$ auf Y ein Ultrafilter.

(2) Ein Filter $\mathscr{F}$ auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn aus $A \cup B \in \mathscr{F}$ stets $A \in \mathscr{F}$ oder $B \in \mathscr{F}$ folgt. (Nach §D8e heißt das: Ultrafilter sind maximale Ideale.)

(3) Jeder Ultrafilter $\mathscr{F}$ auf X definiert einen surjektiven Homomorphismus

$$h : (\mathfrak{P}(X), \cap, \cup) \to (\{0,1\}, \wedge, \vee)$$

durch $h(A) = 1$ für $A \in \mathscr{F}$ und $h(A) = 0$ für $A \notin \mathscr{F}$. Umgekehrt definiert jeder surjektive Homomorphismus h einen Ultrafilter durch $\mathscr{F} = \{\, A \subset X \mid h(A) = 1 \,\}$.

Erläuterung: Als Wahrheitswerte interpretieren wir 1 als „wahr“ und 0 als „falsch“. Auf der Menge $\{0,1\}$ ist dann $a \wedge b = \min\{a,b\}$ das logische Und sowie $a \vee b = \max\{a,b\}$ das logische Oder. Der Begriff *Homomorphismus* bedeutet hier $h(A \cap B) = h(A) \wedge h(B)$ und $h(A \cup B) = h(A) \vee h(B)$ für alle $A, B \subset X$.

✻ **D8w.** (1) Sei $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter auf X und $f(\mathscr{F}) = \{\, V \subset Y \mid f(U) \subset V \text{ für ein } U \in \mathscr{F} \,\}$ der Bildfilter. Sei $V \in Y$ mit $V \notin f(\mathscr{F})$. Dann gilt $f(U) \not\subset V$ für alle $U \in \mathscr{F}$, also $U \not\subset f^{-1}(V)$. Somit gilt $f^{-1}(V) \notin \mathscr{F}$, und da $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter ist, enthält er nach D8T das Komplement $X \smallsetminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \smallsetminus V)$. Also ist $Y \smallsetminus V$ im Bildfilter $f(\mathscr{F})$ enthalten. Das zeigt, das auch $f(\mathscr{F})$ ein Ultrafilter ist.

(2) „⇒“: Gilt $A, B \notin \mathscr{F}$, so enthält $\mathscr{F}$ nach D8T die Komplemente $X \smallsetminus A$ und $X \smallsetminus B$, also auch $(X \smallsetminus A) \cap (X \smallsetminus B) = X \smallsetminus (A \cup B)$. Mit $A \cup B$ enthielte $\mathscr{F}$ nach (F2) dann deren Durchschnitt $\emptyset$, was (F1) widerspricht.

„⇐“: Für $A \subset X$ und $B = X \smallsetminus A$ wissen wir $A \cup B = X \in \mathscr{F}$ nach (F1). Nach Voraussetzung gilt dann $A \in \mathscr{F}$ oder $B \in \mathscr{F}$. Beide Aussagen sind falsch, wie zuvor gesehen. Nach D8T ist demnach $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter.

(3) „⇒“: Surjektivität folgt aus (F1). Wir zeigen $h(A \cap B) = h(A) \wedge h(B)$: Für $A, B \in \mathscr{F}$ gilt $A \cap B \in \mathscr{F}$ nach (F2). Für $A, B \notin \mathscr{F}$ gilt $A \cap B \notin \mathscr{F}$ nach (F3). Für $A \in \mathscr{F}$ aber $B \notin \mathscr{F}$ gilt $(X \smallsetminus B) \in \mathscr{F}$, also $A \cap (X \smallsetminus B) \in \mathscr{F}$, somit $A \cap B \notin \mathscr{F}$. Nach (2) gilt $h(A \cup B) = h(A) \vee h(B)$, denn aus $h(A \cup B) = 1$ folgt $h(A) = 1$ oder $h(B) = 1$.

„⇐“: Wegen Surjektivität existieren $A, B \subset X$ mit $h(A) = 0$ und $h(B) = 1$. Somit $h(\emptyset) = h(\emptyset \cap A) = h(\emptyset) \wedge h(A) = 0$ und $h(X) = h(X \cup B) = h(X) \vee h(B) = 1$, also gilt (F1). Aus $h(A \cap B) = h(A) \wedge h(B)$ folgt (F2), aus $h(A \cup B) = h(A) \vee h(B)$ folgt (F3).

Übung D8x. Für $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ und $X \neq \emptyset$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) $\mathscr{F}$ ist ein Ultrafilter.
(2) $\mathscr{F}$ ist ein Filter, und für $A \subset X$ gilt $A \in \mathscr{F}$ oder $X \smallsetminus A \in \mathscr{F}$.
(3) $\mathscr{F}$ ist ein Filter, und für $A, B \subset X$ mit $A \cup B \in \mathscr{F}$ gilt $A \in \mathscr{F}$ oder $B \in \mathscr{F}$.
(4) Genau dann gilt $A \in \mathscr{F}$, wenn $A \subset X$ und $A \cap B_1 \cap \ldots \cap B_n \neq \emptyset$ gilt für alle $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{F}$ und $n \geq 0$.
(5) Für jede Zerlegung $X = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ gibt es genau ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $A_i \in \mathscr{F}$.
(6) Für jede Zerlegung $X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$ gibt es genau ein $i \in \{1,2,3\}$ mit $A_i \in \mathscr{F}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D9. Übungen und Ergänzungen

§D9a. Halbstetige Funktionen. Die *Indikatorfunktion* einer Teilmenge $A \subset X$ ist die Abbildung $\mathbf{I}_A : X \to \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ mit $\mathbf{I}_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\mathbf{I}_A(x) = 0$ für $x \notin A$.

Übung D9A. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $A \subset X$ zeige man, dass $\mathbf{I}_A$ stetig ist in jedem Punkt $x \in X \smallsetminus \delta A$, aber unstetig in jedem Randpunkt $x \in \delta A$.

Definition D9B. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *halbstetig nach oben*, wenn zu jedem $a \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von a existiert, sodass $f(x) < f(a) + \varepsilon$ für alle $x \in U$ gilt. Entsprechend heißt f *halbstetig nach unten* falls $f(x) > f(a) + \varepsilon$ für alle $x \in U$.

Übung D9C. (1) Für $A \subset X$ ist $\mathbf{I}_A$ genau dann halbstetig nach oben, wenn A abgeschlossen ist, und genau dann halbstetig nach unten, wenn A offen ist.

(2) Die Abbildung $\operatorname{rang} : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{N}$ ordnet jeder Matrix ihren Rang zu, also die Dimension des Bildes. Ist diese Abbildung stetig? halbstetig nach unten? nach oben?

(3) Die Menge $\mathcal{T}_\uparrow = \{\,]-\infty, s[\mid s \in \mathbb{R}\,\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\uparrow)$ ist genau dann stetig, wenn f halbstetig nach oben ist. Entsprechendes gilt für $\mathcal{T}_\downarrow = \{\,]s, +\infty[\mid s \in \mathbb{R}\,\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ und halbstetig nach unten.

(4) Ist $\mathcal{T}_\uparrow \cup \mathcal{T}_\downarrow$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$? Wie sieht die hiervon erzeugte Topologie aus?

(5) Man folgere, dass eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn sie sowohl halbstetig nach oben als auch halbstetig nach unten ist.

§D9b. Merkwürdige Topologien auf $\mathbb{R}$.

Übung D9D. Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir die koendliche und die koabzählbare Topologie.
(1) Sind diese hausdorffsch? (2) Erfüllen sie das erste Abzählbarkeitsaxiom? das zweite?

Übung D9E. Auf der Menge $\mathbb{R}$ betrachten wir $\mathcal{T} := \{\,]a, +\infty[, [a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\,\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist. (D1Q)

(2) Der Abschluss von $\{x\}$ ist $]-\infty, x]$. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ bezüglich $\mathcal{T}$.

(3) Ist $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ hausdorffsch? Erfüllt $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ das erste / zweite Abzählbarkeitsaxiom?

(4) Eine Abbildung $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist genau dann stetig, wenn f monoton wächst.

§D9c. Endliche Topologien. Wir betrachten einen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$. Ist die Trägermenge X endlich, so auch die Topologie $\mathcal{T}\subset\mathfrak{P}X$. Dank (O2) sind dann beliebige Durchschnitte offener Mengen wieder offen, und somit ist jedes Element $x\in X$ in einer kleinsten offenen Menge O_x enthalten, das heißt, es gilt $x\in O_x\in\mathcal{T}$ und aus $x\in O\in\mathcal{T}$ folgt $O_x\subset O$. Anders gesagt, jedes Element $x\in X$ hat eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}_x=\{O_x\}$ bestehend aus einer einzigen offenen Menge O_x. Dies definiert eine Präordnung $x\preccurlyeq y$ durch $O_x\subset O_y$. Umgekehrt definiert jede prägeordnete Menge $(X,\preccurlyeq)$ eine Topologie auf X, mit Umgebungsbasis $\mathcal{B}_x=\{O_x\}$ und $O_x=\{\,y\in X\mid y\preccurlyeq x\,\}$ für jedes $x\in X$. Somit ist jeder endliche Raum $(X,\mathcal{T})$ äquivalent zu einer prägeordneten Menge $(X,\preccurlyeq)$.

Übung D9F. Man bestimme alle Topologien auf $X=\{a,b\}$ und sodann auf $X=\{a,b,c\}$ bis auf Homöomorphie und gebe jeweils alle Automorphismen an. Wer den Mut dazu hat, versuche entsprechend, alle Topologien $X=\{a,b,c,d\}$ bis auf Homöomorphie aufzulisten.

✻ **D9F.** Zum Aufwärmen wiederholen wir zunächst den leichten Fall $X=\{a,b\}$: Bis auf Isomorphie gibt es genau 3 Präordnungen $\preccurlyeq$. Diese können wir übersichtlich als Hasse–Diagramme darstellen:

Diese Diagramme zeigen Isomorphieklassen; durch Beschriften mit a,b erhalten wir jeweils eine Präordnung. Eine Kante $a-b$ bedeutet $a\preccurlyeq b$, wobei das kleinere Element a unten und das größere Element b oben gezeichnet wird. Im letzten Beispiel sind a,b äquivalent, daher durch eine horizontale Kante verbunden.

Die Topologie zum ersten Diagramm wird erzeugt von $\{a\},\{b\}$, ist also die diskrete und erfüllt T_1 (siehe §E5a). Die Topologie zum zweiten Diagramm wird erzeugt von $\{a\},\{a,b\}$ bzw. von $\{b\},\{a,b\}$ je nach Beschriftung, und erfüllt nur T_0. Die Topologie zum dritten Diagramm wird erzeugt von $\{a,b\}$, ist also die indiskrete. Die Automorphismengruppen sind jeweils $S_2,1,S_2$, wir erhalten insgesamt $2/2+2/1+2/2=4$ Topologien.

Bis auf Isomorphie gibt es 9 Präordnungen $\preccurlyeq$ auf $X=\{a,b,c\}$:

Diese Diagramme zeigen Isomorphieklassen; durch Beschriften mit a,b,c erhalten wir jeweils eine Präordnung und eine Topologie nach obiger Konstruktion. Die erste Topologie ist die diskrete und erfüllt T_1, die nächsten vier erfüllen nur T_0, bei den letzten vier gibt es äquivalente (untrennbare) Elemente. Die Automorphismengruppen sind jeweils $S_3,1,S_2,S_2,1,S_2,S_3,S_2,S_2$. Als Gesamtzahl aller Topologien erhalten wir also $6/6+6/1+6/2+6/2+6/1+6/2+6/6+6/2+6/2=29$. Genauer: Im ersten Fall führen die $3!=6$ Beschriftungen zu $6/6=1$ Topologie, im zweiten Fall zu $6/1=6$ Topologien, im dritten Fall zu $6/2=3$ Topologien, etc.

Allgemeines Prinzip: Jede Isomorphieklasse $[S]$ sollten wir mit ihrem Gewicht $1/|\mathrm{Aut}(S)|$ zählen! Diese erstaunliche aber geniale Idee tritt immer auf, wenn Strukturen und Automorphismen gezählt werden.

Übung D9G. Für die Anzahl t_n der Topologien auf der Menge $X=\{1,\dots,n\}$ zeige man die untere Schranke $t_n>2^{n^2/4}$ für alle $n\geq 2$. *Hinweis:* Für $n=2m$ mit $m\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ hat die Menge $Y=\{\,(i,j)\in\mathbb{N}^2\mid 1\leq i\leq m<j\leq n\,\}$ genau m^2 Elemente. Jede Teilmenge $T\subset Y$ definiert eine Präordnung und somit eine Topologie auf X, wie oben erklärt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§D9d. Topologien auf $\mathbb{R}$. Topologien zählen kann man auch auf unendlichen Mengen:

Übung D9H. Wie viele Topologien existieren auf der Menge $\mathbb{N}$? auf $\mathbb{R}$? Allgemein:

(1) Die Menge ΣX aller Topologien auf X ist gleichmächtig zu $\mathfrak{PP}X$.
(2) Die Menge ΦX aller Ultrafilter auf X ist gleichmächtig zu $\mathfrak{PP}X$.
(3) Es gibt eine unabhängige Menge $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}X$ gleichmächtig zu $\mathfrak{P}X$.

Hier heißt *unabhängig*: Für paarweise verschiedene $A_1, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt $A_1 \cap \dots \cap A_m \cap (X \smallsetminus A_{m+1}) \cap \dots \cap (X \smallsetminus A_n) \neq \emptyset$. (Damit können wir Filter erzeugen.)

Die Implikationen (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) sind relativ leicht. Etwas stärker als in (1) gilt sogar: Die Menge der Homöomorphieklassen aller Topologien auf X ist gleichmächtig zu $\mathfrak{PP}X$.

✻ **D9H.** (1) Jede Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist eine Menge von Teilmengen, also $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}X$ und somit $\mathcal{T} \in \mathfrak{PP}X$. Das bedeutet $\Sigma X \subset \mathfrak{PP}X$. Es bleibt, eine Injektion $\mathfrak{PP}X \to \Sigma X$ zu konstruieren. Hierzu nutzen wir (2): Wir wählen ein Element $x \in X$. Da X unendlich ist, hat das Komplement $X' = X \smallsetminus \{x\}$ dieselbe Mächtigkeit wie X. Jeder Filter $\mathscr{F}$ auf X' definiert eine Topologie $\mathcal{T}_{\mathscr{F}} := \mathfrak{P}X' \cup \{ F \cup \{x\} \mid F \in \mathscr{F} \}$. Dank (2) erhalten wir $\mathfrak{PP}X \hookrightarrow \Phi X \hookrightarrow \Sigma X$. Die Menge ΣX aller Topologien auf X ist somit gleichmächtig zu $\mathfrak{PP}X$, dank B2O.

Dasselbe gilt sogar noch modulo Homöomorphie: Genau dann sind $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ und $\mathcal{T}_{\mathscr{F}'}$ homöomorph, wenn die Filter $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}'$ isomorph sind vermöge einer Bijektion $f : X \to X$. Die Anzahl der Bijektion ist höchstens $X^X \cong \mathfrak{P}X$, also auch die Anzahl in jeder Homöomorphieklasse, somit bleiben $\mathfrak{PP}X$ Homöomorphieklassen.

(2) Sei $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}X$ unabhängig. Für jedes $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ setzen wir $\mathscr{E}_{\mathcal{B}} = \big\{ B \;\big|\; B \in \mathcal{B} \big\} \cup \big\{ X \smallsetminus B \;\big|\; B \in \mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{B} \big\}$. Nach Voraussetzung ist jeder endliche Schnitt in $\mathscr{E}_{\mathcal{B}}$ nicht leer, somit erzeugt $\mathscr{E}_{\mathcal{B}}$ einen Filter $\mathscr{F}_{\mathcal{B}}$, und dieser liegt in einem Ultrafilter $\mathscr{F}^*_{\mathcal{B}}$. Für $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$ in $\mathcal{A}$ sind die Filter $\mathscr{F}_{\mathcal{B}}$ und $\mathscr{F}_{\mathcal{B}'}$ fremd. Somit sind auch $\mathscr{F}^*_{\mathcal{B}}$ und $\mathscr{F}^*_{\mathcal{B}'}$ fremd, und insbesondere verschieden. Die Zuordnung $\mathcal{B} \to \mathscr{F}^*_{\mathcal{B}}$ liefert somit eine Injektion $\mathfrak{P}\mathcal{A} \hookrightarrow \Phi X$. Dank (3) existiert $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}X$ unabhängig und gleichmächtig mit $\mathfrak{P}X$, also $\mathfrak{PP}X \hookrightarrow \Phi X$.

(3) Die folgende raffinierte Konstruktion einer unabhängigen Menge $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}X$ geht zurück auf Felix HAUSDORFF, *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch*, Studia Mathematica 6 (1936) 18–19. Wir betrachten $Y := \{(F,G) \mid F \subset X \text{ endlich und } G \subset \mathfrak{P}F\}$. Die Menge Y ist gleichmächtig zu X. Für $A \subset X$ setzen wir $Y_A := \big\{ (F,G) \in Y \;\big|\; A \cap F \in G \big\}$. Für $A \neq A'$ in X gilt $Y_A \neq Y_{A'}$, die Zuordnung $A \mapsto Y_A$ ist also injektiv. Somit ist $\mathcal{A} := \{ Y_A \mid A \subset X \} \subset \mathfrak{P}Y$ gleichmächtig zu $\mathfrak{P}X \cong \mathfrak{P}Y$. Wir zeigen nun, dass die Menge $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}Y$ sogar unabhängig ist. Hierzu seien $A_1, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots, A_n \subset X$ paarweise verschieden. Das bedeutet, zu jedem Indexpaar (j,k) mit $1 \leq j < k \leq n$ existiert ein Element $x_{jk} \in X$ dass zu genau einer der beiden Mengen A_j und A_k gehört. Sei $F = \{ x_{jk} \mid 1 \leq j < k \leq m+n \}$ und $G = \{ A_k \cap F \mid 1 \leq k \leq m \}$. Nach Konstruktion gilt $(F,G) \in Y$ sowie $A_k \cap F \in G$ für $k = 1, \dots, m$ und $A_k \cap F \notin G$ für $k = m+1, \dots, n$. Somit gilt $(F,G) \in A_1 \cap \dots \cap A_m \cap (Y \smallsetminus A_{m+1}) \cap \dots \cap (Y \smallsetminus A_n)$. Das bedeutet, die Menge $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}Y$ ist unabhängig.

Übung D9I. Sei A dicht in einem Hausdorff–Raum $(X, \mathcal{T})$. Dann gilt $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} \mathfrak{PP}A$. Erfüllt $(X, \mathcal{T})$ zudem das erste Abzählbarkeitsaxiom, so gilt stärker sogar $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} \mathfrak{P}A$. Typisches Beispiel: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar und dicht in $\mathbb{R}$, und es gilt $\operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card} \mathfrak{P}\mathbb{Q}$.

✻ **D9I.** Für jeden Punkt $x \in X = \overline{A}$ existiert nach D8M ein Filter $\mathscr{F}_x$ auf A, dessen Bildfilter in X gegen x konvergiert, also $\langle \mathscr{F}_x \rangle_X \supset \mathscr{U}_x$. Da $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch ist, sind Filtergrenzwerte eindeutig nach D8L. Somit ist die Abbildung $X \to \mathfrak{PP}A : x \mapsto \mathscr{F}_x$ injektiv, also $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} \mathfrak{PP}A$.

Erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das erste Abzählbarkeitsaxiom, so können wir Filter durch Folgen ersetzen. Zu jedem Punkt $x \in X \smallsetminus A$ existiert eine (injektive) Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $(a_n) \to x$. Die Menge $F_x = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ hat dann die Eigenschaft, dass jede Umgebung U von x in $(X, \mathcal{T})$ alle bis auf endlich viele Elemente von F_x enthält. Speziell für $a \in A$ setzen wir $F_a = \{a\}$. Somit ist die Abbildung $X \to \mathfrak{P}A : x \mapsto F_x$ injektiv.

Ohne Abzählbarkeitsaxiom ist tatsächlich $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathfrak{PP}A$ möglich. Als Beispiel betrachten wir $A = \mathbb{N}$ und $X = \Phi\mathbb{N}$ die Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Die Inklusion $A \hookrightarrow X$ ist gegeben durch $a \mapsto \langle a \rangle$. Die Topologie $\mathcal{T}$ auf X wird erzeugt von den Mengen $\{ F \in X \mid U \in F \}$ für $U \subset \mathbb{N}$. Dann liegt A dicht in $(X, \mathcal{T})$, und nach der vorigen Übung gilt $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathfrak{PP}A$.

Mathematics is security. Certainty. Truth. Beauty. Insight. Structure. Architecture.
I see mathematics, the part of human knowledge that I call mathematics,
as one thing — one great, glorious thing. Whether it is differential topology,
or functional analysis, or homological algebra, it is all one thing.
Paul R. HALMOS (1916–2006)

KAPITEL E

Topologische Konstruktionen

§E0. Einführung und Überblick

☞ Dieses Kapitel folgt dem Leitmotiv „Neue Räume aus alten!“. Hierzu werden wir vier Grundkonstruktionen diskutieren, sozusagen die vier Grundrechenarten der Topologie: ☜

(1) Teilräume $A \subset X$ eines topologischen Raumes (§E1)
(2) Quotienten X/R eines topologischen Raumes (§E2)
(3) Summen $X \sqcup Y$ und $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ topologischer Räume (§E3)
(4) Produkte $X \times Y$ und $\prod_{i\in I} X_i$ topologischer Räume (§E4)

Natürlich gibt es noch viele weitere Konstruktionen, aber mit diesen vier werden wir es schon weit bringen. Auch für metrische Räume können wir problemlos Teilräume (C2E) und Summen (C2F) definieren. An Quotienten und Produkten hingegen scheitern Metriken meist (E4V); hier erweist sich die größere Flexibilität topologischer Räume.

Wir lösen mit diesen Werkzeugen die Metrisierungsfrage: Mit dem Fortsetzungssatz von Tietze (E5N) erhalten wir den Metrisierungssatz von Urysohn (E5R).

Als fünfte Konstruktion geben wir in §F7 dem Raum $Y^X = \mathscr{C}(X,Y)$ aller stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ eine Topologie, die der kompakten Konvergenz (D4D) entspricht.

☞ **Konvention.** Ab diesem Kapitel nutze ich zunehmend freizügig die Abkürzung „der Raum X“ wo ich vollständig „der Raum $(X,\mathcal{T})$“ sagen müsste. Die implizit gemeinte Topologie $\mathcal{T}$ muss dann jeweils aus dem Kontext unmissverständlich erkennbar sein. ☜

☞ **Geschichtliche Entwicklung.** Die Teilraumtopologie wurde 1914 von Felix HAUSDORFF eingeführt, die Quotiententopologie 1925 von Eliakim MOORE und 1926 von Pawel ALEXANDROFF, die Produkttopologie 1930 von Andrei TYCHONOFF. Die Entwicklung verlief keineswegs geradlinig: Bereits 1923 hatte Heinrich TIETZE eine Topologie für Produkte vorgeschlagen, die wir heute Boxtopologie nennen, die jedoch für unendliche Produkte nicht die gewünschten Eigenschaften hat (§E4f). Dies zeigt eindringlich, dass die „richtige“ Topologie nicht leicht zu finden ist! Der Begriff der topologischen Summe schließlich stammt von Nicolas BOURBAKI (1940). Durch sein Lehrbuch *Topologie générale* (1947) fand insbesondere die kategorielle Konstruktion von Initial- und Finaltopologien weite Verbreitung: ein Musterbeispiel für „*abstract general nonsense*“ und seine ordnende Kraft. ☜

§E1. Teilräume

§E1a. Transport von Topologien. Wir erinnern an folgende Rechenregeln.

Satz E1A (Bilder und Urbilder)**.** *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für alle Teilmengen $U, U', U_i \subset X$ und $V, V', V_i \subset Y$ mit $i \in I$ und einer beliebigen Indexmenge I gilt:*

$$\begin{aligned}
f^{-1}(V) &:= \{\, x \in X \mid f(x) \in V \,\}, & f(U) &:= \{\, f(x) \mid x \in U \,\},\\
f^{-1}\big(\textstyle\bigcup_{i\in I} V_i\big) &= \textstyle\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i), & f\big(\textstyle\bigcup_{i\in I} U_i\big) &= \textstyle\bigcup_{i\in I} f(U_i),\\
f^{-1}\big(\textstyle\bigcap_{i\in I} V_i\big) &= \textstyle\bigcap_{i\in I} f^{-1}(V_i), & f\big(\textstyle\bigcap_{i\in I} U_i\big) &\mathrel{\dot\subset} \textstyle\bigcap_{i\in I} f(U_i),\\
f^{-1}(Y) &= X,\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, & f(X) &\mathrel{\ddot\subset} Y,\ f(\emptyset) = \emptyset,\\
V \subset V' &\Rightarrow f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V'), & U \subset U' &\Rightarrow f(U) \subset f(U'),\\
f^{-1}(V \setminus V') &= f^{-1}(V) \setminus f^{-1}(V'), & f(U \setminus U') &\mathrel{\dot\supset} f(U) \setminus f(U'),\\
f\big(f^{-1}(V)\big) &= V \cap f(X) \mathrel{\ddot\subset} V, & f^{-1}\big(f(U)\big) &\mathrel{\dot\supset} U.
\end{aligned}$$

Für jede injektive / surjektive Abbildung f gilt anstelle „$\dot\subset$“ / „$\ddot\subset$“ stärker „$=$“.

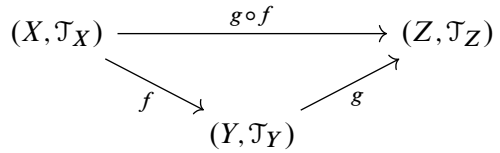
Wenn Sie die genannten Inklusionen bzw. Gleichheiten noch nicht nachgeprüft haben, sollten Sie dies dringend nachholen. Topologie und Maßtheorie nutzen vor allem die links aufgeführten Gleichungen für f^{-1}. Die Regeln für f sind ebenfalls oft nützlich.

Ist f nicht surjektiv, so sind manche der Inklusionen „$\ddot\subset$“ strikt, denn $f(f^{-1}(Y)) = f(X) \subsetneq Y$. Für jede Teilmenge $V \subset f(X)$ der Bildmenge gilt $f(f^{-1}(V)) = V$.

Ist f nicht injektiv, so sind manche der Inklusionen „$\dot\subset$“ strikt: Es existieren $x \neq x'$ in X mit $f(x) = f(x') = y$, also $\emptyset = f(\{x\} \cap \{x'\}) \subsetneq f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = \{y\}$ und ebenso $\{y\} = f(\{x\} \setminus \{x'\}) \supsetneq f(\{x\}) \setminus f(\{x'\}) = \emptyset$ sowie $f^{-1}(f(\{x\})) \supset \{x, x'\} \supsetneq \{x\}$.

Ebenso gilt im Allgemeinen $f(X \setminus U) \neq Y \setminus f(U)$, und zwar weder „$\subset$“ noch „$\supset$“. Injektivität von f ist äquivalent zu $f(X \setminus U) \subset Y \setminus f(U)$ für alle $U \subset X$, Surjektivität von f ist äquivalent zu $f(X \setminus U) \supset Y \setminus f(U)$ für alle $U \subset X$, und Bijektivität zu „$=$“.

Definition E1B (initiale und finale Topologie)**.** Wir betrachten Abbildungen



zwischen topologischen Räumen. Wir können Topologien wie folgt transportieren:

(1) *Zurückziehen* (*pull back*) einer Topologie von Z nach Y entlang $g : Y \to Z$:
Jede Topologie $\mathcal{T}_Z$ auf Z induziert auf Y mittels g die *initiale Topologie*

$$g^*\mathcal{T}_Z := \big\{\, g^{-1}(W) \;\big|\; W \in \mathcal{T}_Z \,\big\}.$$

(1a) Genau dann ist $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \supset g^*\mathcal{T}_Z$ gilt (D2A).
Das heißt, $g^*\mathcal{T}_Z$ ist die gröbste Topologie auf Y, bezüglich derer g stetig ist (D1F).

(1b) Genau dann ist $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, wenn $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, g^*\mathcal{T}_Z)$ stetig ist (universelle Abbildungseigenschaft, kurz UAE).

(2) *Vorschieben* (*push forward*) einer Topologie von X nach Y entlang $f : X \to Y$:
Jede Topologie $\mathcal{T}_X$ auf X induziert auf Y mittels f die *finale Topologie*

$$f_*\mathcal{T}_X := \{\, V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \,\}.$$

(2a) Genau dann ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \subset f_*\mathcal{T}_X$ gilt (D2A).
Das heißt, $f_*\mathcal{T}_X$ ist die feinste Topologie auf Y, bezüglich derer f stetig ist (D1F).

(2b) Genau dann ist $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, wenn $g : (Y, f_*\mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig ist (universelle Abbildungseigenschaft, kurz UAE).

Wir rechnen die in der Definition gemachten Aussagen unmittelbar nach:

BEWEIS. Dank der vorstehenden Formeln für Urbilder übertragen sich die Eigenschaften (O1–3) jeder Topologie unmittelbar von $\mathcal{T}_Z$ auf $g^*\mathcal{T}_Z$ und ebenso von $\mathcal{T}_X$ auf $f_*\mathcal{T}_X$.

Die Aussagen (1a) und (2a) sind trivial, denn sie entspringen unmittelbar der Definition der Stetigkeit (D2A) und dem Vergleich von Topologien (D1F).

(1b) Ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, g^*\mathcal{T}_Z)$ stetig, so auch $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ als Komposition stetiger Abbildungen (D2B). Ist umgekehrt $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, so gilt für $W \in \mathcal{T}_Z$ stets $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{T}_X$. Jede offene Menge $V \in g^*\mathcal{T}_Z$ ist von der Form $V = g^{-1}(W)$ für ein $W \in \mathcal{T}_Z$, also gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$, das heißt f ist stetig.

(2b) Ist $g : (Y, f_*\mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, so auch $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ als Komposition stetiger Abbildungen (D2B). Ist umgekehrt $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, so gilt für $W \in \mathcal{T}_Z$ stets $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{T}_X$, also $g^{-1}(W) \in f_*\mathcal{T}_X$, das heißt g ist stetig. □

Bemerkung. Topologien entlang einer Abbildung $f : X \to Y$ transportieren zu können, ist ein wesentlicher Vorteil gegenüber Metriken, die sich hier eher widerspenstig verhalten. Diese unscheinbare Konstruktion wird sich als grundlegend erweisen für Teilräume und Quotientenräume, sowie für Summen und Produkte von topologischen Räumen.

Beispiel. Als einfachstes Beispiel betrachten wir eine konstante Abbildung $f : X \to Y$.

- Für jede Topologie $\mathcal{T}_Y$ auf Y ist $f^*\mathcal{T}_Y$ die indiskrete Topologie auf X.
- Für jede Topologie $\mathcal{T}_X$ auf X ist $f_*\mathcal{T}_X$ die diskrete Topologie auf Y.

Übung E1C. Bestimmen Sie jeweils die finale Topologie $f_{i*}\mathcal{T}_\mathbb{R}$ für $f_1 = \mathbf{I}_{[a,b]} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ und $f_2 = \mathbf{I}_{]a,b[} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ und $f_3 = \mathbf{I}_{]a,b]} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ sowie $f_4 = \operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$.

✻ **E1C.** Wir finden gemäß Definition E1B die Topologien $f_{1*}\mathcal{T}_\mathbb{R} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ und $f_{2*}\mathcal{T}_\mathbb{R} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ und $f_{3*}\mathcal{T}_\mathbb{R} = \{\emptyset, \{0,1\}\}$ sowie schließlich $f_{4*}\mathcal{T}_\mathbb{R} = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1,1\}, \{-1,0,1\}\}$. Nachrechnen!

Übung E1D. Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume.

(1) Sei $\mathcal{B}_Y$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_Y$. Ist $f^*\mathcal{B}_Y$ eine Basis der Topologie $f^*\mathcal{T}_Y$?
(2) Sei $\mathcal{B}_X$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_X$. Ist $f_*\mathcal{B}_X$ eine Basis der Topologie $f_*\mathcal{T}_X$?

✻ **E1D.** (1) Ja. Aus $\mathcal{B}_Z \subset \mathcal{T}_Z$ folgt zunächst $f^*\mathcal{B}_Z \subset f^*\mathcal{T}_Z$. Wir zeigen, dass $f^*\mathcal{B}_Z$ eine Basis von $f^*\mathcal{T}_Z$ ist: Sei $V \in f^*\mathcal{T}_Z$, also $V = f^{-1}(W)$ mit $W \in \mathcal{T}_Z$. Wir haben $W = \bigcup_{i\in I} W_i$ mit $W_i \in \mathcal{B}_Z$ und setzen $V_i := f^{-1}(W_i) \in f^*\mathcal{B}_Z$. Schließlich gilt $V = f^{-1}(W) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} W_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(W_i) = \bigcup_{i\in I} V_i$.

(2) Nein. Wir betrachten das vorige Beispiel $f = \mathbf{I}_{\{0\}} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$. Für die euklidische Topologie $\mathcal{T}_\mathbb{R}$ wählen wir die Basis $\mathcal{B} = \{\,]a,b[\mid a < b \text{ in } \mathbb{R} \,\}$. Hier ist $f_*\mathcal{B} = \emptyset$ keine Basis von $f_*\mathcal{T}_\mathbb{R} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Wir folgen in diesem Kapitel der von BOURBAKI propagierten Methode: Wir definieren Topologien gemäß ihrer Abbildungseigenschaften als initiale / finale Topologien. Die konketen Ergebnisse sind vielgestaltig, aber die abstrake Methode ist klar und einfach:

☞ **Übung E1E.** Sei $\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Abbildungen $f_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \to (X, \mathcal{T})$. Geben Sie möglichst explizit die gröbste / feinste Topologie $\mathcal{T}$ auf X an, bezüglich derer alle Abbildungen f_λ stetig sind. Die feinste solche Topologie $\mathcal{T}_X$ auf X heißt *finale Topologie* bezüglich $\mathscr{F}$. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $g \circ f_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig sind. ☜

✻ **E1E.** Die gröbste solche Topologie ist die indiskrete Topologie auf X. Die feinste solche Topologie ist gegeben durch $\mathcal{T}_X = \{ U \subset X \mid f_\lambda^{-1}(U) \in \mathcal{T}_\lambda \text{ für alle } \lambda \in \Lambda \} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (f_\lambda)_* \mathcal{T}_\lambda$. Dies ist eine Topologie (D6E). Nach Konstruktion ist jede Abbildung $f_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \to (X, \mathcal{T}_X)$ stetig. Ist $g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, so auch $g \circ f_\lambda$ als Komposition stetiger Abbildungen. Seien nun umgekehrt alle Abbildungen $g \circ f_\lambda$ stetig. Für $V \in \mathcal{T}_Y$ ist nach Voraussetzung $f_\lambda^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f_\lambda)^{-1}(V) \in \mathcal{T}_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, und somit $g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Beispiel. Zentrale Beispiele sind die Quotiententopologie (E2B) und die Summentopologie (E3C), aber die Methode ist noch allgemeiner (§E1i): Sei $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ eine Überdeckung durch eine Familie $\mathscr{X} = (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topologischer Räume. Dies erzeugt eine Topologie $\mathcal{T}_X$ auf X, nämlich die feinste, für die jede Inklusion $i_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ stetig ist.

☞ **Übung E1F.** Sei $\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Abbildungen $f_\lambda : (X, \mathcal{T}) \to (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$. Geben Sie möglichst explizit die gröbste / feinste Topologie $\mathcal{T}$ auf X an, bezüglich derer alle Abbildungen f_λ stetig sind. Die gröbste solche Topologie $\mathcal{T}_X$ auf X heißt *initiale Topologie* bezüglich $\mathscr{F}$. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $f_\lambda \circ g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ stetig sind. ☜

✻ **E1F.** Die feinste solche Topologie ist die diskrete Topologie auf X. Die gröbste solche Topologie $\mathcal{T}_X$ wird erzeugt durch $\mathcal{E} = \{ f_\lambda^{-1}(U) \mid \lambda \in \Lambda,\ U \in \mathcal{T}_\lambda \} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^* \mathcal{T}_\lambda$, siehe D6E und D6F. Nach Konstruktion ist jede Abbildung $f_\lambda : (X, \mathcal{T}_X) \to (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ stetig. Ist $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ stetig, so auch $f_\lambda \circ g$ als Komposition stetiger Abbildungen. Seien nun umgekehrt alle Abbildungen $f_\lambda \circ g$ stetig. Es reicht zu zeigen, dass für $V \in \mathcal{E}$ stets $g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Y$ gilt (D6G). Nach Definition von $\mathcal{E}$ gilt $V = f_\lambda^{-1}(U)$ für ein $\lambda \in \Lambda$ und $U \in \mathcal{T}_\lambda$, und somit $g^{-1}(V) = g^{-1}(f_\lambda^{-1}(U)) = (f_\lambda \circ g)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, da wir $f_\lambda \circ g$ als stetig voraussetzen.

Beispiel. Zentrale Beispiele sind die Teilraumtopologie (D1K) und die Produkttopologie (E4C), aber die Methode ist noch allgemeiner: Den Raum $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ versehen wir mit der Supremumsnorm; dies entspricht der gleichmäßigen Konvergenz (D4C). Den Raum $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ versehen wir mit der Topologie der kompakten Konvergenz (D4D): Dies ist die gröbste, für die jede Projektion $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{[a,b]}$ stetig ist.

☞ **Bemerkung.** Wie finden wir die „richtige“ Topologie? Die Konstruktion einer geeigneten Topologie auf Teilmengen und Summen ist recht offensichtlich, doch für Quotienten und Produkte ist dies nicht so einfach. Wie sollen wir überhaupt entscheiden, was die „richtige“ Topologie ist, wo es doch auf jeder Menge unüberschaubar viele Topologien gibt? Auf lange Sicht kann dies nur die erfolgreiche Anwendung unserer Konstruktionen beantworten. ☜

Um unmittelbar eine brauchbare Topologie als solche zu erkennen, werden wir jeweils ihre Abbildungseigenschaften hervorheben: Immer geht es um stetige Abbildungen. Dieses Prinzip erweist sich als gute Richtschnur, gemäß dem biblischen Motto: „An ihren Früchten [Abbildungseigenschaften] sollt ihr sie erkennen.“ (In Matthäus 7,21 geht es um die Warnung vor falschen Propheten, ähnlich wollen wir uns hier vor falschen Topologien hüten.)

§E1b. Teilräume. Teilräume haben wir bereits in D1K definiert. Zur Erinnerung: Sei $(X,\mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $\iota_A : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ die Inklusion. Die *Teilraumtopologie* von A in $(X,\mathcal{T}_X)$ ist

$$\mathcal{T}_A := \big\{\, A \cap U \;\big|\; U \in \mathcal{T}_X \,\big\} \quad = \quad \big\{\, \iota_A^{-1}(U) \;\big|\; U \in \mathcal{T}_X \,\big\} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X .$$

Wir nennen $(A,\mathcal{T}_A)$ den *Teilraum* von $(X,\mathcal{T}_X)$ auf der Teilmenge $A \subset X$. Seine Topologie $\mathcal{T}_A = \iota_A^* \mathcal{T}_X$ ist die initiale Topologie (E1B) bezüglich der Inklusion $\iota_A : (A,\mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X,\mathcal{T}_X)$.

Übung E1G. Zeigen Sie folgende Aussagen zur Vererbung topologischer Eigenschaften:

(0) Ist $(X,\mathcal{T}_X)$ hausdorffsch bzw. metrisierbar, so auch $(A,\mathcal{T}_A)$.
(1) Ist $(X,\mathcal{T}_X)$ erstabzählbar, so auch $(A,\mathcal{T}_A)$. Allgemeiner: Ist $\mathcal{B}_x \subset \mathscr{U}_x(X,\mathcal{T}_X)$ eine UBasis, dann ist $\mathcal{B}'_x = \{\, U \cap A \mid U \in \mathcal{B}_x \,\} \subset \mathscr{U}_x(A,\mathcal{T}_A)$ eine UBasis.
(2) Ist $(X,\mathcal{T}_X)$ zweitabzählbar, so auch $(A,\mathcal{T}_A)$. Allgemeiner: Ist $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{T}_X$ eine Basis, dann ist $\mathcal{B}_A = \{\, U \cap A \mid U \in \mathcal{B}_X \,\} \subset \mathcal{T}_A$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_A$.

✻ **E1G.** (0) Seien $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte in A. Da $(X,\mathcal{T}_X)$ hausdorffsch ist, existieren disjunkte offene Umgebungen, also $x \in U \in \mathcal{T}_X$ und $y \in V \in \mathcal{T}_A$ mit $U \cap V = \emptyset$. Für $\tilde{U} := U \cap A$ und $\tilde{V} := V \cap A \in \mathcal{T}_A$ gilt dann $x \in \tilde{U} \in \mathcal{T}_A$ und $y \in \tilde{V} \in \mathcal{T}_A$ mit $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$; also trennen $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$ die Punkte x und y in $(A,\mathcal{T}_A)$.

Zur Metrisierbarkeit von Teilräumen siehe D1L.

(1) Sei $\tilde{U}$ eine Umgebung von x in $(A,\mathcal{T}_A)$. Nach Definition D3A gibt es eine offene Menge $\tilde{O} \in \mathcal{T}_A$ mit $x \in \tilde{O} \subset \tilde{U}$. Nach Definition D1K der Teilraumtopologie gibt es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}_X$ mit $\tilde{O} = O \cap A$. Dann ist O eine Umgebung von x in $(X,\mathcal{T}_X)$, also gibt es eine Basisumgebung $U \in \mathcal{B}_x$ mit $x \in U \subset O$. Es folgt $x \in U \cap A \subset O \cap A = \tilde{O} \subset \tilde{U}$; in jeder Umgebung $\tilde{U}$ von x in $(A,\mathcal{T}_A)$ ist eine Basisumgebung der Form $U \cap A$ mit $U \in \mathcal{B}_x$ enthalten. Also ist $\mathcal{B}'_x = \{\, U \cap A \mid U \in \mathcal{B}_x \,\}$ eine Umgebungsbasis von x in $(A,\mathcal{T}_A)$.

(2) Wir haben zu zeigen, dass $\mathcal{T}_A = \{\bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{B}_A\}$ gilt. Die Inklusion „$\supset$“ ist klar: Die Elemente von $\mathcal{B}_A$ sind nach Definition D1K der Teilraumtopologie offen in $(A,\mathcal{T}_A)$, also auch jede Vereinigung solcher Mengen. Für die Inklusion „$\subset$“ sei $\tilde{U} \in \mathcal{T}_A$. Dann gibt es ein offene Menge $U \in \mathcal{T}_X$ mit $\tilde{U} = U \cap A$. Da $\mathcal{B}_X$ eine Basis von $\mathcal{T}_X$ ist, gibt es eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}_X$ mit $U = \bigcup \mathcal{S}$. Sei $\tilde{\mathcal{S}} = \{\, B \cap A \mid B \in \mathcal{S} \,\} \subset \mathcal{B}_A$. Dann gilt: $\bigcup \tilde{\mathcal{S}} = \bigcup_{\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{S}}} \tilde{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} (B \cap A) = \big(\bigcup_{B \in \mathcal{S}} B\big) \cap A = \big(\bigcup \mathcal{S}\big) \cap A = U \cap A = \tilde{U}$, also $\tilde{U} \in \big\{\bigcup \mathcal{S} \;\big|\; \mathcal{S} \subset \mathcal{B}_A\big\}$.

Übung E1H. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $D \subset X$ dicht in $(X,\mathcal{T})$.

(1) Ist $O \subset X$ offen, also $O \in \mathcal{T}$, dann gilt $\overline{D \cap O} = \overline{O}$ in $(X,\mathcal{T})$.
(2) Ist $O \subset X$ offen, dann ist $D \cap O$ dicht im Teilraum $(O,\mathcal{T}_O)$.
(3) Gelten die Folgerungen (a) und (b) auch, wenn $O \subset X$ nicht offen ist?
(4) Ist $(X,\mathcal{T})$ separabel, so auch jeder offene Teilraum. (Für beliebige Teilräume gilt dies nicht, selbst für abgeschlossene nicht, siehe die Sorgenfrey–Ebene D6Z.)

✻ **E1H.** (1) Wegen $D \cap O \subset O$ gilt $\overline{D \cap O} \subset \overline{O}$. Sei nun $x \in \overline{O}$; wir müssen zeigen, dass jede Umgebung U von x in $(X,\mathcal{T})$ nicht-leeren Schnitt mit $D \cap O$ hat. Ohne Einschränkung sei U offen. Da $O \cap U$ offen und D dicht in $(X,\mathcal{T})$ ist, gilt $\emptyset \neq D \cap (O \cap U) = (D \cap O) \cap U$, was zu zeigen war.

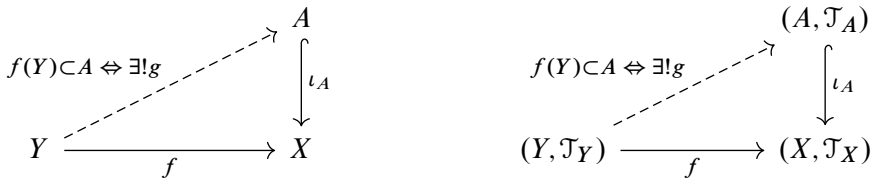
(2) Sei $\emptyset \neq \tilde{U} \in \mathcal{T}_O$. Wir zeigen $(D \cap O) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Nach Definition D1K der Teilraumtopologie gibt es eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $\tilde{U} = U \cap O$. Mit $U, O \in \mathcal{T}$ ist auch $\tilde{U} \in \mathcal{T}$. Es folgt $(D \cap O) \cap \tilde{U} = D \cap (O \cap U) \neq \emptyset$, da D dicht in $(X,\mathcal{T})$ ist und $O \cap U \in \mathcal{T}$. Das zeigt, dass $D \cap O$ dicht in $(O,\mathcal{T}_O)$ ist.

(3) Ohne Offenheit gilt dies im Allgemeinen nicht: Ein Gegenbeispiel ist $X = \mathbb{R}$, darin ist $D = \mathbb{Q}$ dicht. Setzt man $O = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist $D \cap O = \emptyset$, also $\overline{D \cap O} = \emptyset \neq \overline{O} = \mathbb{R}$, und $D \cap O$ ist nicht dicht in O.

(4) Ist $(X,\mathcal{T})$ separabel, dann gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subset X$. Für $O \in \mathcal{T}$ ist $D \cap O$ nach (2) dicht in $(O,\mathcal{T}_O)$ und ebenfalls abzählbar. Daher ist der Teilraum $(O,\mathcal{T}_O)$ ebenfalls separabel.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§E1c. Universelle Abbildungseigenschaft des Teilraumes.** Wie zuvor sei $A \subset X$ und $\iota_A : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ die Inklusion. Zu jeder Abbildung $f : X \to Y$ *aus* X *hinaus* haben wir die Einschränkung $f|_A = f \circ \iota_A : A \to Y$. Umgekehrt, zu jeder Abbildung $f : Y \to X$ *in* X *hinein* stehen wir vor einem einfachen aber grundlegenden Faktorisierungsproblem: ☜



Genau dann existiert $g : Y \to A$ mit $f = \iota_A \circ g$, wenn $f(Y) \subset A$ gilt: Aus $f = \iota_A \circ g$ folgt $f(Y) = \iota_A(g(Y)) \subset A$. Umgekehrt, dank $f(Y) \subset A$ ist $g = f|^A : Y \to A : y \mapsto f(y)$ wohldefiniert durch Einschränkung der Zielmenge. Wir sagen hierzu: f *induziert* g.

Die gesuchte Faktorisierung g mit $f = \iota_A \circ g$ ist eindeutig, denn ι_A ist injektiv.

Diese Faktorisierungsregel übertragen wir nun von Mengen auf topologische Räume:

✍ **Satz E1I.** *Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, hierin $A \subset X$ und $\iota_A : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$. Die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A = \iota_A^* \mathcal{T}_X$ ist die gröbste, für die $\iota_A : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ stetig ist.* ✍

UAE: Genau dann faktorisiert $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ gemäß $f = \iota_A \circ g$ in die Inklusion ι_A und eine stetige Abbildung $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (A, \mathcal{T}_A)$, wenn f stetig ist und $f(Y) \subset A$ erfüllt.

☞ BEWEIS. Die erste Aussage ist klar nach Definition E1B der Topologie $\mathcal{T}_A = \iota_A^* \mathcal{T}_X$. Für $f = \iota_A \circ g$ mit $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (A, \mathcal{T}_A)$ stetig ist auch f stetig und erfüllt $f(Y) \subset A$. Ist f stetig und $f(Y) \subset A$, so ist $g = f|^A : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (A, \mathcal{T}_A)$ stetig gemäß E1B. □ ☜

☞ **Bemerkung E1J.** Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und hierin $A \subset X$ eine Teilmenge. Für jede Topologie $\mathcal{T}_A$ auf A sind folgende Aussagen äquivalent: ☜

(1) Die Topologie $\mathcal{T}_A$ ist die Teilraumtopologie (D1K), also $\mathcal{T}_A = \iota_A^* \mathcal{T}_X$.
(2) Die Topologie $\mathcal{T}_A$ ist die gröbste, für die $\iota_A : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ stetig ist.
(3) Genau dann ist $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (A, \mathcal{T}_A)$ stetig, wenn's $\iota_A \circ g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ ist.
(4) Genau dann faktorisiert $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ gemäß $f = \iota_A \circ g$ in ι_A und eine stetige Abbildung $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (A, \mathcal{T}_A)$, wenn f stetig ist und $f(Y) \subset A$ erfüllt.
(5) Für jeden topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ist die folgende Abbildung eine Bijektion:

$$\Phi : \mathscr{C}(Y, A) \to \big\{ f \in \mathscr{C}(Y, X) \;\big|\; f(Y) \subset A \big\} : g \mapsto f = \iota_A \circ g$$

Eigenschaft (1) ist unsere Definition D1K der Teilraumtopologie. Die Äquivalenzen (1) ⇔ (2) ⇔ (3) folgen aus Definition E1B und den daran anschließenden Erklärungen. Die Äquivalenz (1) ⇔ (4) haben wir als Satz E1I hervorgehoben. Die Äquivalenz (4) ⇔ (5) ist eine leichte Umformulierung: Mit ι_A ist auch Φ injektiv. Surjektivität ist Aussage (4).

Die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A$ wird durch jede dieser Eigenschaften charakterisiert! Wir können sie explizit angeben (D1K) durch die Konstruktion $\mathcal{T}_A = \{ U \cap A \mid U \in \mathcal{T}_X \}$ oder implizit durch die universelle Eigenschaft (E1I) der Inklusion $\iota_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T}_X)$ bezüglich aller anderen stetigen Abbildungen $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$.

Beide Sichtweisen sind nützlich und leisten uns gute Dienste. Auch andere Topologien werden wir soweit möglich durch ihre Abbildungseigenschaften charakterisieren.

§E1d. Einbettungen. Im topologischen Raum $(X,\mathcal{T}_X)$ ist die Teilraumtopologie auf $A \subset X$ die zurückgezogene Topologie $\mathcal{T}_A = \iota_A^* \mathcal{T}_X$ bezüglich der Inklusion $\iota_A : A \hookrightarrow X$. Dies wollen wir nun Inklusionen auf beliebige Injektionen $Y \hookrightarrow X$ verallgemeinern:

Definition E1K. Eine injektive Abbildung $f : (Y,\mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (X,\mathcal{T}_X)$ heißt *Einbettung*, wenn $\mathcal{T}_Y = f^*\mathcal{T}_X$ gilt. Das heißt, wir haben $A = f(Y) \subset X$, und $f = \iota_A \circ \bar{f}$ ist ein Homöomorphismus $\bar{f} : (Y,\mathcal{T}_Y) \xrightarrow{\sim} (A,\mathcal{T}_A)$ gefolgt von der Inklusion $\iota_A : (A,\mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X,\mathcal{T}_X)$.

Beispiel. Jede Inklusion $\iota_A : (A,\mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X,\mathcal{T}_X)$ eines Teilraums ist eine Einbettung. Definition E1K erweitert Inklusion / Teilraum zu Injektion / Einbettung; das ist flexibler.

Beispiel. Für $m < n$ ist $s : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n : (x_1,\dots,x_m) \mapsto (x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$ eine Einbettung. Der Nachweis von $s^*\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m}$ gelingt mit D1L oder besonders leicht mit E2I.

Beispiel. Die Abbildung $f : [0,1[\to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ ist stetig und injektiv, aber keine Einbettung. Für $0 \le a < 1$ hingegen ist $f|_{[0,a]} : [0,a] \to \mathbb{C}$ eine Einbettung (später mit F1L).

Bemerkung. Genau dann ist $f : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X,\mathcal{T}_X)$ stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \supset f^*\mathcal{T}_X$ gilt, und genau dann einbettend, wenn f injektiv ist und $\mathcal{T}_Y = f^*\mathcal{T}_X$ erfüllt (E1B). Diese Bedingung ist wesentlich stärker als Stetigkeit: Sind zum Beispiel $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}'$ verschiedene Topologien auf X, etwa extrem $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ die indiskrete und $\mathcal{T}' = \mathfrak{P}(X)$ die diskrete, dann ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ stetig, aber nicht einbettend.

Bemerkung E1L. Topologische Räume und ihre Einbettungen bilden eine Kategorie: Die Identität $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}_X) \to (X,\mathcal{T}_X)$ ist eine Einbettung. Sind $f : (X,\mathcal{T}_X) \hookrightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y,\mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (Z,\mathcal{T}_Z)$ Einbettungen, so auch ihre Komposition $g \circ f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Z,\mathcal{T}_Y)$. Dies folgt sofort aus der Zurückziehung $(g \circ f)^*\mathcal{T}_Z = f^*g^*\mathcal{T}_Z = f^*\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_X$.

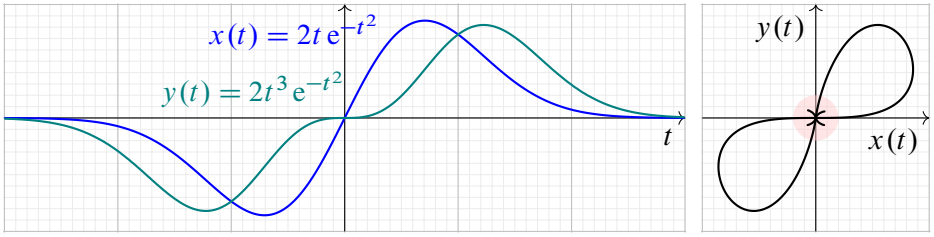


ABBILDUNG E:1. Eine stetige Injektion ist noch keine Einbettung!

Übung E1M. Wir betrachten $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}$ und $y(t) = 2t^3\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Skizzieren Sie $f,g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t,x(t))$, $g(t) = (t,y(t))$, $h(t) = (x(t),y(t))$. Welche dieser Abbildungen sind injektiv? Welche sind einbettend, also ein Homöomorphismus auf ihr Bild, als Teilraum im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$?

⁎ **E1M.** Die Abbildungen $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig, daher sind auch $f,g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ stetig (sogar beliebig oft differenzierbar, und die Ableitungen f', g', h' verschwinden nirgends). Zudem sind f,g,h injektiv. Die Abbildung f ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ dank stetiger Umkehrabbildung $(t,x) \mapsto t$. Ebenso g, aber nicht h! Zwar ist $h : \mathbb{R} \to h(\mathbb{R})$ bijektiv und stetig, aber nicht offen: Das Intervall $]-1,1[$ offen in $\mathbb{R}$, aber sein Bild $h(]-1,1[)$ ist nicht offen in $h(\mathbb{R})$ mit der Teilraumtopologie des $\mathbb{R}^2$. Schlimmer noch, es gibt überhaupt keinen Homöomorphismus zwischen den Räumen $\mathbb{R}$ und $h(\mathbb{R})$: Der Raum $h(\mathbb{R})$ ist kompakt, aber $\mathbb{R}$ nicht. Jeder Punkt trennt $\mathbb{R}$, aber nur 0 trennt $h(\mathbb{R})$. Ähnliche Beispiele kennen wir aus D2C.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§E1e. Überdeckungskriterium.** Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $X_i \subset X$ heißt *Überdeckung* von X, wenn $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ gilt. ☜

Konvention. Zur Bequemlichkeit sagt man kurzerhand „die Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$“, meint aber die Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $X_i \subset X$ mit der Eigenschaft $X = \bigcup_{i\in I} X_i$.

Die Familie $(X_i)_{i\in I}$ heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), falls jede der Mengen X_i offen (bzw. abgeschlossen) in $(X,\mathcal{T})$ ist. Wie in D5F vereinbart nennen wir $(X_i)_{i\in I}$

- *punktweise endlich*, wenn für jedes $x \in X$ die Menge $I_x = \{\, i \in I \mid x \in X_i \,\}$ endlich ist,
- *lokal-endlich* im Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U existiert, $x \in U \in \mathcal{T}$, sodass die Menge $I_U = \{\, i \in I \mid X_i \cap U \neq \emptyset \,\}$ endlich ist.

Lokal-endlich impliziert punktweise endlich aber nicht umgekehrt:

- Die Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$ ist punktweise endlich, aber nicht lokal-endlich.
- Die offene Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n-1, n+1[$ und die abgeschlossene Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1]$ sind lokal-endlich und somit auch punktweise endlich.

✍ **Satz E1N** (Überdeckungskriterium)**.** *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ sei (a) offen oder (b) lokal-endlich abgeschlossen.* ✍

(1) Für jede Teilmenge $U \subset X$ und ihr Komplement $V = X \smallsetminus U$ gilt:

U *ist offen in* $(X,\mathcal{T})$	$\Leftrightarrow$	V *ist abgeschlossen in* $(X,\mathcal{T})$
(a) $\Downarrow$ *trivial* $\Uparrow$ *dank (O3)*		*(b)* $\Downarrow$ *trivial* $\Uparrow$ *dank D5G*
$U_i = X_i \cap U = X_i \smallsetminus V_i$ *ist offen in jedem* $(X_i,\mathcal{T}_i)$	$\Leftrightarrow$	$V_i = X_i \cap V = X_i \smallsetminus U_i$ *ist abgeschlossen in jedem* $(X_i,\mathcal{T}_i)$

(2) Genau dann ist eine Abbildung $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn für jeden Index $i \in I$ die Einschränkung $f_i = f|_{X_i} : (X_i,\mathcal{T}_i) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig ist.

✍ BEWEIS. (1) Die Äquivalenzen „$\Leftrightarrow$“ sind Teil der Definition D1A. Die Implikationen „$\Downarrow$“ sind trivial nach Definition D1K der Teilraumtopologie. Wir zeigen die interessante Implikation „$\Uparrow$“, für jede (a) offene oder (b) lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung. ✍

(a) Es gilt $U = U \cap X = U \cap \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} (U \cap X_i) = \bigcup_{i\in I} U_i$. Gegeben ist $U_i \in \mathcal{T}_i$. Gemäß D1K existiert $\tilde{U}_i \in \mathcal{T}$ mit $\tilde{U}_i \cap X_i = U_i$. Aus $X_i \in \mathcal{T}$ folgt $U_i \in \mathcal{T}$ dank (O2). Also $U = \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ dank (O3).

(b) Es gilt $V = V \cap X = V \cap \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} (V \cap X_i) = \bigcup_{i\in I} V_i$. Sei $V_i \subset X_i$ abgeschlossen in $(X_i,\mathcal{T}_i)$. Gemäß D1K existiert $\tilde{V}_i \subset X$ abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$ mit $\tilde{V}_i \cap X_i = V_i$. Dank (A2) ist also auch V_i abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$. Da $(V_i)_{i\in I}$ lokal-endlich in $(X,\mathcal{T})$ ist, ist auch $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$ dank Satz D5G.

(2) „$\Rightarrow$“: Sei f stetig. Für $V \in \mathcal{T}_Y$ ist $f^{-1}(V)$ offen in $(X,\mathcal{T})$. Nach Definition D1K ist $f_i^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X_i$ offen in $(X_i,\mathcal{T}_i)$. Somit ist $f_i : X_i \to Y$ stetig für jedes $i \in I$.

„$\Leftarrow$“: Sei $f_i = f|_{X_i} : X_i \to Y$ stetig für jedes $i \in I$. Für $V \in \mathcal{T}_Y$ ist $U_i = f_i^{-1}(V)$ offen in $(X_i,\mathcal{T}_i)$. Dank (1) ist dann auch $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} U_i$ offen in $(X,\mathcal{T})$. □

☞ **Bemerkung.** Bei abgeschlossenen Überdeckungen kann auf die lokale Endlichkeit nicht verzichtet werden, wie $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$ zeigt: Für jede Menge $V \subset \mathbb{R}$ ist die Schnittmenge $V \cap \{x\}$ entweder $\emptyset$ oder $\{x\}$, also immer offen und abgeschlossen im Teilraum $\{x\}$. ☜

§E1f. Verkleben stetiger Abbildungen. Oft definieren wir Funktionen „stückweise“. Wir wollen klären, unter welchen Bedingungen wir dabei eine stetige Funktion erhalten.

Beispiel E1O. Wir betrachten folgende Funktionen:

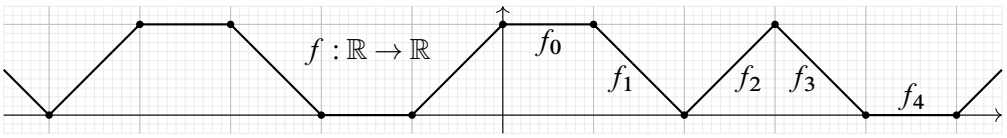
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}1 & \text{falls } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{falls } x\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}.\end{cases}\qquad g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{für } x^2>2,\\ 1 & \text{für } x^2<2.\end{cases}$$

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{für } x<0,\\ 1 & \text{für } x\geq 0.\end{cases}\qquad k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}\sqrt{x} & \text{für } x\geq 0,\\ -\sqrt{-x} & \text{für } x\leq 0.\end{cases}$$

Jede dieser Funktionen ist aus zwei stetigen Funktionen zusammengesetzt, dennoch sind nur g,k stetig, f,h hingegen nicht. Für die Dirichlet–Funktion f ist sowohl $f|_{\mathbb{Q}}$ als auch $f|_{\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}}$ stetig, sogar jeweils konstant, aber f ist nirgends stetig. Die Funktion g springt von 0 nach 1 nach 0, dennoch ist sie in jedem Punkt $a\in\mathbb{Q}$ stetig. Auch die Heaviside–Funktion h springt von 0 nach 1, sie ist jedoch im Punkt 0 unstetig. Die Funktion k setzt die Quadratwurzel zu einer ungeraden Funktion fort; das ist zwar willkürlich aber stetig.

Bemerkung. Ist eine Abbildung $f:X\to Y$ stetig, dann ist für jede Teilmenge $A\subset X$ die Einschränkung $f|_A=f\circ\iota_A:A\to Y$ stetig bezüglich der Teilraumtopologie auf A. Die Umkehrung gilt nicht: Ist $f:X\to Y$ eine Abbildung, $A\subset X$ eine Teilmenge und die Einschränkung $f|_A:A\to Y$ stetig, so braucht die gesamte Funktion $f:X\to Y$ in keinem Punkt von A stetig sein, wie die obige Dirichlet–Funktion f eindrücklich zeigt.

Dies führt uns zur Frage, wie wir eine Abbildung $f:X\to Y$ aus stetigen Abbildungen $f_i:X_i\to Y$ zusammensetzen und zugleich die Stetigkeit von f garantieren können.



Wir wollen auch unendliche Familien verkleben: Zum Beispiel möchten wir eine stetige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definieren durch Verkleben stetiger Funktionen $f_i:[i,i+1]\to\mathbb{R}$ mit $i\in\mathbb{Z}$, die der Kompatibilitätsbedingung $f_{i-1}(i)=f_i(i)$ für alle $i\in\mathbb{Z}$ genügen.

Der folgende Verklebesatz beantwortet diese Frage bequem und allgemein. Er wird auch *Verklebelemma* genannt (‘Lemma’ im Sinne von fundamentaler Satz oder Hilfssatz).

Satz E1P (Verkleben stetiger Funktionen)**.** *Sei X eine Menge sowie $X=\bigcup_{i\in I}X_i$ eine Überdeckung und $f_i:X_i\to Y$ Abbildungen für $i\in I$. Genau dann existiert eine Abbildung $f:X\to Y$ mit $f|_{X_i}=f_i$ für alle $i\in I$, wenn $f_i|_{X_i\cap X_j}=f_j|_{X_i\cap X_j}$ für alle $i,j\in I$ gilt. In diesem Falle erfüllt die Verklebung $f=\bigcup_{i\in I}f_i$ als einzige alle Bedingungen $f|_{X_i}=f_i$.*

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum sowie $X=\bigcup_{i\in I}X_i$ eine offene oder lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung und $f_i:X_i\to Y$ stetig mit $f_i|_{X_i\cap X_j}=f_j|_{X_i\cap X_j}$ für alle $i,j\in I$. Dann ist ihre Verklebung $f=\bigcup_{i\in I}f_i:X\to Y$ eine stetige Abbildung.

BEWEIS. Dank $X=\bigcup_{i\in I}X_i$ und $f_i|_{X_i\cap X_j}=f_j|_{X_i\cap X_j}$ ist $f=\bigcup_{i\in I}f_i$ eine Abbildung von X nach Y: Zu jedem $x\in X$ existiert genau ein $y\in Y$ mit $(x,y)\in f$. Diese Abbildung erfüllt $f|_{X_i}=f_i$ für jedes $i\in I$ und wird durch diese Eigenschaft eindeutig festgelegt.

Die Stetigkeit der so konstruierten Funktion f folgt aus Satz E1N. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E1g. Anwendungsbeispiele zum Verkleben: gelochte Ebene und Gandhis Brille.

Übung E1Q. Konstruieren Sie Homöomorphismen $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^1 \cong \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^2 \cong \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$. Zeigen Sie schließlich $\mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{D}^p \cong \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{D}^n$ für alle $0 \le p < n$ mit dem halben Aufwand.

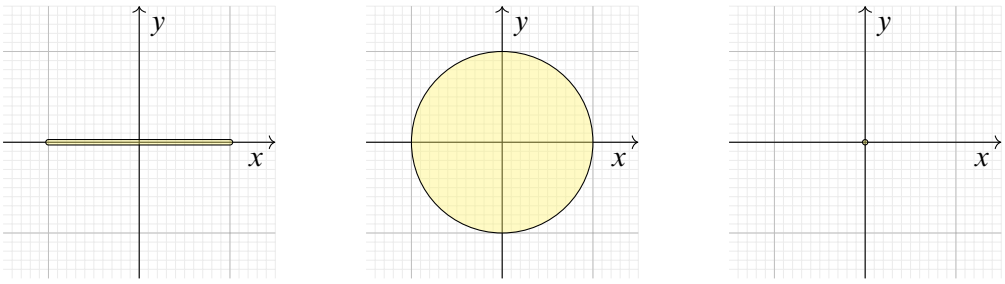


ABBILDUNG E:2. Gelochte Ebene und Konstruktion von Homöomorphismen

✻ **E1Q.** Wir konstruieren $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^1$ wie in E:2 durch Verkleben:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{für } |x| \ge 1, \\ (x, y+\sqrt{1-x^2}) & \text{für } |x| \le 1,\ y > 0, \\ (x, y-\sqrt{1-x^2}) & \text{für } |x| \le 1,\ y < 0, \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{für } |x| \ge 1, \\ (x, y-\sqrt{1-x^2}) & \text{für } |x| \le 1,\ y > 0, \\ (x, y+\sqrt{1-x^2}) & \text{für } |x| \le 1,\ y < 0. \end{cases}$$

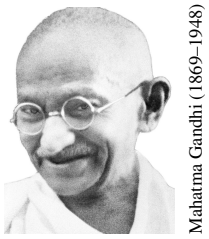
Diese Abbildungen sind wohldefiniert. Sie sind stetig dank Verklebesatz E1P. Man rechnet sodann mühelos nach, dass $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^1}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^2}$ gilt. Für die Homöomorphismen $h : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ und $k : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^2$ nutzen wir Polarkoordinaten: $h(x) = (|x|-1)\cdot x/|x|$ und $k(x) = (|x|+1)\cdot x/|x|$. Auch diese sind wohldefiniert und stetig und erfüllen $k \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^2}$ und $h \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}}$.

Den allgemeinen Fall behandeln wir genauso: Sei $0 \le p < n$ und $p+q = n$. Wir konstruieren $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{D}^p \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{D}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{D}^p$ durch Verkleben: Für $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^q$ setzen wir

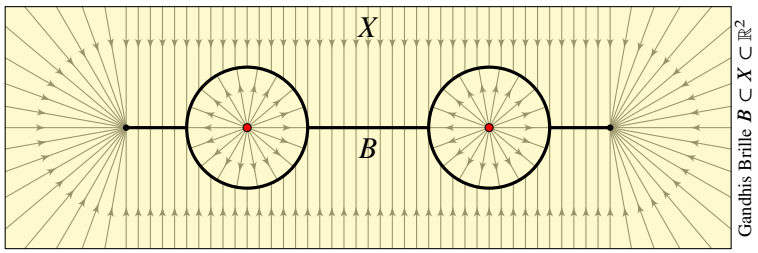
$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{für } |x| \ge 1, \\ (x, (|y| + \sqrt{1-x^2})\cdot y/|y| & \text{für } |x| \le 1, \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{für } |x| \ge 1, \\ (x, (|y| - \sqrt{1-x^2})\cdot y/|y| & \text{für } |x| \le 1. \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert und stetig dank Satz E1P. Wie gewünscht gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{D}^p}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{D}^n}$.

Übung E1R. Sei $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{\pm 2\}$ und $B = (\mathbb{S}^1 - 2) \cup (\mathbb{S}^1 + 2) \cup [-4,-3] \cup [-1,1] \cup [3,4]$. Zeichnen Sie $B \subset X$ und konstruieren Sie eine Retraktion, $r : X \to B$ stetig mit $r|_B = \mathrm{id}_B$.



Mahatma Gandhi (1869–1948)



Gandhis Brille $B \subset X \subset \mathbb{R}^2$

✻ **E1R.** Wir definieren $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sqrt{1-(x-2)^2}$ für $x \in [1,3]$ und $f(x) = \sqrt{1-(x+2)^2}$ für $x \in [-3,-1]$ sowie $f(x) = 0$ für $x \in [-4,-3] \cup [-1,1] \cup [3,4]$. Nach dem Verklebesatz E1P ist f stetig.

Wir definieren $r : X \to B$ für $z = x + \mathrm{i}y \in X$ wie folgt: Für $0 < |z-2| \le 1$ sei $r(z) = (z-2)/|z-2| + 2$. Für $0 < |z+2| \le 1$ sei $r(z) = (z+2)/|z+2| - 2$. Für $x \in [-4,4]$ und $y \ge f(x)$ sei $f(z) = x + \mathrm{i}f(x)$. Für $x \in [-4,4]$ und $y \le -f(x)$ sei $f(z) = x - \mathrm{i}f(x)$. Für $x \ge 4$ sei $r(z) = 4$. Für $x \le -4$ sei $f(z) = -4$. Diese sechs Definitionsbereiche bilden eine abgeschlossene Überdeckung von X. Auf paarweisen Überlappungen stimmen die Definitionen überein. Nach dem Verklebesatz E1P ist r stetig. Zudem gilt $r|_B = \mathrm{id}_B$.

§E1h. Offene und abgeschlossene Überdeckungen. Überdeckungen treten häufig auf:

- Jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit X kommt per Definition mit einem Atlas aus einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ durch die Kartengebiete $X_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.
- Jedes Polyeder $X = |\mathscr{K}|$ eines polytopalen / simplizialen Komplexes kommt mit der abgeschlossenen Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ durch die Polytope / Simplizes $X_i \in \mathscr{K}$.

Hier nutzen wir dankend geeignete Lokal-Global-Prinzipien: Wir wollen globale Daten und Eigenschaften von X aus den lokalen Daten und Eigenschaften der X_i konstruieren.

Übung E1S. Wir betrachten $X = \mathbb{N}$ mit koendlicher Topologie $\mathcal{T}$ (D1H). Ist die Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $I = X$ und $X_i = \{i\}$ abgeschlossen? lokal-endlich? Bestimmen Sie hierzu die *schwache Topologie* $\mathcal{T}' := \{ U \subset X \mid (U \cap X_i) \in \mathcal{T}_i \text{ für alle } i \in I \}$; allgemein siehe E1U. Untersuchen Sie dies ebenso für $X = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$ und $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$.

✻ **E1S.** Für jedes $i \in I$ ist $X_i = \{i\}$ abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$. Die Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ ist nicht lokal-endlich, denn jede Umgebung von $x \in X$ ist unendlich. Allgemein gilt $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, und hier finden wir tatsächlich $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$: Nur $\emptyset$ und die koendlichen Menge $U \subset X$ sind offen in $(X,\mathcal{T})$, aber immer ist $U \cap X_i$ offen in $(X_i,\mathcal{T}_i)$. Entsprechendes gilt für $X = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$. Die global offenen Mengen können also nicht lokal erkannt werden!

Übung E1T. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ eine Überdeckung, (a) offen oder (b) lokal-endlich abgeschlossen. Als Umkehrung zu E1G fragen wir: Welche topologischen Eigenschaften der Teilräume $(X_i,\mathcal{T}_i)$ übertragen sich auf den Raum $(X,\mathcal{T})$?

(0) Sind alle Teilräume $(X_i,\mathcal{T}_i)$ hausdorffsch, so auch der gesamte Raum $(X,\mathcal{T})$?
(1) Sind alle Teilräume $(X_i,\mathcal{T}_i)$ erstabzählbar, so auch der gesamte Raum$(X,\mathcal{T})$?
(2) Sind alle Teilräume $(X_i,\mathcal{T}_i)$ zweitabzählbar, so auch der gesamte Raum$(X,\mathcal{T})$?

✻ **E1T.** (0a) Nein, das gilt leider nicht — erstaunlicherweise! Ein klassisches Gegenbeispiel ist die Gerade mit doppeltem Ursprung (E2E). Hier gilt $X = U_1 \cup U_2$ mit $U_i \cong \mathbb{R}$, dennoch ist X nicht hausdorffsch.

(0b) Ja, das gilt — erstaunlicherweise! Gegeben seien zwei Punkte $a \neq b$ in X. Hierzu konstruieren wir offene Mengen U, V mit $a \in U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ sowie $U \cap V = \emptyset$. Dank lokaler Endlichkeit von $(X_i)_{i\in I}$ existieren offene Umgebungen $a \in W_a \in \mathcal{T}$ mit $J := \{ i \in I \mid X_i \cap W_a \neq \emptyset \}$ endlich und $b \in W_b \in \mathcal{T}$ mit $K := \{ i \in I \mid X_i \cap W_b \neq \emptyset \}$ endlich. Zu $i \in J \cap K$ existieren offene Umgebungen $U_i, V_i \in \mathcal{T}_i$ mit $a \in U_i$ und $b \in V_i$ sowie $U_i \cap V_i = \emptyset$. Gemäß Teilraumtopologie (D1K) existieren $\tilde{U}_i, \tilde{V}_i \in \mathcal{T}$ mit $\tilde{U}_i \cap X_i = U_i$ und $\tilde{V}_i \cap X_i = V_i$. Zu $i \in J \smallsetminus K$ wählen wir $\tilde{U}_i = X$ und $\tilde{V}_i = X \smallsetminus X_i$. Zu $i \in K \smallsetminus J$ wählen wir $\tilde{U}_i = X \smallsetminus X_i$ und $\tilde{V}_i = X$. Wir erhalten $a \in U := W_a \cap \bigcap_{i\in J\cup K} \tilde{U}_i \in \mathcal{T}$ und $b \in V := W_b \cap \bigcap_{i\in J\cup K} \tilde{V}_i \in \mathcal{T}$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Warnung: Für die Hausdorff–Eigenschaft benötigen wir die lokale Endlichkeit von $(X_i)_{i\in I}$, siehe E1S.

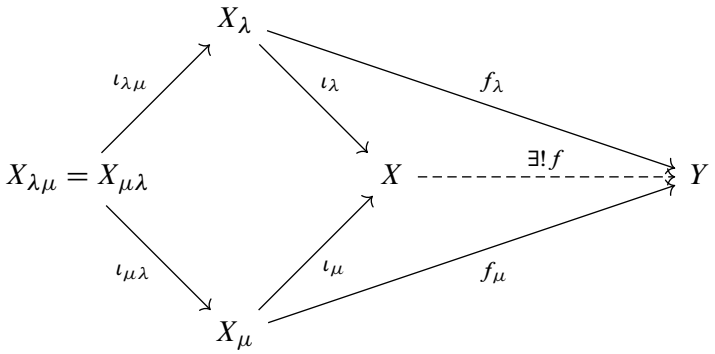
(1a) Ja, das gilt. Zu $x \in X_i \subset X$ gibt es eine abzählbare offene Umgebungsbasis $\mathcal{B}_x$ in $(X_i,\mathcal{T}_i)$, siehe D3H. Aus $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}$ folgt $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{T}$. Für $x \in V \in \mathcal{T}$ gilt $x \in V \cap X_i \in \mathcal{T}_i$, also existiert $U \in \mathcal{B}_x$ mit $x \in U \subset V \cap X_i \subset V$.

(2a) Ja, das gilt — für abzählbare Vereinigungen — und ist leicht zu sehen: Zu jedem $i \in I$ sei $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{T}_i$ eine abzählbare Basis für die Topologie $\mathcal{T}_i$. Dank $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}$ gilt $\mathcal{B} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{T}$. Da wir I als abzählbar voraussetzen, ist auch $\mathcal{B}$ abzählbar. Wir zeigen schließlich, dass $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ ist: Sei $U \in \mathcal{T}$. Für $U_i := U \cap X_i \in \mathcal{T}_i$ gilt $U_i = \bigcup \mathcal{S}_i$ mit $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{B}_i$. Für $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{S}_i$ gilt somit $U = \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} \bigcup \mathcal{S}_i = \bigcup \mathcal{S}$.

Warnung: Für die Zweitabzählbarkeit von $(X,\mathcal{T})$ benötigen wir die Abzählbarkeit von I. Andernfalls gibt es Gegenbeispiele, etwa überabzählbare Summenräume $X = \coprod_{i\in I} X_i$, zum Beispiel der Raum $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}\mathbb{R})$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E1i. Die schwache Topologie. Erfahrungsgemäß gewinnen wir viele Abbildungen $f : X \to Y$ nicht direkt als „geschlossene Formel“, sondern erst durch Verkleben, wie oben bereits angedeutet. Es lohnt sich daher, dieses Konstruktionsprinzip genau zu verstehen.



Sei X eine Menge, $\iota_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X$ eine Teilmenge für jedes $\lambda \in \Lambda$, mit Schnittmengen $X_{\lambda\mu} = X_{\mu\lambda} = X_\lambda \cap X_\mu$ und Inklusionen $\iota_{\lambda\mu} : X_{\lambda\mu} \hookrightarrow X_\lambda$ für $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Auf der Überdeckung $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sei $(f_\lambda : X_\lambda \to Y)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Abbildungen mit $f_\lambda \circ \iota_{\lambda\mu} = f_\mu \circ \iota_{\mu\lambda}$ für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$, also $f_\lambda|_{X_{\lambda\mu}} = f_\mu|_{X_{\mu\lambda}}$. Dann ist die Verklebung $f = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda : X \to Y$ die eindeutige Abbildung mit $f \circ \iota_\lambda = f_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Definition E1U. Sei $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ eine Überdeckung der Menge X durch eine Familie $\mathscr{X} = (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topologischer Räume. Diese erzeugt die zugehörige *schwache Topologie*

$$\mathcal{T}_{\mathscr{X}} := \big\{ U \subset X \;\big|\; \iota_\lambda^{-1}(U) \in \mathcal{T}_\lambda \text{ für alle } \lambda \in \Lambda \;\big\}.$$

In Worten: Genau dann ist $U \subset X$ offen in $(X, \mathcal{T}_{\mathscr{X}})$, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ der Schnitt $U \cap X_\lambda$ offen in $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ist. Äquivalent hierzu: Genau dann ist $A \subset X$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T}_{\mathscr{X}})$, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ der Schnitt $A \cap X_\lambda$ abgeschlossen in $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ist. Oder äquivalent für Abbildungen: Genau dann ist $f : (X, \mathcal{T}_{\mathscr{X}}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn jede Einschränkung $f|_{X_\lambda} : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ für $\lambda \in \Lambda$ stetig ist. (Verkleben wie in Satz E1P)

Beispiele. Für $\mathscr{X} = (X, \mathcal{T})$ gilt $\mathcal{T}_{\mathscr{X}} = \mathcal{T}$. Für $\mathscr{X} = (\{x\}, \mathfrak{P}\{x\})_{x\in X}$ gilt $\mathcal{T}_{\mathscr{X}} = \mathfrak{P}(X)$.

Bemerkung. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sind Teilräume, so gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\mathscr{X}}$: Die schwache Topologie $\mathcal{T}_{\mathscr{X}}$ ist mindestens so fein wie die Ausgangstopologie $\mathcal{T}$. Idealerweise stimmen beide überein. Hinreichend hierzu sind zwei wichtige Spezialfälle:

Beispiel. Ist $\mathscr{X} = (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene oder lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung in $(X, \mathcal{T})$, so erzeugt $\mathscr{X}$ die ursprüngliche Topologie $\mathcal{T}$ auf X, also $\mathcal{T}_{\mathscr{X}} = \mathcal{T}$ (E1N).

Bemerkung. Die schwache Topologie löst das Verklebeproblem gemäß obigem Diagramm. Sie heißt auf Englisch *weak topology*, auf Französisch *topologie faible* und besonders schön auf Spanisch *topología débil*; sie ist keineswegs debil, sondern *débil* heißt eben ‘schwach’.

Bemerkung. Auch in der Funktionalanalysis gibt es den Begriff der *schwachen Topologie*: Zu jedem normierten (oder allgemein lokal-konvexen topologischen) $\mathbb{K}$–Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ sei X' der topologische Dualraum aller stetigen Funktionale $f : X \to \mathbb{K}$. Die schwache Topologie $\mathcal{T}_w$ auf X ist die gröbste Topologie, für die alle $f \in X'$ stetig sind. Diese beiden Konstruktionen haben außer dem traditionellen Namen ‘schwach’ nicht viel gemeinsam.

§E1j. Kohärenz. Weiterhin sei $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ eine Überdeckung der Menge X durch eine Familie $\mathscr{X} = (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ topologischer Räume. Dies definiert die schwache Topologie $\mathcal{T}_{\mathscr{X}}$ auf X gemäß E1U. Zu jeder Schnittmenge $X_{\lambda\mu} = X_{\mu\lambda} = X_\lambda \cap X_\mu$ für $\lambda, \mu \in \Lambda$ haben wir die beiden Inklusionen $\iota_{\lambda\mu} : X_{\lambda\mu} \hookrightarrow X_\lambda$ und $\iota_{\mu\lambda} : X_{\mu\lambda} \hookrightarrow X_\mu$, und somit auch zwei Topologien $\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \iota_{\lambda\mu}^* \mathcal{T}_\lambda$ und $\mathcal{T}_{\mu\lambda} = \iota_{\mu\lambda}^* \mathcal{T}_\mu$. Idealerweise stimmen beide überein:

Proposition E1v. *Angenommen, auf jeder Schnittmenge $X_\lambda \cap X_\mu$ stimmen die von $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ und $(X_\mu, \mathcal{T}_\mu)$ induzierten Teilraumtopologien überein, also $\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \mathcal{T}_{\mu\lambda}$. Dann gilt:*

(1) Jeder der topologischen Räume $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ist ein Teilraum von $(X, \mathcal{T}_{\mathscr{X}})$.
(2) Ist $X_{\lambda\mu}$ offen / abgeschlossen in $(X_\mu, \mathcal{T}_\mu)$ für jedes $\mu \in \Lambda$, so auch X_λ in $(X, \mathcal{T}_{\mathscr{X}})$.

BEWEIS. (1) Wir müssen zeigen: Zu $U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$ existiert $U \in \mathcal{T}_{\mathscr{X}}$ mit $U \cap X_\lambda = U_\lambda$. Da U_λ in X_λ offen ist, ist $U_{\lambda\mu} = U_\lambda \cap X_{\lambda\mu}$ offen im Teilraum $X_{\lambda\mu}$. Da $X_{\lambda\mu}$ von X_λ und X_μ nach Voraussetzung dieselbe Teilraumtopologie erbt, existiert $U_\mu \in \mathcal{T}_\mu$ mit $U_\mu \cap X_{\lambda\mu} = U_{\lambda\mu}$. Die Menge $U = \bigcup_{\mu\in\Lambda} U_\mu$ erfüllt $U \in \mathcal{T}_{\mathscr{X}}$, denn für jedes $\mu \in \Lambda$ gilt $U \cap X_\mu = U_\mu \in \mathcal{T}_\mu$, und zudem $U \cap X_\lambda = U_\lambda$. Aussage (2) folgt aus der Definition der Topologie $\mathcal{T}_{\mathscr{X}}$. □

Definition E1w. Seien $(X_0, \mathcal{T}_0) \subset (X_1, \mathcal{T}_1) \subset (X_2, \mathcal{T}_2) \subset \dots$ topologische Räume, wobei jeder ein Teilraum des folgenden ist. Dann ist ihre Vereinigung $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ein topologischer Raum mit der schwachen Topologie $\mathcal{T}$ bezüglich $(X_n, \mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, genannt *Limesraum*, geschrieben $(X, \mathcal{T}) =: \lim_n (X_n, \mathcal{T}_n)$. Ausführlich bedeutet das, wie oben erklärt:

- Genau dann ist $U \subset X$ offen in X, wenn jeder Schnitt $U \cap X_n$ offen in X_n ist.
- Genau dann ist $f : X \to Y$ stetig, wenn jede Einschränkung $f|_{X_n} : X_n \to Y$ stetig ist.

Übung E1x. Die euklidischen Räume $(\mathbb{R}^0, \mathcal{T}_0) \subset (\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_1) \subset (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_2) \subset \dots$ definieren als Limes den Raum $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \mathcal{T}) = \lim_n (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$. (1) Die schwache Topologie $\mathcal{T}$ ist echt feiner als die ℓ^p–Topologie für jedes $p \in [1, \infty]$. (2) Ist $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \mathcal{T})$ normierbar? metrisierbar?

✻ **E1x.** Wir identifizieren $\mathbb{R}^n$ mit dem Teilraum $\{(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\}$. Damit gilt $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$.

(1) Jeder ℓ^p–Ball $B_p(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \mid |a - x|_p < \varepsilon\}$ ergibt als Schnitt in $\mathbb{R}^n$ einen ℓ^p–Ball (warum?), ist also offen in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$. Daher gilt $B_p(a, \varepsilon) \in \mathcal{T}$, und somit $\mathcal{T}(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, |-|_p) \subset \mathcal{T}$. Mit (2) folgt „$\subsetneq$“.

(2) Wir zeigen, dass $(X, \mathcal{T})$ nicht erstabzählbar ist, und somit nicht metrisierbar. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $0 \in U_n \in \mathcal{T}$. Nach Definition von $\mathcal{T}$ gilt $U_n \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{T}_n$, also existiert $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon_n) \subset U_n \cap \mathbb{R}^n$ (euklidischer Ball). Wir setzen $U := \{x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \mid \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| < \varepsilon_n/2\}$. Es gilt $0 \in U \in \mathcal{T}$, aber $U_n \not\subset U$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E2. Quotientenräume

§E2a. Äquivalenzrelationen und Quotienten. In der Mathematik sind *Äquivalenzrelationen* und *Quotienten* überaus nützlich, allgegenwärtig und für viele Konstruktionen unerlässlich. Auch in der Topologie nutzen wir *Quotientenräume*.

Anschaulich entsteht ein Quotientenraum, indem wir Punkte eines Raumes X „identifizieren“ oder „zusammenkleben“. Abbildung A:2 zeigt typische Anwendungen: Wir nehmen ein rechteckiges Blatt Papier, identifizieren Randpunkte wie angegeben, und erhalten einen Zylinder, ein Möbius–Band, einen Torus oder eine Sphäre. (Siehe E2M für Details.)

Diese Konstruktion ist sehr vielseitig, aber erfahrungsgemäß delikat. Hier zahlt sich die größere Flexibilität topologischer Räume gegenüber metrischen Räumen aus: Anders als die Konstruktion von Teilräumen, die wir aus der Analysis metrischer Räume kennen, sind Quotientenräume eine topologische Technik, die metrisch keine direkte Entsprechung hat.

Formal entspricht dies der Quotientenbildung bezüglich einer Äquivalenzrelation.

Zur Erinnerung: Eine *Relation* R auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$. Zwei Elemente $x, y \in X$ *stehen in der Relation* R, geschrieben $x\,R\,y$, wenn $(x,y) \in R$ gilt. Wir nennen $R \subset X \times X$ eine *Äquivalenzrelation* auf X, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(1) Reflexivität: $x\,R\,x$
(2) Symmetrie: $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
(3) Transitivität: $x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$

Die *Äquivalenzklasse* von $x \in X$ ist die Menge aller zu x äquivalenten Elemente:

$$[x] = [x]_R := \left\{ x' \in X \;\middle|\; x\,R\,x' \right\}$$

Dank Reflexivität ist jede Äquivalenzklasse nicht-leer, denn $x \in [x]_R$. Aus $y \in [x]_R$ folgt dank Transitivität $[y]_R \subset [x]_R$, und dank Symmetrie $[y]_R \supset [x]_R$, insgesamt also $[y]_R = [x]_R$. Somit gilt: Je zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt.

Die *Quotientenmenge* von X bezüglich R ist die Menge aller Äquivalenzklassen:

$$X/R := \left\{ [x]_R \;\middle|\; x \in X \right\}$$

Anders gesagt, X/R ist eine *Zerlegung* der Menge X, kurz $X = \bigsqcup X/R$: Jedes Element $x \in X$ gehört zu genau einer Klasse $c \in X/R$. Umgekehrt definiert jede Zerlegung $X = \bigsqcup P$ eine Äquivalenzrelation $R = \{\, (x,x') \in X \times X \mid \exists c \in P : x \in c \wedge x' \in c \,\}$ mit $P = X/R$. So entsprechen sich Äquivalenzrelationen $R \subset X \times X$ und Zerlegungen $P \subset \mathfrak{P}(X)$.

Die zugehörige *Quotientenabbildung* oder *kanonische Surjektion* ist

$$q : X \twoheadrightarrow X/R : x \mapsto [x]_R.$$

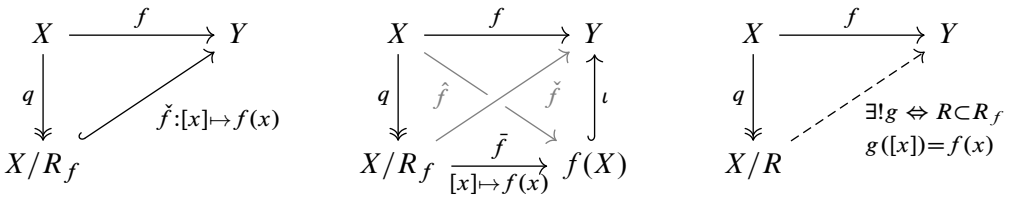
Die Äquivalenzklasse von $x \in X$ schreibt man auch $q(x) = [x]_R = \overline{x}^R = \mathfrak{cl}_R(x) = \ldots$. Wenn R aus dem Kontext klar ist, so schreiben wir abkürzend $[x] = \overline{x} = \mathfrak{cl}(x) = \ldots$.

Ist $c \in X/R$ eine Äquivalenzklasse, so nennen wir jedes Element $x \in c$ einen *Repräsentanten* der Klasse c. Die Wahl eines Repräsentanten ist im Allgemeinen willkürlich, weder eindeutig noch kanonisch… und im Allgemeinen auch nicht erforderlich: Die Quotientenkonstruktion wurde gerade dazu erschaffen, um uns von Repräsentanten zu befreien!

Statt mit Elementen $x \in X$ können wir fortan mit Äquivalenzklassen $c \in X/R$ arbeiten.

§E2b. Faktorisierung. Jede Abbildung $f : X \to Y$ definiert ihre Äquivalenzrelation

$$R_f := \{ (x,x') \in X \times X \mid f(x) = f(x') \}.$$



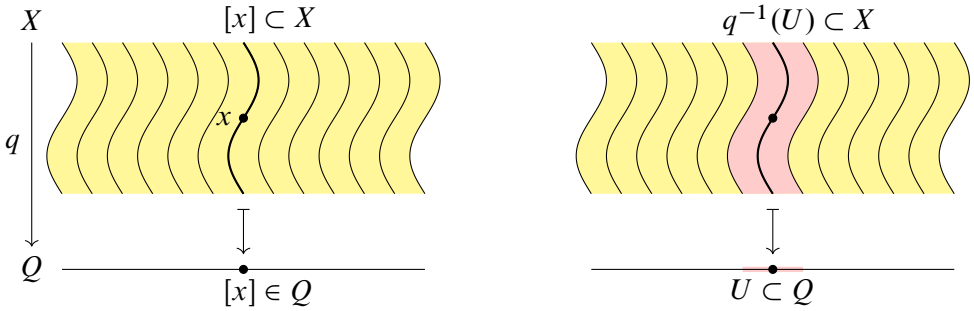
Die Abbildung $\check{f} : X/R_f \to Y : [x] \mapsto f(x)$ ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von der willkürlichen Wahl eines Repräsentanten x, denn aus $[x] = [x']$ folgt $f(x) = f(x')$. Wir erhalten $f = \check{f} \circ q$. Hierbei ist $\check{f}$ injektiv, denn $\check{f}(c) = \check{f}(c')$ bedeutet: Für Repräsentanten $x \in c$ und $x' \in c'$ gilt $f(x) = f(x')$, folglich $(x,x') \in R_f$, und somit $c = c'$.

Hieraus erhalten wir folgende *kanonische Faktorisierung*. Sie kennen dies aus der linearen Algebra als ersten Isomorphiesatz für Vektorräume (und später Gruppen, Ringe, etc.).

Proposition E2A. *Jede Abbildung $f : X \to Y$ faktorisiert gemäß $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$ in Quotient $q : X \twoheadrightarrow X/R_f$, Bijektion $\bar{f} : X/R_f \xrightarrow{\sim} f(X) : [x] \mapsto f(x)$, Inklusion $\iota : f(X) \hookrightarrow Y$.*

Allgemein sei $q : X \to X/R$ ein Quotient und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Genau dann faktorisiert $f = g \circ q$ über q und $g : X/R \to Y$, wenn $R \subset R_f$ gilt. In diesem Fall ist g eindeutig und wohldefiniert durch $g([x]_R) = f(x)$. Wir nennen g die von f induzierte Abbildung *auf dem Quotienten X/R. Die Bildmenge $f(X) = g(X/R)$ bleibt unverändert. Genau dann ist g injektiv, wenn $R = R_f$ gilt.* □

§E2c. Quotiententopologie. Wir übertragen die Quotientenkonstruktion von Mengen nun auf topologische Räume. Die Topologie transportieren wir durch Vorschieben:



Definition E2B. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation, $Q = X/R = \{ [x]_R \mid x \in X \}$ die Quotientenmenge und $q : X \to Q : x \mapsto [x]_R$ die Quotientenabbildung. Die *Quotiententopologie* auf Q ist die finale Topologie (E1B)

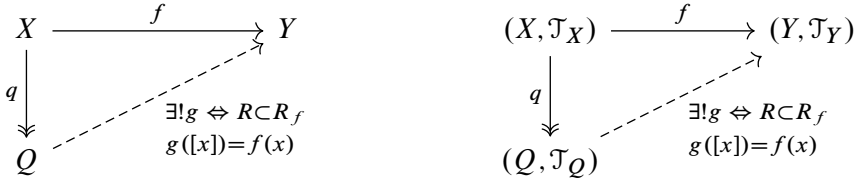
$$\mathcal{T}_Q := q_* \mathcal{T}_X = \{ U \subset Q \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \}.$$

Wir nennen $(Q, \mathcal{T}_Q) =: (X, \mathcal{T}_X)/R$ den *Quotientenraum* von $(X, \mathcal{T}_X)$ bezüglich R.

In Worten: Eine Teilmenge $U \subset Q$ ist genau dann offen in der Quotiententopologie $\mathcal{T}_Q$, wenn ihr Urbild $q^{-1}(U) \subset X$ offen ist in der ursprünglichen Topologie $\mathcal{T}_X$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§E2d. Universelle Abbildungseigenschaft des Quotientenraumes.** Wie zuvor sei $q : (X,\mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Q,\mathcal{T}_Q) : x \mapsto [x]$ der Quotient bezüglich R. Zu jeder Abbildung $f : Y \to X$ *in X hinein* haben wir $q \circ f : Y \to Q$. Umgekehrt, zu jeder Abbildung $f : X \to Y$ *aus X hinaus* stehen wir vor einem einfachen aber grundlegenden Faktorisierungsproblem: ☜



Genau dann existiert $g : Q \to Y$ mit $f = g \circ q$, wenn $R \subset R_f$ gilt: Aus $f = g \circ q$ folgt $R_f \supset R$. Umgekehrt, dank $R \subset R_f$ ist $g : Q \to Y : [x] \mapsto f(x)$ wohldefiniert. Wir sagen hierzu: *f induziert g*. Die Abbildung g mit $f = g \circ q$ ist eindeutig, denn q ist surjektiv.

Diese Faktorisierungsregel übertragen wir nun von Mengen auf topologische Räume:

☞ **Satz E2C.** *Sei $(X,\mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum. Sei $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation, $Q = X/R$ die Quotientenmenge und $q : X \to Q : x \mapsto [x]$ die Quotientenabbildung. Die Quotiententopologie $\mathcal{T}_Q = q_*\mathcal{T}_X$ ist die feinste, für die $q : (X,\mathcal{T}_X) \to (Q,\mathcal{T}_Q)$ stetig ist.* ☜

✍ *UAE: Genau dann faktorisiert $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ gemäß $f = g \circ q$ in den Quotient q und eine stetige Abbildung $g : (Q,\mathcal{T}_Q) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$, wenn f stetig ist und $R \subset R_f$ erfüllt.* ✍

Die Bedingung $R \subset R_f$ bedeutet: Für alle $x, x' \in X$ mit xRx' gilt $f(x) = f(x')$.

☞ BEWEIS. Die erste Aussage ist klar nach Definition E1B der Topologie $\mathcal{T}_Q = q_*\mathcal{T}_X$. Für $f = g \circ q$ mit $g : (Q,\mathcal{T}_Q) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig ist auch f stetig und erfüllt $R_f \supset R$. Ist f stetig und $R \subset R_f$, so ist $g : (Q,\mathcal{T}_Q) \to (Y,\mathcal{T}_Y) : [x] \mapsto f(x)$ stetig gemäß E1B. □ ☜

☞ **Bemerkung E2D.** Sei $(X,\mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $q : X \to Q = X/R$ ein Quotient. Für jede Topologie $\mathcal{T}_Q$ auf Q sind folgende Aussagen äquivalent: ☜

(1) Die Topologie $\mathcal{T}_Q$ ist die Quotiententopologie (E2B), also $\mathcal{T}_Q = q_*\mathcal{T}_X$.
(2) Die Topologie $\mathcal{T}_Q$ ist die feinste, für die $q : (X,\mathcal{T}_X) \to (Q,\mathcal{T}_Q)$ stetig ist.
(3) Genau dann ist $g : (Q,\mathcal{T}_Q) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn's $g \circ q : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ ist.
(4) Genau dann faktorisiert $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ gemäß $f = g \circ q$ in q und eine stetige Abbildung $g : (X,\mathcal{T}_X) \to (Q,\mathcal{T}_Q)$, wenn f stetig ist und $R \subset R_f$ erfüllt.
(5) Für jeden topologischen Raum $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ist die folgende Abbildung eine Bijektion:

$$\Phi : \mathscr{C}(Q,Y) \to \left\{ f \in \mathscr{C}(X,Y) \;\middle|\; R \subset R_f \right\} : g \mapsto f = g \circ q.$$

Eigenschaft (1) ist unsere Definition E2B der Quotiententopologie. Die Äquivalenzen (1) ⇔ (2) ⇔ (3) folgen aus Definition E1B und den daran anschließenden Erklärungen. Die Äquivalenz (1) ⇔ (4) haben wir als Satz E2C hervorgehoben. Die Äquivalenz (4) ⇔ (5) ist eine leichte Umformulierung: Mit ι_A ist auch Φ injektiv. Surjektivität ist Aussage (4).

Die Quotiententopologie $\mathcal{T}_Q$ wird durch jede dieser Eigenschaften charakterisiert! Wir können sie explizit angeben (E2B) durch $\mathcal{T}_Q = q_*\mathcal{T}_X = \{ U \subset Q \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \}$ oder implizit durch die universelle Eigenschaft (E2C) des Quotienten $q : (X,\mathcal{T}_X) \to (Q,\mathcal{T}_Q)$.

Beide Sichtweisen sind nützlich und leisten uns gute Dienste. Auch andere Topologien werden wir soweit möglich durch ihre Abbildungseigenschaften charakterisieren.

§E2e. Triviale Beispiele. Nach dieser langen Vokabelarbeit und *abstract general nonsense* beginnen wir nun mit der Untersuchung konkreter Beispiele und Anwendungen.

Beispiel. Die kleinste (feinste) Äquivalenzrelation $R = \{\,(x,x) \mid x \in X\,\}$ identifiziert jeden Punkt $x \in X$ nur mit sich selbst. Der Quotientenraum $Q = X/R = \{\,\{x\} \mid x \in X\,\}$ ist formal verschieden von X, aber die Quotientenabbildung $q : X \to Q : x \mapsto \{x\}$ ist eine Bijektion. Mit der Topologie $\mathcal{T}_Q := q_*\mathcal{T}_X$ ist $q : (X,\mathcal{T}_X) \to (Q,\mathcal{T}_Q)$ ein Homöomorphismus.

Beispiel. Die größte (gröbste) Äquivalenzrelation $R = X \times X$ identifiziert alle Punkte von X miteinander. Der Quotientenraum ist $Q = X/R = \{X\}$ und die Quotientenabbildung ist $q : X \to Q : x \mapsto X$, ebenso die stetige Abbildung $q : (X,\mathcal{T}_X) \to (Q,\mathcal{T}_Q)$.

§E2f. Exotische Beispiele. Die folgenden Beispiele sind bemerkenswert, gar berühmt: Sie zeigen, dass Trennungseigenschaften bei Quotientenbildung leicht zu Bruch gehen.

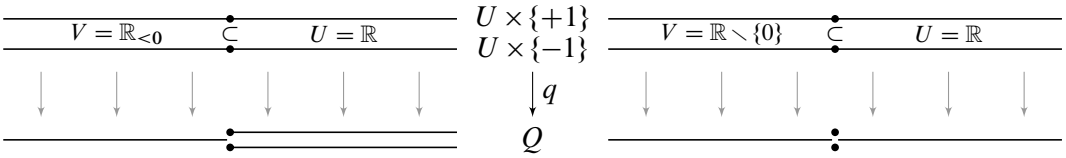


ABBILDUNG E:3. Verzweigte Gerade und Gerade mit doppeltem Ursprung

Beispiel E2E. Seien $\emptyset \neq V \subsetneq U = \mathbb{R}^n$ offen. Der Teilraum $X = U \times \{\pm 1\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht aus zwei Kopien $U_\pm = U \times \{\pm 1\}$ von U. Wir verheften nun die beiden Kopien $V_\pm$ von V; hierzu definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch

$$(x,y) \sim (x',y') \quad :\Longleftrightarrow \quad (x,y) = (x',y') \;\vee\; x = x' \in V.$$

Die Äquivalenzklassen sind also $[(x,y)] = \{(x,\pm y)\}$ für $x \in V$ und $[(x,y)] = \{(x,y)\}$ für $x \in U \smallsetminus V$. Damit ist der Quotient $q : (X,\mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Q,\mathcal{T}_Q)$ ein lokaler Homöomorphismus vermöge $(q_\pm, s_\pm) : U_\pm \cong Q_\pm$. Der Raum Q ist lokal euklidisch, also lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$, aber dennoch nicht hausdorffsch. (Übung: Führen Sie dies sorgfältig aus!)

✻ **E2E.** (1) Zu jedem Punkt $x \in V$ gehört ein Punkt $q(x,+1) = q(x,-1)$ in Q. Zu $x \in U \smallsetminus V$ betrachten wir die beiden Punkte $q(x,+1) \neq q(x,-1)$ in Q. Für $x \in \delta V$ sind diese nicht separiert, denn in Q schneidet jede Umgebung von $q(x,+1)$ jede Umgebung von $q(x,-1)$. Demnach ist Q nicht hausdorffsch.

(2) Die Mengen $Q_\pm = q(U_\pm)$ überdecken Q und sind offen gemäß E2B, denn $q^{-1}(Q_+) = U_+ \cup V_-$ ist offen in X, ebenso $q^{-1}(Q_-) = U_- \cup V_+$. Die Einschränkung $q_+ : U_+ \to Q_+ : (x,+1) \mapsto [(x,+1)]$ ist stetig. Wir zeigen, dass q_+ ein Homöomorphismus ist, durch Konstruktion einer stetigen Umkehrabbildung.

Die Projektion $f_+ : X \to U_+ : (x,\pm 1) \mapsto (x,+1)$ ist kompatibel mit der Äquvalenzrelation $\sim$. Dank E2C induziert f_+ die stetige Abbildung $g_+ : Q \to U_+ : [(x,\pm 1)] \mapsto (x,+1)$. Somit ist auch die Einschränkung $s_+ = q_+|_{Q_+} : Q_+ \to U_+ : [(x,+1)] \mapsto (x,+1)$ stetig. Wir erhalten so den expliziten Homöomorphismus $(q_+,s_+) : U_+ \cong Q_+$, denn es gilt $s_+ \circ q_+ = \mathrm{id}_{U_+}$ und $q_+ \circ s_+ = \mathrm{id}_{Q_+}$. Ebenso gilt $(q_-,s_-) : U_- \cong Q_-$.

Beispiel. Speziell für $U = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}_{<0}$ erhalten wir die *verzweigte Gerade* (E:3 links). Für $U = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ist Q die *reelle Gerade mit doppeltem Ursprung* (E:3 rechts). Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,0,1/2,0,1/3,0,1/4,\dots)$ in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen 0. Auch $q(x_n,+1)$ in Q konvergiert gegen $0_+ = q(0,+1)$, aber $0_- = q(0,-1)$ ist ein weiterer Häufungspunkt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E2g. Identifizierungen. Dual zu Einbettungen (E1K) nutzen wir Identifizierungen:

Definition E2F. Eine surjektive Abbildung $f : (X,\mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ heißt *Identifizierung*, wenn $\mathcal{T}_Y = f_*\mathcal{T}_X$ gilt. Anders gesagt, $f = g \circ q$ ist der Quotient $q : (X,\mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Q,\mathcal{T}_Q)$ bezüglich R_f gefolgt von einem Homöomorphismus $g : (Q,\mathcal{T}_Q) \xrightarrow{\sim} (Y,\mathcal{T}_Y)$.

Beispiel. Jeder Quotient $q : (X,\mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Q,\mathcal{T}_Q) = (X,\mathcal{T}_X)/R$ ist eine Identifizierung. Definition E2F erweitert Quotient / Quotientenraum zu Surjektion / Identifizierung.

Beispiel. Für $n > m$ haben wir die Projektion $p : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m : (x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,x_m)$. Dies ist eine Identifizierung. Der Nachweis von $q_*\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m}$ gelingt leicht mit E2I.

Beispiel. Die Abbildung $p : [0,1[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ ist stetig und surjektiv, aber keine Identifizierung: Hingegen sind $p : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ (E2T) und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ (E2P) Identifizierungen.

Bemerkung. Genau dann ist $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \subset f_*\mathcal{T}_X$ gilt, und genau dann identifizierend, wenn f surjektiv ist und $\mathcal{T}_Y = f_*\mathcal{T}_X$ erfüllt. Diese Bedingung ist wesentlich stärker als Stetigkeit: Sind zum Beispiel $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}'$ verschiedene Topologien auf X, dann ist die identische Abbildung $\mathrm{id} : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ stetig aber nicht identifizierend.

Bemerkung E2G. Topologische Räume und ihre Identifizierungen bilden eine Kategorie: Die Identität $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}_X) \to (X,\mathcal{T}_X)$ ist eine Identifizierung. Sind $f : (X,\mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y,\mathcal{T}_Y) \twoheadrightarrow (Z,\mathcal{T}_Z)$ identifizierend, so auch ihre Komposition $g \circ f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Z,\mathcal{T}_Z)$. Dies folgt aus $(g \circ f)_*\mathcal{T}_X = g_* f_* \mathcal{T}_X = g_*\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_Z$.

§E2h. Die kanonische Faktorisierung. Analog zur Situation für Mengen und vielen anderen mathematischen Objekten (wie Gruppen, Ringen, Moduln, Vektorräumen, etc…) gilt in der Kategorie der topologischen Räume folgende kanonische Faktorisierung:

$$R_f = R_{\hat f} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \hat f \nearrow \quad \check f \nearrow & \uparrow{\scriptstyle \iota} \\ X/R_f & \xrightarrow{\quad \bar f \quad} & f(X) \end{array} \qquad f(X) = \check f(X)$$

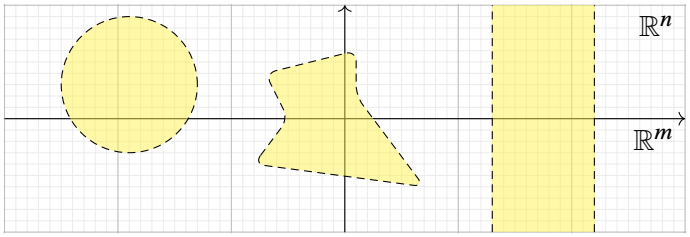
Satz E2H (kanonische Faktorisierung)**.** *Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ faktorisiert gemäß $f = \iota \circ \bar f \circ q$ in die Quotientenabbildung $q : X \twoheadrightarrow X/R_f : x \mapsto [x]$, die stetige Bijektion $\bar f : X/R_f \xrightarrow{\sim} f(X) : [x] \to f(x)$ und die Inklusion $\iota : f(X) \hookrightarrow Y : y \mapsto y$.*

Im Allgemeinen ist $\bar f$ kein Homöomorphismus. Äquivalent sind: (1) Die stetige Bijektion $\bar f : X/R_f \to f(X)$ ist ein Homöomorphismus. (2) Die stetige Surjektion $\hat f : X \to f(X)$ ist eine Identifizierung. (3) Die stetige Injektion $\check f : X/R_f \to Y$ ist eine Einbettung.

Ist f zudem offen / abgeschlossen, so auch $\bar f$, $\hat f$, $\check f$, und es gilt (1–3).

BEWEIS. Die Abbildung f induziert die Injektion $\check f$ dank E2C und diese die Bijektion $\bar f$ dank E1I. Ebenso induziert f die Surjektion $\hat f$ dank E1I und diese die Bijektion $\bar f$ dank E2C. Die Stetigkeit verdanken wir den oben definierten Topologien auf Quotient und Teilraum (E1I, E2C). Die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (2) gilt dank E2F, und (1) $\Leftrightarrow$ (3) gilt dank E1K. Die Offenheit bzw. Abgeschlossenheit überträgt sich dank Definition (D1K, E2B). □

§E2i. Schnitt und Retraktion. Einbettungen E1K sind verallgemeinerte Inklusionen, Identifizierungen E2F sind verallgemeinerte Quotienten. Eine anschauliche Illustration:



Beispiel. Als grundlegendes geometrisches und nicht-triviales Beispiel betrachten wir die kanonischen Injektionen und Projektionen euklidischer Räume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit $m < n$:

$$s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : (x_1,\dots,x_m) \mapsto (x_1,\dots,x_m,0,\dots,0),$$
$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : (x_1,\dots,x_m,\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,x_m).$$

Es gilt $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^m} = s^*\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} = p_*\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, genauer ist s eine abgeschlossene Einbettung und p eine offene Identifzierung. Das ist allerdings nicht offensichtlich und bedarf eines Beweises.

Erläuterung. Für $B = B_{\mathbb{R}^n}(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ mit a und $r > 0$ gilt $p(B) = B_{\mathbb{R}^m}(a',r)$ mit $a' = p(a)$ und $s^{-1}(B) = B_{\mathbb{R}^m}(a',r'$ mit $r'^2 = r^2 - |a-a'|^2$ falls > 0, sonst leer. Für $U = \bigcup_i B_i \subset \mathbb{R}^n$ offen ist $p(U) = \bigcup_i p(B_i) \subset \mathbb{R}^m$ offen. Für $A \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen ist $s(A) \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, denn das Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus s(A)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$: Fallunterscheidung $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus s(\mathbb{R}^m)$ und $x \in s(\mathbb{R}^m) \smallsetminus s(A)$.

Aus $p \circ s = \mathrm{id}_X$ folgt insbesondere, dass s injektiv und p surjektiv ist. Die Forderung, dass p und s zudem *stetig* sein müssen, ist hier wesentlich und echt stärker, siehe E2K.

Satz E2I. *Seien $s : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ und $p : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X,\mathcal{T}_X)$ stetige Abbildungen.*

(1) Aus $p \circ s = \mathrm{id}_X$ folgt $\mathcal{T}_X = s^*\mathcal{T}_Y = p_*\mathcal{T}_Y$.

Das bedeutet, p ist linksinvers zu s, und wir nennen $s : X \hookrightarrow Y$ eine Einbettung mit Retraktion $p : Y \twoheadrightarrow X$. *Äquivalent hierzu ist s rechtsinvers zu p, und wir nennen $p : Y \twoheadrightarrow X$ eine* Identifizierung mit (globalem) Schnitt $s : X \hookrightarrow Y$.

(2) Ist zudem $(Y,\mathcal{T}_Y)$ hausdorffsch, so ist s eine abgeschlossene Einbettung.

BEWEIS. Zur Einübung der Begriffe rechnen Sie (1) und (2) nach. □

✻ **E2I.** (1) Mit universeller Abbildungseigenschaft: Wir faktorisieren $p = \bar{p} \circ q$ in Quotient $q : Y \twoheadrightarrow Y/R_p$ und stetige Bijektion $\bar{p} : Y/R_p \xrightarrow{\sim} X$. Auch $\bar{s} = q \circ s : X \to Y/R_p$ ist stetig. Weiterhin gilt $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_X$. Komposition mit der Umkehrfunktion $\bar{p}^{-1}$ von links ergibt $\bar{s} = \bar{p}^{-1}$, diese ist also stetig. Ebenso hat die stetige Bijektion $\hat{s} : X \xrightarrow{\sim} s(X) \subset Y$ die Umkehrabbildung $\hat{p} = p|_{s(X)}$, diese ist also ebenfalls stetig.

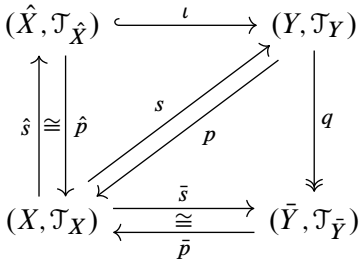
Alternativ direkt: Wir zeigen explizit $s^*\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_X$. Da s stetig ist, gilt $s^*\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$ nach Definition E1B. Die umgekehrte Inklusion $s^*\mathcal{T}_Y \supset \mathcal{T}_X$ sieht man so: Für $U \in \mathcal{T}_X$ gilt $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, da p stetig ist. Nach Definition der initialen Topologie $s^*\mathcal{T}_Y$ enthält sie $s^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ s)^{-1}(U) = U$. Das zeigt $\mathcal{T}_X \subset s^*\mathcal{T}_Y$.

Wir zeigen nun ebenso $\mathcal{T}_X = p_*\mathcal{T}_Y$: Da p stetig ist, gilt $\mathcal{T}_X \subset p_*\mathcal{T}_Y$ nach Definition E1B. Die umgekehrte Inklusion $\mathcal{T}_X \supset p_*\mathcal{T}_Y$ sieht man so: Sei $U \in p_*\mathcal{T}_Y$ in der finalen Topologie, also $U \subset X$ mit $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$. Da $s : X \to Y$ stetig ist, enthält $\mathcal{T}_X$ das Urbild $s^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ s)^{-1}(U) = U$. Das zeigt $p_*\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$.

(2) Es gilt $s(X) = \{\, s(x) \mid x \in X \,\} = \{\, y \in Y \mid s(p(y)) = y \,\}$. Ist Y hausdorffsch, so ist $s(X)$ in Y abgeschlossen, dank D5L. Ohne Hausdorff–Eigenschaft gilt dies nicht: Zu $X = \{0\}$ und $Y = \{0,1\}$ indiskret haben wir $s : X \hookrightarrow Y$ und $p : Y \to X$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$, aber $s(X)$ ist nicht abgeschlossen in Y.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✍ **Übung E2J.** Jedes Paar $(s,p) : (X,\mathcal{T}_X) \rightleftarrows (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetiger Abbildungen mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$ induziert einen Homöomorphismus $(\hat{s},\hat{p}) : (X,\mathcal{T}_X) \cong (\hat{X},\mathcal{T}_{\hat{X}}) := \mathrm{Im}(s)$ auf den Bildraum und ebenso $(\bar{s},\bar{p}) : (X,\mathcal{T}_X) \cong (\bar{Y},\mathcal{T}_{\bar{Y}}) := (Y,\mathcal{T}_Y)/R_p$ auf den Quotientenraum. ✍



✻ **E2J.** Die kanonische Faktorisierung liefert zunächst eine stetige Bijektion $\hat{s} : X \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ mit $s = \iota \circ \hat{s}$ sowie eine stetige Bijektion $\bar{p} : \bar{Y} \to X$ mit $p = \bar{p} \circ q$. Es ist zu zeigen, dass dies hier sogar Homöomorphismen sind.

Die Komposition $\hat{p} = p \circ \iota : \hat{X} \to X$ ist stetig und erfüllt $\hat{p} \circ \hat{s} = p \circ \iota \circ \hat{s} = p \circ s = \mathrm{id}_X$. Nach Konstruktion ist $\hat{s} : X \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ stetig und bijektiv, und wir erhalten nun $\hat{s}^{-1} = \hat{p} \circ \hat{s} \circ \hat{s}^{-1} = \hat{p}$.

Die Komposition $\bar{s} = q \circ s : X \to \bar{Y}$ ist stetig und erfüllt $\bar{p} \circ \bar{s} = \bar{p} \circ q \circ s = p \circ s = \mathrm{id}_X$. Nach Konstruktion ist $\bar{p} : \bar{Y} \to X$ stetig und bijektiv, und wir erhalten nun $\bar{p}^{-1} = \bar{p}^{-1} \circ \bar{p} \circ \bar{s} = \bar{s}$.

Diese Situation tritt häufig genug auf, um interessant und nützlich zu sein.

☞ **Beispiel.** Sei $X = \mathbb{S}^n$ und $Y = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$. Die Inklusion $s : \mathbb{S}^n \hookrightarrow Y : x \mapsto x$ und die radiale Retraktion $p : Y \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n : y \mapsto y/|y|$ sind stetig und erfüllen $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$. Hierzu müssen wir den Nullpunkt entfernen: Es gibt keine Retraktion $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ (J4E). ☜

Das Kriterium E2J verallgemeinern wir später von globalen zu lokalen Schnitten (E2Q). Das ist nötig, denn es gibt Einbettungen ohne Retraktion und Identifizierungen ohne Schnitt:

✍ **Übung E2K.** (1) Die Inklusion $s : \{-1,1\} \hookrightarrow [-1,1]$ ist stetig und injektiv, sogar eine Einbettung, erlaubt aber keine Retraktion, also $p : [-1,1] \to \{-1,1\}$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\{-1,1\}}$. (Dieses fundamentale Ergebnis J4E gilt für jede Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$.) ✍

(2) Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ können wir in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten, aber nicht in die Gerade $\mathbb{R}$. Genauer: Zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ existiert $x \in \mathbb{S}^1$ mit $f(x) = f(-x)$. (Dieses fundamentale Ergebnis J6C gilt für jede stetige Funktion $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$.)

(3) Die Abbildung $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist stetig und surjektiv, sogar eine Identifizierung (E2P), erlaubt aber keinen Schnitt, also $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$. (Die Abbildung p ist das typische Beispiel einer Überlagerung, siehe M1B.)

(4) Ist $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^2$ ein offener Teilraum, so existiert keine stetige Injektion $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}$ (siehe J6D). Wir erhalten erneut $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$: Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph.

✻ **E2K.** (1) Jede Funktion $p : [-1,1] \to \{-1,1\}$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\{-1,1\}}$ ist surjektiv. Nach dem Zwischenwertsatz C3R ist jede stetige Funktion $p : [-1,1] \to \{-1,1\}$ konstant. Demnach kann es zu s keine Retraktion p geben.

(2) Ist $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ stetig, dann auch $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\pi)})$. Wegen $g(\pi) = -g(0)$ existiert dank C3R ein $t_0 \in [0,\pi]$ mit $g(t_0) = 0$. Für $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0}$ und $-x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_0+\pi)}$ gilt $f(x) = f(-x)$.

(3) Jede Funktion $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ ist injektiv. Das ist nach (2) unmöglich.

(4) Zu $a \in U$ existiert $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a,2r) \subset U$. Wir erhalten $g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow U$ mit $g(s) = a + rs$. Komponiert mit $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}$ ergäbe dies eine stetige Injektion $f \circ g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}$, was (2) widerspricht.

§E2j. Offene und abgeschlossene Abbildungen. Es ist im Allgemeinen schwierig zu erkennen, ob eine vorgelegte stetige Injektion einbettend ist oder eine stetige Surjektion identifizierend. Manchmal jedoch gelingt dies besonders leicht, dank der in D2A eingeführten Begriffe der offenen und der abgeschlossenen Abbildung:

Satz E2L. *Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume.*

(1) Ist f bijektiv, stetig und offen / abgeschlossen, so ist f ein Homöomorphismus.
(2) Ist f injektiv, stetig und offen / abgeschlossen, so ist f einbettend.
(3) Ist f surjektiv, stetig und offen / abgeschlossen, so ist f identifizierend.

BEWEIS. (1) Eine Bijektion $f : X \to Y$ ist genau dann offen, wenn die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist. Ist zudem f stetig, so ist f ein Homöomorphismus.

(2) Sei $f : X \hookrightarrow Y$ injektiv, stetig und offen. Wir haben $\mathcal{T}_X = f^*\mathcal{T}_Y$ zu zeigen. Wenn $V \subset Y$ offen ist, dann ist dank Stetigkeit von f auch $f^{-1}(V) \subset X$ offen, also $\mathcal{T}_X \supset f^*\mathcal{T}_Y$. Ist umgekehrt $U \subset X$ offen, so auch $f(U) \subset Y$, da f offen ist, und dank Injektivität gilt $U = f^{-1}(f(U))$, also $\mathcal{T}_X \subset f^*\mathcal{T}_Y$. Somit ist f einbettend.

(3) Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ surjektiv, stetig und offen. Wir haben $\mathcal{T}_Y = f_*\mathcal{T}_X$ zu zeigen. Wenn $V \subset Y$ offen ist, dann ist dank Stetigkeit von f auch $f^{-1}(V) \subset X$ offen, also $\mathcal{T}_Y \subset f_*\mathcal{T}_X$. Ist umgekehrt das Urbild $f^{-1}(V)$ von $V \subset Y$ offen in X, dann ist das Bild $f(f^{-1}(V)) = V$ offen in Y, da f offen und surjektiv ist, also $\mathcal{T}_Y \supset f_*\mathcal{T}_X$. Somit ist f identifizierend.

Alle Argumente verlaufen wörtlich genauso mit „abgeschlossen“ statt „offen“. □

Beispiel. Eine Einbettung $f : X \hookrightarrow Y$ ist genau dann offen / abgeschlossen, wenn ihr Bild $f(X)$ in Y offen / abgeschlossen ist. Die Einbettung $]0,1[\hookrightarrow \mathbb{R}$ ist offen, $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ abgeschlossen, $[0,1[\hookrightarrow \mathbb{R}$ weder noch, $[0,1] \hookrightarrow [0,1] \cup [2,3]$ sowohl als auch.

Das hinreichende Kriterium E2L ist oft nützlich, später vor allem im Zusammenspiel mit dem Kompakt-Hausdorff-Kriterium (F1L) und abgeschlossenen Abbildungen:

Beispiel E2M. Die Abbildungen $f, g, h, k : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ aus Abbildung A:2 sind stetig und abgeschlossen (dank F1L), also Identifizierungen, das heißt, sie induzieren einen Homöomorphismus vom jeweiligen Quotientenraum $[-1,1]^2/\!\sim$ auf den Bildraum in $\mathbb{R}^3$.

Übung E2N. Zur Illustration hier sogleich einige einfache aber wichtige Beispiele:

(1) Für $m < n$ ist $s : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ abgeschlossen einbettend (E2I), aber nicht offen, und $p : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$ ist offen identifizierend (E2I), aber nicht abgeschlossen.
(2) Die Abbildung $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ ist identifizierend (E2P) und induziert somit $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$. Sie ist stetig und offen, aber nicht abgeschlossen.
(3) Die Abbildung $p : [0,1] \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ ist identifizierend (E2T) und induziert somit $\bar{p} : [0,1] /\!\!/ \{0,1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$. Sie ist stetig und abgeschlossen, aber nicht offen.
(4) Die Abbildung $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ ist identifizierend:
Sie ist stetig und sowohl offen als auch abgeschlossen. (Skizze!)
(5) Die Abbildung $p : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ ist identifizierend:
Sie ist stetig und sowohl offen als auch abgeschlossen. (Skizze!)
(6) Auf $X = (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 \cup (\mathbb{R}_{\leq 0})^2$ betrachten wir $p : X \twoheadrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$.
Dies ist eine Identifizierung, aber weder offen noch abgeschlossen!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **E2N.** (1) Dank E2I ist s eine abgeschlossene Einbettung und p eine Identifizierung. Die Einbettung s ist nicht offen, da $s(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$ nicht offen ist. Die Identifizierung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x$ ist offen aber nicht abgeschlossen: Die Hyperbel $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, aber $p(A) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Entsprechendes gilt im allgemeinen Fall $1 \leq m < n$.

(2) Siehe E2P. Für $\xi \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{Z}\xi$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Für $\xi \notin \mathbb{Q}$ ist das Bild $p(\mathbb{Z}\xi) \subsetneq \mathbb{S}^1$ dicht (D5K).

(3) Siehe E2T. Zum Beispiel ist $[0, 1/2[$ offen in $[0,1]$ aber das Bild $p([0, 1/2[)$ nicht offen in $\mathbb{S}^1$.

(4) Wir nutzen den stetigen Schnitt $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$, also ist p identifizierend (E2I). Zudem ist p offen (in jedem Punkt): Dies ist klar in 0 dank $p(]-r,r[) = [0, r^2[$; die Einschränkung $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^2$ ist ein Homöomorphismus, also offen; ebenso $\mathbb{R}_{<0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^2$. Die Abbildung p ist abgeschlossen, denn beide Einschränkungen $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ und $\mathbb{R}_{\leq 0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ sind abgeschlossen.

(5) Dies beweist man wie (4) mit den Zweigen der komplexen Wurzelfunktion C5N.

(6) Dank $s : \mathbb{R} \to X : x \mapsto (x,0)$ ist p identifizierend (E2I). Jedoch ist p nicht offen, denn $U = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{>0}$ ist offen in X, nicht aber $p(U) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ in $\mathbb{R}$. Ebensowenig ist p abgeschlossen, denn $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ ist abgeschlossen in X, nicht aber $p(A) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$. Diese Kriterien sind hinreichend aber nicht notwendig!

☞ **§E2k. Einschränkung von Identifizierungen.** Die Komposition zweier Einbettungen ist eine Einbettung (E1L), die Komposition zweier Identifizierungen ist eine Identifizierung (E2G). Gemischte Kompositionen hingegen verhalten sich schlecht: ☜

Zunächst ist klar: Die Komposition einer Identifizierung $f : X \twoheadrightarrow Y$ mit einer Einbettung $g : Y \hookrightarrow Z$ ist im Allgemeinen weder eine Identifizierung (es sei denn g ist ein Homöomorphismus) noch eine Einbettung (es sei denn f ist ein Homöomorphismus).

Umgekehrt ist auch die Komposition einer Einbettung $f : X \hookrightarrow Y$ mit einer Identifizierung $g : Y \twoheadrightarrow Z$ im Allgemeinen weder eine Identifizierung (selbst wenn $g \circ f$ surjektiv ist) noch eine Einbettung (selbst wenn $g \circ f$ injektiv ist). Hierzu ein einfaches Gegenbeispiel:

☞ **Beispiel.** Die Projektion $p : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x$ ist identifizierend (E2I). ☜

(1) Wir betrachten $A = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ als Teilraum von $\mathbb{R}^2$.
(2) Alternativ betrachten wir $A = (\mathbb{Q} \times \{0\}) \cup ((\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}) \times \{1\})$ als Teilraum von $\mathbb{R}^2$.

Die Einschränkung $p|_A : A \to \mathbb{R}$ ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus.

Unter folgenden Vorsichtsmaßnahmen verläuft jedoch alles wie gewünscht:

☞ **Proposition E2O.** *Sei $p : X \twoheadrightarrow Y$ identifzierend, $B \subset Y$ ein Teilraum und $A = p^{-1}(B)$ sein Urbild. Sei $q = p|_A^B : A \to B$ die Einschränkung. Ist A offen / abgeschlossen oder p offen / abgeschlossen, dann ist auch q identifizierend.* ☜

BEWEIS. Nach Definition ist $q : A \to B$ stetig und surjektiv. Wegen $A = p^{-1}(B)$ gilt zudem $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$ für alle $V \subset B$ und $p(U \cap A) = p(U) \cap B$ für alle $U \subset X$.

Sei nun $V \subset B$ mit $q^{-1}(V)$ offen in A; wir wollen zeigen, dass V offen in B ist.

(1) Wir nehmen zunächst an, dass A offen ist. Da $q^{-1}(V)$ offen in A und A offen in X ist, ist $q^{-1}(V)$ offen in X. Also ist $p^{-1}(V) = q^{-1}(V)$ offen in X. Da p identifizierend ist, ist V offen in Y. Somit ist $V = V \cap B$ offen in B.

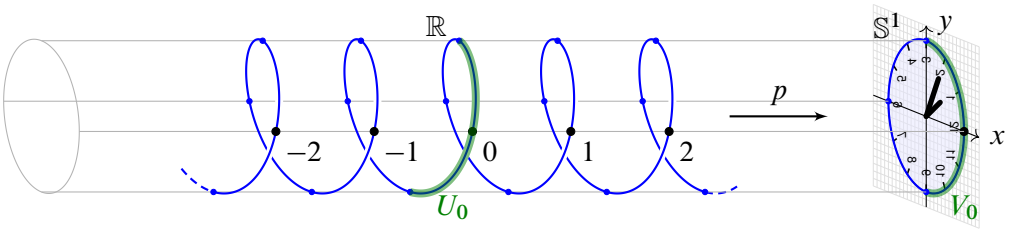
(2) Wir nehmen nun an, dass p offen ist. Da $p^{-1}(V) = q^{-1}(V)$ offen in A ist, existiert $U \subset X$ offen, sodass $p^{-1}(V) = U \cap A$. Weiters gilt $V = p(p^{-1}(V)) = p(U \cap A) = p(U) \cap B$. Da p offen ist, ist $p(U)$ offen in Y, also ist V offen in B.

Beide Argumente verlaufen wörtlich genauso mit „abgeschlossen“ statt „offen“. □

§E2l. Überlagerung der Kreislinie. Wir parametrisieren die Kreislinie

$$\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

durch die stetige Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$:



Erläuterung. Die komplexe Exponentialfunktion (C5K) spielt in der Mathematik eine zentrale Rolle, von Polarkoordinaten über Fourier–Reihen und Funktionentheorie bis zu Überlagerungen (M1B). Das Bild zeigt, wie die reelle Gerade $\mathbb{R}$ um die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ gewickelt wird, dekorativ als die Einbettung $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ gefolgt von der Projektion $\mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (x,y)$.

Die Abbildung p erlaubt lokal eine Umkehrfunktion, aber nicht global. Sie kennen das Phänomen bereits aus Ihrer Kindheit, als Sie lernten, Analoguhren zu lesen. Die Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist linear, zum Beispiel gemessen in Stunden, der Minutenzeiger jedoch zirkulär; er gibt Ihnen daher nur lokale Information, die ganze Stunde müssen Sie sich merken. Der Stundenzeiger hilft natürlich, hat aber nach zwölfstündigem Umlauf dasselbe Problem; er gibt nur lokale Information, den Tag müssen Sie sich merken.

Die Abbildung p ist nicht injektiv, sondern periodisch: Genau dann gilt $p(t) = p(t')$, wenn $t - t' \in \mathbb{Z}$. Für $t, t' \in \mathbb{R}$ definieren wir $t \sim t'$ durch $t - t' \in \mathbb{Z}$ und setzen $\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \mathbb{R}/\!\sim$.

Die Schreibweise $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ rührt daher, dass $(\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{R}, +)$ eine Untergruppe ist.

Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist nicht surjektiv, sondern hat als Bild $p(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$.

Aus $|p(t)| = 1$ folgt $p(\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}^1$. Die Inklusion $p(\mathbb{R}) \supset \mathbb{S}^1$ folgt implizit dank Zwischenwertsatz (C3R) für cos und sin, oder noch besser explizit dank lokaler Umkehrfunktion:

Wir konstruieren offene Überdeckungen $\mathbb{R} = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} U_\theta$ und $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} V_\theta$, sodass für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ die Einschränkung von p den Homöomorphismus $(p_\theta, s_\theta) : U_\theta \cong V_\theta$ stiftet:

$$U_0 = \,]-1/4, 1/4[, \qquad V_0 = \{ (x,y) \in \mathbb{S}^1 \mid x > 0 \},$$
$$p_0 : U_0 \to V_0 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}, \qquad s_0 : V_0 \to U_0 : (x,y) \mapsto \tfrac{1}{2\pi} \arctan\big(\tfrac{y}{x}\big),$$

Für jeden Wert $t \in U_0$ gilt $p_0(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in V_0$ und $s_0 p_0(t) = t$. Für jeden Punkt $(x,y) \in V_0$ gilt $s_0(x,y) \in U_0$ und $p_0 s_0(x,y) = (x,y)$. Wir setzen dies fort, indem wir das Intervall U_0 um $\theta \in \mathbb{R}$ verschieben und den Halbkreis V_0 um den Winkel θ drehen:

$$U_\theta = U_0 + \theta, \qquad V_\theta = V_0 \cdot \mathrm{e}^{2\pi i \theta},$$
$$p_\theta : U_\theta \to V_\theta : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}, \qquad s_\theta : V_\theta \to U_\theta : z \mapsto s_0\big(z \cdot \mathrm{e}^{-2\pi i \theta}\big) + \theta.$$

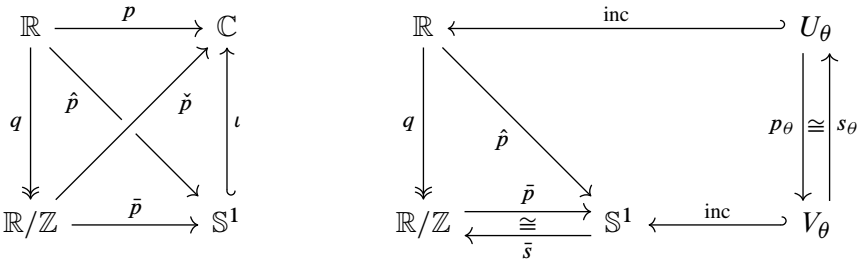
Es gilt $s_\theta \circ p_\theta = \mathrm{id}_{U_\theta}$ sowie $p_\theta \circ s_\theta = \mathrm{id}_{V_\theta}$, zunächst für $\theta = 0$ und damit für alle $\theta \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Die verlockende Idee „$p^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln(z)$“ ist gefährlicher Unsinn!

Zur $2\pi i$–periodischen Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ist die „Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$“ nicht eindeutig, und egal bei welchen Wahlen nicht stetig: Wir können willkürlich Urbilder wählen, erhalten aber niemals eine *stetige* Umkehrfunktion. Die obige Skizze zeigt dies eindrücklich: Stetige Umkehrung gelingt bestenfalls lokal! Genau das führen wir hier aus.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Dank kanonischer Faktorisierung E2H induziert p die stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$.



Wir wollen zeigen, dass die Quotiententopologie von $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ der Teilraumtopologie von $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ entspricht. Das ist nicht selbstverständlich, sondern bedarf eines Beweises!

Satz E2P. *Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ induziert einen Homöomorphismus $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$.*

BEWEIS, EXPLIZIT. Wir konstruieren $\bar{s} : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ durch Verkleben (E1P) der stetigen Abbildungen $\bar{s}_\theta = q \circ s_\theta : \mathbb{S}^1 \supset V_\theta \xrightarrow{\sim} U_\theta \hookrightarrow \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: Anders als $(s_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ erfüllen sie $\bar{s}_\theta|_{V_\theta \cap V_\xi} = \bar{s}_\xi|_{V_\xi \cap V_\theta}$ für alle $\theta, \xi \in \mathbb{R}$. Wir erhalten $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $\bar{s} \circ \bar{p} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$. □

BEWEIS, IMPLIZIT. Lokale Homöomorphismen sind offen, also identifizierend (E2L). □

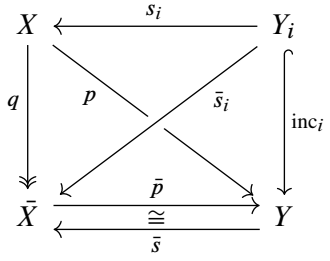
BEWEIS, IMPLIZIT. (Mit Kompaktheit, hier zunächst als Vorschau) Das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt (F1D), also auch das stetige Bild $q([0, 1]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (F1J). Die euklidische Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist hausdorffsch (C2O), also auch der Teilraum $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ (E1G). Dank Satz F1L ist $\check{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ abgeschlossen, somit auch $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$, also ist $\bar{p}$ ein Homöomorphismus. □

Bemerkung. Warum beweisen wir das? Ein drastisches Gegenbeispiel: Die Teilmenge $X = \mathbb{Z}\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ ist diskret, das Bild $Y = p(X)$ in $\mathbb{S}^1$ ist nicht diskret, sondern dicht (D5K). Somit ist $p : X \to Y$ zwar eine stetige Bijektion, aber kein Homöomorphismus. Solche Unfälle müssen wir ausschließen, um Homöomorphie garantieren zu können.

Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist weder offen noch abgeschlossen, $\hat{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ ist wie gesehen offen doch nicht abgeschlossen, $\check{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist abgeschlossen (F1L) doch nicht offen, $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ ist offen und abgeschlossen, also ein Homöomorphismus.

Die lokalen Schnitte $s_\theta : V_\theta \to \mathbb{R}$ lassen sich *nicht* zu einem globalen Schnitt $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ verkleben; maximal erreichen wir $(\tilde{p}_\theta, \tilde{s}_\theta) :]\theta - 1/2, \theta + 1/2[\cong \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}\}$. Das Hindernis verschwindet für $\bar{s}_\theta = q \circ s_\theta : V_\theta \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: Diese können wir verkleben zu $\bar{s} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, und $\bar{s}$ ist stetig dank E1P. Dieses Konstruktionsprinzip ist auch allgemein sehr nützlich:

Satz E2Q (lokale Schnitte)**.** *Sei $p : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig. Die Überdeckung $Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$ sei offen oder lokal-endlich abgeschlossen. Für jedes $i \in I$ sei $s_i : Y_i \to X$ stetig mit $p \circ s_i = \mathrm{inc}_i : Y_i \hookrightarrow Y$. Dann ist p identifizierend, das heißt surjektiv mit $p_*\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y$. Über $q : X \twoheadrightarrow \bar{X} = X/R_p$ induzieren p und $(s_i)_{i\in I}$ den Homöormorphismus $(\bar{p}, \bar{s}) : \bar{X} \cong Y$.*



BEWEIS. Der Quotient $q : X \twoheadrightarrow \bar{X} = X/R_p$ definiert $\mathcal{T}_{\bar{X}} := q_* \mathcal{T}_X$. Die von p induzierte Abbildung $\bar{p} : \bar{X} \to Y$ mit $p = \bar{p} \circ q$ ist stetig. Jede stetige Abbildung $s_i : Y_i \to X$ definiert $\bar{s}_i = q \circ s_i : Y_i \to \bar{X}$. Aus $p \circ s_i = \mathrm{inc}_i$ folgt $\bar{p} \circ \bar{s}_i = \mathrm{inc}_i$ und $\bar{s}_i|_{Y_i \cap Y_j} = \bar{s}_j|_{Y_i \cap Y_j}$. Durch Verkleben (E1P) erhalten wir eine stetige Abbildung $\bar{s} : Y \to \bar{X}$. Nach Konstruktion gilt $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_Y$. Wir zeigen schließlich $\bar{s} \circ \bar{p} = \mathrm{id}_{\bar{X}}$: Für $[x] \in \bar{X}$ gilt $p(x) \in Y_i$ für ein $i \in I$; für $x' = s_i(p(x))$ gilt $p(x') = p(s_i(p(x)) = p(x)$, also $\bar{s}(\bar{p}([x])) = [x'] = [x]$. □

Übung E2R. Die Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot) : z \mapsto \sum_{k=0}^\infty z^k/k!$ ist ein Gruppenhomomorphismus, $2\pi\mathrm{i}$–periodisch und ein lokaler Homöomorphismus:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow[z \mapsto \sum_{k=0}^\infty z^k/k!]{\exp} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} & \xrightarrow[[z] \mapsto \exp(z)]{\overline{\exp}} & \mathbb{C}^\times \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \xrightarrow[z \mapsto z^n]{p_n} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathbb{C}^\times/W_n & \xrightarrow[[z] \mapsto z^n]{\overline{p}_n} & \mathbb{C}^\times \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow[z \mapsto z^n]{p_n} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathbb{S}^1/W_n & \xrightarrow[[z] \mapsto z^n]{\overline{p}_n} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Untersuchen Sie jeweils die kanonische Faktorisierung: Formulieren und beweisen Sie hierzu die analogen Konstruktionen von Satz E2P. Zur Wiederholung der Exponentialfunktion hilft C5K. Für die Potenzabbildung $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$, speziell für $n = 2$, siehe C5N.

✻ **E2R.** (1) Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = x + \mathrm{i}y \mapsto w = \exp(z) = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ erfüllt $|w| = \mathrm{e}^x \neq 0$. Die Richtung $w/|w| = \cos y + \mathrm{i}\sin y \in \mathbb{S}^1$ behandeln wir wie zuvor. Wir konstruieren lokal eine Umkehrfunktion: Hierzu sei $U_0 = \mathbb{R} + \mathrm{i}\cdot]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $V_0 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0 \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \}$. Hierauf haben wir $\exp_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 : z \mapsto \exp(z)$ und $\ln_0 : V_0 \xrightarrow{\sim} U_0 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}\arctan(y/x)$ Für jeden Punkt $z \in U_0$ gilt $\exp_0(z) \in V_0$ und $\ln_0 \exp_0(z) = z$. Für jeden Punkt $w \in V_0$ gilt $\ln_0(w) \in U_0$ und $\exp_0 \ln_0(w) = w$.

Wir können dies fortsetzen, indem wir den Streifen $U_0 \subset \mathbb{C}$ verschieben zu $U_\theta = U_0 + \mathrm{i}\theta$ und zugleich die Halbebene $V_0 \subset \mathbb{C}^\times$ drehen zu $V_\theta = V_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Hierauf erhalten wir dann die zueinander inversen Homöomorphismen $\exp_\theta : U_\theta \xrightarrow{\sim} V_\theta : z \mapsto \exp(z)$ und $\ln_\theta : V_\theta \xrightarrow{\sim} U_\theta : w \mapsto \ln_0(w \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) + \mathrm{i}\theta$. Das nennt man *Zweige* des komplexen Logarithmus. Nochmal: Es gibt keine globale, stetige Umkehrfunktion zu $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$.

Die kanonische Faktorisierung von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ liefert die stetige Bijektion $\overline{\exp} : \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$. Die lokalen Umkehrfunktionen $\ln_\theta : \mathbb{C}^\times \supset V_\theta \xrightarrow{\sim} U_\theta \subset \mathbb{C}$ können wir verkleben zu $\overline{\ln} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$, wie im vorangehenden Satz E2Q erklärt, und hier gilt $\overline{\ln} \circ \overline{\exp} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ und $\overline{\exp} \circ \overline{\ln} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}$.

(2) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die Abbildung $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ ist nicht injektiv. Für $n = 2$ ist dies klar, denn $(-z)^2 = z^2$. Allgemein hat jeder Punkt $v \in \mathbb{C}^\times$ genau n Urbilder: Dank (1) können wir jedes $v \in \mathbb{C}^\times$ schreiben als $v = \exp(z_0)$. Demnach erfüllt $w_0 = \exp(z_0/n)$ die Gleichung $w_0^n = \exp(z_0/n)^n = \exp(z_0) = v$. Ebenso gilt $v = \exp(z_k)$ für $z_k = z_0 + 2\pi\mathrm{i}k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also erfüllt auch $w_k = \exp(z_k/n) = w_0 \exp(2\pi\mathrm{i}k/n)$ die Gleichung $w_k^n = v$. Die Polynomfunktion $w \mapsto w^n - v$ hat höchstens n Wurzeln im Körper $\mathbb{C}$. Wir kennen sie alle, nämlich $\{ w_0, w_1, \ldots, w_{n-1} \} = w_0 W_n$ mit $W_n = \{ \exp(2\pi\mathrm{i}k/n) \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \} < (\mathbb{C}^\times, \cdot)$. Dies ist die Gruppe der n–ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Sie hat genau n Elemente, genauer $(\mathbb{Z}/n, +) \xrightarrow{\sim} (W_n, \cdot) : k \mapsto \exp(2\pi\mathrm{i}k/n)$.

Die Abbildung $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ erlaubt keine globale, stetige Umkehrfunktion, dies gelingt nur lokal. Hierzu nutzen wir (1): Auf $V_0 = \{ \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mid \rho \in \mathbb{R}_{>0}, \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\}$ und $W_0 = \{ \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mid \rho \in \mathbb{R}_{>0}, \varphi \in]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}[\}$ haben wir $r_0 : V_0 \to W_0 : v \mapsto \exp_0(\ln_0(v)/n)$. Wir können dies fortsetzen, indem wir die Sektoren simultan drehen zu $V_\theta = V_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ und $W_\theta = W_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n}$. Hierauf erhalten wir dann die zueinander inversen Homöomorphismen $p_\theta : W_\theta \xrightarrow{\sim} V_\theta : w \mapsto w^n$ und $r_\theta : V_\theta \xrightarrow{\sim} W_\theta : v \mapsto r_0(v \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) + \mathrm{i}\theta/n$. Das sind *Zweige* der komplexen n–ten Wurzel. Wie zuvor in (1) erhalten wir $(\overline{p}, \overline{r}) : \mathbb{C}^\times/W_n \cong \mathbb{C}^\times$ dank Satz E2Q.

(3) Dies ist ein Spezialfall von (2) durch Einschränkung auf $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^\times$. Die Konstruktion lokaler Schnitte gelingt wie in (2). Durch Verkleben der lokalen Schnitte erhalten wir $(\overline{p}, \overline{r}) : \mathbb{S}^1/W_n \cong \mathbb{S}^1$ dank Satz E2Q.

Umgekehrt ist (2) eine leichte Erweiterung von (3) dank $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^1$. Der radiale Anteil $\mathbb{R}_{>0}$ ist unproblematisch dank $\rho \mapsto \rho^n$ und $\rho \mapsto \sqrt[n]{\rho}$ Das topologische Problem besteht allein in $\mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E2m. Zusammenschlagen eines Teilraums. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Darin möchten wir einen Teilraum $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, zu einem Punkt identifizieren:

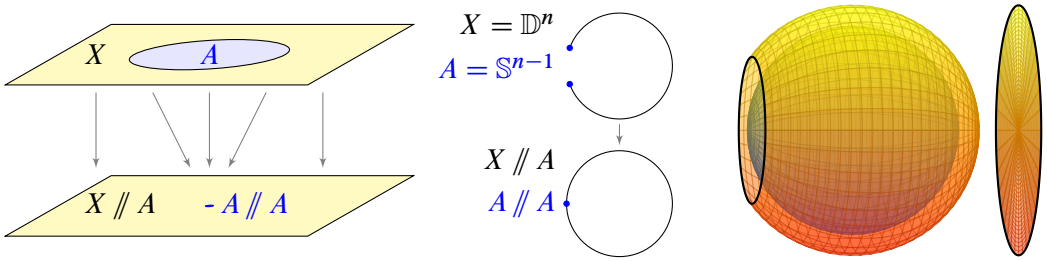
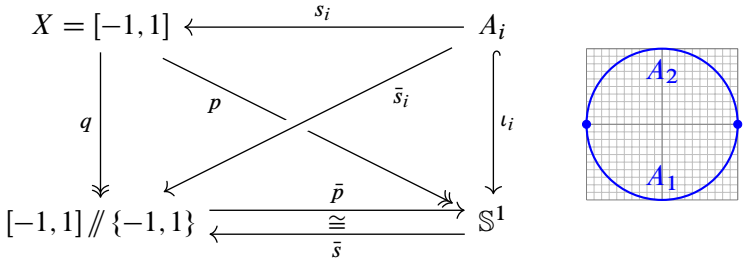


ABBILDUNG E:4. Zusammenschlagen eines Teilraums $A \subset X$ zu einem Punkt

Definition E2S (Zusammenschlagen)**.** Zu $\emptyset \neq A \subset X$ definieren wir auf X die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $x = y$ oder $\{x,y\} \subset A$. Äquivalenzklassen sind demnach A und $\{x\}$ für jedes $x \in X \smallsetminus A$. Den Quotientenraum bezeichnen wir mit $X /\!\!/ A := X/\!\sim$.

Konvention. Man unterscheide $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$! In der Literatur wird beides oft „X/A“ geschrieben und je nach Kontext ist damit der Quotient X/A nach einer Untergruppe $A < X$ gemeint oder aber der Quotient $X /\!\!/ A$ durch Zusammenschlagen eines Teilraums $A \subset X$.

Anschauliches Beispiel: Wenn Sie eine Schnur an ihren Enden zusammenkleben, so erhalten Sie eine Kreislinie. Genau dies gilt auch in unserem topologischen Modell:



Satz E2T. *Die Abbildung* $p : [-1,1] \to \mathbb{S}^1$ *mit* $p(t) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t} = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ *ist eine Identifizierung. Sie induziert demnach einen Homöomorphismus* $\bar{p} : [-1,1] /\!\!/ \{-1,1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$.

BEWEIS. Wir konstruieren explizit eine stetige Inverse $\bar{s} : \mathbb{S}^1 \to X := [-1,1] /\!\!/ \{-1,1\}$. Ähnlich wie im Beweis von Satz E2P nutzen wir stetige Abbildungen $s_i : A_i \to [-1,1]$ mit

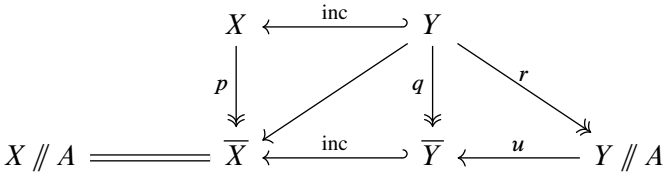
$$A_1 = \{ z \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{Im}(z) \leq 0 \} = \{ \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t} \mid -1 \leq t \leq 0 \}, \qquad s_1(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}) = t \text{ für } -1 \leq t \leq 0,$$
$$A_2 = \{ z \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0 \} = \{ \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t} \mid 0 \leq t \leq +1 \}, \qquad s_2(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}) = t \text{ für } 0 \leq t \leq +1.$$

Sie lassen sich nicht verkleben, da sie im Punkt $-1 = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}}$ nicht übereinstimmen: $s_1(-1) = -1$, $s_2(-1) = +1$. Für $\bar{s}_i = q \circ s_i : A_i \to [-1,1] /\!\!/ \{-1,1\}$ verschwindet dieses Problem. Dank Verklebesatz E1P ist $\bar{s} : \mathbb{S}^1 \to [-1,1] /\!\!/ \{-1,1\}$ mit $\bar{s}|_{A_i} = \bar{s}_i$ stetig. Wir erhalten $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $\bar{s} \circ \bar{p} = \mathrm{id}_{[-1,1] /\!\!/ \{-1,1\}}$ wie in E2Q. □

Bemerkung. Allgemein gilt $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, siehe F1R. Im Falle $n = 0$ ist $\mathbb{D}^0 = \{0\}$ und $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$. Damit auch hier $\mathbb{D}^0 /\!\!/ \mathbb{S}^{-1} \cong \mathbb{S}^0$ gilt, sollten wir $X /\!\!/ \emptyset = X \sqcup \{*\}$ definieren, oder allgemein $X /\!\!/ A$ durch $X \sqcup \{*\} /\!\!/ A \sqcup \{*\}$ ersetzen (siehe E3J).

Übung E2U. (1) Bestimmen Sie die Quotientenräume $[0,1] /\!\!/ [0,1[$ und $[0,1] /\!\!/]0,1[$.

(2) Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ und $p : X \twoheadrightarrow \overline{X} = X /\!\!/ A$. Für jeden Teilraum $Y \subset X$ trägt die Menge $\overline{Y} = p(Y) \subset \overline{X}$ die Teilraumtopologie, und die Einschränkung $p = q|^{\overline{Y}}_{Y} : Y \to \overline{Y}$ ist stetig. Ebenso können wir den Quotienten $r : Y \twoheadrightarrow Y /\!\!/ A := Y /\!\!/ (A \cap Y)$ bilden. Sind $p(Y)$ und $Y /\!\!/ A$ homöomorph?



(3) Unter welchen Bedingungen ist $p : Y \to \overline{Y}$ bijektiv? ein Homöomorphismus?

✻ **E2U.** (1a) Der Quotientenraum $[0,1] /\!\!/ [0,1[= \{\, \overline{0}, \overline{1} \,\}$ enthält zwei Punkte. Seine Topologie besteht aus drei offenen Mengen: $\mathcal{T} = \{\, \emptyset, \{\overline{0}\}, \{\overline{0}, \overline{1}\} \,\}$. Sie ist also weder diskret noch indiskret. Sie ist nicht hausdorffsch.

(1b) Der Quotientenraum $[0,1] /\!\!/]0,1[= \{\, \overline{0}, \overline{1/2}, \overline{1} \,\}$ hat hier drei Punkte und trägt die Topologie $\mathcal{T} = \{\, \emptyset, \{\overline{1/2}\}, \{\overline{0}, \overline{1/2}\}, \{\overline{1/2}, \overline{1}\}, \{\overline{0}, \overline{1/2}, \overline{1}\} \,\}$. Sie ist weder diskret noch indiskret. Sie ist nicht hausdorffsch.

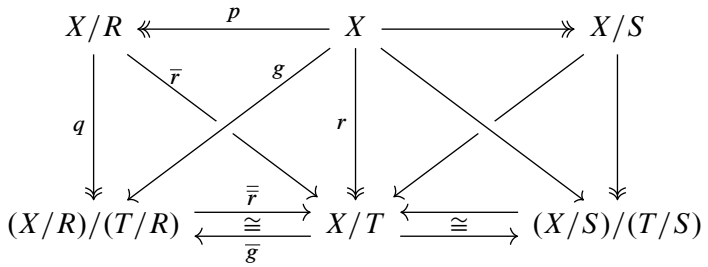
(2) Die Einschränkung $p : Y \to \overline{Y}$ identifiziert genau dieselben Punkte wie $r : Y \to Y /\!\!/ A$. Die universelle Eigenschaft von r gibt uns eine stetige Bijektion $u : Y /\!\!/ A \to \overline{Y}$ mit $u \circ r = q$. Wir sehen zunächst keinen Grund, warum u ein Homöomorphismus sein müsste, also suchen wir nach Gegenbeispielen.

In Beispiel (1a) betrachten wir $Y = \{0,1\} \subset [0,1] = X$ und erhalten $\overline{Y} = \overline{X}$, aber $Y /\!\!/ A \cong Y$ ist diskret. Entsprechendes gilt in Beispiel (1b) für $Y = \{0, 1/2, 1\} \subset [0,1] = X$. Allgemein siehe E2O.

(3) Genau dann ist p bijektiv, wenn $|A \cap Y| \leq 1$ gilt. Für Homöomorphie ist dies wie gesehen nicht hinreichend. Hinreichend ist $A \cap Y = \emptyset$ und $Y \subset X$ offen, zum Beispiel $A \subset X$ abgeschlossen und $Y = X \smallsetminus A$.

Übung E2V. (1) Ist Zusammenschlagen kommutativ? Genauer sei X ein topologischer Raum und $\emptyset \neq A, B \subset X$. Sind $(X /\!\!/ A) /\!\!/ (B /\!\!/ A)$ und $(X /\!\!/ B) /\!\!/ (A /\!\!/ B)$ homöomorph?

(2) Allgemeiner: Seien $R, S \subset X \times X$ zwei Äquivalenzrelationen auf dem Raum X und $T = \langle\, R \cup S \,\rangle$ die von beiden erzeugte, also die kleinste Äquivalenzrelation, die R, S enthält. Auf dem Quotienten X/R ist $T/R = \{\, ([x],[y]) \mid (x,y) \in T \,\}$ eine Äquivalenzrelation. (Warum?) Wir erhalten so den Quotientenraum $(X/R)/(T/R)$. Ebenso erhalten wir X/S und daraus $(X/S)/(T/S)$. Sind diese Räume homöomorph? *Hinweis:* Konstruieren Sie folgendes Diagramm und nutzen Sie jeweils die universelle Eigenschaft des Quotienten.

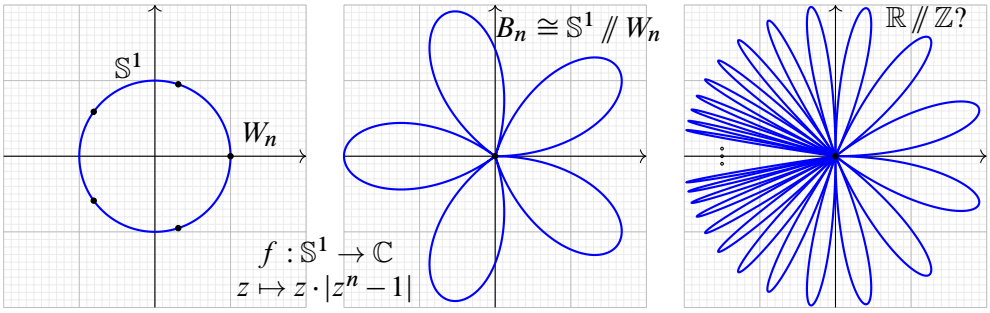


✻ **E2V.** (2) Die Abbildungen p, q, r sind Quotienten. Wir setzen $g := q \circ p$. Die Abbildungen $\overline{g}$ sowie $\overline{r}$ und $\overline{\overline{r}}$ erhalten wir dank der universellen Eigenschaft des jeweiligen Quotienten. All diese Abbildungen sind stetig. Nach Konstruktion gilt $\overline{g} \circ \overline{\overline{r}} = \mathrm{id}$ und $\overline{\overline{r}} \circ \overline{g} = \mathrm{id}$. Dies sind die gewünschten Homöomorphismen.

(1) Dies ist ein Spezialfall mit $R = \{\, (x,y) \mid x = y \vee \{x,y\} \subset A \,\}$ und $S = \{\, (x,y) \mid x = y \vee \{x,y\} \subset B \,\}$. Für T sind zwei Fälle zu unterscheiden: (a) Für $A \cap B = \emptyset$ gilt $T = \{\, (x,y) \mid x = y \vee \{x,y\} \subset A \vee \{x,y\} \subset B \,\}$. (b) Für $A \cap B \neq \emptyset$ gilt $T = \{\, (x,y) \mid x = y \vee \{x,y\} \subset A \cup B \,\}$. Damit können wir (2) anwenden.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E2n. Bouquet von Kreislinien. In der Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ liegen die n–ten Einheitswurzeln, $W_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} = \{ \exp(2\pi \mathrm{i} k/n) \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \}$.



Wir nennen den Quotientenraum $\mathbb{S}^1 /\!\!/ W_n$ ein *n–faches Bouquet von Kreislinien*. Er ist homöomorph zur Kurve $B_n = \{ z \cdot |z^n - 1| \mid z \in \mathbb{S}^1 \}$ in der komplexen Ebene.

Die Abbildung $p : \mathbb{S}^1 \to B_n : z \mapsto z \cdot |z^n - 1|$ ist stetig und surjektiv, identifiziert werden hier genau die n-ten Einheitswurzeln. Dies induziert die stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{S}^1 /\!\!/ W_n \xrightarrow{\sim} B_n$ (E2H). Wie in E2T beweist man, dass $\bar{p}$ ein Homöomorphismus ist. Alternativ: $\mathbb{S}^1$ ist kompakt und B_n hausdorffsch, dank F1L ist p abgeschlossen und $\bar{p}$ ein Homöomorphismus.

Übung E2w. Der Quotient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ (nicht $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$!) entsteht durch Verheften aller ganzzahligen Punkte in $\mathbb{R}$, also durch die Äquivalenzrelation $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x = y \vee \{x, y\} \subset \mathbb{Z}$. Dies nennt man auch ein *unendliches Bouquet von Kreislinien*. (Skizze?)

(1) In $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ konvergieren die Folgen $[n]_{n\in\mathbb{N}}$ und $[2^{-n}]_{n\in\mathbb{N}}$, nicht aber $[n + 2^{-n}]_{n\in\mathbb{N}}$.
(2) Erfüllt $\mathbb{R}$ das erste / zweite Abzählbarkeitsaxiom? Was davon bleibt für $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$?
(3) Ist der Quotientenraum $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ hausdorffsch? Ist er metrisierbar?

Anders als $\mathbb{S}^1 /\!\!/ W_n$ lässt sich das unendliche Bouquet $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ schlecht zeichnen. Warum?

⁕ **E2w.** Für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ und $0 < \varepsilon \leq d(x, \mathbb{Z})$ ist $U = q(B(x, \varepsilon))$ eine offene Umgebung von $q(x)$ ist, denn $q^{-1}(U) = B(x, \varepsilon)$. Für jede Abbildung $\varepsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist $B(\mathbb{Z}, \varepsilon) := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B(k, \varepsilon(k))$ eine offene Umgebung von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$, deren Bild $V = q(B(\mathbb{Z}, \varepsilon))$ eine offene Umgebung von $q(0) = \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ ist, denn $q^{-1}(V) = B(\mathbb{Z}, \varepsilon)$.

(1) Die erste Folge ist konstant, also konvergent. Die zweite ist das stetige Bild einer konvergenten Folge in $\mathbb{R}$, also ebenfalls konvergent in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$. Wir definieren $\varepsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{>0}$ durch $\varepsilon(n) = 1/2$ für $n < 0$ und $\varepsilon(n) = 2^{-n-1}$ für $n \geq 0$. Die Menge $U = q(B(\mathbb{Z}, \varepsilon))$ ist eine offene Umgebung von $q(0) = \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$, und für $n \geq 1$ gilt $q(n + 2^{-n}) \notin U$. Somit konvergiert die Folge $q(n + 2^{-n})$ nicht gegen den Punkt $q(0)$ in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$. Sie kann aber auch gegen keinen anderen Punkt $q(x)$ in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ konvergieren, da sonst bereits $n + 2^{-n} \to x$ in $\mathbb{R}$ gelten müsste.

(2) Der Raum $\mathbb{R}$ erfüllt 1AA (D3F) und 2AA (D6H), der Quotient $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ hingegen erfüllt nicht 1AA und somit auch nicht 2AA. Wir zeigen dies durch ein Diagonalargument. Angenommen es gäbe eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}$ von $q(0) = \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$. Wir wählen zunächst eine Bijektion $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} : k \mapsto U_k$. Da U_k eine Umgebung von $q(0)$ ist, muss $q^{-1}(U_k)$ eine Umgebung von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ sein. Hierzu existiert $\varepsilon_k : \mathbb{Z} \to]0, 1/2[$ mit $B(\mathbb{Z}, \varepsilon_k) \subset q^{-1}(U_k)$ und somit $q(B(\mathbb{Z}, \varepsilon_k)) \subset U_k$. Wir definieren nun $\varepsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{>0}$ durch $\varepsilon(k) = \varepsilon_k(k)/2$. Die Menge $q(B(\mathbb{Z}, \varepsilon))$ ist eine offene Umgebung des Punktes $q(0)$, die nach Konstruktion keines der U_k enthält.

(3) Hausdorffsch? Ja. Seien $q(x) \neq q(y)$ in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$. Gilt $x, y \notin \mathbb{Z}$, dann sind $q(B(x, \varepsilon))$ und $q(B(y, \varepsilon))$ disjunkt für $0 < \varepsilon \leq \min\{ d(x, y)/2, d(x, \mathbb{Z}), d(y, \mathbb{Z}) \}$. Ansonsten gelte $x \in \mathbb{Z}$ und $y \notin \mathbb{Z}$. (Der Fall $y \in \mathbb{Z}$ und $x \notin \mathbb{Z}$ ist analog.) Dann sind $q(B(\mathbb{Z}, \varepsilon))$ und $q(B(y, \varepsilon))$ für $0 < \varepsilon \leq d(y, \mathbb{Z})/2$ disjunkt.

Metrisierbar? Nein. Metrische Räume erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom, also ist $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ nicht metrisierbar. Anders als $\mathbb{S}^1 /\!\!/ W_n$ lässt sich $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ nicht in die euklidische Ebene einbetten, denn jeder Teilraum von $\mathbb{R}^n$ ist metrisierbar (D1L). Das erklärt, warum man das unendliche Bouquet schlecht skizzieren kann.

§E2o. Der Raum $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Das folgende Beispiel ist allseits beliebt zur Abschreckung:

Übung E2X. Wie üblich versehen wir $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie.

Auf $\mathbb{R}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch die Bedingung $x - y \in \mathbb{Q}$. (1) Welche Mächtigkeit hat die Quotientenmenge $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$? (2) und die Quotiententopologie?

Einen gänzlich anderen Quotienten $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Q}$ erhalten wir durch Zusammenschlagen. (3) Ist die Quotiententopologie auf $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Q}$ diskret? (4) Welche Mächtigkeit hat sie?

✻ **E2X.** (1) Jede Äquivalenzklasse $c = [a] = a + \mathbb{Q}$ ist abzählbar. Jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar. Da jedoch $\mathbb{R} = \bigsqcup_{c \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}} c$ überabzählbar ist, muss auch $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ überabzählbar sein.

Genauer gibt es eine Bijektion $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \cong \mathbb{R}$, also $\operatorname{card}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$. Diese konstruieren wir wie folgt:

$$\mathbb{R} \cong \mathbb{Q}^{(B)} \cong \mathbb{Q}^{(C)} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Q}$$

Dank Auswahlaxiom existiert eine Basis $B \subset \mathbb{R}$ des Vektorraums $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$; wir können und werden $1 \in B$ annehmen. Die Basis entspricht dem $\mathbb{Q}$–Vektorraumisomorphismus $\Phi : \mathbb{Q}^{(B)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} : \lambda \mapsto \sum_{b \in B} \lambda(b) \cdot b$. Sei $C = B \smallsetminus \{1\}$. Die Basis B ist unendlich, sogar überabzählbar, also gibt es eine Bijektion $\theta : B \xrightarrow{\sim} C$, und somit einen $\mathbb{Q}$–Vektorraumisomorphismus $\Theta : \mathbb{Q}^{(B)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^{(C)}$. Für die Quotientenmenge $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ haben wir schließlich die Bijektion $\Psi : \mathbb{Q}^{(C)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}/\mathbb{Q} : \lambda \mapsto \left[\sum_{b \in C} \lambda(b) \cdot b\right]$. Somit gilt $\Psi \circ \Theta \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

(2) Sei $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ die Quotientenabbildung. Sei $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ offen, das heißt $q^{-1}(U)$ ist offen in $\mathbb{R}$. Angenommen, es gilt $U \neq \emptyset$, dann wählen wir $[a] \in U$. Wegen $a \in q^{-1}(U)$ gilt somit $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset q^{-1}(U)$. Da auch alle $\mathbb{Q}$–Translationen in $q^{-1}(U)$ liegen, folgt $q^{-1}(U) = \mathbb{R}$. Somit gibt es neben $\emptyset$ nur noch eine offene Menge in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, nämlich $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ selbst. Die Quotiententopologie auf $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ist also die indiskrete Topologie.

(3) Anders als $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist der Quotientenraum $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Q}$ nicht diskret! Sei $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Q}$ die Quotientenabbildung. Sei $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} : k \mapsto r_k$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $U_\varepsilon := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(r_k, 2^{-k}\varepsilon)$ eine offene Umgebung von $\mathbb{Q}$ mit Gesamtlänge $\operatorname{vol}_1(U_\varepsilon) \leq 4\varepsilon$. Dann ist $V_\varepsilon = q(U_\varepsilon)$ offen in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Q}$, denn $q^{-1}(V_\varepsilon) = U_\varepsilon$. Insbesondere gilt $V_\varepsilon \notin \{\emptyset, \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Q}\}$, also ist $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Q}$ nicht diskret.

(4) Zur euklidischen Topologie $\mathcal{T}_\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ existiert eine Bijektion $\mathcal{T}_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ (D6I). Wir zeigen $\mathcal{T}_{\mathbb{R}/\!/\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}$. Zunächst haben wir die Injektion $\mathcal{T}_{\mathbb{R}/\!/\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathcal{T}_\mathbb{R} : V \mapsto U = q^{-1}(V)$. Umgekehrt haben wir die Surjektion $\mathcal{T}_{\mathbb{R}/\!/\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow [0,\infty] : V \mapsto \operatorname{vol}_1(q^{-1}(V))$. Die Abbildung $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : \varepsilon \mapsto \operatorname{vol}_1(U_\varepsilon)$ erfüllt $2\varepsilon < f(\varepsilon) < 4\varepsilon$ (klar), sie ist monoton (klar) und stetig (mühsam), somit ist f surjektiv (C3R). Wir schließen mit Satz B2O.

§E2p. Blätterungen. Blätterungen wurden um 1950 vom französischen Mathematiker Georges REEB eingeführt. Sie sind bei vielen geometrischen Untersuchungen nützlich.

Wir betrachten hier den einfachsten Fall von Blätterungen der Ebene durch Kurven. Eine solche Blätterung sieht lokal aus wie eine parallele Kurvenschar. Das ist hübsch geometrisch und zur Quotientenbildung illustrativ und lehrreich:

Übung E2Y. Auf der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ definieren wir Äquivalenzrelationen:

(1) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$.
(2) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.
(3) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn entweder $x_1 = x_2$ und $|x_1| = |x_2| \geq 1$, oder $|x_1| < 1$ und $|x_2| < 1$ und $y_1 - x_1/(1-x_1^2) = y_2 - x_2/(1-x_2^2)$.
(4) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn entweder $x_1 = x_2$ und $|x_1| = |x_2| \geq 1$, oder $|x_1| < 1$ und $|x_2| < 1$ und $y_1 + 1/(1-x_1^2) = y_2 + 1/(1-x_2^2)$.

Skizzieren Sie jeweils die Äquivalenzklassen als ebene Kurven und bestimmen Sie die Quotientenräume durch explizite Homöomorphismen zu vertrauteren Räumen, zum Beispiel Teilräume des $\mathbb{R}^n$ oder Quotientenräume wie der verzweigten Geraden (E2E). Welche dieser Räume sind lokal euklidisch? Welche sind hausdorffsch?

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

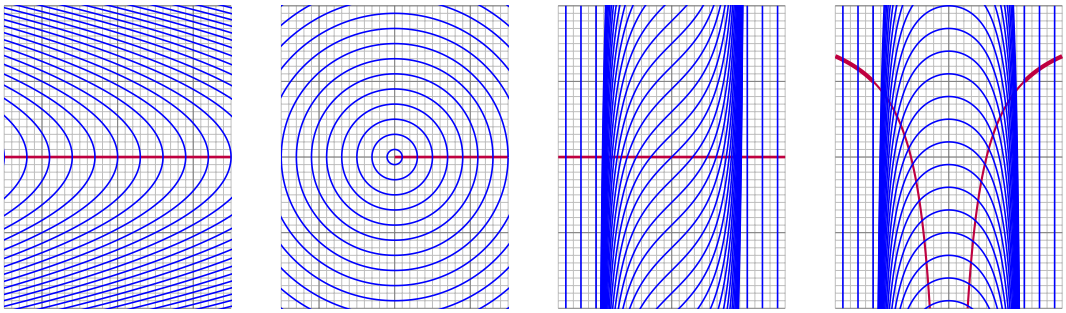


ABBILDUNG E:5. Vier Blätterungen der Ebene durch Kurven

✻ **E2Y.** Im Folgenden sei jeweils $q : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow Q = \mathbb{R}^2/\!\sim$ die Quotientenabbildung.

(1) Die Abbildung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x + y^2$ ist stetig und surjektiv. Genau dann gilt $p(x_1,y_1) = p(x_2,y_2)$, wenn $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ gilt. Gemäß E2H induziert p eine stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}^2/\!\sim \to \mathbb{R}$ mit $p = \bar{p} \circ q$. Die Abbildung $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x,0)$ ist ein stetiger Schnitt, das heißt $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, und induziert somit eine stetige Abbildung $\bar{s} = q \circ s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\!\sim$. Es gilt $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $\bar{s} \circ \bar{p} = \mathrm{id}_Q$, somit $\mathbb{R}^2/\!\sim \cong \mathbb{R}$.

(2) Die Abbildung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ ist stetig und surjektiv. Genau dann gilt $p(x_1,y_1) = p(x_2,y_2)$, wenn $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ gilt. Gemäß E2H induziert p eine stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}^2/\!\sim \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $p = \bar{p} \circ q$. Die Abbildung $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x,0)$ ist ein stetiger Schnitt, das heißt $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$, und induziert $\bar{s} = q \circ s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2/\!\sim$. Es gilt $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ und $\bar{s} \circ \bar{p} = \mathrm{id}_Q$, somit $\mathbb{R}^2/\!\sim \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(3) Äquivalenzklassen sind senkrechte Geraden mit Abszisse $x \geq 1$ oder $x \leq -1$, sowie die Funktionsgraphen F_c von $f_c(x) = x/(1-x^2) + c$ für $-1 < x < 1$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Jede dieser Kurven schneidet die x–Achse in genau einem Punkt: Es gilt $c = -x_0/(1-x_0^2)$ für ein $x_0 \in]-1,1[$, und dieser Punkt x_0 ist die einzige Nullstelle von f_c. Dies definiert eine stetige Abbildung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Genau dann gilt $p(x_1,y_1) = p(x_2,y_2)$, wenn $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ gilt. Nach E2H induziert p eine stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}^2/\!\sim \to \mathbb{R}$ mit $p = \bar{p} \circ q$. Die Abbildung $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x,0)$ ist ein stetiger Schnitt, das heißt $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, und induziert $\bar{s} = q \circ s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\!\sim$. Es gilt $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $\bar{s} \circ \bar{p} = \mathrm{id}_Q$, somit $\mathbb{R}^2/\!\sim \cong \mathbb{R}$.

(4) Äquivalenzklassen sind senkrechte Geraden mit Abszisse $x \geq 1$ oder $x \leq -1$, sowie die Funktionsgraphen F_c von $f_c(x) = c - 1/(1-x^2)$ für $-1 < x < 1$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten zudem den Graphen G der Funktion $g(x) = -1/|x|$ für $x \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. (Alternativ $g(x) = \ln|x|$.) Jede der Geraden schneidet G in genau einem Punkt $(x, g(x))$ mit $|x| \geq 1$, und jede Kurve F_c schneidet G in genau zwei Punkten $(\pm x, g(x))$ mit $|x| < 1$. Wir gehen deshalb zum Quotientenraum $\mathbb{R}^*/\!\approx$ über bezüglich der Äquivalenzrelation $x \approx x$ für $|x| \geq 1$ und $x \approx \pm x$ für $0 < |x| < 1$. Wir erhalten dann einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^2/\!\sim \cong \mathbb{R}^*/\!\approx$.

Explizit konstruieren wir diesen wie folgt. Auf dem offenen Halbraum $H_+ = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1 \,\}$ haben wir eine stetige Surjektion $p_+ : H_+ \to \mathbb{R}_{>0}$: Die Äquivalenzklasse jedes Punktes $(x,y) \in H_+$ hat genau einen Repräsentanten $(r,-1/r)$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$, und wir setzen $p_+(x,y) = r$. Umgekehrt haben wir die stetige Injektion $s_+ : \mathbb{R}_{>0} \to H_+ : x \mapsto (x,-1/|x|)$, und es gilt $p_+ \circ s_+ = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$. Analog für $H_- = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1 \,\}$ und $p_- : H_- \to \mathbb{R}_{<0}$ sowie $s_- : \mathbb{R}_{<0} \to H_- : x \mapsto (x,1/|x|)$. Die induzierten Abbildungen $\bar{p}_\pm : H_\pm \to \mathbb{R}^*/\!\approx$ lassen sich verkleben zu einer stetigen Surjektion $\bar{p} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^*/\!\approx$, und diese induziert eine stetige Bijektion $\bar{\bar{p}} : \mathbb{R}^2/\!\sim \to \mathbb{R}^*/\!\approx$. Die stetige Abbildung $s : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$ mit $s(x) = (x,-1/|x|)$ induziert eine stetige Surjektion $\bar{s} = q \circ s : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2/\!\sim$, und diese eine stetige Bijektion $\bar{\bar{s}} : \mathbb{R}^*/\!\approx \to \mathbb{R}^2/\!\sim$. Es gilt $\bar{\bar{p}} \circ \bar{\bar{s}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^*/\!\approx}$ und $\bar{\bar{s}} \circ \bar{\bar{p}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2/\!\sim}$, somit $\mathbb{R}^2/\!\sim \cong \mathbb{R}^*/\!\approx$.

Alle vier Quotientenräume sind lokal euklidisch der Dimension 1, also lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Der letzte Quotientenraum ist jedoch nicht hausdorffsch. Wie wir sehen, kommt diese Situation natürlich vor.

Die verzweigte Gerade und die Gerade mit doppeltem Ursprung (E2E) dienten uns zunächst nur als etwas exotische Illustrationen zu Quotientenräumen, und auch als Warnung. So ganz exotisch sind sie aber gar nicht, wie wir jetzt sehen. Sie treten jedenfalls in der Natur auf. Daher ist es wichtig, mit ihnen umgehen zu können.

§E2q. Differentialgleichungen und Flüsse. In der Analysis untersuchen Sie Differentialgleichungssysteme $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Gegeben ist hierzu eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ auf einem Gebiet D, gesucht sind Lösungskurven $x : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto x(t)$, also stetig differenzierbare Wege auf einem Intervall I mit $(t, x(t)) \in D$ und $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$. Zu gegebenem Startwert $x(t_0) = x_0$ stellt sich die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Der Satz von Picard–Lindelöf C4R garantiert genau dies, zumindest lokal auf einem kleinen Intervall um t_0.

Besonders einfach und übersichtlich ist die Theorie für *lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten*, also $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ zu einer vorgegebenen Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. In diesem Falle ist zu jedem Startwert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ die (maximale) Lösung gegeben durch $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \mapsto x(t) = \mathrm{e}^{tA} x_0$. Hierzu nutzen wir die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}$ für Matrizen (§C5l): Es gilt $\dot{x}(t) = A\,\mathrm{e}^{tA} x_0 = Ax(t)$.

Zur konkreten Berechnung lernen Sie in der Linearen Algebra die Diagonalisierung (durch Eigenvektoren) und allgemein die Jordanisierung (durch Hauptvektoren).

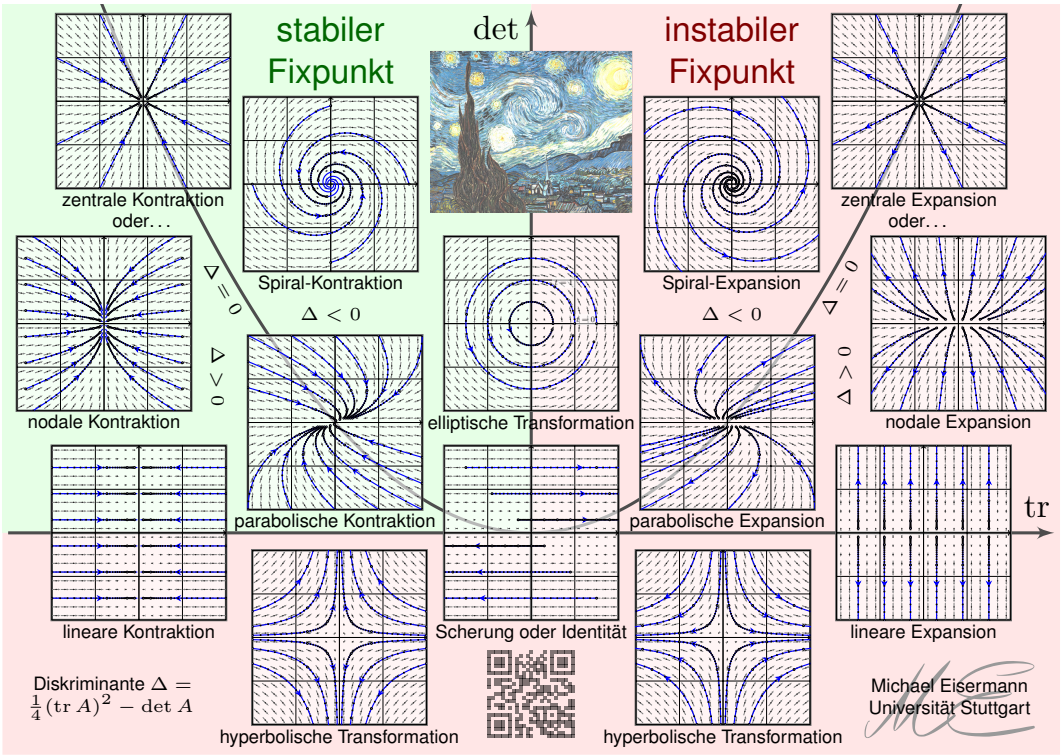


ABBILDUNG E:6. Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiel. Die Übersicht E:6 zeigt eine Klassifikation der Dynamik in Dimension $n = 2$. Zwei einfache, wichtige Beispiele sind die hyperbolische und elliptische Transformation:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (t,x) \mapsto \mathrm{e}^{tH}x = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} x,$$

$$K = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \qquad \Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (t,x) \mapsto \mathrm{e}^{tK}x = \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} x.$$

Auf $X = \mathbb{R}^n$ und $X^* = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ untersuchen wir die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Lösungskurve durch $x \in X$ ist gegeben durch $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}x$. Dies sind die Flusslinien der Operation der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$:

$$\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (t,x) \mapsto \mathrm{e}^{tA}x$$

Dies ist eine Gruppenoperation, also $\mathrm{e}^{0A}x = x$ und $\mathrm{e}^{sA}(\mathrm{e}^{tA}x) = (\mathrm{e}^{sA}\,\mathrm{e}^{tA})x = \mathrm{e}^{(s+t)A}x$. (Warum?) Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. (Warum?)

Wir nennen zwei Punkte $x, y \in X$ *äquivalent* bezüglich der Operation Φ, wenn sie in derselben Bahn bezüglich dieser Operation liegen. Ausführlich: Es gilt $x \sim y$ genau dann, wenn ein $t \in \mathbb{R}$ existiert mit $\Phi_t(x) = y$. Dies ist eine Äquivalenzrelation. (Warum?)

Übung E2z. Skizzieren Sie für $H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $K = \left(\begin{smallmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}$ die Bahnen und bestimmen Sie die Quotientenräume $X/\!\sim$ und $X^*/\!\sim$ durch explizite Homöomorphismen zu vertrauteren Räumen, zum Beispiel Teilräume des $\mathbb{R}^n$ oder Quotientenräume wie der verzweigten Geraden (E2E). Welche dieser Räume sind lokal euklidisch? Welche sind hausdorffsch? Sehen Sie einen Zusammenhang zur Reeb–Blätterung aus Abbildung E:5?

Zusatz: Wiederholen Sie die Klassifikation der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ bis auf Konjugation durch die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$: einfache Repräsentanten $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ sind Diagonalmatrizen und Jordanmatrizen, im Falle komplex-konjugierter Eigenwerte erhalten Sie zudem noch reelle Drehmatrizen. Warum genügen diese Repräsentanten? Inwiefern sind sie eindeutig? Diskutieren Sie die so entstehenden Quotientenräume $Q_A = X/\!\sim$ und $Q_A^* = X^*/\!\sim$. Welche dieser Räume sind lokal euklidisch? Welche sind hausdorffsch?

Dies ist ein erster Schritt zur *topologischen Klassifikation* der Fixpunkte dynamischer Systeme: Zu zwei vorgegebenen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ suchen wir einen Isomorphismus $T : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, der ihre Operationen ineinander konjuguiert gemäß $\Phi_B = T^{-1} \circ \Phi_A \circ T$. Wann existiert solch ein linearer Isomorphismus? Diffeomorphismus? Homöomorphismus?

§E3. Summen topologischer Räume

§E3a. Summe zweier topologischer Räume. Seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ disjunkte topologische Räume, also $X \cap Y = \emptyset$. Zur *disjunkten Vereinigung* $X \sqcup Y = X \cup Y$ mit $X \cap Y = \emptyset$ gehören die Inklusionen $i : X \hookrightarrow X \sqcup Y : x \mapsto x$ und $j : Y \hookrightarrow X \sqcup Y : y \mapsto y$.

Disjunkt machen. Notfalls können wir X und Y disjunkt machen, indem wir zu $X' = \{0\} \times X$ und $Y' = \{1\} \times Y$ übergehen. Mit den Bijektionen $X \xrightarrow{\sim} X' : x \mapsto (0,x)$ und $Y \xrightarrow{\sim} Y' : y \mapsto (1,y)$ übertragen wir alle Strukturen von X auf X' und von Y auf Y' und können dann im Folgenden mit den disjunkten Kopien X' und Y' weiterarbeiten. Diese Sichtweise werden wir weiter unten ausführen.

Wir möchten $X \sqcup Y$ mit einer Topologie $\mathcal{T}$ ausstatten, sodass i und j stetig werden. Hierzu sind viele Topologien denkbar. Die gröbste Topologie auf $X \sqcup Y$ wäre die indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X \sqcup Y\}$, aber diese hat rein gar nichts mit den Räumen $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ und den Inklusionen i, j zu tun. Wir wählen stattdessen die feinste Topologie $\mathcal{T}$ auf $X \sqcup Y$, für die i und j stetig sind. Dies führt uns zu folgender Definition:

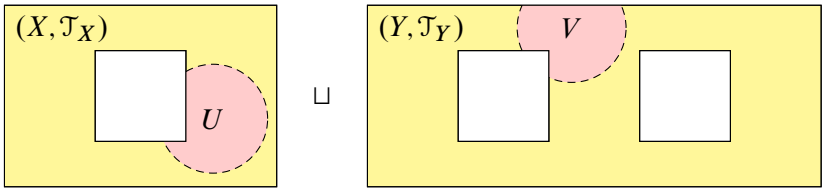


ABBILDUNG E:7. Summentopologie auf $X \sqcup Y$

Definition E3A. Die Räume $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ seien disjunkt, also $X \cap Y = \emptyset$. Auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y = X \cup Y$ definieren wir die *Summentopologie* durch

$$\mathcal{T} := \big\{ U \sqcup V \;\big|\; U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y \big\} \quad = \quad i_*\mathcal{T}_X \cap j_*\mathcal{T}_Y .$$

Dies ist eine Topologie. Den topologischen Raum $(X \sqcup Y, \mathcal{T}) =: (X,\mathcal{T}_X) \sqcup (Y,\mathcal{T}_Y)$ nennen wir die *Summe* oder *disjunkte Vereinigung* der beiden Räume $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$.

Bemerkung E3B. Die hier definierte Summentopologie $\mathcal{T}$ ist tatsächlich eine Topologie (D1A): Die Eigenschaften (O1–3) prüft man leicht nach. Zudem ist $\mathcal{T}$ die feinste Topologie auf $X \sqcup Y$, für die beide Inklusionen $i : X \hookrightarrow X \sqcup Y$ und $j : Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ stetig sind:

- Für $U \in \mathcal{T}_X$ und $V \in \mathcal{T}_Y$ gilt $i^{-1}(U \sqcup V) = U \in \mathcal{T}_X$ und $j^{-1}(U \sqcup V) = V \in \mathcal{T}_Y$. Demnach sind beide Inklusionen $i : X \hookrightarrow X \sqcup Y$ und $j : Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ stetig.
- Sind i und j stetig bezüglich irgendeiner Topologie $\mathcal{T}'$ auf $X \sqcup Y$, so gilt $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$: Für alle $U \sqcup V \in \mathcal{T}'$ muss $i^{-1}(U \sqcup V) = U \in \mathcal{T}_X$ und $j^{-1}(U \sqcup V) = V \in \mathcal{T}_Y$ gelten.

Damit sind $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ Teilräume von $(X \sqcup Y, \mathcal{T})$, zudem offen und abgeschlossen. Die Inklusionen i, j sind Einbettungen (E1K), zudem offen und abgeschlossen.

Beispiel. Es gilt $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ und $\mathrm{GL}_n\mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_n^-\mathbb{R}$ mit Summentopologie. Seien $X, Y \subset Z$ disjunkt. Dann sind äquivalent: (1) Die Teilraumtopologie auf $X \sqcup Y$ ist die Summentopologie. (2) Es existieren $A \supset X$ und $B \supset Y$ offen mit $A \cap Y = X \cap B = \emptyset$.

Bemerkung. In $X \sqcup Y$ ist jede der Teilmengen X, Y offen und damit auch abgeschlossen. Dies ist das typische Modell eines unzusammenhängenden Raumes (siehe Kapitel G).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§E3b. Disjunkte Vereinigung.** Sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume. ☜ Sie sind *paarweise disjunkt*, wenn $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ für alle $\lambda \neq \mu$ gilt. In diesem Falle ist ihre *Summe* oder *(interne) disjunkte Vereinigung* nichts weiter als ihre Vereinigung:

$$\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \quad \text{wobei} \quad X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset \text{ für } \lambda \neq \mu.$$

Es kommt oft vor, dass die gegebenen Mengen X_λ nicht disjunkt sind, wir aber eine disjunkte Vereinigung wünschen. Im Beispiel E2E haben wir mit $X = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n$ zwei Kopien des euklidischen Raumes genutzt. Wir behelfen uns dann mit folgendem Trick: Wir ersetzen jede Menge X_λ durch $X'_\lambda = \{\lambda\} \times X_\lambda$: Die Mengen der Familie $(X'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sind paarweise disjunkt. Mit den kanonischen Bijektionen $X_\lambda \xrightarrow{\sim} X'_\lambda : x \mapsto (\lambda, x)$ übertragen wir alle Strukturen von X_λ auf X'_λ und können im Folgenden mit den disjunkten Kopien X'_λ weiterarbeiten. Wir nennen dies ihre *Summe* oder *(externe) disjunkte Vereinigung*:

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \{\lambda\} \times X_\lambda$$

Beide Sichtweisen sind nützlich und leisten im Wesentlichen dasselbe: Jedes Element $x \in \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X'_\lambda$ gehört zu einem eindeutigen Index λ. Wir erklären je nach Kontext, welche der beiden Sichtweisen gemeint ist: die interne Summe oder die externe Summe.

§E3c. Summe einer Familie topologischer Räume. Wir vereinbaren folgendes:

✍ **Definition E3C.** Sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume. Wir definieren die ✍ *(externe) disjunkte Vereinigung* der Trägermengen $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ durch

$$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \{\lambda\} \times X_\lambda.$$

Hierzu gehören die *kanonischen Injektionen* $i_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X : x \mapsto (\lambda, x)$.

Die *Summentopologie* auf X definieren wir durch

$$\mathcal{T} = \left\{ \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \right\} \quad = \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (i_\lambda)_* \mathcal{T}_\lambda.$$

Dies ist eine Topologie. Den topologischen Raum $(X, \mathcal{T}) =: \coprod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ nennen wir die *Summe* oder *(externe) disjunkte Vereinigung* der Räume $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$.

☞ **Bemerkung E3D.** Die Eigenschaften (O1–3) der Definition D1A prüft man leicht nach. ☜ Auf X ist $\mathcal{T}$ die feinste Topologie, für die alle $i_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig sind (E3B).

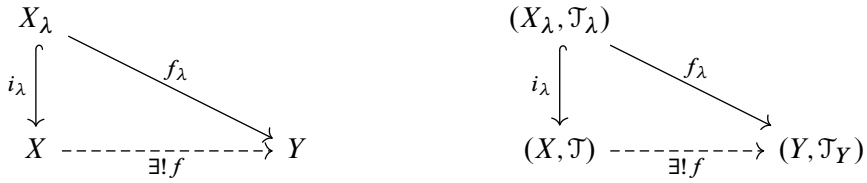
Zudem ist i_λ eine Einbettung. Somit ist $X'_\lambda = \{\lambda\} \times X_\lambda = i_\lambda(X_\lambda)$ mit der transportierten Topologie $\mathcal{T}'_\lambda$ ein Teilraum von $(X, \mathcal{T})$. Er ist offen, denn $X'_\lambda \in \mathcal{T}$, und abgeschlossen, denn $X \smallsetminus X'_\lambda = \bigcup_{\mu\neq\lambda} X'_\mu$ ist offen. Meist identifizieren wir X_λ stillschweigend mit X'_λ.

☞ **Bemerkung.** Sind die Trägermengen $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ bereits disjunkt, gilt also $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ für ☜ alle $\lambda \neq \mu$, so können wir alternativ auch die interne disjunkte Vereinigung $X = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ verwenden. Die kanonischen Injektionen sind in diesem Falle einfach nur die Inklusionen $i_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X : x \mapsto x$. Die Summentopologie auf X definieren wir wörtlich genauso.

☞ **Bemerkung E3E.** Hat die Topologie $\mathcal{T}_\lambda$ als Basis (bzw. Erzeugendensystem) $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{T}_\lambda$, für ☜ jedes $\lambda \in \Lambda$, so hat die Summentopologie $\mathcal{T}$ als Basis (bzw. Erzeugendensystem)

$$\mathcal{B} = \left\{ i_\lambda(U_\lambda) \;\middle|\; \lambda \in \Lambda,\ U_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda \right\}.$$

§E3d. Universelle Abbildungseigenschaft des Summenraumes. Wir haben in E3C die Summe $(X,\mathcal{T}) = \coprod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$ topologischer Räume definiert, indem wir die disjunkte Vereinigung $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ der Trägermengen mit einer naheliegenden Topologie $\mathcal{T}$ ausstatten. Ist dies die „richtige“ Topologie auf X? Wir lassen uns hier von den kanonischen Abbildungen leiten: Jede der Injektionen $i_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X$ soll stetig sein. Die Summentopologie leistet genau das und erfreut sich folgender universeller Abbildungseigenschaft:



Satz E3F. *Sei $(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume.*

Die Summentopologie $\mathcal{T}$ auf $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ist die feinste Topologie, für die jede der kanonischen Injektionen $i_\lambda : (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda) \hookrightarrow (X,\mathcal{T}) : x \mapsto (\lambda,x)$ mit $\lambda\in\Lambda$ stetig ist.

UAE: Zu jeder Familie $(f_\lambda : (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda) \to (Y,\mathcal{T}_Y))_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen existiert genau eine stetige Abbildung $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ mit $f\circ i_\lambda = f_\lambda$ für alle $\lambda\in\Lambda$.

BEWEIS. Klar nach Definition der Menge X und der Summentopologie $\mathcal{T}$ (E3C, E1E). □

Bemerkung. Jede der kanonischen Injektionen $i_\lambda : (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda) \hookrightarrow (X,\mathcal{T}) : x \mapsto (\lambda,x)$ für $\lambda\in\Lambda$ ist eine Einbettung; sie ist sowohl offen als auch abgeschlossen. Wir können somit $(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$ als Teilraum von $(X,\mathcal{T})$ betrachten; er ist sowohl offen als auch abgeschlossen. Die universelle Eigenschaft E3F entspricht der Zusammensetzung gemäß Verklebesatz E1P.

Bemerkung E3G. Für jede Topologie $\mathcal{T}$ auf $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ äquivalent:

(1) Die Topologie $\mathcal{T}$ ist die Summentopologie auf X (E3C).
(2) Die Topologie $\mathcal{T}$ ist die feinste, für die alle $i_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X$ stetig sind.
(3) Genau dann ist eine gegebene Abbildung $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn für jedes $\lambda\in\Lambda$ die Komposition $f\circ i_\lambda : (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig ist.
(4) Zu jeder Familie $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen $f_\lambda : (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ mit $f\circ i_\lambda = f_\lambda$ für alle $\lambda\in\Lambda$.
(5) Für jeden topologischen Raum $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ist die folgende Abbildung eine Bijektion:

$$\Phi : \mathscr{C}\Big(\coprod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Y\Big) \to \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda,Y) \;:\; f \mapsto (f\circ i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

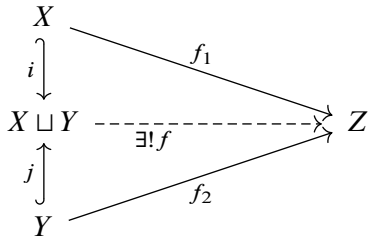
Eigenschaft (2) ist die Umformulierung der Summentopologie (1) als finale Topologie $\mathcal{T} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(i_\lambda)_*\mathcal{T}_\lambda$ der Familie $(i_\lambda : (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda) \to X)_{\lambda\in\Lambda}$. Die Äquivalenzen (2) ⇔ (3) ⇔ (4) ⇔ (5) sind Umformulierungen dieser Abbildungseigenschaft. Die besonders bequeme und wichtige Äquivalenz (1) ⇔ (4) haben wir als Satz E3F hervorgehoben.

Die Summentopologie wird durch jede dieser fünf Eigenschaften charakterisiert! Wir können sie explizit angeben (E3C) durch die Konstruktion $\mathcal{T} = \{\coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \mid U_\lambda\in\mathcal{T}_\lambda\}$ oder implizit durch die universelle Eigenschaft (E3F) der Familie $(i_\lambda : (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda) \to (X,\mathcal{T}))_{\lambda\in\Lambda}$ bezüglich aller anderen Familien $(f_\lambda : (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda) \to (Y,\mathcal{T}_Y))_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen.

Beide Sichtweisen sind nützlich und leisten uns gute Dienste. Es ist allgemein hilfreich, Topologien soweit möglich durch ihre Abbildungseigenschaften zu charakterisieren.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Bemerkung.** Zu je zwei stetigen Abbildungen $f_1 : X \to Z$ und $f_2 : Y \to Z$ mit $X \cap Y = \emptyset$ ☜ existiert genau eine stetige Abbildung $f : X \sqcup Y \to Z$ mit $f \circ i = f_1$ und $f \circ j = f_2$.



Diese universelle Abbildungseigenschaft (bzw. Verkleben E1P) stiftet die Bijektion

$$\Phi \,:\, \mathscr{C}(X \sqcup Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(X,Z) \times \mathscr{C}(Y,Z) \,:\, f \mapsto (\, f \circ i,\, f \circ j \,).$$

In der Schreibweise $B^A := \mathscr{C}(A,B)$ und $X + Y := X \sqcup Y$ gilt besonders suggestiv

$$Z^{(X+Y)} \cong Z^X \times Z^Y \,:\, f \mapsto (\, f \circ i,\, f \circ j \,).$$

Für je zwei disjunkte Räume gilt zudem die Kommutativität

$$X + Y = Y + X.$$

Der leere Raum $\emptyset$ fungiert bezüglich Summen als neutrales Element:

$$X + \emptyset = \emptyset + X = X.$$

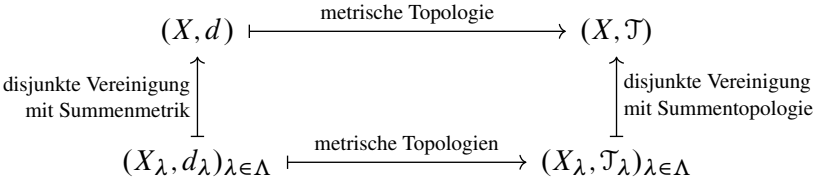
Für je drei paarweise disjunkte Räume X, Y, Z gilt ebenso die Assoziativität

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z).$$

Für die *externe* Summe $X_1 \amalg \cdots \amalg X_n = \{1\} \times X_1 \cup \cdots \cup \{n\} \times X_n$ gilt anstelle der obigen Gleichungen jeweils ein kanonischer Homöomorphismus, siehe E4M.

Die Konstruktion der paarweisen Summe $X \sqcup Y$ verallgemeinert sich per Induktion auf endliche Summen $X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$. Klammerung und Reihenfolge spielen dabei keine Rolle, wie gesehen, dank Assoziativität und Kommutativität. Unsere Definition E3C dehnt dies aus auf beliebige, eventuell unendliche Familien topologischer Räume.

☞ **Übung E3H.** Genau dann ist der Summenraum $(X, \mathcal{T}) = \coprod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ metrisierbar, wenn ☜ jeder der Summanden $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ metrisierbar ist. Allgemein haben wir folgende Situation:



✻ **E3H.** „⇒“: Ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar, so auch jeder Teilraum $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ dank D1L. „⇐“: Sei $(X_\lambda, d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie metrischer Räume. Auf $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{\lambda\} \times X_\lambda$ definieren wir wie in C2F die Summenmetrik

$$d : X \times X \to [0,\infty], \quad d\big((\lambda,x),(\mu,y)\big) = \begin{cases} d_\lambda(x,y) & \text{falls } \lambda = \mu, \\ \infty & \text{falls } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

Zu (X_λ, d_λ) haben wir die metrische Topologie $\mathcal{T}_\lambda$ auf X_λ. Aus den topologischen Räumen $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ erhalten wir $(X, \mathcal{T})$ mit der Summentopologie $\mathcal{T}$ wie in E3C. Dank E3E gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

§E3e. Konstruktion der Sphäre $\mathbb{S}^n$ durch Verheften zweier Räume $\mathbb{R}^n$.

Übung E3I. (1) Sei $X_0 = X_1 = \mathbb{D}^n$. Auf dem Summenraum $X = X_0 \sqcup X_1$ sei die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $(0,x) \sim (1,x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Konstruieren Sie explizit Homöomorphismen $(f,g) : X/\!\sim \cong \mathbb{S}^n$ durch Zerlegen und Verkleben: Nennen und nutzen Sie unsere topologischen Konstruktionen und ihre universellen Eigenschaften.

(2) Sei $X_0 = X_1 = \mathbb{R}^n$. Auf $X = X_0 \sqcup X_1$ sei die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $(0,x) \sim (1, x/|x|^2)$ für $x \neq 0$. Konstruieren Sie Homöomorphismen $(f,g) : X/\!\sim \cong \mathbb{S}^n$.

(3) Seien $(f_i, g_i) : X_i \cong Y_i$ Homöomorphismen. Konstruieren Sie hieraus kanonisch Homöomorphismen $(f,g) : X_0 \sqcup X_1 \cong Y_0 \sqcup Y_1$, ohne offene Mengen zu betrachten.

(4) Die Überdeckungen $X = X_0 \cup X_1$ und $Y = Y_0 \cup Y_1$ seien offen oder abgeschlossen. Gegeben seien Homöomorphismen $(f_i, g_i) : X_i \cong Y_i$ mit $f_0|_{X_0 \cap X_1} = f_1|_{X_1 \cap X_0}$ und $g_0|_{Y_0 \cap Y_1} = g_1|_{Y_1 \cap Y_0}$. Konstruieren Sie hieraus Homöomorphismen $(f,g) : X \cong Y$.
Diese Technik nutzen wir zum Beispiel für die komplex-projektive Gerade $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ (K2L).

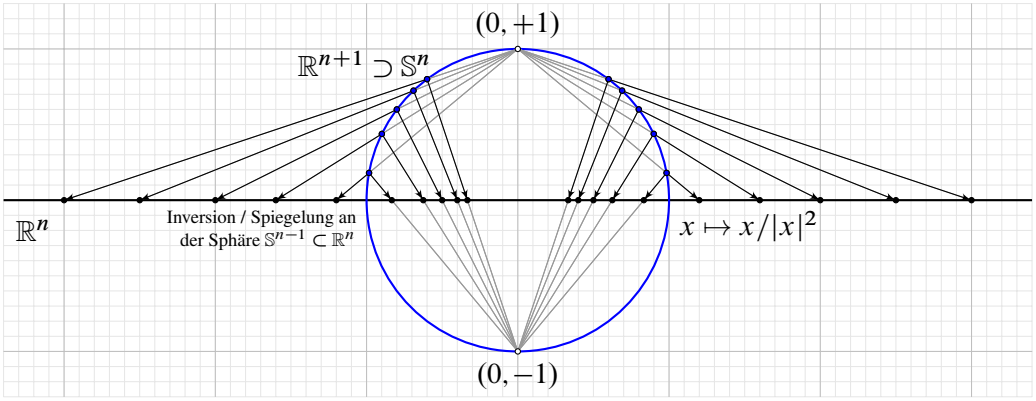


ABBILDUNG E:8. Verkleben von zwei stereographischen Projektionen

⁕ **E3I.** Abstrakt ist leicht, konkret ist schwerer! Die Aussagen (3) und (4) können Sie leicht nachrechnen: Die wenigen Daten lassen sich nur auf eine sinnvolle Weise zusammenfügen und dann anhand der universellen Eigenschaften nachrechnen. Die konkreten Fälle (1) und (2) sind interessanter, aber auch aufwändiger. Wir gehen dies hier exemplarisch in allen Details durch. Daraus können Sie anschließend (3) und (4) abstrahieren.

(1) Wir haben $\mathbb{D}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \,\}$ und $\mathbb{S}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1 \,\}$. Wir konstruieren stetige Abbildungen $(f,g) : X/\!\sim \rightleftarrows \mathbb{S}^n$ in beide Richtungen. Zuerst $f : X/\!\sim \to \mathbb{S}^n$: Dazu konstruieren wir zunächst die stetige Abbildung $\tilde{f} : X = \mathbb{D}^n \sqcup \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$ als Zusammensetzung der Abbildungen

$$f_i \;:\; X_i = \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n \;:\; x \mapsto f_i(x) = \Big(x, (-1)^i \sqrt{1-|x|^2}\Big).$$

Die universelle Abbildungseigenschaft der Summe (Satz E3F) besagt, dass es eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{f} : X = X_0 \sqcup X_1 \to \mathbb{S}^n$ gibt mit $\tilde{f} \circ \iota_i = f_i$ für $i = 0, 1$, also $\tilde{f}(i,x) = \big(x, (-1)^i \sqrt{1-|x|^2}\big)$.

Für jeden Punkt $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt $f_0(x) = (x,0) = f_1(x)$. Aus $(i,x) \sim (j,y)$ folgt somit $\tilde{f}(i,x) = \tilde{f}(j,y)$. Die universelle Abbildungseigenschaft des Quotienten (Satz E2C) garantiert zu $q : X \twoheadrightarrow X/\!\sim$ und $\tilde{f} : X \to \mathbb{S}^n$ eine eindeutige stetige Abbildung $f : X/\!\sim \to \mathbb{S}^n$ mit $f \circ q = \tilde{f}$, ausgeschrieben

$$f \;:\; X/\!\sim \to \mathbb{S}^n \;:\; f([i,x]) = \tilde{f}(i,x) = \Big(x, (-1)^i \sqrt{1-|x|^2}\Big).$$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Wir konstruieren umgekehrt eine stetige Abbildung $g : \mathbb{S}^n \to X/\!\sim$. Die Sphäre $\mathbb{S}^n = Y_0 \cup Y_1$ überdecken wir durch zwei abgeschlossene Halbsphären $Y_0 = \{\, y \in \mathbb{S}^n \mid y_{n+1} \geq 0 \,\}$ und $Y_1 = \{\, y \in \mathbb{S}^n \mid y_{n+1} \leq 0 \,\}$. Jede der beiden Abbildungen $\tilde{g}_i : Y_i \to X_i = \mathbb{D}^n : y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \mapsto x = (y_1, \ldots, y_n)$ ist stetig. Durch Komposition erhalten wir hieraus die stetige Abbildung $g_i := q \circ \iota_i \circ \tilde{g}_i$, ausgeschrieben

$$g_0 \;:\; Y_0 \xrightarrow{\tilde{g}_0} X_0 \xrightarrow{\iota_0} X_0 \sqcup X_1 = X \xrightarrow{q} X/\!\sim \;:\; y \mapsto [(0, (y_1, \ldots, y_n))],$$
$$g_1 \;:\; Y_1 \xrightarrow{\tilde{g}_1} X_1 \xrightarrow{\iota_1} X_0 \sqcup X_1 = X \xrightarrow{q} X/\!\sim \;:\; y \mapsto [(1, (y_1, \ldots, y_n))].$$

Diese beiden Abbildungen lasssen sich verkleben zu einer stetigen Abbildung $g : \mathbb{S}^n = Y_0 \cup Y_1 \to X/\!\sim$. Wir nutzen den Verklebesatz E1P: Die Überdeckung $\mathbb{S}^n = Y_0 \cup Y_1$ ist (lokal-)endlich und abgeschlossen. Auf dem Schnitt stimmen die Abbildungen g_0 und g_1 überein: Für jeden Punkt $y = (x, 0) \in Y_0 \cap Y_1 = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$ gilt $\iota_0 \tilde{g}_0(x, 0) = (0, x) \sim (1, x) = \iota_1 \tilde{g}_1(x, 0)$, somit $g_0(y) = [(0, x)] = [(1, x)] = g_1(y)$. Dank Satz E1P existiert genau eine stetige Funktion $g : S^n \to X/\!\sim$ mit $g|_{Y_0} = g_0$ und $g|_{Y_1} = g_1$.

Damit haben wir ein Paar stetiger Funktionen $(f, g) : X/\!\sim \rightleftarrows \mathbb{S}^n$ konstruiert. Wir prüfen schließlich nach, dass diese gemäß Konstruktion zueinander invers sind. Ausführlich: Für jeden Punkt $[(i, x)] \in X/\sim$ gilt $g(f([(i, x)])) = g(f_i(x)) = [(i, x)]$. Für jeden Punkt $y \in \mathbb{S}^n$ mit $y_{n+1} \geq 0$ gilt $f(g(y)) = f([(0, (y_1, \ldots, y_n)]) = f_0(y_1, \ldots, y_n) = y$; für $y_{n+1} \leq 0$ entsprechend $f(g(y)) = f([(1, (y_1, \ldots, y_n)]) = f_1(y_1, \ldots, y_n) = y$.

(2) Wir gehen wie in (1) vor, verwenden jedoch stereographische Projektionen (A1L) wie in Abbildung E:8. Wir konstruieren stetige Abbildungen $(f, g) : X/\!\sim \rightleftarrows \mathbb{S}^n$ in beide Richtungen. Zuerst $f : X/\!\sim \to \mathbb{S}^n$: Dazu konstruieren wir zunächst die stetige Abbildung $\tilde{f} : X = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ als Zusammensetzung der Abbildungen

$$f_0 \;:\; X_0 = \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \;:\; x \mapsto \tfrac{1}{|x|^2+1}\big(2x, |x|^2 - 1\big),$$
$$f_1 \;:\; X_1 = \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \;:\; x \mapsto \tfrac{1}{|x|^2+1}\big(2x, 1 - |x|^2\big).$$

Dies sind die stereographischen Abbildungen zu den Polen $p = (0, \ldots, 0, \pm 1)$. Die universelle Abbildungseigenschaft der Summe (Satz E3F) liefert uns zu f_0 und f_1 die stetige Abbildung $\tilde{f} : X = X_0 \sqcup X_1 \to \mathbb{S}^n$ mit $\tilde{f} \circ \iota_i = f_i$ für $i = 0, 1$, also $\tilde{f}(0, x) = f_0(x)$ und $\tilde{f}(1, x) = f_1(x)$. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt

$$f(1, x/|x|^2) = f_1(x/|x|^2) = \tfrac{1}{|x|^{-2}+1}\big(2x|x|^{-2}, 1 - |x|^{-2}\big) = \tfrac{1}{|x|^2+1}\big(2x, |x|^2 - 1\big) = f_0(x) = f(0, x).$$

Somit werden äquivalente Punkte in X auf denselben Bildpunkt in $\mathbb{S}^n$ abgebildet. Die universelle Abbildungseigenschaft des Quotienten (Satz E2C) garantiert zu $q : X \twoheadrightarrow X/\!\sim$ und $\tilde{f} : X \to \mathbb{S}^n$ eine eindeutige stetige Abbildung $f : X/\!\sim \to \mathbb{S}^n$ mit $f \circ q = \tilde{f}$, ausgeschrieben

$$f \;:\; X/\!\sim \to \mathbb{S}^n \;:\; [(i, x)] \mapsto \tfrac{1}{|x|^2+1}\big(2x, (-1)^i(|x|^2 - 1)\big).$$

Wir konstruieren umgekehrt eine stetige Abbildung $g : \mathbb{S}^n \to X/\!\sim$. Die Sphäre $\mathbb{S}^n = Y_0 \cup Y_1$ überdecken wir durch die offenen Mengen $Y_0 = \mathbb{S}^n \smallsetminus \{(0, 0, \ldots, 0, +1)\}$ und $Y_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0, -1)\}$. Hierauf haben wir die stereographischen Projektionen

$$\tilde{g}_0 \;:\; Y_0 \to X_0 = \mathbb{R}^n \;:\; y \mapsto \tfrac{1}{1-y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n),$$
$$\tilde{g}_1 \;:\; Y_1 \to X_1 = \mathbb{R}^n \;:\; y \mapsto \tfrac{1}{1+y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n).$$

Durch Komposition erhalten wir hieraus die stetige Abbildung $g_i := q \circ \iota_i \circ \tilde{g}_i$, ausgeschrieben

$$g_0 \;:\; Y_0 \xrightarrow{\tilde{g}_0} X_0 \xrightarrow{\iota_0} X_0 \sqcup X_1 = X \xrightarrow{q} X/\!\sim \;:\; y \mapsto \Big[\Big(0, \tfrac{1}{1-y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n)\Big)\Big],$$
$$g_1 \;:\; Y_1 \xrightarrow{\tilde{g}_1} X_1 \xrightarrow{\iota_1} X_0 \sqcup X_1 = X \xrightarrow{q} X/\!\sim \;:\; y \mapsto \Big[\Big(1, \tfrac{1}{1+y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n)\Big)\Big].$$

Diese wollen wir zu einer Abbildung $g : \mathbb{S}^n \to X/\!\sim$ verkleben (E1P). Dazu ist zu prüfen, dass sie auf $Y_0 \cap Y_1$ übereinstimmen. Hierzu sei $y \in Y_0 \cap Y_1$, also $y_{n+1} \neq \pm 1$. Für $x = \tilde{g}_0(y) = \frac{1}{1-y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n)$ gilt

$$|x|^2 = \tfrac{1}{(1-y_{n+1})^2}(1 - y_{n+1}^2) = \tfrac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}},$$

also $x/|x|^2 = \frac{1}{1+y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n) = \tilde{g}_1(y)$. Damit haben wir ein Paar stetiger Funktionen $(f, g) : X/\!\sim \rightleftarrows \mathbb{S}^n$ konstruiert. Wir prüfen schließlich nach, dass diese zueinander invers sind. Hierzu haben wir in A1L bereits $g_i \circ f_i = \mathrm{id}_{X_i}$ und $f_i \circ g_i = \mathrm{id}_{Y_i}$ nachgewiesen. Hieraus folgt sofort $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

§E3f. Verheften zweier Räume entlang einer Abbildung. Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden die beiden Räume X und Y als disjunkt und somit unmittelbar als Teilräume von $X \sqcup Y = X \cup Y$. Andernfalls müssen wir sicherheitshalber die beiden Räume disjunkt machen, wie zuvor in E3I: Wir betrachten dann $X \sqcup Y = (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$.

Definition E3J (Verheften)**.** Seien X und Y topologische Räume und $f : Y \supset B \twoheadrightarrow A \subset X$ stetig. Die *Verheftung* $X \cup_f Y$ definieren wir durch den Quotienten

$$q : X \sqcup Y \twoheadrightarrow X \cup_f Y := \frac{X \sqcup Y}{f(y) \sim y,\ y \in B}.$$

Äquivalenzklassen sind $\{x\} \sqcup f^{-1}(x)$ für $x \in A$ sowie $\{z\}$ für $z \notin A \sqcup B$.

Beispiele. (0) Für $A = B = \emptyset$ ist $X \cup_f Y \cong X \sqcup Y$ die *topologische Summe*.

(1) Für $f : Y \supset \{y_0\} \xrightarrow{\sim} \{x_0\} \subset X$ erhalten wir das *Bouquet*

$$X \cup_f Y = \frac{X \sqcup Y}{x_0 \sim y_0} =: (X, x_0) \vee (Y, y_0).$$

(2) Für $X = \{x_0\}$ erhalten wir die *Zusammenschlagung*

$$X \cup_f Y = \frac{\{x_0\} \sqcup Y}{x_0 \sim y,\ y \in B} =: Y /\!\!/ B$$

Bemerkung. Der Raum $Y /\!\!/ B$ hat immer einen ausgezeichneten Punkt x_0, den wir als Fußpunkt nutzen können. Die Sichtweise als Verheftung erklärt im Sonderfall $B = \emptyset$ die Konvention $Y /\!\!/ \emptyset = \{x_0\} \sqcup Y$: Sie ist oft nützlich und hier auch vollkommen natürlich.

Bemerkung. Später fordern wir meist, dass B abgeschlossen in Y ist; damit erhalten wir etwas bessere Eigenschaften der Verheftung (I5J). Wir betrachten vorerst den allgemeinen Fall eines beliebigen Teilraums $B \subset Y$ und erkennen einige gute alte Bekannte wieder:

Übung E3K. Skizzieren Sie soweit möglich die folgenden Verheftungen und finden Sie explizite Homöomorphismen zu vertrauteren Räumen, zum Beispiel zu Teilräumen des $\mathbb{R}^n$.

(1) Wir betrachten $X = Y = \mathbb{D}^n$ mit $A = B = \mathbb{S}^{n-1}$ und $f : B \twoheadrightarrow A : a \mapsto a$.

(2) $X = A = \mathbb{S}^{n-1}$, $Y = \{0,1\} \times \mathbb{D}^n$, $B = \{0,1\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ und $f : B \twoheadrightarrow A : (i,a) \mapsto a$.

(3) $X = Y = \mathbb{R}^n$ mit $A = B = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ und $f : B \xrightarrow{\sim} A : a \mapsto a/|a|^2$.

(4) $X = Y = \mathbb{R}^n$ mit $A = B = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ und $f : B \xrightarrow{\sim} A : a \mapsto a$.

Welche dieser Räume sind lokal euklidisch? Welche sind hausdorffsch?

✻ **E3K.** (1) Wir erhalten die Sphäre $X \cup_f Y \cong \mathbb{S}^n$ wie in E3I. Dasselbe gilt auch in (2): Hier beginnen wir mit dem Äquator $X = \mathbb{S}^{n-1}$, an den wir die beiden Hemisphären $Y_0 = \{0\} \times \mathbb{D}^n$ und $Y_1 = \{1\} \times \mathbb{D}^n$ anheften.

Die Konstruktion von Räumen durch sukzessives Anheften (§I5) von Zellen $\mathbb{D}^n$ der Dimension $n = 0, 1, 2, \ldots$ führt zum Begriff des Zellkomplexes (§L7). Speziell die Konstruktion der Sphäre $\mathbb{S}^n$ durch zwei Hemisphären $Y_i \cong \mathbb{D}^n$ hilft zur Untersuchung des reell projektiven Raumes $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$ (§K2). Wir kennen dies für die projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ bereits anschaulich aus der Einleitung, siehe Abbildung A:28.

(3) Wir erhalten erneut die Sphäre $X \cup_f Y \cong \mathbb{S}^n$ wie in E3I. (4) Wir erhalten den Raum $\mathbb{R}^n$ mit doppeltem Ursprung wie in E2E. Ganz anders als die vorigen Konstruktionen ist dieser Raum nicht hausdorffsch!

Eine Mannigfaltigkeit M (§K1), wie zum Beispiel die Sphäre $M = \mathbb{S}^n$, ist lokal euklidisch, wird also überdeckt durch einen Atlas $\mathscr{A} = \big(h_i : M \supset U_i \xrightarrow{\sim} V_i \subset \mathbb{R}^n\big)_{i \in I}$. Aus den lokalen Karten können wir global die gesamte Mannigfaltigkeit rekonstruieren durch Verkleben, wie im Beispiel (3) exemplarisch ausgeführt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E4. Produkte topologischer Räume

§E4a. Produkt zweier topologischer Räume. Seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Das *Produkt* $X\times Y = \{\,(x,y) \mid x\in X,\ y\in Y\,\}$ der Trägermengen X und Y ist die Menge aller Paare (x,y) mit $x\in X$ und $y\in Y$. Hierzu gehören die *Projektionen* $p=\mathrm{pr}_1 : X\times Y\to X : (x,y)\mapsto x$ und $q=\mathrm{pr}_2 : X\times Y\to Y : (x,y)\mapsto y$.

Wir möchten $X\times Y$ mit einer Topologie $\mathcal{T}$ ausstatten, sodass p und q stetig werden. Hierzu sind viele Topologien denkbar. Die feinste Topologie auf $X\times Y$ wäre die diskrete Topologie $\mathfrak{P}(X\times Y)$, aber diese hat rein gar nichts mit den Räumen X,Y oder den Projektionen p,q zu tun. Wir wählen stattdessen die gröbst-mögliche Topologie:

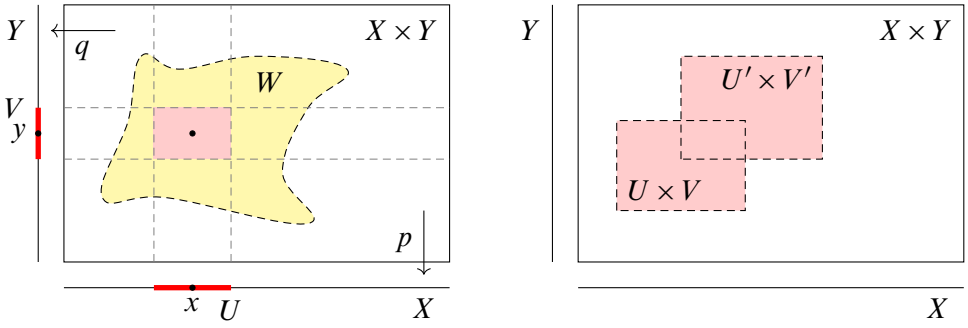


ABBILDUNG E:9. Basis der Produkttopologie sind die offenen Kästchen $U\times V$.

Definition E4A. Seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Auf dem Produkt $X\times Y$ der Trägermengen definieren wir die Produkttopologie $\mathcal{T}$ durch die *Produktbasis*

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \mathcal{T}_X\otimes\mathcal{T}_Y &:= \big\{\,U\times V \;\big|\; U\in\mathcal{T}_X,\ V\in\mathcal{T}_Y\,\big\}\\ &= \big\{\,p^{-1}(U)\cap q^{-1}(V) \;\big|\; U\in\mathcal{T}_X,\ V\in\mathcal{T}_Y\,\big\}.\end{aligned}$$

Diese erfüllt die Basisaxiome (B1–2) aus D6C und definiert so die *Produkttopologie*

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \big\{\textstyle\bigcup\mathcal{S} \;\big|\; \mathcal{S}\subset\mathcal{B}\big\}\\ &= \big\{\,W\subset X\times Y \;\big|\; \forall(x,y)\in W\ \ \exists U\in\mathcal{T}_X\ \ \exists V\in\mathcal{T}_Y\ :\ (x,y)\in U\times V\subset W\,\big\}.\end{aligned}$$

In Worten: Genau dann ist $W\subset X\times Y$ offen in der Produkttopologie, wenn W um jeden Punkt $(x,y)\in W$ ein offenes Kästchen $U\times V\subset W$ enthält mit $U\in\mathcal{T}_X$ und $V\in\mathcal{T}_Y$.

Wir nennen $(X\times Y,\mathcal{T}) =: (X,\mathcal{T}_X)\times(Y,\mathcal{T}_Y)$ den *Produktraum* von $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$.

Bemerkung. Anschaulich besteht die Basis $\mathcal{B}$ aus den offenen Kästchen $U\times V$ wie in E:9 skizziert. Nochmal zur Betonung: Dies ist noch nicht die Topologie, sondern nur eine Basis! Das Mengensystem $\mathcal{B}$ erfüllt (O1), denn $\emptyset\in\mathcal{B}$ und $X\times Y\in\mathcal{B}$, sowie (O2), denn es gilt $(U\times V)\cap(U'\times V') = (U\cap U')\times(V\cap V')$, jedoch nicht (O3) wie Abbildung E:9 zeigt: Die offenen Kästchen sind nicht stabil unter Vereinigung. Dies leistet erst die Topologie $\mathcal{T}$.

Bemerkung E4B. Aus Basen $\mathcal{B}_X\subset\mathcal{T}_X$ und $\mathcal{B}_Y\subset\mathcal{T}_Y$ erhalten wir die Produktbasis

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y := \big\{\,U\times V \;\big|\; U\in\mathcal{B}_X,\ V\in\mathcal{B}_Y\,\big\}\ \subset\ \mathcal{B} = \mathcal{T}_X\otimes\mathcal{T}_Y\ \subset\ \mathcal{T}.$$

Beispiel. Der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_n)$ hat $\mathcal{B}_n = \{\,]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_n,b_n[\ \mid a_i<b_i \text{ in } \mathbb{R}\,\}$ als eine Basis. Für $k+\ell=n$ gilt $\mathcal{B}_k\otimes\mathcal{B}_\ell=\mathcal{B}_n$, also $(\mathbb{R}^k,\mathcal{T}_k)\times(\mathbb{R}^\ell,\mathcal{T}_\ell) = (\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_n)$.

§E4b. Produkt einer Familie topologischer Räume. Sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume. Wir definieren das *Produkt* der Trägermengen $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ durch

$$\begin{aligned} X = \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda &:= \big\{ x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \,\big|\, \forall \lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_\lambda \big\} \\ &= \big\{ x : \Lambda \to \textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : \lambda \mapsto x_\lambda \,\big|\, \forall \lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_\lambda \big\}. \end{aligned}$$

Hierzu gehören die *kanonischen Projektionen* $p_\lambda : X \to X_\lambda : x \mapsto x_\lambda$.

Jedes Element $x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ist ein Λ–Tupel $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, formal also eine Abbildung $x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : \lambda \mapsto x_\lambda$, mit $x_\lambda \in X_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Die Projektion $p_\lambda : X \to X_\lambda : x \mapsto x_\lambda$ ist die Auswertung an der Stelle λ. Ist eine der Mengen X_λ leer, so auch das Produkt $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Sind alle Mengen X_λ nicht-leer, so auch das Produkt (dank des Auswahlaxioms). Jede Projektion $p_\lambda : X \to X_\lambda$ ist dann surjektiv: Wir wählen ein festes Element $x_\mu \in X_\mu$ für jedes $\mu \neq \lambda$; zu jedem $x_\lambda \in X_\lambda$ erhalten wir so ein $x \in X$ mit $p_\lambda(x) = x_\lambda$.

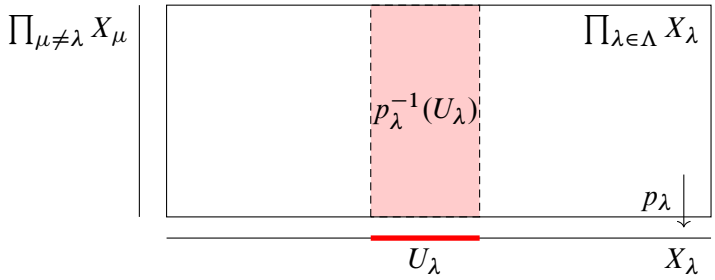


ABBILDUNG E:10. Offene Zylinder $p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ erzeugen die Produkttopologie.

Auf X ist $p_\lambda^* \mathcal{T}_\lambda = \{\, p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \,\}$ die gröbste Topologie, für die die Projektion p_λ stetig ist. Wenn alle p_λ stetig sein sollen, müssen zumindest die Mengen aus $\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^* \mathcal{T}_\lambda$ offen sein. Wir gehen daher zu der von $\mathcal{E}$ erzeugten Topologie über:

Definition E4C. Die *Produkttopologie* $\mathcal{T}$ auf $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ wird erzeugt von

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^* \mathcal{T}_\lambda = \big\{\, p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \,\big|\, \lambda \in \Lambda,\ U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \,\big\} \\ &= \Big\{ \prod\nolimits_{\mu\in\Lambda} U_\mu \,\Big|\, U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda, \text{ und } U_\mu = X_\mu \text{ für alle } \mu \neq \lambda \Big\}. \end{aligned}$$

Nach Satz D6F erhalten wir eine Basis $\mathcal{B}$ für $\mathcal{T}$ mittels endlicher Schnitte:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \big\{\, p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \,\big|\, n \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda,\ U_{\lambda_1} \in \mathcal{T}_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n} \in \mathcal{T}_{\lambda_n} \,\big\} \\ &= \Big\{ \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \,\Big|\, U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \text{ für endlich viele } \lambda \in \Lambda, \text{ und } U_\lambda = X_\lambda \text{ sonst} \Big\} =: \bigotimes\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda \end{aligned}$$

Diese erfüllt die Basisaxiome (B1–2) aus D6C und definiert so die Topologie

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \big\{ \textstyle\bigcup \mathcal{S} \,\big|\, \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \big\} = \big\{\, W \subset X \;\big|\; &\forall x \in W \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda \\ &\exists U_{\lambda_1} \in \mathcal{T}_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n} \in \mathcal{T}_{\lambda_n} \ : \ x \in p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \subset W \,\big\}. \end{aligned}$$

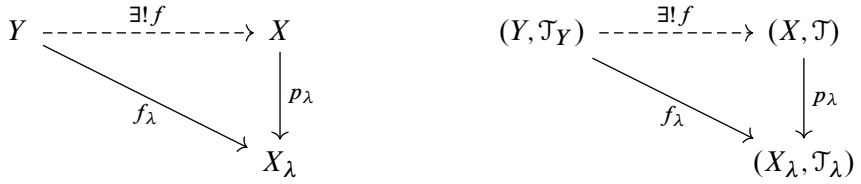
Wir nennen $(X, \mathcal{T}) =: \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ den *Produktraum* der Familie $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

In Worten: Eine Menge $W \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ist genau dann offen in der Produkttopologie, wenn W um jeden Punkt $x \in W$ eine offene Menge der Basis $\mathcal{B}$ enthält, das heißt, es gilt $x \in p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \subset W$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und geeignete $U_{\lambda_1} \in \mathcal{T}_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n} \in \mathcal{T}_{\lambda_n}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§E4c. Universelle Abbildungseigenschaft des Produktraumes.** Wir definieren den ☜ Produktraum $(X,\mathcal{T}) = \prod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$, indem wir das kartesische Produkt $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ der Trägermengen mit einer naheliegenden Topologie $\mathcal{T}$ ausstatten. Hier zahlt sich unsere solide Vorbereitung zu Basen und Erzeugendensystemen aus (D6F).

Ist dies die „richtige“ Topologie auf X? Wir lassen uns hierbei von den kanonischen Abbildungen leiten: Jede der Projektionen $p_\lambda : X \to X_\lambda$ soll stetig sein. Die Produkttopologie leistet genau das und erfreut sich folgender universeller Abbildungseigenschaft:



✍ **Satz E4D.** *Sei $(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume.* ✍

Die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ist die gröbste Topologie, für die jede der kanonischen Projektionen $p_\lambda : (X,\mathcal{T}) \to (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda) : x \mapsto x_\lambda$ mit $\lambda\in\Lambda$ stetig ist.

UAE: Zu jeder Familie $(f_\lambda : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen existiert genau eine stetige Abbildung $f : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X,\mathcal{T})$ mit $p_\lambda \circ f = f_\lambda$ für alle $\lambda\in\Lambda$.

BEWEIS. Klar nach Definition der Menge X und der Produkttopologie $\mathcal{T}$ (E4C, E1F). □

☞ **Bemerkung E4E.** Für jede Toplogie $\mathcal{T}$ auf $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ sind äquivalent: ☜

(1) Die Topologie $\mathcal{T}$ ist die Produkttopologie auf X (E4C).
(2) Die Topologie $\mathcal{T}$ ist die gröbste, für die alle $p_\lambda : X \to X_\lambda$ stetig sind.
(3) Genau dann ist eine gegebene Abbildung $f : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X,\mathcal{T})$ stetig, wenn für jedes $\lambda\in\Lambda$ die Komposition $p_\lambda \circ f : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$ stetig ist.
(4) Zu jeder Familie $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen $f_\lambda : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X,\mathcal{T})$ mit $p_\lambda \circ f = f_\lambda$ für alle $\lambda\in\Lambda$.
(5) Für jeden topologischen Raum $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ist die folgende Abbildung eine Bijektion:

$$\mathscr{C}\Big(Y, \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\Big) \xrightarrow{\sim} \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(Y,X_\lambda) \;:\; f \mapsto (p_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Eigenschaft (2) ist die Umformulierung der der Produkttopologie (1) als initiale Topologie $\mathcal{T} = \tau\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^*\mathcal{T}_\lambda\big)$ der Familie $(p_\lambda : (X,\mathcal{T}) \to (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$. Die Äquivalenzen (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) sind Umformulierungen dieser Abbildungseigenschaft. Die besonders bequeme und wichtige Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (4) haben wir als Satz E4D hervorgehoben.

Die Produkttopologie wird durch jede dieser fünf Eigenschaften charakterisiert! Wir können sie explizit angeben (E4C) durch die Konstruktion $\mathcal{T} = \tau\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^*\mathcal{T}_\lambda\big)$ oder implizit durch die universelle Eigenschaft (E4D) der Familie $(p_\lambda : (X,\mathcal{T}) \to (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ bezüglich aller anderen Familien $(f_\lambda : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen.

Beide Sichtweisen sind nützlich und leisten uns gute Dienste. Es ist allgemein hilfreich, Topologien soweit möglich durch ihre Abbildungseigenschaften zu charakterisieren. Das trifft in besonderem Maße für die Produkttopologie zu: Die interne Sichtweise E4C ist konkret aber mühsam, die externe Sichtweise E4D hingegen elegant und bequem.

Bemerkung E4F. Endliche Produkte $(X,\mathcal{T}) = (X_1,\mathcal{T}_1)\times\cdots\times(X_n,\mathcal{T}_n)$ sind besonders einfach zu beschreiben. Als Indexmenge wählen wir hier $\Lambda = \{1,2,\dots,n\}$. Auf der Produktmenge $X = X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ erhalten wir die Produkttopologie $\mathcal{T}$ gemäß E4C wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= p_1^*\mathcal{T}_1 \cup\cdots\cup p_n^*\mathcal{T}_n = \left\{ p_i^{-1}(U_i) \;\middle|\; i=1,\dots,n,\ U_i\in\mathcal{T}_i \right\}\\ &= \left\{ X_1\times\cdots\times X_{i-1}\times U_i\times X_{i+1}\times\cdots\times X_n \;\middle|\; i=1,\dots,n,\ U_i\in\mathcal{T}_i \right\},\\ \mathcal{B} &= \left\{ p_1^{-1}(U_1)\cap\cdots\cap p_n^{-1}(U_n) \;\middle|\; U_1\in\mathcal{T}_1,\dots,U_n\in\mathcal{T}_n \right\}\\ &= \left\{ U_1\times\cdots\times U_n \;\middle|\; U_1\in\mathcal{T}_1,\dots,U_n\in\mathcal{T}_n \right\} = \mathcal{T}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{T}_n.\end{aligned}$$

Allgemeiner und flexibler: Aus Basen $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{T}_1,\dots,\mathcal{B}_n\subset\mathcal{T}_n$ erhalten wir die Basis

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_n = \left\{ U_1\times\cdots\times U_n \;\middle|\; U_1\in\mathcal{B}_1,\dots,U_n\in\mathcal{B}_n \right\} \subset \mathcal{B}\subset\mathcal{T}.$$

Diese erfüllt die Basisaxiome (B1–2) aus D6C und definiert so die Topologie

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \left\{ \bigcup\mathcal{S} \;\middle|\; \mathcal{S}\subset\mathcal{B} \right\}\\ &= \left\{ W\subset X \;\middle|\; \forall x\in W\ \ \exists U_1\in\mathcal{B}_1,\dots,U_n\in\mathcal{B}_n\ :\ x\in U_1\times\cdots\times U_n\subset W \right\}.\end{aligned}$$

In Worten: Eine Menge $W\subset X_1\times\cdots\times X_n$ ist genau dann offen in der Produkttopologie, wenn sie um jeden Punkt $(x_1,\dots,x_n)\in W$ einen offenen Quader $U_1\times\cdots\times U_n$ enthält.

Genau dann ist eine Abbildung $f:(Y,\mathcal{T}_Y)\to(X,\mathcal{T})$ in den Produktraum stetig, wenn jede Komposition $f_k = p_k\circ f:(Y,\mathcal{T}_Y)\to(X_k,\mathcal{T}_k)$ stetig ist, für $k=1,\dots,n$.

Beispiel E4G. Der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_n)$ hat $\mathcal{B}_n = \{\prod_{i=1}^n]a_i,b_i[\mid a_i<b_i \text{ in } \mathbb{R}\}$ als eine Basis. Wir erhalten $\mathcal{B}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_n$, also $(\mathbb{R}^1,\mathcal{T}_1)\times\cdots\times(\mathbb{R}^1,\mathcal{T}_1) = (\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_n)$.

Eine Funktion $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_n)$ ist genau dann stetig, wenn jede Koordinatenfunktion $f_k = p_k\circ f: X\to\mathbb{R}$ stetig ist. Umgekehrt gelesen heißt das: Stetige Funktionen $f_1,\dots,f_n: X\to\mathbb{R}$ induzieren die stetige Funktion $f: X\to\mathbb{R}^n: x\mapsto(f_1(x),\dots,f_n(x))$.

Warnung: Dies gilt nicht umgekehrt für $\mathbb{R}^n\to X$, siehe das Gegenbeispiel E4K.

Bemerkung E4H. Wird $\mathcal{T}_\lambda$ erzeugt von $\mathcal{E}_\lambda\subset\mathcal{T}_\lambda$, für jedes $\lambda\in\Lambda$, so wird $\mathcal{T}$ erzeugt von

$$\mathcal{E} = \bigcup\nolimits_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^*\mathcal{E}_\lambda = \left\{ \prod\nolimits_{\mu\in\Lambda} U_\mu \;\middle|\; U_\lambda\in\mathcal{E}_\lambda \text{ für ein } \lambda\in\Lambda, \text{ und } U_\mu = X_\mu \text{ für alle } \mu\neq\lambda \right\}.$$

Hat $\mathcal{T}_\lambda$ als Basis $\mathcal{B}_\lambda\subset\mathcal{T}_\lambda$, für jedes $\lambda\in\Lambda$, so hat $\mathcal{T}$ als Basis die endlichen Zylinder

$$\mathcal{B} = \bigotimes\nolimits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda = \left\{ \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; U_\lambda\in\mathcal{B}_\lambda \text{ für endlich viele } \lambda\in\Lambda, \text{ und } U_\lambda = X_\lambda \text{ sonst} \right\}.$$

Die Endlichkeitsbedingung ist wesentlich: Wir fordern $U_\lambda = X_\lambda$ für fast alle $\lambda\in\Lambda$. Dies ergibt sich zwangsläufig aus unserem Wunsch, dass $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie sein soll, die alle Projektionen p_λ stetig macht. Ohne die Endlichkeitsbedingung erhalten wir anstelle der Produkttopologie die sogenannte *Boxtopologie*, mit ganz anderen Eigenschaften (§E4f).

Beispiel E4I. Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \prod_{x\in\mathbb{R}}\mathbb{R} = \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : x\mapsto f(x)\}$ ist die Produkttopologie (E4C) die Topologie der punktweisen Konvergenz (D4A). Gleiches gilt allgemein für $\mathbb{R}^I$.

Hier ist $p_i:\mathbb{R}^I\to\mathbb{R}: f\mapsto f(i)$ die Auswertung an der Stelle i. Für $U\in\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ist $p_i^{-1}(U) = \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(i)\in U\}$; dies erzeugt die Produkttopologie (E4C). Andererseits ist $U(f;i,\varepsilon) = p_i^{-1}(B(f(i),\varepsilon))$; dies erzeugt die Topologie der punktweisen Konvergenz (D4A). Beide Topologien stimmen also überein.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Bemerkung.** Jede der Projektionen $p_\lambda : X \to X_\lambda$ ist stetig und zudem offen: Jede offene Menge $W \subset X$ ist Vereinigung von offenen Mengen der Form $p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$; jede davon wird auf eine offene Menge in X_λ abgebildet, also auch ihre Vereinigung W. ☜

☞ **Bemerkung.** Im Allgemeinen ist p_λ nicht abgeschlossen: Als Beispiel betrachten wir die Projektion $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x$. Die Hyperbel $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\,\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, aber ihr Bild $p(A) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$. ☜

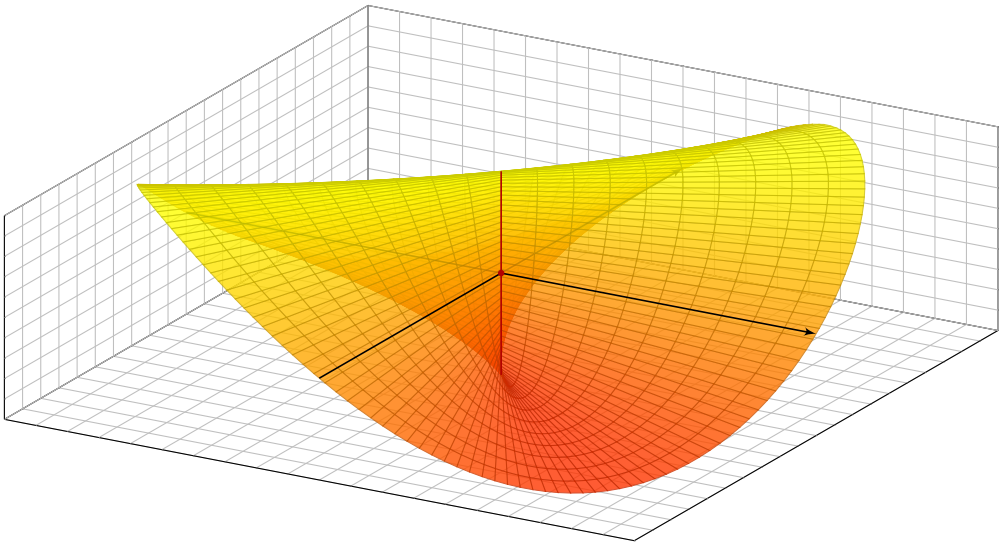
☞ **Übung E4J.** (1) Konstruieren Sie Homöomorphismen $(f,g) : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^{n-1}$. ☜

(2) Konstruieren Sie Zylinderkoordinaten $(f,g) : \mathbb{R}^3 \smallsetminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

(3) Konstruieren Sie allgemein $(f,g) : \mathbb{R}^{n+m} \smallsetminus (\{(0,\dots,0)\} \times \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^m$.

Hierbei seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$. Wir identifizieren wie üblich $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.

✻ **E4J.** (3) Wir nutzen die Homöomorphismen $\mathbb{R}^{n+m} \smallsetminus (\{0\} \times \mathbb{R}^m) = (\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^m$:
$f : \mathbb{R}^{n+m} \smallsetminus (\{0\} \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^m : (x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m) \mapsto (|x|, x/|x|, y)$,
$g : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m} \smallsetminus (\{0\} \times \mathbb{R}^m) : (r,s;y_1,\dots,y_m) \mapsto (rs,y)$.



☞ **Übung E4K.** Das folgende Beispiel warnt vor einem weitverbreiteten Missverständnis: Die universelle Abbildungseigenschaft des Produktes $X \times Y$ betrifft Abbildungen $Z \to X \times Y$ in das Produkt *hinein*, nicht Abbildungen $X \times Y \to Z$ aus dem Produkt *heraus*. ☜

(1) Ist $f : X \times Y \to Z$ stetig, so auch für jedes $y \in Y$ die partielle Abbildung $f(-,y) : X \to Z : x \mapsto f(x,y)$ und für $x \in X$ ebenso $f(x,-) : Y \to Z : y \mapsto f(x,y)$.

(2) Skizzieren Sie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \operatorname{Im} \frac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y} = 2xy/(x^2+y^2)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$. Ist f partiell stetig? Ist f stetig? Für die Stetigkeit von $f : X \times Y \to Z$ ist partielle Stetigkeit notwendig aber nicht hinreichend!

✻ **E4K.** (1) Die partielle Abbildung $f(-,y)$ ist stetig, denn sie ist die Komposition der stetigen Abbildung $X \to X \times \{y\} : x \mapsto (x,y)$ mit $f : X \times Y \to Z$. Ebenso ist die partielle Abbildung $f(x,-)$ stetig.

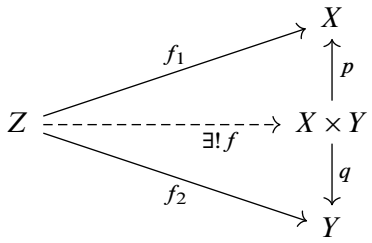
(2) Die obige Skizze zeigt f; wir nutzen hier am besten Polarkoordinaten. Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto f(x,y)$ stetig: Für $y \neq 0$ ist das klar, für $y = 0$ auch. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $y \mapsto f(x,y)$ stetig: Für $x \neq 0$ ist das klar, für $x = 0$ auch. Dennoch ist f nicht stetig! Auf der Diagonalen $x = y$ gilt $f(x,y) = 1$ für $x = y \neq 0$ aber $f(0,0) = 0$. Auf der Gegendiagonalen $x = -y$ gilt $f(x,-y) = -1$ für $x = -y \neq 0$ aber $f(0,0) = 0$.

☞ **Bemerkung E4L.** Für $\Lambda = \emptyset$ erhalten wir den einpunktigen Raum $(X = \{e\}, \mathcal{T} = \mathfrak{P}X)$. ☜

Für $\Lambda = \{1\}$ erhalten wir als Produktraum $(X, \mathcal{T}) = (X_1, \mathcal{T}_1)$ den einzigen Faktor.

Für $\Lambda = \{1, 2\}$ erhalten wir den Produktraum $(X, \mathcal{T}) = (X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2)$ wie in E4A.

Zu je zwei stetigen Abbildungen $f_1 : Z \to X$ und $f_2 : Z \to X$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : Z \to X \times Y$ mit $p \circ f = f_1$ und $q \circ f = f_2$.



Diese universelle Abbildungseigenschaft stiftet die Bijektion

$$\Phi : \mathscr{C}(Z, X \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(Z, X) \times \mathscr{C}(Z, Y) : f \mapsto (\, p \circ f,\, q \circ f \,).$$

Dies entspricht Zerlegung in und Zusammensetzung aus Koordinatenfunktionen.

In exponentieller Schreibweise $B^A := \mathscr{C}(A, B)$ abgekürzt gilt demnach:

$$(X \times Y)^Z \xrightarrow{\sim} X^Z \times Y^Z : f \mapsto (\, p \circ f, q \circ f \,)$$

Bis auf Homöomorphie ist das Produkt zweier Räume X, Y kommutativ:

$$X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X : (x, y) \mapsto (y, x).$$

Jeder einpunktige Raum $\{a\}$ fungiert als neutrales Element:

$$\begin{array}{ccccc} X \times \{a\} & \xleftarrow{\sim} & X & \xrightarrow{\sim} & \{a\} \times X, \\ (x, a) & \longleftarrow & x & \longmapsto & (a, x). \end{array}$$

Das Produkt ist zudem distributiv über die Summe:

$$\Big[\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\Big] \times \Big[\coprod_{\mu \in M} Y_\mu\Big] \xrightarrow{\sim} \coprod_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} X_\lambda \times Y_\mu,$$
$$((\lambda, x), (\mu, y)) \mapsto ((\lambda, \mu), (x, y))$$

Für dreifache Produkte gilt Assoziativität vermöge folgender Homöomorphismen:

$$\begin{array}{ccccc} (X \times Y) \times Z & \xleftarrow{\sim} & X \times Y \times Z & \xrightarrow{\sim} & X \times (Y \times Z), \\ ((x, y), z) & \longleftarrow & (x, y, z) & \longmapsto & (x, (y, z)). \end{array}$$

Hier gilt statt Gleichheit „=“ jeweils nur ein (kanonischer und natürlicher) Homöomorphismus „≅“. Die Stetigkeit folgt jeweils leicht aus obiger Konstruktion der Produkttopologie E4F, oder noch leichter aus der universellen Abbildungseigenschaft E4D!

Wir identifizieren fortan diese dreifachen Produkte mittels der kanonischen Homöomorphismen. Die Konstruktion der paarweisen Produkte $X \times Y$ verallgemeinert sich dann per Induktion auf endliche Produkte $X_1 \times \cdots \times X_n$. Klammerung und Reihenfolge spielen dabei keine Rolle (bis auf kanonische Homöomorphie). Unsere Definition E4C dehnt dies aus auf beliebige, eventuell unendliche Familien topologischer Räume.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§E4d. Kanonische und weitere nützliche Abbildungen.** Zu Summen und Produkten ☜ halten wir einige einfache aber hilfreiche Beobachtungen fest:

Übung E4M. Für jede Bijektion $\varphi : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda$ gilt das allgemeine Kommutativgesetz:

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_{\varphi(\lambda)} : \qquad (\varphi(\lambda), x) \leftrightarrow (\lambda, x)$$

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} X_{\varphi(\lambda)} : \qquad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \leftrightarrow (x_{\varphi(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$$

Für jede Zerlegung $\Lambda = \coprod_{i\in I} \Lambda_i$ gilt das allgemeine Assoziativgesetz:

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \coprod_{i\in I}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda_i} X_\lambda\Big) : \qquad ((i,\lambda), x) \leftrightarrow (i, (\lambda, x))$$

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{i\in I}\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda_i} X_\lambda\Big) : \qquad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \leftrightarrow ((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_i})_{i\in I}$$

Für $\Lambda = \prod_{i\in I} \Lambda_i$ gilt das allgemeine Distributivgesetz:

$$\prod_{i\in I}\Big(\coprod_{\lambda_i\in\Lambda_i} X_{\lambda_i}\Big) \cong \coprod_{\lambda\in\Lambda}\Big(\prod_{i\in I} X_{\lambda_i}\Big) : \qquad (\lambda_i, x_{\lambda_i})_{i\in I} \leftrightarrow ((\lambda_i)_{i\in I}, (x_{\lambda_i})_{i\in I})$$

Diese Abbildungen und ihre Inversen sind stetig, also Homöomorphismen. *Hinweis:* Es ist oft vorteilhaft, und hier besonders, die universellen Abbildungseigenschaften zu nutzen.

Übung E4N. Sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie nicht-leerer topologischer Räume.

(1) Jede der Inklusionen $i_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ist eine Einbettung, für $K \subset \Lambda$ ebenso $i_K : \coprod_{\lambda\in K} X_\lambda \hookrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Diese ist sowohl offen als auch abgeschlossen.
(2) Jede der Projektionen $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \twoheadrightarrow X_\lambda$ ist eine Identifizierung, für $K \subset \Lambda$ ebenso $p_K : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \twoheadrightarrow \prod_{\lambda\in K} X_\lambda$. Diese ist offen aber i.A. nicht abgeschlossen.

Es gibt zu Summe und Produkt auch viele nützliche Abbildungen, die nicht kanonisch sind, sondern von willkürlichen Wahlen abhängen, etwa von Fußpunkten $a_\lambda \in X_\lambda$:

(3) Für $K \subset \Lambda$ sei $s_K : \prod_{\lambda\in K} X_\lambda \hookrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : (x_\lambda)_{\lambda\in K} \mapsto (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit $x_\lambda = a_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda \smallsetminus K$. Dies ist eine Einbettung mit Retraktion p_K, also $p_K \circ s_k = \mathrm{id}$.
(4) Für $K \subset \Lambda$ wählen wir $a \in \coprod_{\lambda\in K} X_\lambda$ und definieren $r_K : \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \twoheadrightarrow \coprod_{\lambda\in K} X_\lambda$ durch $f(x) = x$ falls $x \in \coprod_{\lambda\in K} X_\lambda$ und $f(x) = a$ sonst. Dies ist eine Identifizierung mit Schnitt i_K, also $r_K \circ i_K = \mathrm{id}$.

Übung E4O. Sind $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ für $\lambda \in \Lambda$ stetige Abbildungen, dann auch

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda : \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda : \qquad (\lambda, x) \mapsto (\lambda, f_\lambda(x)),$$

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda : (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto (f_\lambda(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}.$$

(1) Sind alle $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ Einbettungen, so auch $\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ und $\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$.
(2) Sind $p : X \twoheadrightarrow A$ und $q : Y \twoheadrightarrow B$ Identifizierungen, so muss $p \times q : X \times Y \to A \times B$ keine Identifizierung sein. Als Beispiel betrachte man $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ und $q = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

§E4e. Konvergenz in Produkten. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn koordinatenweise Konvergenz $p_i(x_n) \to p_i(a)$ für jedes $i = 1,\dots,n$ vorliegt. Entsprechendes gilt für alle Produkträume:

Satz E4P. *Sei $(X,\mathcal{T}) = \prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i)$ ein Produktraum.*

(1) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert genau dann gegen x in $(X,\mathcal{T})$, wenn jede Bildfolge $(p_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $(X_i,\mathcal{T}_i)$ gegen $p_i(x)$ konvergiert.
(2) Ein Netz $(x_n)_{n\in N}$ in X konvergiert genau dann gegen x in $(X,\mathcal{T})$, wenn jedes Bildnetz $(p_i(x_n))_{n\in N}$ in $(X_i,\mathcal{T}_i)$ gegen $p_i(x)$ konvergiert.
(3) Ein Filter $\mathscr{F}$ auf X konvergiert genau dann gegen x in $(X,\mathcal{T})$, wenn jeder Bildfilter $p_i(\mathscr{F}) = \{\, p_i(F) \mid F \in \mathscr{F} \,\}$ auf $(X_i,\mathcal{T}_i)$ gegen x_i konvergiert.

BEWEIS. (2) „⇒“: Jede Projektion $p_i : X \to X_i$ ist stetig nach Konstruktion der Produkttopologie. Aus $(x_n)_{n\in N} \to x$ in X folgt also $(p_i(x_n))_{n\in N} \to p_i(x)$ in X_i.

„⇐“: Es gelte $(p_i(x_n))_{n\in N} \to p_i(x)$ in X_i. Sei $x \in W \in \mathcal{T}$. Nach Definition der Produkttopologie enthält W eine Menge der Form $\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_i)$ mit $J \subset I$ endlich und $x_i \in U_i \in \mathcal{T}_i$. Für jedes $i \in J$ existiert $m_i \in N$ sodass $p_i(x_n) \in U_i$ für alle $n \in N_{\geq m_i}$. Da J endlich ist, existiert $m \in N$ mit $m \geq m_i$ für $i \in J$. Für $n \geq m$ gilt dann $x_n \in \bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_i) \subset W$.

(3) „⇒“: Jede Projektion $p_i : X \to X_i$ ist stetig nach Konstruktion der Produkttopologie, also gilt $p_i(\mathscr{U}_x) \supset \mathscr{U}_{x_i}$ dank D8O. Aus $\mathscr{F} \supset \mathscr{U}_x$ folgt demnach $p_i(\mathscr{F}) \supset \mathscr{U}_{x_i}$.

„⇐“: Es gelte $p_i(\mathscr{F}) \supset \mathscr{U}_{x_i}$ für jedes $i \in I$. Nach Definition der Produkttopologie ist

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \bigcap\nolimits_{i\in J} p_i^{-1}(U_i) \;\middle|\; J \subset I \text{ endlich und } U_i \in \mathscr{U}_{x_i} \right\}$$

eine Basis des Umgebungsfilters $\mathscr{U}_x$ in X. Wegen $p_i(\mathscr{F}) \supset \mathscr{U}_{x_i}$ ist jede Umgebung $U_i \in \mathscr{U}_{x_i}$ in $p_i(\mathscr{F})$ enthalten, gilt also $p_i^{-1}(U_i) \in \mathscr{F}$. Damit gilt auch $\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_i) \in \mathscr{F}$ für jede endliche Indexmenge J. Das bedeutet $\mathscr{F} \supset \mathcal{B}_x$, und somit $\mathscr{F} \supset \mathscr{U}_x$. □

§E4f. Boxtopologie. Auf unendlichen Produkten kann man sich viele (mehr oder weniger natürliche) Topologien ausdenken. Wir betrachten hierzu die Boxtopologie, die 1923 von Heinrich TIETZE eingeführt wurde, bevor Andrei TYCHONOFF 1930 die Produkttopologie entwickelte. Letztere setzte sich aufgrund ihrer guten Eigenschaften schnell durch, die Boxtopologie hingegen dient vor allem als exotisches Gegenbeispiel.

Übung E4Q. Sei $(X_i,\mathcal{T}_i)$ ein topologischer Raum für $i \in I$. Auf dem Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ wird die *Boxtopologie* $\mathcal{T}_{\text{box}}$ erzeugt von den Mengen der Form $\prod_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_i$.

(1) Ist I endlich, so stimmen Produkttopologie und Boxtopologie überein. Ist I unendlich und kein Raum $(X_i,\mathcal{T}_i)$ indiskret, dann ist die Boxtopologie echt feiner.
(2) Die Boxtopologie auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist echt feiner als die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Sie ist nicht separabel und erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom.
(3) Da die Boxtopologie sehr viele offene Mengen hat, ist die Konvergenz stark eingeschränkt: In $(\mathbb{R}^\Omega,\mathcal{T}_{\text{box}})$ konvergiert eine Folge $f_n \to f$ genau dann, wenn es eine endliche Menge $I \subset \Omega$ und einen Index $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in I$ sowie $f_n(x) = f(x)$ für alle $n \geq m$ und $x \in \Omega \smallsetminus I$ gilt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E4g. Topologische Eigenschaften von Summen und Produkten. Seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $X\times Y$ ihr Produkt, $F\subset X\times Y$ ein Teilraum.

Übung E4R. Genau dann ist eine Relation $F\subset X\times Y$ eine Abbildung von X nach Y, wenn die Projektion $p:F\to X:(x,y)\mapsto x$ eine Bijektion ist. Genau dann ist $F\subset X\times Y$ eine stetige Abbildung von X nach Y, wenn $p:F\to X$ ein Homöomorphismus ist.

✻ **E4R.** Bijektivität von p bedeutet, zu jedem $x\in X$ existiert genau ein $y\in Y$ mit $(x,y)\in F$, das heißt F ist eine Abbildung. Die Umkehrung gilt ebenso. Ist F stetig, so auch $g:X\to X\times Y$ mit $g(x)=(x,F(x))$. Es gilt $p\circ g=\mathrm{id}_X$ und $g\circ p=\mathrm{id}_F$, also ist p ein Homöomorphismus. Ist umgekehrt p ein Homöomorphismus, so ist $p^{-1}:X\to F:x\mapsto(x,F(x))$ stetig, also auch die Komposition $F=\mathrm{pr}_2\circ p^{-1}:x\mapsto(x,F(x))\mapsto F(x)$.

Übung E4S. Genau dann ist X hausdorffsch, wenn die Diagonale $\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$ in $X\times X$ abgeschlossen ist. (Die Diagonale Δ_X ist der Graph der Identität $\mathrm{id}_X:X\to X$.)

Allgemeiner: Sei $R\subset X\times X$ eine Äquivalenzrelation mit offener Quotientenabbildung $q:X\twoheadrightarrow X/R$. Genau dann ist X/R hausdorffsch, wenn R in $X\times X$ abgeschlossen ist.

✻ **E4S.** Äquivalent sind: (1) Die Diagonale Δ_X ist abgeschlossen in $X\times X$ (2) Das Komplement $(X\times X)\smallsetminus\Delta_X$ offen in $X\times X$. (3) Zu jedem Paar $x\neq y$ in X existieren offene Umgebungen U,V in X mit $U\times V\subset(X\times X)\smallsetminus\Delta_X$, also $U\cap V=\emptyset$.

Der allgemeine Fall verläuft genauso. „⇒“: Da X/R hausdorffsch ist, existieren für $(x,y)\in(X\times X)\smallsetminus R$ disjunkte offene Mengen $U,V\subset X/R$ mit $q(x)\in U$ und $q(y)\in V$. Die Menge $q^{-1}(U)\times q^{-1}(V)$ ist eine offene Umgebung von (x,y) in $X\times X$, und wegen $U\cap V=\emptyset$ gilt $(q^{-1}(U)\times q^{-1}(V))\cap R=\emptyset$.

„⇐“: Seien $q(x),q(y)\in X/R$ zwei verschiedene Punkte, also $(x,y)\in(X\times X)\smallsetminus R$. Da R in $X\times X$ abgeschlossen ist, existieren offene Umgebungen $U,V\subset X$ mit $(x,y)\in U\times V\subset(X\times X)\smallsetminus R$. Somit gilt $q(U)\cap q(V)=\emptyset$. Da q offen ist, sind $q(U)$ und $q(V)$ offene Umgebungen von $q(x)$ und $q(y)$.

Übung E4T. Im Folgenden sei Y hausdorffsch.

(1) Ist $f:X\to Y$ stetig, so ist die Teilmenge $f\subset X\times Y$ abgeschlossen.
(2) Sind $f,g:X\to Y$ stetig, so ist $\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$ abgeschlossen in X.
(3) Aus $f|_A=g|_A$ auf einer Menge $A\subset X$ folgt $f|_{\overline{A}}=g|_{\overline{A}}$ auf dem Abschluss.
(4) Ist die Abbildung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}):f\mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ injektiv? surjektiv?

✻ **E4T.** (1) Man zeigt dies wie in der vorigen Übung E4S oder benutzt diese. Ist $f:X\to Y$ stetig, so auch $g:X\times Y\to Y\times Y$ mit $g(x,y)=(f(x),y)$. Dank E4S $f=g^{-1}(\Delta_Y)$ abgeschlossen in $X\times Y$.

(2) Die Abbildung $h:X\to Y\times Y$ mit $h(x)=(f(x),g(x))$ ist stetig. Dank der vorigen Übung E4S ist Δ_Y in $Y\times Y$ abgeschlossen. Somit ist die Urbildmenge $h^{-1}(\Delta_Y)=\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$ abgeschlossen in X.

(3) Die Menge $h^{-1}(\Delta_Y)=\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$ ist abgeschlossen in X und umfasst A, also auch $\overline{A}$.

(4) Injektivität folgt aus (3). Nicht jede stetige Funktion $\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ lässt sich stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen (E1O).

Übung E4U. (1) Ein Produkt $\prod_{i\in I}X_i$ bzw. eine Summe $\coprod_{i\in I}X_i$ topologischer Räume ist hausdorffsch, wenn dies für alle X_i der Fall ist. Gilt auch die Umkehrung?

(2) Ein abzählbares Produkt $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ bzw. Summe $\coprod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ ist erst- bzw. zweitabzählbar, wenn dies für alle X_i der Fall ist. Gilt auch die Umkehrung?

Seien X und Y topologische Räume sowie $A\subset X$ und $B\subset Y$ Teilmengen.

(3) Es gilt $\overline{A\sqcup B}=\overline{A}\sqcup\overline{B}$ und $(A\sqcup B)^\circ=A^\circ\sqcup B^\circ$, also $\delta(A\sqcup B)=\delta A\sqcup\delta B$.
Man zeige an einem Beispiel, dass dies für $A\cup B$ im Allgemeinen nicht gilt.
(4) Es gilt $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$ und $(A\times B)^\circ=A^\circ\times B^\circ$, also $\delta(A\times B)=(\delta A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\delta B)$.
Man veranschauliche diesen Sachverhalt für $A=B=[0,1[$ in $X=Y=\mathbb{R}$.

Allgemeiner seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume, $A_i \subset X_i$, und $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$:

(5) Es gilt $\overline{\prod_i A_i} = \prod_i \overline{A_i}$ aber nur $(\prod_i A_i)^\circ \subset \prod_i A_i^\circ$. Man finde ein Beispiel für $\not\supset$.
(6) Die Produkttopologie auf $\prod_i A_i$ stimmt mit der Teilraumtopologie in X überein.

Zum Vergleich seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume, $A_i \subset X_i$, und $(X, \mathcal{T}) = \coprod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$:

(7) Es gilt $\overline{\coprod_i A_i} = \coprod_i \overline{A_i}$ und $(\coprod_i A_i)^\circ = \coprod_i A_i^\circ$, also $\delta(\coprod_i A_i) = \coprod_i \delta A_i$.
(8) Die Summentopologie auf $\coprod_i A_i$ stimmt mit der Teilraumtopologie in X überein.

✻ **E4U.** (1) und mit $\iota_i : X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ die Inklusion des i–ten Summanden. Angenommen, alle Räume X_i sind hausdorffsch. Für je zwei Punkte $x \neq y$ aus $\prod_{i\in I} X_i$ existiert ein $i \in I$ mit $p_i(x) \neq p_i(y)$. Nun lassen sich $p_i(x)$ und $p_i(y)$ durch disjunkte offene Umgebungen in X_i trennen. Die Urbilder dieser Umgebungen unter p_i sind dann disjunkte offene Umgebungen von x und y in $\prod_{i\in I} X_i$. Für je zwei Punkte $x \neq y$ aus $\coprod_{i\in I} X_i$ gilt $x \in \iota_i(X_i)$ und $y \in \iota_j(X_j)$ mit $i, j \in I$. Ist $i = j$, dann lassen sich die Urbilder von x und y in X_i durch disjunkte offene Umgebungen trennen. Die Bilder dieser Umgebungen unter ι_i sind dann offene disjunkte Umgebungen von x und y, da ι_i offen ist. Gilt $i \neq j$, so sind $\iota_i(X_i)$ und $\iota_j(X_j)$ disjunkte offene Umgebungen von x und y in $\coprod_{i\in I} X_i$.

Die Umkehrung gilt für die Summe: Die Inklusionsabbildungen sind hier immer Einbettungen, d.h. X_i ist homöomorph zu einem Unterraum von $\coprod_{i\in I} X_i$, und Unterräume von Hausdorff–Räumen sind hausdorffsch. Für das Produkt gilt die Umkehrung falls $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$. Für $a = (a_j)_{j\in I} \in \prod_{j\in I} X_j$ lässt sich nämlich jedes X_i in $\prod_{j\in I} X_j$ einbetten durch $f : X_i \to \prod_{j\in I} X_j$ mit $f(x)_j = a_j$ für $j \neq i$ und $f(x)_i = x$.

(2) Sei $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, und für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}_{i,x_i}$ von x_i in X_i mit $X_i \in \mathcal{B}_{i,x_i}$ gegeben. Dann ist $\mathcal{B}_x = \big\{ \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i \mid U_i \in \mathcal{B}_{i,x_i} \text{ und fast alle } U_i = X_i \big\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x in $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Analog erhält man eine abzählbare Basis von $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ aus einer gegebenen Familie von abzählbaren Basen $\mathcal{B}_i$ von X_i mit $X_i \in \mathcal{B}_i$ durch $\mathcal{B} = \big\{ \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i \mid U_i \in \mathcal{B}_i \text{ und fast alle } U_i = X_i \big\}$.

Für $x \in \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ gilt $x \in X_i$ für genau ein $i \in \mathbb{N}$, und jede Umgebungsbasis von x in X_i dank kanonischer Einbettung auch eine Umgebungsbasis von x in $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Aus gegebenen abzählbaren Basen $\mathcal{B}_i$ von X_i für alle $i \in \mathbb{N}$ erhalten wir eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_i \cup \{\emptyset\}$ von $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Die Umkehrung erhalten wir mit dem gleichen Argument wie in (1) für die topologische Summe und nicht-leere topologische Produkte.

(3) Wir zeigen zunächst $(A \sqcup B)^\circ = A^\circ \sqcup B^\circ$. Aus $A^\circ \subset A$ und $B^\circ \subset B$ folgt $A^\circ \sqcup B^\circ \subset A \sqcup B$. Da die linke Seite der letzen Gleichung offen in $X \sqcup Y$ ist, folgt schließlich $A^\circ \sqcup B^\circ \subset (A \sqcup B)^\circ$. Umgekehrt ist X offen in $X \sqcup Y$, daher gilt $(A \sqcup B)^\circ \cap X \subset (A \sqcup B) \cap X = A$. Da die linke Seite der letzen Gleichung offen ist, folgt $(A \sqcup B)^\circ \cap X \subset A^\circ$. Analog zeigt man $(A \sqcup B)^\circ \cap Y \subset B^\circ$ und somit insgesamt $(A \sqcup B)^\circ \subset A^\circ \sqcup B^\circ$.

Statt $\overline{A \sqcup B} = \overline{A} \sqcup \overline{B}$ zeigen wir allgemeiner $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Es gilt $A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$, und da die rechte Seite abgeschlossen ist $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Analog gilt wieder $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, und somit $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Da $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, und die rechte Seite der Gleichung abgeschlossen ist, folgt $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Für $A \cup B$ gilt im Allgemeinen nur $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$, und somit auch nur $\delta(A \cup B) \subset \delta A \cup \delta B$. Dies sieht man etwa für $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, hier ist $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{R} = (A \cup B)^\circ$.

(5) Seien $p_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ die kanonischen Projektionen. Die Menge $\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i\in I} p_i^{-1}(\overline{A_i})$ ist Schnitt abgeschlossener Mengen, also abgeschlossen in X. Daher gilt $\prod_{i\in I} \overline{A_i} \supset \overline{\prod_{i\in I} A_i}$. Sei umgekehrt $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ und $U = \prod_{i\in I} U_i$, mit U_i offen in X_i und fast alle $U_i = X_i$, eine offene Umgebung von x. Wegen $p_i(x) \in \overline{A_i}$ gilt $U_i \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Insgesamt gilt also $U \cap \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Da jede offene Umgebung von x eine solche Umgebung U enthält, gilt $x \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$.

Zu $x \in (\prod_{i\in I} A_i)^\circ$ existiert $U = \prod_{i\in I} U_i$, mit $x \in U \subset \prod_{i\in I} A_i$ sowie U_i offen in X_i und fast alle $U_i = X_i$. Damit gilt nun $U_i \subset A_i$ für alle $i \in I$, woraus $x \in \prod_{i\in I} A_i^\circ$ folgt. Für $I = \mathbb{N}$ sowie $X_i = \mathbb{R}$ und $A_i = [0, 1]$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erhalten wir $\emptyset = (\prod_{i\in I} A_i)^\circ \neq \prod_{i\in I} A_i^\circ =]0, 1[^{\mathbb{N}}$.

(6) Seien $\iota_i : A_i \to X_i$ und $\iota : \prod_i A_i \to \prod_i X_i$ die Inklusionen, sowie $p_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ und $\tilde{p}_i : \prod_j A_j \to A_i$ die Projektionen. Sie sind stetig und erfüllen $\iota_i \circ \tilde{p}_i = p_i \circ \iota$. Die Produkttopologie auf $\prod_i A_i$ ist die initiale Topologie bzgl. $\tilde{p}_i$ und somit bzgl. der Familie $(\iota_i \circ \tilde{p}_i)_{i\in I}$. Die Teilraumtopologie auf $\prod_i A_i$ ist die initiale Topologie bzgl. ι und somit bzgl. der Familie $(p_i \circ \iota)_{i\in I}$. Demnach stimmen beide überein.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E4h. Metrisierung von Produkträumen. Sei $(X,\mathcal{T}) = \prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i)$ das Produkt topologischer Räume $(X_i,\mathcal{T}_i)$. Ist einer der Räume leer, so auch das Produkt: Aus $X_i = \emptyset$ für ein $i \in I$ folgt $X = \emptyset$. Wir können und werden daher im Folgenden meist $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$ annehmen. Besteht einer der Räume $X_i = \{x_i\}$ nur aus einem Punkt, so können wir diesen bei der Produktbildung weglassen, ohne den Produktraum zu verändern: Wir erhalten kanonisch homöomorphe Räume. Wir können fortan also $|X_i| \geq 2$ annehmen.

Beispiel. Auf der Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Topologie der punktweisen Konvergenz *nicht* metrisierbar (D4B). Auf der Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ hingegen ist die Topologie der punktweisen Konvergenz metrisierbar. Allgemein gilt folgendes:

Satz E4v. *Sei $(X,\mathcal{T}) = \prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i)$ das Produkt topologischer Räume $(X_i,\mathcal{T}_i)$. Jeder Raum X_i enthalte mindestens zwei Elemente $x_i \neq x_i'$. Dann sind äquivalent:*

(1) Jeder Faktor $(X_i,\mathcal{T}_i)$ ist metrisierbar, und die Indexmenge I ist abzählbar.
(2) Der Produktraum $(X,\mathcal{T})$ ist metrisierbar.

BEWEIS. „(1) ⇒ (2)“: Für $i \in I$ sei $d_i : X_i \times X_i \to [0,1]$ eine Metrik zur Topologie $\mathcal{T}_i$, notfalls gestutzt (C3L). Da I abzählbar ist, können wir $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen mit $\sum_{i\in I} a_i \leq 1$. Dank Satz D4G wird die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $X = \prod_{i\in I} X_i$ induziert durch die Metrik

$$d \;:\; X\times X \to [0,1] \;:\; (x,y) \mapsto \sum\nolimits_{i\in I} a_i\, d_i(x_i,y_i).$$

„(2) ⇒ (1)“: Wie D1L: Der Raum X_i ist homöomorph zum Teilraum $X_i' = \prod_{j\in I} A_j$ mit $A_i = X_i$ und $A_j = \{x_j\}$ für $j \neq i$. Der Homöomorphismus wird gestiftet durch die (nicht-kanonische) Einbettung $s_i : X_i \to X : x_i \mapsto (x_j)_{j\in I}$, wobei wir in jeder Koordinate $j \in I \smallsetminus \{i\}$ jeweils einen Punkt $x_j \in X_j$ wählen müssen. Die Projektion $p_i : X \to X_i$ hingegen ist kanonisch. Wenn X metrisierbar ist, dann auch jeder Teilraum $X_i' \cong X_i$.

Wie D4B: Ist X metrisierbar, so hat der Punkt $x = (x_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\{\, W_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \{x\}$. Nach Definition der Produkttopologie existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $J_n = \{i_1,\dots,i_k\} \subset I$, sodass $W_n \supset p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k})$ mit $x_{i_1} \in O_{i_1} \in \mathcal{T}_{i_1},\dots,x_{i_k} \in O_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$. Die Vereinigung $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ ist eine abzählbare Menge. Der Schnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ enthält die Menge $\prod_{i\in I} A_i$ mit $A_j = \{x_j\}$ für $j \in J$ und $A_i = X_i \supsetneq \{x_i\}$ für $i \in I \smallsetminus J$. Daher muss $I = J$ gelten, also ist I abzählbar. □

§E4i. Die Cantor–Menge. Zum diskreten Raum $\{0,1\}$ betrachten wir das abzählbare Produkt $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\} = \{\, f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\,\}$ mit Produkttopologie (E4C). Dies ist ebenso die Topologie der punktweisen Konvergenz (D4A). Nach E4V ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ metrisierbar. Dies erinnert an die Konstruktion der Cantor–Menge aus §C6b, und tatsächlich gilt:

Übung E4W. Der Produktraum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist homöomorph zur Cantor–Menge $C \subset [0,1]$ vermöge $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} 2x_k\, 3^{-k-1}$. Ist dies womöglich gar eine Isometrie, wenn wir $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit einer geeigneten Metrik der Form $d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i |x_i - y_i|$ versehen?

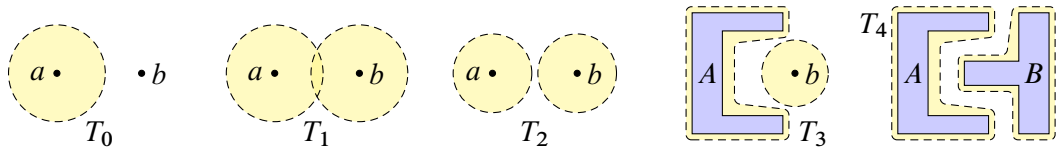
✻ **E4w.** Nach C6D ist $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ eine Bijektion. Es bleibt zu zeigen, dass φ und φ^{-1} stetig sind. Zum Punkt $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n = \{\, x' \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid x_0' = x_0,\dots,x_{n-1}' = x_{n-1}\,\}$. Dies ist eine Umgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von x in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Die Bilder $V_n = \varphi(U_n)$ sind eine Umgebungsbasis $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $y = \varphi(x)$ in C. Es gilt nämlich $V_n \subset C \cap [y - 3^{-n}, y + 3^{-n}] \subset V_{n-1}$. Somit sind φ und φ^{-1} stetig, kurz $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong C$.

Isometrisch gelingt dies nicht: Die Punkte $(0,0,0\dots)$ und $(1,0,0,\dots)$ haben Abstand a_0. Die Punkte $(0,1,0\dots)$ und $(1,0,0,\dots)$ haben größeren Abstand $a_0 + a_1$. In $C \subset [0,1]$ hingegen verringert sich ihr Abstand.

§E5. Trennungsaxiome und Metrisierung

Aus der Diskussion von Konvergenz und Eindeutigkeit von Grenzwerten ist uns bereits das Hausdorff–Axiom D3J bekannt und hat uns seitdem gute Dienste geleistet. Es gibt daneben stärkere und auch schwächere Trennungsaxiome, die wir nun diskutieren wollen.

§E5a. Trennungseigenschaften metrischer Räume. In einem Raum X wollen wir verschiedene Punkte bzw. disjunkte abgeschlossene Mengen trennen. Die folgenden Eigenschaften besagen, dass es hierzu genügend offene Mengen und stetige Funktionen gibt.



Satz E5A. *Jeder metrische Raum (X,d) erfreut sich folgender Trennungseigenschaften:*

T_0: Zu $a \neq b$ in X hat einer eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.
T_1: Zu $a \neq b$ in X hat jeder eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.
Äquivalent hierzu: Für jeden Punkt $a \in X$ ist $\{a\}$ in X abgeschlossen.
T_2: Zu $a \neq b$ in X existieren disjunkte Umgebungen. (Hausdorff–Eigenschaft D3J)
T_3: Zu $A \subset X$ abgeschlossen und $b \in X \setminus A$ existieren disjunkte Umgebungen.
T_4: Zu $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt existieren disjunkte Umgebungen.
T_5: Zu $A, B \subset X$ mit $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ existieren disjunkte Umgebungen.

Ebenso lassen sich Punkte und Mengen durch stetige Funktionen $f : X \to [0,1]$ trennen:

$T_{2\frac{1}{2}}$: Zu $a \neq b$ in X existiert $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$.
$T_{3\frac{1}{2}}$: Zu $A \subset X$ abgeschlossen und $b \in X \setminus A$ existiert f mit $f|_A = 0$ und $f(b) = 1$.
$T_{4\frac{1}{2}}$: Zu $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt existiert f mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$,
$T_{5\frac{1}{2}}$: sogar $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$, genannt eine Urysohn–Funktion *zu A, B.*

BEWEIS. In C2O haben wir T_2 gezeigt. Offensichtlich gilt $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ und $T_5 \Rightarrow T_4$. Dank T_1 sind einpunktige Mengen $\{a\}$ in X abgeschlossen, damit gilt $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$.

Für T_5 sei $U = \{ x \in X \mid d(x,A) < d(x,B) \}$ und $V = \{ x \in X \mid d(x,B) < d(x,A) \}$. Offensichtlich sind diese Mengen disjunkt. Sie sind offen, denn $f(x) = d(x,A) - d(x,B)$ ist stetig (C3N). Schließlich gilt $A \subset U$ und $B \subset V$: Für jedes $a \in A$ gilt $a \notin \overline{B}$ und somit $d(x,A) = 0 < d(x,B)$. Für $b \in B$ gilt entsprechend $x \notin \overline{A}$ und somit $d(x,B) = 0 < d(x,A)$.

Die Bedingung $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ ist unverzichtbar: In $\mathbb{R}$ lassen sich $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht durch Umgebungen trennen. Gleiches gilt für $A = \mathbb{Q}$ und $b = \sqrt{2}$.

Für $T_{5\frac{1}{2}}$ konstruieren wir zu $A, B \neq \emptyset$ explizit folgende Urysohn–Funktion (C3N):

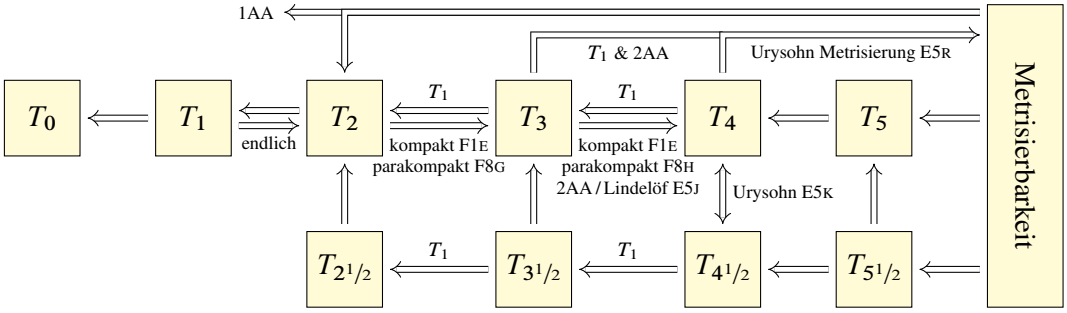
$$f \;:\; X \to [0,1] \;:\; x \mapsto \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

Die Sonderfälle sind leicht: Für $B = \emptyset$ setzen wir $f(x) = \min\{d(x,A), 1/2\}$. Für $A = \emptyset$ setzen wir $f(x) = \max\{1 - d(x,B), 1/2\}$. Für $A = B = \emptyset$ gilt $f(x) = 1/2$ für alle $x \in X$.

Die punktweisen Formulierungen sind Spezialfälle mit $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E5b. Trennungseigenschaften topologischer Räume. Obige Trennungseigenschaften gelten in jedem metrischen Raum, aber nicht in jedem topologischen Raum. Extremes Beispiel: Die indiskrete Topologie erfüllt nicht einmal T_0, T_1, T_2! Um genügend offene Mengen bzw. stetige Funktionen garantieren zu können, fordern wir daher je nach Bedarf die obigen *Trennungsaxiome*. Allgemein gelten hierbei folgende Implikationen:



Trivialerweise gilt $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ sowie $T_5 \Rightarrow T_4$ und $T_{5\frac{1}{2}} \Rightarrow T_{4\frac{1}{2}}$. Mit T_1 sind einpunktige Mengen $\{a\}$ abgeschlossen, also gilt $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$ und $T_{4\frac{1}{2}} \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_{2\frac{1}{2}}$.

Die Implikation $T_{2\frac{1}{2}} \Rightarrow T_2$ und $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$ und $T_{4\frac{1}{2}} \Rightarrow T_4$ folgt mit $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ und $V = f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$. Die Implikation $T_4 \Rightarrow T_{4\frac{1}{2}}$ ist das Lemma von Urysohn (E5K).

Zur Implikation $T_{5\frac{1}{2}} \Rightarrow T_5$ seien $A, B \subset X$ mit $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Nach $T_{5\frac{1}{2}}$ angewendet auf $(\overline{A}, \emptyset)$ bzw. $(\overline{B}, \emptyset)$ existieren $f, g : X \to [0,1]$ mit $f^{-1}(0) = \overline{A}$ und $g^{-1}(0) = \overline{B}$, und es gilt $A \subset U := \{\, x \in X \mid f(x) < g(x) \,\}$ und $B \subset V := \{\, x \in X \mid g(x) < f(x) \,\}$.

Im Allgemeinen gilt $T_1 \not\Rightarrow T_2 \not\Rightarrow T_3 \not\Rightarrow T_4$ und $T_4 \not\Rightarrow T_3 \not\Rightarrow T_2$, wie die Beispiele in §E5d belegen. Ist die Topologie $\mathcal{T}$ endlich, so gilt $T_1 \Rightarrow T_2$. Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, enthält also jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, so gilt $T_2 \Rightarrow T_3$ (F1E) und $T_3 \Rightarrow T_4$ (F1E). Ist allgemeiner X ein Lindelöf–Raum, enthält also jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung, so gilt $T_3 \Rightarrow T_4$ (E5J).

Definition E5B. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *T_i–Raum*, wenn er die obige Eigenschaft T_i hat. Traditionell üblich sind folgende Bezeichnungen für die wichtigsten Fälle:

		T_2	*hausdorffsch / separiert*
T_1	&	T_3	*regulär*
T_1	&	$T_{3\frac{1}{2}}$	*vollständig regulär / Tychonoff*
T_1	&	T_4	*normal*
T_1	&	$T_{4\frac{1}{2}}$	Dies folgt aus normal!
T_1	&	T_5	*vollständig normal*
T_1	&	$T_{5\frac{1}{2}}$	*perfekt normal*

Dank T_1 und dem Lemma von Urysohn (E5K) gelten also die Implikationen perfekt normal $\Rightarrow$ vollständig normal $\Rightarrow$ normal $\Rightarrow$ vollständig regulär $\Rightarrow$ regulär $\Rightarrow$ hausdorffsch.

Bemerkung. Dies sind Forderungen nach Reichhaltigkeit: Jede sichert auf ihre Weise, dass die Topologie genügend offene Mengen hat bzw. genügend stetige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ erlaubt. Sie schränken die möglichen Topologien zunehmend ein, aber doch nicht allzu stark, denn jeder metrische Raum erfüllt all diese Forderungen.

☞ **Bemerkung.** Diese Bezeichnungen sind historisch gewachsen und aufgrund unterschiedlicher Traditionen in der Literatur nicht einheitlich. Auch ich habe mir mit $T_{2\frac{1}{2}}$, $T_{4\frac{1}{2}}$, $T_{5\frac{1}{2}}$ Idiosynkrasien erlaubt. Beim Lesen verschiedener Quellen muss man aufpassen und die Definitionen nachlesen bzw. bei eigener Darstellung die Vereinbarungen wiederholen. ☜

☞ **Übung E5C.** (1) Für jeden topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent: ☜

(a) X ist ein T_1–Raum.
(b) Jede einpunktige Menge $\{a\} \subset X$ ist abgeschlossen.
(c) Jede Menge $A \subset X$ ist der Schnitt all ihrer Umgebungen.

(2) Für jeden topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(d) X ist ein T_2–Raum.
(e) Die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ ist abgeschlossen.
(f) Der Schnitt aller abgeschlossenen Umgebungen von a ist $\{a\}$.

(3) Genau dann ist $(X,\mathcal{T})$ ein T_3–Raum, wenn zu jedem Punkt $a \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis sind. Somit gilt T_3 für jeden Teilraum Y in $(X,\mathcal{T})$.

(4) Genau dann ist $(X,\mathcal{T})$ ein T_4–Raum, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden. Dies vererbt sich auf jeden abgeschlossenen Teilraum Y in $(X,\mathcal{T})$ (aber im Allgemeinen nicht auf beliebige Teilräume).

(5) Genau dann ist $(X,\mathcal{T})$ ein T_5–Raum, wenn jeder Teilraum $Y \subset X$ ein T_4–Raum ist.

(6) Sei $(X,\mathcal{T})$ normal ($T_1\&T_4$). Genau dann existiert $f : X \to [0,1]$ mit $f^{-1}(0) = A$, wenn A abgeschlossen ist und zudem eine G_δ–Menge, also abzählbarer Schnitt offener Mengen (D7H). Somit ist ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ genau dann perfekt normal ($T_1\&T_{5\frac{1}{2}}$), wenn er normal ist und jede abgeschlossene Menge in $(X,\mathcal{T})$ eine G_δ–Menge.

✻ **E5C.** „(a) ⇒ (b)“: Für $x \in X \smallsetminus \{a\}$ existiert dank T_1 eine offene Umgebung, die a nicht enthält. Das Komplement von $\{a\}$ ist also offen. „(b) ⇒ (c)“: Sei $A \subset X$ und $a \notin A$. Nach Voraussetzung ist $X \smallsetminus \{a\}$ eine offene Umgebung von A. „(c) ⇒ (a)“: Seien $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte. Da $\{x\}$ und $\{y\}$ jeweils der Schnitt all ihrer Umgebungen sind, existieren $U, V \subset X$ offen mit $x \in U$, $y \in V$ und $x \notin V$, sowie $y \notin U$.

„(d) ⇔ (e)“: Siehe E4S. „(d) ⇒ (f)“: Zu $x \in X \smallsetminus \{a\}$ existieren $a \in U \in \mathcal{T}$ und $x \in V \in \mathcal{T}$ mit $U \cap V = \emptyset$, also ist $X \smallsetminus V$ eine abgeschlossene Umgebung von a. „(f) ⇒ (d)“: Zu $a \neq x$ existiert eine abgeschlossene Umgebung A von a mit $x \notin A$. Für $U = A^\circ$ und $V = X \smallsetminus A$ gilt dann $a \in U \in \mathcal{T}$ und $x \in V \in \mathcal{T}$ mit $U \cap V = \emptyset$.

(3) „⇒“: Sei X ein T_3–Raum. Zu $a \in W \in \mathcal{T}$ existieren U, V mit $a \in U \in \mathcal{T}$ und $X \smallsetminus W \subset V \in \mathcal{T}$ und $U \cap V = \emptyset$. Für $A := X \smallsetminus V$ gilt $a \in U \subset A$, also ist A eine abgeschlossene Umgebung von a und erfüllt $A \subset W$. „⇐“: Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $a \in X \smallsetminus A$. Damit ist $X \smallsetminus A$ eine offene Umgebung von a. Sei B eine abgeschlossene Umgebung von a mit $B \subset X \smallsetminus A$. Somit sind $B \ni a$ und $X \smallsetminus B \supset A$ disjunkte Umgebungen.

(4) Die Charakterisierung der T_4–Eigenschaft beweist man wörtlich genauso wie (3).

(5) „⇒“: Seien $A, B \subset Y$ abgeschlossen und disjunkt in Y. Seien $\overline{A}$ und $\overline{B}$ die Abschlüsse in X. Wegen $B \subset Y$ und $\overline{A} \cap Y = A$ gilt $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap Y \cap B = A \cap B = \emptyset$. Ebenso gilt $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Damit gibt es disjunkte offene Umgebungen von A und B in X, und somit auch in Y. „⇐“: Seien $A, B \subset X$ mit $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. Die Abschlüsse von A und B im offenen Teilraum $Y := X \smallsetminus (\overline{A} \cap \overline{B})$ sind disjunkt. Nach Voraussetzung ist Y ein T_4–Raum, daher lassen sich A und B trennen durch disjunkte offene Mengen U und V in Y, somit in X.

(6) „⇒“: Für $f : X \to [0,1]$ stetig ist $A = f^{-1}(0)$ abgeschlossen und wegen $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([0,1/n[)$ eine G_δ–Menge. „⇐“: Für $A \subset X$ abgeschlossen mit $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ mit $U_n \subset X$ offen gibt es dank T_4 stetige Funktionen $f_n : X \to [0,1]$ mit $f_n(A) = 0$ und $f_n(X \smallsetminus U_n) = 1$, und $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)/2^n$ definiert eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f^{-1}(0) = A$. Sind $A, B \subset X$ disjunkte abgeschlossene G_δ–Mengen, so gibt es demnach stetige Funktionen $g, h : X \to [0,1]$ mit $g^{-1}(0) = A$ und $h^{-1}(0) = B$. Die Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = g(x)/(g(x)+h(x))$ ist wohldefiniert und stetig und erfüllt $f^{-1}(A) = 0$ und $f^{-1}(1) = B$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§E5c. Ordnungstopologien.** Trennungseigenschaften sind nützlich und hilfreich, ihr ☜ Nachweis kann jedoch kompliziert sein. Wenn Sie eine Herausforderung suchen, versuchen Sie zu beweisen, dass jede Ordnungstopologie alle Trennungseigenschaften T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 erfüllt: Für T_2 ist dies eine leichte Übung (D3L), danach wird es zunehmend kniffliger.

☞ **Beispiel.** Wir versehen $Z = [0,1]^2$ mit der *lexikographischen Ordnung*: $(x,y) < (x',y')$ ☜ bedeutet $x < x'$ oder ($x = x'$ und $y < y'$). Dies ist eine totale Ordnung. Sei $\mathcal{T}$ die zugehörige Ordnungstopologie (D1M). Welche der Trennungsaxiome T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 erfüllt sie?

✍ **Satz E5D.** *Sei $(X,<)$ eine total geordnete Menge und $\mathcal{T}$ die zugehörige Ordnungstopologie (D1M). Dann erfüllt $(X,\mathcal{T})$ alle Trennungsaxiome T_1, T_2, T_3, T_4, T_5.* ✍

☞ BEWEIS. Es gilt T_2: Jede Ordnungstopologie ist separiert (D3L). Insbesondere gilt damit ☜ auch T_1. Wir zeigen im Folgenden T_5, denn dies impliziert T_4 und T_3.

T_5: Seien $A, B \subset X$ Teilmengen mit $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Wir müssen zeigen, dass es disjunkte offene Umgebungen U, V gibt, also $A \subset U \in \mathcal{T}$ und $B \subset V \in \mathcal{T}$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass $A \cup B$ nicht das Maximum oder das Minimum von X enthält; notfalls ersetzen wir X durch $X \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Zu jedem Punkt $a \in A$ wählen wir $p_a, q_a \in X$, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) Es gilt $p_a < a < q_a$ und $]p_a, q_a[\cap B = \emptyset$.
(2) $]p_a, a[= \emptyset$ oder $p_a \in A$ oder ($p_a \in X \smallsetminus B$ und $]p_a, a[\cap A = \emptyset$).
(3) $]a, q_a[= \emptyset$ oder $q_a \in A$ oder ($q_a \in X \smallsetminus B$ und $]a, q_a[\cap A = \emptyset$).

Man prüft leicht nach, dass solche Elemente $p_a, q_a \in X$ tatsächlich existieren. Ausführlich: Bedingung (1) ist erfüllbar wegen $a \in X \smallsetminus \overline{B}$. Für Bedingung (2) müssen wir eventuell p_a an a heranrücken: Im Falle $]p_a, a[= \emptyset$ oder $p_a \in A$ ist nichts zu tun. Falls $]p_a, a[\cap A \neq \emptyset$, so ersetze p_a durch ein Element $p'_a \in]p_a, a[\cap A$. Falls $]p_a, a[\cap A = \emptyset$ aber $]p_a, a[\neq \emptyset$, so ersetze p_a durch ein Element $p'_a \in]p_a, a[$. Damit gilt (2). Für (3) verfahren wir ebenso.

Die Menge $U = \bigcup_{a \in A}]p_a, q_a[$ ist offen und enthält A. Hierzu ist $V = X \smallsetminus \overline{U}$ offen und disjunkt von U. Wir zeigen $B \subset V$, das heißt, zu jedem $b \in B$ existieren $p_b, q_b \in X$ mit $p_b < b < q_b$ und $]p_b, q_b[\cap U = \emptyset$. Wir finden ein geeignetes $p_b \in X$, sodass gilt:

$$U \cap]p_b, b] = \Big(\bigcup_{a \in A}]p_a, q_a[\Big) \cap]p_b, b] = \bigcup_{a < b}]p_a, q_a[\cap]p_b, b] \quad \overset{!}{=} \quad \emptyset$$

(a) Wir nehmen zunächst an, es gibt ein maximales Element $a \in A$ mit $a < b$.
  (i) Im Falle $q_a \in B$ gilt $q_a = b$ und $]a, b[= \emptyset$, und wir setzen $p_b = a$.
  (ii) Der Fall $q_a \in A$ ist unmöglich, sonst wäre $a < q_a < b$ und a nicht maximal.
  (iii) Im verbleibenden Fall $q_a \in X \smallsetminus B$ gilt $a < q_a < b$ und wir setzen $p_b = q_a$.
  Es folgt $U \cap]p_b, b] = \emptyset$, denn für jedes $a' \in A$ mit $a' < a$ gilt $q_{a'} \leq a \leq p_b$.
(b) Es bleibt die Möglichkeit, dass es kein maximales Element $a \in A$ mit $a < b$ gibt. Dank $\overline{A} \cap B = \emptyset$ existiert $p_b \in X$ mit $A \cap]p_b, b] = \emptyset$. Es folgt $U \cap]p_b, b] = \emptyset$: Zu jedem $a \in A$ mit $a < b$ existiert ein $a' \in A$ mit $a < a' < b$; speziell für $q_a \in A$ wählen wir $a' = q_a$. Es gilt dann $q_a \leq a' \leq p_b$, also $]p_a, q_a[\cap]p_b, b] = \emptyset$.

Ebenso finden wir ein geeignetes $q_b \in X$ mit $[b, q_b[\cap U = \emptyset$. Zusammenfassend gilt: Zu jedem $b \in B$ existieren $p_b, q_b \in X$ mit $p_b < b < q_b$ und $]p_b, q_b[\cap U = \emptyset$. Das zeigt $b \in V = X \smallsetminus \overline{U}$ für alle $b \in B$, also $B \subset V$ wie behauptet. □

§E5d. Unabhängigkeit der Trennungseigenschaften. Die folgenden Beispiele belegen, dass über die offensichtlichen Beziehungen hinaus die Trennungseigenschaften T_1, T_2, T_3, T_4 unabhängig sind. Aus T_1 folgt nicht T_2:

Übung E5E. Die Menge $\mathbb{N}$ mit koendlicher Topologie (D1H) erfüllt T_1 aber nicht T_2.

✻ **E5E.** Für zwei verschiedene Punkte $x, y \in \mathbb{N}$ sind $U = \mathbb{N} \smallsetminus \{y\}$ und $V = \mathbb{N} \smallsetminus \{x\}$ offene Umgebungen von x bzw. y mit $y \notin U$ und $x \notin V$, also gilt T_1. Für zwei beliebige Umgebungen U von x und V von y hingegen ist $U \cap V$ stets abzählbar unendlich, und somit niemals leer.

Übung E5F. Die Zariski–Topologie (D5T) auf $\mathbb{C}^n$ mit $n \geq 1$ erfüllt T_1 aber nicht T_2.

(In Dimension $n = 1$ ist dies die koendliche Topologie wie im vorigen Beispiel.)

Hinweis: Für $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ dürfen Sie annehmen oder zeigen: (1) Aus $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$ folgt $f = 0$; die Abbildung $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathscr{C}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ ist injektiv (D5N). (2) Aus $fg = 0$ folgt $f = 0$ oder $g = 0$; das heißt, der Ring $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ ist nullteilerfrei.

✻ **E5F.** Zu $a \in \mathbb{C}^n$ betrachten wir $S = \{X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n\}$ und erhalten als Nullstellenmenge $V(S) = \{a\}$. Somit sind alle einpunktigen Mengen $\{a\}$ abgeschlossen. Das ist äquivalent zu T_1 (E5C).

Hingegen gilt nicht T_2: Zu $a \neq b$ in $\mathbb{C}^n$ seien A, B Zariski–offene Umgebungen, also $a \in A = \mathbb{C}^n \smallsetminus V(I)$ und $b \in B = \mathbb{C}^n \smallsetminus V(J)$ für geeignete Ideale I, J mit $\{0\} \subsetneq I, J \subsetneq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Für die Schnittmenge gilt $A \cap B = \mathbb{C}^n \smallsetminus V(IJ)$. Für $f \in I \smallsetminus \{0\}$ und $g \in J \smallsetminus \{0\}$ gilt $fg \neq 0$ dank (2). Dank (1) existiert ein Punkt $c \in \mathbb{C}^n$ mit $f(c)g(c) \neq 0$, also $c \notin V(IJ)$, somit gilt $c \in A \cap B$.

Aus T_4 folgt nicht T_3, und aus T_4 und T_3 folgt weder T_2 noch T_1:

Übung E5G. Man finde jeweils einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, wobei die Menge X endlich und so klein wie möglich sein soll, sodass gilt:

(1) T_4 aber nicht T_3.
(2) T_4 und T_3 aber nicht T_2.

✻ **E5G.** (1) Das kleinste Beispiel ist der Raum $\{0,1\}$ mit der Sirpiński–Topologie $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$: Abgeschlossene Mengen sind $\emptyset, \{1\}, \{0,1\}$ und darunter sind keine zwei disjunkt, also ist T_4 trivialerweise erfüllt. Andererseits lässt sich $A = \{1\}$ nicht von $b = 0$ durch offene Mengen trennen, also gilt T_3 hier nicht.

(2) Das kleinste Beispiel ist der Raum $\{0,1\}$ mit der indiskreten Topologie $\{\emptyset, \{1,2\}\}$. Abgeschlossene Mengen sind $\emptyset, \{0,1\}$ und beide sind zugleich offen, also gilt T_4. Offensichtlich gilt auch T_3 aber nicht T_2.

Aus T_2 folgt weder T_3 noch T_4:

Übung E5H. Eine Menge $U \subset \mathbb{N}_{\geq 1}$ heiße offen, wenn sie zu jedem Element $a \in U$ eine *arithmetische Progression* $a + b\mathbb{N} = \{a + nb \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$ enthält. Dies ist eine Topologie auf $X = \mathbb{N}_{\geq 1}$ und erfüllt T_2 aber weder T_3 noch T_4. *Hinweis:* Die abgeschlossene Menge $A = \mathbb{N} \smallsetminus (3 + 2\mathbb{N})$ und der Punkt $b = 3$ lassen sich nicht trennen.

(Mehr zum Sieb des Eratosthenes und der Fürstenberg–Topologie auf $\mathbb{Z}$ siehe D6D.)

✻ **E5H.** Die Mengen $a + b\mathbb{N}$ erfüllen die Axiome (B1–2) aus D6C, sie definieren also eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $X = \mathbb{N}_{\geq 1}$, und hierin sind die Mengen $a + b\mathbb{N}$ offen. Seien nun $1 \leq a_1 < a_2$ zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{N}$. Wir wählen $b > 1$ mit $\operatorname{ggT}(a_1, b) = 1$ und $\operatorname{ggT}(a_2, b) = 1$ sowie $b \nmid (a_2 - a_1)$, etwa b prim mit $b > a_2$. Dann sind die Mengen $a_1 + b\mathbb{N}$ und $a_2 + b\mathbb{N}$ disjunkte offene Umgebungen von a_1 und a_2, also gilt T_2. Es reicht zu zeigen, dass T_3 nicht gilt, denn dann kann auch T_4 nicht gelten. Dazu betrachten wir die abgeschlossene Menge $A = X \smallsetminus (3 + 2\mathbb{N}) = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ und den Punkt $b = 3$. Jede offene Umgebung V von b enthält $3 + k\mathbb{N}$ für ein $k \geq 1$ mit $\operatorname{ggT}(3, k) = 1$. Zwecks $V \cap A = \emptyset$ muss k gerade sein. Somit gilt $k \in A$, also enthält jede Umgebung U von A eine offene Menge der Form $k + \ell\mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(k, \ell) = 1$. Aus dem Lemma von Bézout erhalten wir nun $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\ell q = 1 + kp$, also $k + \ell 3q = 3 + k(3p - 1)$. Das zeigt $U \cap V \neq \emptyset$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Aus T_3 folgt nicht T_4: Beispiele dieser Art sind allerdings nicht so leicht zu haben. Wie findet man solche Beispiele? Man kann zunächst versuchen, selbst eins zu konstruieren, oder gleich bei L.A. Steen und J.A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, nachschlagen.

SEPARATION AXIOM CHART

	T_0	T_1	T_2	$T_{2\frac{1}{2}}$	T_3	$T_{3\frac{1}{2}}$	T_4	T_5	Semiregular	Regular	Urysohn	Completely Regular	Normal	Completely Normal	Perfectly Normal
4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
18	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
52	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
53	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
57	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
60	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
63	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
66	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
75	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
78	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
79	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
80	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
81	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
84	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
86	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
88	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
90	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
91	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
92	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
93	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
94	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
100	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
101	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
103	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
105	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
126	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Der hier abgebildeten Übersicht entnehmen wir, dass die dortigen Beispiele 82, 84, 90–94, 103 die gesuchte Eigenschaft haben. Beispiel 84 ist die Sorgenfrey–Ebene (D6Z):

Wir statten $Y = \mathbb{R}^2$ mit folgender Topologie $\mathcal{T}_Y$ aus: Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ ist offen, wenn sie zu jedem $(a,b) \in U$ auch eine Menge $[a,a+\varepsilon[\times [b,b+\varepsilon[$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ enthält. Der so definierte Raum $(Y,\mathcal{T}_Y)$ heißt *Sorgenfrey–Ebene*. Die Menge $S = \mathbb{Q}^2$ ist abzählbar und dicht in $(Y,\mathcal{T}_Y)$. Die Gegendiagonale $D = \{\,(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\,\}$ ist abgeschlossen und diskret in $(Y,\mathcal{T}_Y)$. Die Mengen $A = \{\,(x,-x) \mid x \in \mathbb{Q}\,\}$ und $B = \{\,(x,-x) \mid x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}\,\}$ sind disjunkt und abgeschlossen in $(Y,\mathcal{T}_Y)$, lassen sich aber nicht durch offene Umgebungen trennen. Das ist plausibel, aber keineswegs offensichtlich; man kann es etwa mit dem Satz von Baire (D7C) beweisen. Wir begnügen uns mit folgendem einfacheren Argument.

Erinnerung und Analogie: Für jeden metrischen Raum (X,d) ist separabel äquivalent zu zweitabzählbar (D6N), und damit jede diskrete Teilmenge $D \subset X$ abzählbar (D6J).

Übung E5I. (1) Ist $(X,\mathcal{T})$ ein T_4–Raum und $S \subset X$ abzählbar und dicht, dann ist dank Tietze (E5L) jede abgeschlossene diskrete Teilmenge $D \subset X$ kleiner als $\mathbb{R}$, also $\mathbb{R} \not\hookrightarrow D$.

(2) Anwendung: Erfüllt die Sorgenfrey–Ebene die Trennungseigenschaft T_2? T_3? T_4?

✻ **E5I.** (1) Jede Abbildung $D \to \{0,1\}$ ist stetig, da $D \subset X$ diskret ist. Der Fortsetzungssatz von Tietze (E5L) liefert eine Injektion $\mathscr{C}(D,\{0,1\}) \hookrightarrow \mathscr{C}(X,[0,1])$. Da $S \subset X$ dicht ist, erhalten wir weiters eine Injektion $\mathscr{C}(X,[0,1]) \hookrightarrow \mathscr{C}(S,[0,1]) : f \mapsto f|_S$ (D5L). Aus Bijektionen $[0,1] \cong \mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (B2N) erhalten wir $[0,1]^S \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times S} \cong \mathbb{R}$. Insgesamt besteht also eine Injektion $\{0,1\}^D \hookrightarrow \mathbb{R}$. Wegen $\{0,1\}^{\mathbb{R}} \not\hookrightarrow \mathbb{R}$ folgt $\mathbb{R} \not\hookrightarrow D$. (Die Kontinuumshypothese besagt, dass „D echt kleiner als $\mathbb{R}$“ bereits abzählbar bedeutet; das umgehen wir hier.)

(2) Für die Sorgenfrey–Ebene gelten die Trennungseigenschaften T_2 und T_3 aber nicht T_4: Sie enthält eine abzählbare dichte Menge S und eine diskrete Teilmenge $D \cong \mathbb{R}$; gemäß (1) ist T_4 daher unmöglich.

§E5e. Das Lemma von Tychonoff. Für jeden kompakten Raum gilt $T_2 \Rightarrow T_3$ (F1E) und $T_3 \Rightarrow T_4$ (F1E). Letzteres gilt allgemeiner für jeden Lindelöf–Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn also jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung enthält.

Lemma E5J (Tychonoff). *(1) Sei $(X,\mathcal{T})$ zweitabzählbar. Dann impliziert T_3 bereits T_4.*

(2) Allgemeiner als zweitabzählbar genügt, dass $(X,\mathcal{T})$ ein Lindelöf–Raum ist (D6V).

Der folgende Beweis ist, wie so oft in der Topologie, ebenso elementar wie raffiniert:

BEWEIS. (2) Seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Nach T_3 existieren zu jedem Punkt $a \in A$ offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $B \subset U'_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap U'_a = \emptyset$. Die offene Überdeckung $X = (X \smallsetminus A) \cup \bigcup_{a\in A} U_a$ erlaubt eine abzählbare Teilüberdeckung, also auch $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$. Nach Nummerierung mit $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $\tilde{U}_n, \tilde{U}'_n \in \mathcal{T}$ mit $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{U}_n$ sowie $B \subset \tilde{U}'_n$ und $\tilde{U}_n \cap \tilde{U}'_n = \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $U_n := \bigcup_{k=0}^n \tilde{U}_k$ und $U'_n := \bigcap_{k=0}^n \tilde{U}'_k$ gilt dann $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$ mit $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und $U'_0 \supset U'_1 \supset U'_2 \supset \dots \supset B$.

Durch Vertauschen der Rollen von A und B erhalten wir offene Mengen $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$ mit $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ und $V'_0 \supset V'_1 \supset V'_2 \supset \dots \supset A$ mit $V_n \cap V'_n = \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Schließlich gilt $A \subset U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(U_n \cap V'_n)$, denn jedes $a \in A$ liegt in einem U_n, und wegen $V'_n \supset A$ auch in $U_n \cap V'_n$. Ebenso gilt $B \subset V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(V_n \cap U'_n)$. Nach Konstruktion sind U und V offen und erfüllen $U \cap V = \emptyset$: Wäre $x \in U \cap V$, so existieren $m,n \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_m \cap V'_m$ und $x \in V_n \cap U'_n$. Im Falle $m \le n$ gilt $U'_m \supset U'_n$, also $U_m \cap U'_n \subset U_m \cap U'_m = \emptyset$. Im Falle $m \ge n$ gilt $V'_m \subset V'_n$ also $V_n \cap V'_m \subset V_n \cap V'_n = \emptyset$. □

§E5f. Das Lemma von Urysohn. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir suchen Kriterien für die Existenz stetiger Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit vorgegebenen Eigenschaften, also zur Lösung von Gleichungen im Raum $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$. Solche Fragen treten in Analysis und Geometrie häufig auf, zumeist unter zusätzlichen Bedingungen wie Differenzierbarkeit.

Problem. Gegeben seien Teilmengen $A, B \subset X$ eines topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$. Unter welchen Umständen existiert $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$? (Siehe $T_{4^1/_2}$)

Offenbar muss $A \cap B = \emptyset$ gelten. Aber diese offensichtliche Vorsichtsmaßnahme reicht noch nicht: In $\mathbb{R}$ sind $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ disjunkt, aber die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f|_A = 1$ und $f|_B = 0$ ist nicht stetig. Wir werden zudem Abgeschlossenheit fordern:

Lemma E5K (Urysohn). *Aus T_4 folgt $T_{4^1/_2}$. Ausführlich heißt das: Sei $(X,\mathcal{T})$ ein T_4–Raum, das heißt, zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Mengen $A, B \subset X$ existieren disjunkte offene Umgebungen. Dann ist $(X,\mathcal{T})$ ein $T_{4^1/_2}$–Raum, das heißt, zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Mengen $A, B \subset X$ existiert $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.*

BEWEIS. (1) Sei $r_0 = 0, r_1 = 1, r_2, r_3, \dots$ eine Abzählung einer dichten Teilmenge $D \subset [0,1]$, etwa $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} = (0, 1, {}^1/_2, {}^1/_4, {}^3/_4, {}^1/_8, {}^3/_8, {}^5/_8, {}^7/_8, \dots)$ für $D = [0,1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Dank T_4 gibt es zu $A \subset O$ in $(X,\mathcal{T})$ mit A abgeschlossen und O offen disjunkte offene Umgebungen U von A und V von $X \smallsetminus O$, also $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \smallsetminus V \subset O$.

Zu $r \in D$ konstruieren wir rekursiv $U(r) \in \mathcal{T}$, sodass für $r < s$ stets $\overline{U(r)} \subset U(s)$ gilt. Sei $U(1) := X \smallsetminus B$. Dank T_4 existiert $U(0) \in \mathcal{T}$ mit $A \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \subset U(1) = X \smallsetminus B$. Sind $U(r_0), \dots, U(r_{n-1}) \in \mathcal{T}$ konstruiert, so bestimmen wir $k, \ell < n$ mit $r_k < r_n < r_\ell$ und $r_i \notin]r_k, r_\ell[$ für alle $i < n$. Dank T_4 existiert $U(r_n) \in \mathcal{T}$ mit $\overline{U(r_k)} \subset U(r_n) \subset \overline{U(r_n)} \subset U(r_\ell)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

(2) Wir definieren die ersehnte Funktion $f : X \to [0,1]$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{\, r \in D \mid x \in U(r) \,\} & \text{falls } x \in U(1), \\ 1 & \text{falls } x \in X \smallsetminus U(1). \end{cases}$$

Wegen $A \subset U(0)$ gilt $f|_A = 0$. Wegen $B = X \smallsetminus U(1)$ gilt $f|_B = 1$.

(3) Seien $a, b \in [0,1]$. Die Menge $f^{-1}([0,a[) = \bigcup_{r<a} U(r)$ ist offen. (Die Inklusionen „$\subset$“ und „$\supset$“ sind klar.) Auch $f^{-1}(]b,1]) = \bigcup_{r>b} X \smallsetminus \overline{U(r)}$ ist offen. (Die Inklusionen „$\subset$“ und „$\supset$“ sind klar.) Die Intervalle $[0,a[$ und $]b,1]$ mit $a,b \in [0,1]$ erzeugen die euklidische Topologie auf $[0,1]$, also ist $f : X \to [0,1]$ stetig (D6G). □

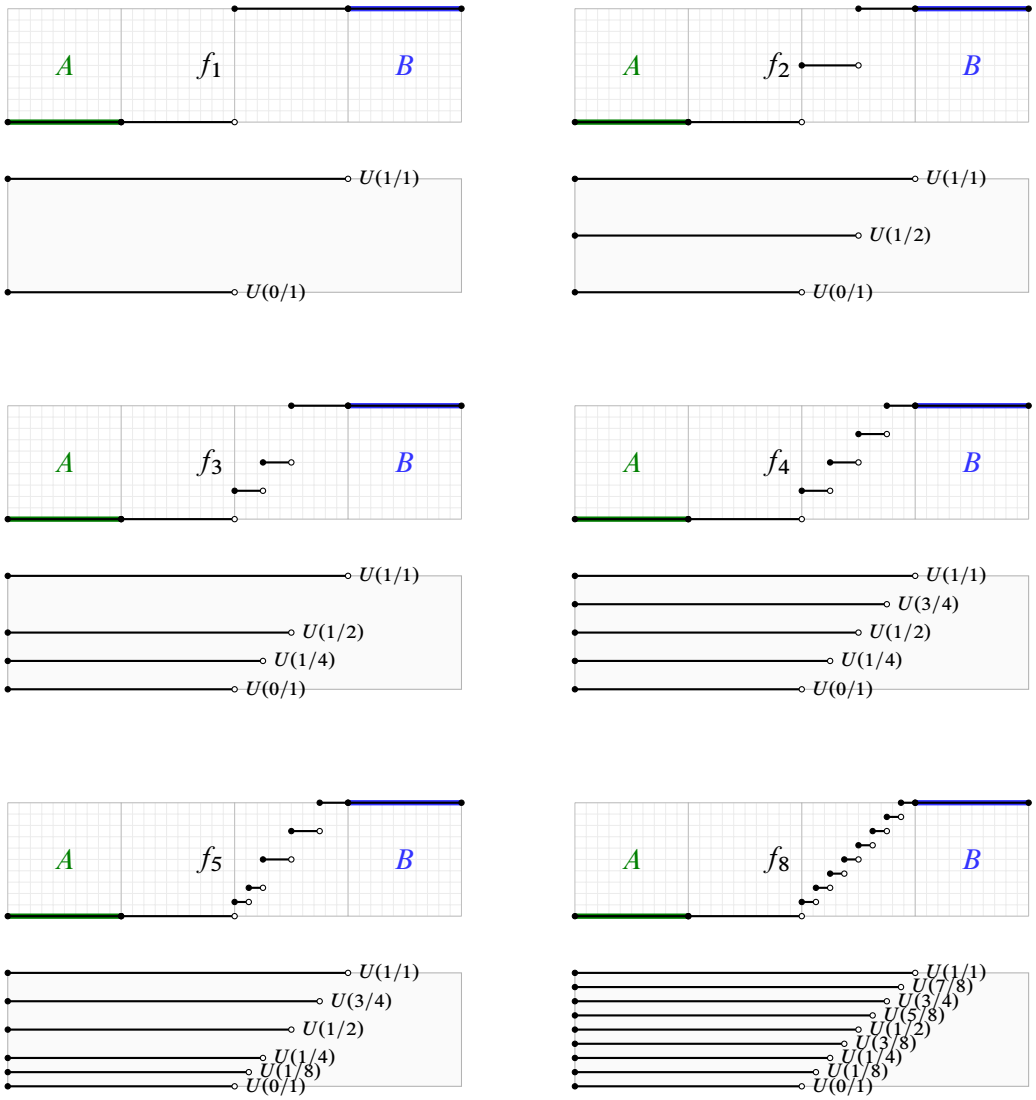


ABBILDUNG E:11. Illustration des Lemmas von Urysohn

☞ **Beispiel.** Zur Illustration skizziere ich Urysohns Konstruktion in einem (banalen aber dekorativen) Spezialfall: In $X = \mathbb{R}$ sind $A =]-\infty,-1]$ und $B = [1,+\infty[$ abgeschlossen. Die offenen Mengen $U(r) = \mathbb{R}_{<r}$ erfüllen die im Beweis gestellten Anforderungen. ☜

$$f_n(x) = \begin{cases} \min\{\, r \in \{r_0, r_1, \dots, r_n\} \mid x \in U(r) \,\} & \text{falls } x \in U(1), \\ 1 & \text{falls } x \in X \smallsetminus U(1). \end{cases}$$

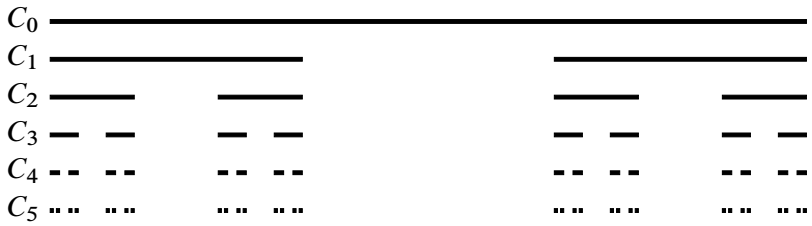
Die Treppenfunktionen f_n sind nicht stetig, aber ihre Sprünge werden immer kleiner. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (monoton fallend) gegen die stetige Funktion $f : X \to [0,1]$. Nach Konstruktion erfüllt sie $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$, wie gewünscht.

☞ **Bemerkung.** Die Zerlegung eines Problems in immer kleinere Teilprobleme ist eine allgemeine Lösungsstrategie. Musterbeispiele hierfür sind das Lemma von Urysohn (E5K) und der Satz von Tietze (E5L), sie liefern zudem einen überraschend erfreulichen Ausgang. Schließlich ist auch die Nutzung von Treppenfunktionen ein allgemein nützlicher Trick. ☜

Bildquelle: wikipedia.org

ABBILDUNG E:12. Die etwa 2000 Jahre alten Reisterrassen von Banaue auf den Philippinen gehören seit 1995 zum UNESCO-Weltkulturerbe.

☞ **§E5g. Der Fortsetzungssatz von Tietze.** Das Lemma von Urysohn (E5K) stellt Funktionen bereit, die hier 0 und dort 1 sind. Das mag auf den ersten Blick noch recht speziell anmuten, doch es bereitet den Weg für sehr vielseitige Konstruktionen stetiger Funktionen, insbesondere den folgenden Fortsetzungssatz von Tietze. ☜



☞ **Beispiel.** Bei der Untersuchung der Cantor–Menge $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \subset [0,1]$ (C6D) nutzen wir eine bemerkenswerte Eigenschaft: *Jede stetige Abbildung $f : C \to \mathbb{R}$ erlaubt stetige Fortsetzungen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.* Da die Cantor–Menge zwar kompliziert ist, aber explizit gegeben, gelingt der Beweis durch eine explizite, wenn auch mühsame Konstruktion. ☜

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Für topologische Räume X und Y stellt sich allgemein die folgende Frage:

Problem. Gegeben sei eine Funktion $f : A \to Y$ auf einer Teilmenge $A \subset X$. Unter welchen Umständen existiert eine stetige Funktion $F : X \to Y$ mit $F|_A = f$?

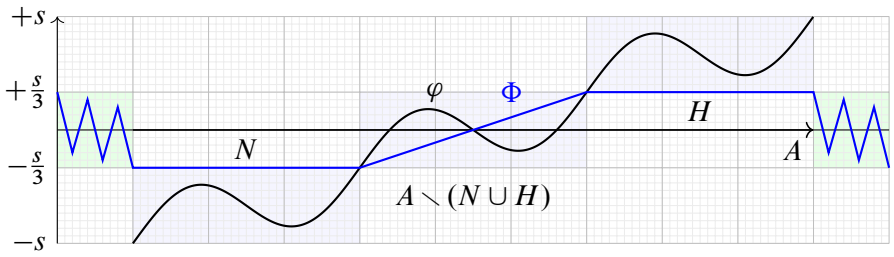
Offenbar muss $f : A \to Y$ stetig sein, denn mit $F : X \to Y$ ist auch die Einschränkung $f = F|_A = F \circ \iota_A$ stetig. Aber diese offensichtliche Vorsichtsmaßnahme reicht noch nicht: Auf $A = \mathbb{Q}$ ist die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2)$ stetig, aber sie erlaubt keine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Zu diesem Fortsetzungsproblem siehe C4L.)

Für reelle Funktionen auf *abgeschlossenen* Teilmengen sieht die Situation besser aus:

Satz E5L (Fortsetzungssatz von Tietze)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_4–Raum und darin $A \subset X$ abgeschlossen. Zu $f : A \to [a,b]$ stetig existiert $F : X \to [a,b]$ stetig mit $F|_A = f$.*

Dem Beweis des Satzes schicken wir folgende Überlegung voraus. Statt das Problem direkt anzugehen, betrachten wir als Zwischenschritt eine stetige *Näherungsfortsetzung*:

Lemma E5M (Näherungsfortsetzung)**.** *Zu $\varphi : A \to [-s,s]$ stetig existiert $\Phi : X \to [-\frac{s}{3}, \frac{s}{3}]$ stetig mit $|\varphi - \Phi|_A \leq \frac{2}{3}s$, also $|\varphi(a) - \Phi(a)| \leq \frac{2}{3}s$ für alle $a \in A$.*



BEWEIS DES LEMMAS. In A sind $N := \varphi^{-1}([-s, -\frac{s}{3}])$ und $H := \varphi^{-1}([\frac{s}{3}, s])$ abgeschlossen, somit auch in X, da A abgeschlossen in X ist. Nach dem Lemma von Urysohn (E5K) existiert $\Phi : X \to [-\frac{s}{3}, \frac{s}{3}]$ stetig mit $\Phi|_N = -\frac{s}{3}$ und $\Phi|_H = \frac{s}{3}$. Es gilt $|\varphi(a) - \Phi(a)| \leq \frac{2}{3}s$ für jedes $a \in A = N \sqcup H \sqcup [A \smallsetminus (N \cup H)]$, nach Fallunterscheidung. □

BEWEIS DES SATZES E5L. Ohne Einschränkung können wir $[a,b] = [-1,1]$ annehmen.
Zu $\varphi_0 = f : A \to [-1,1]$ existiert dank E5M eine Näherungsfortsetzung $\Phi_0 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.
Der Fehler auf A ist somit eine stetige Funktion $\varphi_1 = f - \Phi_0|_A : A \to [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$.
Hierzu wiederum existiert $\Phi_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \cdot \frac{2}{3}$. Rekursiv erhalten wir

$$\Phi_n : X \to [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^n. \tag{E.1}$$

Der verbleibende Fehler auf der Teilmenge A ist

$$\varphi_{n+1} = f - (\Phi_0 + \cdots + \Phi_n)|_A \;:\; A \to [-1,1] \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}. \tag{E.2}$$

Dank (E.1) konvergiert $F_n = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k$ gleichmäßig auf X, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_k|_X \;\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 1.$$

Die Grenzfunktion $F : X \to [-1,1]$ ist demnach stetig (C3Q).
Dank (E.2) gilt $|f - F_n|_A|_A = |\varphi_{n+1}|_A \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \to 0$, also $F|_A = f$. □

§E5h. Ausdehnung. Satz E5L behandelt (technisch bedingt) zunächst nur beschränkte Funktionen $f : A \to [a,b]$ und liefert ebenso beschränkte Fortsetzungen $F : X \to [a,b]$. Diese Beschränkung beseitigen wir nun im zweiten Schritt:

Korollar E5N (Tietze). *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein T_4–Raum und darin $A \subset X$ abgeschlossen.*

(1) Zu $f : A \to \mathbb{R}^n$ stetig existiert $F : X \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $F|_A = f$.
(2) Dasselbe gilt statt $\mathbb{R}^n$ für jeden euklidischen Retrakt $(\iota, r) : Y \leftrightarrows \mathbb{R}^n$.

BEWEIS. (1a) Wir betrachten $n = 1$. Wir nutzen den Homöomorphismus (A1B)

$$h \;:\; \mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]-1,1[\;:\; x \mapsto \frac{x}{1+|x|}.$$

Die Umkehrabbildung hierzu ist gegeben durch

$$h^{-1} \;:\;]-1,1[\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \;:\; y \mapsto \frac{y}{1-|y|}.$$

Die Komposition $\varphi := h \circ f : A \to]-1,1[$ ist stetig. Dank E5L existiert $\Phi : X \to [-1,1]$ stetig mit $\Phi|_A = \varphi$. Nun können wir nicht unbedingt $h^{-1} \circ \Phi$ bilden, denn Φ nimmt eventuell die Werte ± 1 an. Zum Glück ist die Menge $B = \Phi^{-1}(\{-1,1\})$ in X abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Dank E5K existiert $g : X \to [0,1]$ stetig mit $g|_A = 1$ und $g|_B = 0$. Somit ist das Produkt $\Psi = g \cdot \Phi : X \to]-1,1[$ stetig und $\Psi|_A = \varphi$. Schließlich ist $F = h^{-1} \circ \Psi : X \to \mathbb{R}$ stetig und erfüllt $F|_A = f$. Dies löst das Fortsetzungsproblem in Dimension $n = 1$.

(1b) Nun zu $f = (f_1, \ldots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zu $f_k : A \to \mathbb{R}$ existiert eine Fortsetzung $F_k : X \to \mathbb{R}$. Somit ist $F = (F_1, \ldots, F_n) : X \to \mathbb{R}^n$ eine Fortsetzung von f.

(2) Mit $f : A \to Y$ ist $g := \iota \circ f : A \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dank (1) existiert $G : X \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $G|_A = g$. Wir erhalten $F := r \circ G : X \to Y$ stetig mit $F|_A = r \circ g = r \circ \iota \circ f = f$. □

Bemerkung. Tietzes Fortsetzungssatz ist sehr vielseitig einsetzbar, denn alle metrischen Räume sind normal (T_1 und T_4), ebenso alle kompakten Hausdorff–Räume (F1I). Der Satz gilt für den Zielraum $Y = \mathbb{R}^n$ und ebenso für alle euklidischen Retrakte $(\iota, r) : Y \leftrightarrows \mathbb{R}^n$. Das beinhaltet insbesondere den Fall $Y = [a,b] \subset \mathbb{R}$ aus E5L, sodass unsere Formulierung E5N alle Varianten enthält. Weitere typische Beispiele sind die Bälle $Y = \bar{B}(a,r) \subset \mathbb{R}^n$.

BROUWER und LEBESGUE bewiesen die Fortsetzungseigenschaft E5N zunächst nur für euklidische Räume $X = \mathbb{R}^n$, TIETZE (1915) dann für allgemeine metrische Räume (E5Q), und URYSOHN (1925) schließlich für T_4–Räume. Das ist optimal, denn es gilt umgekehrt:

Übung E5O. Erlaubt $(X,\mathcal{T})$ zu jeder stetigen Funktion $g : C \to \mathbb{R}$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge $C \subset X$ eine stetige Fortsetzung $G : X \to \mathbb{R}$, dann ist $(X,\mathcal{T})$ ein T_4–Raum.

✻ **E5O.** Seien $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$. Ihre Vereinigung $C = A \sqcup B$ ist ebenfalls abgeschlossen. Hierauf ist die Funktion $g = \mathbf{1}_B : C \to \mathbb{R}$ stetig. Hierzu existiert $G : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $G|_C = g$. Für $f = \max(\min(G,1),0) : X \to [0,1]$ gilt $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$, wie für $T_{4^1/_2}$ gefordert (E5A).

Auf der anderen Seite ist der Zielraum $\mathbb{R}^n$ wesentlicher Teil des Satzes:

Übung E5P. In $X = [-1,1]$ ist $A = \{-1,1\}$ abgeschlossen. Sei $Y = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Erlaubt die stetige Abbildung $f : A \to Y : a \mapsto a$ eine stetige Fortsetzung $F : X \to Y$?

✻ **E5P.** Nein, denn dann wäre $G = \iota_Y^{\mathbb{R}} \circ F : X \to Y \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $G(\pm 1) = \pm 1$. Nach dem Zwischenwertsatz C3R existiert $x \in X = [-1,1]$ mit $G(x) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E5i. Verschärfungen. Die Konstruktion von Fortsetzungen zu $f : X \supset A \to \mathbb{R}^n$ mit vorgegebenen Eigenschaften ist häufig nützlich und auch von eigenständigem Interesse.

☞ **Beispiel.** In der Analysis betrachten Sie abgeschlossene Mengen $A \subset \mathbb{R}^m$ euklidischer Räume. Ist $f : A \to \mathbb{R}^n$ stetig, so garantiert E5L eine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $F|_A = f$. Der Fortsetzungssatz von Whitney konstruiert zudem ein F, das sogar *analytisch* auf dem Komplement $\mathbb{R}^m \smallsetminus A$ ist. Zudem kann man auf A nicht nur die Funktion f, sondern auch beliebig hohe Ableitungen vorschreiben (in einem geeigneten Sinne). ☜

☞ **Beispiel.** Ein *Dirichlet–Problem* besteht aus einer Differentialgleichung, etwa der Laplace–Gleichung $\Delta u = 0$ mit $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_m^2$ für Funktionen $u \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, und einer Funktion $f : \delta\Omega \to \mathbb{R}^n$ als Randbedingung. Gesucht sind stetige Fortsetzungen $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $u|_{\delta\Omega} = f$, die im Inneren Ω die Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllen. ☜

Bereits für metrische Räume hat das Fortsetzungsproblem interessante Aspekte:

☞ **Übung E5Q.** (1) Sei (X, d) ein metrischer Raum, darin $A \subset X$ abgeschlossen mit $A \neq \emptyset$, und $f : A \to [0,1]$ stetig. Die folgende Formel liefert eine stetige Fortsetzung: ☜

$$F \;:\; X \to [0,1] \;:\; x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ \inf\{\, f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 \;\big|\; a \in A \,\} & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Geeignet skaliert lässt sich so jede *beschränkte* Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ fortsetzen.

(2) Sei $f : A \to \mathbb{R}$ sogar L–lipschitz–stetig. Dann gilt dies auch für jedes $a \in A$ und die zugehörige Funktion $f_a : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f(a) + L \cdot d(a,x)$. Auch die Funktion

$$F \;:\; X \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto \inf\{\, f(a) + L \cdot d(a,x) \;\big|\; a \in A \,\}$$

ist dann L–lipschitz–stetig und erfüllt $F|_A = f$. Zeigen Sie hierzu allgemein:

(3) Sind $f_i : X \to \mathbb{R}$ mit $i \in I$ punktweise beschränkt und L–lipschitz–stetig, so auch

$$g \;:\; X \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto \inf\{\, f_i(x) \;\big|\; i \in I \,\},$$
$$h \;:\; X \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto \sup\{\, f_i(x) \;\big|\; i \in I \,\}.$$

✻ **E5Q.** (1) Die Funktion F ist stetig auf A und auf $X \smallsetminus A$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X \smallsetminus A$ mit Grenzwert $a \in A$. Wir beweisen $F(x_n) \to F(a) = f(a)$. Für $r_n := d(x_n, a)$ gilt $d(x_n, A) \leq r_n$, daher existiert $b_n \in A \cap \bar{B}(a, 2r_n)$ mit $d(x_n, b_n) \leq d(x_n, A) \cdot [1 + 2^{-n} d(x_n, A)]$. Hieraus folgt $F(x_n) \leq f(b_n) + 2^{-n}$ und $b_n \to a$. Umgekehrt können wir das Infimum $F(x)$ so durch $a_n \in A$ annähern, sodass gilt:

$$f(a_n) + \frac{d(x_n, a_n)}{d(x_n, A)} - 1 - 2^{-n} \leq F(x_n) \leq f(b_n) + 2^{-n}.$$

Dann gilt $a_n \in \bar{B}(a, 4r_n)$, denn aus $d(a_n, a) > 4r_n$ folgt $f(a_n) + d(x_n, a_n)/d(x_n, A) - 1 - 2^{-n} > 2$, aber $F(x) \leq f(b_n) + d(x_n, b_n)/d(b_n, A) - 1 \leq 2$. Somit gilt auch $a_n \to a$. Als Grenzwert erhalten wir schließlich:

$$f(a) \leq \liminf \Big[f(a_n) + \frac{d(x_n, a_n)}{d(x_n, A)} - 1 - 2^{-n} \Big] \leq \liminf F(x_n) \leq \limsup F(x_n) \leq \limsup f(b_n) + 2^{-n} = f(a).$$

(2) Es gilt $|f_a(x) - f_a(y)| = L\,|d(a,x) - d(a,y)| \leq L d(x,y)$ dank Dreiecksungleichung. Für $a \in A$ gilt einerseits $F(a) \leq f(a)$. Für jeden anderen Punkt $b \in A$ gilt andererseits $|f(a) - f(b)| \leq L\, d(a,b)$, also $f(a) \leq f(b) + L\, d(a,b)$, und somit $F(a) \geq f(a)$. Das zeigt $F|_A = f$. Der Rest folgt mit (3).

(3) Wir zeigen, dass h lipschitz–stetig ist; für g ist der Beweis analog. Seien $x, y \in X$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $i \in I$, sodass $h(x) \leq \varepsilon + h_i(x)$ gilt. Im Punkt y gilt trivialerweise $h_i(y) \leq h(y)$, also $-h(y) \leq -h_i(y)$. Es folgt $h(x) - h(y) \leq \varepsilon + h_i(x) - h_i(y) \leq \varepsilon + L\, d(x,y)$. Da diese Ungleichung für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, folgern wir $h(x) - h(y) \leq L\, d(x,y)$. Ebenso gilt $h(y) - h(x) \leq L\, d(y,x)$. Wir schließen $|h(x) - h(y)| \leq L\, d(x,y)$.

§E5j. Der Metrisierungssatz von Urysohn. Jede Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ auf X induziert eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, aber umgekehrt entsteht nicht jede Topologie aus einer Metrik. Mathematische Neugier und gelegentliche Anwendung führen zur Frage:

Unter welchen Bedingungen ist eine vorgelegte Topologie $\mathcal{T}$ metrisierbar?

Der folgende schöne Satz beantwortet dies für zweitabzählbare Topologien. Wir verdanken ihn dem russischen Mathematiker Pavel URYSOHN (1898–1924). Er bewies ihn kurz bevor er im Alter von 26 Jahren beim Baden im Atlantik vor der Bretagne ertrank.

Satz E5R (Metrisierungssatz von Urysohn, 1924)**.** *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Dann sind äquivalent:*

(1) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist metrisierbar.
(2) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist regulär, erfüllt also T_1 und T_3.
(3) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist normal, erfüllt also T_1 und T_4.
(4) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ erfüllt die Trennungsaxiome T_1 und $T_{4\frac{1}{2}}$.
(5) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist homöomorph zu einem Teilraum des Hilbert–Würfels $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

BEWEIS. „(5) ⇒ (1)“: Der Hilbert–Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist metrisierbar (E4V) durch

$$d \;:\; [0,1]^{\mathbb{N}} \times [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1] \;:\; (x,y) \mapsto \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} |x_k - y_k|.$$

Ist eine Einbettung $f : X \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$ gegeben, so ist der Raum $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar (D1L) durch die Teilraummetrik $d_X : X \times X \to [0,1] : (a,b) \mapsto d(f(a),f(b))$.

„(1) ⇒ (2), (3), (4)“: Jeder metrische Raum ist sogar perfekt normal (E5A).

„(2) ⇒ (3)“: Dank D6V ist dies ein Spezialfall des Lemmas von Tychonoff (E5J).

„(3) ⇒ (4)“: Dies ist die Aussage des Lemmas von Urysohn (E5K).

„(4) ⇒ (5)“: Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine abzählbare Basis. Sei I die (ebenfalls abzählbare) Menge aller Paare $i = (U,V)$ mit $U,V \in \mathcal{B}$ und $\overline{U} \subset V$. Zu jedem $i \in I$ existiert $f_i : X \to [0,1]$ stetig mit $f_i|_{\overline{U}} = 0$ und $f_i|_{X \smallsetminus V} = 1$. Die Abbildung $f : X \to [0,1]^I : x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$ ist stetig, injektiv, und sogar eine Einbettung. Das Nachrechnen gelingt dank Lemma E5S. □

§E5k. Einbettung in Produkte. Satz E5R nutzt folgendes Einbettungslemma. Es ist leider etwas technisch, aber auch für sich genommen ein nützliches Kriterium:

Lemma E5S. *Sei $F = (f_i)_{i\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_i : (X,\mathcal{T}) \to (X_i,\mathcal{T}_i)$.*

(1) Die Abbildung $f : X \to \prod_{i\in I} X_i$ mit $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$ ist stetig.
(2) Genau dann ist f injektiv, wenn F alle Punkte von X trennt, also zu $a \neq b$ in X ein Index $i \in I$ existiert mit $f_i(a) \neq f_i(b)$.
(3) Die Abbildung $f : X \to f(X)$ ist offen, wenn F alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ von Punkten $b \in X \smallsetminus A$ trennt, also ein $i \in I$ existiert mit $f_i(b) \notin \overline{f_i(A)}$.

Gelten alle drei Bedingungen, so ist f eine Einbettung.

BEWEIS. (1) Dies ist die universelle Abbildungseigenschaft des Produkts (E4D).

(2) Dies ist klar, denn $(f_i(a))_{i\in I} = (f_i(b))_{i\in I}$ bedeutet $f_i(a) = f_i(b)$ für alle $i \in I$.

(3) Sei $U \in \mathcal{T}$ und $A = X \smallsetminus U$. Zu jedem $b \in U$ existiert ein $i \in I$ mit $f_i(b) \notin \overline{f_i(A)}$. Demnach ist $f(X) \smallsetminus \overline{f(A)}$ eine offene Umgebung von $f(b)$ in $f(X)$ und liegt in $f(U)$: In $f(X)$ ist die Menge $f(U)$ Umgebung jedes ihrer Punkte, also offen (D3C). □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Bemerkung.** Die Bedingungen des Lemmas sind im Beweis von Satz E5R erfüllt: Zu $A \subset X$ abgeschlossen und $b \in X \smallsetminus A$ existiert V mit $b \in V \in \mathcal{B}$ und $V \cap A = \emptyset$. Damit ist $X \smallsetminus V$ abgeschlossen und $b \notin X \smallsetminus V$, also existieren U, W mit $b \in U \in \mathcal{B}$ und $X \smallsetminus V \subset W \in \mathcal{T}$ und $U \cap W = \emptyset$. Wir erhalten $b \in U \subset \overline{U} \subset X \smallsetminus W \subset V$. Für das Paar $i = (U, V) \in I$ haben wir demnach $f_i(b) = 0$ und $f_i|_A = 1$. Die obigen Bedingungen (2–3) sind somit erfüllt und bescheren uns die Einbettung $f : X \to [0,1]^I : x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}$. ☜

✍ **§E5l. Metrisierung.** Zusammenfassend halten wir zur Metrisierbarkeit fest: ✍

$$T_2 \text{ \& 1AA} \quad \Longleftarrow \quad \text{Metrisierbarkeit} \quad \Longleftarrow \quad T_1 \text{ \& } T_3 \text{ \& 2AA}$$

Damit haben wir sehr einfache, notwendige und hinreichende Kriterien: Vorgelegt sei ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$. Jeder metrische Raum ist hausdorffsch und erstabzählbar; ist unser Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht hausdorffsch oder nicht erstabzählbar, so ist er sicher nicht metrisierbar. Sind die offensichtlichen Hindernisse T_2 und 1AA erst einmal ausgeräumt, so wollen wir nachweisen, dass unser Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar ist. Dies gelingt mit den hinreichenden Kriterien T_1 und T_3 und 2AA. Die folgende Übung zeigt ein schönes Beispiel.

☞ **Übung E5T.** Aus lokal euklidisch, hausdorffsch und zweitabzählbar folgt metrisierbar: ☜

(1) Jeder lokal euklidische Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt T_1.
(2) Es gibt Gegenbeispiele ohne T_2 (E2E). Gilt zudem T_2, so folgt T_3 und sogar $T_{3\frac{1}{2}}$.
Hinweis: Diese Konstruktion nutzt Kompaktheit (§F1) an entscheidender Stelle.
(3) Es gibt Gegenbeispiele ohne 2AA. Gilt zudem 2AA, so ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar.

✻ **E5T.** (1) Zu $a \neq b$ in X existiert U mit $a \in U \in \mathcal{T}$ und $\varphi : (U, a) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, 0)$. Im Falle $b \notin U$ ist alles klar. Im Falle $b \in U$ gilt $r := |\varphi(b)| > 0$, und $U' := \varphi^{-1}(B(0,r))$ erfüllt $a \in U' \in \mathcal{T}$ und $U' \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ sowie $b \notin U'$.

(2) Gegenbeispiel: Die Gerade mit doppeltem Usprung (E2E) ist lokal euklidisch aber nicht hausdorffsch.

Zu $A \subset X$ abgeschlossen und $b \in X \smallsetminus A$ existiert U mit $b \in U \in \mathcal{T}$ und $\varphi : (U, b) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, 0)$. Wir können $U \cap A = \emptyset$ annehmen: Andernfalls ist $U \cap A \neq \emptyset$ abgeschlossen in U, also $A' = \varphi(U \cap A)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Dank $0 \notin A'$ gilt $r := d(0, A') > 0$, und $U' := \varphi^{-1}(B(0,r))$ erfüllt $b \in U' \in \mathcal{T}$ und $U' \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ sowie $U' \cap A = \emptyset$. Wir ersetzen unsere erste Wahl U durch die bessere Wahl U' und haben so $U \cap A = \emptyset$.

Wir nutzen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \max\{0, 1 - |x|\}$ mit kompaktem Träger $\mathbb{D}^n$ (F1O). Zu $f_1 := g \circ \varphi : U \to [0,1]$ ist der Träger $K = \varphi^{-1}(\mathbb{D}^n)$ ebenfalls kompakt (F1J). Im Hausdorff–Raum $(X, \mathcal{T})$ ist K abgeschlossen (F1G); das wäre falsch ohne T_2, siehe Gegenbeispiel! Wir betrachten $f_2 : X \smallsetminus K \to [0,1] : x \mapsto 0$. Dank Verklebesatz (E1P) ist $f = f_1 \cup f_2$ stetig und erfüllt $f|_A = 0$ und $f(b) = 1$.

(3) Ein naives Gegenbeispiel ist $X = Y \times \mathbb{R}^n$ mit Y überabzählbar diskret. Ein zusammenhängendes Beispiel ist die lange Gerade F9K Ist $(X, \mathcal{T})$ hingegen lokal euklidisch, zweitabzählbar (etwa dank E1T) und hausdorffsch, so gilt T_3 dank (2), und wir können den Metrisierungssatz E5R von Urysohn anwenden.

☞ **Bemerkung.** Der Hilbert–Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, denn die Produkttopologie wird erzeugt von der abzählbaren Familie $p_k^{-1}(]a,b[)$ wobei $k \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq a < b \leq 1$, und dies führt zu einer abzählbaren Basis (D6F). Für metrische Räume ist zweitabzählbar äquivalent zu separabel (D6O); tatsächlich ist $[0,1]_{\mathbb{Q}}{}^{(\mathbb{N})}$ in $[0,1]^{\mathbb{N}}$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Daher ist jeder Teilraum $X \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ metrisierbar, zudem zweitabzählbar und separabel. Der Hilbert–Würfel spielt somit die Rolle eines universellen metrischen Raumes: Jeder separable metrisierbare Raum lässt sich hierin einbetten. ☜

☞ **Bemerkung.** Der Metrisierungssatz von Urysohn (E5R) fordert explizit das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Im Beweis nutzen wir es zweimal, für „(2) ⇒ (3)“ und für „(4) ⇒ (5)“. Es ist zur Metrisierung jedoch nicht notwendig, genaueres formuliert Satz E5U. ☜

☞ **§E5m. Charakterisierung der Metrisierbarkeit nach Bing–Nagata–Smirnov.** Der ☜ Metrisierungssatz E5R von Urysohn liefert eine präzise und elegante Antwort auf die Metrisierbarkeitsfrage. Die angegebenen Bedingungen sind zugleich notwendig und hinreichend. Wir haben hierzu allerdings nur „kleine“ Räume zugelassen, da wir zusätzlich das zweite Abzählbarkeitsaxiom voraussetzen. Das bedeutet, dass die Topologie nicht allzu groß ist (D6I). Man kann dies weglassen und allgemein fragen, wann Metrisierbarkeit gilt.

Eine Mathematikergeneration nach Urysohn wurde sein Werk vollendet, indem hinreichende und notwendige Bedingungen zur Metrisierbarkeit formuliert und bewiesen wurden. Ich füge sie hier zur Information an, für Beweise verweise ich auf Dugundji und Engelking.

Satz E5U (Metrisierbarkeitssatz von Bing–Nagata–Smirnov 1950–51)**.**
Für jeden topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ sind äquivalent:

(1) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist metrisierbar.
(2) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist regulär (T_1 & T_3), und $\mathcal{T}$ erlaubt eine σ–lokal-endliche Basis $\mathcal{B}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{B}(k)$, d.h. jede Familie $\mathcal{B}(k)$ ist lokal-endlich: Zu jedem Punkt $x\in X$ existiert eine Umgebung $U\in\mathcal{T}$, die nur endlich viele Mengen aus $\mathcal{B}(k)$ schneidet.
(3) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist regulär, und die Topologie $\mathcal{T}$ erlaubt eine σ–diskrete Basis $\mathcal{B}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{B}(k)$, d.h. jede Familie $\mathcal{B}(k)$ ist diskret: Zu jedem Punkt $x\in X$ existiert eine Umgebung $U\in\mathcal{T}$, die höchstens eine Menge aus $\mathcal{B}(k)$ schneidet.

Dies sind zugegeben recht technische Bedingungen, die sich aber natürlich aus den Notwendigkeiten der oben formulierten Charakterisierung ergeben.

Beispiel. Erfüllt $(X,\mathcal{T})$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{B}=\{B_k\mid k\in\mathbb{N}\}$. Somit ist $\mathcal{B}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{B_k\}$ sowohl σ–lokal-endlich als auch σ–diskret. Der Metrisierungssatz von Urysohn (E5R) folgt somit als Spezialfall sowohl aus (2) als auch aus (3). Ich habe oben dem direkten (und einfachen) Beweis den Vorzug gegeben.

Der Metrisierbarkeitssatz E5U ist ein Höhepunkt der mengentheoretischen Topologie. Bedingung (2) wurde formuliert und bewiesen von Jun-iti NAGATA, *On a necessary and sufficient condition of metrizability*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A. Math. 1 (1950) 93–100, und unabhängig von Yurii SMIRNOV, *A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space*, Doklady Akad. Nauk SSSR 77 (1951) 197–200. Bedingung (3) wurde davon unabhängig formuliert und bewiesen von R.H. BING, *Metrization of topological spaces*, Canadian J. Math. 3 (1951) 175–186.

Bemerkung. In vielen Anwendungen geht es um die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$, um ihre Teilräume und deren Quotienten, sowie um ihre nahen Verwandten wie Mannigfaltigkeiten. Hier ist die zusätzliche Bedingung des zweiten Abzählbarkeitsaxioms ein gangbarer Kompromiss und eine willkommene Hilfe: Die allermeisten Beispiele erfüllen diese Bedingung und viele wichtige Sätze benötigen sie. Wir werden daher Mannigfaltigkeiten als zweitabzählbar voraussetzen, und somit als metrisierbar (E5T). Daher begnüge ich mich ruhigen Gewissens mit dem Metrisierungssatz von Urysohn (E5R) und nenne den allgemeineren Satz von Bing–Nagata–Smirnov (E5U) nur als Ausblick. Zum Einstieg in die Topologie möchte ich diese Vertiefung hier nicht verfolgen und würde sie auch nicht empfehlen. Wenn Sie später mehr topologische Erfahrung haben, und auch gesteigerte Ansprüche, dann können Sie sich anhand der angegebenen Lehrbücher gerne in diesen Themenkreis vertiefen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E6. Geometrisch-analytische Anwendungen

§E6a. Hat das Dual eine Wahl? Zu jedem Raum X haben wir den Raum $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$ als „Dualraum“. Zu jeder stetigen Abbildung $\varphi : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y definieren wir ihre duale Abbildung durch

$$\varphi^* \,:\, \mathscr{C}(Y,\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(X,\mathbb{R}) \,:\, f \mapsto f \circ \varphi.$$

Für die Inklusion $\varphi : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ zum Beispiel ist $\varphi^*(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ die Einschränkung. In diesem Falle ist φ^* injektiv, aber nicht surjektiv. (Wissen Sie noch warum? Siehe D5L!)

Übung E6A. Im Folgenden seien X und Y normal (T_1 und T_4). Zeigen Sie:

(1) Genau dann ist φ^* injektiv, wenn $\varphi(X)$ dicht in Y ist.
(2) Ist die duale Abbildung φ^* surjektiv, dann ist φ injektiv.
(3) Ist φ injektiv und abgeschlossen, dann ist φ^* surjektiv.

✻ **E6A.** (1) „⇐“: Sei $\varphi(X)$ dicht in Y, also $\overline{\varphi(X)} = Y$. Seien $f,g \in \mathscr{C}(Y,\mathbb{R})$ mit $\varphi^*(f) = \varphi^*(g)$, ausführlich $f(\varphi(x)) = g(\varphi(x))$ für alle $x \in X$, also gilt $f|_{\varphi(X)} = g|_{\varphi(X)}$. Nach D5L gilt $f = g$, also ist φ^* injektiv.

„⇒“: Sei $\varphi(X)$ nicht dicht in Y: Es gibt $y \in Y \setminus \overline{\varphi(X)}$. Da Y normal ist, ist $\{y\}$ abgeschlossen (T_1), also sind $\{y\}$ und $\overline{\varphi(X)}$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von Y. Nach dem Lemma von Urysohn (E5K) existiert eine stetige Abbildung $f : Y \to \mathbb{R}$ mit $f(y) = 1$ und $f(\overline{\varphi(X)}) = \{0\}$. Sei $g : Y \to \mathbb{R}$ die Nullabbildung. Dann ist $f \neq g$, aber nach Konstruktion $\varphi^*(f) = f \circ \varphi = 0$ und $\varphi^*(g) = g \circ \varphi = 0$, das heißt, φ^* ist nicht injektiv.

(2) Sei φ^* surjektiv. Zu $a \neq b$ in X existiert $g \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ mit $g(a) = 0$ und $g(b) = 1$ dank T_1, T_4 und E5K. Da φ^* surjektiv ist, gibt es $f \in \mathscr{C}(Y,\mathbb{R})$ mit $g = \varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Wäre $\varphi(a) = \varphi(b)$, so folgte $0 = g(a) = f(\varphi(a)) = f(\varphi(b)) = g(b) = 1$, ein Widerspruch. Also gilt $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Daher ist φ injektiv.

(3) Sei φ injektiv und abgeschlossen. Dann ist $\overline{\varphi} : X \to \varphi(X)$ ein Homöomorphismus. Sei $\psi : \varphi(X) \to X$ die inverse Abbildung; sie ist ebenfalls stetig. Zu $g \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ ist $g \circ \psi : Y \supset \varphi(X) \to \mathbb{R}$ stetig. Da φ abgeschlossen ist, ist insbesondere $\varphi(X)$ abgeschlossen in Y, somit existiert nach dem Fortsetzungssatz von Tietze (E5N) eine stetige Fortsetzung $f : Y \to \mathbb{R}$ von $g \circ \psi$. Für $x \in X$ gilt $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)) = g(\psi(\varphi(x))) = g(x)$, also $\varphi^*(f) = g$. Somit ist φ^* surjektiv.

Bemerkung. Diese Dualisierung ist eine topologische Entsprechung der Dualisierung aus der Linearen Algebra: Zu jedem K–Vektorraum V erhalten Sie den dualen K–Vektorraum $V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$ aller K–linearen Abbildungen $\varphi : V \to K$, also aller *Linearformen*.

Zu jeder K–linearen Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ erhalten Sie die zugehörige duale Abbildung $\varphi^* \in \mathrm{Hom}_K(V^*,U^*)$ auf den Linearformen durch

$$\varphi^* \,:\, \mathrm{Hom}_K(V,K) \to \mathrm{Hom}_K(U,K) \,:\, f \mapsto f \circ \varphi.$$

Für $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ gilt $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* : W^* \to U^*$. Genau dann ist φ^* surjektiv / rechtsinvertierbar, wenn φ injektiv / linksinvertierbar ist. Genau dann ist φ^* injektiv, wenn φ surjektiv ist. Zu jeder Basis $B = (v_1,\dots,v_n)$ von V erhalten Sie die duale Basis $B^* = (v_1^*,\dots,v_n^*)$ von V^* durch $v_i^*(v_i) = 1$ und $v_i^*(v_j) = 0$ für $j \neq i$.

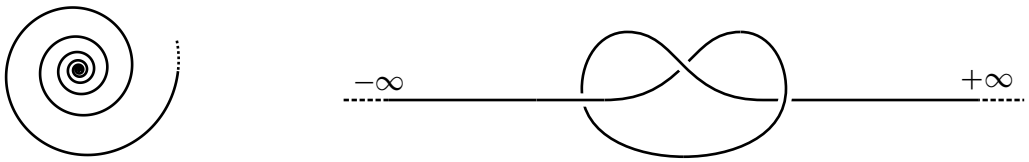
Im endlich-dimensionalen Fall, also $\dim_K(V) < \infty$, stiftet jede Basiswahl einen Isomorphismus $\Psi_B : V \xrightarrow{\sim} V^* : v_i \mapsto v_i^*$, jedoch gibt es keinen kanonischen / natürlichen solchen Isomorphismus. Hingegen gibt es zum Bidual den natürlichen Homomorphismus $V \to (V^*)^* : \varphi \mapsto (\varphi^*)^*$, und für $\dim_K(V) < \infty$ ist dieser ein Isomorphismus.

Für topologische Räume und ihre stetigen Abbildungen können (und werden) wir ähnliche Ideen nutzen. Wir untersuchen dies hier für $\mathscr{C}(-,\mathbb{R})$ in Analogie zu $\mathrm{Hom}_K(-,K)$. Injektivität und Surjektivität führen dann auf interessante topologische Eigenschaften.

§E6b. Retrakte. Eine *Retraktion* des Raums X auf einen Teilraum $A \subset X$ ist eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$, also $r(a) = a$ für alle $a \in A$, somit eine Linksinverse zur Inklusion $\iota_A : A \hookrightarrow X$, denn $r \circ \iota_A = \mathrm{id}_A$. Wir nennen $A \subset X$ einen *Retrakt*.

Beispiele. • In jedem Raum X ist $A = \{a\}$ ein Retrakt vermöge $r = \mathrm{const}_X^a$.
• Im Raum $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ein Retrakt vermöge $r(x) = x/|x|$.

Allgemein nennen wir eine stetige Abbildung $\iota : A \to X$ einen Retrakt, wenn eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$ existiert. Insbesondere ist ι dann eine Einbettung (E2I). Zum Beispiel ist $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Retrakt vermöge $r(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$.



Übung E6B. (1) Hat $X = \mathbb{R}^n$ zweipunktige Retrakte $A = \{a, b\} \subset X$?
(2) Jeder Retrakt $A \subset X$ in einem Hausdorff–Raum X ist abgeschlossen.
(3) Ist im Raum $\mathbb{R}^n$ die Menge $A = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ ein Retrakt? und $B = \mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$?
(4) Ist die logarithmische Spirale $B = \{ \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \mid t \in \mathbb{R} \}$ in $\mathbb{C}$ ein Retrakt?
Ist ihr Abschluss $A = B \cup \{0\}$ in $\mathbb{C}$ ein Retrakt?
(5) Sei $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} A \subset \mathbb{R}^3$ eine Einbettung mit $f(x) = (x, 0, 0)$ für $|x| \geq 1$, etwa wie in obiger Skizze. (Sie ist dann abgeschlossen, siehe F1L.) Ist $A \subset \mathbb{R}^3$ ein Retrakt?
(6) Ist $K \subset \mathbb{R}^m$ ein Retrakt, so auch *jede* abgeschlossene Einbettung $\iota : K \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

✻ **E6B.** (1) Anschaulich ist das unmöglich, da hierbei der zusammenhängende Raum $\mathbb{R}^n$ zerrissen würde. Formal sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-t)a + tb$ der Weg von a nach b. Wir definieren $p : A \to \{0,1\}$ durch $p(a) = 0$ und $p(b) = 1$. Gäbe es eine Retraktion $r : \mathbb{R}^n \to \{a, b\}$, so wäre $f := p \circ r \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ eine stetige Abbildung mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, was dem Zwischenwertsatz C3R widerspricht (Übung E2K).

(2) Für jede Retraktion $r : X \to A$ gilt $A = \{ x \in X \mid x = r(x) \}$. Demnach ist A in X abgeschlossen (D5L).

(3) Eine Skizze führt in diesem einfachen Beispiel direkt zur Lösung: Wir finden die Retraktion $r : \mathbb{R}^n \to A$ mit $r(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\max\{0, x_1\}, 0, \dots, 0)$. Hingegen ist $B \subset \mathbb{R}^n$ kein Retrakt, da nicht abgeschlossen (2).

(4) Wir nutzen die stetigen Abbildungen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(z) = |z|$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to A$ mit $g(0) = 0$ und $g(x) = \exp[(1+\mathrm{i}) \ln x]$ für $x > 0$. Die Komposition $r = g \circ f : \mathbb{C} \to A$ ist stetig und erfüllt $r|_A = \mathrm{id}_A$.

(5) Klar ist zunächst der Fall $f(x) = (x, 0, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Selbst für den skizzierten, sehr einfachen Knoten ist eine explizite Retraktion keineswegs offensichtlich. Zur Parametrisierung $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} A$ sei $g : A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ die Umkehrabbildung. Dank E5N existiert eine stetige Fortsetzung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $G|_A = g$, also $G \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

(6) Zu $K \subset \mathbb{R}^m$ sei $r : \mathbb{R}^m \to K$ stetig mit $r|_K = \mathrm{id}_K$. Sei $\iota : K \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Einbettung, also ein Homöomorphismus auf den abgeschlossenen Teilraum $A = \iota(K) \subset \mathbb{R}^n$. Die Umkehrabbildung $f : A \xrightarrow{\sim} K \subset \mathbb{R}^m$ ist stetig. Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze (E5N) existiert eine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $F|_A = f$. Demnach ist $\rho = r \circ F : \mathbb{R}^n \to K$ eine Retraktion, denn ρ ist stetig und erfüllt $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_K$.

Bemerkung. Für die Gerade $f(x) = (x, 0, 0)$ ist eine Retraktion nicht schwer zu finden. Aber für einen Knoten sieht man zunächst keine Retraktion, vielleicht glaubt man gar nicht daran. Wenn die Phantasie versagt, hilft der Fortsetzungssatz von Tietze! Er garantiert uns die Existenz stetiger Abbildungen, die wir sonst nur mühsam beschaffen können. Wenn Sie zusätzlich Anschauung oder Intuition wollen, so kann ich zwei Geschichten anbieten:

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Physikalische Intuition: Wir denken uns $A = f(\mathbb{R})$ als Draht mit stetiger Temperaturverteilung $g : A \xrightarrow{\sim}]-1,1[$, strikt monoton längs A, zudem zeitlich konstant gehalten. Der umgebende Raum habe anfangs die Temperatur 0. Nun lassen wir die Wärme im $\mathbb{R}^3$ fließen, etwa bis zum Gleichgewicht: In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ herrscht schließlich eine Temperatur $G(x) \in]-1,1[$. In $x \in A$ ist dabei $G(x) = g(x)$ die vorgegebene Temperatur. Damit ist $g^{-1} \circ G : \mathbb{R}^3 \to A$ eine Retraktion. Was beweist das? Noch gar nichts. Aber es ist eine schöne Geschichte. Wie jedes Märchen kann und soll es Ihre Phantasie anregen…

Geometrische Intuition: Ist f stückweise affin (oder glatt), so existiert eine Schlauchumgebung $F : \mathbb{R} \times \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(x,0,0) = f(x)$ und $F(x,y,z) = (x,y,z)$ für $|x| \geq r$. Zudem ist $B = F(\mathbb{R} \times \mathbb{D}^2)$ eine abgeschlossene Umgebung von A in $\mathbb{R}^3$, $F(\mathbb{R} \times \mathbb{B}^2)$ offen und $F(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ der Rand: Hier können wir es explizit herstellen, später können wir es allgemein folgern aus der Invarianz des Gebietes (J7K). Wir konstruieren damit $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: Außerhalb von B setzen wir $G = 0$. Auf B setzen wir $G \circ F(x,y,z) = x(1-y^2-z^2)$. Die Verklebung ist stetig und erfüllt $G \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Was beweist das? Mehr als nötig! Die Konstruktion von F gelingt nur für zahme Knoten, nicht für wilde. Eine weitere Anregung Ihrer Phantasie…

Bildquelle: Loriots Kleiner Ratgeber, dtv 1999

§E6c. Umgebungsretrakte. Sei X ein topologischer Raum. Ein Teilraum $A \subset X$ heißt *Umgebungsretrakt*, wenn es eine Umgebung U von A in X gibt und eine Retraktion von U auf A, also eine stetige Abbildung $r : U \to A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$.

Speziell im euklidischen Raum $X = \mathbb{R}^n$ nennen wir A dann einen *euklidischen Umgebungsretrakt*, engl. *euclidean neighbourhood retract*, kurz *ENR*.

Beispiel. In $\mathbb{R}$ ist der Teilraum $A = \{-1,1\}$ kein Retrakt (C3R), aber ein Umgebungsretrakt: $U = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ist eine offene Umgebung und $r : U \to A : x \mapsto x/|x|$ eine Retraktion.

Das gilt in jeder Dimension: Die Sphäre $A = \mathbb{S}^n$ ist kein Retrakt von $X = \mathbb{R}^{n+1}$ (J4E), wohl aber von $U = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ vermöge der Retraktion $r : U \to \mathbb{S}^n : x \mapsto x/|x|$.

Allgemeiner nennen wir eine stetige Abbildung $\iota : A \to X$ einen Umgebungsretrakt, wenn eine Umgebung U von $\iota(A)$ in X existiert und eine stetige Abbildung $r : U \to A$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$. Insbesondere ist ι dann eine Einbettung (in U und somit in X).

Übung E6C. (1) Ist $]-1,1[\subset \mathbb{C}$ ein Retrakt? wenigstens ein Umgebungsretrakt?

(2) Sei $h : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]1,3[$ ein Homöomorphismus, zum Beispiel $h(t) = 2 + t/(1+|t|)$ mit $h^{-1}(u) = (u-2)/(1-|u-2|)$. Ist $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto h(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ein Retrakt? Umgebungsretrakt?

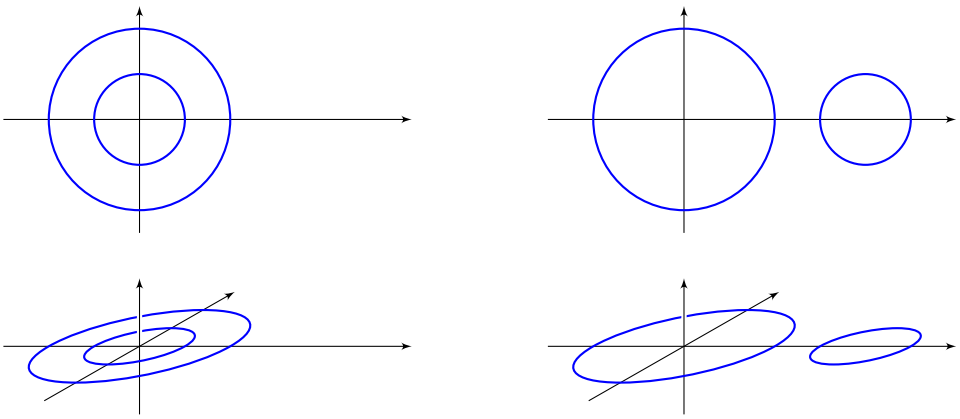
✻ **E6C.** (1) Retrakt von $\mathbb{C}$ sicher nicht, da $]-1,1[$ in $\mathbb{C}$ nicht abgeschlossen ist (E6B). Aber $]-1,1[$ ist ein Retrakt der offenen Umgebung $\mathbb{B}^2 = \{\,(x,y) \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 < 1\,\}$, etwa vermöge $r : \mathbb{B} \to]-1,1[: (x,y) \mapsto x$.

(2) Retrakt in $\mathbb{C}$ sicher nicht, da $A = \iota(\mathbb{R})$ in $\mathbb{C}$ nicht abgeschlossen ist (E6B): Es gilt $\overline{A} = A \cup \mathbb{S}^1 \cup 3\mathbb{S}^1$; machen Sie eine Skizze! Doch A ist ein Retrakt der offenen Umgebung $U = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\,\}$ vermöge $r : U \to \mathbb{R} : z \mapsto h^{-1}(|z|)$, denn $r \circ \iota(t) = r(h(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = h^{-1}(|h(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|) = h^{-1}(h(t)) = t$.

Bemerkung. Euklidische Umgebungsretrakte sind eine nützliche Klasse von Räumen: Sie ist einerseits recht umfangreich und ausreichend allgemein. Andererseits ist sie topologisch-geometrischen Techniken des $\mathbb{R}^n$ zugänglich. Mehr hierzu im nächsten Kapitel (§F3e).

§E6d. Komplemente und Stabilisierung. Sind im Raum $\mathbb{R}^n$ zwei Teilräume A und B homöomorph, so müssen ihre Komplemente $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ und $\mathbb{R}^n \smallsetminus B$ keineswegs homöomorph sein: Ein einfaches Gegenbeispiel sind $A = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und $B = \mathbb{R} \smallsetminus [-1,1]$ in $\mathbb{R}$.

Selbst wenn wir $A \cong B$ in $\mathbb{R}^n$ als abgeschlossen voraussetzen, sind die Komplemente $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ und $\mathbb{R}^n \smallsetminus B$ im Allgemeinen nicht homöomorph. Hier ein einfaches Beispiel:



Hier besteht $A = \mathbb{S}^1 \sqcup (2 \cdot \mathbb{S}^1)$ aus konzentrischen Kreisen aber $B = (\mathbb{S}^1 + 4) \sqcup (2 \cdot \mathbb{S}^1)$ aus nebeneinanderliegenden Kreisen. Die Komplemente sind nicht homöomorph:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \smallsetminus A &\cong \mathbb{R}^2 \sqcup (\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}) \sqcup (\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}), \\ \mathbb{R}^2 \smallsetminus B &\cong \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2 \sqcup (\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0,1\}). \end{aligned}$$

Beweisen können wir $A \not\cong B$ mit der Homotopie-Invarianz der Euler–Charakteristik oder später mit der Fundamentalgruppe. (Versuchen Sie es!) Im Raum $\mathbb{R}^3$ haben wir mehr Platz: Hier existiert ein Homöomorphismus $H : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $A' \xrightarrow{\sim} B'$ und $\mathbb{R}^3 \smallsetminus A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3 \smallsetminus B$.

Das Hinzufügen zusätzlicher Freiheitsgrade ist allgemein eine nützliche Technik und heißt *Stabilisierung*. Nach hinreichender Stabilisierung sind die Komplemente homöomorph:

Satz E6D. *Seien $A \subset \mathbb{R}^m$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $(\varphi, \psi) : A \cong B$ ein Homöomorphismus. Im Raum $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ betrachten wir $A' = A \times \{0\}$ und $B' = \{0\} \times B$. Hierzu existiert ein Homöomorphismus $(\Phi, \Psi) : (\mathbb{R}^{m+n}, A') \cong (\mathbb{R}^{m+n}, B')$ mit $\Phi(a,0) = (0, \varphi(a))$ und $\Psi(0,b) = (\psi(b), 0)$. Insbesondere gilt für die Komplemente $\mathbb{R}^{m+n} \smallsetminus A' \cong \mathbb{R}^{m+n} \smallsetminus B'$.*

BEWEIS. Wir nutzen den Fortsetzungssatz von Tietze (E5N): Zu $\varphi : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$ existiert $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $h|_A = \varphi$. Zu $\psi : \mathbb{R}^n \supset B \to A \subset \mathbb{R}^m$ existiert $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig mit $k|_B = \psi$. Daraus erhalten wir die ersehnten Homöomorphismen:

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &&: (x,y) \mapsto (x, y - h(x)), \\ K &: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &&: (x,y) \mapsto (x - k(y), y), \\ \Phi &:= K \circ H^{-1} \quad \text{erfüllt} && (a,0) \mapsto (0, \varphi(a)), \\ \Psi &:= H \circ K^{-1} \quad \text{erfüllt} && (0,b) \mapsto (\psi(b), 0). \end{aligned}$$

Einschränkung auf die Komplemente ergibt $\mathbb{R}^{m+n} \smallsetminus A' \cong \mathbb{R}^{m+n} \smallsetminus B'$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E7. Topologische Gruppen

Gruppen, Ringe, Körper sind grundlegende algebraische Strukturen, ebenso Vektorräume, Algebren, etc. In vielen interessanten Fällen wie den Körpern $(\mathbb{R},+,\cdot)$ oder $(\mathbb{C},+,\cdot)$ oder den Vektorräumen $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ oder $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)$ sind diese algebraischen Strukturen zusätzlich mit einer Topologie versehen, und zwar so, dass die algebraischen Operationen stetig sind. Aus dieser Verbindung von Topologie und Algebra entsteht das mathematische Gebiet der *topologischen Algebra*. Einige ihrer Grundbegriffe sollen hier erläutert werden und dienen als Prüfstein und Illustration unseres topologischen Begriffsapparats.

§E7a. Topologische Gruppen. Gruppen (B1M) versehen wir nun mit einer Topologie:

Definition E7A. Eine *T–Gruppe* $(G,\mathcal{T},\cdot,1,\iota)$ besteht aus einem topologischen Raum $(G,\mathcal{T})$ und einer Gruppe $(G,\cdot,1,\iota)$, sodass Produkt $\cdot : G\times G\to G$ und Inversion $\iota : G\to G$ stetig sind. Wir sprechen von einer *topologischen Gruppe*, wenn zudem $\{1\}$ abgeschlossen ist.

Wie wir gleich sehen werden ist die letzte Bedingung, dass $\{1\}$ abgeschlossen ist, gleichbedeutend mit der Hausdorff–Eigenschaft. Dies werden wir im Folgenden für alle topologischen Gruppen verlangen. Wo dies nicht nötig oder gewünscht ist, sprechen wir etwas allgemeiner von T–Gruppen. Diese technische Hilfsbezeichnung wird hauptsächlich in diesem Abschnitt benötigt und wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet.

Beispiele. Zunächst die beiden trivialen Topologien:

- Jede Gruppe $(G,\cdot,1,\iota)$ wird zu einer *diskreten topologischen Gruppe* mit der diskreten Topologie $\mathcal{T}=\mathfrak{P}(G)$ auf der Menge G. Hierin ist $\{1\}$ abgeschlossen.
- Jede Gruppe $(G,\cdot,1,\iota)$ wird zu einer *T–Gruppe* mit der indiskreten Topologie $\mathcal{T}=\{\emptyset,G\}$. Im Falle $G\neq\{1\}$ ist hierin $\{1\}$ nicht abgeschlossen.

Beispiele. Nicht-triviale Beispiele liefern die folgenden topologischen Gruppen:

- Die additive Gruppe $(\mathbb{Q},\mathcal{T}_{\mathbb{Q}},+,0,-)$ und die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Q}^*,\mathcal{T}_{\mathbb{Q}^*},\cdot,1,^{-1})$.
- Die additive Gruppe $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}},+,0,-)$ und die multiplikative Gruppe $(\mathbb{R}^*,\mathcal{T}_{\mathbb{R}^*},\cdot,1,^{-1})$.
- Die additive Gruppe $(\mathbb{C},\mathcal{T}_{\mathbb{C}},+,0,-)$ und die multiplikative Gruppe $(\mathbb{C}^*,\mathcal{T}_{\mathbb{C}^*},\cdot,1,^{-1})$.
- Die multiplikative Untergruppe $(\mathbb{S}^1,\mathcal{T}_{\mathbb{S}^1},\cdot,1,^{-1})$ auf der Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1\subset\mathbb{C}$.
- Die additive Gruppe $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n},+,0,-)$ und die Untergruppe $(\mathbb{Q}^n,\mathcal{T}_{\mathbb{Q}^n},+,0,-)$.
- Matrizengruppen wie $(\mathrm{GL}_n\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathrm{GL}_n\mathbb{R}},\cdot,1,^{-1})$ oder $(\mathrm{GL}_n\mathbb{C},\mathcal{T}_{\mathrm{GL}_n\mathbb{C}},\cdot,1,^{-1})$ etc. Stetigkeit folgt aus den expliziten Formeln für Multiplikation und Inversion (B1Y).

Beispiel. In jeder topologischen Gruppe $(G,\mathcal{T}_G,\cdot,1,\iota)$ wird jede Untergruppe $H\subset G$ zu einer topologischen Gruppe $(H,\mathcal{T}_H,\cdot|^H_{H\times H},1,\iota|^H_H)$ bezüglich der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_H$.

Bemerkung. Als bequeme Abkürzung definieren wir für Teilmengen $U,V\subset G$ die Mengen $U\cdot V=\{u\cdot v\mid u\in U,v\in V\}$ sowie $U^{-1}=\{u^{-1}\mid u\in U\}$.

Die Stetigkeit von $\cdot$ bedeutet: Für jedes Paar $a,b\in G$ und jede Umgebung W von $a\cdot b$ in G existieren Umgebungen U von a und V von b in G sodass $U\cdot V\subset W$ gilt.

Die Stetigkeit von ι bedeutet: Für jedes Element $a\in G$ und jede Umgebung V von a^{-1} in G existiert eine Umgebung U von a in G sodass $U^{-1}\subset V$ gilt.

Übung E7B. Sei $(G,\cdot,1,\iota)$ eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G. Wir versehen $G\times G$ mit der Produkttopologie. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) Produkt $\cdot : G\times G\to G$ und Inversion $\iota : G\to G$ sind stetig.
(2) Die Abbildung $\alpha : G\times G\to G : (a,b)\mapsto a^{-1}b$ ist stetig.
(3) Die Abbildung $\beta : G\times G\to G : (a,b)\mapsto ab^{-1}$ ist stetig.

In diesem Fall ist ι ein Homöomorphismus, ebenso jede Links- bzw. Rechtstranslation $\lambda_a,\rho_a : G\to G$ mit $\lambda_a(x)=a\cdot x$ bzw. $\rho_a(x)=x\cdot a$. Ferner sind äquivalent:

$\{1\}$: Die Teilmenge $\{1\}$ ist abgeschlossen in $(G,\mathcal{T})$, es gilt also $G\smallsetminus\{1\}\in\mathcal{T}$.
T_0: Zu $a\neq b$ in G hat einer eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.
T_1: Zu $a\neq b$ in G hat jeder eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.
T_2: Zu $a\neq b$ in G existieren disjunkte Umgebungen. (Hausdorff–Eigenschaft)

Jede endliche topologische Gruppe ist somit diskret.

✻ **E7B.** „(1) $\Rightarrow$ (2)“: α ist Komposition der stetigen Abbildungen $\iota\times\mathrm{id}_G : G\times G\to G\times G$ und $\cdot : G\times G\to G$.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Ist α stetig, so auch die Kompositionen $\iota : G\to G\times\{1\}\xrightarrow{\alpha} G$ und $\cdot : G\times G\xrightarrow{\iota\times\mathrm{id}} G\times G\xrightarrow{\alpha} G$.

Die Äquivalenz „(1) $\Leftrightarrow$ (3)“ zeigt man ebenso. Die Inversion erfüllt $\iota\circ\iota=\mathrm{id}_G$, also ist ι ein Homöomorphismus. Jede Linkstranslation $\lambda_a : G\to G : x\mapsto a\cdot x$ ist stetig, denn sie ist Komposition der stetigen Abbildungen $G\to\{a\}\times G\xrightarrow{\cdot} G$. Es gilt $\lambda_1=\mathrm{id}_G$ und $\lambda_a\circ\lambda_b=\lambda_{a\cdot b}$, denn für alle $x\in G$ gilt $(\lambda_a\circ\lambda_b)(x)=\lambda_a(\lambda_b(x))=a\cdot(b\cdot x)=(a\cdot b)\cdot x=\lambda_{a\cdot b}(x)$. Insbesondere gilt $\lambda_{a^{-1}}\circ\lambda_a=\mathrm{id}_G$, und somit ist λ_a für jedes $a\in G$ ein Homöomorphismus. Entsprechendes gilt für die Rechtstranslation $\rho_a : G\to G : x\mapsto x\cdot a$.

Ist die Teilmenge $\{1\}$ in $(G,\mathcal{T})$ abgeschlossen, so auch $\{a\}$ für jeden Punkt $a\in G$ dank des Homöomorphismus $\lambda_a : 1\mapsto a$. Dies entspricht dem Trennungsaxiom T_1. „$T_0\Rightarrow T_1$“: Zu je zwei Elementen $a,b\in G$ ist $f : G\to G$ mit $f(x)=ax^{-1}b$ ein Homöomorphismus mit $f(a)=b$ und $f(b)=a$. Existiert eine offene Menge $a\in U\in T$ mit $b\notin\mathcal{T}$, so gilt $b\in f(U)\in\mathcal{T}$ mit $a\notin f(U)$. „$T_1\Rightarrow T_2$“: Seien $a\neq b$ in G, also $a^{-1}b\neq 1$. Dank T_1 existiert eine Umgebung W von $a^{-1}b$, die 1 nicht enthält. Dank Stetigkeit existieren offene Umgebungen $a\in U\in\mathcal{T}$ und $b\in V\in\mathcal{T}$ mit $U^{-1}V\subset W$. Aus $1\notin W$ folgt $1\notin U^{-1}V$, also $U\cap V=\emptyset$.

Übung E7C. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^2$ lässt sich zu einer topologischen Gruppe machen, ebenso die Teilräume $X=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ und $Y=\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$. Gilt dies auch für $Z=X\cup Y$?

✻ **E7C.** Nein. Jede topologische Gruppe G ist *homogen*, das heißt, zu je zwei Punkten $a,b\in G$ existiert ein Homöomorphismus $h : G\to G$ mit $h(a)=b$: Dank Gruppenstruktur erfüllt dies zum Beispiel $h(x)=xa^{-1}b$ oder $h(x)=ax^{-1}b$. Der Raum $Z=(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})\cup(\mathbb{Z}\times\mathbb{R})$ hingegen ist nicht homogen: Jeder Punkt $a\in\mathbb{Z}^2$ zerlegt kleine zusammenhängende Umgebungen in vier Zusammenhangskomponenten, jeder Punkt $b\in Z\smallsetminus\mathbb{Z}^2$ hingegen nur in zwei. Es kann also keinen Homöomorphismus $h : Z\to Z$ mit $h(a)=b$ geben.

Übung E7D. Die Cantor–Menge $C\subset[0,1]$ ist *homogen*, das heißt, zu je zwei Punkten $a,b\in C$ existiert ein Homöomorphismus $h : C\xrightarrow{\sim} C$ mit $h(a)=b$ (und sogar $h\circ h=\mathrm{id}_C$). *Hinweis:* Es ist leichter, mehr zu beweisen. Ist $C\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ eine topologische Gruppe?

✻ **E7D.** Wir nutzen den Homöomorphismus $C\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aus E4W. Wir betrachten $\{0,1\}$ als die zweielementige Gruppe $\mathbb{Z}/2$ mit der Addition modulo 2. Somit ist $G=(\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}}$ eine (abelsche) Gruppe bezüglich der punktweisen Addition. Nach Definition der Produkttopologie sind Addition und Inversion stetig, also erhalten wir eine topologische Gruppe. Jede topologische Gruppe G ist homogen: Zu $a,b\in G$ ist $h : G\to G$ mit $h(x)=ax^{-1}b$ ein Homöomorphismus mit $h(a)=b$ und $h(b)=a$. Ist G abelsch wie hier, so gilt zudem $h\circ h=\mathrm{id}_G$.

Übung E7E. Sei $(G,\mathcal{T},\cdot,1,^{-1})$ eine topologische Gruppe und $H<G$ eine Untergruppe.

(1) Mit Teilraumtopologie ist H eine topologische Gruppe, ebenso ihr Abschluss $\overline{H}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

(2) Die *Linksnebenklasse* von H zu $g \in G$ ist $gH := \{ gh \mid h \in H \}$. Dies definiert eine Zerlegung von G. Gleiches gilt für die *Rechtsnebenklassen* $Hg := \{ hg \mid h \in H \}$.

(3) Jede offene Untergruppe H in G ist auch abgeschlossen, aber nicht umgekehrt.

(4) Der Quotient $q : G \to G/H := \{ gH \mid g \in G \}$ ist eine offene Abbildung. Ist H abgeschlossen, so erfüllt der Quotientenraum G/H das Trennungsaxiom T_1.

(5) Ist H eine normale Untergruppe und abgeschlossen in G, so können wir G/H auf genau eine Weise zu einer topologischen Gruppe machen, für die $q : G \to G/H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist. Dies nennen wir die *topologische Quotientengruppe*.

(6) Wir erhalten so $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ als Isomorphismus topologischer Gruppen.

Übung E7F. Sei $(G, \mathcal{T}, \cdot, e, ^{-1})$ eine topologische Gruppe. Jede Umgebungsbasis $\mathcal{B}$ des Einselements e im Raum $(G, \mathcal{T})$ erfreut sich folgender Eigenschaften:

(GB1) Es gilt $\bigcap \mathcal{B} = \{e\}$.
(GB2) Zu $U, V \in \mathcal{B}$ existiert $W \in \mathcal{B}$ mit $W \subset U \cap V$.
(GB3) Zu $U \in \mathcal{B}$ existiert $V \in \mathcal{B}$ mit $V^{-1}V \subset U$.
(GB4) Zu $U \in \mathcal{B}$ und $a \in G$ existiert $V \in \mathcal{B}$ mit $V \subset aUa^{-1}$.

Ist umgekehrt $(G, \cdot, e, ^{-1})$ eine Gruppe und erfüllt ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(G)$ diese Bedingungen (GB1–4), dann erhalten wir eine Topologie auf der Menge G durch

$$\mathcal{T} = \left\{ O \subset G \;\middle|\; \forall a \in O \;\; \exists U \in \mathcal{B} \,:\, aU \subset O \right\}.$$

Damit wird $(G, \mathcal{T}, \cdot, e, ^{-1})$ zu einer topologischen Gruppe mit Umgebungsbasis $\mathcal{B}$.

§E7b. Topologische Körper. Zur Erinnerung (B1A): Ein *Körper* $(K, +, \cdot)$ besteht aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+, \cdot : K \times K \to K$. Die Addition bildet eine abelsche Gruppe $(K, +, 0, -)$, die Multiplikation bildet eine abelsche Gruppe $(K^*, \cdot, 1, ^{-1})$ auf $K^* = K \smallsetminus \{0\}$ und ist distributiv über die Addition gemäß $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Bei einem *(kommutativen) Ring* $(K, +, \cdot)$ verlangen wir neben der abelschen Gruppe $(K, +, 0, -)$ und Distributivität nur, dass $(K, \cdot, 1)$ ein (kommutatives) Monoid ist.

Definition E7G. Ein *topologischer Ring bzw. Körper* $(K, \mathcal{T}, +, \cdot)$ ist ein Ring bzw. Körper $(K, +, \cdot)$ zusammen mit einer Hausdorff–Topologie $\mathcal{T}$, für die alle Operationen stetig sind.

Letzteres bedeutet: Wir versehen $K \times K$ mit der Produkttopologie und verlangen, dass die Addition $+ : K \times K \to K$ und die Multiplikation $\cdot : K \times K \to K$ sowie im Falle eines Körpers auch die Inversion $^{-1} : K^* \to K^*$ stetig sind. Dann ist auch die Negation $- : K \to K$ als Multiplikation mit $-1 \in K$ stetig. Zudem wollen wir, dass $\{0\}$ in $(K, \mathcal{T})$ abgeschlossen ist, und verlangen daher gleich die hierzu äquivalente Hausdorff–Eigenschaft (E7B).

Bemerkung. Die Stetigkeit von $+$ bedeutet: Für jedes Paar $a, b \in K$ und jede Umgebung W von $a + b$ in K existieren Umgebungen U von a und V von b sodass $U + V \subset W$ gilt.

Die Stetigkeit von $-$ bedeutet: Für jedes Element $a \in K$ und jede Umgebung V von $-a$ in K existiert eine Umgebung U von a in K sodass $-U \subset V$ gilt.

Die Stetigkeit von $\cdot$ bedeutet: Für jedes Paar $a, b \in K$ und jede Umgebung W von $a \cdot b$ in K existieren Umgebungen U von a und V von b in K sodass $U \cdot V \subset W$ gilt.

Die Stetigkeit von $^{-1}$ bedeutet: Für jedes Element $a \in K^*$ und jede Umgebung V von a^{-1} in K^* existiert eine Umgebung U von a in K^* sodass $U^{-1} \subset V$ gilt.

Beispiele. Zunächst die beiden trivialen Topologien:

- Jeder Körper $(K,+,\cdot)$ wird zu einem topologischen Körper mit der diskreten Topologie.
- Mit der indiskreten Topologie sind zwar alle Operationen stetig, aber wegen $0 \neq 1$ gilt das Hausdorff–Axiom nicht. Dies lassen wir also nicht als topologischen Körper gelten.

Beispiele. Unsere wichtigsten nicht-trivialen Beispiele topologischer Körper sind dank C3D:

- Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q},\mathcal{T}_{\mathbb{Q}},+,\cdot)$.
- Die reellen Zahlen $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}},+,\cdot)$.
- Die komplexen Zahlen $(\mathbb{C},\mathcal{T}_{\mathbb{C}},+,\cdot)$.

Beispiel. Die Matrizen über jedem Körper $(K,+,\cdot)$ bilden einen Ring $(K^{n\times n},+,\cdot)$. Ist $(K,\mathcal{T}_K,+,\cdot)$ ein topologischer Körper, so sind alle Ringoperationen stetig bezüglich der Produkttopologie, und somit wird $(K^{n\times n},\mathcal{T}_{K^{n\times n}},+,\cdot)$ zu einem topologischen Ring. Für $n \geq 2$ ist dieser Ring nicht kommutativ und hat Nullteiler, insbesondere ist dies kein Körper.

Beispiel E7H (Quaternionenalgebra)**.** Im Matrizenring $\mathbb{C}^{2\times 2}$ betrachten wir die Teilmenge

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a+\mathrm{i}b & -c-\mathrm{i}d \\ c-\mathrm{i}d & a-\mathrm{i}b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^4.$$

Dies ist ein Unterring, sogar eine *Divisionsalgebra* über $\mathbb{R}$, erfüllt also alle Körperaxiome bis auf die Kommutativität der Multiplikation. (Übung!)

§E7c. Topologische Vektorräume. Auch Vektorräume (§B1i) können wir mit Topologien versehen. Hierzu setzen wir voraus, dass der Grundkörper eine Topologie mitbringt:

Definition E7I. Sei $(K,\mathcal{T}_K,+,\cdot)$ ein topologischer Körper. Ein *topologischer Vektorraum* $(V,\mathcal{T}_V,+,\cdot)$ über K ist ein Vektorraum $(V,+,\cdot)$ zusammen mit einer Hausdorff–Topologie $\mathcal{T}$, für die Addition $+ : V\times V \to V$ und Skalarmultiplikation $\cdot : K\times V \to V$ stetig sind.

Bemerkung. Dann ist auch die Negation $- : K \to K$ als Multiplikation mit $-1 \in K$ stetig. Demnach ist $(V,\mathcal{T}_V,+)$ eine topologische Gruppe.

Beispiel. Zunächst der triviale Fall: Jeder K–Vektorraum V wird zu einem topologischen Vektorraum, wenn wir sowohl V als auch K mit der diskreten Topologie versehen.

Beispiel. Unsere einfachsten nicht-trivialen Beispiele sind die topologischen Vektorräume K^n über jedem topologischen Körper K, insbesondere die Matrixalgebra $K^{n\times n}$.

Beispiel. Jeder normierte Vektorraum $(V,|-|)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C}$ ist ein topologischer Vektorraum bezüglich der von der Norm induzierten Topologie: Der Nullpunkt 0 ist abgeschlossen, da $|0| = 0$ aber $|v| > 0$ für $v \neq 0$. Die Skalarmultiplikation ist stetig dank $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$. Die Addition ist stetig dank der Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$. Zudem ist die Norm $|-| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig dank der umgekehrten Dreiecksungleichung.

Beispiel. Der Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Die Funktionalanalysis untersucht und nutzt normierte / metrisierte / topologische Vektorräume. Dies war und ist eine der Hauptmotivationen für die analytische Topologie. Manche Vektorraumtopologie ist nicht normierbar (D4F) oder nicht einmal metrisierbar (D4B). Hier hat sich die topologische Sichtweise als natürlich und flexibel bewährt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§E7d. Metrisierung topologischer Gruppen. Jede metrisierbare Topologie ist hausdorffsch (T_2) und erstabzählbar. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, hinreichend sind regulär (T_1 & T_3) und zweitabzählbar (E5R). Für topologische Gruppen hingegen ist alles besser: Die offensichtlichen notwendigen Bedingungen sind bereits hinreichend!

Satz E7J. *Eine topologische Gruppe $(G,\mathcal{T},\cdot,1,\iota)$ ist genau dann metrisierbar, wenn eine abzählbare Umgebungsbasis $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ des Einselements existiert. In diesem Fall kann die Topologie wahlweise durch eine linksinvariante oder eine rechtsinvariante Metrik definiert werden. Eine biinvariante Metrik ist genau dann möglich, wenn es eine abzählbare Umgebungsbasis gibt, die $g\,U_n\,g^{-1} = U_n$ für alle $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.*

Bemerkung. Eine Metrik $d : G \times G \to \mathbb{R}$ heißt *linksinvariant*, wenn $d(zx,zy) = d(x,y)$ für alle $x,y,z \in G$ gilt, und *rechtsinvariant*, wenn $d(xz,yz) = d(x,y)$ gilt, sowie *biinvariant*, wenn beides gilt. Auch wenn links- und rechtsinvariante Metriken existieren, ist es im Allgemeinen nicht möglich, eine biinvariante Metrik zu finden.

BEWEIS. Die einelementige Menge $\{1\}$ ist abgeschlossen in G, also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{1\}$. Wir können U_n als symmetrisch annehmen, indem wir U_n durch $U_n \cap U_n^{-1}$ ersetzen. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir $U_{n+1}^3 \subset U_n$ erreichen: Wegen der Stetigkeit von $G \times G \times G \to G$ mit $(a,b,c) \to abc$ existieren offene Umgebungen A,B,C des Einselements mit $ABC \subset U_n$. Auch $D = A \cap B \cap C$ ist dann eine offene Umgebung des Einselements, also existiert $m > n$ mit $U_m \subset D$, und somit $U_m^3 \subset U_n$. Wir können $U_0 = G$ setzen und schrittweise $U_{n+1}^3 \subset U_n$ erreichen. Wir erhalten so eine Zerlegung

$$G = (U_0 \smallsetminus U_1) \sqcup (U_1 \smallsetminus U_2) \sqcup (U_2 \smallsetminus U_3) \sqcup \dots \sqcup \{1\}.$$

Wir definieren eine Hilfsfunktion $\delta : G \times G \to \mathbb{R}$ durch $\delta(x,x) = 0$ sowie $\delta(x,y) = 2^{-k}$, wenn $x^{-1}y \in U_k \smallsetminus U_{k+1}$ gilt. Nach Konstruktion gilt $\delta(x,x) = 0$ und $\delta(x,y) > 0$ für $x \neq y$. Zudem gilt Symmetrie $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ sowie Linksinvarianz $\delta(zx,zy) = \delta(x,y)$ für alle $x,y,z \in G$. Zu einer Metrik fehlt noch die Dreiecksungleichung.

Um eine Metrik zu erhalten, definieren wir

$$d(x,y) := \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{n} \delta(z_{k-1},z_k) \;\Big|\; n \in \mathbb{N},\ x = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = y \in G \Big\}.$$

Nach Konstruktion gilt $d(x,x) = 0$ und Positivität $d(x,y) \geq 0$, Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$, Linksinvarianz $d(zx,zy) = d(x,y)$, sowie die Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in G$. Wir zeigen schließlich die Ungleichungen

$$\frac{1}{2}\delta(x,y) \leq d(x,y) \leq \delta(x,y). \tag{E.3}$$

Die rechte Ungleichung folgt unmittelbar aus der Definition von d. Für die linke Ungleichung zeigen wir für jede Familie $z_0, z_1, \dots, z_n$ in G die Ungleichung

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \delta(z_{k-1},z_k) \geq \frac{1}{2}\delta(z_0,z_n).$$

Diese Ungleichung beweisen wir durch Induktion über n. Für $n = 1$ ist diese Ungleichung trivial. Sei also $n \geq 2$. Wegen $\delta \geq 0$ gilt $0 = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n$. Im Falle $s_n = 0$ gilt die Ungleichung, denn dann ist $z_0 = z_1 = \dots = z_n$. Wegen $\delta \leq 1$ gilt die Ungleichung auch für $s_n \geq \frac{1}{2}$. Wir können also $0 < s_n < \frac{1}{2}$ annehmen.

Es existiert genau ein Index $m \in \{1,\dots,n\}$, für den $s_{m-1} \le \frac{1}{2}s_n < s_m$ gilt. Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta(z_0,z_{m-1}) &\le \sum_{k=1}^{m-1}\delta(z_{k-1},z_k) &&\le \frac{1}{2}s_n,\\ \frac{1}{2}\delta(z_m,z_n) &\le \sum_{k=m+1}^{n}\delta(z_{k-1},z_k) &&\le \frac{1}{2}s_n. \end{aligned}$$

Die linken Ungleichungen folgen jeweils aus der Induktionsannahme, die rechten aus der Wahl von m. Wir erhalten also $\delta(z_0,z_{m-1}) \le s_n$ und $\delta(z_{m-1},z_m) \le s_n$ und $\delta(z_m,z_n) \le s_n$. Es existiert genau eine Zahl $k \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ mit $2^{-k} \le s_n < 2^{1-k}$. Nach Definition von δ gilt $z_0^{-1}z_{m-1} \in U_k$ und $z_{m-1}^{-1}z_m \in U_k$ und $z_m^{-1}z_n \in U_k$. Daher ist

$$z_0^{-1}z_m = z_0^{-1}z_{m-1}\cdot z_{m-1}^{-1}z_m \cdot z_m^{-1}z_n \in U_k^3 \subset U_{k-1}.$$

Hieraus folgt $\delta(z_0,z_n) \le 2^{1-k} \le 2s_n$, und dies ist die ersehnte Ungleichung (E.3). Sie zeigt, dass $d(x,y) = 0$ nur für $x = y$ gilt, also d eine Metrik ist. Die offenen Bälle bezüglich dieser Metrik erfüllen für alle $n \in \mathbb{N}$ zudem die Inklusionen

$$B(1,2^{-n-1}) \subset U_n \subset B(1,2^{-n}).$$

Die von der Metrik d induzierte Topologie $\mathcal{T}_d$ hat somit dieselben Umgebungen des Einselements wie die Topologie $\mathcal{T}$. Dank der Linksinvarianz von d gilt dies in jedem Punkt. Hieraus folgt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, das heißt, die Metrik d induziert die Topologie $\mathcal{T}$.

Eine äquivalente, rechtsinvariante Metrik d' erhält man durch $d'(x,y) = d(x^{-1},y^{-1})$.

Nehmen wir zusätzlich an, die Umgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei konjugationsinvariant, erfülle also $gU_ng^{-1} = U_n$ für alle $g \in G$. Dann ist auch die Hilfsfunktion δ konjugationsinvariant, erfüllt also $\delta(gxg^{-1},gyg^{-1}) = \delta(x,y)$ für alle $g,x,y \in G$. Nach Konstruktion ist schließlich auch die Metrik d konjugationsinvariant, und somit biinvariant, denn von Links-, Rechts- und Konjugationsinvarianz implizieren je zwei die dritte.

Die Umkehrung gilt ebenso: Wird die Topologie auf G durch eine biinvariante Metrik d induziert, dann sind die offenen Bälle $U_n = B(1,2^{-n})$ eine Umgebungsbasis des Einselements und erfüllen $gU_ng^{-1} = U_n$, denn aus $d(1,u) < 2^{-n}$ folgt $d(1,gug^{-1}) = d(1,u) < 2^{-n}$ für alle $g \in G$. Die Existenz einer biinvarianten Metrik ist also äquivalent zur Existenz einer konjugationsinvarianten, abzählbaren Umgebungsbasis des Einselements. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Habe nun, ach! Philosophie, // Juristerei und Medizin,
Und leider auch Topologie // Durchaus studiert, mit heißem Bemühn.
Da steh' ich nun, ich armer Tor, // Und bin so klug als wie zuvor!
frei nach Goethe (1749–1832), *Faust*, zur Frage ob der Satz
von Tychonoff zur Topologie zählt oder zur Theologie

KAPITEL F

Kompaktheit

§F0. Einführung und Überblick

§F0a. Kompakt heißt topologisch endlich. Für jede *endliche* Menge $X \neq \emptyset$ gilt:

(1) Jede Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, das heißt, es existieren Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$, sodass $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ gilt.
(2) Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ in X nimmt mindestens einen Wert $a \in X$ unendlich oft an, d.h. es existieren Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, sodass $a = x_{n_0} = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots$.
(3) Jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihre Extrema an, das heißt, es existieren $a, b \in X$, sodass $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$ gilt.

Für *unendliche* Mengen X gelten diese Eigenschaften / Einschränkungen nicht: (1) Die Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ erlaubt keine echte Teilüberdeckung, (2) es gibt Injektionen $\mathbb{N} \to X : n \mapsto x_n$ und (3) unbeschränkte Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, etwa $f(x_n) = (-1)^n n$.

Für topologische Räume ist *Kompaktheit* die sinngemäße Übertragung der *Endlichkeit*. Wir übertragen die obigen Eigenschaften, indem wir in (1) offene Überdeckungen betrachten, in (2) Häufungspunkte, und in (3) stetige Funktionen. Eigenschaft (1) werden wir zur Definition der Kompaktheit erheben und hieraus alle weiteren Eigenschaften ableiten (§F1). Für jeden kompakten topologischen Raum X gilt dann:

(1) Jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, das heißt, es existieren Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$, sodass $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ gilt.
(2) Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ in X hat einen Häufungspunkt $a \in X$, das heißt, jede Umgebung von a enthält unendlich viele Folgenglieder $x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$.
(3) Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihre Extrema an, das heißt, es existieren $a, b \in X$, sodass $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$.

Beispiele. Jedes Intervall $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ hat diese Eigenschaften (F1D), die Intervalle $]a, b[$ und die reelle Gerade $\mathbb{R}$ hingegen nicht. Nach dem Satz von Heine–Borel (F1O) ist ein Teilraum $X \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn X in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Bemerkung. Für metrische Räume erarbeiten wir in §F2 verschiedene Charakterisierungen der Kompaktheit. Insbesondere sind Eigenschaften (1–3) äquivalent für metrische Räume, im Allgemeinen jedoch nicht für beliebige topologische Räume.

§F0b. Wozu dient Kompaktheit? Viele Sätze der Topologie gelten nur bei Kompaktheit, wie schon die obigen Beispiele zeigen. Andere Sätze sind für kompakte Räume leicht, für nicht-kompakte aber schwer zu beweisen. Wir sind daher im Allgemeinen gut beraten, bei der Erkundung schwierigen Terrains zunächst von kompakten Räumen auszugehen.

Es kann umgekehrt auch vorkommen, dass kompakte Räume für bestimmte Fragestellungen ungeeignet sind, zum Beispiel weil sie für die gewünschten Konstruktionen schlicht „zu klein“ sind. Manch wichtiger Raum, wie die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$, ist eben nicht kompakt. Hier wird uns der Begriff der lokalen Kompaktheit gute Dienste leisten (§F3).

Als Anwendung zeigen wir: Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum X ist genau dann lokalkompakt, wenn er endlich dimensional ist, also $n = \dim_{\mathbb{R}} X < \infty$ (F6U). In diesem Fall ist er linear homöomorph zum euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (F6S). Insbesondere ist die euklidische Topologie die einzige Vektorraumtopologie auf $\mathbb{R}^n$ (F6O). Dieses schöne Ergebnis bestärkt unsere bisherige Erfahrung, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ besonders gute Eigenschaften hat, die sie unter allen denkbaren Topologien auf $\mathbb{R}^n$ auszeichnen.

§F0c. Kompaktifizierung. Kompaktheit ist eine sehr nützliche Eigenschaft. Für einen nicht-kompakten Raum X wird man daher versuchen, einen kompakten Raum $\bar{X} \supset X$ zu konstruieren. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ kann man zum Beispiel zur *erweiterten reellen Gerade* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ vervollständigen. Mit der üblichen Ordnungstopologie ist $\bar{\mathbb{R}}$ kompakt und $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine Einbettung. Diese *Kompaktifizierung* erlaubt es uns, den gängigen Ausdrücken „$\lim x_n = +\infty$“ und „$\lim x_n = -\infty$“ ihre natürliche Bedeutung zu geben.

Die einfachste ist die *Einpunktkompaktifizierung* $X \hookrightarrow \widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ nach Alexandroff (§F4). Wichtigstes Beispiel ist die Kompaktifizierung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ zur Sphäre $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ dank stereographischer Projektion. *Eigentliche Abbildungen* $f : X \to Y$ sind solche, die sich auf die Einpunktkompaktifizierung fortsetzen lassen zu einer stetigen Abbildung $\widehat{X} \to \widehat{Y}$, also $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ erfüllen.

§F0d. Geschichte. In der Entwicklung der Analysis im 19. Jahrhundert hat sich die Kompaktheit als zentraler Begriff erwiesen. Um das Jahr 1900 waren unter anderem die folgenden Charakterisierungen kompakter Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$ bekannt:

(1) Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung. (Borel–Lebesgue)
(2) Jede Folge in X besitzt eine in X konvergente Teilfolge. (Bolzano–Weierstraß)
(3) Die Teilmenge X ist beschränkt und abgeschlossen. (Heine–Borel)

Die erste Eigenschaft ist unsere Definition von Kompaktheit, die zweite heißt Folgenkompaktheit. Die dritte Eigenschaft gilt speziell für den Raum $\mathbb{R}^n$ mit seiner euklidischen Metrik: Dort sind (1,2,3) äquivalent. Allgemeiner für metrische Räume sind (1) und (2) äquivalent (sowie einige weitere Charakterisierungen, siehe F2E). Beide lassen sich auf beliebige topologische Räume übertragen, sind dort aber nicht mehr äquivalent (§F2e). Für topologische Räume sind Folgen im Allgemeinen unzureichend, doch glücklicherweise erhalten wir die richtige Verallgemeinerung, wenn wir Folgen durch Filter ersetzen (F1V).

§F0e. Vorgehensweise. Wir werden in diesem Kapitel den Kompaktheitsbegriff für topologische Räume entwickeln. Als Analogie ist es dabei oft nützlich, die vom $\mathbb{R}^n$ und von metrischen Räumen vertrauten Argumente ins topologische Vokabular zu übersetzen, dabei allerdings gewissenhaft zu präzisieren. Diese Aufgabe wollen wir nun ausführen.

§F1. Kompakte topologische Räume

§F1a. Kompakte topologische Räume. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $U_i \subset X$ mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ heißt *Überdeckung* von X.

Eine Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ von X heißt *Verfeinerung* der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$, wenn zu jedem $j \in J$ ein $i \in I$ existiert, sodass $V_j \subset U_i$ gilt (siehe F8D).

Eine Überdeckung heißt *offen*, wenn jede Menge U_i offen in X ist, also $U_i \in \mathcal{T}$ gilt. Sie heißt *abzählbar*, wenn I abzählbar ist, und *endlich*, wenn I endlich ist.

Eine *Teilüberdeckung* von $(U_i)_{i\in I}$ ist eine Familie $(U_i)_{i\in J}$ mit $J \subset I$ und $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Definition F1A. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält: Zu jeder Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen $U_i \in \mathcal{T}$ mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ existieren $i_1,\dots,i_n \in I$ mit $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Bemerkung. Die Kompaktheit von $(X,\mathcal{T})$ erfordert nicht bloß, dass *irgendeine* endliche offene Überdeckung von X existiert: Das wäre zu wenig verlangt, denn jeder Raum $(X,\mathcal{T})$ wird durch die offene Menge X überdeckt. Definition F1A fordert, genau wie oben erklärt, dass *jede offene Überdeckung* von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Hingegen wäre es zu viel verlangt, dass *jede Überdeckung* von X eine endliche Teilüberdeckung enthält. Diese allzu harsche Bedingung erfüllen nur endliche Räume: Genau dann enthält $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ eine endliche Teilüberdeckung, wenn X endlich ist. Definition F1A ist mit Bedacht gewählt und mit Präzision formuliert!

Beispiele.
- Ein diskreter Raum $(X,\mathfrak{P}(X))$ ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.
- Jede Menge X mit der indiskreten Topologie $\{\emptyset, X\}$ ist kompakt (und langweilig).
- Jede Menge X mit der koendlichen Topologie (D1H) ist kompakt: Gilt $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit U_i offen, dann enthält jede Menge $U_i \neq \emptyset$ bereits fast alle Punkte aus X.
- Jede unendliche Menge X mit der koabzählbaren Topologie (D1I) ist nicht kompakt: Ist $f : \mathbb{N} \to X$ injektiv, dann gilt $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ mit $U_i = X \smallsetminus f(\mathbb{N}_{\geq i})$ offen.

Beispiele.
- Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} B(0,r)$ ist nicht kompakt für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, denn die offene Überdeckung $(B(0,r))_{r\in\mathbb{N}}$ enthält keine endliche Teilüberdeckung.
- Die offene Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n-1, n+1[\cup]-\infty,-99[\cup]+99,+\infty[$ erlaubt eine endliche Teilüberdeckung. (Welche sind minimal?) Dennoch ist $\mathbb{R}$ nicht kompakt.
- Auch das beschränkte reelle Intervall $]0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]2^{-n},1]$ ist nicht kompakt, denn die offene (!) Überdeckung $(]2^{-n},1])_{n\in\mathbb{N}}$ enthält keine endliche Teilüberdeckung.
- Genau dann ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist (F1O).

Bemerkung. In der mathematischen Literatur ist der Sprachgebrauch zur Kompaktheit nicht einheitlich. Manche Autoren nennen einen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ *kompakt*, wenn er die oben erklärte endliche Überdeckungseigenschaft hat. Andere Autoren folgen Nicolas BOURBAKI und nennen einen solchen Raum $(X,\mathcal{T})$ zunächst nur *quasikompakt*, und erst dann *kompakt*, wenn $(X,\mathcal{T})$ zusätzlich hausdorffsch ist. Ich möchte im Folgenden bei Kompaktheit die Hausdorff–Eigenschaft nicht automatisch voraussetzen. Wo beide Eigenschaften benötigt werden, spreche ich ausdrücklich von einem kompakten Hausdorff–Raum.

Die Wortwahl ist nur eine Geschmacksfrage, doch präzise Vereinbarungen sind wichtig.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F1b. Kompakte Teilmengen. Kompaktheit haben wir in obiger Definition F1A für topologische Räume $(X,\mathcal{T})$ definiert. Für Teilmengen definieren wir entsprechend:

Definition F1B. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

(1) Die Teilmenge A ist *kompakt in* $(X,\mathcal{T})$, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält: Zu jeder Familie $(V_i)_{i\in I}$ offener Mengen $V_i \in \mathcal{T}$ mit $A \subset \bigcup_{i\in I} V_i$ existieren $i_1,\dots,i_n \in I$ mit $A \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$. Äquivalent hierzu:

(2) Der Teilraum $(A,\mathcal{T}_A)$ ist kompakt (gemäß F1A): Zu jeder Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen $U_i \in \mathcal{T}_A$ mit $A = \bigcup_{i\in I} U_i$ existieren $i_1,\dots,i_n \in I$ mit $A = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Wir nennen A *relativ kompakt in* $(X,\mathcal{T})$, falls der Abschluss $\overline{A}$ in $(X,\mathcal{T})$ kompakt ist.

Bemerkung. Die Äquivalenz „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“ entspringt Definition D1K der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A = \{\, V \cap A \mid V \in \mathcal{T} \,\}$. Anschaulich dürfen in (1) die offenen Mengen $V_i \in \mathcal{T}$ über die Teilmenge A „hinausragen“, während in (2) die „gestutzten“ offenen Mengen $U_i \in \mathcal{T}_A$ den Raum A genau ausfüllen.

Für $A \subset X$ haben wir zwei Kompaktheitsbegriffe: (1) *extrinsisch* für die Teilmenge A im Raum $(X,\mathcal{T})$ gemäß F1B und (2) *intrinsisch* für den Raum $(A,\mathcal{T}_A)$ gemäß F1A. Glücklicherweise stimmen beide Betrachtungsweisen überein. Wir nutzen jeweils die bequemere.

Hingegen hat die relative Kompaktheit von A immer nur bezüglich des umgebenden Raumes $(X,\mathcal{T})$ einen Sinn, denn es wird zunächst der Abschluss von A in $(X,\mathcal{T})$ gebildet.

Der Beweis der Äquivalenz „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“ folgt aus den Definitionen durch formale Manipulation; in diesem Sinne ist er *trivial*. Dennoch ist es lehrreich, zur Übung solch formaler Argumente, diese Umformung einmal sorgfältig auszuführen. Versuchen Sie es!

BEWEIS. „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Wir setzen (2) voraus und wollen (1) zeigen. Vorgelegt sei hierzu eine Familie $(V_i)_{i\in I}$ offener Mengen $V_i \in \mathcal{T}$ mit $A \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Wir suchen eine endliche Teilüberdeckung. Gemäß D1K gilt $U_i := V_i \cap A \in \mathcal{T}_A$, somit $A = \bigcup_{i\in I} U_i$. Nach Voraussetzung (2) existieren $i_1,\dots,i_n \in I$ mit $A = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$, also $A \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$.

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Vorgelegt sei hierzu eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen $U_i \in \mathcal{T}_A$ mit $A = \bigcup_{i\in I} U_i$. Gemäß D1K existiert zu $U_i \in \mathcal{T}_A$ ein $V_i \in \mathcal{T}$ mit $V_i \cap A = U_i$. Demnach gilt $A \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Nach Voraussetzung (1) existieren $i_1,\dots,i_n \in I$ mit $A \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$. Also gilt $A = (V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}) \cap A = (V_{i_1} \cap A) \cup \dots \cup (V_{i_n} \cap A) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. □

Beispiele.
- Jede endliche Teilmenge $A \subset X$ ist kompakt in $(X,\mathcal{T})$.
- Sind $A_1,\dots,A_n \subset X$ (relativ) kompakt in $(X,\mathcal{T})$, so auch $A_1 \cup \dots \cup A_n$ (D5G).
  Warnung: Für $A_1 \cap \dots \cap A_n$ hingegen brauchen wir zudem das Hausdorff–Axiom (F1I).
- In $\mathbb{R}$ ist das Intervall $A =]0,1]$ nicht kompakt, wie die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty}]2^{-n},2[$ zeigt. Es ist aber relativ kompakt, denn $\overline{]0,1]} = [0,1]$ ist kompakt (F1D).
- In $\mathbb{R}$ ist die Teilmenge $A = \{\, 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ nicht kompakt, wie die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty}]2^{-n},2[$ zeigt. Ihr Abschluss $\overline{A} = A \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$ ist hingegen kompakt (F1C).

Übung F1C. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen $x_\infty \in X$ konvergiert. Dann ist die Menge $A = \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{x_\infty\}$ kompakt in $(X,\mathcal{T})$.

✻ **F1C.** Ist $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ eine Überdeckung durch offene Mengen $U_i \in \mathcal{T}$, dann existiert $j \in I$ mit $x_\infty \in U_j$. Wegen $x_n \to x_\infty$ enthält U_j fast alle Folgenglieder, es existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $x_k \in U_j$ für alle $k > n$. Zudem gilt $x_0 \in U_{i_0}, \dots, x_n \in U_{i_n}$, also $A \subset U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_n} \cup U_j$.

§F1c. Kompakte Intervalle. Der folgende Satz zeigt, dass jedes Intervall $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ kompakt ist. Ohne zusätzlichen Aufwand erhalten wir noch wesentlich mehr: Wir nutzen nur die Ordnungstopologie (§D1i) und die Supremums-Vollständigkeit (§B2b):

Satz F1D. *Sei $<$ eine Totalordnung auf $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T}$ die Ordnungstopologie. Genau dann ist $(X,\mathcal{T})$ kompakt, wenn jede Menge $E \subset X$ ein Supremum (bzw. ein Infimum) in X besitzt.*

Bemerkung. Supremum und Infimum sind hier gleichwertig: Genau dann besitzt jede Teilmenge $E \subset X$ ein Supremum in X, wenn jede Teilmenge $F \subset X$ ein Infimum in X besitzt (B2B). Die Ordnungstopologien von $(X,<)$ und $(X,>)$ sind offensichtlich dieselben.

Beispiel. Auf jeder endlichen Menge $X = \{0,1,2,\dots,n\}$ haben wir die übliche Ordnung. Die Ordnungstopologie $\mathcal{T}$ auf X ist diskret, und $(X,\mathcal{T})$ ist trivialerweise kompakt.

Das wichtigste nicht-triviale Beispiel sind reelle Intervalle:

Beispiel. In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $[a,b]$ mit $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ kompakt dank Satz F1D.

Hier stimmen euklidische Topologie (D1D) und Ordnungstopologie (D1M) überein.

Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, wie die offene Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_{<s}$ zeigt.

In $(\mathbb{R},<)$ gilt $\sup\emptyset = \inf\mathbb{R} = -\infty$ und $\inf\emptyset = \sup\mathbb{R} = +\infty$. Allgemein in $(X,<)$ gilt ebenso $\sup\emptyset = \inf X$ und $\inf\emptyset = \sup X$. Satz F1D fordert demnach insbesondere, dass X nach unten beschränkt ist durch $a = \inf X \in X$ und nach oben durch $b = \sup X \in X$.

Auch auf $\mathbb{Q}$ stimmen euklidische Topologie und Ordnungstopologie überein:

Beispiel. Im Gegensatz zu reellen Intervallen ist $[a,b]_{\mathbb{Q}}$ für $a < b$ in $\mathbb{Q}$ nicht kompakt.

Zum Beweis konstruieren wir explizit eine offene Überdeckung von $[0,1]_{\mathbb{Q}}$ ohne endliche Teilüberdeckung: Hierzu sei $\xi \in [0,1] \smallsetminus \mathbb{Q}$, etwa $\xi = \sqrt{2}/2$ (B2A), und

$$[0,1]_{\mathbb{Q}} \;=\; \bigcup\nolimits_{u<\xi} [0,u[_{\mathbb{Q}} \;\sqcup\; \bigcup\nolimits_{v>\xi}]v,1]_{\mathbb{Q}}.$$

BEWEIS DES SATZES. „⇒“: Die Kontraposition formalisiert die beiden vorigen Beispiele. Die Menge $(X,<)$ ist nicht beschränkt (wie $\mathbb{R}$) oder lückenhaft (wie $[0,1]_{\mathbb{Q}}$). Genauer:

Hätte $(X,<)$ kein Supremum, so wäre $X = \bigcup_{s\in X} X_{<s}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Hätte $(X,<)$ kein Infimum, so wäre ebenso $X = \bigcup_{s\in X} X_{>s}$.

Also besitzt $(X,<)$ ein kleinstes Element $a = \inf X$ und ein größtes Element $b = \sup X$. Wir schreiben im Folgenden $X = [a,b]$ als maximales Intervall in $(X,<)$.

Angenommen eine Teilmenge $E \subset X$ ist nicht-leer, erlaubt aber kein Supremum in X. Dann ist X nicht kompakt: Hierzu stellen wir eine offene Überdeckung wie im vorigen Beispiel $[0,1]_{\mathbb{Q}}$ her. Sei $T = \{\, t \in X \mid E \leq t \,\}$ und $S = \{\, s \in X \mid s \leq T \,\}$. Es gilt $X = S \cup T$, denn zu $x \in X$ mit $x \notin T$ existiert $e \in E$ mit $x < e$, wegen $e \leq T$ also $x \in S$.

Für $x \in X$ sind äquivalent: $x \in S \cap T$, $x = \max S$, $x = \min T$, $x = \sup E$. Wir nehmen an, dass dieses Element nicht existiert. Aus $X = S \cup T$ folgt dann die offene Überdeckung

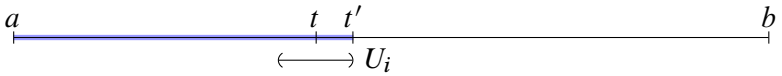
$$X \;=\; S \sqcup T \;=\; \bigcup\nolimits_{s\in S} [a,s[\;\sqcup\; \bigcup\nolimits_{t\in T}]t,b]$$

Diese erlaubt keine endliche Teilüberdeckung, andernfalls $S = [a,s_1[\cup \dots \cup [a,s_n[= [a,x[$ mit $x = \max\{s_1,\dots,s_n\}$ und somit $x \notin S \sqcup T$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

„⇐“: Es gilt $X = [a,b]$ mit $a = \inf X$ und $b = \sup X$. Sei $[a,b] = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}$. Sei E die Menge aller $t \in [a,b]$, für die $[a,t]$ endlich überdeckt wird, also $[a,t] \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ für geeignete $i_1,\dots,i_n \in I$. Offensichtlich gilt $a \in E$. Wir zeigen nun $E = [a,b]$.

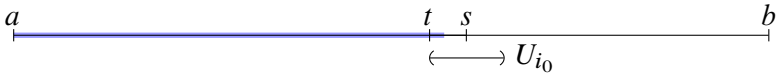
(1) *Zu jedem $t \in E$ mit $a \le t < b$ existiert $t' \in E$ mit $t < t' \le b$.*



Beweis: Aus $[a,t] \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ folgt $t \in U_i$ für ein $i \in \{i_1,\dots,i_n\}$. Da U_i offen ist, existiert $t' \in]t,b]$ mit $[t,t'[\subset U_i$. Mit $t' \in U_{i_0}$ folgt $[a,t'] \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Aussage (1) gilt für alle geordneten Mengen $(X,<)$. Nun der entscheidende Schritt: Wir nutzen die Supremums-Vollständigkeit und betrachten das Element $s \in E$ mit $s = \sup E$.

(2) *Für $s = \sup E$ gilt $s \in E$, also $s = \max E$.*



Beweis: Dank (1) gilt $s > a$. Zu $s \in U_{i_0}$ existiert $t \in [a,s[$ mit $]t,s] \subset U_{i_0}$. Es gilt $t \in E$, also $[a,t] \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$, somit $[a,s] \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$, also $s \in E$.

Aussage (2) garantiert, dass E ein größtes Element s hat. Nach (1) muss $s = b$ gelten. Das heißt, der gesamte Raum $X = [a,b]$ wird endlich überdeckt. □

Bemerkung. Es lohnt sich, den Beweis schrittweise nachzuvollziehen für die Überdeckung

$$[0,1]_{\mathbb{Q}} \;=\; \bigcup\nolimits_{u<\xi} [0,u[_{\mathbb{Q}} \;\sqcup\; \bigcup\nolimits_{v>\xi}]v,1]_{\mathbb{Q}}.$$

Hier ist $E = [0,\xi[_{\mathbb{Q}}$, denn $[0,t]_{\mathbb{Q}}$ wird endlich überdeckt für $t < \xi$ aber nicht für $t > \xi$. Aussage (1) gilt weiterhin, aber ohne Vollständigkeit schlägt der Beweisschritt (2) fehl: Die Menge E erlaubt kein Supremum in $\mathbb{Q}$. Insbesondere gilt hier nicht $E = [0,1]_{\mathbb{Q}}$.

Beispiele. Zu $X \subset \mathbb{R}$ untersuchen wir Überdeckungen $X \subset \bigcup_{x\in X} B(x,r_x)$ durch offene Bälle $B(x,r_x) =]x-r_x, x+r_x[$ mit Radien $r : X \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto r_x$, etwa $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

(0) Existiert zu $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} B(x,\varepsilon)$ eine endliche Teilüberdeckung? Nein!

(1) Existiert zu $[0,1] \subset \bigcup_{x\in[0,1]} B(x,r_x)$ eine endliche Teilüberdeckung? Ja, immer!

(2) Existiert zu $]0,1] \subset \bigcup_{x\in]0,1]} B(x,\varepsilon)$ eine endliche Teilüberdeckung? Ja, wie in (4)!

(3) Existiert zu $]0,1] \subset \bigcup_{x\in]0,1]} B(x,r_x)$ eine endliche Teilüberdeckung? Nein, nicht immer. Ein mögliches Gegenbeispiel entsteht durch die Wahl $r_x = |x|/2$.

(4) Existiert zu $[0,1]_{\mathbb{Q}} \subset \bigcup_{x\in[0,1]_{\mathbb{Q}}} B(x,\varepsilon)$ eine endliche Teilüberdeckung? Ja, denn $[0,1]_{\mathbb{Q}} \subset \bigcup_{x\in E} B(x,\varepsilon)$ für die endliche Menge $E = \{k/n \mid k = 0,1,\dots,n\}$ mit $n = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

(5) Existiert zu $[0,1]_{\mathbb{Q}} \subset \bigcup_{x\in[0,1]_{\mathbb{Q}}} B(x,r_x)$ eine endliche Teilüberdeckung? Nein, nicht immer! (5a) Wir wählen $\xi = \sqrt{2}/2$ und $r_x = |x-\xi|/2$ wie in (3). (5b) Sei $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} [0,1]_{\mathbb{Q}} : n \mapsto x_n$ eine Abzählung, $\varepsilon \in]0,1[$ und $x_n \mapsto r_n = \varepsilon 2^{-n-2}$. Die Überdeckung hat dann Gesamtlänge $\mathrm{vol}_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,r_n)) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} 2r_n = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} = \varepsilon < 1$. Jede endliche Teilüberdeckung besteht aus endlich vielen Intervallen der Gesamtlänge $< \varepsilon < 1$.

§F1d. Hausdorff–Eigenschaft. In einem Hausdorff–Raum $(X,\mathcal{T})$ lassen sich je zwei Punkte durch disjunkte offene Umgebungen trennen. Dies können wir nun von Punkten auf kompakte Teilmengen ausdehnen: Für jeden kompakten Raum $(X,\mathcal{T})$ gilt $T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_4$.

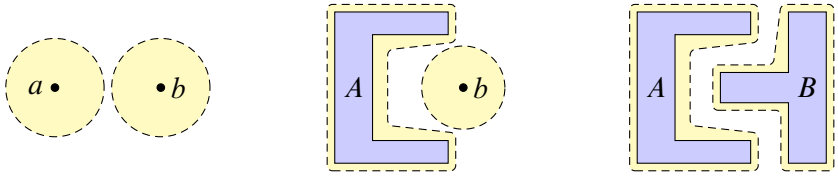


ABBILDUNG F:1. Disjunkte Umgebungen für Kompakta

Lemma F1E. *Sei $(X,\mathcal{T})$ hausdorffsch und $A \subset X$ kompakt. Zu jedem Punkt $b \in X \setminus A$ existieren Umgebungen U, V mit $A \subset U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ sodass $U \cap V = \emptyset$.*

BEWEIS. Wir nutzen die Hausdorff–Eigenschaft (T_2): Zu jedem Punkt $a \in A$ existieren offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $b \in V_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$. Es gilt $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$. Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n} =: U$. Damit ist auch der endliche Durchschnitt $V := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n} \ni b$ offen, und es gilt $U \cap V = \emptyset$. □

Satz F1E. *Sei $(X,\mathcal{T})$ hausdorffsch, $A, B \subset X$ kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Dann existieren Umgebungen U, V mit $A \subset U \in \mathcal{T}$ und $B \subset V \in \mathcal{T}$ sodass $U \cap V = \emptyset$.*

Der Beweis ist wörtlich derselbe wie für F1E, wobei wir „b“ durch „B“ ersetzen:

BEWEIS. Wir nutzen das vorige Lemma F1E: Zu jedem Punkt $a \in A$ existieren offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $B \subset V_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$. Es gilt $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$. Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n} =: U$. Damit ist auch der endliche Durchschnitt $V := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n} \supset B$ offen, und es gilt $U \cap V = \emptyset$. □

Bemerkung. Ähnliche Argumente helfen uns bei Trennungsaxiomen durchaus häufiger: Das Lemma von Tychonoff E5J beweist $T_3 \Rightarrow T_4$ für zweitabzählbare / Lindelöf–Räume. Der Satz von Dieudonné F8H beweist $T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_4$ für parakompakte Räume.

§F1e. Teilräume. Gemäß der eingangs erklärten Analogie verhalten sich kompakte Räume ähnlich wie endliche Mengen. Diese Analogie hinkt jedoch etwas: In einer endlichen Menge ist jede Teilmenge endlich, hingegen kann ein kompakter Raum durchaus nichtkompakte Teilmengen enthalten. Zum Beispiel ist das Intervall $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ kompakt, nicht aber $]0,1[$ oder $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ (siehe voriges Beispiel). Es fehlt die Abgeschlossenheit:

Satz F1F. *Ist $(X,\mathcal{T})$ kompakt, so ist jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ kompakt.*

BEWEIS. Jede Überdeckung $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}$ können wir erweitern zur offenen Überdeckung $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$. Da X kompakt ist, enthält diese eine endliche Teilüberdeckung von X, also $X = (X \setminus A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ und somit $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. □

Umgekehrt muss ein kompakter Teilraum $A \subset X$ nicht abgeschlossen sein: Man denke an $A = \{0\}$ im indiskreten Raum $X = \{0,1\}$. Hier fehlt ist die Hausdorff–Eigenschaft:

Satz F1G. *Ist $(X,\mathcal{T})$ hausdorffsch, so ist jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen.*

BEWEIS. Nach Lemma F1E ist das Komplement $X \setminus A$ offen. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F1f. Kompakta in $\mathbb{R}$. Wir erhalten den eindimensionalen Satz von Heine–Borel (F1O):

Korollar F1H (Heine–Borel in Dimension 1)**.** *Genau dann ist eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, wenn A in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt ist.*

BEWEIS. „⇐“: Dank Beschränktheit existiert $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $A \subset [-r,r]$. Das abgeschlossene Intervall $[-r,r]$ ist kompakt (F1D). Darin ist A abgeschlossen, also kompakt (F1F).

„⇒“: Ist $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, so ist A in $\mathbb{R}$ abgeschlossen (F1G). Die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{r\in\mathbb{N}}]-r,r[= \mathbb{R}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, also ist A beschränkt. □

§F1g. Trennungseigenschaften. Für kompakte Räume sind Trennungseigenschaften und Metrisierbarkeit besonders einfach und übersichtlich:

Übung F1I. (1) Jeder kompakte Hausdorff–Raum $(X,\mathcal{T})$ ist regulär (T_3) und normal (T_4). Insbesondere folgen hieraus auch die Trennungsaxiome $T_{4\frac{1}{2}}$ und $T_{3\frac{1}{2}}$ und $T_{2\frac{1}{2}}$.

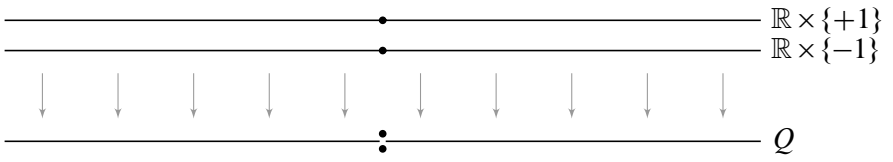
(2) Ein kompakter topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist genau dann metrisierbar, wenn er hausdorffsch und zweitabzählbar ist. (Kompakt hausdorffsch genügt nicht, siehe F1U.)

✻ **F1I.** Ist der Raum X kompakt und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist A kompakt (F1F). Somit gilt $T_2 \Rightarrow T_3$ (F1E) und $T_3 \Rightarrow T_4$ (F1E). Ist der Raum X zudem zweitabzählbar, so ist X metrisierbar (E5R).

Ist umgekehrt X kompakt und metrisierbar, so ist X separabel (D6L): Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert zur offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X} B(x,1/n)$ eine endliche Menge $A_n \subset X$ mit $X = \bigcup_{a\in A_n} B(a,1/n)$. Die Vereinigung $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist abzählbar und dicht in X: Ist $U \subset X$ offen und $x \in U$, so existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $B(x,1/n) \subset U$, sowie $a \in A_n$ mit $x \in B(a,1/n)$, also $a \in B(x,1/n) \subset U$. Also ist X separabel und somit zweitabzählbar (D6N).

Übung F1I. Wir untersuchen Vereinigung und Durchschnitt kompakter Mengen:

(3) Sind $A_1,\dots,A_n \subset X$ (relativ) kompakt in X, dann auch $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$.
(4) Für unendliche (selbst lokal-endliche) Vereinigungen gilt (1) im Allgemeinen nicht!
(5) In jedem Hausdorff–Raum ist jeder Durchschnitt kompakter Mengen kompakt.
(6) Ohne die Hausdorff–Eigenschaft gilt Schnittstabilität (3) im Allgemeinen nicht! Ein einfaches Gegenbeispiel ist die reelle Gerade mit doppeltem Ursprung (E2E).



✻ **F1I.** (3) Seien $A_1,\dots,A_n \subset X$ kompakt in X und $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Sei $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ eine Überdeckung durch offene Mengen $U_i \subset X$. Da A_k kompakt ist, existiert eine endliche Menge $J_k \subset I$, für die $A_k \subset \bigcup_{j\in J_k} U_j$ gilt. Somit ist auch $J = J_1 \cup \dots \cup J_n$ endlich, und es gilt $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

Im relativ kompakten Fall sind $\overline{A_1},\dots,\overline{A_n} \subset X$ kompakt in X, und somit auch $\overline{A} = \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$ (D5G).

(4) In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $[k,k+1]$ ist kompakt, ihre Vereinigung $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k,k+1]$ ist lokal-endlich und somit abgeschlossen (D5G), doch nicht beschränkt und somit nicht kompakt.

(5) Sei X ein Hausdorff–Raum und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie kompakter Teilmengen $A_i \subset X$. Wir nehmen $I \neq \emptyset$ an. Alle A_i sind abgeschlossen (F1G), also auch $A = \bigcap_{i\in I} A_i$, und somit ist $A \subset A_i$ kompakt (F1F).

(6) In der Geraden mit doppeltem Ursprung (E2E) sind die Teilräume $q_+([0,1])$ und $q_-([0,1])$ homöomorph zu $[0,1]$ und somit kompakt, aber ihr Durchschnitt $q_+([0,1]) \cap q_-([0,1]) \cong]0,1]$ ist nicht kompakt.

§F1h. Stetige Abbildungen kompakter Räume. Kompaktheit (F1A) ist eine topologische Invariante: Ist X kompakt und $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ ein Homöomorphismus, so ist auch Y kompakt. Mehr noch, Kompaktheit bleibt unter stetigen Abbildungen erhalten:

Satz F1J. *Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig. Ist $A \subset X$ kompakt, so auch $f(A) \subset Y$.*

BEWEIS. Sei $f(A) \subset \bigcup_{i\in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{T}_Y$, also $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i := f^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}_X$. Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Wir schließen $f(A) \subset f(U_{i_1}) \cup \cdots \cup f(U_{i_n}) \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$. Das bedeutet, $f(A) \subset Y$ ist kompakt. □

Beispiel. Für jeden kompakten Raum X ist auch jeder Quotientenraum $X/\!\sim$ kompakt, denn nach Konstruktion ist die Quotientenabbildung $q : X \twoheadrightarrow X/\!\sim$ stetig und surjektiv.

Die Hausdorff–Eigenschaft hingegen geht bei Quotientenbildung $X \twoheadrightarrow X/\!\sim$ leicht zu Bruch. Daher ziehe ich es vor, sie getrennt von der Kompaktheit zu betrachten.

Das Urbild eines Kompaktums muss hingegen nicht kompakt sein, wie die konstante Abbildung $X \to \{y\}$ lehrt. Wir gehen in §F5a näher auf *eigentliche* Abbildungen ein.

§F1i. Minimum und Maximum stetiger Funktionen. Den folgenden Satz kennen Sie aus der Analysis für Kompakta $X \subset \mathbb{R}^n$: Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihre Extrema an. Dieser wichtige Sachverhalt gilt für alle kompakten Räume:

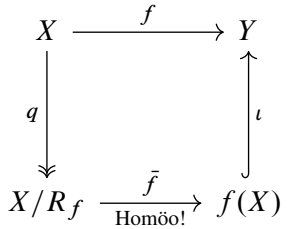
Satz F1K. *Ist $X \neq \emptyset$ kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt und nimmt ihre Extrema an, das heißt, es existieren $a, b \in X$ mit $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$.*

BEWEIS. Das Bild $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt (F1J), also beschränkt und abgeschlossen (F1H). Insbesondere ist das Infimum $\inf f(X)$ endlich und wird angenommen, es existiert also $a \in X$ mit $f(a) = \inf f(X)$. Ebenso existiert $b \in X$ mit $f(b) = \sup f(X)$. □

§F1j. Das Kompakt-Hausdorff-Kriterium. Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologischer Räume heißt *abgeschlossen*, wenn zu jeder abgeschlossenen Menge A in X das Bild $f(A)$ in Y abgeschlossen ist (D2A). Dies in konkreten Anwendungen nachzuweisen kann schwierig sein, aber dank Kompaktheit erhalten wir Abgeschlossenheit oft gratis:

Satz F1L. *Sei X kompakt und Y hausdorffsch. Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen und induziert in der kanonischen Faktorisierung einen Homöomorphismus:*

kompakt



hausdorffsch

Insbesondere gilt in dieser glücklichen Situation:

(1) Jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ist ein Homöomorphismus.
(2) Jede stetige Surjektion $f : X \to Y$ ist eine Identifizierung.
(3) Jede stetige Injektion $f : X \to Y$ ist eine Einbettung.

BEWEIS. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Da X kompakt ist, ist A kompakt (F1F). Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (F1J). Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (F1G).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

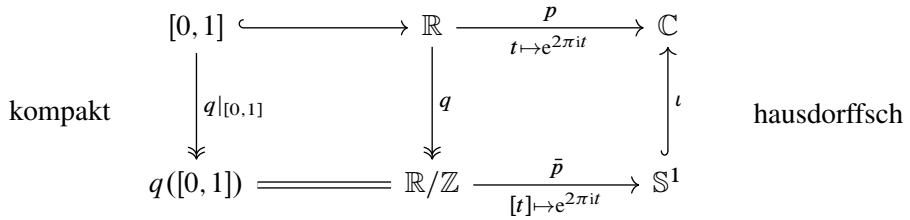
(1) Für jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ist die Aussage klar: Ist f abgeschlossen, so ist f^{-1} stetig. Somit ist f ein Homöomorphismus.

Allgemein nutzen wir die kanonische Faktorisierung (E2H): Mit X ist auch der Quotientenraum X/R_f kompakt (F1J). Mit Y ist auch der Teilraum $f(X)$ hausdorffsch (F1G). Somit ist $\bar{f} : X/R_f \to f(X)$ ein Homöomorphismus nach (1).

(2) Für jede stetige Surjektion $f : X \to Y$ erhalten wir auf dem Quotienten eine stetige Bijektion $\bar{f} : X/R_f \to Y$. Mit X ist auch der Quotientenraum X/R_f kompakt, nach (1) also $\bar{f} : X/R_f \to Y$ ein Homöomorphismus, somit ist f identifizierend (E2F).

(3) Für jede stetige Injektion $f : X \to Y$ erhalten wir durch Einschränkung eine stetige Bijektion $f : X \to f(X)$. Mit Y ist auch der Teilraum $f(X)$ hausdorffsch, nach (1) also $\bar{f} : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus, somit ist f einbettend (E1K). □

Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist stetig und ergibt in der kanonischen Faktorisierung die stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$. Da $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = q([0,1])$ kompakt ist (F1J) und $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ hausdorffsch (D1K), ist $\bar{p}$ ein Homöomorphismus (F1L).



Im vorigen Kapitel haben wir zur stetigen Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ *explizit* eine stetige Umkehrabbildung konstruiert (E2P). Dieser lange Weg ist oft informativ. Kompaktheit ist oft der kürzere und bequemere Weg, um allein $\bar{p}$ als Homöomorphismus nachzuweisen; die Umkehrabbildung bleibt *implizit*. Kompaktheit vereinfacht viele Argumente erheblich!

Beispiel. Allgemein gilt $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, siehe F1R.

Beispiel. Die Abbildungen $f, g, h, k : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ aus A:2 sind stetig. Das Quadrat $[-1,1]^2$ ist kompakt (dank Tychonoff F1N oder Heine–Borel F1O). Somit erhalten wir einen Homöomorphismus vom jeweiligen Quotientenraum $[-1,1]^2/\!\sim$ auf den Bildraum im $\mathbb{R}^3$ (F1L). Wir erhalten so einen Zylinder, ein Möbius–Band, einen Torus oder eine Sphäre aus einem Quadrat durch Identifizieren längs des Randes. Dieser Beweis bestätigt unsere Anschauung.

Die Hausdorff–Eigenschaft benötigt möglichst viele offene Mengen, um je zwei Punkte durch disjunkte Umgebungen zu trennen. Die Kompaktheit benötigt möglichst wenige offene Mengen, damit jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Korollar F1L. *Jeder kompakte Hausdorff–Raum $(X, \mathcal{T})$ ist im perfekten Gleichgewicht:*

(1) Jede echt feinere Topologie $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$ ist noch hausdorffsch, aber nicht mehr kompakt.
(2) Jede echt gröbere Topologie $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$ ist noch kompakt, aber nicht mehr hausdorffsch.

✻ **F1L.** Wir nutzen Satz F1L: (1) Jede feinere Topologie $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ist offenbar ebenfalls hausdorffsch. Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ stetig; ist $(X, \mathcal{T}')$ kompakt, so ist id_X ein Homöomorphismus, also $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

(2) Jede gröbere Topologie $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ ist offenbar ebenfalls kompakt. Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ stetig; ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, so ist id_X ein Homöomorphismus, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

§F1k. Summen kompakter Räume. Wir betrachten Kompaktheit unter den vier Grundkonstruktionen: Nach Teilraum und Quotient bleiben nun noch Summe und Produkt.

Satz F1M. *Sei $(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume $X_\lambda\neq\emptyset$. Die Summe $(X,\mathcal{T})=\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$ ist genau dann kompakt, wenn jeder Raum X_λ kompakt und Λ endlich ist.*

BEWEIS. „⇒“: Jede Teilmenge X_λ ist abgeschlossen in X (E3C). Ist also X kompakt, so auch jedes X_λ (F1F). Wegen $X_\lambda\neq\emptyset$ erlaubt $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ keine echte Teilüberdeckung. Ist also X kompakt, so ist Λ endlich.

„⇐“: Sei $X=\bigcup_{i\in I}U_i$ eine Überdeckung durch offene Mengen $U_i\subset X$. Da X_λ kompakt ist, existiert eine endliche Menge $J_\lambda\subset I$, für die $X_\lambda\subset\bigcup_{j\in J_\lambda}U_j$ gilt. Da wir zudem Λ als endlich voraussetzen, ist auch $J=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}J_\lambda$ endlich, und es gilt $X=\bigcup_{j\in J}U_j$. □

§F1l. Endliche Produkte kompakter Räume. Als letzte und wohl interessanteste unserer vier Grundkonstruktionen bleibt das Produkt topologischer Räume.

Satz F1N (kleiner Satz von Tychonoff)**.** *Sind $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ kompakt, dann auch der Produktraum $(X\times Y,\mathcal{T}_{X\times Y})=(X,\mathcal{T}_X)\times(Y,\mathcal{T}_Y)$.*

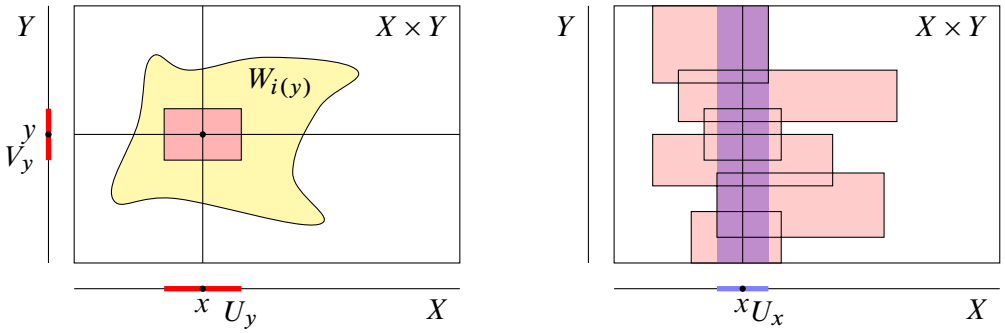


ABBILDUNG F:2. Produkttopologie und Tubenlemma

BEWEIS. Sei $X\times Y=\bigcup_{i\in I}W_i$ mit $W_i\in\mathcal{T}_{X\times Y}$ eine offene Überdeckung. Sei $x\in X$. Zu $y\in Y$ existiert $i(y)\in I$ mit $(x,y)\in W_{i(y)}$. Da $W_{i(y)}$ offen ist, existieren Umgebungen U_y,V_y mit $x\in U_y\in\mathcal{T}_X$ und $y\in V_y\in\mathcal{T}_Y$ sodass $(x,y)\in U_y\times V_y\subset W_{i(y)}$. Die offene Überdeckung $Y=\bigcup_{y\in Y}V_y$ enthält eine endliche Teilüberdeckung $Y=V_{y_1}\cup\dots\cup V_{y_n}$. Der Durchschnitt $U_x:=U_{y_1}\cap\dots\cap U_{y_n}$ erfüllt $x\in U_x\in\mathcal{T}_X$. Der gesamte Streifen $U_x\times Y$ wird endlich überdeckt:

$$\begin{aligned}U_x\times Y&=U_x\times(V_{y_1}\cup\dots\cup V_{y_n})=(U_x\times V_{y_1})\cup\dots\cup(U_x\times V_{y_n})\\&\subset(U_{y_1}\times V_{y_1})\cup\dots\cup(U_{y_n}\times V_{y_n})\subset W_{i(y_1)}\cup\dots\cup W_{i(y_n)}.\end{aligned}$$

Sei $J_x:=\{i(y_1),\dots,i(y_n)\}$. Die Überdeckung $X=\bigcup_{x\in X}U_x$ enthält eine endliche Teilüberdeckung $X=U_{x_1}\cup\dots\cup U_{x_p}$. Somit ist $J=J_{x_1}\cup\dots\cup J_{x_p}\subset I$ endlich und erfüllt

$$\begin{aligned}X\times Y&=(U_{x_1}\cup\dots\cup U_{x_p})\times Y=(U_{x_1}\times Y)\cup\dots\cup(U_{x_p}\times Y)\\&\subset\big(\textstyle\bigcup_{j\in J_{x_1}}W_j\big)\cup\dots\cup\big(\bigcup_{j\in J_{x_p}}W_j\big)=\bigcup_{j\in J}W_j.\end{aligned}$$

Damit haben wir zu $(W_i)_{i\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung $(W_i)_{i\in J}$ gefunden. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Korollar F1N. *(1) Seien $X_1, \dots, X_n \neq \emptyset$ nicht-leere topologische Räume. Genau dann ist der Produktraum $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ kompakt, wenn jeder Raum $X_1, \dots, X_n$ kompakt ist.*

BEWEIS. „⇒“: Mit X ist auch das stetige Bild $p_i(X) = X_i$ kompakt (F1J).

„⇐“: Die Kompaktheit paarweiser Produkte $X_1 \times X_2$ (F1N) verallgemeinert sich per Induktion über n auf endliche Produkte $X_1 \times \cdots \times X_n$ (dank Assoziativität E4L). □

Korollar F1N. *(2) Jeder Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.*

BEWEIS. In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $[a, b]$ kompakt bezüglich der euklidischen Topologie (F1D). Auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ stimmt die euklidische Topologie mit der Produkttopologie überein, und gleiches gilt für den Teilraum $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$. □

Satz F1O (Heine–Borel, nun allgemein für den $\mathbb{R}^n$)**.** *Genau dann ist eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, wenn A in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.*

BEWEIS. Wie F1H: „⇐“: Dank Beschränktheit existiert $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sodass $A \subset \bar{B}(0, r) \subset [-r, r]^n$. Da $[-r, r]^n$ kompakt ist (F1N) und A in X abgeschlossen, ist A kompakt (F1F).

„⇒“: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, dann ist A abgeschlossen (F1G). Die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{r \in \mathbb{N}} B(0, r) = \mathbb{R}^n$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, also ist A beschränkt. □

Beispiel. In $\mathbb{R}^n$ ist jeder Ball $\bar{B}(a, r)$ kompakt, denn er ist beschränkt und abgeschlossen. Ebenso ist die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \}$ kompakt.

Bemerkung. Sie kennen Satz F1O aus der Analysis (vgl. F2E). Wir erhalten hier einen unabhängigen, topologisch strukturierten Beweis: Aus Supremums-Vollständigkeit folgt Kompaktheit von Intervallen (F1D), Produkten (F1N) und Teilräumen (F1F, F1G).

Warnung. Satz F1O ist eine Besonderheit des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und gilt nicht für beliebige metrische Räume. Gegenbeispiel: In jedem diskreten metrischen Raum (X, d) ist jede Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen und beschränkt, aber nur endliche sind kompakt.

Übung F1P. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $(X \times Y, \mathcal{T})$ ihr Produkt.

(1) Tubenlemma: Sei $a \in X$ und $B \subset Y$ kompakt. Zu jeder Umgebung W von $\{a\} \times B$ in $X \times Y$, existieren $a \in U \in \mathcal{T}_X$ und $B \subset V \in \mathcal{T}_Y$ mit $\{a\} \times Y \subset U \times V \subset W$.
(2) Verallgemeinertes Tubenlemma: Wir dürfen $\{a\}$ ersetzen durch $A \subset X$ kompakt.
(3) Gilt das Tubenlemma auch noch, wenn A oder B nicht kompakt ist?
(4) Ist Y kompakt, so ist die Projektion $p : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$ abgeschlossen.
(5) Ist Y kompakt hausdorffsch, so ist $f : X \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \subset X \times Y$ abgeschlossen ist. (Satz vom abgeschlossenen Graphen für topologische Räume)

✻ **F1P.** (1) Wir übersetzen Abbildung F:2: Zu $b \in B$ existiert $U_b \times V_b \subset W$ mit $a \in U_b \in \mathcal{T}_X$ und $b \in V_b \in \mathcal{T}_Y$. Aus $B \subset \bigcup_{b \in B} V_b$ folgt $B \subset V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_n} =: V$. Die Menge $U = U_{b_1} \cap \cdots \cap U_{b_n}$ erfüllt $a \in U \in \mathcal{T}_X$ sowie $\{a\} \times B \subset U \times V \subset W$. Hieraus folgt (2) mit demselben Argument aber vertauschten Rollen.

(3) Nein: In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist $W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| < 1 \}$ eine offene Umgebung von $\{0\} \times \mathbb{R}$.

(4) Sei $A \subset X \times Y$ abgeschlossen. Wir zeigen, dass $p(A)$ abgeschlossen ist, indem wir $X \smallsetminus p(A)$ als offen nachweisen. Sei $x \notin p(A)$. Dann ist $\{x\} \times Y$ disjunkt von A, also ist $W = (X \times Y) \smallsetminus A$ eine offene Umgebung. Nach (1) existiert eine offene Umgebung U von x in X, so dass $U \times Y \subset W$ gilt, also $U \subset X \smallsetminus p(A)$.

(5) “⇒“: Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist die Teilmenge $f \subset X \times Y$ abgeschlossen in $X \times Y$ (E4T). “⇐“: Die Einschränkung $p|_f : f \to X$ ist eine stetige Bijektion. Nach (4) ist $p : X \times Y \to Y$ abgeschlossen. Da wir $f \subset X \times Y$ als abgeschlossen voraussetzen, ist $p|_f$ ein Homöomorphismus, also $f = \mathrm{pr}_2 \circ p|_f^{-1}$ stetig (E4R).

§F1m. Klassische Matrixgruppen. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wir betrachten die $\mathbb{K}$–Algebra $\mathbb{K}^{n\times n}$ aller $n \times n$–Matrizen über $\mathbb{K}$ mit der euklidischen Norm (C1P). Hierin betrachten wir die *allgemeine/spezielle lineare/orthogonale/unitäre Gruppe*:

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}_n\mathbb{K} &= \big\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,\big|\, \det A \neq 0 \big\}, & \mathrm{SL}_n\mathbb{K} &= \big\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,\big|\, \det A = 1 \big\},\\
\mathrm{O}_n\mathbb{R} &= \big\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\big|\, A^\mathsf{T}A = AA^\mathsf{T} = 1_{n\times n} \big\}, & \mathrm{SO}_n\mathbb{R} &= \big\{ A \in \mathrm{O}_n\mathbb{R} \,\big|\, \det A = 1 \big\},\\
\mathrm{U}_n\mathbb{C} &= \big\{ A \in \mathbb{C}^{n\times n} \,\big|\, \overline{A}^\mathsf{T}A = A\overline{A}^\mathsf{T} = 1_{n\times n} \big\}, & \mathrm{SU}_n\mathbb{C} &= \big\{ A \in \mathrm{U}_n\mathbb{C} \,\big|\, \det A = 1 \big\}.
\end{aligned}$$

Satz F1Q. *In $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ der invertierbaren Matrizen offen und dicht. In $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ sind $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ kompakte Untergruppen, ebenso $\mathrm{U}_n\mathbb{C}$ und $\mathrm{SU}_n\mathbb{C}$ in $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$.*

Für $n = 1$ haben wir $\mathrm{GL}_1\mathbb{K} = \mathbb{K}^\times$ sowie hierin jeweils

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}_1\mathbb{R} &= \big\{ a \in \mathbb{R} \,\big|\, a^2 = 1 \big\} = \{\pm 1\} &&= \mathbb{S}^0,\\
\mathrm{U}_1\mathbb{C} &= \big\{ a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C} \,\big|\, a^2 + b^2 = 1 \big\} &&= \mathbb{S}^1.
\end{aligned}$$

Hierin sind $\mathrm{SL}_1\mathbb{R} = \mathrm{SO}_1\mathbb{R} = \mathrm{SL}_1\mathbb{C} = \mathrm{SU}_1\mathbb{C} = \{1\}$ trivial. Für $n = 2$ finden wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{SO}_2\mathbb{R} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a,b \in \mathbb{R}, \\ a^2+b^2 = 1 \end{matrix} \right\} &&\cong \mathbb{S}^1,\\
\mathrm{SU}_2\mathbb{C} &= \left\{ \begin{pmatrix} a+\mathrm{i}b & -c+\mathrm{i}d \\ c+\mathrm{i}d & a-\mathrm{i}b \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{R}, \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \end{matrix} \right\} &&\cong \mathbb{S}^3.
\end{aligned}$$

Das ist überaus bemerkenswert: Die Sphären $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ tragen Gruppenstrukturen!

Für weitere Sphären gilt dies nicht; wir beweisen dies in J5D für $\mathbb{S}^{2n}$ mit $n \geq 1$.

Übung F1Q. (0) Rechnen Sie für $n = 1, 2$ die Gleichungen des Satzes F1Q sorgfältig nach.
(1a) Warum ist die Teilmenge $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ in der Algebra $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$ eine Untergruppe?
(1b) Sind auf $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ Multiplikation und Inversion stetig? rational? gar polynomiell?
(1c) Ist die Teilmenge $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ in $\mathbb{K}^{n\times n}$ offen? abgeschlossen? beschränkt? kompakt?

Beantworten Sie diese Fragen für (2) $\mathrm{SL}_n\mathbb{K}$ und (3) $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$, $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ und (4) $\mathrm{U}_n\mathbb{C}$, $\mathrm{SU}_n\mathbb{C}$.

(5) Für $n \geq 2$ haben wir folgende Gruppenhomomorphismen (kurze exakte Sequenzen) und Homöomorphismen topologischer Räume (aber keine Isomorphismen von Gruppen!):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_1, && \mathrm{SL}_n \times \mathrm{GL}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n \;:\; (A,s) \mapsto A \cdot \mathrm{diag}(s,1,\dots,1),\\
&\mathrm{SO}_n \hookrightarrow \mathrm{O}_n \twoheadrightarrow \mathrm{O}_1, && \mathrm{SO}_n \times \mathrm{O}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}_n \;:\; (A,s) \mapsto A \cdot \mathrm{diag}(s,1,\dots,1),\\
&\mathrm{SU}_n \hookrightarrow \mathrm{U}_n \twoheadrightarrow \mathrm{U}_1, && \mathrm{SU}_n \times \mathrm{U}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_n \;:\; (A,s) \mapsto A \cdot \mathrm{diag}(s,1,\dots,1).
\end{aligned}$$

⁕ **F1Q.** (0) Für $n = 1$ sind die Gleichungen klar nach Definition. Für $n = 2$ rechnen wir's nach. Die Inklusion „$\supset$“ ist klar nach Definition. Wir zeigen nun „$\subset$“. Wir betrachten zuerst $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Für $A = \left(\begin{smallmatrix} u & w \\ v & z \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ gilt nach Definition $\det(A) = uz - vw = 1$ sowie $|u|^2 + |v|^2 = |w|^2 + |z|^2 = 1$ und $\overline{u}w + \overline{v}z = 0$. Multiplikation mit v liefert $0 = \overline{u}vw + \overline{v}vz = \overline{u}vw + (1-\overline{u}u)z = \overline{u}(vw - uz) + z = -\overline{u} + z$, also $z = \overline{u}$. Multiplikation mit u liefert $0 = \overline{u}uw + u\overline{v}z = (1-\overline{v}v)w + u\overline{v}z = w + \overline{v}(uz - vw) = w + \overline{v}$, also $w = -\overline{v}$. Folglich $A = \left(\begin{smallmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{smallmatrix}\right)$. Die Rechnung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ verläuft wörtlich genauso, ohne Konjugation. Schließlich ist $\mathrm{SO}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mit $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \mapsto a + \mathrm{i}b$ ein Homöomorphismus und sogar ein Gruppenisomorphismus. Gleiches gilt auch für $\mathrm{SU}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, wenn wir $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ als Quaternionenalgebra auffassen (E7H).

(1a) Die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist über jedem kommutativen Ring $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ erklärt (B1Y). Genau dann ist eine Matrix A in $\mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, wenn ihre Determinante $\det A$ in $\mathbb{K}$ invertierbar ist, kurz $\det A \in \mathbb{K}^\times$. Da wir hier über einem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ arbeiten, gilt $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

(1b) Die Multiplikation $\cdot : \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ ist stetig, denn sie ist sogar eine Polynomfunktion in den Koordinaten. Gleiches gilt demnach für die Einschränkung $\cdot : \mathrm{GL}_n\mathbb{K} \times \mathrm{GL}_n\mathbb{K} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{K}$. Auch die Inversion $\mathrm{GL}_n\mathbb{K} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{K} : A \mapsto A^{-1}$ ist stetig, denn dank B1Y ist sie eine rationale Funktion in den Koordinaten.

$$\mathrm{GL}_1\mathbb{K} \to \mathrm{GL}_1\mathbb{K} : a \mapsto a^{-1}, \qquad \mathrm{GL}_2\mathbb{K} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{K} : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(1c) Die Determinantenabbildung $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist stetig, denn sie ist eine Polynomfunktion in den Koordinaten (B1Y). Somit ist $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ offen in $\mathbb{K}^{n\times n}$, als Urbild der offenen Menge $\mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ unter det. (Dank D5O ist $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ nicht nur offen, sondern zudem dicht in $\mathbb{K}^{n\times n}$ und hat volles Lebesgue-Maß.) Die Menge $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ ist in $\mathbb{K}^{n\times n}$ nicht abgeschlossen: Für $\mathbb{K}^\times \ni a \to 0$ gilt $\mathrm{GL}_n\mathbb{K} \ni \mathrm{diag}(a,1,\dots,1) \to \mathrm{diag}(0,1,\dots,1)$. Ebensowenig ist $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ beschränkt: Für $a \in \mathbb{K}^\times$ gilt $A = \mathrm{diag}(a,1,\dots,1) \in \mathrm{GL}_n\mathbb{K}$, und $|A| \geq |a|$ kann beliebig groß werden. Insbesondere ist $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ nicht kompakt, nach dem Satz von Heine–Borel (F1O).

(2a) Dank B1Y gilt $\det(1_{n\times n}) = 1$ und $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Die Abbildung $\det : \mathrm{GL}_n\mathbb{K} \to \mathbb{K}^\times$ ist demnach ein Gruppenhomomorphismus. Der Kern $\mathrm{SL}_n\mathbb{K} = \ker(\det : \mathrm{GL}_n\mathbb{K} \to \mathbb{K}^\times)$ ist demnach eine Untergruppe. Sie ist sogar eine normale Untergruppe, also invariant unter Konjugation.

(2b) Multiplikation und Inversion sind stetig auf $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$, also auch ihre Einschränkungen auf dem Teilraum $\mathrm{SL}_n\mathbb{K}$. Genauer: Die Multiplikation ist immer noch polynomiell in den Matrixkoordinaten. Wegen $\det A = 1$ ist nun die Inversion $\mathrm{SL}_n\mathbb{K} \to \mathrm{SL}_n\mathbb{K} : A \mapsto A^{-1}$ nicht nur rational (B1Y), sondern sogar eine Polynomfunktion!

(2c) Die Menge $\mathrm{SL}_n\mathbb{K}$ ist abgeschlossen, als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ unter der stetigen Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$. Sie ist nicht offen: Für $1 \neq a \to 1$ gilt $\mathrm{SL}_n\mathbb{K} \not\ni \mathrm{diag}(a,1,\dots,1) \to \mathrm{diag}(1,1,\dots,1)$. Im Fall $n = 1$ ist $\mathrm{SL}_1\mathbb{K} = \{1\}$ kompakt. Für $n \geq 2$ hingegen ist $\mathrm{SL}_n\mathbb{K}$ zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt: Für $a \in \mathbb{K}^\times$ gilt $\mathrm{diag}(a,a^{-1},1,\dots,1) \in \mathrm{SL}_n\mathbb{K}$. Nach Heine–Borel (F1O) ist $\mathrm{SL}_n\mathbb{K}$ nicht kompakt.

(3a) Wir zeigen, dass $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ ist. Es gilt $1_{n\times n} \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$. Für $A, B \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$ gilt $AB \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$, denn $(AB)^\mathsf{T}AB = B^\mathsf{T}A^\mathsf{T}AB = B^\mathsf{T}B = 1_{n\times n}$ und $AB(AB)^\mathsf{T} = ABB^\mathsf{T}A^\mathsf{T} = AA^\mathsf{T} = 1_{n\times n}$. Schließlich ist jede Matrix $A \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$ invertierbar mit $A^{-1} = A^\mathsf{T}$. Somit ist $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ eine Untergruppe in $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$.

Dank B1Y ist die Determinante multiplikativ und invariant unter Transposition. Für alle $A \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$ gilt daher $1 = \det(1_{n\times n}) = \det(A^\mathsf{T}A) = \det(A^\mathsf{T})\det(A) = \det A^2$, also $\det A \in \{\pm 1\} = \mathrm{O}_1\mathbb{R}$.

(3b) Multiplikation und Inversion sind stetig auf $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$, also auch auf $\mathrm{O}_n\mathbb{R} \subset \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$: Die Multiplikation ist immer noch polynomiell in den Matrixkoordinaten. Wegen $A^{-1} = A^\mathsf{T}$ gilt dies nun auch für die Inversion.

(3c) Im Fall $n = 1$ ist $\mathrm{O}_1\mathbb{R} = \{\pm 1\} = \mathbb{S}^0$ offensichtlich kompakt. Auch für $n = 2$ ist $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$ kompakt, somit auch $\mathrm{O}_2\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$ dank (5). Im allgemeinen Fall nutzen wir den Satz von Heine–Borel (F1O):

Die Teilmenge $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n\times n}$, denn $f(A) = A^\mathsf{T}A$ und $g(A) = AA^\mathsf{T}$ definieren stetige Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, und es gilt $\mathrm{O}_n\mathbb{R} = f^{-1}(\{1_{n\times n}\}) \cap g^{-1}(\{1_{n\times n}\})$. *Bemerkung:* Es gilt sogar $\mathrm{O}_n\mathbb{R} = f^{-1}(\{1_{n\times n}\}) = g^{-1}(\{1_{n\times n}\})$; unsere redundante Definition vereinfacht die Aufgabe (3a) etwas.

Zudem ist $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ beschränkt: Dank $A^\mathsf{T}A = 1$ bilden die Spalten der Matrix $A = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, also $|v_1|^2 = \cdots = |v_n|^2 = 1$, somit $|A|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = n$, also $|A| = \sqrt{n}$.

Dank Heine–Borel (F1O) ist $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ kompakt. *Bemerkung:* Wir nutzen hier die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$, damit gelingt's besonders leicht. Jede andere Norm ist hierzu äquivalent (F6K) und induziert somit dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Für die Operatornorm (C1Q) zum Beispiel gilt noch eleganter $|A|_{\mathbb{R}^2} = 1$.

Gleiches gilt für die normale Untergruppe $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} = \mathrm{O}_n\mathbb{R} \cap \mathrm{SL}_n\mathbb{R} = \ker(\det : \mathrm{O}_n\mathbb{R} \to \{\pm 1\})$.

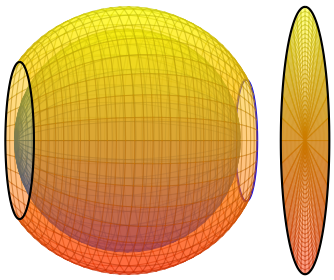
(4) Wörtlich genauso rechnet man nach, dass $\mathrm{U}_n\mathbb{C}$ und $\mathrm{SU}_n\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ kompakte Untergruppen sind.

(5) Der Gruppenhomomorphismus $\det : \mathrm{GL}_n\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_1\mathbb{R}$ spaltet, etwa durch $\iota : \mathrm{GL}_1\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ mit $\iota(s) = \mathrm{diag}(s,1,\dots,1)$. Wir erhalten den Homöomorphismus $(f,g) : \mathrm{SL}_n \times \mathrm{GL}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n$ mit $f(A,s) = A\cdot\iota(s)$ und $g(B) = (B\cdot\iota(\det B)^{-1}, \det B)$. Es gilt $g \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ g = \mathrm{id}$, wie man ohne Mühe nachrechnet. *Warnung:* Der Homöomorphismus $(f,g) : \mathrm{SL}_n \times \mathrm{GL}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n$ ist kein Gruppenisomorphismus, wie man (z.B. für $n = 2$) leicht nachrechnet. Auch der Homöormorphismus $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \times \{\pm 1\} \cong \mathrm{O}_2\mathbb{R}$ ist kein Gruppenisomorphismus: Die Produktgruppe links ist kommutativ, die Gruppe rechts hingegen nicht. (Rechnen Sie einfache Beispiele aus!)

§F1n. Rand eines Balles zusammenschlagen. Zur Erinnerung (§E2m): Im Raum X identifizieren wir einen Teilraum $A \subset X$ zu einem Punkt vermöge der Äquivalenzrelation $R = \{(x,y) \in X^2 \mid x = y \vee \{x,y\} \subset A\}$ und erhalten den Quotientenraum $X /\!\!/ A := X/R$.

Im vorigen Kapitel haben wir $[-1,1] /\!\!/ \{-1,1\} \cong \mathbb{S}^1$ gezeigt (E2T) und allgemein einen Homöomorphismus $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ versprochen. Dieses Versprechen lösen wir nun ein:

Satz F1R. *In jeder Dimension $n \geq 1$ haben wir einen Homöomorphismus $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$.*



$$\begin{array}{ccc}
[0,1]\times\mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow[\text{Kugelkoordinaten}]{\tilde p\,:\,(r,s)\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)} & \mathbb{R}^{n-1} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \tilde q:(r,s)\mapsto rs} & & \Big\| \\
\mathbb{D}^n & \xrightarrow[\text{wohldefiniert und stetig}]{p\,:\,rs\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)} & \mathbb{R}^{n+1} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle q\,:\,rs\mapsto[rs]} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \iota} \\
\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow[\text{Homöomorphismus!}]{\bar p\,:\,[rs]\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)} & \mathbb{S}^n
\end{array}$$

Wir nutzen Polarkoordinaten $\tilde q : [0,1]\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{D}^n : (r,s) \mapsto rs$. Die stetige Abbildung $\tilde p : [0,1]\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1} : (r,s) \mapsto (\cos(\pi r), \sin(\pi r)s)$ induziert $p : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, und deren kanonische Faktorisierung liefert den Homöomorphismus $\bar p : \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$.

> **Anschauung oder Formalisierung? Beides!** Dies ist ein Paradebeispiel: Die geometrische Aussage ist anschaulich plausibel, aber wir müssen beweisen, dass sie auch tatsächlich in unserem topologischen Modell gilt. Die technisch sorgfältige Ausführung erfordert eine Reihe nicht-trivialer Begriffe und Techniken, Definitionen und Sätze, die wir zu diesem Zwecke eingeführt haben: metrische und allgemeiner topologische Räume, Homöomorphismen und allgemeiner stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen, Teilräume und Quotienten und die kanonische Faktorisierung, Kompaktheit und Hausdorff-Eigenschaft. Der Weg ist lang, aber das Ziel ist lohnend: Das Zusammenspiel dieser Begriffe und Techniken beschert uns klare, präzise Aussagen und leichte, tragfähige Argumente.

BEWEIS. Die Abbildung $p : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^{n+1} : x = rs \mapsto (\cos(\pi r), \sin(\pi r)s)$ ist wohldefiniert: Für $r = 0$ und $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist rs unabhängig von s, das Bild $(\cos(\pi r), \sin(\pi r)s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ auch.

Die Abbildung p ist stetig. Kanonische Faktorisierung: (1) Das Bild ist $p(\mathbb{D}^n) = \mathbb{S}^n$.

Die Inklusion „$\subset$“ folgt aus $|p(rs)|^2 = \cos(\pi r)^2 + \sin(\pi r)^2|s|^2 = 1$. Wir zeigen „$\supset$“: Zu $(u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ mit $|u|^2 + |v|^2 = 1$ gilt $-1 \leq u \leq 1$, also existiert genau ein $r \in [0,1]$ mit $\cos(\pi r) = u$ dank Zwischenwertsatz C3R: Die Funktion cos ist stetig und auf $[0,\pi]$ streng monoton fallend von $\cos(0) = 1$ nach $\cos(\pi) = -1$. Für $-1 < u < 1$ gilt $0 < r < 1$ und $\sin(\pi r) > 0$, und wir setzen $s := v/\sin(\pi r) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Für $u = \pm 1$ gilt $r \in \{0,1\}$, und wir wählen $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ beliebig. In allen Fällen gilt $(u,v) = (\cos(\pi r), \sin(\pi r)s) = p(rs)$.

(2) Genau dann gilt $p(x) = p(y)$, wenn $x = y$ oder $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt. Der offene Ball $\mathbb{B}^n$ wird injektiv auf $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{-e_1\}$ abgebildet, die Randsphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ auf $-e_1 = (-1,0,\ldots,0)$.

(3) In der kanonischen Faktorisierung (E2H) induziert p somit eine stetige Bijektion $\bar p : \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$. Wir haben nachzuweisen, dass die Quotiententopologie von $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1}$ der Teilraumtopologie von $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ entspricht. Das ist keineswegs selbstverständlich.

Mit Kompaktheit gelingt es leicht: Der Raum $\mathbb{D}^n$ ist kompakt (dank Heine–Borel F1O), somit auch der Quotient $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1}$ (F1J). Der Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ ist hausdorffsch (sogar metrisierbar, C2O), somit auch der Teilraum $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (E1G). Dank dem Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L ist die stetige Bijektion $\bar p : \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ ein Homöomorphismus. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F1o. Die Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft. Eine Familie von Mengen $F_i \subset X$ mit $i \in I \neq \emptyset$ hat die *Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft* (engl. *finite intersection property*, kurz *FIP*), wenn $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \neq \emptyset$ für jede endliche Familie $i_1, \dots, i_n \in I$ gilt.

Lemma F1S (FIP). *Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind äquivalent:*

(1) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist kompakt: Jede Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch offene Mengen $U_i \subset X$ enthält eine endliche Teilüberdeckung $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
(2) Hat eine Familie $(F_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen $F_i \subset X$ leeren Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, so ist bereits ein endlicher Durchschnitt leer, $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = \emptyset$.
(3) Hat eine Familie $(F_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen $F_i \subset X$ die Eigenschaft (FIP) $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \neq \emptyset$ für alle $i_1, \dots, i_n \in I$, so gilt $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

BEWEIS. (1) $\Leftrightarrow$ (2) folgt durch Komplementbildung, (2) $\Leftrightarrow$ (3) durch Kontraposition. □

Beispiel. In $\mathbb{R}$ entspricht (3) dem Intervallschachtelungsprinzip: Zu jeder Folge $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ geschachtelter kompakter Intervalle in $\mathbb{R}$ ist der Schnitt nicht leer, das heißt, es existiert $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. (Gilt zudem $b_n - a_n \searrow 0$, so ist x eindeutig.)

Für offene Intervalle gilt dies nicht, wie $\bigcap_{n \geq 1}]0, 1/n[= \emptyset$ zeigt. Ebensowenig für abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{Q}$, wie $[3,4]_{\mathbb{Q}} \supset [3.1, 3.2]_{\mathbb{Q}} \supset [3.14, 3.15]_{\mathbb{Q}} \supset [3.141, 3.142]_{\mathbb{Q}} \supset \dots$.

§F1p. Der Satz von Tychonoff. Wir haben oben den kleinen Satz von Tychonoff für endliche Produkte bewiesen: Jedes *endliche* Produkt kompakter Räume ist kompakt (F1N). Der berühmte Satz von Tychonoff besagt darüber hinaus ganz allgemein:

Satz F1T (Tychonoff 1930). *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ nicht-leere topologische Räume. Unter der Annahme des Auswahlaxioms gilt: Das Produkt $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$ ist genau dann kompakt, wenn jeder Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt ist.*

BEWEIS. „⇒“: Jede Projektion $p_i : X \to X_i$ ist stetig (E4D) und surjektiv, da alle Räume X_j für $j \in I$ nicht-leer sind. Wenn X kompakt ist, dann auch $p_i(X) = X_i$ (F1J).

„⇐“: Sei $\mathscr{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Familie abgeschlossener Mengen in $(X, \mathcal{T})$ mit der Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft (kurz FIP). Zur Kompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ zeigen wir $\bigcap \mathscr{A} \neq \emptyset$.

Wir setzen $\mathscr{F}_0 := \{ A_1 \cap \dots \cap A_n \mid n \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A} \}$; zu $n = 0$ vereinbaren wir wie üblich $X \in \mathscr{F}_0$. Wir betrachten alle Familien $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ und Eigenschaft (a): Für $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ gilt $\emptyset \neq F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$. Dank Zorns Lemma existiert ein maximales $\mathscr{F}$, und für dieses gilt zudem (b): Für $U \subset X$ mit $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathscr{F}$ gilt $U \in \mathscr{F}$.

Die Familie $\{ p_i(F) \mid F \in \mathscr{F} \}$ hat dann ebenfalls FIP, ebenso $\{ \overline{p_i(F)} \mid F \in \mathscr{F} \}$. Da der Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt ist, existiert $x_i \in \bigcap_{F \in \mathscr{F}} \overline{p_i(F)}$ dank F1S. Für $x_i \in U_i \in \mathcal{T}_i$ gilt $U_i \cap p_i(F) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathscr{F}$, also $p_i^{-1}(U_i) \cap F \neq \emptyset$. Dank (b) gilt $p_i^{-1}(U_i) \in \mathscr{F}$. Dank (a) folgt $U = p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \in \mathscr{F}$. Jede Umgebung U' von $x = (x_i)_{i \in I}$ enthält eine solche Menge U (E4C), schneidet also jedes $V \in \mathscr{F}$, insbesondere jedes $V \in \mathscr{A} \subset \mathscr{F}$. Das bedeutet $x \in \overline{V} = V$ für jedes $V \in \mathscr{A}$ (D5A), also $x \in \bigcap \mathscr{A}$. □

Erläuterung. Zur Existenz von $\mathscr{F}$ appellieren wir an Zorns Lemma, oder äquivalent hierzu an das Auswahlaxiom. Alternativ nutzen wir: Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten (D8U). Das ist die magische Zutat, der Beweis ist dadurch leider nicht konstruktiv. Auch der Satz selbst kann es nicht sein, denn er impliziert seinerseits das Auswahlaxiom (F1W). Der Beweis ist extrem raffiniert eingefädelt, aber dann kurz und einfach: Alle weiteren Argumente lassen sich Schritt für Schritt nachvollziehen und verstehen. Ist das Theologie? Nein, Topologie!

Beispiel. Der diskrete Raum $\{0,1\}$ ist kompakt, nach Tychonoff also auch der Produktraum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Diesen kann man sich (ein wenig) besser vorstellen, wenn man ihn in $\mathbb{R}$ einbettet: Der Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist homöomorph zur Cantor–Menge $C \subset [0,1]$, siehe E4W.

Beispiele. Jeder Quader $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.
Jeder Quader $\prod_{k\in\mathbb{N}}[a_k,b_k]$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt, insbesondere $[0,1]^{\mathbb{N}}$.
Jeder Quader $\prod_{x\in\mathbb{R}}[a_x,b_x]$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist kompakt, insbesondere $[0,1]^{\mathbb{R}}$.

Beispiel. Für jede Menge X ist der Funktionenraum $[0,1]^X$ kompakt hausdorffsch. Diese (beliebig großen) Räume nutzen wir zur Stone–Čech–Kompaktifizierung (F4O).

Bemerkung. Der Satz von Tychonoff erscheint zunächst überraschend, wenig intuitiv, oder gar widersprüchlich. Wir stellen uns kompakte Räume, wie eingangs motiviert, als Verallgemeinerung endlicher Mengen vor. Ein *unendliches* Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ kompakter Räume X_i passt nicht so recht zu dieser Intuition. Für die Kompaktheit des topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$ zählt jedoch nicht die Größe der zugrundeliegenden Trägermenge X, sondern allein die hierauf betrachtete Topologie $\mathcal{T}$. Genau in diesem Sinne ist die Produkttopologie nicht allzu groß: Sie hat als Basis die Mengen $\prod_{i\in I} U_i$ mit $U_i \subset X_i$ offen für alle $i \in I$, wobei jedoch $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ (E4C). Dies garantiert, dass wir gerade genug offene Mengen erhalten, um alle Projektionen $p_i : X \to X_i$ stetig zu machen (E4D), aber doch nicht zu viele um die Kompaktheit zu gefährden (F1T). Berühmtestes Beispiel:

Beispiel (Hilbert–Würfel)**.** Als *Hilbert–Würfel* bezeichnet man den Raum $[0,1]^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie. Dieser ist metrisierbar (E4V) und spielt eine zentrale Rolle im Metrisierungssatz von Urysohn (E5R). Zudem ist $[0,1]^{\mathbb{N}}$ kompakt (F1T). Vorgriff / Alternative: Folgenkompaktheit (F2E) folgt leicht aus einem Diagonalargument. (Übung)

Beweis. Sei $(f_n : \mathbb{N} \to [0,1])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]^{\mathbb{N}}$. In $x = 0$ erhalten wir die Folge $f_n(0)$ in $[0,1]$. Da $[0,1]$ kompakt ist, existiert $i_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $i_0(0) < i_0(1) < \ldots$, sodass die Teilfolge $f_{i_0(n)}(0)$ in $[0,1]$ konvergiert. Angenommen, wie haben $i_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton, sodass $f_{i_k(n)}(x)$ in $[0,1]$ konvergiert für $0 \le x \le k$. Dann ist $f_{i_k(n)}(k+1)$ eine Folge in $[0,1]$, und es existiert $i_{k+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton mit $\mathrm{im}(i_{k+1}) \subset \mathrm{im}(i_k)$, sodass $f_{i_{k+1}(n)}(k+1)$ konvergiert. Wir definieren $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $i(n) = i_n(n)$. Diese Folge ist streng monoton, und $f_{i(n)}(x)$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{N}$.

Beispiel (Hilbert–Quader)**.** Im Hilbert–Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ aller quadrat-summierbaren Folgen (C1D) finden wir eine homöomorphe Kopie des Hilbert–Würfels, den *Hilbert–Quader*

$$H := \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; 0 \le f(k) \le \tfrac{1}{k+1} \right\} = [0,1]\times[0,\tfrac{1}{2}]\times[0,\tfrac{1}{3}]\times[0,\tfrac{1}{4}]\times\ldots.$$

Beweis. Zunächst gilt $H \subset \ell^2(\mathbb{N})$, denn für $f \in H$ gilt $\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(k)|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6 < \infty$. Der Hilbert–Quader $H \subset \ell^2(\mathbb{N})$ ist homöomorph zum Hilbert–Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ vermöge der zueinander inversen Bijektionen $\varphi : H \to [0,1]^{\mathbb{N}} : f \mapsto ((k+1)\cdot f(k))_{k\in\mathbb{N}}$, stetig dank Produkttopologie, und $\psi : [0,1]^{\mathbb{N}} \to H : x \mapsto ((k+1)^{-1}\cdot x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, stetig dank $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 < \infty$.

Übung F1U. Ist der Produktraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ hausdorffsch? erstabzählbar? metrisierbar? kompakt? Was gilt für den Teilraum $[0,1]^{\mathbb{R}}$? Und den Teilraum $\mathscr{C}(\mathbb{R},[0,1])$? (vgl. Arzelà–Ascoli F3M)

✻ **F1U.** Der Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist hausdorffsch, aber nicht erstabzählbar (D4B), also nicht metrisierbar. Die Auswertung $p_0 : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(0)$ ist stetig und surjektiv, aber das Bild $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, also ist auch $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nicht kompakt (F1J). Der Teilraum $[0,1]^{\mathbb{R}}$ ist kompakt (F1T), hausdorffsch (E1G) aber nicht metrisierbar (D4B). Ein Teilraum wie $\mathscr{C}(\mathbb{R},[0,1])$ ist genau dann kompakt, wenn er abgeschlossen ist (F1F, F1G). Jede abgeschlossene Teilmenge ist insbesondere folgenabgeschlossen (D5D). Dies ist für $\mathscr{C}(\mathbb{R},[0,1])$ nicht der Fall (D4F).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F1q. Kompaktheit und Filter. Für metrische Räume sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent (F2E): Dies gilt sinngemäß auch für topologische Räume, allerdings müssen wir wie üblich von Folgen zu Filtern übergehen. Die Rolle von Teilfolgen spielen die Verfeinerungen von Filtern (D8Q), insbesondere die maximalen Verfeinerungen, also die Ultrafilter (D8U). Diese Sichtweise erklärt insbesondere den oben angegebenen, kurzen (aber zugegeben recht ominösen) Beweis des Satzes F1T von Tychonoff.

Satz F1V. *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter $\mathscr{F}$ auf X konvergiert, also ein Punkt $x \in X$ existiert, sodass $\mathscr{F} \supset \mathscr{U}_x$ gilt.*

BEWEIS. „⇒“ Sei $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter auf X, der nicht konvergiert, das heißt, jeder Punkt $x \in X$ hat eine offene Umgebung $U_x \in \mathscr{U}_x$ mit $U_x \notin \mathscr{F}$. Da $(X,\mathcal{T})$ kompakt ist, enthält die Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X} U_x$ eine endliche Teilüberdeckung. Folglich existiert eine offene Überdeckung $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ mit $U_1,\dots,U_n \notin \mathscr{F}$. Da $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter ist, enthält er nach D8T die Komplemente $X \smallsetminus U_1,\dots,X \smallsetminus U_n$, und nach (F2) auch deren Durchschnitt

$$(X \smallsetminus U_1) \cap \dots \cap (X \smallsetminus U_n) = X \smallsetminus (U_1 \cup \dots \cup U_n) = \emptyset.$$

Das widerspricht jedoch der Filterbedingung (F1).

„⇐“ Angenommen X wäre nicht kompakt, das heißt, es existiert eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Dann ist

$$\mathscr{E} = \left\{ X \smallsetminus \bigcup\nolimits_{i\in J} U_i \;\middle|\; J \subset I \text{ endlich} \right\}$$

eine Filterbasis: Es gilt $\mathscr{E} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathscr{E}$, und zu $U,V \in \mathscr{E}$ gilt $U \cap V \in \mathscr{E}$. Diese Filterbasis erzeugt einen Filter, und dieser liegt in einem Ultrafilter $\mathscr{F}$ (D8U). Nach Voraussetzung konvergiert $\mathscr{F}$, das heißt es existiert ein Element $x \in X$ mit $\mathscr{F} \supset \mathscr{U}_x$. Wegen $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ existiert ein Index $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j eine offene Umgebung von x ist, gilt $U_j \in \mathscr{U}_x \subset \mathscr{F}$. Andererseits gilt für das Komplement $X \smallsetminus U_j \in \mathscr{E} \subset \mathscr{F}$. Nach (F2) enthält $\mathscr{F}$ dann $U_j \cap (X \smallsetminus U_j) = \emptyset$, was (F1) widerspricht. □

BEWEIS DES SATZES F1T VON TYCHONOFF MITTELS FILTER. „⇒“: Dies ist klar.

„⇐“: Sei $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist der Bildfilter $p_i(\mathscr{F})$ ein Ultrafilter auf X_i (D8W). Da X_i kompakt ist konvergiert $p_i(\mathscr{F})$ gegen einen Punkt $x_i \in X_i$ (F1V). Somit konvergiert $\mathscr{F}$ gegen $x = (x_i)_{i\in I}$ in X (E4P). Also ist der Raum X kompakt (F1V). □

§F1r. Bezug zum Auswahlaxiom. Wir benutzen hier entscheidend Satz D8U: Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten (*Boolean prime ideal theorem*, BPIT). Dies folgt aus dem Auswahlaxiom, ist aber schwächer. Im endlichen Fall (F1N) benötigen wir das Auswahlaxiom nicht. Man mag sich fragen, ob es im allgemeinen Fall einen ebenso konstruktiven Beweis gibt. Dem ist nicht so: Wir kommen um das Auswahlaxiom nicht herum!

Übung F1W. Der Satz von Tychonoff impliziert das Auswahlaxiom. *Hinweis:* Gegeben sei eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ nicht-leerer Mengen $A_i \neq \emptyset$. Sei $* \notin \bigcup_{i\in I} A_i$ ein weiterer Punkt. Wir betrachten den Raum $X = \prod_{i\in I} X_i$, wobei $X_i = A_i \cup \{*\}$ die Topologie $\{\emptyset, \{*\}, X_i\}$ trägt.

⁕ **F1W.** Jeder der Räume X_i ist kompakt. Nach dem Satz von Tychonoff (F1T) ist auch der Produktraum $X = \prod_{i\in I} X_i$ kompakt. Der Teilraum $A_i \subset X_i$ ist abgeschlossen, also auch das Urbild $B_i := p_i^{-1}(A_i)$ in X. Endliche Schnitte $B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_n}$ sind nicht-leer: Wir können $a_{i_1} \in A_{i_1},\dots,a_{i_n} \in A_{i_n}$ in allen weiteren Koordinaten $i \in I \smallsetminus \{i_1,\dots,i_n\}$ durch $*$ fortsetzen. Somit ist auch $\bigcap_{i\in I} B_i = \prod_{i\in I} A_i$ nicht leer (F1S): Es existiert ein Punkt $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$. Dieser wählt also aus jeder Menge A_i einen Punkt $a_i \in A_i$ aus.

§F2. Kompakte metrische Räume

§F2a. Abstand zwischen Mengen. Sei (X,d) ein metrischer Raum. In §C3g haben wir den Abstand zwischen Punkten und Mengen definiert als das punktweise Infimum:

$$d : X \times \mathfrak{P}X \to [0,\infty], \qquad d(a,B) := \inf\bigl\{\, d(a,b) \;\big|\; b \in B \,\bigr\}$$
$$d : \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X \to [0,\infty], \qquad d(A,B) := \inf\bigl\{\, d(a,b) \;\big|\; a \in A,\ b \in B \,\bigr\}$$

Bemerkung. Aus $d(A,B) > 0$ folgt $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Die Umkehrung jedoch gilt nicht: In $\mathbb{R}^2$ sind die Mengen $A = \{\,(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\,\}$ und $B = \{\,(x,1/x) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\,\}$ abgeschlossen und disjunkt, $A \cap B = \emptyset$, dennoch gilt $d(A,B) = 0$. Für kompakte Mengen ist alles besser:

Satz F2A. *Sind $A, B \subset X$ disjunkt, A abgeschlossen und B kompakt, so gilt $d(A,B) > 0$.*

BEWEIS. Die Funktion $f : B \to \mathbb{R} : x \mapsto d(A,x)$ ist stetig (C3N). Aus $x \in B$ folgt $x \notin A$, also $f(x) = d(A,x) > 0$, da A abgeschlossen ist (C3N). Da B kompakt ist, nimmt f ein Minimum an (F1K), das heißt, es existiert $b \in B$ mit $d(A,B) = \inf f = f(b) > 0$. □

§F2b. Lebesgue–Zahl einer Überdeckung. Folgende Eigenschaft ist oft nützlich:

Satz F2B. *Ist ein metrischer Raum (X,d) kompakt, so erlaubt jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine* Lebesgue–Zahl *$\delta \in \mathbb{R}_{>0}$: Für jeden Punkt $a \in X$ gilt $B(a,\delta) \subset U_i$ für ein $i \in I$. Anders gesagt: Jede Menge $A \subset X$ vom Durchmesser* $\operatorname{diam}(A) < \delta$ *liegt ganz in einer Menge U_i, denn $A \subset B(a,\delta) \subset U_i$ für jeden Punkt $a \in A$ und ein $i \in I$.*

BEWEIS. Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert $i_x \in I$ mit $x \in U_{i_x}$ und somit $\varepsilon_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x,2\varepsilon_x) \subset U_{i_x}$. Zur offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X} B(x,\varepsilon_x)$ existiert $E \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{x\in E} B(x,\varepsilon_x)$. Wir setzen $\delta := \min\{\,\varepsilon_x \mid x \in E\,\} > 0$. Jeder Punkt $a \in X$ erfüllt $a \in B(x,\varepsilon_x)$ für ein $x \in E$, also $B(a,\delta) \subset B(x,\varepsilon_x+\delta) \subset B(x,2\varepsilon_x) \subset U_{i_x}$. □

ALTERNATIVER BEWEIS. Das Komplement $A_i = X \smallsetminus U_i$ ist abgeschlossen in (X,d). Wir dürfen $U_i \neq X$ also $A_i \neq \emptyset$ für jedes $i \in I$ annehmen. Wir definieren $f : X \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sup\{\, d(x,A_i) \mid i \in I \,\}$. Für jedes $x \in X$ gilt $x \in U_i$ für ein $i \in I$, also $d(x,A_i) > 0$ und somit $f(x) > 0$. Zudem ist f stetig (C3N). Dank F1K nimmt f ihr Infimum an, somit gilt $\varepsilon := \inf f = f(x_0) > 0$. Jedes $\delta \in]0,\varepsilon]$ ist eine Lebesgue–Zahl: Zu jedem $x \in X$ existiert $i \in I$ mit $d(x,A_i) > \delta$, also $B(x,\delta) \subset U_i$. Jedes $\delta \in]\varepsilon,+\infty[$ ist keine Lebesgue–Zahl. □

Beispiele.
- Die Überdeckung $\mathbb{R}_{>0} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n,n+2[$ erlaubt bezüglich der euklidischen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ die Lebesgue–Zahl $\delta = 1/2$ oder kleiner, aber nicht größer.
- Die Folge $x_n = \log n$ (mit $x_0 = -\infty$) erfüllt $x_n \to \infty$ doch $x_{n+1} - x_n = \log \frac{n+1}{n} \to 0$. Die offene Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]x_n, x_{n+2}[$ erlaubt keine Lebesgue–Zahl $\delta > 0$, jedenfalls nicht bezüglich der euklidischen Metrik $d(x,y) = |x-y|$.
- Die Existenz einer Lebesgue–Zahl hängt von der Metrik ab und ist keine topologische Eigenschaft: Auf $\mathbb{R}$ haben wir neben der euklidischen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ auch die topologisch äquivalente Metrik $e(x,y) := |\exp(x) - \exp(y)|$: Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ein Homöomorphismus ist, definieren d und e dieselbe Topologie. Bezüglich e erlaubt die offene Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]x_n, x_{n+2}[$ die Lebesgue–Zahl $\delta = 1/2$.
- Ist (X,d) ein Raum mit diskreter Metrik, so ist $\delta \in]0,1]$ eine Lebesgue–Zahl zu jeder Überdeckung, und das selbst wenn X unendlich und somit nicht kompakt ist.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§F2c. Totalbeschränkte metrische Räume.** Ein metrischer Raum (X,d) heißt *beschränkt*, wenn die Metrik d beschränkt ist. Für $X \neq \emptyset$ ist hierzu äquivalent: Für einen (und damit jeden) Punkt $a \in X$ ist die Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto d(x,a)$ beschränkt. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ mit $f < r$ gilt dann $X = B(a,r)$. Wir verschärfen diese Bedingung wie folgt:

✍ **Definition F2C.** Ein metrischer Raum (X,d) heißt *totalbeschränkt*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X \;:\; X = B(a_1,\varepsilon) \cup \dots \cup B(a_n,\varepsilon)$$

Mit anderen Worten, die Abstandsfunktion $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto d(x,A)$ erfüllt $f(x) < \varepsilon$ für alle $x \in X$. Auch dies ist eine metrische und keine topologische Eigenschaft.

☞ **Bemerkung.** Totalbeschränkt impliziert beschränkt: Aus $X = B(a_1,\varepsilon) \cup \dots \cup B(a_n,\varepsilon)$ folgt $d(x,a_1) < r := \varepsilon + \max d(a_1,a_k)$ für alle $x \in X$. Die Umkehrung gilt nicht:

☞ **Beispiel.** In $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist der Einheitsball $\bar{B}(0,1)$ beschränkt, aber nicht totalbeschränkt: Für die kanonische Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $|e_m - e_n|_\infty = 1$ für alle $m \neq n$. Zu $\varepsilon = 1/2$ überdecken also nicht endlich viele Bälle $B(a_k,\varepsilon)$, denn jeder enthält höchstens einen der Punkte e_n.

☞ **Beispiel.** In $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik ist jeder Würfel $X = [-r,r]^n$ totalbeschränkt. Genau dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ totalbeschränkt, wenn A beschränkt ist. Hierzu nutzen Wir:

☞ **Proposition F2D.** *Ist (X,d) totalbeschränkt, so auch jeder Teilraum $A \subset X$.*

BEWEIS. Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon/2)$ und $I = \{i \in \{1,\dots,n\} \mid A \cap B(x_i,\varepsilon/2) \neq \emptyset\}$. Für jedes $i \in I$ wählen wir einen Punkt $a_i \in A \cap B(x_i,\varepsilon/2)$. Dank $x_i \in B(a_i,\varepsilon/2)$ folgt $B(x_i,\varepsilon/2) \subset B(a_i,\varepsilon)$, also $A \subset \bigcup_{i\in I} B(x_i,\varepsilon/2) \subset \bigcup_{i\in I} B(a_i,\varepsilon)$. □

☞ **§F2d. Charakterisierungen kompakter metrischer Räume.** Die Kompaktheit ist ein zentraler Begriff der Analysis und der Topologie und erscheint in vielen Formen und Zusammenhängen. Aus der Analysis kennen Sie verschiedene Kompaktheitsbegriffe, die für metrische Räume alle übereinstimmen. Da all diese Begriffe nützlich sind, wollen wir diese nun diskutieren und soweit möglich auch für topologische Räume nutzbar machen.

✍ **Satz F2E** (siebenfache Kompaktheit)**.** *Für jeden metrischen Raum (X,d) sind äquivalent:*

(1) Kompaktheit, also endliche Überdeckungseigenschaft nach Borel–Lebesgue:
Jede (beliebige) offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.

(2) Abzählbare Kompaktheit:
Jede abzählbare offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.

(3) Häufungspunkte: Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat einen Häufungspunkt $a \in X$, das heißt, jede Umgebung U von a enthält unendlich viele Folgenglieder.

(4) Folgenkompaktheit: Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat eine konvergente Teilfolge, d.h. es gibt Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ und einen Punkt $x \in X$ sodass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to x$.

(5) Pseudokompaktheit: Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Infimum und Supremum an, das heißt es existieren $a,b \in X$ mit $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$.

(6) Lebesgue–Kompaktheit: Der metrische Raum (X,d) ist totalbeschränkt und jede offene Überdeckung von X erlaubt eine Lebesgue–Zahl $\delta > 0$.

(7) Heine–Borel–Lebesgue–Kompaktheit:
Der metrische Raum (X,d) ist vollständig und totalbeschränkt.

Versuchen Sie den Beweis zunächst als Übung; das ist länglich aber sehr lehrreich.

☞ BEWEIS. Die Implikation „(1) ⇒ (2)“ ist trivial. ☜

„(2) ⇒ (3)“: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zum Endstück $E_n = \{ x_k \mid k \geq n \}$ sei $A_n = \overline{E_n}$ der Abschluss. Das Komplement $U_n = X \smallsetminus A_n$ ist offen. Wegen $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supsetneq \emptyset$ gilt $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supsetneq \emptyset$ und $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subsetneq X$. Wäre $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, so wäre $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$ eine abzählbare offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung, im Widerspruch zu (2). Jedes Element $a \in A$ ist ein Häufungspunkt der Folge.

„(3) ⇒ (4)“ wie in D3S: Zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X existiert dank (3) ein Häufungspunkt $a \in X$. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$. Zu $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ enthält $B(a, 2^{-k})$ unendlich viele Folgenglieder, also existiert $n_k > n_{k-1}$ mit $x_{n_k} \in B(a, 2^{-k})$. Hieraus folgt $x_{n_k} \to a$.

„(4) ⇒ (5)“: Es existiert eine Folge $x_n \in X$ mit $f(x_n) \to \sup f$. Wegen (4) existiert eine konvergente Teilfolge, $x_{n_k} \to b$ für $k \to \infty$. Weiterhin gilt $f(x_{n_k}) \to \sup f$ und wegen Stetigkeit zudem $f(x_{n_k}) \to f(b)$, also $f(b) = \sup f$ dank Eindeutigkeit des Grenzwertes (C3D). Das Infimum behandelt man wörtlich ebenso.

„(5) ⇒ (6)“: Die Existenz einer Lebesgue–Zahl haben wir oben im Satz F2B bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass (X, d) totalbeschränkt ist. Angenommen für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und jede endliche Familie $a_1, \ldots, a_n \in X$ gilt $B(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_n, \varepsilon) \subsetneq X$. Rekursiv wählen wir eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit $d(a_m, a_n) \geq \varepsilon$ für alle $m < n$. Die Funktion $f_n : X \to [0,1]$ mit $f_n(x) = \max\{0, 1 - 3/\varepsilon \cdot d(x, a_n)\}$ ist stetig (C3N). Die Träger $\bar{B}(a_n, \varepsilon/3)$ sind paarweise disjunkt. Daher ist auch $f = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n$ stetig aber unbeschränkt, im Widerspruch zu (5).

„(6) ⇒ (7)“: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X, d). Angenommen, zu jedem $a \in X$ existiert $\varepsilon > 0$ sodass $U_a = B(a, \varepsilon)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. Zur Überdeckung $X = \bigcup_{a\in X} U_a$ existiert nach (6) eine Lebesgue–Zahl $\delta > 0$, und wegen Totalbeschränktheit gilt $X = B(a_1, \delta) \cup \cdots \cup B(a_n, \delta)$. Da in jedem $B(a_k, \delta) \subset U_{a(k)}$ nur endlich viele Folgenglieder liegen erhalten wir einen Widerspruch. Also existiert ein $a \in X$ sodass für jedes $\varepsilon > 0$ die Umgebung $B(a, \varepsilon/2)$ unendlich viele Folgenglieder enthält. Hieraus folgt $x_n \to a$: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$, sodass für $p, q \geq n$ gilt $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon/2$. Zudem existiert $q \geq n$ mit $d(x_q, x) < \varepsilon/2$, also $d(x_p, x) \leq d(x_p, x_q) + d(x_q, x) < \varepsilon$.

„(7) ⇒ (4)“: Zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konstruieren wir eine Cauchy–Teilfolge: Da X totalbeschränkt ist, existiert zu $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung $X = B(a_1, 2^{-n}) \cup \cdots \cup B(a_k, 2^{-n})$. Mindestens einer dieser Bälle, sagen wir $B(a_1, 2^{-n})$ enthält unendlich viele Folgenglieder. Durch Weglassen aller anderen Folgenglieder können wir $x_p \in B(a_1, 2^{-n})$ für alle $p \geq n$ annehmen. Insbesondere gilt $d(x_p, x_q) < 2^{1-n}$ für alle $p, q \geq n$. So fortfahrend erhalten wir eine Cauchy–Folge. Dank Vollständigkeit (7) konvergiert diese in (X, d).

„(4) ⇒ (3)“ wie in D3S: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Nach (4) konvergiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, also $x_{n_k} \to a$. Damit ist a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

„(3) ⇒ (2)“: Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x_n \in X \smallsetminus (U_0 \cup \cdots \cup U_n)$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat nach (3) einen Häufungspunkt $a \in X$. Es gilt $a \in U_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion gilt $x_n \notin U_m$ für alle $n \geq m$, und damit wäre a kein Häufungspunkt.

„(2) ⇒ (1)“: Wegen (2) ⇒ ⋯ ⇒ (6) ist (X, d) totalbeschränkt. Demnach existiert zu jedem $k = 1, 2, 3, \ldots$ eine endliche Teilmenge A_k mit $d(x, A_k) < 1/k$ für alle $x \in X$. Die Vereinigung $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ist abzählbar und zudem dicht in X, das heißt $\overline{A} = X$. Somit ist (X, d) zweitabzählbar (D6N), also auch Lindelöf (D6V). Somit folgt (1) aus (2). □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

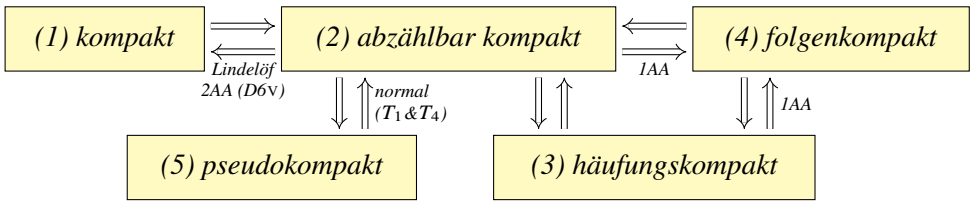
§F2e. Kompaktheitsbegriffe für topologische Räume. Die Eigenschaften (1–5) sind topologischer Natur und lassen sich somit wörtlich auf topologische Räume übertragen. Die Eigenschaften (6–7) hingegen sind metrischer Natur.

Bemerkung. Die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ ist homöomorph zum Intervall $]-1,1[$ vermöge $h:\mathbb{R}\to]-1,1[$ mit $h(x)=x/(1+|x|)$. Auf $\mathbb{R}$ haben wir somit neben der euklidischen Metrik $d(x,y)=|x-y|$ auch die topologisch äquivalente Metrik $d'(x,y):=|h(x)-h(y)|$: Da h ein Homöomorphismus ist, definieren d und d' dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}$. Ihre topologischen Eigenschaften sind gleich, aber ihre metrischen Eigenschaften sind sehr verschieden:

- Der Raum $(\mathbb{R},d)$ ist vollständig, das heißt, jede Cauchy–Folge konvergiert. In $(\mathbb{R},d')$ hingegen ist $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge, die nicht konvergiert.
- Der Raum $(\mathbb{R},d)$ ist unbeschränkt, hingegen ist $(\mathbb{R},d')$ totalbeschränkt.
- Die Überdeckung $(]n-1,n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ erlaubt die Lebesgue–Zahl $\delta=1/2$ bezüglich d. Bezüglich d' hingegen erlaubt diese Überdeckung keine Lebesgue–Zahl.

Vollständigkeit, Totalbeschränktheit und Existenz einer Lebesgue–Zahl hängen also von der gewählten Metrik ab und sind nicht topologisch invariant. Ihre Kombination wie in (6) oder (7) hingegen ist äquivalent zur Kompaktheit und somit topologisch invariant.

Satz F2F (fünffache Kompaktheit)**.** *Für topologische Räume gelten folgende Beziehungen:*



BEWEIS. Dies beweist man ähnlich wie Satz F2E im metrischen Fall. Ich habe den obigen Beweis so formuliert, dass es genügt, alle Argumente mit den uns zur Verfügung stehenden topologischen Begriffen umzuformulieren. Als Übung empfohlen! □

Bemerkung. Im obigen Schema steht die abzählbare Kompaktheit im Mittelpunkt. In den Anfängen der Topologie war sie tatsächlich der zentrale Begriff und wurde kurz „Kompaktheit“ genannt, während man unsere heutige Definition als „Bikompaktheit“ bezeichnete. Diese Bezeichnung findet sich noch in der Literatur der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Man sagte „bikompakt“ für *Lindelöf–kompakt und abzählbar kompakt*: Jede offene Überdeckung enthält eine abzählbare und diese dann eine endliche Teilüberdeckung.

Die abzählbare Kompaktheit ist gelegentlich nützlich aber aus heutiger Sicht bei weitem nicht so zentral wie die Kompaktheit. Die endliche Überdeckungseigenschaft erweist sich als besonders robust und flexibel, wie insbesondere der Satz von Tychonoff (F1T) belegt.

Bemerkung. Anders als für metrische Räume sind für topologische Räume Kompaktheit und Folgenkompaktheit unabhängige Eigenschaften: Ein kompakter Raum muss nicht folgenkompakt sein (F2G) und ein folgenkompakter Raum muss nicht kompakt sein (F2H). Schließlich braucht ein pseudokompakter Raum nicht abzählbar kompakt zu sein (F2I), also auch nicht kompakt oder folgenkompakt. Die folgenden drei Übungen präsentieren entsprechende Gegenbeispiele aus der topologischen Trickkiste.

☞ **§F2f. Beispiele und Gegenbeispiele.** Nicht jeder kompakte Raum ist folgenkompakt: ☜

Übung F2G. Wir versehen $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie und $X = \{0,1\}^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ mit der Produkttopologie. Nach dem Satz von Tychonoff ist X kompakt (F1T). Wir definieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $x_n : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$ durch $x_n(A) = |\{a \in A \mid a < n\}| \bmod 2$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat keine konvergente Teilfolge.

✻ **F2G.** Für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ sei $p_A : X \to \{0,1\}$ die kanonische Projektion: Diese weist jeder Funktion $x : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$ den Wert $p_A(x) = x(A)$ zu. Nach Konstruktion der Produkttopologie ist p_A stetig. Wir nutzen ein Diagonalargument: Angenommen es gäbe eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Hierzu sei $A = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Da p_A stetig ist, muss auch die Bildfolge $(p_A(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Es ist aber $p_A(x_{n_k}) = x_{n_k}(A) = k \bmod 2$ abwechselnd 0 und 1. Also erlaubt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge.

☞ Nicht jeder folgenkompakte Raum ist kompakt: Sei $(\Omega, <)$ wohlgeordnet und überabzählbar, aber jedes Intervall $[a,b]$ in Ω sei abzählbar. (Die üblichen Zermelo–Fraenkel–Axiome garantieren die Existenz dieser *kleinsten überabzählbaren Ordinalzahl*.) ☜

Übung F2H. Mit der Ordnungstopologie ist $(\Omega, \mathcal{T}_<)$ nicht kompakt aber folgenkompakt.

✻ **F2H.** Da $(\Omega, <)$ wohlgeordnet ist, existiert ein kleinstes Element $a \in \Omega$. Jedes Intervall $[a,\omega[$ mit $\omega \in \Omega$ ist offen in der Ordnungstopologie. Da Ω kein größtes Element enthält, ist $\Omega = \bigcup_{\omega\in\Omega} [a,\omega[$ eine Überdeckung. Diese enthält keine endliche Teilüberdeckung, da jedes Intervall $[a,\omega[$ abzählbar ist, Ω aber überabzählbar.

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Ω. Die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a,x_n]$ ist abzählbar, also nicht ganz Ω. Somit existiert $b \in \Omega$ mit $x_n \le b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(\Omega, <)$ wohlgeordnet ist, existiert ein kleinstes solches Element, also $b_0 = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ebenso existiert $b_m = \sup\{x_n \mid n \ge m\}$. Wegen $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \dots$ und Wohlordnung wird diese Folge stationär, also $b_m = x$ für alle $m \ge M$, und eine Teilfolge erfüllt $x_{n_k} \to x$.

☞ Nicht jeder pseudokompakte Raum ist abzählbar kompakt: ☜

Übung F2I. Wir versehen die Menge $\mathbb{N}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N} \mid 0 \in U\}$. Dieser Raum ist pseudokompakt, aber nicht kompakt, ja nicht einmal abzählbar kompakt.

✻ **F2I.** Wie behauptet ist $\mathcal{T}$ tatsächlich eine Topologie auf $\mathbb{N}$. Die offene Überdeckung $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{0,k\}$ hat keine endliche Teilüberdeckung. Jede stetige Funktion $f : (\mathbb{N},\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ ist konstant: Wäre $f(k) \ne f(0)$, so existierte eine offene Umgebung $f(k) \in U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, die $f(0)$ nicht enthält, und somit wäre $f^{-1}(U) \notin \mathcal{T}$. (Dieses Argument zeigt sogar noch etwas mehr: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ in einen T_1–Raum ist konstant.)

☞ **§F2g. Gleichmäßige Stetigkeit.** Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume. Aus C3E kennen wir die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion $f : X \to Y$: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass für alle $x,x' \in X$ mit $d_X(x,x') < \delta$ gilt $d_Y(f(x),f(x')) < \varepsilon$. Zum Beispiel ist $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig (C3H). ☜

Stetigen Funktionen auf kompakten Räumen kann so etwas nicht passieren:

☞ **Satz F2J.** *Ist $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ stetig und X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.* ☜

Eduard HEINE (1821–1881) bewies dies 1872 für Funktionen $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$. Den allgemeinen Fall metrischer Räume beweisen wir wörtlich genauso:

BEWEIS. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Zu jedem $a \in X$ existiert $\delta_a > 0$, sodass für alle $x \in B(a,2\delta_a)$ gilt $d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon/2$. Zur offenen Überdeckung $X = \bigcup_{a\in X} B(a,\delta_a)$ existiert $E \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{a\in E} B(a,\delta_a)$. Wir setzen $\delta := \min\{\delta_a \mid a \in E\} > 0$. Zu $x,x' \in X$ mit $d_X(x,x') < \delta$ existiert $a \in E$ mit $x \in B(a,\delta_a)$, also $x,x' \in B(a,2\delta_a)$. Hieraus folgt schließlich $d_Y(f(x),f(x')) \le d_Y(f(x),f(a)) + d_Y(f(a),f(x')) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F2h. Der Satz von Dini. Gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ impliziert punktweise Konvergenz, aber nicht umgekehrt. Unter zusätzlichen Voraussetzungen jedoch finden wir:

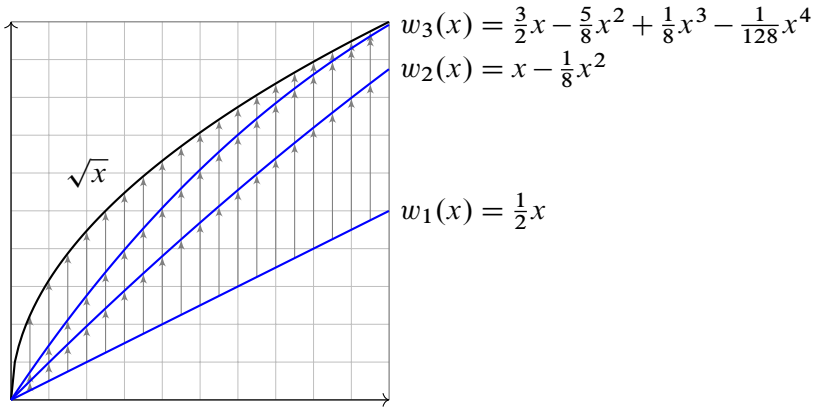
Satz F2K (Dini 1878)**.** *Sei X kompakt und $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $f_n(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig, also $|f - f_n|_X \searrow 0$.*

BEWEIS. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Menge $U_n := \{ x \in X \mid f_n(x) > f(x) - \varepsilon \}$ ist offen in X, da f_n und f stetig sind. Aus $f_n \nearrow f$ folgt $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$. Dank Kompaktheit von X existiert eine endliche Teilüberdeckung, also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $U_m = X$. Für alle $n \geq n$ gilt dann $0 \leq f - f_n < \varepsilon$. Das bedeutet $|f - f_n|_X \searrow 0$ für $n \to \infty$. □

Bemerkung. Dieser Satz ist einer der seltenen Glücksfälle, in denen die (sehr schwache) punktweise Konvergenz die (wesentlich stärkere) gleichmäßige Konvergenz nach sich zieht.

Alle drei Voraussetzungen sind wesentlich: die Stetigkeit der Grenzfunktion f, die Kompaktheit des Raumes X und die punktweise monotone Konvergenz $f_n(x) \nearrow f(x)$:

(1) Auf $X = [0,1]$ konvergieren $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - x^n$ monoton, $f_n \nearrow f = \mathbf{I}_{[0,1[}$, aber f ist unstetig. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, denn $|f - f_n|_{[0,1]} = 1$.
(2) Eingeschränkt auf $X = [0,1[$ gilt $f_n \nearrow f = 1$, auch hier bleibt $|f - f_n|_{[0,1[} = 1$.
(3) Die stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1] : x \mapsto \max(1, |1 - nx|)$ konvergieren punktweise gegen $f = 1$, aber weder monoton noch gleichmäßig: $|f - f_n|_{[0,1]} = 1$.



Lemma F2L. *Es gibt eine Folge $w_0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w : [0,1] \to [0,1]$ mit $w(x) = \sqrt{x}$ und Polynomfunktionen w_n, sodass $w_n \nearrow w$ gilt. Dank F2K folgt $|w - w_n|_{[0,1]} \searrow 0$.*

BEWEIS. Wir nutzen das Newton–Heron–Verfahren: Wir setzen $w_0 := 0$ und rekursiv

$$w_{n+1} := w_n + (w^2 - w_n^2)/2. \tag{F.1}$$

Per Induktion zeigen wir $0 \leq w_n \leq w \leq 1$. Dies gilt für $n = 0$, und mit n auch für $n + 1$:

$$w - w_{n+1} = w - w_n - (w^2 - w_n^2)/2 = \big[w - w_n\big]\cdot\big[1 - (w + w_n)/2\big] \geq 0$$

Somit gilt $w_n \leq w$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit (F.1) folgt $w_0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w$. Demnach existiert eine Grenzfunktion $w_n \nearrow g : [0,1] \to [0,1]$. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ geht die Rekursionsgleichung (F.1) über in $g = g + (w^2 - g^2)/2$, also $g = w$ und $w_n \nearrow w$. □

§F2i. Der Satz von Stone–Weierstraß. Ist der Raum X kompakt, so ist jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt (F1K), also die Norm $|f|_X = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ endlich. Hierdurch wird $(\mathscr{C}(X,\mathbb{R}), +, \cdot, |-|_X)$ zu einer reellen Banach–Algebra mit Eins (C1T).

Eine nicht-leere Teilmenge $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ ist eine $\mathbb{R}$*–Algebra*, wenn für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in A$ auch $\alpha f + \beta g \in A$ und $f \cdot g \in A$ gilt. Eine Algebra mit Eins erfüllt zudem $1 \in A$.

Lemma F2M. *Für jede $\mathbb{R}$–Algebra $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ gilt: Mit f, g enthält $\overline{A}$ auch*

$$|f|, \quad \min(f,g) = \tfrac{1}{2}\big[f + g - |f-g|\big] \quad \textit{und} \quad \max(f,g) = \tfrac{1}{2}\big[f + g + |f-g|\big].$$

BEWEIS. Für $f = 0$ liegt $|f| = 0$ in $A \subset \overline{A}$. Zu $f \in A \smallsetminus \{0\}$ sei $h := f/|f|_X \in A$. Es gilt $|h|_X = 1$, also $0 \le h^2 \le 1$. Die Funktionen $w_n(h^2) \in A$ aus F2L konvergieren gleichmäßig gegen $\sqrt{h^2} = |h|$. Daher gilt $|h| \in \overline{A}$ und $|f| = |h| \cdot |f|_X \in \overline{A}$. Zu $f \in \overline{A}$ existieren Approximationen $f_n \in A$ mit $||f| - |f_n||_X \le |f - f_n|_X \to 0$. Dank $|f_n| \in \overline{A}$ folgt $|f| \in \overline{A}$. □

Eine Teilmenge $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ heißt *Verband*, wenn sie mit $f, g \in A$ stets auch $\min(f,g)$ und $\max(f,g)$ enthält. Im Falle eines Vektorraums A spricht man von einem *Vektorverband*. Dank F2M ist für jede $\mathbb{R}$–Algebra $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ der Abschluss $\overline{A}$ ein Vektorverband.

Ein Vektorraum $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ *trennt alle Punkte* $a, b \in X$, wenn jede Auswertung $p_{a,b} : A \to \mathbb{R}^{\{a,b\}} : f \mapsto (f(a), f(b))$ sujektiv ist. Anders gesagt, zu je zwei Punkten $a \ne b$ in X und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existiert eine Interpolation $f \in A$ mit $f(a) = \alpha$ und $f(b) = \beta$. Für $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ ist dies das Trennungsaxiom $T_{2^1/_2}$ (E5A); für kompakte X genügt bereits Hausdorff (F1I). Für eine $\mathbb{R}$–Algebra $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ mit $1 \in A$ genügt eine Funktion $g \in A$ mit $g(a) \ne g(b)$, denn $f(x) = \alpha \frac{g(x)-g(b)}{g(a)-g(b)} + \beta \frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)}$ erfüllt dann $f \in A$ sowie $f(a) = \alpha$ und $f(b) = \beta$.

Satz F2N (Weierstraß 1885, Stone 1937)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorff–Raum.*

(1) Genau dann ist eine $\mathbb{R}$–Algebra A in $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ dicht, wenn sie alle Punkte trennt.

(2) Sei $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ eine Menge, sodass für $f, g \in A$ stets $\min(f,g), \max(f,g) \in \overline{A}$ gilt. Für $h \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ gilt $h \in \overline{A}$ genau dann, wenn für je zwei Punkte $a, b \in X$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Approximation $f \in A$ existiert mit $|f(a) - h(a)| < \varepsilon$ und $|f(b) - h(b)| < \varepsilon$.

BEWEIS. (1) „⇒“: Die Algebra $\overline{A} = \mathscr{C}(X, A)$ trennt alle Punkte in X (F1I), also auch A. Wäre $p_{a,b}(A) \subsetneq \mathbb{R}^{\{a,b\}}$ ein echter Untervektorraum, dann auch $p_{a,b}(\overline{A}) = \overline{p_{a,b}(A)} \subsetneq \mathbb{R}^{\{a,b\}}$.

Die Umkehrung „⇐“ folgt dank F2M aus der allgemeineren Aussage (2):

(2) „⇒“: Aus $f_n \to h$ gleichmäßig folgt $|f_n(a) - h(a)| \to 0$ und $|f_n(b) - h(b)| \to 0$.

„⇐“: Zu $h \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ konstruieren wir $f \in \overline{A}$ mit $|f - h| < \varepsilon$, also $h \in \overline{A}$.

Zu $a, b \in X$ existiert $f_{a,b} \in A$ mit $|f_{a,b}(a) - h(a)| < \varepsilon/2$ und $|f_{a,b}(b) - h(b)| < \varepsilon/2$. Dann sind $U_{a,b} := \{x \in X \mid f_{a,b}(x) < h(x) + \varepsilon\}$ und $V_{a,b} := \{x \in X \mid f_{a,b}(x) > h(x) - \varepsilon\}$ offen: $\{a,b\} \subset U_{a,b}, V_{a,b} \in \mathcal{T}$. Zu jedem festem Punkt $b \in X$ gilt $X = \bigcup_{a \in X} U_{a,b}$. Es existiert $E \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{a \in E} U_{a,b}$. Die Funktion $f_b := \min_{a \in E} f_{a,b} \in \overline{A}$ erfüllt $f_b(x) < h(x) + \varepsilon$ für alle $x \in X = \bigcup_{a \in E} U_{a,b}$ und ebenso $f_b(x) > h(x) - \varepsilon$ für $x \in V_b := \bigcap_{a \in E} V_{a,b}$. Die Menge V_b ist eine offene Umgebung von $b \in X$. Zu $X = \bigcup_{b \in X} V_b$ existiert $F \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{b \in F} V_b$. Die Funktion $f := \max_{b \in F} f_b \in \overline{A}$ erfüllt sowohl $f(x) < h(x) + \varepsilon$ also auch $f(x) > h(x) - \varepsilon$ für alle $x \in X$. Das bedeutet $|f - h| < \varepsilon$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F2j. Komplexe Formulierung. Der Satz von Stone–Weierstraß gilt auch komplex:

Satz F2O (Stone–Weierstraß, komplexe Formulierung)**.** *Sei X kompakt und $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ ein Ring stetiger Funktionen, der Punkte trennt, alle konstanten Funktionen enthält und zu jeder Funktion $f \in A$ auch die komplex-konjugierte $\overline{f} \in A$. Dann liegt A dicht in $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$.*

Übung F2P. Beweisen Sie die komplexe Formulierung des Satzes von Stone–Weierstraß. Klassische Anwendung: Jede stetige 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird gleichmäßig approximiert durch trigonometrische Polynome $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$.

✻ **F2P.** Auch $A_{\mathbb{R}} = A \cap \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ ist ein Ring und enthält alle konstanten Funktionen nach $\mathbb{R}$. Wenn A Punkte trennt, dann auch $A_{\mathbb{R}}$: Zu $a \neq b$ existiert $h \in A$ mit $h(a) \neq h(b)$. Mit h enthält A auch $\overline{h}$ und $\mathrm{Re}(h) = (h+\overline{h})/2$ und $\mathrm{Im}(h) = (h-\overline{h})/2\mathrm{i}$. Also gilt $\mathrm{Re}(h), \mathrm{Im}(h) \in \mathrm{A}_{\mathbb{R}}$ und $\mathrm{Re}h(a) \neq \mathrm{Re}h(b)$ oder $\mathrm{Im}h(a) \neq \mathrm{Im}h(b)$. Wir können nun F2N anwenden: Zu $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ existieren $g_n, h_n \in A_{\mathbb{R}}$ mit $g_n \to g = \mathrm{Re}(f)$ und $h_n \to h = \mathrm{Im}(f)$, also $f_n = g_n + \mathrm{i}h_n \in A$ und $f_n \to f$, denn $|f_n - f|_X = |(g_n - g) + \mathrm{i}(h_n - h)|_X \leq |g_n - g|_X + |h_n - h|_X \to 0$.

Ohne Konjugation scheitert der Beweis: Für $A = \mathbb{C}[z] \subset \mathscr{C}(\mathbb{D}^2,\mathbb{C})$ trennt $A_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ nicht mehr die Punkte. Auch der Satz ist falsch: $\overline{A} \subsetneq \mathscr{C}(\mathbb{D}^2,\mathbb{C})$ sind die holomorphen Funktionen. Für $\mathbb{C}[z,\overline{z}]$ hingegen gilt der Satz.

§F2k. Fejér–Polynome. Zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 2π–periodisch suchen wir Approximationen $f_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. Die *Fourier–Koeffizienten* $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} f(t)\,\mathrm{d}t$ minimieren den L^2–Abstand (C1H). Im Allgemeinen konvergieren die *Fourier–Polynome* f_n nicht gleichmäßig gegen f, nicht einmal punktweise. Lipót FEJÉR nutzte die arithmetischen Mittel $f_n^* := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k^* \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit $c_k^* = c_k(n-|k|)/n$ und bewies:

Satz F2Q (Fejér 1911)**.** *Die Fejér–Polynome f_n^* konvergieren gleichmäßig gegen f.*

BEWEIS. Wir berechnen für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ die *Dirichlet–Kerne* und ihre Summe:

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}} = \frac{\sin\big((n+1/2)x\big)}{\sin(x/2)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1/2)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+1/2)x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2})^2} = \frac{\sin(nx/2)^2}{\sin(x/2)^2}$$

Der *Fejér–Kern* $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$ erfüllt also $F_n \geq 0$ und $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ sowie

$$0 \quad \leq \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \leq \quad \frac{1}{n\sin(\delta/2)^2} \quad \to \quad 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Zu f sind die Fourier– und die Fejér–Polynome gegeben durch die Faltungen

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad f_n^*(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi} f(t)\, F_n(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Die Funktion f ist gleichmäßig stetig (F2J): Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $\delta \in \,]0,\pi[$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|t| < \delta$ die Schranke $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon/2$ gilt. Hieraus folgt:

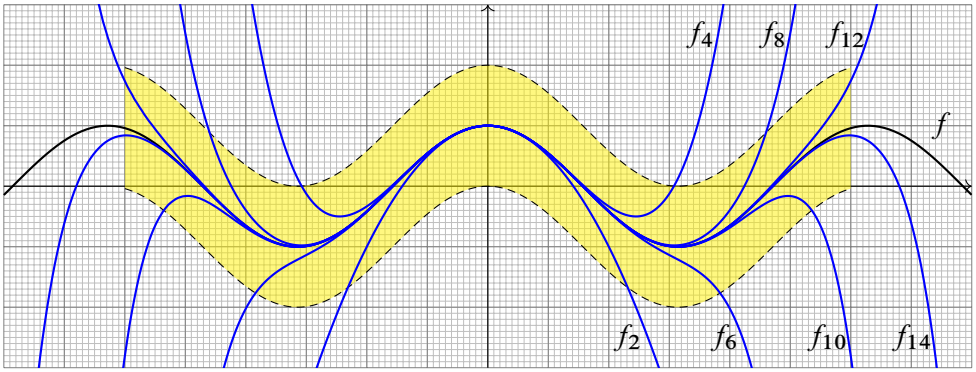
$$\big|f_n^*(x) - f(x)\big| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big[f(x-t) - f(x)\big]\, F_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(x-t) - f(x)\big|\, F_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}\big|f(x-t) - f(x)\big|\, F_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |t| \leq \pi}\big|f(x-t) - f(x)\big|\, F_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Wir schließen $|f_n^* - f|_{\mathbb{R}} < \varepsilon/2 + 2|f|_{\mathbb{R}}/(n\sin(\delta/2)^2)$, also $< \varepsilon$ für n hinreichend groß. □

§F2l. Approximation durch Polynome. Stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ können phantastisch kompliziert sein, dennoch lassen sie sich gleichmäißg approximieren durch so einfache Funktionen wie Polynome! Dies ist der der klassische Satz von Weierstraß (1885):

Korollar F2R. *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kann gleichmäßig approximiert werden durch Polynomfunktionen $f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ mit $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom f_n mit $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$.* □



Beispiel. Ist f *analytisch*, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konvergent auf $B(x_0, \rho) \supset [a,b]$, so sind die Taylor–Polynome $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ geeignete Approximationen (C5F). Die Koeffizienten $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$ lassen sich leicht berechnen, und das Restglied im Satz von Taylor gibt Auskunft über den Fehler $|f - f_n|_{[a,b]} \to 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Die Taylor–Approximation ist bequem, aber nicht optimal: Zu festem Grad n gibt es genauere Approximationen. Zudem setzt sie f als analytisch bzw. $\mathscr{C}^n$–glatt voraus und ist für beliebige stetige Funktionen nicht anwendbar. Satz F2U behebt dieses Problem.

Übung F2S. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann existieren Polynome $f_n \in \mathbb{R}[x]$, für die sowohl $f_n \to f$ als auch $f_n' \to f'$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergieren. *Gegenbeispiele:* Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n/n$ konvergieren gleichmäßig gegen $f = 0$, aber nicht einmal punktweise gilt $f_n' \to f'$. Die Funktionen $f_n(x) = \sqrt{1/n + x^2}$ sind glatt und konvergieren gleichmäßig gegen $f(x) = |x|$, aber f ist nicht differenzierbar.

✻ **F2S.** Die Ableitung $g := f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und erfüllt $f(x) = f(a) + \int_{t=a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$. Dank F2R existieren Polynome $g_n \in \mathbb{R}[x]$ mit $|g_n - g|_{[a,b]} \to 0$. Wir integrieren diese zu $f_n(x) = f(a) + \int_{t=a}^{x} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ und erhalten $f_n \in \mathbb{R}[x]$ mit $|f_n(x) - f(x)| = |\int_{t=a}^{x} g_n(t) - g(t)\,\mathrm{d}t| \leq |b-a| \cdot |g_n - g|_{[a,b]}$, also $|f_n - f|_{[a,b]} \to 0$.

Übung F2T. Zu $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig existieren Polynome $f_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ sodass $f_n \to f$ kompakt konvergiert, also gleichmäßig auf jedem Kompaktum $K \subset U$.

✻ **F2T.** Der Polynomring $A = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ trennt alle Punkte: Zu $a \neq b$ in $\mathbb{R}^d$ existiert ein Index $i \in \{1, \ldots, d\}$ mit $a_i \neq b_i$, also $x_i(a) \neq x_i(b)$. Wir können also den Satz von Stone–Weiserstraß F2N auf Kompakta $K \subset \mathbb{R}^d$ anwenden. Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ ist wie in D6N eine Vereinigung $U = \bigcup B(a, 1/k)$ mit $a \in \mathbb{Q}^n$ und $\bar{B}(a, 1/k) \subset U$. Also ist U abzählbare Vereinigung von offenen Bällen B_n mit $n \in \mathbb{N}$ und kompakten Abschlüssen $\overline{B_n} \subset U$. Wir setzen $K_n = \bigcup_{k=0}^{n} \overline{B_k}$ und erhalten Kompakta $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ mit $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Dank F2N existiert $f_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ mit $|f - f_n|_{K_n} < 2^{-n}$. Für jedes Kompaktum $K \subset U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ gilt $K \subset K_n$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt auf K gleichmäßige Konvergenz $|f - f_n|_K \to 0$ für $n \to \infty$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F2m. Bernstein–Polynome. Zu einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ suchen wir eine möglichst explizite Folge approximierender Polynomfunktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.

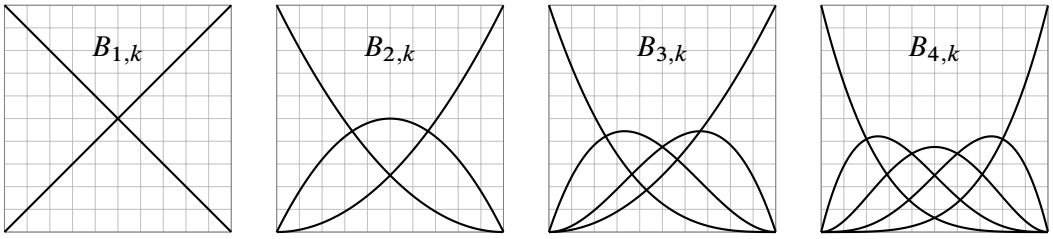


ABBILDUNG F:3. Bernstein–Polynome $B_{n,k}$ für $n = 1,2,3,4$ und $k = 0,1,\dots,n$

Satz F2U. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0,1,\dots,n\}$ definieren wir das* Bernstein–Polynom $B_{n,k} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *durch* $B_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \geq 0$. *Für alle $t \in [0,1]$ und $n \geq 1$ gilt*

$$\text{(F.2)} \quad \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} B_{n,k}(t) = t, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 B_{n,k}(t) = \frac{t(1-t)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

*Zur Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definieren wir ihr n–*tes Bernstein–Polynom *durch*

$$\text{(F.3)} \qquad f_n(t) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Ist die Funktion f stetig, so konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[0,1]$. □

BEWEIS. Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt (F1K), also $|f| \leq M < \infty$, und gleichmäßig stetig (F2J): Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für $t, t' \in [0,1]$ mit $|t'-t| < \delta$ die Schranke $|f(t') - f(t)| < \varepsilon/2$ gilt. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
\left|f_n(t) - f(t)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right] B_{n,k}(t)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right| B_{n,k}(t) \\
&= \sum_{|k/n-t|<\delta} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right| \cdot B_{n,k}(t) + \sum_{|k/n-t|\geq\delta} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right| \cdot B_{n,k}(t) \\
&< \sum_{|k/n-t|<\delta} \frac{\varepsilon}{2} \cdot B_{n,k}(t) + \sum_{|k/n-t|\geq\delta} 2M \cdot \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{k}{n} - t\right)^2 B_{n,k}(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\delta^2 n}
\end{aligned}$$

Wir schließen $|f_n - f|_{[0,1]} < \varepsilon$ für n hinreichend groß, also $|f - f_n|_{[0,1]} \to 0$ für $n \to \infty$.

Bemerkung. Da f gleichmäßig stetig ist, gilt die angegebene Abschätzung unabhängig vom Punkt $t \in [0,1]$. Ist die vorgegebene Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ lediglich beschränkt gemäß $|f| \leq M < \infty$, so gilt immerhin punktweise Konvergenz $f_n(t) \to f(t)$ für $n \to \infty$ in jeder Stetigkeitsstelle $t \in [0,1]$.

Es bleibt noch die Gleichung (F.2) nachzurechnen. Sie besagt, dass $P(\frac{k}{n}) = B_{n,k}(t)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge $\Omega = \{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots \frac{n}{n}\}$ ist mit Erwartungswert t und Varianz $t(1-t)/n$. Dies beweist man am leichtesten mit stochastischem Vokabular: Für eine Zufallsvariable X_i mit Verteilung $P(X_i = 1) = t$ und $P(X_i = 0) = 1-t$ berechnet man den Erwartungswert t und die Varianz $t(1-t)$. Der Mittelwert $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ hat dann Erwartungswert t und Varianz $t(1-t)/n$. Die Verteilung von S_n ist gegeben durch $P(S_n = k) = B_{n,k}(t)$. Somit gilt (F.2). □

Übung F2v. Wem das stochastische Argument im Beweis von Satz F2U nicht behagt, der kann die benötigte Gleichung (F.2) direkt nachrechnen. Besonders effizient gelingt dies durch zweimaliges Ableiten der zugehörigen *erzeugenden Funktion*

$$F(z) := \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\, z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k z^k = (1-t+zt)^n.$$

✻ **F2v.** Die Ableitungen F' und F'' sind leicht zu berechnen:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} k\, B_{n,k}(t)\, z^{k-1} &&= (1-t+zt)^{n-1} nt, \\ F''(z) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, B_{n,k}(t)\, z^{k-2} &&= (1-t+zt)^{n-2} n(n-1)t^2. \end{aligned}$$

Ausgewertet an der Stelle $z = 1$ ergibt dies folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} F(1) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) &&= 1 \\ F'(1) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(t) &&= nt \\ F''(1) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k}(t) &&= n(n-1)t^2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt die behauptete Gleichung (F.2):

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 B_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2\frac{k}{n}t + t^2\right) B_{n,k}(t) = \frac{n(n-1)t^2 + nt}{n^2} - 2t^2 + t^2 = \frac{t(1-t)}{n} \le \frac{1}{4n}$$

Die quadratische Funktion $t(1-t)$ nimmt ihr Maximum in $t = 1/2$ an, daher die angegebene Ungleichung.

Bemerkung. Diese Approximationsmethode wurde 1912 von Sergei BERNSTEIN (1880–1968) eingeführt. Sie hat viele nützliche Eigenschaften. Ist etwa $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nicht nur stetig sondern sogar stetig differenzierbar, so konvergiert nicht nur $f_n \to f$ sondern auch $f_n' \to f'$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Allgemeiner für $f \in \mathscr{C}^k([0,1],\mathbb{R})$ gilt $f_n \to f$, $f_n' \to f'$, …, $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Das ist allgemein keineswegs zu erwarten (F2S).

Bemerkung. Gegebene Punkte $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ definieren die *Bernstein–Bézier–Kurve* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ mit $\gamma(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\, v_k$. Dieser Weg verbindet $\gamma(0) = v_0$ mit $\gamma(1) = v_n$ in der konvexen Hülle $[v_0, v_1, \dots, v_n]$. Für $n = 1$ ist γ das Geradensegment von v_0 nach v_1. Solche Funktionen nützen allerorten in der Numerik und der Computergrafik (CAD, SVG).

Entsprechend lässt sich $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ approximieren durch Polynome

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d} f\left(\frac{k_1}{n_1}, \dots, \frac{k_d}{n_d}\right) \binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_d}{k_d} x_1^{k_1} (1-x_1)^{n_1-k_1} \cdots x_d^{k_d} (1-x_d)^{n_d-k_d}.$$

Wie schon im eindimensionalen Fall liefert diese explizite Polynomapproximation einen konstruktiven Beweis des Satzes von Weierstraß (F2R). Für $d = 2$ definieren die Kontrollpunkte eine *Bezier–Fläche*. Um den Grad zu beschränken verwendet man in der Praxis meist *Splines*, also stückweise Bezier–Funktionen, die stetig bzw. $\mathscr{C}^k$–glatt ineinander übergehen.

Im Computer-Aided-Design (CAD) dienen Splines zur geometrischen Modellierung technischer Bauteile. Hierzu wurden sie ab 1958 entwickelt durch Paul DE CASTELJAU (Mathematiker bei Citroën) und popularisiert durch Pierre BÉZIER (Ingenieur bei Renault).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F2n. Stückweise affine Funktionen. Jede Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_\ell = 1$ und Werte $v_0, v_1, \ldots, v_\ell \in \mathbb{R}$ definieren die stückweise affine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} v_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} v_k \quad \text{für alle } k = 1, \ldots, \ell \text{ und } t \in [t_{k-1}, t_k]. \tag{F.4}$$

Diese bilden den Vektorraum $A = \mathrm{PL}([0,1], \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. Dieser ist keine Algebra, denn für $f, g \in A$ liegt $f \cdot g$ im Allgemeinen nicht in A. Hingegen gilt stets $|f| \in A$, und somit $\min(f,g), \max(f,g) \in A$ (F2M), das heißt, A ist ein *Vektorverband*.

Übung F2w. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ ein kompaktes Polyeder und $A = \mathrm{PL}(X, \mathbb{R}^n)$ die Menge der stückweise affinen Funktionen, das heißt affin auf jedem Polytop einer geeigneten Unterteilung. Aus dem Satz F2N von Stone–Weierstraß folgt $\overline{A} = \mathscr{C}(X, \mathbb{R}^n)$, das heißt, jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ lässt sich gleichmäßig approximieren durch stückweise affine Funktionen. (In §I4 beweisen wir dies für Simplizialkomplexe durch simpliziale Approximation.)

§F2o. Relative Approximation. Oft ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem Teilraum $N \subset X$ bereits gut genug und soll dort bei der Approximation $f_n \to f$ nicht gestört werden.

Beispiel. Wir approximieren stückweise affin, $A = \mathrm{PL}(X, \mathbb{R})$, oder polynomial, $A = \mathbb{R}[t]$.

Wir wollen einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$ approximieren durch einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit demselben Start und Ziel. Hier ist $N = \{0,1\}$; wir wählen polygonal $\nu(t) = \mathrm{dist}(t, \{0,1\}) \in \mathrm{PL}([0,1], \mathbb{R})$ bzw. polynomial $\nu(t) = t(1-t) \in \mathbb{R}[t]$.

Wir approximieren eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ von $H(0,t) = \alpha(t)$ nach $H(1,t) = \beta(t)$ mit festem Rand $H(s,0) = \alpha(0)$ und $H(s,1) = \alpha(1)$. Hier ist $N = \partial[0,1]^2$; wir wählen polygonal $\nu(s,t) = \mathrm{dist}((s,t), N)$ bzw. polynomial $\nu(s,t) = s(1-s)t(1-t)$.

Übung F2x (Approximation relativ zu einem Teilraum)**.** Sei X kompakt und $A \subset \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$–Vektorverband bzw. eine $\mathbb{R}$–Algebra. Wir fordern, dass A alle Punkte in X trennt.

Sei $N = \{ x \in X \mid \nu(x) = 0 \}$ die Nullstellenmenge einer vorgegebenen Funktion $\nu \in A$. Dann liegt $A_0 = \{ f \in A \mid f(N) = 0 \}$ dicht in $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R}) \mid f(N) = 0 \}$.

Anwendung: Gegeben sei $h \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ mit $h|_N = g|_N$ für ein $g \in A$. Zu jeder Fehlerschranke $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert eine Approximation $f \in A$ mit $|f - h| < \varepsilon$ und $f|_N = h|_N$.

✻ **F2x.** Zu $h \in \mathscr{C}_0(X, \mathbb{R})$ wollen wir $h \in \overline{A_0}$ zeigen. Dank des Satzes F2N von Stone–Weierstraß genügt es, zu allen $a, b \in X$ eine Approximation $f_0 \in A_0$ zu finden mit $f_0(a) = h(a)$ und $f_0(b) = h(b)$. Wir unterscheiden:

(1) Ist A ein Vektorverband, so auch A_0. Wir können $\nu \geq 0$ annehmen, notfalls ersetzen wir ν durch $|\nu|$. Es existiert $f \in A$ mit $f(a) = h(a)$ und $f(b) = h(b)$. Zudem existiert $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$ sodass $|h(a)| \leq \alpha\nu(a)$ und $|h(b)| \leq \alpha\nu(b)$. Dann liegt $f_0 = \max(\min(f, \alpha\nu), -\alpha\nu)$ in A_0 und erfüllt $f_0(a) = h(a)$ und $f_0(b) = h(b)$.

(2) Ist A eine $\mathbb{R}$–Algebra, so auch A_0 (wenn auch ohne Eins). Es existiert $f \in A$ mit $\nu(a) f(a) = h(a)$ und $\nu(b) f(b) = h(b)$. Für $\nu(a) = 0$ ist die Bedingung leer, für $\nu(a) \neq 0$ können wir $f(a) = h(a)/\nu(a)$ einrichten; entsprechend für b. Somit liegt das Produkt $f_0 = \nu f$ in A_0 und erfüllt $f_0(a) = h(a)$ und $f_0(b) = h(b)$.

Anwendung auf den inhomogenen Fall: Wir approximieren $h_0 := h - g \in \mathscr{C}_0(X, \mathbb{R})$ durch $f_0 \in A_0$ mit $|f_0 - h_0| < \varepsilon$. Die Funktion $f := f_0 + g \in A$ erfüllt dann $|f - h| < \varepsilon$ sowie $f|_N = g|_N = h|_N$.

Beispiel. Für $\nu = 1$ gilt $N = \emptyset$ und wir erhalten den absoluten Fall (F2N).

Beispiel. Wir verlangen mit Bedacht $\nu \in A$; die freie Wahl $\nu \in \overline{A}$ ist im Allgemeinen nicht möglich. Die Algebra $A = \mathbb{R}[t]$ liegt dicht in $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, also liegt $\nu(t) = \mathrm{dist}(t, [0, 1/2])$ in $\overline{A}$. Hier gilt $N = [0, 1/2]$. Somit liegt $A_0 = \{0\}$ nicht dicht in $\mathscr{C}_0([0,1], \mathbb{R})$.

§F3. Lokale Kompaktheit

§F3a. Lokal-kompakte Räume. Viele wichtige Räume, wie der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$, sind nicht kompakt aber immerhin lokal-kompakt im folgenden Sinne:

Definition F3A. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt *lokal-kompakt* im Punkt $x\in X$, wenn jede Umgebung V von x eine kompakte Umgebung U von x enthält. Gilt dies in jedem Punkt $x\in X$, so nennen wir den Raum $(X,\mathcal{T})$ *lokal-kompakt*. Äquivalent sind hierbei:

- Jeder Punkt $x\in X$ erlaubt beliebig kleine kompakte Umgebungen.
- Die kompakten Umgebungen von x bilden eine Umgebungsbasis $\mathscr{U}_x^{\mathrm{k}}$ von x.
- Die Topologie $\mathcal{T}$ erlaubt eine Basis aus relativ kompakten, offenen Mengen in $(X,\mathcal{T})$.

Beispiele.
- Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt: Für jeden Punkt $x\in\mathbb{R}^n$ bilden die kompakten Umgebungen $\bar{B}(x,\varepsilon)$ mit $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ eine Umgebungsbasis. Die Basis $\mathcal{B}=\big\{\,B(x,\varepsilon)\;\big|\;x\in\mathbb{R}^n,\ \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\,\big\}$ besteht aus relativ kompakten, offenen Mengen.
- Jede offene Menge $U\subset\mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt dank $\bar{B}(x,\varepsilon)\subset U$: Für jeden Punkt $x\in U$ bilden die kompakten Umgebungen $\bar{B}(x,\varepsilon)\subset U$ eine Umgebungsbasis. (F3E)
- Jede abgeschlossene Menge $A\subset\mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt: Für jeden Punkt $x\in A$ bilden die kompakten Umgebungen $\bar{B}(x,\varepsilon)\cap A$ eine Umgebungsbasis. (F3E)
- Der Teilraum $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ ist nicht lokal-kompakt, denn kein Punkt $x\in\mathbb{Q}$ hat eine kompakte Umgebung: Jede Umgebung U von x enthält ein abgeschlossenes Intervall $I=[a,b]_{\mathbb{Q}}$ mit $a<x<b$. Wäre U kompakt, so auch I (F1F), was falsch ist (F1D).

Beispiel. Ein metrischer Raum (X,d) ist genau dann lokal-kompakt im Punkt $x\in X$, wenn *eine* kompakte Umgebung U existiert: Dann existiert $r\in\mathbb{R}_{>0}$, sodass der abgeschlossene Ball $\bar{B}(x,r)\subset U$ kompakt ist (C2M, F1F) und somit auch $\bar{B}(x,r')$ für alle r' mit $0<r'\le r$.

Vollständigkeit ist hiervon unabhängig: $\mathbb{B}^n\subset\mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt, aber nicht vollständig. Der Raum $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ mit sup–Norm ist vollständig, aber nicht lokal-kompakt.

Beispiel. Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum $(X,\mathcal{T},+,\cdot)$ ist genau dann lokal-kompakt, wenn er endlich dimensional ist (F6U). In diesem Fall ist er linear homöomorph zu $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n},+,\cdot)$.

Lokale Kompaktheit ist demnach eine Besonderheit endlicher Dimension. Unendlichdimensionale Hilbert–Räume wie $\ell^2(\mathbb{Z})$ oder $L^2([a,b])$ sind nicht lokal-kompakt, ebensowenig die Banach–Räume $\ell^p(\mathbb{Z})$ und $L^p([a,b])$: In diesen konkreten Beispielen sieht man leicht, dass kein Ball $\bar{B}(0,r)$ mit positivem Radius $r\in\mathbb{R}_{>0}$ kompakt ist (F6X).

Beispiel. Jede n–dimensionale Mannigfaltigkeit M ist lokal euklidisch, also lokal homöomorph zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ bzw. zum Halbraum $\mathbb{R}^n_{\ge 0}=\{x\in\mathbb{R}\mid x_1\ge 0\}$, wenn wir Rand zulassen. Da diese Modellräume lokal-kompakt sind, ist auch M lokal-kompakt.

Auch hier ist lokale Kompaktheit eine Besonderheit endlicher Dimension. Unendlichdimensionale Hilbert– oder Banach–Mannigfaltigkeiten sind nicht lokal-kompakt.

Übung F3B. Sei X ein lokal-kompakter Raum und $K\subset X$ eine kompakte Teilmenge. Dann enthält jede Umgebung V von K eine kompakte Umgebung U von K.

✻ **F3B.** Nach Voraussetzung existiert zu jedem Punkt $x\in K\subset U$ eine kompakte Umgebung $U_x\subset V$. Zur offenen Überdeckung $K\subset\bigcup_{x\in K}U_x^\circ$ existieren $x_1,\dots,x_n\in K$ mit $K\subset U_{x_1}^\circ\cup\dots\cup U_{x_n}^\circ$. Die Vereinigung $U:=U_{x_1}\cup\dots\cup U_{x_\ell}$ ist kompakt und erfüllt $K\subset U^\circ\subset U\subset V$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F3b. Lokal-kompakte Hausdorff–Räume. Für lokale Kompaktheit fordern wir gemäß Definition F3A, dass jede Umgebung eine kompakte Umgebung enthält. In einem Hausdorff–Raum reicht hierzu schon *eine* kompakte Umgebung für jedes $x \in X$:

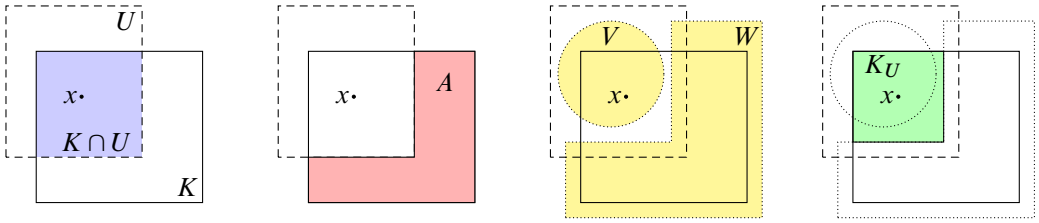


ABBILDUNG F:4. Konstruktion einer kompakten Umgebung K_U, nach Piet MONDRIAN (1872–1944), einem Begründer des Konstruktivismus.

Satz F3C. *Jeder kompakte Hausdorff–Raum ist lokal-kompakt.*

Genauer: Sei $(X,\mathcal{T})$ hausdorffsch. Existiert zum Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung $K \in \mathscr{U}_x^k$, dann ist $(X,\mathcal{T})$ lokal-kompakt im Punkt x (im Sinne der Definition F3A).

BEWEIS. Zu jeder offenen Umgebung $U \in \mathscr{U}_x^o$ konstruieren wir eine kompakte Umgebung $K_U \subset U$ von x wie in Abbildung F:4 skizziert.

Im Teilraum K ist $K \cap U$ offen und $A := K \setminus U$ abgeschlossen, somit kompakt (F1F). Im Hausdorff–Raum X gibt es offene disjunkte Umgebungen V von x und W von A (F1E). Im Teilraum K ist $K \cap W$ offen und $K_U := K \setminus W$ abgeschlossen, somit kompakt (F1F). Wie in der Skizze F:4 gilt $K \cap V \subset K_U \subset U$:

- Aus $V \cap W = \emptyset$ folgt $K \cap V \subset K \setminus W = K_U$.
- Aus $W \supset A$ folgt $K_U = K \setminus W \subset K \setminus A = K \cap U \subset U$.

Mit K und V ist auch $K \cap V$ eine Umgebung von x in X, somit auch $K_U \supset K \cap V$. □

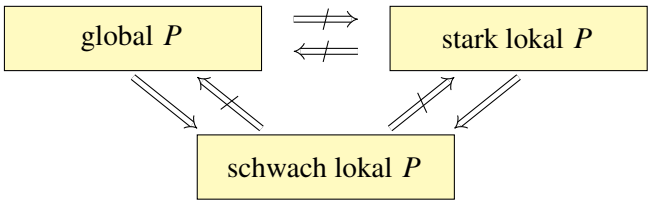
Warnung. Ohne die Hausdorff–Eigenschaft gilt die Aussage nicht. Der Raum $\mathbb{Q}$ mit seiner euklidischen Topologie $\mathcal{T}_\mathbb{Q}$ ist weder kompakt noch lokal-kompakt. Auf $X = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ist $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathbb{Q} \cup \{X\}$ eine Topologie und kompakt, aber offensichtlich nicht hausdorffsch und auch nicht lokal-kompakt (vgl. Alexandroff–Kompaktifizierung, F4C).

Bemerkung F3D. Wir können eine Eigenschaft $P : \mathfrak{P}(X) \to \{0,1\}$ von Teilmengen eines topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$, etwa Kompaktheit, verschieden lokalisieren:

(0) Die Eigenschaft P gilt *global* für den Raum X, wenn X diese Eigenschaft hat.
(1) Die Eigenschaft P gilt im Punkt $x \in X$ *lokal im schwachen Sinne*, wenn x eine Umgebung U mit der Eigenschaft P hat. (Hier ist etwa $U = X$ möglich.)
(2) Die Eigenschaft P gilt im Punkt $x \in X$ *lokal im starken Sinne*, wenn jede Umgebung V von x eine Umgebung U von x mit der Eigenschaft P enthält.

Forderung (1) besagt, dass x *irgendeine* Umgebung U mit der Eigenschaft P hat, hingegen fordert (2), dass x *beliebig kleine* Umgebungen U mit der Eigenschaft P hat; das heißt, x hat eine Umgebungsbasis (D3E) aus Umgebungen mit Eigenschaft P. Gilt P lokal in jedem Punkt $x \in X$, so sagen wir, die Eigenschaft P gilt *lokal* im gesamten Raum $(X,\mathcal{T})$.

Oft unterscheiden sich beide Lokalisierungen, wie wir für Kompkatheit gesehen haben:



Meist werden wir im starken Sinne lokalisieren, da dies häufig der nützlichere Begriff ist. Wir können zudem stark-offen und schwach-offen lokalisieren, indem wir *offene* Umgebungen mit Eigenschaft P fordern. Gilt P stark-offen lokal im Raum $(X,\mathcal{T})$, so hat die Topologie $\mathcal{T}$ eine Basis aus offenen Mengen mit Eigenschaft P. (Im Falle der Kompaktheit nutzen wir hierzu die relative Kompaktheit.) Es ist daher gute Praxis, die Definition von „lokal P“ explizit auszuformulieren. Wo Verwechslungen möglich und zu befürchten sind, sollten die Varianten genannt und durch Gegenbeispiele abgegrenzt oder als äquivalent nachgewiesen werden. Genau dies haben wir oben für die lokale Kompaktheit getan.

Beispiel. Zur Illustration erinnere ich an den Begriff „lokal euklidisch“: Für diesen stimmen die starke und die schwache Lokalisierung überein. Zur Erinnerung:

Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt im Punkt $x \in X$ *lokal euklidisch* der Dimension n, wenn eine offene Umgebung U existiert, also $x \in U \in \mathcal{T}$, und ein Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\sim} U'$ auf eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^n$ des euklidischen Raumes, bzw. allgemeiner $U' \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x_1 \geq 0 \,\}$, wenn wir Rand zulassen. Gilt dies in jedem Punkt $x \in X$, so nennen wir den gesamten Raum $(X,\mathcal{T})$ *lokal euklidisch* der Dimension n.

Hier haben wir schwach-offen lokalisiert. Für jeden Punkt $x \in X$ sind äquivalent:

(1) Es existiert eine offene Umgebung U, also $x \in U \in \mathcal{T}$, und ein Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\sim} U'$ auf eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $U' \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.
(2) In jeder Umgebung V von x existiert eine offene Umgebung $W \subset V$, für die ein Homöomorphismus $k : W \xrightarrow{\sim} W'$ existiert mit $W' \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $W' \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen.

Stark (2) impliziert schwach (1) wie immer: Es genügt, $V = X$ und $U = W$ zu nutzen. Hier gilt auch die Umkehrung „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Aus jeder Karte $h : U \xrightarrow{\sim} U'$ um x und jeder Umgebung V von x gewinnen wir die offene Umgebung $W = U \cap V^\circ \subset V$ und die Karte $k = h|^{W'}_{W} : W \xrightarrow{\sim} W'$ mit $W' = h(W) \subset U'$ offen. Ebenso äquivalent sind:

(3) Es existiert eine offene Umgebung U, also $x \in U \in \mathcal{T}$, und ein Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bzw. $h : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ auf den gesamten euklidischen (Halb-)Raum.
(4) In jeder Umgebung V von x existiert eine offene Umgebung $W \subset V$, für die ein Homöomorphismus $k : W \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bzw. $k : W \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ existiert.

Die Implikation „(4) $\Rightarrow$ (3)“ ist trivial: Es genügt, $V = X$ und $U = W$ zu nutzen. Die Implikationen „(3) $\Rightarrow$ (1)“ ist trivial mit $U' = \mathbb{R}^n$ bzw. $U' = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Für „(2) $\Rightarrow$ (4)“ nutzen wir die Homöomorphie $B(x',\varepsilon) \cong \mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n$ für alle $x' \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ (A1D). Für den Halbraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ unterscheiden wir je nach $x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ zwei Fälle: Für $x'_1 = 0$ gilt $B(x',\varepsilon) \cong \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Für $x'_1 \geq \varepsilon > 0$ gilt $B(x',\varepsilon) \cong \mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n$.

Solche Routine-Überprüfungen sind nicht besonders tiefsinnig, aber unerlässlich zur Klärung der Begriffe und zur Vermeidung möglicher Missverständnisse.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F3c. Lokal-kompakte Teilräume. Das Beispiel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ zeigt, dass in einem lokal-kompakten Raum nicht jeder Teilraum lokal-kompakt ist. Dies gilt jedoch für offene und für abgeschlossene Teilräume, womit wir unser Beispielrepertoire wesentlich erweitern:

Lemma F3E. *Ist X lokal-kompakt, so auch jeder offene / abgeschlossene Teilraum $Y \subset X$. (Lokale Kompaktheit vererbt sich jedoch nicht auf jeden Teilraum, wie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ zeigt.)*

BEWEIS. (1) Sei $Y \subset X$ offen. Jede Umgebung V von x in Y ist auch eine Umgebung von x in X (D1K). Nach Voraussetzung enthält V eine kompakte Umgebung U von x in X. Somit ist $U \subset V$ eine kompakte Umgebung von x in Y.

(2) Sei $Y \subset X$ abgeschlossen und $x \in Y$. Jede Umgebung V von x in Y ist von der Form $V = \tilde{V} \cap Y$, wobei $\tilde{V}$ eine Umgebung von x in X ist (D1K). Diese Umgebung $\tilde{V}$ enthält eine kompakte Umgebung $\tilde{U}$ von x in X. In $\tilde{U}$ ist $U := \tilde{U} \cap Y$ abgeschlossen, also kompakt (F1F). Somit ist $U \subset V$ eine kompakte Umgebung von x in Y. □

Satz F3F. *Sei $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch. Für $Y \subset X$ sind äquivalent:*

(1) Der Teilraum Y ist lokal-kompakt (im Sinne der Definition F3A).
(2) Jeder Punkt $x \in Y$ hat eine kompakte Umgebung in Y (F3C).
(3) Jeder Punkt $x \in Y$ hat eine offene Umgebung U in X, sodass $Y \cap U$ in U abgeschlossen ist.
(4) Es gilt $Y = U \cap A$ mit $U \subset X$ offen und $A \subset X$ abgeschlossen. Hierzu sagen wir: Y ist lokal-abgeschlossen *im Raum $(X, \mathcal{T})$.*

BEWEIS. Die Implikation „(1) ⇒ (2)“ ist trivial, die Umkehrung „(2) ⇒ (1)“ ist Satz F3C.

„(1) ⇒ (3)“: Zu $x \in Y$ sei $V \subset Y$ eine kompakte Umgebung, also $V = Y \cap W$ für eine Umgebung W in X. Somit ist $U = W^\circ$ offen in X und $Y \cap U = V \cap U$ in U abgeschlossen, denn V ist abgeschlossen in X (F1G).

„(3) ⇒ (4)“: Zu jedem $x \in Y$ sei $x \in U_x \in \mathcal{T}$ und zudem $Y \cap U$ abgeschlossen in U_x. Es gilt $Y \cap U_x = \overline{Y} \cap U_x$, also $Y = Y \cap \big(\bigcup_{x \in Y} U_x\big) = \bigcup_{x \in Y} (\overline{Y} \cap U_x) = \overline{Y} \cap \big(\bigcup_{x \in Y} U_x\big)$.

„(4) ⇒ (1)“: In X ist die abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ lokal-kompakt (F3E) und hierin wiederum ist die offene Teilmenge $Y \subset A$ lokal-kompakt (F3E). □

§F3d. Summen und Produkte lokal-kompakter Räume.

Übung F3G. (1) Die Summe $(X, \mathcal{T}) = \coprod_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$ topologischer Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ist genau dann lokal-kompakt, wenn jeder Summand $(X_i, \mathcal{T}_i)$ lokal-kompakt ist.

(2) Das Produkt $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$ topologischer Räume $X_i \neq \emptyset$ ist genau dann lokal-kompakt, wenn jeder Faktor $(X_i, \mathcal{T}_i)$ lokal-kompakt ist und fast alle kompakt.

✻ **F3G.** (1) „⇒“: Ist X lokal-kompakt so auch der offene / abgeschlossene Teilraum $X_i \subset X$ (F3E). „⇐“: Zu $x \in U \in \mathcal{T}$ und $x \in X_i \in \mathcal{T}$ enthält die Umgebung $U_i := U \cap X_i \in \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}$ eine kompakte Umgebung von x.

(2) „⇒“: Ist X lokal-kompakt so auch $X_i \hookrightarrow X$ als abgeschlossener Teilraum (F3E). Sei V eine kompakte Umgebung von x in X. Sie enthält eine offene Umgebung $U = \prod_{i \in I} U_i$ mit $x \in U_i \in \mathcal{T}_i$, wobei $U_i = X_i$ für alle $i \in I \smallsetminus J$ mit endlicher Ausnahmemenge J (E4C), also ist $p_i(V) = X_i$ kompakt (F1J) für alle $i \in I \smallsetminus J$.

„⇐“: Jede Umgebung W von x in X enthält eine Umgebung $U = \prod_{i \in I} U_i$ mit $x_i \in U_i \in \mathcal{T}_i$, wobei $U_i = X_i$ für alle $i \in I \smallsetminus J$ mit endlicher Ausnahmemenge J (E4C). Ohne Einschränkung sei X_i kompakt für alle $i \in I \smallsetminus J$; notfalls vergrößern wir J. Für jedes $i \in I$ wählen wir eine kompakte Umgebung $V_i \subset U_i$, also $x_i \in V_i^\circ \in \mathcal{T}_i$, wobei $V_i = X_i$ für alle $i \in I \smallsetminus J$. Dann ist $V = \prod_{i \in I} V_i$ kompakt (F1T) und eine Umgebung von x in X, dank $x \in \prod_{i \in I} V_i^\circ \in \mathcal{T}$ (E4C), und es gilt $V \subset U \subset W$.

§F3e. Geometrische Anwendung: Euklidische Umgebungsretrakte (ENR). Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Teilraum. Eine *Retraktion* von X auf A ist eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$. Das ist somit eine Linksinverse zur Inklusion $\iota : A \hookrightarrow X$, denn $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$. Wir nennen $A \subset X$ einen *Retrakt* des Raumes X.

Wir nennen $A \subset X$ einen *Umgebungsretrakt*, wenn es eine Umgebung U von A in X mit einer Retraktion von U auf A gibt, also $r : U \to A$ stetig mit $r|_A = \mathrm{id}_A$.

Allgemeiner nennen wir eine stetige Abbildung $\iota : A \to X$ einen Umgebungsretrakt, wenn eine Umgebung U von $\iota(A)$ in X existiert und eine stetige Abbildung $r : U \to A$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$. Insbesondere ist ι dann eine Einbettung in U und somit auch in X.

Speziell im euklidischen Raum $X = \mathbb{R}^n$ nennen wir $A \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $\iota : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ dann einen *euklidischen Umgebungsretrakt*, engl. *euclidean neighbourhood retract*, kurz *ENR*.

Übung F3H. Wir nutzen die lokale Kompaktheit (F3F) des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$:

(1) Jeder Umgebungsretrakt $A \subset \mathbb{R}^n$ ist lokal-abgeschlossen und somit lokal-kompakt.

Seien $A \subset \mathbb{R}^m$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ homöomorphe Teilräume, vermöge $h : A \xrightarrow{\sim} B$.

(2) Ist A in $\mathbb{R}^m$ lokal-abgeschlossen, so auch B in $\mathbb{R}^n$. *Hinweis:* lokale Kompaktheit
(3) Ist A in $\mathbb{R}^m$ ein Umgebungsretrakt, so auch B in $\mathbb{R}^n$. *Hinweis:* Tietze (E5N)

Die Eigenschaft ENR ist demnach topologisch invariant: Ist *irgendeine* Einbettung $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ ein Umgebungsretrakt, so ist *jede* Einbettung $j : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Umgebungsretrakt.

✻ **F3H.** (1) Sei U eine Umgebung von A in $\mathbb{R}^m$, also $A \subset U^\circ \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, und $r : U \to A$ eine Retraktion. Dann ist $A = \{\, x \in U^\circ \mid x = r(x) \,\}$ abgeschlossen in der offenen Menge U°, also lokal-abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Dank Satz F3F ist der Teilraum A demnach lokal-kompakt. (Dies ist eine intrinsische topologische Eigenschaft!)

(2) Dank Satz F3F gelten folgende Äquivalenzen: A in $\mathbb{R}^m$ ist lokal-abgeschlossen. $\Leftrightarrow$ A ist lokal-kompakt. $\Leftrightarrow$ B ist lokal-kompakt. $\Leftrightarrow$ B in $\mathbb{R}^n$ ist lokal-abgeschlossen. (Lokale Kompaktheit ist intrinsisch.)

(3) Wir setzen $A \subset \mathbb{R}^m$ als Umgebungsretrakt voraus. Demnach existiert $U \subset \mathbb{R}^m$ offen mit Inklusionen $i : A \hookrightarrow U$ und $j : U \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ sowie eine Retraktion $r : U \to A$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Nach (2) ist B in $\mathbb{R}^n$ lokal-abgeschlossen, also $B = O \cap C$ mit $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und somit ist B in O abgeschlossen. Die Abbildung $f = j \circ i \circ h^{-1} : B \to \mathbb{R}^m$ ist stetig. Dank des Fortsetzungssatzes von Tietze (E5N) existiert eine stetige Fortsetzung $F : O \to \mathbb{R}^m$ mit $F|_B = f$. Die Menge $U' = F^{-1}(U)$ ist offen in O und somit in $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung $r' = h^{-1} \circ r \circ F : U' \to B$ ist stetig und erfüllt $r'|_B = \mathrm{id}_B$.

Beispiel. Die Sphäre $A = \mathbb{S}^n$ ist kein Retrakt des euklidischen Raumes $X = \mathbb{R}^{n+1}$, wohl aber der offenen Umgebung $U = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ dank der Retraktion $r : U \to \mathbb{S}^n : x \mapsto x/|x|$.

Jede (noch so komplizierte) Einbettung $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ ist ein Umgebungsretrakt: Die Abbildung ι stiftet einen Homöomorphismus $\mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \iota(\mathbb{S}^n) =: B$ auf das Bild in $\mathbb{R}^m$. Nach der vorigen Übung existiert eine Umgebung V von B in $\mathbb{R}^n$ und eine Retraktion $r : V \to B$.

Solche Einbettungen müssen nicht glatt sein, im Gegenteil können sie unvorstellbar kompliziert werden… Um Ihre Phantasie anzuregen, nenne ich erneut die Osgood–Kurven (C6H): Es gibt Einbettungen $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, deren Bild positiven Flächeninhalt hat (im Sinne des Lebesgue–Maßes von $\mathbb{R}^2$). Dennoch ist ι ein Umgebungsretrakt und verhält sich wenigstens in dieser Eigenschaft wie die Standardeinbettung $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F3f. Lokal-kompakte Gruppen und Pontryagin–Dualität. Zur Erinnerung:

Übung F3I. Zu jedem K–Vektorraum V ist auch $V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$ ein K–Vektorraum, genannt *Dualraum*. Jede K–lineare Abbildung $f : V \to W$ induziert die duale Abbildung $f^* : W^* \to V^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$. Wir haben die kanonische Einbettung $\Phi_V : V \to V^{**}$ mit $\Phi(v)(\varphi) := \varphi(v)$. Im Falle $\dim_K V < \infty$ ist $\Phi_V : V \to V^{**}$ ein Isomorphismus.

⁕ **F3I.** Man prüft geduldig nach: Mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist $V^* = \mathrm{Hom}_K(V,K)$ ein K–Vektorraum. Für $f : V \to W$ und $\varphi : W \to K$ ist $\varphi \circ f : V \to K$ linear, also ist $f^* : W^* \to V^*$ wohldefiniert. Schließlich ist f^* linear. Ebenso ist Φ_V wohldefiniert und linear. Ist V endlich-dimensional, so wählen wir eine endliche Basis $b_1, \dots, b_n$. Dann ist $b_1^*, \dots, b_n^*$ mit $b_i^*(b_i) = 1$ und $b_i^*(b_j) = 0$ für $i \neq j$ eine Basis des dualen Vektorraumes V^*. Durch erneute Anwendung dieser Konstruktion gewinnen wir die Basis $b_1^{**}, \dots, b_n^{**}$ des Bidualraumes V^{**}. Man erkennt nun $\Phi_V(b_i) = b_i^{**}$, also ist Φ_V ein Vektorraumisomorphismus. Endliche Dimension ist hierbei wesentlich: Ist V unendlich-dimensional, so ist Φ_V injektiv, aber nicht bijektiv.

Eine analoge Konstruktion gilt für lokal-kompakte abelsche Gruppen $(G,\cdot)$, etwa $(\mathbb{Z},+)$ und $(\mathbb{Z}/n,+)$ oder $(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{S}^1,\cdot)$ mit der euklidischen Topologie. Zu $(G,\cdot)$ ist das *Pontryagin–Dual* die Gruppe $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G,\mathbb{S}^1)$ aller stetigen Gruppenhomomorphismen $\chi : G \to \mathbb{S}^1$ mit punktweiser Multiplikation und der Topologie der kompakten Konvergenz.

Übung F3J. Bestimmen Sie $\widehat{G}$ in den vier Beispielen $G = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}/n$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{S}^1$. *Hinweis:*

(1) $f : \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$ mit $f(x)(y) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xy}$.
(2) $f : \mathbb{Z}/n \to \widehat{\mathbb{Z}/n}$ mit $f(x)(y) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xy/n}$.
(3) $f : \mathbb{S}^1 \to \widehat{\mathbb{Z}}$ mit $f(s)(k) = s^k$, also $f(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x})(y) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xy}$.
(4) $f : \mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{S}^1}$ mit $f(k)(s) = s^k$, also $f(y)(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xy}$.

⁕ **F3J.** Stehen die Abbildungen erst einmal vor uns, so genügt geduldiges Nachrechnen: Für jedes $x \in G$ ist $f(x) : G \to \mathbb{S}^1$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dies nennt man einen *Charakter* von G. Zudem ist f ein Gruppenhomomorphismus und bijektiv: Zu $x \neq x'$ gehören verschiedene Charaktere (Injektivität) und jeder Charakter ist von dieser Form (Surjektivität). Schließlich ist f ein Homöomorphismus.

Bemerkung. Wir haben die kanonische Einbettung $\Psi_G : G \to \widehat{\widehat{G}}$ mit $\Psi(g)(\chi) := \chi(g)$. Der berühmte Dualitätssatz von Lev PONTRYAGIN (1908–1988) und Egbert VAN KAMPEN (1908–1942) besagt: Für jede lokal-kompakte abelsche Gruppe G ist Ψ_G ein Isomorphismus. Die vorige Übung beweist dies in vier wichtigen Spezialfällen; dies ist die Basis der Fourier–Transformation $L^2(\mathbb{R}) \leftrightarrow L^2(\mathbb{R})$ sowie $L^2(\mathbb{S}^1) \leftrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ und $\ell^2(\mathbb{Z}/n) \leftrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}/n)$.

Übung F3K. Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ induziert einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\widehat{f} : \widehat{H} \to \widehat{G} : \chi \mapsto \chi \circ f$. Für Produkte gilt $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$. So dualisieren wir $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $(\mathbb{S}^1)^n$ und jede endliche abelsche Gruppe $\mathbb{Z}/n_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_\ell$.

⁕ **F3K.** Mit $f : G \to H$ und $\chi : H \to \mathbb{S}^1$ ist auch $\chi \circ f : G \to \mathbb{S}^1$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Die hieraus entstehende Abbildung $\widehat{f} : \widehat{H} \to \widehat{G} : \chi \mapsto \chi \circ f$ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus, wie man geduldig nachrechnet. Für die Identität $\mathrm{id}_G : G \to G$ gilt $\widehat{\mathrm{id}_G} = \mathrm{id}_{\widehat{G}} : \widehat{G} \to \widehat{G}$, denn $\widehat{\mathrm{id}_G}(\chi) = \chi \circ \mathrm{id}_G = \chi$. Für die Komposition von $f : G \to H$ und $g : H \to K$ gilt $\widehat{g \circ f} = \widehat{f} \circ \widehat{g} : \widehat{K} \to \widehat{G}$, denn $\widehat{g \circ f}(\chi) = \chi \circ (g \circ f) = (\chi \circ g) \circ f = \widehat{f}(\widehat{g}(\chi))$. Das bedeutet, dass die Zuordnung $G \mapsto \widehat{G}$ und $f \mapsto \widehat{f}$ ein kontravarianter Funktor ist.

Wir nutzen die kanonische Inklusion $\iota_G : G \to G \times H : g \mapsto (g,1)$ und die kanonische Projektion $p_G : G \times H \to G : (g,h) \mapsto g$. Entsprechend für H. Wir definieren $f : \widehat{G \times H} \to \widehat{G} \times \widehat{H}$ durch $\chi \mapsto (\chi \circ \iota_G, \chi \circ \iota_H)$ und $g : \widehat{G} \times \widehat{H} \to \widehat{G \times H}$ durch $(\chi_G, \chi_H) \mapsto (\chi_G \circ p_G) \cdot (\chi_H \circ p_H)$. Man weist nun geduldig nach: f und g sind wohldefiniert und stetige Gruppenhomomorphismen mit $f \circ g = \mathrm{id}_{\widehat{G} \times \widehat{H}}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\widehat{G \times H}}$.

§F3g. Der Kompaktheitssatz von Arzelà–Ascoli. Nach dem Satz von Heine–Borel (F1O) ist $X \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn X in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Norm abgeschlossen und beschränkt ist. Für unendlich–dimensionale normierte Vektorräume $(V,|-|)$ gilt diese nützliche Äquivalenz nicht mehr: Jede kompakte Teilmenge ist beschränkt (F1K) und abgeschlossen (F1G), aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht:

Beispiel. In $X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ mit ℓ^p–Norm ist der Ball $\bar{B}(0,1)$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt: Für die kanonische Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $|e_m - e_n| \geq 1$ für alle $m \neq n$. Die Bälle $(\bar{B}(e_n, 1/3))_{n\in\mathbb{N}}$ sind disjunkt und lokal-endlich. Für $U_n = X \smallsetminus \bigcup_{k\geq n} \bar{B}(e_k, 1/3)$ ist $\bar{B}(0,1) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ohne endliche Teilüberdeckung. Dasselbe gilt in $\ell^p(\mathbb{N})$.

Beispiel F3L. Zu $X = [-\pi,\pi]$ betrachten wir den Raum $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $|f|_X = \sup_{x\in X}|f(x)|$. Auch hier ist der abgeschlossene Einheitsball $\bar{B}(0,1)$ nicht kompakt: Die Funktionenfolge $f_n : X \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sin(nx)$ liegt im Ball $\bar{B}(0,1)$, besitzt aber keine konvergente Teilfolge. (Übung!)

✻ **F3L.** Es lohnt sich, diese Übung auszuführen, denn sie beinhaltet im Kern die Idee des folgenden Satzes. Angenommen, eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, das heißt, es existieren Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ sodass $|f - f_{n_k}|_X \to 0$ gilt. Insbesondere gilt dann punktweise Konvergenz, etwa $0 = f_{n_k}(0) \to f(0)$, hier also $f(0) = 0$. Zudem ist die Grenzfunktion f stetig (C3Q). Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$ mit $f(]-\delta,\delta[) \subset]-\varepsilon,\varepsilon[$. Für hinreichend großes n wird aber f_n beliebig steil: Für $n > 1/(4\delta)$ gilt $f_n(]-\delta,\delta[) = [-1,1]$. Für $0 < \varepsilon < 1/2$ liegt somit f_n nicht im ε–Schlauch um die Funktion f.

Im Funktionenraum $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ können wir kompakte Teilmengen erfreulich einfach charakterisieren. Den folgenden Satz verdanken wir Giulio ASCOLI (1843–1896) und verallgemeinert Cesare ARZELÀ (1847–1912). Zur Erinnerung: Eine Teilmenge A heißt *relativ kompakt* im Raum $(X,\mathcal{T})$, wenn ihr Abschluss $\overline{A}$ kompakt ist (F1B). Die *kompakte Konvergenz* auf X bedeutet gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum $K \subset X$ (D4D). Ist der gesamte Raum X kompakt, so ist dies die gleichmäßige Konvergenz auf X (D4C).

Satz F3M (Arzelà–Ascoli)**.** *Sei $(X,\mathcal{T}_X)$ ein lokal-kompakter Raum und (Y,d_Y) ein metrischer Raum. Den Raum $\mathscr{C}(X,Y)$ statten wir mit der Topologie der kompakten Konvergenz aus. Genau dann ist eine Teilmenge $F \subset \mathscr{C}(X,Y)$ relativ kompakt, wenn gilt:*

(1) In jedem Punkt $x \in X$ ist die Menge $F(x) = \{\, f(x) \mid f \in F \,\}$ relativ kompakt in Y.
(2) Die Menge F ist gleichgradig stetig*, das heißt, zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in X$ existiert eine Umgebung U mit $x \in U \in \mathcal{T}_X$ und $f(U) \subset B_Y(f(x),\varepsilon)$ für alle $f \in F$.*

Eine Teilmenge $F \subset \mathscr{C}(X,Y)$ ist demnach genau dann kompakt, wenn jede Menge $F(x) = \{\, f(x) \mid f \in F \,\}$ kompakt ist, sowie F abgeschlossen und gleichgradig stetig ist.

BEWEIS. „⇒“ (1) Die Projektion $p : \mathscr{C}(X,Y) \to Y : f \mapsto f(x)$ ist stetig (E4D), also $p(\overline{F})$ kompakt (F1J), somit $F(x) = p(F) \subset p(\overline{F})$ relativ kompakt (F1F). Wäre (2) in einem Punkt $x \in X$ verletzt, so gäbe es eine Folge ohne konvergente Teilfolge wie in F3L.

„⇐“: Dank (1) ist $\overline{F(x)} \subset Y$ kompakt, dank Tychonoff (F1N) also auch der Produktraum $Z = \prod_{x\in X} \overline{F(x)} \subset Y^X$. Für den Abschluss $\overline{F} \subset \mathscr{C}(X,Y)$ gilt weiterhin gleichgradige Stetigkeit (2), wie man leicht nachrechnet. Auf $\overline{F}$ stimmen die Topologien ist kompakten Konvergenz von $\mathscr{C}(X,Y)$ und der punktweisen Konvergenz von Y^X überein (F3N). Der Teilraum $\overline{F} \subset Z$ ist abgeschlossen und somit kompakt (F1F). □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Lemma F3N. *Sei $(K,\mathcal{T}_K)$ ein kompakter und (Y,d_Y) ein metrischer Raum. Wir versehen $\mathscr{C}(K,Y)$ mit der Supremumsmetrik $d(f,g)=\max\{\,d_Y(f(x),g(x)) \mid x\in K\,\}$; sie induziert die Topologie $\mathcal{T}_d$ der gleichmäßigen Konvergenz. Auf jeder gleichgradig stetigen Teilmenge $F\subset\mathscr{C}(K,Y)$ stimmt $\mathcal{T}_d$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ überein.*

BEWEIS. Die Inklusion $T_d\supset\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ ist klar (D4F). Wir zeigen $T_d\subset\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$. Sei $f\in F$ und $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ sowie $B_Y(f,\varepsilon)=\{\,g\in F\mid d(f,g)<\varepsilon\,\}$. Gleichgradige Stetigkeit von F besagt: Zu jedem $x\in K$ existiert U_x mit $x\in U_x\in\mathcal{T}_K$ und $g(U_x)\subset B_Y(g(x),\varepsilon/3)$ für alle $g\in F$. Zur offenen Überdeckung $K=\bigcup_{x\in K}U_x$ existiert $J\subset K$ endlich mit $K=\bigcup_{x\in J}U_x$. Demnach ist die $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$–Umgebung $U(f;J,\varepsilon/3):=\{\,g\in F\mid\forall x\in J: d(f(x),g(x))<\varepsilon/3\,\}$ im d–Ball $B_Y(f,\varepsilon)$ enthalten: Sei $g\in U(f;J,\varepsilon/3)$. Zu jedem $x'\in K$ existiert ein $x\in J$ mit $x'\in U_x$, also $d_Y(f(x'),g(x'))\le d_Y(f(x'),f(x))+d_Y(f(x),g(x))+d_Y(g(x),g(x'))<\varepsilon$. Somit gilt $g\in B_Y(f,\varepsilon)$, also $U(f;J,\varepsilon/3)\subset B_Y(f,\varepsilon)$. Das bedeutet $T_d\subset\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$. □

Beispiel. Arzelà–Ascoli (F3M) enthält Heine–Borel (F1O) als Spezialfall für $X=\{1,\dots,n\}$ mit diskreter Topologie und $Y=\mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik: Die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathbb{R}^n$ ist die Konvergenz in der Maximumsnorm oder gleichbedeutend die koordinatenweise Konvergenz. Für $F\subset\mathbb{R}^n$ ist die Bedingung (2) leer, und (1) besagt, dass alle Koordinaten beschränkt sind, und somit auch $F\subset\mathbb{R}^n$ bezüglich der Maximumsnorm.

Beispiel. Arzelà–Ascoli (F3M) enthält Tychonoff (F1N) als Spezialfall: Sei I eine Menge, aufgefasst als diskreter Raum, (Y_i,d_i) kompakt für $i\in I$, und $Y=\coprod_{i\in I}Y_i$. Jede Abbildung $f:I\to Y$ ist stetig, und $\mathscr{C}(I,Y)=Y^I$ trägt die Produkttopologie. Bedingung (2) ist leer, da wir $U=\{x\}$ wählen können. Für $F=\prod_{i\in I}Y_i\subset Y^I$ gilt (1), also ist $\overline{F}=F$ kompakt.

Korollar F3O. *Sei $f_0,f_1,f_2,\dots:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Folge reeller Funktionen, für die gilt:*

(1) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig beschränkt*, das heißt, es existiert eine gemeinsame Konstante $M\in\mathbb{R}$, sodass $|f_n|\le M$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.*
(2) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig gleichmäßig stetig*, das heißt, für jedes $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ existiert $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $n\in\mathbb{N}$ und $|x-x'|<\delta$ gilt $|f_n(x)-f_n(x')|<\varepsilon$.*

Dann existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, also Indizes $n_0<n_1<n_2<\dots$ und eine (stetige) Grenzfunktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $|f-f_{n_k}|_{[a,b]}\to 0$. □

Dies beantwortet die im Beispiel F3L aufgeworfene Frage: Wann erlaubt eine Folge reeller Funktionen $f_0,f_1,f_2,\dots:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine konvergente Teilfolge? Zur Erläuterung:

(1) Jede stetige Funktion $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist beschränkt (F1K), also $|f_n|_X<\infty$ für jedes $n\in\mathbb{N}$. Gilt jedoch $|f_n|_X\to\infty$ für $n\to\infty$, so kann keine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergieren. Um das Entkommen nach Unendlich zu verhindern, fordern wir kurzerhand $|f_n|_X\le M$ mit einer gemeinsamen Konstante M wie in (1).
(2) Wie in F3L und F3M gesehen, benötigen wir zusätzlich die gleichgradige Stetigkeit der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das heißt, zu jedem $x\in X$ und $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ existiert $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $n\in\mathbb{N}$ und $x'\in[a,b]$ mit $|x-x'|<\delta$ gilt $|f_n(x)-f_n(x')|<\varepsilon$.

Auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist jede Funktion f_n gleichmäßig stetig (F2J). Jede gleichgradig stetige Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist sogar gleichgradig gleichmäßig stetig wie in (2):

Übung F3P. Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume sowie $F\mathscr{C}(X,Y)$ eine gleichgradig stetige Funktionenfamilie. Ist X kompakt, so ist F gleichgradig gleichmäßig stetig.

✻ **F3P.** Der Beweis verläuft wörtlich wie der von Satz F2J im Spezialfall $F = \{f\}$: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Zu jedem $a \in X$ existiert $\delta_a > 0$, sodass für jedes $x \in B(a, 2\delta_a)$ und $f \in F$ gilt $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$. Zur offenen Überdeckung $X = \bigcup_{a\in X} B(a,\delta_a)$ existiert $E \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{a\in E} B(a,\delta_a)$. Wir setzen $\delta := \min\{\delta_a \mid a \in E\} > 0$. Zu $x, x' \in X$ mit $d_X(x,x') < \delta$ existiert $a \in E$ mit $x \in B(a,\delta_a)$, also $x, x' \in B(a, 2\delta_a)$. Hieraus folgt $d_Y(f(x), f(x')) \le d_Y(f(x), f(a)) + d_Y(f(a), f(x')) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ für jedes $f \in F$.

Der Satz von Arzelà–Ascoli hat zahlreiche Anwendungen in der Analysis, zum Beispiel zur Existenz von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen $y'(x) = f(x, y'(x))$ zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Lassen wir im Satz von Picard–Lindelöf (C4R) die Lipschitz–Bedingung fallen, so erhalten wir den Satz von Peano (1890):

Satz F3Q. *Sei $I = [x_0 - a, x_0 + b]$ mit $a, b \le s$ und $K = \bar{B}(y_0, r) \subset \mathbb{R}^n$. Sei $f : I \times K \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt durch $|f| \le M$. Es gelte $s\,M \le r$; notfalls verkleinern wir I und s. Dann existiert $y \in \mathscr{C}^1(I, K)$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$.*

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei $a = 0$ und $b = s > 0$. Sei $\gamma_n : I \to \mathbb{R}^n$ der *Euler–Polygonzug*, das heißt: stückweise affin zwischen den Stützstellen $x_k = x_0 + kb/n$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ mit $\gamma_n(x_0) = y_0$ und $\gamma_n(x_{k+1}) = \gamma_n(x_k) + f(x_k, \gamma_n(x_k)) \cdot (x_{k+1} - x_k)$.

Die Familie $F = \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist relativ kompakt in $\mathscr{C}(I, \mathbb{R}^n)$ dank Arzelà–Ascoli:

(1) Sie ist in jedem Punkt $x \in I$ beschränkt gemäß $|\gamma_n(x) - y_0| \le M(x - x_0)$.
(2) Sie ist gleichgradig stetig, denn für $x, x' \in I$ gilt $|\gamma_n(x) - \gamma_n(x')| \le M|x - x'|$.

Dank F3M ist $\overline{F}$ kompakt $\mathscr{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Dank F2E enthält $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge: es gibt $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ und eine Grenzfunktion $y \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ mit $|y - \gamma_{n_k}|_I \to 0$.

Wir müssen schließlich $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$ zeigen; äquivalent hierzu ist die Integralgleichung $y(x) = y_0 + \int_{t=x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$. Zum Vergleich schreiben wir $\gamma_n(x) = y_0 + \int_{t=x_0}^{x} f(t, \tilde{\gamma}_n(t))\,\mathrm{d}t$ mit Hilfe der Treppenfunktion $\tilde{\gamma}_n(t) = \gamma_n(x_k)$ für $x_k \le t < x_{k+1}$. Man rechnet nun nach, dass $f(t, \tilde{\gamma}_{n_k}(t))$ gleichmäßig gegen $f(t, y(t))$ konvergiert. Die Fehlerabschätzungen sind etwas mühsam, ich führe sie hier nicht aus. □

Dieses sogenannte *explizite Euler–Verfahren* ist numerisch leicht zu implementieren. Fehlerschranken und Konvergenzgeschwindigkeit sind interessante und praktisch relevante Eigenschaften; mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Dort finden Sie noch günstigere Näherungsmethoden, wie die *Runge–Kutta–Verfahren*, die schneller konvergieren.

§F3h. Kompakt erzeugte Räume. Wir vereinbaren folgenden Sprachgebrauch:

Definition F3R. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *k-offen*, wenn für jedes Kompaktum K in $(X, \mathcal{T})$ die Schnittmenge $U \cap K$ offen ist in $(K, \mathcal{T}_K)$.

Dies definiert die *kompakt erzeugte Topologie* $k\mathcal{T} := \{U \subset X \mid U \text{ ist k-offen}\}$.

Die ursprüngliche Topologie $\mathcal{T}$ heißt *kompakt erzeugt*, wenn $\mathcal{T} = k\mathcal{T}$ gilt.

Wir nennen $(X, \mathcal{T})$ einen *k-Raum*, wenn er kompakt erzeugt und hausdorffsch ist.

Bemerkung. Kompakt erzeugt bedeutet: Genau dann ist $U \subset X$ offen in $(X, \mathcal{T})$, wenn für jedes Kompaktum K in $(X, \mathcal{T})$ die Schnittmenge $U \cap K$ offen in $(K, \mathcal{T}_K)$ ist.

Durch Komplementbildung ist äquivalent: Genau dann ist $A \subset X$ abgeschlossen, wenn für jedes Kompaktum $K \subset X$ die Schnittmenge $A \cap K$ abgeschlossen in $(K, \mathcal{T}_K)$ ist.

Anders gesagt, die Kompakta bestimmen bereits die gesamte Topologie von $(X, \mathcal{T})$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiel. Wie die nachfolgenden Sätze zeigen, ist die Topologie des $\mathbb{R}^n$ kompakt erzeugt.

Beispiel. Als Gegenbeispiel betrachten wir eine überabzählbare Menge, etwa $X = \mathbb{R}$, mit der koabzählbaren Topologie $\mathcal{T}$ (D1I). Kompakta in $(X,\mathcal{T})$ sind die endlichen Teilmengen, jeweils mit diskreter Topologie. Somit ist $k\mathcal{T} \supsetneq \mathcal{T}$ die diskrete Topologie.

Beispiel F3S. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein Raum, dessen Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt wird durch eine Familie $(K_i)_{i\in I}$ kompakter Teilräume K_i in $(X,\mathcal{T})$, das heißt, $U \subset X$ ist offen in $(X,\mathcal{T})$ genau dann, wenn $U \cap K_i$ offen in K_i ist für jedes $i \in I$. Dann ist $\mathcal{T}$ kompakt erzeugt: $U \subset X$ ist offen in $(X,\mathcal{T})$ genau dann, wenn $U \cap K$ offen in K ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

BEWEIS. Die Implikation „⇒“ gilt immer. Die Implikation „⇐“ ist hier trivial. □

Satz F3T (Kaonisierung)**.**

(1) Es gilt $\mathcal{T} \subset k\mathcal{T} = k(k\mathcal{T})$. Die kompakten Teilräume sind jeweils dieselben.

(2) Ist $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig, so auch $f : (X,k\mathcal{T}_X) \to (Y,k\mathcal{T}_Y)$.

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{T}_X) & \xrightarrow{\ f\ } & (Y,\mathcal{T}_Y) \\ {\scriptstyle k_X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle k_Y} \\ (X,k\mathcal{T}_X) & \xrightarrow{\ f\ } & (Y,k\mathcal{T}_Y) \end{array}$$

(3) Ist A abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$, so ist $(A,k\mathcal{T}_A)$ die Teilraumtopologie von $(X,k\mathcal{T}_X)$.

BEWEIS. Nach Definition der Teilraumtopologie gilt $\mathcal{T} \subset k\mathcal{T}$, denn für $U \in \mathcal{T}$ und jeden Teilraum $K \subset X$ gilt $U \cap K \in \mathcal{T}_K$, also $U \in k\mathcal{T}$. Ist also K kompakt in $(X,k\mathcal{T})$, so auch in $(X,\mathcal{T})$, denn $\mathcal{T} \subset k\mathcal{T}$. Ist umgekehrt K kompakt in $(X,\mathcal{T})$, so sind die Teilraumtopologien $\mathcal{T}_K$ und $(k\mathcal{T})_K$ gleich, und somit ist K auch kompakt in $(X,k\mathcal{T})$. Da $(X,\mathcal{T})$ und $(X,k\mathcal{T})$ dieselben kompakten Teilräume haben, folgt $k(k\mathcal{T}) = k\mathcal{T}$. □

Satz F3U. *(1) Jeder kompakte bzw. lokal-kompakte Raum $(X,\mathcal{T})$ ist kompakt erzeugt.*

(2) Jeder metrische oder auch nur erstabzählbare Raum ist kompakt erzeugt.

BEWEIS. (1) Es genügt allgemeiner, dass jeder Punkt $x \in X$ *eine* kompakte Umgebung hat; ist $(X,\mathcal{T})$ zudem hausdorffsch, so ist $(X,\mathcal{T})$ damit bereits lokal-kompakt (F3C).

Wir zeigen $k\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$. Hierzu sei $U \in k\mathcal{T}$, also $U \subset X$ mit $U \cap K$ offen in jedem Kompaktum K in $(X,\mathcal{T})$. Zu jedem $x \in U$ existiert eine kompakte Umgebung K in $(X,\mathcal{T})$. Wegen $U \in k\mathcal{T}$ ist $U \cap K$ offen in $(K,\mathcal{T}_K)$. Nach Definition der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_K$ (D1K) existiert eine offene Menge $V \in \mathcal{T}$, sodass $U \cap K = V \cap K$. Letzteres ist eine Umgebung von x in $(X,\mathcal{T})$, da V und K Umgebungen sind, also ist auch U eine Umgebung von x in $(X,\mathcal{T})$. Die Menge U ist demnach Umgebung jedes ihrer Punkte, also $U \in \mathcal{T}$ (D3C).

(2) Sei $A \subset X$ und der Schnitt $A \cap K$ abgeschlossen in jedem Kompaktum $K \subset X$. Wir wollen $\overline{A} \subset A$ zeigen. Zu jedem $x \in \overline{A}$ existiert eine Folge $a_n \in A$ mit $a_n \to x$ (D5C). Die Menge $K = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ ist kompakt in X (F1C). Nach Voraussetzung ist $A \cap K$ abgeschlossen in K, also auch abgeschlossen in X (D1K). Aus $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A \cap K$ folgt $x \in \overline{\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subset A \cap K$, also $x \in A$. Somit gilt $\overline{A} \subset A$, also ist A abgeschlossen. □

Beispiel. Der Raum $\mathbb{Q}$ ist kompakt erzeugt, aber nicht lokal-kompakt.

§F4. Kompaktifizierung

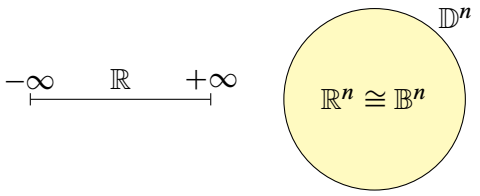
§F4a. Kompaktifizierung. Kompaktheit ist eine schöne und nützliche Eigenschaft. Ist ein topologischer Raum X nicht kompakt, so wollen wir ihn möglichst *kompaktifizieren*, das heißt, in einen kompakten Raum Y einbetten. In diesem Fall ist bereits der Abschluss $\overline{X}$ in Y kompakt (F1F), es reicht also $Y = \overline{X}$ anzunehmen. Zudem wollen wir fortan die Hausdorff–Eigenschaft fordern. Dies motiviert folgende Vereinbarung:

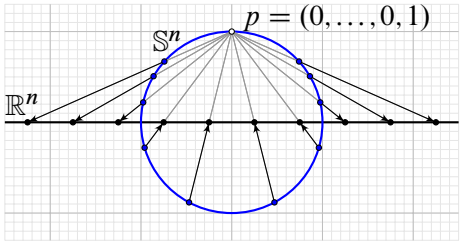
Definition F4A. Eine *(Hausdorff–)Kompaktifizierung* eines Raumes X ist ein Paar (Y,κ) aus einem kompakten Hausdorff–Raum Y und einer Einbettung $\kappa : X \hookrightarrow Y$ mit $\overline{\kappa(X)} = Y$.

Erläuterung. Es kommt uns vornehmlich auf die Kompaktheit an, doch ist die Hausdorff–Eigenschaft meist so wichtig, dass wir diese Forderung gleich mit aufnehmen. Wir sagen daher kurz *Kompaktifizierung* statt der präziseren aber schwerfälligeren Ausdrucksweise *Hausdorff–Kompaktifizierung*. Es wird sich erweisen, dass die meisten Formulierungen damit natürlicher ausfallen.

Sprech- und Schreibweise. Für viele Kompaktifizierungen ist $X \subset Y$ eine Teilmenge und $\kappa : X \hookrightarrow Y$ die Inklusion. In diesem Fall lässt man die Nennung von κ meist weg, und sagt „Y ist eine Kompaktifizierung von X“. Auch im allgemeinen Fall ist es oft bequemer, sich X als Teilraum von Y vorzustellen: Dies kann man immer erreichen, indem mittels $\kappa : X \xrightarrow{\sim} \kappa(X)$ den Raum X mit seinem Bild $\kappa(X)$ in Y identifiziert. Wenn die in Frage stehende Einbettung κ aus dem Zusammenhang unzweifelhaft hervorgeht, dann kann man somit ihre Nennung weglassen und $X \subset Y$ annehmen.

Beispiel F4B. Für jeden kompakten Hausdorff–Raum X ist die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ eine Kompaktifizierung, ebenso jeder Homöomorphismus $\kappa : X \xrightarrow{\sim} Y$. Dies sind hier tatsächlich die einzigen: Ist nämlich $\kappa : X \hookrightarrow Y$ eine Kompaktifizierung, so ist $\kappa(X)$ kompakt (F1J), also im Hausdorff–Raum Y abgeschlossen (F1G). Wegen $Y = \overline{\kappa(X)} = \kappa(X)$ ist $\kappa : X \xrightarrow{\sim} Y$ eine stetige Bijektion, und somit ein Homöomorphismus (F1L).





Beispiele. Zur Illustration einige einfache aber wichtige Kompaktifizierungen:

- Die Inklusionen $[0,1[\hookrightarrow [0,1]$ und $]-1,1[\hookrightarrow [-1,1]$ sind Kompaktifizierungen (F1D).
- Die Inklusion $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in die erweiterte Zahlengerade (§B2h) ist eine Kompaktifizierung: $\bar{\mathbb{R}}$ mit Ordnungstopologie ist hausdorffsch und kompakt (F1D).
- Die Inklusion $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0,\infty[\hookrightarrow [0,\infty]$ ist eine Einpunktkompaktifizierung.
- Die Inklusion $\mathbb{N} \hookrightarrow \hat{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist eine Einpunktkompaktifizierung, siehe §D3k.
- Die Inklusion $\mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ ist eine Kompaktifizierung (F1O), ebenso die Komposition $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n : x \mapsto x/(1+|x|)$. Speziell für $n = 1$ ist $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]-1,1[\hookrightarrow [-1,1]$ topologisch äquivalent zur obigen Kompaktifizierung $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- Die stereographische Projektion (A1L) definiert eine Einpunktkompaktifizierung $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$. Speziell für $n = 1,2$ erhalten wir $\mathbb{R} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{S}^1$ die Kreislinie und $\mathbb{C} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2$ die Riemannsche Zahlensphäre.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§F4b. Projektive Räume.** Der reell-projektive Gerade $\mathbb{RP}^1 = (\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\})/(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\})$ ☜ liefert die Kompaktifizierung $\kappa : \mathbb{R} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{RP}^1 : x \mapsto [x : 1]$ durch Hinzufügen eines einzigen „unendlich fernen“ Punktes $\infty = [1 : 0]$. Ebenso liefert die komplex-projektive Gerade $\mathbb{CP}^1$ die Kompaktifizierung $\kappa : \mathbb{C} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1 : z \mapsto [z : 1]$. (Siehe §K2e)

Allgemein liefert der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ die Kompaktifizierung $\kappa : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{RP}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$. Hierbei wird zu jeder Geraden $\mathbb{R}x$ mit $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ein unendlich ferner Punkt $[x_1 : \dots : x_n : 0]$ hinzugefügt. Ebenso liefert der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ die Kompaktifizierung $\kappa : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^n : (z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_1 : \dots : z_n : 1]$.

☞ **Bemerkung.** Die Kompaktifizierung $\mathbb{C} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ heißt auch *Riemannsche Zahlensphäre* und wird seit Mitte des 19. Jahrhunderts in der komplexen Analysis verwendet. Zum Beispiel definiert jede rationale Funktion $F = P/Q$ mit $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$ und $\mathrm{ggT}(P, Q) = 1$ eine Funktion $f : \mathbb{C} \smallsetminus Z(Q) \to \mathbb{C}$ bis auf die Polstellen $Z(Q) = \{ z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0 \}$. Wir erhalten die stetige Fortsetzung $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, die die Polstellen auf ∞ abbildet. Wir werden sie im Folgenden als Leitmotiv übernehmen und zur Einpunktkompaktifizierung von topologischen Räumen verallgemeinern. Ebenso entspringen die projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ geometrischen Bedürfnissen und sind viel älter als die allgemeine Topologie. Diese Kompaktifizierungen liegen in der Natur der Sache und drängen sich geradezu auf.

☞ **§F4c. Alexandroff–Kompaktifizierung durch einen Punkt.** Die einfachste Kompaktifizierung wird wie in obigen Beispielen durch einen zusätzlichen Punkt erreicht.

☞ **Beispiel F4C.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein nicht-kompakter Hausdorff–Raum und $\infty \notin X$ ein weiterer Punkt. Auf der um diesen Punkt erweiterten Menge $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ suchen wir Topologien $\widehat{\mathcal{T}}$, sodass $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ ein kompakter Hausdorff–Raum ist und $(X, \mathcal{T})$ als offenen Teilraum enthält:

- Die Menge $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T} \cup \{\widehat{X}\}$ ist eine Topologie auf $\widehat{X}$, und zwar die gröbste, für die $(X, \mathcal{T})$ ein offener Teilraum ist. Der Raum $(\widehat{X}, \mathcal{T}_0)$ ist kompakt, aber nicht hausdorffsch.
- Die Summentopologie $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T} \cup \{ U \cup \{\infty\} \mid U \in \mathcal{T} \}$ ist die feinste auf $\widehat{X}$, für die $(X, \mathcal{T})$ ein offener Teilraum ist. Der Raum $(\widehat{X}, \mathcal{T}_1)$ ist hausdorffsch, aber nicht kompakt.

Die Topologie $\mathcal{T}_0$ ist zu klein, um hausdorffsch zu sein, und $\mathcal{T}_1$ ist zu groß, um kompakt zu sein. Die folgende Konstruktion von Alexandroff findet den richtigen Kompromiss:

✍ **Satz F4D** (Alexandroff)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\infty \notin X$ ein weiterer Punkt. Auf der Menge $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ definieren wir die* Alexandroff–Topologie *durch* ✍

$$\widehat{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \cup \big\{ \widehat{X} \smallsetminus K \;\big|\; K \subset X \text{ kompakt und abgeschlossen in } (X, \mathcal{T}) \big\}.$$

Dies ist eine Topologie auf $\widehat{X}$. Der Raum $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ ist kompakt, und hierin ist $(X, \mathcal{T})$ ein offener Teilraum. Die Topologie $\widehat{\mathcal{T}}$ auf $\widehat{X}$ ist die feinste mit diesen Eigenschaften.

Genau dann ist $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ hausdorffsch, wenn $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch ist. In diesem Fall ist $\widehat{\mathcal{T}}$ auf $\widehat{X}$ die einzige kompakte Hausdorff–Topologie mit Teilraum $(X, \mathcal{T})$.

☞ **Bemerkung.** Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, so ist jede kompakte Teilmenge K in X abgeschlossen (F1G) und die Konstruktion vereinfacht sich zu $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{ \widehat{X} \smallsetminus K \mid K \subset X \text{ kompakt} \}$. ☜

☞ **Bemerkung.** Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, so ist jede abgeschlossene Teilmenge K in X kompakt (F1F), und $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{ U \cup \{\infty\} \mid U \in \mathcal{T} \}$ ist die Summentopologie auf $\widehat{X} = X \sqcup \{\infty\}$ (E3A). ☜

BEWEIS VON SATZ F4D. Der Satz ist vollkommen explizit formuliert und angeordnet. Zum Beweis genügt es, die genannten Eigenschaften geduldig nachzuprüfen: Übung! □

✻ **F4D.** Als erstes weisen wir für $\widehat{\mathcal{T}}$ die Axiome (O1–3) einer Topologie nach (D1A):

(O1) Aus $\emptyset \in \mathcal{T}$ folgt $\emptyset \in \widehat{\mathcal{T}}$. Es gilt $\widehat{X} \in \widehat{\mathcal{T}}$, denn $\emptyset$ ist kompakt abgeschlossen in X.

(O2) Für $U, V \in \widehat{\mathcal{T}}$ ist $U \cap V \in \widehat{\mathcal{T}}$ zu zeigen. Drei Fälle treten auf: (a) Für $U, V \in \mathcal{T}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{T} \subset \widehat{\mathcal{T}}$, denn $\mathcal{T}$ ist eine Topologie. (b) Für $U \in \mathcal{T}$ und $V = \widehat{X} \smallsetminus K$ mit $K \subset X$ kompakt abgeschlossen in X liegt $U \cap V = U \cap (X \smallsetminus K)$ in $\mathcal{T} \subset \widehat{\mathcal{T}}$, denn $X \smallsetminus K$ ist offen in X. (c) Für $U = \widehat{X} \smallsetminus K$ und $V = \widehat{X} \smallsetminus L$ mit $K, L \subset X$ kompakt abgeschlossen in X liegt $U \cap V = \widehat{X} \smallsetminus (K \cup L)$ in $\widehat{\mathcal{T}}$, denn $K \cup L$ ist kompakt abgeschlossen in X.

(O3) Für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i \in \widehat{\mathcal{T}}$ zeigen wir $\bigcup_{i \in I} U_i \in \widehat{\mathcal{T}}$. Wir setzen $I_0 = \{ i \in I \mid U_i \in \mathcal{T} \}$ und $U = \bigcup_{i \in I_0} U_i$ sowie $I_1 = \{ i \in I \mid U_i \in \widehat{\mathcal{T}} \smallsetminus \mathcal{T} \}$ und $V = \bigcup_{i \in I_1} U_i$. Da $\mathcal{T}$ eine Topologie ist, gilt $U \in \mathcal{T}$. Für $I_1 = \emptyset$ gilt $V = \emptyset$, also $U \cup V \in \mathcal{T} \subset \widehat{\mathcal{T}}$. Sei also $I_1 \neq \emptyset$. Für $i \in I_1$ gilt $U_i = \widehat{X} \smallsetminus K_i$ mit $K_i \subset X$ kompakt abgeschlossen in X, also $V = \widehat{X} \smallsetminus K$ mit $K = \bigcap_{i \in I_1} K_i$ kompakt abgeschlossen in X. Damit gilt schließlich $V \cup U = (\widehat{X} \smallsetminus K) \cup U = \widehat{X} \smallsetminus (K \smallsetminus U)$. Da $K \smallsetminus U$ kompakt abgeschlossen in X ist, gilt $V \cup U \in \widehat{\mathcal{T}}$.

Damit ist $\widehat{\mathcal{T}}$ eine Topologie und der Raum $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ enthält $(X, \mathcal{T})$ als offenen Teilraum, denn $\mathcal{T} \subset \widehat{\mathcal{T}}$ und $\mathcal{T} = \{ U \cap X \mid U \in \widehat{\mathcal{T}} \}$. Nach Konstruktion ist der Raum $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ kompakt: Ist nämlich $\widehat{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung mit $U_i \in \widehat{\mathcal{T}}$, dann existiert $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$. Es gilt $U_{i_0} = \widehat{X} \smallsetminus K$ mit $K \subset X$ kompakt, also existiert eine endliche Überdeckung $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Damit ist $\widehat{X} = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Unter allen Topologien auf $\widehat{X}$ mit diesen Eigenschaften ist $\widehat{\mathcal{T}}$ die feinste: Sei $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie auf $\widehat{X}$, die $(X, \mathcal{T})$ als offenen Teilraum enthält. Dann gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ und $\mathcal{T} = \{ U \cap X \mid U \in \mathcal{T}' \}$. Das bedeutet, jede offene Menge $U \in \mathcal{T}' \smallsetminus \mathcal{T}$ ist von der Form $U = \widehat{X} \smallsetminus K$ mit $K \subset X$ abgeschlossen. Wäre K nicht kompakt, dann gäbe es offene Mengen $U_i \in \mathcal{T}$ sodass $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ keine endliche Teilüberdeckung erlaubt, und somit wäre $\widehat{X} = U \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Ist also $(\widehat{X}, \mathcal{T}')$ kompakt, so ist jede offene Menge $U \in \mathcal{T}' \smallsetminus \mathcal{T}$ von der Form $U = \widehat{X} \smallsetminus K$ mit $K \subset X$ kompakt abgeschlossen, also $\mathcal{T}' \subset \widehat{\mathcal{T}}$.

Ist $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ hausdorffsch, so ist der Teilraum $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch und zudem lokal-kompakt: Zu $x \in X$ existieren disjunkte offene Umgebungen $V \in \mathcal{T}$ von x und $U = \widehat{X} \smallsetminus K$ von ∞. Wegen $V \cap U = \emptyset$ gilt $V \subset K$, somit ist K eine kompakte Umgebung von x. Hieraus folgen beliebig kleine kompakte Umgebungen (F3C).

Ist umgekehrt $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch, so ist $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ hausdorffsch: Zu $x \neq y$ in X existieren disjunkte offene Umgebungen $U, V \in \mathcal{T} \subset \widehat{\mathcal{T}}$. Für $x \in X$ und $y = \infty$ nutzen wir die lokale Kompaktheit: Wir haben $x \in V \subset K \subset X$ mit V offen und K kompakt, somit sind V und $U = \widehat{X} \smallsetminus K$ disjunkte offene Umgebungen.

Sei $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch und $(\widehat{X}, \mathcal{T}')$ kompakt hausdorffsch mit Teilraum $(X, \mathcal{T})$. Nach F3F gilt $X = U \cap A$ mit $U \subset \widehat{X}$ offen und $A \subset \widehat{X}$ abgeschlossen. Es bleiben zwei Möglichkeiten: Entweder $A = X$, dann ist X kompakt und $\widehat{X} = X \sqcup \{\infty\}$ mit Summentopologie, also $\mathcal{T}' = \widehat{\mathcal{T}}$. Oder aber $A = \widehat{X}$, dann ist $U = X$ offen und $\mathcal{T}' \subset \widehat{\mathcal{T}}$ dank Maximalität von $\widehat{\mathcal{T}}$; folglich ist $\mathrm{id}_{\widehat{X}} : (\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}}) \to (\widehat{X}, \mathcal{T}')$ stetig von einem kompakten Raum in einen Hausdorff–Raum, also ein Homöomorphismus, und somit $\mathcal{T}' = \widehat{\mathcal{T}}$ wie behauptet.

Definition F4E. Ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch, aber nicht kompakt, so heißt die Einbettung $\alpha : (X, \mathcal{T}) \to (\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ die *Alexandroff–Kompaktifizierung* von $(X, \mathcal{T})$.

Wir nennen den Raum $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ dann auch die *Einpunktkompaktifizierung* von $(X, \mathcal{T})$. Der bestimmte Artikel rechtfertigt sich durch die im Satz F4D formulierte Eindeutigkeit.

Damit können wir lokal-kompakte Hausdorff–Räume wie folgt charakterisieren:

Korollar F4F. *Die lokal-kompakten Hausdorff–Räume sind genau die offenen Teilräume kompakter Hausdorff–Räume.*

BEWEIS. Ist Y kompakt hausdorffsch und $X \subset Y$ offen, dann ist X hausdorffsch (E1G) und lokal-kompakt (F3E). Ist umgekehrt X lokal-kompakt hausdorffsch, dann ist der Raum $\widehat{X}$ aus Satz F4D kompakt hausdorffsch, und X ist offen in $\widehat{X}$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

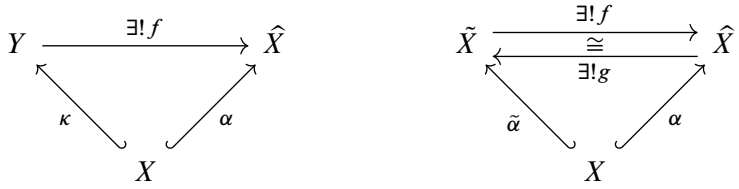
☞ **§F4d. Universelle Abbildungseigenschaft der Alexandroff–Kompaktifizierung.** Zu ☜ jedem Raum X bilden die Kompaktifizierungen (F4A) eine Kategorie: Objekte sind Kompaktifizierungen $\kappa : X \to Y$ und Morphismen zwischen Kompaktifizierungen $\kappa : X \to Y$ und $\kappa' : X \to Y'$ sind die stetigen Abbildungen $f : Y \to Y'$ mit $f \circ \kappa = \kappa'$.

Bemerkung. Da wir $\overline{\kappa(X)} = Y$ und Y' hausdorffsch voraussetzen, ist die stetige Abbildung $f : Y \to Y'$ eindeutig (E4T): Aus $f, g : Y \to Y'$ mit $f \circ \kappa = g \circ \kappa$ folgt $f = g$.

Die Kompaktifizierungen von X erhalten hierdurch eine Präordnung: $\kappa \succcurlyeq \kappa'$ bedeutet, es existiert eine (eindeutige) stetige Abbildung $f : Y \to Y'$ mit $f \circ \kappa = \kappa'$. Diese Relation ist reflexiv, denn $\kappa \succcurlyeq \kappa$ gilt dank id_Y, und transitiv, dank Komposition stetiger Abbildungen.

Ist etwa X kompakt hausdorffsch, so ist $\mathrm{id}_X : X \to X$ bis auf Homöomorphie die einzige Kompaktifizierung (F4B). Die Einpunktkompaktifizierung betrachten wir, wenn X lokalkompakt hausdorffsch ist, aber noch nicht kompakt (F4D). Wir können Sie nun durch die folgende universelle Abbildungseigenschaft als terminale / kleinste charakterisieren:

✍ **Korollar F4G.** *Sei X lokal-kompakt hausdorffsch, aber nicht kompakt. Jede Einpunktkompaktifizierung $\alpha : X \to \widehat{X}$ erfreut sich folgender Eigenschaft (UAE): Zu jeder Kompaktifizierung $\kappa : X \to Y$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \to \widehat{X}$ mit $f \circ \kappa = \alpha$.* ✍



Insbesondere folgt: Sind $\alpha : X \to \widehat{X}$ und $\tilde{\alpha} : X \to \tilde{X}$ zwei Einpunktkompaktifizierungen, dann existiert genau ein Homöomorphismus $(f, g) : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \widehat{X}$ mit $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ und $g \circ \alpha = \tilde{\alpha}$.

☞ BEWEIS. Sei X lokal-kompakt hausdorffsch und $\alpha : X \to \widehat{X}$ eine Einpunktkompaktifizierung. Wir können $X \subset \widehat{X}$ als Teilmenge und $\alpha : X \hookrightarrow \widehat{X}$ als Inklusion annehmen. Dann trägt $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ die Alexandroff–Topologie dank der Eindeutigkeitsaussage von F4D. ☜

Sei $\kappa : X \xrightarrow{\sim} \kappa(X) \subset Y$ eine weitere Kompaktifizierung. Nach F3F gilt $\kappa(X) = U \cap A$ mit $U \subset Y$ offen und $A \subset Y$ abgeschlossen. Wegen $Y = \overline{\kappa(X)} \subset \overline{A} = A$ gilt $A = Y$, also ist $\kappa(X) = U$ offen, und $\kappa : X \hookrightarrow Y$ ist eine offene Einbettung.

Eindeutigkeit: Sind $f, g : Y \to X$ stetig mit $f \circ \kappa = g \circ \kappa$, so gilt $f|_{\overline{\kappa(X)}} = g|_{\overline{\kappa(X)}}$ (D5L), also $f = g$. Existenz: Wir definieren $f : Y \to \widehat{X}$ durch $f(\kappa(x)) = x$ und sonst durch Zusammenschlagen $f(Y \smallsetminus \kappa(X)) = \{\infty\}$. Für $U \subset \widehat{X}$ offen gibt es nur zwei Möglichkeiten:

- Für $U \subset X$ offen ist $f^{-1}(U) = \kappa(U)$ offen in Y, da κ eine offene Einbettung ist.
- Für $U = \widehat{X} \smallsetminus K$ mit $K \subset X$ ist $f^{-1}(K) = \kappa(K)$ kompakt, also abgeschlossen in Y (F1G). Das Komplement $f^{-1}(U) = Y \smallsetminus f^{-1}(K)$ ist demnach offen in Y.

In beiden Fällen ist für $U \subset \widehat{X}$ offen das Urbild $f^{-1}(U) \subset Y$ offen, also ist f stetig.

Sind $\alpha : X \to \widehat{X}$ und $\tilde{\alpha} : X \to \tilde{X}$ Einpunktkompaktifizierungen, dann existiert nach dem vorher Gesagten eine stetige Abbildung $f : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \widehat{X}$ mit $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Ebenso existiert eine stetige Abbildung $g : \widehat{X} \to \tilde{X}$ mit $g \circ \alpha = \tilde{\alpha}$. Nun sind $f \circ g$ und $\mathrm{id}_{\widehat{X}}$ zwei solche Abbildungen $\widehat{X} \to \widehat{X}$, dank Eindeutigkeit also $f \circ g = \mathrm{id}_{\widehat{X}}$. Ebenso gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. □

Beispiele F4H. Das wichtigste Beispiel ist die Kompaktifizierung des euklidischen Raums:

- Die stereographische Projektion (A1L) beschert uns eine Einpunktkompaktifizierung $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$. Dank der Eindeutigkeitsaussage (F4G) ist diese homöomorph zur Alexandroff–Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$. *Übung:* Rechnen Sie dies explizit nach!
- Von der klassischen Zweipunktkompaktifizierung $\kappa : \mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \cong [-1,1]$ zu Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung $\alpha : \mathbb{R} \hookrightarrow \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$ haben wir die Identifizierung $f : \bar{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{R}}$ durch Zusammenschlagen gemäß $\pm\infty \mapsto \infty$ (E2T).
- Von der Ballkompaktifizierung $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n : x \mapsto x/(1+|x|)$ zur stereographischen Einpunktkompaktifizierung $\alpha : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ haben wir die Identifizierung $f : \mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \mathbb{D}^n \mathbin{/\!/} \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ durch Zusammenschlagen des Randes (F1R).

Beispiele. Über den beiden Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ werden wir in §K2 die projektiven Räume als Quotienten $\mathbb{KP}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\})$ konstruieren und eingehend untersuchen. Diese Objekte haben viele nützliche Eigenschaften, insbesondere sind sie klassische Beispiele von Kompaktifizierungen. Als Vorschau weise ich daher hier schon auf sie hin:

- Vermöge $\kappa : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{RP}^1 : x \mapsto [x:1]$ ist auch der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^1$ eine Einpunktkompaktifizierung von $\kappa(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ um $\infty = [1:0]$, also folgt $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ (F4G).
- Vermöge $\kappa : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{CP}^1 : z \mapsto [z:1]$ ist auch der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^1$ eine Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, also folgt $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ (F4G).

Homöomorphismen $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ zu konstruieren, erfordert Arbeit (K2L). Der Satz von Alexandroff beweist sie gleich mit — ohne Aufpreis als Geschenk.

Übung F4I. Bestimmen Sie zur Halbebene $A = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ eine Einpunktkompaktifizierung $\kappa : A \hookrightarrow K \subset \mathbb{R}^n$. Dieselbe Aufgabe für $B =]0,1[$, $C = [0,1[\cup [2,3[$, $D =]0,1[\cup]2,3[$.

Übung F4J. Nennen Sie zur Einpunktkompaktifizierung von $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| \leq 1\}$, $X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| < \infty\}$, $X_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| < 1\}$, $X_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < 1\}$, $X_5 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|, |x_2| < 1\}$, $X_6 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| < 1\}$, $X_7 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0, |x| < 1\}$ explizit eine homöomorphe Kompaktifizierung $\kappa_i : X_i \hookrightarrow Y_i$ mit $Y_i \subset \mathbb{R}^n$.

Bemerkung. Ist ein Raum X hausdorffsch und lokal-kompakt, aber nicht kompakt, so ist die Alexandroff–Kompaktifizierung $\alpha_X : X \to \widehat{X}$ die kleinste. Wenn der Raum X überhaupt eine Kompaktifizierung erlaubt, dann existiert auch eine größte (F4O).

§F4e. Abzählbarkeit im Unendlichen. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ lässt sich durch die kompakten Bälle $\bar{B}(0,n)$ für $n \in \mathbb{N}$ ausschöpfen. Dies motiviert folgende Definition:

Definition F4K. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt *σ–kompakt*, wenn er abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist, also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ mit K_n kompakt in $(X,\mathcal{T})$.

Beispiele.
- Der Raum $\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$ ist σ–kompakt, aber nicht lokal-kompakt.
- Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(0,n)$ ist σ–kompakt und lokal-kompakt.

Satz F4L. *Für jeden lokal-kompakten Hausdorff–Raum $(X,\mathcal{T})$ sind äquivalent:*

(1) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist σ–kompakt, also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ mit K_n kompakt in $(X,\mathcal{T})$.
(2) Es gilt $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ mit U_n offen und $\overline{U_n}$ kompakt und $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

(3) In der Alexandroff–Kompaktifizierung $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{T}})$ hat der Punkt ∞ eine abzählbare Umgebungsbasis. Dies nennt man kurz Abzählbarkeit im Unendlichen.

BEWEIS. Versuchen Sie es zum Verständnis der Begriffe als Übung! □

✻ **F4L.** „(1) ⇒ (2)“: Wir haben $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ mit $K_n \subset X$ kompakt. Zu K_0 existiert nach F3B eine offene Umgebung U_0 deren Abschluss $\overline{U_0}$ in X kompakt ist. Per Induktion existiert eine relativ kompakte offene Umgebung U_{n+1} der kompakten Menge $\overline{U_n} \cup K_{n+1}$. Damit gilt (2).

„(2) ⇒ (3)“: Da $\overline{U_n}$ kompakt ist, ist $V_n = \widehat{X} \smallsetminus \overline{U_n}$ eine offene Umgebung von ∞ im Raum $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{T}})$. Sei $V \subset \widehat{X}$ eine offene Umgebung von ∞ in $\widehat{X}$, also $K = \widehat{X} \smallsetminus V \subset X$ kompakt. Wegen $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$ gilt $K \subset U_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Aus $K \subset \overline{U_n}$ folgt $V = \widehat{X} \smallsetminus K \supset \widehat{X} \smallsetminus \overline{U_n} = V_n$.

„(3) ⇒ (1)“: Sei $\{ V_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ eine Umgebungsbasis von ∞. Nach D3H können wir alle V_n als offen annehmen. Da $\widehat{X}$ hausdorffsch ist, gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{\infty\}$. Da $\widehat{X}$ kompakt ist, sind die Komplemente $K_n = \widehat{X} \smallsetminus V_n \subset X$ nicht nur abgeschlossen, sondern auch kompakt, und wir erhalten $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$.

☞ **Satz F4M.** *(1) Sei $(X,\mathcal{T}_X)$ lokal-kompakt und σ–kompakt. Sei (Y,d_Y) ein metrischer Raum. Dann ist $\mathscr{C}(X,Y)$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz metrisierbar.* ☜

(2) Jede offene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt und σ–kompakt. Sei $Y = \mathbb{R},\mathbb{C}$ mit der euklidischen Metrik. Dann sind die Funktionenräume $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ und $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ metrisierbar.

BEWEIS. Zwecks Wiederholung der Begriffe als Übung empfohlen. □

✻ **F4M.** (1) Dank F4L existiert eine Folge kompakter Teilmengen $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ mit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n^\circ$. Somit liegt jedes Kompaktum $K \subset X$ in einem K_n (und damit auch in allen nachfolgenden). Wie in D4G können wir dann die Topologie der kompakten Konvergenz metrisieren durch $d : \mathscr{C}(X,Y)\times\mathscr{C}(X,Y) \to [0,1]$ mit $d(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-1} |d_Y^*(f,g)|_{K_n}$. Die klassische Anwendung ist $\mathbb{C}(U,\mathbb{R})$ für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen:

(2) Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt, also auch jeder offene Teilraum U (F3E). Wie in D6N gilt $U = \bigcup \bar{B}(a,1/k)$ mit $a \in \mathbb{Q}^n$ und $\bar{B}(a,1/k) \subset U$, also ist U abzählbare Vereinigung von Kompakta.

§F4f. Vollständig reguläre Räume. Zur Erinnerung (E5B): Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt *vollständig regulär* (T_1 & $T_{3\frac{1}{2}}$), wenn alle einpunktigen Mengen $\{a\}$ in X abgeschlossen sind (T_1) und zu jeder abgeschlossenen Menge $B \subset X$ und $a \in X \smallsetminus B$ eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ existiert mit $f(a) = 0$ und $f|_B = 1$ ($T_{3\frac{1}{2}}$). Wir sagen hierzu auch, die stetigen Funktionen trennen Punkte und abgeschlossene Mengen.

Im Zuge der Metrisierung (§E5j) haben wir noch etwas mehr bewiesen:

Lemma F4N. *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist genau dann vollständig regulär, wenn er sich in einen Produktraum $[0,1]^I$ einbetten lässt. (Im Allgemeinen ist I überabzählbar.)*

BEWEIS. „⇒“: Sei $(f_i : X \to [0,1])_{i\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen, die abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ von Punkten $b \in X \smallsetminus A$ trennt gemäß $f_i(b) \notin \overline{f_i(A)}$ für ein $i \in I$. Dank $T_{3\frac{1}{2}}$ existiert solch eine Familie, notfalls wählen wir die Menge $X^* := \mathscr{C}(X,[0,1])$ aller stetigen Abbildungen $X \to [0,1]$. Die Abbildung $f : X \to [0,1]^I : x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$ ist stetig, injektiv, und sogar eine Einbettung dank des Einbettungslemmas E5S.

„⇐“: Dank Kompaktheit ist jede Projektion $p_i : [0,1]^I \to [0,1]$ abgeschlossen (F1L). Sei $f : X \to [0,1]^I$ eine Einbettung und $f_i := p_i \circ f$. Für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ und $b \in X \smallsetminus A$ gilt $f(b) \notin f(A)$, das heißt, es existiert $i \in I$ mit $f_i(b) \notin f_i(A)$. Da $f_i(A)$ im Teilraum $f_i(X)$ abgeschlossen ist, existiert $V \subset [0,1]$ abgeschlossen mit $f_i(A) = f_i(X) \cap V$, also $f(b) \notin V$. Wir erhalten $\varepsilon := d(f(b),V) > 0$. Schließlich ist $g : X \to [0,1]$ mit $g(x) := \max\{1, d(f(x),f(b))/\varepsilon\}$ stetig und erfüllt $g(b) = 0$ und $g|_A = 1$. □

§F4g. Die Stone–Čech–Kompaktifizierung. Wir betrachten Einbettungen $X \hookrightarrow [0,1]^I$. Jeder solche Produktraum ist hausdorffsch und kompakt (F1T), wir erhalten auf diese Weise also Kompaktifizierungen von X. Wir betrachten nun insbesondere die maximale:

Satz F4O. *Für jeden topologischen Raum X setzen wir $X^* := \mathscr{C}(X,[0,1])$ und definieren $\beta : X \to [0,1]^{X^*}$ durch $\beta(x) = (c(x))_{c\in X^*}$. Dies ist genau dann eine Einbettung, wenn X vollständig regulär ist. In diesem Fall ist $\beta_X : X \to \beta X := \overline{\beta(X)}$ eine Kompaktifizierung.*

Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ setzt sich eindeutig fort zu einer stetigen Abbildung $\beta f : \beta X \to \beta Y$ mit $\beta f \circ \beta_X = \beta_Y \circ f$. Das entspricht folgendem kommutativen Diagramm:

Ist insbesondere $f : X \hookrightarrow Y$ eine Kompaktifizierung, so ist β_Y ein Homöomorphismus, und wir erhalten die stetige Abbildung $\bar f = \beta_Y^{-1} \circ \beta f : \beta X \to Y$ mit $\bar f \circ \beta_X = f$.

Bemerkung. Die *Stone–Čech–Kompaktifizierung* $X \hookrightarrow \beta X$ ist somit die größte Kompaktifizierung: Jede andere Kompaktifizierung $X \hookrightarrow Y$ ist Quotient von $X \hookrightarrow \beta X$.

BEWEIS VON SATZ F4O. Auch dieser Satz ist bereits so explizit formuliert und angeordnet, dass wir die genannten Eigenschaften nur geduldig nachprüfen müssen: Übung! □

✻ **F4O.** Die Stetigkeit von $\beta : X \to [0,1]^{X^*}$ verdanken wir wie immer der universellen Abbildungseigenschaft des Produkts (E4D), denn jede Koordinate $c : X \to [0,1]$ ist stetig. Eine Einbettung erhalten wir, wenn X vollständig regulär ist (E5S). Die Umkehrung haben wir im Lemma F4N bewiesen. Nach Tychonoff (F1T) ist jeder Produktraum $[0,1]^{X^*}$ kompakt und hausdorffsch, also ist $\beta : X \to \beta X$ eine Kompaktifizierung (F4A).

Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert eine Abbildung $f^* : Y^* \to X^* : c \mapsto c \circ f$, die jeder stetigen Abbildung $c : Y \to [0,1]$ die Komposition $f^*(c) = c \circ f : X \to [0,1]$ zuordnet. Hieraus erhalten wir eine stetige Abbildung $f^{**} : [0,1]^{X^*} \to [0,1]^{Y^*} : a \mapsto a \circ f^*$, indem wir jeder Funktion $a : X^* \to [0,1]$ die Funktion $f^{**}(a) = a \circ f^* : Y^* \to [0,1]$ zuordnen. Wir setzen $f : X \to Y$ fort zu $\beta f : \beta X \to \beta Y$ gemäß $(c(x))_{c\in X^*} \mapsto (c'(f(x))_{c'\in Y^*}$. Dies ist die Einschränkung der Funktion f^{**}, also wohldefiniert und stetig.

Angenommen, $f : X \hookrightarrow Y$ ist eine Kompaktifizierung (F4A), das heißt Y ist kompakt hausdorffsch und f eine Einbettung mit $\overline{f(X)} = Y$. Dann ist $\beta_Y : Y \to \beta Y$ ein Homöomorphismus (F4B).

Damit können wir die kompaktifizierbaren Räume wie folgt charakterisieren:

Korollar F4P. *Die vollständig regulären Räume sind genau diejenigen Räume, die sich kompaktifizieren lassen, also die Teilräume kompakter Hausdorff–Räume.*

BEWEIS. Wenn es überhaupt eine Kompaktifizierung $\kappa : X \to Y$ gibt, dann ist Y vollständig regulär, somit auch der Teilraum $\kappa(X) \cong X$. Ist X vollständig regulär, dann lässt sich der Satz anwenden und wir erhalten die Stone–Čech–Kompaktifizierung $\beta_X : X \hookrightarrow \beta X$. □

Bemerkung. Zum Vergleich: Die lokal-kompakten Hausdorff–Räume sind genau die *offenen* Teilräume kompakter Hausdorff–Räume (F4F). Dies sind genau die Räume, die sich durch einen Punkt kompaktifizieren lassen (F4G). Zusammengefasst gilt für diese Räume: Alexandroff liefert die kleinste, Stone–Čech die größte Kompaktifizierung.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F5. Eigentliche Abbildungen

§F5a. Eigentliche Abbildungen. Seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume.

Lemma F5A. *Sei $f : X \to Y$ abgeschlossen. Zu jeder Menge $B \subset Y$ und offenen Umgebung U von $f^{-1}(B)$ in X existiert eine offene Umgebung V von B in Y mit $f^{-1}(V) \subset U$.*

BEWEIS. Die Bildmenge $f(X \smallsetminus U)$ ist abgeschlossen und somit $V := Y \smallsetminus f(X \smallsetminus U)$ offen in Y. Aus $f^{-1}(B) \subset U$ folgt $B \cap f(X \smallsetminus U) = \emptyset$ und somit $B \subset V$. Schließlich gilt

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \smallsetminus f(X \smallsetminus U)) = X \smallsetminus f^{-1}(f(X \smallsetminus U)) \subset X \smallsetminus (X \smallsetminus U) = U. \qquad \square$$

Definition F5B. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *eigentlich*, engl. *proper*, wenn sie stetig und abgeschlossen ist, und für jeden Punkt $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ kompakt ist.

Beispiele.
- Jeder Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist eigentlich.
- Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ von einem kompakten Raum X in einen Hausdorff–Raum Y ist eigentlich, da f abgeschlossen (F1L) und $f^{-1}(\{y\})$ kompakt (F1F) ist.

Die Definition F5B mag zunächst technich anmuten. Sie hat sich jedoch als nützlich herausgestellt, denn eigentliche Abbildungen haben besonders gute Eigenschaften:

Satz F5C. *Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive eigentliche Abbildung.*

(1) Ist X hausdorffsch, dann ist auch Y hausdorffsch.
(2) Ist $K \subset Y$ kompakt, dann ist auch $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt.
(3) Genau dann ist X lokal-kompakt, wenn Y lokal-kompakt ist.

BEWEIS. (1) Für $y_1 \neq y_2$ in Y sind $f^{-1}(\{y_1\})$ und $f^{-1}(\{y_2\})$ disjunkte Kompakta in X. Nach F1E existieren disjunkte offene Umgebungen $U_1 \supset f^{-1}(\{y_1\})$ und $U_2 \supset f^{-1}(\{y_2\})$ in X. Nach F5A existieren offene Umgebungen V_1 von y_1 und V_2 von y_2 in Y sodass $f^{-1}(V_1) \subset U_1$ und $f^{-1}(V_2) \subset U_2$. Insbesondere gilt also $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

(2) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f^{-1}(K)$. Für jeden Punkt y in $K \subset Y$ ist $f^{-1}(\{y\})$ kompakt in X, also gilt $f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{i\in J(y)} U_i$ für eine endliche Teilmenge $J(y) \subset I$. Dank Lemma F5A existiert eine offene Umgebung V_y von y in Y sodass $f^{-1}(V_y) \subset \bigcup_{i\in J(y)} U_i$. Die offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{y\in Y} V_y$ enthält eine endliche Teilüberdeckung $K \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Für $J = J(y_1) \cup \cdots \cup J(y_n)$ gilt demnach

$$f^{-1}(K) \subset f^{-1}(V_{y_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{y_n}) \subset \bigcup\nolimits_{k=1}^{n} \bigcup\nolimits_{i\in J(y_k)} U_i = \bigcup\nolimits_{i\in J} U_i.$$

(3) Sei X lokal-kompakt. Zu $y \in Y$ ist $f^{-1}(\{y\})$ kompakt in X. Nach F3B existiert eine relativ kompakte offene Umgebung U von $f^{-1}(\{y\})$ in X. Nach F5A existiert eine offene Umgebung V von y in Y mit $f^{-1}(V) \subset U$. Ihr Abschluss $\overline{V}$ ist kompakt, denn $f^{-1}(\overline{V}) = \overline{f^{-1}(V)} \subset \overline{U}$ ist kompakt und somit auch $\overline{V} = f(f^{-1}(\overline{V}))$.

Sei umgekehrt Y lokal-kompakt. Sei $x \in X$ und U eine offene Umgebung. Nach F5A existiert eine offene Umgebung V von $f(x)$ sodass $f^{-1}(V) \subset U$. Hierin liegt eine relativ kompakte offene Umgebung V_0 mit $y \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$. Somit ist $U_0 = f^{-1}(V_0)$ eine offene Umgebung von x und $\overline{U_0} = f^{-1}(\overline{V_0})$ ist kompakt nach (2). $\square$

Korollar F5D. *Die Komposition von eigentlichen Abbildungen ist eigentlich.*

BEWEIS. Das ist aus der Definition F5B nicht offensichtlich, folgt aber sofort aus (2). $\square$

§F5b. Eigentliche Abbildungen lokal-kompakter Hausdorff–Räume. Für jede stetige Abbildung ist das Bild einer kompakten Menge wieder kompakt (F1J). Hingegen ist das Urbild einer kompakten Menge im Allgemeinen nicht kompakt. Einfachstes Beispiel:

Beispiel. Sei X ein (nicht-kompakter) topologischer Raum und $Y = \{y\}$ bestehe nur aus einem Punkt. Dann ist $f : X \to Y$ stetig und abgeschlossen und $f^{-1}(\{y\}) = X$.

Diesen Mangel beheben wir durch eigentliche Abbildungen. Mit unseren bisherigen Mitteln ist nicht leicht festzustellen, ob eine gegebene Abbildung eigentlich ist oder nicht. Das folgende einfache Kriterium verschafft uns eine bequeme Charakterisierung:

Satz F5E. *Seien X und Y lokal-kompakte Hausdorff–Räume. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Die Abbildung f ist eigentlich (im Sinne der Definition F5B).
(2) Für jedes Kompaktum $K \subset Y$ ist das Urbild $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt.
(3) Die Fortsetzung von $f : X \to Y$ zu $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ mit $\infty_X \mapsto \infty_Y$ ist stetig.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ \widehat{X} & \xrightarrow[\infty_X \mapsto \infty_Y]{\quad \widehat{f} \quad} & \widehat{Y} \end{array}$$

BEWEIS. Die Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)“ folgt aus dem Satz F5C, denn unter eigentlichen Abbildungen sind Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt.

Für „(2) $\Rightarrow$ (1)“ müssen wir zeigen, dass f abgeschlossen ist, dass also für jede abgeschlossene Menge A in X das Bild $f(A)$ in Y abgeschlossen ist. Nach F3U ist Y kompakt erzeugt, also reicht es zu zeigen, dass für jedes Kompaktum $K \subset Y$ der Durchschnitt $f(A) \cap K$ abgeschlossen in K ist. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(K)$ kompakt in X, also auch die abgeschlossene Teilmenge $A \cap f^{-1}(K)$, und somit auch das Bild $f(A \cap f^{-1}(K)) = f(A) \cap K$. Da Y hausdorffsch ist, ist also $f(A) \cap K$ abgeschlossen in Y.

Für die Alexandroff–Topologie (F4D) gilt „(2) $\Leftrightarrow$ (3)“: Die Abbildung $\widehat{f}$ ist in allen Punkten $x \in X$ stetig. Die Stetigkeit in ∞_X ist gleichbedeutend mit Bedingung (2). □

Bemerkung. Wir haben in §F5a eigentliche Abbildungen zwischen allgemeinen topologischen Räumen diskutiert. Wenn man sich nur für eigentliche Abbildungen lokal-kompakter Hausdorff–Räume interessiert, dann kann man Bedingung (2) aus Satz F5E als Definition verwenden: Diese ist dann zwar nur auf einen Spezialfall zugeschnitten, aber die allgemeineren Ausführungen in §F5a werden umgangen. Bei unserem Vorgehen ist F5E ein Satz, der aus der allgemeineren Definition abgeleitet wird.

Beispiele.
- Genau dann ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n : k \mapsto x_k$ eigentlich, wenn $|x_k| \to \infty$ für $k \to \infty$ gilt, wenn also zu jedem $r \in \mathbb{R}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|x_k| > r$ für alle $k > m$.
- Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eigentlich, wenn $|f(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$ gilt, also zu jedem $r \in \mathbb{R}$ ein $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert, sodass $|f(t)| > r$ für alle $t > t_0$.
- Konkretes Beispiel: Zu $c \in \mathbb{C}$ definieren wir $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ durch $f(t) = \exp(ct)$. Für $c = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt demnach $f(t) = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$. Für $a \neq 0$ ist dies eine Einbettung. Die Abbildung f ist eigentlich für $a > 0$, nicht für $a \leq 0$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Bemerkung. Für $f : X \to Y$ hat die Schreibweise „$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$“ zunächst nur symbolische Bedeutung, solange ∞ kein Punkt des betrachteten Raumes ist. Sie erhält ihre übliche Bedeutung, wenn wir zur Einpunktkompaktifizierung übergehen. Schönes Beispiel:

✍ **Übung F5F.** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ eine Polynomfunktion mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ und $a_n \neq 0$. Genau dann ist f eigentlich, wenn $n \geq 1$ gilt. ✍

✻ **F5F.** Der Fall $n = 0$ ist klar: Jede konstante Funktion $f : \mathbb{K} \to \{a_0\} \subset \mathbb{K}$ ist stetig und abgeschlossen, aber nicht eigentlich, da $f^{-1}(\{a_0\}) = \mathbb{K}$ nicht kompakt ist. Auch im Falle $n \geq 1$ ist f stetig, zudem gilt $|f(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Dank Satz F5E ist f eigentlich, denn der Start- und Zielraum $\mathbb{K}$ ist lokal-kompakt hausdorffsch.

Alternativ können wir versuchen, direkt die Definition F5B anzuwenden: Die Funktion f is stetig, und für jeden Punkt $y \in \mathbb{K}$ hat das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ höchstens n Elemente (B5Q), ist also endlich und somit kompakt. Die Schwierigkeit liegt dabei darin, die Abgeschlossenheit von f nachzuweisen. Das ist nicht selbstverständlich und benötigt tatsächlich die lokale Kompaktheit: Es gilt nicht für alle Polynomfunktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, etwa $f(x) = x^2 - 2$, denn $[0,2]_\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{Q}$, aber das Bild $f([0,1]_\mathbb{Q}) \subset [0,2]$ nicht (siehe C3T).

☞ **Übung F5G.** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Wir untersuchen Polynome und ihre Nullstellen: ☜

(1) Zum Polynom $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$ sei $r := \sum_{k=1}^n |a_k|$. Für $|z| > r$ gilt $|f(z)| > 0$. Das heißt: Alle Nullstellen von P liegen in $\bar{B}(0,r)$.
(2) Je n vorgegebene Nullstellen definieren ein zugehöriges Polynom: Die so definierte Abbildung $\mu : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}[X]_n^1 : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (X - x_1) \cdots (X - x_n)$ ist eigentlich.

Wir führen die Übung D5R zu separablen Polynomen und Matrizen fort. Wir erinnern an die dort erklärte Diskriminante $\Delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$. In Grad 2 gilt $\Delta(X^2 + pX + q) = p^2 - 4q$. In Grad 3 gilt $\Delta(X^3 + aX^2 + bX + c) = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc$.

☞ **Übung F5H.** Ein Polynom $P \in \mathbb{K}[X]_n^1$ heiße $\mathbb{K}$*–zerfallend*, falls $P = (X - x_1) \cdots (X - x_n)$ mit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ gilt, und $\mathbb{K}$*–separabel*, falls zudem $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ gilt. ☜

(1) In $\mathbb{R}[X]_n^1$ ist die Teilmenge $\Sigma_\mathbb{R}$ aller $\mathbb{R}$–separablen Polynome offen.
(2) In $\mathbb{R}[X]_n^1$ ist der Abschluss $\overline{\Sigma_\mathbb{R}}$ die Menge der $\mathbb{R}$–zerfallenden Polynome.
(3) Speziell für $n \leq 3$ gilt $\Sigma_\mathbb{R} = \{ P \mid \Delta(P) > 0 \}$ und $\overline{\Sigma_\mathbb{R}} = \{ P \mid \Delta(P) \geq 0 \}$.
(4) Im reellen Fall sind die beiden Einschränkungen $\mu_0 : \{ (x_1 < \cdots < x_n) \in \mathbb{R}^n \} \to \Sigma_\mathbb{R}$ und $\mu_1 : \{ (x_1 \leq \cdots \leq x_n) \in \mathbb{R}^n \} \to \overline{\Sigma_\mathbb{R}}$ Homöomorphismen.

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heiße entsprechend $\mathbb{K}$*–zerfallend* bzw. $\mathbb{K}$*–separabel*, wenn dies für ihr charakteristisches Polynom zutrifft. Hierzu gilt:

(5) In $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Teilmenge $S_\mathbb{R}$ aller $\mathbb{R}$–separablen Matrizen offen.
(6) In $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist der Abschluss $\overline{S_\mathbb{R}}$ die Menge $D_\mathbb{R}$ der $\mathbb{R}$–trigonalisierbaren Matrizen.
(7) Speziell für $n \leq 3$ gilt $S_\mathbb{R} = \{ A \mid \Delta(\chi(A)) > 0 \}$ und $\overline{S_\mathbb{R}} = \{ A \mid \Delta(\chi(A)) \geq 0 \}$.
(8) In einer Umgebung von $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist keine Matrix $\mathbb{R}$–trigonalisierbar. Dasselbe gilt in $\mathbb{R}^{n \times n}$ für jede Matrix A mit negativer Diskriminante $\Delta(\chi(A)) < 0$.
(9) In $\mathbb{R}^{n \times n}$ hat die Menge $D_\mathbb{R}$ der $\mathbb{R}$–diagonalisierbaren Matrizen als Abschluss die $\mathbb{R}$–trigonalisierbaren Matrizen, als Inneres $D_\mathbb{R}^\circ = S_\mathbb{R}$ die $\mathbb{R}$–separablen Matrizen.

§F6. Geometrische Anwendungen

☞ **§F6a. Polarkoordinaten.** In der Ebene nutzen wir Polarkoordinaten, etwa in der Form ☜

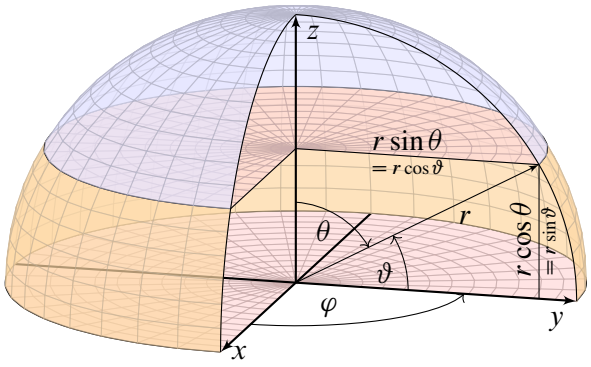
$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times [-\pi,\pi] \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2 \;:\; (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Diese Zerlegung steht uns ebenso im $\mathbb{R}^3$ und allgemein für $\mathbb{R}^n$ zur Verfügung:

$$\Phi \;:\; \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{S}^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \;:\; (r,s) \mapsto rs.$$

Für $x = rs$ in $\mathbb{R}^n$ entspricht dies der Zerlegung in den radialen Anteil $r = |x| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und die Richtung $s = x/|x| \in \mathbb{S}^{n-1}$ im Falle $x \neq 0$; für $x = 0$ ist $r = 0$ und $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ beliebig.

Außerhalb des Nullpunkts ist Φ ein Homöomorphismus mit $\Phi^{-1} : x \mapsto (|x|, x/|x|)$. Ohne radialen Anteil bleibt daher nur noch, die Sphären $\mathbb{S}^{n-1}$ geschickt zu parametrisieren. Wir bauen dies induktiv auf. Die Abbildung $[-\pi,\pi] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : \varphi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ induziert $[-\pi,\pi] /\!\!/ \{-\pi,\pi\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$, siehe E2T. Für die zweidimensionale Sphäre $\mathbb{S}^2$ nutzen wir Kugelkoordinaten, wie Sie sie aus Mathematik und Physik und Anwendungen kennen:



☞ **Übung F6A.** In jeder Dimension $n \geq 1$ untersuchen wir die Abbildungen ☜

$$f \;:\; X := \mathbb{S}^{n-1} \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^{n+1} \qquad : (s,\theta) \mapsto (\sin(\theta)\, s, \cos(\theta)),$$
$$f^* \;:\; Y := \mathbb{S}^{n-1} \times [-\pi/2,\pi/2] \to \mathbb{R}^{n+1} \;:\; (s,\vartheta) \mapsto (\cos(\vartheta)\, s, \sin(\vartheta)).$$

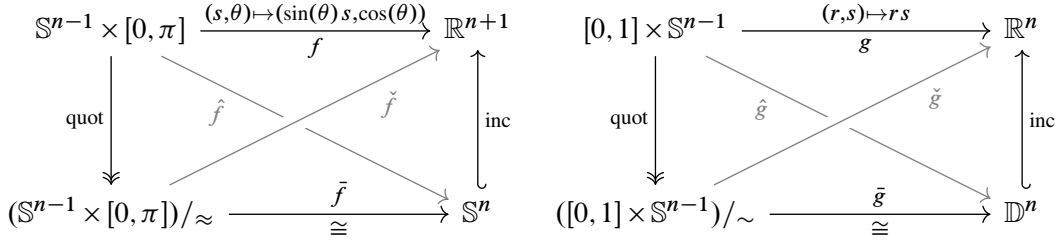
Führen Sie die kanonische Faktorisierung für f aus (anschließend ebenso für g):
(1) Bestimmen Sie das Bild $Z = f(X)$. (2) Welche Punkte werden durch f identifiziert?
(3) So induziert f die stetige Bijektion $\bar{f} : X/\!\sim \to Z$. Ist $\bar{f}$ ein Homöomorphismus?

✻ **F6A.** (1) Es gilt $f(X) = \mathbb{S}^n$. Die Inklusion „$\subset$“ folgt aus $|f(s,\theta)|^2 = \sin(\theta)^2|s|^2 + \cos(\theta)^2 = 1$. Wir zeigen „$\supset$“: Zu $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $|u|^2 + |v|^2 = 1$ gilt $-1 \leq v \leq 1$, also existiert genau ein $\theta \in [0,\pi]$ mit $\cos(\theta) = v$ dank Zwischenwertsatz C3R, denn cos ist stetig und auf $[0,\pi]$ streng monoton fallend von $\cos(0) = 1$ nach $\cos(\pi) = -1$. Für $-1 < v < 1$ gilt $0 < \theta < \pi$ und $\sin(\theta) > 0$, und wir setzen $s := u/\sin(\theta) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Für $v = \pm 1$ gilt $r \in \{0,\pi\}$, und wir wählen $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ beliebig. In allen Fällen gilt $(u,v) = (\sin(\theta)\, s, \cos(\theta)) = f(s,\theta)$.

(2) Der Boden $B = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$ wird auf den Nordpol $(0,\ldots,0,1)$ zusammengeschlagen, der Deckel $D = \mathbb{S}^{n-1} \times \{\pi\}$ auf den Südpol $(0,\ldots,0,-1)$. Weitere Identifizierungen gibt es nicht, wie die Rechnung aus (1) zeigt. In der kanonischen Faktorisierung (E2H) induziert f eine stetige Bijektion $\bar{f} : \bar{X} := (X /\!\!/ B) /\!\!/ D \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$.

(3) Ja, $\bar{f}$ ist ein Homöomorphismus. Mit Kompaktheit gelingt dies leicht: Der Raum $X = \mathbb{S}^{n-1} \times [0,\pi]$ ist kompakt dank Heine–Borel (F1O) und Tychonoff (F1T). Somit ist auch der Quotient $\bar{X}$ kompakt (F1J). Der Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ ist hausdorffsch (sogar metrisierbar, siehe C2O). Somit ist auch der Teilraum $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hausdorffsch (E1G. Dank F1L ist die stetige Bijektion $\bar{f} : \bar{X} \to \mathbb{S}^n$ also ein Homöomorphismus.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]



☞ **Übung F6B.** Wir untersuchen $g : [0,1]\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n : (r,s) \mapsto rs$. Führen Sie die kanonische Faktorisierung aus: (1) Bestimmen Sie das Bild. (2) Welche Punkte werden durch g identifiziert? (3) So induziert g eine stetige Bijektion $\bar g$. Ist diese ein Homöomorphismus? ☜

Beantworten Sie dieselben Fragen für die Abbildung $h : \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n : (r,s) \mapsto rs$.

✻ **F6B.** Für h ist die Situation besonders einfach und übersichtlich: h ist ein Homöomorphismus auf die offene Teilmenge $\operatorname{im}(h) = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Die Umkehrung ist gegeben durch $h^{-1}(x) = (|x|, x/|x|)$. Nun zu g:

(1) Das Bild ist $\operatorname{Im}(g) = \mathbb{D}^n$: Die Inklusion „$\subset$“ ist klar, denn $\mathbb{D}^n$ ist konvex und erfüllt $0 \in \mathbb{D}^n$ und $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$, also $rs \in \mathbb{D}^n$ für alle $r \in [0,1]$ und $s \in \mathbb{S}^{n-1}$. Es gilt auch die Umkehrung „$\supset$“: Für $0 \in \mathbb{D}^n$ gilt $g(0,s) = 0$ für jedes $s \in \mathbb{S}^{n-1}$. Für $0 \neq x \in \mathbb{D}^n$ gilt $g(r,s) = x$ mit $r = |x|$ und $s = x/|x|$.

(2) Es gilt $g(r,s) = g(r',s')$ genau dann, wenn $(r,s) = (r',s')$ oder $r = r' = 0$. Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar. Die Implikation „$\Rightarrow$“ folgt dank der Vorüberlegung zu $h : \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Die durch g induzierte Äquivalenzrelation $\sim$ erfüllt somit $(r,s) \sim (r',s')$ genau dann, wenn $(r,s) = (r',s')$ oder $r = r' = 0$.

(3) Ja, $\bar g$ ist ein Homöomorphismus. Mit Kompaktheit gelingt dies leicht: Der Raum $X = [0,1]\times\mathbb{S}^{n-1}$ ist kompakt dank Heine–Borel (F1O) und Tychonoff (F1T). Somit ist auch der Quotient $\bar X = X/{\sim}$ kompakt (F1J). Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist hausdorffsch (sogar metrisierbar, siehe C2O). Somit ist auch der Teilraum $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ hausdorffsch (E1G). Dank F1L ist die stetige Bijektion $\bar f : \bar X \to \mathbb{S}^n$ also ein Homöomorphismus.

☞ **Bemerkung.** Die komplementäre, etwas freiere Aufgabenstellung lautet: ☜

(1) Auf dem Zylinder $X = [0,1]\times\mathbb{S}^{n-1}$ werde die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt von $(0,s) \sim (0,s')$ für alle $s,s' \in \mathbb{S}^{n-1}$. Konstruieren Sie explizit einen Homöomorphismus $X/{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$ und weisen Sie die Homöomorphie sorgfältig nach.

(2) Auf dem Zylinder $Y = [-1,1]\times\mathbb{S}^{n-1}$ werde die Äquivalenzrelation $\approx$ erzeugt von $(-1,s) \approx (-1,s')$ und $(+1,s,) \approx (+1,s')$ für alle $s,s' \in \mathbb{S}^{n-1}$. Konstruieren Sie explizit einen Homöomorphismus $Y/{\approx} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ und weisen Sie die Homöomorphie sorgfältig nach.

✻ **F6B.** Das ist eine komplementäre Aufgabenstellung zu den vorigen Übungen F6B und F6A: Dort waren Abbildungen g und f explizit vorgegeben und die kanonische Faktorisierung bis zum erhofften Homöomorphismus gefragt. Hier haben wir nur den Raum mit Äquivalenzrelation gegeben und suchen einen Homöomorphismus zum erhofften Zielraum $\mathbb{D}^n$ bzw. $\mathbb{S}^n$. Das ist insofern freier und zugleich schwieriger, da wir eine geeignete Abbildung erst einmal finden müssen. Im Nachgang zu den Übungen F6B und F6A ist dies jedoch leicht. Die Abbildung $g : [0,1]\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n : (r,s) \mapsto rs$ induziert $\bar g : ([0,1]\times\mathbb{S}^{n-1})/{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$. Die Abbildung $f : [-1,1]\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n : (t,s) \mapsto (\sin(\pi(t+1)/2)s, \cos(\pi(t+1)/2))$ induziert $\bar f : ([-1,1]\times\mathbb{S}^{n-1})/{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$. Ebenso genügt die Abbildung $f* : [-1,1]\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n : (t,s) \mapsto (\cos(t\pi/2)s, \sin(t\pi/2))$. Der Nachweis der Homöomorphie wurde in den beiden vorigen Aufgaben ausgeführt.

Bemerkung: Die Aufgabe wird noch freier und damit schwieriger in der Form: „Gegeben sind der Raum X und hierauf die Äquivalenzrelation $\sim$ durch …. Finden Sie einen zu $X/{\sim}$ homöomorphen Teilraum $Z \subset \mathbb{R}^n$ und konstruieren Sie explizit einen Homöomorphismus $X/{\sim} \xrightarrow{\sim} Z$.“ Hierzu müssen Sie sich erst einmal ein Ziel Z setzen, dazu eine Abbildung $g : X \to \mathbb{R}^n$ konstruieren, und schließlich nachweisen, dass diese einen Homöomorphismus $\bar g : X/{\sim} \xrightarrow{\sim} Z$ induziert. Mathematik verbindet Kreativität und Sorgfalt!

§F6b. Zerlegungen von Sphären. Für $m < n$ betrachten wir $\mathbb{R}^m$ als Teilraum von $\mathbb{R}^n$ vermöge der isometrischen Einbettung $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n : (x_1,\dots,x_m) \mapsto (x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$. Dies rechtfertigt die Schreibweise $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ sowie $\mathbb{D}^m \subset \mathbb{D}^n$ und $\mathbb{B}^m \subset \mathbb{B}^n$ und $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{S}^{n-1}$. In der Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist zum Beispiel $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$ der Äquator in der x–y–Ebene, und $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^2$ besteht aus dem „Ostpol“ $(-1,0,0)$ und dem „Westpol“ $(1,0,0)$.

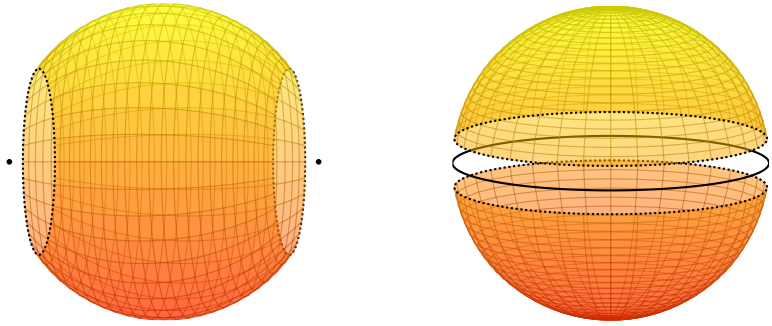


ABBILDUNG F:5. Die Zerlegung $\mathbb{S}^n \smallsetminus \mathbb{S}^p \cong \mathbb{B}^{p+1} \times \mathbb{S}^q$

Übung F6c. Sei $n = p+q+1$. Konstruieren Sie zueinander inverse Homöomorphismen $\mathbb{S}^n \smallsetminus \mathbb{S}^p \cong \mathbb{B}^{p+1} \times \mathbb{S}^q$. *Hinweis:* Zu $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$ nutze man

$$g : \mathbb{B}^{p+1} \times \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^n \smallsetminus \mathbb{S}^p : (y,z) \mapsto (y, \sqrt{1-|y|^2}\, z)$$
$$h : \mathbb{S}^n \smallsetminus \mathbb{S}^p \to \mathbb{B}^{p+1} \times \mathbb{S}^q : (y,z) \mapsto (y, z/|z|).$$

Illustration: Der Fall $\mathbb{S}^2 \smallsetminus \mathbb{S}^0 \cong \mathbb{B}^1 \times \mathbb{S}^1$ entspricht den beliebten sphärischen Koordinaten.

✻ **F6c.** In der Sphäre $\mathbb{S}^n = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ liegen für $n = p+q+1$ die disjunkten Sphären $\mathbb{S}^p \times \{0\} = \{(y_0,\dots,y_p,0,\dots,0) \in \mathbb{S}^n\}$ und $\{0\} \times \mathbb{S}^q = \{(0,\dots,0,z_0,\dots,z_q) \in \mathbb{S}^n\}$. Die Abbildung $f : \mathbb{D}^{p+1} \times \mathbb{S}^q \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(y,z) = (y, \sqrt{1-|y|^2}\, z)$ ist stetig. Ihr Bild ist $f(\mathbb{D}^{p+1} \times \mathbb{S}^q) = \mathbb{S}^n$, und es gilt $f(\mathbb{S}^p \times \{0\}) = \mathbb{S}^p$. Somit ist die Einschränkung $g : \mathbb{B}^{p+1} \times \mathbb{S}^q \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \smallsetminus \mathbb{S}^p$ wohldefiniert. Auch die Abbildung $h : \mathbb{S}^n \smallsetminus \mathbb{S}^p \to \mathbb{B}^{p+1} \times \mathbb{S}^q$ mit $h(y,z) = (y, z/|z|)$ ist wohldefiniert und stetig. Man rechnet mühelos nach, dass $h \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{B}^{p+1} \times \mathbb{S}^q}$ und $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n \smallsetminus \mathbb{S}^p}$ gilt. Somit sind g und h zueinander inverse Homöomorphismen.

Übung F6d. Die 3–Sphäre $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ist Vereinigung von zwei Volltori $A \cong \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ und $B \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ mit $A \cap B \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Skizzieren Sie dies im Raum $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{S}^3 \smallsetminus \{\infty\}$.

Allgemein sei $n = p+q+1$. Konstruieren Sie eine Zerlegung $\mathbb{S}^n = A \cup B$ in Kompakta $A \cong \mathbb{D}^{p+1} \times \mathbb{S}^q$ und $B \cong \mathbb{S}^p \times \mathbb{D}^{q+1}$ mit $A \cap B = \delta A = \delta B \cong \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$. Nutzen Sie hierzu

$$f : \mathbb{S}^p \times [0,1] \times \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^n : (y,t,z) \mapsto (\sin(t\pi/2)\, y, \cos(t\pi/2)\, z).$$

Illustration: Skizzieren Sie $\mathbb{S}^1 \cong (\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^0) \cup_\delta (\mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^1)$ und $\mathbb{S}^2 \cong (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^0) \cup_\delta (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)$.

✻ **F6d.** Auf $W := \mathbb{S}^p \times [0,1] \times \mathbb{S}^q$ definieren wir $f : W \to \mathbb{R}^{n+1} : (y,t,z) \mapsto (\sin(t\pi/2)\, y, \cos(t\pi/2)\, z)$. Diese Abbildung ist stetig, dank Kompaktheit von W auch abgeschlossen, somit eine Identifizierung (F1L). Ihr Bild ist $f(W) = \mathbb{S}^n$, die kanonische Faktorisierung liefert also $W/R_f \cong \mathbb{S}^n$. Wir zerlegen $W = X \cup Y$ in die Kompakta $X = \mathbb{S}^p \times [0, 1/2] \times \mathbb{S}^q$ und $Y = \mathbb{S}^p \times [1/2, 1] \times \mathbb{S}^q$ und erhalten $\mathbb{S}^n = A \cup B$ mit $A = f(X)$ und $B = f(Y)$. Die Abbildung $g : X \to \mathbb{D}^{p+1} \times \mathbb{S}^q : (y,t,z) \mapsto (\sin(t\pi/2)\, y, z)$ zeigt $A \cong X/R_f = X/R_g \cong \mathbb{D}^{p+1} \times \mathbb{S}^q$. Die Abbildung $h : Y \to \mathbb{S}^p \times \mathbb{D}^{q+1} : g(y,t,z) \mapsto (y, \cos(t\pi/2)\, z)$ zeigt $B \cong Y/R_f = Y/R_h \cong \mathbb{S}^p \times \mathbb{D}^{q+1}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F6c. Kennst Du das Land, wo die Quotienten blühen? Hilfreiche Fingerübungen:

☞ **Übung F6E.** Bestimmen Sie zu X und $\sim$ die folgenden Quotientenräume $X/_\sim$: ☜

(1) Auf $\mathbb{D}^2$ definieren wir $x \sim y$ durch die Bedingung $|x| = |y|$.
(2) Auf $\mathbb{D}^2$ definieren wir $x \sim y$ durch die Bedingung $x_1 = y_1$ oder $|x_1| = |y_1| = 1$.
(3) Auf $\mathbb{D}^2$ definieren wir $x \sim y$ durch die Bedingung $x = y$ oder $\max\{|x|, |y|\} \leq 1/2$.
(4) Auf $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ definieren wir $x \sim y$ durch die Bedingung $\mathbb{R}_{>0} \cdot x = \mathbb{R}_{>0} \cdot y$.
(5) Auf $\mathbb{R}^3$ definieren wir $x \sim y$ durch $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot x = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot y$ und $\min\{1, |x|\} = \min\{1, |y|\}$.
(6) Auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ identifizieren wir Punkte gemäß $(x, y, z) \sim (x, y, -z)$.
(7) Auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ identifizieren wir Punkte gemäß $(x, y, z) \sim (-x, -y, z)$.

☞ Was heißt es genau, einen Quotienten zu „bestimmen“? Ich schlage hierzu drei Schritte vor, in aufsteigender Detailtreue und damit auch Schwierigkeitsgrad: ☜

(a) Nennen Sie einen zum Quotienten $X/_\sim$ homöomorphen Teilraum $Y \subset \mathbb{R}^m$.
(b) Nennen Sie als Beleg von (a) eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$, deren kanonische Faktorisierung den versprochenen Homöomorphismus $\bar{f} : X/_\sim \xrightarrow{\sim} Y$ induziert.
(c) Führen Sie den Nachweis der in (b) gemachten Aussagen. Dies kann zum Beispiel explizit durch Angabe des inversen Homöomorphismus $g : Y \xrightarrow{\sim} X/_\sim$ geschehen, oder implizit durch den Nachweis, dass $\bar{f}$ bijektiv und offen / abgeschlossen ist.

✻ **F6E.** (1a) Der Quotient $\mathbb{D}^2/_\sim$ ist homöomorph zum Intervall $[0,1]$ vermöge (b) $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$. (c) Das Bild ist $f(\mathbb{D}^2) = [0,1]$. Zudem gilt $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn $x \sim y$. Die kanonische Faktorisierung liefert also die stetige Bijektion $\bar{f} : \mathbb{D}^2/_\sim \xrightarrow{\sim} [0,1]$. Diese ist ein Homöomorphismus dank Kompaktheit (F1L). Alternativ haben wir explizit die inverse Abbildung $g : [0,1] \to \mathbb{D}^2/_\sim : r \mapsto q(r,0) = r \cdot \mathbb{S}^1$. Sie ist stetig und erfüllt $f \circ g = \mathrm{id}_{[0,1]}$ sowie $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}^2/_\sim}$, wie man unmittelbar nachrechnet.

(2a) Es gilt $\mathbb{D}^2/_\sim \cong \mathbb{S}^1$ vermöge (b) $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C} : x \mapsto \mathrm{e}^{\pi i x_1}$. (c) Das Bild ist $f(\mathbb{D}^2) = \mathbb{S}^1$. Zudem gilt $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn $x \sim y$. Die kanonische Faktorisierung liefert die stetige Bijektion $\bar{f} : \mathbb{D}^2/_\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$. Diese ist ein Homöomorphismus dank Kompaktheit (F1L).

(3a) Es gilt $\mathbb{D}^2/_\sim \cong \mathbb{D}^2$ vermöge (b) $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(rs) = 0$ für $0 \leq r \leq 1/2$. (c) Das Bild ist $f(\mathbb{D}^2) = \mathbb{D}^2$. Zudem gilt $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn $x \sim y$. Die kanonische Faktorisierung liefert die stetige Bijektion $\bar{f} : \mathbb{D}^2/_\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^2$. Diese ist ein Homöomorphismus dank Kompaktheit (F1L).

(4a) Der Quotient ist homöomorph zur Sphäre $\mathbb{S}^2$ vermöge (b) $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x/|x|$. (c) Das Bild ist $f(\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}) = \mathbb{S}^2$. Zudem gilt $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn $x \sim y$. Die kanonische Faktorisierung liefert die stetige Bijektion $\bar{f} : (\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$. Dass sie ein Homöomorphismus ist, kann man hier explizit an der inversen Abbildung ablesen: $g : \mathbb{S}^2 \to (\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0} : s \mapsto q(s) = \mathbb{R}_{>0} \cdot s$.

(5a) Der Quotient ist homöomorph zum Ball $\mathbb{D}^3$ vermöge (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{D}^3$ und $f(x) = x/|x|$ sonst. (c) Das Bild ist $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{D}^3$. Zudem gilt $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn $x \sim y$. Die kanonische Faktorisierung liefert die stetige Bijektion $\bar{f} : \mathbb{R}^3/_\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^3$. Dass sie ein Homöomorphismus ist, kann man hier explizit an der inversen Abbildung ablesen: $g : \mathbb{D}^3 \to \mathbb{R}^3/_\sim : x \mapsto q(x)$.

(6a) Der Quotient ist homöomorph zur Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ vermöge (b) der Projektion $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$. (c) Das Bild ist $f(\mathbb{S}^2) = \mathbb{D}^2$. Zudem gilt $f(x, y, z) = f(x', y', z')$ genau dann, wenn $(x, y, z) = (x', y', \pm z')$. Die kanonische Faktorisierung liefert die stetige Bijektion $\bar{f} : \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^2$. Diese ist ein Homöomorphismus dank Kompaktheit (F1L).

(7a) Der Quotient ist homöomorph zur Sphäre $\mathbb{S}^2$. (b) Wir nutzen Zylinderkoordinaten und $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\sqrt{1-z^2}\cos t, \sqrt{1-z^2}\sin t, z) = (\sqrt{1-z^2}\cos 2t, \sqrt{1-z^2}\sin 2t, z)$. (c) Das Bild ist $f(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$. Zudem gilt $f(x, y, z) = f(x', y', z')$ genau dann, wenn $z = z'$ und $(x, y) = \pm(x', y')$. Die kanonische Faktorisierung liefert die stetige Bijektion $\bar{f} : \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$. Diese ist ein Homöomorphismus dank Kompaktheit (F1L).

Wie kommt man auf solche Formeln? Man mache sich eine Skizze! Stehen die Formeln erst einmal da, ist der Rest leicht: Wohldefiniertheit, Stetigkeit, und alle weiteren Eigenschaften rechnet man geduldig nach.

§F6d. Konvexe und sternförmige Kompakta. Sei $S = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\,\}$ die Einheitskreislinie und $Q = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} = 1\,\}$ der Quadratrand, jeweils mit der Teilraumtopologie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^2$. Sind S und Q homöomorph? Das scheint offensichtlich! Gibt es einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $f(S) = Q$? Auch das scheint plausibel. Wie konstruiert man solche Homöomorphismen? Wir können diese Frage nun allgemein und elegant klären: Als geometrische Anwendung der Kompaktheit wollen wir konvexe Kompakta des $\mathbb{R}^n$ bis auf Homöomorphie klassifizieren.

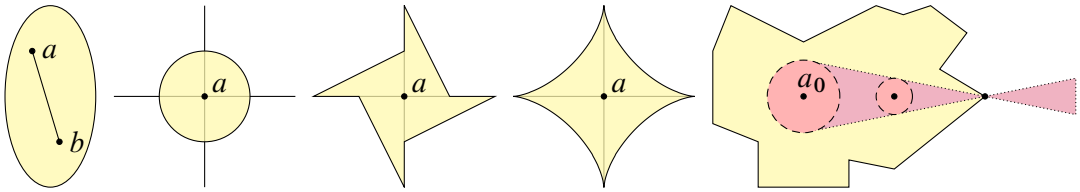


ABBILDUNG F:6. Konvexe und sternförmige Mengen

Definition F6F. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Eine Teilmenge $X \subset V$ ist *konvex*, wenn gilt:

$$\forall a,b \in X \;:\; [a,b] \subset X$$

Die Menge X ist *sternförmig* zum Zentrum $a \in X$, wenn gilt:

$$\forall b \in X \;:\; [a,b] \subset X$$

Anschaulich heißt konvex, dass man von jedem Punkt in X jeden anderen sehen kann. Sternförmig heißt, dass man vom gegebenen Zentrum $a \in X$ jeden anderen Punkt sehen kann. Genau dann ist X konvex, wenn X sternförmig bezüglich jedes Punktes $a \in X$ ist.

Beispiele.
- Konvexe Mengen $X \subset \mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.
- Sternförmige Mengen in $X \subset \mathbb{R}$ sind genau die nicht-leeren Intervalle.
- In $\mathbb{R}^2$ ist $(\mathbb{R}\times\{0\}) \cup (\{0\}\times\mathbb{R})$ sternförmig bezüglich 0, aber nicht konvex.
- Die Mengen $\mathbb{D}^n$ und $\mathbb{B}^n$ sind sternförmig, gar konvex, nicht aber ihr Rand $\mathbb{S}^{n-1}$.
- Jede Menge K mit $\mathbb{B}^n \subset K \subset \mathbb{D}^n$ ist konvex, offen für $K = \mathbb{B}^n$, kompakt für $K = \mathbb{D}^n$.

Satz F6G. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig zu $a \in X^\circ$. Für jeden Randpunkt $b \in \delta X$ gelte $[a,b] \cap \delta X = \{b\}$. Dann existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.*

Verschärfung: *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig bezüglich jedes Punktes $a \in B(a_0,\varepsilon)$ für ein $a_0 \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so existiert $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bilipschitz mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.*

Beispiele. Die etwas technische Voraussetzung ist nötig, sonst gibt es Gegenbeispiele (F:6):

- $X = ([-1,1]\times\{0\}) \cup (\{0\}\times[-1,1])$ ist kompakt und sternförmig zu 0, aber $X \ncong \mathbb{D}^2$.
- $Y = X \cup \bar{B}(0,1/2)$ ist kompakt und sternförmig zu $0 \in Y^\circ$, aber dennoch gilt $Y \ncong \mathbb{D}^2$.
- Die Astroide $A = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^{2/3}+y^{2/3} \le 1\,\right\}$ ist kompakt und sternförmig zum Punkt $0 \in A^\circ$ und sonst keinem. Glücklicherweise gilt für jeden Randpunkt $b \in \delta X$ noch $[a,b] \cap \delta X = \{b\}$, also folgt $A \cong \mathbb{D}^2$. Die Verschärfung jedoch gilt hier nicht.

Bemerkung. Zu $X \subset V$ sei $X' \subset X$ die Teilmenge aller Punkte $x \in X$, bezüglich derer X sternförmig ist. Dann ist X' konvex. Genau dann ist X sternförmig, wenn $X' \neq \emptyset$, und konvex, wenn $X' = X$. Für Satz F6G ist die Voraussetzung $X' \neq \emptyset$ zu schwach und $X' = X$ unnötig stark. Es genügt vorauszusetzen, dass X' nicht-leeres Inneres hat.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

BEWEIS. Nach Translation sei $a = 0$. Wir haben $B(0,\varepsilon) \subset X \subset \bar{B}(0,R)$ mit $0 < \varepsilon \le R$ und

$$\rho : \mathbb{S}^{n-1} \to [\varepsilon, R] : s \mapsto \sup\{\, r \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid rs \in X \,\} \quad \text{mit} \quad \delta X \cap \mathbb{R}_{\ge 0} \cdot s = \{\, \rho(s) \cdot s \,\}.$$

Die Zentralprojektion $f : \delta X \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$ ist wohldefiniert dank $0 \notin \delta X$, stetig, bijektiv dank $f^{-1}(s) = \rho(s) \cdot s$, also ein Homöomorphismus (F1L).

Insbesondere ist $\rho : s \mapsto |f^{-1}(s)|$ stetig. Wir erhalten daraus inverse Bijektionen

$$h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x/\rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x \cdot \rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beide sind stetig in $x \neq 0$, als Komposition stetiger Abbildungen. Stetigkeit im Punkt 0 gilt dank $|h(x)| \le |x|/\varepsilon$ und $|h^{-1}(x)| \le |x| \cdot R$. Somit ist $(h,k) : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Nach Konstruktion gilt $h(X) \subset \mathbb{D}^n$ und $k(\mathbb{D}^n) \subset X$.

Verschärfung: Sei $a_0 = 0$. Für $r > \rho(s)$ liegt rs im Äußeren von X. Für $0 \le r < \rho(s)$ hingegen liegt rs im Inneren von X, wie in Abbildung F:6 gezeigt: Für $t = r/\rho(s)$ gilt

$$B(rs, (1-t)\varepsilon) = \{\, (1-t)a + t\rho(s) \cdot s \mid a \in B(0,\varepsilon) \,\} \subset X.$$

Insbesondere gilt $\delta X \cap \mathbb{R}_{\ge 0} \cdot s = \{\, \rho(s) \cdot s \,\}$ wie zuvor gefordert. Der Rand δX trifft nicht das Innere des Doppelkegels um $\rho(s) \cdot s$. Dies zeigt, dass ρ lipschitz-stetig ist. □

§F6e. Konvexe Kompakta des $\mathbb{R}^n$. Konvexe Kompakta in $\mathbb{R}$ sind leicht klassifiziert: die leere Menge $\emptyset$, die einpunktigen Mengen $\{a\}$ und die Intervalle $[a,b]$ mit $a < b$.

Im Raum $\mathbb{R}^n$ sind neben der leeren Menge $\emptyset$ auch der abgeschlossene Einheitsball $\mathbb{D}^n$ ein konvexes Kompaktum sowie $\mathbb{D}^k \times \{0\}$ mit $0 \le k \le n$. Bis auf Homöomorphie sind dies bereits alle Möglichkeiten, wie wir nun leicht folgern können:

Satz F6H (Homöomorphie der konvexen Körper). *(1) Jeder konvexe Körper $X \subset \mathbb{R}^n$, das heißt konvex, kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \neq \emptyset$, ist bilipschitz homöomorph zu $\mathbb{D}^n$.*

(2) Allgemein für $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex gilt $X = \emptyset$ oder $X \cong \mathbb{D}^k$ mit $0 \le k \le n$. Genauer existiert ein bilipschitz Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^k \times \{0\}$.

Bemerkung. Die Kompaktheit von X ist hier notwendig, denn $\mathbb{D}^n$ ist kompakt (F1J). Auch auf die Konvexität von X können wir nicht verzichten, wie man sich leicht ausmalt. In Dimension $n \ge 2$ ist auch X kompakt und sternförmig nicht hinreichend für $X \cong \mathbb{D}^k$.

BEWEIS. (1) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit $X^\circ \neq \emptyset$, so können wir Satz F6G anwenden und erhalten einen bilipschitz Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.

(2) Allgemein sei $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt. Wir können $X \neq \emptyset$ annehmen, also $a \in X$, und nach Translation $a = 0$. Sei $v_1, \dots, v_k \in X$ eine maximale linear unabhängige Familie. Es gilt $X \subset \mathbb{R}v_1 + \cdots + \mathbb{R}v_k$. Im Falle $k = 0$ gilt $X = \{0\} = \mathbb{D}^0$. Sei also $k \ge 1$. Nach Rotation können wir $X \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ annehmen. Nun ist $X \subset \mathbb{R}^k$ kompakt und konvex mit $X^\circ \neq \emptyset$, Letzteres dank $t_0 v_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \in X^\circ$ für alle $t_0, t_1, \dots, t_k \in]0,1[$ und $t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1$; hier sei $v_0 = 0$. Wie in (1) existiert $h : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$ mit $h(X) = \mathbb{D}^k$. □

§F6f. Sternförmige offene Mengen. Sternförmige offene Mengen des $\mathbb{R}^n$ können recht franselig aussehen: Für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ definieren wir

$$\widehat{A} := \mathbb{R}_{\geq 1} \cdot A = \big\{ ta \;\big|\; a \in A,\, t \in \mathbb{R}_{\geq 1} \big\}.$$

Stellt man sich den Nullpunkt als Lichtquelle vor, so ist $\widehat{A}$ der von A beschattete Bereich. Ist A abgeschlossen, so auch $\widehat{A}$, somit ist $U = \mathbb{R}^n \smallsetminus \widehat{A}$ offen und sternförmig bezüglich 0.

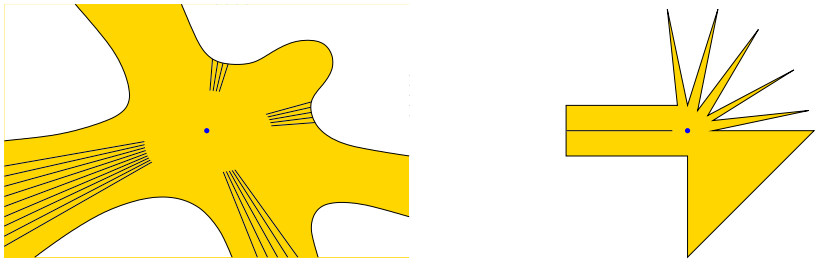


ABBILDUNG F:7. Offene sternförmige Mengen (schwarze Linien als Rand)

Satz F6I. *Jede sternförmige offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Zu $0 \in U \subset \mathbb{B}^n$ existiert $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ lipschitz-stetig mit $g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ und $g|_U : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$.*

BEWEIS. Nach Verschiebung können wir U sternförmig bezüglich 0 annehmen, und nach Anwendung des Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$ mit $h(x) = x/(1+|x|)$ auch $U \subset \mathbb{B}^n$.

Das Komplement $V = \mathbb{R}^n \smallsetminus U$ ist abgeschlossen. Wir definieren $\psi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ durch $\psi(x) = d([0,x], V)$. Diese Funktion erfreut sich folgender Eigenschaften:

(1) Für $x \in U$ gilt $\psi(x) > 0$. (C3N, F2A)
(2) Es gilt $|\psi(x) - \psi(y)| \leq |x - y|$. (C3N)
(3) Für $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\psi(rs)$ fallend in $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(4) Es gilt $\psi(x) = 0$ für alle $x \in V = \mathbb{R}^n \smallsetminus U$.

Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x/\psi(x)$ ist somit wohldefiniert (1), stetig (2), injektiv (3) und surjektiv (4) dank Zwischenwertsatz (C3R) längs jedes Radius. Zur stetigen Bijektion $f : \mathbb{B}^n \supset U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bleibt schließlich die Stetigkeit von f^{-1} nachzuweisen. (Mit fortgeschrittenen Hilfsmitteln können wir an die Invarianz des Gebietes appellieren, siehe Satz J7K, doch wie folgt gelingt es auch elementar.) Für $g = h \circ f : U \to \mathbb{B}^n$ gilt

$$g(x) = \frac{x/\psi(x)}{1 + |x/\psi(x)|} = \frac{x}{\psi(x) + |x|}$$

Die letzte Formel beschert uns eine stetige Fortsetzung $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$, die U bijektiv auf $\mathbb{B}^n$ abbildet und das Komplement $\mathbb{D}^n \smallsetminus U$ auf den Rand $\mathbb{S}^{n-1}$. Da $\mathbb{D}^n$ kompakt ist, ist g eine abgeschlossene Abbildung (F1L), das heißt, für jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{D}^n$ ist das Bild $g(A) \subset \mathbb{D}^n$ abgeschlossen. Dies gilt dann auch für die stetige Bijektion $g|_U^{\mathbb{B}^n} : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$, denn $g(A \cap U) = g(A) \cap \mathbb{B}^n$. Diese ist somit ein Homöomorphismus. □

Bemerkung. Der Rand $\delta U = \overline{U} \smallsetminus U$ kann sehr irregulär sein. In unserer Konstruktion wird er auf $\mathbb{S}^{n-1}$ geworfen. Wir haben hier wenig Kontrolle, aber auf dem Inneren U genügt es.

Bemerkung. Jede sternförmige offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist sogar diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$. Das ist leider aufwändiger. Vielleicht finden Sie eine elementare und elegante Konstruktion…

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F6g. Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. Wir erinnern an die euklidische Norm

$$|-|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto |x|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Daneben kennen wir für $1 \leq p < \infty$ die ℓ^p–Norm (C1I) $|x|_p := \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}$

Im Sonderfall $p = \infty$ haben wir die Supremumsnorm $|x|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Diese Normen sind äquivalent gemäß $|x|_\infty \leq |x|_p \leq |x|_1 \leq n|x|_\infty$, daher definieren sie dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Für die ℓ^p–Normen auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ gilt dies nicht (C3K).

Satz F6J. *Der $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ erbt die euklidische Norm $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$. Daneben existieren auf $\mathbb{Q}^2$ überabzählbar viele Normen mit paarweise verschiedenen Topologien, nämlich zu jedem $\xi \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ die Norm $|-|_\xi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (a,b) \mapsto |a + b\xi|$.*

BEWEIS. Zur Einschränkung der euklidischen Norm ist alles klar. Für $|-|_\xi$ gilt (N1), denn aus $|a + b\xi| = 0$ folgt $b = 0$ und $a = 0$. (Aus $b \neq 0$ folgt $\xi = -a/b \in \mathbb{Q}$, Widerspruch!) Homogenität (N2) und Dreiecksungleichung (N3) erbt $|-|_\xi$ vom Absolutbetrag $|-|$ auf $\mathbb{R}$. Für $\xi \neq \zeta$ wählen wir eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \to \xi$ und setzen $b_n := -1$. Dann gilt $|(a_n, b_n)|_\xi = |a_n + b_n\xi| \to 0$ aber $|(a_n, b_n)|_\zeta \to |\xi - \zeta| > 0$ und $|(a_n, b_n)| \to \sqrt{\xi^2 + 1} \geq 1$. Somit sind die Topologien $\mathcal{T}(\mathbb{Q}^2, |-|_\xi)$ verschieden, und keine ist die euklidische. □

Satz F6K. *Auf jedem $\mathbb{R}$–Vektorraum V mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$ sind je zwei Normen $|-|$ und $\|-\|$ äquivalent: Es gibt Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass $\ell\,|x| \leq \|x\| \leq L\,|x|$ für alle $x \in V$ gilt. Insbesondere induzieren sie auf V dieselbe Topologie $\mathcal{T}_{|-|} = \mathcal{T}_{\|-\|}$. Speziell für $V = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm $|-|$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \,\}$ kompakt, und es genügen*

$$\ell = \min\{\, \|x\| \;\big|\; x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\} \quad \text{und} \quad L = \max\{\, \|x\| \;\big|\; x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\}.$$

BEWEIS. Die Wahl einer Basis $v_1, \ldots, v_n \in V$ stiftet einen $\mathbb{R}$–linearen Isomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ durch $h(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Damit können wir jede Norm von V auf $\mathbb{R}^n$ zurückziehen vermöge $\|x\| := \|h(x)\|$. Ohne Einschränkung sei also $V = \mathbb{R}^n$.

Wir vergleichen eine beliebige Norm $\|-\|$ auf $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $|-|_2$. Sei $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die kanonische Basis. Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ schreibt sich eindeutig als Linearkombination $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Wir setzen $c := \|e_1\| + \cdots + \|e_n\| > 0$. Dank Dreiecksungleichung (N3) und Homogenität (N2) gilt

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\| \leq |x_1| \cdot \|e_1\| + \cdots + |x_n| \cdot \|e_n\| \leq c|x|_\infty \leq c|x|_2.$$

Ebenso $\|x - y\| \leq c|x - y|_2$, also ist $\|-\|$ stetig bezüglich $|-|_2$. Dank des Satzes von Heine–Borel (F1O) ist die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt in der euklidischen Topologie. Die Funktion $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ ist stetig bezüglich der euklidischen Topologie. Dank F1K existieren $a, b \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit $0 < \ell := f(a) \leq f(x) \leq f(b) =: L < \infty$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Für $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ gilt $x/|x|_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$, also $\|x\|/|x|_2 \in [\ell, L]$, somit $\ell\,|x|_2 \leq \|x\| \leq L\,|x|_2$. □

Bemerkung. Satz und Beweis beruhen ganz wesentlich auf der Kompaktheit und damit letztlich auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Der Satz scheint plausibel, manche mögen sagen „Das ist doch anschaulich klar!“. Doch dieser Ausruf beweist rein gar nichts, außer vielleicht Mangel an Phantasie: Wer kann sich schon alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ vorstellen? Mit Satz F6M geht's! Im Gegensatz dazu steht uns für $\mathbb{Q}$–Vektorräume kein Kompaktheitsargument zur Verfügung. Daher habe ich das Gegenbeispiel F6J eingangs ausgeführt.

§F6h. Geometrische Klassifikation aller Normen auf $\mathbb{R}^n$. Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent (F6K), definieren also dieselbe Topologie. Etwas genauer und geometrischer gilt:

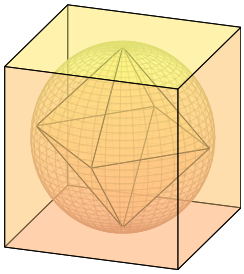
Satz F6L. *(1) Je zwei Skalarprodukte $\langle - \mid - \rangle$ und $\langle\!\langle - \mid - \rangle\!\rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ sind isometrisch: Es existiert ein linearer Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $\langle h(u) \mid h(v) \rangle = \langle\!\langle u \mid v \rangle\!\rangle$.*

(2) Je zwei Normen $|-|$ und $\|-\|$ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent: Es existiert ein Bilipschitz-Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $|h(v)| = \|v\|$ und $h(\lambda v) = \lambda h(v)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. (1) Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Das Gram–Schmidt–Verfahren (C1H) liefert eine Orthonormalbasis $u_1, \dots, u_n$ von $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\langle\!\langle - \mid - \rangle\!\rangle$ und eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\langle - \mid - \rangle$. Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der lineare Isomorphismus mit $h(u_k) = v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$. Dann gilt $\langle h(u) \mid h(v) \rangle = \langle\!\langle u \mid v \rangle\!\rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(2) Sei $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ gegeben durch $h(v) = (\|v\|/|v|) \cdot v$ für $v \neq 0$ und $h(0) = 0$. In F6K haben wir $0 < \ell \leq \|v\|/|v| \leq L < \infty$ gezeigt, also ist h bilipschitz. Gleiches gilt für die Umkehrabbildung $h^{-1}(v) = (|v|/\|v\|) \cdot v$ für $v \neq 0$ und $h^{-1}(0) = 0$. □

Bemerkung. Der Homöomorphismus in (1) ist linear, was für (2) im Allgemeinen nicht möglich ist, wie die untenstehenden Beispiele aus F:8 zeigen. Zwar ist h nicht additiv, aber doch wenigstens homogen, das ist sozusagen die nächstbeste Möglichkeit.



Nachdem alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ topologisch äquivalent sind, können wir uns fragen, wie solche Normen geometrisch aussehen. Gibt es über die ℓ^p–Normen hinaus noch weitere? Ja, sogar sehr viele! In folgendem Sinne entsprechen Normen auf $\mathbb{R}^n$ konvexen Körpern: kompakten, konvexen, symmetrischen Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren.

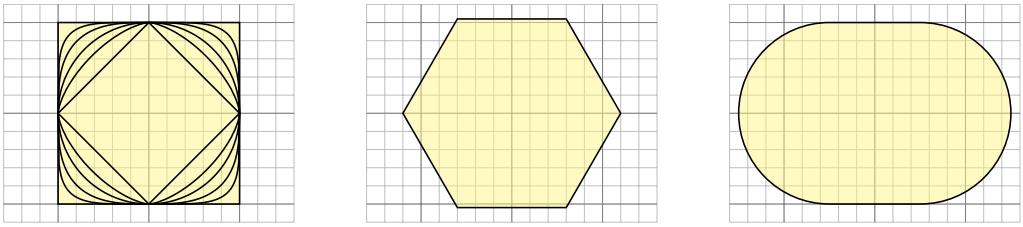


ABBILDUNG F:8. Symmetrische konvexe Körper entsprechen Normen!

Satz F6M. *(1) Zu jeder Norm $\|-\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist der Einheitsball $K = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$ kompakt, konvex, symmetrisch ($-K = K$) und enthält eine euklidische Umgebung der Null.*

(2) Erfüllt eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ diese Eigenschaften, so existiert genau eine Norm $\|-\|$ mit Einheitsball K, nämlich $\|x\| = 1/\max\{ r \in \mathbb{R} \mid rx \in K \}$ für $x \neq 0$ und $\|0\| = 0$.

BEWEIS. Versuchen Sie als Übung, diese Äquivalenz nachzurechnen! □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F6i. Topologische Vektorräume. Sei $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein topologischer Körper (E7G), etwa $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit euklidischer Topologie, und $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ der $\mathbb{K}$–Vektorraum mit

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Wir versehen $\mathbb{K}^n$ mit der Produkttopologie (E4A). Die obigen Operationen sind dann stetig. (Warum?) Dies führt uns zum Begriff des topologischen Vektorraums (E7I):

Definition F6N. Ein *topologischer* $\mathbb{K}$*–Vektorraum* $(X, \mathcal{T}, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum $(X, +, \cdot)$ mit einer Hausdorff–Topologie $\mathcal{T}$, für die Addition $+ : X \times X \to X$ und Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ stetig sind. Wir nennen dann $\mathcal{T}$ eine *Vektorraumtopologie* auf $(X, +, \cdot)$.

Beispiele.
- Über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist die Produkttopologie die euklidische Topologie auf $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$. Dies ist das allgegenwärtige Beispiel einer Vektorraumtopologie (C3D).
- Auf $X = \mathbb{R}^n$ mit der indiskreten Topologie sind Addition $+ : X \times X \to X$ und Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ stetig (Warum?), aber die Topologie ist nicht hausdorffsch.
- Auf $X = \mathbb{R}^n$ ist die diskrete Topologie hausdorffsch, und die Addition $+ : X \times X \to X$ ist stetig, nicht jedoch die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$. (Warum nicht?)
- Auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ definieren punktweise (§D4b), gleichmäßige (§D4c) und kompakte Konvergenz (§D4d) jeweils eine Vektorraumtopologie, und diese drei sind sehr verschieden.
- Allgemeiner ist jeder normierte $\mathbb{R}$–Vektorraum $(X, |-|)$ ein topologischer Vektorraum. Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ definieren die p–Normen für $1 \leq p \leq \infty$ überabzählbar viele Normen mit paarweise verschiedenen Vektorraumtopologien (C3K).
- Auch auf kleinen Räumen wie dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ existieren überabzählbare viele Normen $|-|_\xi$ mit paarweise verschiedenen Topologien $\mathcal{T}(\mathbb{Q}^2, |-|_\xi)$ (F6J).

Bemerkung. Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^n$ gibt es neben der euklidischen durchaus noch weitere Topologien, für die Addition und Multiplikation stetig sind, zum Beispiel die indiskrete. Solche allzu trivialen Fälle schließen wir durch die Hausdorff–Eigenschaft aus. Auf $\mathbb{R}^n$ bleibt dann bemerkenswerterweise nur noch eine einzige Topologie übrig, nämlich die euklidische. Dieser Satz (F6S) ist unser Ziel für den Rest dieses Abschnitts. Vorab gesagt:

Satz F6O. *Die einzige Vektorraumtopologie auf* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *über* $\mathbb{R}$ *ist die euklidische. Auf jedem endlich-dimensionalen* $\mathbb{R}$*–Vektorraum existiert genau diese Vektorraumtopologie.*

Übung F6P. Auf $\mathbb{R}^2$ konstruiere man überabzählbar viele Topologien, die zwar nicht hausdorffsch sind, aber für die Addition und Skalarmultiplikation stetig sind.

✻ **F6P.** Die indiskrete Topologie $\{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ wurde schon genannt. Zu $v \in \mathbb{S}^1$ betrachten wir die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle x \mid v \rangle$. Die zurückgezogene Topologie $\mathcal{T}_v = f^* \mathcal{T}_\mathbb{R}$ wird erzeugt von den offenen Streifen $U(v, a, b) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid a < \langle x \mid v \rangle < b \}$. Dies ist eine Vektorraumtopologie auf $\mathbb{R}^2$. Für $v \neq \pm w$ sind die Topologien $\mathcal{T}_v$ und $\mathcal{T}_w$ verschieden (aber durch Drehung homöomorph): In $\mathcal{T}_v$ sind die Elemente $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle x \mid v \rangle = 0$ nicht von 0 separierbar. Wir erhalten also überabzählbare viele dieser Topologien.

Bemerkung. Aus der Stetigkeit der algebraischen Operationen (F6N) entfaltet sich eine reiche Struktur, in der Algebra und Topologie raffiniert verwoben sind. Zum Beispiel sind die lokal-kompakten $\mathbb{R}$–Vektorräume genau die endlich-dimensionalen (F6U). Unendlich-dimensionale topologische Vektorräume sind Gegenstand und Werkzeug der Funktionalanalysis, siehe etwa Kapitel 1 von W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw–Hill 1991.

§F6j. Ausgewogene Umgebungen. Als bequeme Abkürzung nutzen wir die Verknüpfung von Elementen $a \in \mathbb{R}$ und $u, v \in X$ auch für Mengen $A \subset \mathbb{R}$ und $U, V \subset X$:

$$\begin{aligned} U + V &= \{ u + v \mid u \in U,\ v \in V \}, & A \cdot V &= \{ a \cdot v \mid a \in A,\ v \in V \}, \\ U + v &= \{ u + v \mid u \in U \}, & A \cdot v &= \{ a \cdot v \mid a \in A \}, \\ u + V &= \{ u + v \mid v \in V \}, & a \cdot V &= \{ a \cdot v \mid v \in V \}. \end{aligned}$$

Zum Beispiel erzeugen $x_1, \dots, x_n \in X$ den Untervektorraum $\mathbb{R}x_1 + \cdots + \mathbb{R}x_n \subset X$.

Lemma F6Q. *Sei $(X, \mathcal{T}, +, \cdot)$ ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum.*

(1) Für jedes $v \in X$ ist die Translation $\tau_v : X \to X : x \mapsto x + v$ ein Homöomorphismus.
(2) Für $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ist die Skalierung $\mu_a : X \to X : v \mapsto av$ ein Homöomorphismus.
(3) Jede Umgebung U von 0 ist absorbierend, sie erfüllt also $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$.
(4) Jede Umgebung U von 0 in $(X, \mathcal{T})$ enthält eine ausgewogene offene Umgebung V. Das bedeutet: Zu $0 \in U \in \mathcal{T}$ existiert $V \in \mathcal{T}$ mit $0 \in V \subset U$ und $[-1, 1] \cdot V \subset V$.
(5) Dank (4) gilt (3) in der Verschärfung $V \subset 2V \subset 3V \subset \cdots \subset X$ und $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nV$.

Bemerkung. Dank (1) gilt $\mathscr{U}_0 \xrightarrow{\sim} \mathscr{U}_v$ vermöge $U \mapsto U + v$. Für eine Vektorraumtopologie reicht es daher, die Umgebungen der Null zu kennen. Nach (2) erhalten wir für $a \in \mathbb{R}^\times$ eine Bijektion $\mathscr{U}_0 \xrightarrow{\sim} \mathscr{U}_0$ durch $U \mapsto aU$. So können wir Umgebungen strecken und stauchen. Aussage (3) kennen wir vom $\mathbb{R}^n$, denn $B(0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ ist absorbierend. Nach (4) bilden die ausgewogenen Umgebungen um 0 eine Umgebungsbasis. Ausgewogen bedeutet hierbei $[-1, 1] \cdot V = V$, also bezüglich 0 sternförmig ($[0, 1] \cdot V = V$) und symmetrisch ($V = -V$).

BEWEIS. (1) Für $v \in X$ ist τ_v stetig als Komposition stetiger Abbildungen:

$$\tau_v : X \xrightarrow{\sim} X \times \{v\} \hookrightarrow X \times X \xrightarrow{+} X.$$

Ebenso ist τ_{-v} stetig, und es gilt $\tau_v \circ \tau_{-v} = \tau_{-v} \circ \tau_v = \tau_0 = \mathrm{id}_X$.

(2) Für $a \in \mathbb{R}$ ist μ_a stetig als Komposition stetiger Abbildungen:

$$\mu_a : X \xrightarrow{\sim} \{a\} \times X \hookrightarrow \mathbb{R} \times X \xrightarrow{\cdot} X.$$

Für $a \neq 0$ ist ebenso $\mu_{a^{-1}}$ stetig, und es gilt $\mu_a \circ \mu_{a^{-1}} = \mu_{a^{-1}} \circ \mu_a = \mu_1 = \mathrm{id}_X$.

(3) Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to X$ mit $a \mapsto ax$ stetig, als Komposition

$$f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \{x\} \hookrightarrow \mathbb{R} \times X \xrightarrow{\cdot} X.$$

Insbesondere ist f folgenstetig (D3P), also gilt $n^{-1}x \to 0$ für $n \to \infty$. Nach D3I heißt das, für $0 \in U \in \mathcal{T}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass $n^{-1}x \in U$ für alle $n \geq m$, und somit $x \in nU$.

(4) Die Multiplikation $m : \mathbb{R} \times X \to X : (a, x) \mapsto a \cdot x$ ist stetig. Für $0 \in U \in \mathcal{T}$ ist das Urbild $m^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R} \times X$. Wegen $m(0, 0) = 0$ gilt insbesondere $(0, 0) \in m^{-1}(U)$. Dank Produkttopologie (E4A) existieren $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $0 \in W \in \mathcal{T}$, sodass $]-\varepsilon, +\varepsilon[\times W \subset m^{-1}(U)$ gilt, also $aW \subset U$ für alle $a \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Dank (2) gilt $0 \in aW \in \mathcal{T}$. Die Vereinigung $V = \bigcup_{0 < |a| < \varepsilon} aW$ erfüllt $0 \in V \in \mathcal{T}$ und $V \subset U$ sowie $[-1, 1] \cdot V = V$. □

Bemerkung. Für diese Aussagen benötigen wir nur die Stetigkeit von Addition und Skalarmultiplikation, die Hausdorff–Eigenschaft spielt hier noch keine Rolle. Für (1–3) haben wir sogar jeweils nur die partielle Stetigkeit in einer Koordinate genutzt (E4K). Erst für die letzte Aussage (4) nutzen wir umfassend die Stetigkeit bezüglich der Produkttopologie.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F6k. Lokal-konvexe Vektorräume. Ausgewogene Umgebungen $0 \in V \in \mathcal{T}$ sind sternförmig und symmetrisch und im Allgemeinen der beste Ersatz für offene Bälle $B(0,\varepsilon)$, die wir vom euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ und von normierten Vektorräumen $(X,|-|)$ kennen.

Die Bälle einer Norm sind zudem *konvex*, denn für $|x|,|y| < \varepsilon$ und $0 \le t \le 1$ gilt

$$\big|(1-t)x + ty\big| \le (1-t)|x| + t|y| < \varepsilon.$$

Als Verallgemeinerung normierter Vektorräume betrachtet man daher folgende Eigenschaft:

Definition F6R. Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum $(X,\mathcal{T},+,\cdot)$ heißt *lokal-konvex*, wenn 0 (und damit jeder Punkt $x \in X$) eine Umgebungsbasis aus konvexen Umgebungen besitzt.

Das heißt, jede Umgebung U von 0 enthält eine konvexe Umgebung V von 0. Ist V eine konvexe Umgebung von 0, dann ist $V \cap (-V)$ eine ausgewogene konvexe Umgebung.

Beispiel. Jeder normierte $\mathbb{R}$–Vektorraum $(X,|-|)$ ist lokal-konvex. Dies gilt ganz allgemein, wenn die Topologie auf X von einer Familie von Halbnormen induziert wird.

Beispiel. Sei $0 < p < \infty$. Auf $X = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ definieren wir $\|-\|_p : X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ durch

$$\|f\|_p := \Big(\int_0^1 |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

Für $p \ge 1$ ist dies eine Norm (C1M), insbesondere gilt für alle $f,g \in X$ die Dreiecksungleichung $\|f+g\| \le \|f\|_p + \|g\|_p$. Für $p < 1$ hingegen gilt die Dreiecksungleichung nicht mehr. Dennoch definiert dies eine Vektorraumtopologie und wir erhalten einen topologischen Vektorraum $(X,\mathcal{T}_p,+,\cdot)$. Dieser ist lokal-konvex für $p \ge 1$, aber nicht für $p < 1$.

§F6l. Die Vektorraumtopologie auf $\mathbb{R}^n$. Der euklidische Vektorraum $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n},+,\cdot)$, wie oben dargestellt, erfreut sich folgender universeller Eigenschaft:

Satz F6S. *Sei $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n},+,\cdot)$ der euklidische und $(X,\mathcal{T},+,\cdot)$ ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum.*

(1) Jede $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to X$ ist stetig.
(2) Ist $f : \mathbb{R}^n \to X$ linear und injektiv, so ist f abgeschlossen.
(3) Ist $f : \mathbb{R}^n \to X$ linear und bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.

Bemerkung. Ohne Injektivität ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to X$ nicht abgeschlossen! Das Standardbeispiel ist die Projektion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x$. In $\mathbb{R}^2$ ist die Hyperbel $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\,\}$ abgeschlossen, aber ihr Bild $f(A) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ nicht.

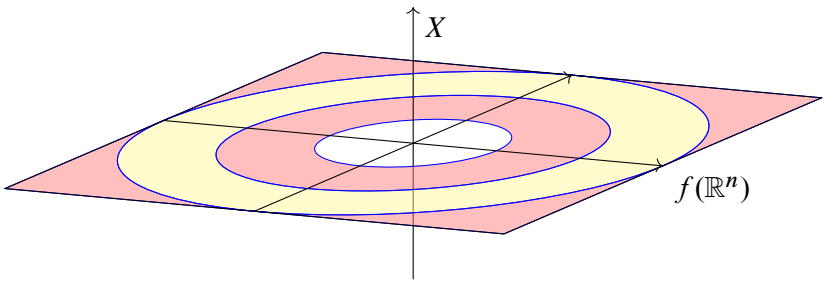


ABBILDUNG F:9. Lokal-endliche Überdeckung $f(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$

BEWEIS. (1) Sei $e_1,\dots,e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standardbasis und $x_1 = f(e_1),\dots,x_n = f(e_n)$ die Bilder in X. Für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(a) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ dank $\mathbb{R}$–Linearität. Folglich ist f stetig, als Komposition stetiger Abbildungen:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\xrightarrow{x} (\mathbb{R}\times X)^n \xrightarrow{\cdot^n} X^n \xrightarrow{+^n} X, \\ (a_1,\dots,a_1) &\mapsto (a_1,x_1,\dots,a_n,x_n) \mapsto (a_1\cdot x_1,\dots,a_n\cdot x_n) \mapsto a_1\cdot x_1 + \cdots + a_n\cdot x_n. \end{aligned}$$

(2) Für $K_0 = \bar{B}(0,1)$ und $K_r = \bar{B}(0,2^r) \smallsetminus B(0,2^{r-1})$ für $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_r$, siehe Abbildung F:9. Die Familie $(K_r)_{r\in\mathbb{N}}$ ist kompakt und lokal-endlich. Wir zeigen nun, dass $(f(K_r))_{r\in\mathbb{N}}$ in X eine lokal-endliche abgeschlossene Familie ist.

Nach (1) ist f stetig, also $f(K_r)$ kompakt (F1J), somit abgeschlossen in X (F1G). Da f injektiv ist, folgt aus $0 \notin K_1$ auch $0 = f(0) \notin f(K_1)$. Somit ist $U = X \smallsetminus f(K_1)$ eine offene Umgebung von 0. Sei $V \subset U$ eine ausgewogene offene Umgebung (F6Q). Dann ist $2^{-r}V \subset V$ disjunkt von K_1, also V disjunkt von $2^rK_1 = K_r$ für alle $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Jeder Punkt $x \in X$ liegt in einer offenen Menge 2^kV für ein $k \in \mathbb{N}$ (F6Q), und diese Umgebung von x trifft nur endlich viele der K_r. Somit ist die Familie $(f(K_r))_{r\in\mathbb{N}}$ lokal-endlich in X.

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so ist $A \cap K_r$ in K_r abgeschlossen und somit kompakt (F1F). Dann ist $f(A \cap K_r)$ in X kompakt und somit abgeschlossen (F1G). Somit ist auch die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A \cap K_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A) \cap f(K_n) = f(A)$ abgeschlossen in X (E1N).

(3) Die letzte Aussage folgt aus der Kombination von (1) und (2). □

Aus Satz F6S folgt insbesondere wie eingangs angekündigt (F6O): Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum $(X,+,\cdot)$ existiert genau eine Vektorraumtopologie.

BEWEIS VON SATZ F6O. Sei $(X,+,\cdot)$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Es gibt eine Basis $x_1,\dots,x_n \in X$. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to X : (a_1,\dots,a_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$–Vektorräumen. Die euklidische Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Vektorraumtopologie (C3D), also existiert auf X mindestens eine Topologie, nämlich $\mathcal{T} = f_*\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Ist umgekehrt $\mathcal{T}$ eine beliebige Vektorraumtopologie auf X, so ist f ein Homöomorphismus (F6S), also $\mathcal{T} = f_*\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. □

Bemerkung. Die Endlichkeit der Dimension ist wesentlich: Auf unendlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorräumen gilt diese Aussage nicht mehr, wie die ℓ^p–Normen belegen (C3K).

Bemerkung. Auf $\mathbb{R}^n$ und jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum X sind alle Normen äquivalent (F6K), induzieren also dieselbe Topologie. Satz F6O ist wesentlich stärker und beweist die Eindeutigkeit ohne die Voraussetzung der Normierbarkeit.

Dieses Ergebnis bestärkt unsere bisherige Erfahrung, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ besonders gute Eigenschaften hat, die sie unter allen denkbaren Topologien auf $\mathbb{R}^n$ auszeichnen. Die Aussage scheint geometrisch plausibel, beruht aber ganz wesentlich auf der Kompaktheit und somit letztlich auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$.

Als Kontrast betrachten wir den geordneten Körper $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ mit seiner Ordnungstopologie; dies ist zugleich die Teilraumtopologie in $\mathbb{R}$. Für $\mathbb{Q}^n$ gilt der Satz von Heine–Borel nicht, zum Beispiel ist der Einheitsball $\{\, x \in \mathbb{Q}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \,\}$ beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{Q}^n$, aber nicht kompakt; schon das Intervall $[-1,1]_{\mathbb{Q}}$ ist nicht kompakt (F1D). Der obige Beweis lässt sich hier also nicht führen. Tatsächlich existieren auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $(\mathbb{Q}^2,+,\cdot)$ überabzählbar viele verschiedene Vektorraumtopologien (F6J).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F6m. Lokal-kompakte Vektorräume. Wir zeigen im folgenden Satz, dass jeder lokalkompakte $\mathbb{R}$–Vektorraum endlich-dimensional und somit isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Lemma F6T. *Sei $\mathcal{B}_0$ eine Umgebungsbasis von 0 im topologischen Vektorraum $(X,\mathcal{T},+,\cdot)$. Für jede Teilmenge $A\subset X$ ist der Abschluss gegeben durch $\overline{A}=\bigcap\{\,A+U\;\big|\;U\in\mathcal{B}_0\,\}$.*

BEWEIS. Für jedes $x\in X$ ist $\mathcal{B}_x=\{\,x-U\;\big|\;U\in\mathcal{B}_0\,\}$ eine Umgebungsbasis (F6Q). Genau dann gilt $x\in\overline{A}$, wenn $(x-U)\cap A\neq\emptyset$ für alle $U\in\mathcal{B}_0$ gilt. Letzteres bedeutet, für jedes $U\in\mathcal{B}_0$ existiert ein $a\in A$ mit $a\in x-U$, also $x\in a+U$, kurz $x\in A+U$. □

Satz F6U. *Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum $(X,\mathcal{T},+,\cdot)$ ist genau dann lokal-kompakt, wenn er endlich dimensional ist. In diesem Fall ist er linear homöomorph zu $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n},+,\cdot)$.*

BEWEIS. „⇐“: Gilt $\dim_{\mathbb{R}}X=n<\infty$, so existiert ein $\mathbb{R}$–Isomorphismus $f:\mathbb{R}^n\xrightarrow{\sim}X$. Dank F6S ist dieser ein Homöomorphismus. Genau wie $\mathbb{R}^n$ ist dann auch X lokal-kompakt.

„⇒“: Sei nun umgekehrt X lokal-kompakt. Es existiert eine offene Umgebung V von 0 in X mit kompaktem Abschluss $\overline{V}$. Nach F6Q enthält jede Umgebung von 0 eine ausgewogene Umgebung U von 0, mit $U\subset 2U\subset 3U\subset\dots$ und $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}2^nU$. Dank Kompaktheit folgt $V\subset\overline{V}\subset 2^nU$ für ein n, also $2^{-n}V\subset U$. Demnach ist $(2^{-n}V)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von 0. Mit V ist auch $x+\frac{1}{2}V$ offen (F6Q). Zur offenen Überdeckung $X=\bigcup_{x\in X}(x+\frac{1}{2}V)$ existieren $x_1,\dots,x_m\in X$ mit

$$\overline{V}\subset\big(x_1+\tfrac{1}{2}V\big)\cup\dots\cup\big(x_m+\tfrac{1}{2}V\big).$$

Wir betrachten den von $x_1,\dots,x_m$ erzeugten Vektorraum $Y:=\mathbb{R}x_1+\dots+\mathbb{R}x_m$. Es gilt $\dim_{\mathbb{R}}Y\leq m<\infty$. Aus $V\subset Y+\frac{1}{2}V$ und $\frac{1}{2}Y=Y$ folgt $\frac{1}{2}V\subset Y+\frac{1}{4}V$, also

$$V\quad\subset\quad Y+\tfrac{1}{2}V\quad\subset\quad Y+Y+\tfrac{1}{4}V\quad=\quad Y+\tfrac{1}{4}V.$$

Per Induktion folgt so $V\subset Y+2^{-n}V$ für alle $n\in\mathbb{N}$, nach F6T also

$$V\quad\subset\quad\bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}}Y+2^{-n}V\quad=\quad\overline{Y}.$$

Nach F6S ist Y in X abgeschlossen, also $V\subset Y$. Die Umgebung V von 0 in X ist absorbierend (F6Q), also gilt $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}nV\subset Y$, und somit $X=Y$. □

§F6n. Lokal-kompakte Räume sind Baire–Räume. Jeder vollständig metrisierbare Raum ist ein Baire–Raum (D7C). Die zweite wichtige Klasse sind lokal-kompakte Räume:

Satz F6V (Baire 1899)**.** *Jeder lokal-kompakte Hausdorff–Raum $(X,\mathcal{T})$ ist ein Baire–Raum.*

BEWEIS. Seien $V_1,V_2,V_3,\dots\subset X$ offen und dicht in $(X,\mathcal{T})$. Wir wollen zeigen, dass auch $V:=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}V_k$ dicht in $(X,\mathcal{T})$ ist. Sei $\emptyset\neq B_0\in\mathcal{T}$. Wir haben $B_0\cap V\neq\emptyset$ zu zeigen. Sei $k\geq 1$ und $\emptyset\neq B_{k-1}\in\mathcal{T}$. Da V_k offen und dicht ist, ist $U_k:=B_{k-1}\cap V_k$ offen und nichtleer. Da X lokal-kompakt ist, existiert $\emptyset\neq B_k\in\mathcal{T}$ mit kompaktem Abschluss $\overline{B_k}\subset U_k$. Die Kompakta $\overline{B_1}\supset\overline{B_2}\supset\overline{B_3}\supset\dots$ haben nicht-leeren Durchschnitt $K:=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{B_k}\neq\emptyset$ (F1S). Es gilt $K\subset B_k\subset B_0$ und $K\subset B_k\subset V_k$ für alle $k\in\mathbb{N}$, also $K\subset B_0$ und $K\subset V$. □

Übung F6W. Jede abzählbare lokal-kompakte topologische Gruppe $(X,\mathcal{T},\cdot)$ ist diskret.

✻ **F6W.** Wir erinnern an die Definition E7A einer topologischen Gruppe. Für jeden Punkt $x\in X$ ist die Menge $\{x\}$ in $(X,\mathcal{T})$ abgeschlossen. Ist eine Menge $\{x\}$ offen, so gilt dies per Translation für alle $x\in X$, also ist X diskret. Ist hingegen $\{x\}$ nicht offen, also $\{x\}^\circ=\emptyset$, so ist $X\smallsetminus\{x\}$ offen und dicht in $(X,\mathcal{T})$, denn $\overline{X\smallsetminus\{x\}}=X$. Es gilt $\bigcap_{x\in X}X\smallsetminus\{x\}=\emptyset$, also ist $(X,\mathcal{T})$ kein Baire–Raum (D7C).

☞ **§F6o. Unendlich-dimensionale Bälle.** Die folgende Aufgabe dient zur Illustration ☜ und als Warnung vor allzu leichtfertigen Trugschlüssen:

Übung F6x. (1) Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit Produkttopologie E4C (also der Topologie der punktweisen Konvergenz D4A). Ist hierin der Teilraum $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ kompakt?

(2) Sei $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ der Raum aller beschränkten Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $|x| = \sup\{\, |x_k| \mid k \in \mathbb{N} \,\}$. Ist hierin der Einheitsball $\bar{B}(0,1) = [-1,1]^{\mathbb{N}}$ kompakt?

(3) Für welche p mit $1 \le p \le \infty$ ist der Einheitsball $\bar{B}(0,1)$ in $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ kompakt?

✻ **F6x.** (1) Das Intervall $[-1,1]$ in $\mathbb{R}$ ist kompakt dank Heine–Borel (F1O) oder direkt aus der Supremums-Eigenschaft (F1D). Nach dem Satz von Tychonoff (F1T) ist auch das Produkt $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ kompakt.

Erläuterung: Betrachten Sie die beiden Fragen (1) und (2) im Kontrast: Die Menge $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ ist jeweils dieselbe, aber die beiden Topologien (ℓ^∞–Norm vs Produkttopologie) sind sehr unterschiedlich.

(2) In $\bar{B}(0,1) = [-1,1]^{\mathbb{N}} \subset \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ betrachten wir die Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $e_k(k) = 1$ und $e_k(\ell) = 0$ für $\ell \neq k$. Es gilt $|e_k - e_\ell| = 1$ für $k \neq \ell$. (a) Keine Teilfolge konvergiert, da sie nicht Cauchy–Folge ist, demnach ist der Teilraum $\bar{B}(0,1) = [-1,1]^{\mathbb{N}}$ nicht kompakt (F2E). Alternativ können wir direkt eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung angeben. Etwas Sorgfalt ist erforderlich: (b) Die Bälle $U_k = B(e_k,1)$ sind offen, ebenso $V = \ell^\infty \smallsetminus \{\, e_k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$, es gilt $\bar{B}(0,1) \subset V \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k = \ell^\infty$, aber keine endliche Teilfamilie überdeckt $\bar{B}(0,1)$. (c) Die Menge $\{\, e_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ ist diskret und abgeschlossen, demnach ist jede Menge $U_n = \ell^\infty \smallsetminus \{\, e_k \mid k \ge n \,\}$ offen. Es gilt $\bar{B}(0,1) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \ell^\infty$, aber es existiert keine endliche Teilüberdeckung.

(3) Für kein p! Der Beweis verläuft wörtlich wie in (2). *Warnung:* Der Satz von Heine–Borel (für den endlich-dimensionalen Fall) und der Satz von Tychonoff (für beliebige Produkte) greifen hier nicht!

☞ **§F6p. Kompaktheit und Isometrie.** Für jede endliche Menge X ist jede injektive Abbildung $f : X \to X$ automatisch bijektiv. Dies charakterisiert sogar endliche Mengen: Für unendliche Mengen gilt dies offensichtlich nicht, wie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x+1$ zeigt. ☜

Die Abbildung $f : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} : x \mapsto x+1$ ist eine isometrische Einbettung, aber nicht surjektiv und somit keine Isometrie. Für kompakte Räume kann dies nicht passieren:

Übung F6y. (1) Ist (X,d) ein kompakter metrischer Raum, dann ist jede isometrische Einbettung $f : X \hookrightarrow X$ surjektiv und somit eine Isometrie (metrikerhaltende Bijektion).

(2) Beispiel: Gibt es isometrische Einbettungen $g : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ der euklidischen Sphäre in sich selbst, die keine Isometrien sind, also mit der Eigenschaft $g(\mathbb{S}^n) \subsetneq \mathbb{S}^n$?

(3) Gegenbeispiel: Im Hilbert–Raum $V = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ betrachten wir die Hilbert–Sphäre $S = \{\, x \in V \mid |x| = 1 \,\}$. Gibt es isometrische Einbettungen $g : S \hookrightarrow S$, die keine Isometrien sind, also mit der Eigenschaft $g(S) \subsetneq S$?

✻ **F6y.** (1) Das Bild $f(X)$ ist kompakt, also in X abgeschlossen (F1G). Gäbe es $x_0 \in X \smallsetminus f(X)$, so gälte $B(x_0,\varepsilon) \subset X \smallsetminus f(X)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $x_n = f^n(x_0)$ gilt dann $d(x_0,x_n) \ge \varepsilon$. Da f die Metrik erhält, folgt $d(x_m,x_{m+n}) = d(f^m(x_0),f^m(x_n)) = d(x_0,x_n) \ge \varepsilon$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$. Die Menge $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ ist somit diskret und abgeschlossen, demnach ist jede Menge $U_n = X \smallsetminus \{\, x_k \mid k \ge n \,\}$ offen. Es gilt $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, aber es existiert keine endliche Teilüberdeckung. Dies widerspricht der vorausgesetzten Kompaktheit von X.

(2) Nein, dank (1) ist jede isometrische Einbettung $g : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ surjektiv und somit eine Isometrie. (Genauer ist g sogar die Einschränkung einer linearen Isometrie $f : \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n+1}$, also $f \in \mathrm{O}_{n+1}\mathbb{R}$.)

(3) Der Schiebeoperator $f : V \hookrightarrow V : (x_0,x_1,x_2,\dots) \mapsto (0,x_0,x_1,x_2,\dots)$ ist eine lineare Abbildung und zudem eine isometrische Einbettung, denn $\langle\, f(x) \mid f(y) \,\rangle = \langle\, x \mid y \,\rangle$ für alle $x,y \in V$. Es gilt $f(S) \subset S$, somit ist die Einschränkung $g : S \hookrightarrow S$ eine isometrische Einbettung der Hilbert–Sphäre in sich. Sie ist jedoch nicht surjektiv, denn $(1,0,0,0,\dots)$ liegt nicht im Bild.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F7. Abbildungsräume und die Kompakt-Offen-Topologie

Auf der Menge $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller stetigen Abbildungen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ haben wir verschiedene Topologien untersucht, insbesondere zur punktweisen (§D4b), gleichmäßigen (§D4c), und kompakten Konvergenz (§D4d). Wie wir bereits am Beispiel der Potenzreihen sehen, ist die Forderung der punktweisen Konvergenz oft zu schwach, die der gleichmäßigen Konvergenz jedoch zu stark. Die kompakte Konvergenz ist meist der richtige Kompromiss.

Übung F7A. Die *kompakte Konvergenz* ist die gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum. Sie heißt auch *lokal-gleichmäßige Konvergenz*. Ist nämlich $(X,\mathcal{T})$ lokal-kompakt und (Y,d) ein metrischer Raum, dann sind für jede Funktionenfolge $f_n:X\to Y$ äquivalent:

(1) Die Folge f_n konvergiert *gleichmäßig auf jedem Kompaktum* gegen f: Auf jeder kompakten Teilmenge $K\subset X$ gilt gleichmäßige Konvergenz $|f-f_n|_K\to 0$.
(2) Die Folge f_n konvergiert *lokal gleichmäßig* gegen f: Zu jedem $x\in X$ existiert eine Umgebung $U\subset X$, auf der gleichmäßige Konvergenz $|f-f_n|_U\to 0$ gilt.

§F7a. Definition der Kompakt-Offen-Topologie. Wir übertragen nun die Topologie der kompakten Konvergenz auf beliebige topologische Räume X und Y: Wir versehen die Menge $\mathscr{C}(X,Y)$ aller stetigen Abbildungen $f:X\to Y$ mit einer geeigneten Topologie.

Angenommen, es gilt $f(K)\subset O$ für ein Kompaktum $K\subset X$ und eine offene Menge $O\subset V$. Dann möchten wir alle Abbildungen $g:X\to Y$, die dieser Bedingung genügen, als „nahe“ zu f betrachten. Diese Idee veranlasst uns zu folgender Definition:

Definition F7B. Seien X,Y topologische Räume. Für $A\subset X$ und $B\subset Y$ definieren wir

$$[A,B] := \mathscr{C}(X,A;Y,B) := \big\{\, f:X\to Y \;\big|\; f \text{ stetig und } f(A)\subset B \,\big\}.$$

Die *Kompakt-Offen-Topologie* $\mathcal{T}_{\mathrm{KO}}$ auf $\mathscr{C}(X,Y)$, kurz auch *KO-Topologie*, wird erzeugt von den Mengen $[K,O]$ wobei $K\subset X$ kompakt und $O\subset Y$ offen ist.

Konvention. Im Folgenden werden wir den Abbildungsraum $\mathscr{C}(X,Y)$ stets mit der Kompakt-Offen-Topologie versehen, soweit nichts anderes angegeben wird.

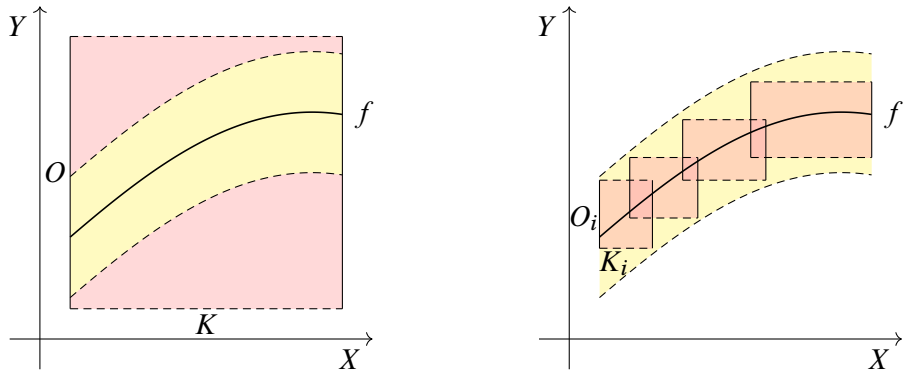


ABBILDUNG F:10. Das Runde muss ins Eckige, hier auch umgekehrt, links: $U(f;K,\varepsilon)\subset[K,O]$, rechts: $[K_1,O_1]\cap\cdots\cap[K_n,O_n]\subset U(f;K,\varepsilon)$.

Bemerkung. Die ausführliche Schreibweise $\mathscr{C}(X,A;Y,B)$ beinhaltet alle Informationen und wird uns auch langfristig gute Dienste leisten. Manchmal sind die zugrundeliegenden Räume X und Y aus dem Kontext klar und fest gewählt, während die Teilräume A und B variieren; in diesem Fall nennen wir X und Y nicht explizit und schreiben kurz $[A,B]$.

Bemerkung. Die Mengen $[K,O]$ bilden im Allgemeinen keine Basis sondern nur ein Erzeugendensystem. Dank D6F erhalten wir eine Basis bestehend aus Mengen der Form

$$[K_1,O_1]\cap\cdots\cap[K_n,O_n]$$

mit $K_1,\dots,K_n\subset X$ kompakt und $O_1,\dots,O_n\subset Y$ offen. Einfache Rechenregeln:

$$\bigcap_{i=1}^n[K_i,O]=\Big[\bigcup_{i=1}^n K_i,O\Big],\quad \bigcap_{i=1}^n[K,O_i]=\Big[K,\bigcap_{i=1}^n O_i\Big],\quad \bigcap_{i=1}^n[K_i,O_i]\subset\Big[\bigcup_{i=1}^n K_i,\bigcup_{i=1}^n O_i\Big].$$

Satz F7C. *Die Kompakt-Offen-Topologie beinhaltet unsere bisherigen Beispiele:*

(1) Ist X diskret, so ist jede Abbildung $X\to Y$ stetig, also gilt $\mathscr{C}(X,Y)=Y^X$, und die Kompakt-Offen-Topologie stimmt mit der Produkttopologie überein.
(2) Ist $(X,\mathcal{T}_X)$ kompakt und (Y,d_Y) metrisch, dann stimmt auf $\mathscr{C}(X,Y)$ die Kompakt-Offen-Topologie mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz überein.
(3) Für jeden topologischen Raum $(X,\mathcal{T}_X)$ und metrischen Raum (Y,d_Y) ist die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X,Y)$ die Topologie der kompakten Konvergenz.

BEWEIS. (1) Ist X diskret, so gilt $\mathscr{C}(X,Y)=Y^X$. Die kompakten Teilmengen von X sind genau die endlichen. Also wird die KO-Topologie erzeugt den Mengen $[\{x\},O]$ mit $x\in X$ und $O\in\mathcal{T}_Y$. Dies ist ein Erzeugendensystem der Produkttopologie (E4C).

(2) Wir vergleichen die Kompakt-Offen-Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{KO}}$ mit der Topologie $\mathcal{T}_d$ der gleichmäßigen Konvergenz, induziert durch die Metrik $d(f,g)=\sup\{\,d_Y(f(x),g(x))\mid x\in X\,\}$. Letztere wird also erzeugt von offenen Bällen $B(f,\varepsilon)=\{\,g\mid d(f,g)<\varepsilon\,\}$.

Wir zeigen $\mathcal{T}_{\mathrm{KO}}\subset\mathcal{T}_d$: Sei $[K,O]\in\mathcal{T}_{\mathrm{KO}}$. Für $f\in[K,O]$ ist $f(K)\subset O\subset Y$ kompakt, also $\varepsilon:=d_Y(f(K),Y\smallsetminus O)>0$ (F2A), somit $f\in B(f,\varepsilon)\subset[K,O]$. Dies zeigt $[K,O]\in\mathcal{T}_d$.

Wir zeigen $\mathcal{T}_d\subset\mathcal{T}_{\mathrm{KO}}$: Zu $f\in\mathscr{C}(X,Y)$ und $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ müssen wir $B(f,\varepsilon)\in\mathcal{T}_{\mathrm{KO}}$ nachweisen, also $f\in[K_1,O_1]\cap\cdots\cap[K_n,O_n]\subset B(f,\varepsilon)$ für geeignete Kompakta $K_1,\dots,K_n\subset X$ und offene Mengen $O_1,\dots,O_n\subset Y$. (Abbildung F:10 illustriert dies.)

Da X kompakt ist, hat die offene Überdeckung $X=\bigcup_{y\in Y}f^{-1}(B(y,\varepsilon/3))$ eine endliche Teilüberdeckung, $X=U_1\cup\cdots\cup U_n$ mit $U_i=f^{-1}(B(y_i,\varepsilon/3))$. Der Abschluss $K_i:=\overline{U_i}$ ist kompakt (F1F). Es gilt $f(K_i)\subset\bar B(y_i,\varepsilon/3)\subset B(y_i,\varepsilon/2)=:O_i$. Aus $g(K_i)\subset O_i$ folgt $d_Y(f(x),g(x))<\varepsilon$ für alle $x\in K_i$. Wir schließen $f\in[K_1,O_1]\cap\cdots\cap[K_n,O_n]\subset B(f,\varepsilon)$.

(3) Die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathscr{C}(X,Y)$ wird erzeugt von den Mengen $U(f;K,\varepsilon):=\big\{\,g\;\big|\;|d(f,g)|_K<\varepsilon\big\}$ mit $K\subset X$ kompakt und $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$. Dank (2) gilt $f\in B(f;K,\varepsilon/2)\subset[K,O]$ und $f\in[K_1,O_1]\cap\cdots\cap[K_n,O_n]\subset B(f;K,\varepsilon)$. □

Bemerkung. In die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X,Y)$ fließt die Topologie von Y durch ihre offenen Mengen ein, die Topologie von X hingegen nur durch ihre kompakten Mengen. Anschaulich gesprochen dürfen wir gute Eigenschaften erwarten solange es genügend kompakte Mengen gibt, um die Topologie auf X zu bestimmen. Die nachfolgenden Ergebnisse werden dies belegen; wo nötig, wird lokale Kompaktheit vorausgesetzt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F7b. Einbettungen.

Proposition F7D. *Seien $(X,\mathcal{T}_X)$, $X\neq\emptyset$, und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume.*

(1) Ist $B\subset Y$ ein Teilraum, dann ist $\mathscr{C}(X,B)\subset\mathscr{C}(X,Y)$ ein Teilraum.
(2) Die Abbildung $j:Y\to\mathscr{C}(X,Y):y\mapsto \mathrm{const}_X^y$ ist eine Einbettung.
(3) Genau dann ist $\mathscr{C}(X,Y)$ hausdorffsch, wenn Y hausdorffsch ist.

BEWEIS. Sei $K\subset X$ kompakt und $U\subset Y$ offen.

(1) Es gilt $\mathscr{C}(X,K;Y,U)\cap\mathscr{C}(X,B)=\mathscr{C}(X,K;B,U\cap B)$. Daher stimmt die Teilraumtopologie von $\mathscr{C}(X,B)$ in $\mathscr{C}(X,Y)$ mit der Kompakt-Offen-Topologie überein.

(2) Für $X\neq\emptyset$ ist die Abbildung j injektiv, denn für $x\in X$ gilt $j(y)(x)=y$. Die Bedingungen $y\in U$ und $\mathrm{const}_X^y\in[K,U]$ sind äquivalent, und somit ist j eine Einbettung: $j:Y\to j(Y)$ ist ein Homöomorphismus auf den Teilraum $j(Y)\subset\mathscr{C}(X,Y)$.

(3) Wenn $\mathscr{C}(X,Y)$ hausdorffsch ist, dann auch der zu Y homöomorphe Teilraum $j(Y)$. Sei umgekehrt Y hausdorffsch. Zu $f\neq g$ in $\mathscr{C}(X,Y)$ existiert ein $x\in X$ mit $f(x)\neq g(x)$, und hierzu disjunkte Umgebungen, $f(x)\in U\in\mathcal{T}_Y$ und $g(x)\in V\in\mathcal{T}_Y$ mit $U\cap V=\emptyset$. Es folgt $f\in[\{x\},U]\in\mathcal{T}_{\mathrm{KO}}$ und $g\in[\{x\},V]\in\mathcal{T}_{\mathrm{KO}}$ mit $[\{x\},U]\cap[\{x\},V]=\emptyset$. □

§F7c. Stetigkeit von Komposition und Auswertung.

Satz F7E. *Seien X,Y,Z topologische Räume.*

(1) Für jedes $g\in\mathscr{C}(Y,Z)$ ist $g_*:\mathscr{C}(X,Y)\to\mathscr{C}(X,Z):f\mapsto g\circ f$, stetig.
(2) Für jedes $f\in\mathscr{C}(X,Y)$ ist $f^*:\mathscr{C}(Y,Z)\to\mathscr{C}(X,Z):g\mapsto g\circ f$, stetig.
(3) Ist zudem Y lokal-kompakt, dann ist die Komposition

$$\circ\ :\ \mathscr{C}(Y,Z)\times\mathscr{C}(X,Y)\to\mathscr{C}(X,Z)\ :\ (g,f)\mapsto g\circ f,$$

stetig (stärker als in (1) und (2) also gleichzeitig in g und f).

BEWEIS. Sei $K\subset X$ kompakt und $U\subset Z$ offen. Für $f:X\to Y$ stetig ist $f(K)$ kompakt. Für $g:Y\to Z$ stetig ist $g^{-1}(U)$ offen.

(1) Die Bedingung $g\circ f\in[K,U]$ ist äquivalent zu $f\in[K,g^{-1}(U)]$. Anders gesagt, es gilt $(g_*)^{-1}([K,U])=[K,g^{-1}(U)]$. Demnach ist g_* stetig (D6G).

(2) Die Bedingung $g\circ f\in[K,U]$ ist äquivalent zu $g\in[f(K),U]$, Anders gesagt, es gilt $(f^*)^{-1}([K,U])=[f(K),U]$. Demnach ist f_* stetig (D6G).

(3) Wir zeigen die Stetigkeit der Komposition $\circ$ in (g,f). Sei $[K,U]$ eine Umgebung von $g\circ f$ in $\mathscr{C}(X,Z)$. Es gilt $g\circ f\in[K,U]$, also $g(f(K))\subset U$, somit $f(K)\subset g^{-1}(U)$. Da Y lokal-kompakt ist, existiert nach F3B eine kompakte Umgebung V von $f(K)$ in $g^{-1}(U)$, also $f(K)\subset V^\circ\subset V\subset g^{-1}(U)$. Somit ist $[V,U]\times[K,V^\circ]$ eine Umgebung von (g,f) in $\mathscr{C}(Y,Z)\times\mathscr{C}(X,Y)$, die durch die Komposition nach $[K,U]$ abgebildet wird. □

Korollar F7F. *Speziell für $X=\{*\}$ folgt: Für jeden Punkt $y\in Y$ ist die Auswertung*

$$\mathscr{C}(Y,Z)\to Z:g\mapsto g(y)$$

stetig. Ist Y zudem lokal-kompakt, dann ist die Auswertung

$$\mathscr{C}(Y,Z)\times Y\to Z:(g,y)\mapsto g(y)$$

stetig (gleichzeitig in g und y). □

Die Voraussetzung der lokalen Kompaktheit scheint zunächst lästig. Sie ist jedoch kein Artefakt eines ungeschickten Beweises, sondern wesentlich für die gewünschte Stetigkeit:

Beispiel F7G. Die Auswertung $e : \mathscr{C}(\mathbb{Q},[0,1]) \times \mathbb{Q} \to [0,1] : (f,x) \mapsto f(x)$ ist nicht stetig.

BEWEIS. Es gilt $e(0,0) = 0$, aber $e^{-1}(]-1,1[)$ ist keine Umgebung von $(0,0)$. Andernfalls gäbe es Umgebungen $U = [K_1,U_1] \cap \dots \cap [K_n,U_n]$ von 0 in $\mathscr{C}(\mathbb{Q},[0,1])$ und $V =]-\varepsilon,\varepsilon[_{\mathbb{Q}}$ von 0 in $\mathbb{Q}$ mit $e(U \times V) \subset]-1,1[$. Da $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ kompakt ist, $\overline{V} = [-1,1]_{\mathbb{Q}}$ aber nicht, gilt $V \not\subset K$. Es existiert also ein $x \in V \smallsetminus K$. Hierzu existiert $f \in \mathscr{C}(\mathbb{Q},[0,1])$ mit $f(x) = 1$ und $f(K) = \{0\}$ (E5A). Damit gilt $f \in U$ und $x \in V$ aber $f(x) \notin]-1,1[$. □

§F7d. Adjunktion. Jede Abbildung $f : X \times Y \to Z$ und $x \in X$ definiert die partielle Abbildung $f(x,-) : Y \to Z : y \mapsto f(x,y)$ als die Einschränkung $Y \xrightarrow{\sim} \{x\} \times Y \xrightarrow{f} Z$. Dies definiert die *adjungierte Abbildung* $\tilde{f} : X \to Z^Y : x \mapsto f(x,-)$, also $\tilde{f}(x)(y) = f(x,y)$. Umgekehrt definiert $\tilde{f}$ hierdurch auch f. Wir erhalten also eine Bijektion

$$Z^{X\times Y} \to (Z^Y)^X : f \mapsto \tilde{f} \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(x)(y) = f(x,y).$$

Aufgrund der suggestiven Schreibweise nennt man dies auch das *Exponentialgesetz*. Es gilt nicht nur für Mengen und ihre Abbildungen sondern (beinahe) ebenso für topologische Räume und ihre stetigen Abbildungen. Allerdings besteht ein bemerkenswerter Schönheitsfehler: Der Raum Y muss lokal-kompakt sein, damit das Exponentialgesetz gilt:

Satz F7H. *Seien $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$, $(Z,\mathcal{T}_Z)$ topologische Räume.*

(1) Ist $f : X \times Y \to Z$ stetig, dann auch $\tilde{f} : X \to \mathscr{C}(Y,Z)$.
(2) Ist Y lokal-kompakt und $\tilde{f} : X \to \mathscr{C}(Y,Z)$ stetig, dann auch $f : X \times Y \to Z$.

BEWEIS. (1) Wir zeigen, dass $\tilde{f}$ in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist. Sei $\tilde{f}(x) \subset [K,U]$ mit $K \subset Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen, also $f(\{x\} \times K) \subset U$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ offen in $X \times Y$: Zu $(x,y) \in \{x\} \times K$ existiert eine Umgebung $V_y \times W_y \subset f^{-1}(U)$ mit $x \in V_y \in \mathcal{T}_X$ und $y \in W_y \in \mathcal{T}_Y$. Da $\{x\} \times K$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{x\} \times K \subset (V_{y_1} \times W_{y_1}) \cup \dots \cup (V_{y_n} \times W_{y_n})$. Für die offene Umgebung $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$ von x gilt demnach $\{x\} \times K \subset V \times K \subset f^{-1}(U)$. Das heißt $f(V \times K) \subset U$, also $\tilde{f}(V) \subset [K,U]$.

(2) Ist Y lokal-kompakt und $\tilde{f} : X \to \mathscr{C}(Y,Z)$ stetig, dann auch die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} X \times Y & \xrightarrow{\tilde{f}\times\mathrm{id}} & \mathscr{C}(Y,Z) \times Y & \xrightarrow{\qquad e \qquad} & Z, \\ (x,y) & \longmapsto & (\tilde{f}(x),y) & \longmapsto & \tilde{f}(x)(y) = f(x,y). \end{array}$$ □

Korollar F7I. *Ist X lokal-kompakt, dann ist die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X,Y)$ die gröbste, für die die Auswertung $e : \mathscr{C}(X,Y) \times X \to Y : (f,x) \mapsto f(x)$ stetig ist.*

BEWEIS. Nach F7F ist $e : (\mathscr{C}(X,Y),\mathcal{T}_{\mathrm{KO}}) \times (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig. Sei $\mathcal{T}$ eine weitere Topologie auf $\mathscr{C}(X,Y)$, für die $e : (\mathscr{C}(X,Y),\mathcal{T}) \times (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ stetig ist. Dann ist nach F7H auch die Adjungierte $\tilde{e} : (\mathscr{C}(X,Y),\mathcal{T}) \to (\mathscr{C}(X,Y),\mathcal{T}_{\mathrm{KO}})$ stetig. Für $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ und $x \in X$ gilt $\tilde{e}(f)(x) = e(f,x) = f(x)$, also $\tilde{e}(f) = f$. Das heißt, $\tilde{e}$ ist die Identität, und ihre Stetigkeit besagt $\mathcal{T}_{\mathrm{KO}} \subset \mathcal{T}$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Adjungierte in der linearen Algebra. Seien X, Y, Z Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $f : X \times Y \to Z$ heißt *bilinear*, wenn sie in beiden Argumenten linear ist, also

$$f(\lambda x + \mu x', y) = \lambda f(x,y) + \mu f(x',y) \text{ und}$$
$$f(x, \lambda y + \mu y') = \lambda f(x,y) + \mu f(x,y')$$

gilt für alle $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ und $\lambda, \mu \in K$. Das wichtigste Beispiel ist $X = Y$ und $Z = K$; in diesem Fall spricht man von einer *Bilinearform* auf X. Zum Beispiel ist das euklidische Skalarprodukt $\langle - \mid - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$.

Zu festem $x \in X$ ist $\tilde{f}(x) : Y \to Z : y \mapsto f(x,y)$ eine lineare Abbildung, also $\tilde{f}(x) \in \operatorname{Hom}_K(Y,Z)$. Diese Menge ist selbst ein Vektorraum bezüglich der punktweisen Operationen, und die Zuordnung $X \to \operatorname{Hom}_K(Y,Z) : x \mapsto \tilde{f}(x)$ ist linear. Wir erhalten also $\tilde{f} \in \operatorname{Hom}_K(X, \operatorname{Hom}_K(Y,Z))$ durch $\tilde{f}(x)(y) = f(x,y)$. Umgekehrt definiert jedes $\tilde{f} \in \operatorname{Hom}_K(X, \operatorname{Hom}_K(Y,Z))$ hierdurch eine bilineare Abbildung $f : X \times Y \to Z$. Wir erhalten also eine Bijektion

$$\operatorname{Bil}_K(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_K(X, \operatorname{Hom}_K(Y,Z)) : f \mapsto \tilde{f} \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(x)(y) = f(x,y).$$

Diese Bijektion ist sogar ein Vektorraumisomorphismus. Genau diesen Sachverhalt wollen wir hier in der topologischen Kategorie beweisen, also Bijektivität F7H und Homöomorphie F7J.

Im Spezialfall $X = Y$ und $Z = K$ ist $X^* = \operatorname{Hom}_K(X,K)$ der Dualraum zu X, und wir erhalten die Bijektion $\operatorname{Bil}_K(X \times X, K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_K(X, X^*)$. Jeder Bilinearform $\langle - \mid - \rangle : X \times X \to K$ entspricht ihre adjungierte Abbildung $X \to X^* : x \mapsto \langle x \mid - \rangle$. Ist X endlich-dimensional und $\langle - \mid - \rangle$ *nicht ausgeartet*, das heißt, für jedes $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $\langle x \mid y \rangle \neq 0$, dann stiftet $\langle - \mid - \rangle$ einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} X^*$.

§F7e. Summen, Produkte, Adjunktion. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume. Für die disjunkte Vereinigung $X + Y$ von Mengen haben wir die Bijektion

$$Z^{X+Y} \xrightarrow{\sim} Z^X \times Z^Y, \quad f \mapsto (f \circ i_X, f \circ i_Y).$$

Bezüglich der Summentopologie (§E3c) induziert dies die natürliche Bijektion

$$\mathscr{C}(X \sqcup Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(X,Z) \times \mathscr{C}(Y,Z). \tag{F.5}$$

Für das Produkt $X \times Y$ von Mengen haben wir die Bijektion

$$(Y \times Z)^X \xrightarrow{\sim} Y^X \times Z^X, \quad f \mapsto (p_Y \circ f, p_Z \circ f).$$

Bezüglich der Produkttopologie (§E4b) induziert dies die natürliche Bijektion

$$\mathscr{C}(X, Y \times Z) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(X,Y) \times \mathscr{C}(X,Z). \tag{F.6}$$

Für Mengen haben haben wir die Bijektion

$$Z^{X \times Y} \xrightarrow{\sim} (Z^Y)^X, \quad f \mapsto \tilde{f} \text{ mit } \tilde{f}(x)(y) = f(x,y).$$

Bezüglich der Kompakt-Offen-Topologie induziert dies die natürliche Bijektion

$$\mathscr{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y,Z)), \tag{F.7}$$

wenn wir voraussetzen, dass Y lokal-kompakt ist (F7H).

All diese Mengen sind jeweils mit einer natürlichen Topologie ausgestattet, nämlich ihrer jeweiligen Kompakt-Offen-Topologie. Man kann sich daher fragen, ob die natürlichen Bijektionen sogar Homöomorphismen sind. Dies ist tatsächlich der Fall:

Satz F7J. *Die natürlichen Bijektionen* (F.5)*,* (F.6)*,* (F.7) *sind Homöomorphismen bezüglich der Kompakt-Offen-Topologie. Für* (F.6) *setzen wir hierbei X als hausdorffsch voraus, für* (F.7) *zusätzlich Y als lokal-kompakt hausdorffsch.*

BEWEIS. Zu (F.5): Die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X \sqcup Y, Z)$ wird erzeugt von den Mengen $[K,U]$ mit $K \subset X \sqcup Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen. Die Produkttopologie auf $\mathscr{C}(X,Z) \times \mathscr{C}(Y,Z)$ wird erzeugt von den Mengen $[A,U] \times [B,U]$ mit $A \subset X$, $B \subset Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen, denn hieraus erhält man beliebige offene Kästchen vermöge

$$[A,U] \times [B,U'] = ([A,U] \times [\emptyset,U]) \cap ([\emptyset,U'] \times [B,U']).$$

Jede kompakte Menge $K \subset X \sqcup Y$ ist von der Form $K = A \cup B$ mit $A = K \cap X$ kompakt in X und $B = K \cap Y$ kompakt in Y. Die natürliche Bijektion bildet somit beide Erzeugendensysteme bijektiv aufeinander ab, also auch die von ihnen erzeugten Topologien.

Zu (F.6): Die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X, Y \times Z)$ wird erzeugt von den Mengen $[K, U \times V]$ mit $K \subset X$ kompakt und $U \subset Y$, $V \subset Z$ offen (F7N). Die Produkttopologie auf $\mathscr{C}(X,Y) \times \mathscr{C}(X,Z)$ wird erzeugt von den Mengen $[K,U] \times [K,V]$ mit $K \subset X$ kompakt und $U \subset Y$, $V \subset Z$ offen, denn hieraus erhält man beliebige offene Kästchen vermöge

$$[K,U] \times [K',V] = ([K,U] \times [K,Z]) \cap ([K',Y] \times [K',V]).$$

Die natürliche Bijektion bildet beide Erzeugendensysteme bijektiv aufeinander ab, also auch die von ihnen erzeugten Topologien.

Zu (F.7): Die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y,Z))$ wird erzeugt von den Mengen $[K,[L,U]]$ mit $K \subset X$ kompakt, $L \subset Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen (F7N). Die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X \times Y, Z)$ wird erzeugt von den Mengen $[K \times L, U]$ mit $K \subset X$ kompakt, $L \subset Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen (F7N). Die natürliche Bijektion bildet diese Erzeugendensysteme bijektiv aufeinander ab. □

§F7f. Erzeugendensysteme für die KO-Topologie. Die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X,Y)$ wird erzeugt durch Mengen der Form $[K,O]$ mit $K \subset X$ kompakt und $O \subset Y$ offen. Gelegentlich ist es zweckmäßig, K und O nur bestimmte Mengen durchlaufen zu lassen. Dies haben wir im Beweis von Satz F7J benötigt, und wollen es nun beweisen.

Definition F7K. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{A}$ kompakter Mengen in X nennen wir ein *Erzeugendensystem der Kompakta in X* wenn gilt: Zu $K \subset X$ kompakt und $U \supset K$ offen existieren $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ sodass $K \subset A_1 \cup \dots \cup A_n \subset U$.

Offensichtlich ist die Menge aller Kompakta in X ein Erzeugendensystem der Kompakta in X. Es gibt auch Situationen, in denen kleinere Erzeugendensysteme nützlich sind:

Beispiel F7L. Für den Produktraum $Y \times Z$ zweier Hausdorff–Räume ist die Familie

$$\mathcal{A} = \{\, A \times B \mid A \subset Y \text{ kompakt},\ B \subset Z \text{ kompakt} \,\}$$

ein Erzeugendensystem der Kompakta in $Y \times Z$.

BEWEIS. Sei $K \subset Y \times Z$ kompakt und $U \supset K$ offen. Die Projektionen $A = p_Y(K)$ und $B = p_Z(K)$ sind kompakt, nach F3C lokal-kompakt, ebenso das Produkt $X := A \times B \supset K$. Die Menge $V = U \cap X$ ist offen in X. Jeder Punkt $x \in K$ hat eine kompakte Umgebung $A_x \times B_x \subset V$ in X. Die offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{x \in K} A_x^\circ \times B_x^\circ$ hat eine endliche Teilüberdeckung, und somit gilt $K \subset A_1 \times B_1 \cup \dots \cup A_n \times B_n \subset V \subset U$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Den nächsten Satz bereiten wir durch folgende Beobachtung vor:

Lemma F7M. *Sei X kompakt hausdorffsch. Zu jeder offenen Überdeckung $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ existieren kompakte Teilmengen $K_1 \subset U_1, \ldots, K_n \subset U_n$ sodass $X = K_1^\circ \cup \cdots \cup K_n^\circ$.*

BEWEIS. Das Komplement $A_1 = X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n)$ ist abgeschlossen in X also kompakt, und es gilt $A_1 \subset U_1$. Auch das Komplement $B_1 = X \setminus U_1$ ist kompakt, und es gilt $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Nach F1E existieren disjunkte offene Umgebungen V_1 von A_1 und W_1 von B_1 in X. Der Abschluss $K_1 = \overline{V_1}$ in X ist kompakt und disjunkt zu W_1. Wir erhalten demnach $A_1 \subset K_1^\circ \subset K_1 \subset U_1$ und somit $X = K_1^\circ \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$. So fortfahrend für $i = 1, 2, \ldots, n$ ist $A_i = X \setminus (K_1^\circ \cup \cdots \cup K_{i-1}^\circ \cup U_{i+1} \cup \cdots \cup U_n)$ abgeschlossen in X also kompakt. Wie zuvor finden wir K_i kompakt mit $A_i \subset K_i^\circ \subset K_i \subset U_i$. Schließlich gilt $X = K_1^\circ \cup \cdots \cup K_n^\circ$. □

Satz F7N. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, mit X hausdorffsch.*

(1) Sei $\mathcal{A}$ ein Erzeugendensystem der Kompakta in X.
(2) Sei $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem der Topologie auf Y.

Dann wird die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X, Y)$ erzeugt von $\{[A, B] \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

BEWEIS. Sei $K \subset X$ kompakt und $O \subset Y$ offen und $f \in [K, O]$. Es gilt $O = \bigcup_{i \in I} B_i$ wobei $B_i = B_{i1} \cap \cdots \cap B_{in_i}$ mit $B_{ik} \in \mathcal{B}$ (D6F). Da $f(K) \subset O$ kompakt ist, gilt $f(K) \subset B_1 \cup \cdots \cup B_n \subset O$ für eine geeignete Teilfamilie, also $K \subset f^{-1}(B_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(B_n) \subset f^{-1}(O)$. Nach F7M existieren Kompakta $K_1 \subset f^{-1}(B_1), \ldots, K_n \subset f^{-1}(B_n)$ sodass $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ existieren $A_{i1}, \ldots, A_{im_i} \in \mathcal{A}$ sodass $K_i \subset A_{i1} \cup \cdots \cup A_{im_i} \subset f^{-1}(B_i)$. Wir erhalten somit

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_i} \bigcap_{k=1}^{n_i} [A_{ij}, B_{ik}] = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_i} [A_{ij}, B_i] \subset \bigcap_{i=1}^{n} [K_i, B_i] \subset [K, O].$$

Das bedeutet, die Mengen $[A, B]$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ erzeugen die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X, Y)$. □

Korollar F7O. *Sei X ein lokal-kompakter Hausdorff–Raum. Erlauben die Topologien auf X und Y abzählbare Basen, dann auch die Kompakt-Offen-Topologie auf $\mathscr{C}(X, Y)$.*

BEWEIS. Seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{B}$ abzählbare Basen der Topologie auf X bzw. Y. Die Menge

$$\mathcal{A} = \{\overline{U} \mid U \in \mathcal{S} \text{ und } \overline{U} \text{ kompakt}\}$$

ist ein Erzeugendensystem der Kompakta in X. Mit $\mathcal{S}$ ist auch $\mathcal{A}$ abzählbar. Nach Satz F7N erzeugt $\mathscr{E} = \{[A, B] \mid (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$ die KO-Topologie auf $\mathscr{C}(X, Y)$. Nach Konstruktion ist $\mathscr{E}$ abzählbar und ebenso die hieraus gemäß D6F gewonnene Basis. □

§F8. Parakompaktheit

Wir zeigen in diesem Abschnitt die Existenz von beliebig feinen *Zerlegungen der Eins*, wie sie in Analysis und Geometrie gebraucht werden. Wir diskutieren hierzu kurz den – etwas technischen aber langfristig nützlichen – Begriff der Parakompaktheit.

§F8a. Lokal-endliche Summen. Für stetige Funktionen $f_1,\dots,f_n : X \to \mathbb{R}$ ist auch ihre Summe $f : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ stetig. Für eine unendliche Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dies im Allgemeinen nicht: Zunächst ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sicherzustellen; in diesem Fall erhalten wir die Funktion $f : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Aber diese ist im Allgemeinen nicht stetig. Das universelle Beispiel sieht so aus:

Beispiel. Sei $(g_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine unstetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert (etwa wie in D4F). Die Funktionen $f_0 := g_0$ und $f_{n+1} := g_{n+1} - g_n$ für $n \in \mathbb{N}$ sind dann stetig, für jeden Punkt $x \in X$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = g_n(x)$ gegen $f(x)$, aber $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ist nicht stetig.

Die gewünschte Stetigkeit gilt jedoch für die Summe jeder lokal-endlichen Familie:

Definition F8A. Zu jeder Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt die abgeschlossene Teilmenge

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{\, x \in X \mid f(x) \neq 0 \,\}}$$

der *Träger* der Funktion f, engl. *support*, frz. *support*.

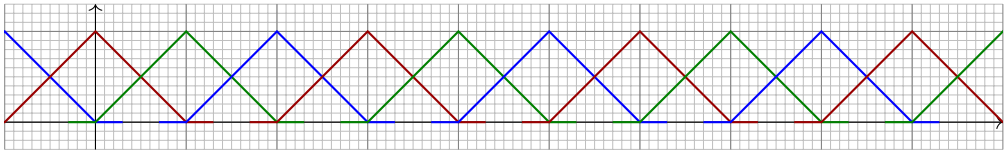
Lemma F8B. *Sei $(f_i : X \to \mathbb{R})_{i\in I}$ eine Familie stetiger Funktionen mit lokal-endlicher Trägerfamilie $(\operatorname{supp}(f_i))_{i\in I}$. Dann ist die Summe $f = \sum_{i\in I} f_i$ wohldefiniert und stetig.*

BEWEIS. Zu jedem $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x, sodass die Indexmenge $I_U = \{\, i \in I \mid U \cap \operatorname{supp}(f_i) \neq \emptyset \,\}$ endlich ist. Auf U ist demnach $f|_U = \sum_{i\in I_U} f_i|_U$ eine endliche Summe und somit stetig. Daher ist f stetig auf ganz X (E1P). □

§F8b. Zerlegung der Eins. Zerlegungen der Eins werden häufig für Probleme gebraucht, die zunächst nur lokale Lösungen zulassen, auf „kleinen“ offenen Mengen: Wir möchten dann das globale Problem in lokale Probleme zerlegen, lösen, und schließlich die lokalen Lösungen zu einer globalen Lösung zusammenfügen.

Definition F8C. Eine Familie $(f_i : X \to [0,1])_{i\in I}$ stetiger Funktionen heißt eine *Zerlegung der Eins*, wenn die Trägerfamilie $(\operatorname{supp}(f_i))_{i\in I}$ lokal-endlich ist und $\sum_{i\in I} f_i = 1$ gilt.

Eine Zerlegung der Eins $(f_i)_{i\in I}$ heißt einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X *untergeordnet*, wenn $\operatorname{supp}(f_i) \subset U_i$ für alle $i \in I$ gilt.



Beispiel. Zu $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir $f_k : \mathbb{R} \to [0,1] : x \mapsto \max(0, 1 - d(x,k))$. Die Träger $\operatorname{supp}(f_k) = [k-1, k+1]$ bilden eine lokal-endliche Familie. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x) = 1$, wobei die Summe jeweils aus höchstens zwei nicht-trivialen Summanden besteht. Somit ist die Familie $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung der Eins.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F8c. Parakompakte Räume. Wie eingangs motiviert, sind Zerlegungen der Eins ein nützliches Hilfsmittel. Wie steht es nun mit der Existenz solcher Zerlegungen auf einem Raum X? Gibt es zu jeder vorgegebenen offenen Überdeckung von X eine untergeordnete Zerlegung der Eins? Das ist selbst für so einfache Räume wie den $\mathbb{R}^n$ zunächst nicht leicht zu sehen. Wir werden hierzu den Begriff der *Parakompaktheit* einführen.

Definition F8D. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X. Eine *Verfeinerung* von $(U_i)_{i\in I}$ ist eine Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ von X, sodass jede Menge V_j in einer Menge U_i enthalten ist.

Ein topologischer Raum X heißt *parakompakt*, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine lokal-endliche offene Verfeinerung $(V_j)_{j\in J}$ existiert.

Beispiel F8E. Jeder kompakte Raum X ist parakompakt: Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X existiert eine endliche Teilüberdeckung $(U_{i_1},\dots,U_{i_n})$, und diese ist insbesondere eine lokal-endliche Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$.

> **Sprachgebrauch.** Wie schon bei der Kompaktheit ist auch bei Parakompaktheit der Sprachgebrauch in der Literatur nicht einheitlich. Manche Autoren fordern für parakompakte Räume stets auch die Hausdorff–Eigenschaft. Da ich dies bei Kompaktheit nicht voraussetze, will ich es konsequenterweise für Parakompaktheit auch nicht tun. Wo beide Eigenschaften benötigt werden, spreche ich von einem parakompakten Hausdorff-Raum.

Soweit die zunächst trockene Definition. Im weiteren Verlauf wollen wir diesen Begriff mit Leben füllen, parakompakte Räume besser verstehen lernen und schließlich den erhofften Satz F8J beweisen: *Ein Hausdorff–Raum ist genau dann parakompakt, wenn zu jeder offenen Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins existiert.*

Beispiele. Einfache Illustrationen zu offenen Überdeckungen und Verfeinerungen:

(1) Die Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ selbst ist eine Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$, ebenso jede Teilüberdeckung $(U_j)_{j\in J}$ mit $J\subset I$.
(2) Die offene Überdeckung $(]-\infty,k[)_{k\in\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{R}$ ist nicht lokal-endlich. Die offene Überdeckung $(]k-1,k+1[)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine lokal-endliche Verfeinerung.

Im Allgemeinen sind die Indexmengen I und J unabhängig, wir verlangen nur, dass eine Abbildung $\nu : J\to I$ existiert, sodass $V_j\subset U_{\nu(j)}$ für alle $j\in J$ gilt.

Bemerkung F8F. Wir können bei Verfeinerungen $J=I$ und $\nu=\mathrm{id}$ annehmen:

(a) Ist $(V_j)_{j\in J}$ eine Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$ mit $V_j\subset U_{\nu(j)}$ für alle $j\in J$, dann ist $(W_i)_{i\in I}$ mit $W_i=\bigcup_{j\in\nu^{-1}(i)} V_j$ eine Verfeinerung mit $W_i\subset U_i$ für alle $i\in I$.

(b) Ist $(V_j)_{j\in J}$ offen, dann offensichtlich auch $(W_i)_{i\in I}$.

(c) Ist $(V_j)_{j\in J}$ lokal-endlich, dann auch $(W_i)_{i\in I}$:

BEWEIS. (c) Zu jedem $x\in X$ existiert eine offene Umgebung U, sodass die Indexmenge $J_U=\{\,j\in J\mid U\cap V_j\neq\emptyset\,\}$ endlich ist. Die Menge $I_U=\{\,i\in I\mid U\cap W_i\neq\emptyset\,\}$ erfüllt $I_U=\nu(J_U)$ und ist somit ebenfalls endlich. □

§F8d. Aus Parakompaktheit und T2 folgt T3 und T4. Für kompakte Räume haben wir die Implikationen $T_2\Rightarrow T_3$ (F1E) und $T_3\Rightarrow T_4$ (F1E) gezeigt. Diese Aussagen lassen sich direkt auf parakompakte Räume verallgemeinern: Wir ersetzen „kompakt“ durch „parakompakt“ und „endliche Teilüberdeckung“ durch „lokal-endliche Verfeinerung“.

Lemma F8G. *Jeder parakompakte Hausdorff–Raum $(X,\mathcal{T})$ erfüllt das T_3-Axiom: Zu $A\subset X$ abgeschlossen und $b\in X\smallsetminus A$ existieren disjunkte Umgebungen.*

BEWEIS. Da X hausdorffsch ist, existieren zu jedem $a\in A$ offene Umgebungen $a\in U_a\in\mathcal{T}$ und $b\in W_b\in\mathcal{T}$ mit $U_a\cap W_a=\emptyset$. Insbesondere gilt $b\notin\overline{U_a}$. Zu der offenen Überdeckung $\{U_a\mid a\in A\}\cup\{X\smallsetminus A\}$ von X existiert dank Parakompaktheit eine lokal-endliche offene Verfeinerung $\{V_a\mid a\in A\}\cup X'$ mit $V_a\subset U_a$ für alle $a\in A$ und $X'\subset X\smallsetminus A$. Die Vereinigung $V=\bigcup_{a\in A}V_a$ ist eine offene Umgebung von A und nach D5G gilt $\overline{V}=\bigcup_{a\in A}\overline{V_a}$. Aus $b\notin\overline{U_a}$ und $\overline{U_a}\supset\overline{V_a}$ folgt $b\notin\overline{V_a}$ für alle $a\in A$, also $b\notin\overline{V}$. Somit erhalten wir disjunkte offene Umgebungen V von A und $X\smallsetminus\overline{V}$ von b. □

Satz F8H (Dieudonné)**.** *Jeder parakompakte Hausdorff–Raum X erfüllt das T_4-Axiom: Zu $A,B\subset X$ abgeschlossen und disjunkt existieren disjunkte offene Umgebungen.*

Der Beweis ist wörtlich derselbe wie für F8G, wobei wir „b“ durch „B“ ersetzen:

BEWEIS. Dank Lemma F8G gilt T_3: Zu jedem Punkt $a\in A$ existieren offene Umgebungen $a\in U_a\in\mathcal{T}$ und $B\subset W_a\in\mathcal{T}$ mit $U_a\cap W_a=\emptyset$. Insbesondere gilt $B\cap\overline{U_a}=\emptyset$. Zu der offenen Überdeckung $\{U_a\mid a\in A\}\cup\{X\smallsetminus A\}$ von X existiert dank Parakompaktheit eine lokal-endliche offene Verfeinerung $\{V_a\mid a\in A\}\cup X'$. Die Vereinigung $V=\bigcup_{a\in A}V_a$ ist eine offene Umgebung von A und nach D5G gilt $\overline{V}=\bigcup_{a\in A}\overline{V_a}$. Aus $B\cap\overline{U_a}=\emptyset$ und $\overline{U_a}\supset\overline{V_a}$ folgt $B\cap\overline{V_a}=\emptyset$ für alle $a\in A$, also $B\cap\overline{V}=\emptyset$. Somit erhalten wir disjunkte offene Umgebungen V von A und $X\smallsetminus\overline{V}$ von B. □

Bemerkung. Ähnliche Argumente helfen uns bei Trennungsaxiomen durchaus häufiger: Das Lemma von Tychonoff E5J beweist $T_3\Rightarrow T_4$ für zweitabzählbare / Lindelöf–Räume. Lemma F1E und Satz F1E beweisen $T_2\Rightarrow T_3\Rightarrow T_4$ für kompakte Räume. Der Satz von Dieudonné F8H schließlich beweist $T_2\Rightarrow T_3\Rightarrow T_4$ für parakompakte Räume.

§F8e. Existenz von Zerlegungen der Eins. Wir zeigen zunächst, dass wir offene Überdeckungen in folgendem Sinne „schrumpfen“ können:

Lemma F8I. *Sei X ein parakompakter Hausdorff–Raum. Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X existiert eine offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von X mit $\overline{V_i}\subset U_i$ für alle $i\in I$.*

BEWEIS. Wegen $X=\bigcup_{i\in I}U_i$ existiert zu jedem Punkt $x\in X$ ein Index $\nu(x)\in I$ sodass $x\in U_{\nu(x)}$. Nach T_3 existiert eine offene Menge W_x mit $x\in W_x\subset\overline{W_x}\subset U_{\nu(x)}$. Zu der offenen Überdeckung $(W_x)_{x\in X}$ existiert eine lokal-endliche offene Verfeinerung $(V_x)_{x\in X}$ mit $V_x\subset W_x$ für alle $x\in X$, also $\overline{V_x}\subset\overline{W_x}\subset U_{\nu(x)}$. Damit ist $(V_i)_{i\in I}$ mit $V_i:=\bigcup_{x\in\nu^{-1}(i)}V_x$ eine offene Überdeckung von X und nach D5G gilt $\overline{V_i}=\bigcup_{x\in\nu^{-1}(i)}\overline{V_x}\subset U_i$. □

Satz F8J. *Ein Hausdorff–Raum X ist genau dann parakompakt, wenn zu jeder offenen Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins existiert.*

BEWEIS. Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar: Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X existiert nach Voraussetzung eine untergeordnete Zerlegung der Eins $(f_i:X\to[0,1])_{i\in I}$. Die Mengen $V_i=f_i^{-1}(]0,1])$ sind dann eine lokal-endliche offene Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$.

Es bleibt „$\Rightarrow$“ zu zeigen. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Nach Voraussetzung können wir diese als lokal-endlich annehmen. (Falls nötig gehe man zu einer lokal-endlichen offenen Verfeinerung über.) Nach F8I können wir $(U_i)_{i\in I}$ schrumpfen zu einer offenen

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ mit $\overline{V_i} \subset U_i$ für alle $i \in I$. Durch nochmalige Schrumpfung erhalten wir eine offene Überdeckung $(W_i)_{i\in I}$ mit $\overline{W_i} \subset V_i$ für alle $i \in I$.

Nach F8H erfüllt X das T_4–Axiom. Nach dem Lemma von Urysohn (E5K) existiert zu jedem $i \in I$ eine stetige Funktion $f_i : X \to [0,1]$ mit $f|_{\overline{W_i}} = 1$ und $f|_{X\smallsetminus V_i} = 0$. Es gilt $\operatorname{supp}(f_i) \subset \overline{V_i} \subset U_i$, also ist $(\operatorname{supp}(f_i))_{i\in I}$ lokal-endlich und somit $f = \sum_{i\in I} f_i$ stetig (F8B). Wegen $X = \bigcup_{i\in I} W_i$ gilt überall $f \geq 1$. Die Familie $(\tau_i)_{i\in I}$ mit $\tau_i := f_i/f$ ist dann eine Zerlegung der Eins, und wegen $\operatorname{supp}(\tau_i) = \operatorname{supp}(f_i) \subset \overline{V_i} \subset U_i$ für alle $i \in I$ ist diese Zerlegung der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnet. □

§F8f. Jeder lokal-kompakte und σ–kompakte Raum ist parakompakt. Die folgenden beiden Sätze F8K und F8L zeigen, dass Parakompaktheit nicht nur wünschenswert, sondern auch weitverbreitet ist: Beide Sätze zeigen insbesondere, dass der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ parakompakt ist. Wir beginnen mit dem leichteren:

Satz F8K. *Jeder lokal-kompakte und σ–kompakte Raum X ist parakompakt.*

BEWEIS. Nach F4L gibt es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ mit $\overline{O_n}$ kompakt und $\overline{O_n} \subset O_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Im $\mathbb{R}^n$ zum Beispiel $O_n = B(0,n)$ wie in Abbildung F:11.) Dann ist $K_n = \overline{O_n} \smallsetminus O_{n-1}$ kompakt und $W_n = O_{n+1} \smallsetminus \overline{O_{n-2}}$ eine offene Umgebung von K_n. (Wir ergänzen $O_{-1} = O_{-2} = \emptyset$.) Sowohl die kompakte Überdeckung $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch die offene Überdeckung $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind lokal-endlich, denn jeder Punkt $x \in X$ hat eine offene Umgebung O_n, und diese trifft nicht K_m für $m \geq n+1$ und nicht W_m für $m \geq n+2$.

Vorgelegt sei nun eine offene Überdeckung $U = (U_i)_{i\in I}$ von X. Für jedes K_n genügt eine endliche Teilüberdeckung, $K_n \subset U_{i(n,1)} \cup \cdots \cup U_{i(n,\ell_n)}$. Wegen $W_n \supset K_n$ ist auch $V_{n,j} := U_{i(n,j)} \cap W_n$ eine offene Überdeckung, $K_n \subset V_{n,1} \cup \cdots \cup V_{n,\ell_n}$. Somit ist $V = \{\, V_{n,j} \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq \ell_n \,\}$ eine offene Überdeckung von X. Nach Konstruktion ist V eine Verfeinerung von U. Da $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal-endlich ist, gilt dies auch für V. □

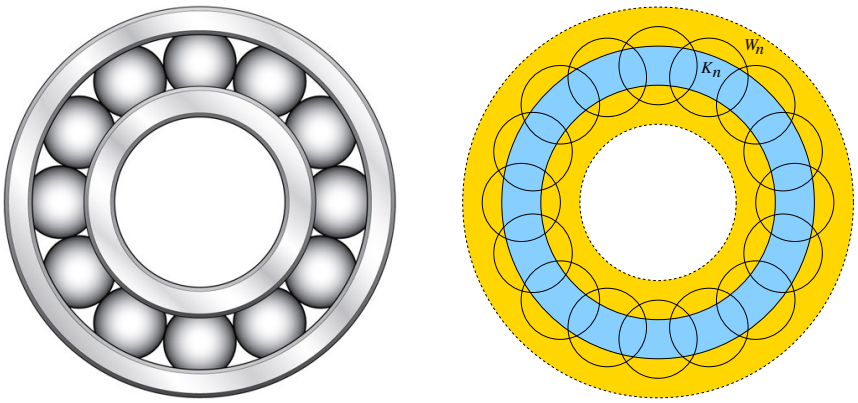


ABBILDUNG F:11. Links: ein Kugellager. Rechts: eine Beweisskizze; lokal-kompakt und σ–kompakt impliziert parakompakt.

§F8g. Jeder metrische Raum ist parakompakt. Wesentlich tiefer liegt der folgende, sehr allgemeine und nützliche Satz:

Satz F8L (Stone)**.** *Jeder metrische Raum ist parakompakt.*

Der Satz ist leicht zu formulieren, aber überraschend schwer zu beweisen. Die folgende, bewundernswert raffinierte Konstruktion stammt von Mary Ellen RUDIN, *A new proof that metric spaces are paracompact*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), Seite 603. Der Beweis ist kurz (eine knappe Seite) und elementar (er benutzt im Wesentlichen nur die Dreiecksungleichung), aber nicht leicht (man braucht ein paar Stunden, um ihn zu verstehen).

Voraussetzungen. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Wir nehmen an, I sei mit einer Wohlordnung $\le$ ausgestattet, also einer Ordnung sodass jede nicht-leere Menge $J\subset I$ ein kleinstes Element besitzt. (Dies ist nach dem Wohlordnungssatz immer möglich.) Für jeden Punkt $x\in X$ existiert somit $\mu(x)=\min\{\,i\in I\mid x\in U_i\,\}$.

Konstruktion. Induktiv definieren wir für jedes $n\in\mathbb{N}$ eine Familie $(V_i^n)_{i\in I}$ von Teilmengen $V_i^n\subset X$ wie folgt. Wir nennen $a\in X$ einen (i,n)*–Mittelpunkt*, wenn gilt:

(1) $\mu(a)=i$
(2) $B(a,3\cdot 2^{-n})\subset U_i$
(3) $a\notin V_j^m$ für $m<n$ und $j\in J$

Wir definieren dann

$$V_i^n := \bigcup\big\{\, B(a,2^{-n}) \;\big|\; a \text{ ist ein } (i,n)\text{–Mittelpunkt}\,\big\}.$$

Soweit die Konstruktion; wir werden unten zeigen, dass $(V_i^n)_{i\in I}^{n\in\mathbb{N}}$ die gesuchte lokal-endliche Verfeinerung ist. Zuvor wollen wir die Konstruktion an einem Beispiel illustrieren:

Beispiel. Auf $X=\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik betrachten wir die Überdeckung $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $U_i=\,]-\infty,5i\,[$. Auf $\mathbb{N}$ wählen wir die natürliche Ordnung; diese ist eine Wohlordnung.

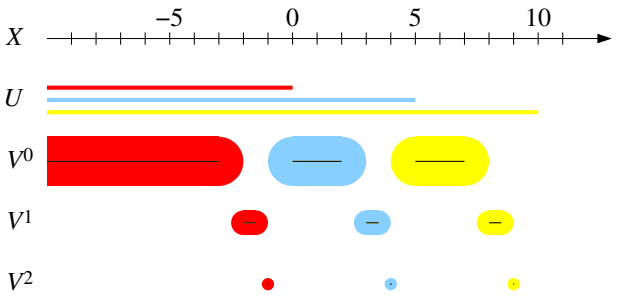


ABBILDUNG F:12. Konstruktion der lokal-endlichen Verfeinerung V_i^n zur Überdeckung U_i. Die (i,n)–Mittelpunkte sind schwarz eingezeichnet.

Die Konstruktion für $n=0,1,2,\dots$ liefert folgendes:

- Für $n=0$ finden wir $V_0^0=\,]-\infty,-2[$ und $V_i^0=\,]5i-6,5i-2[$ für alle $i\ge 1$.
- Für $n=1$ gilt $V_i^1=\,]5i-{}^5\!/_2,5i-1[$ für alle $i\in\mathbb{N}$.
- Für $n=2$ gilt $V_i^2=\,]5i-{}^5\!/_4,5i-{}^3\!/_4[$ für alle $i\in\mathbb{N}$.

Damit ist $\mathbb{R}$ bereits ausgeschöpft und es gilt $V_i^n=\emptyset$ für alle $n\ge 3$ und $i\in I$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Wir wenden uns nun dem Nachweis der gewünschten Eigenschaft zu:

Satz F8M (M.E. Rudin)**.** *Die obige Konstruktion ordnet jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ des metrischen Raums (X,d) eine lokal-endliche offene Verfeinerung $(V_i^n)_{i\in I}^{n\in\mathbb{N}}$ zu.*

BEWEIS. Die Familie $(V_i^n)_{i\in I}^{n\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$:

- Nach Konstruktion ist V_i^n offen und in U_i enthalten.
- Die Familie $(V_i^n)_{i\in I}^{n\in\mathbb{N}}$ überdeckt X:
  (1) Jeder Punkt x liegt in U_i für $i=\mu(x)$.
  (2) Da U_i offen ist, gilt $B(x,3\cdot 2^{-n})\subset U_i$ für ein hinreichend großes $n\in\mathbb{N}$.
  (3) Entweder gilt $x\in V_j^m$ für ein $m<n$ und $j\in J$, oder es gilt $x\in V_i^n$.

  Wir zeigen nun, dass $(V_i^n)_{i\in I}^{n\in\mathbb{N}}$ lokal-endlich ist.

Jeder Punkt $x\in X$ liegt in einer Menge V_i^n mit $i\in I$ und $n\in\mathbb{N}$. Wir wählen i minimal, und für dieses i dann auch n minimal. Da V_i^n offen ist, existiert $m\in\mathbb{N}$ sodass $B(x,2^{-m})\subset V_i^n$. Wir betrachten die offene Umgebung $W:=B(x,2^{-m-n-1})$ von x.

- Für jedes $k>m+n$ und jedes $j\in J$ gilt $W\cap V_j^k=\emptyset$.
  Beweis: Sei a ein (j,k)–Mittelpunkt. Wegen $k>n$ gilt $a\notin V_i^n$, und aus $B(x,2^{-m})\subset V_i^n$ folgt $d(x,a)\geq 2^{-m}$. Wegen $k>m$ gilt $2^{-k}+2^{-m-n-1}\leq 2^{-m-1}+2^{-m-1}=2^{-m}$, also $B(x,2^{-m-n-1})\cap B(a,2^{-k})=\emptyset$.
- Für jedes $k\leq m+n$ existiert höchstens ein $j\in J$ mit $W\cap V_j^k\neq\emptyset$.
  Beweis: Wir zeigen, dass für alle $y\in V_j^k$ und $z\in V_{j'}^k$ mit $j<j'$ die Ungleichung $d(y,z)\geq 2^{-m-n}$ gilt. Es existiert ein (j,k)–Mittelpunkt a sodass $y\in B(a,2^{-k})\subset V_j^k$, und ein (j',k)–Mittelpunkt b sodass $z\in B(b,2^{-k})\subset V_{j'}^k$ gilt. Nach (2) gilt $B(a,3\cdot 2^{-k})\subset U_j$. Nach (1) gilt $b\notin U_j$, also $d(a,b)\geq 3\cdot 2^{-k}$. Es folgt
  $$d(y,z)\geq d(a,b)-d(a,y)-d(b,z)>2^{-k}\geq 2^{-m-n}.$$
  Somit kann $W=B(x,2^{-m-n-1})$ nicht zugleich V_j^k und $V_{j'}^k$ treffen. □

Bemerkung. Die meisten Räume, die uns in der Topologie begegnen werden, sind parakompakt. Es gibt aber auch Räume, die nicht parakompakt sind, siehe Steen–Seebach, *Counterexamples in Topology*. Zum Beispiel ist die kleinste überabzählbare Ordinalzahl $(\Omega,<)$ mit ihrer Ordnungstopologie nicht parakompakt. Ebenso ist die Sorgenfrey–Ebene (D6Z) nicht parakompakt. Diese Gegenbeispiele können Sie getrost als exotisch betrachten.

§F9. Übungen und Ergänzungen

§F9a. Überblick. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick der wichtigsten Konstruktionen (Teilraum, Summe, Produkt, Quotient, etc.) und einiger wichtiger Eigenschaften (Trennung, Abzählbarkeit, Kompaktheit, etc.) Zudem habe ich einige interne Referenzen zu Ergebnissen bzw. Gegenbeispielen angegeben. Mehr hierzu finden Sie bei R. Engelking, *General Topology*, und L.A. Steen, J.A. Seebach: *Counterexamples in Topology*.

	T_1	Hausdorff (T_2)	regulär (T_1&T_3)	Tychonoff (T_1&$T_{3½}$)	normal (T_1&T_4)	metrisierbar	erstabzählbar (1AA)	zweitabzählbar (2AA)	separabel	Lindelöf	kompakt	lokal-kompakt	σ–kompakt	parakompakt	kompakt erzeugt
Teilraum	✓	✓ E1G	✓ E5C	✓	✘	✓ D1L	✓ E1G	✓ E1G	✘	✘	✘	✘ F3E	✘	✘	✘
offen	✓	✓	✓	✓	✘	✓	✓	✓	✓ E1H	✘ F9B	✘ F9C	✓ F3E	✘ F9C	✘	✓
abgeschlossen	✓	✓	✓	✓	✓ E5C	✓	✓	✓	✘ D6Z	✓ F9B	✓ F1F	✓ F3E	✓ F9C	✓	✓
Summe	✓	✓	✓	✓	✓	✓ E3H	✓	✘	✘ F9A	✘ F9B	✘	✓ F3G	✘ F9C	✓	✓
abzählbar	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓ F9A	✓ F9B	✘ F1M	✓	✓ F9C	✓	✓
endlich	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓ F1M	✓	✓	✓	✓
Produkt	✓	✓ E4U	✓	✓	✘	✘ E4V	✘ E4U	✘ E4U	✘ F9A	✘	✓ F1T	✘	✘	✘	✘
abzählbar	✓	✓	✓	✓	✘	✓ E4V	✓ E4U	✓ E4U	✓ F9A	✘	✓	✘ F3G	✘ F9C	✘	✘
endlich	✓	✓	✓	✓	✘	✓	✓	✓	✓	✘ D6Z	✓ F1N	✓ F3G	✓ F9C	✘	✘
stetige Surjektion	✘	✘	✘	✘	✘	✘	✘	✘	✓ F9A	✓ F9B	✓ F1J	✘	✓ F1J	✘	✘
Quotient	✘	✘	✘	✘	✘	✘	✘ E2W	✘ E2W	✓	✓	✓	✘ E2W	✓	✘	✓
offen	✘ E2E	✘ E2E	✘ E2E	✘ E2E	✘ E2E	✘	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✘	✓
abgeschlossen	✓	✘	✘	✘	✓	✘	✘	✘	✓	✓	✓	✘	✓	✓	✓
offen abgeschlossen	✓	✘	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
eigentlich	✓	✓ F5C	✓	✘	✓	✓	✘	✓	✓	✓	✓	✓ F5C	✓	✓	✓

Diese Tabelle macht insgesamt $15 \cdot 15 = 225$ Aussagen; nicht alle sind unabhängig. Versuchen Sie möglichst viele als Übung (Wiederholung oder Vertiefung) zu beweisen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§F9b. Separabel und Lindelöf.

Übung F9A. Separabilität bleibt erhalten unter (1) offenen Teilräumen, (2) nicht aber abgeschlossenen, (3) stetigen Surjektionen, (4) abzählbaren Summen, (5) nicht aber überabzählbaren, (6) abzählbaren Produkten, (7) nicht aber überabzählbaren.

Übung F9B. Die Lindelöf–Eigenschaft bleibt erhalten unter (1) abgeschlossenen Teilräumen, (2) nicht aber offenen, (3) stetigen Surjektionen, (4) abzählbaren Summen, (5) nicht aber überabzählbaren, (6) ebensowenig endlichen Produkten.

§F9c. Alexandroff–Kompaktifizierung und Abzählbarkeit im Unendlichen.

Übung F9C. (1) Ist X ein σ–kompakter Raum, so auch jeder abgeschlossene Teilraum.

(2) Konstruieren Sie einen lokal-kompakten Hausdorffraum X, der nicht σ–kompakt ist. Somit ist $\widehat{X}$ zwar (σ–)kompakt, aber der offene Teilraum X ist nicht σ–kompakt.

(3) σ–Kompaktheit bleibt erhalten bei abzählbaren Summen, nicht bei überabzähbaren.

(4) σ–Kompaktheit bleibt erhalten bei endlichen Produkten, nicht bei abzählbaren.

✻ **F9C.** (1) Sei $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ mit K_n in X kompakt. Für $A \subset X$ gilt $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(K_n \cap A)$. Ist A in X abgeschlossen, so auch $K_n \cap A$ in K_n, also kompakt (F1F). (2) Es genügt X überabzählbar und diskret.

Übung F9D. (1) Sei $X = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Wie sieht die Alexandroff–Kompaktifizierung $\widehat{X}$ aus? Geben Sie einen hierzu homöomorphen Teilraum $Z \subset \mathbb{R}^n$ möglichst explizit an.

(2) Angenommen, X und Y sind homöomorph. Sind dann auch $\widehat{X}$ und $\widehat{Y}$ homöomorph?

(3) Umgekehrt seien $\widehat{X}$ und $\widehat{Y}$ homöomorph. Sind dann auch X und Y homöomorph?

(4) Angenommen, es gilt $\widehat{X} \cong \widehat{Y} \cong \mathbb{S}^n$. Folgt daraus bereits $X \cong Y \cong \mathbb{R}^n$?

(5) Seien $\widehat{X} \cong \widehat{Y} \cong Z$ homogen. Sind dann auch X und Y homöomorph?

✻ **F9D.** (1) Ein geeigneter Raum Z ist das Bouquet zweier Kreislinien. Wir haben $h : X \xrightarrow{\sim} Y =]-1,0[\cup]0,1[$ mit $h(x) = x/(1+|x|)$. Wir wählen $\kappa : Y \hookrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\operatorname{sign}(t)(\cos(2\pi t)-1), \sin(2\pi t))$. Skizze!

(2) Ja, jeder Homöomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ setzt sich fort zu einem Homöomorphismus $\widehat{f} : \widehat{X} \xrightarrow{\sim} \widehat{Y}$.

(3) Nein! Sei $Z = (\mathbb{S}^1 - 1) \cup (\mathbb{S}^1 + 1)$ das Bouquet zweier Kreislinien aus Antwort (1). Die Teilräume $X = Z \smallsetminus \{0\}$ und $Y = Z \smallsetminus \{2\}$ haben beide Z als Einpunktkompaktifizierung, aber dennoch gilt $X \ncong Y$.

(4) Ja, dank stereographischer Projektion. Allgemeiner gilt folgendes:

(5) Homogenität eines Raumes Z bedeutet: Zu je zwei Punkten $p, q \in Z$ existiert ein Homöomorphismus $h : Z \xrightarrow{\sim} Z$ mit $p \mapsto q$. (Dies gilt für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, zum Beispiel $\mathbb{S}^n$, siehe K1Z.) Durch Einschränkung erhalten wir aus h einen Homöomorphismus $Z \smallsetminus \{p\} \xrightarrow{\sim} Z \smallsetminus \{q\}$. Dank $\widehat{X} \cong Z$ gilt $X \cong Z \smallsetminus \{p\}$ für ein $p \in Z$. Dank $\widehat{Y} \cong Z$ gilt $Y \cong Z \smallsetminus \{q\}$ für ein $q \in Z$. Wir schließen $X \cong Y$.

§F9d. Bouquet und Smash-Produkt. Ein *punktierter Raum* (X, x) ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten Punkt $x \in X$, auch *Basispunkt* genannt.

Eine stetige Abbildungen $f : (X, x) \to (Y, y)$ punktierter Räume ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x) = y$. Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, x) \to (X, x)$ respektiert den Basispunkt. Aus $f : (X, x) \to (Y, y)$ und $g : (Y, y) \to (Z, z)$ wird durch Komposition $g \circ f : (X, x) \to (Z, z)$. Wir erhalten so die Kategorie $\mathtt{Top}_*$ der punktierten Räume.

Das *Produkt* definieren wir durch $(X_1, x_1) \times (X_2, x_2) = (X_1 \times X_2, (x_1, x_2))$, allgemein $(Y, y) = \prod_{i\in I}(X_i, x_i)$ durch $Y = \prod_{i\in I} X_i$ und $y = (x_i)_{i\in I}$. Hierzu gehört die Projektion

$p_i : (Y,y) \to (X_i,x_i)$ für jedes $i \in I$. Universelle Abbildungseigenschaft des Produkts: Für jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $f_i : (Z,z) \to (X_i,x_i)$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : (Z,z) \to (Y,y)$ mit $p_i \circ f = f_i$ für jedes $i \in I$.

Das *Bouquet* definieren wir durch $(X_1,x_1) \vee (X_2,x_2) = (X_1 \sqcup X_2) /\!\!/ \{x_1,x_2\}$ allgemein $(Y,y) = \bigvee_{i\in I}(X_i,x_i) := \bigsqcup_{i\in I}(X_i,x_i) /\!\!/ \{ x_i \mid i \in I \}$ mit Basispunkt $y = \{ x_i \mid i \in I \}$. Hierzu gehört die Einbettung $\iota_i : (X_i,x_i) \hookrightarrow \bigsqcup_{i\in I}(X_i,x_i) \twoheadrightarrow \bigvee_{i\in I}(X_i,x_i)$ für jedes $i \in I$. Universelle Abbildungseigenschaft des Bouquets: Für jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $f_i : (X_i,x_i) \to (Z,z)$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : (Y,y) \to (Z,z)$ mit $f \circ \iota_i = f_i$ für jedes $i \in I$.

Übung F9E. Im Produktraum $X_1 \times X_2$ betrachten wir $Z = (X_1 \times \{x_2\}) \cup (\{x_1\} \times X_2)$ mit Basispunkt $z = (x_1,x_2)$. Zeigen Sie, dass $(X_1,x_1) \vee (X_2,x_2) \to (Z,z)$ ein Homöomorphismus ist. Wir können so $(X_1,x_1) \vee (X_2,x_2) \hookrightarrow X_1 \times X_2$ als Teilraum betrachten.

Mahnung zur Vorsicht: Gilt dies auch für unendliche Bouquets $\bigvee_{i\in I}(X_i,x_i)$?

Das *Smash-Produkt* definieren wir durch $(X_1,x_1) \wedge (X_2,x_2) := (X_1 \times X_2) /\!\!/ (X_1 \vee X_2)$.

Übung F9F. (1) Im Torus $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ist der Teilraum $Y = (\mathbb{S}^1 \times \{1\}) \cup (\{1\} \times \mathbb{S}^1)$ homöomorph zum Bouquet $(\mathbb{S}^1,1) \vee (\mathbb{S}^1,1)$. Zeichnen Sie X und Y und konstruieren Sie einen Homöomorphismus $X /\!\!/ Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$.

Hinweis: Die Einbettung im $\mathbb{R}^3$ dient der Anschauung. Für den Quotienten $X /\!\!/ Y$ ist sie jedoch eher hinderlich. Effizienter ist X als Quadrat mit Randidentifizierung (A:2).

(2) Konstruieren Sie wie in (2) einen Homöomorphismus $\mathbb{S}^p \wedge \mathbb{S}^q \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^{p+q}$.

(3) Seien X und Y lokal-kompakt hausdorffsch sowie $X \cup \{\infty\}$ und $Y \cup \{\infty\}$ ihre Alexandroff–Kompaktifizierungen, jeweils mit ∞ als Basispunkt. Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $(X \cup \{\infty\}) \wedge (Y \cup \{\infty\}) \xrightarrow{\sim} (X \times Y) \cup \{\infty\}$

§F9e. Lexikographische Ordnung.

Definition F9G. Sind $(X,<)$ und $(Y,<)$ total geordnet, dann erhalten wir auf der Produktmenge $X \times Y$ eine totale Ordnung indem wir koordinatenweise *lexikographisch ordnen*: Es gilt $(x,y) < (x',y')$ genau dann, wenn $x < x'$ gilt oder wenn $x = x'$ und $y < y'$ gilt.

Übung F9H. (1) Seien $(X,<)$ und $(Y,<)$ vollständig geordnet und Y habe Minimum und Maximum. Dann ist auch $X \times Y$ mit lexikographischer Ordnung vollständig geordnet.

(2) Wir versehen $Z = [0,1]^2$ mit der lexikographischen Ordnung. Sei $\mathcal{T}$ die zugehörige Ordnungstopologie (§D1i). Ist $(X,\mathcal{T})$ kompakt? und hausdorffsch?

✻ **F9H.** (1) Sei $E \subset X \times Y$ nicht-leer und beschränkt, also $E \leq (x_0,y_0)$. Die Projektion $\mathrm{pr}_1(E) \subset X$ ist nicht-leer und beschränkt, denn $E \leq x_0$. Wir setzen $a = \sup \mathrm{pr}_1(E) \in X$ und $b = \sup\{\, y \in Y \mid (a,y) \in E \,\} \in Y$; im Falle $\mathrm{pr}_1^{-1}(a) = \emptyset$ gilt $b = \min Y$. Dann ist (a,b) das Supremum von E. (2) Der Raum $(X,\mathcal{T})$ ist kompakt dank (1) und Satz F1D. Jede Ordnungstopologie ist separiert (D3L), sogar vollständig normal (E5D).

Übung F9I. Konstruieren Sie einen Ordnungsisomorphismus und somit einen Homöomorphismus $\mathbb{N} \times [0,1[\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mathbb{Z} \times [0,1[\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$. Gilt ebenso $\mathbb{Z} \times [0,1] \cong \mathbb{R}$?

✻ **F9I.** Wir definieren $f : \mathbb{N} \times [0,1[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch $f(k,a) = k + a$ und umgekehrt $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{N} \times [0,1[$ durch $f(x) = (\lfloor x \rfloor, x - \lfloor x \rfloor)$. Dies sind zueinander inverse Bijektionen und beide sind ordnungserhaltend. Ebenso konstruiert man $f : \mathbb{Z} \times [0,1[\to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{Z} \times [0,1[$. Hingegen existiert kein Homöomorphismus

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

$\mathbb{Z}\times[0,1]\cong\mathbb{R}$, wobei $\mathbb{Z}\times[0,1]$ die Topologie der lexikographischen Ordnung trage: Der Raum $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend, das heißt, jede offene Zerlegung $\mathbb{R}=A\sqcup B$ ist trivial, also $A=\emptyset$ und $B=\emptyset$, hingegen erlaubt $X=\mathbb{Z}\times[0,1]$ nicht-triviale offene Zerlegungen, etwa in $X_{<(1,0)}$ und $X_{>(0,1)}$.

Übung F9J. (1) Sei $(X,<)$ wohlgeordnet, das heißt, jede nicht-leere Teilmenge $E\subset X$ hat ein Minimum. Dann ist die lexikographische Ordnung auf $Z=X\times[0,1[$ vollständig.

(2) Bezüglich der Ordnungstopologie $\mathcal{T}$ ist jedes Intervall $[a,b]$ in $(Z,\mathcal{T})$ kompakt.

(3) Ist X zudem abzählbar, so existiert ein Homöomorphismus $Z\cong\mathbb{R}_{\geq 0}$.

✻ **F9J.** (1) Sei $E\subset X\times[0,1[$ nicht-leer. Die untere Schranke $(\min X,0)\leq E$ ist klar. Das Bild $\mathrm{pr}_1(E)\subset X$ ist nicht-leer, also existiert $a:=\min\mathrm{pr}_1(E)$ und $b:=\inf\{\,y\in[0,1[\mid(a,y)\in E\,\}$. Nach Konstruktion ist (a,b) die größte untere Schranke von E. Dank B2B sind inf–Vollständigkeit und sup–Vollständigkeit äquivalent.

(2) Jedes Intervall $[a,b]$ im Raum $(X,\mathcal{T})$ ist kompakt dank Satz F1D.

(3) Ist X abzählbar, so können wir $(X,<)$ in $(\mathbb{R},<)$ einbetten vermöge einer streng wachsenden Abbildung $f:X\to\mathbb{R}$ mit $f(\min X)=0$. Wie in F9I setzt sich dies fort zu einem Ordnungsisomorphismus $f:X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$.

§F9f. Die lange Gerade. Die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0}$ erhält man wie in F9I, wenn man abzählbare viele Intervalle $[0,1[$ aneinanderlegt. Die *lange Gerade* oder *Alexandroff–Gerade* $L_{\geq 0}$ erhält man entsprechend, wenn man überabzählbar viele Intervallen $[0,1[$ aneinanderlegt. Der entstehende Raum ist lokal homöomorph zur reellen Geraden, aber global gesehen „überabzählbar verlängert“. Dieser hat erstaunliche Eigenschaften und dient daher in der Topologie häufig als Gegenbeispiel für einen Raum, der lokal gutartig aber „zu groß“ ist.

Definition F9K. Sei $(\Omega,<)$ die kleinste überabzählbare Ordinalzahl, das bedeutet, $(\Omega,<)$ ist wohlgeordnet und überabzählbar, aber jedes Intervall $[0,a]$ in Ω ist abzählbar. Hierbei bezeichnen wir mit $0:=\min\Omega$ das kleinste Element von Ω.

- Die *lange Halbgerade* ist der Raum $L_{\geq 0}=\Omega\times[0,1[$ mit der Topologie der lexikographischen Ordnung. Die *einseitig lange Gerade* ist $L_{>0}=L_{\geq 0}\smallsetminus\{(0,0)\}$.
- Die Einpunktkompaktifizierung $L^*_{\geq 0}=L_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ entsteht durch Hinzufügen eines maximalen Elements ∞, und die erweiterte Ordnung induziert die Topologie auf $L^*_{\geq 0}$.
- Die *beidseitig lange Gerade* $L=L_{\geq 0}\cup L_{\leq 0}$: Hier trägt $L_{\geq 0}$ die obige Ordnung und $L_{\leq 0}:=-L_{\geq 0}$ die umgekehrte Ordnung, und wir identifizieren $0=+(0,0)=-(0,0)$.
- Die Kompaktifizierung $L^*=L\cup\{\pm\infty\}$ entsteht durch Hinzufügen eines maximalen bzw. minimalen Elements $\pm\infty$, und diese Ordnung induziert die Topologie auf L^*.

Übung F9L. Die Räume $L_{\geq 0}$ und L haben dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.

Versehen mit der Ordnungstopologie sind $L_{\geq 0}$ und L hausdorffsch und lokal-kompakt. Sie erfüllen das erste aber nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom und sind nicht separabel.

Jede wachsende Folge $x_0\leq x_1\leq x_2\leq\dots$ in L hat ein Supremum und konvergiert in L. Daher sind $L_{\geq 0}$ und L folgenkompakt aber nicht kompakt, also nicht metrisierbar.

Jedes Intervall $[0,a[$ mit $0<a$ in L ist homöomorph zu $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Insbesondere ist $L_{\geq 0}$ lokal homöomorph zu $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Der gesamte Raum $L_{\geq 0}$ ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Jede stetige Funktion $f:L_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ ist schließlich konstant, das heißt, es existiert $a\in L$ und $c\in\mathbb{R}$ sodass $f(x)=c$ für alle $x\geq a$. Entsprechendes gilt für L.

You can always come back,
but you can't come back all the way.
Bob DYLAN, *Mississippi*

KAPITEL G

Zusammenhang und Homotopie

§G0. Einführung und Überblick

☞ Die Zahlengerade $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend, aber $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ☜ ist zusammenhängend, aber $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ auch. Offenbar ist $\mathbb{Z}$ unzusammenhängend, doch wie steht es mit dem Raum $\mathbb{Q}$? Schon bei diesen einfachen und erst recht bei komplexeren Beispielen müssen wir unsere Intuition durch eine tragfähige Definition stützen!

§G0a. Zusammenhang. Dieses Kapitel diskutiert *Zusammenhang* und *Wegzusammenhang* und beweist ihre grundlegenden Eigenschaften. Zwei Punkte $a, b \in X$ heißen *verbindbar* durch einen Weg in X, wenn eine stetige Abbildung $h : [0,1] \to X$ existiert mit $h(0) = a$ und $h(1) = b$. Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Wegkomponenten* von X und dienen häufig als praktisches Unterscheidungsmerkmal.

§G0b. Homotopie. Stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ sind *homotop*, wenn sie sich ineinander deformieren lassen, durch $H : [0,1] \times X \to Y$ stetig mit $H(0,x) = f(x)$ und $H(1,x) = g(x)$ für alle $x \in X$. Dies interpretieren wir als Weg $H : f \simeq g$ von f nach g im Abbildungsraum $\mathscr{C}(X,Y)$. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation. Durch Übergang von stetigen Abbildungen zu ihren Homotopieklassen gelangen wir zur *Homotopiekategorie*.

☞ **§G0c. Homotopie-Äquivalenz.** Die Aussage „der Raum X sieht topologisch *genauso* aus wie der Raum Y" wird durch die *Homöomorphie* präzisiert: Es existieren stetige ☜ Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$, die $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ erfüllen.

Dies ist eine sehr starke und oft zu starre Forderung. Zum Beispiel sieht die punktierte Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so ähnlich aus wie die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$: Beide haben ein Loch. Sie sind jedoch nicht homöomorph: Je zwei Punkte trennen $\mathbb{S}^1$, nicht aber $\mathbb{C}^*$.

Die Aussage „der Raum X sieht topologisch *so ähnlich* aus wie der Raum Y" wird durch den Begriff der *Homotopie-Äquivalenz* präzisiert: Es existieren stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ sowie Homotopien $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Das bedeutet anschaulich, die Räume X und Y lassen sich stetig ineinander deformieren.

§G0d. Vorgehensweise. Dieses Kapitel legt zu obigen Begriffen die Grundlagen und gibt erste Beispiele. In den folgenden Kapiteln werden diese Techniken dann ausgebaut.

§G1. Zusammenhang

§G1a. Zusammenhängende Räume. In jedem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ sind die Teilmengen $\emptyset$ und X sowohl offen als auch abgeschlossen. Allgemein sind äquivalent:

- Die Teilmenge $A \subset X$ ist offen und abgeschlossen, das heißt $\overline{A} = A^\circ$, also $\delta A = \emptyset$.
- Das Komplement $B = X \smallsetminus A$ ist offen und abgeschlossen.
- Der Raum $X = A \sqcup B$ zerfällt in zwei disjunkte offene Teilmengen A, B.

In diesem Falle nennen wir (A,B) eine *offene Zerlegung* des Raumes $(X,\mathcal{T})$. Er ist dann die topologische Summe $(X,\mathcal{T}) = (A,\mathcal{T}_A) \sqcup (B,\mathcal{T}_B)$ dieser beiden Teilräume (E3A).

Beispiel. Jeder Raum X erlaubt die *triviale* offene Zerlegung $X = \emptyset \sqcup X = X \sqcup \emptyset$.

Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ erlaubt die offene Zerlegung $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$.

Proposition G1A. *Für jedes Intervall $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, gilt dank Zwischenwertsatz (C3R):*

(1) Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ hat die Zwischenwerteigenschaft:
Zu $a,b \in X$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.
(2) Für jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist das Bild $f(X) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.
(3) Jede stetige Funktion $f : X \to \{0,1\}$ (mit diskreter Topologie) ist konstant.
(4) Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ in einen diskreten Raum Y ist konstant.
(5) Für jede offene Zerlegung $X = A \sqcup B$ gilt entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Für jeden nicht-leeren Raum $(X,\mathcal{T})$ sind (1–5) äquivalent.

BEWEIS. Die Implikationen „(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇔ (4)“ sind klar.

„(3) ⇒ (5)“: Ist $X = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung, so ist $f : X \to \{0,1\}$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$ stetig. Dank (3) gilt entweder $A = f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ oder $B = f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

„(5) ⇒ (1)“: Angenommen $f : X \to \mathbb{R}$ ist stetig und zu $a,b \in X$ gäbe es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y < f(b)$ aber $y \notin f(X)$. Dann wäre $X = A \sqcup B$ mit $a \in A = f^{-1}(\mathbb{R}_{<y})$ und $b \in B = f^{-1}(\mathbb{R}_{>y})$ eine offene Zerlegung von X, im Widerspruch zu (5). □

Definition G1B. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt *zusammenhängend*, wenn (5) gilt. Einen nicht-leeren, nicht zusammenhängenden Raum nennen wir *unzusammenhängend*.

Nullologie. Der leere Raum $\emptyset$ ist nicht zusammenhängend, da er nichts enthält, was zusammenhängen könnte. Diese Konvention ist Geschmackssache, doch häufig muss die leere Menge ohnehin ausgeschlossen werden. Beispiele: Genau dann ist $f : X \to Y$ konstant, wenn $f(X) = \{y\}$. Ein Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn $\mathcal{Z}(X) = \{X\}$, und genau dann wegzusammenhängend, wenn $\pi_0(X) = \{X\}$ gilt. Ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ ist offen und zusammenhängend – und nicht-leer!

Beispiele.
- Jeder diskrete Raum $(X,\mathfrak{P}X)$ mit $|X| \geq 2$ ist unzusammenhängend.
- Jeder indiskrete Raum $(X,\{\emptyset,X\})$ mit $X \neq \emptyset$ ist zusammenhängend (und langweilig).
- Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$, ist zusammenhängend dank Zwischenwertsatz (C3R).
- Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist der Raum $X = \mathbb{R} \smallsetminus \{t\} = \mathbb{R}_{<t} \sqcup \mathbb{R}_{>t}$ unzusammenhängend.
- Ebenso ist $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<\xi} \sqcup \mathbb{Q}_{>\xi}$ unzusammenhängend, wobei $\xi \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

Bemerkung. Zusammenhang des Raumes $(X,\mathcal{T})$ ist eine topologische Eigenschaft (A1F): Die Definition G1B verwendet nur die Topologie $\mathcal{T}$. Gleiches kennen wir von T_i, 1AA, 2AA, Kompaktheit, etc. Topologische Eigenschaften bleiben bei Homöomorphismen erhalten.

§G1b. Zusammenhängende Teilräume. Eine Teilmenge $X \subset Y$ eines topologischen Raumes $(Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie als Teilraum zusammenhängend ist.

Beispiel. Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle (G1D). Der Teilraum $X = [0,1] \cup]2,3]$ in $\mathbb{R}$ ist unzusammenhängend, denn er lässt sich in die disjunkten offenen Teilmengen $[0,1]$ und $]2,3]$ zerlegen. (Offen? Ja, offen in X!)

Beispiel G1C. In jedem diskreten Raum ist jede zusammenhängende Teilmenge einelementig. Ein unzusammenhängender Raum mit dieser Eigenschaft heißt *total unzusammenhängend*. Dies gilt zum Beispiel für den Raum $\mathbb{Q}$, obwohl $\mathbb{Q}$ nicht diskret ist.

§G1c. Zusammenhängende Intervalle. Der folgende Satz zeigt erneut, dass jedes Intervall in $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist. Das Argument ist jedoch wesentlich allgemeiner und benutzt nur die Ordnungstopologie (§D1i) und die Supremums-Vollständigkeit (§B2b):

Satz G1D. *Sei $(X,<)$ eine total geordnete Menge, $X \neq \emptyset$ mit Ordnungstopologie $\mathcal{T}$.*

(1) Ist ein Teilraum I in $(X,\mathcal{T})$ zusammenhängend, so ist I ein Intervall in $(X,<)$.

(2) Genau dann ist X (und jedes nicht-leere Intervall $I \subset X$) zusammenhängend, wenn $(X,<)$ ordnungsvollständig ist und die Zwichenpunkteigenschaft erfüllt: Zu je zwei Punkten $x < y$ in X ein Zwischenpunkt $z \in X$ existiert mit $x < z < y$.

Beispiel. Die reellen Zahlen $(\mathbb{R},<)$ sind vollständig geordnet. Dank G1D ist jedes reelle Intervall $I \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend. Dies ist die Aussage des Zwischenwertsatzes (C3R).

Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q},<)$ erfüllen die Zwischenpunktbedingung, sind aber nicht vollständig geordnet. Wie oben gesehen ist $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend.

Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z},<)$ sind vollständig geordnet, erfüllen aber nicht die Zwischenpunktbedingung. Die Ordnungstopologie ist diskret und daher unzusammenhängend.

Beispiel. Etwas exotischer: Die lange Gerade L (F9K) ist zusammmenhängend.

Bevor Sie weiterlesen, versuchen Sie den Satz selbst zu beweisen: Es ist lehrreich!

BEWEIS DES SATZES. (1) Aus $a < t < b$ in X mit $a,b \in I$ aber $t \notin I$ folgt $I = I_{<t} \sqcup I_{>t}$.

(2) „⇐“: Sei $I \subset X$ ein Intervall und $I = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung, $a \in A$, $b \in B$. Wir können $a < b$ annehmen; notfalls vertauschen wir A und B. Die Menge $E := A \cap [a,b]$ ist nicht-leer ($a \in E$) und beschränkt ($E < b$). Also existiert $s := \sup E$ in $[a,b] \subset I$.

Wäre $s \in A$, so folgt $a \leq s < b$. Da A offen ist, gilt $[s,t[\subset A$ für ein $t \in]s,b]$. Jeder Zwischenpunkt z mit $s < z < t$ erfüllt $[s,z] \subset A$, was dem Supremum s widerspricht.

Wäre $s \in B$, so folgt $a < s \leq b$. Da B offen ist, gilt $]t,s] \subset B$ für ein $t \in [a,s[$. Jeder Zwischenpunkt z mit $t < z < s$ erfüllt $[z,s] \subset B$, was dem Supremum s widerspricht.

„⇒“: Die Zwischenpunktbedingung ist klar: Wäre $x < y$ in X ohne Zwischenpunkte, so wäre $X = X_{<y} \sqcup X_{>x} = X_{\leq x} \sqcup X_{\geq y}$ eine offene / abgeschlossene Zerlegung.

Wir zeigen die Vollständigkeit von $(X,<)$: Angenommen $E \subset X$ ist nicht-leer, $a \in E$, und nach oben beschränkt, $E \leq b$, erlaubt aber kein Supremum in X. Dann ist $[a,b]$ nicht zusammenhängend: Sei $T = \{ t \in [a,b] \mid E \leq t \}$ und $S = \{ s \in [a,b] \mid s \leq T \}$. Es gilt $a \in S$ und $b \in T$ sowie $[a,b] = S \cup T$, denn zu $x \in [a,b]$ mit $x \notin T$ existiert $e \in E$ mit $x < e$, wegen $e \leq T$ also $x \in S$. Für $x \in X$ sind äquivalent: $x \in S \cap T$, $x = \max S$, $x = \min T$, $x = \sup E$. Da dieses Element $x \in X$ nicht existiert, ist $[a,b] = S \sqcup T$ eine offene Zerlegung. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§G1d. Stetige Abbildungen zusammenhängender Räume. Zusammenhang ist eine topologische Eigenschaft (A1F) und bleibt sogar unter stetigen Surjektionen erhalten:

Satz G1E. *Sei $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so auch das Bild $f(X) \subset Y$.*

BEWEIS. Ist $f(X) = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung, so auch $X = f^{-1}(A) \sqcup f^{-1}(B)$. Ist X zusammenhängend, so folgt $f^{-1}(A) = \emptyset$ oder $f^{-1}(B) = \emptyset$, also $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. □

Übung G1F. Ist $\mathrm{GL}_2\mathbb{R} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid ad - bc \neq 0 \right\}$ zusammenhängend? und $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$? Nein!

✻ **G1F.** Die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist eine Polynomfunktion (B1Y) und somit stetig; für $n = 2$ gilt $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$. Sie ist surjektiv wegen $\det \mathrm{diag}(a, 1, \ldots, 1) = a$. Genau dann ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Demnach gilt $\mathrm{GL}_n\mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0 \}$, und $\mathrm{GL}_n^{\pm}\mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \gtrless 0 \}$ ist eine nicht-triviale offene Zerlegung von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Dies sind genau die (Weg)Komponenten, siehe G2N.

§G1e. Abschluss zusammenhängender Teilräume.

Lemma G1G. *In einem Raum X sei $A \subset B \subset \overline{A}$. Ist A zusammenhängend, so auch B.*

BEWEIS. Ist $f : B \to \{0,1\}$ stetig, so auch $f|_A$, also $f|_A = \mathrm{const}_A^c$ konstant (G1A). Die stetigen Abbildungen $f, \mathrm{const}_B^c : B \to \{0,1\}$ stimmen auf A überein; in B ist A dicht, zudem ist $\{0,1\}$ hausdorffsch, also folgt $f = \mathrm{const}_B^c$ auf ganz B (D5L). □

Beispiel G1H. In $\mathbb{R}^2$ betrachten wir den Funktionsgraphen $A := \{(x, \sin(\pi/x)) \mid x \in]0,1]\}$, siehe Abbildung G:2. Das Intervall $]0,1]$ ist zusammenhängend dank G1D. Das stetige Bild $A \subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend dank G1E, also auch der Abschluss $\overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,+1])$ dank G1G. (Jedoch ist $\overline{A}$ nicht wegzusammenhängend, siehe G2K.)

§G1f. Vereinigung zusammenhängender Räume.

Lemma G1I. *Im Raum $(X, \mathcal{T})$ sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilräume $A_i \subset X$, $I \neq \emptyset$, sodass zu jedem Paar $i, j \in I$ eine Kette $i = i_0, i_1, \ldots, i_n = j$ in I existiert mit $A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k} \neq \emptyset$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Dann ist $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ zusammenhängend.*

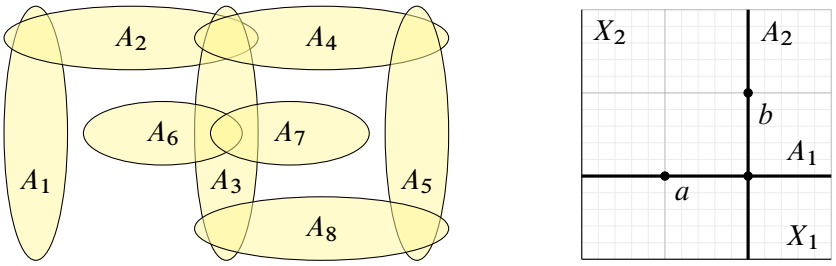


ABBILDUNG G:1. Vereinigung und Produkt zusammenhängender Räume

BEWEIS. Sei $f : A \to \{0,1\}$ stetig. Jede Einschränkung $f|_{A_i} : A_i \to \{0,1\}$ ist stetig und somit konstant, $f|_{A_i} = c_i$, da A_i zusammenhängend ist. Für jede Kette $i = i_0, i_1, \ldots, i_n = j$ wie oben folgt $c_i = c_{i_0} = c_{i_1} = \cdots = c_{i_n} = c_j$. Also ist f konstant. □

Die Kettenbedingung ist insbesondere erfüllt, wenn $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$, oder stärker noch, wenn ein Punkt $a \in X$ existiert mit $a \in A_i$ für alle $i \in I$, also $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^n = \bigcup_{s\in\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{R} \cdot s$ ist zusammenhängend dank G1D, G1E und G1I.

§G1g. Zusammenhangskomponenten. Jeder topologische Raum kann eindeutig in Zusammenhangskomponenten zerlegt werden, also maximale zusammenhängende Teilräume. Dies gibt Auskunft darüber, wie unzusammenhängend der Raum ist.

Definition G1J. Wir nennen $a, b \in X$ *zusammenhängend in* X, wenn beide in einem zusammenhängenden Teilraum $A \subset X$ liegen. Dank G1I ist dies eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse $\langle a \rangle_X$ von a in X heißt die *(Zusammenhangs-)Komponente* von a in X. Dies definiert die Zerlegung $\mathcal{Z}(X) := \{ \langle a \rangle_X \mid a \in X \}$ von X in Komponenten.

Bemerkung. Genau dann ist der Raum X zusammenhängend, wenn $\mathcal{Z}(X) = \{X\}$ gilt.

Beispiele. Es gilt $\mathcal{Z}(\mathbb{R} \smallsetminus \{t\}) = \{\mathbb{R}_{<t}, \mathbb{R}_{>t}\}$ und $\mathcal{Z}(\mathbb{Q}) = \{ \{a\} \mid a \in \mathbb{Q} \}$. Obwohl $\mathbb{Q}$ nicht diskret ist, bestehen die Zusammenhangskomponenten jeweils nur aus einem Punkt (G1C).

Satz G1K. *Sei X ein topologischer Raum.*

(1) Zu $a \in X$ ist $\langle a \rangle_X$ die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die a enthält.
(2) Jede Zusammenhangskomponente $\langle a \rangle_X$ des Raumes X ist abgeschlossen in X.
(3) Ist die Zerlegung $\mathcal{Z}(X)$ lokal-endlich, so ist jede Komponente $\langle a \rangle_X$ offen.

Letzteres bedeutet $X = \bigsqcup_{i \in I} \langle a_i \rangle_X$ mit der Summentopologie, wie etwa für $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ oder $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$. Dies gilt nicht mehr bei beliebiger Zerlegung, wie $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ zeigen.

BEWEIS. (1) Nach Definition G1J ist $\langle a \rangle_X$ die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen $A \subset X$, die a enthalten. Nach G1I ist $\langle a \rangle_X$ selbst zusammenhängend.

(2) Dank (1) und G1G ist $\overline{\langle a \rangle_X} \ni a$ zusammenhängend, also $\overline{\langle a \rangle_X} \subset \langle a \rangle_X$.

(3) In der Zerlegung $X = \bigsqcup_{i \in I} \langle a_i \rangle_X$ ist jede Menge $\langle a_i \rangle_X$ offen, denn ihr Komplement $\bigsqcup_{j \neq i} \langle a_j \rangle_X$ ist lokal-endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen (D5G). □

§G1h. Zusammenhang in Summenräumen.

Satz G1L. *(1) Im Summenraum $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ gilt $\langle a \rangle_X = \langle a \rangle_{X_i}$ für $a \in X_i$.*

(2) Für die Zerlegung in Komponenten folgt $\mathcal{Z}\big(\bigsqcup_{i \in I} X_i\big) = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{Z}(X_i)$.

BEWEIS. (1) „$\supseteq$“: Der Teilraum $\langle a \rangle_{X_i}$ ist zusammenhängend, also enthalten in $\langle a \rangle_X$.

„$\subseteq$“: Wir haben die offene Zerlegung $X = X_i \sqcup X_i'$ mit $X_i' = \bigcup_{j \neq i} X_j$. Zu $C := \langle a \rangle_X$ erhalten wir die offene Zerlegung $C = (C \cap X_i) \sqcup (C \cap X_i')$. Aus $a \in C \cap X_i$ folgt $C \cap X_i' = \emptyset$, also $C \subseteq X_i$, somit $C \subseteq \langle a \rangle_{X_i}$.

(2) Für die Komponenten des Summenraums $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ folgt:

$$\mathcal{Z}(X) \overset{\text{Def}}{=} \big\{ \langle a \rangle_X \,\big|\, a \in X \big\} \overset{(0)}{=} \bigcup_{i \in I} \big\{ \langle a_i \rangle_X \,\big|\, a \in X_i \big\} \overset{(1)}{=} \bigcup_{i \in I} \big\{ \langle a_i \rangle_{X_i} \,\big|\, a \in X_i \big\} \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{i \in I} \mathcal{Z}(X_i)$$

Die letzte Vereinigung ist disjunkt. □

Für diesen Satz ist wesentlich, dass die Zerlegung $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ *offen* ist.

Gegenbeispiel: Für die disjunkte Zerlegung $X = [0,2] = A \sqcup B$ in die zusammenhängenden Mengen $A = [0,1[$ und $B = [1,2]$ gilt nicht $\mathcal{Z}(X) = \{A, B\}$, sondern $\mathcal{Z}(X) = \{X\}$.

Raffinierter: Für die Sinuskurve des Topologen $C = \overline{A} = A \sqcup B$ sind A und B zusammenhängend, aber es gilt nicht $\mathcal{Z}(C) = \{A, B\}$, sondern $\mathcal{Z}(C) = \{C\}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§G1i. Wegzusammenhang in Produkträumen.

Satz G1M. *(1) Genau dann ist $X = \prod_{i\in I} X_i$ zusammenhängend, wenn alle X_i es sind.*
(2) Für $a \in X$ gilt $\langle a\rangle_X = \prod_{i\in I}\langle a_i\rangle_{X_i}$, also $\mathcal{Z}\big(\prod_{i\in I} X_i\big) = \big\{\prod_{i\in I} A_i \;\big|\; A_i \in \mathcal{Z}(X_i)\big\}$.

BEWEIS. (1) „⇒“: Ist X zusammenhängend, so auch $X_i = p_i(X)$ (G1E).

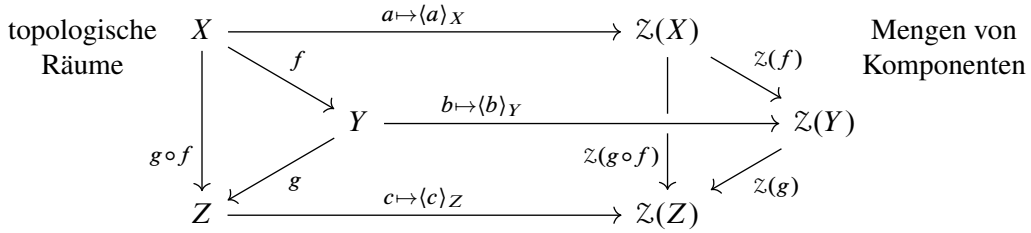
„⇐“: Sei zunächst I endlich, etwa $I = \{1,2,\dots,n\}$, also $X = X_1 \times \dots\dots X_n$. Zu $a,b \in X$ ist $A_i := \{b_1\}\times\cdots\times\{b_{i-1}\}\times X_i \times\{a_{i+1}\}\times\cdots\times\{a_n\} \cong X_i$. Mit X_i ist auch A_i zusammenhängend. Es gilt $a \in A_1$ und $b \in A_n$ sowie $(b_1,\dots,b_i,a_{i+1},\dots,a_n) \in A_i \cap A_{i+1}$. Dank Lemma G1I ist somit $A := A_1 \cup\cdots\cup A_n$ zusammenhängend.

Sei nun I beliebig (unendlich). Sei $a \in X$. Für $J \subset I$ endlich sei $A_J = \prod_{i\in I} A_i$ mit $A_i = X_i$ für $i \in J$ und $A_i = \{a_i\}$ für alle $i \in I \smallsetminus J$. Das endliche Produkt $A_J \cong \prod_{i\in J} X_i$ ist zusammenhängend. Auch $A = \bigcup\{A_J \mid J \subset I \text{ endlich}\}$ ist zusammenhängend, dank G1I und $a \in A_J$ für alle J, nach G1G somit auch $\overline{A} = X$.

Wir zeigen $\overline{A} = X$. Jede offene Menge $\emptyset \neq U \subset X$ enthält $\prod_{i\in I} U_i$ mit $\emptyset \neq U_i \subset X_i$ offen und $U_i = X_i$ für alle Indizes $i \in I \smallsetminus J$ außerhalb einer endlichen Menge $J \subset I$. Demnach existiert $b \in U$ mit $b_j \in U_j$ für $j \in J$ und $b_i = a_i$ für alle $i \in I \smallsetminus J$. Somit $b \in A_J \subset A$, also $U \cap A \neq \emptyset$. Das bedeutet, A ist dicht in X ist, kurz $\overline{A} = X$.

(2) Für $a \in X$ gilt $\langle a\rangle_X \subset \prod_{i\in I}\langle a_i\rangle_{X_i}$, denn $p_i(\langle a\rangle_X) \ni a_i$ ist zusammenhängend (G1E), also $p_i(\langle a\rangle_X) \subset \langle a_i\rangle_{X_i}$ für alle $i \in I$. Umgekehrt gilt $\langle a\rangle_X \supset \prod_{i\in I}\langle a_i\rangle_{X_i}$, denn dieses Produkt enthält a und ist zusammenhängend dank (1). Der Rest ist klar. □

§G1j. Funktorialität. Jedem topologischen Raum X ordnen wir die Menge $\mathcal{Z}(X)$ seiner Zusammenhangskomponenten zu. Wir gehen einen entscheidenden Schritt weiter und ordnen jeder stetigen Abbildung $f : X \to Y$ eine Abbildung $\mathcal{Z}(f) : \mathcal{Z}(X) \to \mathcal{Z}(Y)$ dieser Mengen zu. Diese Zuordnung ist in folgendem Sinne funktoriell:



Satz G1N. *Die Zuordnung $X \mapsto \mathcal{Z}(X)$ ist in folgendem Sinne funktoriell:*

(1) Ist $f : X \to Y$ stetig und $a \in X$, so gilt $f(\langle a \rangle_X) \subset \langle f(a) \rangle_Y$.
(2) Somit ist $\mathcal{Z}(f) : \mathcal{Z}(X) \to \mathcal{Z}(Y) : \langle a \rangle_X \mapsto \langle f(a) \rangle_Y$ wohldefiniert.
(3) Sie erhält Identität $\mathcal{Z}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{Z}(X)}$ und Komposition $\mathcal{Z}(g \circ f) = \mathcal{Z}(g) \circ \mathcal{Z}(f)$.

Jeder Homöomorphismus $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ induziert eine Bijektion $\mathcal{Z}(h) : \mathcal{Z}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(Y)$.

BEWEIS. (1) Die Komponente $\langle a \rangle_X$ ist zusammenhängend (G1K), also auch ihr stetiges Bild $f(\langle a \rangle_X)$ dank G1E. Dieses enthält $f(a)$, also gilt $f(\langle a \rangle_X) \subset \langle f(a) \rangle_Y$ dank G1K.

(2) Die Zuordnung $\langle a \rangle_X \mapsto \langle f(a) \rangle_Y$ ist wohldefiniert, das heißt unabhängig vom gewählten Repräsentanten a: Aus $\langle a \rangle_X = \langle b \rangle_X$ folgt $\langle f(a) \rangle_Y = \langle f(b) \rangle_Y$, denn nach (1) enthalten beide Komponenten die Bildmenge $f(\langle a \rangle_X) = f(\langle b \rangle_X)$, sind also gleich.

(3) Die Aussage $\mathcal{Z}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{Z}(X)}$ ist klar. Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(g \circ f)(\langle a \rangle_X) &= \langle (g \circ f)(a) \rangle_Z = \langle g(f(a)) \rangle_Z = \mathcal{Z}(g)(\langle f(a) \rangle_Y) \\ &= \mathcal{Z}(g)(\mathcal{Z}(f)(\langle a \rangle_X)) = (\mathcal{Z}(g) \circ \mathcal{Z}(f))(\langle a \rangle_X). \end{aligned}$$

□

Beispiel G1O. Es gilt $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$ mit $A =]-\infty, -1[$, $B =]-1, 0[$, $C =]0, 1[$, $D =]1, \infty[$, also $\mathcal{Z}(X) = \{A, B, C, D\}$. (Warum?) Für $f : X \to X : x \mapsto 1/x$ gilt $\mathcal{Z}(f) : A \mapsto B, B \mapsto A, C \mapsto D, D \mapsto C$. (Berechnung durch Repräsentanten! Wohldefiniertheit!) Untersuchen Sie ebenso $g(x) = -x$ und $h(x) = x^2$ und $k(x) = x^3$ und Kompositionen. Was geht schief für $Y = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$ und denselben Abbildungen f, g, h, k?

Übung G1P. (1) Welche Komponenten hat $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$? $(\mathbb{R}^*)^2$? $(\mathbb{R}^*)^I$?
(2) Die Cantor–Menge $C = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist total unzusammenhängend (C6D, E4W).

✻ **G1P.** (1) Es gilt $\mathcal{Z}(X) = \{ A =]-\infty, -1[, B =]-1, 1[, C =]1, \infty[\}$. Satz G1M oder eine einfache Skizze von $X \times X \subset \mathbb{R}^2$ zeigt $\mathcal{Z}(X \times X) = \{ A \times A, A \times B, A \times C, B \times A, B \times B, B \times C, C \times A, C \times B, C \times C \}$. Dank G1M gilt für jede Indexmenge I allgemein $\mathcal{Z}((\mathbb{R}^*)^I) = \{ \prod_{i \in I} Z_i \mid Z_i \in \{A, B, C\} \}$.

(2) Wie für jeden diskreten Raum gilt $\mathcal{Z}(\{0, 1\}) = \{\{0\}, \{1\}\}$. Dank Satz G1M erhalten wir die Zusammenhangskomponenten $\mathcal{Z}(\prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}) = \{ \prod_{i \in I} A_i \mid A_i \in \{\{0\}, \{1\}\} \} = \big\{ \{x\} \bigm| x \in C \big\}$.

Übung G1Q (Satz vom Grenzübertritt)**.** Sei $A \subset X$ zusammenhängend und $B \subset X$. Wenn A sowohl B als auch das Komplement $X \setminus B$ trifft, dann trifft A auch den Rand von B.

✻ **G1Q.** Es gilt $X = \overline{B} \cup \overline{X \setminus B}$, also $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{X \setminus B})$. Nach Voraussetzung gilt sowohl $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ als auch $A \cap \overline{X \setminus B} \neq \emptyset$. Beide Mengen sind abgeschlossen in A, und da A zusammenhängend ist, können sie nicht disjunkt sein. Also gilt $A \cap \overline{B} \cap \overline{X \setminus B} = A \cap \delta B \neq \emptyset$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§G1k. Hilberts Kloster.** Der Satz von Cantor–Bernstein (B2O) konstruiert zu je zwei ☜ vorgegebenen Injektionen $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$ eine Bijektion $h : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Gilt ein entsprechender Satz auch für topologische Räume und stetige Abbildungen? Stärker noch: Angenommen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ sind bijektiv und stetig, sind die Räume X und Y dann homöomorph? Erstaunlicherweise gilt dies im Allgemeinen nicht:

Übung G1R (Hilberts Kloster, mit offenen und abgeschlossenen Zellen)**.** Wir betrachten

$$X =]0,1[\cup [2,3] \cup]4,5[\cup [6,7] \cup \dots,$$
$$Y =]0,1] \cup [2,3] \cup]4,5[\cup [6,7] \cup \dots.$$

Gibt es stetige Bijektionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$? Einen Homöomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$?

✻ **G1R.** Es gibt keinen Homöomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$: Ein solcher Homöomorphismus müsste Zusammenhangskomponenten von X homöomorph auf Zusammenhangskomponenten von Y abbilden. Zur Komponente $]0,1]$ in Y existiert aber keine homöomorphe Zusammenhangskomponente in X. Dennoch gibt es stetige Bijektionen, etwa $f : X \to Y$ mit $f|_{]0,1[}(x) = x/2$ und $f|_{[2,3]}(x) = (x-1)/2$ sowie $f|_{]4k,4k+1[}(x) = x$ und $f|_{[4k+2,4k+3]}(x) = x-4$ für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Konstruieren Sie ebenso explizit eine stetige Bijektion $g : Y \to X$!

☞ **§G1l. Charakterisierungen des Körpers der reellen Zahlen.** Zur Grundlegung der ☜ Analysis werden für den Körper der reellen Zahlen gewisse Eigenschaften benötigt...

Satz G1S. *Wir betrachten einen geordneten Körper $(K,+,\cdot,<)$ und versehen ihn mit seiner Ordnungstopologie (D1M). Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(1) Supremumseigenschaft von $(K,<)$: Ist eine Teilmenge $E \subset K$ nicht-leer und nach oben beschränkt, so existiert zu E ein Supremum (kleinste obere Schranke) in K.
(2) Lokale Kompaktheit von $(K,\mathcal{T}_<)$: Das Intervall $[0,1]$ ist kompakt.
(3) Zusammenhang von $(K,\mathcal{T}_<)$: Das Intervall $[0,1]$ ist zusammenhängend.
(4) Zwischenwerteigenschaft von $(K,\mathcal{T}_<)$: Zu jeder stetigen Funktion $f : [a,b] \to K$ mit $f(a) < 0 < f(b)$ existiert ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$.

Zusammen mit dem archimedischen Axiom sind weiters hierzu äquivalent:

(5) Bolzano–Weierstraß: Zu jeder monoton wachsenden und nach oben beschränkten Folge $a_0 \leq a_1 \leq a_n \leq \dots \leq b$ in K existiert ein Grenzwert in K.
(6) Intervallschachtelung: Jede Intervallfolge $[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \dots$ in K hat nicht-leeren Durchschnitt, das heißt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n] \neq \emptyset$.
(7) Cauchy–Vollständigkeit: Jede Cauchy–Folge in K hat einen Grenzwert in K

Ein solcher Körper existiert. Zwischen je zwei geordneten Körper mit diesen Eigenschaften existiert genau ein Körperisomorphismus, und dieser erhält die Anordnung.

Beweisen Sie die Äquivalenz dieser Eigenschaften als umfassende Übung zur Wiederholung. Wie beweisen Sie die Existenz eines solchen Körpers? wie seine Eindeutigkeit?

Diese Vollständigkeitseigenschaften sind für den Aufbau der Analysis unabdingbar und werden ausgiebig genutzt: Der geordnete Körper $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ der rationalen Zahlen hat diese Eigenschaften nicht, deshalb vervollständigen wir ihn zum geordneten Körper $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ der reellen Zahlen. Die genannten Eigenschaften spielen schon in der Analysis und dann in der Topologie eine grundlegende Rolle. Der Satz erklärt somit, warum die reellen Zahlen das grundlegende Modell für viele Fragen der Topologie sind. Wären die reellen Zahlen nicht schon in der Analysis entstanden, wir müssten sie für die Topologie erfinden!

§G1m. Kann der Torus $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+)$ zu einer interessanten Algebra werden? In der additiven Gruppe $(\mathbb{R},+)$ haben wir die Untergruppe $\mathbb{Z}<\mathbb{R}$ und hierzu die Quotientengruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Sei $q:(\mathbb{R},+)\twoheadrightarrow(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+):x\mapsto x+\mathbb{Z}$ der Quotientenhomomorphismus. Anschaulich haben wir $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}\mathbb{S}^1:t+\mathbb{Z}\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ als topologischen Gruppenisomorphismus. Für $n\in\mathbb{N}$ erhalten wir den n–dimensionalen Torus $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+)\cong(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)^n\cong(\mathbb{S}^1,\cdot)^n$.

Übung G1T. Wir suchen zur Gruppe $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+)$ alle Algebrastrukturen $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+,\cdot)$.

(1) Können Sie die Gruppe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ zu einem Körper $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+,\cdot)$ ergänzen?
(2) Finden Sie alle Multiplikationsabbildungen $\cdot$, die die topologische Gruppe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ zu einer topologischen Algebra $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+,\cdot)$ ergänzen. Ausführliche Anleitung:
(3) Finden Sie alle stetigen Gruppenhomomorphismen $\varphi:(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$. *Hinweis:* Zu jedem $a\in\mathbb{Z}$ haben wir $\varphi_a:x\mapsto a\cdot x$. Gibt es weitere? Genauer hierzu:
(4) Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi:(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ lässt sich eindeutig hochheben zu $\tilde\varphi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$ mit $\varphi\circ q=q\circ\tilde\varphi$.
(5) Finden Sie ebenso alle Multiplikationsabbildungen $\cdot$, die die topologische Gruppe $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+)$ zu einer topologischen Algebra $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+,\cdot)$ ergänzen.

✻ **G1T.** (1) Nein! Hierzu brauchen wir noch keine Topologie, es genügt etwas Lineare Algebra. Jeder Körper $(K,+,\cdot)$ hat eine Charakteristik $p=\mathrm{char}(K)$: entweder eine Primzahl oder Null. Somit ist K ein Vektorraum über dem Primkörper $\mathrm{Char}(K)\cong\mathbb{Z}/p$. Im Falle $p\neq0$ hat jedes Element $a\neq0$ in $(K,+)$ die Ordnung p. Im Falle $p=0$ hat jedes Element $a\neq0$ in $(K,+)$ unendliche Ordnung. In der Gruppe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ hingegen gibt es Elemente jeder endlichen Ordnung m, etwa $1/m+\mathbb{Z}$, sowie Elemente unendlicher Ordnung, etwa $\sqrt{2}+\mathbb{Z}$. Dasselbe gilt für $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+)$, daher gibt es sicher keinen Körper $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+,\cdot)$.

(2) Die triviale Multiplikation ist $a\cdot b=0$ für alle $a,b\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Wir zeigen, dass dies die einzige Möglichkeit ist. Gegeben sei hierzu eine Multiplikation, also eine Abbildung $\cdot:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, die stetig ist und distributiv, also additiv in jedem Argument. Für jedes $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist $\varphi_x:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}:y\mapsto x\cdot y$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dank (3) gilt $\varphi_x:y\mapsto g(x)\cdot y$ für eine ganze Zahl $g(x)\in\mathbb{Z}$. Wir erhalten so die Abbildung $g:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}:x\mapsto g(x)$. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus und stetig. Da $\mathbb{Z}$ total unzusammenhängend ist, ist g konstant, und zwar gleich Null wegen $g(0)=0$. Somit folgt $x\cdot y=0$ für alle $x,y\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(3) Sei $\varphi:(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dank (4) haben wir die Hochhebung $\tilde\varphi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$ mit $\varphi\circ q=q\circ\tilde\varphi$. Jede additive Abbildung $\tilde\varphi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$ ist $\mathbb{Z}$–linear, somit auch $\mathbb{Q}$–linear, und mit Stetigkeit sogar $\mathbb{R}$–linear, also $\tilde\varphi(x)=ax$ mit einer Konstanten $a\in\mathbb{R}$. Hierbei gilt $\tilde\varphi(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$ genau dann, wenn $a\in\mathbb{Z}$ gilt. Also gilt $\varphi=\varphi_a:x+\mathbb{Z}\mapsto ax+\mathbb{Z}$. (Pontryagin–Dualität §F3f)

(4) Hochhebung gelingt allgemein für Überlagerungen, siehe Kapitel M; wir konstruieren sie hier *ad hoc*: Wir betrachten $\bar\varphi=\varphi\circ q:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ und heben dies wie folgt zu $\tilde\varphi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$: Dank Stetigkeit existiert ein $\varepsilon>0$ sodass $\bar\varphi([-\varepsilon,\varepsilon])\subset q(]-1/4,1/4[)$ gilt, und somit $\bar\varphi([-2\varepsilon,2\varepsilon])\subset q(]-1/2,1/2[)$. Dies können wir eindeutig heben zu $\hat\varphi=(q|_{]-1/4,1/4[})^{-1}\circ\bar\varphi:[0,\varepsilon]\to]-1/4,1/4[$. Dies setzen wir zu $\tilde\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fort durch $\tilde\varphi(x+k\varepsilon)=\hat\varphi(x)+k\hat\varphi(\varepsilon)$ für alle $x\in[0,\varepsilon]$ und $k\in\mathbb{Z}$. Dies ist stetig dank Verklebesatz (E1P). Zudem gilt $q\circ\tilde\varphi=\bar\varphi$, denn $q\circ\tilde\varphi(x+k\varepsilon)=q(\hat\varphi(x)+k\hat\varphi(\varepsilon))=q\circ\hat\varphi(x)+kq\circ\hat\varphi(\varepsilon)=\bar\varphi(x)+k\bar\varphi(\varepsilon)=\bar\varphi(x+k\varepsilon)$.

Wir zeigen, dass mit φ und $\bar\varphi$ auch $\tilde\varphi$ ein Gruppenhomomorphismus ist, also $\tilde\varphi(x+y)=\tilde\varphi(x)+\tilde\varphi(y)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt. Für $x,y\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ ist dies klar: Anwendung des Gruppenhomomorphismus q ergibt hier $q\circ\tilde\varphi(x+y)=\bar\varphi(x+y)=\bar\varphi(x)+\bar\varphi(y)=q\circ\tilde\varphi(x)+q\circ\tilde\varphi(y)=q(\tilde\varphi(x)+\tilde\varphi(y))$. Links gilt $x+y\in[-2\varepsilon,2\varepsilon]$, also $\bar\varphi(x+y)\in]-1/2,1/2[$, rechts $\bar\varphi(x),\bar\varphi(y)\in]-1/4,1/4[$, also $\bar\varphi(x)+\bar\varphi(y)\in]-1/2,1/2[$. Wir nutzen nun die Injektivität von $q:[-2\varepsilon,2\varepsilon]\to]-1/2,1/2[$ und schließen $\tilde\varphi(x+y)=\tilde\varphi(x)+\tilde\varphi(y)$ für alle $x,y\in[-\varepsilon,\varepsilon]$.

Für alle $x',y'\in\mathbb{R}$ gilt $x'=x+k\varepsilon$ und $y'=y+\ell\varepsilon$ mit $x,y\in[0,\varepsilon]$ und $k,\ell\in\mathbb{Z}$. Es folgt schließlich $\tilde\varphi(x')+\tilde\varphi(y')=\tilde\varphi(x)+k\tilde\varphi(\varepsilon)+\tilde\varphi(y)+\ell\tilde\varphi(\varepsilon)=\tilde\varphi(x+y)+(k+\ell)\tilde\varphi(\varepsilon)=\tilde\varphi(x+y+(k+\ell)\varepsilon)=\tilde\varphi(x'+y')$. Für die vorletzte Gleichung ist eine Fallunterscheidung nach $x+y\in[0,\varepsilon]$ und $x+y\in[\varepsilon,2\varepsilon]$ nötig.

(5) Hochhebung (4) gilt wörtlich genauso, ebenso Aussage (3): Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi:\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n\to\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist von der Form $\varphi:x+\mathbb{Z}^n\mapsto Ax+\mathbb{Z}^n$ mit $A\in\mathbb{Z}^{n\times n}$. Hieraus folgt (2): Nur die triviale Multiplikation ergänzt die topologische Gruppe $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+)$ zu einer topologischen Algebra $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,+,\cdot)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§G2. Wegzusammenhang

§G2a. Wege in einem topologischen Raum. Wir haben oben in §G1 die topologische Eigenschaft des *Zusammenhangs* eingeführt und illustriert. Die folgende Eigenschaft des *Wegzusammenhangs* ist etwas geometrischer und manchmal einfacher anzuwenden. Beide Begriffe sind nützlich und hängen eng zusammen, es lohnt sich daher beide zu nutzen.

Definition G2A (Wegzusammenhang)**.** Ein *Weg* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$. Dabei heißt $a = \gamma(0)$ der *Startpunkt* und $b = \gamma(1)$ der *Zielpunkt*. Wir sagen auch, *γ läuft von a nach b in X*, oder *γ verbindet a mit b in X*.

Wir nennen X *wegzusammenhängend*, falls $X \neq \emptyset$ gilt und zu je zwei Punkten $a, b \in X$ ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$ existiert.

Proposition G2B. *Wir halten folgende Beobachtung fest:*

(1) Jeder topologische $\mathbb{R}$–Vektorraum V, etwa $V = \mathbb{R}^n$, ist wegzusammenhängend.
(2) Jede bezüglich x_0 sternförmige Menge $X \subset V$ ist wegzusammenhängend.
(3) Für $\dim V \geq 2$ ist $V \smallsetminus \{0\}$ wegzusammenhängend, nicht jedoch für $\dim V = 1$.
(4) Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist wegzusammenhängend für $n \geq 1$, aber nicht für $n = 0$.

BEWEIS. Zum Aufwärmen als Fingerübung empfohlen! □

✻ **G2B.** (1) Zu $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-t)a + tb$ stetig und erfüllt $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

(2) Für $a, b \in X$ gilt $[a, x_0], [x_0, b] \subset X$. Wie in (1) verbinden wir a über x_0 mit b durch $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(t) = (1-2t)a + 2tx_0$ für $0 \leq t \leq 1/2$ und $\gamma(t) = (2-2t)x_0 + (2t-1)b$ für $1/2 \leq t \leq 1$.

(3) Für $n = 1$ gilt $V \cong \mathbb{R}$, und $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ist nicht wegzusammenhängend aufgrund des Zwischenwertsatzes C3R. Für $n \geq 2$ gilt: Sind $a, b \in V$ linear unabhängig oder $b \in \mathbb{R}_{>0} \cdot a$, so ist γ aus (1) ein Weg in $V \smallsetminus \{0\}$. Für $b \in \mathbb{R}_{<0} \cdot a$ existiert $c \in V$ linear unabhängig von a, b. Wir verbinden a über c mit b wie in (2).

(4) Für $n = 0$ ist $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ nicht wegzusammenhängend wegen des Zwischenwertsatzes C3R. Für $n \geq 1$ verbinden wir $a, b \in \mathbb{S}^n$ durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ wie in (3). Hieraus erhalten wir den Weg $\bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{S}^n : t \mapsto \gamma(t)/|\gamma(t)|$ von a nach b in $\mathbb{S}^n$. (Für $a \neq \pm b$ ist $\bar{\gamma}$ ein Segment eines Großkreises.) Aussage und Beweis gelten wörtlich genauso für jeden normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum V, auch unendlich-dimensional.

Satz G2C. *Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang, aber nicht umgekehrt (G2L).*

BEWEIS. Sei X wegzusammenhängend und $X = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung. Von $a \in A$ nach $b \in B$ existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$. Die offene Zerlegung $[0,1] = \gamma^{-1}(A) \sqcup \gamma^{-1}(B)$ mit $0 \in \gamma^{-1}(A)$ und $1 \in \gamma^{-1}(B)$ widerspricht G1A bzw. G1D. Also $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. □

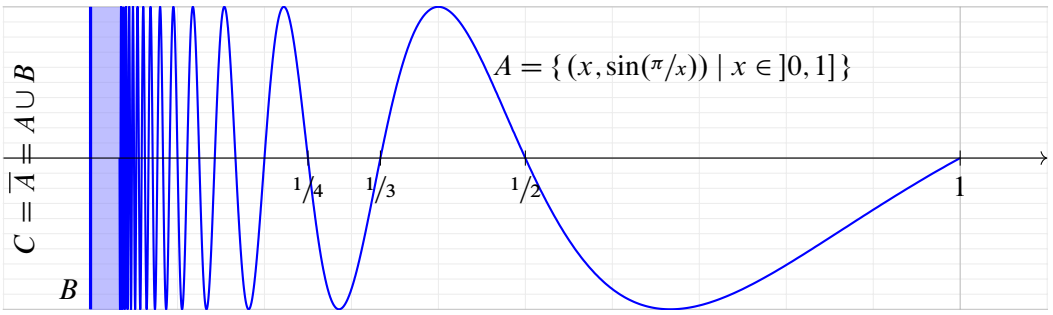


ABBILDUNG G:2. Die Sinuskurve des Topologen

§G2b. Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ sind nicht homöomorph. Sei $1 \leq m < n$. Aus der linearen Algebra wissen Sie, dass es keinen K–Vektorraum-Isomorphismus $K^m \xrightarrow{\sim} K^n$ gibt. (Wissen Sie noch, warum?) Hieraus folgert die Analysis, für $K = \mathbb{R}$, dass es keinen Diffeomorphismus $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ geben kann. (Wie folgt das? Siehe §C5m.) Hingegen gibt es sehr wohl Bijektionen $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ (B2N), sogar $\mathbb{Q}$–Vektorraum-Isomorphismen!

Bemerkung. Es gibt Homöomorphismen $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^2$ (A1Y), also $\mathbb{Q}^m \cong \mathbb{Q}^n$ für alle $m, n \geq 1$.

Wir fragen uns, ob es Homöomorphismen $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ geben kann. Wir zeigen später, dass dies nicht möglich ist (J7B). Den Spezialfall $m = 1 < n$ können wir sofort klären:

Satz G2D. *Es existiert kein Homöomorphismus $(f, g) : \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$.*

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Raum $\mathbb{R} \smallsetminus \{x\}$ nicht zusammenhängend, aber der Raum $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{y\}$ ist zusammenhängend für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ (G2B, G2C). Da Zusammenhang unter Homöomorphie erhalten bleibt, können diese beiden Räume nicht homöomorph sein. Genauer:

BEWEIS. Gäbe es einen Homöomorphismus $(f, g) : \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$, so wären $X = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und $Y = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{f(0)\}$ homöomorph vermöge $(f|_X^Y, g|_Y^X) : X \cong Y$. Das widerspricht G2B. □

Bemerkung. Dies ist ein *negatives* Ergebnis zum Homöomorphieproblem; alle bisherigen waren *positiv*: Sie zeigen die Existenz eines Homöomorphismus (durch Konstruktion). Um zu beweisen, dass es keinen Homöomorphismus gibt, genügt es selbstverständlich nicht, keinen Homöomorphismus zu finden; wir müssen erklären, *warum* es keinen geben kann. Im obigen Fall rettet uns die topologische Invarianz des Zusammenhangs.

Bemerkung. Der Satz ist plausibel, manche mögen sagen „Das ist doch anschaulich klar!“. Doch dieser Ausruf beweist rein gar nichts, außer vielleicht Mangel an Phantasie: Wer kann sich schon alle stetigen Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vorstellen? Der Satz beruht auf dem Zusammenhang und damit letztlich auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, siehe A1Y.

Übung G2E (Topologie der reellen Geraden)**.** Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ erfreut sich ganz besonderer Eigenschaften wie die topologische Invarianz der Dimension, des Randes und des Gebietes. In Dimension 1 sind die Beweise leicht und hier schon zugänglich:

(1) Invarianz der Dimension: Seien $U \subset \mathbb{R}^1_{\geq 0}$ und $V \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen und nicht leer. Existiert ein Homöomorphismus $f : U \xrightarrow{\sim} V$, so gilt $n = 1$.
(2) Invarianz des Randes: Gilt zudem $0 \in U$, so folgt $f(0) = 0 \in V$.
(3) Invarianz des Gebietes: Sei $U \subset \mathbb{R}^1$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^1$ stetig und injektiv. Dann ist f offen, $V = f(U)$ offen in $\mathbb{R}^1$, und $f : U \to V$ ist ein Homöomorphismus.

Diese Aussagen gelten nicht nur in Dimension 1 sondern auch in beliebiger Dimension. Zum Beweis brauchen wir allerdings stärkere Hilfsmittel, etwa den Abbildungsgrad (J7K).

✻ **G2E.** (1) Angenommen $n \geq 2$. Wir argumentieren wie in Satz G2D: Jeder Punkt in $x \in U$ trennt seine zusammenhängenden offenen Umgebungen $I \subset U$, mit 0 als einzig möglicher Ausnahme. Kein Punkt von $y \in V$ trennt seine zusammenhängenden offenen Umgebungen $J \subset V$. Diese topologische Eigenschaft bleibt unter Homöomorphismen erhalten. Folglich kann es keinen Homöomorphismus $f : U \xrightarrow{\sim} V$ geben.

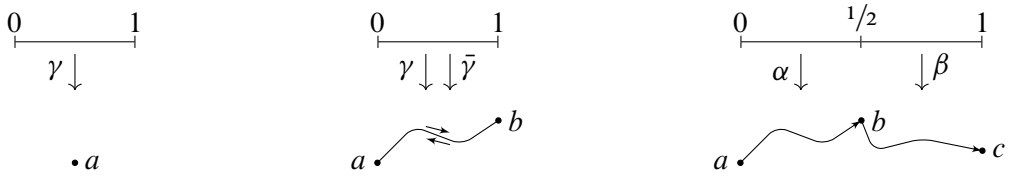
(2) Nur der Punkt $0 \in U$ trennt keine seiner zusammenhängenden offenen Umgebungen $I \subset U$. Diese topologische Eigenschaft bleibt unter Homöomorphismen erhalten. Folglich gilt $f(0) = 0$.

(3) Unter der stetigen Injektion $f : U \to \mathbb{R}$ ist das Bild jedes offenen Intervalls $I \subset U$ wieder ein offenes Intervall $f(I) \subset \mathbb{R}$, wie in D2F erklärt. Daher ist f eine offene Abbildung. Der Rest ist klar.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§G2c. Operationen auf Wegen. Sei X ein topologischer Raum. Die Menge aller Wege in X bezeichnen wir mit $P(X) := \mathscr{C}([0,1],X)$. Der Buchstabe '$P$' steht hierbei für engl. *path* oder dt. *Pfad*. Bei Bedarf versehen wir $P(X)$ mit der Kompakt-Offen-Topologie (F7B). Die Auswertungen $e_0, e_1 : P(X) \to X$ ordnen jedem Weg γ seinen Startpunkt $e_0(\gamma) = \gamma(0)$ bzw. seinen Zielpunkt $e_1(\gamma) = \gamma(1)$ zu. Die Teilmenge aller Wege von a nach b in X ist

$$P(X,a,b) := \big\{ \gamma : [0,1] \to X \text{ stetig} \,\big|\, \gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b \big\}.$$



Auf Wegen definieren wir drei einfache aber nützliche Operationen:

(1) Der *konstante Weg* zu $a \in X$ ist $1_a : [0,1] \to X : t \mapsto a$.
(2) Die *Wegumkehr* $\bar{}: P(X,a,b) \to P(X,b,a)$ ist $\bar\gamma(t) = \gamma(1-t)$.
(3) Die *Aneinanderhängung* $* : P(X,a,b) \times P(X,b,c) \to P(X,a,c)$ ist

$$\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta \ :\ [0,1] \to X \ :\ t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \le t \le \tfrac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \text{für } \tfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Die so definierte Abbildung ist stetig dank Verklebesatz (E1P).

§G2d. Wegkomponenten. Aus den obigen Vorüberlegungen gewinnen wir:

Definition G2F. Wir nennen zwei Punkte $a, b \in X$ *verbindbar* in X, wenn $P(X,a,b) \neq \emptyset$ gilt. Dank der obigen Konstruktionen (1–3) ist dies eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse $[a]_X$ von a in X heißt die *Weg(zusammenhangs)komponente* von a im Raum X. Dies definiert die Zerlegung $\pi_0(X) := \{\, [a]_X \mid a \in X \,\}$ von X in Wegkomponenten.

Bemerkung. Genau dann ist ein Raum X wegzusammenhängend, wenn $\pi_0(X) = \{X\}$ gilt.

Bemerkung. Der Teilraum $X := \{0,1\} \subset \mathbb{R} =: Y$ ist nicht wegzusammenhängend: Hier gilt $[0]_X = \{0\}$ und $[1]_X = \{1\}$, aber $[0]_Y = [1]_Y = \mathbb{R}$. Für Wegzusammenhang und Wegkomponenten ist daher wichtig klarzustellen, in welchem Raum die Wege verlaufen dürfen.

Beispiele.
- Es gilt $\pi_0(\mathbb{Z}) = \{\{z\} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ und $\pi_0(\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}) = \{\,]k, k+1[\mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Es gilt $\pi_0(\mathbb{R} \smallsetminus \{a\}) = \{\mathbb{R}_{<a}, \mathbb{R}_{>a}\}$. Für $n \geq 2$ ist $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{a\}$ wegzusammenhängend.
- Es gilt $\mathcal{Z}(\mathbb{Q}) = \pi_0(\mathbb{Q}) = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Q}\}$: Der Raum $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend.
- Für die Sinuskurve des Topologen $C = A \cup B$ gilt $\mathcal{Z}(C) = \{C\}$ aber $\pi_0(C) = \{A, B\}$.

Bemerkung. Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend (G2C), die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht (G2L). Daher ist die Zerlegung $\pi_0(X)$ in Wegkomponenten (i.A. echt) feiner als die Zerlegung $\mathcal{Z}(X)$ in Zusammenhangskomponenten. Die Zerlegung $\mathcal{Z}(X)$ ist abgeschlossen (G1K), die Zerlegung $\pi_0(X)$ im Allgemeinen nicht.

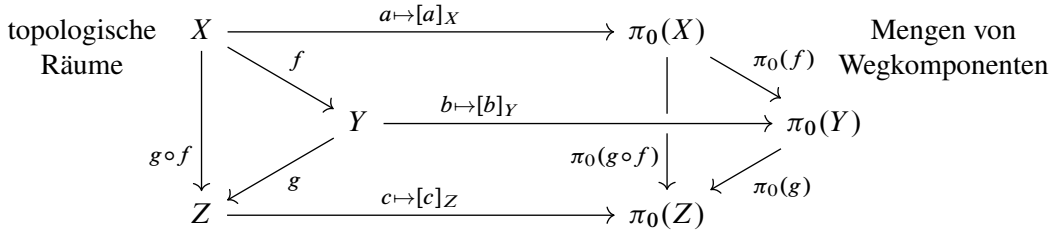
Bemerkung. Bezüglich Verbindbarkeit $a \sim b$ in X ist $\pi_0(X) = X/\!\sim$ die Quotientenmenge und $q : X \to \pi_0(X) : a \mapsto [a]_X$ die Quotientenabbildung. Meist betrachten wir $\pi_0(X)$ nur als Menge, also als diskreten Raum. Wir können diese mittels q mit der Quotiententopologie ausstatten. Diese ist im Allgemeinen nicht diskret, wie das Beispiel $X = \mathbb{Q}$ zeigt.

§G2e. Funktorialität. Stetige Surjektionen erhalten den Wegzusammenhang:

Satz G2G. *Sei $f : X \to Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so auch das Bild $f(X) \subset Y$.*

BEWEIS. Zu $a, b \in f(X)$ existieren Urbilder $x, y \in X$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von $\gamma(0) = x$ nach $\gamma(1) = y$. Somit ist $f \circ \gamma : [0,1] \to f(X)$ ein Weg von $f(\gamma(0)) = a$ nach $f(\gamma(1)) = b$. □

Für Zusammenhangskomponenten ist die Zuordnung $X \mapsto \mathcal{Z}(X)$ funktoriell (G1N). Dies gilt ebenso für die Zuordnung $X \mapsto \pi_0(X)$ der Wegkomponenten:



Satz G2H. *Die Zuordnung $X \mapsto \pi_0(X)$ ist in folgendem Sinne funktoriell:*

(1) Ist $f : X \to Y$ stetig und $a \in X$, so gilt $f([a]_X) \subset [f(a)]_Y$.
(2) Somit ist $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y) : [a]_X \mapsto [f(a)]_Y$ wohldefiniert.
(3) Sie erhält Identität $\pi_0(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}$ und Komposition $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$.

Jeder Homöomorphismus $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ induziert eine Bijektion $\pi_0(h) : \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$.

BEWEIS. (1) Die Wegkomponente $[a]_X$ ist wegzusammenhängend, also auch ihr stetiges Bild $f([a]_X) \subset Y$ dank G2G. Dieses enthält $f(a)$, also gilt $f([a]_X) \subset [f(a)]_Y$.

(2) Die Zuordnung $[a]_X \mapsto [f(a)]_Y$ ist wohldefiniert, das heißt unabhängig vom gewählten Repräsentanten a: Aus $[a]_X = [b]_X$ folgt $[f(a)]_Y = [f(b)]_Y$, denn nach (1) enthalten beide Wegkomponenten die Bildmenge $f([a]_X) = f([b]_X)$.

(3) Die Aussage $\pi_0(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}$ ist klar. Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gilt

$$\begin{aligned}\pi_0(g \circ f)([a]_X) &= [(g \circ f)(a)]_Z = [g(f(a))]_Z = \pi_0(g)\big([f(a)]_Y\big) \\ &= \pi_0(g)(\pi_0(f)([a]_X)) = (\pi_0(g) \circ \pi_0(f))([a]_X).\end{aligned}$$

□

Beispiel. Beispiel G1O für $\mathcal{Z}$ gilt wörtlich genauso für π_0. Zur Illustration empfohlen!

§G2f. Wegzusammenhang in Summenräumen.

Satz G2I. *(1) Im Summenraum $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ gilt $[a]_X = [a]_{X_i}$ für $a \in X_i$.*
(2) Die Zerlegung in Wegkomponenten ist $\pi_0\big(\bigsqcup_{i \in I} X_i\big) = \bigsqcup_{i \in I} \pi_0(X_i)$.

Beweisen Sie dies für π_0 nach dem Vorbild von Satz G1L für $\mathcal{Z}$.

✻ **G2I.** (1) „$\supseteq$“: Der Teilraum $[X]_{X_i}$ ist zshgd, also enthalten in $[a]_X$.

„$\subseteq$“: Wir haben die offene Zerlegung $X = X_i \sqcup X_i'$ mit $X_i' = \bigcup_{j \neq i} X_j$. Demnach liegt $[a]_X$ ganz im Summanden X_i, also ganz in $[a]_{X_i}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

(2) Für die Wegkomponenten des Summenraums $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ folgt:

$$\pi_0(X) \overset{\text{Def}}{=} \{\,[a]_X \mid a \in X\,\}$$
$$\overset{(0)}{=} \bigcup_{i\in I} \{\,[a]_X \mid a \in X_i\,\}$$
$$\overset{(1)}{=} \bigcup_{i\in I} \{\,[a]_{X_i} \mid a \in X_i\,\} \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{i\in I} \pi_0(X_i)$$

Die letzte Vereinigung ist disjunkt.

Das ist ein sehr anschauliches Ergebnis, darauf wären Sie bei Bedarf auch ganz alleine gekommen. Tatsächlich wird es oft einfach verwendet und nicht explizit ausgeführt. Ich betone diesen Satz hier auch nicht, weil er schwierig oder tiefsinnig wäre, sondern aus zwei didaktischen Gründen. Erstens möchte ich die Dualität von Summe und Produkt hervorheben. Zweitens sehen Sie hier, wie wichtig und hilfreich gute Notation ist.

Ich schreibe ganz bewusst $[a]_X$ für die Wegkomponente des Punktes a im umgebenden Raum X. Dies kürzt man später gerne ab zu $[a]$, falls hier nur ein Raum in Frage kommt. Doch vorerst üben wir Genauigkeit.

In der Formulierung des obigen Satzes und Beweises betrachten wir nämlich a sowohl in X_i als auch in X. Hier zahlt sich unsere umsichtige Notation bestens aus, die Argumente werden dadurch klar und einfach.

§G2g. Wegzusammenhang in Produkträumen. Wie zuvor schon für den Zusammenhang gesehen (G1M), bleibt auch der Wegzusammenhang bei Produkten erhalten:

Satz G2J. *(1) Genau dann ist $X = \prod_{i\in I} X_i$ wegzusammenhängend, wenn alle X_i es sind.*
(2) Für $a \in X$ gilt $[a]_X = \prod_{i\in I} [a_i]_{X_i}$, also $\pi_0\big(\prod_{i\in I} X_i\big) = \big\{\prod_{i\in I} A_i \;\big|\; A_i \in \pi_0(X_i)\big\}$.

BEWEIS. (1) „⇒“: Ist X wegzusammenhängend, so auch jeder Faktor $X_i = p_i(X)$ (G2G).

„⇐“: Seien $a, b \in X$. Da X_i wegzusammenhängend ist, existiert eine stetige Abbildung $\gamma_i : [0,1] \to X_i$ von $\gamma_i(0) = a_i$ nach $\gamma_i(1) = b_i$. Dank E4D definiert dies eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $p_i \circ \gamma = \gamma_i$. Dies ist ein Weg von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$.

(2) Für $a \in X$ gilt $[a]_X \subset \prod_{i\in I} [a_i]_{X_i}$, denn $p_i([a]_X) \ni a_i$ ist wegzusammenhängend dank G2G, also $p_i([a]_X) \subset [a_i]_{X_i}$ für alle $i \in I$. Umgekehrt gilt $[a]_X \supset \prod_{i\in I} [a_i]_{X_i}$, denn dieses Produkt enthält a und ist wegzusammenhängend nach (1). Der Rest ist klar. □

☞ **§G2h. Wegabgeschlossene Teilräume.** Wir kennen nun die – vergleichsweise einfachen – allgemeinen Begriffe. Die konkrete „Berechnung“ von $\pi_0(X)$ zu einem gegebenen Raum X kann beliebig kompliziert werden, enthüllt aber meist lohnende Informationen. ☜

Sei X ein topologischer Raum. Wir nennen $C \subset X$ *wegabgeschlossen* in X, wenn jeder Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) \in C$ ganz in C verbleibt, also $\gamma([0,1]) \subset C$ erfüllt.

Anders gesagt, es gibt keinen Weg in X von $a \in C$ ins Komplement zu $b \in X \smallsetminus C$.

Genau dann ist C wegabgeschlossen in X, wenn $[a]_X \subset C$ für jeden Punkt $a \in C$ gilt, also $C = \bigcup\{\, [a]_X \mid a \in C \,\}$ eine Vereinigung von Wegkomponenten ist.

Genau dann ist C wegabgeschlossen in X, wenn das Komplement $X \smallsetminus C$ dies ist. Wir erhalten so die Zerlegung $\pi_0(X) = \{\, [a]_X \mid a \in C \,\} \sqcup \{\, [b]_X \mid b \in X \smallsetminus C \,\}$.

Genau dann ist C eine Wegkomponente von X, also $C = [a]_X$ für ein und damit für alle $a \in C$, wenn C wegzusammenhängend und wegabgeschlossen in X ist.

Bemerkung. Ist C wegabgeschlossen in X, so gilt dies auch in jedem Teilraum $U \subset X$, das heißt, $C \cap U$ ist wegabgeschlossen in U. Hierzu gilt folgende nützliche Umkehrung:

☞ **Übung G2K.** Genau dann ist C wegabgeschlossen in X, wenn dies lokal gilt, das heißt: Zu einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ ist jedes $C_i = C \cap U_i$ wegabgeschlossen in U_i. ☜

✻ **G2K.** „$\Rightarrow$“: Von $a \in U_i \cap C$ nach $b \in U_i \smallsetminus C$ gibt es keinen Weg in X, also auch nicht im Teilraum $U_i \subset X$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\gamma : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) \in C$. Wir haben $\gamma([0,1]) \subset C$ zu zeigen. Hierzu betrachten wir $s = \sup\{\, t \in [0,1] \mid \gamma([0,t]) \subset C \,\}$, das bedeutet $\gamma([0,s[) \subset C$ und s ist maximal. Es gilt $\gamma(s) \in U_i$ für ein $i \in I$.

Angenommen $\gamma(s) \in X \smallsetminus C$, somit $0 < s \leq 1$. Da U_i offen ist, gilt $\gamma([t,s]) \subset U_i$ für ein t mit $0 \leq t < s$. Da das Komplement $U_i \smallsetminus C$ wegabgeschlossen in U_i ist, folgt $\gamma|_{[t,s]} \subset U_i \smallsetminus C$. Das widerspricht dem Supremum.

Es gilt also $\gamma(s) \in C$, somit $\gamma([0,s]) \subset C$. Zwecks Widerspruch nehmen wir $s < 1$ an. Da γ stetig ist, gilt $\gamma([s,t]) \subset U_i$ für ein t mit $s < t \leq 1$. Da $C_i = C \cap U_i$ wegabgeschlossen in U_i ist, folgt $\gamma([s,t]) \subset U_i \cap C$, also $\gamma([0,t]) \subset C$, was dem Supremum widerspricht. Also gilt $s = 1$, somit $\gamma([0,1]) \subset C$.

Mit dieser Vorbereitung lassen sich Aufgaben wie die folgenden leichter angehen:

☞ **Übung G2L.** In $\mathbb{R}^2$ betrachten wir $A = \{\, (x, \sin(\pi/x)) \mid x \in]0,1] \,\}$ und $B = \{0\} \times [-1,+1]$. Die Menge $C = A \cup B$ ist zusammenhängend (G1G), aber nicht wegzusammenhängend (G2K). Genauer $\mathcal{Z}(C) = \{C\}$ und $\pi_0(C) = \{A, B\}$. In C ist A offen und B abgeschlossen. ☜

✻ **G2L.** Die Menge A ist wegzusammenhängend, denn das Intervall $]0,1]$ ist wegzusammenhängend (G2B), und A ist das Bild der stetigen Abbildung $]0,1] \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, \sin(\pi/x))$ (G2G). Gleiches gilt für die Menge B; diese ist sogar sternförmig (G2B). Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang (G2C), also ist die Menge A auch zusammenhängend, somit auch ihr Abschluss $\overline{A} = A \cup B$ in $\mathbb{R}^2$ (G1G). Dies zeigt $\mathcal{Z}(C) = \{C\}$.

Um zu zeigen, dass A und B in C wegabgeschlossen sind, überdecken wir C durch die offenen Mengen $U_+ = \{\, (x,y) \in C \mid y > -1/2 \,\}$ und $U_- = \{\, (x,y) \in C \mid y > 1/2 \,\}$. Wir betrachten die Projektion $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x$ auf die x–Achse. Dank Zwischenwertsatz sind $A \cap U_\pm$ und $B \cap U_\pm$ wegabgeschlossen in $U_\pm$. Dank G2K sind die Mengen A und B somit wegabgeschlossen in $\mathbb{R}^2$. Da A und B wie gesehen wegzusammenhängend sind, sind dies die beiden Wegkomponenten, also $\pi_0(C) = \{A, B\}$.

Alternatives Argument: Angenommen, es gäbe eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to C$, die $\gamma(0) = (0,0)$ in B mit $\gamma(1) = (1,0)$ in A verbindet. Sei $s = \inf\{\, t \in [0,1] \mid \gamma([t,1]) \subset A \,\}$. Da A in C offen ist, gilt $\gamma(s) \in B$ und $\gamma(]s,1]) \subset A$. Wir betrachten die stetige Funktion $g = p_1 \circ f : [0,1] \to [0,1]$ mit $g(s) = 0$ und $g(1) = 1$ sowie $g(t) > 0$ für alle $t \in]s,1]$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Folge $t_k \searrow s$ mit $\gamma_1(t_k) = (k + 1/2)^{-1}$. Aus $\gamma(t_k) \in C$ folgt $\gamma_2(t_k) = (-1)^k$. Dies widerspricht der Stetigkeit von γ, denn $\gamma(t_k) \to \gamma(s)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§G2i. Wegkomponenten von Matrixgruppen.** Für offene Mengen $X \subset \mathbb{R}^n$ können ☜ Pathologien wie bei der Sinuskurve des Topologen G2L nicht auftreten:

☞ **Übung G2M.** Für $X \subset \mathbb{R}^n$ offen sind Zusammenhang und Wegzusammenhang äquivalent. ☜ Ausführlicher sind für $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht-leer folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) Der Raum X ist zusammenhängend.
(2) Der Raum X ist wegzusammenhängend.
(3) Je zwei Punkte $a, b \in X$ sind durch polygonale Wege verbindbar.
(4) Je zwei Punkte $a, b \in X$ sind durch stückweise achsenparallele Wege verbindbar.

Speziell für jede nicht-leere Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent: X ist (a) ein Intervall, (b) konvex, (c) sternförmig, (d) wegzusammenhängend, (e) zusammenhängend.

✻ **G2M.** Die Implikationen „(4) ⇒ (3) ⇒ (2) ⇒ (1)“ sind klar, letzere dank G2C. Allgemein gilt „(1) ⇒ (2)“ für lokal wegzusammenhängende Räume (G3C). Für $X \subset \mathbb{R}^n$ offen zeigen wir „(1) ⇒ (4)“: Sei X zusammenhängend. Zu $a \in X$ sei A die Menge aller Punkte $x \in X$, die von a durch einen stückweise achsenparallelen Weg in X erreichbar sind. Sei B die Menge aller Punkte $x \in X$, die von a nicht durch einen solchen Weg in X erreichbar sind. Es gilt $X = A \sqcup B$. Sowohl A als auch B sind offen, denn zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung $B(x, \varepsilon) \subset U$. Wegen $a \in A$ muss $B = \emptyset$ gelten, also ist X wegzusammenhängend wie in (4).

Die Gruppen $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ begegnen Ihnen früh in der Linearen Algebra und fortan nahezu überall in der Mathematik und ihren zahlreichen Anwendungen. Sie gehören zur mathematischen Allgemeinbildung, und dazu zählen auch ihre topologischen Eigenschaften:

✍ **Satz G2N.** *Die* allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n \mathbb{K} = \{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det A \neq 0 \}$ *aller invertierbaren Matrizen über* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *ist offen und dicht im Raum* $\mathbb{K}^{n\times n}$ *aller* $(n \times n)$*–Matrizen. Für die Wegkomponenten gilt* $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}) = \{ \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R},\ \mathrm{GL}_n^- \mathbb{R} \}$ *und* $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{C}) = \{ \mathrm{GL}_n \mathbb{C} \}$. ✍

Letzteres hat handfeste geometrische Konsequenzen (J7O): Eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ mit $\det A > 0$ heißt *orientierungserhaltend*, mit $\det A < 0$ *orientierungsumkehrend*. Dies werden wir später für Diffeomorphismen und Homöomorphismen verallgemeinern (J7P).

☞ Führen Sie den Beweis aus — als wunderschöne Wiederholung der Linearen Algebra! ☜ Nutzen Sie hierzu die Determinante sowie Elementarmatrizen und den Gauß–Algorithmus!

(1) Erklären Sie zunächst den einfachsten Fall $n = 1$.
(2) Ist die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ stetig? Was gilt konkret für $n = 2$?
(3) Warum ist $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ offen in $\mathbb{K}^{n\times n}$? und dicht? Was gilt konkret für $n = 2$?
(4) Warum hat $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_n^- \mathbb{R}$ mindestens zwei Komponenten? Nennen Sie explizit zwei Matrizen in $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$, die nicht verbindbar sind.

Zeigen Sie schließlich, dass $\mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist, ebenso $\mathrm{GL}_n^- \mathbb{R}$, und schließen Sie hieraus $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}) = \{ \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R},\ \mathrm{GL}_n^- \mathbb{R} \}$. Zunächst der Fall $n = 2$:

(5) Verbinden Sie die Einheitsmatrix $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ durch Wege in $\mathrm{GL}_2 \mathbb{R}$ mit den positiven Elementarmatrizen $R_{12}(\mu) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $R_{21}(\mu) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$ sowie $S_1(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $S_2(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und schließlich $T_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
(6) Dank Gauß–Algorithmus können wir jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R}$ als Produkt positiver Elementarmatrizen darstellen. Somit ist $\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R}$ wegzusammenhängend.
(7) Führen Sie ebenso den allgemeinen Fall $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ sorgfältig aus!
(8) Zeigen Sie ebenso, dass $\mathrm{GL}_n \mathbb{C}$ wegzusammenhängend ist.

✻ **G2N.** (1) Der Fall $n = 1$ ist klar: Die Gruppe $\mathrm{GL}_1\mathbb{R} = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ hat zwei Komponenten, die Gruppe $\mathrm{GL}_1\mathbb{C} = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ hingegen nur eine (G2B). Beide sind jeweils offen und dicht in $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Dasselbe gilt für alle $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$, doch schon für den Fall $n = 2$ genügt die Anschauung nicht mehr, denn $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ ist ein vierdimensionaler Raum, $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ sogar reell achtdimensional. Lineare Algebra, hilf!

(2) Die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}$ ist ein Polynom (homogen von Grad n) in den Matrixeinträgen a_{ij}; insbesondere ist diese Funktion stetig. Speziell für $n = 2$ haben wir die allseits beliebte Formel $\det : \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K} : A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \det(A) = ad - bc$.

(3) Genau dann ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, wenn $\det A \neq 0$ gilt (B1Y). Speziell für $n = 2$ haben wir die Inversion $\mathrm{GL}_2\mathbb{K} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{K} : A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. Demnach ist $\mathrm{GL}_n\mathbb{K} = \det^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ offen in $\mathbb{K}^{n\times n}$, insbesondere gilt $\pi_0(\mathrm{GL}_n\mathbb{K}) = \mathfrak{Z}(\mathrm{GL}_n\mathbb{K})$ dank Übung G2M oder allgemein Satz G3C.

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat das charakteristische Polynom $P(t) = \det(A - tI)$ den Grad n in t und verschwindet somit an höchstens n Stellen. Daher ist $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ dicht in $\mathbb{K}^{n\times n}$, denn zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass gilt: Für alle t mit $0 < t < \varepsilon$ ist $A - tI$ invertierbar.

(4) Wegen $\det\operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1) = a$ ist $\det : \mathrm{GL}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ surjektiv, und $\mathrm{GL}_n\mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_n^-\mathbb{R}$ hat mindestens zwei Komponenten, wobei $\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R} = \det^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ und $\mathrm{GL}_n^-\mathbb{R} = \det^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ offen sind.

Konkretes Beispiel: In $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ führt kein Weg von $\operatorname{diag}(+1, 1, \ldots, 1)$ nach $\operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$.

Zunächst wäre denkbar, dass die beiden Mengen $\mathrm{GL}_n^\pm\mathbb{R}$ noch feinere offene Zerlegungen erlauben. Das ist nicht der Fall: Wir zeigen, dass $\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist, ebenso $\mathrm{GL}_n^-\mathbb{R}$, und schließen hieraus $\pi_0(\mathrm{GL}_n\mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}, \mathrm{GL}_n^-\mathbb{R}\}$. Hierzu konstruieren wir sorgfältig und explizt Wege in $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$:

(5) Jede Matrix $M \in \{ R_{12}(\mu), R_{21}(\mu), S_1(\lambda), S_2(\lambda), T_{12} \mid \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \}$ können wir auf direktem Wege mit I verbinden, durch $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{2\times 2} : t \mapsto (1-t)I + tM$. Dieser Weg verläuft tatsächlich ganz in $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$, wie wir an der Determinante ablesen, etwa im letzten Falle dank $\det\left(\begin{smallmatrix} 1-t & -t \\ t & 1-t \end{smallmatrix}\right) = (1-t)^2 + t^2 > 0$.

Von I zu $T_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ führt auch der Weg $\gamma : [0,1] \to \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \subset \mathrm{GL}_2\mathbb{R} : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \cos(t\pi/2) & -\sin(t\pi/2) \\ \sin(t\pi/2) & \cos(t\pi/2) \end{smallmatrix}\right)$.

Selbstverständlich sind viele andere Wege möglich; besonders trickreich ist die erneute Nutzung von $R_{12}(\mu)$ und $R_{21}(\mu)$ und die Darstellung $T_{12} = R_{12}(1)R_{21}(-1)R_{12}(1)$, denn $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(7) Sei $I = 1_{n\times n} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ die Einheitsmatrix sowie $E_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit Eins in der i–ten Zeile und j–ten Spalte, sonst Nullen. Für $1 \le i, j \le n$ und $i \neq j$ nutzen wir die positiven Elementarmatrizen: (a) $R_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $A \mapsto R_{ij}(\lambda)A$ addiert das λ-fache der i–ten zur j–ten Zeile. (b) $S_i(\lambda) = I + (\lambda - 1)E_{ii}$ für $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Abbildung $A \mapsto S_i(\lambda)A$ multipliziert die i-te Zeile von A mit λ. (c) $T_{ij} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji}$. Die Abbildung $A \mapsto T_{ij}A$ tauscht die i-te Zeile mit der j–ten Zeile von A und multipliziert letztere mit -1, um das Vorzeichen der Determinante zu bewahren. Wir verbinden jede positive Elementarmatrix M mit I durch einen Weg in $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ wie in (5).

(6) Sei $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Der Gauß–Algorithmus überführt A durch Zeilenoperationen in I. Dies entspricht Elementarmatrizen $M_1, M_2, \ldots, M_k$, sodass $M_k \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot A = I$ gilt. Üblicherweise erlaubt man dazu auch die Multiplikation einer Zeile mit negativen Skalaren und die Vertauschung von zwei Zeilen. Hier hingegen erlauben wir nur die Multiplikation einer Zeile mit positiven Zahlen (Multiplikation von links mit $S_i(\lambda)$, $\lambda > 0$) und das Vertauschen von zwei Zeilen bei gleichzeitiger Multiplikation einer Zeile mit -1 (Multiplikation von links mit T_{ij}). Wir können dennoch A auf Diagonalgestalt $\operatorname{diag}(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$ bringen. Durch Multiplikation mit $T_{1j}^2 = I - 2E_{11} - 2E_{jj}$ gelangen wir zu $\operatorname{diag}(\pm 1, 1, \ldots, 1)$. Demnach gibt es positive Elementarmatrizen $M_1, M_2, \ldots, M_k \in \{ R_{ij}(\mu), S_i(\lambda), T_{ij} \mid \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \}$, sodass $M_k \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot A = D$ gilt mit $D = \operatorname{diag}(\varepsilon, 1, \ldots, 1)$ und $\varepsilon = \operatorname{sign}\det A$. Zu jeder Matrix M_i existiert ein Weg $\gamma_i : [0,1] \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ von $\gamma_i(0) = I$ nach $\gamma_i(1) = M_i$, wie oben erklärt. Somit ist $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R} : t \mapsto \gamma_k(t)\cdots\gamma_2(t)\cdot\gamma_1(t)\cdot A$ ein Weg von $\gamma(0) = A$ nach $\gamma(1) = D$. Also sind $\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ und $\mathrm{GL}_n^-\mathbb{R}$ wegzusammenhängend.

(8) Ebenso zeigen wir, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ wegzusammenhängend ist. Hierzu sei $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$. Der Gauß–Algorithmus überführt A durch Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix I. Dies entspricht Elementarmatrizen $M_1, M_2, \ldots, M_k \in \{ R_{ij}(\mu), S_i(\lambda), T_{ij} \mid \mu \in \mathbb{C},\ \lambda \in \mathbb{C}^\times \}$, sodass $M_k \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot A = I$ gilt. Da $\mathbb{C}^\times$ wegzusammenhängend ist (G2B), gibt es in $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ einen Weg von I nach $S_i(\lambda)$. Zu jeder Matrix M_i existiert demnach ein Weg $\gamma_i : [0,1] \to \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ von I nach M_i. Somit ist $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n\mathbb{C} : t \mapsto \gamma_k(t)\cdots\gamma_2(t)\cdot\gamma_1(t)\cdot A$ ein Weg von A nach I. Also ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ wegzusammenhängend.

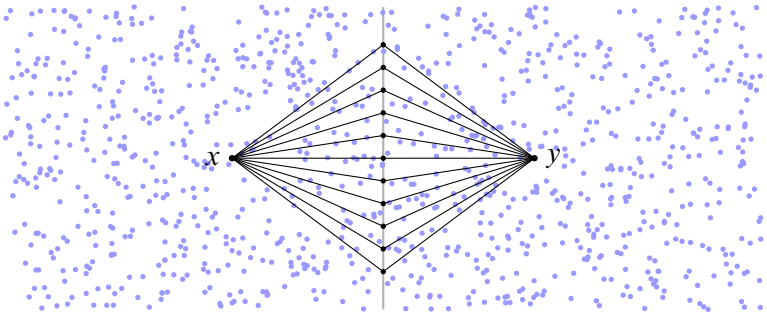
© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§G2j. Nullstellen komplexer Polynome und Wegzusammenhang des Komplements.

Satz G2O. *(1) Sei $n \geq 2$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar, etwa $A = \mathbb{Q}^n$. Dann ist das Komplement $X := \mathbb{R}^n \smallsetminus A$ wegzusammenhängend. Genauer: In X können wir je zwei Punkte x, y durch einen polygonalen Weg verbinden. (Dies ist ein Spezialfall von J2O.)*

(2) Sei $P \in \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$ ein Polynom, $P \neq 0$, und $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ die zugehörige Polynomfunktion. Dann ist die Nichtnullstellenmenge $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ in $\mathbb{C}^n$ offen und dicht und wegzusammenhängend. Dasselbe gilt für endliche Durchschnitt $\bigcap_{k=0}^{m-1} f_k^{-1}(\mathbb{C}^*) =: X$.

Beweisen Sie diesen Satz als Übung und zur Präzisierung folgende Zusätze:
(3) Für reelle Polynome gilt „offen und dicht“, aber nicht „wegzusammenhängend“.
(4) Was können Sie daraus für die Gruppe $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ schließen?
(5) Aussage (2) gilt allgemein für $f_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ komplex total differenzierbar.
(6) Gilt „wegzusammenhängend“ und „dicht“ auch abzählbar für $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(\mathbb{C}^*)$?



✻ **G2O.** (1) Es genügt, $x \neq y$ und $n = 2$ zu betrachten. (Für $n \geq 3$ wählen wir eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $x, y \in E$.) Wir wählen eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$, die x und y nicht enthält, etwa die Mittelsenkrechte auf $[x, y]$. Es gibt überabzählbar viele Wege $\gamma = |xzy|$ von x über $z \in G$ nach y. Höchstens abzählbar viele davon treffen A.

(2a) Zunächst der Fall $n = 1$: Jede Polynomfunktion $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat nur endlich viele Nullstellen (höchstens so viele wie der Grad $\deg f_k$ erlaubt, siehe B3D). Somit ist auch jede endliche Vereinigung $\bigcup_{k=0}^{m-1} f_k^{-1}(\{0\})$ endlich, das Komplement $\bigcap_{k=0}^{m-1} f_k^{-1}(\mathbb{C}^*)$ also offen und dicht, und dank (1) auch wegzusammenhängend.

(2b) Allgemeiner $n \geq 1$: Dank D5O ist $f_k^{-1}(\mathbb{C}^*)$ offen und dicht. Dank D7A gilt dies auch für endliche Durchschnitte. Wegzusammenhang: Zu $x \neq y$ in X betrachten wir die komplexe Gerade $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ durch $g(0) = x$ und $g(1) = y$, also $g(z) = x + z(y - x)$. Auch die Komposition $h_k = f_k \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eine Polynomfunktion, und nicht Null dank $h_k(0) = f_k(x) \neq 0$. Hierauf können wir (2a) anwenden: $\bigcap_{k=0}^{m-1} h_k^{-1}(\mathbb{C}^*) =: Y$ ist wegzusammenhängend. So lassen sich 0 und 1 in Y verbinden, ebenso x und y in X.

(3) Schon reell-eindimensional trennen Nullstellen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Einfache reell-zweidimensionale Beispiele $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind $f(x, y) = x$ oder $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ oder $f(x, y) = xy$. Die Nullstellenmenge und ihr Komplement können beliebig viele Komponenten haben. Anschaulich hat die Nullstellenmenge hier reelle Kodimension 1. Im komplexen Fall hingegen haben wir reelle Kodimension 2, und daher Wegzusammenhang

(4) Die Determinante (B1Y) ist eine Polynomfunktion in den Matrixeinträgen, dank der expliziten Formel $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K} : A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist daher die Gruppe $\mathrm{GL}_n \mathbb{C} = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ offen und dicht und wegzusammenhängend dank (2). Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hingegen ist $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ nur offen und dicht (D5O). Dank G2N kennen wir die Wegkomponenten $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}, \mathrm{GL}_n^- \mathbb{R}\}$.

(5) Dank Stetigkeit ist $f_k^{-1}(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}^n$ offen, ebenso endliche Schnitte. Zu Dichtheit und Wegzusammenhang betrachten wir $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n : z \mapsto x + z(y - x)$. Dank Kettenregel ist $h_k = f_k \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, also holomorph, und somit um jeden Punkt lokal in eine Potenzreihe entwickelbar. Die Nullstellenmenge $h_k^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen und diskret, somit insbesondere abzählbar. Wir schließen mit (1).

(6) Wegzusammenhang folgt wörtlich wie in (5). Dichtheit folgt aus dem Satz von Baire D7C

§G2k. Wegzusammenhang von $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$.

☞ **Übung G2P.** (1) Sei $p : X \to Y$ identifizierend. Ist Y zusammenhängend und ebenso jede Faser $p^{-1}(\{y\}) \subset X$ für $y \in Y$, so auch X. (2) Gilt dies auch für Wegzusammenhang? ☜

(3) Die Gruppe $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ ist zusammenhängend. *Hinweis:* $\mathrm{SO}_1 = \{1\}$ ist trivial, $\mathrm{SO}_2 \cong \mathbb{S}^1$ ist klar, SO_n operiert auf $\mathbb{S}^{n-1}$ mit Faser SO_{n-1}. Nutzen Sie (1) per Induktion.

(4) Komplex ist vieles leichter: Die Gruppen $\mathrm{U}_n\,\mathbb{C}$ und $\mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$ sind wegzusammenhängend. *Hinweis:* Jede Matrix $A \in \mathrm{U}_n\,\mathbb{C}$ ist unitär diagonalisierbar, das heißt, es existiert $T \in \mathrm{U}_n\,\mathbb{C}$ mit $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{S}^1$.

Bemerkung: Wir zeigen später genauer mit dem Gram–Schmidt–Verfahren (G5G), dass $\mathrm{O}_n\,\mathbb{R} \subset \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ ein starker Deformationsretrakt ist, ebenso $\mathrm{U}_n\,\mathbb{C} \subset \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$.

✻ **G2P.** (1) Sei $X = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung. Für jede Faser $F = p^{-1}(\{y\}) = (F \cap A) \sqcup (F \cap B)$ folgt $F \cap A = \emptyset$ oder $F \cap B = \emptyset$, also $F \subset B$ oder $F \subset A$. Somit ist $Y = p(A) \sqcup p(B)$ eine disjunkte Zerlegung. Da zudem p eine Identifizierung ist, sind $p(A)$ und $p(B)$ offen in Y, denn die Urbilder $p^{-1}(p(A)) = A$ und $p^{-1}(p(B)) = B$ sind offen in X. Nach Voraussetzung ist Y zusammenhängend, also gilt entweder $p(A) = \emptyset$ oder $p(B) = \emptyset$, und somit schließlich entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Daher ist auch X zusammenhängend.

(2) Nein. Ein Gegenbeispiel ist die Sinuskurve des Topologen (G2L) mit $p : \mathbb{R}^2 \supset C \to [0,1] : (x,y) \mapsto x$.

(3) Die Abbildung $p : \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} \to \mathbb{S}^{n-1} : A \mapsto A \cdot e_n$ mit $e_n = (0, \dots, 0, 1)^\intercal$ weist jeder Matrix A ihre letzte Spalte zu; sie ist stetig und surjektiv. Da $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ kompakt ist (F1Q) und $\mathbb{S}^{n-1}$ hausdorffsch, ist p abgeschlossen und somit identifizierend (F1L). Über e_n ist die Faser $p^{-1}(\{e_n\}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A' & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid A' \in \mathrm{SO}_{n-1}\,\mathbb{R} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_{n-1}\,\mathbb{R}$. Zu jedem Punkt $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ existiert $B \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ mit $Be_n = v$. Wir erhalten $(f,g) : p^{-1}(e_n) \cong p^{-1}(v)$ mit $f(A) = BA$ und $g(A) = B^{-1}A$, also $p^{-1}(v) \cong \mathrm{SO}_{n-1}\,\mathbb{R}$. Nun ist $\mathrm{SO}_1\,\mathbb{R} = \{1\}$ als einpunktiger Raum zusammenhängend. Für $n \geq 2$ folgt, dass $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ zusammenhängend ist, per Induktion mit (1).

(4) Da $\mathbb{S}^1$ wegzusammenhängend ist, lässt sich jeder Punkt $\lambda \in \mathbb{S}^1$ mit $1 \in \mathbb{S}^1$ verbinden durch einen Weg $\gamma_\lambda : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ mit $\gamma_\lambda(1) = \lambda$ und $\gamma_\lambda(0) = 1$. Dann ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^{n\times n} : t \mapsto T\ \mathrm{diag}(\gamma_{\lambda_1}(t), \dots, \gamma_{\lambda_n}(t))\,T^{-1}$ stetig, also ein Weg in $\mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\gamma(1) = T\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,T^{-1} = A$ und $\gamma(0) = T\ \mathrm{diag}(1, \dots, 1)\,T^{-1} = 1_{n\times n}$. Dieser Weg verläuft tatsächlich in der Gruppe U_n, denn die drei Matrizen sind unitär und somit auch ihr Produkt.

Im Falle SU_n gilt zudem $\det A = 1$, also $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 1$. Um auch hier einen Weg in SU_n von A nach $1_{n\times n}$ zu konstruieren, nutzen wir $\gamma(t) = T\ \mathrm{diag}(\gamma_{\lambda_2}(t)^{-1}\cdots\gamma_{\lambda_n}(t)^{-1}, \gamma_{\lambda_2}(t), \dots, \gamma_{\lambda_n}(t))\,T^{-1}$.

☞ **§G2l. Quadratisch, lexikographisch, gut!** Exotisches Beispiel zur Wiederholung: ☜

Übung G2Q. Wir versehen $Z = [0,1]^2$ mit der *lexikographischen Ordnung*: $(x,y) < (x',y')$ bedeutet $x < x'$ oder ($x = x'$ und $y < y'$). Sei $\mathcal{T}$ die zugehörige Ordnungstopologie (D1M). (1) Besitzt jede Teilmenge E in $(Z,<)$ ein Supremum und ein Infimum? Ist der topologische Raum $(Z,\mathcal{T})$ (2) separiert (T_2)? (3) erstabzählbar? (4) separabel? (5) zweitabzählbar? (6) kompakt? (7) zusammenhängend? (8) Bestimmen Sie $\pi_0(Z)$.

✻ **G2Q.** (1) Ja, $\sup E = (a,b)$ mit $a = \sup \mathrm{pr}_1(E)$ und $b = \sup\{\, y \in [0,1] \mid (a,y) \in E \,\}$, ebenso für $\inf E$. (2) Jede Ordnungstopologie ist separiert (D3L), sogar vollständig normal (E5D). (3) Ja: Für (x,y) mit $0 < y < 1$ ist das klar, für $(0,0)$ und $(1,1)$ auch. Für $y = 0$ und $0 < x \leq 1$ betrachte $](x',0),(x,y')[$ mit $x', y' \in [0,1]_\mathbb{Q}$ und $0 \leq x' < x$. Für $y = 1$ und $0 \leq x < 1$ entsprechend. (4) Nein: Die Mengen $U_s = \{s\} \times]0,1[$ mit $s \in [0,1]$ sind offen und disjunkt. Jede dichte Menge $Q \subset Z$ muss jedes U_s schneiden, also überabzählbar sein. (5) Nein, denn 2AA impliziert separabel (D6M). (6) Ja, dank (1) und Satz F1D. (7) Ja, dank (1) und Satz G1D. (8) Jede Menge $\{x\} \times [0,1] \cong [0,1]$ ist wegzusammenhängend. Wäre $\gamma : [0,1] \to Z$ ein Weg von (x,y) nach (x',y') mit $x < x'$, so läge jeder Zwischenpunkt (s,t) mit $x < s < x'$ im Bild; demnach wären $\gamma^{-1}(U_s) \subset [0,1]$ offen, nicht-leer, disjunkt und überabzählbar, doch $[0,1]$ ist separabel. Wir schließen $\pi_0(Z) = \{\, \{x\} \times [0,1] \mid x \in [0,1] \,\}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§G2m. Cantors Karussell.** Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ Einbettungen der reellen Geraden in die euklidische Ebene. Per Definition sind die Bilder homöomorph, $f_1(\mathbb{R}) \cong f_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Hingegen können ihre Komplemente $\mathbb{R}^2 \smallsetminus f_1(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^2 \smallsetminus f_2(\mathbb{R})$ sehr verschieden sein! Nicht einmal die Anzahl der Wegkomponenten lässt sich irgendwie einschränken: ☜

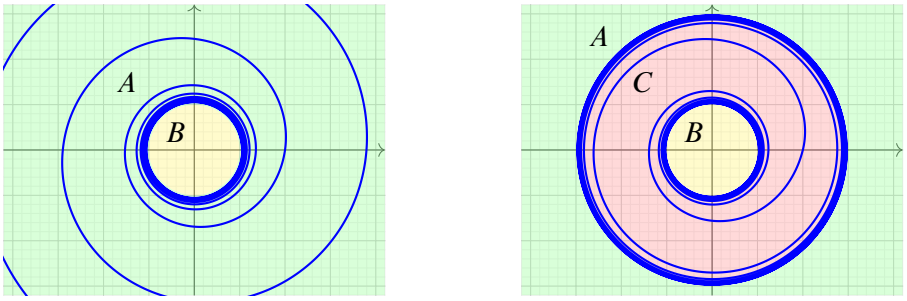


ABBILDUNG G:3. Zerlegung der Ebene in zwei und drei Wegkomponenten

Satz G2R. *Gibt es zu $k = 1,2,3,\ldots$ eine Einbettung $f_k : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, deren Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus f_k(\mathbb{R})$ genau k Wegkomponenten hat? Ja! Sogar überabzählbar viele sind möglich.*

Beispiele. Die Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (e^t, 0)$ ist eine Einbettung. Sie trennt die Ebene nicht: Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus f_1(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend, $\pi_0(X) = \{X\}$.

Die Standardeinbettung $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, 0)$ zerlegt $\mathbb{R}^2$ in zwei offene Halbebenen: $\pi_0(\mathbb{R}^2 \smallsetminus f_2(\mathbb{R})) = \{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0},\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}\}$ dank Zwischenwertsatz (C3R).

Auch $f_2^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 + e^t)(\cos t, \sin t)$ ist eine Einbettung (G:3 links). Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus f_2^*(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, hat aber zwei Wegkomponenten.

Es gibt auch Einbettungen $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, die die Ebene in *drei* Wegkomponenten zerlegen (G:3 rechts und G:4). Als einfache Beispiele betrachten wir $f_3, f_3^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_3(t) = \left(2 + \frac{t}{1+|t|}\right) \cdot (\cos t, \sin t) \quad \text{und} \quad f_3^*(t) = \left(\frac{t \cos t}{1+|t|}, \frac{|t| \sin t}{1+|t|}\right).$$

Übung G2S. Dieses Kunststück gelingt auch mit *simplizialen* Einbettungen $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, also affin-linear auf jedem Intervall $[a, a+1]$ mit $a \in \mathbb{Z}$. Führen Sie dies explizit aus!

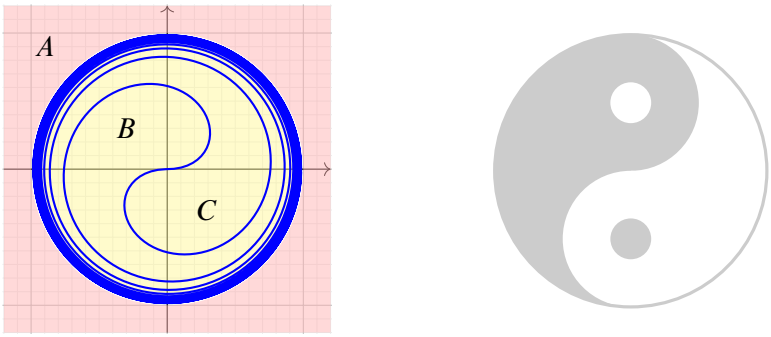


ABBILDUNG G:4. Zerlegung der Ebene in drei Wegkomponenten, Yin&Yang

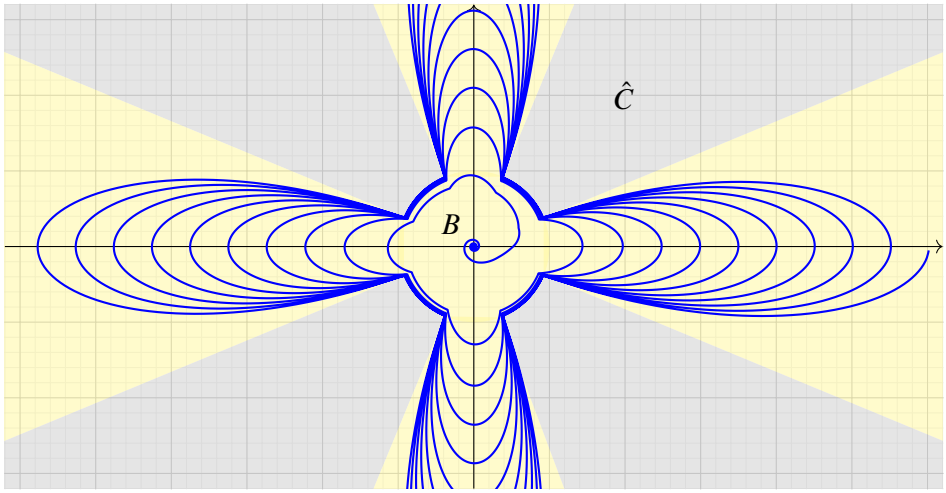


ABBILDUNG G:5. Cantors Karussell: Licht und Schatten

Zur Menge $A \subset \mathbb{C}^*$ definieren wir den Schatten $\hat{A} := \mathbb{R}_{\geq 1} \cdot A = \{ ta \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 1},\ a \in A \}$. Stellen wir uns den Ursprung 0 als Lichtquelle vor, so ist $\hat{A}$ der von A beschattete Bereich.

Beispiel G2T (Cantors Karussell)**.** Sei $g : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$ ein Homöomorphismus, etwa $g(t) = \mathrm{e}^t$. Sei $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig mit Nullstellenmenge $A = h^{-1}(0)$. Dann ist die Abbildung

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}^* \ : \ t \mapsto \frac{1 + g(t)\, h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{1 + g(-t)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

eine Einbettung. Sind g, h glatt, so auch f. Das Komplement $X = \mathbb{C}^* \smallsetminus f(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, zerfällt aber in die Wegkomponenten $B = X \smallsetminus \hat{A}$ und $\hat{C}$ für $C \in \pi_0(A)$, kurz

$$\pi_0(X) = \left\{ B, \hat{C} \;\middle|\; C \in \pi_0(A) \right\}.$$

Hierbei gilt $B \cong \mathbb{B}^2$ und $\hat{C} \cong C \times [0,1[$, wobei $C = \mathbb{S}^1$ oder $C \cong [0,1]$ oder $C = \{a\}$.

Beispiel. Für $g(t) = \mathrm{e}^t$ und $h = 1$ gilt $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \cdot (1 + \mathrm{e}^t)/(1 + \mathrm{e}^{-t})$, und $\mathbb{C}^* \smallsetminus f(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend. Für $h = 0$ gilt $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/(1 + \mathrm{e}^{-t})$, und $\mathbb{C}^* \smallsetminus f(\mathbb{R})$ hat zwei Wegkomponenten ähnlich wie in G:3, nämlich neben B noch $\hat{A} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1 \}$.

Im allgemeinen Fall $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{S}^1$ werden gemäß der Funktion h durch die Lücken von A radiale Zacken eingefügt, die bei jedem Umlauf weiter ausschlagen wie in G:5 illustriert. Hierzu können wir jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{S}^1$ vorgeben: Für $A = \emptyset$ wählen wir $h = 1$, sonst $h(x) = d(x, A)$. Dies gilt für die n–punktige Menge $\{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$, für die unendliche Menge $\{1\} \cup \{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}/k} \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 1} \}$, ebenso wie für jede Cantor–Menge mit überabzählbar vielen Wegkomponenten! Die Funktion h lässt sich auch hier sogar glatt wählen.

Bemerkung. Dies illustriert eindrücklich, dass für Einbettungen $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ die Anzahl der Wegkomponenten $\pi_0(\mathbb{R}^2 \smallsetminus f(\mathbb{R}))$ keiner einfachen Regel folgt. Für $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ist die Situation gänzlich anders: Hier hat das Komplement immer eine bzw. genau zwei Komponenten. Dies ist Thema des Satzes von Jordan–Schoenflies (§J2).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung G2U. Finden Sie Einbettungen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, deren Komplement aus einer, zwei bzw. drei (!) Wegkomponenten besteht, und beweisen Sie jeweils diese Eigenschaft.

Dieser Aufgabentyp hat zwei Teile: Zunächst sind geeignete Beispiele zu konstruieren, sodann sind die behaupteten Eigenschaften nachzuweisen. Ersteres erfordert Kreativität, letzteres Virtuosität. Da wir die obigen Beispiele nun kennen, bleibt noch der Nachweis:

Beweisen Sie Satz G2R durch Ausführen der obigen Beispiele.

✻ **G2U.** Wir definieren $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ durch $f_1(t) = \mathrm{e}^t$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(1 + \mathrm{e}^t/(1 + \mathrm{e}^t))$, Alle drei sind injektiv. Warum sind dies Einbettungen? Klar ist f_2: Diese Abbildung ist abgeschlossen, also eine Einbettung (E2L). Die Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist nicht abgeschlossen, wohl aber als Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \to X_1$ in $X_1 = \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid a > 0\}$. Komponiert mit der offenen Einbettung $X_1 \subset \mathbb{C}$ ergibt die Einbettung $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Ebenso verfährt man mit Einbettung $f_3 : \mathbb{R} \to X_3$ in die offene Menge $X_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

Das Komplement $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{>0}$ von $f_1(\mathbb{R})$ in $\mathbb{C}$ ist offensichtlich wegzusammenhängend, es ist sogar sternförmig bezüglich -1 (G2B). Das Komplement $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ von $f_2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{C}$ hat zwei Wegkomponenten: Wir nutzen die Projektion $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und den Zwischenwertsatz (C3R). Das Komplement von $f_3(\mathbb{R})$ besitzt die drei Wegkomponenten $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 2\}$ und $C = X_3 \smallsetminus f_3(\mathbb{R})$. Die Mengen A und B sind offensichtlich wegzusammenhängend, die dritte dank des Homöomorphismus $h : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to X_3$ mit $h(z,t) = z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(1 + \mathrm{e}^t/(1 + \mathrm{e}^t))$. Der Raum $(\mathbb{S}^1 \smallsetminus \{1\}) \times \mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend, also auch das Bild C.

Diese Mengen sind jeweils wegzusammenhängend. Um zu zeigen, dass dies tatsächlich die Wegkomponenten sind, bleibt nachzuweisen, dass sie wegabgeschlossen sind. Dies gelingt leicht lokal (G2K): Im letzten Fall nutzen wir die offene Überdeckung durch $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -1/2\}$ und $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 1/2\}$. Dies zeigt, dass man A, B, C nicht durch einen stetigen Weg verbinden kann.

Genauso geht man beim Beweis von Cantors Karussell G2T vor.

§G2n. Weitere exotische Beispiele.

Übung G2V. Wir schließen die Kurve $A = \{(x, \sin(\pi/x)) \mid x \in]0,1]\}$ zum *Pseudokreis D*, auch *Warschauer Kreis* genannt, durch den Polygonzug $(0,1)$, $(0,-2)$, $(1,-2)$, $(1,0)$. In diesem „Löwenkäfig des Topologen“ sitzt ein Löwe, den wir als punktförmig annehmen. Kann er aus dem Käfig entkommen? (Genauer gesagt: entlang eines stetigen Weges in der Ebene; Springen, Fliegen, Tunneleffekt, Teleportation, etc. sind hier keine Option.)

Übung G2W. Auf nicht-hausdorffschen Räumen können Wege etwas exotisch anmuten:

(1) Ist $X = \{0,1\}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ wegzusammenhängend?
(2) Ist jeder *endliche* zusammenhängende Raum wegzusammenhängend?

Übung G2X. Seien $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$ Topologien auf X. Was bedeutet der (Weg)Zusammenhang in der einen für die andere Topologie? Was lässt sich im Vergleich über $\mathcal{Z}(X,\mathcal{T})$ und $\mathcal{Z}(X,\mathcal{T}')$ sagen? Was über $\pi_0(X,\mathcal{T})$ und $\pi_0(X,\mathcal{T}')$? Konstruieren Sie je ein nicht-triviales Beispiel.

Übung G2Y. Die lange Halbgerade $L_{\geq 0}$ (F9K) ist wegzusammenhängend aber nicht kompakt. Ihre Einpunktkompaktifizierung ist noch zusammenhängend aber nicht mehr wegzusammenhängend. Anschaulich gesagt: Der unendlich ferne Punkt liegt zu weit weg.

§G3. Lokaler Zusammenhang

§G3a. Lokaler Zusammenhang.

Zusammenhang können wir lokalisieren (F3D):

Definition G3A. Ein Raum X heißt *lokal (weg)zusammenhängend* im Punkt $a \in X$, wenn jede Umgebung von a eine (weg)zusammenhängende offene Umgebung enthält. Das heißt, a hat eine Umgebungsbasis aus (weg)zusammenhängenden offenen Umgebungen.

Gilt dies in jedem Punkt $a \in X$, so nennen wir X *lokal (weg)zusammenhängend*. Das heißt, die Topologie hat eine Basis aus (weg)zusammenhängenden offenen Mengen.

Beispiele.
- Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist lokal (weg)zusammenhängend, denn zu $a \in \mathbb{R}^n$ ist der offene Ball $B(a,\varepsilon)$ sternförmig zu a, und somit wegzusammenhängend (G2B).
- Ebenso ist jeder topologische $\mathbb{R}$–Vektorraum V lokal (weg)zusammenhängend, denn zu $a \in V$ existieren beliebig kleine offene sternförmige Umgebungen (F6Q).
- Ist X lokal (weg)zusammenhängend, so auch jeder offene Teilraum $U \subset X$.
- Der Raum $\mathbb{Q}$ ist weder (weg)zusammenhängend noch lokal (weg)zusammenhängend.

Beispiele. Lokaler und globaler (Weg)Zusammenhang sind unabhängige Eigenschaften:

- In euklidischen Raum $\mathbb{R}$ sind die Teilräume $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$ und $[0,1] \cup [2,3]$ zwar nicht (weg)zusammenhängend, aber immerhin lokal (weg)zusammenhängend.
- Die Sinuskurve des Topologen $C = A \cup B \subset \mathbb{R}^2$ (G2L) ist zusammenhängend, aber nicht lokal zusammenhängend, und somit auch nicht lokal wegzusammenhängend.
- Der *rationale Kamm* $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^2$ ist (weg)zusammenhängend, aber nicht lokal, ebenso der *irrationale Kamm* $Y = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup ((\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R})$.
- Der *rationale Stern* $Z = \{ r\, \mathrm{e}^{2\pi i t} \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ t \in \mathbb{Q} \}$ in $\mathbb{R}^2$ ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal zusammenhängend, ebenso der irrationale Stern mit $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.
- Die Menge $\mathbb{R}^n$ mit der französischen Eisenbahnmetrik ist wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. (Man beachte den Unterschied zum vorigen Beispiel.)

Bemerkung. Wir können eine topologische Eigenschaft wie etwa Kompaktheit F3A oder (Weg)Zusammenhang G3A, verschieden lokalisieren (F3D). Daher nochmal zur Betonung:

Lokaler (Weg)Zusammenhang eines Raumes X erfordert, dass jeder Punkt $a \in X$ *beliebig kleine* (weg)zusammenhängende Umgebungen hat. Wie unsere Beispiele zeigen, genügt hierzu nicht, dass *a irgendeine* (weg)zusammenhängende Umgebung hat.

Lokaler Wegzusammenhang impliziert lokalen Zusammenhang (G2C), aber nicht umgekehrt. Gegenbeispiele sind nicht ganz leicht zu finden, hier eines der leichtesten:

Übung G3B. Sei X überabzählbar, etwa $X = \mathbb{R}$, mit koabzählbarer Topologie $\mathcal{T}$ (D1I). Dann ist $(X,\mathcal{T})$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Jede Umgebung eines Punktes ist wiederum eine überabzählbar unendliche Menge mit koabzählbarer Topologie, also ist X lokal zusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend.

∗ **G3B.** In X sind nur die abzählbaren Teilmengen und X abgeschlossen. Wäre $X = A \sqcup B$ eine echte offene Zerlegung, so wären $A, B \neq X$ abgeschlossen, also abzählbar, und somit wäre auch X abzählbar.

Ist $\gamma : [0,1] \to X$ eine stetige Abbildung, dann ist das Bild $I = \gamma([0,1])$ kompakt (F1J). In der koabzählbaren Topologie sind nur die endlichen Mengen kompakt. Somit $[0,1] = \bigsqcup_{i \in I} \gamma^{-1}(\{i\})$ endliche Vereinigung von disjunkten nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen. Dies ist nur für $|I| = 1$ möglich, denn $[0,1]$ ist zusammenhängend (G1D). Somit ist jeder Weg konstant und X nicht wegzusammenhängend.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§G3b. Offene Zerlegungen. Jeden topologischen Raum X zerlegen wir in seine (Weg)Komponenten:

$$X = \bigsqcup \mathcal{Z}(X) \quad \text{und} \quad X = \bigsqcup \pi_0(X)$$

Die Komponenten sind abgeschlossen (G1K) aber im Allgemeinen nicht offen, wie das Beispiel $\mathbb{Q}$ zeigt. Ist die Zerlegung $\mathcal{Z}(X)$ endlich, dann ist jede Komponente offen (G1K), und die obige Zerlegung ist eine topologische Summe. Die Wegkomponenten sind im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen, selbst wenn die Zerlegung endlich ist (G2L).

Satz G3C. *(1) Ist X lokal zusammenhängend, so ist die Zerlegung $X = \bigsqcup \mathcal{Z}(X)$ offen, also eine topologische Summe, das heißt, jede Komponente ist offen und abgeschlossen.*

(2) Ist X lokal wegzusammenhängend, so ist die Zerlegung $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ offen, also eine topologische Summe. In diesem Falle gilt insbesondere $\pi_0(X) = \mathcal{Z}(X)$.

Dies gilt insbesondere für $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, oder allgemein für jeden lokal euklidischen Raum X, insbesondere für jede Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand).

Zum Beweis benötigen wir nur, dass jeder Punkt irgendeine (weg)zusammenhängende Umgebung besitzt, sie muss nicht beliebig klein sein wie in G3A gefordert.

BEWEIS. (1) Hat a in X eine zusammenhängende Umgebung U, so gilt $U \subset \langle a \rangle_X$. Gilt dies in jedem Punkt, so ist jede Komponente Umgebung ihrer Punkte, also offen (D3C). In diesem Falle ist $\langle a \rangle_X$ auch abgeschlossen, denn ihr Komplement ist offen als Vereinigung aller anderen, ebenfalls offenen Komponenten. (Zur Abgeschlossenheit vergleiche G1K.)

(2) Hat a in X eine wegzusammenhängende Umgebung U, so gilt $U \subset [a]_X$. Gilt dies in jedem Punkt, so ist jede Wegkomponente Umgebung jedes ihrer Punkte, also offen (D3C). In diesem Falle ist $[a]_X$ auch abgeschlossen, denn ihr Komplement ist offen als Vereinigung aller anderen, ebenfalls offenen Wegkomponenten.

Allgemein gilt $a \in [a]_X \subset \langle a \rangle_X$ dank G2C. Dank (2) ist $[a]_X$ offen und abgeschlossen im Raum X, also auch im Teilraum $\langle a \rangle_X$. Letzterer ist zusammenhängend (G1K), also folgt $[a]_X = \langle a \rangle_X$: Komponenten und Wegkomponenten sind gleich. □

Beispiel. In Satz G2R und Beispiel G2T haben wir Einbettungen $f_1, f_2, f_3, \dots : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ betrachtet, deren Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus f_k(\mathbb{R})$ genau k Wegkomponenten hat; sogar überabzählbar viele sind möglich! Die Kurve $A = f_k(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ kann dabei recht kompliziert werden. Insbesondere ist ihr Abschluss $\overline{A}$ zwar zusammenhängend (G1E, G1G), aber im Allgemeinen nicht wegzusammenhängend und auch nicht lokal (weg)zusammenhängend.

Die gute Nachricht: Für das offene Komplement $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \overline{A}$ sind solche Pathologien nicht zu befürchten: Wie jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ ist U lokal-wegzusammenhängend, daher ist jede (Weg)Komponente offen und abgeschlossen in U, beide stimmen überein, und die Menge U zerfällt in die topologische Summe ihrer Komponenten.

Diese Zerlegung ist oft nützlich, da wir uns auf (weg)zusammenhängende Teilräume in X konzentrieren können. Diese haben einen traditionellen Namen:

Definition G3D. Sei X ein topologischer Raum, etwa $X = \mathbb{R}^n$ oder eine Mannigfaltigkeit. Ein *Gebiet* $U \subset X$ ist eine offene zusammenhängende Menge; insbesondere gilt $U \neq \emptyset$.

Ist X lokal wegzusammenhängend, etwa $X = \mathbb{R}^n$ oder eine Mannigfaltigkeit, so ist jedes Gebiet U nicht nur zusammenhängend, sondern auch wegzusammenhängend.

§G3c. Übungen und Anwendungen.

Übung G3E. Sei X kompakt. (1) Ist X lokal (weg)zusammenhängend, so hat X nur endlich viele (Weg)Komponenten. (2) Gilt dies auch noch ohne lokalen (Weg)Zusammenhang?

✻ **G3E.** (1) Die Zerlegung $X = \bigsqcup \mathcal{Z}(X)$ ist offen (G3C). Ist X kompakt, so hat sie eine endliche Teilüberdeckung, also ist $\mathcal{Z}(X)$ endlich. Bei lokalem Wegzusammenhang gilt dies ebenso für $X = \bigsqcup \pi_0(X)$.

(2) Die Cantor–Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt, hat aber überabzählbar viele (Weg)Komponenten.

Übung G3F. Sei X zweitabzählbar. (1) Ist X lokal (weg)zusammenhängend, so hat X abzählbar viele (Weg)Komponenten. (2) Gilt dies auch ohne lokalen (Weg)Zusammenhang?

✻ **G3F.** (1) Ist X lokal zusammenhängend, so ist $X = \bigsqcup \mathcal{Z}(X)$ eine offene Zerlegung (G3C). Zu jeder $\mathcal{B}$ der Topologie von X existiert eine Injektion $\mathcal{Z}(X) \hookrightarrow \mathcal{B}$: Zu jeder Komponente $\langle a \rangle_X$ wählen wir eine offene Menge $U_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in U_a \subset \langle a \rangle_X$. Ist $\mathcal{B}$ abzählbar, so auch $\mathcal{Z}(X)$. Bei lokalem Wegzusammenhang gilt dies ebenso für die offene Zerlegung $X = \bigsqcup \pi_0(X)$.

(2) Der Raum $\mathbb{R}$ hat eine abzählbare Basis der Topologie, also auch jeder Teilraum (E1G), zum Beispiel $X = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. Hingegen ist die Zerlegung $\mathcal{Z}(X) = \pi_0(X) = \{\, \{x\} \mid x \in X \,\}$ überabzählbar.

Übung G3G. Sei $f : X \to Y$ surjektiv, stetig und offen. Ist X lokal (weg)zusammenhängend, so auch der Bildraum Y.

✻ **G3G.** Sei V eine Umgebung von y in Y. Sei $x \in f^{-1}(\{y\})$ ein Urbild, also $f(x) = y$. Dank Stetigkeit von f ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Dank lokalem (Weg)Zusammenhang von X existiert eine (weg)zusammenhängende offene Umgebung U' mit $x \in U' \subset U$. Dank Offenheit von f ist $V' = f(U')$ eine offene Umgebung mit $y \in V' \subset V$ und (weg)zusammenhängend (dank G1E und G2G).

Übung G3H. (1) Genau dann ist der Produktraum $X = \prod_{i \in I} X_i$ (weg)zusammenhängend und lokal (weg)zusammenhängend, wenn jeder Faktor X_i dies erfüllt.

(2) Genau dann ist X lokal (weg)zusammenhängend, wenn jeder Faktor X_i dies ist, und alle bis auf endlich viele zudem (weg)zusammenhängend.

✻ **G3H.** (1) "⇒": Mit X ist auch $p_i(X) = X_i$ (weg)zusammenhängend (dank G1E und G2G). Dasselbe gilt für lokalen (Weg)Zusammenhang dank G3G, denn die Projektion $p_i : X \to X_i$ ist stetig und offen.

"⇐": Der Produktraum X ist (weg)zusammenhängend (dank G1M und G2J). Zu $x \in X$ sei $U \subset X$ eine Umgebung. Diese enthält $\prod_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset X_i$ offen, wobei $U_i = X_i$ für alle $i \in I \smallsetminus J$ außerhalb einer endlichen Ausnahmemenge. Dank lokalem (Weg)Zusammenhang von X_i existiert eine (weg)zusammenhängende Umgebung $V_i \subset U_i$ von x_i für jedes $i \in J$. Für $i \in I \smallsetminus J$ wählen wir $V_i = X_i$. Dann ist $V = \prod_{i \in I} V_i$ eine (weg)zusammenhängende Umgebung von x in U (erneut dank G1M und G2J).

(2) "⇒": Sei U eine (weg-)zusammenhängende Umgebung von x in X. Sie enthält eine offene Umgebung $\prod_{i \in I} U_i$ mit $x_i \in U_i \in \mathcal{T}_i$, wobei $U_i = X_i$ für alle $i \in I \smallsetminus J$ mit endlicher Ausnahmemenge J (E4C). Somit ist $p_i(U) = X_i$ (weg)zusammenhängend für alle $i \in I \smallsetminus J$ (dank G1E und G2G).

Die Implikation "⇐" beweist man wörtlich wie in (1), wobei man nur J geeignet vergrößern muss.

Übung G3I. Wegzusammenhang lässt sich auf (mindestens) zwei Arten lokalisieren:

(1) Lokaler Wegzusammenhang: Zu jedem Punkt $x \in X$ enthält jede (offene) Umgebung $U \in \mathscr{U}_x$ eine wegzusammenhängende (offene) Umgebung $V \in \mathscr{U}_x$, das heißt je zwei Punkte $a, b \in V$ sind durch einen Weg in V verbindbar.
(2) Semilokaler Wegzusammenhang: Zu jedem Punkt $x \in X$ enthält jede (offene) Umgebung $U \in \mathscr{U}_x$ eine (offene) Umgebung $V \in \mathscr{U}_x$, sodass je zwei Punkte $a, b \in V$ durch einen Weg in U verbindbar sind. (Der Weg in U verbindet Endpunkte in V.)

Sind diese Eigenschaften äquivalent? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung G3J. (1) Wir betrachten den *rationalen Kamm* $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^2$. In welchen Punkten ist X lokal wegzusammenhängend, in welchen nicht?

(2) Wir betrachten das *rationale Gitter* $Y = (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ in $\mathbb{R}^2$. Ist dieser Raum wegzusammenhängend? lokal wegzusammenhängend?

(3) Untersuchen Sie $Z = Y \smallsetminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ und bestimmen Sie $\pi_0(Z)$ sowie $\mathcal{Z}(Z)$.

✻ **G3J.** (1) Der Raum X ist wegzusammenhängend: Wir können jeden Punkt $(x, y) \in X$ durch den direkten Weg mit $(x, 0)$ und dann mit $(0, 0)$ verbinden. In jedem Punkt $(x, 0)$ ist X lokal wegzusammenhängend, denn $X \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times]-\delta, \delta[=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times \{0\}) \cup (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[_{\mathbb{Q}} \times]-\delta, \delta[$ ist offen für $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und wegzusammenhängend, aus demselben Grund wie zuvor für X. In jedem Punkt (x, y) mit $y \neq 0$ ist der Raum X nicht lokal zusammenhängend: Die offene Umgebung $U = \{ (a, b) \in X \mid b \neq 0 \}$ zerfällt in die Wegkomponenten $\{a\} \times \mathbb{R}_{>0}$ und $\{a\} \times \mathbb{R}_{<0}$ für $a \in \mathbb{Q}$ dank der Projektion $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ mit $p(U) = \mathbb{Q}$ und dem Zwischenwertsatz. Daher enthält U keine (weg)zusammenhängende Umgebung von (x, y).

(2) Der Raum Y besteht aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit *mindestens* einer rationalen Koordinate. Ist x rational, so können wir (x, y) durch den direkten Weg mit $(x, 0)$ und dann mit $(0, 0)$ verbinden. Ist y rational, so gelingt der Weg über $(0, y)$ nach $(0, 0)$. Dasselbe gilt auch lokal um jeden Punkt $(x, y) \in Y$, denn für $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $Y \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times]y-\delta, y+\delta[= (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[_{\mathbb{Q}} \times]y-\delta, y+\delta[) \cup (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times]y-\delta, y+\delta[_{\mathbb{Q}})$ offen und wegzusammenhängend, aus demselben Grund wie zuvor für Y.

(3) Der Raum Z besteht aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit *genau* einer rationalen Koordinate. In (1) half uns die Projektion $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ und der Zwischenwertsatz. Hier jedoch gilt $p(Z) = \mathbb{R}$ und ebenso $q(Z) = \mathbb{R}$ für $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to y$. Nach etwas Überlegen finden wir $r_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$: Hier gilt $r_+(Z) = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, das heißt jeder Weg in Z bleibt auf einer Diagonalen $x + y = \text{const}$. Für $r_- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - y$ gilt ebenso $r_-(Z) = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, daher bleibt jeder Weg in Z auf einer Diagonalen $x - y = \text{const}$. Zusammenfassend ist jeder Weg in Z konstant. Somit gilt $\pi_0(Z) = \{ \{z\} \mid z \in Z \}$. Dieselben Diagonalprojektionen zeigen, dass der Raum Z total unzusammenhängend ist, also $\mathcal{Z}(Z) = \{ \{z\} \mid z \in Z \}$.

☞ **§G3d. Trennungsgrad.** Sei X ein topologischer Raum und $a \in X$ ein Punkt. Wir betrachten die Komponente $\langle a \rangle_X$ von a in X. Der *globale Trennungsgrad* von a in X ist ☜

$$\mathrm{Deg}_X(a) := |\mathcal{Z}(\langle a \rangle_X \smallsetminus \{a\})|.$$

Die Zahl $\mathrm{Deg}_X(a)$ gibt also an, in wie viele Komponenten der zusammenhängende Raum $\langle a \rangle_X$ durch Wegnahme von a zerfällt. Statt Komponenten könnte man ebenso Wegkomponenten betrachten; für lokal wegzusammenhängende Räume ist beides dasselbe (G3C).

☞ **Beispiele.** Diese Idee haben wir bereits mehrfach zur Unterscheidung von Räumen genutzt: ☜

- In $\mathbb{R}$ hat jeder Punkt Trennungsgrad 2. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ hat jeder Punkt Trennungsgrad 1. Dieser topologische Unterschied beweist $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^n$. (G2D)
- In $[0,1]$ gilt $\mathrm{Deg}(0) = \mathrm{Deg}(1) = 1$ aber $\mathrm{Deg}(a) = 2$ für $0 < a < 1$. Entsprechendes gilt für $[0,1[$ und $]0,1[$. Dies klassifiziert reelle Intervalle bis auf Homöomorphie. (D2G)
- In $\mathbb{S}^1$ hat jeder Punkt $a \in \mathbb{S}^1$ den Trennungsgrad 1. Somit gilt $\mathbb{S}^1 \ncong [0,1]$.
- In $\mathbb{R}^2$ mit der französischen Eisenbahnmetrik hat jeder Punkt $a \neq 0$ Trennungsgrad 2, hingegen ist $\mathrm{Deg}(0)$ überabzählbar unendlich. (Eine Blockade in der Provinz schneidet nur diese Provinz ab, aber eine Blockade in Paris legt das ganze Land lahm.)

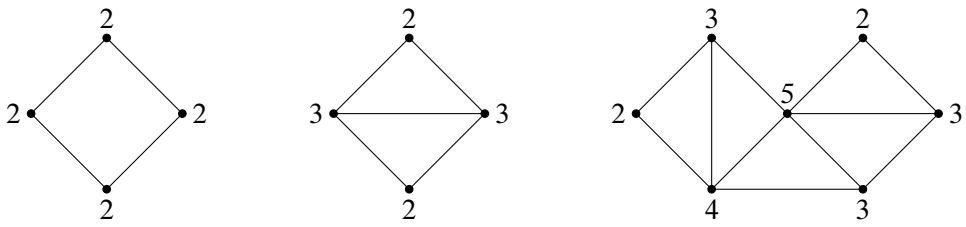


ABBILDUNG G:6. Lokaler Trennungsgrad in einem Graphen

☞ **Beispiel.** Abbildung G:6 zeigt *Graphen* $X \subset \mathbb{R}^2$ bestehend aus Punkten (*Ecken*) und Geradenstücken (*Kanten*). Hier hat jeder Punkt $a \in X$ globalen Trennungsgrad 1, denn keiner trennt den Raum X. Interessanter ist hier der *lokale* Trennungsgrad, wie skizziert. (Man kann so zum Beispiel die 26 Großbuchstaben des lateinischen Alphabets bis auf Homöomorphie klassifizieren, siehe G6F.) Grob gesagt ist dies $\mathrm{Deg}_U(x)$ für eine hinreichend kleine Umgebung U von x. Hierzu müssen wir allerdings klären, inwiefern dies von U abhängt. ☜

☞ **Definition G3K.** Sei $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis des Punktes a in X sodass für jedes Paar $U \subset V$ in $\mathcal{B}$ die Inklusion $\iota_U^V : U \hookrightarrow V$ eine Bijektion der Komponenten induziert: ☜

$$\mathcal{Z}(\iota) : \mathcal{Z}\big(\langle a \rangle_U \smallsetminus \{a\}\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}\big(\langle a \rangle_V \smallsetminus \{a\}\big)$$

Dann nennen wir die Kardinalität dieser Menge den *lokalen Trennungsgrad* von a in X:

$$\deg_X(a) := \big|\mathcal{Z}\big(\langle a \rangle_U \smallsetminus \{a\}\big)\big| \quad \text{wobei } U \in \mathcal{B}$$

☞ **Beispiel.** Wir betrachten einen Graph $X \subset \mathbb{R}^2$ aus Abbildung G:6. Um jeden Punkt $a \in X$ wählen wir hier die Umgebungsbasis $U_k = B(a, 1/k)$ mit $k = 1, 2, 3, \ldots$. Für hinreichend großes k stabilisiert sich $|\mathcal{Z}\big(\langle a \rangle_{U_k} \smallsetminus \{a\}\big)|$. Genauer gesagt: Die Inklusionen $U_{k+1} \hookrightarrow U_k$ induziert eine Bijektion. Wir erhalten die angegebenen lokalen Trennungsgrade. ☜

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ Erfreulicherweise hängt das Ergebnis nicht von der Wahl der Umgebungsbasis $\mathcal{B}$ ab! ☜ Für je zwei Umgebungsbasen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ von a mit der geforderten Eigenschaft gilt nämlich: Zu $V' \in \mathcal{B}'$ existiert $V \in \mathcal{B}$ mit $V \subset V'$, sodann $U' \in \mathcal{B}'$ mit $U' \subset V$ und schließlich $U \in \mathcal{B}$ mit $U \subset U'$. Die Inklusionen $U \subset U' \subset V \subset V'$ induzieren dann folgende Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z}(\langle a\rangle_U \smallsetminus \{a\}) & & \xrightarrow{\quad\cong\quad} & & \mathcal{Z}(\langle a\rangle_V \smallsetminus \{a\}) \\ & \searrow^{f} & & \nearrow_{g} & & \searrow^{h} & \\ & & \mathcal{Z}(\langle a\rangle_{U'} \smallsetminus \{a\}) & \xrightarrow{\quad\cong\quad} & \mathcal{Z}(\langle a\rangle_{V'} \smallsetminus \{a\}) \end{array}$$

Die Abbildung g ist surjektiv, denn $g \circ f$ ist surjektiv. Die Abbildung g ist injektiv, denn $h \circ g$ ist injektiv. Daher ist auch g eine Bijektion, und somit auch f und h.

☞ **Beispiel.** Im Raum $X = (\mathbb{R}\times\mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z}\times\mathbb{R})$ hat jeder Punkt $a \in X$ den lokalen Trennungsgrad 4 (Ecke) oder 2 (Kante). Jeder Homöomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} X$ erhält diese Eigenschaft und ist somit ein Graphenhomomorphismus. (Zunächst ist f auf jeder Kante nur ein Homöomorphismus, dies kann aber durch eine Homotopie gerade gezogen werden.) ☜

§G3e. Enden bei einem Punkt. Die obige Definition des lokalen Trennungsgrades setzt voraus, dass sich dieser für hinreichend kleine Umgebungen nicht ändert. Als beliebtes Gegenbeispiel betrachten wir in $\mathbb{C}$ den *Hawaiianischen Ohrring* $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\mathbb{S}^1 - \mathrm{i})$.

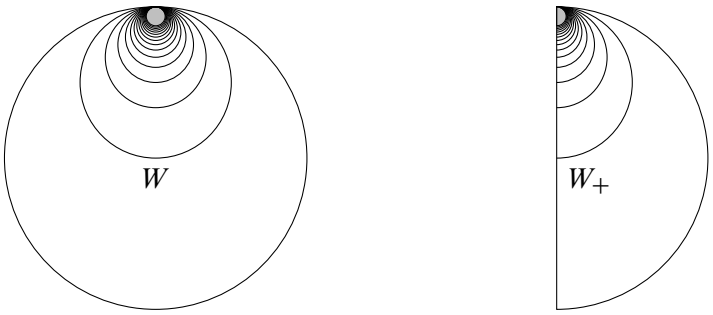


ABBILDUNG G:7. Hawaiianischer Ohrring $W \subset \mathbb{C}$

Beispiel. Wir betrachten $\mathbb{S}^1_+ = [-\mathrm{i}, \mathrm{i}] \cup \{ z \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0 \}$ und bilden hieraus den *halben Hawaiianische Ohrring* $W_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\mathbb{S}^1_+ - \mathrm{i})$. Für die Umgebung $U = B(0, 2/n)$ von 0 in W_+ besteht $\langle 0\rangle_U \smallsetminus \{0\}$ aus $n+1$ Komponenten. Je kleiner U, desto größer diese Zahl!

Auch in diesem erstaunlich komplizierten Beispiel kann man leicht die verschiedenen Enden bei 0 erahnen. Unsere Intuition wollen wir nun präzise formulieren:

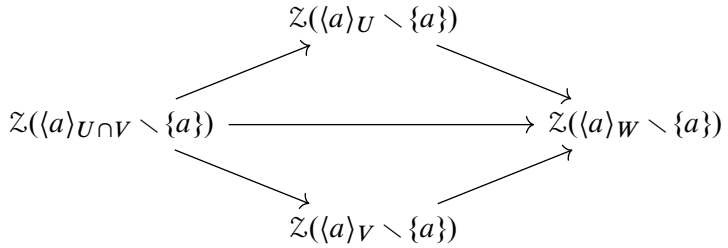
Definition G3L. Ein *Ende* bei a in X ist eine Abbildung $C : \mathscr{U}_a \to \mathfrak{P}X$, die jeder Umgebung U von a in X eine Komponente $C(U) \in \mathcal{Z}(\langle a\rangle_U \smallsetminus \{a\})$ zuordnet. Als Kohärenz fordern wir zudem, dass für $U \subset V$ die von der Inklusion $\iota_U^V : U \hookrightarrow V$ induzierte Abbildung

$$\mathcal{Z}(\iota) : \mathcal{Z}\big(\langle a\rangle_U \smallsetminus \{a\}\big) \to \mathcal{Z}\big(\langle a\rangle_V \smallsetminus \{a\}\big)$$

die Komponente $C(U)$ auf die Komponente $C(V)$ abbildet.

Bemerkung. Ist $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von a in X, so genügt es, statt $C : \mathscr{U}_a \to \mathfrak{P}X$ die Einschränkung $C' : \mathcal{B} \to \mathfrak{P}X$ zu betrachten. Umgekehrt setzt sich jede kohärente Abbildung $C' : \mathcal{B} \to \mathfrak{P}X$ eindeutig zu einer kohärenten Abbildung $C : \mathscr{U}_a \to \mathfrak{P}X$ fort.

Zu $W \in \mathscr{U}_a$ wählen wir $U \in \mathcal{B}$ mit $U \subset W$ und setzen $C(W) := \mathcal{Z}(\iota_U^W)(C'(U))$. Dies ist wohldefiniert, denn zu $U, V \in \mathcal{B}$ mit $U, V \subset W$ haben wir folgendes Diagramm:



Die Funktorialität stellt sicher, dass $C(W)$ auf allen drei Wegen dasselbe ist, denn

$$\mathcal{Z}(\iota_U^W)(C'(U)) = \mathcal{Z}(\iota_V^W)(C'(V)) = \mathcal{Z}(\iota_{U\cap V}^W)(C'(U \cap V)).$$

Somit ist C auch kohärent, denn zu $V \subset W$ in $\mathscr{U}_a$ existiert $U \in \mathcal{B}$ mit $U \subset V \subset W$.

Bemerkung. Sind wie in G3K für eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}$ alle $\mathcal{Z}(\iota)$ Bijektionen, so kann man eine feste Umgebung $U \in \mathcal{B}$ wählen und sieht die Enden konkret als die Komponenten $\mathcal{Z}\big(\langle a\rangle_U \smallsetminus \{a\}\big)$. Die Anzahl der Enden ist dann wie oben der lokale Trennungsgrad.

Beispiele.
- Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ hat zwei Enden bei jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
- Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ hat nur ein Ende bei jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^2$.
- Ist $a \in X$ ein isolierter Punkt, so existieren keine Enden bei a.

Beispiel. Der halbe Hawaiianische Ohrring W_+ hat als Enden bei 0 anschaulich die Kurven $E_0 = [0, -2\mathrm{i}]$ und $E_n = \frac{1}{n}(\mathbb{S}^1_+ - \mathrm{i})$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Genauer gesagt, jede Kurve E_n definiert ein Ende C_n wie folgt: Zu $U \in \mathscr{U}_0$ wähle aus $\mathcal{Z}\big(\langle a\rangle_U \smallsetminus \{a\}\big)$ die Komponente $C_n(U)$, die E_n schneidet. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist C_n ein Ende, und jedes Ende hat diese Form.

§G3f. Enden eines topologischen Raumes bei ∞. Als *Ende* eines lokal-kompakten Hausdorff–Raumes X betrachtet man ein Ende bei ∞ in der Einpunktkompaktifizierung. Das bedeutet, für jedes Kompaktum $K \subset X$ wählen wir eine Komponente $C(K) \in \mathcal{Z}(X \smallsetminus K)$ mit der obigen Kohärenzbedingung: Für $L \supset K$ bildet die von der Inklusion $X \smallsetminus L \subset X \smallsetminus K$ induzierte Abbildung $\mathcal{Z}(X \smallsetminus L) \to \mathcal{Z}(X \smallsetminus K)$ die Komponente $C(L)$ auf $C(K)$ ab.

Bemerkung. Ist X lokal-kompakt hausdorffsch und σ–kompakt (§F4e), so existieren Kompakta $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset X$ mit $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n^\circ$. Ein *Ende* des Raumes X ist dann eine kohärente Folge $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ von Komponenten $C_n \in \mathcal{Z}(X \smallsetminus K_n)$.

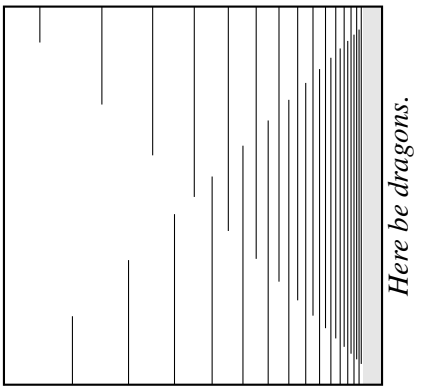
Beispiele.
- Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ hat zwei Enden: Man denke an $+\infty$ und $-\infty$.
- Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ hat nur ein Ende: Man denke an $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.
- Ein kompakter Raum hat keine Enden: Der zusätzliche Punkt ∞ ist isoliert.
- Der Raum $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ hat vier Enden.
- Der Raum $\mathbb{R}^2$ mit der französischen Eisenbahnmetrik hat überabzählbar viele Enden.
- Der Raum $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$ hat nur ein Ende.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§G3g. Unerreichbare Randpunkte. Schon ebene Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ können beeindruckend kompliziert sein, selbst wenn das Gebiet Ω homöomorph zur offenen Kreisscheibe $\mathbb{B}^2$ ist, wie zum Beispiel in Abbildung G:3. Ein weiteres Beispiel zur Warnung:

Übung G3M. Zu jeder Folge $0 \le a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ mit $a_n \nearrow 1$ setzen wir

$$C = C(a_0,a_1,a_2,\dots) := \partial[0,1]^2 \cup \bigcup_{n\in 2\mathbb{N}} [(a_n,0),(a_n,a_n)] \cup \bigcup_{n\in 2\mathbb{N}+1} [(a_n,1),(a_n,1-a_n)].$$



(1) Ist C kompakt? zusammenhängend? wegzusammenhängend?
(2) Das Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$ hat genau zwei Komponenten, A unbeschränkt, B beschränkt. Bestimmen Sie den Rand δA und den Rand δB in der Ebene $\mathbb{R}^2$.
(3) Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $h : \mathrm{Int}[0,1]^2 =]0,1[^2 \xrightarrow{\sim} B$.
(4) Lässt sich solch ein h fortsetzen zu einer stetigen Abbildung $g : [0,1]^2 \to \overline{B}$?
(5) Welche Randpunkte $(x,y) \in \delta B$ lassen sich vom Gebiet B aus erreichen durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma([0,1[) \subset B$ und $\gamma(1) = (x,y)$?

✻ **G3M.** (1) Die Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^2$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt (F1O). Sie ist zusammenhängend, sogar wegzusammenhängend, wie man durch Fallunterscheidung leicht zeigt.

(2) Der Rand $\delta A = \partial[0,1]^2$ ist der Quadratrand, hingegen ist $\delta B = C$ wesentlich größer.

(3) Wir können $a_0 = 0$ annehmen; dann gilt $C(a_0,a_1,a_2,\dots) = C(a_1,a_2,\dots)$. Zu jedem $n = 1,2,3,\dots$ existiert ein stetige Abbildung $h_n : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ mit $h_n(x,y) = (x,y)$ für $x \in [0,a_{n-1}] \cup [a_{n+1},1]$, sodass die Einschränkung einen Homöomorphismus $h_n : C(a_n,a_{n+1},a_{n+2},\dots) \xrightarrow{\sim} C(a_{n+1},a_{n+2},\dots)$ stiftet. Die explizite Konstruktion einer solchen Abbildung h_n gelingt wie in Satz F6G / F6I. Wir können zudem erreichen, dass $h_n([a_{n-1},a_n]\times[0,1]) \subset [a_{n-1},a_n]\times[0,1]$ und $h_n([a_n,a_{n+1}]\times[0,1]) \subset [a_n,a_{n+1}]\times[0,1]$ gilt. Wir definieren $h : [0,1[\times[0,1] \to [0,1[\times[0,1]$ durch $h(x,y) = h_n \circ \cdots \circ h_1(x,y)$, wobei wir n hinreichend groß wählen, sodass $x \le a_{n-1}$ gilt. Damit ist h wohldefiniert und stetig, und die Einschränkung erfüllt $h : \mathrm{Int}[0,1]^2 \xrightarrow{\sim} B$.

(4) Nein. In unserer expliziten Konstruktion lässt sich das leicht erkennen. Allgemein folgt es aus (5): Angenommen, zu $h : \mathrm{Int}[0,1]^2 \xrightarrow{\sim} B$ gäbe es eine stetige Fortsetzung $g : [0,1]^2 \to \overline{B} = B \cup C$. Zu jedem Randpunkt $c \in C$ existiert eine Folge $b_n \in B$ mit $b_n \to c$. Die Folge $b_n^* = h^{-1}(b_n)$ im Kompaktum $[0,1]^2$ hat eine konvergente Teilfolge. Nach Wahl einer solchen Teilfolge können wir $b_n^* \to c^*$ annehmen. Es gilt $c = \lim b_n = \lim g(b_n^*) = g(\lim b_n^*) = g(c^*)$. Der Punkt $c^* \in \partial[0,1]^2$ lässt sich vom Inneren $\mathrm{Int}[0,1]^2$ durch einen Weg $\gamma^* : [0,1] \to [0,1]^2$ erreichen. Somit lässt sich auch $c \in C$ durch den Weg $\gamma = g \circ \gamma^*$ vom Inneren $B = g(\mathrm{Int}[0,1]^2)$ erreichen. Nach (5) ist dies jedoch für $c \in \{1\}\times[0,1] \subset C$ unmöglich!

(5) Jeder Randpunkt $(x,y) \in \delta B = C$ mit $x < 1$ lässt sich durch einen Weg vom Gebiet B aus erreichen, wie man durch Fallunterscheidung leicht zeigt. Für jeden Randpunkt $(x,y) \in \{1\}\times[0,1]$ hingegen gilt dies nicht! Dies beweist man wie die analoge Aussage zur Sinuskurve des Topologen (G2L).

§G4. Homotopie stetiger Abbildungen

§G4a. Homotopie. Seien X und Y topologische Räume. Zwei stetige Abbildungen $f,g : X \to Y$ heißen *homotop*, wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen wie in Abbildungen G:8 illustriert. Diesen nützlichen Begriff wollen wir nun ausformulieren.

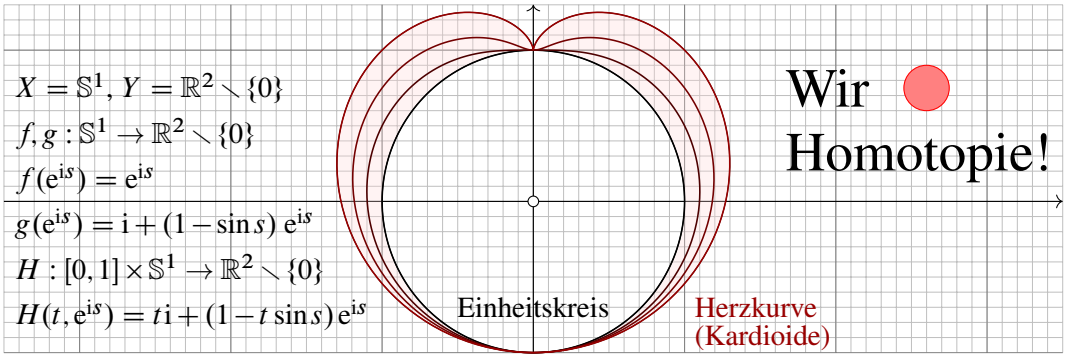


ABBILDUNG G:8. Beispiel einer Homotopie $H : f \simeq g : X \to Y$

Definition G4A. Eine *Homotopie* ist eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y$. Für jedes $t \in [0,1]$ definiert dies eine stetige Abbildung $H_t : X \to Y$ mit $H_t(x) = H(t,x)$.

Wir betrachten $(H_t)_{t\in[0,1]}$ als eine stetige Schar von Abbildungen $H_t : X \to Y$ und stellen uns dies als stetige Deformation von H_0 nach H_1 vor. Diese Schar $H_t(x)$ ist zugleich stetig in t und in x, was wir durch die Stetigkeit von $H : [0,1] \times X \to Y$ präzise ausdrücken.

Seien $f,g : X \to Y$ stetig. Eine *Homotopie* H von f nach g in Y ist eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$. Wir schreiben hierfür $H : f \simeq g : X \to Y$ oder kurz $H : f \simeq g$. Wir nennen dann f,g *homotop* in Y, geschrieben $f \simeq g$.

Im wichtigen Spezialfall einer konstanten Abbildung $g = \mathrm{const}^*_X : X \to \{*\} \subset Y$ nennen wir f *nullhomotop* oder *zusammenziehbar* in Y, geschrieben $f \simeq *$.

Der Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn $\mathrm{id}_X \simeq *$ in X gilt, geschrieben $X \simeq *$. Ausführlich bedeutet letzteres: Es existiert eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to X$ mit $H(0,x) = x$ und $H(1,x) = a$ für alle $x \in X$ und einen Punkt $a \in X$.

Bemerkung. Der Zielraum Y, in dem sich die Homotopie bewegen darf, ist wesentlicher Bestandteil der Definition. Zum Beispiel sind die stetigen Abbildungen $f,g : \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = +1$ und $g(0) = -1$ homotop, aber nicht $f,g : \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beispiel G4B. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig zu a (F6F), zum Beispiel $X = \mathbb{R}^n$ zu $a = 0$. Dann ist X zusammenziehbar auf a vermöge $H : [0,1] \times X \to X : (t,x) \mapsto (1-t)x + ta$.

- Jede stetige Abbildung $f : Y \to X$ ist homotop zu $g = \mathrm{const}^a_Y : Y \to \{a\} \subset X$ vermöge der affinen Homotopie $H : [0,1] \times Y \to X : (t,y) \mapsto (1-t)\, f(y) + ta$.
- Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist homotop zu $g = \mathrm{const}^{f(a)}_X : X \to \{f(a)\} \subset Y$ vermöge der Homotopie $H : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto f((1-t)x + ta)$.

Die Abbildung H ist jeweils wohldefiniert, weil X sternförmig ist, und stetig, weil sie eine Komposition stetiger Abbildungen ist. Hier gilt $H_0 = f$, und $H_1 = *$ ist konstant.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Satz G4C. *Seien $f,g : X \to \mathbb{S}^n$ stetig und nirgends antipodal, also $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt $H : f \simeq g$ vermöge der Homotopie*

$$H \;:\; [0,1]\times X \to \mathbb{S}^n \;:\; (t,x) \mapsto \frac{(1-t)\,f(x)+t\,g(x)}{|(1-t)\,f(x)+t\,g(x)|}.$$

BEWEIS. Der Nenner verschwindet nur für $t = 1/2$ und $f(x) = -g(x)$. Letzteres ist ausgeschlossen, also ist H wohldefiniert und stetig mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$. □

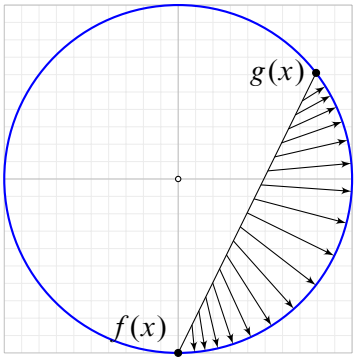


ABBILDUNG G:9. Konstruktion einer Homotopie $f \simeq g$ auf einer Sphäre

Bemerkung. Die Homotopie $K(t,x) = (1-t)\,f(x)+t\,g(x)$ verbindet $f(x)$ mit $g(x)$ durch den kürzesten Weg in $\mathbb{R}^{n+1}$, verlässt dabei aber die Sphäre $\mathbb{S}^n$. Um diese Abweichung zu reparieren, teilen wir durch die Norm: Diese verschwindet nie, da f und g niemals antipodal sind. Somit verbinden wir $f(x)$ und $g(x)$ durch den (eindeutigen!) kürzesten Weg in $\mathbb{S}^n$.

Satz G4D. *Ist $f : X \to \mathbb{S}^n$ stetig und nicht surjektiv, dann gilt $f \simeq *$.*

ERSTER BEWEIS. In Satz G4C wähle man $a \in \mathbb{S}^n \smallsetminus f(X)$ und $g = \mathrm{const}_X^a$. □

ZWEITER BEWEIS. Für $a \in \mathbb{S}^n \smallsetminus f(X)$ gilt $f : X \to \mathbb{S}^n \smallsetminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n \simeq *$ (A1L, G4B). □

Die Konstruktion einer Homotopie erfordert meist geometrisch-topologisches Geschick. Ebenso schwierig kann der Nachweis sein, dass zwei Abbildungen nicht homotop sind.

Übung G4E. In Kapitel J werden wir $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \not\simeq *$ zeigen, das heißt, die Sphäre der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist nicht zusammenziehbar. Als Übung beweise man den einfachsten Fall $n = 0$.

✻ **G4E.** Wir haben $\mathbb{S}^0 = \{-1,1\}$. Jede stetige Abbildung $H : [0,1]\times\mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}^0$ ist konstant auf jeder Komponente $[0,1]\times\{x\}$, denn $\mathbb{S}^0$ ist diskret. Aus $H_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^0}$ folgt $H_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^0}$; diese Abbildung ist nicht konstant.

Übung G4F. Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to X$ ist genau dann nullhomotop, $f \simeq *$, wenn eine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ mit $F|_{\mathbb{S}^n} = f$ existiert. (Allgemein G6J)

✻ **G4F.** „⇐“: Zu $F : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ definieren wir $H : [0,1]\times\mathbb{S}^n \to X$ durch $H(t,x) := F(tx)$. Diese Abbildung ist stetig mit $H_0 = F(0)$ konstant und $H_1 = F|_{\mathbb{S}^n} = f$. Das zeigt $H : * \simeq f$.

„⇒“: Die Abbildung $q : [0,1]\times\mathbb{S}^n \to \mathbb{D}^{n+1} : (t,x) \mapsto tx$ schlägt den Teilraum $\{0\}\times\mathbb{S}^n$ zum Nullpunkt zusammen. Da $[0,1]\times\mathbb{S}^1$ kompakt ist und $\mathbb{D}^{n+1}$ hausdorffsch, ist q abgeschlossen, also identifizierend (F1L). Sei $H : * \simeq f$, also $H : [0,1]\times\mathbb{S}^n \to X$ eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{const}_{\mathbb{S}^n}^a$ zu $H_1 = f$. Wir definieren $F : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ durch $F(tx) := H(t,x)$. Die Abbildung F ist wohldefiniert und stetig dank der kanonischen Faktorisierung $H = F \circ q$ (E2H), wobei wir den Quotienten durch die äquivalente Identifizierung q ersetzen.

☞ **§G4b. Nahe Abbildungen sind homotop.** Auf der Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nutzen wir die euklidische Metrik d. Satz G4C besagt: Sind $f,g : X \to \mathbb{S}^n$ stetig mit $d(f(x),g(x)) < 2$ in jedem Punkt $x \in X$, dann existiert eine Homotopie $H : f \simeq g$ wie angegeben. ☜

Dieses schöne Beispiel wollen wir nun zu einer allgemeinen Methode ausbauen und zeigen: *Nahe Abbildungen sind homotop.* Das ist im Allgemeinen offensichtlich falsch, etwa für total unzusammenhängende Räume wie $\mathbb{Q}$, aber unsere Intuition erweist sich als richtig für schöne Räume wie Mannigfaltigkeiten oder Simplizialkomplexe. Wir konstruieren geeignete Homotopien im Folgenden für euklidische Umgebungsretrakte. Zur Erinnerung:

Wir nennen $A \subset X$ einen *Umgebungsretrakt*, wenn es eine Umgebung U von A in X mit einer Retraktion von U auf A gibt, also $r : U \to A$ stetig mit $r|_A = \mathrm{id}_A$.

Beispiel. Die Sphäre $A = \mathbb{S}^n$ ist kein Retrakt des Raumes $X = \mathbb{R}^{n+1}$, wohl aber der offenen Umgebung $U = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ dank der radialen Retraktion $r : U \to \mathbb{S}^n : x \mapsto x/|x|$.

Allgemeiner nennen wir eine stetige Abbildung $\iota : A \to X$ einen Umgebungsretrakt, wenn eine Umgebung U von $\iota(A)$ in X existiert und eine stetige Abbildung $r : U \to A$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$. Insbesondere ist ι dann eine Einbettung in U und somit auch in X.

Speziell im euklidischen Raum $X = \mathbb{R}^n$ nennen wir $A \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $\iota : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ dann einen *euklidischen Umgebungsretrakt*, engl. *euclidean neighbourhood retract*, kurz *ENR*.

Übung G4G. Sei $(E,|-|)$ ein normierter Vektorraum, etwa $E = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm. Hierin sei Y ein Umgebungsretrakt. Dann sind nahe Abbildungen $f,g : X \to Y$ homotop.

Anleitung: Gegeben seien $U \subset E$ offen, $\iota : Y \to U$ und $r : U \to Y$ stetig mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_Y$.

(0) Zwei stetige Abbildungen $f,g : X \to Y$ heißen *nah*, wenn $[\iota f(x), \iota g(x)] \subset U$ gilt für jeden Punkt $x \in X$. Daraus erhalten wir eine Homotopie $H : f \simeq g$ vermöge

$$H(t,x) = r\big((1-t)\cdot \iota f(x) + t \cdot \iota g(x)\big).$$

(1) Die Einbettung ι metrisiert den Raum Y vermöge $d_Y(y,y') = |\iota(y) - \iota(y')|$.

(2) Die Abstandsfunktion $\varepsilon : Y \to \mathbb{R}_{>0} : y \mapsto d_E(\iota(y), E \smallsetminus U)$ ist stetig.

(3) Gilt $d_Y(f(x),g(x)) < \varepsilon(f(x))$ in jedem Punkt $x \in X$, so folgt $H : f \simeq g$ wie oben.

(4) Ist Y kompakt, so existiert $\varepsilon_0 = \min \varepsilon > 0$. Gilt $d_Y(f,g) < \varepsilon_0$, so folgt $H : f \simeq g$.

(5) Illustrieren Sie dies für die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$. Inwiefern ist Satz G4C besser?

✻ **G4G.** (0) Die affine Homotopie $K : [0,1] \times X \to E : (t,x) \mapsto (1-t)\cdot \iota f(x) + t \cdot \iota g(x)$ verläuft im Raum E von $K_0 = \iota f$ nach $K_1 = \iota g$. Sind f und g nah, so verläuft K ganz in U. Wir können dann die Retraktion $r : U \to Y$ anwenden und erhalten so die stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto r(K(t,x))$. Es gilt $H_0 = r\iota f = f$ und $H_1 = r\iota g = g$, also $H : f \simeq g$, wie gewünscht.

(1) Dank der Retraktion $r : U \to Y$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_Y$ ist ι eine Einbettung (E2I). Somit stiftet ι einen Homöomorphismus von Y auf das Bild $\iota(Y)$. Der Teilraum $\iota(Y) \subset E$ ist metrisierbar wie angegeben (D1L).

(2) Dank Dreiecksungleichung ist die Funktion ε sogar lipschitz–stetig (C3N). Da $U \subset E$ offen ist, ist das Komplement $E \smallsetminus U$ abgeschlossen. Für jeden Punkt $\iota(y) \in U$ gilt somit $d_E(\iota(y), E \smallsetminus U) > 0$ (C3N).

(3) Die Bedingung $d_Y(f(x),g(x)) < \varepsilon(f(x))$ garantiert $\iota g(x) \in B(\iota f(x), \varepsilon(f(x))) \subset U$. Da dieser Ball konvex ist, liegt die Verbindungsstrecke $[\iota f(x), \iota g(x)]$ ganz in U. Wir können also (0) anwenden.

(4) Wenn Y kompakt ist, so nimmt jede stetige Funktion ihr Minimum an (F1K). Wir können also (3) anwenden, nun vereinfacht von der stetigen Funktion ε zu der Konstanten ε_0.

(5) Im Fall der Sphäre $\mathbb{S}^n$ erlaubt die Umgebung $U = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ die Retraktion $r : U \to \mathbb{S}^n : x \mapsto x/|x|$. Hier ist ε konstant gleich 1, also $\varepsilon_0 = 1$. Gemäß Satz G4C wäre $\varepsilon_0 = 2$ optimal für nahe Abbildungen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§G4c. Homotopieklassen. Für Homotopien $H : [0,1] \times X \to Y$ definieren wir drei einfache aber nützliche Operationen, wie bereits für Wege $\gamma : [0,1] \to Y$ in §G2c:

(1) Zu jeder stetigen Abbildung $f : X \to Y$ definieren wir die *konstante Homotopie* $H : f \simeq f$ durch $H : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto f(x)$.
(2) Zu jeder Homotopie $H : f \simeq g$ definieren wir die *inverse Homotopie* $\bar{H} : g \simeq f$ durch $\bar{H} : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto H(1-t,x)$.
(3) Zu je zwei verknüpfbaren Homotopien $H : f \simeq g$ und $K : g \simeq h$ definieren wir ihre *Aneinanderhängung* $H * K : f \simeq h$ durch

$$H * K \;:\; [0,1] \times X \to Y \;:\; (t,x) \mapsto \begin{cases} H(2t,x) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ K(2t-1,x) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert wegen $H_1 = K_0 = g$ und stetig dank Verklebesatz (E1P), denn $[0, 1/2] \times X$ und $[1/2, 1] \times X$ sind abgeschlossen in $[0,1] \times X$.

Definition G4H. Seien X und Y topologische Räume. Auf $\mathscr{C}(X,Y)$ ist Homotopie $\simeq$ eine Äquivalenzrelation. Die Quotientenmenge bezeichnen wir mit $[X,Y] := \mathscr{C}(X,Y)/_{\simeq}$.

Beispiel G4I. Die Menge $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist riesig, hingegen hat $[\mathbb{R},\mathbb{R}] = \{[0]\}$ nur ein Element. Für jeden Raum X und $n \in \mathbb{N}$ gilt $[X,\mathbb{R}^n] = \{[0]\}$ denn $H : 0 \simeq f$ vermöge $H(t,x) = tf(x)$. Ebenso haben wir $[\mathbb{R}^n, X] \cong \pi_0(X)$ vermöge $[f] \mapsto [f(0)]_X$ und $[\mathrm{const}^a_{\mathbb{R}^n}] \mapsfrom [a]_X$.

Beispiel. In §J1 konstruieren wir die Umlaufzahl $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Dabei hat die k–fache Umlaufung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^* : z \mapsto z^k$ die Umlaufzahl $\deg(f) = k$. Stetige Abbildungen $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^*$ sind Schleifen um den Nullpunkt. Genau dann existiert eine Homotopie $f \simeq g$ in $\mathbb{C}^*$, wenn beide Schleifen dieselbe Umlaufzahl haben, kurz $\deg(f) = \deg(g)$.

Bemerkung G4J. Anschaulich ist eine Homotopie $H : [0,1] \times X \to Y$ ein Weg von H_0 nach H_1 im Raum $\mathscr{C}(X,Y)$ der stetigen Abbildungen $X \to Y$. Genauer gilt:

- Ist $H : [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von f nach g, dann ist die adjungierte Abbildung $h : [0,1] \to \mathscr{C}(X,Y)$ mit $h(t)(x) = H(t,x)$ ein Weg von f nach g (F7H).
- Ist umgekehrt $h : [0,1] \to \mathscr{C}(X,Y)$ ein Weg und zudem X kompakt oder lokal-kompakt, dann ist $H : [0,1] \times X \to Y$ mit $H(t,x) = h(t)(x)$ stetig (F7H).

Homotope Abbildungen $f, g : X \to Y$ sind demnach Punkte $f, g \in \mathscr{C}(X,Y)$, die durch einen Weg in $\mathscr{C}(X,Y)$ verbindbar sind. In den meisten Anwendungen ist X (lokal-)kompakt und somit gilt auch die gewünschte Umkehrung. In diesem Fall gilt $[X,Y] = \pi_0(\mathscr{C}(X,Y))$.

Übung G4K. Für jeden topologischen Raum X sind äquivalent:

(1) Der Raum X ist zusammenziehbar, das heißt, es existiert eine Homotopie $\mathrm{id}_X \simeq *$.
(2) Es gilt $[X,X] = \{*\}$, d.h. je zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to X$ sind homotop.
(3) Es gilt $[Z,X] = \{*\}$ für jeden topologischen Raum Z.
(4) Es gilt $[X,Z] \xrightarrow{\sim} [\{*\}, Z] = \pi_0(Z)$ für jeden topologischen Raum Z.

✻ **G4K.** „(1) ⇒ (3)“: Aus der Homotopie $\mathrm{id}_X \simeq \mathrm{const}^a_X$ folgt dank G4L für jede stetige Funktion $f : Z \to X$ die Homotopie $f = \mathrm{id}_X \circ f \simeq \mathrm{const}^a_X \circ f = \mathrm{const}^a_Z$. Die Implikation „(3) ⇒ (2)“ folgt durch Spezialisierung $Z = X$. Die Implikation „(2) ⇒ (1)“ ist klar: Aus $[X,X] = \{*\}$ folgt $[\mathrm{id}_X] = [\mathrm{const}^a_X]$, und das bedeutet $\mathrm{id}_X \simeq \mathrm{const}^a_X$. Die Äquivalenz „(1) ⇔ (4)“ rechnen wir etwas allgemeiner in G4T nach.

§G4d. Die Homotopiekategorie. Wir halten folgende Beobachtungen fest:

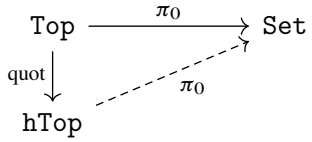
Satz G4L. *Seien $f_0, f_1 : X \to Y$ und $g_0, g_1 : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Aus Homotopien $F : f_0 \simeq f_1$ und $G : g_0 \simeq g_1$ folgt die Homotopie $H : g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ mit $H_t = G_t \circ F_t$.*

Wir erhalten so die Quotientenkategorie $\mathtt{hTop} = \mathtt{Top}/\text{Homotopie}$*:*

(a) Objekte sind alle topologischen Räume $X, Y, Z, \ldots$ (dieselben wie in Top*).*
(b) Morphismen sind die Homotopieklassen $[f : X \to Y]$ stetiger Abbildungen.
(c) Die Komposition ist $[g : Y \to Z] \circ [f : X \to Y] := [g \circ f : X \to Z]$.

BEWEIS. Die erste Aussage ist klar. Somit ist die Komposition auf Äquivalenzklassen wohldefiniert. In Top ist id_X neutral, also auch $[\mathrm{id}_X]$ in hTop: $[f] \circ [\mathrm{id}_X] = [f \circ \mathrm{id}_X] = [f]$ und $[\mathrm{id}_Y] \circ [f] = [\mathrm{id}_Y \circ f] = [f]$. In Top gilt Assoziativität, also auch in hTop. □

Satz G4M. *Der Funktor $\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ ist homotopie-invariant: Aus $H : f \simeq g : X \to Y$ folgt $\pi_0(f) = \pi_0(g) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. Er induziert somit einen Funktor $\pi_0 : \mathtt{hTop} \to \mathtt{Set}$.*



BEWEIS. Für $a \in X$ stimmen $\pi_0(f) : [a]_X \mapsto [f(a)]_Y$ und $\pi_0(g) : [a]_X \mapsto [g(a)]_Y$ überein, denn $t \mapsto H(t,a)$ ist ein Weg von $f(a)$ nach $g(a)$ in Y, also $[f(a)]_Y = [g(a)]_Y$. □

§G4e. Homotopie-Äquivalenz. Erinnerung (D2A): Ein Homöomorphismus $(f,g) : X \cong Y$ besteht aus stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Modulo Homotopie erhalten wir den Begriff der *Homotopie-Äquivalenz*:

Definition G4N. Eine *Homotopie–Äquivalenz* $(f,g) : X \simeq Y$ besteht aus zwei stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. In diesem Fall nennen wir die Räume X, Y *homotopie-äquivalent*, geschrieben $X \simeq Y$.

Abkürzend nennen wir allein die Abbildung $f : X \to Y$ eine Homotopie-Äquivalenz, wenn eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ existiert mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

Beispiel G4O. Für $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} = \mathrm{GL}_1 \mathbb{C}$ und $\mathbb{S}^1 = \mathrm{U}_1 \mathbb{C}$ gilt $\mathbb{S}^1 \not\simeq \mathbb{C}^\times$, aber $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^\times$.

(1) $\mathbb{S}^1 \not\simeq \mathbb{C}^\times$: Je zwei Punkte $a \neq b$ trennen $\mathbb{S}^1$, im Raum $\mathbb{C}^\times$ hingegen gilt das nicht. Weitere topologische Invarianten: Der Raum $\mathbb{S}^1$ ist kompakt, der Raum $\mathbb{C}^\times$ hingegen nicht.

(2) $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^\times$: Inklusion $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times : z \mapsto z$ und radiale Retraktion $g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z/|z|$ erfüllen $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $f \circ g : z \mapsto z/|z|$. Es gilt $H : f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}$ vermöge $H : [0,1] \times \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : (t,z) \mapsto tz + (1-t)z/|z|$: Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn sie verläuft in $\mathbb{C}^\times$, und stetig als Komposition stetiger Abbildungen.

Beispiel. Sei $n \geq 1$. Für $X = \mathbb{S}^{n-1}$ und $Y = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ gilt ebenso $X \not\simeq Y$ aber $X \simeq Y$. Die Homotopie-Äquivalenz $X \simeq Y$ konstruieren wir wie im Beispiel G4O (Übung G5D).

Bemerkung G4P. Für alle stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gilt:

$$(f,g) : X \cong Y \quad \overset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \quad (f,g) : X \simeq Y \quad \overset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \quad (\pi_0(f), \pi_0(g)) : \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$$

Die Umkehrungen gelten nicht: $\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^n \simeq *$ (G4B) aber $\mathbb{R}^m \not\simeq \mathbb{R}^n$ für $m \neq n$ (G2D, J7C). Sind $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Polyeder, so gilt: $X \simeq Y$ impliziert $\chi(X) = \chi(Y)$, siehe A3J.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Bemerkung.** Homotopie–Äquivalenz ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation. ☜

- Reflexivität: Wir haben die Homotopie-Äquivalenz $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : X \simeq X$.
- Symmetrie: Aus $(f,g) : X \simeq Y$ folgt $(g,f) : Y \simeq X$.
- Transitivität: Aus $(f,f') : X \simeq Y$ und $(g,g') : Y \simeq Z$ folgt $(h,h') : X \simeq Z$ vermöge der Kompositionen $h = g \circ f : X \to Z$ und $h' = f' \circ g' : Z \to X$. Dank G4L gilt nämlich $(f'g')(gf) = f'(g'g)f \simeq f'\mathrm{id}_Y f = f'f \simeq \mathrm{id}_X$ und ebenso $(gf)(f'g) \simeq \mathrm{id}_Z$.

Etwas abstrakter und effizienter kann man hier ausnutzen, dass Homotopie-Äquivalenz die Isomorphie in der Kategorie hTop ist (H2C), und in jeder Kategorie ist die Isomorphie eine Äquivalenzrelation. Dies zeigt noch etwas genauer: Zu jeder Homotopie-Äquivalenz $f : X \to Y$ ist die Homotopie-Inverse $g : Y \to X$ eindeutig bis auf Homotopie.

☞ **Übung G4Q.** Ein Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn er zum einpunktigen Raum $\{*\}$ homotopie-äquivalent ist. (Daher in beiden Fällen dieselbe Schreibweise $X \simeq *$.) ☜

✻ **G4Q.** „⇒“: Sei $H : [0,1] \times X \to X$ eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}_X$ nach $H_1 = \mathrm{const}^a_X$, $a \in X$. Für $Y = \{a\}$ sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g(a) = a$ gilt $(f,g) : X \simeq Y$, denn $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $H : \mathrm{id}_X \simeq g \circ f$.

„⇐“: Umgekehrt bedeutet $X \simeq Y = \{a\}$: Es existieren stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ sowie eine Homotopie $H : \mathrm{id}_X \simeq g \circ f$, also von $H_0 = \mathrm{id}_X$ nach $H_1 = \mathrm{const}^{g(a)}_X$.

☞ **Übung G4R.** Ein Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte in X durch einen Weg verbinden lassen. Wir nennen X *einfach zusammenhängend*, wenn zudem je zwei Wege α, β von a nach b homotop sind bei festen Endpunkten. Zeigen Sie hierzu: ☜

(1) Genau dann ist der Raum X wegzusammenhängend, wenn $[\mathbb{S}^0, X] = \{*\}$ gilt.
(2) Genau dann ist der Raum X einfach zusammenhängend, wenn $[\mathbb{S}^1, X] = \{*\}$ gilt.

Hinweis: Veranschaulichen Sie diese Aussagen mit Skizzen und formalisieren Sie diese.

✻ **G4R.** Die Äquivalenzen sind anschaulich klar: Machen Sie Skizzen und wiederholen Sie genau die Definitionen. Für einen formalen Beweis geben wir explizite Parametrisierungen der jeweils geforderten Abbildungen:

(1) „⇐“: Zu $a, b \in X$ definieren wir $f : \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} \to X$ durch $f(-1) = a$ und $f(1) = b$. Wegen $[\mathbb{S}^0, X] = \{*\}$ existiert eine Homotopie $H : [0,1] \times \mathbb{S}^0 \to X$ von $H_0 = f$ zu $H_1 : \pm 1 \mapsto c$, also ein Weg $\alpha(t) = H(t,-1)$ von a nach c und ein Weg $\beta(t) = H(t,1)$ von b nach c. Somit ist $\gamma = \alpha * \overline{\beta}$ ein Weg von a über c nach b.

„⇒“: Sei $f : \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} \to X$. Wegen $\pi_0(X) = \{*\}$ existiert ein Weg $\alpha : [0,1] \to X$ von $\alpha(0) = f(-1)$ nach $\alpha(1) = f(1)$. Wir erhalten die Homotopie $H : [0,1] \times \mathbb{S}^0 \to X$ mit $H(t,-1) = \alpha(t)$ und $H(t,1) = f(1)$.

(2) „⇐“: Zunächst ist X wegzusammenhängend, also $\pi_0(X) = \{*\}$: Wären zwei Punkte $a, b \in X$ nicht durch einen Weg in X verbindbar, dann wären die Abbildungen $\mathrm{const}^a_{\mathbb{S}^1}, \mathrm{const}^b_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to X$ nicht homotop.

Zu Wegen $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ von a nach b suchen wir eine Homotopie $H : [0,1]^2 \to X$ von α nach β bei festen Endpunkten. Auf dem Rand $\partial[0,1]^2$ ist demnach $h : \partial[0,1]^2 \to X$ vorgegeben durch $h(0,t) = \alpha(t)$ und $h(1,t) = \beta(t)$ sowie $h(s,0) = a$ und $h(s,1) = b$. Wir nutzen einen Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$ (F6G oder A1E) und betrachten $f = h \circ \varphi : \mathbb{S}^1 \to X$. Wegen $[\mathbb{S}^1, X] = \{*\}$ existiert eine Homotopie $f \simeq *$, und somit eine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{D}^2 \to X$ mit $F|_{\mathbb{S}^1} = f$ (G4F). Damit ist $H = F \circ \varphi^{-1} : [0,1]^2 \to X$ gefunden.

„⇒“: Sei $f : \mathbb{S}^1 \to X$ stetig. Dies definiert zwei Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ von $f(1)$ nach $f(-1)$, nämlich $\alpha(t) = f(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ und $\beta(t) = f(\cos(\pi t), -\sin(\pi t))$. Da X einfach zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie $H : [0,1]^2 \to X$ von $H_0 = \alpha$ nach $H_1 = \beta$ bei festen Endpunkten. Wir definieren $F : \mathbb{D}^2 \to X$ durch $F(\cos(\pi t), (1-2s)\sin(\pi t)) = H(s,t)$. Dies ist stetig mit $f = F|_{\mathbb{S}^1}$, also $f \simeq *$ (G4F).

Somit sind alle stetigen Abbildungen $f, g : \mathbb{S}^1 \to X$ homotop zu konstanten Abbildungen $f \simeq \mathrm{const}^a_{\mathbb{S}^1}$, $g \simeq \mathrm{const}^b_{\mathbb{S}^1}$. Da zudem X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg von a nach b und somit eine Homotopie von $\mathrm{const}^a_{\mathbb{S}^1}$ nach $\mathrm{const}^b_{\mathbb{S}^1}$. Dank Transitivität der Homotopie (G4H) gilt schließlich $f \simeq g$.

Übung G4s. (0) Skizzieren Sie $X = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0 \,\}$ und $Y = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x \neq 0 \,\}$ und $Z = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0 \,\}$. Bestimmen Sie die Zerlegungen $\pi_0(X)$, $\pi_0(Y)$, $\pi_0(Z)$. Berechnen Sie damit $[X,X]$, $[X,Y]$, $[Y,X]$, ...: Wie viele Elemente haben diesen Mengen?

Dahinter stecken universelle Rechenregeln! Vorgelegt seien topologische Räume X, X_i mit $i \in I$ und Y, Y_J mit $j \in J$. Konstruieren Sie die folgenden natürlichen Bijektionen:

(1) $[\coprod_{i\in I} X_i, Y] \cong \prod_{i\in I} [X_i, Y]$ und $[X, \prod_{j\in J} Y_j] \cong \prod_{j\in J} [X, Y_j]$

(2) $[X, \coprod_{j\in J} Y_j] \cong \coprod_{j\in J} [X, Y_j]$, falls X wegzusammenhängend ist.

(3) Seien $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ und $Y = \bigsqcup \pi_0(Y)$ topologische Summen. Dann folgt:

$$[X,Y] \cong \prod_{A\in\pi_0(X)} \coprod_{B\in\pi_0(Y)} [A,B]$$

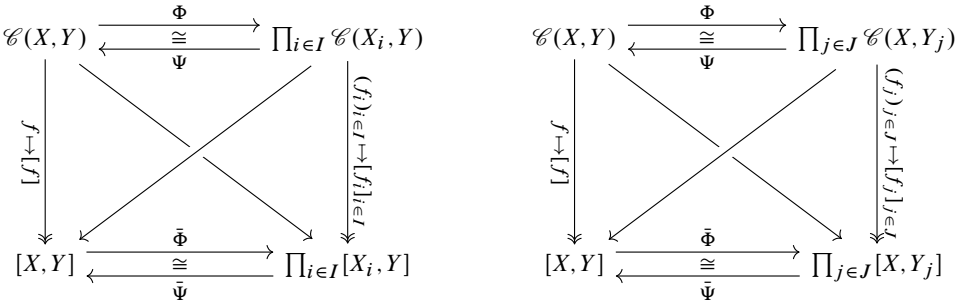
Das gilt insbesondere für lokal wegzusammenhängende Räume X und Y (G3C).

(4) Zusätzlich zu (4) gelte $[A,B] = \{*\}$ für alle $A \in \pi_0(X)$ und $B \in \pi_0(Y)$. Dann ist

$$T \;:\; [X,Y] \to \mathrm{Abb}(\pi_0(X), \pi_0(Y)) \;:\; [f] \mapsto \pi_0(f)$$

eine Bijektion. Dies gilt insbesondere falls $A \simeq *$ für alle $A \in \pi_0(X)$ oder falls $B \simeq *$ für alle $B \in \pi_0(Y)$. Damit lösen Sie die eingangs gestellten Beispiele!

⁕ **G4s.** (1) Wir betrachten die topologische Summe $X = \coprod_{i\in I} X_i$ mit den Inklusionen $\iota_i : X_i \hookrightarrow X$. Die universelle Eigenschaft (E3F) liefert die Bijektion $(\Phi, \Psi) : \mathscr{C}(X,Y) \cong \prod_{i\in I} \mathscr{C}(X_i, Y)$ wobei $\Phi : f \mapsto (f_i)_{i\in I}$ mit $f_i = f \circ \iota_i$ und $\Psi : (f_i)_{i\in I} \mapsto f$. Wir verlängern Φ modulo Homotopie zu $\mathscr{C}(X,Y) \twoheadrightarrow \prod_{i\in I} [X_i, Y]$. Aus $H : f \simeq g$ folgt $H_i : f_i \simeq g_i$, also erhalten wir $\bar\Phi : [X,Y] \cong \prod_{i\in I} [X_i, Y]$. Umgekehrt, aus $H_i : f_i \simeq g_i$ folgt $H : f \simeq g$, also erhalten wir $\bar\Psi : \prod_{i\in I} [X_i, Y] \to [X,Y]$. Der Rest ist Routine: Aus $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ folgt $\bar\Psi \circ \bar\Phi = \mathrm{id}$, und aus $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ folgt $\bar\Phi \circ \bar\Psi = \mathrm{id}$. Diese Konstruktion ist in folgendem Diagramm links zusammengefasst:



Für $Y = \prod_{j\in J} Y_j$ gelingt die analoge Konstruktion wie im Diagramm rechts. Formulieren Sie dies aus!

(2) Sei X wegzusammenhängend und $Y = \coprod_{j\in J} Y_j$. Dann gilt $\mathscr{C}(X,Y) = \coprod_{j\in J} \mathscr{C}(X,Y_j)$: Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ liegt das Bild $f(X)$ ganz in einem Raum Y_j, also $f = \iota_j \circ f_j : X \to X_j \hookrightarrow Y$. Es entsteht erneut ein Diagramm wie die obigen beiden, und wir erhalten $[X,Y] \cong \coprod_{j\in J} [X,Y_j]$

(3) Seien $X = \bigsqcup_{A\in\pi_0(X)} A$ und $Y = \bigsqcup_{B\in\pi_0(Y)} B$ topologische Summen. Aus (1) und (2) folgt dann:

$$[X,Y] = \Big[\bigsqcup_{A\in\pi_0(X)} A, \bigsqcup_{B\in\pi_0(Y)} B \Big] \cong \prod_{A\in\pi_0(X)} \Big[A, \bigsqcup_{B\in\pi_0(Y)} B\Big] \cong \prod_{A\in\pi_0(X)} \coprod_{B\in\pi_0(Y)} [A,B]$$

(4) Die Abbildung T verdanken wir der Homotopie-Invarianz des Funktors $\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ (Satz G4M). Umgekehrt konstruieren wir nun $U : \mathrm{Abb}(\pi_0(X), \pi_0(Y)) \to [X,Y]$ wie folgt: Gegeben sei eine Abbildung $g : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. Zu $A \in \pi_0(X)$ und $B = g(A) \in \pi_0(Y)$ wissen wir $[A,B] = [f_A]$ mit einem Repräsentanten $f_A : A \to B$, etwa einer konstanten Abbildung. Wir definieren $f : X \to Y$ durch die Verklebung $f = \bigcup_{A\in\pi_0(X)} f_A$. Wir erhalten so $U : g \mapsto f$. Es gilt $T \circ U = \mathrm{id}$ und $U \circ T = \mathrm{id}$ dank (3).

(0) Die Teilmengen $X, Y \subset \mathbb{R}$ bestehen aus drei bzw. vier Intervallen und $Z \subset \mathbb{R}^2$ besteht aus den vier offenen Quadranten. Alle Komponenten sind konvex, also zusammenziehbar. Wir können daher (4) anwenden und erhalten $\sharp[X,X] = 3^3 = 27$ und $\sharp[X,Y] = 4^3 = 64$ und $\sharp[Y,X] = 3^4 = 81$ und $\sharp[Y,Y] = 4^4 = 256$, etc.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§G4f. Homotopie-Funktoren.** Vorgelegt seien zwei topologische Räume X und Y. ☜
Homotopie-Äquivalenz $X \simeq Y$ beweist man durch Konstruktion; die Negation $X \not\simeq Y$ durch Angabe eines Hindernisses. Der allgemeine Ansatz hierzu ist folgende Beobachtung:

(1) Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert $f_* : \mathscr{C}(Z,X) \to \mathscr{C}(Z,Y) : h \mapsto f \circ h$.
Aus $h \simeq h'$ folgt $f \circ h \simeq f \circ h'$; so erhalten wir $f_* : [Z,X] \to [Z,Y] : [h] \mapsto [f \circ h]$.
Aus $f \simeq g$ folgt $f_* = g_*$, also erhalten wir $[f]_* : [Z,X] \to [Z,Y] : [h] \mapsto [f \circ h]$.
Dies definiert kovariante Funktoren $[Z,-] : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ bzw. $\mathtt{hTop} \to \mathtt{Set}$.

(2) Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert $f^* : \mathscr{C}(Y,Z) \to \mathscr{C}(X,Z) : h \mapsto h \circ f$.
Aus $h \simeq h'$ folgt $h \circ f \simeq h' \circ f$; so erhalten wir $f^* : [Y,Z] \to [X,Z] : [h] \mapsto [h \circ f]$.
Aus $f \simeq g$ folgt $f^* = g^*$, also erhalten wir $[f]^* : [Y,Z] \to [X,Z] : [h] \mapsto [h \circ f]$.
Dies definiert kontravariante Funktoren $[-,Z] : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ bzw. $\mathtt{hTop} \to \mathtt{Set}$.

Bemerkung. Jede Homotopie-Äquivalenz $X \simeq Y$ stiftet Bijektionen $[Z,X] \cong [Z,Y]$ und $[X,Z] \cong [Y,Z]$. Können wir mit einem geeigneten Testraum Z die Aussage $[Z,X] \ncong [Z,Y]$ oder $[X,Z] \ncong [Y,Z]$ nachweisen, so sind X und Y nicht homotopie-äquivalent.

☞ **Beispiel.** Für $[\{*\},X] \cong \pi_0(X)$ gilt: Jede Homotopie-Äquivalenz $(f,g) : X \simeq Y$ induziert ☜
$\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$. Aus $\pi_0(X) \ncong \pi_0(Y)$ folgt daher $X \not\simeq Y$. Zum Beispiel $\{0,1\} \not\simeq [0,1]$.

Ausführlich: Aus $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ macht der Funktor π_0 Bijektionen $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ und $\pi_0(g) : \pi_0(Y) \to \pi_0(X)$, denn dank Homotopie-Invarianz (G4M) gilt $\pi_0(g) \circ \pi_0(f) = \pi_0(g \circ f) = \pi_0(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}$ sowie $\pi_0(f) \circ \pi_0(g) = \pi_0(f \circ g) = \pi_0(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{\pi_0(Y)}$.

☞ **Bemerkung.** Die Kardinalität der Menge $[Z,X]$ bzw. $[X,Z]$ zählt stetige Abbildungen ☜
modulo Homotopie. Anschaulich misst dies die Komplexität des Raumes X in Bezug auf einen fest gewählten Vergleichsraum, etwa $Z = \mathbb{S}^n$. Die möglichst explizite Berechnung bzw. Beschreibung von $[Z,X]$ und $[X,Z]$ ist das zentrale Thema der Homotopie-Theorie.

☞ **Beispiel.** Der Abbildungsgrad (Kapitel J) liefert eine Bijektion $[\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$ für alle $n \geq 1$. ☜
Insbesondere zeigt dies $\mathbb{S}^n \not\simeq \{*\}$. Mit Simplizialer Approximation (Kapitel I) beweisen wir $[\mathbb{S}^m,\mathbb{S}^n] = \{0\}$ für $m < n$ (I4B). Die Überlagerungstheorie (Kapitel M) zeigt $[\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^1] \cong \{0\}$ für alle $n \geq 2$. Weiters gilt $[\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^2] \cong \{0\}$ und $[\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2] \cong [\mathbb{S}^3,\mathbb{S}^2] \cong \mathbb{Z}$. Für jedes $n \geq 4$ ist $[\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^2]$ eine endliche Menge, aber für große n ist die Elementezahl unbekannt.

☞ **Übung G4T.** Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ sind äquivalent: ☜

(1) Die stetig Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Homotopie-Äquivalenz.
(2) Die Abbildung $f_* : [Z,X] \to [Z,Y] : [h] \mapsto [f \circ h]$ ist bijektiv für jeden Raum Z.
(3) Die Abbildung $f^* : [Y,Z] \to [X,Z] : [h] \mapsto [h \circ f]$ ist bijektiv für jeden Raum Z.

✻ **G4T.** „(1) ⇒ (2)“ Für $g : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ gilt $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{[Z,X]}$ und $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{[Z,Y]}$. „(2) ⇒ (1)“ Für $Z = Y$ ist $f_* : [Y,X] \to [Y,Y]$ surjektiv. Demnach existiert $g : Y \to X$ mit $f_*([g]) = [\mathrm{id}_Y]$, also $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Hieraus folgt $f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f \simeq \mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X$, also $f_*([g \circ f]) = f_*([\mathrm{id}_X])$. Für $Z = X$ ist $f_* : [X,X] \to [X,Y]$ injektiv, also $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.

„(1) ⇒ (3)“ Für $g : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ gilt $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (\mathrm{id}_Y)^* = \mathrm{id}_{[Y,Z]}$ und $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{[X,Z]}$. „(3) ⇒ (1)“ Für $Z = X$ ist $f^* : [Y,X] \to [X,X]$ surjektiv. Demnach existiert $g : Y \to X$ mit $f^*([g]) = [\mathrm{id}_X]$, also $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Hieraus folgt $(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) \simeq f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f$, also $f^*([g \circ f]) = f^*([\mathrm{id}_Y])$. Für $Z = Y$ ist $f^* : [Y,Y] \to [X,Y]$ injektiv, also $g \circ f \simeq \mathrm{id}_Y$.

§G5. Retrakte und Deformationsretrakte

§G5a. Relative Homotopie. Seien X und Y topologische Räume. Wir können den Homotopie-Begriff für Abbildungen $f : X \to Y$ verfeinern, indem wir verlangen, dass sich die Punkte eines vorgegebenen Unterraums $A \subset X$ während der Homotopie nicht bewegen:

Definition G5A. Eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y$ heißt *Homotopie relativ zum Teilraum* $A \subset X$, wenn $H(t,a) = H(0,a)$ für alle $t \in [0,1]$ und $a \in A$ gilt.

Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ mit $f|_A = g|_A$ heißen *homotop relativ* A, wenn es eine Homotopie H relativ A von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$ gibt, geschrieben $H : f \simeq g$ rel A.

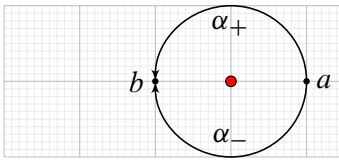
Bemerkung. Im Spezialfall $A = \emptyset$ erhalten wir die übliche (absolute) Homotopie.

Wie im absoluten Fall zeigt man, dass Homotopie relativ A eine Äquivalenzrelation ist.

Eine Homotopie $H : f \simeq g : X \to Y$ ist ein Weg im Raum $\mathscr{C}(X,Y)$ der stetigen Abbildungen (G4J). Entsprechend ist eine Homotopie relativ A ein Weg im Teilraum

$$\mathscr{C}(X,Y)_h = \left\{ f \in \mathscr{C}(X,Y) \;\middle|\; f|_A = h \right\} \subset \mathscr{C}(X,Y).$$

Beispiel. In Kapitel L betrachten wir stetige Abbildungen $\alpha : [0,1] \to X$, also Wege in X, und hierzu relative Homotopien, die die Endpunkte 0 und 1 festhalten. Konkretes Beispiel:



$X = [0,1]$, $Y = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$,
$\alpha_\pm : [0,1] \to \mathbb{C}^\times : t \mapsto \mathrm{e}^{\pm \pi i t}$.
Im Raum Y gilt $\alpha_- \simeq \alpha_+$ aber
nicht $\alpha_- \simeq \alpha_+$ relativ $A = \{0,1\}$.

Die Wege $\alpha_\pm : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ mit $\alpha_\pm(t) = \mathrm{e}^{\pm \pi i t}$ laufen von $+1$ nach -1. Da $[0,1]$ zusammenziehbar ist, sind auch $\alpha_\pm$ zusammenziehbar (G4B), etwa durch $H(s,t) = \gamma_\pm(st)$: Für $s = 1$ gilt $H_1 = \alpha_\pm$, für $s = 0$ ist $H_0 = 1$ konstant. Insbesondere sind die Abbildungen α_+ und α_- homotop in X. Bei festgehaltenen Endpunkten gilt dies nicht! (J1I)

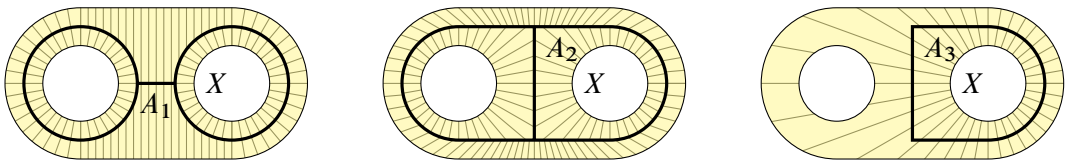


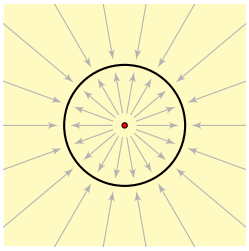
ABBILDUNG G:10. Retrakte $A_i \subset X$

Beispiel. Abbildung G:10 zeigt Retrakte $A_i \subset X$. Retraktionen $r_i : X \to A_i$ lassen sich mit etwas Mühe explizit angeben, etwa stückweise dank Verklebesatz (E1P) wie in E1R; für $r_3 : X \to A_3$ genügt eine radiale Projektion. Zudem sind A_1, A_2 in X Deformationsretrakte vermöge $H(t,x) = (1-t)x + t\,r(x)$. Hingegen ist A_3 kein Deformationsretrakt von X. Ein Beweis von $A_3 \not\simeq X$ gelingt mit der Euler–Charakteristik (A3J), denn $\chi(A_3) = 0$ aber $\chi(X) = -1$, oder mit der Fundamentalgruppe (L2N), denn die Gruppen $\pi_1(A_3, 0) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(X,0) \cong \langle a, b \mid - \rangle$ sind frei mit 1 bzw. 2 Erzeugern, und somit nicht isomorph.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§G5b. Retrakte und Deformationsretrakte.** Anschaulich ist plausibel, dass es keine stetige Abbildung $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $r|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ gibt. (Wir werden dies in J4E beweisen; für $n = 1$ genügt der Zwischenwertsatz C3R.) Nach Entfernen des Nullpunktes geht's: ☜

Beispiel G5B. Die Räume $A = \mathbb{S}^1$ und $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ sind homotopie-äquivalent (G4O): Zur Inklusion $\iota : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ haben wir die Retraktion $r : X \to A : x \mapsto x/|x|$, denn $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$, das heißt $r(a) = a$ für alle $a \in A$. Zudem gilt $H : \iota \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ vermöge der affinen Homotopie $H : [0,1] \times X \to X : (t,x) \mapsto (1-t)x + tx/|x|$: Sie verläuft in X von $H_0 = \mathrm{id}_X$ nach $H_1 = \iota \circ r$. Die Punkte $a \in A$ werden dabei nicht bewegt, denn es gilt $H(t,a) = a$ für alle $t \in [0,1]$.



✍ **Definition G5C.** Seien $\iota : A \to X$ und $r : X \to A$ stetig. Das Paar $(\iota, r) : A \rightleftarrows X$ heißt... ✍

Bezeichnung für (ι, r)	Bedingung an $r \circ \iota : A \to A$	Bedingung an $\iota \circ r : X \to X$
Homöomorphismus	$r \circ \iota = \mathrm{id}_A$	$\iota \circ r = \mathrm{id}_X$
Homotopie-Äquivalenz	$r \circ \iota \simeq \mathrm{id}_A$	$\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_X$
Deformationsretrakt	$r \circ \iota = \mathrm{id}_A$	$\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_X$
starker Deformationsretrakt	$r \circ \iota = \mathrm{id}_A$	$\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ rel $\iota(A)$
Retrakt	$r \circ \iota = \mathrm{id}_A$	–
schwacher Retrakt	$r \circ \iota \simeq \mathrm{id}_A$	–

Notation. Die ersten beiden Zeilen formulieren wir üblicherweise gleichberechtigt für $(f,g) : X \rightleftarrows Y$. Die weiteren Bedingungen sind nicht mehr symmetrisch, daher die Schreibweise $(\iota, r) : A \rightleftarrows X$.

Sei $\iota : A \hookrightarrow X$ stetig, etwa die Inklusion eines Teilraums $A \subset X$ oder allgemein eine Einbettung. Eine *Retraktion* zu ι ist eine stetige Abbildung $r : X \twoheadrightarrow A$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$, also eine Linksinverse. In diesem Fall nennen wir $(\iota, r) : A \leftrightarrows X$ einen *Retrakt*. Ohne Nennung von r nennen wir abkürzend auch $\iota : A \hookrightarrow X$ einen Retrakt. Im Falle der Inklusion $A \subset X$ nennen wir abkürzend auch den Teilraum A in X einen *Retrakt*.

Für einen *schwachen Retrakt* $(\iota, r) : A \rightleftarrows X$ fordern wir statt $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$ nur $r \circ \iota \simeq \mathrm{id}_A$.

Eine *Retraktionsdeformation* (oder *Retraktionshomotopie*) zu $(\iota, r) : A \leftrightarrows X$ ist eine Homotopie $H : \mathrm{id}_X \simeq \iota \circ r$, also $H : [0,1] \times X \to X$ stetig von $H_0 = \mathrm{id}_X$ nach $H_1 = \iota \circ r$. In diesem Fall nennen wir $r : X \twoheadrightarrow A$ eine *Deformationsretraktion* (oder *Homotopieretraktion*) und $(\iota, r) : A \leftrightarrows X$ oder kurz $\iota : A \hookrightarrow X$ einen *Deformationsretrakt* (oder *Homotopieretrakt*).

Für eine *starke Retraktionsdeformation* fordern wir $H : \mathrm{id}_X \simeq \iota \circ r$ rel $\iota(A)$, also zudem $H(t, \iota(a)) = \iota(a)$ für alle $t \in [0,1]$ und $a \in A$: Die Punkte im Teilraum $\iota(A) \subset X$ werden bei der Homotopie nicht bewegt. In diesem Fall nennen wir r eine *starke Deformationsretraktion* und $(\iota, r) : A \leftrightarrows X$ oder kurz $\iota : A \hookrightarrow X$ einen *starken Deformationsretrakt*.

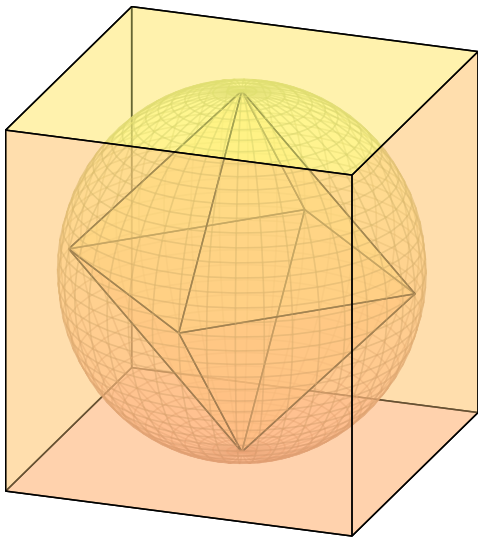
✍ **Beispiele.** ✍

- In jedem Raum X ist jeder einpunktige Raum $\{a\} \subset X$ ein Retrakt von X.
- Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ ist ein Retrakt vermöge $r(x) = x/|x|$, sogar ein starker Deformationsretrakt vermöge der Homotopie $H(t,x) = (1-t)x + tr(x)$. (G5D)
- Der Ball $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Retrakt vermöge $r(x) = x/|x|$ für $|x| \geq 1$, sogar ein starker Deformationsretrakt vermöge der Homotopie $H(t,x) = (1-t)x + tr(x)$. (G5D)
- Es gibt keine Retraktion $r : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}$: Dies folgt aus dem Zwischenwertsatz (C3R). Es existiert keine Retraktion $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$: Dies folgt mit dem Abbildungsgrad (J4E).

☞ **Übung G5D.** Gegeben sei ein $\mathbb{R}$–Vektorraum V mit einer Norm $|-| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Hierin sei ☜ $D = \{ x \in V \mid |x| \leq 1 \}$ der Einheitsball und $S = \{ x \in V \mid |x| = 1 \}$ die Einheitssphäre.

(0) Skizzieren Sie $S \subset V = \mathbb{R}^3$ mit euklidischer, Taxi- und Maximumsnorm.
(1) Ist die Inklusion $f : S \hookrightarrow V^* := V \smallsetminus \{0\} : x \mapsto x$ ein starker Deformationsretrakt?
(2) Ist die Inklusion $f : S \hookrightarrow D^* := D \smallsetminus \{0\} : x \mapsto x$ ein starker Deformationsretrakt?
(3) Ist die Inklusion $f : D \hookrightarrow V : x \mapsto x$ ein Retrakt? Deformationsretrakt? stark?
(4) Ist die Inklusion $f : \mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{D}^1$ ein Retrakt? Deformationsretrakt? stark?

Spezieller sei $V = \mathbb{R}^n$ der euklidische Raum, dafür allgemeiner $D \subset V$ kompakt und konvex mit $0 \in D^\circ$, sowie $S = \delta D$ der Rand. Beantworten Sie hierzu die Fragen (1–3).



Bemerkung. Noch interessanter aber schwieriger ist die Frage, ob $S \hookrightarrow V$ oder $S \hookrightarrow D$ ein Retrakt ist. In unendlicher Dimension gelingt dies erstaunlicherweise (J4Q). In endlicher Dimension ist es hingegen unmöglich, und das ist äußerst bemerkenswert: Es gibt keine Retraktion des Balls $\mathbb{D}^n$ auf seinen Rand $\mathbb{S}^{n-1}$ (J4E). Das ist anschaulich plausibel, aber keineswegs trivial; ein Beweis gelingt mit dem Abbildungsgrad (J3A). Der einfachste Fall $n = 1$ folgt direkt aus dem Zwischenwertsatz (C3R): Sehen Sie wie?

✻ **G5D.** (1) Ja: Zur Inklusion $f : S \hookrightarrow V^*$ haben wir die Retraktion $g : V^* \to S : x \mapsto x/|x|$. Dank $x \neq 0$ ist g wohldefiniert, zudem stetig als Komposition stetiger Abbildungen. Es gilt $g \circ f = \mathrm{id}_S$ und $H : f \circ g \simeq \mathrm{id}_{V^*}$ rel S: Für jeden Punkt $x \in V^*$ gilt $[x, g(x)] \subset V^*$, daher ist $H : [0,1] \times V^* \to V^* : (t,x) \mapsto tx + (1-t)x/|x|$ wohldefiniert. Schließlich ist H stetig, es gilt $H_0 = f \circ g$ und $H_1 = \mathrm{id}_{V^*}$ sowie $H_t|_S = \mathrm{id}_S$. Eine alternative Homotopie ist $K : \mathrm{id}_{V^*} \simeq f \circ g : (t,x) \mapsto x/[(1-t) + t|x|]$. Ebenso gelingt (2).

(3) Ja: Wir definieren $g : V \to D$ durch $g(x) = x$ für $|x| \leq 1$ und $g(x) = x/|x|$ für $|x| \geq 1$. Dies ist wohldefiniert und stetig nach dem Verklebesatz E1P, denn in V sind $\{ x \in V \mid |x| \leq 1 \}$ und $\{ x \in V \mid |x| \geq 1 \}$ abgeschlossen. Wir haben $H : f \circ g \simeq \mathrm{id}_V$ vermöge $H : (t,x) \mapsto tx + (1-t) f(g(x))$.

Für $V = \mathbb{R}^n$ können wir Satz F6G nutzen: Es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(D) = \mathbb{D}^n$ und somit $h(S) = \mathbb{S}^{n-1}$. Demnach gelten alle gemachten Aussagen wörtlich genauso auch in diesem Fall.

(4) Wir betrachten $f : \mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{D}^1$ mit $\mathbb{D}^1 = [-1,1]$ und $\mathbb{S}^0 = \{-1,1\}$. Wäre $g : \mathbb{D}^1 \to \mathbb{S}^0$ ein Retrakt, so wäre $g : [-1,1] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $g(-1) = -1$ und $g(1) = 1$ aber $g(x) \neq 0$ für alle $x \in [-1,1]$. Das widerspricht dem Zwischenwertsatz (C3R).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Übung G5E.** (1) Ist der Raum X zusammenziehbar, so auch jeder Retrakt $A \subset X$. ☜

(2) Genau dann ist $\{a\} \subset X$ ein Deformationsretrakt, wenn X zusammenziehbar ist.

(3) Im *rationalen Kamm* $X := ([0,1]\times\{0\}) \cup ([0,1]_{\mathbb{Q}} \times [0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ ist jeder Punkt $a \in X$ ein Deformationsretrakt, aber stark nur falls $a \in [0,1]\times\{0\}$, siehe G:11.

(4) Wir vereinigen Kopien von $X \subset \mathbb{C}$ im Zick-Zack wie in G:11. Der so entstehende Raum $Y := (X \cup \mathrm{i}X) + \mathbb{Z}(1-\mathrm{i})$ ist zusammenziehbar, somit ist jeder Punkt $a \in Y$ ein Deformationsretrakt, aber *kein einziger* Punkt ist starker Deformationsretrakt.

(5) Genauer: Die Zick-Zack-Linie $Z \subset Y$ ist ein Deformationsretrakt, aber nicht stark.

ABBILDUNG G:11. Der rationale Kamm X und der Zick-Zack-Kamm Y

✻ **G5E.** (1) Retrakt heißt: Zur Inklusion $i : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ existiert eine Retraktion $r : X \to A$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Sei $H : [0,1]\times X \to X$ eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}_X$ zu $H_1 = \mathrm{const}^x_X$. Wir definieren $K : [0,1]\times A \to A$ durch $K_t = r \circ H_t \circ i$, also $K(t,a) = r(H(t,i(a)))$. Diese Abbildung ist stetig, da Komposition stetiger Abbildungen, also eine Homotopie von $K_0 = r \circ H_0 \circ i = r \circ \mathrm{id}_X \circ i = r \circ i = \mathrm{id}_A$ nach $K_1 = r \circ \mathrm{const}^x_X \circ i = \mathrm{const}^{r(x)}_A$.

(2) Sei $i : \{a\} \hookrightarrow X$ und $r : X \to \{a\}$. Gibt es eine Homotopie $H : \mathrm{id}_X \simeq i \circ r = \mathrm{const}^a_X$, so ist X zusammenziehbar. Sei umgekehrt X zusammenziehbar durch eine Homotopie $K : [0,1]\times X \to X$ von $K_0 = \mathrm{id}_X$ zu einer konstanten Abbildung $K_1 = \mathrm{const}^b_X$. Der Weg $\gamma : t \mapsto K(t,a)$ führt von a nach b. Wir verknüpfen K mit dem umgekehrten Weg $\bar\gamma$ von b nach a und erhalten eine Homotopie $H : \mathrm{id}_X \simeq i \circ r$, wie behauptet.

(3) Der Raum X ist zusammenziehbar: Die Abbildung $K : [0,1]\times X \to X$ mit $K_t(x,y) = (x,(1-t)y)$ ist wohldefiniert und stetig, es gilt $K_0 = \mathrm{id}_X$ und $K_1(x,y) = (x,0)$. Wir wählen $a \in [0,1]\times\{0\}$ und definieren $L : [0,1]\times X \to X$ durch $L_t(x,y) = ta + ((1-t)x,0)$. Dies ist eine Homotopie von $L_0(x,y) = (x,0)$ nach $L_1(x,y) = a$. Die Verknüpfung $H = K * L$ ist eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}_X$ nach $H_1 = \mathrm{const}^a_X$ relativ a.

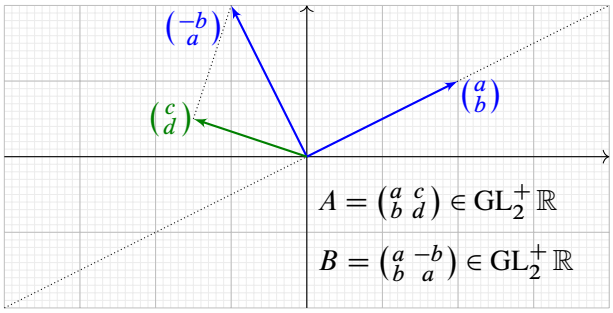
Nach (2) ist jede Teilmenge $\{a\} \subset X$ ein Deformationsretrakt, sogar stark für $a \in [0,1]\times\{0\}$. Wir zeigen schließlich, dass letzteres für $a = (x,y) \in X$ mit $y > 0$ nicht möglich ist. (Machen Sie sich zuerst eine Skizze!)

Angenommen es gäbe $H : [0,1]\times X \to X$ stetig mit $H_0 = \mathrm{id}_X$ und $H_1 = \mathrm{const}^a_X$ sowie $H_t(a) = a$ für alle $t \in [0,1]$. Sei $a_n = (x_n, y_n)$ in X eine Folge mit $a_n \to a$, wobei $y_n = y$ aber $x_n \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Weg $t \mapsto H(t,a_n)$ läuft von a_n nach a in X. In X ohne $Y := [0,1]\times\{0\}$ sind a_n und a nicht verbindbar, also existiert $t_n \in [0,1]$ mit $H(t_n,a_n) \in Y$. Da $[0,1]$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge, $t_{n_k} \to t$. Es gilt $a_{n_k} \to a$, dank Stetigkeit von H also $H(t_{n_k},a_{n_k}) \to H(t,a) = a$. Andererseits liegen alle Punkte $H(t_{n_k},a_{n_k})$ in Y, und da Y abgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert in Y. Dies widerspricht $a \notin Y$.

(5) Zu jedem Punkt $y \in Y$ existiert genau ein Weg $f_y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to Y : 0 \mapsto y$, der in der Skizze strikt nach rechts läuft und nach Weglänge parametrisiert ist, stückweise $\mathscr{C}^1$ mit konstanter Geschwindigkeit $|f_y'(t)| = 1$: Punkte auf der Zick-Zack-Linie Z folgen einfach dieser Linie; alle anderen Punkte laufen erst ein kurzes Stück der Länge ≤ 1 nach Z und folgen dann Z. Die Abbildung $H : [0,1]\times Y \to Y : (t,y) \mapsto f_y(t)$ ist stetig: Dies ist anschaulich plausibel, bedarf aber einer genaueren Ausführung, die ich dem Leser überlasse. (Anschaulich ist H ein Fluss mit zeitlich konstantem Vektorfeld $f : Y \to \mathbb{R}^2$; das Vektorfeld ist milde unstetig, und wir können H als Lösung der Differentialgleichung $\dot y = f(y)$ betrachten.) Es gilt $H_0 = \mathrm{id}_Y$ und $H_1(Y) = Z$. Wir verküpfen dies mit der Homotopie $K : [0,1]\times Z \to Z$, die jeden Punkt $z \in Z$ ebenso auf Z nach links laufen lässt. Die Verknüpfung $H * K$ ist demnach eine Homotopie von id_Y zu einer Retraktion $r : Y \to Y$ mit $r(Y) = Z$ und $r|_Z = \mathrm{id}_Z$. Somit ist $Z \subset Y$ ein Deformationsretrakt. Nach (4) ist er jedoch nicht stark.

(4) Der Raum $Z \cong \mathbb{R}$ ist zusammenziehbar, genauer ist jeder Punkt $z \in Z$ ein starker Deformationsretrakt von Z. Dank (5) ist auch $Y \simeq Z$ zusammenziehbar, aber nach (3) ist kein Punkt $z \in Z$ ein starker Deformationsretrakt von Y. Insbesondere kann auch der Deformationsretrakt $Z \subset Y$ nicht stark sein.

§G5c. Gram–Schmidt–Verfahren. Die nachfolgende Übung G5G konstruiert für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Homotopie-Äquivalenz $\mathrm{GL}_n\mathbb{R} \simeq \mathrm{O}_n\mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{GL}_n\mathbb{C} \simeq \mathrm{U}_n\mathbb{C}$. Für $\mathrm{O}_1\mathbb{R} = \{\pm 1\}$ in $\mathrm{GL}_1\mathbb{R} = \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ ist das klar, ebenso für $\mathrm{U}_1\mathbb{C} = \mathbb{S}^1$ in $\mathrm{GL}_1\mathbb{C} = \mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$ (G4O). Es lohnt sich, zunächst den einfachsten nicht-trivialen Fall $n = 2$ auszuführen; das ist illustrativ und betont zudem die Besonderheiten der Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ im Gegensatz zu $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$.



Übung G5F. Wir untersuchen die Abbildungen

$$j : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} : a + \mathrm{i}b \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad r : \mathbb{R}^{2\times 2} \twoheadrightarrow \mathbb{C} : \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto a + \mathrm{i}b.$$

Offensichtlich gilt $r \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Geometrisch besteht $j(a+\mathrm{i}b)$ aus der ersten Spalte $\binom{a}{b}$, und die zweite Spalte $\binom{-b}{a}$ entsteht hieraus durch eine Vierteldrehung in mathematisch positiver Richtung, entsprechend der Multiplikation mit i in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

(1) Ist die Abbildung j bzw. r stetig? additiv? $\mathbb{R}$–linear? multiplikativ?
Warum gilt $j(\mathbb{C}^\times) \subset \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$? Warum gilt $r(\mathrm{GL}_2\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}^\times$?
(2) Wir untersuchen die Einschränkungen $j : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ und $r : \mathrm{GL}_2\mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$.
Ist (j, r) eine Homotopie-Äquivalenz? ein Deformationsretrakt? sogar stark?
(3) Wir untersuchen die Einschränkungen $j : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_2^+\mathbb{R}$ und $r : \mathrm{GL}_2^+\mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$.
Ist (j, r) eine Homotopie-Äquivalenz? ein Deformationsretrakt? sogar stark?

✻ **G5F.** (1) Die Abbildungen j und r sind stetig, da stetig in jeder Koordinate. Beide sind $\mathbb{R}$–linear. (Für endlich-dimensionale topologische Vektorräume zieht das die Stetigkeit nach sich, siehe F6S.) Zudem ist j multiplikativ, also ein Homomorphismus von Ringen mit Eins, auch von $\mathbb{R}$–Algebren mit Eins. Wie jeder Ringhomomorphismus erhält j invertierbare Elemente, demnach gilt $j(\mathbb{C}^\times) \subset \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$; alternativ sehen wir $\det j(a+\mathrm{i}b) = a^2 + b^2$. Die Abbildung r ist *nicht* multiplikativ, zum Beispiel $r\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = r\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$ aber $r\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot r\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$. Dennoch gilt $r(\mathrm{GL}_2\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}^\times$, denn die Spalten einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$, insbesondere kann keine verschwinden.

(2) Nein, die Einschränkungen $j : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ und $r : \mathrm{GL}_2\mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ erfüllen zwar $r \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}$ aber nicht $j \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_2\mathbb{R}}$. Genauer ist $\mathbb{C}^\times$ wegzusammenhängend aber $\mathrm{GL}_2\mathbb{R} = \mathrm{GL}_2^+\mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_2^-\mathbb{R}$ nicht, die induzierten Abbildungen $\pi_0(j) : \pi_0(\mathbb{C}^\times) \to \pi_0(\mathrm{GL}_2\mathbb{R})$ und $\pi_0(r) : \pi_0(\mathrm{GL}_2\mathbb{R}) \to \pi_0(\mathbb{C}^\times)$ sind also keine Bijektionen.

(3) Nach Einschränkung auf $\mathbb{C}^\times$ und die Wegkomponente $\mathrm{GL}_2^+\mathbb{R}$ ist $(j, r) : \mathbb{C}^\times \simeq \mathrm{GL}_2^+\mathbb{R}$ eine starke Homotopie-Äquivalenz: Wie zuvor gilt $r \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}$, und wir konstruieren $H : j \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_2^+\mathbb{R}}$ gemäß

$$j \circ r : A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad H(t, A) = (1-t)(j \circ r(A)) + tA = \left(\begin{smallmatrix} a & tc-(1-t)b \\ b & td+(1-t)a \end{smallmatrix}\right).$$

Anschaulich: Wir deformieren den zweiten Spaltenvektor $\binom{c}{d}$ affin zu $\binom{-b}{a}$. Wegen $\det A > 0$ liegen beide „links“ von $\binom{a}{b}$, siehe Skizze. Rechnerisch: Die Determinante $\det H(t, A) = t(ad - cb) + (1-t)(a^2 + b^2)$ ist eine Konvexkombination von zwei positiven Zahlen, insbesondere also niemals null.

Fazit: In der vierdimensionalen Gruppe $\mathrm{GL}_2^+\mathbb{R}$ liegt die zweidimensionale Untergruppe $j(\mathbb{C}^\times)$ als starker Deformationsretrakt, und in dieser wiederum die eindimensionale kompakte Untergruppe $j(\mathbb{S}^1) = \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung G5G. Das Gram–Schmidt–Verfahren (C1H) ist eine Retraktion $\mathrm{GL}_n\mathbb{R} \to \mathrm{O}_n\mathbb{R}$, sogar eine starke Deformationsretraktion! Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $\mathrm{B}_n^+\mathbb{K}$ die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $r_{ij} = 0$ für alle $i > j$ und $r_{ii} \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle i.

(1) Die Abbildung $h : \mathrm{O}_n \times \mathrm{B}_n^+ \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R} : (Q, R) \mapsto QR$ ist ein Homöomorphismus: Gram–Schmidt als Inverse zerlegt $A \in \mathrm{GL}_n$ gemäß $A = QR$ in $Q \in \mathrm{O}_n$ und $R \in \mathrm{B}_n^+$. *Illustration:* Schreiben Sie die Zuordnung $g : A \mapsto (Q, R)$ für $n \leq 3$ explizit aus.

(2) Die Gruppe $\mathrm{B}_n^+ \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist konvex, sogar homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ mit $m = \frac{n(n+1)}{2}$. Die Untergruppen $\{1\} \subset \mathrm{B}_n^+$ und $\mathrm{O}_n \subset \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ sind starke Deformationsretrakte. Für $n = 2$ folgt insbesondere $\mathrm{GL}_2\mathbb{R} \simeq \mathrm{O}_2\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ (dank F1Q).

(3) Ebenso ist die unitäre Gruppe $\mathrm{U}_n\mathbb{C} \subset \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ ein starker Deformationsretrakt.

(4) Folgern Sie die Wegkomponenten von $\mathrm{O}_n\mathbb{R} \subset \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{U}_n\mathbb{C} \subset \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$.

(5) Sind auch $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \subset \mathrm{SL}_n\mathbb{R} \subset \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ starke Deformationsretrakte? *Warnung:* $\mathrm{SU}_n\mathbb{C} \subset \mathrm{U}_n\mathbb{C}$ ist kein Deformationsretrakt, wie $\mathrm{SU}_1 = \{1\}$ in $\mathrm{U}_1 = \mathbb{S}^1$ zeigt.

✻ **G5G.** (1) Sei $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Die Spalten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ der Matrix A bilden eine Basis $\mathcal{A}$ des $\mathbb{R}^n$. Das Gram–Schmidt–Verfahren (C1H) liefert die (eindeutige!) Orthonormalbasis $\mathcal{Q} = (q_1, \ldots, q_n)$, sodass jeder Vektor q_k eine Linearkombination der Vektoren $a_1, \ldots, a_k$ ist, mit positivem Koeffizienten vor a_k. Die Basiswechselmatrix und ihre Inverse liegen demnach in $\mathrm{B}_n^+\mathbb{R}$. Sei Q die Matrix mit Spalten $q_1, \ldots, q_n$. Da $\mathcal{Q}$ eine Orthonormalbasis ist, ist Q orthogonal. Sei $R = (r_{ij})_{ij} \in \mathrm{B}_n^+(\mathbb{R})$ definiert durch $a_k = \sum_{i=1}^n q_i r_{ik}$. Aufgrund der Definition folgt $A = QR$. Die expliziten Formeln sind bemerkenswert einfach und einfach bemerkenswert:

$$q_1 = a_1/|a_1|, \ \ldots, \ a_k^* = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} q_i \cdot \langle q_i \mid a_k \rangle, \quad q_k = a_k^*/|a_k^*|, \quad r_{kk} = |a_k^*|, \quad r_{ik} = \langle q_i \mid a_k \rangle \text{ für } i < k.$$

Wir erhalten $g : \mathrm{GL}_n\mathbb{R} \to \mathrm{O}_n \times \mathrm{B}_n^+ : A \mapsto (Q, R)$. Die Abbildungen g und h sind stetig, wie man an den Formeln sieht: h besteht nur aus Summen und Produkten (Polynome vom Grad 2), g zudem aus Quotienten und Wurzeln. Sie erfüllen $h \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_n\mathbb{R}}$ nach Konstruktion und $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{O}_n \times \mathrm{B}_n^+}$ dank Eindeutigkeit.

Illustration: Im Fall $n = 3$ seien a_1, a_2, a_3 die Spalten von A und q_1, q_2, q_3 die Spalten von Q. Dann gilt:

$$q_1 = \frac{a_1}{|a_1|}, \qquad q_2 = \frac{a_2 - q_1 \cdot \langle q_1 \mid a_2 \rangle}{|a_2 - q_1 \cdot \langle q_1 \mid a_2 \rangle|}, \qquad q_3 = \frac{a_3 - q_1 \cdot \langle q_1 \mid a_3 \rangle - q_2 \cdot \langle q_2 \mid a_3 \rangle}{|a_3 - q_1 \cdot \langle q_1 \mid a_3 \rangle - q_2 \cdot \langle q_2 \mid a_3 \rangle|}$$

Für die Matrix $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$ lösen wir die Gleichung für q_k nach a_k auf:

$$a_1 = q_1 \cdot \underbrace{|a_1|}_{r_{11}}, \qquad a_2 = q_1 \cdot \underbrace{\langle q_1 \mid a_2 \rangle}_{r_{12}} + q_2 \cdot \underbrace{|a_2 - \langle q_1 \mid a_2 \rangle q_1|}_{r_{22}},$$

$$a_3 = q_1 \cdot \underbrace{\langle q_1 \mid a_3 \rangle}_{r_{13}} + q_2 \cdot \underbrace{\langle q_2 \mid a_3 \rangle}_{r_{23}} + q_3 \cdot \underbrace{|a_3 - \langle q_1 \mid a_3 \rangle q_1 - \langle q_2 \mid a_3 \rangle q_2|}_{r_{33}}$$

(2) Die Menge $\mathrm{B}_n^+ \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist konvex (F6F). Somit ist $\{1_{n\times n}\} \subset \mathrm{B}_n^+$ ein starker Deformationsretrakt (G4B) vermöge $H : [0,1] \times \mathrm{B}_n^+ \to \mathrm{B}_n^+ : (t, R) \mapsto (1-t)R + t1_{n\times n}$. Wir sehen: H ist stetig, $H_0 = \mathrm{id}$ und $H_1 = \mathrm{const}$ sowie $H_t(1_{n\times n}) = 1_{n\times n}$ für alle $t \in [0,1]$. Genauso ist $\mathrm{O}_n \times \{1_{n\times n}\}$ ein starker Deformationsretrakt in $\mathrm{O}_n \times \mathrm{B}_n^+$. Dank des Homöomorphismus $h : \mathrm{O}_n \times \mathrm{B}_n^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ ist somit $h(\mathrm{O}_n \times \{1_{n\times n}\}) = \mathrm{O}_n$ ein starker Deformationsretrakt in $h(\mathrm{O}_n \times \mathrm{B}_n^+) = \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$.

(3) Über $\mathbb{C}$ verläuft der Beweis wörtlich genauso wie über $\mathbb{R}$. Rechnen Sie dies ausführlich nach!

(4) Dank G2N wissen wir $\pi_0(\mathrm{GL}_n\mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_n^\pm\mathbb{R}\}$ und $\pi_0(\mathrm{GL}_n\mathbb{C}) = \{\mathrm{GL}_n\mathbb{C}\}$. Dank (2) und G4P folgt $\pi_0(\mathrm{O}_n\mathbb{R}) = \{\mathrm{O}_n^\pm\mathbb{R}\}$ mit $\mathrm{O}_n^+\mathbb{R} = \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$. Dank (3) und G4P ist mit $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ auch $\mathrm{U}_n\mathbb{C}$ wegzusammenhängend.

(5) Das Gram–Schmidt–Verfahren liefert $h : \mathrm{SO}_n \times \mathrm{SB}_n^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$, wobei $\mathrm{SL}_n = \{A \in \mathrm{GL}_n \mid \det A = 1\}$ und $\mathrm{SO}_n = \{Q \in \mathrm{O}_n \mid \det Q = 1\}$ sowie $\mathrm{SB}_n^+ = \{R \in \mathrm{B}_n^+ \mid \det R = 1\}$. Nun ist $\{1_{n\times n}\} \subset \mathrm{SB}_n^+$ ebenfalls ein starker Deformationsretrakt: Für $R \in \mathrm{SB}_n^+$ gilt $r_{ij} = 0$ für alle $i > j$ sowie $r_{ii} = \exp(r_i)$ mit $r_1 + \cdots + r_n = 0$. Wir definieren $H : [0,1] \times \mathrm{SB}_n^+ \to \mathrm{SB}_n^+$ durch $H(t, R) = R(t)$ mit $R(t)_{ij} = t r_{ij}$ für $i \neq j$ und $R(t)_{ii} = \exp(t \ln r_{ii})$. Diese Abbildung ist wohldefiniert und stetig und erfüllt $H(1, R) = R$ sowie $H(0, R) = 1_{n\times n}$.

§G5d. Radiale Fortsetzung. Wir setzen Übung A1Q zu Polarkoordinaten fort.

Übung G5H. (1) Jede stetige Abbildung $g : \mathbb{S}^{p-1} \to \mathbb{S}^{q-1}$ lässt sich stetig radial fortsetzen zu $f : \mathbb{D}^p \to \mathbb{D}^q$ mittels $f(r \cdot s) = r \cdot g(s)$ für $r \in [0,1]$ und $s \in \mathbb{S}^{p-1}$.

(1') Ist g zudem $\mathscr{C}^\alpha$–glatt für $\alpha \geq 1$ so auch f in allen Punkten außer 0.

(2) Ist $g : \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^{n-1}$ ein Homöomorphismus, so auch $f : \mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$.

(3) Nennen Sie möglichst explizit einen $\mathscr{C}^\infty$–Diffeomorphismus $g : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$, dessen Fortsetzung $f : \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^2$ nicht differenzierbar ist. Allgemein: Für welche g ist f glatt?

(4) Konstruieren Sie zu jedem $\mathscr{C}^\alpha$–Diffeomorphismus $g : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ eine $\mathscr{C}^\alpha$–Fortsetzung $f : \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^2$. *Hinweis:* Nutzen Sie $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ und $g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.

(5) Die Einbettung $\iota : \mathrm{O}_2\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ ist ein starker Deformationsretrakt (mit jeder vernünftigen Topologie, angefangen mit der gleichmäßigen Konvergenz.)

Bemerkung. Dieses Fortsetzungsproblem ist topologisch leicht, aber differentiell schwer. Ist die Einschränkung $r : \mathrm{Diff}(\mathbb{D}^n) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^{n-1}) : f \mapsto f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ surjektiv? Die Diskrepanz wird gemessen durch die Quotientengruppe $\Gamma_n := \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^{n-1})/r\,\mathrm{Diff}(\mathbb{D}^n)$. Der obige Fall $n = 2$ ist leicht: Es gibt eine Homotopie-Äquivalenz $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) \simeq \mathrm{O}_2\mathbb{R}$, somit $\Gamma_2 = \{1\}$. Stephen SMALE bewies 1959 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2) \simeq \mathrm{O}_3\mathbb{R}$ und somit $\Gamma_3 = \{1\}$. Seine Vermutung $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^3) \simeq \mathrm{O}_4\mathbb{R}$ und $\Gamma_4 = \{1\}$ wurde 1983 von Allen HATCHER bewiesen. Für $n \geq 7$ ist Γ_n nicht-trivial, wie John MILNOR 1956 durch die Konstruktion exotischer Sphären zeigte. Diese sensationelle Entdeckung war der Beginn der *Differentialtopologie*.

✻ **G5H.** (1) Die Abbildung $f : \mathbb{D}^p \to \mathbb{D}^q : r \cdot s \mapsto r \cdot g(s)$ ist wohldefiniert: Für den Radius $r = 0$ ist der Punkt $x = rs$ unabhängig von der gewählten Richtung s, sein Bild $f(x) = r \cdot g(s) = 0$ aber auch. Auf $\mathbb{D}^p \smallsetminus \{0\}$ ist f stetig, denn $f(x) = |x| \cdot g(x/|x|)$ ist Komposition stetiger Abbildungen. Hieraus folgt ebenso (1'). Wegen $|f(x)| = |x|$ ist f auch im Ursprung stetig (sogar lipschitz–stetig mit Dehnungsschranke $L = 1$).

(2) Ist g Homöomorphismen, so auch f, dank der expliziten Umkehrung $f^{-1}(r \cdot s) = r \cdot g^{-1}(s)$.

(3) Sei $g : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ eine $\mathscr{C}^\infty$–glatte Abbildung mit $g(e_1) = e_1$ aber $g(-e_1) \neq -e_1$. Für $r \searrow 0$ gilt $\partial_1^+ f(0) = \lim f(re_1)/r = g(e_1) = e_1$ aber $r \nearrow 0$ gilt $\partial_1^- f(0) = \lim f(re_1)/r = -g(-e_1) \neq e_1$.

Umgekehrt: Angenommen, $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n : r \cdot s \mapsto r \cdot g(s)$ ist in 0 differenzierbar, das heißt, es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|f(x) - Ax|/|x| \to 0$ für $|x| \to 0$. Speziell für $x = rs$ mit $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $r \searrow 0$ erhalten wir $|f(x) - Ax|/|x| = |rg(s) - rAs|/r = g(s) - As \to 0$. Demnach gilt $g(s) = As$ für alle $s \in \mathbb{S}^{n-1}$. Unsere Fortsetzung f ist also nur dann differenzierbar, wenn g die Einschränkung einer linearen Abbildung ist.

(4) Für $\alpha = 0$ genügt (1). Sei nun also $\alpha \geq 1$. Wir können $g(1) = 1$ annehmen, notfalls drehen wir $g(1)$ nach 1. Wir können g als orientierungserhaltend annehmen, notfalls spiegeln wir an der x–Achse. Die Funkion $\tilde{g} : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0) : t \mapsto \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{2\pi i\tau} g'(\mathrm{e}^{2\pi i\tau})/g(\mathrm{e}^{2\pi i\tau})\,\mathrm{d}\tau = \int_\gamma \mathrm{d}z/z$ ist stetig und erfüllt $g \circ p = p \circ \tilde{g}$, denn $h(t) = g(\mathrm{e}^{2\pi i t})\,\mathrm{e}^{-2\pi i \tilde{g}(t)}$ erfüllt $h(0) = 1$ und $h'(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zudem ist $\tilde{g}$ streng wachsend und erfüllt $\tilde{g}(t + k) = \tilde{g}(t) + k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wir wählen eine $\mathscr{C}^\infty$–Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\varphi(t) = 0$ für $t \leq 1/3$ und $\varphi(t) = 1$ für $t \geq 2/3$. Wir setzen $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2 : z = r \cdot p(\tilde{g}(t)) \mapsto r \cdot p((1-\varphi(r))\tilde{g}(t) + \varphi(r)t)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert: Für $r = |z| = 0$ ist z unabhängig von t, das Bild $f(z)$ aber auch. Für $r = |z| > 0$ ist $t \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt modulo $\mathbb{Z}$: Aus $p(\tilde{g}(t')) = p(\tilde{g}(t))$ folgt $t' = t + k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, das Bild $f(z)$ ist hiervon unabhängig. Für $r = |z| \geq 2/3$ gilt $f(r \cdot s) = r \cdot g(s)$, insbesondere $f|_{\mathbb{S}^1} = g$. Für $r = |z| \leq 1/3$ gilt $f(r \cdot s) = r \cdot s$, insbesondere $f|_{B(0,1/3)} = \mathrm{id}_{B(0,1/3)}$. Aus $g \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ folgt $\tilde{g} \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $f \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbb{D}^2, \mathbb{D}^2)$.

(5) Zu jedem $\mathscr{C}^\alpha$–Diffeomorphismus $h : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ existiert genau ein Element $A \in \mathrm{O}_2\mathbb{R}$, sodass die Komposition $g = A^{-1} \circ h : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ orientierungserhaltend ist und $g(1) = 1$ erfüllt. Dies definiert die Retraktion $\rho : \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) \twoheadrightarrow \mathrm{O}_2\mathbb{R} : h \mapsto A$ zur Einbettung $\iota : \mathrm{O}_2\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$. Die Konstruktion aus (4) liefert die Homotopie $G : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : (r, p(\tilde{g}(t))) \mapsto p((1-\varphi(r))\tilde{g}(t) + \varphi(r)t)$ von $G_0 = g$ nach $G_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$. Zusammengesetzt erhalten wir die Homotopie $[0,1] \times \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) : (r, h) \mapsto A \circ G_r$ von id nach $\iota \circ \rho$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§G6. Übungen und Ergänzungen

Übung G6A. Hat der euklidische Raum $X = \mathbb{R}^n$ zweipunktige Retrakte $A = \{a, b\} \subset X$? Allgemein gefragt: Kann ein Retrakt $A \subset X$ mehr (Weg)Komponenten haben als X?

✻ **G6A.** Nein, das ist nicht möglich: Inklusion $\iota : A \hookrightarrow X$ und Retraktion $r : X \to A$ erfüllen $r \circ \iota_A = \mathrm{id}_A$. Auf Wegkomponenten folgt hieraus $\pi_0(r) \circ \pi_0(\iota) = \mathrm{id}_{\pi_0(A)}$, somit ist $\pi_0(\iota) : \pi_0(A) \to \pi_0(X)$ injektiv.

Übung G6B. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ sei $X = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0 \}$ der Halbraum und hierin $A = X \smallsetminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Inklusion $\iota : A \hookrightarrow X$ kein Retrakt ist aber eine Homotopie-Äquivalenz relativ zu $X \smallsetminus B(0,1)$. (Eine Skizze für $n = 2$ illustriert den Beweis im allgemeinen Fall.) *Bemerkung:* Diese einfache Beobachtung hat nützliche Konsequenzen. In Satz J7H beweisen wir damit die topologische Invarianz des Randes.

§G6a. Abbildungseigenschaften von Deformationsretrakten.

Übung G6C. Für jede Abbildung $r : X \to X$ und $A \subset X$ sind äquivalent:

(a) Retraktion auf A: Es gilt $r(X) = A$ und $r|_A = \mathrm{id}_A$.
(b) Projektion auf A: Es gilt $r \circ r = r$ und $A = \{ x \in X \mid r(x) = x \}$.

Insbesondere ist jeder Retrakt $A \subset X$ eines Hausdorff–Raumes abgeschlossen (D5L).

Genau dann ist $A \subset X$ ein Retrakt, wenn gilt:

(1) Jede stetige Abbildung $f : A \to Z$ lässt sich stetig fortsetzen zu $F : X \to Z$.
Das heißt, die Einschränkung $\iota_A^* : \mathscr{C}(X, Z) \to \mathscr{C}(A, Z)$ mit $F \mapsto F|_A$ ist surjektiv.

Genau dann ist $A \subset X$ ein Deformationsretrakt, wenn (1) gilt sowie:

(2) Stetige Abbildungen $F, G : X \to Z$ sind homotop, wenn $F|_A \simeq G|_A$ gilt.
D.h. Die Einschränkung $\iota_A^* : [X, Z] \to [A, Z]$ ist injektiv, und bijektiv mit (1).

Genau dann ist $A \subset X$ ein starker Deformationsretrakt, wenn (1) gilt sowie:

(3) Stetige Abbildungen $F, G : X \to Z$ sind homotop relativ A, wenn $F|_A = G|_A$ gilt.
D.h. Die Einschränkung $\iota_A^* : [X, Z]_{\mathrm{rel}A} \to \mathscr{C}(A, Z)$ ist injektiv, und bijektiv mit (1).

✻ **G6C.** „(a) ⇒ (b)“: Für $x \in X$ gilt $r(x) \in A$ also $r(r(x)) = r(x)$, und $r(x) = x$ impliziert $x \in A$.
„(b) ⇒ (a)“: Für $x \in X$ gilt $r(r(x)) = r(x)$ also $r(x) \in A$, und für alle $a \in A$ gilt $r(a) = a$.

(1) „⇒“: Ist $r : X \to A$ eine Retraktion und $f : A \to Z$ stetig, so ist $F = f \circ r : X \to Z$ eine stetige Fortsetzung. „⇐“: Speziell für $Z = A$ lässt sich die Identität $\mathrm{id}_A : A \to A$ stetig fortsetzen zu $r : X \to A$. Dies ist eine Retraktion.

(2) „⇒“: Sei $H : [0,1] \times X \to A$ eine Homotopie mit $H_0 = \mathrm{id}_X$ und $H_1(X) \subset A$ sowie $H_1|_A = \mathrm{id}_A$. Existiert zu $F, G : X \to Z$ eine Homotopie $F|_A \simeq G|_A$, so erhalten wir eine Homotopie von F nach G vermöge

$$F = F \circ H_0 \simeq F \circ H_1 = F|_A \circ H_1 \simeq G|_A \circ H_1 = G \circ H_1 \simeq G \circ H_0 = G.$$

„⇐“: Aus (1) haben wir eine Retraktion $r : X \to A$. Die Abbildungen $\mathrm{id}_X, r : X \to X$ stimmen auf A überein, also sind sie nach (2) homotop $H : \mathrm{id}_X \simeq r$.

(3) „⇒“: Sei $H : [0,1] \times X \to A$ eine Homotopie relativ A mit $H_0 = \mathrm{id}_X$ und $H_1(X) \subset A$. Sind $F, G : X \to Z$ stetig mit $F|_A = G|_A$, so erhalten wir eine Homotopie von F nach G relativ A vermöge

$$F = F \circ H_0 \simeq F \circ H_1 = G \circ H_1 \simeq G \circ H_0 = G.$$

„⇐“: Aus (1) haben wir eine Retraktion $r : X \to A$. Die Abbildungen $\mathrm{id}_X, r : X \to X$ stimmen auf A überein, also sind sie nach (3) homotop $H : \mathrm{id}_X \simeq r$ relativ A.

§G6b. Fixpunktsätze. Der Fixpunktsatz von Banach (C4Q) ist ein wichtiges Konstruktionsprinzip der Analysis. Satz und Beweis sind metrischer Natur, anders als der topologische Fixpunktsatz von Brouwer (J4H): Jede stetige Abbildung $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ hat einen Fixpunkt. Der Zwischenwertsatz (C3R) genügt für folgenden Spezialfall:

Übung G6D. (1) Beweisen Sie den Brouwerschen Fixpunktsatz im einfachsten Fall $n = 1$. (2) Hat jede stetige bzw. kontraktive Abbildung $f :]0,1[\to]0,1[$ einen Fixpunkt? (3) Jeder Homöomorphismus $]0,1[\xrightarrow{\sim}]0,1[$? (4) Jeder Homöomorphismus $[0,1[\xrightarrow{\sim} [0,1[$?

✻ **G6D.** (1) Wir betrachten $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x - f(x)$. Wegen $0 \le f(x) \le 1$ gilt $g(0) \le 0$ und $g(1) \ge 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (C3R) existiert ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$ und somit $f(x) = x$. (2) Nein. Die Abbildung $f :]0,1[\to]0,1[$ mit $f(x) = x/2$ ist eine Kontraktion ohne Fixpunkt. (3) Nein. $f(x) = x^2$ ist ein Homöomorphismus ohne Fixpunkt. (4) Sei $f : [0,1[\xrightarrow{\sim} [0,1[$ ein Homöomorphismus. Der einzige Punkt, dessen Wegnahme das Intervall nicht trennt, ist 0. Diese topologische Eigenschaft bleibt unter Homöomorphismen erhalten, also $f(0) = 0$. (Das ist die topologische Invarianz des Randes; für Dimension $n = 1$ siehe G2E).

Übung G6E. Auf der Erde gibt es jederzeit zwei gegenüberliegende Orte gleicher Temperatur: Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $n \ge 1$, so existiert ein $x \in \mathbb{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

✻ **G6E.** Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ mit $\gamma(1) = -\gamma(0)$ ein Weg, der zwei gegenüberliegende Punkte verbindet; für $n \ge 1$ ist dies möglich. Die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(\gamma(t)) - f(-\gamma(t))$ ist stetig und erfüllt $g(0) = -g(1)$. Dank Zwischenwertsatz (C3R) existiert ein $t \in [0,1]$ mit $g(t) = 0$. Für $x = \gamma(t)$ gilt dann $f(x) = f(-x)$.

Bemerkung. Der Satz von Borsuk–Ulam garantiert noch wesentlich mehr (J6C): Zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert mindestens ein Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$. Insbesondere existiert keine Einbettung $f : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

§G6c. Buchstabensuppe. Ein Klassiker zur topologischen Klassifikation:

Übung G6F. Die 26 Großbuchstaben betrachten wir als kompakte Teilräume der Ebene:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(1) Wir nehmen diese Symbole zunächst als ideal dünn an, als Graph aus Ecken und Kanten. Bestimmen Sie die Homöomorphieklassen. (*Hinweis:* Zusammenhang)

(2) Wie lautet das Ergebnis, wenn wir die Symbole als realistisch dick annehmen, als ein kleiner ε–Schlauch um die vorigen Mengen? (Siehe Flächenklassifikation A4J)

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(3) Die topologische Klassifikation hängt tatsächlich vom gewählten Zeichensatz ab. Als Variante können wir zum Beispiel einen Zeichensatz mit Serifen betrachten:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(4) Welche Klassen ergeben sich bezüglich Homotopie-Äquivalenz?

Bemerkung. Sie erledigen diese Aufgabe sehr erfolgreich und treffsicher seit Sie lesen lernten. Während Sie diese Zeilen lesen, vollführt Ihr Gehirn eine überaus effiziente Mustererkennung. . . . Das funktioniert selbst dann noch, wenn sich der Zeichensatz etwas ändert.

Aus topologischer Sicht können Sie bei dieser Aufgabe sowohl Ihre Anschauung üben, als auch präzise Argumente zum Zusammenhang. Zunächst bilden Sie Klassen und prüfen, dass die Buchstaben einer Klasse tatsächlich homöomorph sind. Umgekehrt sollen Buchstaben aus unterschiedlichen Klassen nicht homöomorph sein: Hierzu benötigen Sie geeignete topologische Invarianten, etwa Zusammenhangseigenschaften.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **G6F.** (1) Wir betrachten die Buchstaben als Graphen mit geraden Kanten. Die Homöomorphieklassen sind:

{A, R}, {B}, {C, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z}, {D, O}, {E, F, G, T, Y}, {H, K}, {P}, {Q}, {X}

Hierzu prüfen wir zunächst, dass die Buchstaben einer Klasse tatsächlich homöomorph sind. (Überzeugen Sie sich jeweils durch eine Zeichnung. Formal kann man jeden Buchstaben als Graph codieren, bestehend aus Ecken und Kanten wie in Kapitel I erklärt, und damit alles in Koordinaten angeben.)

Umgekehrt sollen Buchstaben aus unterschiedlichen Klassen nicht homöomorph sein: Sei z die Anzahl der Punkte, die man maximal entfernen kann, ohne den Zusammenhang zu zerstören, und a_n die Anzahl der Punkte, die kleine zusammenhängende Umgebungen in n Komponenten trennen. Diese Eigenschaften bleiben bei Homöomorphismen erhalten und können daher zur Unterscheidung benutzt werden.

dünne Buchstaben	z	a_1	a_3	a_4
A,R	3	2	2	0
B	2	0	2	0
C, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z	2	2	0	0
D, O	1	0	0	0
E, F, G, T, Y	3	3	1	0
H, K	4	4	2	0
P	2	1	1	0
Q	3	2	0	1
X	4	4	0	1

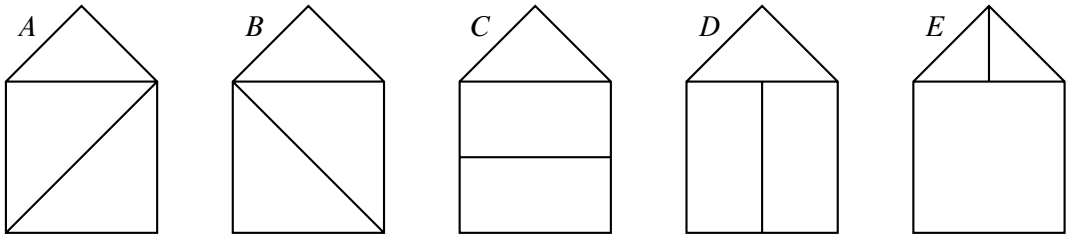
(2) Wir nehmen nun an, dass die Buchstaben realistisch dick sind. Es handelt sich dann um kompakte zusammenhängende orientierbare Flächen. (Manche Kleinbuchstaben wie i und j sind nicht zusammenhängend.) Dank Flächenklassifikation A4J genügt es, die Euler-Charakteristik χ und die Anzahl r der Randkomponenten zu bestimmen: Zwei dicke Buchstaben sind genau dann homömorph, wenn diese beiden Zahlen übereinstimmen. Etwas einfacher und anschaulicher gesagt: Jeder dicke Buchstabe ist homöomorph zu einer Kreisscheibe mit 0, 1, 2 Löchern, daher gibt es hier nur drei Homöomorphieklassen:

dicke Buchstaben	χ	r	g	Modellfläche
C, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S, T, U, V, W, X, Y, Z	1	1	0	$F^+_{0,1}$
A, D, O, P, Q, R	0	2	0	$F^+_{0,2}$
B	−1	3	0	$F^+_{0,3}$

(3) In diesem Falle erhalten die Graphen aus (1) weitere Verzweigungen, und die Zerlegung in Homöomorphieklassen wird feiner. Zum Beispiel sind A und R nicht mehr homöomorph, ebensowenig M und N. Für die aufgedickten Buchstaben wie in (2) hingegen ändern sich die Homöomorphieklassen nicht!

(4) Modulo Homotopieäquivalenz ergeben sich dieselben Klassen wie in (2). Die Unterscheidung gelingt mit der Homotopie-Invarianz der Euler–Charakteristik (A3J) oder mit der Fundamentalgruppe (Kapitel L).

Übung G6G. Welche der folgenden Räume (topologische Graphen) sind homöomorph? Was gilt für kleine ε–Umgebungen? Was gilt bezüglich Homotopie-Äquivalenz?



§G6d. Homotopie als Fortsetzungsproblem. Die Frage, ob zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ homotop sind, ist im Wesentlichen ein Fortsetzungsproblem: Gegeben ist die stetige Abbildung $h : \{0,1\} \times X \to Y$ mit $h(0,x) = f(x)$ und $h(1,x) = g(x)$. Gesucht ist eine stetige Fortsetzung $H : [0,1] \times X \to Y$ mit $H|_{\{0,1\}\times X} = h$.

Der Fortsetzungssatz von Tietze (E5N) löst solche Probleme für $Y = \mathbb{R}^n$. Speziell für Homotopien können wir die affine Fortsetzung $H(t,x) = (1-t)\,f(x) + t\,g(x)$ direkt angeben. Interessant und schwierig sind Situationen, in denen Y nicht zusammenziehbar ist.

Speziell die Frage, ob $f : X \to Y$ nullhomotop ist, lässt sich wie folgt betrachten:

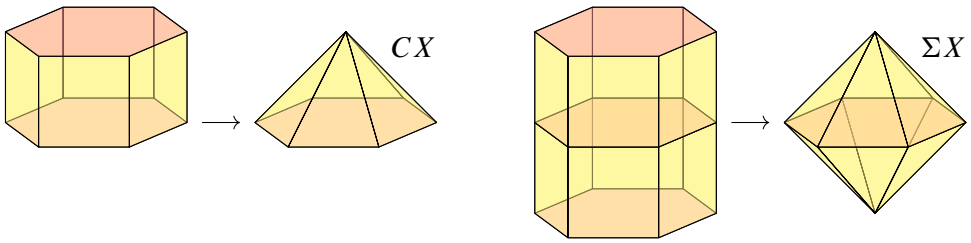


ABBILDUNG G:12. Kegel $C(X)$ und Einhängung $\Sigma(X)$

Definition G6H. Sei X ein topologischer Raum. Der *Kegel* (engl. *cone*)

$$C(X) = ([0,1] \times X) \mathbin{/\!\!/} (\{1\} \times X)$$

entsteht aus dem Zylinder $[0,1] \times X$ durch Zusammenschlagen des Deckels $\{1\} \times X$.

Die *Einhängung* (engl. *suspension*) ΣX von X entsteht als Doppelkegel

$$\Sigma(X) = \big(([-1,1] \times X) \mathbin{/\!\!/} (\{1\} \times X)\big) \mathbin{/\!\!/} (\{-1\} \times X).$$

aus dem Zylinder $[-1,1] \times X$ durch separates Zusammenschlagen von Boden und Deckel. Ausführlich definieren wir $(t,x) \sim (t',x')$ durch $(t,x) = (t',x')$ oder $t = t' = 1$ oder $t = t' = -1$. Dies ist eine Äquivalenzrelation, und der Quotient ist die Einhängung.

Die Quotientenabbildung $[0,1] \times X \twoheadrightarrow CX$ liefert die Einbettung $X \xrightarrow{\sim} \{0\} \times X \hookrightarrow CX$. Ebenso liefert $[-1,1] \times X \twoheadrightarrow \Sigma X$ die Einbettungen $X \hookrightarrow CX \hookrightarrow \Sigma X$. Wir identifizieren diese Teilräume und schreiben kurz $X \subset CX \subset \Sigma X$.

Übung G6I. Man konstruiere Homöomorphismen $C\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{D}^n$ und $\Sigma\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$.

✻ **G6I.** (1) Die Abbildung $p : [0,1] \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{D}^n$ mit $p(t,x) = (1-t)x$ ist stetig und surjektiv. Genau dann gilt $p(t,x) = p(t',x')$, wenn $(t,x) = (t',x')$ oder $t = t' = 1$. Die kanonische Faktorisierung E2H liefert die stetige Bijektion $\bar{p} : C\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{D}^n$. Dank F1L ist p ein Homöomorphismus.

(2) Die Abbildung $p : [-1,1] \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ mit $p(t,x) = (\sin(t\pi/2), \cos(t\pi/2)x)$ ist stetig und surjektiv. Genau dann gilt $p(t,x) = p(t',x')$, wenn $(t,x) = (t',x')$ oder $t = t' = 1$ oder $t = t' = -1$. Die kanonische Faktorisierung E2H liefert die stetige Bijektion $\bar{p} : \Sigma\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$. Dank F1L ist p ein Homöomorphismus.

Übung G6J. Genau dann ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ nullhomotop, wenn eine stetige Fortsetzung $F : CX \to Y$ mit $F|_X = f$ existiert. (Dies verallgemeinert G4F.)

✻ **G6J.** Sei $q : [0,1] \times X \to CX$ die Quotientenabbildung. „⇒“: Ist $H : [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von f zu einer konstanten Abbildung g, dann induziert H eine stetige Abbildung $F : CX \to Y$ mit $H = F \circ q$. „⇐“: Die Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto F(q(t,x))$ ist stetig mit $H_0 = F|_X = f$, und H_1 ist konstant.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ definiert $\mathrm{id}_{[-1,1]} \times f : [-1,1] \times X \to [-1,1] \times X$ mit $(t,x) \mapsto (t, f(x))$. Dies ist stetig und induziert die stetige Abbildung $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ auf den Quotienten, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [-1,1] \times X & \xrightarrow{\mathrm{id} \times f} & [-1,1] \times Y \\ \downarrow{\scriptstyle q_X} & & \downarrow{\scriptstyle q_Y} \\ \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma Y \end{array}$$

Übung G6K. Zeigen Sie $\Sigma \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\Sigma X}$ und $\Sigma(f \circ g) = (\Sigma f) \circ (\Sigma g)$. Somit erhalten wir den Einhängungsfunktor $\Sigma : \mathtt{Top} \to \mathtt{Top}$ mit $X \mapsto \Sigma X$ und $f \mapsto \Sigma f$.

Zu jeder Homotopie $H : f \simeq g$ konstruiere man eine Homotopie $\Sigma H : \Sigma f \simeq \Sigma g$. Somit erhalten wir einen Funktor $\Sigma : \mathtt{hTop} \to \mathtt{hTop}$ mit $X \mapsto \Sigma X$ und $[f] \mapsto [\Sigma f]$.

Insbesondere induziert jeder Homöomorphismus $X \cong Y$ einen Homöomorphismus $\Sigma X \cong \Sigma Y$, und jede Homotopie-Äquivalenz $X \simeq Y$ eine Homotopie-Äquivalenz $\Sigma X \simeq \Sigma Y$.

Oublions les choses, ne considérons que les rapports.
[Vergessen wir die Dinge, betrachten wir nur die Beziehungen.]
Georges BRAQUES (1882–1963), Mitbegründer des Kubismus

KAPITEL H

Die Sprache der Kategorien

§H0. Einführung und Überblick

☞ In der Topologie sind topologische Räume die *Objekte* unserer Untersuchungen. Hierzu ☜ nutzen wir stetige Abbildungen als strukturerhaltende Abbildungen, genannt *Morphismen*. Die Hintereinanderausführung zweier stetiger Abbildungen ist wieder eine stetige Abbildung, oder anders gesagt: die *Komposition* zweier Morphismen ist wieder ein Morphismus.

☞ In der Linearen Algebra gilt dasselbe für lineare Abbildungen, in der Analysis für diffe- ☜ renzierbare Abbildungen, in der Maßtheorie für messbare Abbildungen, in der Numerik für Matrizen, usw. Viele Modelle und Theorien strukturieren sich in dieser Weise um Objekte und Morphismen. Die Sprache der *Kategorien* dient dazu, häufig wiederkehrende Sachverhalte, Strukturen und Argumente effizient zu formulieren und prägnant zu kommunizieren.

Dies ist Ziel und Kennzeichen jeder hochentwickelten Sprache: Sie ermöglicht uns, verschiedene Phänomene einheitlich zu beschreiben und Gemeinsamkeiten zu erfassen.

It frames a possible template for any mathematical theory:
the theory should have nouns and verbs, i.e., objects and morphisms,
and there should be an explicit notion of composition related to the morphisms;
the theory should, in brief, be packaged by a category. There is hardly any species of mathematical object that doesn't fit into this convenient, and often enlightening, template.
Barry Mazur, *When is one thing equal to some other thing?* (2007)

☞ Die Sprache der Kategorien verhilft uns in vielen günstigen Fällen zu knappen Sätzen ☜ und eleganten Beweisen, zum Beispiel bei universellen Eigenschaften, Diagrammjagden oder Dualität. Norman STEENROD (1910–1971), einer der Väter der Algebraischen Topologie, nannte diese Vorgehensweise und ihre Beweismethoden „abstract nonsense“. Diese Bezeichnung ist inzwischen sprichwörtlich geworden, doch keineswegs abwertend gemeint: Die geschickte Nutzung der kategoriellen Denk- und Sprechweise trivialisiert alles, was trivial sein sollte. Das allein ist schon Grund genug, sie kennen und nutzen zu lernen.

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
Ludwig Wittgenstein (1889–1951), *Tractatus logico-philosophicus*

☞ Über die Sprachpraxis hinaus gibt es auch eine Kategorien*theorie*, die allgemeine Konstruktionen und Gesetzmäßigkeiten untersucht, sozusagen die Grammatik dieser Sprache. Dies nennt man auch „general abstract nonsense“ – halb ernst, halb ironisch, aber durchaus anerkennend. Unser bescheidenes Ziel ist hier zunächst, die Sprache anhand von Beispielen gerade soweit einzuführen, wie sie für die Grundlagen der Topologie nötig und nützlich ist. ☜

Es ist schwierig, hier einen Ausblick auf die Theorie und ihre Ergebnisse zu geben, da wir zunächst die Sprache aufbauen und ihren flüssigen Gebrauch einüben müssen. Stattdessen gebe ich einige konkrete Beispiele von wohlbekannten Sätzen anderer Gebiete, die durch die kategorielle Sichtweise erklärt, vereinfacht und verallgemeinert werden:

(1) Darstellungssatz von Cayley: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe. Allgemeiner: Jedes Monoid ist isomorph zu einem Abbildungsmonoid.
(2) Tensorprodukte: Für je drei K–Vektorräume U, V, W gilt $U \otimes V \cong V \otimes U$ und sowie $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$.
(3) Minimax-Ungleichung: Für jede beliebige Funktion $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gilt die Ungleichung $\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \leq \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y)$
(4) Ist ein topologischer Raum X wegzusammenhängend, so sind je zwei seiner Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph, im Allgemeinen aber nicht kanonisch isomorph. Sind sie zudem kommutativ, so sind sie kanonisch isomorph.

☞ Eingeführt wurden Kategorien 1942 von Samuel EILENBERG (1913–1998) und Saunders MAC LANE (1909–2005), um Ergebnisse der Algebraischen Topologie zu formulieren, vornehmlich um topologischen Räumen geeignete algebraische Objekte (Gruppen, Ringe, Vektorräume, ...) zuzuordnen und somit topologische Probleme mit algebraischen Werkzeugen zu behandeln. Ihr großer Nutzen liegt darin, Analogien zwischen unterschiedlichen Gegenständen hervorzuheben. Die Sprache der Kategorien und ihre ordnende Kraft haben sich seither in vielen Gebieten der Mathematik durchgesetzt. Jede Anfängervorlesung der Mathematik, zum Beispiel in der Linearen Algebra, bedient sich heutzutage ganz selbstverständlich ihrer Ideen und Grundbegriffe, wie *Homomorphismus*, *Isomorphismus*, etc. ☜

Literatur: S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1998. F.W. Lawvere, S.H. Schanuel, *Conceptual Mathematics*, Cambridge University Press, 1997. Als kollaborative Online-Referenz entwickelt sich das *nLab* (`ncatlab.org`).

§H1. Kategorien

§H1a. Motivierende Beispiele. Mathematische Objekte studieren wir immer zusammen mit ihren Morphismen. Ich erinnere Sie an einige vertraute Beispiele:

Beispiel. Die Topologie untersucht und nutzt stetige Abbildungen:

$$\texttt{Top} = (\text{ topologische Räume } A,\ \text{stetige Abbildungen } f : A \to B,\ \text{Komposition } \circ\ )$$

Ausführlich bedeutet diese Kurzschreibweise folgendes:

(a) Objekte sind topologische Räume $A, B, C, D, \ldots$.

(b) Morphismen sind stetige Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, ...

(c) Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ stetig, so auch ihre Verknüpfung

$$g \circ f \ : \ A \to C \ : \ a \mapsto g(f(a)).$$

Diese Daten erfüllen einige grundlegenden Rechenregeln:

(0) Jede Abbildung f bestimmt eindeutig ihren Startraum und ihren Zielraum.

(1) Für jeden topologischen Raum B ist die Identität $\mathrm{id}_B : B \to B : b \mapsto b$ stetig.
Bei Verknüpfung ist id_B neutral, das heißt, für alle $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt

$$\mathrm{id}_B \circ f = f \quad \text{und} \quad g \circ \mathrm{id}_B = g.$$

(2) Die Verknüpfung ist assoziativ, das heißt, für alle verknüpfbaren Abbildungen gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beispiel. Grundlegend für die gesamte Mathematik sind Mengen und Funktionen:

$$\texttt{Set} = (\text{ Mengen } X,\ \text{Abbildungen } f : X \to Y,\ \text{Komposition } \circ\ )$$

Dies sind ähnliche Daten, und sie erfüllen dieselben grundlegenden Rechenregeln!

(a) Objekte sind Mengen $A, B, C, D, \ldots$.

(b) Morphismen sind Funktionen $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, ...

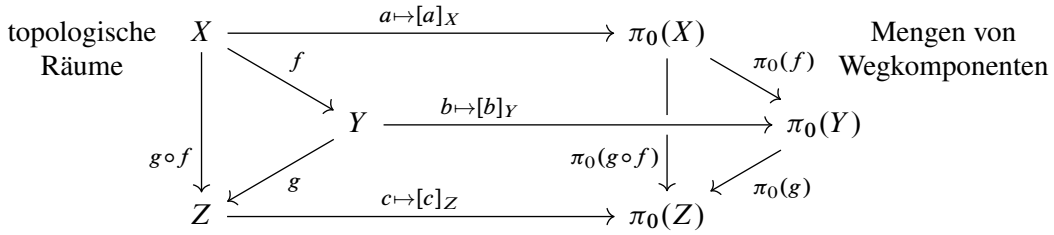
(c) Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so auch $g \circ f : A \to C$.

(0) Jede Funktion f bestimmt ihren Startraum und ihren Zielraum.

(1) Für jede Menge B ist die Identität $\mathrm{id}_B : B \to B : b \mapsto b$ neutral.

(2) Die Verknüpfung ist assoziativ, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Beispiel. Zwar sind `Set` und `Top` sehr verschieden, doch sie verhalten sich ähnlich. Sie sind Beispiele von *Kategorien* (H1A). Diese stehen nicht nur nebeneinander, sondern treten in Beziehung. Wir nutzen *Funktoren* (H4C) zwischen diesen Kategorien:



© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✍ **Beispiel.** Die Lineare Algebra untersucht und nutzt lineare Abbildungen: ✍

$$\mathtt{Vec}_K = (\ K\text{–Vektorräume } V,\ K\text{–lineare Abbildungen } f : V \to W,\ \text{Komposition } \circ\ ).$$

✍ **Beispiel.** Die Analysis untersucht und nutzt differenzierbare Abbildungen: ✍

$$\mathscr{C}^1 = (\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},\ f : U \to V \text{ stetig differenzierbar, Komposition } \circ\ ).$$

✍ **Beispiel.** Auch hier sind $\mathtt{Vec}_K$ und $\mathscr{C}^1$ sehr verschieden, doch sie verhalten sich ähnlich: ✍
Auch sie erfüllen dieselben grundlegenden Rechenregeln einer Kategorie (H1A). Zwischen diesen beiden Kategorien besteht zudem eine wichtige Beziehung: Die Ableitung ist ein Funktor $D : \mathscr{C}^1_* \to \mathtt{Vec}_{\mathbb{R}}$, denn es gilt die Kettenregel $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$. Das ist die geniale Idee der Differentialrechnung: Wir wollen die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^m$ um den Punkt a durch eine lineare Funktion $f'(a)$ approximieren, also $f(a+x) = f(a) + f'(a)\,x + \varepsilon(x)$ mit kleinem Fehler $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^m$, sodass $\varepsilon(x)/|x| \to 0$ für $x \to 0$.

Hierzu müssen wir angeben, in welchem Punkt $a \in U$ wir ableiten. Daher besteht $\mathscr{C}^1_*$ aus Objekten (U,a) mit $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ und U offen sowie Morphismen $f : (U,a) \to (V,b)$, mit $f : U \to V$ stetig diff'bar und $f(a) = b$. Die Ableitung D ordnet (U,a) den Tangentialraum $T_aU = \mathbb{R}^n$ zu und $f : (U,a) \to (V,b)$ die Ableitung $D_a f : T_aU \to T_bV$; diese können wir als Jacobi–Matrix darstellen. Dabei gilt $D(\mathrm{id}_{(U,a)}) = \mathrm{id}_{T_aU}$ und die Kettenregel $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$. Das zeigt: Die Ableitung ist ein kovarianter Funktor $D : \mathscr{C}^1_* \to \mathtt{Vec}_{\mathbb{R}}$. Diese Begriffe wollen wir nun präzisieren und nutzen lernen.

☞ **§H1b. Kategorien.** Aus unserer Erfahrung mit zahlreichen Beispielen der Analysis, Algebra und Topologie extrahieren wir folgende Definition. Sie hat sich vielfach bewährt und wird sich insbesondere in der Topologie als sehr hilfreich erweisen. ☜

✍ **Definition H1A.** Eine *Kategorie* $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ besteht aus drei *Daten*: ✍

(a) eine Klasse Ob, deren Elemente wir *Objekte* von $\mathtt{C}$ nennen,
(b) zu je zwei Objekten $A, B \in \mathrm{Ob}$ eine Klasse $\mathrm{Mor}(A,B)$ von *Morphismen*,
(c) zu je drei Objekten $A, B, C \in \mathrm{Ob}$ eine *Verknüpfung* von Morphismen,

$$\circ\ :\ \mathrm{Mor}(B,C) \times \mathrm{Mor}(A,B) \to \mathrm{Mor}(A,C)\ :\ (g,f) \mapsto g \circ f.$$

Diese drei Daten müssen die folgenden drei *Eigenschaften* erfüllen:

(0) *Disjunktion:* Für alle Paare $(A,B) \neq (A',B')$ gilt $\mathrm{Mor}(A,B) \cap \mathrm{Mor}(A',B') = \emptyset$.
(1) *Identität:* Zu jedem Objekt $B \in \mathrm{Ob}$ existiert ein Morphismus $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}(B,B)$, sodass $\mathrm{id}_B \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_B = g$ gilt für alle $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ und $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$.
(2) *Assoziativität:* Es gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ für alle verknüpfbaren Morphismen, also alle $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}$ und alle $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$, $h \in \mathrm{Mor}(C,D)$.

☞ Die Eigenschaft (1) bestimmt die Identität id_B zu B eindeutig: Sind für $B \in \mathrm{Ob}$ zwei Morphismen $\mathrm{id}_B, \mathrm{id}'_B \in \mathrm{Mor}(B,B)$ neutral, so folgt $\mathrm{id}'_B = \mathrm{id}_B \circ \mathrm{id}'_B = \mathrm{id}_B$. ☜

Stehen mehrere Kategorien in Rede, so schreiben wir $A, B, C \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(B,C)$ und $g \circ_{\mathtt{C}} f$, oder kürzer $A, B, C \in \mathtt{C}$, $f \in \mathtt{C}(A,B)$, $g \in \mathtt{C}(B,C)$ und $g \circ f$.

☞ **Bemerkung.** Eine Kategorie besteht aus *Daten* (a–c) mit gewissen *Eigenschaften* (0–2). ☜
Um eine Kategorie festzulegen, müssen wir ihre Daten präzise angeben und sodann die geforderten Eigenschaften gewissenhaft nachweisen. Genau dies haben wir eingangs für topologische Räume getan; die Anforderungen sind gering und die Beweise meist leicht.

Notation. Die Schreibweise der Komposition (c) folgt der traditionellen Schreibweise für Funktionen. Die Linksreihung ist üblich, aber manchmal unglücklich. Wir sollten genauer von einer *Linkskategorie* sprechen. Eine *Rechtskategorie* hat als Verknüpfung

$$\bullet : \mathrm{Mor}(A,B) \times \mathrm{Mor}(B,C) \to \mathrm{Mor}(A,C) : (f,g) \mapsto f \bullet g.$$

Man muss (wie immer im Leben) Links und Rechts auseinanderhalten. Beide Konventionen sind möglich und nützlich. Die Wahl ist eine Frage von Tradition und Vorliebe.

Beispiele. Wir erhalten eine Unterkategorie, indem wir nur gewisse Objekte zulassen, etwa

$$\mathtt{Haus} = (\text{ Hausdorff–Räume } X, \text{ stetige Abbildungen } f : X \to Y, \text{ Komposition } \circ),$$

ebenso für (lokal-)kompakte Räume, (lokal-)kompakte Hausdorff–Räume, etc.

Alternativ können wir zwar alle Objekte aber nur gewisse Morphismen zulassen, etwa

$$\mathtt{Emb} = (\text{ topologische Räume } X, \text{ Einbettungen } f : X \to Y, \text{ Komposition } \circ),$$

ebenso Identifizierungen, offene / abgeschlossene / eigentliche Abbildungen, etc.

Hierbei ist jeweils nur nachzuprüfen, dass die betrachtete Eigenschaft bei Komposition erhalten bleibt. Diese grundlegende Forderung formulieren wir wie folgt als Definition:

Definition H1B. Eine *Unterkategorie* $\mathtt{S} = (\mathrm{Ob}_\mathtt{S}, \mathrm{Mor}_\mathtt{S}, \circ)$ in $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}_\mathtt{C}, \mathrm{Mor}_\mathtt{C}, \circ)$, geschrieben $\mathtt{S} < \mathtt{C}$, besteht aus einer Teilklasse $\mathrm{Ob}_\mathtt{S} \subset \mathrm{Ob}_\mathtt{C}$ von Objekten sowie für jedes Paar $A, B \in \mathrm{Ob}_\mathtt{S}$ einer Teilklasse $\mathrm{Mor}_\mathtt{S}(A,B) \subset \mathrm{Mor}_\mathtt{C}(A,B)$ von Morphismen, sodass gilt:

(1) Für jedes Objekt $B \in \mathrm{Ob}_\mathtt{S}$ der Unterkategorie gilt $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}_\mathtt{S}(B,B)$.
(2) Für alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_\mathtt{S}(A,B)$ und $g \in \mathrm{Mor}_\mathtt{S}(B,C)$ gilt $g \circ f \in \mathrm{Mor}_\mathtt{S}(A,C)$.

Damit ist $\mathtt{S}$ selbst eine Kategorie mit der von $\mathtt{C}$ auf $\mathtt{S}$ eingeschränkten Verknüpfung.

Die Unterkategorie $\mathtt{S} < \mathtt{C}$ heißt *weit*, wenn $\mathrm{Ob}_\mathtt{S} = \mathrm{Ob}_\mathtt{C}$ gilt, also nur die Morphismen eingeschränkt werden, aber nicht die Objekte, und *voll*, wenn $\mathrm{Mor}_\mathtt{S}(A,B) = \mathrm{Mor}_\mathtt{C}(A,B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Ob}_\mathtt{S}$ gilt, also nur die Objekte eingeschränkt werden, aber nicht die Morphismen.

Beispiele. Die Unterkategorie $\mathscr{C}^1 < \mathtt{Top}$ ist weder weit noch voll.

Die Unterkategorie $\mathtt{Emb} < \mathtt{Top}$ aller Einbettungen ist weit, nicht voll.

Die Unterkategorie $\mathtt{Haus} < \mathtt{Top}$ aller Hausdorff–Räume ist voll, nicht weit.

Übung H1C. Die folgenden Daten definieren eine Kategorie mit der üblichen Komposition:

(1) Die Kategorie $\mathtt{Top}_2$ hat als Objekte alle Raumpaare (X,A) mit $A \subset X$. Ein Morphismus $f : (X,A) \to (Y,B)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(A) \subset B$.

(2) Als Unterkategorie $\mathtt{Top}_* < \mathtt{Top}_2$ betrachten wir Paare (X,a) mit Fußpunkt $a \in X$. Ein Morphismus $f : (X,a) \to (Y,b)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(a) = b$.

Ebenso gelangen wir von $\mathtt{Set}$ zu $\mathtt{Set}_*$: Objekte (X,a) sind Mengen X mit Fußpunkt $a \in X$. Morphismen $f : (X,a) \to (Y,b)$ sind Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(a) = b$.

Oben sind wir ebenso von $\mathscr{C}^1$ zu $\mathscr{C}^1_*$ übergegangen: Objekte (U,a) sind offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Fußpunkt $a \in U$. Das ist immer dann nützlich, wenn wir unsere Untersuchung an einem bestimmten Punkt festmachen (fixieren, lokalisieren) wollen.

(3) Die Kategorie $\mathtt{Top}_3$ besteht aus Raumtripeln (X,A,A') mit $A' \subset A \subset X$ und stetigen Abbildungen $f : (X,A,A') \to (Y,B,B')$, also $f : X \to Y$ mit $f(A) \subset B$ und $f(A') \subset B'$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§H1c. Prominente Beispiele aus der Mengenlehre.** Zur Illustration führe ich zahlreiche Beispiele an, die früh und natürlich im Mathematikstudium auftreten – wenn auch nicht gleich in kategorieller Sprech- und Sichtweise. Wir wiederholen schöne Mathematik: ☜

☞ **Beispiel H1D.** Mengen und Relationen mit ihrer Komposition bilden die Kategorie ☜

$$\texttt{Rel} = (\text{ Mengen } X, \text{ Relationen } F \subset X \times Y, \text{ Komposition } \circ).$$

Eine *Relation* zwischen Mengen X und Y ist eine Teilmenge $F \subset X \times Y$ des Produkts. Allein aus F können wir jedoch die Mengen X und Y nicht rekonstruieren, sondern nur die Teilmengen $X' = \mathrm{pr}_1 F = \{ x \mid \exists y : (x,y) \in F \}$ und $Y' = \mathrm{pr}_2 F = \{ y \mid \exists x : (x,y) \in F \}$.

Um alle nötigen Informationen parat zu halten, ist es sinnvoll und nötig, der Relation F explizit die Mengen X und Y mitzugeben: Dies leistet das Tripel $f = (X,F,Y)$. Wir ordnen so der Relation f ihren Start $s(f) = X$ und ihr Ziel $t(f) = Y$ zu.

Das Mathematikstudium beginnt mit den Begriffen *Relation* $F \subset X \times Y$ und *Funktion* $F : X \to Y$ zwischen Mengen X und Y. Zur Erinnerung führe ich sie hier nochmal aus:

☞ **Definition H1E.** Eine *Relation* $f = (X,F,Y)$ besteht aus Mengen X, Y und $F \subset X \times Y$. ☜ Die Verknüpfung von $f = (X,F,Y)$ mit $g = (Y,G,Z)$ ist $g \circ f := h = (X,H,Z)$ mit $H = \{ (x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x,y) \in F, (y,z) \in G \}$. Die Identität ist $\mathrm{id}_X = (X,\Delta,X)$ mit $\Delta = \{ (x,x) \mid x \in X \}$. Wir erhalten tatsächlich eine Kategorie. (Übung!)

Wir nennen $f = (X,F,Y)$ *linkstotal*, wenn $\mathrm{pr}_1 F = X$ gilt, also zu jedem $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert mit $(x,y) \in F$. Entsprechend nennen wir f *rechtstotal*, wenn $\mathrm{pr}_2 F = Y$ gilt, also zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $(x,y) \in F$.

Wir nennen f *rechtseindeutig*, wenn zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ existiert mit $(x,y) \in F$. Anders gesagt, aus $(x,y),(x,y') \in F$ folgt $y = y'$. Wir nennen f *linkseindeutig*, wenn zu jedem $y \in X$ höchstens ein $x \in Y$ existiert mit $(x,y) \in F$. Anders gesagt, aus $(x,y),(x',y) \in F$ folgt $x = x'$. Hierzu benötigen wir nur F, nicht aber X und Y.

☞ Eine Relation $f = (X,F,Y)$ heißt *Funktion* oder *Abbildung*, wenn sie linkstotal und ☜ rechtseindeutig ist, also zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x,y) \in F$. Wir sagen hierzu, f ordnet dem Element $x \in X$ das Element $y \in Y$ zu, und schreiben kurz $f(x) = y$.

Die Tatsache, dass $f = (X,F,Y)$ eine Funktion ist, schreiben wir auch kurz $f : X \to Y$ und nennen $F = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subset X \times Y$ den *Graph* der Funktion. Eine Funktion f besteht also aus ihrem Graphen F und zudem ihrer Startmenge X und ihrer Zielmenge Y.

☞ **Bemerkung.** Allein aus dem Funktionsgraphen $F \subset X \times Y$ können wir immerhin die ☜ Startmenge $s(f) = X = \mathrm{pr}_1 F = \{ x \mid \exists y : (x,y) \in F \}$ rekonstruieren, im Allgemeinen jedoch nicht die Zielmenge $t(f) = Y$, sondern nur die (eventuell kleinere) Bildmenge $\mathrm{im}(f) = Y' = \mathrm{pr}_2 F = \{ y \mid \exists x : (x,y) \in F \} \subset Y$. Zwar können wir an F ablesen, ob f injektiv (linkseindeutig) ist, jedoch nicht, ob f surjektiv (rechtstotal) ist.

☞ **Beispiel.** Ist die Inklusion $f : \{-1,1\} \hookrightarrow \mathbb{R}$ zusammenziehbar? Diese Frage ist nur dann ☜ sinnvoll, wenn wir wissen, in welchem Raum die Homotopie stattfinden darf; in unserem Beispiel ist dies der Raum $\mathbb{R}$, und hier ist f tatsächlich zusammenziehbar. Die Antwort ist negativ für $g : \{-1,1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Der Funktionsgraph $F = G = \{ (-1,-1),(1,1) \}$ ist jedoch in beiden Fällen derselbe! Auch in der Topologie ist es daher unabdingbar, dass wir mit jeder stetigen Abbildung f ihren Startraum und ihren Zielraum kennen.

Beispiel H1F. Mengen und Abbildungen mit ihrer Komposition bilden die Kategorie

$$\texttt{Set} = (\text{ Mengen } X,\ \text{Abbildungen } f : X \to Y,\ \text{Komposition } \circ),$$
$$\texttt{FinSet} = (\text{ endliche Mengen } X,\ \text{Abbildungen } f : X \to Y,\ \text{Komposition } \circ),$$
$$\texttt{NatSet} = (\text{ Mengen } n = \{0,1,\dots,n-1\} \in \mathbb{N},\ \text{Abbildungen } f : m \to n,\ \text{Komposition } \circ).$$

In `Rel` erhalten wir jeweils eine weite Unterkategorie, wenn wir nur links-/rechtstotale oder rechts-/linkseindeutige Relationen betrachten, oder Kombinationen hiervon.

Speziell ist $\texttt{Set} < \texttt{Rel}$ eine weite Unterkategorie: Morphismen sind alle Abbildungen $f : X \to Y$, also Relationen $f = (X, F, Y)$, die linkstotal und rechtseindeutig sind.

In `Set` bilden die endlichen Mengen die volle Unterkategorie `FinSet`: Objekte sind alle endlichen Mengen $X, Y, \dots$, und Morphismen sind Abbildungen $f : X \to Y$.

Hierin ist $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ nach John von Neumann die Menge der natürlichen Zahlen $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\}$, $4 = \{0,1,2,3\}$, und rekursiv $n = \{0,\dots,n-1\}$. Morphismen $f : m \to n$ sind hier Abbildungen $f : \{0,\dots,m-1\} \to \{0,\dots,n-1\}$.

In `Set`, `FinSet`, `NatSet` erhalten wir jeweils eine weite Unterkategorie, wenn wir nur injektive / surjektive / bijektive Abbildungen zulassen, denn die Identität erfüllt diese Eigenschaften und sie bleiben bei Komposition erhalten. Speziell in `NatSet` können wir zudem (schwach oder strikt) monotone Abbildungen betrachten, usw.

Beispiel. Eine lokal besonders kleine Unterkategorie von `Set` erhalten wir durch

$$\texttt{Set}_{\subset} = (\text{ Mengen } X,\ \text{Inklusionen } X \subset Y,\ \text{Komposition } \circ).$$

Als möglichen Morphismus von A nach B betrachten wir hier nur die Inklusion $A \subset B$, also $\iota_A^B = (A, \Delta, B)$ mit $\Delta = \{\,(a,a) \mid a \in A\,\}$. Jede Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ bildet hierin eine volle Unterkategorie, ebenso jede Teilmenge von $\mathfrak{P}(X)$, zum Beispiel eine Topologie $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$. Ebenso haben wir in $\texttt{Set}_{\subset}$ die vollen Unterkategorien $\texttt{FinSet}_{\subset}$ und $\texttt{NatSet}_{\subset}$; letztere entspricht der Menge $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ mit ihrer natürlichen Ordnung.

Beispiel H1G. Jede prägeordnete Menge $(X, \leq)$ können wir als eine Kategorie betrachten:

$$(X, \leq, \circ) \quad \text{mit} \quad \mathrm{Ob} = X, \quad \mathrm{Mor}(a,b) = \begin{cases} \{\,(a,b)\,\} & \text{falls } a \leq b, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine *Präordnung* $\leq$ auf einer Menge X ist eine reflexive und transitive Relation (§B1c). Dies definiert eine Kategorie $(X, \leq, \circ)$: Die Objekte sind die Elemente $a \in X$, Morphismen $a \to b$ sind die Paare (a,b) mit $a \leq b$, die Komposition von (a,b) und (b,c) ist (a,c). Dies ist wohldefiniert dank Transitivität und offensichtlich assoziativ. Reflexivität $a \leq a$ sorgt für die Existenz der Identität $\mathrm{id}_a = (a,a)$. Umgekehrt definiert jede Kategorie `C` eine Präordnung auf $\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$, indem wir $a \leq b$ definieren durch $\mathrm{Mor}(a,b) \neq \emptyset$. Ist jede Morphismenmenge $\mathrm{Mor}(a,b)$ höchstens einelementig, dann entspricht $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}, \leq, \circ)$ einer Präordnung.

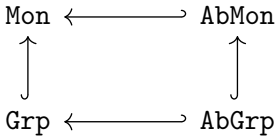
Prägnantes Beispiel sind die Kompaktifizierungen $\kappa : X \to Y$ eines Raumes X (§F4d).

Beispiel H1H. Eine Kategorie `D` heißt *diskret*, wenn jeder Morphismus in `D` eine Identität ist. Jede Menge X bildet eine diskrete Kategorie $(X, =, \circ)$, indem wir jedem Objekt $x \in X$ die Identität $\mathrm{id}_x = (x,x)$ zuordnen, aber sonst keine Morphismen. Umgekehrt wird jede diskrete Kategorie `D` bestimmt durch die Menge ihrer Objekte. Wir setzen bei dieser Sprechweise stillschweigend voraus, dass `D` klein ist, also $\mathrm{Ob}_{\mathtt{D}}$ eine Menge (H1P).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H1d. Prominente Beispiele aus der Linearen Algebra und der Algebra.

Beispiel H1I. Monoide und ihre Homomorphismen bilden eine Kategorie, darin sind Gruppen und ihre Homomorphismen eine volle Unterkategorie, ebenso die abelschen:



Wir nutzen hierzu folgende sinnfällige Abkürzungen:

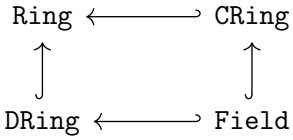
$$\texttt{Mon} = (\text{ Monoide, Monoidhomomorphismen, Komposition })$$
$$\texttt{AbMon} = (\text{ abelsche Monoide, Monoidhomomorphismen, Komposition })$$
$$\texttt{Grp} = (\text{ Gruppen, Gruppenhomomorphismen, Komposition })$$
$$\texttt{AbGrp} = \texttt{Ab} = (\text{ abelsche Gruppen, Gruppenhomomorphismen, Komposition })$$

Die endlichen bilden hierin die volle Unterkategorie `FinGrp` und `FinAb`, die endlich erzeugten entsprechend `fgGrp` und `fgAb`. Die Morphismen sind jeweils dieselben.

Für jedes Monoid G haben wir die Kategorie der G–Linksmengen $G \curvearrowright X$ gegeben durch eine Operation $\cdot : G \times X \to X : (g,x) \mapsto g \cdot x$ von links, ebenso $X \curvearrowleft H$ von rechts.

$$_G\texttt{Set} = (\ G\text{–Linksmengen, äquivariante Abbildungen, Komposition }\ )$$
$$\texttt{Set}_H = (\ H\text{–Rechtsmengen, äquivariante Abbildungen, Komposition }\ )$$
$$_G\texttt{Set}_H = (\ G\text{–}H\text{–Bimengen, äquivariante Abbildungen, Komposition }\ )$$

Beispiel H1J. Ringe mit Eins bilden eine Kategorie, und Körper eine volle Unterkategorie:



Wir nutzen hierzu folgende sinnfällige Abkürzungen:

$$\texttt{Ring} = (\text{ Ringe } (R,+,0,\cdot,1),\ \text{Ringhomomorphismen, Komposition })$$
$$\texttt{CRing} = (\text{ kommutative Ringe, Ringhomomorphismen, Komposition })$$
$$\texttt{DRing} = (\text{ Divisionsringe, Ringhomomorphismen, Komposition })$$
$$\texttt{Field} = \texttt{CDRing} = (\text{ Körper, Körperhomomorphismen, Komposition })$$

Die Körper der Charakteristik p bilden hierin die volle Unterkategorie $\texttt{Field}_p$, die endlichen hierin wiederum $\texttt{FinField}_p$. Die Morphismen sind jeweils dieselben.

Über jedem Körper K haben wir die Kategorie $\texttt{Vec}_K$ der K–Vektorräume, allgemein:

$$_R\texttt{Mod} = (\ R\text{–Linksmoduln, } R\text{–lineare Abbildungen, Komposition }\ )$$
$$\texttt{Mod}_S = (\ S\text{–Rechtsmoduln, } S\text{–lineare Abbildungen, Komposition }\ )$$
$$_R\texttt{Mod}_S = (\ R\text{–}S\text{–Bimoduln, } R\text{–}S\text{–lineare Abbildungen, Komposition }\ )$$

Die endlich erzeugten bilden hierin die volle Unterkategorie $\texttt{FinMod}_K$ bzw. $\texttt{FinVec}_K$. Hierin bilden die Objekte K^n für $n \in \mathbb{N}$ die volle Unterkategorie $\texttt{NatMod}_K$ bzw. $\texttt{NatVec}_K$.

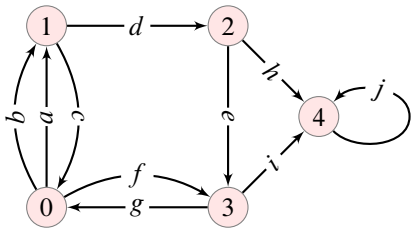
☞ **Bemerkung.** Diese Beispiele folgen einem allgegenwärtigen Muster: Objekte sind *Mengen mit zusätzlicher Struktur* (Gruppen, Vektorräume, topologische Räume, etc.) und Morphismen sind strukturerhaltende Abbildungen. Solche Kategorien heißen *konkrete Kategorien*. (Für die abstrakte Definition konkreter Kategorien siehe H4S.) ☜

☞ Kategorien müssen jedoch nicht aus Abbildungen von strukturierten Mengen bestehen. Zum Kontrast nennen ich zwei ebenso konkrete Beispiele, die anders aufgebaut sind: ☜

✍ **Beispiel H1K.** Algebra, Analysis, Numerik, Physik und zahlreiche Anwendungen nutzen intensiv die Kategorie der Matrizen über einem Körper K, insbesondere für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$: ✍

$$\mathtt{Mat}_K = (\text{ Objekte } m \in \mathbb{N},\ \text{Matrizen } K^{n\times m},\ \text{Multiplikation } \cdot\ ),$$
$$\cdot : K^{r\times n} \times K^{n\times m} \to K^{r\times m} \quad \text{also} \quad \mathrm{Mat}_K(n,r) \times \mathrm{Mat}_K(m,n) \to \mathrm{Mat}_K(m,r)$$

Morphismen $A : m \to n$ sind Matrizen $A \in K^{n\times m} := \mathrm{Mat}_K(m,n)$. Die Komposition ist die Matrizenmultiplikation (§B1m), wobei nur Matrizen passender Größe miteinander multipliziert werden können. Die Lineare Algebra nutzt $\mathtt{Mat}_K$ als ein Modell für $\mathtt{FinVec}_K$ (H5F).



$$C_0 = \{0,1,\dots,4\}$$
$$C_1 = \{a,b,\dots,j\}$$
$$(s,t) : a \mapsto (0,1)$$
$$b \mapsto (0,1)$$
$$\dots$$
$$j \mapsto (4,4)$$

✍ **Beispiel H1L.** Ein *(gerichteter) Graph* $\Gamma = (C_0, C_1, s, t)$ besteht aus einer Eckenmenge C_0, einer Kantenmenge C_1 und zwei Abbildungen $s,t : C_1 \to C_0$, die jeder Kante $e \in C_1$ ihren Start $s(e) \in C_0$ und ihr Ziel $t(e) \in C_0$ zuordnen. Wir definieren die *Wegekategorie* ✍

$$\Gamma^* = (C_0, C_1^*, s, t, \circ) \qquad \text{kurz} \qquad (C_0, C_1^*, \circ).$$

Objekte sind die Ecken $v \in C_0$. Morphismen sind Wege $w = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$ endlicher Länge $n \in \mathbb{N}$ mit $s(e_k) = v_{k-1}$ und $t(e_k) = v_k$ für $k = 1,2,\dots,n$. Dieser Weg w läuft vom Start $s(w) = v_0$ zum Ziel $t(w) = v_n$ und ist somit ein Morphismus in $\Gamma^*(v_0, v_n)$. Die Verknüpfung von Wegen w, w' mit $t(w) = s(w')$ ist ihre Aneinanderhängung gemäß

$$(v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m) \circ (v_m, e_{m+1}, v_{m+1}, \dots, e_n, v_n)$$
$$:= (v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m, e_{m+1}, v_{m+1}, \dots, e_n, v_n).$$

Diese Konstruktion nutzen wir für Fundamentalgruppen (Kapitel L). Besteht der Graph Γ nur aus einer Ecke v und der Kantenmenge A, so besteht die Kategorie Γ^* nur aus dem Objekt v, und die Morphismenmenge $\mathrm{End}(v) = A^*$ ist das freie Monoid über A (§L3).

☞ **Beispiel.** Domino spielt in einer Kategorie: Die Steine sind die Kanten eines (ungerichteten) Graphen Γ, die Zahlen sind die Ecken. Das passende Anlegen links oder rechts ist die Komposition. Eine Folge von Steinen liegt demnach in der Wegekategorie Γ^*. ☜

☞ **Beispiel.** Nahezu alle „Handlungen“ spielen in einer Kategorie: Objekte sind die möglichen Zustände $s_0, s_1, s_2, \dots$, elementare Morphismen sind die möglichen Aktionen $a_1 : s_0 \to s_1$, $a_2 : s_0 \to s_2$, etc. Hierdurch entsteht ein neuer Zustand mit neuen Aktionen, etc. So erhalten wir einen Graphen Γ. Eine Folge von Aktionen liegt demnach in der Wegekategorie Γ^*. ☜

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H1e. Prominente Beispiele aus der Analysis und der Topologie.

☞ **Beispiel H1M.** Stetig differenzierbare Funktionen bilden die Kategorie ☜

$$\mathscr{C}^1 = (\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, stetig differenzierbare Funktionen, Komposition }).$$

Objekte sind hier die offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$. Morphismen $f : \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^m$ sind stetig differenzierbare Funktionen. Die Komposition $g \circ f$ ergibt wieder eine stetig differenzierbare Funktion dank Kettenregel. Hierin liegen die weiten Unterkategorien

$$\mathscr{C}^k = (\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, } k\text{–fach stetig diff'bare Funktionen, Komposition }),$$
$$\mathscr{C}^\infty = (\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, beliebig oft diff'bare Funktionen, Komposition }),$$
$$\mathscr{C}^\omega = (\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, reell-analytische Funktionen, Komposition }).$$

Analytische Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^m$ sind solche, die sich lokal als konvergente Potenzreihe darstellen lassen. In der komplexen Analysis betrachtet man entsprechend

$$\texttt{Hol} = (\ U \subset \mathbb{C} \text{ offen, komplex-differenzierbare Funktionen, Komposition }).$$

Diese lokalen Modelle dienen zur globalen Konstruktion von Mannigfaltigkeiten der jeweiligen Kategorie (§K1), wobei alle Kartenwechsel $\mathscr{C}^k$–Funktionen sind (K1F), entsprechend $\mathscr{C}^\infty$ für glatt, $\mathscr{C}^\omega$ für analytisch und `Hol` für holomorph, etc.

☞ **Beispiel H1N.** Metrische Räume führen zu äußerst interessanten Kategorien: ☜

$$\texttt{Met} = (\text{ metrische Räume, stetige Abbildungen, Komposition })$$
$$\texttt{Isom} = (\text{ metrische Räume, isometrische Einbettungen, Komposition })$$
$$\texttt{Lip} = (\text{ metrische Räume, lipschitz–stetige Abbildungen, Komposition })$$
$$\texttt{Bilip} = (\text{ metrische Räume, bilipschitz–stetige Einbettungen, Komposition })$$

Von metrischen Räumen sind wir zu topologischen Räumen gelangt:

$$\texttt{Top} = (\text{ topologische Räume, stetige Abbildungen, Komposition })$$
$$\texttt{hTop} = (\text{ topologische Räume, Homotopieklassen, Komposition })$$

In `Top` kennen wir zahlreiche Unterkategorien, die je nach Anwendung nützlich werden: offene / abgeschlossene Abbildungen, Einbettung, Identifizierungen, Retrakte, etc.

☞ **Übung H1O.** Nicht alles, was auf den ersten Blick nach einer Kategorie aussieht, ist auch eine! Prüfen Sie anhand der Definition H1A, ob folgende Beispiele Kategorien sind: ☜

(1) Metrische Räume und kontraktive Abbildungen mit der üblichen Komposition.
(2) Metrische Räume und $(1/2, 2)$–bilipschitz Abbildungen mit Komposition (§C2f).
(3) Punkte in einem topologischen Raum X und Wege mit ihrer Verknüpfung (§G2a).
(4) Matrizen $\texttt{Mat}_{\mathbb{K}}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{>0}$, $[0,\infty]$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. (§B2h).

Wir verknüpfen Matrizen $A : J \times I \to \mathbb{R}$ und $B : K \times J \to \mathbb{R}$ zu $C = B \circ A : K \times I \to \mathbb{R}$ mit $C(k,j) = \sum_{j \in J} B(k,j)A(j,i)$. Hierzu seien die Matrizen in geeignetem Sinne endlich:

(5) spaltenendlich: Für $i \in I$ existiert $J_i \subset J$ endlich, sodass $A(j,i) = 0$ für $j \in J \smallsetminus J_i$.
(6) stochastisch: Für alle $i, j \in I$ gilt $A(j,i) \geq 0$ und in der Summe $\sum_{j \in J} A(j,i) = 1$.

☞ **§H1f. Kleine Kategorien.** In unserer Definition H1A einer Kategorie $\mathtt{C}$ sprechen wir ☜ nicht von der *Menge* $\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$, sondern vorsichtig von der *Klasse* aller Objekte der Kategorie $\mathtt{C}$.

Beispiel. Wir möchten von der Kategorie $\mathtt{Set}$ aller Mengen sprechen. Doch die Annahme einer „Menge M aller Mengen“ führt zu Widersprüchen, insbesondere der *Russelschen Antinomie*: In M hätten wir die Teilmenge $R = \{\, x \in M \mid x \notin x \,\}$ aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Dies ist eine Menge, also gilt $R \in M$. Aus der Annahme $R \notin R$ folgt $R \in R$. Aus der Annahme $R \in R$ folgt $R \notin R$. Wir erhalten in jedem Fall einen Widerspruch.

Die Russellsche Antinomie hat die naiven Anfänge der Mengenlehre schwer erschüttert. Beim axiomatischen Aufbau muss man daher die möglichen Konstruktionen einschränken. Dies gilt auch für Kategorien. Wir sprechen daher vorsichtig bei einer Kategorie $\mathtt{C}$ von der „Klasse $\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$“ und der „Klasse $\mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}$“, um derlei mengentheoretische Widersprüche zu vermeiden. (Mehr zur Grundlagenproblematik erfährt man bei Mac Lane.)

☞ **Definition H1P.** Eine Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ heißt *klein*, wenn die Objektklasse Ob ☜ und die Morphismenklasse Mor beides Mengen sind. Sie heißt *lokal klein*, wenn zu je zwei Objekten $A, B \in \mathrm{Ob}$ die Morphismenklasse $\mathrm{Mor}(A, B)$ eine Menge ist.

☞ **Beispiele.** Die folgenden Kategorien sind klein: ☜

- Die Wegekategorie Γ^* eines gerichteten Graphen Γ (H1L)
- Eine prägeordnete Menge aufgefasst als Kategorie (H1G)
- Ein Monoid als Kategorie mit nur einem Objekt (H2H).

☞ **Beispiel.** Die Kategorie $\mathtt{Set}$ aller Mengen ist nicht klein, aber immerhin lokal klein: Für ☜ je zwei Objekte $A, B \in \mathtt{Set}$ ist die Morphismenklasse $\mathtt{Set}(A, B)$ eine Menge, denn jede Abbildung $f : A \to B$ begreifen wir als Teilmenge der Produktmenge $A \times B$. Gleiches gilt in jeder Kategorie aus strukturierten Mengen und strukturerhaltenden Abbildungen, wie etwa $\mathtt{Top}$, $\mathtt{Met}$, $\mathtt{Grp}$, $\mathtt{Vec}_K$, etc: Die Morphismen von $A = (\mathrm{Menge}_A, \mathrm{Struktur}_A)$ nach $B = (\mathrm{Menge}_B, \mathrm{Struktur}_B)$ bilden eine Teilmenge $\mathrm{Mor}(A, B) \subset \mathtt{Set}(\mathrm{Menge}_A, \mathrm{Menge}_B)$.

Beispiel. Die Metakategorie $\mathtt{Cat}$ aller Kategorien und ihrer Funktoren (H4C) ist weder klein noch lokal klein. Das nur zur Illustration: Manche Kategorien sind wirklich groß.

☞ **§H1g. Disjunktion.** In einer Kategorie $\mathtt{C}$ ist es nützlich, $\mathrm{Mor}(A, B)$ und $\mathrm{Mor}(A', B')$ ☜ für $(A, B) \neq (A', B')$ als disjunkt anzunehmen, wie in H1A gefordert. Wir können dann jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ eindeutig seinen *Start* $s(f) = A$ und sein *Ziel* $t(f) = B$ zuordnen. Sollte dies in $\mathtt{C}$ noch nicht der Fall sein, so gehen wir von $\mathrm{Mor}(A, B)$ über zu

$$\mathrm{Mor}^*(A, B) := \{A\} \times \mathrm{Mor}(A, B) \times \{B\}.$$

In der so entstehenden Kategorie $\mathtt{C}^*$ ist jeder Morphismus dann ein Tripel (A, f, B) mit $f : A \to B$ in $\mathtt{C}$, und die Komposition definieren wir in der offensichtlichen Weise durch

$$(B, g, C) \circ (A, f, B) := (A, g \circ f, C).$$

Zu jedem Morphismus $f : A \to B$ aus $\mathtt{C}$ wird somit in der Erweiterung $\mathtt{C}^*$ explizit der Start A und das Ziel B vermerkt: Jeder Morphismus weiß jetzt, wo er herkommt und wo er hingeht. Von dieser kleinen aber wichtigen Korrektur abgesehen sind $\mathtt{C}$ und $\mathtt{C}^*$ gleich.

Nach diesen Vorbereitungen können wir als Zusammenfassung den Begriff *Kategorie* besonders schön strukturieren als ein *Graph mit Komposition*. Dies führen wir nun aus.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§H1h. Kategorie als Graph mit Komposition.** Die eingangs formulierte Definition H1A können wir abschließend wie folgt strukturieren: Da $\mathrm{Mor}(A,B)$ und $\mathrm{Mor}(A',B')$ für $(A,B) \neq (A',B')$ disjunkt sind, können wir jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ eindeutig seinen Start $s(f) = A$ und sein Ziel $t(f) = B$ zuordnen. Statt für jedes Objekt A die Existenz einer Identität $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A,A)$ zu fordern und dann ihre Eindeutigkeit nachzuweisen, können wir A direkt seine Identität id_A zuordnen. Wir erhalten zusammenfassend: ☜

☞ **Definition H1Q.** Ein *(gerichteter) Graph* $\mathtt{C} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, s, t)$ besteht aus folgenden Daten: ☜

(a) eine Klasse $\mathtt{C}_0$, deren Elemente wir *Ecken*, *Elemente* oder *Objekte* nennen,
(b) eine Klasse $\mathtt{C}_1$, deren Elemente wir *Kanten*, *Pfeile* oder *Morphismen* nennen,
(c) zwei Abbildungen $s,t : \mathtt{C}_1 \to \mathtt{C}_0$, engl. *source* und *target*, die jedem Morphismus $f \in \mathtt{C}_1$ sein *Startobjekt* $s(f) \in \mathtt{C}_0$ und sein *Zielobjekt* $t(f) \in \mathtt{C}_0$ zuordnen.

Alternativ schreiben wir $\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}} = \mathtt{C}_0$ und $\mathrm{Mor}_{\mathtt{C}} = \mathtt{C}_1$ wie in Definition H1A. Für Objekte $A, B \in \mathtt{C}_0$ schreiben wir kurz $A, B \in \mathtt{C}$. Für Morphismen $f \in \mathtt{C}_1$ vom Start $s(f) = A$ zum Ziel $t(f) = B$ schreiben wir kurz $f \in \mathtt{C}(A,B)$ oder $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ oder $f : A \to B$, wenn $\mathtt{C}$ klar ist. Wir setzen hierzu $\mathtt{C}(A,B) := \{\, f \in \mathtt{C}_1 \mid s(f) = A,\ t(f) = B \,\}$.

Eine *(Links-)Kategorie* $\mathtt{C} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, s, t, \circ, \mathrm{id})$ besteht zudem aus folgenden Daten:

(d) eine Verknüpfung $\circ : \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1 \to \mathtt{C}_1 : (g,f) \mapsto g \circ f$ auf der Klasse aller verknüpfbaren Morphismenpaare, $\mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1 = \{\, (g,f) \in \mathtt{C}_1 \times \mathtt{C}_1 \mid s(g) = t(f) \,\}$,
(e) eine Abbildung $\mathrm{id} : \mathtt{C}_0 \to \mathtt{C}_1 : A \mapsto \mathrm{id}_A$, die jedem Objekt $A \in \mathtt{C}_0$ einen Morphismus $\mathrm{id}_A \in \mathtt{C}_1$ zuordnet, genannt die *Identität* von A.

Diese Daten müssen folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Es gilt $A = s(\mathrm{id}_A) = t(\mathrm{id}_A)$ für jedes Objekt $A \in \mathtt{C}_0$ und $f = f \circ \mathrm{id}_{s(f)} = \mathrm{id}_{t(f)} \circ f$ für jeden Morphismus $f \in \mathtt{C}_1$.
(2) Es gilt $s(g \circ f) = s(f)$ und $t(g \circ f) = t(g)$ für jedes Paar $(g,f) \in \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1$ und $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ für jedes verknüpfbare Tripel $(h,g,f) \in \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1$.

☞ **Bemerkung.** Eine *Kategorie* $\mathtt{C} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, s, t, \circ, \mathrm{id})$ besteht demnach aus einem Graphen mit einer Komposition $\circ$ und Identität id, die die obigen Eigenschaften (1–2) haben. Mit anderen Worten, (1) die Morphismen $\mathrm{id}_A \in \mathtt{C}(A,A)$ fungieren als Identitäten, und (2) die Verknüpfungen $\circ : \mathtt{C}(B,C) \times \mathtt{C}(A,B) \to \mathtt{C}(A,C)$ sind assoziativ. Dies verallgemeinert den Begriff des *Monoids* (H2H): In einem Monoid sind je zwei Elemente verknüpfbar, in einer Kategorie gilt dies nur partiell, wie durch den zugrundeliegenden Graphen formalisiert. ☜

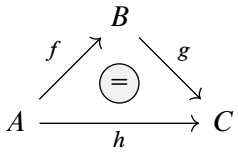
☞ **Bemerkung.** Ist das übertrieben formal und abstrakt? Abstrakt ist richtig: Wir haben eine gemeinsame Struktur destilliert aus Dutzenden von zentralen doch sehr unterschiedlichen Beispielen aus der Mengenlehre, Algebra, Analysis, Stochastik, Numerik, Topologie, etc. Die Definition H1Q fällt also nicht vom Himmel, sondern fasst jahrhundertelange mathematische Erfahrungen zusammen. Ist das übertrieben formal? Das hängt von den gesteckten Zielen ab. Ich glaube und hoffe: Sinnvolle Abstraktion hilft und vereinfacht. ☜

☞ **Warnung.** Die Sprache der Kategorien ist ein mächtiges Hilfsmittel. Man kann damit sehr einfache Dinge sehr kompliziert ausdrücken, glücklicherweise aber auch sehr komplizierte Dinge sehr einfach formulieren. Das ist mit unseren natürlichen Sprachen nicht anders. Der Nutzen entsteht durch den rechten Gebrauch. Üben Sie das rechte Maß an Abstraktion! ☜

§H2. Kommutative Diagramme

§H2a. Kommutative Diagramme. Wir arbeiten in einer Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$. Die folgende graphische Notation erweist sich als ungemein effizient und hilfreich.

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{Mor}(A,B) \\ g \in \mathrm{Mor}(B,C) \\ h \in \mathrm{Mor}(A,C) \\ h = g \circ f \end{array}\right\} \iff$$

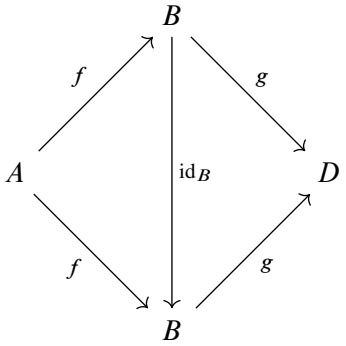


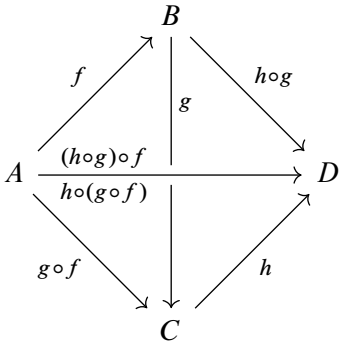
Den Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ schreiben wir als Pfeil $f : A \to B$. Die Komposition von $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ergibt den Morphismus $h : A \to C$ mit $h = g \circ f$. Dies stellen wir wie oben als *kommutatives Diagramm* dar. Dies organisiert alle Informationen besonders übersichtlich, insbesondere falls viele Morphismen beteiligt sind.

Definition H2A. Ein *Diagramm* in der Kategorie $\mathtt{C}$ ist ein (gerichteter) Graph (H1L), wobei die Ecken mit Objekten aus $\mathtt{C}$ beschriftet sind und die Kanten mit hierzu passenden Morphismen aus $\mathtt{C}$. Ein solches Diagramm heißt *kommutativ*, wenn zwischen je zwei Ecken des Diagramms die Komposition entlang aller Wege denselben Morphismus in $\mathtt{C}$ ergibt.

Konvention. Graphisch können wir dies wie oben durch ein Symbol „=“ darstellen (oder einen Kreis oder beides.) Zur Betonung formulieren wir explizit: „Dieses Diagramm kommutiert.“ Oft wird das bereits aus dem Kontext klar und nicht besonders hervorgehoben.

Beispiel. Identität $\mathrm{id}_B \circ f = f$, $g \circ \mathrm{id}_B = g$ und Assoziativität $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ besagen, dass in jeder Kategorie $\mathtt{C}$ die folgenden Diagramme kommutieren:





Bemerkung. Kommutative Diagramme begegnen Ihnen häufig in der Mathematik. Warum ist das so? Ein Grund liegt auf der Hand: In konkreten Kategorien wie $\mathtt{Set}$, $\mathtt{Top}$, $\mathtt{Vec}_K$ codieren kommutative Diagramme *All-Aussagen* über die Elemente der betrachteten Menge für die gezeigten Abbildungen. In den obigen Diagrammen heißt das:

$\forall a \in A : (\mathrm{id}_B \circ f)(a) = f(a)$	kurz	$\mathrm{id}_B \circ f = f$
$\forall b \in B : (g \circ \mathrm{id}_B)(b) = g(b)$	kurz	$g \circ \mathrm{id}_B = g$
$\forall a \in A : ((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a)$	kurz	$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Das gilt insbesondere für algebraische Strukturen, denn diese beruhen auf Gleichungen für Abbildungen und Verknüpfungen. Wir führen dies am Beispiel von Gruppen aus.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✍ **Beispiel H2B.** Eine *Gruppe* (G,μ,η,ι) ist eine Menge G zusammen mit einem Produkt $\mu : G\times G \to G$ (zweistellig), einem neutralen Element $\eta : 1 = \{*\} \to G$ (nullstellig) und einer Inversion $\iota : G \to G$ (einstellig), die die folgenden Axiome Ass, Ntr, Inv erfüllen: ✍

Ass(G,μ): Die Verknüpfung $\mu : G\times G \to G : (a,b) \mapsto a\cdot b$ ist assoziativ:
Für alle $a,b,c \in G$ gilt $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$. Als kommutatives Diagramm in `Set`:

$$\begin{array}{ccc} G\times G\times G & \xrightarrow{\mu\times \mathrm{id}_G} & G\times G \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times\mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G\times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

Ntr(G,μ,η): Das Element $e := \eta(*) \in G$ ist beidseitig neutral bezüglich μ:
Für alle $a \in G$ gilt $e\cdot a = a$ und $a\cdot e = a$. Als kommutatives Diagramm in `Set`:

$$\begin{array}{ccccc} 1\times G & \xrightarrow{\eta\times\mathrm{id}_G} & G\times G & \xleftarrow{\mathrm{id}_G\times\eta} & G\times 1 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ G & \xlongequal{\mathrm{id}_G} & G & \xlongequal{\mathrm{id}_G} & G \end{array}$$

Inv(G,μ,η,ι): Zu jedem $a \in G$ ist $a^{-1} := \iota(a)$ beidseitig invers bezüglich (μ,e):
Für alle $a \in G$ gilt $a^{-1}\cdot a = e$ und $a\cdot a^{-1} = e$. Als kommutatives Diagramm in `Set`:

$$\begin{array}{ccccc} G\times G & \xleftarrow{(\iota,\mathrm{id}_G)} & G & \xrightarrow{(\mathrm{id}_G,\iota)} & G\times G \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G & \xleftarrow{\eta} & 1 & \xrightarrow{\eta} & G \end{array}$$

Com(G,μ): Die Gruppe (G,μ,η,ι) heißt *abelsch*, wenn μ kommutativ ist:
Für alle $a,b \in G$ gilt $a\cdot b = b\cdot a$. Als kommutatives Diagramm in `Set`:

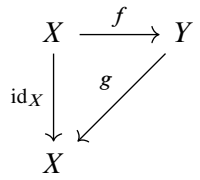
$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{G,G}} & & \Vert{\scriptstyle \mathrm{id}_G} \\ G\times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

Hierbei ist $\tau_{G,G} : G\times G \to G\times G : (a,b) \mapsto (b,a)$ die *Vertauschung*.

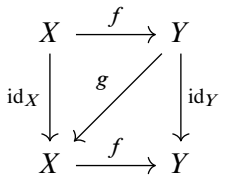
☞ **Bemerkung.** So können wir jede algebraische Struktur codieren, die gegeben ist durch Verknüpfungen (der Stelligkeit $0,1,2,\dots$) und allgemeingültige Gleichungen: Gruppen und Gruppenoperationen, Ringe und Moduln, Körper und Vektorräume, etc. Probieren Sie es! ☜

Kommutative Diagramme in `Set` codieren *All-Aussagen*. *Existenz-Aussagen* wie „Es gibt ein neutrales Element $e \in G$.“ oder „Zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in G$.“ codieren wir daher nicht implizit, sondern durch explizite Abbildungen.

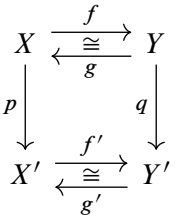
§H2b. Isomorphismen. In C betrachten wir folgende kommutative Diagramme:



$g \circ f = \mathrm{id}_X$:
g linksinvers zu f,
f rechtsinvers zu g



$g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$:
$(f,g) : X \cong Y$ zueinander
inverse Isomorphismen



Die Morphismen
p und q sind
isomorph.

Definition H2C. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Morphismen in einer Kategorie C.

Gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so nennen wir g *linksinvers* zu f (oder eine *Retraktion*) und f *rechtsinvers* zu g (oder einen *Schnitt*, in Anlehnung an den topologischen Sprachgebrauch E2I).

(1) Gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ in C, so nennen wir f und g *zueinander invers*, oder (f,g) ein *Paar zueinander inverser Isomorphismen*, geschrieben $(f,g) : X \cong Y$.

Sind g, g' invers zu f, so folgt $g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathrm{id}_X \circ g' = g'$. Daher nennen wir g *den* inversen Morphismus zu f, und schreiben $g = f^{-1}$.

(2) Wir nennen $f : X \to Y$ *invertierbar* in C oder einen C*–Isomorphismus*, geschrieben $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, wenn es in C einen zu f inversen Morphismus $g : Y \xrightarrow{\sim} X$ gibt.

(3) Zwei Objekte X und Y in C heißen C*–isomorph*, geschrieben $X \cong Y$, wenn hierzu Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ in C existieren mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(4) Morphismen $p : X \to X'$ und $q : Y \to Y'$ in C heißen C*–isomorph*, wenn es Isomorphismen $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ und $f' : X' \xrightarrow{\sim} Y'$ gibt mit $f' \circ p = q \circ f$, kurz $(f, f') : p \xrightarrow{\sim} q$.

Bemerkung. Formulierung (1) gibt explizit f und g an. Formulierung (2) nennt nur noch f und verschweigt den inversen Morphismus g, allein seine Existenz wird noch gefordert. Zwar ist g durch f eindeutig bestimmt, aber doch nur implizit gegeben. Formulierung (3) ist die bequemste und ungenauste: Die Aussage $X \cong Y$ behauptet die Existenz eines Isomorphismus $(f,g) : X \cong Y$, ohne jedoch einen konkreten Kandidaten zu nennen. Dieser ist im Allgemeinen nicht eindeutig, und die Schreibweise $X \cong Y$ macht keinerlei Aussage über eine mögliche Wahl und gibt auch keinerlei Hinweis oder Hilfestellung zur Konstruktion.

Als *Aussagen* werden (1–3) immer knapper und bequemer, als *Aufgaben* hingegen umfangreicher und schwerer: Will man (3) ausführen, so muss man einen Isomorphismus (2) angeben; der Nachweis dieser Eigenschaft gelingt mit dem inversen Isomorphismus (1).

Beispiel. Um $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$ zu beweisen (A1L), muss man einen Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^n \smallsetminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ konstruieren, etwa $f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_n)/(1-x_{n+1})$ mit Inversem $g(y_1,\dots,y_n) = (2y_1,\dots,2y_n,|y|^2-1)/(|y|^2+1)$. Es kann schwer sein, f und g zu finden; hält man sie einmal in Händen, so genügt meist geduldiges Nachrechnen.

Beispiel. Die Inklusion $f : \mathrm{O}_n\,\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ ist ein starker Defomationsretrakt (G5G). Zum Nachweis benötigen wir eine Retraktion $g : \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{O}_n\,\mathbb{R}}$ sowie eine Homotopie $H : f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}}$ rel $\mathrm{O}_n\,\mathbb{R}$. Dies gelingt dank Gram–Schmidt. Somit ist die Homotopieklasse $[f] : \mathrm{O}_n\,\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ ein Isomorphismus in hTop (G4L).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiele. Zur Illustration einige einfache, aber prominente Beispiele:

Kategorie	Isomorphismen $(f,g) : X \cong Y$	Isomorphie $X \cong Y$
$(X,\leq)$	$(a \leq b, b \leq a) : a \cong b$	mit Antisymmetrie: $a = b$
$\mathtt{Set}_\subset$	$(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y) : X = Y$	Gleichheit $X = Y$
$\mathtt{Set}$	Bijektionen $(f,g) : X \cong Y$	$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$
Mat_K	invertierbare Matrizen $A \in K^{m\times n}$	Gleichheit $m = n$
$\mathtt{Vec}_K$	K–lineare Isomorphismen	$\dim_K(X) = \dim_K(Y)$
$\mathtt{Grp}$	Gruppenisomorphismen	Isomorphie $X \cong Y$
$\mathscr{C}^k$	Diffeomorphismen	Diffeomorphie $X \cong Y$
$\mathtt{Top}$	Homöomorphismen	Homöomorphie $X \cong Y$
$\mathtt{hTop}$	Homotopie-Äquivalenzen	Homotopie-Äquivalenz $X \simeq Y$

(1) Betrachten wir eine prägeordnete Menge $(X,\leq)$ als Kategorie (H1G), so sind zwei Objekte $a,b \in X$ genau dann isomorph, $a \cong b$, wenn sowohl $a \leq b$ als auch $b \leq a$ gilt.

(2) In der Kategorie $\mathtt{Set}_\subset$ der Mengen und Inklusionen sind zwei Mengen A, B genau dann isomorph, wenn sie gleich sind, denn aus $A \subset B$ und $B \subset A$ folgt $A = B$.

(3) In der Kategorie $\mathtt{Set}$ sind die Isomorphismen genau die Bijektionen. Zwei Mengen sind genau dann isomorph, wenn sie gleichmächtig sind.

(4) In der Kategorie Mat_K der Matrizen über einem Körper K sind die Isomorphismen die invertierbaren Matrizen. Jede invertierbare Matrix $A \in K^{n\times m}$ ist quadratisch, $m = n$.

Erläuterung. Das ist ein grundlegendes und nicht-triviales Ergebnis der Linearen Algebra: Es folgt zum Beispiel aus dem Gauß–Algorithmus (H2D). Äquivalent: Wir können jedem endlich-erzeugten K–Vektorraum V eine eindeutige Dimension $n \in \mathbb{N}$ zuordnen. Triviales Gegenbeispiel: Wir benötigen hier $1 \neq 0$, denn im Nullring $K = \{0\}$ gilt $1 = 0$, und jede $m \times n$–Matrix über K ist invertierbar.

Bizarres ist auch über nicht-kommutativen Ringen möglich. Sei K ein Körper, hierüber $V = K^{(\mathbb{N})}$ und $R = \mathrm{End}_K(V)$. Seien $a,b,c,d : V \to V : (x_0,x_1,x_2,x_3,\dots) \mapsto (x_0,0,x_1,0,\dots)$, $(0,x_0,0,x_1,\dots)$, $(x_0,x_2,x_4,x_6,\dots)$, $(x_1,x_3,x_5,x_7,\dots)$. Für $a,b,c,d \in R$ gilt $(a\ b)\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right) = 1$ und $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)(a\ b) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dies ist ein Isomorphismus $R^2 \cong R$ als Rechtsmoduln über R. Somit folgt $R^m \cong R^n$.

Über einem *kommutativen* Ring R mit $1 \neq 0$ ist diese Pathologie hingegen unmöglich: Für $n \geq 2$ gilt $R^n \ncong R$ als Rechtsmoduln über R, denn je zwei Elemente $a,b \in R$ sind R–linear abhängig gemäß $a(-b) + ba = 0$, aber in R^n gibt es R–linear unabhängige wie $a = (1,0,\dots)$ und $b = (0,1,\dots)$.

(5) In der Kategorie $\mathtt{Vec}_K$ der K–Vektorräume sind die Isomorphismen die K–linearen Isomorphismen, wie man sie aus der Linearen Algebra kennt. Zwei K–Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension über K haben, analog zu (4).

(6) Die Isomorphismen in $\mathtt{Grp}$ sind die Gruppenisomorphismen.

(7) Die Isomorphismen in $\mathscr{C}^k$ sind die Diffeomorphismen zwischen offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$. Dank (4) ist dies nur für $m = n$ möglich (H2F).

(8) In der Kategorie $\mathtt{Top}$ sind die Isomorphismen die Homöomorphismen (D2A).

(9) In der Kategorie $\mathtt{hTop}$ sind die Isomorphismen die Homotopie-Äquivalenzen (G4N).

Das Isomorphie-Problem in $\mathtt{Top}$ bzw. $\mathtt{hTop}$ lässt sich nicht wie in $\mathtt{Set}$ oder $\mathtt{Vec}_K$ auf die Berechnung einer Zahl reduzieren. Nichtsdestotrotz sind solche *Invarianten* durchaus nützlich, zum Beispiel die Anzahl der (Weg)Komponenten oder die Euler–Charakteristik.

☞ **§H2c. Äquivalenz von Matrizen und der Rangsatz.** In jeder Kategorie C verfügen wir über die Begriffe *Isomorphie* von Objekten und *Äquivalenz* von Morphismen, wie oben in Definition H2C erklärt. Sie kennen diese Ideen bereits aus zentralen Sätzen der Linearen Algebra und der Analysis. Wir wollen dies nun auszuführen: ☜

☞ **Beispiel H2D.** Sei K ein Körper. Der Gauß–Algorithmus liefert zu jeder Matrix $A \in K^{n\times m}$ invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n K$ und $T \in \mathrm{GL}_n K$ mit $D = SAT = \mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)$; hierbei ist $r = \mathrm{rang}(A) = \dim_K(\mathrm{im}\, A)$ der *Rang* von A. Hieraus folgt: Zwei Matrizen A und A' in Mat_K sind genau dann isomorph in Mat_K, wenn $(m,n,r) = (m',n',r')$ gilt. ☜

☞ **Übung H2E.** Führen Sie die Definition H2C wie folgt aus: ☜

(0) Die Komposition zweier Isomorphismen ist ein Isomorphismus.
(1) Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf den Objekten von C.
(2) Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf den Morphismen von C.
(3) Nennen Sie die Isomorphieklassen von Objekten und Morphismen in $\mathtt{FinVec}_K$, indem Sie ein (möglichst einfaches) Repräsentantensystem angeben.
(4) Nennen Sie ebenso diese Isomorphieklassen in FinSet.

✻ **H2E.** (0) Aus $(f,f') : X \cong Y$ und $(g,g') : Y \cong Z$ folgt $(h,h') : X \cong Z$ vermöge der Kompositionen $h = g \circ f : X \to Z$ und $h' = f' \circ g' : Z \to X$. Dank Assoziativität und Identität in der Kategorie C gilt nämlich $(f'g')(gf) = f'(g'g)f = f'\mathrm{id}_Y f = f'f = \mathrm{id}_X$ und ebenso $(gf)(f'g) = \mathrm{id}_Z$.

Für (1) und (2) schreiben wir Reflexivität, Symmetrie und Transitivität geduldig aus:

(a) Reflexivität: Für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}_C$ haben wir den Isomorphismus $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : X \cong X$.
(b) Symmetrie: Aus $(f,g) : X \cong Y$ folgt $(g,f) : Y \cong X$ durch Vertauschung der Daten.
(c) Transitivität: Aus $(f,f') : X \cong Y$ und $(g,g') : Y \cong Z$ folgt $(h,h') : X \cong Z$ dank (0).

(3) Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir den K–Vektorraum K^m. Der Gauß–Algorithmus (H2D) zeigt, dass es K–lineare Isomorphismen $K^m \cong K^n$ nur für $m = n$ gibt. Zu jedem endlich erzeugten K–Vektorraum X können wir eine Basis wählen und erhalten so $f : K^m \xrightarrow{\sim} X$. In diesem Falle nennen wir $\dim_K X := m$ die *Dimension* von X. Zwei K–Vektorräume X und X' sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

Sei $q : X \to Y$ eine K–lineare Abbildung. Wir wählen Basen, also $f : K^m \xrightarrow{\sim} X$ und $g : K^n \xrightarrow{\sim} Y$, und erhalten eine Abbildung $p = g^{-1} \circ q \circ f : K^m \to K^n$. Per Gauß–Algorithmus können wir die Basen so anpassen, dass $p(x_1,\dots,x_m) = (x_1,\dots,x_r,0,\dots,0)$ gilt. In diesem Falle nennen wir p die *Normalform* von q. Sie entspricht dem Tripel (m,n,r), und r heißt *Rang* von q. Zwei Abbildungen q und q' sind genau dann isomorph, wenn die zugehörigen Normalformen $p = p'$ gleich sind, also $(m,n,r) = (m',n',r')$ gilt.

(4) Wir betrachten die natürlichen Zahlen $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, und rekursiv $n = \{0,\dots,n-1\}$. Per Induktion beweist man, dass es Bijektionen $m \cong n$ nur für $m = n$ gibt. Zu jeder endlichen Menge X können wir eine Nummerierung wählen, also eine Bijektion $f : m \xrightarrow{\sim} X$, und nennen $|X| := m$ die *Mächtigkeit* von X. Zwei Mengen X und X' sind genau dann in Bijektion, wenn sie dieselbe Mächtigkeit haben.

Sei $q : X \to Y$ eine Abbildung endlicher Mengen. Wir nummerieren $f : m \xrightarrow{\sim} X$ und $g : n \xrightarrow{\sim} Y$ und erhalten eine Abbildung $p = g^{-1} \circ q \circ f : m \to n$. Die Nummerierung können wir so sortieren, dass p monoton ist und $\mathrm{Im}(p) = r$ gilt, also die ersten p_0 Elemente auf 0 abbildet, die nächsten p_1 Elemente auf 1 etc., wobei $p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1} = m$. Wir können so umsortieren, dass $p_0 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_{n-1} \geq 0$ gilt. In diesem Falle nennen wir p die *Normalform* von q. Ein solches n–Tupel $(p_0,p_1,\dots,p_{n-1})$ natürlicher Zahlen $p_0 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_{n-1} \geq 0$ mit Summe $p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1} = m$ nennt man eine *(Zahl-)Partition* von m in n Summanden.

Zwei Abbildungen q und q' sind genau dann isomorph, wenn die zugehörigen Normalformen p und p' gleich sind. Äquivalenzklassen entsprechend also den genannten Partitionen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§H2d. Äquivalenz von Funktionskeimen und der lokale Umkehrsatz.** Der lokale ☜ Umkehrsatz ist ein zentrales Ergebnis und Hilfsmittel der Analysis. Er erlaubt uns unter gewissen Voraussetzungen, eine differenzierbare Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lokal als eine lineare Abbildung zu betrachten. Das ist eine wunderbare Vereinfachung!

Wir wollen diesen Satz hier in kategorieller Sprechweise ausformulieren.

☞ **Beispiel.** Lokalisierung auf „beliebig kleine Umgebungen“ führt uns zur Kategorie ☜

$$g\mathscr{C}^k_* = (\ \mathbb{N},\ \mathscr{C}^k\text{–Funktionskeime } [f] : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b),\ \text{Komposition}\ ).$$

Der Buchstabe „g“ steht für engl. *germ*. Wir beginnen in der Kategorie $\mathscr{C}^k_*$. Wir nennen $f_1 : (U_1, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ und $f_2 : (U_2, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ *äquivalent*, wenn es eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^m$ gibt mit $U \subset U_1 \cap U_2$ und $f_1|_U = f_2|_U$. Die Äquivalenzklasse von $f : (U, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ heißt *$\mathscr{C}^k$–Funktionskeim*, geschrieben $[f : (U, a) \to (\mathbb{R}^n, b)]$ oder $[f] : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$. Wir komponieren Keime $[f : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)]$ und $[g : (\mathbb{R}^n, b) \to (\mathbb{R}^p, c)]$ zum Keim $[g] \circ [f] = [g \circ f|_{U'}]$ mit $U' = f^{-1}(V)$. Dies ist wohldefiniert und ergibt die Kategorie $g\mathscr{C}^k_*$. Genau dann ist ein Keim $[f] : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ invertierbar, wenn ein Keim $[g] : (\mathbb{R}^n, b) \to (\mathbb{R}^m, a)$ existiert mit $[g] \circ [f] = [\mathrm{id}]$ und $[f] \circ [g] = [\mathrm{id}]$. Nach Einschränkung auf hinreichend kleine offene Umgebungen U von a und V von b entspricht dies einem Diffeomorphismus $(f, g) : (U, a) \cong (V, b)$.

☞ **Bemerkung.** Ebenso können wir topologische Abbildungskeime in $\mathtt{Top}_*$ betrachten (H1C). ☜ Die invertierbaren Keime entsprechen dann lokalen Homöomorphismen (D3O).

Die Differentialrechnung nutzt $g\mathscr{C}^k_*$ bei allen lokalen Konstruktionen, insbesondere der Ableitung: Im Folgenden sei hierzu $k \geq 1$. Jedem $\mathscr{C}^k$–Keim $[f] : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ ordnen wir seine Ableitung $D[f] = f'(a) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ zu (Jacobi–Matrix). Dies ist wohldefiniert. Somit ist $D : g\mathscr{C}^k_* \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}$ ein kovarianter Funktor im Sinne der Definition H4C.

Zwar vergisst D viele Informationen, doch ist schon der lineare Teil sehr aussagekräftig; genau hierfür wurde die Ableitung erfunden! Der lokale Umkehrsatz (C5Q) besagt:

☞ **Satz H2F.** *Genau dann ist ein $\mathscr{C}^k$–Funktionskeim $[f] : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ invertierbar, also ein lokaler $\mathscr{C}^k$–Diffeomorphismus, wenn die Ableitung $f'(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar ist.* □ ☜

Vornehm sagt man, der Ableitungsfunktor $D : g\mathscr{C}^k_* \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}$ *reflektiert* Isomorphismen. Analogie: Die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ reflektiert Invertierbarkeit (B1Y).

Allgemeiner betrachten wir die Ableitung von $f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ in jedem Punkt $x \in U$. Wir sagen, f hat *konstanten Rang r*, wenn $\operatorname{rang} f'(x) = r$ für alle $x \in U$ gilt. Entsprechend heißt der Keim $[f]$ von *konstantem Rang r*, wenn dies für einen Repräsentanten gilt, also auf einer hinreichend kleinen Umgebung U von a in $\mathbb{R}^m$. Solch ein Keim f sieht lokal aus wie die lineare Abbildung $f'(0)$, wenn wir geeignete Koordinaten wählen:

☞ **Satz H2G.** *Ist $[f] : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ ein $\mathscr{C}^k$–Funktionskeim von konstantem Rang r, so existieren invertierbare $\mathscr{C}^k$–Keime $[\varphi] : (\mathbb{R}^m, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^m, a)$ und $[\psi] : (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, b)$ sodass $[\psi]^{-1} \circ [f] \circ [\varphi] : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0) : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.* □ ☜

Geometrisch formuliert: In geeigneten lokalen Koordinaten $[\varphi], [\psi]$ ist $[f]$ diffeomorph zu einer linearen Abbildung. Für diese können wir die angegebene, besonders einfache Normalform wählen. Letzteres ist der Rangsatz der Linearen Algebra (H2D).

§H2e. Von Monoiden zu Kategorien, von Gruppen zu Gruppoiden, und zurück.

☞ **Beispiel H2H.** Ein *Monoid* $(M,\circ,e)$ besteht aus einer Menge M mit assoziativer Verknüpfung $\circ : M\times M\to M$ und neutralem Element $e\in M$. Dies definiert eine Kategorie $\mathtt{M}$ mit nur einem Objekt X, der Morphismenmenge $\mathtt{M}(X,X)=M$ und hierauf der Verknüpfung $\circ$. ☜

Die Isomorphismen der Kategorie $\mathtt{M}$ sind die invertierbaren Elemente des Monoids $(M,\circ)$. Wir schreiben diese Menge kurz $M^\times\subset M$, ausführlich $(M,\circ)^\times$, und erhalten so die Gruppe $(M^\times,\circ)$ der invertierbaren Elemente im Monoid $(M,\circ)$.

Umgekehrt definiert jedes Objekt $X\in \mathrm{Ob}_\mathtt{C}$ das Monoid $\mathrm{End}_\mathtt{C}(X)=(\mathtt{C}(X,X),\circ,\mathrm{id}_X)$ aller *Endomorphismen* von X, und darin die *Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}_\mathtt{C}(X)=\mathrm{End}_\mathtt{C}(X)^\times$.

Wir setzen hierbei meist stillschweigend voraus, dass die betrachtete Kategorie $\mathtt{C}$ lokal klein ist: Die Endomorphismenklasse $\mathtt{C}(X,X)$ ist dann tatsächlich eine Menge (H1P).

Prominente Beispiele: In $\mathtt{Mat}_K$ erhalten wir den Matrizenring $\mathrm{End}_K(n)=(K^{n\times n},\cdot,1)$. Die invertieren Elemente hierin bilden die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{Aut}_K(n)=\mathrm{GL}_n K$.

In $\mathtt{Vec}_K$ bzw. $\mathtt{Mod}_K$ erhalten wir den Endomorphismenring $\mathrm{End}_K(X)=\mathrm{Hom}_K(X,X)$. Die invertieren Elemente bilden die Gruppe $\mathrm{Aut}_K(X)$ der K–linearen Automorphismen.

☞ **Definition H2I.** Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie, in der jeder Morphismus invertierbar ist. ☜

Jede Kategorie $\mathtt{C}$ enthält als Unterkategorie $\mathtt{C}^\times<\mathtt{C}$ das *Gruppoid ihrer Isomorphismen*: Die Objekte von $\mathtt{C}^\times$ sind dieselben wie die von $\mathtt{C}$, doch die Morphismen von $\mathtt{C}^\times$ sind nur die Isomorphismen von $\mathtt{C}$. Man rechnet sofort nach, dass dies eine Kategorie ist (H2E).

☞ **Beispiel.** Die Kategorie $\mathtt{FinSet}^\times$ besteht nur aus Bijektionen endlicher Mengen. ☜

☞ **Beispiel.** Jede Gruppe $(G,\circ)$ definiert eine Kategorie $\mathtt{G}$ mit nur einem Objekt X, der Morphismenmenge $\mathtt{G}(X,X)=G$ und hierauf der Verknüpfung $\circ$ (H2H). Gemäß dieser Konstruktion ist jeder Morphismus invertierbar, also ist $\mathtt{G}$ ein *Gruppoid*. ☜

☞ **Beispiel.** Sei X ein topologischer Raum. Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildungen $\alpha:[0,1]\to X$. Diese lassen sich durch Aneinanderhängung verknüpfen. Modulo Homotopie erhalten wir das *Fundamentalgruppoid* $\Pi(X)$, siehe Kapitel L. Zum Fußpunkt $x_0\in X$ erhalten wir als Automorphismengruppe die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X,x_0)=\Pi(X,x_0,x_0)$. ☜

☞ **Bemerkung.** Monoide und Gruppen sind grundlegende Strukturen der Mathematik. Sie treten nahezu überall auf, insbesondere in Form von Operationen auf Mengen, bei Transformationen und Symmetrien, bei Ringen und Körpern, bei Moduln und Vektorräumen, etc. ☜

Bei der Behandlung solcher Situationen begegnen uns ganz natürlich auch Eigenschaften wir (links/rechts) *invertierbar* und (links/rechts) *kürzbar*, siehe H2K.

Der Begriff der *Kategorie* verallgemeinert den Begriff des *Monoids*: In einem Monoid sind je zwei Elemente verknüpfbar, in einer Kategorie gilt dies nur partiell (H1Q): Wir können f und g nur dann verknüpfen, wenn das Ziel von f gleich dem Start von g ist. Dasselbe gilt für die Verallgemeinerung von Gruppe zu Gruppoid. Zusammengefasst:

$$\begin{array}{ccc}\text{Monoid} & \longleftrightarrow & \text{Kategorie}\\ \text{Gruppe} & \longleftrightarrow & \text{Gruppoid}\end{array}$$

Wie eingangs erklärt gelten folgende Spezialfälle (H2H): Ein Monoid ist eine Kategorie mit nur einem Objekt. Eine Gruppe ist ein Gruppoid mit nur einem Objekt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§H2f. Rechenregeln für Morphismen: invertierbar vs kürzbar.** Invertierbarkeit und Kürzbarkeit kennen und nutzen Sie seit Schultagen bei der Lösung einfacher Gleichungen: ☜

Beispiel. Im Körper $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ sind alle Zahlen $a\neq 0$ invertierbar: Aus $ax=ax'$ folgt $x=x'$ durch Multiplikation mit dem Inversen a^{-1}. Im Ring $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ sind nur ± 1 invertierbar, aber alle Zahlen $a\neq 0$ sind immerhin noch kürzbar: Aus $ax=ax'$ folgt $x=x'$.

Bemerkung. In jedem Ring $(R,+,\cdot)$ gilt: Die Gleichung $ax=ax'$ ist äquivalent zu $a(x-x')=0$, und $xa=x'a$ ist äquivalent zu $(x-x')a=0$. Somit ist a genau dann (links-/rechts-)kürzbar, wenn a kein (Links-/Rechts-)Nullteiler ist. Nullteiler sind omnipräsent:

Beispiel. Im Ring $(\mathbb{R}^{2\times 2},+,\cdot)$ ist die Matrix $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ weder invertierbar noch kürzbar: Aus $AX=AX'$ folgt nicht $X=X'$, wie die Beispiele $X=A$ und $X'=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ zeigen.

Beispiel. Sei $M=\{\,\mathbb{N}\to\mathbb{N}\text{ injektiv}\,\}$. Im Monoid $(M,\circ)$ ist $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}:n\mapsto n+1$ nicht linksinvertierbar: Es gibt keine injektive Abbildung $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $g\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. (Warum?) Hingegen ist f linkskürzbar: Aus $g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ und $f\circ g=f\circ h$ folgt $g=h$. (Warum?) Andererseits ist f nicht rechtskürzbar, und somit auch nicht rechtsinvertierbar, denn es gilt $g\circ f=h\circ f$ aber $g\neq h$ für $g=f$ aber $h(0)=0$ und $h(n)=n+1$ für $n\geq 1$.

☞ **Definition H2J.** Sei $\mathtt{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f:X\to Y$ heißt *linkskürzbar* oder *Monomorphismus* in $\mathtt{C}$, wenn für alle $h,h':Z\to X$ gilt: Aus $f\circ h=f\circ h'$ folgt $h=h'$. ☜

Stärker heißt f *linksinvertierbar* oder *spaltender Monomorphismus* in $\mathtt{C}$, wenn es einen Morphismus $g:Y\to X$ mit $g\circ f=\mathrm{id}_X$ gibt. Damit ist f insbesondere linkskürzbar.

Entsprechend definieren wir *rechtskürzbar* oder *Epimorphismus* in $\mathtt{C}$, sowie stärker *rechtsinvertierbar* oder *spaltender Epimorphismus* in $\mathtt{C}$.

☞ **Übung H2K.** Sei $\mathtt{C}$ eine konkrete Kategorie, etwa $\mathtt{Set}$ oder $\mathtt{Vec}_K$ oder $\mathtt{Top}$, bestehend aus strukturierten Mengen $X,Y,\dots$ und ihren strukturerhaltenden Abbildungen $f:X\to Y$. ☜

(1a) Allgemein gilt: f linksinvertierbar $\Rightarrow$ f injektiv $\Rightarrow$ f linkskürzbar.
(b) In $\mathtt{Set}$ und (c) $\mathtt{Vec}_K$ gelten beide Umkehrungen, die erste mit Ausnahme $X=\emptyset\neq Y$.
(d) In $\mathtt{Top}$ gilt nur die zweite Umkehrung. Nicht jede Einbettung ist linksinvertierbar.

(2a) Allgemein gilt: f rechtsinvertierbar $\Rightarrow$ f surjektiv $\Rightarrow$ f rechtskürzbar.
(b) In $\mathtt{Set}$ und (c) $\mathtt{Vec}_K$ gelten beide Umkehrungen, die erste ist das Auswahlaxiom.
(d) In $\mathtt{Top}$ gilt nur die zweite Umkehrung. Nicht jede Identifizierung ist rechtsinvertierbar.
(e) In der Kategorie $\mathtt{Haus}<\mathtt{Top}$ der Hausdorff–Räume gilt keine der beiden Umkehrungen.

(3) Im Folgenden sei $\mathtt{C}$ eine beliebige Kategorie, etwa eines der obigen Beispiele.
(a) Aus linksinvertierbar in $\mathtt{C}$ folgt linkskürzbar in $\mathtt{C}$ (ebenso für rechts).
(b) Zu f kann es mehrere Linksinverse geben (ebenso mehrere Rechtsinverse).
(c) Ist f linksinvertierbar, $g\circ f=\mathrm{id}_X$, und rechtsinvertierbar, $f\circ h=\mathrm{id}_Y$, so folgt $g=h$; somit ist f invertierbar, und es gibt nur einen (links-/rechts-)inversen Morphismus zu f.
(d) Ist f rechtsinvertierbar und linkskürzbar, so ist f invertierbar. (Ebenso vertauscht)

(4) Wie verhalten sich Invertierbarkeit und Kürzbarkeit bezüglich Unterkategorien $\mathtt{S}<\mathtt{C}$?

✻ **H2K.** (1a) Sei $f:X\to Y$ linksinvertierbar, das heißt, es existiert $g:Y\to X$ mit $g\circ f=\mathrm{id}_X$. Dann ist die Abbildung f injektiv, denn für jedes Paar $x,x'\in X$ mit $f(x)=f(x')$ folgt $x=g(f(x))=g(f(x'))=x'$.

Sei $f:X\to Y$ injektiv. Dann ist f linkskürzbar: Gegeben seien $h,h':Z\to X$ mit $f\circ h=f\circ h'$. Für jedes $x\in X$ gilt $f(h(x))=f(h'(x))$, dank Injektivität von f also $h(x)=h'(x)$, und somit $h=h'$.

(1b) In `Set` zeigen wir die erste Umkehrung „f injektiv $\Rightarrow$ f linksinvertierbar“: Im Falle $X = Y = \emptyset$ brauchen wir nichts zu tun. Im Falle $X = \emptyset \neq Y$ können wir nichts tun. Seien also X und Y nicht leer; wir wählen $x_0 \in X$. Zu jeder injektiven Abbildung $f : X \to Y$ definieren wir $g : Y \to X$ durch $g(y) = x$, falls $y = f(x) \in f(X)$, und $g(y) = x_0$ sonst. Damit gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$, wie gewünscht.

In `Set` zeigen wir die zweite Umkehrung „f linkskürzbar $\Rightarrow$ f injektiv“ durch Kontraposition: Sei f nicht injektiv, dann gibt es $x \neq x'$ in X mit $f(x) = f(x')$. Wir nutzen die Testfunktionen $h, h' : \{1\} \to X$ mit $h(1) = x$ und $h'(1) = x'$. Es gilt $h \neq h'$ aber $f \circ h = f \circ h'$, daher ist f nicht linkskürzbar.

(1c) In $\mathtt{Vec}_K$ zeigen wir die zweite Umkehrung analog zu (1b), dank der Testfunktionen $h, h' : K \to X$ mit $h(\lambda) = \lambda x$ und $h'(\lambda) = \lambda x'$. Die erste Umkehrung zeigen wir so: Sei $f : X \to Y$ eine K–lineare Injektion. Wir wählen wir eine Basis von $f(X)$ und ergänzen diese zu einer Basis von Y. Sei $g : Y \to X$ die lineare Abbildung, die jeden Basisvektor in $f(X)$ auf ihr (eindeutiges) Urbild abbildet, die restlichen Basisvektoren auf beliebig gewählte Elemente von X (etwa auf 0_X). Damit gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$, wie gewünscht.

(1d) In `Top` zeigen wir die zweite Umkehrung wie in (1b): Hierzu sei $\{1\}$ ein einelementiger topologischer Raum; die Topologie ist dann eindeutig und die Testfunktionen $h, h' : \{1\} \to X$ stetig, also Morphismen in `Top`.

Die erste Umkehrung „f linkskürzbar $\Rightarrow$ f linksinvertierbar“ gilt in `Top` nicht: Zum Beispiel erlaubt die Inklusion $\{-1, 1\} \hookrightarrow [-1, 1]$ keine Linksinverse / Retraktion (E2K). Gleiches gilt für die Inklusion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$.

(2a) Sei $f : X \to Y$ rechtsinvertierbar, das heißt, es existiert $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dann ist die Abbildung f surjektiv, denn für jedes Element $y \in Y$ liegt im Bild dank $f(g(y)) = y$.

Sei $f : X \to Y$ surjektiv. Dann ist f rechtskürzbar: Gegeben seien $g, g' : Y \to Z$ mit $g \circ f = g' \circ f$. Zu jedem $y \in Y$ existiert $x \in X$ mit $f(x) = y$, also gilt $g(y) = g(f(x)) = g'(f(x)) = g'(y)$, und somit $g = g'$.

(2b) In `Set` zeigen wir die erste Umkehrung „f surjektiv $\Rightarrow$ f rechtsinvertierbar“ durch eine Wahl von $h : Y \to X$: Zu jedem $y \in Y$ sei $h(x) \in f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ ein beliebiges Urbild. Damit gilt $f \circ h = \mathrm{id}_Y$.

In `Set` zeigen wir die zweite Umkehrung „f rechtskürzbar $\Rightarrow$ f surjektiv“ durch Kontraposition: Sei f nicht surjektiv; wir wählen ein Element $y_0 \in Y \smallsetminus f(X)$. Wir nutzen die Testfunktionen $g, g' : Y \to \{0, 1\}$ mit $g = 0$ und $g' = \mathbf{I}_{\{y_0\}}$. Es gilt $g \neq g'$ aber $g \circ f = g' \circ f$, also ist f nicht rechtskürzbar.

(2c) In $\mathtt{Vec}_K$ zeigen wir die zweite Umkehrung analog zu (2b): Wir wählen eine Basis von $f(X) \subset Y$ und ergänzen dies durch $y_0 \in Y \smallsetminus f(X)$ und weiter zu einer Basis von Y. Wir erhalten K–lineare Testfunktionen $g, g' : X \to K$ mit $g = 0$ sowie $g'(y_0) = 1$ und $g'|_{f(X)} = 0$. Die erste Umkehrung zeigen wir so: Wir wählen wir eine Basis von Y. Zu jeder K–linearen Surjektion $f : X \to Y$ sei $h : Y \to X$ eine K–lineare Abbildung, die jeden Basisvektor in $Y = f(X)$ eines seiner Urbilder zuordnet. Damit gilt $f \circ h = \mathrm{id}_Y$, wie gewünscht.

(2d) In `Top` zeigen wir die zweite Umkehrung wie in (2b): Hierzu versehen wir $\{0, 1\}$ mit der indiskreten Topologie; die Testfunktionen $g, g' : \{0, 1\} \to X$ sind dann stetig, also Morphismen in `Top`.

Die erste Umkehrung „f rechtskürzbar $\Rightarrow$ f rechtsinvertierbar“ gilt in `Top` nicht: Zum Beispiel erlaubt die Indentifizierung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ keine Rechtsinverse / keinen Schnitt (E2K).

(2e) Die Inklusion $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ in `Haus` ist nicht surjektiv, aber rechtskürzbar dank Proposition D5L. Allgemein gilt: In `Haus` sind die rechtskürzbaren Morphismen genau die stetigen Abbildungen mit dichtem Bild.

(3a) Sei $f : X \to Y$ linksinvertierbar, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Für alle $h, h' : Z \to X$ mit $f \circ h = f \circ h'$ folgt $h = \mathrm{id}_X \circ h = g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' = \mathrm{id}_X \circ h' = h'$, also ist f linkskürzbar. Aussage (3b) ist klar.

(3c) Aus $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ folgt $g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ f \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h$.

(3d) Aus $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ folgt $f \circ h \circ f = \mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X$. Ist f linkskürzbar, so folgt $h \circ f = \mathrm{id}_X$.

(4) Beim Übergang `C` zu `S` bleibt Kürzbarkeit offensichtlich erhalten, Invertierbarkeit im Allgemeinen nicht: Einfachstes Beispiel ist $\mathtt{C} = \langle\, f : X \to Y, g : Y \to X \mid g \circ f = \mathrm{id}_X,\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \,\rangle$ und $\mathtt{S} = \langle\, f : X \to Y \,\rangle$.

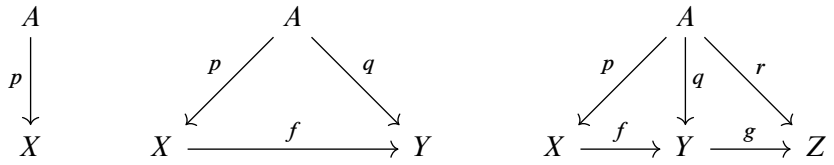
Beim Übergang `S` zu `C` bleibt Invertierbarkeit offensichtlich erhalten, Kürzbarkeit im Allgemeinen nicht: Einfachstes Beispiel ist $\mathtt{S} = \langle\, f : X \to Y \,\rangle$ und $\mathtt{C} = \langle\, f : X \to Y, g, h, : Z \to X \mid g \circ f = g \circ h \,\rangle$.

Allgemein gilt: Jeder Funktor $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ erhält Invertierbarkeit (H4F); kontravariant wird rechts und links vertauscht. Kürzbarkeit bleibt nicht erhalten: Zum Beispiel ist $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ in `Haus` rechtskürzbar, nicht jedoch in der Zielkategorie des Vergissfunktors $\mathtt{Haus} \to \mathtt{Set}$ oder der Inklusion $\mathtt{Haus} \hookrightarrow \mathtt{Top}$, da ι nicht surjektiv ist.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H2g. Drunter und drüber. Sei $\mathtt{C}$ eine Kategorie und hierin A ein Objekt.

Beispiel H2L. Die Kategorie $\mathtt{C}^A_\downarrow$ aller *Morphismen mit Start A* entsteht wie folgt:



(a) Objekte in $\mathtt{C}^A_\downarrow$ sind die Morphismen $p : A \to X$ aus $\mathtt{C}$. („Objekte unter A“)
(b) In $\mathtt{C}^A_\downarrow$ ist jeder Morphismus $f : p \to q$ von $p : A \to X$ nach $q : A \to Y$ gegeben durch einen Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathtt{C}$, der $f \circ p = q$ erfüllt.
(c) Die Verknüpfung von Morphismen in $\mathtt{C}^A_\downarrow$ ist die Verknüpfung in $\mathtt{C}$.

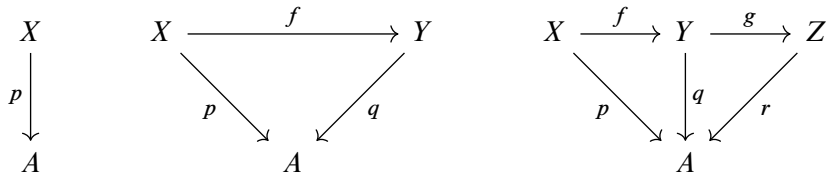
Das obige Diagramm zeigt, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Für $q : A \to Y$ ist die Identität $\mathrm{id}_q = \mathrm{id}_Y$. Die Assoziativität von $\mathtt{C}$ überträgt sich auf $\mathtt{C}^A_\downarrow$.

Insbesondere ist ein Isomorphismus $f : p \xrightarrow{\sim} q$ zwischen $p : A \to X$ und $q : A \to Y$ in $\mathtt{C}^A_\downarrow$ nichts anderes als ein Isomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ in $\mathtt{C}$, der $f \circ p = q$ erfüllt.

Beispiel. Isomorph zum Quotienten $q : X \twoheadrightarrow Q$ sind genau die Identifizierungen (E2F).

Beispiel. Sei $\mathtt{Field}$ die Kategorie der Körper. Dann ist $\mathtt{Field}^K_\downarrow$ die Kategorie der *Körpererweiterungen* $K \hookrightarrow L$. Diese ist Gegenstand der Galois–Theorie. (Aus historischen Gründen nennt man $K \hookrightarrow L$ eine Körpererweiterung *über* K, das entspricht $\mathtt{Field}^\uparrow_K$.)

Beispiel H2M. Die Kategorie $\mathtt{C}^\downarrow_A$ aller *Morphismen mit Ziel A* entsteht wie folgt:



(a) Objekte in $\mathtt{C}^\downarrow_A$ sind die Morphismen $p : X \to A$ aus $\mathtt{C}$. („Objekte über A“)
(b) In $\mathtt{C}^\downarrow_A$ ist jeder Morphismus $f : p \to q$ von $p : X \to A$ nach $q : Y \to A$ gegeben durch einen Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathtt{C}$, der $p = q \circ f$ erfüllt.
(c) Die Verknüpfung von Morphismen in $\mathtt{C}^\downarrow_A$ ist die Verknüpfung in $\mathtt{C}$.

Das obige Diagramm zeigt, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Für $q : Y \to A$ ist die Identität $\mathrm{id}_q = \mathrm{id}_Y$. Die Assoziativität von $\mathtt{C}$ überträgt sich auf $\mathtt{C}^\downarrow_A$.

Insbesondere ist ein Isomorphismus $f : p \xrightarrow{\sim} q$ zwischen $p : X \to A$ und $q : Y \to A$ in $\mathtt{C}^\downarrow_A$ nichts anderes als ein Isomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ in $\mathtt{C}$, der $p = q \circ f$ erfüllt.

Beispiel. Isomorph zur Teilrauminklusion $\iota : A \hookrightarrow X$ sind genau die Einbettungen (E1K).

Beispiel. Sei $\mathtt{Top}$ die Kategorie der topologischen Räume. Dann ist $\mathtt{Top}^\downarrow_X$ die Kategorie der *Räume über X*. Hierin sind die *Überlagerungen* von X eine Unterkategorie (§M1).

§H2h. Auch die Morphismen bilden eine Kategorie. Kategorien sind omnipräsent, wie unsere Beispiele bereits andeuten. Ihre Struktur ist sehr einfach und grundlegend, und zugleich atemberaubend allgemein und flexibel. Hierzu eine weitere Illustration:

Beispiel H2N. Für jede Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}, \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}, \circ_{\mathtt{C}})$ wird $\mathtt{D} = \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}$ zu einer Kategorie:

$$\begin{array}{c} X \\ {\scriptstyle p}\downarrow \\ X' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

(a) Objekte in $\mathtt{D}$ sind die Morphismen $p : X \to X'$ aus $\mathtt{C}$.
(b) In $\mathtt{D}$ ist jeder Morphismus $(f, f') : p \to q$ von $p : X \to X'$ nach $q : Y \to Y'$ ein Paar von Morphismen $f : X \to Y$ und $f' : X' \to Y'$ in $\mathtt{C}$, die $f' \circ_{\mathtt{C}} p = q \circ_{\mathtt{C}} f$ erfüllen.
(c) Die Verknüpfung von Morphismen in $\mathtt{D}$ ist $(g, g') \circ_{\mathtt{D}} (f, f') = (g \circ_{\mathtt{C}} f, g' \circ_{\mathtt{C}} f')$.

Das obige Diagramm zeigt, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Für $q : Y \to Y'$ ist die Identität $\mathrm{id}_q = (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_{Y'})$. Die Assoziativität von $\mathtt{C}$ überträgt sich auf $\mathtt{D}$.

Bemerkung. Die Isomorphismen $(f, f') : p \xrightarrow{\sim} q$ in $\mathtt{D} = \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}$ kennen wir bereits aus H2C: Dies ist die Isomorphie (oder Äquivalenz) von $\mathtt{C}$–Morphismen $p : X \to X'$ und $q : Y \to Y'$.

Bemerkung. Die Kategorie $\mathtt{D} = \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}$ enthält $\mathtt{C}^A_\downarrow$ und $\mathtt{C}^\downarrow_A$ als Unterkategorien:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathrm{id}_A} & A \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ A & \xrightarrow{\mathrm{id}_A} & A \end{array}$$

Bemerkung. Die im vorigen Beispiel H2N erklärten kommutativen Quadrate erlauben zwei Kompositionen, nämlich horizontal und vertikal. Dies ist ein Beispiel für eine *Doppelkategorie*. Wenn Sie Spaß an Abstraktion und Gehirnakrobatik haben, finden Sie mehr hierzu unter `ncatlab.org/nlab/show/double+category`.

Übung H2O. Sei Γ ein Graph und $\mathtt{C} = \Gamma^*$ seine Wegekategorie gemäß H1L. Welche Morphismen sind (links / rechts) invertierbar? Welche Morphismen sind (links / rechts) kürzbar? Was sind in diesem Falle die Kategorien $\mathtt{C}^a_\downarrow$ gemäß H2L und $\mathtt{C}^\downarrow_a$ gemäß H2M? Was ist in diesem Falle die Morphismenkategorie $\mathtt{D} = \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}$ gemäß H2N?

✻ **H2O.** In der Wegekategorie $\mathtt{C} = \Gamma^*$ sind nur die Identitäten $\mathrm{id}_v = (v)$ invertierbar, also Wege der Länge 0, denn wie Weglänge $\ell : \Gamma^* \to (\mathbb{N}, +)$ ist additiv unter Komposition. Dasselbe gilt für linksinvertierbar und rechtsinvertierbar. In diesem Sinne ist Γ^* das Gegenteil eines Gruppoids. Hingegen ist jeder Morphismus in Γ^* kürzbar, sowohl links als auch rechts. Die Kategorie $\mathtt{C}^a_\downarrow$ hat als Morphismen (α, β, α') alle Faktorisierungen $\alpha \circ \beta = \alpha'$ mit Start in a. Die Komposition ist $(\alpha, \beta, \alpha') \circ (\alpha', \gamma, \alpha'') = (\alpha, \beta\gamma, \alpha'')$. Ebenso $\mathtt{C}^\downarrow_a$ mit Ziel in a. Die Morphismenkategorie $\mathtt{D} = \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}$ hat als Morphismen alle Paare von Faktorisierungen $\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta'$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H3. Universelle Objekte

✍ **Definition H3A.** Sei $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ eine Kategorie. Wir vereinbaren: ✍

$$\begin{aligned} I \in \mathrm{Ob} \text{ ist } \textit{initial} \text{ in } \mathtt{C} &:\Longleftrightarrow \quad \forall X \in \mathrm{Ob}\ \ \exists! u \in \mathrm{Mor}(I, X) \\ T \in \mathrm{Ob} \text{ ist } \textit{terminal} \text{ in } \mathtt{C} &:\Longleftrightarrow \quad \forall X \in \mathrm{Ob}\ \ \exists! v \in \mathrm{Mor}(X, T) \\ N \in \mathrm{Ob} \text{ ist } \textit{Nullobjekt} \text{ in } \mathtt{C} &:\Longleftrightarrow \quad N \text{ ist initial und terminal in } \mathtt{C} \end{aligned}$$

Ein Objekt I ist *initial* in $\mathtt{C}$, wenn zu jedem Objekt X genau ein Morphismus $u : I \to X$ existiert, also $|\mathrm{Mor}(I, X)| = 1$. Ein Objekt T ist *terminal* (oder *final*) in $\mathtt{C}$, wenn zu jedem Objekt X genau ein Morphismus $v : X \to T$ existiert, also $|\mathrm{Mor}(X, T)| = 1$. Ein *Nullobjekt* N in $\mathtt{C}$ ist sowohl initial als auch terminal, also $|\mathrm{Mor}(N, X)| = |\mathrm{Mor}(X, N)| = 1$ für alle X.

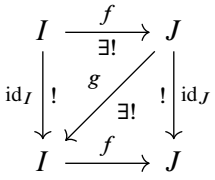
✍ **Beispiele H3B.** Zur Illustration einige einfache, aber prominente Beispiele: ✍

Kategorie	initiale Objekte	terminale Objekte	Nullobjekte
$(X, \leq)$	kleinste	größte	—
$(X, \geq)$	größte	kleinste	—
$\mathtt{Rel}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\mathtt{Set}$, $\mathtt{Top}$, $\mathscr{C}^k$	$\emptyset$	$\{e\}$	—
$\mathtt{Set}_*$, $\mathtt{Top}_*$, $\mathscr{C}^k_*$, $\mathtt{Grp}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$
$\mathtt{Vec}_K$, $\mathtt{Mod}_K$, $\mathtt{Ab}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
dyn. Systeme (A, a, α)	$(\mathbb{N}, 0, s)$	$(\{0\}, 0, c)$	—
$\mathtt{Ring}$ (immer mit Eins)	$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$	$(\{0\}, +, \cdot)$	—
$\mathtt{Field}_p$ (Charakteristik p)	$\mathbb{F}_p$ bzw. $\mathbb{Q}$	—	—
archimedische Körper	$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$	$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$	—
Kompaktifizierungen	Stone–Čech F4O	Alexandroff F4G	—

☞ Eine Kategorie $\mathtt{C}$ braucht im Allgemeinen kein initiales Objekt zu haben. Wenn eines existiert, so ist es im Allgemeinen nicht eindeutig, aber je zwei sind eindeutig isomorph: ☜

✍ **Satz H3C.** *Zwischen je zwei initialen Objekten I, J in einer Kategorie $\mathtt{C}$ existiert genau ein $\mathtt{C}$–Isomorphismus $(f, g) : I \cong J$. Gleiches gilt für je zwei terminale Objekte.* ✍

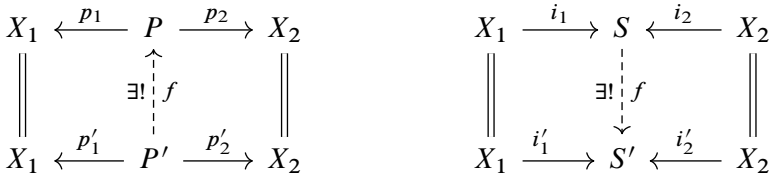
BEWEIS. Es existiert genau ein Morphismus $f : I \to J$, weil I initial ist, und ebenso genau ein Morphismus $g : J \to I$, weil J initial ist. Es folgt $g \circ f = \mathrm{id}_I : I \to I$, denn dies ist der einzige Morphismus $I \to I$. Ebenso ist $f \circ g = \mathrm{id}_J : J \to J$ der einzige Morphismus $J \to J$. Somit ist $(f, g) : I \cong J$ ein Isomorphismus, und zwar der einzige. □



☞ **Bemerkung.** Diese Eindeutigkeit bis auf Isomorphie rechtfertigt den üblichen Gebrauch: Wir sagen *die* triviale Gruppe, *der* Nullvektorraum, *der* einelementige topologische Raum, *der* Körper mit p Elementen, *die* ganzen / rationalen / reellen Zahlen, etc. ☜

Der Beweis ist wunderbar elegant, vollkommen trivial und ein schönes Beispiel für „general abstract nonsense“. Die Feststellung nützt in jeder der zahlreichen Situationen, in denen wir ein Objekt durch eine „universelle Abbildungseigenschaft“ definieren: Wenn eine Lösung existiert, so ist sie automatisch eindeutig – bis auf eindeutige Isomorphie.

§H3a. Produkte und Summen. Wir haben Produkte und Summen (Coprodukte) durch ihre universelle Abbildungseigenschaft charakterisiert (für Top siehe E4D und E3F).



Hierzu Sei $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ eine Kategorie und $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ zwei Objekte.

(1) Ein *Produkt* von X_1, X_2 in C ist eine terminale Familie $(X_1 \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} X_2)$ in der Kategorie all dieser Familien, geschrieben $\mathtt{C}(X_1 \leftarrow \bullet \rightarrow X_2)$

(2) Eine *Summe* von X_1, X_2 in C ist eine initiale Familie $(X_1 \xrightarrow{i_1} S \xleftarrow{i_2} X_2)$ in der Kategorie all dieser Familien, geschrieben $\mathtt{C}(X_1 \rightarrow \bullet \leftarrow X_2)$.

Vorgegeben sei eine Familie $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Objekten $X_\lambda \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$.

Die Kategorie $\mathtt{C}(\bullet \rightarrow X)$ hat als *Objekte über X* Familien $(P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ mit $P \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ und $p_\lambda \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(P, X_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$. Ein Morphismus $f : (P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ist ein C–Morphismus $f : P' \to P$ mit $p'_\lambda = p_\lambda \circ f$ für $\lambda \in \Lambda$. Die Verknüpfung ist die aus C.

Definition H3D (Produkt in einer Kategorie C)**.** Ein *Produkt* der Objekte $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in C ist eine terminale Familie $(P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}(\bullet \rightarrow X)$: Zu jeder Familie $(P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}(\bullet \rightarrow X)$ existiert genau ein Morphismus $f : (P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$.

Das Produkt ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie (H3C). Falls eines existiert, so wählen wir eines $P =: \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ und nennen $p_\lambda : \prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu \to X_\lambda$ die kanonischen Morphismen. Die universelle Eigenschaft entspricht der Bijektivität der Abbildung

$$\Phi \,:\, \mathrm{Mor}\Big(A, \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\Big) \xrightarrow{\sim} \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Mor}(A, X_\lambda) \,:\, f \mapsto (p_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Dual zum Produkt definieren wir das *Coprodukt* $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, oder die *Summe*, formal durch Umdrehen aller Pfeile wie in obigen Diagrammen. Ausführlich bedeutet das:

Die Kategorie $\mathtt{C}(X \rightarrow \bullet)$ hat als *Objekte unter X* Familien $(S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ mit $S \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ und $i_\lambda \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(X_\lambda, P)$ für $\lambda \in \Lambda$. Ein Morphismus $f : (S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (S', (i'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ist ein C–Morphismus $f : S \to S'$ mit $f \circ i_\lambda = i'_\lambda$ für $\lambda \in \Lambda$. Die Verknüpfung ist die aus C.

Definition H3E (Summe / Coprodukt in einer Kategorie C)**.** Eine *Summe* der Objekte $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in C ist eine initiale Familie $(S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}(X \rightarrow \bullet)$: Zu jeder Familie $(S', (i'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}(X \rightarrow \bullet)$: existiert genau ein Morphismus $f : (S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (S', (i'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$.

Das Coprodukt ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie (H3C). Falls eines existiert, so wählen wir eines $S =: \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ und nennen $i_\lambda : X_\lambda \to \coprod_{\mu\in\Lambda} X_\mu$ die kanonischen Morphismen. Die universelle Eigenschaft entspricht der Bijektivität der Abbildung

$$\Phi \,:\, \mathrm{Mor}\Big(\coprod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Z\Big) \xrightarrow{\sim} \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Mor}(X_\lambda, Z) \,:\, f \mapsto (f \circ i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Beispiel. Für $\Lambda = \emptyset$ ist das Co/Produkt über Λ das intiale/terminale Objekte in C. Für $\Lambda = \{1\}$ gilt $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = X_1$ mit $p_1 = \mathrm{id}_{X_1}$ und $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = X_1$ mit $i_1 = \mathrm{id}_{X_1}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✍ **Beispiele H3F.** Zur Illustration einige prominente Beispiele: ✍

Kategorie	Produkt	Summe / Coprodukt
$(X,\leq)$	$\inf\{ x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda \}$	$\sup\{ x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda \}$
$(X,\geq)$	$\sup\{ x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda \}$	$\inf\{ x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda \}$
$\mathtt{Set}_\subset$	$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{Set}$, $\mathtt{Top}$	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{Set}_*$, $\mathtt{Top}_*$	$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{Grp}$	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\ast_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{Ab}$, $\mathtt{Vec}_K$, $\mathtt{Mod}_K$	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{CRing}$ (mit Eins)	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$

☞ ☜

In jeder geordneten Menge $(X,\leq)$ ist das Produkt das Infimum und die Summe das Supremum. Speziell in $\mathtt{Set}_\subset$ ist das Produkt der Schnitt und die Summe die Vereinigung.

In $\mathtt{Set}$ haben wir das kartesische Produkt $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ mit den Projektionen p_λ. Als Summe dient die disjunkte Vereinigung $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \{\lambda\}\times X_\lambda$ mit den Inklusionen i_λ.

Ebenso in $\mathtt{Top}$ mit der Produkttopologie (E4C) und der Summentopologie (E3C).

Für punktierte Mengen $\mathtt{Set}_*$ und punktierte Räume $\mathtt{Top}_*$ hingegen erhalten wir als Produkt das Smash-Produkt $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ und als Summe das Bouquet $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ (§F9d).

In $\mathtt{Grp}$ ist das Produkt $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ das kartesische mit koordinatenweiser Verknüpfung. Die Summe $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \ast_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ hingegen ist das *freie Produkt* von Gruppen (L9A).

Auch in $\mathtt{Ab}$, $\mathtt{Mod}_K$, $\mathtt{Vec}_K$ ist das Produkt $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ das kartesische. Hierin ist die Summe $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ die Teilmenge der Familien mit endlichem Träger.

In der Kategorie der kommutativen Ringe mit Eins ist die Summe das Tensorprodukt (über $\mathbb{Z}$) mit den kanonischen Abbildungen; diese sind im Allgemeinen keine Einbettungen.

☞ **Übung H3G.** Abstrakter Nonsens ist allgegenwärtig und immer wieder nützlich: ☜

(1) Angenommen die Kategorie $\mathtt{C}$ erlaubt ein terminales Objekt 1 und paarweise Produkte $X\times Y$. Dann existieren natürliche Isomorphismen $X\times 1\cong X\cong 1\times X$.
(2) Angenommen die Kategorie $\mathtt{C}$ erlaubt ein initiales Objekt 0 und paarweise Summen $X+Y$. Dann existieren natürliche Isomorphismen $X+0\cong X\cong 0+X$.
(3) Man konstruiere natürliche Isomorphismen zur Kommutativität $X\times Y\cong Y\times X$ und zur Assoziativität $(X\times Y)\times Z\cong X\times Y\times Z\cong X\times(Y\times Z)$. Aus paarweisen Produkten folgen so beliebige endliche Produkte. Entsprechend für Summen.

Dies sind vertraute Eigenschaften aus $\mathtt{Set}$, $\mathtt{Top}$, $\mathtt{Grp}$, $\mathtt{Vec}_K$, etc. Hier gilt streng genommen nicht Gleichheit sondern jeweils nur ein natürlicher Isomorphismus. Die Übung zeigt, dass sich diese Isomorphismen bereits aus den universellen Eigenschaften ergeben.

(4) Sei $\mathtt{C}$ eine Kategorie mit paarweisen Produkten $X\times Y$ und Summen $X+Y$. Zur Distributivität haben wir zunächst den kanonischen Morphismus
$$(\mathrm{id}_X\times\iota_Y^{Y\sqcup Z}) + (\mathrm{id}_X\times\iota_Z^{Y\sqcup Z}) : (X\times Y)+(X\times Z)\to X\times(Y+Z).$$
Ist dies ein Isomorphismus, so heißt $\mathtt{C}$ *distributiv*, und es gilt $X\times 0\cong 0\times X\cong 0$. Dies gilt in den Kategorien $\mathtt{Set}$ und $\mathtt{Top}$, nicht jedoch in $\mathtt{Grp}$ und $\mathtt{Vec}_K$.

Übung H3H. Sei $\mathtt{C}$ eine Kategorie mit allen endlichen Produkten $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ und allen endlichen Coprodukten $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ sowie einem Nullobjekt 0. Dies definiert zu jeder Familie $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ den kanonischen Morphismus

$$f : A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n \to A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad \text{durch die Matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ausführlich: Für jedes Paar $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$ ist $f_{ij} = p_j \circ f \circ \iota_i : A_i \to A_j$ gegeben durch die Identität $f_{ij} = \mathrm{id}_{A_i}$ falls $i = j$ sowie den Nullmorphismus $f_{ij} : A_i \to 0 \to A_j$ falls $i \neq j$. Untersuchen Sie speziell die Kategorien $\mathtt{Ab}$ und $\mathtt{Grp}$ sowie $\mathtt{Set}_*$ und $\mathtt{Top}_*$: Ist f ein Isomorphismus? oder linksinvertierbar/-kürzbar? oder rechtsinvertierbar/-kürzbar?

Übung H3I. Was gilt allgemein für initiale / terminale Objekte in folgenden Kategorien?

(1) Die Kategorie $\mathtt{C}^A_\downarrow$ aller Morphismen mit Start A (H2L).
(2) Die Kategorie $\mathtt{C}^\downarrow_A$ aller Morphismen mit Ziel A (H2M).

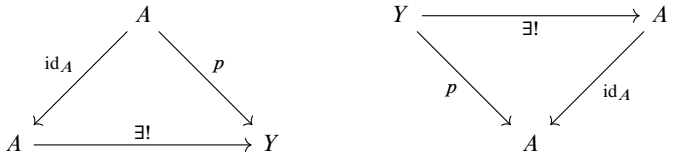
Was erhalten Sie, wenn in der Initial-/Terminalbedingung die Eindeutigkeit fehlt?

(3) Welche Objekte $f : A \to X$ in $\mathtt{C}^A_\downarrow$ erfüllen $\forall\, p : A \to Y \;\; \exists h : f \to p$?
(4) Welche Objekte $f : X \to A$ in $\mathtt{C}^\downarrow_A$ erfüllen $\forall\, p : Y \to A \;\; \exists h : p \to f$?

Zur Abrundung drei Feststellungen, wie von Monoiden und Gruppen bekannt (H2H):

(5) Bilden die (links-/rechts-)invertierbaren Morphismen in $\mathtt{C}$ eine Unterkategorie?

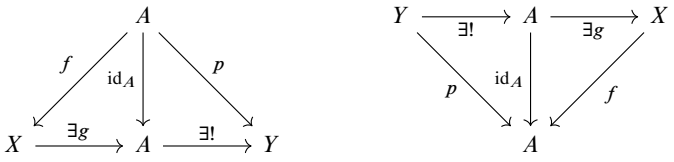
✻ **H3I.** Beide Fragen lassen sich unmittelbar beantworten durch Inspektion der geforderten Morphismen:



(1) Über terminale Objekte ist keine allgemeine Aussage möglich. In $\mathtt{C}^A_\downarrow$ ist das Objekt $\mathrm{id}_A : A \to A$ initial. Initiale Objekte sind nur bis auf Isomorphie bestimmt, also sind alle $\mathtt{C}$–Isomorphismen $f : A \xrightarrow{\sim} X$ initial.

(2) Über initiale Objekte ist keine allgemeine Aussage möglich. In $\mathtt{C}^\downarrow_A$ ist das Objekt $\mathrm{id}_A : A \to A$ terminal. Terminale Objekte sind nur bis auf Isomorphie bestimmt, also sind alle $\mathtt{C}$–Isomorphismen $f : X \xrightarrow{\sim} A$ terminal.

Für die beiden Folgefragen betrachten wir folgende Diagramme:



(3) Notwendig ist die Existenz eines $\mathtt{C}$–Morphismus $g : X \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$, also f linksinvertierbar. Das ist auch hinreichend, denn $\mathrm{id}_A : A \to A$ ist initial in $\mathtt{C}^A_\downarrow$.

(4) Notwendig ist die Existenz eines $\mathtt{C}$–Morphismus $g : A \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_A$, also f rechtsinvertierbar. Das ist auch hinreichend, denn $\mathrm{id}_A : A \to A$ ist terminal in $\mathtt{C}^\downarrow_A$.

(5) Ja. Sind $(f, f') : X \to Y$ und $(g, g') : Y \to Z$ Isomorphismen, also $f' \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_Y$ sowie $g' \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ g' = \mathrm{id}_Z$, so folgt $(f' \circ g') \circ (g \circ f) = f' \circ g' \circ g \circ f' = f' \circ \mathrm{id}_Y \circ f = f' \circ f = \mathrm{id}_X$ und $(g \circ f) \circ (f' \circ g') = g \circ f \circ f' \circ g' = g \circ \mathrm{id}_Y \circ g' = g \circ g' = \mathrm{id}_Z$, also $(g \circ f, f' \circ g') : X \cong Z$. Dasselbe gilt, wenn wir nur Links-/Rechtsinvertierbarkeit fordern und beweisen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H3b. Natürliche und ganze Zahlen als initiales Objekt.

Übung H3J. Wir betrachten die Kategorie $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{end}}$: Objekte sind Tripel (A,a,α) bestehend aus einer Menge A, einem Fußpunkt $a \in A$, und einer Selbstabbildung $\alpha : A \to A$. Morphismen $f : (A,a,\alpha) \to (B,b,\beta)$ sind Abbildungen $f : A \to B$ mit $f(a) = b$ und $f \circ \alpha = \beta \circ f$.

$$\begin{array}{ccccc} \{a\} & \xhookrightarrow{\text{inc}} & A & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \{b\} & \xhookrightarrow{\text{inc}} & B & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

In $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{end}}$ liegen die vollen Unterkategorien $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{bij}}$ und $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{inj}}$ und $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{sur}}$: Für ihre Objekte (A,a,α) verlagen wir, dass die Abbildung $\alpha : A \to A$ bijektiv / injektiv / surjektiv ist.

Bestimmen Sie jeweils initiale und terminale Objekte in jeder dieser Kategorien.

Hinweis: Wiederholen Sie die Dedekind–Peano–Axiome für die natürlichen Zahlen und darauf aufbauend Dedekinds Rekursionssatz. Beweisen Sie diesen grundlegenden Satz!

✻ **H3J.** Das terminale Objekt ist die einpunktige Menge $(\{e\},e,\varepsilon)$. Initiale Objekt sind hier viel interessanter:

(1) Initial in $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{end}}$ sind die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N},0,\nu)$ mit der Nachfolgerabbildung $\nu : n \mapsto n+1$. Zum Nachweis sei ein Objekt $(A,a,\alpha) \in \mathtt{Set}_*^{\mathrm{end}}$ vorgelegt, also A eine Menge, $a \in A$ ein Element, $\alpha : X \to X$ eine Abbildung. Wir konstruieren hieraus die Folge $f : \mathbb{N} \to A : n \mapsto a_n$ durch die „Rekursion“ $a_0 = a$ und $a_{n+1} = \alpha(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also schrittweise nach folgendem Muster:

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{N} & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{N} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \{a\} & \xhookrightarrow{\text{inc}} & A & \xrightarrow{\alpha} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \overset{\nu}{\longmapsto} & 1 & \overset{\nu}{\longmapsto} & 2 & \overset{\nu}{\longmapsto} & 3 & \overset{\nu}{\longmapsto} & 4 & \overset{\nu}{\longmapsto} & 5 & \overset{\nu}{\longmapsto} & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ a_0 & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_1 & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_2 & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_3 & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_4 & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_5 & \overset{\alpha}{\longmapsto} & \dots \end{array}$$

Sie nutzen dieses Prinzip jedesmal, wenn Sie eine rekursive Folge mathematischer Objekte konstruieren! Existenz und Eindeutigkeit dieser Folge, also der Abbildung f, garantiert Dedekinds Rekursionssatz H3M.

Bemerkung: Nach demselben Prinzip erhalten wir $\mathbb{N} \to \mathrm{End}(A) : n \mapsto \alpha^n$, indem wir den Rekursionssatz auf $(\mathrm{End}(A), \mathrm{id}_A, g \mapsto \alpha \circ g)$ anwenden. Im obigen Beispiel gilt dann $f(n) = \alpha^n(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Initial in $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{bij}}$ sind die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z},0,\zeta)$ mit der Nachfolgerabbildung $\zeta : n \mapsto n+1$. Zum Nachweis sei ein Objekt $(A,a,\alpha) \in \mathtt{Set}_*^{\mathrm{bij}}$ vorgelegt, also A eine Menge, $a \in A$ ein Element, $\alpha : X \to X$ eine Bijektion. Wir konstruieren hieraus die Folge $f : \mathbb{Z} \to A : n \mapsto a_n = \alpha^n(a)$ nach folgendem Muster:

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \{a\} & \xhookrightarrow{\text{inc}} & A & \xrightarrow{\alpha} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccccc} \dots & \overset{\zeta}{\longmapsto} & -2 & \overset{\zeta}{\longmapsto} & -1 & \overset{\zeta}{\longmapsto} & 0 & \overset{\zeta}{\longmapsto} & 1 & \overset{\zeta}{\longmapsto} & 1 & \overset{\zeta}{\longmapsto} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_{-2} & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_{-1} & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_0 & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_1 & \overset{\alpha}{\longmapsto} & a_2 & \overset{\alpha}{\longmapsto} & \dots \end{array}$$

Ausführlich: Dank (1) haben wir $\mathbb{N} \to A : n \mapsto \alpha^n$ und $\mathbb{N} \to A : n \mapsto \alpha^{-n} := (\alpha^{-1})^n$. Für $n = 0$ gilt $\alpha^{-0} = \alpha^0 = \mathrm{id}_A$. Wir setzen $f(n) = \alpha^n(a)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und erhalten $\alpha(f(n)) = f(n+1)$.

(3) Initial in $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{inj}}$ ist $(\mathbb{N},0,\nu)$ genau wie in (1), denn die Nachfolgerabbildung $\nu : n \mapsto n+1$ ist injektiv.

(4) Nach einigem Experimentieren entdecken Sie die Überraschung: Die Kategorie $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{sur}}$ hat kein initiales Objekt! Der Beweis ist trick- und lehrreich. Angenommen (A,a,α) wäre initial in $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{sur}}$. Diese Annahme wollen wir zum Widerspruch führen. Hierzu betrachten wir das Objekt $(Y,y,\upsilon) \in \mathtt{Set}_*^{\mathrm{sur}}$ mit $Y = \{\pm 1,0\} \times \mathbb{N}$ und $y = (0,0)$ und definieren $\upsilon : Y \twoheadrightarrow Y$ durch $\upsilon(0,n) = (0,n+1)$ sowie $\upsilon(\pm 1,n) = \upsilon(\pm 1,n-1)$ für $n > 0$ und $\upsilon(\pm 1,0) = (0,0)$ für $n = 0$. Wir sehen den Automorphismus $\tau : (Y,y,\upsilon) \xrightarrow{\sim} (Y,y,\upsilon) : (\varepsilon,n) \mapsto (-\varepsilon,n)$. Nach Annahme existiert genau ein Morphismus $f : (A,a,\alpha) \to (Y,y,\upsilon)$. Dank Surjektivität von $\alpha : A \to A$ existiert $z \in A$ mit $\alpha(z) = a$. Wegen $\alpha(f(z)) = f(\alpha(z)) = f(a) = y$ gilt $f(z) = (\pm 1,0)$. Auch $f' = \tau \circ f$ ist ein Morphismus $(A,a,\alpha) \to (Y,y,\upsilon)$, und dank $f(z) \neq f'(z)$ gilt $f' \neq f$. Also ist (A,a,α) nicht initial.

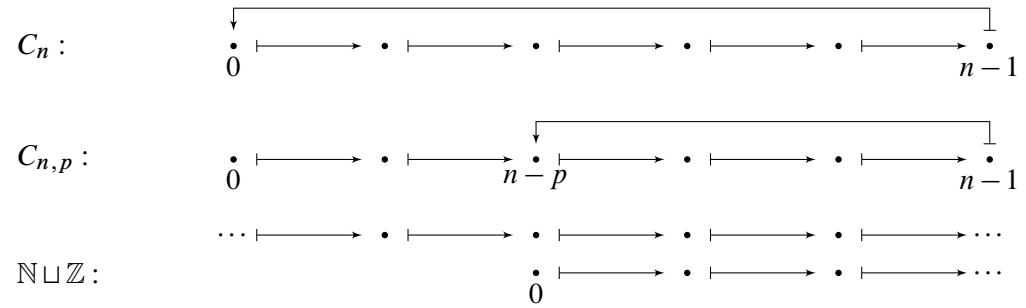
§H3c. Wiederholung: die Dedekind–Peano–Axiome. Zählen ist kinderleicht, und so haben wir es als Kinder gelernt: „(null,) eins, zwei, drei, vier, fünf, …“. Die Schwierigkeit versteckt sich hierbei in dem myteriösen Auslassungszeichen „…“! Wie geht es weiter? „Das ist doch selbstverständlich.“, mag mancher denken, ist es aber nicht. Die Aussage „Die Abfolge der natürlichen Zahlen ist 0, 1, 2, 3, 4, 5, usw…“ bedeutet etwas gänzlich anderes als „Die Abfolge der Jahreszeiten ist Frühling, Sommer, Herbst, Winter, usw…“.

Die nötige Präzisierung liefern folgende Axiome von Dedekind (1888) und Peano (1889):

Definition H3K (Dedekind–Peano)**.** Ein *Modell der natürlichen Zahlen* $(N, 0, \nu)$ besteht aus einer Menge N mit einem Element $0 \in N$ und einer Abbildung $\nu : N \to N$, sodass gilt:

(D0) Das Element 0 liegt nicht im Bild, kurz $0 \notin \nu(N)$: Für jedes $n \in N$ gilt $\nu(n) \neq 0$,
(D1) Die Abbildung ν ist injektiv: Für je zwei Elemente $n \neq m$ in N gilt $\nu(n) \neq \nu(m)$.
(D2) Induktion: Für jede Teilmenge $E \subset N$ mit $0 \in E$ und $\nu(E) \subset E$ gilt $E = N$.

Beispiele. Die drei Axiome (D0,1,2) sind voneinander unabhängig, wie die folgenden drei Beispiele zeigen: Jedes verletzt genau eines der Axiome, erfüllt aber die beiden anderen.



Beispiel. Schon vor über 30 000 Jahren zählte man mit Kerben in Knochen, anhand von Wörtern über dem einelementigen Alphabet $\{|\}$. Das Element 0 ist hierbei das leere Wort.

$$0 \mapsto | \mapsto || \mapsto ||| \mapsto |||| \mapsto ||||| \mapsto |||||| \mapsto ||||||| \mapsto |||||||| \mapsto \dots$$

Beispiel. Eine besonders effiziente Schreibweise erhalten wir aus Wörtern über dem zweielementigen Alphabet $\{0, 1\}$, auch Binärzahlen genannt, nach dem bekannten Muster:

$$0 \mapsto 1 \mapsto 10 \mapsto 11 \mapsto 100 \mapsto 101 \mapsto 110 \mapsto 111 \mapsto 1000 \mapsto \dots$$

Beispiel. Genauso zählen wir mit Hilfe des Alphabets $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ nach dem vertrauten Muster der Dezimalzahlen. *Übung:* Erklären Sie die Nachfolgerabbildung!

Beispiel. Nach John von NEUMANN entsteht das kanonische Modell $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ der natürlichen Zahlen aus der leeren Menge $0 := \emptyset$ durch Iteration der Abbildung $\nu : n \mapsto n \cup \{n\}$.

$$\emptyset \mapsto \{\emptyset\} \mapsto \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \mapsto \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \mapsto \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \mapsto \dots$$

Das bedeutet $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, …, $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, usw.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung H3L. Die Existenz dieser Menge ist Teil der Zermelo–Fraenkel–Axiome, speziell das *Unendlichkeitsaxiom* fordert: Es gibt eine Menge U mit $\emptyset \in U$ und $\nu(U) \subset U$.

(1) Warum ist ν injektiv? Seien a, b Mengen mit $a \neq b$, wie folgt daraus $\nu(a) \neq \nu(b)$?

(2) Sei U eine beliebige Menge und hierauf $f : U \to U$ injektiv aber nicht surjektiv. Wir wählen ein Element $0 \in U \smallsetminus f(U)$ und setzen $N := \bigcap\{ E \subset U \mid 0 \in E,\ f(E) \subset E \}$. Dann ist $(N, 0, \nu)$ mit $0 \in N$ und $\nu = f|_N^N : N \to N$ ein Modell der natürlichen Zahlen.

⁕ **H3L.** (1) Wir nehmen $a \cup \{a\} = b \cup \{b\}$ an und zeigen $a = b$. Aus $a \in a \cup \{a\} = b \cup \{b\}$ folgt $a \in b$ oder $a \in \{b\}$; Letzteres bedeutet $a = b$. Aus $b \in b \cup \{b\} = a \cup \{a\}$ folgt $b \in a$ oder $b \in \{a\}$; Letzteres bedeutet $b = a$. Die Konstellation $a \in b$ und $b \in a$ ist unmöglich dank Fundierungsaxiom. Also gilt $a = b$.

(2) Das Tripel $(N, 0, \nu)$ erfüllt (D0), denn $\nu(a) = a \cup \{a\} \neq \emptyset$ für jede Menge a. Dank (1) gilt zudem die Injektivität (D1). Es bleibt nur noch das Induktionsaxiom (D2) zu zeigen: Angenommen, eine Teilmenge $E \subset N$ erfüllt $0 \in E$ und $\nu(E) \subset E$. Dann gilt $N \subset E$ nach Konstruktion des Durchschnitts, also $E = N$.

Nach diesen Vorbereitungen zum *Zählen* können wir Dedekinds Rekursionssatz formulieren und beweisen. Dies ist die *universelle Abbildungseigenschaft* der natürlichen Zahlen:

Satz H3M (Rekursionssatz von Dedekind, 1888)**.** *Sei $(N, 0, \nu)$ ein Modell der natürlichen Zahlen und (A, a, α) bestehe aus einer Menge A, einem Element $a \in A$ und einer Abbildung $\alpha : A \to A$. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : N \to A$ mit $f(0) = a$ und $f \circ \nu = \alpha \circ f$.*

Korollar: *Insbesondere sind je zwei Modelle $(N, 0, \nu)$ und $(N', 0', \nu')$ der natürlichen Zahlen isomorph vermöge des eindeutigen Isomorphismus $(f, f') : (N, 0, \nu) \cong (N', 0', \nu')$.*

BEWEIS. *Eindeutigkeit von f:* Angenommen $f, g : N \to A$ erfüllen beide $f(0) = g(0) = a$ und $f \circ \nu = \alpha \circ f$ und $g \circ \nu = \alpha \circ g$. Für $E = \{ n \in N \mid f(n) = g(n) \}$ gilt dann $0 \in E$ und $\nu(E) \subset E$, denn aus $n \in E$ folgt $f(\nu(n)) = \alpha(f(n)) = \alpha(g(n)) = g(\nu(n))$, also $\nu(n) \in E$. Dank (D2) folgt $E = N$. Das bedeutet $f = g$.

Existenz von f: Die Existenz ist weniger offensichtlich und verlangt eine Konstruktion! Eine Teilmenge $R \subset N \times A$ heiße *induktiv*, wenn $(0, a) \in R$ gilt und mit $(n, x) \in R$ auch $(\nu(n), \alpha(x)) \in R$. Die gesamte Menge $N \times A$ ist induktiv. Sei $F \subset N \times A$ der Durchschnitt aller induktiven Mengen, also die kleinste induktive Menge.

Wir zeigen, dass F der Graph einer Abbildung von N nach A ist. Sei E die Menge der $n \in N$, für die genau ein $x \in A$ mit $(n, x) \in F$ existiert. Wir haben $E = N$ zu zeigen.

Zunächst gilt $(0, a) \in F$, denn F ist induktiv. Gäbe es ein Paar $(0, x) \in F$ mit $x \neq a$, dann wäre $F \smallsetminus \{(0, x)\}$ eine kleinere induktive Menge gemäß (D0), im Widerspruch zur Minimalität von F. Somit gilt $0 \in E$.

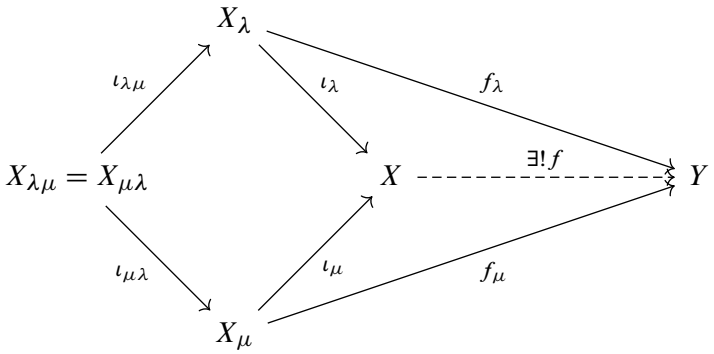
Angenommen, es gilt $n \in E$. Dann gibt es genau ein $x \in A$ mit $(n, x) \in F$. Daher gilt $(\nu(n), \alpha(x)) \in F$, denn F ist induktiv. Gäbe es ein Paar $(\nu(n), y) \in F$ mit $y \neq \alpha(x)$, dann wäre $F \smallsetminus \{(\nu(n), y)\}$ eine kleinere induktive Menge gemäß (D1), im Widerspruch zur Minimalität von F. Aus $n \in E$ folgt also $\nu(n) \in E$. Wir schließen $E = N$ gemäß (D2).

Das bedeutet, $F \subset N \times A$ ist der Graph einer Abbildung $f : N \to A$. Die Tatsache, dass F induktiv ist, bedeutet nun gerade $f(0) = a$ und $f(\nu(n)) = \alpha(f(n))$ für alle $n \in N$.

Korollar: Dank der Existenzaussage gibt es Morphismen $f : (N, 0, \nu) \to (N', 0', \nu')$ und $f' : (N', 0', \nu') \to (N, 0, \nu)$. Dank der Eindeutigkeitsaussage erfüllen diese schließlich $f' \circ f = \mathrm{id} : (N, 0, \nu) \to (N, 0, \nu)$ und $f \circ f' = \mathrm{id} : (N', 0', \nu') \to (N', 0', \nu')$. □

☞ **§H3d. Verklebung als universelles Objekt.** Universelle Eigenschaften nehmen uns mühsame Arbeit ab, indem sie immerwiederkehrende Konstruktionsprobleme einheitlich lösen. Ihr Name ist Programm, sie sind „universell“: Wir müssen nicht jedes Problem einzeln analysieren und nachrechnen, sondern lösen gleich alle und alle gleich. ☜

Übung H3N. Formulieren Sie den Verklebesatz E1P als universelle Abbildungseigenschaft. Genauer gefragt: Wie gelingt dies als initiales Objekt in einer geeigneten Kategorie?



Anleitung: Sei X ein topologischer Raum, $\iota_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X$ ein Teilraum für jedes $\lambda \in \Lambda$, mit Schnittmengen $X_{\lambda\mu} = X_{\mu\lambda} = X_\lambda \cap X_\mu$ und Inklusionen $\iota_{\lambda\mu} : X_{\lambda\mu} \hookrightarrow X_\lambda$ für $\lambda, \mu \in \Lambda$. Zu diesen Daten $\mathscr{X} = (\iota_{\lambda\mu} : X_{\lambda\mu} \hookrightarrow X_\lambda)_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ definieren wir die Kategorie $\mathtt{Top}^{\mathscr{X}}_{\downarrow}$:

(a) Als Objekte $F : \mathscr{X} \to Y$ betrachten wir Familien $F = (f_\lambda : X_\lambda \to Y)_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen mit $f_\lambda \circ \iota_{\lambda\mu} = f_\mu \circ \iota_{\mu\lambda}$ für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$.
(b) Ein Morphismus $g : F \to G$ von $F : \mathscr{X} \to Y$ nach $G : \mathscr{X} \to Z$ ist eine stetige Abbildung $g : Y \to Z$ mit $g \circ f_\lambda = g_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$.
(c) Die Komposition von $g : F \to G$ und $h : G \to H$ ist die Verknüpfung $h \circ g$ in $\mathtt{Top}$.

Damit können wir die eingangs gestellte Frage nun präzise formulieren:

(1) Prüfen Sie nach, dass $\mathtt{Top}^{\mathscr{X}}_{\downarrow}$ mit diesen Daten tatsächlich eine Kategorie ist.
(2) Wann ist das Objekt $\iota : \mathscr{X} \to X$ mit $\iota = (\iota_\lambda : X_\lambda \to X)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathtt{Top}^{\mathscr{X}}_{\downarrow}$ initial?

✻ **H3N.** (1) Die Komposition in $\mathtt{Top}^{\mathscr{X}}_{\downarrow}$ ist wohldefiniert: Zu $g : F \to G$ und $h : G \to H$ ist $h \circ g : F \to H$ tatsächlich ein Morphismus von F nach H, wie oben definiert, denn $(h \circ g) \circ f_\lambda = h \circ (g \circ f_\lambda) = h \circ g_\lambda = h_\lambda$.

Damit liegen die nötigen Daten für $\mathtt{Top}^{\mathscr{X}}_{\downarrow}$ vor. Wir prüfen nun die in Definition H1A geforderten Eigenschaften einer Kategorie: Disjunktheit, Identität und Assoziativität. Alle drei folgen auf $\mathtt{Top}$: Ausschreiben!

(2) Wir betrachten zunächst die Kategorie $\mathtt{Set}$ der Mengen. In diesem Fall ist $\iota : \mathscr{X} \to X$ in $\mathtt{Set}^{\mathscr{X}}_{\downarrow}$ initial: Jedes Objekt $F : \mathscr{X} \to Y$ ist eine Familie $F = (f_\lambda : X_\lambda \to Y)_{\lambda\in\Lambda}$ von Abbildungen mit $f_\lambda \circ \iota_{\lambda\mu} = f_\mu \circ \iota_{\mu\lambda}$ für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$. Das bedeutet $f_\lambda|_{X_{\lambda\mu}} = f_\mu|_{X_{\mu\lambda}}$. Damnach ist die Verklebung $f = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda : X \to Y$ die eindeutige Abbildung mit $f \circ \iota_\lambda = f_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Somit ist $\iota : \mathscr{X} \to X$ in $\mathtt{Set}^{\mathscr{X}}_{\downarrow}$ initial.

Wir gehen nun zur Kategorie $\mathtt{Top}$ über. Genau dann ist $\iota : \mathscr{X} \to X$ in $\mathtt{Set}^{\mathscr{X}}_{\downarrow}$ initial, wenn gilt: Genau dann ist $U \subset X$ offen in X, wenn $U_\lambda = \iota_\lambda^{-1}(U)$ offen in X_λ ist. Das bedeutet, X trägt die von den Teilräumen $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ induzierte schwache Topologie. Hinreichend hierzu sind zwei wichtige Spezialfälle: $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist eine offene Überdeckung oder eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung. Das Überdeckungskriterium E1N garantiert dann, dass die Topologie auf X übereinstimmt mit der durch $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ induzierten schwachen Topologie. Das wiederum garantiert die universelle Abbildungseigenschaft.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H3e. Entgegengesetzte Kategorie. Unsere Beispiele von Kategorien und kategoriellen Konstruktionen zeigen allesamt eine bemerkenswerte Dualität: initiale und terminale Objekte, Coprodukte und Produkte, etc. Jede Definition, jeder Satz, jeder Beweis existiert in zwei zueinander dualen Formen: Es genügt eine Fassung zu beweisen, die zweite entsteht durch Umdrehen aller Pfeile. Diese Dualität wollen wir nun explizit ausschreiben.

Definition H3O. Wir betrachten eine Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ gemäß H1A oder explizit strukturiert $\mathtt{C} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, s, t, \circ, \mathrm{id})$ gemäß H1Q. Wir können in $\mathtt{C}$ formal alle Pfeile umdrehen und erhalten die *entgegengesetzte Kategorie* $\mathtt{C}^{\mathrm{op}} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, t, s, \bar{\circ}, \mathrm{id})$: Diese hat dieselben Objekte und dieselben Morphismen wie $\mathtt{C}$, aber alle Morphismen werden umgedreht notiert.

Wir setzen also $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}(B,A) = \mathtt{C}(A,B)$ und definieren die Verknüpfung durch

$$\bar{\circ} : \mathtt{C}^{\mathrm{op}}(B,A) \times \mathtt{C}^{\mathrm{op}}(C,B) \to \mathtt{C}^{\mathrm{op}}(C,A) : (f,g) \mapsto f \,\bar{\circ}\, g = g \circ f.$$

Diese Verknüpfung erfüllt die Forderungen nach Identität und Assoziativität, somit ist $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}$ tatsächlich eine Kategorie. Durch zweimaliges Umdrehen erhalten wir $(\mathtt{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathtt{C}$.

Beispiel. Wenn wir eine geordnete Menge $(X, \leq)$ als Kategorie auffassen (H1G), so entspricht die entgegengesetzte Kategorie der entgegengesetzten Ordnung $(X, \geq)$.

Beispiel. Für jeden gerichteten Graphen $\Gamma = (C_0, C_1, s, t)$ gemäß Definition H1L besteht der entgegengesetzte Graph $\Gamma^{\mathrm{op}} = (C_0, C_1, t, s)$ aus denselben Ecken und Kanten, aber dabei wird jede Kante umgekehrt durchlaufen. Entsprechend besteht die Wegekategorie $(\Gamma^{\mathrm{op}})^* = (\Gamma^*)^{\mathrm{op}}$ aus denselben Objekten, aber jeder Weg wird umgekehrt durchlaufen.

Bemerkung. Jedes kommutative Diagramm in $\mathtt{C}$ entspricht durch Umdrehen aller Pfeile einem kommutativen Diagramm in $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}$, und umgekehrt. Insbesondere haben $\mathtt{C}$ und $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}$ dieselben Isomorphismen. Für das Dualisieren erhalten wir folgende Übersetzungen:

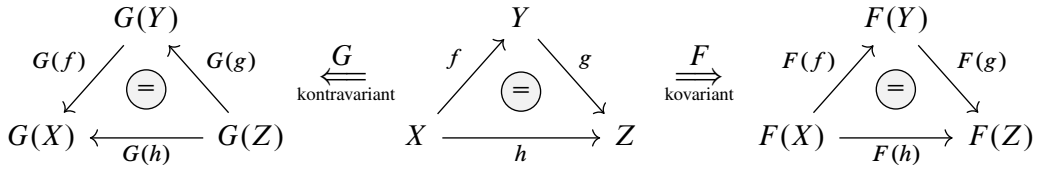
Eigenschaft in $\mathtt{C}$	Eigenschaft in $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}$
invertierbar – Isomorphismus	Isomorphismus – invertierbar
links-/rechtsinvertierbar	rechts-/linksinvertierbar
links-/rechtskürzbar	rechts-/linkskürzbar
initial / terminal	terminal / initial
Nullobjekt	Nullobjekt
Coprodukt / Produkt	Produkt / Coprodukt
ko-/kontravarianter Funktor $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$	kontra-/kovarianter Funktor $F : \mathtt{C}^{\mathrm{op}} \to \mathtt{D}$

Übung H3P. (1) Jede Gruppe G ist isomorph zur entgegengesetzten Gruppe G^{op}.
(2) Die Abbildungsmonoide E_X und E_X^{op} hingegen sind nicht isomorph für $\sharp X \geq 2$.

✻ **H3P.** (1) Die Inversion $\iota : G \to G : a \mapsto a^{-1}$ ist bijektiv dank $\iota \circ \iota = \mathrm{id}_G$. Zudem gilt $\iota(ab) = \iota(b)\iota(a)$, also ist $\iota : G \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{op}}$ ein Gruppenisomorphismus. (2) In E_X ist jede Konstante c linksabsorbierend, also $c \circ a = c$ für alle $a \in E_X$. In E_X^{op} gibt es keine linksabsorbierenden Elemente (dafür aber rechtsabsorbierende).

§H4. Funktoren

Eine Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ besteht aus Objekten, Morphismen und ihrer Komposition. Ein *Funktor* $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ist eine strukturerhaltende Abbildung: Er überführt kommutative Diagramme in der Kategorie $\mathtt{C}$ in kommutative Diagramme in der Kategorie $\mathtt{D}$:



Hierbei soll die Pfeilrichtung erhalten bleiben, wir sprechen daher zur Betonung von einem *kovarianten Funktor*. Ein *kontravarianter Funktor* $G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ hingegen überführt kommutative Diagramme in $\mathtt{C}$ in kommutative Diagramme in $\mathtt{D}$ und dreht dabei alle Pfeile um. Dies ist demnach nichts anderes als ein kovarianter Funktor $G : \mathtt{C}^{\mathrm{op}} \to \mathtt{D}$ bzw. $G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}^{\mathrm{op}}$ (H3O).

Zur Illustration zwei grundlegende Konstruktionen der Mengenlehre:

Beispiel H4A. Jeder Menge X ordnen wir ihre Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ zu und jeder Abbildung $f : X \to Y$ die induzierte Abbildung $f_* : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$, die jede Teilmenge $A \subset X$ auf ihre Bildmenge $f_*(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$ abbildet. Wir erhalten den kovarianten Funktor

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_* \,:\, \mathtt{Set} \to \mathtt{Set} \,:\, X &\mapsto \mathfrak{P}(X) = \{ A \mid A \subset X \},\\ (f : X \to Y) &\mapsto (f_* : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y) : A \mapsto f_*(A) = \{ f(a) \in Y \mid a \in A \}).\end{aligned}$$

Für jede Menge X gilt hierbei $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}(X)}$. Für je zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, wie man für alle $A \subset X$ unmittelbar nachprüft:

$$(g \circ f)_*(A) = \{ g(f(a)) \mid a \in A \} = \{ g(b) \mid b \in f_*(A) \} = g_*(f_*(A)) = (g_* \circ f_*)(A).$$

Beispiel H4B. Wir betrachten Urbilder statt Bilder: Jeder Abbildung $f : X \to Y$ ordnen wir die Abbildung $f^* : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$ zu, die jede Teilmenge $B \subset Y$ auf ihre Urbildmenge $f^*(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$ abbildet. Wir erhalten den kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^* \,:\, \mathtt{Set} \to \mathtt{Set} \,:\, X &\mapsto \mathfrak{P}(X) = \{ A \mid A \subset X \},\\ (f : X \to Y) &\mapsto (f^* : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X) : B \mapsto f^*(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}).\end{aligned}$$

Für jede Menge X gilt hierbei $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}(X)}$. Für je zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, wie man für alle $C \subset Z$ unmittelbar nachprüft:

$$\begin{aligned}(g \circ f)^*(C) &= \{ x \in X \mid g(f(x)) \in C \}\\ &= \{ x \in X \mid f(x) \in g^*(C) \} = f^*(g^*(C)) = (f^* \circ g^*)(C).\end{aligned}$$

Bemerkung. Für die Bildmenge $f_*(A)$ schreibt man kurz $f(A)$ und für die Urbildmenge $f^*(B)$ schreibt man meist $f^{-1}(B)$. Das ist bequem aber insofern unglücklich, als man f_* nicht von der Abbildung f unterscheidet, und insbesondere f^* nicht von der (eventuell existierenden) inversen Abbildung f^{-1}. Meist kann man dem Kontext leicht entnehmen, was gemeint ist, dennoch führt die Doppelbedeutung insbesondere für Anfänger regelmäßig zu Verwirrung. Wie so oft gilt es zwischen Bequemlichkeit und Klarheit abzuwägen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H4a. Funktoren. Aus Erfahrung mit zahlreichen Beispielen, wie den vorangegangenen aus der Mengenlehre, extrahieren wir nun folgende Vereinbarung:

Definition H4C. Seien $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ordnet jedem $\mathtt{C}$–Objekt $X \in \mathtt{C}$ ein $\mathtt{D}$–Objekt $F(X) \in \mathtt{D}$ zu und jedem $\mathtt{C}$–Morphismus $f : X \to Y$ einen $\mathtt{D}$–Morphismus $F(f) : F(X) \to F(Y)$, wobei $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \mathtt{C}$ gilt sowie $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ in $\mathtt{C}$.

Ein *kontravarianter Funktor* $G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ hingegen ordnet jedem $\mathtt{C}$–Morphismus $f : X \to Y$ einen $\mathtt{D}$–Morphismus $G(f) : G(Y) \to G(X)$ zu, wobei ebenfalls $G(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{G(X)}$ für alle $X \in \mathtt{C}$ gilt, jedoch $G(g \circ f) = G(f) \circ G(g)$ für alle Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ in $\mathtt{C}$. Anders gesagt, G ist ein (kovarianter) Funktor $G : \mathtt{C}^{\mathrm{op}} \to \mathtt{D}$.

Beispiel. Wir können prägeordnete Mengen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ als Kategorien auffassen (H1G). Ein kovarianter Funktor $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ ist eine monoton wachsende Abbildung, das heißt, $x \leq y$ impliziert $f(x) \leq f(y)$. Ein kontravarianter Funktor $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ ist eine monoton fallende Abbildung, das heißt, $x \leq y$ impliziert $f(x) \geq f(y)$.

Beispiel H4D. Ein konstanter Funktor $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ordnet jedem Objekt X in $\mathtt{C}$ ein festes Objekt Y in $\mathtt{D}$ zu und jedem Morphismus in $\mathtt{C}$ die Identität id_Y. Dieser ist sowohl kovariant als auch kontravariant. Dieses Zusammentreffen ist eine seltene Ausnahme.

Beispiel H4E. Für jede Kategorie $\mathtt{C}$ ist die Identität $\mathrm{id}_{\mathtt{C}} : \mathtt{C} \to \mathtt{C}$ ein kovarianter Funktor. Sind $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ und $G : \mathtt{D} \to \mathtt{E}$ kovariante Funktoren, so auch die Komposition $G \circ F : \mathtt{C} \to \mathtt{E}$. Kategorien und kovariante Funktoren bilden demnach selbst eine Kategorie.

Bemerkung. Ebenso wie eine Kategorie (H1A) besteht ein Funktor $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ aus *Daten* mit gewissen *Eigenschaften*. Um einen Funktor F festzulegen, muss man die beiden Abbildungen $F_0 : \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}} \to \mathrm{Ob}_{\mathtt{D}} : X \mapsto F(X)$ auf den Objekten und $F_1 : \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}} \to \mathrm{Mor}_{\mathtt{D}} : f \mapsto F(f)$ auf den Morphismen angeben, und sodann die geforderten Eigenschaften nachweisen.

Im Sinne von H1Q seien $\mathtt{C} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, s, t, \circ, \mathrm{id})$ und $\mathtt{D} = (\mathtt{D}_0, \mathtt{D}_1, s, t, \circ, \mathrm{id})$ Kategorien. Ein *kovarianter Funktor* $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ besteht dann aus einer Abbildung $F_0 : \mathtt{C}_0 \to \mathtt{D}_0$ auf den Objekten und einer Abbildung $F_1 : \mathtt{C}_1 \to \mathtt{D}_1$ auf den Morphismen, sodass gilt:

(1) $F_1(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F_0(X)}$ für jedes Objekt $X \in \mathtt{C}_0$,
(2) $s(F_1(f)) = F_0(s(f))$ und $t(F_1(f)) = F_0(t(f))$ für jeden Morphismus $f \in \mathtt{C}_1$,
(3) $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$ für jedes verknüpfbare Paar $(g, f) \in \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1$.

Für kontravariante Funktoren formulieren wir entsprechend:

(1) $F_1(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F_0(X)}$ für jedes Objekt $X \in \mathtt{C}_0$,
(2) $s(F_1(f)) = F_0(t(f))$ und $t(F_1(f)) = F_0(s(f))$ für jeden Morphismus $f \in \mathtt{C}_1$,
(3) $F_1(g \circ f) = F_1(f) \circ F_1(g)$ für jedes verknüpfbare Paar $(g, f) \in \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1$.

Beispiel. Die Einpunktkompaktifizierung ist ein Funktor $\mathtt{LCHaus} \to \mathtt{CHaus}_*$ (F5E). Hierbei ist $\mathtt{CHaus}_*$ die Kategorie aller kompakten Hausdorff–Räume mit Fußpunkt und ihren stetigen Abbildungen und $\mathtt{LCHaus}$ die Kategorie aller lokal-kompakten Hausdorff–Räume mit ihren eigentlichen stetigen Abbildungen (F5E).

Beispiel. Die Transposition ist ein kontravarianter Funktor $^{\intercal} : \mathtt{Mat}_K \to \mathtt{Mat}_K$. Es gilt nämlich $^{\intercal} : \mathtt{Mat}_K(m,n) \to \mathtt{Mat}_K(n,m)$ mit $1_{n\times n}^{\intercal} = 1_{n\times n}$ und $(AB)^{\intercal} = B^{\intercal}A^{\intercal}$. (Siehe H5N)

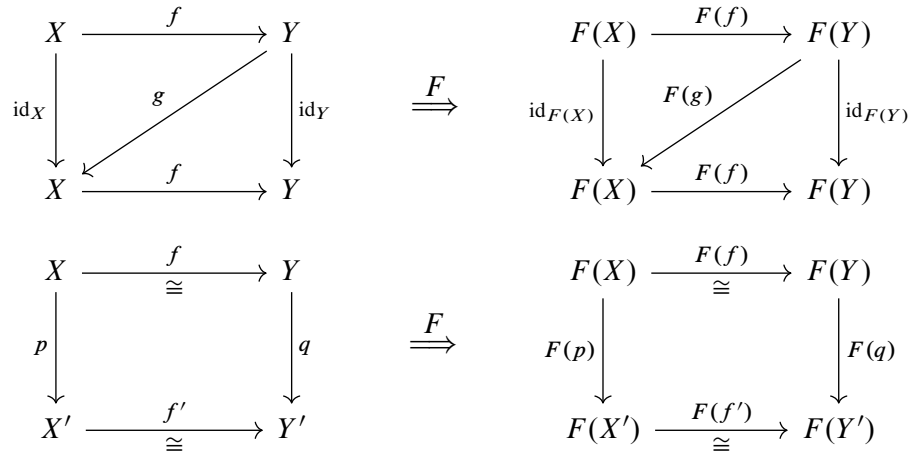
§H4b. Wie nutzen wir Kategorien und Funktoren? Ein Funktor $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ übersetzt eine Kategorie C in eine andere D, idealerweise eine komplizierte Situation in eine einfache.

Zur Illustration betone ich unsere Beispiele aus der Linearen Algebra und der Analysis. Der lokale Umkehrsatz (H2F) und der Rangsatz (H2G) sind typische und besonders schöne Beispiele: Stetig differenzierbare Funktionen können nahezu beliebig kompliziert sein, Matrizen sind wesentlich einfacher. Das ist das Erfolgsrezept der Differentialrechnung!

Damit will ich nicht den Eindruck erwecken, Kategorien und Funktoren seien hier der wesentliche Aspekt: Sie formulieren die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten und blenden die Feinstruktur aus, sie trennen die allgemeine Struktur von den speziellen Eigenschaften. Die Feinstruktur der betrachteten Kategorien ist wesentlich, um die Funktoren zu *konstruieren* und die behaupteten Gesetzmäßigkeiten zu *beweisen*. Gauß–Algorithmus und lokaler Umkehrsatz sind wesentlich tiefsinniger als unsere bescheidene Kategorientheorie.

In der Topologie steht die Kategorie Top der topologischen Räume im Mittelpunkt. Sie ist recht kompliziert, zum Beispiel ist es zu gegebenen Räumen X und Y im Allgemeinen schwer herauszufinden, ob sie homöomorph sind oder nicht. Ebenso ist es zu stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $f' : X' \to Y'$ schwer herauszufinden, ob sie (lokal) homöomorph sind oder nicht. Linear (H2D) oder differenzierbar (H2G) ist dies wesentlich leichter!

Um sich auch in unübersichtlichen Situationen wie der topologischen zurechtzufinden, haben sich Kategorien und Funktoren als ordnendes Prinzip bewährt. Zum Beispiel gilt:



Satz H4F. *Sei $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ein kovarianter (bzw. kontravarianter) Funktor.*

(0) Ist f links-/rechtsinvertierbar in C, so auch $F(f)$ in D (getauscht).
(1) Ist f ein Isomorphismus in C, dann ist $F(f)$ ein Isomorphismus in D.
(2) Sind zwei Objekte $X \cong Y$ isomorph in C, so auch $F(X) \cong F(Y)$ in D.
(3) Sind Morphismen $p \cong q$ isomorph in C, so auch $F(p) \cong F(q)$ in D.

BEWEIS. Die obigen Diagramme fassen die nötigen Rechnungen graphisch zusammen. Ausformuliert: (1) Aus $(f,g) : X \rightleftarrows Y$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ folgt $(F(f), F(g)) : F(X) \rightleftarrows F(Y)$ mit $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$. Symmetrisch hierzu: Aus $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ folgt $F(f) \circ F(g) = \mathrm{id}_{F(Y)}$. (2) Zusammengefasst: Jeder Isomorphismus $(f,g) : X \cong Y$ in C wird abgebildet auf einen Isomorphismus $(F(f), F(g)) : F(X) \cong F(Y)$ in D.

Die ergänzenden Isomorphie-Aussagen (3) und (4) sind damit klar. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H4c. Der Funktor π_0. Wir erinnern an wichtige Funktoren aus Kapitel G:

✍ **Beispiel H4G.** Komponenten definieren nach G1N den kovarianten Funktor ✍

$$\mathcal{Z} : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set} : X \mapsto \mathcal{Z}(X),$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (\mathcal{Z}(f) : \mathcal{Z}(X) \to \mathcal{Z}(Y) : \langle a \rangle_X \mapsto \langle f(a) \rangle_Y).$$

Jedem topologischen Raum X ordnen wir die Menge $\mathcal{Z}(X)$ seiner Komponenten zu und jeder stetigen Abbildung $f : X \to Y$ die zugehörige Abbildung $\mathcal{Z}(f) : \mathcal{Z}(X) \to \mathcal{Z}(Y)$.

✍ **Beispiel H4H.** Wegkomponenten definieren nach G2H den kovarianten Funktor ✍

$$\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set} : X \mapsto \pi_0(X),$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y) : [a]_X \mapsto [f(a)]_Y).$$

Jedem topologischen Raum X ordnen wir die Menge $\pi_0(X)$ seiner Wegkomponenten zu und jeder stetigen Abbildung $f : X \to Y$ die Abbildung $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.

✍ **Beispiel H4I.** Den Übergang zur Homotopiekategorie (G4L) leistet der Quotientenfunktor ✍

$$\mathrm{quot} : \mathtt{Top} \to \mathtt{hTop} : X \mapsto X,$$
$$(f : X \to Y) \mapsto ([f] : X \to Y).$$

Dank Homotopie-Invarianz (G4M) induziert π_0 den Funktor $\mathtt{hTop} \to \mathtt{Set} : [f] \mapsto \pi_0(f)$.

§H4d. Hom-Funktoren. Sei $\mathtt{C}$ eine lokal kleine Kategorie (H1P). Zu jedem Paar von Objekten $X, Y \in \mathtt{C}$ ist dann $\mathtt{C}(X,Y)$ die Menge aller Morphismen von X nach Y.

☞ **Übung H4J.** Zu einem festen Objekt $Z \in \mathtt{C}$ erhalten wir den kovarianten Funktor ☜

$$\mathtt{C}(Z,-) : \mathtt{C} \to \mathtt{Set} : X \mapsto \mathtt{C}(Z,X),$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (f_* : \mathtt{C}(Z,X) \to \mathtt{C}(Z,Y) : h \mapsto f \circ h).$$

Dual hierzu erhalten wir den kontravarianten Funktor

$$\mathtt{C}(-,Z) : \mathtt{C} \to \mathtt{Set} : X \mapsto \mathtt{C}(X,Z),$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (f^* : \mathtt{C}(Y,Z) \to \mathtt{C}(X,Z) : h \mapsto h \circ f).$$

✻ **H4J.** Wir rechnen geduldig nach, dass $\mathtt{C}(Z,-) : \mathtt{C} \to \mathtt{Set}$ ein kovarianter Funktor ist:

(1) Für jedes Objekt $X \in \mathtt{C}$ gilt $\mathtt{C}(Z, \mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\mathtt{C}(Z,X)}$, denn für jeden Morphismus $h \in \mathtt{C}(Z,X)$, also $h : Z \to X$ in $\mathtt{C}$, gilt gemäß obiger Konstruktion $(\mathrm{id}_X)_*(h) = \mathrm{id}_X \circ h = h$ dank Neutralität.

(2) Für je zwei Morphismen $f : V \to X$ und $g : X \to Y$ in $\mathtt{C}$ gilt

$$\mathtt{C}(Z, g \circ f) = (g \circ f)_* = g_* \circ f_* = \mathtt{C}(Z,g) \circ \mathtt{C}(Z,f),$$

denn für jeden Morphismus $h \in \mathtt{C}(Z,V)$ gilt dank Assoziativität

$$(g \circ f)_*(h) = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g_*(f \circ h) = g_*(f_*(h)) = (g_* \circ f_*)(h).$$

Genauso zeigen wir, dass $\mathtt{C}(-,Z) : \mathtt{C} \to \mathtt{Set}$ ein kontravarianter Funktor ist:

(1) Für jedes Objekt $X \in \mathtt{C}$ gilt $\mathtt{C}(\mathrm{id}_X, Z) = (\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{\mathtt{C}(X,Z)}$, denn für jeden Morphismus $h \in \mathtt{C}(X,Z)$, also $h : X \to Z$ in $\mathtt{C}$, gilt gemäß obiger Konstruktion $(\mathrm{id}_X)^*(h) = h \circ \mathrm{id}_X = h$ dank Neutralität.

(2) Für je zwei Morphismen $f : V \to X$ und $g : X \to Y$ in $\mathtt{C}$ gilt

$$\mathtt{C}(g \circ f, Z) = (g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \mathtt{C}(f,Z) \circ \mathtt{C}(g,Z),$$

denn für jeden Morphismus $h \in \mathtt{C}(Y,Z)$ gilt dank Assoziativität

$$(g \circ f)^*(h) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = f^*(h \circ g) = f^*(g^*(h)) = (f^* \circ g^*)(h).$$

☞ **§H4e. Abstrakter Nonsens, möglichst konkret.** Hom-Funktoren kennen Sie aus der Linearen Algebra: Jedem K–Vektorraum V ordnen Sie seinen Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_K(V,K)$ zu, und jeder K–linearen Abbildung $f : V \to W$ ihre duale Abbildung $f^* : W^* \to V^* : h \mapsto h \circ f$. Dieselbe Konstruktion gelingt genauso in jeder lokal kleinen Kategorie $\mathtt{C}$. ☜

☞ **Beispiel H4K.** Jeder topologische Raum Z definiert den ko/kontravarianten Funktor ☜

$$\mathscr{C}(Z,-) \,:\, \mathtt{Top} \to \mathtt{Top} \,:\, X \mapsto \mathscr{C}(Z,X),$$
$$\mathscr{C}(-,Z) \,:\, \mathtt{Top} \to \mathtt{Top} \,:\, X \mapsto \mathscr{C}(X,Z).$$

Die Abbildungsräume versehen wir wie üblich mit ihrer Kompakt-Offen-Topologie (F7E). Modulo Homotopie erhalten wir hieraus den ko/kontravarianten Funktor

$$[Z,-] \,:\, \mathtt{hTop} \to \mathtt{Set} \,:\, X \mapsto [Z,X],$$
$$[-,Z] \,:\, \mathtt{hTop} \to \mathtt{Set} \,:\, X \mapsto [X,Z].$$

Das grundlegende Beispiel ist der Wegkomponentenfunktor $\pi_0 = [\{*\},-]$ (G4I).

☞ **Übung H4L** (Baby–Yoneda)**.** Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ sind äquivalent: ☜

(1) Die stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist ein Homöomorphismus.
(2) Für jeden Raum Z ist $f_* : \mathscr{C}(Z,X) \to \mathscr{C}(Z,Y) : h \mapsto f \circ h$ eine Bijektion.
(3) Für jeden Raum Z ist $f^* : \mathscr{C}(Y,Z) \to \mathscr{C}(X,Z) : h \mapsto h \circ f$ eine Bijektion.

Ebenso sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(4) Die stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Homotopie-Äquivalenz.
(5) Für jeden Raum Z ist $[f]_* : [Z,X] \to [Z,Y] : [h] \mapsto [f \circ h]$ eine Bijektion.
(6) Für jeden Raum Z ist $[f]^* : [Y,Z] \to [X,Z] : [h] \mapsto [h \circ f]$ eine Bijektion.

Diese Äquivalenz gilt genauso in jeder lokal kleinen Kategorie.

✻ **H4L.** Wir zeigen „(1) ⇔ (2)“. Die Äquivalenz „(1) ⇔ (3)“ folgt unter Umdrehung der Kompositionen.

„(1) ⇒ (2)“: Wir wissen, dass $\mathscr{C}(Z,-)$ ein Funktor ist (H4J). Daher erhält $\mathscr{C}(Z,-)$ Isomorphismen, wie jeder Funktor (H4F): Aus Homöomorphismus $(f,g) : X \cong Y$ folgt Bijektion $(f_*,g_*) : \mathscr{C}(Z,X) \cong \mathscr{C}(Z,Y)$, denn $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\mathscr{C}(Z,X)}$ und $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\mathscr{C}(Z,Y)}$.

„(2) ⇒ (1)“: Es gelte die Bijektion (2) für alle Räume Z. Für $Z = Y$ ist $f_* : \mathscr{C}(Y,X) \to \mathscr{C}(Y,Y)$ bijektiv, es gibt also $g : Y \to X$ stetig mit $\mathrm{id}_Y = f_*(g) = f \circ g$. Für $Z = X$ ist $f_* : \mathscr{C}(X,X) \to \mathscr{C}(X,Y)$ injektiv, aus $f_*(g \circ f) = f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f = \mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X = f_*(\mathrm{id}_X)$ folgt also $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Die Äquivalenz gilt wie in $\mathtt{Top}$ genauso in jeder lokal kleinen Kategorie. Insbesondere gilt: Genau dann ist $f : X \to Y$ eine Homotpie-Äquivalenz, wenn $[f : X \to Y]$ in $\mathtt{hTop}$ ein Isomorphismus ist. Damit folgen die Äquivalenzen „(4) ⇔ (5)“ und „(4) ⇔ (6)“ wörtlich genauso wie zuvor (siehe G4T).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§H4f. Anwendungsbeispiel: Homotopie-Invarianten.** Jeder Funktor $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{C}$ erlaubt, statt der Kategorie Top ihr (vereinfachtes) Abbild in C zu untersuchen. Sind zwei topologische Räume X und Y homöomorph, also isomorphe Objekte in Top, dann sind ihre Bilder $F(X)$ und $F(Y)$ in C isomorph. Aus $F(X) \ncong F(Y)$ in C folgt somit $X \ncong Y$ in Top. ☜

☞ **Beispiel.** Sind die topologischen Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ homöomorph? Wir sehen, dass die Antwort negativ ausfällt: Wären $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^*$ homöomorph, also isomorph in Top, so wären auch ihre Bilder unter dem Funktor $\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ isomorph, aber $\pi_0(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}\}$ besteht aus einer Komponente, $\pi_0(\mathbb{R}^*) = \{\mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R}_{>0}\}$ hingegen aus zwei. In Set sind diese Objekte nicht isomorph, also können auch $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^*$ in Top nicht isomorph sein. ☜

☞ **Beispiel.** Sind die Abbildungen $\mathrm{id}, -\mathrm{id} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ homotop? Auch hier fällt die Antwort negativ aus: Gäbe es eine Homotopie $\mathrm{id} \simeq -\mathrm{id}$, so wären ihre Bilder unter dem homotopieinvarianten Funktor $\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ gleich, aber $\pi_0(\mathrm{id})$ ist die Identität, während $\pi_0(-\mathrm{id})$ die Transposition der beiden Komponenten ist. Aus $\pi_0(\mathrm{id}) \neq \pi_0(-\mathrm{id})$ folgt somit $\mathrm{id} \not\simeq -\mathrm{id}$. ☜

☞ **Bemerkung.** Viele Invarianten der (algebraischen) Topologie sind Variationen dieser Idee: ☜

$$\mathtt{Top} \xrightarrow{F} \mathtt{Top} \xrightarrow{\pi_0} \mathtt{Set}$$

Wir betrachten zunächst einen Funktor $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Top}$, etwa $\mathscr{C}(\mathbb{S}^1, -)$ oder $\mathscr{C}(-, \mathbb{S}^1)$, und komponieren diesen anschließend mit $\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$. Das ist leicht definiert, und wenn in den betrachteten Fällen zudem noch die explizite Berechnung gelingt, so können wir damit topologische Probleme lösen, zum Beispiel Räume und Abbildungen unterscheiden.

☞ **§H4g. Anwendungsbeispiel: Konfigurationsräume.** Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ lassen sich nicht unmittelbar durch π_0 unterscheiden, denn beide sind zusammenziehbar, somit sind $\pi_0(\mathbb{R})$ und $\pi_0(\mathbb{R}^2)$ einpunktige Mengen, also in Set isomorph. Das bedeutet natürlich nicht, dass die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ homöomorph wären. Um $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$ zu beweisen, müssen wir eine bessere Konstruktion finden, zum Beispiel können wir einen Punkt entfernen… aber welchen? Da keiner schöner ist als der andere, erlauben wir die Wahl *jedes* beliebigen Punktes. Funktoriell gesehen entspricht dies der Bildung des Konfigurationsraumes: ☜

☞ **Übung H4M.** Zu jedem topologischen Raum X betrachten wir den *Konfigurationsraum* ☜

$$\tilde{C}_n(X) := \mathtt{Emb}(\{1,\dots,n\}, X) = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in X^n \;\middle|\; x_i \neq x_j \text{ für alle } i \neq j \right\} \subset X^n.$$

(1) Ergänzen Sie dies zu einem Funktor $\tilde{C}_n : \mathtt{Emb} \to \mathtt{Emb}$. (2) Bestimmen Sie $\sharp\pi_0(\tilde{C}_n(\mathbb{R}^d))$. So beweist der Funktor $\pi_0 \circ \tilde{C}_2 : \mathtt{Emb} \to \mathtt{Set}$ die Unterscheidung $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$, sogar $\mathbb{R}^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^1$. (3) Lässt sich die Zuordnung $X \mapsto \tilde{C}_n(X)$ ergänzen zu einem Funktor $\tilde{C}_n : \mathtt{Top} \to \mathtt{Top}$?

✻ **H4M.** (1) Ein Funktor muss nicht nur Objekte auf Objekte abbilden, sondern auch Morphismen auf Morphismen. Für $f : X \hookrightarrow Y$ setzen wir $\tilde{C}_n(f) : \tilde{C}_n(X) \hookrightarrow \tilde{C}_n(Y) : (x_1,\dots,x_n) \mapsto (f(x_1),\dots,f(x_n))$.

(2) Ein Weg $\gamma : [0,1] \to \tilde{C}_n(X) : t \mapsto (\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$ entspricht n Wegen $\gamma_1,\dots,\gamma_n : [0,1] \to X$, die sich nie kreuzen. Für $X = \mathbb{R}$ finden wir $\pi_0(\tilde{C}_n(\mathbb{R})) = \{\, [(\sigma(1),\dots,\sigma(n))] \mid \sigma \in S_n \,\}$: Jede Konfiguration $(x_1,\dots,x_n) \in \tilde{C}_n(\mathbb{R})$ lässt sich verbinden mit $(\sigma(1),\dots,\sigma(n)) \in \tilde{C}_n(X)$ für eine geeignete Permutation $\sigma \in S_n$. Verschiedene Permutationen $\sigma \neq \sigma'$ lassen sich nicht verbinden: Dank Zwischenwertsatz (C3R) bleibt die Ordnung der Punkte erhalten, das heißt, aus $\gamma_i(0) < \gamma_j(0)$ folgt $\gamma_i(1) < \gamma_j(1)$. Für $X = \mathbb{C}$ hingegen gilt $\pi_0(\tilde{C}_n(\mathbb{C})) = \{\, [(1,\dots,n)] \,\}$, denn jede Konfiguration lässt sich in die Standardposition $(1,\dots,n)$ bewegen.

(3) Nein, das ist unmöglich. In Top gilt $\mathbb{R} \leftrightarrows \mathbb{C}$, aber in Set nicht $\pi_0(\tilde{C}_n(\mathbb{R})) \leftrightarrows \pi_0(\tilde{C}_n(\mathbb{C}))$, siehe (2). Hätten wir einen Funktor $\tilde{C}_n : \mathtt{Top} \to \mathtt{Top}$, so müsste dieser Retrakte erhalten (H4F). Das leistet hier nur $\tilde{C}_1$.

§H4h. Vergissfunktoren. Vergessen gelingt leicht und ist manchmal sogar nützlich:

Beispiel H4N. Den Übergang von metrischen zu topologischen Räumen leistet der Funktor

$$\begin{aligned} F : \mathtt{Met} &\to \mathtt{Top}, \\ (X,d) &\mapsto (X,\mathcal{T}_d), \\ (f : (X,d) \to (Y,e)) &\mapsto (f : (X,\mathcal{T}_d) \to (Y,\mathcal{T}_e)). \end{aligned}$$

Jedem metrischen Raum (X,d) ordnen wir den topologischen Raum $(X,\mathcal{T}_d)$ zu, wobei $\mathcal{T}_d$ die von der Metrik d induzierte Topologie auf derselben Trägermenge X ist (C2M). Jeder stetigen Abbildung $f : (X,d) \to (Y,e)$ ordnen wir dieselbe Abbildung zu, aber diesmal betrachtet als Morphismus $f : (X,\mathcal{T}_d) \to (Y,\mathcal{T}_e)$ topologischer Räume (C3G).

Dieser Funktor codiert das Metrisierungsproblem: Welche topologischen Räume sind metrisierbar? Dies ist nicht immer möglich, und wenn es möglich ist, so nicht eindeutig. Wir erinnern an die Metrisierungssätze von Urysohn E5R und Bing–Nagata–Smirnov E5U.

Definition H4O. Ein Funktor $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ heißt *treu*, wenn zu jedem Paar $A, B \in \mathtt{C}$ die Abbildung $F_{A,B} : \mathtt{C}(A,B) \to \mathtt{D}(F(A),F(B))$ injektiv ist. Entsprechend heißt F *voll*, wenn $F_{A,B}$ stets surjektiv ist. Der obige Funktor $F : \mathtt{Met} \to \mathtt{Top}$ ist voll und treu, kurz *volltreu*.

Beispiel H4P. Für jede Unterkategorie $\mathtt{S} < \mathtt{C}$ ist die Inklusion $\mathtt{S} \hookrightarrow \mathtt{C}$ ein Funktor (H1B), immer treu, aber nicht immer voll. Im Beispiel $\mathtt{Isom} \to \mathtt{Met}$ sind die Objekte dieselben, aber die Morphismen sind eingeschränkt; der Inklusionsfunktor ist treu, aber nicht voll.

Beispiel H4Q. Das Vergessen der Topologie definiert den Vergissfunktor:

$$\begin{aligned} V : \mathtt{Top} &\to \mathtt{Set}, \\ (X,\mathcal{T}) &\mapsto X, \\ (f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)) &\mapsto (f : X \to Y). \end{aligned}$$

Er ordnet jedem topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ die Trägermenge X zu und jeder stetigen Abbildung $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ dieselbe Abbildung $f : X \to Y$ der Trägermengen.

Beispiel H4R. Vergissfunktoren haben wir für alle Kategorien strukturierter Mengen und strukturerhaltenden Abbildungen durch (teilweises) Vergessen der Struktur, zum Beispiel $\mathtt{Met} \to \mathtt{Top}$, $\mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ wie oben oder $\mathtt{Vec}_{\mathbb{C}} \to \mathtt{Vec}_{\mathbb{R}}$, $\mathtt{Vec}_K \to \mathtt{Ab}$, $\mathtt{Grp} \to \mathtt{Set}$:

Jeder $\mathbb{C}$–Vektorraum ist insbesondere ein $\mathbb{R}$–Vektorraum durch Einschränkung der Skalare von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}$, und jede $\mathbb{C}$–lineare Abbildung ist insbesondere $\mathbb{R}$–linear.

Jeder K–Vektorraum $(V,+,\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe $(V,+)$, jede K–lineare Abbildung $f : (V,+,\cdot) \to (W,+,\cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus $f : (V,+) \to (W,+)$.

Jede Gruppe ist eine Menge, jeder Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung.

Definition H4S. Eine *konkrete Kategorie* $(\mathtt{C},V)$ besteht aus einer Kategorie $\mathtt{C}$ und einem treuen Funktor $V : \mathtt{C} \to \mathtt{Set}$. Den Funktor V betrachten wir als Vergissfunktor, der jedem Objekt $X \in \mathtt{C}$ die zugrundeliegende Menge $V(X) \in \mathtt{Set}$ zuordnet, und jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathtt{C}$ die zugrundeliegende Abbildung $V(f) : V(X) \to V(Y)$ der Mengen.

Beispiel. Die Kategorie $\mathtt{Top}$ ist konkret vermöge $V : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ wie oben, hingegen ist $\mathtt{hTop}$ nicht konkret. (P. Freyd: *Homotopy is not concrete*, Springer LNM 168, 1970)

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung H4T. (1) Ist $P_n : \mathtt{Mon} \to \mathtt{Set} : M \mapsto P_n(M) = \{ a^n \mid a \in R \}$ ein Funktor?

(2) Ist n–Torsion $T_n : \mathtt{Mon} \to \mathtt{Set} : M \mapsto T_n(M) = \{ a \in M \mid a^n = 1 \}$ ein Funktor?

(3) Die Abbildung $(-)^\times : \mathtt{Mon} \to \mathtt{Grp} : M \mapsto M^\times$ ordnet jedem Monoid M die Gruppe $M^\times = \{ a \in M \mid \exists b \in R : ab = ba = 1 \}$ zu. Lässt sich $(-)^\times$ zu einem Funktor ergänzen?

(4) Die Abbildung $Z : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab} : G \mapsto Z(G)$ ordnet jeder Gruppe G ihr Zentrum $Z(G) = \{ z \in G \mid \forall a \in G : az = za \}$ zu. Lässt sich Z zu einem Funktor ergänzen?

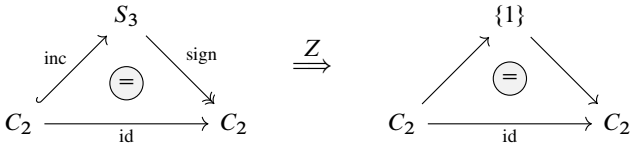
✻ **H4T.** Ein Funktor muss nicht nur Objekte auf Objekte abbilden, sondern auch Morphismen auf Morphismen. Letzteres fehlt hier. Dies versuchen wir nun jeweils zu ergänzen, und zwar so natürlich wir möglich:

(1) Zu $f : M \to N$ haben wir $P_n(f) : P_n(M) \to P_n(N) : a^n \mapsto f(a^n) = f(a)^n$.

(2) Zu $f : M \to N$ haben wir $T_n(f) : T_n(M) \to T_n(N) : a \mapsto f(a)$, denn $f(a)^n = f(a^n) = f(1) = 1$.

(3) Jeder Monoidhomomorphismus $f : M \to N$ erhält Invertierbarkeit, dann aus $ab = ba = 1$ folgt $f(a)f(b) = f(b)f(a) = f(1) = 1$. Wir können also $f^\times : M^\times \to N^\times$ durch Einschränkung definieren. Damit ist $(-)^\times : \mathtt{Mon} \to \mathtt{Grp}$ tatsächlich ein Funktor, denn es gilt $(\mathrm{id}_M)^\times = \mathrm{id}_{M^\times}$ und $(g \circ f)^\times = (g)^\times \circ (f)^\times$.

(4) Der direkte Versuch einer Definition schlägt fehl: Ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ erfüllt im Allgemeinen nicht $f(Z(G)) \subset Z(H)$. Wir zeigen nun allgemein: Es gibt keine Lösung dieses Problems. Angenommen, es gäbe einen solchen Funktor $Z : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}$ mit $G \mapsto Z(G)$.



In der symmetrischen Gruppe $S_3 = \mathrm{Sym}(\{1,2,3\})$ betrachten wir die kommutative Untergruppe $C_2 = \{\mathrm{id}, (12)\}$. Wir erhalten das linke Diagramm in $\mathtt{Grp}$. Hingegen ist das rechte Diagramm in $\mathtt{Ab}$ unmöglich! Demnach kann es den ersehnten Funktor $Z : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}$ mit $G \mapsto Z(G)$ nicht geben.

Übung H4U. Sei $T : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ein (kovarianter) Funktor. Zeigen oder widerlegen Sie:
(1) Ist $f : X \to Y$ ein $\mathtt{C}$–Isomorphismus, so ist $T(f) : T(X) \to T(Y)$ ein $\mathtt{D}$–Isomorphismus.
(2) Ist $T(f) : T(X) \to T(Y)$ ein $\mathtt{D}$–Isomorphismus, so ist $f : X \to Y$ ein $\mathtt{C}$–Isomorphismus.

✻ **H4U.** (1) Das ist richtig, siehe H4F: Ist $f : X \to Y$ ein $\mathtt{C}$–Isomorphismus, so existiert ein hierzu inverser $\mathtt{C}$–Morphismus $g : Y \to X$ mit $(f,g) : X \cong Y$, also $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Anwendung des Funktor T auf $(f,g) : X \cong Y$ ergibt $(T(f), T(g)) : T(X) \cong T(Y)$, denn $T(g) \circ T(f) = T(g \circ f) = T(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T(X)}$ und $T(f) \circ T(g) = T(f \circ g) = T(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{T(Y)}$. (Als Diagramm haben wir dies in H4F ausgeführt.)

(2) Das ist falsch: Sie finden leicht diverse Gegenbeispiele, es ist der typische Fall! (2a) Der Funktor $\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ liefert einfache Gegenbeispiele. Ganz konkret: Die stetige Abbildung $f : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist kein Homöomorphismus (Isomorphismus in $\mathtt{Top}$), aber $\pi_0(f) : \pi_0(\{0\}) \to \pi_0(\mathbb{R})$ ist eine Bijektion (Isomorphismus in $\mathtt{Set}$). (2b) Besonders schön ist der Vergissfunktor $V : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$: Nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus! (2c) Minimalistisches Gegenbeispiel ist $T : \{\bullet \to \bullet\} \to \{\bullet\}$, ebenso nahezu jeder Funktor in die terminale Kategorie $\{\bullet\}$, bestehend aus einem Objekt 0 und nur einem Morphismus id_0.

Bemerkung: Funktoren *erhalten* Isomorphismen, aber sie *reflektieren* nicht Isomorphismen. Ausführlich: Jeder Funktor überführt Isomorphismen in Isomorphismen, wie in (1) gesehen, aber die in (2) gefragte Umkehrung ist eine seltene Ausnahme. Wo sie gilt, ist dies ein bemerkenswerter Satz.

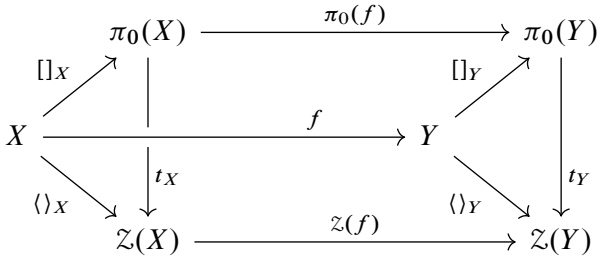
Sie kennen zwei grundlegende Beispiele aus der Linearen Algebra: Die Monoidhomomorphismen $\mathrm{sign} : (E_X, \circ, \mathrm{id}_X) \to (\{\pm 1, 0\}, \cdot, 1)$ (B1S) und $\det : (K^{n\times n}, \cdot, 1) \to (K, \cdot, 1)$ (B1Y) reflektieren Invertierbarkeit.

Als berühmtes Beispiel und Ausblick der Algebraischen Topologie nenne ich hier den Satz von Whitehead: Sei $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung zwischen zellulären Räumen, etwa Polyeder von Simplizialkomplexen. Angenommen, f induziert Isomorphismen $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_n(Y, y_0)$ auf den Homotopiegruppen für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f eine Homotopie-Äquivalenz, also ein Isomorphismus in $\mathtt{hTop}$.

§H5. Natürliche Transformationen

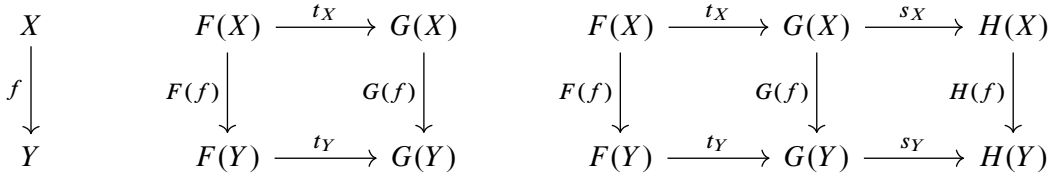
§H5a. Natürliche Transformationen. Wir beginnen mit motivierenden Beispielen:

Beispiel H5A. Zwischen den Funktoren $\pi_0, \mathcal{Z} : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ besteht folgende Beziehung.



Für jeden topologischen Raum X haben wir die Abbildung $t_X : \pi_0(X) \to \mathcal{Z}(X)$, die jeder Wegkomponente $[a]_X$ die sie umfassende Komponente $\langle a\rangle_X$ zuordnet. Diese Zuordnung wird man völlig zu Recht als „natürlich“ empfinden. Natürlichkeit bedeutet genauer: Für jede stetige Funktion $f : X \to Y$ ist das obige Diagramm kommutativ.

Definition H5B. Seien $F, G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ Funktoren. Eine *Transformation* $t : F \to G$ ordnet jedem $\mathtt{C}$–Objekt X einen $\mathtt{D}$–Morphismus $t_X : F(X) \to G(X)$ zu. Wir nennen t *natürlich*, wenn für jeden $\mathtt{C}$–Morphismus $f : X \to Y$ die Gleichung $t_Y \circ F(f) = G(f) \circ t_X$ gilt.



Eine *natürliche Äquivalenz* $(t,s) : F \cong G$ besteht aus natürlichen Transformationen $t : F \to G$ und $s : G \to F$ mit $s \circ t = \mathrm{id}_F$ und $t \circ s = \mathrm{id}_G$. Für jedes $\mathtt{C}$–Objekt X ist $(t_X, s_X) : F(X) \cong G(X)$ ein $\mathtt{D}$–Isomorphismus, so dass wir nur t oder s angeben müssen. Natürlichkeit von t impliziert die von s und umgekehrt, so dass wir nur eine prüfen müssen.

Bemerkung. Wenn wir Funktoren $F, G, H, \ldots : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ als Objekte betrachten, dann sind die natürlichen Transformationen ihre Morphismen. Die Identität $\mathrm{id}_F : F \to F$ ist gegeben durch $(\mathrm{id}_F)_X = \mathrm{id}_{F(X)}$. Die Komposition von $t : F \to G$ und $s : G \to H$ ist objektweise gegeben durch $(s \circ t)_X = s_X \circ t_X$, wie im obigen Diagramm gezeigt. Dies definiert die Kategorie $\mathtt{Fun}(\mathtt{C}, \mathtt{D})$. Eine natürliche Äquivalenz $(t,s) : F \cong G$ ist demnach ein Isomorphismus von Funktoren; wir nennen dies daher auch einen *natürlichen Isomorphismus*.

Beispiel. Beispiel H5A zeigt die natürliche Transformation $t : \pi_0 \to \mathcal{Z} : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$. Auf der Unterkategorie der lokal wegzusammenhängenden Räume ist dies sogar eine natürliche Äquivalenz (G3C). Dies kürzen wir wie üblich mit der Schreibweise $\pi_0 \cong \mathcal{Z}$ ab.

Beispiel. Beispiel H5A zeigt auch, dass $[\,]_X : V(X) \to \pi_0(X)$ und $\langle\rangle_X : V(X) \to \mathcal{Z}(X)$ natürliche Transformationen sind vom Vergissfunktor $V : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ zu π_0 und $\mathcal{Z}$. Auf der Unterkategorie der diskreten Räume, oder allgemeiner der total unzusammenhängenden Räume, ist diese eine natürliche Äquivalenz, kurz $V \cong \pi_0 \cong \mathcal{Z}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H5b. Potenzmenge und Indikatorfunktion. Aus der Mengenlehre wissen wir:

Beispiel H5C. Für jede Menge X haben wir eine natürliche Äquivalenz $\mathfrak{P}X \cong \{0,1\}^X$ zwischen den kontravarianten Funktoren $\mathfrak{P}^* : \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$ (H4B) und $\mathtt{Set}(-,\{0,1\})$ (H4J).

$$\begin{array}{ccc} X & & \mathfrak{P}(X) \underset{s_X}{\overset{t_X}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\cong}}}} \{0,1\}^X \\ \Big\downarrow f & & \Big\uparrow f^* \qquad\qquad \Big\uparrow f^\flat = \mathtt{Set}(f,\{0,1\}) \\ Y & & \mathfrak{P}(Y) \underset{s_Y}{\overset{t_Y}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\cong}}}} \{0,1\}^Y \end{array}$$

Natürlichkeit bedeutet, dass diese Isomorphismen mit den von den Funktoren transportierten Morphismen kommutieren. Um dies explizit auszuführen, konstruieren wir für jede Menge X Bijektionen $t_X : \mathfrak{P}X \xrightarrow{\sim} \{0,1\}^X$ und $s_X : \{0,1\}^X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{P}X$ wie folgt:

- Die Transformation $t_X : \mathfrak{P}X \to \{0,1\}^X$ ordnet jeder Teilmenge $A \subset X$ ihre *Indikatorfunktion* $\mathbf{I}_A : X \to \{0,1\}$, wobei $\mathbf{I}_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\mathbf{I}_A(x) = 0$ für $x \notin A$.
- Die Transformation $s_X : \{0,1\}^X \to \mathfrak{P}X$ ordnet jeder Funktion $h : X \to \{0,1\}$ ihren *Träger* $\operatorname{supp}(h) \subset X$ zu, wobei $\operatorname{supp}(h) = \{\, x \in X \mid h(x) \neq 0 \,\} = \{\, x \in X \mid h(x) = 1 \,\}$.

Nach Konstruktion gilt $s_X \circ t_X = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}X}$ und $t_X \circ s_X = \mathrm{id}_{\{0,1\}^X}$. Diese Transformationen sind natürlich, das heißt, das obige Diagramm kommutiert: Jede Abbildung $f : X \to Y$ induziert $f^* : \mathfrak{P}Y \to \mathfrak{P}X : B \mapsto f^{-1}(B)$ sowie $f^\flat : \{0,1\}^Y \to \{0,1\}^X : h \mapsto h \circ f$. Hierbei gilt $\mathbf{I}_{f^*(B)} = \mathbf{I}_B \circ f = f^\flat(\mathbf{I}_B)$ und $\operatorname{supp}(f^\flat(h)) = \operatorname{supp}(h \circ f) = f^{-1}(\operatorname{supp}(h))$.

§H5c. Die Determinante als natürliche Transformation. Sei $\mathtt{Ring}$ die Kategorie der Ringe mit Eins. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ haben wir den Funktor $M_n : \mathtt{Ring} \to \mathtt{Ring}$, der jedem Ring R den Matrizenring $M_n(R) = R^{n\times n}$ zuordnet und jedem Homomorphismus $f : R \to S$ die komponentenweise Abbildung $M_n(f) : M_n(R) \to M_n(S)$.

Wir betrachten die Unterkategorie $\mathtt{CRing} < \mathtt{Ring}$ der kommutativen Ringe R mit Eins. Hier haben wir die Determinante $\det_R : M_n(R) \to R$ dank Satz B1Y. Diese ist für alle Ringe durch dieselbe Formel definiert und somit natürlich: Für jeden Homomorphismus $f : R \to S$ in $\mathtt{CRing}$ gilt $\det_S \circ M_n(f) = f \circ \det_R$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} R = M_1(R) & \xleftarrow{\det_R} & M_n(R) \\ \Big\downarrow f & & \Big\downarrow M_n(f) \\ S = M_1(S) & \xleftarrow{\det_S} & M_n(S) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R^\times = \mathrm{GL}_1(R) & \xleftarrow{\det_R} & \mathrm{GL}_n(R) \\ \Big\downarrow \mathrm{GL}_1(f) & & \Big\downarrow \mathrm{GL}_n(f) \\ S^\times = \mathrm{GL}_1(S) & \xleftarrow{\det_S} & \mathrm{GL}_n(S) \end{array}$$

Dank Multiplikativität der Determinante erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $\det_R : \mathrm{GL}_n(R) \to R^\times$ von der Gruppe $\mathrm{GL}_n(R)$ der invertierbaren Matrizen in die Gruppe $R^\times$ der invertierbaren Elemente des Grundrings R. Zusammenfassend haben wir:

Beispiel H5D. Zu den Funktoren $M_n : \mathtt{CRing} \to \mathtt{Ring}$ und $M_1 : R \mapsto R$ haben wir die natürliche Transformation $\det : M_n \to M_1$. Insbesondere erhalten wir zu den Funktoren $\mathrm{GL}_n : \mathtt{CRing} \to \mathtt{Grp}$ und $\mathrm{GL}_1 : R \mapsto R^\times$ die natürliche Transformation $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$.

§H5d. Isomorphie und Äquivalenz von Kategorien. Wie für mathematische Objekte üblich haben wir auch für Kategorien einen Isomorphiebegriff:

Definition H5E. Eine *Isomorphie* $(F,G) : \mathtt{C} \cong \mathtt{D}$ zwischen zwei Kategorien $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ besteht aus Funktoren $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ und $G : \mathtt{D} \to \mathtt{C}$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathtt{C}}$ und $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathtt{D}}$.

Eine *Äquivalenz* $(F,G) : \mathtt{C} \simeq \mathtt{D}$ besteht aus Funktoren $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ und $G : \mathtt{D} \to \mathtt{C}$ und natürlichen Äquivalenzen $(t,t') : G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathtt{C}}$ und $(s,s') : F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathtt{D}}$.

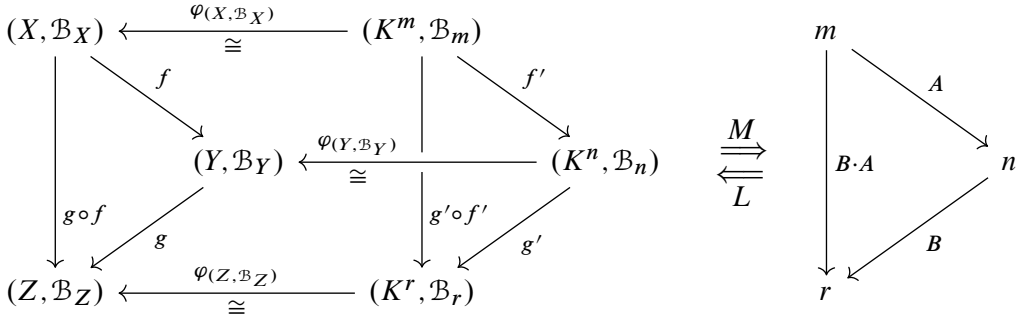
Isomorphie $\mathtt{C} \cong \mathtt{D}$ bedeutet, dass $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ im Wesentlichen gleich sind. Das ist jedoch oft eine allzu strenge Bedingung. Äquivalenz ist wesentlich flexibler. Wir illustrieren die Isomorphie und Äquivalenz von Kategorien am zentralen Beispiel der Linearen Algebra:

Satz H5F. *Für jeden Ring K haben wir den Isomorphismus $(L,M) : \mathtt{Mat}_K \cong \mathtt{NatMod}_K$. Hingegen gilt $\mathtt{FinMod}_K \ncong \mathtt{Mat}_K$, denn $\mathtt{FinMod}_K$ hat überabzählbar viele Objekte.*

BEWEIS. Sei $\mathtt{NatMod}_K < \mathtt{FinMod}_K$ die volle Unterkategorie der Moduln K^n mit $n \in \mathbb{N}$. Der Funktor $L : \mathtt{Mat}_K \to \mathtt{NatMod}_K$ ordnet jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ den Modul $L(n) = K^n$ zu und jeder Matrix $A \in K^{n\times m}$ die Abbildung $L(A) : K^m \to K^n : v \mapsto Av$. Die Matrixmultiplikation wurde vorausschauend so definiert, dass $L(B \cdot A) = L(B) \circ L(A)$ gilt. Umgekehrt haben wir den Funktor $M : \mathtt{NatMod}_K \to \mathtt{Mat}_K$: Dem Modul K^n wird seine Dimension $n \in \mathbb{N}$ zugeordnet und jeder linearen Abbildung $f : K^m \to K^n$ die zugehörige Matrix $M(f) \in K^{m\times n}$: Bezüglich der kanonischen Basen gilt $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_{ij}, und wir setzen $M(f) := (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$. Auch hier gilt $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$. Wir sehen $M \circ L = \mathrm{id}_{\mathtt{Mat}_K}$ und $L \circ M = \mathrm{id}_{\mathtt{NatMod}_K}$. So erhalten wir den Isomorphismus $(L,M) : \mathtt{Mat}_K \cong \mathtt{NatMod}_K$. □

Nach diesem Erfolg möchten wir den Funktor $M : \mathtt{NatMod}_K \to \mathtt{Mat}_K$ auf $\mathtt{FinMod}_K$ ausdehnen: Wir wollen jeder K–linearen Abbildung $f : X \to Y$ eine Matrix $A \in K^{n\times m}$ zuordnen. Hierzu müssen wir allerdings Basen von X und Y wählen. Nicht immer existiert eine Basis, und falls eine existiert, so gibt es keine kanonische Wahl. Wir machen die Not zur Tugend und betrachten Paare $(X, \mathcal{B}_X)$, wobei X ein K–Modul ist und $\mathcal{B}_X = (x_1, \dots, x_m)$ eine Basis von X. Als Morphismen $f : (X, \mathcal{B}_X) \to (Y, \mathcal{B}_Y)$ betrachten wir K–lineare Abbildungen $f : X \to Y$ wie zuvor. Wir erhalten so die Kategorie $\mathtt{FinMod}_K^b$ der endlich-basierten K–Moduln. Als volle Unterkategorie haben wir $\mathtt{NatMod}_K^b$ mit Objekten $(K^n, \mathcal{B}_n)$, wobei $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von K^n ist; speziell hier gibt es eine kanonische Wahl. Der Vergissfunktor $\mathtt{FinMod}_K^b \to \mathtt{FinMod}_K : (X, \mathcal{B}_X) \mapsto X$ vergisst die gewählte Basis.

Zu jedem Objekt $(X, \mathcal{B}_X)$ mit $\dim X = m$ haben wir den kanonischen Isomorphismus $\varphi : (K^m, \mathcal{B}_m) \xrightarrow{\sim} (X, \mathcal{B}_X)$ mit $e_k \mapsto x_k$. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:



© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Satz H5G. *Es gilt* $(L,M) : \mathtt{Mat}_K \simeq \mathtt{FinMod}_K^b$*: Die Kategorie der Matrizen ist (nicht isomorph aber) äquivalent zur Kategorie der endlich-basierten* K*–Moduln.*

BEWEIS. Aus Satz H5F haben wir die Funktoren $L : \mathtt{Mat}_K \xrightarrow{\sim} \mathtt{NatMod}_K \hookrightarrow \mathtt{FinMod}_K^b$ und $M : \mathtt{FinMod}_K^b \to \mathtt{Mat}_K$ wie oben erklärt. Nach Konstruktion gilt $M \circ L = \mathrm{id}_{\mathtt{Mat}_K}$. Umgekehrt gilt i.A. $L \circ M \neq \mathrm{id}_{\mathtt{FinMod}_K^b}$, denn für jeden basierten Modul $(X, \mathcal{B}_X)$ mit $\dim X = m$ gilt $(L \circ M)(X, \mathcal{B}_X) = L(m) = (K^m, \mathcal{B}_m)$. Dank der gegebenen Basen $\mathcal{B}_X = (x_1, \dots, x_m)$ von X und $\mathcal{B}_m = (e_1, \dots, e_m)$ von K^m haben wir den kanonischen Isomorphismus $\varphi : (K^m, \mathcal{B}_m) \xrightarrow{\sim} (X, \mathcal{B}_X)$ mit $e_k \mapsto x_k$. All diese Daten ergeben das obige kommutative Diagramm. Das stiftet die natürliche Äquivalenz $\varphi : L \circ M \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathtt{FinMod}_K^b}$. □

§H5e. Skelett einer Kategorie. Die obige Konstruktion ist ein zentrales Werkzeug der Linearen Algebra, da man so „natürlich“ zwischen linearen Abbildungen und Matrizen hin- und herwechseln kann. Die Kernidee ist jedoch ganz allgemein:

Satz H5H. *Sei* $\mathtt{C}$ *eine Kategorie und* $\mathtt{U} < \mathtt{C}$ *eine volle Unterkategorie. Angenommen, zu jedem Objekt* X *in* $\mathtt{C}$ *existiert (mindestens) ein isomorphes Objekt* Y *in* $\mathtt{U}$*. Dann ist die Inklusion* $F : \mathtt{U} \hookrightarrow \mathtt{C}$ *eine Äquivalenz von Kategorien.*

BEWEIS. Für $X \in \mathtt{U}$ setzen wir $G(X) := X$ und $t_X := \mathrm{id}_X$. Zu $X \in \mathtt{C} \setminus \mathtt{U}$ wählen wir ein $\mathtt{C}$–isomorphes Objekt $G(X) \in \mathtt{U}$ und einen $\mathtt{C}$–Isomorphismus $t_X : G(X) \xrightarrow{\sim} X$. Zu jedem $\mathtt{C}$–Morphismus $f : X \to Y$ definieren wir $G(f) : G(X) \to G(Y)$ durch $G(f) := t_Y^{-1} \circ f \circ t_X$. Dieser Morphismus liegt in der (vollen!) Unterkategorie $\mathtt{U}$. Wir erhalten so einen Funktor $G : \mathtt{C} \to \mathtt{U}$, denn es gilt $G(\mathrm{id}_X) = t_X^{-1} \circ \mathrm{id}_{G(X)} \circ t_X = \mathrm{id}_{G(X)}$ für jedes Objekt X in $\mathtt{C}$, sowie

$$G(g) \circ G(f) = (t_Z^{-1} \circ g \circ t_Y) \circ (t_Y^{-1} \circ f \circ t_X) = t_Z^{-1} \circ (g \circ f) \circ t_X = G(g \circ f)$$

für alle Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ in $\mathtt{C}$. Dank dieser Konstruktion erhalten wir die Gleichheit $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathtt{U}}$ und die natürliche Transformation $t : F \circ G \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathtt{C}}$. □

Bemerkung. Zur Konstruktion von G und t müssen wir im Allgemeinen willkürliche Wahlen treffen. In Satz H5G haben wir diese Willkür vermieden, indem wir jedem Vektorraum $X \in \mathtt{FinVec}_K$ eine fest gewählte Basis mitgegeben haben. Diese Wahl macht alle weiteren Rechnungen explizit, so wie es in der Praxis der Linearen Algebra benötigt wird.

Noch strenger und sparsamer fassen wir diese Idee, wenn wir verlangen, dass je zwei verschiedene Objekte in $\mathtt{U}$ nicht isomorph sein dürfen (weder $\mathtt{U}$–isomorph noch $\mathtt{C}$–isomorph, beide Eigenschaften sind offensichtlich äquivalent da $\mathtt{U} < \mathtt{C}$ eine volle Unterkategorie ist).

Definition H5I. Sei $\mathtt{C}$ eine Kategorie. Ein *Skelett* ist eine volle Unterkategorie $\mathtt{S} < \mathtt{C}$, sodass zu jedem Objekt X in $\mathtt{C}$ genau ein $\mathtt{C}$–isomorphes Objekt Y in $\mathtt{S}$ existiert.

Dank Satz H5H ist die Inklusion $\mathtt{S} \hookrightarrow \mathtt{C}$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Beispiele.
- In $\mathtt{FinSet}$ bilden die Mengen $n = \{0, \dots, n-1\} \in \mathbb{N}$ das Skelett $\mathtt{NatSet}$.
- In $\mathtt{FinVec}_K$ bilden die kanonischen Vektorräume K^n mit $n \in \mathbb{N}$ das Skelett $\mathtt{NatVec}_K$.
- In der Kategorie $\mathtt{WOrd}$ der Wohlordnungen bilden die Ordinalzahlen ein Skelett.

Übung H5J. Jede Kategorie $\mathtt{C}$ besitzt ein Skelett $\mathtt{S}$, (wobei wir ein geeignetes Auswahlaxiom voraussetzen müssen und wollen). Je zwei Skelette $\mathtt{S}$, $\mathtt{S}'$ von $\mathtt{C}$ sind isomorph. Zwei Kategorien $\mathtt{C}$, $\mathtt{C}'$ sind genau dann äquivalent, wenn sie isomorphe Skelette besitzen.

§H5f. Konstruktion von Signatur und Determinante: erst Skelett, dann überall!
Aus der Linearen Algebra kennen Sie den Trick, eine Konstruktionen zunächst auf einem Skelett auszuführen und dann auf die gesamte Kategorie auszudehnen. Ich erinnere hierzu an die grundlegenden Konstruktionen von Signatur und Determinante:

Übung H5K. Sei `FinSet` die Kategorie der endlichen Mengen und ihrer Abbildungen (H1F). Hierin bilden die Mengen $X = \{0,\dots,n-1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ das Skelett `NatSet`. Hierzu ist $\operatorname{End}(X) = \operatorname{Abb}(X,X) = X^X$ ein Monoid (H2H). Hierauf definieren wir die *Signatur* (B1S)

$$\operatorname{sign}_X : (X^X,\circ) \to (\{\pm1,0\},\cdot) : f \mapsto \prod\nolimits_{\{i\neq j\}\subset X} \frac{f(i)-f(j)}{i-j}.$$

(1) Die Abbildung $\operatorname{sign}_X : (X^X,\circ) \to (\{\pm1,0\},\cdot)$ ist ein Monoidhomomorphismus. Genau dann gilt $\operatorname{sign}(f) = \pm1$, wenn f eine gerade / ungerade Permutation ist.
(2) Damit können wir sign_Y für jede endliche Menge $Y \cong X$ natürlich fortsetzen: Wir wählen eine Bijektion $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$. Jede Abbildung $g : Y \to Y$ ziehen wir damit zurück zu $f := \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi : X \to X$ und definieren $\operatorname{sign}(g) := \operatorname{sign}(f)$. Dies ist wohldefiniert, also unabhängig von der willkürlich gewählten Bijektion φ.
(3) Die obige Formel gilt allgemein für $X = \{x_1,x_2,\dots,x_n\} \subset K$ in einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$, sodass $-1 \neq 1$. Eine kanonische Wahl wäre der Körper $K = \mathbb{Q}(X) = \mathbb{Q}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ der rationalen Funktionen in den Unbestimmten $x_1,x_2,\dots,x_n$. Diese „koordinatenfreie“ Konstruktion ist elegant und raffiniert.

Übung H5L. Sei $\mathtt{FinVec}_K$ die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über dem Körper K (H1J). Hierin bilden die Vektorräume K^n für $n \in \mathbb{N}$ das Skelett $\mathtt{NatVec}_K$. Die K–Algebra $\operatorname{End}_K(K^n) = \operatorname{Hom}_K(K^n,K^n)$ ist kanonisch isomorph zur Matrixalgebra $K^{n\times n}$ (H5F). Hierauf definieren wir die *Determinante* (B1Y) durch die explizite Formel

$$\det : (K^{n\times n},\cdot) \to (K,\cdot) : A \mapsto \sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}.$$

(1) Die Abbildung $\det : (K^{n\times n},\cdot) \to (K,\cdot)$ ist ein Monoidhomomorphismus. Genau dann ist $\det A$ in $(K,\cdot)$ invertierbar, wenn A in $(K^{n\times n},\cdot)$ invertierbar ist.
(2) Damit können wir $\det_V$ für jeden K–Vektorraum $V \cong K^n$ natürlich fortsetzen: Wir wählen einen K–Isomorphismus $\varphi : K^n \xrightarrow{\sim} V$. Jede K–lineare Abbildung $g : V \to V$ ziehen wir damit zurück zu $f := \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi : K^n \to K^n$ und definieren $\det(g) := \det(f)$. Dies ist wohldefiniert, also unabhängig vom Isomorphismus φ.
(3) Auch hier ist die „koordinatenfreie“ Sichtweise wunderbar elegant und raffiniert: Zu jedem n–dimensionalen K–Vektorraum V nutzen wir die äußere Potenz $\Lambda^k V$. Dabei gilt $\dim_K(\Lambda^k V) = \binom{n}{k}$, insbesondere gilt $\Lambda^0 V \cong K$ und $\Lambda^1 V \cong V$ sowie $\Lambda^n V \cong K$, letzteres allerdings nicht kanonisch. Jede K–lineare Abbildung $f : V \to V$ induziert $\Lambda^k f : \Lambda^k V \to \Lambda^k V$. Dank Dimension 1 ist $\Lambda^n f : \Lambda^n V \to \Lambda^n V$ die Multiplikation mit einem Element $\det(f) \in K$: Dies ist die ersehnte Signatur!
(4) Diese Konstruktion gelingt wörtlich genauso für jeden kommutativen Ring K mit $1 \neq 0$ und alle freien K–Moduln $V \cong K^n$ von endlichem Rang $n \in \mathbb{N}$.
(5) Bezug zur Signatur: Zu $X = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ sei KX der freie K–Modul mit Basis X, bestehend aus allen formalen Linearkombinationen $k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n$ mit $k_1,k_2,\dots,k_n \in K$. Jede Abbildung $f : X \to X$ setzt sich K–linear fort zu $f' : KX \to KX$. Hier gilt $\det(f') = \operatorname{sign}(f)$, wobei wir $\operatorname{char} K \neq 2$ voraussetzen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H5g. Haben auch nicht-quadratische Matrizen eine Determinante? Können wir nicht-quadratischen Matrizen, also $A \in K^{p\times q}$ mit $p \neq q$ in $\mathbb{N}$, sinnvoll eine Determinante zuweisen? Oder ist dies prinzipiell unmöglich? Eine beliebige Zuweisung wie $\det A = 0$ wäre denkbar, doch stillschweigend wünschen wir weiterhin Multiplikativität.

Wir machen diese Forderung also explizit und packen es an:

Übung H5M. (1) Für jede Menge $X \in \mathtt{FinSet}$ haben wir den Monoidhomomorphismus $\operatorname{sign}_X : (X^X, \circ) \to (\{\pm 1, 0\}, \cdot)$ aus H5K. Wir betrachten $(\{\pm 1, 0\}, \cdot)$ als Kategorie mit einem Objekt (H2H). Lässt sich sign fortsetzen zu einem Funktor $\mathtt{NatSet} \to (\{\pm 1, 0\}, \cdot)$?

(2) Für jeden K–Vektorraum $V \in \mathtt{FinVec}_K$ haben wir den Monoidhomomorphismus $\det_V : (\operatorname{End}_K(V), \circ) \to (K, \cdot)$ aus H5L. Wir betrachten $(K, \cdot)$ als Kategorie (H2H). Lässt sich det fortsetzen zu einem Funktor $\mathtt{NatVec}_K \to (K, \cdot)$ oder $\mathtt{Mat}_K \to (K, \cdot)$?

Wir machen die Not zur Tugend und betrachten Paare $(X, <)$, wobei X eine endliche Menge ist und $<$ eine Totalordnung auf X. Als Morphismen $f : (X, <_X) \to (Y, <_Y)$ betrachten wir alle Abbildungen $f : X \to Y$. Wir erhalten so die Kategorie $\mathtt{FinSet}_<$ und die Unterkategorie $(\mathtt{FinSet}_<)'$ aller Abbildungen zwischen Objekten gleicher Größe.

(3) Lässt sich sign fortsetzen zu einem Funktor auf $\mathtt{FinSet}_<$? auf $(\mathtt{FinSet}_<)'$?

(4) Lässt sich det fortsetzen zu einem Funktor auf $\mathtt{FinVec}_K^b$? auf $(\mathtt{FinVec}_K^b)'$?

✻ **H5M.** (1) Probieren Sie es zunächst selbst! Nach einigen Versuchen werden Sie vermuten, dass diese Fortsetzung unmöglich ist. Zum Beweis müssen wir ein Hindernis benennen. Angenommen, wir hätten einen Funktor $\operatorname{sign} : \mathtt{NatSet} \to \{\pm 1, 0\}$. Wir führen dies durch folgende einfache Rechnungen zum Widerspruch:

(1a) Sei $g : n \to m$ nicht injektiv, also $g(i) = g(j)$ für $i < j$ in n. Sei $f : n \to n$ die Identität bis auf $j \mapsto i$. Hierfür wissen wir bereits $\operatorname{sign}(f) = 0$. Damit gilt $g = g \circ f$, also $\operatorname{sign}(g) = \operatorname{sign}(g) \cdot \operatorname{sign}(f) = 0$.

(1b) Sei $f : m \to n$ nicht surjektiv, also $j \notin \operatorname{im}(g)$. Im Falle $n \geq 2$ wählen wir $i \neq j$ in n und setzen $g : n \to n$ die Identität bis auf $j \mapsto i$. Damit gilt $f = g \circ f$, also $\operatorname{sign}(f) = \operatorname{sign}(g) \cdot \operatorname{sign}(f) = 0$.

Wir wählen ein Paar $(f, g) : n \rightleftarrows n+1$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_n$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Es gilt $\operatorname{sign}(f) = \operatorname{sign}(g) = 0$ dank (1a,b), und somit $1 = \operatorname{sign}(\mathrm{id}_n) = \operatorname{sign}(g) \cdot \operatorname{sign}(f) = 0$. An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme.

(2) Nein, es gibt keine Fortsetzung der Determinante zu einem Funktor $\det : \mathtt{Mat}_K \to (K, \cdot)$. Besonders einfach ist der Fall $K = \mathbb{F}_3 = \{0, \pm 1\}$: Wir haben $\mathtt{NatSet} \hookrightarrow \mathtt{Mat}_K$, und die vermeintliche Fortsetzung von det zu einem Funktor $\det : \mathtt{Mat}_K \to (K, \cdot)$ induziert durch Einschränkung den Funktor $\operatorname{sign} : \mathtt{NatSet} \to (\{\pm 1, 0\}, \cdot)$.

Im allgemeinen Fall übertragen wir die Argumente aus (1) auf Matrizen bzw. lineare Abbildungen:

(2a) Sei $B \in K^{m\times n}$ nicht injektiv, es gibt also $v_n \in K^n \smallsetminus \{0\}$ mit $Bv_n = 0$. Wir wählen für K^n eine Basis $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ und definieren $A \in K^{n\times n}$ durch $A : v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \mapsto v_1, \dots, v_{n-1}, 0$. Hierfür wissen wir bereits $\det(A) = 0$. Damit gilt $B = BA$, wie wir auf $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ testen, also $\det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = 0$.

(2b) Sei $A \in K^{n\times m}$ nicht surjektiv. Wir wählen eine Basis $v_1, \dots, v_\ell$ für $\operatorname{im}(A)$ und ergänzen zu einer Basis $v_1, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_n$ für K^n. Wir definieren $B \in K^{n\times n}$ durch $B : v_1, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_m \mapsto v_1, \dots, v_\ell, 0, \dots, 0$. Hierfür wissen wir $\det(B) = 0$. Damit gilt $A = BA$, also $\det(A) = \det(B) \cdot \det(A) = 0$.

Wir wählen ein Paar $(A, B) : n \rightleftarrows n+1$ mit $B \circ A = \mathrm{id}_n$. Es gilt $\det(A) = \det(B) = 0$ dank (2a,b), und somit $1 = \det(\mathrm{id}_n) = \det(B) \cdot \det(A) = 0$. An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme.

(3) Es gibt keine Fortsetzung der Signatur zu $\operatorname{sign} : \mathtt{FinSet}_< \to (\{\pm 1, 0\}, \cdot)$: Die Argumente aus (1) bleiben gültig. Hingegen existiert eine Fortsetzung zu $\operatorname{sign} : (\mathtt{FinSet}_<)' \to (\{\pm 1, 0\}, \cdot)$, denn Mengen in $(\mathtt{FinSet}_<)'$ der Größe n entsprechen Objekten unter n, und Morphismen entsprechend Endomorphismen von n.

(4) Es gibt keine Fortsetzung der Determinante zu $\det : \mathtt{FinVec}_K^b \to (K, \cdot)$: Die Argumente aus (2) bleiben gültig. Hingegen existiert eine Fortsetzung zu $\det : (\mathtt{FinVec}_K^b)' \to (K, \cdot)$: denn Vektorräume in $(\mathtt{FinVec}_K^b)'$ der Dimension n entsprechen Objekten unter K^n, und Morphismen entsprechend Endomorphismen von K^n.

☞ **§H5h. Dualität.** Die Lineare Algebra nutzt folgende Funktoren für K–Vektorräume: ☜

Beispiele. Zu einem festen K–Vektorraum Z definieren wir den kovarianten Funktor

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_K(Z,-) : \mathtt{Vec}_K &\to \mathtt{Vec}_K,\\ V &\mapsto \mathrm{Hom}_K(Z,V),\\ (h : V \to W) &\mapsto (h_* : \mathrm{Hom}_K(Z,V) \to \mathrm{Hom}_K(Z,W) : f \mapsto h \circ f).\end{aligned}$$

Dual hierzu erhalten wir den kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_K(-,Z) : \mathtt{Vec}_K &\to \mathtt{Vec}_K,\\ V &\mapsto \mathrm{Hom}_K(V,Z),\\ (h : V \to W) &\mapsto (h^* : \mathrm{Hom}_K(W,V) \to \mathrm{Hom}_K(V,Z) : f \mapsto f \circ h).\end{aligned}$$

Der Fall $Z = K$ ist besonders wichtig. Hier ist $V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$ der Vektorraum der K–Linearformen $f : V \to K$, genannt *Dualraum* von V. Jeder K–linearen Abbildung $h : V \to W$ ordnen wir die K–lineare Abbildung $h^* : W^* \to V^* : f \mapsto f \circ h$ zu.

Dualisierung definiert so den kontravarianten Funktor $\mathtt{Vec}_K \to \mathtt{Vec}_K : V \mapsto V^*$.

Übung H5N. Für endlich-basierte K–Vektorräume $(V,\mathcal{B})$ erhalten wir den Funktor $\mathcal{F}\backslash\mathcal{V}_K^b \to \mathcal{F}\backslash\mathcal{V}_K^b : (V,\mathcal{B}) \mapsto (V^*,\mathcal{B}^*)$: Zur Basis $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ von V erhalten wir die duale Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*,\dots,v_n^*)$ von V^* durch $v_i^*(v_i) = 1$ und $v_i^*(v_j) = 0$ für $j \neq i$. Für die Matrixdarstellung $M : \mathtt{FinVec}_K^b \to \mathtt{Mat}_K$ gilt $M(f^*) = M(f)^\intercal$.

☞ **§H5i. Bidual.** Aus den vorigen Beispielen extrahieren wir folgende Feststellung: ☜

Bemerkung. Genau dann ist eine natürliche Transformation $t : F \to G$ zweier Funktoren $F,G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ eine natürliche Äquivalenz, wenn für jedes Objekt X in $\mathtt{C}$ der Morphismus $t_X : F(X) \to G(X)$ ein Isomorphismus in $\mathtt{D}$ ist. In diesem Falle können wir nämlich $s : G \to F$ definieren durch $s_X = t_X^{-1}$ für jedes Objekt X in $\mathtt{C}$. Aus der Natürlichkeit von t folgt dann die Natürlichkeit von s. Nach Konstruktion gilt $s \circ t = \mathrm{id}_F$ und $t \circ s = \mathrm{id}_G$.

Aus natürlicher Äquivalenz $F \cong G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ folgt die Isomorphie $F(X) \cong G(X)$ in $\mathtt{D}$ für jedes Objekt X in $\mathtt{C}$. Natürliche Äquivalenz bedeutet aber weit mehr, nämlich dass diese Isomorphismen kompatibel sind mit den von den Funktoren transportierten Morphismen.

Beispiel. Sei $\mathtt{FinVec}_K$ die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über K. Der Funktor $F = \mathrm{Hom}_K(K,-)$ bzw. $G = \mathrm{Hom}_K(-,K)$ ordnet jedem Vektorraum V einen Vektorraum $F(V) = \mathrm{Hom}_K(K,V)$ bzw. $G(V) = \mathrm{Hom}_K(V,K)$ zu. Hierbei haben $F(V)$ und $G(V)$ dieselbe Dimension wie V, sind also isomorph. Dennoch sind F und G nicht natürlich äquivalent: Da F kovariant und G kontravariant ist, laufen die Pfeile in entgegengesetzte Richtung, und es besteht keine Möglichkeit, hier Natürlichkeit herzustellen.

Übung H5O. Zu jedem K–Vektorraum V haben wir den Dualraum $V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$. Jede K–lineare Abbildung $h : V \to W$ induziert $h^* : W^* \to V^*$ durch $h^*(\varphi) := \varphi \circ h$. Wir haben die kanonische Einbettung $\Phi_V : V \to V^{**}$ mit $\Phi(v)(\varphi) := \varphi(v)$. Dies ist eine natürliche Transformation von $\mathrm{id}_{\mathtt{Vec}_K}$ zum Bidual **. Auf der Unterkategorie $\mathtt{FinVec}_K$ der endlich-dimensionalen K–Vektorräume ist dies eine natürliche Äquivalenz.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§H5j. Sprachgebrauch: eindeutig, kanonisch, natürlich.** Die vorhergehenden Überlegungen schulen uns im Gebrauch der Wörter „eindeutig“, „kanonisch“ und „natürlich“. ☜

☞ **Beispiel H5P.** Wir sagen „eindeutig“, wenn die gestellte Frage höchstens eine Lösung hat: ☜

- In jedem K–Vektorraum X ist der Nullvektor eindeutig.
- Es gibt eine eindeutige K–lineare Abbildung $f : X \to \{0\}$.
- Zu jedem $x \in X$ gibt es eine eindeutige K–lineare Abbildung $f : K \to X$ mit $f(1) = x$.
- Je zwei vollständig geordnete Körper K und K' sind eindeutig isomorph. (B2C)

Das letzte Beispiel ist kein Wortspiel und soll nicht etwa betonen, dass K und K' ganz sicher isomorph sind. Es besagt, dass es genau einen Körperisomorphismus $K \xrightarrow{\sim} K'$ gibt.

☞ **Beispiel H5Q.** Wir sagen „kanonisch“, wenn die gestellte Frage vielleicht keine eindeutige aber doch eine irgendwie ausgezeichnete Lösung hat, und sei's nur, weil sie uns besonders gut gefällt oder die traditionelle Lösung der Lehrbücher ist, also dem *Kanon* entspricht. ☜

- Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist die Wahl einer Basis nicht eindeutig: Es gibt überabzählbar viele! Die Wahl $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ erklären wir als kanonisch.
- Im Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ gibt es zwei Elemente i mit $\mathrm{i}^2 = -1$. Im Modell $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist die Wahl $\mathrm{i} = (0,1)$ kanonisch (B3A). Die Alternative $-\mathrm{i} = (0,-1)$ ist hierzu konjugiert.
- Jede Restklasse von $\mathbb{Z}$ modulo 5 hat einen kanonischen Repräsentanten, nämlich einen der Liste $0,1,2,3,4$. (Ein anderes Lehrbuch bevorzugt vielleicht $-2,-1,0,1,2$.)

Das Wort *kanonisch* heißt ‘dem Kanon entsprechend’; stillschweigend wird hier also ein gesellschaftlich vereinbarter Kanon angenommen. Ein *Kanon* ist eine festgesetzte Ordnung, wie etwa der *Bibelkanon* als Auswahl und Reihung der zur Bibel gehörigen Bücher, oder der vielstimmige Wunsch nach einem *Bildungskanon*. Da ein solcher Kanon meist alles andere als eindeutig ist, sollten wir bei seiner Beschwörung stets Vorsicht walten lassen.

☞ **Beispiel H5R.** Wir sagen „natürlich“ im Sinne der betrachteten Kategorie, wenn die gestellte Frage eine einheitliche Lösung hat, sich also mit allen Morphismen verträgt. ☜

- Die Kategorie `FinSet` der endlichen Mengen ist natürlich äquivalent zur vollen Unterkategorie `NatSet` der Mengen $n = \{0,\dots,n-1\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.
- Die Kategorie $\mathtt{FinVec}_K$ der endlich-dimensionalen K–Vektorräume ist natürlich äquivalent zur vollen Unterkategorie $\mathtt{NatVec}_K$ der K–Vektorräume K^n mit $n \in \mathbb{N}$.
- Auf der Kategorie der lokal wegzusammenhängenden topologischen Räume (G3C) sind die Funktoren π_0 und $\mathbb{Z}$ natürlich äquivalent (H5A).

Auch dies ist kein Wortspiel und soll nicht etwa andeuten, dass die Aussage „selbstverständlich“ oder „offensichtlich“ oder gar „trivial“ wäre. Dies ist kein Gefühlsausdruck, sondern Gegenstand der Definition H5B: Es gibt eine Lösung, die mit allen Morphismen kommutiert. Die Lösung ist meist nicht eindeutig, oft auch nicht kanonisch, vielleicht sogar willkürlich, aber immerhin lässt sie sich in der betrachteten Kategorie natürlich wählen.

☞ **Beispiel.** Die Äquivalenz von Teilmengen und Indikatorfunktionen (H5C) ist natürlich. Die Äquivalenz von linearen Abbildungen und Matrizen (H5G) ist natürlich. Die Determinante $\det_R : R^{n\times n} \to R$ ist natürlich bezüglich Ringhomomorphismen (H5D). Sie sind auch kanonisch, da alle Lehrbüchern hier dasselbe meinen (so hoffe ich). Die Determinante ist sogar eindeutig: Sie ist die einzige multilineare, alternierende, normierte Abbildung (B1Y). ☜

§H6. Adjungierte Funktoren

§H6a. Motivierende Beispiele. Sei $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ der Vergissfunktor:

$$F: \quad Y = (M_Y, \mathcal{T}_Y) \mapsto M_Y, \quad (f : (M_X, \mathcal{T}_X) \to (M_Y, \mathcal{T}_Y)) \mapsto (f : M_X \to M_Y)$$

In die umgekehrte Richtung haben wir zwei offensichtliche Funktoren $G, H : \mathtt{Set} \to \mathtt{Top}$, nämlich die Ausstattung der Menge X mit der indiskreten bzw. mit der diskreten Topologie:

$$G: \quad X \mapsto (X, \{\emptyset, X\}), \qquad (f : X \to Y) \mapsto (f : (X, \{\emptyset, X\}) \to (Y, \{\emptyset, Y\})),$$
$$H: \quad X \mapsto (X, \mathfrak{P}(X)), \qquad (f : X \to Y) \mapsto (f : (X, \mathfrak{P}(X)) \to (Y, \mathfrak{P}(Y))).$$

Beispiel H6A. Für jede Menge $X \in \mathtt{Set}$ und jeden topologischen Raum $Y \in \mathtt{Top}$ gilt:

$$\mathtt{Set}(X, FY) \cong \mathtt{Top}(HX, Y)$$

Ausführlich: Der Raum $Y = (M_Y, \mathcal{T}_Y)$ besteht aus einer Trägermenge M_Y und einer Topologie $\mathcal{T}_Y \subset \mathfrak{P}(M_Y)$. Der Vergissfunktor macht hieraus die Menge $F(M_Y, \mathcal{T}_Y) = M_Y$. Jede Abbildung $f : X \to M_Y$ definiert die stetige Abbildung $f : (X, \mathfrak{P}(X)) \to (M_Y, \mathcal{T}_Y)$.

Beispiel H6B. Für jeden topologischen Raum $X \in \mathtt{Top}$ und jede Menge $Y \in \mathtt{Set}$ gilt:

$$\mathtt{Set}(FX, Y) \cong \mathtt{Top}(X, GY)$$

Ausführlich: Der Raum $X = (M_X, \mathcal{T}_X)$ besteht aus einer Trägermenge M_X und einer Topologie $\mathcal{T}_X \subset \mathfrak{P}(M_X)$. Der Vergissfunktor macht hieraus die Menge $F(M_X, \mathcal{T}_X) = M_X$. Jede Abbildung $f : M_X \to Y$ definiert die stetige Abbildung $f : (M_X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \{\emptyset, Y\})$.

Definition H6C. Seien $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ Kategorien. Eine *Adjunktion* $(\varphi, \varphi') : F \dashv G : \mathtt{D} \rightleftarrows \mathtt{C}$ besteht aus zwei gegenläufigen Funktoren $F : \mathtt{D} \to \mathtt{C}$ und $G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ und einer natürlichen Bijektion $(\varphi_{X,Y}, \varphi'_{X,Y}) : \mathtt{C}(FX, Y) \cong \mathtt{D}(X, GY)$ für jedes Paar von Objekten $X \in \mathtt{D}$ und $Y \in \mathtt{C}$.

Wir schreiben $(\varphi, \varphi') : F \dashv G$ kurz $\varphi : F \dashv G$ für die Adjunktion der Funktoren (F, G), oder noch kürzer $F \dashv G$. Wir nennen auch kurz das Paar (F, G) eine Adjunktion, dabei ist F *linksadjungiert* zu G, und entsprechend G *rechtsadjungiert* zu F.

Die Natürlichkeit von (φ, φ') bedeutet ausführlich: Für jeden Morphismus $f : Y \to Y'$ in $\mathtt{C}$ und jeden Morphismus $g : X' \to X$ in $\mathtt{D}$ kommutieren die folgenden Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathtt{C}(FX, Y) & \underset{\varphi'_{X,Y}}{\overset{\varphi_{X,Y}}{\rightleftarrows}} & \mathtt{D}(X, GY) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)_*} \\ \mathtt{C}(FX, Y') & \underset{\varphi'_{X,Y'}}{\overset{\varphi_{X,Y'}}{\rightleftarrows}} & \mathtt{D}(X, GY') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathtt{C}(FX, Y) & \underset{\varphi'_{X,Y}}{\overset{\varphi_{X,Y}}{\rightleftarrows}} & \mathtt{D}(X, GY) \\ {\scriptstyle F(g)^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ \mathtt{C}(FX', Y) & \underset{\varphi'_{X',Y}}{\overset{\varphi_{X',Y}}{\rightleftarrows}} & \mathtt{D}(X', GY) \end{array}$$

Hier induziert $f : Y \to Y'$ die Abbildungen $f_* : \mathtt{C}(A, Y) \to \mathtt{C}(A, Y') : \alpha \mapsto f \circ \alpha$ und $G(f)_* : \mathtt{D}(A, GY) \to \mathtt{D}(A, GY') : \alpha \mapsto G(f) \circ \alpha$, und $g : X' \to X$ induziert umgekehrt $g^* : \mathtt{C}(X, B) \to \mathtt{C}(X', B) : \beta \mapsto \beta \circ g$ und $F(g)^* : \mathtt{D}(FX, B) \to \mathtt{D}(FX', B) : \beta \mapsto \beta \circ F(g)$.

Beispiel. Zum Vergissfunktor $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ haben wir einen rechtsadjungierten Funktor $G : \mathtt{Set} \to \mathtt{Top}$ aus H6B sowie einen linksadjungierten Funktor $H : \mathtt{Set} \to \mathtt{Top}$ aus H6A. Als Bijektion (φ, φ') zwischen den Morphismenmengen wählen wir hier jeweils die Identität. Diese ist natürlich in beiden Argumenten; das ist jeweils nachzurechnen, hier ist es klar.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§H6b. Vektorraum zu einer vorgegebenen Basis. Die Lineare Algebra nutzt folgende universelle Konstruktion von K–Vektorräumen; sie erweist sich nun als Adjunktion:

Beispiel H6D. Sei K ein Körper und $F : \mathtt{Vec}_K \to \mathtt{Set}$ der Vergissfunktor, der jedem K–Vektorraum $(V,+,\cdot)$ die zugrundeliegende Trägermenge V zuordnet. Umgekehrt haben wir zu jeder Menge X den Vektorraum $(K^X,+,\cdot)$ aller Funktionen $g : X \to K$ und hierin den Untervektorraum $G(X) = (K^{(X)},+,\cdot)$ aller Funktionen mit endlichem Träger. Letzterer hat als kanonische Basis die Familie $(e_x)_{x\in X}$, wobei die Funktion $e_x : X \to K$ definiert ist durch $e_x(x) = 1$ und $e_x(x') = 0$ für $x' \neq x$. Der Satz der linearen Fortsetzung besagt hier: Zu jeder Abbildung $f : X \to V$ in $\mathtt{Set}$ existiert genau eine K–lineare Abbildung $f' = \varphi'(f) : (K^{(X)},+,\cdot) \to (V,+,\cdot) : e_x \mapsto f(x)$, nämlich $f'(g) = \sum_{x\in X} g(x)f(x)$.

Umgekehrt haben wir zu jeder linearen Abbildung $f' = \varphi'(f) : (K^{(X)},+,\cdot) \to (V,+,\cdot)$ ihre Einschränkung $f = \varphi(f')$ mit $f(x) = f'(e_x)$. Nach Konstruktion gilt $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}$ und $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}$. Damit haben wir eine Adjunktion $(G, F, \varphi, \varphi')$ konstruiert, denn für jede Menge $X \in \mathtt{Set}$ und jeden K–Vektorraum $Y \in \mathtt{Vec}_K$ haben wir die natürliche Bijektion

$$(\varphi_{X,Y}, \varphi'_{X,Y}) \;:\; \mathtt{Vec}_K(GX, Y) \cong \mathtt{Set}(X, FY).$$

Die Natürlichkeit von (φ, φ') rechnet man geduldig nach. (Versuchen Sie es als Übung!)

§H6c. Freier K–Modul. Die Konstruktion gelingt genauso über jedem Ring K:

Beispiel H6E. Sei K ein Ring, nicht notwendig kommutativ. Zu jeder Menge X erhalten wir den freien K–(Links-)Modul $G(X) = (K^{(X)},+,\cdot)$ über X. Dies ist eine Adjunktion:

$$F \;:\; \mathtt{Mod}_K \to \mathtt{Set} \;:\; Y = (V,+,\cdot) \mapsto V,$$
$$G \;:\; \mathtt{Set} \to \mathtt{Mod}_K \;:\; X \mapsto (K^{(X)},+,\cdot),$$
$$(\varphi_{X,Y}, \varphi'_{X,Y}) \;:\; \mathtt{Mod}_K(GX, Y) \cong \mathtt{Set}(X, FY).$$

§H6d. Polynomring. Die Algebra nutzt den Polynomring $K[x]$ in einer Variablen x über dem Körper K. Allgemein haben wir den Polynomring $K[\,x_i \,|\, i \in I\,]$ in mehreren Variablen x_i $(i \in I)$ über dem kommutativen Ring K. Diese universelle Konstruktion ist allgegenwärtig und sehr nützlich; auch sie erweist sich nun als Adjunktion:

Beispiel H6F. Sei K ein kommutativer Ring und $\mathtt{CAlg}_K$ die Kategorie der K–Algebren, assoziativ, kommutativ, mit Eins. Zur Menge X sei $G(X) = (K[X],+,\cdot)$ die Polynomalgebra über K in den Variablen $x \in X$. Ihre universelle Eigenschaft besagt: Zu jeder Abbildung $f : X \to A$ der Menge X in eine K–Algebra $(A,+,\cdot)$ haben wir den K–Algebren–Homomorphismus $f' = \varphi'(f) : (K[X],+,\cdot) \to (A,+,\cdot) : x \mapsto f(x)$, genannt *Einsetzungshomomorphismus*. Damit haben wir auch hier eine Adjunktion vorliegen:

$$F \;:\; \mathtt{CAlg}_K \to \mathtt{Set} \;:\; Y = (A,+,\cdot) \mapsto A,$$
$$G \;:\; \mathtt{Set} \to \mathtt{CAlg}_K \;:\; X \mapsto (K[X],+,\cdot),$$
$$(\varphi_{X,Y}, \varphi'_{X,Y}) \;:\; \mathtt{CAlg}_K(GX, Y) \cong \mathtt{Set}(X, FY).$$

Die Natürlichkeit von (φ, φ') rechnet man geduldig nach. (Versuchen Sie es als Übung!)

Als Kontrast betrachten wir $\psi_{X,Y}(f) = \varphi_{X,Y}(f+1)$ und $\psi'_{X,Y}(f') = \varphi'_{X,Y}(f') - 1$. Ist auch (ψ, ψ') eine natürliche Bijektion, wie in der obigen Definition H6C gefordert?

Übung H6G. Zahlreiche „universelle Konstruktionen“ erweisen sich als Adjunktionen. Führen Sie zehn Beispiele aus! Prominente Beispiele sind: das freie Monoid $[S \mid -]$ (L3A) bzw. die freie Gruppe $\langle S \mid - \rangle$ (L3A) über einer Menge S, die Wegekategorie Γ^* (H1L) als freie Kategorie über einem Graphen Γ, der Bruchkörper $\iota : R \to K$ zu einem Integritätsbereich R, der Monoidring KM zu einem Monoid M über dem kommutativen Ring K, usw.

Nicht jeder Vergissfunktor erlaubt einen linksadjungierten Funktor:

Übung H6H. Sei $U : \mathtt{Field} \to \mathtt{Set}$ der Vergissfunktor, der jedem Körper $(K, +, \cdot)$ seine Grundmenge K zuordnet. Zeigen Sie, dass U keine Linksadjungierte $T \dashv U$ erlaubt.

Hinweis: Welche Eigenschaften hätte der Körper $T(\emptyset)$ in `Field`? Ist das möglich?

Als Kontrast: Zum Vergissfunktor $U : \mathtt{CRing} \to \mathtt{Set}$ haben wir den linksadjungierten Funktor $T : \mathtt{Set} \to \mathtt{CRing}$ mit $T(X) = \mathbb{Z}[X]$ wie im obigen Beispiel H6F.

✻ **H6H.** Angenommen, es gäbe einen linksadjungierten Funktor $T : \mathtt{Set} \to \mathtt{Field}$, sodass für jede Menge X und jeden Körper K eine Bijektion $(\varphi, \varphi') : \mathtt{Field}(T(X), K) \cong \mathtt{Set}(X, U(K))$ existiert. Sei $X = \emptyset$ die leere Menge und $I = T(\emptyset)$ der zugehörige Körper. Dank $(\varphi, \varphi') : \mathtt{Field}(T(\emptyset), K) \cong \mathtt{Set}(\emptyset, U(K))$ existiert zu jedem Körper K genau ein Körperhomomorphismus $h : I \to K$. Mit anderen Worten, da die Menge $\emptyset$ initial ist in `Set`, ist auch der Körper $I = T(\emptyset)$ initial in `Field`. Es gibt aber kein initiales Objekt in `Field`!

Ausführlich: Die Körper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$ sind jeweils initial in der Unterkategorie $\mathtt{Field}_p$ der Körper der Charakteristik $p \in \{0, 2, 3, 5, \dots\}$. Diese Unterkategorien sind jedoch disjunkt: Es gibt keine Homomorphismen zwischen Körpern unterschiedlicher Charakteristik. Insbesondere hat `Field` kein initiales Objekt.

Bemerkung: Dieser raffinierte Beweis ist Teil eines größeren Panoramas. Für jedes Adjunktionspaar $F \dashv G$ gilt: F erhält alle Colimites, insbesondere Coprodukte, und G erhält alle Limites, insbesondere Produkte. Angewendet auf unserem Fall bedeutet das, $T : \mathtt{Set} \to \mathtt{Field}$ erhält initiale Objekte (als leeres Coprodukt). Das ist hier jedoch unmöglich, denn `Set` hat ein initiales Objekt, doch `Field` hingegen hat keines.

Das ist allgemein ein sehr nützlicher Trick: Jedes Adjunktionspaar $F \dashv G$ erfüllt gewisse allgemeine Eigenschaften, wie die Erhaltung von Co/Limites. Diese können wir als notwendige Bedingungen lesen und als Hindernis nutzen. Sie können auch als hinreichende Bedingungen formuliert werden und zur Konstruktion dienen, siehe `ncatlab.org/nlab/show/adjoint+functor+theorem`

Wir bohren in diesem schönen Beispiel noch etwas tiefer:

Übung H6I. Sei $\mathtt{Field}_p$ die Kategorie der Körper der Charakteristik $p \in \{0, 2, 3, 5, \dots\}$. Sei $U : \mathtt{Field}_p \to \mathtt{Set}$ der Vergissfunktor, der jedem Körper $(K, +, \cdot)$ seine Grundmenge K zuordnet. Zeigen Sie, dass auch U keine Linksadjungierte $T \dashv U$ erlaubt. *Anleitung:*
(0) Zeigen Sie zunächst, dass jeder Körperhomomorphismus $f : K \to L$ injektiv ist.
(1) Zur Vereinfachung fordern wir zudem, dass $X \subset T(X)$ gilt und $\varphi(f') = f'|_X$.

✻ **H6I.** (0) Als Teil der Definition gilt $1 \neq 0$ für jeden Körper und $f(1) = 1$ für jeden Körperhomomorphismus. Für jedes Element $a \in K \smallsetminus \{0\}$ im Startkörper folgt daraus $f(a) \neq 0$ im Zielkörper L: In K existiert zu a ein inverses Element $b = a^{-1}$ mit $ab = 1$, also gilt $1 = f(1) = f(ab) = f(a)f(b)$, und somit $f(a) \neq 0$.

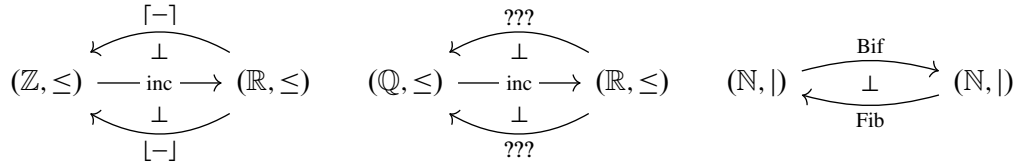
(1) Angenommen, es gäbe einen linksadjungierten Funktor $T : \mathtt{Set} \to \mathtt{Field}_p$, sodass für jede Menge X und jeden Körper K eine Bijektion $(\varphi, \varphi') : \mathtt{Field}_p(T(X), K) \cong \mathtt{Set}(X, U(K))$ existiert. Zur Vereinfachung nehmen wir zusätzlich an, dass $X \subset T(X)$ gilt und $\varphi(f') = f'|_X$.

Zu $X = \{a\}$ in `Set` betrachten wir $K = T(X)$ in $\mathtt{Field}_p$. Wie sieht dieser Körper aus? Besser gefragt: Welche Eigenschaften hat er? Dank unserer Annahme wissen wir $a \in K$. Zu der Abbildung $f : X \to U(K) : a \mapsto 1$ in `Set` haben wir den Körperhomomorphismus $f' = \varphi'(f) : K \to K$ in $\mathtt{Field}_p$ mit $\varphi(f') = f$, also $f'(a) = 1$. Somit gilt $a \neq 0$ in K. Zu der Abbildung $g : X \to U(K) : a \mapsto 0$ haben wir entsprechend den Körperhomomorphismus $g' = \varphi'(g) : K \to K$ mit $g'(a) = 0$. Somit ist g' nicht injektiv, was (0) widersprich.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung H6J. (1) Wir betrachten $(\mathbb{R},\leq)$ als Kategorie und darin $(\mathbb{Z},\leq)$ als volle Unterkategorie. Somit ist die Inklusion $\mathrm{inc} : (\mathbb{Z},\leq) \hookrightarrow (\mathbb{R},\leq)$ ein Funktor. Existiert hierzu ein ein linksadjungierter Funktor? ein rechtsadjungierten Funktor? Ist die Lösung eindeutig? Geben Sie sie möglichst explizit an! (2) Dieselben Fragen für den Funktor $\mathrm{inc} : (\mathbb{Q},\leq) \hookrightarrow (\mathbb{R},\leq)$.

(3) Die Fibonacci–Folge $\mathrm{Fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto F_n$ ist rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die geordnete Menge $(\mathbb{N},|)$ als Kategorie. Warum ist Fib ein Funktor? Bestimmen Sie, soweit möglich, einen linksadjungierten Funktor $\mathrm{Bif} = G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dies ist die sogenannte *Bifonacci–Folge*.



✻ **H6J.** (1a) Als Linksadjungierten zum Funktor $g = \mathrm{inc} : (\mathbb{Z},\leq) \hookrightarrow (\mathbb{R},\leq) : y \mapsto y$ suchen wir einen Funktor $f : (\mathbb{R},\leq) \to (\mathbb{Z},\leq) : x \mapsto f(x)$ mit der Eigenschaft $(\mathbb{Z},\leq)(f(x),y) \cong (\mathbb{R},\leq)(x,g(y))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{Z}$. Zu festem $x \in \mathbb{R}$ heißt das: Für alle $y \in \mathbb{Z}$ gilt $f(x) \leq y$ genau dann, wenn $x \leq y$. Das bedeutet $f(x) = \lceil x \rceil$.

(1b) Als Rechtsadjungierten zum Funktor $g = \mathrm{inc} : (\mathbb{Z},\leq) \hookrightarrow (\mathbb{R},\leq) : y \mapsto y$ suchen wir einen Funktor $h : (\mathbb{R},\leq) \to (\mathbb{Z},\leq) : x \mapsto h(x)$ mit der Eigenschaft $(\mathbb{R},\leq)(g(y),x) \cong (\mathbb{Z},\leq)(y,h(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{Z}$. Zu festem $x \in \mathbb{R}$ heißt das: Für alle $y \in \mathbb{Z}$ gilt $y \leq h(x)$ genau dann, wenn $y \leq x$. Das bedeutet $h(x) = \lfloor x \rfloor$.

(2) Zu $x \in \mathbb{R}$ suchen wir ein $\bar{x} \in \mathbb{Q}$, sodass für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt: (a) $\bar{x} \leq y \Leftrightarrow x \leq y$ bzw. (b) $y \leq \bar{x} \Leftrightarrow y \leq x$. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, müsste dazu $\bar{x} = x$ gelten. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist daher keine solche Wahl $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ möglich.

(3) Hier die ersten Werte der Fibonacci–Folge (`oeis.org/A000045`):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

In diesen Beispielen $m,n \in \{0,\dots,12\}$ gilt $m \mid n \Rightarrow F_m \mid F_n$. Dies gilt tatsächlich für alle $m,n \in \mathbb{N}$, man nennt dies eine *Teilbarkeitsfolge*. Aus kategorieller Sicht haben wir also einen Funktor $F : (\mathbb{N},|) \to (\mathbb{N},|)$. Die Fibonacci–Zahlen bilden sogar eine *starke Teilbarkeitsfolge*, es gilt nämlich $\mathrm{ggT}(F_m,F_n) = F_{\mathrm{ggT}(m,n)}$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$. Das ist nicht ganz leicht zu beweisen. Versuchen Sie es!

Als Linksadjungierten zum Funktor F suchen wir einen Funktor $G : (\mathbb{N},|) \to (\mathbb{N},|) : n \mapsto G_n$ mit der Eigenschaft $G_m | n \Leftrightarrow m | F_n$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$. Dies führt zu folgenden Werten (`oeis.org/A001177`):

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_m	0	1	3	4	6	5	12	8	6	12	15	10	12

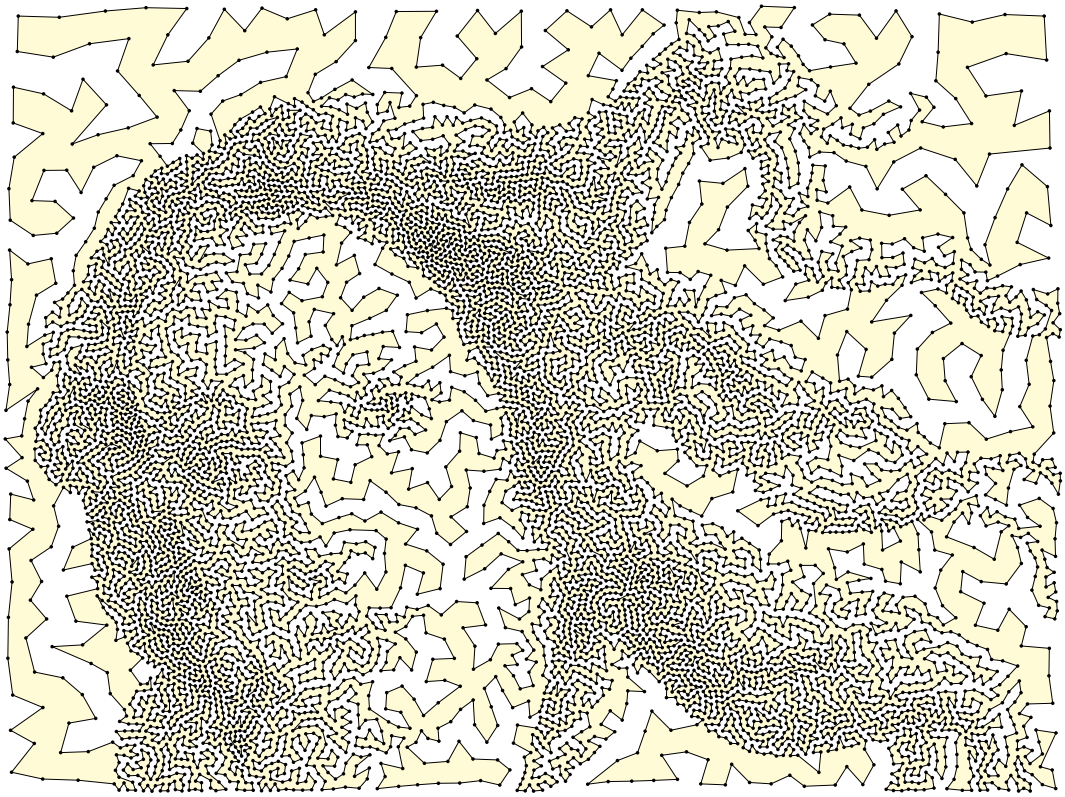
Wir beobachten hier ein Phänomen, das bei Adjunktion sehr häufig auftritt: Einer der beiden Funktoren (hier F) ist leicht zu konstruieren, zu beschreiben, zu verstehen, etc. Der andere Funkor (hier G) ist schwerer zu verstehen, daher hilft es, ihn dank Adjunktion zu konstruieren und zu untersuchen. Dank Adjunktion können wir beide Seiten gegeneinander ausspielen und jeweils den für uns einfachsten Zugang wählen.

Übung H6K. Jeder Isomorphismus $(F,G) : \mathtt{D} \cong \mathtt{C}$ von Kategorien liefert auf kanonische Weise eine Adjunktion $(\varphi,\psi) : F \dashv G : \mathtt{D} \rightleftarrows \mathtt{C}$. Es genügt sogar eine natürliche Äquivalenz $(\sigma,\tau) : (F,G) : \mathtt{D} \simeq \mathtt{C}$, diese Konstruktion ist jedoch spürbar aufwändiger.

✻ **H6K.** Wir betrachten Objekte $X \in \mathtt{D}$ und $\mathtt{C}$. Die Anwendung des Funktors G liefert die Abbildung $\varphi_{X,Y} : \mathtt{C}(FX,Y) \to \mathtt{D}(GFX,GY) = \mathtt{D}(X,GY)$. Umgekehrt, die Anwendung des Funktors F liefert die Abbildung $\psi_{X,Y} : \mathtt{D}(X,GY) \to \mathtt{C}(FX,FGY) = \mathtt{C}(FX,Y)$. Nach Konstruktion ist $(\varphi_{X,Y},\psi_{X,Y})$ ein Bijektionspaar und zudem natürlich in X,Y. Übung: Rechnen Sie es sorgsam nach.

TEIL II

Geometrische Topologie



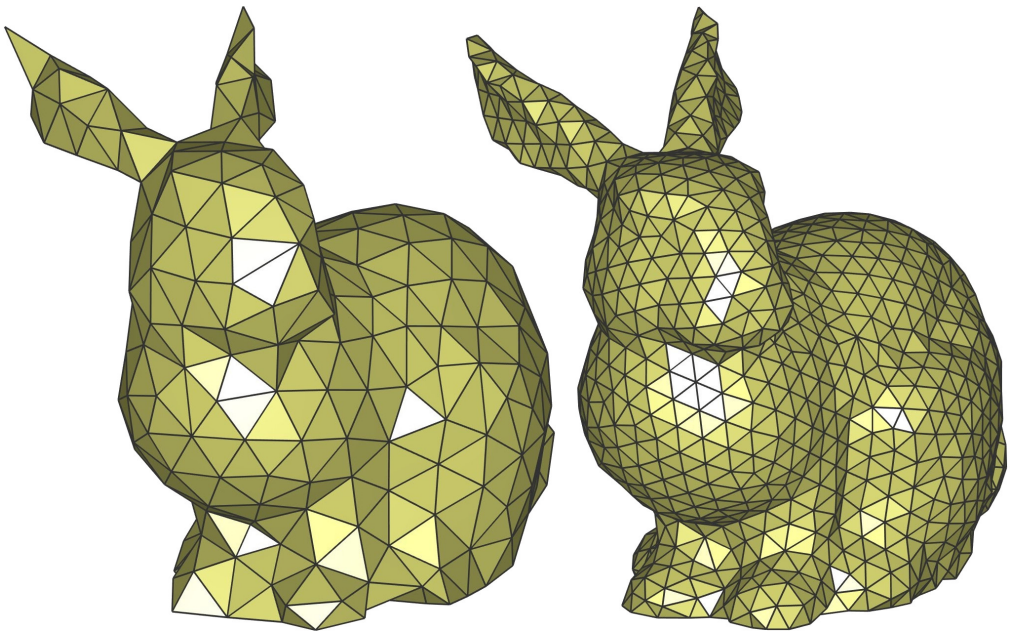
I have a dream that one day [...]
the rough places will be made plain,
and the crooked places will be made straight.
Martin Luther KING (1929–1968)

KAPITEL I

Simpliziale Komplexe

§I0. Einführung und Überblick

Topologische Räume sind ungeheuer allgemein und vielseitig anwendbar, leider auch beliebig kompliziert oder gar pathologisch. Um zu tieferliegenden Ergebnissen vorzudringen, werden wir uns in vielen Situationen auf „schöne“ Räume konzentrieren, also solche, die besondere Eigenschaften haben und zusätzliche Strukturen erlauben, etwa (euklidische, normierte, topologische) Vektorräume oder (topologische, simpliziale, glatte) Mannigfaltigkeiten oder (simpliziale, polytopale, zelluläre) Komplexe. Hierzu erarbeiten wir in diesem Kapitel I die Grundlagen zu Komplexen. In Kapitel J werden wir damit den Abbildungsgrad konstruieren und die Topologie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ untersuchen, insbesondere den Jordanschen Trennungssatz. In Kapitel K schließlich werden wir Mannigfaltigkeiten erklären und alle (triangulierten) kompakten Flächen klassifizieren.



Bildquelle: sites.google.com/site/dengwirda/jigsaw

Topologische Räume mit zusätzlicher Struktur. Den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen verstehen wir recht gut, ähnlich gut daher auch den Raum $\mathbb{R}^n$: Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist von der Form $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, und mit diesen reellen Koordinaten können wir konkret rechnen. Wir können daher versuchen, auf einem topologischen Raum (lokale) Koordinaten einzuführen und somit bewährte Methoden des $\mathbb{R}^n$ zu nutzen, zumindest lokal. Die *geometrische Topologie* untersucht Teilräume $X \subset \mathbb{R}^n$ und Räume, die lokal so aussehen, in einem jeweils zu präzisierenden Sinne. Die Grundidee ist ebenso einfach wie effizient: Wir versuchen, ein kompliziertes Objekt in einfachere Teile zu zerlegen (Analyse) und umgekehrt aus einfachen Teilen das Ganze zu rekonstruieren (Synthese).

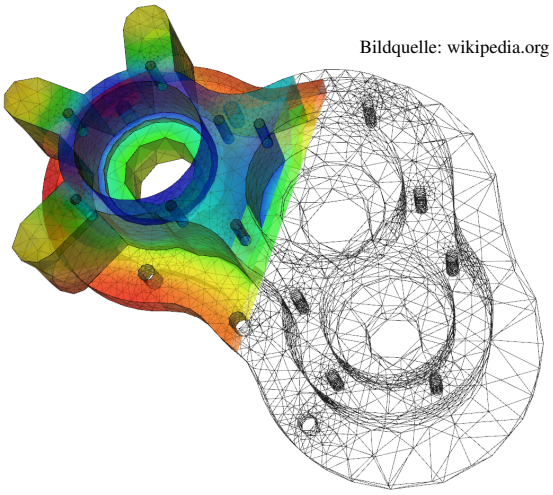
Simplizialkomplexe: Die Teile sind Simplizes Δ^n der Dimension $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (Punkt, Kante, Dreieck, Tetraeder, ...). Verklebt werden sie durch affin-lineare Homöomorphismen entlang ihrer Seiten. Diese diskutieren wir in diesem Kapitel I.

Zellkomplexe: Die Teile sind Bälle $\mathbb{D}^n$ der Dimension $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Verklebt werden sie sehr flexibel durch stetige Abbildungen entlang des Randes $\mathbb{S}^{n-1}$. Dies verallgemeinert Simplizialkomplexe, indem wir auf Linearität verzichten.

Mannigfaltigkeiten: Eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit sieht lokal aus wir der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$. Die Teile sind hier offene Mengen des $\mathbb{R}^n$, und verklebt werden sie durch Homöomorphismen entlang ihrer Überlappungen, siehe Kapitel K.

§I0a. Anwendungen. Wir nutzen Simplizialkomplexe hier zur effizienten Darstellung topologischer Räume (§I3) und zur Untersuchung ihrer stetigen Abbildungen (§I4).

Die kombinatorische Beschreibung durch Simplizialkomplexe eignet sich zur Implementierung auf dem Computer. Dies führt zu algorithmischen Fragestellungen der *kombinatorischen Topologie*.



Bildquelle: wikipedia.org

Affine Triangulierungen werden in der Numerik eingesetzt, etwa bei der Finite-Elemente-Methode: Hier wird die exakte Lösung einer partiellen Differentialgleichung angenähert durch die Lösung eines vereinfachten, diskreten Problems auf einer geeigneten Triangulierung.

Das Bild rechts illustriert eine Näherung der Wärmeleitungsgleichung.

Triangulierungen werden intensiv genutzt für Computergraphiken, bei Videospielen oder auch beim 3D-Druck. Hierzu wird das darzustellende Objekt, etwa die Oberfläche eines Körpers, durch hinreichend kleine Dreiecke approximiert. Diese Dreiecke werden etwa in einem geeigneten Dateiformat aufgelistet, wobei zu jeder Ecke die dreidimensionalen Koordinaten angegeben werden. Aus solchen Daten kann ein Renderer ein zweidimensionales Bild projizieren, oder ein 3D-Drucker ein dreidimensionales Objekt aufbauen.

Diese Datenstruktur erweist sich auch für geometrisch-topologische Untersuchungen als sehr effizient. Hierzu wollen wir nun die Grundlagen bereitstellen.

§I1. Affine Simplizialkomplexe

§I1a. Affine Simplizes. Wir kennen Polytope aus §A2 als facettenreiche Objekte. Sie dienen uns insbesondere als Bausteine für polytopale Komplexe. Um Polyeder möglichst effizient darzustellen, wollen wir nur die einfachsten Bausteine nutzen, nämlich *Simplizes*. Hier vereinfacht die affine Unabhängigkeit der Ecken alle Konstruktionen und Argumente. Simplizes setzen wir anschließend zu *Simplizialkomplexen* zusammen.

Definition I1A. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der *n–dimensionale Standardsimplex* Δ^n ist

$$\Delta^n := \left\{ (t_0,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; t_0,\dots,t_n \geq 0,\ t_0+\dots+t_n = 1 \right\} = [e_0,\dots,e_n],$$
$$\operatorname{Int}\Delta^n := \left\{ (t_0,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; t_0,\dots,t_n > 0,\ t_0+\dots+t_n = 1 \right\}, \quad \partial\Delta^n := \Delta^n \smallsetminus \operatorname{Int}\Delta^n.$$

Anschaulich ist Δ^0 ein Punkt, Δ^1 eine Kante, Δ^2 ein Dreieck, Δ^3 ein Tetraeder, etc.

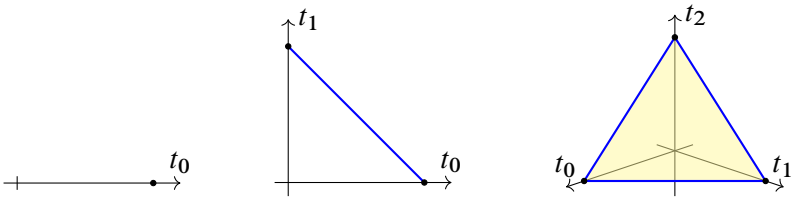


ABBILDUNG I:1. Die Standardsimplizes Δ^0, Δ^1, Δ^2

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ *affin unabhängig*, also $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ linear unabhängig. Der *affine n–Simplex* $\Delta := [v_0, v_1, \dots, v_n]$ ist ihre konvexe Hülle.

$$h : \Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta := [v_0,v_1,\dots,v_n] := \left\{ t_0v_0 + t_1v_1 + \dots + t_nv_n \;\middle|\; (t_0,t_1,\dots,t_n) \in \Delta^n \right\},$$
$$h(t_0,t_1,\dots,t_n) = t_0v_0 + t_1v_1 + \dots + t_nv_n = v_0 + t_1(v_1-v_0) + \dots + t_n(v_n-v_0).$$

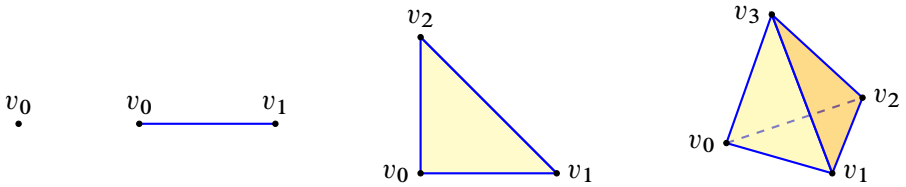


ABBILDUNG I:2. Affine Simplizes $\Delta = [v_0,\dots,v_n]$ der Dimension $n = 0,1,2,3$

Bemerkung I1B. Jeder n–Simplex Δ entsteht aus Δ^n durch den affinen Isomorphismus h. Hierzu müssen wir eine Reihenfolge der Ecken $v_0, v_1, \dots, v_n$ vorgeben (vergleiche I3W).

Für beliebige Punkte $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ ist $P = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ ein Polytop (A2B). Die Abbildung $h : \Delta^n \to P$ ist immer surjektiv, nur bei affiner Unabhängigkeit auch injektiv. In diesem Fall bestimmt jeder Punkt $x \in [v_0, v_1, \dots, v_n]$ eindeutig seine *baryzentrischen Koordinaten* $(t_0, t_1, \dots, t_n) = h^{-1}(x)$. Simplizes sind besonders einfach, wie der Name sagt.

Ist $(V, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, so ist die Bijektion $h : \Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta$ ein Homöomorphismus (F1L). Da Δ in einem endlich-dimensionalen Teilraum $U \leq V$ liegt, ist für jede Vektorraumtopologie $\mathcal{T}$ auf V die Teilraumtopologie auf $U \supset \Delta$ die euklidische (F6O).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Beispiel.** Für die kanonischen Basisvektoren $e_0, e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ erhalten wir den obigen Standardsimplex $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n]$. Für die kanonischen Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ spannt die Familie $(0, e_1, \dots, e_n)$ einen hierzu homöomorphen n–Simplex auf: ☜

$$[0, e_1, \dots, e_n] = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; t_1, \dots, t_n \geq 0,\ t_1 + \cdots + t_n \leq 1 \right\}.$$

Grammatik. Laut Duden ist das Wort *Simplex* sächlich, es heißt also *das Simplex*. Als Plural wird angegeben *die Simplizia*. In der mathematischen Literatur hingegen findet sich neben *das Simplex* auch das Maskulinum *der Simplex*, und neben *die Simplexe* auch der Plural *die Simplizes*. Ich finde letzteres schöner, schreibe also *der Simplex* und *die Simplizes*. Auf Englisch heißt es im Singular *simplex* und im Plural *simplexes* oder *simplices*, auf Französisch *le simplexe* und *les simplexes*.

☞ **Bemerkung.** Jeder Simplex $\Delta \cong \Delta^n$ der Dimension n ist homöomorph zum Einheitsball $\mathbb{D}^n$ derselben Dimension (F6H). Topologisch eignen sich beide gleich gut als lokale Modelle. Für Simplizialkomplexe wollen wir die affin-lineare Struktur ausnutzen, und hierzu eignet sich der Simplex Δ^n besser als der Ball $\mathbb{D}^n$. Die Modellräume $\mathbb{D}^n$ mit stetigen Verklebungen längs des Randes $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ führen zum Begriff des Zellkomplexes. ☜

☞ **§I1b. Ecken und Seiten eines Simplex.** Sind die gegebenen Vektoren $v_0, v_1, \dots, v_n$ in V affin unabhängig, so auch die umgeordnete Familie $v_{\tau 0}, v_{\tau 1}, \dots, v_{\tau n}$ für jede Permutation $\tau : \{0, 1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{0, 1, \dots, n\}$. Für die Simplizes gilt $[v_0, v_1, \dots, v_n] = [v_{\tau 0}, v_{\tau 1}, \dots, v_{\tau n}]$. Einem affinen Simplex $\Delta \subset V$ sehen wir daher die Reihenfolge seiner Ecken nicht mehr an. Die Ecken*menge* hingegen lässt sich aus der affinen Struktur rekonstruieren: ☜

✍ **Bemerkung.** Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ in V affin unabhängig. Der so aufgespannte Simplex $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ bestimmt seine Eckenmenge, geschrieben ✍

$$\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] \quad \mapsto \quad \operatorname{vert}(\Delta) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\},$$

als die Menge seiner Extrempunkte (A2I), und somit auch seine Dimension

$$\Delta \quad \mapsto \quad \dim(\Delta) = \dim \operatorname{aff}(\Delta) = n = \sharp \operatorname{vert}(\Delta) - 1.$$

Die leere Familie spannt den leeren Simplex $[\emptyset] = \emptyset$ auf; wir setzen $\dim \emptyset = -1$.

Jede Seite $Q \leq \Delta$ wird aufgespannt von einer Eckenmenge $S \subset \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, wie wir allgemein von Polytopen wissen (A2E). Bei affiner Unabhängigkeit gilt umgekehrt: Für jede Teilmenge $S \subset \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ist $[S]$ eine Seite von Δ, geschrieben $[S] \leq \Delta$.

✍ **Bemerkung.** Simplizes haben die folgende, besonders einfache Seitenstruktur: ✍

$$\mathfrak{P}\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \xrightarrow{\sim} \{\, Q \leq \Delta \,\} \;:\; S \mapsto [S]$$

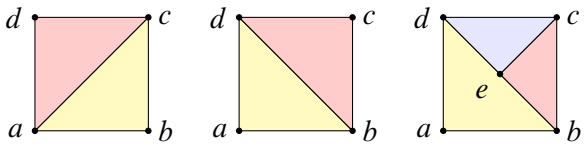
Jeder n–dimensionale Simplex Δ hat somit $f_d(\Delta) = \binom{n+1}{d+1}$ Seiten der Dimension d.

$$\Delta = \bigcup_{[S] \leq \Delta} [S] = \bigsqcup_{[S] \leq \Delta} \operatorname{Int}[S], \qquad \partial\Delta = \bigcup_{[S] < \Delta} [S] = \bigsqcup_{[S] < \Delta} \operatorname{Int}[S], \qquad \operatorname{Int}\Delta = \Delta \smallsetminus \partial\Delta$$

Der Rand besteht demnach aus allen Punkten, für die mindestens eine baryzentrische Koordinate t_k verschwindet. Das Innere des Simplex $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ besteht aus allen Punkten $x = t_0 v_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ mit $t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 1$ sowie $t_0, t_1, \dots, t_n > 0$.

☞ **Bemerkung.** Im aufgespannten affinen Raum $A = \operatorname{aff}(\Delta) \cong \mathbb{R}^n$ stimmen geometrischen und topologische Begriffe überein: Das geometrische Innere $\operatorname{Int}\Delta$ und der geometrische Rand $\partial\Delta$ sind das topologische Innere und der topologische Rand von Δ in A. ☜

§I1c. Affine Simplizialkomplexe. Jeder Simplex Δ ist als topologischer Raum leicht zu verstehen (I1A). Simplizes eignen sich daher als Bausteine komplexerer Räume:



$$\mathscr{K} = \big\langle [a,b,c],[a,c,d] \big\rangle$$
$$\mathscr{L} = \big\langle [a,b,d],[b,c,d] \big\rangle$$
$$\mathscr{P} = \big\langle [a,b,d],[b,c,e],[c,d,e] \big\rangle$$

ABBILDUNG I:3. Simpliziale Komplexe $\mathscr{K}, \mathscr{L}$ und ein polytopaler Komplex $\mathscr{P}$

Definition I1C. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $\mathscr{K}$ eine Familie affiner Simplizes $\Delta \subset V$. Wir nennen $\mathscr{K}$ einen *affinen Simplizialkomplex* in V, wenn gilt:

(0) Der leere Simplex gehört zu $\mathscr{K}$, kurz $\emptyset \in \mathscr{K}$. (Das ist langweilig, aber nützlich.)

(1) Für jeden Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$ ist auch jede Seite $\Delta' \leq \Delta$ ein Element von $\mathscr{K}$:

$$\Delta' \leq \Delta \in \mathscr{K} \quad \Longrightarrow \quad \Delta' \in \mathscr{K}$$

(2) Je zwei Simplizes $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathscr{K}$ haben als Durchschnitt eine gemeinsame Seite Δ, das heißt, Δ ist Seite sowohl von Δ_1 als auch von Δ_2, eventuell die leere Menge:

$$\Delta_1, \Delta_2 \in \mathscr{K} \quad \Longrightarrow \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 \leq \Delta_1, \Delta_2$$

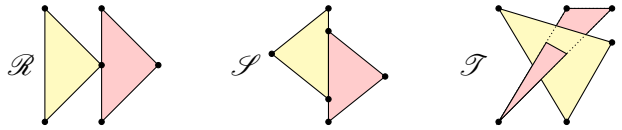


ABBILDUNG I:4. Dies sind keine Simplizialkomplexe.

Für jede Familie $\mathscr{M}$ von Simplizes können wir (0) und (1) erreichen durch Übergang zu $\mathscr{K} = \langle \mathscr{M} \rangle := \{\emptyset\} \cup \{ \Delta' \mid \Delta' \leq \Delta \in \mathscr{M} \}$; dann bleibt nur noch Eigenschaft (2) zu prüfen.

Die *Dimension* und die *Skelette* des Simplizialkomplexes $\mathscr{K}$ definieren wir durch

$$\dim \mathscr{K} := \sup\big\{ \dim \Delta \;\big|\; \Delta \in \mathscr{K} \big\}, \qquad \mathscr{K}_{\leq n} := \big\{ \Delta \in \mathscr{K} \;\big|\; \dim \Delta \leq n \big\},$$
$$\mathscr{K}_{<n} := \big\{ \Delta \in \mathscr{K} \;\big|\; \dim \Delta < n \big\}, \qquad \mathscr{K}_n := \big\{ \Delta \in \mathscr{K} \;\big|\; \dim \Delta = n \big\}.$$

Die *Eckenmenge* des Simplizialkomplexes $\mathscr{K}$ ist

$$\Omega(\mathscr{K}) := \bigcup \big\{ \operatorname{vert} \Delta \;\big|\; \Delta \in \mathscr{K} \big\} \quad \text{also} \quad \Omega(\mathscr{K}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{K}_0 \;:\; a \mapsto \{a\}.$$

Das durch den Komplex $\mathscr{K}$ definierte *Polyeder* ist die Vereinigung all seiner Simplizes:

$$|\mathscr{K}| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup\nolimits_{\Delta \in \mathscr{K}} \Delta = \bigsqcup\nolimits_{\Delta \in \mathscr{K}} \operatorname{Int} \Delta \;\subset\; V$$

Der Komplex $\mathscr{K}$ bestimmt also das Polyeder $|\mathscr{K}|$, aber nicht umgekehrt.

Jeden Simplex Δ versehen wir dank $\Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta$ mit seiner euklidischen Topologie (I1B). Das Polyeder $|\mathscr{K}|$ versehen wir mit der durch $\mathscr{K}$ definierten *simplizialen Topologie* $\mathfrak{T}_{\mathscr{K}}$:

Genau dann ist $U \subset |\mathscr{K}|$ offen, wenn $U \cap \Delta \subset \Delta$ offen ist in jedem Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$.

Genau dann ist $f : |\mathscr{K}| \to X$ stetig, wenn $f|_\Delta$ auf jedem Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$ stetig ist.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Beispiel.** Der kleinste Simplizialkomplex ist $\mathscr{K} = \{\emptyset\}$ der Dimension $\dim \mathscr{K} = -1$. Seine Eckenmenge $\Omega = \emptyset$ ist leer. Das zugehörige Polyeder $|\mathscr{K}| := \bigcup \mathscr{K} = \emptyset$ ist der leere Raum. ☜

> **Nullologie.** Gemäß unserer Definition I1C enthält jeder Simplizialkomplex $\mathscr{K}$ den leeren Simplex. Manche Autoren verbieten hingegen den leeren Simplex. Der (psychologische) Grund liegt darin, dass der leere Simplex zunächst weder anschaulich noch nützlich scheint. Obige Bedingungen lauten dann: (0) Der leere Simplex gehört *nicht* zu $\mathscr{K}$, kurz $\emptyset \notin \mathscr{K}$. (1) Für jeden Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$ ist jede *nicht-leere* Seite ein Element von $\mathscr{K}$. (2) Je zwei Simplizes $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathscr{K}$ haben als Durchschnitt *entweder die leere Menge oder* eine gemeinsame Seite. Beide Definitionen sind offensichtlich äquivalent durch Hinzufügen oder Entfernen des leeren Simplex. Mir scheint es für diese Definition und die weiteren Betrachtungen einfacher, die leere Menge stets als Simplex in $\mathscr{K}$ vorauszusetzen.

☞ **Beispiel I1D.** Jeder 0–dimensionale Komplex ist von der Form $\mathscr{K} = \{\emptyset, \{v\} \mid v \in \Omega\}$ mit einer Eckenmenge $\Omega \neq \emptyset$. Das zugehörige Polyeder ist $|\mathscr{K}| = \Omega$ mit diskreter Topologie. ☜

☞ **Beispiel I1E.** Für jeden n–Simplex $\Delta \subset V$ ist die Menge $\mathscr{D}^n = \langle \Delta \rangle = \{\Delta' \mid \Delta' \leq \Delta\}$ aller Seiten ein Simplizialkomplex der Dimension n mit Polyeder $|\mathscr{D}^n| = \Delta \cong \mathbb{D}^n$. Die Menge $\mathscr{D}^n_{<n} = \{\Delta' \mid \Delta' < \Delta\}$ der echten Seiten ist ein Simplizialkomplex der Dimension $n-1$ mit Polyeder $|\mathscr{D}^n_{<n}| = \partial\Delta \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Die Homöomorphismen erhalten wir aus F6H. ☜

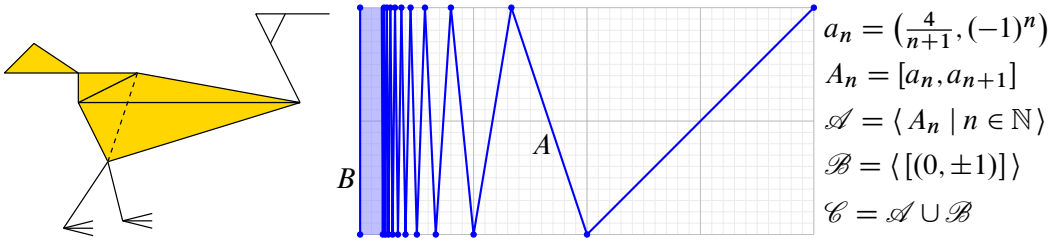


ABBILDUNG I:5. Der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt.

✍ **Beispiel I1F.** Abbildung I:5 zeigt die Sinuskurve des Topologen (G:2) in einer simplizialen Version $\mathscr{C} = \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$. In $C = A \cup B$ mit der simplizialen Topologie $\mathcal{T}_{\mathscr{C}}$ sind A und B beide offen, also auch beide abgeschlossen, und somit ist $C = A \sqcup B$ eine topologische Summe. In der Teilraumtopologie von C in $\mathbb{R}^2$ ist nur A offen und nur B abgeschlossen (G2L). ✍

ABBILDUNG I:6. Der Komplex $\mathscr{C}$ mit simplizialer Topologie $\mathcal{T}_{\mathscr{C}}$

☞ **Beispiel.** Es lohnt sich, genauer hinzuschauen: Die Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht lokal-endlich in jedem Punkt $a \in V$, wohl aber in jedem Punkt $a \in A$. Letzteres genügt für Satz I1G: Für das Polyeder $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ stimmen simpliziale Topologie und Teilraumtopologie überein. ☜

✍ **Satz I1G.** *Sei V ein topologischer Vektorraum. Die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_{\mathscr{K}}$ ist feiner als die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_{|\mathscr{K}|}$, also $\mathcal{T}_{\mathscr{K}} \supset \mathcal{T}_{|\mathscr{K}|}$. Ist $\mathscr{K}$ in V lokal-endlich, so gilt $\mathcal{T}_{\mathscr{K}} = \mathcal{T}_{|\mathscr{K}|}$.* ✍

✍ BEWEIS. Die Abbildung $h : \mathbb{R}^{n+1} \supset \Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta \subset V$ ist ein Homöomorphismus (F1L). und $|\mathscr{K}| = \bigcup_{\Delta\in\mathscr{K}} \Delta$ ist eine abgeschlossene Überdeckung in beiden Topologien (I1C bzw. F1G). Ist sie lokal-endlich, so definiert dies eindeutig die Topologie (I1C bzw. E1N). □ ✍

☞ **Bemerkung.** Die Topologie des Polyeders $|\mathscr{K}|$ hängt nur von der kombinatorischen Struktur des Komplexes $\mathscr{K}$ ab, aber nicht von der Lage in V. Dazu ist die simpliziale Topologie mit Bedacht gewählt. Sie erweist sich im weiteren Verlauf als die richtige Wahl. ☜

Bemerkung. Die simpliziale Topologie ist kompakt erzeugt (F3S).

☞ **Übung I1H.** Jeder Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$ ist abgeschlossen in $|\mathscr{K}|$ mit simplizialer Topologie. (1) Wann ist Δ offen? (2) Wann ist das Innere $\operatorname{Int}\Delta$ eines Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$ offen in $|\mathscr{K}|$? ☜

✻ **I1H.** (0) Wir wenden die Definition I1C an: Der Schnitt von Δ mit jedem $\Delta' \in \mathscr{K}$ ist eine gemeinsame Seite, insbesondere also abgeschlossen in Δ'. Somit ist Δ abgeschlossen in $|\mathscr{K}|$ mit simplizialer Topologie.

(1) Genau dann ist ein Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$ offen in $|\mathscr{K}|$, wenn er nur seine Seiten $\Delta' \leq \Delta$ schneidet und keine weiteren Simplizes. „⇐“: Für jede Seite $\Delta' \leq \Delta$ ist $\Delta \cap \Delta' = \Delta'$ offen in Δ'. Für jeden anderen Simplex Δ' ist $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ ebenfalls offen in Δ'. „⇒“: Die einzigen offenen Seiten von Δ' sind $\emptyset$ und Δ'. Ist also Δ offen in $|\mathscr{K}|$, dann gilt für jeden Simplex $\Delta' \in \mathscr{K}$ folglich $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ oder aber $= \Delta'$, also $\Delta' \leq \Delta$.

Bemerkung: Das bedeutet, der Simplizialkomplex $\mathscr{K} = \langle\, \Delta \,\rangle \cup \mathscr{K}'$ ist die Vereinigung des Komplexes $\langle\, \Delta \,\rangle$ und einem komplementären Komplex $\mathscr{K}'$, disjunkt im Sinne von $\langle\, \Delta \,\rangle \cap \mathscr{K}' = \{\emptyset\}$. Für die zugehörigen Polyeder mit simplizialer Topologie bedeutet das eine topologische Summe $|\mathscr{K}| = \Delta \sqcup |\mathscr{K}'|$ wie in I1F.

(2) Genau dann ist $\operatorname{Int}\Delta \in \mathscr{K}$ offen in $|\mathscr{K}|$, wenn Δ maximal ist in $(\mathscr{K}, \leq)$, also nicht Seite eines größeren Simplex. Wir zeigen „⇒“ durch Kontraposition: Für $\Delta < \Delta' \in \mathscr{K}$ ist $\operatorname{Int}\Delta \cap \Delta' = \operatorname{Int}\Delta$ nicht offen in Δ'. „⇐“: Ist Δ maximal, dann gilt für jeden Simplex $\Delta' \in \mathscr{K}$ entweder $\Delta' = \Delta$ oder $\Delta \cap \Delta' < \Delta$. Im ersten Fall ist $\operatorname{Int}\Delta \cap \Delta = \operatorname{Int}\Delta$ offen in Δ. Im zweiten Fall ist $\operatorname{Int}\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ offen in Δ'.

Bemerkung: Maximal verstehen wir hier bezüglich Inklusion in $\mathscr{K}$. Hinreichend aber nicht notwendig hierzu ist, dass der betrachtete Simplex Δ in $\mathscr{K}$ die maximale Dimension hat, also $\dim\Delta = \dim\mathscr{K}$.

§I1d. Simpliziale Teilkomplexe.

✍ **Definition I1I.** Sei $\mathscr{K}$ ein affiner Simplizialkomplex. Ein *Teilkomplex* $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}$ ist eine Teilmenge $\mathscr{L} \subset \mathscr{K}$ mit (0) $\emptyset \in \mathscr{L}$ und (1) $\Delta' \leq \Delta \in \mathscr{L} \Rightarrow \Delta' \in \mathscr{L}$. ✍

Beispiel. Jede Teilmenge $\mathscr{M} \subset \mathscr{K}$ erzeugt gemäß I1C einen Teilkomplex $\mathscr{L} = \langle\, \mathscr{M} \,\rangle$.

☞ **Übung I1J.** (a) Die Bedingung I1C(2), also $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathscr{K} \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 \leq \Delta_1, \Delta_2$, vererbt sich von $\mathscr{K}$ auf $\mathscr{L}$, somit ist $\mathscr{L}$ selbst ein affiner Simplizialkomplex gemäß Definition I1C.
(b) Das Polyeder $|\mathscr{L}| \subset |\mathscr{K}|$ ist abgeschlossen in der simplizialen Topologie $\mathfrak{T}_{\mathscr{K}}$.
(c) Dank simplizialer Topologie ist $(|\mathscr{L}|, \mathfrak{T}_{\mathscr{L}})$ ein Teilraum von $(|\mathscr{K}|, \mathfrak{T}_{\mathscr{K}})$. ☜

✻ **I1J.** (a) All-Aussagen wie (2) vererben sich bei Einschränkung auf $\mathscr{L} \subset \mathscr{K}$, nur Existenz–Aussagen wie (0) und (1) müssen explizit gefordert werden. Somit ist $\mathscr{L}$ ein affiner Simplizialkomplex gemäß Definition I1C.

(b) Für jeden Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$ ist die Schnittmenge $\mathscr{L} \cap \Delta \subset \Delta$ eine Seite, also abgeschlossen in Δ. Gemäß Definition der simplizialen Topologie (I1C), ist somit die Teilmenge $|\mathscr{L}| \subset |\mathscr{K}|$ abgeschlossen in $\mathfrak{T}_{\mathscr{K}}$.

(c) Spezialfall: Ist $\mathscr{K}$ lokal-endlich, so auch $\mathscr{L}$, und $|\mathscr{L}| \subset |\mathscr{K}| \subset V$ tragen die Teilraumtopologie.

Im allgemeinen Fall wiederholen wir die Definitionen und vergleichen die simpliziale Topologie I1C mit der Teilraumtopologie D1K. Aus Gewohnheit könnten wir wie immer offene Mengen untersuchen, das ist möglich aber länglich. Die Betrachtung abgeschlossener Mengen ist hier vorteilhaft, da wesentlich einfacher:

„$\mathfrak{T}_{|\mathscr{L}|} \subset \mathfrak{T}_{\mathscr{L}}$“: Sei $A \subset |\mathscr{L}|$ abgeschlossen im Teilraum $(|\mathscr{L}|, \mathfrak{T}_{|\mathscr{L}|})$. Gemäß D1K existiert $B \subset |\mathscr{K}|$ abgeschlossen im umgebenden Raum $(\mathscr{K}, \mathfrak{T}_{\mathscr{K}})$ mit $B \cap |\mathscr{L}| = A$. Gemäß I1C gilt insbesondere: Für jeden Simplex $\Delta \in \mathscr{L} \subset \mathscr{K}$ ist $A \cap \Delta = B \cap \Delta \subset \Delta$ abgeschlossen in Δ. Somit ist A abgeschlossen in $(|\mathscr{L}|, \mathfrak{T}_{\mathscr{L}})$.

„$\mathfrak{T}_{\mathscr{L}} \subset \mathfrak{T}_{|\mathscr{L}|}$“: Sei $A \subset |\mathscr{L}|$ abgeschlossen in $(|\mathscr{L}|, \mathfrak{T}_{\mathscr{L}})$. Gemäß I1C gilt: Für jeden Simplex $\Delta \in \mathscr{L}$ ist $A \cap \Delta \subset \Delta$ abgeschlossen in Δ. Dasselbe gilt dann für alle $\Delta' \in \mathscr{K}$, denn $A \cap \Delta' = \bigcup\{ A \cap \Delta \mid \Delta \in \mathscr{L}, \Delta \leq \Delta' \}$ ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen in Δ', also wiederum abgeschlossen in Δ'. Demnach ist A abgeschlossen in $(|\mathscr{K}|, \mathfrak{T}_{\mathscr{K}})$. Gemäß D1K ist $A = A \cap |\mathscr{L}|$ abgeschlossen im Teilraum $(|\mathscr{L}|, \mathfrak{T}_{|\mathscr{L}|})$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I1e. Simpliziale Abbildungen.

✍ **Definition I1K.** Seien $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ affine Simplizialkomplexe. Eine *simpliziale Abbildung* $f : \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ ist eine Abbildung $f : \Omega(\mathscr{K}) \to \Omega(\mathscr{L})$ der Eckenmengen, sodass gilt: ✍

(I.1) $\quad \Delta = [s_0, s_1, \dots, s_n] \in \mathscr{K} \quad \Longrightarrow \quad f(\Delta) = [f(s_0), f(s_1), \dots, f(s_n)] \in \mathscr{L}$

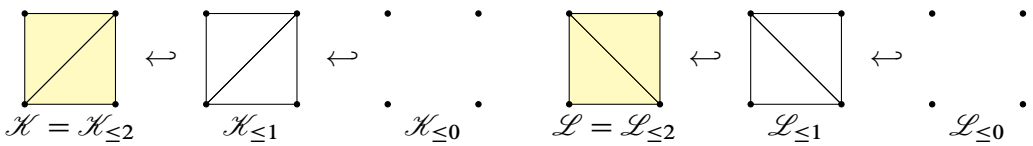
Somit erhalten wir die affin-lineare Fortsetzung $|f|_\Delta^{\Delta'} : \Delta \to \Delta'$ durch

(I.2) $\quad f(t_0 s_0 + t_1 s_1 + \cdots + t_n s_n) = t_0 f(s_0) + t_1 f(s_1) + \cdots + t_n f(s_n)$

für alle $t \in \Delta^n$. Dies definiert $|f|_\Delta : |\mathscr{K}| \supset \Delta \to \Delta' \hookrightarrow |\mathscr{L}|$. Durch Verkleben erhalten wir die *geometrische Realisierung* $|f| : |\mathscr{K}| \to |\mathscr{L}|$ auf den Polyedern. Sie ist stetig dank simplizialer Topologie (I1C). Wir nennen $|f|$ *simplizial* oder *stückweise affin* bezüglich der (implizit mitgedachten) Unterteilungen $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$.

✍ **Beispiel.** Für jeden Teilkomplex $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}$ ist die Inklusion $\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{K}$ eine simpliziale Abbildung und $|\mathscr{L}| \hookrightarrow |\mathscr{K}|$ eine simpliziale Einbettung: Die durch $\mathscr{L}$ definierte simpliziale Topologie auf $|\mathscr{L}|$ stimmt überein mit der Teilraumtopologie von $|\mathscr{L}|$ in $|\mathscr{K}|$. ✍

✍ **Beispiel.** Für $n \in \mathbb{N}$ ist das *n–Skelett* $\mathscr{K}_{\leq n} := \{\, \Delta \in \mathscr{K} \mid \dim \Delta \leq n \,\} \leq \mathscr{K}$ ein Teilkomplex. Das zugehörige Polyeder $|\mathscr{K}_{\leq n}| \hookrightarrow |\mathscr{K}|$ ist das *n–Skelett* des Polyeders $|\mathscr{K}|$ bezüglich $\mathscr{K}$. ✍



☞ **Bemerkung.** Das n–Skelett ergibt sich nicht allein aus dem Raum $|\mathscr{K}|$, sondern erst aus dem Komplex $\mathscr{K}$, der die Unterteilung vorgibt. Umgekehrt lässt sich aus der Familie aller Skelette $|\mathscr{K}_{\leq 0}| \subset |\mathscr{K}_{\leq 1}| \subset |\mathscr{K}_{\leq 2}| \subset \ldots \subset |\mathscr{K}| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} |\mathscr{K}_{\leq n}|$ der simpliziale Aufbau des Polyeders $|\mathscr{K}| \subset V$ ablesen und somit der Komplex $\mathscr{K}$ rekonstruieren. ☜

☞ **Übung I1L.** (1) Wie viele simpliziale Abbildungen $\mathscr{D}^n \to \mathscr{D}^n$ gibt es für $\mathscr{D}^n = \langle\, \Delta^n \,\rangle$? Wie viele davon sind injektiv / surjektiv / bijektiv? Dieselben Fragen für $\mathscr{D}^n_{\leq k} \to \mathscr{D}^n_{\leq \ell}$.
(2) Wie viele Teilkomplexe haben die Simplizialkomplexe $\mathscr{D}^1$ und $\mathscr{D}^2$? ☜

✻ **I1L.** (1) Hier definiert *jede* Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ der Eckenmenge $\Omega = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ eine simpliziale Abbildung $f : \mathscr{D}^n \to \mathscr{D}^n$. Insgesamt gibt es also $(n+1)^{n+1}$ Möglichkeiten. Davon sind genau $(n+1)!$ bijektiv. Da Start- und Zielmenge $n+1$ Elemente enthalten, sind Injektivität / Surjektivität / Bijektivität äquivalent.

Für $0 \leq k \leq \ell \leq n$ ergibt sich weiterhin keine Einschränkung. Für $0 = \ell < k \leq n$ und $\mathscr{D}^n_{\leq k} \to \mathscr{D}^n_{\leq 0}$ gibt es nur die $n+1$ konstanten Abbildungen. Allgemein für $0 \leq \ell < k \leq n$ und $\mathscr{D}^n_{\leq k} \to \mathscr{D}^n_{\leq 1}$ gibt es genau die Abbildungen $\Omega \to \Omega$, deren Bild in einem ℓ–Simplex liegt, also höchstens $\ell + 1$ Elemente enthält.

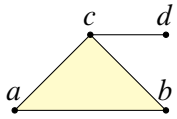
(2) Zunächst $\mathscr{D}^1$: Wir finden $\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset, \{e_1\}\}$ und $\{\emptyset, \{e_2\}\}$ sowie $\mathscr{D}^1$, insgesamt also 4 Teilkomplexe. Anschließend $\mathscr{D}^2$: Wir finden den leeren Komplex $\{\emptyset\}$ der Dimension -1, dann 7 Teilkomplexe der Dimension 0, und 10 Teilkomplexe der Dimension 1, schließlich $\mathscr{D}^2$ der Dimension 2, insgesamt also 19 Teilkomplexe.

☞ **Übung I1M.** Jeder simpliziale Komplex (I1A) ist polytopal (A3B/I3K), aber nicht umgekehrt, selbst wenn er nur aus Simplizes besteht (I:3). Finden Sie das kleinste Gegenbeispiel. ☜

✻ **I1M.** In I1A fordern wir, dass jede Seite $\Delta' \leq \Delta \in \mathscr{K}$ zum Komplex gehört, in I3K/A3B nur, dass zu jedem Polytop $P \in \mathscr{K}$ der Rand endliche Vereinigung von Polytopen aus $\mathscr{K}$ ist. Für $\dim \mathscr{K} \leq 1$, also Graphen aus Ecken und Kanten, besteht hier kein Unterschied. Das kleinste Gegenbeispiel in Dimension 2 ist ein Dreieck $[a, b, c]$ mit einer unterteilten Seite. Dieses Beispiel, etwas erweitert, ist in Abbildung I:3 dargestellt.

§I2. Kombinatorische Simplizialkomplexe

Jeder affine Simplizialkomplex $\mathscr{K}$ in V wird durch seine Simplizes $\Delta \in \mathscr{K}$ festgelegt, und jeder affine Simplex $\Delta \subset V$ ist durch seine Eckenmenge $\operatorname{vert}(\Delta)$ festgelegt:



$$\begin{array}{lcl} \Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] & \leftrightarrow & \operatorname{vert}(\Delta) = \{ v_0, v_1, \dots, v_n \} \\ \mathscr{K} = \{ \Delta \mid \Delta \in \mathscr{K} \} & \leftrightarrow & K = \{ \operatorname{vert}(\Delta) \mid \Delta \in \mathscr{K} \} \end{array}$$

$$\mathscr{K} = \langle\, [a,b,c],[c,d] \,\rangle = \{ \emptyset,\ [a],\ [b],\ [c],\ [d],\ [a,b],\ [a,c],\ [b,c],\ [c,d],\ [a,b,c] \}$$
$$K = \langle \{a,b,c\},\{c,d\} \rangle = \{ \emptyset,\ \{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\ \{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{c,d\},\ \{a,b,c\} \}$$

ABBILDUNG I:7. Ein Simplizialkomplex: affin $\mathscr{K}$ und kombinatorisch K

Damit erreichen wir eine effiziente kombinatorische Beschreibung: Besser noch als $\mathscr{K}$ eignet sich K zur Speicherung und Verarbeitung der Daten, etwa auf einem Computer.

Definition I2A. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Eine endliche, affin unabhängige Menge $S \subset V$ heißt *kombinatorischer Simplex* der Dimension $\dim S := \sharp S - 1$. Ein *kombinatorischer Simplizialkomplex K in V* ist eine Familie kombinatorischer Simplizes $S \subset V$, für die gilt:

(0) Die leere Menge gehört zu K, kurz $\emptyset \in K$.
(1) Mit jedem Simplex $[S]$ haben wir auch jede Seite $[T] \le [S]$:
$$T \subset S \in K \quad \Longrightarrow \quad T \in K$$
(2) Je zwei Simplizes $[S]$ und $[T]$ haben als Durchschnitt eine gemeinsame Seite:
$$S, T \in K \quad \Longrightarrow \quad [S] \cap [T] = [S \cap T].$$

Für jede Familie M von Simplizes können wir (0) und (1) erreichen durch Übergang zu $K = \langle M \rangle := \{\emptyset\} \cup \{ T \mid T \subset S \in M \}$. Es bleibt dann noch Eigenschaft (2) zu prüfen.

Die *Dimension* und die *Skelette* des Komplexes K definieren wir durch

$$\dim K := \sup\{ \dim S \mid S \in K \}, \qquad K_{\le n} := \{ S \in K \mid \dim S \le n \},$$
$$K_{<n} := \{ S \in K \mid \dim S < n \}, \qquad K_n := \{ S \in K \mid \dim S = n \}.$$

Die *Eckenmenge* des Simplizialkomplexes K ist

$$\Omega(K) := \bigcup K \quad \text{also} \quad \Omega(K) \xrightarrow{\sim} K_0 : a \mapsto \{a\}.$$

Jedes Element $a \in \Omega(K)$ nennen wir eine *Ecke* des Komplexes K.

Jeder kombinatorische Simplizialkomplex K definiert einen affinen Simplizialkomplex $\mathscr{K} = \{ [S] \mid S \in K \}$. Umgekehrt bestimmt $\mathscr{K}$ den Komplex $K = \{ \operatorname{vert}(\Delta) \mid \Delta \in \mathscr{K} \}$.

Das durch K definierte *Polyeder* ist die Vereinigung all seiner affinen Simplizes:

$$|K| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup\nolimits_{S \in K} [S] = \bigsqcup\nolimits_{S \in K} \operatorname{Int}[S] \ \subset\ V$$

Jeden Simplex $[S]$ versehen wir mit seiner euklidischen Topologie (I1A). Das gesamte Polyeder $|K|$ versehen wir mit der durch K definierten *simplizialen Topologie* $\mathcal{T}_K$ (I1C): Genau dann ist $U \subset |K|$ offen, wenn $U \cap [S] \subset [S]$ offen ist in jedem Simplex mit $S \in K$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§I2a. Abstrakte Simplizialkomplexe.** Jeder affine Simplizialkomplex $\mathscr{K}$ in V wird ☜ durch seine Simplizes $\Delta \in \mathscr{K}$ festgelegt, und jeder affine Simplex $\Delta \subset V$ ist durch seine Eckenmenge $\mathrm{vert}(\Delta)$ festgelegt. Wie oben erklärt erhalten wir so aus $\mathscr{K}$ den kombinatorischen Simplizialkomplex K in V. Jeder Simplex $S \in K$ ist eine endliche, affin unabhängige Teilmenge $S \subset V$, er spannt also einen affinen Simplex $[S]$ in V auf. So rekonstruieren wir $\mathscr{K}$ aus K, es ist also noch keine Information verloren gegangen.

Wir können schließlich den umgebenden Vektorraum V vergessen und nur die abstrakte Struktur der Simplizes betrachten. Diese Beschreibung ist äußerst knapp und effizient:

✍ **Definition I2B.** Ein *(abstrakter) Simplizialkomplex* K ist eine Familie endlicher Mengen ✍ mit $\emptyset \in K$ und $T \subset S \in K \Rightarrow T \in K$.

Jede beliebige Familie M endlicher Mengen erzeugt einen abstrakten Simplizialkomplex $K = \langle M \rangle := \{\emptyset\} \cup \{ T \mid T \subset S \in M \}$. Diese kurze Beschreibung ist oft bequem.

Wir nennen $S \in K$ einen *(abstrakten) Simplex* der Dimension $\dim S := \sharp S - 1$.

Wie zuvor definieren wir die *Dimension* und die *Skelette* des Komplexes K durch

$$\dim K := \sup\big\{ \dim S \;\big|\; S \in K \big\}, \qquad K_{\leq n} := \big\{ S \in K \;\big|\; \dim S \leq n \big\},$$
$$K_{<n} := \big\{ S \in K \;\big|\; \dim S < n \big\}, \qquad K_n := \big\{ S \in K \;\big|\; \dim S = n \big\}.$$

Die *Eckenmenge* des Simplizialkomplexes K ist

$$\Omega(K) := \bigcup K \quad \text{also} \quad \Omega(K) \xrightarrow{\sim} K_0 \;:\; a \mapsto \{a\}.$$

Jedes Element $a \in \Omega(K)$ nennen wir eine *Ecke* des Komplexes K.

☞ **§I2b. Geometrische Realisierung.** Wir wollen jedem abstrakten Simplizialkomplex ☜ K einen affinen Simplizialkomplex $\mathscr{K}$ in einem geeigneten $\mathbb{R}$–Vektorraum V zuordnen.

Der abstrakte Komplex K hat als Ecken $s \in \Omega(K)$. Dies sind zunächst keine Vektoren, wir müssen einen passenden Vektorraum V erst noch angeben. Jeder Ecke $s \in \Omega$ wollen wir dann einen Vektor $f(s) \in V$ zuordnen. Dabei ist zu beachten, dass für jeden Simplex $\{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ in K die Vektoren $f(s_0), f(s_1), \ldots, f(s_n)$ in V affin unabhängig sein müssen. Zudem dürfen sich je zwei Simplizes nur in einer gemeinsamen Seite schneiden:

✍ **Definition I2C.** Eine *(affine) Darstellung* $f : K \to V$ eines abstrakten Simplizialkomplexes ✍ K in einem $\mathbb{R}$–Vektorraum V ist eine injektive Abbildung $f : \Omega(K) \to V$ sodass gilt:

(1) Für jeden Simplex $S \in K$ ist $f(S) \subset V$ affin unabhängig.
Somit ist $|S|_f := [f(S)] \subset V$ ein affiner Simplex in V.
(2) Für alle $S, T \in K$ gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = [f(S \cap T)]$.
Somit ist $\mathscr{K} := \{ [f(S)] \subset V \mid S \in K \}$ ein affiner Simplizialkomplex in V.

Aus dem *abstrakten* Simplizialkomplex K wird als Bild unter f in V der *kombinatorische* $f(K) = \{ f(S) \subset V \mid S \in K \}$ und daraus der *affine* $\mathscr{K} := \{ [f(S)] \subset V \mid S \in K \}$. Das Polyeder $|K|_f := |\mathscr{K}|$ nennen wir die *geometrische Realisierung* mittels $f : K \to V$.

☞ **Beispiel.** Sei K in V ein kombinatorischer Simplizialkomplex (I2A), also eine Familie end- ☜ licher, affin unabhängiger Teilmengen $S \subset V$ mit (0) $\emptyset \in K$ und (1) $T \subset S \in K \Rightarrow T \in K$ sowie (2) $S, T \in K \Rightarrow [S] \cap [T] = [S \cap T]$. Dann ist K ein abstrakter Simplizialkomplex und die Inklusion $\mathrm{inc} : K \hookrightarrow V$ ist eine Darstellung.

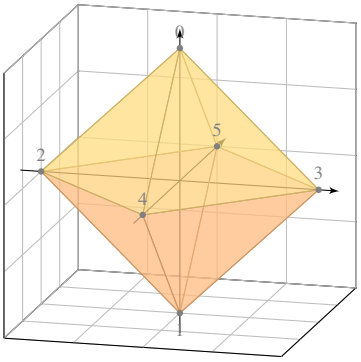
☞ **Bemerkung.** Die Definitionen I2B und I2C trennen die kombinatorischen Daten K von den geometrischen Daten f. Der Komplex K gibt den Bauplan vor, allerdings noch ohne Angabe von Längen, Winkeln, Volumina etc. Die Darstellung $f : K \to V$ realisiert dies in einem Vektorraum V. Bildlich gesprochen ist V der Bauplatz, die Punkte $f(s) \in V$ stecken die Ecken ab. Der abstrakte Bauplan K sagt *was* gebaut wird, die Abbildung f sagt *wo*. Schließlich wird das Polyeder $|K|_f \subset V$ mit „kontinuierlicher Raumsoße“ ausgegossen. ☜

☞ **Beispiel.** Der leere Komplex $K = \{\emptyset\}$ hat Dimension $\dim K = -1$ und Eckenmenge $\Omega = \emptyset$. Die leere Abbildung $f : \Omega \hookrightarrow V$ ist eine Darstellung und ergibt das Polyeder $|K|_f = \emptyset$. ☜

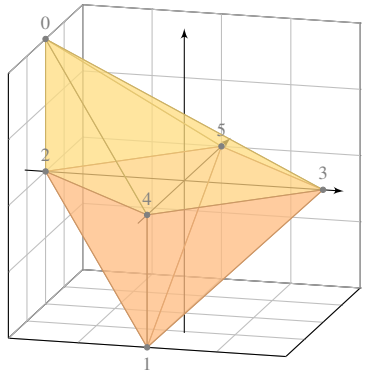
☞ **Beispiel.** Jeder 0–dimensionale Komplex hat die Form $K = \{\,\emptyset, \{a\} \mid a \in \Omega\,\}$ mit $\Omega \neq \emptyset$. Jede injektive Abbildung $f : \Omega \hookrightarrow V$ ergibt das Polyeder $|K|_f = f(\Omega)$ als diskreten Raum. ☜

✍ **Beispiel.** Ein Komplex K mit $\dim K \leq 1$ heißt *(simplizialer) Graph*. Er besteht aus Ecken $a, b, \ldots \in \Omega$ und gewissen Kanten $\{a, b\}$. Bei einer Darstellung $f : \Omega \hookrightarrow V$ schneiden sich Kanten nur in gemeinsamen Ecken. Das Polyeder $|K|_f$ ist dann ein *topologischer Graph*. ✍

☞ **Bemerkung.** Die Trennung (K, f) in kombinatorische und geometrische Daten ist die natürliche Wahl für eine effiziente Implementierung auf einem Computer. Die folgenden Graphiken zeigen ein reguläres und ein nicht-reguläres Oktaeder. Die kombinatorischen Komplexe sind jeweils dieselben, nur die Koordinaten der Eckpunkte ändern sich. Als konkrete Illustration füge ich die hierfür benutzten Skripte in der Graphiksprache *TikZ* bei. ☜




```
\addplot3[ patch, patch type=triangle,
  patch table={ % Liste der 2-Simplizes
    0 2 4 \\ % Dreieck oben links vorne
    0 3 4 \\ % Dreieck oben rechts vorne
    0 2 5 \\ % Dreieck oben links hinten
    0 3 5 \\ % Dreieck oben rechts hinten
    1 2 4 \\ % Dreieck unten links vorne
    1 3 4 \\ % Dreieck unten rechts vorne
    1 2 5 \\ % Dreieck unten links hinten
    1 3 5 \\ % Dreieck unten rechts hinten
  } ]
table{ % Liste der Koordinaten der Eckpunkte
   0  0 +2 \\ % Punkt 0 (oben)
   0  0 -2 \\ % Punkt 1 (unten)
  -2  0  0 \\ % Punkt 2 (links)
  +2  0  0 \\ % Punkt 3 (rechts)
   0 -2  0 \\ % Punkt 4 (vorne)
   0 +2  0 \\ % Punkt 5 (hinten)
};
```




```
\addplot3[ patch, patch type=triangle,
  patch table={ % Liste der 2-Simplizes
    0 2 4 \\ % Dreieck oben links vorne
    0 3 4 \\ % Dreieck oben rechts vorne
    0 2 5 \\ % Dreieck oben links hinten
    0 3 5 \\ % Dreieck oben rechts hinten
    1 2 4 \\ % Dreieck unten links vorne
    1 3 4 \\ % Dreieck unten rechts vorne
    1 2 5 \\ % Dreieck unten links hinten
    1 3 5 \\ % Dreieck unten rechts hinten
  } ]
table{ % Liste der Koordinaten der Eckpunkte
  -2  0 +2 \\ % Punkt 0 (oben links)
   0 -2 -2 \\ % Punkt 1 (unten vorne)
  -2  0  0 \\ % Punkt 2 (links)
  +2  0  0 \\ % Punkt 3 (rechts)
   0 -2  0 \\ % Punkt 4 (vorne)
   0 +2  0 \\ % Punkt 5 (hinten)
};
```

ABBILDUNG I:8. Zwei Realisierungen eines kombinatorischen Oktaeders

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I2c. Die kanonische Realisierung. Sei K ein abstrakter Simplizialkomplex mit der Eckenmenge $\Omega = \Omega(K) = \bigcup K$. Die Anforderungen an eine Darstellung $f : K \to V$ sind automatisch erfüllt, wenn *alle* Vektoren $(f(s))_{s\in\Omega}$ affin unabhängig sind (I2C).

Beispiel. Jeden Simplizialkomplex K mit endlicher Eckenmenge $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ können wir realisieren durch die Darstellung $e : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1} : s \mapsto e_s$ auf die Standardbasis $e_0, e_1, \dots, e_n$. Wir erhalten $|K| \subset \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Teilkomplex des Standardsimplex.

Diese Konstruktion gelingt für alle Eckenmengen, egal ob endlich und unendlich:

Definition I2D. Die *kanonische Darstellung* des Komplexes K ist $e : K \to \mathbb{R}^{(\Omega)} : s \mapsto e_s$.

Wir nutzen den Vektorraum $\mathbb{R}^{(\Omega)}$ aller Funktionen $x : \Omega \to \mathbb{R}$ mit endlichem Träger $\operatorname{supp}(x) = \{ s \in \Omega \mid x(s) \neq 0 \}$. Kanonische Basis $(e_s)_{s\in\Omega}$ sind die Funktionen $e_s : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $e_s(s) = 1$ und $e_s(s') = 0$ für $s' \neq s$. Wir erhalten daraus die kanonische Darstellung $e : \Omega \hookrightarrow \mathbb{R}^{(\Omega)} : s \mapsto e_s$ und den affinen Simplizialkomplex $\mathscr{K} = \big\{ [e(S)] \,\big|\, S \in K \big\}$.

Das zugehörige Polyeder ist die *kanonische Realisierung* von K:

$$\begin{aligned} |K| \;:=\; |K|_e \;&=\; \bigcup \big\{ [e(S)] \,\big|\, S \in K \big\} \;=\; \bigcup\nolimits_{S\in K} [e(S)] \\ &= \big\{ x = \textstyle\sum_{s\in\Omega} x(s)\cdot e(s) \,\big|\, \operatorname{supp}(x) \in K,\ x(s) \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \sum_{s\in\Omega} x(s) = 1 \big\} \\ &= \big\{ x : \Omega \to [0,1] \,\big|\, \operatorname{supp}(x) \in K,\ \textstyle\sum_{s\in\Omega} x(s) = 1 \big\}. \end{aligned}$$

Jeder Punkt $x \in |K|$ schreibt sich eindeutig als endliche Summe $x = \sum_s x(s)\cdot e(s)$ mit baryzentrischen Koordinaten $x(s) \geq 0$ und $\sum_s x(s) = 1$. Der Träger $S = \operatorname{supp}(x) \in K$ ist demnach die Eckenmenge des kleinsten Simplex, der den Punkt $x \in |K|$ enthält.

Bemerkung. Die Dimension ist im Allgemeinen unnötig groß. Jeder endliche (oder abzählbare lokal-endliche) Simplizialkomplex K der Dimension $\dim K = m$ erlaubt simpliziale Einbettungen $|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ (I2Q). Solche Einbettungen sind jedoch nicht kanonisch.

Satz I2E. *Sei K ein abstrakter Simplizialkomplex und $|K| \subset \mathbb{R}^{(\Omega)}$ seine kanonische Realisierung. Sei $f : K \to V$ eine beliebige Darstellung in einem Vektorraum V und $|K|_f \subset V$ die so entstehende Realisierung. Dann erhalten wir den kanonischen Homöomorphismus*

$$h : |K| \xrightarrow{\sim} |K|_f \quad \textit{mit} \quad e(s) \mapsto f(s), \quad \textit{also} \quad \sum_{s\in\Omega} x(s)\cdot e(s) \mapsto \sum_{s\in\Omega} x(s)\cdot f(s).$$

BEWEIS. Da wir f als Darstellung voraussetzen, ist h bijektiv (I2C). Auf jedem Simplex $S \in K$ ist die Einschränkung $h : [S] \to [f(S)]$ ein Homöomorphismus (I1A). Daher ist $h : |K| \xrightarrow{\sim} |K|_f$ ein Homöomorphismus bezüglich der simplizialen Topologien (I1C). □

Bemerkung. Dieser Satz garantiert, dass die *Topologie* der Realisierung $|K|$ allein durch den abstrakten Simplizialkomplex K festgelegt wird. Die *Metrik* und somit die *Geometrie* unterscheidet sich je nach Darstellung f, wie in Abbildung I:8 illustriert. Die Wahl der Einbettung bestimmt alle geometrischen Eigenschaften wie die genaue Lage, Längen, Winkel, Volumina, etc., doch die Topologie ist dank Satz I2E immer dieselbe.

Konvention. Es ist oft bequem, jede Ecke $s \in \Omega$ mit $e_s \in \mathbb{R}^{(\Omega)}$ zu identifizieren, kurz $s = e_s$. So können wir jeden abstrakten Simplizialkomplex K als kombinatorischen in $\mathbb{R}^{(\Omega)}$ betrachten: Für jeden Simplex $S \in K$ ist die Realisierung der aufgespannte affine Simplex $[S] \subset \mathbb{R}^{(\Omega)}$, und der kanonische affine Simplizialkomplex ist $\mathscr{K} = \{ [S] \mid S \in K \}$.

§I2d. Simpliziale Abbildungen. Wie zuvor im affinen Fall vereinbaren wir:

Definition I2F. Sei K ein Simplizialkomplex (kombinatorisch I2A oder abstrakt I2B). Ein *Teilkomplex* $L \leq K$ ist eine Teilmenge $L \subset K$ mit $\emptyset \in L$ und $T \subset S \in L \Rightarrow T \in L$.

Beispiel. Jede Teilmenge $M \subset K$ erzeugt gemäß I2B einen Teilkomplex $\langle M \rangle \leq K$.

Definition I2G. Eine *simpliziale Abbildung* $f : K \to L$ zwischen Simplizialkomplexen ist eine Abbildung $f : \Omega(K) \to \Omega(L)$ der Eckenmengen, sodass gilt:

$$S = \{ s_0, s_1, \ldots, s_n \} \in K \quad \Longrightarrow \quad f(S) = \{ f(s_0), f(s_1), \ldots, f(s_n) \} \in L \tag{I.3}$$

Die *geometrische Realisierung* von $f : K \to L$ ist die affine Fortsetzung

$$|f| : |K| \to |L| \quad \text{mit} \quad \sum\nolimits_{s \in \Omega(K)} x(s) \cdot s \mapsto \sum\nolimits_{s \in \Omega(K)} x(s) \cdot f(s). \tag{I.4}$$

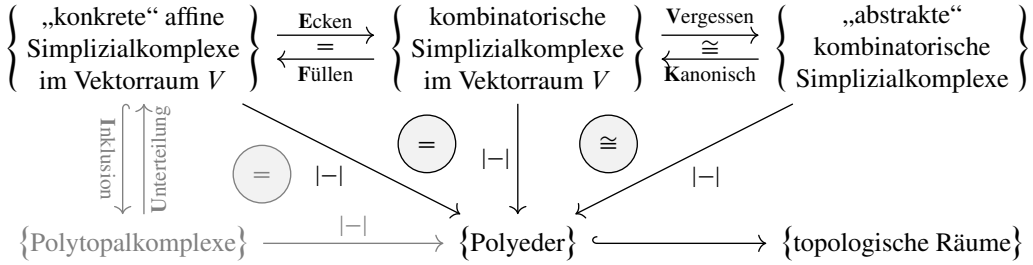
Dies ist wohldefiniert (I2E) und stetig dank simplizialer Topologie (I1C).

Beispiel. Für jeden Teilkomplex $L \leq K$ ist die Inklusion $L \hookrightarrow K$ eine simpliziale Abbildung. Ist $f : K \to V$ eine Darstellung in einen $\mathbb{R}$–Vektorraum V, etwa die kanonische, so ist $g = f|_L$ eine Darstellung von L in V, und $|L|_g \hookrightarrow |K|_f$ eine simpliziale Einbettung.

Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist das *n–Skelett* $K_{\leq n} := \{ S \in K \mid \dim S \leq n \} \leq K$ ein Teilkomplex. Das zugehörige Polyeder $|K_{\leq n}|_f \hookrightarrow |K|_f$ nennen wir *n–Skelett* der Realisierung $|K|_f$.

Beispiel. Der kombinatorische Simplizialkomplex $K = \mathfrak{P}(\{0, 1, \ldots, n\})$ hat Dimension n. Sein 0–Skelett ist $K_{\leq 0} = \{ \{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\} \}$; dies entspricht wie immer den Eckpunkten. Das 1–Skelett $K_{\leq 1}$ ist der *vollständige Graph* mit Ecken $0, 1, \ldots, n$ und allen Kanten $\{a, b\}$ mit $0 \leq a < b \leq n$. Beim 2–Skelett kommen alle Dreiecke hinzu, usw. Das $(n-1)$–Skelett ist $K_{<n} = K \setminus \{\{0, 1, \ldots, n\}\}$. Das n–Skelett schließlich ist $K_{\leq n} = K$. Die kanonische Realisierung ist der Standardsimplex $|K| = \Delta^n$, und $|K_{<n}| = \partial\Delta^n$ ist sein geometrischer Rand.

Übung I2H. Wir fassen unsere Konstruktionen anhand eines Diagramms zusammen:



(1) Definieren Sie die vorliegenden Kategorien (Objekte, Morphismen, Komposition) und beweisen Sie die für jede Kategorie erforderlichen Eigenschaften (H1A).
(2) Die geometrische Realisierung $|-|$ ist jeweils ein Funktor in die Kategorie Top.
(3) Es gilt $F \circ E = \mathrm{id}$ und $E \circ F = \mathrm{id}$. Diese Kategorien sind demnach *isomorph* (H5E).
(4) Wir haben natürliche Transformationen $V \circ K \to \mathrm{id}$ dank I2D und $K \circ V \to \mathrm{id}$ dank I2E. Diese Kategorien sind zwar nicht isomorph, aber immerhin *äquivalent* (H5E).

Konvention. Wir werden im Folgenden kurz von Simplizialkomplexen sprechen, und den Zusatz „affin“ oder „kombinatorisch“ oder „abstrakt“ nur hinzufügen, wo dies der Betonung bedarf. Meist geht aus dem Kontext unzweifelhaft hervor, welche Variante gemeint ist.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I2e. Simpliziale Metrik. Jeder Simplizialkomplex K definiert sein Polyeder $|K|$ und hierauf die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_K$. Zudem können wir $|K|$ mit einer Metrik ausstatten:

Definition I2I. Sei K ein Simplizialkomplex mit Eckenmenge Ω. Auf der kanonischen Realisierung $|K| \subset \mathbb{R}^{(\Omega)}$ definieren wir die *simpliziale Metrik*

$$d = d_K \,:\, |K| \times |K| \to [0,1] \,:\, (x,y) \mapsto \max\big\{\, |x(s) - y(s)| \;\big|\; s \in \Omega \,\big\}.$$

Dies ist die Supremumsnorm $|-|_\infty$ von $\mathbb{R}^{(\Omega)}$ eingeschränkt auf $|K|$. Andere Normen, etwa die euklidische Norm $|-|_2$, wären ebenso möglich: Auf jedem endlich-dimensionalen Teilraum induzieren alle dieselbe Topologie (F6K), und somit auch auf jedem Simplex.

Mit dem kanonischen Homöomorphismus $h : |K| \xrightarrow{\sim} |K|_f$ aus I2E übertragen wir die simpliziale Metrik von $|K|$ auf $|K|_f$ zur gleichnamigen Metrik $d_K : |K|_f \times |K|_f \to [0,1]$.

Beispiel. Der Simplizialkomplex $K = \mathfrak{P}(\{0,1,\dots,n\})$ wird kanonisch realisiert durch den Standardsimplex $|K| = \Delta^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Hierauf ist d_K die Maximumsmetrik. Diese induziert die euklidische Topologie auf Δ^n. Dies ist hier die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_K$.

Beispiel. Im Raum $(|K|, d_K)$ besteht der offene Ball $B_K(a,r)$ vom Radius $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ um den Eckpunkt $a \in \Omega(K)$ aus allen Punkten $x \in |K|$ mit $x(a) > 1-r$. Insbesondere für $r > 1$ gilt $B_K(a,r) = |K|$. Entsprechend besteht abgeschlossene Ball $\bar{B}_K(a,r)$ aus allen Punkten $x \in |K|$ mit $x(a) \geq 1-r$. Insbesondere für $r \geq 1$ gilt $\bar{B}_K(a,r) = |K|$.

Beispiel. Wir betrachten den Simplizialkomplex $R = \langle \{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z} \rangle$ mit Eckenmenge $\Omega = \mathbb{Z}$. Diesen realisieren wir (nicht kanonisch aber naheliegend) durch die Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Wir erhalten das Polyeder $|R| = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie (I1G).

Die simpliziale Metrik d_R ist allerdings nicht die euklidische! Der Abstand von $x \in \mathbb{R}$ zu einem Eckpunkt $a \in \mathbb{Z}$ ist $d_R(x,a) = \min\{|x-a|, 1\}$, siehe Übung I2L.

Satz I2J. *Die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_K$ auf $|K|$ ist feiner als die metrische Topologie $\mathcal{T}_d$, also $\mathcal{T}_K \supset \mathcal{T}_d$. Ist K lokal-endlich, so gilt $\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_d$. Andernfalls ist $\mathcal{T}_K$ nicht metrisierbar.*

Ein (abstrakter) Simplizialkomplex K heißt *lokal-endlich*, wenn jede Ecke $a \in \Omega$ nur in endlich vielen Simplizes enthalten ist, das heißt, die Menge $\{\, S \in K \mid a \in S \,\}$ ist endlich. *Warnung:* Für Darstellungen $K \to V$ bedeutet *lokal-endlich in V* etwas anderes, siehe I1G. In der kanonischen Realisierung $K \to \mathbb{R}^{(\Omega)}$ stimmen beide Begriffe überein.

BEWEIS. Jeder Ball $B_K(x,r)$ mit $x \in |K|$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist offen in der simplizialen Topologie (I1C), denn $B_K(x,r) \cap \Delta$ ist offen in jedem Simplex Δ von $|K|$. Somit ist jede offene Menge bezüglich der Metrik d auch offen bezüglich der simplizialen Topologie.

Metrische und simpliziale Topologie stimmen auf jedem Simplex überein (I1B). Ist K lokal-endlich, so ist die Familie $\mathscr{K} = \{\, [S] \mid S \in K \,\}$ aller Simplizes eine lokal-endliche, abgeschlossene Überdeckung von $|K|$ mit der metrischen Topologie $\mathcal{T}_d$. Dank E1N stimmen metrische und simpliziale Topologie $\mathcal{T}_K$ auf ganz $|K|$ überein.

Ist K hingegen nicht lokal-endlich, so ist mindestens eine Ecke $a \in \Omega$ in unendlich vielen Simplizes enthalten. Es existieren dann unendlich viele Kanten $\{a, a_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dies entspricht einem unendlichen Stern zu a, und hierin hat der Punkt a keine abzählbare Umgebungsbasis (Übung I2K). Somit ist $|K_{\leq 1}| \subset |K|$ nicht metrisierbar. □

☞ **Übung I2K.** Sei K ein Simplizialkomplex und nicht lokal-endlich. Auf dem zugehörigen Polyeder $|K|$ ist dann die metrische Topologie $\mathcal{T}_d$ echt gröber als die simpliziale $\mathcal{T}_K$: ☜

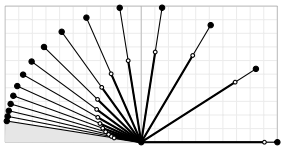
(1) Sei K der Komplex mit allen endlichen Mengen $S \subset \mathbb{N}$ als Simplizes. Dies ist der „unendlich-dimensionale Simplex“. Konstruieren Sie eine Teilmenge $U \subset |K|$, die offen ist in der simplizialen Topologie, aber nicht offen in der metrischen Topologie.

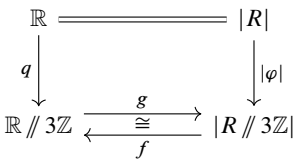
(2) Sei $K = \langle\, \{0, a\} \mid a \in \mathbb{N}_{\geq 1} \,\rangle$ der „unendliche Stern“ um 0. Der Punkt 0 in $|K|$ besitzt keine abzählbare Umgebungsbasis. Das erinnert uns sofort an Aufgabe E2W:

(3) Das unendliche Bouquet $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\!\!/ 3\mathbb{Z}$ wird trianguliert durch den simplizialen Komplex $K = \langle\, \{0, 3k{+}1\}, \{3k+1, 3k{+}2\}, \{3k{+}2, 0\} \mid k \in \mathbb{Z} \,\rangle$. Konstruieren Sie explizit ein Paar zueinander inverser Homöomorphismen $(f, g) : |K| \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$.

✻ **I2K.** (1) Die Menge $U := \bigcup_{\{0<i_1<\cdots<i_n\}\in K} \operatorname{Int}[e_0, i_1^{-1} e_{i_1}, \ldots, i_n^{-1} e_{i_n}]$ enthält den Punkt e_0. Sie ist offen in der simplizialen Topologie $\mathcal{T}_K$, da U in jedem Simplex offen ist. Hingegen ist U nicht offen in der metrischen Topologie $\mathcal{T}_d$, denn kein Ball $B_K(e_0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ liegt ganz in U.

(2) Wir widerlegen Erstabzählbarkeit durch ein Diagonalargument. Angenommen, der Punkt e_0 in $|K|$ hätte eine abzählbare Umgebungsbasis $\{\, U_k \mid k = 1, 2, 3, \ldots \,\}$. Für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$ ist $U_k \cap [e_0, e_k]$ offen im 1–Simplex $[e_0, e_k]$. Es existiert also $\varepsilon_k \in]0, 1[$ mit $[e_0, \varepsilon_k e_k] \subset U_k$. Wir setzen $U := \bigcup_{k=1}^{\infty} [e_0, \varepsilon_k e_k[\subset |K|$. Dies ist eine offene Umgebung von e_0 in $|K|$. Jedoch gilt $U_k \not\subset U$ für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$.





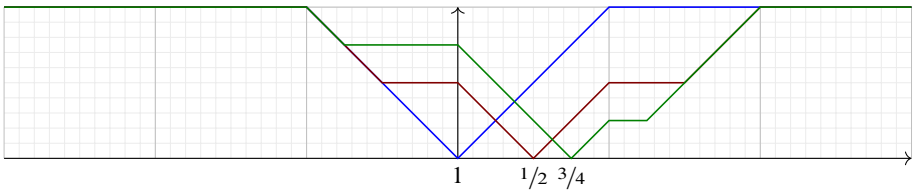
(3) Wir nutzen den Simplizialkomplex $R = \langle\, \{a, a{+}1\} \mid a \in \mathbb{Z} \,\rangle$ mit Eckenmenge $\Omega(R) = \mathbb{Z}$ und Polyeder $\mathbb{R} = |R|$, siehe I2L, sowie die Quotientenabbildung $\varphi : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z} /\!\!/ 3\mathbb{Z}$ mit $\varphi(a) = 3\mathbb{Z}$ für $a \in 3\mathbb{Z}$ und $\varphi(a) = \{a\}$ für $a \in \mathbb{Z} \smallsetminus 3\mathbb{Z}$. Damit erhalten wir $K = \langle\, \{\varphi(a), \varphi(a{+}1)\} \mid a \in \mathbb{Z} \,\rangle$. Die Realisierung $|\varphi| : \mathbb{R} = |R| \to |K|$ erfüllt $|\varphi|(3\mathbb{Z}) = \{0\}$ und induziert demnach die stetige Abbildung $g : \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z} \to |K|$ mit $g \circ q = |\varphi|$.

Die Abbildung $f : |K| \to \mathbb{R} /\!\!/ 3\mathbb{Z}$ konstruieren wir wie folgt. Jede Kante $[\varphi(a), \varphi(a{+}1)] \subset |K|$ bilden wir affin auf das Intervall $[a, a{+}1] \subset \mathbb{R}$ ab, und dann auf $q([a, a{+}1]) \subset \mathbb{R} /\!\!/ 3\mathbb{Z}$. Dies verklebt sich zur stetigen Abbildung $f : |K| \to \mathbb{R} /\!\!/ 3\mathbb{Z}$ (E1P). Nach Konstruktion gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{|R /\!\!/ 3\mathbb{Z}|}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R} /\!\!/ 3\mathbb{Z}}$.

Simpliziale und metrische Topologie stimmen hier nicht überein, denn K ist nicht lokal-endlich. Alternatives Argument: Andernfalls wäre $|K| \cong \mathbb{R} /\!\!/ 3\mathbb{Z}$ metrisierbar, was wir bereits in (1) und E2W widerlegt haben.

☞ **Übung I2L.** Wir realisieren den Simplizialkomplex $R = \langle\, \{a, a{+}1\} \mid a \in \mathbb{Z} \,\rangle$ durch die Darstellung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ und erhalten das Polyeder $|R| = \mathbb{R}$. Warum ist die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_R$ auf $|R|$ gleich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$? Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten der Punkte $0, 1/2, 3/4 \in \mathbb{R}$ bezüglich R. Zeichnen Sie für die simpliziale Metrik d_R die Abstandsfunktion $d_R(x, 1)$ sowie $d_R(x, 1/2)$ und $d_R(x, 3/4)$. ☜

✻ **I2L.** Der Komplex R in $\mathbb{R}$ ist lokal-endlich, also stimmen auf dem Polyeder $|R| = \mathbb{R}$ die simpliziale und die euklidische Topologie überein (I1G). In baryzentrischen Koordinaten gilt $0 = 1 \cdot 0$ sowie $1/2 = 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 1$ und $3/4 = 1/4 \cdot 0 + 3/4 \cdot 1$. Für die drei gefragten Abstandsfunktionen finden wir folgendes überraschende Bild:



© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

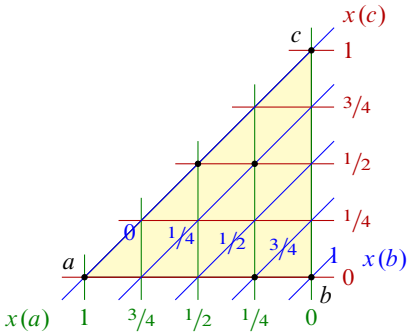
Übung I2M. (1) Skizzieren Sie in der Ebene $\mathbb{R}^2$ den Simplizialkomplex

$$R^2 = \big\langle \{(a,b),(a,b+1),(a+1,b+1)\},\{(a,b),(a+1,b),(a+1,b+1)\} \;\big|\; a,b \in \mathbb{Z} \big\rangle.$$

Was ist das Polyeder $|R^2|$? Was ist darauf die simpliziale Topologie? Bestimmen Sie zu den Punkten $(0,0), (3/4,0), (1/2,1/2), (3/4,1/2) \in \mathbb{R}^2$ die baryzentrischen Koordinaten in R^2.

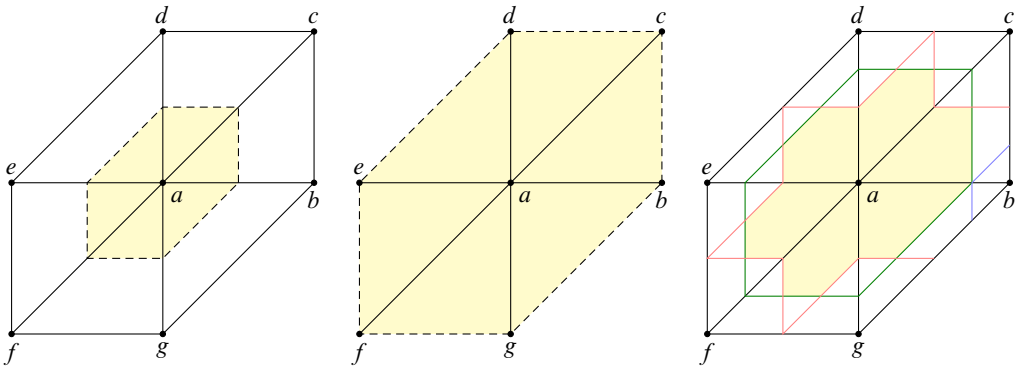
(2) Skizzieren Sie die Bälle $B((0,0),1/2)$, $B((0,0),1)$, $\bar{B}((0,0),1)$ und $\bar{B}((1/4,0),1/2)$ bezüglich der durch R^2 definierten simplizialen Metrik auf $|R^2|$.

✻ **I2M.** (1) Wir finden $|R^2| = \mathbb{R}^2$ wie in I:12 skizziert. Da K lokal-endlich ist, stimmt die simpliziale Topologie auf $|R^2|$ überein mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$. Die vier Punkte liegen alle im 2–Simplex $\Delta = [a,b,c]$ mit den Eckpunkten $a = (0,0)$, $b = (1,0)$, $c = (1,1)$. Für die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes $x \in \Delta$ gilt $x(s) = 0$ für alle Ecken $s \in \Omega \smallsetminus \{a,b,c\}$; wir listen daher nur die Koordinaten $x(a)$, $x(b)$, $x(c)$. Die Skizze zeigt den Simplex $\Delta = [a,b,c]$ mit Hilfslinien, für die eine der drei Koordinaten konstant ist.



$x \in \|R^2\| = \mathbb{R}^2$	$x(a)$	$x(b)$	$x(c)$
$a = (0,0)$	1	0	0
$b = (1,0)$	0	1	0
$c = (1,1)$	0	0	1
$(3/4,0)$	1/4	1/4	0
$(1/2,1/2)$	1/2	0	1/2
$(3/4,1/2)$	1/4	1/4	1/2

(2) Der Ball $B((0,0),1/2)$: Der Punkt $a = (0,0)$ hat die baryzentrischen Koordinaten $a(a) = 1$ und $a(s) = 0$ sonst; hier verstehen wir a einmal als Punkt und einmal als die Funktion, die jeder Ecke ihre baryzentrischen Koordinate zuordnet. Ist $y \in B((0,0),1/2)$, dann gilt $|a(s) - y(s)| < \frac{1}{2}$ für alle Ecken $s \in \Omega$. Für die Koordinaten von $y \in B((0,0),1/2)$ gilt also $y(a) > 1/2$ und $y(s) < 1/2$ sonst. Die folgende Skizze zeigt $B((0,0),1/2)$.



Der Ball $B((0,0),1)$ ist der offene Stern um $(0,0)$ wie skizziert. Hingegen gilt $\bar{B}((0,0),1) = \mathbb{R}^2$.

Wir kommen schließlich zum Ball $\bar{B}((1/4,0),1/2)$: Die baryzentrischen Koordinaten von $x = (1/4,0)$ sind $x(a) = 3/4$, $x(b) = 1/4$ und $x(s) = 0$ für alle $s \in \Omega \smallsetminus \{a,b\}$. Ein Punkt y liegt genau dann in $\bar{B}((1/4,0),1/2)$, wenn $y(a) \geq 1/4$, $y(b) \leq 3/4$ und $y(s) \leq 1/2$ gilt für alle übrigen Ecken. Insbesondere ist $y(a) > 0$, d.h. wieder sind nur die zu a benachbarten Ecken interessant. Die obige Skizze zeigt $\bar{B}((1/4,0),1/2)$ und in jedem an a angrenzenden 2-Simplex die Linien mit a–Koordinate gleich $1/4$ in grün, die mit b–Koordinate gleich $3/4$ in blau, die mit s–Koordinate gleich $1/2$ in rot, wobei $s \neq a,b$. Der gesuchte Ball $\bar{B}((1/4,0),1/2)$ befindet sich innerhalb dieser Linien (inklusive Rand). Und die Moral? Die simpliziale Metrik ist leicht und übersichtlich in der kanonischen Realisierung in $\mathbb{R}^{(\Omega)}$, jedoch weit weniger leicht und übersichtlich in anderen Darstellungen.

☞ **Übung I2N.** Für jeden Simplizialkomplex K gilt: ☜

(1) Die geometrische Realisierung $|K|$ ist hausdorffsch.
(2) Genau dann ist $|K|$ kompakt, wenn der Komplex K endlich ist.
(3) Enthält $A \subset |K|$ aus jedem Simplex nur endlich viele Punkte, so ist A in $|K|$ abgeschlossen und diskret. Dies gilt insbesondere für die Eckenmenge $\Omega \subset |K|$.
(4) Genau dann ist $|K|$ lokal-kompakt, wenn der Komplex K lokal-endlich ist.
(5) Jede kompakte Teilmenge $A \subset |K|$ liegt in einem endlichen Teilkomplex.

✻ **I2N.** (1) Auf $|K|$ ist die metrische Topologie hausdorffsch, also auch die feinere simpliziale Topologie $\mathcal{T}$ (I2J). Für $x \neq y$ gilt $r := d_K(x,y) > 0$; die Bälle $B_K(x, r/2)$ und $B_K(y, r/2)$ sind disjunkt und offen bzgl. $\mathcal{T}$.

(2) Ist K endlich, so ist $|K| = \bigcup_{S\in K}[S]$ endliche Vereinigung von Kompakta, also kompakt. Für die Umkehrung betrachten wir die offene Überdeckung $|K| = \bigcup_{a\in\Omega} B_K(a,1)$; sie enthält keine echte Teilüberdeckung, denn $a \notin B_k(a',1)$ für $a' \in \Omega \smallsetminus \{a\}$. Ist $|K|$ kompakt, so muss Ω endlich sein, und somit auch $K \subset \mathfrak{P}\Omega$.

Alternatives Argument mit (3): Ist $|K|$ kompakt, so auch die abgeschlossene Teilmenge $\Omega \subset |K|$. Eine diskrete Menge ist genau dann kompakt, wenn sie endlich ist. Also muss Ω endlich sein und mithin auch K.

(3) Nach Definition der simplizialen Topologie ist A in $|K|$ abgeschlossen, denn $A \cap \Delta$ ist endlich und somit abgeschlossen in jedem Simplex Δ von $|K|$. Für jedes Element $a \in A$ gilt dies dann auch für $A' = A \smallsetminus \{a\}$. also ist $U = |K| \smallsetminus A'$ offen und $U \cap A = \{a\}$. Insbesondere ist $\Omega \subset |K|$ abgeschlossen und diskret.

(4) Ist K lokal-endlich, so ist um jeden Eckpunkt $a \in \Omega$ der abgeschlossene Stern $\overline{\mathrm{st}}(a) = \bigcup_{a\in S\in K}[S]$ endliche Vereinigung kompakter Simplizes, und somit kompakt. Jeder Punkt $x \in |K|$ erfüllt $x(a) > 0$ für mindestens eine Ecke $a \in \Omega$ und liegt somit in der offenen Umgebung $\mathring{\mathrm{st}}(a)$ und der kompakten Umgebung $\overline{\mathrm{st}}(a)$.

Ist K hingegen nicht lokal-endlich, so liegt mindestens eine Ecke $a \in \Omega(K)$ in unendlich vielen Simplizes. Es existieren dann unendlich viele Kanten $\{a, a_k\} \in K$ mit $k \in \mathbb{N}$. Jede Umgebung U von a in $|K|$ enthält eine nicht-leere offene Teilmenge von $|\{a,a_k\}|$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir einen Punkt $x_k \in U \cap \mathrm{Int}|\{a,a_k\}|$. Nach (3) ist die unendliche Menge $\{ x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset U$ abgeschlossen und diskret. Somit kann U nicht kompakt sein.

(5) Sei I die Menge aller Simplizes Δ mit $A \cap \mathrm{Int}\,\Delta \neq \emptyset$. Für jeden Simplex $\Delta \in I$ wählen wir einen Punkt $x_\Delta \in A \cap \mathrm{Int}\,\Delta$. Nach (3) ist diese Menge $\{x_\Delta | \Delta \in I\}$ abgeschlossen und diskret. Da A kompakt ist, muss diese Menge endlich sein. Dies liefert die endliche Überdeckung $A \subset \bigcup_{\Delta\in I} \Delta$. Zusammen mit allen Seiten dieser Simplizes erhalten wir den endlichen Teilkomplex $L = \{ \Delta' \leq \Delta \mid \Delta \in I \}$ und $A \subset |L|$.

☞ **Übung I2O.** Sei K ein Simplizialkomplex und $K_i \leq K$ Teilkomplexe für $i \in I$. Ist die Vereinigung $\bigcup_{i\in I} K_i$ ein Teilkomplex? und der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} K_i$? Jede Teilmenge $M \subset K$ liegt in einem kleinsten Teilkomplex $\langle M \rangle$, dem von M *erzeugten* Teilkomplex. ☜

✻ **I2O.** Abstrakter Simplizialkomplex (I2B) bedeutet $\emptyset \in K$ und $T \subset S \in K \Rightarrow T \in K$.

(1) Sei $L = \bigcup_{i\in I} K_i$ die Vereinigung von Teilkomplexen $K_i \leq K$. Für $I \neq \emptyset$ gilt $\emptyset \in L$; im Sonderfall $I = \emptyset$ vereinbaren wir $L = \{\emptyset\}$. Zu $S \in L$ existiert $i \in I$ mit $S \in K_i$; für alle $T \subset S$ folgt $T \in K_i \subset L$. Stabilität unter Vereinigungen ist erfreulich, aber doch eher ungewohnt: Für Gruppen, Vektorräume, etc. gilt sie nicht!

(2) Sei $L = \bigcap_{i\in I} K_i$ der Durchschnitt von Teilkomplexen $K_i \leq K$. Für $I \neq \emptyset$ gilt $\emptyset \in L$; im Sonderfall $I = \emptyset$ vereinbaren wir $L = K$. Für $T \subset S \in L$ gilt $T \subset S \in K_i$ für jedes $i \in I$, also $T \in K_i$ für jedes $i \in I$ und somit $T \in L$. Stabilität unter Durchschnitten sind wir von vielen anderen mathematischen Strukturen gewohnt.

(3) Jede Teilmenge $M \subset K$ erzeugt einen Teilkomplex $L = \langle M \rangle := \{\emptyset\} \cup \{ T \mid T \subset S \in M \}$. Dies ist offensichtlich ein Teilkomplex, kurz $L \leq K$, und zudem der kleinste, den M als Teilmenge umfasst.

Diese direkte Konstruktion habe ich gleich in Definition I2B aufgenommen. Wir haben nunmehr die implizite Behauptung nachgewiesen, dass $\langle M \rangle$ der kleinste Teilkomplex von K ist, der M als Teilmenge umfasst.

Alternative: Die übliche Standardkonstruktion für erzeugte Unterstrukturen lässt sich auch hier anwenden:

$$L' := \bigcap \{ K' \leq K \mid M \subset K' \}$$

Dank (2) ist dies ein Teilkomplex, kurz $L' \leq K$. Es gilt $L \subset L'$, denn aus $T \subset S \in M \subset K' \leq K$ folgt $T \in K'$. Es gilt $L \supset L'$, denn $L \leq K$ erfüllt $M \subset L$. Wir schließen $L = L'$. Beide Sichtweisen ergeben dasselbe.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I2f. Der Teilraum der affinen Einbettungen $f : |K| \hookrightarrow V$ ist offen.

Übung I2P. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Norm $|-|$ und zugehöriger Metrik d. Sei K ein lokal-endlicher Simplizialkomplex. Wir betrachten die Menge $\mathrm{Aff}(K,V)$ der affinen Abbildungen $f : K \to V$, also beliebige Eckenabbildung $f : \Omega(K) \to V$ und fortgesetzt zu

$$f \;:\; K \to V \;:\; \{s_0, s_1, \dots, s_n\} \mapsto \{f(s_0), f(s_1), \dots, f(s_n)\}.$$

Dies setzen wir auf jedem Simplex affin fort zur geometrischen Realisierung

$$|f| \;:\; |K| \to V \;:\; [s_0, s_1, \dots, s_n] \mapsto [f(s_0), f(s_1), \dots, f(s_n)].$$

(1) Genau dann ist $|f|$ injektiv, wenn f eine Darstellung ist (gemäß Definition I2C),
(2) und eine Einbettung, wenn zudem die Überdeckung $([f(S)])_{S\in K}$ lokal-endlich ist.

Sei $\mathrm{Emb}(K,V) \subset \mathrm{Aff}(K,V)$ die Teilmenge aller Abbildungen $f : K \to V$ mit den Eigenschaften (1) und (2). Wir wollen zeigen, dass diese Teilmenge offen ist.

Im Folgenden sei $f \in \mathrm{Emb}(K,V)$. Für jede Ecke $v \in \Omega$ setzen wir dann

$$\varepsilon(v) := \tfrac{1}{3} \min\big\{\, d([f(S)],[f(T)]) \;\big|\; S,T \in K,\ v \in S,\ S \cap T = \emptyset \,\big\}.$$

(3) Es gilt $\varepsilon(v) > 0$ für jede Ecke $v \in \Omega(K)$.
(4) Für $g \in \mathrm{Aff}(K,V)$ mit $d(f(v),g(v)) \le \varepsilon(v)$ für alle $v \in \Omega$ gilt $g \in \mathrm{Emb}(K,V)$.

Bemerkung. Ist der Simplizialkomplex K endlich, so müssen wir nur (1) sicherstellen, denn Bedingung (2) ist automatisch erfüllt. In (3) erhalten wir die globale Konstante

$$\varepsilon := \tfrac{1}{3} \min\big\{\, d([f(S)],[f(T)]) \;\big|\; S,T \in K,\ S \cap T = \emptyset \,\big\}.$$

Diese erfüllt $\varepsilon > 0$, denn jeder Simplex $[f(S)] \subset V$ ist kompakt, also alle Abstände positiv. Das Minimum wird also über endlich viele positive Zahlen gebildet, und ist somit positiv.

✻ **I2P.** Aussagen (1–2) dienen zur Wiederholung und Betonung. Bedingung (1) sichert Injektivität: (1a) Für $S \in K$ ist $f(S)$ affin unabhängig. Das garantiert die lokale Injektivität von $|f|$ auf $[S]$. (1b) Für $S,T \in K$ gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = [f(S \cap T)]$. Das garantiert die globale Injektivität von $|f| : |K| \to V$. (2) Ist $|f| : |K| \hookrightarrow V$ zudem eine Einbettung, so ist $|K|$ metrisierbar, also K lokal-endlich (I2J). Ist umgekehrt K lokal-endlich, so stimmen auf dem Polyeder $|K|$ die simpliziale Topologie und die Teilraumtopologie in V überein (I1G).

(3) Ist K endlich, so gilt $\varepsilon > 0$ dank Kompaktheit, wie oben bemerkt. Im allgemeinen Fall nutzen wir zudem die lokale Endlichkeit, die wir dank (2) vorausgesetzen dürfen. Sei $S \in K$. Zu jedem Punkt $x \in [f(S)]$ existiert $\delta_x \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $B(x,2\delta_x)$ nur endlich viele Simplizes $[f(T)]$ mit $T \in K$ schneidet. Zur offenen Überdeckung $[S] = \bigcup\{\, B(x,\delta_x) \mid x \in [S] \,\}$ existiert eine endliche Menge $E \subset [S]$ sodass $[S] = \bigcup\{\, B(x,\delta_x) \mid x \in E \,\}$. Für $\delta_S := \min\{\delta_x \mid x \in E\} > 0$ gilt: Die δ_S–Umgebung $\bigcup\{\, B(x,\delta_S) \mid x \in [S] \,\} \subset \bigcup\{\, B(x,2\delta_x) \mid x \in E \,\}$ schneidet nur endlich viele Simplizes. Demnach gilt $\varepsilon_S := \min\big\{\, d([f(S)],[f(T)]) \;\big|\; T \in K,\ S \cap T = \emptyset \,\big\} > 0$. Da jede Ecke $v \in \Omega(K)$ nur in endlich vielen Simplizes liegt, folgt schließlich $\varepsilon(v) := \frac{1}{3} \min\{\varepsilon_S \mid v \in S \in K\} > 0$.

(4) Sei $f \in \mathrm{Emb}(K,V)$ und $g \in \mathrm{Aff}(K,V)$ mit $d(f(v),g(v)) \le \varepsilon(v)$ für jede Ecke $v \in \Omega$. Wir wollen $g \in \mathrm{Emb}(K,V)$ zeigen; dazu haben wir die Eigenschaften (1) und (2) nachzuprüfen.

Eigenschaft (1a): Für $S \in K$ ist $f(S)$ affin unabhängig, also gilt dies auch für $g(S)$. Andernfalls gäbe es $U,V \subset S$ mit $U \cap V = \emptyset$ aber $[g(U)] \cap [g(V)] \neq \emptyset$, was den Abständen widerspricht: Für jede Ecke $v \in U \cup V$ gilt $d(f(v),g(v)) \le \varepsilon(v) \le \frac{1}{3} d([f(U)],[f(V)])$, also $d([g(U)],[g(V)]) \ge \frac{1}{3} d([f(U)],[f(V)]) > 0$. Eigenschaft (1b): Für $S,T \in K$ gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = [f(S \cap T)]$, also $[g(S)] \cap [g(T)] = [g(S \cap T)]$. Andernfalls gäbe es $U \subset S$ und $V \subset T$ mit $U \cap V = \emptyset$ aber $[g(U)] \cap [g(V)] \neq \emptyset$, was wie in (1a) zum Widerspruch führt.

Eigenschaft (2): Für alle $S,T \in K$ mit $S \cap T = \emptyset$ gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = \emptyset$, also $d([f(S)],[f(T)]) > 0$. Für jede Ecke $v \in S \cup T$ gilt $d(f(v),g(v)) \le \frac{1}{3} d([f(S)],[f(T)])$, also $d([g(S)],[g(T)]) \ge \frac{1}{3} d([f(S)],[f(T)])$. In der $\frac{1}{3}\varepsilon_S$–Umgebung um $[g(S)]$ liegen also nur die Simplizes $[g(T)]$ mit $T \in K$ und $S \cap T \neq \emptyset$. Dies sind endlich viele. Somit ist $([g(S)])_{S\in K}$ lokal-endlich.

§I2g. Der Einbettungssatz von Whitney für Simplizialkomplexe. Wir können jeden Simplizialkomplex K kanonisch realisieren durch $|K| \subset \mathbb{R}^{(\Omega)}$. Die Dimension $\sharp\Omega$ ist im Allgemeinen jedoch verschwenderisch und viel zu groß!

Beispiel. Wir können jeden endlichen Graphen ($\dim K = 1$) affin im Raum $\mathbb{R}^3$ realisieren, dafür ist offensichtlich genug Platz, ganz unabhängig von seiner Eckenzahl $\sharp\Omega$.

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ hingegen gelingt dies nicht für alle, sondern nur für „planare" Graphen. Abbildung I:9 zeigt die beiden typischen Gegenbeispiele K_5 und $K_{3,3}$: Überzeugen Sie sich durch ausprobieren, dass sich diese nicht in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten lassen. (Affin ist dies relativ leicht, topologisch gelingt es mit dem Jordanschen Kurvensatz.)

In der Ebene können wir zwar nicht alle Überschneidungen von Kanten vermeiden, aber wir können immerhin allgemeine Lage erreichen, wie in I:9 skizziert.

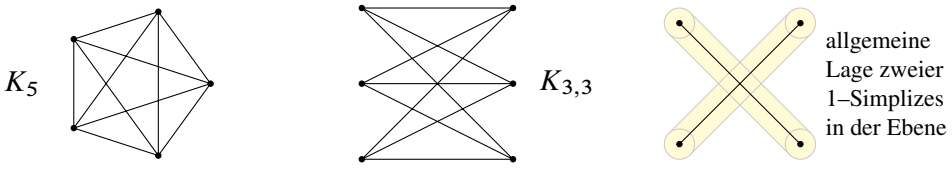


ABBILDUNG I:9. Diese Graphen lassen sich nicht im $\mathbb{R}^2$ einbetten… erst im $\mathbb{R}^3$.

Allgemein gilt (I2Q): Jeder endliche Simplizialkomplex K der Dimension $\dim K = m$ erlaubt simpliziale Einbettungen $|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$. (Notwendig und hinreichend ist, dass K abzählbar und lokal-endlich ist.) Das ist eine simpliziale Fassung von Whitneys berühmtem Einbettungssatz, ursprünglich aus der Differentialgeometrie für glatte Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung. Für beliebige Simplizialkomplexe K der Dimension m ist die hier genannte Einbettungsdimension $n = 2m+1$ optimal nach dem Satz von van Kampen–Flores:

Beispiel. Sei $K = \langle\, \Delta^{2m+2} \,\rangle_{\le m}$ das m–Skelett des $(2m+2)$–Simplex. Dann lässt sich $|K|$ affin in den Raum $\mathbb{R}^{2m+1}$ einbetten, aber nicht in $\mathbb{R}^{2m}$. Im einfachsten Fall $m = 1$ ist K der vollständige Graph auf 5 Ecken, wie oben in Abbildung I:9 gezeigt.

Satz I2Q (Whitney)**.** *Sei K ein Simplizialkomplex der Dimension $m \ge 0$.*

(1) Existiert irgendeine Einbettung $|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, so ist K abzählbar und lokal-endlich. Ist K abzählbar und lokal-endlich, so existiert eine affine Einbettung $|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$. Für Eckpunkte genügt die Momentkurve $\Omega \hookrightarrow \{\,(k^1, k^2, k^3, \dots, k^{2m+1}) \mid k \in \mathbb{N}\,\}$.

(2) Einbettungen sind offen und dicht im Raum aller eigentlichen affinen Abbildungen $|f| : |K| \to \mathbb{R}^n$ mit $n \ge 2m+1$, wie üblich gegeben durch $f \in \mathrm{Aff}(K, V)$.
Relative Fassung: Gegeben sei $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$, und $|f|$ sei eine Einbettung auf $|L|$ für den Teilkomplex $L = \{\, S \in K \mid \varepsilon(S) = \{0\}\,\}$. Dann existiert eine affine Einbettung $|g| : |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $|f(v) - g(v)| \le \varepsilon(v)$ für alle $v \in \Omega$ und somit fix auf L.

(3) Für alle $n > m$ gilt Aussage (2) ebenso für $f : |K| \to \mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage.

BEWEIS. Zeigen Sie Aussagen (1) und (2) als Übung! Aussage (2) ist ein Spezialfall von (3); hierzu benötigen Sie den Begriff der *allgemeinen Lage*, den wir nun ausführen. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Die Einbettungen $|f| : |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ sind dicht. Für $|f| : |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ gilt dies nicht: Zwei m–Simplizes in $\mathbb{R}^{2m}$, die sich in einem inneren Punkt schneiden, lassen sich nicht durch eine beliebig kleine Verschiebung disjunkt machen. (Siehe I:9 rechts für den Fall $m = 1$ und $n = 2$.) Diesen Sachverhalt wollen wir hier erläutern.

Für $i = 1, 2, 3, \ldots$ sei V_i ein Untervektorraum in $\mathbb{R}^n$ und $A_i = a_i + V_i$. Wir nennen A_1, A_2 *transvers* oder *in allgemeiner Lage*, geschrieben $A_1 \pitchfork A_2$ oder $\pitchfork(A_1, A_2)$, wenn für jeden Schnittpunkt $x \in A_1 \cap A_2$ die Bedingung $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^n$ gilt. Für $\dim V_1 + \dim V_2 < n$ bedeutet das $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Für $\dim V_1 + \dim V_2 = n$ ist die Summe direkt, und der Schnitt $A_1 \cap A_2$ besteht aus genau einem Punkt. Für $\dim V_1 + \dim V_2 > n$ besteht $A_1 \cap A_2$ aus einem affinen Unterraum der Dimension $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - n$.

Allgemein für $\pitchfork(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ verlangen wir: Für jede Teilmenge $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $|I| \geq 2$ und jeden Schnittpunkt $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ gelte $V_j + (\bigcap_{i \in I \smallsetminus \{j\}} V_i) = \mathbb{R}^n$.

Beispiele. Seien E_1, E_2, E_3 Ebenen im $\mathbb{R}^3$.

- Allgemeine Lage $\pitchfork(E_1, E_2)$ bedeutet: $E_1 \cap E_2$ ist leer oder eine Gerade.
- Allgemeine Lage $\pitchfork(E_1, E_2, E_3)$ bedeutet paarweise $\pitchfork(E_1, E_2)$, $\pitchfork(E_1, E_3)$, $\pitchfork(E_2, E_3)$ und zudem ist $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ entweder leer oder einpunktig (aber keine Gerade).

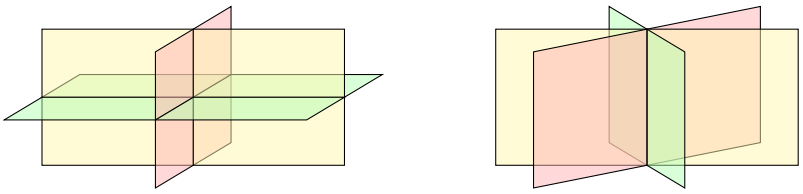


ABBILDUNG I:10. Drei Ebenen im Raum, links in allgemeiner Lage

Zwei Simplizes $[S_1], [S_2]$ sind *transvers* oder *in allgemeiner Lage*, wenn für alle Seiten $[Q_i] \leq [S_i]$ und jedem Schnittpunkt $x \in [Q_1] \cap [Q_2]$ die Bedingung $\operatorname{aff}(Q_1) \pitchfork \operatorname{aff}(Q_2)$ gilt.

Allgemein für $\pitchfork([S_1], [S_2], \ldots, [S_k])$ verlangen wir: Für jede Teilmenge $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $|I| \geq 2$ und $[Q_i] \leq [S_i]$ gilt: In jedem Schnittpunkt $x \in \bigcap_{i \in I} [Q_i]$ gilt $\pitchfork(\operatorname{aff}(Q_i))_{i \in I}$.

Unter den Familien $[S_1], [S_2], \ldots, [S_k] \subset \mathbb{R}^n$ sind diejenigen in allgemeiner Lage offen und dicht: Dicht bedeutet: Ist sie es noch nicht, so wird sie es nach beliebig kleiner Änderung. Offen bedeutet: Ist sie es, so bleibt sie es bei hinreichend kleiner Änderung.

Sei K ein Simplizialkomplex der Dimension $m \geq 0$. Sei $n > m$. Eine affine Abbildung $|f| : |K| \to \mathbb{R}^n$ heißt *generisch* oder *in allgemeiner Lage*, wenn gilt:

(AL1) Für jeden Simplex $S \in K$ ist $f(S) \subset \mathbb{R}^n$ affin unabhängig.
(AL2) Für alle $S, T \in K$ mit $S \cap T \neq \emptyset$ gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = [f(S \cap T)]$.
(AL3) Für $S_1, S_2, \ldots, S_k \in K$ paarweise disjunkt gilt $\pitchfork([f(S_1)], [f(S_2)], \ldots, [f(S_k)])$.

Im Falle $n > 2m$ ist Bedingung (3) äquivalent zu $[f(S)] \cap [f(T)] = \emptyset$ für alle $S, T \in K$ mit $S \cap T = \emptyset$, und somit ist f eine Einbettung (I2C). Im Falle $2n > 3m$ verbietet (3) Tripelpunkte, das heißt dreifache Schnitte sind leer, es gibt also schlimmstenfalls Doppelpunkte. Abbildung I:9 illustriert dies für simpliziale Graphen in der Ebene ($m = 1$, $n = 2$). Für 2–dimensionale Komplexe im $\mathbb{R}^3$ ($m = 2$, $n = 3$) können wir Tripelpunkte nicht ausschließen.

✻ **I2Q.** (1a) Nach I2N ist die Eckenmenge Ω diskret in $|K|$, dank der Einbettung $|f| : |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ auch $f(\Omega)$ in $\mathbb{R}^n$. Folglich ist Ω abzählbar (D6J). Zudem ist $|K| \cong f(|K|) \subset \mathbb{R}^n$ metrisierbar, dank I2J also K lokal-endlich.

(1b) Sei $n = 2m+1$. Wir wählen Punkte $p_0, p_1, p_2, \ldots \in \mathbb{R}^n$ in *allgemeiner Lage*: keine zwei gleich, keine drei auf einer Geraden, keine vier in einer Ebene, …, allgemein: jede $(n+1)$–elementige Teilmenge $S \subset P := \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ sei affin unabhängig. Somit spannt S einen affinen Simplex $[S] \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ auf. Ein schönes Beispiel ist $P = \{\, p_k := (k^1, k^2, \ldots, k^n) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$. Die *Momentkurve* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (t^1, t^2, \ldots, t^n)$ schneidet jede Hyperebene $A = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \,\}$ in höchstens n Punkten, denn das Polynom $a_0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n = 0$ hat höchstens n Nullstellen. Somit sind je $n+1$ Punkte der Momentkurve affin unabhängig. Dies folgt auch aus der Determinante der Vandermonde–Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \ldots & a_n^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1^1 - a_0^1 & \ldots & a_n^1 - a_0^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n - a_0^n & \ldots & a_n^n - a_0^n \end{pmatrix}, \quad \det B = \det A = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

Wir wählen eine Injektion $f : \Omega \hookrightarrow P$. Wegen $\dim K \le m$ ist dies eine Darstellung $f : K \to \mathbb{R}^{2m+1}$ gemäß I2C: Für je zwei Simplizes $S, T \in K$ besteht $f(S \cup T) \subset P$ aus $\le 2m+2$ Punkten, ist also affin unabhängig. Somit ist $\Delta = [f(S \cup T)]$ ein affiner Simplex, hierin sind $[f(S)]$ und $[f(T)]$ Seiten, und diese schneiden sich höchstens in einer gemeinsamen Seite, daher gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = [f(S) \cap f(T)] = [f(S \cap T)]$. Die Realisierung $|f| : |K| \to \mathbb{R}^{2m+1}$ ist stetig und nach Konstruktion injektiv. Da zudem $([f(S)])_{S \in K}$ in $\mathbb{R}^{2m+1}$ lokal-endlich ist, stimmen Teilraumtopologie und simpliziale Topologie überein. Somit ist $|f|$ eine Einbettung.

(2,3) Seien f und $\varepsilon : \Omega \to [0,1]$ wie gefordert. Die Eckenmenge Ω ist abzählbar, denn f ist eigentlich. Wir nummerieren $\Omega \smallsetminus \Omega(L) = \{\, v_1, v_2, v_3, \ldots \,\}$ und bestimmen rekursiv $g(v_1), g(v_2), g(v_3), \ldots$. Sei g bereits bestimmt auf $\Omega_k = \Omega(L) \cup \{\, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1} \,\}$. Sei $\mathscr{A}$ die kleinste Menge affiner Teilräume mit $\Omega_k \subset \mathscr{A}$, die abgeschlossen ist unter affinem Aufspann und Schnitt. Für $A \in \mathscr{A}$ mit $\dim A < n$ ist $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ offen und dicht. Für die abzählbare Vereinigung $V = \bigcup\{\, A \in \mathscr{A} \mid \dim A < n \,\}$ ist das Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus V$ immerhin noch dicht (D7D). Wir können daher $g(v_k) \in B(f(v_k), \varepsilon(v_k)) \smallsetminus V$ wählen. Das garantiert, dass schließlich $g(\Omega)$ in allgemeiner Lage ist: Man prüft nun die Forderungen (AL1–3) geduldig nach. Mit f ist auch g eigentlich.

Wir zeigen schließlich die Offenheit. Hierzu sei $|f| : |K| \to \mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage (AL1–3). Für jede Ecke $v \in \Omega$ setzen wir $\varepsilon(v) := \frac{1}{3} \min\{\, d([f(S)], [f(T)]) \mid S, T \in K,\ v \in S,\ [f(S)] \cap [f(T)] = \emptyset \,\}$. Jede affine Abbildung $|g| : |K| \to \mathbb{R}^n$ mit $d(f(v), g(v)) \le \varepsilon(v)$ für alle $v \in \Omega$ ist dann in allgemeiner Lage (AL1–3). Dies zeigt man wie zuvor in I2P ausgeführt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I3. Triangulierung und Unterteilungen

§I3a. Triangulierung. Simplizialkomplexe sind stark strukturiert und hierdurch sehr effizient zu handhaben. Insbesondere erlauben sie lokale Koordinaten: Jeder Simplex kommt mit baryzentrischen Koordinaten (I1B). Dies wollen wir für topologische Räume nutzen:

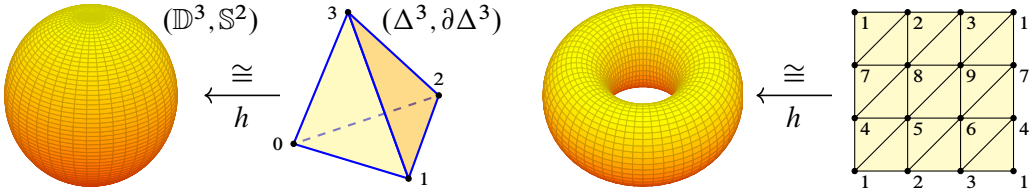


ABBILDUNG I:11. Triangulierung von Sphäre $F_0^+ = \mathbb{S}^2$ und Torus $F_1^+ = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Definition I3A. Gegeben sei X ein topologischer Raum. Eine *Triangulierung* (K,h,k) von X besteht aus einem Simplizialkomplex K und einem Homöomorphismus $(h,k) : |K| \cong X$. Der Raum X heißt *triangulierbar*, wenn eine solche Triangulierung existiert.

Erläuterung. Wir wollen den Raum X triangulieren, um simpliziale Methoden nutzen zu können. Der Homöomorphismus $k : X \xrightarrow{\sim} |K|$ führt auf X (stückweise) affine Koordinaten ein, die Umkehrung $h : |K| \xrightarrow{\sim} X$ parametrisiert X. Mittels k können wir von X zu $|K|$ übergehen, die betrachtete Frage in $|K|$ lösen, und schließlich mittels h das Ergebnis von $|K|$ zurück auf X übertragen.

Nicht jeder topologische Raum ist X triangulierbar: Jedes Polyeder $|K|$ ist lokal zusammenziehbar (I4D). Wenn X diese notwendige Eigenschaft nicht hat, so ist X nicht triangulierbar. Ist X triangulierbar, so gibt es im Allgemeinen viele Triangulierungen, daher ist die explizite Angabe von (K,h,k) wesentlich. Jeder der beiden Abbildungen (h,k) bestimmt die anderen, es genügt also h anzugeben.

Beispiel. Jeder diskrete Raum X wird trianguliert durch den Komplex $K = \{\emptyset, \{x\} \mid x \in X\}$ und $h : |K| \xrightarrow{\sim} X : x \mapsto x$. Diese Triangulierung ist eindeutig bis auf simpliziale Isomorphie.

Beispiel I3B. Ein *simplizialer Graph* ist ein kombinatorischer Simplizialkomplex K der Dimension $\dim K \leq 1$, bestehend aus Ecken $\{a\}$ und Kanten $\{a,b\}$ für $a \neq b$. Ein *topologischer Graph* ist ein topologischer Raum X, der homöomorph ist zur Realisierung eines kombinatorischen Graphen, also $(h,k) : |K| \cong X$ mit $\dim K \leq 1$. Mehr hierzu in §I3b.

Übung I3C. Triangulierbar sind der Ball $\mathbb{D}^n \cong \Delta^n$ und die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} \cong \partial\Delta^n$ dank F6G.

✻ **I3C.** Diese Homöomorphismen ist eine einfache aber grundlegende Konstruktion. Wir nennen dies daher die *Standardtriangulierung* von $\mathbb{D}^n$ bzw. $\mathbb{S}^{n-1}$. Der Beweis ist eine schöne Wiederholung der topologischen Grundbegriffe: Der Standardsimplex $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist homöomorph (I1A) zu $\Delta = [v_0, e_1, \ldots, e_n] \subset \mathbb{R}^n$ mit $v_0 = -(e_1 + \cdots + e_n)$. Wir können von $0 \in \operatorname{Int}\Delta$ radial nach außen projizieren (F6G) und erhalten einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(\Delta) = \mathbb{D}^n$ und $h(\partial\Delta) = \mathbb{S}^{n-1}$. Es genügt also, den Standardsimplex Δ^n und seinen Rand $\partial\Delta^n$ wie in I1E zu triangulieren durch die affinen Simplizialkomplexe

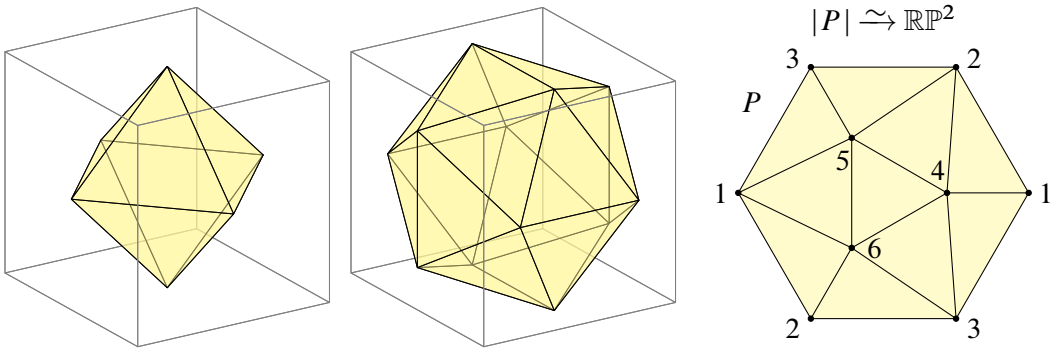
$$\mathscr{D}^n = \langle \Delta^n \rangle = \{ \Delta' \mid \Delta' \leq \Delta^n \} \quad \text{und} \quad \mathscr{S}^{n-1} = \{ \Delta' \mid \Delta' < \Delta^n \}.$$

Dies entspricht den besonders einfachen kombinatorischen Simplizialkomplexen

$$D^n = \mathfrak{P}\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \quad \text{und} \quad S^{n-1} = D^n \smallsetminus \{\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}\}.$$

Für die Polyeder gilt $|D^n| = |\mathscr{D}^n| = \Delta^n \cong \mathbb{D}^n$ und $|S^{n-1}| = |\mathscr{S}^{n-1}| = \partial\Delta^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$.

☞ **Beispiel.** Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ können wir durch den Simplexrand $\partial\Delta^{n+1}$ triangulieren (I3C). ☜ Ebenso gelingt dies mit dem Rand $K = \partial[\pm e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_n]$ des Kreuzpolytops in $\mathbb{R}^{n+1}$. Die folgende Skizze zeigt das Oktaeder im Fall $n = 2$.



✍ **Übung I3D.** Speziell in Dimension $n = 2$ nutzen wir den Ikosaederrand K zu $h : |K| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$. ✍ Der Quotient $P = K/\{\pm 1\}$ ist ein Simplizialkomplex (I4T); das Oktaeder genügt hier nicht! Wir erhalten die 6–Ecken–Triangulierung $|P| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2/\{\pm 1\} = \mathbb{RP}^2$ der projektiven Ebene. Kontrolle: Zählen Sie Ecken, Kanten, Dreiecke und berechnen Sie $\chi(K)$ und $\chi(P)$.

Bemerkung. Hier zahlt sich unsere Vorbereitung zu *abstrakten* Simplizialkomplexen aus!

☞ **Beispiel.** Die reelle Gerade $\mathbb{R} = |R|$ triangulieren wir durch $R = \langle \{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z} \rangle$. ☜ Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2 = |R^2|$ triangulieren wir durch den Simplizialkomplex

$$R^2 = \big\langle \{(a,b),(a,b+1),(a+1,b+1)\}, \{(a,b),(a+1,b),(a+1,b+1)\} \,\big|\, a,b \in \mathbb{Z} \big\rangle.$$

Entsprechendes gilt für $\mathbb{R}^n = |R^n|$ in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$, wie in I3X ausgeführt.

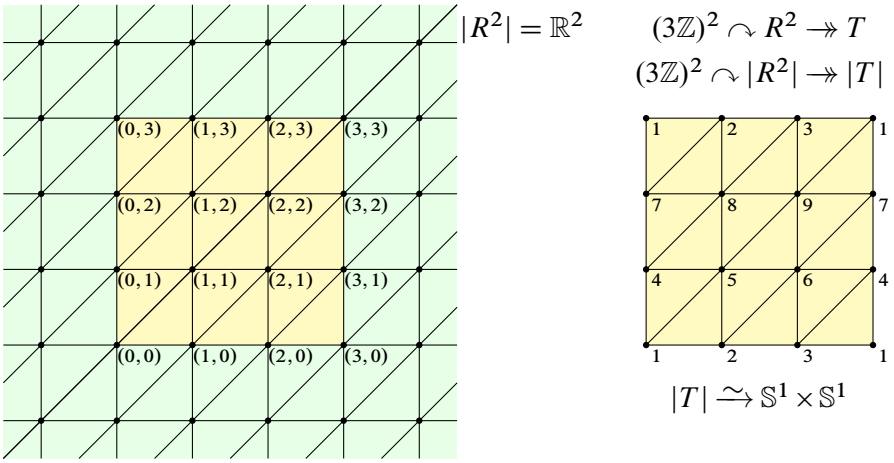


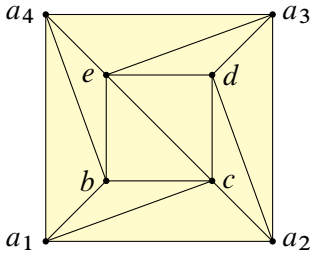
ABBILDUNG I:12. Eine Triangulierung der Ebene $\mathbb{R}^2$ und des Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

✍ **Übung I3E.** (1) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x/3}, e^{2\pi i y/3})$ ist invariant ✍ unter der Translationsgruppe $G = 3\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$, und der Quotient liefert $\mathbb{R}^2/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Ebenso liefert der Quotientenkomplex $T = R^2/G$ eine Triangulierung $|T| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, siehe I4T. Kontrolle: Zählen Sie Ecken, Kanten, Dreiecke und berechnen Sie $\chi(T)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

(2) Die Abbildung $g : [-1,1]^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 : (x,y) \mapsto (e^{\pi i x}, e^{\pi i y})$ identifiziert gegenüberliegende Seiten des Quadrats gemäß $(-1,y) \sim (+1,y)$ und $(x,-1) \sim (x,+1)$ und stiftet so einen Homöomorphismus zum Torus, $h : [-1,1]^2/\!\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(2a) Liefert die folgende Triangulierung des Quadrats $[-1,1]^2$ durch Identifizieren gegenüberliegende Seiten eine Triangulierung des Torus? Wie viele Ecken wären das?

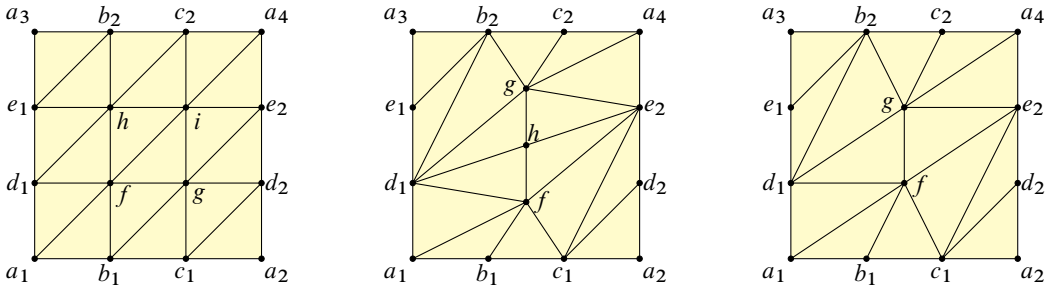


(2b) Aus (1) kennen Sie eine Triangulierung $h : |K| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ des Torus mit 9 Ecken. Versuchen Sie es sparsamer: Gelingt es mit 8 Ecken? gar mit 7 Ecken? Warum nicht 6?

✻ **I3E.** (1) Alles ist explizit, wie in Abbildung I:12 gezeigt. Es genügt geduldiges Nachprüfen.

(2a) Nein, so einfach geht es leider nicht: Die Triangulierung des Quadrats bleibt keine Triangulierung, wenn wir naiv gegenüberliegende Seiten identifizieren. Um dies zu erläutern, beschriften wir die Ecken des Quadrats wie angegeben. Im Quotienten gilt dann $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 =: a$. Es gibt demnach zwei Kanten von a nach b, ebenso je zwei Kanten von a nach c, d, e, sogar vier Kanten von a nach a! Das darf nicht passieren.

Anders betrachtet: Die Identifizierung $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 =: a$ schlägt den Quadratrand zu einem Punkt zusammen. Der so entstehende Simplizialkomplex $K = \langle \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,d,e\}, \{a,e,b\}, \{b,c,e\}, \{c,d,e\} \rangle$ ist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Dies trianguliert die Sphäre, aber nicht den Torus.



(2b) Unser erster naiver Versuch (2a) war zwar ein Fehlschlag, aber doch lehrreich: Er liefert uns eine Anleitung, was wir für eine Triangulierung des Torus prüfen müssen. Die vorangegangene Übung I3E zeigt eine erfolgreiche Triangulierung $h : |T| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ des Torus mit 9 Ecken, wobei $T = R^2/G$ mit $G = 3\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$.

Die obige Skizze zeigt zwei weitere Triangulierungen des Quadrats. Hier wird jede Kante $[x,y]$ und jedes Dreieck $[x,y,z]$ durch die Eckpunkte eindeutig bestimmt. Nach Identifizierung gilt $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 =: a$ sowie $b_1 = b_2 =: b$, $c_1 = c_2 =: c$, $d_1 = d_2 =: d$, $e_1 = e_2 =: e$, wir erhalten also 8 bzw. 7 Ecken $a, b, c, \ldots$. Jede Randkante wird hierbei mit der gegenüberliegenden identifiziert. Weitere Identifizierungen treten nicht auf: Das ist der entscheidende Unterschied zu (2a). Wir erhalten tatsächlich zwei Triangulierungen des Torus.

Bemerkung. In Kapitel K untersuchen wir triangulierte Flächen wie die Sphäre $F_0^+ = \mathbb{S}^2$ und die projektive Ebene $F_0^- = \mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm 1\}$ oder den Torus $F_1^+ = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und die Kleinschen Flasche $F_1^- = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm 1\}$. Die Heawood–Ungleichung (K3B) garantiert dann, dass die obigen Triangulierungen tatsächlich minimal sind: Für $\mathbb{S}^2$ benötigen wir mindestens 4 Ecken, für $\mathbb{RP}^2$ mindestens 6, für $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mindestens 7.

☞ **§I3b. Graphen.** Ein *simplizialer Graph* ist ein Simplizialkomplex K mit $\dim K \leq 1$. ☜ Ein topologischer Raum X heißt *(topologischer) Graph*, wenn er durch einen simplizialen Graphen K triangulierbar ist, kurz $|K| \xrightarrow{\sim} X$. Die Triangulierung ist hierbei nicht eindeutig.

Beispiel. Für jeden Simplizialkomplex K ist das 1–Skelett $K_{\leq 1}$ ein Graph.

Aus topologischer Sicht sind Graphen denkbar einfach gebaut. Aus kombinatorischer Sicht sind sie jedoch bereits höchst interessant. Die *Graphentheorie* ist daher grundlegend in Kombinatorik und Informatik, als Forschungsgegenstand und als Werkzeug.

☞ **Übung I3F.** (1) Seien $|K| \xrightarrow{\sim} X$ und $|L| \xrightarrow{\sim} X$ Triangulierungen desselben Raumes X. ☜ Aus $\dim K = 0$ folgt $\dim L = 0$, und aus $\dim K = 1$ folgt $\dim L = 1$. In beiden Fällen gibt es eine gemeinsame Unterteilung von K und L. Ist K endlich, so auch L, und $\chi(K) = \chi(L)$.

(2) Nennen Sie möglichst viele (gar alle) Graphen K, deren Realisierung $|K|$ eine zusammenhängende 1–Mannigfaltigkeit ist. (Die Klassifikation wird in K1O ausgeführt.)

✻ **I3F.** (1) Genau dann gilt $\dim K \leq 0$, wenn $|K|$ diskret ist. Genau dann gilt $\dim K \leq 1$, wenn für jeden Punkt $x \in |K|$ gilt: Entweder ist x isoliert in $|K|$, oder es existiert eine offene Umgebung U mit $(U, x) \cong ([0,1[, 0)$, oder es existiert eine zusammenhängende Umgebung U von x in $|K|$, sodass $U \smallsetminus \{x\}$ nicht zusammenhängend ist. Diese topologische Eigenschaft ist invariant unter Homöomorphismen. Sei $h : |K| \xrightarrow{\sim} |L|$ ein Homöomorphismus, ohne Einschränkung $|K| = |L|$. Wir erhalten eine gemeinsame Verfeinerung M von K und L mit der Eckenmenge $\Omega(K) \cup \Omega(L)$. Schrittweises Einfügen der Zwischenpunkte zeigt induktiv $\chi(K) = \chi(M) = \chi(L)$.

(2) Wir finden $A_n = \langle \{0,1\}, \{1,2\}, \dots, \{n-2, n-1\} \rangle$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, mit $|A_n| \cong [0,1]$, $B = \langle \{k, k+1\} \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ mit $|B| \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$, $C_n = A_n \cup \{ \{n-1, 0\} \}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, mit $|C_n| \cong \mathbb{S}^1$, $D = \langle \{k, k+1\} \mid k \in \mathbb{Z} \rangle$ mit $|D| \cong \mathbb{R}$.

Ein Simplizialkomplex K heißt *endlich*, wenn er nur endlich viele Simplizes hat, kurz $|K| < \infty$. Dies ist äquivalent dazu, dass K nur endlich viele Ecken hat, kurz $\sharp\Omega < \infty$.

Wir nennen K *lokal-endlich*, wenn jede Ecke $v \in \Omega$ nur mit endlich vielen Ecken benachbart ist, also die Menge $N(v) = \{ u \in \Omega \mid \{u, v\} \in K \}$ aller Nachbarn endlich ist.

Ebenso definieren wir *abzählbar* und *lokal-abzählbar* für Simplizialkomplexe.

Ein *Kantenzug* in K ist eine Eckenfolge $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, kurz $w = v_0 v_1 \dots v_n$, mit $\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\} \in K$. Er verbindet den *Startpunkt* v_0 mit dem *Zielpunkt* v_n. Lokal können wir den Kantenzug w kürzen gemäß $uvu \to uu$ und $uu \to u$, wobei $u, v \in \Omega$. Sind keine lokalen Kürzungen mehr möglich, so nennen wir w einem *gekürzten* Kantenzug.

Für einen *Kantenpfad* verlangen wir zudem, dass keine Ecke doppelt vorkommt, also $k \mapsto v_k$ injektiv ist. Jeder Kantenpfad ist lokal gekürzt, aber es gibt gekürzte Kantenzüge, die keine Pfade sind, zum Beispiel die (mehrfache) Umlaufung eines Dreiecks.

☞ **Übung I3G.** (1) Äquivalent sind: Zwei Ecken u, v in K sind verbindbar durch (a) einen ☜ Kantenzug, (b) einen gekürzten Kantenzug, (c) einen Kantenpfad. Gilt dies für alle Ecken $u, v \in \Omega \neq \emptyset$, so heißt der Simplizialkomplex K *(kombinatorisch) zusammenhängend*.

(2) Ist K lokal-abzählbar und zusammenhängend, so ist K abzählbar.

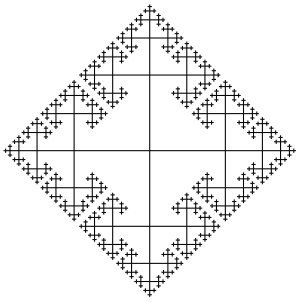
✻ **I3G.** (1) Die Implikationen (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) sind trivial. Für (a) $\Rightarrow$ (c) sei ein Kantenzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ gegeben. Gilt $v_i = v_j$ für $i < j$, so ist $w' = v_0 v_1 \dots v_i v_{j+1} \dots v_n$ ein kürzerer Kantenzug. Nach endlich vielen Abkürzungen dieser Art erhalten wir einen Kantenpfad. Start v_0 und Ziel v_n bleiben dabei unverändert.

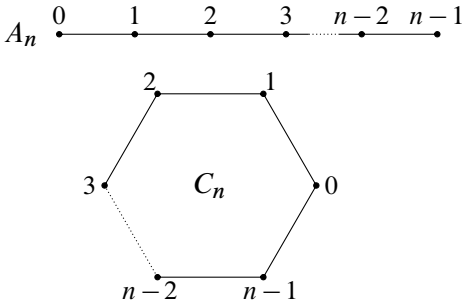
(2) Zu jeder Ecke $v \in \Omega$ sei die Menge $N(v)$ aller Nachbarn abzählbar. Wir setzen $N^0(v) := \{v\}$; rekursiv ist $N^\ell(v) := \bigcup \{ N(w) \mid w \in N^{\ell-1}(v) \}$ die Menge aller Ecken mit Abstand $\leq \ell$ zu v. Per Induktion ist $N^\ell(v)$ abzählbar, und somit auch $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} N^\ell(v) = \Omega$, dank Zusammenhang.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§I3c. Mein Freund, der Baum.** Ein Graph K heißt *zykelfrei*, wenn für jede Kante ☜ $\{a \neq b\} \in K$ gilt: Die beiden Ecken a, b sind im Teilgraph $K \setminus \{\{a,b\}\}$ nicht verbindbar.

Ein Graph K heißt *Baum*, wenn er zusammenhängend und zykelfrei ist.





Wir haben zunächst definiert, was *zykelfrei* bedeutet; hierzu mussten wir nicht erklären, was ein *Zykel* sein soll. Das können wir leicht nachholen: Ein *Zykel* der Länge $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ist eine Einbettung $C_n \hookrightarrow K$ des Modells $C_n := \langle\, \{0,1\}, \{1,2\}, \ldots, \{n-2,n-1\}, \{n-1,0\} \,\rangle$.

☞ **Übung I3H.** (1) Ist der Graph K zykelfrei, so auch jeder Teilgraph $L \leq K$. ☜

(2) Sei $L \leq K$ ein Teilgraph mit $L_0 = K_0$. Ist L zusammenhängend, so auch K.

(3) Ist K nicht zykelfrei, so existiert eine Einbettung $C_n \hookrightarrow K$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

(4) Genau dann ist K zykelfrei, wenn jeder gekürzte Kantenzug ein Kantenpfad ist.

(5) Ein Graph $K \neq \{\emptyset\}$ ist genau dann zusammenhängend / zykelfrei / ein Baum, wenn je zwei Ecken in K durch mindestens / höchstens / genau einen Kantenpfad verbindbar sind.

✻ **I3H.** (1) Für jede Kante $\{a \neq b\} \in L \leq K$ lassen sich die beiden Ecken a, b nicht in $K \setminus \{\{a,b\}\}$ verbinden, da K nach Voraussetzung zykelfrei ist. Also lassen sich a, b auch nicht in $L \setminus \{\{a,b\}\} \leq K \setminus \{\{a,b\}\}$ verbinden.

(2) Je zwei Ecken $a, b \in \Omega(K)$ von K sind wegen $\Omega(K) = \Omega(L)$ auch Ecken von L. Nach Voraussetzung lassen sich a, b durch einen Kantenzug w in L verbinden. Wegen $L \leq K$ ist w auch ein Kantenzug in K.

(3) Ist K nicht zykelfrei, so existiert eine Kante $\{a \neq b\} \in K$, sodass a, b im Teilgraph $K \setminus \{\{a,b\}\}$ verbindbar sind. Dank I3G existiert ein Kantenpfad $v_0 v_1 \ldots v_{n-1}$ von $v_0 = a$ nach $v_{n-1} = b$ in $K \setminus \{\{a,b\}\}$. Dies definiert eine Einbettung $C_n \hookrightarrow K : i \mapsto v_i$, also einen Zykel der Länge n.

(4) „⇐“: Wie in (3) ist $w = v_0 v_1 \ldots v_{n-1} v_0$ in K ein gekürzter Kantenzug aber kein Kantenpfad.

„⇒“: Sei K zykelfrei und $w = v_0 v_1 \ldots v_n$ ein gekürzter Kantenzug in K. Wir haben zu zeigen, dass w ein Kantenpfad ist, also $i \mapsto v_i$ injektiv. Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte $v_i = v_j$ für $0 \leq i < j \leq n$. Wir können $\{i, \ldots, j-1\} \to \{v_i, \ldots, v_{j-1}\} : k \mapsto v_k$ als injektiv annehmen, notfalls erhöhen wir i oder verringern j geeignet. Da der Kantenzug w gekürzt ist, gilt $j \geq i+3$. Damit haben wir einen Zykel $\{v_i, v_{i+1}\}, \ldots, \{v_{j-1}, v_i\}$ in K aus paarweise verschiedenen Kanten, und somit ist K nicht zykelfrei.

(5a) „⇒“: Ist K zusammenhängend, so lassen sich je zwei Ecken in K durch einen Kantenzug verbinden, dank I3G sogar durch einen Kantenpfad. Die Umkehrung „⇐“ ist trivial.

(5b) „⇐“: Ist K nicht zykelfrei, so existiert eine Kante $\{a \neq b\} \in K$ und ein Kantenzug von a nach b in $K \setminus \{\{a,b\}\}$, dank I3G sogar ein Kantenpfad w. In K sind ab und w verschiedene Kantenpfade von a nach b.

„⇒“: Sei K zykelfrei und $u = u_0 u_1 \ldots u_m$, $v = v_0 v_1 \ldots v_n$ zwei Kantenpfade von $u_0 = v_0$ nach $u_m = v_n$. Ohne Einschränkung sei $m \leq n$. Wir zeigen $u = v$ per Induktion über m. Für $m = 0$ gilt $n = 0$ und somit $u = v$. Für $m \geq 1$ sei $i \in \{1, \ldots, m\}$ minimal mit $u_i = v_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$; wir wählen auch j minimal. Im Falle $i \geq 2$ oder $j \geq 2$ hätten wir einen Zykel $\{u_0, u_1\}, \ldots, \{u_{i-1}, u_i\}, \{v_j, v_{j-1}\}, \ldots, \{v_1, v_0\}$ in K. Also bleibt nur $i = j = 1$: Für $u' = u_1 \ldots u_m$ und $v' = v_1 \ldots v_n$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $u' = v'$, also $u = v$.

☞ **Übung I3I.** Für endliche Graphen und Bäume gelten Abzählargumente: ☜

(1) Jeder endliche Baum K hat die Euler–Charakteristik $\chi(K) = 1$.
(2) Jeder endliche Baum K mit $n \geq 2$ Ecken hat mindestens ein *Blatt*, das heißt eine Ecke, die nur in einer Kante liegt. Genauer existieren sogar mindestens zwei Blätter.
(3) Zu jeder Eckenzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gibt es Bäume mit nur zwei Blättern; je zwei solche Bäume K, K' sind isomorph; es gibt genau zwei Isomorphismen $K \xrightarrow{\sim} K'$.
(4) Wie sehen endliche Bäume K aus mit genau drei Blättern? vier? fünf?
Es gibt unendliche Bäume mit nur einem Blatt, sogar mit gar keinem Blatt.

Für jeden endlichen Graphen K sind äquivalent:

(5) Der Graph K ist ein Baum, also zusammenhängend und zykelfrei.
(6) Der topologische Raum $|K|$ ist zusammenziehbar, kurz $|K| \simeq *$.
(7) Der Graph K ist zusammenhängend und $\chi(K) \geq 1$.
(8) Der Graph K ist nicht leer, zykelfrei und $\chi(K) \leq 1$.

Zusatz: Die Äquivalenz „(5) ⇔ (6)“ gilt auch für unendliche Graphen (J8F).

✻ **I3I.** (1) Wir führen Induktion über die Eckenzahl $n = \sharp\Omega(K)$: Für $n = 1$ gilt $K = \langle\, \{a\} \,\rangle$, also $\chi(K) = 1$. Für $n \geq 2$ wählen wir eine Kante $\{a \neq b\} \in K$ und erhalten $K \smallsetminus \{\{a,b\}\} = A \sqcup B$ mit zwei Bäumen $A \ni \{a\}$ und $B \ni \{b\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\chi(A) = \chi(B) = 1$, also $\chi(K) = \chi(A) + \chi(B) - 1 = 1$.

(2) Wir führen Induktion über n: Für $n = 2$ gilt $K = \langle\, \{a,b\} \,\rangle$, somit sind a, b Blätter. Sei K ein Baum mit $n \geq 3$ Ecken. Wir wählen eine Kante $\{a \neq b\} \in K$ und erhalten $K \smallsetminus \{\{a,b\}\} = A \sqcup B$ mit zwei Bäumen $A \ni \{a\}$ und $B \ni \{b\}$. Es gilt $\Omega(K) = \Omega(A) \sqcup \Omega(B)$, also $\sharp\Omega(A) + \sharp\Omega(B) = \sharp\Omega(K)$ mit $1 \leq \sharp\Omega(A), \sharp\Omega(B) < n$. Wir unterscheiden drei Fälle: (a) Im Falle $A = \langle\, \{a\} \,\rangle$ gilt $\sharp\Omega(B) \geq 2$. Nach Induktionsvoraussetzung hat B mindestens zwei Blätter $b' \neq b''$. Im Falle $b \in \{b', b''\}$ sei ohne Einschränkung $b = b'$. Damit hat K mindestens die beiden Blätter a und b''. (b) Im Falle $B = \langle\, \{b\} \,\rangle$ gilt $\sharp\Omega(A) \geq 2$, und wir argumentieren wie in (a) mit vertauschten Rollen. (c) Es bleibt der Fall $\sharp\Omega(A), \sharp\Omega(B) \geq 2$. Nach Induktionsvoraussetzung hat A mindestens zwei Blätter a', a'', ebenso hat B mindestens zwei Blätter b', b''. Im Falle $a \in \{a', a''\}$ sei $a = a'$, im Falle $b \in \{b', b''\}$ sei $b = b'$. Damit hat $K = A \sqcup B \sqcup \{\{a,b\}\}$ mindestens die beiden Blätter a'' und b''.

(3) Zu $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist A_n ein Baum mit n Ecken und den Blättern 0 und $n-1$. Sei K ein endlicher Baum mit genau zwei Blättern a und b. Zwischen diesen existiert ein Kantenpfad der Länge $n-1$, also eine Einbettung $p = p_{ab} : A_n \hookrightarrow K$ mit $0 \mapsto a$ und $n-1 \mapsto b$. Im Falle $p(A_n) \neq K$ gäbe es Abzweigungen, und diese führen zu weiteren Blättern (2). Also ist $p_{ab} : A_n \xrightarrow{\sim} K$ ein Isomorphismus; der andere ist $p_{ba} : A_n \xrightarrow{\sim} K$.

(4) Zu $p, q, r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachten wir drei disjunkte Kopien A_{p+1}, A_{q+1}, A_{r+1} und identifizieren die drei Nullpunkte; der so entstehende Baum $T_{p,q,r}$ hat $1 + p + q + r$ Ecken und drei Blättern. Wie in (3) zeigt man, dass dies bis auf Isomorphie alle Möglichkeiten sind; allerdings hat $\mathrm{Aut}(T_{p,q,r})$ nun Ordnung 1, 2, oder 6.

„(5) ⇒ (6)“: Wir führen Induktion über die Eckenzahl $n = \sharp\Omega(K)$. Im Falle $n = 1$ ist $|K| = \{a\}$ nur ein Punkt, also trivialerweise zusammenziehbar. Im Falle $n \geq 2$ existiert dank (2) mindestens ein Blatt b mit Kante $\{a,b\} \in K$. Einklappen liefert den Graphen $K' = K \smallsetminus \{\{a,b\}, \{b\}\}$ und zur Inklusion $i : K' \hookrightarrow K$ die starke Homotopieretraktion $r : K \to K' : b \mapsto a$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $|K| \simeq |K'| \simeq \{*\}$.

Ausführliche Konstruktion: Wir definieren $r : \Omega(K) \to \Omega(K') = \Omega(K) \smallsetminus \{b\}$ durch $r(x) = x$ für alle $x \in \Omega(K')$ sowie $r(b) = a$. Da b ein Blatt ist und nur in der Kante $\{a,b\}$ liegt, ist $r : K \to K'$ eine simpliziale Abbildung, und wir erhalten $|r| : |K| \to |K'|$. Die Abbildung $H : [0,1] \times |K| \to |K| : (t,x) = (1-t)x + t|r|(x)$ ist wohldefiniert und stetig bezüglich der simplizialen Topologie (I1C). Sie erfüllt $H_0 = \mathrm{id}_{|K|}$ und $H_1 = |i| \circ |r|$.

„(6) ⇒ (7)“: Aus $|K| \simeq \{*\}$ folgt $\pi_0(|K|) \cong \pi_0(\{*\}) = \{*\}$ dank Homotopie-Invarianz (G4P) sowie $\chi(|K|) = 1$, dank Homotopie-Invarianz der Euler–Charakteristik (A3J).

„(7) ⇒ (5)“: Dank I3J existiert ein Spannbaum $T \subset K$. Für diesen wissen wir $\chi(T) = 1$ dank (1), also $\chi(K) = \chi(T) - |K \smallsetminus T| \leq 1$. Gilt zudem $\chi(K) \geq 1$, so folgt $|K \smallsetminus T| = 0$, also ist $K = T$ ein Baum.

„(8) ⇒ (5)“: Es gilt $K = \bigsqcup_{i \in I} K_i$, jede Komponente K_i ist ein Baum, also $\chi(K) = \sum_{i \in I} \chi(K_i) = |I| \geq 1$ dank (1). Gilt zudem $\chi(K) \leq 1$, so folgt $|I| = 1$, also $I = \{i\}$, und $K = K_i$ ist ein Baum.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

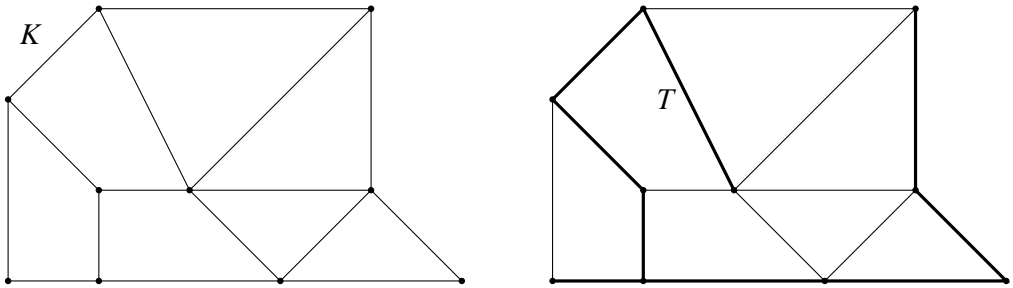


ABBILDUNG I:13. Ein Graph K mit einem Spannbaum $T \leq K$ (in fett): Es gibt viele Lösungen, die Konstruktion erfordert willkürliche Wahlen!

☞ **Satz I3J.** *Sei K ein zusammenhängender Graph und $K_0 \leq T \leq K$. Dann sind äquivalent:* ☜

(1) T ist ein Baum, das heißt zusammenhängend und zykelfrei.
(2) T ist zusammenhängend und minimal mit dieser Eigenschaft.
(3) T ist zykelfrei und maximal mit dieser Eigenschaft.

Einen solchen Baum T mit $K_0 \leq T \leq K$ nennen wir einen Spannbaum *von K. Es gilt:*

(4) Jeder zusammenhängende Graph K enthält einen Spannbaum. Genauer:
(5) Zu jedem zykelfreien Teilgraph $S \leq K$ existiert ein Spannbaum T mit $S \leq T \leq K$.

Zusatz: Die Aussagen (4) und (5) beruhen auf dem Auswahlaxiom. Umgekehrt impliziert die allgemeine Gültigkeit von (4) das Auswahlaxiom, die beiden sind also äquivalent.

Algorithmus: Sei $(K,<)$ ein Graph K mit einer Wohlordnung $<$ der Eckenmenge $\Omega(K)$. Es gibt eine Konstruktion $(K,<) \mapsto T$ ohne Wahlen, im endlichen Fall einen Algorithmus.

Bemerkung. Statt Teilgraphen $T \leq K$, die zykelfrei / zusammenhängend / ein Baum sind, betrachtet man in der Linearen Algebra Teilmengen $T \subset V$ eines Vektorraums, die linear unabhängig / erzeugend / eine Basis sind. Die obigen Aussagen gelten formal genauso.

BEWEIS. Beweisen Sie Satz I3J — als Fingerübung in technischer Virtuosität. □

✻ **I3J.** „(1) ⇒ (2)“: Sei $T \supset K_0$ ein Baum. Dann ist T zusammenhängend. Zu jedem kleineren Graphen S mit $K_0 \subset S \subsetneq T$ existiert $\{a,b\} \in T \smallsetminus S$. Da T zykelfrei ist, ist $S \subset T \smallsetminus \{\{a,b\}\}$ nicht zusammenhängend.

„(2) ⇒ (1)“: Sei $T \supset K_0$ zusammenhängend und minimal mit dieser Eigenschaft. Dann gilt für jede Kante $\{a,b\} \in T$: In $T \smallsetminus \{\{a,b\}\}$ lassen sich a,b in $T \smallsetminus \{\{a,b\}\}$ nicht verbinden. Also ist T zykelfrei.

„(1) ⇒ (3)“: Sei $T \subset K$ ein Baum. Dann ist T zykelfrei. Jeder größerer Graph S mit $T \subsetneq S \subset K$ enthält eine weitere Kante $\{a,b\} \in S \smallsetminus T$. Da T zusammenhängend ist, sind a,b in $T \subset S \smallsetminus \{\{a,b\}\}$ durch einen Kantenzug verbindbar, also ist S nicht zykelfrei.

„(3) ⇒ (1)“: Sei $T \subset K$ zykelfrei und maximal mit dieser Eigenschaft. Wir zeigen, dass je zwei Ecken a,b in T verbindbar sind. Nach Voraussetzung ist K zusammenhängend, es existiert also ein Kantenzug $\{v_0,v_1\},\dots,\{v_{n-1},v_n\} \in K$ von $a = v_0$ nach $b = v_n$. Wären für ein $k \in \{1,\dots,n\}$ die Ecken v_{k-1} und v_k in T nicht verbindbar, so wäre $T \cup \{\{v_{k-1},v_k\}\}$ zykelfrei und echt größer als T, ein Widerspruch. Dank Transitivität der Verbindbarkeit gilt per Induktion über n: Die Ecke $a = v_0$ ist in T verbindbar mit $v_1, v_2, \dots, v_n = b$.

(4) Ist K endlich, dann existiert ein minimaler zusammenhängender Teilgraph T mit $K_0 \subset T \subset K$: Wir starten mit K und lassen solange Kanten weg, bis die Wegnahme jeder weiteren Kante den Zusammenhang zerstören würde. Ebenso existiert ein maximaler zykelfreier Teilgraph T mit $K_0 \subset T \subset K$: Wir starten mit K_0 und fügen solange Kanten hinzu, bis jede weitere Kante einen Zykel erzwingen würde. Ebenso für K unendlich:

(5) Sei $P := \{\, T \mid K_0 \cup S \subset T \subset K,\ T \text{ zykelfrei} \,\}$ geordnet durch Inklusion. Dank (3) ist jedes maximale Element T von $(P,\subset)$ ein Spannbaum von K. Wegen $K_0 \cup S \in P$ ist P nicht leer. Ist $(T_i)_{i\in I}$ eine Kette in P, dann ist $S = \bigcup_{i\in I} T_i$ wieder zykelfrei: Andernfalls gäbe es eine Kante $\{a,b\} \in S$, sodass a und b durch einen Kantenzug $\{v_0,v_1\},\dots,\{v_{n-1},v_n\} \in S \smallsetminus \{\{a,b\}\}$ verbindbar sind. Da $(T_i)_{i\in I}$ eine Kette ist, gibt es ein T_j, das all diese Kanten enthält. Aber dann ist T_j nicht zykelfrei, ein Widerspruch. Somit ist $S \in P$ eine obere Schranke der Kette $(T_i)_{i\in I}$. Nach dem Lemma von Zorn existieren maximale Elemente in $(P,\subset)$.

Zusatz: Wir nehmen (4) an und folgern hieraus das Auswahlaxiom. (Wir benutzen hierzu stillschweigend die anderen Axiome der Mengenlehre; genauer gesagt zeigen wir also „ZF + (4) $\Rightarrow$ AC“.) Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei $X_i \neq \emptyset$ eine nicht-leere Menge. Sei $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ ihre Vereinigung. Ohne Einschränkung können wir $I \cap X = \emptyset$ annehmen. Auf der Eckenmenge $\Omega = I \sqcup X$ betrachten wir den Graphen $K = \{\{i,x\} \mid i \in I,\ x \in X_i\} \cup \{\{x,y\} \mid x,y \in X\}$. Dieser Graph ist zusammenhängend. Genauer: Wir wählen einen festen Basispunkt $z \in X$. Von jeder Ecke $x \in X$ existiert ein Weg nach z der Länge ≤ 1. Von jeder Ecke $i \in I$ existiert ein Weg nach z der Länge ≤ 2, dank $X_i \neq \emptyset$. Dank (4) existiert ein Spannbaum $T \leq K$. Zu jedem $i \in I$ existiert genau ein Kantenpfad von i nach z in T. Dieser beginnt mit einer Kante $\{i,x_i\} \in T$ mit $x_i \in X_i$. Somit codiert T die Auswahl $(x_i)_{i\in I}$ eines Elements $x_i \in X_i$ für jedes $i \in I$.

Algorithmus: Sei $(K,<)$ ein Graph K mit Wohlordnung $<$ der Eckenmenge Ω. Zur Erinnerung: Wohlordnung bedeutet, zu jeder nicht-leeren Teilmenge $X \subset \Omega$ existiert ein kleinstes Element $x = \min(X,<)$, also $x \in X$ mit $x \leq X$. Ist K endlich, so entspricht dies einer Abzählung $\{0,1,\dots,n\} \xrightarrow{\sim} \Omega$. Ist K abzählbar unendlich, so überträgt jede Abzählung $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \Omega$ der Eckenmenge die Wohlordnung $<$ von $\mathbb{N}$ auf Ω.

Das folgende Verfahren ist *konstruktiv*, das heißt, es werden keine weiteren Wahlen benötigt. Zu jedem gegebenen wohlgeordneten Graphen $(K,<)$ konstruieren wir ein Spannbaum $T \leq K$ wie folgt:

Sei $x_0 \in \Omega$ die kleinste Ecke. Wir beginnen mit dem Baum $T(0) = \langle\{x_0\}\rangle$ mit Eckenmenge $\Omega(0) = \{x_0\}$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei der Baum $T(n)$ mit Eckenmenge $\Omega(n)$ gegeben; dies sind alle Ecken mit Abstand $\leq n$ vom Startpunkt x_0. Wir setzen $\Omega(n+1) = \{\, x \in \Omega \mid \exists y \in \Omega(n) : \{x,y\} \in K \,\}$. Für jede Ecke $x \in \Omega(n+1) \smallsetminus \Omega(n)$ sei $y(x) \in \Omega(n)$ der kleinste Nachbar. Wir setzen $T(n+1) = T(n) \cup \{\{x\},\ \{x,y(x)\} \mid x \in \Omega(n+1) \smallsetminus \Omega(n)\}$. Wir erhalten so einen Baum $T(n+1)$ mit Eckenmenge $\Omega(n+1)$; dies sind alle Ecken mit Abstand $\leq n+1$ vom Startpunkt x_0. So fortfahrend erhalten wir schließlich $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(n)$. Dies ist ein Baum: Gäbe es einen Zykel in T, so ist dieser endlich und tritt bereits in einem $T(n)$ auf, was nach Konstruktion unmöglich ist. Die Eckenmenge von T ist die gesamte Eckenmenge Ω: Da K zusammenhängend ist, gibt es von jeder Ecke $x \in \Omega$ einen Weg nach x_0 mit einer gewissen Länge $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann $\{x\} \in T(n) \subset T$, wie gewünscht.

Diskussion: Für endliche Graphen, mit $\{0,1,\dots,n\} \xrightarrow{\sim} \Omega$, ist dies ein Algorithmus im klassischen Sinne: Die Konstruktion von T gelingt in endlich vielen Schritten. Jeder Schritt ist eindeutig vorgegeben, zur Betonung sagt man auch *deterministisch*, also ohne willkürliche Wahlen. Die Zuordnung $(K,<) \mapsto T$ ist in diesem Sinne wohldefiniert, der Algorithmus liefert auf isomorphen Eingaben stets isomorphe Ausgaben.

Jeder lokal-endliche Graph K ist abzählbar (I3G). Die Konstruktion von jedem $T(n)$ gelingt in endlich vielen Schritten. Die Teilbäume $T(0) \leq T(1) \leq T(2) \leq \dots$ wachsen in alle Richtungen und umfassen schließlich jede vorgegebene endliche Eckenmenge. Dies kann man noch als Algorithmus betrachten; die Datentypen sind hier nicht endlich sondern *Streams*, man denke an ein unendlich langes Speicherband.

Im Allgemeinen, für einen nicht lokal-endlichen Graphen K, ist unser Verfahren kein Algorithmus im strengen Sinne, da zur Konstruktion von $T(n)$ unendlich viele Schritte benötigt werden. Das ist auf einem klassischen Computer (Turing–Maschine) nicht realisierbar. Immerhin ist in der Konstruktion $(K,<) \mapsto T$ jeder Schritt deterministisch, und das Ergebnis T hängt nur von der Eingabe $(K,<)$ ab.

Das Auswahlaxiom garantiert, dass auf jeder Menge Ω eine Wohlordnung $<$ existiert. So gesehen ist es keine Einschränkung, statt des Graphen K einen wohlgeordneten Graphen $(K,<)$ zu fordern. Zudem kann es je nach Anwendung vorkommen, dass der betrachtete Graph K bereits eine Wohlordnung mitbringt. In diesem Falle ist es günstig, diese Wohlordnung in der Konstruktion zu nutzen. Das hier ausgeführte Verfahren befreit uns im erklärten Sinne vom Auswahlaxiom, bzw. grenzt es präzise auf vorzugebende Daten ein.

Schließlich bleibt die didaktische Frage: Das hier ausgeführte Konstruktionsverfahren mittels Wohlordnung mag manchem intuitiver und leichter verständlich erscheinen als die Anwendung des Zornschen Lemmas. Beide Beweise verlaufen ähnlich und sind in etwa gleich kompliziert. Vorliebe ist letztlich eine persönliche Frage. Mir scheint es gut und günstig, beide Verfahren zur Wahl zu haben.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I3d. Polytopale Komplexe. Wir erinnern an den Begriff des polytopalen Komplexes (A3B) aus der Einleitung und präzisieren ihn nun für unendliche Komplexe.

Definition I3K. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $\mathscr{K}$ eine Familie von Polytopen in V.

Wir nennen $\mathscr{K}$ einen *polytopalen Komplex*, wenn gilt:

(0) Das leere Polytop gehört zu $\mathscr{K}$, kurz $\emptyset \in \mathscr{K}$.
(1) Für je zwei verschiedene Polytope $P \neq Q$ in $\mathscr{K}$ gilt $\operatorname{Int} P \cap \operatorname{Int} Q = \emptyset$.
(2) Für jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ gilt $\partial P = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ mit $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathscr{K}$.

Die *Dimension* und die *Skelette* des polytopalen Komplexes $\mathscr{K}$ definieren wir durch

$$\dim \mathscr{K} := \sup\bigl\{ \dim P \;\big|\; P \in \mathscr{K} \bigr\}, \qquad \mathscr{K}_{\leq n} := \bigl\{ P \in \mathscr{K} \;\big|\; \dim P \leq n \bigr\},$$
$$\mathscr{K}_{<n} := \bigl\{ P \in \mathscr{K} \;\big|\; \dim P < n \bigr\}, \qquad \mathscr{K}_n := \bigl\{ P \in \mathscr{K} \;\big|\; \dim P = n \bigr\}.$$

Das durch den Komplex $\mathscr{K}$ definierte *Polyeder* ist die Vereinigung all seiner Polytope:

$$\bigl|\mathscr{K}\bigr| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup\nolimits_{P \in \mathscr{K}} P = \bigsqcup\nolimits_{P \in \mathscr{K}} \operatorname{Int} P \;\subset\; V$$

Jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ versehen wir mit seiner euklidischen Topologie (in $\operatorname{aff} P \cong \mathbb{R}^n$). Das Polyeder $|\mathscr{K}|$ versehen wir mit der durch $\mathscr{K}$ definierten *polytopalen Topologie* $\mathcal{T}_{\mathscr{K}}$: Genau dann ist $U \subset |\mathscr{K}|$ offen, wenn $U \cap P \subset P$ offen ist in jedem Polytop $P \in \mathscr{K}$.

Bemerkung. Ist $\mathscr{K}$ ein lokal-endlicher Komplex in einem topologischen Vektorraum V, so stimmt die polytopale Topologie auf $|\mathscr{K}|$ mit der Teilraumtopologie in V überein (E1N).

Beispiel. Für jedes Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ bildet die Familie $\mathscr{K} = \{\, Q \leq P \,\}$ aller Seiten einen endlichen polytopalen Komplex mit $|\mathscr{K}| = P$ (A2E). Auch die Familie $\partial\mathscr{K} = \{\, Q < P \,\}$ aller echten Seiten ist ein polytopaler Komplex; das zugehörige Polyeder ist $|\partial\mathscr{K}| = \partial P$. Baryzentrische Unterteilung (I3M) liefert den simplizialen Komplex $\beta(\mathscr{K}) \preccurlyeq \mathscr{K}$.

Bemerkung. Für (affine) simpliziale und polytopale Komplexe gilt:

$$\mathscr{K} \text{ simplizial (I1C)} \implies \mathscr{K} \text{ polytopal (I3K)} \implies \beta(\mathscr{K}) \text{ simplizial (I3M)}$$

Bemerkung. Ist $\mathscr{K}$ endlich, so auch $\dim \mathscr{K} = n$; die Umkehrung gilt nicht (I2L). Ist $\mathscr{K}$ endlich, so ist $|\mathscr{K}|$ kompakt; hierzu gilt auch die Umkehrung (I2N). Für $d = 0, 1, 2, \ldots, n$ zählen wir die d–dimensionalen Polytope, $f_d(\mathscr{K}) := \sharp \mathscr{K}_d = \sharp\{\, P \in \mathscr{K} \mid \dim P = d \,\}$.

Die *Euler–Charakteristik* eines endlichen Komplexes $\mathscr{K}$ ist die Wechselsumme

$$\chi(\mathscr{K}) := \sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(\mathscr{K}) = \sum_{\emptyset \neq P \in \mathscr{K}} (-1)^{\dim P}$$

Bemerkung. Wir erinnern an die topologische Invarianz der Euler–Charakteristik (A3J). Für endliche polytopale (speziell: simpliziale) Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ gilt:

$$\underset{\text{affin-lineare Isomorphie}}{(1)\ |\mathscr{K}| \cong |\mathscr{L}|} \implies \not\Leftarrow \underset{\text{Homöomorphie}}{(2)\ |\mathscr{K}| \cong |\mathscr{L}|} \implies \not\Leftarrow \underset{\text{Homotopie-Äquivalenz}}{(3)\ |\mathscr{K}| \simeq |\mathscr{L}|} \implies \not\Leftarrow \underset{\text{Gleichhheit in } \mathbb{Z}}{(4)\ \chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L})}$$

Die Implikationen „(1) ⇒ (2) ⇒ (3)“ sind klar. Die affin-lineare Invarianz „(1) ⇒ (4)“ verdanken wir Satz A3G. Bemerkenswert ist die topologische Invarianz „(2) ⇒ (4)“ und stärker noch die Homotopie-Invarianz „(3) ⇒ (4)“! Beide können wir erst später mit simplizialer Homologie beweisen, bis dahin aber nutzen wir sie bereits als Werkzeug.

§I3e. Zentrische Unterteilung. Beispiele legen nahe: Für jeden polytopalen Komplex $\mathscr{K}$ gemäß I3K können wir das Polyeder $|\mathscr{K}|$ durch zentrische Unterteilung triangulieren.

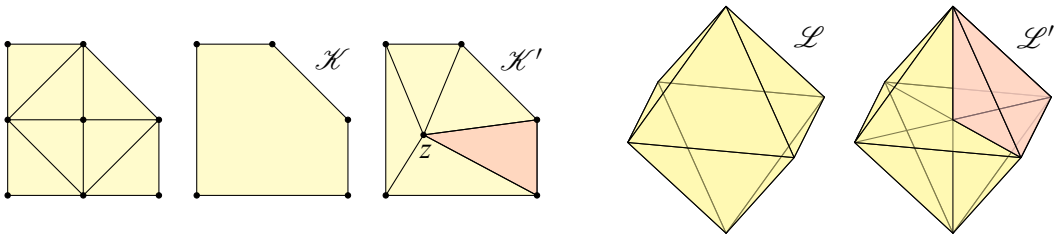


ABBILDUNG I:14. Zentrische Unterteilung eines Fünfecks und eines Oktaeders

Beispiel. Abbildung I:14 zeigt die zentrische Unterteilung eines Fünfecks und eines Oktaeders. In beiden Fällen haben wir ein n–dimensionales Polytop P, dessen Rand ∂P bereits simplizial unterteilt ist. Wir wählen ein Zentrum $z_P \in \operatorname{Int} P$ und erhalten eine Unterteilung relativ zum Rand, denn dieser wird hierbei nicht unterteilt. Diese Idee führen wir nun aus:

Definition I3L. Eine *Unterteilung* $\mathscr{K}' \preccurlyeq \mathscr{K}$ ist ein Komplex $\mathscr{K}'$ mit selbem Polyeder $|\mathscr{K}'| = |\mathscr{K}|$, und jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ ist Vereinigung endlich vieler Polytope $P' \in \mathscr{K}'$.

Ist zudem $\mathscr{K}'$ simplizial, so nennen wir $\mathscr{K}' \preccurlyeq \mathscr{K}$ eine *simpliziale Unterteilung*.

Eine *relative Unterteilung* $(\mathscr{K}', \mathscr{L}) \preccurlyeq (\mathscr{K}, \mathscr{L})$ zum Teilkomplex $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}$ bedeutet $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}' \preccurlyeq \mathscr{K}$. Das heißt, nur Polytope $P \in \mathscr{K} \smallsetminus \mathscr{L}$ werden unterteilt.

Für $\mathscr{L} = \{\emptyset\}$ ist $(\mathscr{K}', \mathscr{L}) \preccurlyeq (\mathscr{K}, \mathscr{L})$ eine (absolute) Unterteilung $\mathscr{K}' \preccurlyeq \mathscr{K}$ wie zuvor.

Bemerkung. Für jede Unterteilung gilt $\dim \mathscr{K}' = \dim \mathscr{K}$. Ist $\mathscr{K}$ lokal-endlich, so auch $\mathscr{K}'$. Ist $\mathscr{K}$ endlich, so auch $\mathscr{K}'$, und für die Euler–Charakteristiken gilt $\chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{K}')$.

Das gemeinsame Polyeder $|\mathscr{K}| = |\mathscr{K}'|$ trägt die polytopalen Topologien $\mathfrak{T}_{\mathscr{K}} = \mathfrak{T}_{\mathscr{K}'}$: Dank der Endlichkeitsbedingung unserer Definition I3L stimmen beide überein (E1N).

Satz I3M. *Sei $\mathscr{K}$ ein polytopaler Komplex, $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}$ ein simplizialer Teilkomplex, etwa $\mathscr{L} = \{\emptyset\}$ oder $\mathscr{L} = \mathscr{K}_{\leq 1}$, sowie $z : \mathscr{K} \smallsetminus \mathscr{L} \to |\mathscr{K}| : P \mapsto z_P \in \operatorname{Int} P$. Daraus konstruieren wir rekursiv den Simplizialkomplex $\mathscr{K}'$ als* zentrische Unterteilung $(\mathscr{K}', \mathscr{L}) \preccurlyeq (\mathscr{K}, \mathscr{L})$*:*

$$\mathscr{K}'_{\leq 0} = \mathscr{K}_{\leq 0}, \quad \mathscr{K}'_{\leq n} = \mathscr{K}'_{<n} \cup \mathscr{L}_n \cup \left\{ [v_0, \dots, v_k, z_P] \;\middle|\; \begin{array}{c} P \in \mathscr{K}_n \smallsetminus \mathscr{L}_n, \\ \partial P \supset [v_0, \dots, v_k] \in \mathscr{K}'_{<n} \end{array} \right\} \preccurlyeq \mathscr{K}_{\leq n}$$

Speziell die baryzentrische Unterteilung $\beta(\mathscr{K}, \mathscr{L}) := (\mathscr{K}', \mathscr{L})$ *erhalten wir mit*

$$P \quad \mapsto \quad \operatorname{vert}(P) = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \mapsto \quad z_P = \beta(P) := \tfrac{1}{n} x_1 + \dots + \tfrac{1}{n} x_n \in \operatorname{Int} P.$$

BEWEIS. Alles ist explizit angegeben, es genügt induktives Nachprüfen: Übung! □

✻ **I3M.** Für $n \in \mathbb{N}$ zeigen wir per Induktion: $\mathscr{K}'_{\leq n}$ ist ein Simplizialkomplex und $\mathscr{L}_{\leq n} \leq \mathscr{K}'_{\leq n} \preccurlyeq \mathscr{K}_{\leq n}$.

Das 0–Skelett $\mathscr{L}_{\leq n} \leq \mathscr{K}'_{\leq 0} = \mathscr{K}_{\leq 0}$ besteht aus einzelnen Punkten und ist bereits simplizial. Für jedes Polytop $P \in \mathscr{K}_n$ gilt $P \in \mathscr{L}_n$ oder $P \in \mathscr{K}_n \smallsetminus \mathscr{L}_n$. Im ersten Falle ist P ein Simplex mit $\langle P \rangle \leq \mathscr{L}$ und wird unverändert übernommen. Im zweiten Falle ist P ein Polytop und der Rand ∂P Vereinigung von endlich vielen Polytopen in $Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathscr{K}_{<n}$ (I3K). Per Induktionsannahme werden diese durch $\mathscr{K}'_{<n} \preccurlyeq \mathscr{K}_{<n}$ in einen endlichen Simplizialkomplex unterteilt. Über jedem Simplex $[v_0, \dots, v_k] \in \mathscr{K}'_{<n}$ in ∂P bilden wir den Kegel $[v_0, \dots, v_k, z_P]$ mit der hierzu affin unabhängigen Spitze $z_P \in \operatorname{Int} P$ (I3O). Auf diese Weise wird das Polytop P in Simplizes unterteilt, wie in I:14 skizziert, denn P ist der Kegel von ∂P mit Spitze z_P (F6H).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§I3f. Illustration.** Die zentrische Unterteilung $\beta(\mathscr{K},\mathscr{L}) \preccurlyeq (\mathscr{K},\mathscr{L})$ gemäß I3M ist ☜ einfach und elegant. Erfahrungsgemäß sollte man sie unbedingt an Beispielen erproben.

Übung I3N. (1) Sei $[a,b,c] \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck und $\mathscr{K} = \langle [a,b,c] \rangle$ der zugehörige Komplex. Skizzieren Sie $\beta(\mathscr{K})$ und $\beta^2(\mathscr{K})$ sowie $\beta(\mathscr{K},\mathscr{K}_{\leq 1})$ und $\beta^2(\mathscr{K},\mathscr{K}_{\leq 1})$. Bestimmen Sie insbesondere den f–Vektor (f_0,f_1,f_2) und die Euler–Charakteristik $\chi = f_0 - f_1 + f_2$.

(2) Dieselben Fragen für ein Quadrat $[a,b,c,d]$ oder ein regelmäßiges n–Eck $P_n \subset \mathbb{R}^2$.

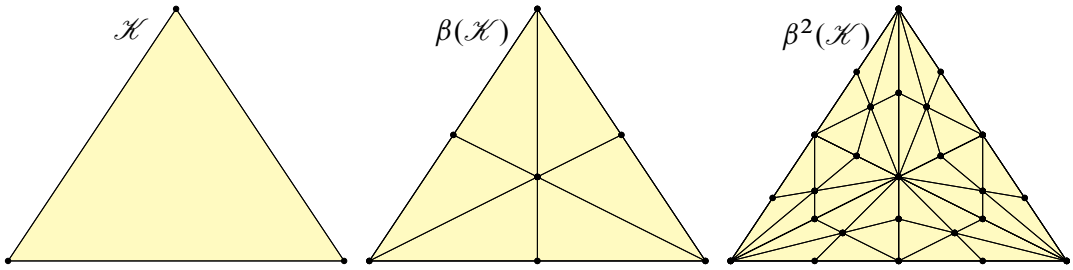


ABBILDUNG I:15. Erste und zweite baryzentrische Unterteilung, absolut

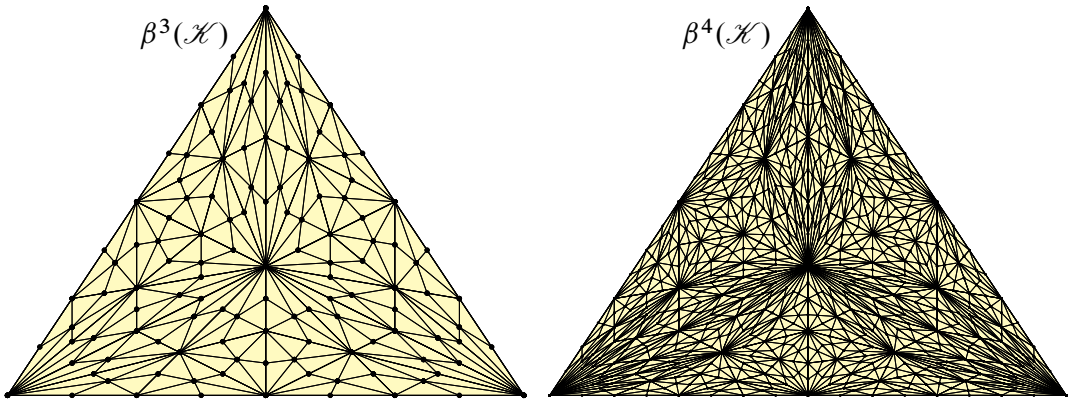


ABBILDUNG I:16. Dritte und vierte baryzentrische Unterteilung, absolut

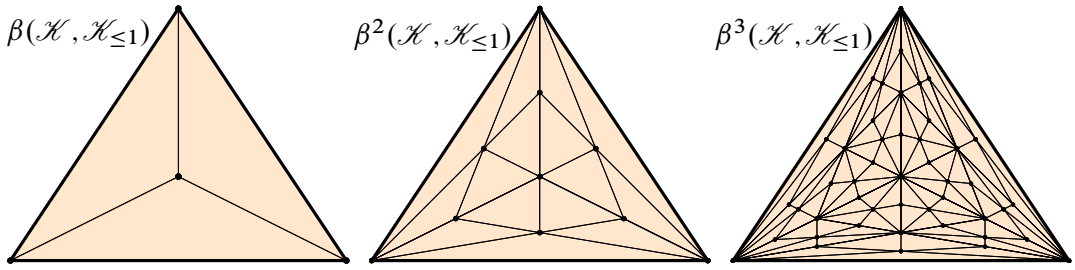


ABBILDUNG I:17. Baryzentrische Unterteilung von $\mathscr{K}$ relativ zu $\mathscr{K}_{\leq 1}$

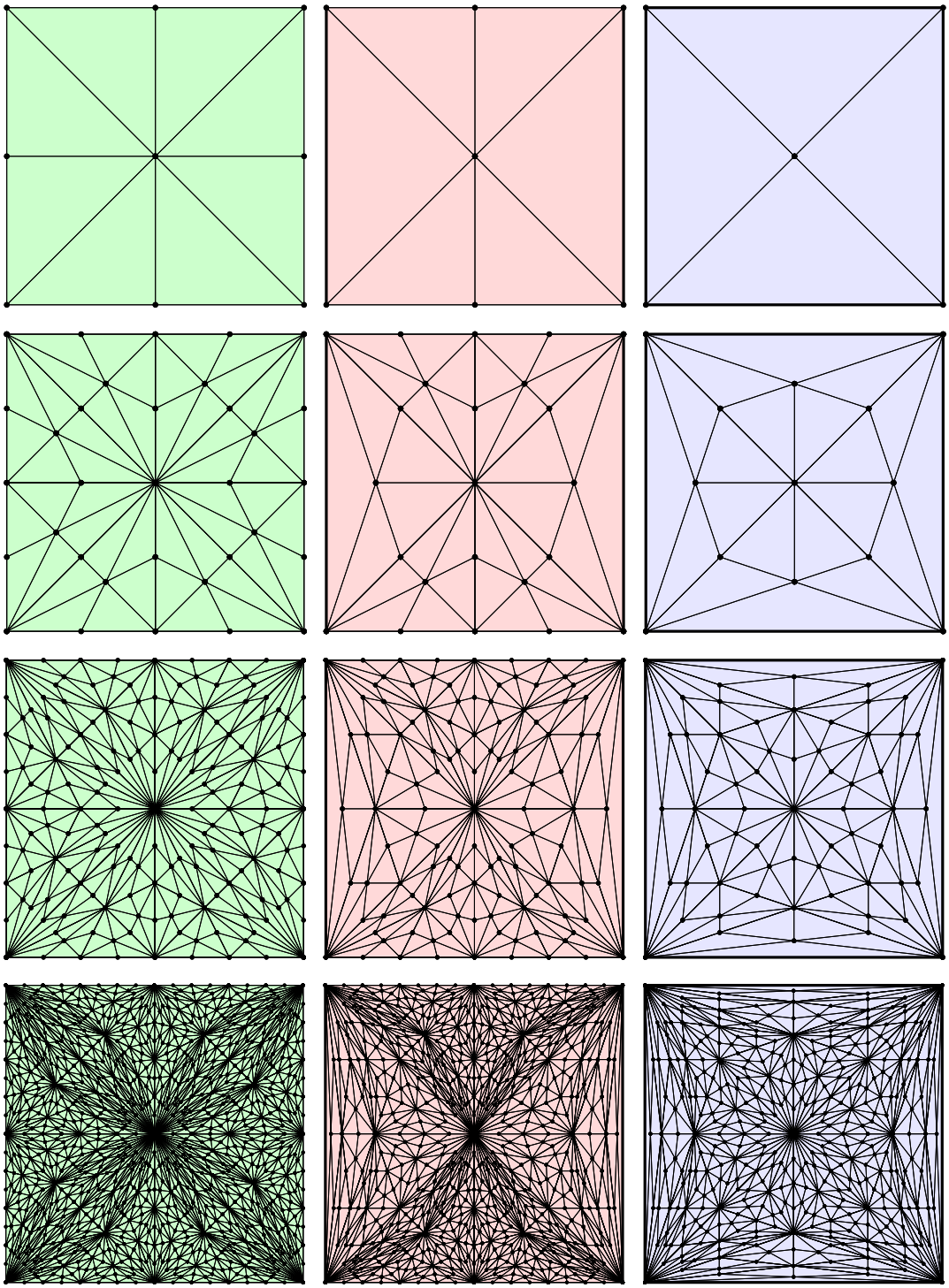


ABBILDUNG I:18. Baryzentrische Unterteilungen, absolut und relativ

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§I3g. Kegelkonstruktion.** Sei X ein topologischer Raum. Der *Kegel* (engl. *cone*) ☜

$$C(X) = ([0,1]\times X) \mathbin{/\!\!/} (\{1\}\times X)$$

entsteht aus dem Zylinder $[0,1]\times X$ durch Zusammenschlagen des Deckels $\{1\}\times X$. Ebenso konstruieren wir die *Einhängung* (engl. *suspension*) als Doppelkegel

$$\Sigma(X) = ([-1,1]\times X) \mathbin{/\!\!/} (\{1\}\times X) \mathbin{/\!\!/} (\{-1\}\times X).$$

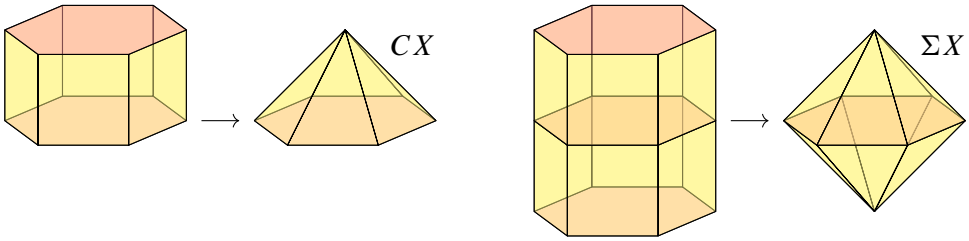


ABBILDUNG I:19. Kegel $C(X)$ und Einhängung $\Sigma(X)$

Sei V ein topologischer Vektorraum, etwa $V = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Topologie. Zu $X \subset V$ und $v \in V$ betrachten wir den *affinen Kegel* über X mit Spitze v:

$$C_v(X) := \big\{\, (1-t)x + tv \;\big|\; x \in X,\ t \in [0,1] \,\big\}$$

Die Abbildung $f : [0,1]\times X \to V$ mit $f(t,x) = (1-t)x + tv$ erfüllt $f(1,x) = f(1,x')$ für alle $x, x' \in X$ und induziert somit eine stetige Abbildung $g : C(X) \to C_v(X)$. Folgt aus $f(t,x) = f(t',x')$ stets $(t,x) = (t',x')$ oder $t = t' = 1$, so ist g bijektiv. Wir nennen dann X und v in *allgemeiner Lage*. Ist zudem X kompakt, so ist g ein Homöomorphismus (F1L).

Ist $P = [x_1,\dots,x_n] \subset V$ ein Polytop, so auch der Kegel $C_v(P) = [x_1,\dots,x_n,v]$. Sind P und v in allgemeiner Lage, so gilt $\dim C_v(P) = \dim P + 1$, und die Seiten von $C_v(P)$ sind die Seiten $Q \le P$, hierüber alle Kegel $C_v(Q)$ inklusive der Spitze $C_v(\emptyset) = \{v\}$.

Ist $\Delta \subset V$ ein Simplex und mit v in allgemeiner Lage, so ist auch $C_v(\Delta)$ ein Simplex. Damit gelingt uns folgende polytopale bzw. simpliziale Konstruktion:

Satz I3O. *Sei $\mathscr{K}$ in V ein endlicher polytopaler Komplex. Ist das Polyeder $|\mathscr{K}| \subset V$ mit dem Punkt $v \in V$ in allgemeiner Lage, so ist der Kegel $C_v(\mathscr{K}) := \mathscr{K} \cup \big\{ C_v(P) \;\big|\; P \in \mathscr{K} \big\}$ ein polytopaler Komplex mit $|C_v(\mathscr{K})| = C_v(|\mathscr{K}|)$ und $\chi(C_v(\mathscr{K})) = 1$. Ist der Komplex $\mathscr{K}$ simplizial, so auch der Kegel $C_v(\mathscr{K})$.* □

Bemerkung. Kombinatorisch gesehen definieren wir zu jedem kombinatorischen Simplizialkomplex K den *simplizialen Kegel* $C_v(K)$ mit Spitze $v \notin \Omega(K)$ wie folgt: Wir betrachten $\{v\}$ als kombinatorischen Simplizialkomplex $L = \{\emptyset, \{v\}\}$ und definieren ihren *Join* durch

$$K * L = \big\{\, S \cup T \;\big|\; S \in K,\ T \in L \,\big\}.$$

Dies ist das kombinatorische Destillat der geometrischen Kegelkonstruktion.

Beispiel. Der Join mit dem Komplex $S^0 = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}\}$ definiert ein simpliziales Modell $K \mapsto K * S^0$ für die Einhängung $|K| \mapsto \Sigma(|K|)$, siehe G6H. Es gilt $\chi(K * S^0) = 2 - \chi(K)$.

Aus der 0–Sphäre $\mathbb{S}^0 = |S^0|$ erhalten wir durch Einhängung die 1–Sphäre $\mathbb{S}^1 \cong |S^1|$ als Quadrat $S^1 = S^0 * S^0$, sodann die 2–Sphäre $\mathbb{S}^2 \cong |S^2|$ als Oktaeder $S^2 = S^1 * S^0$, etc. Allgemein gilt $\mathbb{S}^n \cong \Sigma^n \mathbb{S}^0 = |S^n|$ mit $S^n = S^0 * S^0 * \cdots * S^0$ und $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.

§I3h. Die Euler–Charakteristik ist invariant bei Unterteilung. Die Seitenzahlen $f'_* = f_*(\mathscr{K}')$ aus $f_* = f_*(\mathscr{K})$ zu bestimmen, ist im Allgemeinen knifflig (I3Q). Die Euler–Charakteristik bleibt jedenfalls gleich, und das ist sogar leicht nachzurechnen:

Übung I3P. (1) Sei $\mathscr{K}$ ein polytopaler Komplex. Sind $\mathscr{A}, \mathscr{B} \leq \mathscr{K}$ Teilkomplexe, so auch Schnitt $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ und Vereinigung $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$. Im endlichen Fall erfüllt die Euler–Charakteristik

$$\chi(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) = \chi(\mathscr{A}) + \chi(\mathscr{B}) - \chi(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}).$$

(2) Für jedes konvexe Polyeder $|\mathscr{A}| \neq \emptyset$ gilt $\chi(\mathscr{A}) = 1$ dank Euler–Poincaré A3C. Folgern Sie mit (1) die Invarianz $\chi(\mathscr{K}') = \chi(\mathscr{K})$ für jede Unterteilung $\mathscr{K}' \preccurlyeq \mathscr{K}$.

(3) Haben je zwei Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ mit gleichem Polyeder $|\mathscr{K}| = |\mathscr{L}|$ eine gemeinsame (polytopale / simpliziale) Unterteilung $\mathscr{A}$, also $\mathscr{A} \preccurlyeq \mathscr{K}$ und $\mathscr{A} \preccurlyeq \mathscr{L}$?

(4) Folgt aus $|\mathscr{K}| = |\mathscr{L}|$ bereits $\chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L})$? Nutzen Sie hierzu (a) die vorangegangenen Überlegungen dieser Übung und alternativ (b) das Euler–Maß aus §A3.

✻ **I3P.** (1) Die Definition (I3K) ist stabil unter Schnitt und Vereinigung. Wir prüfen Bedingung (0): Es gilt $\emptyset \in \mathscr{A}, \mathscr{B}$, also auch $\emptyset \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ und $\emptyset \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$. Bedingung (1): Für je zwei verschiedene Polytope $P \neq Q$ in $\mathscr{K}$ gilt $\operatorname{Int} P \cap \operatorname{Int} Q = \emptyset$, also gilt dies in $\mathscr{A}, \mathscr{B} \leq \mathscr{K}$, und somit auch in $\emptyset \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ und in $\emptyset \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$. Bedingung (2): Für jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ gilt $\partial P = |\mathscr{Q}| = \bigcup_{Q \in \mathscr{Q}} Q = \bigsqcup_{Q \in \mathscr{Q}} \operatorname{Int} Q$ für den *eindeutigen* Randkomplex $\mathscr{Q} = \{\, Q \in \mathscr{K} \mid Q \subset \partial P \,\}$. Aus $P \in \mathscr{A} \leq \mathscr{K}$ folgt daher $\mathscr{Q} \leq \mathscr{A}$. Aus $P \in \mathscr{B} \leq \mathscr{K}$ folgt ebenso $\mathscr{Q} \leq \mathscr{B}$. Aus $P \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ folgt somit $\mathscr{Q} \leq \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$. Aus $P \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ folgt ebenso $\mathscr{Q} \leq \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$.

Die Formel für die Euler–Charakteristik ist dann klar: Die Summe $\chi(\mathscr{A}) + \chi(\mathscr{B})$ zählt alle Polytope der Vereinigung $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, dabei jedes Polytop des Schnitts $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ genau zweimal, alle anderen genau einmal.

(2) Wir verfolgen die Konstruktion I3M und führen Induktion über die Anzahl $m = \sharp \mathscr{K}_{\geq 1}$ aller Polytope der Dimension ≥ 1. Im Falle $m = 0$ gilt $\mathscr{K}' = \mathscr{K}$ und somit $\chi(\mathscr{K}') = \chi(\mathscr{K})$. Im Folgenden sei $m \geq 1$. In höchster Dimension $n = \dim \mathscr{K}$ wählen wir ein Polytop $P \in \mathscr{K}_n$ und erhalten den Komplex $\mathscr{P} = \{\, Q \in \mathscr{K} \mid Q \subset P \,\}$ sowie den Randkomplex $\mathscr{Q} = \{\, Q \in \mathscr{L} \mid Q \subset \partial P \,\}$ und schließlich $\mathscr{L} = \mathscr{K} \smallsetminus \{P\}$. Die Unterteilung $\mathscr{K}' \preccurlyeq \mathscr{K}$ definiert Unterteilungen $\mathscr{P}' \preccurlyeq \mathscr{P}$ sowie $\mathscr{Q}' \preccurlyeq \mathscr{Q}$ und $\mathscr{L}' \preccurlyeq \mathscr{L}$. Für das Polytop $P = |\mathscr{P}| = |\mathscr{P}'|$ wissen wir $\chi(\mathscr{P}') = \chi(\mathscr{P}) = 1$ dank Euler–Poincaré (A3C). Auf $\mathscr{L}' \preccurlyeq \mathscr{L}$ und $\mathscr{Q}' \preccurlyeq \mathscr{Q}$ wenden wir die Induktionsvoraussetzung an und erhalten $\chi(\mathscr{L}') = \chi(\mathscr{L})$ sowie $\chi(\mathscr{Q}') = \chi(\mathscr{Q})$. Wir schließen $\chi(\mathscr{K}') = \chi(\mathscr{L}') + \chi(\mathscr{P}') - \chi(\mathscr{Q}') = \chi(\mathscr{L}) + \chi(\mathscr{P}) - \chi(\mathscr{Q}) = \chi(\mathscr{K})$.

(3) Wir nehmen die polytopalen Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ als endlich an. Für je zwei Polytope $P \in \mathscr{K}$ und $Q \in \mathscr{L}$ ist $A = P \cap Q$ dank A2F ein Polytop, eventuell leer. Wir zeigen, dass $\mathscr{A} = \{\, P \cap Q \mid P \in \mathscr{K},\ Q \in \mathscr{L} \,\}$ ein polytopaler Komplex ist sowie $\mathscr{A} \preccurlyeq \mathscr{K}$ und $\mathscr{A} \preccurlyeq \mathscr{L}$ erfüllt.

Wir prüfen Definition I3K für $\mathscr{A}$: Bedingung (0) ist klar: $\emptyset \in \mathscr{A}$. Bedingung (1) vererbt sich von $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ auf $\mathscr{A}$: Für $P, P' \in \mathscr{K}$ und $Q, Q' \in \mathscr{L}$ sind $A = P \cap Q$ und $A' = P' \cap Q'$ entweder gleich im Falle $P = P'$ und $Q = Q'$, oder aber sie erfüllen $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} A' = \emptyset$, denn für $P \neq P'$ gilt $\operatorname{Int} P \cap \operatorname{Int} P' = \emptyset$ und für $Q \neq Q'$ gilt $\operatorname{Int} Q \cap \operatorname{Int} Q' = \emptyset$. Bedingung (2): Für $A = P \cap Q$ mit $P \in \mathscr{K}$ und $Q \in \mathscr{L}$ gilt $\partial A = [(\partial P) \cap Q] \cup [P \cap (\partial Q)]$ ebenfalls dank A2F, indem wir P und Q durch affine Un/Gleichungen darstellen. Somit ist der Rand ∂A endliche Vereinigung von Polytopen in $\mathscr{A}$, wie gefordert.

Es gilt $|\mathscr{K}| = \bigcup_{P \in \mathscr{K}} P$ und ebenso $|\mathscr{L}| = \bigcup_{Q \in \mathscr{L}} Q$. Hieraus folgt $|\mathscr{K}| = |\mathscr{L}| = |\mathscr{K}| \cap |\mathscr{L}| = \big(\bigcup_{P \in \mathscr{K}} P\big) \cap \big(\bigcup_{Q \in \mathscr{L}} Q\big) = \bigcup_{P,Q} P \cap Q = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$. Für jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ erhalten wir die Unterteilung $P = P \cap |\mathscr{L}| = \bigcup_{Q \in \mathscr{L}} P \cap Q = \bigcup_{A \in \mathscr{A}, A \subset P} A$. Dies zeigt $\mathscr{A} \preccurlyeq \mathscr{K}$. Für jedes Polytop $Q \in \mathscr{L}$ erhalten wir die Unterteilung $Q = |\mathscr{K}| \cap Q = \bigcup_{P \in \mathscr{K}} P \cap Q = \bigcup_{A \in \mathscr{A}, A \subset Q} A$. Dies zeigt $\mathscr{A} \preccurlyeq \mathscr{L}$. Falls eine simpliziale Unterteilung gewünscht wird, so können wir zu $\beta(\mathscr{A}) \preccurlyeq \mathscr{A} \preccurlyeq \mathscr{K}, \mathscr{L}$ übergehen.

(4a) Ja, aus $|\mathscr{K}| = |\mathscr{L}|$ folgt $\chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L})$: Dies ist eine direkte Konsequenz aus (3) der Existenz einer gemeinsamen Unterteilung $\mathscr{K} \succcurlyeq \mathscr{A} \preccurlyeq \mathscr{L}$ und (2) der Invarianz $\chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{A}) = \chi(\mathscr{L})$.

(4b) Alternativ können wir das Euler–Maß $\mu(|\mathscr{K}|) = \chi(\mathscr{K})$ nutzen, wie in A3I ausgeführt. Das erfordert anfänglich eine gewisse Investition, vereinfacht aber anschließend viele Rechnungen beträchtlich.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I3i. Simplex, Würfel, Kreuzpolytop und ihre baryzentrischen Unterteilungen.

Übung I3Q. (1) Sei $\mathscr{K}$ ein endlicher simplizialer Komplex und $(\mathscr{K}', \mathscr{K}_{<n}) = \beta(\mathscr{K}, \mathscr{K}_{<n})$ die relative baryzentrische Unterteilung in oberster Dimension $n = \dim \mathscr{K}$. Bestimmen Sie alle Seitenzahlen $f'_* = f_*(\mathscr{K}')$ aus den vorgegebenen $f_* = f_*(\mathscr{K})$ und berechnen Sie zur Probe die Euler–Charakteristik $\chi(\mathscr{K}') = \chi(\mathscr{K})$.

(2) Sei $P = [v_1, v_2, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^2$ ein n–Eck: Der Komplex $\mathscr{K} = \langle P \rangle = \{ Q \leq P \}$ habe die n Ecken $v_1, v_2, \dots, v_n$ und die n Kanten $[v_1, v_2], \dots, [v_{n-1}, v_n], [v_n, v_1]$ sowie das 2–Polytop P. Konstruieren Sie die baryzentrische Unterteilung $\mathscr{K}' = \beta\mathscr{K}$; skizzieren Sie $\mathscr{K}'$ für $n = 3, 4, 5, 6$. Zählen Sie f'_* analog zu f_*, berechnen Sie $\chi(\mathscr{K}')$ und $\chi(\mathscr{K})$.

(3) Sei $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n] \subset \mathbb{R}^n$ der Standardsimplex. Konstruieren Sie zum Komplex $\mathscr{K} = \langle \Delta^n \rangle = \{ Q \leq \Delta^n \}$ explizit die baryzentrische Unterteilung $\mathscr{K}' = \beta\mathscr{K}$; skizzieren Sie $\mathscr{K}'$ für $n = 1, 2, 3$. Zählen Sie f_* und f'_*, berechnen Sie $\chi(\mathscr{K}')$ und $\chi(\mathscr{K})$.

(4) Ist $\Delta_n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0 \}$ ein Polytop? Bestimmen Sie die Eckpunkte. Wegen seiner rechten Winkel nennen wir Δ_n ein *Orthosimplex*. Zerlegen Sie den Einheitswürfel $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ in $n!$ Orthosimplizes; skizzieren Sie dies für $n = 1, 2, 3$. Welches Volumen hat jeder dieser Simplizes? (a) durch Integration? (b) durch Symmetrie?

(5) Beantworten Sie Frage (3) für den n–dimensionalen Würfel $\square^n = [-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ und für das n–dimensionale Kreuzpolytop $\Diamond^n = [\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n] \subset \mathbb{R}^n$.

✻ **I3Q.** (1) Wir finden $f'_k = f_k + f_n \cdot \binom{n+1}{k}$ für $0 \leq k < n$ und $f'_n = f_n \cdot (n+1)$. Die Probe ergibt tatsächlich $\chi(\mathscr{K}') - \chi(\mathscr{K}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (f'_k - f_k) = f_n \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = f_n \cdot \big(1 + (-1)\big)^{n+1} = 0$.

(2) Wir setzen $v_{n+1} := v_1$ und damit $u_k := \frac{1}{2} v_k + \frac{1}{2} v_{k+1}$ sowie $u_0 := \frac{1}{n} v_1 + \dots + \frac{1}{n} v_n$. Wir erhalten $\mathscr{K}' = \{ \emptyset, [v_k], [u_k], [u_0], [v_k, u_k], [u_k, v_{k+1}], [u_0, v_k], [u_0, u_k], [u_0, v_k, u_k], [u_0, u_k, v_{k+1}] \mid k = 1, 2, \dots, n \}$. Abzählen ergibt $f_0 = n$, $f_1 = n$, $f_2 = 1$, $\chi(\mathscr{K}) = 1$ und $f'_0 = 2n + 1$, $f'_1 = 4n$, $f'_2 = 2n$, $\chi(\mathscr{K}') = 1$.

(3) Sei K ein kombinatorischer Simplizialkomplex in V. Die Ecken von $K' = \beta K$ sind die nicht-leeren Simplizes $S \in K$, also $\Omega' = K \smallsetminus \{\emptyset\}$. In V realisieren wir jeden n–Simplex $S = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \in K$ als Ecke $S \in \Omega'$ im Schwerpunkt $\beta(S) = \frac{1}{\sharp S} \sum_{v \in S} v = \frac{1}{n+1}(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$. Die k–Simplizes $S' \in K'$ sind die Ketten $S' = \{S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_k\} \subset \Omega'$. Hierbei ist $\operatorname{Int}[S'] \subset \operatorname{Int}[S]$ äquivalent zu $S_k = S$; dies entspricht einer Surjektion $\alpha : S \to \{0, 1, \dots, k\}$ und $S_i = \alpha^{-1}(\{0, \dots, i\})$ für $i = 0, \dots, k$. Die Anzahl dieser Surjektionen ist $A(n,k) = (k+1)! \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\}$, wobei $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\}$ die Stirling–Zahlen zweiter Art sind. Damit gilt $f'_k = \sum_n f_n A(n,k)$, wobei $A(n,k) = 0$ für $n < k$. Die Stirling–Zahlen und die Koeffizienten $A(n,k)$ lassen sich rekursiv berechnen. Der Spaltenvektor $v = (1, -1, 1, -1, \dots)^\intercal$ erfüllt $Av = v$, also $\chi(K') = f'v = (fA)v = f(Av) = fv = \chi(K)$.

Beispiel: Für $K = \mathfrak{P}\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ gilt $f_0 = n + 1$ und $f'_0 = 2^{n+1} - 1$ sowie $f_n = 1$ und $f'_n = (n+1)!$. Die n–Simplizes sind $S' = \{S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_n\}$ mit $S_k = \{ e_{\sigma(0)}, \dots, e_{\sigma(k)} \}$ für eine Permutation $\sigma \in S_{n+1}$.

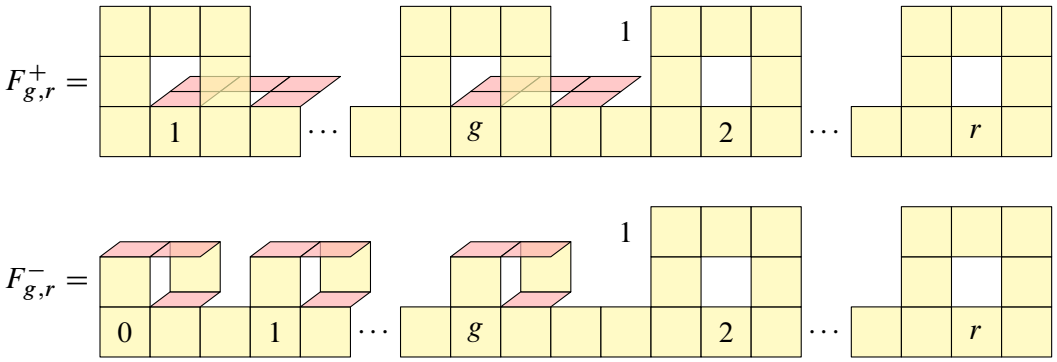
(4) Die Eckpunkte von Δ_n sind $v_0 = 0, v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2, \dots, v_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ (A2I). Diese sind affin unabhängig, also Δ_n ein Simplex (I1A) und $\operatorname{Int} \Delta_n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid 1 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0 \}$. Der Komplex $\mathscr{K} = \langle \sigma\Delta_n \mid \sigma \in S_n \rangle$ trianguliert den Einheitswürfel $[0,1]^n = |\mathscr{K}| = \bigsqcup_{\Delta \in \mathscr{K}} \operatorname{Int} \Delta$.

(a) Für das Volumen folgt $1 = \operatorname{vol}_n([0,1]^n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{vol}_n(\sigma\Delta_n)$, dank Isometrie also $\operatorname{vol}_n(\Delta_n) = 1/n!$. (b) Integration liefert ebenso $\operatorname{vol}_n(x\Delta_n) = x^n/n!$ für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für $n = 1$ ist dies klar, und per Induktion folgt

$$\operatorname{vol}_n(x\Delta_n) = \int_{x_1=0}^{x} \int_{x_2=0}^{x_1} \cdots \int_{x_n=0}^{x_{n-1}} 1 \, \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 = \int_{x_1=0}^{x} \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}x_1 = \frac{x^n}{n!}.$$

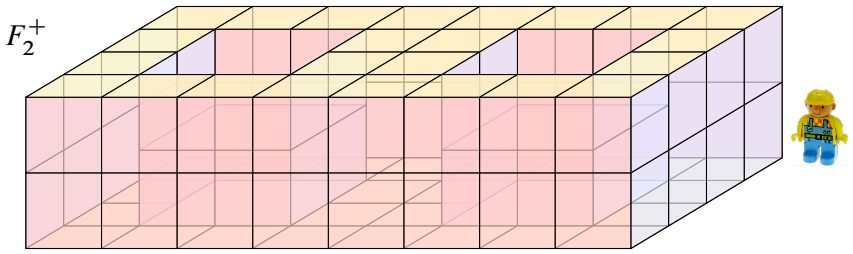
(5) Die baryzentrische Unterteilung von $\square^n = [-1, 1]^n$ besteht aus $2^n n!$ Orthosimplizes und ihren Seiten. Die baryzentrische Unterteilung von $\Diamond^n = [\pm e_1, \dots, \pm e_n]$ besteht aus $2^n n!$ Simplizes und ihren Seiten. Beide Polytope sind dual zueinander; beide Komplexe gehen durch radiale Projektion ineinander über.

☞ **§I3j. Triangulierung unserer Modellflächen.** In der Einleitung (Kapitel A) haben wir Flächen dargestellt durch kubische Komplexe aus Punkten, Kanten, Quadraten. Das war zum Einstieg bequem und ohne große technische Vorbereitungen sofort möglich. Ich möchte dies im Rückblick kurz erläutern und mit simplizialen Komplexen vergleichen: Beide lassen sich ineinander umrechnen und ergeben dieselben topologischen Räume. ☜



☞ **Beispiel.** Modelle für die berandeten Flächen $F^\pm_{g,r}$ mit $r \geq 1$ Randkomponenten lassen sich leicht explizit angeben, zum Beispiel wie oben skizziert. Die einfachsten und berühmtesten Beispiele sind der Zylindermantel $F^+_{0,1}$ und das Möbius–Band $F^-_{0,1}$ (siehe Titelseite). ☜

Unsere Darstellung definiert explizit einen polytopalen (hier: kubischen) Komplex $\mathscr{K}^\pm_{g,r}$ als Modellfläche $|\mathscr{K}^\pm_{g,r}| =: F^\pm_{g,r}$. Durch baryzentrische Unterteilung erhalten wir hieraus den simplizialen Komplex $K^\pm_{g,r} = \beta(\mathscr{K}^\pm_{g,r})$ und somit eine Triangulierung $|K^\pm_{g,r}| \xrightarrow{\sim} F^\pm_{g,r}$. (Es genügt eine Unterteilung jedes Quadrats, etwa Halbierung, relativ zum 1–Skelett.)



☞ **Beispiel.** Auch die orientierbare geschlossene Fläche $F^+_g = \partial H_g$ vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}$ lässt sich leicht im $\mathbb{R}^3$ realisieren als Rand des Henkelkörpers H_g, siehe A:25. ☜

Die Modellfläche $F^+_g = \partial H_g \subset \mathbb{R}^3$ ist orientierbar, anschaulich gesagt zweiseitig.
Die Punktspiegelung $x \mapsto -x$ erhält den Henkelkörper $H_g = -H_g$, somit $F^+_g = -F^+_g$.
Ihr Fixpunkt 0 liegt im Inneren / Äußeren, auf dem Rand $\partial H_g = F^+_g$ ist sie fixpunktfrei.

☞ **Beispiel.** Durch Identifikation gegenüberliegender Punkte erhalten wir $F^-_g = F^+_g/\{\pm\}$. ☜

Dies ist eine *nicht-orientierbare geschlossene Fläche*. Leider lässt sie sich nicht in den Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten und daher auch nur schlecht visualisieren. Der Simplizialkomplex $K^+_g = \beta(\mathscr{K}^+_g)$ liefert $F^+_g \cong |K^+_g|$. Mit seinem Quotienten $K^-_g = K^+_g/\{\pm\}$ erhalten wir einen (abstrakten) Simplizialkomplex und eine Triangulierung $F^-_g \cong |K^-_g|$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I3k. Kubische Gitterkomplexe. Kubische Gitterkomplexe wie in obigen Beispielen sind oft bequem, da sie besonders einfache Koordinaten erlauben und leicht darzustellen sind. Das wirft die Frage auf: Können wir kubisch weniger Räume darstellen als simplizial? oder gar mehr? Es stellt sich heraus, dass beide Zugänge dieselben Räume ergeben!

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $B \subset V$ eine Basis. Diese erzeugt in V das Gitter $\mathbb{Z}B = \bigoplus_{b\in B} \mathbb{Z}b$. Die Menge B versehen wir mit einer linearen Ordnung $<$. Ein *Gitterwürfel* ist ein achsenparalleler Würfel mit Kantenlänge 1 und ganzzahligen Eckpunkten; wir codieren dies durch $W = (a,b)$ mit $a \in \mathbb{Z}B$ und $b = \{ b_1 < \ldots < b_n \} \subset B$. Seine Realisierung ist $|W| := \{ a + t_1 b_1 + \ldots t_n b_n \mid t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \} \cong [0,1]^n$. In jede Richtung $i \in \{1,\ldots,n\}$ haben wir für $\varepsilon \in \{0,1\}$ ein Paar gegenüberliegender Facetten $\partial_i^\varepsilon W = (a', b')$ mit $a' = a + \varepsilon b_i$ und $b' = b \smallsetminus \{b_i\}$. Die Seiten kleinerer Dimension ergeben sich hieraus iterativ.

Definition I3R. Ein *kubischer Gitterkomplex* K ist eine Menge solcher Würfel, sodass gilt: Mit jedem n–Würfel $W \in K$ enthält K auch alle Facetten $\partial_i^\varepsilon W$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Die Realisierung $|W| \cong [0,1]^n$ versehen wir mit der euklidischen Metrik und Topologie. Den Komplex K realisieren wir durch $|K| = \bigcup_{W\in K} |W|$ mit der induzierten Topologie: Genau dann ist $U \subset |K|$ offen, wenn $U \cap |W| \subset |W|$ offen ist in jedem Würfel $|W|$.

Satz I3S. *(1) Jeder kubische Gitterkomplex K definiert durch baryzentrische Unterteilung einen simplizialen Komplex K' und einen Homöomorphismus $|K'| \xrightarrow{\sim} |K|$.*

(2) Umgekehrt gilt: Jeder simpliziale Komplex K definiert durch kubische Unterteilung einen kubischen Gitterkomplex K^* und einen Homöomorphismus $|K^*| \xrightarrow{\sim} |K|$.

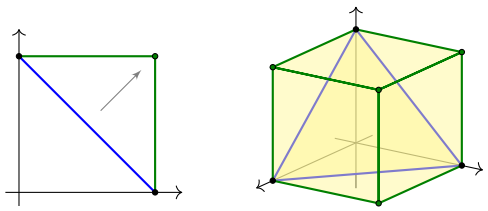


ABBILDUNG I:20. Der Standardsimplex Δ^n wird durch $n+1$ Würfel kubuliert.

BEWEIS. (1) Gitterkomplexe sind polytopale Komplexe (I3K). Wir nutzen Satz I3M.

(2) Den Simplizialkomplex K mit Eckenmenge Ω realisieren wir im Vektorraum $\mathbb{R}^{(\Omega)}$ mit Basis Ω. Die Menge Ω versehen wir mit einer linearen Ordnung $<$. Jeden n–Simplex $S = \{ s_0 < \ldots < s_n \} \in K$ zerlegen wir in $n+1$ Würfel $W_i(S) = (s_i, \{s_0,\ldots,s_n\} \smallsetminus \{s_i\})$. Die Realisierungen $X = |S|$ und $Y = \bigcup_{i=0}^n |W_i(S)|$ sind homöomorph dank Zentralprojektion: Für jeden Punkt $x \in X$ gilt $(\mathbb{R}_{>0} \cdot x) \cap Y = \{y\}$ für genau ein $y \in Y$; wir setzen $f(x) = y$. Für jeden Punkt $y \in Y$ gilt $(\mathbb{R}_{>0} \cdot y) \cap X = \{x\}$ für genau ein $x \in X$; wir setzen $g(y) = x$. Die Abbildungen f, g sind stetig (F6G), stiften also einen Homöomorphismus $(f,g) : X \cong Y$.

Wir erhalten so den kubischen Gitterkomplex $K^* = \{ W_i(S) \mid S \in K,\ 0 \le i \le \dim S \}$ und den Homöomorphismus $|K^*| \xrightarrow{\sim} |K|$ durch Zentralprojektion. □

Bemerkung. Anschaulich ersetzen wir den Ball der ℓ^1–Norm durch den der ℓ^∞–Norm. Für die ℓ^2–Norm erhalten wir entsprechend rechtwinklige sphärische Simplizes.

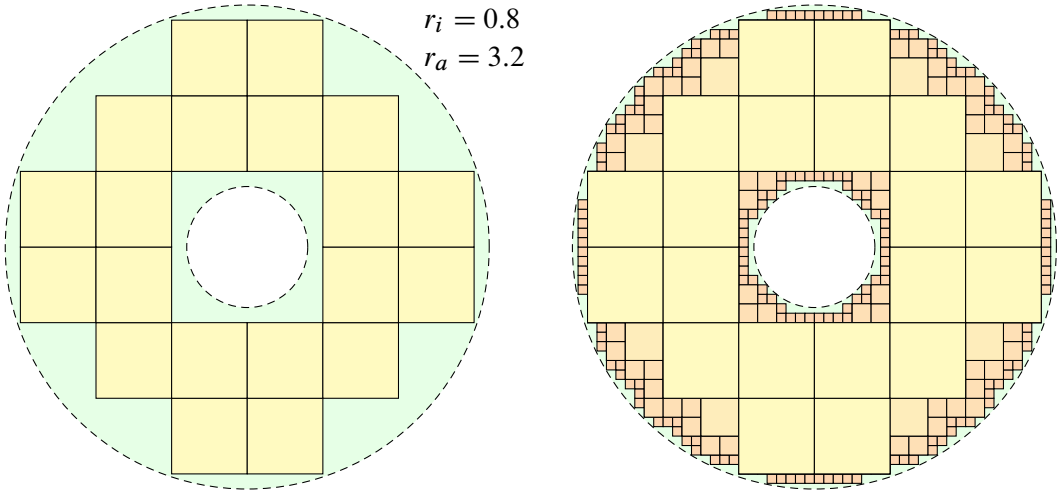
§I3l. Jede offene Menge des $\mathbb{R}^n$ ist triangulierbar. Besonders schön und einfach sind endliche Simplizialkomplexe K: Sie reduzieren die topologische Beschreibung auf endlich viele kombinatorische Daten, und ihre geometrische Realisierung $|K|$ ist kompakt.

Wir haben mit Bedacht auch unendliche Komplexe K zugelassen. Damit können wir insbesondere offene Mengen $X \subset \mathbb{R}^n$ triangulieren, also einen Simplizialkomplex K mit $|K| \xrightarrow{\sim} X$ finden. Dieser ist für nicht-kompakte Räume X notwendigerweise unendlich.

Beispiel. Jeder euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist triangulierbar: Die reelle Gerade $\mathbb{R} = |\mathscr{K}|$ wird trianguliert durch $\mathscr{K} = \langle\, [a,a+1] \mid a \in \mathbb{Z} \,\rangle$. Für den Raum $\mathbb{R}^n = |\mathscr{K}^n|$ haben wir den kubischen Komplex $\mathscr{K}^n$ und nach baryzentrischer Unterteilung die Triangulierung $\beta(\mathscr{K}^n)$.

Satz I3T (Runge 1884)**.** *Jede offene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich affin triangulieren.*

Allgemeiner: Sei $\mathscr{K}$ ein polytopaler Komplex und $X \subset |\mathscr{K}|$ eine offene Menge im zugehörigen Polyeder mit seiner polytopalen Topologie. Dann lässt sich X triangulieren durch einen (im Allgemeinen unendlichen) Komplex affiner Simplizes.



Diesen Satz bewies Carl RUNGE (1856–1927) für ebene Gebiete $X \subset \mathbb{R}^2$ bei seinen funktionentheoretischen Untersuchungen. Die Idee für $X \subset \mathbb{R}^n$ ist einfach: Wir stellen X als Vereinigung immer kleiner werdender Würfel dar.

BEWEIS. Sei $q \in \mathbb{N}$. Ein *q–Intervall* der Dimension 0 ist von der Form $\{k2^{-q}\}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Ein *q–Intervall* der Dimension 1 ist von der Form $[k2^{-q}, (k+1)2^{-q}]$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Ein *q–Würfel* $Q = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Produkt von q–Intervallen $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ liegt im Inneren von genau einem q–Würfel.

Sei $\mathscr{K}$ die Familie aller Würfel $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

(1) Q ist ein q–Würfel für ein $q \in \mathbb{N}$, und für jeden q–Würfel $P \supset Q$ gilt $P \subset X$.
(2) Entweder gilt $q = 0$ oder für mindestens einen $(q-1)$–Würfel $P \supset Q$ gilt $P \not\subset X$.

Dann ist $\mathscr{K}$ ein polytopaler Komplex und lokal-endlich mit Polyeder $|\mathscr{K}| = X$.

Durch baryzentrische Unterteilung erhalten wir einen Simplizialkomplex $\mathscr{K}'$ (I3M). Nach Konstruktion sind $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ lokal-endlich im Raum $\mathbb{R}^n$. Die simpliziale Topologie auf $X = |\mathscr{K}'|$ stimmt daher überein mit der Teilraumtopologie von X in $\mathbb{R}^n$ (I1G). □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

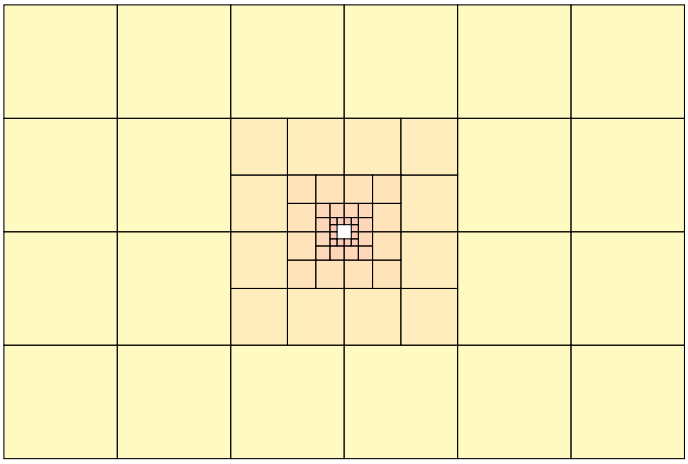
☞ **Übung I3U.** (1) Prüfen Sie nach, dass die im Beweis konstruierte Familie $\mathscr{K}$ tatsächlich ☜ ein polytopaler Komplex ist und lokal-endlich mit Polyeder $|\mathscr{K}| = X$.

Es ist lehrreich, dies in einfachen Fällen explizit auszuführen:

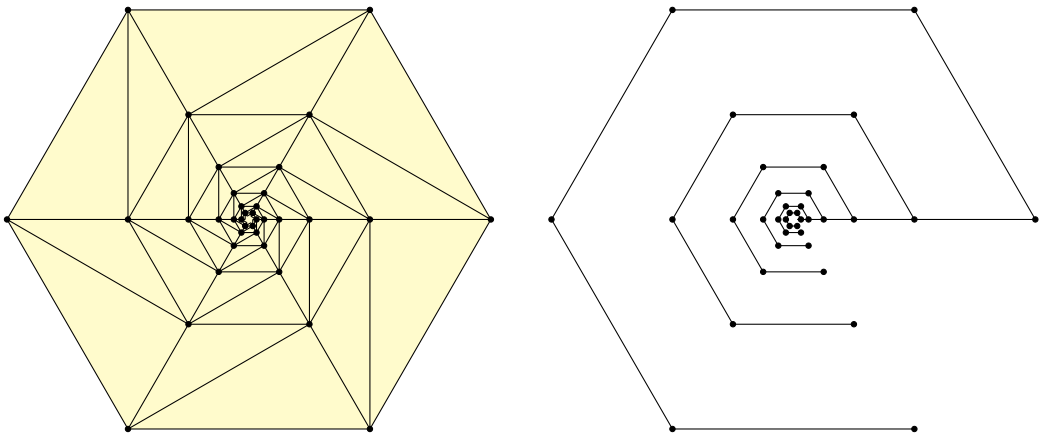
(2) Was ergibt die Konstruktion des obigen Beweises für $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$?

(3) Skizzieren Sie alternativ eine Triangulierung der punktierten Ebene $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ mit der Eckenmenge $\Omega = \{\, 2^k \, e^{\pi i \ell/3} \mid k, \ell \in \mathbb{Z} \,\}$ sowie einen Spannbaum des 1-Skeletts.

✻ **I3U.** (2) Die Konstruktion des obigen Beweises pflastert zunächst die Ebene mit Einheitsquadraten, ausgenommen sind lediglich die vier Quadrate direkt um den Nullpunkt. Im zweiten Schritt wird diese Lücke mit 12 kleineren Quadraten gefüllt, ausgenommen sind erneut die vier Quadrate um den Nullpunkt. So fortfahrend schöpfen wir die punktierte Ebene $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ durch immer kleinere Quadrate aus. Dies definiert einen kubischen Komplex; eine anschließende baryzentrische Unterteilung liefert einen simplizialen Komplex.



(3) Die folgende Skizze zeigt einen kleinen Ausschnitt für $-3 \leq k \leq 2$. Es sind überabzählbar viele Triangulierungen möglich, etwa indem man für jede der „Diagonalen“ eine der beiden Möglichkeiten wählt. Wir wählen hier eine symmetrische Triangulierung, die invariant unter der Gruppe $G = \langle\, 2, e^{\pi i/3} \,\rangle < \mathbb{C}^\times$ ist. Hierzu gibt es immerhin noch abzählbar unendlich viele Möglichkeiten. Zu jeder Triangulierung gibt es überabzählbar viele Spannbäume, wir zeigen hier nur einen. Seine willkürliche Wahl bricht notgedrungen die Symmetrie.



§I3m. Produkt zweier Komplexe. Simplizes sind, wie ihr Name sagt, sehr einfache Objekte und haben viele gute Eigenschaften — aber leider auch einen Schönheitsfehler: Das Produkt $\Delta^p \times \Delta^q$ von zwei Simplizes der Dimension $p,q \geq 1$ ist kein Simplex! Zum Beispiel ist das Produkt zweier Intervalle kein Dreieck, na klar, sondern ein Rechteck.

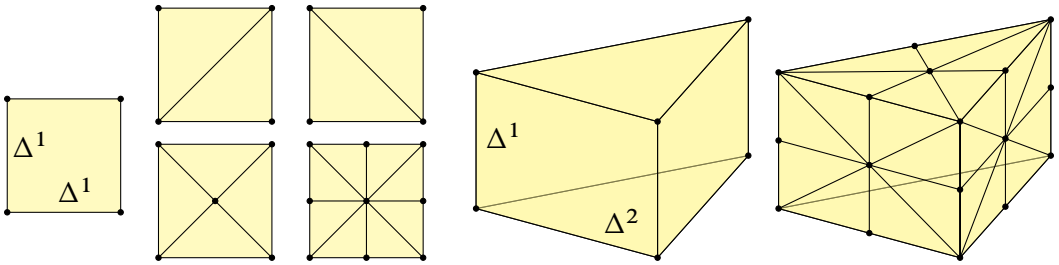


ABBILDUNG I:21. Das Produkt $\Delta^p \times \Delta^q$ ist kein Simplex, sondern ein Polytop.

Glücklicherweise ist $\Delta^p \times \Delta^q$ ein Polytop und kann daher leicht trianguliert werden: Die baryzentrische Unterteilung (I3M) liefert uns eine kanonische Triangulierung. Allein schon für diese Konstruktion ist es uns nützlich, über Simplizes hinaus auch allgemeinere Polytope zu betrachten: Anders als Simplizes sind Polytope stabil unter Produktbildung.

Satz I3v. *(1) Sind $\mathscr{K}$ in V und $\mathscr{L}$ in W polytopale Komplexe, so auch ihr Produkt*

$$\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L} := \big\{\, P \times Q \;\big|\; P \in \mathscr{K},\ Q \in \mathscr{L} \,\big\} \quad \text{in } V \times W.$$

Baryzentrische Unterteilung $\mathscr{M} = \beta(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L})$ triangulliert $|\mathscr{M}| = |\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}| = |\mathscr{K}| \times |\mathscr{L}|$.

(2) Sind die Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ lokal-endlich, so auch $\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}$ und $\mathscr{M}$, und die polytopale Topologie auf $|\mathscr{M}| = |\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}|$ ist die Produkttopologie auf $|\mathscr{K}| \times |\mathscr{L}|$ (E1N).

Andernfalls genügt es, die Produkttopologie $\mathfrak{T}$ zu ersetzen durch die von ihr kompakt erzeugte Topologie $k\mathfrak{T}$ (F3R); wir erhalten so $|\mathscr{K}| \times |\mathscr{L}| = |\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}| = |\mathscr{M}|$.

(3) Verträglichkeit mit Teilräumen: Für alle Teilkomplexe $\mathscr{A} \leq \mathscr{K}$ und $\mathscr{B} \leq \mathscr{L}$ wird das Produkt $|\mathscr{A}| \times |\mathscr{B}|$ trianguliert durch den Teilkomplex $\beta(\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}) \leq \mathscr{M}$.

(4) Es gilt $\dim(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}) = \dim(\mathscr{K}) + \dim(\mathscr{L})$*, sogar im Sonderfall* $\dim\{\emptyset\} = -\infty$*. Für endliche Polytopalkomplexe gilt zudem $\chi(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}) = \chi(\mathscr{K}) \cdot \chi(\mathscr{L})$.* □

Bemerkung. Die lokale Endlichkeit ist in (2) leider notwendig, aber leicht zu verschmerzen. In vielen wichtigen Anwendungen ist diese technische Voraussetzung ohnehin erfüllt. Andernfalls haben wir auf dem Produktraum $|\mathscr{K}| \times |\mathscr{L}|$ neben der Produkttopologie $\mathfrak{T}$ als weitere die von ihr kompakt erzeugte Topologie $k\mathfrak{T}$ (F3R). Letztere ist in vielen Situationen nützlicher, und im obigen Satz entspricht sie genau der polytopalen Topologie.

Bemerkung. Bei Bedarf können wir jeden polytopalen Komplex triangulieren (I3M), kanonisch etwa durch die baryzentrische Unterteilung (I3M). Dies nutzen wir hier speziell für den Produktkomplex $\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}$ und erhalten den Simplizialkomplex $\mathscr{M} = \beta(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L})$.

Die baryzentrische Unterteilung $\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L} \mapsto \beta(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L})$ führt wie skizziert neue Ecken ein (und sehr viele Simplizes, siehe I3Q). Raffinierter und sparsamer ist das *Shuffle-Produkt* (I3X). Dieses ist eine der Grundkonstruktionen für Simplizialkomplexe; sie ist leider etwas technisch, spielt aber für die Kombinatorik und die Homologie eine wichtige Rolle.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I3n. Geordnete Simplizialkomplexe und ihr Shuffle-Produkt.

Definition I3W. Ein *(lokal) geordneter Simplizialkomplex* $(K,<)$ ist ein Simplizialkomplex K mit einer zweistelligen Relation $<$ auf der Eckenmenge Ω, deren Einschränkung auf jedem Simplex $\{s_0,s_1,\dots,s_n\} \in K$ eine Totalordnung ist: Für alle $\{a,b,c\} \in K$ gilt:

(1) Trichotomie: Es gilt entweder $a = b$ oder $a < b$ oder $b < a$.
(2) Transitivität: Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Bemerkung. Jede Totalordnung $<$ auf Ω erfüllt dies für alle $a,b,c \in \Omega$; wir nennen dann $(K,<)$ *total geordnet*. Unsere lokale Bedingung genügt jedoch für unsere Konstruktionen.

Konvention. Wie üblich schreiben wir $a \le b$ für $a < b$ oder $a = b$ für die laxe Ordnung. Hieraus rekonstruieren wir die strikte Ordnung $a < b$ durch $a \le b$ und $a \neq b$.

Für jeden n–Simplex $S = \{s_0,s_1,\dots,s_n\} \in K$ können wir die Ecken so nummerieren, dass $s_i < s_j$ für alle $i < j$ gilt; kurz $S = \{s_0 < s_1 < \dots < s_n\}$. Insbesondere gilt $\dim S = n$.

Entsprechend nutzen wir die Notation $S = \{s_0 \le s_1 \le \dots \le s_n\}$; hier dürfen Ecken mehrfach aufgezählt werden, also Degenerierungen auftreten. Es gilt dann $\dim S \le n$.

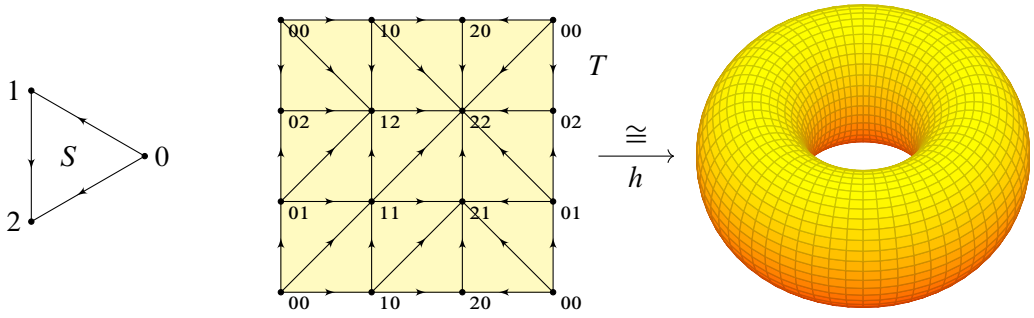
Definition I3X. Seien $(K,<)$ und $(L,<)$ lokal geordnete Simplizialkomplexe. Hierzu konstruieren wir das *Shuffle-Produkt* $(M,<) =: (K,<) \otimes (L,<)$ wie folgt:

Die Produktmenge $\Omega(M) := \Omega(K) \times \Omega(L)$ versehen wir lokal mit der Produktordnung, das heißt, es gilt $(a,b) \le (a',b')$ genau dann, wenn $a \le a'$ und $b \le b'$ gilt.

Die Simplizes des Komplexes M sind alle Ketten $\{(a_0,b_0) < (a_1,b_1) < \dots < (a_n,b_n)\}$ mit $\{a_0 \le a_1 \le \dots \le a_n\} \in K$ und $\{b_0 \le b_1 \le \dots \le b_n\} \in L$.

Beispiel. Sei $R = \langle \{a,a+1\} \mid a \in \mathbb{Z} \rangle$ der kombinatorische Simplizialkomplex mit der üblichen Ordnung $<$ auf den Eckenmenge $\Omega(R) = \mathbb{Z}$. Er trianguliert die Gerade $\mathbb{R} = |R|$.

Als Shuffle-Produkt $(R^2,<) = (R,<) \otimes (R,<)$ finden wir hier den Simplizialkomplex aus Abbildung I:12; er trianguliert die Ebene $\mathbb{R}^2 = |R^2|$. Ebenso gilt $\mathbb{R}^n = |R^n|$.



Beispiel. Wir triangulieren die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \cong |S|$ durch $S = \langle \{0,1\},\{1,2\},\{0,2\} \rangle$ mit der Totalordnung $0 < 1 < 2$. Das Produkt $(T,<) = (S,<) \otimes (S,<)$ trianguliert den Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong |T|$. Einen expliziten Homöomorphismus kann man wie in I3E konstruieren.

Die Triangulierung aus Abbildung I:12 verlangt nach der lokalen Ordnung $0 < 1$, $1 < 2$, $2 < 0$. Diese ist nicht transitiv auf $\Omega = \{0,1,2\}$, nach Definition I3W aber durchaus erlaubt. Diese zusätzliche Freiheit motiviert unsere sehr allgemein gehaltene Definition.

Übung I3Y. Wir triangulieren die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \cong |S|$ durch den Simplizialkomplex $S = \langle\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,0\}\rangle$ mit der Eckenordnung $0<1<2$ und $0<3<2$. (Diese Ordnung ist nicht total, das ist nach Definition I3W durchaus erlaubt.) Zeichnen Sie den Produktkomplex $(T,<) = (S,<) \otimes (S,<)$. Geben Sie explizit eine Realisierung $f : T \to \mathbb{R}^3$ an, indem Sie den 16 Ecken geeignete (möglichst symmetrische) Koordinaten zuweisen.

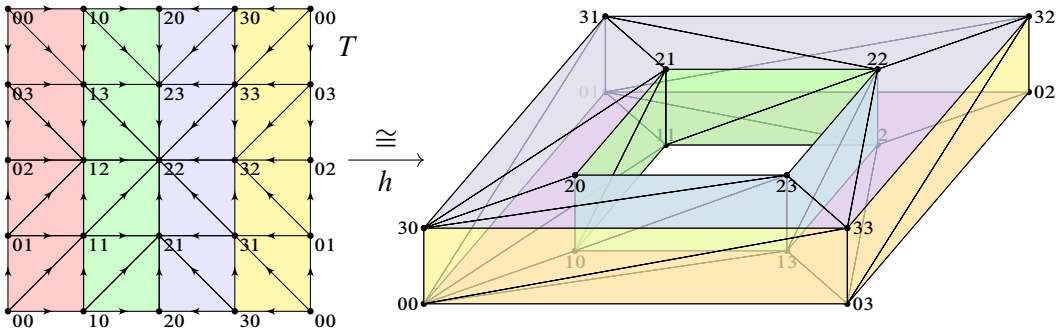


ABBILDUNG I:22. Eine Triangulierung des Torus, rechts eingebettet im $\mathbb{R}^3$

Unsere Beispiele illustrieren das folgende, allgemeine Ergebnis:

Satz I3Z. *(1) Für das Shuffle-Produkt $(M,<) = (K,<) \otimes (L,<)$ gilt $|M| = |K| \times |L|$.*

(2) Sind die Simplizialkomplexe K und L lokal-endlich, so auch M, und die simpliziale Topologie auf $|M|$ ist die Produkttopologie auf $|K| \times |K|$ (E1N). Andernfalls genügt es, die Produkttopologie $\mathcal{T}$ zu ersetzen durch die von ihr kompakt erzeugte Topologie $k\mathcal{T}$ (F3R).

(3) Für alle Teilkomplexe $A \leq K$ und $B \leq L$ gilt $(A,<) \otimes (B,<) \leq (M,<)$.

BEWEIS. Nur Aussage (1) bedarf noch des Beweises. Es genügt, dies für jedes Paar von Simplizes zu zeigen. Seien also $K = \mathfrak{P}\{0,1,\dots,p\}$ und $L = \mathfrak{P}\{0,1,\dots,q\}$. Der Standardsimplex $|K| = \Delta^p := \{t \in [0,1]^{p+1} \mid t_0 + t_1 + \cdots + t_p = 1\}$ ist affin homöomorph zum Orthosimplex $\Delta_p := \{x \in [0,1]^p \mid 1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_p \geq x_{p+1} = 0\}$: Genauer gilt $\Delta_p = [v_0, v_1, v_2, \dots, v_p]$ für $v_0 = 0$, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$, …, $v_p = e_1 + e_2 + \cdots + e_p$ und $\Delta^p \xrightarrow{\sim} \Delta_p : t \mapsto x$ mit $x_k = t_k + \cdots + t_p$ und umgekehrt $t_k = x_k - x_{k+1}$. Ebenso gilt $|L| = \Delta^q \xrightarrow{\sim} \Delta_q : t \mapsto y$. Demnach ist $\Delta^p \times \Delta^q$ affin homöomorph zum Produkt

$$\Delta_p \times \Delta_q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \;\big|\; 1 \geq x_1 \geq \cdots \geq x_p \geq 0,\ 1 \geq y_1 \geq \cdots \geq y_q \geq 0\big\}.$$

Der Komplex $M = (K,<) \otimes (L,<)$ hat die Eckenmenge $\Omega(M) = \{0,\dots,p\} \times \{0,\dots,q\}$. Wir nutzen die Darstellung $f : M \to \Delta_p \times \Delta_q : (a,b) \mapsto (v_a, v_b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ und erhalten

$$\Delta_p \times \Delta_q = |M|_f = \bigcup\nolimits_{S \in M} [f(S)] = \bigsqcup\nolimits_{S \in M} \operatorname{Int}[f(S)].$$

Jeder Simplex $S \in M$ hat die Form $S = \{(a_0,b_0) < (a_1,b_1) < \cdots < (a_n,b_n)\}$ mit $\{a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n\} \subset \{0,1,\dots,p\}$ und $\{b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n\} \subset \{0,1,\dots,q\}$. Im Inneren des Simplex $[f(S)]$ liegen genau die Punkte $(x,y) \in \Delta_p \times \Delta_q$ mit der Sortierung $1 =: c_0 = x_i = y_j$ für $0 \leq i \leq a_0$, $0 \leq j \leq b_0$ und $c_{k-1} > c_k = x_i = y_j$ für $a_{k-1} < i \leq a_k$, $b_{k-1} < j \leq b_k$ und $0 =: c_{n+1} = x_i = y_j$ für $a_n < i \leq p$, $b_n < j \leq q$. Umgekehrt liegt jeder Punkt $(x,y) \in \Delta_p \times \Delta_q$ nach Sortierung (in Form eines Shuffles) im Inneren $\operatorname{Int}[f(S)]$ für genau einen Simplex $S \in M$. Damit ist die behauptete Triangulierung bewiesen. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I4. Simpliziale Approximation

§I4a. Motivation. Unser Ziel ist folgender Satz (ausgeführt in I4J):

Satz I4A (simpliziale Approximation, Vorschau)**.** *Seien K und L Simplizialkomplexe. Jede stetige Abbildung $f : |K| \to |L|$ ist homotop zu einer simplizialen $|\varphi| : |K'| \to |L|$.*

Genauer: Es existiert eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$ desselben Polyeders $|K'| = |K|$ sowie eine simpliziale Abbildung $\varphi : K' \to L$ mit Realisierung $g = |\varphi| : |K'| \to |L|$ und affiner Homotopie $H : f \simeq g$ vermöge $H : [0,1] \times |K'| \to |L| : (t,x) \mapsto (1-t)\,f(x) + t\,g(x)$.

Ist der Komplex K endlich, so genügt iterierte baryzentrische Unterteilung, $K' = \beta^m K$.

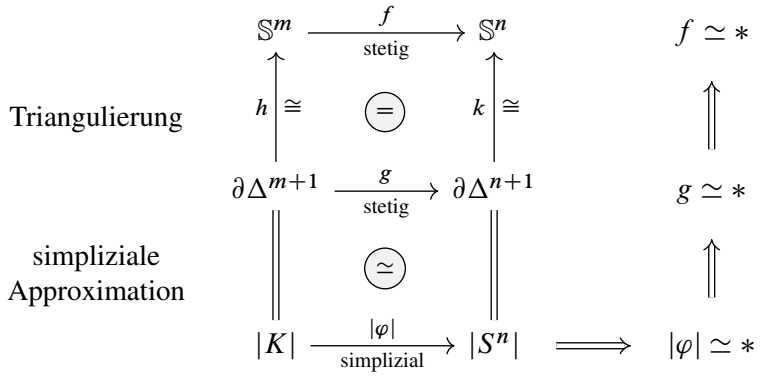
Wir können damit stetig-topologische Probleme diskret-kombinatorisch formulieren: Wir beschreiben topologische Räume X, Y durch simpliziale Komplexe K, L (per Triangulierung $X \cong |K|$ und $Y \cong |L|$) und stetige Abbildungen $f : X \to Y$ durch simpliziale $\varphi : K' \to L$ (per simplizialer Approximation $f \simeq |\varphi|$). Auf topologischen Räumen führen wir so Koordinaten ein und dürfen lokal die bewährten Methoden des $\mathbb{R}^n$ einsetzen. Simpliziale Abbildungen sind stückweise affin-linear, wir nutzen so die Lineare Algebra.

§I4b. Anwendung auf Sphären. Eine einfache aber wichtige Anwendung:

Satz I4B. *Für alle $0 \le m < n$ gilt $[\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^n] = \{*\}$. Ausführlich: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ ist nullhomotop, also homotop zu einer konstanten Abbildung, kurz $f \simeq *$.*

BEWEIS. (1) Verfehlt $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ einen Punkt $y \in \mathbb{S}^n$, so gilt $f \simeq *$ (G4D).

Vorsicht! Was tun, wenn f surjektiv ist? Solche Abbildungen gibt es für $1 \le m < n$ tatsächlich! (§C6d) Aus einem flächenfüllenden Weg $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$ gewinnen wir iterativ $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^n$ und hieraus $f : \mathbb{S}^m \twoheadrightarrow [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n$. In diesem Falle lässt sich das vorhergehende Argument nicht direkt auf f anwenden. Hier rettet uns der simpliziale Approximationssatz (I4J): Wir ersetzen die komplizierte Abbildung f durch eine einfachere, nämlich simpliziale Abbildung $|\varphi|$.



(2) Wir triangulieren die Sphären vermöge $h : \partial\Delta^{m+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^m$ und $k : \partial\Delta^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ (I3C). Statt f betrachten wir die äquivalente Abbildung $g = k^{-1} \circ f \circ h : \partial\Delta^{m+1} \to \partial\Delta^{n+1}$. Dank I4A existiert zu g eine simpliziale Approximation $\varphi : S^m \succcurlyeq K \to S^n$, also $g \simeq |\varphi|$.

Es gilt $\dim K = \dim S^m = m < n = \dim S^n$. Daher trifft $|\varphi|$ nicht das Innere $\mathrm{Int}[T]$ des n–Simplex $T = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Dank (1) folgt $|\varphi| \simeq *$. Alternativ: Das Komplement $\partial\Delta^{n+1} \smallsetminus \mathrm{Int}[T] = \overline{\mathrm{st}}(e_0) \simeq e_0$ ist sternförmig, damit folgt $f \simeq g \simeq |\varphi| \simeq *$. □

§I4c. Eckensterne. Sei K ein kombinatorischer Simplizialkomplex mit Eckenmenge Ω in einem $\mathbb{R}$–Vektorraum V wie in Definition I2A erklärt.

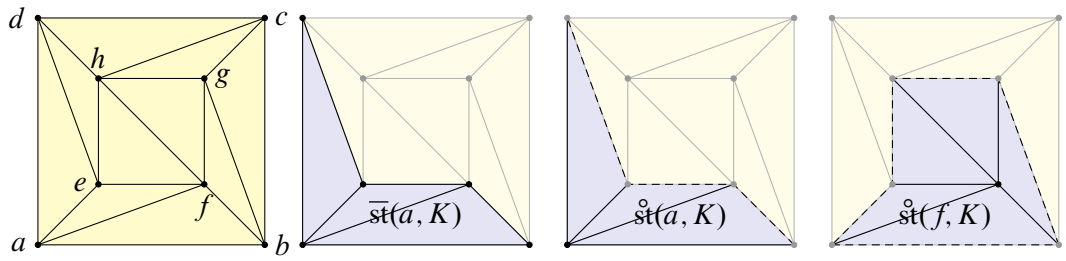


ABBILDUNG I:23. Abgeschlossener und offener Stern einer Ecke

Definition I4C. Der *offene Stern* um die Ecke $a \in \Omega$ im Komplex K ist

$$\begin{aligned}\mathring{\mathrm{st}}(a) = \mathring{\mathrm{st}}(a,K) &:= B_K(a,1) && \text{in der simplizialen Metrik (I2I)}\\ &= \{\, x \in |K| \;\big|\; x(a) > 0 \,\} && \text{in baryzentrischen Koordinaten (I2D)}\\ &= \bigsqcup \{\, \mathrm{Int}[S] \;\big|\; a \in S \in K \,\} && \text{als Vereinigung offener Simplizes.}\end{aligned}$$

Letzteres gilt, denn jeder Punkt $x \in |K|$ liegt im Inneren genau eines Simplex $S = \mathrm{supp}(x)$, und $x(a) > 0$ ist gleichbedeutend mit $a \in S$. Der *abgeschlossene Stern* um $a \in \Omega$ ist

$$\overline{\mathrm{st}}(a) = \overline{\mathrm{st}}(a,K) := \bigcup \{\, [S] \;\big|\; a \in S \in K \,\}.$$

Bemerkung. Die offenen Sterne überdecken das Polyeder $|K|$. Sowohl in der simplizialen als auch in der metrischen Topologie ist der offene Stern $\mathring{\mathrm{st}}(a,K)$ offen und der abgeschlossene Stern $\overline{\mathrm{st}}(a,K)$ abgeschlossen. Der Name „Stern“ rührt daher, dass $\mathring{\mathrm{st}}(a)$ und $\overline{\mathrm{st}}(a)$ sternförmig sind bezüglich a. Hieraus folgern wir:

Satz I4D. *(1) Jede Ecke $a \in \Omega(K)$ ist starker Deformationsretrakt ihres Sterns vermöge*

$$H \;:\; [0,1] \times \overline{\mathrm{st}}(a) \to \overline{\mathrm{st}}(a) \;:\; (t,x) \mapsto ta + (1-t)x.$$

Gleiches gilt für jeden offenen Ball $B_K(a,r) \subset |K|$ mit Radius $r \in]0,1]$.

(2) Jeder Punkt $a \in |K|$ ist starker Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in $|K|$.

BEWEIS. (1) Für jedem Simplex $S \in K$ mit $a \in S$ definieren wir $H_{[S]} : [0,1] \times [S] \to [S]$ durch $H_{[S]}(t,x) = ta + (1-t)x$; dies ist wohldefiniert und stetig. Diese Abbildungen verkleben sich zur angegebenen Homotopie $H : [0,1] \times \overline{\mathrm{st}}(a) \to \overline{\mathrm{st}}(a)$. Somit ist H wohldefiniert und stetig bezüglich der simplizialen Topologie (I1C), also eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}_{\overline{\mathrm{st}}(a)}$ zur konstanten Abbildung $H_1 : \overline{\mathrm{st}}(a) \to \{a\}$, wie behauptet.

(2) Es gilt $a \in \mathrm{Int}[S]$ für $S = \mathrm{supp}(a) \in K$. Zentrische Unterteilung (I3M) mit $z_S = a$ liefert $K' \preccurlyeq K$ mit $a \in \Omega(K')$. Wir wenden (1) an auf $\overline{\mathrm{st}}(a,K')$ und $B_{K'}(a,r)$. □

Diese Eigenschaft zeigt, dass viele topologische Räume nicht triangulierbar sind:

Beispiel. Der Raum $\mathbb{Q}$ ist nicht triangulierbar, denn er ist nicht lokal zusammenhängend, also auch nicht lokal zusammenziehbar. Der Raum $\mathbb{R}$ hingegen ist triangulierbar (I2L).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§I4d. Beliebig feine simpliziale Unterteilung.** Die baryzentrische Unterteilung führt ☜ zu beliebig feinen Unterteilungen. Die grundlegende Beobachtung ist folgende:

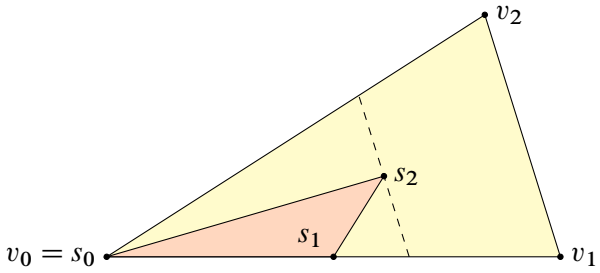


ABBILDUNG I:24. Liebling, ich habe den Simplex geschrumpft!

Lemma I4E. *Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Norm $|-|$ und Metrik $d(x,y) = |x-y|$.*
Jeder n–Simplex $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] \subset V$ realisiert seinen Durchmesser auf den Ecken:

$$\operatorname{diam}(\Delta) = \max\big\{\, d(v_i, v_j) \;\big|\; i, j = 0, \dots, n \,\big\}.$$

Nach baryzentrischer Unterteilung gilt für jeden Simplex $\Delta' \in \beta\langle\, \Delta \,\rangle$:

$$\operatorname{diam}(\Delta') \le q \operatorname{diam}(\Delta) \quad \textit{mit} \quad q = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Iterierte baryzentrische Unterteilung liefert somit Durchmesser $\le q^m \operatorname{diam}\Delta \searrow 0$.

☞ BEWEIS. Wir betrachten eine Nummerierung $v_0, \dots, v_n$. Die sukzessiven Schwerpunkte ☜ $s_k = \frac{1}{k+1}(v_0 + \cdots + v_k)$ bilden unser Simplex $\Delta' = [s_0, \dots, s_n]$. Nach Translation können wir $v_0 = 0$ annehmen. Für $k = 1, \dots, n$ gilt dann $\frac{k+1}{k} s_k \in \Delta$, also $s_k \in \frac{k}{k+1}\Delta$. Wegen $\frac{1}{2} \le \frac{2}{3} \le \frac{3}{4} \le \dots \frac{n}{n+1} = q$ folgt $s_0, \dots, s_n \in q\Delta$, somit $\Delta' \subset q\Delta$ und $\operatorname{diam}\Delta' \le q \operatorname{diam}\Delta$. □

Die Existenz beliebig feiner Unterteilungen formulieren wir ausführlich wie folgt:

✍ **Satz I4F.** *Sei K ein Simplizialkomplex in V und $U = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung des Polyeders $|K|$, also $|K| = \bigcup_{i\in I} U_i$ und $U_i \in \mathcal{T}_K$ für alle $i \in I$.* ✍

(1) Dann existiert eine U–feine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, das heißt, für jede Ecke $a \in \Omega(K')$ liegt der Stern $\overline{\operatorname{st}}(a, K')$ ganz in einer der Mengen U_i.

(2) Ist $A \le K$ ein Teilkomplex, sodass für jede Ecke $a \in \Omega(A)$ der Stern $\overline{\operatorname{st}}(a, A)$ ganz in einer der Mengen U_i enthalten ist, so braucht A nicht unterteilt zu werden, also $A \le K'$.

(3) Ist K endlich, so genügt iterierte baryzentrische Unterteilung, $K' = \beta^m K$.

Anders gesagt, die Sterne $\overline{\operatorname{st}}(a, K')$ mit $a \in \Omega(K')$ bilden eine Überdeckung des Polyeders $|K| = |K'|$, die der vorgegebenen offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnet ist.

✍ BEWEIS FÜR K ENDLICH UND $A = \{\emptyset\}$. Sei $M = \max\{\operatorname{diam}[S] \mid S \in K\}$ der maximale Simplexdurchmesser. Das Polyeder $|K|$ ist kompakt (F1I). Zur Überdeckung U existiert daher eine Lebesgue–Zahl $\lambda > 0$ (F2B): Jede Teilmenge $X \subset |K|$ mit Durchmesser $\operatorname{diam}(X) < \lambda$ liegt in einer der Mengen U_i. Sei $n = \dim K$ und $q = n/(n+1)$. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $q^m M < \lambda$ gilt. Dank Lemma I4E ist die baryzentrische Unterteilung $K' = \beta^m K$ dann U–fein. ✍ □

Für die meisten Anwendungen genügt der kompakte Spezialfall, und hier ist der Beweis besonders leicht. Für unendliche Simplizialkomplexe genügt $\beta^m K$ nicht mehr:

Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir $x_n := \sum_{k=1}^{n} 1/k \nearrow +\infty$ sowie $x_{-1} = -\infty$. Dann ist $(U_n =]x_{n-1}, x_{n+1}[)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$ mit immer kleineren Mengen, denn $x_{n+1} - x_{n-1} \searrow 0$. Wir beginnen mit der Triangulierung $R = \langle\, \{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z} \,\rangle$ für $|R| = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und suchen eine Unterteilung R' von R, sodass jeder Teilsimplex Δ von $|R'|$ ganz in einer Menge U_n liegt. Egal wie groß wir m wählen, die baryzentrische Unterteilung $\beta^m R$ erfüllt dies nicht. Dies gelingt nur lokal: Für jeden Simplex Δ von $|R|$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass jeder Teilsimplex von $\beta^m \langle\, \Delta \,\rangle$ ganz in einer Menge U_n liegt.

Der Beweis im allgemeinen Fall ist technisch, gelingt aber lokal mit demselben Trick:

BEWEIS DES ALLGEMEINEN FALLS. Wir konstruieren die Unterteilung K' von K induktiv über die Skelette. Das 0–Skelett $K'_{\leq 0} = K_{\leq 0}$ erfüllt die Sternbedingung.

Sei nun $n \geq 1$ und $K'_{<n}$ eine Unterteilung von $K_{<n}$, die die Sternbedingung erfüllt. Das heißt, zu jeder Ecke $a \in \Omega(K'_{<n})$ existiert ein Index $\varphi(a) \in I$ sodass $\overline{\mathrm{st}}(a, K'_{<n}) \subset U_{\varphi(a)}$.

Sei $S \in K_{\leq n} \smallsetminus A$ ein n–Simplex. Auf $\Delta = [S]$ induziert die simpliziale Metrik d_K die euklidische Topologie. Da Δ kompakt ist, existiert eine Lebesgue–Zahl $\lambda > 0$, sodass jede Menge $X \subset \Delta$ mit Durchmesser $\mathrm{diam}(X) < \lambda$ in einer Menge U_i enthalten ist (F2B). Zu jeder Ecke $a_1, \ldots, a_\ell \in \Omega(K'_{<n})$ im Rand von Δ existiert $\delta_k > 0$ sodass die δ_k–Umgebung von $\overline{\mathrm{st}}(a_k, K'_{<n})$ in Δ ganz in der Menge $U_{\varphi(a_k)}$ liegt. Wir setzen $\varepsilon = \min\{\lambda/2, \delta_1, \ldots, \delta_\ell\}$. Nach m–fach wiederholter baryzentrischer Unterteilung relativ zu $K'_{<n}$ hat jeder Simplex $S' \in \beta^m(\{S\} \cup K'_{<n}, K'_{<n})$ Durchmesser $\mathrm{diam}[S'] < \varepsilon$, für m hinreichend groß.

So verfahren wir mit jedem n–Simplex $\Delta \in K_{\leq n} \smallsetminus A$. Die so erzeugte Unterteilung $K'_{\leq n}$ erfüllt dann die Sternbedingung. Per Induktion über n ist damit der Satz bewiesen. □

§I4e. Parakompaktheit. Satz I4F garantiert für jeden Simplizialkomplex K beliebig feine Unterteilungen $K' \preccurlyeq K$. Wir gewinnen nebenbei das folgende schöne Ergebnis:

Satz I4G. *Zu jedem Simplizialkomplex K ist das Polyeder $|K|$ parakompakt.*

Zur Erinnerung (F8D): Ein topologischer Raum X heißt *parakompakt*, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ eine lokal-endliche offene Verfeinerung $(V_j)_{j\in J}$ existiert.

Wenn K lokal-endlich ist, so ist $|K|$ metrisierbar (I2J) und somit parakompakt (F8L). Im allgemeinen Fall ist K nicht lokal-endlich und somit auch nicht metrisierbar, aber dank simplizialer Unterteilung folgt die Parakompaktheit dennoch aus der simplizialen Metrik:

BEWEIS. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung des Raumes $|K|$. Nach I4F existiert eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, sodass die offenen Sterne $(\mathring{\mathrm{st}}(a, K'))_{a\in\Omega(K')}$ eine Überdeckung bilden, die der vorgegebenen offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnet ist. Es genügt also zu zeigen, dass diese Sternüberdeckung eine lokal-endliche Verfeinerung erlaubt.

Jeder Stern $\mathring{\mathrm{st}}(a, K') = B_{K'}(a, 1)$ mit $a \in \Omega(K')$ ist offen bezüglich der simplizialen Metrik d' auf $|K'|$. Der metrische Raum $(|K'|, d')$ ist parakompakt (F8L). Also existiert eine lokal-endliche Verfeinerung $(V_j)_{j\in J}$ durch Mengen V_j, die bezüglich der simplizialen Metrik d' offen sind. Da die simpliziale Topologie feiner ist als die von d' induzierte metrische Topologie, ist jede Menge V_j auch offen bezüglich der simplizialen Topologie. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I4f. Simpliziale Approximation. Durch *simpliziale Approximation* versuchen wir, eine beliebig vorgegebene stetige Funktion $f : |K| \to |L|$ anzunähern durch eine hinreichend nahegelegene (und somit homotope) simpliziale Abbildung $g = |\varphi| : |K| \to |L|$.

Definition I4H. Seien K, L Simplizialkomplexe und $f : |K| \to |L|$ eine stetige Abbildung. Wir nennen f *sternartig* bezüglich K und L, wenn f jeden offenen Stern $\mathring{\mathrm{st}}(a, K)$ in einen offenen Stern $\mathring{\mathrm{st}}(b, L)$ abbildet. Demnach existiert eine Abbildung $\varphi : \Omega(K) \to \Omega(L)$ mit $f(\mathring{\mathrm{st}}(a, K)) \subset \mathring{\mathrm{st}}(\varphi(a), L)$ für jede Ecke $a \in \Omega(K)$. In diesem Falle nennen wir φ eine *simpliziale Approximation* von $f : |K| \to |L|$ bezüglich K und L.

Beispiel. Für simpliziale Abbildungen gilt dies automatisch: Sei $\varphi : K \to L$ eine simpliziale Abbildung und $|\varphi| : |K| \to |L|$ affine Fortsetzung. Dann gilt $|\varphi|(\mathring{\mathrm{st}}(a, K)) \subset \mathring{\mathrm{st}}(\varphi(a), L)$ und ebenso $|\varphi|(\overline{\mathrm{st}}(a, K)) \subset \overline{\mathrm{st}}(\varphi(a), L)$ für jede Ecke $a \in \Omega(K)$.

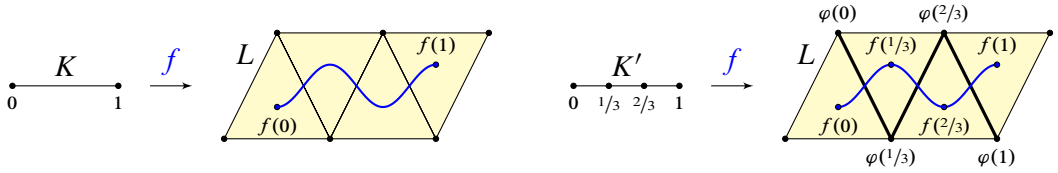


ABBILDUNG I:25. Unterteilung und simpliziale Approximation φ zu f

Beispiel. Zu einer stetigen Abbildung $f : |K| \to |L|$ existiert nicht immer eine simpliziale Approximation $\varphi : K \to L$, wie Abbildung I:25 (links) zeigt. Dies gelingt jedoch nach hinreichend feiner Unterteilung (rechts). Dies ist Inhalt des folgenden Satzes.

Lemma I4I. *Jede simpliziale Approximation $\varphi : \Omega(K) \to \Omega(L)$ von $f : |K| \to |L|$ erfüllt:*

(1) Die Abbildung φ ist simplizial (I2G), das heißt, für alle $S \in K$ gilt $\varphi(S) \in L$.
(2) Für jedes $x \in |K|$ liegen $f(x)$ und $|\varphi|(x)$ im Simplex $[\operatorname{supp} f(x)] \subset |L|$.
(3) Die Abbildungen f und $|\varphi|$ sind homotop vermöge $H(t,x) = (1-t)\,f(x) + t\,|\varphi|(x)$.

BEWEIS. Als Vorbemerkung entnehmen wir aus Definition I4C des offenen Eckensterns: Genau dann gilt $x \in \mathring{\mathrm{st}}(s_0, K) \cap \cdots \cap \mathring{\mathrm{st}}(s_n, K)$, wenn $s_0, \ldots, s_n \in \operatorname{supp}(x)$.

(1) Zum Simplex $S = \{s_0, \ldots, s_n\} \in K$ wählen wir einen inneren Punkt $x \in \operatorname{Int}[S] \subset \mathring{\mathrm{st}}(s_0, K) \cap \cdots \cap \mathring{\mathrm{st}}(s_n, K)$. Nach Voraussetzung gilt $f(x) \in \mathring{\mathrm{st}}(\varphi(s_0), L) \cap \cdots \cap \mathring{\mathrm{st}}(\varphi(s_n), L)$. Das bedeutet $\varphi(S) = \{\varphi(s_0), \ldots, \varphi(s_n)\} \subset \operatorname{supp} f(x)$. Dank $\operatorname{supp} f(x) \in L$ folgt $\varphi(S) \in L$.

(2) Sei $x \in \operatorname{Int}[S]$. Dank (1) gilt $|\varphi|(x) \in [\varphi(S)] \subset [\operatorname{supp} f(x)]$.

(3) Die Abbildung $H : [0,1] \times |K| \to |L|$ mit $H(t,x) = (1-t)\,f(x) + t\,|\varphi|(x)$ ist wohldefiniert nach (2). Sie ist stetig auf jedem Simplex; diese erzeugen die Topologie (I1C). □

Satz I4J. *Seien K und L Simplizialkomplexe und $f : |K| \to |L|$ stetig. Dann existiert eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, auf der f sternartig ist zu $\varphi : \Omega(K') \to \Omega(L)$ und somit homotop zu $g = |\varphi| : |K'| \to |L|$ vermöge $H : [0,1] \times |K'| \to |L| : (t,x) \mapsto (1-t)\,f(x) + t\,g(x)$.*

Zusatz: *Ist die Abbildung f bereits simplizial auf einem Teilkomplex $A \leq K$, so können wir $A \leq K'$ zusichern sowie $g|_{|A|} = f|_{|A|}$; die Homotopie $H : f \simeq g$ ist dann relativ $|A|$.*

Ist der Komplex K endlich, so genügt iterierte baryzentrische Unterteilung, $K' = \beta^m K$.

Bemerkung. Hier wird nur der Startkomplex K unterteilt, nicht der Zielkomplex L.

BEWEIS. Wir haben $|L| = \bigcup_{b\in\Omega(L)} \mathring{\mathrm{st}}(b,L)$, die Überdeckung durch offene Eckensterne. Wir erhalten $|K| = f^{-1}(|L|) = \bigcup_{b\in\Omega(L)} f^{-1}(\mathring{\mathrm{st}}(b,L))$, als offene Überdeckung, da f stetig ist. Dank Satz I4F existiert eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, sodass zu jeder Ecke $a \in \Omega(K')$ ein $\varphi(a) \in \Omega(L)$ existiert mit $\mathring{\mathrm{st}}(a,K') \subset f^{-1}(\mathring{\mathrm{st}}(\varphi(a),L))$, also $f(\mathring{\mathrm{st}}(a,K')) \subset \mathring{\mathrm{st}}(\varphi(a),L)$. Das heißt, f ist sternartig zu $\varphi : \Omega(K') \to \Omega(L)$. Dank I4I definiert dies eine simpliziale Abbildung $\varphi : K' \to L$, und ihre Realisierung $g = |\varphi| : |K'| \to |L|$ ist homotop zu f. □

Für jeden endlichen Simplizialkomplex K zeigt der Beweis noch etwas mehr:

Korollar I4K. *Sei K ein endlicher Simplizialkomplex in einem normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum V. Vorgegeben sei eine Folge $K = K^{(0)} \succcurlyeq K^{(1)} \succcurlyeq K^{(2)} \succcurlyeq \dots$ von immer feineren Unterteilungen, das heißt, zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass alle Simplizies in $K^{(n)}$ Durchmesser kleiner ε haben. Dann erlaubt jede stetige Abbildung $f : |K| \to |L|$ eine simpliziale Approximation $\varphi : K^{(n)} \to L$ für hinreichend großes n.* □

Dies leisten zum Beispiel die iterierten baryzentrischen Unterteilungen $K^{(n)} = \beta^n K$ (I3M). Für das Quadrat $[0,1]^2$ genügen auch Unterteilungen $[0,1]^2 = |K^{(n)}|$ wie in J:6.

§I4g. Sphären umwickeln: eine explizite simpliziale Approximation.

Übung I4L. Wie viele Elemente enthält $[\mathbb{S}^2, \mathbb{D}^4 \smallsetminus \{0\}]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

✻ **I4L.** Für $X = \mathbb{D}^4 \smallsetminus \{0\}$ nutzen wir die Homotopie-Äquivalenz $(f,g) : X \simeq \mathbb{S}^3$ (G5D). Diese induziert die Bijektion $(f_*, g_*) : [\mathbb{S}^2, X] \cong [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3]$, und dank Satz I4B wissen wir $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3] = \{*\}$. Mit anderen Worten: Jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{D}^4 \smallsetminus \{0\}$ ist zusammenziehbar. Das ist anschaulich plausibel, nun auch bewiesen.

Übung I4M. Wir betrachten den Simplizialkomplex $S^1 = \langle \{1,\mathrm{i}\}, \{\mathrm{i},-1\}, \{-1,-\mathrm{i}\}, \{-\mathrm{i},1\} \rangle$ in $\mathbb{C}$ sowie den Weg $\gamma : [0,1] \to |S^1| : t \mapsto \mathrm{e}^{10\pi\mathrm{i}t}/|\mathrm{e}^{10\pi\mathrm{i}t}|_1$, projiziert dank der Taxinorm. Nennen Sie eine minimale Unterteilung $K \preccurlyeq \langle [0,1] \rangle$ mit simplizialer Approximation zu γ.

✻ **I4M.** Wir finden $K = \langle \{\frac{k-1}{20}, \frac{k}{20}\} \mid k = 1,\dots,20 \rangle$ mit der Abbildung $\varphi : K \to S^1 : \frac{k}{20} \mapsto \mathrm{i}^k$. (Eine Skizze hilft, siehe J:29.) Anschaulich läuft γ fünfmal um das Quadrat, und φ tut dasselbe simplizial, $|\varphi|$ stückweise affin. Tatsächlich ist γ bezüglich K sternartig und φ eine simpliziale Approximation.

Übung I4N. (1) Triangulieren Sie vermöge $h : |S^n| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ in jeder Dimension $n \geq 1$ die Sphäre $\mathbb{S}^n$ durch den Rand des Kreuzpolytops $|S^n| = \partial[\pm e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

(2) Zu jedem $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die Modellabbildung $\varphi^1_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^k$ für den k–fachen Umlauf. Konstruieren Sie eine Unterteilung $S^1_k \preccurlyeq S^1$ und eine simpliziale Approximation $g^1_k : |S^1_k| \to |S^1|$ sowie eine Homotopie $H : g^1_k \simeq f^1_k := h^{-1} \circ \varphi^1_k \circ h$.

(3) In Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die Modellabbildung $\varphi^n_k : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ vom Grad $k \in \mathbb{Z}$ gegeben durch $\varphi^n_k(r\cos t, r\sin t, x_2, \dots, x_n) = (r\cos kt, r\sin kt, x_2, \dots, x_n)$. Geben Sie eine Unterteilung $S^n_k \preccurlyeq S^n$ und eine simpliziale Approximation $g^n_k : |S^n_k| \to |S^n|$ an. *Hinweis:* Lösen Sie zunächst den Fall $n = 2$ durch Einhängung (§I3g), dann induktiv.

✻ **I4N.** Diese Konstruktion führen wir in J3J aus und berechnen damit explizit den Abbildungsgrad. Versuchen Sie es zunächst selbst: Durch explizite Formeln erlangen Sie mehr Zutrauen zu diesen Konzepten.

(1) Machen Sie sich Skizzen! In Dimension $n = 1$ erhalten Sie den Quadratrand, in Dimension $n = 2$ erhalten Sie den Oktaederrand. Der Homöomorphismus $h : |S^n| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ gelingt durch radiale Projektion (F6G).

(2) Die vorige Übung I4M diskutiert das Beispiel $k = 5$. Der allgemeine Fall verläuft genauso.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I4h. Übungen zur simplizialen Approximation.

Übung I4O. Sei $f : |K| \to |L|$ stetig mit einer simplizialen Approximation $\varphi : K \to L$.

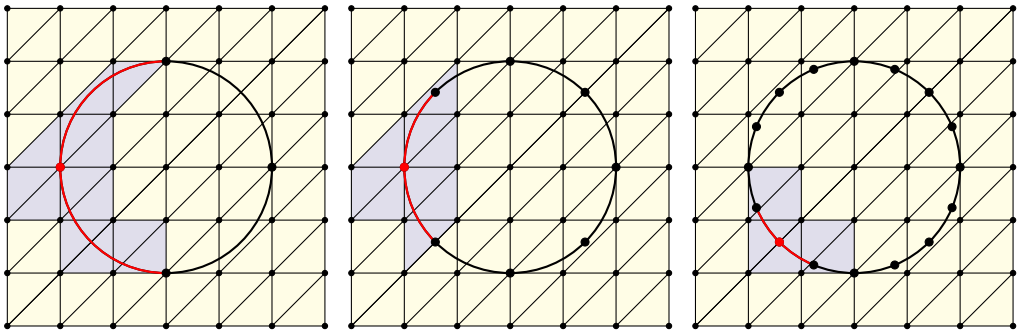
(1) Angenommen, für eine Ecke $a \in \Omega(K)$ gilt $f(a) \in \Omega(L)$. Gilt dann $f(a) = \varphi(a)$?

(2) Angenommen, f ist bereits simplizial auf einem Teilkomplex $A \leq K$, es gilt also $f|_{|A|} = |\psi|$ mit $\psi : A \to L$ simplizial. Folgt daraus $\varphi|_A = \psi$?

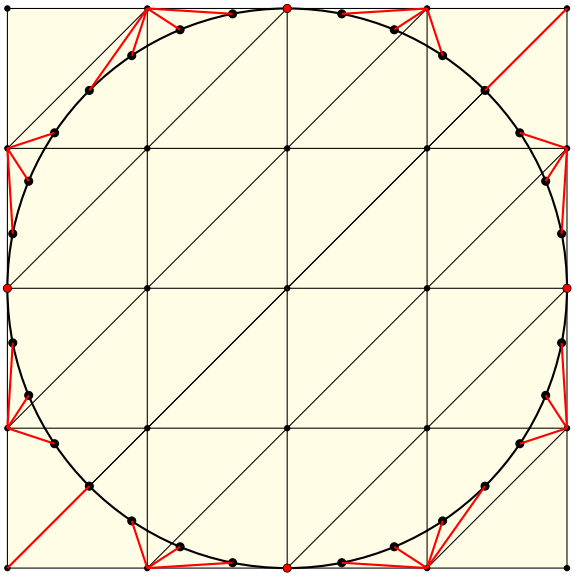
✻ **I4O.** (1) Es gilt $a \in \mathring{\mathrm{st}}(a, K)$, also $f(a) \in f(\mathring{\mathrm{st}}(a, K)) \subset \mathring{\mathrm{st}}(\varphi(a), L)$. Die einzige Ecke in $\mathring{\mathrm{st}}(\varphi(a), L)$ ist $\varphi(a)$, also gilt $f(a) = \varphi(a)$. (2) Für jede Ecke $a \in \Omega(A)$ gilt $f(a) = \psi(a) \in \Omega(L)$, nach (1) also $\varphi(a) = \psi(a)$.

Übung I4P. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto 2\,\mathrm{e}^{2\pi i t}$. Wir triangulieren das Intervall $[0,1] = |K|$ durch $K = \langle \{\frac{k-1}{4}, \frac{k}{4}\} \mid k = 1,2,3,4 \rangle$ sowie die Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = |R^2|$ durch R^2 aus I2M. Wie oft müssen Sie K baryzentrisch unterteilen, damit f sternartig bezüglich $\beta^m K$ und R^2 ist? Geben Sie in diesem Fall eine simpliziale Approximation an (in Form einer Zeichnung).

✻ **I4P.** Wir betrachten das Bild unter f von offenen Sternen. Die folgenden Abbildungen zeigen die Bilder offener Sterne (in rot), blau hinterlegt sind die Dreiecke, deren Inneres zum Eckenstern gehören müssten. Wir sehen, dass dies für K sowie die ersten beiden Unterteilungen βK und $\beta^2 K$ noch nicht möglich ist.



In der dritten Unterteilung gelingt es schließlich. Die folgende Abbildung zeigt die simpliziale Approximation: Rote Linien verbinden $f(a)$ und $\varphi(a)$ für $a \in \Omega(\beta^3 K)$, wobei φ eine simpliziale Approximation von f ist. (Für manche Ecken sind mehrere Wahlen möglich; als weitere Übung können Sie diese vollständig aufzählen.)



§I4i. Anwendung auf Wegzusammenhang.

Übung I4Q. Für jeden Simplizialkomplex K sind äquivalent:

(1) Der topologische Raum $|K|$ ist zusammenhängend.
(2) Der topologische Raum $|K|$ ist wegzusammenhängend.
(3) Je zwei Ecken $a,b \in \Omega(K)$ lassen sich durch einen Kantenzug verbinden.

Ist also der Komplex K lokal-abzählbar, so ist jede Komponente von K abzählbar (I3G).

✻ **I4Q.** „(1) ⇔ (2)“: Der Raum $|K|$ ist lokal wegzusammenhängend, sogar lokal zusammenziehbar (I4D), also ist jede Komponente von $|K|$ zugleich auch Wegkomponente (G3C).

„(3) ⇒ (2)“: Jeder Punkt $x \in |K|$ liegt in einem Simplex $|S|$ und lässt sich mit einem Eckpunkt $a \in S$ durch $[x,a]$ verbinden. Auch $y \in |K|$ lässt sich so mit einem Eckpunkt b verbinden. Zusammen mit einem Kantenweg von a nach b erhalten wir einen Weg $\gamma : [0,1] \to |K|$ von $\gamma(0) = x$ nach $\gamma(1) = y$.

„(2) ⇒ (3)“: Seien $a,b \in \Omega(K)$ zwei Ecken und $\gamma : [0,1] \to |K|$ ein Weg von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$. Das Intervall realisieren wir durch den Komplex $\langle\, \{0,1\} \,\rangle$. Zu γ existiert eine simpliziale Approximation $\varphi : L \to K$ auf einer geeigneten Unterteilung $L = \langle\, \{(k-1)/n, k/n\} \mid k = 1,\dots,n \,\rangle$. Zudem können wir $\varphi(0) = a$ und $\varphi(1) = b$ annehmen. Somit ist φ ein Kantenweg von a nach b in K.

§I4j. Anwendung auf Homotopieklassen. Zu vorgegebenen Komplexen K und L ist die explizite Bestimmung der Menge $[|K|,|L|]$ aller Homotopieklassen schwer und im Allgemeinen praktisch unmöglich, aber wenigstens ihre Abzählbarkeit ist leicht zu beweisen:

Übung I4R. (1) Sei K ein Simplizialkomplex mit $\dim K < m,n$. Ist dann jede stetige Abbildung $f : |K| \to \mathbb{S}^n$ zusammenziehbar? Was gilt für $f : |K| \to \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$?

(2) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q]$ für jedes Paar $p,q \in \mathbb{N}$ abzählbar ist. Allgemein gilt: Ist K ein endlicher und L ein abzählbarer Simplizialkomplex, dann ist $[|K|,|L|]$ abzählbar.

✻ **I4R.** (1) Wir nutzen Satz I4A als Modell: Zu $f : |K| \to \partial\Delta^{n+1}$ gibt es eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, auf der f sternartig ist und somit homotop zu einer simplizialen Abbildung $g = |\varphi| : |K'| \to \partial\Delta^{n+1}$. Wegen $\dim K' = \dim K < n$ wird das Innere des n–Simplex $T = \{e_1,\dots,e_{n+1}\}$ nicht getroffen, $\partial\Delta^{n+1} \smallsetminus \mathrm{Int}[T] \simeq e_0$ ist sternförmig bezüglich e_0, also $f \simeq g \simeq *$. Ebenso lässt sich jede stetige Abbildung $f : |K| \to \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ zusammenziehen: Ist F_1 eine Homotopie von $f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f : |K| \to \mathbb{S}^m$ nach $*$ und F_2 eine Homotopie von $f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f : |K| \to \mathbb{S}^n$ nach $*$, dann ist $F(t,x) = (F_1(t,x), F_2(t,x))$ eine Homotopie von f nach $*$.

(2) Ist K endlich, so auch jede baryzentrische Unterteilung $\beta^n K$ für $n = 1,2,3,\dots$. Es gibt daher nur abzählbar viele simpliziale Abbildungen $\varphi : \beta^n K \to L$ mit $n \in \mathbb{N}$. Jede stetige Abbildung $f : |K| \to |L|$ ist homotop zur Realisierung einer simplizialen Abbildung $\varphi : \beta^n K \to L$ für ein $n \in \mathbb{N}$, siehe I4K. Somit erhalten wir ein abzählbares Repräsentantensystem: $[|K|,|L|] = \{\, [|\varphi|] \mid \varphi : \beta^n K \to L,\ n \in \mathbb{N} \,\}$.

Bemerkung. Auch wenn beide Komplexe K und L endlich sind, so kann die Menge $[|K|,|L|]$ der Homotopieklassen doch unendlich sein. Einfachstes Beispiel ist $K = L = \langle\, \{0,1\},\{1,2\},\{2,0\} \,\rangle$: Hier gilt $|K| \cong |L| \cong \mathbb{S}^1$ und $\deg : [|K|,|L|] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ siehe §J1.

Bemerkung. Die Abzählbarkeit von$[|K|,|L|]$ gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn der Ausgangskomplex K unendlich ist. Als Beispiel betrachten wir das unendliche Bouquet

$$K = \langle\, \{0,2k+1\}, \{2k+1,2k+2\}, \{2k+2,0\} \mid k \in \mathbb{N} \,\rangle.$$

und als Ziel das Dreieck $L = \langle\, \{0,1\},\{1,2\},\{2,0\} \,\rangle$. Zu jeder Folge $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ definieren wir $f_u : |K| \to |L|$, indem wir das k–te Dreieck von $|K|$ genau u_k mal um das Dreieck $|L|$ wickeln. Die Abbildung $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to [|K|,|L|] : u \mapsto [f_u]$ ist bijektiv. Zur Injektivität betrachten wir die Einbettung des k–ten Dreiecks $\iota_k : |L| \to |K|$; es gilt dann $u_k = \deg(f_u \circ \iota_k)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§I4k. Simpliziale Quotienten.** Wir führen die Übungen I3D und I3E fort: ☜

Übung I4s. Sei K ein Simplizialkomplex und $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge Ω. Dann erhalten wir den simplizialen Quotientenkomplex $Q := K/\!\sim$ auf der Eckenmenge $\Omega/\!\sim$: Hierzu sei $q : \Omega \to \Omega/\!\sim$ die Quotientenabbildung und $Q = \{\, q(S) \mid S \in K \,\}$. Somit ist die Abbildung $q : K \twoheadrightarrow Q$ simplizial und surjektiv.

(0) Ist jede simpliziale Surjektion $p : K \twoheadrightarrow L$ äquivalent zu einem Quotienten?

(1) Ist die geometrische Realisierung $|p| : |K| \twoheadrightarrow |L|$ dann eine Identifizierung?

Wir wollen im Folgenden möglichst explizit erklären, welche Punkte des Polyeders $|K|$ durch die Abbildung $|q| : |K| \twoheadrightarrow |Q|$ identifiziert werden. Hierzu wollen wir die zugehörige Äquivalenzrelation $\approx$ auf $|K|$ explizit angeben.

Beispiele: Wir betrachten $K = \langle \{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z} \rangle$ mit $|K| = \mathbb{R}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ haben wir den Quotienten $q : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n$ und somit $q : K \twoheadrightarrow K_n$ mit $K_n = \langle \{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z}/n \rangle$. Für $n \geq 3$ identifiziert $|q|$ genau die Punkte in $a + n\mathbb{Z}$. Für $n = 2$ werden $\pm a + n\mathbb{Z}$ identifiziert; das ist etwas zuviel. Für $n = 1$ werden alle Punkte identifiziert zu $|K_1| = \{*\}$.

Für $n = rs$ mit $r, s \in \mathbb{N}$ haben wir $q : \mathbb{Z}/n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/r$ und somit $q : K_n \twoheadrightarrow K_r$. Speziell für $n = 2r$ entspricht $q : K_{2r} \twoheadrightarrow K_r$ einem $2r$–Eck modulo Punktspiegelung. Für $r \geq 3$ identifiziert $|q|$ je zwei Punkte, für $r = 2$ jedoch je vier Punkte; das ist etwas zu viel.

Übungen I3D und I3E liefern weitere schöne, zweidimensionale Beispiele. Auch hier identifiziert $|q|$ manchmal mehr Punkte als uns lieb ist. Schauen wir also genauer hin!

(2) Angenommen, für alle $a \sim b$ in Ω gilt entweder $a = b$ oder $\{a, b\} \notin K$; wir nennen die Äquivalenzrelation $\sim$ dann *simplizial*. Äquivalent hierzu: Je zwei äquivalente Ecken $a \neq b$ in Ω haben mindestens Abstand 2 (Länge des kürzesten Kantenzuges). Erklären Sie die durch $|q| : |K| \twoheadrightarrow |Q|$ induzierte Äquivalenzrelation $\approx$ auf $|K|$.

(3) Angenommen, für alle $a \sim b$ in Ω gilt entweder $a = b$ oder $\overline{\mathrm{st}}(a, K) \cap \overline{\mathrm{st}}(b, K) = \emptyset$; wir nennen die Äquivalenzrelation $\sim$ dann *frei simplizial*. Äquivalent hierzu: Je zwei äquivalente Ecken $a \neq b$ in Ω haben mindestens Abstand 3 (Länge des kürzesten Kantenzuges). Erklären Sie die durch $|q| : |K| \twoheadrightarrow |Q|$ induzierte Äquivalenzrelation $\approx$ auf $|K|$.

✻ **I4s.** (0) Ist $p : K \twoheadrightarrow L$ simplizial und surjektiv, so ist insbesondere die zugehörige Eckenabbildung $q : \Omega(K) \twoheadrightarrow \Omega(L)$. Das entspricht einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\Omega(K)$ mit $a \sim b$ genau dann, wenn $q(a) = q(b)$. Da q simplizial ist, gilt $\{\, q(S) \mid S \in K \,\} \subset L$. Da q surjektiv ist, gilt $\{\, q(S) \mid S \in K \,\} = L$. Somit ist $L \cong K/\!\sim$.

(1) Ja, $|p| : |K| \twoheadrightarrow |L|$ ist identifizierend. Hierzu müssen wir zeigen: Genau dann ist $V \subset |L|$ offen, wenn $|p|^{-1}(V) \subset |K|$ offen ist. Die Implikation „⇒“ ist klar, denn $|p| : |K| \twoheadrightarrow |L|$ ist stetig. Wir zeigen nun die Umkehrung „⇐“: Gegeben sei hierzu $V \subset |L|$ mit $U := |p|^{-1}(V) \subset |K|$ offen. Das bedeutet, $U \cap [S]$ ist offen in $[S]$ für jeden Simplex $S \in K$. Wir wollen zeigen: $V \cap [T]$ ist offen in $[T]$ für jeden Simplex $T \in L$. Zum Simplex $T \in L$ existiert $S \in K$ mit $p(S) = T$. Die Einschränkung $p_S : [S] \twoheadrightarrow |L|$ ist stetig. Somit ist $p_S^{-1}(V) = U \cap [S]$ offen in $[S]$. Da $p_S^T : [S] \twoheadrightarrow [T]$ eine Identifizierung ist (F1L), ist $p(p_S^{-1}(V)) = V \cap [T]$ offen in $[T]$. Dank simplizialer Topologie heißt das: V ist offen in $|L|$

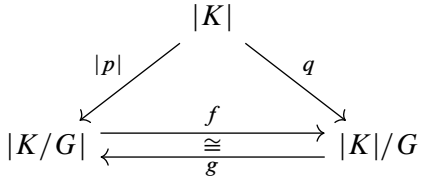
(2) Jeder Simplex $[S]$ mit $S \in K$ wird homöomorph abgebildet auf $[T]$ mit $T = q(S) \in L$. Zwei Punkte $x, x' \in |K|$ sind genau dann äquivalent, geschrieben $x \approx x'$, also $|q|(x) = |q|(x')$, wenn sie sich in baryzentrischen Koordinaten schreiben als $x = \sum_{i=0}^{n} x_i s_i$ mit $\mathrm{supp}(x) = \{s_0, \ldots, s_n\} = S \in K$ und $x' = \sum_{i=0}^{n} x'_i s'_i$ mit $\mathrm{supp}(x) = \{s'_0, \ldots, s'_n\} = S' \in K$ und nach Umnummerierung $x_i = x'_i$ und $s_i \sim s'_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$; die Umnummerierung ist dabei eindeutig.

§I4l. Simplizialkomplexe und Gruppen. Wir führen die Übungen I3D und I3E fort:

Übung I4T. Sei K ein Simplizialkomplex und $(G,\cdot,1)$ eine Gruppe. Eine Gruppenoperation $G\times K\to K$ heißt *simplizial*, wenn G durch simpliziale Abbildungen operiert, das heißt: G operiert auf der Eckenmenge Ω gemäß $G\times\Omega\to\Omega:(g,s)\mapsto gs$, sodass für jedes $g\in G$ und jeden Simplex $S=\{s_0,\dots,s_n\}\in K$ auch $gS=\{gs_0,\dots,gs_n\}$ in K liegt.

Angenommen für jeden Stern $\overline{\mathrm{st}}(a,K)$ und $g\in G\smallsetminus\{1\}$ gilt $g\cdot\overline{\mathrm{st}}(a,K)\cap\overline{\mathrm{st}}(a,K)=\emptyset$; wir nennen die Operation $G\times K\to K$ dann *frei simplizial*. Äquivalent hierzu: Jede Ecke v und ihr Bild gv haben mindestens Abstand 3 (Länge des kürzesten Kantenzuges).

Zeigen Sie, dass dann der Quotient $Q=K/G$ ein Simplizialkomplex ist, $p:K\to Q$ eine simpliziale Abbildung, und $|p|:|K|\twoheadrightarrow|K/G|$ äquivalent zu $q:|K|\twoheadrightarrow|K|/G$.



Untersuchen Sie nochmals die Beispiele I3D und I3E: Ist die Gruppenoperation hier simplizial frei? Was geht schief beim Oktaeder mit der Operation von $G=\{\pm1\}$ durch Punktspiegelung? Warum und wie genau löst die baryzentrische Unterteilung das Problem?

Übung I4U (Cayley–Graph)**.** Der Graph $K=K(\mathbb{Z},\{1\})=\{\emptyset,\{k\},\{k,k+1\}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ ist ein Baum mit $|K|\cong\mathbb{R}$. Entsprechend $|K(\mathbb{N},\{1\})|\cong\mathbb{R}_{\geq0}$ und $|K(\{0,\dots,n\},\{1\})|\cong[0,1]$.

Allgemein sei $(G,\cdot,1)$ eine Gruppe, und $S\subset G$ eine Teilmenge mit $1\notin S$.

$$K=K(G,S)=\big\{\emptyset,\{g\},\{g,gs\}\;\big|\;g\in G,s\in S\big\}$$
$$K'=K'(G,S)=\big\{\emptyset,\{g\},\{(g,s)\},\{g,(g,s)\},\{(g,s),gs\}\;\big|\;g\in G,s\in S\big\}$$

Der Graph $K(\mathbb{Z},\{1\})$ ist der obige Baum mit $|K|\cong\mathbb{R}$, und $K(\mathbb{Z},\{1\})$ ist die zentrische Unterteilung. Die Unterteilung K' orientiert die Kanten und berücksichtigt so mögliche Elemente der Ordnung zwei (Involutionen), also $s\in S$ mit $s^2=1$.

(0) Skizzieren Sie diese Graphen für $(\mathbb{Z}^2,\{(1,0),(0,1)\})$ und $(S_3,\{(1,2),(2,3)\})$, ebenso $(C_n,\{a\})$ für die zyklische Gruppe $C_n=\langle a\mid a^n=1\rangle$, zur Illustration auch $(C_7,\{a,a^3\})$, und schließlich $(D_n,\{r,s\})$ für die Diedergruppe $D_n=\langle r,s\mid r^n=s^2=rsrs=1\rangle$.

Jedem Kantenzug im Graph $K'(G,S)$ von $a\in G$ nach $b\in G$ lesen wir ein *Gruppenwort* $s_1^{e_1}s_2^{e_2}\cdots s_n^{e_n}$ ab, genauer $(s_1,e_1;s_2,e_2;\dots;s_n,e_n)\in(S\times\mathbb{Z})^n$ mit *Faktoren* $s_1,s_2,\dots,s_n\in S$ und *Exponenten* $e_1,e_2,\dots,e_n\in\mathbb{Z}$, gemäß $(g,(g,s),gs)\mapsto s^{+1}$ und $(gs,(g,s),g)\mapsto s^{-1}$. Dieses Wort reduzieren wir durch Zusammenfassen und Kürzen (Algorithmus L-2) sodass schließlich $s_i\neq s_{i+1}$ für alle $i=1,\dots,n-1$ gilt sowie $e_i\neq0$ für alle $i=1,\dots,n$.

(1) Genau dann ist K' zykelfrei, wenn S in G frei ist, d.h. jedes Element $g\in G$ schreibt sich auf *höchstens* eine Weise als ein reduziertes Wort $g=s_1^{e_1}s_2^{e_2}\cdots s_n^{e_n}$ über S.

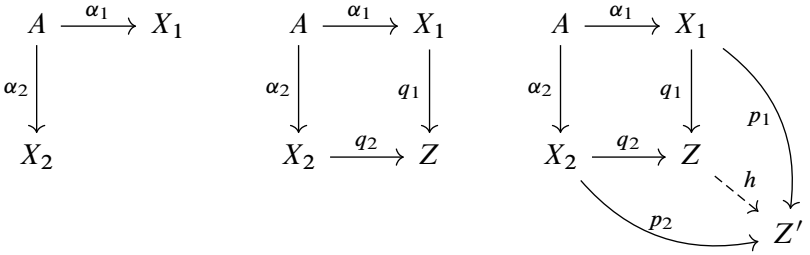
(2) Genau dann ist K' zusammenhängend, wenn S die Gruppe G erzeugt, d.h. jedes Element $g\in G$ schreibt sich auf *mindestens* eine Weise als ein reduziertes Wort über S.

(3) Genau dann ist K' ein Baum, wenn S eine Basis von G ist, d.h. jedes Element $g\in G$ schreibt sich auf *genau* eine Weise als ein reduziertes Wort über S.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§I5. Verheftung topologischer Räume

§I5a. Pushout. Das Verheften (E3J) entlang eines Teilraumes heißt auch *Pushout*:



Im Spezialfall $X \cup_f Y$ ist $\alpha_1 = f : A \to X$ beliebig und $\alpha_2 = \iota_A^Y : A \hookrightarrow Y$ die Inklusion.

Definition I5A (Pushout)**.** Gegeben seien stetige Abbildungen $\alpha_i : A \to X_i$ für $i \in I$ mit gleichem Startraum A. Zu diesen Daten $(A \xrightarrow{\alpha_i} X_i)_{i\in I}$ konstruieren wir den Quotienten

$$q : A \sqcup \bigsqcup\nolimits_{i\in I} X_i \twoheadrightarrow \bigvee\nolimits_{i\in I}^{(A,\alpha_i)} X_i := \Big(A \sqcup \bigsqcup\nolimits_{i\in I} X_i\Big)\Big/_{\sim} = Z$$

modulo der Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt von $a \sim \alpha_i(a)$ für alle $a \in A$ und $i \in I$. Hierzu gehören die Einschränkungen $q_i = q|_{X_i} : X_i \to Z$. Nach Konstruktion gilt $q_i \circ \alpha_i = q_j \circ \alpha_j$ für alle $i, j \in I$. Der Raum Z heißt *Pushout*, genauer nennen wir den vollen Datensatz $L = (A \xrightarrow{\alpha_i} X_i \xrightarrow{q_i} Z)_{i\in I}$ das *Pushout-Diagramm*. Es hat folgende universelle Eigenschaft:

Für jedes Diagramm $L' = (A \xrightarrow{\alpha_i} X_i \xrightarrow{q'_i} Z')_{i\in I}$ mit $q'_i \circ \alpha_i = p_j \circ \alpha_j$ für alle $i, j \in I$ existiert genau eine stetige Abbildung $h : Z \to Z'$ mit $h \circ q_i = q'_i$ für alle $i \in I$.

Diese Diagramme L, L' und ihre Morphismen $h : L \to L'$ bilden eine Kategorie, und hierin ist der Pushout initial (H3A). Diese universelle Eigenschaft charakterisiert den Pushout in Top eindeutig bis auf einen eindeutigen Homöomorphismus (H3C).

Beispiel. Sei $Z = X_1 \cup X_2$ eine offene oder abgeschlossene Überdeckung, $A = X_1 \cap X_2$ sowie α_i und q_i die Inklusionen. Dies ist ein Pushout-Diagramm dank Verklebesatz E1P.

Beispiel. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) topologische Räume mit abgeschlossenen Fußpunkten. Für das Bouquet gilt dann $(X, x_0) \vee (Y, y_0) \cong (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$, denn beide haben die universelle Eigenschaft des Pushouts, sind also homöomorph (H3C).

Definition I5B (Bouquet)**.** Sei $(X_i, x_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume X_i mit Fußpunkt $x_i \in X_i$. Wir verheften entlang $A = \{a\}$ und $\alpha_i : a \mapsto x_i$ und erhalten das *Bouquet*

$$\bigvee\nolimits_{i\in I}(X_i, x_i) = \Big(\{a\} \sqcup \bigsqcup\nolimits_{i\in I} X_i\Big)\Big/(a \sim x_i) = \Big(\bigsqcup\nolimits_{i\in I} X_i\Big)\Big/(x_i \sim x_j).$$

Die letzte Gleichung gilt für $I \neq \emptyset$. Im Sonderfall $I = \emptyset$ gilt $\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) = \{a\}$.

Beispiel. In der Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ liegen die n–ten Einheitswurzeln $W_n = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \,\}$. Der Quotientenraum $\mathbb{S}^1 /\!\!/ W_n$ ist ein *n–faches Bouquet von Kreislinien*. Ganz analog ist $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z} \cong \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} \{i\} \times (\mathbb{S}^1, 1)$ ein *unendliches Bouquet von Kreislinien* (E2W).

Beispiel. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit französischer Eisenbahnmetrik d_{SNCF} (C2D) sieht aus wie ein Bouquet $X = \bigvee_{s\in\mathbb{S}^1} \{s\} \times (\mathbb{R}_{\geq 0}, 0)$ von Halbgeraden. Tatsächlich ist $X \to \mathbb{R}^2 : [s, r] \mapsto rs$ bijektiv und stetig aber nicht offen in 0. In 0 ist X nicht erstabzählbar, also $X \ncong (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$.

Definition I5C (Einhängung)**.** Sei X ein topologischer Raum. Der *Kegel* (engl. *cone*)

$$C(X) = ([0,1]\times X) /\!\!/ (\{1\}\times X)$$

entsteht aus dem Zylinder $Y = [0,1]\times X$ durch Zusammenschlagen des Deckels $\{1\}\times X$ (Abbildung I:19). Dies entspricht dem Verheften durch die Abbildung $\alpha_1 : \{1\}\times X \to \{1\}$.

$$\begin{array}{ccc} \{1\}\times X & \xrightarrow{\alpha_1} & \{1\} \\ {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ [0,1]\times X & \xrightarrow{q_2} & C(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \{\pm1\}\times X & \xrightarrow{\alpha_1} & \{\pm1\} \\ {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ [-1,1]\times X & \xrightarrow{q_2} & \Sigma(X) \end{array}$$

Die *Einhängung* (engl. *suspension*) ΣX von X entsteht als Doppelkegel

$$\Sigma(X) = \big(([-1,1]\times X) /\!\!/ (\{1\}\times X)\big) /\!\!/ (\{-1\}\times X).$$

aus dem Zylinder $Y = [-1,1]\times X$ durch separates Zusammenschlagen von Boden und Deckel. Dies entspricht dem Verheften durch die Projektion $\alpha_1 : \{\pm1\}\times X \to \{\pm1\}$.

Beispiel I5D. Die Einhängung der Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{S}^{n+1}$ (Abbildung I:19):

$$\begin{array}{ccc} \{\pm1\}\times\mathbb{S}^n & \xrightarrow{\alpha_1} & \{\pm1\} \\ {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ [-1,1]\times\mathbb{S}^n & \xrightarrow{q_2} & \Sigma(\mathbb{S}^n) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \{\pm1\}\times\mathbb{S}^n & \xrightarrow{\alpha_1} & \{\pm1\} \\ {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ [-1,1]\times\mathbb{S}^n & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{S}^{n+1} \end{array}$$

Hier ist $p_1(\pm1) = \pm e_{n+1}$ der Nord-/Südpol und $p_2(r,s) = (\cos(r\pi/2)\cdot s, \sin(r\pi/2))$. Aus dem Pushout $\Sigma(\mathbb{S}^n)$ existiert genau eine stetige Abbildung $h : \Sigma(\mathbb{S}^n) \to \mathbb{S}^{n+1}$ mit $h\circ q_i = p_i$. Sie ist bijektiv, denn auch p_2 identifiziert nur Deckel und Boden. Somit ist h ein Homöomorphismus, denn $\Sigma(\mathbb{S}^n)$ ist kompakt und $\mathbb{S}^{n+1}$ ist hausdorffsch (F1L). Somit ist auch das rechte Diagram ein Pushout-Diagram zu $(\{\pm1\} \leftarrow \{\pm1\}\times X \to [-1,1]\times X)$.

Definition I5E (Join)**.** Seien X und Y topologische Räume. Ihr *Join* $X * Y$ entsteht, indem wir jeden Punkt $x \in X$ mit jedem Punkt $y \in Y$ durch ein Geradensegment $[0,1]$ verbinden:

$$q : X\times[0,1]\times Y \twoheadrightarrow (X\times[0,1]\times Y)/{\sim} =: X * Y$$

Die Äquivalenzrelation $\sim$ wird definiert durch $(x,0,y) \sim (x,0,y')$ und $(x,1,y) \sim (x',1,y)$ für alle $x,x' \in X$ und $y,y' \in Y$. Für $X \neq 0$ und $Y \neq \emptyset$ haben wir die abgeschlossene Einbettung $\iota : X \sqcup Y \hookrightarrow X * Y : x \mapsto q(x,0,y),\ y \mapsto q(x,1,y)$ für $x \in X$ und $y \in Y$.

Im Sonderfall leerer Räume vereinbaren wir $X * \emptyset = X$ und $\emptyset * Y = Y$.

$$\begin{array}{ccc} X\times\{0,1\}\times Y & \xrightarrow{\alpha_1} & X \sqcup Y \\ {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ X\times[0,1]\times Y & \xrightarrow{q} & X * Y \end{array}$$

Auch der Join $X * Y$ entsteht durch Verheftung: Hier ist $\alpha_1(x,0,y) = x$ und $\alpha_1(x,1,y) = y$ und $\alpha_2 : X\times\{0,1\}\times Y \hookrightarrow X\times[0,1]\times Y$ die Inklusion. Dies entspricht für $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$ dem obigen Quotienten und liefert auch im Sonderfall $X = \emptyset$ oder $Y = \emptyset$ das Richtige.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiel. Wir erhalten den Kegel $X * \{1\} \cong C(X)$ und die Einhängung $X * \{\pm 1\} \cong \Sigma(X)$. Ausführlich: Die Abbildung $X \times [0,1] \times \{\pm 1\} \twoheadrightarrow X \times [-1,1] : (x,t,s) \mapsto (x,ts)$ für $s = \pm 1$ ist stetig und induziert den Homöomorphismus $h : X * \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} \Sigma(X)$ auf den Quotienten.

Definition I5F (affiner Join)**.** Seien $X, Y \subset V$ nicht-leere Teilräume eines topologischen Vektorraums V, etwa $V = \mathbb{R}^n$. Ihr *affiner Join in V* ist geometrisch definiert als der Teilraum

$$Z = (X * Y)_V := \left\{ (1-t)x + ty \;\middle|\; x \in X,\ y \in Y,\ t \in [0,1] \right\} \subset V.$$

Die Abbildung $X \times [0,1] \times Y \twoheadrightarrow Z : (x,t,y) \mapsto (1-t)x + ty$ ist stetig und surjektiv. Sie induziert eine stetige Surjektion $h : X * Y \twoheadrightarrow Z$. Sind die aufgespannten affinen Unterräume $\mathrm{aff}(X)$ und $\mathrm{aff}(Y)$ affin unabhängig, so ist h injektiv. Sind zudem X und Y kompakt, so auch ihr Join $X * Y$ (I5E), und $h : X * Y \xrightarrow{\sim} (X * Y)_V$ ist ein Homöomorphismus (F1L).

Beispiel I5G. Sei $\Delta^{p+q+1} = [u_0, \dots, u_p, v_0, \dots, v_q]$ ein $(p+q+1)$–Simplex in V, das heißt, $u_0, \dots, u_p, v_0, \dots, v_q \in V$ sind affin unabhängig. Für den p–Simplex $\Delta^p = [u_0, \dots, u_p]$ und den q–Simplex $\Delta^q = [v_0, \dots, v_q]$ gilt dann $\Delta^p * \Delta^q \xrightarrow{\sim} (\Delta^p * \Delta^q)_V = \Delta^{p+q+1}$.

Beispiel I5H. Sind $X = |K|$ und $Y = |L|$ trianguliert durch Simplizialkomplexe K, L, so wird ihr Join $X * Y$ trianguliert durch den *simplizialen Join* $K * L = \{ S \sqcup T \mid S \in K,\ T \in L \}$, das heißt, es existiert ein Homöomorphismus $h : |K| * |L| \xrightarrow{\sim} |K * L|$. Ausführlich:

Wir dürfen die Eckenmengen $\Omega(K), \Omega(L)$ als disjunkt annehmen, $\Omega(K) \cap \Omega(L) = \emptyset$, und arbeiten fortan im Vektorraum $\mathbb{R}^{(\Omega)} = \mathbb{R}^{(\Omega(K))} \oplus \mathbb{R}^{(\Omega(L))}$ mit $\Omega = \Omega(K) \sqcup \Omega(L)$. Hierin seien $|K| \subset \mathbb{R}^{(\Omega(K))}$ und $|L| \subset \mathbb{R}^{(\Omega(L))}$ die kanonischen Realisierungen (I2D). Für je zwei Simplizes $S \in K$ und $T \in L$ ist dann $S \sqcup T$ affin unabhängig, wie im Beispiel I5G also $[S] * [T] \xrightarrow{\sim} ([S] * [T])_V = [S \sqcup T]$. Wir erhalten simplexweise $h : |K| * |L| \xrightarrow{\sim} |K * L|$. Nach Konstruktion ist h bijektiv, zudem ein Homöomorphismus auf jedem Simplex, also insgesamt ein Homöomorphismus dank simplizialer Topologie.

Bemerkung I5I. Den $(n+1)$–fachen Join $Z = X_0 * X_1 * \cdots * X_n$ nicht-leerer topologischer Räume $X_0, X_1, \dots, X_n$ können wir iterativ definieren oder direkt durch

$$Z = \left\{ (t_0, x_1, \dots, t_n, x_n) \in [0,1] \times X_0 \times \cdots \times [0,1] \times X_n \;\middle|\; t_0 + \cdots + t_n = 1 \right\} \Big/ \sim .$$

Die Äquivalenzrelation $z \sim z'$ wird wie in I5E definifiert durch die Bedingung: Für jede Koordinate $i = 0, 1, \dots, n$ gilt $t_i = t_i' = 0$ oder ($t_i = t_i'$ und $x_i = x_i'$). Damit gilt:

$$((X_0 * X_1) \cdots * X_n) \cong X_0 * X_1 * \cdots * X_n$$

Diese einheitliche, symmetrische Beschreibung des Joins zeigt mühelos die Kommutativität und die Assoziativität, wie immer bis auf die kanonischen Homöomorphismen.

Auch der affine Join aus I5F verallgemeinert sich wörtlich genauso. Treten leere Räume als Faktoren auf, so werden sie ignoriert; diese Konvention wurde in I5E erklärt.

Auch hier treffen wir einige gute alte Bekannte wieder: Simplizes und Sphären!

$$\begin{aligned}
\{e_0\} * \{e_1\} * \cdots * \{e_n\} &= [e_0, e_1, \dots, e_n] &&= \Delta^n \\
\{\pm e_0\} * \{\pm e_1\} * \cdots * \{\pm e_n\} &= \partial[\pm e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_n] &&\cong \mathbb{S}^n \\
\mathbb{S}^0 * \mathbb{S}^0 * \cdots * \mathbb{S}^0 &\cong \mathbb{S}^n \\
\mathbb{S}^{d_0} * \mathbb{S}^{d_1} * \cdots * \mathbb{S}^{d_n} &\cong \mathbb{S}^{d_0 + d_1 + \cdots + d_n + n}
\end{aligned}$$

§I5b. Topologische Eigenschaften. Die Hausdorff–Eigenschaft ist immer nützlich und spielt auch im Folgenden eine wichtige Rolle. Sie geht bei Quotienten leicht verloren, wie wir aus leidvoller Erfahrung wissen. Das ist auch bei Pushouts oft der Fall:

Beispiel. Sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ mit den Inklusionen $f : A \hookrightarrow X$ und $g : A \hookrightarrow Y$. Der Raum $Z = X \cup_f Y = X \vee_A Y$ ist die Gerade mit doppeltem Ursprung (E2E).

Beispiel. Sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R}_{<0}$ mit den Inklusionen $f : A \hookrightarrow X$ und $g : A \hookrightarrow Y$. Der Raum $Z = X \cup_f Y = X \vee_A Y$ ist die verzweigte Gerade (E2E).

Dies sind zwei berühmte Beispiele für Räume, die lokal euklidisch sind (also lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, hier für $n = 1$), aber dennoch nicht hausdorffsch. Wesentlich besser sieht es aus, wenn wir entlang eines abgeschlossenen Teilraums verheften:

Beispiel. Sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R}_{\leq 0}$ mit den Inklusionen $f : A \hookrightarrow X$ und $g : A \hookrightarrow Y$. Der Raum $Z = X \cup_f Y = X \vee_A Y$ ist hausdorffsch, genauer $Z \cong \mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}\mathrm{i} \subset \mathbb{C}$.

Beispiel. Sei $X = Y = \mathbb{C}$ und $A = [-1, 1]$ mit den Inklusionen $f : A \hookrightarrow X$ und $g : A \hookrightarrow Y$. Der Raum $Z = X \cup_f Y = X \vee_A Y$ ist hausdorffsch, genauer $Z \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. (Skizze!)

Bemerkung. Die zum Pushout genutzte Äquivalenzrelation $\sim$ auf $A \sqcup \bigsqcup_{i \in I} X_i$ ist leicht zu definieren, aber im Allgemeinen schwer auszurechnen. Es ist keineswegs offensichtlich, was die Punkte des Quotientenraumes sind! Fragen wie Trennungseigenschaften sind noch schwerer zu klären. Wir konzentrieren uns daher auf den wichtigen Spezialfall einer Verheftung ($X \leftarrow A \hookrightarrow Y$); hier ist $\alpha_2 : A \hookrightarrow Y$ die Inklusion, und alle Fragen werden lösbar.

Der folgende Satz klärt topologische Eigenschaften, grundlegend und hilfreich:

Satz I5J. *Seien X, Y topologische Räume, $A \subset Y$ abgeschlossen und $f : A \to X$ stetig.*

(1) Die Einschränkung $q|_X : X \hookrightarrow X \cup_f Y$ ist eine abgeschlossene Einbettung.
(2) Die Einschränkung $q|_{Y \smallsetminus A} : Y \smallsetminus A \hookrightarrow X \cup_f Y$ ist eine offene Einbettung.
(3) Genau dann ist $q : X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ abgeschlossen, wenn f abgeschlossen ist.
(4) Sind X, Y Fréchet–Räume (T_1), so auch $X \cup_f Y$. Sind X, Y normal (T_1 & T_4), so auch $X \cup_f Y$; dies impliziert regulär (T_1 & T_3) und hausdorffsch (T_2).
(5) Sei $Y' \subset Y$ ein (offener / abgeschlossener) Teilraum disjunkt zu A, also $Y' \cap A = \emptyset$. Dann ist $q|_{Y'} : Y' \to X \cup_f Y$ eine (offene / abgeschlossene) Einbettung.
(6) Sei $Y' \subset Y$ ein (offener / abgeschlossener) Teilraum, der A umfasst, also $Y' \supset A$. Dies induziert eine (offene / abgeschlossene) Einbettung $X \cup_f Y' \hookrightarrow X \cup_f Y$.
(7) Jede Retraktion $r' : Y' \to Y'$ auf A, also $r'(Y') = A$ und $r'|_A = \mathrm{id}_A$, induziert eine Retraktion $r : X \cup_f Y' \to X \cup_f Y'$ auf $\bar{X} = q(X)$.
(8) Jede Retraktionsdeformation $h' : \mathrm{id}_{Y'} \simeq r' : [0,1] \times Y' \to Y'$ rel A induziert eine Retraktionsdeformation $h : \mathrm{id}_{X \cup_f Y} \simeq r : [0,1] \times (X \cup_f Y) \to (X \cup_f Y)$ rel $\bar{X}$.

Dank (1,2) können wir X und $Y \smallsetminus A$ mit ihrem Bild identifizieren und so als disjunkte Teilräume von $X \cup_f Y = q(X) \cup q(Y \smallsetminus A)$ ansehen, X abgeschlossen und $Y \smallsetminus A$ offen. Im Allgemeinen ist dies keine topologische Summe: Die Anheftung in A ist wesentlich! Dank (4) können wir in allen relevanten Beispielen die Hausdorff–Eigenschaft sicherstellen.

BEWEIS. Beweisen Sie den Satz als Übung! Das ist mühsam aber lehrreich. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **I5J.** Mit q sind auch die Einschränkungen $q|_X$ und $q|_{Y\smallsetminus A}$ stetig. Jede Äquivalenzklasse $z \in Z$ ist entweder $z = \{x\} \sqcup f^{-1}(\{x\})$ für $x \in X$ oder $z = \{y\}$ für $y \in Y \smallsetminus A$. Demnach sind $q|_X$ und $q|_{Y\smallsetminus A}$ injektiv.

(1) Wir zeigen, dass $q|_X$ abgeschlossen ist, das heißt, für $C \subset X$ abgeschlossen ist $q(C) \subset Z$ abgeschlossen in der Quotiententopologie: Da $f : A \to X$ stetig, ist $f^{-1}(C) \subset A$ abgeschlossen in A. Da $A \subset Y$ abgeschlossen, ist $f^{-1}(C) \subset A \subset Y$ abgeschlossen in Y, also auch $q^{-1}(q(C)) = C \sqcup f^{-1}(C)$ in $X \sqcup Y$.

(2) Wir zeigen, dass $q|_{Y\smallsetminus A}$ offen ist, das heißt, für $U \subset Y \smallsetminus A$ offen ist $q(U) \subset Z$ offen in der Quotiententopologie: Es gilt $q^{-1}(q(U)) = U$; dies ist offen in $Y \smallsetminus A$, also auch in Y, und somit in $X \sqcup Y$.

(3) Ist f abgeschlossen, dann auch q: Jede abgeschlossene Menge C in $X \sqcup Y$ ist von der Form $C = C_1 \sqcup C_2$ mit $C_1 \subset X$ abgeschlossen und $C_2 \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist $q(C)$ in $X \cup_f Y$ abgeschlossen, denn $q^{-1}(q(C)) = (C_1 \cup f(C_2)) \sqcup (C_2 \cup f^{-1}(C_1 \cup f(C_2)))$ ist abgeschlossen in $X \sqcup Y$. Ist umgekehrt q abgeschlossen, dann auch f: Jede abgeschlossenen Menge $C \subset A$ ist auch abgeschlossen in $X \sqcup Y$, also ist $q^{-1}(q(C)) = f(C) \sqcup f^{-1}(f(C)$ abgeschlossen in $X \sqcup Y$, und insbesondere $f(C)$ abgeschlossen in X.

(4) Das T_1–Axiom bedeutet: Jeder Punkt $z \in Z$ ist abgeschlossen. In der Quotiententopologie auf Z bedeutet das: Die Urbildmenge $q^{-1}(\{z\}) \subset X \sqcup Y$ ist abgeschlossen. Wir können alle Fälle ausschreiben und nachprüfen: Für $z = \{x\} \sqcup f^{-1}(\{x\})$ mit $x \in X$ ist das Urbild $q^{-1}(\{z\}) = \{x\} \sqcup f^{-1}(\{x\})$ abgeschlossen in $X \sqcup Y$, da X das T_1–Axiom erfüllt und f stetig ist. Für $z = \{y\}$ mit $y \in Y \smallsetminus A$ ist das Urbild $q^{-1}(\{z\}) = \{y\}$ abgeschlossen in $X \sqcup Y$, da Y das T_1–Axiom erfüllt.

Der Satz von Tietze (E5L, E5N) besagt: Genau dann ist Z ein T_4–Raum, wenn sich jede stetige Funktion $g' : Z' \to \mathbb{R}$ von einem abgeschlossenen Teilraum $Z' \subset Z$ fortsetzen lässt zu einer stetigen Funktion $g : Z \to \mathbb{R}$ mit $g|_A = g'$. Sei also $Z' \subset Z$ abgeschlossen und $g' : Z' \to \mathbb{R}$ stetig. Das Urbild $X' = q|_X^{-1}(Z')$ ist abgeschlossen in X, hierauf ist $h' = g' \circ q|_{X'} : X' \to Z' \to \mathbb{R}$ stetig. Da der Raum X normal ist, existiert eine stetige Fortsetzung $h : X \to \mathbb{R}$ mit $h|_{X'} = h'$. Das Urbild $Y' = q|_Y^{-1}(Z')$ ist abgeschlossen in Y. Die stetigen Funktionen $h \circ f : A \to X \to \mathbb{R}$ und $g' \circ q|_{Y'} : Y' \to Z' \to \mathbb{R}$ stimmen auf $A \cap Y'$ überein, definieren also eine stetige Abbildung $k' : A \cup Y' \to \mathbb{R}$ dank Verklebesatz (E1P). Da auch Y normal ist, existiert eine stetige Fortsetzung $k : Y \to \mathbb{R}$ mit $k|_{Y'} = k'$. Die Funktion $(h,k) : X \sqcup Y \to \mathbb{R}$ erfüllt $h \circ f = k|_A$ auf A, induziert also eine stetige Abbildung $g : X \cup_f Y \to \mathbb{R}$ mit $(h,k) = g \circ q$. Nach Konstruktion gilt $g|_{Z'} = g'$.

(5) Die Einschränkung $q|_{Y'} : Y' \xrightarrow{\sim} q(Y') \hookrightarrow X \cup_f Y : y \mapsto \{y\}$ ist ein Homöomorphismus gefolgt von einer Inklusion als topologischem Teilraum. Genau dann ist der Teilraum $q(Y')$ in $X \cup_f Y$ offenen / abgeschlossenen, wenn der Teilraum Y' in Y dies ist.

(6) Die Abbildung $X \sqcup Y' \hookrightarrow X \sqcup Y \twoheadrightarrow X \cup_f Y$ induziert eine stetige Injektion $g : X \cup_f Y' \hookrightarrow X \cup_f Y$. Genau genommen ist $Z' = X \cup_f Y'$ ein Teilraum von $Z = X \cup_f Y$: Jede Äquivalenzklasse $z' \in Z'$ ist entweder $z = \{x\} \sqcup f^{-1}(\{x\})$ für $x \in X$ oder $z = \{y'\}$ für $y' \in Y' \smallsetminus A$, also $Z' \subset Z$. Die Quotiententopologie auf Z' stimmt mit der Teilraumtopologie in Z überein.

(7) Wir setzen $r' : Y' \to Y'$ fort zu $r'' : X \sqcup Y' \to X \sqcup Y'$ mit $x \mapsto x$ für alle $x \in X$. Die stetige Abbildung $q \circ r'' : X \sqcup Y' \to X \cup_f Y'$ erfüllt $q \circ r''|_A = q|_A = q \circ r'' \circ f$ induziert also auf dem Quotienten eine stetige Abbildung $r : X \cup_f Y' \to X \cup_f Y'$. Nach Konstruktion gilt $r \circ q|_X = q \circ r''|_X = q \circ \mathrm{id}_X = q_X$, kurz $r|_{\bar X} = \mathrm{id}_{\bar X}$ Ebenso gilt $r(X \cup_f Y') = q \circ r''(X \sqcup Y') = q(X \sqcup A) = \bar X$.

(8) Das Produkt eines Pushout-Diagramms mit $W = [0,1]$ ist wieder ein Pushout-Diagramm. Dies gilt allgemein für jeden lokal-kompakten Hausdorff–Raum W.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_1} & X \\ {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ Y & \xrightarrow{q_2} & X \cup_f Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [0,1]\times A & \xrightarrow{\mathrm{id}_{[0,1]}\times\alpha_1} & [0,1]\times X \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{[0,1]}\times\alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{[0,1]}\times q_1} \\ [0,1]\times Y & \xrightarrow{\mathrm{id}_{[0,1]}\times q_2} & [0,1]\times(X \cup_f Y) \end{array}$$

Wir setzen $h' : [0,1] \times Y' \to Y'$ rel A fort zu $h'' : [0,1] \times (X \sqcup Y') \to X \sqcup Y'$ rel $X \sqcup A$ mit $(t,x) \mapsto x$ für alle $t \in [0,1]$ und $x \in X$. Wie in (7) induziert dies $h : [0,1] \times (X \cup_f Y') \to (X \cup_f Y')$ auf dem Pushout.

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician.
The devil says: I will give you this powerful machine, it will answer
any question you like. All you need to do is give me your soul:
give up geometry and you will have this marvelous machine.
Sir Michael ATIYAH (1929–2019)

KAPITEL J

Abbildungsgrad auf Sphären und Topologie des $\mathbb{R}^n$

§J0. Einführung und Überblick

Für Analysis, Geometrie und Topologie sind die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ grundlegend. Wir wollen daher einige fundamentale Fragen klären, die zwar leicht zu formulieren sind, aber nur mit Raffinesse zu beantworten. Die naheliegendste hiervon ist: Können zwei euklidische Räume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit $m < n$ homöomorph sein? Allgemeiner: Existiert eine injektive stetige Abbildung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$? „Nein, wohl kaum.“, flüstert unsere Intuition, oder plappert's leichtfertig, doch unser Verstand fordert einen Beweis. Dieses und weitere Ergebnisse sind Ziel dieses Kapitels, hierzu wollen wir die nötigen Techniken entwickeln.

Der Satz $\mathbb{R}^m \ncong \mathbb{R}^n$ für $m < n$ garantiert uns, dass die Dimension n eine topologische Eigenschaft des Raumes $\mathbb{R}^n$ ist. Manche mögen sagen „Das ist doch anschaulich klar!“ Ja, ja, anschaulich ist die Erde eine Scheibe und der Mond aus Käse. Der emphatische Ausruf „Mir ist alles klar!“ beweist rein gar nichts, außer Mangel an Phantasie: Wer kann sich schon alle stetigen Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vorstellen? Wie sollte man so einen Homöomorphismus ausschließen? Die topologische Invarianz der Dimension nutzt ganz wesentlich die Vollständigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gilt er nicht: Wie wir in A1Y gesehen haben, gibt es Homöomorphismen $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^2$ und somit $\mathbb{Q}^m \cong \mathbb{Q}^n$ für $1 \leq m < n$. Mit *diskreter* Topologie gilt übrigens sehr wohl $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ für $1 \leq m < n$ (B2N).

Als Einpunktkompaktifizierung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ erhalten wir die Sphäre $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Jeder Homöomorphismus $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ induziert einem Homöomorphismus $\mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^n$. Sind die Sphären $\mathbb{S}^m$ und $\mathbb{S}^n$ homöomorph, oder allgemeiner homotopieäquivalent? Es stellt sich heraus, dass die letzte Frage leichter anzupacken ist, und dass ihre Antwort eine Vielzahl verwandter Fragen löst. Wir untersuchen daher stetige Abbildungen $\mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ und werden aus ihren Eigenschaften zahlreiche Anwendungen gewinnen.

Dieses Kapitel ist umfangreich und enthält viel Anschauungsmaterial. Daher möchte ich mit dieser Einführung zuerst die Kernideen vermitteln und einen Überblick geben – beides zunächst noch vereinfacht. Im Anschluss erarbeiten wir die notwendigen Details, die für ein tieferes Verständnis und Anwendungen nötig sind. Ich beginne daher mit der Grundidee des Abbildungsgrades und kündige die wichtigsten Ergebnisse an.

§J0a. Der Abbildungsgrad. Eine der grundlegenden Invarianten der Topologie ist der *Abbildungsgrad*: Zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ zählt $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, wie oft f die Sphäre um sich selbst wickelt. Luitzen BROUWER hat diese Invariante 1912 konstruiert, ihre Homotopie-Invarianz bewiesen und hieraus wichtige Anwendungen abgeleitet wie die Invarianz der Dimension, den Brouwerschen Fixpunktsatz, usw.[1]

Homotopie-Invarianz bedeutet folgendes: Sind zwei stetige Abbildungen $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ homotop, so haben sie denselben Abbildungsgrad, kurz: $f \simeq g$ impliziert $\deg(f) = \deg(g)$.

Heinz HOPF zeigte 1927 die Umkehrung:[2] Aus $\deg(f) = \deg(g)$ folgt $f \simeq g$. Die beiden Sätze fassen wir zusammen: Für $n \geq 1$ und $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Modellabbildung

$$\varphi_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} : \big(r\cos(t), r\sin(t), x_2, \dots, x_n\big) \mapsto \big(r\cos(kt), r\sin(kt), x_2, \dots, x_n\big).$$

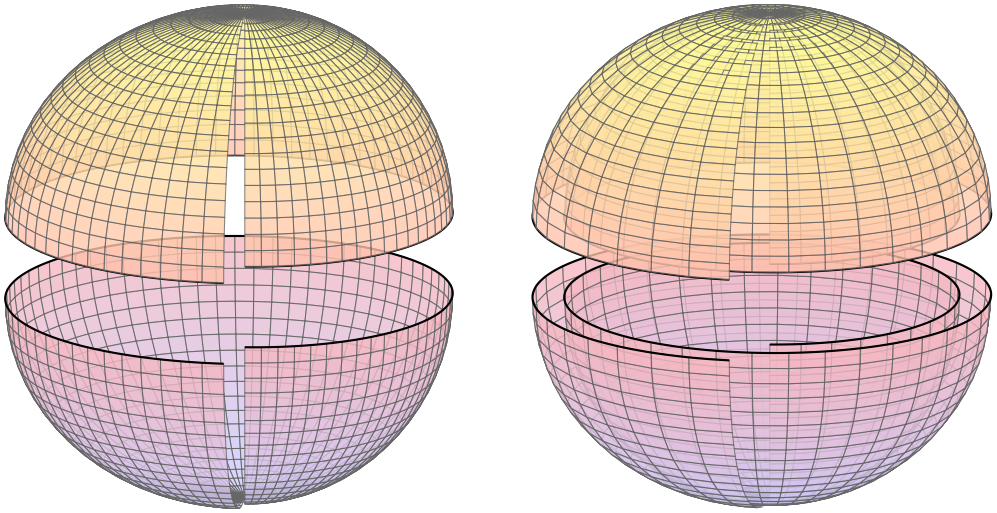


ABBILDUNG J:1. Illustration der Abbildung $\varphi_k : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ für $n = k = 2$

Wir nutzen hier Zylinderkoordinaten: φ_k wickelt die x_0–x_1–Ebene k–mal um den Nullpunkt, die anderen Koordinaten $x_2, \dots, x_n$ bleiben unverändert. Somit gilt $|\varphi_k(x)| = |x|$, durch Einschränkung erhalten wir also die Abbildung $\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ auf der Sphäre. Diese wickelt die n–Sphäre k–mal um sich selbst. Es gilt nun folgendes schöne Ergebnis:

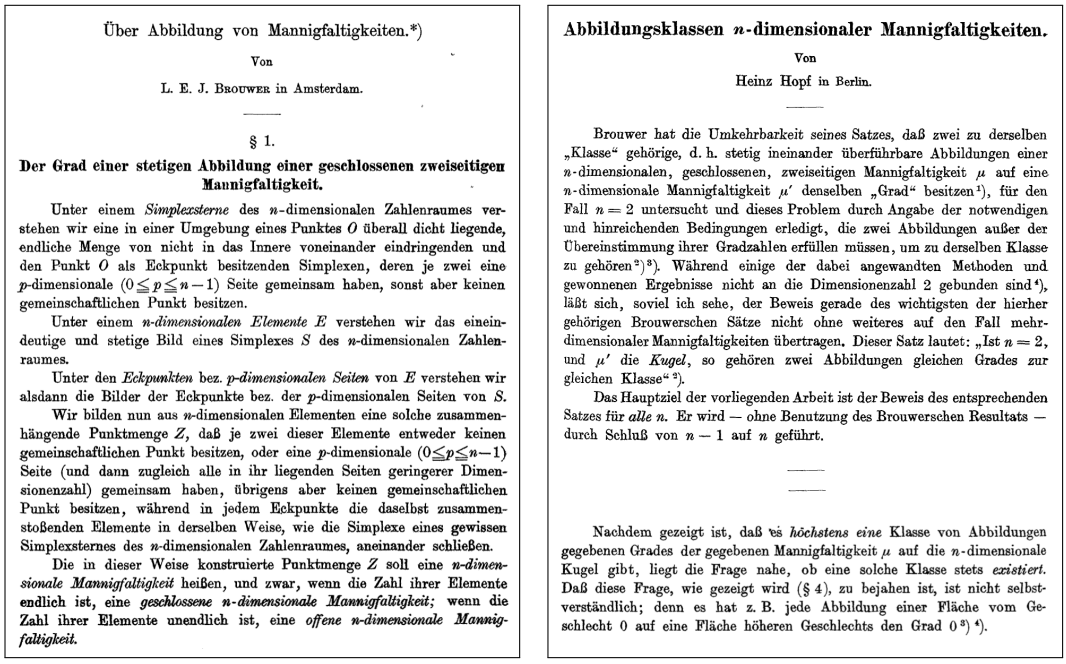
Satz J0A (Brouwer–Hopf)**.** *Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist $\mathbb{Z} \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] : k \mapsto [\varphi_k^n]$ eine Bijektion. Die hierzu inverse Bijektion ist der Abbildungsgrad* $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to \mathbb{Z} : [f] \mapsto \deg(f)$.

Hier ist $[X, Y] = \mathscr{C}(X, Y)/_{\simeq} = \{ [f] \mid f : X \to Y \}$ die Menge aller Homotopieklassen $[f]$ stetiger Abbildungen $f : X \to Y$ (G4H). Die Bijektion $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] : k \mapsto [\varphi_k^n]$ bedeutet: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, wie kompliziert sie auch sein mag, ist homotop zu genau einer unserer Modellabbildungen φ_k^n. Diese Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $f \simeq \varphi_k^n$ heißt der *Abbildungsgrad* von f. Homotopie vereinfacht drastisch und extrahiert das Wesentliche.

[1] L.E.J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71 (1912) 97–115

[2] H. Hopf, *Abbildungsklassen n–dimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 96 (1927) 209–224. Ein elementarer Beweis stammt von H. Whitney, *On maps of an n–sphere into another n–sphere*, Duke Math. J. 3 (1937) 46–50; *On maps of an n–complex into another n–sphere*, Duke Math. J. 3 (1937) 51–55).

Dieser Satz kommt bescheiden daher, entfaltet aber eine erstaunliche Kraft. Er ist die topologische Quintessenz von mehr als einhundertjährigen Bemühungen, den geometrisch-topologischen Gehalt der anschaulichen „Umlaufzahl“ präzise zu fassen. Wichtige Vorläufer sind 1799 Gauß' genialer geometrischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (§J1o), 1831/37 Cauchys Residuenkalkül in der komplexen Analysis (§J1j), und 1869 Kroneckers höherdimensionale Verallgemeinerung.



Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.*)

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

§ 1.

Der Grad einer stetigen Abbildung einer geschlossenen zweiseitigen Mannigfaltigkeit.

Unter einem *Simplexsterne* des n-dimensionalen Zahlenraumes verstehen wir eine in einer Umgebung eines Punktes O überall dicht liegende, endliche Menge von nicht in das Innere voneinander eindringenden und den Punkt O als Eckpunkt besitzenden Simplexen, deren je zwei eine p-dimensionale ($0 \leqq p \leqq n-1$) Seite gemeinsam haben, sonst aber keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen.

Unter einem *n-dimensionalen Elemente* E verstehen wir das eindeutige und stetige Bild eines Simplexes S des n-dimensionalen Zahlenraumes.

Unter den *Eckpunkten* bez. *p-dimensionalen Seiten* von E verstehen wir alsdann die Bilder der Eckpunkte bez. der p-dimensionalen Seiten von S.

Wir bilden nun aus n-dimensionalen Elementen eine solche zusammenhängende Punktmenge Z, daß je zwei dieser Elemente entweder keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, oder eine p-dimensionale ($0 \leqq p \leqq n-1$) Seite (und dann zugleich alle in ihr liegenden Seiten geringerer Dimensionenzahl) gemeinsam haben, übrigens aber keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, während in jedem Eckpunkte die daselbst zusammenstoßenden Elemente in derselben Weise, wie die Simplexe eines gewissen Simplexsternes des n-dimensionalen Zahlenraumes, aneinander schließen.

Die in dieser Weise konstruierte Punktmenge Z soll eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* heißen, und zwar, wenn die Zahl ihrer Elemente endlich ist, eine *geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit;* wenn die Zahl ihrer Elemente unendlich ist, eine *offene n-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Von

Heinz Hopf in Berlin.

Brouwer hat die Umkehrbarkeit seines Satzes, daß zwei zu derselben „Klasse“ gehörige, d. h. stetig ineinander überführbare Abbildungen einer n-dimensionalen, geschlossenen, zweiseitigen Mannigfaltigkeit μ auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ' denselben „Grad“ besitzen[1]), für den Fall $n = 2$ untersucht und dieses Problem durch Angabe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen erledigt, die zwei Abbildungen außer der Übereinstimmung ihrer Gradzahlen erfüllen müssen, um zu derselben Klasse zu gehören[2])[3]). Während einige der dabei angewandten Methoden und gewonnenen Ergebnisse nicht an die Dimensionenzahl 2 gebunden sind[4]), läßt sich, soviel ich sehe, der Beweis gerade des wichtigsten der hierher gehörigen Brouwerschen Sätze nicht ohne weiteres auf den Fall mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten übertragen. Dieser Satz lautet: „Ist $n = 2$, und μ' die *Kugel*, so gehören zwei Abbildungen gleichen Grades zur gleichen Klasse“[2]).

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des entsprechenden Satzes für *alle n.* Er wird — ohne Benutzung des Brouwerschen Resultats — durch Schluß von $n-1$ auf n geführt.

Nachdem gezeigt ist, daß es *höchstens eine* Klasse von Abbildungen gegebenen Grades der gegebenen Mannigfaltigkeit μ auf die n-dimensionale Kugel gibt, liegt die Frage nahe, ob eine solche Klasse stets *existiert.* Daß diese Frage, wie gezeigt wird (§ 4), zu bejahen ist, ist nicht selbstverständlich; denn es hat z. B. jede Abbildung einer Fläche vom Geschlecht 0 auf eine Fläche höheren Geschlechts den Grad 0[3])[4]).

Einleitung zu Brouwers Arbeit von 1912 und zu Hopfs Arbeit von 1927.

§J0b. Dimension 0. In Dimension $n = 0$ ist die Konstruktion des Abbildungsgrades $\deg : [\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0] \to \mathbb{Z}$ simpel: Auf der Menge $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ gibt es nur vier Abbildungen $\mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}^0$; für diese definieren wir $\deg(\pm\mathrm{id}) = \pm 1$ und $\deg(\mathrm{const}^{\pm 1}_{\mathbb{S}^0}) = 0$. Dies ist die *Signatur* (B1s)!

Zu jeder Abbildung $f : X \to X$ einer endlichen Menge X ($\subset \mathbb{R}$) definieren wir

$$\mathrm{sign}(f) = \prod\nolimits_{\{i \neq j\} \subset X} \frac{f(i) - f(j)}{i - j} \quad \in \{\pm 1, 0\}.$$

Es gilt $\mathrm{sign}(f) = 0$, falls f nicht bijektiv ist, und $\mathrm{sign}(f) = \pm 1$, falls f eine gerade / ungerade Permutation ist. Die Abbildung $\mathrm{sign} : X^X \to \{\pm 1, 0\}$ ist multiplikativ, das heißt $\mathrm{sign}(f \circ g) = \mathrm{sign}(f) \cdot \mathrm{sign}(g)$ für alle $f, g : X \to X$, und wird hierdurch charakterisiert: Für $|X| \geq 2$ ist sign die einzige multiplikative Surjektion $(X^X, \circ) \twoheadrightarrow (\{\pm 1, 0\}, \cdot)$.

Die Signatur dient zur Konstruktion der Determinante $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ (B1y) und tritt in vielen ihrer Anwendungen auf: Jede Permutation $f : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$ definiert einen $\mathbb{K}$–linearen Automorphismus $L_f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : e_k \mapsto e_{f(k)}$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sehen wir das Orientierungsverhalten von L_f an der Determinante $\det(L_f) = \mathrm{sign}(f) \in \{\pm 1\}$ (§J7g).

Der Abbildungsgrad $\deg(f)$ stetiger Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist eine topologische Verallgemeinerung und ähnlich grundlegend wie die Signatur $\mathrm{sign}(f)$ von Abbildungen $f : X \to X$ und die Determinante $\det(f)$ linearer Abbildungen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J0c. Dimension 1. der Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ ist besonders anschaulich und leicht zu konstruieren. Dank $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^*$ nutzen wir $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*]$. Für geschlossene Wege $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^*$ erhalten wir die *Umlaufzahl* $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, auch *Windungszahl* genannt. Sie zählt, wie oft der Weg f den Nullpunkt umrundet. Dieser grundlegende Begriff tritt in vielen Zusammenhängen der Mathematik und der Physik auf, zum Beispiel in Cauchys Residuenkalkül für holomorphe Funktionen oder bei der elektromagnetischen Induktion. Allein schon deshalb lohnt es sich, diese Konstruktion ausführlich zu behandeln.

Wir können die Umlaufzahl als Winkelsumme berechnen (§J1g) oder als Arbeitsintegral des Wirbelfeldes (§J1j) oder rein kombinatorisch durch Achsübergänge (§J1k). Jeder dieser Zugänge kann als Definition gewählt werden; anschließend ist die Homotopie-Invarianz nachzuweisen. Jede dieser äquivalenten Sichtweisen hat jeweils ihre eigenen Vorzüge. Achsübergänge sind für den Jordanschen Trennungssatz bequem (J2D) und dienen uns später insbesondere zur Berechnung der Fundamentalgruppe (L4D).

§J0d. Vorgehensweise. Auch in Dimension $n \geq 2$ können wir jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ihren Abbildungsgrad $\deg(f)$ zuordnen und seine Homotopie-Invarianz nachweisen. Für den Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to \mathbb{Z}$ in Dimension $n \geq 2$ setzen sich Aussagen und Beweistechniken von $n = 1$ fort, die Argumente werden allerdings technisch aufwändiger. Didaktisch gesehen bestehen hier drei Wahlmöglichkeiten:

(1) Bei einer ersten Präsentation in der Vorlesung (oder beim ersten Lesen) kann man sich auf den Fall $n = 1$ konzentrieren und nur diesen beweisen. Die hiermit erreichbaren Anwendungen genügen für alles, was wir für Flächen in Kapitel K benötigen.
(2) Die vollständige Konstruktion des Abbildungsgrades in Dimension $n \geq 2$ ist etwas aufwändig, und ihr Kosten-Nutzen-Verhältnis hängt vom Kontext der Vorlesung ab. Am effizientesten gelingt dies in der algebraischen Topologie im Rahmen der Homologie und Homotopie, durch die Berechnung von $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$.
(3) Als Mittelweg können wir die Eigenschaften des Abbildungsgrades für $n = 1$ beweisen, aber ohne Mehrkosten für $n \geq 1$ bereits allgemein formulieren. Mit dieser axiomatischen Einführung können wir frühzeitig die geometrischen Folgerungen in jeder Dimension ernten. Die Beweise dieser Anwendungen sind ohnehin dieselben, der allgemeine Fall scheint mir sogar einfacher und durchsichtiger.

Ich folge dem Mittelweg (3). Den allgemeinen Satz $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ werden wir in diesem Kapitel nur für $n = 1$ beweisen, aber für alle $n \geq 1$ bereits ausgiebig benutzen. Es gibt schöne und elementare Beweise, sie sind geometrisch erhellend, aber doch mühevoll. Es scheint mir effizienter, diesen Satz später aus der Homologie- und Homotopietheorie zu gewinnen. Der Aufbau dieser Maschinerie ist zwar deutlich umfangreicher aber auch lohnender, und die Sätze von Brouwer und Hopf erhalten wir als Spezialfälle gratis!

Für ein erstes Kennenlernen der Topologie des $\mathbb{R}^n$ werde ich den obigen Satz J0A von Brouwer–Hopf als „black box“ verwenden. Etwas versöhnlicher will ich es so sagen: Ich nehme hier einen Kredit auf, der später in der algebraischen Topologie beglichen wird.

§J0e. Erste namhafte Anwendungen des Abbildungsgrades. Als Anwendungen erhalten wir kurze und elegante Beweise für grundlegende geometrisch-topologische Sätze:

Satz J0B (Nicht-Retrahierbarkeit des Randes). *Die Randsphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$ ist kein Retrakt. Allgemein: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $A^\circ \neq \emptyset$, so existiert keine Retraktion $r : A \to \delta A$.*

Satz J0C (Fixpunktsatz von Brouwer, 1909). *Zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ existiert mindestens ein Fixpunkt, das heißt $a \in \mathbb{D}^n$ mit $f(a) = a$.*

Satz J0D (Satz vom gekämmten Igel). *Für tangentiale Vektorfelder auf Sphären gilt:*

(1) Ist n ungerade, so existieren nirgends verschwindende Vektorfelder auf $\mathbb{S}^n$.
(2) Ist n gerade, so hat jedes Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$ mindestens eine Nullstelle.

Der Satz von Borsuk–Ulam gibt ein hinreichendes geometrisches Kriterium dafür, dass eine Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ungeraden Grad hat und somit nicht zusammenziehbar ist:

Satz J0E (Borsuk–Ulam). *Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig und ungerade, das heißt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Dann ist ihr Abbildungsgrad $\deg(f)$ ungerade, insbesondere $f \not\simeq *$.*

Korollar J0F. *Zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert mindestens ein Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$. Insbesondere existiert keine Einbettung $f : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.*

Korollar J0G. *Sei $0 \leq m < n$ in $\mathbb{N}$. Zu $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ offen existiert keine stetige Injektion $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^m$. Insbesondere gilt $U \ncong V$ für $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^m$ offen.*

Satz J0H (Schinkenbrot). *Seien $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Mengen. Dann existiert eine affine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$, mit $\operatorname{vol}_n(A_k \cap H_+) = \operatorname{vol}_n(A_k \cap H_-)$ für alle $k = 1, \dots, n$.*

Satz J0I (Lusternik–Schnirelman). *Sei $\mathbb{S}^n = A_0 \cup \dots \cup A_n$ eine abgeschlossene (offene) Überdeckung, dann enthält mindestens eine der Mengen A_k Antipoden, $A_k \cap (-A_k) \neq \emptyset$.*

Erinnerung: Ein *Gebiet* $U \subset \mathbb{R}^n$ ist offen und wegzusammenhängend, insbesondere $U \neq \emptyset$. Der Abbildungsgrad spielt eine zentrale Rolle für den Jordanschen Trennungssatz:

Satz J0J (Jordan–Brouwer–Trennungssatz). *Für jede Einbettung $f : \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} S \subset \mathbb{R}^n$ hat das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus S = A \sqcup B$ zwei Gebiete, A unbeschränkt und B beschränkt.*

Wir haben die Bijektion $\pi_0(\mathbb{R}^n \setminus S) = \{A, B\} \xrightarrow{\sim} \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg(f - x) \bmod 2$.

Für den Rand gilt $\delta A = \delta B = C$, für den Abschluss also $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$.

Im klassischen Fall von einfach geschlossenen Kurven in der Ebene gilt noch mehr:

Satz J0K (Jordan–Schoenflies). *Für jede Einbettung $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} C \subset \mathbb{R}^2$ hat das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C = A \sqcup B$ zwei Gebiete, wie oben erklärt. Zudem existiert ein Homöomorphismus $h : (\mathbb{R}^2, C) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^1)$, also $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(C) = \mathbb{S}^1$, somit $h(B) = \mathbb{B}^2$, $h(\overline{B}) = \mathbb{D}^2$.*

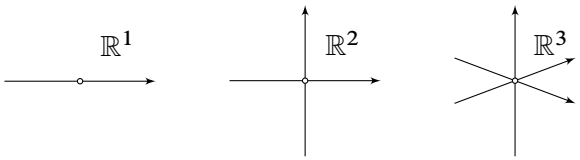
Dies ist ein Paradebeispiel für einen Satz, der leicht zu formulieren aber schwer zu beweisen ist. Zur Vereinfachung werden wir die Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ als polygonal voraussetzen (J2D, J2J). Der Beweis ist dann explizit algorithmisch und entspricht unserer Anschauung.

Als Warnung zum Schluss: In höherer Dimension gilt der Satz von Schoenflies nicht! Es gibt „wilde“ Sphären $\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} S \subset \mathbb{S}^3$, sodass keine Komponente von $\mathbb{S}^3 \setminus S = A \sqcup B$ homöomorph zum offenen Ball $\mathbb{B}^3$ ist, ja nicht einmal zusammenziehbar! Für „zahme“ Sphären jedoch gilt der Satz von Schoenflies in jeder Dimension (J2Z).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J0f. Topologische Invarianz der Dimension. Die $\mathbb{R}$–Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind in $\mathtt{Vec}_{\mathbb{R}}$ nicht-isomorph, das heißt, es gibt keinen $\mathbb{R}$–linearen Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^3$. Das scheint plausibel, bedarf aber eines Beweises: Hierzu entwickelt man die Begriffe *Basis* und *Dimension* eines Vektorraumes und beweist die $\mathbb{R}$*–lineare Invarianz der Dimension*. Hingegen sind die nackten Mengen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ in $\mathtt{Set}$ isomorph, denn es existieren Bijektionen $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^3$: Beide Mengen sind gleichmächtig, enthalten also gleichviele Elemente (B2N).

Wenn wir die Vektorraumstruktur vergessen aber die Topologien auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ behalten, gibt es dann noch einen Unterschied? Oder existiert ein Homöomorphismus $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^3$?



Um $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$ in $\mathtt{Top}$ zu beweisen, sind wir wie folgt vorgegangen (G2D). Wenn wir einen beliebigen Punkt a aus $\mathbb{R}$ entfernen, so ist $\mathbb{R} \smallsetminus \{a\}$ nicht wegzusammenhängend, genauer gilt $\pi_0(\mathbb{R} \smallsetminus \{a\}) = \{\mathbb{R}_{<a}, \mathbb{R}_{>a}\}$. Wenn wir hingegen aus $\mathbb{R}^2$ einen Punkt b entfernen, so ist $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{b\}$ wegzusammenhängend, also $\pi_0(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{b\}) = \{\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{b\}\}$.

Damit wird die Dimension 1 durch eine topologische Eigenschaft des Raumes $\mathbb{R}^1$ charakterisiert: Gäbe es einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$, dann könnten wir $a \in \mathbb{R}$ und $b = f(a)$ wählen und erhielten einen Homöomorphismus $\mathbb{R} \smallsetminus \{a\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{b\}$. Ein solcher Homöomorphismus ist aber aus den genannten Zusammenhangsgründen nicht möglich.

Ähnlich wollen wir auch die Räume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ unterscheiden, indem wir $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{a\}$ und $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{b\}$ betrachten. Hier ist aber der Funktor π_0 nicht das richtige Werkzeug, denn beide Räume sind wegzusammenhängend. Anschaulich gesprochen sind dennoch die Löcher in $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{a\}$ und $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{b\}$ von verschiedenem Typ. Um den Unterschied benennen und beweisen zu können, untersuchen wir, ob etwa eine Schlinge um das Loch herum zusammengezogen werden kann, ohne das Loch zu treffen. Sie vermuten richtig, dass dies in $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{b\}$ immer geht (I4B), aber in $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{a\}$ nicht möglich ist: Wir werden hierzu die *Umlaufzahl* konstruieren. (Diese Idee wird in Kapitel L zum Konzept der Fundamentalgruppe π_1 ausgebaut.) Mithilfe des Abbildungsgrades können wir allgemeiner zeigen:

Satz J0L (topologische Invarianz der Dimension)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^p$ und $V \subset \mathbb{R}^q$ offen und nicht-leer. Wenn ein Homöomorphismus $f : U \xrightarrow{\sim} V$ existiert, dann gilt $p = q$.*

Der Satz garantiert, dass die Dimension p eine Eigenschaft des topologischen Raumes U ist. Insbesondere existiert für $p \neq q$ kein Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$. Die Dimension ist in vielen Beispielen unmittelbar anschaulich. Doch erst ihre Invarianz macht sie zu einem nützlichen Werkzeug: Egal wie man das Beispiel betrachtet, es hat immer dieselbe Dimension. Eine typische Anwendung dieser Art können wir nun beweisen:

Satz J0M (topologische Invarianz der simplizialen Dimension)**.** *Seien K, L Simplizialkomplexe. Existiert ein Homöomorphismus $f : |K| \xrightarrow{\sim} |L|$, so folgt* $\dim K = \dim L$.

Dimension 1 entspricht Graphen, und hier ist die Aussage leicht zu beweisen (I3F). Die Invarianz in höherer Dimension ist schwieriger, aber beruhigend und nützlich.

§J0g. Topologische Invarianz des geometrischen Randes. Der euklidische Halbraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0 \}$ ist das grundlegende Modell einer n–dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand. Sein Rand ist die Hyperebene $\partial\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0 \}$, sein Inneres ist $\operatorname{Int}\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0 \}$. Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ definieren wir ihren *geometrischen Rand* $\partial U := U \cap \partial\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und ihr *geometrisches Innere* $\operatorname{Int} U := U \cap \operatorname{Int}\mathbb{R}^n_{\geq 0}$.

Anschaulich haben Punkte im Inneren $\operatorname{Int} U$ und im Rand ∂U unterschiedliche Umgebungen: Um einen Punkt $a \in \operatorname{Int} U$ können wir uns in jede Richtung ein kleines Stück bewegen und bleiben in U; für $b \in \partial U$ gilt dies nicht. Diese Eigenschaft bleibt offensichtlich erhalten unter $\mathbb{R}$–linearen Isomorphismen, und auch unter Diffeomorphismen.

Der Übergang zu Homöomorphismen ist ein kühner Schritt und verlangt besondere Umsicht, denn die Methoden der linearen Algebra stehen hier nicht mehr zur Verfügung. Der folgende Satz versichert uns, dass unsere Intuition auch topologisch zutrifft. Um einen Punkt $a \in \operatorname{Int} U$ können wir eine kleine Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ legen, die sich nicht zusammenziehen lässt, um $b \in \partial U$ ist dies nicht möglich. Diese topologische Charakterisierung zeigt:

Satz J0N (topologische Invarianz des geometrischen Randes)**.** *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen. Für jeden Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\sim} V$ gilt dann $h(\partial U) = \partial V$ und $h(\operatorname{Int} U) = \operatorname{Int} V$.*

Zusammen mit der Invarianz der Dimension erhalten wir:

Satz J0O. *Seien $U \subset \mathbb{R}^p_{\geq 0}$ und $V \subset \mathbb{R}^q_{\geq 0}$ offen und nicht-leer. Wenn ein Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\sim} V$ existiert, so folgt $p = q$ sowie $h(\partial U) = \partial V$ und $h(\operatorname{Int} U) = \operatorname{Int} V$.*

§J0h. Topologische Invarianz des Gebietes. In Dimension $n = 1$ sind die Invarianz der Dimension und des Randes schöne Übungsaufgaben zum Zwischenwertsatz (G2E), ebenso für die Invarianz des Gebietes. Diese gilt in jeder endlichen Dimension:

Satz J0P (topologische Invarianz des Gebietes)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Jede stetige Injektion $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist offen, also $V = f(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \xrightarrow{\sim} V$ ein Homöomorphismus.*

Bemerkung. Dies ist die topologische Entsprechung des lokalen Umkehrsatzes (C5Q) und eine topologische Besonderheit des Raumes $\mathbb{R}^n$. Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ oder $\ell^p(\mathbb{N})$ zum Beispiel ist der Schiebeoperator $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$ stetig und injektiv, aber nicht offen.

Es gibt weitere wichtige Sätze, die die Offenheit einer Abbildung garantieren:

In der komplexen Analysis ist der Satz von der offenen Abbildung folgende Aussage: Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph (komplex differenzierbar) aber nicht konstant, dann ist f eine offene Abbildung. Reell gilt dies nicht, wie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ zeigt.

Grundlegend für die Funktionalanalysis ist der Satz von der offenen Abbildung (Satz von Banach–Schauder): Sind X und Y Banach–Räume und ist $T : X \to Y$ linear, surjektiv und stetig, dann ist T eine offene Abbildung. (Der Beweis benutzt den Satz von Baire, und Vollständigkeit ist wesentlich. Man beweise den einfachen Fall $\dim Y < \infty$ als Übung.)

Auch die Invarianz des Gebietes können wir von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ausdehnen:

Satz J0Q (topologische Invarianz des Gebietes und des Randes)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen. Jede stetige Injektion $f : (U, \partial U) \to (\mathbb{R}^n_{\geq 0}, \partial\mathbb{R}^n_{\geq 0})$ ist offen, also $V = f(U)$ offen in $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und $f : U \to V$ ein Homöomorphismus. Insbesondere gilt $f(\partial U) = \partial V$ und $f(\operatorname{Int} U) = \operatorname{Int} V$.*

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J1. Die Umlaufzahl ebener Wege

§J1a. Motivation. Wir wollen jedem geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C}^*$, also $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ stetig mit $\gamma(0) = \gamma(1)$, seine *Umlaufzahl* $\deg(\gamma)$ zuordnen. Allgemeiner wollen wir später jeder stetigen Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ ihren *Abbildungsgrad* zuordnen (J3A).

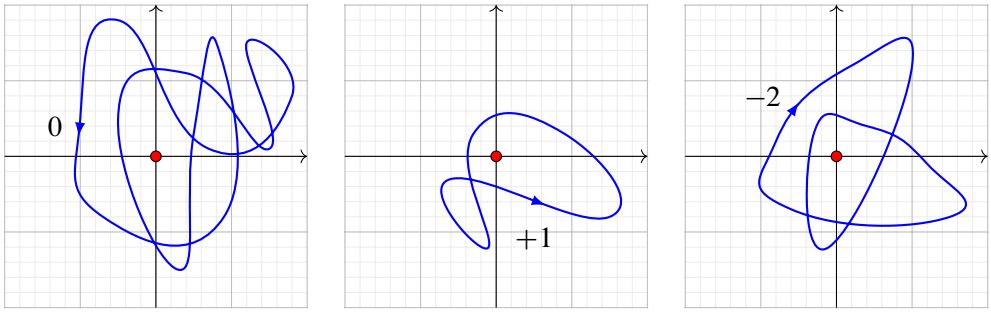


ABBILDUNG J:2. Beispiele zur Motivation der Umlaufzahl

Stetige Abbildungen können unvorstellbar kompliziert sein, das gilt selbst für Wege $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Die schönen glatten Wege aus Abbildung J:2 sind in diesem Sinne allzu optimistisch, man denke an Peano– oder Osgood–Kurven (§C6d). Zur Vereinfachung nutzen wir im Folgenden polygonale Wege, denn diesen sieht man die Umlaufzahl leicht an.

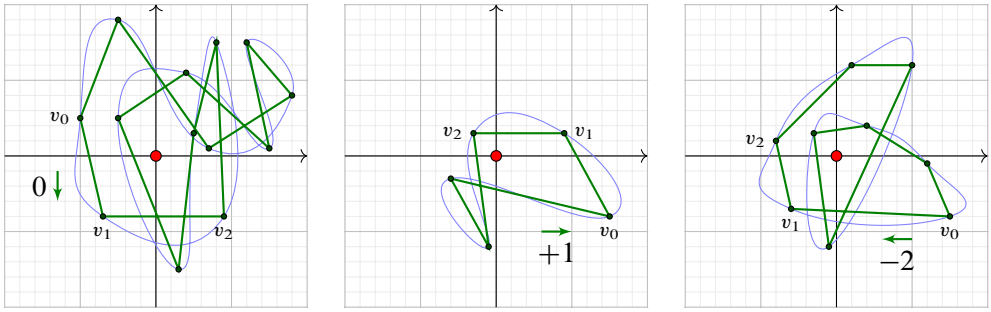


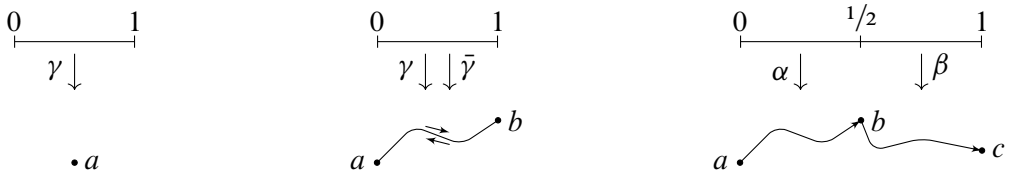
ABBILDUNG J:3. Wir berechnen die Umlaufzahl mit polygonalen Wegen. Die gewählte Unterteilung durch Stützstellen muss hierzu fein genug sein!

§J1b. Vorgehensweise. Die Umlaufzahl ist schön anschaulich und technisch einfach, daher behandeln wir sie in aller Ausführlichkeit mittels polygonaler Approximation.

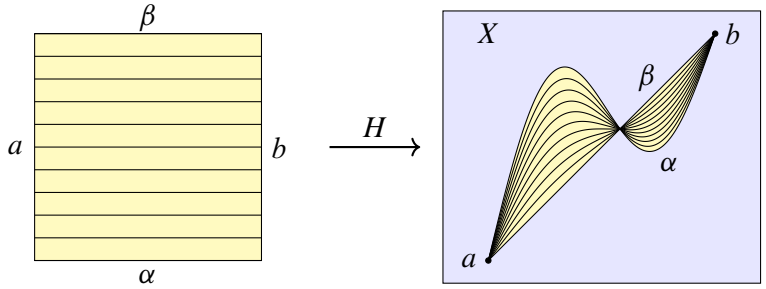
Die grundlegende Eigenschaft der Umlaufzahl von Wegen $\gamma, \tilde\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ ist, dass sie sich nicht ändert unter Homotopie in $\mathbb{C}^*$ (bei festen Endpunkten, ebenso bei geschlossenen Wegen). Daher können wir den gegebenen Weg γ durch einen homotopen Weg $\tilde\gamma$ ersetzen. Bei dieser Gelegenheit wollen wir $\tilde\gamma$ so einfach wie möglich wählen, nämlich polygonal: Konstruktion und Berechnung der Umlaufzahl gelingen dann durch eine einfache Summe (§J1g); allgemeiner für stückweise glatte Wege genügt ein entsprechendes Integral (§J1j).

Wir werden daher als erstes zeigen, dass polygonale Wege tatsächlich alle Homotopieklassen repräsentieren, und zudem Homotopie auf polygonale Homotopie zurückführen. Dies zeigt, dass polygonale Wege ein treues Abbild der allgemeinen Situation sind.

☞ **§J1c. Wege.** Zur Erinnerung (§G2a): Ein *Weg* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$. Zum Beispiel ist jede konstante Abbildung $\mathrm{const}^a_{[0,1]} : [0,1] \to \{a\} \subset X$ ein Weg. Durch $\bar\gamma(t) = \gamma(1-t)$ erhalten wir den zu γ *umgekehrten Weg*. ☜



Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_n : [0,1] \to X$ heißen *verknüpfbar*, wenn $\gamma_k(1) = \gamma_{k+1}(0)$ für $1 \le k < n$ gilt. In diesem Falle definieren wir ihre *Verknüpfung* $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_n : [0,1] \to X$ durch $\gamma(t) = \gamma_k(nt - k + 1)$ für alle $k = 1, \ldots, n$ und $t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Im Fall $n = 1$ ist dies $\gamma = \gamma_1$. Im Fall $n = 2$ ist dies die paarweise Verknüpfung $\gamma_1 * \gamma_2$ aus §G2a.



Zwei Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ von $a = \alpha(0) = \beta(0)$ nach $b = \alpha(1) = \beta(1)$ heißen *homotop*, genauer *homotop in X relativ zu* $\{0,1\}$, wenn es eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ von $H_0 = \alpha$ nach $H_1 = \beta$ gibt mit festem Startpunkt $H_s(0) = a$ und festem Zielpunkt $H_s(1) = b$ für alle $s \in [0,1]$. Wir schreiben hierfür $\alpha \simeq \beta$ rel $\{0,1\}$ oder kurz $\alpha \sim \beta$.

☞ **§J1d. Polygonale Wege.** Im Folgenden sei V ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein Weg $\gamma : [0,1] \to V$ ist *polygonal*, wenn es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ gibt, sodass γ affin interpoliert zwischen den Stützstellen t_k mit Bildpunkten $v_k = \gamma(t_k)$: ☜

$$\gamma(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} v_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} v_k \quad \text{für alle } k = 1, \ldots, n \text{ und } t \in [t_{k-1}, t_k]. \tag{J.1}$$

Somit ist der Weg γ bereits durch die Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und die zugehörigen Eckpunkte $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ festgelegt. Umgekehrt existiert zu jeder Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und Stützstellen $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ genau ein polygonaler Weg γ gemäß (J.1), und nach dem Verklebesatz E1P ist γ stetig. Wir schreiben hierfür kurz

$$\gamma = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \ldots & t_n \\ v_0 & v_1 & \ldots & v_n \end{vmatrix}. \tag{J.2}$$

Hierbei ist $v_{k-1} = v_k$ erlaubt; in diesem Fall ist γ auf dem Intervall $[t_{k-1}, t_k]$ konstant. Die Schreibweise (J.2) erinnert an folgendes: Der Graph $\gamma \subset [0,1] \times V$ ist der Simplizialkomplex mit Eckpunkten (t_k, v_k) und Kanten $[(t_{k-1}, v_{k-1}), (t_k, v_k)]$ für $k = 1, \ldots, n$.

☞ **Beispiele.** Jeder konstante Weg ist polygonal. Ist ein Weg γ polygonal, so auch der inverse Weg $\bar\gamma$. Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ polygonale Wege, so auch ihre Aneinanderhängung $\gamma_1 * \ldots * \gamma_n$. ☜

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§J1e. Polygonale Parametrisierung.** Die Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ des Zeitintervalls $[0,1]$ benötigen wir für die konkrete Parametrisierung von $\gamma : [0,1] \to V$: Sie schreibt vor, zu welchem Zeitpunkt t_k der Punkt v_k erreicht wird und bestimmt so die Geschwindigkeit der Durchlaufung. Die Wahl der Zeitpunkte ist topologisch unerheblich: ☜

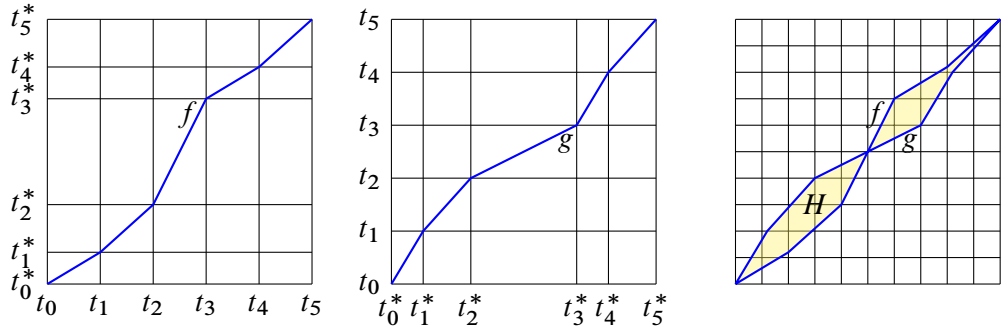


ABBILDUNG J:4. Umparametrisierungen des Intervalls $[0,1]$

☞ **Bemerkung.** Gegeben seien zwei beliebige Unterteilungen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $0 = t_0^* < t_1^* < \cdots < t_n^* = 1$. Dann sind die Abbildungen $f, g : [0,1] \to [0,1]$ mit ☜

$$f = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_n \\ t_0^* & t_1^* & \dots & t_n^* \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad g = \begin{vmatrix} t_0^* & t_1^* & \dots & t_n^* \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{vmatrix}$$

zueinander inverse Homöomorphismen. Zudem gilt $H : f \sim g$ vermöge

$$H_s = \begin{vmatrix} (1-s)t_0 + st_0^* & (1-s)t_1 + st_1^* & \dots & (1-s)t_n + st_n^* \\ (1-s)t_0^* + st_0 & (1-s)t_1^* + st_1 & \dots & (1-s)t_n^* + st_n \end{vmatrix}.$$

Hierbei gilt $H_0 = f$ und $H_1 = g$ sowie $H_{1/2} = \mathrm{id}$, siehe J:4. Jeder Zwischenschritt H_s ist ein Homöomorphismus, denn $H_s \circ H_{1-s} = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Ebenso lassen sich je zwei Wege

$$\gamma = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_n \\ v_0 & v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^* = \begin{vmatrix} t_0^* & t_1^* & \dots & t_n^* \\ v_0 & v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix}$$

umparametrisieren dank $\gamma^* = \gamma \circ g$ und $\gamma = \gamma^* \circ f$. Sie sind homotop vermöge $H : \gamma \sim \gamma^*$,

$$H_s = \begin{vmatrix} (1-s)t_0 + st_0^* & (1-s)t_1 + st_1^* & \dots & (1-s)t_n + st_n^* \\ v_0 & v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix}.$$

☞ **Bemerkung.** Wenn sich keine bessere Unterteilung des Zeitintervalls $[0,1]$ aufdrängt, so wählen wir kanonisch die *äquidistante Unterteilung* $t_k = k/n$ für $k = 0, 1, \dots, n$. Es genügt dann, den Weg γ durch seine Eckpunkte $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ anzugeben, wobei $n \geq 1$. Dies schreiben wir als Folge $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ in V oder unter Weglassung der Klammern und Kommata kurz als Wort $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in V. Hieraus erhalten wir den Weg ☜

$$\gamma = |w| : [0,1] \to V \quad \text{mit} \quad |v_0 v_1 \dots v_n| := \begin{vmatrix} 0/n & 1/n & \dots & n/n \\ v_0 & v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix}.$$

Ausführlich bedeutet das $\gamma(t) = (k - nt)v_{k-1} + (nt - k + 1)v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ und $t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Für $n = 1$ ist $|v_0 v_1|$ der gerade Weg von v_0 nach v_1. Für $n \geq 2$ erhalten wir $|v_0 v_1 \dots v_n| = |v_0 v_1| * \dots * |v_{n-1} v_n|$. Für $n = 0$ vereinbaren wir $\gamma = |v_0 v_0| = \mathrm{const}^{v_0}_{[0,1]}$.

§J1f. Homotopie polygonaler Wege. Polygonale Wege codieren wir kombinatorisch:

Definition J1A. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $X \subset V$ eine Teilmenge.

- Ein *Polygonzug* $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in X ist eine Folge von Punkten $v_0, v_1, \dots, v_n \in X$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $[v_0, v_1], \dots, [v_{n-1}, v_n] \subset X$. Wir nennen w *geschlossen* falls $v_0 = v_n$.
- Für jeden Punkt $v_0 \in X$ ist der *konstante Polygonzug* $w = v_0$ geschlossen.
  Mit $w = v_0 v_1 \dots v_n$ verläuft auch der *umgekehrte Polygonzug* $\bar{w} = v_n \dots v_1 v_0$ in X.
- Polygonzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = v'_0 v'_1 \dots v'_m$ sind *verknüpfbar* falls $v_n = v'_0$.
  In diesem Falle definieren wir ihre *Verknüpfung* $w * w' := v_0 v_1 \dots v_n v'_1 \dots v'_m$.
- Die Äquivalenz $\approx$ von Polygonzügen in X wird erzeugt durch *polygonale Homotopien* $v_0 \dots v_{k-1} v_k v_{k+1} \dots v_n \approx v_0 \dots v_{k-1} v_{k+1} \dots v_n$, wobei $[v_{k-1}, v_k, v_{k+1}] \subset X$ gelte.
- Als Spezialfall vereinbaren wir schließlich $v_0 v_0 \approx v_0$.

Beispiel. Polygonale Homotopie erlaubt insbesondere das Einfügen bzw. Löschen eines Unterteilungspunktes $u \in [v_{k-1}, v_k]$ gemäß $v_0 \dots v_{k-1} v_k \dots v_n \approx v_0 \dots v_{k-1} u v_k \dots v_n$.

Bemerkung. Jeder Polygonzug w in X definiert einen polygonalen Weg $|w| : [0,1] \to X$. Jede polygonale Homotopie $w \approx w'$ induziert eine Homotopie $|w| \sim |w'|$ dieser Wege.

Wir denken hier vor allem an $V = \mathbb{R}^d$ und offene Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^d$. Ebenso interessant sind Polyeder $X \subset \mathbb{R}^{(\Omega)}$, daher fassen wir Definition J1A gleich möglichst allgemein. Auch muss V nicht endlich-dimensional sein, sondern darf ein beliebiger Vektorraum sein.

Die polygonale Darstellung ist sowohl nützlich für Berechnungen als auch hilfreich für die Anschauung: Stetige Abbildungen $\gamma : [0,1] \to X$ können kompliziert sein, jedoch stellen wir uns γ eher glatt oder als Polygonzug vor. Der folgende Satz besagt, dass diese intuitive Vorstellung korrekt ist, zumindest modulo Homotopie in offenen Mengen $X \subset \mathbb{R}^d$.

Satz J1B. *Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ offen, oder allgemeiner: $X \subset V$ werde überdeckt durch konvexe offene Teilmengen $X_i \subset X$. (1) Jeder Weg $\gamma : [0,1] \to X$ ist homotop* rel $\{0,1\}$ *zu einem polygonalen Weg, $\gamma \sim |w| = |v_0 v_1 \dots v_n|$. (2) Genau dann gilt $|w| \sim |w'|$, wenn $w \approx w'$.*

In Worten bedeutet (2): Je zwei polygonale Wege $|w|, |w'| : [0,1] \to X$ sind genau dann homotop in X relativ $\{0,1\}$, wenn die Polygonzüge w, w' in X polygonal homotop sind.

BEWEIS FÜR $X \subset \mathbb{R}^d$ OFFEN. Wir triangulieren $X = |K|$ (I3T) durch affine Simplizes und nutzen simpliziale Approximation für $\gamma : [0,1] \to |K|$ und $H : [0,1] \times [0,1] \to |K|$ (I4J). □

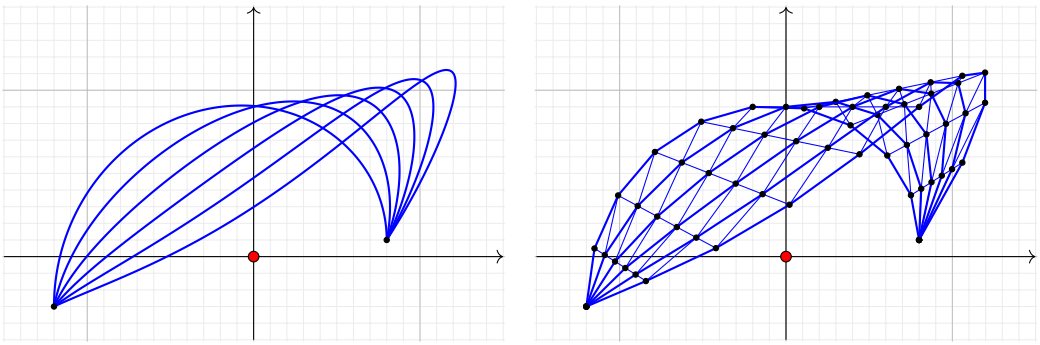


ABBILDUNG J:5. Approximation durch polygonale Wege und Homotopien

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Beispiele.** In unserem zentralen Beispiel $X = \mathbb{C}^*$ überdecken bereits die vier offenen Halbebenen $\mathrm{Re} \gtrless 0$ und $\mathrm{Im} \gtrless 0$. Ist V ein normierter Vektorraum, $K \subset V$ konvex, etwa $K = V$ oder $K = \bar{B}(0,1)$, und $X \subset K$ offen, so wird X überdeckt durch die konvexen offene Bälle $X_i = B_K(x_i, r_i) \subset X$. Dasselbe gilt in jedem lokal-konvexen topologischen Vektorraum V. ☜

Bemerkung. Satz J1B ist trivial für konvexe Teilmengen $X \subset V$. Für $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $X_i \subset X$ offen und konvex gelingt der Beweis leicht durch Unterteilung. Ich führe dies hier aus als Präzisierung und Verallgemeinerung zur simplizialen Approximation.

BEWEIS. Die Menge $X \subset V$ werde überdeckt durch konvexe offene Teilmengen $X_i \subset X$.

(1) Sei $\gamma : [0,1] \to X$ stetig. Zur offenen Überdeckung $[0,1] = \bigcup_{i\in I} \gamma^{-1}(X_i)$ existiert eine Lebesgue–Zahl $1/n$ (F2B). Für $k = 0, 1, \dots, n$ setzen wir $t_k = k/n$ und $v_k = \gamma(t_k)$. Damit gilt $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset X_{i(k)}$ und $[v_{k-1}, v_k] \subset X_{i(k)}$. Der Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ definiert den polygonalen Weg $\hat\gamma = |v_0 v_1 \dots v_n|$. Die Homotopie $H(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s\hat\gamma(t)$ von $H_0 = \gamma$ nach $H_1 = \hat\gamma$ verläuft in X, denn $H([0,1] \times [t_{k-1}, t_k]) \subset X_{i(k)}$.

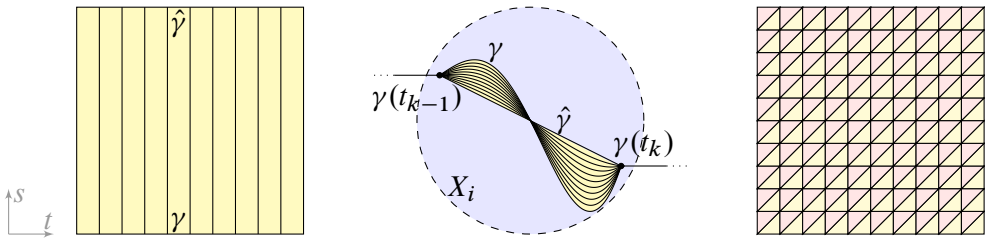


ABBILDUNG J:6. Triangulierung des Quadrats $[0,1]^2$ in $2n^2$ kleine Dreiecke

(2) Seien $\gamma = |u_0 u_1 \dots u_m|$ und $\hat\gamma = |v_0 v_1 \dots v_n|$ polygonale Wege in X. Wenn sie polygonal homotop sind, dann sind sie homotop. Wir haben noch die Umkehrung zu zeigen.

Sei $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ eine Homotopie von γ nach $\hat\gamma$, also $H(0,t) = \gamma(t)$ und $H(1,t) = \hat\gamma(t)$ sowie $H(s,0) = \gamma(0)$ und $H(s,1) = \gamma(1)$ für alle $s,t \in [0,1]$. Zur offenen Überdeckung $[0,1]^2 = \bigcup_{i\in I} H^{-1}(X_i)$ existiert eine Lebesgue–Zahl $\sqrt{2}/N$ (F2B). Hierbei sei N ein gemeinsames Vielfaches von m, n; nach Einfügen von Zwischenpunkten können wir $m = n = N$ annehmen. Wir unterteilen das Quadrat $[0,1]^2$ in $2n^2$ Dreiecke wie in Abbildung J:6: Zu $s_j = j/n$ und $t_k = k/n$ für $j,k = 0,1,\dots,n$ nutzen wir die 2–Simplizes $[(s_j,t_k),(s_j,t_{k+1}),(s_{j+1},t_{k+1})]$ (gelb) und $[(s_j,t_k),(s_{j+1},t_k),(s_{j+1},t_{k+1})]$ (rot).

Wir definieren $\hat H : [0,1] \times [0,1] \to V$ durch $\hat H(s_j,t_k) = H(s_j,t_k)$ für $j,k = 0,1,\dots,n$ und affine Fortsetzung auf jedem der obigen Simplizes Δ. Es gilt $H(\Delta) \subset X_i$ für ein $i \in I$, dank Konvexität also $\hat H(\Delta) \subset X_i$. Somit verläuft $\hat H$ in X, ebenso $(1-r)H + r\hat H$ für $r \in [0,1]$. Nach Konstruktion gilt $\hat H = H$ auf dem Rand $\partial[0,1]^2$, somit ist $\hat H$ eine Homotopie von γ nach $\hat\gamma$ in X. In der obigen Triangulierung lesen wir in jeder Zeile $j = 0,1,\dots,n$ einen polygonalen Weg $\gamma_j = |v_{j0} v_{j1} \dots v_{jn}|$ in X ab. Diese sind polygonal homotop in X:

$$\begin{aligned}
\gamma_j = |v_{j,0} v_{j,1} \dots v_{j,n-1} v_{j,n}| &\approx |v_{j,0} v_{j,1} \dots v_{j,n-1} v_{j,n} v_{j+1,n}| \\
\approx |v_{j,0} v_{j,1} \dots v_{j,n-1} v_{j+1,n}| &\approx |v_{j,0} v_{j,1} \dots v_{j,n-1} v_{j+1,n-1} v_{j+1,n}| \\
\approx \dots &\approx |v_{j+1,0} v_{j+1,1} \dots v_{j+1,n-1} v_{j+1,n}|
\end{aligned}$$

Somit sind die Polygonzüge $u_0 u_1 \dots u_m$ und $v_0 v_1 \dots v_n$ in X polygonal homotop. □

§J1g. Umlaufzahl als Winkelsumme. Für jeden Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in der punktierten Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ können wir seine Umlaufzahl vollkommen elementar berechnen als Summe der Winkelzuwächse. Von Polygonzügen J1A bis zur Klassifikation J1H genügt Schulmathematik, nämlich Trigonometrie und Sorgfalt.

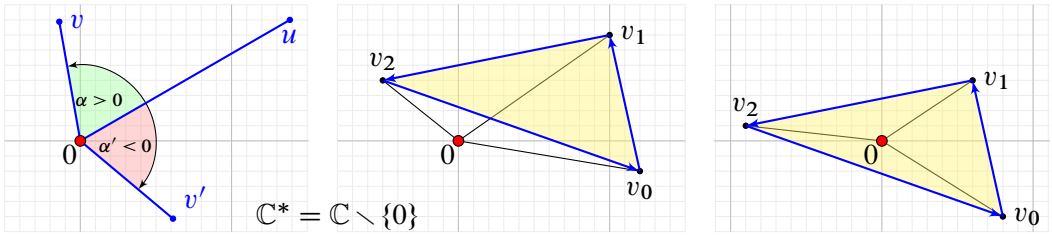


ABBILDUNG J:7. Orientierter Winkel $\sphericalangle(u,v)$ bezüglich des Nullpunktes

Definition J1C. Für $u, v \in \mathbb{C}^*$ mit $v \notin \mathbb{R}_{<0} \cdot u$ definieren wir den *orientierten Winkel*

$$\sphericalangle(u,v) := \alpha \in]-\pi,\pi[\quad \text{durch die Bedingung} \quad \frac{v}{|v|} = e^{i\alpha} \frac{u}{|u|}. \tag{J.3}$$

Jedem Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in $\mathbb{C}^*$ ordnen wir entsprechend die Summe zu:

$$\deg(w) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k) \quad \in \mathbb{R}. \tag{J.4}$$

Jeder Summand ist hierbei wohldefiniert, denn $[v_{k-1}, v_k] \subset \mathbb{C}^*$ garantiert $v_k \notin \mathbb{R}_{<0} \cdot v_{k-1}$. Die Summe $\deg(w)$ nennen wir die *Umlaufzahl* von w um 0, oder auch die *Windungszahl*. Es gilt $\deg(v_0) = 0$ und $\deg(\bar{w}) = -\deg(w)$ sowie $\deg(w * w') = \deg(w) + \deg(w')$.

Bemerkung. In reellen Koordinaten $u = (u_1, u_2)$ und $v = (v_1, v_2)$ bedeutet der Winkel

$$\frac{1}{|v|}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|u|}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Für Skalarprodukt $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$ und Kreuzprodukt $u \times v = u_1 v_2 - u_2 v_1$ folgt

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}, \quad \sin\alpha = \frac{u \times v}{|u| \cdot |v|}.$$

Die erste Gleichung genügt, um den *absoluten Winkel* $|\alpha| \in [0,\pi]$ zu bestimmen; das beruht allein auf dem Skalarprodukt und gelingt genauso in jedem euklidischen Vektorraum. Das *Vorzeichen* entspricht der Orientierung des Winkels wie in J:7 skizziert; dies gelingt tatsächlich nur in der Ebene, wo wir Links- und Rechtsdrehung unterscheiden können.

Beispiel J1D. Ist $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in $\mathbb{C}^*$ geschlossen, also $v_0 = v_n$, so gilt $\deg(w) \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Für $\ell = 0, \dots, n$ setzen wir $\alpha_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$. Per Induktion erhalten wir $v_\ell/|v_\ell| = e^{i\alpha_\ell} v_0/|v_0|$. Im Falle $v_0 = v_n$ gilt $e^{i\alpha_n} = 1$, also $\alpha_n \in \mathbb{Z}2\pi$ und $\deg(w) \in \mathbb{Z}$. □

Beispiel J1E (Baby–Jordan)**.** Sei $\Delta = [v_0, v_1, v_2] \subset \mathbb{C}$ ein Dreieck und $w = v_0 v_1 v_2 v_0$.
(0) Im Falle $0 \notin \Delta$ gilt $\deg(w) = 0$, wie in J:7 skizziert.
(1) Im Falle $0 \in \operatorname{Int}\Delta$ gilt $\deg(w) = \pm 1$, je nach Orientierung.
Im Falle $0 \in \partial\Delta$ läuft w durch 0, und wir können w keine Umlaufzahl zuordnen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J1h. Homotopie-Klassifikation. Wir zeigen nun, dass die Umlaufzahl homotopie-invariant ist. Stärker noch, sie klassifiziert Polygonzüge in $\mathbb{C}^*$ bis auf Homotopie:

Lemma J1F. *Aus polygonaler Homotopie $w \approx w'$ in $\mathbb{C}^*$ folgt* $\deg(w) = \deg(w')$.

BEWEIS. Abbildung J:8 und Beispiel J1E(0): Der Winkelzuwachs ändert sich nicht. □

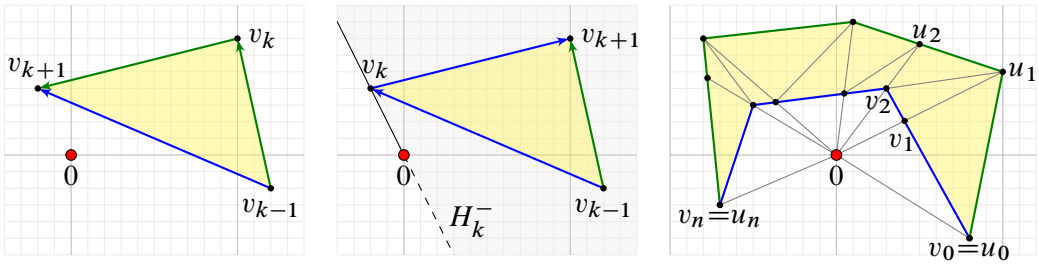


ABBILDUNG J:8. Homotopie-Invarianz, Kürzung und Äquivalenz

Lemma J1G. *Jeder Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in $\mathbb{C}^*$ ist kürzbar bis schließlich alle Winkel $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$ dasselbe Vorzeichen haben (alle positiv, oder negativ, oder null mit $n \le 1$).*

BEWEIS. Gilt $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k) \cdot \sphericalangle(v_k, v_{k+1}) \le 0$ für einen Index $0 < k < n$, dann liegen die Punkte v_{k-1}, v_k, v_{k+1} in derselben Halbebene $H_k^\pm = \{\, r\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\alpha} v_k \mid r \in \mathbb{R}_{>0},\ 0 \le \alpha < \pi \,\}$. Da $H_k^\pm$ konvex ist, folgt $[v_{k-1}, v_k, v_{k+1}] \subset H_k^\pm \subset \mathbb{C}^*$, und wir können v_k löschen. □

Satz J1H. *Seien $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = u_0 u_1 \dots u_m$ zwei Polygonzüge mit gleichem Start $v_0 = u_0$ und gleichem Ziel $v_n = u_m$. Genau dann gilt $w \approx w'$, wenn* $\deg(w) = \deg(w')$.

BEWEIS. „⇒“: Die Homotopie-Invarianz haben wir in J1F festgestellt.

„⇐“: (a) *Kürzen.* Wir kürzen w und w' gemäß J1G. Im Falle $w = w' = v_0$ oder $v_0 v_1$ ist nichts weiter zu zeigen. Wir nehmen daher $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k) > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$ an. Wegen $\deg(w) = \deg(w')$ gilt dann auch $\sphericalangle(u_{k-1}, u_k) > 0$ für alle $k = 1, \dots, m$.

(b) *Unterteilen.* Durch Einfügen von Zwischenpunkten (wie in J:8) erreichen wir $m = n$ und $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k) = \sphericalangle(u_{k-1}, u_k)$ für $k = 1, \dots, n$. Somit gilt $v'_k \in \mathbb{R}_{>0} \cdot v_k$ für $k = 0, 1, \dots, n$.

(c) *Homotopie.* Hieraus erhalten wir folgende $2n$ elementare polygonalen Homotopien:

$$\begin{aligned} w &= v_0 v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n &&\approx v_0 u_1 v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n \\ &\approx v_0 u_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n &&\approx v_0 u_1 u_2 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n \\ &\approx v_0 u_1 u_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n &&\approx v_0 u_1 u_2 u_3 v_3 \dots v_{n-1} v_n \approx \dots \\ &\approx v_0 u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} v_n &&= w' \end{aligned}$$

□

Korollar J1I. *(1) Jeden Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ können wir dank J1B approximieren durch einen Polygonzug w in $\mathbb{C}^*$ mit $\gamma \sim |w|$. Die Zuordnung* $\deg(\gamma) := \deg(w)$ *ist wohldefiniert.*

(2) Seien $\gamma, \gamma' : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ zwei Wege mit gleichem Start $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und gleichem Ziel $\gamma(1) = \gamma'(1)$. Genau dann gilt $\gamma \sim \gamma'$, wenn $\deg(\gamma) = \deg(\gamma')$ *gilt.*

BEWEIS. (1) Für jede andere Wahl w' mit $\gamma \sim |w'|$ folgt $|w| \sim |w'|$, somit $w \approx w'$ dank J1B, also $\deg(w) = \deg(w')$ dank J1F. (2) Wir approximieren $\gamma \sim |w|$ und $\gamma' \sim |w'|$ und erhalten $\deg(\gamma) = \deg(\gamma') \Leftrightarrow \deg(w) = \deg(w') \Leftrightarrow w \approx w' \Leftrightarrow |w| \sim |w'| \Leftrightarrow \gamma \sim \gamma'$. □

§J1i. Die Umlaufzahl für stetige Abbildungen der Kreislinie. Besonders interessant sind geschlossene Polygonzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$, also $v_0 = v_n$. Wir können den Start-Ziel-Punkt $v_0 = v_n$ gemeinsam verschieben, von w zu $w' = a * w * \bar{a}$ mit $a = v'_0 \dots v_0$ in $\mathbb{C}^*$. Die Umlaufzahl ändert sich hierbei nicht: $\deg(w') = \deg(a) + \deg(w') + \deg(\bar{a}) = \deg(w)$.

Die Parametrisierung $[0,1] \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$ induziert $[0,1] /\!\!/ \{0,1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ (E2T). Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^*$ definiert vermöge $\gamma(t) = f(e^{2\pi i t})$ den zugehörigen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$, und umgekehrt. Wir approximieren $\gamma \sim |w|$ relativ $\{0,1\}$ und definieren $\deg(f) := \deg(\gamma) := \deg(w)$. Dies ist invariant unter (freier) Homotopie: Aus $f' \simeq f$ folgt $\gamma' \sim \alpha * \gamma * \bar{\alpha}$ und somit $\deg(f') = \deg(\gamma') = \deg(\gamma) = \deg(f)$.

Bemerkung. Wir haben die Homotopie-Äquivalenz $(\iota, r) : \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^*$ aus G4O, und daher

$$[\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*] \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{C}^*, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*].$$

Gemäß G4T induziert $(\iota, r) : \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^*$ die Bijektion $(\iota_*, r_*) : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*]$ vermöge $\iota_* : [f] \mapsto [\iota \circ f]$ und $r_* : [g] \mapsto [r \circ g]$. Ebenso entstehen die weiteren Bijektionen.

Zu jedem $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Modellabbildung

$$\varphi_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^k \quad \text{also} \quad (\cos t, \sin t) \mapsto (\cos(kt), \sin(kt)).$$

Anschaulich wickelt φ_k die Kreislinie k–mal um sich selbst. Hierbei ist $\varphi_1(z) = z$ die Identität, $\varphi_0(z) = 1$ konstant, $\varphi_{-1}(z) = \bar{z}$ die Spiegelung an der x–Achse, also die komplexe Konjugation. Als Zusammenfassung unserer Konstruktion der Umlaufzahl erhalten wir:

Satz J1J (Umlaufzahl)**.** *Die Umlaufzahl (alias der Abbildungsgrad in Dimension* 1*) stiftet folgende Bijektion:*

$$[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \underset{\varphi_k \hookleftarrow k}{\overset{\deg}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathbb{Z}$$

Mit anderen Worten: Zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ existiert genau eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$, für die $f \simeq \varphi_k$ gilt. Diese Zahl k ist der *Abbildungsgrad* von f.

BEWEIS. (1) Für $k \in \mathbb{Z}$ zeigen wir $\deg(\varphi_k) = k$: Wir approximieren $\varphi_k \sim |v_0 v_1 \dots v_{4k}|$ durch $v_j = \varphi_k(e^{2\pi i j/4k}) = 1, i, -1, -i, 1, \dots$ und lesen die Umlaufzahl $\deg(\varphi_k) = k$ ab.

(2) Für $\deg(\gamma) = \deg(\gamma')$ zeigen wir $\gamma \sim \gamma'$: Wir approximieren $\gamma \sim |w|$ und $\gamma' \sim |w'|$, und erhalten $\deg(\gamma) = \deg(\gamma') \Leftrightarrow \deg(w) = \deg(w') \Leftrightarrow w \approx w' \Leftrightarrow |w| \sim |w'| \Leftrightarrow \gamma \sim \gamma'$.

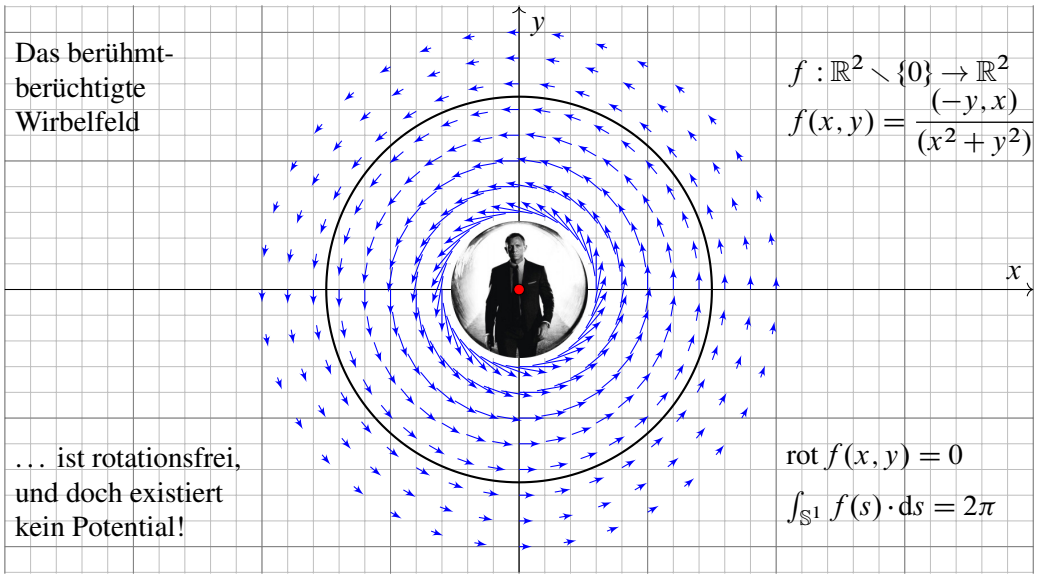
Somit ist $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ sowohl (1) surjektiv als auch (2) injektiv. Alternativ als Komposition: Es gilt (1) $k \mapsto [\varphi_k] \mapsto k$ sowie (2) $[f] \mapsto k \mapsto [\varphi_k] = [f]$ dank $\varphi_k \sim f$. □

Bemerkung. Stetige Abbildungen können unvorstellbar kompliziert sein, die Bijektion $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ hingegen ist einfach und übersichtlich. Sie ist anschaulich plausibel, aber geometrische Intuition ersetzt leider keinen Beweis. Wie unpräzise unsere Intuition sein kann, zeigt folgende Überlegung: Wenn wir überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$ ersetzen, dann gelten obige Aussagen nicht mehr (J1Y). Schon der ebenso anschauliche Zwischenwertsatz bricht zusammen (C3T). Letztendlich beruhen all unsere Argumente auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, hier in Form lokaler Kompaktheit (J1B) für den Übergang von beliebigen zu polygonalen Wegen und Homotopien. Alles weitere ist dann elementar: Wie eingangs angekündigt genügt Schulmathematik für die Berechnung von Winkeln und Umlaufzahlen sowie für die Klassifikation bis auf polygonale Homotopie: Trigonometrie und Sorgfalt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§J1j. Berechnung der Umlaufzahl als Integral.** Unsere Konstruktion der Umlaufzahl $\deg(w) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$ ist die diskrete Formulierung der Cauchy–Indexformel aus der Funktionentheorie. Dort betrachtet man stückweise stetig differenzierbare Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ und definiert die Umlaufzahl durch das Integral ☜

$$\deg(\gamma) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{t=a}^{b} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{J.5}$$



Das Vektorfeld f ist rotationsfrei, hat aber keine Stammfunktion, da das Arbeitsintegral längs jedes Kreises um 0 den Wert 2π ergibt. Auf der Halbebene $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ hingegen besitzt f die Stammfunktion $F(x,y) = \arctan(y/x)$, und entsprechend gedreht auf jeder offenen Halbebene. Demnach misst das Wegintegral den zurückgelegten Winkel:

$$\deg(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=a}^{b} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{t=a}^{b} \frac{\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{J.6}$$

☞ **Übung J1K.** Zeigen Sie für jeden (geschlossenen) polygonalen Weg $\gamma = |w|$, dass die Integrale (J.5) und (J.6) tatsächlich die oben definierte Umlaufzahl $\deg(\gamma)$ ergeben. *Zusatz:* Liegt der Weg $\gamma(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$ bereits in Polarkoordinaten vor, so ist alles besonders leicht. ☜

✻ **J1K.** Wir zerlegen das komplexe Integral (J.5) in Real- und Imaginärteil:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{t=a}^{b}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{t=a}^{b}\frac{\gamma'(t)\bar\gamma(t)}{|\gamma(t)|^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{t=a}^{b}\frac{\gamma_1(t)\gamma_1'(t)+\gamma_2(t)\gamma_2'(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)} + \mathrm{i}\frac{\gamma_1(t)\gamma_2'(t)-\gamma_2(t)\gamma_1'(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Der Realteil hat $\ln|\gamma|$ als Stammfunktion; dieses Wegintegral verschwindet also für jeden geschlossenen Weg. Der Imaginärteil liefert gerade das Integral (J.6). Aus der Stammfunktion $F(x,y) = \arctan(y/x)$ auf U folgt für jeden Weg $\gamma = |uv|$ in U die Gleichheit $\int_\gamma f\,\mathrm{d}\gamma = \sphericalangle(u,v)$. Dies gilt nach Drehung allgemein für jedes Geradensegment $[u,v] \subset \mathbb{C}^*$. Hieraus folgt für $\gamma = |v_0 v_1 \dots v_n|$ die Gleichheit $\int_\gamma f\,\mathrm{d}\gamma = \sum_{k=1}^{n}\sphericalangle(v_{k-1},v_k)$.

In Polarkoordinaten gilt $\int_a^b \gamma'(t)/\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b r'(t)/r(t) + \mathrm{i}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \big[\ln r(t) + \mathrm{i}\varphi(t)\big]_a^b$. Der Imaginärteil zählt die Winkeländerung. Für geschlossene Wege gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, also $r(a) = r(b)$ und $\varphi(b) = \varphi(a) + 2\pi k$.

Die Integrale (J.5) und (J.6) sind invariant unter Homotopien in $\mathbb{C}^*$, da *lokal* eine Stammfunktion existiert (L5I). Alternativ folgt dies aus $\operatorname{rot}(f) = 0$ und den Integralsätzen (Stokes, Green, Gauß, Cauchy).

§J1k. Berechnung der Umlaufzahl durch Achsübergänge. Neben Winkelsumme J1C und Integral J1K gibt es eine dritte nützliche Möglichkeit, die Umlaufzahl zu berechnen: Wir zählen orientierte Achsübergänge, mathematisch positiv oder negativ, wie folgt.

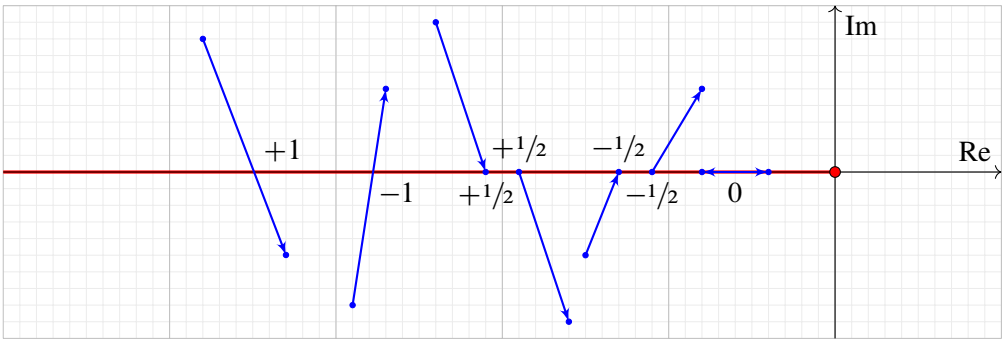


ABBILDUNG J:9. Anzahl der Übergänge über die negative reelle Achse

Definition J1L. Für jede Kante $[u,v] \subset \mathbb{C}^*$ definieren wir (inspiriert durch Abbildung J:9)

$$\eta(u,v) := \begin{cases} 0 & \text{falls } [u,v] \cap \mathbb{R}_{<0} = \emptyset, \\ \frac{1}{2}\big[\operatorname{sign}\operatorname{Im}(u) - \operatorname{sign}\operatorname{Im}(v)\big] & \text{falls } [u,v] \cap \mathbb{R}_{<0} \neq \emptyset. \end{cases} \tag{J.7}$$

Jedem Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in $\mathbb{C}^*$ ordnen wir entsprechend die Summe zu:

$$\eta(v_0 v_1 \dots v_n) := \sum_{k=1}^{n} \eta(v_{k-1}, v_k). \tag{J.8}$$

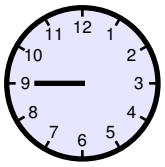
Beispiel. Wir betrachten ein Dreieck $\Delta = [v_0, v_1, v_2]$ und den Polygonzug $w = v_0 v_1 v_2 v_0$ längs des Randes: Im Falle $0 \notin \Delta$ gilt $\eta(w) = 0$. Im Falle $0 \in \operatorname{Int}\Delta$ gilt $\eta(w) = \pm 1$.

Wie mit der Winkelsumme können wir auch mit η die Umlaufzahl für geschlossene Polygonzüge konstruieren und alle Eigenschaften nachweisen. (Versuchen Sie dies als Übung! Siehe L4D.) Da wir diese Arbeit bereits verrichtet haben, zeigen wir direkt die Gleichheit:

Satz J1M. *Für jeden geschlossenen Polygonzug w in $\mathbb{C}^*$ gilt $\eta(w) = \deg(w) \in \mathbb{Z}$.*

BEWEIS. Zeigen Sie diese Gleichheit als Übung! □

✻ **J1M.** Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ mit $v_0 = v_n = 1$, notfalls multiplizieren wir mit v_0^{-1}. Für $\ell = 0, \dots, n$ setzen wir $\alpha_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$ und $\eta_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} \eta(v_{k-1}, v_k)$. Per Induktion gilt $\alpha_\ell \in]2\pi\eta_\ell - \pi, 2\pi\eta_\ell + \pi[$. Schließlich haben wir $\alpha_n \in \mathbb{Z}2\pi$ und $\eta_n \in \mathbb{Z}$, also $\alpha_n = 2\pi\eta_n$. Das bedeutet $\eta(w) = \frac{1}{2\pi}\alpha_n = \deg(w)$.



Als bildhafte Analogie beobachten wir eine Analoguhr: Wie viele Tage und Nächte vergehen? Wir können dies messen, indem wir die Winkeländerung des Stundenzeigers aufsummieren bzw. integrieren. Ist das Endergebnis eine ganze Zahl, so genügt es, nur die Übergänge des Stundenzeigers über 12 Uhr zu zählen, oder 6 Uhr oder 9 Uhr oder jede andere Stelle.

Bemerkung. Statt Übergänge über die negative reelle Achse $\mathbb{R}_{<0}$ können wir ebenso gut die positive reelle Achse $\mathbb{R}_{>0}$ betrachten, oder allgemein η_s für jede Achse $\mathbb{R}_{>0} \cdot s$ mit $s \in \mathbb{S}^1$. Auch gewichtete Summen sind möglich, wie zum Beispiel $\bar{\eta}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_{e^{2\pi i k/n}}$. Für $n \to \infty$ erhalten wir die kontinuierliche Winkelmessung, denn $\bar{\eta}_n(u,v) \to \sphericalangle(u,v)/2\pi$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J1l. Berechnung der Umlaufzahl durch Sturm–Ketten. Die Umlaufzahl lässt sich leicht berechnen für *polygonale* Wege (J2M). Wir wollen die Berechnung auf *stückweise polynomielle* Wege ausdehnen (J1S). Die raffinierte reell-algebraische Methode geht zurück auf Augustin-Louis CAUCHY (1789–1857) und Charles François STURM (1803–1855).

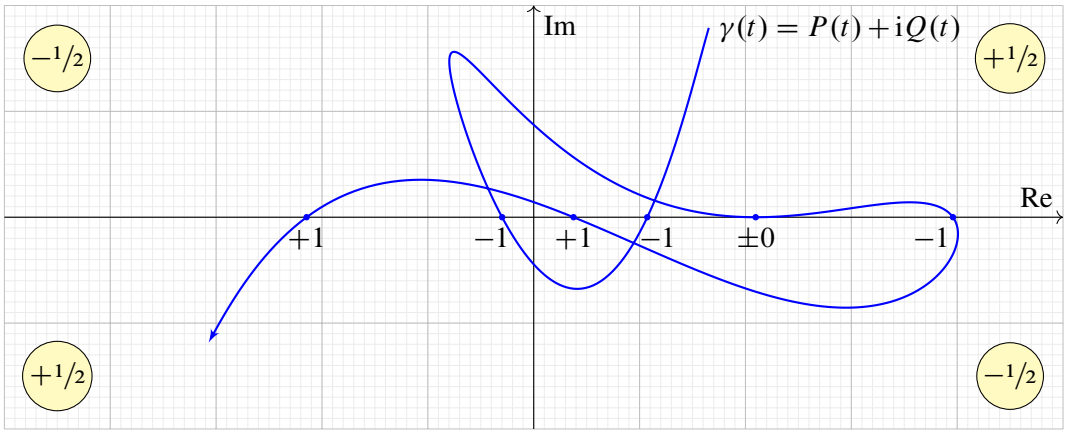


ABBILDUNG J:10. Umlaufzahl eines polynomiellen Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$

Definition J1N. Der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto P(t) + iQ(t)$ sei gegeben durch Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[t]$ ohne gemeinsame Nullstelle in $[a,b]$. Ein Achsübergang $\gamma(s) \in \mathbb{R}$ entspricht einer Nullstelle $Q(s) = 0$ des Imaginärteils. Hierzu existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $P(t)Q(t)$ konstantes Vorzeichen hat für alle $t \in [s-\varepsilon, s[$ und ebenso für alle $t \in]s, s+\varepsilon]$: Wir setzen

$$\operatorname{Ind}_s^{\pm}(P:Q) := \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{sign}[(PQ)(s \pm \varepsilon)] & \text{falls } Q(s) = 0, \\ 0 & \text{falls } Q(s) \neq 0. \end{cases}$$

Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ definieren wir den *Cauchy–Index* auf dem Intervall $[a,b]$ durch

$$\operatorname{Ind}_a^b(P:Q) := \operatorname{Ind}_a^+(P:Q) - \operatorname{Ind}_b^-(P:Q) + \sum_{s \in]a,b[} \operatorname{Ind}_s^+(P:Q) - \operatorname{Ind}_s^-(P:Q). \tag{J.9}$$

Diese Summe ist wohldefiniert, da hierzu nur endlich viele Punkte $s \in [a,b]$ beitragen. In den degenerierten Fällen $P = 0$ oder $Q = 0$ erhalten wir automatisch $\operatorname{Ind}_a^b(P:Q) = 0$. Für $b < a$ setzen wir $\operatorname{Ind}_a^b(P:Q) := -\operatorname{Ind}_b^a(P:Q)$, für $a = b$ schließlich $\operatorname{Ind}_a^a(P:Q) := 0$.

Bemerkung. Damit gilt $\operatorname{Ind}_a^b(P:Q) + \operatorname{Ind}_b^c(P:Q) = \operatorname{Ind}_a^c(P:Q)$ für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$. Wir können daher Definition (J.9) auf stückweise polynomielle Wege γ fortsetzen.

Für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(t) = P(t) + iQ(t)$ gilt dank J1M

$$\deg(\gamma) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Ind}_a^b(P:Q). \tag{J.10}$$

Der Faktor $1/2$ dient hier zur Normierung, denn wir zählen Übergänge von γ sowohl über die negative Halbachse $\mathbb{R}_{<0}$ als auch die positive Halbachse $\mathbb{R}_{>0}$. Mit (J.10) haben wir die geometrische Situation algebraisch formuliert. Sturm entdeckte 1835, wie man den Cauchy–Index $\operatorname{Ind}_a^b(P:Q)$ durch einfache Polynomdivision effizient berechnen kann (J1S).

Satz J1O (Inversionsformel)**.** *Für $P,Q\in\mathbb{R}[t]$ ohne gemeinsame Nullstellen in $[a,b]$ gilt*

(J.11) $\operatorname{Ind}_a^b(P:Q)+\operatorname{Ind}_a^b(Q:P)=V_a^b(P,Q):=\frac12\operatorname{sign}P(b)Q(b)-\frac12\operatorname{sign}P(a)Q(a).$

BEWEIS. Wir dürfen $a<b$ und $P,Q\in\mathbb{R}[t]^*$ annehmen, und dass $[a,b]$ höchstens eine Nullstelle von P oder Q enthält, denn Gleichung (J.11) ist additiv bei Unterteilung.

Enthält $[a,b]$ keine Nullstelle von P oder Q, so gilt $\operatorname{Ind}_a^b(P:Q)=\operatorname{Ind}_a^b(Q:P)=0$. Dank Zwischenwertsatz haben P und Q auf $[a,b]$ konstantes Vorzeichen, $V_a^b(P,Q)=0$.

Angenommen, $[a,b]$ enthält genau eine Nullstelle s. Nach Unterteilung bzw. Symmetrie $t\mapsto a+b-t$ können wir $s=a$ annehmen. Da Gleichung (J.11) symmetrisch in P und Q ist, können wir $Q(a)=0$ annehmen. Somit gilt $P\neq0$ auf $[a,b]$, also $\operatorname{Ind}_a^b(Q:P)=0$. Zudem gilt $Q\neq0$ auf $]a,b]$. Dank Zwischenwertsatz haben P, Q und PQ konstantes Vorzeichen auf $]a,b]$, also gilt $\operatorname{Ind}_a^b(P:Q)=\operatorname{Ind}_a^+(P:Q)=\frac12\operatorname{sign}P(b)Q(b)=V_a^b(P,Q)$. □

Definition J1P. Eine Folge von Polynomen $(S_0,S_1,\dots,S_n)$ in $\mathbb{R}[t]$ heißt *Sturm–Kette* auf dem Intervall $[a,b]\subset\mathbb{R}$, wenn sie die folgende *Sturmsche Vorzeichenregel* erfüllen:

(J.12) Gilt $S_k(t)=0$ für ein $t\in[a,b]$ und $0<k<n$, so folgt $S_{k-1}(t)S_{k+1}(t)<0$.

Im Sonderfall $n=1$ fordern wir nur, dass S_0 und S_1 keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Satz J1Q. *Für jede Sturm–Kette $(S_0,S_1,\dots,S_n)$ auf $[a,b]$ ergibt die Inversionsformel:*

(J.13) $\operatorname{Ind}_a^b(S_1:S_0)+\operatorname{Ind}_a^b(S_{n-1}:S_n)=V_a^b(S_0,\dots,S_n):=\sum_{k=1}^n V_a^b(S_{k-1},S_k)$.

BEWEIS. Für $n=1$ ist dies die Inversionsformel (J.11). Für $n=2$ ergibt diese:

$$\operatorname{Ind}_a^b(S_1:S_0)+\operatorname{Ind}_a^b(S_0:S_1)+\operatorname{Ind}_a^b(S_2:S_1)+\operatorname{Ind}_a^b(S_1:S_2)=V_a^b\big(S_0,S_1,S_2\big).$$

Dies ist eine Teleskopsumme: Beiträge der beiden mittleren Indizes entstehen in Nullstellen von S_1, aber dort haben die beiden Nachbarn S_0 und S_2 entgegengesetzte Vorzeichen dank (J.12), also löschen sich diese Beiträge paarweise aus. Per Induktion über n folgt (J.13). □

Auf $P,Q\in\mathbb{R}[t]^*$ wenden wir den euklidischen Algorithmus an: Wir setzen $P_0=Q$ und $P_1=P$. Iterierte Polynomdivision $P_{k-1}=Q_kP_k-P_{k+1}$ (mit diesem Vorzeichen) liefert Quotienten $Q_1,\dots,Q_n\in\mathbb{R}[t]$ und Reste $P_2,\dots,P_{n+1}\in\mathbb{R}[t]$ mit $\deg P_{k+1}<\deg P_k$ für $k=1,2,\dots,n$, bis $P_{n+1}=0$ und $P_n=\text{const}\cdot\operatorname{ggT}(P_0,P_1)$: Das letzte Polynom $P_n\neq0$ teilt alle vorhergehenden $P_{n-1},\dots,P_1,P_0$, und jeder Teiler von P_0,P_1 teilt $P_2,\dots,P_n$.

Definition J1R. Zu (P,Q) definieren wir so die *euklidische Kette* $(S_0,S_1,\dots,S_n)$ durch $S_k:=P_k/P_n\in\mathbb{R}[t]^*$ für $k=0,\dots,n$. Wir erhalten den gekürzten Bruch $P/Q=S_1/S_0$ sowie die Kette $S_{k-1}=Q_kS_k-S_{k+1}$ mit $S_n=\operatorname{ggT}(S_0,S_1)=1$.

Satz J1S. *Zu $P,Q\in\mathbb{R}[t]^*$ ist die euklidische Kette $(S_0,S_1,\dots,S_n)$ eine Sturm–Kette und*

(J.14) $$\operatorname{Ind}_a^b(S_1:S_0)=V_a^b\big(S_0,S_1,\dots,S_n\big)$$

Haben P,Q keine gemeinsamen Nullstellen auf $[a,b]$, so gilt $\operatorname{Ind}_a^b(P:Q)=\operatorname{Ind}_a^b(S_1:S_0)$. Damit können wir den Cauchy–Index effektiv berechnen, und dank J.10 auch die Umlaufzahl $\deg(\gamma)$ jedes stückweise polynomiellen, geschlossenen Weges $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}^*$.

BEWEIS. Je zwei benachbarte Polynome S_{k-1} und S_k dieser Kette haben keine Nullstelle gemein dank $\operatorname{ggT}(S_{k-1},S_k)=S_n=1$. Aus $S_{k-1}=Q_kS_k-S_{k+1}$ und $S_k(t)=0$ folgt $S_{k-1}(t)=-S_{k+1}(t)$, also $S_{k-1}(t)S_{k+1}(t)<0$. Somit folgt (J.14) aus Satz J1Q. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§J1m. Der Fundamentalsatz der Algebra.** Eine berühmte und wichtige Anwendung: ☜

Satz J1T (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Zu jedem Polynom* $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ *mit* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ *existieren Nullstellen* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *sodass* $F(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$.

Dank Polynomdivision genügt es, *eine* Nullstelle $z_n \in \mathbb{C}$ mit $F(z_n) = 0$ zu finden. Das anschauliche Argument vorweg: Sei $n \geq 1$ und $c_n \neq 0$. Zum Radius $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachten wir $\gamma_r : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} : s \mapsto F(rs)$. Für große r dominiert der Term $r^n s^n$, und so umläuft γ_r den Nullpunkt n mal. Für kleine r dominiert der konstante Term c_n, und so umläuft γ_r den Nullpunkt keinmal. Nun sind alle γ_r untereinander homotop, aber in $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ kann sich die Umlaufzahl nicht ändern. Also muss F mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ haben. Nun genauer:

☞ **Übung J1U.** Zu $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ mit $c_n \neq 0$ definieren wir ☜

$$H : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} : (t,z) \mapsto \begin{cases} t^n F(z(1-t)/t) & \text{für } t > 0, \\ z^n & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

(1) Die Abbildung H ist ein Polynom in t und z und somit stetig.
(2) Hat F keine Nullstellen in $\mathbb{C}$, so gilt $H : z^n \simeq * \text{ in } \mathbb{C}^*$, also $n = 0$.

Per Induktion über n folgt: Es existieren $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ sodass $F(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$. Das beweist Satz J1T. Es kommt noch viel besser: Wir können alle Nullstellen lokalisieren!

(3) Sind $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ geschlossene Wege, so auch ihr punktweises Produkt $\gamma = \alpha \cdot \beta : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)$, und es gilt $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.
(4) Sei $R = [a,b,c,d] \subset \mathbb{C}$ ein Rechteck und $\gamma = |a,b,c,d,a|$ der positiv orientierte Randweg. Hat F keine Nullstellen auf dem Rand ∂R, so gilt

$$\deg(F \circ \gamma) = \sharp\{ k \mid z_k \in R^\circ \}. \tag{J.15}$$

Dieses Argument ist nicht nur wunderbar elegant, sondern auch ungemein praktisch:

(5) Die folgenden Abbildungen zeigen Randwege γ von Quadraten $R \subset \mathbb{C}$ und ihre Bilder $F \circ \gamma$. Bestimmen Sie $\deg(F \circ \gamma)$ und lokalisieren Sie Nullstellen von F.
(6) Reelle Nullstellen reeller Polynome lokalisiert man durch Intervallhalbierung, komplexe Nullstellen komplexer Polynome durch Rechteckviertelung. Erklären Sie wie!

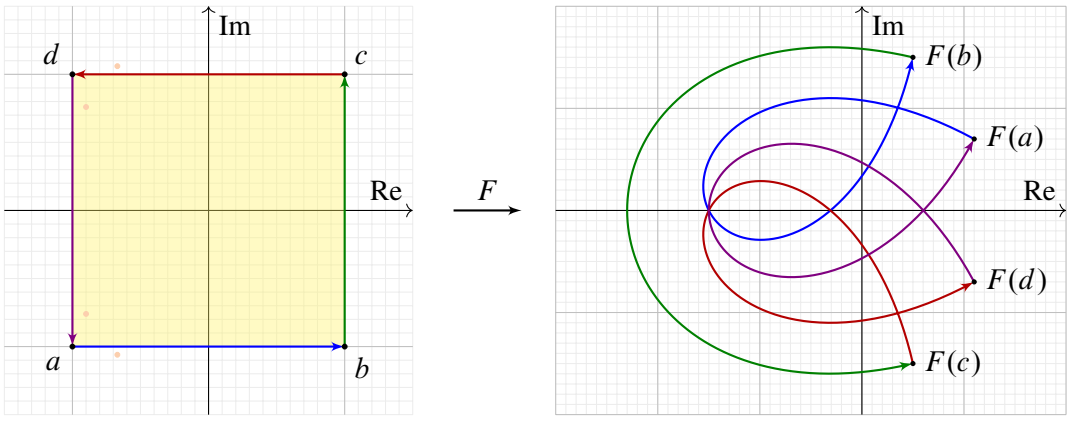


ABBILDUNG J:11. Umlaufzahl von $F(z) = z^5 - 5z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 3z - 12$

✻ **J1U.** *Warnung:* H ist stetig in z bei festem t, und stetig in t bei festem z. Diese partielle Stetigkeit in z und t genügt jedoch nicht, siehe das warnende Beispiel E4K. Der Verklebesatz E1P lässt sich nicht direkt anwenden.

(1) Für $t > 0$ entwickeln wir die für H angegebene Formel und finden ein Polynom in t und z:

$$H(t,z) = (1-t)^n z^n + c_1(1-t)^{n-1}tz^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(1-t)t^{n-1}z + c_n t^n \quad \xrightarrow{t\to 0} \quad z^n$$

(2) Es gilt $H_1(z) = c_n$, also $\deg(H_1) = 0$, und $H_0(z) = z^n$, also $\deg(H_0) = n$ dank J1J. Wenn F keine Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, dann gilt $H(t,z) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$ und $z \in \mathbb{S}^1$, und somit ist H eine Homotopie in $\mathbb{C}^*$ von $H_0 : z \mapsto z^n$ nach $H_1 : z \mapsto c_n$. Dank J1J folgt $n = \deg(H_0) = \deg(H_1) = 0$. Kontraposition: Für Grad $n \geq 1$ muss die Homotopie $H : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ von $H_0 : z \mapsto z^n$ nach $H_1 : z \mapsto c_n$ über den Nullpunkt gehen. Somit gilt $H(t,z) = 0$ für ein $0 < t < 1$ und $z \in \mathbb{S}^1$, also hat F eine Nullstelle.

(3) Wir betrachten geschlossene Wege: Für $\deg(\alpha) = p$ gilt $H : \alpha \sim \tilde{\alpha}$ mit $\tilde{\alpha}(t) = a\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} p t}$. Für $\deg(\beta) = q$ gilt $K : \beta \sim \tilde{\beta}$ mit $\tilde{\beta}(t) = b\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} q t}$. Hieraus folgt $H \cdot K : \gamma \sim \tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(t) = c\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(p+q)t}$, also $\deg(\gamma) = p+q$. Alternativ nutzen wir die Integralformel (J.5) $\deg(\alpha) = (2\pi \mathrm{i})^{-1} \int_0^1 \alpha'(t)/\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ für stückweise stetig differenzierbare Wege $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}^*$. Dank $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta + \alpha\beta'$ gilt $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.

(4) Die Aussage gilt für jeden Linearfaktor $F_k(z) = (z - z_k)$ mit $z_k \in \mathbb{C}$, denn $\deg(F_k \circ \gamma) = \deg(\gamma - z_k)$ ist die Umlaufzahl um z_k, also $= 1$ falls $z_k \in \operatorname{Int} R$, und $= 0$ falls $z_k \notin R$. Dank (3) gilt die Formel (J.15).

(5) Die Umlaufzahl des Polynoms F entlang des Randes ∂R entnehmen wir der Graphik: $\deg(F \circ \gamma) = 2$. Wir können sie auch wie in J1S berechnen. Dank (4) liegen demnach im Quadrat R genau 2 Nullstellen von F.

(6) Wir unterteilen das Rechteck wie in J:12: In $[-1,0] \times [0,1]$ liegt genau eine Nullstelle, in $[0,1] \times [0,1]$ liegt keine. Abbildung J:13 zeigt zwei weitere Schritte. Das Verfahren wird im Folgenden ausgeführt.

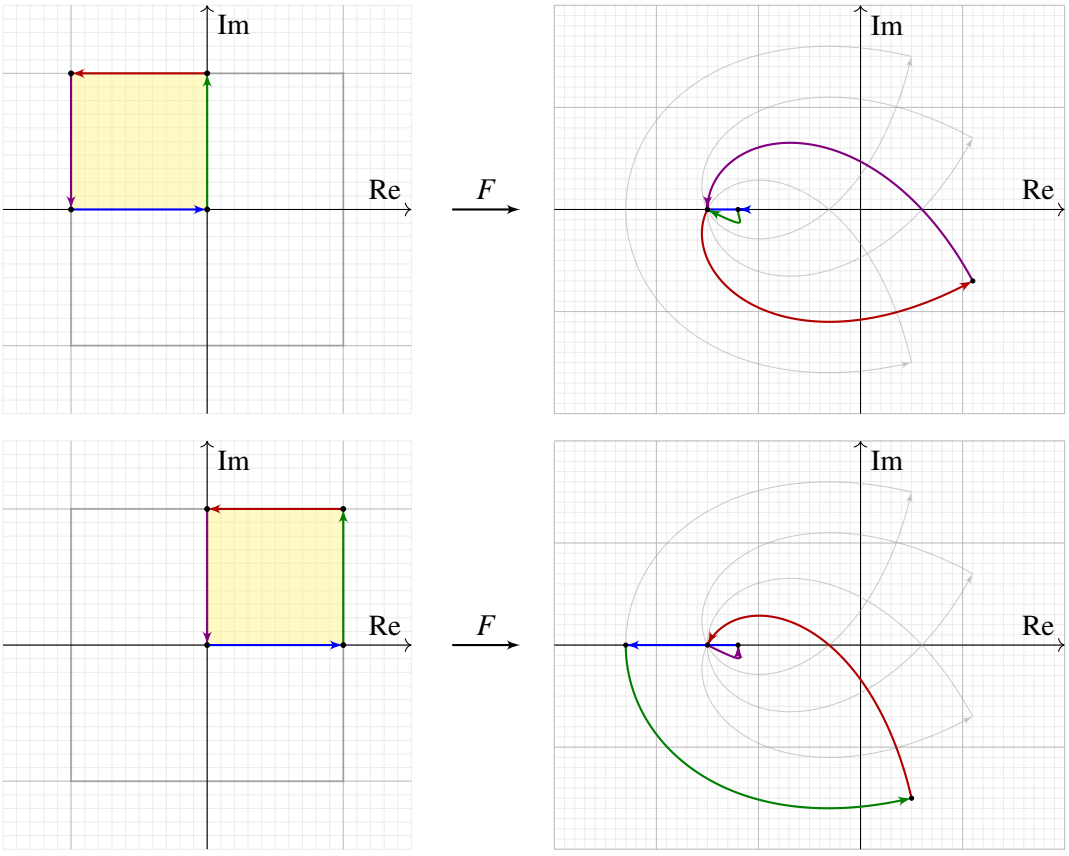


ABBILDUNG J:12. Umlaufzahlen von $F(z) = z^5 - 5z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 3z - 12$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

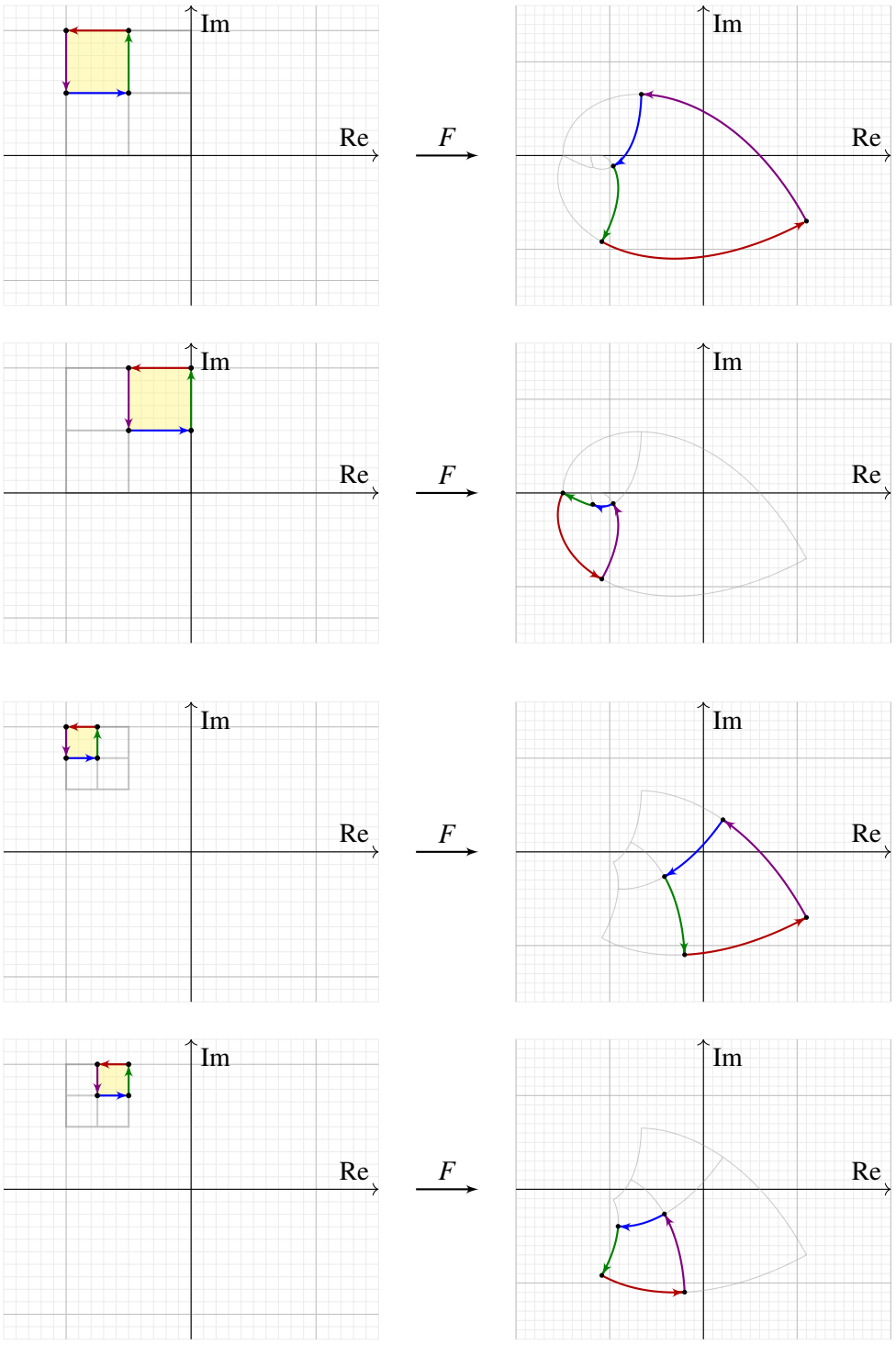
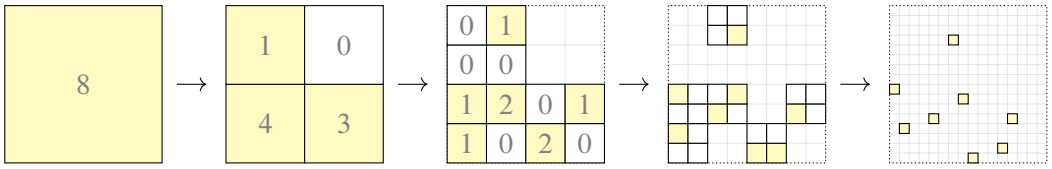


ABBILDUNG J:13. Umlaufzahlen von $F(z) = z^5 - 5z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 3z - 12$

☞ **§J1n. Lokalisierung der Nullstellen.** Nach Hermann WEYL verkündet ein Existenzsatz wie der Fundamentalsatz der Algebra „das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort.“[3] Für die Praxis ist das Lokalisieren der Nullstellen von zentraler Bedeutung. Dies geht wesentlich über die grundlegende Existenzaussage hinaus. ☜

Die Koeffizienten des Polynoms F sind gegeben, seine Nullstellen noch unbekannt. Insbesondere sieht man F die Anzahl seiner Nullstellen im Rechteck D nicht direkt an. Die Umlaufzahl hingegen kann man direkt aus den Koeffizienten von F berechnen, numerisch durch geschickte Approximation oder algebraisch durch Polynomdivision wie in Satz J1S erklärt. Die Zählformel (J.15) für Nullstellen ist ein Algorithmus, zudem recht einfach.



Hieraus erhalten wir folgendes Verfahren: Zum Polynom $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ wählen wir ein Quadrat $D = [-r,r]^2$, das alle n Nullstellen enthält, etwa $r = \sum_{k=1}^{n} |c_k|$, siehe C3Y. Dieses unterteilen wir in vier Teilquadrate. In jedem können wir die Umlaufzahl berechnen (J1S) und somit die Anzahl der Nullstellen (J1U). Wir behalten nur die nichtleeren Quadrate und unterteilen diese weiter. Auf diese Weise können wir alle Nullstellen von F beliebig genau lokalisieren. Haben wir alle Nullstellen ausreichend genau voneinander getrennt, so können wir schließlich zum Newton–Verfahren übergehen (J1Z): Es muss in unmittelbarer Nähe einer Nullstelle gestartet werden, konvergiert dann aber blitzschnell.

☞ **§J1o. Zur Geschichte des Fundamentalsatzes.** Der Fundamentalsatz der Algebra ist eine historische Errungenschaft und hat eine bewegte, vielhundertjährige Geschichte. ☜

Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ konnten schon die Babylonier um 2000 v. Chr. lösen. Eine Methode zur Lösung kubischer Gleichungen fanden erst del Ferro (um 1520) und Tartaglia (1535). Ferrari verallgemeinerte dies zu einer Lösung quartischer Gleichungen. Beides wurde von Cardano 1545 veröffentlicht. Trotz großer Anstrengungen über die nächsten 250 Jahre wurde keine solche Lösungsformel für Grad ≥ 5 gefunden.

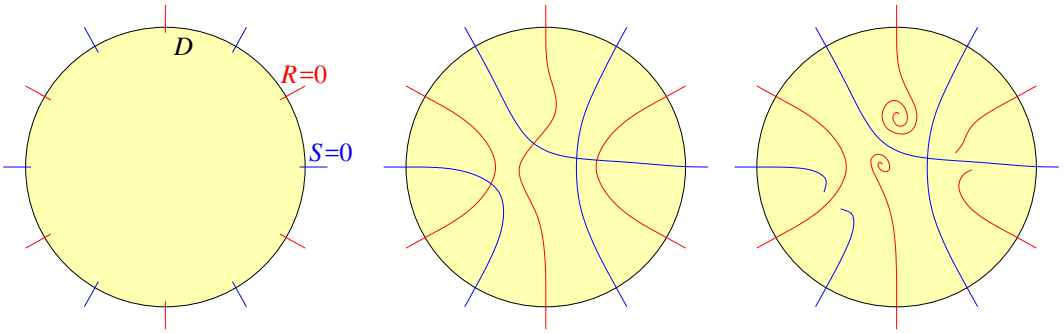
Schließlich zeigten Ruffini (1805), Abel (1825) und Galois (1831), dass es in Grad ≥ 5 keine allgemeine Lösung gibt, die neben den vier Grundrechenarten nur das Wurzelziehen verwendet. Damit lösten sie eines der großen Probleme der Mathematik, allerdings negativ.

Es stellte sich die Frage, ob überhaupt immer Nullstellen existieren. Erste Beweisversuche hierzu unternahmen d'Alembert (1746), Euler (1749), Lagrange (1772), und Laplace (1795). In seiner Dissertation präsentierte Gauß (1799) ein geometrisches Argument, das gemeinhin als erster befriedigender Beweis des Fundamentalsatzes angesehen wird.

Sei $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ ein Polynom in $\mathbb{C}[z]$. Einsetzen von $z = x + \mathrm{i}y$ ergibt $F = R + \mathrm{i}S$ mit $R, S \in \mathbb{R}[x,y]$. Die Nullstellen von F sind die Schnittpunkte der Kurven $R = 0$ und $S = 0$ in der x–y–Ebene. Gauß betrachtet eine Kreisscheibe D um 0 mit großem Radius. Nahe dem Rand ∂D ähneln diese Kurven denen des Real- und Imaginärteils von z^n. Letztere sind $2n$ Geraden durch den Ursprung. Daher schneidet ∂D die Kurven $R = 0$ und $S = 0$ jeweils in $2n$ Punkten, und zwar abwechselnd wie in Abbildung J:14.

[3] H. Weyl, *Fundamentalsatz der Algebra und Grundlagen der Mathematik*, Math. Z. 20 (1924) 131–150

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]



(A) Die Kurven $R = 0$ und $S = 0$ außerhalb einer Kreisscheibe D.

(B) Die Verbindung der Enden in D erzwingt Schnittpunkte.

(C) Pathologische Fälle müssen noch ausgeschlossen werden.

ABBILDUNG J:14. Gauß' geometrisches Argument zur Existenz von Nullstellen

Diese Kurven setzen sich vom Rand ∂D ins Innere von D fort. Gauß schließt daher, dass sich die Kurven $R = 0$ und $S = 0$ irgendwo in D schneiden müssen. Dies beruht auf (anschaulich plausiblen) Annahmen, die Gauß klar benennt, aber nicht beweist.

> „Es scheint hinreichend sicher bewiesen, dass eine algebraische Kurve weder plötzlich abbrechen kann (wie zum Beispiel die transzendente Kurve mit Gleichung $y = 1/\log x$) noch sich sozusagen in einem Punkt verlieren kann nach unendlich vielen Schleifen (wie die logarithmische Spirale). Soweit ich weiß hat niemand je dagegen Zweifel erhoben. Sollte es dennoch jemand verlangen, so will ich bei anderer Gelegenheit einen Beweis geben, der über jeden Zweifel erhaben ist.“[4]

Gauß' geniale Idee war es, geometrische Argumente auf ein algebraisches Problem anzuwenden. Aus heutiger Sicht erkennt man in Gauß' Darstellung die Berechnung der Umlaufzahl $\deg(F|\partial D) = n$. Sein Schlussargument beruft sich allerdings auf den Jordanschen Kurvensatz (§J2) in einer speziellen Version (J1X). Nach modernen Maßstäben ist daher Gauß' geometrischer Beweis unvollständig. Die fehlenden Ausführungen sind ernsthafte Probleme; sie lassen sich beweisen, aber dies gelang erst etwa hundert Jahre später. Brouwers Abbildungsgrad / Umlaufzahl und Homotopie-Invarianz leisten genau dies.

Zwischenzeitlich bewiesen Argand (1814) und Cauchy (1820) den Fundamentalsatz unter Annahme eines globalen Minimums von $|F(z)|$ und eines lokalen Arguments (C3X). Dass ein Minimum existiert, beruht wesentlich auf einem Kompaktheitsargument (C3Y). Auch dieser Begriff musste im Laufe des 19. Jahrhunderts erst mühsam erarbeitet werden.

So grundlegend und bescheiden der Fundamentalsatz heute auch scheinen mag, er ist ein erster wichtiger Prüfstein unserer analytisch-topologischen Techniken. Die Nullstellensuche tritt in nahezu allen mathematisch-technischen Anwendungen auf, und ihre effiziente algorithmische Behandlung ist ein hochentwickeltes und faszinierendes Gebiet.

[4] „Satis bene certe demonstratum esse videtur, curvam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse (uti e.g. evenit in curva transscendente, cuius aequatio $y = 1/\log x$), neque post spiras infinitas in aliquo puncto se quasi perdere (ut spiralis logarithmica), quantumque scio nemo dubium contra hanc rem movit. Attamen si quis postulat, demonstrationem nullis dubiis obnoxiam alia occasione tradere suscipiam.“ Gauß, *Werke*, Bd. 3, p. 27.

§J1p. Nullstellensuche in der Ebene. Die Nullstellensuche ist nicht auf komplexe Polynome $F \in \mathbb{C}[z]$ beschränkt, sondern funktioniert allgemein für jede stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \supset R \to \mathbb{R}^2$, insbesondere Polynomfunktionen. Wir halten hierzu folgendes fest:

Lemma J1v. *Sei $R = [a,b,c,d] \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $\gamma = |a,b,c,d,a|$ der Randweg.*

(1) Sei $F : R \to \mathbb{R}^2$ stetig. Hat F keine Nullstelle, so folgt $\deg(F \circ \gamma) = 0$.
(2) Hat $F \circ \gamma$ keine Nullstelle und $\deg(F \circ \gamma) \neq 0$*, so hat F eine Nullstelle in* $\operatorname{Int} R$.
(3) Ein solche Nullstelle kann durch Rechteckviertelung lokalisiert werden.

BEWEIS. (1) Hat F keine Nullstelle, so haben wir die Homotopie $H : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ mit $H_t = F \circ ((1-t)a + t\gamma)$, also $H : \text{const} \simeq F \circ \gamma$ und $\deg(F \circ \gamma) = 0$. Hieraus folgt (2).

(3) Wir beginnen mit einem Rechteck $R_0 \subset \mathbb{R}^2$ sodass $F|\partial R_0$ keine Nullstelle hat und $\deg(F|\partial R_0) \neq 0$ erfüllt. Wir unterteilen $R_0 = A \cup B \cup C \cup D$ in vier gleichgroße Teilrechtecke. Es gilt $1 = \deg(F|\partial R_0) = \deg(F|\partial A) + \deg(F|\partial B) + \deg(F|\partial C) + \deg(F|\partial D)$. Also existiert ein $R_1 \in \{A, B, C, D\}$ mit $\deg(F|R_1) \neq 0$. (Nullstellen auf dem Rand lösen ebenfalls unser Problem, müssen aber abgefangen und gesondert behandelt werden, wie in J1R.)

So fortfahrend erhalten wir $R_0 \supset R_1 \supset \cdots \supset R_n$ mit $\deg(F|R_n) \neq 0$, also existiert eine Nullstelle von F in R_n. Wir können R_n bis zu jeder gewünschten Präzision verkleinern. □

Bemerkung. Konkret für Polynomfunktionen $F : \mathbb{R}^2 \supset R \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ können wir die Umlaufzahl $\deg(F \circ \gamma)$ durch Sturm–Ketten berechnen (J1S).

§J1q. Brouwers Fixpunktsatz, konstruktive Fassung. Brouwers Fixpunktsatz J4H in Dimension $n \in \mathbb{N}$ besagt: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat einen Fixpunkt, das heißt, es existiert ein $a \in \mathbb{D}^n$ mit $f(a) = a$. In Dimension $n = 1$ folgt dies leicht aus dem Zwischenwertsatz. Mit der Umlaufzahl können wir jetzt bereits den Fall $n = 2$ beweisen.

Ich formuliere diesen Satz hier konstruktiv, als Algorithmus zur Lokalisierung eines Fixpunkts, etwa im Falle polynomieller Abbildungen. Statt der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ betrachten wir das Quadrat $[-1,1]^2$; das ist topologisch äquivalent, aber algorithmisch vorteilhaft.

Satz J1w. *Jede stetige Abbildung $f : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ hat mindestens einen Fixpunkt. Ein solcher Fixpunkt kann durch iterierte Rechteckviertelung lokalisiert werden.*

BEWEIS. Wir nutzen die Maximumsnorm $|(x,y)| := \max\{|x|,|y|\}$, denn für diese gilt $R := [-1,1]^2 = \{\, z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq 1 \,\}$. Wir betrachten die Homotopie $H : [0,1] \times R \to \mathbb{R}^2$ mit $H_t(z) = z - t f(z)$ von $H_0 = \mathrm{id}_R$ nach $H_1 = F$ mit $F(z) = z - f(z)$.

(a) Für jeden Randpunkt $z \in \partial R$ gilt $|H_t(z)| = |z - t f(z)| \geq |z| - t|f(z)| = 1 - t|f(z)|$. Demnach gilt $H_t(z) = 0$ nur für $t = 1$ und $z = f(z)$, also einen Fixpunkt auf dem Rand.

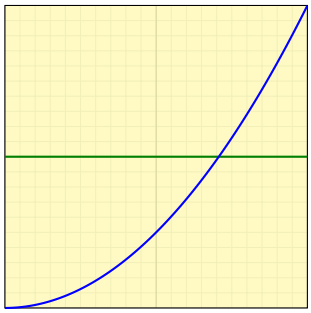
(b) Andernfalls gilt $H_t(z) \neq 0$ für alle $z \in \partial R$ und $t \in [0,1]$. Dank Homotopie-Invarianz (J1J) gilt $\deg(F|\partial R) = \deg(\mathrm{id}|\partial R) = 1$. Dank Lemma J1v hat F eine Nullstelle $z \in \operatorname{Int} R$, es gilt also $0 = F(z) = z - f(z)$, und somit hat f einen Fixpunkt.

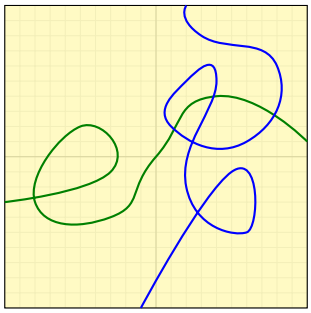
Das beweist die Existenz eines Fixpunktes $z \in R$. Darüber hinaus liefert uns Lemma J1v zugleich ein Verfahren zur Lokalisierung eines solchen Fixpunkts. □

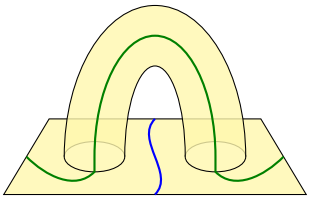
Bemerkung. Für *kontraktive* Abbildungen $f : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ garantiert der Banachsche Fixpunktsatz (C4Q) Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes und liefert zudem ein effizientes Näherungsverfahren. Voraussetzung und Folgerung sind hier wesentlich stärker.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§J1r. Kreuzende Wege.** Als weitere schöne geometrische Anwendung der Umlaufzahl wollen wir die obige Behauptung von Gauß in folgender Form beweisen: Je zwei Wege in einem Rechteck $[a,b]\times[c,d]$, die gegenüberliegende Seiten verbinden, kreuzen sich. ☜







Diese Fläche $F\subset\mathbb{R}^3$ hat als Rand $\partial F=\partial[-1,1]^2$, aber hier kann man gegenüberliegende Seiten auch ohne Kreuzung verbinden. (Brücke, Platine)

ABBILDUNG J:15. Kreuzende Wege: eine Eigenschaft der reellen Ebene!

Das ist keineswegs selbstverständlich, sondern beruht lokal auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und global auf der Form der Fläche: Andere Flächen haben diese Eigenschaft nicht!

Satz J1x. *Seien $f,g:[-1,1]\to[-1,1]^2$ stetig mit $f_1(\pm1)=\pm1$ und $g_2(\pm1)=\pm1$. Dann kreuzen sich die Wege f und g, das heißt, es existieren $s,t\in[-1,1]$ mit $f(s)=g(t)$. Eine solche Lösung kann durch Rechteckviertelung lokalisiert werden.*

BEWEIS. Für $h:[-1,1]^2\to\mathbb{R}^2:(s,t)\mapsto(f_1(s)-g_1(t),g_2(t)-f_2(s))$ gilt $h(s,t)=0$ genau dann, wenn $f(s)=g(t)$: Kreuzungspunkte (s,t) sind genau die Nullstellen von h.

(a) Hat h eine Nullstelle auf dem Rand, so ist dies ein Kreuzungspunkt.

(b) Hat h keine Nullstellen auf dem Rand, so gilt $\deg(h|\partial[-1,1]^2)=1$. Genauer:

Die Homotopie $H:[0,1]\times\partial[-1,1]^2\to\mathbb{R}^2$ mit $H(r,s,t):=(1-r)(s,t)+rh(s,t)$ geht von $H_0(s,t)=(s,t)$ nach $H_1(s,t)=h(s,t)$ und verläuft in $\mathbb{R}^2\smallsetminus\{0\}$: In $(s,t)\in\partial[-1,1]^2$ weist h nicht in $[-1,1]^2$ hinein, denn $f_1(-1)\le g_1(t)\le f_1(1)$ und $g_2(-1)\le f_2(s)\le g_2(1)$. Dank Homotopie-Invarianz der Umlaufzahl folgt $\deg(h|\partial[-1,1]^2)=\deg(H_0)=1$.

Dank Lemma J1v hat h eine Nullstelle $(s,t)\in\operatorname{Int}[-1,1]^2$.

Das beweist die Existenz eines Kreuzungspunktes $(s,t)\in[-1,1]^2$ mit $f(s)=g(t)$. Darüber hinaus liefert uns Lemma J1v ein Verfahren zur Lokalisierung. □

Übung J1y. Der Satz beruht auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Es ist immer wieder heilsam, sich Gegenbeispiele über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ vor Augen zu führen:

(1) Es gibt stetige Abbildungen $f,g:[-1,1]_{\mathbb{Q}}\to[-1,1]^2_{\mathbb{Q}}$ wie in obiger Abbildung J:15 mit $f_1(\pm1)=\pm1$ und $g_2(\pm1)=\pm1$, aber $f(s)\neq g(t)$ für alle $s,t\in[-1,1]_{\mathbb{Q}}$.

(2) Es gibt Homotopien $H:[0,1]\times\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}\to\mathbb{Q}^2\smallsetminus\{0\}$ von $H_0=\mathrm{id}$ nach $H_1=\mathrm{const}$.

Anders als über $\mathbb{R}$ kann es demnach über $\mathbb{Q}$ keine homotopie-invariante Umlaufzahl geben!

✻ **J1y.** (1) Die Abbildungen $f,g:[-1,1]_{\mathbb{Q}}\to[-1,1]^2_{\mathbb{Q}}$ mit $f(s)=(s,0)$ und $g(t)=(t,(t+1)^2/2-1)$ erfüllen $f_1(\pm1)=\pm1$ und $g_2(\pm1)=\pm1$, aber $f(s)\neq g(t)$ für alle $s,t\in[-1,1]_{\mathbb{Q}}$. Diese Situation ist in J:15 skizziert.

(2) Die Abbildung $H(s,q)=(1-s)q+s(1,1)$ ist stetig und erfüllt $H(0,q)=q$ und $H(1,q)=(1,1)$. Wegen $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ gilt $\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R}\cdot(1,1)=\emptyset$, also $H(s,q)\neq0$ für alle $s\in[0,1]$ und $q\in\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}$.

§J1s. Übergang zum Newton–Verfahren. Wie zuvor sei $F \in \mathbb{C}[z]$. Das Newton–Verfahren iteriert die Abbildung $\Phi(z) = z - F(z)/F'(z)$ auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid F'(z) \neq 0\}$. Diese einfache Methode besticht durch schnelle Konvergenz in der Nähe von Nullstellen:

Satz J1z. *(1) Die Fixpunkte von $\Phi(z) = z - F(z)/F'(z)$ sind genau die einfachen Nullstellen von F, also $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $F(z_0) = 0$ und $F'(z_0) \neq 0$. Zu jeder einfachen Nullstelle z_0 existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für jeden Anfangswert $z \in \bar{B}(z_0, \delta)$ quadratische Konvergenz gilt:*

$$|\Phi^t(z) - z_0| \leq 2^{1-2^t} \cdot |z - z_0| \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{N}. \tag{J.16}$$

(2) Quantitative Präzisierung: Gegeben sei $F \in \mathbb{C}[z]$ ohne doppelte Nullstellen. Wir können die Nullstellen $z_1, \dots, z_n$ von F separieren in $\bar{B}(u_1, \delta_1), \dots, \bar{B}(u_n, \delta_n)$ mit

$$3n\delta_k \leq |u_j - u_k| \qquad \text{für alle } j \neq k. \tag{J.17}$$

Für jedes $z \in \bar{B}(z_k, \delta_k)$, insbesondere $z = u_k$, gilt $|\Phi^t(z) - z_k| \leq 2^{1-2^t} \cdot \delta_k$ für alle $t \in \mathbb{N}$.

Aussage (1) gilt für alle $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$; siehe C4U und C4X. Mehrfache Nullstellen erkennen und eliminieren wir dank Polynomdivision vermöge $F/\operatorname{ggT}(F, F')$.

Die anfängliche Lokalisierung (J1U) ist mühsam und liefert nur ein Bit pro Schritt, Newton ist dagegen blitzschnell: Jede Iteration verdoppelt die Anzahl gültiger Ziffern!

Dies gilt allerdings nur bei guten Startwerten, in hinreichender Nähe einer Nullstelle. Andernfalls kann die Newton–Iteration anfangs umherirren oder auch gar nicht konvergieren. Beide Methoden zusammen lösen dieses Problem: Wir können mit J1U alle Nullstellen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ von F lokalisieren und hinreichend genau approximieren, bis schließlich das Kriterium (2) greift. Dann können wir getrost zum Newton–Verfahren übergehen.

BEWEIS. Die qualitative Aussage (1) lasse ich als Übung / Rück- / Ausblick zur Numerik.

(2) Für $F = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$ finden wir $F'/F = \sum_{j=1}^n (z - z_j)^{-1}$ für $F(z) \neq 0$ und somit $\Phi(z) = z - 1/\sum_{j=1}^n (z - z_j)^{-1}$ für $F'(z) \neq 0$. Wir untersuchen

$$\frac{\Phi(z) - z_k}{z - z_k} = 1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{z - z_k}{z - z_j}} = \frac{\sum_{j \neq k} \frac{z - z_k}{z - z_j}}{1 + \sum_{j \neq k} \frac{z - z_k}{z - z_j}}.$$

Wir haben Näherungen $u_1, \dots, u_n$ mit $|u_k - z_k| \leq \delta_k$. Im Folgenden sei $z \in \bar{B}(z_k, \delta_k)$. Zunächst gilt damit $|z - u_k| \leq 2\delta_k$. Für alle $j \neq k$ finden wir umgekehrt

$$|z - z_j| \geq |u_k - u_j| - |z - u_k| - |z_j - u_j| \geq |u_k - u_j| - 2\delta_k - \delta_j \geq (3n - 3)\delta_k.$$

Letzteres folgt durch Konvexkombination aus (J.17). Dies garantiert die Abschätzung

$$\left| \sum_{j \neq k} \frac{z - z_k}{z - z_j} \right| \leq \sum_{j \neq k} \left| \frac{z - z_k}{z - z_j} \right| \leq \sum_{j \neq k} \frac{|z - z_k|}{3(n-1)\delta_k} \leq \frac{|z - z_k|}{3\delta_k} \leq \frac{1}{3}.$$

Für $0 < |z - z_k| \leq \delta_k$ erhalten wir damit schließlich folgende Kontraktionsungleichung:

$$\left| \frac{\Phi(z) - z_k}{z - z_k} \right| \leq \frac{\left| \sum_{j \neq k} \frac{z - z_k}{z - z_j} \right|}{1 - \left| \sum_{j \neq k} \frac{z - z_k}{z - z_j} \right|} \leq \frac{\frac{1}{3\delta_k} |z - z_k|}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{|z - z_k|}{2\delta_k}.$$

Für alle $z \in \bar{B}(z_k, \delta_k)$ folgt $|\Phi(z) - z_k| \leq \frac{1}{2\delta_k} |z - z_k|^2$, also $|\Phi^t(z) - z_k| \leq 2^{1-2^t} \cdot |z - z_k|$ per Induktion über $t \in \mathbb{N}$. Dies gilt insbesondere für den Startwert $z = u_k$ in $\bar{B}(z_k, \delta_k)$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J2. Der Satz von Jordan–Schoenflies

☞ **§J2a. Motivation.** Wir beginnen mit einem konkreten Beispiel für Rätselfreunde: ☜

Beispiel. Abbildung J:16 zeigt eine polygonale Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$. Sie ist einfach geschlossen, das heißt homöomorph zur Kreislinie $\mathbb{S}^1$; wir nennen dies eine *Jordan–Kurve*. Sie prüfen diese Aussage leicht nach, indem Sie die gesamte Kurve geduldig mit einem Stift abfahren.

Können Sie a mit b durch einen Weg im Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ verbinden? und a mit x? und b mit x? Wie können Sie das effizient feststellen bzw. leicht nachprüfbar zertifizieren? Können Sie a, b, x verbinden, nachdem Sie irgendein kleines Wandstück entfernen?

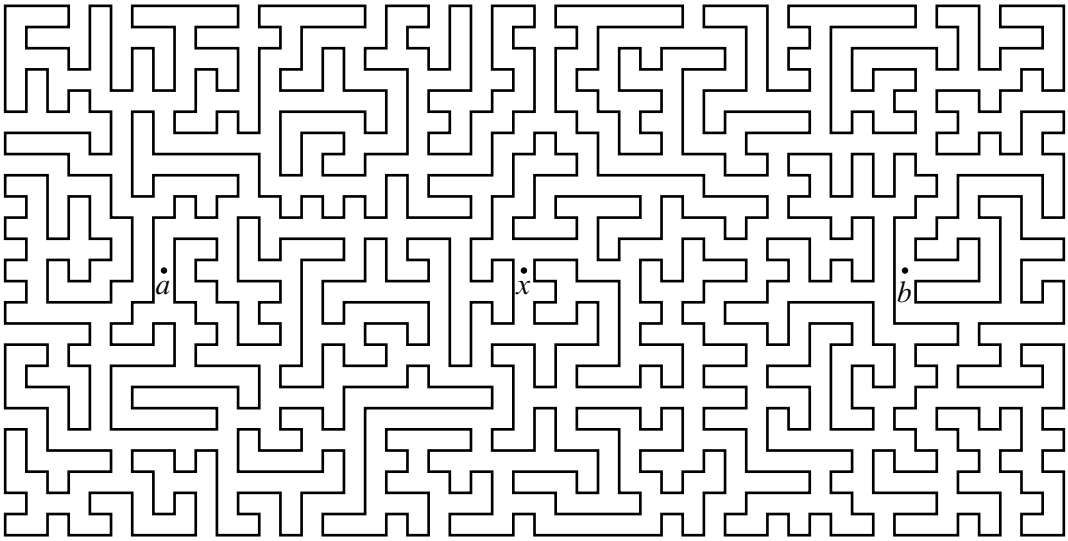


ABBILDUNG J:16. Der Satz von Jordan illustriert durch ein Labyrinth, frei nach Serge GAINSBOURG (1921–1991), *« Qui est in? Qui est out? »*

In diesem Beispiel trennt die Kurve C die Ebene $\mathbb{R}^2$ in genau zwei Wegkomponenten A und B. Dies wird augenfällig, wenn wir beide Gebiete einfärben wie in Abbildung J:17. Die Bijektion $\pi_0(\mathbb{R}^2 \smallsetminus C) = \{A, B\} \xrightarrow{\sim} \{0, 1\}$ ist die Umlaufzahl $x \mapsto \deg(f - x) \bmod 2$. Jeder innere Punkt $b \in B$ (gelb) wird von f genau einmal umlaufen, jeder äußere Punkt $a \in A$ (weiß) wird nicht umlaufen. Der Algorithmus aus J2M löst die obigen Fragen!

Bemerkung. Jeder polygonalen Jordan–Kurve wird man mit Geduld dieselbe Eigenschaft nachweisen, und unser Beweis leistet genau dies allgemein. Die Situation scheint intuitiv klar: Seit Menschengedenken verlassen sich Hirten auf diese empirische Beobachtung!

Dieser Trennungssatz wurde lange als selbstverständlich erachtet, so etwa von Carl Friedrich GAUSS (1777–1855), siehe §J1o. Sein Zeitgenosse Bernard BOLZANO (1781–1848) erkannte wohl als erster, dass es sich um einen nicht-trivialen Satz handelt, der eines Beweises bedarf. Explizit formuliert und bewiesen hat ihn erstmals Camille JORDAN 1887 in seiner Vorlesung „Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique“. Der Satz ist ein Paradebeispiel für eine Aussage, die leicht zu formulieren, aber schwer zu beweisen ist. Wir werden im Folgenden einen einfachen und schönen Beweis für polygonale Kurven entwickeln.

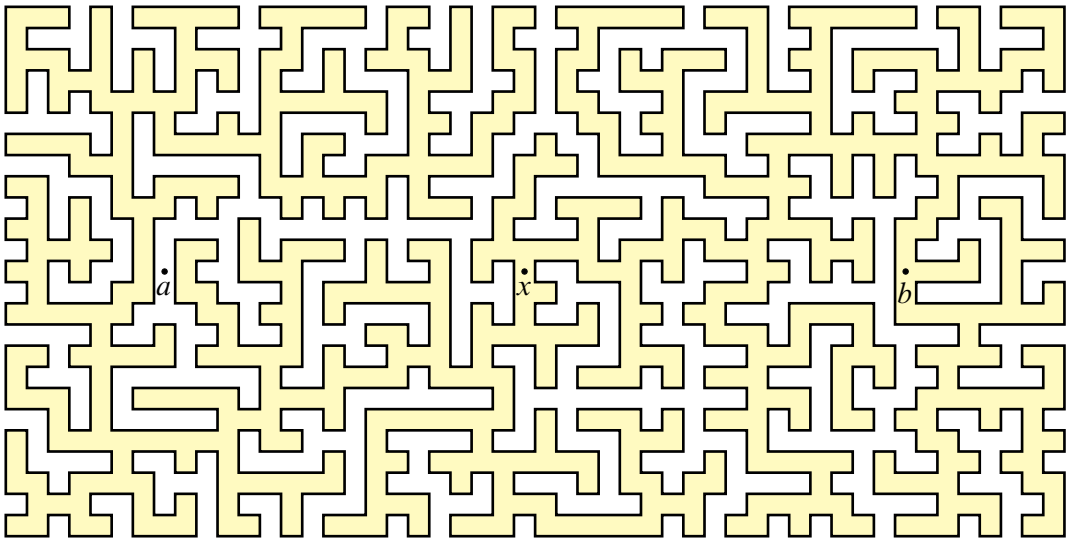


ABBILDUNG J:17. Das Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ besteht aus zwei Gebieten, hier gelb und weiß gefärbt; das innere ist homöomorph zur Kreisscheibe.

§J2b. Der Satz von Jordan und Schoenflies. Zur Erinnerung: Jedes Kompaktum $C \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, das Komplement $X = \mathbb{R}^n \smallsetminus C$ ist offen und somit lokal wegzusammenhängend. Daher zerfällt $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ als topologische Summe (G3C). Jede Komponente $U \in \pi_0(X)$ ist ein *Gebiet*, also $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend.

Satz J2A (Jordan–Schoenflies)**.** *Für jede Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} C \subset \mathbb{R}^2$ gilt:*

(1) Jordan: $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$ zerfällt in zwei Gebiete, A unbeschränkt, B beschränkt.
(2) Wir haben die Bijektion $\pi_0(\mathbb{R}^2 \smallsetminus C) = \{A, B\} \xrightarrow{\sim} \{0,1\} : [x] \mapsto \deg(f - x) \bmod 2$.
(3) Für den Rand gilt $\delta A = \delta B = C$, für den Abschluss also $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$.
(4) Schoenflies: Es existiert ein Homöomorphismus $h : (\mathbb{R}^2, C) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^1)$, das heißt $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(C) = \mathbb{S}^1$, somit $h(B) = \mathbb{B}^2$ und $h(\overline{B}) = \mathbb{D}^2$.

Bemerkung. Die Schwierigkeit des Satzes J2A liegt in der sehr schwachen Voraussetzung: Zwar ist der Teilraum $C \cong \mathbb{S}^1$ denkbar einfach, aber er kann sehr kompliziert in der Ebene liegen; man denke an Osgood–Kurven (C6H) mit positivem Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(C) > 0$.

§J2c. Der Abbildungssatz von Riemann–Carathéodory. Wir betrachten $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ als die komplexe Ebene. Aus dem Riemannschen Abbildungssatz und Carathéodorys Fortsetzung ergibt sich folgende dramatische Verschärfung, die ich hier ohne Beweis nenne:

Satz J2B (Riemann–Carathéodory)**.** *In obiger Situation existiert eine komplexe Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, die auf ganz $\mathbb{D}^2$ konvergiert und einen Homöomorphismus $g : \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} \overline{B}$ stiftet sowie auf dem Inneren einen biholomorphen Diffeomorphismus $g : \mathbb{B}^2 \xrightarrow{\sim} B$.* □

Bemerkung. Das Gebiet $B \subset \mathbb{C}$ kann phantastisch kompliziert sein. Einfache Riemann–Abbildungen, etwa von Kreis auf Rechteck, lassen sich explizit berechnen, aber schon nicht durch elementare Funktionen ausdrücken. Für jeden Polygonzug $C \subset \mathbb{C}$, etwa wie in J:17, ist die Schwarz–Christoffel–Transformation ein expliziter Homöomorphismus $g : \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} \overline{B}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§J2d. Wege und Kurven.** Einbettungen $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ verhalten sich viel zahmer als $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ wie in Cantors Karussell (G2T). Wir präzisieren zunächst die Begriffe. ☜

Im Folgenden sei X ein Hausdorff–Raum, etwa die Ebene $X = \mathbb{R}^2$ oder eine Fläche wie in Abbildung J:18. Diese Skizzen illustrieren insbesondere, dass Kreisscheibe, Torus, Zylinder und Möbius–Band ein gänzlich unterschiedliches Trennungsverhalten haben.

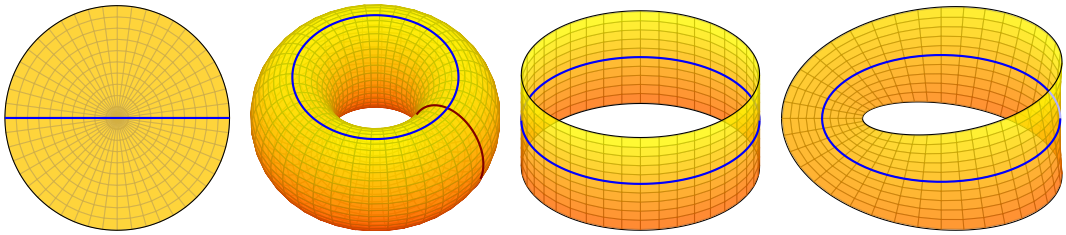


ABBILDUNG J:18. Kurven $[0,1] \hookrightarrow X$ und $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X$ auf einer Fläche X

☞ **Definition J2C.** Eine *einfache Kurve* in X ist eine Teilmenge $C \subset X$ mit $C \cong [0,1]$. Eine *einfach geschlossene Kurve* in X ist eine Teilmenge $C \subset X$ mit $C \cong \mathbb{S}^1$. ☜

Zur Erinnerung: Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$; die zugehörige *Kurve* ist das Bild $C = \gamma([0,1]) \subset X$. Ein Weg heißt *einfach*, wenn er injektiv ist, dank Kompaktheit also eine Einbettung (F1L); sein Bild $C \cong [0,1]$ ist dann eine *einfache Kurve*.

Wir unterscheiden *Weg* und *Kurve*, denn der Weg $\gamma : [0,1] \to X$ bestimmt die Kurve $C \subset X$, aber umgekehrt sind Parametrisierungen von C keineswegs eindeutig. Insbesondere legt der Weg γ eine Durchlaufungsrichtung fest, die man der Kurve C alleine nicht ansieht.

Ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt. In diesem Falle ist $\bar\gamma : \mathbb{S}^1 \to X$ mit $\bar\gamma(e^{2\pi i t}) = \gamma(t)$ wohldefiniert und stetig (F1R). Der Weg γ heißt *einfach geschlossen*, wenn $\gamma(s) = \gamma(t)$ äquivalent ist zu $s = t$ oder $\{s,t\} = \{0,1\}$. In diesem Falle ist $\bar\gamma$ eine Einbettung (F1L); ihr Bild $C \cong \mathbb{S}^1$ ist eine *einfach geschlossene Kurve*.

Wie in §J1d nennen wir einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *polygonal* (bzw. *stückweise glatt*), wenn eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_\ell = 1$ existiert, sodass $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ affin ist (bzw. stetig differenzierbar mit nirgends verschwindender Ableitung). Auch die zugehörige Kurve $C = \gamma([0,1])$ nennen wir dann *polygonal* (bzw. *stückweise glatt*).

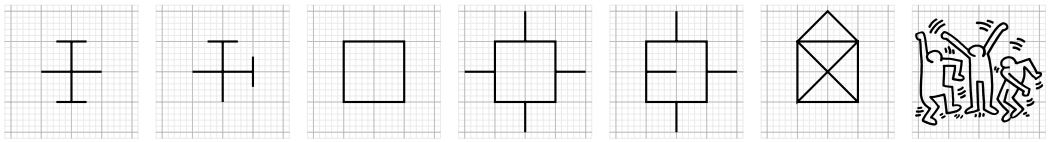


ABBILDUNG J:19. Endliche Graphen eingebettet in der Ebene

☞ **Bemerkung.** Allgemeiner können wir eine Einbettung $\gamma : |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eines endlichen Graphen K betrachten (§I3b). Diese heißt *stückweise affin* (bzw. *stückweise glatt*), wenn dies auf jeder Kante gilt. Komplexe $K \preccurlyeq \langle \{0,1\} \rangle$ mit $|K| = [0,1]$ liefern einfache Kurven, Komplexe $K \preccurlyeq \langle \{a,b\},\{b,c\},\{c,a\} \rangle$ mit $|K| \cong \mathbb{S}^1$ liefern einfach geschlossene Kurven. ☜

§J2e. Der Satz von Jordan für polygonale Kurven. Wir beweisen Satz J2A zunächst nicht in voller Allgemeinheit, sondern setzen die Jordan–Kurve $\mathbb{S}^1 \cong C \subset \mathbb{R}^2$ als polygonal voraus. Dies ist eine starke aber hilfreiche Einschränkung. Die Schlussfolgerung des Satzes bleibt unverändert, aber der Beweis wird hierdurch dramatisch vereinfacht.

Satz J2D (Satz von Jordan für polygonale Kurven)**.** *In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ ein einfach geschlossener Polygonzug. Für die so beschriebene Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ bedeutet das:*

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow[\text{einfach geschlossen}]{\gamma=|v_0v_1\dots v_n|} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow{\scriptstyle t\mapsto e^{2\pi i t}} & & \uparrow{\scriptstyle \text{inc}} \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow[\cong]{f} & C \end{array}$$

$C = [v_0,v_1] \cup \dots \cup [v_{n-1},v_n] \subset \mathbb{R}^2$,
$v_1, \dots, v_n = v_0$ *paarweise verschieden,*
$[v_0,v_1[, \dots, [v_{n-1},v_n[$ *paarweise disjunkt*

Dann zerfällt $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ in zwei Gebiete: A unbeschränkt, B beschränkt. Genauer ist $\nu : \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \{0,1\} : [x] \mapsto \deg(\gamma - x) \bmod 2$ wohldefiniert und bijektiv, $A \mapsto 0$, $B \mapsto 1$.

BEWEIS. Die Menge $C \subset \mathbb{R}^2$ ist kompakt, da abgeschlossen und beschränkt (F1O). Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ ist also offen, insbesondere lokal wegzusammenhängend (G3A). Somit ist $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ eine topologische Summe: Jede Komponente $U \in \pi_0(X)$ ist ein Gebiet, also offen und zusammenhängend (G3C). Wir wollen $\pi_0(X)$ bestimmen.

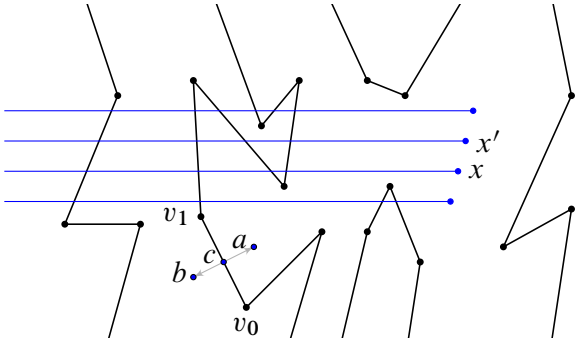


ABBILDUNG J:20. Konstruktion der Funktion $\tilde\nu : \mathbb{R}^2 \smallsetminus C \to \{0,1\}$

(1a) Die Funktion $\tilde\nu : X \to \mathbb{Z} : x \mapsto \deg(\gamma - x)$ ist lokal konstant dank Homotopie-Invarianz (J1J), somit stetig, induziert also $\nu : \pi_0(X) \to \{0,1\} : [x] \mapsto \deg(\gamma - x) \bmod 2$.

Erläuterung. Die Umlaufzahl $\deg(\gamma - x)$ des Weges $\gamma = |v_0 v_1 \dots v_n|$ um den Punkt x berechnen wir durch Achsübergänge wie in Abbildung J:9; dort wurden auch alle Sonderfälle erklärt (J1M). Wir nutzen die Homotopie-Invarianz der Umlaufzahl (J1I): Ist $\alpha : [0,1] \to X$ ein Weg von x nach x', so ist $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ mit $H(s,t) = \gamma(t) - \alpha(s)$ eine Homotopie von $\gamma - x$ nach $\gamma - x'$, also $\deg(\gamma - x) = \deg(\gamma - x')$. Die Parametrisierung γ gibt der Kurve C einen Umlaufsinn; da wir modulo 2 rechnen, spielt die Orientierung von C für das Endergebnis schließlich keine Rolle.

(1b) Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ hat mindestens zwei Komponenten: ν ist surjektiv, denn auf beiden Seiten der Kante $[v_0,v_1]$ werden verschiedene Werte angenommen.

Erläuterung. Die k–te Kante hat den Mittelpunkt $c_k = (v_{k-1} + v_k)/2$, die Richtung $v_k^* = v_k - v_{k-1}$ und die Normale $n_k = \mathrm{i} v_k^*/|v_k^*|$. Sei $c_k^\pm = c_k \pm \frac{1}{2}\varepsilon n_k$. Dank J1M gilt $|\tilde\nu(c_k^+) - \tilde\nu(c_k^-)| = 1$. Wir wählen die Bezeichnungen $\{a,b\} = \{c_1^-, c_1^+\}$ so, dass $\nu([a]) = 0$ und $\nu([b]) = 1$ gilt. Insbesondere ist die Abbildung $\nu : \pi_0(X) \to \{0,1\} : [x] \mapsto \deg(\gamma - x) \bmod 2$ wie behauptet surjektiv.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

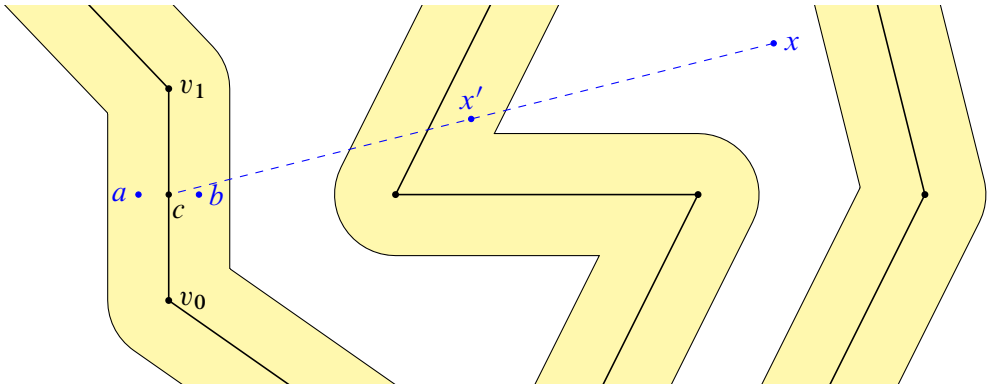


ABBILDUNG J:21. Polygonale Kurve C und eine Kragenumgebung U

(2a) Um die Kurve C legen wir die ε–Umgebung $U = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,C) \le \varepsilon \,\}$ mit

$$\varepsilon < \varepsilon(C) := \tfrac{1}{2} \min\big(\{\, d([v_{i-1},v_i],[v_{j-1},v_j]) \;\big|\; |i-j| \ge 2 \,\} \cup \{\, d(v_i,[v_{j-1},v_j]) \;\big|\; i \notin \{j-1,j\} \,\}\big).$$

Erläuterung. Im Sonderfall $n = 3$ eines Dreiecks ist die erste Menge leer, und ε ist ein Drittel der kleinsten Höhe. Im typischen Fall $n \ge 4$ ist die zweite Menge nicht wirksam, da die Eckenabstände größer gleich den Kantenabstände sind. Diese ε–Umgebung U ist die Vereinigung der ε–Umgebungen aller Kanten $[v_{k-1},v_k]$, lokal wie in J:21. Global erhalten wir einen Kreisring $(U,C) \cong (\mathbb{S}^1 \times [-1,1], \mathbb{S}^1 \times \{0\})$ oder ein Möbius–Band wie in J:18. Letzteres ist in orientierbaren Flächen wie der Ebene ausgeschlossen. Dank (1) wissen wir bereits, dass $U \smallsetminus C$ mindestens zwei Komponenten hat, was für das Möbius–Band nicht zutrifft. Für den Satz benötigen wir nur folgendes:

(2b) Das Komplement $U \smallsetminus C$ hat höchstens zwei Komponenten, $\pi_0(U \smallsetminus C) = \{[a],[b]\}$.

In jeder Ecke v_k sei $h_k^* := \frac{1}{2}(n_k + n_{k+1})$ und $h_k := h_k^*/|h_k^*|$ die Winkelhalbierende. Wir setzen $v_k^\pm = v_k \pm \frac{1}{2}\varepsilon h_k$. Dann liegen $[v_{k-1}^-, v_k^-]$ und $[v_{k-1}^+, v_k^+]$ in $U \smallsetminus C$.

Jeder Punkt $x' \in U \smallsetminus C$ liegt in der ε–Umgebung einer Kante $[v_{k-1},v_k]$. Der Polygonzug $w' = x' v_{k-1}^\pm \dots v_1^\pm c_1^\pm$ in $U \smallsetminus C$ verbindet x' mit a oder b.

(2c) Das Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ hat höchstens zwei Komponenten, $\pi_0(\mathbb{R}^2 \smallsetminus C) = \{[a],[b]\}$.

Sei $x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus C$. Auf dem Weg $[x,c_1]$ von x nach $c_1 \in C$ sei x' der erste Punkt in U. Der Polygonzug $w = xx' * w'$ in $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ mit w' aus (2b) verbindet x mit a oder b. □

Bemerkung. Die Konstruktion (1) nutzt die spezielle Struktur der Ebene $\mathbb{R}^2$, hier die Umlaufzahl. Die Konstruktion (2-4) hingegen gilt für jede zusammenhängende Fläche F und jede Jordan–Kurve $\mathbb{S}^1 \cong C \subset F$, zur Vereinfachung als polygonal angenommen.

Lemma J2E. *Für den Rand gilt $\delta A = \delta B = C$, also $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$.*

BEWEIS. Die Jordan–Kurve $\mathbb{S}^1 \cong C \subset \mathbb{R}^2$ zerlegt die Ebene in $\mathbb{R}^2 = A \sqcup B \sqcup C$ mit A, B zusammenhängend und offen. Da A und B offen sind, folgt $\delta A \subset C$ und $\delta B \subset C$. Jeder Punkt $c \in C$ berührt A und B, wie in J:21 gesehen, also gilt $C \subset \delta A$ und $C \subset \delta B$. □

Bemerkung. Der Jordansche Trennungssatz ist einfach und übersichtlich für polygonale Kurven, wie hier in Satz J2D ausgeführt. Der Beweis liefert zudem einen Algorithmus. Wir beweisen den allgemeinen Fall in Satz J2V, das Randlemma allgemein in J2P.

§J2f. Der Satz von Schoenflies für polygonale Kurven. Wir nutzen weiterhin die Zerlegung $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$ mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen §J2e.

Lemma J2F. *Das Kompaktum $\overline{B} = B \cup C$ lässt sich affin triangulieren, $\overline{B} = |\mathscr{K}|$.*

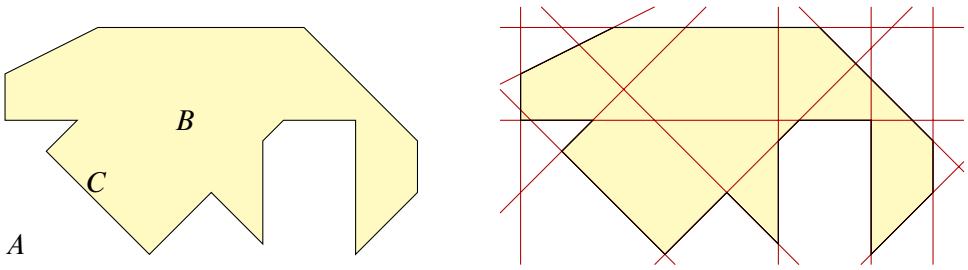


ABBILDUNG J:22. Polygonale Kurve C und Triangulierung von $\overline{B} = B \cup C$

BEWEIS. Wir betrachten die Polygonkurve $C = [v_0, v_1] \cup \cdots \cup [v_{n-1}, v_n]$ mit $v_0 = v_n$. Jede Kante $[v_{k-1}, v_k]$ spannt eine Gerade $H_k^0 \subset \mathbb{R}^2$ auf und zerlegt $\mathbb{R}^2 = H_k^+ \cup H_k^-$ in zwei Halbräume mit $H_k^+ \cap H_k^- = H_k^0$. Für $i \in \{\pm, 0\}^n$ ist $P^i := H_1^{i_1} \cap \cdots \cap H_n^{i_n}$ konvex, eventuell leer. Jede Menge P^i liegt in $\overline{A}$ oder in $\overline{B}$; diejenigen in $\overline{B}$ sind allesamt kompakt, also Polytope (A2F). Die Menge $\mathscr{P} = \{\, P^i \subset \overline{B} \,\}$ ist ein polytopaler Komplex mit $|\mathscr{P}| = \overline{B}$. Durch baryzentrische Unterteilung (I3M) erhalten wir eine Triangulierung $\mathscr{K} = \beta(\mathscr{P})$. □

Bemerkung. Diese Unterteilung beweist zu $\overline{B} = B \cup C$ die *Existenz* einer Triagulierung. Es geht auch wesentlich sparsamer, optimal sogar ganz ohne neue Ecken, siehe Übung J2K.

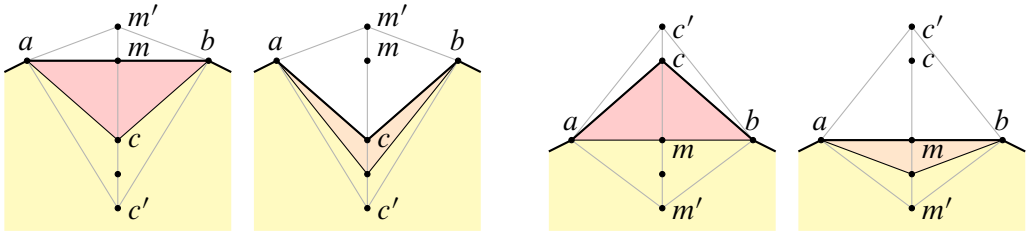


ABBILDUNG J:23. Einklappen eines Dreiecks als Homöomorphismus der Ebene

Definition J2G. Wir nennen $\Delta \in \mathscr{K}_2$ ein *Randdreieck*, wenn mindestens eine Seite im Rand C liegt, und *einklappbar*, wenn $\Delta \cap C$ aus genau einer oder zwei Kanten besteht, also $\Delta = [a,b,c]$ mit $\Delta \cap C = [a,b]$ oder $[a,c] \cup [c,b]$.

Lemma J2H. *Zu jedem einklappbaren Dreieck $\Delta \in \mathscr{K}_2$ existiert ein stückweise affiner Homöomorphismus $k : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $k(\overline{B}) = \overline{B \smallsetminus \Delta} = |\mathscr{K}'|$ wie in Abbildung J:23.*

BEWEIS. Die Kantenmitte von $[a,b]$ ist $m = (a+b)/2$. Die Seitenhalbierende $[m,c]$ verlängern wir beidseitig etwas zu $[m',c']$. In dem Viereck $V = [a,m',b,c']$ verschieben wir nun m nach c und c nach $(c+c')/2$ bzw. c nach m und m nach $(m+m')/2$. Dies setzt sich zu einen stückweise affinen Homöomorphismus $k : V \xrightarrow{\sim} V$ fort, wobei wir V wie skizziert in 6 Dreiecke unterteilen. Da dabei der Rand von V nicht bewegt wird, bewegen wir auch außerhalb von V nichts und erhalten $k : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ wie gewünscht. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Wir behaupten: Hat $\mathscr{K}$ mindestens zwei Dreiecke, so ist mindestens eines einklappbar. Das scheint plausibel, bedarf aber eines Beweises. Ein erster Induktionsbeweis wird zunächst scheitern. Es ist erstaunlicherweise leichter, mehr zu zeigen (wie schon in I3I):

Lemma J2I. *Hat $\mathscr{K}$ mindestens zwei Dreiecke, so sind mindestens zwei einklappbar.*

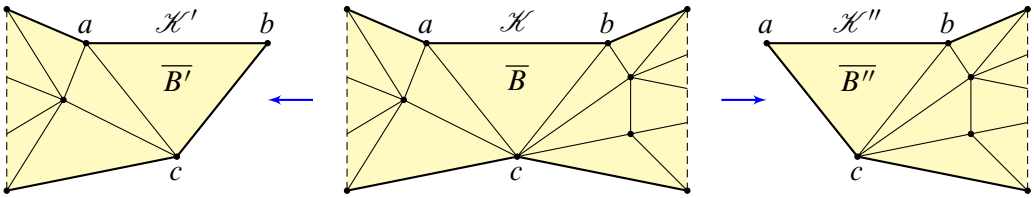


ABBILDUNG J:24. Existenz von einklappbaren Dreiecken

BEWEIS. Wir führen Induktion über die Anzahl $n = \sharp\mathscr{K}_2$ der Dreiecke. Für $n = 2$ ist die Aussage wahr: Beide Dreiecke teilen sich eine gemeinsame Kante, also ist jedes einklappbar. Sei nun $n \geq 3$ und die Aussage sei wahr für alle Triangulierungen mit $< n$ Dreiecken.

Es gibt mindestens zwei Randdreiecke. Sind alle einklappbar, so ist nichts zu zeigen. Sei Δ nicht einklappbar, also $\Delta = [a,b,c]$ mit $\Delta \cap C = [a,b] \cup \{c\}$ wie in Abbildung J:24.

Die Kurve $C \smallsetminus (\mathrm{Int}[a,b] \cup \{c\})$ hat zwei Komponenten $C_a \ni a$ und $C_b \ni b$. Wir schließen diese zu zwei Jordan–Kurven $C' = C_a \cup [a,b] \cup [b,c]$ und $C'' = C_b \cup [b,a] \cup [a,c]$. Nach dem Satz von Jordan umschließt C' ein Gebiet B', und C'' umschließt B'', weiters $\mathscr{K}' = \{\Delta \in \mathscr{K} \mid \Delta \subset \overline{B'}\}$ trianguliert $\overline{B'}$, und $\mathscr{K}'' = \{\Delta \in \mathscr{K} \mid \Delta \subset \overline{B''}\}$ trianguliert $\overline{B''}$.

Die Triangulierung $\mathscr{K}'$ enthält mindestens zwei einklappbare Dreiecke, also neben Δ noch ein weiteres Δ'. Dieses ist auch einklappbar bezüglich $\mathscr{K}$, denn $\Delta' \cap C = \Delta' \cap C'$. Ebenso enthält $\mathscr{K}''$ neben Δ noch ein weiteres einklappbares Dreieck Δ''. Demnach enthält $\mathscr{K}$ mindestens die beiden einklappbaren Dreiecke Δ' und Δ'', was zu zeigen war. □

Bemerkung. Ist Lemma J2I nicht offensichtlich? Müssen wir es wirklich so pedantisch sorgfältig beweisen? Ich denke ja! Zum Kontrast: In Dimension 3 gilt die analoge Aussage nicht mehr: Es gibt sogar affine Triangulierungen eines Tetraeders, sodass kein Randtetraeder einklappbar ist. Diese erstaunliche Erkenntnis verdanken wir Mary Ellen RUDIN, *An unshellable triangulation of a tetrahedron*, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958) 90–91.

Bemerkung (Inventor's paradox)**.** Wir stehen staunend vor einem genial einfachen doch trickreichen Beweis zu Lemma J2I. Denkwürdig ist dabei: Die *stärkere* Aussage ist *einfacher* zu beweisen. Wie kann das sein? Das ist bei vollständiger Induktion ein häufiges, ja geradezu typisches Phänomen. George PÓLYA nannte es das *inventor's paradox*:

„The typical proposition A accessible to proof by mathematical induction has an infinity of cases $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. The case A_0 is often easy; at any rate, A_0 has to be handled by specific means. Once A_0 is established, we have to prove A_{n+1} assuming A_n. A proposition A' stronger than A may be easier to prove than A. In fact, let A' consist of the cases $A'_0, A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, \ldots$. In passing from A to A' we make the burden of the proof heavier: we have to prove the stronger A'_{n+1} instead of A_{n+1}. Yet we make also the support of the proof stronger: we may use the more informative A'_n instead of A_n."

„In general, in trying to devise a proof by mathematical induction, you may fail for two opposite reasons. You may fail because you try to prove too much: your A_{n+1} is too heavy a burden. Yet you may also fail because you try to prove too little: your A_n is too weak a support. You have to balance the statement of your theorem so that the support is just enough for the burden. And so the machinery of the proof edges you towards a more balanced, better adapted view of the facts. This may be typical of the rôle of proofs in building up science." (George Pólya, *Mathematics and plausible reasoning, vol. I, Induction and analogy in mathematics*, 1954, p. 119)

In Ihrer Mathematikausbildung sehen und lösen Sie viele Aufgaben, die folgende, etwas künstliche Form haben: „Zeigen Sie die Aussage A_n per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$." Wie Sie aus Ihrer Erfahrung wissen, kann das leicht oder schwer sein. In der Praxis stehen Sie aber vor einem zusätzlichen, ganz natürlichen Problem: Wenn Ihnen niemand die Aufgabe vorformuliert, dann müssen Sie sich selbst vortasten und irgendwann entscheiden: Welche Aussage A_n wollen Sie überhaupt zeigen? Hier ist Pólyas Weisheit Gold wert. Manchmal gilt: Weniger ist schwer, mehr ist leichter. Die Kunst ist, die richtige Balance zu finden!

Dasselbe gilt insgesamt für Ihr Studium: Solide Grundlagen kosten anfangs Mühe, doch dann tragen sie reiche Früchte. Das lohnt sich! Leben allgemein ist ein Balanceakt zwischen Investition und Konsum. Die Vorbereitung von heute ist der Nutzen von morgen!

Satz J2J (Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven)**.** *(1) Zu jeder polygonalen Kurve $\mathbb{S}^1 \cong C \subset \mathbb{R}^2$ existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(C) = \mathbb{S}^1$.*

(2) Genauer: Das Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$ zerfällt in zwei Gebiete, A unbeschränkt und B beschränkt. Sei $\mathscr{K}$ eine affine Triangulierung von $\overline{B}$ und $D \in \mathscr{K}_2$ ein Dreieck. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung des Kompaktums $\overline{B \smallsetminus D}$. Dann existiert ein stückweiser affiner Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(\overline{B}) = D$ und Träger $\operatorname{supp}(h) \subset U$.

Der *Träger* eines Homöomorphismus $h : X \xrightarrow{\sim} X$ ist die Menge der bewegten Punkte, genauer gesagt ihr Abschluss $\operatorname{supp}(h) := \overline{\{\, x \in X \mid h(x) \neq x \,\}}$. Die Aussage $\operatorname{supp}(h) \subset U$ bedeutet also: h bewegt nur Punkte in U, somit $h(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus U$.

Aussage (1) beinhaltet die Jordan–Zerlegung $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$ mit $h(B) = \mathbb{B}^2$ und $h(\overline{B}) = \mathbb{D}^2$. Zur Vereinfachung setzen wir voraus, dass unsere Kurve $\mathbb{S}^1 \cong C \subset \mathbb{R}^2$ polygonal ist. Im Gegenzug haben wir sogar mehr bewiesen als anfänglich behauptet: Der Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ kann stückweise affin gewählt werden, wie in (2) erklärt.

BEWEIS. (2) Dank J2D haben wir die Jordan–Zerlegung $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$. Dank J2E gilt $\delta A = \delta B = C$ und somit $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$. Dank J2F existiert eine Triangulierung $\mathscr{K}$ mit $|\mathscr{K}| = \overline{B}$. Wir führen Induktion über die Anzahl $n = \sharp \mathscr{K}_2$ der Dreiecke. Für $n = 1$ gilt $\overline{B} = D$, und $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ leistet das Gewünschte. Für $n \geq 2$ existiert dank J2I ein einklappbares Dreieck Δ verschieden von D. Wie in J2H können wir Δ einklappen vermöge $k : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $k(\overline{B}) = \overline{B'}$ und $\operatorname{supp}(k) \subset U$. Für $\overline{B'}$ nutzen wir die Triangulierung $\mathscr{K}'$ ohne das Dreieck Δ. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $h' : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h'(\overline{B'}) = D$ und $\operatorname{supp}(h') \subset U$. Also liefert die Komposition $h = h' \circ k : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ das Gewünschte.

(1) Dank (2) haben wir $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(\overline{B}) = D$. Radiale Projektion (F6G) liefert dann einen Homöomorphismus $k : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $k(D) = \mathbb{D}^2$. □

Beispiel. Zur Illustration können Sie das Verfahren auf unser Labyrinth J:17 anwenden. Alle Schritte sind explizit und können direkt auf einem Computer implementiert werden.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J2g. Sparsamere Triangulierung. Im Beweis von Lemma J2F fügen wir Eckpunkte hinzu. Es geht auch sparsamer: Allein die Eckpunkte $v_1, \dots, v_n$ der Randkurve C genügen!

Übung J2K. Sei $C = [v_0, v_1] \cup \dots \cup [v_{n-1}, v_n]$ eine einfach geschlossene Polygonkurve, $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$ die zugehörige Jordan–Zerlegung, und B das beschränkte Gebiet.

(1) Für $n \geq 4$ existiert eine *Diagonale*, also zwei Eckpunkte v_k, v_ℓ mit $\operatorname{Int}[v_k, v_\ell] \subset B$.
(2) Das Polyeder $\overline{B} = B \cup C$ lässt sich allein mit den Ecken $v_1, \dots, v_n$ triangulieren, also mit n Ecken, n Randkanten, $n-3$ inneren Kanten und $n-2$ Dreiecken.
(3) Für $n \geq 4$ hat jede solche Triangulierung $\mathscr{K}$ des Polyeders $\overline{B} = B \cup C$ mindestens zwei *Ohren*, also innere Kanten der Form $[v_{k-1}, v_{k+1}]$.

Wir wählen ein Dreieck $\Delta \in \mathscr{K}$. Durch sukzessives Einklappen von Ohren erhalten wir einen stückweise affinen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(\overline{B}) = \Delta$.

✻ **J2K.** (1) Wir können annehmen, dass alle Eckpunkte verschiedene Höhen (y–Koordinaten) haben; notfalls drehen wir das Koordinatensystem etwas. Sei v_k eine höchste Ecke, also mit maximaler y–Koordinate. Gilt $\operatorname{Int}[v_{k-1}, v_{k+1}] \subset B$, so ist $[v_{k-1}, v_{k+1}]$ eine Diagonale. Andernfalls liegen im Dreieck $[v_{k-1}, v_k, v_{k+1}]$ weitere Eckpunkte. Wir wählen von diesen Eckpunkten den höchsten v_ℓ; dann ist $[v_k, v_\ell]$ eine Diagonale.

(2) Wir führen Induktion über die Länge n. Für $n = 3$ ist die Aussage klar. Für $n \geq 4$ können wir dank (1) eine Diagonale $[v_k, v_\ell]$ wählen. Aufschneiden entlang $[v_k, v_\ell]$ ergibt zwei einfach geschlossene Polygonkurven $C_1 = (v_k, v_{k+1}, \dots, v_\ell, v_k)$ und $C_2 = (v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_k, v_\ell)$ der Länge $3 \leq n_1, n_2 < n$. Nach Induktionsvoraussetzung lassen sich $\overline{B_1}$ und $\overline{B_2}$ allein mit den gegebenen Ecken triangulieren. Wir fügen diese zusammen.

(3) Jedes Dreieck hat höchstens zwei Randkanten. Da wir $n-2$ Dreiecke haben aber n Randkanten, müssen mindestens zwei Dreiecke zwei Randkanten haben.

§J2h. Polygonal berandete Gebiete. Wir behandeln auch Gebiete mit Löchern:

Übung J2L. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Der Rand $\delta\Omega = |P_1| \sqcup \dots \sqcup |P_n|$ bestehe aus einfach geschlossenen Polygonzügen $P_1, \dots, P_n$.

(1) Können wir P_k so orientieren, dass Ω in Fahrtrichtung stets links von $|P_k|$ liegt?
(2) Warum bestimmen die Randkurven $P = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ eindeutig die Menge Ω?
(3) Wie berechnen Sie, ob ein Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ in Ω liegt oder in $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \overline{\Omega}$ oder auf $\delta\Omega$?
(4) Wie berechnen Sie den Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(\Omega) = a(P)$ als Funktion von P?

Lösen Sie die Fragen (3) und (4) durch Angabe eines möglichst einfachen und effizienten Algorithmus. Nutzen Sie dabei nur die Grundrechenarten $\pm, \cdot, <, =$ und Division durch 2.

✻ **J2L.** (1) Ja: Nach dem Jordanschen Trennungssatz liegt Ω ganz auf einer Seite von P_i.

Warnendes Gegenbeispiel: Für das Gebiet $\Omega =]-1,1[^2 \smallsetminus]0,1[$ besteht der Rand $\delta\Omega$ aus Geradensegmenten, aber diese bilden keinen einfach geschlossene Polygonzüge. Für die offene Menge $\Omega =]-2,2[^2 \smallsetminus \partial]-1,1[^2$ besteht der Rand aus zwei einfach geschlossenen Kurven, aber für die kleine liegt Ω auf beiden Seiten.

(2) *Warnendes Gegenbeispiel:* Die beiden Halbebenen $H_\pm = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \gtrless 0 \}$ werden durch ihren Rand $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \}$ nicht eindeutig festgelegt. Für beschränkte Gebiete löst (3) das Problem:

(3) Für $x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus |P|$ betrachten wir die Summe der Umlaufzahlen $\deg(P - x) = \sum_{k=1}^n \deg(P_k - x)$ modulo 2. Die Abbildung $\nu : \mathbb{R}^2 \smallsetminus |P| \to \{0,1\} : x \mapsto \deg(P - x) \bmod 2$ ist lokal konstant. An jeder Kante liegt Ω auf einer Seite und $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \overline{\Omega}$ auf der anderen. Da Ω beschränkt ist, also $\Omega \subset B(0,r)$, gilt $f(x) = 0$ für $|x| > r$. Beim Überschreiten der Kante wechselt ν den Wert. Somit gilt $\nu = \mathbf{I}_\Omega$.

(4) Der orientierte Flächeninhalt des Dreiecks $[0, v_{k-1}, v_k]$ ist das Kreuzprodukt $a_k = (v_{k-1} \times v_k)/2$. Wir erhalten $a(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\ell x_{k-1} y_k - y_{k-1} x_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\ell (x_k + x_{k-1})(y_k - y_{k-1})$; die zweite Summe benötigt nur ℓ Multiplikationen. Dies ist die diskrete Formulierung von Greens Flächenformel $\operatorname{vol}_2(B) = \oint_{\partial B} x \, \mathrm{d}y$.

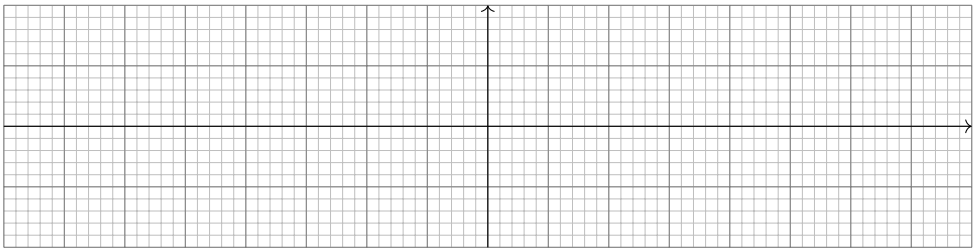
§J2i. Computational Topology: Point-in-Polygon. Vorgelegt sei ein Polygonzug $P = v_0 v_1 \dots v_\ell$ mit Ecken $v_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ und $v_0 = v_\ell$. Wir wollen effizient berechnen, ob P einen gegebenen Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ umschließt. Das ist Grundlage graphischer Oberflächen (CAD, GIS, etc): Jeder Mausklick löst eine solche Berechnung aus! Auch in Spielen werden Objekte eines 3D-Szenarios, etwa simpliziale Flächen, auf die Bildebene projiziert, und zur realistischen Anzeige müssen Überschneidungen erkannt werden.

Übung J2M. Lösen Sie folgende Probleme durch Angabe eines geeigneten Algorithmus. Nutzen Sie dabei nur die Grundrechenarten $\pm, \cdot, <, =$, keine trigonometrischen Funktionen.

(1) Berechnen Sie die Umlaufzahl $\deg(P)$ um 0. Behandeln Sie auch den Fall $0 \in |P|$. Versuchen Sie es sparsam: Es genügen 3ℓ Multiplikationen und 3ℓ Additionen.

Sei zudem P einfach geschlossen (J2N) mit Jordan–Zerlegung $\mathbb{R}^2 \smallsetminus |P| = A \sqcup B$.

(2) Berechnen Sie, ob ein gegebener Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ in A oder in B oder auf $|P|$ liegt.
(3) Für konvexe Polygone lassen sich (1) und (2) mit Aufwand $O(\log \ell)$ berechnen.
(4) Hat $|P|$ nur m Maxima/Minima, so gelingen (1) und (2) mit Aufwand $O(m + \log \ell)$.



∗ **J2M.** (1) Das Segment $[v_{k-1}, v_k]$ kreuzt die x–Achse, wenn $0 \neq s_k := |\operatorname{sign}(y_{k-1}) - \operatorname{sign}(y_k)|$ gilt. Genauer gilt $s_k = 2$ bei vollständigem Kreuzen, $s_k = 1$ bei genau einer Ecke auf der x–Achse, und $s_k = 0$ sonst. Das Vorzeichen des Kreuzprodukts $v_{k-1} \times v_k = x_{k-1} y_k - y_{k-1} x_k$ ist das des orientierten Winkels $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$, also positiv gegen den Uhrzeigersinn, negativ mit dem Uhrzeigersinn, und 0 in allen degenerierten Fällen. Die Umlaufzahl ist demnach $\deg(P) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\ell} |\operatorname{sign}(y_{k-1}) - \operatorname{sign}(y_k)| \cdot \operatorname{sign}(x_{k-1} y_k - y_{k-1} x_k)$.

Diese einfache Formel behandelt sogar alle Sonderfälle: Liegt 0 im Inneren einer Kante von P, so ist $\deg(P)$ halbzahlig, nämlich der Mittelwert beider Seiten. Liegt 0 auf einer Ecke von P, so gibt es keine einfache Regel: Der absolute Beitrag ist $0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$, die Diskussion aller 16 Konfigurationen ist leicht aber länglich.

(2) Wir fangen als erstes die Sonderfälle $q \in \{v_1, \dots, v_\ell\}$ ab: Für Eckpunkte gilt natürlich $q \in |P|$. Andernfalls gilt $q \in A$ gdw. $\deg(P - q) = 0$, und $q \in B$ gdw. $\deg(P - q) = \pm 1$ sowie $q \in |P|$ gdw. $\deg(P - q) = \pm 1/2$.

Alle Details wurden so geschickt eingerichtet, dass ein Durchgang alle Fälle abdeckt. Der Eckpunkte-Test benötigt 2ℓ Vergleiche. Die Umlaufzahl benötigt 2ℓ Multiplikationen und 2ℓ Additionen (zuzüglich Kleinigkeiten wie 4ℓ Vorzeichentests, $\ell + 1$ Multiplikationen mit $2, 1, 1/4$, sowie ℓ Subtraktionen von $-1, 0, 1$.)

(3) Wir können $y_0 \leq \dots \leq y_j \geq \dots \geq y_k$ annehmen. Zur in (1) entwickelten Summe für $\deg(P - q)$ tragen höchstens vier Kanten bei. Diese finden wir durch eine binäre Suche mit Aufwand $O(\log \ell)$.

(4) Als Vorbereitung sortieren wir einmal alle Kanten nach ihren y–Koordinaten. Das kostet Zeit $O(\ell \log \ell)$ und Speicher $O(\ell)$. Dieser zusätzliche Aufwand amortisiert sich, wenn mehrere Punkte q getestet werden: Zur in (1) entwickelten Summe für $\deg(P - q)$ tragen höchstens $4m$ Kanten bei. Diese finden wir durch eine binäre Suche mit Aufwand $O(\log \ell)$. Die Summe benötigt dann nur $4m$ mal 3 Multiplikationen und 3 Additionen.

Rundung: Zur Vereinfachung nehmen wir exakte Arithmetik an. Ein Binärcomputer kann nicht jede reelle Zahl exakt darstellen. Wenn wir alle Eingaben und Rechnungen auf den Körper $\mathbb{Q}$ oder den Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ beschränken, dann gelingt die Rechnung exakt, ohne Rundungsfehler. In der Praxis wird man zur Beschleunigung meist Fließkommazahlen nutzen, muss dann allerdings Rundungsfehler erwarten, untersuchen, abfangen, ...

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J2j. Segment-Segment-Intersection. Wir ergänzen Übung J2M durch folgenden Test:

Übung J2N. Entwickeln Sie (mit Kreativität und Sorgfalt) einen Algorithmus, der feststellt, ob ein gegebener Polygonzug $P = v_0 v_1 \cdots v_\ell$ im $\mathbb{R}^n$ einfach ist bzw. einfach geschlossen.

Hinweis: Wir diskutieren im Folgenden nur die Dimensionen $n = 1, 2, 3$. Zu gegebenen Punkten $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ wollen wir berechnen, ob und wie die Segmente $[a, b]$ und $[c, d]$ sich schneiden, aber nicht wo: Eventuelle Schnittpunkte wollen wir nicht berechnen, daher nutzen wir lediglich die Grundrechenarten $\pm, \cdot, <, =$ und Division durch 2.

(0) Die folgenden Algorithmen (1) und (2) sollen alle Sonderfälle korrekt behandeln. Zeichnen Sie hierzu mögliche Konfigurationen der Segmente $[a, b]$ und $[c, d]$ in $\mathbb{R}^n$.

(1) Schreiben Sie Algorithmen in Dimension $n = 1, 2, 3$ zur Berechnung der Funktion

$$\delta(a,c) := \begin{cases} 0 & \text{falls } a \neq c, \\ 1 & \text{falls } a = c, \end{cases} \qquad \delta(a,b,c) := \begin{cases} 0 & \text{falls } c \notin [a,b], \\ 1/2 & \text{falls } c \in \partial[a,b], \\ 1 & \text{falls } c \in \operatorname{Int}[a,b]. \end{cases}$$

(2) Schreiben Sie Algorithmen in Dimension $n = 1, 2, 3$ zur Berechnung der Funktion

$$\delta(a,b,c,d) := \begin{cases} 0 & \text{falls } [a,b] \cap [c,d] = \emptyset, \\ 1/4 & \text{falls } [a,b] \cap [c,d] = \partial[a,b] \cap \partial[c,d] \neq \emptyset, \\ 1/2 & \text{falls } [a,b] \cap [c,d] = (\partial[a,b] \cap \operatorname{Int}[c,d]) \cup (\operatorname{Int}[a,b] \cap \partial[c,d]) \neq \emptyset, \\ 1 & \text{falls } \operatorname{Int}[a,b] \cap \operatorname{Int}[c,d] \neq \emptyset. \end{cases}$$

✻ **J2N.** Falls $v_{k-1} = v_k$ für ein $k = 1, \ldots, \ell$, so ist der Polygonzug P nach Definition nicht einfach. Wir können also $v_{k-1} \neq v_k$ für alle $k = 1, \ldots, \ell$ annehmen. Für $1 \leq j < k \leq \ell$ bleibt zu prüfen, dass $[v_{j-1}, v_j] \cap [v_{k-1}, v_k] = \emptyset$ für $j \leq k-2$, bzw $= \{v_j\}$ für $j = k-1$. Dies gelingt leicht mit der obigen Funktion δ.

Zusatz: Im einfach geschlossenen Fall muss zyklisch $v_0 = v_\ell$ gelten sowie $[v_{\ell-1}, v_\ell] \cap [v_\ell, v_1] = \{v_\ell\}$.

(1) Es gilt $\delta(a,b,c) = \delta(b,a,c)$. Für $a = b$ gilt $\delta(a,b,c) = \delta(a,c)$. Wir können also $a \neq b$ annehmen.

Dimension $n = 1$: Sei also $a < b$; notfalls vertauschen wir $a \leftrightarrow b$. Die fünf Fälle $c < a < b$ und $a = c < b$ und $a < c < b$ und $a < c = b$ und $a < b < c$ bilden wir ab auf die vorgeschriebenen Werte $0, 1/2, 1, 1/2, 0$.

Dimension $n = 2, 3$: Falls $(b-a) \times (c-a) \neq 0$, so gilt $c \notin G := \operatorname{aff}(a,b)$, also $c \notin [a,b]$. Andernfalls gilt $c \in G$. Wir wählen k mit $a_k \neq b_k$, projizieren auf $\mathbb{R}$ vermöge $a, b, c \mapsto a_k, b_k, c_k$ und nutzen den Fall $n = 1$.

(2) Die Funktion δ ist invariant unter Vertauschungen $a \leftrightarrow b$, $c \leftrightarrow d$ und $(a,b) \leftrightarrow (c,d)$. Für $c = d$ gilt $\delta(a,b,c,d) = \delta(a,b,c)$. Für $a = b$ gilt $\delta(a,b,c,d) = \delta(c,d,a)$. Wir können also $a \neq b$ und $c \neq d$ annehmen.

Dimension $n = 1$: Wir sortieren $a < b$ und $c < d$. Für $b < c$ oder $d < a$ gilt $\delta = 0$. Für $b = c$ oder $d = a$ gilt $\delta = 1/4$. In allen anderen Fällen gilt $\delta = 1$. (Der Fall $\delta = 1/2$ tritt in Dimension 1 noch nicht auf.)

Dimension $n = 2$: Im Falle $(b-a) \times (d-c) = 0$ liegen a, b, c, d auf der Geraden $G = \operatorname{aff}(a,b) = \operatorname{aff}(c,d)$. Wir wählen $k = 1, 2$ mit $a_k \neq b_k$, projizieren $a, b, c, d \mapsto a_k, b_k, c_k, d_k$ in $\mathbb{R}$ und nutzen den Fall $n = 1$.

Der Wert $i = |\operatorname{sign}((b-a) \times (c-a)) - \operatorname{sign}((b-a) \times (d-a))| \in \{0, 1, 2\}$ signalisiert, ob $[c,d]$ die Gerade $G = \operatorname{aff}(a,b)$ kreuzt. Der Wert $j = |\operatorname{sign}((d-c) \times (a-c)) - \operatorname{sign}((d-c) \times (b-c))| \in \{0, 1, 2\}$ signalisiert, ob $[a,b]$ die Gerade $H = \operatorname{aff}(c,d)$ kreuzt. Ihr Produkt $\delta(a,b,c,d) = i \cdot j/4$ leistet demnach das Gewünschte.

Dimension $n = 3$: Für $\det(b-a, c-a, d-a) \neq 0$ sind die Geraden $G = \operatorname{aff}(a,b)$ und $H = \operatorname{aff}(c,d)$ windschief und somit $[a,b] \cap [c,d] = \emptyset$. Wenn $u = (b-a) \times (c-a) \neq 0$ oder $u = (b-a) \times (d-a) \neq 0$, dann wählen wir $k = 1, 2, 3$ mit $u_k \neq 0$, vergessen die k–te Koordinate und nutzen den Fall $n = 2$.

Literatur: J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press 1998, Abschnitte §1.5 *Segment intersection* und §7.7 *Intersection of line segments*. Unser naiver Algorithmus hat Zeitaufwand $O(\ell^2)$. In der Ebene gibt es clevere Optimierungen: Der Algorithmus von Shamos–Hoey (1976) benötigt zum Testen nur Zeit $O(\ell \log \ell)$ und Bentley–Ottmann (1979) zum Auflisten aller k Kreuzungen nur Zeit $O((k+\ell) \log \ell)$.

§J2k. Too big to fail? Too small to separate!

Übung J2O. Die folgenden Aufgaben benutzen immer denselben genial-einfachen Trick (D7D): Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist nicht abzählbare Vereinigung affiner Teilräume $A_k \subsetneq \mathbb{R}^n$.

(1) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar und $n \geq 2$, so ist $X := \mathbb{R}^n \smallsetminus A$ wegzusammenhängend. Genauer: In X sind je zwei Punkte x, y durch einen polygonalen Weg verbindbar.
(2) Dasselbe gilt in $\mathbb{R}^n$ allgemeiner für jede abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k$ von Simplizes $\Delta_k \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $\leq n-2$.
(3) Seien K, L abzählbare Simplizialkomplexe und $f : |K| \to \mathbb{R}^n$, $g : |L| \to \mathbb{R}^n$ affin mit disjunkten Bildern. Gilt $\dim K + \dim L \leq n-2$, so lässt sich g in $\mathbb{R}^n \smallsetminus f(|K|)$ zusammenziehen. Genauer: Dies gelingt durch eine affine Kegelkonstruktion.

⁕ **J2O.** (1) Es genügt, $x \neq y$ und $n = 2$ zu betrachten. (Für $n \geq 3$ wählen wir eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^n$, mit $x, y \in R$.) Wir wählen eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$, die x und y nicht enthält, etwa die Mittelsenkrechte auf $[x, y]$. Es gibt überabzählbar viele Wege $\gamma = |xzy|$ von x über $z \in G$ nach y. Höchstens abzählbar viele davon treffen A.

(2) Diese Aussage ist ein Spezialfall von (3) für $|L| = \{x, y\}$.

(3) Sei $p = \dim K$ und $q = \dim L$. Für jeden Simplex $S \in K$ gilt $\dim S \leq p$, also besteht $f(S) \subset \mathbb{R}^n$ aus $\leq p+1$ Punkten. Für $T \in L$ besteht $g(T) \subset \mathbb{R}^n$ aus $\leq q+1$ Punkte. Somit hat $f(S) \cup g(T)$ höchstens $p+q+2 \leq n$ Punkte, und der affine Teilraum $A_{S,T} := \operatorname{aff}(f(S) \cup g(T))$ hat Dimension $\leq n-1$. Die abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_{(S,T)\in K\times L} \operatorname{aff}(f(S) \cup g(T))$ schöpft $\mathbb{R}^n$ nicht aus (D7D). Wir wählen $z \in \mathbb{R}^n \smallsetminus A$ und setzen $g : |L| \to \mathbb{R}^n$ affin fort auf den Kegel $L^* = L * \{z\}$ zu $g^* : |L^*| \to \mathbb{R}^n$. Für $S \in K$ und $T \in L$ ist der Simplex $[f(S)]$ disjunkt zu $\operatorname{aff}(g(T), z)$, daher ist $f(|K|) = \bigcup_{S\in K}[f(S)]$ disjunkt zu $g^*(|L^*|) = \bigcup_{T\in L}[g(T), z]$.

§J2l. Komplement eines Kompaktums $K \subset \mathbb{R}^n$.

Übung J2P. Für $n \geq 2$ und jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

(1) Jede Komponente von $\mathbb{R}^n \smallsetminus K$ ist offen und wegzusammenhängend.
(2) Das Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus K$ hat genau eine unbeschränkte Komponente.
(3) Der Rand jeder Komponente $U \subset \mathbb{R}^n \smallsetminus K$ ist eine Teilmenge von K, kurz $\delta U \subset K$.
(4) Trennt K aber keine (kompakte) Teilmenge $K' \subsetneq K$ den Raum $\mathbb{R}^n$, so gilt $\delta U = K$.

Illustration: Bestimmen Sie die Komponenten und ihre Ränder in Abbildung J:19.

⁕ **J2P.** (1) Jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen (F1O), also ist das Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus K$ offen. Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist lokal wegzusammenhängend (G3A), also auch jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$. Daraus folgt: Für den Raum $\mathbb{R}^n \smallsetminus K$ sind Komponenten und Wegkomponenten dasselbe.

(2) Jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt, also $K \subset B(0,r)$ für ein $r \geq 0$. In Dimension $n \geq 2$ ist $X = \mathbb{R}^n \smallsetminus B(0,r)$ zusammenhängend: Je zwei Punkte liegen in einer Ebene und lassen sich durch einen Weg verbinden (Polarkoordinaten). Für jede unbeschränkte Komponente $U \subset \mathbb{R}^n \smallsetminus K$ gilt $U \cap X \neq \emptyset$, also $U \supset X$.

(3) Sei U eine Komponente von $\mathbb{R}^n \smallsetminus K$ und V die Vereinigung aller anderen, also $\mathbb{R}^n \smallsetminus K = U \sqcup V$. Für Randpunkte $x \in \delta U$ gilt: Jede Umgebung von x in $\mathbb{R}^n$ schneidet sowohl U als auch $\mathbb{R}^n \smallsetminus U$. Da U offen ist, kann x nicht in U liegen. Da auch V offen ist, kann x auch nicht in V liegen. Es bleibt nur $x \in K$.

(4) Da K den Raum $\mathbb{R}^n$ trennt, existierten Komponenten $U \neq V$ von $\mathbb{R}^n \smallsetminus K$. Wir zeigen, dass jeder Punkt $a \in K$ im Rand von U liegt. Für $\varepsilon > 0$ sei $B = K \cap B(a,\varepsilon)$. Die Teilmenge $K' = K \smallsetminus B$ trennt $\mathbb{R}^n$ nicht, also existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \smallsetminus K'$ von $\gamma(0) \in U$ nach $\gamma(1) \in V$. Dieser Weg muss durch B laufen, andernfalls läge er in $\mathbb{R}^n \smallsetminus K$. Sei $t \in [0,1]$ der erste Zeitpunkt mit $\gamma(t) \in \overline{V}$, also $\gamma([0,t[) \subset U$ und $\gamma(t) \in B$. Wegen Stetigkeit existiert $0 \leq s < t$ mit $\gamma(]s,t]) \in B(a,\varepsilon)$. Somit schneidet jede Umgebung $B(a,\varepsilon)$ von $a \in K$ die Komponente U. Das bedeutet $a \in \delta U$. Da dies für jeden Punkt $a \in K$ gilt, schließen wir $K \subset \delta U$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§J2m. Der Jordansche Nicht-Trennungssatz.** Zu topologischen Räumen C und X, etwa $C = [0,1]$ und $X = \mathbb{R}^2$, betrachten wir Einbettungen $f_0, f_1 : C \hookrightarrow X$. Ihre Bilder $C_0 = f_0(C)$ und $C_1 = f_1(C)$ sind homöomorph, können aber verschieden in X liegen: ☜

(a) Haben die Komplemente $X \smallsetminus C_0$ und $X \smallsetminus C_1$ gleich viele Komponenten?
(b) Existiert ein Homöomorphismus $h : X \smallsetminus C_0 \xrightarrow{\sim} X \smallsetminus C_1$ der Komplemente?
(c) Existiert gar ein Homöomorphismus $h : (X, C_0) \xrightarrow{\sim} (X, C_1)$ der Raumpaare?

Letzteres ist ein Homöomorphismus $h : X \xrightarrow{\sim} X$ mit $h(C_0) = C_1$. Offensichtlich gelten die Implikationen (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Für nicht-kompakte Räume wie $C = \mathbb{R}$ gilt (a) im Allgemeinen nicht, siehe Cantors Karussell (G2T). Selbst für $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ schlägt (c) fehl:

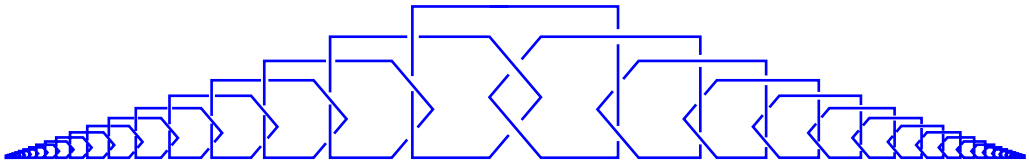


ABBILDUNG J:25. Eine wilde Einbettung $[-1,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ nach Artin und Fox

☞ **Beispiel J2Q.** Abbildung J:25 zeigt eine Einbettung $f : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{S}^3$. Das Komplement $X = \mathbb{S}^3 \smallsetminus f([0,1])$ ist nicht zusammenziehbar, denn $\pi_1(X) \neq \{1\}$; siehe R.H. Fox, E. Artin, *Some wild cells and spheres in three-dimensional space.* Ann. of Math. 49 (1948) 979–990. Zur Konstruktion kann man die Eckpunkte leicht in Koordinaten angeben: Die gezeigte Figur ist selbstähnlich mit einer Verschiebung und Skalierung, hier um $q = 0.8$. Man erhält so eine stückweise affine Einbettung $\gamma :]-1,1[\hookrightarrow \mathbb{R}^3$ mit den Stützstellen $\pm(1-2^{-k})$ für $k \in \mathbb{N}$. (Versuchen Sie es!) Diese lässt sich stetig fortsetzen zu $\gamma : [-1,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. ☜

☞ **Satz J2R** (Nicht-Trennungssatz)**.** *Für jede einfache Kurve $[0,1] \cong C \subset \mathbb{R}^n$ und $n \geq 2$ gilt:* ☜

(1) Das Komplement $A = \mathbb{R}^n \smallsetminus C$ ist wegzusammenhängend.
(2) Der Rand des Komplements $\mathbb{R}^n \smallsetminus C$ in $\mathbb{R}^n$ ist die Menge C.

In kleiner Dimension $n \leq 2$ oder für polygonale Kurven C gelten stärkere Aussagen:

(3) Es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \smallsetminus C \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$.
(4) Es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(C) = [0,1]$.

Die Schwierigkeit dieses Satzes liegt in der schwachen Voraussetzung: Zwar ist der Teilraum $C \cong [0,1]$ sehr einfach, aber er kann kompliziert im Raum $\mathbb{R}^n$ liegen (J2Q). Man denke etwa an Osgood–Kurven $C \subset \mathbb{R}^2$ (C6H) mit positivem Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(C) > 0$.

☞ **Übung J2S.** Beweisen Sie Satz J2R für polygonale Kurven $C = [v_0, v_1] \cup \cdots \cup [v_{\ell-1}, v_\ell]$. Für $n = 3$ entspricht er der Alltagserfahrung: Jedes verknotete Seil lässt sich entknoten. ☜

✻ **J2S.** Wir zeigen (4) per Induktion über die Länge $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: Für $\ell = 1$ gilt $C = [v_0, v_1]$, daher genügt für h die Komposition einer Verschiebung, Drehung, Streckung. Für $\ell \geq 2$ betrachten wir das letzte Segment $S = [v_{\ell-1}, v_\ell]$. Eine ε–Umgebung U um S schneidet neben S nur $[v_{\ell-2}, v_{\ell-1}]$. Durch einen (stückweise affinen) Homöomorphismus $k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit Träger in U können wir S schrumpfen und den Winkel geradebiegen. Dann lässt sich der Punkt $v_{\ell-1}$ löschen, und wir erhalten den Polygonzug $C' = k(C)$ der Länge $\ell' = \ell - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $h' : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h'(C') = [0,1]$. Für $h = h' \circ k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ gilt demnach $h(C) = [0,1]$. Hieraus folgen (1) und (2). Schließlich gilt (3) $\mathbb{R}^n \smallsetminus [0,1] \cong \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ dank E1Q.

§J2n. Der Jordansche Nicht-Trennungssatz. Wir widmen uns folgendem Problem:

Satz J2T. *Für jede Einbettung $f : [0,1]^k \xrightarrow{\sim} C \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}^n \smallsetminus C$ wegzusammenhängend.*

Für die Topologie der Ebene interessiert uns zunächst die Dimension $n = 2$. Der Beweis verläuft jedoch in allen Dimensionen gleich, daher formuliere ich ihn hier allgemein:

BEWEIS. Die Bildmenge $C = f([0,1]^k)$ ist kompakt (F1J), nach Heine–Borel (F1O) also beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Wir nutzen Tietzes Fortsetzungssatz (E5L): Die stetige Abbildung $g = f^{-1} : C \to [0,1]^k$ erlaubt eine stetige Fortsetzung $G : \mathbb{R}^n \to [0,1]^k$. Demnach ist $q := f \circ G : \mathbb{R}^n \to C$ eine Retraktion, das heißt stetig mit $q|_C = \mathrm{id}_C$.

Das Komplement $X = \mathbb{R}^n \smallsetminus C$ ist offen, somit lokal wegzusammenhängend, daher ist $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ topologische Summe von Gebieten (G3C). Sei $A \in \pi_0(X)$ die unbeschränkte und B die Vereinigung aller beschränkten Komponenten, also $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$. Wir wollen $B = \emptyset$ zeigen. Es gilt $\overline{A} \subset A \cup C$ und $\overline{B} \subset B \cup C$, also $\overline{A} \cap \overline{B} \subset C$. Wir definieren

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in \overline{A} \cup C, \\ q(x) & \text{für } x \in \overline{B}. \end{cases}$$

Dank Verklebesatz E1P ist h stetig. Nach Konstruktion gilt $\mathrm{im}(h) = \overline{A} \cup C$.

Angenommen, es existierte $b \in B$. Es gilt $C \subset B(b,R)$ für einen ausreichend großen Radius $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Verschieben und Stauchen können wir $b = 0$ und $R = 1$ annehmen. Wegen $0 \notin \mathrm{im}(h)$ ist $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto h(x)/|h(x)|$ wohldefiniert und stetig. Zudem gilt $r(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1} \subset A$. Diese Retraktion widerspricht folgendem Lemma J2U. □

Als Hilfsmittel benötigen wir folgendes Ergebnis (J4E), auf das ich hier vorgreife:

Lemma J2U. *Es gibt keine stetige Retraktion $r : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ des Balls auf seinen Rand.*

Für $n = 1$ folgt dies leicht aus dem Zwischenwertsatz. (Übung!) Für $n \geq 2$ gelingt der Beweis mit dem Abbildungsgrad (J4E). Für die Topologie der Ebene interessiert uns zunächst der Fall $n = 2$, und hierzu genügt bereits die Umlaufzahl:

BEWEIS FÜR $n = 2$. Die Inklusion $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2 : s \mapsto s$ ist stetig und zusammenziehbar vermöge $H : \iota \simeq *$ mit $H(t,s) = (1-t)s$. Gäbe es $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so folgt $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1} = r \circ \iota \simeq \mathrm{const}$. Dies widerspricht J1J, denn $\deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}) = 1$ aber $\deg(\mathrm{const}) = 0$. □

§J2o. Der Jordansche Trennungssatz. Der Jordansche Trennungssatz ist einfach und übersichtlich für polygonale Kurven (J2D). Wir beweisen nun den allgemeinen Fall.

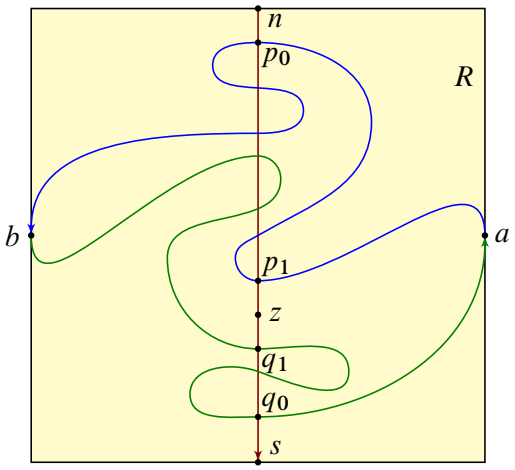
Satz J2V (Jordan)**.** *(1) Für jede Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} C \subset \mathbb{R}^2$ zerfällt das Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$ in zwei Gebiete, A unbeschränkt, B beschränkt.*

(2) Wir haben die Bijektion $\pi_0(\mathbb{R}^2 \smallsetminus C) = \{A, B\} \xrightarrow{\sim} \{0,1\} : [x] \mapsto \deg(f - x) \bmod 2$.

(3) Für den Rand gilt $\delta A = \delta B = C$, für den Abschluss also $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$.

BEWEIS. Die Abstandsfunktion $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto |f(s_1) - f(s_2)|$ ist stetig. Da $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ kompakt ist, nimmt sie ihr Maximum an, das heißt, es gibt $s_1, s_2 \in \mathbb{S}^1$ sodass die Punkte $a = f(s_1)$ und $b = f(s_2)$ in C maximalen Abstand haben, kurz $|a - b| = \mathrm{diam}(C)$. Nach Umparametrisierung von $\mathbb{S}^1$ können wir $s_1 = 1$ und $s_2 = -1$ annehmen. Nach Verschiebung, Drehung und Skalierung von $\mathbb{R}^2$ können wir $a = (1,0)$ und $b = (-1,0)$ annehmen. Damit liegt C im Rechteck $R = [-1,1] \times [-2,2]$ und $\partial R \cap C = \{a, b\}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]



Der Weg $\alpha : [0,1] \xrightarrow{\sim} C_+ : t \mapsto f(\mathrm{e}^{\pi i t})$ führt von a nach b längs des oberen Halbkreises, der Weg $\beta : [0,1] \xrightarrow{\sim} C_- : t \mapsto f(-\mathrm{e}^{\pi i t})$ von b zurück nach a längs des unteren Halbkreises. Sei $n = (0,2)$ der „Nordpol“ und $s = (0,-2)$ der „Südpol“ unseres Rechtecks R. Der Weg $\gamma : [0,1] \xrightarrow{\sim} [n,s] : t \mapsto (1-t)n + ts$ schneidet sowohl α als auch β (ZWS). Wir können annehmen, dass γ zuerst α schneidet, andernfalls ersetzen wir $f : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} C$ durch $f \circ \mathrm{conj}$.

Sei p_0 der erste und p_1 der letzte Schnittpunkt von γ mit α; eventuell gilt $p_0 = p_1$. Nach p_1 muss γ noch β schneiden: Andernfalls führt der Weg $np_0 \underline{\alpha} p_1 s$ von n nach s, ohne β zu schneiden, im Widerspruch zu J1X. Nach p_1 sei q_1 der erste und q_0 der letzte Schnittpunkt von γ mit β; eventuell gilt $q_0 = q_1$. Sei $z = (p_1 + q_1)/2$ der Mittelpunkt.

(1a) Das Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ hat mindestens zwei Komponenten. Dies folgt aus:

(2a) Wir berechnen $\deg(f - z) = 1$. Den Weg $np_0 \underline{\alpha} p_1 z$ approximieren wir im Komplement von $[z,s]$ und β durch einen Polygonzug $w = np_0 \ldots p_1 z$ in R. Falls nötig machen wir $|w|$ doppelpunktfrei, indem wir an jedem Doppelpunkt die Schleife abschneiden. Nach dem polygonalen Jordan–Satz (J2D) zerlegt $\gamma^* = |w * zs|$ das Rechteck R in zwei Komponenten. Wir approximieren β im Komplement von $|w|$ polygonal durch β^*. Der Weg β^* überschreitet γ^* ungeradzahlig oft, und zwar ausschließlich über $[z,s]$. Das zeigt $\deg(f - z) = 1$ dank J1M.

(3) Für jede Komponente $U \in \pi_0(\mathbb{R}^2 \smallsetminus C)$ gilt $\delta U = C$.

Sei A die unbeschränkte und B eine beschränkte Komponente; eine solche existiert dank (1a). Es gilt $\overline{A} \subset A \cup C$ und $\overline{B} \subset B \cup C$, also $\overline{A} \cap \overline{B} \subset C$. Wir nehmen $\overline{A} \cap \overline{B} \subsetneq C$ an. Dann existiert eine Kurve $[0,1] \xrightarrow{\sim} C' \subset C$ mit $\overline{A} \cap \overline{B} \subset C'$. Damit sind $A \neq B$ Wegkomponenten von $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C'$, im Widerspruch zu J2T.

(1) Das Komplement $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ hat genau zwei Komponenten und (2) ν ist bijektiv.

Sei A die unbeschränkte und $B = [z]$ die beschränkte Komponente aus (1a). Angenommen, es gäbe eine weitere Komponente U von $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$. Diese ist ebenfalls beschränkt, $U \subset \operatorname{Int} R$. Wir betrachten den Weg δ gemäß $np_0 \underline{\alpha} p_1 q_1 \underline{\beta} q_0 s$. Dieser verläuft in $A \cup B \cup C$, weder durch U noch a oder b. Seien $B(a,\varepsilon)$ und $B(b,\varepsilon)$ disjunkt von δ. Nach (3) gilt $a, b \in \delta U$, also existieren $a' \in B(a,\varepsilon) \cap U$ und $b' \in B(b,\varepsilon) \cap U$. Da U wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\eta' : [0,1] \to U$ von a' nach b'. Der Weg η gemäß $aa' \underline{\eta'} b'b$ schneidet δ nicht, im Widerspruch zu J1X. □

☞ **§J2p. Wilde Sphären.** Der Satz von Schoenflies (in topologischer Fassung) gilt für ☜
$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ aber nicht mehr in Dimension $n \geq 3$: Für die Standardeinbettung $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ ist jede er beiden Komponenten von $\mathbb{S}^3 \smallsetminus \mathbb{S}^2$ eine Hemisphäre und somit homöomorph zum offenen Ball $\mathbb{B}^3$ ist. Es gibt aber auch „wilde“ Sphären $\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} S \subset \mathbb{S}^3$, sodass keine der beiden Komponenten von $\mathbb{S}^3 \smallsetminus S$ homöomorph zum offenen Ball $\mathbb{B}^3$ ist.

Beispiel. Wir betrachten die wilde Einbettung $\gamma : [-1,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ aus J:25. Den inneren Teil $\gamma :]-1,1[\hookrightarrow \mathbb{R}^3$ können wir (polygonal) aufdicken zur Einbettung $f :]-1,1[\times \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Diese lässt sich an den beiden wilden Enden jeweils stetig in einen Punkt fortsetzen zu $f : \mathbb{D}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (siehe J:26). Das innere Gebiet $f(\mathbb{B}^3) \cong \mathbb{B}^3$ ist ein offener Ball, aber das äußere Gebiet $\mathbb{R}^3 \smallsetminus f(\mathbb{D}^3) \cong \mathbb{R}^3 \smallsetminus \gamma([-1,1])$ ist nicht einfach-zusammenhängend.

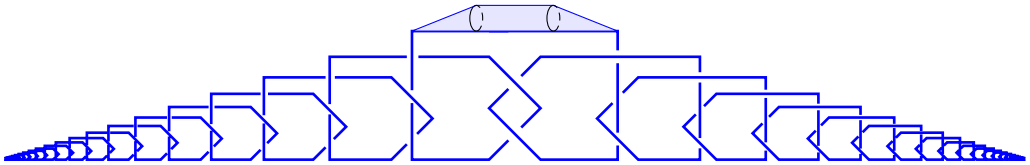


ABBILDUNG J:26. Eine wilde Einbettungen $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ nach Artin und Fox

Beispiel. Durch Verdopplung dieser Konstruktion erhalten wir eine Einbettung $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, die den Raum in zwei Gebiete trennt, wovon jedoch keines einfach-zusammenhängend ist. Dies ist in J:27 skizziert: Die eine Sphäre ragt wild in das äußere, die andere in das innere Gebiet, und verhindert so, dass dieses einfach-zusammenhängend sein kann. Beide Sphären sind wie skizziert verbunden zu der skizzierten Sphäre $S \subset \mathbb{R}^3$.

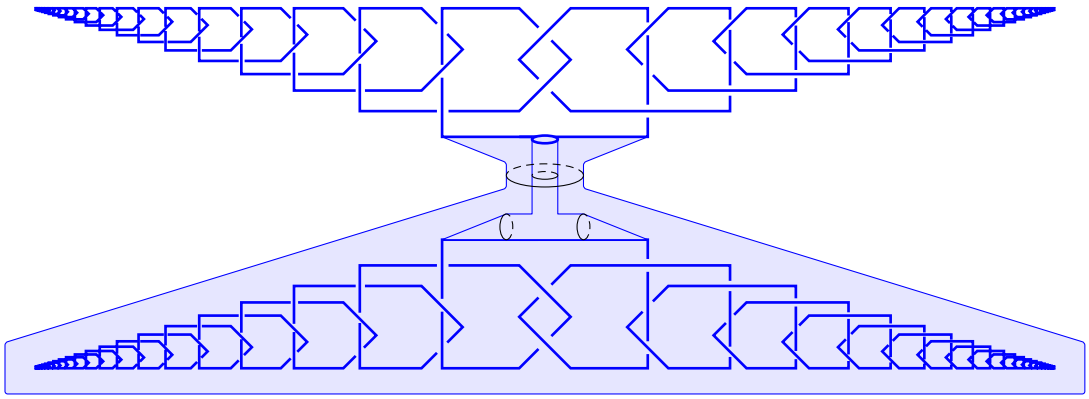


ABBILDUNG J:27. Eine noch wildere Einbettungen $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

Insbesondere kann es für solche wilden Sphären $S \subset \mathbb{R}^n$ keinen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $h(S) = \mathbb{S}^{n-1}$ geben. Dies gilt jedoch für zahme Sphären (J2Z).

Wir sehen an diesen Beispielen $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, dass der ebene Fall $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ vergleichsweise übersichtlich ist. Auch hier ist die allgemeine, topologische Fassung schwierig (J2V); ich diskutiere daher im Folgenden zunächst polygonale Jordan–Kurven $\mathbb{S}^1 \cong C \subset \mathbb{R}^2$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J2q. Der Trennungssatz von Jordan–Brouwer. Wir nutzen vorgreifend den Abbildungsgrad $\deg(f)$ für $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ aus Satz J3A. Analog zum Jordanschen Satz (J2A) für $f : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} S \subset \mathbb{R}^2$ gilt in jeder Dimension $n \geq 2$ folgender Trennungssatz:

Satz J2W (Jordan–Brouwer–Trennungssatz)**.** *In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt:*

(1) Für jede Einbettung $f : \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} S \subset \mathbb{R}^n$ zerfällt das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus S = A \sqcup B$ in zwei Gebiete, A unbeschränkt, B beschränkt.

(2) Wir haben die Bijektion $\pi_0(\mathbb{R}^n \setminus S) = \{A, B\} \xrightarrow{\sim} \{0,1\} : [x] \mapsto \deg(f - x) \bmod 2$.

(3) Für den Rand gilt $\delta A = \delta B = S$, für den Abschluss also $\overline{A} = A \cup S$ und $\overline{B} = B \cup S$.

(4) Für $\mathbb{S}^k \xrightarrow{\sim} S \subset \mathbb{R}^n$ mit $k \leq n-2$ hingegen ist $\mathbb{R}^n \setminus S$ wegzusammenhängend.

(5) Auch für jede Einbettung $\mathbb{D}^k \xrightarrow{\sim} D \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}^n \setminus D$ wegzusammenhängend. □

Den Nicht-Trennungssatz (5) konnten wir bereits in J2T relativ einfach beweisen.

Der Satz gilt offensichtlich für die Standardeinbettungen $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{D}^k \subset \mathbb{R}^n$, ebenso in weiteren einfachen Beispielen. Im Allgemeinen jedoch ist die Aussage schwierig zu beweisen. Dies gelingt am besten mit Homologie, siehe Bredon, §IV.

Allgemeiner gelten die folgenden, stärkeren Resultate:

Satz J2X (Borsuk)**.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Genau dann hat $\mathbb{R}^n \setminus K$ mehrere Komponenten, wenn $[K, \mathbb{S}^{n-1}] \neq \{*\}$, also nicht-zusammenziehbare Abbildungen $K \to \mathbb{S}^{n-1}$ existieren.*

Beispiel. Für $K \cong \mathbb{S}^k$ mit $k \leq n-2$ und für $K \cong \mathbb{D}^k$ ist $\mathbb{R}^n \setminus K$ zusammenhängend.

Bemerkung. Für nicht-kompakte Teilräume K gilt die Aussage des Satzes nicht: Die Gerade $K = \mathbb{R} \times \{0\}$ trennt $\mathbb{R}^2$, aber $[K, \mathbb{S}^1] = \{*\}$.

Satz J2Y (Alexander)**.** *Ist A kompakt, so haben für je zwei Einbettungen $f, g : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Komplemente $\mathbb{R}^n \setminus f(A)$ und $\mathbb{R}^n \setminus g(A)$ gleich viele Komponenten.*

BEWEIS-IDEE. Mit den passenden Werkzeugen der algebraischen Topologie ist der Satz eine Konsequenz der Poincaré–Dualität: Die reduzierte Homologie $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus f(A))$ des Komplements ist isomorph zur Čech–Kohomologie $\check{H}^{n-k-1}(A)$. Diese hängt nur von A ab, nicht aber von der Einbettung f. Somit gilt $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus f(A)) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus g(A))$. Speziell die nullte Homologie $H_0 = \mathbb{Z}[\pi_0]$ bestimmt die Anzahl der Wegkomponenten. □

Bemerkung. Für nicht-kompakte Räume A ist dies falsch, siehe Cantors Karussell (G2T).

§J2r. Der Satz von Jordan–Schoenflies für zahme Sphären. Der Trennungssatz J2W ist intuitiv glaubhaft, ein Beweis für beliebige Einbettungen $f : \mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist technisch aufwändig. Intuition und Beweisführung versöhnen sich in günstigen Spezialfällen:

Eine Einbettung $f : \mathbb{S}^k \xrightarrow{\sim} S \subset \mathbb{R}^n$ heißt *zahm*, wenn es einen Homöomorphismus $F : \mathbb{S}^k \times \mathbb{B}^{n-k} \xrightarrow{\sim} U$ gibt auf eine offene Umgebung U von S in $\mathbb{R}^n$ mit $F(s,0) = f(s)$ für alle $s \in \mathbb{S}^k$. In diesem Falle nennen wie $S \subset \mathbb{R}^n$ eine *zahme k–Sphäre*. Dies ist äquivalent $F : \mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \xrightarrow{\sim} U$ auf eine offene Umgebung U mit $F(\mathbb{S}^k \times \{0\}) = S$, und ebenso zu $F : \mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k} \xrightarrow{\sim} V$ auf eine kompakte Umgebung V mit $F(\mathbb{S}^k \times \{0\}) = S$.

Bemerkung. Dank der Invarianz des Gebietes (J7K) genügt es sogar, nur eine stetige Injektion $F : \mathbb{S}^k \times \mathbb{B}^{n-k} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(\mathbb{S}^k \times \{0\}) = S$ zu fordern: Das Bild $U := F(\mathbb{S}^k \times \mathbb{B}^{n-k})$ ist dann automatisch offen in $\mathbb{R}^n$ und $F : \mathbb{S}^k \times \mathbb{B}^{n-k} \xrightarrow{\sim} U$ ein Homöomorphismus.

Beispiele. Die Standardeinbettung $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{R}^n$ ist zahm, ebenso jede glatte oder simpliziale Einbettung $\mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von Schoenflies (in der topologischen Fassung, die wie hier nicht bewiesen haben) ist jede Einbettung $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ zahm. Wie oben gesehen gibt es wilde Einbettungen $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Uns interessieren vor allem Einbettungen $f : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ der Kodimension 1. Hier ist $F : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1,1] \xrightarrow{\sim} U \subset \mathbb{R}^n$ ein beidseitiger *Kragen* um f. Genau dies haben wir oben im Beweis des Jordanschen Trennungssatzes (J2D) genutzt: Der Kragen kontrolliert die lokale Situation und verhindert Pathologien wie bei wilden Sphären.

BEWEIS DES SATZES J2W VON JORDAN–BROUWER FÜR ZAHME SPHÄREN. Wir nutzen eine Kragenumgebung U von S in $\mathbb{R}^n$ mit einem Homöomorphismus $F : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1,1] \xrightarrow{\sim} U$ mit $F(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = S$. Damit geht alles so leicht wie bisher:

(1a) Das Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus S$ hat mindestens zwei Komponenten.

Zur Einbettung $f = F|_{\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}} : \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} S \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir wie in Satz J2D eine Funktion $\nu : \mathbb{R}^n \smallsetminus S \to \{0,1\}$ durch den Abbildungsgrad $\nu(x) = \deg(f - x) \bmod 2$. Diese ist stetig dank Homotopie-Invarianz (J3A). Zudem ist φ surjektiv, da auf beiden Seiten von S in der Kragenumgebung U verschiedene Werte angenommen werden.

(1b) Das Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus S$ hat höchstens zwei Komponenten.

In $U \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{D}^1$ hat das Komplement $U \smallsetminus S \cong \mathbb{S}^{n-1} \times (\mathbb{D}^1 \smallsetminus \{0\})$ genau zwei Komponenten, $\pi_0(U \smallsetminus S) = \{[a],[b]\}$. Wir wählen $p \in S$. Jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus S$ verbinden wir mit p durch $[x,p]$ in $\mathbb{R}^n$. Auf dem Weg von x nach p sei x' der erste Punkt in U. Wegen $S \subset U^\circ$ gilt $x' \in U \smallsetminus S$. Wir können x mit x' durch $[x,x']$ in $\mathbb{R}^n \smallsetminus S$ verbinden, und dann weiter x' mit a oder b in $U \smallsetminus S$. Demnach hat $\mathbb{R}^n \smallsetminus S$ höchstens zwei Wegkomponenten.

(3) Da A und B offen sind, gilt $\delta A \subset S$ und $\delta B \subset S$. Umgekehrt berührt jeder Punkt $p \in S$ sowohl A als auch B, also gilt $S \subset \delta A$ und $S \subset \delta B$.

(4) In $U \cong \mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$ ist das Komplement $U \smallsetminus S \cong \mathbb{S}^k \times (\mathbb{D}^{n-k} \smallsetminus \{0\})$ wegzusammenhängend für $0 \le k \le n-2$. Wir argumentieren dann wie in (1b). □

Auch der Satz von Schoenflies lässt sich von klassischen Fall $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ auf zahme Sphären $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ in höherer Dimension verallgemeinern. Hier ist die zusätzliche Bedingung tatsächlich wesentlich, da die Aussage für wilde Sphären nicht gilt:

Satz J2Z (Schoenflies für zahme Sphären)**.** *Für jede zahme $(n-1)$–Sphäre $S \subset \mathbb{R}^n$ existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(S) = \mathbb{S}^{n-1}$.* □

Diesen schönen Satz verdanken wir Barry MAZUR, *On embeddings of spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959) 59–65, und Morton BROWN, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 74–76. Ich gebe das Ergebnis hier nur zur Information an, für einen Beweis verweise ich auf Bredon, §IV, Theorem 19.11.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J3. Der Abbildungsgrad auf Sphären

Ein Grundproblem der Homotopietheorie ist, zu gegebenen Räumen X, Y die Menge $[X,Y]$ aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen $X \to Y$ zu bestimmen.

Der einfachste Fall ist $[\{*\}, X] = \pi_0(X)$. Schon diese Berechnung ist nicht-trivial: Zur Illustration rekapitulieren Sie $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R})$ und $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{C})$ mit Beweis (G2N).

Mit simplizialer Approximation konnten wir $[\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ für $m < n$ zeigen (I4B). Ebenfalls mit polygonaler Approximation haben wir $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ konstruiert (J1J).

Ebenso gilt $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Aus diesem grundlegenden Ergebnis wollen wir einige wichtige topologische Eigenschaften des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ableiten.

§J3a. Definition und Existenz des Abbildungsgrades. Für $n = 1$ und $k \in \mathbb{Z}$ haben wir die Abbildung $\varphi_k^1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^k$. In jeder Dimension $n \geq 1$ setzen wir dies fort zu

$$\varphi_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} : \big(r\cos(t), r\sin(t), x_2, \dots, x_n\big) \mapsto \big(r\cos(kt), r\sin(kt), x_2, \dots, x_n\big)$$

für $r \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}$. Anschaulich wickelt φ_k die x_0–x_1–Ebene k–mal um den Nullpunkt. Hierbei gilt $|\varphi_k(x)| = |x|$, also $\varphi_k(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^n$, durch Einschränkung erhalten wir $\varphi_k^n = \varphi_k|_{\mathbb{S}^n}^{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Diese Abbildung wickelt die n–Sphäre k–mal um sich selbst (J:1).

Satz J3A (Brouwer–Hopf)**.** *In jeder Dimension $n \geq 1$ existiert die Bijektion*

$$[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \underset{[\varphi_k^n] \leftarrow\!\shortmid k}{\overset{\deg}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Der Satz enthält zwei Aussagen: Die Abbildung $k \mapsto [\varphi_k^n]$ ist injektiv, das heißt, für $k \neq \ell$ sind φ_k^n und φ_ℓ^n nicht homotop (Brouwer). Diese Abbildung $\mathbb{Z} \to [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ ist zudem surjektiv, das heißt, jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, wie kompliziert sie auch sein mag, ist homotop zu einer unserer Modellabbildungen φ_k^n für ein $k \in \mathbb{Z}$ (Hopf). Dies ist der *Abbildungsgrad* $\deg(f) = k$. Homotopie vereinfacht und extrahiert das Wesentliche.

Bemerkung. Die Abbildungen $\varphi_{\pm 1} = \mathrm{diag}(1, \pm 1, 1, \dots, 1)$ sind linear: φ_1 ist die Identität und φ_{-1} ist eine Spiegelung. Die Abbildung $\varphi_0^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist für $n = 1$ konstant und für $n \geq 2$ zusammenziehbar auf $(1, 0, \dots, 0)$. Die Tatsache $\varphi_1^n \not\simeq \varphi_0^n$ zeigt $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \neq \{*\}$, insbesondere ist $\mathbb{S}^n$ nicht zusammenziehbar (J4A). Die Tatsache $\varphi_{-1}^n \not\simeq \varphi_1^n$ unterscheidet die Spiegelung von der Identität und führt zur topologischen Invarianz der Orientierung (§J7i).

BEWEIS-IDEEN. In Dimension $n = 1$ haben wir den Abbildungsgrad elementar durch die Umlaufzahl konstruiert und so den Satz beweisen: (1) als Winkelsumme J1J, (2) als Integral J1K, (3) durch Achsübergänge J1M. Jeder dieser Ansätze funktioniert auch in beliebiger Dimension $n \in \mathbb{N}$, die Ausführung ist allerdings aufwändiger. □

Erläuterung. (1) In der algebraischen Topologie folgt der Satz von Brouwer–Hopf aus der Homologie $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ und dem Satz von Hurewicz $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong H_n(\mathbb{S}^n)$. (2) Wir betrachten $\mathbb{S}^n$ als glatte Mannigfaltigkeit und approximieren $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ glatt. Auf $\mathbb{S}^n$ wählen wir eine Volumenform mit $\int_{\mathbb{S}^n} \omega = 1$ und erhalten $\deg(f) = \int_{\mathbb{S}^n} f^*\omega$. Die Homotopie-Invarianz ist dann eine Folgerung des Integralsatzes von Stokes. (3) Für $v \in \mathbb{S}^n$ regulär ist $f^{-1}(v) = \{p_1, \dots, p_m\}$ endlich, um jedes p_i ist f ein lokaler Diffeomorphismus, und der Abbildungsgrad ist die Summe $\deg(f) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sign}\det f'(p_i)$. Der Satz von Sard garantiert, dass für glatte $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fast alle Werte $v \in \mathbb{S}^n$ regulär sind, siehe John W. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton, 1965.

§J3b. Theft or honest toil? Satz J3A garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Abbildungsgrades. Fürs Folgende genügt es, so den Abbildungsgrad axiomatisch zu *definieren*. Der erhoffte didaktische Vorteil ist, möglichst schnell zu interessanten Anwendungen vorzudringen. Dinge zu postulieren, ohne sie zu beweisen, ist natürlich nicht die feine mathematische Art. Laut Bertrand RUSSELL hat diese Methode dennoch viele Vorteile:

> *The method of "postulating" what we want has many advantages;*
> *they are the same as the advantages of theft over honest toil.*
> Bertrand Russel (1872–1970)

Etwas versöhnlicher will ich es so sagen: Ich nehme hier einen Kredit auf, den ich später begleichen muss, indem ich den Abbildungsgrad nachträglich *konstruiere* und die gewünschten Eigenschaften *nachweise*, etwa (1) in der algebraischen Topologie, (2) in der Analysis oder (3) in der Differentialtopologie. Einstweilen nutzen wir ihn als *Werkzeug*.

§J3c. Erste Eigenschaften. Aus der Charakterisierung von Satz J3A folgern wir:

Korollar J3B. *Ist* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *stetig und* $\deg(f) \neq 0$*, so ist* f *surjektiv.*

BEWEIS. Aus $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \smallsetminus \{y\} \cong \mathbb{R}^n \simeq \{*\}$ folgt $f \simeq * \simeq \varphi_0$, also $\deg(f) = 0$. □

Korollar J3C. *Der Abbildungsgrad ist ein Isomorphismus* $\deg : ([\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n], \circ, \mathrm{id}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, \cdot, 1)$.

BEWEIS. Seien $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig. Für $\deg(f) = k$ und $\deg(g) = \ell$ gilt $f \simeq \varphi_k^n$ und $g \simeq \varphi_\ell^n$ dank J3A. Hieraus folgt $f \circ g \simeq \varphi_k^n \circ \varphi_\ell^n = \varphi_{k\ell}^n$, also $\deg(f \circ g) = k\ell$. □

Da das Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ kommutativ ist, notieren wir eine weitere Besonderheit: Auch das Monoid $([\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n], \circ, \mathrm{id})$ ist kommutativ, für alle $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt $f \circ g \simeq g \circ f$.

Korollar J3D. *Genau dann ist* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *eine Homotopie-Äquivalenz, wenn* $\deg(f) = \pm 1$ *gilt. Insbesondere für jeden Homöomorphismus* $f : \mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ *gilt* $\deg(f) = \pm 1$.

BEWEIS. „⇒": Aus $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ folgt $\deg(f) \cdot \deg(g) = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$. In $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ hat die Gleichung $a \cdot b = 1$ nur die Lösungen $a = b = \pm 1$. Aus Topologie wird Algebra!

„⇐": Gilt umgekehrt $\deg(f) = \pm 1$, so folgt $f \simeq \varphi_{\pm 1}^n$, also $f \circ f \simeq \varphi_1^n = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$. In diesem besonders glücklichen Fall wird aus Algebra auch wieder Topologie! □

Für Identität φ_1^n und Spiegelung φ_{-1}^n gilt $\deg(\varphi_{\pm 1}^n) = \pm 1$. Daher nennen wir einen Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ *orientierungserhaltend*, wenn $\deg(f) = +1$ gilt, und *orientierungsumkehrend*, wenn $\deg(f) = -1$ gilt (siehe §J7i). Hierzu halten wir fest:

Korollar J3E. *Für* $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *definieren wir* $f_A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto Ax/|Ax|$.
Speziell für $E_\pm = \mathrm{diag}(1, \pm 1, 1, \ldots, 1)$ *gilt* $f_{E_\pm} = \varphi_{\pm 1}^n$*, also* $\deg(f_{E_\pm}) = \pm 1$.
Allgemein gilt $\deg(f_A) = \operatorname{sign}\det(A)$*, insbesondere* $\deg(-\mathrm{id}) = (-1)^{n+1}$.
Speziell für $A \in \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ *gilt* $f_A = A$ *und* $\deg(A) = \det(A) \in \{\pm 1\}$.

BEWEIS. Dank $Ax \neq 0$ für $x \neq 0$ ist f_A wohldefiniert und stetig. Nach G2N gilt

$$\pi_0(\mathrm{GL}_{n+1}\mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_{n+1}^+\mathbb{R} = [E_+],\ \mathrm{GL}_{n+1}^-\mathbb{R} = [E_-]\}.$$

Demnach existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_{n+1}\mathbb{R}$ von $\gamma(0) = A$ nach $\gamma(1) = E_\pm$. Dies definiert eine Homotopie $\Gamma : f_A \simeq f_{E_\pm}$ durch $\Gamma_t = f_{\gamma(t)} : x \mapsto \gamma(t)(x)/|\gamma(t)(x)|$. Hieraus folgt $\deg(f_A) = \deg(f_{E_\pm}) = \pm 1 = \operatorname{sign}\det(A)$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J3d. Berechnung des Abbildungsgrades durch Achsübergänge. Analog zur Umlaufzahl von $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ (J1L) können wir auch den Abbildungsgrad von $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ durch Achsübergänge berechnen. Die Achse $\mathbb{R}_{>0} \cdot q$ mit $q \in \mathbb{S}^n$ können wir dabei beliebig wählen. Zur Berechnung müssen wir die Orientierung ± 1 eines Übergangs erklären:

Definition J3F. Wir betrachten $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ im Punkt $p \in \mathbb{S}^n$. Stereographische Projektion zum Pol $-p$ liefert die lokale Karte $h : (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{S}^n, p)$. Die Komposition ist

$$g = f \circ h \;:\; (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{S}^n, p) \to (\mathbb{S}^n, q) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, q).$$

Wir nennen p einen *regulären Punkt*, wenn g in 0 differenzierbar ist und die Matrix $D(f,p) := (g(0), \partial_1 g(0), \dots, \partial_n g(0))$ invertierbar ist. Wir definieren dann die *Orientierung* von f in diesem Punkt p durch $\operatorname{sign}(f,p) := \operatorname{sign} \det D(f,p) \in \{\pm 1\}$.

Wir nennen $q \in \mathbb{S}^n$ einen *regulären Wert*, wenn das Urbild $f^{-1}(q) = \{ p_1, \dots, p_\ell \}$ endlich ist und nur reguläre Punkte enthält. In diesem Fall definieren wir die Zählung

$$\eta(f,q) := \sum_{p \in f^{-1}(q)} \operatorname{sign}(f,p) \quad \in \mathbb{Z}.$$

Modulo 2 genügt $\eta(f,q) \equiv \ell \bmod 2$, also die Parität der Urbilder (allesamt regulär).

Beispiel. Für einen polygonalen Weg ist dies die Anzahl der Achsübergänge, die wir in J1L eingeführt haben: Wenn auf $\mathbb{R}_{>0} \cdot q$ keine Eckpunkte liegen, dann ist q ein regulärer Wert. Die Orientierung ± 1 gibt an, ob ein positiver oder ein negativer Übergang vorliegt.

In J1L konnten wir zudem alle Randfälle klären, mit Eckpunkten auf der Achse. Diese Mühe wollen wir uns hier nicht machen, sondern uns auf reguläre Werte beschränken.

Zur Berechnung des Abbildungsgrades können wir nun folgenden Satz nutzen:

Satz J3G. *Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig und $q \in \mathbb{S}^n$ ein regulärer Wert von f. Dann ergibt die Zählung der Achsübergänge den Abbildungsgrad von f, kurz $\eta(f,q) = \deg(f)$.*

Umgekehrt können wir diese Zählung auch zur Konstruktion des Abbildungsgrades nutzen. Hierzu müssen wir zeigen, dass sich das Ergebnis unter Homotopie nicht ändert. Dieser differentialtopologische Ansatz wird wunderschön ausgeführt in dem Büchlein von John W. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton, 1965. Der Satz von Sard garantiert, dass für glatte $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fast alle Werte $q \in \mathbb{S}^n$ regulär sind.

Übung J3H. (1) Untersuchen Sie die Modellabbildungen $f = \varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Welche Werte $q \in \mathbb{S}^n$ sind regulär, welche nicht? Berechnen Sie $\eta(f,q)$ für jeden regulären Wert $q \in \mathbb{S}^n$. Erhalten Sie so tatsächlich den Abbildungsgrad $\deg(f) = k$?

(2) Für die Orientierung $\operatorname{sign}(f,p)$ haben wir oben die Ableitung genutzt. Dies gelingt auch mit dem Abbildungsgrad für Abbildungen $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ eine Dimension niedriger. Führen Sie diese rekursive Idee aus! Schon der vertraute Fall $n = 1$ ist lehrreich.

§J3e. Das Kreuzpolytop. Sei $e_0, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Diamond^{n+1} = [\pm e_0, \dots, \pm e_n] = |K^{n+1}| \subset \mathbb{R}^{n+1}$ das Kreuzpolytop und $\partial\Diamond^{n+1} = |S^n|$ sein Rand. Für $n = 1$ ist dies der Rand eines Quadrates, für $n = 2$ der Rand eines Oktaeders.

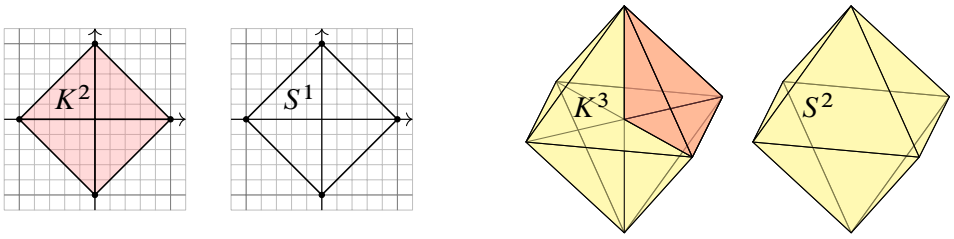


ABBILDUNG J:28. Das Kreuzpolytop $|K^{n+1}|$ und sein Rand $|S^n|$

Das Kreuzpolytop ist der Einheitsball bezüglich der Taxinorm $|-|_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $(x_0, \dots, x_1) \mapsto |x_0| + \cdots + |x_n|$. Als Simplizialkomplexe wählen wir hierzu

$$K^{n+1} = \big\langle \{0, \varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n\} \;\big|\; \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\} \big\rangle,$$
$$S^n = \big\langle \{\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n\} \;\big|\; \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\} \big\rangle.$$

Jeder n–Simplex $T \in S^n$ ist von der Form $T = \{v_0, \dots, v_n\} = \{\pm e_0, \dots, \pm e_n\}$. Aus den Vektoren $v_0, \dots, v_n$ bilden wir die Matrix $(v_0, \dots, v_n) = (\varepsilon_0 e_{\tau 0}, \dots, \varepsilon_n e_{\tau n})$ mit einer Permutation $\tau \in S_{n+1}$ und beliebigen Vorzeichen $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Ihre Determinante misst die Orientierung gemäß $\det(v_0, \dots, v_n) = \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n \operatorname{sign}(\tau) \in \{\pm 1\}$.

Es gibt 2^{n+1} solcher n–Simplizes, und jeder deckt einen gleich großen Raumwinkel ab, $1/2^{n+1}$ vom Vollwinkel. Die Isometriegruppe $\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, \Diamond^{n+1}) = \operatorname{Aut}(S^n)$ besteht aus den $2^{n+1}(n+1)!$ Spiegelpermutationen $(\varepsilon, \tau) : (e_0, \dots, e_n) \mapsto (\varepsilon_0 e_{\tau 0}, \dots, \varepsilon_n e_{\tau n})$. Negative Orientierung heißt, der Raumwinkel wird umgekehrt durchlaufen und zählt negativ.

Bemerkung. Diese Polyeder und Simplizialkomplexe haben maximale Symmetrie: Das Kreuzpolytop $\Diamond^n$ gehört neben Tetraeder Δ^n und Würfel $\square^n$ zu den *regulären* Polytopen.

Die Familie der Tetraeder $\Delta^0 = [e_0]$ und $\Delta^1 = [e_0, e_1]$ und $\Delta^2 = [e_0, e_1, e_2]$ usw. gewinnen wir durch iterierte Kegelbildung vermöge $\Delta^n = \Delta^{n-1} * \{e_n\} = [e_0, e_1, \dots, e_n]$.

Die Familie der Würfel $\square^0 = \{*\}$ und $\square^1 = [-1, 1]$ und $\square^2 = [-1, 1]^2$ usw. gewinnen wir durch iterierte Produktbildung vermöge $\square^n = \square^{n-1} \times [-1, 1] = [-1, 1]^n$.

Die Familie der Kreuzpolytope $\Diamond^0 = \{0\}$ und $\Diamond^1 = [\pm e_1]$ und $\Diamond^2 = [\pm e_1, \pm e_2]$ usw. gewinnen wir durch iterierte Einhängung vermöge $\Diamond^n = \Diamond^{n-1} * \{\pm e_n\} = [\pm e_1, \dots, \pm e_n]$.

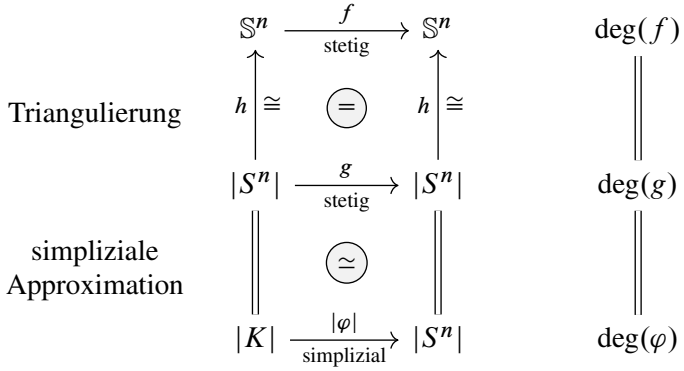
Die Einhängung von Simplizialkomplexen (I3o) produziert zudem die oben genannten Komplexe $K^0 = \langle \{0\} \rangle$ und $K^1 = \langle \{-1, 0\}, \{0, 1\} \rangle$ usw. vermöge $K^n = K^{n-1} * \langle \{\pm e_n\} \rangle$.

Letzteres gilt auch für den Rand: Aus der 0–Sphäre $\mathbb{S}^0 = |S^0|$ erhalten wir durch Einhängung die 1–Sphäre $\mathbb{S}^1 \cong |S^1|$ als Quadrat $S^1 = S^0 * S^0$, sodann die 2–Sphäre $\mathbb{S}^2 \cong |S^2|$ als Oktaeder $S^2 = S^0 * S^0 * S^0$ usw. Allgemein gilt $\mathbb{S}^n \cong \Sigma^n \mathbb{S}^0 = |S^n|$ mit $S^n = S^0 * S^0 * \cdots * S^0 = \langle \{\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n\} \mid \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\} \rangle$ wie oben angegeben.

Diese einheitliche und besonders symmetrische Sichtweise nutzen wir im Folgenden, um einfache und explizite Formeln für den Abbildungsgrad zu entwickeln.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J3f. Abbildungsgrad als Winkelsumme. Dank simplizialer Approximation (I4J) können wir den Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to \mathbb{Z}$ wie folgt erklären.



Wir triangulieren die euklidische n–Sphäre durch die Radialprojektion $h : |S^n| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$, also $h(x) = x/|x|_2$ mit der euklidischen Norm sowie $h^{-1}(y) = y/|y|_1$ mit der Taxinorm. Gegeben ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig; wir betrachten stattdessen $g = h^{-1} \circ f \circ h : |S^n| \to |S^n|$.

Zu jeder stetigen Abbildung $g : |S^n| \to |S^n|$ existiert eine simpliziale Approximation $\varphi : K \to S^n$ auf einer Unterteilung $K \preccurlyeq S^n$ desselben Polyeders $|K| = |S^n|$ mit einer Homotopie $H : g \simeq |\varphi|$ vermöge $H : [0,1] \times |K| \to |S^n| : (t,x) \mapsto (1-t)g(x) - t|\varphi|(x)$.

Dank dieser Vereinfachung können wir nun den Abbildungsgrad von $\varphi : S^n \succcurlyeq K \to S^n$ ablesen: Für jeden n–Simplex $S = \{v_0, \dots, v_n\} \in K_n$ definieren wir

$$\operatorname{sign}(\varphi|S) := \operatorname{sign}\det(v_0, \dots, v_n) \cdot \operatorname{sign}\det(\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n)).$$

Dies ist wohldefiniert da unabhängig von der willkürlichen Nummerierung der Eckpunkte: Jede Vertauschung $v_i \leftrightarrow v_j$ ändert *beide* Determinanten um einen Faktor -1.

Satz J3I (Brouwer)**.** *Sei $\varphi : S^n \succcurlyeq K \to S^n$ eine simpliziale Abbildung.*

(1) Den simplizialen Abbildungsgrad können wir als globale Winkelsumme berechnen:

$$\deg(\varphi) := \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{S \in K_n} \operatorname{sign}(\varphi|S) \tag{J.18}$$

(2) Wir wählen einen n–Simplex $T \in S^n$, etwa $T = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ für den Standardsimplex $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Aus (1) folgt dann die lokale Summenformel

$$\deg(\varphi) = \deg_T(\varphi) := \sum_{S \in K_n, \varphi(S) = T} \operatorname{sign}(\varphi|S). \tag{J.19}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl $T \in S^n$. Hieraus folgt (1) durch Mittelung.

(3) Der simpliziale Abbildungsgrad ist invariant unter Homotopie: Für jede simpliziale Abbildung $\psi : S^n \succcurlyeq K' \to S^n$ mit $|\psi| \simeq |\varphi|$ gilt $\deg(\psi) = \deg(\varphi)$.

Damit können wir $\deg(f) := \deg(g) := \deg(\varphi)$ definieren. Das ist wohldefiniert, denn das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der simplizialen Approximation φ zu g.

Der simpliziale Abbildungsgrad definiert somit eine Abbildung $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to \mathbb{Z}$.

(4) Für jede unserer Modellabbildungen $\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt $\deg(\varphi_k^n) = k$, für alle $k \in \mathbb{Z}$. Damit erfüllt $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to \mathbb{Z}$ die axiomatische Definition aus Satz J3A.

§J3g. Abbildungsgrad der Modellabbildungen. Anschaulich zählt die simpliziale Formel (J.18), wie oft $\varphi : S^n \succcurlyeq K \to S^n g$ die Sphäre um sich selbst wickelt. Dies entspricht der Winkelsumme (§J1g) bzw. einer diskreten Version des Cauchy–Integrals (§J1j).

Beispiel. Die Identität $\mathrm{id} : |S^n| \to |S^n|$ ist simplizial. Es gibt 2^{n+1} Simplizes $S \in S^n$ höchster Dimension, für jeden gilt $\mathrm{sign}(\mathrm{id}|S) = 1$, also $\deg(\mathrm{id}) := \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{S\in K} \mathrm{sign}(\varphi|S) = 1$.

Auch die Antipodenabbildung $-\mathrm{id} : |S^n| \to |S^n|$ ist simplizial. Für jeden n–Simplex $S \in S^n$ gilt $\mathrm{sign}(-\mathrm{id}|S) = (-1)^{n+1}$, also $\deg(\mathrm{id}) := \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{S\in K} \mathrm{sign}(\varphi|S) = (-1)^{n+1}$.

Allgemeiner: Jede Isometrie $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, \Diamond^{n+1}) = \mathrm{Aut}(S^n)$ ist eine Spiegelpermutationen, also eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung gegeben durch $g(e_i) = \varepsilon_i e_{\tau(i)}$ mit Vorzeichen $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ und einer Permutation $\tau \in S_{n+1}$. Für jeden n–Simplex $S \in S^n$ gilt $\mathrm{sign}(g|S) = \det(g) = \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n \cdot \mathrm{sign}(\tau)$, also $\deg(g) := \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{S\in K} \mathrm{sign}(\varphi|S) = \det(g)$.

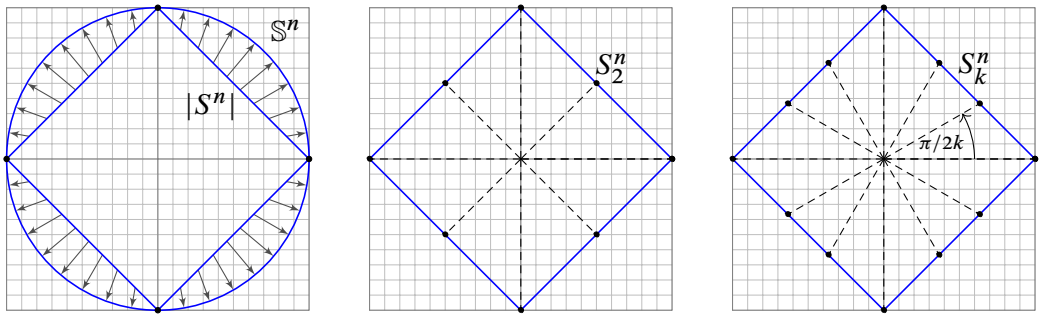


ABBILDUNG J:29. Triangulierung $h : |S^n| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ und Unterteilung S_k^n

Übung J3J. (1) In Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die Modellabbildung $\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ für $k \in \mathbb{Z}$ gegeben durch $\varphi_k^n(r\cos(t), r\sin(t), x_2, \dots, x_n) = (r\cos(kt), r\sin(kt), x_2, \dots, x_n)$. Konstruieren Sie eine Unterteilung $S_k^n \preccurlyeq S^n$ mit simplizialer Approximation $\tilde{\varphi}_k^n : S_k^n \to S^n$. *Hinweis:* Lösen Sie zunächst den Fall $n = 1$, dann induktiv durch Einhängung.

(2) Berechnen Sie hieraus den Abbildungsgrad $\deg(\varphi_k^n)$ unserer Modellabbildungen.

✻ **J3J.** Für $n = 1$ haben wir $\varphi_k^1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^k$. Hier ist $|S^1| = \partial[\pm e_0, \pm e_1]$ der Quadratrand mit Ecken $s_0 = 1, s_1 = \mathrm{i}, s_2 = -1, s_3 = -\mathrm{i}$ und $S^1 = \langle \{s_0, s_1\}, \{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}, \{s_3, s_0\} \rangle$ Für $k \geq 1$ nutzen wir als Unterteilung $S^1 \succcurlyeq S_k^1 = \langle \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{4k-1}, v_{4\ell} = v_0\} \rangle$ mit den Eckpunkten $v_\ell = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} \ell/2k} / |\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} \ell/2k}|_1$ für $\ell = 0, 1, \dots, 4k$. Hierauf ist φ_k^1 sternartig, lässt sich also simplizial approximieren durch $\tilde{\varphi}_k^1 : |S_k^1| \to |S^1|$ mit $\tilde{\varphi}_k^1(v_\ell) = s_{\ell \bmod 4}$. Es gilt $\det(v_{i-1}, v_i) > 0$ und $\det(s_{i-1}, s_i) = 1$, also $\mathrm{sign}(\tilde{\varphi}_k^1|\{v_{i-1}, v_i\}) = 1$ für alle $i = 1, \dots, 4k$. Die Summe (J.18) ergibt daher $\deg(\varphi_k^1) = \deg(\tilde{\varphi}_k^1) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4k} (+1) = k$.

Für $k < 0$ nutzen wir die Unterteilung $S^1 \succcurlyeq S_k^1 = S_{-k}^1$ und $\tilde{\varphi}_k^1(v_\ell) = s_{-\ell \bmod 4}$. Für $k = 0$ nutzen wir $S_0^1 = S^1$ und $\tilde{\varphi}_0^1(v_\ell) = s_0$. In allen Fällen finden wir den Abbildungsgrad $\deg(\varphi_k^1) = \deg(\tilde{\varphi}_k^1) = k$.

Den Übergang von $\varphi_k^1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zu $\varphi_k^2 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ leistet die Einhängung: Aus dem Quadratrand S^1 entsteht der Oktaederrand $S^2 = S^1 * \{\pm e_2\}$ als Doppelkegel mit den Eckpunkten $\pm e_2$. Aus der Unterteilung $S_k^1 \preccurlyeq S^1$ wird $S_k^2 = S_k^1 * \{\pm e_2\} \preccurlyeq S^2$. Die Approximation $\tilde{\varphi}_k^1 : S_k^1 \to S^1$ von φ_k^1 wird zur Approximation $\tilde{\varphi}_k^2 : S_k^2 \to S^2$ von φ_k^2. In allen Fällen finden wir wieder den Abbildungsgrad $\deg(\varphi_k^2) = \deg(\tilde{\varphi}_k^2) = k$. Den Übergang von Dimension $n-1$ auf Dimension n erreicht man wörtlich genauso als Doppelkegel mit den Eckpunkten $\pm e_n$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Bemerkung. Wir summieren in (J.18) über alle n–Simplizes $S = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$. Die Ecken $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ sind linear unabhängig, daher gilt $\det(v_0, \dots, v_n) \neq 0$.

Ist $S = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$ ein Simplex kleinerer Dimension, so gilt $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, also $\det(v_0, \dots, v_n) = 0$. Diese Summanden ignorieren wir in J.18.

In J.19 wählen wir einen festen n–Simplex $T \in S^n$ und summieren wir nur über Simplizes $S \in K$ mit Bild $\varphi(S) = T$; dies erfüllen nur n–Simplizes.

Bemerkung. Wir haben die Homotopie-Äquivalenz $\mathbb{S}^n \simeq X := \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ aus G5B, also

$$[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \;\cong\; [\mathbb{S}^n, X] \;\cong\; [X, X] \;\cong\; [X, \mathbb{S}^n].$$

Auch diese Sichtweise ist nützlich, zum Beispiel für die folgende Berechnung.

Wir betrachten eine stückweise affine Abbildung $g : |K| \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$, das heißt, g ist affin-linear auf jedem Simplex $[S]$ mit $S \in K \preccurlyeq S^n$.

Für jeden n–Simplex $S = \{v_0, \dots, v_n\} \in K_n$ definieren wir wie zuvor

$$\operatorname{sign}(g|S) = \operatorname{sign}\det(v_0, \dots, v_n) \cdot \operatorname{sign}\det(g(v_0), \dots, g(v_n)).$$

Wir wollen Achsübergänge zählen wie in §J1k. Hierzu wählen wir eine Richtung $s \in \mathbb{S}^n$ und betrachten die Achse $A = \mathbb{R}_{>0} \cdot s$. Wir setzen

$$\eta_A(S) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } g^{-1}(A) \cap [S] = \{a\} \text{ mit } a \in \operatorname{Int}[S], \\ \frac{1}{2} & \text{wenn } g^{-1}(A) \cap [S] = \{a\} \text{ mit } a \in \operatorname{Int}[S \smallsetminus \{v_i\}], \\ 0 & \text{sonst, insbesondere wenn } A \cap [g(S)] = \emptyset. \end{cases}$$

In Worten: Wir setzen $\eta_A(S) = 1$ bei einem einzelnen Schnittpunkt im Inneren von $[S]$ und $\eta_A(S) = 1/2$ bei einem einzelnen Schnittpunkt im Inneren einer $(n-1)$–Facette.

Die Richtung $s \in \mathbb{S}^n$ heißt *regulär*, wenn $A \cap g(|K_{\leq n-2}|) = \emptyset$ gilt, also die Achse A das $(n-2)$–Skelett nicht schneidet. Für jeden $(n-2)$–Simplex $U = \{u_0, \dots, u_{n-2}\}$ ist der $\mathbb{R}$–Unterraum $\langle\, g(u_0), \dots, g(u_{n-2}) \,\rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$ höchstens $(n-1)$–dimensional. Auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ schneidet dies $(n-2)$–dimensionale Sphären aus; das Komplement sind die regulären Richtungen, diese sind aus Dimensionsgründen offen, dicht und wegzusammenhängend.

Satz J3K (Achsübergänge)**.** *Sei $g : |K| \to X = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ stückweise affin.*

(1) Für jede reguläre Richtung $s \in \mathbb{S}^n$ und zugehörige Achse $A = \mathbb{R}_{>0} \cdot s$ gilt

$$\deg(g) = \deg_A(g) := \sum_{S \in K} \eta_A(S) \cdot \operatorname{sign}(g|S). \tag{J.20}$$

(2) Das Ergebnis ist für alle regulären Richtungen $s \in \mathbb{S}^n$ gleich.

(3) Die so berechnete Zahl ist invariant unter Homotopie von g, also $\deg : [\mathbb{S}^n, X] \to \mathbb{Z}$.

(4) Für jede unserer Modellabbildungen $\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt $\deg(\varphi_k^n) = k$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung. Satz J3K impliziert J3I: Die Achse $A = \mathbb{R}_{>0} \cdot (1, 1, \dots, 1)$ durchstößt den Simplex $T = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ im Inneren. Wir haben $g = |\varphi|$ und $\deg_A(g) = \deg_T(\varphi)$.

Zur Konstruktion des Abbildungsgrades $\deg : [\mathbb{S}^n, X] \to \mathbb{Z}$ genügt es daher, die verlangten Eigenschaften (2–4) für die Formel (J.20) nachzuweisen.

[Der Beweis soll später eingefügt werden. Einstweilen nutzen wir J3A ohne Beweis.]

§J3h. Illustrationen zum Abbildungsgrad.

Übung J3L. (0) Die Inklusion $(i,r) : \mathbb{S}^{n-1} \leftrightarrows \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ist ein starker Homotopieretrakt. Dies definiert die Bijektion $(i_*, r_*) : [\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}] \cong [\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}]$. Der Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ klassifiziert so auch Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ bis auf Homotopie. Nennen Sie zu jeder Homotopieklasse genau einen Repräsentanten φ_k.

(1) Bestimmen Sie den Abbildungsgrad von $f : \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\} : (u,v) \mapsto (u^k, v^\ell)$. Ebenso von $g : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 : (u,v) \mapsto (u^k, v^\ell)/(|u^k| + |v^\ell|)$ normiert auf $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Welchen Abbildungsgrad finden Sie für $(\varphi_k, \varphi_\ell) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ um 0?

(2) Wir betrachten die 3–Sphäre $\mathbb{S}^3 = \{ x \in \mathbb{H} \mid |x|^2 = 1 \}$ in den Quaternionen $\mathbb{H}$. Bestimmen Sie den Abbildungsgrad von $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 : x \mapsto x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, insb. $k \in \{0, \pm 1\}$.

✻ **J3L.** (1) Die Abbildung $g_k : (u,v) \mapsto (u^k, v)$ ist homotop zur Modellabbildung $\varphi_k : (u,v) \mapsto (u^k/|u|^{k-1}, v)$; diese hat Abbildungsgrad $\deg(g_k) = \deg(\varphi_k) = k$ dank J3A. Entsprechend für $h_\ell : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 : (u,v) \mapsto (u, v^\ell)$ gilt $h_\ell = \tau \circ g_\ell \circ \tau$ mit der orthogonalen Abbildung $\tau : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 : (u,v) \mapsto (v,u)$; diese hat Abbdildungsgrad $\deg(\tau) = 1$ dank J3E. Somit folgt $\deg(h_\ell) = \deg(\tau) \cdot \deg(g_\ell) \cdot \deg(\tau) = \ell$ dank J3C. Aus $f = g_k \circ h_\ell$ erhalten wir schließlich $\deg(f) = \deg(g_k) \cdot \deg(h_\ell) = k\ell$ erneut dank J3C.

Bemerkung: Es ist lehrreich, den Abbildungsgrad für schöne Beispiele wie f explizit auszurechnen. Hier gelingt es direkt, ebenso können wir damit alle Berechnungsmethoden illustrieren.

(w) Für $k = 0$ ist $f : x \mapsto x^0$ konstant, also $\deg(f) = 0$. Für $k = 1$ gilt $f = \mathrm{id} : x \mapsto x$, also $\deg(f) = +1$. Für $k = -1$ gilt $f : x = a1 + bI + cJ + dK \mapsto \overline{x} = a1 - bI - cJ - dK$, also $\deg(f) = -1$.

Bemerkung. Jede Familie reeller Polynome $F = (F_0, F_1, \ldots, F_n) \in \mathbb{R}[X_0, X_1, \ldots, X_n]^{n+1}$ definiert eine Polynomabbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto F(x)$. Hat f keine Nullstelle auf $\mathbb{S}^n$, so erhalten wir die Abbildung $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto F(x)/|F(x)|$ auf der Sphäre.

Sind zudem $F_0, F_1, \ldots, F_n$ homogen vom Grad $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so gilt $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und 0 ist die einzige Nullstelle, also $F : \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$. Im linearen Fall gilt $d = 1$ und $F_i = (a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)$ für alle $i = 0, 1, \ldots, n$, also $f(x) = Ax$ mit der Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$. Hier gilt $\deg(g) = \operatorname{sign} \det A$, wie in J3E ausgerechnet.

Wie berechnet man $\deg(g)$ möglichst effizient? Den grundlegenden Fall $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ haben wir oben gelöst, und die Umlaufzahl durch Sturmsche Ketten berechnet (§J1l).

Für ungerad-dimensionale Sphären $\mathbb{S}^{2m+1} \subset \mathbb{R}^{2m+2} = \mathbb{C}^{m+1}$ betrachten wir ebenso komplexe Polynome $F_0, F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{C}[Z_0, Z_1, \ldots, Z_m]$. Diese definieren die Polynomabbildung $f : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{m+1} : z \mapsto F(z)$. Hat f keine Nullstelle auf $\mathbb{S}^{2m+1}$, so erhalten wir die Abbildung $g : \mathbb{S}^{2m+1} \to \mathbb{S}^{2m+1} : g(z) = F(z)/|F(z)|$ auf der Sphäre. Im homogenen Fall entsprechend $F : \mathbb{C}^{m+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}^{m+1} \smallsetminus \{0\}$.

§J3i. Alexandroff–Kompaktifizierung.

Der Raum $\mathbb{R}^n$ wird einpunktkompaktifiziert durch $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Eine stetige Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erlaubt genau dann eine stetige Fortsetzung $\hat{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ durch $\infty \mapsto \infty$, wenn g eigentlich ist, also $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ erfüllt. Somit können wir jeder eigentlichen Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ihren Abbildungsgrad $\deg(g) := \deg(\hat{g})$ zuordnen.

Übung J3M. Bestimmen Sie den Abbildungsgrad zu folgenden eigentlichen Abbildungen:

(1) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}[X]^1_n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (X - x_1) \cdots (X - x_n)$
(2) $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}[Z]^1_n : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (Z - z_1) \cdots (Z - z_n)$
(3) $\mathbb{R}[x]^1_p \times \mathbb{R}[x]^1_q \to \mathbb{R}[x]^1_n : (P, Q) \mapsto P \cdot Q$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J4. Der Brouwersche Fixpunktsatz

☞ **§J4a. Sphären sind nicht zusammenziehbar.** Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar. ☜ Allgemeiner: Jede sternförmige Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich a ist zusammenziehbar vermöge der affinen Homotopie $H : [0,1] \times X \to X$ mit $H(t,x) = (1-t)x + ta$. Dies schreiben wir $H : \mathrm{id}_X \simeq \mathrm{const}^a_X$, kurz $X \simeq *$. Insbesondere ist der Ball $\mathbb{D}^{n+1}$ so zusammenziehbar.

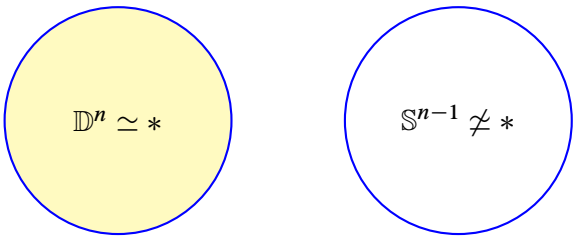


ABBILDUNG J:30. Der Ball ist zusammenziehbar, die Sphäre nicht!

Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist nicht sternförmig: Sie umschließt ein Loch und scheint nicht zusammenziehbar. Doch wie beweist man $\mathbb{S}^n \not\simeq *$? Homotopien $H : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gibt es viele… Wie beweist man, dass es keine Homotopie H von $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ nach $\mathrm{const}^*_{\mathbb{S}^n}$ gibt? Hierzu genügt es selbstverständlich nicht, keine Homotopie zu finden und erfolglos aufzugeben. Wir müssen erklären, *warum* es keine Homotopie geben kann, indem wir das topologische Hindernis verstehen. Aus der Existenz des Abbildungsgrades (J3A) folgt:

✍ **Satz J4A.** *Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist nicht zusammenziehbar, kurz $\mathbb{S}^n \not\simeq *$.* ✍

Für $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ ist dies klar. Für $n = 1$ gelingt der Beweis mit Hilfe der Umlaufzahl $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, in beliebiger Dimension mit dem Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$:

✍ BEWEIS. Dank J3A gilt $\deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$ und $\deg(\mathrm{const}) = 0$, also $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \not\simeq \mathrm{const}$. □ ✍

ALTERNATIVER BEWEIS. Es gilt $[\mathbb{S}^n, \{*\}] = \{*\}$, aber $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$ dank J3A. □

☞ **Bemerkung.** Für jeden Raum X ist die Aussage $X \not\simeq *$ äquivalent zu $[X,X] \neq \{*\}$: ☜

- Im Falle $X \simeq *$ gilt $\mathrm{id}_X \simeq \mathrm{const}^a_X$. Für jede stetige Abbildung $f : X \to X$ gilt dann $f = \mathrm{id}_X \circ f \simeq \mathrm{const}^a_X \circ f = \mathrm{const}^a_X$, also hat $[X,X] = \{[\mathrm{const}^a_X]\}$ nur ein Element.
- Im Falle $X \not\simeq *$ sind die Abbildungen $\mathrm{id}_X, \mathrm{const}^a_X : X \to X$ nicht homotop. Sie definieren demnach verschiedene Homotopieklassen $[\mathrm{id}_X] \neq [\mathrm{const}^a_X]$ in $[X,X]$.

Insbesondere ist $\mathbb{S}^n \not\simeq *$ äquivalent zu $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \neq \{*\}$. Satz J3A macht hierüber hinaus die präzisiere Aussage $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$ und gibt explizit eine kanonische Bijektion an.

☞ **Bemerkung.** Das einfache Resultat J4A präzisiert eine der grundlegenden Fragen aus der Einleitung (Kapitel A): Der Ball $\mathbb{D}^n$ und die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ sind nicht homöomorph, denn anschaulich gesagt umschließt die Sphäre ein Loch, der Ball nicht. Geometrisch ist das offensichtlich, denn $\mathbb{D}^n$ ist konvex aber $\mathbb{S}^{n-1}$ nicht, eine topologische Präzisierung erfordert aber mehr Aufwand: Versuchen Sie, den Begriff „umschließt ein Loch“ möglichst allgemein und anwendungsfähig zu definieren… Naja, ein Loch ist da, wo nichts ist, aber was heißt umschließen? Die Homotopieklassen $[\mathbb{S}^n, X]$ wurden genau hierzu erfunden! Nach Satz J7A umschließen die Sphären $\mathbb{S}^p$ und $\mathbb{S}^q$ mit $p \neq q$ Löcher verschiedener Dimension. ☜

§J4b. Mehrdimensionaler Zwischenwertsatz. Die Frage, ob ein „Loch“ vorliegt oder nicht, ist nicht bloß Spielerei, sondern hat handfeste Konsequenzen für die Lösung von Gleichungssystemen. Zur Erinnerung, der eindimensionale Zwischenwertsatz (C3R) besagt:

Satz J4B. *Zu $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(-1)\,f(1) < 0$ existiert $x \in]-1,1[$ mit $f(x) = 0$.*

Das ist klar für affine Abbildungen $f(x) = ax + b$, mit der Lösung $x = -b/a$. Hingegen ist die Aussage für beliebige stetige Abbildungen f äußerst bemerkenswert! Sie ist äquivalent zur Vollständigkeit der reellen Zahlen (G1S). Etwas allgemeiner folgt hieraus:

Satz J4C. *Sei $f : \mathbb{D}^1 \to \mathbb{R}$ stetig. Für jeden Wert $y \in \mathbb{R}$ zwischen $a = f(-1)$ und $b = f(1)$, also $(y-a)(b-y) > 0$, gilt $y \in f(\mathbb{B}^1)$, das heißt, es existiert $x \in \mathbb{B}^1$ mit $f(x) = y$.*

Für stetige Funktionen $f : \mathbb{D}^1 \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $\mathbb{D}^1 = [-1,1]$ kontrolliert demnach das Verhalten auf dem Rand $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ das Verhalten im Inneren $\mathbb{B}^1 =]-1,1[$: Alle Zwischenwerte *müssen* angenommen werden. (Weitere Werte *können* angenommen werden.)

In Dimension $n \geq 2$ betrachten wir den Ball $\mathbb{D}^n$ mit Randsphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ und den Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}] \xrightarrow{\sim} [\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Für $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ zählt $\deg(f)$, wie oft f die Sphäre um den Nullpunkt wickelt. Allgemein für $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ mit $y \notin f(\mathbb{S}^{n-1})$ zählt $\deg(f - y)$, wie oft f die Sphäre um den Punkt y wickelt.

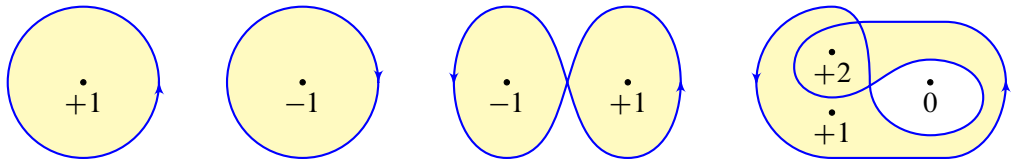


ABBILDUNG J:31. Umlaufzahl $\deg(f - y)$ um einen Punkt $y \in \mathbb{R}^2$

Satz J4D (mehrdimensionaler Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zu jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ mit $\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}} - y) \neq 0$ existiert $x \in \mathbb{B}^n$ mit $f(x) = y$, kurz $y \in f(\mathbb{B}^n)$.*

BEWEIS. *Kontraposition:* Für $y \in \mathbb{R}^n \smallsetminus f(\mathbb{D}^n)$ zeigen wir $\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}} - y) = 0$. Nach Verschiebung können wir $y = 0$ annehmen. Die Homotopie $H : [0,1] \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ mit $H(r,s) := f(rs)$ geht von $H_0(s) = f(0)$ nach $H_1(s) = f(s)$. Sie verläuft in $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ aufgrund unserer Annahme $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}^n$. Dank Homotopie-Invarianz folgt $\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg(H_0) = 0$. □

Bemerkung. Ebenso wie der Zwischenwertsatz J4C ist auch die mehrdimensionale Version J4D klar für *affine* Abbildungen $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + b$ dank Konvexität. In vielen Anwendungen steht man jedoch vor einem *nicht-linearen* Gleichungssystem $f(x) = y$, und oft sichert Satz J4D die Existenz einer Lösung. In einem zweiten Schritt wollen wir diese dann lokalisieren (etwa analog zu J1V). Wir haben dies bereits erfolgreich genutzt, spektakuläre Beispiele sind der Fundamentalsatz der Algebra (J1U), kreuzende Wege (J1X), und der Fixpunktsatz von Brouwer (in der Ebene J1W, allgemein J4H).

Bemerkung. Abbildung J:31 suggeriert, dass jeder Bildpunkt $y \in \mathbb{R}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ mit Umlaufzahl $|\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}} - y)| = n > 0$ auch n–mal angenommen wird. Das ist im Allgemeinen nicht wahr: Im Beispiel $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ gilt $\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = n$, aber der Wert 0 wird nur einmal angenommen. Hier muss man Vielfachheiten geeignet zählen wie in J1U.

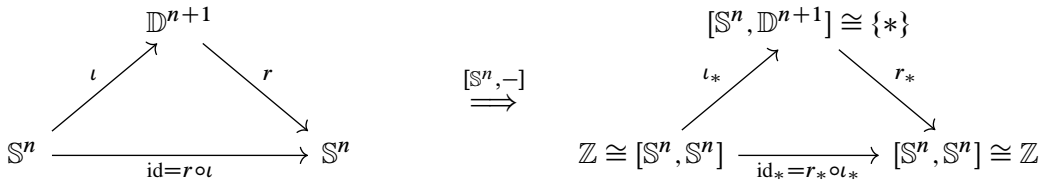
© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J4c. Retraktion auf den Rand. Zur Erinnerung: Der punktierte Raum $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ lässt sich auf die Sphäre $\mathbb{S}^n$ retrahieren vermöge $r : \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{S}^n : x \mapsto x/|x|$. Hierzu müssen wir allerdings einen Punkt entfernen, anders geht es nicht:

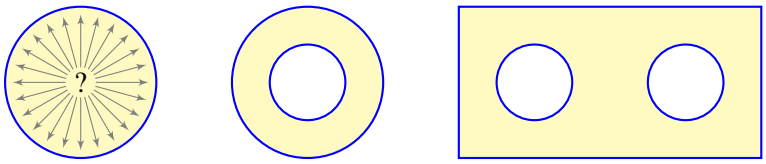
Lemma J4E. *Es gibt keine stetige Retraktion $r : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ des Balls auf seinen Rand.*

Für $n = 0$ folgt dies leicht aus dem Zwischenwertsatz. (Übung!) Für $n = 1$ gelingt der Beweis mit Hilfe der Umlaufzahl (J2U), in beliebiger Dimension mit dem Abbildungsgrad:

BEWEIS. Die Inklusion $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ ist stetig und zusammenziehbar (G4B). Gäbe es $r : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ stetig mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$, so folgt $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} = r \circ \iota \simeq *$, im Widerspruch zu J4A. □



ALTERNATIVER BEWEIS. Wir wenden den Funktor $[\mathbb{S}^n, -]$ an (§G4f). Wegen $r_* \circ \iota_* = \mathrm{id}_*$ wäre dann ι_* injektiv und r_* surjektiv. Die Menge $[\mathbb{S}^n, \mathbb{D}^{n+1}] = \{*\}$ besteht nur aus einem Element, denn $\mathbb{D}^{n+1}$ ist zusammenziehbar. Die Menge $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ hingegen hat mehr als ein Element: Für $n \geq 1$ haben wir $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ dank Brouwer–Hopf (J3A). Für $n = 0$ gilt $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$, und $[\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0]$ hat vier Elemente. □



Satz J4F. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $A^\circ \neq \emptyset$. Dann existiert keine Retraktion $r : A \to \delta A$.*

BEWEIS. Wir können A so verschieben, dass 0 im Inneren liegt, und dann so skalieren, dass $A \subset \mathbb{B}^n$ gilt. Aus einer Retraktion $r : A \to \delta A$ erhalten wir die Retraktion

$$g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto \begin{cases} r(x)/|r(x)| & \text{für } x \in A, \\ x/|x| & \text{für } x \in \mathbb{D}^n \smallsetminus A^\circ. \end{cases}$$

Nach dem Verklebesatz E1P ist g stetig, denn $\mathbb{D}^n \smallsetminus A^\circ$ und A sind abgeschlossen, und auf dem Durchschnitt δA stimmen beide Definitionen überein. Zudem gilt $g(x) = x$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, also ist g eine Retraktion. Eine solche Retraktion ist nach J4E unmöglich. □

Beispiele. Neben $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ sind viele weitere Räume $(A, \delta A)$ nicht retrahierbar, wie Kreisring oder Kugelschale $A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq |x| \leq 2 \}$, Volltorus oder Henkelkörper, etc.

Bemerkung. Die Voraussetzung des nicht-leeren Inneren $A^\circ \neq \emptyset$ ist notwendig, andernfalls gilt $\delta A = A$ und trivialerweise ist die Identität $\mathrm{id}_A : A \to A = \delta A$ eine Retraktion.

Bemerkung. Wir benötigen, dass $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, andernfalls wäre die Aussage falsch. Der Halbraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, zum Beispiel, erlaubt eine Retraktion auf seinen Rand.

§J4d. Der Brouwersche Fixpunktsatz. Ein *Fixpunkt* der Abbildung $f : X \to X$ ist ein Punkt $a \in X$ mit $f(a) = a$. Viele Problemstellungen der Mathematik führen zu Fixpunktfragen oder lassen sich in solche umformulieren. Im Raum $\mathbb{R}^n$ sind Lösungen der Gleichung $g(x) = 0$ genau die Fixpunkte der Abbildung $f(x) = x - g(x)$ und umgekehrt.

Eine wichtige Lösungsmethode ist der Banachsche Fixpunktsatz (C4Q): Für kontraktive Abbildungen $f : X \to X$ garantiert er Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes und liefert zudem ein effizientes Näherungsverfahren mit expliziten Fehlerschranken.

Manchmal beruht die Existenz von Fixpunkten nicht auf speziellen Eigenschaften von $f : X \to X$, sondern folgt allgemein aus der besonderen Beschaffenheit des Raumes X:

Satz J4G. *Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$. Jede stetige Abbildung $f : [a,b] \to [a,b]$ hat einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x - f(x)$ erfüllt $g(a) \leq 0$ und $g(b) \geq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (C3R) existiert $x \in [a,b]$ mit $g(x) = 0$, also $f(x) = x$. □

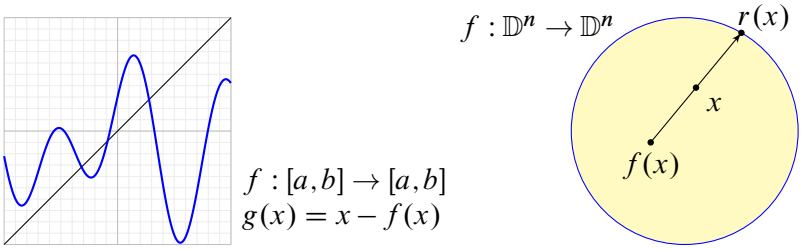


ABBILDUNG J:32. Brouwerscher Fixpunktsatz in Dimension $n = 1$ und $n \geq 2$

Die höherdimensionale Version können wir nun mit dem Abbildungsgrad beweisen:

Satz J4H (Fixpunktsatz von Brouwer, 1909)**.** *Zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ existiert mindestens ein Fixpunkt, also ein Punkt $a \in \mathbb{D}^n$ mit $f(a) = a$.*

Für $n = 1$ folgt dies wie oben gesehen aus dem Zwischenwertsatz. Für $n = 2$ gelingt der Beweis mit der Umlaufzahl, in beliebiger Dimension mit dem Abbildungsgrad:

BEWEIS. Angenommen, es gilt $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{D}^n$. Zu jedem $x \in \mathbb{D}^n$ und $y = f(x)$ existiert dann genau ein $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, für das $r(x) = x + t \cdot (x - y)$ in $\mathbb{S}^{n-1}$ liegt.

Ausführlich finden wir $|x + t(x-y)|^2 - 1 = at^2 - 2bt - c$ mit $a = \sum_i (x_i - y_i)^2 > 0$ und $b = \sum_i x_i (y_i - x_i)$ und $c = 1 - \sum_i x_i^2 \geq 0$. Die Lösung $t(x) := (b + \sqrt{b^2 + ac})/a \geq 0$ ist stetig, also auch die gesuchte Abbildung $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x + t(x) \cdot (x - f(x))$.

Für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt $r(x) = x$, also ist r eine Retraktion von $\mathbb{D}^n$ auf $\mathbb{S}^{n-1}$. Das jedoch widerspricht Lemma J4E, also muss f mindestens einen Fixpunkt haben. □

Übung J4I. Zeigen Sie zur Zusammenfassung die Äquivalenz folgender Aussagen (J4K):

(1) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist nicht zusammenziehbar, $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}} \not\simeq *$, somit $[\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}] \neq \{*\}$.
(2) Es gibt keine stetige Retraktion $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ des Balls auf seinen Rand.
(3) Jede stetige Abbildung $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat einen Fixpunkt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J4e. Das Lemma von Sperner. Im Jahr 1928 fand Emanuel SPERNER (1905–1980), damals 23jähriger Student, einen elementaren Beweis für Brouwers Fixpunktsatz J4H. Wir haben den Satz aus dem Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ abgeleitet (J3A). Sperners eleganter Beweis ist noch direkter, etwas spezieller, dafür aber kurz und elementar.

Sei $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein n–Simplex mit Eckenmenge $E = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$. Jeder Punkt $x \in \Delta^n$ liegt in einer kleinsten Seite $[T] \leq \Delta^n$, und dies definiert den *Träger* $\operatorname{supp}(x) := T \subset E$. Sei $K \preccurlyeq \Delta^n$ eine simpliziale Unterteilung (I3L), also eine affine Triangulierung des Simplex $\Delta^n = |K|$. Eine *Eckenfärbung* ist eine Abbildung $f : \Omega(K) \to E$, sodass für jede Ecke $v \in \Omega(K)$ stets $f(v) \in \operatorname{supp}(v)$ gilt. (Machen Sie sich einige Skizzen!)

Wir stellen uns $e_0, e_1, \dots, e_n$ als $n+1$ verschiedene Farben vor. Es gilt $E \subset \Omega(K)$ und $f(e_i) = e_i$ für alle $i = 0, 1, \dots, n$. Auf jeder Kante $[e_i, e_j] \leq \Delta^n$ dürfen nur die Farben e_i, e_j verwendet werden, auf jedem Randdreieck $[e_i, e_j, e_k] \leq \Delta^n$ nur die Farben e_i, e_j, e_k, usw. Jeder Simplex $S \in K$ hat eine Menge $f(S) \subset E$ von Farben. Ein *Regenbogensimplex* $S \in K$ hat alle Farben, also $f(S) = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$. Gibt es solche immer? Ja!

Lemma J4J (Sperner 1928)**.** *Sei $K \preccurlyeq \Delta^n$ eine simpliziale Unterteilung und $f : \Omega(K) \to E$ eine Eckenfärbung. Dann existiert ein Simplex $S \in K$ mit $f(S) = E$. Genauer gilt:*

(1) Unorientierte Zählung in $\mathbb{Z}/2$: Die Anzahl der Regenbogensimplizes ist ungerade.
(2) Orientierte Zählung in $\mathbb{Z}$: Es gilt $\sum_{S \in K} \operatorname{sign}(f|S) = 1$ mit der Orientierung

$$\operatorname{sign}(f|S) := \operatorname{sign} \frac{\det(f(s_1) - f(s_0), \dots, f(s_n) - f(s_0))}{\det(s_1 - s_0, \dots, s_n - s_0)} \in \{0, \pm 1\}.$$

Die Orientierung ist wohldefiniert da unabhängig von der willkürlichen Nummerierung der Eckpunkte. Jeder Regenbogensimplex S mit $f(S) = E$ hat ein Vorzeichen $\operatorname{sign}(f|S) = \pm 1$ je nach Orientierung. Für alle anderen Simplizes S, mit $f(S) \subsetneq E$, gilt $\operatorname{sign}(f|S) = 0$.

BEWEIS VON SPERNERS LEMMA J4J(1) DURCH DOPPELTES ABZÄHLEN. Wir führen Induktion über die Dimension $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ ist die Aussage (1) trivialerweise wahr.

Für $n = 1$ ist Aussage (1) die diskrete Version des Zwischenwertsatzes: Die Strecke $\Delta^1 = [e_0, e_1]$ wird unterteilt durch $v_0, v_1, \dots, v_\ell$. Wegen $f(v_0) = e_0$ und $f(v_\ell) = e_1$ ist die Anzahl der Segmente i mit Farbwechsel $f(v_{i-1}) \neq f(v_i)$ ungerade.

Für $n \geq 1$ betrachten wir die Menge der Regenbogensimplizes:

$$\begin{aligned}
X_n &= \{\, S \in K_n \mid f(S) = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\} \,\} \quad \text{sowie} \\
Y_n &= \{\, S \in K_n \mid f(S) = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\} \,\}, \quad Z_n = X_n \sqcup Y_n, \\
Z_{n-1} &= \{\, T \in K_{n-1} \mid f(T) = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\} \,\} = X_{n-1} \sqcup Y_{n-1}, \\
Y_{n-1} &= \{\, T \in Z_{n-1} \mid T \not\subset [e_0, e_1, \dots, e_{n-1}] \,\} \quad \text{(innere Simplizes)}, \\
X_{n-1} &= \{\, T \in Z_{n-1} \mid T \subset [e_0, e_1, \dots, e_{n-1}] \,\} \quad \text{(Randsimplizes)}.
\end{aligned}$$

Für $\Gamma = \{\, (S, T) \in Z_n \times Z_{n-1} \mid S \supset T \,\}$ gilt $|\Gamma| = |X_n| + 2|Y_n| = |X_{n-1}| + 2|Y_{n-1}|$:

- Jeder n–Simplex $S \in X_n$ enthält genau einen $(n-1)$–Simplex $T \in Z_{n-1}$.
- Jeder n–Simplex $S \in Y_n$ enthält genau zwei $(n-1)$–Simplizes $T \in Z_{n-1}$.
- Jeder $(n-1)$–Simplex $T \in X_{n-1}$ liegt in genau einem n–Simplex $S \in Z_n$.
- Jeder $(n-1)$–Simplex $T \in Y_{n-1}$ liegt in genau zwei n–Simplizes $S \in Z_n$.

Nach Induktionsannahme ist $|X_{n-1}|$ ungerade, also auch $|X_n|$. □

Für Sperners Lemma gebe ich zwei wunderschöne, einfache doch raffinierte Beweise: Der erste ist rein kombinatorisch und nutzt geschickt doppeltes Abzählen, der zweite ist analytisch-geometrisch und nutzt die Determinante für das orientierte Volumen.

BEWEIS VON SPERNERS LEMMA J4J(2) MIT DETERMINANTEN. Für $e_0, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ ist das Volumen des aufgespannten n–Simplex $\Delta = [e_0, e_1, \dots, e_n]$ in $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $\operatorname{vol}_n \Delta = \det(e_1 - e_0, \dots, e_n - e_0)/n!$. Zur Vereinfachung fixieren wir die Ecken so, dass $\operatorname{vol}_n \Delta = 1$ gilt, etwa $e_{ii} = i$ für $i = 0, 1, \dots, n$ und $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Für jeden n–Simplex $S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\} \in K$ der gegebenen Triangulierung $K \preccurlyeq \Delta$ gilt $\operatorname{vol}_n[S] = \det(s_1 - s_0, \dots, s_n - s_0)/n!$; wir nummerieren die Ecken so, dass die Determinante positiv ausfällt. Dank Additivität des Volumens gilt $\sum_{S \in K} \operatorname{vol}_n[S] = \operatorname{vol}_n \Delta = 1$.

Wir betrachten die Homotopie $\varphi_t : |K| \to \Delta$ mit $\varphi_t(s) = (1-t)s + tf(s)$ für $t \in [0,1]$. Das Volumen $P_t(S) := \det(\varphi_t(s_1) - \varphi_t(s_0), \dots, \varphi_t(s_n) - \varphi_t(s_0))$ ist ein Polynom in t vom Grad $\leq n$, ebenso $P_t(K) := \sum_{S \in K} P_t(S)$. Für kleine $t \in [0, \varepsilon]$ ist $\varphi_t(K)$ weiterhin eine Triangulierung von Δ (I2P). Daher gilt $P_t(K) = 1$ für alle $t \in [0, \varepsilon]$, und somit für alle $t \in [0,1]$. Für $t = 1$ gilt $P_1(S) = \operatorname{sign}(f|S)$ und somit $1 = P_1(K) = \sum_{S \in K} \operatorname{sign}(f|S)$. □

Sperners Lemma ist eine diskrete, rein kombinatorische Version des Fixpunksatzes:

Satz J4K. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist nicht zusammenziehbar, somit $[\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}] \neq \{*\}$.
(2) Es gibt keine stetige Retraktion $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ des Balls auf seinen Rand.
(3) Brouwers Fixpunktsatz: Jede stetige Abbildung $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat einen Fixpunkt.
(4) Sperners Lemma: Für $K \preccurlyeq \Delta^n$ hat jede Eckenfärbung einen Regenbogensimplex.
(5) Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz: Sind $A(e_0), \dots, A(e_n) \subset \Delta^n$ abgeschlossen mit $[T] \subset \bigcup_{s \in T} A(s)$ für jede Seite $[T] \leq \Delta^n$, so gilt $A(e_0) \cap \dots \cap A(e_n) \neq \emptyset$.

BEWEIS. „(1) ⇔ (2)“: Jede Homotopie $H : [0,1] \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ von $H_0 = \text{const}$ nach $H_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ entspricht einer Retraktion $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ durch $r(ts) = H(t,s)$, siehe G4F.

„(2) ⇒ (3)“: Dies haben wir oben zum Beweis von Satz J4H gezeigt.

„(3) ⇒ (2)“: Gäbe es eine stetige Retraktion $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, so wäre die Abbildung $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit $g(x) = -r(x)$ stetig aber ohne Fixpunkt. Dank (3) ist dies unmöglich.

„(3) ⇒ (4)“: Sei $K \preccurlyeq \Delta^n$ und $f : \Omega(K) \to E$ eine Eckenfärbung ohne Regenbogensimplex. Sei $\rho : E \xrightarrow{\sim} E : e_0 \mapsto e_1 \mapsto \dots \mapsto e_n \mapsto e_0$ und $\varphi = \rho \circ f : \Omega(K) \to E$. Die topologische Realisierung $|\varphi| : \Delta^n = |K| \to \partial\Delta^n$ hat keine Fixpunkte: Zum Punkt $x \in \partial\Delta^n$ betrachten wir den Trägersimplex $S \in K$ mit $x \in \operatorname{Int}[S]$. Dieser wird abgebildet auf $T := f(S) \subsetneq E$. Es gilt $\operatorname{Int}[S] \subset \operatorname{Int}[T]$, und wegen $\rho(T) \neq T$ gilt $\operatorname{Int}[\rho(T)] \cap \operatorname{Int}[T] = \emptyset$, also $x \neq |\varphi|(x)$.

„(4) ⇒ (5)“: Seien $K_m \preccurlyeq \Delta^n$ Triangulierungen mit $\max\{ \operatorname{diam} S \mid S \in K_m \} \to 0$ für $m \to \infty$. Für jedes $m \in N$ wählen wir eine Eckenfärbung $f_m : K_m \to E$ mit $s \in A(f(s))$. Sei $\{s_{m,0}, \dots, s_{m,n}\} \in K_m$ ein Regenbogensimplex mit $f(s_{m,i}) = e_i$. Wir wählen eine konvergente Teilfolge $s_{m,0} \to p$. Für alle $i = 0, 1, \dots, n$ gilt dann $s_{m,i} \to p$, also $p \in A(e_i)$.

„(5) ⇒ (3)“: Sei $f : \Delta^n \to \Delta^n : x = (x_0, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_0(x), \dots, f_n(x))$ stetig. Wir betrachten $A(e_i) := \{ x \in \Delta^n \mid f_i(x) \leq x_i \}$. Wegen $\sum_i x_i = \sum_i f_i(x) = 1$ gilt $\Delta^n = A(e_0) \cup \dots \cup A(e_n)$, und für jede Seite $[T] \leq \Delta^n$ gilt $[T] \subset \bigcup_{s \in T} A(s)$. Dank (5) existiert $x \in A(e_0) \cap \dots \cap A(e_n)$, also $f_i(x) \leq x_i$ für jedes $i = 0, \dots, n$, somit $f(x) = x$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J4f. Fixpunkträume. Der Brouwersche Fixpunktsatz motiviert folgenden Begriff:

Übung J4L. Ein topologischer Raum X hat die *Fixpunkteigenschaft* (kurz FPE) und heißt *Fixpunktraum*, wenn jede stetige Abbildung $f : X \to X$ (mindestens) einen Fixpunkt hat.

(1) Sei $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ ein Homöomorphismus. Ist X ein Fixpunktraum, so auch Y.
(2) Die Räume $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, $\mathbb{B}^n$, $\mathbb{S}^n$ haben die Fixpunkteigenschaft nicht.
(3) Jeder Fixpunktraum X ist zusammenhängend. Das ist notwendig, nicht hinreichend.
(4) Ein diskreter Raum X hat die Fixpunkteigenschaft genau dann, wenn $X = \{*\}$.
(5) Jede nicht-leere kompakte konvexe Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Fixpunktraum.
(6) Die Fixpunkteigenschaft vererbt sich auf Retrakte, nicht auf beliebige Teilräume.
(7) Sei $(X, x_0) = \bigvee_{i\in I}(A_i, a_i) := \bigsqcup_{i\in I}(A_i, a_i)/_{a_i \sim a_j}$ ein Bouquet mit $I \neq \emptyset$. Genau dann hat X die Fixpunkteigenschaft, wenn jeder Teilraum A_i sie hat.
(8) Jeder Graph mit Fixpunkteigenschaft ist ein Baum ohne unendlichen Kantenpfad.
(9) Umgekehrt: Jeder Baum ohne unendlichen Kantenpfad hat die Fixpunkteigenschaft.

Insbesondere hat jeder endliche Baum die Fixpunkteigenschaft. Dieser besonders schöne einfache Spezialfall dieser Übung ist erstaunlicherweise als Artikel erschienen: M. Labbé, J.-F. Thisse, *A tree-network has the fixed point property*, Networks 19 (1989) 255–259.

✻ **J4L.** (1) Ist $g : Y \to Y$ stetig, so auch $f = h^{-1}gh : X \to X$. Hieraus folgt $\mathrm{Fix}(g) = h(\mathrm{Fix}(f)) \neq \emptyset$.

Ausführlich: Es gilt $\mathrm{Fix}(g) \supset h(\mathrm{Fix}(f))$, denn $f(a) = a$ impliziert $g(h(a)) = h(f(a)) = h(a)$. Ebenso gilt $\mathrm{Fix}(f) \supset h^{-1}(\mathrm{Fix}(g))$, also $\mathrm{Fix}(g) \subset h(\mathrm{Fix}(f))$. Wir schließen $\mathrm{Fix}(g) = h(\mathrm{Fix}(f))$.

(2) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x + v$ ist stetig und fixpunktfrei für $v \neq 0$. Damit sind auch $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und $\mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n$ keine Fixpunkträume dank (1). Die Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto -x$ ist stetig und fixpunktfrei.

(3) Sei $X = A \sqcup B$ eine Zerlegung in nicht-leere offene Teilmengen A und B. Wir wählen Punkte $a \in A$ und $b \in B$. Die Abbildung $f : X \to X$ mit $f(A) = \{b\}$ und $f(B) = \{a\}$ ist stetig und fixpunktfrei.

(4) Jeder einpunktige Raum $X = \{*\}$ hat die FPE. Hat X zwei oder mehr Punkten, so nutzen wir (3).

(5) Es gilt $X \cong \mathbb{D}^k$ dank F6H. Nach (1) können wir den Brouwerschen Fixpunktsatz J4H anwenden.

(6) Ein Teilraum $Y \subset X$ erbt im Allgemeinen nicht die Fixpunkteigenschaft, wie $\{0, 1\} \subset [0, 1]$ zeigt. Für eine Einbettung $\iota : Y \to X$ mit Retraktion $r : X \to Y$ gilt $r \circ \iota = \mathrm{id}_Y$. Zu jeder stetigen Abbildung $g : Y \to Y$ ist $f = \iota \circ g \circ r : X \to X$ stetig. Ist X ein Fixpunktraum, dann hat f einen Fixpunkt $x_0 \in X$. Für $y_0 = r(x_0)$ gilt dann $y_0 = r(x_0) = rf(x_0) = r\iota g r(x_0) = g(y_0)$. Damit hat auch f einen Fixpunkt, nämlich y_0.

(7) Das Bouquet erlaubt Injektionen $\iota_i : (A_i, a_i) \hookrightarrow (X, x_0)$ und Retraktionen $r_i : (X, x_0) \twoheadrightarrow (A_i, a_i)$ mit $r_i(x) = x$ für $x \in A_i$ und $r_i(x) = x_0$ für $x \in A_j$, $j \neq i$. Dank dieser Einbettung dürfen wir $A_i \subset X$ als Teilraum betrachten. Hat X die FPE, so auch A_i nach (6). Nehmen wir umgekehrt an, jeder Teilraum A_i hat die FPE. Sei $f : X \to X$ stetig. Es gilt $f(x_0) \in A_k$ für ein $k \in I$. Die Komposition $g = r_k \circ f \circ \iota_k : A_k \to A_k$ ist stetig. Nach Voraussetzung hat A_k die FPE, also existiert ein Fixpunkt $a \in A_k$, $g(a) = a$. Wir unterscheiden zwei Fälle: Gilt $f(a) \in A_k$, so folgt $f(a) = g(a) = a$. Gilt $f(a) \in A_i$ für $i \neq k$, so folgt $a = g(a) = r_k f(a) = x_0$, und mit $f(x_0) \in A_k$ hätten wir $f(x_0) \in A_k \cap A_i = \{x_0\}$. In beiden Fällen hat f einen Fixpunkt.

(8) Sei K ein Graph und $|K|$ habe die Fixpunkteigenschaft. Zusammenhang folgt aus (3). Wenn K einen Zykel enthält, dann existiert eine Einbettung $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow |K|$ und eine Retraktion $r : |K| \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ (durch Zurückziehen eines Spannbaums I3J). Da $\mathbb{S}^1$ die Fixpunkteigenschaft nicht hat (1), kann nach (6) auch $|K|$ sie nicht haben. Also muss $|K|$ ein Baum sein. Jeder unendliche Kantenpfad $v_0, v_1, v_2, \ldots$ definiert eine Einbettung $\iota : \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow |K| : k \mapsto v_k$ und eine Retraktion $r : |K| \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (durch Zurückziehen eines Spannbaums I3J). Da $\mathbb{R}$ die Fixpunkteigenschaft nicht hat (2), kann nach (6) auch $|K|$ sie nicht haben.

(9) Sei K ein Baum, aber $|K|$ habe nicht die FPE. Wir wählen eine Ecke v_0 von K. Dann ist $(|K|, v_0) = \bigvee_{i\in I}(|K_i|, v_0)$ ein Bouquet von Teilbäumen. Nach (6) hat mindestens ein $|K_i|$ nicht die FPE. In K_i hat v_0 den einzigen Nachbarn v_1. Wir wiederholen das Argument mit $K' = K_i \smallsetminus \{\{v_0\}, \{v_0, v_1\}\}$: Auch $|K'|$ hat nach (6) nicht die FPE. So fortfahrend erhalten wir einen unendlichen Kantenpfad $v_0, v_1, v_2, \ldots$ in K, Widerspruch!

§J4g. Hat die Sinuskurve des Topologen die Fixpunkteigenschaft? Jeder Fixpunktraum ist notwendigerweise zusammenhängend, siehe J4L(3). Unsere bisherigen Beispiele wie $\mathbb{D}^n$ sind sogar wegzusammenhängend, das ist jedoch keineswegs notwendig:

Übung J4M. (1) Wir betrachten die Sinuskurve des Topologen

$$C = A \cup B \quad \text{mit} \quad A = \big\{ (x, \sin(\pi/x)) \,\big|\, x \in]0,1] \big\} \quad \text{und} \quad B = \{0\} \times [-1,1].$$

(a) Bestimmen Sie $\pi_0(C)$. Wie viele Abbildungen $g : \pi_0(C) \to \pi_0(C)$ gibt es?
(b) Welche davon werden induziert durch stetige Abbildungen $f : C \to C$?

Jede stetige Abbildung $f : C \to C$ hat einen Fixpunkt. Zeigen Sie diese Behauptung:
(c) falls $f(B) \subset B$ sowie (d) falls $f(C) \subset A$ und schließlich (e) allgemein.

Untersuchen Sie ebenso folgende Räume auf die Fixpunkteigenschaft:
(2) $X = \mathbb{D}^2 \cup S \subset \mathbb{C}$ mit $S = \{ (1 + \mathrm{e}^{-\theta})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$
(3) $Y = \{(0,0)\} \cup A$ mit $A = \{ (x, \sin(\pi/x)) \mid x \in]0,1] \}$

✻ **J4M.** (1a) Wir wissen $\pi_0(C) = \{ A, B \}$ dank G2L. Somit gibt es vier Abbildungen $g : \pi_0(C) \to \pi_0(C)$. (1b) Nur drei dieser vier Abbildungen werden von stetigen Abbildungen $f : C \to C$ induziert. Die Identität id_C induziert wie immer $\mathrm{id}_{\pi_0(C)} : (A,B) \mapsto (A,B)$. Die konstanten Abbildungen $C \to \{c\} \hookrightarrow C$ auf $c \in A$ bzw. $c \in B$ induzieren $(A,B) \mapsto (A,A)$ bzw. $(A,B) \mapsto (B,B)$. Die Abbildung $(A,B) \mapsto (B,A)$ jedoch kann nicht durch eine stetige Abbildung $f : C \to C$ induziert werden: In $C = A \cup B$ ist B abgeschlossen aber nicht offen, und A ist offen aber nicht abgeschlossen; der Abschluss ist $\overline{A} = C$. Gälte $f(A) \subset B$ und $f(B) \subset A$, so wäre $A = f^{-1}(B)$ abgeschlossen in C und $B = f^{-1}(A)$ offen in C, Widerspruch.

(1c) Im Falle $f(B) \subset B$ haben wir einen Fixpunkt in B dank Zwischenwertsatz (J4G). (1d) Die Menge C ist kompakt (F1O) und zusammenhängend (G1G). Im Falle $f(C) \subset A$ ist das Bild $Z = f(C)$ zusammenhängend (G1E) im Raum $A \cong]0,1]$, also $Z \cong I$ mit einem Intervall $I \subset]0,1]$ (G1D). Zudem ist Z kompakt (F1J), also ist $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen (F1H), somit $Z \cong [a,b]$. Zur Einschränkung $f|_Z^Z : Z \to Z$ existiert ein Fixpunkt dank Zwischenwertsatz (J4G). (1e) Nur die beiden Fälle (1c) und (1d) sind möglich dank (1b).

(2) Dieser Raum verhält sich genauso wie die Sinuskurve des Topologen: (2a) Es gilt $\pi_0(X) = \{\mathbb{D}^2, S\}$. (2b) Nur drei der vier Abbildungen $g : \pi_0(X) \to \pi_0(X)$ werden von stetigen Abbildungen $f : X \to X$ induziert: In X ist $\mathbb{D}^2$ abgeschlossen und S offen mit Abschluss $\overline{S} = S \cup \mathbb{S}^1$. Wäre $f(S) \subset \mathbb{D}^2$ und $f(\mathbb{D}^2) \subset S$, so wäre $S = f^{-1}(\mathbb{D}^2)$ abgeschlossen in X, Widerspruch. (2c) Im Falle $f(\mathbb{D}^2) \subset \mathbb{D}^2$ haben wir einen Fixpunkt in B dank Brouwers Fixpunktsatz J4H. (2d) Im Falle $f(X) \subset S$ finden wir einen Fixpunkt wie folgt: Die Menge X ist kompakt (F1O) und zusammenhängend (G1G und G1I). Das Bild $Z = f(X)$ ist zusammenhängend (G1E) im Raum $S \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$, also $Z \cong I$ mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ (G1D). Zudem ist Z kompakt (F1J), also ist $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen (F1H), somit $Z \cong [a,b]$. Zur Einschränkung $f|_Z^Z : Z \to Z$ existiert ein Fixpunkt dank Zwischenwertsatz (J4G). (2e) Nur die beiden Fälle (2c) und (2d) sind möglich dank (2b).

(3) Der Raum $Y = \{(0,0)\} \cup A$ ist eine Variante der Sinuskurve des Topologen $C = B \cup A$, aber kniffliger: Die Teilmenge $Y \subset \mathbb{R}^2$ ist nicht abgeschlossen, also auch nicht kompakt nach dem Satz von Heine–Borel (F1O). Tatsächlch gibt es stetige Surjektionen $f : Y \twoheadrightarrow A$; das Argument (1d) bricht hier zusammen.

Die Teilmenge $Y \subset [0,1] \times [-1,1]$ ist der Graph einer Funktion $h : [0,1] \to [-1,1]$. Diese Funktion h ist stetig in jedem Punkt $x \in]0,1]$, aber nicht stetig in $x = 0$. Sei nun $f : Y \to Y$ stetig. Wir wollen zeigen, dass f einen Fixpunkt hat. Gilt $f(0,0) = (0,0)$, so sind wir fertig. Wir nehmen also $f(0,0) \neq (0,0)$ an.

Als Hilfsfunktion nutzen wir $g : [0,1] \to [0,1] : x \mapsto \mathrm{pr}_1 f(x, h(x))$; diese ist stetig auf $]0,1]$. Wir betrachten die Zerlegung $[0,1] = U \sqcup V$ in die Teilmengen $U = \{ x \in [0,1] \mid x < g(x) \}$ und $V = \{ x \in [0,1] \mid g(x) \leq x \}$. Es gilt $0 \in U$, da $f(0,0) \neq (0,0)$, sowie $1 \in V$. Zudem wissen wir $U \supsetneq \{0\}$, also $V \subsetneq]0,1]$: Für $n = 1,2,3,\ldots$ gilt $Y \ni (1/n, 0) \to (0,0) \in Y$, doch mit $V =]0,1]$ wäre $f(1/n,0) \to f(0,0)$ unmöglich.

Es existiert eine Folge $0 = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots$ in U mit $u_n \nearrow u := \sup U \in]0,1]$. Da g im Punkt u stetig ist, gilt $g(u_n) \to g(u)$. Aus $g(u_n) > u_n$ wird im Grenzwert $g(u) \geq u$. Ebenso existiert $1 = v_0 \geq v_1 \geq v_2 \geq \ldots$ in V mit $v_n \searrow u$, es gilt $g(v_n) \to g(u)$, und aus $g(v_n) \leq v_n$ wird im Grenzwert $g(u) \leq u$. Damit gilt $g(u) = u$, also ist $f(u, h(u)) = (u, h(u))$ ein Fixpunkt, wie behauptet.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J4h. Hat jedes zusammenziehbare Kompaktum die Fixpunkteigenschaft? Für die Fixpunkteigenschaft gibt es zahlreiche notwendige Bedingungen und auch zahlreiche hinreichende Bedingungen, aber dazwischen klafft eine große Lücke: Die hinreichenden sind extrem einschränkend, die notwendigen sind extrem schwach.

Eine schöne Übersicht hierzu finden Sie bei R.H. Bing: *The elusive fixed point property.* Amer. Math. Monthly 76 (1969) 119–132. Sie präsentiert auf wenigen Seiten eine reiche Sammlung an starken Ergebnissen, exotischen Beispielen und offenen Fragen. Seit ihrem Erscheinen bis heute ist sie sehr einflussreich und hat zahlreiche Untersuchungen inspiriert.

Brouwers Fixpunktsatz J4H garantiert die Fixpunkteigenschaft für jedes konvexe Kompaktum $X \subset \mathbb{R}^n$. Kompaktheit alleine genügt nicht, wie $\mathbb{S}^n$ zeigt. Konvexität genügt ebensowenig, wie $\mathbb{R}^n$ zeigt, und ist keine topologische Eigenschaft. Borsuk fragte 1932, ob jedes zusammenziehbare Kompaktum die Fixpunkteigenschaft hat. Diese Frage wurde 20 Jahre später beantwortet von S. Kinoshita: *On Some Contractible Continua without Fixed Point Property*, Fund. Math. 40 (1953) 96–98. Sein Gegenbeispiel ist verblüffend einfach:

Übung J4N (Kinoshita 1953)**.** Wir betrachten die Spirale $S = \{\,(1-\mathrm{e}^{-\theta})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,\}$ in der Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Im Raum $\mathbb{R}^3$ bestehe $K := A \cup B \cup C$ aus dem äußeren Zylindermantel $A = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$, dem Boden $B = \mathbb{D}^2 \times \{0\}$ sowie $C = S \times [0,1]$. Der Raum K ist kompakt und zusammenziehbar. Konstruieren Sie eine fixpunktfreie Abbildung $f : K \to K$. *Hinweis:* Der Raum K ist einfach, aber die Abbildung f ist trickreich, siehe Kinoshitas Artikel.

Übung J4O. In $\mathbb{C}$ sei $X = \bar{B}(0,2) \smallsetminus B(\pm 1, 1/2)$ eine Kreisscheibe mit zwei Löchern. Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $h : X \xrightarrow{\sim} X$ ohne Fixpunkte. *Hinweis:* Jede Lösung h muss die Randkomponenten zyklisch permutieren und die Orientierung umkehren.

✻ **J4O.** Hier hilft eine symmetrischere Darstellung als Sphäre mit drei Löchern: $Y = \mathbb{S}^2 \smallsetminus \bigcup_{k=0}^{2} B(p_k, 1/2)$ mit $p_k = (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\cdot k/3}, 0)$. Die Rotation um die z–Achse mit Winkel $2\pi/3$ liefert $k : Y \xrightarrow{\sim} Y$ und fixiert nur die Pole. Komponiert mit der Spiegelung an der Äquatorebene erhalten wir $h : Y \xrightarrow{\sim} Y$ ohne Fixpunkte.

Übung J4P. Die Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ sei konvex kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \neq \emptyset$. Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= immer wahr) oder nein (= manchmal unwahr).

(1) Jede stetige Abbildung $f : X \to X$ hat mindestens einen Fixpunkt.
(2) Jede stetige Abbildung $f : X^\circ \to X^\circ$ hat mindestens einen Fixpunkt.
(3) Jede stetige Abbildung $f : X \to X^\circ$ hat mindestens einen Fixpunkt.
(4) Jede stetige Abbildung $f : X^\circ \to X$ hat mindestens einen Fixpunkt.

✻ **J4P.** Dank F6G existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^n$ und $h(X^\circ) = \mathbb{B}^n$.
(1) Ja, denn Brouwers Fixpunktsatz J4H gilt für den Raum $X \cong \mathbb{D}^n$, siehe J4L(1).
(2) Nein, denn $X \cong \mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n$ hat die Fixpunkteigenschaft nicht, siehe J4L(2).
(3) Ja, denn die Komposition $g = \mathrm{inc} \circ f : X \to X^\circ \hookrightarrow X$ hat einen Fixpunkt nach (1).
(4) Nein, denn es gibt Gegenbeispiele $g : X^\circ \to X^\circ$ wie in (2), also auch $f = \mathrm{inc} \circ g : X^\circ \to X^\circ \hookrightarrow X$.

☞ **§J4i. Haben unendlich-dimensionale Bälle die Fixpunkteigenschaft?** Brouwers ☜ Fixpunktsatz gilt für die Bälle $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ in jeder *endlichen* Dimension, im Allgemeinen jedoch nicht in unendlich-dimensionalen normierten Vektorräumen.

Übung J4Q. (1) Erklären Sie die ℓ^p–Norm $|-|_p$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sowie vervollständigt auf $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Ist der Einheitsball $D = \{\, x \in \ell^p \mid |x|_p \le 1 \,\}$ kompakt?

(2) Sei $D = \{\, x \in \ell^2 \mid |x| \le 1 \,\}$ der Einheitsball in $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ mit ℓ^2-Norm $|-|$. Ist $f : D \to D : (x_0, x_1, \dots) \mapsto \big((1-|x|^2)^{1/2}, x_0, x_1, \dots\big)$ stetig? Welche Fixpunkte hat f? Gibt es eine stetige Retraktion $r : D \to S$ auf die Sphäre $S = \{\, x \in \ell^2 \mid |x| = 1 \,\}$?

(3) Was gilt für $D = \{\, x \in \ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R}) \mid |x| \le 1 \,\}$ mit $1 \le p < \infty$? und $p = \infty$?

✻ **J4Q.** (1) Nein, der Ball ist nicht kompakt: Die Standardbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ definiert eine Folge in $\ell^p(\mathbb{N})$ ohne konvergente Teilfolge: Für $m \neq n$ gilt $|e_m - e_n|_p = \sqrt[p]{2} \ge 1$ bzw. $|e_m - e_n|_\infty = 1$, also ist keine Teilfolge eine Cauchy–Folge, und somit auch nicht konvergent. Alternativ ist $D = \big(D \smallsetminus \{\, e_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}\big) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(e_n, 1)$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung.

(2a) Die Abbildung $f : D \to D$ ist wohldefiniert: Für $x \in D$ gilt $|f(x)| = 1 - |x|^2 + |x|^2 = 1$. Ihr Bild liegt also tatsächlich im Einheitsball D, wie behauptet, sogar in der Sphäre $S = \big\{ x \in \ell^2 \,\big|\, |x| = 1 \big\}$.

Die Abbildung f ist stetig: Wir zeigen Stetigkeit im Punkt $x \in \ell^2$. Für $y \in \ell^2$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|^2 &= \Big| \Big(\sqrt{1-|x|^2}, x_0, x_1, x_2, \dots\Big) - \Big(\sqrt{1-|y|^2}, y_0, y_1, y_2, \dots\Big) \Big|^2 \\ &= \Big(\sqrt{1-|x|^2} - \sqrt{1-|y|^2}\Big)^2 + |x-y|^2 \quad \to 0 \text{ für } y \to x. \end{aligned}$$

Genauer ist f sogar ein Homöomorphismus auf die Hemisphäre $S_+ = \big\{ (u, x_0, x_1, \dots) \in S \,\big|\, u \ge 0 \big\}$: Die Abbildung $g : S_+ \to D : (u, x_0, x_1, \dots) \mapsto (x_0, x_1, \dots)$ ist stetig und erfüllt $g \circ f = \mathrm{id}_D$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{S_+}$.

(2b) Ist $x \in D$ ein Fixpunkt von f, so folgt $x_0 = x_1 = x_2 = \dots$, das heißt, alle Koordinaten sind gleich. Die ℓ^2–Norm ist $|x| = \infty$, falls $x_0 \neq 0$ ist, daher bleibt nur $x_0 = 0$. Für $x = (0,0,0,\dots)$ gilt $f(x) = (1,0,0,\dots)$.

(2c) Ja, die Retraktionsformel aus Übung **??** gilt im Hilbert–Raum ℓ^2 wörtlich genauso.

(3) Allgemeiner betrachten wir auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ für $1 \le p < \infty$ die ℓ^p–Norm $|x|_p = (\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p)^{1/p}$. Die Vervollständigung von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ bezüglich $|x|_p$ ist der Banach–Raum $\ell^p(\mathbb{N}) = \{\, x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p < \infty \,\}$. Speziell für $p = 2$ ist dies zudem ein Hilbert–Raum: Die ℓ^2–Norm kommt vom Skalarprodukt.

Auf dem Einheitsball $D = \{\, x \in \ell^p \mid |x|_p \le 1 \,\}$ ist die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$f : D \to D : (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto \big((1 - |x|_p^p)^{1/p}, x_0, x_1, x_2, \dots\big)$$

Wörtlich genauso wie in (2) beweist man damit Stetigkeit, Fixpunktfreiheit und Retraktion.

Im Falle $p = \infty$ haben wir $|x|_\infty := \sup\big\{ |x_k| \,\big|\, k \in \mathbb{N} \big\}$. Unser voriges Argument versagt: Die Abbildung $f : D \to D : (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto \big(1 - |x|_\infty, x_0, x_1, x_2, \dots\big)$ hat einen Fixpunkt, nämlich $x = (1/2, 1/2, 1/2, \dots)$.

Übung J4R. (1) Ist $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, so folgt $\mathbb{D}^n \subset f(\mathbb{D}^n)$.
(2) Ist f injektiv, so gilt $f(\mathbb{D}^n) = \mathbb{D}^n$, und $f : \mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$ ist ein Homöomorphismus.
(3) Illustrieren Sie dies für $n = 1$ (Zwischenwertsatz) und $n = 2$ (Umlaufzahl).
(4) Trennt die Einheitssphäre $S \subset \ell^p$? Gilt wie in (1) der Zwischenwertsatz?

✻ **J4R.** (1) Für $y \in \mathbb{B}^n$ gilt $\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}} - y) = 1$, dank J4D also $y \in f(\mathbb{B}^n)$. (2) Da $\mathbb{B}^n$ zusammenhängend ist, nicht aber $\mathbb{R}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{B}^n \sqcup (\mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{D}^n)$, folgt $f(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{B}^n$, insgesamt also $f(\mathbb{D}^n) = \mathbb{D}^n$. Wir haben demnach eine stetige Bijektion $f : \mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$. Dank Kompaktheit ist sie ein Homöomorphismus (F1L).

(4) Der Raum ℓ^p wird durch die Einheitssphäre S in zwei Wegkomponenten getrennt dank der stetigen Abbildung $|-|^p : \ell^p \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ und dem Zwischenwertsatz in $\mathbb{R}$. Der Zwischenwertsatz wie in (1) gilt jedoch nicht für $f : D \to D$ stetig mit $f|_S = \mathrm{id}_S$, wie das Gegenbeispiel aus der vorigen Übung zeigt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J4j. Anwendung: Ein Satz von Frobenius. Als schöne Anwendung nenne ich:

☞ **Übung J4S.** Für Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $x \geq 0$ falls $x_1, \dots, x_n \geq 0$, ☜ und $x > 0$ falls $x_1, \dots, x_n > 0$. Entsprechend für Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir nutzen Taxi–Norm $\|x\| = |x_1| + \cdots + |x_n|$ und Standardsimplex $\Delta = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ \|x\| = 1 \}$.

(1) Zu $A \geq 0$ existiert ein Eigenvektor $v \in \Delta$: Es gilt $Av = \lambda v$ mit $\lambda \geq 0$.
Ist A stochastisch, also $A \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ für alle j, so folgt $Av = v$.

(2) Zu $A > 0$ stochastisch existiert genau ein Eigenvektor $v \in \Delta$, mit $v > 0$ und $Av = v$.
Für jeden Startvektor $x \in \Delta$ konvergiert $A^m x \to v$ gemäß $\|v - A^m x\| \leq q^m$.

Hinweis: Nutzen Sie die Fixpunktsätze von (1) Brouwer und (2) Banach. Aussage (2) ist die mathematische Grundlage des PageRank-Algorithmus der Suchmaschine Google.

✻ **J4S.** (1) Existiert $v \in \Delta$ mit $Av = 0$, so erfüllt v mit $\lambda = 0$ die Forderung. Andernfalls ist die Abbildung $f : \Delta \to \Delta$ mit $f(x) = Ax/\|Ax\|$ wohldefiniert und stetig. Wegen $\Delta \cong \mathbb{D}^{n-1}$ existiert nach J4H ein Fixpunkt $v \in \Delta$, also $f(v) = v$. Das bedeutet $Av = \lambda v$ mit $\lambda = \|Av\| > 0$. Aus $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ folgt $\|Av\| = 1$.

(2) Sei $c := \min\{a_{ij}\} > 0$, also $q := 1 - c < 1$. Dann ist $A : \Delta \to \Delta$ kontraktiv, denn $\|Ax - Ay\| \leq q\|x - y\|$. Dies rechnet man geduldig nach. Den Rest beschert uns der Fixpunktsatz von Banach (C4Q).

☞ **§J4k. Existenz von Nash–Gleichgewichten in der Spieltheorie.** Als Brouwer 1912 ☜ seine Arbeiten zum Abbildungsgrad veröffentlichte, war dieses neue Werkzeug zunächst ungewohnt und schwierig zu verstehen. Es gewann jedoch schnell Anerkennung dank seiner spektakulären Anwendungen. Der Fixpunktsatz J4H sichert unter sehr milden Voraussetzungen die Existenz von Lösungen, wie im obigen Beispiel J4S angedeutet. In Mikroökonomie und Spieltheorie wird dies genutzt, um die Existenz von Gleichgewichten zu beweisen. Die Arbeiten von John NASH, Kenneth ARROW und Gérard DEBREU hierzu in den 1950er Jahren wurden jeweils mit Nobelpreisen für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet.

Wir betrachten ein deterministisches Spiel mit n Spielern. Jedem Spieler $i = 1, \dots, n$ steht eine Menge S_i an Strategien zur Verfügung. Er darf seine Strategie $s_i \in S_i$ frei wählen. Als Gewinn erhält er die Auszahlung $g_i(s_1, \dots, s_n)$. Die Interaktion des Spiels besteht darin, dass die Auszahlung g_i für Spieler i von allen Strategien $s_1, \dots, s_n$ abhängt, also seiner eigenen und denen der anderen Spieler. Die Wahlen werden unabhängig voneinander getroffen. Das Spiel wird also beschrieben durch die Abbildung $g : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$.

Jeder Spieler versucht, seine Auszahlung $g_i(s_1, \dots, s_n)$ zu maximieren. Er kann jedoch nur seine eigene Strategie direkt beeinflussen. Zur Analyse solcher Situationen entwickelte John NASH ein elementares aber ungemein erfolgreiches Lösungskonzept:

Definition J4T. Ein *Spiel* wird modelliert durch eine Abbildung $g : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$. Ein Strategiebündel $(s_1^*, \dots, s_n^*) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ heißt *Nash–Gleichgewicht*, wenn für jeden Spieler $i = 1, \dots, n$ und jede alternative Strategie $s_i \in S_i$ folgende Ungleichung gilt:

$$g_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \leq g_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*).$$

Die Strategien $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ sind demnach gegenseitig beste Antworten: In einem Nash–Gleichgewicht lohnt es sich für keinen Spieler, einseitig von seiner gewählten Strategie s_i^* abzuweichen. Er ist daher auch im Nachhinein mit seiner Strategiewahl einverstanden. Solche Gleichgewichte dienen zum Verständnis nicht-kooperativer Spiele: Jeder sucht für sich die beste Aktion unter Berücksichtigung der Aktionen aller anderen.

A \ B	Schweigen	Gestehen
Schweigen	-1 / -1	0 / -5
Gestehen	-5 / 0	-4 / -4

Beispiel (Gefangenendilemma)**.** Zwei Gefangene, Alice und Bob, werden einer Straftat beschuldigt. Als Höchststrafe drohen 5 Jahre Haft. Schweigen beide, so können sie nur wegen kleinerer Delikte belangt werden, und jeder verbüßt 1 Jahr Haft. Gestehen beide, so verbüßt jeder 4 Jahre Haft. Gesteht jedoch nur einer, so kommt dieser als Kronzeuge frei, während der andere die Höchststrafe von 5 Jahren bekommt. Die Situation ist in der Tabelle zusammengefasst. Hier ist (gestehen,gestehen) das einzige Nash–Gleichgewicht.

A \ B	Bach	Strawinsky
Bach	2 / 1	0 / 0
Strawinsky	0 / 0	1 / 2

Beispiel (Bach oder Strawinsky, ehemals *Battle of Sexes*)**.** Alice und Bob planen einen Opernabend. Alice mag Bach aber noch lieber Strawinsky, für Bob ist es umgekehrt. Wenn sie sich nicht einigen, dann fällt der Opernabend aus, was beiden missfallen würde. Hier gibt es genau zwei Nash–Gleichgewichte, nämlich (Bach,Bach) und (Strawinsky,Strawinsky).

A \ B	Schere	Stein	Papier
Schere	0 / 0	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Stein	-1 / $+1$	0 / 0	$+1$ / -1
Papier	$+1$ / -1	-1 / $+1$	0 / 0

Beispiel. Bei dem Kinderspiel „Schere-Stein-Papier“ gelten Sieg $(+1)$ und Niederlage (-1) wie in obiger Tabelle angegeben. In diesem Modell gibt es kein Nash–Gleichgewicht.

Aus eigener Spielerfahrung wissen Sie, was stattdessen passiert: Jeder Spieler kann und wird *zufällig* eine Strategie $s_i \in S_i$ wählen, etwa $s = \frac{1}{3}\text{Schere} + \frac{1}{3}\text{Stein} + \frac{1}{3}\text{Papier}$. Im erweiterten Raum dieser *randomisierten Strategien* ist (s,s) ein Gleichgewicht. (Übung!)

Um dies zu beschreiben, erweitern wir unser Modell: Der Spieler i wählt nun nicht mehr eine einzelne Strategie $s_i \in S_i$, sondern eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mu_i : S_i \to [0,1]$ mit $\sum_{s_i \in S_i} \mu_i(s_i) = 1$. Dies beinhaltet den deterministischen Fall einer *reinen Strategie* $s_i \in S_i$, bei der sich μ_i auf einen einzelnen Punkt $s_i \in S_i$ konzentriert, also $\mu_i(s_i) = 1$ und $\mu_i(s) = 0$ für $s \neq s_i$. Bei einer *gemischten Strategie* darf μ_i nun verteilt sein.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Wir nehmen an, dass die Menge S_i der *reinen Strategien* endlich ist. Die Menge der *randomisierten Strategien* $\mu_i : S_i \to [0,1]$ ist dann der Standardsimplex $\bar{S}_i := [S_i] \subset \mathbb{R}^{S_i}$. Wir schreiben hierfür kurz $\mu_i = \sum_{s_i \in S_i} \mu_i(s_i) s_i$. Der Gewinn ist nun der Erwartungswert, wobei wir die Randomisierungen als unabhängig annehmen: Unsere Auszahlungsfunktion $g : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ setzen wir affin fort zu $\bar{g} : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ vermöge

$$\bar{g}\Big(\sum_{s_1 \in S_1} \mu_1(s_1) s_1, \dots, \sum_{s_n \in S_n} \mu_n(s_n) s_n \Big) = \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_n \in S_n} \mu_1(s_1) \cdots \mu_n(s_n) g(s_1, \dots, s_n).$$

Damit können wir nun Nashs berühmten Satz formulieren und beweisen:

Satz J4U. *Sei $g : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel und $\bar{g} : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Dann besitzt $\bar{g}$ ein Nash–Gleichgewicht.*

BEWEIS. Wir konstruieren wie folgt die *Nash–Funktion*

$$f \,:\, \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \,:\, s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto \check{s} = (\check{s}_1, \dots, \check{s}_n).$$

Zu $x \in \mathbb{R}$ sei x^+ der Positivteil, also $x^+ = x$ für $x \geq 0$ und $x^+ = 0$ für $x < 0$.
Zum gegebenen Strategievektor $s = (s_1, \dots, s_n)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$\bar{g}_i^s \,:\, \bar{S}_i \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \bar{g}_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n) \quad \text{und weiter}$$

$$S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}, \quad s_i = \sum\nolimits_k p_i^k s_i^k, \quad \delta_i^k := \big[\bar{g}_i^s(s_i^k) - \bar{g}_i^s(s_i)\big]^+,$$

$$\check{s}_i := \sum\nolimits_k \check{p}_i^k s_i^k \text{ mit } \check{p}_i^k := \frac{p_i^k + \delta_i^k}{1 + \sum_j \delta_i^j}, \quad \text{also } \check{p}_i^k \geq 0 \text{ und } \sum\nolimits_k \check{p}_i^k = 1.$$

Die Funktion f ist stetig. Dank Brouwer J4H existiert ein Fixpunkt $s = f(s)$. □

Bemerkung. Dieser geniale Beweis ist in wenigen Zeilen hingeschrieben, so gesehen leicht, doch extrem raffiniert. Wenn Sie länger darüber nachdenken, werden Sie ihn schließlich recht natürlich finden: Die Nash–Funktion $f : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n$ optimiert durch *Trial and Error*. Brouwers Fixpunktsatz garantiert die Existenz eines Gleichgewichts.

Lemma J4V. *Die Nash–Gleichgewichte des Spiels $\bar{g} : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ sind genau die Fixpunkte der Nash–Funktion $f : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n$.*

BEWEIS. „⇒“ Jedes Gleichgewicht s von $\bar{g}$ ist ein Fixpunkt von f nach Konstruktion. „⇐“ Jeder Fixpunkt $s = f(s)$ ist ein Gleichgewicht, $\bar{g}_i^s(s_i) = \max \bar{g}_i^s$: Für $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k$ gilt $\bar{g}_i^s(s_i) = \sum_k p_i^k \bar{g}_i^s(s_i^k)$ nach Definition von $\bar{g}$. Es gibt einen Index k mit $p_i^k > 0$ und $\bar{g}_i^s(s_i^k) \leq \bar{g}_i^s(s_i)$, somit $\delta_i^k = 0$. Aus $\check{p}_i^k = p_i^k$ folgt $\delta_i^j = 0$ für alle $j = 0, 1, \dots, \ell$, also $\bar{g}_i^s(s_i^j) \leq \bar{g}_i^s(s_i)$. Somit gilt $\bar{g}_i^s(s_i) = \max \bar{g}_i^s$; jede Strategie s_i ist eine beste Antwort. □

Bemerkung. Der Mathematiker John von NEUMANN und der Wirtschaftswissenschaftler Oskar MORGENSTERN veröffentlichten 1944 ihr Buch *Theory of Games and Economic Behavior*. Damit legten sie das Fundament der Spieltheorie, insbesondere für den Spezialfall der Nullsummenspiele aufbauend auf von Neumanns Min-Max-Theorem.

Definition und Existenz von Gleichgewichten stammen aus Nashs Dissertation *Non-cooperative Games* von 1950. Dieses Konzept geht weit über Nullsummenspiele hinaus und ist bis heute grundlegend für die Spieltheorie in ihren zahlreichen Weiterentwicklungen. Hierfür wurde Nash 1994 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet.

§J5. Der Satz vom Igel und Vektorfelder auf Sphären

Definition J5A. Ein tangentiales *Vektorfeld* auf der Sphäre $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid x \rangle = 1\}$ ist eine stetige Abbildung $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle x \mid v(x) \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$.

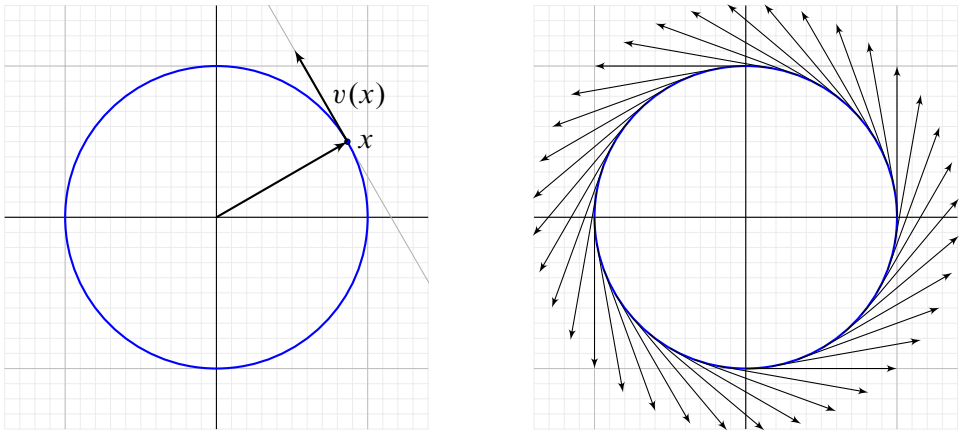


ABBILDUNG J:33. Vektorfelder auf Sphären, hier für $\mathbb{S}^1$ skizziert

Satz J5B (Satz vom gekämmten Igel)**.** *Für tangentiale Vektorfelder auf Sphären gilt:*

(1) Ist n ungerade, so existieren nirgends verschwindende Vektorfelder v auf $\mathbb{S}^n$.
(2) Ist n gerade, so hat jedes Vektorfeld v auf $\mathbb{S}^n$ mindestens eine Nullstelle.

BEWEIS. (1) Sei $n = 2m-1$ ungerade, $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wir definieren $v : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ durch

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_{2m-1}, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

Die Einschränkung $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist ein tangentiales Vektorfeld, denn $\langle x \mid v(x) \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$, und verschwindet nirgends. Abbildung J:33 zeigt den Fall $m = 1$.

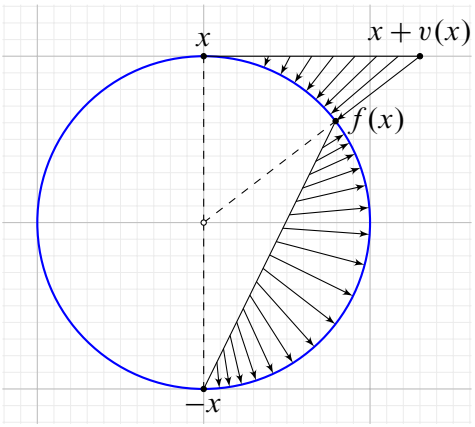


ABBILDUNG J:34. Versuch, einen Igel zu kämmen. *Don't try this at home!*

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

(2) Jedes tangentiale Vektorfeld $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiert eine Homotopie

$$H \,:\, [0,1]\times\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \,:\, H(t,x) = \frac{x+tv(x)}{|x+tv(x)|}, \qquad H : \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq f.$$

Wegen $\langle x \mid v(x)\rangle = 0$ gilt $\langle x \mid x+tv(x)\rangle = \langle x \mid x\rangle = 1$, also $x+tv(x) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit ist H wohldefiniert und stetig, also eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ zu $H_1 = f$, wobei $f(x) = [x+v(x)]/|x+v(x)|$. Aus $v(x) \neq 0$ folgt $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$.

Wir erhalten (wie in G4C) eine zweite Homotopie

$$K \,:\, [0,1]\times\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \,:\, K(t,x) = \frac{(1-t)f(x)-tx}{|(1-t)f(x)-tx|}, \qquad K : f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}.$$

Der Nenner verschwindet genau für $t = 1/2$ und $f(x) = x$, was wir nach Voraussetzung ausgeschlossen haben, also ist K wohldefiniert und stetig mit $K_0 = f$ und $K_1 = -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.

Aus $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ folgt $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = \deg(-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$ dank J3E. Das ist nur für ungerades n möglich. Für gerades n muss v mindestens eine Nullstelle haben. □

ALTERNATIVER BEWEIS FÜR (2). Hat das Vektorfeld $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ keine Nullstelle, so ist $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto v(x)/|v(x)|$ wohldefiniert und stetig. Für jedes $x \in \mathbb{S}^n$ gilt dann $0 = \langle x \mid v(x)\rangle = \langle x \mid g(x)\rangle$, also $g(x) \neq \pm x$. Dank G4C gilt $g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ und $g \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$. Hieraus folgt $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = \deg(-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$ dank J3E, also n ungerade. □

Der Fall $n = 2$ wurde bereits 1881 von Henri POINCARÉ bewiesen, der allgemeine Fall 1912 von Luitzen BROUWER mit Hilfe des von ihm entwickelten Abbildungsgrades.

Tangentiale Vektorfelder sind auf jeder glatten Mannigfaltigkeit M interessant, zum Beispiel auf Flächen (§A4): Auf dem Torus $F_1^+ = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ existieren Vektorfelder ohne Nullstellen, auf der Sphäre $F_0^+ = \mathbb{S}^2$ und der Fläche F_2^+ vom Geschlecht 2 hingegen nicht. Der folgende Satz von Poincaré–Hopf klärt dieses Problem vollständig und elegant auf:

☞ **Satz J5C.** *Eine zusammenhängende geschlossene glatte Mannigfaltigkeit M erlaubt genau dann ein tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen, wenn $\chi(M) = 0$ gilt.* □ ☜

Dies beweist man in der algebraischen Topologie mit dem Fixpunktsatz von Lefschetz. Wegen $\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n$ beinhaltet J5C den Satz vom Igel (J5B) als Spezialfall.

☞ **Übung J5D.** (1) Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig und n gerade, so existiert $a \in \mathbb{S}^n$ mit $f(a) \in \{\pm a\}$. ☜

(2) Anders als $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ trägt $\mathbb{S}^{2n}$ für $n \geq 1$ nicht die Struktur einer topologischen Gruppe. (Élie CARTAN bewies 1936, dass von allen Sphären nur $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ Gruppen sind.)

✻ **J5D.** (1) Gilt $f(x) \neq \mp x$ für jedes $x \in \mathbb{S}^n$, so ist $H(t,x) = [(1-t)f(x) \pm tx]/|(1-t)f(x) \pm tx|$ eine Homotopie $H : f \simeq \pm\mathrm{id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Nach J3E gilt $\deg(f) = \deg(\pm\mathrm{id}) = (\pm 1)^{n+1}$, also n ungerade.

(2) Wir wissen bereits, dass die drei Sphären $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^\times$ und $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^\times$ und $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}^\times$ Gruppen sind. *Fun(damental) fact:* Es gilt $\mathbb{S}^0 = \mathrm{O}_1\,\mathbb{R}$ und $\mathbb{S}^1 = \mathrm{U}_1\,\mathbb{C} \cong \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ und $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}_2\,\mathbb{C}$, siehe F1Q.

Wir zeigen nun, dass $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^6$, … keine topologischen Gruppen sein können. Wir zeigen: Ist $(\mathbb{S}^n, \cdot, e)$ mit $n \geq 1$ eine topologische Gruppe, so ist n ungerade. Wir wählen einen Punkt $a \in \mathbb{S}^n$ mit $a \neq e$, etwa den Antipodenpunkt $a = -e$. Sei $\lambda_a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto a \cdot x$ die Linksmultiplikation mit a. Wir konstruieren eine Homotopie $H : \lambda_a \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$: Wegen $n \geq 1$ existiert ein Weg $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ von $\alpha(0) = a$ nach $\alpha(1) = e$ (G2B). Somit ist $H : [0,1]\times\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (t,x) \mapsto (\alpha(t),x) \mapsto \alpha(t)\cdot x$ stetig mit $H_0 = \lambda_a$ und $H_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$. Hieraus folgt $\deg(\lambda_a) = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$ (J3A). Andererseits hat λ_a keine Fixpunkte, denn $a \cdot x = x$ für ein $x \in \mathbb{S}^n$ impliziert $a = e$. Hieraus folgt $K : \lambda_a \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ vermöge $K(t,x) = [(1-t)\lambda_a(x) - tx]/|(1-t)\lambda_a(x) - tx|$. Nach J3E gilt $\deg(\lambda_a) = \deg(-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$, also muss n ungerade sein.

§J5a. Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n$. Tangentialvektoren sind ein wichtiges Konzept in der Analysis, Geometrie und Physik, daher stelle ich diesen Begriff etwas ausführlicher vor:

Definition J5E. Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ ist der *Tangentialraum* an $\mathbb{S}^n$ gegeben durch

$$T_x\mathbb{S}^n = \big\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \;\big|\; \langle x \mid v \rangle = 0 \big\}.$$

Dies ist ein Vektorraum der Dimension n; in $T_x\mathbb{S}^n$ können wir Vektoren addieren und mit Skalaren multiplizieren. Geometrisch stellt man sich jeden Tangentialvektor $v \in T_x\mathbb{S}^n$ als im Punkte x angeheftet vor, wie in Abbildung J:33 skizziert. Es hat hier keinen Sinn, Tangentialvektoren zu verschiedenen Basispunkten addieren zu wollen: Für verschiedene Punkte $x \neq x'$ sind die Tangentialräume $T_x\mathbb{S}^n$ und $T_{x'}\mathbb{S}^n$ getrennt zu behandeln.

Um die Tangentialräume $T_x\mathbb{S}^n$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ dennoch zu einem gemeinsamen Objekt zusammenzufassen, definieren wir das *Tangentialbündel* wie folgt: Der Totalraum

$$T\mathbb{S}^n = \big\{ (x,v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \;\big|\; \langle x \mid v \rangle = 0 \big\} = \bigcup_{x \in \mathbb{S}^n} \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$$

ist die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume. Diesem Raum geben wir die Teilraumtopologie von $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, wobei letzterer die Produkttopologie trägt. Die *Bündelprojektion* $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (x,v) \mapsto x$ ist dann stetig.

Bemerkung. Der Totalraum $T\mathbb{S}^n$ ist kein Vektorraum: Zwar ist jede Faser $T_x\mathbb{S}^n = p^{-1}(x)$ ein Vektorraum, aber Tangentialvektoren zu verschiedenen Basispunkten können nicht addiert werden. Dank der präzisen Sprech- und Schreibweise besteht keine Verwechslungsgefahr zwischen dem Tangentialraum $T_x\mathbb{S}^n$ und dem Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.

Bemerkung. Nach Konstruktion ist $T\mathbb{S}^n$ einerseits ein topologischer Raum und andererseits die disjunkte Vereinigung der Vektorräume $T_x\mathbb{S}^n$. Man stellt sich diese als eine kontinuierliche Familie von Vektorräumen vor, parametrisiert durch den Fußpunkt $x \in \mathbb{S}^n$.

§J5b. Schnitte. Wie gesehen ist ein Vektorfeld auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung $s : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$, die jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ auf der Sphäre einen Vektor $s(x) \in T_x\mathbb{S}^n$ des entsprechenden Tangentialraums zuordnet. Dies formulieren wir prägnant wie folgt:

Definition J5F. Ein (tangentiales) *Vektorfeld* auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist eine stetige Abbildung $s : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$, also ein Schnitt des Tangentialbündels $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.

Ausführlich ist ein Vektorfeld $s : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung mit $s(x) = (x, v(x))$, mit $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, sodass $\langle x \mid v(x) \rangle = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Wir sagen $x \in \mathbb{S}^n$ sei eine *Nullstelle* von v, oder v *verschwindet* in x, wenn $v(x) = 0$ gilt.

Beispiel. Ein banales Beispiel ist der Nullschnitt $s(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$.

Wir interessieren uns besonders für Vektorfelder, die nirgends verschwinden. Hierzu betrachten wir das punktierte Tangentialbündel $p' : T'\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ durch Einschränkung auf

$$T'\mathbb{S}^n = \big\{ (x,v) \in T\mathbb{S}^n \;\big|\; v \neq 0 \big\}.$$

Ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist dann ein Schnitt des Bündels p', also eine stetige Abbildung $s : \mathbb{S}^n \to T'\mathbb{S}^n$ mit $p' \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$. Existiert solch ein

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

nirgends verschwindendes Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$? Auf diese grundlegende Frage gibt der obige Satz vom Igel (J5B) eine vollständige Antwort: Ja für n ungerade, nein für n gerade.

§J5c. Bündel. Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist das erste und zentrale Beispiel einer wunderbaren Theorie. In der Differentialgeometrie konstruiert man zu jeder glatten Mannigfaltigkeit M das Tangentialbündel $p : TM \to M$. Hieraus ergeben sich weitere Bündel über M. Auch in der Topologie sind Bündel allgegenwärtig und wichtig.

Ein *Bündel* ist zunächst nichts weiter als eine stetige Abbildung $p : E \to B$. Wir nennen B den *Basisraum* und E den *Totalraum* des Bündels sowie $p : E \to B$ die *Bündelprojektion*. Für $x \in B$ heißt $F_x = p^{-1}(x)$ die *Faser* des Bündels über dem Punkt x. Anschaulich denkt man sich ein Bündel $p : E \to B$ als Vereinigung der Fasern F_x über allen $x \in B$, als eine kontinuierliche Familie von Räumen F_x parametrisiert durch den Fußpunkt $x \in B$.

Einfachstes Modell ist ein *Produktbündel* aus einem Produktraum $E = B \times F$ mit Faser F und der Projektion $q : E \to B : (x, y) \mapsto x$. Ein Bündel $p : E \to B$ heißt *trivial*, wenn es bündelisomorph ist zu einem Produktbündel, das heißt, wenn ein Homöomorphismus $\tau : B \times F \xrightarrow{\sim} E$ mit $p \circ \tau(x, y) = x$ existiert, genannt *Trivialisierung* des Bündels p.

Beispiel J5G. Über jedem Teilraum $U = \mathbb{S}^n \smallsetminus \{x_0\}$ ist das Tangentialbündel TU trivial. Nach dem Satz vom Igel ist für n gerade das gesamte Bündel $T\mathbb{S}^n$ jedoch nicht trivial.

Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{S}^n$ ist hierbei $TU = \{ (x, v) \in U \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid v \rangle = 0 \}$ und $p : TU \to U : (x, v) \mapsto x$ das auf U eingeschränkte Tangentialbündel.

BEWEIS. Wir nutzen die stereographische Projektion (A1L). Nach Drehung können wir $x_0 = (0, \dots, 0, 1)$ annehmen. Dann gilt $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{x_0\} \cong \mathbb{R}^n$ vermöge des Homöomorphismus $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \smallsetminus \{x_0\}$ mit $g(y_1, \dots, y_n) = (2y_1, \dots, 2y_n, |y|^2 - 1)/(|y|^2 + 1)$. Dieser ist stetig differenzierbar. Die Ableitung in $y \in \mathbb{R}^n$ ist eine lineare Abbildung $g'(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Sie hat als Bild den gesamten Tangentialraum $T_x\mathbb{S}^n$ des Bildpunktes $x = g(y)$. Wir erhalten mit $\tau : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} TU : (y, v) \mapsto (y, g'(y)v)$ die gewünschte Trivialisierung. □

Lokale Trivialität ist eine günstige Eigenschaft und meist gegeben, hingegen ist globale Trivialität meist zu viel verlangt. Wir betrachten daher *lokal triviale* Bündel $p : E \to B$:

Definition J5H (Faserbündel)**.** Seien E, B, F topologische Räume.

(0) Ein *Bündel* ist eine stetige Abbildung $p : E \to B$. Wir nennen B den *Basisraum* und E den *Totalraum* des Bündels sowie $p : E \to B$ die *Bündelprojektion*.
(1) Ein Bündel $p : E \to B$ ist *trivial* über $U \subset B$ mit Faser F, wenn ein Homöomorphismus $\tau : U \times F \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$ mit $p \circ \tau(x, y) = x$ existiert.
(2) Ein Bündel $p : E \to B$ heißt *lokal trivial*, wenn eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ mit Trivialisierungen $\tau_i : U_i \times F_i \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U_i)$ existiert (Bündelatlas).
(3) Ein Bündel $p : E \to B$ heißt *Faserbündel* mit Faser F, wenn ein Bündelatlas $(\tau_i)_{i \in I}$ existiert, also Trivialisierungen $\tau_i : U_i \times F \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U_i)$ über $B = \bigcup_{i \in I} U_i$.
(4) Bei einem *glatten Bündel* sind E, B, F glatte Mannigfaltigkeiten (§K1), $p : E \to B$ eine glatte Abbildung und alle Trivialisierungen τ_i Diffeomorphismen.
(5) Bei einem $\mathbb{R}$*–Vektorraumbündel* $p : E \to B$ tragen $F = \mathbb{R}^n$ und jede Faser $F_x = p^{-1}(x)$ die Struktur eines $\mathbb{R}$–Vektorraumes, und jede Trivialisierung τ_i ist auf der Faser über jedem Punkt $x \in U_i$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraumisomorphismus $\{x\} \times F \xrightarrow{\sim} F_x$.

Beispiel. Triviale Beispiele sind die Produktbündel $p : B \times F \to B : (x, y) \mapsto x$.

Beispiel J5I. Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist ein glattes Vektorraumbündel (J5G).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J5d. Getwistete Produkte. Bündel über dem Basisraum $B = \mathbb{S}^1$ mit Faser F erhalten wir wie folgt: Gegeben sei $\alpha : F \xrightarrow{\sim} F$, ein beliebiger Homöomorphismus. Wir erhalten $h : \mathbb{R} \times F \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times F : (x, y) \mapsto (x + 1, \alpha(y))$. Die Operation $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \times F$ definieren wir durch $k \bullet (x, y) := h^k(x, y) = (x + k, \alpha^k(y))$. Wir definieren den topologischen Raum $\mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} F := (\mathbb{R} \times F)/\sim$ durch die Identifikation $(x, y) \sim (x + k, \alpha^k(y))$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $y \in F$ und $k \in \mathbb{Z}$. Hierauf ist die Abbildung $p : \mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} F \to \mathbb{S}^1 : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$ wohldefiniert und stetig. Wir nennen dies das *getwistete Produkt* über $\mathbb{S}^1$ mit *Twist* α.

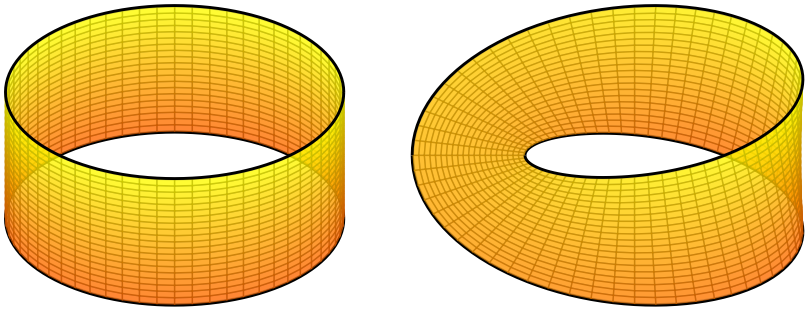


ABBILDUNG J:35. Triviales Produkt und getwistetes Produkt

Übung J5J. Die Abbildung $p : \mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} F \to \mathbb{S}^1$ ist lokal trivial mit Faser F über $U = \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{s\}$ für jeden Punkt $s \in \mathbb{S}^1$. Zudem ist p ein glattes Faserbündel, wenn F eine glatte Mannigfaltigkeit und $\alpha : F \xrightarrow{\sim} F$ ein Diffeomorphismus ist. Ebenso ist p ein Vektorraumbündel, wenn F ein Vektorraum und $\alpha : F \xrightarrow{\sim} F$ ein linearer Isomorphismus ist.

Erste konkrete Beispiele:

- Für die Faser $F = \mathbb{R}$ und den Twist $\alpha = +\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ erhalten wir den Zylinder.
- Für die Faser $F = \mathbb{R}$ und den Twist $\alpha = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ erhalten wir das Möbius–Band.
- Für die Faser $F = \mathbb{S}^1$ und den Twist $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ erhalten wir den Torus.
- Für die Faser $F = \mathbb{S}^1$ und den Twist $\alpha = \mathrm{conj}$ erhalten wir die Kleinsche Flasche.

Zylinder und Möbius–Band sind dank dieser Konstruktion sogar Vektorraumbündel. Der Zylinder ist trivial über ganz $\mathbb{S}^1$. Das Möbius–Band hingegen ist nur lokal trivial.

Bemerkung. Auch allgemein wollen wir uns ein Faserbündel $F \to E \to B$ als ein getwistetes Produkt $E = B \ltimes F$ vorstellen: Lokal ist das Bündel trivial, aber global werden diese Stücke nicht-trivial verklebt. Der Twist kann hierbei noch sehr viel komplizierter ausfallen, als das einfachste Beispiel $B = \mathbb{S}^1$ vorerst erahnen lässt.

Bemerkung. Bündel sind faszinierende Objekte und ein mächtiges Werkzeug: Man kann einen topologischen Raum B studieren durch die Bündel über B. Ein wichtiger Spezialfall sind Überlagerungen (Kapitel M). Dies sind gerade die lokal trivialen Bündel $p : E \to B$ mit diskreter Faser F. Dieser Fall ist eng mit der Fundamentalgruppe verwoben (Kapitel L). Zwischen Fundamentalgruppe $\pi_1(B, b_0)$ und Überlagerungen $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ besteht eine wunderschöne Dualität, die Galois–Korrespondenz. Dies setzt sich für die höheren Homotopiegruppen π_n fort zur langen exakten Homotopiesequenz von Faserbündeln.

§J5e. Parallelisierungen. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt die Sphäre $\mathbb{S}^n$ *parallelisierbar*, wenn es Vektorfelder $s_1, \dots, s_n : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ gibt, sodass $s_1(x), \dots, s_n(x) \in T_x\mathbb{S}^n$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ eine Basis des Tangentialraums $T_x\mathbb{S}^n$ bilden. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{S}^n$ parallelisierbar?

Beispiel. Für $n = 0$ ist $T_x\mathbb{S}^0 = \{0\}$, also ist die leere Familie eine Basis.

Beispiel. Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ wird parallelisiert durch unser Vektorfeld $s(x) = (x, v(x))$ mit $v(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Geometrisch betrachtet ist dies eine Rotation um eine Vierteldrehung; algebraisch entspricht dies der Multiplikation mit i in $\mathbb{C}$. Ebenso wird $\mathbb{S}^1$ parallelisiert durch jedes Vektorfeld $\tilde{s}(x) = (x, g(x)v(x))$ mit $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^*$.

Beispiel. Die Sphäre $\mathbb{S}^2$ ist nicht parallelisierbar: Der Satz vom Igel besagt, dass kein nirgends verschwindendes Vektorfeld existiert. Gleiches gilt für $\mathbb{S}^{2m}$ für alle $m \geq 1$.

Beispiel. Die Sphäre $\mathbb{S}^3$ ist parallelisierbar durch s_1, s_2, s_3 mit $s_\ell(x) = (x, v_\ell(x))$ und

$$\begin{aligned} v_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3),\\ v_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (-x_3, x_4, x_1, -x_2),\\ v_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1). \end{aligned}$$

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

Diese schöne Konstruktion entspringt den Quaternionen $\mathbb{H}$ (B4G). Wir identifizieren hierzu $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$ vermöge $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 e + x_2 i + x_3 j + x_4 k$. Die Multiplikation, gegeben durch obige Multiplikationstafel, ist assoziativ und nullteilerfrei. Die orthogonalen Vektorfelder v_1, v_2, v_3 entsprechen der Linksmultiplikation mit i, j, k.

Beispiel. Die Sphäre $\mathbb{S}^5$ ist nicht parallelisierbar, aber dies ist keineswegs offensichtlich.

Beispiel. Die Sphäre $\mathbb{S}^7$ ist parallelisierbar durch $s_\ell(x) = (x, v_\ell(x))$ mit

$$\begin{aligned} v_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5, -x_8, x_7),\\ v_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_3, x_4, x_1, -x_2, -x_7, -x_8, x_5, x_6),\\ v_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1, -x_8, x_7, -x_6, x_5),\\ v_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_5, x_6, x_7, x_8, x_1, -x_2, -x_3, -x_4),\\ v_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_6, -x_5, x_8, -x_7, x_2, x_1, x_4, -x_3),\\ v_7(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_7, -x_8, -x_5, x_6, x_3, -x_4, x_1, x_2),\\ v_8(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_8, x_7, -x_6, -x_5, x_4, x_3, -x_2, x_1). \end{aligned}$$

Diese trickreiche Konstruktion entspringt den Oktaven $\mathbb{O}$ (B4H). Wir identifizieren $\mathbb{R}^8 \xrightarrow{\sim} \mathbb{O}$ vermöge $(x_1, \dots, x_8) \mapsto x_1 e_1 + \cdots + x_8 e_8$. Die Multiplikation ist dann gegeben durch die dort gegebene Multiplikationstafel; sie ist nicht-assoziativ, aber nullteilerfrei. Die orthogonalen Vektorfelder $v_2, \dots, v_8$ entsprechen der Linksmultiplikation mit $e_2, \dots, e_8$.

Übung J5K. Weisen Sie nach, dass die Sphären $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ durch die angegebenen Vektorfelder tatsächlich parallelisiert werden. Nutzen Sie, dass $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ nullteilerfrei sind.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J5f. Welche Sphären sind parallelisierbar? Wir kennen nun die Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ und konnten diese für $n = 0, 1, 3, 7$ explizit parallelisieren.

Dies führt uns zu der Frage, welche Sphären parallelisierbar sind, über die klassischen Beispiele $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ hinaus. Heinz HOPF zeigte 1940 mit Hilfe der Kohomologie der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$, dass die Parallelisierbarkeit von $\mathbb{S}^n$ höchstens in Dimension $n = 2^k - 1$ möglich ist. Dies war ein erster großer Erfolg, der die meisten Fälle negativ beantwortete. Eine explizite Konstruktion in den verbleibenden Fällen $n = 15, 31, 63, \ldots$, analog zur obigen für $n = 0, 1, 3, 7$, gelang jedoch nicht.

Die abschließende Antwort wurde 1958 von Michel KERVAIRE und von John MILNOR gefunden und benutzte den kurz zuvor bewiesenen Periodizitätssatz von Raoul BOTT:

Satz J5L (Bott–Milnor, Kervaire)**.** *Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist nur für $n = 1, 2, 4, 8$ parallelisierbar. Eine reelle Divisionsalgebra auf $\mathbb{R}^n$ gibt es nur in den Dimensionen $n = 1, 2, 4, 8$.* □

Für eine schöne Darstellung verweise ich auf das Buch *Zahlen* von Heinz-Dieter Ebbinghaus *et al*. Das Kapitel „Divisionsalgebren und Topologie“ von Friedrich Hirzebruch stellt die mathematischen Grundideen und ihre historische Entwicklung dar.

§J5g. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektorfelder. Allgemeiner als die Parallelisierbarkeit stellt sich die Frage: Wie viele Vektorfelder $s_1, \ldots, s_k : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ sind möglich, sodass $s_1(x), \ldots, s_k(x) \in T_x\mathbb{S}^n$ linear unabhängig sind in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$? Da jeder Tangentialraum $T_x\mathbb{S}^n$ Dimension n hat, gilt $0 \le k \le n$. Im Falle $k = n$ erhalten wir in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ eine Basis $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ von $T_x\mathbb{S}^n$, und $\mathbb{S}^n$ ist parallelisierbar. Durch explizite Konstruktion konnten Johann RADON 1922 und Adolf HURWITZ 1923 zeigen:

Satz J5M (Radon, Hurwitz)**.** *Sei $n = u2^{4a+b}$ mit $u \in 2\mathbb{N}+1$ sowie $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann existieren mindestens $8a + 2^b - 1$ linear unabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$.* □

Für ungerade n gilt $u = n$ und $a = b = 0$ und so ergibt sich hier die Zahl 0. Dies entspricht dem Satz vom Igel, denn auf $\mathbb{S}^{n-1}$ hat jedes Vektorfeld eine Nullstelle. Für gerade n ergeben sich folgende Werte, die die Parallelisierbarkeit von $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ beinhalten:

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
u	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	11	3	13	7	15	1
a	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
b	1	2	1	3	1	2	1	0	1	2	2	3	1	2	1	1
$8a + 2^b - 1$	1	3	1	7	1	3	1	8	1	3	1	7	1	3	1	9

Auch hier blieb die Frage, ob man diese Werte verbessern kann, lange unbeantwortet. Dass dies in der Tat unmöglich ist, wurde schließlich 1962 von Frank ADAMS bewiesen:

Satz J5N (Adams)**.** *Sei $n = u2^{4a+b}$ mit $u \in 2\mathbb{N}+1$ sowie $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann existieren höchstens $8a + 2^b - 1$ linear unabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$.* □

§J6. Der Satz von Borsuk–Ulam und Anwendungen

§J6a. Ungerade Abbildungen. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ oder $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ heißt *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x, und *gerade*, falls $f(-x) = +f(x)$ für alle x.

Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir wie zuvor $\varphi_k^1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^k$.

(0) Ist k gerade, so ist φ_k^1 gerade: $\varphi_k^1(-z) = \varphi_k^1(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$.
(1) Ist k ungerade, so ist φ_k^1 ungerade: $\varphi_k^1(-z) = -\varphi_k^1(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$.

Dies setzen wir für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ fort zu $\varphi_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\varphi_k(r\cos(t), r\sin(t), x_2, \dots, x_n) = (r\cos(kt), r\sin(kt), x_2, \dots, x_n).$$

Es gilt $|\varphi_k(x)| = |x|$, durch Einschränkung erhalten wir $\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.

(0) Ist k gerade und $n \geq 2$, so ist die Modellabbildung φ_k^n weder gerade noch ungerade.
(1) Ist k ungerade, so ist φ_k^n ungerade: $\varphi_k^n(-x) = -\varphi_k^n(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$.

Der Satz von Borsuk–Ulam besagt, dass folgende bemerkenswerte Umkehrung gilt:

Satz J6A (Borsuk–Ulam)**.** *Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig.*

(0) Ist f gerade, $f(-x) = +f(x)$, dann ist $\deg(f)$ *gerade, eventuell* 0 *und $f \simeq *$.*
(1) Ist f ungerade, $f(-x) = -f(x)$, dann ist $\deg(f)$ *ungerade, somit $f \not\simeq *$.*

Bemerkung. Der Fall $n = 0$ ist klar: Hier gilt $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$, und $\deg(f)$ ist die Signatur: (0) Für $f = \mathrm{const}_{\mathbb{S}^0}^{\pm 1}$ gilt $\deg(f) = 0$. (1) Für $f = \pm\mathrm{id}$ gilt $\deg(f) = \pm 1$.

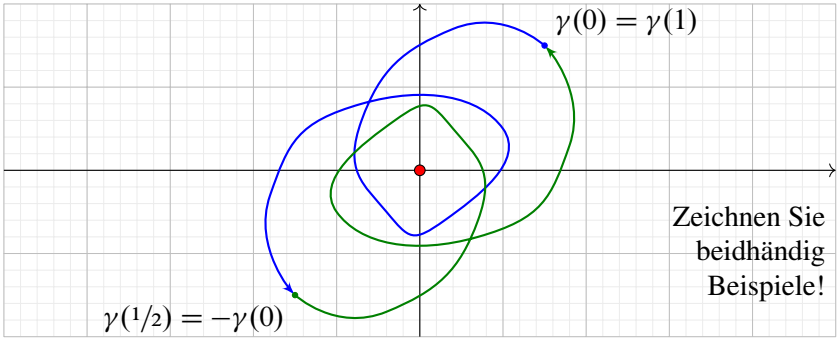


ABBILDUNG J:36. Beweis des Satzes von Borsuk–Ulam in Dimension $n = 1$

ERSTER BEWEIS IM FALL $n = 1$. (1) Statt $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ betrachten wir den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto f(e^{2\pi i t})$, mit $\gamma(t + 1/2) = -\gamma(t)$ für $0 \leq t \leq 1/2$. Es gilt $\deg(\gamma|_{[0,1/2]}) = k + 1/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$, da sich $\gamma(0)$ und $\gamma(1/2) = -\gamma(0)$ gegenüberliegen. Dank Symmetrie folgt $\deg(\gamma|_{[1/2,1]}) = k + 1/2$. In der Summe erhalten wir $\deg(\gamma) = 2k + 1$.

(0) Für f gerade gilt $\gamma(t + 1/2) = \gamma(t)$ und $\deg(\gamma|_{[0,1/2]}) = \deg(\gamma|_{[1/2,1]}) = k$. □

ZWEITER BEWEIS IM FALL $n = 1$. (1) Wir wählen eine Richtung $s \in \mathbb{S}^1$, sodass die Gerade $A = \mathbb{R}s$ die Punkte $\pm\gamma(0)$ nicht enthält. Der Weg $\gamma|_{[0,1/2]}$ überquert die Gerade $2k + 1$ mal, da sich $\gamma(0)$ und $\gamma(1/2)$ gegenüberliegen. Dank Symmetrie überquert auch $\gamma|_{[1/2,1]}$ die Gerade $2k + 1$ mal. Die Umlaufzahl von γ ist die halbe Summe, also $\deg(\gamma) = 2k + 1$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ Der Fall $n \geq 2$ gelingt durch Induktion (ist aber technisch aufwändiger): ☜

BEWEIS IM FALL $n \geq 2$. Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist invariant unter $\{\pm\mathrm{id}\}$ und enthält $\mathbb{S}^{n-1}$ in der Äquatorebene $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ stetig und ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Diese Daten können wir wie folgt simplizial codieren:

Sei $e_0, \dots, e_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Basis und $|S^n| = \partial[\pm e_0, \dots, \pm e_n]$ der Rand des Kreuzpolytops. Wir triangulieren die Sphäre $\mathbb{S}^n$ durch die Radialprojektion $h : |S^n| \xrightarrow{\simeq} \mathbb{S}^n$. Der Simplizialkomplex S^n ist invariant unter $\{\pm\mathrm{id}\}$ und enthält S^{n-1} in der Äquatorebene $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Eine hinreichend feine Unterteilung $K \preccurlyeq S^n$ erlaubt eine simpliziale Approximation $g : |K| \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ mit $g \simeq f \circ h$. Wir können die Unterteilung K so herstellen, dass sie invariant unter $\{\pm\mathrm{id}\}$ ist, und die Approximation g so wählen, dass $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in |K| = |S^n|$ gilt. Damit ist das Problem nun simplizial formuliert.

Wir wählen eine Richtung $s \in \mathbb{S}^n$, sodass die Gerade $A = \mathbb{R}s$ keine $(n-1)$–Simplizes von $g(|K|) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ trifft. Anders gesagt, A trifft nur n–Simplizes, und jeden davon nur in seinem Inneren. Sei $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ eine Projektion längs der Geraden $A = \ker(p)$.

Sei $K_0 = K \cap \mathbb{R}^n$ der Komplex in der Äquatorebene und $K_\pm$ die obere/untere Hemisphäre. Die Abbildung $g_0 : |K_0| \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ trifft die Gerade A nicht, also erhalten wir $p \circ g_0 : |K_0| \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Da auch $p \circ g_0$ ungerade ist, gilt $\deg(p \circ g_0) = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{Z}$, per Induktion über die Dimension n. Die Abbildung $g_+ : |K_+| \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ trifft die Gerade A daher $2k+1$ mal, mit Vorzeichen gemäß Orientierung gerechnet. Dank Symmetrie gilt dies auch für $g_- : |K_-| \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$. Der Abbildungsgrad von $g : |K| \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ ist die halbe Summe, also $\deg(g) = 2k+1$. □

☞ **Bemerkung.** Den ungeraden Fall J6A(1) werden wir ausgiebig nutzen. Der gerade Fall J6A(2) ist schwächer und steht hier vor allem zur didaktischen Abrundung. Ist n gerade und $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gerade, so folgt $\deg(x \mapsto f(x)) = \deg(x \mapsto f(-x)) = (-1)^{n+1}\deg(f)$, also $\deg(f) = 0$ und $f \simeq *$. Für gerade Abbildungen $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ mit $\deg(f) \neq 0$ siehe J3L. ☜

Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I [6]. *Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.*

Satz II [7]. *Ist $f \in R^{S_n}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \in S_n$, dass $f(p) = -f(p^*)$ ist.*

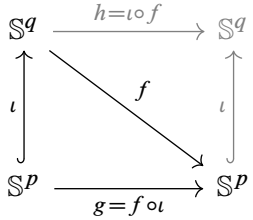
Satz III. *Sind $A_0, A_1, \dots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=0}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht.*

[6]) Herr H. Hopf, dem ich den Satz I mitteilte, gab mir brieflich drei andere kürzere Beweise dieses Satzes an. Da aber diese Beweise auf tiefliegenden Ergebnissen der Theorie des Abbildungsgrades beruhen und mein Beweis im Grunde ganz elementar ist, halte ich seine Veröffentlichung für nicht überflüssig.

[7]) Dieser Satz wurde als Vermutung von S t. Ulam aufgestellt.

Diesen Satz verdanken wir Karol BORSUK, *Drei Sätze über die n–dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933) 177–190. Ein schönes Lehrbuch widmet sich dem Satz von Borsuk–Ulam, seinen Beweisen und einigen seiner zahlreichen Anwendungen: Jiří MATOUŠEK, *Using the Borsuk–Ulam theorem*, Springer, 2003.

§J6b. Ungerade Abbildungen zwischen Sphären. Für $p < q$ in $\mathbb{N}$ gibt es ungerade stetige Abbildungen $\mathbb{S}^p \to \mathbb{S}^q$, zum Beispiel die Inklusion vermöge $\mathbb{R}^{p+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{q+1} : (x_0,\dots,x_p) \mapsto (x_0,\dots,x_p,0,\dots,0)$. Umgekehrt ist dies für $f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^p$ nicht möglich:



Korollar J6B. *Für $p < q$ in $\mathbb{N}$ gibt es keine ungerade stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^p$.*

BEWEIS. Ist $f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^p$ stetig und ungerade, so auch $g = f \circ \iota : \mathbb{S}^p \to \mathbb{S}^p$. Nach J6A ist $\deg(g)$ ungerade. Andererseits gilt $\iota \simeq *$ (G4D), also $g \simeq *$ und $\deg(g) = 0$. An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme. □

ALTERNATIVER BEWEIS. Auch $h = \iota \circ f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^q$ ist ungerade. Nach J6A ist $\deg(h)$ ungerade. Andererseits ist mit ι auch h zusammenziehbar, also $h \simeq *$ und $\deg(h) = 0$. □

Bemerkung. Das erste Argument nutzt nur den Abbildunggrad $[\mathbb{S}^p,\mathbb{S}^p] \to \mathbb{Z}$, das zweite nutzt ihn höherdimensional für $[\mathbb{S}^q,\mathbb{S}^q] \to \mathbb{Z}$. Wenn man nur mit der Umlaufzahl arbeiten möchte, also $p = 1$, etwa aus didaktischen Gründen, so bietet sich der erste Beweis an.

Allein mit der Umlaufzahl $\deg : [\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1] \to \mathbb{Z}$ erhalten wir nur folgenden Spezialfall: Für $1 = p < q$ in $\mathbb{N}$ gibt es keine ungerade stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^1$.

§J6c. Unmöglichkeit einer Einbettung $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Jede stetige Injektion $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild, denn $\mathbb{S}^n$ ist kompakt und $\mathbb{R}^m$ ist hausdorffsch (F1L). Solche Einbettungen existieren in Dimension $m > n$, aber nicht für $m \le n$:

Korollar J6C. *Zu $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig existiert $x \in \mathbb{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$.*
Insbesondere gilt $\mathbb{S}^n \not\hookrightarrow \mathbb{R}^n$: Es existiert keine Einbettung $f : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

BEWEIS. Angenommen, es gälte $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Dann wäre

$$g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$$

wohldefiniert und stetig und ungerade, $g(-x) = -g(x)$. Dies widerspricht J6B. □

Bemerkung. Für $n = 1$ genügt der Zwischenwertsatz (E2K), für $n = 2$ genügt die Umlaufzahl (und J6A). Veranschaulichung: Zu jedem Zeitpunkt existieren auf der Erdoberfläche zwei gegenüberliegende Punkte mit gleichem Luftdruck und Temperatur.

§J6d. Einbettungsdimension von Gebieten. Die *Einbettungsdimension* eines Raums X ist n, falls eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, aber keine in $\mathbb{R}^{n-1}$. Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hat Einbettungsdimension $n+1$. Jedes Gebiet $V \subset \mathbb{R}^q$ hat Einbettungsdimension q:

Korollar J6D. *Sei $p < q$. Zu $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^q$ offen existiert keine stetige Injektion $V \hookrightarrow \mathbb{R}^p$.*
Insbesondere gilt $\mathbb{R}^p \not\cong \mathbb{R}^q$, allgemein $U \not\cong V$ für $U \subset \mathbb{R}^p$ und $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^q$ offen.

BEWEIS. Es gibt $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a,2r) \subset V$, also $\mathbb{S}^{q-1} \hookrightarrow V : s \mapsto a + rs$. Die Komposition $\mathbb{S}^{q-1} \hookrightarrow V \hookrightarrow \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ widerspricht J6C. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§J6e. Der Satz vom Schinken-Käse-Brot.** Zur Erinnerung (an die Schulzeit?): ☜

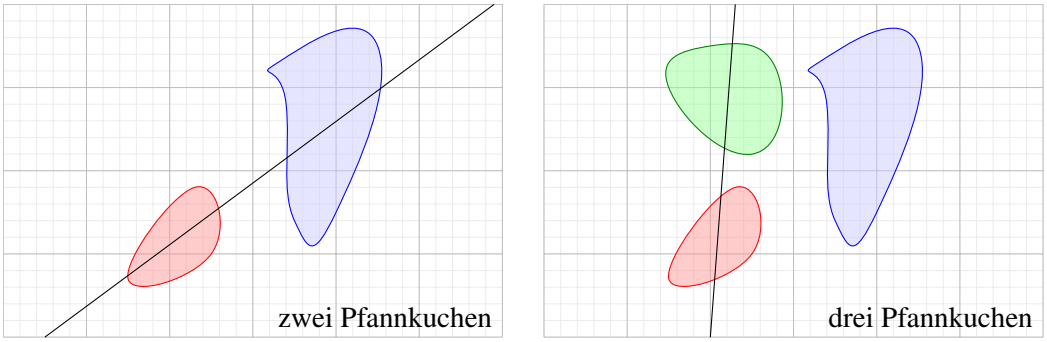


ABBILDUNG J:37. Versuch, Pfannkuchen zu halbieren

✍ **Definition J6E.** Ein Schinken-Käse-Brot besteht aus Brot mit Käse und Schinken. ✍

Kann man ein Schinken-Käse-Brot im $\mathbb{R}^3$ durch einen geraden Schnitt so teilen, dass jede Hälfte gleich viel Brot, Käse und Schinken enthält? Diese Frage beinhaltet zwei Aspekte. (1) Theoretisch: Gibt es einen solchen Schnitt? (2) Praktisch: Wie kann man einen finden? Der Satz vom Schinken-Käse-Brot garantiert, dass eine solche Teilung immer möglich ist:

✍ **Satz J6F.** *Seien $A_1,\dots,A_n \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Mengen. Dann existiert eine affine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$, sodass $\operatorname{vol}_n(A_k \cap H_+) = \operatorname{vol}_n(A_k \cap H_-)$ für alle $k = 1,\dots,n$ gilt.* ✍

Hierbei ist vol_n das Volumen (Lebesgue–Maß) auf $\mathbb{R}^n$. Wir definieren das eingeschränkte Maß $\mu_k(B) := \operatorname{vol}_n(A_k \cap B)$ und beweisen sogleich den folgenden allgemeineren Satz:

✍ **Satz J6G.** *Seien $\mu_1,\dots,\mu_n$ endliche Borel–Maße auf $\mathbb{R}^n$, für die jede affine Hyperebene Maß 0 habe. Dann existiert eine affine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$, die den Raum in zwei affine Halbräume $H_\pm$ teilt, sodass $\mu_k(H_+) = \mu_k(H_-)$ für alle $k = 1,\dots,n$ gilt.* ✍

✍ BEWEIS. Jeder Vektor $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{S}^n$ definiert die beiden affinen Halbräume $H_\pm(v) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid v_1x_1 + \cdots + v_nx_n \gtrless v_0 \,\}$. Hierbei gilt $H_\pm(-v) = H_\mp(v)$. Die Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f_k(v) = \mu_k(H_+(v))$ ist stetig (Übung J6H). Dank J6C existiert $v \in \mathbb{S}^n$ mit $f(v) = f(-v)$, also $\mu_k(H_+(v)) = \mu_k(H_-(v))$ für alle k. □ ✍

☞ **Übung J6H.** (1) Führen Sie den Beweis des Satzes vom Schinken-Käse-Brot aus, indem Sie die Stetigkeit von $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ nachweisen. (Die majorisierte Konvergenz hilft.) ☜

(2) Geben Sie Gegenbeispiele mit $A_k \subset \mathbb{R}^n$ nicht kompakt oder μ_k ein Dirac–Maß.

✻ **J6H.** (1) Sei μ ein endliches Borel–Maß auf $\mathbb{R}^n$, sodass jede affine Hyperebene H das Maß $\mu(H) = 0$ hat. Wir haben zu zeigen, dass $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ mit $g(v) = \mu(H_+(v))$ stetig ist. Sei $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \to v$ eine Folge in $\mathbb{S}^n$. Wir zeigen $g(v_k) \to g(v)$. Für jeden Punkt $x \in H_+(v)$, der nicht auf dem Rand $H(v)$ liegt, gilt $x \in H_+(v_k)$ für alle hinreichend großen k. Ebenso für $x \in H_-(v)$. Sind $I, I_k : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ die Indikatorfunktion von $H_+(v)$ bzw. $H_+(v_k)$, so gilt demnach $I_k(x) \to I(x)$ für alle $x \notin H(v)$. Wegen $\mu(H(v)) = 0$, gilt die punktweise Konvergenz $I_k \to I$ somit μ–fast überall. Zudem sind alle I_k beschränkt durch 1, und diese Majorante ist μ–integrierbar dank $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Der Satz der von der majorisierten Konvergenz besagt nun:

$$g(v_k) = \mu(H_+(v_k)) = \int_{\mathbb{R}^n} I_k \,\mathrm{d}\mu \to \int_{\mathbb{R}^n} I \,\mathrm{d}\mu = \mu(H_+(v)) = g(v)$$

☞ **Bemerkung.** Der Satz vom Schinkenbrot besagt, dass eine Teilung möglich ist. Für gegebene Mengen gibt er aber keinen Hinweis darauf, wie ein solche Teilung zu finden wäre. ☜

Übung J6I. Zeichnen Sie zwei Kompakta in der Ebene und suchen Sie eine Teilung. Warum ist das offensichtlich, wenn Sie nur Kreisscheiben oder Rechtecke benutzen, oder allgemein jede der Mengen $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ punktsymmetrisch zu ihrem Schwerpunkt ist?

Übung J6J. Zeichnen Sie rote und blaue Punkte in der Ebene. Finden Sie eine Gerade, die sowohl die rote als auch die blaue Punktwolke halbiert. Warum muss es eine geben? Eine solche Gerade zu finden ist schwieriger: Ein Algorithmus mit linearer Laufzeit wurde erst 1990 gefunden, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Ham_sandwich_theorem`.

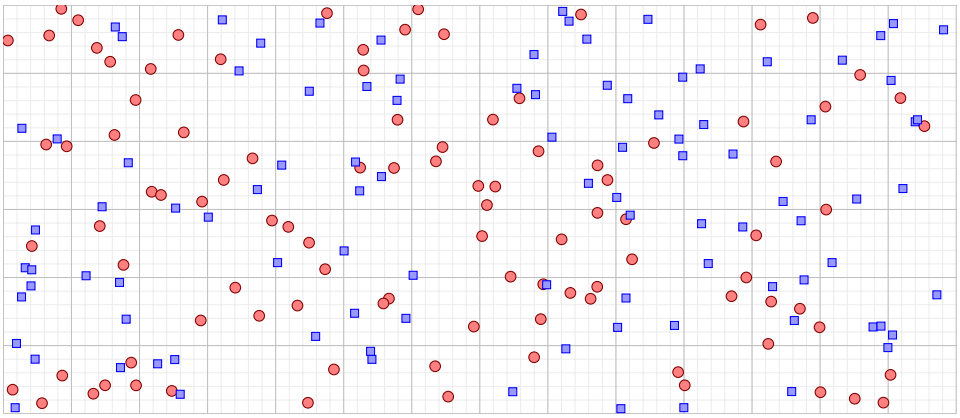


ABBILDUNG J:38. Partyspaß mit Smarties: Wie gelingt eine gerechte Teilung?

Bemerkung. Die Frage nach *einer fairen Teilung* ist sehr vielfältig und nicht nur relevant für alltägliche Anwendungen, sondern auch ein erstaunliches aktives Forschungsgebiet in Mathematik, Algorithmik und Spieltheorie. Als wunderschön animiertes Video: *Sneaky Topology | The Borsuk–Ulam theorem and stolen necklaces*, `you2.be/yuVqxCSsE7c`.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§J6f. Der Satz von Lusternik–Schnirelman.** Nach dem Pausenbrot hier eine weitere Erinnerung an die Schulzeit, diesmal (als Anwendung?) zum Erdkundeunterricht: ☜

Übung J6K. Auf $\mathbb{S}^2 \cong$ Erdoberfläche betrachten wir die drei (abgeschlossenen) Mengen $A_0 =$ Land, $A_1 =$ Pazifik, $A_2 =$ andere Meere; damit gilt $\mathbb{S}^2 = A_0 \cup A_1 \cup A_2$.

(1) Bevor Sie den Globus konsultieren: Enthält eine der Mengen ein Antipodenpaar?
(2) Mit Globus: Welche? Siehe `findlatitudeandlongitude.com/antipode-map`, wenn Sie Geographie mögen oder explizite Antipoden sehen möchten. (Griechisch ἀντι [antí] 'gegen' und ποός [poús] 'Fuß' bedeutet wörtlich 'Gegenfüßer'.)

✻ **J6K.** (1) Ja, das garantiert der folgende Satz von Lusternik–Schnirelman: Für mindestens eine der Mengen A_0, A_1, A_2 gilt $A_k \cap (-A_k) \neq \emptyset$. (2) Eindrückliche Beispiele sind für A_0 etwa die Hauptstädte Madrid (Spanien) – Wellington (Neuseeland), Taipei (Taiwan) – Asunción (Paraguay), Lima (Perú) – Phnom Penh (Kambodscha), A_1: Küste vor Vietnam – Küste vor Peru / Chile, A_2: Golf von Mexiko – Indischer Ozean.

✍ **Satz J6L.** *Sei $\mathbb{S}^n = A_0 \cup \cdots \cup A_n$ eine abgeschlossene (bzw. offene) Überdeckung, dann enthält mindestens eine der Mengen A_k antipodale Punkte, das heißt $A_k \cap (-A_k) \neq \emptyset$.* ✍

BEWEIS. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. (Warum?) Für $n = 1$ genügt wie üblich der Zwischenwertsatz C3R. (Sehen Sie wie?) Übung: Beweisen Sie den allgemeinen Fall mit Hilfe des Satzes J6C von Borsuk–Ulam. *Hinweis:* Nutzen Sie $f_k(x) = \operatorname{dist}(x, A_k)$. □

✻ **J6L.** (1) Für $k = 1, \ldots, n$ ist $f_k : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{dist}(x, A_k)$ stetig (C3N), ebenso die Zusammenfassung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Dank J6C existiert $x \in \mathbb{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$. Gilt $f_k(x) = 0$ für ein $k = 1, \ldots, n$, so folgt $0 = \operatorname{dist}(x, A_k) = \operatorname{dist}(-x, A_k)$, also $x, -x \in A_k$, da A_k abgeschlossen ist. Andernfalls gilt $f_k(x) \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$, also auch $f_k(-x) \neq 0$, und somit $x, -x \notin A_k$. Es bleibt nur noch $x, -x \in A_0$.

(2) Zu jeder offenen Überdeckung $\mathbb{S}^n = U_0 \cup \cdots \cup U_n$ konstruieren wir eine abgeschlossene Überdeckung $\mathbb{S}^n = A_0 \cup \cdots \cup A_n$ mit $A_k \subset U_k$: Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ existiert ein offene Umgebung V_x mit $\overline{V_x} \subset U_k$ für mindestens ein $k = 0, \ldots, n$. Da der Raum $\mathbb{S}^n$ kompakt ist (F1O), überdecken endlich viele V_x die Sphäre, etwa $\mathbb{S}^n = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_\ell}$. Sei A_k die Vereinigung aller $\overline{V_{x_i}}$ mit $\overline{V_x} \subset U_k$. Dann ist A_k abgeschlossen, $A_k \subset U_k$ und $\mathbb{S}^n = A_0 \cup \cdots \cup A_n$. Wir schließen mit der Aussage aus Teil (1).

☞ **Übung J6M.** (1) Können wir im Satz J6L von Lusternik–Schnirelman für $A_0, \ldots, A_n \subset \mathbb{S}^n$ die Voraussetzung „abgeschlossen" bzw. „offen" durch „zusammenhängend" ersetzen? ☜

(2) Genauer: Wie viele zusammenhängende Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{S}^n$ benötigen Sie, um $\mathbb{S}^n = A_0 \cup \cdots \cup A_m$ aber $A_0 \cap (-A_0) = \cdots = A_m \cap (-A_m) = \emptyset$ zu garantieren?

(3) Gilt Satz J6L auch für $A_0, A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{S}^n$ mit $m < n$? und für $m > n$?

✻ **J6M.** (1) Nein: In $\mathbb{S}^1$ sind die beiden Teilmengen $A_0 = \{ e^{\pi i t} \mid 0 \leq t < 1 \}$ und $A_1 = -A_0$ zusammenhängend und überdecken $A_0 \cup A_1 = \mathbb{S}^1$, aber weder A_0 noch A_1 enthält antipodale Punkte.

(2) In jeder Dimension $n \geq 1$ können wir $\mathbb{S}^n = A_0 \sqcup A_1$ durch nur *zwei* disjunkte zusammenhängende Mengen $A_0 = -A_1$ überdecken. Ein solches Gegenbeispiel $\mathbb{S}^1 = A_0^1 \sqcup A_1^1$ haben wir in (1) angegegen. Wir betrachten $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$ als Äquator vermöge $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0)$. Für $S_2 = A_0^2 \sqcup A_1^2$ setzen wir $A_0^2 = A_0^1 \cup \{ x \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 > 0 \}$ und $A_0^2 = A_0^1 \cup \{ x \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 < 0 \}$. Rekursiv gelingt dies in jeder Dimension $n = 1, 2, 3, \ldots$. Offensichtlich sind A_0^n und A_1^n weder abgeschlossen noch offen!

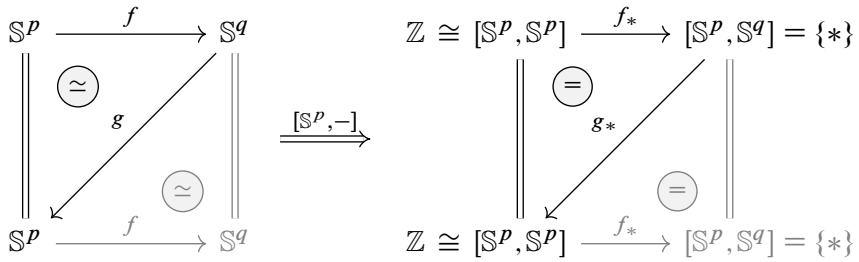
(3) Der Satz gilt auch für $m < n$: Es genügt, durch die leere Menge $A_{m+1} = \cdots = \ldots, A_n = \emptyset$ zu ergänzen. Der Satz gilt nicht mehr für $m = n + 1$: In $\mathbb{S}^0$ betrachte man $A_0 = \{+1\}$ und $A_1 = \{-1\}$. In $\mathbb{S}^1$ betrachte man $A_0 = \{ e^{2\pi i t} \mid 0 \leq t \leq 1/3 \}$, $A_1 = \{ e^{2\pi i t} \mid 1/3 \leq t \leq 2/3 \}$, $A_2 = \{ e^{2\pi i t} \mid 2/3 \leq t \leq 1 \}$. Für $\mathbb{S}^2$ betrachten wir ein Tetraeder $\Delta^3 = [a_0, a_1, a_2, a_3] \subset \mathbb{R}^3$, zum Beispiel regulär wir in Abbildung A:8. Nach Verschiebung können wir $0 \in \operatorname{Int} \Delta^3$ annehmen. Die radiale Projektion stiftet einen Homöomorphismus $h : \partial\Delta^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$. Die vier Facetten projizieren dabei auf abgeschlossene Mengen $A_0, A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{S}^2$ mit $\mathbb{S}^2 = A_0 \cup \cdots \cup A_3$ aber $A_0 \cap (-A_0) = \cdots = A_3 \cap (-A_3) = \emptyset$. Diese Konstruktion gelingt in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$.

§J7. Invarianz der Dimension, des Randes, des Gebietes, der Orientierung

§J7a. Topologische Invarianz der Dimension von $\mathbb{R}^n$. Als wichtige Anwendung des Abbildungsgrades beweisen wir die topologische Invarianz der Dimension: Für $p \neq q$ sind die Sphären $\mathbb{S}^p$ und $\mathbb{S}^q$ nicht homöomorph, nicht einmal homotopie-äquivalent.

Satz J7A. *Für alle $p \neq q$ in $\mathbb{N}$ gilt $\mathbb{S}^p \ncong \mathbb{S}^q$, sogar $\mathbb{S}^p \not\simeq \mathbb{S}^q$.*

BEWEIS. Sei $p < q$. Wir setzen noch etwas weniger voraus: Angenommen, es gäbe stetige Abbildungen $f : \mathbb{S}^p \to \mathbb{S}^q$ und $g : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^p$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^p}$. Dann gilt $f \simeq *$ (I4B), also auch $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^p} \simeq g \circ f \simeq *$ (G4L). Das aber widerspricht $\mathbb{S}^p \not\simeq *$ (J4A).

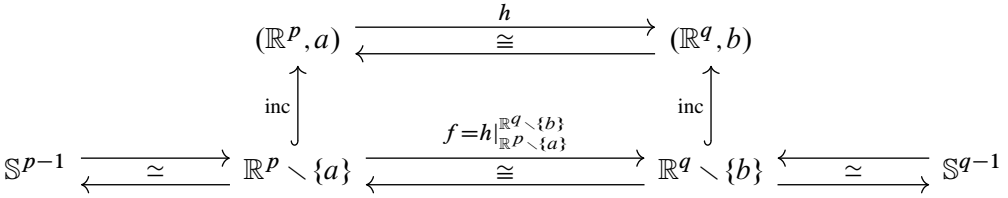


Alternative Formulierung: Wie nutzen den Funktor $[\mathbb{S}^p,-]$ und erhalten obiges Diagramm. Aus $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^p}$ folgt $g_* \circ f_* = \mathrm{id}_*$, also sind f_* injektiv und g_* surjektiv. Das aber ist unmöglich, denn es gilt $[\mathbb{S}^p,\mathbb{S}^q] = \{*\}$ dank I4B und $[\mathbb{S}^p,\mathbb{S}^p] \cong \mathbb{Z}$ dank J3A (für $p \geq 1$). □

Korollar J7B. *Für alle $p \neq q$ in $\mathbb{N}$ gilt zwar $\mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^q \simeq *$, aber dennoch $\mathbb{R}^p \ncong \mathbb{R}^q$.*

Für $0 = p < q$ ist $\mathbb{R}^0 \ncong \mathbb{R}^q$ klar. Für $1 = p < q$ folgt $\mathbb{R}^1 \ncong \mathbb{R}^q$ mit Hilfe des Zusammenhangs (G2D). In beliebiger Dimension gelingt der Beweis mit dem Abbildungsgrad:

BEWEIS. Sei $p,q \in \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{R}^p \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^q$ ein Homöomorphismus. Aus $p = 0$ folgt $q = 0$; wir können also $p,q \geq 1$ annehmen. Sei $a \in \mathbb{R}^p$ und $b = h(a) \in \mathbb{R}^q$.



Mit h ist dann auch die Einschränkung $f : \mathbb{R}^p \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{R}^q \smallsetminus \{b\}$ ein Homöomorphismus. Nach G5B erhalten wir $\mathbb{S}^{p-1} \simeq \mathbb{R}^p \smallsetminus \{a\} \cong \mathbb{R}^q \smallsetminus \{b\} \simeq \mathbb{S}^{q-1}$. Dank J7A folgt $p = q$. □

Bemerkung. Um $\mathbb{R}^p \ncong \mathbb{R}^q$ zu zeigen, können wir nicht direkt Homotopie-Invarianten anwenden, denn $\mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^q \simeq *$. Wir entfernen daher zunächst einen Punkt. Anschaulich sind die Löcher in $\mathbb{R}^p \smallsetminus \{a\}$ und in $\mathbb{R}^q \smallsetminus \{b\}$ unterschiedlicher Natur. Das scheint plausibel für $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$, bedarf jedoch eines Beweises: In $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ ist jede Schlaufe zusammenziehbar: $[\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}] = \{*\}$ dank simplizialer Approximation (I4B). In $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ gilt dies nicht: $[\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}] \cong [\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$ dank Umlaufzahl (J1J).

ALTERNATIVER BEWEIS MITTELS KOMPAKTIFIZIERUNG. Wie zuvor seien $p,q \geq 1$. Jeder Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^p \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^q$ setzt sich eindeutig fort zu einem Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^p \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^q$ der Alexandroff–Kompaktifizierungen (F4D). Dank J7A folgt $p = q$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J7b. Topologische Invarianz der Dimension von Gebieten $U \subset \mathbb{R}^n$.

☞ **Satz J7C** (topologische Invarianz der Dimension). *Seien $U \subset \mathbb{R}^p$ und $V \subset \mathbb{R}^q$ nicht-leere offene Teilmengen. Wenn ein Homöomorphismus $f : U \xrightarrow{\sim} V$ existiert, dann gilt $p = q$.* ☜

Mit dem Satz von Borsuk–Ulam können wir diese Invarianz sogar noch verschärfen (J6D). Ohne den Satz von Borsuk–Ulam kann man sich mit folgendem Lemma behelfen:

Lemma J7D. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$.*
Dann gilt $n = \min\{\, k \in \mathbb{N} \mid \forall U \in \mathscr{U}_a(X) : [\mathbb{S}^{k-1}, U \smallsetminus \{a\}] \neq \{*\} \,\}$

Somit wird n allein durch topologische Eigenschaften des Raumes X festgelegt. Für $n = 1$ ist das ein vertrautes Argument: Jeder Punkt $a \in U \subseteq \mathbb{R}^1$ trennt jede noch so kleine Umgebung. Das Lemma perfektioniert diesen Trick.

BEWEIS. Zu $r > 0$ mit $B(a, 2r) \subset U \subset X$ betrachten wir die Komposition

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & = & \mathbb{S}^{n-1} \\ & {\scriptstyle g}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle f} & \\ & U \smallsetminus \{a\} & \end{array}$$

aus $g(s) = a + rs$ und $f(x) = (x-a)/|x-a|$. Aus $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}} \not\simeq *$ dank J4A folgt $g \not\simeq *$ dank G4L. Also gilt $[\mathbb{S}^{n-1}, U \smallsetminus \{a\}] \neq \{*\}$ für jede Umgebung U von a in U.

Speziell für $U = B(a, 2r)$ gilt $U \smallsetminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$, vermöge der Abbildungen $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} B(a, 2r) : x \mapsto a + 2rx/(1+|x|)$ und $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$. Für $k < n$ ist daher jede stetige Abbildung $g : \mathbb{S}^{k-1} \to U \smallsetminus \{a\}$ zusammenziehbar (I4B). □

§J7c. Topologische Invarianz der simplizialen Dimension. Für jeden Simplizialkomplex K beruht die Dimension $\dim K := \sup\{\, \dim S \mid S \in K \,\}$ auf der kombinatorischen Struktur des Komplexes K bzw. der affinen Struktur der Simplizes S. Wir können nun zeigen, dass diese Dimension eine topologische Invariante des Raumes $|K|$ ist:

☞ **Satz J7E** (topologische Invarianz der simplizialen Dimension). *Seien K, L Simplizialkomplexe. Existiert ein Homöomorphismus $f : |K| \xrightarrow{\sim} |L|$, so folgt $\dim K = \dim L$.* ☜

BEWEIS. Wir führen $\dim K \neq \dim L$ zum Widerspruch. Wir können $\dim K > \dim L$ annehmen; notfalls vertauschen wir K und L. Es gilt $\dim K \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $m := \dim L < \infty$. In $|K|$ ist das m–Skelett $|K_{\leq m}|$ abgeschlossen; das Komplement $U := |K| \smallsetminus |K_{\leq m}|$ ist offen in $|K|$ und nicht-leer: Es ist Vereinigung aller offener p–Simplizes mit $p > m$. Auch $V := f(U)$ ist offen in $|L|$ und nicht-leer. Also existiert ein Simplex $T \in L$ mit $[T] \cap V \neq \emptyset$. Sei T maximal mit dieser Eigenschaft. Dann ist $\mathrm{Int}[T]$ offen in $|L|$, also auch $V' = \mathrm{Int}[T] \cap V \neq \emptyset$. Sei $S \in K$ sodass $U' := \mathrm{Int}[S] \cap f^{-1}(V') \neq \emptyset$. Wegen $\mathrm{Int}[S] \cap U \neq \emptyset$ gilt $n := \dim S > m$. Die Menge U' ist offen in $\mathrm{Int}[S]$. Einerseits gilt $U' \subset \mathrm{Int}[S] \cong \mathbb{R}^n$, andererseits $U' \hookrightarrow \mathrm{Int}[T] \cong \mathbb{R}^m$. Das aber widerspricht Borsuk–Ulam (J6D). □

Damit können wir die Dimension von Simplizialkomplexen übertragen auf alle topologischen Räume, die zu Polyedern homöomorph sind, also auf alle triangulierbaren Räume:

☞ **Definition J7F.** Ist ein topologischer Raum X triangulierbar, also $X \cong |K|$ mit einem Simplizialkomplex K, so definieren wir seine *simpliziale Dimension* durch $\dim X := \dim K$. Dies ist wohldefiniert, denn aus $X \cong |K|$ und $X \cong |L|$ folgt $\dim K = \dim L$ dank J7E. ☜

§J7d. Topologische Invarianz des geometrischen Randes. Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei

$$\mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0 \}$$

der n–dimensionale Halbraum. Sein Rand ist die $(n-1)$–dimensionale Hyperebene

$$\partial\mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0 \}.$$

Sein Inneres ist der offene n–dimensionale Halbraum

$$\operatorname{Int}\mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0 \}.$$

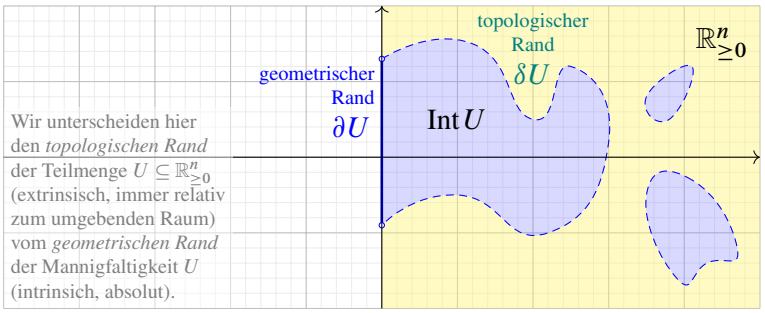


ABBILDUNG J:39. Geometrischer Rand ∂U und Inneres $\operatorname{Int} U$ von U.
Der topologische Rand $\delta U \supset \partial U$ in $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ist im Allgemeinen strikt größer.

Definition J7G. Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ definieren wir den *geometrischen Rand* $\partial U := U \cap \partial\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und das *geometrische Innere* $\operatorname{Int} U := U \cap \operatorname{Int}\mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Dies nutzt zunächst die geometrische Situation von U in $\mathbb{R}^n$. Es sind jedoch topologische Eigenschaften:

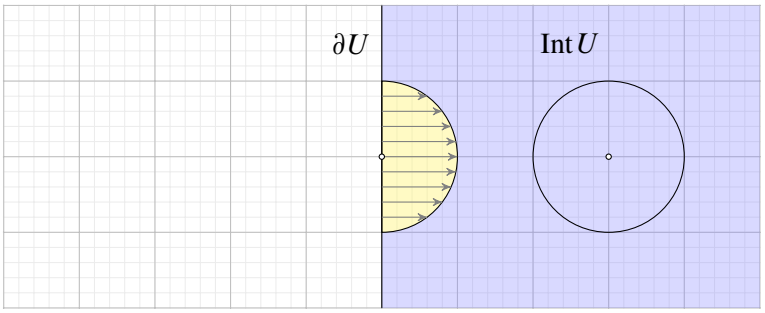


ABBILDUNG J:40. Homotopie-Äquivalenz $\iota : U' = U \smallsetminus \{a\} \hookrightarrow U$

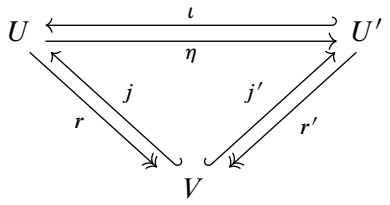
Lemma J7H. *(1) Für $a \in \partial U$ ist die Inklusion $\iota : U \smallsetminus \{a\} \hookrightarrow U$ eine Homotopie-Äquivalenz.*
(2) Für $a \in \operatorname{Int} U$ hingegen ist die Inklusion $\iota : U \smallsetminus \{a\} \hookrightarrow U$ keine Homotopie-Äquivalenz.

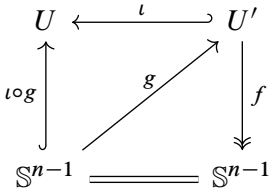
Beispiel. Für $n = 1$ mit $U = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist dies klar: Für $a = 0$ ist die Inklusion $\mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Homotopie-Äquivalenz, für $a > 0$ hingegen $[0, a[\cup]a, \infty[\hookrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nicht.

Bemerkung. In $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ ist $U = \mathbb{R}^2_{\geq 0} \smallsetminus (\mathbb{N}_{\geq 1} \times \{0\})$ offen. Für jeden Punkt $a \in \operatorname{Int} U$ gibt es einen Homöomorphismus $U \smallsetminus \{a\} \cong U$. Es kann also durchaus Homotopie-Äquivalenzen $U \smallsetminus \{a\} \simeq U$ geben. Man beachte daher die genaue Formulierung: Der Satz spricht nicht von einer beliebigen Homotopie-Äquivalenz, sondern von der Inklusion $\iota : U \smallsetminus \{a\} \hookrightarrow U$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

BEWEIS. Abbildung J:40 zeigt die Idee. Wir übersetzen sie nun geduldig in Formeln:





(1) Sei $a \in \partial U$. Es existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a,2\varepsilon) \cap \mathbb{R}^n_{\geq 0} \subset U$. Nach Verschieben können wir $a = 0$ annehmen, nach Skalieren auch $\varepsilon = 1$. Sei $V = U \smallsetminus B(0,1)$ und

$$r : U \to V : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } |x| \geq 1, \\ \left(\sqrt{1-x_2^2-\cdots-x_n^2}, x_2, \ldots, x_n\right) & \text{für } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und stetig (E1P). Für $j : V \hookrightarrow U$ gilt $r \circ j = \mathrm{id}_V$ und $H : j \circ r \simeq \mathrm{id}_U$ vermöge $H : [0,1] \times U \to U : (t,x) \mapsto tx + (1-t)r(x)$. Für $U' := U \smallsetminus \{0\}$ sei $j' : V \hookrightarrow U'$ und $r' = r|_{U'} : U' \to V$. Es gilt $r' \circ j' = \mathrm{id}_V$ und $H' : j' \circ r' \simeq \mathrm{id}_{U'}$ vermöge $H' : [0,1] \times U' \to U' : (t,x) \mapsto tx + (1-t)r'(x)$. Für $\eta = j' \circ r : U \to U'$ erhalten wir $H : \iota \circ \eta = j \circ r \simeq \mathrm{id}_U$ und $H' : \eta \circ \iota = j' \circ r' \simeq \mathrm{id}_{U'}$.

(2) Wir wählen $r > 0$ mit $B(a,2r) \subset U$ und komponieren $g : \mathbb{S}^{n-1} \to U' : s \mapsto a + rs$ mit $f : U' \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto (x-a)/|x-a|$. Aus $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}} \not\simeq *$ dank J4A folgt $g \not\simeq *$ dank G4L. Hingegen ist $\iota \circ g : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow U$ in $B(a,2r)$ zusammenziehbar (G4B). Demnach ist $\iota_* : [\mathbb{S}^{n-1}, U \smallsetminus \{a\}] \to [\mathbb{S}^{n-1}, U]$ nicht injektiv, denn $\{[*] \neq [g]\} \to \{[*]\}$. □

Bemerkung. Satz und Beweis haben zwei Teile. Für $a \in \partial U$ ist der Beweis konstruktiv: Für die Inklusion $\iota : U \smallsetminus \{a\} \hookrightarrow U$ konstruieren wir eine Homotopie-Inverse $\eta : U \to U \smallsetminus \{a\}$ zusammen mit Homotopien $\iota \circ \eta \simeq \mathrm{id}_U$ und $\eta \circ \iota \simeq \mathrm{id}_{U'}$.

Für jeden inneren Punkt $a \in \operatorname{Int} U$ hingegen ist der Beweis obstruktiv: Die Inklusion $\iota : U \smallsetminus \{a\} \hookrightarrow U$ erlaubt keine Homotopie-Inverse. Hierzu nutzen wir den Funktor $[\mathbb{S}^{n-1}, -]$ und zeigen, dass die induzierte Abbildung $\iota_* : [\mathbb{S}^{n-1}, U \smallsetminus \{a\}] \to [\mathbb{S}^{n-1}, U]$ nicht injektiv ist. Dies gelingt uns dank des Abbildungsgrades $\deg : [\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Lemma J7H charakterisiert geometrische Randpunkte durch eine topologische Eigenschaft. Hieraus erhalten wir sofort die topologische Invarianz des geometrischen Randes:

Satz J7I (topologische Invarianz des geometrischen Randes)**.** *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen. Für jeden Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\sim} V$ gilt dann $h(\partial U) = \partial V$ und $h(\operatorname{Int} U) = \operatorname{Int} V$.* □

Dies ist nur in Dimension $n \geq 1$ interessant. Im Sonderfall $n = 0$ haben wir $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ und ergänzen sinngemäß $\mathbb{R}^0_{\geq 0} = \{0\}$ sowie $\operatorname{Int} \mathbb{R}^0_{\geq 0} = \{0\}$ und $\partial \mathbb{R}^0_{\geq 0} = \emptyset$.

Zusammen mit der Invarianz der Dimension erhalten wir schließlich:

Satz J7J. *Seien $U \subset \mathbb{R}^p_{\geq 0}$ und $V \subset \mathbb{R}^q_{\geq 0}$ offen und nicht-leer. Wenn ein Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\sim} V$ existiert, so folgt $p = q$ sowie $h(\partial U) = \partial V$ und $h(\operatorname{Int} U) = \operatorname{Int} V$.*

BEWEIS. Aus $p = 0$ folgt $U = \{0\}$ und somit $q = 0$ und $V = \{0\}$. Wir können also $p, q \geq 1$ annehmen. Dank J7H gilt $h(\partial U) = \partial V$ und $h(\operatorname{Int} U) = \operatorname{Int} V$. Nun sind $\operatorname{Int} U \subset \mathbb{R}^p$ und $\operatorname{Int} V \subset \mathbb{R}^q$ offen und nicht-leer. Aus $\operatorname{Int} U \cong \operatorname{Int} V$ folgt $p = q$ dank J7C. □

§J7e. Topologische Invarianz des Gebietes. Als *Gebiet* bezeichnet man traditionell eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, die zudem (weg)zusammenhängend ist (und somit nicht-leer).

Für $n > m$ existiert keine stetige Injektion $f : \mathbb{R}^n \supset U \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ (J6D). Für $n \leq m$ ist dies möglich, denn $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$. In der kritischen Dimension $m = n$ passiert etwas Besonderes:

Satz J7K (topologische Invarianz des Gebietes)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Jede stetige Injektion $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist offen, also $V = f(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \xrightarrow{\sim} V$ ein Homöomorphismus.*

Bemerkung. Dies ist die topologische Entsprechung des lokalen Umkehrsatzes (C5Q) aus der Differentialrechnung und eine topologische Besonderheit des Raumes $\mathbb{R}^n$.

Beispiele J7L. Für $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ müssen Start und Ziel dieselbe Dimension haben. Die Inklusion $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$ ist stetig und injektiv, aber nicht offen.

In unendlicher Dimension gilt die Aussage nicht: Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ oder $\ell^p(\mathbb{N})$ ist der Schiebeoperator $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$ stetig und injektiv, aber nicht offen.

Auch in endlicher Dimension gilt die Aussage nicht für Halbräume $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$: Die Abbildung $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x + 1$ ist stetig und injektiv, aber nicht offen.

Bemerkung. Satz J7K scheint plausibel, doch der Beweis ist subtil. Zur mathematischen Schwierigkeit gesellt sich die psychologische: Die Frage ist einfach und die Antwort scheint klar. Die Beweisführung bedarf daher großer Disziplin und Sorgfalt, um unsere topologischen Argumente nicht mit unbewiesenen (oder gar falschen) Annahmen zu kontaminieren.

Der folgende Beweis mobilisiert zum krönenden Abschluss noch einmal alle Techniken: Kompaktheit und Zusammenhang sowie den Jordan–Brouwerschen Trennungssatz.

BEWEIS. Für $n = 1$ ist der Satz eine lehrreiche Übung zum Zwischenwertsatz (G2E).

Sei $n \geq 2$. Wir zeigen, dass die Abbildung f offen ist in jedem Punkt $a \in U$. Ohne Einschränkung sei $a = 0$ und $B(0, 2) \subset U$, notfalls verschieben und strecken wir U.

Nach Voraussetzung ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Die Einschränkung $f : \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} S := f(\mathbb{S}^{n-1})$ ist stetig und bijektiv, also ein Homöomorphismus, da $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt ist und S hausdorffsch (F1L). Ebenso $f : \mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} D := f(\mathbb{D}^n)$.

Wir vergleichen die Jordan–Zerlegung von $\mathbb{R}^n \smallsetminus S$ mit der Abbildung f:

$$\mathbb{R}^n \smallsetminus S = A \sqcup B = A' \sqcup B'$$

Dank dem Jordan–Brouwerschen Trennungssatz (J2W) und $n \geq 2$ zerfällt das Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus S = A \sqcup B$ in zwei Gebiete, wobei A unbeschränkt und B beschränkt ist.

Mit $\mathbb{B}^n \subset U$ ist auch $B' = f(\mathbb{B}^n)$ wegzusammenhängend (G1E). Dank J2W trennt $f(\mathbb{D}^n)$ den Raum $\mathbb{R}^n$ nicht, also ist $A' = \mathbb{R}^n \smallsetminus f(\mathbb{D}^n)$ wegzusammenhängend, zudem offen und unbeschränkt (F1O). Wir erhalten so die zweite Zerlegung $\mathbb{R}^n \smallsetminus S = A' \sqcup B'$. Wir wollen zeigen, dass auch B' offen ist. Wir zeigen dies durch Vergleich und schließen $A = A'$ und $B = B'$: Dank Zusammenhang gilt entweder $A' \subset A$ oder $A' \subset B$. Da A' unbeschränkt ist, aber B beschränkt, folgt $A' \subset A$. Dank Zusammenhang gilt $B' \subset B$ oder $B' \subset A$. Aus der Zerlegung $\mathbb{R}^n \smallsetminus S = A \sqcup B = A' \sqcup B'$ folgt $A' = A$ und $B' = B$.

Insbesondere ist das Bild $f(\mathbb{B}^n) = B$ offen in $\mathbb{R}^n$. Das bedeutet, f ist offen. □

Übung J7M. Gehen Sie den Beweis sorgfältig durch und formulieren Sie ihn für $n = 1$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J7f. Topologische Invarianz des Gebietes und des Randes. Die Invarianz des Gebietes (J7K) für $\mathbb{R}^n$ gilt ebenso für $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, wir müssen allerdings explizit fordern, dass der Rand erhalten bleibt, andernfalls gibt es Gegenbeispiele wie J7L.

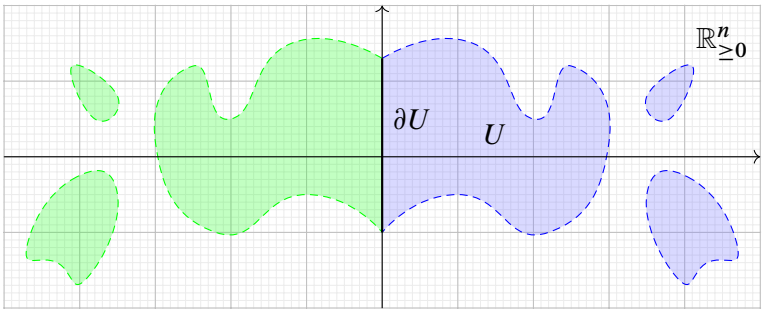


ABBILDUNG J:41. Verdopplung von $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ zu $\mathbb{R}^n$ und von U zu U^*, nach Hermann RORSCHACH (1884–1922) und der gleichnamigen Comicfigur

Fun fact. Bilder wie in J:41 können Sie leicht erstellen, indem Sie Farbe auf Papier auftragen und es dann falten. Die Resultate sind recht zufällig, entfalten aber dank ihrer Symmetrie meist einen ästhetischen Reiz. Solche „Tintenkleckstests“ nutzte der schweizer Psychoanalytiker Hermann RORSCHACH als Grundlage seiner Formdeutungsversuche in der Psychodiagnostik, kurz *Rorschach-Test*.

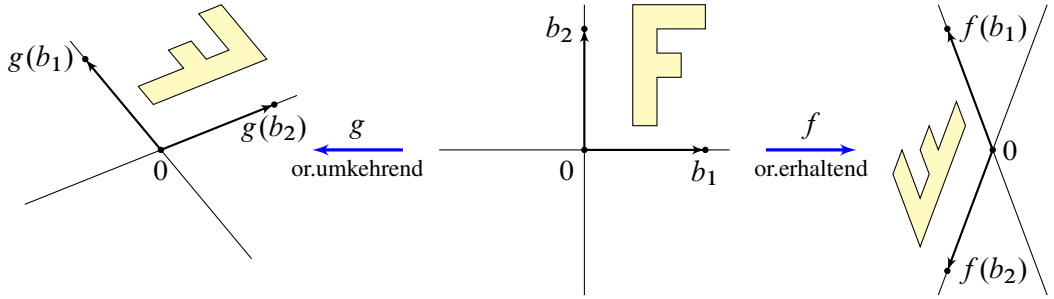
Satz J7N (topologische Invarianz des Gebietes und des Randes)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen. Jede stetige Injektion $f : (U, \partial U) \to (\mathbb{R}^n_{\geq 0}, \partial\mathbb{R}^n_{\geq 0})$ ist offen, also $V = f(U)$ offen in $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und $f : U \to V$ ein Homöomorphismus. Insbesondere gilt $f(\partial U) = \partial V$ und $f(\operatorname{Int} U) = \operatorname{Int} V$.*

BEWEIS. Die Invarianz des Gebietes können wir durch Verdopplung von $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ auf $\mathbb{R}^n$ zurückführen, wie in Abbildung J:41 skizziert. Wir betrachten die Spiegelung $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\sigma(x_1, x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Es gilt $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ mit Fixpunktmenge $\partial\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \partial\mathbb{R}^n_{\leq 0}$. Ist U in $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen, so ist $U^* = U \cup \sigma U$ in $\mathbb{R}^n$ offen. Die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ setzen wir fort zu $f^* : U^* \to \mathbb{R}^n$ durch $f^*(x) = x$ für $x \in U$ und $f^*(x) = \sigma f \sigma(x)$ für $x \in \sigma U$. Dies ist wohldefiniert dank $f(\partial U) \subset \partial\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, zudem ist f stetig nach dem Verklebesatz E1P, denn U und σU sind abgeschlossen in U^*. Wir erhalten eine injektive stetige Abbildung $f^* : U^* \to \mathbb{R}^n$ mit Bild $V^* = f(U^*) = V \cup \sigma V$. Dank Invarianz des Gebietes (J7K) ist f^* offen, und somit V^* offen in $\mathbb{R}^n$ und $f^* : U^* \to V^*$ ein Homöomorphismus, also ist auch $V = V^* \cap \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen in $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und $f : U \to V$ ein Homöomorphismus. □

§J7g. Linear-algebraische Definition der Orientierung. Was ist eine Orientierung des $\mathbb{R}^n$? Wie stellen wir fest, ob ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ die Orientierung erhält oder umkehrt? Bemerkenswerterweise ist die zweite Frage leichter als die erste.

Beispiel. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ wird orientiert durch ihre Ordnung $<$, und h ist entweder wachsend oder fallend. Was eine *Orientierung* allgemein ist, ist weniger offensichtlich.

Beispiel. Für jede affine Abbildung $h : x \mapsto Ax + v$ mit $A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ entscheidet $\operatorname{sign} \det A \in \{\pm 1\}$, das Vorzeichen der Determinante, über das Orientierungsverhalten. Jede Verschiebung $x \mapsto x + v$ erhält die Orientierung, ebenso jede Drehung $x \mapsto Ax$ mit $A \in \mathrm{SO}_n \mathbb{R}$. Die Spiegelung $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kehrt die Orientierung um.



Beispiel. Zwei Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ des $\mathbb{R}^n$ sind *orientierungsäquivalent*, wenn es einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ von B nach B' gibt: Die Spalten von $\gamma(t)$ sind zu jedem Zeitpunkt $0 \le t \le 1$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und deformieren B stetig in B'. Dies ist genau dann möglich, wenn die Basiswechselmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positive Determinante hat, denn $\pi_0 \mathrm{GL}_n \mathbb{R} = \{ \mathrm{GL}_n^{\pm} \mathbb{R} \}$. Damit gelangen wir zu folgender allgemeinen Definition:

Definition J7o. Zwei Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ eines $\mathbb{R}$–Vektorraums V heißen *orientierungsäquivalent*, wenn die Basiswechselmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definiert durch $b_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b'_i$, positive Determinante hat. Die Äquivalenzklasse $[B]$ der Basis B nennen wir eine *Orientierung* auf V, und das Paar $(V, [B])$ einen *orientierten* $\mathbb{R}$–Vektorraum.

Es gibt genau zwei Orientierungen auf V. Die umgekehrte Orientierung zu $[B] = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ erhalten wir durch $-[B] = [-b_1, b_2, \ldots, b_n]$.

Jeder $\mathbb{R}$–lineare Isomorphismus $h : V \xrightarrow{\sim} V'$ transportiert $[B] = [b_1, \ldots, b_n]$ von V zu einer Orientierung $h_*([B]) = [h(b_1), \ldots, h(b_n)]$ von V'. Ein $\mathbb{R}$–linearer Isomorphismus $h : (V, [B]) \xrightarrow{\sim} (V', [B'])$ orientierter Vektorräume heißt *orientierungserhaltend*, falls $h_*([B]) = [B']$ gilt, andernfalls *orientierungsumkehrend*, falls $h_*([B]) = -[B']$ gilt.

Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^n$ hat die kanonische Basis $E = (e_1, \ldots, e_n)$, und diese definiert die kanonische Orientierung $[E]$ auf $\mathbb{R}^n$. Ein $\mathbb{R}$–linearer Automorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ ist *orientierungserhaltend*, falls $h([B]) = [B]$ gilt. Dies ist unabhängig von der Basiswahl und gleichbedeutend damit, dass die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positive Determinante hat. Wir erhalten also die eingangs formulierte Vorzeichenregel.

Beispiel. Für jeden Diffeomorphismus $h : (\mathbb{R}^n, a) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, b)$ entscheidet das Vorzeichen $\operatorname{sign} \det h'(a) \in \{\pm 1\}$ der Determinante der Jacobi–Matrix über das Orientierungsverhalten.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J7h. Topologische Definition des Orientierungsverhaltens. Den oben erklärten Begriff des Orientierungsverhaltens wollen wir nun auf beliebige Homöomorphismen ausdehnen. Die bequemen Techniken der linearen Algebra oder der Differentialrechnung stehen uns hier leider nicht zur Verfügung. Doch zum Glück rettet uns der Abbildungsgrad:

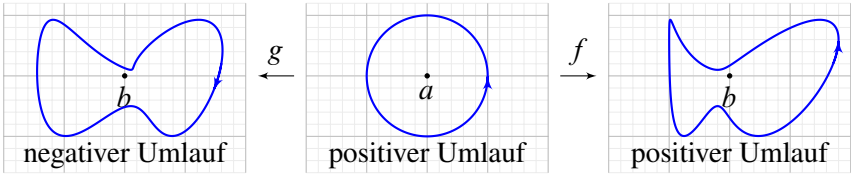


ABBILDUNG J:42. Orientierungsverhalten

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h : (U,a) \xrightarrow{\sim} (V,b)$ ein Homöomorphismus. Zu $B(a,r_0) \subset U$ und $0 < r < r_0$ betrachten wir die Komposition von h mit der Einbettung $g_{a,r} : s \mapsto a + rs$ und der Projektion $f_b : y \mapsto (y-b)/|y-b|$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \varphi_{a,r} & & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ \mathbb{S}^{n-1} & \underset{f_a}{\overset{g_{a,r}}{\rightleftarrows}} & U \smallsetminus \{a\} & \underset{h^{-1}}{\overset{h}{\rightleftarrows}} & V \smallsetminus \{b\} & \underset{g_{b,r'}}{\overset{f_b}{\rightleftarrows}} & \mathbb{S}^{n-1} \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ & & & \psi_{b,r'} & & & \end{array}$$

Dank Homotopie-Invarianz ist $\deg(\varphi_{a,r})$ unabhängig vom gewählten Radius $r \in]0,r_0[$. Ebenso umgekehrt für $\psi_{b,r'}$ und $0 < r' < r'_0$, wobei $B(b,r'_0) \subset V$

Es gilt $f_a \circ g_{a,r} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Eingeschränkt auf $U' = B(a,r_0) \smallsetminus \{a\}$ gilt $g_{a,r} \circ f_a \simeq \mathrm{id}_{U'}$. Ebenso gilt $f_b \circ g_{b,r'} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Eingeschränkt auf $V' = B(b,r'_0) \smallsetminus \{b\}$ gilt $g_{b,r'} \circ f_b \simeq \mathrm{id}_{V'}$. Wir wählen daher $0 < r_1 < r_0$ mit $h(B(a,r_1)) \subset B(b,r'_0)$. Für $r \in]0,r_1[$ gilt dann

$$\begin{aligned} \psi_{b,r'} \circ \varphi_{a,r} &= f_a \circ h^{-1} \circ g_{b,r'} \circ f_b \circ h \circ g_{a,r} \\ &\simeq f_a \circ h^{-1} \circ h \circ g_{a,r} = f_a \circ g_{a,r} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}. \end{aligned}$$

Es folgt $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg(\psi_{b,r'} \circ \varphi_{a,r}) = \deg(\psi_{b,r'}) \cdot \deg(\varphi_{a,r})$ dank Multiplikativität des Abbildungsgrades (J3D), also gilt $\deg(\varphi_{a,r}) = \deg(\psi_{b,r'}) \in \{\pm 1\}$.

Definition J7P. Das *Orientierungsverhalten* von $h : (U,a) \xrightarrow{\sim} (V,b)$ definieren wir durch

$$\mathrm{sign}(h) = \mathrm{sign}(h,a) := \deg(\varphi_{a,r}) \quad \text{wobei } r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } \bar{B}(a,r) \subset U.$$

Dies ist wohldefiniert, also unabhängig vom gewählten Radius r. Im Falle $\mathrm{sign}(h) = +1$ nennen wir h *orientierungserhaltend*, im Falle $\mathrm{sign}(h) = -1$ *orientierungsumkehrend*.

Für $h : U \xrightarrow{\sim} V$ ist $a \mapsto \mathrm{sign}(h,a)$ lokal konstant; ist U zusammenhängend, so ist $\mathrm{sign}(h) \in \{\pm 1\}$ konstant. Wir nennen h kurz *orientierungserhaltend* bzw. *-umkehrend*.

Beispiel. Seien $\emptyset \neq U, V \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $h : U \xrightarrow{\sim} V$ ein Homöomorphismus. Genau dann gilt $\mathrm{sign}(h,a) = +1$, wenn h monoton wächst, und $\mathrm{sign}(h,a) = -1$, wenn h monoton fällt. In Dimension 1 finden wir also die Ausgangsidee wieder.

Übung J7Q. Schon linear ist die Definition des Orientierungsbegriffs raffiniert, topologisch umso mehr, da wir nur sehr wenig Struktur zur Verfügung haben. Sie erweitert die üblichen und wesentlich bequemeren Definitionen für lineare oder glatte Homöomorphismen:

(1) Für $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$ gilt $\mathrm{sign}(A,0) = \mathrm{sign}\det A$.
(2) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h : U \xrightarrow{\sim} V$ ein Homöomorphismus. Ist h im Punkt a differenzierbar mit $A = h'(a) \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$, so gilt $\mathrm{sign}(h,a) = \mathrm{sign}\det A$.

✻ **J7Q.** (1) Nach G2N zerfällt $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ in zwei Wegkomponenten: $\pi_0(\mathrm{GL}_n\mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_n^{\pm}\mathbb{R}\}$. Für $\det A \gtrless 0$ ist A mit $E_\pm = \mathrm{diag}(1,\pm1,1,\dots,1)$ verbindbar durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Das Orientierungsverhalten ändert sich nicht während der Homotopie $H : [0,1]\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} : (t,x) \mapsto (\gamma(t)\,x)/|\gamma(t)\,x|$. Für $E_\pm$ können wir das Orientierungsverhalten leicht ablesen: Schließlich gilt $\mathrm{sign}(A,0) = \mathrm{sign}(E_\pm,0) = \pm1$.

(2) Durch Verschiebung erreichen wir $a = 0$ und $h(0) = 0$, also $h : (U,0) \xrightarrow{\sim} (V,0)$. Gegeben ist $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ sodass $|h(x) - Ax|/|x| \to 0$ für $|x| \to 0$. Dank Kompaktheit von $\mathbb{S}^{n-1}$ gilt $c := \min\{\,|Ax| \mid |x| = 1\,\} > 0$, also $|Ax| \geq c\cdot|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dank Differenzierbarkeit existiert ein kleiner Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\bar{B}(0,r) \subset U$ und hierauf die Approximation $|h(x) - Ax| < c\cdot|x|$. Gemäß J7P berechnen wir den Abbildungsgrad von $\varphi = h\circ g : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} : s \mapsto h(rs)$. Die Komposition $h\circ g$ ist homotop zu $A\circ g$ vermöge der affinen Homotopie $H : [0,1]\times\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ mit $H(t,s) = th(rs) + (1-t)A(rs)$. Dank der Abschätzung $|h(x) - Ax| < c\cdot|x| \leq |Ax|$ liegt diese tatsächlich in $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Wir schließen dank (1).

Übung J7R. (1) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h : (U,a) \to (V,b)$ stetig. Unter welchen Bedingungen liefert $\deg(h,a) = \deg(\varphi_{a,r})$ einen wohldefinierten lokalen Abbildungsgrad?

(2) Untersuchen Sie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^k$ für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie $\deg(f,z_0)$ und $f'(z_0)$. Ist f in z_0 ein lokaler Homöomorphismus? Diffeomorphismus?

(3) Untersuchen Sie ebenso $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^n$, wobei $a \in \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$, und $g(x) = |x|$ sowie $h,k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h(x,y) = (|x|,y)$ und $k(x,y) = (|x|,|y|)$.

✻ **J7R.** (1) Hinreichend ist, dass h im Punkt a ein *lokaler* Homöomorphismus ist. Allgemein genügt folgendes: Es existiert $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a,r_0) \subset U$ und $h(B(a,r_0)\smallsetminus\{a\}) \subset V \smallsetminus \{b\}$. Dann ist für jeden Radius $r \in]0,r_0[$ die Abbildung $\varphi_{a,r} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} : s \mapsto (h(a+rs)-b)/|h(a+rs)b|$ definiert. Dank Homotopie-Invarianz ist $\deg(\varphi_{a,r})$ unabhängig von $r \in]0,r_0[$. Somit ist der lokale Abbildungsgrad $\deg(h,a) := \deg(\varphi_{a,r})$ wohldefiniert.

(2) In jedem Punkt $z_0 \neq 0$ ist f ein lokaler Diffeomorphismus mit $f'(z_0) = kz_0^{k-1}$ und $\deg(f,z_0) = +1$, also orientierungserhaltend. Der Nullpunkt $z_0 = 0$ ist besonders interessant: Wir finden hier $\deg(f,0) = k$. Für $k = 1$ ist $f(z) = z$ ein linearer Isomorphismus, also insbesondere ein Homöomorphismus und sogar ein Diffeomorphismus. Für $k \geq 2$ ist f zwar überall differenzierbar / glatt / analytisch, aber in 0 kein lokaler Diffeomorphismus, nicht einmal Homöomorphismus. Die Ableitung $f'(z) = kz^{k-1}$ gibt im Nullpunkt $z = 0$ keine Auskunft über den lokalen Abbildungsgrad; die topologische Sichtweise ist hier informativer.

(3) In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar mit $f'(x) = nax^{n-1}$. Für $n = 1$ ist f ein linearer Isomorphismus, also insbesondere ein Homöomorphismus und sogar ein Diffeomorphismus. Für $n \geq 3$ ungerade ist f ein Homöomorphismus, aber im Nullpunkt kein lokaler Diffeomorphismus. Für $n \geq 2$ gerade ist f im Nullpunkt 0 kein lokaler Homöomorphismus, somit auch kein Diffeomorphismus.

In $x_0 > 0$ gilt $\deg(f,x_0) = \mathrm{sign}(a)$. In $x_0 < 0$ gilt $\deg(f,x_0) = \mathrm{sign}(a)\cdot(-1)^{n-1}$. Auch hier ist der Nullpunkt $x_0 = 0$ besonders interessant: Hier gilt $\deg(f,0) = \mathrm{sign}(a)\cdot(1+(-1)^{n-1})/2$.

Für g finden wir $\deg(g,x_0) = \mathrm{sign}(x_0)$. Im Nullpunkt $x_0 = (0,0)$ ist g nicht differenzierbar.

Für h finden wir $\deg(h,(x_0,y_0)) = \mathrm{sign}(x_0)$. Auf der y–Achse $\{0\}\times\mathbb{R}$ ist h nicht differenzierbar.

Für k finden wir $\deg(h,(x_0,y_0)) = \mathrm{sign}(x_0)\,\mathrm{sign}(y_0)$. Auf den Koordinatenachsen $(\{0\}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\{0\})$ ist k nicht differenzierbar; hier betrachten wir den lokalen Abbildungsgrad und finden $\deg(h,(x_0,y_0)) = 0$. Überall sonst ist h ein lokaler Diffeomorphismus mit

$$f'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{sign}\,x_0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sign}\,y_0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \det f'(x_0,y_0) = \mathrm{sign}(x_0)\,\mathrm{sign}(y_0).$$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J7i. Topologische Definition der Orientierung. Bislang haben wir erklärt, wann ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend bzw. orientierungsumkehrend ist. Wir wollen schließlich erklären, was topologisch gesehen eine *Orientierung* ist. Wir gehen dabei wie im linearen Fall (J7O) vor:

Definition J7S. Sei X ein topologischer Raum und lokal n–euklidisch, das heißt, zu jedem Punkt $x \in X$ existieren offene Umgebungen U_1 von x in X und V_1 von 0 in $\mathbb{R}^n$ sowie ein Homöomorphismus $k_1 : (V_1, 0) \xrightarrow{\sim} (U_1, x)$. Dies nennen wir *lokale Koordinaten* um x.

Sind auch $k_2 : (V_2, 0) \xrightarrow{\sim} (U_2, x)$ lokale Koordinaten um x, so ist $U_{12} = U_{21} := U_1 \cap U_2$ eine offene Umgebung von x in X sowie $V_{12} := k_1^{-1}(U_{12})$ und $V_{21} := k_2^{-1}(U_{21})$ offene Umgebungen von 0 in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen k_1 und k_2 *orientierungsäquivalent*, wenn der Koordinatenwechsel $k_{12} : (V_{12}, 0) \xrightarrow{\sim} (V_{21}, 0) : x \mapsto k_2^{-1}(k_1(x))$ orientierungserhaltend ist.

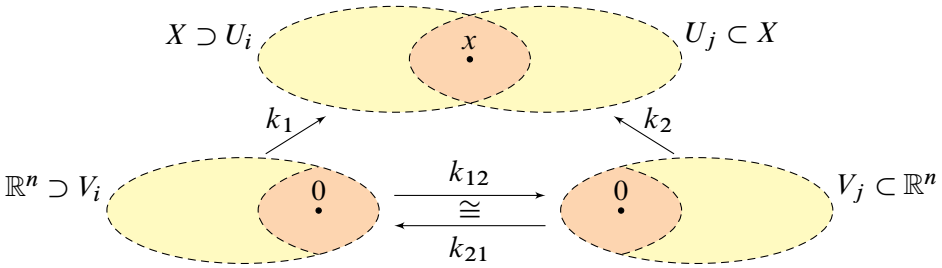


ABBILDUNG J:43. Lokale Koordinaten und Koordinatenwechsel

Dies ist eine Äquivalenzrelation. Wir schreiben $[k]$ für die Äquivalenzklasse der lokalen Koordinaten k, und nennen $[k]$ eine *lokale Orientierung* von X im Punkt x, oder kurz eine *Orientierung* von (X, x). In Dimension $n \geq 1$ zerfällt die Menge aller lokalen Koordinaten von (X, x) in zwei Äquivalenzklassen, daher gibt es genau zwei Orientierungen von (X, x).

Jeder (lokale) Homöomorphismus $h : (X, x) \xrightarrow{\sim} (Y, y)$ transportiert die Orientierung $[k]$ von (X, x) zu einer Orientierung $h_*([k]) := [h \circ k]$ von (Y, y). Ein Homöomorphismus $h : (X, x, [k]) \xrightarrow{\sim} (Y, y, [k'])$ lokal orientierter n–euklidischer Räume heißt *orientierungserhaltend*, falls $h_*([k]) = [k']$, andernfalls *orientierungsumkehrend*, falls $h_*([k]) = -[k']$.

Wir definieren das *Orientierungsverhalten* von h im Punkt x durch das Vorzeichen $\operatorname{sign}(h, x) \in \{\pm 1\}$ sodass $h_*([k]) = \operatorname{sign}(h, x) \cdot [k']$. Dies entspricht der Bezeichnung aus J7P, wobei offene Mengen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ die kanonische Orientierung des $\mathbb{R}^n$ tragen.

Beispiel. Sei V ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum der Dimension n. Jede Wahl einer Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V stiftet einen $\mathbb{R}$–linearen Homöomorphismus $h_B : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ mit $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ und somit die Orientierung $[B]$ von V wie in J7O.

Bemerkung. Der Orientierungsbegriff spielt eine zentrale Rolle für Mannigfaltigkeiten, etwa bei der Klassifikation der Flächen. Aus §A4 kennen wir bereits anschauliche Beispiele: Der Kreisring (Zylindermantel) ist orientierbar, das Möbius–Band hingegen nicht (A:2).

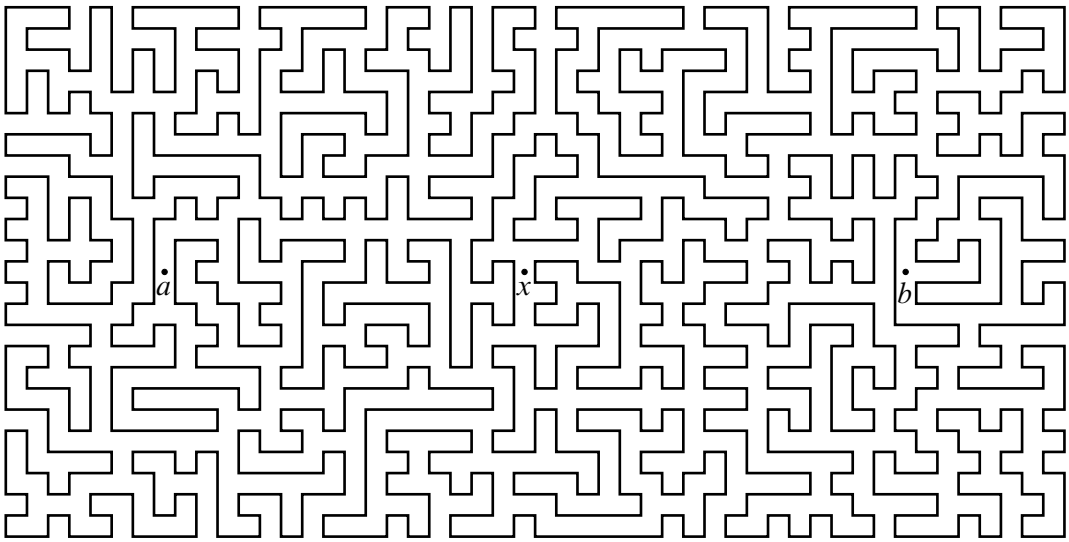
Um diese Begriffe im folgenden Kapitel K nutzen zu können, entwickeln wir hier die zugrundeliegenden topologischen Definitionen J7P und J7S. Die Idee ist denkbar einfach, aber die technisch saubere Ausführung ist erstaunlich aufwändig. Sorgfalt hat ihren Preis.

§J8. Übungen und Ergänzungen

§J8a. Fundamentalsatz der Algebra: Zählung von Nullstellen und Polstellen.

Übung J8A. (1) Sei $\gamma = |v_0, v_1, v_2, \dots, v_n|$ mit $v_0 = v_n$ die einfach geschlossene Polygonkurve aus der folgenden Abbildung. Sei $Q(z) = (z-a)^3(z-b)^5(z-c)^{-2} \in \mathbb{C}(z)$; bestimmen Sie hierzu $\deg(Q \circ \gamma) \in \mathbb{Z}$. Wie beeinflusst die Orientierung von γ das Ergebnis?

(2) Erklären Sie die Berechnung von $\deg(Q \circ \gamma)$ für rationale Funktionen $Q \in \mathbb{C}(z)$ und geschlossene Wege $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$. Was gilt für einfach geschlossene Wege $\gamma : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$?



✻ **J8A.** (1) Zunächst fixieren wir eine Orientierung für γ, etwa überall am äußeren Rand gegen den Uhrzeigersinn. Damit gilt $\deg(\gamma - a) = 0$ und $\deg(\gamma - b) = \deg(\gamma - c) = +1$. Für den Weg $Q \circ \gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^*$ finden wir $\deg(Q \circ \gamma) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3$. Für die umgekehrte Durchlaufung gilt entsprechend $\deg(Q \circ \bar{\gamma}) = -3$.

Dies ist ein schöner Spezialfall von Cauchys Residuensatz aus der komplexen Analysis:

Satz J8B. *Seien $F, G \in \mathbb{C}[z]$ Polynome, faktorisiert gemäß $F(z) = a(z-p_1)\cdots(z-p_m)$ und $G = b(z-q_1)\cdots(z-q_n)$, und $Q(z) = F(z)/G(z) \in \mathbb{C}(z)$ ihr Quotient. Die Nullstellenordnung von $z \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit* $\operatorname{ord}(Q,z) = \operatorname{ord}(F,z) - \operatorname{ord}(G,z) \in \mathbb{Z}$.

Sei $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg, etwa polygonal, und $C = \gamma(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{C}$ das Bild. Die Menge $N = N(F) \cup N(G) = \{ p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n \}$ sei disjunkt von C. Dann gilt:

$$\deg(Q \circ \gamma) = \sum_{z \in N} \operatorname{ord}(Q,z) \cdot \deg(\gamma - z)$$

Speziell für einen einfach geschlossenen Weg $\gamma : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ sei $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C = A \sqcup B$ die Jordan–Zerlegung und B das beschränkte Gebiet, positiv von γ umlaufen. Dann gilt:

$$\deg(Q \circ \gamma) = \sum_{z \in N \cap B} \operatorname{ord}(Q,z)$$

BEWEIS. Die Aussagen sind klar für $Q = (z-a)$. Dank Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes Polynom wie angegeben. Die Umlaufzahl ist dabei additiv (J1T). □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§J8b. Abbildungen auf Sphären. Eine schöne Fingerübung zur Wiederholung:

Übung J8C. (1) Gibt es $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $f(x) \notin \{\pm x\}$ für alle $x \in \mathbb{S}^1$?
(2) Gibt es stetige Abbildungen $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ mit $f(x) \notin \{\pm x\}$ für alle $x \in \mathbb{S}^2$?
(3) Sei $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^1$. Ist f nullhomotop?
(4) Sei $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^2$. Ist f nullhomotop?
(5) Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Ist f surjektiv?

✻ **J8C.** (1) Ja, jede Drehung um $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}\pi$ genügt, etwa eine Vierteldrehung $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Dasselbe gelingt für $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ mit n ungerade durch $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2m-1}, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1})$.

(2) Nein, J5D: Gilt $f(x) \neq \mp x$ für jedes $x \in \mathbb{S}^n$, so ist $H(t,x) = [(1-t)f(x) \pm tx]/|(1-t)f(x) \pm tx|$ eine Homotopie $H : f \simeq \pm\mathrm{id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Nach J3E gilt $\deg(f) = \deg(\pm\mathrm{id}) = (\pm 1)^{n+1}$, also n ungerade.

(3) Nein, $f(z) = z^2$ ist ein Gegenbeispiel. Die Modellabbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^k$ erfüllt $\deg(f) = k$. Sie ist gerade falls $k \in 2\mathbb{Z}$, und ungerade falls $k \in 2\mathbb{Z}+1$. Sie ist zusammenziehbar genau dann wenn $k = 0$.

(4) Ja: Sei n gerade. Für $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gerade gilt $\deg(x \mapsto f(x)) = \deg(x \mapsto f(-x)) = (-1)^{n+1}\deg(f)$, also $\deg(f) = 0$, und somit $f \simeq *$. Für gerade Abbildungen $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ mit $\deg(f) \neq 0$ siehe J3L.

(5) Ja: Nach dem Satz von Borsuk-Ulam (J6A) ist $\deg(f)$ ungerade. Wäre f nicht surjektiv, so wäre f zusammenziehbar (G4D), also $f \simeq *$ und $\deg f = 0$ (J3A), ein Widerspruch. Folglich ist f surjektiv (J3B).

§J8c. Produkte von Sphären. Hier eine schöne Fingerübung zur Vertiefung:

Übung J8D. Wir wollen klären, ob die Räume $X = \mathbb{S}^n$ und $Y = \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ homöomorph sind, oder zumindest homotopie-äquivalent. Ohne Einschränkung seien $n, p, q \geq 1$ und $p \leq q$.

(0) Wenn ein Homöomorphismus $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ existiert, so gilt $n = p + q$.
(1) Welche dieser Räume lassen sich durch ihre Euler–Charakteristik unterscheiden?
(2) Welche dieser Räume lassen sich durch $[\mathbb{S}^k, X]$ und $[\mathbb{S}^k, Y]$ unterscheiden?
(3) Welche dieser Räume lassen sich durch $[X, \mathbb{S}^k]$ und $[Y, \mathbb{S}^k]$ unterscheiden?
(4) Welche dieser Räume lassen sich durch $([X,X], \circ)$ und $([Y,Y], \circ)$ unterscheiden?

Folgern Sie in allen Fällen $\mathbb{S}^n \not\simeq \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ allein mit Hilfe des Abbildungsgrades.

✻ **J8D.** (0) Dies folgt aus der Invarianz der Dimension, hier für Mannigfaltigkeiten (K1C).

Demnach gilt zum Beispiel $\mathbb{S}^3 \not\simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, aber $\mathbb{S}^4 \not\simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ bleibt noch offen.

(1) Es gilt $\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n$ und $\chi(\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q) = (1 + (-1)^p)(1 + (-1)^q)$. Für $n = p + q$ ungerade verschwinden beide. Für $n = p + q$ gerade gilt $\chi(\mathbb{S}^n) = 2$ und $\chi(\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q) \in \{0, 4\}$.

Demnach gilt zum Beispiel $\mathbb{S}^4 \not\simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ und $\mathbb{S}^6 \not\simeq \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, aber $\mathbb{S}^5 \not\simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ bleibt noch offen.

(2) Sei $1 \leq p \leq q$ und $p < n$. Wir wissen $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ dank I4B. Wir zeigen nun $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q] \neq \{*\}$. Hierzu nutzen wir die Einbettung $\iota_1 : \mathbb{S}^p \hookrightarrow \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ mit $\iota_1(x) = (x, y_0)$ und die Projektion $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^p$ mit $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$. Die Komposition $\mathrm{pr}_1 \circ \iota_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^p}$ ist nicht zusammenziehbar (J4A), demnach auch nicht ι_1.

(3) Sei $1 \leq p \leq q$ und $n < q$. Wir wissen $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^q] = \{*\}$ dank I4B. Wir zeigen nun $[\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q, \mathbb{S}^q] \neq \{*\}$. Hierzu nutzen wir die Einbettung $\iota_2 : \mathbb{S}^q \hookrightarrow \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ mit $\iota_2(y) = (x_0, y)$ und die Projektion $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^q$ mit $\mathrm{pr}_2(x, y) = y$. Die Komposition $\mathrm{pr}_2 \circ \iota_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^q}$ ist nicht zusammenziehbar (J4A), demnach auch nicht pr_2.

Die bisherigen Überlegungen zeigen $\mathbb{S}^n \not\simeq \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ bis auf den Fall $n = p = q$ ungerade. Zum Beispiel bleiben $\mathbb{S}^1 \not\simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{S}^3 \not\simeq \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ noch offen. Der folgende erstaunliche Trick löst alle Fälle auf einmal:

(4) Wir kennen das Monoid $([\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n], \circ) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, \cdot)$ aus J3C. Hier gilt: Aus $f \not\simeq *$ und $g \not\simeq *$ folgt $g \circ f \not\simeq *$. In $([\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q, \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q], \circ)$ gilt dies nicht: Wir wählen $x_0, y_0 \in Y$. Die Abbildungen $f, g : Y \to Y$ mit $f(x, y) = (x, y_0)$ und $g(x, y) = (x_0, y)$ sind wie gesehen nicht zusammenziehbar, denn $\mathrm{pr}_1 \circ f \circ \iota_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^p}$ und $\mathrm{pr}_2 \circ g \circ \iota_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^q}$ sind nicht zusammenziehbar. Demnach gilt $f \not\simeq *$ und $g \not\simeq *$ aber dennoch $g \circ f = *$.

Der Unterschied ist subtil aber typisch für die algebraische Topologie: Die Mengen $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ und $[Y, Y]$ sind gleich mächtig, denn beide sind abzählbar unendlich, aber die zusätzliche algebraische Struktur ist verschieden.

§J8d. Retrakte von Graphen und Zusammenziehbarkeit.

Übung J8E. Seien $L \leq K$ Graphen, also Simplizialkomplexe der Dimension ≤ 1. Genau dann ist die Inklusion $i : |L| \hookrightarrow |K|$ ein Retrakt, wenn $\pi_0(i) : \pi_0(|L|) \to \pi_0(|K|)$ ein Retrakt ist. Dies gilt insbesondere, wenn beide Graphen L und K zusammenhängend sind.

✻ **J8E.** Die Implikation „⇒“ ist klar dank Funktorialität von π_0: Wenn zur Inklusion $i : |L| \hookrightarrow |K|$ eine Retraktion $r : |K| \twoheadrightarrow |L|$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_{|L|}$ existiert, so folgt $\pi_0(r) \circ \pi_0(i) = \mathrm{id}_{\pi_0(|L|)}$. Die Umkehrung „⇐“ ist interessanter: Wir konstruieren eine Retraktion $r : |K| \twoheadrightarrow |L|$ in drei Schritten:

(1) Seien $L \leq K$ Bäume. Wir betrachten den Graphen $K' := K \smallsetminus L_1$. Zu jeder Ecke $a \in \Omega(K) = \Omega(K')$ enthält die Komponente $[a]_{K'} \leq K'$ genau eine Ecke $a' \in \Omega(L)$. Dies definiert eine simpliziale Retraktion $\rho : K \to L : a \mapsto a'$. Beweis: Da L nicht leer ist, können wir $b \in \Omega(L)$ wählen. Da K zusammenhängend ist, können wir a mit b durch einen Kantenpfad in K verbinden. Hierbei sei a' die erste Ecke in $\Omega(L)$; dies zeigt die Existenz. Gäbe es zwei solche Ecken $a' \neq a''$ in $[a] \cap L$, so könnten wir sie in L verbinden und ebenso in $K \smallsetminus L_1$, und somit wäre K nicht zykelfrei. Für alle $a \in \Omega(L)$ gilt $\rho(a) = a$, also $\rho|_L = \mathrm{id}_L$. Die Abbildung $\rho : K \to L$ ist simplizial: Dies ist jeweils klar auf K' und auf L, also auch auf $K = K' \cup L$.

(2) Seien $L \leq K$ zusammenhängende Graphen. Wir wählen einen Spannbaum $T \leq L$ von L und erweitern diesen zu einem Spannbaum $T' \leq K$ von K (I3J). Dank (1) haben wir eine simpliziale Retraktion $\rho : T' \to T$. Sie setzt sich fort zu $\rho : T' \cup L \to L$, wir erhalten so $|\rho| : |T' \cup L| \to |L|$. Für jede Kante $\{a,b\} \in K \smallsetminus (T' \cup L)$ wählen wir einen Weg $\gamma_{a,b}$ von $\rho(a)$ und $\rho(b)$ in $|L|$. So setzen wir $|\rho|$ fort zu $r : |K| \to |L|$.

(3) Zu jeder Retraktion $\rho : \pi_0(|K|) \twoheadrightarrow \pi_0(|L|)$ existiert eine Retraktion $r : |K| \twoheadrightarrow |L|$ mit $\pi_0(r) = \rho$. Wir konstruieren diese auf jeder Komponente $[a]_K$ von K: Sei $\rho([a]_K) = [b]_L$. Gilt $\pi_0(i)([b]_L) = [a]_K$, so haben wir dank (2) eine Retraktion $|[a]_K| \twoheadrightarrow |[b]_L|$. Andernfalls wählen wir $[a]_K \to [b]_L$ beliebig, etwa konstant.

Übung J8F. Für jeden simplizialen Graphen K sind äquivalent:

(1) Der Graph K ist ein Baum, also zusammenhängend und zykelfrei.
(2) Der Raum $|K|$ ist zusammenziehbar, kurz $|K| \simeq *$.
(3) Der Graph K ist zusammenhängend und $[|K|, \mathbb{S}^1] = \{*\}$.
(4) Der Raum $|K|$ erfüllt $[\mathbb{S}^1, |K|] = \{*\}$.

Bemerkung: Für endliche Graphen ist „(1) ⇔ (2)“ leichter (I3I), zudem sind äquivalent:

(5) Der Graph K ist zusammenhängend und $\chi(K) \geq 1$.
(6) Der Graph K ist nicht leer, zykelfrei und $\chi(K) \leq 1$.

✻ **J8F.** „(1) ⇒ (2)“: Wir wählen $v_0 \in \Omega$. Zu jeder Ecke $v \in \Omega$ existiert genau ein Kantenpfad $v_0 v_1 \dots v_n$ von v_0 nach $v_n = v$ (I3H). Wir definieren $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \times |K| \to |K|$ auf $[k, k+1] \times [v_{n-1}, v_n]$ für $k \in \mathbb{N}$ durch $h(k+t, x) = (1-t)v_k + t v_{k+1}$ für $k < n-1$, und $h(k+t, x) = t v_k + (1-t)x$ für $k = n-1$, sowie $h(k+t, x) = x$ für $k \geq n$. Dies verklebt sich zur stetigen Abbildung h. Umparametrisiert mit $f : [0,1[\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\geq 0} : t \mapsto t/(1-t)$ erhalten wir $H : [0,1] \times |K| \to |K|$ mit $H(t,x) = h(f(t), x)$ für $0 \leq t < 1$ und $H(1,x) = x$. Damit ist H stetig auf jeder Kante, also stetig auf $|K|$ dank simplizialer Topologie. Wir erhalten $H : \mathrm{const} \simeq \mathrm{id}_{|K|}$ rel $\{v_0\}$.

„(2) ⇒ (3,4)“: Im Falle $|K| \simeq *$ ist K zusammenhängend, es gilt $[|K|, \mathbb{S}^1] = \{*\}$ sowie $[\mathbb{S}^1, |K|] = \{*\}$.

„(3) ⇒ (1)“: Gilt $[|K|, \mathbb{S}^1] = \{*\}$, so ist K zykelfrei. Andernfalls gäbe es eine Kante $\{a,b\} \in K_1$, deren Ecken a, b durch einen Kantenpfad $v_0 v_1 \cdots v_n$ in $K \smallsetminus \{\{a,b\}\}$ verbindbar sind. Wir erhalten den Teilgraphen $L = \langle \{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_0\} \rangle \leq K$. Dies definiert eine Einbettung $i : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} |L| \hookrightarrow |K|$ und dank J8E eine Retraktion $r : |K| \twoheadrightarrow |L| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$. Dank $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ wissen wir $\mathbb{S}^1 \not\simeq *$. Wegen $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ sind daher r und i nicht zusammenziehbar. Aus $r \not\simeq *$ folgt $[|K|, \mathbb{S}^1] \neq \{*\}$, im Widerspruch zu unserer Annahme.

„(4) ⇒ (1)“: Gilt $[\mathbb{S}^1, |K|] = \{*\}$, so ist K zusammenhängend. Andernfalls wäre entweder $|K|$ leer und $[\mathbb{S}^1, |K|] = \emptyset$, oder aber es gäbe Ecken $a, b \in \Omega(K)$, die nicht verbindbar sind, und somit wären die Abbildungen $f : \mathbb{S}^1 \to \{a\} \hookrightarrow |K|$ und $g : \mathbb{S}^1 \to \{b\} \hookrightarrow |K|$ nicht homotop, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Zudem ist K zykelfrei. Andernfalls gäbe es eine Einbettung $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow |K|$ und eine Retraktion $r : |K| \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$, wie oben gesehen. Aus $i \not\simeq *$ folgt $[\mathbb{S}^1, |K|] \neq \{*\}$, im Widerspruch zu unserer Annahme.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Topology is like modern art: It is easy to draw pictures,
but it takes a lot of sophistication to interpret them.
Hansjörg GEIGES, *How to draw up to*
five-dimensional manifolds?

KAPITEL K

Klassifikation kompakter Flächen

§K0. Einführung und Überblick

Mit dem Instrumentarium der vorangegangenen Kapitel untersuchen wir nun eingehend den Begriff der Mannigfaltigkeit (A0A). Zur Erinnerung: Eine *n–dimensionale Mannigfaltigkeit* ist ein metrisierbarer topologischer Raum, der lokal homöomorph zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist, bzw. im berandeten Fall zum Halbraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Dies ist eine lokale Eigenschaft, und es stellt sich die Frage, wie solche Räume global aussehen.

Als Problem aufgeworfen wurde dies von Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) zunächst für Flächen und in höherer Dimension fortgeführt von Bernhard RIEMANN (1826–1866) und Henri POINCARÉ (1854–1912) sowie vielen anderen. Die hieraus entstehende Theorie ist eines der faszinierendsten Kapitel der Topologie und Geometrie und hat seit zweihundert Jahren wesentliche Entwicklungen der Mathematik hervorgebracht.

Eindimensionale Mannigfaltigkeiten nennen wir auch *Kurven*, und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten nennen wir *Flächen*. Unser Ziel ist die Einführung der nötigen Begriffe und Werkzeuge zur Klassifikation aller kompakten Kurven und Flächen bis auf Homöomorphie. Jede Mannigfaltigkeit zerfällt in die topologische Summe ihrer Zusammenhangskomponenten, daher genügt es meist, nur zusammenhängende zu betrachten.

Über Kurven und Flächen hinaus werden die Entdeckungen in höheren Dimensionen noch abenteuerlicher. Die uns umgebende Welt scheint zunächst dreidimensional. Physiker interpretieren dies in der Relativitätstheorie aus gutem Grund anders und arbeiten mit vier Dimensionen. Das Studium solcher Mannigfaltigkeiten niedriger Dimension (das heißt ≤ 4) ist somit von unmittelbarem Interesse sowohl für Mathematiker als auch für Physiker. In den letzten Jahrzehnten haben beide Seiten hierzu wesentliche Einsichten beigetragen, und aus ganz unterschiedlichen Gründen spielen die Dimensionen 3 und 4 eine besondere Rolle.

Zur Vorbereitung der Klassifikation möchte ich einen würdigen Rahmen schaffen, für Mannigfaltigkeiten werben und das Panorama grob skizzieren. Vor diesem entwickeln wir dann die (im Vergleich eher bescheidene) Klassifikation der Kurven und Flächen. Über den Beginn dieser Entdeckungsreise schrieb Vladimir ARNOLD (1937–2010):

The theorem of classification of surfaces is a top-class mathematical achievement, comparable with the discovery of America or X-rays.

§K0a. Exotische Flächenwesen und wo sie zu finden sind. Zur Erinnerung und als Motivation für die folgenden Untersuchungen zeige ich nochmals die Protagonisten dieses Kapitels: Flächen! Die Einleitung (§A4) zeigt weitere hilfreiche Illustrationen und gibt eine anschauliche Einführung. Darauf wollen wir nun aufbauen.

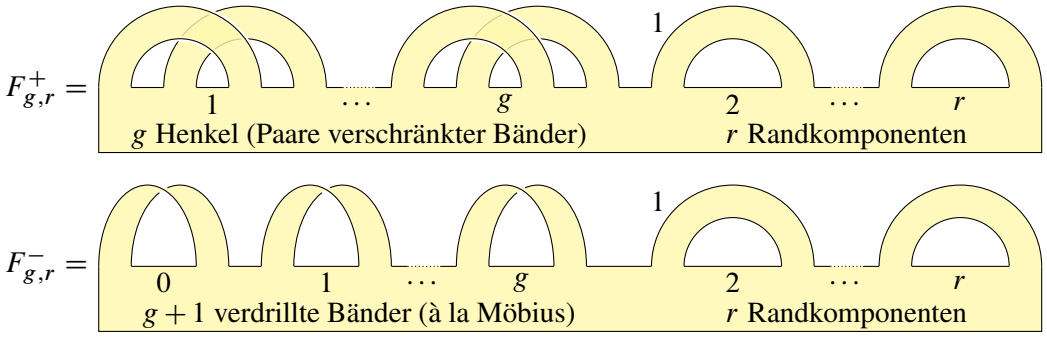


ABBILDUNG K:1. Glatte Modelle $F^{\pm}_{g,r} \subset \mathbb{R}^3$ berandeter Flächen

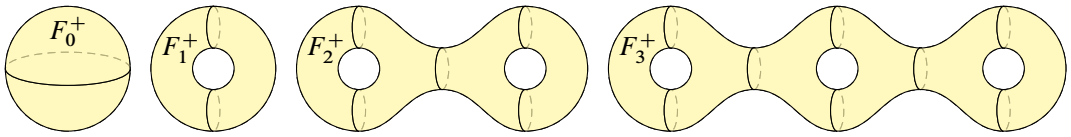


ABBILDUNG K:2. Glatte Modelle $F^+_g \subset \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen.

Unser Ziel in diesem Kapitel ist der Klassifikationssatz kompakter Flächen.

Nicht-kompakte Flächen können wesentlich komplizierter sein; hiervon können und sollten Sie sich selbst überzeugen, indem Sie möglichst vielgestaltige Beispiele von Flächen $X \subset \mathbb{R}^3$ skizzieren, etwa die folgenden: Sind diese Flächen homöomorph?

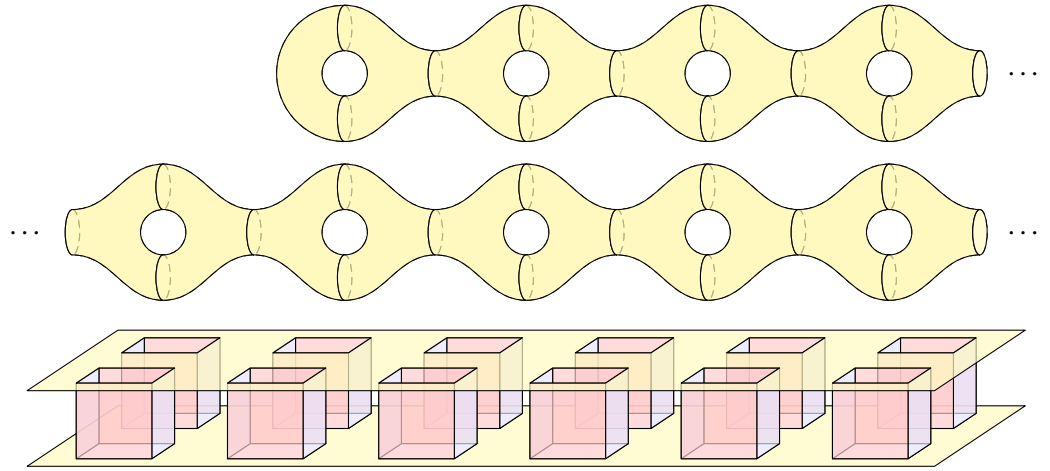


ABBILDUNG K:3. Offene Flächen unendlichen Gechlechts

§K1. Mannigfaltigkeiten

☞ **§K1a. Lokal euklidische Räume.** Wir erinnern an folgenden grundlegenden Begriff: ☜

Definition K1A. Ein topologischer Raum M heißt *n–euklidisch* im Punkt $a \in M$, falls es eine offene Umgebung $U \subset M$ und einen Homöomorphismus $h : (U, a) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, 0)$ gibt.

Gilt dies in jedem Punkt $a \in M$, so nennen wir M *lokal euklidisch der Dimension n*.

Beispiele. Zunächst einige illustrative und warnende Beispiele:

(0) Jeder diskrete Raum ist lokal euklidisch der Dimension 0.
(1) Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist lokal euklidisch der Dimension n (A1D).
(2) Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist lokal euklidisch der Dimension n (A1L).
(3) Der abgeschlossene Ball $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist *nicht* lokal euklidisch (J7I).
(4) Die verzweigte Gerade (E2E) ist lokal euklidisch, aber nicht hausdorffsch.
(5) Die lange Gerade $L_{>0}$ (F9K) ist lokal euklidisch, aber nicht zweitabzählbar.

Aussage (0) ist klar, (1) folgt aus $B(x, \varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ (A1D), (2) folgt dank stereographischer Projektion (A1L), und (3) folgt aus der Invarianz des Randes (J7I).

Beispiele (4) und (5) zeigen, dass gewisse Pathologien auftreten können: Allein die Bedingung, lokal euklidisch zu sein, kann dies nicht ausschließen. Wir müssen daher noch weitere Vorkehrungen treffen. Diese sind eher technischer Natur aber für die weiteren Ergebnisse unentbehrlich. Da diese Vorsichtsmaßnahmen in die nachfolgende Definition des Begriffs der *Mannigfaltigkeit* einfließen sollen, möchte ich sie zuvor kurz erläutern.

Bemerkung. Wir nutzen den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ als Modell. Damit können wir lokal euklidische Räume untersuchen und eine schöne und umfangreiche Theorie der *Mannigfaltigkeiten ohne Rand* entwickeln. Aber wichtige Beispiele wie der Ball $\mathbb{D}^n$ entziehen sich diesem Begriff solange wir den Rand nicht erfassen. Wir werden daher gleich allgemeiner *Mannigfaltigkeiten mit Rand* betrachten, mit dem Halbraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ als Modell.

Bemerkung. Lokal euklidisch impliziert die Trennungseigenschaft T_1, aber nicht T_2, wie Beispiel (4) zeigt. Die Hausdorff–Eigenschaft muss daher gesondert gefordert werden.

Bemerkung. Lokal euklidisch impliziert erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar: Es gibt lokal euklidische Hausdorff–Räume ohne abzählbare Basis der Topologie, wie Beispiel (5). Meist wird man daher neben lokal euklidisch und hausdorffsch noch fordern, dass die Topologie des Raumes M eine abzählbare Basis hat, oder äquivalent hierzu: metrisierbar ist.

Alle drei Bedingungen laufen auf dasselbe hinaus: Mannigfaltigkeiten sollen topologisch gesehen nicht „zu groß“ sein. Ohne diese Einschränkung stößt man auf Beispiele, die man getrost als pathologisch betrachten darf und ausschließen möchte. Diese Vorsichtsmaßnahme drängt sich zunächst nicht auf, wird im Folgenden aber in vielen Beweisen benötigt. Beispielsweise möchten wir zur leichteren Handhabung unsere Mannigfaltigkeiten triangulieren, und für Beispiele wie die lange Gerade $L_{>0}$ (F9K) ist dies sicher nicht möglich.

Bemerkung. Ist M lokal euklidisch der Dimension n, dann ist M lokal zusammenziehbar. Die Komponenten und Wegkomponenten von M stimmen somit überein (G3C) und definieren eine offene Zerlegung $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i$. Jede Komponente M_i ist selbst lokal euklidisch der Dimension n. Daher können wir uns auf zusammenhängende Räume konzentrieren.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K1b. Topologische Mannigfaltigkeiten. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Als Modell für n–dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand dient der n–dimensionale euklidische Halbraum

$$\mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0 \}.$$

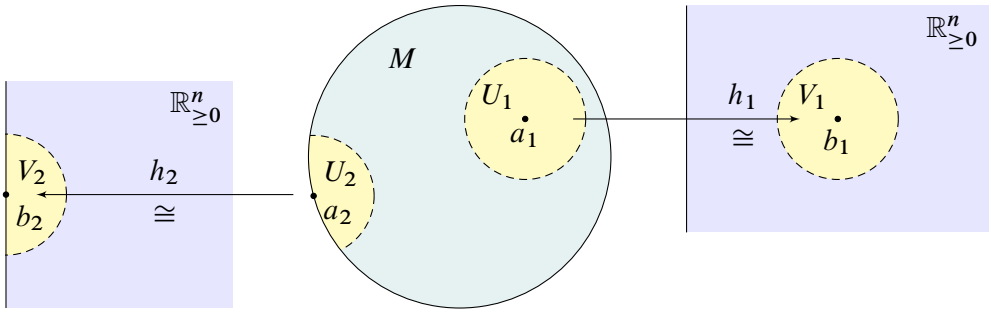
Sein Inneres ist der offene n–dimensionale Halbraum

$$\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0 \}.$$

Sein Rand ist die $(n-1)$–dimensionale Hyperebene

$$\partial \mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0 \}.$$

Dieser Modellraum erlaubt uns, in Koordinaten zu rechnen: Hier können wir Analysis und Geometrie betreiben. Auch topologisch verstehen wir diese Räume gut (Kapitel J).



Definition K1B. Ein topologischer Raum M heißt *n–Mannigfaltigkeit*, wenn gilt:

(0) Der Raum M ist hausdorffsch (§D3g) und jede Komponente zweitabzählbar (§D6e). Für lokal euklidische Räume gemäß (1) ist dies äquivalent zur Metrisierbarkeit (K1X).

(1) Zu jedem Punkt $a \in M$ existiert ein Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\sim} V$ von einer offenen Umgebung $U \subset M$ von a auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ in unserem Modellraum.

Wir nennen $h : U \xrightarrow{\sim} V$ eine *lokale Karte* von M und $h^{-1} : V \xrightarrow{\sim} U$ eine *lokale Parametrisierung* von M mit Kartengebiet $U \subset M$ und Parametergebiet $V \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.

Die Menge der inneren Punkte bzw. Randpunkte von M bezeichnen wir mit

$$\operatorname{Int} M := \{ a \in M \mid \exists \text{ Karte } h : h(a) \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\geq 0} \},$$
$$\partial M := \{ a \in M \mid \exists \text{ Karte } h : h(a) \in \partial \mathbb{R}^n_{\geq 0} \}.$$

Eine Mannigfaltigkeit M mit $\partial M = \emptyset$ heißt *unberandet*. Ist M zudem kompakt, so nennen wir M eine *geschlossene Mannigfaltigkeit*, andernfalls eine *offene Mannigfaltigkeit*.

Ein *Atlas* $\mathscr{A}$ von M ist eine Kartenfamilie, die den Raum M überdeckt, also

$$\mathscr{A} = \Big(M \underset{\text{offen}}{\supset} U_i \underset{\cong}{\xrightarrow{h_i}} V_i \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n_{\geq 0} \Big)_{i \in I} \quad \text{mit} \quad M = \bigcup\nolimits_{i \in I} U_i .$$

Beispiele. (1) Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine offene n–Mannigfaltigkeit.
(2) Der Halbraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ist eine n–Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.
(3) Der Ball $\mathbb{D}^n$ ist eine kompakte n–Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.
(4) Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist eine geschlossene n–Mannigfaltigkeit (kompakt, ohne Rand).
(5) Ist M eine n–Mannigfaltigkeit, so auch jede offene Teilmenge $U \subset M$.

§K1c. Kartenwechsel. Zu $i, j \in I$ ist $U_{ij} := U_i \cap U_j$ offen in M und $V_{ij} = h_i(U_{ij})$ offen in $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$; eventuell gilt $U_{ij} = V_{ij} = \emptyset$. Der *Kartenwechsel* ist der Homöomorphismus

$$h_{ij} \,:\, V_i \supset V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji} \subset V_j \,:\, x \mapsto h_j(h_i^{-1}(x))$$

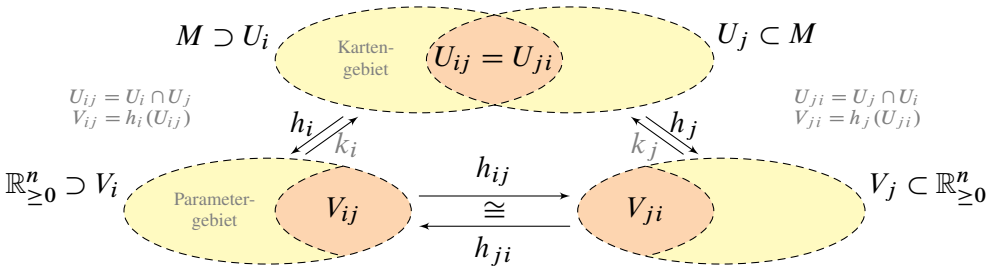


ABBILDUNG K:4. Zwei lokale Karten h_i, h_j und ihre Kartenwechsel h_{ij}, h_{ji}

Die Mannigfaltigkeit M und ein Atlas $\mathscr{A} = (h_i)_{i \in I}$ bestimmen die Kartenwechsel $(h_{ij})_{i,j \in I}$. Umgekehrt können wir M rekonstruieren durch Verkleben der Karten (K1U).

Der leere Raum $\emptyset$ ist eine n–Mannigfaltigkeit für *jedes* $n \in \mathbb{N}$. Mannigfaltigkeiten der Dimension 0 sind die diskreten Räume. Mannigfaltigkeiten der Dimension 1 nennen wir *Kurven*, Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 entsprechend *Flächen*.

Satz K1C. *(1) Für Inneres und Rand gilt* $M = \operatorname{Int} M \cup \partial M$ *und* $\operatorname{Int} M \cap \partial M = \emptyset$.

(2) Ist $M \neq \emptyset$ *sowohl* m*–Mannigfaltigkeit als auch* n*–Mannigfaltigkeit, so folgt* $m = n$.

BEWEIS. Übung: Nutzen Sie die Werkzeuge des vorigen Kapitels J! □

✻ **K1C.** (1) Liegt $a \in M$ in einer Karte $h_1 : U_1 \xrightarrow{\sim} V_1$ im Inneren / im Rand, so in jeder Karte $h_2 : U_2 \xrightarrow{\sim} V_2$ dank Kartenwechsel $h_{12} : V_{12} \xrightarrow{\sim} V_{21}$ und Invarianz des Randes (J7I).

(2) Sei $a \in M$ und $h_1 : M \supset U_1 \xrightarrow{\sim} V_1 \subset \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ und $h_2 : M \supset U_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ lokale Karten um a. Der Kartenwechsel $V_{12} \cong V_{21}$ zwischen den offenen Mengen $V_{12} \subset \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ und $V_{21} \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ zeigt $m = n$ (J7J).

Definition K1D. Ist $M \neq \emptyset$ eine n–Mannigfaltigkeit, so nennen wir n die *Dimension* von M, geschrieben $\dim M = n$. Dies ist eine Eigenschaft des topologischen Raumes M.

Statt *n–Mannigfaltigkeit* sagen wir auch *Mannigfaltigkeit der Dimension n*.

Bemerkung. Für jede Mannigfaltigkeit M sind ihr Inneres $\operatorname{Int} M$ und ihr Rand ∂M *intrinsische* Begriffe, die allein der Topologie des Raumes M entspringen.

Ist M Teilmenge eines größeren Raumes X, so gibt es daneben die Begriffe Inneres M° und Rand δM bezüglich des umgebenden Raumes X. Dies sind *extrinsische* Begriffe, denn sie hängen nicht allein vom Raum M ab, sondern vor allem von seiner Lage in X.

Beispiel. Für die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{D}^n$ gilt $\operatorname{Int} M = M^\circ = \mathbb{B}^n$ und $\partial M = \delta M = \mathbb{S}^{n-1}$ bezüglich $\mathbb{R}^n$. Eingebettet in $\mathbb{R}^{n+1}$ gilt $M^\circ = \emptyset$ und $\delta M = M$ bezüglich $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beispiel. Für $N = \mathbb{S}^{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$ unterscheiden sich die intrinsischen Begriffe $\operatorname{Int} N = N$ und $\partial N = \emptyset$ von den extrinsischen Begriffen $N^\circ = \emptyset$ und $\delta N = N$ bezüglich $\mathbb{R}^n$.

Um diese Begriffe sorgsam zu unterscheiden, haben wir die nötigen Definitionen und Sätze dargelegt und nutzen eine möglichst genaue Schreib- und Sprechweise.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§K1d. Orientierbarkeit.** Gegeben sei $(M,\mathscr{A})$, eine Mannigfaltigkeit M mit einem ☜ Atlas $\mathscr{A} = \big(h_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i\big)_{i\in I}$. Dank $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ können wir uns M als Verklebung der Räume $(V_i)_{i\in I}$ vorstellen. Auf der disjunkten Vereinigung $V = \coprod_{i\in I} V_i = \bigcup_{i\in I}\{i\}\times V_i$ haben wir die stetige Surjektion $f : V \twoheadrightarrow M$ mit $f(i,x) = h_i^{-1}(x)$. Identifiziert werden jeweils $(i,x) \sim (j,x')$ mit $x \in V_{ij}$, $x' \in V_{ji}$ und $h_{ij}(x) = x'$. Die Kartenwechsel h_{ij} dienen hier als Verklebevorschrift und erzeugen die Äquivalenzrelation $\sim$ auf V. Die Abbildung $f : V \twoheadrightarrow M$ induziert einen Homöomorphismus $\bar f : V/_\sim \xrightarrow{\sim} M$ (E1N).

✍ **Definition K1E.** Ein Atlas $\mathscr{A}$ von M heißt *orientiert*, wenn alle Kartenwechsel zwischen ✍ Karten in $\mathscr{A}$ orientierungserhaltend sind (im Sinne der topologischen Definition J7P).
Eine Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn ein orientierter Atlas $\mathscr{A}$ existiert.
Eine *Orientierung* auf M ist ein (maximaler) orientierter Atlas $\mathscr{A}$ von M.
Das Paar $(M,\mathscr{A})$ heißt dann eine *orientierte Mannigfaltigkeit*.

☞ **Bemerkung.** Ist die Mannigfaltigkeit M zusammenhängend, so existieren entweder keine ☜ oder genau zwei Orientierungen auf M. Das bedeutet: Orientierbarkeit ist eine *Eigenschaft* von M, hingegen ist die Wahl einer Orientierung eine zusätzliche *Struktur* auf M, die wir durch einen orientierten Atlas $\mathscr{A}$ codieren.

☞ **Beispiele.** ☜
- Jede 0–Mannigfaltigkeit ist orientierbar. Diese Dimension ist eine Ausnahme: Die Orientierung eines Punktes ist die Zuweisung eines Vorzeichens $+$ oder $-$.
- Jede 1–Mannigfaltigkeit ist orientierbar, wie wir der Klassifikation entnehmen (§K1h).
- Das Möbius–Band (A:2) ist eine nicht-orientierbare 2–Mannigfaltigkeit (K1H).
- Der Ball $\mathbb{D}^n$ und die Sphäre $\mathbb{S}^n$ sind orientierbare n–Mannigfaltigkeiten (K1I).

☞ **§K1e. Differenzierbarkeit.** Auch wenn wir davon zunächst wenig Gebrauch machen, ☜ so möchte ich doch den wichtigen Begriff der *differenzierbaren Mannigfaltigkeit* erklären.

✍ **Definition K1F.** Ein Atlas $\mathscr{A}$ heißt *differenzierbar* der Klasse $\mathscr{C}^r$ (für $1 \le r \le \infty$) oder ✍ *glatt* ($r = \infty$) oder *analytisch* ($r = \omega$), wenn alle Kartenwechsel von der Klasse $\mathscr{C}^r$ sind.
Eine Mannigfaltigkeit M heißt *$\mathscr{C}^r$–glättbar*, wenn ein $\mathscr{C}^r$–Atlas $\mathscr{A}$ auf M existiert.
Eine *$\mathscr{C}^r$–Differenzierbarkeitsstruktur* auf M ist ein maximaler $\mathscr{C}^r$–Atlas $\mathscr{A}$ von M.
Das Paar $(M,\mathscr{A})$ heißt dann *$\mathscr{C}^r$–differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

☞ Seien $(M,\mathscr{A})$ und $(N,\mathscr{B})$ zwei $\mathscr{C}^r$–Mannigfaltigkeiten mit maximalen $\mathscr{C}^r$–Atlanten ☜ und $f : M \to N$ stetig. Um jeden Punkt $x \in \operatorname{Int} M$ und seinen Bildpunkt $y = f(x) \in \operatorname{Int} N$ existieren lokale Karten $h : (U,x) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^m,0)$ in $\mathscr{A}$ und $k : (V,y) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n,0)$ in $\mathscr{B}$ mit $f(U) \subset V$. Wir erhalten so $g = k \circ f|_U^V \circ h^{-1} : (\mathbb{R}^m,0) \to (\mathbb{R}^n,0)$, genannt *$f$ in lokalen Karten*. Im Rand nutzen wir entsprechend die Modellräume $(\mathbb{R}^m_{\ge 0},0)$ und $(\mathbb{R}^n_{\ge 0},0)$.

Wir nennen die Abbildung $f : M \to N$ *differenzierbar* der Klasse $\mathscr{C}^s$ (mit $1 \le s \le r$) um den Punkt x, wenn dies lokal für die Abbildung g gilt. Diese Eigenschaft ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von den gewählten Karten, denn jede andere Karte aus $\mathscr{A}$ bzw. $\mathscr{B}$ führt per $\mathscr{C}^r$–Kartenwechsel zum selben Differenzierbarkeitsbegriff.

☞ **Bemerkung.** Eine topologische Mannigfaltigkeit zu sein, ist eine Eigenschaft des topologi- ☜ schen Raumes M. Hingegen ist die Differenzierbarkeit keine Eigenschaft von M, sondern des gewählten Atlas $\mathscr{A}$. Die Wahl eines $\mathscr{C}^r$–Atlas ist eine zusätzliche *Struktur* auf M. Auf manchen topologischen Mannigfaltigkeiten existiert keine Differenzierbarkeitsstruktur, auf manchen existieren mehrere, wie John MILNOR 1956 entdeckte (Fields–Medaille 1962).

§K1f. Karten und Atlanten. Zur Einübung und Wiederholung der Grundbegriffe:

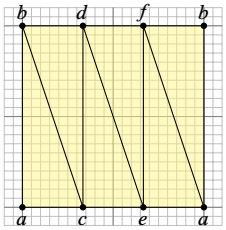
Übung K1G. Für die topologische Mannigfaltigkeit $M =]-1,1[\subset \mathbb{R}$ betrachten wir die vier Karten $h_1, h_2, h_3, h_4 : M \xrightarrow{\sim}]-1,1[: x \mapsto +x, -x, +x^3, -x^3$.

(1) Ist $\mathscr{A} = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ ein Atlas für M? orientiert? glatt?
(2) Welche Teilatlanten von $\mathscr{A}$ sind orientiert? glatt? beides?

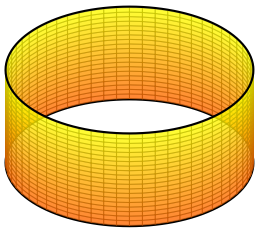
✻ **K1G.** Jede offene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n–Mannigfaltigkeit, in unserem Beispiel gilt $n = 1$. In dieser Übung sollen Sie mögliche Atlanten mit zusätzlicher Struktur untersuchen und hieran die Definitionen einüben.

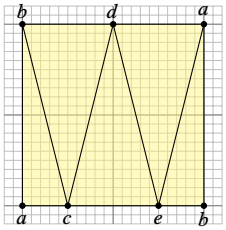
(1) Ja, $\mathscr{A}$ ist ein Atlas: Der Kartenbereich M ist offen und jede Abbildung $h_i : M \to]-1,1[\subset \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus, also eine *Karte*. Ganz M wird überdeckt (von jeder Karte). Der Atlas $\mathscr{A}$ ist nicht *orientiert*: Der Kartenwechsel $h_{12} :]-1,1[\xrightarrow{\sim}]-1,1[: x \mapsto -x$ ist nicht orientierungserhaltend. Der Atlas $\mathscr{A}$ ist nicht $\mathscr{C}^1$*–glatt*: Der Kartenwechsel $h_{31} :]-1,1[\xrightarrow{\sim}]-1,1[: x \mapsto x^{1/3}$ ist nicht differenzierbar (im Punkt 0).

(2) Jeder der vier Atlanten (h_1), (h_2), (h_3), (h_4) ist orientiert und glatt. Jeder der beiden Atlanten (h_1, h_3), (h_2, h_4) ist orientiert, aber nicht glatt. Jeder der beiden Atlanten (h_1, h_2), (h_3, h_4) ist glatt, aber nicht orientiert. Der Atlas $\mathscr{A} = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ ist weder orientiert noch glatt, gleiches gilt für jeden Teilatlas mit drei Karten.



$$f : \mathbb{R} \times [-1,1] \twoheadrightarrow Z \subset \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(\pi s) \\ 3\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$





$$g : \mathbb{R} \times [-1,1] \twoheadrightarrow M \subset \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [3 + t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [3 + t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$

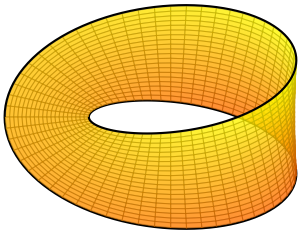


ABBILDUNG K:5. Zylindermantel und Möbius–Band eingebettet im $\mathbb{R}^3$

Übung K1H. Geben Sie für das Möbius–Band aus Abbildung K:5 explizit einen minimalen Atlas an (mit zwei Karten). Gelingt dies glatt? orientiert? Analog für den Zylindermantel. Wiederholung: Wie lassen sich diese Räume triangulieren? mit möglichst wenigen Ecken?

✻ **K1H.** (1) Die Abbildung $g : \mathbb{R} \times [-1,1] \twoheadrightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ ist kein Homöomorphismus, aber immerhin eine Identifizierung. Die Einschränkungen $g_i : V_i \to U_i$ auf $V_1 =]-1,1[\times [-1,1]$ und $V_2 =]0,2[\times [-1,1]$ mit $U_i = g(V_i)$ sind Homöomorphismen. Die Mengen $U_1, U_2 \subset M$ sind offen und überdecken M. Wir erhalten so den Atlas $\mathscr{A} = (h_i = g_i^{-1} : U_i \xrightarrow{\sim} V_i)$. Der Kartenwechsel h_{12} ist definiert von $V_{12} = R_0 \cup R_1$ auf $V_{21} = R_1 \cup R_2$, wobei $R_k =]k-1, k[\times [-1,1]$. Der Kartenwechsel $h_{12} : V_{12} \xrightarrow{\sim} V_{21}$ ist gegeben durch $R_1 \xrightarrow{\sim} R_1 : (x,y) \mapsto (x,y)$ und $R_0 \xrightarrow{\sim} R_2 : (x,y) \mapsto (x+2, -y)$. Somit ist $\mathscr{A}$ glatt, aber nicht orientiert.

Es gilt die wesentlich stärkere Aussage: Die Mannigfaltigkeit M erlaubt keinen orientierten Atlas. Dies sehen wir daran, dass wir lokale Orientierungen (J7S) durch einmaligen Umlauf umkehren können.

(2) Für den Zylindermantel gehen wir wörtlich genauso vor. Der Kartenwechsel $h_{12} : V_{12} \xrightarrow{\sim} V_{21}$ ist hier gegeben durch $R_1 \xrightarrow{\sim} R_1 : (x,y) \mapsto (x,y)$ und $R_0 \xrightarrow{\sim} R_2 : (x,y) \mapsto (x+2, +y)$. Somit ist der Atlas $\mathscr{A}$ auch hier glatt und zudem orientiert. Anschauung und formale Definition arbeiten wunderbar zusammen!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Im vorigen Beispiel haben wir einen Atlas (h_1, h_2) für das Möbius–Band M gefunden, dieser Atlas ist jedoch nicht orientiert. Das beweist vorerst leider noch nicht, dass M nicht orientiert werden kann. Dazu schauen wir noch etwas genauer hin:

Satz K1H. *Sei $(M, \mathscr{A})$ eine n–Mannigfaltigkeit, der Dimension $n \geq 2$, orientiert durch den Atlas $\mathscr{A} = (h_i : M \supset U_i \xrightarrow{\sim} V_i \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0})_{i \in J}$.*

(1) Sei $h_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0$ eine weitere Karte. Das Kartengebiet U_0 sei zusammenhängend. Dann existiert ein Vorzeichen $s \in \{\pm 1\}$ mit $\operatorname{sign}(h_{0i}, a) = s$ für alle $i \in I$ und $a \in V_{0i}$.

Im Falle $s = -1$ können wir h_0 spiegeln zu $h_0 \circ \sigma$ mit $\sigma : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, -x_n)$ und so das gewünschte Orientierungsverhalten $s = +1$ erreichen.

(2) Jeden Atlas $\mathscr{B} = (h_j)_{j \in J}$ zusammenhängender Karten können wir somit orientieren wie $\mathscr{A}$, indem wir jede negative Karte h_j spiegeln.

(3) Unser obiger Atlas (h_1, h_2) des Möbius–Bandes M erlaubt keine solche Korrektur. Demnach ist das Möbius–Band M nicht orientierbar.

BEWEIS. (1) Wir definieren $s(a)$ durch $s(a) := \operatorname{sign}(h_{0i}, a)$ mit $i \in I$ und $a \in V_{0i}$. Mindestens ein solcher Index $i \in I$ existiert, dank $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. Für je zwei solche Indizes $i, j \in I$ ist das Ergebnis gleich, da wir $\mathscr{A}$ als orieniert voraussetzen, also $\operatorname{sign} h_{ij} = +1$. Somit ist $s(a)$ wohldefiniert. Zudem ist $a \mapsto s(a)$ lokal konstant auf V_0. Da wir V_0 als zusammenhängend voraussetzen, ist s konstant. Die weiteren Aussagen (2,3) sind klar. □

Übung K1I. (1) Finden Sie für die Sphäre $\mathbb{S}^n$ einen möglichst einfachen Atlas $\mathscr{A}$. Gelingt dies glatt? analytisch? algebraisch? rational? Konstruieren Sie einen nicht-orientierten sowie zwei gegenläufig orientierte Atlanten. (In K2L beweisen wir damit $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$.)

(2) Zeichnen Sie im $\mathbb{R}^3$ den Doppelkegel $K = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\,\}$. Ist K zusammenhängend? kompakt? eine Fläche? In welchen Punkten ist K lokal euklidisch, in welchen nicht? Untersuchen Sie ebenso allgemeine Quadriken in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$.

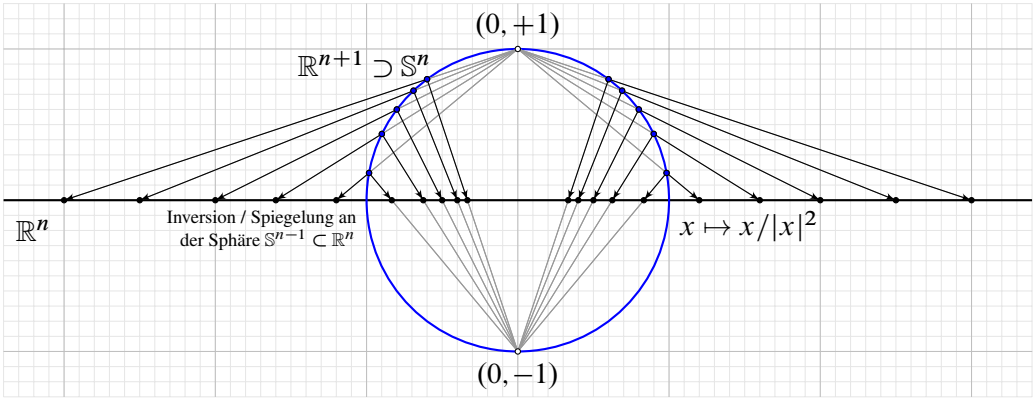


ABBILDUNG K:6. Zwei stereographische Projektionen und Kartenwechsel

✻ **K1I.** (1) Wir nutzen die stereographischen Projektionen (A1L) bezüglich Nord-/Südpol $\pm p = (0,\dots,0,\pm 1)$:

$$h_1, h_2 : \mathbb{S}^n \smallsetminus \{\pm p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 \mp x_{n+1}}(x_1,\dots,x_n),$$

$$g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \smallsetminus \{\pm p\} : (y_1,\dots,y_n) \mapsto \frac{1}{|y|^2+1}(2y_1,\dots,2y_n,\pm(|y|^2-1)).$$

Man rechnet $h_i \circ g_i = \mathrm{id}$ und $g_i \circ h_i = \mathrm{id}$ direkt nach. Der Atlas $\mathscr{A} = (h_1, h_2)$ hat nur zwei Karten; das ist minimal (K1Y). Als Kartenwechsel finden wir $h_{12} : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} : y \mapsto h_2(g_1(y)) = y/|y|^2$, ebenso h_{21}. Dies ist die Spiegelung an der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (A1O), glatt, analytisch, algebraisch, sogar rational, aber orientierungsumkehrend. Mit einer Spiegelung, etwa $\sigma : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : (y_1,\dots,y_{n-1},y_n) \mapsto (y_1,\dots,y_{n-1},-y_n)$, erhalten wir den orientierten Atlas $\mathscr{A}' = (h_1, \sigma h_2)$. Auch $\mathscr{A}'' = (\sigma h_1, h_2)$ ist orientiert, gegenläufig zu $\mathscr{A}'$.

Durch Verkleben von $\mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n$ mittels der Spiegelung an der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ erhalten wir $\mathbb{S}^n$ (E3I).

(2) Der Kegel $K \subset \mathbb{R}^3$ ist zusammenhängend, aber nicht kompakt. Er ist keine Mannigfaltigkeit: Der Raum K ist 2–euklidisch in jedem Punkt $x \neq 0$, aber nicht im Ursprung, denn $K \smallsetminus \{0\}$ besteht aus zwei Komponenten.

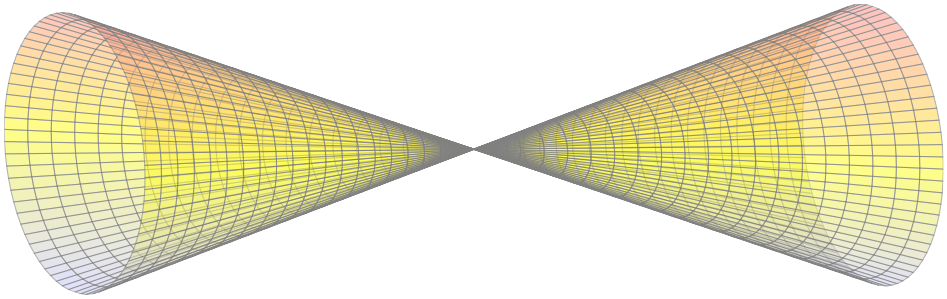


ABBILDUNG K:7. Der Kegel ist überall 2–euklidisch außer im Ursprung.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K1g. Triangulierbarkeit. Eine *Triangulierung* (K,h) eines topologischen Raumes X besteht aus einem Simplizialkomplex K und einem Homöomorphismus $h : |K| \xrightarrow{\sim} X$. Ein Raum X heißt *triangulierbar*, wenn eine solche Triangulierung (K,h) existiert.

Diese Begriffe wurden von Henri POINCARÉ in seinen grundlegenden Arbeiten zur *Analysis Situs* in den 1890er Jahren eingeführt und waren in den folgenden Jahrzehnten das unentbehrliche Werkzeug der Topologie. Dieser Zweig wird heute *PL-Topologie* genannt, englisch *piecewise linear topology*. Das Studium eines topologischen Raumes X mittels Simplizialkomplexen stößt dabei sofort auf zwei Probleme: Erstens, existiert zu X eine Triangulierung $h : |K| \xrightarrow{\sim} X$? Zweitens, sind je zwei Triangulierungen äquivalent?

Vermutung K1J (Triangulierungsvermutung für topologische Mannigfaltigkeiten)**.** Jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit M ist triangulierbar, das heißt, es existiert ein endlicher Simplizialkomplex K und ein Homöomorphismus $h : |K| \xrightarrow{\sim} M$.

Die rein topologische Voraussetzung ist meist zu schwach, aber jede $\mathscr{C}^1$–glatte Mannigfaltigkeit erlaubt eine glatte Triangulierung: J.H.C. WHITEHEAD zeigte dies 1940 für Mannigfaltigkeiten ohne Rand, und James MUNKRES 1960 für Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Der Simplizialkomplex K einer Triangulierung (K,h) bestimmt mittels $h : |K| \xrightarrow{\sim} X$ die Topologie des triangulierten Raumes X. Die *Hauptvermutung* besagt umgekehrt, dass der topologische Raum X den Simplizialkomplex K bestimmt – bis auf Unterteilung:

Vermutung K1K (Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie)**.** Seien K und L Simplizialkomplexe mit homöomorphen Realisierungen $|K| \cong |L|$. Dann existieren Unterteilungen $K' \preccurlyeq K$ und $L' \preccurlyeq L$ und ein Isomorphismus $K' \cong L'$ von Simplizialkomplexen.

Diese Vermutung wurde 1908 von Heinrich TIETZE (1880–1964) und Ernst STEINITZ (1871–1928) formuliert. In Dimension 0 ist sie trivial, in Dimension 1 leicht (I3F). Sie gilt für je zwei glatte Triangulierungen $|K| \xrightarrow{\sim} M \xleftarrow{\sim} |L|$ (WHITEHEAD 1940).

Für 2–dimensionale Mannigfaltigkeiten hat Tibor RADÓ 1925 sowohl die Triangulierbarkeit als auch die Hauptvermutung bewiesen. Die Hauptvermutung für beliebige Simplizialkomplexe der Dimension ≤ 2 hat Christos PAPAKYRIAKOPOULOS 1943 bewiesen.

Für 3–dimensionale Mannigfaltigkeiten haben Edwin MOISE und R.H. BING in einer Reihe von Arbeiten Anfang der 1950er Jahre sowohl die Triangulierbarkeit als auch die Hauptvermutung bewiesen. Die Hauptvermutung für beliebige Simplizialkomplexe der Dimension ≤ 3 hat Edward BROWN 1964 bewiesen. Wir halten zusammenfassend fest:

Satz K1L. *Jede topologische Mannigfaltigkeit M der Dimension ≤ 3 ist triangulierbar, und je zwei Triangulierungen von M sind isomorph nach geeigneter Unterteilung.* □

Die Hauptvermutung nahm eine unerwartete Wendung, als John MILNOR 1961 die ersten Gegenbeispiele in höherer Dimension fand: Im Allgemeinen ist die Hauptvermutung falsch! Das heißt, es existieren Simplizialkomplexe K und L mit homöomorphen Realisierungen $|K| \cong |L|$, aber keine zwei Unterteilungen $K' \preccurlyeq K$ und $L' \preccurlyeq L$ sind isomorph.

Für 4–dimensionale Mannigfaltigkeiten sind beide Vermutungen falsch: Es gibt kompakte 4–Mannigfaltigkeiten, die nicht triangulierbar sind (Michael FREEDMAN), und solche, die nicht-äquivalente Triangulierungen tragen (Simon DONALDSON; beide erhielten hierfür 1986 die Fields–Medaille). Für Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 5 widerlegte Ciprian MANOLESCU 2013 die Triangulierungsvermutung.

§K1h. Klassifikation der Kurven. Eindimensionale Mannigfaltigkeiten heißen auch *Kurven*. Die folgenden vier Modellräume sind zusammenhängende Kurven:

1–Mannigfaltigkeiten	ohne Rand	mit Rand
nicht kompakt	die reelle Gerade $\mathbb{R}$	die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0}$
kompakt	die Kreislinie $\mathbb{S}^1$	das Intervall $[0,1]$

Das prüfen wir direkt anhand der Definition K1B: Diese Räume sind metrisierbar und lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$; für $\mathbb{S}^1$ folgt dies aus der stereographischen Projektion (A1L).

Übung K1M. Sie kennen einige topologische Invarianten und können sie hier anwenden:

(1) Warum sind keine zwei dieser vier Räume homöomorph?
(2) Nur drei dieser vier Räume sind homotopie-äquivalent: welche?

✻ **K1M.** (1) Kompaktheit und geometrischer Rand sind topologische Invarianten! Damit können wir die vier genannten Räume bereits unterscheiden. Alternativ mit Zusammenhang: In $\mathbb{R}$ trennt jeder Punkt, in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ alle bis auf einen, in $[0,1]$ alle bis auf zwei, in $\mathbb{S}^1$ trennt gar kein Punkt (A1L). Im kompakten Fall unterscheidet die Euler–Charakteristik $\chi([0,1]) = 1$ und $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$ (A3J). Die Umlaufzahl $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (J1J) zeigt, dass $\mathbb{S}^1$ nicht zusammenziehbar ist, anders als $[0,1]$. Dasselbe finden wir mit der Fundamentalgruppe (Kapitel L). (2) Es gilt $\mathbb{S}^1 \not\simeq [0,1] \simeq \mathbb{R}_{\geq 0} \simeq \mathbb{R}$: Alle nicht-leeren Intervalle sind zusammenziehbar, aber $\mathbb{S}^1$ nicht (J4A).

Bemerkung. Ohne die in Definition K1B vorausgesetzte Metrisierbarkeit gibt es noch unzählige weitere Möglichkeiten wie die verzweigte Gerade (E2E, verletzt T_2) oder die lange Gerade $L_{>0}$ (F9K, verletzt 2AA). Daher integrieren wir die nötigen Vorsichtsmaßnahmen in die Definition K1B des Mannigfaltigkeitsbegriffs. Damit erreichen wir:

Satz K1N (topologische Klassifikation der Kurven)**.** *Jede zusammenhängende Kurve (*1*–Mannigfaltigkeit) ist homöomorph zu genau einem der Modellräume* $[0,1]$*,* $\mathbb{S}^1$*,* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{R}_{\geq 0}$*.*

Korollar. *Jede kompakte Kurve ist homöomorph zu genau einem der Modellräume* $E_{p,q} = (\{1,\dots,p\} \times [0,1]) \cup (\{p+1,\dots,p+q\} \times \mathbb{S}^1)$ *mit* $p,q \in \mathbb{N}$*.*

Der Satz ist plausibel. Die Voraussetzung ist jedoch recht schwach. Wie man nach ersten Versuchen bemerkt, ist daher die Konstruktion eines Homöomorphismus keineswegs leicht. Versuchen Sie es! Eine Anleitung finden Sie bei D. Gale, *The classification of* 1*–manifolds: A take-home exam*, American Mathematical Monthly 94 (1987), 170–175.

Als Hilfsmittel wollen wir Simplizialkomplexe nutzen (K1L). Die Triangulierbarkeit ist der technisch schwierigste Teil der Klassifikation; wir werden sie hier nicht beweisen, sondern zur Vereinfachung voraussetzen. Die kombinatorische Klassifikation ist dann leicht:

§K1i. Simpliziale Klassifikation der Kurven. Als schöne Anwendung unserer topologischen Werkzeuge können Sie nun simpliziale Kurven klassifizieren. Es ist recht leicht doch lehrreich; Sie können insbesondere Genauigkeit üben. Zur Flächenklassifikation nutzen wir denselben Zugang, Sie können hier in Miniatur schon einmal alles einüben.

Übung K1O. Sei K ein Simplizialkomplex und $X = |K|$ seine topologische Realisierung.

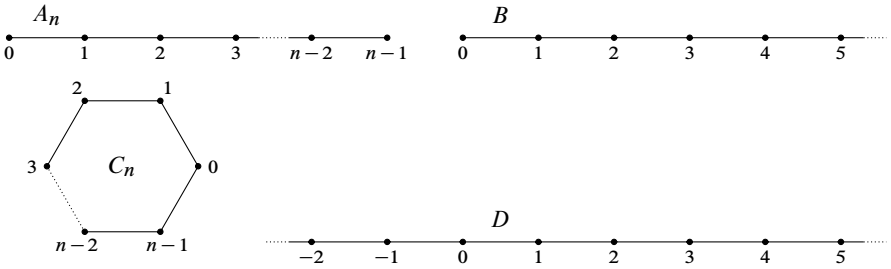
(1) Genau dann ist X eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, wenn K ein Graph ist, also $\dim K \leq 1$ erfüllt, und zudem jede Ecke in genau einer oder zwei Kanten liegt.
(2) Klassifizieren Sie solche zusammenhängenden Komplexe K bis auf Isomorphie.
(3) Klassifizieren Sie alle (triangulierbaren) Kurven X bis auf Homöomorphie.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **K1o.** (1) Die Aussage „⇐“ ist klar: Da K lokal-endlich ist, ist $|K|$ metrisierbar (I2J). Jede Ecke $a \in \Omega$ besitzt eine Umgebung $(U,0) \cong ([0,1[,0)$, falls a in nur einer Kante liegt, oder $(U,0) \cong (]-1,1[,0)$, falls a in zwei Kanten liegt. Jeder andere Punkt $x \in |K| \smallsetminus \Omega$ liegt im Innern $U = \operatorname{Int}[a,b]$ einer Kante, und dies ist eine offene Umgebung $(U,x) \cong (]0,1[,1/2)$. Wir zeigen die Umkehrung „⇒“: Sei $X = |K|$ eine 1–Mannigfaltigkeit.

(1a) Es gilt $\dim K \leq 1$. Angenommen, es gäbe einen Simplex $S \in K$ der Dimension ≥ 2. Um jeden Punkt $x \in \Delta = [S]$ können wir in jede Umgebung eine Sphäre $\mathbb{S}^1$ einbetten. Da $|K|$ eine 1-Mannigfaltigkeit ist, besitzt x eine offene Umgebung $U \subset X$ homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, und hier ist $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow V$ unmöglich (J6C). *Alternatives Argument:* Jeder innere Punkt $x \in \operatorname{Int} X$ erlaubt beliebig kleine zusammenhängende offene Umgebungen $U \cong \mathbb{R}$ und trennt diese, $|\pi_0(U \smallsetminus \{x\})| = 2$. Für jeden Randpunkt $x \in \partial X$ gilt entsprechend $U \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $|\pi_0(U \smallsetminus \{x\})| = 1$, zudem liegen Randpunkte isoliert. In einem Simplex Δ der Dimension ≥ 2 trennt kein Punkt $x \in \operatorname{Int}\Delta$ seine Umgebungen, und diese Punkte liegen nicht isoliert. Demnach kann K keine Simplizes der Dimension ≥ 2 haben, das heißt K ist ein Graph ($\dim K \leq 1$).

(1b) Liegt eine Ecke a in genau k Kanten, so gilt $|\pi_0(U \smallsetminus \{a\})| = k$ für jede hinreichend kleine zusammenhängende offene Umgebung $U \subset |K|$. Nach der obigen Überlegung aus (1a) bleibt nur $k = 1$ oder $k = 2$.



(2) Wir nutzen die Modelle $A_n = \langle \{0,1\},\{1,2\},\dots,\{n-2,n-1\} \rangle$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $B = \langle \{k,k+1\} \mid k \in \mathbb{N} \rangle$, $C_n = A_n \cup \{\{n-1,0\}\}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $D = \langle \{k,k+1\} \mid k \in \mathbb{Z} \rangle$. Die Graphen A_n, B und D können wir realisieren, indem wir jede Ecke k als Element von $\mathbb{R}$ auffassen; damit gilt $|A_n| = [0,n-1]$, $|B| = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $|D| = \mathbb{R}$. Für $|C_n| \cong \mathbb{S}^n$ wählen wir ein regelmäßiges n–Eck und nutzen radiale Projektion auf $\mathbb{S}^1$ (F6G).

Die Komplexe A_n, B, C_n, D erfüllen (1): Sie sind Graphen und jede Ecke liegt in genau ein oder zwei Kanten. Keine zwei dieser Graphen sind isomorph; sie unterscheiden sich in der Anzahl ihrer Ecken und Blätter.

Wir zeigen abschließend: Ist $|K|$ eine zusammenhängende 1–Mannigfaltigkeit, so gilt $K \cong A_n, B, C_n, D$: Hierzu nutzen wir die kombinatorischen Eigenschaften aus (1). Für K unendlich und $a \in \partial K$ existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\varphi : (B,0) \xrightarrow{\sim} (K,a)$. Im Falle $\partial K = \emptyset$ wählen wir einen 1–Simplex $\{a,b\} \in K$; hierzu existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\varphi : (D,0,1) \xrightarrow{\sim} (K,a,b)$. Für $|K| = n < \infty$ und $a \in \partial K$ existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\varphi : (A_n,0) \xrightarrow{\sim} (K,a)$. Im Falle $\partial K = \emptyset$ wählen wir einen 1–Simplex $\{a,b\} \in K$; hierzu existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\varphi : (C_n,0,1) \xrightarrow{\sim} (K,a,b)$.

(3) Sei X eine triangulierbare Kurve, also eine 1–Mannigfaltigkeit, und es existiert ein Homöomorphismus $\varphi : |K| \xrightarrow{\sim} X$ mit einem Simplizialkomplex K. Dann muss K die kombinatorischen Bedingungen aus (1) erfüllen. Dank (2) erhalten wir hieraus die kombinatorische Klassifikation $K \cong A_n, B, C_n, D$. Hieraus folgt schließlich die topologische Klassifikation: $X \cong |K|$ ist homöomorph zu $[0,1]$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Ich trage die formale Konstruktion aus (2) nach. Wenn Sie es wirklich genau nehmen möchten, dann ist die Ausführung etwas länglich, aber eine schöne Herausforderung und Stilübung. Versuchen Sie es!

Im Folgenden sei K ein zusammenhängender Graph, und jede Ecke liege in genau einer oder zwei Kanten. Insbesondere gilt $|\Omega| \geq 2$. Sei ∂K die Menge der Blätter, also der Ecken, die nur in einer Kante liegen.

Wir betrachten zunächst den endlichen Fall: Sei $|\Omega| = n < \infty$. Jede Kante enthält zwei Ecken, und jede Ecke liegt in einer oder zwei Kanten. Wir erhalten die Gleichung $2|K_1| = 2|K_0 \smallsetminus \partial K| + |\partial K|$. Demnach hat K eine *gerade* Anzahl von Blättern, also entweder 0 falls $\partial K = \emptyset$, oder andernfalls 2 oder mehr.

(2a) Sei $n < \infty$ und $\partial K \neq \emptyset$. Zu je zwei Ecken $a \neq b$ im Rand ∂K existiert genau ein Isomorphismus $\varphi : (A_n,0,n-1) \xrightarrow{\sim} (K,a,b)$. (Wir formulieren und beweisen hier also eine präzisere Aussage.)

Beweis: Wir führen Induktion über n. Für $n = 2$ ist die Aussage klar. Sei also $n \geq 3$ und die Aussage für alle kleineren Graphen mit Bedingung (1) bereits bewiesen. Sei $b' \in \Omega$ der Nachbar von b. Wegen $n \geq 3$ gilt

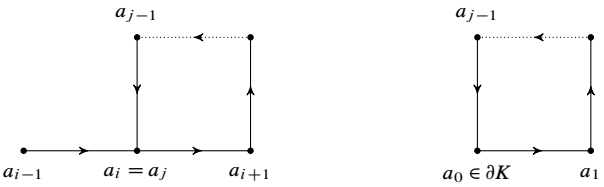
$b' \notin \partial K$, insbesondere $b' \neq a$. Der Graph $K' = K \smallsetminus \{\{b',b\},\{b\}\}$ erfüllt erneut die Bedingungen (1). Nach Induktionsvoraussetzung existiert daher genau ein Isomorphismus $\varphi' : (A_{n-1}, 0, n-2) \xrightarrow{\sim} (K', a, b')$. Dieser setzt sich eindeutig fort durch $n-1 \mapsto b$ zu einem Isomorphismus $\varphi : (A_n, 0, n-1) \xrightarrow{\sim} (K, a, b)$.

(2b) Sei $n < \infty$ und $\partial K = \emptyset$. Zu $\{a \neq b\} \in K$ existiert genau ein Isomorphismus $\varphi : (C_n, 0, 1) \xrightarrow{\sim} (K, a, b)$.

Beweis: Wegen $a \notin \partial K$ hat a neben b einen weiteren Nachbarn $b' \neq b$. Der Graph $K' = K \smallsetminus \{\{a,b'\}\}$ erfüllt erneut die Bedingungen (1), nun allerdings mit den beiden Blättern $a, b' \in \partial K'$. Dank (2a) existiert genau ein Isomorphismus $\varphi : (A_n, 0, n-1) \xrightarrow{\sim} (K, a, b')$. Für diesen gilt $1 \mapsto b$, da die Kanten $0 \in \{0,1\} \in A_n$ und $a \in \{a,b\} \in K$ eindeutig sind. Durch Zurückfügen der Kante $\{a,b'\}$ erhalten wir $\varphi : (C_n, 0, 1) \xrightarrow{\sim} (K, a, b)$.

Bemerkung: Die Behandlung unendlicher Graphen ist subtiler, wie zu erwarten. Insbesondere stehen uns keine einfachen Induktionsargumente über die Eckenzahl zur Verfügung. Die folgenden Konstruktionen sind zwar einfach, aber die formalen Beweise etwas trickreich. Unsere Modelle erinnern nicht von ungefähr an die Peano–Axiome der natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, 0, S)$ mit der Nachfolgerabbildung $S : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} : k \mapsto k+1$, und ihre Einbettung in die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, 0, T)$ mit der Fortsetzung von S zur Bijektion $T : \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} : k \mapsto k+1$.

Wir betrachten die Menge $\tilde{K}_1 = \{\,(a,b) \mid \{a,b\} \in K,\ a \neq b\,\}$ der orientierten Kanten in K. Jede orientierte Kante $(a,b) \in \tilde{K}_1$ mit $b \notin \partial K$ können wir eindeutig vorschieben zur orientierten Kante $\Phi(a,b) := (b,c)$ mit $a \neq c$. Bei Randpunkten $b \in \partial K$ kehren wir um und setzen $\Phi(a,b) := (b,a)$. Somit ist $\Phi : \tilde{K}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{K}_1$ eine Bijektion: Für $\tau : \tilde{K}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{K}_1 : (a,b) \mapsto (b,a)$ gilt $\tau \circ \Phi \circ \tau \circ \Phi = \mathrm{id}_{\tilde{K}_1}$, also $\Phi^{-1} = \tau \circ \Phi \circ \tau$.



(2c) Sei $|\Omega| = \infty$ und $a \in \partial K$. Dann existiert genau ein Isomorphismus $\varphi : (B, 0) \xrightarrow{\sim} (K, a)$.

Beweis: Die Ecke $a \in \partial K$ hat genau einen Nachbarn b; wir erhalten die Kante $(a,b) \in \tilde{K}_1$. Wir definieren $(a_i, a_{i+1}) := \Phi^i(a,b)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und erhalten $\varphi : (B,0) \to (K,a) : i \mapsto a_i$. Die Abbildung φ ist surjektiv: Der Bildkomplex $K' = \langle \{a_i, a_{i+1}\} \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ ist eine Komponente von K, denn jede Ecke a_i hat alle anliegenden Kanten in K' dank (1); da K zusammenhängend ist, gilt $K = K'$. Die Abbildung φ ist injektiv: Andernfalls gäbe es $i < j$ mit $a_i = a_j$. Wir wählen j minimal. Im Falle $i = 0$ hätte a_0 zwei verschiedene Nachbarn $a_1 \neq a_{j-1}$, im Widerspruch zur Voraussetzung $a_0 \in \partial K$. Der Fall $i = j-1$ kommt nicht vor, nach Definition von Φ. Der Fall $i = j-2$ entspricht $a_{i+1} = a_{j-1} \in \partial K$; dann hätte $K \cong A_j$ nur j Ecken, was wir durch $|\Omega| = \infty$ ausgeschlossen haben. Im Falle $0 < i < j-2$ hätte $a_i = a_j$ drei verschiedene Nachbarn $a_{i-1}, a_{i+1}, a_{j-1}$, im Widerspruch zu (1). Damit ist $\varphi : (B,0) \xrightarrow{\sim} (K,a)$ der ersehnte Graphenisomorphismus.

(2d) Sei $|\Omega| = \infty$ und $\partial K = \emptyset$. Zu jeder orientierten Kante $(a,b) \in \tilde{K}_1$ existiert genau ein Isomorphismus $\varphi : (D, 0, 1) \xrightarrow{\sim} (K, a, b)$. (Die Kante gibt wie schon in (2b) den Startpunkt und die Richtung vor.)

Beweis: Wir definieren $(a_i, a_{i+1}) := \Phi^i(a,b)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und erhalten $\varphi : (D,0,1) \to (K,a,b) : i \mapsto a_i$. Die Abbildung φ ist surjektiv: Der Bildkomplex $K' = \langle \{a_i, a_{i+1}\} \mid i \in \mathbb{Z} \rangle$ ist eine Komponente von K, denn jede Ecke a_i hat alle anliegenden Kanten in K' dank (1); da K zusammenhängend ist, gilt $K = K'$. Die Abbildung φ ist injektiv: Andernfalls gäbe es $i < j$ mit $a_i = a_j$. Wir wählen $d = j - i$ minimal. Der Fall $d = 1$ kommt nicht vor, nach Definition von Φ. Der Fall $d = 2$ entspricht $a_{i+1} = a_{j-1} \in \partial K$, was wir durch $\partial K = \emptyset$ ausgeschlossen haben. Im Falle $d \geq 3$ hätte $a_i = a_j$ drei Nachbarn $a_{i-1}, a_{i+1}, a_{j-1}$; das ist nur für $a_{i-1} = a_{j-1}$ möglich, und somit hätte $K \cong C_d$ nur d Ecken, was wir durch $|\Omega| = \infty$ ausgeschlossen haben. Damit ist $\varphi : (D,0,1) \xrightarrow{\sim} (K,a,b)$ der ersehnte Graphenisomorphismus.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K1j. Klassifikation der Flächen. Kompakte Kurven können wir klassifizieren wie in Satz K1N. Die Klassifikation der kompakten Flächen ist ähnlich leicht zu formulieren: Wir konstruieren die konkreten Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ vom Geschlecht g mit r Randkomponenten (§K3). Anschließend zeigen wir, dass unsere Liste vollständig und redundanzfrei ist:

Satz K1P (Klassifikation der kompakten Flächen)**.** *Jede kompakte zusammenhängende Fläche F ist homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen $F^{\varepsilon}_{g,r}$ mit $g,r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{\pm\}$.*

Für die Euler–Charakteristik gilt $\chi(F^{+}_{g,r}) = 2-2g-r$ und $\chi(F^{-}_{g,r}) = 1-g-r$. Allein aus der Kenntnis dieser drei Daten (χ, r, ε) zu F folgt bereits die Homöomorphie $F \cong F^{\varepsilon}_{g,r}$.

Bemerkung. Für *triangulierte Flächen* gelingt der Beweis der Klassifikation vergleichsweise leicht durch Schneiden und Kleben (§K3). Die Triangulierbarkeit ist der technisch schwierigste Teil der Klassifikation. Wir werden zur Vereinfachung stets annehmen, dass unsere Fläche F bereits trianguliert vorliegt. Die Klassifikation der kompakten *topologischen Flächen* führt dank Triangulierbarkeit K1L zum selben Ergebnis.

Bemerkung. So einfach Kurven und Flächen für sich genommen auch sein mögen, so vielfältig ist ihr Zusammenspiel mit anderen Räumen, etwa als Untermannigfaltigkeiten: als Knoten in 3–Mannigfaltigkeiten und als Flächen in 3– und 4–Mannigfaltigkeiten. Auch die Homöomorphismen von Flächen sind hierbei wichtig und enthüllen tiefliegende Ergebnisse.

§K1k. Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Beispiele von 3-Mannigfaltigkeiten sind leicht zu finden: Neben dem Raum $\mathbb{R}^3$ können wir jede offene Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ betrachten. Diese sind lokal leicht zu verstehen, können aber global phantastisch kompliziert sein: Als Beispiel betrachte man das Komplement einer wilden Einbettung $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ wie in J:25.

Als kompakte 3–Mannigfaltigkeiten kennen wir $\mathbb{S}^3$ ohne Rand und $\mathbb{D}^3$ mit Rand $\mathbb{S}^2$. Jede orientierbare Fläche F^{+}_{g} berandet einen *Henkelkörper* $H_g \subset \mathbb{R}^3$ wie in A:26.

Der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ sind geschlossene 3–Mannigfaltigkeiten. Allgemein gilt: Ist M eine 1–Mannigfaltigkeit und N eine 2–Mannigfaltigkeit, so ist der Produktraum $M \times N$ eine 3–Mannigfaltigkeit (K1W). Kurven und Flächen finden wir auf diesem Wege unmittelbar als (sehr kleinen) Teil in der Welt der 3–Mannigfaltigkeiten wieder.

Es gibt darüber hinaus noch eine Vielzahl weiterer geschlossener 3–Mannigfaltigkeiten. Mit relativ einfachen Werkzeugen lassen sich diese noch systematisch *konstruieren*, das heißt vollständig auflisten, zum Beispiel als Verklebung zweier Henkelkörper:

Satz K1Q. *Seien $A \cong B \cong H_g$ Henkelkörper und $f : \partial A \xrightarrow{\sim} \partial B$ ein Homöomorphismus ihrer Ränder. Dann ist die Verheftung $M_f = A \cup_f B$ eine zusammenhängende, orientierbare, geschlossene 3–Mannigfaltigkeit. Umgekehrt ist jede zusammenhängende, orientierbare, geschlossene 3–Mannigfaltigkeit M homöomorph zu einem solchen Raum M_f.*

Wir können also alle 3–Mannigfaltigkeiten *parametrisieren* durch solche Paare (g, f). Es ist allerdings viel schwieriger, 3–Mannigfaltigkeiten zu *klassifizieren*, das heißt durch geeignete Kenngrößen (Invarianten) zu unterscheiden. In den Jahrzehnten seit circa 1950 hat die Topologie hier spektakuläre Fortschritte erzielt, und inzwischen ist eine Klassifikation in greifbare Nähe gerückt. Die hierzu nötigen Methoden schöpfen aus einem reichhaltigen Fundus an topologischen, algebraischen und geometrischen Werkzeugen, und so hat sich die Theorie der 3–Mannigfaltigkeiten zu einem umfangreichen Gebiet entwickelt.

§K1l. Vierdimensionale Mannigfaltigkeiten. Während dies für 3–Mannigfaltigkeiten noch möglich ist, ist die Klassifikation aller geschlossenen 4–Mannigfaltigkeiten nachweislich unmöglich (§L8g). Die Klassifikation gelingt jedoch für wichtige und große Teilfamilien: Michael FREEDMAN gelang 1982 die Klassifikation der einfach zusammenhängenden topologischen 4–Mannigfaltigkeiten (Fields–Medaille 1986).

Auch in höheren Dimensionen muss man sich auf spezielle Mannigfaltigkeiten beschränken, etwa einfach-zusammenhängende. Erstaunlicherweise wird deren Klassifikation dann technisch einfacher als in niedriger Dimension. Der Grund ist, grob gesprochen, dass nun genügend Raum vorhanden ist: Zum Beispiel können sich Kurven und Flächen nun gegenseitig ausweichen, und viele Schwierigkeiten sind somit leichter zu lösen als für Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 und 4. Mehr hierzu findet man im *Manifold Atlas* unter `www.manifoldatlas.him.uni-bonn.de`.

§K1m. Differentialtopologie. Auf Mannigfaltigkeiten tummelt sich ein Zoo weiterer Strukturen, die sich je nach Anwendung aufdrängen und auch für sich genommen reichhaltige Studienobjekte sein können. Für eine glatte Struktur zum Beispiel müssen die Kartenwechsel glatt sein; hierdurch wird das Differenzieren in allen Karten kompatibel. Damit lassen sich die mächtigen Methoden der Differential- und Integralrechnung anwenden; sie sind der zentrale Begriff der Differentialtopologie. Hierzu verweise ich auf das schöne Taschenbuch von Bröcker–Jänich und das ausführlichere Buch von Hirsch. Wir werden uns hier mit den Grundbegriffen topologischer Mannigfaltigkeiten begnügen.

Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, dass es in Dimension ≤ 3 keinen Unterschied zwischen topologischen und glatten Mannigfaltigkeiten gibt: Jede topologische Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 3 erlaubt eine glatte Struktur, und diese ist eindeutig bis auf Diffeomorphismen. Nicht jede topologische Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 4 erlaubt eine glatte Struktur, und wenn doch, so braucht sie nicht eindeutig zu sein.

In Dimension 4 sind die topologische und die glatte zwei getrennte Welten, wie Simon DONALDSON zeigte (Fields–Medaille 1986). Die Theorie *glatter* 4–Mannigfaltigkeiten hat seit den 1980er Jahren eine Vielfalt unerwarteter Phänomene eröffnet. Anders als im topologischen Fall scheint hier eine Klassifikation nicht in Sicht. Einen Überblick findet man bei Alexandru Scorpan, *The Wild World of* 4*–Manifolds*, AMS 2005.

§K1n. Differentialgeometrie. Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist das lokale Modell der Raum $\mathbb{R}^n$ mit seiner euklidischen Metrik. Diese wird zur *Riemannschen Metrik* auf (dem Tangentialbündel) der Mannigfaltigkeit verallgemeinert. Jede glatte Mannigfaltigkeit erlaubt eine Riemannsche Metrik, und diese zusätzliche Struktur ist oft hilfreich und auch für sich genommen überaus interessant. Andere lokale Modelle sind möglich und werden ausgiebig untersucht: Statt Riemann–Metriken mit Signatur $(+,+,+,+)$ betrachtet man in der Relativitätstheorie Lorentz–Metriken mit Signatur $(-,+,+,+)$ bzw. $(+,-,-,-)$.

Geometrische Methoden spielen bereits in Dimension 3 eine überragende Rolle. William THURSTONs Geometrisierung (Fields–Medaille 1982) und ihre Vollendung durch Grigori PERELMAN (Fields–Medaille 2006) sind Meilenstein der Topologie und Geometrie und führen zur Klassifikation geschlossener 3–Mannigfaltigkeiten. Sie ist wesentlich komplizierter als in Dimension 1 und 2 und erfordert maßgeschneiderte Techniken.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K1o. Topologische Invarianz des Gebietes in Mannigfaltigkeiten. Wir erinnern an die topologische Invarianz des Gebietes (Satz J7K für $\mathbb{R}^n$ und Satz J7N für $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$):

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Jede stetige Injektion $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist offen. Allgemeiner:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen. Jede stetige Injektion $f : (U, \partial U) \to (\mathbb{R}^n_{\geq 0}, \partial \mathbb{R}^n_{\geq 0})$ ist offen.

Offenheit ist eine lokale Eigenschaft. Wir können die Invarianz des Gebietes also auf Mannigfaltigkeiten übertragen und $f : M \to N$ in lokalen Karten untersuchen.

Für berandete Mannigfaltigkeiten müssen wir explizit fordern, dass $f : M \to N$ den Rand erhält, also $f(\partial M) \subset \partial N$ erfüllt, andernfalls gibt es offensichtliche Gegenbeispiele wie $f : [-1,1]^n \to [-1,1]^n : x \mapsto x/2$: Hier ist f stetig und injektiv, aber nicht offen.

Satz K1R (topologische Invarianz des Gebietes)**.** *Seien M, N Mannigfaltigkeiten derselben Dimension n. Dann gilt: Jede stetige Injektion $f : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ ist offen.*

Folglich ist die Bildmenge $M' = f(M)$ offen in N und die Einschränkung $f : M \to M'$ ein Homöomorphismus. Insbesondere gilt $f(\partial M) = \partial M'$ und $f(\operatorname{Int} M) = \operatorname{Int} M'$.

BEWEIS. Wir kennen die wesentlichen Spezialfälle: Satz J7K garantiert dies für offene Teilräume $M \subset N = \mathbb{R}^n$ und Satz J7N für offene Teilräume $M \subset N = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Der allgemeine Fall folgt durch Einschränkung auf lokale Karten: Führen Sie dies als Übung aus! □

✻ **K1R.** Sei $f : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ stetig und injektiv. Wir zeigen, dass f offen ist in jedem Punkt $x \in M$. Um den Bildpunkt $y = f(x) \in N$ wählen wir eine Karte $h_2 : N \supset U_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ mit $U_2 \subset N$ und $V_2 \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen. Das Urbild $f^{-1}(U_2) \subset M$ ist offen, da f stetig ist. Um unseren Punkt x in $f^{-1}(U_2)$ wählen wir eine Karte $h_1 : M \supset U_1 \xrightarrow{\sim} V_1 \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Da $f^{-1}(U_2) \ni x$ eine offene Umgebung ist, können wir $x \in U_1 \subset f^{-1}(U_2)$ annehmen, also $f(U_1) \subset U_2$. Mit f ist auch die Einschränkung $f^* = f|_{U_1}^{U_2} : U_1 \to U_2$ stetig und injektiv. Nach Voraussetzung gilt $f(\partial U_1) \subset \partial U_2$, wir haben also $f^* : (U_1, \partial U_1) \to (U_2, \partial U_2)$. Wir nutzen unsere Karten h_1, h_2 und ersetzen f^* durch die äquivalente Abbildung $g := h_2 \circ f^* \circ h_1^{-1} : (V_1, \partial V_1) \to (V_2, \partial V_2)$. Jetzt spielt sich alles in unserem Modellraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ab: Auch g ist stetig und injektiv, dank Satz J7N also offen. Somit ist auch f^* offen. Da dies in jedem Punkt $x \in M$ gilt, ist die gesamte Abbildung $f : M \to N$ offen.

Zur Illustration vergleichen wir diesen Satz mit ähnlich gelagerten Situationen:

Übung K1S. Beweisen Sie folgende Aussagen oder konstruieren Sie ein Gegenbeispiel: Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus…

(1) … für $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ zusammenhängend?
(2) … für $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ abgeschlossen?
(3) … für $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ offen?

Zusatz: (a) Ist die Bedingung an X notwendig? (b) Ist die Bedingung an Y redundant?

✻ **K1S.** (1) Nein. Gegenbeispiel: Die Räume $X = \{ e^{it} \in \mathbb{S}^1 \mid 0 \leq t < \pi \}$ und $Y = \mathbb{S}^1$ sind zusammenhängend. Die Abbildung $f : X \to Y : z \mapsto z^2$ ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus (siehe D2C).

(2) Ja. Beweis: Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist kompakt (F1O), ebenso die abgeschlossene Teilmenge $X \subset \mathbb{S}^n$ (F1F). Der Zielraum $Y \subset \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist hausdorffsch (E1G). Dank des Kompakt-Hausdorff-Kriteriums F1L ist $f : X \to Y$ abgeschlossen, also ein Homöomorphismus.

(3) Ja. Beweis: Dank topologischer Invarianz des Gebietes (K1R) ist f offen, also ein Homöomorphismus. (Um Satz J7K bzw. J7N anwenden zu können, lesen wir die stetige Bijektion $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ in lokalen Karten. Dies wurde oben im Beweis von Satz K1R ausgeführt. Wiederholen Sie diese Konstruktion als Übung!)

Zusatz: (a) Ist X weder offen noch abgeschlossen, so finden wir leicht Gegenbeispiele, wie in (1) sogar zusammenhängend. (b) Ist X zusammenhängend / kompakt / offen, so auch Y. Die Forderung an Y ist also jeweils redundant; sie ist eine Folgerung aus der vorausgesetzten Eigenschaft von X und des jeweiligen Satzes.

§K1p. Auch der Rand will einmal im Zentrum stehen…

Übung K1T. Für alle n–Mannigfaltigkeiten M und N gilt:

(0) Das Innere $\operatorname{Int} M$ und der Rand ∂M sind disjunkt, hausdorffsch und zweitabzählbar.
(1) Das Innere $\operatorname{Int} M$ ist eine nicht-leere n–Mannigfaltigkeit ohne Rand, $\partial \operatorname{Int} M = \emptyset$.
(2) Der Rand ∂M ist eine $(n-1)$–Mannigfaltigkeit ohne Rand, kurz $\partial\partial M = \emptyset$.

Bemerkung: Die einfache aber grundlegende Eigenschaft $\partial\partial M = \emptyset$ hat wichtige Konsequenzen und Verallgemeinerungen in der algebraischen Topologie.

(3) Im Raum M ist das Innere $\operatorname{Int} M$ offen und der Rand ∂M abgeschlossen.
(4) Ist die Mannigfaltigkeit M kompakt, dann ist auch ihr Rand ∂M kompakt.

Zur Illustration nenne ich einfache aber nützliche Anwendungen:

(5) Jeder Homöomorphismus $f : M \xrightarrow{\sim} N$ induziert $f|_{\partial M}^{\partial N} : \partial M \xrightarrow{\sim} \partial N$.
(6) Für jede kompakte Fläche F erfüllt der Rand $\partial F \cong \{1,\dots,r\}\times\mathbb{S}^1$ für ein $r \in \mathbb{N}$.
(7) Sind $X = \mathbb{D}^3 \smallsetminus \frac{1}{2}\mathbb{B}^3$ und $Y = \mathbb{D}^3 \smallsetminus \big((\frac{1}{4}\mathbb{B}^3 + \frac{1}{2}e_1) \cup (\frac{1}{4}\mathbb{B}^3 - \frac{1}{2}e_1)\big)$ homöomorph? Skizzieren Sie diese Räume. Sind beides Mannigfaltigkeiten? zusammenhängend? kompakt? berandet? Bestimmen Sie die geometrischen Ränder ∂X und ∂Y.

✻ **K1T.** (0) Dies folgt wie in K1C aus der topologischen Invarianz des Randes (J7I). Mit M ist jeder Teilraum, etwa $\operatorname{Int} M$ und ∂M, hausdorffsch und zweitabzählbar (E1G), ebenso metrisierbar (D1L).

(1) Zu $x \in \operatorname{Int} M \subset M$ existiert eine Karte $h : M \supset U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ mit $h(x) \in \operatorname{Int}\mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Die Teilmenge $V' := V \cap \operatorname{Int}\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ist offen in $\operatorname{Int}\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, ebenso ist $U' := h^{-1}(V') = U \cap \operatorname{Int} M$ offen in $\operatorname{Int} M$, und die Einschränkung von h liefert $h' : U' \xrightarrow{\sim} V'$. Somit ist $\operatorname{Int} M$ offen in M und eine nicht-leere n–Mannigfaltigkeit ohne Rand. Letzteres schreiben wir kurz $\partial \operatorname{Int} M = \emptyset$.

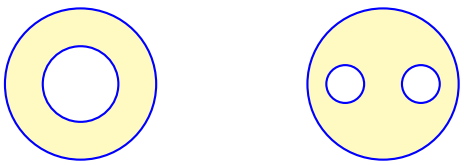
(2) Zu $x \in \partial M \subset M$ existiert existiert eine Karte $h : M \supset U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ mit $h(x) \in \partial\mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Die Teilmenge $V' := V \cap \partial\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ist offen in $\partial\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, ebenso ist $U' := h^{-1}(V') = U \cap \partial M$ offen in ∂M, und die Einschränkung von h liefert $h' : U' \xrightarrow{\sim} V'$. Somit ist ∂M eine $(n-1)$–Mannigfaltigkeit ohne Rand, kurz $\partial\partial M = \emptyset$.

(3) Dank (1) ist $\operatorname{Int} M$ offen in M. Das Komplement $\partial M = M \smallsetminus \operatorname{Int} M$ ist daher abgeschlossen in M. Hier nutzen wir erneut $M = \operatorname{Int} M \sqcup \partial M$, also die topologische Invarianz des Randes (0).

(4) Ist die Mannigfaltigkeit M kompakt, so ist die abgeschlossene Teilmenge ∂M ebenfalls kompakt (F1F).

(5) Das ist klar, denn wir haben Rand und Inneres topologisch invariant definiert. Ausführlich: Zu jedem $x \in M$ existiert eine Karte $h : M \supset U \xrightarrow{\sim} V$. Für den Bildpunkt $y = f(x)$ in N haben wir $U' := f(U) \subset N$ und die Karte $h' := \varphi \circ f^{-1} : N \supset U' \xrightarrow{\sim} V$ mit $h'(y) = h(x)$. Für $x \in \partial M$ gilt $h(x) \in \partial\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, also $h'(y) \in \partial\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und somit $y \in \partial N$. Für $x \in \operatorname{Int} M$ gilt entsprechend $y \in \operatorname{Int} M$. Somit gilt $f(\operatorname{Int} M) = \operatorname{Int} N$ und $f(\partial M) = \partial N$, und die Einschränkungen $f|_{\operatorname{Int} M}^{\operatorname{Int} N} : \operatorname{Int} M \to \operatorname{Int} N$ und $f|_{\partial M}^{\partial N} : \partial M \to \partial N$ sind Homöomorphismen.

(6) Dies folgt aus der topologischen Klassifikation der Kurven (K1N): Dank (2,4) ist ∂F eine geschlossene 1–Mannigfaltigkeit, also $\partial F \cong \{1,\dots,r\}\times\mathbb{S}^1$ für ein $r \in \mathbb{N}$.



(7) Die Teilräume $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ sind 3–Mannigfaltigkeiten; Karten erhalten wir durch Inversion an einer Sphäre (A1M). Der Rand $\partial X = \mathbb{S}^2 \cup \frac{1}{2}\mathbb{S}^2$ hat zwei Komponenten, aber $\partial Y = \mathbb{S}^2 \cup (\frac{1}{4}\mathbb{S}^2 + \frac{1}{2}e_1) \cup (\frac{1}{4}\mathbb{S}^2 - \frac{1}{2}e_1)$ hat derer drei. Somit sind die beiden Ränder ∂X und ∂Y nicht homöomorph, daher auch nicht die beiden Mannigfaltigkeiten X und Y: Aus $\pi_0(\partial X) \ncong \pi_0(\partial Y)$ folgt $\partial X \ncong \partial Y$, und mit (5) folgt $X \ncong Y$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K1q. Atlas, Kartenwechsel und Verklebung.

Übung K1U. Jedes Paar $(M, \mathscr{A})$ bestehend aus einer Mannigfaltigkeit M und einem Atlas $\mathscr{A} = (h_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i)_{i\in I}$ auf M bestimmt die Kartenwechsel $(h_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji})_{i,j\in I}$. Umgekehrt können wir M rekonstruieren durch das Verkleben der Karten (K1U):

(1) Sei $X = \bigsqcup_{i\in I} V_i$ die topologische Summe der Parametergebiete $V_i \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Die lokalen Parametrisierungen $k_i : V_i \xrightarrow{\sim} U_i \subset M$ setzen wir zusammen zu einer globalen Parametrisierung $k : X \twoheadrightarrow M$. Auf dem Summenraum X wird die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $(i,x) \sim (j, h_{ij}(x))$ für alle Indizes $i, j \in I$ und alle Punkte $x \in V_{ij}$. Durch Übergang zum Quotienten erhalten wir den Homöomorphismus $\bar{k} : X/\!\sim \xrightarrow{\sim} M$.

Anschaulich: Allein aus den Kartenwechseln $(h_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji})_{i,j\in I}$ rekonstruieren wir die gesamte Mannigfaltigkeit M bis auf Homöomorphie; dazu genügt, die Parametergebiete $(V_i)_{i\in I}$ nach dieser Anleitung zu verkleben. Das erklärt noch einmal eindrücklich, wie die Kartenwechsel $(h_{ij})_{i,j\in I}$ die gesamte Information über M codieren. Dies kommt ganz praktisch zum Ausdruck bei der Differenzierbarkeit K1F und Orientierbarkeit K1E.

Eine wunderschöne Illustration ist die Verheftung $\mathbb{S}^n \cong (\mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n)/\!\sim$ aus Übung E3I.

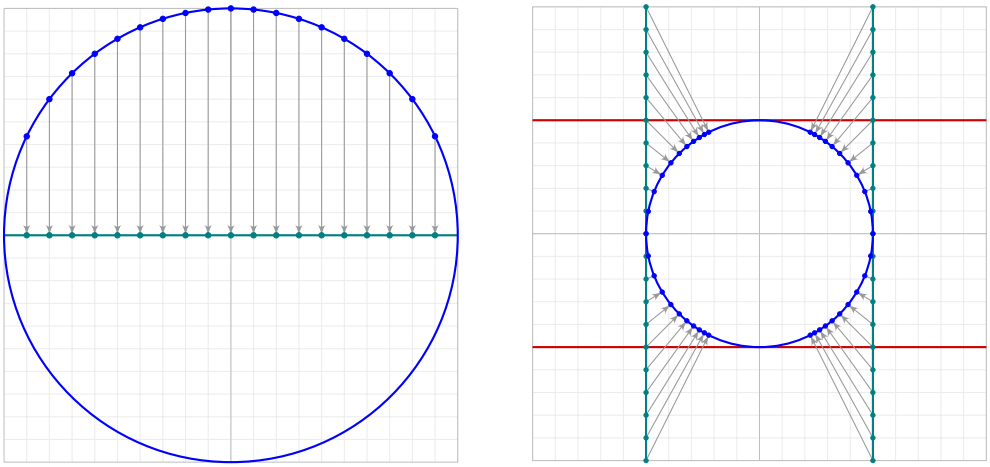


ABBILDUNG K:8. Weitere Karten und schöne Atlanten für die Sphäre $\mathbb{S}^n$

(2) Wir betrachten die Sphäre $\mathbb{S}^n = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ mit den lokalen Karten $h_i^\pm : U_i^\pm \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n : x \mapsto (x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$ für $i = 0,1,\dots,n$ auf $U_i^\pm = \{x \in \mathbb{S}^n \mid \pm x_i > 0\}$. Ist dies ein Atlas auf $\mathbb{S}^n$? Schreiben Sie die Umkehrabbildungen $k_i^\pm$ und alle Kartenwechsel $h_{ij}^{\pm\pm}$ explizit aus, insbesondere für die Beispiele $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{S}^2$.

Dieser Atlas ist sehr intuitiv und naheliegend, leider benötigt er $2n+2$ Karten.

(3) Wir betrachten die Sphäre $\mathbb{S}^n$ wie in (2), diesmal mit den lokalen Parametrisierungen $k_i^\pm : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} U_i^\pm \subset \mathbb{S}^n : x \mapsto (x_1,\dots,x_i,\pm 1,x_{i+1},\dots,x_n)/\sqrt{1+|x|^2}$ für $i = 0,1,\dots,n$. Was ist das Kartengebiet $U_i^\pm$? Wie lauten die Umkehrabbildungen $h_i^\pm$? Ist dies ein Atlas auf $\mathbb{S}^n$? Schreiben Sie alle Kartenwechsel explizit aus, insbesondere für $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{S}^2$.

Auch dieser schöne Atlas benötigt $2n+2$ Karten. Wir nutzen ihn später für den projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ und seinen kanonischen Atlas mit $n+1$ Karten (siehe Übung K2F).

§K1r. Verdopplung. Gelegentlich ist es bequem, eine Mannigfaltigkeit mit Rand einzubetten in eine größere Mannigfaltigkeit ohne Rand. Folgender Trick löst dieses Problem:

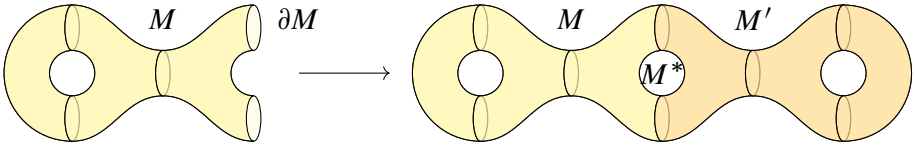


ABBILDUNG K:9. Verdopplung einer berandeten Mannigfaltigkeit

Übung K1v (Verdopplung einer Mannigfaltigkeit)**.** Zu jeder n–Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M existiert eine unberandete n–Mannigfaltigkeit $M^* \supset M$ mit stetiger Involution $\sigma : M^* \to M^*$ und Fixpunktmenge ∂M, sodass $M^* = M \cup \sigma M$ und $M \cap \sigma M = \partial M$ gilt. Ist $(M, \mathscr{A})$ glatt / orientiert, so auch $(M^*, \mathscr{A}^*)$ und σ ist glatt / orientierungsumkehrend.

Wir nennen $D(M) := M^*$ die *Verdopplung* von M. Beispielsweise gilt $D(\mathbb{R}^n_{\geq 0}) \cong \mathbb{R}^n$ und $D(\mathbb{D}^n) \cong \mathbb{S}^n$. Verdopplung des Möbius–Bandes ergibt die Kleinsche Flasche (K:10).

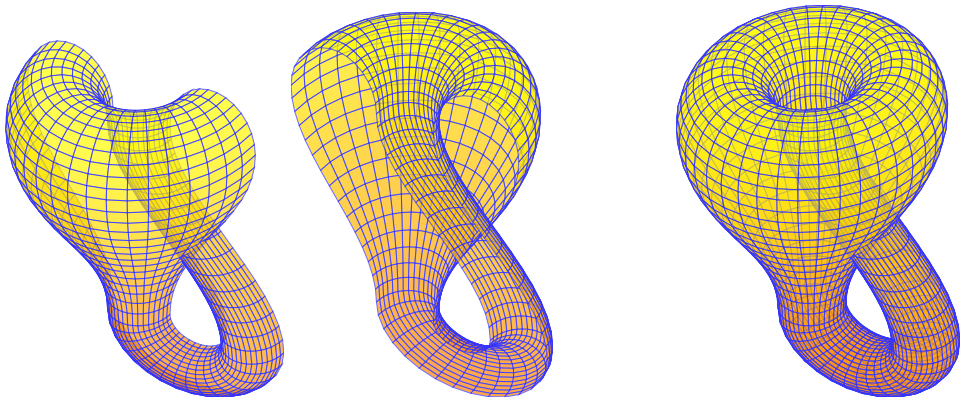


ABBILDUNG K:10. Verdopplung des Möbius–Bandes zur Kleinschen Flasche

✻ **K1v.** Für $M = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ nutzen wir $M^* = \mathbb{R}^n$ und $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$. Allgemein betrachten wir $X = M \times \{\pm 1\}$ mit Involution $\sigma(x, \pm 1) = (x, \mp 1)$ und den Quotienten $M^* := X/_\sim$ bezüglich $(x, +1) \sim (x, -1)$ für $x \in \partial M$. Die Komposition $M \hookrightarrow X \twoheadrightarrow M^*$ ist eine Einbettung. Wir identifizieren M mit seinem Bild in M^* und schreiben $M \subseteq M^*$. Die Involution $\sigma : X \to X$ induziert eine stetige Involution $\sigma : M^* \to M^*$ mit Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(\sigma) = \partial M$, es gilt $M^* = M \cup \sigma M$ und $M \cap \sigma M = \partial M$.

Es bleibt zu zeigen, dass $M^* := X/_\sim$ eine n–Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Die Hausdorff–Eigenschaft und eine abzählbare Basis weist man leicht nach. Jede Karte $(h, k) : M \supseteq U \cong V \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ von M setzen wir fort zur Karte $(h^*, k^*) : M^* \supseteq U^* \cong V^* \subseteq \mathbb{R}^n$ von M^*. Hierbei ist U offen in M, also ist $U^* = U \cup \sigma U$ offen in M^*. Weiters ist V offen in $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, also ist $V^* = V \cup \sigma V$ offen in $\mathbb{R}^n$. Wir setzen $h^*(x) = x$ für $x \in U$ und $h^*(x) = \sigma h \sigma(x)$ für $x \in \sigma U$ sowie $k^*(y) = k(y)$ für $y \in V$ und $k^*(y) = \sigma k \sigma(y)$ für $y \in \sigma V$. Dies ist wohldefiniert dank $U \cap \sigma U \subseteq \partial M$ und $h(\partial M) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Somit ist $(h^*, k^*) : U^* \cong V^*$ ein Homöomorphismus.

Aus jedem Atlas $\mathscr{A} = (h_i)_{i \in I}$ von M gewinnen wir so einen Atlas $\mathscr{A}^* = (h_i^*)_{i \in I}$ der Verdopplung M^*. Ist der Atlas $\mathscr{A}$ zudem orientiert, so auch $\mathscr{A}^*$, und die Involution $\sigma : M^* \to M^*$ ist orientierungsumkehrend. Schließlich sei der Atlas $\mathscr{A}$ glatt, also alle Kartenwechsel h_{ij} in $\mathscr{A}$ seien $\mathscr{C}^r$–differenzierbar, wobei $r \geq 1$. Hier ist Orthogonalität eine technisch notwendige Vorkehrung: Wir müssen für jede Kartenwechsel h_{ij} in $\mathscr{A}$ voraussetzen bzw. einrichten, dass auf dem Rand ∂M die Ableitung $\partial_1 h_{ij}$ senkrecht steht auf $e_2, \dots, e_n$. (Andernfalls entstehen Knicke.) Ist dies alles erfüllt, so ist auch der Atlas $\mathscr{A}^*$ glatt, und darauf ist σ eine glatte Involution.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K1s. Produkt von Mannigfaltigkeiten. Zu Mannigfaltigkeiten M und N statten wir ihr Produkt $M \times N$ wie üblich mit der Produkttopologie (E4A) aus. Die Modellräume $\mathbb{R}^n$ sind stabil unter Produktbildung, denn $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ mit der stillschweigenden Identifizierung $((x_1,\dots,x_m),(y_1,\dots,y_n)) \mapsto (x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$. Für Mannigfaltigkeiten mit Rand nutzen wir als Modelle die Halbräume $\mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{\,(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\,\}$. Diese erfüllen leider nicht $\mathbb{R}^n_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m_{\geq 0} = \mathbb{R}^{m+n}_{\geq 0}$. Immerhin kann ein kanonischer Homöomorphismus den Winkel geradebiegen, doch mit Diffeomorphismen gelingt dies nicht (A1R).

Um diese Komplikation zu vermeiden, nutzen wir als lokale Modelle die Orthanten $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ oder die Würfel $[-1,1]^n$: Sie sind in jedem Punkt lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ (A1R), doch zudem gilt $(\mathbb{R}_{\geq 0})^m \times (\mathbb{R}_{\geq 0})^n = (\mathbb{R}_{\geq 0})^{m+n}$ und $[-1,1]^m \times [-1,1]^n = [-1,1]^{m+n}$. *Choose your models wisely!*

Übung K1W. Seien M und N nicht-leere topologische Mannigfaltigkeiten.

(0) Der Produktraum $M \times N$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit: Zu Atlanten
$$\mathscr{A} = (h_i : M \supset U_i \xrightarrow{\sim} U_i' \subset [-1,1]^m)_{i\in I} \quad \text{auf } M \text{ und}$$
$$\mathscr{B} = (k_j : N \supset V_j \xrightarrow{\sim} V_j' \subset [-1,1]^n)_{j\in J} \quad \text{auf } N$$
erhalten wir auf $M \times N$ den Produktatlas
$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = (h_i \times k_j : M \times N \supset U_i \times V_j \xrightarrow{\sim} U_i' \times V_j' \subset [-1,1]^{m+n})_{(i,j)\in I\times J}.$$
(1) Die Dimension ist dabei additiv, $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.
(2) Sind $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ orientiert bzw. $\mathscr{C}^r$–glatt, so auch $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.
(3) Für den Rand gilt Leibniz, $\partial(M \times N) = [(\partial M) \times N] \cup [M \times (\partial N)]$.
Zum Beispiel ist $\partial(M \times [-1,1]) \cong M^*$ die Verdopplung von M (K1V).
(4) Wiederholung: Genau dann ist $M \times N$ kompakt, wenn M und N kompakt sind.
Genau dann ist $M \times N$ geschlossen, wenn M und N geschlossen sind.
(5) Wiederholung: Es gilt $\pi_0(M \times N) = \{\, X \times Y \mid X \in \pi_0(M),\ Y \in \pi_0(N)\,\}$.

Bemerkung. Die Konstruktion (2) zeigt: Sind M und N orientierbar, so auch $M \times N$. Hierzu gilt auch die Umkehrung (M4S): Genau dann ist die Produktmannigfaltigkeit $M \times N$ orientierbar, wenn beide Faktoren $M \times N$ orientierbar sind.

⁕ **K1W.** Alle Konstruktionen sind explizit angegeben, es genügt, sie anhand der Definition K1B nachzuprüfen.

(1) Der Raum $M \times N$ ist hausdorffsch (E4U). Sind M und N zweitabzählbar, so auch $M \times N$ (E4U). Allgemein gilt Zweitabzählbarkeit zumindest für jede Komponenten $[(x,y)]_{M\times N} = [x]_M \times [y]_N$, siehe (5). Die kanonische Konstruktion liefert lokale Karten. Hieraus folgt die Dimensionsformel.

(2) Diese Aussagen sind klar, denn Orientierung und Differenzierbarkeit vertragen sich mit Produkten. (Hier ist die glatte Orientierung leicht, die topologische Orientierung erfordert etwas Finesse, siehe J3L.)

(3) Es genügt, dies an unseren Modellräumen zu überprüfen: Der geometrische (und auch topologische) Rand des Würfels $[-1,1]^n$ ist $\partial([-1,1]^n) = \{\, x \in [-1,1]^n \mid \exists i \in \{1,\dots,n\} : x_i = \pm 1\,\}$. Für $M = [-1,1]^m$ und $N = [-1,1]^n$ sowie $M \times N = [-1,1]^{m+n}$ gilt demnach $\partial(M \times N) = [(\partial M) \times N] \cup [M \times (\partial N)]$. Diese schöne Eigenschaft überträgt sich mittels Karten (1) von den Modellräumen auf alle Mannigfaltigkeiten.

(4) Genau dann ist der Produktraum $M \times N$ kompakt, wenn beide Faktoren M und N kompakt sind: Dies ist der kleine Satz von Tychonoff (F1N). Genau dann ist die Produktmannigfaltigkeit $M \times N$ unberandet, wenn beide Faktoren M und N unberandet sind, siehe (3). Geschlossen bedeutet kompakt und unberandet.

(5) Jede Mannigfaltigkeit ist lokal zusammenziehbar, somit lokal wegzusammenhängend, also stimmen Zusammenhangs- und Wegkomponenten überein (G3C). Genau dann ist $M \times N$ (weg)zusammenhängend, wenn beide Faktoren M und N dies sind. Allgemein gilt die angegebene Produktzerlegung, siehe G2J.

§K1t. Metrisierbarkeit und Einbettungen.

Übung K1X. Jede Mannigfaltigkeit ist metrisierbar (Wiederholung von E5T):

(1) Jeder lokal euklidische Raum $(X,\mathcal{T})$ erfüllt T_1.
(2) Es gibt Gegenbeispiele ohne T_2. Gilt zudem T_2, so folgt T_3 und sogar $T_{3\frac{1}{2}}$.
(3) Es gibt Gegenbeispiele ohne 2AA. Gilt zudem 2AA, so ist $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar.
(4) Umgekehrt: Ist ein topologischer Raum M lokal euklidisch und metrisierbar, so ist M hausdorffsch und jede Komponente zweitabzählbar, also eine Mannigfaltigkeit.

Jede geschlossene Mannigfaltigkeit M lässt sich in einen $\mathbb{R}^N$ einbetten:

(5) Es gibt eine offene Überdeckung $M = U_1 \cup \cdots \cup U_\ell$ mit $\varphi_k : U_k \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$.
(6) Kompaktifizierung liefert stetige Fortsetzungen $\bar\varphi_k : M \to \mathbb{R}^m \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^m$.
(7) Wir erhalten so eine Einbettung $\varphi = (\bar\varphi_1,\dots,\bar\varphi_\ell) : M \hookrightarrow (\mathbb{S}^m)^\ell \subset \mathbb{R}^{(m+1)\ell}$.

Bemerkung: Die Dimension $N = (m+1)\ell$ ist unnötig groß, was unserem einfachen Beweis geschuldet ist. Eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ ist immer möglich, siehe Munkres, Corollary 50.8: „Every compact m–manifold can be imbedded in $\mathbb{R}^{2m+1}$." Exercise 6 auf Seite 315 zeigt, dass dies sogar für nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten gilt.

Es ist eine interessante aber schwierige Frage, zu einer gegebenen Mannigfaltigkeit M die kleinste Dimension d zu bestimmen, für die eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ möglich ist.

Beispiel. Der Ball $\mathbb{D}^n$ lässt sich in $\mathbb{R}^n$ einbetten, aber nicht in $\mathbb{R}^{n-1}$ (J6D).

Beispiel. Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ lässt sich in $\mathbb{R}^{n+1}$ einbetten, aber nicht in $\mathbb{R}^n$ (J6C).

Beispiel. Jede orientierbare geschlossene Fläche F_g^+ lässt sich in $\mathbb{R}^3$ einbetten aber nicht in $\mathbb{R}^2$. Jede nicht-orientierbare geschlossene Fläche F_g^- lässt sich in $\mathbb{R}^4$ einbetten aber nicht in $\mathbb{R}^3$. Jede kompakte Fläche $F_{g,r}^\pm$ mit Rand ($r \geq 1$) hingegen lässt sich in den Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten, orientierbare Flächen $F_{0,r}^+$ mit Geschlecht 0 sogar in die Ebene $\mathbb{R}^2$, nicht in $\mathbb{R}^1$

Übung K1Y. Wiederholen Sie die Invarianz des Gebietes (K1R) und zeigen Sie:

(0) Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ kann im $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet werden, aber nicht im $\mathbb{R}^n$ (J6C).
Allgemeiner gilt: Ist $M \neq \emptyset$ eine geschlossene n–dimensionale Mannigfaltigkeit, also kompakt und ohne Rand, so existiert keine Einbettung $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.
(1) Seien M, N zwei n–Mannigfaltigkeiten, $M \neq \emptyset$ geschlossen, N zusammenhängend. Dann ist jede stetige Injektion $f : M \hookrightarrow N$ ein Homöomorphismus.
(2) Seien M, N zwei n–Mannigfaltigkeiten, $M \neq \emptyset$ kompakt, N zusammenhängend. Dann ist jede stetige Injektion $f : (M,\partial M) \hookrightarrow (N,\partial N)$ ein Homöomorphismus.

✻ **K1Y.** Aussage (0a) folgt aus (0b) im Spezialfall $M = \mathbb{S}^n$. Aussage (0b) folgt aus (2) im Spezialfall $N = \mathbb{R}^n$.

(1) Dank Invarianz des Gebietes (K1R) ist $f : M \hookrightarrow N$ offen, insbesondere ist $f(M) \subset N$ offen. Mit M ist auch $f(M)$ kompakt (F1J). Da N hausdorffsch ist, ist $f(M)$ abgeschlossen in N (F1G). Da N zusammenhängend ist und hierin $f(M) \neq \emptyset$ sowohl offen als auch abgeschlossen, bleibt nur $f(M) = N$. Somit ist $f : M \to N$ bijektiv, stetig und offen, also ein Homöomorphismus.

(2) Ohne Rand, $\partial M = \emptyset$, ist dies die Aussage (1). Im Fall $\partial M \neq \emptyset$ führen wir Aussage (2) auf (1) zurück: Gemäß K1V verdoppeln wir M zu M^* und N zu N^* und setzen f fort zu $f^* : M^* \to N^*$ mit $f^*\sigma = \sigma f^*$. Mit M ist auch M^* kompakt, zudem gilt $\partial M^* = \emptyset$. Mit f ist auch f^* eine stetige Injektion. Dank (1) ist $f^* : M^* \to N^*$ ein Homöomorphismus, also auch die Einschränkung $f : M \to N$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K1u. Homogenität. Nach Definition K1B sieht jede n–Mannigfaltigkeit lokal überall gleich aus: im Inneren wie $(\mathbb{R}^n, 0)$, am Rand wie $(\mathbb{R}^n_{\geq 0}, 0)$. Stärker noch gilt: Wir können Punkt im Inneren bzw. im Rand durch Homöomorphismen beliebig verschieben:

Übung K1Z (Homogenität)**.** Sei M eine Mannigfaltigkeit, eventuell mit Rand ∂M.

(1) Seien $x, y \in \operatorname{Int} M$ zwei innere Punkte in derselben (Weg)Komponente von M. Dann existiert ein Homöomorphismus $\Phi_1 : M \xrightarrow{\sim} M$ mit $h(x) = y$. Genauer gilt:

Zu jedem Weg $\varphi : [0,1] \to \operatorname{Int} M$ von $\varphi(0) = x$ nach $\varphi(1) = y$ existiert eine Homöotopie $\Phi : [0,1] \times M \to M$, also eine stetige Familie von Homöomorphismen $\Phi_t : M \xrightarrow{\sim} M$ mit $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$ und $\Phi_t(x) = \varphi(t)$ für alle $t \in [0,1]$, und somit $\Phi_1(x) = y$. Wir können zudem Φ mit kompaktem Träger wählen: Wir nennen $x \in X$ einen *Fixpunkt* falls $\Phi_t(x) = \Phi_0(x)$ für alle $t \in [0,1]$ gilt; andernfalls sagen wir, Φ bewegt x. Der *Träger* von Φ ist der Abschluss

$$\operatorname{supp}(\Phi) := \overline{\{\, x \in X \mid \Phi \text{ bewegt } x \,\}}.$$

(2) Gleiches gilt für Randpunkte $x, y \in \partial M$ in derselben (Weg)Komponente von ∂M.

Hinweis: Beweisen Sie (1) und (2) zunächst in einer Karte $h : M \supset U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Nehmen Sie $M = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ an und entwickeln Sie eine explizite Formel für Φ zu φ. Allgemein können Sie dann jeden beliebigen Weg φ zerlegen gemäß $\varphi = \varphi_1 * \cdots * \varphi_\ell$ in endlich viele Teilwege $\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell$, von denen jeder in nur einem Kartengebiet verläuft.

(3) Sei M zusammenhängend und $\dim M \geq 2$. Wir können jedes n–Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\operatorname{Int} M$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ abbilden auf jedes n–Tupel $(y_1, \ldots, y_n)$ in $\operatorname{Int} M$ mit $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$ durch einen Homöomorphismus $\Phi_1 : M \xrightarrow{\sim} M$ mit $\Phi_1(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Anders gesagt, die Homöomorphismengruppe $\mathrm{Homeo}(M)$ operiert n–transitiv auf M.

Genauer existiert eine Homöotopie $\Phi : [0,1] \times M \to M$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(\Phi)$ sowie $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$ und $\Phi_1(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Demnach operiert die Untergruppe $\mathrm{Homeo}_0(M) < \mathrm{Homeo}(M)$ ebenfalls n–transitiv auf M; dies sind alle Homöomorphismen, die sich per Homöotopie mit der Identität verbinden lassen.

(4) Im Falle $\dim M = 1$ gilt Aussage (3) nicht: Für $M = \mathbb{R}$ muss jeder Homöomorphismus $\varphi \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ die Ordnung respektieren (D2F): Für $x = (x_1 < \cdots < x_n)$ und $y = \varphi(x)$ gilt $y = (y_1 < \cdots < y_n)$ oder $y = (y_1 > \cdots > y_n)$. Umgekehrt existiert zu solchen n–Tupeln x, y ein $\varphi \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ mit $\varphi(x) = y$. Die Orientierungsumkehr ist für $\varphi \in \mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R})$ nicht möglich: Für $x = (x_1 < \cdots < x_n)$ und $y = \varphi(x)$ gilt $y = (y_1 < \cdots < y_n)$. Umgekehrt existiert zu solchen n–Tupeln x, y ein $\varphi \in \mathrm{Homeo}_0(\mathbb{R})$ mit $\varphi(x) = y$. Für $M = \mathbb{S}^1$ muss die zyklische Ordnung erhalten werden. Formulieren und beweisen Sie auch dies.

(5) Gleiches gilt bei Vorgabe von inneren Punkten $x_1, \ldots, x_m \in \operatorname{Int} M$ und Randpunkten $x_{m+1}, \ldots, x_n \in \partial M$. Präzisieren und beweisen Sie diese Aussage.

Bemerkung. Diese Aussagen gelten sinngemäß auch für jede glatte Mannigfaltigkeit M und Diffeomorphismen. Wir setzen dabei mehr voraus, verlangen aber auch mehr: Zu jedem glatten Weg $\varphi : [0,1] \to M$ existiert eine glatte Familie $\Phi : [0,1] \times M \to M$ von Diffeomorphismen $\Phi_t : M \xrightarrow{\sim} M$. Allgemeiner können wir so nicht nur Punkte in M bewegen, sondern jedes Kompaktum: Dies garantiert Thoms Ausdehungssatz für glatte Isotopien (siehe M.W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer 1976, §8.1).

§K2. Projektive Räume

Wie die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$, die Bälle $\mathbb{D}^n$ und die Sphären $\mathbb{S}^n$ gehören auch die projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ zur Grundausstattung der Mathematik. Sie sind von zentraler Bedeutung für Topologie, Geometrie, Algebra, Physik, usw. In der Flächenklassifikation ist die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 = F_0^-$ die erste nicht-orientierbare geschlossene Fläche.

Während jede Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ unmittelbar als euklidischer Teilraum gegeben ist, gilt dies für projektive Räume nicht: Sie entstehen zunächst als Quotientenräume, erst danach wird man versuchen, sie als euklidische Teilräume einzubetten. Dies gelingt zwar, ist aber in gewisser Weise willkürlich und entspringt nicht der Natur der projektiven Räume. Somit steht die Quotientenkonstruktion im Vordergrund, und dieser wenden wir uns nun zu.

§K2a. Motivation aus der projektiven Geometrie. Auge oder Kamera nutzen die Zentralprojektion auf eine Bildebene E wie in Abbildung K:11: Als Projektionszentrum wählen wir den Koordinatenursprung $O = (0,0,0)$. Zwei Objektpunkte fallen auf denselben Bildpunkt, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden durch O liegen. Zwei Objektgeraden fallen auf dieselbe Bildgerade, wenn sie auf einer gemeinsamen Ebene durch O liegen. (Sie dürfen selbst nicht durch O laufen, andernfalls würden sie nämlich zu Punkten projiziert.)

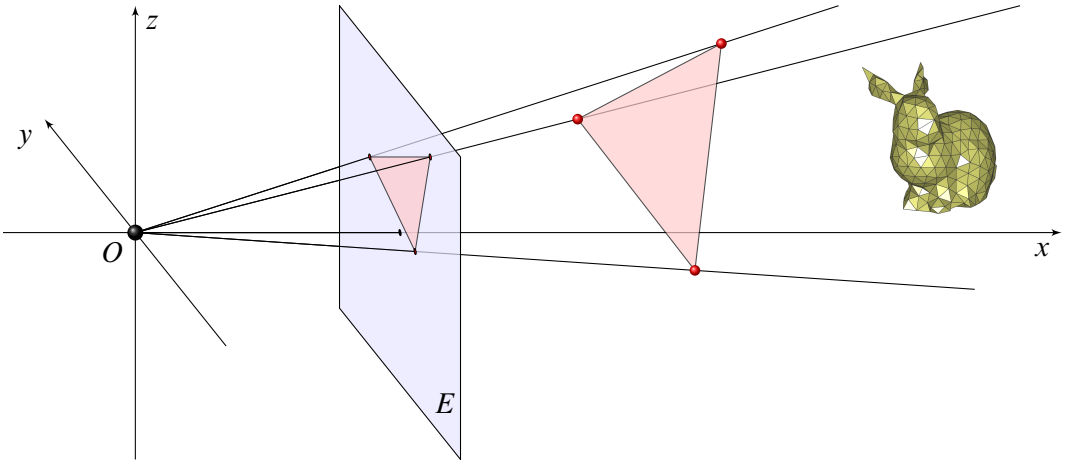


ABBILDUNG K:11. Zentralprojektion dreidimensionaler Objekte auf eine Ebene

Tiefe. Die Projektion löscht die Tiefeninformation: Die dreidimensionale Szene wird zu ihrem zweidimensionalen Bild projiziert. Dies wollen wir nun mathematisch beschreiben und verallgemeinern.

Die hierbei geltenden Regeln werden in der Kunst zur *perspektivischen Darstellung* genutzt. Die zusätzliche Tiefeninformation ist wichtig für realistische Bilder (Malerei) und praktische Anwendungen (*computer vision*). In der Photographie nutzt man hierzu die *Tiefenschärfe*, etwa bei Portraits. In der Landschaftsmalerei dient das Verblassen weit entfernter Objekte zur *Farbperspektive*.

Die Evolution hat den Menschen mit zwei Augen ausgestattet, deren Gesichtsfeld sich weitgehend überlappt. Aus der dabei entstehenden *Parallaxe* kann das Gehirn die Tiefe errechnen. Das ist für Jäger vorteilhaft, ebenso bei der Nutzung von Werkzeugen. Fluchttiere wie Pferde oder Kaninchen tragen ihre Augen seitlich am Kopf: Das bringt mehr Rundumblick, kostet aber das räumliche Sehen.

Auch mit nur einem Auge kann man Tiefeninformation durch Bewegung ermitteln; so messen Astronomen etwa die Entfernung nahegelegener Sterne durch die Parallaxe der Erdbahn um die Sonne.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Seit jeher entstehen mathematische Fragen aus praktischen Bedürfnissen, in der Antike etwa Landvermessung, Kalender, Buchhaltung, etc., seit der Renaissance verstärkt in Kunst, Ingenieurwesen, Astronomie, Physik, etc. Albrecht Dürer (1471–1528) war Maler, Graphiker und Mathematiker. Er veröffentlichte 1525 sein Lehrwerk *Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebnen unnd gantzen corporen*. Dabei bedeutet *Messen* oder *Messkunst* im heutigen Sinne *geometrische Konstruktion und Darstellung*.

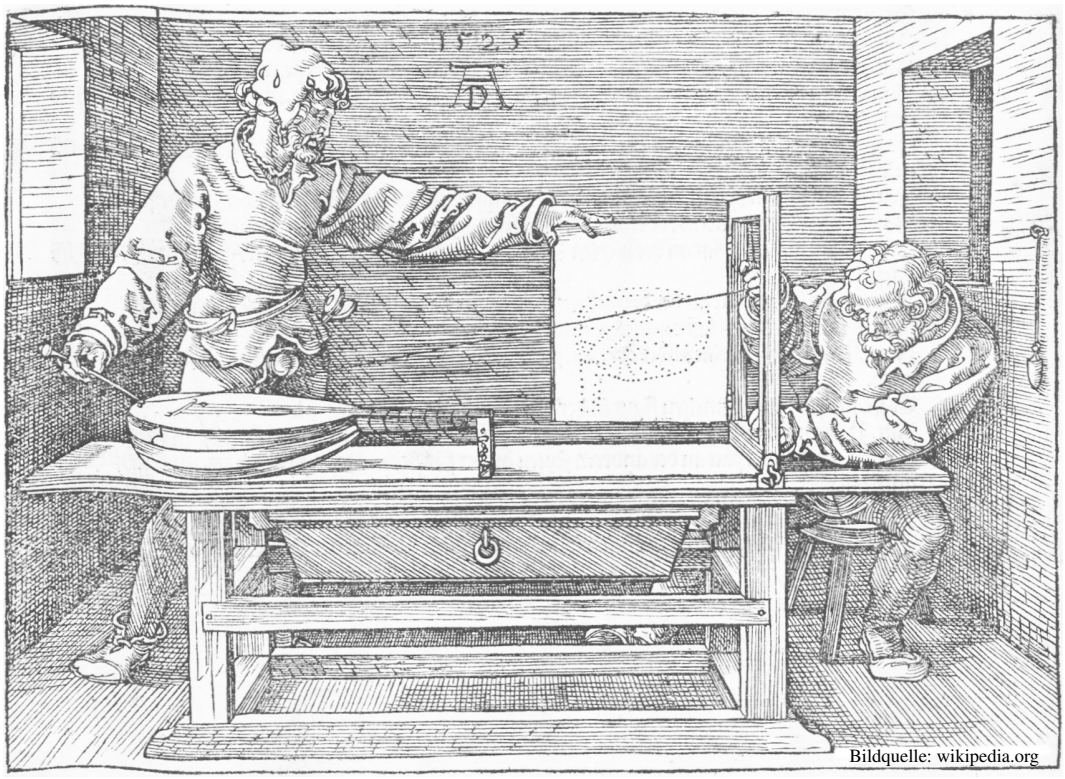


ABBILDUNG K:12. Albrecht Dürers *Underweysung* zum Perspektivproblem

Die Regeln der projektiven Geometrie lassen sich leicht als Slogan zusammenfassen: *Geraden sind die neuen Punkte! Ebenen sind die neuen Geraden!*

Aus dieser einfachen Idee ergeben sich zahlreiche interessante Konsequenzen. Dies wollen wir im Folgenden mathematisch präzise formulieren und verstehen lernen.

Unter Zentralprojektion sind zwei Punkte p, q in $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ genau dann *äquivalent*, wenn sie auf derselben Ursprungsgeraden liegen, also $p = \lambda q$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ gilt. Dies ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf dem Raum $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$. Der Quotientenraum $\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\})/(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\})$ ist die *reell-projektive Ebene*. Die Zentralprojektion wird so zur Quotientenabbildung $q : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^2$. Jede affine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$, wie oben in Abbildung K:11, liefert eine lokale Karte von $\mathbb{RP}^2$, deckt aber alleine noch nicht alles ab.

Die geübte Mathematikerin liebäugelt an dieser Stelle sogleich mit der Abstraktion:

- Wir benötigen keine affine Projektionsebene, sondern konstruieren einen Quotienten.
- Diese Konstruktion gelingt genauso in jeder Dimension und über jedem Körper $\mathbb{K}$.

☞ **§K2b. Motivation aus der mathematischen Physik: Qubits.** Die klassische Physik ☜ beschreibt den Zustand eines Systems durch deterministische Größen, in der klassischen Mechanik etwa Massen $m_k \in \mathbb{R}$ mit Positionen $u_k \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeiten $v_k \in \mathbb{R}^3$.

Beispiel. So lässt sich die Bewegung von Himmelskörpern beschreiben und berechnen:

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum\nolimits_{j\neq k} \gamma\, m_j \, \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Vorgegeben sind die Anfangssdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$. Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T[\to \mathbb{R}^{6n}$. Die Lösung ist eindeutig dank Picard–Lindelöf (C4R). Darauf aufbauend kann sie numerisch näherungsweise berechnet werden. Glückliche Spezialfälle wie das Zweikörperproblem lassen sich sogar elementar lösen.

Die Quantenmechanik hingegen beschreibt jeden Zustand durch einen Vektor in einem $\mathbb{C}$–Vektorraum und projiziert diese zu Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel. Als kleinste Informationseinheit kann ein *Bit* nur den Zustand 0 oder 1 annehmen. Die Quantenmechanik erlaubt zudem *Überlagerungen* dieser Basiszustände: Jeder Zustand schreibt sich eindeutig als Linearkombination $s = a|0\rangle + b|1\rangle$. Dabei wird mit komplexen Amplituden $a, b \in \mathbb{C}$ gerechnet, wobei $(a, b) \neq (0, 0)$. Die möglichen Zustände und der Nullvektor bilden somit einen zweidimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraum.

Physikalisch messbar sind jedoch nicht der Zustand $s = a|0\rangle + b|1\rangle$ oder die Amplituden $a, b \in \mathbb{C}$, sondern nur ihre Absolutquadrate $|a|^2, |b|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Das Längenquadrat des Zustandsvektors s ist $|s|^2 = |a|^2 + |b|^2 > 0$. Normiert zu $|s| = 1$ erhalten wir $|a|^2 + |b|^2 = 1$: dies sind die Wahrscheinlichkeiten, dass Zustand 0 bzw. 1 gemessen wird.

Der *normierte Zustand* s mit $|s| = 1$ liegt demnach auf der 3–Sphäre:

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \cong \big(\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}\big)/\mathbb{R}_{>0}$$

Auch die Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{S}^1$ ändert den Zustand nur unwesentlich: Sie bewirkt eine *globale Phasenverschiebung* und ist nicht messbar. Wir bilden den Quotienten daher nicht nur modulo $\mathbb{R}_{>0}$, sondern modulo $\mathbb{C}^\times$. Im Vektorraum $\mathbb{C}^2$ betrachten wir also zunächst $\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$ und identifizieren dann je zwei Zustände, die sich nur durch ein Vielfaches $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ unterscheiden. Wir erhalten so die komplex-projektive Gerade:

$$\mathbb{CP}^1 := \big(\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}\big)/\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$$

Dieser Raum beschreibt den quantenmechanischen Zustand eines Systems mit genau zwei Basiszuständen. Dies ist die Grundeinheit der Quanteninformation und heißt *Qubit*. Für ein System mit $n + 1$ orthogonalen Basiszuständen erhalten wir entsprechend $\mathbb{CP}^n$.

Wie sieht der Quotientenraum $\mathbb{CP}^1$ aus? Erstaunlicherweise ist dies die 2–Sphäre $\mathbb{S}^2$! In der Quantenmechanik heißt $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ traditionell *Bloch–Sphäre*, nach dem Physiker Felix BLOCH (1905–1983). In der komplexen Analysis heißt $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$ *Riemannsche Zahlensphäre*, nach dem Mathematiker Bernhard RIEMANN (1826–1866). Insbesondere gilt $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$: Dies ist die berühmte *Hopf–Faserung* $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$, nach Heinz HOPF (1894–1971). Viele Namen für Aspekte desselben faszinierenden Objekts.

Dieser Konstruktion wollen wir nun auf den Grund gehen. Unser topologisches Augenmerk liegt dabei auf den reell-projektiven Räumen $\mathbb{RP}^n$ und den komplex-projektiven Räumen $\mathbb{CP}^n$, doch die Konstruktion gelingt ebenso über jedem Körper $\mathbb{K}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K2c. Projektive Räume: Geraden sind die neuen Punkte! Die projektiven Räume entstehen auf natürliche Weise als Quotientenräume. Glücklicherweise haben wir diesen Begriff gründlich vorbereitet. Die folgende Definition ist dann eine leichte aber zentrale Anwendung. Die geometrische Idee ist denkbar einfach: Wir betrachten einen Vektorraum V und darin alle Geraden, und erhalten so den projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$.

Definition K2A. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ seine multiplikative Gruppe. Diese operiert durch (Links-)Multiplikation auf jedem $\mathbb{K}$–Vektorraum V und ebenso auf der Teilmenge $V^\sharp = V \smallsetminus \{0\}$. Wir definieren den *projektiven Raum* $\mathbb{P}(V)$ als den Quotienten

$$\mathbb{K}^\times \curvearrowright V^\sharp \xrightarrow{q} \mathbb{P}(V) := V^\sharp/\mathbb{K}^\times \,:\, x \mapsto q(x) = [x] = \mathbb{K}^\times \cdot x$$

Der Übergang von V zu $\mathbb{P}(V)$ heißt *Projektivierung*.

Geometrisch: Jeder Vektor x in $V^\sharp = V \smallsetminus \{0\}$ erzeugt eine Gerade $\mathbb{K}x$ in V. Genau dann erzeugen $x, y \in V^\sharp$ dieselbe Gerade $\mathbb{K}x = \mathbb{K}y$, geschrieben $x \sim y$, wenn ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ mit $x = \lambda y$ existiert. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $V^\sharp$. Die Äquivalenzklasse $\mathbb{K}^\times \cdot x$ ist die Gerade ohne 0. Der Quotientenraum ist der oben definierte projektive Raum $\mathbb{P}(V)$.

Beispiel. Als Standardbeispiel betrachten wir den Koordinatenraum

$$V = \mathbb{K}^{n+1} = \big\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \;\big|\; x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \big\}.$$

Den projektiven Raum schreiben wir dann $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{KP}^n$ und erhalten:

$$q \,:\, \mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{KP}^n \,:\, (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \dots : x_n] = \mathbb{K}^\times \cdot x$$

Diese Schreibweise nennt man *homogene Koordinaten*, denn für alle Skalare $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ gilt:

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n]$$

Speziell im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ trägt der Vektorraum $\mathbb{K}^{n+1}$ die euklidische Topologie, $\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ ist ein Teilraum, und $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{KP}^n$ ist der zugehörige Quotientenraum.

Bemerkung. Projektivierung ist verträglich mit Teilräumen: Ist $U < V$ ein Untervektorraum, so operiert $\mathbb{K}^\times$ auf der Teilmenge $U^\sharp \subset V^\sharp$, und wir erhalten $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$.

Speziell für die Koordinatenräume verfügen wir über die kanonischen Einbettungen $\mathrm{inc} : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1} : (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$. Wir erhalten so die kanonischen Einbettungen der zugehörigen projektiven Räume:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{K}^1 & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{K}^2 & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{K}^3 & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{K}^4 & \hookrightarrow & \dots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbb{K}^1 \smallsetminus \{0\} & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{K}^2 \smallsetminus \{0\} & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{K}^3 \smallsetminus \{0\} & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{K}^4 \smallsetminus \{0\} & \hookrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{KP}^0 & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{KP}^1 & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{KP}^2 & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{KP}^3 & \hookrightarrow & \dots
\end{array}$$

Bemerkung. Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ operiert auf $\mathbb{K}^{n+1}$ durch lineare Abbildungen und somit auch auf $\mathbb{KP}^n$. Vielfache operieren dabei gleich, wir erhalten daher eine Operation der *projektiven linearen Gruppe* $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) := \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})/\mathbb{K}^\times$.

§K2d. Die Fano–Ebene. Das kleinste Beispiel erhalten wir für den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ und $n = 2$. Hier besteht $V = \mathbb{F}_2^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ aus acht Vektoren, also $V^\sharp = \mathbb{F}_2^3 \smallsetminus \{0\}$ aus sieben. Jeder Vektor $v \in V^\sharp$ spannt die Gerade $\{0, v\} \subset \mathbb{F}_2^3$ auf. Diese sieben Geraden in $\mathbb{F}_2^3$ sind die Punkte des projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.

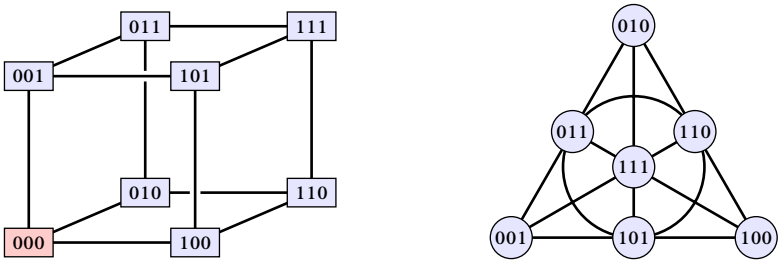


ABBILDUNG K:13. $\mathbb{F}_2^3$ als Würfel und $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$ als Fano–Ebene

Bemerkung. Je zwei Vektoren $u \neq v$ aus $V^\sharp$ spannen die Ebene $\{0, u, v, u+v\}$ in $\mathbb{F}_2^3$ auf. Es gibt insgesamt $\binom{7}{2} = 21$ solche Paare $\{u, v\}$, und jede Ebene wird dabei dreimal gezählt, also gibt es genau sieben verschiedene Ebenen. Diese können wir nun mühelos aufzählen.

$$\{001,010,011\},\quad \{001,100,101\},\quad \{001,110,111\},\quad \{010,101,111\},$$
$$\{010,100,110\},\quad \{011,100,111\},\quad \{011,101,110\}$$

Diese sieben Ebenen in $\mathbb{F}_2^3$ betrachten wir als Geraden in $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$. Die sieben Punkte und sieben Geraden von $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ lassen sich wie in Abbildung K:13 darstellen. Dies bezeichnet man als die *Fano–Ebene*. Sie hat interessante kombinatorische Eigenschaften:

(1) Mit zwei verschiedenen Punkten inzidiert genau eine Gerade.
(2) Mit zwei verschiedenen Geraden inzidiert genau ein Punkt.
(3) Es gibt vier Punkte, sodass keine Gerade mit mehr als zwei davon inzidiert.

In der synthetischen Geometrie ist $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ das Minimalmodell einer projektiven Ebene; man versteht darunter eine Menge P von *Punkten* und eine Menge L von *Geraden* und einer Relation $F \subset P \times L$ zwischen Punkten und Geraden, genannt Inzidenz, die obige Bedingungen (1–3) erfüllt. Die Bezeichnung „Inzidenz“ ermöglicht eine symmetrische Sprechweise für Punkte und Geraden. Bedingung (2) besagt, dass es keine parallelen Geraden gibt. Bedingung (3) dient dazu, degenerierte Fälle auszuschließen.

Übung K2B. Dieselbe Konstruktion gelingt für jeden endlichen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ mit $q = p^k$ Elementen. Wie viele Elemente hat $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \mathbb{P}(n,q)$? Wie erklären Sie das geometrisch?

✻ **K2B.** Der Vektorraum $V = \mathbb{F}_q^{n+1}$ hat q^{n+1} Elemente, die Teilmenge $V^\sharp$ somit $q^{n+1}-1$, und der Quotient $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \mathbb{P}(n,q)$ hat $(q^{n+1}-1)/(q-1) = 1+q+q^2+\cdots+q^n$. Im obigen Beispiel $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ mit $q = 2$ und $n = 2$ erhalten wir $1+2+4 = 7$, wie gesehen. Hinter dieser geometrischen Summe steckt tatsächlich wunderschöne Geometrie: Die Inklusion $\mathbb{K}^n \subset \mathbb{K}^{n+1}$ gibt uns $\mathbb{KP}^{n-1} = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_n = 0\}$ und somit $\mathbb{KP}^n \smallsetminus \mathbb{KP}^{n-1} = \big\{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \,\big|\, x_n \neq 0\big\} = \big\{[x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1} : 1]\big\} \cong \mathbb{K}^n$. Aus der kanonischen *Filtrierung* $\mathbb{KP}^0 \subset \mathbb{KP}^1 \subset \mathbb{KP}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{KP}^n$ gewinnen wir so die *Zellenzerlegung* $\mathbb{KP}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{K}^n$. Dies erklärt die obige Formel $\sharp\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = 1+q+q^2+\cdots+q^n$ geometrisch: Das ist ein schönes Beispiel für algebraisch-geometrischen Zahlenzauber: Den Zahlen entsprechen ganz konkrete geometrische Objekte! Diese Sichtweise ist oft nützlich, der vornehme Ausdruck hierfür ist *Kategorifizierung*.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§K2e. Reelle und komplexe projektive Räume.** Projektive Räume sind faszinierende ☜ algebraische und geometrische Objekte. Über endlichen Körpern stehen ihre algebraisch-kombinatorischen Eigenschaften im Vordergrund. Um Topologie und Differentialgeometrie betreiben zu können, betrachtet man projektive Räume über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\mathbb{RP}^n := \big(\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}\big) \,/\, \big(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}\big)$$
$$\mathbb{CP}^n := \big(\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}\big) \,/\, \big(\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}\big)$$

Wie üblich versehen wir den Quotientenraum mit der Quotiententopologie (E2B).

Der folgende Satz stellt die grundlegenden Eigenschaften dieser Räume im Überblick zusammen. Diese werden in den nachfolgenden Erläuterungen und Übungen ausgeführt.

✍ **Satz K2C** (Lobgesang der projektiven Räume)**.** *Die projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ sind zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der Dimension $\dim \mathbb{RP}^n = n$ und $\dim \mathbb{CP}^n = 2n$.* ✍

Sie sind Quotienten von Sphären gemäß $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ und $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.

Sie sind kompakt und ohne Rand, also kurz: geschlossene Mannigfaltigkeiten.

Sie tragen eine natürliche $\mathscr{C}^\infty$–Differenzierbarkeitsstruktur (sogar rational).

Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist orientierbar für n ungerade, aber nicht-orientierbar für $n \geq 2$ gerade. Der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ ist orientierbar in jeder Dimension n: Die komplexe Struktur definiert eine kanonische Orientierung.

Für $n = 1$ gilt $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$, für $n \geq 2$ hingegen $\mathbb{RP}^n \ncong \mathbb{S}^n$ und $\mathbb{CP}^n \ncong \mathbb{S}^{2n}$.

Für kleine Matrixgruppen gilt $\mathrm{O}_1\,\mathbb{R} = \mathbb{S}^0$ und $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$.

Für geschlossene Flächen kleinen Geschlechts gilt $F_0^+ = \mathbb{S}^2$ und $F_0^- = \mathbb{RP}^2$.

Im reellen Fall haben wir die folgenden kanonischen Einbettungen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{R}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^2 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^4 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^5 & \hookrightarrow & \dots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbb{S}^0 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^2 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^4 & \hookrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{RP}^0 & \xhookrightarrow{\text{+1–Zelle}} & \mathbb{RP}^1 & \xhookrightarrow{\text{+2–Zelle}} & \mathbb{RP}^2 & \xhookrightarrow{\text{+3–Zelle}} & \mathbb{RP}^3 & \xhookrightarrow{\text{+4–Zelle}} & \mathbb{RP}^4 & \hookrightarrow & \dots
\end{array}$$

Hierbei entsteht $\mathbb{RP}^n$ aus $\mathbb{RP}^{n-1}$ durch Anheften einer einzigen n–Zelle $\mathbb{D}^n$.

Im komplexen Fall haben wir die folgenden kanonischen Einbettungen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{C}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^2 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^4 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^5 & \hookrightarrow & \dots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^5 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^7 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^9 & \hookrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{CP}^0 & \xhookrightarrow{\text{+2–Zelle}} & \mathbb{CP}^1 & \xhookrightarrow{\text{+4–Zelle}} & \mathbb{CP}^2 & \xhookrightarrow{\text{+6–Zelle}} & \mathbb{CP}^3 & \xhookrightarrow{\text{+8–Zelle}} & \mathbb{CP}^4 & \hookrightarrow & \dots
\end{array}$$

Hierbei entsteht $\mathbb{CP}^n$ aus $\mathbb{CP}^{n-1}$ durch Anheften einer einzigen $2n$–Zelle $\mathbb{D}^{2n}$.

Für die Euler–Charakteristik folgt $\chi(\mathbb{RP}^n) = \frac{1+(-1)^n}{2}$ und $\chi(\mathbb{CP}^n) = 1+n$.

§K2f. Sphären und projektive Räume. Zunächst ist der projektive Raum definiert als Quotient $\mathbb{KP}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{K}^\times$. Speziell für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ können wir $\mathbb{KP}^n$ alternativ als Quotient von Sphären gewinnen, was oft anschaulicher und technisch nützlich ist: Zum Beispiel erhalten wir so die Kompaktheit als Dreingabe gratis. Wir beginnen daher unsere Untersuchung der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ mit ihren großen Schwestern, den Sphären $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Diese lassen sich sowohl als Teilräume als auch als Quotientenräume auffassen, und beide Sichtweise sind nützlich:

§K2g. Sphären als Teilräume. Die n–dimensionale Sphäre ist der Teilraum

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\} \quad \subset \quad \mathbb{R}^{n+1}.$$

Die kanonische Einbettung $\mathrm{inc} : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (x, 0)$ ergibt hier:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{R}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^2 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^4 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \dots & \text{(jeweils als Hyperebene)} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\
\mathbb{S}^0 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^2 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \dots & \text{(jeweils als Äquator)}
\end{array}$$

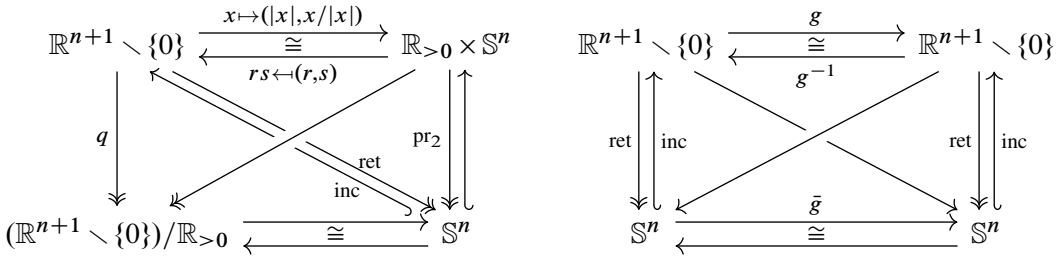
Jede Sphäre ungerader Dimension $n = 2m + 1$ erhalten wir demnach auch als Teilraum

$$\mathbb{S}^{2m+1} = \left\{ (z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} \;\middle|\; |z_0|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 1 \right\} \quad \subset \quad \mathbb{C}^{m+1}.$$

Die kanonische Einbettung $\mathrm{inc} : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} : z \mapsto (z, 0)$ ergibt hier:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{C}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^2 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^4 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \dots & \text{(als komplexe Hyperebene)} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\
\mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^5 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^7 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \dots & \text{(jeweils als Durchschnitt)}
\end{array}$$

§K2h. Sphären als Quotienten. Jeder Vektor x in $X := \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ spannt eine Halbgerade $\mathbb{R}_{>0} \cdot x$ auf. Genau dann spannen $x, y \in X$ dieselbe Halbgerade $\mathbb{R}_{>0} \cdot x = \mathbb{R}_{>0} \cdot y$ auf, geschrieben $x \approx y$, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x = \lambda y$ existiert. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf X. Die Äquivalenzklassen sind die Halbgeraden in $\mathbb{R}^{n+1}$ ohne 0. Kurz gesagt, dies sind die Bahnen von X unter der Gruppenoperation von $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Dem Quotientenraum $X/{\approx} = (\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$ geben wir die Quotiententopologie. Wir erhalten:



Jede invertierbare lineare Abbildung $g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ definiert einen Homöomorphismus $\bar{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto g(x)/|g(x)|$ wie in J3E. Positive Vielfache λg mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ operieren dabei gleich, wir erhalten daher eine Operation der Quotientengruppe $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$.

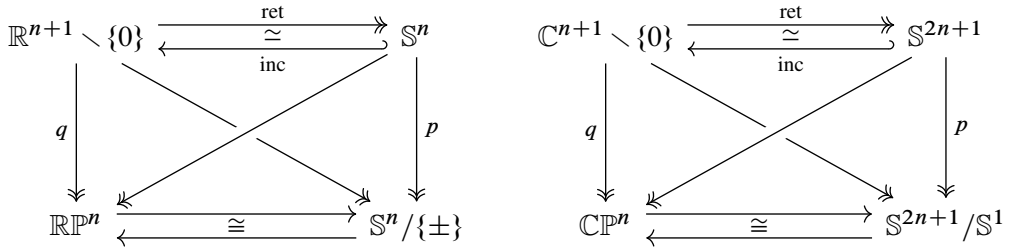
© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§K2i. Projektive Räume als Quotienten von Sphären.** Schon die projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ steht im Ruf kompliziert zu sein. Ein Teil des Problems ist unbestreitbar: Sie lässt sich nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten und daher nur schwer graphisch darstellen. Zum Glück haben wir gerade für solche Fälle das nötige mathematische Instrumentarium entwickelt. ☜

Anders als die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind die projektiven Räume $\mathbb{KP}^n$ zunächst als Quotientenräume gegeben und nicht als Teilräume im $\mathbb{R}^m$. Dennoch lässt sich hervorragend mit ihnen rechnen! Der einzige Weg, mit projektiven Räumen vertraut zu werden, ist eine eingehende Untersuchung, wie sie die folgenden Übungen vorschlagen. Die Investition lohnt sich.

Die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ haben wir zunächst topologisch untersucht, nun dienen Sie als Modell. Auch die Sphären $\mathbb{S}^n$ haben wir zunächst als *Werkstücke* betrachtet (etwa für Triangulierung und simpliziale Approximation in Kapitel I) und danach als *Werkzeuge* (bei den Anwendungen des Abbildungsgrades in Kapitel J). So sind auch die projektiven Räume hier zunächst *Werkstücke*, später in der Geometrie und Topologie dann *Werkzeuge*.

✍ **Übung K2D.** In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ haben wir $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ und $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$. Insbesondere sind alle projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ kompakt (F1J). ✍



✻ **K2D.** Wir übersetzen die Diagramme: Die obere Zeile faktorisiert wie angegeben und liefert in der unteren Zeile die ersehnten kanonischen Homöomorphismen $(f,g) : \mathbb{RP}^n \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ mit $f : \mathbb{R}^\times \cdot x \mapsto \mathbb{S}^0 \cdot x/|x|$ und $g : \mathbb{S}^0 \cdot a \mapsto \mathbb{R}^\times \cdot a$ sowie $(h,k) : \mathbb{CP}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ mit $h : \mathbb{C}^\times \cdot x \mapsto \mathbb{S}^1 \cdot x/|x|$ und $k : \mathbb{S}^1 \cdot a \mapsto \mathbb{C}^\times \cdot a$.

☞ **§K2j. Projektive Räume als euklidische Teilräume.** Wir haben den projektiven Raum zunächst als Quotientenraum $\mathbb{KP}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\})$ konstruiert, alternativ als $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ und $\mathbb{CP}^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$. Lässt er sich in einen euklidischen Raum einbetten? ☜

✍ **Übung K2E.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Zu jedem Vektor $s \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$ haben wir ✍

(a) die orthogonale Projektion $F(s) : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m : x \mapsto s\langle s \mid x \rangle/\langle s \mid s \rangle$,
(b) die orthogonale Projektion $F(s) : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m : x \mapsto x - s\langle s \mid x \rangle/\langle s \mid s \rangle$,
(c) die Hyperebenenspiegelung $F(s) : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m : x \mapsto x - 2s\langle s \mid x \rangle/\langle s \mid s \rangle$.

Jede Abbildung $F(s) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ entspricht einer Matrix $f(s) \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Wir erhalten so die euklidische Einbettung $\bar{f} : \mathbb{KP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{K}^{n\times n} : [s] \mapsto f(s)$.
Insbesondere ist jeder projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ hausdorffsch und zweitabzählbar (E1G).

✻ **K2E.** Jede Abbildung $F(s) : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ ist $\mathbb{K}$–linear. In der kanonischen Basis wird sie dargestellt durch die Matrix (a) $f(s) = \langle s \mid s \rangle^{-1} s \cdot \bar{s}^\intercal$, (b) $f(s) = 1_{m\times m} - \langle s \mid s \rangle^{-1} s \cdot \bar{s}^\intercal$, (c) $f(s) = 1_{m\times m} - 2\langle s \mid s \rangle^{-1} s \cdot \bar{s}^\intercal$. Die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{K}^{m\times m} : s \mapsto f(s)$ ist stetig, denn jede Koeffizientenfunktion ist stetig (E4D). Es gilt $f(\lambda s) = f(s)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, also induziert f eine stetige Abbildung $\bar{f} : \mathbb{KP}^n \to \mathbb{K}^{m\times m} : [s] \mapsto f(s)$ auf dem Quotientenraum (E2C). Die Abbildung $\bar{f}$ ist injektiv, denn (a) der $(+1)$–Eigenraum von $f(s)$ ist $\mathbb{K}s$, (b) der 0–Eigenraum (Kern) von $f(s)$ ist $\mathbb{K}s$, (c) der (-1)–Eigenraum von $f(s)$ ist $\mathbb{K}s$: Aus $f(s) = f(s')$ folgt somit $[s] = [s']$. Dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium (F1L) ist die stetige Injektion $\bar{f}$ eine Einbettung.

§K2k. Projektive Räume als Mannigfaltigkeiten.

Übung K2F. Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit:

(0) Der Raum $\mathbb{KP}^n$ ist kompakt (K2D), hausdorffsch und zweitabzählbar (K2E).
(1) In $\mathbb{KP}^n$ ist $U_i := \{\,[x_0:\ldots:x_n] \mid x_i \neq 0\,\} = \{\,[x_0:\ldots:x_n] \mid x_i = 1\,\}$ offen.
(2) Es gilt $\mathbb{KP}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ mit den kanonischen Karten $(h_i, k_i) : U_i \cong \mathbb{K}^n$, wobei
$h_i : [x_0:\ldots:x_{i-1}:x_i:x_{i+1}:\ldots:x_n] \mapsto x_i^{-1}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$
und $k_i : (y_1,\ldots,y_n) \mapsto [y_1:\ldots:y_i:1:y_{i+1}:\ldots:y_n]$.
(3) Als Komplement von U_n im Raum $\mathbb{KP}^n$ erhalten wir $\mathbb{KP}^{n-1}$.
(4) Bestimmen Sie explizit die Kartenwechsel $h_{ij} : \mathbb{K}^n \supset V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji} \subset \mathbb{K}^n$.
(5) Ist $\mathbb{KP}^n$ mit dem Atlas $\mathscr{A} = (h_0,\ldots,h_n)$ eine glatte Mannigfaltigkeit?
(6) Ist der Atlas $\mathscr{A}$ orientiert? Ist die Mannigfaltigkeit $\mathbb{KP}^n$ orientierbar?
(7) Für $0 \leq m \leq n$ ist $\mathbb{KP}^m \subset \mathbb{KP}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit.

✻ **K2F.** (1) Gemäß Quotiententopologie (E2B) ist $U \subset \mathbb{KP}^n$ genau dann offen, wenn das Urbild $q^{-1}(U)$ in $\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ offen ist. Wir finden $q^{-1}(U_i) = \tilde{U}_i := \{\,x \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_i \neq 0\,\}$; diese Teilmenge ist offen (E4C).

(2) Jedes Element $[x_0:\ldots:x_n] \in \mathbb{KP}^n$ erfüllt $x_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{0,\ldots,n\}$. Demnach gilt $[x_0:\ldots:x_n] = [x_0/x_i:\ldots:1:\ldots:x_n/x_i] \in U_i$, also $\mathbb{KP}^n = U_0 \cup \cdots \cup U_n$. Die Abbildung

$$\tilde{h}_i \;:\; \mathbb{K}^{n+1} \supset \tilde{U}_i \to \mathbb{K}^n \;:\; (x_0,\ldots,x_n) \mapsto x_i^{-1}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$$

ist wohldefiniert, stetig, invariant unter Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, und induziert somit die stetige Abbildung

$$h_i : \mathbb{KP}^n \supset U_i \to \mathbb{K}^n \;:\; [x_0:\ldots:x_n] \mapsto x_i^{-1}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n).$$

Dies ist ein Homöomorphismus: Die Umkehrabbildung ist explizit gegeben durch die stetige Abbildung k_i, für diese gilt $h_i \circ k_i = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ und $k_i \circ h_i = \mathrm{id}_{U_i}$, denn $[x_0:\ldots:x_n] \mapsto x_i^{-1}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \mapsto [x_i^{-1}x_0,\ldots,x_i^{-1}x_{i-1},1,x_i^{-1}x_{i+1},\ldots,x_i^{-1}x_n] = [x_0:\ldots:x_n]$. (Zur Illustration siehe Übung K1U.)

(3) Es gilt $\mathbb{KP}^n \smallsetminus U_n = \mathbb{KP}^{n-1}$, denn $\mathbb{KP}^n \smallsetminus U_n = \{\,[x_0:\ldots:x_{n-1}:0]\,\}$. Ausführlicher siehe (7).

(4) Wir finden $U_{ij} = U_{ji} = U_i \cap U_j = \{\,[x_0:\ldots:x_n] \mid x_i, x_j \neq 0\,\}$. Für $i < j$ gilt

$$V_{ij} = h_i(U_{ij}) = \{\,(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{K}^n \mid y_j \neq 0\,\},$$
$$V_{ji} = h_j(U_{ji}) = \{\,(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{K}^n \mid y_{i+1} \neq 0\,\},$$
$$h_{ij} : V_{ij} \to V_{ji} : (y_1,\ldots,y_n) \xmapsto{h_j \circ k_i} y_j^{-1}(y_1,\ldots,y_i,1,y_{i+1},\ldots,y_{j-1},y_{j+1},\ldots,y_n),$$
$$h_{ji} : V_{ji} \to V_{ij} : (y_1,\ldots,y_n) \xmapsto{h_i \circ k_j} y_{i+1}^{-1}(y_1,\ldots,y_i,y_{i+2},\ldots,y_j,1,y_{j+1},\ldots,y_n).$$

(5) Dank (0) und (2) ist $\mathbb{KP}^n$ eine Mannigfaltigkeit. Dank (4) ist der Atlas $\mathscr{A} = (h_0,\ldots,h_n)$ glatt, das heißt beliebig oft differenzierbar, sogar (reell- bzw. komplex-) analytisch, algebraisch, gar rational.

(6) Für $\mathbb{CP}^n$ sind alle Kartenwechsel orientierungserhaltend und somit $\mathscr{A}$ orientiert. Hingegen ist $\mathbb{RP}^n$ nur für ungerade n orientierbar. Die Jacobi–Determinante ist $\det h'_{ij} = y_j^{-(n+1)}(-1)^{j-i}$. Für n ungerade sei $\tau : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : (y_1,y_2,\ldots,y_n) \mapsto (-y_1,y_2,\ldots,y_n)$ und $h_i^* = \tau^i h_i$; der Atlas $\mathscr{A}^* = (h_0^*,\ldots,h_n^*)$ ist orientiert.

Sei $n \geq 2$ gerade. Angenommen, $\mathbb{RP}^n$ erlaubte einen orientierten Atlas $\mathscr{A}^*$. Da das Kartengebiet U_i zusammenhängend ist, existiert $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, sodass $h_i^* = \tau^{\varepsilon_i} h_i$ mit $\mathscr{A}^*$ kompatibel ist. Für die Kartenwechsel hat $\det(h_{ij}^*)' = y_j^{-(n+1)}(-1)^{j-i+\varepsilon_i+\varepsilon_j}$ verschiedene Vorzeichen für $y_j > 0$ und $y_j < 0$, ein Widerspruch! (Siehe Satz K1H für das Möbius–Band und den einfachsten Fall dieses Arguments.)

Bemerkung: Das erste Beispiel in dieser Reihe ist die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$, die wir bereits in der Einleitung ausführlich skizziert haben. Für $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die Antipodenabbildung $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto -x$ orientierungsumkehrend, und das zerstört die Orientierung auf dem Quotienten $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$.

(7) Zwecks Bequemlichkeit identifizieren wir $\mathbb{K}^{m+1}$ mit $\{\,(x_0,\ldots,x_m,0,\ldots,0) \in \mathbb{K}^{n+1}\,\}$ und $\mathbb{KP}^m$ mit $\{\,[x_0:\ldots:x_m:0:\ldots:0] \in \mathbb{KP}^n\,\}$. Die Kartengebiete $U_{m+1},\ldots,U_n$ schneiden $\mathbb{KP}^m$ nicht. Für $0 \leq i \leq m$ gilt $h_i(U_i \cap \mathbb{KP}^m) = \mathbb{K}^m \subset \mathbb{K}^n$. Somit ist $\mathbb{KP}^m$ in $(\mathbb{KP}^n, \mathscr{A})$ eine glatte Untermannigfaltigkeit.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K2l. Projektive Räume als Kompaktifizierungen. Die projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ sind kompakt (K2D) und hausdorffsch (K2E). Darüber hinaus gilt:

Übung K2G. Die Einbettung $\kappa : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{KP}^n : (x_1,\dots,x_n) \mapsto [1 : x_1 : \dots : x_n]$ ist eine Kompaktifizierung. Es folgt $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$.

✻ **K2G.** Das Bild $U_0 = \kappa(\mathbb{K}^n)$ ist dicht in $\mathbb{KP}^n$: Jeder Punkt in $\mathbb{KP}^n \setminus \kappa(\mathbb{K}^n)$ ist von der Form $[0 : x_1 : \dots : x_n]$ mit $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ und somit Grenzwert (Fernpunkt) der Geraden $\mathbb{K} \to \mathbb{KP}^n : \lambda \mapsto [1 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n]$ für $\lambda \to \infty$. Somit ist $\kappa : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{KP}^n$ eine Hausdorff–Kompaktifizierung von $\mathbb{K}^n$ im Sinne der Definition F4A.

Besonders übersichtlich ist $\mathbb{KP}^1$: Hier wird nur ein Punkt $\infty = [0 : 1]$ hinzugefügt. Wir erhalten die Einpunktkompaktifizierungen (F4D) $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$

§K2m. Projektive Abbildungen auf $\mathbb{KP}^n$ und die Gruppe $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$. Jede Matrix $g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ operiert von links auf $\mathbb{K}^{n+1}$ durch Matrixmultiplikation

$$g = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad : \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad g \cdot x = \begin{pmatrix} a_{00}x_0 + \dots + a_{0n}x_n \\ \vdots \\ a_{n0}x_0 + \dots + a_{nn}x_0 \end{pmatrix}$$

Da wir g als invertierbar voraussetzen, gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$, wir erhalten also die Einschränkung $g : \mathbb{K}^{n-1} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}^{n-1} \setminus \{0\}$. Da g linear ist, kommutiert g mit der Operation von $\mathbb{K}^\times$, und wir erhalten $\bar{g} : \mathbb{KP}^n \to \mathbb{KP}^n : [x] \mapsto g \cdot [x] = [g(x)]$; dies ist wohldefiniert, denn $g \cdot [\lambda x] = [g(\lambda x)] = [\lambda g(x)] = [g(x)] = g \cdot [x]$. Hierbei gilt $1 \cdot [x] = [1x] = [x]$ und $h \cdot (g \cdot [x]) = h \cdot [g(x)] = [h(g(x))] = [(h \circ g)(x)] = (h \circ g) \cdot [x]$.

Somit operiert die Gruppe $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ von links auf $\mathbb{KP}^n$ gemäß

$$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) \times \mathbb{KP}^n \to \mathbb{KP}^n : (g, [x]) \mapsto g \cdot [x] = [g(x)].$$

Das Zentrum $Z(\mathrm{GL}_{n+1}\mathbb{K}) = \{ \operatorname{diag}(\lambda,\dots,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times \}$ operiert dabei trivial. Zwei Matrizen sind *projektiv äquivalent*, wenn sie sich nur durch einen Faktor $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ unterscheiden. Wir erhalten so die Quotientengruppe $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) := \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})/Z(\mathrm{GL}_{n+1}\mathbb{K})$ und den kanonischen Homomorphismus $q : \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) : g \mapsto [g]$.

Nach Konstruktion operiert $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$ auf $\mathbb{KP}^n$ gemäß

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \times \mathbb{KP}^n \to \mathbb{KP}^n : ([g], [x]) \mapsto [g] \cdot [x] = [g(x)].$$

Schon der einfachste Fall $n = 1$ ist extrem interessant. Wir nutzen hier die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbb{KP}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{K} \cup \{\infty\} \ : \quad & [x_0 : x_1] \mapsto x = x_0/x_1, \qquad [1 : 0] \mapsto \infty, \\ \mathbb{K} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{KP}^1 \ : \quad & x \mapsto [x : 1], \qquad \infty \mapsto [1 : 0]. \end{aligned}$$

Somit operiert $\mathrm{GL}_2\mathbb{K}$ auf $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ durch die *gebrochen-linearen Funktionen*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad : \quad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad \infty \mapsto \frac{a}{c}, \qquad -\frac{d}{c} \mapsto \infty.$$

So operiert $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ auf der Kreislinie $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{RP}^1$ und $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ auf der *Riemannschen Zahlensphäre* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$. Die Gruppe $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathrm{Möb}(\mathbb{S}^2) = \mathrm{PGL}_2\mathbb{C}$ heißt auch *Möbius–Gruppe* (A1O). Sie ist ein klassisches geometrisches Objekt und hat faszinierende Eigenschaften. Zum Beispiel operiert sie scharf 3–transitiv: Zu je drei verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ erhalten wir $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (0, 1, \infty)$ durch $f(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z1)}$.

§K2n. Rationale Abbildungen. Die Kompaktifizierungen $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{RP}^1$ und $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{CP}^1$ entspringen natürlichen und konkreten Bedürfnissen. Zur Erinnerung (an Schulzeiten):

Jedes reelle Polynom $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ definiert eine stetige Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto P(x)$. Diese setzt sich auf $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ stetig fort zu $\bar{p} : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$.

Mit der Kompaktifizierung $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ beschreiben wir das Verhalten $p(x) \to \pm\infty$ für $x \mapsto \pm\infty$. Wir können $\pm\infty$ zu ∞ zusammenschlagen und erhalten aus $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] \cong [-1, 1]$ dann $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$ (E2T) und hierauf $\widehat{p} : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$.

Ebenso definiert jedes komplexe Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ stetige Funktionen $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\widehat{p} : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ auf $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$. (Die Unterscheidung $\pm\infty$ ist für $\mathbb{C}$ sinnlos.)

Je zwei Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ mit $Q \neq 0$ definieren $R = P/Q \in \mathbb{R}(x)$. Wir können gemeinsame Faktoren kürzen und werden daher $\operatorname{ggT}(P, Q) = 1$ voraussetzen. Dies definiert eine stetige Funktion $r : \mathbb{R} \smallsetminus \{x \mid q(x) = 0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto r(x) = p(x)/q(x)$ und ihre stetige Fortsetzung $r : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$. Das wäre auf $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ nicht möglich!

Ebenso definiert $R = P/Q \in \mathbb{C}(z)$ eine stetige Funktion $r : \mathbb{C} \smallsetminus \{z \mid q(z) = 0\} \to \mathbb{C}$ und ihre stetige Fortsetzung $r : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$. Die oben erklärten gebrochen-linearen Funktionen $r(x) = (az + b)/(cz + d)$ mit $ad - bc \neq 0$ sind einfache doch reichhaltige Beispiele.

Bemerkung K2H. Wir können rationale Abbildungen $r = p/q : \mathbb{KP}^1 \to \mathbb{KP}^1$ wie folgt elegant und einheitlich beschreiben. Die beiden Polynome $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ seien gegeben durch

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n.$$

Diese können wir nun *homogenisieren* zu den Polynomen $P^*, Q^* \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$ mit

$$P^*(x_0, x_1) := P(x_1/x_0)x_0^n = a_0 x_0^n x_1^0 + a_1 x_0^{n-1} x_1^1 + \cdots + a_n x_0^0 x_1^n,$$
$$Q^*(x_0, x_1) := Q(x_1/x_0)x_0^n = b_0 x_0^n x_1^0 + b_1 x_0^{n-1} x_1^1 + \cdots + b_n x_0^0 x_1^n.$$

Umgekehrt *dehomogenisieren* wir durch $(x_0, x_1) \mapsto (1, x)$. Unsere rationale Abbildung ist

$$r : \mathbb{KP}^1 \to \mathbb{KP}^1 : [x_0 : x_1] \mapsto [Q^*(x_0, x_1) : P^*(x_0, x_1)].$$

Diese Zuordnung ist wohldefiniert, denn für alle $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ gilt dank Homogenität

$$\begin{aligned}[\lambda x_0 : \lambda x_1] &\mapsto [Q^*(\lambda x_0, \lambda x_1) : P^*(\lambda x_0, \lambda x_1)] \\ &= [\lambda^n Q^*(x_0, x_1), \lambda^n P^*(x_0, x_1)] = [Q^*(x_0, x_1), P^*(x_0, x_1)].\end{aligned}$$

Diese Definition ist einheitlich in *allen* Punkten $[x_0, x_1] \in \mathbb{KP}^1$. Insbesondere erübrigt sich die Diskussion von Polstellen und Grenzwerten, die wir oben für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ genutzt haben.

Beispiel. Im Spezialfall $P^* = ax_0 + bx_1$ und $Q^* = cx_0 + dx_1$ haben wir oben die Gruppe $\mathrm{PSL}_2 \mathbb{K}$ gesehen: Die Bedingung $\operatorname{ggT}(P, Q) = 1$ bedeutet gerade $ad - bc \neq 0$.

Definition K2I. Sei $P = (P_0, \ldots, P_s) \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_r]^{s+1}$ homogen vom Grad n, das heißt $P_i = \sum_{|k|=n} a_{ik} x^k$ mit $a_{ik} \in \mathbb{K}$ und $x^k = x_0^{k_0} \cdots x_r^{k_r}$ indiziert durch Multiindizes $k \in \mathbb{N}^{r+1}$ mit $|k| = k_0 + \cdots + k_r$. Einzige gemeinsame Nullstelle von $P_0, \ldots, P_s$ sei 0. Dies definiert die Abbildung $p : \mathbb{KP}^r \to \mathbb{KP}^s : [x_0 : \ldots : x_r] \mapsto [P_0(x_0, \ldots, x_r) : \ldots : P_s(x_0, \ldots, x_r)]$.

Beispiel. Die *Veronese-Einbettung* ist $i : \mathbb{KP}^1 \to \mathbb{KP}^2 : [x : y] \mapsto [x^2 : xy : y^2]$. In affinen Koordinaten $[x : 1] \mapsto [x^2 : x : 1]$ entspricht sie der Parabel $\mathbb{K} \to \mathbb{K}^2 : x \mapsto (x^2, x)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§K2o. Projektive Räume als Zellkomplexe.** Aus der kanonischen Filtrierung ☜

$$\mathbb{KP}^0 \subset \mathbb{KP}^1 \subset \mathbb{KP}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{KP}^n$$

der projektiven Räume (K2C) gewinnen wir ihre *kanonische Zellenzerlegung*

$$\mathbb{KP}^n = \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{K}^n.$$

Genauer parametrisieren wir diese Zellen wie folgt. In $\mathbb{S}^n$ haben wir zwei Hemisphären:

$$\mathbb{S}^n_\pm = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \pm x_n \geq 0 \right\}$$

$$\mathbb{D}^n \cong \mathbb{S}^n_\pm : (x_0, \dots, x_{n-1}) \leftrightarrows (x_0, \dots, x_{n-1}, \pm\sqrt{1 - {x_0}^2 - \cdots - {x_{n-1}}^2})$$

$$\partial\mathbb{S}^n_\pm = \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^n = \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{S}^n \right\}$$

Die Einschränkung der Quotientenabbildung $q_n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ auf die n–Zelle $\mathbb{S}^n_+ \cong \mathbb{D}^n$ ist stetig und surjektiv. Sie identifiziert nur Punkte auf $\mathbb{S}^{n-1}$, gemäß $q_{n-1} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{S}^{n-1} & \xhookrightarrow{+n\text{–Zelle}} & \mathbb{S}^n_+ & \hookrightarrow & \mathbb{S}^n \\
\downarrow{\scriptstyle q_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle q_n} & & \downarrow{\scriptstyle q_n} \\
\mathbb{RP}^{n-1} & \xhookrightarrow{+n\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^n & = & \mathbb{RP}^n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{S}^{2n-1} & \xhookrightarrow{+2n\text{–Zelle}} & \mathbb{S}^{2n}_+ & \hookrightarrow & \mathbb{S}^{2n+1} \\
\downarrow{\scriptstyle q_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle q_n} & & \downarrow{\scriptstyle q_n} \\
\mathbb{CP}^{n-1} & \xhookrightarrow{+2n\text{–Zelle}} & \mathbb{CP}^n & = & \mathbb{CP}^n
\end{array}$$

Wie die reell-projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ können wir auch die komplex-projektiven Räume $\mathbb{CP}^n$ schrittweise durch Verheften aufbauen. In $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ ist der Teilraum

$$\mathbb{S}^{2n}_+ = \{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n+1} \mid z_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$$

homöomorph zu $\mathbb{D}^{2n}$, wie oben gesehen. Der Rand entspricht dabei dem Äquator

$$\partial\mathbb{S}^{2n}_+ = \partial\mathbb{D}^{2n} = \mathbb{S}^{2n-1} = \mathbb{S}^{2n+1} \cap \mathbb{C}^n = \left\{ (z_0, \dots, z_{n-1}, 0) \in \mathbb{S}^{2n+1} \right\}.$$

Die Einschränkung der Quotientenabbildung $q_n : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ auf die $2n$–Zelle $\mathbb{S}^{2n}_+$ ist stetig und surjektiv. Sie identifiziert nur Punkte auf $\mathbb{S}^{2n-1}$, gemäß $q_{n-1} : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$.

✍ **Übung K2J.** (1) Beginnend mit $\mathbb{RP}^0 = \{*\}$ gewinnen wir so die reell-projektiven Räume $\mathbb{RP}^0 \subset \mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^3 \subset \dots$ durch sukzessives Anheften je einer Zelle $\mathbb{D}^1, \mathbb{D}^2, \mathbb{D}^3, \dots$. ✍

(2) Alternativ zu K2G/K2K finden wir insbesondere $\mathbb{S}^1 \xleftarrow{\sim} \mathbb{D}^1 /\!\!/ \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{RP}^1$ (E2T).

(3) Beginnend mit $\mathbb{CP}^0 = \{*\}$ gewinnen wir ebenso die komplex-projektiven Räume $\mathbb{CP}^0 \subset \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2 \subset \mathbb{CP}^3 \subset \dots$ durch sukzessives Anheften je einer Zelle $\mathbb{D}^2, \mathbb{D}^4, \mathbb{D}^6, \dots$.

(4) Alternativ zu K2G/K2L finden wir insbesondere $\mathbb{S}^2 \xleftarrow{\sim} \mathbb{D}^2 /\!\!/ \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{CP}^1$ (F1R).

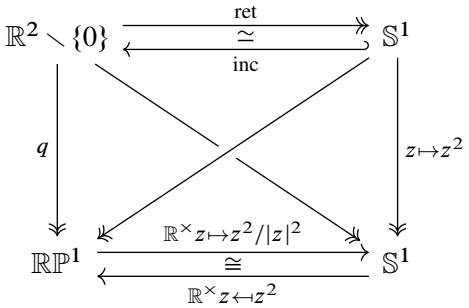
(5) Berechnen Sie die Euler–Charakteristiken $\chi(\mathbb{RP}^n) = \frac{1+(-1)^n}{2}$ und $\chi(\mathbb{CP}^n) = 1 + n$.

☞ **Bemerkung.** Der Aufbau der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ durch sukzessives Anheften von Zellen ist eine sehr übersichtliche und effiziente Beschreibung. Für die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ haben wir dies in der Einleitung graphisch dargestellt (siehe A:28). ☜

Solche Zellenzerlegungen nutzen wir insbesondere in der algebraischen Topologie, etwa zur Berechnung der Fundamentalgruppen $\pi_1(\mathbb{RP}^1, *) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(\mathbb{RP}^n, *) \cong \mathbb{Z}/2$ für $n \geq 2$, oder der Homologie $H_*(\mathbb{RP}^n)$ und der Kohomologie $H^*(\mathbb{RP}^n)$. Hiervon kündet die Euler–Charakteristik als Spezialfall.

§K2p. Diffeomorphismen $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$.

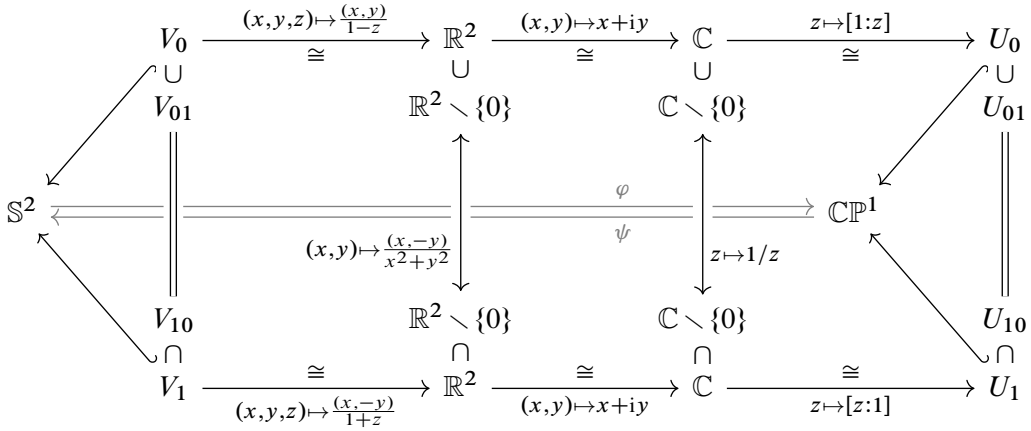
Übung K2K. Konstruieren Sie einen (glatten) Homöomorphismus $\mathbb{S}^1/\{\pm\} \cong \mathbb{S}^1$.



Vorsicht: Der Fall $n = 1$ ist eine Ausnahme. Für $n \neq 1$ gilt $\mathbb{S}^n/\{\pm\} \ncong \mathbb{S}^n$!

✻ **K2K.** Wir übersetzen das kommutative Diagramm: Die obere Zeile faktorisiert wie angegeben und liefert in der unteren Zeile den ersehnten Homöormorphismus $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$. Das gelingt, weil $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \supset \mathbb{S}^1$ ein Körper ist!

Übung K2L. Konstruieren Sie einen (glatten) Homöomorphismus $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$:



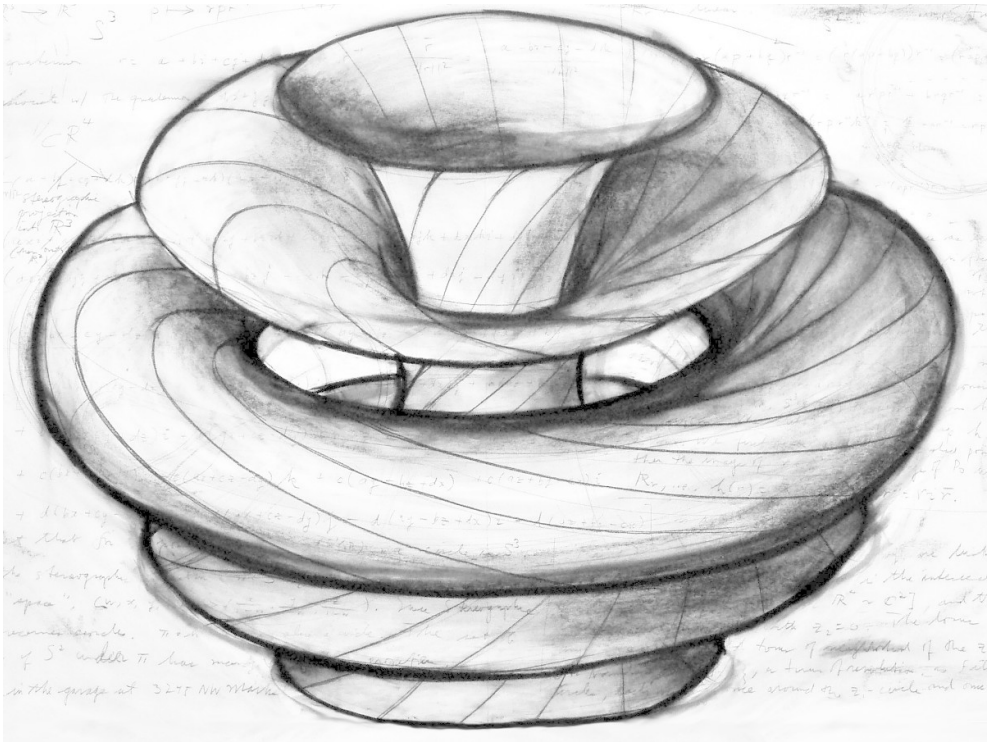
Links steht ein Atlas für $\mathbb{S}^2$ aus zwei stereographischen Projektionen (K1I), rechts ein Atlas für den komplex-projektiven Raum $\mathbb{CP}^1$ (K2F), beide orientiert, glatt, analytisch, algebraisch, sogar rational. Verkleben (E1P) ergibt $(\varphi, \psi) : \mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$. Dasselbe gilt für $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{RP}^1$.

Bemerkung K2M. Somit gilt $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^1 \backslash \mathbb{S}^3 \cong \mathbb{S}^2$: Dies ist die berühmte Hopf–Faserung. Auf $\mathbb{S}^3 = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\}$ operiert die Gruppe $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ durch $z \cdot (u,v) = (zu, zv)$. Die Operation ist treu, das heißt $z \mapsto z \cdot (u,v)$ ist injektiv. Jede Bahn $\mathbb{S}^1 \cdot (u,v) = \{(zu, zv) \mid z \in \mathbb{S}^1\}$ ist daher homöomorph zu $\mathbb{S}^1$. Diese Bahnen zerlegen $\mathbb{S}^3$, siehe K2N. Bemerkenswerterweise ist der Quotientenraum homöomorph zur 2–Sphäre $\mathbb{S}^2$. Wir erhalten explizit einen Diffeomorphismus $\bar{p} : \mathbb{S}^1 \backslash \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ durch die Polynomfunktion $p : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2 : (a,b,c,d) \mapsto (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2bc - 2ad, 2ac + 2bd)$, siehe K2O.

Wer sich das bildgewaltig vorführen lassen möchte, findet wunderschöne Videos auf der Seite `www.dimensions-math.org`. Dort handeln Kapitel 7 und 8 von der Hopf–Faserung. Die anderen Kapitel, etwa zur stereographischen Projektion, sind ebenso sehenswert!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§K2q. Die Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$.** Die Konstruktion der komplex-projektiven Geraden $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ führt uns zur *Hopf–Faserung* $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$. Zuerst beschrieben und untersucht wurde dieses faszinierende Objekt von Heinz HOPF: *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. 104 (1931) 637–665. ☜



Bildquelle: news.tufts.edu/magazine/fall2009

ABBILDUNG K:14. Darstellung der Hopf–Faserung durch Lun-Yi Tsai

Übung K2N. (1) Wie liegen die $\mathbb{S}^1$–Orbits in $\mathbb{S}^3$? Sind sie miteinander verschlungen? Zeichnen Sie einige dieser Orbits in stereographischer Projektion $\mathbb{S}^3 \smallsetminus \{(0,0,0,1)\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$.

(2) Zum Kontrast: Zerlegen Sie die Sphäre $\mathbb{S}^3$ in Kreislinien, die sich nicht paarweise verschlingen. Genauer: Zerlegen Sie $\mathbb{R}^3$ in eine Gerade und unverschlungene Kreislinien.

✻ **K2N.** (2) Die zweite Frage ist leicht zu beantworten: Abbildung K:17 (rechts) zeigt eine Lösung. Dies entspricht den Magnetfeldlinien eines stromdurchflossenen Leiters entlang der z–Achse. Jede Kreislinie ist mit der z–Achse verschlungen, aber je zwei Kreislinien sind unverschlungen. Wir können uns fragen, ob es noch verwickeltere Zerlegungen gibt, sodass je zwei Kreislinien miteinander unverschlungen sind.

(1) Wir betrachten $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, also $\mathbb{S}^3 = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\}$. Die Operation $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3$ ist gegeben durch $z \cdot (u,v) = (zu, zv)$. Reel schreiben wir $u = a + ib$ und $v = c + \mathrm{id}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $z = \cos t + i \sin t$ mit $t \in \mathbb{R}$. Die Operation $z \cdot (u,v)$ entspricht dann dem Matrixprodukt $\left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & +\cos t \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$. Wir projizieren die Sphäre $\mathbb{S}^3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \right\}$ stereographisch vom Pol $* = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ auf den euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ vermöge $f : \mathbb{S}^3 \smallsetminus \{*\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x,y,z) = (a,b,c)/(1-d)$. Die Bahn von $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{S}^3$ wird zum Einheitskreis in $\mathbb{R}^3$, parametrisiert durch $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$. Die Bahn von $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{S}^3$ wird zur z–Achse in $\mathbb{R}^3$, parametrisiert durch $t \mapsto (0,0,\cos t/(1-\sin t))$. Alle anderen Bahnen wickeln sich darum auf Tori, jeder Torus ist zerlegt in verschlungene Kreislinien. Dies ist in den Abbildungen K:14 und K:17 skizziert.

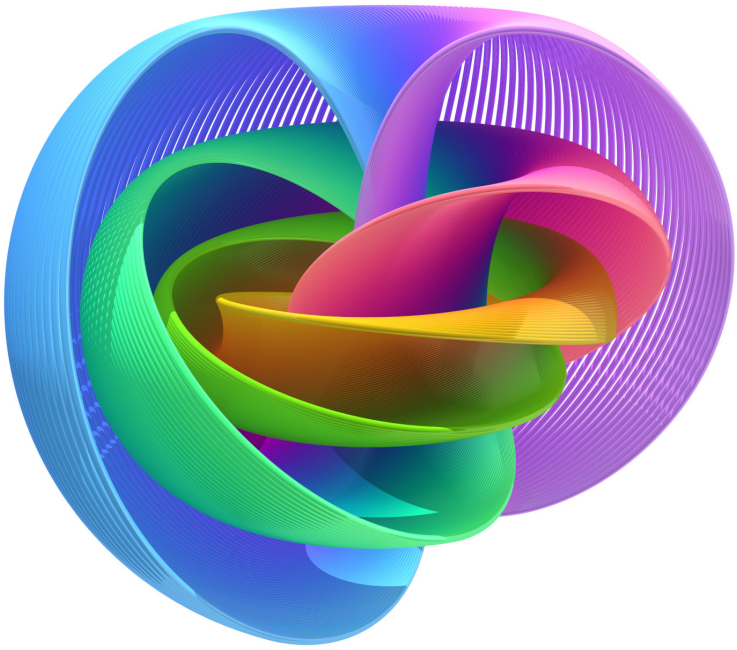


ABBILDUNG K:15. Die Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3$ hat verschlungene Fasern.

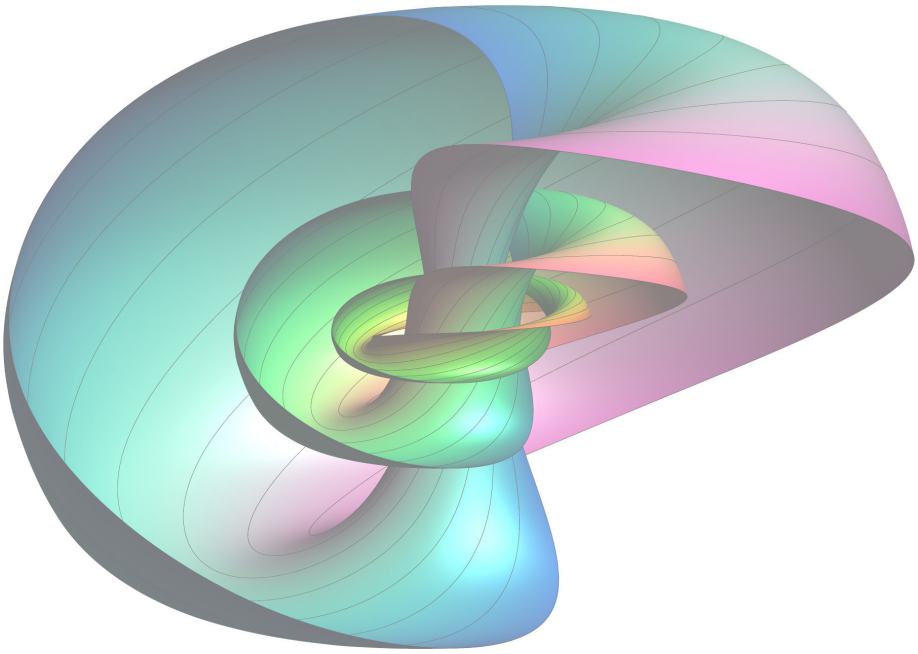


ABBILDUNG K:16. Die Fasern bilden ineinanderliegende Tori.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

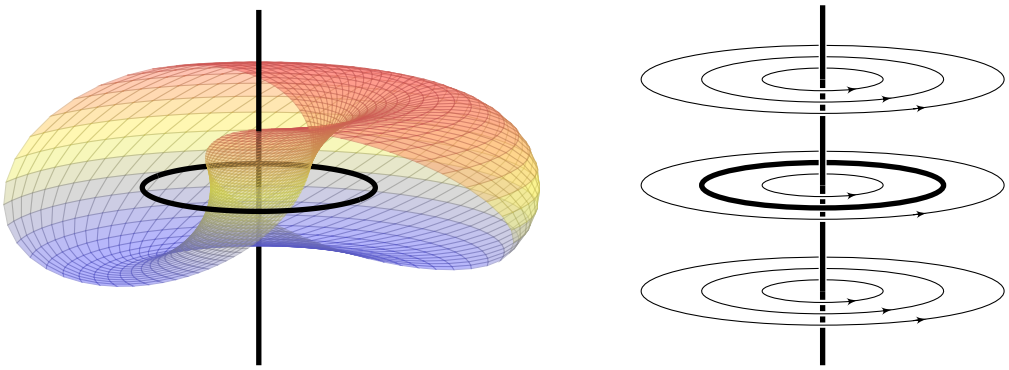


ABBILDUNG K:17. Verschlungen (wie bei der Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3$) vs unverschlungen (wie beim Magnetfeld eines Leiters längs der z–Achse)

Bemerkung. Übung K2N erläutert zur Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3$ die Fasern / Orbits / Äquivalenzklassen. Dabei ist noch keineswegs offensichtlich, wie der Quotient $\mathbb{S}^1\backslash\mathbb{S}^3$ aussieht, oder gar dass er homöomorph zur 2–Sphäre $\mathbb{S}^2$ sein soll. Dies erklären wir nun explizit:

Übung K2O. Eine explizite $\mathbb{S}^1$–invariante Abbildung $p : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ ist gegeben durch

$$(a,b,c,d) \mapsto \big(\, a^2+b^2-c^2-d^2,\ 2bc-2ad,\ 2ac+2bd \,\big).$$

Aus $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ erhalten wir den Homöomorphismus $\bar{p} : \mathbb{S}^1\backslash\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$. Rechnen Sie dies nach: zunächst (a) direkt und dann (b) mit Quaternionen vermöge $A \mapsto A^{-1}IA$.

✻ **K2O.** (1) Die Polynomfunktion $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist stetig. Die $\mathbb{S}^1$–Invarianz ist klar: Sie erhält die Normquadrate a^2+b^2 und c^2+d^2 sowie das Kreuzprodukt $ad-bc$ und das Skalarprodukt $ac+bd$. Es gilt $p(\mathbb{S}^3) \subset \mathbb{S}^2$, denn $(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+(2bc-2ad)^2+(2ac+2bd)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = 1$. Die Surjektivität $p(\mathbb{S}^3) = \mathbb{S}^2$ und den Homöomorphismus $\bar{p} : \mathbb{S}^1\backslash\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ sieht man am besten mit (2) und Drehungen; ohne weitere Struktur ist es mühsam.

(2) Die Gruppe $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ operiert durch Konjugation (von rechts) auf der 2–Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathrm{Im}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$. Wir betrachten $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2 : A \mapsto A^{-1}IA$. Für $A = aE+bI+cJ+dK \in \mathbb{S}^3$ gilt $A^{-1} = aE-bI-cJ-dK$. Damit finden wir $A^{-1}IA = (a^2+b^2-c^2-d^2)I + 2(bc-ad)J + 2(ac+bd)K$ Die Multiplikation mit $S = \alpha E+\beta I \in \mathbb{S}^1$ ergibt $p(SA) = A^{-1}S^{-1}ISA = A^{-1}IA$. Somit erhalten wir $\bar{p} : \mathbb{S}^1\backslash\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$.

Als Standgruppe finden wir $\mathrm{Fix}(I) = \mathbb{S}^1$: Die Inklusion „$\supset$“ haben wir eben nachgerechnet. Für „$\subset$“ betrachten wir $A = aE+bI+cJ+dK \in \mathbb{S}^3$. Die Bedingung $A^{-1}IA = I$ bedeutet, wie oben ausgerechnet, für das Skalarprodukt $ac+bd = 0$ und für das Kreuzprodukt $ad-bc = 0$, also $(a,b) = (0,0)$ oder $(c,d) = (0,0)$. Wegen $a^2+b^2-c^2-d^2 = 1$ bleibt nur $(c,d) = (0,0)$, also $A = aE+bI \in \mathbb{S}^1$. Somit ist $\bar{p} : \mathbb{S}^1\backslash\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ injektiv, insgesamt also bijektiv. Mit $\mathbb{S}^3$ ist auch $\mathbb{S}^1\backslash\mathbb{S}^3$ kompakt. Mit $\mathbb{R}^3$ ist auch $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ hausdorffsch. Dank F1L ist die stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{S}^1\backslash\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ also ein Homöomorphismus.

Bemerkung. Dank simplizialer Approximation wissen wir $[\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ für $m < n$ (I4B). Im Falle $m = n$ liefert der Abbildungsgrad die Bijektion $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (Satz von Brouwer–Hopf J3A). Für $m > n$ wurde zunächst $[\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ vermutet. Für $n = 1$ stimmt dies tatsächlich, dank Hochhebung auf die universelle Überlagerung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$, und $\mathbb{R}$ ist zusammenziehbar. Für $n \geq 2$ blieb die Frage zunächst offen. Hopf zeigte 1931, dass $p : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ nicht zusammenziehbar ist, also $p \not\simeq *$, somit $[\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2] \neq \{*\}$. Das war eine Sensation und öffnete der Homotopietheorie eine neue Welt. Die Berechnung der Homotopiegruppen der Sphären ist bis heute ein aktives Gebiet und bleibt extrem schwierig.

§K2r. Topologie der Gruppe $\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{RP}^3$. Eine anschauliche Erklärung vorweg: Jedes Element $x \in \mathbb{D}^3$ mit $x \neq 0$ definiert eine Drehung $f(x) \in \mathrm{SO}_3$ um die orientierte Achse $\mathbb{R}x$ und den Drehwinkel $|x|\pi$. Dies definiert eine stetige Surjektion $f : \mathbb{D}^3 \to \mathrm{SO}_3$. Identifiziert werden gegenüberliegende Randpunkte $\pm x \in \mathbb{S}^2$. Wir erhalten also $\bar{f} : \mathbb{RP}^3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_3$.

Übung K2P. Konstruieren Sie Homöomorphismen $\mathrm{SO}_2 \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{RP}^3$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 \times [0,2\pi] & \xrightarrow{\ p\ } & \mathbb{S}^3 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & \swarrow{\scriptstyle h} & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathrm{SO}_3 & \xleftarrow[\cong]{\ \bar{h}\ } & \mathbb{RP}^3 \end{array}$$

(1) Wir haben eine stetige Surjektion $\rho : \mathbb{S}^2 \times [0,2\pi] \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$ dank der *Rodrigues–Formel* $\rho(s,\theta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta)\cdot s \times x + (1-\cos(\theta))\cdot s \times (s \times x)$.

(2) Dank Kugelkoordinaten $p : \mathbb{S}^2 \times [0,2\pi] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^3 : (s,\theta) \mapsto \big(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)s\big)$ ist die Abbildung $h : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}_3 : p(s,\theta) \mapsto \rho(s,\theta)$ wohldefiniert und stetig.

✻ **K2P.** (1) *Wohldefiniertheit:* Die Abbildung $\rho(s,\theta)$ ist die Drehung des $\mathbb{R}^3$ um die Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit Winkel $\theta \in [0,2\pi]$: Wir ergänzen $s \in \mathbb{S}^2$ zu einer Orthonormalbasis $s,u,v \in \mathbb{R}^3$ mit $s \times u = v$. In dieser Basis gilt $s \mapsto s$ sowie in der u–v–Ebene $u \mapsto \cos(\theta)u + \sin(\theta)v$ und $v \mapsto -\sin(\theta)u + \cos(\theta)v$. Somit gilt $\rho(s,\theta) \in \mathrm{SO}_3$.

Surjektivität: Jede speziell-orthogonale Matrix $A \in \mathrm{SO}_3$ hat den Eigenwert 1, also einen Eigenvektor $s \in \mathbb{S}^2$ mit $As = s$: Das charakteristische Polynom $P_A = \det(X1_{3\times 3} - A) \in \mathbb{R}[X]$ hat Grad 3, dank Zwischenwertsatz (C3R) existiert also ein reeller Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Die beiden anderen $\mu, \overline{\mu} \in \mathbb{C}$ sind komplex konjugiert. Alle Eigenwerte von A liegen in $\mathbb{S}^1$, also $\lambda \in \{\pm 1\}$. Wegen $\det A = \lambda \cdot \mu \cdot \overline{\mu} = 1$ bleibt nur $\lambda = +1$. Wir ergänzen s zu einer Orthonormalbasis $s,u,v \in \mathbb{R}^3$ mit $s \times u = v$. Die Drehung A erhält die u–v–Ebene und ist hierauf eine Drehung. Dank $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$ existiert $\theta \in \mathbb{R}$ mit $A = \rho(s,\theta)$. Demnach ist ρ surjektiv.

(2) Die Kugelkoordinaten $p : \mathbb{S}^2 \times [0,2\pi] \to \mathbb{S}^3$ sind stetig. Ihr Bild ist $p(\mathbb{S}^2 \times [0,2\pi]) = \mathbb{S}^3$: Die Inklusion „$\subset$“ gilt wegen $|p(s,\theta)| = 1$. Die Inklusion „$\supset$“ gilt, denn $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist surjektiv. Da $\mathbb{S}^2 \times [0,2\pi]$ kompakt und $\mathbb{S}^3$ hausdorffsch ist, induziert p dank F1L einen Homöomorphismus auf dem Quotienten, wobei der Boden $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ zu $+e_1$ zusammengeschlagen wird, und der Deckel $\mathbb{S}^2 \times \{2\pi\}$ zu $-e_1$. Auch unsere stetige Surjektion $\rho : \mathbb{S}^2 \times [0,2\pi] \to \mathrm{SO}_3$ schlägt Boden und Deckel zusammen, faktorisiert also gemäß $\rho = h \circ p$ zur stetigen Surjektion $h : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$ mit $h(p(s,\theta)) = \rho(s,\theta)$. Schließlich gilt $\rho(s,\theta) = \rho(-s, 2\pi - \theta)$. Somit identifiziert h gegenüberliegende Punkte $\pm x$ in $\mathbb{S}^3$. Auf dem Quotienten $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ erhalten wir, erneut dank F1L, den ersehnten Homöomorphismus $\bar{h} : \mathbb{RP}^3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_3$ mit $\bar{h}(\pm p(s,t)) = \rho(s,t)$.

Übung K2Q. *Euler–Winkel* definieren eine stetige Surjektion $E : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$ durch

$$E(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✻ **K2Q.** Jedes Element $R \in \mathrm{SO}_3$ ist eine Rotation um eine Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$, wie in K2P gezeigt. Im Falle $s = e_3$ gilt $R = E(\alpha,0,0)$. Andernfalls können wir $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ so bestimmen, dass diese Drehungen die Achse e_3 nach s drehen. Es gilt dann $R = E(\alpha,\beta,\gamma)$. Demnach ist die Abbildung $E : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{SO}_3$ surjektiv.

Bemerkung. Euler–Winkel werden in Mechanik, Navigation, Computeranimation, etc. ausgiebig verwendet. Diese Abbildung hat jedoch kritische Punkte (kardansche Blockade). Hingegen ist die obige Abbildung $h : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}_3$ aus K2P ein lokaler Diffeomorphismus. Noch mehr Struktur entfaltet sich, wenn wir zur Konstruktion von h die Quaternionen $\mathbb{H}$ verwenden. Die Abbildung h entpuppt sich als surjektiver Gruppenhomomorphismus!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§K2s. Der Gruppenhomomorphismus $\mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ dank Quaternionen.** Den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen erweitern wir zum Körper $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ der komplexen Zahlen (B3A) und sodann zum Schiefkörper $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ der hamiltonschen Quaternionen (B4G). ☜

Hier gelten alle Körperaxiome bis auf die Kommutativität der Multiplikation. Insbesondere bildet $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \smallsetminus \{0\}$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation. Hierin ist die Einheitssphäre $\mathbb{S}^3 = \mathrm{SU}_2 = \mathrm{Spin}(3)$ eine Untergruppe. Für die gesamte Gruppe gilt $\mathbb{H}^\times \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}_{>0}$.

Die mangelnde Kommutativität erweist sich nun als Segen, denn mit der Einheitssphäre $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ lässt sich die Drehgruppe $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \subset \mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}$ besonders elegant parametrisieren.

Bemerkung K2R. Die Gruppe $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}^\times$ operiert auf dem Vektorraum $\mathbb{H}$ durch Konjugation,

$$\varphi \,:\, \mathbb{S}^3 \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \,:\, (A, X) \mapsto \varphi_A(X) := AXA^{-1}.$$

Es gilt $\det(AXA^{-1}) = \det(X)$. Somit erhält $\varphi_A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die Norm, also auch das Skalarprodukt, kurz $\varphi_A \in \mathrm{O}(\mathbb{H})$. Zudem fixiert φ_A den Unterraum $\mathrm{Re}\mathbb{H} := \mathbb{R}E$. Folglich respektiert φ_A die orthogonale Zerlegung $\mathbb{H} = \mathrm{Re}\mathbb{H} \oplus \mathrm{Im}\mathbb{H}$ in die Räume $\mathrm{Re}\mathbb{H} := \mathbb{R}E$ und

$$\mathrm{Im}\mathbb{H} := \{\, bI + cJ + dK \in \mathbb{H} \mid b, c, d \in \mathbb{R} \,\}.$$

Durch Einschränkung auf $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ erhalten wir so die Operation

$$\psi \,:\, \mathbb{S}^3 \times \mathrm{Im}\mathbb{H} \to \mathrm{Im}\mathbb{H} \,:\, (A, Y) \mapsto \psi_A(Y) := AYA^{-1}.$$

Dies definiert den gewünschten Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{O}_3 = \mathrm{O}(\mathrm{Im}\mathbb{H})$. Dieser ist stetig. Da $\mathbb{S}^3$ zusammenhängend ist, muss $\det \circ \psi : \mathbb{S}^3 \to \{\pm 1\}$ konstant sein. Also liegt das Bild wie behauptet in der Untergruppe $\mathrm{SO}_3 = \mathrm{SO}(\mathrm{Im}\mathbb{H})$.

Beispiel. Wir betrachten $A = xE + yI$ mit $x = \cos(\theta/2)$ und $y = \sin(\theta/2)$ und $0 < \theta < 2\pi$. Die Konjugation $\psi_A : \mathrm{Im}\mathbb{H} \to \mathrm{Im}\mathbb{H}$ ergibt $AIA^{-1} = I$ sowie

$$AJA^{-1} = (xE + yI)J(xE - yI) \;= (x^2 - y^2)J + 2xyK = \cos(\theta)J + \sin(\theta)K,$$
$$AKA^{-1} = (xE + yI)K(xE - yI) = (x^2 - y^2)K - 2xyJ \;= \cos(\theta)K - \sin(\theta)J.$$

Somit ist ψ_A die Rotation um die Achse I mit Winkel θ.

Dieses Beispiel gilt allgemein, und wir erhalten folgendes schöne Ergebnis:

Satz K2s. *Der Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}_3$ ist surjektiv mit Kern $\{\pm E\}$. Jedes $A \in \mathbb{S}^3 \smallsetminus \{\pm E\}$ schreibt sich eindeutig als $A = \cos(\theta/2)E + \sin(\theta/2)B$ mit $0 < \theta < 2\pi$ und $B \in \mathbb{S}^2 \subset \mathrm{Im}\mathbb{H}$, und $\psi_A : Y \mapsto AYA^{-1}$ ist die Rotation um die Achse B mit Winkel θ.*

BEWEIS. Die Surjektivität sieht man wie in K2Q: Jede Rotation $R \in \mathrm{SO}_3 = \mathrm{SO}(\mathrm{Im}\mathbb{H})$ ist eine Komposition von höchstens drei speziellen Drehungen wie im vorigen Beispiel.

Jedes $A \neq \pm E$ schreiben wir als $A = xE + yB$ mit $B \in \mathbb{S}^2$ und $y > 0$. Hierbei ist

$$\mathbb{S}^2 = \{\, bI + cJ + dK \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \mid b, c, d \in \mathbb{R},\ b^2 + c^2 + d^2 = 1 \,\}.$$

Wegen $x^2 + y^2 = 1$ existiert genau ein Winkel θ mit $0 < \theta < 2\pi$ sodass $\cos(\theta/2) = x$ und $\sin(\theta/2) = y$. Wir ergänzen B zu einer Orthonormalbasis B, C, D von $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ mit der Orientierung $BCD = -1$. Es gibt eine Rotation $R \in \mathrm{SO}_3 = \mathrm{SO}(\mathrm{Im}\mathbb{H})$, die (B, C, D) auf (I, J, K) abbildet. Wie gesehen gilt $R = \psi_U$ für ein $U \in \mathbb{S}^3$. Somit ist $\psi_U^{-1}\psi_A\psi_U$ die Rotation um die Achse I mit Winkel θ, also ist ψ_A die Rotation um die Achse B mit Winkel θ. Dies zeigt insbesondere $\psi_A \neq \mathrm{id}$, also $\ker(\psi) = \{\pm E\}$. □

§K2t. Wie verschlingen sich $\mathrm{O}_2^\pm\mathbb{R} \simeq \mathrm{GL}_2^\pm\mathbb{R}$ in der Gruppe $\mathrm{GL}_2\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{2\times2}$?

☞ **Übung K2T.** Wir betrachten $\mathbb{R}^{2\times2} \smallsetminus \{0\}$ modulo Multiplikation mit $\mathbb{R}_{>0}$. Dies entspricht einer 3–Sphäre, die wir stereographisch projizieren. Zeichnen Sie $\mathrm{O}_2\mathbb{R}$ in dieser Projektion sowie die singulären Matrizen von Rang 1. Welche Beziehung besteht zur Hopf–Faserung? ☜

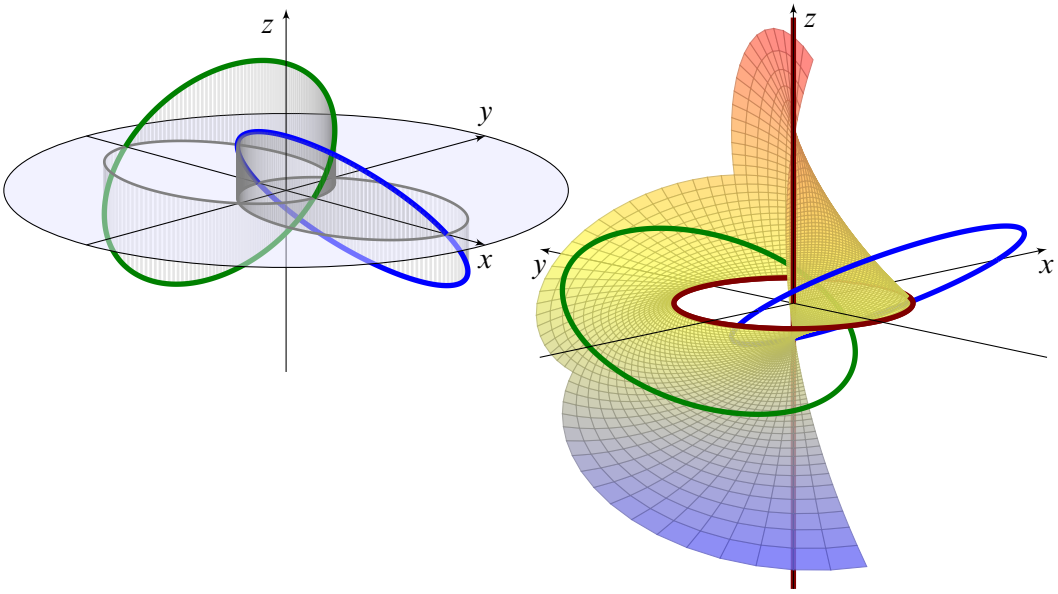


ABBILDUNG K:18. Der Matrizenraum $(\mathbb{R}^{2\times2} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0} \cong \mathbb{S}^3$, hier stereographisch projiziert, besteht aus zwei verschlungenen Volltori um $\mathrm{O}_2^\pm\mathbb{R}$. Ihr gemeinsamer Rand ist die Torusfläche aller Matrizen vom Rang 1.

✻ **K2T.** (1) Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}_2 = \mathrm{O}_2^+ \sqcup \mathrm{O}_2^-$ können wir dank F1Q explizit parametrisieren durch $g_\pm : [0,2\pi] \to \mathrm{O}_2^\pm : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \cos t & \mp\sin t \\ \sin t & \pm\cos t \end{smallmatrix}\right)$. Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^{2\times2} \smallsetminus \{0\}$ aller Matrizen (ohne Null) modulo Multiplikation mit $\mathbb{R}_{>0}$. Der Quotient entspricht der radialen Projektion auf die 3–Sphäre $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{0\}$. Wir wählen alternativ die Sphäre $S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \mid a^2+b^2+c^2+d^2 = r^2 \right\} = r\mathbb{S}^3$. Der Radius $r = \sqrt{2}$ garantiert die Inklusion $\mathrm{O}_2 \subset S$. Diese Sphäre projizieren wir stereographisch vom Pol $* := (0,0,0,r)$ auf den euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ vermöge $f : S \smallsetminus \{*\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x,y,z) = (a,b,c)/(r-d)$. In diesen stereographischen Koordinaten zeigt K:18 das Bild von $f \circ g_\pm : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, also die Untergruppe $\mathrm{O}_2^+ = \mathrm{SO}_2$ aller Drehungen (blau) und die Nebenklasse O_2^- aller Spiegelungen (grün). Wir wissen $\mathrm{O}_2 \times \mathrm{B}_2^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2\mathbb{R} : (Q,R) \mapsto QR$ dank Gram–Schmidt (G5G), also $\mathrm{SO}_2 \times \mathrm{B}_2^\pm \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2^\pm\mathbb{R}$ wobei $\mathrm{B}_2^+ = \left(\begin{smallmatrix} >0 & \mathbb{R} \\ 0 & >0 \end{smallmatrix}\right) \cong \mathbb{R}^3$ und $\mathrm{B}_2^- = \left(\begin{smallmatrix} >0 & \mathbb{R} \\ 0 & <0 \end{smallmatrix}\right) \cong \mathbb{R}^3$. Demnach besteht der Quotientenraum $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}/\mathbb{R}_{>0}$ aus zwei offenen Volltori um die Mittelachsen $\mathrm{O}_2^\pm\mathbb{R}$.

(2) Die Drehgruppe $\mathrm{SO}_2 \cong \mathbb{S}^1$ operiert auf der Menge $\mathbb{R}^{2\times2}$ aller Matrizen durch Linksmultiplikation $\mathrm{SO}_2 \times \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2} : (Q,X) \mapsto QX$. Geometrisch ist dies die simultane Drehung beider Spaltenvektoren. Die Determinante $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = ad-bc$ ist ihr Kreuzprodukt und bleibt bei simultaner Drehung erhalten. Repräsentanten der Bahnen sind neben (a) dem Fixpunkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ noch (b) Matrizen vom Rang eins, $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $0 \le \theta < \pi$, und (c) Matrizen vom Rang zwei als generischer Fall, also $\mathrm{B}_2^\pm$ je nach Orientierung. Der Fall (b) entspricht einer Torusfläche, wie in K:18 skizziert; sie enthält die z–Achse und den Einheitskreis in der x–y–Ebene. Dies zerlegt den Raum $(\mathbb{R}^{2\times2} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0} \cong \mathbb{S}^3$ in zwei offene Volltori und eine Torusfläche als gemeinsamen Rand.

(3) Auf der Sphäre $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^{2\times2} \smallsetminus \{0\}$ entspricht die Operation $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{S}^3$ der Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3$, siehe K2N. Dasselbe gilt skaliert $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \curvearrowright r\mathbb{S}^3$ auf jeder Sphäre vom Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$. In Teil (1) haben wir $r = \sqrt{2}$ betrachtet. Die Menge $\mathrm{O}_2^\pm\mathbb{R}$ ist die Bahn des Punktes $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{smallmatrix}\right)$, also der Identität bzw. der Spiegelung an der x–Achse. Beide Bahnen sind miteinander verschlungen, wie wir es von der Hopf–Faserung kennen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K3. Der Flächenkalkül

☞ In der Einleitung (Kapitel A) habe ich als Motivation und Ausblick die Klassifikation der kompakten zusammenhängenden (triangulierten) Flächen vorgestellt. Wir vollenden nun den Beweis in voller Pracht und Schönheit. Er besteht aus drei Teilen: ☜

(0) Wir konstruieren zunächst unsere Modellflächen $F^{\varepsilon}_{g,r}$ als Beispiele.
(1) Wir weisen nach, dass unsere Liste keine Dopplungen enthält: Invarianten!
(2) Wir zeigen schließlich, dass unsere Liste vollständig ist: Schneiden und Kleben!

Als Satz zusammengefasst: Jede kompakte zusammenhängende (triangulierte) Fläche F ist homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen $F^{\varepsilon}_{g,r}$ mit $g, r \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Das ist ein Musterbeispiel einer Klassifikation! Die Fläche F wird bis auf Homöomorphie durch drei simple Invarianten charakterisiert: ihre Orientierbarkeit $\varepsilon(F) \in \{\pm\}$, die Anzahl $r(F) \in \mathbb{N}$ ihrer Randkomponenten sowie ihre Euler–Charakteristik $\chi(F) \in \mathbb{Z}$. Letztere lässt sich leicht in das Geschlecht $g(F) \in \mathbb{N}$ umrechnen. Diese Invarianten beweisen (1); zusammen mit (2) lösen sie das Homöomorphieproblem kompakter Flächen.

Wir beweisen (2) durch eine genial-einfache Technik: *Schneiden und Kleben*. Konkret nutzen wir Flächenwörter w zur Beschreibung von Flächen $F = \mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$: Diese Notation ist kurz, präzise und flexibel. Anfangs hatten wir nur unsere Anschauung (intuitiv aber vage!) und kommunizierten notgedrungen durch Zeichnungen (schön aber mühsam!). Nun haben wir eine geeignete Schreibweise (bequem!) und einen einfachen Kalkül (effizient!).

Warum gelingt am Ende alles so einfach? Nun ja, weil wir alle Techniken sorgsam vorbereitet haben, und das ursprüngliche geometrisch-topologische Problem schließlich in einen einfachen kombinatorischen Kalkül übersetzen können.

> *By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems, and in effect increases the mental power of the race. Before the introduction of the Arabic notation, multiplication was difficult, and the division even of integers called into play the highest mathematical faculties. Probably nothing in the modern world would have more astonished a Greek mathematician than to learn that, under the influence of compulsory education, the whole population of Western Europe, from the highest to the lowest, could perform the operation of division for the largest numbers. (…) Our modern power of easy reckoning with decimal fractions is the almost miraculous result of the gradual discovery of a perfect notation.*
> Alfred North Whitehead (1861–1947), *An Introduction to Mathematics* (1911)

Mathematik umschrieb man einst als die Lehre von Zahlen und Figuren. Diese Zusammenfassung zweier grundlegender Aspekte hat noch immer ihren Platz, insbesondere ihr gegenseitiger Nutzen in der Topologie: Bilder betonen die wesentliche Idee, Formeln liefern die unverzichtbare Präzision. Viele topologische Argumente lassen sich auf beide Weisen darstellen. Die Kunst besteht darin, beide zu beherrschen und ineinander übersetzen zu können. Idealerweise soll die Topologie Sie zur Zweisprachigkeit erziehen!

> *Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.*
> Ludwig Wittgenstein (1889–1951), *Tractatus logico-philosophicus* (1922)

§K3a. Triangulierte Modellflächen. Wir wollen geschlossene Flächen klassifizieren. Jede Fläche zerfällt in die topologische Summe ihrer Zusammenhangskomponenten (G3C). Zur Vereinfachung betrachten wir daher im Folgenden nur zusammenhängende Flächen. Wir erinnern zunächst an unsere kubischen Modellflächen aus Kapitel A:

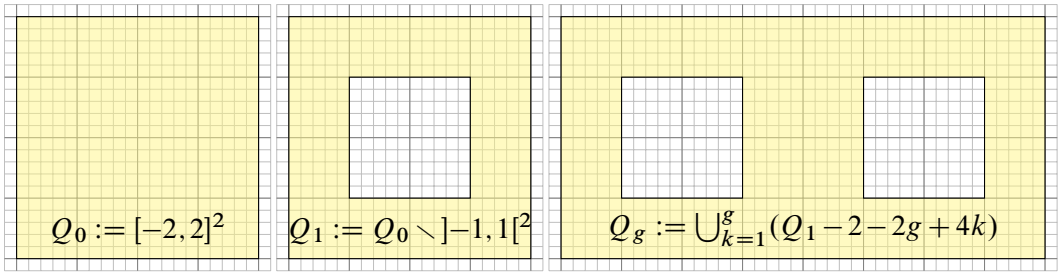


ABBILDUNG K:19. Grundriss Q_g des Henkelkörpers $H_g = Q_g \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$

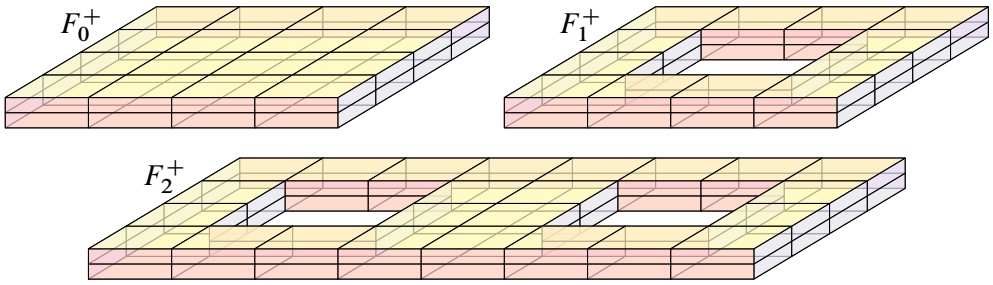


ABBILDUNG K:20. Kubische Modelle $F_g^+ \subset \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen

Satz K3A. *Der Grundriss $Q_g \subset \mathbb{R}^2$ ist eine kompakte 2–Mannigfaltigkeit mit Rand ∂Q_g. Der Henkelkörper $H_g = Q_g \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$ ist eine kompakte 3–Mannigfaltigkeit mit Rand*

$$F_g^+ := \partial H_g = (Q_g \times \{\pm 1\}) \cup (\partial Q_g \times [-1,1]).$$

Diese Räume werden trianguliert durch baryzentrische Unterteilung der gezeigten Quadrate bzw. Würfel. Für die Euler–Charakteristik gilt $\chi(Q_g) = 1-g$ und $\chi(H_g) = 1-g$.

Der Rand $F_g^+ := \partial H_g$ des Henkelkörpers ist eine zusammenhängende geschlossene Fläche. Sie ist triangulierbar, orientierbar und hat Euler–Charakteristik $\chi(F_g^+) = 2-2g$.

Die Punktspiegelung $x \mapsto -x$ erhält den Henkelkörper $H_g = -H_g$, somit auch seinen Rand $F_g^+ = -F_g^+$. Ihr einziger Fixpunkt ist 0, auf dem Rand ∂H_g ist sie fixpunktfrei.

Der Quotientenraum $F_g^- := F_g^+/\{\pm\}$ ist eine zusammenhängende geschlossene Fläche. Sie ist triangulierbar, nicht-orientierbar und hat Euler–Charakteristik $\chi(F_g^+) = 1-g$.

Dank topologischer Invarianz der Orientierbarkeit (J7P) und der Euler–Charakteristik (A3J) sind die Flächen $F_g^\pm$ untereinander nicht homöomorph.

BEWEIS. Dies ist eine schöne und lehrreiche Übung zur Definition von Mannigfaltigkeiten (K1B) und eine praktische Anwendung der Euler–Charakteristik. Versuchen Sie es! □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **K3A.** (1) *Der Grundriss Q_g ist eine kompakte* 2*–Mannigfaltigkeit:* Als Teilraum von $\mathbb{R}^2$ ist Q_g hausdorffsch und zweitabzählbar. Zudem ist Q_g beschränkt und abgeschlossen, also kompakt (F1O). Um jeden Punkt a im Inneren von Q_g gilt $Q_g \supset B(a,\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$. Für jeden Randpunkt a im Inneren einer Kante gilt entsprechend $Q_g \cap B(a,\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2_{\geq 0}$. Für Randpunkte in Ecken können wir Winkel geradebiegen (A1R).

(2) *Der Henkelkörper H_g ist eine kompakte* 3*–Mannigfaltigkeit:* Dies zeigt man wörtlich genauso wie (1). Dank $H_g = Q_g \times [-1,1]$ folgt es auch allgemein aus der Produktkonstruktion (K1W).

(3) *Der Rand $F_g^+ = \partial H_q$ ist eine geschlossene Fläche:* Dies zeigt man wie (1). Dank $F_g^+ = \partial H_g$ folgt es auch allgemein aus der Randkonstruktion (K1T). Es lässt sich auch aus der Triangulierung ablesen (K3B).

(4) *Diese Mannigfaltigkeiten sind trianguliert:* Eine Triangulierung erhalten wir wie angegeben direkt aus unserem kubischen Modell. Die Euler–Charakteristiken $\chi(Q_g) = 1-g$ und $\chi(H_g) = 1-g$ sowie $\chi(H_g) = 2-2g$ können wir geduldig abzählen. Einfacher gelingt es mit dem Euler–Maß, denn die Wechselsumme (A.5) ist hier kurz und leicht. (Für H_q kann die Produktformel A3S genutzt werden.)

Speziell für Sphäre $\mathbb{S}^2 \cong F_0^+$ und Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$ bestätigt diese Rechnung unsere vorige Kenntnis $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ und $\chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 0$. Jede Fläche F_g^+ mit $g \geq 2$ erhalten wir als verbundene Summe von g Tori: Beim Übergang von F_g^+ zu F_{g+1}^+ wird eine Kopie von F_1^+ angeklebt. Dies erhöht die Euler–Charakteristik um $\chi(F_1^+) = 0$; allerdings entfällt auf jeder Seite ein Rechteck (mit $\chi = 1$), und eingefügt wird schließlich nur sein Umfang (ein Kreis mit $\chi = 0$). Daraus folgt $\chi(F_{g+1}^+) = \chi(F_g^+) - 2$.

(5) *Der Quotientenraum $F_g^- = F_g^+/\{\pm 1\}$ ist eine geschlossene Fläche:* Die zugehörige Quotientenabbildung $q : F_g^+ \to F_g^-$ ist ein lokaler Homöomorphismus, denn zu jedem Punkt $x \in F_g^+$ existiert eine offene Umgebung U mit $U \cap (-U) = \emptyset$, somit ist die Einschränkung $q|_U : U \to q(U)$ bijektiv und stetig und offen, also ein Homöomorphismus. Das zeigt, dass F_g^- lokal euklidisch ist. Ebenso sieht man, dass F_g^- hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(6) *Triangulierung des Quotienten:* Unser kubisches Flächenmodell $F_g^+ = |K_g^+|$ ist das Polyeder des oben erklärten Simplizialkomplexes K_g^+. Dieser ist so konstruiert, dass er invariant unter der Punktspiegelung $x \mapsto -x$ in $\mathbb{R}^3$ ist. Die Quotientenabbildung $q : F_g^+ \to F_g^-$ identifiziert jeden Simplex $\Delta \in K_g^+$ mit dem gegenüberliegenden Simplex $-\Delta \in K_g^+$. Beide sind disjunkt und haben keine gemeinsamen Nachbarn. Wegen $\Delta \cap (-\Delta) = \emptyset$ ist q ein Homöomorphismus von Δ auf $q(\Delta)$. Aus dem Simplizialkomplex K_g^+ zur Triangulierung $|K_g^+| \xrightarrow{\sim} F_g^+$ erhalten so den Simplizialkomplex $K_g^- = K_g^+/\{\pm\}$ und die Triangulierung $|K_g^-| \xrightarrow{\sim} F_g^-$. Dabei hat K_g^- in jeder Dimension $d = 0,1,2$ genau halb so viele Simplizes wie K_g^+, also gilt $\chi(F_g^-) = \chi(F_g^+)/2 = 1-g$.

(7) *Orientierbarkeit:* Auf jedem 2–Simplex von F_g^+ betrachten wir den Normalenvektor, der aus dem Henkelkörper H_g herauszeigt, und die Rechte-Hand-Regel definiert eine Orientierung auf jedem 2–Simplex. Man sieht leicht, dass diese untereinander verträglich sind (K3B). Die Fläche F_g^- hingegen ist nicht orientierbar: Sei $R_g \subset \partial Q_g$ die äußere Randkomponente von Q_g. Dann ist die Mantelfläche $M_g = R_g \times [-1,1]$ in F_g^+ homöomorph zu einem Zylinder $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$. Die Quotientenabbildung $q : F_g^+ \to F_g^-$ bildet diesen Zylinder M_g in F_g^+ ab auf ein Möbius–Band $M_g/\{\pm\}$ in F_g^-. Somit ist die Fläche F_g^- nicht orientierbar.

Bemerkung. Die Fläche $F_2^+ = F_1^+ \sharp F_1^+$ ist die *verbundene Summe zweier Tori* (K4A): Wir betrachten zwei Kopien $A \cong B \cong F_1^+$ und schneiden jeweils ein offenes Rechteck aus. Wir erhalten so zwei Flächen A', B' mit Rand $\cong \mathbb{S}^1$ und verkleben beide längs dieses Randes. Ebenso erhält man $F_{g+1}^+ = F_g^+ \sharp F_1^+$. Diese Konstruktion nennt man daher auch „g–fache verbundene Summe von Tori“, geschrieben $F_g^+ = F_1^+ \sharp F_1^+ \sharp \cdots \sharp F_1^+ = (F_1^+)^{\sharp g}$.

Die verbundene Summe $M \sharp N$ ist für Mannigfaltigkeiten M, N in jeder Dimension möglich und nützlich. Dabei müssen wir allerdings auf Zusammenhang und Orientierung achten und zeigen, dass $(M,N) \mapsto M \sharp N$ eine wohldefinierte Operation ist, also unabhängig von der (etwas willkürlichen) Wahl der Verklebung, genauer gesagt: eindeutig bis auf Homöomorphismen bzw. Diffeomorphismen oder welche Strukturen wir betrachten (§K4).

§K3b. Triangulierte Flächen. Sei K ein Simplizialkomplex mit Polyeder $|K|$. Genau dann ist $|K|$ eine Fläche, wenn jeder Eckenstern wie in Abbildung K:21 (links) aussieht.

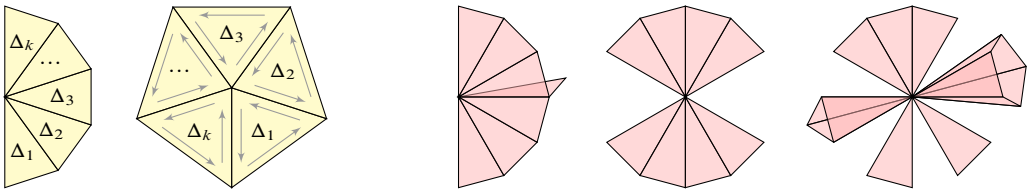


ABBILDUNG K:21. Eckensterne von Flächen (links) und Gegenbeispiele (rechts).

Der folgende Satz übersetzt topologische in kombinatorische Eigenschaften und zurück.

Satz K3B (simpliziale Flächen)**.** *Sei K ein Simplizialkomplex. Genau dann ist die topologische Realisierung $|K|$ eine Fläche, wenn der Komplex K folgende Bedingungen erfüllt:*

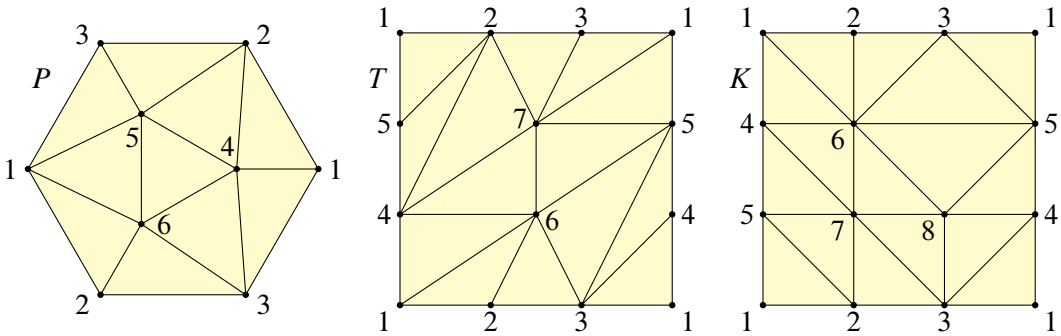
(a) Jeder Simplex von K liegt in einem 2–Simplex. (Invarianz der Dimension)
(b) Jede Kante liegt in genau einem oder zwei 2–Simplizes. (Jordanscher Kurvensatz)
(c) Jede Ecke liegt in endlich vielen 2–Simplizes $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$, wobei wie in K:21(links) jeweils Δ_i und Δ_{i+1} eine Kante gemeinsam haben. (Lokaler Zusammenhang)

Die Fläche $|K|$ hat dann folgende Eigenschaften:

(1) Genau dann ist $|K|$ zusammenhängend, wenn sich je zwei 2–Simplizes $\Delta, \Delta' \in K_2$ verbinden lassen durch $\Delta = \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_\ell = \Delta' \in K_2$ mit $\Delta_{i-1} \cap \Delta_i \in K_1$.
(2) Eine Orientierung der Fläche $|K|$ entspricht einer Orientierung für jeden 2–Simplex $\Delta \in K_2$, sodass je zwei benachbarte 2–Simplizes kompatibel orientiert sind wie in K:21, also ihre gemeinsame Kante $\Delta \cap \Delta' = \{a,b\} \in K_1$ gegenläufig orientieren.
(3) Der Rand $\partial|K|$ besteht aus allen Kanten $\{a,b\} \in K_1$, die in genau einem 2–Simplex liegen. Das bedeutet $\partial|K| = |\partial K|$ mit $\partial K = \langle\, \{a,b\} \in K_1 \mid \exists! c \in \Omega : \{a,b,c\} \in K_2 \,\rangle$.
(4) Genau dann ist $|K|$ geschlossen, wenn K endlich ist und jede Kante in genau zwei 2–Simplizes liegt, also $\partial K = \{\emptyset\}$. Hieraus folgt die Heawood–Ungleichung:

$$\text{(K.1)} \qquad f_1 \le \tbinom{f_0}{2} \quad \textit{und} \quad 2f_1 = 3f_2 \quad \textit{implizieren} \quad 2f_0 \ge 7 + \left\lceil \sqrt{49 - 24\chi} \right\rceil.$$

Die Ungleichung ist scharf für die Sphäre $F_0^+ = \mathbb{S}^2 \cong \partial\Delta^3$, die projektive Ebene $F_0^- = \mathbb{RP}^2$ und den Torus $F_1^+ = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, denn diese lassen sich bereits mit 4, 6, 7 Ecken triangulieren. Die Kleinsche Flasche F_1^- lässt sich nicht mit 7, sondern erst mit 8 Ecken triangulieren.



© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

BEWEIS. Dies ist eine schöne und lehrreiche Übung zur Definition von Flächen (K1B) und zur Topologie des Modellraumes $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ (Kapitel J). □

✻ **K3B.** Die kombinatorischen Bedingungen (a–c) sind hinreichend: Erfüllt K diese Eigenschaften, so ist $|K|$ eine Fläche, also eine 2–Mannigfaltigkeit im Sinne der Definition K1B: Jedes Polyeder $|K|$ ist hausdorffsch (I2N). Dank (c) ist K lokal-endlich, also $|K|$ metrisierbar (I2J). Zudem ist jede Komponente abzählbar (I4Q). Schließlich ist $|K|$ lokal euklidisch der Dimension 2: Für jeden Punkt im Inneren eines 2–Simplex Δ ist dies klar, denn dank (a) gilt $\dim K = 2$ und somit ist $\operatorname{Int}\Delta \cong \mathbb{R}^2$ offen in $|K|$. Dank (b) gilt dies auch für jeden Punkt im Inneren einer Kante, und dank (c) schließlich für jeden Eckpunkt, wie in Abbildung K:21 gezeigt.

Die genannten Bedingungen sind umgekehrt auch notwendig: Wenn $|K|$ eine Fläche ist, dann gelten (a–c):

(a) Sei $S \in K$ ein 3–Simplex. Zu jeder Umgebung U von $x \in [S]$ existieren Einbettungen $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow U$; dies widerspricht $U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ (Borsuk–Ulam J6C). Gleiches gilt für jede Kante, die in keinem 2–Simplex liegt: Dies ist klar dank der lokalen Trennungseigenschaft. Ebenso sind isolierte Eckpunkte ausgeschlossen.

(b) Angenommen, eine Kante $[a,b]$ liegt in drei oder mehr verschiedenen 2–Simplizes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots \subset |K|$. Sei $x \in \operatorname{Int}[a,b]$ der Mittelpunkt dieser Kante. Wenn $|K|$ zudem eine 2–Mannigfaltigkeit ist, dann existiert eine offene Umgebung U von x in $|K|$ mit $U \cong \mathbb{R}^2$ oder $U \cong \mathbb{R}^2_{\geq 0}$. Mit dem Jordanschen Kurvensatz zeigen wir, dass dies nicht möglich ist. Da U offen ist, enthält U einen Ball $B(x,\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$, und dieser ragt in jedes der Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ hinein. Sei $S \subset B(x,\varepsilon)$ eine Kreislinie aus zwei Halbkreisen um x in zwei verschiedenen Dreiecken Δ_1, Δ_2. Dann ist $U \smallsetminus S$ zusammenhängend, denn man kann x mit jedem Punkt verbinden, notfalls durch einen Umweg über Δ_3. Demnach kann U nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ sein.

(c) Wir betrachten eine Ecke a und alle 2–Simplizes, die a als Ecke haben. Nach (b) können wir diese zu Galerien anordnen, jede entweder linear oder zyklisch geschlossen. Verschiedene Galerien hängen nur in a zusammen; gibt es zwei oder mehr, so ist a lokal trennend. Dies ist aber in einer 2–Mannigfaltigkeit unmöglich.

Zusammengenommen sind die Bedingungen (a–c) äquivalent zu der prägnanteren Aussage, dass jeder Eckenstern wie in Abbildung K:21 (links) aussieht. Hieraus folgen die weiteren Aussagen (1–3):

Bedingung (1) impliziert offensichtlich Zusammenhang. Die Umkehrung gilt dank (c).

Jede Orientierung von $|K|$ orientiert die 2–Simplizes von K kompatibel. Die Umkehrung gilt dank (1).

(3) Der Rand ist offensichtlich. (4) Für jede geschlossene Fläche gilt: Jede Kante liegt in zwei Dreiecken, jedes Dreieck hat drei Kanten, also $2f_1 = 3f_2$. Jede Kante $[a,b]$ wird durch ihre beiden Eckpunkte $\{a,b\}$ festgelegt, also gilt $f_1 \leq \binom{f_0}{2} = f_0(f_0-1)/2$. Einsetzen in $\chi = f_0 - f_1 + f_2$ liefert die Heawood–Ungleichung.

Beispiele: Für die Sphäre $F_0^+ = \mathbb{S}^2$ gilt $\chi = 2$, also $f_0 \geq 4$. Tatsächlich lässt sich $\mathbb{S}^2 \cong \partial\Delta^3$ als Rand eines Tetraeders triangulieren mit 4 Ecken sowie allen (!) $\binom{4}{2} = 6$ Kanten und 4 Dreiecken. Für die projektive Ebene $F_0^- = \mathbb{S}^2/\{\pm\}$ gilt $\chi = 1$, also $f_0 \geq 6$. Tatsächlich lässt sich die projektive Ebene triangulieren mit 6 Ecken sowie allen (!) $\binom{6}{2} = 15$ Kanten und 10 Dreiecken. Für den Torus $F_1^+ = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ gilt $\chi = 0$, also $f_0 \geq 7$. Tatsächlich lässt sich der Torus triangulieren mit 7 Ecken sowie allen (!) $\binom{7}{2} = 21$ Kanten und 14 Dreiecken.

Durch systematisches Ausprobieren findet man eine 8–Ecken–Triangulierung $|K| \cong F_1^-$ der Kleinschen Flasche mit $f_0 = 8$, $f_1 = 24$, $f_2 = 16$. Die Triangulierung ist hier nicht mehr eindeutig, es gibt fünf weitere. Mit nur 7 Ecken gelingt es nicht: Eine solche Triangulierung müsste 7 Ecken und alle 21 Kanten haben, und systematisches Ausprobieren aller simplizialen Flächen zeigt, dass man so nur den Torus erhalten kann.

Bemerkung. Im Jahr 1950 formulierte Ernst PESCHL in einem Seminar an der Universität Bonn folgende Frage: Was ist die minimale Eckenzahl zur Triangulierung der Flächen $F_g^\pm$? Die Frage hatten sich vermutlich schon viele zuvor gestellt, er stellte sie wissensdurstigen Studierenden, darunter Gerhard RINGEL. Dieser fand 1955 minimale Triangulierungen für alle Flächen F_g^-, und mit Mark JUNGERMAN 1980 schließlich auch für alle Flächen F_g^+.

Die Konstruktion minimaler Triangulierungen ist überraschend schwierig, die minimale Eckenzahl jedoch ist sensationell und verblüffend einfach: Die Heawood–Ungleichung (K.1) ist scharf für alle geschlossenen Flächen mit nur drei Ausnahmen: Die Kleinsche Flasche F_1^- und die beiden Flächen $F_2^\pm$ benötigen jeweils eine Ecke mehr.

Dieselbe Ungleichung steht im Zentrum der Heawood–Vermutung und des Satzes von Ringel–Youngs (1968): Sie gibt die minimale Anzahl von Farben, mit denen sich jede Landkarte auf $F_g^{\pm}$ politisch korrekt färben lässt; einzige Ausnahme ist die Kleinsche Flasche F_1^-, sie benötigt nur 6 Farben statt 7. Das klassische *Vierfarbenproblem* auf der Sphäre $F_0^+ = \mathbb{S}^2$ wurde erst 1976 von Wolfgang HAKEN und Kenneth APPEL gelöst.

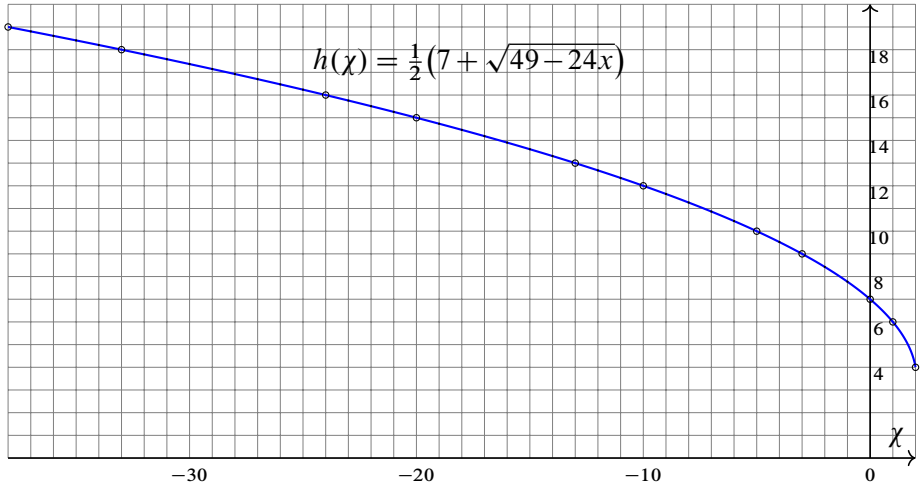


ABBILDUNG K:22. Skizze der Heawood–Funktion $h(\chi)$

Abbildung K:22 zeigt die Heawood–Funktion $h : \mathbb{R}_{\leq 2} \to \mathbb{R} : h(x) = \frac{1}{2}\big(7+\sqrt{49-24x}\big)$. Diese Funktion verläuft bemerkenswert oft durch ganzzahlige Punkte. Für die orientierbaren Flächen F_g^+ mit $\chi = 2-2g$ erhalten wir $h^+(g) = \frac{1}{2}\big(7+\sqrt{1+48g}\big)$. Für die nichtorientierbaren Flächen F_g^- mit $\chi = 1-g$ erhalten wir $h^-(g) = \frac{1}{2}\big(7+\sqrt{25+24g}\big)$.

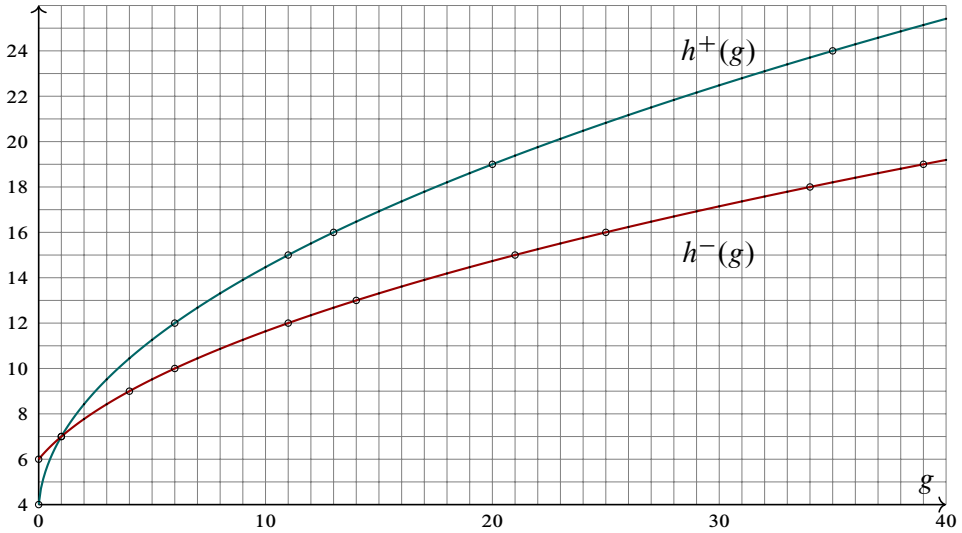


ABBILDUNG K:23. Skizze der Heawood–Funktion $h^{\pm}(g)$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§K3c. Polygonmodelle geschlossener Flächen.** Zur Klassifikation der Flächen nutzen wir eine effiziente Notation. Sie kennen die Idee vermutlich aus der Schule, wenn Sie jemals versucht haben, Polyeder wie die platonischen Körper (A:8) aus Papier zu basteln. ☜

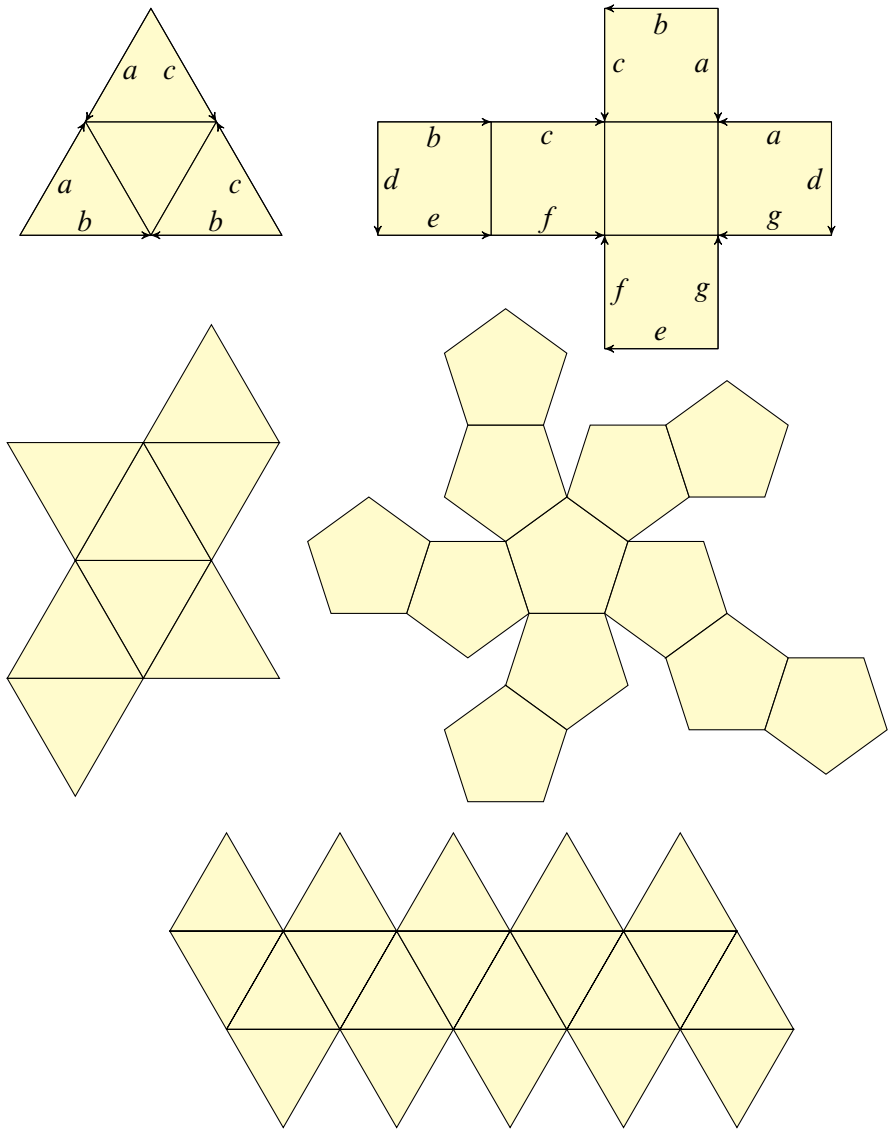


ABBILDUNG K:24. Bastelanleitung für Flächen: die fünf platonischen Körper

In den Bastelanleitungen aus K:24 nutzen wir selbstverständlich die Geometrie: Diese schreibt eindeutig vor, welche Kanten miteinander verklebt werden können und müssen.

In der Topologie gelten diese geometrischen Einschränkungen nicht, und wir können je zwei beliebige Randkanten verkleben. Um die getroffene Wahl eindeutig kenntlich zu machen, beschriften wir solche Kantenpaare mit demselben Buchstaben und notieren zudem die Orientierungen der beiden Kanten. Wir gelangen so zu folgendem Polygonmodell.

ABBILDUNG K:25. Wörter und Verheftung eines Polygonrandes

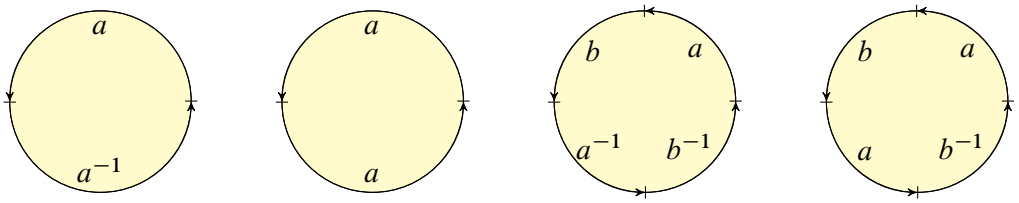


ABBILDUNG K:26. Wörter und Verheftung des Kreisrandes

Definition K3C. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$ teilen wir in n Kreisbögen

$$\gamma_k \,:\, [0,1] \to \mathbb{S}^1 \,:\, t \mapsto \exp\big[\tfrac{2\pi \mathrm{i}}{n}(k-1+t)\big] \quad \text{für} \quad k = 1,2,\dots,n.$$

Sei $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in A^n$ ein Wort über dem Alphabet $A = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}, \dots\}$. Hierbei sei A eine beliebige Menge und $A \to A : x \mapsto x^{-1}$ eine fixpunktfreie Involution.

- Bei $w_k = w_\ell$ identifizieren wir die Punkte $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(t)$ für jedes $t \in [0,1]$.
- Bei $w_k = w_\ell^{-1}$ identifizieren wir die Punkte $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(1-t)$ für jedes $t \in [0,1]$.

Dies erzeugt eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{D}^2$. Den Quotientenraum bezeichnen wir mit

$$\mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle := \mathbb{D}^2/_\sim.$$

Für $n = 1$ erhalten wir $\mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle = \mathbb{D}^2$. Im Sonderfall $n = 0$ vereinbaren wir $\mathbb{D}^2/\langle\,\rangle := \mathbb{S}^2$. Dies entspricht der Zusammenschlagung $\mathbb{D}^2 /\!\!/ \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$ des Randes zu einem Punkt (F1R).

Bemerkung. Für $n \geq 3$ ersetzen wir die Kreisscheibe $\mathbb{D}^n$ durch ein konvexes n–Eck (F6H). In Skizzen ist es oft bequem, einen Buchstaben x durch sein Inverses x^{-1} zu ersetzen und gleichzeitig die Parametrisierung dieses Segments umkehren, wie in Abbildung K:24.

Übung K3D. Konstruieren Sie möglichst explizit folgende Homöomorphismen:

(1) $\mathbb{D}^2/\langle\, aa^{-1} \,\rangle \cong \mathbb{S}^2$ (zweidimensionale Sphäre)
(2) $\mathbb{D}^2/\langle\, aa \,\rangle \cong \mathbb{RP}^2$ (reell-projektive Ebene)
(3) $\mathbb{D}^2/\langle\, aba^{-1}b^{-1} \,\rangle \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (zweidimensionaler Torus)
(4) $\mathbb{D}^2/\langle\, abab^{-1} \,\rangle \cong (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm 1\}$ (Kleinsche Flasche)

Hinweis: $\mathbb{D}^2$ ist kompakt und der rechts stehende Raum X ist hausdorffsch, so dass wir F1L anwenden können. Skizzieren und formalisieren Sie eine geeignete Abbildung $\mathbb{D}^2 \to X$. *Achtung:* Bei $\{\pm\} \curvearrowright \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ entspricht $(-) : (u,v) \mapsto (-u, \overline{v})$ der Punktspiegelung im $\mathbb{R}^3$.

✻ **K3D.** Wir nutzen (1) $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^2 : (x, \sqrt{1-x^2}\sin\frac{\alpha}{2}) \mapsto (x, \sqrt{1-x^2}\sin\alpha, \sqrt{1-x^2}\cos\alpha)$ für $\alpha \in [-\pi,\pi]$, (2) $g : \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^2 : (x,y) \mapsto [x : y : \sqrt{1-x^2-y^2}]$, (3) $h : [-1,1]^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 : (x,y) \mapsto (\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} x}, \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} y})$ wie in Abbildung A:2, (4) $k = q \circ h : [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \twoheadrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm\}$. Dies induziert die gewünschte Identifizierung auf dem Rand der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$, des Quadrates $[-1,1]^2$ bzw. des Rechtecks $[0,1] \times [-1,1]$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K3d. Darstellung von Flächen im Polygonmodell. Wir wollen alle geschlossenen Flächen F klassifizieren. Hierzu nutzen wir das oben in K3C eingeführte Polygonmodell:

Satz K3E. *(0) Der Quotientenraum $\mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ ist zusammenhängend und kompakt, zudem triangulierbar durch einen endlichen zweidimensionalen Simplizialkomplex.*

(1) Jede triangulierte, zusammenhängende, kompakte Fläche F ist homöomorph zu $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ für ein geeignetes Wort w. Dieses ist noch nicht eindeutig.

(2) Für unsere Modellflächen $F_g^\pm$ finden wir als Standarddarstellung (Normalform) $F_g^+ \cong \mathbb{D}^2/\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ und $F_g^- \cong \mathbb{D}^2/\langle c_0 c_0 \cdots c_g c_g \rangle$.

(3) Genau dann ist $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ eine geschlossene Fläche, wenn jeder Buchstabe in w exakt zweimal auftritt. In diesem Falle nennen wir w ein (geschlossenes) Flächenwort.

(4) Tritt ein Buchstabe im Flächenwort w zweimal mit gleichen Exponenten auf, dann ist die Fläche $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ nicht orientierbar. Andernfalls ist sie orientierbar.

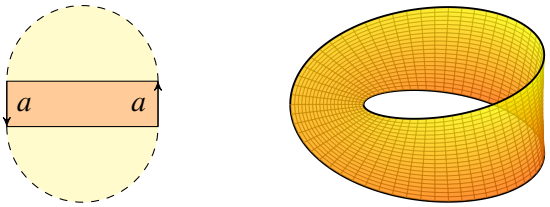


ABBILDUNG K:27. Einbettung eines Möbius–Bandes

Beispiele.
- Der Raum $\mathbb{D}^2/\langle aaa \rangle$ ist keine Fläche.
- Der Raum $\mathbb{D}^2/\langle abb^{-1} \rangle \cong \mathbb{D}^2$ ist eine Fläche, orientierbar aber nicht geschlossen.
- Der Raum $\mathbb{D}^2/\langle aa \rangle \cong \mathbb{RP}^2$ ist eine Fläche, geschlossen aber nicht orientierbar.

BEWEIS. Die Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ ist zusammenhängend und kompakt, somit auch $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$. Eine hinreichend feine Triangulierung von $\mathbb{D}^2$ liefert eine Triangulierung von $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$.

(1) Wir nutzen die vorausgesetzte Triangulierung $|K| \xrightarrow{\sim} F$. Ihr dualer Graph Γ hat als Ecken die Dreiecke von K, Kanten von Γ sind benachbarte Dreiecke in K mit gemeinsamer Kante. Nach K3B ist der Graph Γ zusammenhängend. Wir können also einen Spannbaum $T \subset \Gamma$ wählen (I3J). Wir verkleben nun die Dreiecke von K entlang der Kanten in T zu einem Polyeder D. Es gilt $D \cong \mathbb{D}^2$: Dies beweisen wir wie die simpliziale Fassung des Satzes von Schoenflies durch sukzessives Einklappen (J2I). Die verbleibenden Kanten in $\Gamma \smallsetminus T$ codieren die Verklebung auf dem Rand von D, sodass $D/\langle w \rangle \xrightarrow{\sim} |K| \xrightarrow{\sim} F$.

(2) Man kann geeignete Homöomorphismen anschaulich skizzieren bzw. explizit konstruieren; das ist instruktiv. Die vier einfachsten Beispiele sind Gegenstand der vorigen Übung K3D. Bequemer: Jede unserer Modellflächen $F_g^\pm$ lässt sich dank (1) als Polygonmodell darstellen und dank Satz K3F in die genannte Normalform bringen.

(3) „⇒“: Ist $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ eine geschlossene Fläche, so muss nach Satz K3B jeder Buchstabe genau zweimal vorkommen. „⇐“: Jedes Flächenwort w überführen wir dank Satz K3F in Normalform (2), und diese ist leicht als Fläche erkennbar, genauer: $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle \cong F_g^\pm$.

(4) Tritt im Flächenwort w ein Buchstabe zweimal mit gleichen Exponenten auf, so lässt sich ein Möbius–Band in die Fläche $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ einbetten, diese ist somit nicht-orientierbar. Andernfalls überführen wir w dank K3F in Normalform (2), und F_g^+ ist orientierbar. □

Dank Satz K3E können wir jede triangulierte, zusammenhängende, geschlossene Fläche F darstellen als $F \cong \mathbb{D}^2/\langle w \rangle$. Wir wollen das Flächenwort w soweit möglich vereinfachen.

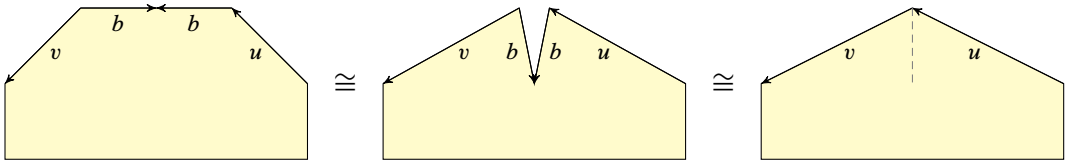


ABBILDUNG K:28. Einklappen inverser Nachbarn bb^{-1}

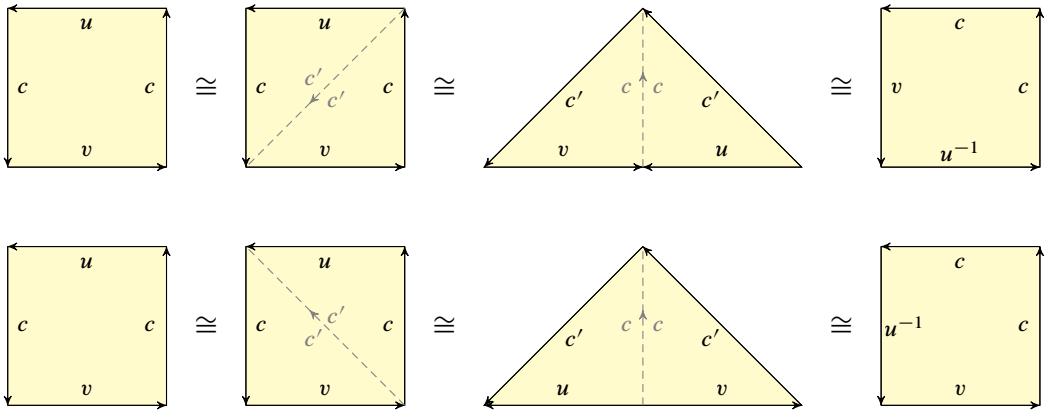


ABBILDUNG K:29. Zusammenfassen einer Kreuzhaube cc

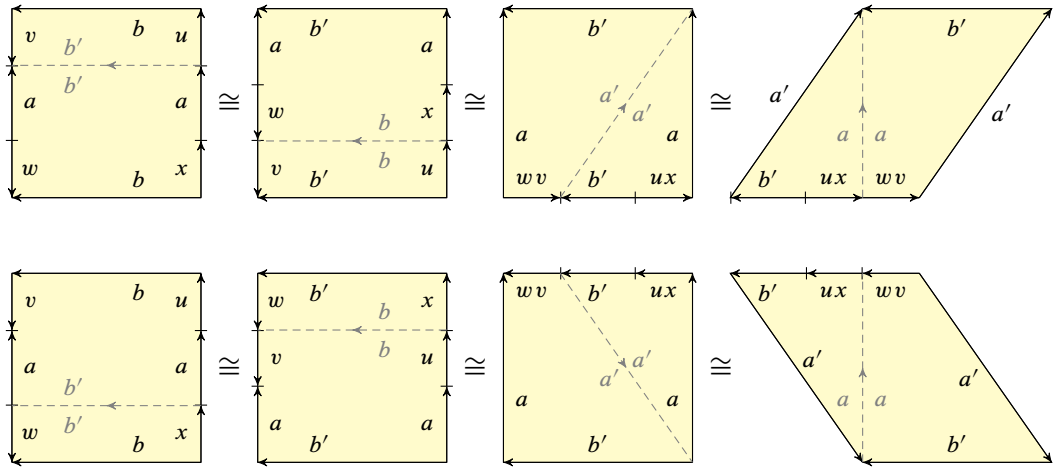


ABBILDUNG K:30. Zusammenfassen eines Henkels $aba^{-1}b^{-1}$

Auf diese Weise können wir mit Flächenwörtern tatsächlich *rechnen*. Dieser Flächenkalkül ist sehr einfach, konzise und effizient. Wir vereinbaren die übliche Inversionsregel $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$. Das Inverse des Wortes $w = w_1 w_2 \cdots w_\ell$ ist $w^{-1} = w_\ell^{-1} \cdots w_2^{-1} w_1^{-1}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K3e. Reduktion auf Normalform. Wir betrachten Flächenwörter, das heißt, jeder Buchstabe tritt genau zweimal auf, mit gleichen oder verschiedenen Exponenten.

Satz K3F. *Folgende Umformungen von Flächenwörtern liefern homöomorphe Flächen:*

(0) $uvw \equiv vwu$	*(zyklische Umordnung)*
(1) $ua^\varepsilon va^\delta w \equiv ub^\varepsilon vb^\delta w \equiv ub^{-\varepsilon} vb^{-\delta} w$	*(Austauschen freier Buchstaben)*
(2) $ubb^{-1}v \equiv uv$	*(Einklappen inverser Nachbarn)*
(3) $cucv \equiv u^{-1}ccv$	*(Gruppieren einer Kreuzhaube)*
(4) $uvccw \equiv uccvw$	*(Verschieben einer Kreuzhaube)*
(5) $aubva^{-1}wb^{-1}x \equiv aba^{-1}b^{-1}xwvu$	*(Gruppieren eines Henkels)*
(6) $uvaba^{-1}b^{-1}w \equiv uaba^{-1}b^{-1}vw$	*(Verschieben eines Henkels)*
(7) $uaba^{-1}b^{-1}ccv \equiv uaabbccv$	*(Kreuzhaube transformiert Henkel)*

Hierbei sind $a,b,c,\ldots \in A$ Buchstaben, $u,v,w,x,\ldots \in A^*$ Teilwörter und $w \mapsto w^{-1}$ die Inversion, wobei $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$. In (1) dürfen a,b sonst nirgends vorkommen.

Damit können wir jedes Flächenwort überführen in eine der folgenden Normalformen, und somit jede zusammenhängende geschlossene Fläche in genau eine der Modellflächen:

$$\mathbb{D}^2/\langle\, a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}\,\rangle \cong F_g^+ \quad \textit{oder} \quad \mathbb{D}^2/\langle\, c_0c_0\cdots c_gc_g\,\rangle \cong F_g^-.$$

BEWEIS. Aussagen (0) und (1) sind klar nach Konstruktion von $\mathbb{D}^2/\langle\, w\,\rangle$. Aussage (2) sieht man wie in Abbildung K:28. (Hierzu kann man explizite Homöomorphismen angeben.)

(3) Eine *Kreuzhaube* ist ein Paar der Form cc. Die so entstehende Fläche enthält ein Möbius–Band und ist somit wie oben gesehen nicht orientierbar. Jede Kreuzhaube kann wie in (3) gruppiert werden, durch Schneiden und Kleben wie in Abbildung K:29.

(4) Jede Kreuzhaube können wir innerhalb des Flächenwortes beliebig verschieben: Dies zeigen die beiden rechten Wörter in Abbildung K:29.

(5) Ein *Henkel* ist ein verschränktes Paar der Form $aba^{-1}b^{-1}$. Dies entspricht dem Ankleben eine Torus durch verbundene Summe, daher der Name. Jeder Henkel kann wie in (5) gruppiert werden, durch zweimaliges Schneiden und Kleben wie in Abbildung K:30.

(6) Auch jeden Henkel können wir innerhalb des Flächenwortes beliebig verschieben: Dies zeigen die beiden rechten Wörter in Abbildung K:30.

Wir können jede Kreuzhaube zusammenfassen (3) und an den Anfang des Wortes schieben (4), ebenso jeden Henkel (5,6). Wir erhalten ein Flächenwort der Form

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}\; c_1c_1\cdots c_\ell c_\ell\; u.$$

Im verbleibenden Teilwort u hat jedes Buchstabenpaar entgegengesetzte Exponenten (keine Kreuzhauben) und je zwei Paare sind unverschränkt (keine Henkel). Ist das Wort u nicht leer, so gibt es ein innerstes Paar der Form $u = \cdots xx^{-1}\cdots$; dieses können wir löschen (2). So fortfahrend können wir u schließlich vollständig löschen.

(7) Eine Kreuzhaube und einen Henkel verwandelt (3) in drei Kreuzhauben gemäß

$$aba^{-1}b^{-1}cc \;\equiv\; aba^{-1}cbc \;\equiv\; abbc^{-1}ac \;\equiv\; aacb^{-1}b^{-1}c \;\equiv\; aabbcc.$$

(Als Film: *Kreuzhaube fressen Henkel auf*, von Rainer Werner FASSBINDER, 1974).

Wir erreichen so eine der obigen Normalformen. Verschiedene Normalformen liefern nicht-homöomorphe Flächen dank Euler–Charakteristik und Orientierbarkeit. □

☞ **Bemerkung.** In Satz K3F habe ich die Umformungen möglichst übersichtlich und anwenderfreundlich formuliert, sodass man sie leicht behalten und gut damit arbeiten kann. Kreuzhauben und Henkel können wir beliebig verschieben. Beim Zusammenfassen einer Kreuzhaube wird das eingeklammerte Teilwort invertiert und neben die Kreuzhaube geschrieben (links oder rechts ist einerlei). Beim Zusammenfassen eines Henkels werden die eingeklammerten Teilwörter in umgekehrter Reihenfolge neben den Henkel geschrieben. ☜

Damit haben wir den Klassifikationssatz für triangulierte Flächen bewiesen. Jeder der obigen Beweisschritte durch Schneiden und Kleben lässt sich als affiner Homöomorphismus realisieren. (Übung: Wie genau funktioniert das?) Wir nutzen statt $\mathbb{D}^2$ systemastisch ein konvexes n–Eck mit $n \geq 3$, Sphäre bzw. projektive Ebene reduzieren wir dann auf $xx^{-1}yy^{-1}$ bzw. $ccxx^{-1}$. Damit haben wir noch mehr bewiesen als anfänglich behauptet:

✍ **Satz K3G** (simpliziale Klassifikation geschlossener Flächen)**.** *Sei K ein Simplizialkomplex und $F = |K|$ eine zusammenhängende geschlossene Fläche. Dann existiert ein stückweise affiner Homöomorphismus $(h,k) : F \cong F_g^\varepsilon$ zu genau einer unserer Modellflächen $F_g^\varepsilon = |L|$.* ✍

Somit gilt die Hauptvermutung K1K für geschlossene Flächen: Zwischen geeigneten Unterteilungen $K' \preccurlyeq K$ und $L' \preccurlyeq L$ existiert ein simplizialer Isomorphismus $K' \cong L'$.

Für die Euler–Charakteristik gilt $\chi(F_g^+) = 2-2g$ und $\chi(F_g^-) = 1-g$. Allein aus der Kenntnis dieser beiden Daten (χ,ε) zur geschlossenen Fläche F folgt bereits $F \cong F_g^\varepsilon$. □

Zusammenhängende, geschlossene, triangulierte Flächen F werden klassifiziert durch ihre Orientierbarkeit $\varepsilon(F)$ und ihre Euler–Charakteristik $\chi(F)$. Dies kann man als Algorithmus verstehen: Nicht nur wissen wir, dass F in der Liste unserer Modellflächen genau einmal vorkommt, die Invarianten (ε,χ) sagen uns genau, wo in unserer Liste wir sie finden.

☞ **Bemerkung.** Wir setzen in Satz K3G voraus, dass unsere Fläche F bereits trianguliert vorliegt. Wir verlangen also stärkere Voraussetzungen als unbedingt nötig, dafür erhalten wir eine stärkere Schlussfolgerung: Es existiert ein stückweise affiner Homöomorphismus. ☜

Satz K3G beweist somit die Hauptvermutung K1K für triangulierte geschlossene Flächen. Seien K und L Simplizialkomplexe mit homöomorphen Realisierungen $|K| \cong |L|$. Sind $|K|$ und $|L|$ geschlossene Flächen, dann existieren Unterteilungen $K' \preccurlyeq K$ und $L' \preccurlyeq L$ und ein Isomorphismus $K' \cong L'$ von Simplizialkomplexen.

Nach Satz K1L ist jede topologische Fläche triangulierbar. Die Triangulierbarkeit ist der technisch schwierigste Teil der Flächenklassifikation und wird hier nicht bewiesen. Wenn wir an dieses Ergebnis appellieren, so wird die Voraussetzung der Triangulierbarkeit überflüssig, und Satz K3G liefert die Klassifikation der topologischen Flächen:

✍ **Korollar K3H** (topologische Klassifikation geschlossener Flächen)**.** *Jede Fläche F ist triangulierbar dank K1L. Gemäß K3G ist somit jede zusammenhängende geschlossene Fläche F homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen F_g^ε. Demnach sind zwei zusammenhängende geschlossene Flächen F und F' genau dann homöomorph, wenn sie übereinstimmen in Orientierbarkeit $\varepsilon(F) = \varepsilon(F')$ und Euler–Charakteristik $\chi(F) = \chi(F')$.* □ ✍

Ebenso gilt die glatte Formulierung dieses Satzes: Jede unserer Modellflächen F_g^ε ist glättbar, das heißt, es existiert ein $\mathscr{C}^r$–Atlas $\mathscr{A}_g^\varepsilon$. Allgemeiner ist jede Fläche F glättbar. Ist F zudem zusammenhängend und geschlossen, so existiert nicht nur ein Homöomorphismus $F \cong F_g^\varepsilon$, sondern sogar ein $\mathscr{C}^r$–Diffeomorphismus $(F,\mathscr{A}) \cong (F_g^\varepsilon, \mathscr{A}_g^\varepsilon)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K3f. Klassifikation kompakter Flächen mit Rand. Wir haben zunächst geschlossene Flächen klassifiziert, nun kostet es kaum Mehraufwand, auch Flächen mit Rand zu klassifizieren. Wir gehen wie oben vor und beginnen mit konkreten Modellflächen:

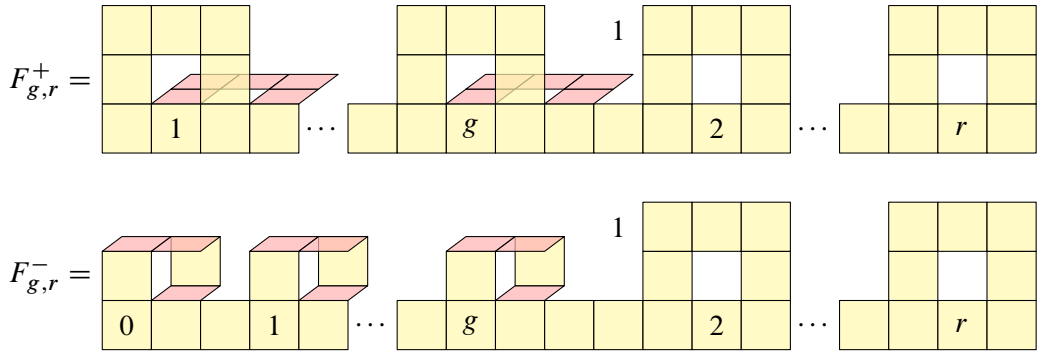


ABBILDUNG K:31. Flächenmodelle $F^{\pm}_{g,r} \subset \mathbb{R}^3$ mit $r \geq 1$ Randkomponenten

Satz K3I (simpliziale Klassifikation kompakter Flächen)**.** *Sei K ein Simplizialkomplex und $F = |K|$ eine zusammenhängende kompakte Fläche. Dann existiert ein stückweise affiner Homöomorphismus $(h,k) : F \cong F^{\varepsilon}_{g,r}$ zu genau einer unserer Modellflächen $F^{\varepsilon}_{g,r}$.*

Für alle $g,r \in \mathbb{N}$ gilt $\chi(F^+_{g,r}) = 2-2g-r$ und $\chi(F^-_{g,r}) = 1-g-r$. Allein aus den drei Daten (χ,r,ε), oder äquivalent hierzu (g,r,ε), folgt bereits die Homöomorphie $F \cong F^{\varepsilon}_{g,r}$.

BEWEIS. Wir übertragen den Kalkül von geschlossenen auf berandete Flächen (K3K).

TRICKREICHE ABKÜRZUNG: Wir nutzen den Klassifikationssatz K3G für geschlossene Flächen. Jede Randkomponente $C \subset \partial K$ verkleben wir mit einer Kreisscheibe. Hierzu fügen wir einen neuen Eckpunkt v hinzu sowie den Kegel über C mit Spitze v wie in §I3g. Wir gewinnen so eine geschlossene simpliziale Fläche K^* mit Euler–Charakteristik $\chi(K^*) = \chi(K)+r$. Die Orientierbarkeit von K ändert sich hierdurch nicht.

Umgekehrt können wir aus der geschlossenen Fläche $|K^*|$ das Innere disjunkter Dreiecke $\Delta_1,\dots,\Delta_r \in K^*$ entfernen und erhalten $|K| \cong |K^*| \smallsetminus U$ mit $U = \operatorname{Int}\Delta_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Int}\Delta_r$. Hierzu können wir die Dreiecke willkürlich wählen; da wir sie in $|K^*|$ beliebig verschieben können (K3B), ist diese Operation wohldefiniert bis auf stückweise affine Homöomorphie.

Aus Satz K3G wissen wir $|K^*| \cong F^{\varepsilon}_g$. Hieraus folgt $|K| \cong F^{\varepsilon}_{g,r}$. □

Korollar K3J (topologische Klassifikation kompakter Flächen)**.** *Jede Fläche F ist triangulierbar dank K1L. Gemäß K3I ist somit jede zusammenhängende kompakte Fläche F homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen $F^{\varepsilon}_{g,r}$. Demnach sind zwei zusammenhängende kompakte Flächen F und F' genau dann homöomorph, wenn sie übereinstimmen in Orientierbarkeit $\varepsilon(F) = \varepsilon(F')$ und Euler–Charakteristik $\chi(F) = \chi(F')$ und Anzahl $|\pi_0(\partial F)| = |\pi_0(\partial F')|$ der Randkomponenten.*

BEWEIS. Aus dem vorausgesetzten Homöomorphismus $F \cong F'$ folgt $\varepsilon(F) = \varepsilon(F')$ dank topologischer Invarianz der Orientierbarkeit, $\chi(F) = \chi(F')$ dank topologischer Invarianz der Euler–Charakteristik, sowie $|\pi_0(\partial F)| = |\pi_0(\partial F')|$ dank topologischer Invarianz des Randes. Gelten umgekehrt diese Gleichungen, so wählen wir nach K1L Triangulierungen für F und F' und wenden K3I an: Es existieren Homöomorphismen $F \cong F^{\varepsilon}_{g,r} \cong F'$. □

§K3g. Der Flächenkalkül für berandete Flächen. Unser Kalkül für geschlossene Flächen ist sehr elegant und ebenso lehr- wie erfolgreich. Wir erhalten so nicht nur den Klassifikationssatz für geschlossene Flächen, sondern zudem einen effizienten Algorithmus zum Rechnen mit Flächenwörtern. Als Übung zur Wiederholung und Vertiefung empfehle ich die Übertragung dieses Kalküls auf berandete Flächen:

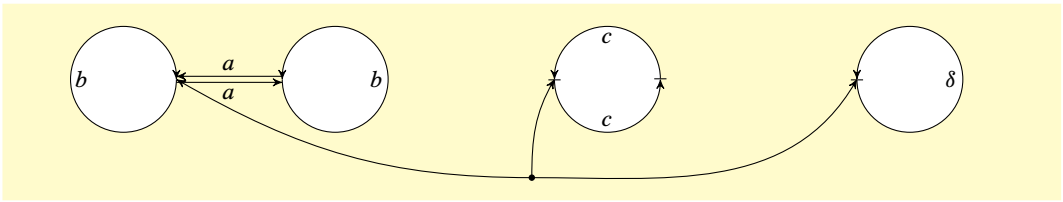
Übung K3K. Folgen Sie dem Vorbild geschlossener Flächen und entwickeln Sie den Flächenkalkül allgemein für kompakte Flächen mit und ohne Rand.

Anleitung: Ein Wort w nennen wir ein *(allgemeines) Flächenwort*, wenn jeder Buchstabe in w höchstens zweimal auftritt. Kommt jeder Buchstabe genau zweimal vor, so nennen wir das Flächenwort w *geschlossen*. Jeder doppelte Buchstabe codiert eine innere Kante; diese bezeichnen wir mit lateinischen Buchstaben $a, b, c, \ldots$. Jeder einzelne Buchstabe codiert eine Randkante; diese bezeichnen wir mit griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

(1) Für unsere Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ finden wir als Standarddarstellung (Normalform)

$$F^{+}_{g,r} \cong \mathbb{D}^2/\langle\, a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}\ d_1 \delta_1 d_1^{-1} \cdots d_r \delta_r d_r^{-1} \,\rangle,$$
$$F^{-}_{g,r} \cong \mathbb{D}^2/\langle\, c_0 c_0 \cdots c_g c_g\ d_1 \delta_1 d_1^{-1} \cdots d_r \delta_r d_r^{-1} \,\rangle.$$

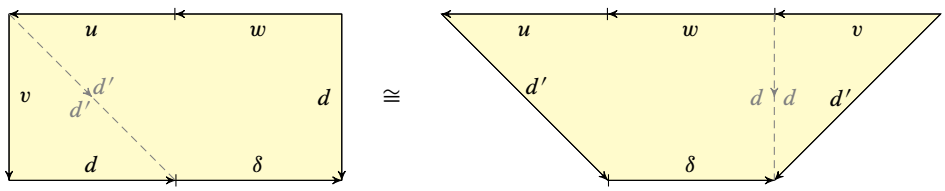
Wir beginnen mit einer Sphäre $\mathbb{S}^2$ und wählen darauf einen Fußpunkt. Wir fügen einen Henkel hinzu durch $haba^{-1}b^{-1}h^{-1}$ und eine Kreuzhaube durch $kcck^{-1}$. Die Hilfskanten h und k entsprechen dem Weg vom und zum Fußpunkt. Wir fügen sie nur zur Bequemlichkeit ein; mit den Relationen aus K3F können sie gelöscht werden. Eine Randkomponente entspricht $d\delta d^{-1}$; hier ist der Hilfsweg d wesentlich und kann i.A. nicht gelöscht werden.



(2) Die Rechenregeln aus Satz K3F gelten weiterhin. Zudem haben wir:

(8) $u\alpha\beta v \equiv u\alpha v$ (Zusammenfassen benachbarter Randkanten)
(9) $uvd\delta d^{-1}w \equiv ud\delta d^{-1}vw$ (freies Verschieben einer Randkomponente)

Weiterhin bezeichnen wir mit $u, v, w, \ldots \in A^*$ beliebige Teilwörter.



(3) Jede kompakte zusammenhängende Fläche können wir als Flächenwort darstellen.

(4) Mit den Rechenregeln (0–9) können wir jedes Flächenwort in Normalform bringen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K3h. Amphichiralität. Jede eindimensionale Mannigfaltigkeit ist orientierbar: Dies gilt offensichtlich für $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1$, $[0,1]$, $[0,1[$, und dank Klassifikationssatz K1N für jede Kurve.

Bemerkung. Ohne die Hausdorff–Eigenschaft gilt diese einfache Klassifikation nicht mehr, und tatsächlich gibt es dann nicht-orientierbare Beispiele, wie jeder Eisenbahner weiß: Man nehme $\mathbb{S}^1$ und identifiziere $e^{it} \sim e^{-it}$ für $\pi/4 < t < 3\pi/4$. Der Quotientenraum $\mathbb{S}^1/_\sim$ entspricht einer Strecke mit zwei Wendeschleifen: ⟜—⟝. Dieser Raum erlaubt einen lokal 1–euklidischen Atlas (aus zwei Karten), ist aber nicht orientierbar.

Hingegen gibt es in jeder Dimension $n \geq 2$ neben orientierbaren auch nicht-orientierbare n–Mannigfaltigkeiten. Speziell in Dimension 2 gilt jedoch noch folgende Besonderheit:

Korollar K3L (orientierungsumkehrende Homöomorphismen)**.** *Für jede orientierbare kompakte Fläche F existiert ein orientierungsumkehrender Homöomorphismus $h : F \xrightarrow{\sim} F$.*

BEWEIS. Für unsere Modellfläche $F_g^+ \subset \mathbb{R}^3$ wie in K:20 leistet die Punktspiegelung das Gewünschte (sogar ohne Fixpunkte), ebenso die Spiegelung an der x–y–Ebene (mit Fixpunkten). Für die Flächen $F_{g,r}^+ \subset \mathbb{R}^3$ mit $r \geq 1$ Randkomponenten wie in K:31 gelingt dies, indem wir $F_{g,r}^+$ symmetrisch zu einer Spiegelebene anordnen. (Wie?) Dank Klassifikation K3I gilt dies dann für jede kompakte Fläche F. (Sie ist *gleichhändig*, gr. *amphichiral*.) □

manche meinen // lechts und rinks
kann man nicht velwechsern
werch ein illtum
Ernst JANDL

Bemerkung. In Dimension $n \geq 3$ existieren orientierbare Mannigfaltigkeiten, die keinen orientierungsumkehrenden Homöomorphismus erlauben: Sie sind *chiral* wie linke und rechte Hand. Berühmtestes Beispiel ist die komplex-projektive Ebene $\mathbb{CP}^2$: Sie ist kanonisch orientiert (K2F), gespiegelt ist $\overline{\mathbb{CP}^2}$ dieselbe Mannigfaltigkeit, aber umgekehrt orientiert. Bemerkenswerterweise ist jeder Homöomorphismus $\mathbb{CP}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{CP}^2$ orientierungserhaltend.

Erläuterung. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ erlaubt genau zwei Orientierungen. Die kanonische Wahl ist die von der kanonischen Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ definierte Orientierung. Diese Wahl ist kanonisch, aber nicht natürlich in $\mathtt{FinVec}_\mathbb{R}$: Es gibt $\mathbb{R}$–Isomorphismen $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, die die Orientierung umkehren. Ebenso trägt jeder $\mathbb{R}$–Vektorraum V endlicher Dimension $n \geq 1$ zwei Orientierungen. Jede Wahl einer Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von V über $\mathbb{R}$ definiert eine Orientierung; die entgegengesetzte Orientierung erhält man durch die Basis $-v_1, v_2, \ldots, v_n$. Die Spiegelung ist ein orientierungsumkehrender $\mathbb{R}$–Isomorphismus.

Die komplexen Zahlen sind eine Körpererweiterung $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ der Dimension $\dim_\mathbb{R} \mathbb{C} = 2$. Die Orientierung von $\mathbb{C}$ entspricht der Wahl eines der beiden Elemente $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$. Bei der Konstruktion von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ wie in B3A wird diese Wahl durch $\mathrm{i} = (0,1)$ getroffen. Die entgegengesetzte Wahl führt zur entgegengesetzten Orientierung, und die Konjugation $\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist ein orientierungsumkehrender Körperautomorphismus über $\mathbb{R}$. Die Orientierung auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist kanonisch, aber nicht natürlich.

Haben wir $\mathbb{C}$ durch die Wahl von i orientiert, so setzt sich dies fort zu einer Orientierung für jeden endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraum V: Wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V über $\mathbb{C}$ und erhalten eine Basis $v_1, \mathrm{i}v_1, \ldots, v_n, \mathrm{i}v_n$ von V über $\mathbb{R}$. Diese definiert eine Orientierung, und zwar unabhängig von der gewählten Basis: Jede andere Basis $v_1', \ldots, v_n'$ von V über $\mathbb{C}$ führt zur selben Orientierung. Somit ist in $\mathtt{FinVec}_\mathbb{C}$ die so konstruierte Orientierung natürlich: Sie bleibt unter $\mathbb{C}$–Isomorphismen $U \xrightarrow{\sim} V$ erhalten. Die so konstruierte Orientierung auf jedem $\mathbb{C}$–Vektorraum V ist in gerader Dimension $\dim_\mathbb{C} V = 2m$ sogar unabhängig von der Orientierung von $\mathbb{C}$: Wenn wir von i zu $-\mathrm{i}$ übergehen, ändert sich in der obigen Konstruktion die Orientierung nicht. Dieses Phänomen, wenn auch noch raffinierter, liegt der oben genannten Tatsache $\mathbb{CP}^2 \ncong \overline{\mathbb{CP}^2}$ zugrunde.

Übung K3M. Entfernen Sie aus $\mathbb{RP}^2$ eine Kreisscheibe; schreiben Sie so das Möbius–Band als Flächenwort aus drei Buchstaben. Welche Fläche F entsteht, wenn Sie zwei Möbius–Bänder an ihrem Rand verkleben? (1) Formulieren Sie F als Flächenwort und bringen Sie es in Normalform. (2) Berechnen Sie χ, r, ε und nutzen Sie den Flächenklassifikationssatz.

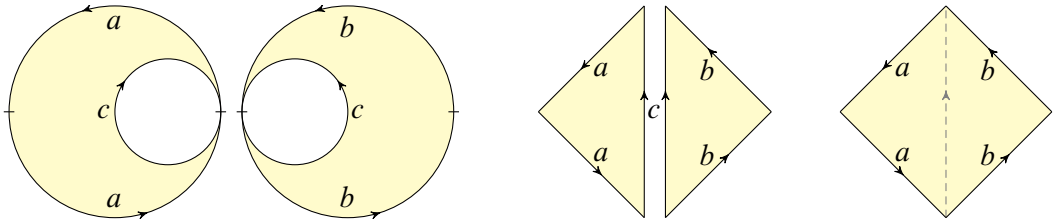


ABBILDUNG K:32. Projektive Ebene, mit Loch, verklebt entlang c

✻ **K3M.** (1) Abbildung K:32 zeigt die Flächenwörter: Wir erhalten die Kleinsche Flasche! Abbildung A:29 zeigt eine dreidimensionale Illustration. (2) Die Fläche F ist nicht-orientierbar ($\varepsilon = -$), denn sie enthält ein Möbius–Band, und geschlossen ($r = 0$), denn beide Ränder wurden verklebt. Aus der Euler–Charakteristik $\chi(F) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2) = 0 + 0 - 0 = 0$ folgt $F \cong F_1^-$ dank Flächenklassifikationssatz K3I.

§K3i. Satz von Dyck.

Walther DYCK (1856–1934) löste 1888 folgendes Problem:

Übung K3N. Entfernen Sie aus einem Torus eine Kreisscheibe und kleben Sie am so geschaffenen Rand ein Möbius–Band ein. Welche Fläche F entsteht? Formulieren Sie alle Konstruktionsschritte und schließlich F als Flächenwort und bringen Sie es in Normalform. *Alternativ:* Berechnen Sie χ, r, ε und nutzen Sie den Flächenklassifikationssatz.

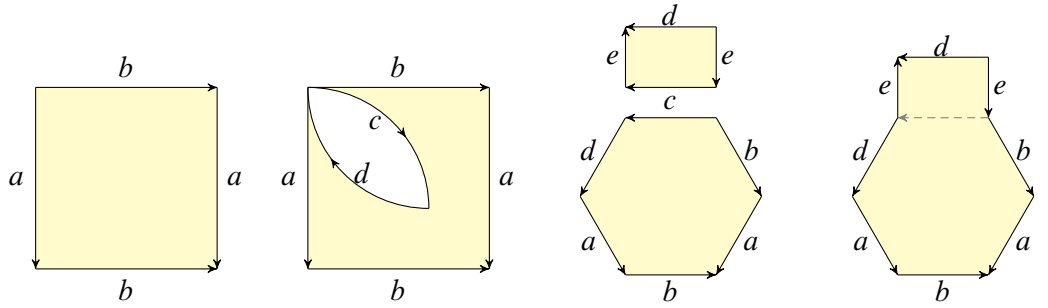


ABBILDUNG K:33. Torus, mit Loch, mit Möbius–Band, verklebt entlang c

✻ **K3N.** Den Torus $T \cong \mathbb{S}^1 \times S^1$ stellen wir durch das Flächenwort aba^-b^- dar. Den Torus T^* mit Loch realisieren wir wie in Abbildung K:33 durch das Flächenwort aba^-b^-cd; die Kanten cd bilden den Rand. Ein Flächenwort für das Möbius–Band M ist ced^-e, ebenfalls mit Rand cd. Beide verkleben wir nun entlang der Kante c und erhalten das Flächenwort $aba^-b^-e^-de^-d$ Wir gruppieren die Kreuzhaube ee zum Flächenwort $aba^-b^-eed^-d$, löschen d^-d und erhalten aba^-b^-ee. Kreuzhaube und Henkel transformiren wir in drei Kreuzhauben: $aabbee$ (K3F). Es handelt sich also um die *Dycksche Fläche* F_2^-. *Bemerkung:* Das Loch haben wir hier an den Rand der Scheibe (hier Quadrat) geschoben. Wr können das Loch auch in die Mitte des Quadrats setzen, benötigen dann aber eine Kante mehr. Das Flächenwort des Torus mit Loch wäre dann $aba^-b^-gcdg^-$.

Alternative: Die Fläche F ist nicht-orientierbar ($\varepsilon = -$), denn sie enthält ein Möbius–Band, und geschlossen ($r = 0$), denn die Ränder von T^* und M wurden miteinander verklebt. Aus der Euler–Charakteristik $\chi(F) = \chi(T^*) + \chi(M) - \chi(T^* \cap M) = -1 + 0 - 0 = -1$ folgt $F \cong F_2^-$ dank Flächenklassifikationssatz K3I.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K4. Verbundene Summe

§K4a. Verbundene Summe zusammenhängender Flächen. Die verbundene Summe $F_1 \sharp F_2$ von zwei zusammenhängenden Flächen F_1 und F_2 sieht anschaulich so aus:

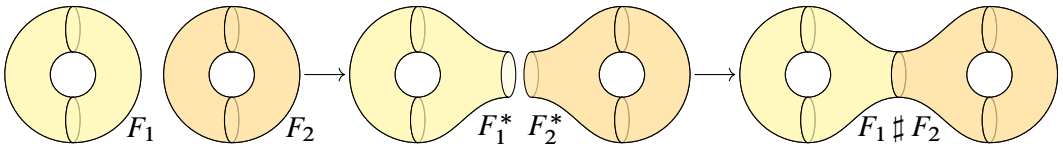


ABBILDUNG K:34. Verbundene Summe $F_1 \sharp F_2$ von zwei Flächen F_1 und F_2

Definition K4A. Gegeben sei eine Fläche $F = |K|$, trianguliert durch den Komplex K, und ein geordnetes Dreieck $D = (a,b,c)$ im Inneren der Fläche, also $\{a,b,c\} \in K_2$ und $\{a\},\{b\},\{c\} \notin \partial K$. Dann ist auch $F^* = F \smallsetminus \mathrm{Int}[D]$ eine zusammenhängende Fläche, trianguliert durch $K^* = K \smallsetminus \{\{a,b,c\}\}$, mit Rand $\partial K^* = \partial K \sqcup \langle \{a,b\},\{b,c\},\{c,a\} \rangle$.

Zu solcherart markierten triangulierten Flächen (K_1, D_1) und (K_2, D_2) ist

$$K = (K_1, D_1) \sharp (K_2, D_2) := K_1^* \sqcup K_2^* / (D_1 = D_2)$$

ihre *verbundene Summe*; identifiziert werden hierbei die Ecken $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

Übung K4B. Auch $F = |K|$ ist eine zusammenhängende kompakte Fläche, mit Euler–Charakteristik $\chi(K) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - 2$, Randkomponenten $r(K) = r(K_1) + r(K_2)$ und Orientierbarkeit $\varepsilon(K) = \min\{\varepsilon(K_1), \varepsilon(K_2)\}$. Folglich gelten folgende Verknüpfungsregeln:

(1) Aus $F_1 \cong F^+_{g,r}$ und $F_2 \cong F^+_{g',r'}$ folgt $F \cong F^+_{g+g',r+r'}$.
(2) Aus $F_1 \cong F^-_{g,r}$ und $F_2 \cong F^-_{g',r'}$ folgt $F \cong F^-_{1+g+g',r+r'}$.
(3) Aus $F_1 \cong F^+_{g,r}$ und $F_2 \cong F^-_{g',r'}$ folgt $F \cong F^-_{2g+g',r+r'}$.

Insbesondere ist die Homöomorphieklasse der Fläche $F = |(K_1, D_1) \sharp (K_2, D_2)|$ unabhängig von den Triangulierungen K_1 und K_2 sowie von der Wahl der Dreiecke $D_1 \subset K_1$ und $D_2 \subset K_2$. Wir dürfen daher $F \cong F_1 \sharp F_2$ schreiben. Oft schreibt man kurz $F = F_1 \sharp F_2$, obwohl die Gleichheit $[F] = [F_1] \sharp [F_2]$ eigentlich nur für die Homöomorphieklassen gilt.

Satz K4C. *Die Verknüpfung $\sharp : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F} : ([A],[B]) \mapsto [A \sharp B]$ ist wohldefiniert auf der Menge $\mathscr{F}$ aller Homöomorphieklassen kompakter zusammenhängender Flächen. Sie ist assoziativ und kommutativ, neutrales Element ist $[\mathbb{S}^2]$, die Homöomorphieklasse der Sphäre $\mathbb{S}^2 \cong F_0^+$. Somit ist $(\mathscr{F}, \sharp, [\mathbb{S}^2])$ ein kommutatives Monoid. Alle geschlossenen Flächen werden erzeugt vom Torus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$ und der reell-projektiven Ebene $P = \mathbb{RP}^2 \cong F_0^-$. Randkomponenten werden erzeugt durch die Kreisscheibe $D = \mathbb{D}^2$. Zusammengefasst:*

$$F^+_{g,r} \cong \mathbb{S}^2 \sharp T^{\sharp g} \sharp D^{\sharp r}, \qquad F^-_{g,r} \cong \mathbb{S}^2 \sharp P^{\sharp(g+1)} \sharp D^{\sharp r}, \qquad T \sharp P \cong P \sharp P \sharp P.$$

BEWEIS. Die Aussagen folgen aus der vorigen Übung. Die verbundene Summe $F \mapsto F \sharp T$ fügt einen Henkel an: zwei Kreisscheiben $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^0$ ausschneiden und Zylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$ ankleben. Hingegen fügt $F \mapsto F \sharp P$ eine Kreuzhaube an: eine Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ ausschneiden und Möbius–Band einkleben (K3N), oder den Rand $\cong \mathbb{S}^1$ identifizieren gemäß Punktspiegelung $x \sim -x$. Schließlich fügt $F \mapsto F \sharp D$ ein Loch ein. So lassen sich alle Flächen wie gezeigt erzeugen. Dabei gilt die Dycksche Relation $T \sharp P \cong P \sharp P \sharp P$ (K3N). □

§K4b. Verbundene Summe von Mannigfaltigkeiten. Die verbundene Summe lässt sich ebenso für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten in jeder Dimension $n \geq 2$ erklären. Dies sorgfältig auszuführen, ist eine lehrreiche Übung in technischer Virtuosität.

Sie $\mathscr{M}_n$ die Menge der glatten n–Mannigfaltigkeiten modulo Diffeomorphie. Unser Ziel ist es, die verbundene Summe zu erklären (Satz K4J) als wohldefinierte Verknüpfung

$$\sharp : \mathscr{M}_n \times \mathscr{M}_n \to \mathscr{M}_n.$$

Sie ist assoziativ und kommutativ, neutrales Element ist die Diffeomorphieklasse der Sphäre $\mathbb{S}^n$ mit stereographischem Atlas. Somit ist $(\mathscr{M}_n, \sharp, [\mathbb{S}^n])$ ein kommutatives Monoid.

Die folgenden Übungen erklären die verbundene Summe. Die Aufgaben sind elementar lösbar durch explizite Konstruktionen; lediglich der Isotopie-Satz K4H ist schwieriger. Er ist technisch notwendig und wird hier dankend genutzt, aber nicht bewiesen.

Definition K4D (verbundene Summe)**.** Vorgelegt seien zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 derselben Dimension n zusammen mit Einbettungen $g_1 : \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1$ und $g_2 : \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2$. Wir verkleben $M = (M_1, g_1) \sharp (M_2, g_2) := (M_1 \smallsetminus g_1(0)) \sqcup (M_2 \smallsetminus g_2(0))/\!\sim$ mittels $g_1(x) \sim g_2(x/|x^2|)$, entsprechend einer Spiegelung an der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$.

Genauer definieren wir $(M, \mathscr{A}) = (M_1, \mathscr{A}_1, g_1) \sharp (M_2, \mathscr{A}_2, g_2)$: Aus dem vorgegebenen Atlas $\mathscr{A}_i$ für M_i erhalten wir den Atlas $\mathscr{A}_i^*$ für $M_i^* = M_i \smallsetminus \{g_i(0)\}$. Die Verklebung wird parametrisiert durch $g_i^* : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \hookrightarrow M_i^*$. Nach der Verklebung gilt $g_1^*(x) = g_2^*(x/|x|^2)$ mit obiger Spiegelung, und wir erhalten für M den Atlas $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1^* \cup \mathscr{A}_2^* \cup \{g_1^*\}$.

Übung K4E. (1) Der so konstruierte Raum M ist eine topologische Mannigfaltigkeit. Sind zudem Atlanten $\mathscr{A}_1$ für M_1 und $\mathscr{A}_2$ für M_2 vorgegeben, so ist $\mathscr{A}$ ein Atlas für M.

(2) Sind die Eingangsdaten $(M_1, \mathscr{A}_1, g_1)$ und $(M_2, \mathscr{A}_2, g_2)$ aus Mannigfaltigkeit, Atlas und Einbettung glatt / analytisch / algebraisch / rational, so auch das Ergebnis $(M, \mathscr{A})$.

(3) Seien $(M_1, \mathscr{A}_1)$ und $(M_2, \mathscr{A}_2)$ orientiert, $g_1 : \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1$ sei orientierungserhaltend und $g_2 : \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2$ orientierungsumkehrend. Dann ist auch $(M, \mathscr{A})$ orientiert.

(4) Ist einer der beiden Summanden M_1 oder M_2 nicht orientierbar, so auch M.

(5) Sind M_1 und M_2 beide zusammenhängend / kompakt / geschlossen, so auch M.

(6) *Warnung:* Wählen wir statt $g_1(x) \sim g_2(x/|x^2|)$ wie oben die ungespiegelte Verklebung $g_1(x) \sim g_2(x)$, so ist das Ergebnis im Allgemeinen nicht-hausdorffsch! (E2E)

Bei der Konstruktion der verbundenen Summe $M = (M_1, g_1) \sharp (M_2, g_2)$ nutzen wir die vorgegebenen Parameterisierungen $g_i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_i$ zur Verklebung. Diese können wir in der Mannigfaltigkeit M_i verschieben und erhalten dasselbe Ergebnis bis auf Homöomorphie.

Definition K4F. Eine *Isotopie* $h : [0,1] \times X \to M$ ist eine Homotopie, bei der zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,1]$ die Abbildung $h_t : X \hookrightarrow M : x \mapsto h(t,x)$ eine Einbettung ist.

Technisch gesehen ist das Zeitintervall $\mathbb{R}$ statt $[0,1]$ vorteilhaft, wir betrachten daher die Ausdehnung $h : \mathbb{R} \times X \to M$, wobei $h_t = h_0$ für alle $t \leq 0$ und $h_t = h_1$ für alle $t \geq 1$.

Eine solche Isotopie $h : \mathbb{R} \times X \to M$ heißt *glatte Isotopie*, wenn die Abbildung h glatt ist und $h_t : X \hookrightarrow M$ eine glatte Einbettung zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$.

Zwei (glatte) Einbettungen $g, \tilde{g} : X \to M$ heißen *(glatt) isotop*, wenn es eine (glatte) Isotopie $h : \mathbb{R} \times X \to M$ von $h_0 = g$ nach $h_1 = \tilde{g}$ gibt, geschrieben $h : g \simeq \tilde{g}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung K4G. (1) Wie bereits Homotopie ist auch (glatte) Isotopie eine Äquivalenzrelation.

(2) Konstruieren Sie eine Isotopie von $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ zu $g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, wobei der Ursprung 0 fix bleibt. Gelingt dies auch glatt? sogar analytisch?

(3) Je zwei orientierungserhaltende Einbettungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind isotop.

Satz K4H. *Sei M eine glatte zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Genau dann sind zwei glatte Einbettungen $g, \tilde{g} : \mathbb{R}^n \hookrightarrow M$ glatt isotop, wenn sie dasselbe Orientierungsverhalten haben. (Letzteres bedeutet: Entweder M ist nicht orientierbar, oder aber $g, \tilde{g}$ sind beide orienierungserhaltend oder beide orientierungsumkehrend.)* □

Anschaulich ist dieser Satz naheliegend und plausibel, der Beweis ist ein Paradebeispiel der Differentialtopologie; siehe Bröcker, Jänich: *Einführung in die Differentialtopologie*.

Übung K4I. (1) Jede Isotopie $h : g_1 \simeq \tilde{g}_1$ definiert einen Homöomorphismus $H : M \cong \tilde{M}$ der verbundenen Summen $M = (M_1, g_1) \sharp (M_2, g_2)$ und $\tilde{M} = (M_1, \tilde{g}_1) \sharp (M_2, g_2)$.

(2) Ist h eine glatte Isotopie, so ist H ein Diffeomorphismus.

Somit ist die verbundene Summe wohldefiniert bis auf Diffeomorphie:

Gegeben seien zusammenhängende n–Mannigfaltigkeiten $(M_1, \mathscr{A}_1)$ und $(M_2, \mathscr{A}_2)$, jeweils mit einem glattem Atlas $\mathscr{A}_i$, und dieser sei orientiert falls M_i orientierbar ist. Sei $\mathscr{M}_n$ die Menge aller Diffeomorphisklassen solcher n–Mannigfaltigkeiten.

Wir wählen zwei glatte Einbettungen, $g_1 : \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1$ orientierungserhaltend und $g_2 : \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2$ orientierungsumkehrend (falls orientiert). Wir verkleben

$$(M, \mathscr{A}) := (M_1, \mathscr{A}_1, g_1) \sharp (M_2, \mathscr{A}_2, g_2)$$

wie oben erklärt. Bis auf Diffeomorphie ist das Ergebnis unabhängig von den gewählten Einbettungen g_1 und g_2. Wir erhalten so die wohldefinierte Verknüpfung

$$\sharp : \mathscr{M}_n \times \mathscr{M}_n \to \mathscr{M}_n : ([M_1, \mathscr{A}_1], [M_2, \mathscr{A}_2]) \mapsto [(M_1, \mathscr{A}_1) \sharp (M_2, \mathscr{A}_2)]).$$

Satz K4J. *Die Verknüpfung $\sharp : \mathscr{M}_n \times \mathscr{M}_n \to \mathscr{M}_n$ ist wohldefiniert. Sie ist assoziativ und kommutativ, neutrales Element ist die Diffeomorphieklasse der Sphäre $\mathbb{S}^n$ mit stereographischem Atlas. Somit ist $(\mathscr{M}_n, \sharp, [\mathbb{S}^n])$ ein kommutatives Monoid.*

Im Spezialfall $n = 2$ haben wir zusammenhängende kompakte Flächen untersucht und hierzu Satz K4C formulieren können. Da wir kompakte Flächen klassifizieren können, können wir das Monoid $(\mathscr{F}, \sharp, [\mathbb{S}^2])$ explizit bestimmen. In höherer Dimension ist dies im Allgemeinen unmöglich. In Dimension $n = 3$ gelingt immerhin noch eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren. In höherer Dimension kann man geeignete Quotienten von $\mathscr{M}_n$ betrachten und explizit bestimmen, also Mannigfaltigkeiten zu gröberen Klassen zusammenfassen.

§K5. Nicht/Einbettungssätze

§K5a. Einbettungen im $\mathbb{R}^3$. Alle berandeten Flächen $F^{\pm}_{g,r}$ und alle orientierbaren geschlossenen Flächen F^+_g können wir uns gut vorstellen, denn sie lassen sich leicht als Teilräume im $\mathbb{R}^3$ realisieren und sind somit unserer Anschauung direkt zugänglich.

Die nicht-orientierbaren geschlossenen Flächen F^-_g hingegen sind weit weniger anschaulich und bereiten anfangs erfahrungsgemäß einiges Kopfzerbrechen. Das hat neben psychologischen Ursachen zugleich einen handfesten mathematischen Grund: Die nicht-orientierbaren Flächen F^-_g lassen sich nicht im vertrauten euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten!

Bemerkung. Jeder endliche Simplizialkomplex K der Dimension $m = \dim K$ lässt sich simplizial in den Raum $\mathbb{R}^{2m+1}$ einbetten (Whitney I2Q). Für jede kompakte Fläche F gilt somit $F \hookrightarrow \mathbb{R}^5$. Die Dimension 5 ist jedoch bei Weitem nicht optimal!

Wir suchen zu jeder kompakten Fläche F die minimale Dimension $d = d(F)$ möglicher Einbettungen $F \hookrightarrow \mathbb{R}^d$. Bevor Sie weiterlesen, versuchen Sie dies selbst zu beantworten. Wir können unsere Ahnung nun präzisieren und beweisen:

Satz K5A. *Für alle $g \in \mathbb{N}$ gilt $F^+_g \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$, aber $F^+_g \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, und $F^-_g \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$, aber $F^-_g \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Im berandeten Fall, $r \geq 1$, gilt immer $F^{\varepsilon}_{g,r} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, aber $F^{\varepsilon}_{g,r} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ nur für $g = 0$ und $\varepsilon = +$.*

Der Beweis dieses Satzes wird in den folgenden Übungen ausgeführt. Versuchen Sie es zunächst selbst: Welche Aussagen sind leicht? Wir beginnen mit dem konstruktiven Teil:

Übung K5B. Konstruieren Sie für alle kompakten Flächen (möglichst explizite simpliziale) Einbettungen $F^+_{0,r} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ und $F^{\pm}_{g,r} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ sowie $F^+_g \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und $F^-_g \hookrightarrow \mathbb{R}^4$.

✻ **K5B.** Die Definition unserer Modellflächen als Teilräume liefert unmittelbar Einbettungen $F^+_{0,r} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ und $F^+_{g,r} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (K:1) sowie $F^+_g \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (K:2). Die nicht-orientierbaren Flächen $F^-_g = F^+_g/\{\pm\}$ hingegen sind zunächst nur als Quotientenraum gegeben. Wir konstruieren nun (simpliziale) Einbettungen $F^-_g \hookrightarrow \mathbb{R}^4$.

Wir beginnen mit einer (simplizialen) Einbettung $F = F^-_{g,1} \subset \mathbb{R}^3$ wie in K:1. Wie üblich betrachten wir $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ als Teilraum vermöge $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3, 0)$. Wir wählen einen Punkt $p \in \mathbb{R}^4 \smallsetminus \mathbb{R}^3$ und konstruieren den Kegel $F' := F \cup C(\partial F)$. Wir erhalten so die Fläche $F' \cong F^-_g$ eingebettet im Raum $\mathbb{R}^4$.

Der obstruktive Teil ist (wie so oft) etwas kniffliger: Wie kann man beweisen, dass eine Einbettung $F \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ in die Ebene unmöglich ist? Glücklicherweise kennen Sie erste Ergebnisse zur Topologie der Ebene und verfügen bereits über die nötigen Werkzeuge:

Übung K5C. Dank Jordanschem Trennungssatz gilt $F^{\varepsilon}_{g,r} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$ falls $g \geq 1$ oder $\varepsilon = -$.

✻ **K5C.** (1) Sei $F = F^{\varepsilon}_{g,r}$ mit $g \geq 1$ oder $\varepsilon = -$. Zur Vereinfachung liege $F = |K|$ bereits hinreichend fein trianguliert vor. Dann gibt es eine (simpliziale) Kurve $\mathbb{S}^1 \cong C \subset \operatorname{Int} F$ im Inneren, sodass das Komplement $F \smallsetminus C$ immer noch zusammenhängt: Für $r \geq 1$ und $\varepsilon = -$ sei C die Mittelachse eines verdrillten Bandes. Für $r \geq 1$ und $\varepsilon = +$ und $g \geq 1$ sei C die Mittelachse eines veschränkten Bandes Für $r = 0$ wählen wir $C \subset F^{\pm}_{g,1}$ wie zuvor und schließen $F^{\pm}_{g,1}$ zu $F = F^{\pm}_g$ durch Ankleben einer Kreisscheibe an den Rand.

Angenommen, es gäbe eine Einbettung $h : F \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Zur Vereinfachung nehmen wir auch h als simplizial an. Die Bildkurve $\mathbb{S}^1 \cong h(C) \subset \mathbb{R}^2$ zerlegt die Ebene gemäß $\mathbb{R}^2 \smallsetminus h(C) = A \sqcup B$ in zwei Komponenten (J2D). Die Abbildung h ist offen (J7K), trifft also um $h(C)$ beide Komponenten A und B. Somit ist $F \smallsetminus C = h^{-1}(A) \sqcup h^{-1}(B)$ eine nicht-triviale offene Zerlegung. Das widerspricht dem Zusammenhang von $F \smallsetminus C$.

Mit diesem Argument können wir leider nicht $\mathbb{S}^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$ zeigen, denn jede Kurve $C \subset \mathbb{S}^2$ zerlegt die Fläche $\mathbb{S}^2$ in zwei Komponenten. Glücklicherweise wissen wir bereits $\mathbb{S}^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$ dank Borsuk–Ulam J6C.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§K5b. Warum existiert keine Einbettung $F_g^- \hookrightarrow \mathbb{R}^3$?** Die nicht-orientierbaren Flächen F_g^- stellen unserer Anschauung vor Herausforderungen. Das Möbius–Band $F_{0,1}^-$ lässt sich noch gut als Modellfläche im $\mathbb{R}^3$ realisieren, doch schon die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 \cong F_0^-$ können wir nicht mehr so recht zeichnen. Gerade für solche Situationen haben wir uns gründlich vorbereitet: Wir haben alle nötigen topologischen Werkzeuge! Wir können lokal alles in Koordinaten ausdrücken und auch global einen guten Überblick gewinnen. ☜

Wir klären schließlich diese auffällige Schwierigkeit: Alle orientierbaren geschlossenen Flächen lassen sich in den $\mathbb{R}^3$ einbetten, kurz $F_g^+ \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, wie unsere Modellflächen zeigen (K:20). Auch alle berandeten Flächen lassen sich so einbetten, $F_{g,r}^{\pm} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ für $r \geq 1$ (K:31); dies gilt selbst für nicht-orientierbare Flächen wie etwa das Möbius–Band. Die einzige Ausnahme bilden die nicht-orientierbaren geschlossenen Flächen, $F_g^- \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Augenscheinlich ist im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ nicht genügend Platz, um eine nicht-orientierbare Fläche wie das Möbius–Band zu schließen. Das ist anschaulich plausibel, aber noch kein überzeugendes Argument. Genauer gilt folgendes:

☞ **Satz K5D** (Zerlegungssatz)**.** *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine zusammenhängende kompakte Fläche.* ☜

(1) Ist S berandet, $\partial S \neq \emptyset$, so ist das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus S$ zusammenhängend.

(2) Ist S geschlossen, $\partial S = \emptyset$, so zerfällt das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus S = A \sqcup B$ in zwei Gebiete, A unbeschränkt, B beschränkt, und für den Rand gilt $\delta A = \delta B = S$. Somit wird S orientiert durch die (von B nach A) nach außen weisende Normale.

Hieraus folgt die Unmöglichkeit einer Einbettung $F_g^- \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

BEWEIS. Wir kennen bereits den Beweis des Jordanschen Trennungssatzes J2D für polygonale Kurven $C \subset \mathbb{R}^2$. Alle Argumente übertragen sich (nahezu wörtlich!) eine Dimension höher zu einem Beweis des Trennungssatzes K5D für zusammenhängende geschlossene simpliziale Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$. Führen Sie dies als Übung aus! □

✻ **K5D.** Sei K ein endlicher Simplizialkomplex in $\mathbb{R}^3$ und $S = |K| \subset \mathbb{R}^3$ eine zusammenhängende Fläche. Wie in J2D existiert eine Tube $T \subset \mathbb{R}^3$, sodass (T, S) lokal aussieht wie $([-1,1] \times S, \{0\} \times S)$.

(0) Da die Fläche S zusammenhängend ist, hat das Komplement $T \setminus S \cong ([-1,1] \setminus \{0\}) \times S$ genau zwei Komponenten. Somit hat das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus S$ höchstens zwei Komponenten, denn die von der Inklusion $T \setminus S \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus S$ induzierte Abbildung $\pi_0(T \setminus S) \to \pi_0(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ ist surjektiv.

(1) Ist S berandet, so ist das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus S$ wegzusammenhängend, da wir um jede Randkante von S in $\mathbb{R}^3$ herumlaufen und so beide Komponenten von $T \setminus S$ verbinden können. (Machen Sie sich eine Skizze!)

Alternativ können wir S durch sukzessives Einklappen von Randdreiecken auf einen Graphen $\Gamma \subset S$ retrahieren. Das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \simeq \mathbb{R}^3 \setminus S$ ist wegzusammenhängend aus Dimensionsgründen (J2O).

(2) Ist die Fläche S hingegen geschlossen, so hat das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus S$ mindestens zwei Komponenten, dank (0) also genau zwei Komponenten. Wie in J2D definieren wir $\nu : \mathbb{R}^3 \setminus S \to \{0,1\}$: Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ wählen wir die Halbgerade $H_x = x - \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (1,0,0)$. Wir nennen x *generisch*, wenn H_x keine Kante oder Ecke von S trifft; in diesem Fall ist $\nu(x)$ die Anzahl der Schnittpunkte: $\nu(x) = |H_x \cap S| \bmod 2$. Das ist der typische Fall: Die Menge der generischen Punkte ist offen und dicht. Ist x nicht generisch, so haben alle generischen Punkte x' in einer kleinen Umgebung denselben Wert $\nu(x')$, und wir setzen $\nu(x) := \nu(x')$.

Die so konstruierte Abbildung $\nu : \mathbb{R}^3 \setminus S \to \{0,1\}$ ist lokal konstant und somit stetig. Zudem ist ν surjektiv, da auf beiden Seiten jedes 2–Simplex von S verschiedene Werte angenommen werden. Für $A = \nu^{-1}(\{0\})$ und $B = \nu^{-1}(\{1\})$ gilt dann $\mathbb{R}^3 \setminus S = A \sqcup B$ mit A, B offen und zusammenhängend, A unbeschränkt, B beschränkt, und $\delta A = \delta B = S$. Insbesondere ist S orientierbar durch die nach außen (von B nach A) weisende Normale.

Umgekehrt bedeutet das: Jede *nicht-orientierbare* geschlossene Fläche lässt sich nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten.

§K5c. Das Möbius–Band im Halbraum? Im Gegensatz zu den geschlossenen Flächen F_g^- können wir die berandeten Flächen $F_{g,r}^-$ mit $r \geq 1$ in den $\mathbb{R}^3$ einbetten. Insbesondere können wir das Möbius–Band $M = F_{0,1}^-$ in den Halbraum $H = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0}$ einbetten. Wir könnten uns dann zusätzlich wünschen, dass der Rand $\partial M \cong \mathbb{S}^1$ im Rand $\partial H = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ liegt. Das ist allerdings zuviel verlangt!

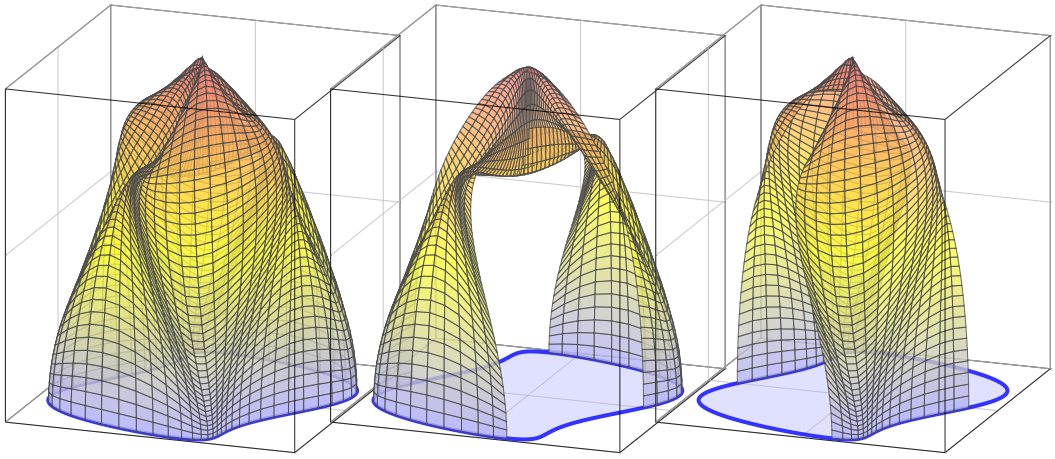


ABBILDUNG K:35. Bild eines Möbius–Bandes im Halbraum $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$: Dies gelingt niemals als Einbettung, es gibt zwangsläufig Doppelpunkte!

Übung K5E. Es existiert keine Einbettung $g : M \hookrightarrow H$ des Möbius–Bandes M in den Halbraum $H = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $g(\partial M) \subset \partial H = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und $g(\operatorname{Int} M) \subset \operatorname{Int} H = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0}$.

✻ **K5E.** Das Möbius–Band M schließen wir zu $\mathbb{RP}^1 = M \cup D$ mit $D \cong \mathbb{D}^2$ und $M \cap D = \delta M = \delta D \cong \mathbb{S}^1$. Zur Vereinfachung nehmen wir die Einbettung $g|_{\partial M} : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ als polygonal an. Nach dem Jordanschen Trennungssatz J2D lässt sie sich fortsetzen zu $D \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Verkleben schließt $g : M \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ zu einer Einbettung $\mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, im Widerspruch zu Satz K5D. Alternativ verdoppeln wir $(M, \partial H) \hookrightarrow (H, \partial H)$ zur Kleinschen Flasche $F_1^- \cong D(M) \hookrightarrow D(H) = \mathbb{R}^3$ (K1V), im Widerspruch zu Satz K5D.

Bemerkung. Solche Un/Möglichkeitssätze begegnen uns recht häufig in der (algebraischen) Topologie. Dahinter stehen meist algebraisch-topologische Invarianten und Hindernisse.

Ich erinnere an die Eingangsworte: *Topologie ist qualitative Geometrie.* Was aber nützt das? Auch theorieferne Anwender wollen wissen, wann eine Konstruktion un/möglich ist: Niemand sollte kostbare Lebenszeit verschwenden mit der jahrelangen Suche nach fiktiven Lösungen, die nachweislich nicht existieren. Lernen Sie derweil lieber Mathematik!

Wer eine Theorie-Aversion pflegt, betrachtet Un/Möglichkeitssätze meist lieblos oder gar verächtlich, gerne gepaart mit beeindruckend hohlen Sprüchen: „Machen, nicht zaudern!“ oder „Geht nicht gibt's nicht.“ Das ist nicht nur kurz gesagt, sondern auch zu kurz gedacht. Zur Illustration wenden wir im Folgenden die obigen Aussagen $\mathbb{RP}^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und $M \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit Satz K5G in ein positives Ergebnis.

Auch aus Steinen, die einem in den Weg
gelegt werden, kann man Schönes bauen.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K5d. Anwendung: Das Eckige muss ins Runde. Vorgelegt sei ein ebener, einfach geschlossener Weg $\gamma : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Sein Bild $C = \gamma(\mathbb{S}^1)$ ist eine *einfach geschlossene Kurve* in der Ebene, auch *Jordan–Kurve* genannt. Wir suchen in C einbeschriebene Quadrate.

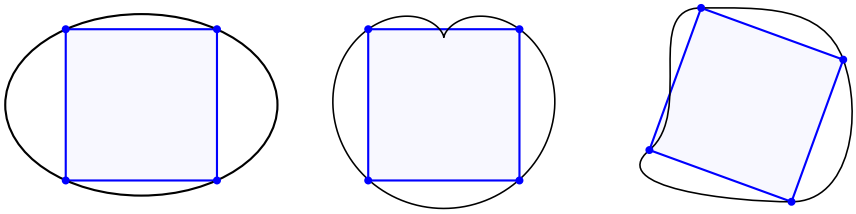


ABBILDUNG K:36. Enthält jede ebene Kurve ein einbeschriebenes Quadrat?

Vermutung K5F (Quadrat-Vermutung, Otto TOEPLITZ 1911)**.** Auf jeder ebenen, einfach geschlossenen Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ gibt es vier verschiedene Punkte, welche ein Quadrat bilden.

Diese einfache geometrische Frage ist immer noch offen (Stand 2020). Einen wunderschönen Überblick des Problems und gelöster Fälle gibt Benjamin Matschke: *A survey on the square peg problem.* In: Notices of the American Mathematical Society. 61, 2014, 346–253, online verfügbar unter `www.ams.org/notices/201404/rnoti-p346.pdf`

Die Aussage K5F ist im Allgemeinen falsch für reguläre n–Ecke mit $n \geq 5$. Allgemeiner für Rechtecke statt Quadrate können wir die Frage einfach und elegant beantworten:

Satz K5G (VAUGHAN 1977)**.** *Auf jeder ebenen, einfach geschlossenen Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ gibt es vier verschiedene Punkte, welche ein Rechteck bilden.*

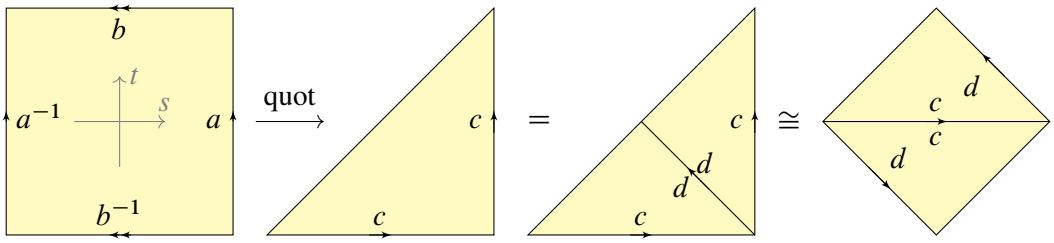
BEWEIS. Gegeben sei eine Parametrisierung $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} C$. Wir definieren

$$f \;:\; T := \big\{\, (s,t) \;\big|\; s,t \in \mathbb{S}^1 \,\big\} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; (s,t) \mapsto \left(\tfrac{\gamma(s)+\gamma(t)}{2},\; |\gamma(s)-\gamma(t)| \right)$$

durch Mittelpunkt und Abstand des *geordneten* Paares (s,t). Die Abbildung f ist stetig und erfüllt $f(s,t) = f(t,s)$, ist also invariant unter Vertauschung $\tau : T \xrightarrow{\sim} T : (s,t) \mapsto (t,s)$. Wir erhalten daher dieselbe Abbildung auf *ungeordneten* Paaren $\{s,t\}$:

$$g \;:\; M := \big\{\, \{s,t\} \;\big|\; s,t \in \mathbb{S}^1 \,\big\} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; \{s,t\} \mapsto \left(\tfrac{\gamma(s)+\gamma(t)}{2},\; |\gamma(s)-\gamma(t)| \right)$$

Abbildung K:35 zeigt das Bild von g in einem Beispiel. Der Raum $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ist eine Torusfläche. Aber was ist der Quotientenraum $M = T/\langle \tau \rangle$? Dies ist ein Möbius–Band!



Die Abbildung $g : M \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist stetig. Kann sie injektiv sein? Nein, solche Einbettungen des Möbius–Bandes gibt es nicht (K5E). Demnach existieren $\{s,t\} \neq \{s',t'\}$ in $\operatorname{Int} M$ mit $g(\{s,t\}) = g(\{s',t'\})$. Somit bilden $\gamma(s), \gamma(t), \gamma(s'), \gamma(t') \in C$ ein Rechteck. □

§K5e. Zwischenwertsatz für Flächen. Wir haben mit Satz J4D einen mehrdimensionalen Zwischenwertsatz für stetige Abbildungen $\mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$ formuliert. Eine entsprechende Aussage gilt für jede stetige Abbildung $h : F \to \mathbb{R}^2$ einer kompakten Fläche F.

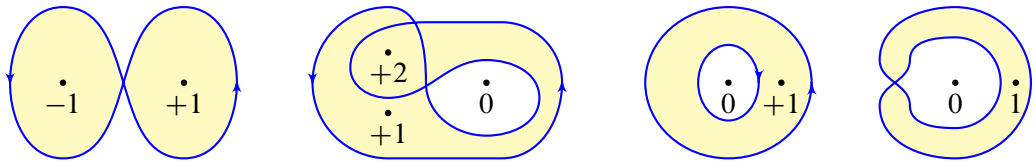


ABBILDUNG K:37. Umlaufzahl $\deg(h|_{\partial F} - p)$ für $h : F \to \mathbb{R}^2$

Übung K5H. Gegeben sei die stetige Abbildung $h : F \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ einer kompakten Fläche F in die gelochte Ebene. Der Rand ∂F werde parametrisiert durch $\rho : \{1,\dots,r\}\times\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \partial F$. Hierzu sei $\deg(h|_{\partial F}) := \deg(h\circ\rho) = \sum_{i=1}^{r} \deg(h\circ\rho_i) \in \mathbb{Z}$ die Summe der Umlaufzahlen.

(1) Ist F orientiert, so auch der Rand ∂F, und es gilt $\deg(h\circ\rho) = 0$.

(2) Im allgemeinen Fall gilt immerhin $\deg(h\circ\rho) \equiv 0 \bmod 2$.

Anleitung: Wie helfen hierbei Triangulierungen und stückweise affine Abbildungen? Welche Berechnung scheint Ihnen günstiger: Winkelsumme J1C oder Achsübergänge J1L?

✻ **K5H.** Wir dürfen $F = |K|$ als trianguliert voraussetzen (K1L). Weiterhin können wir annehmen, dass h auf jedem Simplex affin-linear ist; notfalls können wir F hinreichend fein simplizial unterteilen und $h : F \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ geeignet approximieren. Wir nutzen die Berechnung der Umlaufzahl durch Achsübergänge; die hierzu äquivalente Winkelsumme ist ebenso möglich, aber die Buchführung ist etwas komplizierter.

(1) Zunächst präzisieren wir die Daten: Wir orientieren $F = |K|$ durch eine kohärente Orientierung aller Dreiecke (K3B). Damit wird auch der Rand $\partial F = |\partial K|$ orientiert. Die Parametrisierung $\rho : \{1,\dots,r\}\times\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \partial F$ wählen wir orientierungserhaltend, wobei die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ihre kanonische Orientierung trägt.

Für jedes orientierte Dreieck $\Delta = [v_0, v_1, v_2]$ mit Eckenmenge $\{v_0, v_1, v_2\} \in K_2$ betrachten wir das Bilddreieck $h(\Delta) = [v_0', v_1', v_2'] \subset \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ mit $v_i' = h(v_i)$. Für seinen orientierten Rand $|v_0'v_1'v_2'v_0'|$ ist die Aussage klar, denn $\deg(v_0'v_1'v_2'v_0') = 0$ (J1E). Dasselbe gilt demnach auch für die Summe aller Dreiecke: $0 = \sum_{\{v_0,v_1,v_2\}\in K_2} \deg(v_0'v_1'v_2'v_0') = \deg(h\circ\rho)$: Innere Kanten von K sind gegenläufig orientiert und heben sich paarweise auf. Es bleibt die Summe über alle Randkanten, und dies ist die Umlaufzahl des Randes $h|_{\partial K}$.

(2) Ist die Fläche $F = |K|$ nicht orientiert, so zählen wir Achsübergänge nur modulo 2. Das Argument aus dem orientierten Fall (1) gilt dann wörtlich genauso modulo 2.

Hieraus folgern wir folgenden schönen Zwischenwertsatz, illustriert in K:37:

Satz K5I (Zwischenwertsatz für kompakte Flächen)**.** *Sei F eine kompakte orientierte Fläche und $h : F \to \mathbb{R}^2$ stetig. Jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus h(\partial F)$ mit Umlaufzahl* $\deg(h|_{\partial F} - p) \neq 0$ *liegt im Bild $h(F) \subset \mathbb{R}^2$. Unorientiert gilt dasselbe für* $\deg(h|_{\partial F} - p) \neq 0$ *in $\mathbb{Z}/2$.*

BEWEIS. Kontraposition von K5H: Für $p \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus h(F)$ gilt $\deg(h|_{\partial F} - p) = 0$. □

Damit können wir erneut den Nichteinbettungssatz $F_g^{\pm} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$ zeigen:

Übung K5J. Sei F eine geschlossene Fläche. Dann existiert keine Einbettungen $F \hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

✻ **K5J.** Zur Vereinfachung sei $F = |K|$ eine triangulierte Fläche und $h : F \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ eine simpliziale Einbettung. Sei $\Delta = [a,b,c]$ ein Dreieck und $F' = |K \smallsetminus \{\{a,b,c\}\}|$. Dann ist $h(\Delta) \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Innerem $h(\operatorname{Int}\Delta)$ und Rand $h(\partial\Delta) = h(\partial F')$. Nach Satz K5I liegt jeder Punkt $p \in h(\operatorname{Int}\Delta)$ im Bild von $h(\operatorname{Int} F')$, wird also unter $h : F \to \mathbb{R}^2$ zweimal getroffen. Das widerspricht der geforderten Injektivität.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K6. Übungen und Ergänzungen

Übung K6A. (1) Beim Bastelbogen K:38 fügen sich die neun Vierecke isometrisch zu einer geschlossenen Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$. Welche? *Empirisch:* Sie können's basteln! *Systematisch:* Lesen Sie das Flächenwort ab und bringen Sie es in Normalform gemäß Satz K3F.

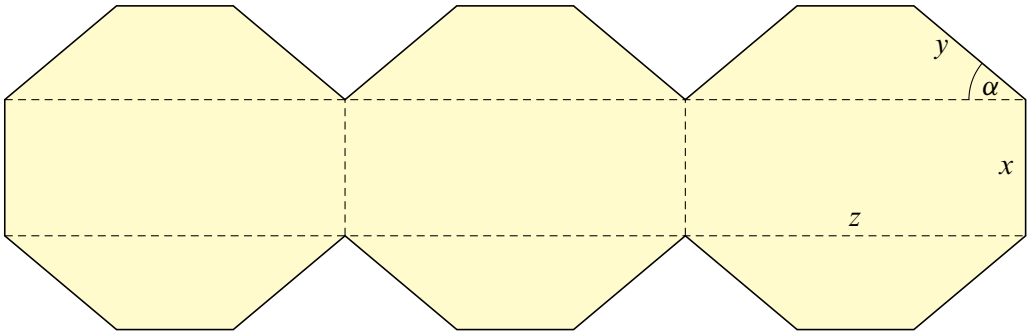


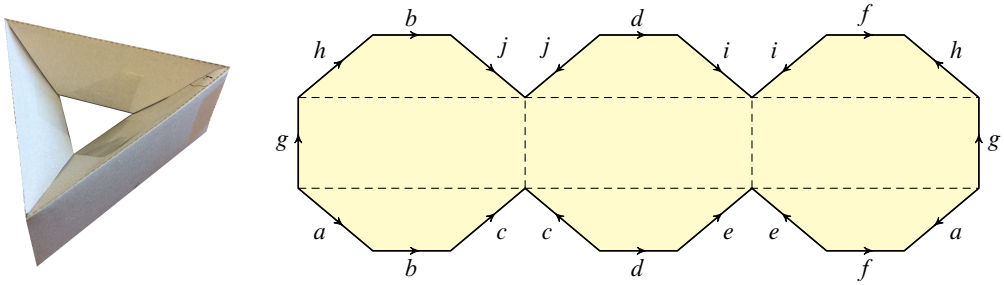
ABBILDUNG K:38. Bastelbogen für eine geschlossene Fläche

(2) Bestimmen Sie für jede Ecke p dieser polyedralen Fläche die lokale Krümmung $\kappa(p) = 2\pi - (\text{Winkelsumme um } p)$. Was besagt der Satz von Gauß–Bonnet (A5F) für die Gesamtkrümmung $\kappa(F)$ der Fläche F? Prüfen Sie dies hier nach!

(3) Praktische Ausführung: Wir wollen die Fläche F isometrisch im $\mathbb{R}^3$ realisieren. Welche geometrischen Bedingungen müssen die Längen x, y, z und der Winkel α erfüllen?

(4) Wenn Sie mehr einfache Übungen dieser Art wünschen, können Sie ebenso die Bastelbögen zu den platonischen Körpern aus Abbildung K:24 untersuchen.

✻ **K6A.** (1) Es entsteht ein Torus, wie man durch Basteln sofort herausfindet. Ein mögliches Flächenwort ist $w = abcc^-dee^-fa^-ghf^-ii^-d^-jj^-b^-h^-g^-$, das wir aus folgender Skizze ablesen:



Wir löschen durch Einklappen und gruppieren den Henkel $a\cdots b\cdots a^-\cdots b^-\cdots$ wie in Satz K3F erklärt:

$$w \equiv a\,b\,\underbrace{df}_{v}\,a^-\,\underbrace{ghf^-d^-}_{w}\,b^-\,\underbrace{h^-g^-}_{x} \equiv aba^-b^-\,\underbrace{h^-g^-}_{x}\,\underbrace{ghf^-d^-}_{w}\,\underbrace{df}_{v}.$$

Merkregel: Fängt das Flächenwort mit einem Buchstaben des Henkels an, dann werden die Teilwörter u, v, w, x, die zwischen den Buchstaben des Henkels stehen, in umgekehrter Reihenfolge an den Henkel angehängt.

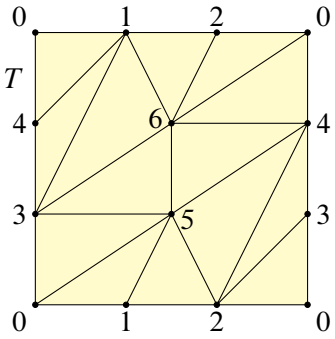
Durch Einklappen kürzen sich die Buchstaben g, h, d, f. Es bleibt das Flächenwort des Torus aba^-b^-.

(2) An den sechs äußeren Ecken gilt $\kappa(p) = 2\pi - (\pi + 2\alpha) = \pi - 2\alpha$, an den drei inneren Ecken gilt $\kappa(p) = 2\pi - (4\pi - 4\alpha) = -2\pi + 4\alpha$. Summiert man über alle Ecken, so ergibt sich $0 \cdot 2\pi$, wie vorhergesagt.

(3) Wir finden $\pi/6 < \alpha < \pi/2$ und $y = x\sqrt{3/(3\sin(\alpha)^2 - \cos(\alpha)^2}$ sowie $z > 2y\cos(\alpha)$.

§K6a. Das Császár–Polyeder. Die Heawood–Ungleichung (K3B) besagt für den Torus $F_1^+ = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, dass jede Triangulierung mindestens 7 Ecken benötigt. Es ist bemerkenswert, dass tatsächlich eine solche Sieben-Ecken-Triangulierung T des Torus existiert. Zunächst ist T ein abstrakter Simplizialkomplex; er lässt sich kanonisch als affiner Simplizialkomplex $T \to \mathbb{R}^7$ realisieren (I2D). Diese Dimension lässt sich weiter reduzieren: Dank Whitney gilt $T \to \mathbb{R}^5$, denn jeder endliche n–dimensionale Komplex lässt sich affin in den $\mathbb{R}^{2n+1}$ einbetten (I2Q). Erstaunlicherweise lässt sich T sogar affin in den $\mathbb{R}^3$ einbetten!

Der ungarische Mathematiker Ákos CSÁSZÁR gab 1949 die folgende Realisierung an:



Realisierung $T \to \mathbb{R}^3$:

$0 \mapsto (\ 3, -3,\ 0)$
$1 \mapsto (\ 3,\ 3,\ 0)$
$2 \mapsto (-3, -3,\ 1)$
$3 \mapsto (\ 3,\ 3,\ 1)$
$4 \mapsto (-1, -2,\ 3)$
$5 \mapsto (\ 1,\ 2,\ 3)$
$6 \mapsto (\ 0,\ 0,\ 15)$

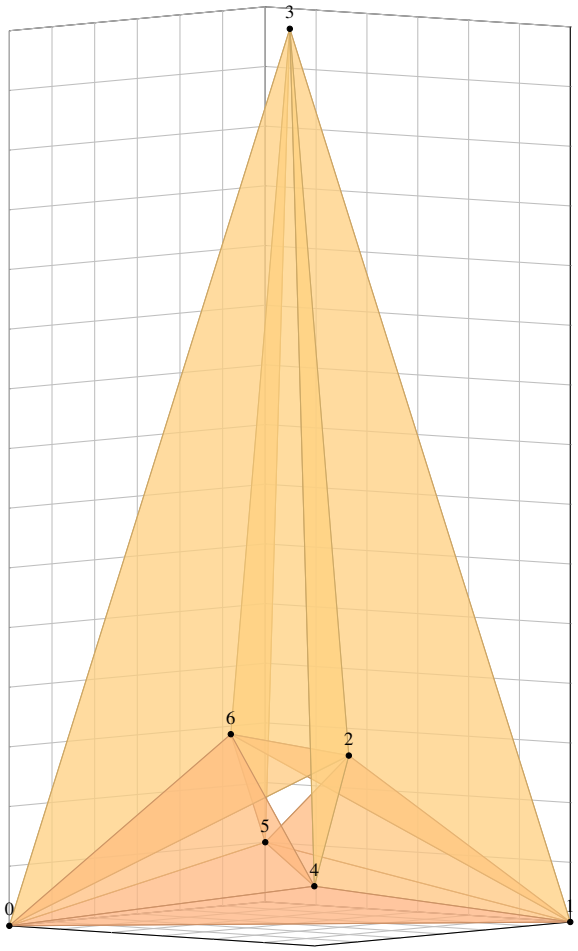


ABBILDUNG K:39. Das Császár–Polyeder

Übung K6B. Was müsste für die Daten aus Abbildung K:39 überprüft werden?

✻ **K6B.** Gemäß Definition I2C ist nachzuprüfen, dass die angegebene Abbildung $T \to \mathbb{R}^3$ eine Darstellung ist, das heißt: Die Simplizes schneiden sich im Raum $\mathbb{R}^3$ nur so, wie im Bauplan T vorgeschrieben. Dies ist in der Abbildung K:39 nicht offensichtlich. Die Überprüfung erfordert eine einfache aber längliche Rechnung; sie wird hier nicht ausgeführt. Zur Überprüfung lässt sich ein Computer gewinnbringend einsetzen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K6b. Affine Einbettungen des Torus. Für die Sphäre besagt der Satz von Steinitz (1922): Jede Triangulierung von $\mathbb{S}^2$ kann simplizial in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden. Dies gelingt sogar als Randkomplex eines Polytops, also auf die schönst mögliche Weise.

Das Problem von Grünbaum (1967) fragt, ob sich ebenso jede Triangulierung des Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ simplizial in den $\mathbb{R}^3$ einbetten lässt. Es ist, soweit ich weiß, bis heute ungelöst.

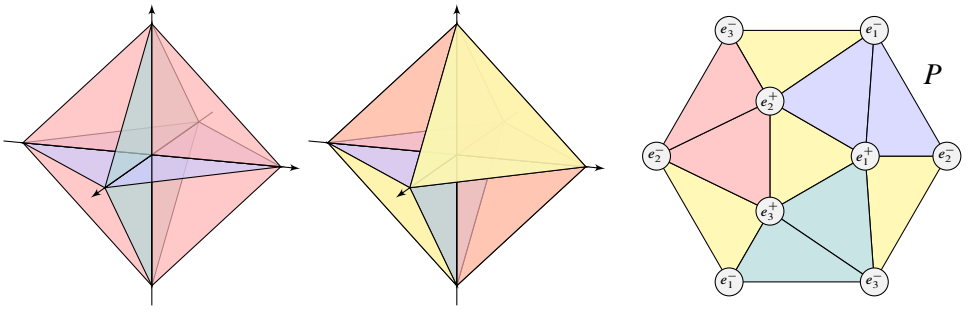
Übung K6C. (1) Nennen Sie zur Wiederholung die übliche 9–Ecken–Triangulierung des Torus. (Es gibt mehrere Varianten. Wenn Sie möchten, zeichnen Sie einige davon.)

(2) Lässt sich diese Triangulierung affin im $\mathbb{R}^9$ realisieren? im $\mathbb{R}^5$? im $\mathbb{R}^3$? Finden Sie auf diese naive Weise bereits ein Gegenbeispiel zum obigen Problem von Grünbaum?

✻ **K6C.** (1) Siehe Abbildung K:40. Ausgehend von den 9 Quadraten können Sie jedes Quadrat triangulieren durch eine seiner beiden Diagonalen. Manche dieser Varianten sind äquivalent durch Verschiebung, Rotation und Spiegelung, dennoch bleiben schließlich mehrere nicht-äquivalente Lösungen.

(2) Wie in Abbildung K:38 verkleben wir 9 Vierecke zu einem Torus und realisieren diesen geometrisch im $\mathbb{R}^3$ wie in Aufgabe K6A erklärt. Anschließend können Sie jedes Viereck triangulieren durch eine seiner beiden Diagonalen (1). All diese 9–Ecken–Triangulierungen sind also affin realisierbar in $\mathbb{R}^3$.

§K6c. Die Boysche Fläche. Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 = F_0^-$ und allgemein F_g^- lässt sich nicht in den Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten. Für die Kleinsche Flasche existiert immerhin eine Immersion $F_1^- \looparrowright \mathbb{R}^3$ mit harmlosen Mehrfachpunkten wie in K:10 gezeigt. David HILBERT vermutete, dass für $\mathbb{RP}^2$ keine Immersion $\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ existiert und schlug dies Werner BOY (1879–1914) als Promotionsthema vor. Boy gelang es daraufhin, eine Immersion $\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ zu konstruieren. Ich skizziere hier eine simpliziale Realisierung:



Die sechs Eckpunkte $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$ im $\mathbb{R}^3$ spannen ein reguläres Oktaeder auf. Wir beginnen mit den Quadraten $[\pm e_1, \pm e_2]$ (blau), $[\pm e_2, \pm e_3]$ (rot), $[\pm e_3, \pm e_1]$ (grün). Die Selbstdurchdringungen wollen wir ignorieren. Wir fügen vier der acht Dreiecke des Oktaeders hinzu: $[+e_1, +e_2, +e_3]$, $[+e_1, -e_2, -e_3]$, $[-e_1, +e_2, -e_3]$, $[-e_1, -e_2, +e_3]$ (gelb).

Übung K6D. (1) Ist das eine geschlossene Fläche, also lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^2$? Welche?

(2) Welche zusammenhängenden kompakten Flächen werden allein durch ihre Euler–Charakteristik festgelegt? Spezieller: Welche zusammenhängenden geschlossenen Flächen?

✻ **K6D.** (1) Es gibt zwei Sichtweisen: (a) Wir schreiben den Simplizialkomplex P konkret aus und erkennen die 6–Ecken–Triangulierung der reell-projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$. (b) Wir nutzen den Klassifikationssatz K3G: Der Komplex P ist eine simpliziale Fläche mit $\chi(P) = 1$. Dies charakterisiert die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$. (2) Siehe K6T: (a) nur die Sphäre $\mathbb{S}^2$, (b) neben $\mathbb{S}^2$ nur noch die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$.

§K6d. Ebene Gitter, Quotienten und Triangulierungen des Torus. Die folgende Übung konstruiert zum Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ die (recht offensichtliche) 9–Ecken–Triangulierung und die (viel erstaunlichere) 7–Ecken–Triangulierung. Bei richtiger Betrachtungsweise zeigt sie ihre hohe Symmetrie, die man auf den ersten Blick (wie in K:39) kaum vermuten würde.

Übung K6E. (1) Zeichnen Sie das Gitter $L_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$. Triangulieren Sie die Ebene L_1–invariant durch rechtwinklige Dreiecke mit Ecken in L_1. Zeichnen Sie das Untergitter $L_1' = \mathbb{Z}3 + \mathbb{Z}3\mathrm{i}$. Welche Fläche ist $F_1 = \mathbb{C}/L_1'$? Welche Triangulierung K_1 erhalten Sie?

(2) Sei $j = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$. Zeichnen Sie das Gitter $L_2 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$ in $\mathbb{C}$. Triangulieren Sie die Ebene L_2–invariant durch regelmäßige Dreiecke mit Ecken in L_2. Zeichnen Sie das Untergitter $L_2' = \mathbb{Z}(2-j) + \mathbb{Z}j(2-j)$. Wählen Sie einen Fundamentalbereich $P \subset \mathbb{R}^2$ in Form eines Parallelograms: Welche Fläche ist $F_2 = \mathbb{C}/L_2'$? Wählen Sie einen Fundamentalbereich Q aus regelmäßigen Dreiecken: Welche Triangulierung K_2 erhalten Sie?

(3) Was können Sie über die simpliziale Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(K_2)$ ablesen? Operiert Sie transitiv auf den Ecken? Kanten? Dreiecken? Welche Ordnung hat sie?

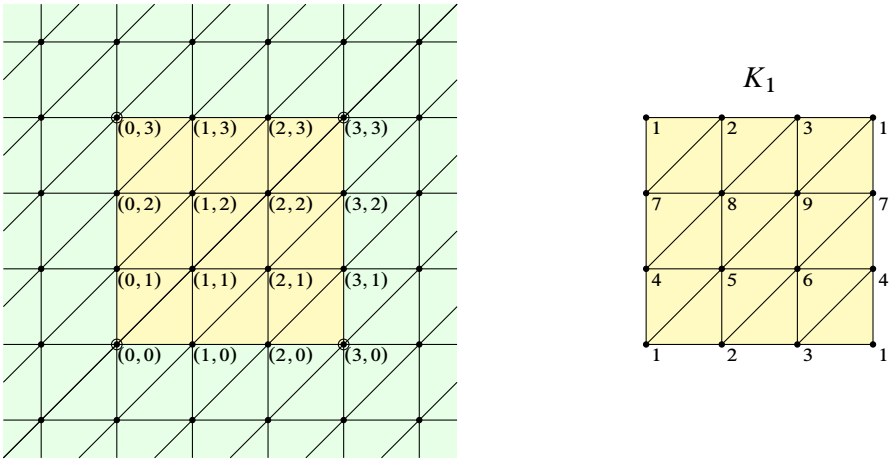


ABBILDUNG K:40. Gitter in $\mathbb{C}$ und invariante Triangulierungen

✻ **K6E.** (1) Das Gitter $L_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$ ist in Abbildung K:40 dargestellt. Wir triangulieren dies durch rechtwinklige Dreiecke mit Ecken in L_1, indem wir jedes Quadrat zweiteilen. Hierzu gibt es überabzählbare viele Möglichkeiten. Da wir zudem L_1–Inavarianz fordern, bleiben nur zwei: Alle Diagonalen laufen entweder von (x, y) nach $(x+1, y+1)$, wie hier skizziert, oder alle von $(x+1, y)$ nach $(x, y+1)$. Ebenso eingezeichnet ist das Untergitter $L_1' = \mathbb{Z}3 + \mathbb{Z}3\mathrm{i} < L_1$. Der Quotientenraum $F_1 = \mathbb{C}/L_1'$ ist homöomorph zu einem Torus. Als Triangulierung K_1 finden wir die 9–Ecken–Triangulierung des Torus wie skizziert.

(2) Das Gitter $L_2 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$ in $\mathbb{C}$ ist in Abbildung K:41 dargestellt, zusammen mit einer L_2–invarianten Triangulierung der Ebene durch regelmäßige Dreiecke mit Ecken in L_2. Ebenso eingezeichnet ist das Untergitter $L_2' = \mathbb{Z}(2-j) + \mathbb{Z}j(2-j) < L_2$ und ein Fundamentalbereich $P \subset \mathbb{C}$: Der Quotientenraum $F_1 = \mathbb{C}/L_1'$ ist homöomorph zu einem Torus, denn gegenüberliegende Seiten von P werden identifiziert (Flächenwort $aba^{-1}b^{-1}$). Zwar ist P einfach und übersichtlich, doch leider nicht verträglich mit der Triangulierung.

Hierzu wählen wir einen Fundamentalbereich Q aus 14 regelmäßigen Dreiecken wie in Abbildung K:42. Die Ebene lässt sich pflastern mit Q und seinen L_2'–Verschiebungen. Somit ist $\mathbb{C}/L_2'$ homöomorph zu $Q/\!\approx$ mit den induzierten Identifizierungen auf dem Rand. Wir lesen das Flächenwort ab, bei 5 unten angefangen gegen den Uhrzeigersinn: $w = abcdea^{-1}c^{-1}b^{-1}e^{-1}d^{-1}$. Die Reduktion auf Normalform enthüllt auch hier den Torus. So muss es auch sein: Es ist ja dieselbe Fläche $\mathbb{C}/L_2'$, nur verschieden dargestellt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

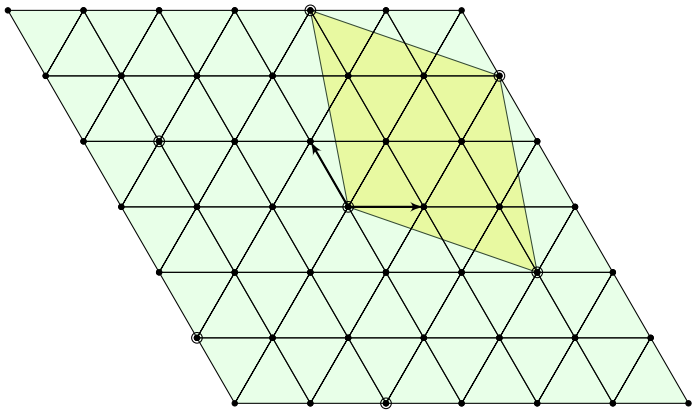


ABBILDUNG K:41. Gitter in $\mathbb{C}$ und invariante Triangulierungen

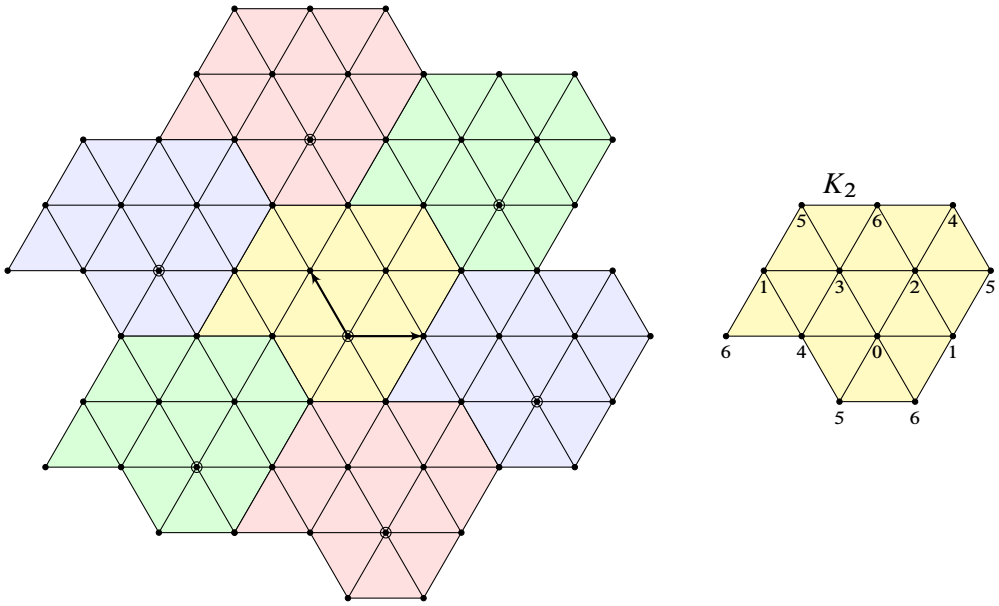


ABBILDUNG K:42. Gitter in $\mathbb{C}$ und invariante Triangulierungen

(3) Die simpliziale Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(K_2)$ operiert transitiv auf den Ecken: Zu je zwei Ecken $a,a' \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ existiert ein Automorphismus $h : K_2 \xrightarrow{\sim} K_2$ mit $a \mapsto a'$. Die Gruppe $\mathrm{Aut}(K_2)$ operiert sogar zweifach transitiv: Zu je zwei Eckenpaaren $a \neq b$ und $a' \neq b'$ existiert ein Automorphismus $h : K_2 \xrightarrow{\sim} K_2$ mit $(a,b) \mapsto (a',b')$. Ebenso operiert $\mathrm{Aut}(K_2)$ scharf transitiv auf allen geordneten Dreiecken: Zu je zwei Dreiecken $\{a,b,c\}$ und $\{a',b',c'\}$ von K_2 existiert genau ein Automorphismus $h : K_2 \xrightarrow{\sim} K_2$ mit $(a,b,c) \mapsto (a',b',c')$. Die Gruppenordnung können wir hieraus leicht ablesen: $|\mathrm{Aut}(K_2)| = 7 \cdot 6 \cdot 2 = 84$. Für die orientierungserhaltenden Automorphismen finden wir $|\mathrm{Aut}(K_2^+)| = 7 \cdot 6 = 42$; die Struktur dieser Gruppe $\mathrm{Aut}(K_2^+) \cong \mathbb{Z}/7 \rtimes \mathbb{Z}/6 = \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}/7,+)$ erweist sich als die affine Gruppe des Körpers $(\mathbb{Z}/7,+,\cdot)$.

Zum Vergleich: Auch $\mathrm{Aut}(K_1)$ operiert transitiv auf den Ecken $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ durch Translation. Dennoch ist der Komplex K_1 weniger symmetrisch: Die Ecke 8 hat die sechs Nachbarn $2,3,4,7,8,9$, jedoch nicht $1,6$; es gibt also keinen Automorphismus $h : K_1 \xrightarrow{\sim} K_1$, der das Paar $(8,2)$ auf das Paar $(8,1)$ abbildet.

§K6e. Topologische Invarianz des geometrischen Randes.

Übung K6F. Zur Wiederholung und zur Einübung berandeter Mannigfaltigkeiten:

(1) Sind die Intervalle $[0,1]$ und $[0,1[$ homöomorph? Was ist $\partial[0,1]$ und $\partial[0,1[$?
(2) Sind die Flächen $X = [0,1]\times[0,1]$ und $Y = [0,1[\times[0,1]$ homöomorph?
(3) Sind die Flächen $X = [0,1]\times]0,1[$ und $Y = [0,1[\times]0,1[$ homöomorph?
(4) Sind die Flächen $X = [0,1]\times[0,1[$ und $Y = [0,1[\times[0,1[$ homöomorph?

Hinweis: Konstruieren Sie einen stückweise affinen Homöomorphismus $h : [0,1]^2 \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$ wie in Abbildung K:43 mit $h(u_i) = v_i$ für $i = 1,2,3,4,5$. Finden Sie hierzu für den Start- und Zielraum jeweils eine geeignete Triangulierung ohne weitere Eckpunkte.

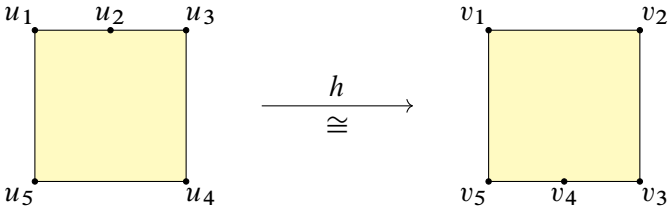


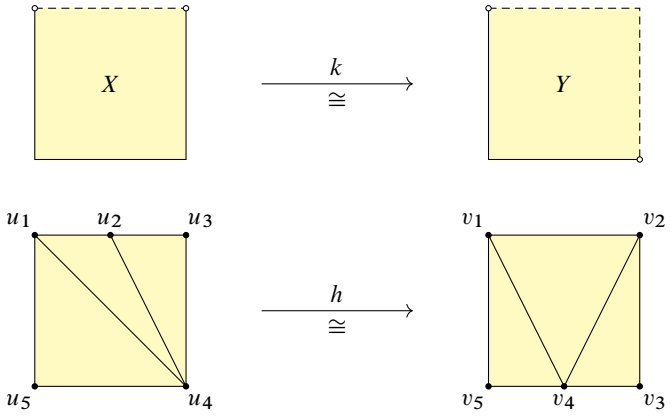
ABBILDUNG K:43. Ein affiner Homöomorphismus des Quadrats

✻ **K6F.** (1) In $[0,1]$ trennt jeder Punkt bis auf zwei, in $[0,1[$ trennt jeder Punkt bis auf einen, also $[0,1] \ncong [0,1[$. Alternativ nutzen wir die topologische Invarianz des geometrischen Randes (J7I): Es gilt $\partial[0,1] = \{0,1\}$ und $\partial[0,1[= \{0\}$. Dies sind intrinsische Eigenschaften (und nicht der Rand bezüglich des umgebenden Raumes $\mathbb{R}^1$).

(2) Nein, es gilt $X \ncong Y$, denn X ist kompakt und Y nicht. Alternativ: Die Ränder sind nicht homöomorph, denn $\partial X = (\{0,1\}\times[0,1]) \cup ([0,1]\times\{0,1\}) \cong \mathbb{S}^1$ aber $\partial Y = (\{0\}\times[0,1]) \cup ([0,1[\times\{0,1\}) \cong]0,1[$.

(3) Nein, es gilt $X \ncong Y$, die Ränder sind nicht homöomorph, denn $\partial X = \{0,1\}\times]0,1[$ hat zwei Komponenten aber $\partial Y = \{0\}\times]0,1[\cong]0,1[$ nur eine.

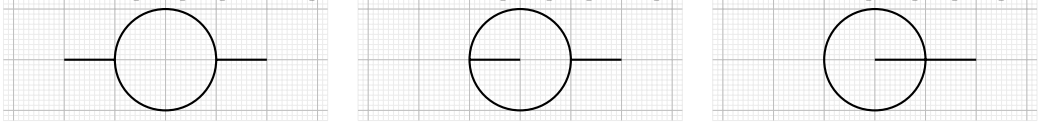
(4) Ja, trotz $[0,1] \ncong [0,1[$ sind nach Produktbildung mit $[0,1[$ die Produkträume $X = [0,1]\times[0,1[$ und $Y = [0,1[\times[0,1[$ homöomorph. Einen Homöomorphismus $k : X \xrightarrow{\sim} Y$ können wir explizit angeben als Einschränkung des affinen Homöomorphismus $h : [0,1]^2 \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$, wie in der Aufgabenstellung vorgeschlagen, denn es gilt $h(X) = Y$. Wir kommen mit fünf Ecken aus, wie nachstehend gezeigt. Alternativ genügt auch eine baryzentrische Unterteilung, wobei wir allerdings eine Ecke $z = (1/2, 1/2)$ mehr benötigen.



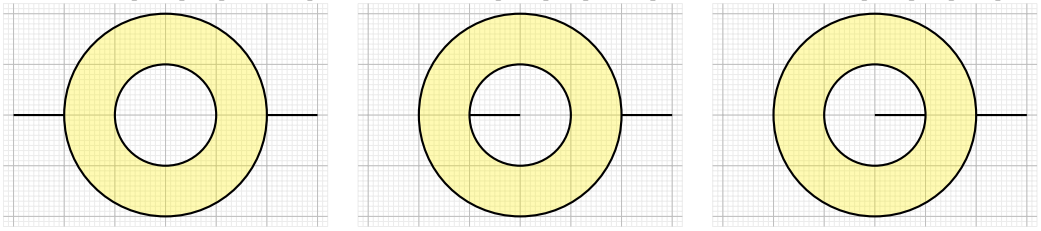
© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K6f. Homöomorph oder nicht? Wir betrachten die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ und den Kreisring $R = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| \le 2 \}$ und bilden hieraus folgende Räume:

$A = \mathbb{S}^1 \cup [1,2] \cup [-2,-1]$ $B = \mathbb{S}^1 \cup [1,2] \cup [-1,0]$ $C = \mathbb{S}^1 \cup [1,2] \cup [0,1]$



$X = R \cup [2,3] \cup [-3,-2]$ $Y = R \cup [2,3] \cup [-1,0]$ $Z = R \cup [2,3] \cup [0,1]$



Übung K6G. Wir untersuchen die obigen Räume auf Homöomorphie.

(1) Sind die Räume A und B homöomorph? Begründung?
(2) Sind die Räume B und C homöomorph? Begründung?
(3) Sind die Produkträume $A \times [0,1]$ und $C \times [0,1]$ homöomorph? Begründung?
(4) Geben Sie alle Punkte an, in denen X, Y, Z lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.
(5) Sind die Räume X und Y homöomorph? Begründung?
(6) Sind die Räume Y und Z homöomorph? Begründung?
(7) Skizzieren Sie $X \times [0,1]$ und $Y \times [0,1]$ und $Z \times [0,1]$. Sind diese homöomorph?

✻ **K6G.** (1) Ja. Es gilt $h : A \xrightarrow{\sim} B$ mit $h(x) = -2 - x$ für $x \in [-2,-1]$ und $h(z) = z$ sonst.

(2) Nein. Die Räume B und C sind in fast jedem Punkt 1–euklidisch (K1A), also lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^1$. Der Raum B ist nicht 1–euklidisch in den vier Punkte $-1, 0, 1, 2$, der Raum C hingegen nur in den drei Punkten $0, 1, 2$. *Alternative:* Die trennenden Punkte bilden zwei Komponenten in B, aber nur eine in C.

(3) Nein. Die Räume $A \times [0,1]$ und $C \times [0,1]$ sind beinahe berandete Flächen, also in jedem Punkt lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^2_{\ge 0}$, bis auf $A' = \{\pm 1\} \times [0,1]$ bzw. $C' = \{1\} \times [0,1]$. Gäbe es einen Homöomorphismus $h : A \times [0,1] \xrightarrow{\sim} C \times [0,1]$, so folgte $A' \cong C'$, was nicht der Fall ist: A' hat zwei Komponenten, C' nur eine.

(4) Diese Menge ist $X^\circ = Y^\circ = Z^\circ = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2 \}$. Dies ist zugleich das Innere von X, Y, Z bezüglich des umgebenden Raumes $\mathbb{C}$, aber die lokale Beschreibung ist für die folgenden Fragen vorteilhaft, denn sie ist intrinsisch für topologische Räume und somit offensichtlich invariant unter Homöomorphismen.

(5) Nein. Gäbe es einen Homöomorphismus $h : X \xrightarrow{\sim} Y$, so folgte $X^\circ \cong Y^\circ$ und $X \smallsetminus X^\circ \cong Y \smallsetminus Y^\circ$, was offensichtlich nicht der Fall ist. Ausführlich argumentiert man wie oben: Die beiden Komponenten $X \smallsetminus X^\circ$ sind homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ bzw. A und daher nicht homöomorph zu den beiden Komponenten von $Y \smallsetminus Y^\circ$.

(6) Ja. Es gibt Homöomorphismen $h : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ mit $h(Y) = Z$, etwa $h(r\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta}) = r\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(\theta + g(r))}$ mit der Drehung um $g(r) = 1/2$ für $0 \le r \le 1$ und $g(r) = 0$ für $r \ge 2$ sowie $g(r) = 1 - r/2$ für $1 \le r \le 2$.

(7) Die Produkträume sind homöomorph zu Volltori mit angeklebten Quadraten. Letztere lassen sich entlang der Torusfläche verschieben. (Das lässt sich durch einen Homöomorphismus darstellen analog zur vorigen Frage, ist aber mühsamer zu parametrisieren.) Demnach sind die Produkträume homöomorph: Es gilt $X \not\cong Y \cong Z$ aber $X \times [0,1] \cong Y \times [0,1] \cong Z \times [0,1]$. *Die Moral von der Geschicht':* Jeder Homöomorphismus $X \cong Y$ impliziert $X \times P \cong Y \times P$, aber die Umkehrung ist falsch, wie unser Beispiel zeigt.

§K6g. Aufdicken eines Graphen zu einer Fläche.

Übung K6H. Wählen Sie einen endlichen simplizialen Graphen $G \subset \mathbb{R}^3$. Ersetzen Sie jede Ecke a durch eine kleines Quadrat Q_a mit Mittelpunkt a, und jede Kante $[a,b]$ durch ein schmales Band $B_{a,b}$ entlang $[a,b]$, das sie an beiden Enden geeignet an Q_a und Q_b ankleben. Diese Bänder sollten simplizial sein, dürfen aber beliebig verdrillt werden. Sie erhalten eine kompakte simpliziale Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$. Machen Sie einige Skizzen zur Illustration.

(1) Wir nehmen $G \subset F$ an. Welche Relation besteht zwischen $\pi_0(G)$ und $\pi_0(F)$? und zwischen $\chi(G)$ und $\chi(F)$? Ist $G \subset F$ ein starker Deformationsretrakt?
(2) Jeder Teilgraph $H \leq G$ bestimmt eine Teilfläche $F_H \subset F_G = F$. Was entspricht einem Baum? speziell einem Spannbaum?
(3) Wie lässt sich die Orientierbarkeit von F möglichst leicht feststellen?
(4) Wie lässt sich die Anzahl der Randkomponenten von F feststellen?
(5) Lässt sich jede kompakte simpliziale Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ so erzeugen? Zumindest bis auf die naheliegenden Bewegungen in $\mathbb{R}^3$?

§K6h. Beispiele zur Flächenklassifikation. Um die Kraft der Flächenklassifikation schätzen zu können, sollten Sie sich mit einer Vielzahl von Beispielen vertraut machen.

Übung K6I. Abbildung K:44 zeigt Flächen $A, B, C, D, E, F, G, H, I \subset \mathbb{R}^3$. Welche davon sind zueinander homöomorph? Nennen Sie jeweils die homöomorphe Modellfläche $F^{\pm}_{g,r}$.

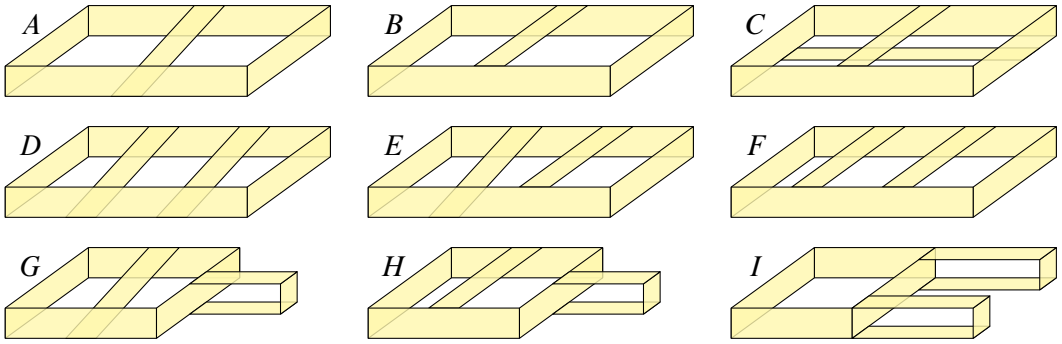


ABBILDUNG K:44. Beispiele zur Flächenklassifikation

✻ **K6I.** Jeder der gezeigten Teilräume $A, B, C, D, E, F, G, H, I \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Fläche, zudem kompakt und zusammenhängend. Dank Flächenklassifikationssatz K3I genügen drei Daten zu ihrer Unterscheidung: die Anzahl $r = \sharp\pi_0(\partial X)$ der Randkomponenten, die Orientierbarkeit $\varepsilon(X) \in \{\pm 1\}$ sowie die Euler–Charakteristik $\chi(X)$.

Fläche	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Randkomponenten r	1	3	4	2	2	4	1	2	2
Orientierbarkeit ε	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
Euler–Charakteristik χ	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
Geschlecht g	1	0	0	1	1	0	2	1	1
Modellfläche $F^{\pm}_{g,r}$	$F^{-}_{1,1}$	$F^{+}_{0,3}$	$F^{+}_{0,4}$	$F^{-}_{1,2}$	$F^{-}_{1,2}$	$F^{+}_{0,4}$	$F^{-}_{2,1}$	$F^{+}_{1,2}$	$F^{+}_{1,2}$

Demnach enthält unsere Liste genau drei Paare homöomorpher Flächen, nämlich $C \cong F$, $D \cong E$, $H \cong I$. (Anschauung!) Alternativ können Sie jede Fläche als Flächenwort darstellen und in Normalform bringen: Genau so verläuft der Beweis des Klassifikationssatzes. Das ist hier etwas mühsamer als die bequemen Invarianten r, ε, χ.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung K6J. Nutzen Sie den Klassifikationssatz: Zu welcher unserer Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ sind die folgenden Flächen $G = G(p,q,r)$ und $H = H(k,\ell,r)$ homöomorph?

Können Sie dies direkt zeigen, indem Sie die gezeigte Fläche in eine der Modellflächen deformieren? Ist das möglich? Ist es leicht? Gibt es mehrere Möglichkeiten?

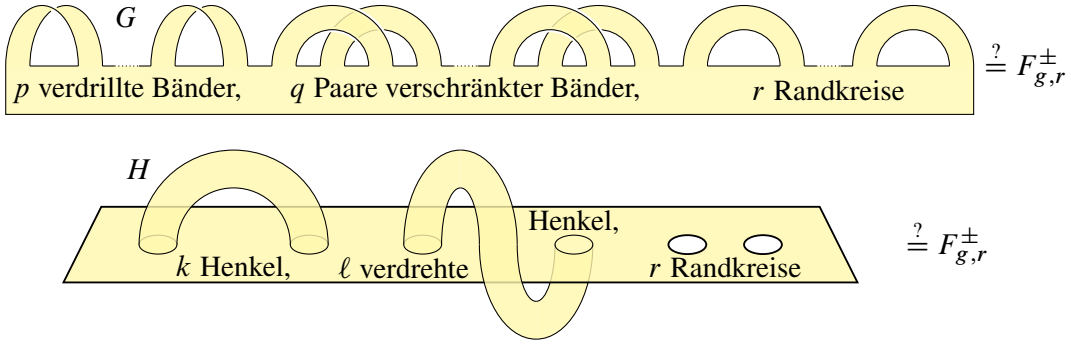


ABBILDUNG K:45. Beispiele zur Flächenklassifikation

✻ **K6J.** (1) Wir untersuchen die Fläche $G = G(p,q,r)$. Sie hat r Randkomponenten. Für $p = 0$ ist dies die Modellfläche $G = F^{+}_{g,r}$ vom Geschlecht $g = q$. Für $p \geq 1$ und $q = 0$ ist dies die Modellfläche $G = F^{-}_{g,r}$ mit $g = p-1$. Allgemein für $p \geq 1$ finden wir $G \cong F^{-}_{g,r}$ mit $g = p-1+2q$, denn Kreuzhauben transformieren Henkel. Ankleben eines Bandes reduziert die Euler–Charakteristik um 1, also gilt in allen Fällen $\chi(G) = 2-r-p-2q$.

(2) Wir untersuchen die Fläche $H = H(k,\ell,r)$. Sie hat r Randkomponenten. Ankleben eines Zylinders reduziert die Euler–Charakteristik um 2, also gilt in allen Fällen $\chi(H) = 2-r-2k-2\ell$. Für $\ell = 0$ gilt $H \cong F^{+}_{g,r}$ mit $g = k$. Für $\ell \geq 1$ finden wir $H \cong F^{-}_{g,r}$ mit $g = 2k+2\ell-1$, denn Kreuzhauben transformieren Henkel.

Sie können diese Homöomorphismen $G \cong F^{\pm}_{g,r}$ bzw. $H \cong F^{\pm}_{g,r}$ direkt zeigen, indem Sie die Flächen ineinander umformen, etwa durch eine Folge von Zeichnungen. Das ist lehrreich und illustrativ, aber auch mühsam. Genau dafür haben wir den Flächenkalkül und den Flächenklassifikationssatz als effiziente Werkzeuge! Zudem besagt der Klassifikationssatz, dank unserer Invarianten, dass wir immer bei derselben Modellfläche $F^{\pm}_{g,r}$ auskommen, egal welche Umformungen wir vornehmen!

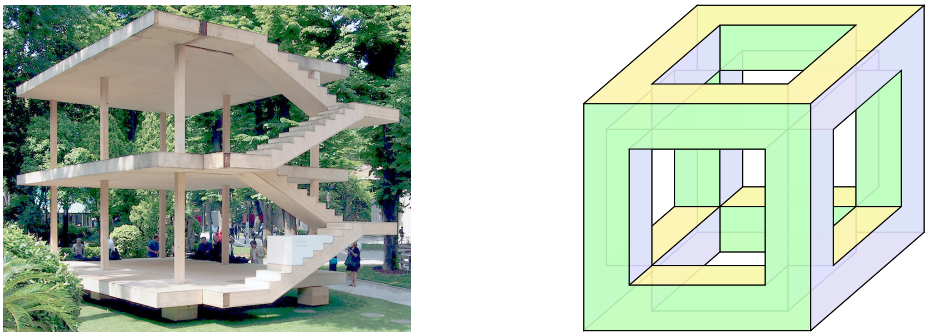


ABBILDUNG K:46. Le Corbusier (1887–1965), *maison dom-ino* (1914)

Übung K6K. Sei K das Polyeder aus Abbildung K:46 links, also die dreidimensionale Konstruktion, 1914 ursprünglich aus Stahlbeton, 2014 aus Holz bei der Biennale in Venedig. Ist K eine 3–Mannigfaltigkeit? gar ein Henkelkörper H_g? Welcher? Ist der Rand $F := \delta K$ eine Fläche? Welche? Bestimmen Sie $\chi(K)$ und $\chi(F)$. Homotopie-Invarianz hilft!

Übung K6L. Sei $(a,b,c,d) = (-1,-1/2,1/2,1)$. Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir das Polyeder

$$K = [a,d]^3 \smallsetminus \Big(\big([a,d] \times]b,c[\times]b,c[\big) \cup \big( ]b,c[\times [a,d] \times]b,c[\big) \cup \big( ]b,c[\times]b,c[\times [a,d] \big) \Big).$$

(1) Ist K eine 3–Mannigfaltigkeit? ein Henkelkörper H_g?

(2) Das Polyeder K enthält einen Graphen $G \subset K$ als starken Homotopie-Retrakt. Geben Sie einen solchen Graphen an und folgern Sie die Euler–Charakteristik $\chi(K)$.

(3) Ist der Rand $F := \delta K$ eine Fläche? Welche? Bestimmen Sie $\chi(F)$.

(4) Die Rotation $\rho : (x,y,z) \mapsto (-x,-y,z)$ um die z–Achse bildet F auf sich selbst ab. Bestimmen Sie den Quotienten $F/\langle \rho \rangle$, also F modulo $(x,y,z) \sim (-x,-y,z)$.

(5) Selbe Frage für die Spiegelung $\sigma : (x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$ an der y–z–Ebene.

(6) Selbe Frage für die Punktspiegelung $\tau : (x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$ im Ursprung.

(7) Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ das 1–Skelett des Dodekaeders bestehend aus 20 Ecken und 30 Kanten (Abbildung A:8). Eine kleine ε–Umgebung ist eine 3–Mannigfaltigkeit K mit Randfläche $F = \delta K$. Welche Fläche $F^{\pm}_{g,r}$ ist dies? Was ergeben die anderen platonischen Körper?

(8) Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein zusammenhängender simplizialer Graph mit e Ecken und k Kanten. Für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die ε–Umgebung $K := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x,G) \leq \varepsilon \}$ um G ein Henkelkörper und sein Rand $F = \delta K = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x,G) = \varepsilon \}$ ist eine Fläche. Welche Fläche $F^{\pm}_{g,r}$ ist dies? Berechnen Sie $\chi(G)$ und hieraus $\chi(K)$ und $\chi(F)$.

✻ **K6L.** (1) Ja, K ist eine 3–Mannigfaltigkeit mit Rand, genauer gesagt ein Henkelkörper: $K \cong H_5$. *Warnung:* Auf den ersten Blick sehen Sie vielleicht sechs „Löcher“, eins für jede Seite des Würfels. Wenn Sie den Henkelkörper jedoch in Standardform möglichst eben darstellen, sind es tatsächlich nur fünf Löcher.

(2) Der Raum K ist homotopie-äquivalent zum 1–Skelett G des Würfels $[-1,1]^n$. (Skizze!) Dieser Graph G besteht aus 8 Ecken und 12 Kanten, also $\chi(K) = \chi(G) = 8 - 12 = -4$. *Erinnerung:* Für jeden Graphen G ist die Berechnung von $\chi(G)$ besonders leicht. Man kann $\chi(K)$ direkt berechnen, es ist jedoch effizienter, die Homotopie-Äquivalenz $K \simeq G$ zu nutzen. Glücklicherweise ist die Euler–Charakteristik homotopie-invariant!

(3) Es gilt $F \cong F^+_5$. Für Geschlecht $g = 5$ folgt $\chi(F^+_g) = 2 - 2g = -8$. *Erinnerung:* Henkel können wir zählen, indem wir in G einen Spannbaum wählen; die verbleibenden fünf Kanten entsprechen Henkeln.

Alternativ können wir den Graphen G von oben betrachten und so in der Ebene zeichnen; das hilft erfahrungsgemäß der Anschauung. Versuchen Sie es!

(4) Wir finden $F/\langle \rho \rangle \cong F^+_3 = F^+_{3,0}$. *Erinnerung:* Man kann Orientierbarkeit, Euler–Charakteristik und Randkomponenten bestimmen und den Klassifikationssatz anwenden. Etwas leichter gelingt es wohl mit Anschauung: Wir schneiden F in zwei Hälften entlang der y–z–Ebene und verkleben die Randkreise.

(5) Wir finden $F/\langle \sigma \rangle \cong F^+_{1,4}$, ein Torus mit vier Löchern. *Erinnerung:* Man kann Orientierbarkeit, Euler–Charakteristik und Randkomponenten bestimmen und den Klassifikationssatz anwenden. Etwas leichter gelingt es wohl mit Anschauung: Wir schneiden F in zwei Hälften entlang der y–z–Ebene.

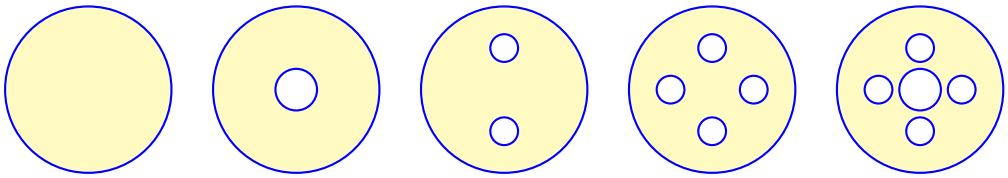
(6) Wir finden $F/\langle \tau \rangle \cong F^-_5$, also die zugehörige nicht-orientierbare Fläche. Der Homöomorphismus $\tau : F \to F$ kehrt die Orientierung um. Wir können $F = |K|$ so triangulieren, dass τ eine simpliziale Abbildung wird, also jeder Simplex auf einen Simplex abgebildet wird. Im Quotienten werden diese beiden zusammengefasst, also $\chi(F/\langle \tau \rangle) = \chi(F)/2 = -4$. Die Fläche $F/\langle \tau \rangle$ ist geschlossen ($r = 0$) und nicht orientierbar ($\varepsilon = -$), laut Klassifikationssatz also homöomorph zur Modellfläche F^-_5.

(8) Wir wählen einen Spannbaum $T \subset G$ aus e Ecken und $e-1$ Kanten. Seine ε–Umgebung ist homöomorph zu einem Ball: Dies sieht man per Induktion über e durch Einklappen von Blättern. An diesen Ball werden nun $k-(e-1)$ Vollzylinder angeklebt. Wir erhalten den Henkelkörper H_g mit $g = 1 - e + k = 1 - \chi(G)$. Für die Randfläche gilt demnach $F := \delta K \cong F^+_g$ und somit $\chi(F) = 2 - 2g = 2\chi(K) = 2\chi(G)$.

Im Beispiel (1) ist $e = 8$ und $k = 12$, also $g = 5$. Im Beispiel (7) ist $e = 20$ und $k = 30$, also $g = 11$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K6i. Scheiben mit Löchern und einige ihrer Quotienten. In der Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sei $X = \bar{B}(0,2)$ sowie $Y = X \smallsetminus B(0,1/2)$ und $Z = X \smallsetminus B(\pm\mathrm{i}, 1/3)$ und $W = Z \smallsetminus B(\pm 1, 1/3)$ und $V = Y \cap W$ eine Kreisscheibe mit null, ein, zwei, vier, fünf Löchern.



Übung K6M. Untersuchen Sie jeden der folgenden Quotientenräume: Ist dies eine Fläche? (kompakt? zusammenhängend? geschlossen?) Wenn ja, welche? Wenn nein, warum nicht?

(1) Die Quotientenräume $X /\!\!/ \partial X$ und $Y /\!\!/ \partial Y$ und $Z /\!\!/ \partial Z$ durch Zusammenschlagen.

Bei den folgenden Quotienten werden jeweils Randpunkte z wie angegeben verklebt:

(2) $X/_{z\sim -z}$
(3) $X/_{z\sim \bar{z}}$
(4) $Y/_{z\sim \bar{z}}$
(5) $Y/_{z\sim -z}$
(6) $Y/_{z\sim z/|z|^2}$
(7) $Y/_{z\sim 1/z}$
(8) $Z/_{z\sim \bar{z}}$
(9) $Z/_{z\sim -z}$
(10) $W/_{z\sim \bar{z}}$
(11) $W/_{z\sim -z}$
(12) $V/_{z\sim \bar{z}}$
(13) $V/_{z\sim -z}$

✻ **K6M.** (1a) Wir erhalten $X /\!\!/ \partial X \cong \mathbb{S}^2$; allgemein gilt $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$ (F1R). (1b) Im Punkt $* = [\partial Y]$ sieht der Quotient aus wie ein Doppelkegel. Insbesondere trennt $*$ kleine zusammenhängende Umgebungen, also ist $Y /\!\!/ \partial Y$ nicht lokal homöomorph zur (Halb-)Ebene. (1c) Hier gilt sinngemäß dasselbe wie in (1b).

(2) Wir erhalten $X/_\sim \cong \mathbb{RP}^2$; als Flächenwort $\mathbb{D}^2/\langle aa \rangle$, siehe K3D für einen Homöomorphismus.

(3) Wir erhalten $X/_\sim \cong \mathbb{S}^2$; als Flächenwort $\mathbb{D}^2/\langle aa^{-1} \rangle$, siehe K3D für einen Homöomorphismus.

(4) Wir erhalten $Y/_\sim \cong \mathbb{S}^2$, anschaulich analog zu (3); als Flächenwort $\mathbb{D}^2/\langle aa^{-1}bcc^{-1}b^{-1} \rangle$ durch Aufschneiden entlang eines Radius b. Die folgenden Fragen kann man mit diesem Trick ebenso beantworten.

(5) Wir erhalten $Y/_\sim \cong \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2 \cong F_1^-$, also die Kleinsche Flasche, anschaulich als verbundene Summe analog zu (2); alternativ (und vermutlich leichter) als Flächenwort $\mathbb{D}^2/\langle aabccb^{-1} \rangle$.

(6) Wir erhalten $Y/_\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$: anschaulich leicht, ebenso als Flächenwort $\mathbb{D}^2/\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

(7) Wir erhalten $Y/_\sim \cong F_1^-$: anschaulich nicht so leicht, wesentlich leichter als Flächenwort $\mathbb{D}^2/\langle abab^{-1} \rangle$.

(8) Wir erhalten $Z/_\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$: anschaulich wie in (3) mit Ankleben eines Henkels.

(9) Wir erhalten $Z/_\sim \cong F_2^-$: anschaulich wie in (2), Kreuzhaube und verdrehter Henkel.

(10) Wir erhalten $W/_\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$: anschaulich wie in (3,8) mit Ankleben eines Henkels.

(11) Wir erhalten $W/_\sim \cong F_4^-$: anschaulich wie in (2,9), eine Kreuzhaube und zwei verdrehte Henkel.

(12) Wir erhalten $V/_\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$: anschaulich wie in (3,8) mit Ankleben eines Henkels.

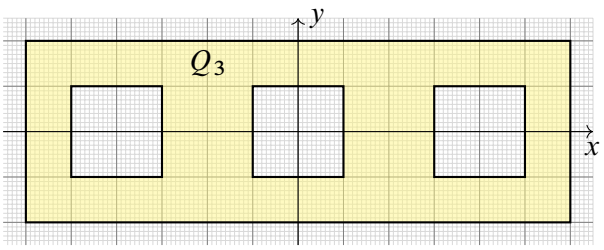
(13) Wir erhalten $V/_\sim \cong F_5^-$: anschaulich wie in (2,9), zwei Kreuzhauben und zwei verdrehte Henkel.

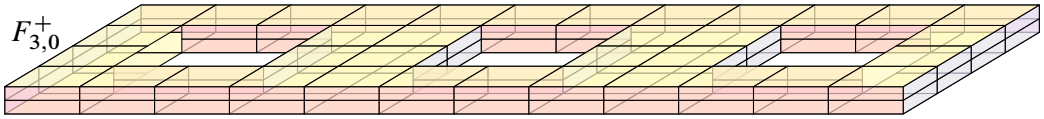
Viele Wege führen zum Ziel. Da diese Fragen zunächst nur auf das Ergebnis zielen, können Sie die Antwort intuitiv erraten… oder wiedererkennen… oder ausrechnen! Manchmal genügt die Anschauung, andermal brauchen Sie Werkzeug. Die Antwort nachvollziehbar zu *erklären* oder zu *begründen* ist wesentlich kniffliger.

Das Rechnen mit Flächenwörtern haben wir zur Klassifikation geschlossener Flächen $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle \cong F_g^\pm$ genutzt. Die Übungen zeigen zahlreiche Beispiele und Illustrationen. Hier sehen Sie weitere Anwendungen, in denen dieser Kalkül effizient Klarheit schafft, insbesondere wenn unsere unmittelbare Anschauung versagt.

Alternativ kann man die Räume (Flächen) triangulieren und so die Euler–Charakteristik, Orientierbarkeit und Randkomponenten bestimmen. Manchmal bietet sich das an, hier ist es eher mühsam. Auch die Wahl des richtigen / effizienten / bequemen Werkzeugs ist eine Fähigkeit, die trainiert werden muss.

§K6j. Flächen und Quotienten. Wir betrachten weiterhin unsere Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$. Die geschlossenen Flächen $F^+_g = F^+_{g,0}$ haben wir in K:20 kubisch dargestellt. Diese Modelle sind zudem symmetrisch bezüglich Spiegelung an jeder der drei Koordinatenebenen.





Übung K6N. Sind folgende Quotienten Flächen? homöomorph zu welchem Modell $F^{\pm}_{g,r}$?

(a) Q_g modulo $(x,y) \sim (-x,y)$
(b) Q_g modulo $(x,y) \sim (x,-y)$
(c) Q_g modulo $(x,y) \sim (-x,-y)$
(1) F^+_g modulo $(x,y,z) \sim (-x,y,z)$
(2) F^+_g modulo $(x,y,z) \sim (x,-y,z)$
(3) F^+_g modulo $(x,y,z) \sim (x,y,-z)$
(4) F^+_g modulo $(x,y,z) \sim (-x,-y,z)$
(5) F^+_g modulo $(x,y,z) \sim (-x,y,-z)$
(6) F^+_g modulo $(x,y,z) \sim (x,-y,-z)$
(7) F^+_g modulo $(x,y,z) \sim (-x,-y,-z)$

Diskutieren Sie zunächst die einfachen Fälle $g = 0,1,2,3$: Hier helfen gute Skizzen, die Quotienten zu finden und zu begründen. Formulieren Sie dann die allgemeine Regel für alle $g \in \mathbb{N}$. Noch anspruchsvoller ist es, möglichst explizite Homöomorphismen zu finden.

✻ **K6N.** Als Quotienten von Q_{2k} bzw. Q_{2k+1} finden wir (a) $F^+_{0,k+1}$, (b) $F^+_{0,1} \cong \mathbb{D}^2$, (c) $F^+_{0,k+1}$ bzw. $F^+_{0,k+2}$.

Frage (7) ist klar, denn $F^+_g/\{\pm\mathrm{id}\} = F^-_g$ nach Definition. Die anderen bereiten einige Überraschungen:

Als Quotienten der Sphäre $F^+_0 \cong \mathbb{S}^2$ erhalten wir (1,2,3) $F^+_{0,1} \cong \mathbb{D}^2$, (4,5,6) $F^+_{0,0} \cong \mathbb{S}^2$ und (7) $F^-_0 \cong \mathbb{RP}^2$.

Als Quotienten des Torus $F^+_1 \cong T$ erhalten wir (1,2,3) $F^+_{0,2} \cong$ Zylindermantel $\cong$ Kreisring, (4) $F^+_{1,0} \cong$ Torus, (5,6) $F^+_{0,0} \cong$ Sphäre, sowie (7) $F^-_1 \cong$ Kleinsche Flasche.

Als Quotienten von F^+_2 erhalten wir (1) $F^+_{1,1}$, (2,3) $F^+_{0,3}$, (4,5) $F^+_{1,0} \cong$ Torus, (6) $F^+_{0,0} \cong$ Sphäre.

Als Quotienten von F^+_3 erhalten wir (1) $F^+_{1,2}$, (2,3) $F^+_{0,4}$, (4) $F^+_{2,0}$, (5) $F^+_{1,0} \cong$ Torus, (6) $F^+_{0,0} \cong$ Sphäre.

Als Quotienten von F^+_{2k} erhalten wir (1) $F^+_{k,1}$, (2,3) $F^+_{0,2k+1}$, (4,5) $F^+_{k,0}$, (6) $F^+_{0,0} \cong$ Sphäre.

Als Quotienten von F^+_{2k+1} erhalten wir (1) $F^+_{k,2}$, (2,3) $F^+_{0,2k+2}$, (4) $F^+_{k+1,0}$, (5) $F^+_{k,0}$, (6) $F^+_{0,0} \cong$ Sphäre.

Den Quotienten $q : F^+_g \twoheadrightarrow F^+_g/\langle\sigma\rangle =: Q$ bezüglich der Spiegelung bzw. Drehung σ bestimmen wir so: Wir zerlegen $F^+_g = A \cup B$ in zwei kompakte Teilflächen A, B mit $\sigma(A) = B$ und gemeinsamen Rand $A \cap B = \partial A = \partial B$. In A werden nur noch Punkte auf dem Rand identifiziert, gemäß $x \sim y$ für $x, y \in \partial A$ und $\sigma(x) = y$. Mit dieser Konstruktionsvorschrift erkennt man die Fläche $Q \cong F^{\varepsilon}_{h,r}$ jeweils leicht. Dabei nutzen wir den Flächenklassifikationssatz K3I implizit oder explizit: Wir triangulieren Q und bestimmen die Euler–Charakteristik $\chi(Q)$, die Orientierbarkeit $\varepsilon(Q)$ und Anzahl $r(Q)$ der Randkomponenten.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§K6k. Einfache Anwendungsbeispiele der Heawood–Ungleichung.

Übung K6O. Sei K ein Simplizialkomplex.

(1) Folgt aus $|K| \cong \mathbb{S}^2$ stets $f_0 \geq 4$ und $f_1 \geq 6$ und $f_2 \geq 4$?
(2) Folgt aus $|K| \cong \mathbb{RP}^2$ stets $f_0 \geq 6$ und $f_1 \geq 15$ und $f_2 \geq 10$?
(3) Folgt aus $|K| \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ stets $f_0 \geq 7$ und $f_1 \geq 21$ und $f_2 \geq 14$?
(4) Wie lautet die Heawood–Ungleichung für die orientierbaren Flächen F_g^+?
Welche Schranken erhalten Sie für das Geschlecht $g = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$?
(5) Konstruieren Sie eine Triangulierung der Fläche F_g^+ vom Geschlecht $g = 100$ durch verbundene Summe. Wie viele Ecken benötigen Sie? Was ist minimal?

✻ **K6O.** (1) Ja, diese Ungleichungen gelten. Die Ungleichung $f_0 \geq 4$ ist klar, denn aus $f_0 \leq 3$ Ecken und höchstens einem Dreieck entsteht keine geschlossene Fläche. (Die Heawood–Ungleichung K.1 sagt das auch.) Wir wissen zudem $2f_1 = 3f_2$ und $2 = \chi(\mathbb{S}^2) = f_0 - f_1 + f_2$, also $4 = 2f_0 - f_2$ und somit $f_2 = 2f_0 - 4 \geq 4$.

(2) Ja, auch diese Ungleichungen gelten. Dank Heawood–Ungleichung (K.1) gilt $f_0 \geq 6$. Aus $2f_1 = 3f_2$ und $1 = \chi(\mathbb{RP}^2) = f_0 - f_1 + f_2$ folgt $2 = 2f_0 - f_2$ und somit $f_2 = 2f_0 - 2 \geq 10$.

(3) Ja, auch diese Ungleichungen gelten. Dank Heawood–Ungleichung (K.1) gilt $f_0 \geq 7$. Aus $2f_1 = 3f_2$ und $0 = \chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = f_0 - f_1 + f_2$ folgt $0 = 2f_0 - f_2$ und somit $f_2 = 2f_0 \geq 14$.

(4) Mit $\chi = 2 - 2g$ gilt $f_0 \geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi}) = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48g})$. Für $g = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ finden wir so die unteren Schranken $f_0 \geq 4, 7, 9, 10, 11, 12, 12, \ldots$

(5) Wir beginnen mit der Sieben-Ecken-Triangulierung T des Torus. Die verbundene Summe $F \mapsto F \sharp T$ fügt einen Henkel an und benötigt 4 weitere Ecken. Für $g \geq 1$ ist $K = T^{\sharp g}$ eine Triangulierung von F_g^+ mit $3 + 4g$ Ecken; für $g = 100$ finden wir so eine Triangulierung mit 403 Ecken. Die Heawood–Ungleichung liefert $f_0 \geq 39$; es klafft eine beachtliche Lücke. Die Arbeiten von Jungerman–Ringel (1980) zeigen, dass es tatsächlich eine Triangulierung mit nur 39 Ecken gibt. Man muss extrem sparsam vorgehen, aber es gelingt!

Übung K6P. (1) Ein Simplizialkomplex K mit $Q = |K| = [-1, 1]^2$ habe f_2 Dreiecke, f_1 Kanten und $f_0 = 13$ Ecken, davon genau vier auf dem Rand. Bestimmen Sie f_1 und f_2.

(2) Dieselbe Frage mit $f_0 = 24$ Ecken, davon genau vier auf dem Rand.

Bemerkung: Wenn Sie möchten, können Sie ein Beispiel zeichnen und alles daran abzählen. Die Zahlen sind jedoch nicht ganz klein, sodass sich die allgemeine Rechnung lohnt.

Bemerkenswert: Alle Beispiele mit dieser Eckenzahl ergeben denselben f–Vektor!

✻ **K6P.** (1) Im Rand ∂Q liegen f_0' Ecken und f_1' Kanten. Wegen $\chi(\partial Q) = 0$ gilt $f_1' = f_0' = 4$. Im Inneren liegen f_0° Ecken, f_1° Kanten und f_2 Dreiecke. Wir wissen $f_0 = f_0' + f_0^\circ = 13$, also $f_0^\circ = 9$, und $f_1 = f_1' + f_1^\circ$ sowie $1 = \chi(Q) = f_0 - f_1 + f_2 = f_0^\circ - f_1^\circ + f_2$, also $f_1^\circ - f_2 = 8$. Schließlich gilt $3f_2 = 2f_1^\circ + f_1'$, denn jedes Dreieck hat drei Kanten, und jede innere Kante liegt in zwei Dreiecken. Wir erhalten so als weitere Gleichung $3f_2 - 2f_1^\circ = 4$. Auflösen ergibt $f_2 = 20$ Dreiecke und $f_1^\circ = 28$ innere Kanten, insgesamt $f_1 = 32$. Abbildung I:18 zeigt ein Beispiel; es entsteht durch zweifache baryzentrische Unterteilung relativ zum Rand.

(2) Wir wissen $f_0 = f_0' + f_0^\circ = 24$, also $f_0^\circ = 20$, und $f_1 = f_1' + f_1^\circ$ sowie $1 = \chi(Q) = f_0 - f_1 + f_2 = f_0^\circ - f_1^\circ + f_2$, also $f_1^\circ - f_2 = 19$. Wie in (1) gilt $3f_2 = 2f_1^\circ + f_1'$. Wir erhalten so als weitere Gleichung $3f_2 - 2f_1^\circ = 4$. Auflösen ergibt $f_2 = 42$ und $f_1^\circ = 61$, also $f_1 = 65$.

§K6l. Homöomorphismen, Atlanten und Dimension.

Übung K6Q. Erlaubt die Sphäre $\mathbb{S}^2$ einen glatten Atlas? und die Würfelfläche $\partial[-1, 1]^3$? (Wir betrachten jede als topologische Mannigfaltigkeit, nicht als Untermannigfaltigkeit.)

Übung K6R. Im Folgenden seien $1 \leq m < n$ natürliche Zahlen. Zur Wiederholung:

(1a) Gibt es stetige Injektionen $[0,1]^m \to [0,1]^n$? (b) Surjektionen? (c) Bijektionen?

(2a) Gibt es stetige Injektionen $\mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$? (b) Surjektionen? (c) Bijektionen?

(3a) Gibt es offene Injektionen $]0,1[\to \mathbb{S}^1$? (b) Surjektionen? (c) Bijektionen?

✻ **K6R.** (1a) Ja, etwa $[0,1]^m \hookrightarrow [0,1]^n : (x_1,\dots,x_m) \mapsto (x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$.

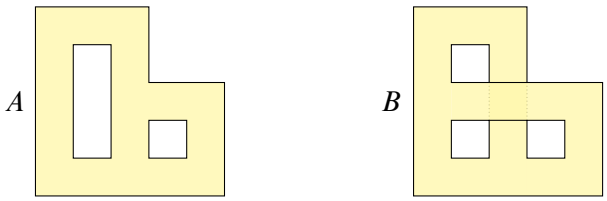
(1b) Ja. Es gibt flächenfüllende Wege $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$, sogenannte *Peano–Kurven*, siehe C6G. Hieraus gewinnen wir iterativ $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^n$ und schließlich $[0,1]^m \twoheadrightarrow [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^n$.

(1c) Nein, das ist unmöglich. Beweis: Wäre die Bijektion $f : [0,1]^m \xrightarrow{\sim} [0,1]^n$ stetig, so wäre f auch abgeschlossen (F1L), also ein Homöomorphismus. Die Räume $[0,1]^m$ und $[0,1]^n$ sind aber nicht homöomorph, da Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Dimension. (Zur topologischen Invarianz der Dimension siehe K1C.)

(2a) Ja, etwa $\mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^n : (x_0,\dots,x_m) \mapsto (x_0,\dots,x_m,0,\dots,0)$. (2b) Ja. Dank (1b) gibt es raumfüllende Wege $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^n$, und damit $\mathbb{S}^m \twoheadrightarrow [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n$. (2c) Nein, das ist unmöglich, siehe (1c): Jede stetige Bijektion $f : \mathbb{S}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ ist ein Homöomorphismus (F1L), und dies ist nur für $m = n$ möglich.

(3a) Ja, etwa $]0,1[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$. (3b) Ja, etwa $]0,1[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{3\pi i t}$. (3c) Nein, das ist unmöglich. Beweis: Die umgekehrte Bijektion $f^{-1} : \mathbb{S}^1 \to]0,1[$ wäre stetig, dank F1L auch abgeschlossen, also ein Homöomorphismus. Aber $\mathbb{S}^1$ und $]0,1[$ sind nicht homöomorph: Die Unterscheidung gelingt mit vielen Invarianten: Kompaktheit, trennende Punkte, Zusammenziehbarkeit, Fundamentalgruppen, ...

§K6m. Produkte von Flächen und Intervallen. Ein kleines aber feines Beispiel:



Übung K6S. (1) Sind die kompakten, berandeten Flächen A und B homöomorph?

(2) Sind die Produkträume $H := A \times [0,1]$ und $K := B \times [0,1]$ homöomorph?

(3) Sind die Produkträume $M := A \times \mathbb{S}^1$ und $N := B \times \mathbb{S}^1$ homöomorph?

(4) Lässt sich M bzw. N in den euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten?

✻ **K6S.** (1) Nein, sind sie nicht, wie wir an ihren geometrischen Rändern erkennen: Es gilt $\partial A \cong 3 \times \mathbb{S}^1$ aber $\partial B \cong \mathbb{S}^1$, also $|\pi_0(\partial A)| = 3$ aber $|\pi_0(\partial B)| = 1$. Dank der topologischen Invarianz des geometrischen Randes (J7I) folgt hieraus $A \ncong B$. Genauer gilt $A \cong F^+_{0,3}$ und $B \cong F^+_{1,1}$, somit $A \ncong B$ dank Flächenklassifikation.

(2) Ja, es gilt $H \cong K$, und beide sind homöomorph zum Modell-Henkelkörper H_2 vom Geschlecht 2.

Erläuterung: Anschaulich entstehen H, K aus A, B durch Aufdicken, als Produkt mit dem Intervall $[0,1]$. Dabei ist H offensichtlich ein Henkelkörper. Bei K können wir einen Henkel verschieben. Obwohl die Flächen $A \ncong B$ verschieden sind, ist dennoch $A \times [0,1] \cong B \times [0,1]$ möglich. Für die allgemeine Regel siehe K6T.

(3) Nein, es gilt $M \ncong N$, wie wir erneut an ihren geometrischen Rändern erkennen: Beide Produkte M und N sind Mannigfaltigkeiten (K1W). Es gilt $\partial M = \partial(A \times \mathbb{S}^1) = (\partial A) \times \mathbb{S}^1 \cup A \times (\partial \mathbb{S}^1) = 3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, also $|\pi_0(\partial M)| = 3$. Hingegen gilt $\partial N = \partial(B \times \mathbb{S}^1) = (\partial B) \times \mathbb{S}^1 \cup B \times (\partial \mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, also $|\pi_0(\partial N)| = 1$.

(4) Wir können $M = A \times \mathbb{S}^1$ als Rotationskörper im $\mathbb{R}^3$ realisieren. Hingegen lässt sich der Produktraum $N = B \times \mathbb{S}^1$ nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten! Hierzu betrachten wir zwei Kurven $C, D \subset B$, die sich in genau einem Punkt transversal schneiden. In $B \times \mathbb{S}^1$ durchstößt die Kurve $C \times \{1\}$ transversal den Torus $D \times \mathbb{S}^1$ in genau einem Punkt. Das ist in $\mathbb{R}^3$ nicht möglich: Nach dem Trennungssatz K5D zerlegt jede Einbettung $F^+_g \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ den Raum $\mathbb{R}^3$ in zwei Gebiete, Inneres und Äußeres.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung K6T. (1) Bestimmen Sie alle zusammenhängenden kompakten Flächen $F^{\pm}_{g,r}$ zu gegebener Euler–Charakteristik $\chi \in \mathbb{Z}$. Gibt es jeweils nur endlich viele? Wie viele sind es?

(2) Klassifizieren Sie einfache Beispiele $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{D}^1$ wie in K6S und zeigen Sie:

$$F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{D}^1 \cong F^{\delta}_{h,s} \times \mathbb{D}^1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r,s = 0, & \varepsilon = \delta, & g = h & \text{oder} \\ r,s \geq 1, & \varepsilon = \delta, & \chi(F^{\varepsilon}_{g,r}) = \chi(F^{\delta}_{h,s}) \end{cases}$$

(3) Versuchen Sie ebenso eine Klassifikation der Produkte $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1$.

✻ **K6T.** (1) Nach Euler–Charakteristik sortiert finden wir die folgenden Flächen. Ihre Anzahl wächst nach einem einfachen aber nicht ganz trivialen Muster: Nochmal ein Dank an die Flächenklassifikation!

χ	Flächen ohne Rand		Flächen mit Rand	
2	$F^+_0 = \mathbb{S}^2$			
1		$F^-_0 = \mathbb{RP}^2$	$F^+_{0,1} = \mathbb{D}^2$	
0	$F^+_1 =$ Torus	$F^-_1 =$ kl.Flasche	$F^+_{0,2} =$ Kreisring	$F^-_{0,1} =$ Möbius–Band
-1		F^-_2	$F^+_{0,3}, F^+_{1,1}$	$F^-_{0,2}, F^-_{1,1}$
-2	F^+_2	F^-_3	$F^+_{0,4}, F^+_{1,2}$	$F^-_{0,3}, F^-_{1,2}, F^-_{2,1}$
-3		F^-_4	$F^+_{0,5}, F^+_{1,3}, F^+_{2,1}$	$F^-_{0,4}, F^-_{1,3}, F^-_{2,2}, F^-_{3,1}$
-4	F^+_3	F^-_5	$F^+_{0,6}, F^+_{1,4}, F^+_{2,2}$	$F^-_{0,5}, F^-_{1,4}, F^-_{2,3}, F^-_{3,2}, F^-_{4,1}$
-5		F^-_6	$F^+_{0,7}, F^+_{1,5}, F^+_{2,3}, F^+_{3,1}$	$F^-_{0,6}, F^-_{1,5}, F^-_{2,4}, F^-_{3,3}, F^-_{4,2}, F^-_{5,1}$
-6	F^+_4	F^-_7	$F^+_{0,8}, F^+_{1,6}, F^+_{2,4}, F^+_{3,2}$	$F^-_{0,7}, F^-_{1,6}, F^-_{2,5}, F^-_{3,4}, F^-_{4,3}, F^-_{5,2}, F^-_{6,1}$

(2) Wann sind für Flächen F, F' die Produkte $F \times \mathbb{D}^1$ und $F' \times \mathbb{D}^1$ homöomorph?

Die Euler–Charakteristik bleibt erhalten (A3S), wegen $\chi(F \times \mathbb{D}^1) = \chi(F) \cdot \chi(\mathbb{D}^1)$ und $\chi(\mathbb{D}^1) = 1$. Dank topologischer Invarianz der Euler–Charakteristik (A3J) ist also $\chi(F) = \chi(F')$ notwendig.

Die Orientierbarkeit bleibt erhalten (K1W und M4S), also ist $\varepsilon(F) = \varepsilon(F')$ notwendig.

Erstaunlicherweise ist dies für berandete Flächen, also $F^{\pm}_{g,r}$ mit $r \geq 1$, bereits hinreichend.

Ein *Henkelkörper* vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}$ entsteht aus dem Würfel $[-1,1]^3$ durch Ankleben von g Henkeln $[-1,1]^3$ vermöge einer anheftenden Abbildung $\{1,\dots,g\} \times [-1,1^3] \supset \{1,\dots,g\} \times \{\pm 1\} \times [-1,1]^2 \hookrightarrow \partial[-1,1]^3$. Ist mindestens einer der Henkel nicht-orientierbar, so nennen wir dies einen *nicht-orientierbaren Henkelkörper* H^-_g, andernfalls einen *orientierbaren Henkelkörper* $H_g = H^+_g$. Das Ergebnis hängt bis auf Homöomorphie tatsächlich nur von g und dem Orientierungsverhalten ab (K1Z). Der Rand $\partial H^+_g = F^+_g$ ist die orientierbare Fläche vom Geschlecht g bzw. $\partial H^-_g = F^-_{2g-1}$ ist die nicht-orientierbare Fläche vom Geschlecht $2g-1$. Für die Euler–Charakteristik gilt in beiden Fällen $\chi(H^{\pm}_g) = 1-g$ und $\chi(\partial H^{\pm}_g) = 2-2g$.

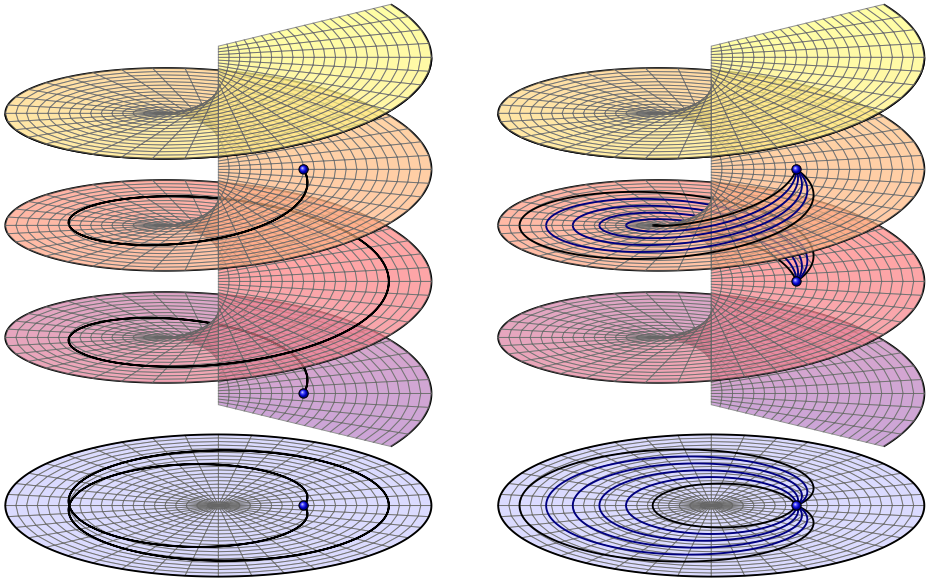
Das Produkt $M = F^{\pm}_{g,r} \times \mathbb{D}^1$ ist eine 3–Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = (\partial F^{\pm}_{g,r}) \times \mathbb{D}^1 \cup F^{\pm}_{g,r} \times \{\pm 1\}$ (K1W). Diese geschlossene Fläche ist homöomorph zur Verdopplung von $F^{\pm}_{g,r}$ (K1V). Das Produkt M selbst ist homöomorph zum Henkelkörper $H^{\pm}_n$ gleicher Charakteristik $\chi(F^{\pm}_{g,r}) = \chi(H^+_n)$, also $2-2g-r = 1-n$ bzw. $1-g-r = 1-n$. Den Homöomorphismus konstruieren wir jeweils durch Verschieben der Henkel; der einfachste Fall wurde in der vorigen Übung diskutiert (K6S).

Für geschlossene Flächen hingegen hat das Produkt $M = F^{\pm}_g \times \mathbb{D}^1$ einen Rand $\partial M = F^{\pm}_g \times \{\pm 1\}$ aus zwei Komponenten (K1W). Auch dies entspricht der Verdopplung von $F^{\pm}_g$ (K1V). Hierdurch unterscheiden sich die Produkte $M = F^{\pm}_g \times \mathbb{D}^1$ von den vorigen Beispielen $F^{\pm}_{g,r} \times \mathbb{D}^1$ und auch untereinander.

(3) Beim Produkt $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1$ bleiben Orientierbarkeit und Randkomponenten erhalten (K1W). Leider wird die Euler–Charakteristik vernichtet (A3S), denn aus $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$ folgt $\chi(F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1) = \chi(F^{\varepsilon}_{g,r}) \cdot \chi(\mathbb{S}^1) = 0$. Die Unterscheidung der Räume $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1$ gelingt jedoch mit der Fundamentalgruppe (L6M), siehe L8F.

TEIL III

Algebraische Topologie



KAPITEL L

Fundamentalgruppen topologischer Räume

§L0. Einführung und Überblick

Gegenstand dieses Kapitels ist die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x_0)$ eines topologischen Raumes X mit Fußpunkt $x_0 \in X$. Wir werden sie definieren und erste wichtige Beispiele berechnen. Zunächst möchte ich den vor uns liegenden Weg skizzieren und motivieren.

§L0a. Worum geht es in der algebraischen Topologie? Die algebraische Topologie untersucht topologische Räume durch die Übersetzung in algebraische Objekte.

Jedem topologischen Raum X wird hierzu ein algebraisches Objekt $F(X)$ zugeordnet, typischerweise eine Gruppe oder je nach Situation auch nur eine Menge wie $\pi_0(X)$ oder sogar ein Ring wie $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$. Zudem wird jeder stetigen Abbildung $g : X \to Y$ ein Homomorphismus $F(g) : F(X) \to F(Y)$ zugeordnet. Diese Zuordnung soll *funktoriell* sein, das heißt, die Komposition stetiger Abbildungen $g : X \to Y$ und $h : Y \to Z$ soll übergehen in die Komposition von Homomorphismen, also $F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ soll dabei übergehen in den identischen Homomorphismus $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$. Wir sagen zusammenfassend, F ist ein *Funktor* von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen (bzw. Mengen, Ringe, ...).

In diesem Kapitel führen wir die *Fundamentalgruppe* ein und lernen so den Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ kennen. Dieser ist, wie der Name andeutet, für die Topologie von fundamentaler Bedeutung. Im nächsten Kapitel werden wir diese Entwicklung durch das duale Konzept der Überlagerungen fortführen und in gewisser Weise vollenden.

Ein solcher Funktor liefert ein algebraisches Abbild des ursprünglich topologischen Sachverhalts. Oft ist das algebraische Abbild gröber, somit leichter zu verstehen, und erlaubt eine Lösung des topologischen Problems. Die Fundamentalgruppe unterscheidet zum Beispiel bequem und präzise alle geschlossenen Flächen (L6N). In günstigen Fällen funktioniert die Übersetzung auch umgekehrt, und die Topologie erleuchtet die Algebra.

Die algebraische Topologie konstruiert und nutzt geeignete Funktoren, um von topologischen Räumen ein algebraisches Abbild zu erstellen, das ausreichend akkurat ist, zumindest für große und interessante Klassen von Fragestellungen. Konstruktion und Anwendung solcher Funktoren sind meist subtil und raffiniert, aber auch von ganz eigener Schönheit.

§L0b. Wegkomponenten. In Kapitel G haben wir den Wegzusammenhang topologischer Räume diskutiert und die Menge $\pi_0(X)$ der Wegkomponenten eingeführt.

Hierzu betrachten wir *Wege* in X, also stetige Abbildungen $\alpha : [0,1] \to X$. Dabei heißt $a = \alpha(0)$ der *Startpunkt* und $b = \alpha(1)$ der *Zielpunkt* von α. Existiert solch ein Weg, so heißen a und b in X *verbindbar*. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Reflexivität: Zu jedem Punkt $a \in X$ läuft der konstante Weg 1_a von a nach a, wobei $1_a(t) = a$ für alle $t \in [0,1]$. Symmetrie: Zu jedem Weg α von a nach b läuft der inverse Weg $\bar\alpha$ von b nach a, wobei $\bar\alpha(t) = \alpha(1-t)$ für alle $t \in [0,1]$. Transitivität: Einen Weg $\alpha : [0,1] \to X$ von a nach b und einen Weg $\beta : [0,1] \to X$ von b nach c verknüpfen wir zu einem Weg $\gamma = \alpha * \beta : [0,1] \to X$ von a nach c, wobei $\gamma(t) = \alpha(2t)$ für $0 \le t \le \frac{1}{2}$ und $\gamma(t) = \beta(2t-1)$ für $\frac{1}{2} \le t \le 1$.

Die Äquivalenzklasse $[a]$ bezüglich Verbindbarkeit nennen wir die *Wegkomponente* von a in X. Die Menge der Wegkomponenten ist $\pi_0(X) := \{\, [a] \mid a \in X \,\}$. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y) : [a] \mapsto [f(a)]$. Hierbei gilt $\pi_0(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}$ und $\pi_0(f \circ g) = \pi_0(f) \circ \pi_0(g)$, wie man sofort nachprüft.

In der Sprache der Kategorien (Kapitel H) bedeutet das: Wir haben einen *Funktor*

$$\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}, \qquad X \mapsto \pi_0(X), \qquad \big(f : X \to Y\big) \mapsto \big(\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)\big)$$

von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Mengen.

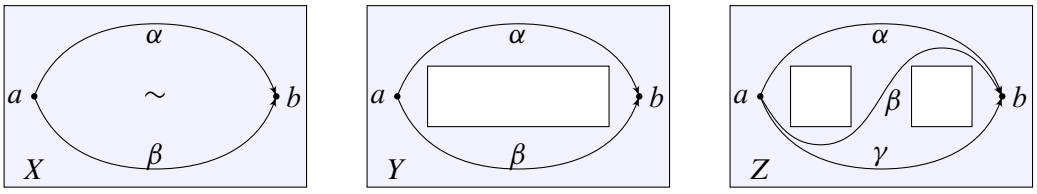
Sind zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ homotop, so gilt $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. Somit hängt $\pi_0(f)$ nur von der Homotopieklasse $[f]$ ab, und wir erhalten einen Funktor

$$\pi_0 : \mathtt{hTop} \to \mathtt{Set}, \qquad X \mapsto \pi_0(X), \qquad \big[f : X \to Y\big] \mapsto \big(\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)\big)$$

auf der Kategorie der topologischen Räumen und Homotopieklassen stetiger Abbildungen.

Der Abbildungsgrad $\deg : \pi_0\mathscr{C}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (J3A) sowie $\pi_0\mathscr{C}(\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n) = \{*\}$ für $k < n$ (I4B) führen bereits zu wichtigen Anwendungen für die Topologie des $\mathbb{R}^n$ (Kapitel J).

§L0c. Mehrfacher Zusammenhang. Wir gehen einen Schritt weiter und fragen nicht nur, *ob* zwei Punkte in X verbindbar sind, sondern auch *wie*. Vereinfachend erlauben wir stetige Deformationen, betrachten also Wege modulo Homotopie bei festen Endpunkten.



Die Abbildung zeigt drei Gebiete $X, Y, Z \subset \mathbb{R}^2$. Das Rechteck ist einfach zusammenhängend (L2S), das heißt, je zwei Punkte $a, b \in X$ lassen sich durch einen Weg verbinden, und alle Wege von a nach b sind homotop. Das Rechteck mit Loch hingegen ist „zweifach zusammenhängend“: Nicht alle Wege sind untereinander homotop, denn man kann oben oder unten herum gehen. Das Rechteck mit zwei Löchern ist „dreifach zusamenhängend“: Man kann „oben herum“ oder „unten herum“ oder „durch die Mitte“ gehen. Aus diesen einfachen Beobachtungen eine präzise Theorie zu entwickeln, ist Ziel dieses Kapitels.

§L0d. Fundamentalgruppen. Die Wege in X modulo Homotopie bilden das *Fundamentalgruppoid* von X (§L1). Um alle betrachteten Wege verknüpfen zu können, wählen wir einen Fußpunkt $x_0 \in X$ und betrachten *Schleifen* in (X, x_0), also geschlossene Wege, die in x_0 beginnen und enden. Wir gelangen so zur *Fundamentalgruppe* (§L2).

Definition L0A. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt.

- Eine *Schleife* in (X, x_0) ist eine stetige Abbildung $\gamma : ([0,1], \{0,1\}) \to (X, x_0)$.
- Die Verknüpfung $*$ von Schleifen ist die für Wege übliche Aneinanderhängung.
- Die Äquivalenz $\sim$ von Schleifen ist die für Wege übliche Homotopie relativ $\{0,1\}$.

Mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen von Schleifen in (X, x_0). Die Verknüpfung $*$ ist wohldefiniert modulo $\sim$, induziert also eine Verknüpfung

$$\cdot : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \quad \text{mit} \quad [\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta].$$

Wie wir sehen werden, ist $(\pi_1(X, x_0), \cdot, 1, {}^{-1})$ eine Gruppe: Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ, das neutrale Element ist die Homotopieklasse $1 = [1_{x_0}]$ des konstanten Weges 1_{x_0}, und das zu $[\alpha]$ inverse Element ist die Homotopieklasse $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$ des inversen Weges $\bar{\alpha}$.

Wir nennen $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ die *Fundamentalgruppe* des punktierten Raumes (X, x_0).

Im Gegensatz zu $\pi_0(X)$ trägt $\pi_1(X, x_0)$ eine Verknüpfung. Diese algebraische Struktur erlaubt eine wesentlich genauere Untersuchung topologischer Fragestellungen.

§L0e. Funktorialität. Ein *punktierter Raum* (X, x_0) ist ein Paar aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x_0 \in X$. Eine stetige Abbildung $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Mit der üblichen Komposition von Abbildungen erhalten wir so die Kategorie $\mathtt{Top}_*$ der punktierten Räume.

Jede Schleife α in (X, x_0) wird unter f abgebildet auf die Schleife $f \circ \alpha$ in (Y, y_0). So induziert f den Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$. Hierbei gilt $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$.

Satz L0B. *Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor*

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}, \qquad & (X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0), \\ & \big(f : (X, x_0) \to (Y, y_0)\big) \mapsto \big(\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)\big) \end{aligned}$$

von der Kategorie der punktieren topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen.

Sind $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homotop relativ $\{x_0\}$, so gilt $\pi_1(f) = \pi_1(g)$. Somit hängt $\pi_1(f)$ nur von der Homotopieklasse $[f]$ ab, und wir erhalten einen Funktor

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathtt{hTop}_* \to \mathtt{Grp}, \qquad & (X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0), \\ & \big[f : (X, x_0) \to (Y, y_0)\big] \mapsto \big(\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)\big) \end{aligned}$$

auf der Kategorie der punktierten Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen.

Funktorialität ist überaus nützlich. Als erste Folgerung haben homöomorphe Räume isomorphe Fundamentalgruppen (L2E): Jeder Homöomorphismus $(f, g) : (X, x_0) \cong (Y, y_0)$ induziert einen Gruppenisomorphismus $(\pi_1(f), \pi_1(g)) : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$.

Dank Homotopie-Invarianz (L2G) gilt dies auch für jede Homotopie-Äquivalenz (L2N). Eindrückliches Beispiel: Aus $(\iota, r) : \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^*$ folgt $(\pi_1(\iota), \pi_1(r)) : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L0f. Die Qual der Wahl des Fußpunktes. Die willkürliche Wahl eines Fußpunktes $x_0 \in X$ und die Betrachtung von Schleifen in (X, x_0) vereinfacht die Situation zunächst, und für Definition L0A drängt sie sich geradezu auf. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ hängt nun aber nicht nur vom topologischen Raum X ab, sondern auch vom gewählten Fußpunkt x_0. Der Raum X hat also nicht nur eine Fundamentalgruppe sondern viele, genau eine für jeden Fußpunkt! Glücklicherweise sind innerhalb jeder Wegkomponente von X die Fundamentalgruppen untereinander isomorph (L2B). Leider gibt es keinen *natürlichen* Isomorphismus zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ für verschiedene Fußpunkte $x_0 \neq x_1$ in X. Wir können diese Gruppen nicht als gleich betrachten, sondern nur als isomorph.

§L0g. Erste Beispiele und Anwendungen. Zur Bestimmung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ eines Raumes (X, x_0) gibt es im Wesentlichen drei Berechnungsmethoden:

(1) Durch *Vergleich* mit einfacheren Räumen, dank Homotopie-Invarianz.
(2) Durch *Überdeckung* mit einfacheren Räumen, dank Seifert–van Kampen.
(3) Durch *Überlagerung* mit einfacheren Räumen, dank Galois–Korrespondenz.

In diesem Kapitel betrachten wir nach der allgemeinen Definition (§L2) besonders schöne Räume, nämlich offene Mengen $X \subset \mathbb{R}^n$ (§L4) und Polyeder $X = |K|$ (§L6). Die Fundamentalgruppen berechnen wir hier bequem durch polygonale Wege und polygonale Homotopien. Hiermit gelingt uns folgende kleine, aber feine Auswahl von Berechnungen:

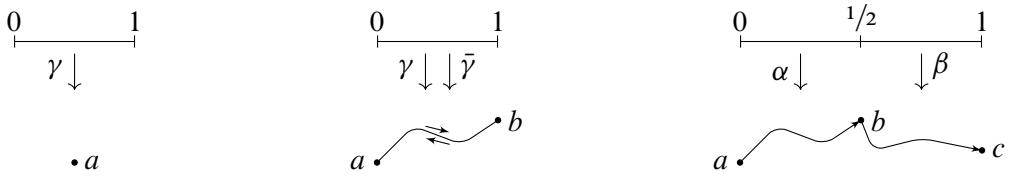
Topologischer Raum	Fundamentalgruppe (bis auf Isomorphie)	
$X \simeq *$ zusammenziehbar	$\{1\}$	L2N
$\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$	$\{1\}$	L2U
$\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^*$	$(\mathbb{Z}, +)$	L4C
$\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{a_1, \ldots, a_g\}$	$\langle s_1, \ldots, s_g \mid - \rangle$	L4D
$\mathbb{R}^n \smallsetminus \{a_1, \ldots, a_g\}$, $n \geq 3$	$\{1\}$	L4E
zshgd. Graph K, endlich	$\langle s_1, \ldots, s_g \mid - \rangle$, mit $\chi(K) = 1 - g$	L6D
$\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2/\{\pm\}$	$(\mathbb{Z}/2, +)$	L6L
$\mathbb{RP}^n$, $n \geq 2$	$(\mathbb{Z}/2, +)$	L6T
$\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2 \mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$	$(\mathbb{Z}, +)$	L6U
$\mathrm{GL}_3^+ \mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$	$(\mathbb{Z}/2, +)$	L6U
$\mathrm{GL}_2 \mathbb{C} \simeq \mathrm{U}_2 \mathbb{C} \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$	$(\mathbb{Z}, +)$	L8I
Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$	L2O
Kleinsche Flasche	$\langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$	L6M
orientierbare Fläche F_g^+	$\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$	L6M
nicht-orientierbare Fläche F_g^-	$\langle c_0, c_1, \ldots, c_g \mid c_0 c_0 c_1 c_1 \cdots c_g c_g \rangle$	L6M
berandete Fläche $F_{g,r}^+$, $r \geq 1$	$\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, d_2, \ldots, d_r \mid - \rangle$	L6H
berandete Fläche $F_{g,r}^-$, $r \geq 1$	$\langle c_0, c_1, \ldots, c_g, d_2, \ldots, d_r \mid - \rangle$	L6H

Hieraus folgt die Invarianz der Euler–Charakteristik (A3J) für kompakte Graphen (L6G) und Flächen (L6O). Durch π_1 lassen sich alle kompakten Flächen bis auf Homotopie-Äquivalenz klassifizieren, die geschlossenen Flächen sogar bis auf Homöomorphie!

§L1. Das Fundamentalgruppoid eines Raumes

Zu einem Raum X mit Fußpunkt $x_0 \in X$ besteht die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ aus Homotopieklassen von Schleifen in (X,x_0). Hierzu benötigen wir ein paar allgemeine Vorüberlegungen zu Homotopien; diese gelten nicht nur für Schleifen in (X,x_0), sondern wörtlich genauso für alle Wege in X. Daher beginne ich mit dem allgemeineren Fall des Fundamentalgruppoids $\Pi(X)$ und spezialisiere in §L2 zur Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$.

§L1a. Wege. Zur Erinnerung (§G2): Ein *Weg* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$. Dabei heißt $a = \gamma(0)$ der *Startpunkt* und $b = \gamma(1)$ der *Zielpunkt*. Wir sagen auch, γ läuft von a nach b in X, oder γ verbindet a mit b in X.



Definition L1A. Im Raum X bezeichnen wir die Menge aller Wege (von a nach b) mit

$$P(X) := \mathscr{C}([0,1],X) = \{\gamma : [0,1] \to X \text{ stetig}\},$$
$$P(X,a,b) := \{\gamma : [0,1] \to X \text{ stetig} \mid \gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b\}.$$

Hierauf definieren wir drei einfache aber sehr nützliche Operationen:

(1) Konstanten $X \hookrightarrow P(X) : a \mapsto 1_a$ wobei $1_a : [0,1] \to X : t \mapsto a$.
(2) Umkehrung $\bar{}: P(X,a,b) \xrightarrow{\sim} P(X,b,a)$ ist gegeben durch $\bar\gamma(t) = \gamma(1-t)$.
(3) Verknüpfung $* : P(X,a,b) \times P(X,b,c) \to P(X,a,c)$ ist gegeben durch

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \le t \le \tfrac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } \tfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Bemerkung. Die paarweise Verknüpfung $\gamma_1 * \gamma_2$ kann iteriert werden. Es ist gelegentlich nützlich, gleich die n–fache Verknüpfung auf der äquidistanten Unterteilung zu definieren. Eine Folge von Wegen $\gamma_1,\dots,\gamma_n : [0,1] \to X$ heißt *verknüpfbar*, wenn $\gamma_k(1) = \gamma_{k+1}(0)$ für alle $k = 1,\dots,n-1$ gilt. In diesem Fall definieren wir die *Verknüpfung* $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_n$ als den Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(t) = \gamma_k(nt-k+1)$ für $k-1 \le nt \le k$ und $k = 1,\dots,n$. Für $n = 2$ erhalten wir die paarweise Verknüpfung $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$. Für $n = 1$ gilt $\gamma = \gamma_1$, und für $n = 0$ gilt $\gamma = 1_a$, wobei wir nur noch den Punkt $a \in X$ vorgeben müssen.

Bemerkung. Einen Weg α von a nach b notieren wir auch kurz als $\alpha : a \to b$.

- Den konstanten Weg in a schreiben wir $1_a : a \to a$.
- Den zu einem Weg $\alpha : a \to b$ inversen Weg schreiben wir $\bar\alpha : b \to a$.
- Die Verknüpfung von $\alpha : a \to b$ und $\beta : b \to c$ schreiben wir $\alpha * \beta : a \to c$.

Die n–fache Verknüpfung $a_0 \xrightarrow{\gamma_1} a_1 \dots \xrightarrow{\gamma_n} a_n$ entspricht dann $a_0 \xrightarrow{\gamma_1 * \dots * \gamma_n} a_n$. Diese graphische Schreibweise ist gelegentlich nützlich. Zu jeder Aneinanderhängung von Wegen erhält man den inversen Weg durch Umkehrung aller Pfeile, wobei gilt:

$$\overline{\gamma_1 * \cdots * \gamma_n} = \overline{\gamma_n} * \cdots * \overline{\gamma_1}.$$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L1b. Homotopie von Wegen bei festen Endpunkten.** Abbildung L:1 zeigt Wege $\alpha,\alpha',\beta,\gamma : [0,1] \to X$ von a nach b. Hierbei sind α und α' äquivalent, denn sie sind homotop relativ zu den Endpunkten $\{0,1\}$. Hingegen sind α,β,γ untereinander nicht äquivalent. ☜

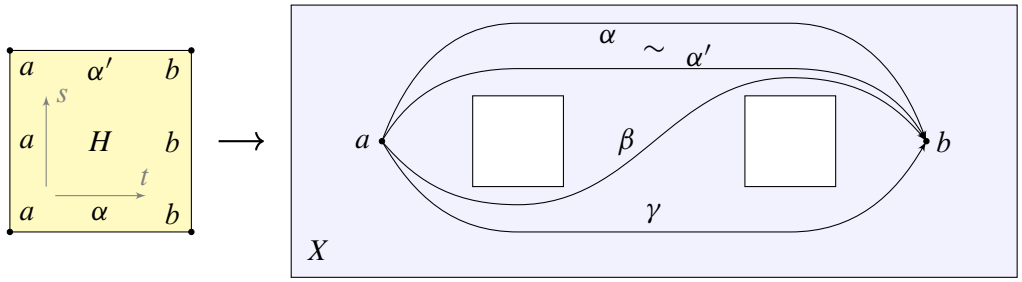


ABBILDUNG L:1. Homotopie von Wegen in X bei festen Endpunkten a und b

✍ **Definition L1B.** Zwei Wege $\alpha,\alpha' \in P(X,a,b)$ heißen *äquivalent*, ausführlich: *homotop bei festen Endpunkten*, wenn eine stetige Abbildung $H : [0,1]\times[0,1] \to X$ existiert mit $H(0,t) = \alpha(t)$ und $H(1,t) = \alpha'(t)$ sowie $H(s,0) = a$ und $H(s,1) = b$ für alle $s,t \in [0,1]$. Wir schreiben $H : \alpha \simeq \alpha'$ rel $\{0,1\}$, kurz $H : \alpha \sim \alpha'$, kürzer $\alpha \sim \alpha'$, graphisch wie in L:1. ✍

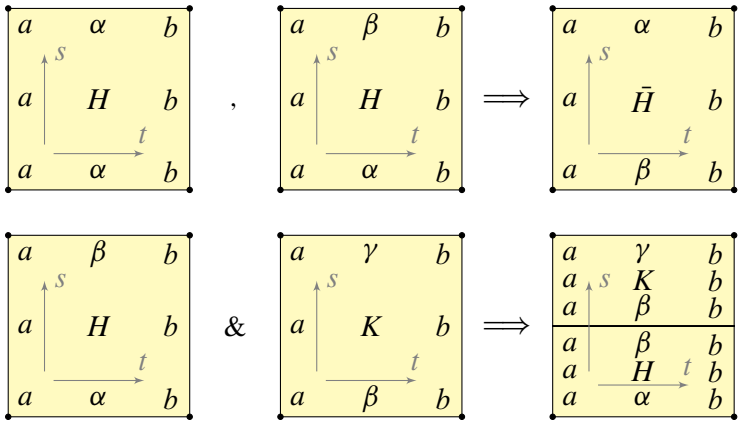


ABBILDUNG L:2. Nachweis von Reflexivität, Symmetrie und Transitivität

☞ *Reflexivität:* Für jeden Weg $\alpha : [0,1] \to X$ gilt $H : \alpha \sim \alpha$ für die in s konstante Homotopie $H : [0,1]\times[0,1] \to X : H(s,t) \mapsto \alpha(t)$. ☜

Symmetrie: Aus jeder Homotopie $H : \alpha \sim \beta$ folgt $\bar{H} : \beta \sim \alpha$ für die in s umgekehrte Homotopie $\bar{H} : [0,1]\times[0,1] \to X : (s,t) \mapsto H(1-s,t)$.

Transitivität: Aus Homotopien $H : \alpha \sim \beta$ und $K : \beta \sim \gamma$ folgt $H * K : \alpha \sim \gamma$ durch die in s verknüpfte Homotopie, wie in Abbildung L:2 illustriert:

$$H * K = H \underset{1}{*} K : [0,1]\times[0,1] \to X : (s,t) \mapsto \begin{cases} H(2s,t) & \text{für } 0 \le s \le \tfrac{1}{2}, \\ K(2s-1,t) & \text{für } \tfrac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Die Stetigkeit von $H * K$ folgt aus dem Verklebesatz (E1P).

☞ **Bemerkung.** Das Festhalten beider Endpunkte ist wesentlich; andernfalls wäre jeder Weg ☜ $\gamma \in P(X,a,b)$ zusammenziehbar vermöge $H(s,t) = \gamma((1-s)t)$ mit $H_0 = \gamma$ und $H_1 = 1_a$.

✍ **Proposition L1C.** *(0) Äquivalenz von Wegen ist eine Äquivalenzrelation auf $P(X,a,b)$. Die Quotientenmenge bezeichnen wir mit $\Pi(X) := P(X)/\sim$ bzw. $\Pi(X,a,b) := P(X,a,b)/\sim$.* ✍

(1) Aus $\alpha \sim \beta$ folgt $\bar\alpha \sim \bar\beta$. Die Wegumkehr definiert also eine wohldefinierte Abbildung

$$^{-}\colon \Pi(X,a,b) \to \Pi(X,b,a) \quad \textit{mit} \quad \overline{[\alpha]} := [\bar\alpha].$$

(2) Aus $\alpha \sim \alpha'$ in $P(X,a,b)$ und $\beta \sim \beta'$ in $P(X,b,c)$ folgt $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ in $P(X,a,c)$. Die Aneinanderhängung von Wegen definiert also eine wohldefinierte Verknüpfung

$$\cdot\colon \Pi(X,a,b) \times \Pi(X,b,c) \to \Pi(X,a,c) \quad \textit{mit} \quad [\alpha]\cdot[\beta] := [\alpha * \beta].$$

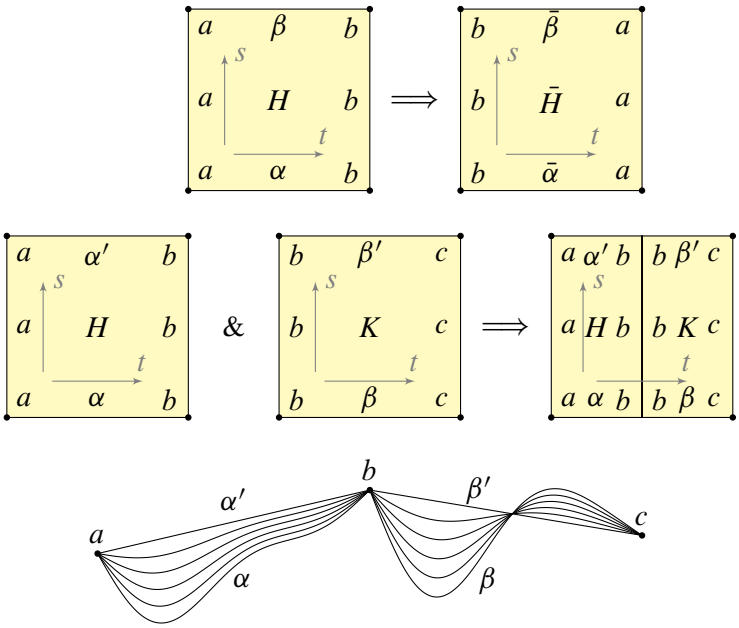


ABBILDUNG L:3. Homotopie ist verträglich mit Inversion und Verknüpfung

☞ BEWEIS / ÜBUNG. Reflexivität, Symmetrie und Transitivität haben wir oben geklärt. ☜

Inversion: Aus jeder Homotopie $H : \alpha \sim \beta$ folgt $\bar H : \bar\alpha \sim \bar\beta$ für die in t umgekehrte Homotopie $\bar H =: [0,1]\times[0,1] \to X : (s,t) \mapsto H(s,1-t)$.

Verknüpfung: Aus Homotopien $H : \alpha \sim \alpha'$ und $K : \beta \sim \beta'$ folgt $H * K : \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ durch die in t verknüpfte Homotopie, wie in Abbildung L:3 illustriert:

$$H * K = H \underset{2}{*} K : [0,1]\times[0,1] \to X : (s,t) \mapsto \begin{cases} H(s,2t) & \text{für } 0 \le t \le \tfrac12, \\ K(s,2t-1) & \text{für } \tfrac12 \le t \le 1. \end{cases}$$

Die Stetigkeit von $H * K$ folgt aus dem Verklebesatz (E1P). Die Inversion und die Verknüpfung von Wegen sind demnach wohldefiniert modulo Homotopie. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L1c. Das Fundamentalgruppoid. Für Wege kennen wir zwei wichtige Konzepte: Homotopie und Verknüpfung. Ihr Zusammenspiel gebiert eine algebraische Struktur:

Satz L1D. *Jeder topologische Raum X definiert eine Kategorie $\Pi(X)$:*

(a) Objekte sind die Punkte $a, b, c, d, \ldots \in X$ des Raumes X.
(b) Morphismen $[\alpha] : a \to b$ sind die Wegeklassen von a nach b in X.
(c) Die Verknüpfung ist die Aneinanderhängung von Wegeklassen gemäß L1C.

Diese Verknüpfung erfreut sich folgender Eigenschaften:

(1) Identität: Für $\alpha : a \to b$ gilt $1_a * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * 1_b$, also

$$[1_a] \cdot [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] \cdot [1_b].$$

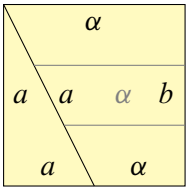
(2) Inversion: Für $\alpha : a \to b$ und $\bar\alpha : b \to a$ gilt $\alpha * \bar\alpha \sim 1_a$ und $\bar\alpha * \alpha \sim 1_b$, also

$$[\alpha] \cdot [\bar\alpha] = [1_a] \quad \text{und} \quad [\bar\alpha] \cdot [\alpha] = [1_b].$$

(3) Assoziativität: Für $a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} d$ gilt $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$, also

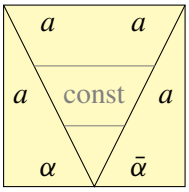
$$([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]).$$

BEWEIS / ÜBUNG. (1) *Identität* gilt vermöge der Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit



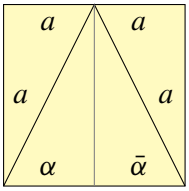
$$H(s,t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ \alpha(\frac{2t-1+s}{1+s}) & \text{für } \frac{1-s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

(2) *Inversion* gilt vermöge der Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit



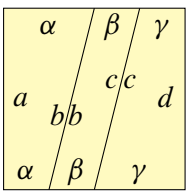
$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ \alpha(1-s) & \text{für } \frac{1-s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ \alpha(2-2t) & \text{für } \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Alternativ, statt *erst-laufen-dann-warten* genügt hier ebenso *erst-warten-dann-laufen:*



$$H(s,t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \le t \le \frac{s}{2}, \\ \alpha(2t-s) & \text{für } \frac{s}{2} \le t \le \frac{1}{2}, \\ \alpha(2-2t-s) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1-\frac{s}{2}, \\ a & \text{für } 1-\frac{s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

(3) *Assoziativität* gilt vermöge der Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit



$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1+s}{4}, \\ \beta(4t-1-s) & \text{für } \frac{1+s}{4} \le t \le \frac{2+s}{4}, \\ \gamma(\frac{4t-2-s}{2-s}) & \text{für } \frac{2+s}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Somit hat $(\Pi(X), *)$ die behaupteten Eigenschaften. □

Definition L1E. Wir nennen $\Pi(X)$ das *Fundamentalgruppoid* des Raumes X. Allgemein ist ein *Gruppoid* $\mathtt{G}$ eine Kategorie, in der jeder Morphismus invertierbar ist. Ein *Gruppoidhomomorphismus* ist ein Funktor zwischen Gruppoiden. Diese bilden die Kategorie $\mathtt{Grpoid}$.

Bemerkung. Hat das Gruppoid $\mathtt{G}$ nur ein Objekt, $\mathrm{Ob}_{\mathtt{G}} = \{x\}$, so besteht $\mathtt{G}$ nur aus der Gruppe $G = \mathrm{Aut}(x) = \mathrm{Mor}_{\mathtt{G}}(x,x)$. Umgekehrt können wir jedes Gruppoid $\mathtt{G}$ als verallgemeinerte Gruppe betrachten: Zwar sind nicht alle Paare von Morphismen verknüpfbar, doch für verknüpfbare gilt stets Assoziativität, und es gibt neutrale und inverse Elemente.

Bemerkung L1F. Man beachte zu Satz L1D, dass in $P(X)$ nur die Äquivalenz „$\sim$“ gilt, im Quotienten $\Pi(X)$ hingegen echte Gleichheit „$=$“. Das ist der Zweck des Quotienten!

Die Verknüpfung auf $P(X)$ bildet kein Gruppoid, nicht einmal eine Kategorie: Der konstante Weg ist nicht neutral, der umgekehrte Weg ist nicht invers, und die Verknüpfung ist nicht assoziativ; dies gilt erst nach Quotientenbildung modulo Homotopie. (Wir können mit etwas Mühe immerhin die Assoziativität auf $P(X)$ retten, siehe L8P.)

Konvention. Für die Verknüpfung von (Homotopieklassen von) Wegen ist

$$\cdot : \Pi(X,a,b) \times \Pi(X,b,c) \to \Pi(X,a,c) : [\alpha]\cdot[\beta] := [\alpha * \beta]$$

eine natürliche Schreibweise. Sie läuft jedoch der üblichen Verknüpfungskonvention in (Links-)Kategorien zuwider. Für diese müsste man die Komposition definieren als

$$\circ : \Pi(X,b,c) \times \Pi(X,a,b) \to \Pi(X,a,c) : [\beta]\circ[\alpha] := [\alpha * \beta].$$

Ich halte die erste Schreibweise für bequemer. Das Problem löst sich in Wohlgefallen auf, wenn wir neben den üblichen Linkskategorien auch Rechtskategorien zulassen. So können wir uns je nach Anwendung die passende, für uns bequemste Schreibweise aussuchen.

Die Konstruktion des Fundamentalgruppoids erlaubt mehrere Verfeinerungen.

Bemerkung L1G. Für jede Teilmenge $X_0 \subset X$ erhalten wir das *relative Fundamentalgruppoid* $\Pi(X, X_0)$ als volle Unterkategorie von $\Pi(X)$:

(1) Objekte sind nur die Punkte $a \in X_0$, also nicht mehr wie zuvor alle Punkte $a \in X$.
(2) Morphismen von a nach b sind Wege von a nach b in X modulo Homotopie in X.
(3) Die Verknüpfung ist die Aneinanderhängung von Wegen modulo Homotopie.

Im Spezialfall $X_0 = \{x_0\}$ erhalten wir die Unterkategorie $\pi_1(X,x_0) := \Pi(X,\{x_0\})$. Diese besteht nur aus einem Objekt. Da nun alle Morphismen verknüpfbar sind, erhalten wir nicht nur ein Gruppoid, sondern eine Gruppe. Dies ist die Fundamentalgruppe des Raumes X mit Fußpunkt x_0, die wir anschließend in §L2 ausführlich diskutieren.

Bemerkung L1H. Noch allgemeiner können wir ein Tripel $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X$ betrachten. Das *relative Fundamentalgruppoid* $\Pi(X_2, X_1, X_0)$ ist folgende Kategorie:

(1) Objekte sind die Punkte $a \in X_0$.
(2) Morphismen von a nach b sind Wege in X_1 modulo Homotopien in X_2.
(3) Die Verknüpfung ist die Aneinanderhängung von Wegen modulo Homotopie.

Ein natürliches Beispiel ist ein Polyeder $X = |K|$ mit Eckenmenge X_0 sowie 1–Skelett X_1 und 2–Skelett X_2. In diesem Fall gilt $\Pi(X, X_0) = \Pi(X_2, X_1, X_0)$, denn dank simplizialer Approximation (I4J) genügt es, Wege in X_1 und Homotopien in X_2 zu betrachten. Wir werden dies in §L6 als simpliziales Fundamentalgruppoid ausformulieren.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L1d. Stetige Abbildungen. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Jedem Weg γ von a nach b in X ordnen wir den Weg $f \circ \gamma$ von $f(a)$ nach $f(b)$ in Y zu:

$$f_\sharp : P(X,a,b) \to P(Y, f(a), f(b)) : \gamma \mapsto f \circ \gamma$$

Zu jeder Homotopie H von $H_0 = \alpha$ nach $H_1 = \beta$ gehört eine Homotopie $K = f \circ H$ von $K_0 = f \circ \alpha$ nach $K_1 = f \circ \beta$. Hält H die Endpunkte fest, dann auch K. Die obige Abbildung $f_\sharp$ ist also wohldefiniert auf Homotopieklassen und induziert so die Abbildung

$$f_\sharp : \Pi(X,a,b) \to \Pi(Y, f(a), f(b)) : [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Satz L1I. *Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Funktor*

$$\begin{aligned} f_\sharp : \Pi(X) &\to \Pi(Y), \\ X \ni a &\mapsto f(a) \in Y, \\ \big([\alpha] : a \to b\big) &\mapsto \big([f \circ \alpha] : f(a) \to f(b)\big). \end{aligned}$$

Wir erhalten so den Funktor $\Pi : \mathtt{Top} \to \mathtt{Grpoid}$.

BEWEIS / ÜBUNG. Für den konstanten Weg in $a \in X$ gilt $f_\sharp([1_a]) = [f \circ 1_a] = [1_{f(a)}]$. Für die Verknüpfung sehen wir ebenso durch Einsetzen der Definitionen:

$$\begin{aligned} f_\sharp([\alpha]\cdot[\beta]) = f_\sharp([\alpha * \beta]) &= [f \circ (\alpha * \beta)] \\ = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] &= [f \circ \alpha]\cdot[f \circ \beta] = f_\sharp([\alpha])\cdot f_\sharp([\beta]). \end{aligned}$$

Somit ist $f_\sharp : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ ein Funktor, wie behauptet.

Für $\mathrm{id}_X : X \to X$ gilt $(\mathrm{id}_X)_\sharp = \mathrm{id}_{\Pi(X)}$. Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ in $\mathtt{Top}$ gilt $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ in $\mathtt{Grpoid}$. Somit ist $\Pi : \mathtt{Top} \to \mathtt{Grpoid}$ ein Funktor. □

§L1e. Homotopie. Sei $H : [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Für jeden Punkt $a \in X$ erhalten wir einen Weg $h_a : [0,1] \to Y$ mit $h_a(t) = H(t,a)$ von $h(0) = f(a)$ nach $h(1) = g(a)$. Genau dann gilt $h_a = 1_a$, wenn H den Punkt a festhält.

Für jeden Weg $\alpha : [0,1] \to X$ von a nach b erhalten wir die folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} f(a) & \xrightarrow{f\circ\alpha} & f(b) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_a} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_b} \\ g(a) & \xrightarrow{g\circ\alpha} & g(b) \end{array}$$

Lemma L1J. *Dieses Diagramm kommutiert bis auf Homotopie bei festen Endpunkten:*

$$(f \circ \alpha) * h_b \sim h_a * (g \circ \alpha).$$

BEWEIS / ÜBUNG. Wie in Abbildung L:4 definieren wir $K : [0,1] \times [0,1] \to Y$ durch

$$K(s,t) = \begin{cases} H(2t,a) & \text{für } 0 \le t \le \frac{s}{2}, \\ H(s, \alpha(2t-s)) & \text{für } \frac{s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ H(2t-1,b) & \text{für } \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

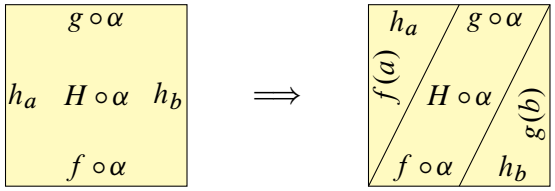
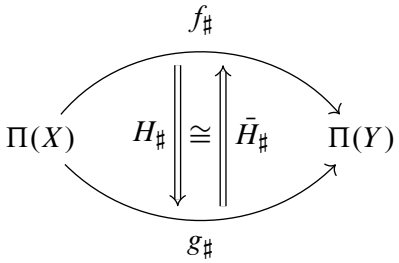


ABBILDUNG L:4. Umwandlung der Homotopie H mit beweglichen Endpunkten in die hierzu konjugierte Homotopie K mit festen Endpunkten

Diese Abbildung ist wohldefiniert und stetig nach dem Verklebesatz E1P. Somit ist K eine Homotopie von $K_0 = (f \circ \alpha) * h_b$ nach $K_1 = h_a * (g \circ \alpha)$. Zudem gilt $K(s,0) = f(a)$ und $K(s,0) = g(b)$ für alle $s \in [0,1]$, also werden die Endpunkte nun festgehalten. □

In der Sprache der Kategorien drücken wir dies so aus:

Satz L1K. *Stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ induzieren Funktoren $f_\sharp, g_\sharp : \Pi(X) \to \Pi(Y)$. Jede Homotopie $H : f \simeq g$ induziert einen natürlichen Isomorphismus $H_\sharp : f_\sharp \cong g_\sharp$.*



BEWEIS / ÜBUNG. Nach Satz L1I sind $f_\sharp, g_\sharp : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ Funktoren. Lemma L1J besagt, dass die Homotopie $H : f \simeq g$ die natürliche Transformation $H_\sharp : f_\sharp \to g_\sharp$ induziert. Die umgekehrte Homotopie $\bar{H} : g \simeq f$ liefert die natürliche Transformation $\bar{H}_\sharp : g_\sharp \to f_\sharp$. Diese sind zueinander invers, also ist $(H_\sharp, \bar{H}_\sharp) : f_\sharp \cong g_\sharp$ eine natürliche Äquivalenz. □

§L1f. Und nun? Die Konstruktion des Fundamentalgruppoids $\Pi(X)$ ist zwar abstrakt, aber leicht: Wir haben in diesem Abschnitt die wichtigsten Eigenschaften formuliert und bewiesen. Der Nachweis verlangt jeweils die Konstruktion einer passenden Homotopie, und hierzu mussten wir nicht lange suchen. Das ist eine leichte Übung in begrifflicher Sorgfalt; sie ist notwendig, um technische Sicherheit zu gewinnen und alle Details zu klären.

Viel schlauer sind wir dadurch noch nicht: Unser eigentliches Ziel ist es, topologische Räume X, Y und stetige Abbildungen $f : X \to Y$ besser zu verstehen. Als Werkzeug haben wir nun die Kategorie $\Pi(X)$, doch diese ist vorerst nur *abstract general nonsense*. Als algebraische Struktur ist sie zwar vielseitig einsetzbar, zum Beispiel für Wegintegrale (§L5), doch für direkte Anwendung und Berechnung leider noch etwas unübersichtlich. Wirklich nützlich wird sie erst, wenn wir sie zudem möglichst konkret berechnen können.

Wir wollen hierzu eine weitere Vereinfachung vornehmen und zur Fundamentalgruppe übergehen. Diese werden wir dann in konkreten Beispielen explizit berechnen, sodass wir topologische Räume unterscheiden und stetige Abbildungen vergleichen können.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L1g. Erste Beispiele. Wie eingangs versprochen übersetzen wir geometrische Objekte (topologische Räume, ihre stetige Abbildungen und Homotopien) in algebraische Strukturen (hier Gruppoide, ihre Homomorphismen und Äquivalenzen). Die Definitionen scheinen zwar zunächst abstrakt, doch die grundlegenden Ideen und nötigen Nachweise sind allesamt leicht. Probieren Sie es selbst! So weit, so gut. Die eigentlichen Schwierigkeiten spüren Sie erst, wenn Sie konkrete Beispiele berechnen wollen:

Übung L1L. Explizieren Sie, soweit jetzt bereits möglich, die folgenden Fundamentalgruppoide $\Pi(X)$, insbesondere zu je zwei Punkten $a, b \in X$ die Wegeklasse $\Pi(X, a, b)$.

(0) $X = \mathbb{R}^n, \mathbb{D}^n, \mathbb{B}^n$, allgemein $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex.

(1) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig zu 0.

(2) $X \simeq \{*\}$ zusammenzuehbar.

(3) $X = \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{B}^n$, ebenso $X = \mathbb{S}^{n-1}$ für $n \geq 3$.

(4) $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{B}^2$, ebenso $X = \mathbb{S}^1$.

(5) $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus B(\pm 2, 1)$.

(6) Denken Sie sich zehn weitere Beispiele aus.

(7) Bestimmen Sie $\Pi(X \times Y)$ aus $\Pi(X)$ und $\Pi(Y)$.

Hinweis: In den einfachen Beispielen (0–4) können Sie das Ergebnis bereits formulieren und beweisen. In weiteren Beispielen wie (5) können Sie das Ergebnis immerhin erahnen und als Vermutung festhalten, auch das ist eine lehrreiche Übung! Ohne geeignete Werkzeuge können Sie Ihre Vermutungen jedoch noch nicht beweisen, Sie entdecken dabei hingegen ganz natürlich viele der folgenden Techniken, insbesondere Fundamentalgruppe und freie Gruppen, vielleicht auch Präsentationen und simpliziale Fundamentalgruppen. Genau dies wollen wir im Folgenden ausführen.

Viele Studienanfänger:innen klagen: „Die abstrakten Definitionen sind schwer, zum Glück sind die konkreten Beispiele und expliziten Rechnungen leicht.“ In der Algebraischen Topologie, wie in vielen Bereichen der Mathematik, ist es erfahrungsgemäß umgekehrt… oder aber beides ist schwer.

§L2. Die Fundamentalgruppe eines punktierten Raumes

§L2a. Die Fundamentalgruppe. Zum Raum X haben wir das *Fundamentalgruppoid*

$$\Pi(X) := P(X)/_\sim = \frac{\{\text{ Wege } \alpha : [0,1] \to X \}}{\text{Homotopie in } X \text{ relativ } \{0,1\}}.$$

In ihm ist jeder Morphismus invertierbar. Für jeden Punkt $x_0 \in X$ haben wir daher die Automorphismengruppe $\pi_1(X,x_0) := \Pi(X,x_0,x_0)$. Geometrisch bedeutet dies folgendes:

Definition L2A. Zum Raum X mit Fußpunkt $x_0 \in X$ haben wir die *Fundamentalgruppe*

$$\pi_1(X,x_0) := \Pi(X,x_0,x_0) = \frac{\{\text{ Schleifen } \alpha : ([0,1],\{0,1\}) \to (X,x_0) \}}{\text{Homotopie in } X \text{ relativ } \{0,1\}}$$

mit der Verknüpfung $[\alpha]\cdot[\beta] = [\alpha * \beta]$ durch Aneinanderhängen von Schleifen (L1C).

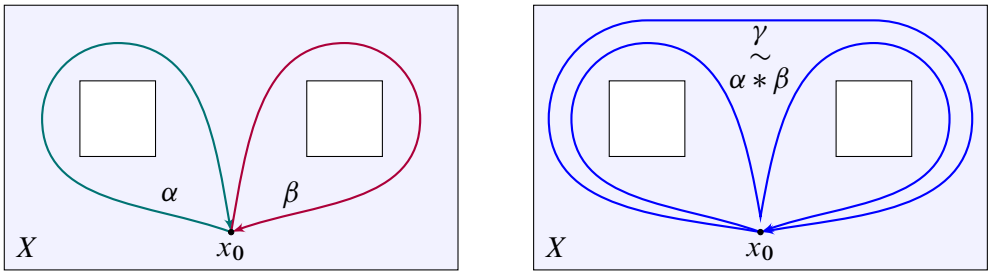


ABBILDUNG L:5. Verknüpfung und Homotopie von Schleifen in (X,x_0)

Eine *Schleife* in (X,x_0) ist ein geschlossener Weg $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Elemente von $\pi_1(X,x_0)$ sind Homotopieklassen bei festgehaltenen Endpunkten (L1B).

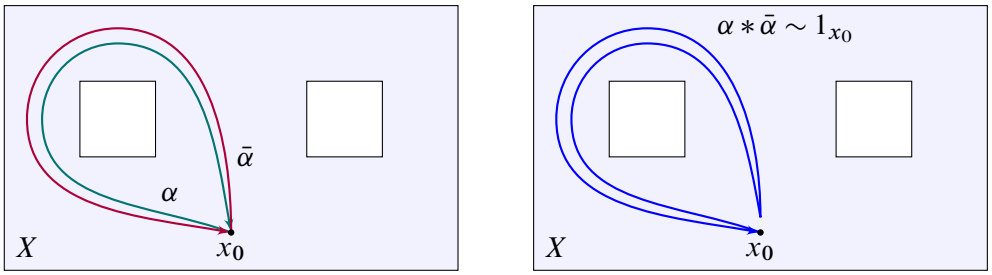


ABBILDUNG L:6. Die umgekehrt durchlaufene Schleife ergibt $\alpha * \bar\alpha \sim 1_{x_0}$.

Das Paar $(\pi_1(X,x_0),\cdot)$ ist eine Gruppe (L1D): Die Äquivalenzklasse $[1_{x_0}]$ des konstanten Weges ist neutrales Element in $\pi_1(X,x_0)$. Zu jeder Schleife α in (X,x_0) ist der inverse Weg $\bar\alpha$ ebenfalls eine Schleife in (X,x_0), und die Äquivalenzklassen $[\alpha]$ und $[\bar\alpha]$ sind zueinander invers in $\pi_1(X,x_0)$. Schließlich ist die Verknüpfung assoziativ.

Für diese drei Eigenschaften ist der Übergang zu Äquivalenzklassen modulo Homotopie wesentlich: Im Schleifenraum $\Omega(X,x_0) := P(X,x_0,x_0)$ gelten Neutrales, Inversion und Assoziativität nicht, sondern erst modulo Homotopie bei festgehaltenen Endpunkten.

Beispiel. Es gilt $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0) = \{1\}$ dank G4B und $\deg : (\pi_1(\mathbb{C}^*,1),\cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z},+)$ dank J1I.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L2b. Verschieben des Fußpunktes. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ hängt nicht nur vom topologischen Raum X sondern auch vom gewählten Fußpunkt x_0 ab. Der Raum X hat also nicht nur eine Fundamentalgruppe sondern viele, nämlich für jeden Fußpunkt eine! Innerhalb einer Wegkomponente von X sind die Fundamentalgruppen jedoch isomorph:

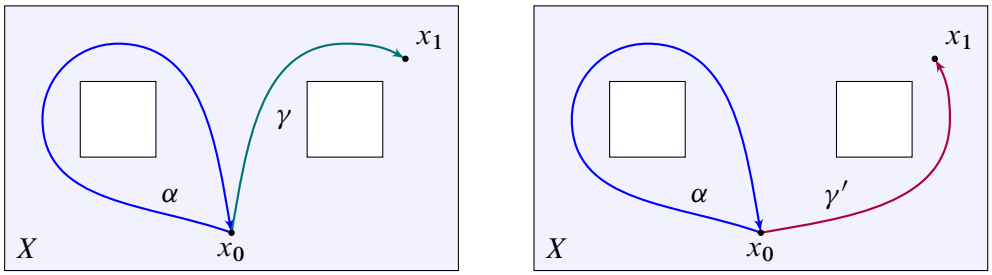


ABBILDUNG L:7. Verschieben des Fußpunktes entlang eines Weges γ bzw. γ'

Satz L2B. *Jeder Weg $\gamma \in P(X,x_0,x_1)$ induziert einen Gruppenisomorphismus*

$$(h_\gamma, h_{\bar\gamma}) : \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1), \quad h_\gamma : [\alpha] \mapsto [\bar\gamma * \alpha * \gamma], \quad h_{\bar\gamma} : [\beta] \mapsto [\gamma * \beta * \bar\gamma].$$

Wir erhalten so den Funktor $\Pi(X) \to \mathtt{Grp}$ mit $x_0 \mapsto \pi_1(X,x_0)$ und $[\gamma] \mapsto h_\gamma$.

Ist $\gamma' \in P(X,x_0,x_1)$ ein weiterer Weg, dann unterscheiden sich die Isomorphismen $h_{\gamma'}$ und h_γ durch eine Konjugation: Es gilt $h_{\gamma'} = c^{-1} \cdot h_\gamma \cdot c$ mit $c = [\bar\gamma * \gamma'] \in \pi_1(X,x_1)$.

BEWEIS. Wir rechnen direkt nach, dass h_γ ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned} h_\gamma([\alpha]) \cdot h_\gamma([\alpha']) &= [\bar\gamma * \alpha * \gamma] \cdot [\bar\gamma * \alpha' * \gamma] = [\bar\gamma * \alpha * \gamma * \bar\gamma * \alpha' * \gamma] \\ &= [\bar\gamma * \alpha * \alpha' * \gamma] \qquad = h_\gamma([\alpha * \alpha']) \qquad = h_\gamma([\alpha] \cdot [\alpha']) \end{aligned}$$

Dies definiert einen Funktor wie angegeben: Aus $\gamma : x_0 \to x_1$ und $\gamma' : x_1 \to x_2$ folgt

$$(h_{\gamma'} \circ h_\gamma)([\alpha]) = h_{\gamma'}(h_\gamma([\alpha])) = h_{\gamma'}([\bar\gamma * \alpha * \gamma]) = [\bar\gamma' * \bar\gamma * \alpha * \gamma * \gamma'] = h_{\gamma * \gamma'}([\alpha]).$$

Insbesondere gilt $h_{\bar\gamma} \circ h_\gamma = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und $h_\gamma \circ h_{\bar\gamma} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_1)}$, das heißt, h_γ und $h_{\bar\gamma}$ sind zueinander invers. Daraus folgt auch die Abhängigkeit von γ bis auf Konjugation. □

Bemerkung L2C. Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ kommutativ, so stimmen alle so definierten Isomorphismen h_γ überein, und wir können $\pi_1(X,x_0)$ und $\pi_1(X,x_1)$ natürlich identifizieren. Ist zudem X wegzusammenhängend, so dürfen wir kurz $\pi_1(X)$ schreiben.

Im Allgemeinen ist die Gruppe $\pi_1(X,x_0)$ nicht kommutativ, und es gibt dann keinen *natürlichen* Isomorphismus zwischen $\pi_1(X,x_0)$ und $\pi_1(X,x_1)$ für verschiedene Fußpunkte $x_0 \neq x_1$ in X. Wir können diese Gruppen daher nicht einfach als gleich betrachten.

Zwischen den Fundamentalgruppen verschiedener Wegkomponenten besteht überhaupt kein Zusammenhang! Einfaches Beispiel ist der Raum $X = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{S}^1$. Allgemein seien (X_i, x_i) für $i \in I$ wegzusammenhängend mit Fundamentalgruppen $G_i = \pi_1(X_i, x_i)$. Die topologische Summe $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ erfüllt $\pi_1(X,x_i) = G_i$ je nach Wahl des Fußpunktes x_i.

Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ ist die natürliche gemeinsame Beschreibung: Es enthält alle Informationen über Wegkomponenten $\pi_0(X)$ und Fundamentalgruppen $\pi(X,x_0)$ sowie deren durch Wege induzierten Isomorphismen $(h_\gamma, h_{\bar\gamma}) : \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$.

§L2c. Funktorialität. Ein *punktierter Raum* (X,x_0) ist ein Paar bestehend aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x_0\in X$. Eine stetige Abbildung $f:X\to Y$ mit $f(x_0)=y_0$ schreiben wir kurz $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$. Mit der üblichen Komposition von Abbildungen erhalten wir so die Kategorie $\mathtt{Top}_*$ der punktierten Räume.

Satz L2D. *Jedem punktierten Raum (X,x_0) ordnen wir die Gruppe $\pi_1(X,x_0)$ zu.*

Jede stetige Abbildung $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ punktierter Räume induziert einen Gruppenhomomorphismus $f_\sharp=\pi_1(f):\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0):[\alpha]\mapsto[f\circ\alpha]$.

Wir erhalten so den kovarianten Funktor $\pi_1:\mathtt{Top}_*\to\mathtt{Grp}$.

BEWEIS. Aus $H:\alpha\sim\alpha'$ folgt $(f\circ H):(f\circ\alpha)\sim(f\circ\alpha')$, also ist $f_\sharp$ wohldefiniert. Durch Einsetzen der Definitionen rechnen wir nach, dass $f_\sharp$ ein Gruppenhomomorphismus ist:

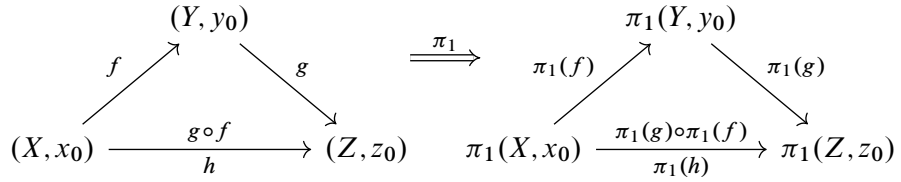
$$\begin{aligned}f_\sharp([\alpha]\cdot[\beta])&=f_\sharp([\alpha*\beta])&&=[f\circ(\alpha*\beta)]\\&=[(f\circ\alpha)*(f\circ\beta)]=[f\circ\alpha]\cdot[f\circ\beta]=f_\sharp([\alpha])\cdot f_\sharp([\beta])\end{aligned}$$

Für die Identität gilt $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)})=\mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und für die Komposition

$$\begin{aligned}\pi_1(g\circ f)([\alpha])&=[(g\circ f)\circ\alpha]&&=[g\circ(f\circ\alpha)]\\&=\pi_1(g)([f\circ\alpha])=\pi_1(g)\big(\pi_1(f)([\alpha])\big)=\big(\pi_1(g)\circ\pi_1(f)\big)([\alpha]).\end{aligned}$$

Somit ist $\pi_1:\mathtt{Top}_*\to\mathtt{Grp}$ ein kovarianter Funktor, wie behauptet. □

Bemerkung. Der Funktor π_1 übersetzt kommutative Diagramme von $\mathtt{Top}_*$ nach $\mathtt{Grp}$:



Korollar L2E. *Wie jeder Funktor erhält $\pi_1:\mathtt{Top}_*\to\mathtt{Grp}$ alle Isomorphismen (H4F):*

(1) Jeder Homöomorphismus $(f,g):(X,x_0)\cong(Y,y_0)$ in $\mathtt{Top}_*$ induziert einen Isomorphismus $(f_\sharp,g_\sharp):\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,y_0)$ in $\mathtt{Grp}$.

(2) Jeder Retrakt $(f,g):(X,x_0)\leftrightarrows(Y,y_0)$ in $\mathtt{Top}_*$ induziert einen Retrakt $(f_\sharp,g_\sharp):\pi_1(X,x_0)\leftrightarrows\pi_1(Y,y_0)$ in $\mathtt{Grp}$.

BEWEIS / ÜBUNG. Aus $g\circ f=\mathrm{id}_{(X,x_0)}$ folgt dank Funktorialität (L2D)

$$\pi_1(g)\circ\pi_1(f)=\pi_1(g\circ f)=\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)})=\mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}.$$

Aus $f\circ g=\mathrm{id}_{(Y,y_0)}$ folgt ebenso $\pi_1(f)\circ\pi_1(g)=\mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. □

Beispiel. Wir wissen $\pi_1(\mathbb{C}^*,1)=\{[\alpha^k]\mid k\in\mathbb{Z}\}$ mit dem Weg $\alpha:[0,1]\to\mathbb{C}^*:t\mapsto\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}$. Zu $n\in\mathbb{Z}$ betrachten wir $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*:z\mapsto z^n$ bzw. $g:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1:z\mapsto z^n$ und finden:

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{C}^*,1)&\xrightarrow[z\mapsto z^n]{f}&(\mathbb{C}^*,1)\\ \pi_1(\mathbb{C}^*,1)&\xrightarrow[[\alpha^k]\mapsto[\alpha^{kn}]]{\pi_1(f)}&\pi_1(\mathbb{C}^*,1)\\ \deg\downarrow\cong&&\deg\downarrow\cong\\ \mathbb{Z}&\xrightarrow{k\mapsto nk}&\mathbb{Z}\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}(\mathbb{S}^1,1)&\xrightarrow[z\mapsto z^n]{g}&(\mathbb{S}^1,1)\\ \pi_1(\mathbb{S}^1,1)&\xrightarrow[[\alpha^k]\mapsto[\alpha^{kn}]]{\pi_1(g)}&\pi_1(\mathbb{S}^1,1)\\ \deg\downarrow\cong&&\deg\downarrow\cong\\ \mathbb{Z}&\xrightarrow{k\mapsto nk}&\mathbb{Z}\end{array}$$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung L2F. (1) Zum Aufwärmen: Sei $X \in \{\mathbb{S}^0, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}, \mathbb{R}_{>0}\}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ erlaubt $p_n : X \to X : z \mapsto z^n$ eine Rechtsinverse, also $r_n : X \to X$ stetig mit $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_X$?

(2) Beantworten Sie dieselbe Frage für jeden der Räume $X \in \{\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*, \mathbb{C}, \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0}\}$. Nutzen Sie den Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ und den Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Bemerkung. Wir suchen hier nach stetigen Wurzelfunktionen, (1) reell und (2) komplex. Bei der Lösung erkennen und nutzen wir das vertraute Wechselspiel zwischen Obstruktion und Konstruktion. Für (1) ist es leicht, für (2) schon etwas beeindruckender.

In unserem konkreten Beispiel sind die Retraktion p_n und der Schnitt r_n zwei sehr vertraute Objekte: Potenz- und Wurzelfunktionen. Zur Lösung ist vor allem der Start- und Zielraum entscheidend! Unsere topologischen Werkzeuge helfen hier sehr effizient.

✻ **L2F.** (1a,b,c) Für n gerade ist p_n nicht surjektiv, kann also keine Rechtsinverse haben. Für n ungerade haben wir $r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{x} := \mathrm{sign}(x) \sqrt[n]{|x|}$. Dies erfüllt $p_n(r_n(x)) = (\mathrm{sign}(x) \sqrt[n]{|x|})^n = \mathrm{sign}(x)|x| = x$.

(1d) Für jeden Exponenten $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ erfüllt $r_n : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ die Bedingung $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_X$.

(2a) Die Abbildung $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$ hat Abbildungsgrad $\deg(p_n) = n$. Wäre $r_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so erfüllte $\deg(r_n) \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $\deg(p_n) \cdot \deg(r_n) = 1$. Das ist nur für $n = 1$ möglich!

(2b) Dasselbe gilt wörtlich auch für $X = \mathbb{C}^*$, da $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{S}^1$, und somit $[\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*] \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$.

(2c) Es bleibt der Fall $X = \mathbb{C}$. Die Abbildung $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfüllt $p_n(0) = 0$ und $p_n(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$. Für jede Rechtsinverse $r_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt demnach ebenfalls $r_n(0) = 0$ und $r(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}^*$. Die Einschränkung $r_n^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ wäre rechtsinvers zur Einschränkung $p_n^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, was nach (2b) unmöglich ist.

(2d) Wir müssen p_n zunächst geeignet einschränken. Wir betrachten dazu $p_n : X_n \to X_1 : z \mapsto z^n$ von $X_n = \{ e^{r+is} \mid r \in \mathbb{R},\ s \in]-\pi/n, \pi/n[\}$ nach $X_1 = \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Wir haben $(\Phi_n, \Psi_n) : \mathbb{R} \times]-\pi/n, \pi/n[\cong X_n$ mit $\Phi_n(r,s) = e^{r+is}$ und Ψ_n wie in §E2l. Wir erhalten $(p_n, r_n) : X_n \cong X_1$ dank $r_n(z) = \Phi_n(\Psi_n(z)/n)$.

Aufgabe (2a,b) gelingt ebenso mit dem Funktor π_1: Sei $X \in \{\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*\}$ und $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_X$. Wir dürfen $r_n(1) = 1$ annehmen, notfalls ersetzen wir r_n durch $\tilde{r}_n(z) = r_n(z)/r_n(1)$. Anwendung des Funktors π_1 ergibt:

$$\begin{array}{ccccc}
(X,1) & \xrightarrow[z\mapsto z^n]{p_n} & (X,1) & \xrightarrow[?!?]{r_n} & (X,1) \\
\pi_1(X,1) & \xrightarrow[\pi_1(p_n)]{} & \pi_1(X,1) & \xrightarrow[\pi_1(r_n)]{} & \pi_1(X,1) \\
\deg\downarrow\cong & & \deg\downarrow\cong & & \deg\downarrow\cong \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{a\mapsto an} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{b\mapsto bm} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Aus $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_{(X,1)}$ folgt $\pi_1(p_n) \circ \pi_1(r_n) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,1)}$, also $n \cdot m = 1$. Das ist nur für $n = m = 1$ möglich!

Aufgabe (1) gelingt ebenso mit dem Funktor π_0. Rechtsinvertierbarkeit bleibt unter π_0 erhalten, wie unter jedem Funktor (H4F): Aus $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_X$ folgt $\pi_0(p_n) \circ \pi_0(r_n) = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}$. Das ist zwar mit Kanonen auf Spatzen geschossen, aber die frappierende Analogie zu (2) ist lehrreich:

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow[x\mapsto x^n]{p_n} & X & \xrightarrow[?!?]{r_n} & X \\
\pi_0(X) & \xrightarrow[\pi_0(p_n)]{} & \pi_0(X) & \xrightarrow[\pi_0(r_n)]{} & \pi_0(X) \\
\mathrm{ret}\downarrow\cong & & \mathrm{ret}\downarrow\cong & & \mathrm{ret}\downarrow\cong \\
\{\pm 1\} & \xrightarrow{a\mapsto a^n} & \{\pm 1\} & \xrightarrow{b\mapsto b^m} & \{\pm 1\}
\end{array}$$

Aus $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_X$ folgt $\pi_0(p_n) \circ \pi_0(r_n) = \mathrm{id}_X$. Für n gerade ist das unmöglich! Ausführlich:

(1a) Die Abbildung $p_n : \mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}^0 : x \mapsto 1$ ist konstant, nicht surjektiv, erlaubt also keine Rechtsinverse.

(1b) Die Abbildung $p_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ induziert $\pi_0(p_n) : \pi_0(\mathbb{R}^*) \to \pi_0(\mathbb{R}^*) : [x] \mapsto [1]$. Somit ist $\pi_0(p_n)$ konstant, nicht surjektiv, erlaubt also keine Rechtsinverse in $\mathtt{Set}$, somit hat p_n keine Rechtsinverse in $\mathtt{Top}$.

(1c) Es bleibt der Fall $X = \mathbb{R}$: Die Abbildung $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt $p_n(0) = 0$ und $p_n(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$. Für jede Rechtsinverse $r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt demnach ebenfalls $r_n(0) = 0$ und $r(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^*$. Die Einschränkung $r_n' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ wäre rechtsinvers zur Einschränkung $p_n' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, was nach (1b) unmöglich ist.

§L2d. Homotopie-Invarianz bei festem Fußpunkt. Fundamentalgruppen $\pi_1(X,x_0)$ sind aufgrund ihrer Definition homotopie-invariant. Allerdings hängen sie vom gewählten Fußpunkt x_0 ab, und diese Abhängigkeit wollen und müssen wir sorgfältig berücksichtigen.

Satz L2G. *Jede Homotopie $H : f \simeq g : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ relativ x_0 impliziert die Gleichheit $\pi_1(f) = \pi_1(g) : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$.*

Wir erhalten so den kovarianten Funktor $\pi_1 : \mathtt{hTop}_* \to \mathtt{Grp}$.

BEWEIS / ÜBUNG. Die Abbildung $H : [0,1]\times X \to Y$ ist stetig mit $H(0,x) = f(x)$ und $H(1,x) = g(x)$ für alle $x \in X$ sowie $H(s,x_0) = y_0$ für alle $s \in [0,1]$. Für jeden Weg $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ gilt $K : f\circ\alpha \sim g\circ\alpha$ vermöge der Homotopie $K : [0,1]\times[0,1] \to Y : (s,t) \mapsto H(s,\alpha(t))$. Also gilt $f_\sharp([\alpha]) = [f\circ\alpha] = [g\circ\alpha] = g_\sharp([\alpha])$. □

Korollar L2H. *Wie jeder Funktor erhält $\pi_1 : \mathtt{hTop}_* \to \mathtt{Grp}$ alle Isomorphismen (H4F):*

(1) Jede Homotopie-Äquivalenz $(f,g) : (X,x_0) \simeq (Y,y_0)$ in $\mathtt{Top}_*$, bei festen Fußpunkten, induziert einen Isomorphismus $(f_\sharp, g_\sharp) : \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(Y,y_0)$ in $\mathtt{Grp}$.

(2) Jeder schwache Retrakt $(f,g) : (X,x_0) \rightleftarrows (Y,y_0)$ in $\mathtt{Top}_*$, mit $g\circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel $\{x_0\}$, induziert einen Retrakt $(f_\sharp, g_\sharp) : \pi_1(X,x_0) \overset{\leftarrow}{\rightarrow} \pi_1(Y,y_0)$ in $\mathtt{Grp}$, also $g_\sharp \circ f_\sharp = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

BEWEIS / ÜBUNG. Aus $g\circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel $\{x_0\}$ folgt dank Homotopie-Invarianz (L2G)

$$\pi_1(g)\circ\pi_1(f) = \pi_1(g\circ f) = \pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}.$$

Aus $f\circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ rel $\{y_0\}$ folgt ebenso $\pi_1(f)\circ\pi_1(g) = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. □

Korollar L2I. *Ist $(\iota,r) : (X,x_0) \simeq (Y,y_0)$ ein starker Deformationsretrakt, $r\circ\iota = \mathrm{id}_X$ und $\iota\circ r \simeq \mathrm{id}_Y$ rel $\iota(X)$, so ist $(\iota_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(Y,y_0)$ ein Gruppenisomorphismus.*

Beispiel L2J. Aus $(\iota,r) : (\mathbb{S}^1,1) \simeq (\mathbb{C}^*,1)$ folgt $(\iota_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*,1)$, siehe G4O.

Zur Erinnerung: Inklusion $\iota : (\mathbb{S}^1,1) \hookrightarrow (\mathbb{C}^*,1)$ und Retraktion $r : \mathbb{C}^* \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z/|z|$ erfüllen $r\circ\iota = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $H : \iota\circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ rel $\mathbb{S}^1$ vermöge $H(t,z) = (1-t)z + tz/|z|$.

Beispiel L2K. Wie können wir $\pi_1(\mathrm{GL}_n\mathbb{R}, 1_{n\times n})$ berechnen?

Das Gram–Schmidt–Verfahren (G5G) zeigt, dass $\mathrm{O}_n \subset \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n \subset \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ starke Deformationsretrakte sind. Damit finden wir insbesondere die Fundamentalgruppen:

$\mathrm{GL}_2^+\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$	dank F1Q	$\Longrightarrow$	$\pi_1 \cong \mathbb{Z}$	dank J1I
$\mathrm{GL}_3^+\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_3\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$	dank K2P	$\Longrightarrow$	$\pi_1 \cong \mathbb{Z}/2$	dank L6T

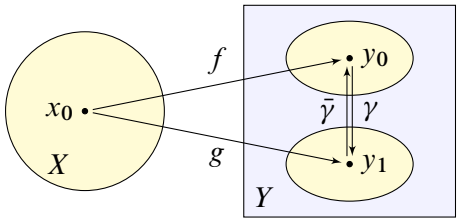
Wir sehen hieran eindrucksvoll die vereinfachende Kraft der Homotopie: Wir können den 4–dimensionalen Raum $\mathrm{GL}_2^+\mathbb{R} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times2} \;\middle|\; ad-bc > 0 \right\}$ zusammenziehen auf den 1–dimensionalen Unterraum $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times2} \;\middle|\; a^2+b^2 = 1 \right\} \cong \mathbb{S}^1$. Für letzteren lässt sich π_1 leicht ausrechnen. Noch drastischer fällt dies für $\mathrm{SO}_3 \subset \mathrm{GL}_3^+\mathbb{R}$ aus.

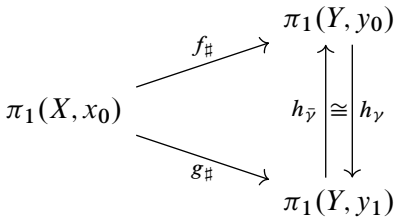
Beispiel L2L. Ist $\{x_0\}$ ein starker Deformationsretrakt von X, so ist $\pi_1(X,x_0)$ trivial.

Dies zeigt erneut, dass die Gruppe $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)$ trivial ist. Auch im rationalen Kamm $X = ([0,1]\times\{0\}) \cup ([0,1]_\mathbb{Q}\times[0,1])$ ist der Punkt $x_0 = (0,0)$ ein starker Deformationsretrakt, also ist $\pi_1(X,x_0)$ trivial. Hingegen ist $x_1 = (0,1)$ kein starker Deformationsretrakt (G5E). Wir wissen aber aus L2B, dass auch $\pi_1(X,x_1)$ trivial sein muss, denn X ist wegzusammenhängend. Diese Feinheit wollen wir nun noch etwas genauer ausleuchten.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L2e. Homotopie-Invarianz bei beweglichen Fußpunkten.** Bewegt die Homotopie $H : f \simeq g : X \to Y$ den Fußpunkt von $y_0 = H_0(x_0)$ nach $y_1 = H_1(x_0)$, so haben $\pi_1(f)$ und $\pi_1(g)$ mitunter verschiedene Zielgruppen. Wir müssen daher die Homotopie-Invarianz $\pi_1(f) = \pi_1(g)$ aus dem vorigen Satz L2G durch eine Konjugation korrigieren: ☜





✍ **Satz L2M.** *Jede Homotopie $H : f \simeq g : X \to Y$ konjugiert $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ und $\pi_1(g) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$ durch den Weg $\gamma : [0,1] \to Y : t \mapsto H(t, x_0)$.* ✍

BEWEIS. Sei $H : [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Der Fußpunkt $x_0 \in X$ bewegt sich von $y_0 := f(x_0) = H(0, x_0)$ nach $y_1 := g(x_0) = H(1, x_0)$ längs des Weges $\gamma : [0,1] \to Y : t \mapsto H(t, x_0)$. Für jede Schleife α in (X, x_0) ist $f \circ \alpha$ eine Schleife in (Y, y_0) und $g \circ \alpha$ eine Schleife in (Y, y_1). Dank L1J gilt in $P(X)$ bzw. $\Pi(X)$:

$$(g \circ \alpha) \sim \bar{\gamma} * (f \circ \alpha) * \gamma \qquad \Longrightarrow \qquad [g \circ \alpha] = [\bar{\gamma}] \cdot [f \circ \alpha] \cdot [\gamma]$$

Die induzierten Gruppenhomomorphismen $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ und $g_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1) : [\alpha] \mapsto [g \circ \alpha]$ sind demnach konjugiert: $g_\sharp = h_\gamma \circ f_\sharp$. □

☞ **Bemerkung.** Wenn H wie in L2G den Fußpunkt nicht bewegt, so gilt $h_\gamma = \mathrm{id}$ und $f_\sharp = g_\sharp$. ☜

Im Falle $y_0 = y_1$ wird der Fußpunkt eventuell durch die Homotopie bewegt, kehrt aber schließlich in seine Ausgangsposition zurück. In diesem Falle ist γ eine Schleife in (Y, y_0), und h_γ ist die Konjugation durch $c = [\gamma]$ in der Gruppe $\pi_1(Y, y_0)$

Wenn zudem die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y, y_0)$ kommutativ ist, dann ist jede Konjugation gleich der Identität, und wir dürfen die Bewegung des Fußpunktes in Y ignorieren.

✍ **Korollar L2N.** *(1) Sei $f : X \to Y$ eine Homotopie-Äquivalenz. Für $x_0 \in X$ und $y_0 = f(x_0)$ ist die induzierte Abbildung $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenisomorphismus.* ✍

(2) Ist der Raum X zusammenziehbar, $X \simeq *$, so gilt $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ für alle $x_0 \in X$. Dies vereinfacht L2L, da wir ohne starken Deformationsretrakt $\{x_0\} \subset X$ auskommen.

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert $g : Y \to X$ mit Homotopien $H : g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $K : f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Anwendung des Funktors π_1 und Homotopie-Invarianz (L2M) ergibt $\pi_1(g) \circ \pi_1(f) = h_\alpha$ mit $\alpha(t) = H(t, x_0)$ und $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) = h_\beta$ mit $\beta(t) = K(t, y_0)$, also $h_\alpha^{-1} \circ \pi_1(g) \circ \pi_1(f) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) \circ h_\beta^{-1} = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. Der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f)$ ist links- und rechts-invertierbar, also invertierbar (H2K). □

☞ **Bemerkung.** Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ ist natürlich, aber weniger übersichtlich, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist übersichtlich, aber weniger natürlich, da wir willkürlich einen Fußpunkt wählen müssen. Am liebsten möchte man die Vorzüge des Fußpunktes nutzen, aber seine Nachteile ignorieren; manche Lehrbücher tun so. Das ist nur zulässig, solange man die nötigen Präzisierungen und Reparaturen jederzeit nachholen kann. Für den Anfang kann ich diese Schludrigkeit nicht empfehlen; sie kommt später von ganz allein. ☜

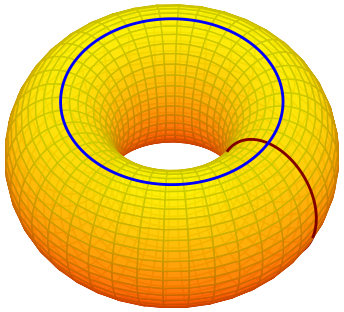
Übung L2O. (1) Zu topologischen Räumen (X,x_0) und (Y,y_0) induzieren die Projektionen $p : X\times Y \to X : (x,y)\mapsto x$ und $q : X\times Y \to Y : (x,y)\mapsto y$ den Gruppenisomorphismus

$$(p_\sharp, q_\sharp) \;:\; \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0).$$

Allgemein: Gilt dieser Isomorphismus auch für beliebige Produkte? Auch für Gruppoide?

(2) Aus $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ folgt $\pi_1(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,(1,1)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,1)\times\pi_1(\mathbb{S}^1,1) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Zeichnen Sie einen Torus $T\subset\mathbb{R}^3$ und ein Erzeugendensystem der Gruppe $\pi_1(T,*)$.

(3) Zu $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ betrachten wir $f_A : \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 : (u,v)\mapsto (u^a v^b, u^c v^d)$. Berechnen Sie $\pi_1(f_A)$ auf $\pi_1(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,(1,1)) \cong \mathbb{Z}^2$. Ist $f_{A'}\circ f_A$ wieder von der Form f_B? Für welche $A\in\mathbb{Z}^{2\times 2}$ ist f_A ein Homöomorphismus? eine Homotopie-Äquivalenz?



✻ **L2O.** (1) Die Projektion $p : X\times Y \to X : (x,y)\mapsto x$ ist stetig, induziert also den Gruppenhomomorphismus

$$p_\sharp \;:\; \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)) \to \pi_1(X,x_0) \;:\; [\gamma]\mapsto[p\circ\gamma].$$

Ebenso induziert die Projektion q den Homomorphismus $q_\sharp$. Wir erhalten hieraus den Homomorphismus

$$(p_\sharp, q_\sharp) \;:\; \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)) \to \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0) \;:\; [\gamma]\mapsto([p\circ\gamma],[q\circ\gamma])$$

dank der universellen Abbildungseigenschaft des Produkts dieser Gruppen. Wir zeigen, dass diese Abbildung bijektiv ist, und somit ein Gruppenisomorphismus. (*Bemerkung:* Anders als in der Kategorie `Top` genügt in `Grp` hierzu bereits die Bijektivität eines Morphismus!) Wir nutzen die universelle Abbildungseigenschaft des Produkts $X\times Y$ der topologischen Räume X und Y (E4D) und geben explizit die Umkehrabbildung an:

$$\Phi \;:\; \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0) \to \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)) \;:\; ([\alpha],[\beta])\mapsto[(\alpha,\beta)]$$

Wir müssen zunächst nachweisen, dass die Abbildung Φ wohldefiniert ist: Aus Homotopie $H : \alpha\sim\alpha'$ in (X,x_0) und $K : \beta\sim\beta'$ in (Y,y_0) erhalten wir die Homotopie $(H,K) : (\alpha,\beta)\sim(\alpha',\beta')$ in $(X\times Y,(x_0,y_0))$. Anschließend ist klar, dass $(p_\sharp,q_\sharp)$ und Φ zueinander invers sind: Für alle Schleifen γ in $(X\times Y,(x_0,y_0))$ sowie α in (X,x_0) und β in (Y,y_0) gilt $(p\circ\gamma,q\circ\gamma)=\gamma$ sowie $p\circ(\alpha,\beta)=\alpha$ und $q\circ(\alpha,\beta)=\beta$.

Alles gilt wörtlich genauso für beliebige Produkte, egal ob endlich oder unendlich:

$$\pi_1\Big(\prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\Big) \xrightarrow{\sim} \prod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \pi_1(X_\lambda,x_\lambda) \;:\; [\gamma]\mapsto([p_\lambda\circ\gamma])_{\lambda\in\Lambda}$$

(2) Dank (1) gilt $\pi(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,(1,1)) \cong \pi(\mathbb{S}^1,1)\times\pi(\mathbb{S}^1,1) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Explizit haben wir den Gruppenisomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,(1,1)) : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) \mapsto [t\mapsto(\mathrm{e}^{2\pi i x t}, \mathrm{e}^{2\pi i y t})]$. Die obige Skizze zeigt zwei Schleifen, deren Homotopieklassen ein Erzeugendensystem bilden: In den Toruskoordinaten aus A0D und mit geeigneter Orientierung der Schleifen entspricht dies der kanonischen Basis $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1\end{smallmatrix}\right)\right)$ von $\mathbb{Z}^2$.

(3) Der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f_A)$ entspricht $\varphi^{-1}\circ\pi_1(f_A)\circ\varphi : \mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2 : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) \mapsto A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)$. Es genügt, diese Gleichheit auf Erzeugern zu prüfen, etwa auf der kanonischen $\mathbb{Z}$–Basis:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0\end{smallmatrix}\right) \mapsto [t\mapsto(\mathrm{e}^{2\pi i t},1)] \mapsto [t\mapsto(\mathrm{e}^{2\pi i a t}, \mathrm{e}^{2\pi i c t})] \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a \\ c\end{smallmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1\end{smallmatrix}\right) \mapsto [t\mapsto(1,\mathrm{e}^{2\pi i t})] \mapsto [t\mapsto(\mathrm{e}^{2\pi i b t}, \mathrm{e}^{2\pi i d t})] \mapsto \left(\begin{smallmatrix} b \\ d\end{smallmatrix}\right)$$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Komposition ergibt $f_{A'} \circ f_A = f_{A'A}$, wie wir erfreut nachrechnen:

$$\begin{aligned}(u,v) \mapsto (u^a v^b, u^c v^d) &\mapsto ((u^a v^b)^{a'} (u^c v^d)^{b'}, (u^a v^b)^{c'} (u^c v^d)^{d'}) \\ &= (u^{a'a+b'c} v^{a'b+b'd}, u^{c'a+d'c} v^{c'b+d'd})\end{aligned}$$

Es lebe die Matrizenrechnung! Ist A in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ invertierbar, also $ab-cd = \pm 1$, so gilt $A^{-1} = \frac{1}{ab-cd}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$, und f_A ist ein Homöomorphismus dank $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$. Ist umgekehrt f_A ein Homöomorphismus, oder auch nur eine Homotopie-Äquivalenz, so ist der induzierte Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f_A) \cong A$ invertierbar, und somit ist die Matrix A in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ invertierbar.

Dasselbe gilt wörtlich genauso für den n–dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$. Hier finden wir wunderbar explizit $\pi(\mathbb{T}^n, 1) \cong \mathbb{Z}^n$ und wie oben $\mathbb{Z}^{n\times n} \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(\pi_1(\mathbb{T}^n, 1))$ sowie $\operatorname{GL}_n \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut}(\pi_1(\mathbb{T}^n, 1))$.

☞ **Bemerkung.** Die vorige Aufgabe (1) zeigt: Der Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ erhält Produkte. ☜ Ist dazu überhaupt etwas zu beweisen? Oder folgt es bereits aus *abstract general nonsense*?

Wir müssen diese Aussage tatsächlich konkret nachrechnen, denn nicht jeder Funktor erhält Ko/Produkte. Zur Illustration betrachten wir einige Gegen/Beispiele.

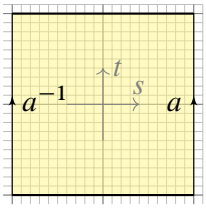
(1) Wir betrachten die Einbettung inc : $\mathtt{Ab} \hookrightarrow \mathtt{Grp}$ der Unterkategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie aller Gruppen.

(1a) Das Produkt in den Kategorien Ab und Grp ist gegeben durch das kartesische Produkt mit koordinatenweiser Verknüpfung. Die Inklusion inc erhält also Produkte.

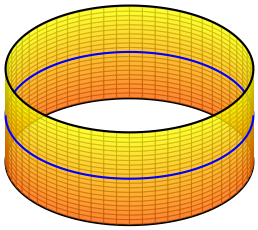
(1b) Das Koprodukt hingegen ist in Ab das kartesische Produkt, doch in Grp ist es das freie Produkt. Die Inklusion inc erhält also nicht Koprodukte!

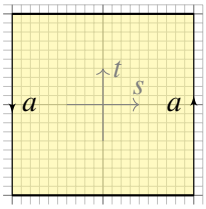
☞ **Übung L2P.** Untersuchen Sie folgende Einbettungen $i : X \hookrightarrow Y$: Ist i ein Retrakt? gar ein Deformationretrakt? stark? Berechnen Sie die induzierten Abbildungen $\pi_0(i)$ und $\pi_1(i)$. ☜

(1) Der Rand $\mathbb{S}^1$ der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$, also $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2 : s \mapsto s$
(2) Die Mittelachse des Zylinders $Z = \mathbb{S}^1 \times [-1,1]$, also $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow Z : s \mapsto (s,0)$
(3) Der Rand ∂Z des Zylinders Z, also $i : \mathbb{S}^1 \times \{\pm 1\} \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \times [-1,1]$
(4) Die Mittelachse des Möbius–Bandes M, kurz $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$
(5) Der Rand des Möbius–Bandes, kurz $i : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \partial M \hookrightarrow M$



$$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(\pi s) \\ 3\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$





$$g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [3 + t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [3 + t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$

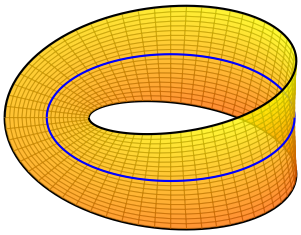


ABBILDUNG L:8. Zylindermantel und Möbius–Band eingebettet im $\mathbb{R}^3$

✻ **L2P.** Diese Fragen sind sehr anschaulich! Die Kunst liegt darin, die Antworten zu finden, zu präzisieren und zu beweisen, d.h. geeignete (Deformations-)Retraktionen zu konstruieren oder Hindernisse explizit anzugeben.

(1) Wir haben $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (J11). Es gilt $\pi_1(\mathbb{D}^2,1) = 0$, denn $\mathbb{D}^2$ ist konvex, somit sternförmig zu 1. Gäbe es zu $i : (\mathbb{S}^1,1) \hookrightarrow (\mathbb{D}^1,1)$ eine Retraktion $r : (\mathbb{D}^2,1) \to (\mathbb{S}^1,1)$, also r stetig mit $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so gäbe es zu $i_\sharp : \mathbb{Z} \to 0$ eine Retraktion $r_\sharp : 0 \to \mathbb{Z}$, also $r_\sharp \circ i_\sharp = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, was offensichtlich unmöglich ist. (Siehe J4E.)

(2) Wir nutzen die offensichtliche Retraktion $r : Z \to \mathbb{S}^1 : (s,y) \mapsto s$. Es gilt $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $H : i \circ r \simeq Z$ vermöge $H : [0,1] \times Z \to Z : (t,(s,y)) \mapsto (s,ty)$. Hieraus erhalten wir $(i_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \cong \pi_1(Z,(1,0))$.

(3) Für jeden der beiden Randkreise $S_\pm = \mathbb{S}^1 \times \{\pm 1\}$ gilt die entsprechende Argumentation aus (2). Für beide zusammen jedoch erlaubt die Inklusion $i : \mathbb{S}^1 \times \{\pm 1\} \hookrightarrow Z$ keine Retraktion: Es gilt $\pi_0(Z) = \{Z\}$ aber $\pi_0(\partial Z) = \{S_+, S_-\}$, somit erlaubt $\pi_0(i) : \pi_0(\partial Z) \to \pi_0(Z)$ offensichtlich keine Retraktion.

(4) Wir nutzen obige Darstellung als Quotient $M := [-1,1]^2/\!\sim$ mit $(-1,y) \sim (1,-y)$ für alle $y \in [-1,1]$. Die Mittelachse entspricht der Einbettung $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M : \mathrm{e}^{\pi i t} \mapsto [(t,0)]$ für $t \in [-1,1]$. Wir zeigen, dass dies ein starker Deformationsretrakt ist; für den Quotientenraum M gelingt dies dank seiner universellen Abbildungseigenschaft (E7B). Die Abbildung $\tilde{r} : [-1,1]^2 \to \mathbb{S}^1 : (t,y) \mapsto \mathrm{e}^{\pi i t}$ ist stetig und induziert auf M die Retraktion $r : M \to \mathbb{S}^1 : [(t,y)] \mapsto \mathrm{e}^{\pi i t}$. Die Abbildung $\tilde{H} : [0,1] \times [-1,1]^2 \to [-1,1]^2 : (s,(t,y)) \mapsto (t,sy)$ ist stetig und induziert auf M die Homotopie $H : [0,1] \times Z \to Z : [(s,(t,y))] \mapsto (t,sy)$. Es gilt $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $H : i \circ r \simeq M$. Hieraus erhalten wir $(i_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \cong \pi_1(M,[(0,0)])$, somit $h := \deg \circ r_\sharp : \pi_1(M,[(0,0)]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

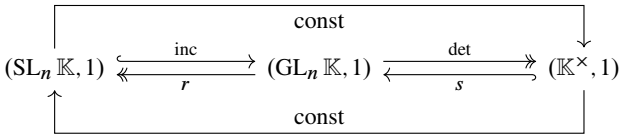
(5) Wir nutzen den Quotienten $q : [-1,1]^2 \twoheadrightarrow M$ aus (4). Der Rand $\partial M = q([-1,1] \times \{\pm 1\})$ wird parametrisiert durch $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$ mit $\mathrm{e}^{\pi i t} \mapsto q(2t,1)$ für $t \in [-1/2, 1/2]$ und $\mathrm{e}^{\pi i t} \mapsto q(2t-2,-1)$ für $t \in [1/2, 3/2]$. Diese Abbildung ist stetig dank Verklebesatz (E1P). Unter $r : M \to \mathbb{S}^1$ wird hieraus $r \circ i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : \mathrm{e}^{\pi i t} \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$. Die induzierte Abbildung $i_\sharp : \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \to \pi_1(M,[(0,0)])$ ist demnach äquivalent zu $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : k \mapsto 2k$. Abbildung L:8 illustriert dies eindrücklich: Umläuft man den Rand ∂M einmal, so umläuft man die Mittelachse zweimal! Der Homomorphismus $i_\sharp$ erlaubt keine Retraktion in `Grp`, also erlaubt auch die Einbettung i keine in `Top`.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

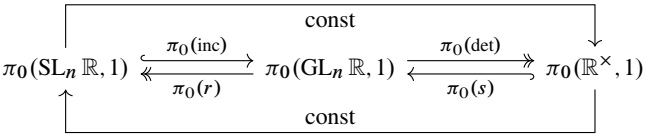
☞ **Übung L2Q.** Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist $\mathrm{inc} : \mathrm{SL}_n \mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ ein Retrakt, aber kein Deformationsretrakt: Dasselbe gilt für $\mathrm{SO}_n \mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{O}_n \mathbb{R}$ und $\mathrm{SU}_n \mathbb{C} \hookrightarrow \mathrm{U}_n \mathbb{C}$. *Ausführung:* ☜

(1) Konstruieren Sie Retrakte $(s, \det) : \mathbb{K}^\times \rightleftarrows \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ und $(\mathrm{inc}, r) : \mathrm{SL}_n \mathbb{K} \rightleftarrows \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$.
(2) Zeigen Sie anschließend, dass (inc, r) keine Homotopie-Äquivalenz sein kann.
(3) Welche der vier Funktoren π_0, π_1, $[\mathbb{S}^0, -]$, $[\mathbb{S}^1, -]$ liefern hierzu Hindernisse?
(4) Welche Eigenschaften muss ein Funktor F für diese Anwendung mitbringen?

✻ **L2Q.** (1) Eine offensichtliche Wahl ist $s : \mathbb{K}^\times \to \mathrm{GL}_n \mathbb{K} : x \mapsto \mathrm{diag}(x, 1, \ldots, 1)$. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus und erfüllt $\det \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^\times}$. Hieraus erhalten wir die Retraktion $r : \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_n \mathbb{K}$ vermöge $r(A) = As(\det A)^{-1}$, denn $\det r(A) = \det(A) \cdot \det(s(\det A)^{-1}) = 1$. Als Diagramm zusammengefasst (L2R):

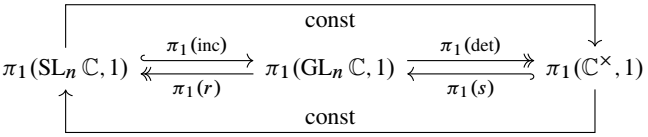


(2) Hierauf können wir nun jeden Funktor unseres Werkzeugkastens anwenden, etwa $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ wie $[\mathbb{S}^0, -]$, $[\mathbb{S}^1, -]$, etc. oder $F : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Set}$ wie π_0, π_1, etc. Auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wenden wir zunächst π_0 an:



Wegen $\pi_0(\mathbb{R}^\times, 1) = \{[\pm 1]\}$ ist $(\pi_0(s), \pi_0(\det))$ ein nicht-trivialer Retrakt. Dank $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}, 1) = \{[\pm 1]\}$ wissen wir sogar: $(\pi_0(s), \pi_0(\det))$ ist eine Bijektion. Hingegen ist die Gruppe $\mathrm{SL}_n \mathbb{R}$ wegzusammenhängend, also $\pi_0(\mathrm{SL}_n \mathbb{R}, 1) = \{[1]\}$ trivial. Somit ist (inc, r) keine Homotopie-Äquivalenz. (Das war offensichtlich.)

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind alle drei Gruppen wegzusammenhängend, also alle Einträge im π_0–Diagramm trivial. Durch π_0 erhalten wir hier also keinerlei Information. Das ändert sich schlagartig mit dem Funktor π_1:



Wegen $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \cong \mathbb{Z}$ ist $(\pi_1(s), \pi_1(\det))$ ein nicht-trivialer Retrakt. Wir müssen $\pi_1(\mathrm{GL}_n \mathbb{C}, 1)$ und $\pi_1(\mathrm{SL}_n \mathbb{C}, 1)$ gar nicht genauer bestimmen. Uns genügt: $\pi_1(r) \circ \pi_1(s) = 1$ ist trivial, insbesondere ist $\pi_1(r)$ nicht injektiv, denn das Bild von $\pi_1(s)$ liegt im Kern. Somit kann (inc, r) keine Homotopie-Äquivalenz sein.

(3) Unsere Argumente für $\mathrm{SL}_n \mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_1 \mathbb{K} = \mathbb{K}^\times$ gelten wörtlich genauso für die Gruppen $\mathrm{SO}_n \mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{O}_n \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_1 \mathbb{R} = \{\pm 1\}$ und $\mathrm{SU}_n \mathbb{C} \hookrightarrow \mathrm{U}_n \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathrm{U}_1 \mathbb{C} = \mathbb{S}^1$. Zusammenfassend erhalten wir:

Grundkörper & Gruppen	π_0	π_1	$[\mathbb{S}^0, -]$	$[\mathbb{S}^1, -]$
$\mathbb{R} : \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$, $\mathrm{O}_n \mathbb{R}$	✓	✘	✓	✓
$\mathbb{C} : \mathrm{GL}_n \mathbb{C}$, $\mathrm{U}_n \mathbb{R}$	✘	✓	✘	✓

(4) Unsere Anwendung eines geeigneten Funktors F folgt einem einfachen gemeinsamen Muster:

(a) Der Funktor $F : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Set}$ bzw. allgemeiner $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ ist homotopie-invariant.
(b) Die von $(\mathbb{K}^\times, 1) \twoheadrightarrow (\{1\}, 1)$ induzierte Abbildung $F((\mathbb{K}^\times, 1) \to F(\{1\}, 1))$ ist nicht injektiv.

Dann kann $\mathrm{SL}_n \mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ kein Homotopieretrakt sein. Ausführlich: Jeder Funktor F erhält Retrakte (H4F), $\det \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^\times}$ in $\mathtt{Top}_*$ impliziert $F(\det) \circ F(s) = \mathrm{id}_{F(\mathbb{K}^\times, 1)}$ in $\mathtt{Set}$. Insbesondere ist $F(s)$ injektiv. Wegen $r \circ s = \mathrm{const} : (\mathbb{K}^\times, 1) \twoheadrightarrow (\{1\}, 1) \hookrightarrow (\mathrm{SL}_n \mathbb{K}, 1)$ faktorisiert $F(r) \circ F(s)$ durch $F((\mathbb{K}^\times, 1) \to (\{1\}, 1))$, ist also nach Voraussetzung (b) nicht injektiv. Der Retrakt $F(s)$ ist injektiv, also kann $F(r)$ nicht injektiv sein. Wäre $(\mathrm{inc}, r) : (\mathrm{SL}_n \mathbb{K}, 1) \rightleftarrows (\mathrm{GL}_n \mathbb{K}, 1)$ ein Homotopieretrakt, so wäre $(F(\mathrm{inc}), F(r)) : F(\mathrm{SL}_n \mathbb{K}, 1) \cong F(\mathrm{GL}_n \mathbb{K}, 1)$ eine Bijektion dank Voraussetzung (a). Das widerspricht jedoch den Daten aus (b).

§L2f. Topologische Gruppen. Wir arbeiten für die folgende Übung in der Kategorie `TopGrp` der topologischen Gruppen und ihrer stetigen Gruppenhomomorphismen.

Übung L2R. (1) Zur Determinante $\det : \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^\times$ existieren Rechtsinverse. Die folgende exakte Sequenz spaltet und liefert das semidirekte Produkt $\mathrm{GL}_n \mathbb{K} = \mathrm{SL}_n \mathbb{K} \rtimes s(\mathbb{K}^\times)$.

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_n \mathbb{K} \underset{r}{\overset{\mathrm{inc}}{\rightleftarrows}} \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \underset{s}{\overset{\det}{\rightleftarrows}} \mathbb{K}^\times \longrightarrow 1$$

Zu jedem Schnitt s gehört demnach der Homöomorphismus $(\varphi, \psi) : \mathrm{SL}_n \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \cong \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ vermöge $\varphi(A, b) \mapsto A \cdot s(b)$ und $\psi(A) = (A \cdot s(\det A)^{-1}, \det(A))$.

(2) Für welche Schnitte $s : \mathbb{K}^\times \to \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ ist (φ, ψ) zudem ein Gruppenisomorphismus?

(3) In welchen Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ gilt allgemein $\mathrm{SL}_n \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \cong \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ in `TopGrp`? (3a) Sind die Zentren isomorph? (3b) Sind die Abelschmachungen äquivalent in `TopGrp`?

Hinweis: Für die Abelschmachung (L3N), gilt $\mathrm{GL}_n' \mathbb{K} = \mathrm{SL}_n' \mathbb{K} = \mathrm{SL}_n \mathbb{K}$ (L3P). Die Zentren sind $Z(\mathrm{GL}_n \mathbb{K}) = \{ \operatorname{diag}(x, \dots, x) \mid x \in \mathbb{K}^\times \}$ und $Z(\mathrm{SL}_n \mathbb{K}) = Z(\mathrm{GL}_n \mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}_n \mathbb{K}$.

✻ **L2R.** (1) Die Abbildung $s : \mathbb{K}^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{K} : x \mapsto \operatorname{diag}(x, 1, \dots, 1)$ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus und erfüllt $\det \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^\times}$. Diese besondere Eigenschaft von $(s, \det) : \mathbb{K}^\times \rightleftarrows \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ heißt traditionell *Schnitt* in `Top` oder *Spaltung* in `Grp`. Daraus erhalten wir den Homöomorphismus $(\varphi, \psi) : G := \mathrm{SL}_n \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ vermöge $\varphi(A, b) \mapsto A \cdot s(b)$ und $\psi(A) = (A \cdot s(\det A)^{-1}, \det(A))$. Dies sind stetige Abbildungen und erfüllen $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_n \mathbb{K}}$. Dies ist jedoch für $n \geq 2$ kein Gruppenisomorphismus! Hierzu müssten alle Matrizen $A \in \mathrm{SL}_n \mathbb{K}$ und $s(x)$ in $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ kommutieren, also $s(x)$ im Zentrum von $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ liegen.

(2) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ungerade definieren wir $s : \mathbb{R}^* \to \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ durch $s(x) = \operatorname{diag}(\sqrt[n]{x}, \dots, \sqrt[n]{x})$, wobei $\sqrt[n]{x} = \operatorname{sign}(x) \sqrt[n]{|x|}$. Dies ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus und erfüllt $\det \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^\times}$, denn $\det(s(x)) = (\operatorname{sign}(x) \sqrt[n]{|x|})^n = \operatorname{sign}(x)|x| = x$. Der Homöomorphismus $(\varphi, \psi) : \mathrm{SL}_n \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ aus (1) ist nun zudem ein Gruppenisomorphismus, kurzum ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

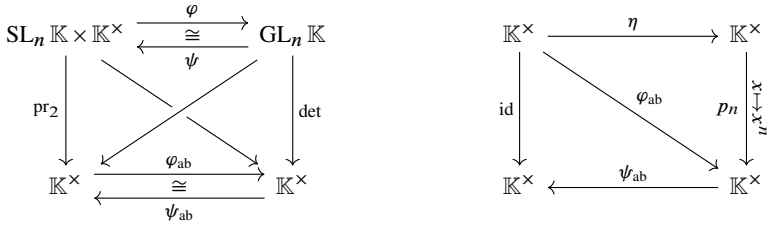
(3) Kurze Antwort: Dies gelingt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nur für n ungerade und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nur für $n = 1$.

(3a) In `TopGrp` haben wir den Isomorphismus $z : \mathbb{K}^\times \xrightarrow{\sim} Z(\mathrm{GL}_n \mathbb{K}) : x \mapsto \operatorname{diag}(x, \dots, x)$.

Für n ungerade gilt $Z(\mathrm{SL}_n \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times) = \{z(1)\} \times \mathbb{R}^\times$; dies ist isomorph zu $Z(\mathrm{GL}_n \mathbb{R})$, so wie es dank (2) sein muss, denn $\mathrm{SL}_n \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \cong \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ für n ungerade. Für n gerade hingegen gilt $Z(\mathrm{SL}_n \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times) = \{\pm z(1)\} \times \mathbb{R}^\times$; dies ist nicht isomorph zu $Z(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$, nicht einmal in `Grp`, also gilt $\mathrm{SL}_n \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \ncong \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ für n gerade.

Im komplexen Fall finden wir $Z(\mathrm{SL}_n \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times) = \{ z(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}) \mid k = 1, 2, \dots, n \} \times \mathbb{C}^\times$. Dies ist für $n \geq 2$ nicht isomorph zu $Z(\mathrm{GL}_n \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$, nicht einmal in `Grp`, also gilt $\mathrm{SL}_n \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \ncong \mathrm{GL}_n \mathbb{C}$ für $n \geq 2$.

(3b) Sei $(\varphi, \psi) : G := \mathrm{SL}_n \mathbb{K} \times \mathbb{K} \cong \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ ein Isomorphismus topologischer Gruppen.



Wir betrachten $s : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{K} : x \mapsto \varphi(1, x)$. Da $(1, x)$ im Zentrum von G liegt, muss $s(x)$ im Zentrum von $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ liegen, also $s(x) = \operatorname{diag}(\eta(x), \dots, \eta(x))$ mit $\eta : \mathbb{K}^\times \to \mathbb{K}^\times$ stetig. Somit gilt $\det s(x) = \eta(x)^n$. Die Abelschmachung von $\mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ ist äquivalent zu $\det : \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \to \mathbb{K}^\times$, dank $\mathrm{GL}_n' \mathbb{K} = \mathrm{SL}_n \mathbb{K}$. Die Abelschmachung von $\mathrm{SL}_n \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ ist äquivalent zur Projektion pr_2, dank $\mathrm{SL}_n' \mathbb{K} = \mathrm{SL}_n \mathbb{K}$. Die Abelschmachung ist ein Funktor $\mathrm{ab} : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}$, dank L3N. Der Isomorphismus $(\varphi, \psi) : \mathrm{SL}_n \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \cong \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ in `TopGrp` induziert so den Isomorphismus $(\varphi_{\mathrm{ab}}, \psi_{\mathrm{ab}}) : \mathbb{K}^\times \cong \mathbb{K}^\times$ in `TopAb`. Wir wissen $\varphi_{\mathrm{ab}}(x) = \varphi_{\mathrm{ab}} \circ \mathrm{pr}_2(1, x) = \det \circ \varphi(1, x) = \eta(x)^n$. Wir erhalten das obige Diagramm (rechts) und schließen wie in L2F: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wenden wir π_0 an und können n gerade ausschließen. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wenden wir π_1 an und können $n \geq 2$ ausschließen.

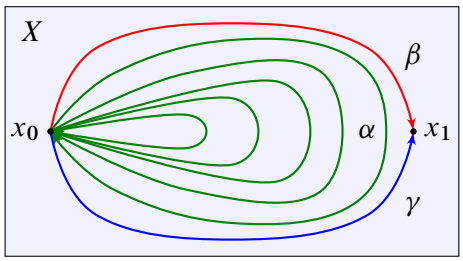
© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

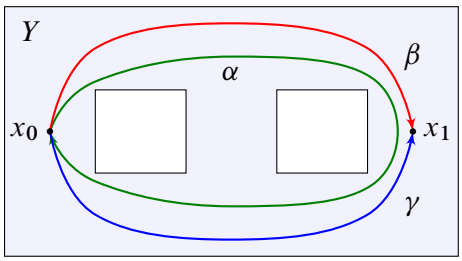
§L2g. Einfach zusammenhängende Räume. Topologische Räume mit trivialer Fundamentalgruppe sind besonders einfach, daher verdient diese Eigenschaft einen Namen:

Definition L2S. Für jeden topologischen Raum X vereinbaren wir folgende Begriffe:

$$\begin{array}{ccc}
X \text{ ist wegzusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & \pi_0(X) = \{X\} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
X \text{ ist 0–zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & [\mathbb{S}^0, X] = \{*\} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
X \text{ ist einfach zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & \pi_0(X) = \{X\} \text{ und } \pi_1(X, x_0) = \{1\} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
X \text{ ist 1–zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & [\mathbb{S}^0, X] = \{*\} \text{ und } [\mathbb{S}^1, X] = \{*\} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
X \text{ ist } n\text{–zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & [\mathbb{S}^k, X] = \{*\} \text{ für alle } 0 \le k \le n \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
X \text{ ist } \infty\text{–zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & [\mathbb{S}^k, X] = \{*\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
X \text{ ist zusammenziehbar} & :\Longleftrightarrow & [X, X] = \{*\} \\
\Uparrow & & \\
X \subset \mathbb{R}^n \text{ sternförmig} & &
\end{array}$$

Die Bezeichnung „einfach zusammenhängend“ erklärt sich so: Je zwei Punkte x_0 und x_1 in X lassen sich durch einen Weg verbinden, und dieser ist eindeutig bis auf Homotopie.





Satz L2T. *Genau dann ist X einfach zusammenhängend, wenn für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ die Menge $\Pi(X, x_0, x_1) = P(X, x_0, x_1)/\sim$ genau eine Wegeklasse enthält.*

BEWEIS. Wegzusammenhang bedeutet $\Pi(X, x_0, x_1) \neq \emptyset$ für jedes Paar $x_0, x_1 \in X$.

Jede Wahl $[\gamma] \in \Pi(X, x_0, x_1)$ definiert zueinander inverse Bijektionen

$$\begin{aligned}
\Pi(X, x_0, x_1) &\to \pi_1(X, x_0) \;:\; [\beta] \mapsto [\beta * \bar{\gamma}], \\
\pi_1(X, x_0) &\to \Pi(X, x_0, x_1) \;:\; [\alpha] \mapsto [\alpha * \gamma].
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Zur Bedingung $[\mathbb{S}^n, X] = \{*\}$ ist äquivalent, dass jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^n \to X$ im Raum X zusammenziehbar ist und zudem $\pi_0(X) = \{X\}$ gilt (G4R). Speziell für $n = 1$ bedeutet das $\pi_0(X) = \{X\}$ und $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$. Diese Eigenschaft des Raumes X ist von Fußpunkten unabhängig: Da X wegzusammenhängend ist, sind je zwei Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph (L2B). Ist eine trivial, so sind alle trivial.

Übung L2U. Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist $(n-1)$–zusammenhängend, aber nicht n–zusammenhängend.

✻ **L2U.** Für $n = 0$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ unzusammenhängend. Für $n \geq 1$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ hingegen $(n-1)$–zusammenhängend, denn für $0 \leq k < n$ ist jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ zusammenziehbar, kurz $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ (I4B). Jedoch ist $\mathbb{S}^n$ nicht n–zusammenhängend, denn $\mathrm{id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist nicht zusammenziehbar (J4A). Genauer gilt $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (J3A), also insbesondere $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \neq \{*\}$.

Bemerkung. Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to X$ ist genau dann nullhomotop (G4A), also im Raum X zusammenziehbar, geschrieben $f \simeq *$, wenn eine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ mit $F|_{\mathbb{S}^n} = f$ existiert (G4F). Je zwei Fortsetzungen $F, F' : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ mit $F|_{\mathbb{S}^n} = F'|_{\mathbb{S}^n} = f$ sind homotop relativ $\mathbb{S}^n$, falls zudem $[\mathbb{S}^{n+1}, X] = \{*\}$ gilt.

Anschaulich testet $f : \mathbb{S}^n \to X$ auf ein „n–dimensionales Loch“: Ein solches liegt vor, wenn zu f keine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ mit $F|_{\mathbb{S}^n} = f$ existiert. Es ist viel nützlicher, stetige Abbildungen und Homotopien zu definieren und $[\mathbb{S}^n, X]$ zu berechnen als vage über das Konzept „Loch“ zu spekulieren. Selbst wenn X irgendwo eingebettet ist, sollen topologische Begriffe wie der Zusammenhang von X hiervon unabhängig sein.

Trivialerweise gilt: Ist X zusammenziehbar, so auch n–zusammenhängend für alle n. Die Umkehrung gilt nicht (L:9): Der Pseudokreis W ist n–zusammenhängend für alle $n \in \mathbb{N}$, aber W ist nicht zusammenziehbar. Die Aussage $[\mathbb{S}^n, W] = \{*\}$ ist relativ leicht zu zeigen. (Versuchen Sie es!) Hingegen ist $\mathrm{id}_W \not\simeq *$ nicht so leicht zu beweisen (siehe M2I).

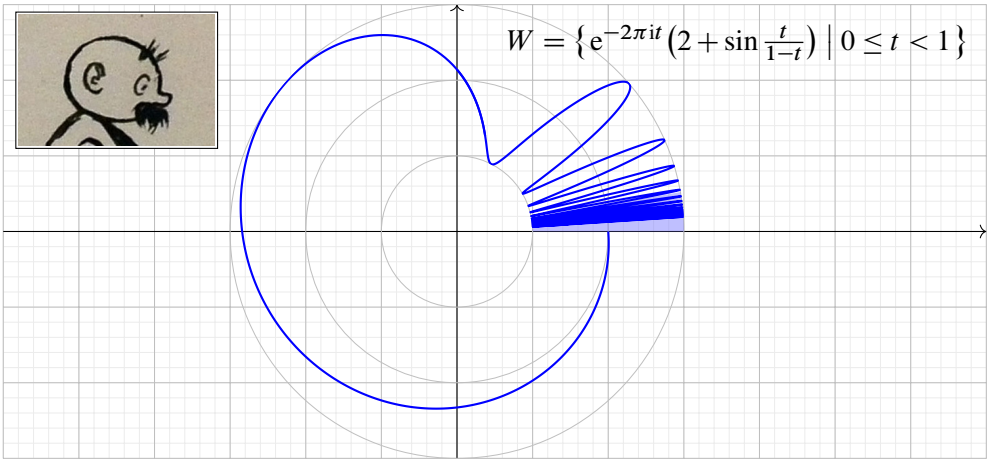


ABBILDUNG L:9. Der Pseudokreis $W \subset \mathbb{C}$

Für „vernünftige“ Räume können solche Pathologien nicht auftreten. Der folgende Satz von Henry WHITEHEAD (1904–1960)[1] ist grundlegend für die Homotopietheorie:

Satz L2V (Whitehead 1949). *Sei X triangulierbar, also homöomorph zur Realisierung $|K|$ eines Simplizialkomplexes K; statt homöomorph genügt homotopie-äquivalent. Genau dann ist X zusammenziehbar, wenn jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^n \to X$ zusammenziehbar ist.* □

Damit wird die Frage, ob X zusammenziehbar ist, in wesentlich einfachere Teilfragen zerlegt und ist insbesondere einer Induktion über die Dimension $n = 0, 1, 2, \ldots$ zugänglich.

[1] J.H.C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I, II*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) 213–245, 453–496.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L3. Präsentationen von Gruppen

☞ **§L3a. Motivation.** Um in einer Gruppe $(G,\cdot)$ praktisch zu rechnen, ist es hilfreich, ☜ sich auf eine geschickt gewählte Menge von Erzeugern zu stützen. Dies gilt besonders, wenn die Gruppe groß und kompliziert ist (gar unendlich), aber erzeugt wird von einer kleinen, übersichtlichen Menge (im besten Falle endlich). Die analoge Idee für einen Vektorraum über einem Körper führt zum Begriff der *Basis* und ist zentral für die Lineare Algebra.

Beispiel. Die zyklische Gruppe $C_n = \{a, a^2, a^3, \dots, a^n = 1\}$ der Ordnung n wird erzeugt von a mit der Relation $a^n = 1$. Dies schreiben wir $C_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$, kurz $C_n = \langle a \mid a^n \rangle$. Diese Gruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vermöge $h : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \xrightarrow{\sim} (C_n, \cdot) : k \mapsto a^k$.

Beispiel. Die unendlich zyklische Gruppe $C = \langle a \mid - \rangle$ wird frei von a erzeugt, das heißt ohne Relationen: Wir haben also $C = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mit $a^k \neq a^\ell$ für alle $k \neq \ell$. Diese Gruppe ist demnach isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$ vermöge $h : (\mathbb{Z}, +) \xrightarrow{\sim} (C, \cdot) : k \mapsto a^k$.

Beispiel. In der Gruppe $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ gilt die Vertauschung $ab = ba$. Wir können damit jedes Produkt $a^{k_1}b^{\ell_1} \cdots a^{k_n}b^{\ell_n}$ umordnen zu $a^k b^\ell$. Weitere Relationen gibt es nicht. Somit ist $h : (\mathbb{Z}^2, +) \xrightarrow{\sim} (G, \cdot) : (k, \ell) \mapsto a^k b^\ell$ ein Gruppenisomorphismus.

Beispiel. Die Gruppe $F(\{a,b\}) = \langle a, b \mid - \rangle$ wird *frei* von a, b erzeugt, also ohne Relationen bis auf die unvermeidlichen Kürzungen $aa^{-1} = a^{-1}a = bb^{-1} = b^{-1}b = 1$ wie in jeder Gruppe. Jedes Element schreibt sich eindeutig als reduziertes Wort, etwa $a^3b^{-2}ab^5$.

☞ **Vorläufige Formulierung:** Eine *Präsentation* (S, R) einer Gruppe G besteht aus einer ☜ Menge $S \subset G$ von Elementen, die die Gruppe erzeugen, und einer hinreichenden Menge $R \subset F(S)$ von Relationen, die zwischen diesen Erzeugern bestehen. Wir schreiben hierfür $G = \langle S \mid R \rangle$ und nennen dies *Präsentation von G durch Erzeuger S und Relationen R*.

Bemerkung. Anschaulich bedeutet die Präsentation $G = \langle S \mid R \rangle$ folgendes:

(1) Jedes Gruppenelement $g \in G$ lässt sich schreiben als ein Produkt $g = s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}$ von Erzeugern $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ und ihren Inversen, also $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{Z}$.
(2) Je zwei solche Schreibweisen desselben Elements unterscheiden sich nur durch die wiederholte Anwendung der angegebenen Relationen $R \subset F(S)$.

Hierzu müssen wir erklären, was Relationen sein sollen, und wie hieraus die Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ entsteht. Dies lösen wir, indem wir zunächst die frei erzeugte Gruppe $F = \langle S \mid - \rangle$ ohne Relationen erklären. Anschließend können wir Relationen $R \subset F$ als Wörter über S betrachten und zur Quotientengruppe $\langle S \mid R \rangle := F/\langle R^F \rangle$ übergehen.

Die Ausführung dieses Plans ist etwas länglich, aber zur Grundlegung unvermeidlich. Ich gebe daher zunächst einen Crash-Kurs (L3A–L3B). Wer möchte, kann anschließend gleich mit topologischen Anwendungen wie in §L4 und §L6 beginnen.

☞ **Bemerkung.** Jede Gruppe lässt sich so präsentieren (L3L). Somit sind Präsentationen ein ☜ universelles Werkzeug, um Gruppen zu konstruieren und zu untersuchen. Viele unendliche Gruppen erlauben eine endliche Präsentation und damit eine effiziente Beschreibung. Die kombinatorische Gruppentheorie stellt hierzu umfangreiche Techniken zur Verfügung.

Literatur: J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer, 1995. R.C. Lyndon, P.E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer, 2001.

§L3b. Präsentation von Monoiden: Wörter und Relationen. Sei A eine Menge und

$$A^* := \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} A^n = \big\{ (a_1,a_2,\dots,a_n) \,\big|\, n\in\mathbb{N},\ a_1,a_2,\dots,a_n \in A \big\}$$

die Menge aller *Wörter* über dem *Alphabet* A. Ihre *Verkettung* definieren wir durch

$$\circ : A^* \times A^* \to A^* : (a_1,\dots,a_m)\circ(b_1,\dots,b_n) := (a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n).$$

Das n–Tupel $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in A^n \subset A^*$ schreiben wir abkürzend $a_1a_2\cdots a_n$. Für $n=1$ identifizieren wir das einelementige Wort $(a)\in A^*$ mit dem Buchstaben $a\in A$; hierdurch wird $A\subset A^*$ eine Teilmenge. Für $n=0$ bezeichnen wir das leere Wort mit $e := ()$. Damit ist $(A^*,\circ,e)$ das *freie Monoid* über A: Nach Konstruktion schreibt sich jedes Element $w\in A^*$ eindeutig als Produkt $w = a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_n$ der Länge $n\in\mathbb{N}$ mit Faktoren $a_1,a_2,\dots,a_n\in A$.

Wie üblich kann zur Abkürzung das Produktsymbol $\circ$ auch weggelassen werden. Wie in jedem Monoid schreiben wir für das n–fache Produkt $uu\cdots u$ kurz u^n, also $u^0 := e$, $u^1 := u$, $u^2 := uu$, $u^3 := uuu$, und rekursiv $u^{n+1} := u^n\circ u$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Wir wollen Relationen $w\equiv w'$ einführen. Gegeben sei $K\subset A^*\times A^*$. Eine Ersetzung $uwv \to uw'v$ mit $u,v\in A^*$ und $(w,w')\in K$ heißt *elementare Umformung*. Die reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow{*}$ definiert ein *Ersetzungssystem* (engl. *rewriting system*). Die Äquivalenzrelation $\equiv$ auf A^* ist die reflexive, symmetrische, transitive Hülle von $\to$: Zwei Wörter in A^* sind genau dann äquivalent, wenn sie durch eine endliche Folge elementarer Umformungen und ihrer Umkehrungen ineinander übergehen. Dies ist eine *Kongruenz* auf $(A^*,\circ)$, also verträglich mit der Verkettung von Wörtern: Aus $u\equiv u'$ und $v\equiv v'$ folgt $u\circ v\equiv u'\circ v'$. Somit ist auf der Quotientenmenge $A^*/_\equiv$ die Verknüpfung $[u]\cdot[v] := [u\circ v]$ wohldefiniert.

Definition L3A. Das durch (A,K) *präsentierte Monoid* ist das Tripel $([\,A\mid K\,],\cdot,1)$ mit

$$[\,A\mid K\,] := A^*/K := A^*/_\equiv, \qquad [u]\cdot[v] := [u\circ v], \qquad 1 := [e].$$

Hierzu gehört der Quotientenhomomorphismus $\pi = \pi_{(A,K)} : A^* \to A^*/K : u\mapsto [u]$. Oft schreibt man kurz u für die Äquivalenzklasse $[u]\in[\,A\mid K\,]$; das ist inkorrekt, aber bequem.

Bemerkung. Das Monoid $([\,A\mid K\,],\cdot,1)$ hat folgende universelle Abbildungseigenschaft:

Erzeuger	$A \xrightarrow{\ f\ } (M,\cdot,1)$	Abbildung in ein Monoid
	$\mathrm{inc}\big\downarrow$ $\quad\big\Vert$	
freies Monoid	$(A^*,\circ,e) \xrightarrow{\ \exists! g\ } (M,\cdot,1)$	Fortsetzung zum Monoidhom. $a_1\cdots a_n \mapsto f(a_1)\cdots f(a_n)$
	$\pi\big\downarrow$ $\quad\big\Vert$	
präsentiertes Monoid	$([\,A\mid K\,],\cdot,1) \dashrightarrow[\exists! h] (M,\cdot,1)$	$\iff \quad \forall (w,w')\in K : g(w)=g(w')$

Jede Abbildung $f : A\to M$ in ein Monoid $(M,\cdot,1)$ setzt sich eindeutig fort zu einem Monoidhomomorphismus $g : (A^*,\circ,e)\to(M,\cdot,1) : a_1a_2\cdots a_n \mapsto f(a_1)\cdot f(a_2)\cdots f(a_n)$. Dies besagt erneut, dass A^* das freie Monoid über A ist, diesmal als Abbildungseigenschaft.

Genau dann induziert g einen Monoidhomomorphismus $h : ([\,A\mid K\,],\cdot,1)\to(M,\cdot,1)$ mit $g = h\circ\pi$, wenn „$K\subset\ker(g)$“ gilt, genauer gesagt $g(w)=g(w')$ für alle $(w,w')\in K$. Dann nämlich gilt $g(w)=g(w')$ für alle Wörter $w,w'\in A^*$ mit $w\equiv w'$, und wir erhalten auf dem Quotienten die wohldefinierte Abbildung $h : A^*/_\equiv \to M : [w]\mapsto g(w)$.

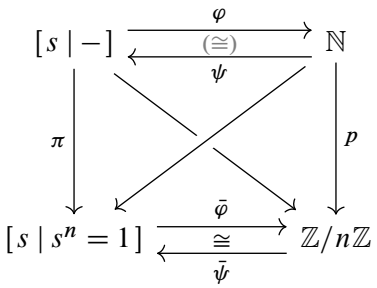
© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✍ **Beispiel.** Für das freie Monoid $N = [\,s \mid -\,] := [\,\{s\} \mid \{\}\,]$ über einem Erzeuger s haben wir $(\varphi,\psi) : (N,\cdot) \cong (\mathbb{N},+)$ dank $\varphi : s \mapsto 1$ und $\psi : k \mapsto s^k$, da auch $(\mathbb{N},+)$ frei über 1 ist. ✍

✍ **Beispiel.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Für das Monoid $C_n = [\,s \mid s^n = 1\,] := [\,\{s\} \mid \{(s^n, e)\}\,]$ finden wir $(\bar\varphi,\bar\psi) : (C_n,\cdot) \cong (\mathbb{Z}/n,+)$ dank $\bar\varphi : [s] \mapsto 1$ und $\bar\psi : (k+\mathbb{Z}n) \mapsto [s^k]$. ✍

Die Menge C_n besteht aus den Äquivalenzklassen der Wörter $1, s, s^2, \ldots, s^{n-1}$: Für s^m mit $m \in \mathbb{N}$ gilt $m = qn + r$ mit $q, r \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < n$, also $s^m = (s^n)^q s^r \equiv s^r$. Insbesondere ist $(C_n,\cdot)$ eine Gruppe, denn zu s^r ist s^{n-r} invers, dank $s^r \circ s^{n-r} = s^n \equiv e$.

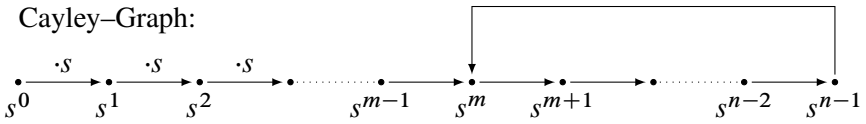
Wir erhalten so den Gruppenisomorphismus $\bar\varphi : (C_n,\cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n,+) : [s] \mapsto 1$ mit der Umkehrung $\bar\psi : (k+\mathbb{Z}n) \mapsto [s^k]$: Dank Konstruktion gilt $\bar\varphi \circ \bar\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n}$ und $\bar\psi \circ \bar\varphi = \mathrm{id}_{C_n}$.



☞ **Bemerkung.** Wir wollen einen Isomorphismus zwischen zwei Quotienten konstruieren. Eine solche Konstruktion nutzt nahezu immer folgendes Prinzip: Wir konstruieren zunächst φ und ψ auf den ursprünglichen Mengen, *vor* der Quotientenbildung, denn hier gelingt es leicht. Damit induzieren wir $\bar\varphi$ und $\bar\psi$ auf den Quotienten, und hier gilt der Isomorphismus. ☜

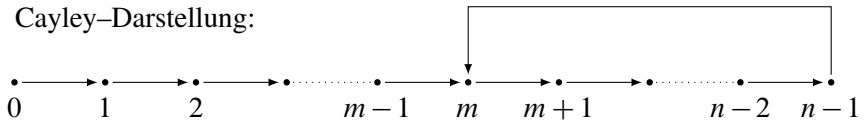
✍ **Beispiel.** Das Monoid $C_n = C_{n,0} := [\,s \mid s^n = 1\,]$ ist die zyklische Gruppe der Ordnung n. Wie viele Elemente hat hingegen das Monoid $C_{n,m} := [\,s \mid s^n = s^m\,]$ mit $0 < m < n$? Hierzu konstruieren wir sorgfältig den *Cayley–Graphen* von $C_{n,m}$ bezüglich $\{s\}$: ✍

Cayley–Graph:



Das Monoid $C_{n,m} := [\,s \mid s^n = s^m\,]$ mit $0 < m < n$ hat Ordnung n, ist aber keine Gruppe. Es lässt sich auch in keine Gruppe einbetten, da $s^{m-1} \neq s^{n-1}$ aber $s^{m-1}s = s^{n-1}s$ gilt.

Cayley–Darstellung:



☞ **Bemerkung.** Auch hier verhilft uns der Satz von Cayley zu einer expliziten Darstellung: Wir können $C_{n,m}$ mit $0 \leq m < n$ als ein konkretes Monoid von Abbildungen realisieren! Hierzu betrachten wir die Menge $X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und die Abbildung $\sigma : X \to X$ mit $\sigma(k) = k+1$ für $0 \leq k < n-1$ und $\sigma(n-1) = m$. Dann sind $\mathrm{id}_X = \sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^{n-1}$ paarweise verschieden und $\sigma^n = \sigma^m$. Das Monoid $M = \{\,\sigma^k \mid k \in \mathbb{N}\,\}$ hat somit genau n Elemente, und wir erhalten den Monoidisomorphismus $(C_{n,m},\cdot,1) \xrightarrow{\sim} (M,\circ,\mathrm{id}_X) : s \mapsto \sigma$ ☜

☞ **Bemerkung.** Ein Monoid M heißt *zyklisch*, wenn es von einem Element $a \in M$ erzeugt wird, also $M = \{ a^k \mid k \in \mathbb{N} \}$ erfüllt. Es ist dann isomorph zu den natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +) \cong (N, \cdot)$ oder zu genau einem der obigen Modelle $C_{n,m}$ für $0 \leq m < n$. ☜

Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, wenn sie von einem Element $g \in G$ erzeugt wird, also $G = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$ erfüllt. Sie ist dann isomorph zu $(\mathbb{Z}, +) \cong (C, \cdot)$ oder zu $C_n = C_{n,0}$. (Übung: Beweisen Sie dies zur Wiederholung duch eine explizite Konstruktion.)

☞ **Bemerkung.** Sie sehen hier eindrücklich die Beziehung zwichen *Kern* und *Kongruenz*. ☜

Für den Monoidhomomorphismus $h : (\mathbb{N}, +, 0) \to (C_{n,m}, \cdot, 1) : k \mapsto s^k$ mit $0 < m < n$ ist der Kern $h^{-1}(\{1\}) = \{0\}$ trivial, dennoch ist h nicht injektiv. Im Falle einer Gruppe sind beide Aussagen äquivalent, im Allgemeinen für Monoide jedoch nicht!

Jeder Monoidhomomorphismus $h : (M, \circ, e) \to (N, \cdot, 1)$ definiert eine Kongruenz $K = \{ (u, u') \in M \times M \mid h(u) = h(u') \}$: Diese Teilmenge $K \subseteq M \times M$ ist eine Äquivalenzrelation, denn sie ist offensichtlich reflexiv, symmetrisch und transitiv. Da h multiplikativ ist, ist K zudem eine Kongruenz, denn aus $(u, u') \in K$ und $(v, v') \in K$ folgt $(uu', vv') \in K$. Damit erhalten wir die kanonische Faktorisierung $h : M \twoheadrightarrow M/K \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}(h) \hookrightarrow N$.

Der Kern $\ker(h) = \{ u \in M \mid h(u) = 1 \} \leq (M, \circ, e)$ ist immer ein Untermonoid, enthält jedoch im Allgemeinen nicht genug Information, weder als Injektivitätskriterium noch für die kanonische Faktorisierung. Ist $(M, \circ, e)$ zudem eine Gruppe, so ist $\ker(h)$ eine normale Untergruppe und bestimmt eindeutig die Kongruenz $K = \{ (u, u') \in M \mid u^{-1}u' \in \ker(h) \}$. Dazu müssen wir in M invertieren können, dann verläuft das Argument wie gewohnt.

☞ **Bemerkung.** In vielen wichtigen Anwendungen interessieren uns vornehmlich Gruppen, Monoide stehen am Rande und dienen bestenfalls als Hilfskonstrukt. Die einschränkende Forderung der allgemeinen Invertierbarkeit ergibt eine strengere Struktur, bietet dafür aber auch die reichere Theorie: weniger Breite, mehr Tiefe. ☜

Dennoch sind Monoide der natürliche Rahmen: Das freie Monoid $(A^*, \circ, e)$ ist leicht herzustellen und zu verstehen, daraus konstruieren wir durch Quotienten alles weitere. In einigen Anwendungen, wie der folgenden, stehen tatsächlich Monoide im Mittelpunkt.

☞ **Beispiel.** Sei $\mathscr{F} = \left\{ [F_g^{\pm}] \;\middle|\; g \in \mathbb{N} \right\}$ die Menge aller Homöomorphieklassen zusammenhängender geschlossener Flächen. Hierauf ist die verbundene Summe wohldefiniert (K4C): Die Verknüpfung $\sharp : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F} : ([A], [B]) \mapsto [A \sharp B]$ ist assoziativ und kommutativ, neutrales Element ist $[\mathbb{S}^2]$. Schneiden und Kleben zeigt: Alle geschlossenen Flächen werden erzeugt vom Torus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$ und der reell-projektiven Ebene $P = \mathbb{RP}^2 \cong F_0^-$: ☜

$$F_g^+ \cong \mathbb{S}^2 \sharp T^{\sharp g}, \qquad F_g^- \cong \mathbb{S}^2 \sharp P^{\sharp(g+1)}, \qquad T \sharp P \cong P \sharp P \sharp P.$$

Letzteres ist die Dycksche Relation K3N. Der Klassifikationssatz K4C besagt nun:

$$(\mathscr{F}, \sharp, [\mathbb{S}^2]) \quad \cong \quad [t, p \mid tp = pt = p^3] =: M$$

Die universelle Abbildungseigenschaft liefert den Monoidhomomorphismus $h : M \to \mathscr{F}$ mit $t \mapsto [T]$ und $p \mapsto [P]$, da die geforderten Relationen $tp = pt = p^3$ in $\mathscr{F}$ erfüllt sind. Surjektivität von h gilt, da $\mathscr{F}$ von $[T], [P]$ erzeugt wird. Es bleibt Injektivität zu zeigen: Jedes Wort in t, p können wir dank der Relationen umformen zu t^g bzw. p^{g+1} mit $g \in \mathbb{N}$. Die Bilder $[T^{\sharp g}]$ bzw. $[P^{\sharp(g+1)}]$ sind verschieden dank unserer topologischen Invarianten: Orientierbarkeit und Euler–Charakteristik. Das Monoid $(\mathscr{F}, \sharp, [\mathbb{S}^2])$ ist nicht zyklisch.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✍ **Beispiel.** Zur Präsentation inverser Elemente nutzen wir sinnfällige Abkürzungen wie ✍

$$C = \big[\, s^+, s^- \;\big|\; s^+s^- = s^-s^+ = 1 \,\big] := \big[\, \{s^+, s^-\} \;\big|\; \{(s^+s^-, e),\ (s^-s^+, e)\} \,\big].$$

Für dieses Monoid finden wir $(h, \bar{h}) : (C, \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$ dank $h : s^\pm \mapsto \pm 1$ und $\bar{h} : k \mapsto s^k$.

Ausführlich setzen wir $f : \{s^\pm\} \to \{\pm 1\}$ fort zu $g : \{s^\pm\}^* \to \mathbb{Z}$, prüfen die Relationen $g(s^+s^-) = g(s^-s^+) = g(e) = 0$, und erhalten $h : C \to \mathbb{Z}$ durch Übergang zum Quotienten. Der umgekehrte Isomorphismus ist $\bar{h} : k \mapsto s^k$: Hierzu prüfen wir, dass $(C, \cdot)$ eine Gruppe ist, und nutzen die universelle Eigenschaft der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$: Auch sie ist frei über 1.

✍ **Definition L3B.** Zur Menge S betrachten wir das Alphabet $A := S \times \{\pm\} = \{\, s^\pm \mid s \in S \,\}$. ✍
Wir nutzen im Folgenden die Injektion $\iota : S \hookrightarrow A : s \mapsto s^+$ und schreiben kurz und bequem $s = s^+$ sowie $s^{-1} = s^-$. Damit gilt $S \subset A = \{\, s = s^+,\ s^{-1} = s^- \mid s \in S \,\}$.

Gegeben sei $R \subset A^*$; wir setzen $K := \{(s^+s^-, e),\ (s^-s^+, e) \mid s \in S\} \cup \{(r, e) \mid r \in R\}$. Die durch (S, R) *präsentierte Gruppe* ist dann $\langle\, S \mid R \,\rangle := [\, A \mid K \,]$. Dieses Monoid ist tatsächlich eine Gruppe, denn das Inverse zu $g = [a_1 \cdots a_n]$ ist $g^{-1} = [a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}]$.

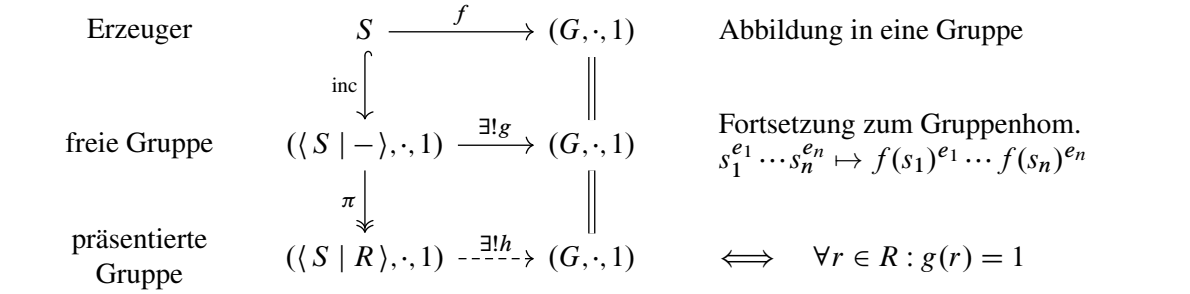
☞ **Notation.** Wir nutzen zunächst Monoide als die einfachere und grundlegendere Struktur. ☜
Zu $w, w' \in A^*$ codieren wir die *Relation* $w = w'$ als das Paar $(w, w') \in K$; so können wir jedes Monoid präsentieren als $[\, A \mid K \,]$ mit Erzeugern A und Relationen $K \subset A^* \times A^*$.

Wir nutzen zudem die Ergänzung $A^* \hookrightarrow A^* \times \{e\}$: Die sehr häufige Relation $r = 1$ codieren wir durch den *Relator* $r \in A^*$; dieser steht abkürzend für $(r, e) \in K \subset A^* \times A^*$.

Anschließend betrachten wir Gruppen als den Spezialfall im Fokus unseres Interesses. In jeder Gruppe ist die Relation $w = w'$ äquivalent zu $w'w^{-1} = 1$. Wir codieren dies als den *Relator* $r = w'w^{-1} \in R$; so können wir jede Gruppe präsentieren als $\langle\, S \mid R \,\rangle$ mit Erzeugern S und Relatoren $R \subset A^*$ über dem Alphabet $A = S \times \{\pm\}$, wie oben erklärt.

Die Präsentation $\langle\, s_1, \ldots, s_k \mid w_1 = w_1', \ldots, w_\ell = w_\ell' \,\rangle$ schreiben wir äquivalent ebenso $\langle\, s_1, \ldots, s_k \mid r_1 = 1, \ldots, r_\ell = 1 \,\rangle$ mit $r_i = w_i' w_i^{-1}$, oder noch kürzer $\langle\, s_1, \ldots, s_k \mid r_1, \ldots, r_\ell \,\rangle$.

✍ **Bemerkung.** Die Gruppe $(\langle\, S \mid R \,\rangle, \cdot, 1)$ hat folgende universelle Abbildungseigenschaft: ✍



Jede Abbildung $f : S \to G$ in eine Gruppe $(G, \cdot, 1)$ setzt sich eindeutig fort zu einem Gruppenhomomorphismus $g : (\langle\, S \mid - \,\rangle, \cdot, 1) \to (G, \cdot, 1)$. Diese universelle Eigenschaft L3H charakterisiert die freie Gruppe $F(S) = \langle\, S \mid - \,\rangle$ über der Erzeugermenge S.

Genau dann induziert g einen Gruppenhomomorphismus $h : (\langle\, S \mid R \,\rangle, \cdot, 1) \to (G, \cdot, 1)$ mit $g = h \circ \pi$, wenn $R \subset \ker(g)$ gilt, also $g(r) = 1$ für alle $r \in R$. Dann nämlich gilt $g(w) = g(w')$ für alle Wörter $w, w' \in A^*$ mit $w \equiv w'$, und wir erhalten auf dem Quotienten die wohldefinierte Abbildung $h : \langle\, S \mid R \,\rangle = A^*/_\equiv \to G : [w] \mapsto g(w)$.

Beispiel. Die *freie Gruppe* $F(S)$ über der Erzeugermenge $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ist

$$F_n = F(S) := \langle\, s_1, \dots, s_n \mid - \,\rangle = \big[\, \{s_1^{\pm}, \dots, s_n^{\pm}\} \;\big|\; \{(s_1^{\pm} s_1^{\mp}, e), \dots, (s_n^{\pm} s_n^{\mp}, e)\} \,\big].$$

Wir haben oben $F_1 \cong \mathbb{Z}$ gezeigt. Für $n \geq 2$ ist F_2 nicht abelsch, denn $s_1 s_2 \neq s_2 s_1$ dank Kürzungsalgorithmus L-2: Es gelten nur die unbedingt nötigen Kürzungen $s_i^{\pm} s_i^{\mp} = 1$, wie in jeder Gruppe, aber keine weiteren. Die Menge F_2 besteht aus den *reduzierten Wörten*

$$1,\ s_1^{e_1},\ s_2^{e_1},\ s_1^{e_1} s_2^{e_2},\ s_2^{e_1} s_1^{e_2},\ s_1^{e_1} s_2^{e_2} s_1^{e_3},\ s_2^{e_1} s_1^{e_2} s_2^{e_3},\ s_1^{e_1} s_2^{e_2} s_1^{e_3} s_2^{e_4},\ s_2^{e_1} s_1^{e_2} s_2^{e_3} s_1^{e_4},\ \dots$$

mit $e_i \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, und jedes Element von F_2 tritt in dieser Liste genau einmal auf (L3F).

Bemerkung. Anders als freie Monoide sind freie Gruppen keine ganz banale Konstruktion: Die Kürzungsregel bedeutet, dass jedes Element auf mehrere Arten geschrieben werden kann. Darunter ist jeweils genau ein reduziertes Wort als Normalform (Algorithmus L-2).

Beispiel L3C. Monoide und Gruppen sind im Allgemeinen nicht kommutativ. Zur Kommutativität genügt, dass alle Erzeuger kommutieren, etwa dank expliziter Vertauschungsregel:

$$[\, s_1, \dots, s_n \mid s_i s_j = s_j s_i : i, j = 1, \dots, n \,] \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^n \;:\; s_i \mapsto e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\langle\, s_1, \dots, s_n \mid s_i s_j = s_j s_i : i, j = 1, \dots, n \,\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^n \;:\; s_i \mapsto e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Dies nennen wir das *freie abelsche Monoid* bzw. die *freie abelsche Gruppe* über den n Erzeugern $s_1, \dots, s_n$. Stillschweigend gehen wir bei der Erzeugermenge $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ davon aus, dass alle Buchstaben verschieden sind, also $s_i \neq s_j$ für alle $i \neq j$ gilt.

Freie *abelsche* Monoide und Gruppen kennen und nutzen Sie seit Schultagen beim Primfaktorzerlegen und Brüchekürzen, wenn auch nicht unter diesem Namen:

Übung L3D. (1) Das Monoid $(\mathbb{Z}_{>0}, \cdot)$ ist frei abelsch über der Menge $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ aller Primzahlen. Ebenso ist die Gruppe $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist frei abelsch über $\mathbb{P}$. Zusammengefasst:

$$\big[\, p : p \in \mathbb{P} \;\big|\; pq = qp : p, q \in \mathbb{P} \,\big] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}_{>0}, \cdot) \;:\; p \mapsto p$$

$$\big\langle\, p : p \in \mathbb{P} \;\big|\; pq = qp : p, q \in \mathbb{P} \,\big\rangle \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot) \;:\; p \mapsto p$$

(2) Das Monoid $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}_{>0}$ und die Gruppe $\mathbb{Q}^* = \{\pm 1\} \times \mathbb{Q}_{>0}$ sind abelsch, aber nicht frei abelsch, denn sie enthalten 2–Torsion. Ausführlich gilt:

$$\big[\, s : s \in S = \{-1\} \cup \mathbb{P} \;\big|\; (-1)^2 = 1,\ st = ts : s, t \in S \,\big] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}^*, \cdot) \;:\; s \mapsto s$$

$$\big\langle\, s : s \in S = \{-1\} \cup \mathbb{P} \;\big|\; (-1)^2 = 1,\ st = ts : s, t \in S \,\big\rangle \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}^*, \cdot) \;:\; s \mapsto s$$

(3) Jede rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ schreibt sich als Bruch $r = z/n!$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ wird demnach erzeugt von den Elementen $r_n = 1/n!$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Dabei gelten die Relationen $n \cdot r_n = r_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir erhalten so die Präsentation

$$h \;:\; \big\langle\, s_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \;\big|\; s_n^n = s_{n-1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \,\big\rangle =: (G, \cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}, +) \;:\; s_n \mapsto \tfrac{1}{n!}.$$

Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist abelsch und *torsionsfrei*: Außer dem neutralen Element 0 enthält $(\mathbb{Q}, +)$ keine Elemente endlicher Ordnung. Dennoch ist die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ nicht frei abelsch. Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist *divisibel*: Zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existiert $w \in \mathbb{Q}$ mit $nw = x$.

(4) Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ erlaubt den bemerkenswerten Gruppenisomorphismus

$$(\exp, \ln) : (\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot).$$

Für den Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ hingegen ist dies unmöglich: Hier gilt $(\mathbb{Q}, +) \ncong (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **L3D.** (1) Die Primzahlen $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,\dots\}$ bescheren uns den Monoidhomomorphismus $\Phi : (\mathbb{N}^{(\mathbb{P})},+) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{N}_{\geq 1},\cdot) : (e_2,e_3,e_5,\dots) \mapsto 2^{e_2}3^{e_3}5^{e_5}\dots$. Er ist surjektiv, denn jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ist ein Produkt von Primzahlen. Er ist injektiv, denn die Faktorisierung in Primzahlen ist eindeutig bis auf Umordnung der Faktoren. Die Umkehrung $\Phi^{-1} : (\mathbb{Z}_{>0},\cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{N}^{(\mathbb{P})},+)$ ist die eindeutige Primfaktorzerlegung. Somit ist das Monoid $(\mathbb{Z}_{>0},\cdot) \cong (\mathbb{N}^{(\mathbb{P})},+)$ frei abelsch über $\mathbb{P}$, geschrieben $(\mathbb{Z}_{>0},\cdot) = [\mathbb{P} \mid pq = qp : p,q \in \mathbb{P}]$.

Für die rationalen Zahlen gilt entsprechend $\Phi : (\mathbb{Z}^{(\mathbb{P})},+) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}_{>0},\cdot) : (e_2,e_3,e_5,\dots) \mapsto 2^{e_2}3^{e_3}5^{e_5}\dots$. Somit ist die Gruppe $(\mathbb{Q}_{>0},\cdot) \cong (\mathbb{Z}^{(\mathbb{P})},+)$ frei abelsch über $\mathbb{P}$, geschrieben $(\mathbb{Q}_{>0},\cdot) = \langle \mathbb{P} \mid pq = qp : p,q \in \mathbb{P}\rangle$.

Bemerkung: Das Monoid $(\mathbb{Z}_{>0},\cdot)$ und die Gruppe $(\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$ sind jeweils frei abelsch, aber nicht frei: Ein einziges Element genügt nicht als Erzeuger. (Warum?) Frei über zwei oder mehr Erzeugern wäre nicht abelsch.

(2) Das Monoid $(\mathbb{Z}^*,\cdot)$ und die Gruppe $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ sind jeweils abelsch, aber nicht frei abelsch: Das Element -1 hat Ordnung 2, denn $-1 \neq 1$ aber $(-1)^2 = 1$. Dies ist unmöglich in einem freien Monoid bzw. frei abelschen Monoid, und ebenso in einer freien Gruppe bzw. frei abelschen Gruppe. (Warum?)

Die angegebenen Präsentationen sind offensichtliche Erweiterungen der Präsentation aus (1).

(3) Der Gruppenhomomorphismus $h : (G,\cdot) \to (\mathbb{Q},+) : s_n \mapsto \frac{1}{n!}$ ist wohldefiniert dank der universellen Abbildungseigenschaft (L3B): Jede Relation $s_n^n = s_{n-1}$ in $(G,\cdot)$ ist auch in $(\mathbb{Q},+)$ erfüllt dank $n \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$. Wir definieren die Umkehrabbildung $k : (\mathbb{Q},+) \to (G,\cdot)$ durch $z/n! \mapsto s_n^z$. Sie ist wohldefiniert, denn für $w/m! = z/n!$ mit $m < n$ gilt $z = w(m+1)\cdots n$, also $s_m^w = s_n^z$ dank der angegebenen Relationen $s_n^n = s_{n-1}$. Wir finden $k \circ h = \mathrm{id}_G$ und $h \circ k = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Also ist $(h,k) : (G,\cdot) \cong (\mathbb{Q},+)$ ein Isomorphismus, wie behauptet.

Alternative: Als Erzeuger der Gruppe $(\mathbb{Q},+)$ genügen auch alle Brüche der Form $q_n = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Offensichtliche Relationen sind $\frac{1}{n} = \frac{m}{mn}$. Wir erhalten $(\mathbb{Q},+) \cong \left\langle q_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \;\middle|\; q_n = q_{mn}^m : m,n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\rangle$.

Bemerkung: Die abelsche Gruppe $(\mathbb{Q},+)$ ist nicht endlich erzeugt, somit nicht endlich präsentierbar. *Ausführlich:* Gegeben seien endlich viele Elemente $a_1,\dots,a_\ell \in \mathbb{Q}$. Diese machen wir gleichnamig und erhalten $a_1 = z_1/n,\dots,a_\ell = z_\ell/n$ mit gemeinsamen Nenner $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und den Zählern $z_1,\dots,z_\ell \in \mathbb{Z}$. Die Untergruppe $I = \langle z_1,\dots,z_\ell\rangle < (\mathbb{Z},+)$ wird erzeugt von $z = \mathrm{ggT}(z_1,\dots,z_\ell)$. Die Untergruppe $J = \langle a_1,\dots,a_\ell\rangle < (\mathbb{Q},+)$ wird demnach erzeugt von z/n. Diese Untergruppe ist nicht ganz $\mathbb{Q}$, zum Beispiel gilt $1/(2n) \notin J$.

(4) Die Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ und der natürliche Logarithmus $\ln : (\mathbb{R}_{>0},\cdot) \to (\mathbb{R},+)$ sind Gruppenhomomorphismen. Sie erfüllen $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $\exp \circ \ln = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$, sind also zueinander inverse Gruppenisomorphismen, kurz $(\exp,\ln) : (\mathbb{R},+) \cong (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$. Diese wunderbare Beziehung erlaubt zum Beispiel die Berechnung von Wurzeln: Zu gegebenen $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$ löst $r = \exp(\ln(a)/n)$ die Gleichung $r^n = a$.

Hingegen gilt $(\mathbb{Q},+) \ncong (\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$, denn $(\mathbb{Q},+)$ ist divisibel, aber $(\mathbb{Q},\cdot)$ nicht. *Ausführlich:* Angenommen, es gäbe einen Isomorphismus $(h,k) : (\mathbb{Q},+) \cong (\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$. In $(\mathbb{Q},+)$ betrachten wir $x = k(2)$ und $y = x/2$ mit $y + y = x$. In $(\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$ erhalten wir $r = h(y)$ mit $r \cdot r = h(y+y) = h(x) = 2$, das ist nach B2A unmöglich!

☞ **Beispiel.** Die zyklische Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ erhalten wir alternativ durch ☜

$$C_n = \langle s \mid s^n = 1\rangle = \left\langle \{s\} \;\middle|\; \{s^n\} \right\rangle := \left[\{s^{\pm}\} \;\middle|\; \{(s^{\pm}s^{\mp},e),\ (s^n,e)\} \right].$$

Hier gilt $s^{-1} \equiv s^n s^{-1} = s^{n-1}$. Die Argumente des obigen Beispiels gelten unverändert.

Im Ring $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ gilt $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\} \cong C_2$ mit einem eindeutigen Isomorphismus.

Im Körper $(\mathbb{C},+,\cdot)$ hat $W_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$ genau n Elemente. Als Untergruppe gilt $(W_n,\cdot) \cong (C_n,\cdot)$. Der Isomorphismus ist für $n \geq 3$ nicht eindeutig: Jede *primitive* n–te Einheitswurzel, also $w \in W_n$ der Ordnung n, stiftet den Isomorphismus $C_n \xrightarrow{\sim} W_n : s \mapsto w$.

☞ **Beispiel L3E.** Jedes Monoid bzw. jede Gruppe $(G,\cdot)$ erlaubt die *kanonische Präsentation* ☜

$$\left[G \;\middle|\; (a \circ b, c) : a,b,c \in G, a \cdot b = c \right] \quad \text{bzw.} \quad \left\langle G \;\middle|\; a \circ b \circ c^{-1} : a,b,c \in G, a \cdot b = c \right\rangle.$$

Ist G endlich mit n Elementen, so können wir die Verknüpfungstafel $\cdot : G \times G \to G$ interpretieren als eine endliche Präsentation durch n Erzeuger und n^2 Relationen. Das ist mit wachsendem n zwar zunehmend ineffizient, aber im Prinzip immer möglich.

§L3c. Ersetzungssysteme. Jedes Ersetzungsystem $K \subset A^* \times A^*$ können wir als Graph $\Gamma = (A^*, A^* \times K \times A^*)$ betrachten: Ecken sind die Wörter $w \in A^*$ über dem Alphabet A. Eine orientierte Kante $uwv \to uw'v$ ist gegeben durch $u, w, w', v \in A^*$ mit $(w, w') \in K$.

Für die reflexive, transitive Hülle $\overset{*}{\to}$ folgen wir Wegen beliebiger Länge, aber immer nur in Pfeilrichtung. Für die reflexive, symmetrische, transitive Hülle $\equiv$ dürfen wir jede Kante in beide Richtungen nutzen. Wir erzwingen also Symmetrie durch $K' = K \cup K^\intercal$. Die Äquivalenzklassen der Menge A^* bezüglich der Äquivalenzrelation $\equiv$ sind demnach die Wegkomponenten des symmetrisierten Graphen $\Gamma' = (A^*, A^* \times K' \times A^*)$.

Diese geometrische Sichtweise hilft unserer Anschauung. Sie warnt uns zugleich vor der möglichen Komplexität: Eine vorgelegte Folge von Umformungen nachzuprüfen, ist sehr leicht und vollkommen automatisch. Hingegen ist es im Allgemeinen schwierig bis unmöglich, zu gegebenen $w, w' \in A^*$ einen Weg von w nach w' zu finden oder seine Nicht-Existenz zu zeigen. Manche dieser Entscheidungsprobleme sind nachweislich unlösbar!

§L3d. Schulbeispiele. Wörter über einem Alphabet, etwa $A = \{\mathtt{a}, \dots, \mathtt{z}, \mathtt{A}, \dots, \mathtt{Z}, \dots\}$, sind eine überaus erfolgreiche und effiziente Erfindung der Menschheit. Seit Grundschultagen nutzen Sie täglich und routiniert das freie Monoid A^*, so auch jetzt beim Lesen dieser Zeilen. Zudem ist A^* ein erstes Beispiel einer nicht-kommutativen Struktur: $\mathtt{otto} \neq \mathtt{toto}$. Sie haben dies durch Nachahmung gelernt und seither pragmatisch genutzt. Nun erkennen Sie die mathematische Grundlage: Wir blicken zurück und formalisieren unser Tun.

Ebenfalls seit der Grundschule nutzen Sie das Alphabet $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \dots, \mathtt{9}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, +, -, \cdot, /\}$ und manipulieren wohlgeformte Ausdrücke, etwa bei der *Bruchrechnung*:

$$\mathtt{2/3+3/4} \quad \to \quad \mathtt{8/12+9/12} \quad \to \quad \mathtt{17/12}$$

Hier fließen schon einige Regeln ein, etwa „Punkt vor Strich“ und „Erweitern“. Dadurch sind viele Rechenwege möglich, doch alle enden bei dem selben *gekürzten* Bruch. Warum? Der Kalkül hat eine Interpretation: der Körper $(\mathbb{Q}, +, 0, -, 1, \cdot, /)$ der rationalen Zahlen! Auch andere bizarre Regeln sind denkbar: „Brüche werden addiert als Zähler-plus-Zähler durch Nenner-plus-Nenner.“ Dieser skrupellose Unsinn missachtet die Interpretation.

Später lernen Sie *Differenzieren*, typischerweise als Ersetzungssystem, zum Beispiel:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[\sin(x^2)\big] \quad \to \quad \cos(x^2) \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[x^2\big] \quad \to \quad \cos(x^2) \cdot 2x$$

Natürlich hat die Ableitung eine tiefere analytisch-geometrisch-physikalische Bedeutung: Sie ist der Grenzwert des Differenzenquotienten, Steigung der Tangente, Geschwindigkeit, etc. Daraus kann man rein formale Ersetzungsregeln extrahieren; sie sind so einfach und effizient, dass sie auch „blind“ ausgeführt werden können, etwa von einem Computer.

Schließlich lernen Sie *Integrieren* als umfangreicheres Ersetzungssystem. Auf ein vorgelegtes Integral sind meist mehrere Umformungen anwendbar, wie Produktregel, Substitution, etc. Das verbreitert die Suche eines erfolgreichen Rechenweges, erfordert Strategie und Erfahrung. Daher das Sprichwort: *Differenzieren ist Handwerk, Integrieren ist Kunst.* Auch das Integral hat zudem eine tiefere analytisch-geometrisch-physikalische Bedeutung…

Sträflicherweise wird Rechnen oft *nur* als formales Manipulieren gelehrt und gelernt, dabei jede Bedeutung verschwiegen oder ignoriert. Dann regnet es formale Regeln ohne jeden Sinn oder Zusammenhang. Das ist didaktischer Bankrott und pädagogischer Betrug. Es zeigt umso eindrücklicher, wie formale Ersetzungssysteme funktionieren.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L3e. Kalkül und Bedeutung: Syntax und Semantik. In Ihrem Studium erlernen Sie verschiedene *Theorien*, die häufig in einem ausgefeilten *Kalkül* münden: Dieser besteht aus einer effizienten Notation mit einem umfangreichen Instrumentarium von Rechenregeln, typischerweise einem Alphabet mit Formationsregeln für wohlgeformte Ausdrücke, dazu eventuell Axiome, sowie Transformationsregeln zur Ableitung weiterer Ausdrücke.

Solch ein Kalkül ist keine willkürliche Festlegung, sondern hat eine konkrete Grundlage und Interpretation: Sie untersuchen mathematische Objekte, etwa Vektorräume, Maßräume, topologische Räume, etc. Für konkrete Rechnungen entwickeln Sie eine geeignete Sprache und Umformungsregeln. Ob diese oder jene Rechenregel gilt, ist nicht bloß Vereinbarung, sondern wird bewiesen. Genau das leistet die Lineare Algebra, Maßtheorie, Topologie, etc.

Beispiel. Selbst *Beweisen* ist, formal betrachtet, nichts weiter als ein Ersetzungssystem! Die formale Logik fixiert ein Alphabet, darüber die Sprache der wohlgeformten Ausdrücke und die Ableitungsregeln, mit denen neue Aussagen aus alten abgeleitet werden können. „Das logische Denken findet sein Abbild in einem Logikkalkül.“ (Hilbert–Ackermann 1928) Die Ausarbeitung dieser Idee hat die Logik im 20. Jahrhundert zu hoher Blüte geführt.

Auch solch ein Logikkalkül beruht auf einer konkreten Interpretation, typischerweise die Mengenlehre und die jeweils daraus abgeleiteten mathematischen Strukturen. Der Kalkül soll ausschließlich wahre Aussagen produzieren (er heißt dann *korrekt*), davon möglichst viele, idealerweise alle (er heißt dann *vollständig*). Die *Modelltheorie* untersucht die Beziehung zwischen formaler Sprache (Syntax) und Bedeutung (Semantik).

Bemerkung. Hier sehen wir eine schöne Analogie zur Präsentation $(h,k) : \langle S \mid R \rangle \cong G$ einer Gruppe (gemäß L3K). Die Elemente von $h(S) \subset G$ sollen die Gruppe G erzeugen, also jedes Element $g \in G$ als Wort über S ausdrücken können. Die angegebenen Relationen R zwischen den Elementen S sollen *korrekt* sein, also in der Gruppe G gelten. Sie sollen zudem *vollständig* sein, also alle gültigen Relationen erzeugen. Der Homomorphismus $h : \langle S \mid R \rangle \to G$ ist eine *Interpretation* oder eine *Darstellung* der „abstrakten“ Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ in der „konkreten“ Gruppe G. Umgekehrt führt der Homomorphismus $k : G \to \langle S \mid R \rangle$ auf der Gruppe G Koordinaten ein, zusammen ergeben sie die verlustfreie Übersetzung (h,k).

§L3f. Topologische Kalküle. Es gibt zahlreiche beeindruckende Kalküle aus Mathematik, Informatik, Physik, etc. Die folgende Auswahl soll Ihre Phantasie anregen. Sie sehen daran, dass Sie Ersetzungssysteme sehr häufig nutzen, mal mit mal ohne Interpretation. Ich erinnere zunächst an Beispiele aus Topologie, Linearer Algebra und Analysis:

Beispiel. Der *Flächenkalkül* (§K3) ist einfach, aber nützlich: Jede zusammenhängende geschlossene Fläche können Sie durch ein Flächenwort darstellen (K3E), und Flächenwörter können Sie durch einfache Rechenregeln ineinander umformen (K3F). Die dahinterliegende Bedeutung ist „Schneiden und Kleben“; sie wird hier auf raffiniert-abstrakte Weise codiert. Chirurgie, geeignet verallgemeinert, nützt auch für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten.

Beispiel. Die *Algebraische Topologie* nutzt kommutative Diagramme und Funktoren als eine geeignete Sprache zur Behandlung topologischer Fragen. (Übung L2F ist ein schönes einfaches Beispiel). Diese Konstrukte können als Kalkül formalisiert werden: Geeignete Axiome extrahieren die wesentlichen Rechenregeln und erlauben eine effiziente Behandlung, sogar losgelöst von der konkreten topologischen Grundlage / Interpretation / Implementierung. Der Abbildungsgrad (Kapitel J) liefert erste eindrückliche Beispiele.

§L3g. Algebraische Kalküle. Warum sind Kalküle so beliebt und erfolgreich? Sie „automatisieren“ das Problemlösen und erlauben so die „industrielle“ Bearbeitung einer ganzen Klasse ähnlicher Aufgaben. Die erfolgreiche „Kalkülisierung“ ermöglicht Effizienz durch Routine, im Idealfall erlaubt sie sogar eine Ausführung auf dem Computer.

Beispiel. Der Körper $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}]$ der *komplexen Zahlen* entsteht aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch formales Hinzufügen der „imaginären“ Zahl i mit der ersehnten Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$. Ihre Nutzung entwickelte sich im 16. Jahrhundert aus praktischen Bedürfnissen beim Lösen von Gleichungen, selbst wenn Start und Ziel reell sind! Ebenso entstanden zuvor negative Zahlen als nützliche Hilfsmittel. Man kann mit ihnen rechnen, auch ohne Interpretation.

Bemerkung. Adjektive wie „negativ“, „irrational“ oder „imaginär“ erinnern uns eindrücklich an die vehemente Ablehnung solcher Zahlen und Rechnungen als okkulte Praktiken. Sie haben sich jedoch bewährt und später eine solide Grundlage erfahren, wenn auch oft erst Jahrhunderte später. Die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit Addition und Multiplikation (B3A) ist nicht imaginär, sondern überaus real. Als komplexe Zahlenebene erhält $\mathbb{C}$ eine handfeste geometrische Bedeutung. Theorie und Praxis der komplexen Zahlen sind heutzutage fest verankert und aus Mathematik, Natur- und Ingenieurwissenschaften nicht mehr wegzudenken.

Beispiel. Der *Matrizenkalkül* ist eine wichtige Technik aus Linearer Algebra und Numerik. Eine Vielzahl mathematischer Objekte lässt sich durch Matrizen beschreiben, zum Beispiel lineare Abbildungen, quadratische Formen, gewichtete Graphen, stochastische Prozesse, etc. Auf Matrizen können wir eine Vielzahl von Standardverfahren anwenden, etwa Gauß–Algorithmus, Diagonalisierung, Orthonormalisierung, etc. Anschließend können wir das so berechnete Ergebnis interpretieren und für die ursprüngliche Fragestellung nutzen.

Warnung. Eigentlich kann man mit Matrizen nicht viel falsch machen, sollte man meinen, aber mit ausreichend Naivität oder Böswilligkeit geht es dann doch. Der Klassiker ist die *Division durch Null*: Niemand kann sinnvoll durch Null dividieren. Manche empfinden diese Tatsache als elitäre Gängelei und tun es einfach trotzdem; sinnlos geht immer.

Über jedem kommutativen Ring K hat die *Determinante* $\det : K^{n\times n} \to K$ wunderbare Eigenschaften (B1Y). Diese genügen manchen noch nicht, und sie erfinden weitere, etwa

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

Diese Regel gilt für kommutierende Matrizen $A, B, C, D \in K^{n\times n}$, aber nicht allgemein. (Warum?) Losgelöst von allen faktischen Grundlagen verlockt die bequeme Allgemeinheit. Abstraktion bedeutet, Beispiele sinnvoll zusammenzufassen, nicht sie zu ignorieren.

Eine wundervolle Illustration ist der *Satz von Cayley–Hamilton*: Zur Matrix $A \in K^{n\times n}$ definieren wir ihr charakteristisches Polynom durch $P_A := \det(A - X1_{n\times n}) \in K[X]$. Für dieses gilt $P_A(A) = 0$. Ein beliebter Pseudobeweis lautet: „Wir setzen ein und erhalten $P_A(A) = \det(A - A1_{n\times n}) = \det(0) = 0$.“ Wo liegt der Fehler? Wie lässt er sich reparieren?

Bemerkung. Die mögliche Trennung von *Syntax* und *Semantik* birgt ernste Risiken, wie Sie in Ihrem Studium regelmäßig beobachten können. Manche Anwender klammern sich an sinnentleerte Formelmagie, ohne zu wissen, was sie eigentlich tun. Manch andere versuchen es, im entgegengesetzten Extrem, mit vager Intuition, können damit allein aber nichts konkret ausrechnen. Zum Erfolg benötigen Sie beides: *Syntax* und *Semantik*!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L3h. Analytische Kalküle. Ein guter Kalkül ermöglicht die konzise Formulierung komplexer Rechnungen, er hilft bereits zur Exploration und Entwicklung neuer Ideen, vor allem aber zur Konsolidierung und Kommunikation von Ergebnissen. Das historisch erste Beispiel ist die Differential- und Integralrechnung, auf Englisch *calculus*.

Beispiel. Für *konvergente Folgen* gibt es nützliche Rechenregeln, allerdings muss man ihre Voraussetzungen kennen und beachten. Diese sind keine willkürliche Schikane, wie manche behaupten, sondern entspringen der Bedeutung der Grenzwerte, sie sichern den Sinn und die Anwendbarkeit des Kalküls. Die beliebte Regel von l'Hôpital etwa ergibt sonst Unsinn:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+3}{x+5} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x+3)'}{(x+5)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1} = 2$$

Selbstverständlich ließe sich diese Rechenregel willkürlich einführen, *par ordre du mufti*, und sicherlich wären viele Anwender von dieser Neuerung begeistert, doch leider hätte dieser Kalkül gar keinen Sinn mehr. Mühsame, harte Wissenschaft wird oft geschmäht und lieber ersetzt durch bequeme, verlockende Zahlenmystik, etwa zur *creatio ex nihilo*:

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & 0 & & & & & & & & \\
= & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
= & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & \dots \\
= & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & + & \dots \\
= & 1 & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & \dots \\
= & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
= & 1 & & & & & & & &
\end{array}$$

Wo genau liegt das Problem bei dieser Pseudorechnung? Die mittere Zeile hat keinen Sinn! Das hält natürlich einige nicht davon ab, auch unsinnigen Formeln einen Sinn anzudichten. Hieraus entstehen dann weitere wundersame Behauptungen, wie etwa die folgenden:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
1 + (-1) + & & 1 + (-1) + & & 1 + (-1) + \dots & = & \frac{1}{2} \\
1 + (-2) + & & 3 + (-4) + & & 5 + (-6) + \dots & = & \frac{1}{4} \\
1 + & 2 + & 3 + & 4 + & 5 + & 6 + \dots & = & -\frac{1}{12}
\end{array}$$

Dieser Schwindel wird gern verbreitet, findet große Aufmerksamkeit und verursacht ebenso großen Schaden. Mit Mühe und Geschick kann man selbst diesen Reihen noch Grenzwerte zuordnen, aber auch hier herrschen Regeln und keine Willkür. Wenn Sie es genauer wissen wollen, schauen Sie bitte die Aufklärung von *Mathologer*: `y2u.be/YuIIjLr6vUA`.

Nach diesen allgegenwärtigen Schreckgespenstern aus leichtgläubiger Fehlanwendung und boshafter Pseudowissenschaft nenne ich zur Versöhnung weitere erfolgreiche Kalküle. Die rein formelhafte Nachahmung endet jedoch rasch in *Cargo Cult Science* wie Richard FEYNMAN sie treffend beschrieb. Als Dichterwort wurde diese Weisheit sprichwörtlich:

Hat der alte Hexenmeister // sich doch einmal wegbegeben!
Und nun sollen seine Geister // auch nach meinem Willen leben.
Seine Wort und Werke // merkt ich und den Brauch,
und mit Geistesstärke // tu ich Wunder auch.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Der Zauberlehrling*

Beispiel. Formale *Potenzreihen* $F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \in K[\![Z]\!]$ über einem Körper oder Ring K sind ein phantastisches Werkzeug. Wir können sie addieren, multiplizieren, differenzieren, also rechnen wie mit „unendlichen Polynomen“, zunächst losgelöst von Konvergenzfragen. Nur das Einsetzen $Z \mapsto z$ eines Wertes $z \in K$ ist im Allgemeinen nicht erklärt, und meist auch nicht sinnvoll möglich. Tut man es dennoch, dann erlebt man blaue Wunder:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^n = \frac{1}{1-Z} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1$$

Potenzreihen $F \in \mathbb{C}[\![Z]\!]$ nutzen wir insbesondere über dem Körper der komplexen Zahlen. Doch nur innerhalb ihres Konvergenzradius $\rho = \rho_F \in [0, \infty]$ definiert F tatsächlich eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset B(0,\rho) \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Konvergenz gilt eventuell noch in einigen Randpunkten, doch hier ist das Verhalten meist kompliziert. Auf $B(0,\rho)$ übersetzen sich die formalen Rechenregeln für Reihen direkt in Rechenregeln für konkrete Funktionen!

Beispiel. Der *Residuenkalkül* erlaubt die Berechnung von Wegintegralen $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ holomorpher Funktionen $f : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ mit Hilfe des Residuensatzes. Wie man diese Rechenregeln findet und beweist, ist ein spannendes Kapitel der Funktionentheorie. Für Anwender in Natur- und Ingenieurwissenschaften besonders verlockend ist hingegen der Umstand, dass sich hieraus ein einfacher und sehr effizienter Kalkül entwickelt, vermeintlich losgelöst von den theoretischen Grundlagen, sozusagen als „ein Buch magischer Zauberformeln“.

Beispiel. Auch die *Laplace–Transformation* ist ein ausgefeilter Kalkül: Sie verwandelt Anfangswertprobleme für Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen; diese kann man dann lösen und zurückübersetzen. Diese Methode wird daher von begeisterten Anwendern sehr geschätzt. Dahinter stehen starke Integralsätze, doch der Kalkül kann über weite Strecken davon losgelöst auch rein formal genutzt werden. Die Übersetzung und Rückübersetzung geschieht nahezu automatisiert durch Nachschlagen in „magischen $\mathscr{L}$–Tabellen“.

Bemerkung. Überraschend häufig entwickelt sich ein Kalkül zunächst als Wunschbild, er blüht und gedeiht noch bevor eine solide Grundlage oder rechtfertigende Theorie existiert. Mancher erweist sich als widersprüchlich und damit bedeutungslos, er wird dann verworfen oder korrigiert… Brauchbare Kalküle finden erfahrungsgemäß schließlich eine mathematische Grundlage. Sie wachsen sozusagen von der Krone zu den Wurzeln.

Beispiel. Ein frappierendes Beispiel ist der *Kalkül der Distributionen*. Er entstand aus ganz praktischen Bedürfnissen seit etwa 1900 in Physik und Ingenieurwissenschaften zunächst als nützliche Rechentechnik wider alle mathematische Sorgfalt: Für die Heaviside–Funktion $u = \mathbf{I}_{[0,\infty[}$ und das Dirac–Funktional $\delta_0 = u'$ drängt sich die beliebte Rechenregel $\int_{-\infty}^{x} \delta_0(t)\,\mathrm{d}t = u(x)$ geradezu auf, auch wenn dies klassisch gesehen keinerlei Sinn ergibt. Ebenso haben manche Differentialgleichungen keine klassischen Lösungen, wohl aber „verallgemeinerte Lösungen“ (Heaviside um 1880, Dirac und Sobolev um 1930). Sie sind nach klassischer Auffassung unmöglich; kann und soll man dennoch damit rechnen?

Distributionen klären dieses Mysterium und lösen so alle Sorgen in Wohlgefallen auf. Die *Theorie der Distributionen*, die den Kalkül begründet, rechtfertigt und vollendet, wurde erst in den 1940er Jahren von Laurent SCHWARTZ entwickelt; sie bewährt sich seither als tragfähiges Fundament. Hierfür erhielt er auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1950 die Fields–Medaille, eine der höchsten Auszeichnungen der Mathematik.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Beispiel. Der *stochastische Kalkül* formalisiert das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten. Es ist überaus bemerkenswert, dass sich selbst dies kalkülisieren lässt! Viele Anwendungen beginnen mit einer umgangssprachlichen Beschreibung des betrachteten Problems. Diese Modellbildung appelliert dabei auch an „Weltwissen“ und unterscheidet sich darin von bereits abstrahierten Fragestellungen etwa der Algebra oder der Analysis. Hieraus werden die benötigten Daten extrahiert und als ein stochastisches Modell $(\Omega, \mathbf{P})$ codiert. Auf dieser Grundlage kann anschließend nach formalen Regeln gerechnet werden. Innerhalb des gewählten Modells werden die Wahrscheinlichkeiten somit berechenbar. Der Rest ist Kalkül.

Beispiel. Wie berechnen Sie $I := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$? Dieses Integral ist mit eindimensionaler Integration nur schwer zu bestimmen: Für die Integralfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ gibt es nachweislich keine geschlossene, elementare Formel. Zweidimensional hingegen gelingt unser Integral I leicht dank dem Kunstgriff von Gauß: Statt I berechnen wir I^2 wie folgt.

$$
\begin{aligned}
I^2 &\overset{\text{Subs}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y && \overset{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x && \overset{\text{Exp}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) && \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}\times[0,2\pi]} \mathrm{e}^{-\rho^2/2} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}}\,\mathrm{d}(\rho,\varphi) \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho && \overset{\text{HDI}}{=} \int_{\rho=0}^{\infty} 2\pi\rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\mathrm{d}\rho \\
&\overset{\text{HDI}}{=} \left[-2\pi\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\right]_{\rho=0}^{\infty} && \overset{\text{Lim}}{=} 2\pi
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir den gesuchten Wert $I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

Bemerkung. Sie sehen, wie wunderbar effizient dieser Kalkül ist! Auch er ist letztlich nur ein ausgefeiltes Ersetzungssystem: „Wenn X vorliegt, dann dürfen wir Y ersetzen.“ Zwar sagt Ihnen die so aufgezeichnete Rechnung nicht, wie Sie diesen Rechenweg *finden*, aber Sie können jede vorgelegte, hinreichend ausgeführte Rechnung schrittweise *nachprüfen*.

Versuchen Sie einmal, als Übung die zugrundeliegenden Ersetzungsregeln explizit auszuformulieren: Linearität, Hauptsatz (HDI), elementare Stammfunktionen, ..., Fubini, Substitution / Transformation, ... Das alles sind wichtige Sätze! Die formale Schreibweise dient als *Sprache* zur Verifizierung, Kommunikation und Archivierung. Die dahinterliegende *Bedeutung* ist jedoch mindestens ebenso wichtig. Sie brauchen definitiv beides!

Beispiel. Der *Differentialformenkalkül* ist eine genial-einfache Methode der Buchführung für mehrdimensionale Integrale: Er absorbiert Orientierung und Transformationsregel in die Notation. Damit gelingt eine koordinatenunabhängige Beschreibung von Integralen auf orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. So lässt sich der Integralsatz von Stokes einheitlich und elegant in allen Dimensionen formulieren. Dies beinhaltet als Spezialfälle die klassischen Sätze von Green/Gauß/Stokes in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung. Solcherart Rückblick und Reflektion zeigen Ihnen, was Sie hier eigentlich tun, und erklären im Nachhinein auch den Aufbau einer guten mathematischen Darstellung. Formales Rechnen und konkrete Bedeutung arbeiten zusammen wie rechte und linke Hand.

§L3i. Geschichte. Als pragmatische Rechentechnik wurden Präsentationen seit den Anfängen der Gruppentheorie im 19. Jahrhundert verwendet: Auch ohne Theorie kann man mit Erzeugern und Relationen sofort konkret rechnen. Solche Rechnungen finden sich zum Beispiel in den Arbeiten von Arthur CAYLEY (1821–1895), Henri POINCARÉ (1854–1912) und Walther von DYCK (1856–1934). Erst im 20. Jahrhundert wurde die bewährte Praxis der präsentierten Gruppen zu einer Theorie ausgebaut: Die *kombinatorische Gruppentheorie* wurde maßgeblich von Max DEHN (1878–1952) initiiert. Seither werden Präsentationen aus kombinatorisch-algorithmisch-geometrischer Sicht intensiv untersucht.

§L3j. Vorgehensweise. Wir haben Präsentationen präzise eingeführt (L3A–L3B). Als pragmatische Rechenregel genügt dieser erste knappe Überblick zunächst. Der Rest dieses Abschnitts führt diese Idee aus und bietet klärende Sätze und illustrative Beispiele.

Zunächst erklären wir *freie Gruppen* F, in Analogie zur Linearen Algebra, durch die Existenz einer *Basis* $S \subset F$. Dies ist eine *innere* Charakterisierung durch reduzierte Wörter (L3F) und führt uns zur Lösung des Wortproblems durch den Kürzungsalgorithmus L-2.

Dual hierzu gilt die *äußere* Charakterisierung durch die universelle Abbildungseigenschaft L3H. Sie scheint zunächst abstrakter, erweist sich aber als wesentlich geschmeidiger.

Die freie Gruppe $F(S)$ über S (L3G) erlaubt uns, Relationen $R \subset F(S)$ zu formulieren und so Präsentationen (S,R) zu erklären. Hieraus konstruieren wir die präsentierte Gruppe $\langle S \mid R \rangle = F(S)/N(R)$ (L3I) und beweisen ihre universelle Abbildungseigenschaft (L3J). Diese äußere Charakterisierung ist vielseitig, elegant und leicht. Innere Eigenschaften wie das Wortproblem sind hingegen schwer und im Allgemeinen unlösbar (L3U).

Eine *Präsentation* einer vorgegebenen Gruppe G ist ein Quadrupel (S,R,h,k) aus einer Präsentation (S,R) und einem Gruppenisomorphismus $(h,k) : \langle S \mid R \rangle \cong G$ (L3K).

Wir diskutieren hierzu drei einfache doch grundlegende und prominente Beispiele:

Die *Diedergruppe* $D_n = \mathrm{Isom}(P_n)$ ist die Isometriegruppe eines regelmäßigen n–Ecks. Sie besteht aus n Drehungen $r_0, \dots, r_{n-1}$ und n Spiegelungen $s_0, \dots, s_{n-1}$, ausgeschrieben

$$r_k = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/n) & -\sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{pmatrix}, \qquad s_k = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/n) & \sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & -\cos(2\pi k/n) \end{pmatrix}.$$

Für die Diedergruppe finden wir zwei Präsentationen (L3M):

$$D_n \;\cong\; D_n^* := \langle s,t \mid s^2,\, t^2,\, (st)^n \rangle \;\cong\; D_n^+ := \langle r,s \mid r^n,\, s^2,\, srs = r^{-1} \rangle$$

Genauer gesagt, die beiden Gruppenhomomorphismen $h : D_n^* \to D_n : s \mapsto s_0, t \mapsto s_1$ und $h' : D_n^+ \to D_n : r \mapsto r_1, s \mapsto s_0$ sind Isomorphismen. Die Tietze–Transformationen (L3S) erklären, wie wir je zwei Präsentationen derselben Gruppe ineinander umformen können.

Für die symmetrische Gruppe S_n beweisen wir die folgende Präsentation (L3W):

$$S_n \;\cong\; P_n := \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{cc} t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \end{array} \right\rangle$$

Genauer: Der Gruppenhomomorphismus $h : P_n \to S_n$ mit $t_i \mapsto \tau_i = (i, i+1)$ ist ein Isomorphismus. Weiters entwickeln wir Präsentationen für die Matrixgruppen $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ und $\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z}$ (L3X) sowie $\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ und $\mathrm{PGL}_2\mathbb{Z}$ (L3Y). Dies sind unendliche Gruppen, dennoch gelingt die Präsentation erstaunlich leicht und effizient; sie entspricht dem euklidischen Algorithmus.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L3k. Freie Gruppen, innere Sicht: Basis. In einer Gruppe $(G,\cdot)$ ist die von $S \subset G$ erzeugte Untergruppe gegeben durch

$$\langle S \rangle := \bigcap \{ H < G \mid S \subset H \} \quad \stackrel{!}{=} \quad \{ s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n} \mid n \in \mathbb{N},\, s_i \in S,\, e_i \in \mathbb{Z} \}.$$

Ausführlich: Es gilt „$\supset$“, da jede Untergruppe $H < G$ mit $S \subset H$ auch jedes Produkt $s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}$ enthält. Es gilt „$\subset$“, da die rechte Seite eine Untergruppe ist und S enthält.

Wir nennen $(s_1,e_1;s_2,e_2;\ldots;s_n,e_n) \in (S\times\mathbb{Z})^n$ ein *(Gruppen-)Wort* über S, mit *Faktoren* $s_1,s_2,\ldots,s_n \in S$ und *Exponenten* $e_1,e_2,\ldots,e_n \in \mathbb{Z}$. Es ist *reduziert*, wenn $s_i \neq s_{i+1}$ für alle $i = 1,\ldots,n-1$ gilt sowie $e_i \neq 0$ für alle $i = 1,\ldots,n$ (Kürzungsalgorithmus L-2). Das durch $(s_1,e_1;s_2,e_2;\ldots;s_n,e_n)$ dargestellte *Gruppenelement* ist $s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n} \in G$.

Definition L3F. Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Eine Menge $S \subset G$ heißt *erzeugend* / *frei* / *Basis* wenn sich jedes Gruppenelement $g \in G$ auf *mindestens* / *höchstens* / *genau* eine Weise als ein reduziertes Wort über S schreiben lässt. Im letzten Fall heißt S eine *Basis von* G, und G heißt *frei erzeugt* von S. Die Gruppe G heißt *frei*, wenn eine Basis $S \subset G$ existiert.

Beispiel. Die zyklische Gruppe $C_n = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^n = 1\}$ wird vom Element a erzeugt, aber nicht frei: Hier gilt $a = a^{1+n}$, aber die Wörter $(a,1) \neq (a,1+n)$ sind verschieden.

Beispiel. Die Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ ist frei über $S = \{1\}$, ebenso über $\{-1\}$. Die Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ wird auch von $S = \{2,3\}$ erzeugt, aber nicht frei, denn hier gilt $3\cdot 2 + (-2)\cdot 3 = 0$.

Beispiel. Die abelsche Gruppe $G = \langle a,b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ wird von a,b erzeugt, aber nicht frei: Hier gilt $ab = ba$, aber die Wörter $(a,1;b,1) \neq (b,1;a,1)$ sind verschieden.

Beispiel. Ist die Gruppe $(F,\cdot)$ frei über $\{a,b\}$, so besteht die Menge F aus den Elementen

$$1,\ a^{e_1},\ b^{e_1},\ a^{e_1}b^{e_2},\ b^{e_1}a^{e_2},\ a^{e_1}b^{e_2}a^{e_3},\ b^{e_1}a^{e_2}b^{e_3},\ a^{e_1}b^{e_2}a^{e_3}b^{e_4},\ b^{e_1}a^{e_2}b^{e_3}a^{e_4},\ \ldots$$

mit $e_i \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, und jedes Element von F tritt in dieser Liste genau einmal auf.

Bemerkung. Wir unterscheiden das *Gruppenwort* $(s_1,e_1;s_2,e_2;\ldots;s_n,e_n) \in (S\times\mathbb{Z})^n$ vom dargestellten *Gruppenelement* $s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n} \in G$. Zwei Wörter $(s_1,e_1;s_2,e_2;\ldots;s_n,e_n)$ und $(\bar{s}_1,\bar{e}_1,\bar{s}_2,\bar{e}_2,\ldots,\bar{s}_{\bar{n}},\bar{e}_{\bar{n}})$ sind genau dann gleich, wenn $n = \bar{n}$ gilt sowie $s_i = \bar{s}_i$ und $e_i = \bar{e}_i$ für alle $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Verschiedene Gruppenwörter können dasselbe Gruppenelement $s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n} = \bar{s}_1^{\bar{e}_1} \bar{s}_2^{\bar{e}_2} \cdots \bar{s}_{\bar{n}}^{\bar{e}_{\bar{n}}}$ in G darstellen. Genau auf diesen Unterschied kommt es an!

Es ist meist bequemer, kurz $s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}$ ein Gruppenwort zu nennen statt der korrekten aber schwerfälligen Schreibweise $(s_1,e_1;s_2,e_2;\ldots;s_n,e_n)$. Die Unterscheidung zwischen Gruppenwort und Gruppenelement wird dann durch den sprachlichen Kontext geleistet.

Analogie / Erinnerung. Sie kennen diese feinsinnige Unterscheidung aus der Linearen Algebra: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, oder allgemein ein (Rechts-)Modul über einem Ring K. Zu $v_1,v_2,\ldots,v_n \in V$ und $k_1,k_2,\ldots,k_n \in K$ betrachten wir die *Linearkombination* $v = v_1k_1 + v_2k_2 + \cdots + v_nk_n$ in V. Auch hier unterscheiden wir zwischen den Daten $(v_1,k_1;v_2,k_2;\ldots;v_n,k_n)$ in $(V\times K)^n$ und dem so dargestellten Vektor v in V. Zwei n–Tupel $(v_1,k_1;v_2,k_2;\ldots;v_n,k_n)$ und $(v'_1,k'_1;v'_2,k'_2;\ldots;v'_n,k'_n)$ in $(V\times K)^n$ können durchaus verschieden sein, aber die dargestellten Vektoren $v_1k_1 + v_2k_2 + \cdots + v_nk_n$ und $v'_1k'_1 + v'_2k'_2 + \cdots + v'_nk'_n$ in V dennoch gleich: In diesem Fall nennen wir $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ *linear abhängig*, andernfalls *linear unabhängig*. Wir nennen $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ eine *Basis*, wenn sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination von $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ schreibt. Das bedeutet, es existiert genau ein $(k_1,k_2,\ldots,k_n) \in K^n$ sodass $v = v_1k_1 + v_2k_2 + \cdots + v_nk_n$ gilt. Das kanonische Modell hierzu ist $V = K^n$ mit der Standardbasis $e_1,\ldots,e_n$.

Algorithmus L-2 Freie Reduktion von Gruppenwörtern

Eingabe: Ein Gruppenwort $w = (s_1, e_1; s_2, e_2, \ldots; s_n, e_n) \in (S \times \mathbb{Z})^n$ über S
Ausgabe: Das hierzu äquivalente reduzierte Gruppenwort $\mathrm{red}(w) \in (S \times \mathbb{Z})^m$, $m \leq n$

$i \leftarrow 0$ // Invariante $s_1^{e_1} \cdots s_i^{e_i} s_j^{e_j} \cdots s_n^{e_n}$ und $s_1^{e_1} \cdots s_i^{e_i}$ reduziert
for j **from** 1 **to** n **do**
  if $i \geq 1$ **and** $s_i = s_j$ **then** { $e_i \leftarrow e_i + e_j$; **if** $e_i = 0$ **then** $i \leftarrow i - 1$ }
  else if $e_j \neq 0$ **then** { $i \leftarrow i + 1$; **if** $i < j$ **then** $(s_i, e_i) \leftarrow (s_j, e_j)$ }
$n \leftarrow i$; **return** $w \in (S \times \mathbb{Z})^n$ // Schließlich wird die Gesamtlänge n auf i gekürzt.

☞ **Satz L3G.** *Zu jeder Menge S existiert eine freie Gruppe $F(S)$ über S.* ☜

Das scheint zunächst banal, verdient aber einen Beweis. Erstens sind die freien Gruppen der Grundstein der Theorie und verdienen daher besondere Sorgfalt. Zweitens spielen Normalformen eine zentrale Rolle für konkrete Rechnungen. Drittens begegnen uns ähnliche Fragen immer wieder: Satz L9B behandelt freie Produkte und Satz L9E Amalgame.

KONSTRUKTION. Wir nutzen $A = S \times \mathbb{Z}$ und schreiben s^k für $(s,k) \in A$. Sei $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ die Menge aller endlichen Wörter über A. Für $n = 0$ ist $e = ()$ das leere Wort. Für $n = 1$ identifizieren wir jedes Element $a \in A$ mit dem Wort $(a) \in A^1 \subset A^*$. Wir definieren die Verkettung $\circ : A^* \times A^* \to A^*$ gemäß $(a_1, \ldots, a_m) \circ (b_1, \ldots, b_n) := (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$. Damit ist $(A^*, \circ, e)$ ein Monoid, genauer das *freie Monoid* über A: Jedes Element $w \in A^*$ schreibt sich eindeutig als Produkt $w = a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Leider ist $(A^*, \circ, e)$ noch keine Gruppe. Auf A^* sei $\equiv$ die Äquivalenzrelation, die durch die elementaren Umformungen $u \circ s^k \circ s^\ell \circ v \equiv u \circ s^{k+\ell} \circ v$ und $u \circ s^0 \circ v \equiv u \circ v$ erzeugt wird, mit $s \in S$ und $k, \ell \in \mathbb{Z}$ und $u, v \in A^*$. Zwei Wörter in A^* sind also genau dann äquivalent, wenn sie durch eine endliche Folge solcher Umformungen ineinander übergehen.

Auf der Quotientenmenge $F := A^*/_\equiv$ definieren wir $\cdot : F \times F \to F$ durch $[u] \cdot [v] := [u \circ v]$. Dies ist wohldefiniert, denn aus $u \equiv u'$ und $v \equiv v'$ folgt $u \circ v \equiv u' \circ v'$. Damit ist $(F, \cdot)$ eine Gruppe: Neutrales Element ist die Äquivalenzklasse $1 = [e]$ des leeren Wortes. Das Inverse zu $g = [s_1^{e_1}, \ldots, s_n^{e_n}]$ ist $g^{-1} = [s_n^{-e_n}, \ldots, s_1^{-e_1}]$. Wir identifizieren $s \in S$ mit $[s^1] \in F$. Nach Konstruktion ist $S \subset F$ ein Erzeugendensystem, sogar eine Basis:

Jedes Element von $F(S)$ schreibt sich eindeutig als ein reduziertes Wort über S.

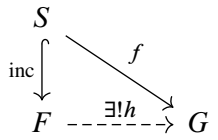
BEWEIS. Zu jedem Wort $w = (s_1^{e_1}, s_2^{e_2}, \ldots, s_n^{e_n}) \in (S \times \mathbb{Z})^n$ liefert Algorithmus L-2 ein äquivalentes reduziertes Wort $\mathrm{red}(w) \in (S \times \mathbb{Z})^m$. Ist w bereits reduziert, so gilt $\mathrm{red}(w) = w$. Unterscheiden sich w und w' durch eine elementare Umformung, so gilt $\mathrm{red}(w) = \mathrm{red}(w')$: Der Beweis gelingt durch (einfache aber längliche) Fallunterscheidung. (Versuchen Sie es als Übung! Der Beweis zu Satz L9B bzw. L9E perfektioniert die Argumentation.)

Hieraus schließen wir: Sind zwei reduzierte Wörter w, w' äquivalent, so gilt $w = w'$: Nach Definition der Äquivalenz $w \equiv w'$ gibt es nämlich eine endliche Folge von Wörtern $w = w_0, w_1, \ldots, w_\ell = w'$, sodass sich w_{i-1} und w_i jeweils nur durch eine elementare Umformung unterscheiden. Es gilt dann $w = \mathrm{red}(w_0) = \mathrm{red}(w_1) = \cdots = \mathrm{red}(w_\ell) = w'$. □

Bemerkung. Der Reduktionsalgorithmus beruht auf einer nützlichen Idee: Das Ersetzungssystem der freien Gruppe ist *terminierend* und *konfluent*, mündet also immer im selben Ergebnis, siehe V. Diekert *et al*: *Discrete Algebraic Methods*, de Gruyter 2016, Kapitel 8.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L3l. Freie Gruppen, äußere Sicht: UAE.** Für freie Gruppen haben wir die innere Charakterisierung durch reduzierte Wörter (L3F); dual hierzu gilt eine äußere durch ihre universelle Abbildungseigenschaft in der Kategorie `Grp` aller Gruppen: ☜



✍ **Satz L3H** (universelle Abbildungseigenschaft)**.** *Eine Gruppe F ist genau dann frei über $S \subset F$, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Zu jeder Abbildung $f : S \to G$ der Menge S in eine Gruppe G existiert genau einen Gruppenhomomorphismus $h : F \to G$ mit $h|_S = f$.* ✍

☞ BEWEIS / ÜBUNG. „⇒“: Wegen $F = \langle S \rangle$ erlaubt $f : S \to G$ höchstens eine multiplikative Fortsetzung $h : F \to G$, nämlich $h([s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}]) = f(s_1)^{e_1} f(s_2)^{e_2} \cdots f(s_n)^{e_n}$. Umgekehrt ist diese Abbildung auf Wörtern invariant unter Reduktion, also wohldefiniert auf Äquivalenzklassen, und somit ein Gruppenhomomorphismus $h : F \to G$ mit $h|_S = f$. ☜

„⇐“: Angenommen F hat die genannte Abbildungseigenschaft bezüglich S. Dann gibt es einen Homomorphismus $h : F \to F(S)$ mit $h|_S = \mathrm{id}_S$. Da umgekehrt auch unser Modell $F(S)$ der freien Gruppe über S diese Abbildungseigenschaft über S hat, existiert ein Homomorphismus $k : F(S) \to F$ mit $k|_S = \mathrm{id}_S$. Die Komposition $k \circ h : F \to F$ und $\mathrm{id}_F : F \to F$ stimmen auf S überein, aufgrund der Eindeutigkeit gilt demnach $k \circ h = \mathrm{id}_F$. Ebenso gilt $h \circ k = \mathrm{id}_{F(S)}$. Wegen $F \cong F(S)$ ist dann mit $F(S)$ auch F frei über $k(S)$. □

☞ **Bemerkung.** Ist die Gruppe F frei über $S \subset F$, so haben wir demnach die Bijektion ☜

$$\mathrm{Hom}((F,\cdot),(G,\cdot)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}(S,G) \;:\; h \mapsto h|_S.$$

Diese universelle Abbildungseigenschaft ist zu unserer obigen Definition L3F äquivalent. Jede dieser beiden Charakterisierungen kann als Definition freier Gruppen verwendet werden, die jeweils andere ist dann eine Folgerung. In der Literatur finden sich beide Zugänge.

Beispiel. Die Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ ist frei über $S = \{1\}$, denn zu jeder Gruppe $(G,\cdot)$ und $g \in G$ existiert genau ein Homomorphismus $h : (\mathbb{Z},+) \to (G,\cdot)$ mit $h(1) = g$, nämlich $h(n) = g^n$.

Beispiel. Die zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}/n,+)$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ wird von 1 erzeugt aber nicht frei: Es gibt keinen Homomorphismus $h : (\mathbb{Z}/n,+) \to (\mathbb{Z},+)$ mit $h(1) = 1$.

Beispiel. Die Gruppe $G = \langle a,b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ wird von a,b erzeugt aber nicht frei: Für $xy \neq yx$ in H gibt es keinen Homomorphismus $h : G \to H$ mit $h(a) = x$ und $h(b) = y$.

☞ **Bemerkung.** Sei G eine Gruppe. Für jede Teilmenge $S \subset G$ induziert die Inklusion $S \hookrightarrow G$ auf der freien Gruppe $F(S)$ einen Gruppenhomomorphismus $h : F(S) \to G$ mit $h|_S = \mathrm{id}_S$. Genau dann ist S erzeugend / frei / eine Basis, wenn h surjektiv / injektiv / bijektiv ist. Insbesondere ist jede Gruppe G isomorph zu einem Quotienten einer freien Gruppe (L3L). ☜

Beispiel. Die zyklische Gruppe $C_n = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^n = 1\}$ der Ordnung n wird erzeugt durch das Element a. Zum Erzeugendensystem $S = \{a\}$ betrachten wir die freie Gruppe $F = \langle a \mid - \rangle$ und den Gruppenhomomorphismus $h : F \to C_n : a^k \mapsto a^{k \bmod n}$. Sein Kern ist $\ker(h) = \langle a^n \rangle$, und wir erhalten somit den Gruppenisomorphismus $\bar{h} : F/\langle a^n \rangle \xrightarrow{\sim} C_n$. Dieses einfache Beispiel ist der Prototyp einer Präsentation durch Erzeuger und Relationen.

§L3m. Präsentationen durch Erzeuger und Relationen. Wird eine Gruppe G von einer Teilmenge $S \subset G$ erzeugt, so können wir in G mit Hilfe von Wörtern über S rechnen. Wird G von S zudem *frei* erzeugt, so ist diese Schreibweise sogar eindeutig: In der freien Gruppe G über S können wir besonders leicht und effizient rechnen (Algorithmus L-2).

Im Allgemeinen wird es aber vorkommen, dass verschiedene Wörter über S dasselbe Gruppelelement in G darstellen: In einer abelschen Gruppe zum Beispiel gilt $ab = ba$ für alle $a, b \in S$. Diese Relationen müssen wir in unseren Rechnungen berücksichtigen.

Dies führt zu folgender informellen Definition: Die Gruppe

$$G = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n \mid r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle$$

wird erzeugt von $s_1, s_2, \ldots, s_n$ unter den Relationen $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Das soll heißen, wir rechnen mit Gruppenwörtern über $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ nur unter Verwendung der Relationen $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$. Dabei gelten keine weiteren Relationen, außer solchen, die sich ohnehin als Konsequenzen aus R ergeben. Anders gesagt, G wird „so frei wie möglich“ erzeugt von S unter den geforderten Relationen R. Wir präzisieren dies wie folgt:

Definition L3I (Präsentation)**.** Sei $F = F(S)$ die freie Gruppe über S und $R \subset F$ eine Menge von Gruppenwörtern über S. Wir nennen solch ein Paar (S, R) eine *Präsentation* mit *Erzeugern* S und *Relationen* R. Die von R in F erzeugte normale Untergruppe ist

$$N = N(R) := \langle\, R^F \,\rangle = \langle\, w\, r\, w^{-1} \mid r \in R,\ w \in F \,\rangle.$$

Die durch (S, R) *präsentierte Gruppe* ist die Quotientengruppe

$$\langle\, S \mid R \,\rangle := F(S)/N(R).$$

Hierzu gehört der Quotientenhomomorphismus $\pi = \pi_{(S,R)} : F(S) \to \langle\, S \mid R \,\rangle : w \mapsto wN$.

Bemerkung. Die Erzeuger $s \in S$ der freien Gruppe $F(S)$ werden abgebildet auf die Erzeuger $\pi(s) = sN$ der Gruppe $\langle\, S \mid R \,\rangle$. In dieser gelten die gewünschten Relationen $r \in R$, denn durch die Quotientenbildung haben wir $\pi(r) = 1$ erzwungen (und nichts weiter).

Konvention (pars pro toto)**.** Oft schreibt man den Repräsentanten w abkürzend für die Äquivalenzklasse $\pi(w) = wN$; das ist inkorrekt, aber bequem. Diese Nachlässigkeit ist gerechtfertigt, solange keine Verwechslungsgefahr entsteht. Im Zweifelsfalle nutzt man besser die umständliche aber präzise Bezeichnung.

Beispiel. Für $R = \emptyset$ ist $F(S) = \langle\, S \mid - \,\rangle$ die freie Gruppe mit Basis S. Pedantisch genau gilt hier $N(R) = \{1\}$, und $\pi : F(S) \xrightarrow{\sim} \langle\, S \mid - \,\rangle : s \mapsto sN = \{s\}$ ist ein Isomorphismus.

Beispiel. Die Gruppe $G = \langle\, a \mid - \,\rangle$ ist isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$ vermöge $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} G : k \mapsto a^k$.
Die Gruppe $G = \langle\, a \mid a^n \,\rangle$ ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/n, +)$ vermöge $\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} G : k \mapsto a^k$.

Beispiel. In der Gruppe $G = \langle\, a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \,\rangle$ gilt die Vertauschungsrelation $ab = ba$. Bequemer schreiben wir diese Präsentation daher auch $G = \langle\, a, b \mid ab = ba \,\rangle$. In G können wir jedes Produkt $a^{k_1} b^{\ell_1} \cdots a^{k_n} b^{\ell_n}$ umordnen zu $a^k b^\ell$. Weitere Relationen gibt es nicht. Somit ist $h : (\mathbb{Z}^2, +) \to (G, \cdot) : (k, \ell) \mapsto a^k b^\ell$ ein Gruppenisomorphismus. (Übung!)

Beispiel. Ist $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe der Ordnung n, so definiert die Verknüpfungstafel $\cdot : G \times G \to G$ eine Präsentation durch n Erzeuger und n^2 Relationen (L3E). Das ist mit wachsendem n zwar zunehmend ineffizient, aber im Prinzip immer möglich.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L3n. Universelle Abbildungseigenschaft. Mit Elementen der freien Gruppe $\langle S \mid - \rangle$ können wir gut rechnen, da wir jedes Wort auf eindeutige Weise reduzieren können (L-2).

Mit Elementen von $\langle S \mid R \rangle$ hingegen lässt sich häufig schlecht rechnen, da man hierzu die Äquivalenz von Wörtern über S modulo R^F verstehen muss (Wortproblem L-3).

Die „innere“ Struktur von $\langle S \mid R \rangle$ kann somit sehr kompliziert sein, manchmal sogar algorithmisch unlösbar, ebenso (bereits für $G = \mathbb{Z}$) die Homomorphismenmenge

$$\mathrm{Hom}\big(G, \langle S \mid R \rangle\big),$$

in die Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ hinein. Die „äußere“ Struktur im Sinne der Homomorphismenmenge

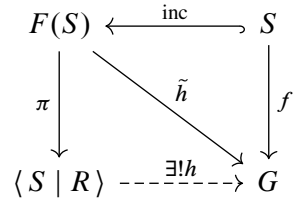
$$\mathrm{Hom}\big(\langle S \mid R \rangle, G\big)$$

aus der Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ hinaus ist hingegen leicht zu verstehen: Ein Gruppenhomomorphismus $\langle S \mid R \rangle \to G$ ist eine Abbildung $f : S \to G$, die die Relationen R respektiert.

Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$. Jeder Homomorphismus $h : \langle a \mid a^n \rangle \to G$ bildet a auf ein Element $x = h(a)$ in G ab, sodass $x^n = 1$ gilt. Umgekehrt gehört zu jedem Element $x \in G$ mit $x^n = 1$ genau ein Homomorphismus $h : \langle a \mid a^n \rangle \to G : a \mapsto x$.

Beispiel. Jeder Homomorphismus $h : \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \to G$ bildet $a \mapsto x = h(a)$ und $b \mapsto y = h(b)$ in G ab, sodass $xy = yx$ gilt. Umgekehrt gehört zu jedem Paar $x, y \in G$ mit $xy = yx$ genau ein Homomorphismus $h : \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \to G : (a, b) \mapsto (x, y)$.

Sei (S, R) eine Präsentation und G eine Gruppe. Dank L3H existiert zu jeder Abbildung $f : S \to G$ eine eindeutige Fortsetzung zu einem Gruppenhomomorphismus $\tilde{h} : F(S) \to G$. Es gilt dann folgendes einfache Kriterium:



Satz L3J (universelle Abbildungseigenschaft einer präsentierten Gruppe)**.** *Sei (S, R) eine Präsentation und $f : S \to G$ eine Abbildung in eine Gruppe $(G, \cdot)$. Sei $\tilde{h} : (F(S), \cdot) \to (G, \cdot)$ ihre Fortsetzung zu einem Gruppenhomomorphismus. Genau dann existiert ein Gruppenhomomorphismus $h : \langle S \mid R \rangle \to G$ mit $h \circ \pi|_S = f$, wenn $\tilde{h}(r) = 1$ für alle $r \in R$ gilt.*

BEWEIS / ÜBUNG. „⇐“: Die Bedingung $\tilde{h}(r) = 1$ für alle $r \in R$ ist gleichbedeutend mit $R \subset \ker(\tilde{h})$. Da $\ker(\tilde{h})$ in F eine normale Untergruppe ist, folgt $N = N(R) \subset \ker(\tilde{h})$. Nach dem Homomorphiesatz induziert $\tilde{h} : F \to G$ einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $h : \langle S \mid R \rangle \to G : wN \mapsto \tilde{h}(w)$. Für $s \in S$ gilt $h(sN) = \tilde{h}(s) = f(s)$, also $h \circ \pi|_S = f$.

„⇒“: Aus $h(sN) = f(s)$ für alle $s \in S$ folgt $\tilde{h} = h \circ \pi$. Für $\ker(\pi) = N(R)$ gilt demnach $\ker \pi \subset \ker(\tilde{h})$, insbesondere also $R \subset \ker(\tilde{h})$, und somit $\tilde{h}(r) = 1$ für alle $r \in R$. □

Beispiel. Für die freie Gruppe $\langle S \mid - \rangle$ gilt $R = \emptyset$, und die Bedingung „$h(r) = 1$ für alle $r \in R$“ ist leer. Somit beinhaltet Satz L3J die universelle Abbildungseigenschaft L3H: Jede Abbildung $S \to G$ setzt sich fort zu einem Gruppenhomomorphismus $\langle S \mid - \rangle \to G$.

§L3o. Präsentation einer vorgegebenen Gruppe. In den obigen Beispielen haben wir uns eine Präsentation $\langle S \mid R \rangle$ vorgegeben und anschließend in dieser Gruppe gerechnet.

Wir können uns auch umgekehrt eine Gruppe G vorgeben und hierzu eine geeignete Präsentation suchen. In der Topologie nutzen wir dies oft und gerne: Die betrachtete Gruppe $G = \pi_1(X, x_0)$ ist typischerweise die Fundamentalgruppe eines gegebenen Raumes (X, x_0).

Definition L3K. Sei G eine Gruppe. Eine *Präsentation von G* ist ein Quadrupel (S, R, h, k) aus einer Präsentation (S, R) und einem Gruppenisomorphismus $(h, k) : \langle S \mid R \rangle \cong G$.

Der Isomorphismus $h : \langle S \mid R \rangle \xrightarrow{\sim} G$ parametrisiert G. Die Umkehrung k schreibt Elemente von G als Wörter über S modulo R. Wegen $k = h^{-1}$ genügt es, h anzugeben.

Wir nennen G *endlich erzeugt*, wenn eine endliche Teilmenge $S \subset G$ mit $\langle S \rangle = G$ existiert. Es existiert dann eine Präsentation $\langle S \mid R \rangle \cong G$, bei der S endlich ist.

Die Gruppe G heißt *endlich präsentiert*, wenn eine Präsentation $\langle S \mid R \rangle \cong G$ existiert, für die sowohl die Erzeugermenge S als auch die Relationenmenge R endlich ist.

Bemerkung. Oft möchte man einen Gruppenhomomorphismus konstruieren in der Form

$$h : \langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle =: P \to G \quad \text{mit} \quad s_i \mapsto g_i \quad \text{für alle } i\,.$$

Eindeutigkeit: Da die Elemente $s_1, \dots, s_m$ die präsentierte Gruppe P erzeugen, ist jeder Homomorphismus h durch $s_i \mapsto g_i$ eindeutig festgelegt. (Es kann höchstens einen geben.)

Existenz: Der angegebene Gruppenhomomorphismus h ist genau dann wohldefiniert, wenn die Elemente $g_1, \dots, g_m$ in G die Relationen $r_1, \dots, r_n$ erfüllen (L3J).

Surjektivität: Der Homomorphismus h ist genau dann surjektiv, wenn $\langle g_1, \dots, g_m \rangle = G$ gilt, also die angegebenen Elemente $g_1, \dots, g_m$ die gesamte Gruppe G erzeugen.

Injektivität: Der Homomorphismus h ist genau dann injektiv, wenn die Relationen $r_1, \dots, r_n$ bereits alle Relationen erzeugen, die zwischen den $g_1, \dots, g_m$ in G bestehen.

Satz L3L. *Jede Gruppe G erlaubt eine Präsentation $h : \langle S \mid R \rangle \xrightarrow{\sim} G$. Ist zudem G endlich bzw. abzählbar, so können auch S und R endlich bzw. abzählbar gewählt werden.*

BEWEIS / ÜBUNG. Kanonisch gelingt dies durch die Verknüpfungstafel (L3E). Allgemein: Man wähle ein Erzeugensystem $S \subset G$, notfalls $S = G$. Die Inklusion $S \hookrightarrow G$ setzt sich fort zu einem surjektiven Gruppenhomomorphismus $f : F(S) \twoheadrightarrow G$. Man wähle eine Menge $R \subset \ker(f)$, die den Kern normal in $F(S)$ erzeugt, notfalls $R = \ker(f)$. Übergang zum Quotienten induziert den ersehnten Gruppenisomorphismus $h : \langle S \mid R \rangle \xrightarrow{\sim} G$. □

Beispiel. Einige vertraute Gruppen wie $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ sind nicht endlich erzeugt, somit nicht endlich präsentierbar. Einfache abzählbare Präsentationen kennen Sie aus L3D.

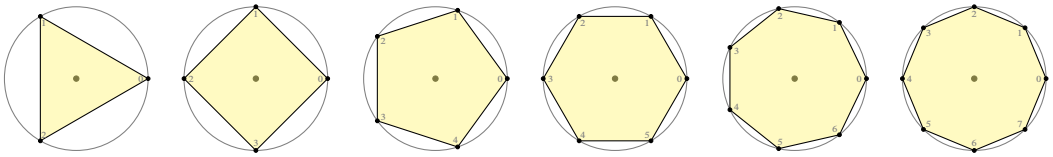
Beispiel. Die zyklische Gruppe $G = \{ g, g^2, g^3, g^4, g^5 = 1 \} \cong \mathbb{Z}/5$ können wir präsentieren durch $h : \langle s \mid s^5 \rangle \xrightarrow{\sim} G : s \mapsto g$ aber ebenso auch durch $h' : \langle s \mid s^5 \rangle \xrightarrow{\sim} G : s \mapsto g^2$. Die Angabe des Isomorphismus ist daher wesentlicher Bestandteil der Präsentation.

Präsentationen derselben Gruppe können verschieden aussehen: Die zyklische Gruppe $G = \{ g, g^2, g^3, g^4, g^5, g^6 = 1 \} \cong \mathbb{Z}/6$ können wir präsentieren durch $h : \langle s \mid s^6 \rangle \xrightarrow{\sim} G$ mit $s \mapsto g$ aber auch durch $h' : \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1,\ ab = ba \rangle \xrightarrow{\sim} G$ mit $a \mapsto g^2$, $b \mapsto g^3$.

Als Übung prüfe man diese Präsentationen und konstruiere zwischen ihnen zueinander inverse Isomorphismen. Satz L3S überführt sie ineinander durch Tietze–Transformationen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L3p. Zwei Präsentationen der Diedergruppen. Zu $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ sei $P_n \subset \mathbb{R}^2$ das regelmäßige n–Eck mit den Eckpunkten $v_k = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n))$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.



Die *Diedergruppe* $D_n = \mathrm{Isom}(P_n)$ besteht aus n Drehungen und n Spiegelungen. Hierzu sei r_k die Drehung um den Winkel $2\pi k/n$ und s_k die Spiegelung an der Achse, die im Winkel $\pi k/n$ geneigt ist. Als Matrizen schreiben sich diese Transformationen dann gemäß

$$r_k = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/n) & -\sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{pmatrix}, \qquad s_k = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/n) & \sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & -\cos(2\pi k/n) \end{pmatrix}.$$

Beispiel. Die acht Elemente der Diedergruppe $D_4 < \mathrm{GL}_2\,\mathbb{Z} < \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ sind

$$r_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad r_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad r_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad r_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$
$$s_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad s_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad s_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad s_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Die Permutationen auf der Eckenmenge $\mathbb{Z}/n$ sind $r_k(x) = k + x$ und $s_k(x) = k - x$. Somit ist D_n isomorph zur Permutationsgruppe $\{\, \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n : x \mapsto k \pm x \mid k \in \mathbb{Z}/n \,\} < S_n$. Diese Darstellung ist auch für $n = 0$ sinnvoll: Die *unendliche Diedergruppe* D_∞ operiert auf der Menge $\mathbb{Z}$ durch Translationen $r_k(x) = k + x$ und Spiegelungen $s_k(x) = k - x$.

Satz L3M. *Für die Diedergruppe D_n mit $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir die Präsentationen*

$$\begin{aligned} D_n \;&\cong\; D_n^* := \langle\, s,t \mid s^2,\ t^2,\ (st)^n \,\rangle \\ &\cong\; D_n^+ := \langle\, r,s \mid r^n,\ s^2,\ srs = r^{-1} \,\rangle \;\cong\; \mathbb{Z}/n \rtimes \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

Genauer: Die beiden Gruppenhomomorphismen $h : D_n^* \to D_n : s \mapsto s_0, t \mapsto s_1$ und $h' : D_n^+ \to D_n : r \mapsto r_1, s \mapsto s_0$ sind bijektiv, also Gruppenisomorphismen.

Es gilt $D_1 \cong \mathbb{Z}/2$ und $D_2 \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ sowie $D_3 \cong S_3$. Für $n \geq 3$ ist D_n nicht abelsch. Im Spezialfall $n = 0$ ist $D_0 = D_\infty$ isomorph zu $D_0^* \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ und zu $D_0^+ \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2$.

BEWEIS / ÜBUNG. In D_n gilt $s_k^2 = 1$ sowie $r_1 = s_1 s_0$ und $r_{-1} = s_0 s_1$, also $(s_0 s_1)^n = 1$. Wir erhalten den Gruppenhomomorphismus $h : D_n^* \to D_n$ mit $s \mapsto s_0$ und $t \mapsto s_1$. Es gilt $r_k = r_1^k$ und $s_k = r_k s_0$ für alle k, also $D_n = \langle\, s_0, s_1 \,\rangle$, und h ist surjektiv. Alle Elemente von D_n^* können wir vollständig aufzählen als alternierende Produkte bis maximal zur Länge n:

$$D_n^* = \{\, 1,\ s,\ t,\ st,\ ts,\ sts,\ tst,\ \ldots,\ sts\cdots = tst\cdots \,\}$$

Es folgt $|D_n^*| \leq 2n$, somit ist $h : D_n^* \to D_n$ ein Isomorphismus. Für die zweite Präsentation gehen wir genauso vor: Relationen, Surjektivität, Injektivität. Als Aufzählung finden wir

$$D_n^+ = \{\, r^k s^\ell \mid k \in \mathbb{Z}/n,\ \ell \in \mathbb{Z}/2 \,\}.$$

Im Falle $n = 0$ sind D_n, D_n^*, D_n^+ unendlich, und man prüft die Injektivität direkt. □

Bemerkung. Sei G eine Gruppe. Je zwei Involutionen $a, b \in G$, also Gruppenelemente der Ordnung $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b) = 2$, erzeugen eine Diedergruppe, das heißt $\langle\, a,b \,\rangle \cong D_n$. Hierbei sind auch die Sonderfälle $D_1 \cong \mathbb{Z}/2$ und $D_2 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ sowie $D_0 = D_\infty$ möglich.

§L3q. Abelschmachung. Für Elemente a,b in einer Gruppe $(G,\cdot,1)$ sind äquivalent:

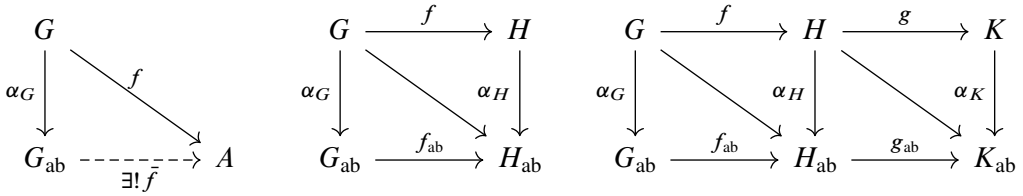
(1) Es gilt $ab = ba$, das heißt, die Elemente a und b *kommutieren*.
(2) Es gilt $b = a^{-1}ba$, das heißt, die *Konjugation* $\gamma_a : x \mapsto x^a = a^{-1}xa$ fixiert b.
(3) Es gilt $b^{-1}ab = a$, das heißt, die *Konjugation* $\gamma_b : x \mapsto x^b = b^{-1}xb$ fixiert a.
(4) Es gilt $a^{-1}b^{-1}ab = 1$, das heißt, der *Kommutator* $[a,b] := a^{-1}b^{-1}ab$ ist trivial.

Der Kommutator $[a,b]$ misst demnach für $a,b \in G$ die Abweichung vom Kommutieren. Die von allen Kommutatoren in G erzeugte Untergruppe ist die *Kommutatorgruppe*

$$G' := \big\langle [G,G] \big\rangle = \big\langle [a,b] \bigm| a,b \in G \big\rangle.$$

Die Gruppe G heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn $ab = ba$ für alle $a,b \in G$ gilt, also $G' = \{1\}$. Wir können G abelsch machen, indem wir zur Quotientengruppe modulo G' übergehen. Frei nach Goethe: *Und bist du nicht abelsch, so brauch' ich G′walt.*

Satz L3N. *(0) In G ist G' normal. Die Quotientengruppe $G_{\mathrm{ab}} := G/G'$ ist abelsch.*



(1) Der Quotientenhomomorphismus $\alpha_G : G \to G_{\mathrm{ab}} : a \mapsto aG'$ hat folgende universelle Eigenschaft: Jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \to A$ in eine abelsche Gruppe induziert einen Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : G_{\mathrm{ab}} \to A$ mit $f = \bar{f} \circ \alpha_G$.
(2) Jedem Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ ordnet die Abelschmachung so den eindeutigen Gruppenhomomorphismus $f_{\mathrm{ab}} : G_{\mathrm{ab}} \to H_{\mathrm{ab}}$ mit $\alpha_H \circ f = f_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_G$ zu.
(3) Dies definiert den Funktor $\mathrm{ab} : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}$ *und die Retraktion* $(\mathrm{inc}, \mathrm{ab}) : \mathtt{Ab} \leftrightarrows \mathtt{Grp}$.
(4) Ist f bijektiv oder surjektiv, so auch f_{ab}. Für Injektivität hingegen gilt dies nicht!
(5) Für jeden inneren Automorphismus $f : G \to G : x \mapsto x^g$ gilt $f_{\mathrm{ab}} = \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}} : G_{\mathrm{ab}} \to G_{\mathrm{ab}}$.

⁕ **L3N.** (0) Die Konjugation mit c bildet die Menge $[G,G]$ aller Kommutatoren in sich ab, denn für alle $a,b \in G$ gilt $[a,b]^c = c^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)c = (c^{-1}a^{-1}c)(c^{-1}b^{-1}c)(c^{-1}ac)(c^{-1}bc) = [a^c, b^c]$. Demnach ist die hiervon erzeugte Kommutatoruntergruppe $G' = \langle\, [G,G] \,\rangle$ konjugationsinvariant, also normal in G.

Für $a,b \in G$ gilt $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab \in G'$, also $a^{-1}b^{-1}abG' = G'$ und somit $abG' = baG'$. Das bedeutet, die Quotientengruppe $G/G' = \{\, aG' \mid a \in G \,\}$ mit der Verknüpfung $(aG') \cdot (bG') = (ab)G'$ ist abelsch.

(1) Ist $f : G \to A$ ein Gruppenhomomorphismus in eine abelsche Gruppe A, so liegt für alle $a,b \in G$ der Kommutator im Kern, denn $f(a^{-1}b^{-1}ab) = f(a)^{-1} f(b)^{-1} f(a) f(b) = 1$. Dank $G' \subset \ker(f)$ induziert f auf dem Quotienten einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus, ausgeschrieben $\bar{f} : G/G' \to A : aG' \mapsto f(a)$.

(2) Wir nutzen (1): Die Komposition $\alpha_H \circ f : G \to H_{\mathrm{ab}}$ induziert $f_{\mathrm{ab}} : G_{\mathrm{ab}} \to H_{\mathrm{ab}}$ mit $\alpha_H \circ f = f_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_G$.

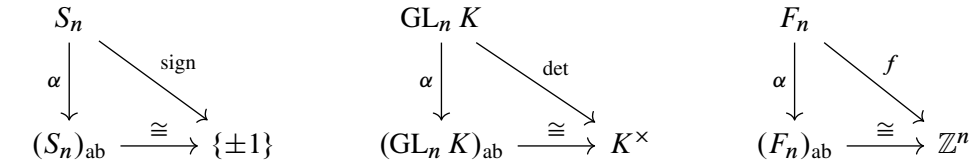
(3) Für $f = \mathrm{id}_G : G \to G$ ergibt (2) durch Einsetzen $f_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_G = \alpha_G \circ f = \alpha_G = \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}} \circ \alpha_G$. Dank universeller Eigenschaft (1) folgt hieraus $f_{\mathrm{ab}} = \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}}$. Für $f : G \to H$ und $g : H \to K$ und $h = g \circ f : G \to K$ folgt $h_{\mathrm{ab}} = g_{\mathrm{ab}} \circ f_{\mathrm{ab}}$ aus obigem Diagramm: $h_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_G = \alpha_K \circ g \circ f = g_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_H \circ f = g_{\mathrm{ab}} \circ f_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_G$. Somit ist die Abelschmachung ein Funktor $\mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}$. Auf der Unterkategorie der abelschen Gruppen ist er äquivalent zum identischen Funktor; in diesem Sinne ist er eine Retraktion zur Inklusion, kurz $(\mathrm{inc}, \mathrm{ab}) : \mathtt{Ab} \leftrightarrows \mathtt{Grp}$.

(4) Bijektivität: Wie jeder Funktor erhält $\mathrm{ab} : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}$ Isomorphismen (H4F). Aus $G \cong H$ in $\mathtt{Grp}$ folgt demnach $G_{\mathrm{ab}} \cong H_{\mathrm{ab}}$ in $\mathtt{Ab}$. Surjektivität: Aus $f : G \twoheadrightarrow H$ folgt $\alpha_H \circ f : G \twoheadrightarrow H_{\mathrm{ab}}$ und $\bar{f} : G_{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow H_{\mathrm{ab}}$. Zur Injektivität betrachte man einfache Gegenbeispiele, wie das folgende: Die Inklusion $\langle\, (1,2,\ldots,n) \,\rangle \hookrightarrow S_n$ ist injektiv, aber $\langle\, (1,2,\ldots,n) \,\rangle_{\mathrm{ab}} \to (S_n)_{\mathrm{ab}} \cong \{\pm 1\}$ ist nicht injektiv für $n \geq 3$, sogar trivial für n ungerade.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Eigenschaft (5) ist klar nach Konstruktion von f_{ab}: Es gilt $x \equiv x^g \mod G'$, da $x^{-1}x^g = [x,g] \in G'$.

§L3r. Zwei wichtige Abelschmachungen. Aus der Linearen Algebra kennen Sie zwei wichtige Abelschmachungen, wenn auch dort noch nicht unter diesem Namen:



Satz L3o. *Die symmetrische Gruppe $(S_n,\circ)$ hat als Kommutatoruntergruppe $S_n' = A_n$. Für $n \geq 2$ ist die Abelschmachung daher äquivalent zur Signatur* $\mathrm{sign} : S_n \twoheadrightarrow \{\pm1\}$.

Zusatz: *Weiters gilt $A_n' = A_n$, außer in den Fällen $n \in \{3,4\}$.*

BEWEIS. Wir haben $A_n := \ker(\mathrm{sign})$. Da die Zielgruppe $\{\pm1\}$ abelsch ist, gilt $A_n \supset S_n'$. Alternativ: Jeder Kommutator $[\sigma,\tau]$ mit $\sigma,\tau \in S_n$ ist gerade, also $S_n' = \langle\, [S_n,S_n] \,\rangle \subset A_n$.

Wir zeigen $A_n \subset S_n'$. Für $n = 2$ gilt $A_2 = \{1\}$. Sei also $n \geq 3$. In S_n ist jeder 3–Zykel (i,j,k) ein Kommutator dank $[(i,k),(j,k)] = (i,k)(j,k)(i,k)(j,k) = (i,j,k)$. Die Gruppe A_n wird von 3–Zykeln erzeugt. (Induktion: Übung!) Also gilt $A_n \subset \langle\, [S_n,S_n] \,\rangle = S_n'$.

Für $n \geq 5$ folgt ebenso $A_n' = A_n$, denn jeder 3–Zykel ist ein Kommutator von zwei geeigneten 3–Zykeln gemäß $[(1,2,3),(1,4,5)] = (1,3,2)(1,5,4)(1,2,3)(1,4,5) = (1,3,5)$.

In den beiden Ausnahmefällen erhalten wir die triviale Gruppe $A_3' = \{1\} \subsetneq A_3$ und die Kleinsche Vierergruppe $A_4' = \{\,\mathrm{id},(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\,\} \subsetneq A_4$. □

Satz L3p. *Für jeden Körper K gilt $(\mathrm{GL}_n K)' = \mathrm{SL}_n K$, außer im Fall $n = 2$ und $\sharp K = 2$. Die Abelschmachung ist daher äquivalent zur Determinante* $\det : \mathrm{GL}_n K \twoheadrightarrow K^\times$.

Zusatz: *Weiters gilt $(\mathrm{SL}_n K)' = \mathrm{SL}_n K$, außer im Fall $n = 2$ und $\sharp K \in \{2,3\}$.*

BEWEIS. Wir haben $\mathrm{SL}_n := \ker(\det)$. Da $K^\times$ abelsch ist, gilt $\mathrm{SL}_n \supset \mathrm{GL}_n'$. Alternativ: Jeder Kommutator $[A,B]$ mit $A,B \in \mathrm{GL}_n$ hat Determinante 1, also $\mathrm{GL}_n' = \langle\, [\mathrm{GL}_n,\mathrm{GL}_n] \,\rangle \subset \mathrm{SL}_n$.

Wir zeigen $\mathrm{SL}_n \subset \mathrm{GL}_n'$. Für $n = 1$ gilt $\mathrm{SL}_1 = \{1\}$. Sei also $n \geq 2$. Sei $T_{ij}(a) \in \mathrm{SL}_n$ die *Transvektion* zu Indizes $i \neq j$ und $a \in K$. Sie hat Einsen auf der Diagonalen, a an der Stelle (i,j), sowie Nullen überall sonst. Dank Gauß–Algorithmus wird SL_n von Transvektionen erzeugt (G2N). Zwischen den Transvektionen gelten folgende *Steinberg–Relationen*:

(S0)	$T_{ij}(a)T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b)$	für alle $i \neq j$ und $a,b \in K$,
(S1)	$\big[T_{ij}(a),T_{jk}(b)\big] = T_{ik}(ab)$	für i,j,k verschieden,
(S2)	$\big[T_{ij}(a),T_{k\ell}(b)\big] = 1_{n\times n}$	für $i \neq \ell$ und $j \neq k$.

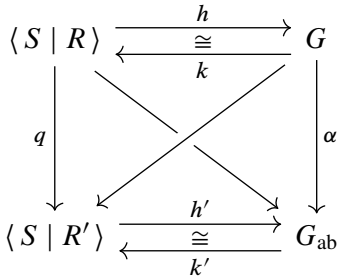
Für $n \geq 3$ liegt jede Transvektion in $[\mathrm{SL}_n,\mathrm{SL}_n]$ dank (S1). Im Falle $n = 2$ nutzen wir einen Trick: Für $U = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2$ mit $u \in K^\times$ gilt $[U,T_{ij}(a)] = T_{ij}(b)$ mit $b = a(1-u)$. Dank der Voraussetzung $\sharp K \geq 3$ können wir $u \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0,1\}$ und $a = b/(1-u)$ wählen. Somit enthält GL_n' alle Transvektionen, also auch die erzeugte Untergruppe SL_n.

Ebenso folgt $\mathrm{SL}_n' = \mathrm{SL}_n$. Im Fall $n = 2$ und $\sharp K \geq 4$ variieren wir den letzten Trick: Für $U = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2$ mit $u \in K^\times$ gilt $[U,T_{ij}(a)] = T_{ij}(b)$ mit $b = a(1-u^2)$. Dank der Voraussetzung $\sharp K \geq 4$ können wir $u \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0,\pm1\}$ und $a = b/(1-u^2)$ wählen.

Im Ausnahmefall $\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_2 = \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_2 \cong S_3$ gilt $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_2 \supsetneq (\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_2)' \cong A_3$. Für $\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_3$ gilt zwar $\mathrm{GL}_2'\mathbb{F}_3 = \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_3$ mit $\sharp\,\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_3 = 48$ und $\sharp\,\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_3 = 24$, aber $\sharp\,\mathrm{SL}_2'\mathbb{F}_3 = 8$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L3s. Abelschmachung einer Präsentation. Gegeben sei eine Gruppe G und eine Präsentation (S,R,h,k), also ein Gruppenisomorphismus $(h,k) : \langle S \mid R \rangle \cong G$.



Für die Abelschmachung G_{ab} erhalten wir die Präsentation (S,R',h',k') mit denselben Erzeugern S und den erweiterten Relationen $R' = R \cup [S,S]$, wobei wir den Kommutator $[s,t] = s^{-1}t^{-1}st$ wie üblich auf Mengen fortsetzen durch $[S,S] = \{\, [s,t] \mid s,t \in S \,\}$.

Wir erzwingen damit, dass alle Erzeuger s,t untereinander kommutieren, und folglich alle Elemente in $\langle S \mid R' \rangle$. Diese Konstruktion präsentiert tatsächlich die Abelschmachung:

Satz L3Q (Abelschmachung)**.** *Aus $(h,k) : \langle S \mid R \rangle \cong G$ erhalten wir so die Präsentation $(h',k') : \langle S \mid R' \rangle \cong G_{\mathrm{ab}}$, die das obige Diagramm kommutativ macht.*

BEWEIS / ÜBUNG. Dies folgt aus der universellen Eigenschaft der Präsentation (L3J) und der Abelschmachung (L3N). Führen Sie die Argumente sorgfältig aus! □

✻ **L3Q.** (1) Die Komposition $\alpha \circ h : \langle S \mid R \rangle \to G_{\mathrm{ab}}$ erfüllt über die Relationen R hinaus auch R', induziert also den Homomorphismus $h' : \langle S \mid R' \rangle \to G_{\mathrm{ab}}$ mit $h' \circ q = \alpha \circ h$ dank universeller Eigenschaft L3J.

(2) Die aus (S,R) gewonnene Präsentation (S,R') mit $R' = R \cup [S,S]$ definiert eine abelsche Gruppe: In der Gruppe $\langle S \mid R' \rangle$ kommutieren alle Erzeuger $s,t \in S$, daher auch alle hiervon erzeugten Elemente, also *alle*.

(3) Die Komposition $q \circ k : G \to \langle S \mid R' \rangle$ geht dank (2) in eine abelsche Gruppe, induziert also den Homomorphismus $k' : G_{\mathrm{ab}} \to \langle S \mid R' \rangle$ mit $k' \circ \alpha = q \circ k$ dank universeller Eigenschaft L3N.

(4) Da (h,k) ein Isomorphismuspaar ist, folgt dies auch für (h',k'): Es gilt $k' \circ h' = \mathrm{id}$ und $h' \circ k' = \mathrm{id}$ auf Erzeugern, also global. Ausführlich: Es gilt $k' \circ h' \circ q = k' \circ \alpha \circ h = q \circ k \circ h = q = \mathrm{id} \circ q$. Dank Surjektivität (oder UAE) von q folgt Rechtskürzbarkeit, $k' \circ h' = \mathrm{id}$. Ebenso gilt $h' \circ k' \circ \alpha = h' \circ q \circ k = \alpha \circ h \circ k = \alpha = \mathrm{id} \circ \alpha$. Dank Surjektivität (oder UAE) von α folgt Rechtskürzbarkeit, $h' \circ k' = \mathrm{id}$.

Beispiel. Für die freie Gruppe $F = \langle s_1, \ldots, s_r \mid - \rangle$ gilt $F_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^r$ vermöge $s_k \mapsto e_k$. (L3C) Wir erhalten so die erneut die vertraute Präsentation $\langle s_1, \ldots, s_r \mid s_i s_j = s_j s_i \rangle \cong \mathbb{Z}^r$.

Bemerkung. Zu der Gruppe G definieren wir die Abelschmachung $\alpha : G \twoheadrightarrow G_{\mathrm{ab}}$ als den Quotienten von G modulo der Kommutatoruntergruppe $\langle [G,G] \rangle = \langle a^{-1}b^{-1}ab \mid a,b \in G \rangle$. Dies hängt nur von der Gruppe G ab, und nicht von der willkürlich gewählten Präsentation.

Die Abelschmachung der Präsentation (S,R) zu (S,R') mit $R' = R \cup [S,S]$ hängt dagegen explizit von der gewählten Präsentation (S,R) ab. Es wäre zu befürchten, dass im Ergebnis auch die Gruppe $\langle S \mid R' \rangle$ von diesen Wahlen abhängt. Der Satz zeigt, dass dies nicht der Fall ist: Jede andere Präsentation führt zum selben Ergebnis (bis auf Isomorphie).

Konstruktion und Nachweis der Präsentation $(h',k') : \langle S \mid R' \rangle \cong G_{\mathrm{ab}}$ sind sehr einfach dank der universellen Eigenschaften beider Objekte. Es wäre sehr mühsam, dies direkt auf Elementen durchzurechnen. Hier hilft die Abstraktion und trivialisiert die Rechnungen.

§L3t. Abelschmachung der Diedergruppe. Als erste Illustration untersuchen wir die beiden Präsentationen der Diedergruppe D_n aus Satz L3M. Das ist zugleich eine schöne Gelegenheit, bereits die Tietze–Transformationen L3S in Aktion zu erleben, und ihre natürliche Kraft und Eleganz zu bewundern. (Fügen Sie alle Zwischenschritte ein!)

Beispiel L3R. (1) Die erste Präsentation, mit benachbarten Spiegelungen s,t, ergibt:

$$\begin{aligned} D_n &\cong \langle\, s,t \mid s^2=1,\ t^2=1,\ (st)^n=1 \,\rangle \\ (D_n)_{\text{ab}} &\cong \langle\, s,t \mid s^2=1,\ t^2=1,\ (st)^n=1,\ st=ts \,\rangle \\ &\cong \langle\, s,t \mid s^2=1,\ t^2=1,\ s^n t^n=1,\ st=ts \,\rangle \\ \text{(a) } n \text{ ungerade:} \quad &\cong \langle\, s,t \mid s^2=1,\ t^2=1,\ st=1,\ st=ts \,\rangle \\ &\cong \langle\, s,t \mid s^2=1,\ t=s^{-1} \,\rangle \cong \langle\, s \mid s^2=1 \,\rangle \cong \mathbb{Z}/2 \\ \text{(b) } n \text{ gerade:} \quad &\cong \langle\, s,t \mid s^2=1,\ t^2=1,\ st=ts \,\rangle \cong \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2 \end{aligned}$$

(2) Die zweite Präsentation, mit Rotation r und Spiegelung s, ergibt:

$$\begin{aligned} D_n &\cong \langle\, r,s \mid r^n=1,\ s^2=2,\ srs=r^{-1} \,\rangle \\ (D_n)_{\text{ab}} &\cong \langle\, r,s \mid r^n=1,\ s^2=2,\ srs=r^{-1},\ rs=sr \,\rangle \\ &\cong \langle\, r,s \mid r^n=1,\ s^2=1,\ r^2=1,\ rs=sr \,\rangle \\ \text{(a) } n \text{ ungerade:} \quad &\cong \langle\, r,s \mid r=1,\ s^2=1,\ rs=sr \,\rangle \\ &\cong \langle\, r,s \mid r=1,\ s^2=1 \,\rangle \cong \langle\, s \mid s^2=1 \,\rangle \cong \mathbb{Z}/2 \\ \text{(b) } n \text{ gerade:} \quad &\cong \langle\, r,s \mid r^2=1,\ s^2=1,\ rs=sr \,\rangle \cong \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2 \end{aligned}$$

Bemerkung. Diese Rechnung hat eine schöne geometrische Interpretation.

(a) Im ungeraden Fall sind alle Spiegelungen $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ in $D_n < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, P_n)$ konjugiert und werden daher durch die Abelschmachung $\alpha : D_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\} : s_k \mapsto -1$ identifiziert.

(b) Im geraden Fall gibt es zwei Arten von Spiegelungen: solche, deren Achse durch zwei gegenüberliegende Ecken von P_n geht, und solche, deren Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten von P_n geht. Sie sind daher nicht zueinander konjugiert. Die Abelschmachung $\alpha : D_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}^2$ bildet sie auf $(-1,1)$ und $(1,-1)$ ab.

Betrachten wir die Operation auf den Eckpunkten, so können wir $D_n < S_n$ als Untergruppe der symmetrischen Gruppe auffassen. Im Falle $n = 4k+1$ kommutiert das linke Diagramm mit $h = 1$, im Falle $n = 4k+3$ mit $h = \mathrm{id}$. In den Fällen $n = 4k$ und $n = 4k+2$ kommutiert das rechte Diagramm jeweils mit der geeigneten Projektion.

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\ \text{sign}\ } & \{\pm 1\} \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h} \\ D_n & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \{\pm 1\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\ \text{sign}\ } & \{\pm 1\} \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \text{proj}} \\ D_n & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \{\pm 1\}^2 \end{array}$$

Die Abelschmachung von Gruppe und Untergruppe kann recht verschieden ausfallen!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L3u. Tietze–Transformationen für Präsentationen. Zu jeder Gruppe G gibt es stets unendlich viele verschiedene Präsentationen (S, R). Zum Beispiel ändern die folgenden *Tietze–Transformationen* die Präsentation (S, R), nicht aber die präsentierte Gruppe:

(T1) *Einfügen oder Löschen redundanter Relationen:*
$(S, R) \leftrightarrow (S, R \sqcup R')$ mit $R' \subset \langle\, R^{F(S)} \,\rangle$.

(T2) *Einfügen oder Löschen redundanter Erzeuger:*
$(S, R) \leftrightarrow (S \sqcup S', R \sqcup R')$ mit $R' = \{\, s' w(s')^{-1} \mid s' \in S' \,\}$ und $w : S' \to F(S)$.

Besonders interessant sind endliche Präsentationen. In diesem Falle erhalten wir (T1,2) durch wiederholtes einfaches Einfügen oder Löschen. Die hier gewählte starke Formulierung erlaubt uns ohne Mehraufwand, auch unendliche Präsentationen zu behandeln.

Beispiel. Wir vergleichen die beiden Präsentationen der Diedergruppe aus L3M:

$$\begin{array}{ccc} \langle\, s_0, s_1 \mid - \,\rangle & \underset{k : s_0 \mapsto s,\, s_1 s_0 \mapsto r}{\overset{h : s_0 \mapsto s,\, s_1 \mapsto rs}{\rightleftarrows}} & \langle\, r, s \,\rangle \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ G := \langle\, s_0, s_1 \mid s_0^2,\ s_1^2,\ (s_1 s_0)^n \,\rangle & \underset{\bar{k}}{\overset{\bar{h}}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} & \langle\, r, s \mid s^2,\ r^n,\ srsr \,\rangle =: H \end{array}$$

Diese Isomorphismen übersetzen wir nun in Tietze–Transformationen:

$$\begin{aligned} & \langle\, s_0, s_1 \quad \mid s_0^2,\ s_1^2,\ (s_1 s_0)^n && && \,\rangle \\ \cong\ & \langle\, s_0, s_1, r, s \mid s_0^2,\ s_1^2,\ (s_1 s_0)^n, && r = s_1 s_0,\ s = s_0 && \,\rangle \\ =\ & \langle\, s_0, s_1, r, s \mid s_0^2,\ s_1^2,\ (s_1 s_0)^n, && r = s_1 s_0,\ s = s_0, && s^2,\ r^n,\ srsr, \quad s_0 = s,\ s_1 = rs \,\rangle \\ =\ & \langle\, s_0, s_1, r, s \mid && && s^2,\ r^n,\ srsr, \quad s_0 = s,\ s_1 = rs \,\rangle \\ \cong\ & \langle\, \quad r, s \mid && && s^2,\ r^n,\ srsr \,\rangle \end{aligned}$$

Satz L3S (Tietze 1908)**.** *Zwei (endliche) Präsentationen (S, R) und (S', R') stellen genau dann isomorphe Gruppen $\langle\, S \mid R \,\rangle \cong \langle\, S' \mid R' \,\rangle$ dar, wenn sie sich durch (endliche) Tietze–Transformationen ineinander überführen lassen. Genauer gilt: Jeder Gruppenisomorphismus $(\bar{h}, \bar{k}) : \langle\, S \mid R \,\rangle \cong \langle\, S' \mid R' \,\rangle$ lässt sich durch Tietze–Transformationen erzeugen.*

BEWEIS. „⇐“: Für (T1) gilt $\langle\, (R \sqcup R')^F \,\rangle = \langle\, R^F \,\rangle$ und somit $\langle\, S \mid R \,\rangle = \langle\, S \mid R' \,\rangle$.

Für (T2) gilt: Die Inklusion $h : S \hookrightarrow S \sqcup S'$ induziert $\bar{h} : \langle\, S \mid R \,\rangle \to \langle\, S \sqcup S' \mid R \sqcup R' \,\rangle$. Die Retraktion $k : F(S \sqcup S') \to F(S)$ mit $s \mapsto s$ für $s \in S$ und $s' \mapsto w(s')$ für $s' \in S'$ induziert $\bar{k} : \langle\, S \sqcup S' \mid R \sqcup R' \,\rangle \to \langle\, S \mid R \,\rangle$. Es gilt $k \circ h = \mathrm{id}_{F(S)}$ und somit $\bar{k} \circ \bar{h} = \mathrm{id}_{\langle S \mid R \rangle}$. Es gilt $h \circ k : s' \mapsto w(s') \equiv s' \bmod R'$, also $\bar{h} \circ \bar{k} = \mathrm{id}_{\langle S \sqcup S' \mid R \sqcup R' \rangle}$.

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \underset{k}{\overset{h}{\rightleftarrows}} & F(S \sqcup S') \\ \big\downarrow \mathrm{quot} & & \big\downarrow \mathrm{quot} \\ \langle\, S \mid R \,\rangle & \underset{\bar{k}}{\overset{\bar{h}}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} & \langle\, S \sqcup S' \mid R \sqcup R' \,\rangle \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(S) & \underset{k}{\overset{h}{\rightleftarrows}} & F(S') \\ \big\downarrow \mathrm{quot} & & \big\downarrow \mathrm{quot} \\ \langle\, S \mid R \,\rangle & \underset{\bar{k}}{\overset{\bar{h}}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} & \langle\, S' \mid R' \,\rangle \end{array}$$

„⇒“: Seien $\bar{h} : \langle S \mid R \rangle \xrightarrow{\sim} \langle S' \mid R' \rangle$ und $\bar{k} : \langle S' \mid R' \rangle \xrightarrow{\sim} \langle S \mid R \rangle$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. Wir heben diese zu $h : F(S) \to F(S')$ und $k : F(S') \to F(S)$. Wir können $S \cap S' = \emptyset$ annehmen und betrachten $S^* := S \sqcup S'$ und $R^* := R \sqcup R' \sqcup R_h \sqcup R_k$ mit $R_h := \{ s\, h(s)^{-1} \mid s \in S \}$ und $R_k := \{ s'\, k(s')^{-1} \mid s' \in S' \}$.

Dank (T2) und (T1) erhalten wir die Isomorphismen

$$\varphi : \langle S \mid R \rangle \xrightarrow{\sim} \langle S^* \mid R \sqcup R_k \rangle = \langle S^* \mid R \sqcup R_k \sqcup R' \rangle = \langle S^* \mid R \sqcup R_k \sqcup R' \sqcup R_h \rangle,$$
$$\psi : \langle S' \mid R' \rangle \xrightarrow{\sim} \langle S^* \mid R' \sqcup R_h \rangle = \langle S^* \mid R' \sqcup R_h \sqcup R \rangle = \langle S^* \mid R' \sqcup R_h \sqcup R \sqcup R_k \rangle.$$

Für diese gilt $\bar{h} = \psi^{-1} \circ \varphi$ und $\bar{k} = \varphi^{-1} \circ \psi$, wie gewünscht. □

Übung L3T. Warum sind $\langle s \mid s^6 \rangle \cong \mathbb{Z}/6$ und $\langle a,b \mid a^2 = b^3 = 1,\ aba^{-1}b^{-1} \rangle$ isomorph?

Allgemeiner sei $n = pq$ mit $p,q \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$. Dann sind die beiden Gruppen $G = \langle s \mid s^n \rangle \cong \mathbb{Z}/n$ und $H = \langle a,b \mid a^p = b^q = 1,\ aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$ isomorph:

(1) Geben Sie zueinander inverse Isomorphismen $h : G \xrightarrow{\sim} H$ und $k : H \xrightarrow{\sim} G$ an.
(2) Geben Sie Tietze–Transformationen zwischen den beiden Präsentationen an.

Ebenso sind die Gruppen $G = \langle x,y \mid xyx = yxy \rangle$ und $H = \langle s,t \mid s^3 = t^2 \rangle$ isomorph. *Hinweis:* In der Gruppe G gilt $xy \cdot xy \cdot xy = xyx \cdot xyx$, daraus erhalten Sie $k : H \to G$.

✻ **L3T.** (1) Zu $p,q \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ existieren Bézout–Koeffizienten $u,v \in \mathbb{Z}$ mit $up + vq = 1$. Wir nutzen hierzu den erweiterten euklidischen Algorithmus, oder abstrakter, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Hauptidealring ist.

Die Abbildung $h : \langle s \mid - \rangle \to H$, $s \mapsto ab$, erfüllt $s^n = 1$. Sie induziert somit einen Gruppenhomomorphismus $\bar{h} : G \to H$. Die Abbildung $k : \langle a,b \mid - \rangle \to H$, $a \mapsto s^{vq}$, $b \mapsto s^{up}$, erfüllt $k(a^p) = s^{vqp} = 1$, $k(b^q) = s^{upq} = 1$, $k(aba^{-1}b^{-1}) = 1$. Sie induziert somit einen Gruppenhomomorphismus $\bar{k} : H \to G$.

Dies sind zueinander inverse Isomorphismen, denn es gilt $\bar{k}(\bar{h}(s)) = \bar{k}(ab) = s^{vq} \cdot s^{up} = s^{up+vq} = s$ sowie $\bar{h}(\bar{k}(a)) = \bar{h}(s^{vq}) = a^{vq} b^{vq} = a^{1-up} = a$ und $\bar{h}(\bar{k}(b)) = \bar{h}(s^{up}) = a^{up} b^{up} = b^{1-vq} = b$.

(2) Die Konstruktion aus (1) entspricht wie in Satz L3S folgenden Tietze–Transformationen:

$$\begin{aligned}
& \langle s \quad \mid s^n & & & & \rangle \\
\cong\ & \langle s,a,b \mid s^n, & a = s^{vq},\ b = s^{up} & & & \rangle \\
=\ & \langle s,a,b \mid s^n, & a = s^{vq},\ b = s^{up}, & a^p,\ b^q,\ aba^{-1}b^{-1}, & s = ab & \rangle \\
=\ & \langle s,a,b \mid & & a^p,\ b^q,\ aba^{-1}b^{-1}, & s = ab & \rangle \\
\cong\ & \langle \quad a,b \mid & & a^p,\ b^q,\ aba^{-1}b^{-1} & & \rangle
\end{aligned}$$

Die für die redundanten Relationen nötigen Rechnungen entsprechen jeweils den Rechnungen aus Teil (1).

(3) Dank Satz L3J existiert der Homomorphismus $h : G \to H$ mit $h(x) = s^{-1}t$ und $h(y) = t^{-1}s^2$, denn $h(xyx) = s^{-1}tt^{-1}s^2s^{-1}t = t$ und $h(yxy) = t^{-1}s^2s^{-1}tt^{-1}s^2 = t^{-1}s^3 \equiv t$. Ebenso existiert $k : H \to G$ mit $k(s) = xy$ und $k(t) = xyx$, denn $k(s^3) = xyxyxy$ und $k(t^2) = xyxxyx \equiv xyxyxy$. Diese beiden erfüllen $k \circ h = \mathrm{id}_G$, denn $k(h(x)) = k(s^{-1}t) = y^{-1}x^{-1}xyx = x$ und $k(h(y)) = k(t^{-1}s^2) = x^{-1}y^{-1}x^{-1}xyxy = y$; ebenso $h \circ k = \mathrm{id}_H$, denn $h(k(s)) = h(xy) = s^{-1}tt^{-1}s^2 = s$ und $h(k(t)) = h(xyx) = s^{-1}tt^{-1}s^2s^{-1}t = t$.

(4) Die Konstruktion aus (3) entspricht wie in Satz L3S folgenden Tietze–Transformationen:

$$\begin{aligned}
& \langle x,y \quad \mid xyx = yxy & & & & \rangle \\
\cong\ & \langle x,y,s,t \mid xyx = yxy, & s = xy,\ t = xyx & & & \rangle \\
=\ & \langle x,y,s,t \mid xyx = yxy, & s = xy,\ t = xyx, & s^3 = t^2, & x = s^{-1}t,\ y = t^{-1}s^{-2} & \rangle \\
=\ & \langle x,y,s,t \mid & & s^3 = t^2, & x = s^{-1}t,\ y = t^{-1}s^{-2} & \rangle \\
\cong\ & \langle \quad s,t \mid & & s^3 = t^2 & & \rangle
\end{aligned}$$

Die für die redundanten Relationen nötigen Rechnungen entsprechen jeweils den Rechnungen aus Teil (3).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L3v. Algorithmische Probleme.** Rechnen in einer präsentierten Gruppe $G = \langle S \mid R \rangle$ ☜ stellt uns vor interessante und schwierige algorithmische Probleme. Diese wurden 1911 von Max DEHN explizit formuliert und in ersten wichtigen Spezialfällen gelöst.

Zunächst das *Wortproblem*: Zu gegebenen Wörtern $w_1, w_2 \in F$ wollen wir entscheiden können, ob sie in G dasselbe Element darstellen, ob also $w := w_1^{-1} w_2$ in $\langle R^F \rangle$ liegt.

Spezifikation L-3 Wortproblem in einer endlichen Präsentation (S, R)

Eingabe: Ein Gruppenwort $w = s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}$ in $F(S)$.
Ausgabe: Die Antwort „trivial“ falls $w \in \langle R^F \rangle$ oder „nicht-trivial“ falls $w \notin \langle R^F \rangle$.

Beispiel. Für $G = \langle a \mid - \rangle$ löst der Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} : a \mapsto 1$ das Wortproblem. Für $H = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ löst $H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2 : a \mapsto (1,0),\ b \mapsto (0,1)$ das Wortproblem.

Beispiel. Für jede zyklische Gruppe $\langle a \mid a^n \rangle$ wird das Wortproblem durch den Isomorphismus $\langle a \mid a^n \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gelöst. Die Rechnungen in $\mathbb{Z}$ gelingen mit euklidischer Division.

Beispiel. Für $D_n^* = \langle s, t \mid s^2,\ t^2,\ (st)^n \rangle$ und $D_n^+ = \langle r, s \mid r^n,\ s^2,\ srs = r^{-1} \rangle$ aus L3M wird das Wortproblem gelöst durch den dort gefundenen Isomorphismus auf die (konkrete!) Diedergruppe $D_n = \{ \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n : x \mapsto k \pm x \mid k \in \mathbb{Z}/n \} < S_n$.

Bemerkung. Diese Beobachtung gilt allgemein: Jeder Isomorphismus $h : \langle S \mid R \rangle \xrightarrow{\sim} G$ auf eine konkrete Gruppe, etwa Permutationen oder Matrizen, löst das Wortproblem in (S, R): Für jedes gegebene Wort $w \in F(S)$ genügt es, $h(w) \in G$ zu berechnen und mit $1 \in G$ zu vergleichen. In der konkreten Gruppe G ist dieser Vergleich leicht. Leider haben wir zu (S, R) nicht immer solch eine hilfreiche Konkretisierung h zur Verfügung.

Beispiel. Für freie Gruppen löst die Reduktion gemäß Algorithmus L-2 das Wortproblem. Dies funktioniert allgemeiner auch noch für freie Produkte (L9B) und Amalgame (L9E). Hier haben wir keine konkretere Darstellung, wir rechnen direkt mit Wörtern in (S, R).

Je komplizierter die Präsentation, desto schwieriger kann das Wortproblem ausfallen. Idealerweise hätten wir gerne einen universellen Algorithmus folgender Art:

Spezifikation L-4 Uniformes Wortproblem für endliche Gruppenpräsentationen

Eingabe: Eine endliche Präsentation (S, R) und ein Wort $w = s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}$ in $F(S)$.
Ausgabe: Die Antwort „trivial“ falls $w \in \langle R^F \rangle$, „nicht-trivial“ falls $w \notin \langle R^F \rangle$.

In dieser Allgemeinheit ist das Wortproblem leider *nicht* lösbar:

Satz L3U (Novikov 1955, Boone 1958)**.** *Es gibt endliche Präsentationen (S, R), für die das Wortproblem L-3 unlösbar ist. Insbesondere ist dann auch L-4 unlösbar.* □

Das bedeutet nicht nur, dass kein Algorithmus zur Lösung des Wortproblems bekannt ist, sondern vielmehr, dass nachweislich kein solcher Algorithmus existieren kann. Ich verweise hierzu auf J.J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Springer 1995.

Das folgende einfache Beispiel ist entnommen aus D.J. Collins, *A simple presentation of a group with unsolvable word problem*, Illinois J. Math 30 (1986), 230-234:

Beispiel. Das Wortproblem ist unlösbar für die Präsentation (S,R) mit den 10 Erzeugern $S=\{a,b,c,d,e,p,q,r,t,k\}$ und den folgenden 27 Relationen

$$\begin{aligned} R=\{\quad & p^{10}a=ap, & p^{10}b=bp, & p^{10}c=cp,\\ & p^{10}d=dp, & p^{10}e=ep, & aq^{10}=qa,\\ & bq^{10}=qb, & cq^{10}=qc, & dq^{10}=qd,\\ & eq^{10}=qe, & ra=ar, & rb=br,\\ & rc=cr, & rd=dr, & re=er,\\ & pt=tp, & qt=tq, & pacqr=rpcaq,\\ & p^2adq^2r=rp^2daq^2, & p^3bcq^3r=rp^3cbq^3, & p^4bdq^4r=rp^4dbq^4,\\ & p^5ceq^5r=rp^5ecaq^5, & p^6deq^6r=rp^6edbq^6, & p^7cdcq^7r=rp^7cdceq^7,\\ & p^8ca^3q^8r=rp^8a^3q^8, & p^9da^3q^9r=rp^9a^3q^9, & a^{-3}ta^3k=ka^{-3}ta^3 \qquad \}. \end{aligned}$$

Dieses Grundproblem zieht andere nach sich, zum Beispiel:

Spezifikation L-5 Problem der Trivialität einer endlich präsentierten Gruppe

Eingabe: Eine endliche Präsentation (S,R).
Ausgabe: Die Antwort „trivial“ falls $\langle S \mid R\rangle = \{1\}$, „nicht-trivial“ sonst.

Spezifikation L-6 Problem der Kommutativität einer endlich präsentierten Gruppe

Eingabe: Eine endliche Präsentation (S,R).
Ausgabe: Die Antwort „abelsch“ falls $\langle S \mid R\rangle$ abelsch ist, „nicht-abelsch“ sonst.

Spezifikation L-7 Problem der Endlichkeit einer endlich präsentierten Gruppe

Eingabe: Eine endliche Präsentation (S,R).
Ausgabe: Die Gruppenordnung $|\langle S \mid R\rangle| \in \{1,2,3,\ldots,\infty\}$.

Spezifikation L-8 Isomorphieproblem endlicher Gruppenpräsentationen

Eingabe: Zwei endliche Präsentationen (S,R) und (S',R').
Ausgabe: Die Antwort „isomorph“ falls $\langle S \mid R\rangle \cong \langle S' \mid R'\rangle$ gilt, „nicht-isomorph“ sonst.

Ist das Wortproblem für die Präsentation (S,R) lösbar, so können wir berechnen, ob die Gruppe $G=\langle S \mid R\rangle$ trivial ist bzw. abelsch: Es genügt, $s=1$ bzw. $st=ts$ für alle $s,t\in S$ zu prüfen. Ebenso wie das Wortproblem L-3 sind Trivialität L-5 und Kommutativität L-6 im Allgemeinen unentscheidbar, ebenso Endlichkeit L-7 und Isomorphie L-8.

Diese Probleme sind immerhin *semi-entscheidbar*: Wenn es eine positive Lösung gibt, so wird diese durch systematisches Aufzählen aller Möglichkeiten gefunden; andernfalls jedoch läuft die Suche erfolglos unendlich lange weiter und liefert somit keinerlei Ergebnis.

Und die Moral? Ist alles unentscheidbar? Nein, alles sicher nicht, denn wir haben ja schon Fälle gesehen, in denen sich die genannten Probleme lösen lassen. Die hier skizzierten Probleme zeigen aber, dass es naiv wäre zu glauben, alle Fragen, die man formulieren kann, ließen sich auch beantworten. So leicht ist das Leben leider nicht. Wir sollten daher sorgsam vorgehen und die Fälle besonders wertschätzen, in denen eine Lösung möglich ist.

Beispiel. Ist die Gruppe $G=\langle S \mid R\rangle$ endlich, so bestimmt der Todd–Coxeter–Algorithmus (M4W) ihre Ordnung $|G|$, erstellt eine Multiplikationstabelle und löst so das Wortproblem.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L3w. Abelsche Gruppen und Präsentationen.** Die Abelschmachung der Gruppe ☜

$$G \cong \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$

können wir präsentieren durch Abelschmachung der Präsentation (L3Q), also Hinzufügen aller Kommutatorrelationen $[s_i, s_j] = 1$ zwischen den Erzeugern $s_1, \dots, s_n$:

$$G_{\mathrm{ab}} \cong \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m,\ s_i s_j s_i^{-1} s_i^{-1} \text{ für alle } i, j \rangle$$

Bemerkung. Ob die Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ abelsch ist, lässt sich aus der Präsentation (S, R) meist nicht ablesen (L-6). Für eine *abelsche* Präsentation fordern wir explizit $[S, S] \subset R$. Für diese werden Wortproblem L-3 bis Isomorphieproblem L-8 gelöst durch die Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen, im Wesentlichen also vom Gauß–Algorithmus über $\mathbb{Z}$.

Beispiel. Für die freie Gruppe $F = \langle s_1, \dots, s_r \mid - \rangle$ gilt $F_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^r$ vermöge $s_k \mapsto e_k$. (L3C)

Bemerkung. Aus $G \cong H$ folgt $G_{\mathrm{ab}} \cong H_{\mathrm{ab}}$. Kontraposition: Aus $G_{\mathrm{ab}} \ncong H_{\mathrm{ab}}$ folgt $G \ncong H$.

☞ **§L3x. Rang einer freien Gruppe.** Die obigen algorithmischen Grundprobleme sind im Allgemeinen unlösbar, sie lassen sich aber durchaus lösen für wichtige Teilklassen. ☜

Für freie Gruppen zum Beispiel löst Algorithmus L-2 das Wortproblem. Erfreulicherweise lässt sich auch das Isomorphieproblem L-8 für zwei freie Gruppen leicht lösen:

✍ **Satz L3v.** *(1) Seien S und T zwei Mengen. Die freien Gruppen $F(S)$ und $F(T)$ sind genau dann isomorph, wenn S und T gleiche Kardinalität haben. Kurz und prägnant geschrieben:* ✍

$$F(S) \cong F(T) \text{ in } \mathtt{Grp} \quad \Longleftrightarrow \quad S \cong T \text{ in } \mathtt{Set}$$

(2) Sei F eine freie Gruppe. Sind $S, T \subset F$ Basen, so existiert eine Bijektion $S \cong T$. Dies erlaubt uns, den Rang $\operatorname{rang}(F) := \operatorname{card}(S)$ *zu definieren als die Kardinalität einer beliebigen Basis $S \subset F$. Dies ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von der willkürlichen Wahl einer Basis $S \subset F$, denn jede andere Basis $T \subset F$ hat dieselbe Kardinalität.*

☞ BEWEIS / ÜBUNG. (1) „⇐“: Dank der universellen Abbildungseigenschaft L3H setzt sich jede Bijektion $(f, g) : S \cong T$ fort zu einem Gruppenisomorphismus $(\bar{f}, \bar{g}) : F(S) \cong F(T)$. ☜

„⇒“: Wir zeigen die Umkehrung zunächst für endliche Mengen S und T. Nach L3H hat $\operatorname{Hom}(F(S), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ genau $2^{|S|}$ Elemente, und entsprechend hat $\operatorname{Hom}(F(T), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ genau $2^{|T|}$ Elemente. Jeder Gruppenisomorphismus $F(S) \cong F(T)$ induziert eine Bijektion $\operatorname{Hom}(F(S), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}(F(T), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, also gilt $2^{|S|} = 2^{|T|}$ und somit $|S| = |T|$.

Allgemein: Wir vergleichen $A = F(S)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{(S)}$ und $B = F(T)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{(T)}$. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann sind $A/pA \cong (\mathbb{Z}/p)^{(S)}$ und $B/pB \cong (\mathbb{Z}/p)^{(T)}$ Vektorräume über $\mathbb{F}_p$ der Dimension $|S|$ bzw. $|T|$. Aus $F(S) \cong F(T)$ in `Grp` folgt $A \cong B$ in `Ab`, und somit $A/pA \cong B/pB$ in `Ab` und in $\mathtt{Vec}_{\mathbb{F}_p}$, schließlich $S \cong T$ in `Set` dank Linearer Algebra.

(2) Sei F eine freie Gruppe und sowohl $S \subset F$ als auch $T \subset F$ eine Basis von F. Aus dem Gruppenisomorphismus $F(S) \cong F \cong F(T)$ folgt dank (1) eine Bijektion $S \cong T$. □

☞ **Bemerkung.** Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei: Dies ist der Satz von Nielsen–Schreier (M5D). Sind $G < F$ freie Gruppen, dann ist $\operatorname{rang}(G) > \operatorname{rang}(F)$ möglich. Die freie Gruppe $F = F(a, b)$ über der Basis $\{a, b\}$ enthält die freie Familie $(x_k = b^{-k} a b^k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Somit ist $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle < F$ eine freie Untergruppe von beliebigem Rang r. ☜

§L3y. Eine Präsentation der symmetrischen Gruppe S_n. Es sei S_n die symmetrische Gruppe aus allen Permutationen der Menge $\{1,2,\dots,n\}$, mit der Verknüpfung $f \circ g$ definiert durch $(f \circ g)(k) = f(g(k))$ für alle k. Für $i,j \in \{1,\dots,n\}$ bezeichnen wir mit $\tau = (i,j)$ die Permutation definiert durch $\tau(i) = \tau(j)$ und $\tau(j) = \tau(i)$ und $\tau(k) = \tau(k)$ für alle $k \notin \{i,j\}$. Für $i = j$ ist τ die Identität, für $i \neq j$ ist τ die Transposition $i \leftrightarrow j$.

Die *elementaren Transpositionen* $\tau_i = (i,i+1)$ mit $1 \leq i < n$ vertauschen Nachbarn. Sie erfüllen $\tau_i^2 = 1$ und $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ für $|i-j| \geq 2$ sowie $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$ für $|i-j| = 1$.

Satz L3w. *Für die symmetrische Gruppe S_n erhalten wir die Präsentation*

$$S_n \;\cong\; P_n := \left\langle t_1,\dots,t_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{cc} t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \end{array} \right\rangle$$

Genauer: Der Gruppenhomomorphismus $h : P_n \to S_n$ mit $t_i \mapsto \tau_i$ ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist die Abelschmachung von S_n die Signatur $\operatorname{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$ *mit* $\tau_i \mapsto -1$.

BEWEIS/ ÜBUNG. Jede Permutation ist Produkt von Transpositionen:

(1) Per Induktion über n gilt: Jede Permutation $\sigma \in S_n$ schreibt sich eindeutig als

$$\sigma = (n,i_n)(n-1,i_{n-1})\cdots(3,i_3)(2,i_2)(1,i_1) \qquad \text{mit } 1 \leq i_k \leq k \text{ für alle } k.$$

Hieraus folgt $|S_n| = n!$ und eine explizite Abzählung $\{0,1,2,\dots,n!-1\} \xrightarrow{\sim} S_n$ durch $\sum_{k=2}^{n}(i_k-1)(k-1)! \mapsto (n,i_n)\cdots(3,i_3)(2,i_2)$. Die eindeutige Darstellung (1) liefert zudem ein effizientes Verfahren, gleichverteilt zufällige Permutationen aus S_n zu konstruieren.

(2) Zur Erzeugung von S_n reichen bereits die folgenden $n-1$ Transpositionen aus:

$$S_n = \big\langle (1,2),(1,3),\dots,(1,n) \big\rangle.$$

(3) Ebenso wird S_n von den Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt:

$$S_n = \big\langle (1,2),(2,3),\dots,(n-1,n) \big\rangle.$$

Aus (3) folgt, dass der obige Gruppenhomomorphismus $h : P_n \to S_n$ surjektiv ist.

Wir wollen schließlich zeigen, dass h auch injektiv ist, also dass wir „alle“ Relationen gefunden haben, genauer gesagt, dass sich alle Relationen zwischen den $\tau_1,\dots,\tau_{n-1}$ aus den obigen ergeben. Da die Gruppe S_n endlich ist, können wir ein Abzählargument nutzen:

(4) In S_n betrachten wir für $1 \leq i < j \leq n$ den Zykel

$$\zeta_{i,j} = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-1} = (i, i+1, \dots, j-1, j).$$

Für $i = j$ setzen wir $\zeta_{i,i} = \mathrm{id}$. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ schreibt sich eindeutig als

$$\sigma = \zeta_{i_n,n} \circ \cdots \circ \zeta_{i_2,2} \circ \zeta_{i_1,1} \qquad \text{mit } 1 \leq i_k \leq k \text{ für alle } k.$$

(5) In P_n definieren wir für $1 \leq i < j \leq n$ analog zu (4) das Produkt

$$z_{i,j} = t_i\, t_{i+1} \cdots t_{j-1}.$$

Für $i = j$ setzen wir $z_{ii} = 1$. Jedes Element $x \in P_n$ schreibt sich als

$$x = z_{i_n,n} \cdots z_{i_2,2} \cdot z_{i_1,1} \qquad \text{mit } 1 \leq i_k \leq k \text{ für alle } k.$$

Aus (5) folgt $|P_n| \leq n!$. Die Surjektion $h : P_n \twoheadrightarrow S_n$ ist demnach ein Gruppenisomorphismus. Alternativ zeigt $h : z_{i,j} \mapsto \zeta_{i,j}$ dank (5) und (4) explizit, dass h injektiv ist. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **L3w.** (1) *Existenz:* Wir betrachten $S_{n-1} = \{\,\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\,\} < S_n$ und führen Induktion über n. Für $n = 1$ gilt $S_1 = \{1\}$ und die Aussage ist trivial. Sei nun $n \geq 2$ und $\sigma \in S_n$. Für $i_n := \sigma(n)$ gilt $1 \leq i_n \leq n$. Für $\sigma' = (n, i_n) \circ \sigma$ gilt $\sigma'(n) = n$, also $\sigma' \in S_{n-1}$. Für $\sigma' \in S_{n-1}$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\sigma' = (n-1, i_{n-1}) \cdots (3, i_3)(2, i_2)(1, i_1),$$

mit $1 \leq i_k \leq k$ für alle k. Daraus erhalten wir schließlich

$$\sigma = (n, i_n)(n-1, i_{n-1}) \cdots (3, i_3)(2, i_2)(1, i_1).$$

Eindeutigkeit: Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Sei nun $n \geq 2$. Angenommen es gilt

$$(n, i_n)(n-1, i_{n-1}) \cdots (3, i_3)(2, i_2)(1, i_1) = (n, j_n)(n-1, j_{n-1}) \cdots (3, j_3)(2, j_2)(1, j_1)$$

mit $1 \leq i_k \leq k$ und $1 \leq j_k \leq k$ für alle k. Links gilt $n \mapsto i_n$, rechts gilt $n \mapsto j_n$, also $i_n = j_n$. Multiplikation von links mit (n, i_n) löscht beidseits den ersten Faktor. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $i_k = j_k$ für alle k.

Erzeugendensysteme: Aus (1) folgen (2) und (3), denn für $i < j$ gilt

$$(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i) = (i, i+1) \cdots (j-2, j-1)(j, j-1)(j-1, j-2) \cdots (i+1, i).$$

(4) Dies beweist man wie Aussage (1). *Existenz:* Wir führen Induktion über n. Für $n = 1$ gilt $S_1 = \{1\}$ und die Aussage ist trivial. Sei nun $n \geq 2$ und $\sigma \in S_n$. Für $i_n := \sigma(n)$ gilt $1 \leq i_n \leq n$. Für $\sigma' = \zeta_{i_n,n}^{-1} \circ \sigma$ gilt $\sigma'(n) = n$, also $\sigma' \in S_{n-1}$. Für $\sigma' \in S_{n-1}$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\sigma' = \zeta_{i_{n-1},n-1} \cdots \zeta_{i_3,3} \zeta_{i_2,2} \zeta_{i_1,1},$$

mit $1 \leq i_k \leq k$ für alle k. Daraus erhalten wir schließlich

$$\sigma = \zeta_{i_n,n} \zeta_{i_{n-1},n-1} \cdots \zeta_{i_3,3} \zeta_{i_2,2} \zeta_{i_1,1}.$$

Eindeutigkeit: Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Sei nun $n \geq 2$. Angenommen es gilt

$$\zeta_{i_n,n} \zeta_{i_{n-1},n-1} \cdots \zeta_{i_3,3} \zeta_{i_2,2} \zeta_{i_1,1} = \zeta_{j_n,n} \zeta_{j_{n-1},n-1} \cdots \zeta_{j_3,3} \zeta_{j_2,2} \zeta_{j_1,1}$$

mit $1 \leq i_k \leq k$ und $1 \leq j_k \leq k$ für alle k. Links gilt $n \mapsto i_n$, rechts gilt $n \mapsto j_n$, also $i_n = j_n$. Multiplikation von links mit $\zeta_{i_n,n}^{-1}$ löscht beidseits den ersten Faktor. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $i_k = j_k$ für alle k.

(5) In P_n betrachten wir die Untergruppen $Q_0 := Q_1 := \{1\}$, $Q_2 := \langle\, t_1 \,\rangle$, …, $Q_\ell := \langle\, t_1, \ldots, t_{\ell-1} \,\rangle$ für $\ell = 1, \ldots, n$ und behaupten: Jedes Element $x \in Q_\ell$ schreibt sich $x = z_{i,\ell} \cdot x'$ mit $1 \leq i \leq \ell$ und $x' \in Q_{\ell-1}$.

Hierzu führen wir Induktion über $\ell = 1, \ldots, n$. Für $\ell = 1$ gilt $Q_1 = \{1\}$ und die Aussage ist trivial.

Sei nun $1 \leq \ell < n$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für $Q_1, \ldots, Q_\ell$ gilt. Wir schreiben $x \in Q_{\ell+1}$ als Wort in $t_1, \ldots, t_\ell$. Dank der Relationen $t_1^2 = \cdots = t_\ell^2 = 1$ können wir alle Exponenten gleich 1 annehmen. Sei m die minimale Anzahl m der Faktoren t_ℓ, die für die Darstellung von x benötigt werden. Für $m \geq 2$ gilt $x = a \cdot t_\ell \cdot b \cdot t_\ell \cdot c$ mit $a, b \in Q_\ell$ und $c \in Q_{\ell+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt entweder $b \in Q_{\ell-1}$ oder $b = b' \cdot t_{\ell-1} \cdot b''$ mit $b', b'' \in Q_{\ell-1}$. Im ersten Fall gilt $b \cdot t_\ell = t_\ell \cdot b$ und somit

$$x = a \cdot t_\ell \cdot b \cdot t_\ell \cdot c = a \cdot t_\ell^2 \cdot b \cdot c = abc.$$

Im zweiten Fall gilt $t_\ell \cdot b' = b' \cdot t_\ell$ sowie $b'' \cdot t_\ell = t_\ell \cdot b''$ und somit

$$\begin{aligned} x &= a \cdot t_\ell \cdot b \cdot t_\ell \cdot c = a \cdot t_\ell \cdot b' \cdot t_{\ell-1} \cdot b'' \cdot t_\ell \cdot c \\ &= a \cdot b' \cdot t_\ell \cdot t_{\ell-1} \cdot t_\ell \cdot b'' \cdot c = a \cdot b' \cdot t_{\ell-1} \cdot t_\ell \cdot t_{\ell-1} \cdot b'' \cdot c. \end{aligned}$$

In beiden Fällen schreibt sich x mit weniger als m Faktoren t_ℓ. Für die minimale Anzahl m der Faktoren t_ℓ bleibt also nur $m \in \{0, 1\}$. Für $m = 0$ gilt $x \in Q_\ell$, also $x = z_{\ell+1,\ell+1} \cdot x$ wie behauptet. Für $m = 1$ gilt $x = a \cdot t_\ell \cdot b$ mit $a, b \in Q_\ell$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a = z_{i,\ell} \cdot a'$ mit $1 \leq i \leq \ell$ und $a' \in Q_\ell$. Demnach gilt

$$x = a \cdot t_\ell \cdot b = z_{i,\ell} \cdot a' \cdot t_\ell \cdot b = z_{i,\ell} \cdot t_\ell \cdot a' \cdot b = z_{i,\ell+1} \cdot a'b$$

mit $a'b \in Q_\ell$ wie behauptet. Wir schließen daraus, dass sich jedes Element $x \in P_n$ schreibt als

$$x = z_{i_n,n} \cdots z_{i_2,2} \cdot z_{i_1,1} \qquad \text{mit } 1 \leq i_k \leq k \text{ für alle } k.$$

Hieraus folgt $|P_n| \leq n!$. Andererseits haben wir die Surjektion $h : P_n \twoheadrightarrow S_n$ mit $|S_n| = n!$. Beides zusammen bedeutet $|P_n| = n!$, und h ist eine Bijektion. Somit ist unser Homomorphismus h ein Isomorphismus.

§L3z. Präsentationen von Matrixgruppen. Als interessantes und anspruchsvolles Anwendungsbeispiel möchten wir Präsentationen erstellen für die Matrixgruppen

$$\mathrm{GL}_2\mathbb{Z} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \;\middle|\; ad-bc = \pm 1 \right\}, \qquad \mathrm{PGL}_2\mathbb{Z} = \mathrm{GL}_2\mathbb{Z}/\{\pm 1\},$$

$$\mathrm{SL}_2\mathbb{Z} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \;\middle|\; ad-bc = +1 \right\}, \qquad \mathrm{PSL}_2\mathbb{Z} = \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}/\{\pm 1\}.$$

Dies sind Gruppen, denn $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -c \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$.

Zur Matrix $M \in \mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ schreiben wir $\overline{M} = \{\pm M\}$ für ihre Klasse in $\mathrm{PGL}_2\mathbb{Z}$.

Als Erzeuger von $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ dienen uns folgende elementare Matrizen:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $S = XY$, $T = XYX = YXY$, $X = S^{-1}T$, $Y = T^{-1}S^2$, $T^2 = -1$, $T^4 = 1$.

Satz L3x. *Für die Gruppen* $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ *und* $\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z}$ *erhalten wir folgende Präsentationen:*

$$\mathrm{SL}_2\mathbb{Z} \cong \langle x,y \mid xyx = yxy,\ (xyx)^4 = 1 \rangle \cong \langle s,t \mid s^3 = t^2,\ t^4 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/6 \underset{\mathbb{Z}/2}{*} \mathbb{Z}/4$$

$$\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z} \cong \langle x,y \mid xyx = yxy,\ (xyx)^2 = 1 \rangle \cong \langle s,t \mid s^3 = t^2,\ t^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/2$$

Ihre Abelschmachungen sind demnach $\alpha : \mathrm{SL}_2\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/12$ *bzw. projektiv* $\overline{\alpha} : \mathrm{PSL}_2\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/6$.

Bemerkung. Dies sind effiziente Präsentationen mit zwei Erzeugern und zwei Relationen. Insbesondere werden $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ und $\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z}$ durch zwei Matrizen endlicher Ordnung erzeugt!

BEWEIS / ÜBUNG. Die drei Beweisschritte formuliere ich als Übungen:

(0) Dank UAE existieren eindeutige Gruppenhomomorphismen

$$h : H = \langle s,t \mid s^3 = t^2,\ t^4 = 1 \rangle \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}, \qquad s \mapsto S, \quad t \mapsto T,$$

$$k : K = \langle s,t \mid s^3 = t^2,\ t^2 = 1 \rangle \to \mathrm{PSL}_2\mathbb{Z}, \quad s \mapsto \overline{S}, \quad t \mapsto \overline{T}.$$

(1) Die Gruppenhomomorphismen h und k sind surjektiv, denn S, T erzeugen $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$.
Anleitung: Es gilt $\langle S,T \rangle = \langle T,X \rangle = \langle X,Y \rangle$. Durch Linksmultiplikation mit T^i und X^q können wir den euklidischen Algorithmus auf der ersten Spalte von M ausführen.
Algorithmus: Formulieren bzw. programmieren Sie die allgemeine Methode.
Beispiel: Manche mögen's konkret. Versuchen Sie es mit $M = \left(\begin{smallmatrix} 29 & -8 \\ 11 & -3 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) Die Gruppenhomomorphismen h und k sind injektiv, also Gruppenisomorphismen.
Anleitung: Jedes Element der Gruppe H schreibt sich (eindeutig) als ein Wort

$$t^e, \quad w = s^{-e_1}t\cdots s^{-e_\ell}t\cdot t^e, \quad tw = t\cdot s^{-e_1}t\cdots s^{-e_\ell}t\cdot t^e$$

mit $\ell \geq 1$ sowie Exponenten $e_1,\dots,e_\ell \in \{1,2\}$ und $e \in \{0,1,2,3\}$. Produkte der Matrizen $S^{-1}T = X$ und $S^{-2}T = Y^{-1}$ liegen in $\mathbb{N}^{2\times 2}$, und die Gesamtsumme $a+b+c+d$ wächst mit der Länge ℓ des Produkts strikt an. Daher gilt $h(w) \neq 1$ und $h(tw) \neq 1$. Es bleibt nur $\ker h = \{1\}$, somit ist $h : H \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ injektiv.

Beweisen Sie damit den Satz: Geben Sie alle behaupteten Isomorphismen explizit an und begründen Sie jeweils, warum es sich um Isomorphismen handelt. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Slogan: *Die Gruppe* $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ *codiert den Euklidischen Algorithmus!*

Algorithmus L-9 Darstellung von $M \in \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ als Wort über $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Eingabe: Eine beliebige Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$
Ausgabe: Eine Darstellung $M = T^{i_0} X^{q_1} T^{i_1} \cdots X^{q_n} T^{i_n} X^{q_{n+1}}$

Drehe $M \leftarrow T^{-i} M$ mit $i \in \{0,1,2,3\}$, sodass $0 \le |b| \le a$ gilt; schreibe T^i.
while $b \neq 0$ **do**
  Euklidische Division $a = qb + r$ mit $q \in \mathbb{Z}$ und $0 \le r < |b|$.
  Reduziere $M \leftarrow X^{-q} M$, somit gilt $0 \le a < |b|$; schreibe X^q.
  Drehe $M \leftarrow T^{-i} M$, sodass $0 \le |b| < a$ gilt; schreibe T^i.
Aus $b = 0$ folgt $a = d = 1$, also $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = X^c$; schreibe X^c.

✻ **L3x.** (0) *Existenz:* Dank UAE existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\langle s,t \mid - \rangle \to \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ mit $s \mapsto S$ und $t \mapsto T$. Es gilt $S^3 = T^2$ und $T^4 = 1$, also liegen $s^3 t^{-2}$ und t^4 im Kern. Dank UAE erhalten wir auf dem Quotienten den Gruppenhomomorphismus $h : H \to \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ wie angegeben. Gleiches gilt für $k : K \to \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{Z}$.

Eindeutigkeit: Der Gruppenhomomorphismus $h : H \to \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ ist auf dem Erzeugendensystem $\{s,t\}$ vorgegeben, und somit auf jedem Element von H eindeutig festgelegt. Gleiches gilt für $k : K \to \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{Z}$.

(1) *Surjektivität:* Es genügt zu zeigen, dass S, T die Gruppe $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ erzeugen.

Zunächst gilt $\langle S,T \rangle = \langle T,X \rangle = \langle X,Y \rangle$ dank der eingangs angegebenen Relationen. Wir nutzen im Folgenden T, X. Je nach Bedarf können wir diese umrechnen in S, T oder auch in X, Y. Wir können jede Matrix $M \in \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ als Wort in T und $X^{\pm}$ darstellen: Der obige Algorithmus L-9 führt dies elegant aus. Wir finden so eine Darstellung $T^{-i_n} X^{-q_n} \cdots T^{-i_1} X^{-q_1} T^{-i_0} M = X^{q_{n+1}}$, also $M = T^{i_0} X^{q_1} T^{i_1} \cdots X^{q_n} T^{i_n} X^{q_{n+1}}$.

Aus $T, X \in \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ folgt offensichtlich $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z} \supseteq \langle T,X \rangle$. Der Algorithmus L-9 beweist $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z} \subseteq \langle T,X \rangle$. Somit haben wir $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z} = \langle T,X \rangle$, also auch $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z} = \langle S,T \rangle$. Der Gruppenhomomosphismus $h : H \to \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ ist folglich surjektiv. In unserem Beispiel gilt

$$M = \begin{pmatrix} 29 & -8 \\ 11 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} = X^2 Y^{-1} X Y^{-1} X^3 (XYX)^3 \\ = S^{-1} T S^{-1} T S^{-2} T S^{-1} T S^{-2} T (S^{-1} T)^3 T^3 \end{cases}$$

(2) *Injektivität:* Jedes Element $g \in H = \langle s,t \mid s^3 = t^2, t^4 = 1 \rangle$ schreibt sich $g = t^{a_1} s^{b_1} \cdots t^{a_n} s^{b_n}$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$. Das Element $s^3 = t^2$ kommutiert mit s und t, liegt also im Zentrum von H. Wir ziehen solche Faktoren heraus und sammeln sie am Ende. So schreiben wir g in der Form

$$t^e, \quad w = s^{-e_1} t \cdots s^{-e_\ell} t \cdot t^e, \quad tw = t \cdot s^{-e_1} t \cdots s^{-e_\ell} t \cdot t^e$$

mit $\ell \ge 1$ sowie Exponenten $e_1, \ldots, e_\ell \in \{1,2\}$ und $e \in \{0,1,2,3\}$.

Wir berechnen nun den Kern von h und zeigen $\ker h = \{1\}$. Für $g = t^e$ gilt $h(g) = T^e \overset{!}{=} 1$ gdw $e = 0$. Die Matrizen $S^{-1}T = X$ und $S^{-2}T = Y^{-1}$ liegen in $\mathbb{N}^{2\times 2}$, also auch jedes ihrer Produkte. Die Gesamtsumme $a + b + c + d$ wächst mit der Länge ℓ des Produkts strikt an. Für $\ell \ge 1$ gilt daher $h(w) \neq 1$ und $h(tw) \neq 1$. Somit ist $h : H \to \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ injektiv. Gleiches gilt für $k : K \to \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{Z}$.

Bemerkung. Den euklidischen Algorithmus kennen Sie seit Ihrem ersten Semester oder sogar seit Schulzeiten, sofern Sie das seltene Glück hatten, einen umfassenden Mathematikunterricht zu genießen. Sie wissen zudem, wie man damit Bézout–Koeffizienten berechnet. In der Algebra haben Sie dann gelernt, dass diese wunderbare Methode ebenso über jedem euklidischen Ring funktioniert, neben $\mathbb{Z}$ etwa über $K[X]$ oder $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, und daraus viele nützliche Schlüsse gezogen. Nun erscheint Ihnen dieser Algorithmus erneut und erleuchtet die Struktur der Gruppe $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$. Man lernt eben nie aus!

☞ Mutige möchten vielleicht ebenso $\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ und $\mathrm{PGL}_2\mathbb{Z}$ untersuchen. Als Erzeuger von $\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ dienen uns neben den obigen X, Y, S, T nun auch folgende elementare Matrizen: ☜

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $Z^2 = U^2 = 1$ sowie $(ZX)^2 = (ZY)^2 = (US)^2 = (UT)^2 = 1$ denn $UT = Z$.
Zudem haben wir die Kommutatoren $U^{-1}Y^{-1}UY = XUX^{-1}U^{-1} = S$.

☞ **Korollar L3Y.** *Wir erhalten folgende Präsentationen:* ☜

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}_2\mathbb{Z} &\cong \langle x, y, z \mid xyx = yxy,\ (xyx)^4 = z^2 = (zx)^2 = (zy)^2 = 1 \rangle \\
&\cong \langle s, t, u \mid s^3 = t^2,\ t^4 = u^2 = (us)^2 = (ut)^2 = 1 \rangle \\
\mathrm{PGL}_2\mathbb{Z} &\cong \langle x, y, z \mid xyx = yxy,\ (xyx)^2 = z^2 = (zx)^2 = (zy)^2 = 1 \rangle \\
&\cong \langle s, t, u \mid s^3 = t^2,\ t^2 = u^2 = (us)^2 = (ut)^2 = 1 \rangle
\end{aligned}$$

Ihre Abelschmachungen sind demnach $\det : \mathrm{GL}_2\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ *bzw.* $\det : \mathrm{PGL}_2\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$.

Übung L3Z. (1) Geben Sie die in Satz L3Y genannten Gruppenhomomorphismen explizit an und begründen Sie jeweils, warum es sich um Isomorphismen handelt.
(2) Es gilt $Z(\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}) = Z(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ und $Z(\mathrm{PGL}_2\mathbb{Z}) = Z(\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z}) = \{\overline{1}\}$.
(3) Existiert ein Automorphismus $\varphi : \mathrm{SL}_2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ mit $X \mapsto Y$ und $Y \mapsto X$? Ist dies ein innerer Automorphismus, also die Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$?
(4) Existiert ein Automorphismus $\psi : \mathrm{SL}_2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ mit $X \mapsto X^{-1}$ und $Y \mapsto Y^{-1}$? Ist dies ein innerer Automorphismus?

☞ **Bemerkung.** Die Präsentation der Matrixgruppen $\mathrm{SL}_n A$ bzw. $\mathrm{GL}_n A$ über einem Ring A mit Eins ist eine schwierige, aber lohnende Aufgabe, da sie wichtige Eigenschaften des Rings A codiert. In unserem fundamentalen Beispiel $A = \mathbb{Z}$ ist dies der Algorithmus von Euklid. Diese Untersuchungen sind der Anfang der *algebraischen K–Theorie*: ☜

Die *Transvektion* $T_{ij}(a) \in \mathrm{SL}_n$ oder *Elementarmatrix* hat Einsen auf der Diagonalen, $a \in K$ an der Stelle (i, j) sowie Nullen überall sonst. Die Linksmultiplation $M \leftarrow T_{ij}(a)\,M$ entspricht der Addition von a–mal der j–ten Zeile zur i–ten Zeile.

Ist A ein Körper (oder ein Hauptidealring) so zeigt der Gauß–Algorithmus, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_n A$ von den Transvektionen $T_{ij}(a)$ erzeugt wird. (Wissen Sie noch warum?)

Zwischen den Transvektionen $T_{ij}(a)$ gelten folgende *Steinberg–Relationen* (L3P):

(S0)	$T_{ij}(a)T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b)$	für alle $i \neq j$ und $a, b \in A$,
(S1)	$\big[T_{ij}(a), T_{jk}(b)\big] = T_{ik}(ab)$	für i, j, k verschieden,
(S2)	$\big[T_{ij}(a), T_{k\ell}(b)\big] = 1_{n\times n}$	für $i \neq \ell$ und $j \neq k$.

Speziell über $A = \mathbb{Z}$ genügt $T_{ij} := T_{ij}(1)$, denn $T_{ij}(a) = T_{ij}^a$ für $a \in \mathbb{Z}$. Für $n \geq 3$ gilt:

$$\mathrm{SL}_n\mathbb{Z} \quad \cong \quad \Big\langle t_{ij} : 1 \leq i \neq j \leq n \;\Big|\; (t_{12}t_{21}^{-1}t_{12})^4 = 1,\ \text{(S1)},\ \text{(S2)} \Big\rangle$$

Die erste Relation kennen wir aus $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$, ab $\mathrm{SL}_3\mathbb{Z}$ kommt (S1) dazu, ab $\mathrm{SL}_4\mathbb{Z}$ auch (S2). Wie immer muss man zeigen, dass diese offensichtlichen bereits alle Relationen erzeugen.

Bemerkung. Im Gegensatz zum Fall $n = 2$ ist für $n \geq 3$ die Abelschmachung $\mathrm{SL}_n\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \{1\}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L4. Polygonale Fundamentalgruppen

☞ Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist für jeden topologischen Raum (X, x_0) definiert ☜ (L2A), denn sie beruht allein auf stetigen Abbildungen, nämlich Wegen $[0,1] \to X$ modulo Homotopien $[0,1]^2 \to X$. Dies macht sie zu einem universellen Werkzeug: Wir erhalten den Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ (L2D), und dieser ist homotopie-invariant (L2G).

Bislang konnten wir jedoch nur sehr einfache Beispiele konkret ausrechnen, etwa sternförmige oder zusammenziehbare Räume (L2S) oder Sphären $\mathbb{S}^n$ (L2U). Das erste nichttriviale Beispiel ist die Umlaufzahl $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Wir wollen noch mehr.

Wenn X ein „schöner“ Raum ist, etwa eine offene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ oder eine Mannigfaltigkeit, ein Simplizialkomplex oder ein Zellkomplex, dann können wir die zusätzliche Struktur nutzen und „schöne“ Wege und Homotopien betrachten. Konkret nutzen wir:

$$\pi_1(X, x_0) := \frac{\{\,\text{Schleifen in } (X, x_0)\,\}}{\text{Homotopie in } (X, x_0)} \cong \frac{\{\,\text{polygonale Schleifen in } (X, x_0)\,\}}{\text{polygonale Homotopie in } (X, x_0)} =: \pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0)$$

Wir formulieren und nutzen diese Idee im Folgenden für *Polygonzüge* (L4A) in offenen Mengen $X \subset \mathbb{R}^n$ und anschließend für *Kantenzüge* (L6A) in Polyedern $X = |K|$.

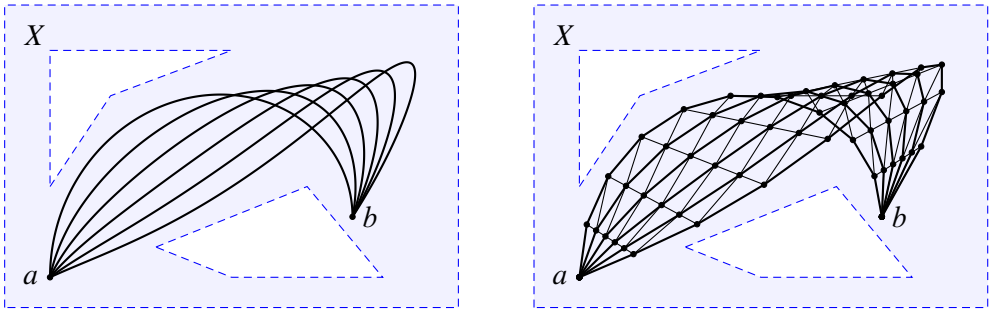


ABBILDUNG L:10. Approximation durch polygonale Wege und Homotopien

☞ **Definition L4A.** Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $X \subset V$ eine Teilmenge. ☜

- Ein *Polygonzug* $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in X ist eine Folge von Punkten $v_0, v_1, \dots, v_n \in X$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $[v_0, v_1], \dots, [v_{n-1}, v_n] \subset X$. Wir nennen w *geschlossen* falls $v_0 = v_n$.
- Für jeden Punkt $v_0 \in X$ ist der *konstante Polygonzug* $w = v_0$ geschlossen.
  Mit $w = v_0 v_1 \dots v_n$ verläuft auch der *umgekehrte Polygonzug* $\bar{w} = v_n \dots v_1 v_0$ in X.
- Polygonzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = v'_0 v'_1 \dots v'_m$ sind *verknüpfbar* falls $v_n = v'_0$.
  In diesem Falle definieren wir ihre *Verknüpfung* $w * w' := v_0 v_1 \dots v_n v'_1 \dots v'_m$.

Damit wird die Menge $P^{\mathrm{pl}}(X)$ aller Polygonzüge in X zur *polygonalen Wegekategorie*: Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ, und zum Punkt $v_0 \in X$ ist der Polygonzug v_0 die Identität. (Zwar liegt $P^{\mathrm{pl}}(X) \subset X^*$ im freien Monoid, doch die Verknüpfungen sind verschieden. Es handelt sich vielmehr um die von den Geradenstücken $v_0 v_1$ in X frei erzeugte Kategorie.)

- Die Äquivalenz $\approx$ von Polygonzügen in X wird erzeugt durch *polygonale Homotopien* $v_0 \dots v_{k-1} v_k v_{k+1} \dots v_n \approx v_0 \dots v_{k-1} v_{k+1} \dots v_n$, wobei $[v_{k-1}, v_k, v_{k+1}] \subset X$ gelte.
- Als Spezialfall vereinbaren wir schließlich $v_0 v_0 \approx v_0$. Damit gilt $w * \bar{w} \approx v_0$.

Zum Raum $X \subset V$ definieren wir das *polygonale Fundamentalgruppoid* als Quotient

$$\Pi^{\mathrm{pl}}(X) := P^{\mathrm{pl}}(X)/_{\approx} = \frac{\{\text{Polygonzüge } w = v_0 v_1 \dots v_n \text{ in } X\}}{\text{polygonale Homotopie} \approx \text{in } X}$$

mit der Verknüpfung $[w]\cdot[w'] = [w * w]$ durch Aneinanderhängen von Polygonzügen.

Für jeden Punkt $x_0 \in X \subset V$ definieren wir so die *polygonale Fundamentalgruppe*

$$\pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) := \Pi^{\mathrm{pl}}(X, x_0, x_0) = \frac{\{\text{geschlossene Polygonzüge in } (X, x_0)\}}{\text{polygonale Homotopie} \approx \text{in } (X, x_0)}.$$

Satz L4B. *Sei $V = \mathbb{R}^d$ oder allgemeiner ein normierter oder lokal-konvexer topologischer Vektorraum. Für jede offene Menge $X \subset V$ haben wir den Gruppoidisomorphismus*

$$\varphi \;:\; \Pi^{\mathrm{pl}}(X) \xrightarrow{\sim} \Pi(X) \;:\; [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Für jeden Fußpunkt $x_0 \in X$ erhalten wir hieraus den Gruppenisomorphismus

$$\varphi \;:\; \pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \;:\; [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

BEWEIS / ÜBUNG. Jeder Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in X definiert, wie in §J1d erklärt, einen stückweise affinen Weg $|w| = |v_0 v_1 \dots v_n| : [0,1] \to X$. Jede polygonale Homotopie $w \approx w'$ in X definiert eine Homotopie $|w| \sim |w'|$ in X. Somit ist $\varphi : [w] \mapsto [|w|]$ wohldefiniert. Zudem gilt $|w * w'| \sim |w| * |w'|$ und $|v| = 1_v$ für $v \in X$, somit ist φ ein Funktor.

Nach Satz J1B ist jeder Weg $\gamma : [0,1] \to X$ äquivalent in X zu einem polygonalen Weg $|w| : [0,1] \to X$ mittels einer Homotopie bei festen Endpunkten; somit ist φ surjektiv. Zwei polygonale Wege $|w'|, |w| : [0,1] \to X$ sind genau dann äquivalent in X, $|w| \sim |w'|$, wenn die Polygonzüge w und w' in X polygonal homotop sind, $w \approx w'$. Somit ist φ injektiv. □

Bemerkung. Auf die Offenheit von X in V können wir in Satz L4B nicht verzichten, andernfalls ist $\varphi : \pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv:

- Für die Kreislinie $X = \mathbb{S}^1$ in $\mathbb{R}^2$ gilt $\pi_1^{\mathrm{pl}}(\mathbb{S}^1, e_1) = \{1\}$ aber $\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) \cong \mathbb{Z}$.
- Für $X = (\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{B}^2) \cup \mathbb{S}^2$ in $\mathbb{R}^3$ hingegen gilt $\pi_1^{\mathrm{pl}}(X, e_1) \cong \mathbb{Z}$ aber $\pi_1(X, e_1) = \{1\}$.

§L4a. Warum nicht gleich so? Zu jedem topologischen Raum X haben wir das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ und hiermit $\pi_0(X)$ und $\pi_1(X, x_0)$. Das ist allgemein und elegant.

Für jede offene Menge $X \subset V$ haben wir zudem das polygonale Fundamentalgruppoid $\Pi^{\mathrm{pl}}(X)$ und hiermit $\pi_0^{\mathrm{pl}}(X)$ und $\pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0)$. Diese sind isomorph zur topologischen Variante, bieten aber zwei Vorteile: Sie sind anschaulicher und erlauben explizite Berechnungen.

Stetige Abbildungen $[0,1] \to X$ sind ungeheuer allgemein und können zum Beispiel raumfüllend sein (§C6d). Intuitiv jedoch stellen wir uns Wege eher polygonal oder stückweise glatt vor. Satz L4B rechtfertigt diese intuitive Vorstellung: Dank Kompaktheit von $[0,1]^n$ und Offenheit von $X \subset V$ können wir lokal die lineare Struktur nutzen.

Warum haben wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ nicht gleich polygonal definiert? Erstens lässt sich nicht jeder Raum als offene Menge $X \subset V$ einbetten. Zweitens werden stetige Abbildungen $f : X \to Y$ unsere Polygonzüge meist nicht in Polygonzüge abbilden.

Wir trennen daher wie üblich die allgemeine *Definition* und die konkrete *Berechnung*: Da wir den Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ für *alle* topologischen Räume und *alle* stetigen Abbildungen nutzen wollen, legen wir Definition L2A zugrunde. Für konkrete Berechnungen nutzen wir dankend jede zweckdienliche Zusatzinformation, hier Satz L4B.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L4b. Anwendung auf die gelochte Ebene. Dank der polygonalen Darstellung aus Satz L4B gewinnen wir als geometrische Anwendung erneut die Umlaufzahl:

Satz L4C. *Die Umlaufzahl stiftet den Gruppenisomorphismus* $\deg : \pi_1(\mathbb{C}^*,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Wir nutzen $\pi_1(\mathbb{C}^*,1) \cong \pi_1^{\mathrm{pl}}(\mathbb{C}^*,1)$ gemäß Satz L4B. Für Polygonzüge w in $(\mathbb{C}^*,1)$ können wir die Umlaufzahl $\deg(w)$ leicht berechnen: als Winkelsumme (§J1g), als Cauchy–Integral (§J1j) oder als Anzahl der Achsübergänge (§J1k). Diese Zahl $\deg(w)$ ist invariant unter polygonaler Homotopie, somit erhalten wir $\deg : \pi_1^{\mathrm{pl}}(\mathbb{C}^*,1) \to \mathbb{Z}$. Zudem gilt $\deg(w * w') = \deg(w) + \deg(w')$, also ist deg ein Gruppenhomomorphismus. Zwei Polygonzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = v'_0 v'_1 \dots v'_m$ in $(\mathbb{C}^*,1)$ sind genau dann polygonal homotop, wenn $\deg(w) = \deg(w')$ gilt (J1H). Somit ist deg injektiv. Surjektivität folgt aus unseren expliziten Modellwegen (J1J). Somit ist deg ein Gruppenisomorphismus. □

Bemerkung. Aus $(\iota, r) : (\mathbb{S}^1,1) \simeq (\mathbb{C}^*,1)$ dank G4O folgt $(\iota_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*,1)$ dank L2H. Zusammen mit $\deg : \pi_1(\mathbb{C}^*,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ folgt somit $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Zur Berechnung der Umlaufzahl können wir zählen, wie oft der Weg die negative Achse überschreitet (J1L). Diese Technik erlaubt unmittelbar folgende Verallgemeinerung:

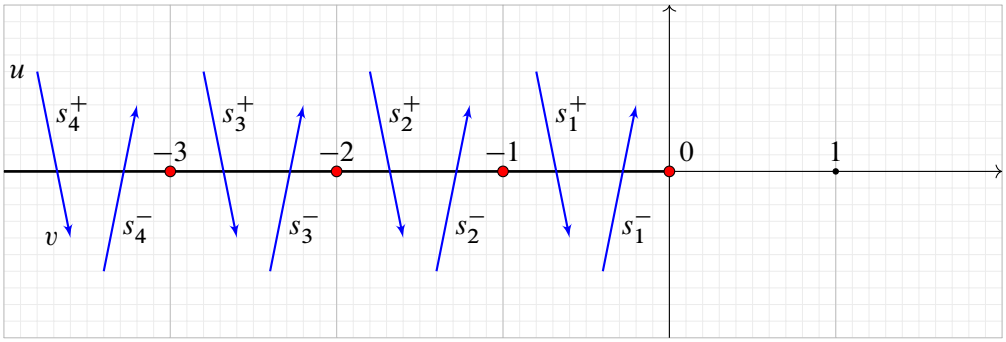


ABBILDUNG L:11. Übergänge über die negative reelle Achse

Satz L4D. *Die Fundamentalgruppe der n–fach gelochten Ebene*

$$X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1, -2, \dots, 1-n\}$$

ist frei vom Rang n: Wir haben den Gruppenisomorphismus $(\psi, \varphi) : \pi_1(X,1) \cong F_n$ *mit*

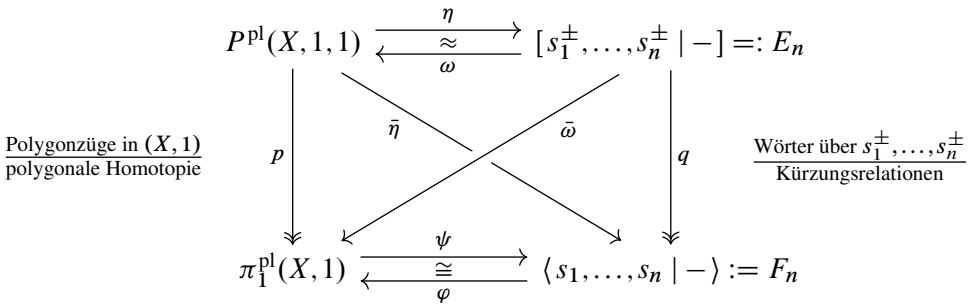
$$\psi : \pi_1(X,1) \xrightarrow{\sim} F_n := \langle s_1, \dots, s_n \mid - \rangle \qquad \text{wie in Abbildung L:11 und}$$

$$\varphi : F_n \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,1) : s_k \mapsto [\lfloor v_0 v_k^+ v_k^- v_0 \rfloor] \qquad \text{mit } v_0 = 1 \text{ und } v_k^\pm = {}^1\!/_2 - k \pm \mathrm{i}.$$

Beispiel. Für $n = 0$ ist $X = \mathbb{C}$ sternförmig und die Gruppe $\pi_1(\mathbb{C},1) = \{1\}$ trivial (L2S). Dies ist die freie Gruppe über 0 Erzeugern. Für $n = 1$ haben wir $X = \mathbb{C}^*$ und die Umlaufzahl $\deg : \pi_1(\mathbb{C}^*,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ wie zuvor (J1M). Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist frei über dem Erzeuger 1.

Bemerkung. Die Gruppe $F_n = \langle s_1, \dots, s_n \mid - \rangle$ ist frei über $s_1, \dots, s_n$: Sie besteht aus allen Wörtern über dem Alphabet $s_1^{\pm 1}, \dots, s_n^{\pm 1}$ mit der Aneinanderhängung als Verknüpfung, modulo den in jeder Gruppe gültigen Kürzungsregeln $s_k s_k^{-1} = s_k^{-1} s_k = 1$. Hierbei ist das leere Wort 1 das neutrale Element. Das Inverse zu $s_{i_1}^{e_1} s_{i_2}^{e_2} \cdots s_{i_\ell}^{e_\ell}$ ist das Wort $s_{i_\ell}^{-e_\ell} \cdots s_{i_2}^{-e_2} s_{i_1}^{-e_1}$. Satz L3G führt diese Idee aus; für L4D genügt diese Kurzfassung.

BEWEIS. Wir nutzen Polygonzüge (L4B). Alle Daten liegen explizit vor, der Beweis gelingt nun durch sorgsames Nachrechnen: Die angegebenen Gruppenhomomorphismen ψ und φ sind wohldefiniert und erfüllen $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_{F_n}$ und $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_{\pi_1^{\mathrm{pl}}(X,1)}$. Versuchen Sie es!



Konstruktion: Für $k = 1,\dots,n-1$ sei $S_k =]-k, 1-k[$ und $S_n =]-\infty, 1-n[$. Für jede Kante $[u,v] \subset X$ zählen wir $\eta(u,v) = s_k^\pm$ für einen positiven / negativen Übergang:

$$\eta(u,v) := \begin{cases} 1 & \text{falls } [u,v]\cap\mathbb{R}_{<0} = \emptyset, \\ s_k^\varepsilon & \text{falls } [u,v]\cap S_k \neq \emptyset \text{ und } \varepsilon = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sign}\operatorname{Im}(u) - \operatorname{sign}\operatorname{Im}(v)\big]. \end{cases}$$

Die Sonderfälle $u \in \mathbb{R}_{<0}$ oder $v \in \mathbb{R}_{<0}$ können wir bei der Wahl der Eckpunkte verbieten oder vorübergehend halbzahlige Exponenten $\varepsilon = \pm 1/2$ zulassen wie in obiger Formel.

Dies setzen wir auf Polygonzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$ multiplikativ fort gemäß

$$\eta(v_0 v_1 \dots v_n) := \eta(v_0,v_1)\eta(v_1,v_2)\cdots\eta(v_{n-1},v_n).$$

Die Komposition $\bar\eta = q\circ\eta$ erfüllt $\bar\eta(v_0v_1v_2v_0) = 1$ für jedes Dreieck $[v_0,v_1,v_2] \subset X$: Sie ist invariant unter polygonalen Homotopien, induziert also den Gruppenhomomorphismus

$$\psi \;:\; \pi_1^{\mathrm{pl}}(X,1) \to \langle s_1,\dots,s_n \mid - \rangle \;:\; [w] \mapsto [\eta(w)].$$

Umgekehrt sei $w_k^\pm = v_0 v_k^\pm v_k^\mp v_0$ der Polygonzug mit $v_0 = 1$ sowie $v_k^\pm = 1/2 - k \pm \mathrm{i}$. Wir erhalten den Monoidhomomorphismus $\omega : [s_1^\pm,\dots,s_n^\pm \mid -] \to P^{\mathrm{pl}}(X,1,1) : s_k^\pm \mapsto w_k^\pm$. Die Komposition $\bar\omega = p\circ\omega$ induziert $\varphi : \langle s_1,\dots,s_n \mid - \rangle \to \pi_1^{\mathrm{pl}}(X,1) : s_k^\pm \mapsto [w_k^\pm]$.

Surjektivität von ψ: Nach Konstruktion gilt $\eta\circ\omega = \mathrm{id}_{E_n}$, also $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_{F_n}$.

Injektivität von ψ: Zur Injektivität genügt $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_{\pi_1^{\mathrm{pl}}(X,1)}$. Da ψ ein Gruppenhomomorphismus ist, nutzen wir das äquivalente Kriterium $\ker(\psi) = \{1\}$. Sei $w = v_0 v_1 \dots v_\ell$ ein Polygonzug in $(X,1)$ mit $\psi([w]) = 1$. Wir konstruieren eine polygonale Homotopie $w \approx v_0$ durch Induktion über die Anzahl N der Übergänge über die Achse $\mathbb{R}_{\le 0}$.

Im Falle $N = 0$ trifft der Polygonzug w die Achse $\mathbb{R}_{\le 0}$ nicht, liegt also ganz in dem sternförmigen Gebiet $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}$ und ist somit zusammenziehbar (L2S). Dies übersetzt sich in eine polygonale Homotopie $w \approx v_0$ (dank L4B oder direkt kombinatorisch dank J1H).

Im Falle $N \ge 1$ trifft der Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ die Achse $\mathbb{R}_{\le 0}$. Wegen $\eta(w) \equiv 1$ wird mindestens ein Übergang $\eta(v_{i-1}v_i) = s_k^\pm$ gefolgt von einem umgekehrten Übergang $\eta(v_j v_{j+1}) = s_k^\mp$. Der dazwischen liegende Polygonzug $v_i \dots v_j$ trifft die Achse $\mathbb{R}_{\le 0}$ nicht, liegt also ganz im sternförmigen Gebiet $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}$. Somit gilt $v_i \dots v_j \approx v_i v_j$ in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}$. Wir erreichen so $j = i+1$ und können beide Achsübergänge löschen. (Skizze! L:12) □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ Für den Isomorphismus $(\psi,\varphi) : \pi_1^{\mathrm{pl}}(X,1) \cong F_n$ ist der entscheidende letzte Beweisschritt der Nachweis von $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\pi_1^{\mathrm{pl}}(X,1)}$, oder äquivalent hierzu $\ker(\psi) = \{1\}$. Dazu zeigen wir: Ist das Wort $\eta(w)$ vollständig kürzbar, so auch der Polygonzug w. Es lohnt sich zum besseren Verständnis, diesen Vorgang durch Beispiele wie das folgende zu illustrieren: ☜

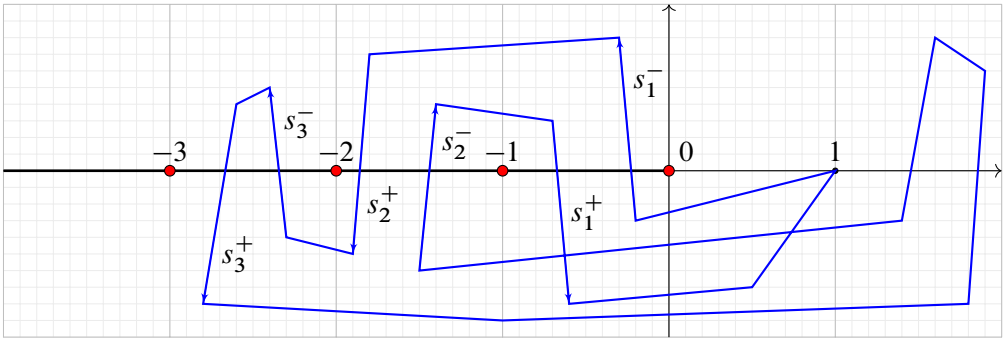


ABBILDUNG L:12. Löschung von Wörtern und Polygonzügen

☞ **Beispiel.** Abbildung L:12 zeigt eine polygonale Scheife $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in $(X,1)$ der Länge $n = 19$. Als Wort in den Erzeugern $s_k^{\pm}$ lesen wir $\eta(w) = s_1^- s_2^+ s_3^- s_3^+ s_2^- s_1^+$ ab. Dies lässt sich vollständig kürzen, also $\psi([w]) = 1$. Ebenso lässt sich die Schleife w in $(X,1)$ vollständig kürzen durch eine Folge von 19 elementaren polygonalen Homotopien. Versuchen Sie es! ☜

☞ **Bemerkung.** Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,1)$ ist frei, aber es gibt keine kanonische Basis. Bereits im Falle $n = 1$ gibt es genau zwei Basen, wie ± 1 in $(\mathbb{Z},+)$. Unser Isomorphismus $\deg : \pi_1(\mathbb{C}^*,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ beruht auf der Wahl einer der beiden Umlaufungsrichtungen in der Ebene $\mathbb{C}^*$ als mathematisch positiv, also letztlich auf dem orientierten Winkelmaß (J1C). ☜

Im Falle $n \geq 2$ gibt es unendlich viele Basen in F_n und ebensoviele Isomorphismen $(\psi,\varphi) : \pi_1(X,1) \cong F_n$. Unser Beweis konstruiert einen speziellen dieser Isomorphismus, und ist dabei vollkommen elementar und explizit. Die Kurzschreibweise $\pi_1(X,1) \cong F_n$ ist bequem, aber unpräzise; sie entlastet den Sender, aber belastet den Empfänger.

Ebenso ist die Abelschmachung $\pi_1(X,1)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^n$ nicht eindeutig. Im Falle $n \geq 2$ gibt es unendlich viele Basen in $\mathbb{Z}^n$ und ebensoviele Automorphismen $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n) = \mathrm{GL}_n \mathbb{Z}$. Die Inklusionen $(X,1) \hookrightarrow (\mathbb{C} \smallsetminus \{p\},1)$ erlauben uns jedoch, ja drängen gar, die Abelschmachung $\pi_1(X,1)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^n$ bequem und explizit als Umlaufzahlen zu formulieren (L4J).

Unser Satz L4D gilt genauso für beliebig platzierte Löcher in der Ebene. Es dürfen sogar (abzählbar) unendlich viele sein, solange sie nur diskret und abgeschlossen in $\mathbb{C}$ liegen:

☞ **Korollar L4E.** *(1) Sei $A \subset \mathbb{C}$ diskret und abgeschlossen. Für das Komplement $X = \mathbb{C} \smallsetminus A$ und $x_0 \in X$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ frei über $|A|$ Erzeugern.*

(2) Für $n \geq 3$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar ist $X = \mathbb{R}^n \smallsetminus A$ einfach zusammenhängend. ☜

☞ BEWEIS / ÜBUNG. (1) Die Menge $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ist abzählbar dank D6J. Wie in K1Z konstruieren wir einen Homöomorphismus $h : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ mit $x_0 \mapsto 1$ und $a_k \mapsto -k$ für $k = 0,1,2,\dots$. Dank L2E genügt es also, $A = -\mathbb{N}$ zu betrachten. Wie im vorigen Satz L4D konstruieren wir einen Isomorphismus $\psi : \pi_1(\mathbb{C} \smallsetminus A,1) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, s_2, s_3, \dots \mid - \rangle$. ☜

(2) Bei Kodimension ≥ 3 gilt $\pi_0(X) = \{X\}$ und $\pi_1(X,x_0) = \{1\}$ dank J2O. □

☞ **Beispiel.** Für die Ebene $\mathbb{C}$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C},1)$ trivial. Für die einfach gelochte Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ ist $\pi_1(\mathbb{C}^*,1) \cong \mathbb{Z}$ nicht-trivial, aber immer noch kommutativ. Für die zweifach gelochte Ebene $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0,-1\}$ hingegen ist $\pi_1(X,1) \cong \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$ nicht kommutativ: Abbildung L:13 illustriert das Beispiel $s_1 s_2^{-1} \neq s_2^{-1} s_1$. Gleiches gilt für die Ebene mit $n \geq 2$ Löchern, egal in welcher Position. Zeichnen Sie weitere Beispiele! ☜

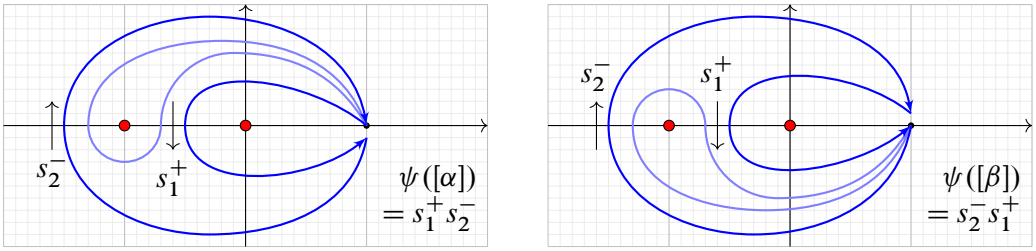


ABBILDUNG L:13. Die Gruppe $\pi_1(\mathbb{C} \smallsetminus \{0,-1\},1)$ ist nicht kommutativ!

✍ **Übung L4F.** In einer Wand stecken $n \geq 1$ Nägel. Können Sie hieran ein Bild an einer Schnur aufhängen, sodass das Bild hält, aber beim Ziehen eines beliebigen Nagels fällt? Können Sie Schnur sparen und die Länge quadratisch in n beschränken? (Ob dies optimal ist oder ob subquadratisches Wachstum möglich ist, scheint eine offene Frage zu sein.) ✍

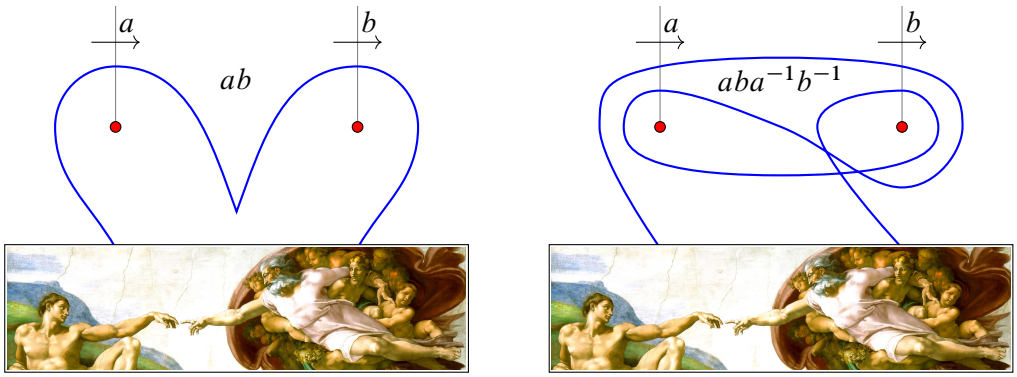


ABBILDUNG L:14. Alles hängt am Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$.

⁕ **L4F.** Wir nehmen hier zunächst stillschweigend an, dass es wirklich nur um die Fundamentalgruppe geht. Die physikalische Realisierung lässt durchaus noch weitere Tricks zu, siehe die nachfolgende Bemerkung.

In der freien Gruppe $F_n = \langle s_1, \ldots, s_n \mid - \rangle$ suchen wir Elemente $w_n \in F_n$ mit $w_n \neq 1$, aber $p_1(w_n) = \cdots = p_n(w_n) = 1$ unter jedem der Homomorphismen $p_i : F_n \to F_n : (s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \mapsto (s_1, \ldots, 1, \ldots, s_n)$.

Lösung mit exponentieller Länge: $w_1 = s_1$, $w_2 = [s_1, s_2]$, $w_3 = [w_2, s_3]$, $w_4 = [w_3, s_4]$, etc. Rekursiv setzen wir $w_1 = s_1$ und $w_n = [w_{n-1}, s_n]$ für $n \geq 2$. Per Induktion sieht man, dass w_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Forderung erfüllt. Die Länge wächst gemäß $\ell(w_n) = 2\ell(w_{n-1}) + 2 \geq 2^n$ für alle $n \geq 2$.

Lösung mit quadratischer Länge: $w_1 = s_1$, $w_2 = [s_1, s_2]$, $w_3 = [[s_1, s_2], s_3]$, $w_4 = [[s_1, s_2], [s_3, s_4]]$, etc. Rekursion: Wie setzen $w_1 = s_1$. Für $n \geq 2$ teilen wir $n = p + q$ in zwei Hälften $p = \lceil n/2 \rceil$ und $q = \lfloor n/2 \rfloor$. Für $p, q < n$ ist w_p, w_q bereits konstruiert. Wir setzen $w_n := [w_p, \sigma(w_q)]$ mit der Verschiebung $\sigma : x_i \mapsto x_{i+p}$. Per Induktion folgt, dass w_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Forderung erfüllt. Für die Länge gilt $\ell(w_n) = 2\ell(w_p) + 2\ell(w_q)$. Per Induktion folgt $\ell(w_n) = n^2$ für $n = 2^k$, allgemein $n^2 \leq \ell(w_n) \leq 2n^2$ für alle n.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Bemerkung.** In L4F nehmen wir stillschweigend an, dass es hier nur um die Fundamentalgruppe geht; das Ergebnis ist selbst dann noch richtig, wenn die Schnur sich selbst durchdringen darf. Bei der physikalischen Realisierung im $\mathbb{R}^3$ kann die Schnur sich nicht selbst durchdringen; das können wir zu noch raffinierteren Schlaufen nutzen. Abbildung L:15 zeigt hierzu eine Aufhängung, deren Schnurlänge sogar nur linear in n wächst. ☜

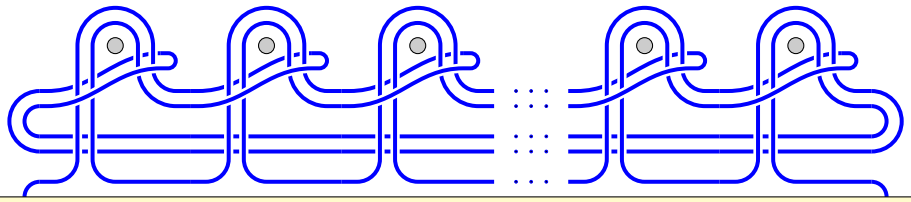


ABBILDUNG L:15. Eine raffinierte Bildaufhängung mit linearer Schnurlänge

☞ **Übung L4G.** Wählen Sie n Punkte $A = \{a_1, \dots, a_n\}^! \subset \mathbb{C}$, etwa $A = \{0, -1, \dots, 1-n\}$ oder $A = \{\, e^{2\pi i k/n} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \,\}$. Finden Sie in $X = \mathbb{C} \smallsetminus A$ einen endlichen Graphen $\iota : |K| \hookrightarrow X$ mit einer starken Deformationsretraktion $r : X \twoheadrightarrow |K|$. Was folgern Sie für die Fundamentalgruppen von X und $|K|$? Was für die Euler–Charakteristik $\chi(K)$? ☜

✻ **L4G.** Einen möglichen Graphen sehen Sie in Abbildung L:35, eine mögliche Homotopie-Retration finden Sie in E1R. Die Fundamentalgruppen sind demnach isomorph vermöge $(\iota_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(X,1) \cong \pi_1(|K|,1)$. Beispiel L6F rechnet davon unabhängig erneut nach, dass $\pi_1(|K|,1)$ frei über n Erzeugern ist. Für die Euler–Charakteristik folgt $\chi(K) = 1-n$. Dabei ist es vollkommen egal, wie Sie Ihren Graphen gewählt haben!

☞ **Übung L4H.** Seien $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ stetig. ☜
Beantworten Sie folgende Fragen durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

(1) Wenn f injektiv / einbettend ist, ist dann $\pi_1(f)$ injektiv?
(2) Wenn zudem $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt, ist dann $\pi_1(f)$ injektiv?
(3) Wenn f surjektiv / identifizierend ist, ist dann $\pi_1(f)$ surjektiv?
(4) Wenn zudem $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt, ist dann $\pi_1(f)$ surjektiv?
(5) Wenn f bijektiv ist, ist dann auch $\pi_1(f)$ bijektiv? injektiv? surjektiv?
(6) Wenn zudem $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt, ist dann $\pi_1(f)$ bijektiv?

✻ **L4H.** (1) Nein! Als Gegenbeispiel betrachten wir die Inklusion $f : (\mathbb{S}^1, 1) \hookrightarrow (\mathbb{C}, 1)$. Hier gilt $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(\mathbb{C}, 1) = 1$, somit ist $\pi_1(f) : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbb{C}, 1)$ nicht injektiv. Dasselbe gilt für $(\mathbb{C}^*, 1) \hookrightarrow (\mathbb{C}, 1)$.

(2) Ja! Dank Funktorialität gilt $\pi_1(g) \circ \pi_1(f) = \pi_1(g \circ f) = \pi_1(\mathrm{id}_{X,x_0}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$, siehe L2E. Der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ist linksinvertierbar, somit insbesondere injektiv.

(3) Nein! Als Gegenbeispiel betrachten wir die Identifizierung $f : (\mathbb{R}, 0) \twoheadrightarrow (\mathbb{S}^1, 1) : t \mapsto e^{it}$. Hier gilt $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = 1$, somit ist $\pi_1(f) : \pi_1(\mathbb{R}, 0) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ nicht surjektiv.

(4) Ja! Dank Funktorialität gilt $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) = \pi_1(f \circ g) = \pi_1(\mathrm{id}_{Y,y_0}) = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$, siehe L2E. Der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ist rechtsinvertierbar, somit insbesondere surjektiv.

(5) Nein! Als Gegenbeispiel betrachten wir $f : ([0, 2\pi[, 0) \to (\mathbb{S}^1, 1) : t \mapsto e^{it}$. Hier gilt $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1([0, 2\pi[, 0) = 1$, insbesondere ist $\pi_1(f) : \pi_1([0, 2\pi[, 0) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ nicht bijektiv.

(6) Ja! Analog zu (2) und (4) ist $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ invertierbar, siehe L2E.

☞ **Bemerkung.** Diese Fragen knüpfen an die kategorielle Sichtweise (H2K) an und unterstreichen eindrücklich, dass Links-/Rechtsinvertierbarkeit unter Funktoren erhalten bleibt, während Injektivität/Surjektivität oder Links-/Rechtskürzbarkeit verloren gehen kann. ☜

☞ **§L4c. Freie Schleifen.** Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ eines Raumes ist im Allgemeinen nicht kommutativ, wie wir jetzt wissen (L4D). Daher ist die Wahl und Fixierung des Fußpunktes x_0 wesentlich (L2C). Wir vergleichen nun *Schleifen* und *freie Schleifen*. ☜

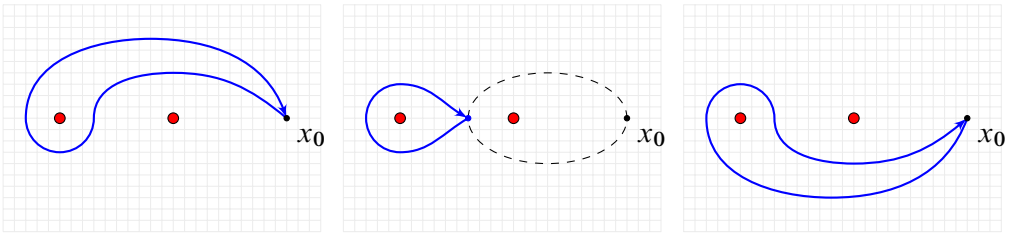


ABBILDUNG L:16. Freie Schleife in X als Konjugationsklasse in $\pi_1(X,x_0)$

Wenn wir die Endpunkte 0 und 1 des Intervalls $[0,1]$ identifizieren, so erhalten wir vermöge $[0,1] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$ als Quotientenraum die Kreislinie $[0,1] /\!\!/ \{0,1\} \cong \mathbb{S}^1$.

Ist α eine Schleife in (X,x_0), also $\alpha : [0,1] \to X$ stetig mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, so erhalten wir $\tilde\alpha : (\mathbb{S}^1,1) \to (X,x_0)$ durch $\tilde\alpha(e^{2\pi i t}) = \alpha(t)$. Umgekehrt definiert jede stetige Abbildung $\tilde\alpha : (\mathbb{S}^1,1) \to (X,x_0)$ eine Schleife $\alpha : ([0,1],\{0,1\}) \to (X,x_0) : t \mapsto \tilde\alpha(e^{2\pi i t})$.

Ebenso übersetzt sich jede Homotopie $H : \alpha \simeq \alpha' : ([0,1],\{0,1\}) \to (X,x_0)$ relativ $\{0,1\}$ in eine Homotopie $\tilde H : \tilde\alpha \simeq \tilde\alpha' : (\mathbb{S}^1,1) \to (X,x_0)$ relativ $\{1\}$. Wir erhalten also:

$$\pi_1(X,x_0) := \frac{\{\,\alpha : ([0,1],\{0,1\}) \to (X,x_0) \text{ stetig}\,\}}{\text{Homotopie relativ } \{0,1\}} \cong \frac{\{\,\tilde\alpha : (\mathbb{S}^1,1) \to (X,x_0) \text{ stetig}\,\}}{\text{Homotopie relativ } \{1\}}$$

Mit der üblichen Schreibweise für Homotopieklassen schreiben wir dies so:

$$\pi_1(X,x_0) := \big[([0,1],\{0,1\}),(X,x_0)\big] \cong \big[\,(\mathbb{S}^1,1),(X,x_0)\,\big]$$

Das Festhalten des Fußpunktes ist hierbei wesentlich. Jede *freie Schleife* $\tilde\alpha : \mathbb{S}^1 \to X$ mit beliebigem Fußpunkt $\tilde\alpha(1) \in X$ definiert erst nach Wahl eines Weges $\gamma : [0,1] \to X$ von $\gamma(0) = \tilde\alpha(1)$ nach $\gamma(1) = x_0$ ein Gruppenelement $a = [\bar\gamma * \alpha * \gamma] \in \pi_1(X,x_0)$.

Wie in L2B erklärt, führen die verschiedenen Wahlen von γ zur *Konjugationsklasse*

$$a^{\pi_1(X,x_0)} = \big\{\, a^c = c^{-1}ac \;\big|\; c \in \pi_1(X,x_0) \,\big\} \subset \pi_1(X,x_0).$$

Jede freie Schleife $\tilde\alpha : \mathbb{S}^1 \to X$ definiert so eine Konjugationsklasse in $\pi_1(X,x_0)$.

☞ **Satz L4I** (freie Schleifen und Konjugation)**.** *Die Zerlegung der Menge $\mathscr{C}(\mathbb{S}^1,X)$ in Homotopieklassen entspricht der Zerlegung der Gruppe $\pi_1(X,x_0)$ in Konjugationsklassen:* ☜

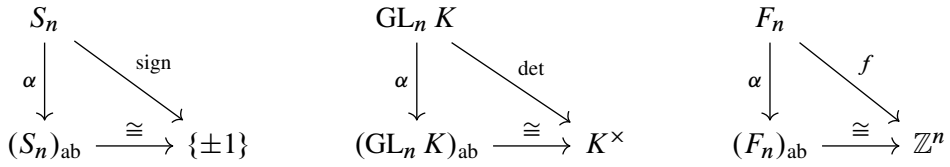
$$[\mathbb{S}^1,X] = \frac{\{\,\tilde\alpha : \mathbb{S}^1 \to X \text{ stetig}\,\}}{\text{Homotopie}} \cong \frac{\text{die Menge } \pi_1(X,x_0)}{\text{Konjugation}} = \big\{\, a^{\pi_1(X,x_0)} \;\big|\; a \in \pi_1(X,x_0) \,\big\}$$

Bemerkung. Die Menge der Konjugationsklassen ist durchaus interessant, aber im obigen Beispiel leider keine Gruppe. Um die wertvolle Gruppenstruktur auf $\pi_1(X,x_0)$ zu erhalten, müssen wir den Fußpunkt x_0 bei Schleifen und Homotopien berücksichtigen.

Ist die Gruppe $\pi_1(X,x_0)$ kommutativ, so hat jede Konjugationsklasse nur ein Element. Nur in diesem besonders einfachen Falle brauchen wir nicht zwischen Schleifen und freien Schleifen zu unterscheiden. Andernfalls können wir $\pi_1(X,x_0)$ kommutativ machen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L4d. Abelschmachung.** Aus der Linearen Algebra kennen Sie bereits zwei wichtige Beispiele von Abelschmachungen (L3N), wenn auch dort nicht unter diesem Namen: ☜



Zur Erinnerung oder als eine schöne Übung zur Wiederholung:

Beispiel. Die symmetrische Gruppe $(S_n, \circ)$ hat als Kommutatoruntergruppe $S_n' = A_n$. Für $n \geq 2$ ist die Abelschmachung daher äquivalent zur Signatur $\mathrm{sign} : S_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$. (Satz L3O)

Beispiel. Für jeden Körper K gilt $(\mathrm{GL}_n K)' = \mathrm{SL}_n K$, außer im Fall $n = 2$ und $\sharp K = 2$. Die Abelschmachung ist daher äquivalent zur Determinante $\det : \mathrm{GL}_n K \twoheadrightarrow K^\times$. (Satz L3P)

Beispiel. Für die freie Gruppe $F = \langle s_1, \ldots, s_r \mid - \rangle$ gilt $F_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^r$ vermöge $s_k \mapsto e_k$. (L3C)

☞ **§L4e. Abelschmachung der Fundamentalgruppe.** Sei X ein topologischer Raum und wegzusammenhängend. Je zwei Wege $\gamma, \gamma' \in P(X, x_0, x_1)$ induzieren Isomorphismen $h_\gamma, h_{\gamma'} : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)$, die sich durch eine Konjugation unterscheiden (L2B), also $h_{\gamma'} = c^{-1} \cdot h_\gamma \cdot c$ mit $c = [\bar{\gamma} * \gamma'] \in \pi_1(X, x_1)$. Für ihre Abelschmachungen gilt daher ☜

$$(h_\gamma)_{\mathrm{ab}} = (h_{\gamma'})_{\mathrm{ab}} : \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)_{\mathrm{ab}}.$$

Anders als die Fundamentalgruppen erlauben ihre Abelschmachungen einen *natürlichen* Isomorphismus! Wir können letztere damit als *gleich* betrachten. Wir definieren daher

$$H_1(X) := \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

Dies ist wohldefiniert, denn für jede andere Wahl $x_1 \in X$ haben wir den natürlichen Isomorphismus $(h_\gamma)_{\mathrm{ab}} : \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)_{\mathrm{ab}}$. Jede freie Schleife $\alpha : \mathbb{S}^1 \to X$ definiert in $\pi_1(X, x_0)$ nur eine Konjugationsklasse $a_1^\pi(X, x_0)$, aber in $H_1(X)$ ein Element $\bar{a}$. Jedes Element der Abelschmachung $H_1(X)$ können so als eine freie Schleife darstellen.

✍ **Satz L4J.** *Für jeden topologischen Raum X ist die* erste Homologiegruppe *gegeben durch* ✍

$$H_1(X) := \bigoplus_{X_0 \in \pi_0(X)} \pi_1(X_0, x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

Diese ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Wahl der Fußpunkte.

☞ **Beispiel.** Für $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ haben wir $\pi_1(X, x_0) \cong \langle s_1, \ldots, s_n \mid - \rangle$ dank L4D, also $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^n$ (L3C). Die Abelschmachung $\alpha : \pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow H_1(X)$ ist äquivalent zu ☜

$$f \;:\; \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{Z}^n \;:\; [\gamma] \mapsto \big(\deg(\gamma - z_1), \ldots, \deg(\gamma - z_n)\big).$$

☞ **Bemerkung.** Diese Konstruktion ist wunderbar explizit und geometrisch anschaulich. In §L5 führen wir dies mit Wegintegralen weiter aus und lösen so das Potentialproblem. ☜

Bemerkung. Die algebraische Topologie umfasst neben Homotopie auch Homologie; wir konstruieren damit für jeden Raum X und zu jeder Dimension $k \in \mathbb{N}$ die (abelsche) Homologiegruppe $H_k(X)$. Dabei gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}\pi_0(X)$ und $H_1(X) \cong \bigoplus_{X_0 \in \pi_0(X)} \pi_1(X_0, x_0)_{\mathrm{ab}}$.

§L4f. Eine praktische Frage: Wie sollte man sein Fahrrad (nicht) anschließen?

☞ Die Knotentheorie untersucht Einbettungen von Kreislinien und Flächen im $\mathbb{R}^3$. Sie nutzt hierzu geeignete Invarianten wie die Fundamentalgruppe, wie hier angedeutet. ☜

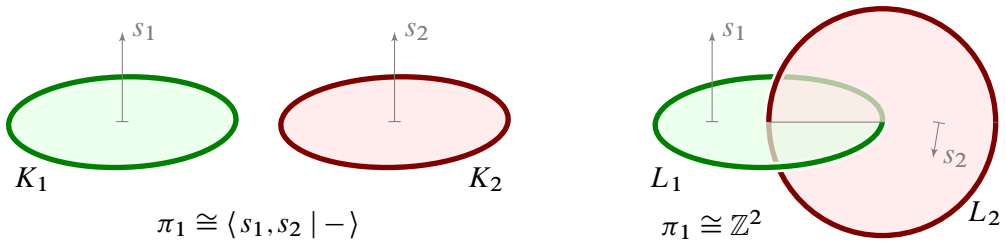


ABBILDUNG L:17. Unverschlungene und verschlungene Kreislinien im $\mathbb{R}^3$

☞ **Übung L4K.** Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$: ☜

$$\begin{aligned} K = K_1 \cup K_2, \qquad & K_1 = \big\{ (x,y,0) \;\big|\; (x+1.2)^2 + y^2 = 1 \big\}, \\ & K_2 = \big\{ (x,y,0) \;\big|\; (x-1.2)^2 + y^2 = 1 \big\}, \\ L = L_1 \cup L_2, \qquad & L_1 = \big\{ (x,y,0) \;\big|\; (x+0.5)^2 + y^2 = 1 \big\}, \\ & L_2 = \big\{ (x,0,z) \;\big|\; (x-0.5)^2 + z^2 = 1 \big\}. \end{aligned}$$

(1) Sei $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus K$ das Komplement von K. Geben Sie für seine Fundamentalgruppe $\pi_K := \pi_1(X,p)$ mit Fußpunkt $p = (3,0,0)$ eine explizite Präsentation an.
(2) Ebenso für das Komplement $Y = \mathbb{R}^3 \smallsetminus L$ und $\pi_L := \pi_1(Y,p)$.
(3) Gibt es einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $h(K) = L$?

✻ **L4K.** Eine kurze Antwort auf (1,2) lautet: Es gilt $\pi_K \cong \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$ und $\pi_L \cong \langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 = s_2 s_1 \rangle$. Hieraus folgt die Antwort auf (3): Nein, es gibt keinen Homöomorphismus $(\mathbb{R}^3, K) \cong (\mathbb{R}^3, L)$.

(1) Seien $S_1 = [K_1]$ und $S_2 = [K_2]$ die Kreisscheiben mit Rand $\partial S_1 = K_1$ bzw. $\partial S_2 = K_2$, siehe L:17. Jeder Kante $[u,v]$ in $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus K$ ordnen wir wie folgt ein Element der freien Gruppe $F = \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$ zu:

$$\eta(u,v) := \begin{cases} s_1^\varepsilon & \text{falls } [u,v] \cap S_1 \neq \emptyset \text{ und } \varepsilon = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sign}(v_3) - \operatorname{sign}(u_3)\big], \\ s_2^\varepsilon & \text{falls } [u,v] \cap S_2 \neq \emptyset \text{ und } \varepsilon = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sign}(v_3) - \operatorname{sign}(u_3)\big], \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies legt eine Koorientierung fest, hier von unten nach oben. Für jeden Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in (X,p) definieren wir $\eta(w) = \eta(v_0,v_1) \cdots \eta(v_{n-1},v_n)$. Dies ist invariant unter polygonaler Homotopie in (X,p), wie in L:18 gezeigt, induziert also den Gruppenhomomorphismus $\psi : \pi_K \to F : [w] \mapsto \eta(w)$. Es gibt eine Schleife w_i in (X,p) mit $\eta(w_i) = s_i$, daher ist ψ surjektiv. Zur Injektivität von ψ sei w ein Polygonzug in (X,p) mit $\eta(w) = 1$. Wir konstruieren eine polygonale Homotopie $w \approx v_0$ durch Induktion über die Anzahl N der Durchstoßungen von $S_1 \cup S_2$. Im Falle $N = 0$ trifft der Polygonzug w die Kreisscheiben nicht, liegt also ganz im Gebiet $X' = \mathbb{R}^3 \smallsetminus (S_1 \cup S_2)$. Dieses ist einfach zusammenhängend, genauer gilt $X' \cong \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{a,b\}$ wie in E1Q, also $w \approx v_0$ in X'. Im Falle $N \geq 1$ löschen wir aufeinander folgende inverse Übergänge wie in L4D.

(2) Ich skizziere die Konstruktion: Wie zuvor seien $S_1 = [L_1]$ und $S_2 = [L_2]$. Wir wählen Koorientierungen und definieren η wie in (1). Wie in L:18 gezeigt ist dies *nicht* invariant unter polygonaler Homotopie in Y: Dies erreichen wir erst durch die Relation $s_1 s_2 = s_2 s_1$. Diese entsteht, wenn ein Dreieck $[v_{k-1}, v_k, v_{k+1}]$ die Schnittachse $A = [(\pm 0.5, 0, 0)]$ kreuzt. Wir erhalten so den Gruppenhomomorphismus $\psi : \pi_L \to G := \langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 = s_2 s_1 \rangle$. Es gibt eine Schleife w_i in (X,p) mit $\eta(w_i) = s_i$, daher ist ψ surjektiv. Die Injektivität schließlich zeigen wir wie in (1); aufgrund der Relation ist das Argument etwas länger.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

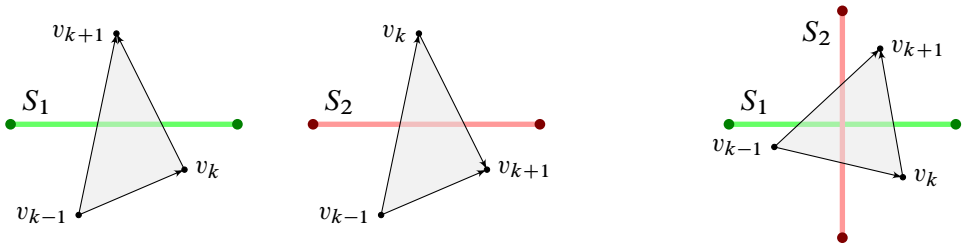


ABBILDUNG L:18. Polygonale Homotopie: Seitenansicht der Kreisscheiben

☞ **Übung L4L.** Abbildung L:19 zeigt drei Mengen $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$, jede davon besteht aus verbundenen Kreislinien. (Geben Sie die Mengen in Koordinaten an, wenn Sie möchten.) ☜

(1) Finden Sie eine Präsentation der Fundamentalgruppe $\pi_A := \pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus A, p)$ und ebenso π_B und π_C, zum Beispiel mit den Techniken der vorigen Aufgabe.
(2) Gibt es einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $h(A) = B$? oder $h(B) = C$?
(3) Gibt es einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $h(A) = C$?

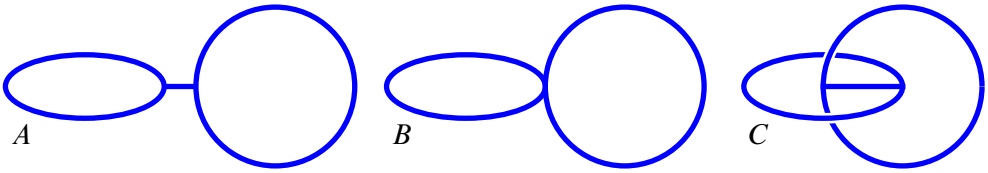


ABBILDUNG L:19. Verbundene Kreislinien im $\mathbb{R}^3$

☞ **Bemerkung.** Dieses hübsche Beispiel ist sehr lehrreich und führt zum folgenden Satz L4M. Dieser perfektioniert die Konstrukion von Erzeugern und Relationen in voller Schönheit. ☜

⁕ **L4L.** (1) Wir finden $\pi_A \cong \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$, und dasselbe für π_B und π_C. Hierzu gehen wir wie folgt vor: Wir setzen $X := \mathbb{R}^3 \smallsetminus A$. Wie in L4K spannt jede der beiden Kreislinien A_i eine Kreisscheibe $S_i = [A_i]$ auf. Jedem Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in (X, p) können wir so ein Gruppenelement $\eta(w) \in \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$ zuordnen. Dies ist invariant unter polygonaler Homotopie in (X, p), wie in L:18 gezeigt, induziert also den Gruppenhomomorphismus $\psi : \pi_A \to F : [w] \mapsto \eta(w)$. Dieser ist surjektiv (klar) und injektiv (nachrechnen!). Wir nutzen hierzu, dass $X' := \mathbb{R}^3 \smallsetminus (A \cup S_1 \cup S_2)$ einfach zusammenhängend ist.

(2) Die Fundamentalgruppe bietet hierzu kein Hindernis. Offensichtlich gilt jedoch $B \ncong A \cong C$ (als Homöomorphismen topologischer Räume). Dies sieht man leicht wie folgt: Genau ein Punkt in B trennt lokal in vier Komponenten, während jeder Punkt in A oder C lokal nur in zwei oder drei Komponenten trennt.

(3) Wir zeigen $(\mathbb{R}^3, A) \ncong (\mathbb{R}^3, C)$: Angenommen, es gäbe $h : (\mathbb{R}^3, C) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^3, A)$, also einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $h(C) = A$. Sei $c \in C$ der Mittelpunkt der Verbindungsachse. Er trennt $C' = C \smallsetminus \{c\}$ in zwei Komponenten, und es gilt $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus C') \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L) \cong \mathbb{Z}^2$ wie in L4K. Der Punkt $a = h(c)$ müsste dieselben Eigenschaften haben: Er trennt $A' = A \smallsetminus \{a\}$ in zwei Komponenten, und es gilt $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus A') \cong \mathbb{Z}^2$. Kein Punkt von A erfüllt dies! Also kann es keinen Homöormorphismus $h : (\mathbb{R}^3, C) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^3, A)$ geben.

☞ **Bemerkung.** Diese und ähnliche Beispiele werden wir in §L8 erneut behandeln und alternativ lösen: Den betrachteten Raum $X \subset \mathbb{R}^3$ können wir auf einen geeigneten Simplizialkomplex $|K| \subset X$ zusammenziehen und dessen Fundamentalgruppe $\pi_1(K, *)$ berechnen. Simplizialkomplexe haben den technischen Vorteil, dass sich ihre kombinatorische Struktur direkt in eine Präsentation der Fundamentalgruppe übersetzt (L6I). ☜

§L4g. Wirtinger–Präsentation. Als Zusammenfassung wollen wir unsere bisherigen Beispiele systematisieren und die Technik anwendungsfreundlich verallgemeinern.

In $\mathbb{R}^n$ sei $\mathscr{K}$ ein lokal-endlicher Polytopalkomplex der Dimension $< n$. Das Polyeder $|\mathscr{K}| \subset \mathbb{R}^n$ ist demnach abgeschlossen (dank Satz D5G), das Komplement $X = \mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{K}|$ also offen (für Satz L4B). Wir wollen die Fundamentalgruppe von X berechnen, das heißt möglichst explizit eine Präsentation $(\psi, \varphi) : \pi_1(X, x_0) \cong [\, S \mid R \,]$ entwickeln.

Wir kennen bereits erste interessante Beispiele, etwa Punkte im $\mathbb{R}^2$ (L4D) oder einfache Graphen im $\mathbb{R}^3$ (L4L). Die gute Nachricht: Der allgemeine Fall funktioniert ganz genau so.

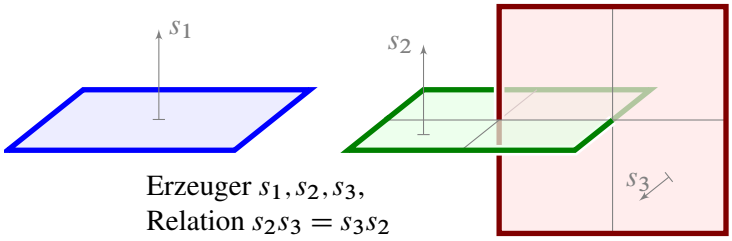


ABBILDUNG L:20. Polytopale Komplexe $\mathscr{K} \leq \mathscr{L}$: Der Teilkomplex $\mathscr{K}$ ist fett gezeichnet. Der größere Komplex $\mathscr{L}$ dient hilfsweise als Füllung, sodass $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{L}|, x_0) = \{1\}$.

Satz L4M (Wirtinger–Präsentation). *In $\mathbb{R}^n$ seien $\mathscr{K} \leq \mathscr{L}$ lokal-endliche polytopale Komplexe der Dimension $< n$. Das Komplement $Y = \mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{L}|$ sei einfach zusammenhängend, also $\pi_0(Y) = \{[x_0]\}$ und $\pi_1(Y, x_0) = \{1\}$ für einen (und somit jeden) Fußpunkt $x_0 \in Y$.*

Wir präsentieren die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{K}|$. Die Wände in $\mathscr{L} \setminus \mathscr{K}$ liefern die Erzeuger S, und die Grate liefern die Relationen $R \subset S^* \times S^*$, wie unten erkärt:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \big\langle \textit{Wände} \;\big|\; \textit{Grate} \big\rangle$$

Eine *Wand* ist ein Polytop $P \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{K}$ mit $\dim P = n - 1$, also mit Kodimension 1. Senkrecht auf P stehen genau zwei Einheitsvektoren $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Jedes Paar $s = s^+ = (P, u)$ nennen wir eine *koorientierte Wand*. Die Umkehrung $s^- = s^{-1} = (P, -u)$ ist dieselbe Wand mit der anderen Koorientierung. Sei S die Menge aller koorientierten Wände:

$$S = \big\{ (P, u) \;\big|\; P \in \mathscr{L}_{n-1} \setminus \mathscr{K},\, u \in \mathbb{S}^{n-1},\, P \perp u \big\}$$

Sei $P^{\mathrm{pl}}_{\mathscr{L}}(X, x_0, x_0)$ die Menge aller polygonalen Schleifen $w = v_0 v_1 \dots v_\ell$ in (X, x_0) in *allgemeiner Lage* zu $\mathscr{L}$: Kein Eckpunkt v_i liegt auf $|\mathscr{L}| = |\mathscr{L}_{\leq n-1}|$; kein Segment $[v_{i-1}, v_i]$ schneidet $|\mathscr{L}_{\leq n-2}|$; jedes Segment $[v_{i-1}, v_i]$ schneidet entweder keine Wand oder genau eine Wand P in genau einem inneren Punkt. Dies gelingt durch Unterteilung und beliebig kleine polygonale Homotopie. Hierauf definieren wir den Monoidhomomorphismus

$$\eta \;:\; P^{\mathrm{pl}}_{\mathscr{L}}(X, x_0, x_0) \to S^* \;:\; v_0 v_1 \dots v_\ell \mapsto \eta(v_0, v_1)\eta(v_1, v_2) \cdots \eta(v_{\ell-1}, v_\ell),$$

$$\eta(v_{i-1}, v_i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } [v_{i-1}, v_i] \cap P = \emptyset \text{ für alle Wände } s = (P, u) \in S, \\ s & \text{falls } [v_{i-1}, v_i] \cap P \neq \emptyset \text{ und } \langle\, u \mid v_i - v_{i-1} \,\rangle > 0. \end{cases}$$

Diese Konstruktion kennen wir von der Berechnung der Umlaufzahl $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$ durch Zählung der Achsübergänge (J1L). Allgemeiner nutzen wir sie für die gelochte Ebene (L4D) zum Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, -1, \dots, 1-n\}, 1) \cong \langle s_1, s_2, \dots, s_n \mid - \rangle$. Sie gilt allgemein.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ Umgekehrt existiert zu jeder koorientierten Wand $s = (P, u) \in S$ eine polygonale Schleife $w = \omega(s)$ in (X, x_0) mit $\eta(w) = s$: Diese startet in x_0, läuft im Raum Y zur negativen Seite der Wand P, durchstößt die Wand in Richtung u zur positiven Seite, und läuft in Y zurück zu x_0. Das ist möglich, da $Y = \mathbb{R}^n \smallsetminus |\mathscr{L}|$ wegzusammenhängend ist. Zudem ist Y einfach zusammenhängend, daher ist die Wahl von w eindeutig bis auf Homotopie. ☜

Durch diese Wahlen $(\omega(s))_{s\in S}$ definieren wir den Monoidhomomorphismus

$$\omega \;:\; S^* \to P^{\mathrm{pl}}_{\mathscr{L}}(X, x_0, x_0) \;:\; s_1 s_2 \cdots s_\ell \mapsto \omega(s_1)\omega(s_2)\cdots\omega(s_\ell).$$

☞ Der Quotient modulo polygonaler Homotopie liefert $p : P^{\mathrm{pl}}_{\mathscr{L}}(X, x_0, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x_0)$. Abbildung L:21 zeigt die Relationen, die durch polygonale Homotopie entstehen. ☜

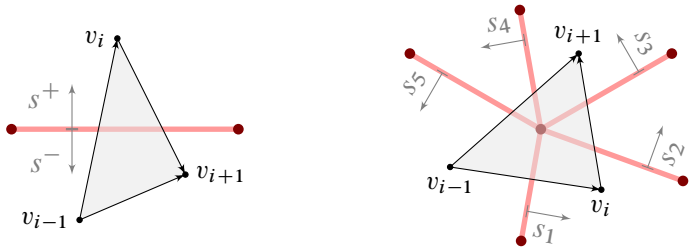


ABBILDUNG L:21. Polygonale Homotopie $v_{i-1}v_iv_{i+1} \approx v_{i-1}v_{i+1}$ in X entspricht im freien Monoid S^* den Relationen $s^+s^- = s^-s^+ = 1$ bzw. zyklisch $r_Q : s_1 s_2 \cdots s_k = 1$.

☞ Ein *Grat* ist ein Polytop $Q \in \mathscr{L} \smallsetminus \mathscr{K}$ mit $\dim Q = n-2$, also Kodimension 2. Seien $s_1^\pm, s_2^\pm, \ldots, s_k^\pm \in S$ die Wände, die Q enthalten. In einer Ebene orthogonal zu Q können wir diese zyklisch anordnen und koorientieren, wie in L:21 gezeigt. Eine elementare Homotopie entspricht der Umformung $s_1 \cdots s_i = s_k^{-1} \cdots s_{i+1}^{-1}$ und somit der Relation $r_Q : s_1 s_2 \cdots s_k = 1$. Sei R die Menge all dieser Relationen: ☜

$$R = \big\{ (s^+s^-, 1) \;\big|\; s \in S \big\} \cup \big\{ r_Q \;\big|\; Q \in \mathscr{L}_{n-2} \smallsetminus \mathscr{K} \big\}$$

✍ Wir haben folgendes Diagramm von Monoiden (obere Zeile) und Gruppen (untere Zeile): ✍

$$\begin{array}{ccc}
P^{\mathrm{pl}}_{\mathscr{L}}(X, x_0, x_0) & \underset{\omega}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}} & [S \mid -] =: E \\
\downarrow p & \swarrow \bar\eta \quad \bar\omega \searrow & \downarrow q \\
\pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) & \underset{\varphi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} & [S \mid R] =: G
\end{array}$$

$\dfrac{\text{Polygonzüge in } (X, x_0)}{\text{polygonale Homotopie}}$ $\qquad$ $\dfrac{\text{Wörter über } S}{\text{Relationen in } R}$

Der Beweis verläuft wie bei der gelochten Ebene (Satz L4D). Bevor Sie weiterlesen: Wiederholen Sie zur Übung diesen lehrreichen Spezialfall und seinen Beweis, dann zeigen Sie den allgemeinen Fall (Satz L4M) durch sorgfältige Übertragung aller Argumente.

☞ **Satz L4M** (Wirtinger–Präsentation, Fortsetzung)**.** *Die Komposition $\bar\eta = q \circ \eta$ ist invariant unter polygonalen Homotopien und induziert so den Gruppenhomomorphismus* ☜

$$\psi \;:\; \pi_1^{\mathrm{pl}}(X,x_0) \to [\,S \mid R\,] \;:\; [v_0v_1\dots v_\ell] \mapsto [\eta(v_0,v_1)\eta(v_1,v_2)\cdots\eta(v_{\ell-1},v_\ell)].$$

Umgekehrt gilt: Die Komposition $\bar\omega = p \circ \omega : S^* \to \pi_1^{\mathrm{pl}}(X,x_0)$ erfüllt $\bar\omega(r_1) = \bar\omega(r_2)$ für alle Relationen $(r_1,r_2) \in R$ und induziert so den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi \;:\; [\,S \mid R\,] \to \pi_1^{\mathrm{pl}}(X,x_0) \;:\; [s_1s_2\cdots s_\ell] \mapsto [\omega(s_1)\omega(s_2)\cdots\omega(s_\ell)].$$

Diese beiden stiften einen Gruppenisomorphismus $(\psi,\varphi) : \pi_1^{\mathrm{pl}}(X,x_0) \cong [\,S \mid R\,]$.

☞ **Bemerkung.** Für praktische Zwecke können wir diese Präsentation etwas kürzen. Wir wählen zu jeder Wand $P \in \mathscr{L}_{n-1} \smallsetminus \mathscr{K}$ *eine* Koorientierung und zu jedem Grat $Q \in \mathscr{L}_{n-2} \smallsetminus \mathscr{K}$ *eine* zyklische Relation. Wir erhalten damit wie versprochen die Gruppenpräsentation ☜

$$\pi_1(X,x_0) \cong \big\langle \text{Wände} \;\big|\; \text{Grate} \big\rangle.$$

☞ BEWEIS. Dank unserer akribischen Vorbereitung liegen alle relevanten Daten explizit vor. Der Beweis des Satzes gelingt nun durch sorgsames und geduldiges Nachrechnen. ☜

Homotopie-Invarianz: In $P^{\mathrm{pl}}_{\mathscr{L}}(X,x_0,x_0)$ betrachten wir eine polygonale Homotopie von $w = v_0\dots v_{i-1}v_iv_{i+1}\dots v_\ell$ nach $w' = v_0\dots v_{i-1}v_{i+1}\dots v_\ell$ mit $\Delta = [v_{i-1},v_i,v_{i+1}] \subset X$.

Wir untersuchen zunächst die folgenden drei elementaren Fälle:

(0) Das Dreieck Δ schneidet keine Wände: Aus $\Delta \subset Y$ folgt $\eta(w) = \eta(w')$.
(1) Das Dreieck Δ schneidet genau eine Wand $s = (P,u) \in S$ im Inneren (L:21 links). Dann sind $\eta(w)$ und $\eta(w')$ gleich oder um eine Kürzung $s^+s^- = e$ verschieden.
(2) Das Dreieck Δ schneidet genau einen Grat Q im Inneren (L:21 rechts). Dann unterscheiden sich $\eta(w)$ und $\eta(w')$ durch eine der zyklischen Relationen dieses Grates.

Jede polygonale Homotopie $w \approx w'$ lässt sich in diese drei elementaren Fälle zerlegen: Jedes Dreieck $\Delta \subset X$ schneidet nur endlich viele Grate, und zwar jeden transvers im Inneren $\operatorname{Int}\Delta$. Nach hinreichend feiner Unterteilung von Δ schneidet jedes Teildreieck Δ_i höchstens einen Grat, weiterhin transvers im Inneren $\operatorname{Int}\Delta_i$. Auf Δ_i können wir nun (0–2) anwenden.

Demnach ist $\bar\eta = q \circ \eta$ homotopie-invariant und induziert somit $\psi : \pi_1^{\mathrm{pl}}(X,x_0) \to [\,S \mid R\,]$. Umgekehrt gilt: Die Komposition $\bar\omega = p \circ \omega$ erfüllt $\bar\omega(r_1) = \bar\omega(r_2)$ für alle Relationen $(r_1,r_2) \in R$, wie in L:21 gezeigt, induziert also $\varphi : [\,S \mid R\,] \to \pi_1^{\mathrm{pl}}(X,x_0)$. (Warum?)

Surjektivität von ψ: Nach Konstruktion gilt $\eta \circ \omega = \mathrm{id}_{[\,S|-]}$, also $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{[\,S|R]}$.

Injektivität von ψ: Da ψ ein Gruppenhomomorphismus ist, nutzen wir das äquivalente Kriterium $\ker(\psi) = \{1\}$. Sei $w = v_0v_1\dots v_\ell$ ein Polygonzug in (X,x_0) mit $\psi([w]) = 1$. Wir haben also $\eta(w) \equiv 1$ in S, das heißt, es gibt eine Folge von Umformungen in R, die das Wort $\eta(w)$ in das triviale Wort 1 überführt. Da das Komplement Y einfach zusammenhängend ist, können wir jede dieser Umformungen von $\eta(w)$ durch eine Homotopie von w in X realisieren. (Warum?) So erhalten wir eine Folge von Homotopien $w \approx v_0$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung L4N. (1) Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den Würfel mit den Eckpunkten $(\pm1, \pm1, \pm1)$. Diese acht Eckpunkte zusammen mit den zwölf Kanten bilden den Graphen $\mathscr{K}$.

Präsentieren Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus |\mathscr{K}|, (0,0,0))$. Ist diese Gruppe frei? Falls ja, von welchem Rang? Bestimmen Sie eine Basis!

(2) Beantworten Sie dieselben Fragen für jeden der fünf platonischen Körper, und allgemein für jeden zusammenhängenden Graphen auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ (nach Radialprojektion).

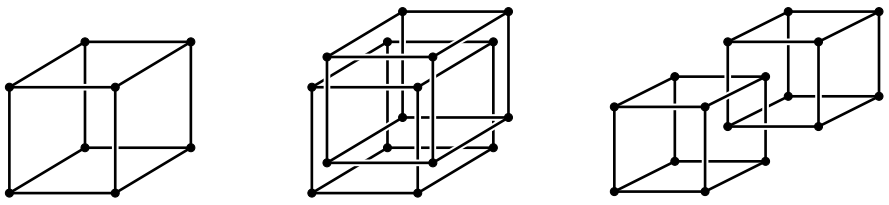
(3) Ebenso für den Graphen $\mathscr{K}$ bestehend aus den Ecken $v = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit x, y, z ungerade und den achsenparallelen Kanten $[v, v + 2e_i]$ mit $i = 1, 2, 3$.

ABBILDUNG L:22. Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen

✻ **L4N.** (1) Wir konstruieren $\mathscr{L} \geq \mathscr{K}$ durch Hinzunahme von fünf der sechs Seiten des Würfels. Das Komplement $\mathbb{R}^3 \smallsetminus |\mathscr{L}|$ ist dann einfach zusammenhängend. (Warum?) Wir können also Satz L4M anwenden und die Wirtinger–Präsentation ablesen: Die Gruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus |\mathscr{K}|, (0,0,0))$ ist frei vom Rang 5.

(2) Der Graph $\mathscr{K}$ auf der Sphäre besteht aus f_0 Ecken, f_1 Kanten und f_2 Facetten. Wir wählen $f_2 - 1$ dieser Facetten, das Komplement ist dann einfach zusammenhängend. (Warum?) Die Gruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus |\mathscr{K}|, *)$ ist somit frei vom Rang $f_2 - 1$.

(3) Ja, auch diese Gruppe ist frei. Ihr Rang ist unendlich. Um eine Basis anzugeben, wählen wir eine geeignete Teilmenge der Wände, hier der achsenparallelen Quadrate. Genauer: Wir betrachten den dualen Graphen Γ, bestehend aus Würfelmittelpunkten und Quadraten zwischen ihnen. In Γ wählen wir einen Spannbaum T. Alle Quadrate in $\Gamma \smallsetminus T$ fügen wir zu $\mathscr{K}$ hinzu und erhalten $\mathscr{L}$. Wir können nun Satz L4M anwenden



Übung L4O. Wir vereinigen den Würfelgraphen $\mathscr{K}$ aus der vorigen Übung mit seiner Verschiebung zu $\mathscr{K}' = \mathscr{K} \cup (\mathscr{K} + (1,1,1))$. Präsentieren Sie $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus |\mathscr{K}'|, (3,3,3))$.

Das Vorgehen ist klar dank L4M, doch die verwickelte Geometrie erfordert eine geschickte Darstellung und gute Buchführung. Mit dem folgenden Satz L4P gelingt es leicht.

☞ **§L4h. Anwendung: Wirtinger–Präsentation von Knotengruppen.** Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir einen (parametrisierten) *Knoten* $\kappa : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ oder allgemein eine *Verschlingung* $\kappa : \{1,\dots,n\} \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Zur Vereinfachung setzen wir κ als polygonal voraus. Wir betrachten also nur „zahme“ Knoten und schließen „wilde“ Knoten aus. ☜

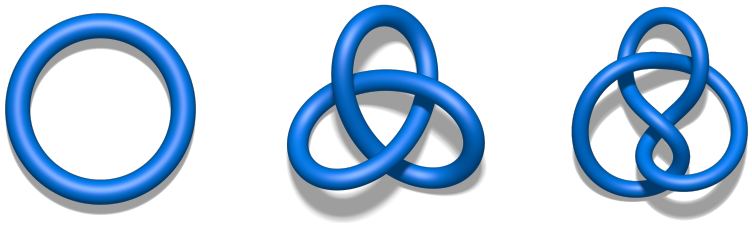


ABBILDUNG L:23. trivialer Knoten, Kleeblattschlinge und Achterknoten

Das Bild $K = \mathrm{im}(\kappa) \subset \mathbb{R}^3$ ist ein (unparametrisierter, polygonaler) Knoten. Einen solchen Knoten K im Raum $\mathbb{R}^3$ können wir (notfalls nach kleiner Drehung) projizieren zu einem Diagramm D in der Ebene $\mathbb{R}^2$, wie in Abbildung L:24 illustriert.

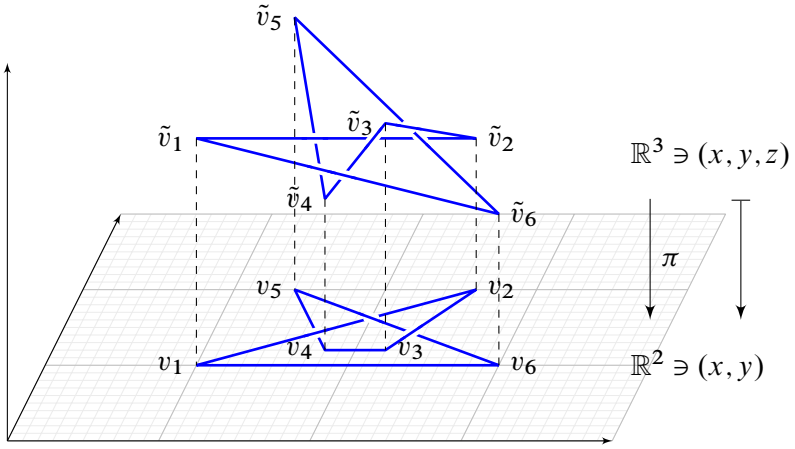


ABBILDUNG L:24. Projektion eines Knotens zu einem ebenen Diagramm

☞ Wir möchten die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus K, x_0)$ des Knotenkomplements bestimmen, also präsentieren durch Erzeuger und Relationen. Hierzu hat Wilhelm WIRTINGER (1865–1945) ein einfaches und effizientes Verfahren angegeben. Als Fußpunkt $x_0 = (0,0,z)$ wählen wir einen Punkt weit über der x–y–Ebene, etwa die Nasenspitze der Betrachter:in. ☜

Wir nummerieren die Bögen $i \in \{1,\dots,n\}$. Jeder Bogen i stiftet dabei einen Erzeuger x_i; hierzu ist die Rechte-Hand-Regel eine bewährte Konvention. Der Erzeuger x_i entspricht dem Weg γ_i vom Fußpunkt einmal um den Bogen und zurück. Am Ende unterkreuzt der Bogen i den Bogen k und wird als Bogen j fortgeführt. Diese Kreuzung stiftet die Wirtinger–Relation $r_i : x_i = x_k^{\varepsilon} x_j x_k^{-\varepsilon}$. Die einzig mögliche Ausnahme ist eine geschlossene Kreislinie i ohne Kreuzungen; diese stiftet einen Erzeuger x_i ohne Relation, formal etwa $r_i : 1 = 1$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

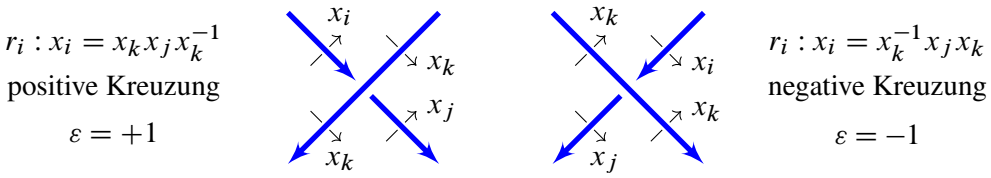


ABBILDUNG L:25. Wirtinger–Kreuzungsrelation $r_i : x_i = x_k^{\varepsilon} x_j x_k^{-\varepsilon}$

Satz L4P (Präsentation der Knotengruppe, Wirtinger 1905)**.** *Jeden polygonalen Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ können wir (nach kleiner Drehung) durch ein Diagramm $D \subset \mathbb{R}^2$ darstellen und daraus die Wirtinger–Präsentation $(S = \{x_1, \dots, x_n\}, R = \{r_1, \dots, r_n\})$ ablesen. Damit gilt*

$$\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x_0) \cong \langle\, x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \,\rangle.$$

Dasselbe gilt allgemein für jeden endlichen, affinen Graphen K im $\mathbb{R}^3$ wie in L4O illustriert. Eckpunkte führen dabei zu Relationen wir in Abbildung L:21 erklärt und in L:26 ausgeführt.

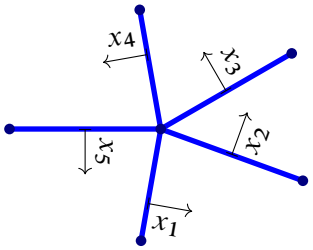


ABBILDUNG L:26. Wirtinger–Eckenrelation $x_1 x_2 \cdots x_k = 1$

BEWEIS / ÜBUNG. Dies ist ein Spezialfall der Wirtinger–Präsentation aus Satz L4M. Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ der „Schatten“ den der Knoten K senkrecht nach unten wirft. Das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus L$ ist einfach zusammenhängend. (Übung: Warum?) Wir beschreiben $L \supset K$ als polytopalen Komplex $\mathscr{L} \geq \mathscr{K}$. Die Wände in $\mathscr{L} \setminus \mathscr{K}$ liefern die Erzeuger S, und die Grate liefern die Wirtinger–Relationen R, wie oben erkärt. (Übung: Wie genau?) □

✻ **L4P.** (1) Wir verschieben den endlichen Graphen K so, dass $K \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{<0}$ gilt. Darunter liegt die Menge $L = \{\,(x,y,z) \mid \exists (x,y,z') \in K : z' \geq z\,\}$. Dann ist $Y = \mathbb{R}^3 \setminus L$ zusammenziehbar, genauer ist $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ in Y ein starker Deformationsretrakt dank $H : [0,1] \times Y \to Y : (t,(x,y,z)) \mapsto (x,y,tz)$.

Übung L4Q. Führen Sie diese Präsentation explizit aus für die drei einfachsten Knoten aus Abbildung L:23: den trivialen Knoten T, die Kleeblattschlinge K und den Achterknoten A. Berechnen Sie jeweils die Abelschmachung. Was fällt Ihnen auf? Zeigen Sie:

Korollar L4R. *Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Knoten ($n = 1$) oder allgemein eine Verschlingung mit n Komponenten ($n \geq 1$). Dann gilt $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x_0)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^n$, also $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong H_1(K)$.*

Die Abelschmachung kann uns also nicht helfen, Knoten zu unterscheiden.

Übung L4S. Konstruieren Sie für die Kleeblattschlinge $K \subset \mathbb{R}^3$ einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi_K \twoheadrightarrow S_3$. Somit ist π_K nicht-abelsch und $(\mathbb{R}^3, K) \ncong (\mathbb{R}^3, T)$. Die Kleeblattschlinge ist somit nicht-trivial, das heißt, sie lässt sich nicht entknoten!

§L4i. Wichtige Ergebnisse zu Knotengruppen. In der Knotengruppe π_K zeichnen wir zwei spezielle Elemente aus: einen *Meridian* $m_K = x_1$ und die zugehörige *Longitude* ℓ_K: Diese umläuft den Knoten einmal parallel zur Knotenlinie und verschwindet in der Abelschmachung $\alpha : \pi_K \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, also $\alpha(m_k) = 1$ und $\alpha(\ell_K) = 0$.

Jeder Knoten K definiert somit nicht nur seine Fundamentalgruppe π_K, sondern ein Tripel (π_K, m_K, ℓ_K) bestehend aus der Gruppe π_K und zwei Elementen $m_K, \ell_K \in \pi_K$. Diese Konstruktion ist eindeutig bis auf Isomorphie solcher Tripel.

Satz L4T (Papakyriakopoulos 1957)**.** *Für jeden Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ sind äquivalent:*

(1) Der Knoten ist trivial, $(\mathbb{R}^3, K) \cong (\mathbb{R}^3, T)$.
(2) Die Knotengruppe ist trivial, $\pi_K = \langle m_K \rangle \cong \mathbb{Z}$.
(3) Die Longitude ist trivial, $\ell_K = 1$ in π_K.
(4) Die Knotengruppe ist abelsch. □

Der Beweis dieses Satzes war ein erster großer Durchbruch für die Knotentheorie. Wir können ihn hier nicht beweisen, doch wir fragen: Wie können wir diesen Satz anwenden? Leider ist das Wortproblem (3) oder die Kommutativität (4) im Allgemeinen algorithmisch unlösbar. Speziell für Knotengruppen rettet uns der folgende, ebenfalls berühmte Satz:

Satz L4U (Thurston 1982)**.** *Für jeden Knoten K ist die Knotengruppe π_K* residuell endlich. *Das bedeutet: Zu jedem nicht-trivialen Element $g \in \pi_K \smallsetminus \{1\}$ existiert ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : \pi_K \twoheadrightarrow G$ auf eine endliche Gruppe G mit $\varphi(g) \neq 1$.*

Der Beweis beruht auf den Arbeiten von Thurston zur hyperbolischen Geometrie von 3–Mannigfaltigkeiten, für die er 1982 die Fields–Medaille erhielt.

Mit diesen beiden Sätzen können wir für jeden Knoten feststellen, ob er trivial ist oder nicht. Der Algorithmus ist überraschend einfach:

Korollar L4V. *Es existiert ein Algorithmus, der zu jedem Knotendiagramm feststellt, ob der dargestellte Knoten trivial ist oder nicht.*

BEWEIS. Wir lesen die Wirtinger–Präsentation (S, R) ab sowie die Wörter für $m_K = x_1$ und ℓ_K in $F(S)$. Nun lassen wir die beiden folgenden Algorithmen parallel laufen:

(1) Wir zählen alle Konsequenzen von R in $F(S)$ auf. Tritt dabei das Wort für ℓ_K auf, so gilt $\ell_K = 1$ in π_K, und der Knoten ist trivial dank L4T.
(2) Wir erzeugen alle Homomorphismen $\varphi : \langle S \mid R \rangle \to S_n$ für $n = 3, 4, 5, \ldots$. Gilt dabei $\varphi(\ell_K) \neq 0$, so gilt $\ell_K = 1$ in π_K, und der Knoten ist nicht-trivial dank L4T.

Dank L4U tritt einer der beiden Fälle ein. Insgesamt liefert unsere Suche also in endlicher Zeit die richtige Antwort (jeweils zusammen mit einem effizient prüfbaren Zertifikat). □

Damit ist das Entknotungsproblem im Prinzip gelöst, oder sagen wir vorsichtiger: Es ist algorithmisch lösbar. Leider ist dieser simple Algorithmus furchtbar ineffizient. Die Knotentheorie hat in den letzten Jahrzehnte spektakuläre Erfolge erzielt, doch Stand 2022 bleibt es weiterhin offen, ob das Entknotungsproblem in polynomieller Zeit gelöst werden kann.

Übung L4W. Nennen Sie möglichst viele Gruppen, die residuell endlich sind, und solche, die es nicht sind. Untersuchen Sie $(\mathbb{K}, +)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, sodann $\mathrm{GL}_1 \mathbb{K}$ und $\mathrm{GL}_2 \mathbb{K}$, ebenso $S = \{\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \mid \sharp\,\mathrm{supp}(\sigma) < \infty\}$ und $A = \{\sigma \in S \mid \mathrm{sign}(\sigma) = +1\}$.

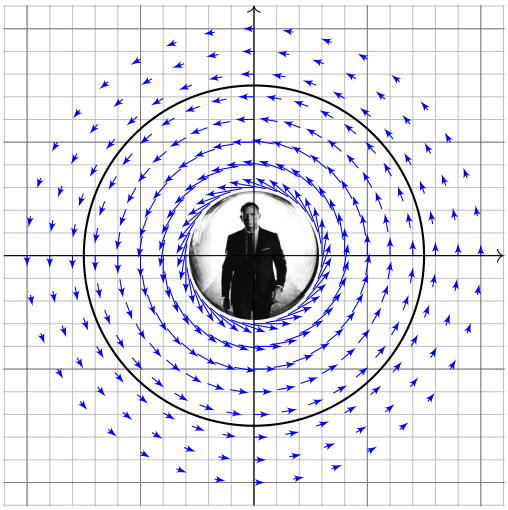
© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L5. Wegintegrale und Potentiale von Vektorfeldern

§L5a. Wegintegrale von Vektorfeldern. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig; wir nennen f ein *Vektorfeld*. Sei $\gamma : [a,b] \to U$ stetig, also ein Weg, und zudem stückweise stetig differenzierbar. Das *Arbeitsintegral*, oder kurz *Wegintegral*, von f längs γ ist dann

$$\text{(L.1)}\quad \int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma := \int_\gamma f(s) \cdot \mathrm{d}s := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{wobei } s = \gamma(t),\ \mathrm{d}s = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Physikalisch können wir uns f als Kraftfeld vorstellen. Der Weg γ beschreibt die Bewegung eines Teilchens. Die dabei geleistete Arbeit summieren bzw. integrieren wir gemäß Arbeit = Kraft · Weg; das Skalarprodukt misst nur den Kraftanteil in Wegrichtung.



Als zentrales Beispiel kennen wir bereits die Berechnung der Umlaufzahl als Arbeitsintegral des Wirbelfeldes (§J1j), rechts skizziert.

Die Topologie nutzt allgemein $\mathscr{C}^0$–Wege $\gamma : [a,b] \to U$. Glücklicherweise ist in jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ genug Platz zur polygonalen Approximation (L4B). Im Folgenden können und werden wir daher alle Wege $\gamma : [a,b] \to U$ als stückweise stetig differenzierbar annehmen, geschrieben $P'(U) \subset P(U)$.

Proposition L5A. *Das Integral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma$ ist invariant bei Umparametrisierung von γ.*

BEWEIS. Sind $\gamma : [a,b] \to U$ und $\varphi : [\tilde{a},\tilde{b}] \to [a,b]$ stückweise $\mathscr{C}^1$ mit $\varphi(\tilde{a}) = a$ und $\varphi(\tilde{b}) = b$, so erhalten wir als Komposition den Weg $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : [\tilde{a},\tilde{b}] \to U$. Dieser ist stückweise $\mathscr{C}^1$, und wir erhalten sein Arbeitsintegral $\int_{\tilde{\gamma}} f \cdot \mathrm{d}\tilde{\gamma}$ durch Substitution $t = \varphi(u)$:

$$\int_{u=\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(u)) \cdot \tilde{\gamma}'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{u=\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\gamma(\varphi(u)) \cdot \gamma'(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Insbesondere können wir fortan alle Integrationswege durch $[0,1]$ parametrisieren.

Korollar L5B. *Das Wegintegral des Vektorfeldes $f : U \to \mathbb{R}^n$ definiert eine Abbildung*

$$I_f \;:\; (P'(U), *) \to (\mathbb{R}, +) \;:\; \gamma \mapsto \textstyle\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma.$$

(1) Für jeden konstanten Weg $\gamma = 1_x : [0,1] \to U : t \mapsto x$ gilt $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$.
(2) Für den zu γ inversen Weg $\bar{\gamma}$ mit $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ gilt $\int_{\bar{\gamma}} f \cdot \mathrm{d}\gamma = -\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma$.
(3) Für die Aneinanderhängung $\gamma = \alpha * \beta$ gilt $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha + \int_\beta f \cdot \mathrm{d}\beta$. □

Bemerkung. Wir erhoffen uns einen Funktor $\Pi(U) \to \mathbb{R}$, doch im Allgemeinen ändert sich das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma$ bei Homotopie von γ. Invarianz gilt, wenn f *rotationsfrei* ist, wie wir in L5L zeigen und im Hauptsatz L5M zur Integrabilitätsbedingung nutzen.

§L5b. Gradientenfelder und Potentiale. Besonders leicht gelingt die Berechnung von Arbeitsintegralen $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma$, wenn das Vektorfeld f ein Potential besitzt: Zu jedem stetig differenzierbaren Skalarfeld $F : U \to \mathbb{R}$ ist das *Gradientenfeld* gegeben durch

$$F' : U \to \mathbb{R}^n, \qquad F' = \operatorname{grad} F = \big(\partial_1 F, \dots, \partial_n F\big) = \Big(\tfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial F}{\partial x_n}\Big).$$

Ein *Potential* zum Vektorfeld $f \in \mathscr{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ ist ein Skalarfeld $F \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ mit $F' = f$. Mit F ist auch $F + \text{const}$ ein Potential; sie sind bis auf additive Konstanten eindeutig (L5F).

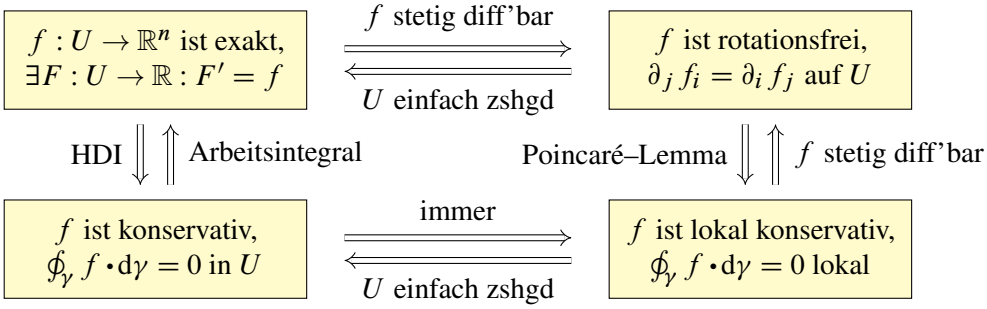
Satz L5C. *Für jedes Gradientenfeld $f = F' : U \to \mathbb{R}^n$ und jeden Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt*

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_{t=a}^{b} F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=a}^{b} \frac{\mathrm{d}F(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{L.2}$$

Das Arbeitsintegral hängt hier nicht vom Weg γ ab, sondern nur von Startpunkt $p = \gamma(a)$ und Zielpunkt $q = \gamma(b)$. Ist γ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$. □

Bemerkung. Physikalisch entspricht das Potential der Energieerhaltung: Die zur Bewegung entlang γ aufgebrachte Arbeit wird als Lageenergie gespeichert. Längs geschlossener Wege wird insgesamt keine Arbeit verrichtet. Jede an einer Stelle des Weges aufgewandte Energie wird an anderer Stelle zurückgewonnen, die Gesamtenergie bleibt erhalten.

§L5c. Potentialproblem. Hat ein gegebenes Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential? Wenn ja, wie können wir eines berechnen? Hierzu wollen wir praktische Methoden entwickeln. Satz L5C ist ein erster Schritt: Aus $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma \neq 0$ folgt, dass f kein Potential haben kann. Allgemein gelten folgende Zusammenhänge, die wir anschließend beweisen wollen.



Dies ist eine mehrdimensionale Fortsetzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (L5C). Ab Dimensionen $n \geq 2$ treten zwei Hindernisse auf: lokale Bedingungen an das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ und globale Bedingungen an das Gebiet U.

Definition L5D. Ein Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt *exakt* oder *Gradientenfeld*, wenn es ein Potential erlaubt, also ein Skalarfeld $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ existiert. Es heißt *konservativ* oder *global wirbelfrei*, wenn $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt.

Ein $\mathscr{C}^1$–Vektorfeld f heißt *rotationsfrei*, wenn $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ gilt, also die Jacobi–Matrix $(\partial_j f_i)_{i,j}$ symmetrisch ist. In Dimension $n = 2, 3$ ist dies gleichbedeutend mit $\operatorname{rot}(f) = 0$.

Bemerkung. Konservativ bedeutet: Arbeitsintegrale hängen nur von Start p und Ziel q ab. Sind nämlich $\alpha, \beta : [0,1] \to U$ zwei Wege von $\alpha(0) = \beta(0) = p$ nach $\alpha(1) = \beta(1) = q$, so ist $\gamma = \alpha * \bar{\beta}$ ein geschlossener Weg. Für diesen gilt $0 = \oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha - \int_\beta f \cdot \mathrm{d}\beta$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L5d. Konstruktion von Potentialen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (L5C) erlaubt wie im ein- so auch im mehrdimensionalen folgende Umkehrung:

Satz L5E (exakt ⇔ konservativ)**.** *Besitzt das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential F, so ist f konservativ. Ist umgekehrt f konservativ, so ist $F(x) = \int_{s=x_0}^{x} f(s)\cdot \mathrm{d}s$ ein Potential.*

BEWEIS. „⇒“: Für das Gradientenfeld $f = F' : U \to \mathbb{R}^n$ und jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) = 0$ dank L5C.

„⇐“: Wir können und werden im Folgenden U als (weg)zusammenhängend annehmen. Wir wählen einen Fußpunkt $x_0 \in U$ und definieren die Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_{s=x_0}^{x} f(s)\cdot \mathrm{d}s = \int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_{t=0}^{1} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Hierbei ist $\gamma : [0,1] \to U$ ein beliebig gewählter Weg von $\gamma(0) = x_0$ nach $\gamma(1) = x$. Das Integral $F(x)$ ist wohldefiniert, da nach Voraussetzung unabhängig vom gewählten Weg γ.

Wir haben zu zeigen, dass F ein Potential ist, also $\partial_i F = f_i$ für alle $i = 1,\dots,n$ gilt. Hierzu betrachten wir einen kurzen Weg $\delta : [0,h] \to U$ mit $\delta(t) = x + te_i$ und berechnen

$$g(h) := F(x+he_i) - F(x) = \int_\delta f \cdot \mathrm{d}\delta = \int_{t=0}^{h} f(x+te_i)\cdot e_i\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{h} f_i(x+te_i)\,\mathrm{d}t.$$

Dank eindimensionalem HDI gilt $g'(0) = f_i(x)$, also ausgeschrieben

$$\partial_i F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+he_i)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = g'(0) = f_i(x). \qquad \square$$

Übung L5F. (1) Eine $\mathscr{C}^1$–Funktion $c : U \to \mathbb{R}$ erfüllt $c' = 0$ genau dann, wenn sie lokal konstant ist, das heißt konstant auf jeder (Weg)Komponente von U.

(2) Ist $c' = 0$ und $F : U \to \mathbb{R}$ ein Potential zum Vektorfeld $f = F'$, so auch $G = F + c$. Sind $F, G : U \to \mathbb{R}$ Potentiale zum Vektorfeld $f = F' = G'$, so gilt $G = F + c$ mit $c' = 0$.

✻ **L5F.** (1) „⇒“: Da $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, stimmen Zusammenhang und Wegzusammenhang überein (G3C). Zu je zwei Punkten $p, q \in U$ derselben Wegkomponente existiert ein Weg γ von $\gamma(0) = p$ nach $\gamma(1) = q$, dank J1B sogar polygonal. Dank L5C gilt $c(q) - c(p) = \int_{t=0}^{1} c'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Die weiteren Aussagen sind klar.

§L5e. Satz von Schwarz und Rotationsfreiheit. Satz L5E bietet vorläufig folgende Teillösung des Potentialproblems: Genau dann erlaubt das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential, wenn $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt. Das ist ein *globales* Kriterium und erfordert die Prüfung *aller* Wege in U. Integrieren ist meist mühsam, Differenzieren ist leichter, daher nutzen wir folgendes *lokale* (infinitesimale) Kriterium:

Satz L5G (Schwarz)**.** *Jede $\mathscr{C}^2$–Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ erfüllt $\partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F$ für alle i, j. Jedes $\mathscr{C}^1$–Gradientenfeld $f = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F) : U \to \mathbb{R}^n$ ist somit rotationsfrei.* $\square$

Übung L5H. Ohne die Stetigkeit der zweiten Ableitungen gilt die Vertauschbarkeit im Allgemeinen nicht. Illustrieren Sie dies ausführlich an folgendem klassischen Beispiel:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

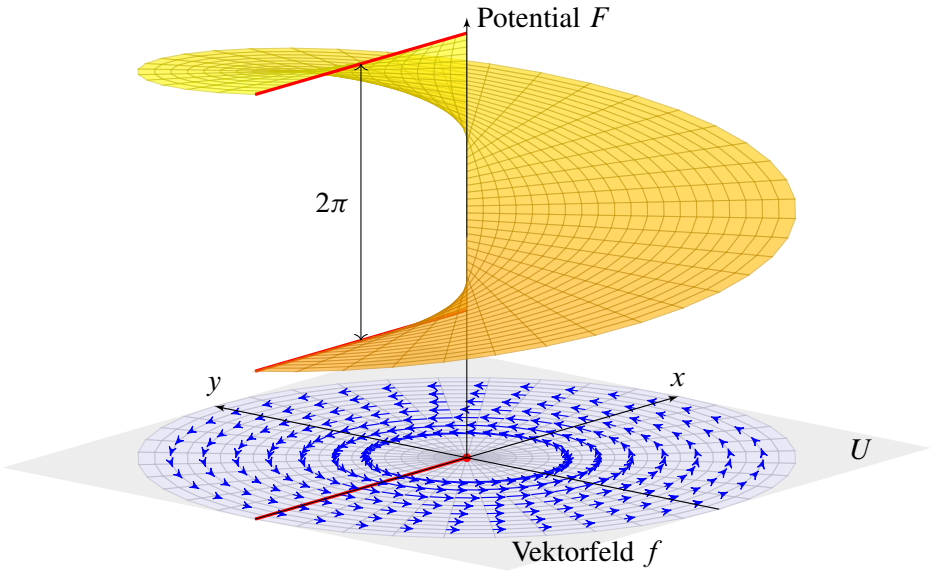
✻ **L5H.** Die Funktion F ist stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, auch in $(0,0)$. Die Ableitungen $\partial_x F$, $\partial_y F$ sind stetig und ihrerseits differenzierbar. Aber $\partial_y \partial_x F$ und $\partial_x \partial_y F$ sind in $(0,0)$ unstetig. Hier gilt $\partial_y \partial_x F \neq \partial_x \partial_y F$:

$$(\partial_y F)(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\ (\partial_y F)(x,0) = \frac{x^5}{x^4} = x, \qquad (\partial_y F)(0,0) = 0,\ (\partial_x \partial_y F)(0,0) = +1,$$
$$(\partial_x F)(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\ (\partial_x F)(0,y) = \frac{-y^5}{y^4} = -y,\ (\partial_x F)(0,0) = 0,\ (\partial_y \partial_x F)(0,0) = -1.$$

Übung L5I. Als klassische Anwendung betrachten wir das eingangs skizzierte Wirbelfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} =: U \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \frac{(-y,x)}{(x^2+y^2)}.$$

(1) Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f)$. (2) Existiert ein Potential zu f auf ganz U? (3) Existiert ein Potential zu $f|_V$ eingeschränkt auf das Schlitzgebiet $V = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \cdot (1,0)$?



✻ **L5I.** (1) Nach kurzer aber sorgfältiger Rechnung finden Sie $\operatorname{rot}(f) = 0$. Oft wird voreilig geschlossen, dass $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein Potential besitzt. Der Satz von Schwarz (L5G) besagt nur, dass $\operatorname{rot}(f) = 0$ *notwendig* ist, aber *hinreichend* ist dies im Allgemeinen noch nicht! Dieser Fehlschluss vernachlässigt fahrlässig die (topologische) Form des Definitionsgebiets: U ist nicht einfach zusammenhängend. Wir schauen also genauer hin:

(2) Nein, zu $f : U \to \mathbb{R}^2$ existiert kein Potential $F : U \to \mathbb{R}$: Für den Weg $\gamma : [0,1] \to U : t \mapsto (r\cos t, r \sin t)$ mit $r > 0$ gilt $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 2\pi \neq 0$. Somit ist f nicht konservativ (L5D), daher auch nicht exakt (L5C). Anders als in U umrundet kein Weg in V den Nullpunkt. Genügt das bereits? Wir schauen auch hier genauer hin:

(3) Das Gebiet V ist einfach zusammenhängend, genauer gesagt sternförmig zu $(1,0)$. Tatsächlich finden wir zur Einschränkung $f|_V : V \to \mathbb{R}^2$ ein Potential, allgemein durch Integration (L5E), speziell hier auch einfach und direkt geometrisch: Wir ordnen jedem Punkt $v = (x,y) \in U$ den Winkel $F(x,y) = \sphericalangle(e_1, v)$ zu, wie in §J1g erklärt. Für $x > 0$ gilt $F(x,y) = \arctan(y/x)$, für $y \gtrless 0$ gilt $F(x,y) = \pm\pi/2 - \arctan(x/y)$. Diese Funktion ist wohldefiniert, stetig differenzierbar und erfüllt $F' = f$, wie man direkt nachrechnet.

Bemerkung. Nochmal zur Betonung: Ab Dimensionen $n \geq 2$ treten der Existenz eines Potentials zwei Hindernisse entgegen: Die lokale Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist notwendig für jedes $\mathscr{C}^1$–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$. Zudem benötigen wir globale Eigenschaften des Gebiets U, hinreichend ist etwa konvex, sternförmig (L5K) oder einfach zusammenhängend (L5N).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L5f. Lösung des zweidimensionalen Potentialproblems. Sei $U := B(z,r) \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Kreisscheibe um $z \in \mathbb{R}^2$. Nach Verschieben dürfen wir $z = (0,0)$ annehmen.

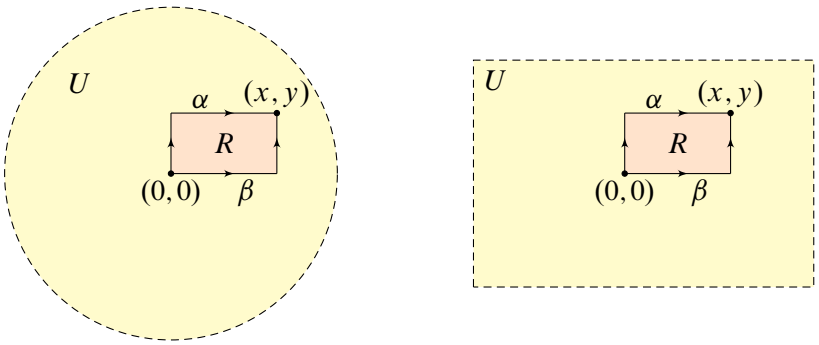


ABBILDUNG L:27. Hakenintegrale von $p = (0,0)$ nach (x,y) in $U \subset \mathbb{R}^2$

Übung L5J. Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ stetig auf $U = B(0,r)$. Wir betrachten die skizzierten Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to U$ von $(0,0)$ nach (x,y) und definieren die sogenannten *Hakenintegrale*

$$G, H : U \to \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad G(x,y) := \int_\alpha f(s) \cdot \mathrm{d}s \quad \text{und} \quad H(x,y) := \int_\beta f(s) \cdot \mathrm{d}s.$$

Wir wollen untersuchen, wann G bzw. H ein Potential zu f ist.

(1) Schreiben Sie die obigen Wegintegrale von f entlang α und β explizit aus. Berechnen Sie so die partiellen Ableitungen $\partial_x G = f_1$ und $\partial_y H = f_2$.
(2) Sind die folgenden Aussagen äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort.
  (A) Es existiert ein Potential F zu f, das heißt $F \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ mit $F' = f$.
  (B) Es gilt $\oint_{\partial R} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0$ für jedes Rechteck $R = [a,b] \times [c,d] \subset U$.
  (C) Es gilt $G = H$, also $G(x,y) = H(x,y)$ für jeden Punkt $(x,y) \in U$.
(3) Welche Implikationen gelten zur lokalen Potentialbedingung?
  (A') Zu f existiert lokal ein Potential: Zu jedem Punkt $p \in U$ existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(p,\varepsilon) \subset U$ und ein $\mathscr{C}^1$–Potential $F : B(p,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $F' = f|_{B(p,\varepsilon)}$.
(4) Sei zudem $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R}^2)$. Welche Implikationen gelten für die Rotation?
  (B') Die Rotation $\operatorname{rot}(f) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1$ verschwindet auf ganz U.
(5) Welche dieser Implikationen gelten noch, wenn U ein Rechteck ist?
(6) Welche gelten, wenn U ein beliebiges Gebiet ist, evtl. mit Löchern?

Als konkrete Illustration untersuchen wir auf dem Gebiet $U = \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \left(axy,\, x^2 - by\, \mathrm{e}^{-y^2/2}\right).$$

(7) Für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ erlaubt f ein Potential $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? Nur für diese Fälle wird das Vektorfeld f im Folgenden noch weiter untersucht:
(8) Berechnen Sie ein Potential F zu f: Ergeben beide Hakenintegrale dasselbe?
(9) Berechnen Sie die Arbeitsintegrale von f entlang der Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (\cos(\pi t)^4, t - t^3)$ und $\gamma_2(t) = (\sin(\pi t/2)^6, t^6 + t^3 - t)$.

Bemerkung. Die Natur ist recht subtil, daher auch die hier genannten Zusammenhänge. Sie verstehen sie nur, indem Sie Argumente und (Gegen-)Beispiele sorgfältig durchgehen.

✻ **L5J.** Sei zunächst $U = B(0,r)$ eine Kreisscheibe. (1) Die beiden Wegintegrale bedeuten ausgeschrieben: $G(x,y) = \int_{t=0}^{y} f_2(0,t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{x} f_1(t,y)\,\mathrm{d}t$ und $H(x,y) = \int_{t=0}^{x} f_1(t,0)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{y} f_2(x,t)\,\mathrm{d}t$. Dank HDI gilt $\partial_x G(x,y) = f_1(x,y)$ und $\partial_y H(x,y) = f_2(x,y)$. *Warnung:* Zu $\partial_y G$ und $\partial_x H$ wissen wir noch nichts. Wir können nicht unter den Integralen ableiten, solange wir nur $f \in \mathscr{C}^0$ wissen. Für $f \in \mathscr{C}^1$ siehe (4).

(2) Wir beweisen die Äquivalenz durch (A) ⇒ (B) ⇒ (C) ⇒ (A). Es gilt „(A) ⇒ (B)“ dank HDI (L5C).

„(B) ⇒ (C)“: Für $R = [0,x]\times[0,y] \subset U$ finden wir $H(x,y) - G(x,y) = \oint_{\partial R} f(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

„(C) ⇒ (A)“: Dank (1) und $G = H$ gilt $\operatorname{grad} G = f$, also ist G ein Potential.

(3) Die Implikation „(A) ⇒ (A')“ ist trivial. Wir zeigen „(A') ⇒ (B)“: Dank Kompaktheit des Rechtecks $R = [a,b]\times[c,d]$ existiert zur offenen Überdeckung $R = \bigcup_{i\in I} B(p_i,\varepsilon_i)$ eine Lebesgue–Zahl $\delta = 2/n$ (F2B). Wir unterteilen R in n^2 gleich große Teilrechtecke R_{jk}. Für jedes R_{jk} gilt $\operatorname{diam}(R_{jk}) < \delta$, daher existiert ein $i \in I$ mit $R_{ij} \subset B(p_i,\varepsilon_i)$ für ein $i \in I$, also $\oint_{\partial R_{ij}} f(s)\cdot\mathrm{d}s = 0$ dank L5C. Bei der Summation über alle j,k löschen sich innere Kanten paarweise aus, und wir erhalten $\oint_{\partial R} f(s)\cdot\mathrm{d}s = \sum_{j,k} \oint_{\partial R_{ij}} f(s)\cdot\mathrm{d}s = 0$.

(4) „(A') ⇒ (B')“: Sei F ein lokales Potential zu f, also $F' = f$ auf $B(p,\varepsilon)$. Dank der zusätzlichen Annahme $f \in \mathscr{C}^1$ gilt $F \in \mathscr{C}^2$. Der Satz von Schwarz (L5G) garantiert dann $\partial_x f_2 = \partial_x\partial_y F = \partial_y\partial_x F = \partial_y f_1$.

„(B') ⇒ (A')“: Aus $G(x,y) = \int_{t=0}^{y} f_2(0,t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{x} f_1(t,y)\,\mathrm{d}t$ folgt $\partial_x G = f_1$ wie in (1). Gilt zudem $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R}^n)$, so können wir unter dem Integral ableiten und die Rotationsfreiheit $\partial_x f_2 = \partial_y f_1$ nutzen: $\partial_y G(x,y) = f_2(0,y) + \int_{t=0}^{x} \partial_y f_1(t,y)\,\mathrm{d}t = f_2(0,y) + \int_{t=0}^{x} \partial_x f_2(t,y)\,\mathrm{d}t = f_2(0,y) + f_2(x,y) - f_2(0,y)$. Somit gilt $\partial_x G = f_1$ und $\partial_y G = f_2$, das heißt, G ist ein Potential zu f. (Dieselbe Rechnung gilt für H.)

(5) Alle Argumente gelten wörtlich genauso für jedes Rechteck $U \subset \mathbb{R}^2$, insbesondere auch für $U = \mathbb{R}^2$.

(6) Allgemein gilt (A) ⇒ (B) ⇔ (A') ⇔ (B'), wie gerade bewiesen. Der Beweis zu „(B') ⇒ (A')“ gelingt lokal, insbesondere auf Kreisscheiben und Rechtecken. *Warnung:* Die naiv erhoffte Implikation „(B') ⇒ (A)“ gilt nicht für alle Gebiete $U \subset \mathbb{R}^2$, wie das Wirbelfeld (L5I) zeigt. Hüten Sie sich vor diesem weitverbreiteten Irrglauben! Für allgemeine Gebiete $U \subset \mathbb{R}^n$ siehe Satz L5M. *Bemerkung:* Die Integrale G, H in (C) haben keinen Sinn, wenn die Integrationswege α, β aus dem Definitionsgebiet U von f hinauslaufen. Für die obigen Beweise benötigen wir zudem $R = [0,x]\times[0,y] \subset U$. Gehen Sie alle Argumente nochmal sorgsam durch.

(7) Hier gilt $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. Wir prüfen zunächst das besonders bequeme infinitesimale Kriterium (B'): $\operatorname{rot}(f) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 = 2x - ax$. Für $a \neq 2$ gilt $\operatorname{rot}(f) \neq 0$, und somit kann f kein Potential haben. Für $a = 2$ gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ und f hat (zumindest lokal) ein Potential. Das Definitionsgebiet $U = \mathbb{R}^2$ ist hier glücklicherweise ein Rechteck, daher existiert ein globales Potential $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F = f$.

(8) Zu $f(x,y) = (axy, x^2 - by\exp(-y^2/2))$ suchen wir $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$. Nur für $a = 2$ lohnt die Suche: Dank (1) existiert genau dann eine Lösung! Wir lassen aus Neugier $a \neq 2$ zu und sehen wo's scheitert.

(8a) Wir berechnen das Hakenintegral von $(0,0)$ über $(0,y)$ nach (x,y):

$$G(x,y) = \int_{t=0}^{y} -bt\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{x} aty\,\mathrm{d}t = \Big[b\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big]_{t=0}^{y} + \Big[\frac{a}{2}t^2 y\Big]_{t=0}^{x} = b\,\mathrm{e}^{-y^2/2} - b + \frac{a}{2}x^2 y$$

Wir machen wie immer die Probe: $\partial_x G = axy = f_1$, aber $\partial_y G = \frac{a}{2}x^2 - by\,\mathrm{e}^{-y^2/b} \stackrel{!}{=} f_2$ erfordert $a = 2$!

(8b) Wir berechnen das Hakenintegral von $(0,0)$ über $(x,0)$ nach (x,y):

$$H(x,y) = \int_{t=0}^{y} x^2 - bt\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \Big[x^2 t + b\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big]_{t=0}^{y} = x^2 y + b\,\mathrm{e}^{-y^2/2} - b$$

Wir machen wie immer die Probe: $\partial_y H = x^2 - by\exp(-y^2/b) = f_2$, aber $\partial_x H = 2xy \stackrel{!}{=} f_1$ erfordert $a = 2$! Die Rechenwege (hier: Integrationswege) sind verschieden, doch die Ergebnisse sind gleich! Das gilt nur für $a = 2$; für $a \neq 2$ scheitert unsere Rechnung, gemäß (7) auch jede andere! Für $a = 2$ erhalten wir das Potential $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 y + b\exp(-y^2/2) + \text{const}$. Die Probe $F' = f$ ist wie immer schnell und sicher.

(9) Die Integrationswege γ_k sind hier kompliziert; das ist Absicht. Die direkte Berechnung der Arbeitsintegrale $\int_{\gamma_k} f(s)\cdot\mathrm{d}s$ ist zwar möglich aber mühsam – und dadurch lang und fehleranfällig. Dank unserer Vorarbeit können wir das Potential F nutzen! Der Weg γ_1 läuft von $\gamma_1(0) = (1,0)$ nach $\gamma_1(1) = (1,0)$. Dank HDI (L5C) gilt $\int_{\gamma_1} f(s)\cdot\mathrm{d}s = [F(\alpha(t))]_{t=0}^{1} = 0$. Hierzu genügt bereits die Existenz eines Potentials (7), seine Berechnung (8) ist entbehrlich. Der Weg γ_2 läuft von $\gamma_2(0) = (0,0)$ nach $\gamma_2(1) = (1,1)$. Dank HDI (L5C) gilt $\int_\beta f(s)\cdot\mathrm{d}s = F(\beta(1)) - F(\beta(0)) = b/\sqrt{\mathrm{e}}$. Hier nutzen wir unsere explizite Berechnung (8). Wunderbar!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L5g. Das Poincaré–Lemma. Satz L5G besagt: Exaktheit impliziert Rotationsfreiheit für jedes $\mathscr{C}^1$–Vektorfeld. Dieses praktische Kriterium ist notwendig aber nicht hinreichend! Aus $\partial_j f_i \neq \partial_i f_j$ folgt, dass f kein Potential haben kann. Aber allein aus $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ folgt noch nicht, dass $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential hat, wie L5I zeigt. Übung L5J löst dieses Problem, falls U eine Kreisscheibe oder ein Rechteck ist. Allgemeiner gilt:

Satz L5K (Poincaré–Lemma)**.** *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich $p \in U$, so gilt: Ein $\mathscr{C}^1$–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann ein Potential F, wenn f rotationsfrei ist. In diesem Fall ist $F : U \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch die Konstante $F(p) \in \mathbb{R}$ und das Wegintegral*

$$F(p+x) = F(p) + \int_{t=0}^{1} f(p+tx)\cdot x \,\mathrm{d}t.$$

Beispiel. Das Wirbelfeld $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ (L5I) ist rotationsfrei, aber das Definitionsgebiet $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist nicht sternförmig. Tatsächlich hat f kein Potential. Hingegen ist das Gebiet $V = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0}\cdot(1,0)$ sternförmig und $f|_V$ besitzt ein Potential $F : V \to \mathbb{R}$, wie wir explizit ausgerechnet haben. Der folgende Satz liefert hierzu die allgemeine Konstruktion.

BEWEIS. Die Implikation „⇒“ folgt aus dem Satz von Schwarz. Wir zeigen nur noch „⇐“: Nach Verschiebung sei $p = 0$. Wenn es eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{R}$ gibt, so gilt $\mathrm{d}F(tx)/\mathrm{d}t = f(tx)\cdot x$. Wir definieren daher $F : U \to \mathbb{R}^n$ durch $F(x) := \int_{t=0}^{1} f(tx)\cdot x \,\mathrm{d}t$. Partielle Ableitung des Integranden nach x_i ergibt dank Produktregel und Rotationsfreiheit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f(tx)\cdot x\Big] &= \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{n} f_k(tx)\,x_k = f_i(tx) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(tx)\,tx_k \\ &= f_i(tx) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(tx)\,tx_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[tf_i(tx)\Big]\end{aligned}$$

Die Funktion $(t,x) \mapsto f(tx)\cdot x$ ist stetig differenzierbar nach $x_1,\dots,x_n$. Wir integrieren über $t \in [0,1]$, also ein Kompaktum. In diesem Falle vertauschen Ableitung und Integral:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{t=0}^{1} f(tx)\cdot x\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{1}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f(tx)\cdot x\Big]\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[tf_i(tx)\Big]\mathrm{d}t = \Big[tf_i(tx)\Big]_{t=0}^{1} = f_i(x)\end{aligned}$$

Dies zeigt $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in U$, also ist $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld. □

Korollar L5L. *Sei $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ rotationsfrei, also $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ für alle i, j. Dann ist das Wegintegral $\int_\gamma f\cdot\mathrm{d}\gamma$ homotopie-invariant und definiert somit einen Funktor*

$$I_f : (\Pi(U),\cdot) \to (\mathbb{R},+) : [\gamma] \mapsto \int_\gamma f\cdot\mathrm{d}\gamma.$$

Speziell erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $I_f : \pi_1(U,x_0) \to \mathbb{R}$.

BEWEIS. Wir nutzen polygonale Wege, dank $\Pi^{\mathrm{pl}}(X) \cong \Pi(U)$ wie in Satz L4B erklärt. Jeder polygonale Weg $\gamma : [0,1] \to U$ ist stückweise stetig differenzierbar, also ist das Integral $\int_\gamma f\cdot\mathrm{d}\gamma$ definiert. Jede polygonale Homotopie ändert den Weg $\gamma \sim \tilde\gamma$ nur in einer sternförmigen offenen Menge $V \subset U$. Auf dieser erlaubt f ein Potential (L5K), also bleibt das Integral unverändert: $\int_\gamma f\cdot\mathrm{d}\gamma = \int_{\tilde\gamma} f\cdot\mathrm{d}\tilde\gamma$. (Machen Sie sich eine Skizze!) □

§L5h. Globale Lösung. Damit können wir das Potentialproblem abschließend lösen:

Satz L5M. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Genau dann besitzt ein $\mathscr{C}^1$–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(1) Das Vektorfeld f ist rotationsfrei, erfüllt also $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ für alle i, j.
(2) Der Gruppenhomomorphismus $I_f : \pi_1(U, x_0) \to \mathbb{R} : [\gamma] \mapsto \oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma$ ist trivial.

In diesem Fall erhalten wir ein Potential durch das (wohldefinierte!) Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=x_0}^{x} f \cdot \mathrm{d}s = \int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma \quad \text{mit} \quad \gamma : [0,1] \to U,\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma(1) = x.$$

BEWEIS. „⇒“: Angenommen, es existiert ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$. Aussage (1) ist der Satz von Schwarz (L5G), und (2) folgt aus dem HDI (L5C).

„⇐“: Dank (1) ist I_f wohldefiniert. Gilt (2), so ist f konservativ, denn $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg. Gemäß L5E definiert das Arbeitsintegral dann ein Potential. □

Bemerkung. Die Bedingung (1) an f ist lokal, die Bedingung (2) an U ist global.

Durch Ableiten lässt sich (1) meist leicht nachprüfen. Für (2) hilft oft folgendes vereinfachte Kriterium: Ist U konvex oder sternförmig oder auch nur einfach zusammenhängend, so ist die Gruppe $\pi_1(U, x_0)$ trivial, somit auch der Gruppenhomomorphismus I_f.

Ist die Gruppe $\pi_1(U, x_0)$ nicht trivial, so muss die Bedingung (2) durch Integrale getestet werden. Im Allgemeinen ist die Gruppe $\pi_1(U, x_0)$ unendlich, glücklicherweise müssen wir nicht alle Gruppenelemente $[\gamma] \in \pi_1(U, x_0)$ integrieren, sondern nur Erzeuger.

Da die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ abelsch ist, faktorisiert $I_f : \pi_1(U, x_0) \to \mathbb{R}$ zu einem Gruppenhomomorphismus $I_f : \pi_1(U, x_0)_{\mathrm{ab}} \to \mathbb{R}$ auf der Abelschmachung. Daher genügt es sogar, Bedingung (2) auf Erzeugern der (meist viel kleineren) Gruppe $\pi_1(U, x_0)_{\mathrm{ab}}$ zu testen.

Korollar L5N (Potentiale auf einfach zusammenhängenden Gebieten)**.** *Das Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ sei sternförmig oder einfach zusammenhängend, oder zumindest gelte $\pi_1(U, x_0)_{\mathrm{ab}} = \{1\}$. Ein $\mathscr{C}^1$–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf einem solchen Gebiet erlaubt genau dann ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$, wenn f rotationsfrei ist, also $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ erfüllt.* □

Zur Illustration aller benutzten Techniken löse man folgendes Anwendungsbeispiel:

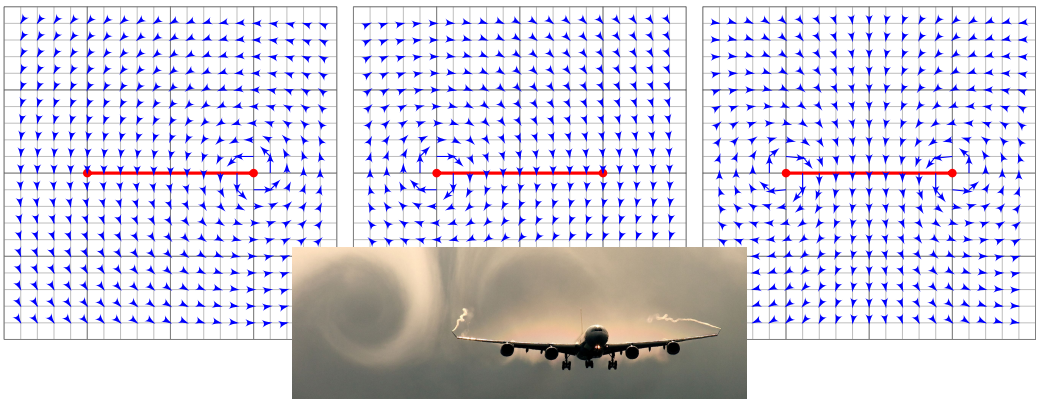


ABBILDUNG L:28. Gegenläufige Wirbelfelder und ihre Superposition

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung L5O. Auf dem Gebiet $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus ([-1,1]\times\{0\})$ betrachten wir

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{(x-1)^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x-1\end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{-1}{(x+1)^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x+1\end{pmatrix},$$

(1) Skizzieren Sie die Felder f, g und ihre Superposition $h = f + g$.
(2) Bestimmen Sie die Rotation. Besitzt f ein Potential auf U? und g? und h?
(3) Bestimmen Sie jeweils möglichst explizit ein Potential auf U, falls existent.

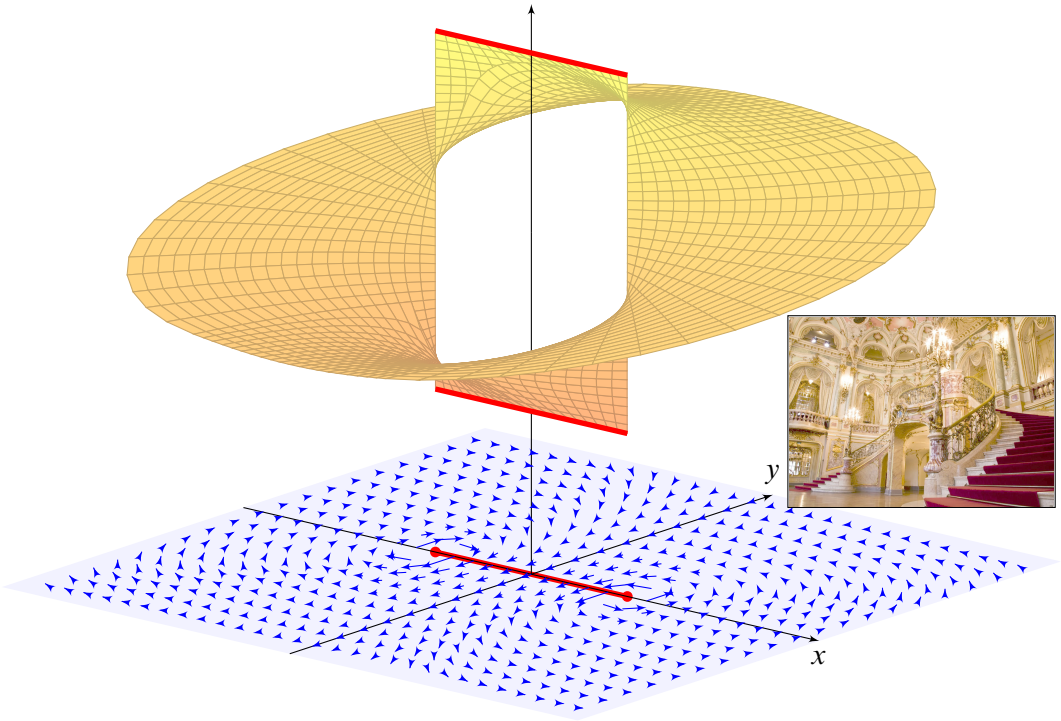
✻ **L5O.** (1) Abbildung L:28 zeigt die Vektorfelder: Das Feld f ist das rechtsdrehende Wirbelfeld um den Pol $(1,0)$. Entsprechend ist g das linksdrehende Wirbelfeld um den Pol $(-1,0)$. Ihre Superposition $h = f + g$ ergibt sich durch punktweise Addition der Vektoren. (2) Für beide Wirbelfelder gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ und $\operatorname{rot}(g) = 0$, wie man durch Ableiten nachprüft, und somit auch $\operatorname{rot}(h) = 0$. (3) Das Feld f hat auf U kein Potential, denn $\oint_{\partial B((1,0),3)} f \cdot \mathrm{d}s = 2\pi \neq 0$. Ebenso hat g auf U kein Potential, denn $\oint_{\partial B((-1,0),3)} g \cdot \mathrm{d}s = -2\pi \neq 0$.

Das Feld $h : U \to \mathbb{R}^2$ hingegen hat ein Potential $H : U \to \mathbb{R}$: Es gilt $\pi_1(U,*) \cong \mathbb{Z}$ und $\int_{B(0,2)} h \cdot \mathrm{d}s = 0$.

Wir berechnen nun explizit ein Potential für h. Zu f und g kennen wir jeweils Potentiale F_i und G_i auf Halbebenen (L5I). Zum Vektorfeld $h = f + g$ erhalten wir hieraus jeweils Potentiale $H_i = F_i + G_i$:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{x > +1\}: & H_1(x,y) &= \arctan\Big(\frac{y}{x-1}\Big) - \arctan\Big(\frac{y}{x+1}\Big) + \text{const}\\
U_2 &= \{y > 0\}: & H_2(x,y) &= \arctan\Big(\frac{x+1}{y}\Big) - \arctan\Big(\frac{x-1}{y}\Big) + \text{const}\\
U_3 &= \{x < -1\}: & H_3(x,y) &= \arctan\Big(\frac{y}{x-1}\Big) - \arctan\Big(\frac{y}{x+1}\Big) + \text{const}\\
U_4 &= \{y < 0\}: & H_4(x,y) &= \arctan\Big(\frac{x+1}{y}\Big) - \arctan\Big(\frac{x-1}{y}\Big) + \text{const}
\end{aligned}$$

Wir versuchen, diese zusammenzukleben… und erleben ein Wunder: Setzt man alle Konstanten Null, so passen H_1, H_2, H_3, H_4 zusammen! Die Sprungstelle $[-1,1]\times\{0\}$ ist hier aus U ausgenommen. Alles wird gut!



§L5i. Weitere Beispiele und Übungen.

Übung L5P. Berechnen Sie mit Hilfe der Homotopie-Invarianz das Integral

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Was erhalten Sie speziell für $a = b = 1$? Was gilt allgemein für $a, b > 0$?

✻ **L5P.** Dies ist das Arbeitsintegral des rotationsfreien Vektorfeldes $f(x,y) = (-y,x)/(x^2+y^2)$ längs der Ellipse $\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$. Der Integrationweg α ist im Definitionsgebiet $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ homotop zum kreisförmigen Integrationweg $\beta : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Dank L5L finden wir:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha = \int_\beta f \cdot \mathrm{d}\beta = \int_{t=0}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

Bemerkung. Die Homotopie-Invarianz vereinfacht die Rechnung erheblich! Unter allen homotopen Wegen suchen wir uns den leichtesten aus. Dieser Trick und speziell dieses Beispiel liegen dem Residuenkalkül der komplexen Analysis zu Grunde.

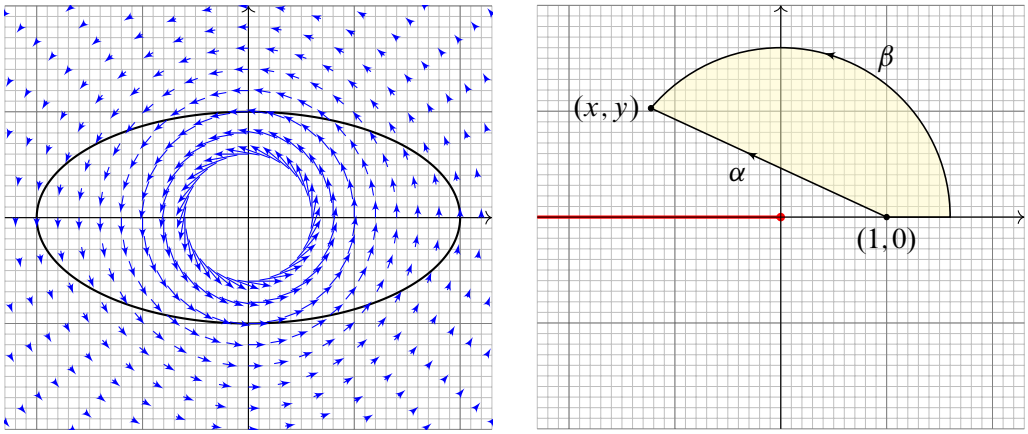


ABBILDUNG L:29. Homotope Integrationswege in der Ebene

Übung L5Q. Wir betrachten wie in L5I das Wirbelfeld $f(x,y) = (-y,x)/(x^2+y^2)$ auf $U := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$. Sei $V = \{\,(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 0\,\}$ die Ebene ohne die negative x–Achse.

(0) Ist U ein Gebiet ? konvex? sternförmig? Erlaubt f ein Potential auf U?
(1) Ist V ein Gebiet? konvex? sternförmig? bezüglich welcher Zentren $p \in \mathbb{R}^2$?
(2) Erlaubt $f|_V$ ein Potential $F : V \to \mathbb{R}$? Wenn ja, berechnen Sie eins!
(3) Erlaubt f ein Potential auf einem größeren Menge V' mit $V \subsetneq V' \subset U$?

Die Physik, etwa die Elektrodynamik, nutzt folgende dreidimensionale Variante: Skizzieren Sie das Wirbelfeld $f(x,y,z) = (-y,x,0)/(x^2+y^2)$ auf $U := \mathbb{R}^3 \smallsetminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$. Sei $V = \{\,(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \le 0\,\}$ der Raum $\mathbb{R}^3$ ohne die x–z–Halbebene.

(4) Ist U ein Gebiet ? konvex? sternförmig? Erlaubt f ein Potential auf U?
(5) Ist V ein Gebiet? konvex? sternförmig? bezüglich welcher Zentren $p \in \mathbb{R}^2$?
(6) Erlaubt $f|_V$ ein Potential $F : V \to \mathbb{R}$? Wenn ja, berechnen Sie eins!
(7) Erlaubt f ein Potential auf einem größeren Menge V' mit $V \subsetneq V' \subset U$?

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **L5Q.** (0) Die Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ ist offen und wegzusammenhängend, also ein Gebiet. Sie ist nicht konvex, auch nicht sternförmig: $[p,-p] \not\subset U$. Das Feld f erlaubt auf U kein Potential wegen $\oint f(s)\cdot \mathrm{d}s \neq 0$, siehe L5I.

(1) Die Menge $V \subset \mathbb{R}^2$ ist offen und wegzusammenhängend, also ein Gebiet. Sie ist nicht konvex aber sternförmig: Als Zentrum eignet sich jeder Punkt $p = (x,0)$ mit $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Anschaulich: Vom Punkt p aus sieht man jeden anderen Punkt $q \in V$. Für p abseits der positiven x–Achse gilt diese Eigenschaft nicht mehr.

(2) Wir finden $\operatorname{rot}(f) = 0$. Auf dem sternförmigen Gebiet V erlaubt f ein Potential dank Poincaré–Lemma (L5K). Zur konkreten Berechnung wählen wir den Fußpunkt $p = (1,0)$. Zu (x,y) führt der gerade Weg $\alpha : [0,1] \to V : t \mapsto ((1-t)+tx, ty)$. Dank L5K erhalten wir ein Potential $F : V \to \mathbb{R}$ durch das Arbeitsintegral

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := \int_\alpha f(s)\cdot \mathrm{d}s = \int_{t=0}^{1} f\begin{pmatrix}(1-t)+tx\\ty\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}\mathrm{d}t.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, nutzen wir Polarkoordinaten. Sei $(x,y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi) \in U$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ und $\varphi \in \,]-\pi,\pi[$. Als Integrationsweg β gehen wir geradwegs von $(1,0)$ nach $(r,0)$ und dann auf dem Kreis zu (x,y), wie in L:29 skizziert. Die Wege α und β sind homotop, also gilt:

$$\begin{aligned} F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= F\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\end{pmatrix} = \int_\alpha f(s)\cdot\mathrm{d}s = \int_\beta f(s)\cdot\mathrm{d}s \\ &= \int_{\rho=1}^{r} f\begin{pmatrix}\rho\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}\rho + \int_{\theta=0}^{\varphi} f\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\r\cos\theta\end{pmatrix}\mathrm{d}\theta = \int_{\rho=1}^{r} 0\,\mathrm{d}\rho + \int_{\theta=0}^{\varphi} 1\,\mathrm{d}\theta = \varphi \end{aligned}$$

Das Potential hat die Form einer Wendelfläche, wie bereits in L5I gefunden und skizziert. Die Äquipotentiallinien von F sind die radialen Strahlen $\mathbb{R}_{>0}\cdot(x,y)$. Der Gradient $f = \operatorname{grad} F$ ist senkrecht hierzu, und hat den Betrag $1/r$. Anschaulich. Eine Wendeltreppe ist innen steiler als außen, und zwar proportional zu $1/r$.

(3) Für jede echt größere Menge V' mit $V \subsetneq V' \subset U$ gilt $(-r,0) \in V$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$; somit enthält V' den geschlossenen Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$. Für das Arbeitsintegral gilt dann $\oint_\gamma f(s)\cdot\mathrm{d}s = 2\pi$, wie wir bereits wissen. Also kann $f|_{V'}$ kein Potential $F : V' \to \mathbb{R}$ haben! Demnach hat das oben konstruierte Potential $F : V \to \mathbb{R}$ tatsächlich einen maximalen Definitionsbereich.

Die dreidimensionale Variante verhält sich sinngemäß genauso: (4) Die Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Gebiet, nicht konvex, auch nicht sternförmig. Das Feld f erlaubt auf U kein Potential wegen $\oint f(s)\cdot\mathrm{d}s \neq 0$ wie in L5I. (5) Die Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Gebiet, nicht konvex aber sternförmig. Als Zentrum eignet sich jeder Punkt $p = (x,0,z)$ mit $x \in \mathbb{R}_{>0}$. (6) Wir finden $\operatorname{rot}(f) = 0$. Auf dem sternförmigen Gebiet V erlaubt f ein Potential dank Poincaré–Lemma (L5K). Dank Integration wie in (2) finden wir auch hier $F(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = \varphi$ für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in \,]-\pi,\pi[$. (7) Für jede echt größere Menge V' mit $V \subsetneq V' \subset U$ gilt $(-r,0,z) \in V$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$; somit enthält V' den geschlossenen Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r\cos t, r\sin t, z)$. Für das Arbeitsintegral gilt dann $\oint_\gamma f(s)\cdot\mathrm{d}s = 2\pi$, wie wir bereits wissen. Also kann $f|_{V'}$ kein Potential $F : V' \to \mathbb{R}$ haben! Demnach hat das oben konstruierte Potential $F : V \to \mathbb{R}$ tatsächlich einen maximalen Definitionsbereich.

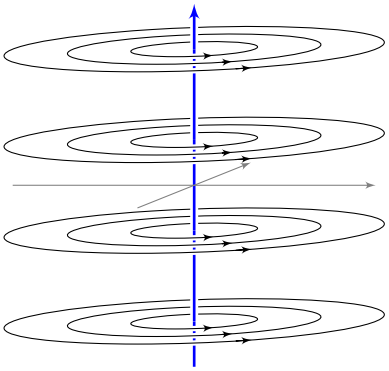


ABBILDUNG L:30. Wirbelfeld um die z–Achse im $\mathbb{R}^3$

Übung L5R. Bestimmen Sie zu $a \in \mathbb{R}$ alle Potentiale des ebenen Vektorfeldes

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{2}{x^2+y^2-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{a}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}.$$

✻ **L5R.** Diese Aufgabenstellung folgt einer verbreiteten Unsitte: Der Definitionsbereich $U \subset \mathbb{R}^2$ des Vektorfeldes $f : U \to \mathbb{R}^2$ ist nicht explizit angegeben. Das ist ärgerlich, denn er bestimmt wesentlich das Ergebnis. Implizit ist meist der maximale Definitionsbereich gemeint, hier also $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \notin \{0,1\}\,\}$.

Wir berechnen zunächst die Rotation… Überall gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$. Diese lokale Bedingung ist also erfüllt. Wir sehen jedoch $\oint_{\partial B(0,r)} f(s)\cdot \mathrm{d}s = 2\pi a$ für $r \notin \{0,1\}$. Für $a \neq 0$ existiert demnach kein Potential!

Im Folgenden sei $a = 0$. Der zweite Summand verschwindet. Auf der Kreislinie $x^2+y^2 = 1$ wird der erste Nenner Null. Wir setzen also $U = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 1\,\}$. Der Definitionsbereich zerfällt somit in zwei Gebiete: $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\,\}$ und $B = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\,\}$. Auf A finden wir das Potential $F_A(x,y) = \ln(x^2+y^2-1) + c_A$. Auf B finden wir das Potential $F_B(x,y) = \ln(1-x^2-y^2) + c_B$. (Machen Sie die Probe!) Insgesamt erhalten wir also $F(x,y) = \ln|x^2+y^2-1| + c_A\mathbf{1}_A + c_B\mathbf{1}_B$, siehe L:31

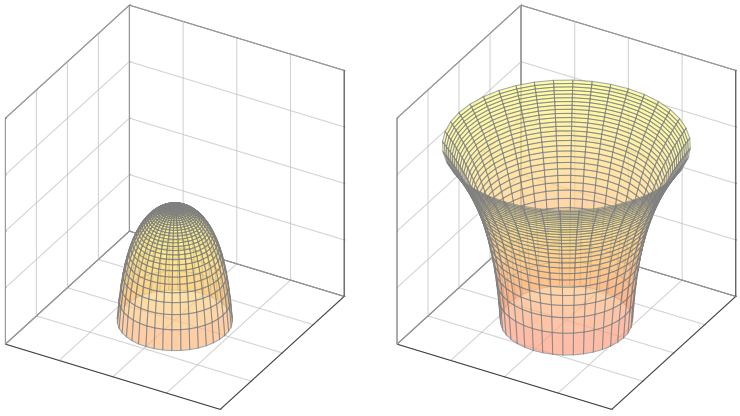
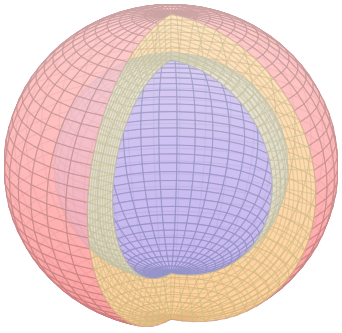


ABBILDUNG L:31. Ein Potential auf $U = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 1\,\}$

Übung L5S. Wir betrachten folgende Gebiete $U_i \subset \mathbb{R}^n$:



- $U_1 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 4\,\}$
- $U_2 = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\,\}$
- $U_3 = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2+y^2 < 4,\ |z| < 1\,\}$
- $U_4 = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{\,(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\,\}$
- $U_5 = \{\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad-bc > 0\,\}$
- $U_6 = \{\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad-bc \neq 0\,\}$

(1) Skizzieren Sie die ersten vier Beispiele.

(2) Gegeben sei ein rotationsfreies Vektorfeld $f : U_i \to \mathbb{R}^n$. Formulieren Sie zur Existenz eines Potentials $F : U_i \to \mathbb{R}$, $F' = f$, äquivalente Bedingungen für Wegintegrale $\int_\gamma f\cdot \mathrm{d}\gamma$; geben Sie hierzu die zu prüfenden Wege γ explizit an (möglichst wenige).

(3) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(U_i, u_i)$ zu einem gewählten Fußpunkt; nennen Sie Erzeuger und falls nötig Relationen. Sind diese Gruppen frei? Wenn ja, von welchem Rang? Bezug zur vorigen Frage: Nennen Sie Erzeuger der Abelschmachung.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L5j. Wie erklärt Wikipedia das Potentialproblem? Das Thema *Wegintegrale und Potentiale von Vektorfeldern* ist nicht sonderlich kompliziert, aber auch nicht trivial, denn die verschiedenen (lokalen und globalen) Bedingungen sind subtil miteinander verwoben. Hierzu benötigen Sie präzise Begriffe und sorgfältige Argumente, wie Sie nun aus eigener Erfahrung wissen. Bei hastiger Formulierung schleichen sich leicht Fehler ein.

Auch die Autoren der deutschsprachigen Wikipedia haben damit ihre liebe Not: Der Artikel `de.wikipedia.org/wiki/Skalarpotential` (Stand 15.12.2014) besagt:

> *„**Formale Definition und Eigenschaften:** Ein Skalarfeld $\Phi : \vec{r} \mapsto \Phi(\vec{r})$ ist genau dann ein Skalarpotential, wenn es in einem einfach zusammenhängenden Gebiet*
>
> *(a) zweimal stetig differenzierbar ist, das heißt keine Sprünge, Stufen oder andere Unstetigkeitsstellen enthält;*
>
> *(b) zu ihm ein Vektorfeld $\vec{F} : \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$ existiert, so dass gilt: $\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$.*
>
> *$\vec{F}$ wird daher oft auch das zugehörige Gradientenfeld genannt, das als Gradient des Skalarpotentials Φ seinerseits stets folgende Bedingungen erfüllt:*
>
> *1. Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals (…).*
> *2. Verschwinden des geschlossenen Kurvenintegrals (…).*
> *3. Generelle Rotationsfreiheit (…).*
>
> *Es lässt sich zeigen, dass die zuletzt genannten drei Charakteristika eines Gradientenfelds einander mathematisch gleichwertig sind, das heißt allein schon die Erfüllung einer der drei Bedingungen genügt, damit auch die beiden anderen gelten.“*

Übung L5T. Lesen Sie diese Erklärung sorgfältig und kritisch. Welche logischen Beziehungen gelten zwischen den genannten Eigenschaften? In welchen Punkten sind die Formulierungen verwirrend oder gar falsch? Erklären Sie es verständlich und richtig.

Hinweis: Ihr Studium der Mathematik beinhaltet aus guten Gründen Hausaufgaben. Diese werden wenig geliebt und allzu oft abgeschrieben, doch sie erfüllen einen fundamental wichtigen Zweck: Üben Sie sich in präziser und verständlicher Formulierung!

Wie schwierig das ist, merken Sie spätestens dann, wenn Sie es selbst einmal versuchen: Sie benötigen genaue Sachkenntnis und zudem Erfahrung beim Formulieren.

Zusatz: Die Wikipedia lebt von engagierten und kompetenten Autoren. Wenn Sie möchten und können, dann helfen Sie bitte mit, die Qualität der Artikel zu verbessern!

✻ **L5T.** Ich skizziere einige Kritikpunkte. (a) Unstetigkeit zu verbieten garantiert nur $\mathscr{C}^0$, aber noch nicht $\mathscr{C}^1$ oder gar $\mathscr{C}^2$, wie hier suggeriert. Für die Definition des Gradienten $\vec{F} := \operatorname{grad}\Phi$ genügt $\mathscr{C}^1$. (b) Die hier formulierte Bedingung ist immer erfüllt, also überflüssig. Gemeint ist sicher die Umkehrung: Ein $\mathscr{C}^0$–Vektorfeld $\vec{F}$ heißt *Gradientenfeld*, wenn ein $\mathscr{C}^1$–Skalarfeld Φ mit $\operatorname{grad}\Phi = \vec{F}$ existiert. Genau um diese Definition geht es hier, sie wird aber nicht erklärt! Aus $\vec{F} = \operatorname{grad}\Phi$ folgt (1) und (2), und für $\vec{F} \in \mathscr{C}^1$ bzw. $\Phi \in \mathscr{C}^2$ auch (3).

Da das Definitionsgebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ hier eine wesentliche Rolle spielt, sollte man es auch explizit nennen, also $\Phi : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ und $\vec{F} : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$. Das mag manchmal übertrieben pedantisch wirken, insbesondere wenn diese Daten aus dem Kontext klar sind. Meist sind sie jedoch keineswegs klar, und der Leser sollte nicht raten müssen, sondern knapp und präzise informiert werden. Schließlich zur Topologie: Ob das Definitionsgebiet U einfach zusammenhängend ist oder nicht, ist nur für die Umkehrung „(3) $\Rightarrow$ (2)“ wesentlich. Es ist unnötig einschränkend, diese Bedingung schon anfangs in die Definition zu schreiben; sie gehört in den Satz.

§L5k. Wie erklärt Bronstein einfachen Zusammenhang? Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend* (G2A), wenn sich je zwei Punkte a und b in X durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ verbinden lassen, kurz $\pi_0(X) = \{X\}$. Wir nennen X *einfach zusammenhängend* (L2S), wenn es bis auf Homotopie genau einen solchen Weg gibt, kurz $\Pi(X,a,b) = \{[\gamma]\}$, oder äquivalent hierzu $\pi_0(X) = \{X\}$ und $\pi_1(X,x_0) = \{1\}$.

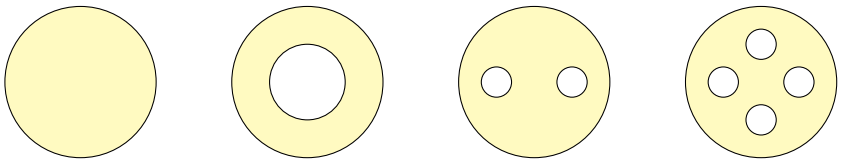


ABBILDUNG L:32. Einfacher und mehrfacher Zusammenhang

Zu Beginn meines Studiums erwarb ich, damals selbstverständlich, das *Taschenbuch der Mathematik* von I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. Kapitel 3 behandelt das übliche Vokabular der Analysis, beginnend mit §3.1 zur Differential- und Integralrechnung von Funktionen einer und mehrerer Variabler. Für Punktmengen des $\mathbb{R}^n$ wird einfacher Zusammenhang wie folgt definiert, als Versuch einer praxistauglichen Vereinfachung:

> *„**Definition:** Eine offene zusammenhängende Punktmenge heißt* Gebiet*. Ein Gebiet G heißt* einfach zusammenhängend*, wenn der Rand von G zusammenhängend ist. Andernfalls heißt G* mehrfach zusammenhängend*. (…) Ist ein Gebiet G einfach zusammenhängend, dann kann jede in G verlaufende doppelpunktfreie, geschlossene Kurve innerhalb von G stetig zu einem Punkt deformiert werden.“*
> (Bronstein, Teubner Stuttgart, 25. Auflage 1991, §3.1.2, S. 244)

Als Beispiele genannt werden ebene Gebiete $G \subset \mathbb{R}^2$ wie in Abbildung L:32, auch wenn die Definition allgemein für Gebiete $G \subset \mathbb{R}^n$ in beliebiger Dimension n formuliert ist. Angewendet wird dies anschließend (§3.1.8, S. 323) auf Arbeitsintegrale eines gegebenen Vektorfeldes $f = (P,Q) : G \to \mathbb{R}^2$ und die Frage nach einem Potential $U : G \to \mathbb{R}$:

> *„Notwendig und hinreichend für die Existenz der Funktion $U(x,y)$*
> *ist die Gültigkeit der Integrabilitätsbedingung $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$*
> *für alle Punkte des einfach zusammenhängenden Gebietes G.“*

Übung L5U. Lesen Sie Bronstein kritisch! Geben Sie Gegenbeispiele $G \subset \mathbb{R}^2$ und $G \subset \mathbb{R}^3$. Hier können Sie Ihr Repertoire an Begriffen und Beispielen nutzen und erproben.

✻ **L5U.** Bronsteins Definition vermeidet zunächst den Begriff der Homotopie von Schleifen und nennt den Zusammenhang des Randes als (vermeintlich äquivalentes) Kriterium. Wie behauptet scheint beides zunächst äquivalent, zumindest stimmt es in den genannten Beispielen. Unglücklicherweise gilt es nicht allgemein:

(a) Die Menge $G = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{D}^2$ ist ein Gebiet (unbeschränkt ist erlaubt), und der Rand $\delta G = \mathbb{S}^1$ ist zusammenhängend. Nichtsdestotrotz lässt sich in dem Gebiet G nicht jede Schleife zusammenziehen, was die oben zitierte Behauptung widerlegt. Genauer gilt $G \simeq \mathbb{S}^1$ und somit $\pi_1(G,*) \cong \mathbb{Z}$. Die lokale Integrabilitätsbedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ genügt hier nicht zur Existenz eines Pozentials, wie das Wirbelfeld (L5Q) zeigt!

(b) Für einen offenen Volltorus $G \subset \mathbb{R}^3$ mit $\overline{G} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ ist der Rand $\delta G = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ eine Torusfläche und somit zusammenhängend. (Abbildung A:2 parametrisiert ein konkretes Beispiel.) Nichtsdestotrotz lässt sich in dem Gebiet G nicht jede Schleife zusammenziehen, genauer gilt $G \simeq \mathbb{S}^1$ und somit $\pi_1(G,*) \cong \mathbb{Z}$. Die lokale Integrabilitätsbedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ genügt hier nicht! Konkretes Gegenbeispiel ist ein dreidimensionales Wirbelfeld (L5Q). Interessanterweise fordert Bronstein später für Gebiete $G \subset \mathbb{R}^3$ die Bedingung „flächenartig einfach zusammenhängend“, also $\pi_1(G)_{\mathrm{ab}} = \{1\}$, siehe §3.1.8, S. 324.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L6. Simpliziale Fundamentalgruppen

☞ Wir betrachten weiterhin Polygonzüge und polygonale Homotopie wie in L4A. Dies spezialisieren wir nun für die Realisierung $|K|$ eines Simplizialkomplexes K. Wir verlangen zusätzlich zu L4A, dass Polygonzüge von Ecke zu Ecke laufen entlang der Kanten von K. Polygonale Homotopien laufen dann über die Dreiecke von K wie in Abbildung L:33. ☜

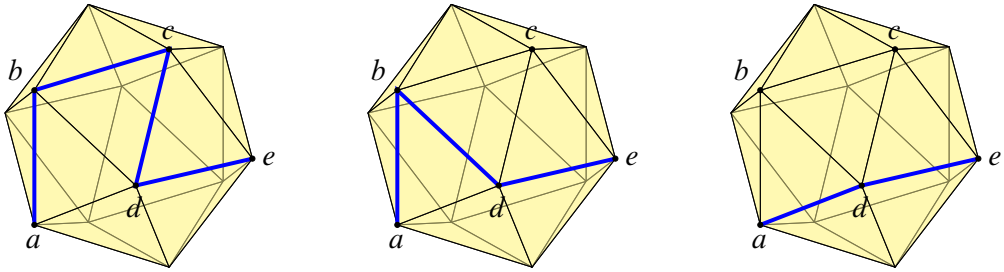


ABBILDUNG L:33. Kantenzüge $abcde \approx abde \approx ade$ in einem Komplex

☞ **Definition L6A.** Sei K ein Simplizialkomplex mit Eckenmenge $\Omega = \Omega(K)$. ☜

- Ein *Kantenzug* $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in K ist eine Folge von Eckpunkten $v_0, v_1, \dots, v_n \in \Omega$, für die $\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\} \in K$ gilt. Wir nennen w *geschlossen*, wenn $v_0 = v_n$ gilt.
- Für jeden Eckpunkt $v_0 \in \Omega$ ist der *konstante Kantenzug* $w = v_0$ geschlossen. Zu $w = v_0 v_1 \dots v_n$ haben wir den *umgekehrten Kantenzug* $\bar{w} = v_n \dots v_1 v_0$ in K.
- Kantenzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = v'_0 v'_1 \dots v'_m$ sind *verknüpfbar* falls $v_n = v'_0$. In diesem Falle definieren wir ihre *Verknüpfung* $w * w' := v_0 v_1 \dots v_n v'_1 \dots v'_m$.

Damit wird die Menge $P(K)$ aller Kantenzüge in K zur *simplizialen Wegekategorie*: Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ, und zum Eckpunkt $v_0 \in X$ ist der Kantenzug v_0 die Identität. (Zwar liegt $P(K) \subset \Omega^*$ im freien Monoid, aber die Verknüpfungen sind verschieden.)

- Die Äquivalenz $\approx$ von Kantenzügen in K wird erzeugt durch *simpliziale Homotopien* $v_0 \dots v_{k-1} v_k v_{k+1} \dots v_n \approx v_0 \dots v_{k-1} v_{k+1} \dots v_n$ mit $\{v_{k-1}, v_k, v_{k+1}\} \in K$.
- Als Spezialfall vereinbaren wir schließlich $v_0 v_0 \approx v_0$. Damit gilt $w * \bar{w} \approx v_0$.

✍ Zum Komplex K definieren wir das *simpliziale Fundamentalgruppoid* als Quotient ✍

$$\Pi(K) := P(K)/_{\approx} = \frac{\{\text{Kantenzüge } w = v_0 v_1 \dots v_n \text{ in } K\}}{\text{simpliziale Homotopie } \approx \text{ in } K}$$

mit der Verknüpfung $[w] \cdot [w'] = [w * w]$ durch Aneinanderhängen von Kantenzügen.

Für jede Ecke $x_0 \in \Omega(K)$ definieren wir die *simpliziale Fundamentalgruppe*

$$\pi_1(K, x_0) := \Pi(K, x_0, x_0) = \frac{\{\text{geschlossene Kantenzüge in } (K, x_0)\}}{\text{simpliziale Homotopie } \approx \text{ in } (K, x_0)}.$$

✍ **Satz L6B.** *Für jeden Simplizialkomplex K haben wir den Gruppoidisomorphismus* ✍

$$\varphi : \Pi(K) \xrightarrow{\sim} \Pi(|K|, \Omega) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Für jeden Fußpunkt $x_0 \in \Omega$ erhalten wir hieraus den Gruppenisomorphismus

$$\varphi : \pi_1(K, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(|K|, x_0) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

☞ BEWEIS. Dies beweist man (wie Satz L4B) mit simplizialer Approximation (Satz I4J). □ ☜

§L6a. Fundamentalgruppen von Graphen. Satz L6B erlaubt die Berechnung der (topologisch definierten) Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|,x_0)$ mit Hilfe der (kombinatorisch definierten) simplizialen Fundamentalgruppe $\pi_1(K,x_0)$. Als einfachen Spezialfall betrachten wir zunächst einen *Baum* T, also einen zusammenhängenden zykelfreien Graphen.

Satz L6C. *Für jeden Baum T gilt $|T| \simeq *$ und $\pi_1(T,x_0) = \pi_1(|T|,x_0) = \{1\}$.*

TOPOLOGISCHER BEWEIS. Der topologische Raum $|T|$ ist stark zusammenziehbar (I3I). Damit folgt $\pi_1(T,x_0) = \pi_1(|T|,x_0) = \{1\}$ dank L6B und Homotopie-Invarianz L2L. □

SIMPLIZIALER BEWEIS. Zwischen je zwei Ecken x_0 und a des Baums T existiert genau ein gekürzter Kantenzug w_a in T (I3H). Hieraus folgt insbesondere $\pi_1(T,x_0) = \{1\}$. □

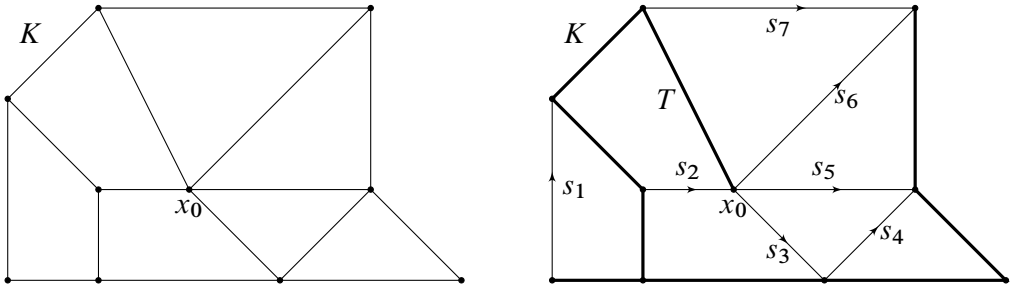


ABBILDUNG L:34. Ein Graph K mit einem Spannbaum $T \subset K$ (in fett). Die (orientierten) Kanten in $K \smallsetminus T$ erzeugen frei die Gruppe $\pi_1(K,x_0)$.

Satz L6D. *Sei K ein zusammenhängender Graph, $x_0 \in \Omega$ eine Ecke und $T \subset K$ ein Spannbaum. Dann ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(K,x_0)$ frei über den Erzeugern $K \smallsetminus T$.*

Genauer haben wir den Isomorphismus $\psi : \pi_1(K,x_0) \xrightarrow{\sim} F = [S \mid R]$

$$\begin{aligned} &\text{mit Erzeugern} && S = \{ s_{ab}, s_{ba} \mid \{a,b\} \in K \smallsetminus T \} \\ &\text{und Relationen} && R = \{ s_{ab} s_{ba} \mid \{a,b\} \in K \smallsetminus T \}. \end{aligned}$$

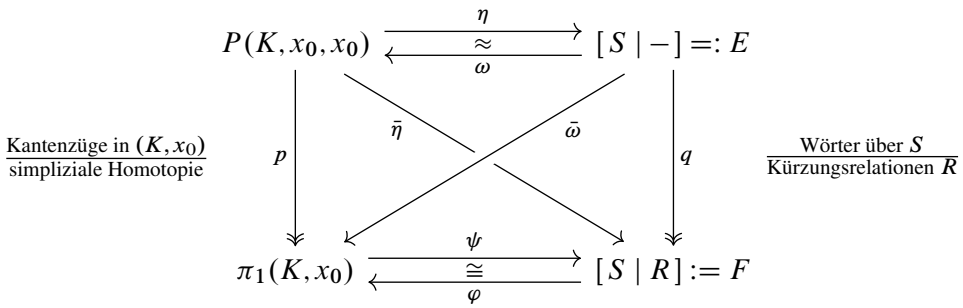
Ist K zudem endlich, so hat die freie Gruppe $\pi_1(K,x_0)$ den Rang $|K \smallsetminus T| = 1 - \chi(K)$.

Bemerkung. Wir verallgemeinern diese Präsentation in Satz L6I für beliebige Simplizialkomplexe und perfektionieren den Beweis. Der Spezialfall von Graphen und freien Gruppen ist jedoch wichtig genug, um hier separat ausgeführt zu werden.

Bemerkung. Die Gruppe $F = [S \mid R]$ besteht aus allen Wörtern über dem Alphabet S, mit Aneinanderhängung als Verknüpfung, modulo der Relationen $s_{ab}s_{ba} = 1$. Somit sind s_{ab} und s_{ba} zueinander invers. Durch Orientierung jeder Kante $\{a,b\} \in K \smallsetminus T$ können wir einen der beiden Erzeuger auswählen und erhalten eine Basis der freien Gruppe F. Anders als in L4D gibt es hier keine kanonische Wahl der Orientierung, wir nutzen beide gleichberechtigt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ BEWEIS. Der Beweis gelingt durch sorgsames und geduldiges Nachrechnen. ☜



Konstruktion: Für jede orientierte Kante (a,b) mit $\{a,b\} \in K$ definieren wir

$$\eta(a,b) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{a,b\} \in T, \\ s_{ab} & \text{falls } \{a,b\} \notin T. \end{cases}$$

Zu jedem Kantenzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in K bilden wir das Produkt

$$\eta(v_0 v_1 \dots v_n) := \eta(v_0,v_1)\eta(v_1,v_2)\cdots\eta(v_{n-1},v_n).$$

Da K keine 2–Simplizes hat, sind simpliziale Homotopien nur von der Form $uvu \approx uu$ oder $uvv \approx uv$ oder $uuv \approx uv$. In allen drei Fällen ist die Komposition $\bar\eta = q \circ \eta$ invariant unter simplizialen Homotopien und induziert so den Gruppenhomomorphismus

$$\psi \;:\; \pi_1(K,x_0) \xrightarrow{\sim} F \;:\; [w] \mapsto [\eta(w)].$$

Surjektivität: Zu jeder Ecke $a \in K$ existiert genau ein gekürzter Kantenzug w_a von x_0 nach a in T. Zu jeder Kante $\{a,b\} \in K$ definieren wir den Kantenzug $w_{ab} = w_a * ab * w_b^{-1}$ von x_0 nach a zu b zurück zu x_0. Es gilt $\eta(w_{ab}) = \eta(a,b) = s_{ab}$, somit ist ψ surjektiv.

Injektivität: Wir zeigen, dass ψ injektiv ist, also $\ker(\psi) = \{1\}$. Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ ein Kantenzug in K mit $v_0 = v_n = x_0$, und es gelte $\psi(w) = 1$. Wir konstruieren eine simpliziale Homotopie $w \approx v_0$ durch Induktion über die Anzahl N der Kanten in $K \smallsetminus T$.

Im Falle $N = 0$ liegt der Weg w ganz im Baum T, ist also zusammenziehbar (L6C).

Im Falle $N \geq 1$ gilt $w = w_1 * ab * w_2 * ba * w_3$ mit einer Kante $\{a,b\} \in K \smallsetminus T$, und w_2 verläuft ganz im Baum T. Wir reduzieren den Kantenzug w durch simpliziale Homotopien gemäß $w = w_1 * ab * w_2 * ba * w_3 \approx w_1 * aba * w_3 \approx w_1 * aa * w_3$. □

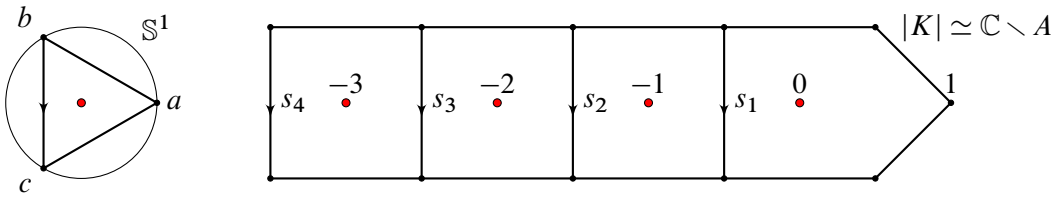


ABBILDUNG L:35. Fundamentalgruppe von $\mathbb{S}^1 \cong |K|$ und $\mathbb{C} \smallsetminus A \simeq |K|$

Beispiel L6E. Wir berechnen $\psi : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, diesmal simplizial. Hierzu triangulieren wir die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \cong |K|$ durch $K = \{a, b, c, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}\}$ wie in Abbildung L:35. Als Spannbaum wählen wir $T = \{a, b, c, \{a,b\}, \{c,a\}\}$, also $K \smallsetminus T = \{\{b,c\}\}$, und erhalten

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow[\text{L2E}]{\cong} \pi_1(|K|, a) \xrightarrow[\text{L6B}]{\cong} \pi_1(K, a) \xrightarrow[\text{L6D}]{\cong} [\, s_{bc}, s_{cb} \mid s_{bc} s_{cb} = 1 \,] \xrightarrow[\text{L3C}]{\cong} \mathbb{Z}.$$

Für den letzten Isomorphismus müssen wir eine Orientierung wählen, etwa durch $s_{bc} \mapsto +1$ und $s_{cb} \mapsto -1$. Das Ergebnis stimmt dann mit der Umlaufzahl $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ überein.

Beispiel L6F. Sei $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1, -2, -3\}$. Dank L4D gilt $\pi_1(X, 1) \cong \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \mid - \rangle$. Alternativ können wir einen Graphen K affin einbetten, sodass $\iota : |K| \hookrightarrow X$ ein starker Deformationsretrakt ist (L4G). Abbildung L:35 zeigt eine Möglichkeit.

$$\pi_1(X, 1) \xrightarrow[\text{L2I}]{\cong} \pi_1(|K|, 1) \xrightarrow[\text{L6B}]{\cong} \pi_1(K, 1) \xrightarrow[\text{L6D}]{\cong} \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \mid - \rangle$$

Korollar L6G. *Seien K und L endliche Graphen. Aus $|K| \simeq |L|$ folgt $\chi(K) = \chi(L)$.*

✻ **L6G.** Nach Zerlegung in Wegkomponenten gilt $K = \bigsqcup_{k=1}^{n} K_i$ und $L = \bigsqcup_{k=1}^{n} L_i$ mit K_i, L_i zusammenhängend und $|K_i| \simeq |L_i|$. Wegen $\chi(K) = \sum_{i=1}^{n} \chi(K_i)$ und $\chi(L) = \sum_{i=1}^{n} \chi(L_i)$ genügt es, die Aussage für zusammenhängende Graphen (K, a) und (L, b) zu beweisen. Dank L2N induziert jede Homotopie-Äquivalenz $f : |K| \simeq |L|$ einen Isomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(|K|, a) \cong \pi_1(|L|, f(a)) \cong \pi_1(|L|, b)$. Die Gruppe $\pi_1(|K|, a)$ ist frei vom Rang $1 - \chi(K)$, ebenso ist $\pi_1(|L|, b)$ frei vom Rang $1 - \chi(L)$. Hieraus folgt $\chi(K) = \chi(L)$, denn der Rang einer freien Gruppe ist wohldefiniert (L3V), das heißt, invariant unter Gruppenisomorphismen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L6b. Fundamentalgruppen berandeter Flächen. Dank der bisherigen Techniken können wir nun die Fundamentalgruppe jeder berandeten Fläche $F^{\pm}_{g,r}$ bestimmen. Das Ergebnis ist anschaulich plausibel: Das Anheften jedes Bandes liefert einen freien Erzeuger.

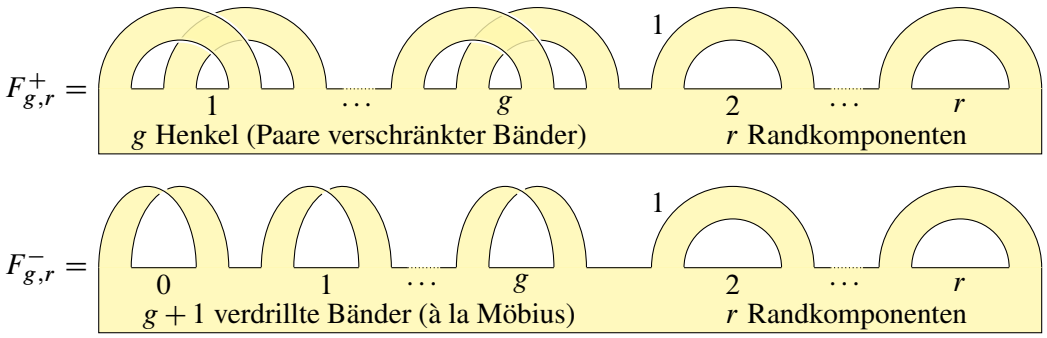


ABBILDUNG L:36. Freie Erzeuger für $\pi_1(F^{\pm}_{g,r}, x_0)$

Satz L6H. *Sei $g, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$. Dann ist $\pi_1(F^{\pm}_{g,r}, x_0)$ frei über $1-\chi$ Erzeugern:*

$$\pi_1(F^+_{g,r}, x_0) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_2, \dots, d_r \mid - \rangle$$
$$\pi_1(F^-_{g,r}, x_0) \cong \langle c_0, c_1, \dots, c_g, d_2, \dots, d_r \mid - \rangle$$

In Abbildung L:36 entsprechen die inneren Ränder den Wörtern $d_2, \dots, d_n$, der äußere Rand entspricht dem Wort $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} d_2 \cdots d_r$ bzw. $c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2 d_2 \cdots d_r$. Aus $F^{\pm}_{g,1}$ gewinnen wir die geschlossene Fläche durch Verkleben mit einer Kreisscheibe:

$$\pi_1(F^+_g, x_0) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$
$$\pi_1(F^-_g, x_0) \cong \langle c_0, c_1, \dots, c_g \mid c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2 = 1 \rangle$$

BEWEIS. Die Fläche $F = F^{\pm}_{g,r}$ enthält einen geeigneten Graphen $|K|$ als starken Deformationsretrakt: Aus $(\iota, \rho) : |K| \simeq F$ folgt $(\iota_\sharp, \rho_\sharp) : \pi_1(|K|, x_0) \cong \pi_1(F, x_0)$ dank L2H. Dank Satz L6D lesen wir die genannte freie Gruppe ab. □

DUALER BEWEIS. Wir realisieren die Fläche $F = F^{\pm}_{g,r}$ kubisch im $\mathbb{R}^3$. Für die Fundamentalgruppe nutzen wir polygonale Wege modulo polygonaler Homotopie wie in §L4. Auf jedem Band $1, \dots, n$ wählen wir einen Schnitt $S_1, \dots, S_n \subset F$ von Rand zu Rand. Ihr Komplement $F \smallsetminus (S_1 \cup \cdots \cup S_n)$ ist dann zusammenziehbar. Der Gruppenisomorphismus $\pi_1(F, x_0) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, \dots, s_n \mid - \rangle$ zählt die Übergänge wie in L4D □

Bemerkung. Beide Beweise ergeben dasselbe, beide sind leicht und lehrreich. Ich präsentiere sie hier parallel, da wir hieran erneut im Keim eine schöne Dualität erkennen, die in der algebraischen Topologie eine wichtige Rolle spielt. Im ersten Beweis zählen wir Übergänge über Kanten des Graphen $|K|$; diese haben Dimension 1. Im zweiten Beweis zählen wir Durchstoßungen von Wänden transvers zu $|K|$; diese haben Kodimension 1.

Dasselbe Phänomen beobachten wir ebenso in den vorigen Beispielen L6E und L6F.

Dies entspricht der Dualität von Fundamentalgruppe und Überlagerung: Wir können entlang der Schnitte aufschneiden und zur universellen Überlagerung verkleben (Kapitel M). Im abelschen Fall gelangen wir zur Poincaré–Dualität von Homologie und Kohomologie. Diese ist ein zentrales Werkzeug der algebraischen Topologie von Mannigfaltigkeiten.

§L6c. Fundamentalgruppen von Simplizialkomplexen. Die obige Technik gilt nicht nur für Graphen. Aus der kombinatorischen Struktur jedes Simplizialkomplexes K können wir direkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(K,x_0)$ durch Erzeuger und Relationen ablesen:

Satz L6I. *Sei K ein zusammenhängender Simplizialkomplex, $x_0 \in \Omega$ eine Ecke und $T \subset K$ ein Spannbaum. Dann erlaubt die Fundamentalgruppe die Präsentation $G = [\,S \mid R\,]$ mit*

$$S = \big\{\, s_{ab} \;\big|\; \{a,b\} \in K \,\big\} \qquad \text{als Menge der Erzeuger und den Relationen}$$
$$R = \big\{\, s_{ab} \;\big|\; \{a,b\} \in T \,\big\} \cup \big\{\, s_{ab}s_{ba} \;\big|\; \{a,b\} \in K \,\big\} \cup \big\{\, s_{ab}s_{bc}s_{ca} \;\big|\; \{a,b,c\} \in K \,\big\}.$$

Genauer haben wir den Gruppenisomorphismus $(\psi,\varphi) : \pi_1(K,x_0) \cong G$ mit

$$\psi : \pi_1(K,x_0) \xrightarrow{\sim} G \;:\; [v_0v_1v_2\dots v_{n-1}v_n] \mapsto s_{v_0v_1}s_{v_1v_2}\cdots s_{v_{n-1}v_n},$$
$$\varphi : G \xrightarrow{\sim} \pi_1(K,x_0) \;:\; s_{ab} \mapsto [\; \underbrace{(x_0\dots a)}_{\text{Kantenzug in } T} * ab * \underbrace{(b\dots x_0)}_{\text{Kantenzug in } T} \;].$$

Für jeden endlichen Simplizialkomplex K wird $\pi_1(K,x_0)$ so endlich präsentiert.

Die Gruppe $G = [\,S \mid R\,]$ besteht aus allen Wörtern über dem Alphabet S, mit Aneinanderhängung als Verknüpfung, modulo der durch die Menge R angegeben Kürzungsregeln. Für alle $\{a,b\} \in T$ gilt $s_{ab} = 1$; diese Erzeuger sind redundant und dienen nur zur bequemeren Notation. Wie zuvor gilt $s_{ab}s_{ba} = 1$ für $\{a,b\} \in K$. Zusätzlich gilt nun $s_{ab}s_{bc}s_{ca} = 1$ für jedes Dreieck $\{a,b,c\} \in K$. Ist K ein Graph, so erhalten wir erneut Satz L6D.

BEWEIS. Der Satz ist vollkommen explizit, zum Beweis genügt geduldiges Nachrechnen: Wir zeigen, dass ψ und φ wohldefiniert sind sowie $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}$ und $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}$ erfüllen.

Jedem Kantenzug $w = v_0v_1v_2\dots v_{n-1}v_n$ in (K,x_0) ordnen wir das Produkt

$$\eta(v_0v_1v_2\dots v_{n-1}v_n) := s_{v_0v_1}s_{v_1v_2}\cdots s_{v_{n-1}v_n}$$

in G zu. Für $\{a,b,c\} \in K$ gilt $abc \approx ac$, und entsprechend $s_{ab}s_{bc} = s_{ac}$ in G. Daher ist η invariant unter simplizialer Homotopie und induziert den Gruppenhomomorphismus

$$\psi \;:\; \pi_1(K,x_0) \to G \;:\; [w] \mapsto \eta(w).$$

Zu jeder Ecke $a \in K$ existiert genau ein gekürzter Kantenzug w_a von x_0 nach a in T. Zu jeder Kante $\{a,b\} \in K$ definieren wir den Kantenzug $w_{ab} = w_a * ab * \overline{w_b}$ in K. Dieser läuft von x_0 nach a in T, über die Kante $\{a,b\}$ zu b, und in T zurück zu x_0. Wir definieren

$$\omega \;:\; [\,S \mid -\,] \to \pi_1(K,x_0) \;:\; s_{ab} \mapsto [w_{ab}].$$

Alle Relationen aus R sind erfüllt, denn sie übersetzen sich in simpliziale Homotopien:

(1) Für $\{a,b\} \in T$ liegt w_{ab} in T, also $w_{ab} \approx x_0$ (L6C).
(2) Für $\{a,b\} \in K$ gilt $w_{ba} = \overline{w_{ab}}$, also $w_{ab} * w_{ba} \approx x_0$.
(3) Für $\{a,b,c\} \in K$ gilt $w_{ab}w_{bc}w_{ca} \approx w_a * abca * \overline{w_a} \approx x_0$.

Somit induziert ω den Gruppenhomomorphismus $\varphi : [\,S \mid R\,] \to \pi_1(K,x_0) : [s_{ab}] \mapsto [w_{ab}]$.

Es gilt $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}$ dank $\psi([w_{ab}]) = s_{ab}$: Für alle $\{u,v\} \in T$ wissen wir $s_{uv} = 1$, also auch $\eta(w_a) = \eta(w_b) = 1$. Hieraus folgt $\eta(w_{ab}) = \eta(w_a)\eta(a,b)\eta(w_b)^{-1} = s_{ab}$.

Schließlich gilt $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}$: Für jeden Kantenzug w in (K,x_0) ergibt unsere Konstruktion $\omega(\eta(w)) \approx w$, wie man unmittelbar nachrechnet. Dies bedeutet $\varphi(\psi([w])) = [w]$.

Somit sind ψ und φ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L6d. Beispiele und Erläuterungen. Satz L6I erlaubt uns, aus der kombinatorischen Struktur des Simplizialkomplexes K Erzeuger und Relationen für die Fundamentalgruppe $\pi_1(K,x_0)$ abzulesen. In günstigen Fällen ist diese Präsentation einfach genug, oder wir können sie weiter vereinfachen, und damit die Gruppe ausreichend gut verstehen.

Beispiel. Satz L6I beinhaltet Satz L6C über Bäume $K = T$:

$$\pi_1(K,x_0) \cong \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \;\big|\; s_{ab} : \{a,b\} \in T \,\big] \quad \cong \quad \{1\}.$$

Beispiel. Satz L6I beinhaltet ebenso Satz L6D über Graphen $K \supset T$:

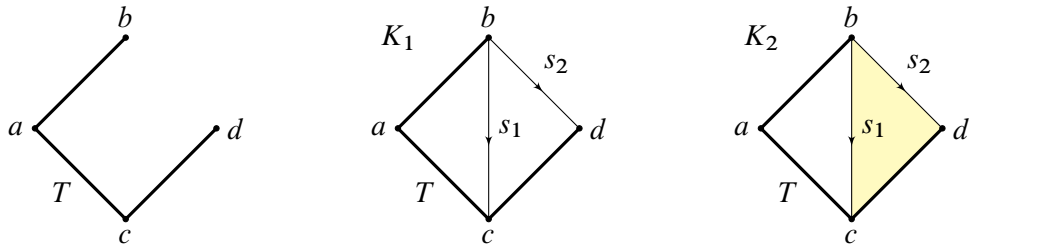
$$\begin{aligned}\pi_1(K,x_0) &\cong \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \;\big|\; s_{ab} : \{a,b\} \in T,\ s_{ab}s_{ba} : \{a,b\} \in K \,\big] \\ &\cong \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \smallsetminus T \;\big|\; s_{ab}s_{ba} : \{a,b\} \in K \smallsetminus T \,\big].\end{aligned}$$

Bemerkung L6J. Die Inklusionen der Skelette von K induzieren folgende Diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K_{\le 0} & \xhookrightarrow{\iota_0} & K_{\le 1} & \xhookrightarrow{\iota_1} & K_{\le 2} & \xhookrightarrow{\iota_2} & K_{\le 3} & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & K \\
\pi_0(K_{\le 0}) & \xrightarrow{\pi_0(\iota_0)} & \pi_0(K_{\le 1}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_0(K_{\le 2}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_0(K_{\le 3}) & \xrightarrow{\cong} & \dots & \xrightarrow{\cong} & \pi_0(K) \\
 & & \pi_1(K_{\le 1}) & \xrightarrow{\pi_1(\iota_1)} & \pi_1(K_{\le 2}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(K_{\le 3}) & \xrightarrow{\cong} & \dots & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(K)
\end{array}$$

Ausführlicher gesagt: Die Komponenten $\pi_0(|K|) = \pi_0(K)$ hängen nur vom 1–Skelett $K_{\le 1}$ ab (I3G): Wir können Punkte ins 0–Skelett verschieben und Wege ins 1–Skelett.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|,x_0) \cong \pi_1(K,x_0)$ hängt nur vom 2–Skelett $K_{\le 2}$ ab (L6B): Wir können Wege ins 1–Skelett $K_{\le 1}$ verschieben und Homotopien ins 2–Skelett $K_{\le 2}$. Satz L6I präzisiert dies: Das 1–Skelett $K_{\le 1}$ ist ein Graph und die Gruppe $\pi_1(K_{\le 1},x_0)$ frei (L6D). Diese liefert die Erzeuger, dank $\pi_1(\iota_1) : \pi_1(K_{\le 1},x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(K_{\le 2},x_0)$. Jedes Dreieck $\Delta \in K_{\le 2} \smallsetminus K_{\le 1}$ liefert eine Relation, und diese erzeugen den Kern $\ker \pi_1(\iota_1)$.



$\pi_1(T,a) = \{1\}$ (zusammenziehbar)

$\pi_1(K_1,a) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$
$abca \leftrightarrow s_1, \quad abdca \leftrightarrow s_2$

$\pi_1(K_2,a) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, s_2 \mid s_1 = s_2 \rangle$
$abca \approx abdca \;\leftrightarrow\; s_1 = s_2$

ABBILDUNG L:37. Spannbaum T und Simplizialkomplexe $T \subset K_1 \subset K_2$

Beispiel. Wir bauen das Beispiel aus L:37 schrittweise auf: Für den Spannbaum T ist die Gruppe $\pi_1(T,a) = \{1\}$ trivial (L6C). Der Graph $K_1 \supset T$ fügt zwei Kanten ein. Jede liefert einen freien Erzeuger (L6D): $\pi_1(K_1,a) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$. Der Komplex $K_2 \supset K_1$ fügt das Dreieck $\{b,c,d\}$ hinzu. Dieses liefert eine Relation (L6I): $\pi_1(K_2,a) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2^{-1} = 1 \rangle$.

Beispielsweise sind die beiden folgenden Schleifen in (K_1,a) nicht homotop:

$$\psi([abcba]) = s_{ab}s_{bc}s_{bc}s_{ba} = s_1 s_1^{-1} = 1, \quad \psi([abcdba]) = s_{ab}s_{bc}s_{cd}s_{db}s_{ba} = s_1 s_2^{-1} \neq 1.$$

Im Komplex (K_2,a) hingegen ist auch die zweite Schleife zusammenziehbar.

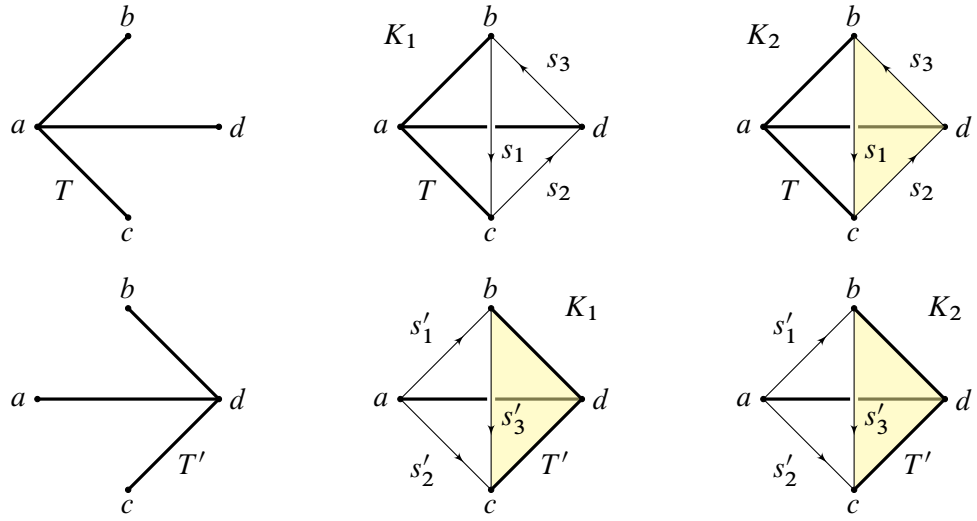


ABBILDUNG L:38. Zwei Spannbäume $T, T' \subset K_1 \subset K_2$

Beispiel. Wir untersuchen Abbildung L:38: Für den Spannbaum T gilt $\pi_1(T,a) = \{1\}$. Der Graph $K_1 \supset T$ fügt drei weitere Kanten ein. Jede liefert einen freien Erzeuger: Wie skizziert gilt $\pi_1(K_1,a) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, s_2, s_3 \mid - \rangle$. Der Komplex $K_2 \supset K_1$ fügt das Dreieck $\{\{b,c,d\}\}$ hinzu. Dieses liefert eine Relation: $\pi_1(K_2,a) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1 s_2 s_3 = 1 \rangle \cong \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$.

Ebenso gut können wir einen anderen Spannbaum wählen, etwa T'. Wir erhalten dann den Isomorphismus $\pi_1(K_2,a) \xrightarrow{\sim} \langle s'_1, s'_2, s'_3 \mid s'_3 = 1 \rangle \cong \langle s'_1, s'_2 \mid - \rangle$. Beide Präsentation können wir ineinander umrechnen dank Tietze–Transformationen (L3S).

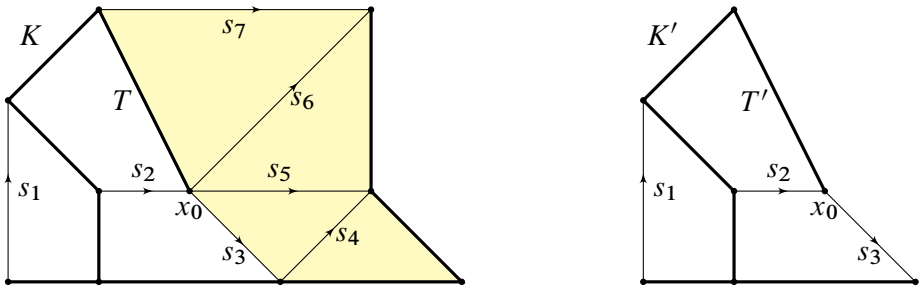


ABBILDUNG L:39. Spannbaum $T \subset K$ und $T' \subset K'$

Beispiel. Wir untersuchen Abbildung L:39: Für den Spannbaum T gilt $\pi_1(T,x_0) = \{1\}$. Der Graph $K_1 \supset T$ fügt sieben weitere Kanten ein. Jede liefert einen freien Erzeuger (L6D):

$$\pi_1(K_1,x_0) \cong \big\langle s_{ab} : \{a,b\} \in K_1 \;\big|\; s_{ab} : \{a,b\} \in T \big\rangle \cong \big\langle s_1, \ldots, s_7 \;\big|\; - \big\rangle$$

Der Komplex $K \supset K_1$ füllt vier Dreiecke aus. Jedes liefert eine weitere Relation (L6I):

$$\pi_1(K,x_0) \cong \big\langle s_{ab} : \{a,b\} \in K \;\big|\; s_{ab} : \{a,b\} \in T,\ s_{aa}, s_{ab}s_{ba}, s_{ab}s_{bc}s_{ca} : \{a,b,c\} \in K \big\rangle$$
$$\cong \big\langle s_1, \ldots, s_7 \;\big|\; s_4 = 1,\ s_3 s_4 = s_5 = s_6 = s_7 \big\rangle \quad \cong \quad \big\langle s_1, s_2, s_3 \;\big|\; - \big\rangle$$

Diese Gruppe ist ebenfalls frei, über den drei Erzeugern s_1, s_2, s_3. Dasselbe Ergebnis erhalten wir geometrisch aus dem starken Deformationsretrakt $K' \subset K$ aus Abbildung L:39.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L6e. Die Fundamentalgruppe des Torus. Mit Satz L6I können wir die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen bestimmen (L6M). Die folgende Übung führt dies für den Torus aus. Das ist noch etwas länglich, anschließend werden wir die Rechnung optimieren.

Übung L6K. Berechnen Sie für den Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ erneut die Fundamentalgruppe (L2O), diesmal jedoch simplizial. Anleitung: Wählen Sie einen triangulierenden Simplizialkomplex K, darin einen Spannbaum $T \subset K$, geben Sie alle Erzeuger und Relationen an. Berechnen Sie damit die Gruppe $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, *) \cong \pi_1(K,a) \cong [S \mid R] \cong \langle s,t \mid st = ts \rangle \cong \mathbb{Z}^2$.

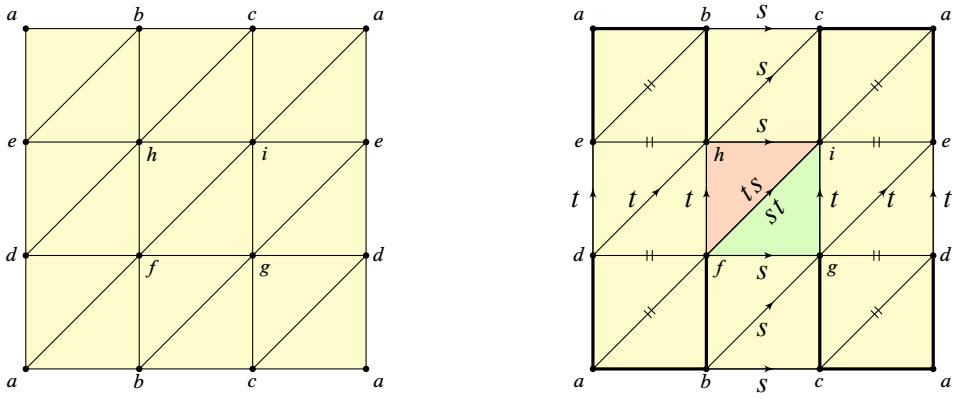


ABBILDUNG L:40. Simpliziale Berechnung der Fundamentalgruppe des Torus

✻ **L6K.** Wir nutzen die 9–Ecken-Triangulierung $|K| \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ aus Abbildung L:40 und wählen einen Spannbaum, hier fett markiert; für jede andere Wahl (K,T) geht man analog vor. Zu jeder Kante $\{x,y\} \in K \smallsetminus T$ wählen wir eine Orientierung (x,y) und somit einen der beiden Erzeuger s_{xy}; der andere ist $s_{yx} = s_{xy}^{-1}$.

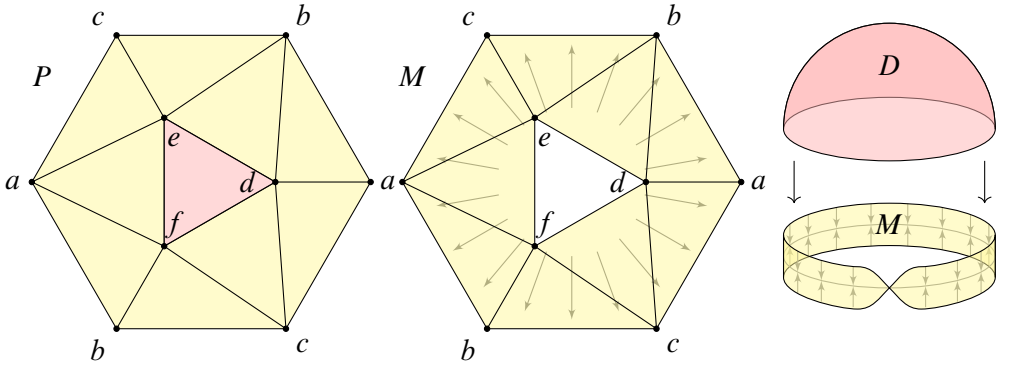
Die Erzeuger zu Kanten $\{x,y\} \in T$ des Spannbaums erfüllen $s_{xy} = 1$, können also weggelassen werden. Das betrifft hier die acht Kanten $s_{ab} = s_{ac} = s_{ad} = s_{ae} = s_{bf} = s_{bh} = s_{cg} = s_{ci} = 1$. Jedes Dreieck definiert eine Relation. Aus dem Dreick $\{a,b,f\}$ folgt $s_{af} = 1$, ebenso ergeht es $s_{df}, s_{be}, s_{eh}, s_{cd}, s_{dg}, s_{ai}, s_{ei}$. Damit löschen wir weitere 8 Kanten. Von den insgesamt 27 Kanten in K werden diese 16 Kanten auf 1 abgebildet.

Wir setzen $s_{bc} := s$ und finden $s_{bc} = s_{bg} = s_{fg} = s_{hc} = s_{hi} = s$ (mittlere Spalte). Wir setzen $s_{de} := t$ und finden $s_{de} = s_{dh} = s_{fh} = s_{ge} = s_{gi} = t$ (mittlere Zeile). Es bleibt nur noch die letzte Kante s_{fi} und die beiden Dreiecke $\{f,g,i\}, \{f,h,i\} \in K$. Das vorletzte Dreieck $\{f,g,i\} \in K$ erzwingt $s_{fi} = st$. Bislang sind s,t noch frei, müssen also keine Relation erfüllen. Das letzte Dreieck $\{f,h,i\} \in K$ erzwingt $s_{fi} = ts$, also die Relation $st = ts$. Zusammenfassend erhalten wir vollkommen explizit den folgenden Gruppenisomorphismus:

$$\begin{aligned}
\pi_1(K,a) \cong [S \mid R] \xrightarrow{\sim} \langle s,t \mid st = ts \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2 : \quad & s_{ab}, s_{ac}, s_{ad}, s_{ae}, s_{bf}, s_{bh}, s_{cg}, s_{ci} \mapsto 1 \mapsto (0,0) \\
& s_{af}, s_{df}, s_{be}, s_{eh}, s_{cd}, s_{dg}, s_{ai}, s_{ei} \mapsto 1 \mapsto (0,0) \\
& s_{bc}, s_{bg}, s_{fg}, s_{hc}, s_{hi} \mapsto s \mapsto (1,0) \\
& s_{de}, s_{dh}, s_{fh}, s_{ge}, s_{gi} \mapsto t \mapsto (0,1) \\
& s_{fi} \mapsto st \mapsto (1,1)
\end{aligned}$$

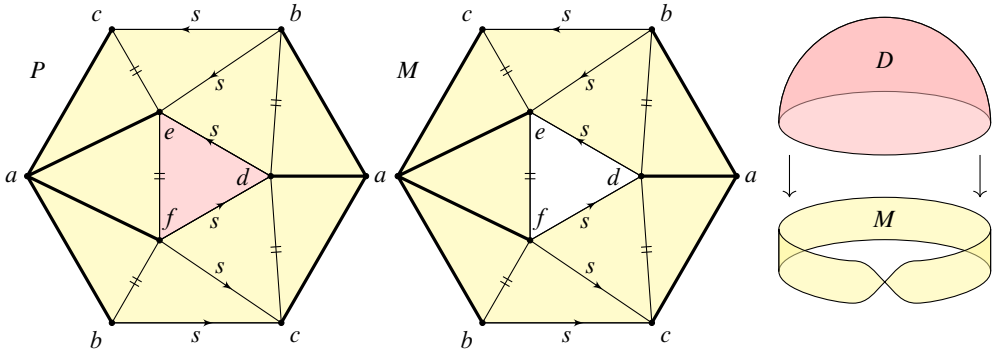
Der inverse Gruppenhomomorphismus ist demnach $\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \pi_1(K,a) : (k,\ell) \mapsto s^k t^\ell \mapsto [abca]^k [adea]^\ell$. *Bemerkung:* Für $K' = K \smallsetminus \{\{f,h,i\}\}$ haben wir $\pi_1(K',a) = \langle s,t \mid - \rangle$ berechnet. Dies können wir alternativ auch geometrisch sehen, sogar noch leichter: Der Randkomplex $L = \langle \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{e,a\} \rangle$ ist ein Graph, dank L6D lesen wir $\pi_1(L,a) \cong \langle s,t \mid - \rangle$ ab. Die Inklusion $i : |L| \hookrightarrow |K'|$ ist ein starker Deformationsretrakt, als Retraktion $r : |K'| \twoheadrightarrow |L|$ dient die radiale Projektion, und $(i_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(L,a) \cong \pi_1(K',a)$ zeigt $s_{fi} s_{ih} s_{hf} \approx sts^{-1}t^{-1}$. Die Inklusion $j : |K'| \hookrightarrow |K|$ fügt das letzte Dreieck $\{f,h,i\}$ hinzu und damit diese Relation. Diese Beobachtung vereinfacht die Berechnung; wir werden sie im Folgenden perfektionieren.

§L6f. Die Fundamentalgruppe der projektiven Ebene. Die folgende Abbildung zeigt die 6–Ecken Triangulierung $|P| \xrightarrow{\sim} \mathbb{RP}^2$ der projektiven Ebene (I3D). Wir erhalten sie aus dem Ikosaeder (A:8) durch Identifikation gegenüberliegender Punkte.



Übung L6L. Berechnen Sie damit die Gruppe $\pi_1(\mathbb{RP}^2,a) \cong \pi_1(P,a) \cong \langle\, s \mid s^2 \,\rangle \cong \mathbb{Z}/2$.

✻ **L6L.** Der Komplex $M = P \smallsetminus \{\{d,e,f\}\}$ ohne das zentrale Dreieck trianguliert das Möbius–Band. Hierin ist $S = \langle \{a,b\},\{b,c\},\{c,a\} \rangle$ die Seele $|S| \cong \mathbb{S}^1$ des Bandes. Für die Kreislinie wissen wir $\pi_1(S,a) \cong \langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$; der Erzeuger ist hier $s = [abca]$. Zudem sehen wir die starke Deformationsretraktion $(\rho,\iota) : |M| \simeq |S|$, also $\rho_\sharp : \pi_1(M,a) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S,a) \cong \langle s \mid - \rangle$. Der Rand des Möbius–Bandes ist $\partial M = \langle \{d,e\},\{e,f\},\{f,d\} \rangle$. Der Weg $\gamma = |adefda|$ umläuft den Rand einmal, aber $\rho_\sharp([adefda]) = [abcabca] = s^2$ umläuft die Seele zweimal. In $P = M \cup \{\{d,e,f\}\}$ wird dies als Relation eingefügt: $[abcabca] = [adefda] = 1$ in $\pi_1(P,a)$. Wir erhalten so die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{RP}^2,a) \cong \pi_1(P,a) \cong \langle\, s \mid s^2 \,\rangle \cong \mathbb{Z}/2$.



Simplizial erhalten wir dasselbe Ergebnis wie folgt: Für das Möbius–Band M wählen wir als Spannbaum $T = \langle \{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{a,f\} \rangle$ wie oben skizziert. Die Kante $\{b,d\}$ fügt einen neuen Erzeuger hinzu, doch dieser wird durch das Dreieck $\{a,b,d\}$ gelöscht. Ebenso ergeht es den Kanten $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{c,e\}$ und schließlich $\{e,f\}$. Die Kante $\{b,c\}$ fügt einen neuen Erzeuger s hinzu. Die Kante $\{b,e\}$ ist hierzu äquivalent aufgrund des Dreiecks $\{b,c,d\}$. Ebenso die Kanten $\{d,e\}$, $\{f,c\}$ und $\{f,d\}$. Wir erhalten so aus Satz L6I den Isomorphismus $\psi_M : \pi_1(M,a) \xrightarrow{\sim} \langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$. Der Weg $\gamma = |adefda|$ umläuft den Rand des zentralen Dreiecks einmal, und wir lesen $\psi_M(\gamma) = s^2$ ab. In $P = M \cup \{\{d,e,f\}\}$ wird genau dies als Relation eingefügt. Wir erhalten so aus Satz L6I den Isomorphismus $\psi_P : \pi_1(P,a) \xrightarrow{\sim} \langle s \mid s^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$.

Bemerkung. Unsere Berechnungen für den Torus (L6K) und die projektive Ebene (L6L) verlaufen erstaunlich ähnlich: Dahinter steckt eine allgemeine Methode. Der folgende Satz L6M präsentiert die Fundamentalgruppe für jede geschlossene Fläche $F_g^\pm$ und perfektioniert die hier herauskristallisierte Beweismethode.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L6g. Flächengruppen. Allgemein erhalten wir:

Satz L6M. *Für die geschlossenen Flächen $F_g^\pm$ haben wir Gruppenisomorphismen*

$$\pi_1(F_g^+, x_0) \xrightarrow{\sim} G_g^+ := \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle,$$
$$\pi_1(F_g^-, x_0) \xrightarrow{\sim} G_g^- := \langle c_0, c_1, \dots, c_g \mid c_0 c_0 c_1 c_1 \cdots c_g c_g = 1 \rangle.$$

BEWEIS. Wir betrachten die Fläche $F = \mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ im Polygonmodell (K3E) mit Flächenwort $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ der Länge $n = 4g$. Der Fall $w = c_0 c_0 \dots c_g c_g$ mit $n = 2 + 2g$ ist analog. Wir realisieren dies durch ein n–Eck; jede Randkante unterteilen wir in drei Teilintervalle; das Innere des n–Ecks unterteilen wir ausreichend fein wie in L:41. Wir erhalten einen Simplizialkomplex (K, L) mit $|K| \cong \mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ und $|L| \cong \mathbb{S}^1/\langle w \rangle$.

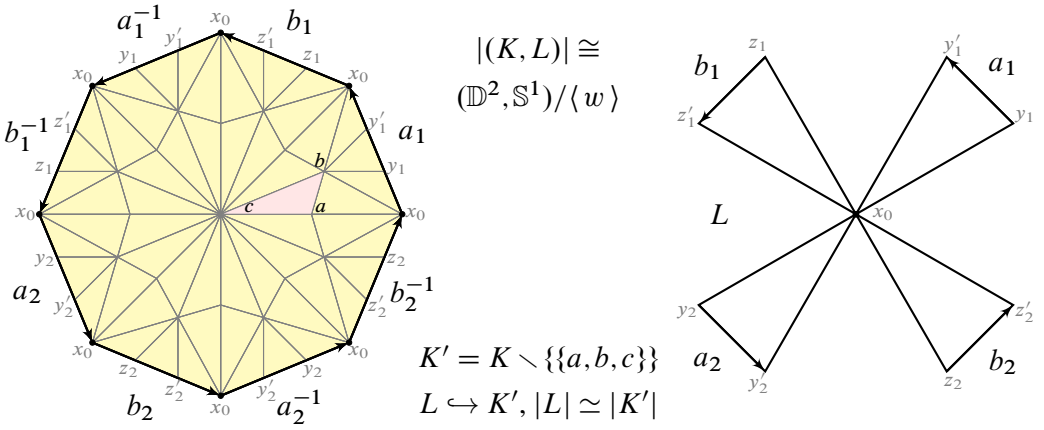


ABBILDUNG L:41. Das Wort $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ definiert die Fläche $F = \mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ und die Relation in $\pi_1(F, x_0) = \langle a_1, b_1, a_2, b_1 \mid w \rangle$.

Der Komplex L ist ein Graph: Alle Eckpunkte des n–Ecks werden im Quotienten zu einem einzigen Punkt x_0 identifiziert. Jede der Kanten $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ bildet in L eine Schleife. Daher ist $\pi_1(|L|, x_0)$ frei mit den Erzeugern $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$. Das Umlaufen des n–Ecks ergibt unser Flächenwort w in $\pi_1(|L|, x_0)$.

Aus K entfernen wir ein Dreieck $\Delta = \{a, b, c\} \in K$ wie skizziert und erhalten den Simplizialkomplex $K' = K \smallsetminus \{\Delta\}$. Die Inklusionen $i : L \hookrightarrow K'$ und $j : K' \hookrightarrow K$ induzieren

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid - \rangle \xrightarrow[\text{L6D}]{\cong} \pi_1(L, x_0) \xrightarrow[\text{L2I}]{\cong} \pi_1(K', x_0) \xrightarrow[\text{L6I}]{\text{surjektiv!}} \pi_1(K, x_0)$$
$$[w] \xleftarrow[(i_\sharp, r_\sharp)]{} [w'] \longmapsto 1$$

Die Inklusion $|i| : |L| \hookrightarrow |K'|$ ist ein starker Deformations-Retrakt; die zugehörige Retraktion $r : |K'| \to |L|$ ist gegeben durch die radiale Projektion auf den Rand des n–Ecks in $\mathbb{R}^2$. Somit induziert r einen Gruppenisomorphismus $(|i|_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(|K'|, x_0) \cong \pi_1(|L|, x_0)$.

Die Inklusion $j : K' \hookrightarrow K$ induziert den Homomorphismus $j_\sharp : \pi_1(K', x_0) \to \pi_1(K, x_0)$. Er ist surjektiv, denn es kommt nur ein Dreieck und damit eine Relation hinzu (L6I): Der Kantenzug $w' = x_0 abc a x_0$ wird nullhomotop. Dank r sehen wir $w' \approx w$. Beim Übergang von K' zu K fügt das zusätzliche Dreieck Δ also genau die Relation w hinzu. □

☞ **§L6h. Illustration.** Für die berandeten Flächen waren die Fundamentalgruppen leicht ☜ zu bestimmen (L6H). Wir erläutern nun nochmals die geschlossenen Flächen.

Beispiel. Für die Sphäre $F_0^+ \cong \mathbb{S}^2$ gilt $\pi_1(\mathbb{S}^2, x_0) = \{1\}$, wie wir bereits aus L2U wissen.

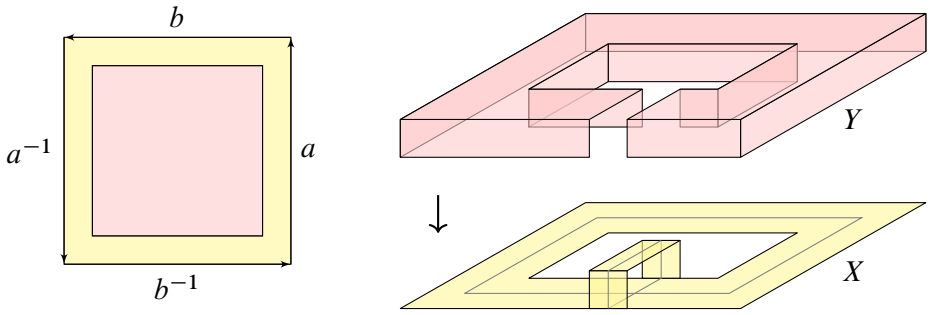


ABBILDUNG L:42. Torus im Polygonmodell und eingebettet im Raum.

Beispiel. Der erste nicht-triviale Fall ist der Torus F_1^+. Die in L:42 gezeigte Identifizierung $q : [-1,1]^2 \twoheadrightarrow |K|$ realisieren wir als Simplizialkomplex $|K| \subset \mathbb{R}^3$. Wir betrachten das Quadrat $Q = [\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon]^2$ mit $0 < \varepsilon < 1/2$ und den Randstreifen $R = [-1,1]^2 \smallsetminus Q^\circ$.

Der Quotient $X := q(R) \cong F_{1,1}^+$ ist eine berandete Fläche vom Geschlecht 1. Die Kanten a und b in R bilden einen Graphen $|L| \subset X$. Dieser ist ein starker Deformationsretrakt, also $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(L, x_0) \cong \langle a, b \mid - \rangle$. Auch der Quotient $Y := q(Q) \cong F_{0,1}^+$ ist eine berandete Fläche. Da hier nichts identifiziert wird, erhalten wir eine Kopie des Quadrats Q.

Wir setzen die Fläche $F_1^+ = X \cup Y$ zusammen. Der gemeinsame Rand $X \cap Y = \partial X = \partial Y$ stellt in $\pi_1(X, x_0)$ das nicht-triviale Element $w = aba^{-1}b^{-1}$ dar. Hingegen ist der Rand in $Y \cong Q$ zusammenziehbar. Wir erhalten $\pi_1(F_1^+, x_0) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$.

Bemerkung. Das deckt sich mit $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und $\pi_1(F_1^+, x_0) \cong \mathbb{Z}^2$, siehe L2O und L6K.

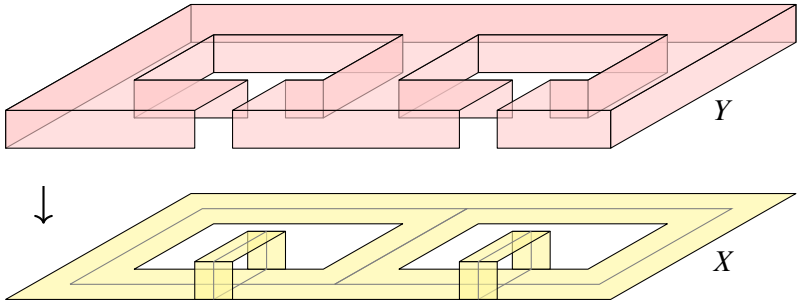


ABBILDUNG L:43. Beim Autobau heißt das „Hochzeit“ von Karosse und Motor.

Beispiel. Dieses Argument gilt für alle geschlossenen Flächen: Wie in Abbildung L:43 zerlegen wir $F_g^\pm = X \cup Y$ in zwei berandete Flächen $X \cong F_{g,1}^\pm$ und $Y \cong \mathbb{D}^2$. Der gemeinsame Rand $X \cap Y = \partial X = \partial Y$ stellt in $\pi_1(X, x_0)$ das Flächenwort w dar (L6H). Hingegen ist der Rand in $Y \cong \mathbb{D}^2$ zusammenziehbar. Wir erhalten hieraus $\pi_1(F_g^\pm, x_0)$ wie in Satz L6M.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L6i. Abelschmachung der Flächengruppen. Gruppenelemente $a,b \in G$ *kommutieren*, wenn $ab = ba$ gilt, also ihr Kommutator verschwindet: $[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = 1$. Ist die Gruppe $G = \langle S \mid R \rangle$ durch Erzeuger und Relationen präsentiert, so entsteht die Abelschmachung G_{ab} durch Hinzufügen aller Kommutatorrelationen $[a,b] = 1$ mit $a,b \in S$ (L3Q)

In $(G_g^+)_{\text{ab}}$ wird hierbei die Relation $[a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g] = 1$ redundant (L3S):

$$\begin{aligned} H_g^+ := (G_g^+)_{\text{ab}} &= \big\langle a_1,b_1,\dots,a_g,b_g \;\big|\; [a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g] = 1 \big\rangle_{\text{ab}} \\ &= \big\langle a_1,b_1,\dots,a_g,b_g \;\big|\; [a_i,a_j] = [a_i,b_j] = [b_i,b_j] = 1,\ [a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g] = 1 \big\rangle \\ &= \big\langle a_1,b_1,\dots,a_g,b_g \;\big|\; [a_i,a_j] = [a_i,b_j] = [b_i,b_j] = 1 \big\rangle \quad\cong\quad \mathbb{Z}^{2g} \end{aligned}$$

$$h : \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\sim} (G_g^+)_{\text{ab}} : \big(k_1,\ell_1,\dots k_g,\ell_g\big) \mapsto a_1^{k_1} b_1^{\ell_1} \cdots a_g^{k_g} b_g^{\ell_g}$$

In $(G_g^-)_{\text{ab}}$ können wir den Erzeuger c_0 durch $t = c_0 c_1 \cdots c_n$ ersetzen (L3S):

$$\begin{aligned} H_g^- := (G_g^-)_{\text{ab}} &= \big\langle c_0,c_1,\dots,c_g \;\big|\; [c_i,c_j] = 1,\ c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2 = 1 \big\rangle \\ &= \big\langle t,c_0,c_1,\dots,c_g \;\big|\; [c_i,c_j] = 1,\ t = c_0 c_1 \cdots c_g,\ t^2 = 1,\ [t,c_i] = 1 \big\rangle \\ &= \big\langle t,c_1,\dots,c_g \;\big|\; t^2 = 1,\ [t,c_i] = 1,\ [c_i,c_j] = 1 \big\rangle \quad\cong\quad \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g \end{aligned}$$

$$h : \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g \xrightarrow{\sim} (G_g^-)_{\text{ab}} : (k_0 + 2\mathbb{Z}, k_1, \dots, k_g) \mapsto c_0^{k_0} c_1^{k_0+k_1} \cdots c_g^{k_0+k_g}$$

$$h^{-1} : (G_g^-)_{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g : c_0^{\ell_0} c_1^{\ell_1} \cdots c_g^{\ell_g} \mapsto (\ell_0 + 2\mathbb{Z}, \ell_1 - \ell_0, \dots, \ell_g - \ell_0)$$

Sind zwei dieser Gruppen isomorph? Nein, der Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen garantiert, dass die Gruppen $H_g^\pm$ untereinander nicht isomorph sind.

Alternativ gelingt dies direkt: Jede Gruppe H_g^- hat ein Element der Ordnung 2, dies gilt für keine der Gruppen H_g^+. Innerhalb jeder der beiden Familien genügt zum Beispiel Zählen von Homomorphismen: Wir finden $|\text{Hom}(H_g^+, \mathbb{Z}/2)| = 2^{2g}$ und $|\text{Hom}(H_g^-, \mathbb{Z}/2)| = 2^{g+1}$.

Satz L6N. *Für alle Paare $(\varepsilon,g) \neq (\delta,h)$ mit $\varepsilon,\delta \in \{\pm\}$ und $g,h \in \mathbb{N}$ gilt:*

(1) $H_g^\varepsilon \ncong H_h^\delta$ — *Die abelsch gemachten Gruppen sind nicht isomorph.*
(2) $G_g^\varepsilon \ncong G_h^\delta$ — *Die Flächengruppen sind untereinander nicht isomorph.*
(3) $F_g^\varepsilon \not\simeq F_h^\delta$ — *Die Flächen sind untereinander nicht homotopie-äquivalent.*
(4) $F_g^\varepsilon \ncong F_h^\delta$ — *Die Flächen sind untereinander nicht homöomorph.*

BEWEIS. Wir nutzen dankend die zuvor entwickelten Funktoren

$$\texttt{Top}_* \xrightarrow[\text{G4L}]{\text{quot}} \texttt{hTop}_* \xrightarrow[\text{L2N}]{\pi_1} \texttt{Grp} \xrightarrow[\text{L3N}]{\text{ab}} \texttt{Ab}.$$

Jeder Funktor erhält Isomorphismen (H4F). Im vorliegenden Fall bedeutet das:

$$F_g^\varepsilon \cong F_h^\delta \quad\Longrightarrow\quad F_g^\varepsilon \simeq F_h^\delta \quad\Longrightarrow\quad G_g^\varepsilon \cong G_h^\delta \quad\Longrightarrow\quad H_g^\varepsilon \cong H_h^\delta$$

Wie oben berechnet, folgt aus $H_g^\varepsilon \cong H_h^\delta$ schließlich die Gleichheit $(g,\varepsilon) = (h,\delta)$.

Durch Kontraposition erhalten wir aus $(g,\varepsilon) \neq (h,\delta)$ die obigen Aussagen (1–4). □

Bemerkung. Es ist ein bemerkenswerter Glücksfall, dass sich die Flächengruppen leicht berechnen lassen (L6M), und bereits ihre Abelschmachungen zur Unterscheidung genügen. Das war nicht vorherzusehen, wir freuen uns umso mehr über diesen wunderbaren Erfolg.

§L6j. Klassifikation der geschlossenen Flächen. In der Flächenklassifikation (K3I) haben wir durch Schneiden und Kleben gezeigt: Jede kompakte zusammenhängende (triangulierte) Fläche F ist homöomorph zu *mindestens* einer unserer Modellflächen $F^{\varepsilon}_{g,r}$. Dass dies für *genau* eine der Modellflächen zutrifft, haben wir mit der topologischen Invarianz der Orientierbarkeit, des Randes und der Euler–Charakteristik begründet.

Die Invarianz der Euler–Charakteristik konnten wir leider bislang noch nicht beweisen. Der obige Satz L6N bietet nun eine Alternative, die wir relativ leicht beweisen können: Die (abelsch gemachte) Fundamentalgruppe genügt als Invariante zur Unterscheidung.

Satz L6N besagt zudem: Für geschlossene Flächen ist Homotopie-Äquivalenz dasselbe wie Homöomorphie. Für Flächen mit Rand gilt diese Aussage nicht. Zum Beispiel sind der Zylinder und das Möbius–Band nicht homöomorph, wohl aber homotopie-äquivalent.

Satz L6O. *Genau dann sind zusammenhängende kompakte Flächen $F = F^{\varepsilon}_{g,r}$, $F' = F^{\delta}_{h,s}$ homotopie-äquivalent, $F \simeq F'$, wenn ihre Gruppen isomorph sind, $\pi_1(F,x_0) \cong \pi_1(F',x_0')$.*

In diesem Fall sind insbesondere die Euler–Charakteristiken gleich, $\chi(F) = \chi(F')$.

Im geschlossenen Fall $r = s = 0$ existiert sogar ein Homöomorphismus $F \cong F'$.

BEWEIS. Aus $F \simeq F'$ folgt $\pi_1(F,x_0) \cong \pi_1(F',x_0')$ dank L2N. Wir wollen umgekehrt zeigen: Aus $\pi_1(F,x_0) \cong \pi_1(F',x_0')$ folgt $|K| \simeq |L|$. Die Gruppen $\pi_1(F^{\pm}_{g,r})$ mit $r \geq 1$ sind frei aber die Gruppen $\pi_1(F^{\pm}_{g})$ nicht (M5L). Wir können diese Fälle also separat behandeln:

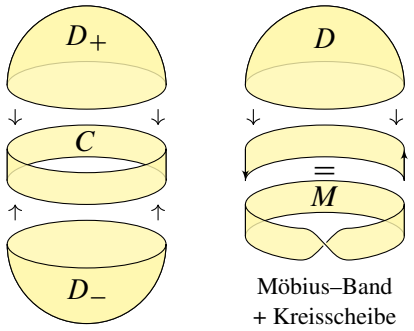
Im berandeten Fall folgt $F \simeq F'$ aus L6H. Hier gilt $|\mathrm{Hom}(\pi_1(F^{\pm}_{g,r}),\mathbb{Z}/2)| = 2^{1-\chi}$

Geschlossen folgt $F \cong F'$ aus L6N. Hier gilt $|\mathrm{Hom}(\pi_1(F^{\pm}_{g}),\mathbb{Z}/2)| = 2^{2-\chi}$. □

Bemerkung. Wie für Graphen (L6G) erhalten wir Homotopie-Invarianz als Dreingabe (A3J): Aus jeder Homotopie-Äquivalenz $|K| \simeq |L|$ kompakter Flächen folgt $\chi(K) = \chi(L)$

§L6k. Die Fundamentalgruppe der projektiven Ebene. Ich greife nochmals unsere Berechnung der Flächengruppen $\pi_1(F^{\pm}_{g},x_0)$ auf. In §L6h haben wir dies bereits illustriert. Die einfachste nicht-orientierbare Fläche ist die projektive Ebene $F^{-}_{0} \cong \mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm 1\}$.

Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 = M \cup D$ besteht wie rechts skizziert aus einem Möbiusband M und einer Kreisscheibe $D \cong \mathbb{D}^2$. Diese sind verklebt längs des gemeinsamen Randes $M \cap D = \partial M = \partial D \cong \mathbb{S}^1$. Es gilt $M \simeq \mathbb{S}^1$, und $\pi_1(M,x_0) \cong \mathbb{Z}$ wird frei erzeugt von der Seele s. Der Rand ∂M läuft *zweimal* um, stellt also das Element s^2 in $\pi_1(M,x_0)$ dar. In D ist der Rand $\partial D = \partial M$ zusammenziehbar. Wir erhalten $\pi_1(M \cup D,x_0) = \langle s \mid s^2 \rangle = \mathbb{Z}/2$.



Übung L6L zeigt dies simplizial und beweist ebenso $\pi_1(\mathbb{RP}^2,x_0) = \mathbb{Z}/2$.

Alternativ gelingt dies mit der Überlagerung $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$: Ein *halber* Umlauf $\tilde\gamma$ von $+e_1$ nach $-e_1$ auf dem Äquator $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$ wird im Quotienten ein *ganzer* Umlauf $\gamma = p \circ \tilde\gamma$ auf $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2$. Wäre γ in $\mathbb{RP}^2$ bei festen Endpunkten zusammenziehbar, so auch $\tilde\gamma$ in $\mathbb{S}^2$, was offensichtlich nicht möglich ist. Das Zusammenspiel von Fundamentalgruppe und Überlagerungen werden wir im nächsten Kapitel ausarbeiten.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L6l. Zellen anheften.** Sei A ein topologischer Raum und $f : \mathbb{S}^{n-1} \to A$ stetig. Auf ☜
$\tilde{X} = A \sqcup \mathbb{D}^n$ erzeugt dies die Äquivalenzrelation mit $s \sim f(s)$ für $s \in \mathbb{S}^{n-1}$. Der Quotientenraum $X = \tilde{X}/\!\sim =: A \cup_f \mathbb{D}^n$ entsteht aus A durch *Anheften einer n–Zelle* mittels f.

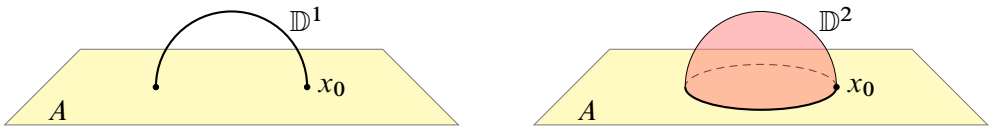


ABBILDUNG L:44. Anheften einer 1–Zelle (Intervall) und einer 2–Zelle (Kreisscheibe) entlang des Randes mittels einer Abbildung $f : \mathbb{S}^{n-1} \to A$

Satz L6P. *Sei A ein wegzusammenhängender Raum. Der Raum $X = A \cup_f \mathbb{D}^n$ entstehe durch Anheften einer n–Zelle. Als Fußpunkt wählen wir $x_0 = f(e_1)$ in $A \subset X$. Die Inklusion $\iota : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ induziert den Gruppenhomomorphismus $\iota_\sharp : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.*

(1) Für $n = 1$ ist $\iota_\sharp$ injektiv, und $\pi_1(K, x_0)$ entsteht durch Hinzufügen eines freien Erzeugers, repräsentiert durch einen Weg von x_0 über $\mathbb{D}^1$ und in A zurück nach x_0.
(2) Für $n = 2$ ist $\iota_\sharp$ surjektiv, und $\pi_1(K, x_0)$ entsteht durch Hinzufügen einer Relation: Der Weg $\gamma(t) = f(e^{2\pi i t})$ entlang des Randes $\mathbb{S}^1$ ist über $\mathbb{D}^2$ zusammenziehbar.
(3) Für $n \geq 3$ ändert sich die Fundamentalgruppe nicht: $\iota_\sharp$ ist ein Isomorphismus. □

Beispiel. Wir kennen diese Fälle bereits aus Satz L6I zur Berechnung der Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0)$ eines zusammenhängenden Simplizialkomplexes K. Zunächst wählen wir einen Spannbaum $T \subset K$ (I3J); dieser ist zusammenziehbar (J8F).

(1) $n = 1$: Anheften jeder weiteren Kante liefert einen freien Erzeuger.
(2) $n = 2$: Anheften jedes Dreiecks liefert eine Relation (eventuell redundant).
(3) $n \geq 3$: Anheften von n–Simplizes ändert die Fundamentalgruppe nicht.

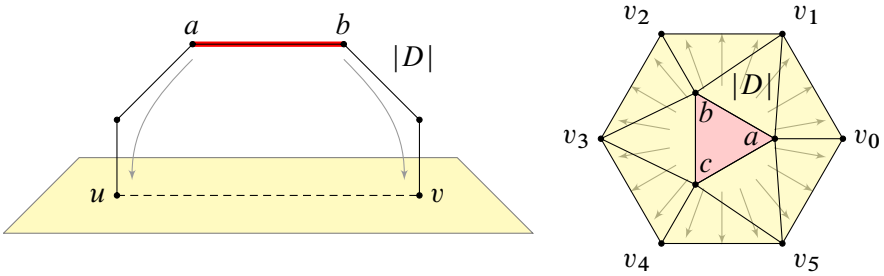


ABBILDUNG L:45. Simpliziales Anheften einer n–Zelle: Erst der letzte Simplex als Schlussstein ändert Homotopietyp und Fundamentalgruppe.

Übung L6Q. Wir betrachten den Rand des Oktaeders: $|K| = \partial[\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3]$ in $\mathbb{R}^3$ triangulliert durch seine Seiten: K besteht aus 6 Ecken, 12 Kanten und 8 Dreiecken.

(1) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(K_{\leq 1}, e_1)$ des 1–Skeletts.
(2) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(K, e_1)$ des 2–Skeletts.
(3) Berechnen Sie $\pi_1(K \cup D, e_1)$ mit der Diagonalen $D = \langle\{-e_3, e_3\}\rangle$.

☞ **§L6m. Simpliziales Anheften.** Wir wollen die Anheftung $X = A \cup_f \mathbb{D}^n$ simplizial ☜ beschreiben und so den vorigen Satz L6P präzisieren und beweisen. Hierzu betrachten wir Triangulierungen $|L| \cong A$, ein konvexes Polyeder $(|D|, |S|) \cong (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ und eine simpliziale Abbildung $\varphi : S \to L$ mit Realisierung $f = |\varphi| : \mathbb{S}^{n-1} \to A$. Auf der disjunkten Vereinigung $\tilde{K} = L \sqcup D$ erzeugt dies eine Äquivalenzrelation mit $s \sim \varphi(s)$ für alle Ecken $s \in \Omega(S)$. Wir erhalten einen Simplizialkomplex $K = \tilde{K}/_\sim =: L \cup_\varphi D$ als Quotienten.

Es kann allerdings vorkommen, dass wir hierbei mehr identifizieren als wir wollen: Man denke an $D = \langle\{-1,0\},\{0,1\}\rangle$ und $S = \langle\{-1\},\{1\}\rangle$ und die simpliziale Abbildung $f : S \to L$ mit $f(-1) = f(1) = x_0$. Dann wird an x_0 nur ein Intervall angeklebt und nicht eine Schleife, wie topologisch vorgegeben. Zur Sicherheit verlangen wir folgendes:

Lemma L6R. *Der Simplizialkomplex (D, S) sei im folgenden Sinne hinreichend fein:*

(*) Es gibt n–Simplizes in D ohne Ecken in S, und jede Ecke $s_0 \in \Omega(D) \smallsetminus \Omega(S)$ bildet mit all ihren S–Nachbarn $s_1, \dots, s_\ell \in \Omega(S)$ einen Simplex $\{s_0, s_1, \dots, s_\ell\} \in D$.

Dann liefert der Simplizialkomplex $K = L \cup_\varphi D$ eine Triangulierung $|K| \cong A \cup_f \mathbb{D}^n$. □

nicht hinreichend fein hinreichend fein

Beispiel. In Dimension $n = 1$ betrachten wir das Intervall $I = [0,1]$ mit Rand $S = \{0,1\}$. Jede Unterteilung von I in mindestens drei Teilintervalle, etwa mit den Teilungspunkten $0, 1/3, 2/3, 1$, ergibt einen hinreichend feinen (*) Simplizialkomplex (D, S).

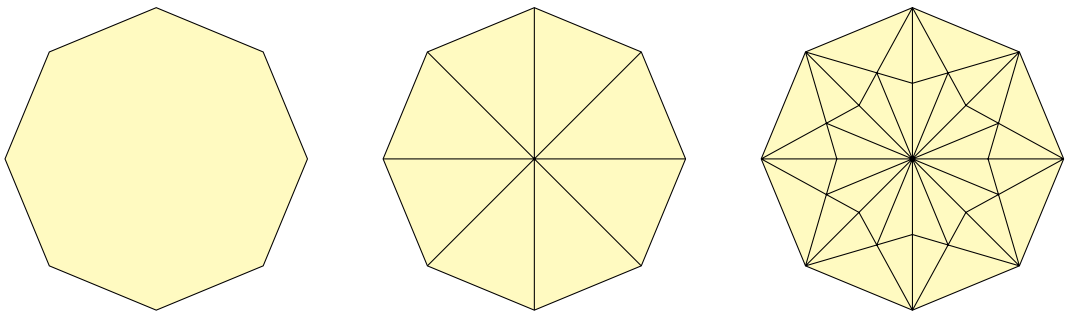


ABBILDUNG L:46. Zweifache baryzentrische Unterteilung des Polygons (P_m, S)

Beispiel. In Dimension $n = 2$ betrachten wir das m–Eck $P = [\{\, e^{2\pi i k/m} \mid k = 1, \dots, m \,\}]$. Sein Rand S besteht aus den Ecken $e^{2\pi i k/m}$ und Kanten $[e^{2\pi i (k-1)/m}, e^{2\pi i k/m}]$. Der polytopale Komplex $D = S \cup \{P\}$ enthält zudem das Polytop P. Die baryzentrische Unterteilung D' relativ S macht hieraus m Dreiecke. Die zweifache baryzentrische Unterteilung D'' relativ S ist in L:46 skizziert. Die Triangulierung (D'', S) ist hinreichend fein (*).

Bemerkung. Dieses Verfahren gelingt genauso in jeder Dimension $n \geq 1$: Wir beginnen mit Triangulierungen $|L| \cong A$ und $|S| \cong \mathbb{S}^{n-1}$, wobei $|S| = \partial P$ der Rand eines Polytops $P \subset \mathbb{R}^n$ ist, sowie einer simplizialen Abbildung $\varphi : S \to L$. Die baryzentrische Unterteilung des polytopalen Komplexes $D = S \cup \{P\}$ relativ S ergibt einen simplizialen Komplex D'. Die baryzentrische Unterteilung D'' von D' relativ S ist hinreichend fein (*). Dank Lemma L6R liefert der Simplizialkomplex $K = L \cup_\varphi D$ eine Triangulierung $|K| \cong A \cup_f \mathbb{D}^n$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Satz L6S.** *Sei L ein zusammenhängender Simplizialkomplex und $K = L \cup_\varphi D$ eine Anheftung mit $(|D|,|S|) \cong (\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1})$ und $\varphi : S \to L$. Als Fußpunkte wählen wir $s_0 \in \Omega(S)$ und $x_0 = \varphi(s_0) \in \Omega(L)$. Die Inklusion $\iota : (L,x_0) \hookrightarrow (K,x_0)$ induziert den Gruppenhomomorphismus $\iota_\sharp : \pi_1(L,x_0) \to \pi_1(K,x_0)$. Aus Satz L6I erhalten wir eine Präsentation*

$$\pi_1(L,x_0) = \langle\, \Sigma \mid R \,\rangle.$$

(1) Für $n = 1$ entsteht $\pi_1(K,x_0)$ durch Hinzufügen eines freien Erzeugers:

$$\pi_1(L,x_0) = \langle\, \Sigma \mid R \,\rangle \xhookrightarrow[\text{injektiv!}]{\iota_\sharp} \pi_1(K,x_0) = \langle\, \Sigma \cup \{\sigma\} \mid R \,\rangle$$

Hier besteht D aus einem Kantenzug $s_0 s_1 \dots s_{\ell-1} s_\ell$, der an das 1–Skelett von L angeheftet wird. Als neuen Erzeuger wählen wir eine innere Kante $\sigma = \{s_i, s_{i+1}\}$.

(2) Für $n = 2$ entsteht $\pi_1(K,x_0)$ durch Hinzufügen einer weiteren Relation:

$$\pi_1(L,x_0) = \langle\, \Sigma \mid R \,\rangle \xrightarrow[\text{surjektiv!}]{\iota_\sharp} \pi_1(K,x_0) = \langle\, \Sigma \mid R \cup \{\rho\} \,\rangle$$

Hier besteht S aus einem geschlossenen Kantenzug $s_0 s_1 \dots s_{\ell-1} s_0$ und definiert so einen geschlossenen Kantenzug $\rho = \varphi(s_0)\varphi(s_1)\dots\varphi(s_{\ell-1})\varphi(s_0)$ in (L,x_0).

(3) Für $n \geq 3$ induziert die Inklusion $i : (L,x_0) \hookrightarrow (K,x_0)$ einen Isomorphismus

$$\pi_1(L,x_0) = \langle\, \Sigma \mid R \,\rangle \xrightarrow[\cong]{\iota_\sharp} \pi_1(K,x_0) = \langle\, \Sigma \mid R \,\rangle.$$

BEWEIS. Dank Bedingung (*) können wir einen inneren n–Simplex $\sigma \in D$ wählen. Da dieser Simplex in keinem weiteren enthalten ist, ist $K' = K \smallsetminus \{\sigma\}$ ein Simplizialkomplex. Die Inklusionen $i : L \hookrightarrow K'$ und $j : K' \hookrightarrow K$ induzieren Gruppenhomomorphismen:

$$\langle\, \Sigma \mid R \,\rangle \xrightarrow[\text{L6I}]{\cong} \pi_1(L,x_0) \xrightarrow[\text{L2I}]{\cong} \pi_1(K',x_0) \xrightarrow[\text{L6I}]{j_\sharp} \pi_1(K,x_0)$$

Die Inklusion $|i| : |L| \hookrightarrow |K'|$ ist ein starker Deformations-Retrakt. Die zugehörige Retraktion $r : |K'| \to |L|$ ist gegeben durch radiale Projektion von $|D \smallsetminus \{\sigma\}|$ auf den Rand $|S|$ wie in Abbildung L:45. Gemäß L2I induzieren $|i|$ und r zueinander inverse Gruppenisomorphismen $|i|_\sharp : \pi_1(|L|,x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(|K'|,x_0)$ und $r_\sharp : \pi_1(|K'|,x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(|L|,x_0)$.

Im Falle $n \geq 3$ ist $j_\sharp$ nach L6I ein Isomorphismus, denn es kommt nur ein n–Simplex hinzu, und dieser hat keinen Einfluss auf die Fundamentalgruppe (L6J).

Im Falle $n = 2$ ist $j_\sharp$ nach L6I surjektiv, denn es kommt nur ein Dreieck und damit eine Relation hinzu. In $(|K'|,x_0)$ besteht der Rand von σ aus dem geschlossenen Kantenzug $abca$. Das entspricht in (K',x_0) einem geschlossenen Kantenzug $\rho' = w_a * abca * \overline{w_a}$ von x_0 nach a über a,b,c,a und schließlich zurück von a nach x_0. Die Homotopie–Retraktion $r : |K'| \to |L|$ zeigt $\rho' \approx \rho$. Beim Übergang von K' zu K fügt das zusätzliche Dreieck σ also genau die Relation ρ hinzu, wie in Abbildung L:45 skizziert.

Im Falle $n = 1$ schließlich ist $j_\sharp$ nach L6I injektiv. Da wir L als zusammenhängend voraussetzen, kommt nur die Kante σ als freier Erzeuger hinzu wie in Abbildung L:45. □

Bemerkung. Der Satz gilt ebenso, wenn L nicht zusammenhängend ist, denn für $n \geq 2$ ist S zusammenhängend. Lediglich für $n = 1$ tritt ein zusätzlicher Fall auf, da $S = \{s_0, s_1\}$ nicht zusammenhängt: Liegen $x_0 = \varphi(s_0)$ und $x_1 = \varphi(s_1)$ in verschiedenen Komponenten von L, so werden diese durch das Intervall D verbunden, also in π_0 zusammengeführt, und die Fundamentalgruppe $\pi_1(K,x_0) = \pi_1(L,x_0) * \pi(L,x_1)$ ist das freie Produkt (L9A).

§L6n. Die reell-projektiven Räume. Wir kennen folgende Fundamentalgruppen:

$$\mathbb{RP}^1 = \mathbb{S}^1/\{\pm 1\} \cong \mathbb{S}^1 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_1(\mathbb{RP}^1, *) \cong \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm 1\} \cong F_0^- \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_1(\mathbb{RP}^2, *) \cong \mathbb{Z}/2$$

Da die Fundamentalgruppen abelsch sind, können wir Fußpunkte weglassen (L2C).

Für höher-dimensionale projektive Räume nutzen wir direkt ihre Konstruktion:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{+\,2\text{–Zellen}} & \mathbb{S}^2 & \xhookrightarrow{+\,3\text{–Zellen}} & \mathbb{S}^3 & \xhookrightarrow{+\,4\text{–Zellen}} & \mathbb{S}^4 & \xhookrightarrow{+\,5\text{–Zellen}} & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle \pm 1} & & \downarrow{\scriptstyle \pm 1} & & \downarrow{\scriptstyle \pm 1} & & \downarrow{\scriptstyle \pm 1} & & \\
\mathbb{RP}^1 & \xhookrightarrow{+\,2\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^2 & \xhookrightarrow{+\,3\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^3 & \xhookrightarrow{+\,4\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^4 & \xhookrightarrow{+\,5\text{–Zelle}} & \dots
\end{array}$$

Beim Schritt $\iota : \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2$ wird eine Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ angeklebt, deren Rand zweimal um $\mathbb{RP}^1$ umläuft. Daher entspricht $\iota_\sharp : \pi_1(\mathbb{RP}^1) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^2)$ dem Quotienten $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$.

Bei $\iota : \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{RP}^3$ hingegen wird eine 3–Zelle $\mathbb{D}^3$ angeklebt, was die Fundamentalgruppe nicht ändert, also $\iota_\sharp : \pi_1(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{RP}^3)$. Dies setzt sich für alle $\mathbb{RP}^n$ fort:

Satz L6T. *Die Inklusionen* $\mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{RP}^3 \hookrightarrow \mathbb{RP}^4 \hookrightarrow \dots$ *induzieren*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_1(\mathbb{RP}^1) & \xrightarrow[\iota_\sharp]{} & \pi_1(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \pi_1(\mathbb{RP}^3) & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \pi_1(\mathbb{RP}^4) & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \\
\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \dots.
\end{array}$$

Anders gesagt: Die Schleife, die einmal um $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ *läuft, erzeugt* $\pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z}$ *und überlebt in allen* $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ *mit* $n \geq 2$ *als das nicht-triviale Element der Ordnung* 2.

BEWEIS. Aus der Konstruktion der projektiven Räume wissen wir (K2J): Der Raum $\mathbb{RP}^n$ entsteht aus $\mathbb{RP}^{n-1}$ durch Anheften einer n–Zelle $\mathbb{D}^n$ entlang $q : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$. Dank Satz L6P folgt für $n \geq 3$ hieraus die oben angegebene Isomorphie. □

Bemerkung. Da wir bislang nur simplizial arbeiten können (L6S), verlangt der formale Beweis nach Triangulierungen. Im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Standardbasis $e_0, \dots, e_n$ betrachten wir das *Kreuzpolytop* $[\pm e_0, \dots, \pm e_n]$; dies verallgemeinert das Oktaeder aus Dimension $n = 2$.

Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ triangulieren wir durch $\mathbb{S}^n \cong |K_n| = \partial[\pm e_0, \dots, \pm e_n]$. Dies ist symmetrisch bezüglich $x \mapsto -x$, ebenso die baryzentrische Unterteilung $K'_n \preccurlyeq K_n$. Letztere liefert eine Triangulierung des Quotientenraumes $\mathbb{RP}^n \cong |P_n|$ mit $P_n = K'_n/\{\pm 1\}$. Wir triangulieren $\mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{RP}^3 \hookrightarrow \dots$ durch $P_1 \hookrightarrow P_2 \hookrightarrow P_3 \hookrightarrow \dots$. Aus P_n entfernen wir einen n–Simplex $\Delta \in P_n$ und erhalten eine starke Deformationsretraktion $(i, r) : |P_{n-1}| \leftrightarrows |P_n \smallsetminus \{\Delta\}|$, und somit einen Isomorphismus $(i_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(P_{n-1}) \cong \pi_1(P_n \smallsetminus \{\Delta\})$.

Die Inklusion $j : P_n \smallsetminus \{\Delta\} \hookrightarrow P_n$ induziert $j_\sharp : \pi_1(P_n \smallsetminus \{\Delta\}) \to \pi_1(P_n)$. Für $n \geq 3$ ändert das Hinzufügen des n–Simplex Δ die Fundamentalgruppe nicht (L6I), also gilt

$$\pi_1(P_{n-1}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(P_n \smallsetminus \{\Delta\}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(P_n).$$

Für $n = 2$ haben wir die Situation in L6L analysiert und so $\pi_1(P_2) = \langle\, c \mid c^2 \,\rangle$ gefunden.

Bemerkung. Diese Berechnungen illustrieren, wie nützlich und effizient es ist, Räume durch sukzessives Ankleben von Zellen aufzubauen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L6o. Die orthogonalen Gruppen. Wir betrachten die Matrixgruppen (F1Q)

$$\mathrm{O}_n = \mathrm{O}_n\mathbb{R} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, A^\top A = 1 \right\} = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, 0),$$
$$\mathrm{SO}_n = \mathrm{SO}_n\mathbb{R} = \left\{ A \in \mathrm{O}_n\mathbb{R} \,\middle|\, \det A = 1 \right\} = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n, 0).$$

Dies sind Bewegungen (C2R) des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, letzteres sind die Drehungen. Das Gram–Schmidt–Verfahren (G5G) zeigt, dass $\mathrm{O}_n\mathbb{R} \subset \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \subset \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ starke Deformationsretrakte sind. Wir kennen bereits folgende Fundamentalgruppen (L2K):

$$\mathrm{GL}_2^+\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1 \quad \text{dank F1Q} \quad \Longrightarrow \quad \pi_1 \cong \mathbb{Z} \quad \text{dank J1I}$$
$$\mathrm{GL}_3^+\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_3\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3 \quad \text{dank K2P} \quad \Longrightarrow \quad \pi_1 \cong \mathbb{Z}/2 \quad \text{dank L6T}$$

Kanonischer Fußpunkt einer topologischen Gruppe $(G, \cdot, 1)$ ist das Einselement $1 \in G$. Da die Fundamentalgruppen zudem abelsch sind, könnten wir Fußpunkte weglassen (L2C).

Wir haben $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (x, 0)$ und entsprechend $\mathrm{SO}_n \hookrightarrow \mathrm{SO}_{n+1} : A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Ähnlich wie in Satz L6T gilt auch für orthogonale Gruppen folgende Stabilisierung:

Satz L6U. *Die Inklusionen* $\mathrm{SO}_2 \hookrightarrow \mathrm{SO}_3 \hookrightarrow \mathrm{SO}_4 \hookrightarrow \mathrm{SO}_5 \hookrightarrow \ldots$ *induzieren*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_1(\mathrm{SO}_2) & \xrightarrow[\iota_\sharp]{} & \pi_1(\mathrm{SO}_3) & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \pi_1(\mathrm{SO}_4) & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \pi_1(\mathrm{SO}_5) & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \ldots \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\
\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \ldots
\end{array}$$

Anders gesagt: Die Schleife, die eine volle Umdrehung realisiert, erzeugt $\pi_1(\mathrm{SO}_2) \cong \mathbb{Z}$ *und überlebt in allen* $\pi_1(\mathrm{SO}_n)$ *mit* $n \geq 3$ *als das nicht-triviale Element der Ordnung* 2. □

Den Anfang $\mathrm{SO}_2 \hookrightarrow \mathrm{SO}_3$ haben wir *ad hoc* behandelt. Die gesamte Folge erhält man in der algebraischen Topologie aus der langen exakten Homotopie-Sequenz für Faserbündel. Dank G5G gilt $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \simeq \mathrm{SL}_n\mathbb{R} \simeq \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ und somit $\pi_1(\mathrm{SO}_n\mathbb{R}) \cong \pi_1(\mathrm{SL}_n\mathbb{R}) \cong \pi_1(\mathrm{GL}_n\mathbb{R})$.

§L6p. Was bedeutet das konkret? Wenn Sie eine Figur in der Ebene um 360° drehen, dann liegt sie wieder wie zuvor. Nicht trivial jedoch ist der dadurch beschriebene Weg

$$\alpha_2 : \mathbb{R} \supset [0,1] \to \mathrm{SO}_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\alpha_2(t) \in \mathrm{SO}_2$ die Rotation der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Winkel $2\pi t$. Somit ist α_2 eine Schleife in $(\mathrm{SO}_2, 1)$. Wegen $\mathrm{SO}_2 \cong \mathbb{S}^1$ wird $\pi_1(\mathrm{SO}_2)$ frei von $[\alpha_2]$ erzeugt: Jedes Element in $\pi_1(\mathrm{SO}_2)$ ist eine n–fache Drehung und genau dann trivial, wenn $n = 0$ gilt. Das bedeutet:

$$\pi_1(\mathrm{SO}_2, 1) = \left\langle [\alpha_2] \,\middle|\, - \right\rangle, \qquad \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{SO}_2, 1) : n \mapsto [\alpha_2]^n = [t \mapsto \alpha_2(nt)]$$

Wenn Sie einen Körper im Raum um 360° drehen, dann liegt er wieder genau wie zuvor; wer bei der Bewegung nicht zugeschaut hat, bemerkt keinen Unterschied. Aber die Fundamentalgruppe merkt sich diese Drehung! Der Weg ist auch hier nicht-trivial:

$$\alpha_3 : \mathbb{R} \supset [0,1] \to \mathrm{SO}_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\alpha_3(t)$ die Rotation des Raumes $\mathbb{R}^3$ mit Winkel $2\pi t$ um die z–Achse. Somit ist α_3 eine Schleife in $(\mathrm{SO}_3, 1)$. Sie repräsentiert das nicht-triviale Element:

$$\pi_1(\mathrm{SO}_3, 1) = \big\langle [\alpha_3] \;\big|\; [\alpha_3]^2 = [1] \big\rangle \cong \mathbb{Z}/2.$$

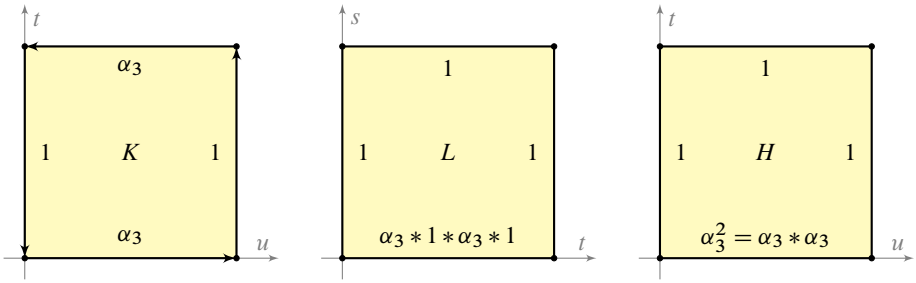
Der Weg α_3 ist auch hier nicht-trivial, also $[\alpha_3] \neq [1]$ in $\pi_1(\mathrm{SO}_3, 1)$. Hingegen ist die zweifache Drehung trivial, $[\alpha_3]^2 = [1]$ in $\pi_1(\mathrm{SO}_3, 1)$. Wie kann man sich das vorstellen?

☞ **Übung L6v.** Konstruieren Sie explizite Homotopien $H : \alpha_3^2 \sim 1$ bzw. $K : \alpha_3 \sim \alpha_3^{-1}$. ☜
Hinweis: Die Drehung des $\mathbb{R}^3$ um die Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ ist

$$\rho(s,\theta) \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;:\; x \mapsto x + \sin(\theta)\cdot s \times x + (1-\cos(\theta))\cdot s \times (s \times x).$$

Bemerkung. Die *Rodrigues–Formel* ist eine bequeme Parametrisierung der Drehgruppe durch die stetige Surjektion $\rho : \mathbb{S}^2 \times [0, 2\pi] \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$ und induziert einen Homöomorphismus $\mathbb{RP}^3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_3$ (K2P). Quaternionen liefern sogar Gruppenhomomorphismen $\mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$ und $\mathbb{S}^3/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_3$ (K2S). Wir erhalten so alle nicht-trivialen Elemente $[\alpha_n] \in \pi_1(\mathrm{SO}_n, 1)$: Aus der Schleife $\alpha_3 : [0,1] \to \mathrm{SO}_3$ und der Homotopie $H_3 : \alpha_3^2 \sim 1$ gewinnen wir dank $\mathrm{SO}_3 \hookrightarrow \mathrm{SO}_4$ die Schleife $\alpha_4 : [0,1] \to \mathrm{SO}_4$ und die Homotopie $H_4 : \alpha_4^2 \sim 1$, usw.

✻ **L6v.** Mit der Rodrigues–Formel können wir zunächst eine Homotopie $K : \alpha_3 \sim \alpha_3^{-1}$ ausschreiben:



Der Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^2 : t \mapsto (0, \sin(\pi t), \cos(\pi t))$ führt auf der Sphäre vom Nordpol $\gamma(0) = (0,0,1)$ zum Südpol $\gamma(1) = (0,0,-1)$ längs eines Halbkreises über $\gamma(1/2) = (0,1,0)$. Wir erhalten die stetige Abbildung

$$K : [0,1]^2 \to \mathrm{SO}_3 : (t,u) \mapsto \rho(\gamma(t), 2\pi u).$$

Längs des Randes $\partial[0,1]^2$ finden wir die beiden Wege $u \mapsto K(0,u) = \alpha_3(u)$ und $u \mapsto K(1,1-u) = \alpha_3(u)$ sowie $K(t,1) = K(t,0) = 1$. Somit haben wir eine Homotopie $K : \alpha_3 \sim \alpha_3^{-1}$.

Für den geschlossenen Kantenzug $\beta = |(0,0),(0,1),(1,1),(1,0),(0,0)|$ gilt $K \circ \beta = \alpha_3 * 1 * \alpha_3 * 1 \sim \alpha_3^2$. Damit können wir eine Homotopie $L : \alpha_3 * 1 * \alpha_3 * 1 \sim 1$ konstruieren:

$$L : [0,1]^2 \to \mathrm{SO}_3 : (s,t) \mapsto K((1-s)\beta(t))$$

Nach Konstruktion ist die Abbildung L stetig, es gilt $L(0,t) = (\alpha_3 * 1 * \alpha_3 * 1)(t)$ und $L(1,t) = 1$ sowie $L(s,0) = L(s,1) = 1$ für alle $s,t \in [0,1]$. Noch eleganter und etwas raffinierter ist die Homotopie

$$H : [0,1]^2 \to \mathrm{SO}_3 : (t,u) \mapsto \rho(\gamma(0), 2\pi u) \cdot \rho(\gamma(t), 2\pi u).$$

Nach Konstruktion ist H stetig, es gilt $H(0,u) = \alpha_3(u)\cdot\alpha_3(u) = (\alpha_3 * \alpha_3)(u)$ und $H(1,u) = \alpha_3(u)\cdot\bar{\alpha}_3(u) = 1$, wie man unmittelbar nachrechnet, sowie $H(t,0) = H(t,1) = 1$ für alle $s,t \in [0,1]$.

☞ **Bemerkung.** Damit ist $\alpha_3^2 \sim 1$ gezeigt. Weniger anschaulich ist $\alpha_3 \not\sim 1$. Dies gelingt mit der Überlagerung $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{RP}^3 \cong \mathrm{SO}_3$ und den Werkzeugen des nächsten Kapitels. Sie können es auch physikalisch realisieren / experimentell nachweisen / anschaulich vorführen durch die nachfolgenden Experimente. Das ist weniger präzise, dafür aber partytauglich. ☜

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L6q. Wir tanzen $\pi_1(\mathrm{SO}_3)$.** Sie können $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \mathbb{Z}/2$ wie folgt veranschaulichen: ☜

Übung L6W (Folklore)**.** Halten Sie eine gefüllte Tasse auf Ihrer Hand und drehen Sie diese behutsam vor sich um 360° um die vertikale Achse. Ihr Arm befindet sich nun in angespannter Haltung. Sie können die Drehung natürlich rückgängig machen und Ihren Arm so wieder entspannen. So verrückt es klingt, statt die Drehung rückgängig zu machen, können Sie auch *dieselbe* Drehung noch einmal durchführen, um Ihren Arm zu entspannen!

Bei Lerntypen unterscheidet man auditive, visuelle, kommunikative, motorische, uvm. Wenn Sie motorisch lernen, sollten Sie das unbedingt ausprobieren. Wenn Sie visuell lernen, lassen Sie es sich vorführen. Wenn Sie auditiv lernen, lassen Sie es sich erklären. Wenn Sie kommunikativ lernen, erzählen Sie auf der nächsten Party von Ihrer Topologie-Vorlesung.

☞ **§L6r. Der Zopf war Zeuge.** Weiters nenne ich ein anschauliches doch verblüffendes Experiment, das auf Paul DIRACs Vorträge in den 1930er Jahren zurückgeht. ☜

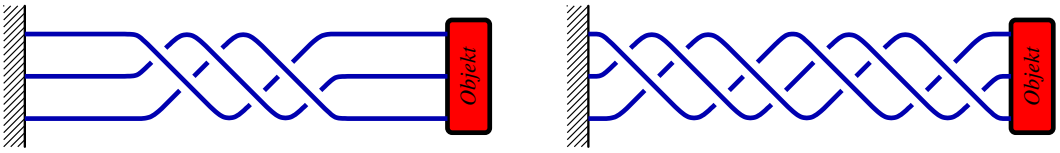


ABBILDUNG L:47. Dirac–Trick als Illustration des Spin $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \mathbb{Z}/2$

Übung L6X (Dirac–Trick)**.** Binden Sie ein Objekt (zum Beispiel die obige Tasse, wenn sie nicht schon zu Bruch gegangen ist) an drei Fäden an einer Wand fest (oder einem Stuhl, Tisch, etc.). Das Objekt nennen wir „Elektron“, die Wand „Universum“, und die Fäden „Wechselwirkungen“, die gesamte Anordnung „Zustand“.

- Wenn Sie das Elektron einmal drehen, dann ist sein Zustand nicht mehr derselbe: Versuchen Sie die Fäden bei festem Elektron zu entwirren, es wird Ihnen nicht gelingen. Diese empirische Beobachtung anschließend als topologische Eigenschaft zu beweisen ist nicht offensichtlich… aber auch nicht schwer. (Versuchen Sie es!)
- Wenn Sie das Elektron nochmals um sich selbst drehen (egal wie), so erhalten Sie den ursprünglichen Zustand zurück. Man vermutet zunächst, die zweifache Drehung müsste den Zustand weiter verkomplizieren… Verblüffenderweise ist das Gegenteil der Fall. Die Fäden lassen sich jetzt entwirren! (Versuchen Sie auch dies!)

Wie können wir das topologisch erklären? Wir betrachten $\{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le |x| \le 2 \,\} \cong [0,1] \times \mathbb{S}^2$ als den Raum zwischen Elektron und Universum. Hierauf definieren wir den Homöomorphismus $\theta : [0,1] \times \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} [0,1] \times \mathbb{S}^2$ durch $\theta(t,s) = (t, \alpha_3(t)s)$. Dieser fixiert den Rand $\{0,1\} \times \mathbb{S}^2$ punktweise. Wir überzeugen uns (zunächst experimentell) davon, dass sich θ bei festem Rand nicht stetig in die Identität von $[0,1] \times \mathbb{S}^2$ überführen lässt.

Da man sich θ nicht leicht vorstellen kann, griff Dirac zum Trick mit den Fäden, um die Wirkung von θ (be)greifbar zu machen. Man braucht einen Zopf aus mindestens drei Fäden oder ein verdrilltes Band, damit diese sich nach Wirkung von θ nicht entwirren lassen.

Die zweifache Ausführung von θ ist gegeben durch $\theta^2(t,s) = (t, \alpha_3(2t)s)$. Da die Schleife $\alpha_3^2 = \alpha_3 * \alpha_3$ in SO_3 zusammenziehbar ist, lässt sich auch θ bei festem Rand stetig in die Identität von $[0,1] \times \mathbb{S}^2$ überführen! Dies entwirrt die Fäden.

☞ **§L6s. Paul Dirac und der Spin des Elektrons.** Warum sollte uns $\pi_1 \mathrm{SO}_3$ interessieren? Hat die Topologie oder irgendeine Theorie konkrete Bedeutung oder Konsequenz? ☜

Wir leben in einer dreidimensionalen Welt, zumindest scheint dies ein gutes Modell, und die Tatsache $\pi_1(\mathrm{SO}_3) \cong \mathbb{Z}/2$ hat physikalische Bedeutung: Jedes Elementarteilchen steht mit dem umgebenden Universum in Wechselwirkung. (In der vorigen Turnübung spielt die Tasse das Teilchen, Sie das Universum und Ihr Arm die Wechselwirkung.)

Nun eröffnet $\pi_1(\mathrm{SO}_3) \cong \mathbb{Z}/2$ die Möglichkeit, dass einmalige Drehung nicht trivial ist, aber zweimalige Drehung schon. Je nachdem, ob das Teilchen auf diesen Unterschied reagiert oder nicht, sprechen Physiker von halbzahligem oder ganzzahligem Spin, und die Teilchen heißen je nach ihrem Verhalten Fermionen oder Bosonen.

Das ist zunächst nur eine theoretische Möglichkeit, aber die Natur will es tatsächlich so: Das Elektron hat diese Spin–$1/2$–Eigenschaft. Ebenso zu den Fermionen gehören Protonen und Neutronen, aus denen Atomkerne aufgebaut sind. Zu den Bosonen gehören zum Beispiel die Photonen, die für das Licht und elektromagnetische Felder verantwortlich sind.

Der Spin hat in der Quantenmechanik weitreichende Konsequenzen: Bei Vertauschung identischer Fermionen wechselt ihre Wellenfunktion Ψ das Vorzeichen; insbesondere können nicht beide im selben Zustand sein, denn sonst wäre $\Psi = -\Psi$, also $\Psi = 0$. Das sorgt zum Beispiel dafür, dass Elektronen im Atom verschiedene Energieniveaus besetzen und trägt somit zur Stabilität der Materie bei. Bei Vertauschung zweier Bosonen hingegen bleibt ihre Wellenfunktion Ψ unverändert. Im Gegensatz zu Fermionen können deshalb mehrere Bosonen im selben Zustand sein. Das nutzt man zum Beispiel beim Laser aus.

Der Physiker Paul DIRAC (1902–1984) entdeckte das Phänomen des Spin *theoretisch*, als er 1928 die Schrödinger–Gleichung der Quantenmechanik relativistisch formulierte. Die resultierende Dirac–Gleichung ergibt sich dabei aus mathematischer Notwendigkeit. Sie impliziert unter anderem die Existenz von Anti-Materie, im Falle des Elektrons also die Existenz des „Positrons“. Das war bis dato weder beobachtet noch vermutet worden, wurde aber im Anschluss an Diracs theoretische Erkenntnis tatsächlich *experimentell* bestätigt.

Diese Geschichte illustriert, wie sich Theorie und Praxis gegenseitig befruchten, und belegt insbesondere, dass manchmal die Theorie der Praxis vorauseilt: Mit Mathematik sieht man mehr. Diracs Theorie ist einer der großen Triumphe der Physik! Er erhielt für diese Leistung 1933 den Nobel–Preis, zusammen mit Erwin SCHRÖDINGER (1887–1961).

Nun will ich nicht den Eindruck erwecken, die Berechnung von $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \mathbb{Z}/2$ wäre hier das Wichtigste. Vielmehr ist diese Eigenschaft des Raumes die topologische Grundlage, auf der sich die mathematische und physikalische Theorie der Dirac–Operatoren entfaltet.

☞ **§L6t. Zu guter Letzt.** Die satirische Webseite *Der Postillon* berichtete am 30. August 2013 über das Problem (`www.der-postillon.com/2013/08/`). Unter dem Titel „Kölner Dom von Unbekannten über Nacht um 360 Grad gedreht“ wurde gemeldet: ☜

Köln (dpo) — Was für eine Frechheit! Unbekannte haben vergangene Nacht den Kölner Dom aus seiner Verankerung gelöst, leicht angehoben und um exakt 360 Grad gedreht. Die Tat war offensichtlich von langer Hand geplant, wurde sehr professionell ausgeführt und verlief nahezu spurenlos. Warum der Dom gedreht wurde, ist bislang noch unklar. [...] Zur Stunde arbeitet ein Gutachterteam aus Statikern und Architekten fieberhaft daran, herauszufinden, in welche Richtung der Dom überhaupt gedreht wurde.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L6u. Rechnen in $\pi_1(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R})$.** Eine schöne Illustration zum besseren Verständnis: ☜

Übung L6Y. Zu $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die stetige Abbildung $p_k : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{S}^1, 1) : z \mapsto z^k$.

(1) Präsentieren Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ und berechnen Sie hierauf den induzierten Gruppenhomomorphismus $\pi_1(p_k) : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.
(2) Ist jede Untergruppe $U < \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ das Bild einer solchen Abbildung $\pi_1(p_k)$?
(3) Beantworten Sie dieselben Fragen für $p_k : \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} : A \mapsto A^k$.
Nutzen Sie den ausgezeichneten Fußpunkt: welchen?

✻ **L6Y.** (1) Wir wissen $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \langle\, [\alpha] \mid - \,\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} : [\alpha]^\ell \mapsto \ell$ mit dem Weg $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$. Wir finden damit $(p_k \circ \alpha)(t) = (\alpha(t))^k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k t} = (\alpha * \cdots * \alpha)(t)$; dies ist die k–fache Aneinanderhängung des Weges α. Für $k < 0$ erhalten wir die $|k|$–fache Aneinanderhängung des umgekehrten Weges $\bar\alpha$. Somit gilt $\pi_1(p_k) : [\alpha]^\ell \mapsto [\alpha]^{k\ell}$. Dank deg ist dies äquivalent zu $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : \ell \mapsto k\ell$.

(2) Das Bild des Homomorphismus $\pi_1(p_k)$ entspricht der Untergruppe $k\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$. Da jede Untergruppe $H < \mathbb{Z}$ von dieser Form ist, ist jede Untergruppe tatsächlich Bild einer solchen Abbildung $\pi_1(p_k)$.

(3) Als Fußpunkt verwenden wir das neutrale Element, also die Einheitsmatrix $1 = 1_{n\times n}$. Dies ist das einzige Element, das unter allen Abbildungen p_k invariant bleibt. Die Wegkomponente von 1 ist $\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R} & \xrightarrow[A\mapsto A^k]{p_k} & \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R} \\ \iota \uparrow \simeq \downarrow r & & \iota \uparrow \simeq \downarrow r \\ \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} & \xrightarrow[A\mapsto A^k]{q_k} & \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} \end{array} \quad \xRightarrow{\pi_1} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R},1) & \xrightarrow[[\alpha_n]\mapsto[\alpha_n]^k]{\pi_1(p_k)} & \pi_1(\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R},1) \\ \pi_1(\iota) \uparrow \cong \downarrow \pi_1(r) & & \pi_1(\iota) \uparrow \cong \downarrow \pi_1(r) \\ \pi_1(\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R},1) & \xrightarrow[[\alpha_n]\mapsto[\alpha_n]^k]{\pi_1(q_k)} & \pi_1(\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R},1) \end{array}$$

Die Inklusion $\iota : \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}$ ist ein starker Deformationsretrakt: Das Gram–Schmidt–Verfahren (G5G) liefert eine Retraktion $r : \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}}$ und $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}}$. Dies induziert Isomorphismen $\pi_1(\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R},1) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R},1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(\mathrm{GL}_3^+\,\mathbb{R},1) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R},1) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^3,1) \cong \mathbb{Z}/2$. Für alle $n \geq 3$ gilt ebenso $\pi_1(\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R},1) \cong \mathbb{Z}/2$ (L6U). Als Erzeuger $[\alpha_n] \in \pi_1(\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R},1)$ haben wir explizit

$$\alpha_n : [0,1] \to \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1_{(n-2)\times(n-2)} \end{pmatrix}.$$

Da $\mathrm{SO}_n < \mathrm{GL}_n^+$ eine Untergruppe ist, können wir p_k einschränken zu $q_k : \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} : A \mapsto A^k$. Wir erhalten das obige Diagramm mit $p_k \circ \iota = \iota \circ q_k$. Anwendung des Funktors π_1 liefert das rechte Diagramm. Es genügt daher, den Homomorphismus $\pi_1(q_k)$ zu berechnen. Für $n = 2$ entspricht dies der vorigen Aufgabe (1):

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} & \xrightarrow[A\mapsto A^k]{q_k} & \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \\ \uparrow \cong \downarrow & & \uparrow \cong \downarrow \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow[z\mapsto z^k]{p_k} & \mathbb{S}^1 \end{array} \quad \xRightarrow{\pi_1} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R},1) & \xrightarrow[[\alpha_2]\mapsto[\alpha_2]^k]{\pi_1(q_k)} & \pi_1(\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R},1) \\ \uparrow \cong \downarrow & & \uparrow \cong \downarrow \\ \pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \xrightarrow[[\alpha]\mapsto[\alpha]^k]{\pi_1(p_k)} & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \end{array}$$

Wir wissen $\mathbb{S}^1 \cong \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$, genauer haben wir den Homöomorphismus und Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} : \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Antwort auf die Frage (3) in Dimension $n = 2$ genau dieselbe wie in Frage (1).

Auch für $n \geq 3$ gilt $(p_k \circ \alpha_n)(t) = (\alpha_n(t))^k = \alpha_n(kt) = (\alpha_n * \ldots * \alpha_n)(t)$, also $\pi_1(p_k) : [\alpha_n] \mapsto [\alpha_n]^k$. Wegen $[\alpha_n]^2 = [1]$ gilt hier $\pi_1(p_k)([\alpha_n]) = [1]$ für k gerade, und $\pi_1(p_k)([\alpha_n]) = [\alpha_n]$ für k ungerade.

Mittels des (eindeutigen) Isomorphismus $\pi_1(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R},1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2$ entspricht dies den Homomorphismen $\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0$ für k gerade, und $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1$ für k ungerade. Für gerade k ist das Bild dieser Abbildung $\{0\}$, für ungerade gleich $\mathbb{Z}/2$, also ist jede Untergruppe von $\mathbb{Z}/2$ Bild einer solchen Abbildung.

☞ **§L6v. Fundamentalgruppe topologischer Gruppen.** Schleifen $\alpha, \beta : [0,1] \to G$ in ☜ einer topologischen Gruppe $(G, \cdot, 1)$ erlauben zwei Operationen: die Aneinanderhängung $\alpha * \beta$ und die punktweise Multiplikation $\alpha \cdot \beta$. In der vorigen Übung haben wir $[\alpha * \beta] = [\alpha \cdot \beta]$ gesehen und genutzt. Diese Übereinstimmung ist kein Zufall sondern Notwendigkeit:

Übung L6z. Für jeden topologischen Raum (X, x_0) ist $\pi_0(X)$ eine Menge und $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe. Dies wird noch besser, wenn $(G, \cdot, 1)$ eine topologische Gruppe ist:

(1) Auf der Menge $\pi_0(G,1)$ ist $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ wohldefiniert und bildet eine Gruppe.
(2) Der Quotientenhomomorphismus $q : G \to \pi_0(G,1) : a \mapsto [a]$ erfüllt $\ker(q) = [1]$.
(3) Aus $H : \alpha * 1 \sim 1 * \alpha$ und $K : 1 * \beta \sim \beta * 1$ folgt $K \cdot H : \alpha * \beta \sim \beta * \alpha$.
(4) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(G,1)$ ist abelsch, und es gilt $[\alpha * \beta] = [\alpha \cdot \beta]$.
(5) Erlaubt $\mathbb{R}$ die Struktur einer topologischen Gruppe? und $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$? und $\mathbb{R} \smallsetminus \{0,1\}$?
(6) Erlaubt $\mathbb{C}$ die Struktur einer topologischen Gruppe? und $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$? und $\mathbb{C} \smallsetminus \{0,1\}$?
(7) Welche Sphären $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^4$ tragen die Struktur einer topologischen Gruppe?
(8) Welche kompakten Flächen erlauben die Struktur einer topologischen Gruppe?
(9) Ist die topologische Gruppe $(G, \cdot, 1)$ eine Mannigfaltigkeit, so ist sie orientierbar.

⁕ **L6z.** (1) Aus Wegen $\alpha : a \to a'$ und $\beta : b \to b'$ erhalten wir $\alpha \cdot \beta : a \cdot b \to a' \cdot b'$, somit $[a \cdot b] = [a' \cdot b']$. Die Gruppenaxiome von G induzieren die des Quotienten $\pi_0(G,1)$. Aussage (2) ist klar.

Aussage (3) ist klar. Hieraus folgt (4). Dieses notwendige Kriterium nutzen wir im Folgenden.

(5) Wir haben die Gruppen $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}^\times, \cdot) \cong (\{\pm 1\}, \cdot) \times (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Auch für $n \geq 1$ kann der Raum $\mathbb{R} \smallsetminus \{0, 1, \dots, n\} \cong (\mathbb{Z}/(n+2)\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ zu einer topologischen Gruppe gemacht werden.

(6) Wir haben die Gruppen $(\mathbb{C}, +)$ und $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$. Hingegen kann $\mathbb{C} \smallsetminus \{0,1\}$ nicht zu einer topologischen Gruppe gemacht werden: Die Fundamentalgruppe ist frei über zwei Erzeugern (L4D) und somit nicht abelsch.

(7) Wir wissen bereits durch Konstruktion, dass $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ und $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^\times$ sowie $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}_2$ Gruppen sind (F1Q). Hingegen ist $\mathbb{S}^{2m}$ für $m \geq 1$ keine topologische Gruppe (J5D).

(8) Jede topologische Gruppe G ist homogen (E7B): Zu je zwei Punkten $a, b \in G$ existiert ein Homöomorphismus $h : G \xrightarrow{\sim} G$ mit $a \mapsto b$, etwa $h(x) = ax^{-1}b$. Da eine Mannigfaltigkeit G stets innere Punkte besitzt, müssen für eine topologische Gruppe $(G, \cdot)$ alle Punkte innere Punkte sein, also $\partial M = \emptyset$. Wir betrachten also nur noch geschlossene Flächen. Für die offenen Flächen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ siehe (6).

Zusammenhängende geschlossene Flächen F haben wir klassifiziert, $F \cong F_g^\varepsilon$ mit $g \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon \in \{\pm\}$, und ihre Fundamentalgruppe ausgerechnet (L6M). Darunter gibt es nur drei, deren Fundamentalgruppe abelsch ist: $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{RP}^2$ sowie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ trägt tatsächlich eine Gruppenstruktur, als Produkt der Gruppe $(\mathbb{S}^1, \cdot)$. Die Sphäre $\mathbb{S}^2$ hingegen trägt keine Gruppenstruktur nach (7). Auch die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ trägt keine Gruppenstruktur nach (9); alternativ können wir die Techniken des folgenden Kapitels M nutzen: Besäße $\mathbb{RP}^2$ die Struktur einer topologischen Gruppe, dann auch $\mathbb{S}^2$ als Überlagerung.

Trägt eine kompakte Fläche F eine Gruppenstruktur $(F, \cdot, 1)$, so ist die Wegkomponente $[1] \subset F$ eine offene Teilmenge, also selbst eine Fläche, weiterhin dank (1) eine topologische Gruppe, und somit ein Torus, $\varphi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} [1]$. Wir wählen Repräsentanten $\Lambda \xrightarrow{\sim} \pi_0(F) : \lambda \mapsto [x_\lambda]$ und erhalten den Homöomorphismus $\Phi : \Lambda \times (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \xrightarrow{\sim} F : \Phi(\lambda, s) = x_\lambda \cdot \varphi(s)$. Kurzum: Die Fläche F besteht nur aus Tori.

(9) Wir wählen eine lokale Karte $\varphi_1 : (U, 1) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, 0)$ einer offenen Umgebung U des neutralen Elements 1 in G. Durch Linkstranslation dieser Karte φ_1 mit einem Gruppenelement $g \in G$ erhalten wir die Karte $\varphi_g : (gU, g) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, 0) : x \mapsto \varphi_1(g^{-1}x)$ um g. Diese Karten bilden den Atlas $\mathscr{A} = (\varphi_g)_{g \in G}$. Dieser ist orientiert, das heißt, alle Kartenwechsel sind orientierungserhaltend. Genauer: Die von der Karte φ_g im Punkt $h \in gU$ induzierte Orientierung ist dieselbe wie die von φ_h induzierte: Der Weg $\gamma : [0,1] \to G : t \mapsto \varphi_g^{-1}(t\varphi_g(h))$ führt von $\gamma(0) = g$ nach $\gamma(1) = h$ im Kartengebiet gU. Die Karten φ_g und $\varphi_{\gamma(t)}$ induzieren in $\gamma(t)$ dieselbe Orientierung für jedes $t \in [0,1]$: Der Orientierungsvergleich definiert eine Abbildung $[0,1] \to \{\pm 1\}$, sie beginnt bei $0 \mapsto +1$ und ist stetig, also ist sie konstant gleich $+1$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L7. Zellkomplexe

Wir wollen topologische Räume *strukturieren*, also mit *vernünftigen* Räumen arbeiten und diese *induktiv* aufbauen. Grundbausteine sind *n–Zellen* in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$:

Ball	$(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$
Simplex	$(\Delta^n, \partial\Delta^n)$
Würfel	$([0,1]^n, \partial[0,1]^n)$

Allgemein ist eine abgeschlossene bzw. offene *n–Zelle* ein topologischer Raum homöomorph zu $\mathbb{D}^n$ bzw. $\mathbb{B}^n$. Dies gilt zum Beispiel für den Simplex Δ^n und den Würfel $[0,1]^n$ als beliebte Modellräume. Welchen Modellraum wir wählen, hängt von der Anwendung ab: Simplizes bieten eine affin-lineare Struktur. Würfel sind abgeschlossen unter Produkten.

Manchmal benötigen wir am Rand einen Kragen und betrachten dann Zellen wie

$$\begin{aligned}
&(\{0\} \times \mathbb{D}^n) &&\cup\, ([0,1] \times \mathbb{S}^{n-1}) \\
&(\{0\} \times \Delta^n) &&\cup\, ([0,1] \times \partial\Delta^n)) \\
&(\{0\} \times [0,1]^n) &&\cup\, ([0,1] \times \partial[0,1]^n).
\end{aligned}$$

Beispiel. Jeder Simplizialkomplex $K = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ kommt naturgemäß mit seinen Skeletten $K_{\leq 0} \leq K_{\leq 1} \leq K_{\leq 2} \leq \dots$. Als topologische Realisierung erhalten wir:

$$\emptyset \xhookrightarrow[\text{(Ecken)}]{\text{+0–Zellen}} |K_{\leq 0}| \xhookrightarrow[\text{(Kanten)}]{\text{+1–Zellen}} |K_{\leq 1}| \xhookrightarrow[\text{(Dreiecke)}]{\text{+2–Zellen}} |K_{\leq 2}| \xhookrightarrow[\text{(Tetraeder)}]{\text{+3–Zellen}} |K_{\leq 3}| \xhookrightarrow{\qquad} \dots$$

Somit zerfällt $|K_{\leq n}| \smallsetminus |K_{<n}| \cong K_n \times \operatorname{Int}\Delta^n \cong K_n \times \mathbb{B}^n$ in Zusammenhangskomponenten, die jeweils homöomorph sind zum offenen Simplex $\operatorname{Int}\Delta^n$ und somit zum offenen Ball $\mathbb{B}^n$. Jede Zelle $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (|K_{\leq n}|, |K_{<n}|)$ ist affin parametrisiert, wodurch der topologische Raum $|K|$ lokal affine Koordinaten erhält. Es ist oft flexibler und manchmal vorteilhaft, die affine Struktur zu vergessen und mit beliebigen stetigen Parametrisierungen zu arbeiten.

Hieraus entsteht das Konzept eines *zellulären Raumes*, auch *CW–Raum* genannt.

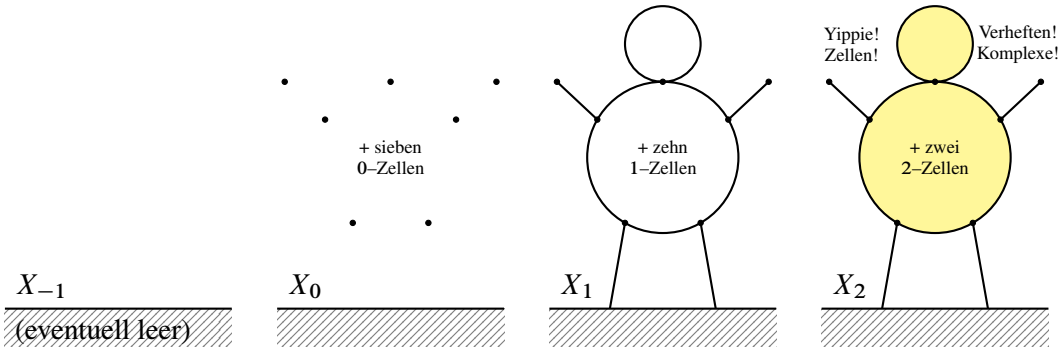


ABBILDUNG L:48. Aufbau eines Raumes aus Zellen der Dimension $0, 1, 2, \dots$
Am Anfang schuf Gott Himmel und Erde, und die Erde war wüst und leer: $X_{-1} = \emptyset$.
(Allgemein kann die Konstruktion mit einem beliebigen Raum X_{-1} beginnen.)
Am $n$ten Tag schuf Gott die n–Zellen, und siehe so entstand der Raum X_n.
Bereits am zweiten Tag sah Gott, dass es schon recht gut war: $X_2 = X$.

§L7a. Anheften von Zellen. Die Grundidee ist das Anheften einer n–Zelle:

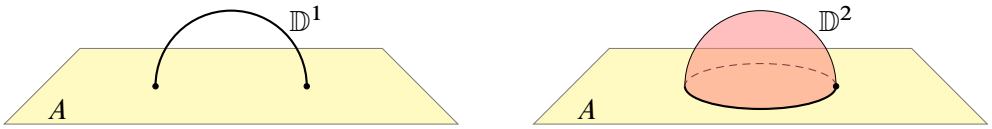


ABBILDUNG L:49. Anheften einer n–Zelle $\mathbb{D}^n$ mittels $f : \mathbb{S}^{n-1} \to A$

Die obige Skizze L:49 formalisieren wir wie folgt: Sei A ein topologischer Raum und $f : \mathbb{S}^{n-1} \to A$ stetig. Durch *Anheften* der n–Zelle $\mathbb{D}^n$ mittels f erhalten wir den Raum

$$X = A \cup_f \mathbb{D}^n = (A \sqcup \mathbb{D}^n)/\langle\, f(s) \sim s \mid s \in \mathbb{S}^1 \,\rangle.$$

Wir sagen, das Raumpaar (X, A) *entsteht durch Anheften einer n–Zelle*: Von A zu X neu hinzugekommen ist die offene n–Zelle $e = X \smallsetminus A \cong \mathbb{B}^n$. Hierzu gibt es eine stetige Parametrisierung $\varphi : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^1) \to (X, A)$ mit $\varphi(\mathbb{B}^n) = e = X \smallsetminus A$ und $\mathring{\varphi} := \varphi|^{e}_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} e$.

Wir können das Anheften einer n–Zelle demnach als Quotienten $X = A \cup_f \mathbb{D}^n$ betrachten oder äquivalent hierzu als Parametrisierung $\varphi : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^1) \to (X, A)$ mit $\mathring{\varphi} : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} X \smallsetminus A$. Ebenso können wir beim Übergang von A nach X mehrere n–Zellen gleichzeitig anheften; dies führt uns zu folgender Definition.

Definition L7A. Sei X ein Hausdorff–Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Das Paar (X, A) entsteht durch *Anheften von n–Zellen*, wenn es folgende *Parametrisierung* φ erlaubt:

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup (I \times \mathbb{D}^n) & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \text{quot}} & \searrow^{\iota_A \sqcup \varphi} & \\ A \cup_{\partial\varphi} (I \times \mathbb{D}^n) & \xrightarrow{\cong} & X \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\varphi : I \times (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X, A), \ \text{ also } \varphi : I \times \mathbb{D}^n \to X \text{ mit} \\ &\varphi(I \times \mathbb{S}^{n-1}) \subset A, \qquad \partial\varphi := \varphi|^{A}_{I \times \mathbb{S}^{n-1}} : I \times \mathbb{S}^{n-1} \to A, \\ &\varphi(I \times \mathbb{B}^n) = X \smallsetminus A, \quad \mathring{\varphi} := \varphi|^{X \smallsetminus A}_{I \times \mathbb{B}^n} : I \times \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} X \smallsetminus A. \end{aligned}$$

Ausführlich bedeutet das: Es existiert eine Indexmenge I, mit diskreter Topologie, und eine stetige Abbildung $\varphi : I \times (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X, A)$, sodass gilt:

(1) Es gilt $\varphi(I \times \mathbb{B}^n) = X \smallsetminus A$ und die Einschränkung $\mathring{\varphi} := \varphi|^{X \smallsetminus A}_{I \times \mathbb{B}^n} : I \times \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} X \smallsetminus A$ ist ein Homöomorphismus. (Jede Komponente von $X \smallsetminus A$ ist eine offene n–Zelle.)

(2) Der Raum X trägt die *zelluläre Topologie*: Genau dann ist $U \subset X$ offen in X, wenn sowohl $U \cap A$ offen in A ist als auch $\varphi^{-1}(U)$ offen in $I \times \mathbb{D}^n$. (Ebenso abgeschlossen)

Nochmal anders gesagt: Wir haben $\mathscr{E} = \pi_0(X \smallsetminus A) = \{\, e_i \mid i \in I \,\}$. Für jeden Index $i \in I$ ist $\varphi_i : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X, A) : x \mapsto \varphi(i, x)$ eine Parametrisierung der *abgeschlossenen Zelle* $\bar{e}_i := \varphi_i(\mathbb{D}^n)$; dabei sind Identifizierungen auf dem Rand $\mathbb{S}^{n-1}$ erlaubt. Die Einschränkung $\partial\varphi_i : \mathbb{S}^{n-1} \to A$ nennen wir die *anheftende Abbildung*, kurz *Anheftung*. Die Einschränkung $\mathring{\varphi}_i : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} e_i$ ist ein Homöomorphismus auf die *offene Zelle* $e_i := \varphi_i(\mathbb{B}^n)$.

Die Zelle e_i heißt *regulär*, wenn die Parametrisierung $\varphi_i : \mathbb{D}^n \to \bar{e}_i$ als Homöomorphismus gewählt werden kann, also die Anheftung $\partial\varphi_i$ injektiv ist.

Bemerkung. Die Zellzerlegung ist durch (X, A) bestimmt, bis auf die willkürliche Indizierung durch I. Die Parametrisierungen $\varphi_i : \mathbb{D}^n \to \bar{e}_i$ sind durch (X, A) nicht vorgegeben, sondern können willkürlich gewählt werden; allein ihre *Existenz* wird in (1) gefordert.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

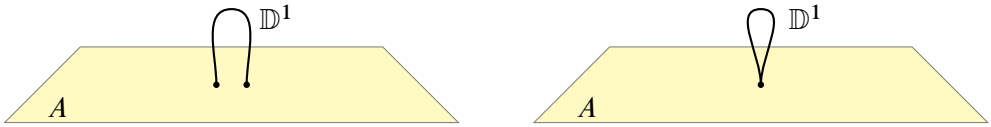
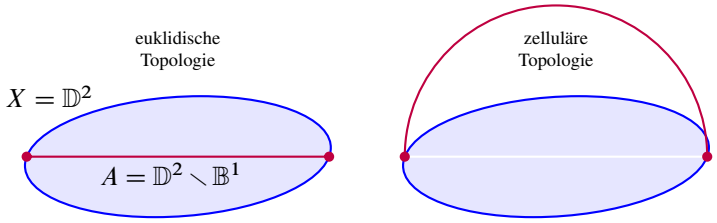


ABBILDUNG L:50. Die linke Zelle ist regulär, die rechte nicht.

☞ **Bemerkung.** Die Abbildung $\iota_A \sqcup \varphi$ ist eine Identifizierung (2), der Raum X trägt also die induzierte Quotiententopologie. Gemäß (1) wird jeder Randpunkt $(i,s) \in I \times \mathbb{S}^{n-1}$ mit seinem Bild $\varphi(i,s) \in A$ identifiziert, im Inneren hingegen wird nichts identifiziert. Zudem gilt: ☜

- In X ist jede Zelle e_i offen, ebenso $X \smallsetminus A = \bigsqcup_{i\in I} e_i$, also A abgeschlossen. (I5J)
- Mit $\mathbb{D}^n$ ist auch das stetige Bild $\bar{e}_i := \varphi_i(\mathbb{D}^n)$ kompakt (F1J). Da wir X als hausdorffsch voraussetzen, ist $\bar{e}_i$ abgeschlossen in X (F1G); somit ist $\bar{e}_i$ der Abschluss von e_i in X.
- Die stetige Surjektion $\varphi_i : \mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \bar{e}_i$ ist abgeschlossen (F1L), also eine Identifizierung. Sie ist genau dann ein Homöomorphismus (also regulär), wenn sie zudem injektiv ist.

☞ Die zelluläre Topologie können wir damit äquivalent wie folgt definieren: Genau dann ist $U \subset X$ offen in X, wenn sowohl $U \cap A$ offen in A ist als auch $U \cap \bar{e}_i$ offen in $\bar{e}_i$ (F1L). Diese Formulierung ist offensichtlich unabhängig von der Parametrisierung φ_i. ☜

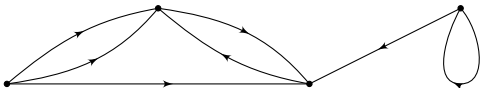


✍ **Beispiel.** Entsteht $X = \mathbb{D}^2$ aus $A = \mathbb{D}^2 \smallsetminus \mathbb{B}^1$ durch Anheften der 1–Zelle $\mathbb{D}^1$? Zwar ist $e = X \smallsetminus A = \mathbb{B}^1$ eine offene 1–Zelle und $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{D}^1} : \mathbb{D}^1 \to \bar{e}$ eine Parametrisierung der abgeschlossenen Zelle $\bar{e} = \mathbb{D}^1$. Doch die euklidische Topologie des Teilraums $X \subset \mathbb{R}^2$ ist hier nicht die zelluläre Topologie auf X. (Diese ist in der Skizze rechts gezeigt.) Der Raum (X, A) entsteht also nicht durch Anheften einer Zelle! ✍

✍ **Lemma L7B.** *Die Bedingung L7A(2) der zellulären Topologie ist automatisch erfüllt, wenn die Familie $(\bar{e}_i)_{i\in I}$ der Zellen in X lokal-endlich ist.* ✍

BEWEIS. Dank Satz D5G bilden A und $(\bar{e}_i)_{i\in I}$ eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung von X. Dank Satz E1N ist $U \subset X$ genau dann offen, wenn $U \cap A$ offen in A ist sowie $U \cap \bar{e}_i$ offen in $\bar{e}_i$ für jedes $i \in I$; dank der Identifizierung $\varphi_i : \mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \bar{e}_i$ ist letzteres äquivalent zu: Jedes Urbild $\varphi_i^{-1}(U) \subset \mathbb{D}^n$ ist offen in $\mathbb{D}^n$. Das ist Bedingung L7A(2). □

☞ **Beispiel.** Anheften von 0–Zellen bedeutet $X \cong A \sqcup I$: Wegen $\mathbb{D}^0 = \mathbb{B}^0 = \{0\}$ und $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ wird hier keinerlei Verheftung vorgenommen, also $\iota_A \sqcup \varphi : A \sqcup (I \times \mathbb{D}^0) \xrightarrow{\sim} X$. ☜



Aus der Eckenmenge A entsteht durch Anheften von Kanten der (Multi)Graph X.

§L7b. Zellkomplexe. Wir iterieren das Anheften von Zellen wie in Definition L7A:

Definition L7C. Sei X hausdorffsch und $A \subset X$ ein Teilraum, eventuell $A = \emptyset$. Eine *Zellstruktur* $\mathscr{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf (X,A) ist eine Filtrierung $A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X$, stillschweigend ergänzt durch $X_k = A$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{<0}$, mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ entsteht das Paar (X_n, X_{n-1}) durch *Anheften von n–Zellen* (L7A):

Das bedeutet: Zu jeder Komponente $e \in \mathscr{E}_n := \pi_0(X_n \smallsetminus X_{n-1})$ existiert eine stetige Parametrisierung $\varphi_e : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X_n, X_{n-1})$ mit $\mathring{\varphi}_e : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} e$.

(2) Der Raum $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ trägt die *zelluläre Topologie*: Genau dann ist $U \subset X$ offen in X, wenn $U \cap A$ offen in A ist sowie $\varphi_e^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{D}^n$ für alle $e \in \mathscr{E}_n$ und $n \in \mathbb{N}$.

Für Abbildungen bedeutet das: Genau dann ist $f : X \to Y$ stetig, wenn $f|_A : A \to Y$ auf dem Teilraum A stetig ist sowie $f \circ \varphi_e : \mathbb{D}^n \to Y$ stetig für jede Zelle $e \in \mathscr{E}_n$ und $n \in \mathbb{N}$.

Die Zellstruktur $\mathscr{X}$ definiert die Zellzerlegung $\mathscr{E}$ und umgekehrt: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathscr{E}_n = \pi_0(X_n \smallsetminus X_{n-1}), \quad \mathscr{E} = \bigsqcup\big\{ \mathscr{E}_n \;\big|\; n \in \mathbb{N} \big\}, \quad X_n = A \sqcup \bigsqcup\big\{ e \in \mathscr{E} \;\big|\; \dim e \le n \big\}.$$

Nochmal zur Betonung: Die in (1) geforderten Parametrisierungen φ_e der Zellen gehören nicht explizit zur Zellstruktur $(X, A, \mathscr{X})$; allein ihre *Existenz* wird gefordert.

Die *Dimension* der Zellstruktur $\mathscr{X}$ auf (X,A) ist

$$\dim(X, A, \mathscr{X}) = \dim \mathscr{X} := \inf\big\{ n \in \mathbb{Z} \;\big|\; X_n = X \big\}.$$

Es gilt $\dim \mathscr{X} = n \in \mathbb{N}$ gdw. $X_{n-1} \subsetneq X_n = X$, und $\dim \mathscr{X} = -\infty$ gdw. $A = X$. In diesen beiden Fällen gilt $\dim \mathscr{X} < \infty$, und wir nennen $\mathscr{X}$ *endlich–dimensional*.

Stärker nennen wir die Zellstruktur $\mathscr{X}$ auf (X,A) *endlich*, wenn $|\mathscr{E}(\mathscr{X})| < \infty$ gilt. In diesem Falle definieren wir ihre *Euler–Charakteristik*

$$\chi(X, A, \mathscr{X}) = \chi(\mathscr{X}) := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \big|\pi_0(X_n \smallsetminus X_{n-1})\big| = \sum\nolimits_{e\in\mathscr{E}} (-1)^{\dim e}.$$

Das Tripel $(X, A, \mathscr{X})$ nennen wir einen (relativen) *Zellkomplex* oder *zellulären Raum*. Hierbei ist X der *zugrundeliegende Raum* relativ zum Teilraum A, und X_n ist das *n–Skelett*.

Erlaubt ein topologischer Raum X relativ A eine Zellstruktur $\mathscr{X}$, so nennen wir (X,A) einen *zellulierbaren Raum*; falsch aber bequem nennt man (X,A) einen *zellulären Raum*.

Statt $(X,\emptyset)$ schreiben wir X. Das Paar $(X,\mathscr{X})$ heißt dann ein (absoluter) *Zellkomplex*, und der Raum X heißt *zellulierbar*; falsch aber bequem nennt man auch X *zellulär*.

Die Parametrisierung $\varphi_e : \mathbb{D}^n \to \bar{e}$ heißt *regulär*, wenn sie ein Homöomorphismus ist. Die Zelle e heißt *regulär*, wenn sie eine reguläre Parametrisierung erlaubt. Die Zellstruktur $\mathscr{X}$ heißt *regulär*, wenn all ihre Zellen regulär sind, also alle Anheftungen $\partial\varphi_e$ injektiv gewählt werden können. In diesem Falle heißt der Raum (X,A) *regulär zellulierbar*.

Bemerkung. Man beachte eine sprachliche Ungenauigkeit und mathematische Subtilität:

- Eine offene n–Zelle $e \subset X$ ist im Allgemeinen nicht offen in X, sondern nur in X_n.
- Die abgeschlossene n–Zelle $\bar{e} \subset X$ ist i.A. keine Zelle, nur im regulären Fall $\bar{e} \cong \mathbb{D}^n$.

Beide Probleme treten schon für Zellkomplexe der Dimension 1 auf, also für Graphen: Eine offene 0–Zelle ist ein Punkt in X und im Allgemeinen nicht offen. Eine abgeschlossene 1–Zelle kann homöomorph zu $\mathbb{D}^1 = [-1,+1]$ sein oder aber zu $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{D}^1 /\!\!/ \{-1,+1\}$.

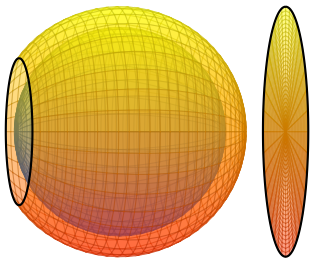
© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✍ **Beispiel.** Sei $\mathscr{K}$ ein simplizialer Komplex (I1C) oder allgemeiner ein polytopaler Komplex (I3K). Die Skelette definieren einen regulären Zellkomplex $(|\mathscr{K}|, (|\mathscr{K}_{\leq n}|)_{n\in\mathbb{N}})$: Zur Anheftung nutzen wir affine Koordinaten und Satz F6H. Dimension, Endlichkeit und Euler–Charakteristik sind in I1C und I3K genau so definiert wie in L7C für Zellkomplexe. ✍

☞ **Bemerkung.** Die Dimension $\dim(X,\mathscr{X})$, die Endlichkeit $|\mathscr{E}(X,\mathscr{X})| < \infty$ und die Euler–Charakteristik $\chi(X,\mathscr{X})$ sind zunächst mit Hilfe der Zellstruktur $\mathscr{X}$ definiert. Es ist überaus bemerkenswert, dass das Ergebnis nur vom Raum X abhängt: Je zwei Zellstrukturen $\mathscr{X}$ und $\mathscr{X}'$ auf X stimmen überein in Dimension, Endlichkeit und Euler–Charakteristik! ☜

✍ **Beispiel L7D.** Ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ zellulierbar? Wie gelingt das möglichst sparsam? Wir schlagen im Ball $\mathbb{D}^n$ den Rand $\mathbb{S}^{n-1}$ zusammen und erhalten $\mathbb{S}^n$ (F1R): ✍

$$(X,A) = (\mathbb{S}^n, \{*\})$$



Hier gilt $X_k = \emptyset$ für $k < 0$ und $X_k = \{*\}$ für $0 \leq k < n$ und $X_k = \mathbb{S}^n$ für $k \geq n$. Daraus folgt $\mathscr{E}_0 = \{\{*\}\}$ und $\mathscr{E}_n = \{\mathbb{S}^n \smallsetminus \{*\}\}$ sowie $\mathscr{E}_k = \emptyset$ für $k \notin \{0,n\}$, also $\chi(\mathscr{X}) = 1 + (-1)^n$.

Übung: Explizieren Sie eine geeignete Parametrisierung der n–Zelle.

✻ **L7D.** Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ entsteht aus dem Punkt $A = \{-e_1\}$ durch Anheften einer n–Zelle vermöge

$$\varphi : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \twoheadrightarrow (\mathbb{S}^n, A) : rs \mapsto (\cos(\pi r), \sin(\pi r)s).$$

Ausführlich (F1R): Jeder Punkt $x \in \mathbb{D}^n$ schreibt sich $x = rs$ mit $r = |x| \in [0,1]$ und $s \in \mathbb{S}^{n-1}$: Für $x \neq 0$ gilt $s = x/|x|$; im Falle $x = 0$ ist $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ beliebig. Die angegebene Abbildung φ ist wohldefiniert, stetig, surjektiv, erfüllt $\varphi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{S}^n \smallsetminus A$, und die Einschränkung $\mathring{\varphi} := \varphi|_{\mathbb{B}^n}^{\mathbb{S}^n \smallsetminus A} : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \smallsetminus A$ ist ein Homöomorphismus, wie in L7A(1) gefordert. Zudem ist φ abgeschlossen (F1L), denn $\mathbb{D}^n$ ist kompakt und $\mathbb{S}^n$ ist hausdorffsch. Somit ist φ eine Identifizierung, induziert also einen Homöomorphismus $\bar{\varphi} : \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ auf dem Quotienten. Das bedeutet, $\mathbb{S}^n$ trägt die zelluläre Topologie, wie in L7A(2) gefordert.

✍ **Beispiel L7E.** Die Einbettung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : (x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,x_n,0)$ liefert: ✍

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{R}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{R}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{R}^3 & \hookrightarrow & \mathbb{R}^4 & \hookrightarrow & \dots & \text{(Hyperebene)} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\
\mathbb{S}^0 & \xhookrightarrow{\text{+1–Zellen}} & \mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{\text{+2–Zellen}} & \mathbb{S}^2 & \xhookrightarrow{\text{+3–Zellen}} & \mathbb{S}^3 & \xhookrightarrow{\text{+4–Zellen}} & \dots & \text{(Äquatorsphäre)}
\end{array}$$

Die obere Filtrierung ist keine Zellstruktur, die untere ist eine reguläre Zellstruktur.

✻ **L7E.** Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ besteht aus den Hemisphären $\mathbb{S}^n_\pm = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{S}^n \mid \pm x_n \geq 0\}$:

$$p_\pm : \mathbb{S}^n_\pm \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n : (x_0,\dots,x_{n-1},x_n) \mapsto (x_0,\dots,x_{n-1}) \quad \text{mit Umkehrung}$$

$$\varphi_\pm : \mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n_\pm : (x_0,\dots,x_{n-1}) \mapsto (x_0,\dots,x_{n-1},\pm\sqrt{1-{x_0}^2-\dots-{x_{n-1}}^2})$$

Mit stereographischer Projektion (A1L) gelingt dies sogar glatt, analytisch, rational.

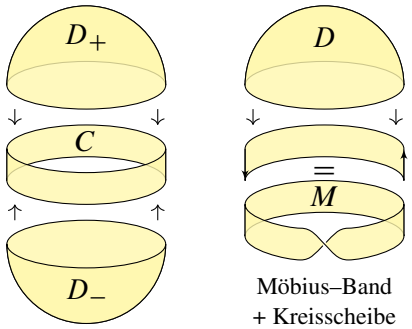
Wir erhalten $\varphi_\pm : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{S}^n_\pm, \mathbb{S}^{n-1})$, und $\varphi : \{\pm\} \times (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ liefert einen Homöomorphismus $\mathring{\varphi} : \{\pm\} \times \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \smallsetminus \mathbb{S}^{n-1}$, wie in L7A(1) gefordert. Dies präsentiert $(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ als reguläre Anheftung von zwei n–Zellen. Die zelluläre Topologie L7A(2) ist klar dank L7B.

Beispiel L7F. Wir setzen Beispiel L7E fort zum reell-projektiven Raum $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{S}^0 & \xhookrightarrow{+1\text{–Zellen}} & \mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{+2\text{–Zellen}} & \mathbb{S}^2 & \xhookrightarrow{+3\text{–Zellen}} & \mathbb{S}^3 & \xhookrightarrow{+4\text{–Zellen}} & \dots & & \text{(Äquatorsphäre)} \\
\downarrow{\scriptstyle q_0} & & \downarrow{\scriptstyle q_1} & & \downarrow{\scriptstyle q_2} & & \downarrow{\scriptstyle q_2} & & & & \\
\mathbb{RP}^0 & \xhookrightarrow{+1\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^1 & \xhookrightarrow{+2\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^2 & \xhookrightarrow{+3\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^3 & \xhookrightarrow{+4\text{–Zelle}} & \dots & & \text{(entsprechend)}
\end{array}$$

Die Einschränkung der Quotientenabbildung $q_n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ auf $\mathbb{S}^n_+$ ist stetig und surjektiv. Sie identifiziert nur Punkte auf $\mathbb{S}^{n-1}$, gemäß $q_{n-1} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$. Somit entsteht $\mathbb{RP}^n$ aus $\mathbb{RP}^{n-1}$ durch Verheften der n–Zelle $\mathbb{S}^n_+ \cong \mathbb{D}^n$ entlang $q_{n-1} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{S}^{n-1} & \xhookrightarrow{+n\text{–Zelle}} & \mathbb{S}^n_+ & \xhookrightarrow{+n\text{–Zelle}} & \mathbb{S}^n \\
\downarrow{\scriptstyle q_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle q_n} & & \downarrow{\scriptstyle q_n} \\
\mathbb{RP}^{n-1} & \xhookrightarrow{+n\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^n & = & \mathbb{RP}^n
\end{array}$$



Für die komplex-projektiven Räume $\mathbb{CP}^0 \subset \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2 \subset \dots$ gilt entsprechendes (§K2o).

Beispiel. Sei $\mathscr{K}$ ein (affiner) Simplizialkomplex (I1C). Das n–Skelett $|\mathscr{K}_{\leq n}|$ entsteht aus $|\mathscr{K}_{<n}|$ durch reguläre Anheftung von n–Zellen Δ, eine für jeden n–Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$. Diese können wir regulär parametrisieren dank F6H: $\mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} \Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta$. Dasselbe gilt für jeden polytopalen Komplex (I3K). Wir illustrieren dies durch zwei einfache Beispiele:

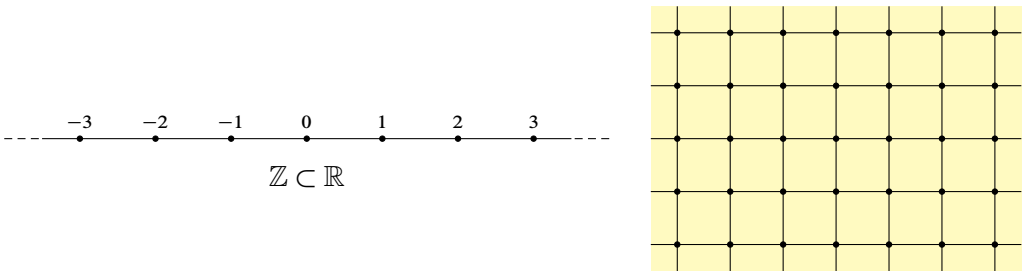


ABBILDUNG L:51. Eine Zellstruktur für die Gerade $\mathbb{R}$ und für die Ebene $\mathbb{R}^2$

Beispiel. Ist $\mathbb{R}$ zellulierbar? Ja, durch $(\mathbb{Z} \subset \mathbb{R})$: Hier zerfällt $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} = \bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} e_i$ in die offenen 1–Zellen $e_i =]i, i+1[$. Die Parametrisierung $\varphi_i : \mathbb{D}^1 \xrightarrow{\sim} \bar{e}_i = [i, i+1] : x \mapsto i + (x+1)/2$ erfüllt L7A(1). Bedingung L7A(2) ist erfüllt, denn die Familie $(\bar{e}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ist lokal-endlich in $\mathbb{R}$, siehe L7B. Dies präsentiert $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ als reguläre Anheftung von 1–Zellen.

Konvention. Wir schreiben $\mathscr{X} = (A \subset X_0 \subset \dots \subset X_n = X)$ und ergänzen $X_k = A$ für $k < 0$ und $X_k = X$ für $k \geq n$. Für $A = \emptyset$ schreiben wir noch kürzer $\mathscr{X} = (X_0 \subset \dots \subset X_n)$.

Beispiel. Ist $\mathbb{R}^2$ zellulierbar? Ja, durch $X_{-1} = \emptyset$, $X_0 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $X_1 = (\mathbb{R}\times\mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z}\times\mathbb{R})$ und $X_2 = \mathbb{R}^2$. Für $n = 0, 1, 2$ entsteht X_n aus X_{n-1} durch reguläre Anheftung von n–Zellen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L7c. Weitere Beispiele und Gegenbeispiele: Erkennen Sie Ihre Komplexe!** Für ☜ ein Raumpaar (X, A) mit einer Filtrierung $\mathscr{X} = (X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von endlicher Länge n schreiben wir die Filtrierung kurz $(A \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = X)$.

Übung L7G. Sind die folgenden Filtrierungen $\mathscr{X}$ Zellstrukturen? Wenn ja, geben Sie eine Parametrisierung für jede Zelle an und weisen Sie die nötigen Eigenschaften nach. Wenn nein, erklären Sie ein Hindernis; existiert auf X überhaupt irgendeine Zellstruktur? Welche Werte erhalten Sie für die Dimension und die Euler–Charakteristik?

(1) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n\big)$
(2) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{S}^n\big)$
(3) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{RP}^0 \subset \mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{RP}^n\big)$
(4) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{CP}^0 \subset \mathbb{CP}^0 \subset \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^1 \subset \cdots \subset \mathbb{CP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^n\big)$
(5) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{Z}\big)$
(6) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}\big)$
(7) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2\big)$
(8) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2\big)$
(9) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{R} \cup \mathbb{R}\times\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2\big)$
(10) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{Q}\big)$
(11) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}\big)$
(12) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \{0\} \subset [0,1[\big)$
(13) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset \{0\} \subset [0,1]\big)$
(14) $\mathscr{X} = \big(\emptyset \subset X_0 \subset X\big)$, die Sinuskurve des Topologen mit Teilraumtopologie (I:5)
(15) Entsteht $\big(\mathbb{R}^1 \smallsetminus \mathbb{B}^1 \subset \mathbb{R}^1\big)$ durch Anheften von Zellen?
(16) Entsteht $\big(\mathbb{D}^2 \smallsetminus \mathbb{B}^1 \subset \mathbb{D}^2\big)$ durch Anheften von Zellen?
(17) Erlaubt jede offene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Zellstruktur?
(18) Erlaubt jede abgeschlossene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Zellstruktur?

☞ **§L7d. Eindimensionale Zellkomplexe sind Graphen.** Ein *(orientierter Multi-)Graph* ☜
$\Gamma = (E_0, E_1, \partial_\pm)$ besteht aus einer Eckenmenge E_0, einer Kantenmenge E_1 und zwei Abbildungen $\partial_\pm : E_1 \to E_0$, die jeder Kante $e \in E_1$ ihren Start $\partial_-(e) \in C_0$ und ihr Ziel $\partial_+(e) \in C_0$ zuordnen. Der Raum $|\Gamma| := E_0 \sqcup (E_1 \times [-1,1])/\sim$ mit $(e,\pm 1) \sim \partial_\pm(e)$ entsteht aus dem diskreten Raum E_0 durch Anheften von 1–Zellen.

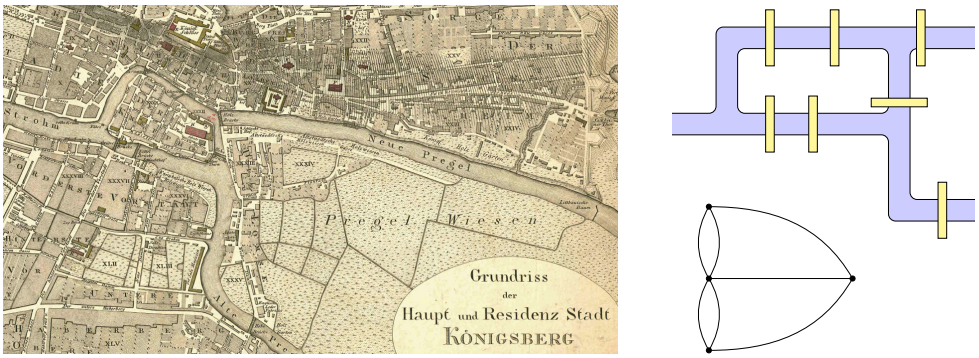


ABBILDUNG L:52. Das Königsberger Brückenproblem

☞ Graphen werden sehr vielseitig genutzt, etwa in der Informatik (als Datenstruktur), in ☜
der Algebra und Darstellungstheorie (als Köcher, engl. *quiver*), in der Kategorientheorie (als kommutative Diagramme) und nicht zuletzt in der Topologie. Das *Königsberger Brückenproblem* geht auf Leonhard EULER im Jahre 1735 zurück und markiert den Beginn der Graphentheorie. Es ist zugleich eine der frühesten topologischen Fragestellungen.

☞ **Beispiel.** In Königsberg führten sieben Brücken über den Fluss Pregel wie in L:52 gezeigt. ☜
Spaziergängern stellte sich die Frage, ob es einen Weg gibt, der jede der sieben Brücken genau einmal überquert (ein *Euler–Weg*), und ob dies sogar als Rundweg möglich ist (ein *Euler–Kreis*). Euler reduzierte diese Frage auf den obigen Graphen und zeigte damit, dass ein solcher Weg in Königsberg nicht möglich ist: Zu jeder Ecke laufen drei Kanten, in einem Euler–Weg gibt es aber maximal zwei Ecken mit ungerader Kantenzahl (Start und Ziel).

☞ Zur Erinnerung: Ein *simplizialer Graph* ist ein Simplizialkomplex der Dimension ≤ 1. ☜
Ecken sind 0–Simplizes $\{a\},\{b\},\ldots$ und Kanten sind ungeordnete Paare $\{a,b\}$ mit $a \neq b$. Diese Definition zieht mehrere Einschränkungen nach sich: Alle Kanten sind unorientiert, zwischen zwei Ecken kann höchstens eine Kante bestehen, und jede Kante hat zwei verschiedene Endpunkte, ist also keine Schleife. Dies nennt man daher auch einen unorientierten, einfachen Graphen. Für viele Anwendungen ist diese Definition zu eng gesteckt.

☞ **Definition L7H.** Ein *unorientierter (Multi-)Graph* $\Gamma = (E_0, E_1, \partial_\pm, -)$ besteht aus einem ☜
orientierten Graphen $(\partial_\pm : E_1 \to E_0)$ und einer fixpunktfreien Involution $- : E_1 \to E_1$, also $e \neq -e$ und $-(-e) = e$ für alle $e \in E_1$, sodass $\partial_\pm(-e) = \partial_\mp(e)$ gilt. Die Kante $-e$ heißt die zu e *inverse Kante*, das Paar $\{e,-e\}$ nennen wir eine *unorientierte Kante*.

Eine *Orientierung* von Γ ist eine Teilmenge $E_1^+ \subset E_1$ mit $E_1 = E_1^+ \sqcup -E_1^+$, also die Auswahl einer Kante aus jedem Paar $\{e,-e\}$. Der zugehörige orientierte Graph ist $(E_0, E_1^+, \partial_\pm|E_1^+)$. Umgekehrt definiert jeder orientierte Graph $(E_0, E_1^+, \partial_\pm)$ einen unorientierten Graphen $(E_0, E_1, \partial_\pm, -)$ mit der Kantenmenge $E_1 = \{\pm\} \times E_1^+$ und den Rändern $\partial_\pm(+,e) = \partial_\mp(-,e) = \partial_\pm(e)$ sowie der Involution $-(\pm,e) = (\mp,e)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Die topologische Realisierung $|\Gamma| := E_0 \sqcup (E_1 \times [-1,1])/\sim$ mit $(e,\pm 1) \sim \partial_\pm(e)$ und $(e,t) \sim (-e,-t)$ für $e \in E_1$ und $t \in [-1,1]$ entsteht aus dem diskreten Raum E_0 durch Anheften von 1–Zellen, je eine für jede unorientierte Kante $\{e,-e\}$. Es ist hier leicht direkt zu sehen, dass der Raum $|\Gamma|$ tatsächlich hausdorffsch ist wie in L7A gefordert; Satz I5J nimmt uns diese Arbeit ab und löst dieses Problem ganz allgemein.

Bemerkung. Bei Simplizialkomplexen stand die Realisierung als Teilraum im Vordergrund. Bei Zellkomplexen hingegen übernimmt die Quotientenkonstruktion die Hauptrolle.

☞ **Bemerkung.** Ist A nicht hausdorffsch, so ist $\varphi_i(\mathbb{D}^n)$ nicht notwendigerweise abgeschlossen in X. Als Gegenbeispiel betrachte man $A = \{-1,a,+1\}$ mit der indiskreten Topologie, verheftet mit der 1-Zelle $\mathbb{D}^1 = [-1,+1]$ vermöge der Abbildung $\mathbb{S}^0 = \{-1,+1\} \hookrightarrow A$. ☜

Um solche Pathologien auszuschließen, fordern wir stets, dass A hausdorffsch ist. Dank Satz I5J ist dann der durch Verheften entstehende Raum X ebenfalls hausdorffsch. Zur Betonung und Vereinfachung nehme ich etwas Redundanz in Kauf, und fordere in Definition L7A, dass der gesamte Raum X hausdorffsch ist; A hausdorffsch würde genügen.

☞ **Beispiel L7I.** Wir betrachten den absoluten Fall $A = \emptyset$. Genau dann gilt $\dim(X,\mathscr{X}) = 0$, wenn der Raum X diskret ist, also $X = X_0 = X_1 = X_2 = \dots$. Umgekehrt erlaubt jeder diskrete Raum X genau eine Zellstruktur, nämlich $X = X_0 = X_1 = X_2 = \dots$. ☜

Ein Zellkomplex $(X,\mathscr{X})$ der Dimension ≤ 1 heißt *zellulärer Graph* (L7H).

Hierbei ist $E_0 = X_0$ die Menge der *Ecken*, und die Zellzerlegung $E_1 = \pi_0(X \smallsetminus X_0)$ besteht aus den offenen *Kanten*: Für $e \in E_1$ gilt $e \cong \mathbb{B}^1 =]-1,1[$. Die abgeschlossene Zelle $\bar{e}$ ist die Kante e mit ihren Endpunkten in X_0: Hier gilt $\bar{e} \cong [-1,1]$ oder für Schleifen $\bar{e} \cong [-1,1] /\!\!/ \{-1,1\} \cong \mathbb{S}^1$. Bei *regulären* Graphen $(X,\mathscr{X})$ sind Schleifen ausgeschlossen.

Für jede Kante e wählen wir (willkürlich) eine Parametrisierung $\varphi_e : [-1,1] \to \bar{e}$ und damit eine Orientierung. Die Anheftung $\partial\varphi_e : \{-1,+1\} \to X_0$ legt Start und Ziel fest. Umgekehrt ist $\Gamma = (E_0, E_1, \partial_\pm)$ mit $\partial_\pm(e) = \varphi_e(\pm 1)$ ein Graph mit $|\Gamma| \cong X$ wie in L7H.

Erläuterung. Im Vergleich zu simplizialen Graphen (I3B) bringen zelluläre Graphen (L7H) zwei Neuerungen: Erstens kann es zwischen zwei Ecken nun beliebig viele Kanten geben. Zweitens sind auch Schleifen zugelassen sind, also eine Kante mit demselben Anfangs- und Endpunkt. Durch geeignete Unterteilung wird jeder zelluläre Graph simplizial: Wir unterteilen jede Kante in zwei Kanten und einen neuen Eckpunkt bzw. jede Schleife in drei Kanten und zwei neue Eckpunkte.

☞ **Übung L7J.** Sei $(X,\mathscr{X})$ ein zellulärer Graph und $\mathscr{X}'$ eine weitere Zellstruktur auf X. Dann gilt $\dim \mathscr{X}' = \dim \mathscr{X}$. Ist $\mathscr{X}$ endlich, so auch $\mathscr{X}'$, und dann gilt $\chi(\mathscr{X}') = \chi(\mathscr{X})$. ☜

✻ **L7J.** Im Falle $\dim \mathscr{X} = 0$ ist der Raum X diskret; hier gilt $\mathscr{X}' = \mathscr{X}$, denn in diesem Fall gibt es nur diese eine Zellstruktur. Sei also $\dim \mathscr{X} = 1$, das heißt, unser Graph hat mindestens eine Kante $e \in \mathscr{E}_1(\mathscr{X})$. Dann gilt $\dim \mathscr{X}' \geq 1$, denn im Falle $\dim \mathscr{X}' = 0$ wäre X ja diskret. Andererseits ist $\dim \mathscr{X} \geq 2$ unmöglich: Angenommen, es gäbe eine n–Zelle $e \in \mathscr{E}_n(\mathscr{X})$ mit $n \geq 2$. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $x \in e \cong \mathbb{B}^n$. Für jede zusammenhängende Umgebung U von x in X ist auch $U' = U \smallsetminus \{x\}$ zusammenhängend. Dies gilt in einem Graphen wie $(X,\mathscr{X})$ nur für Blätter, und diese liegen diskret. (Simplizial genauso, siehe I3F.)

Ist $\mathscr{X}$ endlich, also die Zellenzahl endlich, so ist der Raum $X = \bigcup_{e\in\mathscr{E}} \bar{e}$ kompakt. Ist $\mathscr{X}$ unendlich, so ist X nicht kompakt, denn die Ecken und Kantenmittelpunkte bilden eine unendliche Menge $S \subset X$, die abgeschlossen und diskret ist. Diese topologische Eigenschaft gilt für $\mathscr{X}$ und $\mathscr{X}'$ gleichermaßen.

Wir wählen einen beliebigen Punkt $a \in X_1 \smallsetminus X_0$. Dann ist $(\emptyset \subset X_0 \cup \{a\} \subset X)$ ebenso eine Zellstruktur, und die Euler–Charakteristik bleibt unverändert. Per Induktion haben die Zellstrukturen $(\emptyset \subset X_0 \subset X)$ und $(\emptyset \subset X_0 \cup X_0' \subset X)$ dieselbe Euler–Charakteristik, ebenso $(\emptyset \subset X_0' \subset X)$ und $(\emptyset \subset X_0 \cup X_0' \subset X)$.

§L7e. Zweidimensionale Zellkomplexe, Flächen und Präsentationen. Wir erinnern an die Konstruktion von Flächen durch Polygonmodelle, etwa von Torus und Sphäre durch Verheftung eines Quadrates wie in A:2. Alle kompakten geschlossenen Flächen lassen sich so darstellen. Die allgemeine Konstruktion verläuft wie folgt:

Definition L7K. Zur Menge S betrachten wir das Alphabet $A := S \times \{\pm\} = \{ s^{\pm} \mid s \in S \}$. Gegeben sei eine Menge $R \subset A^*$ oder allgemeiner eine Familie $R = (w_i)_{i\in I}$ von Wörtern $w_i \in A^*$. Zu diesem Paar (S,R) konstruieren wir als topologische Realisierung einen Raum $X = |(S,R)|$ mit Zellstruktur $(\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset X_2 = X)$: Jeder Buchstabe $s \in S$ stiftet eine 1–Zelle in Form einer geschlossenen Schleife, und zu jedem Index $i \in I$ heften wir hieran eine 2–Zelle entlang des Wortes w_i.

Sei $X_0 = \{x_0\}$ der einpunktige Raum, $\tilde{X}_1 = X_0 \sqcup \bigsqcup_{a\in A} \{a\}\times[0,1]$ und $X_1 = \tilde{X}_1/\!\sim$ mit $(a,0) \sim (a,1) \sim x_0$ und $(a,t) \sim (a^{-1},1-t)$ für alle $a \in A$ und $t \in [0,1]$. Sei $q_1 : \tilde{X}_1 \twoheadrightarrow X_1$ die Quotientenabbildung. Somit entsteht X_1 aus X_0 durch Anheften von 1–Zellen, je eine für jedes Paar $\{s^{\pm}\} \subset A$ mit $s \in S$.

Für jedes nicht-leere Wort $w = a_1 a_2 \dots a_n \in A^*$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, definieren wir

$$f_w : \mathbb{S}^1 \to X_1 : \exp\left[\tfrac{2\pi \mathrm{i}}{n}(k-1+t)\right] \mapsto q_1(a_k,t) \quad \text{für } k = 1,2,\dots,n \text{ und } t \in [0,1].$$

Entlang des Kreisrandes $\mathbb{S}^1$ durchläuft die Abbildung f_w die Schleifen $a_1, a_2, \dots, a_n$ in X_1. Für das leere Wort $e \in A^0 \subset A^*$ nutzen wir die konstante Abbildung $f_e(s) = x_0$.

Sei $\tilde{X}_2 = X_1 \sqcup \bigsqcup_{i\in I} \{i\}\times\mathbb{D}^2$ und $X_2 = X_2/\!\sim$ mit $(i,s) \sim f_{w_i}(s)$ für $i \in I$ und $s \in \mathbb{S}^1$. Sei $q_2 : \tilde{X}_2 \twoheadrightarrow X_2$ die Quotientenabbildung. Somit entsteht X_2 aus X_1 durch Anheften von 2–Zellen, je eine für jeden Index $i \in I$.

Damit ist $\mathscr{X} = (\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset X_2)$ eine Zellstruktur auf dem Raum $X = X_2$: Den Raum $X = |(S,R)|$ mit obiger Zellstruktur $\mathscr{X}$ nennen wir die *topologische Realisierung* oder den *Präsentationskomplex* zu (S,R). Jedem Erzeuger $s \in S$ entspricht eine 1–Zelle (Schleife) und jeder Relation $w_i \in A^*$ entspricht eine 2–Zelle (angeheftete Kreisscheibe).

Beispiel. Wir treffen gute Bekannte: $|(\emptyset,\{e\})| \cong \mathbb{S}^2$, $|(\{a\},\{a\})| \cong \mathbb{D}^2$, $|(\{a\},\{a^2\})| \cong \mathbb{RP}^2$, $|(\{a,b\},\{aba^{-1}b^{-1}\})| \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, ebenso alle Flächen $F_g^- \cong |\{c_0,c_1,\dots,c_g\},\{c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2\}|$ und $F_g^+ \cong |\{a_1,b_1,\dots,a_g,b_g\},\{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}\}|$.

Beispiel. Es gilt $|(\{a\},(a,a))| \cong \mathbb{S}^2$: In der Familie (a,a) kommt das Wort a zweimal vor.

Satz L7L. *Für jede Präsentation (S,R) und $X = |(S,R)|$ gilt $\pi_1(X,x_0) \cong \langle\, S \mid R \,\rangle$.*

BEWEIS. Wir können X simplizial realisieren und so Satz L6I anwenden. □

Bemerkung. Wir haben diese Technik ausgeführt für den Torus L6K und die reell-prodjektive Ebene L6L. Für geschlossene Flächen finden Sie die Rechnung in Satz L6M.

Korollar L7M. *Jede Gruppe G ist die Fundamentalgruppe eines geeigneten Raumes (X,x_0).*

(1) Dieser kann als Zellkomplex der Dimension ≤ 2 konstruiert werden.
(2) Ist G endlich präsentierbar, so kann X kompakt gewählt werden. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **§L7f. Teilkomplexe.** Wie schon im simplizialen Fall (I1I) und im polytopalen Fall (I3K) vereinbaren wir auch für Zellkomplexe folgende Konvention für *Teilkomplexe*: ☜

✍ **Satz L7N.** *Sei $(X,A,\mathscr{X})$ ein Zellkomplex. Ein* Teilkomplex $(Y,A,\mathscr{Y}) \leq (X,A,\mathscr{X})$ *ist ein Zellkomplex mit $Y \subset X$ und $Y_n = Y \cap X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Falle gilt:* ✍

(1) Es gilt $\mathscr{E}(\mathscr{Y}) = \{\, e \in \mathscr{E}(\mathscr{X}) \mid e \cap Y \neq \emptyset \,\}$. Das bedeutet in Worten:
  (a) Jede Zelle e von $\mathscr{Y}$ ist eine Zelle von $\mathscr{X}$, kurz $\mathscr{E}(\mathscr{Y}) \subset \mathscr{E}(\mathscr{X})$.
  (b) Umgekehrt ist jede weitere Zelle $e \in \mathscr{E}(\mathscr{X}) \smallsetminus \mathscr{E}(\mathscr{Y})$ disjunkt zu Y.
(2) Das Paar $(X_{n-1} \cup Y_n, X_{n-1})$ entsteht durch Anheften der n–Zellen $e \in \mathscr{E}_n(Y)$, und $(X_n, X_{n-1} \cup Y_n)$ entsteht durch Anheften der n–Zellen $e \in \mathscr{E}_n(X) \smallsetminus \mathscr{E}_n(Y)$.
(3) Auch $(X,Y,\mathscr{X}')$ ist ein Zellkomplex dank der Zellstruktur $X'_n = X_n \cup Y$. Hierbei gilt $\mathscr{E}(\mathscr{X}') = \mathscr{E}(\mathscr{X}) \smallsetminus \mathscr{E}(\mathscr{Y})$ und somit $\chi(\mathscr{X}') = \chi(\mathscr{X}) - \chi(\mathscr{Y})$.

Teilkomplexe von $(X,A,\mathscr{X})$ konstruieren wir wie folgt: Zu gegebenem $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}(\mathscr{X})$ setzen wir $Y := A \sqcup \bigsqcup \mathscr{E}'$ und $Y_n := A \sqcup \bigsqcup \{\, e \in \mathscr{E}' \mid \dim e \leq n \,\}$. Dann sind äquivalent:

(4) Wir erhalten einen Teilkomplex $(Y,A,\mathscr{Y}) \leq (X,A,\mathscr{X})$.
(5) Der Raum Y ist abgeschlossen in X.
(6) Für jede Zelle $e \in \mathscr{E}'$ gilt $\bar{e} \subset Y$.

Der von $\mathscr{E}'$ erzeugte Zellkomplex in $(X,A,\mathscr{X})$ ist der kleinste Teilkomplex, der $\mathscr{E}'$ enthält; er entsteht durch Abschluss unter der letzten Bedingung. Alternativ nutzen wir:

Sind $(X(i),A,\mathscr{X}(i)) \leq (X,A,\mathscr{X})$ Teilkomplexe für $i \in I$, so auch ihre Vereinigung $(Y,A,\mathscr{Y}) = \bigcup_{i\in I}(X(i),A,\mathscr{X}(i))$ und ihr Schnitt $(Z,A,\mathscr{Z}) = \bigcap_{i\in I}(X(i),A,\mathscr{X}(i))$:

$$Y = \bigcup\nolimits_{i\in I} X(i), \qquad \mathscr{Y}_n = \bigcup\nolimits_{i\in I} \mathscr{X}_n(i), \qquad \mathscr{E}_n(\mathscr{Y}) = \bigcup\nolimits_{i\in I} \mathscr{E}_n(\mathscr{X}(i)),$$
$$Z = \bigcap\nolimits_{i\in I} X(i), \qquad \mathscr{Z}_n = \bigcap\nolimits_{i\in I} \mathscr{X}_n(i), \qquad \mathscr{E}_n(\mathscr{Z}) = \bigcap\nolimits_{i\in I} \mathscr{E}_n(\mathscr{X}(i)).$$

Für $I = \emptyset$ vereinbaren wir den Schnitt $(X,A,\mathscr{X})$ und die Vereinigung $(A,A,(A)_{n\in\mathbb{N}})$.

BEWEIS. Beweisen Sie den Satz als Übung! □

✻ **L7N.** Wir beweisen Aussage (1), die Folgerungen (2) und (3) sind dann klar. Wir betrachten eine Zelle $e \in \mathscr{E}_n(\mathscr{Y}) = \pi_0(Y_n \smallsetminus Y_{n-1}) = \pi_0(Y \cap (X_n \smallsetminus X_{n-1}))$. Demnach liegt e ganz in der zugehörigen Zelle $e' \in \mathscr{E}_n(X)$. Zu e wählen wir eine Parametrisierung, also $\varphi_e : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (Y_n, Y_{n-1})$ stetig mit $\mathring{\varphi}_e : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} e$. Das Bild $\bar{e} = \varphi_e(\mathbb{D}^n) \subset Y_n \subset X_n$ ist kompakt, also auch abgeschlossen (F1G). Somit ist $e = \bar{e} \cap e'$ abgeschlossen im Teilraum e'. Andererseits ist $e = \mathring{\varphi}_e(\mathbb{B}^n)$ in $e' \cong \mathbb{B}^n$ offen (Invarianz des Gebietes J7K). Da $e' \cong \mathbb{B}^n$ zusammenhängend und e nicht-leer ist, bleibt nur $e = e'$.

Die Implikation (4) ⇒ (5) ist klar dank der zellulären Topologie (L7C). Es gilt (5) ⇒ (6), denn für den Abschluss in X gilt $\overline{e} \subset \overline{Y} = Y$. Es bleibt (6) ⇒ (4): Jede Parametrisierung $\varphi_e : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X_n, X_{n-1})$ erfüllt $\varphi_e(\mathbb{D}^n) = \bar{e} \subset Y$ und $\varphi_e(\mathbb{S}^{n-1}) = \bar{e} \cap X_{n-1} \subset Y \cap X_{n-1} = Y_{n-1}$. Wir erhalten also $\varphi_e : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (Y_n, Y_{n-1}) \hookrightarrow (X_n, X_{n-1})$ durch Einschränkung des Zielraums. Unverändert ist $\mathring{\varphi}_e : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} e$ ein Homöomorphismus, also ist φ eine Parametrisierung der Zelle e in $(Y,\mathscr{Y})$.

☞ **Beispiel.** Sei $\mathscr{K}$ ein simplizialer oder polytopaler Komplex und $(X,\mathscr{X})$ der Zellkomplex auf dem Polyeder $X = |\mathscr{K}|$ mit Zellstruktur $\mathscr{X} = (|\mathscr{K}_{\leq n}|)_{n\in\mathbb{N}})$. Ist $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}$ ein simplizialer bzw. polytopaler Teilkomplex, so ist $(Y,\mathscr{Y}) \leq (X,\mathscr{X})$ ein zellulärer Teilkomplex, mit $Y = |\mathscr{L}|$ und $\mathscr{Y} = (|\mathscr{L}_{\leq n}|)_{n\in\mathbb{N}})$. Umgekehrt ist jeder zelluläre Teilkomplex $(Y,\mathscr{Y}) \leq (X,\mathscr{X})$ von dieser Form, also ein simplizialer bzw. polytopaler Teilkomplex. ☜

§L7g. Quotientenkomplexe. Bei Teilkomplexen entsprechend sich der simpliziale / polytopale / zelluläre Fall. Quotientenkomplexe haben wir im simplizialen / polytopalen Fall nicht, im zellulären Fall hingegen sind sie natürlich, einfach und elegant:

Satz L7O. *(1) Sei $(X, A, \mathscr{X})$ ein relativer Zellkomplex. Durch Zusammenschlagen des Teilraumes $A \subset X$ erhalten wir $\bar{X} = X /\!\!/ A$ und $\bar{A} = A /\!\!/ A = \{*\}$ sowie $\bar{X}_n = X_n /\!\!/ A$ in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(\bar{X}, \bar{A}, \bar{\mathscr{X}})$ ein Zellkomplex relativ zum Fußpunkt $\bar{A} = \{*\}$.*

(2) Zu jedem Teilkomplex $(Y, A, \mathscr{Y}) \leq (X, A, \mathscr{X})$ erhalten wir den Zellkomplex $(X, Y, \mathscr{X}')$ mit $X'_n = X_n \cup Y$ und hieraus den Quotienten $(\bar{X}, \{*\}, \bar{\mathscr{X}})$ mit $\bar{X}_n = (X_n \cup Y) /\!\!/ Y$. Hierbei gilt $\mathscr{E}(\bar{\mathscr{X}}) \cong \mathscr{E}(\mathscr{X}') = \mathscr{E}(\mathscr{X}) \smallsetminus \mathscr{E}(\mathscr{Y})$ und somit $\chi(\bar{\mathscr{X}}) = \chi(\mathscr{X}') = \chi(\mathscr{X}) - \chi(\mathscr{Y})$.

BEWEIS. Beweisen Sie dies als Übung! □

✻ **L7O.** (1) Wir prüfen Definition L7C nach: Der Quotientenraum $X /\!\!/ A$ ist hausdorffsch (Kragenlemma **??**). Die Quotientenabbildung $q : X \twoheadrightarrow X /\!\!/ A$ stiftet Homöomorphismen $q_n : X_n \smallsetminus X_{n-1} \xrightarrow{\sim} \bar{X}_n \smallsetminus \bar{X}_{n-1}$ (I5J), also eine Bijektion $\pi_0(q_n) : \mathscr{E}_n(\mathscr{X}) = \pi_0(X_n \smallsetminus X_{n-1}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\bar{X}_n \smallsetminus \bar{X}_{n-1}) = \mathscr{E}_n(\bar{\mathscr{X}})$. Zur Zelle $e \in \mathscr{E}_n(\mathscr{X})$ sei $\varphi : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X_n, X_{n-1})$ eine Parametrisierung, also stetig mit $\mathring{\varphi} : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} e$. Es gilt $e \xrightarrow{\sim} q(e)$, somit ist $q \circ \varphi_e : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X_n, X_{n-1}) \twoheadrightarrow (\bar{X}_n, \bar{X}_{n-1})$ stetig und eine Parametrisierung der Zelle $q(e) \in \mathscr{E}_n(\bar{\mathscr{X}})$. Die zelluläre Topologie auf $\bar{X}$ ist die von $q : X \twoheadrightarrow \bar{X}$ induzierte Quotiententopologie.

(2) Dies ist ein Spezialfall von (1). Zu Teilkomplexen nutzen wir Satz L7N.

Bemerkung. Das 0–Skelett $\bar{X}_0 \supset \{*\}$ ist diskret, somit ist $(\bar{X}, \bar{\mathscr{X}})$ sogar ein absoluter Zellkomplex. Der Unterschied zwischen $(\bar{X}, \{*\}, \bar{\mathscr{X}})$ und $(\bar{X}, \bar{\mathscr{X}}) = (\bar{X}, \emptyset, \bar{\mathscr{X}})$ liegt nur in der Buchhaltung: Wir überführen den Fußpunkt $*$ von Dimension -1 nach Dimension 0. Die schöne Formel für die Euler–Charakteristik spricht für diese Konvention.

Beispiel. Der Quotient $\mathbb{S}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1}$ ist ein Bouquet von zwei n–Sphären. Bezüglich der Zellstruktur $\mathscr{X}^n = (\emptyset \subset \mathbb{S}^0 \subset \cdots \subset \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n)$ ist $(\mathbb{S}^{n-1}, \mathscr{X}^{n-1}) \leq (\mathbb{S}^n, \mathscr{X}^n)$ ein Teilkomplex.

Beispiel. Für jeden Zellkomplex $(X, A, \mathscr{X})$ ist $X_n /\!\!/ X_{n-1}$ ein Bouquet von n–Sphären, eine für jede n–Zelle $e \in \mathscr{E}_n = \pi_0(X_n \smallsetminus X_{n-1})$. Die Zellstruktur auf dem Quotientenraum ist wie in Satz L7O gegeben durch $\bar{X}_{-1} = \bar{X}_0 = \ldots \bar{X}_{n-1} = \{*\}$ und $\bar{X}_n = X_n /\!\!/ X_{n-1}$.

§L7h. Produktkomplexe. Der folgende Satz behandelt Podukte von Zellkomplexen. Zuvor erinnere ich an einfache aber eindrückliche Beispiele:

Beispiel. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ erlaubt die Zellstruktur $\mathscr{X} = (\emptyset \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R})$, also $X_0 = \mathbb{Z}$ und $X_1 = \mathbb{R}$. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ erlaubt die Zellstruktur $(\emptyset \subset \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}\times\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2)$. Skizzieren Sie dies! Entwickeln Sie entsprechend eine Zellstruktur für den Raum $\mathbb{R}^3$, allgemein $\mathbb{R}^n$.

Beispiel. Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ erlaubt die Zellstruktur $\mathscr{X} = (\emptyset \subset \{1\} \subset \mathbb{S}^1)$. Der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ erlaubt die Zellstruktur $(\emptyset \subset \{(1,1)\} \subset \mathbb{S}^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$. Entwickeln Sie entsprechend eine Zellstruktur für $(\mathbb{S}^1)^3$, und allgemein den n–Torus $(\mathbb{S}^1)^n$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Satz L7P. *(1) Gegeben seien die Zellkomplexe $(X,A,\mathscr{X})$ und $(Y,B,\mathscr{Y})$. Der Produktraum $Z = X\times Y$ mit Teilraum $C = (A\times Y)\cup(X\times B)$ erlaubt die Filtrierung $\mathscr{Z} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$Z_n := C \cup \bigcup_{p+q\le n} X_p\times Y_q = C \sqcup \bigsqcup_{p+q\le n} \big\{ e_1\times e_2 \;\big|\; e_1\in\mathscr{E}_p(\mathscr{X}),\ e_2\in\mathscr{E}_q(\mathscr{Y}) \big\}.$$

Hierzu gehört demnach die Zellzerlegung

$$\mathscr{E}_n(\mathscr{Z}) = \pi_0(Z_n\smallsetminus Z_{n-1}) = \big\{ e_1\times e_2 \;\big|\; e_1\in\mathscr{E}_p(\mathscr{X}),\ e_2\in\mathscr{E}_q(\mathscr{Y}),\ p+q=n \big\}.$$

Wir schreiben hierfür kurz

$$(Z,C,\mathscr{Z}) = (X,A,\mathscr{X})\times(Y,B,\mathscr{Y}) = (\ X\times Y,\ A\times Y\cup X\times B,\ \mathscr{X}\boxtimes\mathscr{Y}\ ).$$

(2) Sind beide Zellkomplexe $(X,A,\mathscr{X})$ und $(Y,B,\mathscr{Y})$ lokal-endlich, so auch $(Z,C,\mathscr{Z})$, und die zelluläre Topologie auf Z ist die Produkttopologie auf $X\times Y$. Andernfalls genügt es, die Produkttopologie $\mathcal{T}$ zu ersetzen durch die von ihr kompakt erzeugte $k\mathcal{T}$ (F3R).

(3) Zu Teilkomplexen $(X',A,\mathscr{X}')\le(X,A,\mathscr{X})$ und $(Y',B,\mathscr{Y}')\le(Y,B,\mathscr{Y})$ erhalten wir den Teilkomplex $(X'\times Y', C, \mathscr{X}'\boxtimes\mathscr{Y}')\le(X\times Y,C,\mathscr{X}\boxtimes\mathscr{Y})$.

(4) Es gilt $\dim(\mathscr{X}\boxtimes\mathscr{Y}) = \dim(\mathscr{X})+\dim(\mathscr{Y})$ und $\mathscr{E}(\mathscr{X}\boxtimes\mathscr{Y})\cong\mathscr{E}(\mathscr{X})\times\mathscr{E}(\mathscr{Y})$ sowie im endlichen Fall zudem $\chi(\mathscr{X}\boxtimes\mathscr{Y}) = \chi(\mathscr{X})\cdot\chi(\mathscr{Y})$.

BEWEIS. Beweisen Sie dies als Übung! □

✻ **L7P.** (1) Wir prüfen Definition L7C nach: Zunächst einmal ist der Produktraum $X\times Y$ hausdorffsch (E4U). Wir haben $Z_n\smallsetminus Z_{n-1} = \bigsqcup\big\{ e_1\times e_2 \;\big|\; e_1\in\mathscr{E}_p(\mathscr{X}),\ e_2\in\mathscr{E}_q(\mathscr{Y}),\ p+q=n\big\}$. Wegen $e_1\cong\,]-1,1[^p$ und $e_2\cong\,]-1,1[^q$ ist $e_1\times e_2\cong\,]-1,1[^n$ wegzusammenhängend. Also haben wir tatsächlich die (Zell-)Zerlegung

$$\pi_0(Z_n\smallsetminus Z_{n-1}) = \big\{ e_1\times e_2 \;\big|\; e_1\in\mathscr{E}_p(\mathscr{X}),\ e_2\in\mathscr{E}_q(\mathscr{Y}),\ p+q=n\big\}.$$

Wir wählen eine Parametrisierung $\varphi_1 : ([-1,1]^p,\partial[-1,1]^p)\to(X_p,X_{p-1})$ der Zelle e_1 in $(X,\mathscr{X})$ und eine Parametrisierung $\varphi_2 : ([-1,1]^q,\partial[-1,1]^q)\to(Y_q,Y_{1-1})$ der Zelle e_2 in $(Y,\mathscr{Y})$. Ihr Produkt φ gemäß

$$\begin{array}{ccc} ([-1,1]^{p+q},\partial[-1,1]^{p+q}) & = & ([-1,1]^p,\partial[-1,1]^p)\times([-1,1]^q,\partial[-1,1]^q) \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi_1\times\varphi_2 \\ (Z_n,Z_{n-1}) & \xleftarrow{\ \text{inc}\ } & (X_p,X_{p-1})\times(Y_q,Y_{q-1}) \end{array}$$

ist eine Parametrisierung der Zelle $e_1\times e_2$ in $(Z,\mathscr{Z})$: Es gilt $\varphi(x_1,x_2) = (\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2))\in X_p\times Y_q\subset Z_n$. Für jeden Randpunkt $(x_1,x_2)\in\partial[-1,1]^{p+q}$ gilt $x_1\in\partial[-1,1]^p$ oder $x_2\in\partial[-1,1]^q$, für das Bild folgt demnach $\varphi(x_1,x_2) = (\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2))\in X_{p-1}\times Y_q\cup X_p\times Y_{q-1}\subset Z_{n-1}$. Im Inneren erhalten wir den Homöomorphismus $\mathring{\varphi} = \mathring{\varphi}_1\times\mathring{\varphi}_2 : \,]-1,1[^{p+q} = \,]-1,1[^p\times\,]-1,1[^q\xrightarrow{\sim} e_1\times e_2 = e$. Die Aussagen (2–4) sind leicht.

Beispiel. Sind $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ polytopale Komplexe (I3K), so auch ihr polytopales Produkt $\mathscr{K}\boxtimes\mathscr{L} := \big\{ P\times Q \;\big|\; P\in\mathscr{K},\ Q\in\mathscr{L}\big\}$, wie in Satz I3V erklärt. Dies entspricht in Satz L7P dem zellulären Produkt $(X\times Y,\mathscr{X}\boxtimes\mathscr{Y})$ der Polyeder $X = |\mathscr{K}|$ und $Y = |\mathscr{L}|$ mit ihren zugehörigen Zellstrukturen $\mathscr{X} = (|\mathscr{K}_{\le n}|)_{n\in\mathbb{N}})$ und $\mathscr{Y} = (|\mathscr{L}_{\le n}|)_{n\in\mathbb{N}})$.

Auch für simpliziale Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ ist das polytopale Produkt $\mathscr{K}\boxtimes\mathscr{L}$ erklärt, aber es ist im Allgemeinen nicht mehr simplizial: Das Produkt zweier Simplizes Δ^p und Δ^q positiver Dimension $p,q\ge 1$ ist kein Simplex! Immerhin ist es ein Polytop und somit eine $(p+q)$–Zelle, kurz $\Delta^p\times\Delta^q\cong\mathbb{D}^{p+q}$. Drei Auswege bieten sich an:

(1) Die baryzentrische Unterteilung (I3M) liefert den Simplizialkomplex $\beta(\mathscr{K}\boxtimes\mathscr{L})$.
(2) Das Shuffle-Produkt $(M,<) =: (K,<)\otimes(L,<)$ geordneter Simplizialkomplexe (I3X) liefert eine Triangulierung des Produkts ohne zusätzliche Ecken (I3Z).
(3) Für Polytopal- bzw. Zellkomplexe gelingt die Produktbildung natürlich und elegant.

§L8. Beispiele und Anwendungen

☞ **Übung L8A.** (1) Die Kreislinie $A = \{\,(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1/4\,\}$ spannt die Scheibe $S = [A]$ auf. Präsentieren Sie damit zu $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus A$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,e_3)$. ☜

(2) Sei $Y = \mathbb{S}^2 \cup [-e_3,e_3]$ die Sphäre mit Verbindungskante von Südpol zu Nordpol. Ist $Y \hookrightarrow X$ ein starker Deformationsretrakt? Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y,e_3)$.

(3) Finden Sie einen Simplizialkomplex K in $\mathbb{R}^3$, sodass $|K| \hookrightarrow X$ eine starker Deformationsretrakt ist. Bestimmen Sie die simpliziale Fundamentalgruppe $\pi_1(K,*)$.

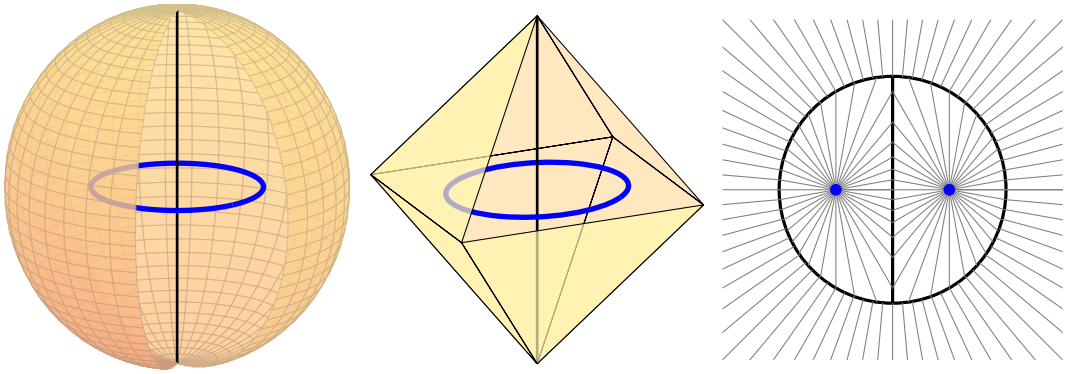


ABBILDUNG L:53. Komplement einer unverknoteten Kreislinie im $\mathbb{R}^3$

✻ **L8A.** (1) Die kurze Antwort lautet $\pi_1(X,e_3) \cong F := \langle\, s \mid - \,\rangle \cong \mathbb{Z}$. Genauer: Wir nutzen die polygonale Fundamentalgruppe. Jeder Kante $[u,v]$ in X ordnen wir ein Element $\eta(u,v) \in F$ zu: $\eta(u,v) = s^\varepsilon$ falls $[u,v] \cap S \neq \emptyset$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sign}(v_3) - \operatorname{sign}(u_3)\big]$, und $\eta(u,v) = 1$ sonst, falls $[u,v] \cap S = \emptyset$. Dies legt eine Koorientierung fest, hier von unten nach oben. Für jeden Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in (X,p) definieren wir $\eta(w) = \eta(v_0,v_1)\cdots\eta(v_{n-1},v_n)$. Dies ist invariant unter polygonaler Homotopie in (X,e_3), wie in L:18 gezeigt, induziert also den Gruppenhomomorphismus $\psi : \pi_1(X,e_3) \to F : [w] \mapsto \eta(w)$. Es gibt eine Schleife w in (X,e_3) mit $\eta(w) = s$, daher ist ψ surjektiv. Zur Injektivität von ψ sei w ein Polygonzug in (X,e_3) mit $\eta(w) = 1$. Wir konstruieren eine polygonale Homotopie $w \approx v_0$ durch Induktion über die Anzahl N der Durchstoßungen von $S_1 \cup S_2$. Im Falle $N = 0$ trifft der Polygonzug w die Kreisscheibe nicht, liegt also ganz im Gebiet $X' = \mathbb{R}^3 \smallsetminus S$. Dieses ist einfach zusammenhängend, genauer gilt $X' \cong \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ wie in E1Q, also $w \approx v_0$ in X'. Im Falle $N \geq 1$ löschen wir aufeinander folgende inverse Übergänge wie in L4D.

(2) Ja, $i : Y \hookrightarrow X$ ist ein starker Deformationsretrakt, wie in L:53 im Querschnitt gezeigt. Wir nutzen die Rotationssymmetrie bezüglich der z–Achse; in jeder Halbebene nutzen wir die radiale Projektion $r : X \to Y$. Zu jedem $x \in X$ liegt $[x,r(x)]$ in X, daher haben wir $H : [0,1] \times X \to X : (t,x) \mapsto (1-t)x + t\,r(x)$. Demnach gilt $r \circ i = \mathrm{id}_Y$ und $H : i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ rel Y. Wir erhalten den Gruppenisomorphismus $\pi_1(i) : \pi_1(Y,e_3) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,e_3)$.

Alternativ zu (1) können wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y,e_3)$ auch direkt bestimmen: Die Sphäre $\mathbb{S}^2$ ist einfach zusammenhängend (L2U). Das Hinzufügen der Kante $[-e_3,e_3]$ ergibt einen freien Erzeuger (L6P).

(3) Wir nutzen den Oktaederrand $|L| = \partial[\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3]$ sowie seine Vereinigung $|K| = |L| \cup [\pm e_3]$ mit der senkrechten Mittelachse wie in L:53 gezeigt. Wir haben $(\mathbb{R}^3,|K|) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^3,Y) : x \mapsto x \cdot |x|_1/|x|_2, 0 \mapsto 0$.

Auch $j : |K| \hookrightarrow X$ ist ein starker Deformationsretrakt, und so erhalten wir den Gruppenisomorphismus $\pi_1(j) : \pi_1(|K|,e_3) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,e_3)$. Die simpliziale Fundamentalgruppe $\pi_1(K,e_3) \cong \pi_1(|K|,e_3)$ können wir wie folgt leicht berechnen. Zu $L \subset K$ vergleichen wir die simplizialen Fundamentalgruppen: $\pi_1(K,e_3)$ hat als weiteren Erzeuger die Schleife $w = (e_3,e_1,-e_3,e_3)$ für die hinzugefügte Kante, ansonsten aber dieselben Erzeuger und Relationen wie $\pi_1(L,e_3)$. Wir wissen $|L| \cong \mathbb{S}^2$, also $\pi_1(L,e_3) \cong \pi_1(|L|,e_3) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2,e_3) = \{1\}$ (L2U). Demnach gilt $\pi_1(K,e_3) = \langle\, [w] \mid - \,\rangle$, also $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(K,e_3) : k \mapsto [w]^k$. Schließlich gilt $|K| \cong Y \simeq X$, also $\pi_1(X,e_3) \cong \pi_1(Y,e_3) \cong \pi_1(K,e_3) \cong \mathbb{Z}$; hierbei entspricht $[w]$ dem freien Erzeuger s aus (1).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

☞ **Übung L8B.** Skizzieren Sie $X = ([-1,1]^2 \times \{-1,1\}) \cup (\{-1,1\}^2 \times [-1,1]) \subset \mathbb{R}^3$. ☜

(1) Geben Sie einen (minimalen) Simplizialkomplex K an mit $|K| = X$.
(2) Bestimmen Sie $\pi_1(X,a) = \pi_1(K,a)$ zu $a = (1,1,1)$. Ist diese Gruppe frei? Nennen Sie ein minimales Erzeugendensystem (als Kantenzüge in K).
(3) Sei $Y = \partial[-1,1]^3 \smallsetminus \{\pm e_1, \pm e_2\}$. Bestimmen Sie $\pi_1(Y,a)$, etwa mit (2).
(4) Sei $Z = \mathbb{R}^3 \smallsetminus (\mathbb{R}e_1 \cup \mathbb{R}e_2)$. Bestimmen Sie $\pi_1(Z,a)$, etwa mit (3).

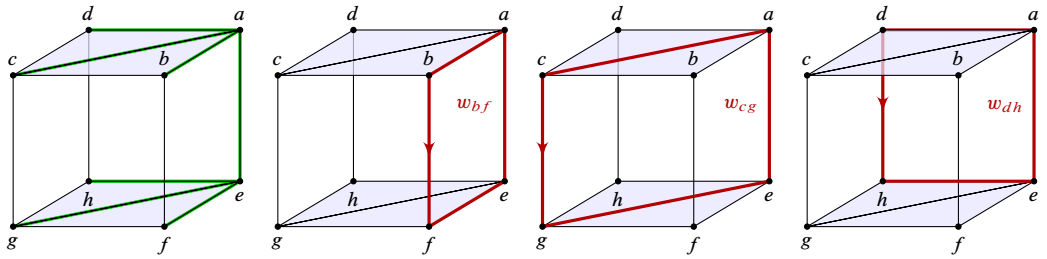


ABBILDUNG L:54. K mit Spannbaum T (grün) und drei freie Erzeuger (rot)

✻ **L8B.** (1) Minimal ist zum Beispiel $K = \langle\, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{e,f,g\}, \{e,g,h\}, \{a,e\}, \{b,f\}, \{c,g\}, \{d,h\} \,\rangle$ mit den Eckpunkten $a = (1,1,1)$, $b = (1,-1,1)$, $c = (-1,-1,1)$, $d = (-1,1,1)$, $e = (1,1,-1)$, $f = (1,-1,-1)$, $g = (-1,-1,-1)$, $h = (-1,1,-1)$, wie in Abbildung L:54 skizziert. (Drei weitere Varianten sind minimal.)

(2) Wir wählen einen Spannbaum, zum Beispiel $T = \langle\, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{e,f\}, \{e,g\}, \{e,h\} \,\rangle$. Nach Satz L6I wird die Fundamentalgruppe $\pi_1(K,a) = [\,S \mid R\,]$ als Monoid erzeugt von

$$S = \{\, s_{ab}, s_{ba}, s_{ac}, s_{ca}, s_{ad}, s_{da}, s_{ae}, s_{ea}, s_{bc}, s_{cb}, s_{cd}, s_{dc}, s_{ef}, s_{fe},$$
$$s_{eg}, s_{ge}, s_{eh}, s_{he}, s_{fg}, s_{gf}, s_{gh}, s_{hg}, s_{bf}, s_{fb}, s_{cg}, s_{gc}, s_{dh}, s_{hd} \,\},$$

also für jede Kante zwei Erzeuger, mit den folgenden Relationen:

$$R = \{\quad s_{xy} = 1 \text{ für } \{x,y\} \in T, \qquad s_{ab}s_{bc}s_{ca} = 1, \qquad s_{ac}s_{cd}s_{da} = 1,$$
$$s_{xy}s_{yx} = 1 \text{ für } \{x,y\} \in K, \qquad s_{ef}s_{fg}s_{gh} = 1, \qquad s_{eg}s_{gh}s_{he} = 1 \,\}$$

Die erste Relation besagt, dass wir alle Erzeuger zu Kanten im Spannbaum weglassen können (und in den restlichen Relationen durch 1 ersetzen können). Die zweite Relation besagt, dass die beiden Erzeuger für jede Kante invers zueinander sind; für das Gruppenerzeugnis genügt einer von beiden. Somit wird die Fundamentalgruppe als Gruppe erzeugt von den Elementen $s_{bc}, s_{cd}, s_{bf}, s_{cg}, s_{dh}, s_{fg}, s_{gh}$ mit den Relationen, die von den Dreiecken kommen. Die Relation für $\{a,b,c\}$ wird wegen $s_{ab} = s_{ac} = 1$ zu $s_{bc} = 1$. Ebenso folgt aus den drei anderen Relationen $s_{cd} = s_{fg} = s_{gh} = 1$. Somit ist $\pi_1(K,a)$ frei erzeugt von s_{bf}, s_{cg}, s_{dh}.

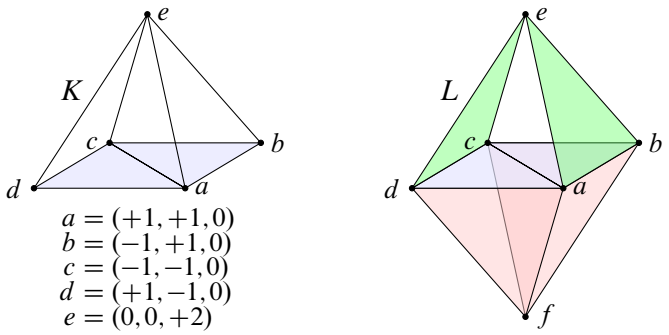
Die Kantenzüge w_{bf}, w_{cg}, w_{dh} aus Abbildung L:54 repräsentieren die Homotopieklassen s_{bf}, s_{cg}, s_{dh}. Der Weg $w_{bf} = abfea$ läuft im Baum T von a nach b über die Kante $\{b,f\}$ nach f und dann in T zurück nach a. Für die anderen Erzeuger gehen wir ebenso vor: $w_{cg} = acgea$, $w_{dh} = adhea$.

(3) Die Inklusion $i : X \hookrightarrow Y$ ist ein starker Deformationsretrakt, indem wir jede gelochte Seite des Würfels radial auf ihren Rand projizieren. Wir erhalten den Gruppenisomorphismus $\pi_1(i) : \pi_1(X,a) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y,a)$.

Alternativ: Wir haben $Y \cong \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{y_0, y_1, y_2, y_3\} \cong \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{z_1, z_2, z_3\}$ dank stereographischer Projektion (A1L), also $\pi_1(Y,a) \cong \langle s_1, s_2, s_3 \mid - \rangle$ dank Satz L4D. Auch hiermit können wir freie Erzeuger explizit angeben.

(4) Auch die Inklusion $j : Y \hookrightarrow Z$ ist ein starker Deformationsretrakt: Wir haben $r : Z \to Y : x \mapsto x/|x|_\infty$ mit $r \circ j = \mathrm{id}_Y$ und $H : j \circ r \simeq \mathrm{id}_Z$ rel Y vermöge $H : [0,1] \times Z \to Z : (t,x) \mapsto (1-t)x + t\,r(x)$. Somit ist auch $i : X \hookrightarrow Z$ ein starker Deformationsretrakt, induziert also einen Isomorphismen $\pi_1(i) : \pi_1(X,a) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Z,a)$.

Alternativ können wir $\pi_1(Z,(1,1,1)) = \langle s_1, s_2, s_3 \mid - \rangle$ wie in L4K präsentieren, indem wir Übergänge durch die drei Quadranten zählen: $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \leq 0\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, y \leq 0\}$, $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, y \geq 0\}$. Das Komplement $Z \smallsetminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ ist einfach zusammenhängend.



$a = (+1,+1,0)$
$b = (-1,+1,0)$
$c = (-1,-1,0)$
$d = (+1,-1,0)$
$e = (0,0,+2)$

Übung L8C. Wir betrachten, wie oben links skizziert, den Simplizialkomplex

$$K = \langle\, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{c,e\}, \{d,e\} \,\rangle.$$

(1) Berechnen Sie die Euler–Charakteristiken $\chi(K_{\leq 1})$ und $\chi(K)$.
(2) Geben Sie einen Spannbaum für das 1–Skelett $K_{\leq 1}$ an.
(3) Nennen Sie eine Familie freier Erzeuger von $\pi_1(K_{\leq 1}, a)$ als Kantenpfade.
(4) Die Inklusion $i : (K_{\leq 1}, a) \hookrightarrow (K, a)$ induziert $\pi_1(i) : \pi_1(K_{\leq 1}, a) \twoheadrightarrow \pi_1(K, a)$. Welche Relationen kommen hierbei neu hinzu?
(5) Nennen Sie eine Familie freier Erzeuger von $\pi_1(K, a)$ als Kantenpfade.
(6) Fügen Sie $K^* = K \cup \ldots$ möglichst wenige Dreiecke hinzu bis $\pi_1(K^*, a) = \{1\}$.
(7) Auch für das Komplement $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus |K|$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ebenfalls frei. Von welchem Rang? Nennen Sie eine Familie freier Erzeuger.

Beantworten Sie dieselben Fragen für den Komplex aus L8B sowie für

$$L = \langle\, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,e\}, \{c,d,e\}, \{a,d,f\}, \{b,c,f\} \,\rangle.$$

✻ **L8C.** (1) Wir finden $\chi(K_{\leq 1}) = 5 - 9 = -4$ für das 1–Skelett und entsprechend $\chi(K) = 5 - 9 + 2 = -2$.

(2) Als Spannbaum wählen wir $T = \langle\, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\} \,\rangle$. Viele weitere wären ebenso möglich.

(3) Es verbleiben fünf Kanten $K \smallsetminus T = \{\, \{b,c\}, \{c,d\}, \{b,e\}, \{c,e\}, \{d,e\} \,\}$, somit ist $\pi_1(K_{\leq 1}, a)$ frei vom Rang 5. Freie Erzeuger sind die Homotopieklassen der Kantenpfade $|abca|$, $|acda|$, $|abea|$, $|acea|$, $|adea|$.

(4) Bei der Inklusion $i : (K_{\leq 1}, a) \hookrightarrow (K, a)$ kommen zwei Dreiecke hinzu. Diese erlauben die Homotopien $|abca| \sim 1_a$ und $|acda| \sim 1_a$. In $\pi_1(K, a)$ entspricht dies den Relation $[|abca|] = 1$ und $[|acda|] = 1$.

(5) Somit ist $\pi_1(K, a)$ frei vom Rang 3. Freie Erzeuger sind die Homotopieklassen der Kantenpfade $|abea|$, $|acea|$, $|adea|$. Sie können dies auch anschaulich gut erkennen: Machen Sie eine Skizze!

(6) Wir fügen unserem Komplex K die Dreiecke $\{a,b,e\}$, $\{a,c,e\}$, $\{a,d,e\}$ hinzu und erhalten den Komplex $K^* = K \cup \langle\, \{a,b,e\}, \{a,c,e\}, \{a,d,e\} \,\rangle$. Diese löschen die in (5) berechneten Erzeuger von $\pi_1(K, a)$, also gilt hier $\pi_1(K^*, a) = \{1\}$. Genauer ist K^* sternförmig bezüglich a und somit zusammenziehbar.

(7) Das Komplement $Y = \mathbb{R}^3 \smallsetminus |K^*|$ ist einfach zusammenhängend, also $\pi_1(Y, p) = \{1\}$. Als Fußpunkt wählen wir zum Beispiel $p = (-2,-2,0)$. Für $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus |K|$ können wir die Fundamentalgruppe hieraus ablesen: $\pi_1(X, p)$ ist frei vom Rang 3. Wir wählen drei Wege $\alpha, \beta, \gamma : ([0,1], \{0,1\}) \to (X, p)$, wobei α nur das Dreieck $[a,b,e]$ einmal durchstößt, β das Dreieck $[a,c,e]$, und γ das Dreieck $[a,d,e]$. Wir erhalten so eine Familie $\{\, [\alpha], [\beta], [\gamma] \,\}$ von drei freien Erzeugern für $\pi_1(X, p)$. Die Ausführung gelingt wie in L4K.

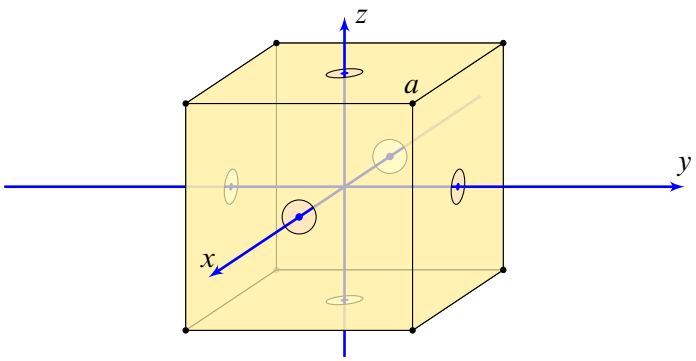
Bemerkung. Die hier beobachtete Dualität zwischen $|K|$ und $\mathbb{R}^3 \smallsetminus |K|$ ist eine Vorstufe der Poincaré–Dualität. Mehr hierzu erfahren Sie in der Algebraischen Topologie.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung L8D. Im Raum $\mathbb{R}^3$ mit Supremumsnorm ist $W = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|_\infty = 1 \,\} = \partial[-1,1]^3$ der Rand eines achsenparallelen Würfels. Zur Standardbasis e_1, e_2, e_3 betrachten wir die drei Achsen $X_i = \mathbb{R} \cdot e_i$. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Fundamentalgruppe $\pi_1(A,a)$ des Komplements $A = \mathbb{R}^3 \smallsetminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ zum Fußpunkt $a = (1,1,1)$ zu bestimmen.

(1) Ist die Fläche $B = W \smallsetminus \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ ein starker Deformationsretrakt von A? Finden Sie $\varphi : B \xrightarrow{\sim} B' \subset \mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(B,a)$.
(2) Die offene Fläche B erlaubt als starken Deformationsretrakt eine kompakte Fläche $C \subset B \subset A$. Welche Fläche $F^{\pm}_{g,r}$ ist dies? Bestimmen Sie ihre Fundamentalgruppe.
(3) Die kompakte Fläche C erlaubt als starken Deformationsretrakt einen Graphen $D \subset C \subset B \subset A$. Bestimmen Sie Euler–Charakteristik und Fundamentalgruppe.
(4) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ geschlossene polygonale Wege in (A,a), die jeweils aus drei Kanten bestehen und nur die Halbachse $\mathbb{R}_{>0} \cdot e_1$, $\mathbb{R}_{>0} \cdot e_2$, $\mathbb{R}_{>0} \cdot e_3$ bzw. $\mathbb{R}_{<0} \cdot e_1$, $\mathbb{R}_{<0} \cdot e_2$, $\mathbb{R}_{<0} \cdot e_3$ positiv umrunden (Rechte-Hand-Regel vom Urprung wegzeigend). Finden Sie eine nicht-triviale Relation zwischen $[\alpha_1], \dots, [\alpha_6]$ und wählen Sie hieraus ein freies Erzeugendensystem der Gruppe $\pi_1(A,a)$.

Allgemein gelingt es ebenso: Seien $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v_0, \dots, \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v_n$ Halbgeraden im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des Komplements $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v_0 \cup \dots \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v_n)$.



✻ **L8D.** (1) Zur Inklusion $i : B \hookrightarrow A$ haben wir die Retraktion $r : A \to B : x \mapsto x/|x|_\infty$. Es gilt $r \circ i = \mathrm{id}_B$ und $H : i \circ r \simeq \mathrm{id}_A$ rel B vermöge $H : [0,1] \times A \to A : x \mapsto (1-t)x + t\,r(x)$. Stereographischer Projektion (A1L) ergibt $B \cong \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\} \cong \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{z_1, \dots, z_5\}$, also $\pi_1(B,a) \cong \langle s_1, \dots, s_5 \mid - \rangle$ dank Satz L4D. (2) Die Fläche $C \cong F^+_{0,6}$ ist oben skizziert. Es gilt $C \simeq B$ rel C dank radialer Projektion auf jeder Würfelseite. Demnach ist $\pi_1(C,a)$ ist frei über 5 Erzeugern (L6H). (3) Das 1–Skelett D des Würfels erfüllt $D \simeq C$ rel D dank radialer Projektion auf jeder Würfelseite. Wir finden $\chi(D) = 8 - 12 = -4$, demnach ist $\pi_1(D,a)$ frei über 5 Erzeugern (L6D). (4) Gemäß obiger Skizze finden wir die Relation $[\alpha_1][\alpha_6][\alpha_2][\alpha_4][\alpha_3][\alpha_5] = 1$. Demnach ist jede fünfelementige Teilmenge $S \subset \{\, [\alpha_1], \dots, [\alpha_6] \,\}$ ein freies Erzeugendensystem der Gruppe $\pi_1(A,a)$. *Achtung:* Von $b = (-1,1,1)$ aus nutzen wir $\beta_1, \dots, \beta_6$ und finden die Relation $[\beta_1][\beta_2][\beta_6][\beta_4][\beta_5][\beta_3] = 1$.

Allgemein: Wir können $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{S}^2$ annehmen. Sie seien paarweise verschieden. Wie in (1) gilt $X \simeq Y := \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$: Zur Inklusion $i : Y \hookrightarrow X$ haben wir die Retraktion $r : X \to Y : x \mapsto x/|x|_2$. Es gilt $r \circ i = \mathrm{id}_Y$ und $H : i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ vermöge $H : [0,1] \times X \to X : x \mapsto (1-t)x + t\,r(x)$. Dank stereographischer Projektion (A1L) erhalten wir $Y \cong \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{z_1, \dots, z_n\}$, also $\pi_1(Y,a) \cong \langle s_1, \dots, s_n \mid - \rangle$ dank Satz L4D.

Alternativ: Nach einem Homöomorphismus können wir $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$ annehmen (K1Z), zudem zyklisch nummeriert. Wir teilen die x–y–Ebene in die Winkel $S_0, S_1, \dots, S_n$, wobei S_i von $\mathbb{R}v_{i-1}$ und $\mathbb{R}v_i$ begrenzt wird (zyklisch mit $v_{-1} = v_n$). Wir nutzen die polygonale Fundamentalgruppe und zählen Durchgänge durch $S_1, \dots, S_n$ als Wort in $\langle s_1, \dots, s_n \mid - \rangle$. Dies überträgt Satz L4D von $\mathbb{R}^2$ direkt auf $\mathbb{R}^3$.

§L8a. Fundamentalgruppe und Orientierbarkeit von Mannigfaltigkeiten. Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Jeder Weg $\gamma : [0,1] \to \operatorname{Int} X$ transportiert lokale Orientierungen (J7S): Jede lokale Orientierung $[k_0]$ um $\gamma(0)$ setzt sich eindeutig fort zur lokalen Orientierung $[k_t]$ um $\gamma(t)$ für jedes $t \in [0,1]$. Illustrieren Sie dies für Möbius–Band und Zylinder (K1H), sowie Sphäre $\mathbb{S}^2$ (K1I) und projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ (K2F). Zeigen Sie:

Satz L8E. *(1) Der Transport von Orientierungen $\gamma_* : [k_0] \mapsto [k_1]$ definiert den Gruppenhomomorphismus* $\operatorname{sign} : \pi_1(X, x_0) \to \{\pm 1\}$ *gemäß* $\gamma_*[k_0] = \operatorname{sign}([\gamma]) \cdot [k_0]$.

(2) Genau dann ist die Mannigfaltigkeit X orientierbar, wenn der Gruppenhomomorphismus sign *trivial ist, also* $\operatorname{sign}([\gamma]) = +1$ *für alle Schleifen γ in (X, x_0) gilt.*

(3) Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit orientierbar. Es genügt, dass $\pi_1(X, x_0)$ oder $H_1(X) = \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$ endlich von ungerader Ordnung ist.

(4) Für das Produkt zusammenhängender Mannigfaltigkeiten M und N gilt

$$\pi_1(M \times N, (a,b)) \cong \pi_1(M,a) \times \pi_1(N,b) \quad \text{wie in L2O und}$$
$$\operatorname{sign}_{M\times N}([\gamma]) = \operatorname{sign}_M([\mathrm{pr}_M \circ \gamma]) \cdot \operatorname{sign}_N([\mathrm{pr}_N \circ \gamma]).$$

Demnach ist $M \times N$ genau dann orientierbar, wenn M und N orientierbar sind.

Diese Technik wird in Satz M4P mit der Orientierungsüberlagerung perfektioniert.

§L8b. Klassifikation von $F^{\pm}_{g,r} \times \mathbb{S}^1$. Wir setzen Übung K6T fort.

Übung L8F. (1) Klassifizieren Sie die Produkte $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1$ bis auf Homöomorphie. Wann ist diese 3–Mannigfaltigkeit orientierbar? Was ist ihr Rand? Wann gilt $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1 \cong F^{\delta}_{h,s} \times \mathbb{S}^1$

(2) Klassifizieren Sie ebenso $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^2$. Hilft hier π_1? und die Euler–Charakteristik?

(3) Als Kontrast und zur Wiederholung (K6T): Wann gilt $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{D}^k \cong F^{\delta}_{h,s} \times \mathbb{D}^k$?

✻ **L8F.** (1) Beim Produkt $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1$ bleiben Orientierbarkeit und Randkomponenten erhalten (K1W): Der Rand $\partial(F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1) = (\partial F^{\varepsilon}_{g,r}) \times \mathbb{S}^1$ besteht aus r Tori. Genau dann ist die 3–Mannigfaltigkeit $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1$ orientierbar, wenn die Fläche $F^{\varepsilon}_{g,r}$ orientierbar ist. Aus $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1 \cong F^{\delta}_{h,s} \times \mathbb{S}^1$ folgt also $r = s$ und $\varepsilon = \delta$.

Wir würden gerne auch noch $g = h$ schließen. Leider wird die Euler–Charakteristik vernichtet (A3S), denn aus $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$ folgt $\chi(F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1) = \chi(F^{\varepsilon}_{g,r}) \cdot \chi(\mathbb{S}^1) = 0$. Daher können wir g hieraus nicht rekonstruieren.

Die Unterscheidung der Räume $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1$ gelingt jedoch mit der Fundamentalgruppe: Dank L2O gilt $\pi_1(F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1, *) \cong \pi_1(F^{\varepsilon}_{g,r}, *) \times \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \pi_1(F^{\varepsilon}_{g,r}, *) \times \mathbb{Z}$. Wir nutzen nun die Abelschmachung:

Wir kennen bereits (r, ε). Für $r \geq 1$ ist $\pi_1(F^{\varepsilon}_{g,r}, *)$ frei vom Rang $2g + r - 1$ (L6H). Die Abelschmachung ist demnach $\pi_1(F^{\varepsilon}_{g,r}, *)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g+r-1}$, und somit $\pi_1(F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1, *)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g+r}$.

Für $r = 0$ ist die Abelschmachung $\pi_1(F^{+}_{g}, *)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ bzw. $\pi_1(F^{-}_{g}, *)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g$, siehe L6M.

In allen Fällen können wir aus der Abelschmachung $\pi_1(F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1, *)_{\mathrm{ab}}$ der Fundamentalgruppe das Geschlecht g rekonstruieren. Demnach gilt $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^1 \cong F^{\delta}_{h,s} \times \mathbb{S}^1$ genau dann, wenn $(g, r, \varepsilon) = (h, s, \delta)$ gilt.

(2) Wir erhalten dasselbe Ergebnis: $F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{S}^2 \cong F^{\delta}_{h,s} \times \mathbb{S}^2$ gilt genau dann, wenn $(g, r, \varepsilon) = (h, s, \delta)$ gilt. Die Rechnung aus (1) gelingt genauso, wegen $\pi_1(\mathbb{S}^2, *) = \{1\}$ sogar noch etwas einfacher. Die Rekonstruktion von g gelingt nicht nur mit π_1, sondern alternativ auch mit der Euler–Charakteristik, dank $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

(3) Für das Produkt mit dem Intervall $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ hingegen gilt (K6T):

$$F^{\varepsilon}_{g,r} \times \mathbb{D}^1 \cong F^{\delta}_{h,s} \times \mathbb{D}^1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r, s = 0, & \varepsilon = \delta, \quad g = h & \text{oder} \\ r, s \geq 1, & \varepsilon = \delta, \quad \chi(F^{\varepsilon}_{g,r}) = \chi(F^{\delta}_{h,s}) \end{cases}$$

Bemerkenswerterweise entspricht das der Klassifikation der Flächen bis auf Homotopie-Äquivalenz (L6O).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L8c. Nochmal Retraktionen. Wir setzen Übung L2P fort:

Übung L8G. Retrakte lassen sich in jeder Kategorie definieren: Wiederholen und erklären Sie, wie das geht! Uns interessieren sie hier insbesondere in den topologischen Kategorien `Top` und `hTop` sowie hilfsweise in der Kategorie `Grp` der Gruppen.

(1) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Nennen Sie alle Homomorphismen $\psi : \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}$ in `Grp`.
(2) Ist der Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 : 1 \mapsto \overline{1}$ in `Grp` ein Retrakt?
(3) Ist die Inklusion $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ eine Homotopie-Äquivalenz? ein Retrakt?
(4) Selbe Frage für die hierdurch induzierte Inklusion $i : \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2$.
(5) Selbe Frage für $i : \mathrm{GL}_2\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{GL}_3\mathbb{R} : A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

✻ **L8G.** (1) Es gibt nur einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}$, nämlich den trivialen, $\psi = 0$.

Ausführlich: In der Gruppe $(\mathbb{Z}/n, +)$ gilt für die n–fache Summe $\overline{1} + \cdots + \overline{1} = 0$. Jeder Gruppenhomomorphismus $\psi : (\mathbb{Z}/n, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ wird durch das Bild $x = \psi(\overline{1})$ festgelegt und muss $x + \cdots + x = 0$ erfüllen. Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ hat jedoch nur ein Element endlicher Ordnung, daher existiert hierzu nur die Lösung $x = 0$. Also ist ψ trivial, das heißt, es gilt $\psi(\overline{a}) = 0$ für alle $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n$.

(2) Nein: Es gibt nur einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}$, nämlich den trivialen mit $\overline{1} \mapsto 0$. Für diesen Homomorphismus gilt $\varphi \circ \psi = 0$, also $\varphi \circ \psi \neq \mathrm{id}$. Somit ist φ in `Grp` kein Retrakt (anders als in `Set`).

(3) Nein: Der von $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ induzierte Gruppenhomomorphismus $\pi_1(i) : \pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) \to \pi_1(\mathbb{S}^2, e_1)$ ist äquivalent zu $\mathbb{Z} \to 0$, erlaubt also keine Retraktion in `Grp`. Daher erlaubt i keine Retraktion in `Top`.

(4) Nein: Der von $i : \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2$ induzierte Homomorphismus $\pi_1(i) : \pi_1(\mathbb{RP}^1, [e_1]) \to \pi_1(\mathbb{RP}^2, [e_1])$ ist äquivalent zu $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$, erlaubt also keine Retraktion in `Grp`. Daher erlaubt i keine Retraktion in `Top`.

(5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ dank Gram–Schmidt (G5G). Für $n = 2$ wissen wir $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$, also $\pi_1(\mathrm{GL}_2\mathbb{R}, 1) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_2\mathbb{R}, 1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Für $n = 3$ wissen wir $\mathrm{SO}_3\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$ dank K2P, also $\pi_1(\mathrm{GL}_3\mathbb{R}, 1) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_3\mathbb{R}, 1) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^3, *) \cong \mathbb{Z}/2$. Erzeuger ist jeweils die Homotopieklasse des Weges

$$\alpha_n : [0,1] \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R} : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1_{(n-2)\times(n-2)} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten so die Präsentationen $\pi_1(\mathrm{GL}_2\mathbb{R}, 1) = \langle [\alpha_2] \mid - \rangle$ und $\pi_1(\mathrm{GL}_3\mathbb{R}, 1) = \langle [\alpha_3] \mid [\alpha_3]^2 \rangle$. Die Inklusion $i : \mathrm{GL}_2\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{GL}_3\mathbb{R}$ induziert $\pi_1(i) : \pi_1(\mathrm{GL}_2\mathbb{R}, 1) \to \pi_1(\mathrm{GL}_3\mathbb{R}, 1) : [\alpha_2] \mapsto [\alpha_3]$. Dieser Homomorphismus ist äquivalent zu $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$, erlaubt also keine Retraktion in `Grp`. Daher erlaubt i keine Retraktion in `Top`.

Übung L8H. Wir untersuchen $r : \mathrm{GL}_2\mathbb{R} \to X := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} : A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto Ae_1 = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$.

(1) Präsentieren Sie $\pi_1(\mathrm{GL}_2\mathbb{R}, 1)$ und $\pi_1(X, e_1)$. Ist $\pi_1(r)$ ein Isomorphismus?
(2) Existiert eine Einbettung $i : X \to \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$?
(3) Ist r eine starke Homotopie-Äquivalenz?

✻ **L8H.** (1) Wir finden $\pi_1(\mathrm{GL}_2\mathbb{R}, 1) = \langle a \mid - \rangle$ mit $a = [\alpha_2]$ wie in der vorigen Übung. Zudem wissen wir $\pi_1(X, e_1) = \langle c \mid - \rangle$ mit $c = [\gamma]$ und der Schleife $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Wie sehen hier explizit $\pi_1(r) : a \mapsto c$, denn $r \circ \alpha_2 = \gamma$, also ist $\pi_1(r)$ tatsächlich ein Gruppenisomorphismus.

(2) Ja. Die Abbildung $i : X \to \mathbb{R}^{2\times 2} : \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ ist stetig und erfüllt $\det i\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = a^2 + b^2 \neq 2$.

(3) Nein, $r : \mathrm{GL}_2\mathbb{R} \to X$ ist keine Homotopie-Äquivalenz, denn $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend.

Hingegen ist die Einschränkung $r : \mathrm{GL}_2^+\mathbb{R} \to X$ eine starke Homotopie-Äquivalenz: Wir können den zweiten Spaltenvektor affin zu $\left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right)$ deformieren, da er wegen $\det > 0$ in derselben Halbebene liegen muss (G5F). Die gesuchte Homotopie $H : i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_2\mathbb{R}}$ ist demnach $H(t, A) = (1-t)i(r(A)) + tA$.

§L8d. Die klassischen Gruppen $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$, insbesondere $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{C} \simeq \mathrm{U}_2\,\mathbb{C} \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Übung L8I. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgenden kommutativen Diagramme für alle $n \geq 1$ zu erklären bzw. zu wiederholen und dann für kleine n genauer zu untersuchen.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^{n\times n} & \underset{\sigma}{\overset{\det}{\rightleftarrows}} & \mathbb{K} = \mathbb{K}^{1\times 1} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} & \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} & \mathbb{K}^\times = \mathrm{GL}_1\,\mathbb{K}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{SL}_n\,\mathbb{R} & \underset{g}{\overset{\mathrm{inc}}{\rightleftarrows}} & \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} & \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} & \mathbb{R}^\times = \mathrm{GL}_1\,\mathbb{R} \\
{\scriptstyle i'}\uparrow\downarrow{\scriptstyle r'} & & {\scriptstyle i}\uparrow\downarrow{\scriptstyle r} & & {\scriptstyle j}\uparrow\downarrow{\scriptstyle q} \\
\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} & \underset{g'}{\overset{\mathrm{inc}'}{\rightleftarrows}} & \mathrm{O}_n\,\mathbb{R} & \underset{s'}{\overset{p'}{\rightleftarrows}} & \mathbb{S}^0 = \mathrm{O}_1\,\mathbb{R}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{SL}_n\,\mathbb{C} & \underset{g}{\overset{\mathrm{inc}}{\rightleftarrows}} & \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C} & \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} & \mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1\,\mathbb{C} \\
{\scriptstyle i'}\uparrow\downarrow{\scriptstyle r'} & & {\scriptstyle i}\uparrow\downarrow{\scriptstyle r} & & {\scriptstyle j}\uparrow\downarrow{\scriptstyle q} \\
\mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} & \underset{g'}{\overset{\mathrm{inc}'}{\rightleftarrows}} & \mathrm{U}_n\,\mathbb{C} & \underset{s'}{\overset{p'}{\rightleftarrows}} & \mathbb{S}^1 = \mathrm{U}_1\,\mathbb{C}
\end{array}$$

(1) Ist die Determinante auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ stetig? und die Multiplikation? die Inversion? Welche der obigen Gruppen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind offen? abgeschlossen? kompakt?

(2) Nennen Sie stetige multiplikative Einbettungen $\sigma : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\det\circ\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Dasselbe gilt dann durch Einschränkung für $s : \mathbb{K}^\times \to \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ etc.

(3) Definieren Sie für alle $m \leq n$ die kanonische Einbettung $\sigma_{m,n} : \mathbb{K}^{m\times m} \hookrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$. Dasselbe gilt dann durch Einschränkung für $\mathrm{GL}_m \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ sowie O, SO, U, SU.

(4) Konstruieren Sie eine Retraktion $g : \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_n\,\mathbb{K}$, also $g \circ \mathrm{inc} = \mathrm{id}_{\mathrm{SL}_n\,\mathbb{K}}$. Dasselbe gilt für $g' : \mathrm{O}_n\,\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ und $g' : \mathrm{U}_n\,\mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$.

(5) Konstruieren Sie eine topologische Produktzerlegung $(f, f') : \mathrm{SL}_n\,\mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \cong \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$. Ebenso gilt $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} \times \mathbb{S}^0 \cong \mathrm{O}_n\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} \times \mathbb{S}^1 \cong \mathrm{U}_n\,\mathbb{C}$.

(6) Konstruieren Sie eine (starke) Deformationsretraktion $r : \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \to \mathrm{O}_n\,\mathbb{R}$ bzw. $r : \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C} \to \mathrm{U}_n\,\mathbb{C}$, sodass $r \circ i = \mathrm{id}$ und $i \circ r \simeq \mathrm{id}$ gilt.

(7) Gibt es eine Deformationsretraktion $g : \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_n\,\mathbb{R}$? und $g : \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_n\,\mathbb{C}$? Dasselbe gilt für $g : \mathrm{O}_n\,\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ und $g : \mathrm{U}_n\,\mathbb{C} \to \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$.

(8) Geben Sie möglichst explizit Homöomorphismus $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$ sowie $\mathrm{SU}_1\,\mathbb{C} \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C} \cong \mathbb{S}^3$ an.

(9) Bestimmen Sie damit die Fundamentalgruppen von $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$, $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$, $\mathrm{SU}_1\,\mathbb{C}$, $\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C}$, sodann $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$, $\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}$, $\mathrm{GL}_1\,\mathbb{C}$, $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{C}$, und schließlich $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{R}$, $\mathrm{SL}_3\,\mathbb{R}$, $\mathrm{SL}_1\,\mathbb{C}$, $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{C}$. (In höherer Dimension tritt Stabilisierung ein: Die Ergebnisse bleiben gleich!)

(10) Nennen Sie Erzeuger all dieser Fundamentalgruppen (explizit als Schleifen) und bestimmen Sie damit die durch π_1 induzierten Gruppenhomomorphismen zu den Inklusionen $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$ sowie $\mathrm{O}_n\,\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{U}_n\,\mathbb{C}$ und $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L8e. Der hawaiianische Ohrring. Der *hawaiianische Ohrring* ist folgender Raum:

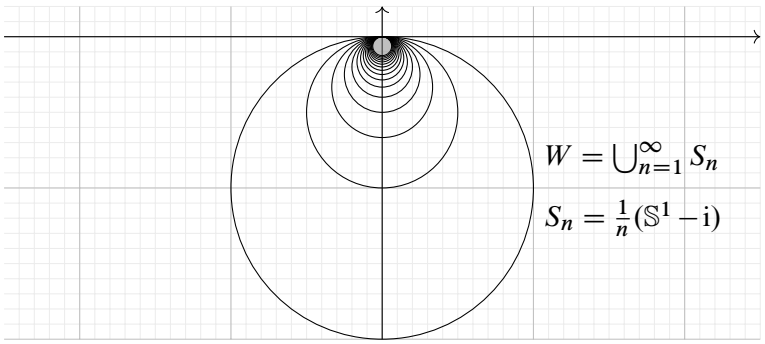


ABBILDUNG L:55. Der hawaiianische Ohrring $W \subset \mathbb{C}$

Übung L8J. (1) Für $X \subset \mathbb{R}^n$ offen ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ abzählbar.

(2) Der hawaiianische Ohrring $W \subset \mathbb{C}$ ist kompakt, und seine Fundamentalgruppe $\pi_1(W, 0)$ ist überabzählbar. Selbst ihre Abelschmachung ist überabzählbar, denn wir haben einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : \pi_1(W, 0) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ auf die *Specker–Gruppe*.

Dieses Ergebnis ist schon erstaunlich. Als Kontrast ein paar weitere Illustrationen:

(3) Sei $X := \bigvee_{n=0}^{\infty}(\mathbb{S}^1, 1) = (\mathbb{N} \times \mathbb{S}^1) /\!\!/ (\mathbb{N} \times \{1\}) \cong \mathbb{R}_{\geq 0} /\!\!/ \mathbb{N} \cong \bigcup_{n=1}^{\infty} n(\mathbb{S}^1 - \mathrm{i})$ das unendliche Bouquet (E2W). Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, *)$ abzählbar?

(4) Sei $C \subset [0,1]$ die Cantor–Menge und $X := \mathbb{R}^2 \smallsetminus (C \times \{0\})$. Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, (0,1))$ abzählbar? Was gilt, wenn Sie C durch $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ersetzen?

✻ **L8J.** (1) Die Menge $A = \mathbb{Q}^n \cap X$ ist abzählbar und dicht in X. Wir können $x_0 \in A$ annehmen. Dank polygonaler Approximation J1B ist jede Schleife $\alpha : [0,1] \to X$ in (X, x_0) homotop zu einer polygonalen Schleife $\beta = |u_0 u_1 \dots u_n|$, und diese wiederum zu $\gamma = |v_0 v_1 \dots v_n|$ mit Ecken $v_0, v_1, \dots, v_n \in A$, durch beliebig kleine Verschiebung der Eckpunkte. Es gibt nur abzählbare viele solcher Polygonzüge, also ist $\pi_1(X, x_0)$ abzählbar.

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir die stetige Abbildung $j_n : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} S_n \hookrightarrow W : s \mapsto \frac{1}{n}(s - \mathrm{i})$. Wir definieren $r_n : W \to \mathbb{S}^n$ durch $r_n(x) = nx + \mathrm{i}$ für $x \in S_n$ und $r_n(x) = \mathrm{i}$ für $x \in S_k$ mit $k \neq n$. Dank Verklebesatz E1P ist r_n stetig. Es gilt $r_n \circ j_n = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, wir haben also eine Retraktion $(j_n, r_n) : \mathbb{S}^1 \leftrightarrows W$. Wir definieren den gesuchten Gruppenhomomorphismus durch $\varphi : \pi_1(W, 0) \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : [\gamma] \mapsto (\deg(r_{n+1} \circ \gamma))_{n \in \mathbb{N}}$. Er ist surjektiv: Zu jeder Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto a_n$ definieren wir $\gamma_a : [0,1] \to W$ als unendliche Aneinanderhängung: Für $t \in [1 - 2^{1-n}, 1 - 2^{-n}]$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ setzen wir $\gamma_a(t) = j_n \circ \exp(2\pi \mathrm{i} a_{n-1} 2^n (t - 1 + 2^{1-n}))$. Dank Verklebesatz E1P ist γ_a stetig auf $[0, 1[$. Wir setzen schließlich $\gamma_a(1) = 0$ und rechnen die Stetigkeit in diesem Punkt direkt nach: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$. Für alle $t \in [1 - 2^{1-n}, 1]$ gilt $|\gamma_a(t) - \gamma_a(1)| \leq 1/n < \varepsilon$. Somit ist $\gamma_a : [0,1] \to W$ stetig, also eine Schleife in $(W, 0)$. Nach Konstruktion gilt $\varphi([\gamma_a]) = a$, also ist φ surjektiv. Die Menge $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist überabzähbar, somit ist die Gruppe $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +)$ nicht abzählbar erzeugt. Gleiches gilt demnach für die (noch „größere“) Gruppe $\pi_1(W, x)$ und ihre Abelschmachtung $\pi_1(W, x)_{\mathrm{ab}}$

Bemerkung: Die Struktur der Gruppe $\pi_1(W, 0)$ ist kompliziert. Zur Inklusion $j_n^* : S_n^* = \bigcup_{k=1}^{n} S_k \hookrightarrow W$ haben wir die Retraktion $r_n^* : W \twoheadrightarrow S_n^*$ und somit $\pi_1(j_n^*) : \pi_1(S_n^*, 0) = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \hookrightarrow \pi_1(W, 0)$. Zudem enthält $\pi_1(W, 0)$ die freie Gruppe $\langle \gamma_a : a \in (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})^{\mathbb{N}_{\geq 1}} \mid - \rangle$ von überabzählbarem Rang. (Warum?)

(3) Das unendliche Bouquet $X = \bigvee_{n=0}^{\infty}(\mathbb{S}^1, 1)$ ist homöommorph zu einem abzählbaren Graphen, etwa als Verheftung von abzählbar vielen Dreiecken in einem gemeinsamen Eckpunkt. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, *)$ berechnen wir dank L6D: Sie ist abzählbar, genauer gesagt frei mit abzählbarer Basis.

(4) Für die Cantor–Menge $C \subset [0,1]$ hat der Raum $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus (C \times \{0\})$ abzählbare Fundamentalgruppe nach (1), denn $X \subset \mathbb{R}^2$ ist offen. Für $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ und $Y = \mathbb{R}^2 \smallsetminus (D \times \{0\})$ gilt dies nicht: Wie in (2) erhalten wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : \pi_1(Y, (0,1)) \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : [\gamma] \mapsto (\deg(\gamma - 1/(n+1)))_{n \in \mathbb{N}}$.

§L8f. Der harmonische Archipel. Der *harmonische Archipel* ist folgender Raum: Wir betrachten den hawaiianischen Ohrring $W \subset (\mathbb{D}^2 - \mathrm{i})$ in der x–y–Ebene $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Zwischen je zwei Kreislinien S_n und S_{n+1} entfernen wir aus $\mathbb{D}^2 - \mathrm{i}$ eine kleine Kreisscheibe und kleben den Kegelmantel mit Höhe 1 ein. Der so entstehende Raum A enthält W.

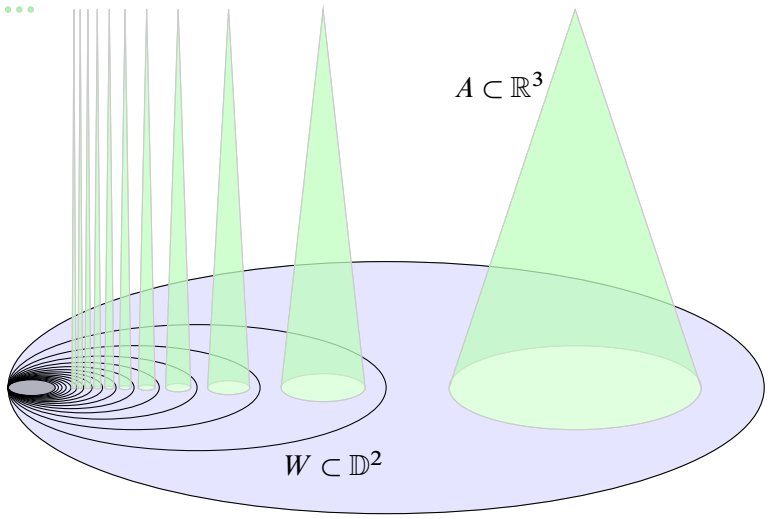


ABBILDUNG L:56. Der harmonische Archipel $A \subset \mathbb{R}^3$

Übung L8K. (1) Führen Sie die Konstruktion von $A \subset \mathbb{R}^3$ explizit aus. Ist A kompakt?

(2) Ist $j_n : S_n \hookrightarrow A$ zusammenziehbar? Ist $\pi_1(j_n) : \pi_1(S_n, 0) \to \pi_1(A, 0)$ injektiv?

(3) Wir haben $j : W \hookrightarrow A$. Ist $\pi_1(j) : \pi_1(W, 0) \to \pi_1(A, 0)$ injektiv? surjektiv?

(4) Die Gruppe $\pi_1(A, 0)$ ist überabzählbar. Selbst ihre Abelschmachung ist überabzählbar, denn wir haben einen surjektiven Homomorphismus $\psi : \pi_1(A, 0) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.

*** L8K.** (1) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ wählen wir das Zentrum $y_n = -(1/n + 1/n+1)$ und den Radius $\rho_n = 2/3(1/n - 1/n+1)$. Wir erhalten so $A = \big((\mathbb{D} - \mathrm{i}) \smallsetminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B((0, y_n), \rho_n)\big) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial B((0, y_n), \rho_n) * (0, y_n, 1)$. Die Bergspitzen $(0, y_n, 1) \in A$ konvergieren gegen $(0, 0, 1) \notin A$. Demnach ist A nicht abgeschlossen, also nicht kompakt (F1O).

(2) Ja, $\pi_1(j_n)$ ist injektiv. Daher: Nein, j_n ist nicht zusammenziehbar. Jede Homotopie $H : [0, 1]^2 \to A$ kann nur endlich viele Bergspitzen treffen, denn $[0, 1]^2$ ist kompakt (F1O) somit auch das Bild $H([0, 1]^2) \subset A$ (F1J), dieses ist somit abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$ (F1O). Die Injektivität des induzierten Gruppenhomomorphismus $\pi_1(j_n) : \pi_1(S_n, 0) \to \pi_1(A, 0)$ folgt aus $\pi_1(S_n, 0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} : [\gamma] \mapsto \deg(\gamma - (0, y_k))$ für $k \geq n$.

(3) Der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(j) : \pi_1(W, 0) \to \pi_1(A, 0)$ ist nicht injektiv: Je zwei Einbettungen $(S_m, 0) \hookrightarrow (W, 0)$ und $(S_n, 0) \hookrightarrow (W, 0)$ sind homotop in A bei festem Fußpunkt 0. (Endlich viele Berge sind kein Hindernis.) Jede Schleife in $(A, 0)$ können wir von den Bergspitzen wegschieben. Anschließend nutzen wir eine Homotopie-Retraktion $A \smallsetminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (0, y_n, 1) \simeq W$. Demnach ist $\pi_1(j) : \pi_1(W, 0) \to \pi_1(A, 0)$ surjektiv.

(4) Die Untergruppe $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} < \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist abzählbar. Die Quotientengruppe $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ ist also noch überabzählbar. Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi : \pi_1(W, 0) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} : [\gamma] \mapsto (\deg(\gamma - (0, y_{n+1})))_{n \in \mathbb{N}}$. Dank (2) gilt $\varphi([\gamma]) = \varphi([\gamma'])$ bei jeder Homotopie $\gamma \sim \gamma'$ in $(A, 0)$. Somit induziert φ den Gruppenhomomorphismus $\psi : \pi_1(A, 0) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Dies zeigt, dass die Gruppen $\pi_1(A, 0)$ und $\pi_1(A, 0)_{\mathrm{ab}}$ überabzählbar sind.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L8g. Jede Gruppe ist Fundamentalgruppe. Zur Wiederholung:

Übung L8L. Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $u \approx v$ durch $u = v$ oder $(u, v \in \mathbb{S}^1$ und $u^n = v^n)$.

(1) Beschreiben Sie den Quotientenraum $\mathbb{D}^2/_\approx = \mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ durch ein Wort w.
(2) Präsentieren Sie $\pi_1(\mathbb{D}^2/_\approx, [1]) = \langle\, S \mid R \,\rangle$ durch Erzeuger und Relationen.
(3) Welche Gruppen können Sie allgemein durch $\mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ realisieren?

✻ **L8L.** (1) Die Konstruktion entspricht $\mathbb{D}^2/_\approx = \mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ mit $w = aa\cdots a$ (mit n Faktoren). Durch $z \mapsto z^n$ wird die Kreislinie n mal um sich selbst gewickelt. Im Fall $n = 1$ ist $\mathbb{D}^2/_\approx = \mathbb{D}^2$ und $\mathbb{D}^2/\langle\, a \,\rangle = \mathbb{D}^2$. Im Fall $n = 0$ ist $\mathbb{D}^2/_\approx = \mathbb{D}^2/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$ und $\mathbb{D}^2/\langle\,\rangle = \mathbb{S}^2$ nach Vereinbarung; diese erweist sich auch hier als sinnvoll.

(2) Für $n \geq 1$ gilt $\pi_1(\mathbb{D}^2/_\approx, [1]) = \langle\, a \mid a^n \,\rangle \cong \mathbb{Z}/n$, analog zu den Flächen $F_g^\pm$. Der Fall $n = 0$ verhält sich hier etwas sonderbar: Hier gilt wäre $\langle\, a \mid a^0 \,\rangle = \langle\, a \mid - \,\rangle \cong \mathbb{Z}$, hingegen ist $\pi_1(\mathbb{S}^2, *) = \{1\}$.

(3) Wir erreichen so alle sogenannten *Ein-Relator-Gruppen*, also $G = \langle\, S \mid R \,\rangle$ mit S endlich und $R = \{w\}$, wobei alle Erzeuger im Wort $w \in \langle\, S \mid - \,\rangle$ vorkommen. Dies sind sehr spezielle aber interessante Gruppen.

Allgemein ist jede Gruppe die Fundamentalgruppe eines geeigneten Raumes:

Satz L8M. *Zu jeder Gruppe G existiert ein Simplizialkomplex (K, x_0) mit einem Isomorphismus $h : \pi_1(K, x_0) \xrightarrow{\sim} G$. Ist G frei, so genügt ein Graph (*$\dim K \leq 1$*), allgemein genügt* $\dim K \leq 2$*. Genau dann kann K endlich gewählt werden, wenn G endlich präsentierbar ist.*

BEWEIS. Es genügen folgende Konstruktionsschritte:

(1) Jede Gruppe G erlaubt eine Präsentation $h : \langle\, S \mid R \,\rangle \xrightarrow{\sim} G$ dank L3L.
(2) Die Gruppe $\langle\, S \mid - \,\rangle$ ist Fundamentalgruppe eines Graphen dank L6D.
(3) Die Gruppe $\langle\, S \mid R \,\rangle$ erhalten wir durch Anheften von 2–Zellen dank L6S. □

Übung L8N. (1) Welche Gruppen sind Fundamentalgruppen von 1–Mannigfaltigkeiten?
(2) Ist jede Gruppe die Fundamentalgruppe einer geschlossenen 2–Mannigfaltigkeit?
(3) Jede Gruppe ist Fundamentalgruppe eines 2–Komplexes. Führen Sie obige Skizze aus.

✻ **L8N.** (1) Wir kennen die Klassifikation der zusammenhängenden 1–Mannigfaltigkeiten: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $[0, 1]$ sind zusammenziehbar, also $\pi_1 = \{1\}$, und für $\mathbb{S}^1$ haben wir $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. (2) Auch bei Flächen treten noch nicht alle Gruppen auf, wie die Abelschmachungen zeigen. Zum Beispiel lässt sich $\mathbb{Z}/3$ durch keine Fläche realisieren. In Dimension 3 hingegen wird $\mathbb{Z}/p$ durch die Linsenräume $L_{p,q} = \mathbb{S}^3/\langle\, (\zeta, \zeta^q) \,\rangle$ realisiert.

Bemerkung. Jede endlich präsentierte Gruppe $G = \langle\, S \mid R \,\rangle$ ist sogar Fundamentalgruppe einer geeigneten 4–Mannigfaltigkeit: Wir konstruieren einen endlichen 2–dimensionalen Simplizialkomplex K mit $\pi_1(K, a) \cong G$ (L8M). Diesen realisieren wir in $\mathbb{R}^5$ (I2Q). Eine hinreichend kleine ε–Umgebung $N \supset |K|$ ist ein starker Deformationsretrakt, $|K| \simeq N$ rel $|K|$. Damit haben wir eine offene 5–Mannigfaltigkeit N mit $\pi_1(N, x_0) \cong G$. Der Rand $M = \delta N$ ist eine geschlossene 4–Mannigfaltigkeit, und es gilt ebenfalls $\pi_1(M, x_0) \cong G$.

Bemerkung. Die Dimension 4 ist optimal. Fundamentalgruppen von 3–Mannigfaltigkeiten erfüllen zusätzliche Eigenschaften, und nicht jede Gruppe lässt sich so realisieren.

Bemerkung. Für Gruppenpräsentationen ist das Klassifikationsproblem algorithmisch unlösbar (§L3v). Ebenso ist das Klassifikationsproblem für 4–Mannigfaltigkeiten unlösbar. Eine ausführliche, elementare Darstellung gibt John Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer–Verlag, New York 1992.

§L8h. Realisierung von Gruppenhomomorphismen.

Übung L8O. Sei $X = |K|$ ein zusammenhängender Graph mit Fußpunkt $x_0 \in \Omega(K)$. Sei (Y, y_0) ein beliebiger topologischer Raum mit Fußpunkt $y_0 \in Y$.

(1) Genau dann ist (X, x_0) zusammenziehbar, wenn $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ gilt (siehe J8F). Für Simplizialkomplexe mit dim ≥ 2 gilt dies im Allgemeinen nicht!

(2) Eine stetige Abbildung $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist genau dann zusammenziehbar, wenn der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ trivial ist. Für Simplizialkomplexe mit dim ≥ 2 gilt dies im Allgemeinen nicht!

(3) Erklären bzw. wiederholen Sie die Konstruktion der Abbildung

$$\Phi \,:\, \big[X, x_0; Y, y_0\big] \to \mathrm{Hom}\big(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0)\big) \,:\, [f] \mapsto \pi_1(f).$$

Für jeden Graphen $X = |K|$ ist diese Abbildung Φ eine Bijektion. Für Simplizialkomplexe mit dim ≥ 2 gilt dies im Allgemeinen nicht!

✻ **L8O.** (1) Dank L6D gilt $\pi_1(|K|, x_0) = \{1\}$ genau dann, wenn K ein Baum ist, also $|K| \simeq *$, siehe J8F.

(2) Dank I3J existiert ein Spannbaum $T \leq K$. Dank J8F existiert eine Homotopie $H : \mathrm{id}_{|T|} \simeq \mathrm{const}$ rel $\{x_0\}$. Wir setzen sie fort zu einer Homotopie $H : [0,1] \times |K| \to |K|$ relativ $\{x_0\}$, indem wir jede Kante $\{a, b\} \in K \smallsetminus T$ mitziehen: Ausführlich definieren wir auf $[a, b]$ die Homotopie $[0,1] \times [a, b] \to |K|$ durch

$$(t, (1-s)a + sb) \mapsto \begin{cases} H(t - 3s, a) & \text{für } 0 \leq s \leq t/3, \\ H(t - 3(1-s), b) & \text{für } 1 - t/3 \leq s \leq 1, \\ (s - t/3)/(1 - 2t/3) & \text{für } t/3 \leq s \leq 1 - t/3. \end{cases}$$

Dies verklebt sich zur stetigen Abbildung $H : [0,1] \times |K| \to |K|$. Es gilt $H_0 = \mathrm{id}_{|K|}$ und $H_1(|T|) = \{x_0\}$. Wir erhalten die Homotopie $f \circ H : f \simeq f' := f \circ H_1 : (|K|, x_0) \to (Y, y_0)$ mit $f'(|T|) = \{y_0\}$. Jede Kante $\{a, b\} \in K \smallsetminus T$ definiert den Weg $\gamma_{a,b} = |x_0 a| * |ab| * |b x_0|$. Die Klassen $[\gamma_{a,b}]$ erzeugen $\pi_1(|K|, x_0)$. Nach Konstruktion gilt $f \circ \gamma_{a,b}(s) = f'((1-s)a + sb)$. Nach Voraussetzung ist jede dieser Schleifen in (Y, y_0) zusammenziehbar, es gibt also eine Homotopie $\Gamma_{a,b} : [0,1] \times [a, b] \to Y$ von $f'|_{[a,b]}$ zu $\mathrm{const}^{y_0}_{[a,b]}$ relativ $\{a, b\}$. Diese verkleben wir zur Homotopie $\Gamma : [0,1] \times |K| \to Y$ von $\Gamma_0 = f'$ zu $\Gamma_1 = \mathrm{const}^{y_0}_{|K|}$ relativ $|T|$.

(3) Jede stetige Abbildung $f : (|K|, a) \to (|L|, b)$ induziert gemäß L2D einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(|K|, a) \to \pi_1(|L|, b)$. Dank Homotopie-Invarianz (L2G) erhalten wir Φ wie angegeben.

(3a) Surjektivität: Zu jedem Gruppenhomomorphismus $\varphi : \pi_1(|K|, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ konstruieren wir eine stetige Abbildung $f : (|K|, x_0) \to (Y, y_0)$ mit $\pi_1(f) = \varphi$. Wir wählen einen Spannbaum $T \leq K$ und setzen $|T| \to \{y_0\}$ fort zu $f : (|K|, x_0) \to (Y, y_0)$: Jede Kante $\{a, b\} \in K \smallsetminus T$ definiert $\gamma_{a,b} = |x_0 a| * |ab| * |b x_0|$. Wir realisieren $\varphi([\gamma_{a,b}]) = [\alpha_{a,b}]$ durch einen Weg $\alpha_{a,b} : ([0,1], \{0,1\}) \to (Y, y_0)$. Auf $[a, b]$ definieren wir f durch $(1-s)a + sb \mapsto \alpha_{a,b}(s)$. Nach Konstruktion ist f stetig und induziert $\pi_1(f) = \varphi$.

(3b) Injektivität: Zu $f, g : (|K|, x_0) \to (Y, y_0)$ mit $\pi_1(f) = \pi_1(g)$ konstruieren wir eine Homotopie $f \simeq g$ relativ $\{x_0\}$: Sei $T \leq K$ ein Spannbaum; wie in (2) nutzen wir die Homotopie $H : [0,1] \times |K| \to |K|$ relativ $\{x_0\}$ von $H_0 = \mathrm{id}_{|K|}$ zu $H_1(|T|) = \{x_0\}$. Wir erhalten $f \simeq f' := f \circ H$ und $g \simeq g' := g \circ H$, und es gilt $f'(|T|) = g'(|T|) = \{y_0\}$. Wegen $\pi_1(f') = \pi_1(g')$ existiert eine Homotopie $\Gamma_{a,b} : [0,1] \times [a, b] \to Y$ von $f'|_{[a,b]}$ zu $g'|_{[a,b]}$ relativ $\{a, b\}$. Diese verkleben wir zur Homotopie $\Gamma : [0,1] \times |K| \to Y$ von $\Gamma_0 = f'$ zu $\Gamma_1 = g'$ relativ $|T|$. Somit gilt $f \simeq f' \simeq g' \simeq g$ relativ $\{x_0\}$.

Bemerkung: (2) folgt aus (3) durch Spezialisierung $g = \mathrm{const}^{x_0}_X$, und (1) folgt aus (2) mit $f = \mathrm{id}_X$.

Warnende Gegenbeispiele: Für (1–3) haben wir ausgenutzt, dass K ein Graph ist, also nur aus Ecken und Kanten besteht. Für Simplizialkomplexe der Dimension ≥ 2 gelten diese einfachen Aussagen nicht mehr: Als eindrückliches Beispiel betrachten wir $|K| \cong \mathbb{S}^n$ für $n \geq 2$, etwa K der Rand des $(n+1)$–Simplex. Es gilt $\pi_1(|K|, x_0) = \{1\}$, aber dennoch $|K| \not\simeq *$, wie wir vom Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ wissen. Insbesondere induziert $\mathrm{id}_{|K|} : (|K|, x_0) \to (|K|, x_0)$ den trivialen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(\mathrm{id}_{|K|}) = 1$, ist aber dennoch nicht zusammenziehbar wegen $\deg(\mathrm{id}_{|K|}) = 1 \neq 0 = \deg(\mathrm{const})$. Auch ist Φ keine Bijektion.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L8i. Moore–Wege. Wir blicken zurück und erfreuen uns der Ergebnisse: Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ aus §L1 und die hieraus abgeleitete Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ aus §L2 sind überaus nützlich, wie zahlreiche Anwendungen belegen. Ist $X \subset \mathbb{R}^d$ offen, so haben wir die polygonale Wegekategorie $P^{\mathrm{pl}}(X)$ aus §L4: Modulo polygonaler Homotopie erhalten wir hieraus das polygonale Fundamentalgruppoid $\Pi^{\mathrm{pl}}(X) \cong \Pi(X)$. Ist $X = |K|$ ein Polyeder, so haben wir die simpliziale Wegekategorie $P(K)$ aus §L6: Modulo simplizialer Homotopie erhalten wir hieraus das simpliziale Fundamentalgruppoid $\Pi(K) \cong \Pi(|K|)$.

Anders als $P^{\mathrm{pl}}(X)$ und $P(K)$ ist $P(X)$ *kein* Gruppoid, nicht einmal eine Kategorie (L1F): Der konstante Weg ist nicht neutral, der umgekehrte Weg ist nicht invers, und die Verknüpfung ist nicht assoziativ; dies gilt erst nach Quotientenbildung modulo Homotopie. Diese Schönheitsfehler kann man durch folgende alternative Konstruktion reparieren.

Definition L8P. Ein *Moore–Weg* von a nach b in X ist ein Paar $w = (\alpha, n)$ bestehend aus einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einer stetigen Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to X$ mit $\alpha(t) = a$ für alle $t \leq 0$ und $\alpha(t) = b$ für alle $t \geq n$. Dieser Moore–Weg heißt *geschlossen*, wenn $a = b$ gilt.

Für jeden Punkt $a \in X$ ist der *konstante Moore–Weg* $w = (\mathrm{const}^a_{\mathbb{R}}, 0)$ geschlossen.

Ist $w = (\alpha, n)$ ein Moore–Weg von a nach b in M, so ist seine *Umkehrung* $\bar{w} = (\bar{\alpha}, n)$ mit $\bar{\alpha}(t) = \alpha(n-t)$ ein Moore–Weg von b nach a in X.

Ist $w = (\alpha, n)$ ein Moore–Weg von a nach b in X und $w' = (\beta, n')$ ein Moore–Weg von b nach c in X, so können wir diese verknüpfen zum Moore–Weg $w * w' := (\gamma, n+n')$ mit $\gamma(t) = \alpha(t)$ für $t \leq n$ und $\gamma(t) = \beta(t-n)$ für $t \geq n$.

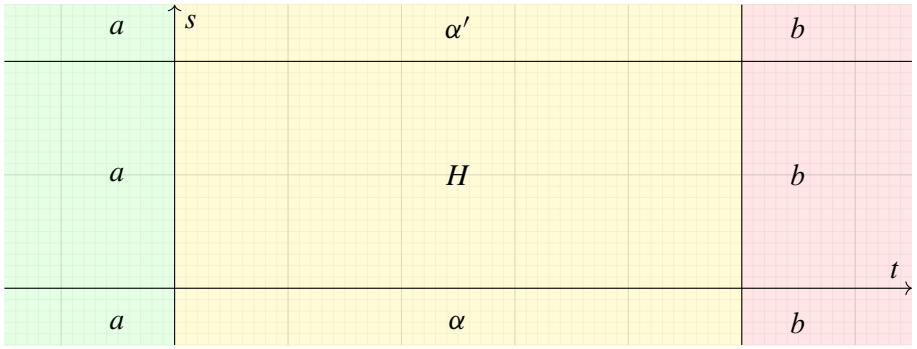


ABBILDUNG L:57. Homotopie von Moore–Wegen

Seien $w = (\alpha, n)$ und $w' = (\alpha', n')$ Moore–Wege von a nach b in X. Eine *Moore–Homotopie* $h : w \sim w'$ ist ein Tripel $h = (H, p, q)$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geq \max\{n, n'\}$, und einer stetigen Abbildung $H : \mathbb{R}^2 \to X$ sodass $H(s,t) = a$ für $t \leq 0$, und $H(s,t) = b$ für $t \geq p$ sowie $H(s,t) = \alpha(t)$ für $s \leq 0$, und $H(s,t) = \beta(t)$ für $s \geq q$.

Übung L8Q. Die Menge $M(X)$ aller Moore–Wege in X ist eine Kategorie bezüglich $*$. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf $M(X)$ und verträglich mit der Verknüpfung $*$. Für die Quotientenkategorie haben wir eine natürliche Äquivalenz $M(X)/_\sim \cong \Pi(X)$. *Hinweis:* Gehen Sie sorgfältig alle Argumente aus §L1 durch, fertigen Sie die passenden Skizzen an und übersetzen Sie sie die erforderlichen in Formeln.

§L9. Freie Produkte und Amalgame

§L9a. Freie Produkte, interne Sichtweise. Das *direkte Produkt* $G = A \times B$ zweier Gruppen $(A, \cdot, e_A)$ und $(B, \cdot, e_B)$ konstruieren wir als die Menge $G = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ mit der koordinatenweisen Multiplikation $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$. Die Gruppe $(G, \cdot, e)$ enthält $A \times \{e_B\} \cong A$ und $\{e_A\} \times B \cong B$ als kommutierende Untergruppen.

Im Folgenden wollen wir das *freie Produkt* $A * B$ so konstruieren, dass zwischen den Untergruppen A und B keinerlei Relation besteht. Was genau dies bedeuten soll, präzisieren wir auf zwei äquivalente Weisen: zunächst intern als eindeutige Darstellung durch reduzierte Wörter (L9A), sodann extern als universelle Abbildungseigenschaft (L9C).

Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen $G_i < G$. Zur Abkürzung setzen wir $G_i^* := G_i \smallsetminus \{e\}$. Wir nehmen $G_i \cap G_j = \{e\}$ für $i \neq j$ an, also $G_i^* \cap G_j^* = \emptyset$. Die von $(G_i)_{i \in I}$ erzeugte Untergruppe in G ist

$$\big\langle (G_i)_{i \in I} \big\rangle = \big\{ g_1 g_2 \cdots g_n \;\big|\; n \in \mathbb{N},\ g_1 \in G_{i_1},\ g_2 \in G_{i_2},\ \ldots,\ g_n \in G_{i_n} \big\}.$$

Wir nennen $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ ein *Wort* in $(G_i)_{i \in I}$. Es heißt *reduziert*, wenn $g_k \in G_{i_k}^*$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt sowie $i_k \neq i_{k+1}$ für alle $k = 1, \ldots, n-1$. Jedes gegebene Wort können wir reduzieren durch Zusammenfassen und Kürzen (wie in Algorithmus L-2).

Definition L9A. Eine Gruppe $(G, \cdot, e)$ heißt *freies Produkt* einer Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Untergruppen $G_i < G$, wenn sich jedes Element $g \in G$ auf genau eine Weise als reduziertes Wort in $(G_i)_{i \in I}$ schreiben lässt. Dies notieren wir $G = \ast_{i \in I} G_i$ oder $G = \coprod_{i \in I} G_i$.

Beispiel. Jede Gruppe G ist freies Produkt von G (als einzigem Faktor), und ebenso gilt $G = G * \{e\} = \{e\} * G$. Für $A, B \neq \{e\}$ besteht das freie Produkt $G = A * B$ aus

$$e,\ a_1,\ b_1,\ a_1 b_2,\ b_1 a_2,\ a_1 b_2 a_3,\ b_1 a_2 b_3,\ a_1 b_2 a_3 b_4,\ b_1 a_2 b_3 a_4,\ \ldots$$

mit $a_i \in A^*$, $b_j \in B^*$, und jedes Element von G tritt in dieser Liste genau einmal auf.

Bemerkung. Sind die Gruppen A, B endlich, so auch ihr direktes Produkt $A \times B$. Für das freie Produkt gilt dies nicht, wie die vorige Aufzählung und die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel. Für die unendliche Diedergruppe D_∞ gilt dank L3M:

$$D_\infty = \langle s, t \mid s^2,\ t^2 \rangle = \langle s \mid s^2 \rangle * \langle t \mid t^2 \rangle \cong C_2 * C_2$$

Beispiel. Für die Gruppe $\mathrm{PSL}_2 \mathbb{Z}$ gilt dank L3X:

$$\mathrm{PSL}_2 \mathbb{Z} = \langle s, t \mid s^3,\ t^2 \rangle = \langle s \mid s^3 \rangle * \langle t \mid t^2 \rangle \cong C_3 * C_2$$

Beispiel. Jede freie Gruppe $F(S)$ ist freies Produkt der Form $F(S) = \ast_{s \in S} \langle s \rangle$.

Beispiel. Aus Präsentationen $G_i = \langle S_i \mid R_i \rangle$ erhalten wir $\ast_{i \in I} G_i = \langle \bigsqcup_{i \in I} S_i \mid \bigsqcup_{i \in I} R_i \rangle$.

Bemerkung. Die universelle Abbildungseigenschaft L9C zeigt, dass $\ast_{i \in I} G_i$ nur von den Gruppen $(G_i)_{i \in I}$ abhängt und nicht von den gewählten Präsentationen $(S_i, R_i)_{i \in I}$.

Da sich jede Gruppe präsentieren lässt (L3L), erhalten wir einen einfachen Existenzbeweis für beliebige freie Produkte; er setzt die Konstruktion freier Gruppen voraus (L3G).

Alternativ können wir freie Produkte konstruieren durch Wörter modulo Reduktionen; dies verallgemeinert Satz L3G und soll im Folgenden ausgeführt werden.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L9b. Konstruktion freier Produkte, externe Sichtweise. Wie für freie Gruppen (L3G) haben wir für freie Produkte folgende grundlegende Existenzaussage:

Satz L9B. *Zu jeder Familie $(G_i)_{i\in I}$ von Gruppen existiert ein freies Produkt $G = \ast_{i\in I} G_i$.*

KONSTRUKTION. Wir können $G_i \cap G_j = \{e\}$ annehmen und setzen $G_i^* := G_i \smallsetminus \{e\}$.

Sei W die Menge aller Wörter $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit $g_k \in G_{i_k}$ für alle $k = 1, 2, \dots, n$. Für $n = 1$ identifizieren wir $g \in G_i$ mit dem einelementigen Wort $(g) \in W$. Wir definieren die Verkettung $\circ : W \times W \to W$ durch Aneinanderhängen von Wörtern gemäß $(g_1, \dots, g_m) \circ (g'_1, \dots, g'_n) := (g_1, \dots, g_m, g'_1, \dots, g'_n)$. Damit ist $(W, \circ)$ das *freie Monoid* über dem Alphabet $\{e\} \sqcup \bigsqcup_{i\in I} G_i^*$.

Auf W erzeugen wir die Äquivalenzrelation $\equiv$ durch die Reduktionen

$$\begin{aligned} u \circ e \circ v &\equiv u \circ v && \text{für } u, v \in W, \\ u \circ g \circ g' \circ v &\equiv u \circ gg' \circ v && \text{für } g, g' \in G_i \end{aligned} \tag{L.3}$$

Dies ist mit der Verkettung verträglich: Aus $u \equiv u'$ und $v \equiv v'$ folgt $u \circ v \equiv u' \circ v'$. Auf der Quotientenmenge $G := W/_{\equiv}$ erhalten wir $\cdot : G \times G \to G : [u] \cdot [v] := [u \circ v]$. Damit ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe: Neutral ist $1 = [e]$. Das Inverse zu $[g_1, \dots, g_n]$ ist $[g_n^{-1}, \dots, g_1^{-1}]$.

Nach Konstruktion wird die Gruppe G erzeugt von $\bigsqcup_{i\in I} G_i$. Wir zeigen schließlich, dass sich jedes Element von G eindeutig als reduziertes Wort in $(G_i)_{i\in I}$ schreiben lässt.

Sei $R \subset W$ die Menge der reduzierten Wörter $(g_1, \dots, g_n)$ mit $g_k \in G_{i_k}^*$ für $k = 1, \dots, n$ und $i_k \neq i_{k+1}$ für $k = 1, \dots, n-1$. Sei $R_i \subset R$ die Teilmenge mit $i_n \neq i$. Wir definieren

$$\cdot : R_i \times G_i \xrightarrow{\sim} R, \quad (g_1, \dots, g_n) \cdot g := \begin{cases} (g_1, \dots, g_n) & \text{für } g = 1, \\ (g_1, \dots, g_n, g) & \text{für } g \neq 1. \end{cases} \tag{L.4}$$

Dies ist eine Bijektion. Die Gruppe G_i operiert auf $R_i \times G_i$ durch $(r, g) \cdot g' = (r, gg')$. Mit der Bijektion (L.4) übertragen wir dies zur Operation $\cdot : R \times G_i \to R$. Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} &\cdot : R \times G_i \to R, \\ &(g_1, \dots, g_{n-1}, g_n) \cdot g := \begin{cases} (g_1, \dots, g_{n-1}, g_n) & \text{für } g = 1, \\ (g_1, \dots, g_{n-1}, g_n, g) & \text{für } i_n \neq i,\ g \neq 1 \\ (g_1, \dots, g_{n-1}; g_n g) & \text{für } i_n = i,\ g_n g \neq 1, \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{für } i_n = i,\ g_n g = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{L.5}$$

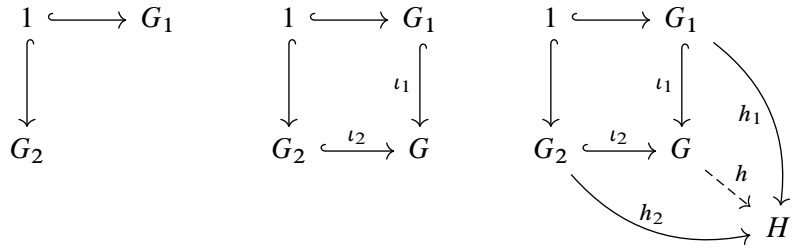
Wir setzen diese Operation fort auf Wörter in $(G_i)_{i\in I}$ von beliebiger Länge:

$$\cdot : R \times W \to R, \quad r \cdot (g_1, g_2, \dots, g_{\ell-1}, g_\ell) := ((\cdots((r \cdot g_1) \cdot g_2) \dots) \cdots g_{\ell-1}) \cdot g_\ell.$$

Für reduzierte Wörter $r = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in R \subset W$ folgt $e \cdot r = r$ per Induktion über n. Dank der Gruppenoperationen $\cdot : R \times G_i \to R$ ist das Produkt $r \cdot w$ invariant unter (L.3). Für $e \cdot (g_1, \dots, g_\ell) = (a_1, \dots, a_n)$ folgt $g_1 \cdots g_\ell = a_1 \cdots a_n$ per Induktion über ℓ, und die gemachten Reduktionen sind von obiger Art (L.3). Dies beweist, dass jede Äquivalenzklasse $[w] \in G$ genau ein reduziertes Wort r in $(G_i)_{i\in I}$ über A enthält, nämlich $r = e \cdot w$. □

Bemerkung. Die Konstruktion freier Produkte ähnelt der freier Gruppen: Die freie Reduktion haben wir dort als Algorithmus L-2 formuliert. Im Beweis von L9B stellen wir dies algebraisch dar als Operation der Gruppe G auf der Menge R der reduzierten Wörter.

§L9c. Universelle Abbildungseigenschaft freier Produkte. Für freie Produkte haben wir die innere Charakterisierung durch reduzierte Wörter, daneben auch eine äußere durch ihre universelle Abbildungseigenschaft in der Kategorie `Grp` der Gruppen:



Satz L9C (universelle Abbildungseigenschaft)**.** *Eine Gruppe G ist genau dann freies Produkt der Untergruppen $(G_i)_{i\in I}$, wenn gilt: Zu jeder Familie $(h_i : G_i \to H)_{i\in I}$ von Gruppenhomomorphismen existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $h : G \to H$ mit $h|_{G_i} = h_i$.*

BEWEIS. „⇒“: Wegen $G = \langle\, (G_i)_{i\in I} \,\rangle$ existiert höchstens ein Homomorphismus $h : G \to H$ mit $h|_{G_i} = h_i$, nämlich $h([g_1 g_2 \cdots g_n]) = h_{i_1}(g_1) h_{i_2}(g_2) \cdots h_{i_n}(g_n)$. Umgekehrt ist diese Abbildung auf Wörtern invariant unter Reduktion, also wohldefiniert auf Äquivalenzklassen, und somit der gesuchte Gruppenhomomorphismus $h : G \to H$ mit $h|_{G_i} = h_i$.

„⇐“: Angenommen G hat die genannte Abbildungseigenschaft bezüglich $(G_i)_{i\in I}$. Sei $H = \ast_{i\in I} G_i$ das in L9B konstruierte freie Produkt. Dann gibt es einen Homomorphismus $h : G \to H$ mit $h|_{G_i} = \mathrm{id}_{G_i}$. Da umgekehrt auch unser Modell H des freien Produkts diese Abbildungseigenschaft bezüglich $(G_i)_{i\in I}$ hat, existiert ein Homomorphismus $k : H \to G$ mit $k|_{G_i} = \mathrm{id}_{G_i}$. Die Komposition $k \circ h : G \to G$ und $\mathrm{id}_G : G \to G$ stimmen auf $(G_i)_{i\in I}$ überein, aufgrund der Eindeutigkeit gilt demnach $k \circ h = \mathrm{id}_G$. Ebenso gilt $h \circ k = \mathrm{id}_H$. Wegen $G \cong H$ ist dann mit H auch G freies Produkt von $(G_i)_{i\in I}$. □

Beispiel. Dank L3X gilt $\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{Z} = \langle s, t \mid s^3,\ t^2 \rangle \cong C_3 * C_2$. Gemäß L9C ist ein Homomorphismus $h : \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{Z} \to H$ gegeben durch zwei Homomorphismen $h_1 : C_3 \to H : s \mapsto x$ und $h_2 : C_2 \to H : t \mapsto y$, also durch zwei Elemente $x, y \in H$ mit $x^3 = y^2 = 1$.

Bemerkung. Kategoriell betrachtet haben freies Produkt und direktes Produkt folgende, zueinander duale Eigenschaften. Das freie Produkt $G = \coprod_{i\in I} G_i$ ist mit den kanonischen Inklusionen $\iota_i : G_i \hookrightarrow G$ ausgestattet. Gemäß L9C haben wir folgende natürliche Bijektion:

$$\mathrm{Hom}\Big(\coprod_{i\in I} G_i, H\Big) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(G_i, H) \ :\ h \mapsto (h \circ \iota_i)_{i\in I}$$

Das direkte Produkt $G = \prod_{i\in I} G_i$ löst das duale Problem: Es ist mit den kanonischen Projektionen $p_i : G \twoheadrightarrow G_i$ ausgestattet und erfüllt folgende natürliche Bijektion:

$$\mathrm{Hom}\Big(H, \prod_{i\in I} G_i\Big) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(H, G_i) \ :\ h \mapsto (p_i \circ h)_{i\in I}$$

Diese Eigenschaften legen Produkt bzw. Koprodukt eindeutig fest (wie immer bis auf einen eindeutigen Isomorphismus). Daneben gibt es Homomorphismen $q_i : \coprod_{i\in I} G_i \twoheadrightarrow G_i$ mit $q_i \iota_i = \mathrm{id}_{G_i}$ und $q_j \iota_i$ trivial für $j \neq i$, sowie $k_i : G_i \hookrightarrow \prod_{i\in I} G_i$ mit $p_i k_i = \mathrm{id}_{G_i}$ und $p_j k_i$ trivial für $j \neq i$. Ebenso erhalten wir $\alpha : \coprod_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} G_i$ mit $p_i \alpha \iota_i = \mathrm{id}_{G_i}$ und $p_j \alpha j_i$ trivial für $j \neq i$. Im Allgemeinen ist α weder injektiv noch surjektiv.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L9d. Pushout. Zu jeder Familie $(G_i)_{i\in I}$ von Gruppen existiert ein freies Produkt $G = \ast_{i\in I} G_i$ (L9B). Ich möchte hierfür eine etwas allgemeinere Konstruktion angeben, die ebenso noch eine Normalform für alle Gruppenelemente $g \in G$ zulässt.

Beispiel. Die Gruppe $\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z} = \langle s,t \mid s^3, t^2\rangle \cong C_3 * C_2$ ist ein freies Produkt. Die Gruppe $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z} = \langle s,t \mid s^6,\ t^4,\ s^3 = t^2\rangle$ hingegen entsteht aus $C_6 * C_4$, indem man die beiden Untergruppen $\langle s^3\rangle = \langle t^2\rangle \cong C_2$ amalgamiert. Diese Situation untersuchen wir genauer.

Sei $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppenhomomorphismen. Hierzu betrachten wir Gruppenhomomorphismen $q_i : G_i \hookrightarrow \ast_{i\in I} G_i \twoheadrightarrow G$ in folgenden Quotienten:

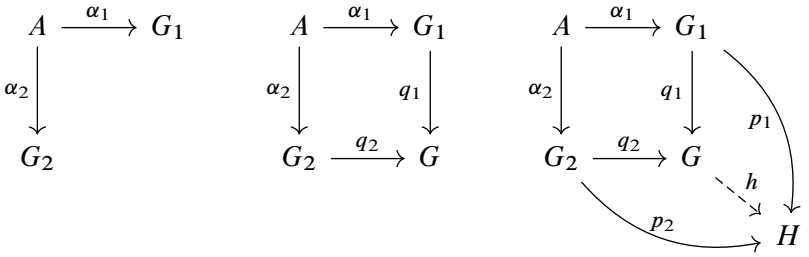
$$G = \ast_{i\in I}^{A,\alpha_i} G_i := (\ast_{i\in I} G_i)/N,\ N = \left\langle g^{-1}\alpha_i(a)^{-1}\alpha_j(a)g : i,j \in I,\ a \in A,\ g \in \ast G_i \right\rangle$$

Der Normalteiler N erzwingt die Gleichungen $q_i\alpha_i(a) = q_j\alpha_j(a)$ für alle $i,j \in I$ und $a \in A$. In der Quotientengruppe G werden so die Bilder von $\alpha_i : A \to G_i$ identifiziert.

Beispiel. Im Spezialfall $A = \{1\}$ ist $G = \ast_{i\in I} G_i$ das freie Produkt.

Beispiel. Aus Präsentationen $G_i = \langle S_i \mid R_i\rangle$ für $i \in I$ und $A = \langle S_0 \mid R_0\rangle$ erhalten wir $G = \langle S \mid R\rangle$ mit $S = \bigsqcup_{i\in I} S_i$ und $R = \bigsqcup_{i\in I} R_i \sqcup \{\tilde\alpha_i(s) = \tilde\alpha_j(s) \mid i,j \in I,\ s \in S_0\}$, wobei wir $\alpha_i : A \to G_i$ zu $\tilde\alpha_i : F(S_0) \to F(S_i)$ heben, also $\pi_{(S_i,R_i)} \circ \tilde\alpha_i = \alpha_i \circ \pi_{(S_0,R_0)}$.

Zu den vorgegebenen Daten $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i)_{i\in I}$ nennen wir die Gruppe G den *Pushout*, genauer nennen wir den vollen Datensatz $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i \xrightarrow{q_i} G)_{i\in I}$ das *Pushout-Diagramm*.



Diese Diagramme bilden eine Kategorie: Ist $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i \xrightarrow{p_i} H)_{i\in I}$ ein weiteres kommutatives Diagramm, also $p_i \circ \alpha_i = p_j \circ \alpha_j$ für alle $i,j \in I$, so ist ein Morphismus gegeben durch einen Gruppenhomomorphismus $h : G \to H$ mit $h \circ q_i = p_i$ für alle $i \in I$.

Das Pushout-Diagramm ist in folgendem Sinne *universell*, genauer *initial*:

Satz L9D (universelle Abbildungseigenschaft)**.** *Genau dann ist $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i \xrightarrow{q_i} G)_{i\in I}$ mit $q_i \circ \alpha_i = q_j \circ \alpha_j$ für alle $i,j \in I$ ein Pushout-Diagramm, wenn gilt:*

Für jedes Diagramm $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i \xrightarrow{p_i} H)_{i\in I}$ mit $p_i \circ \alpha_i = p_j \circ \alpha_j$ für alle $i,j \in I$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $h : G \to H$ mit $h \circ q_i = p_i$ für alle $i \in I$.

BEWEIS. „⇒“: Dank L9C existiert der Gruppenhomomorphismus $k : \ast_{i\in I} G_i \to H$ mit $k|_{G_i} = p_i$ für alle $i \in I$. Wegen $p_i \circ \alpha_i = p_j \circ \alpha_j$ liegt der Normalteiler N im Kern von k. Auf dem Quotienten $G = \ast_{i\in I} G_i/N$ induziert dies $h : G \to H$ mit $h \circ q_i = p_i$.

„⇐“: Zwischen zwei initialen Objekten existiert genau ein Isomorphismus (H3C). □

Beispiel. Für $A = \{1\}$ ist die Bedingung $p_i \circ \alpha_i = p_j \circ \alpha_j$ leer. Somit beinhaltet Satz L9D die universelle Abbildungseigenschaft freier Produkte (L9C) und freier Gruppen (L3H).

§L9e. Amalgame. Wie zuvor betrachten wir eine Familie $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i)_{i\in I}$ von Gruppenhomomorphismen. Wir untersuchen nun ausführlicher den wichtigen Spezialfall, dass alle α_i injektiv sind. Wir können $A < G_i$ sowie $G_i \cap G_j = A$ für alle $i \neq j$ annehmen.

Angenommen $(G,\cdot,e)$ ist eine Gruppe mit Untergruppen $G_i < G$, sodass $G_i \cap G_j = A$ für alle $i \neq j$ gilt. Die von $(G_i)_{i\in I}$ erzeugte Untergruppe in G ist dann

$$\big\langle (G_i)_{i\in I} \big\rangle = \big\{ g_1 g_2 \cdots g_n \;\big|\; n \in \mathbb{N},\ g_1 \in G_{i_1},\ g_2 \in G_{i_2},\ \ldots,\ g_n \in G_{i_n} \big\}.$$

Wir nennen $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ ein *Wort* in $(G_i)_{i\in I}$. Sei $T_i \subset G_i$ ein Repräsentantensystem für G_i/A, wir haben also die Bijektion $T_i \times A \xrightarrow{\sim} G_i : (t,a) \mapsto ta$. Wir können $e \in T_i$ annehmen und setzen $T_i^* := T_i \smallsetminus \{e\}$. Wir nennen $(t_1, t_2, \ldots, t_n; a)$ ein *reduziertes Wort* in $(G_i)_{i\in I}$ über A, wenn $a \in A$ und $t_k \in T_{i_k}^*$ für alle k gilt sowie $i_k \neq i_{k+1}$ für alle $k = 1, \ldots, n-1$.

Wir können jedes gegebene Wort reduzieren, es ist aber zunächst keinesfalls offensichtlich, unter welchen Voraussetzungen die Ergebnisse möglicher Reduktionen eindeutig sind.

Satz L9E (Amalgam)**.** *Sei $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppenhomomorphismen.*

Existenz: *Zu $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i)_{i\in I}$ existiert ein Pushout-Diagramm $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i \xrightarrow{q_i} G)_{i\in I}$.*

Eindeutigkeit: *Der Pushout ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.*

Normalform: *Wir setzen zusätzlich voraus, dass alle α_i injektiv sind; wir können also kurzerhand $A < G_i$ annehmen sowie $G_i \cap G_j = A$ für alle $i \neq j$. Dann sind auch alle q_i injektiv; wir können demnach $G_i < G$ annehmen. In dieser Situation lässt sich jedes Element $g \in G$ auf genau eine Weise als reduziertes Wort in $(G_i)_{i\in I}$ über A schreiben.*

Bemerkung. Für *freie Gruppen* (L3G) und *freie Produkte* (L9B) und schließlich *Amalgame* (L9E) erhalten wir die Existenz durch eine geeignete Konstruktion und die Eindeutigkeit durch die universelle Abbildungseigenschaft. Für konkrete Rechnungen nutzen wir zudem die Normalform durch reduzierte Wörter. Das sind die Kernaussagen dieser drei Sätze.

Sie gelten wörtlich genauso für Monoide $(G_i,\cdot)$: Für Satz L9E benötigen wir eine *Transversale* T_i mit $e \in T_i \subset G_i$ und $T_i \times A \xrightarrow{\sim} G_i : (t,a) \mapsto ta$ bijektiv. Für Gruppen ist eine solche Wahl von T_i immer möglich, für Monoide ist es eine Einschränkung: Zum Untermonoid $A = 3\mathbb{N}$ in $(\mathbb{N},+)$ ist $T = \{0,1,2\}$ eine Transversale, denn $+ : T \times A \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$. Zum Untermonoid $A = \mathbb{N}$ in $(\mathbb{Z},+)$ hingegen existiert keine Transversale $T \subset \mathbb{Z}$.

Beispiel. Im Falle $A = \{e\}$ gilt $T_i = G_i$, und wir erhalten das *freie Produkt*. In diesem Falle ist die Darstellung als reduziertes Wort eindeutig; wir nutzen dies als Definition L9A.

Beispiel. Speziell für $A = \{e\}$ und $T_i = G_i = \langle s_i \mid - \rangle$ erhalten wir die freie Gruppe über $S = \{ s_i \mid i \in I \}$. Algorithmus L-2 reduziert jedes Wort in seine eindeutige Normalform.

Beispiel. Die unendliche Diedergruppe $D_\infty = \langle s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2 \rangle \cong C_2 * C_2$ ist ein freies Produkt. Hier ist $T_1^* = \{s_0\}$ und $T_2^* = \{s_1\}$. Die Wortreduktion auf $s_0 s_1 s_0 s_1 \cdots$ oder $s_1 s_0 s_1 s_0 \cdots$ ist eindeutig; dies haben wir zum Beweis von Satz L3M gezeigt und dankend ausgenutzt.

Beispiel. Die Gruppe $\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z} = \langle s,t \mid s^3,\ t^2 \rangle \cong C_3 * C_2$ ist ein freies Produkt; $A = \{1\}$, $T_1^* = \{s^{-1}, s^{-2}\}$, $T_2^* = \{t\}$. Die Darstellung als reduziertes Wort ist eindeutig (L3X).

Beispiel. Wir haben $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z} = \langle s,t \mid s^3 = t^2,\ t^4 = 1 \rangle \cong C_6 *_A C_4$ mit $A = \langle s^3 \rangle = \langle t^2 \rangle$. Hier können wir $T_1^* = \{s^{-1}, s^{-2}\}$ und $T_2^* = \{t\}$ wählen. Die Wortreduktion ist eindeutig; dies haben wir zum Beweis von Satz L3X gezeigt und dankend ausgenutzt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

KONSTRUKTION. Für die Gruppen $(G_i,\cdot,e_i)$ nehmen wir zunächst $G_i \cap G_j = \emptyset$ an. Sei W die Menge aller Wörter $(g_1,\dots,g_n)$ der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit $g_k \in G_{i_k}$ für $k = 1,\dots,n$. Für $n = 0$ bezeichnen wir das leere Wort mit $e = ()$. Für $n = 1$ identifizieren wir $g \in G_i$ mit dem einelementigen Wort $(g) \in W$. Wir definieren die Verkettung $\circ : W \times W \to W$ durch Aneinanderhängen von Wörtern gemäß $(g_1,\dots,g_m)\circ(g'_1,\dots,g'_n) := (g_1,\dots,g_m,g'_1,\dots,g'_n)$.

Auf W erzeugen wir die Äquivalenzrelation $\equiv$ durch die elementaren Umformungen

$$\begin{aligned} u\circ e_i\circ v &\equiv u\circ v && \text{für } u,v\in W,\\ u\circ g\circ g'\circ v &\equiv u\circ gg'\circ v && \text{für } g,g'\in G_i\\ u\circ g\alpha_i(a)\circ g'\circ v &\equiv u\circ g\circ\alpha_j(a)g'\circ v && \text{für } g\in G_i,\ g'\in G_j,\ a\in A. \end{aligned} \tag{L.6}$$

Dies ist mit der Verkettung verträglich: Aus $u \equiv u'$ und $v \equiv v'$ folgt $u\circ v \equiv u'\circ v'$. Auf der Quotientenmenge $G := W/_\equiv$ erhalten wir $\cdot : G\times G \to G : [u]\cdot[v] := [u\circ v]$. Damit ist $(G,\cdot)$ eine Gruppe: Neutral ist $1 = [e]$. Das Inverse zu $[g_1,\dots,g_n]$ ist $[g_n^{-1},\dots,g_1^{-1}]$.

Mit den kanonischen Homomorphismen $q_i : G_i \to G : g \mapsto [g]$ ist $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i \xrightarrow{q_i} G)_{i\in I}$ ein Pushout–Diagramm (L9D): Zu $(A \xrightarrow{\alpha_i} G_i \xrightarrow{p_i} H)_{i\in I}$ mit $p_i\circ\alpha_i = p_j\circ\alpha_j$ definieren wir $\tilde h : W \to H$ durch $(g_1,\dots,g_n)\mapsto p_{i_1}(g_1)\cdots p_{i_n}(g_n)$. Dieses Produkt ist invariant unter den obigen Umformungen (L.6). Auf dem Quotienten $G = W/_\equiv$ induziert dies den Gruppenhomomorphismus $h : G \to H : [w] = \tilde h(w)$. Insbesondere gilt $h\circ q_i = p_i$. □

NORMALFORM. Wir setzen nun $A < G_i$ und $G_i \cap G_j = A$ voraus. Sei $T_i \subset G_i$ ein Repräsentantensystem für G_i/A, also $T_i \times A \xrightarrow{\sim} G_i : (t,a)\mapsto ta$ bijektiv. Sei $R \subset W$ die Teilmenge aller reduzierten Wörter $(t_1,t_2,\dots,t_n;a)$ mit $a \in A$ und $t_k \in T_{i_k}^*$ für alle k sowie $i_k \neq i_{k+1}$ für $k = 1,\dots,n-1$. Sei $R_i \subset R$ die Teilmenge mit $i_n \neq i$ und $a = 1$. Jedes Element $g \in G_i$ faktorisiert eindeutig gemäß $g = ta$ mit $t \in T_i$ und $a \in A$. Wir definieren

$$\cdot : R_i \times G_i \xrightarrow{\sim} R, \quad (t_1,\dots,t_n;1)\cdot(ta) := \begin{cases}(t_1,\dots,t_n;a) & \text{für } t=1,\\ (t_1,\dots,t_n,t;a) & \text{für } t\neq 1.\end{cases} \tag{L.7}$$

Dies ist eine Bijektion. Die Gruppe G_i operiert auf $R_i \times G_i$ durch $(r,g)\cdot g' = (r,gg')$. Dank der Bijektion (L.7) erhalten wir eine Operation $\cdot : R \times G_i \to R$. Ausgeschrieben heißt das:

$$\begin{aligned} &\cdot : R\times G_i \to R,\\ &(t_1,\dots,t_{n-1},t_n;a)\cdot g' := \begin{cases}(t_1,\dots,t_{n-1},t_n;ag') & \text{für } g'\in A, \text{ somit } ag'\in A,\\ (t_1,\dots,t_{n-1},t_n,t;a') & \text{für } i_n\neq i,\ \ ag' = ta'\notin A,\\ (t_1,\dots,t_{n-1};a') & \text{für } i_n = i,\ \ t_nag' = a'\in A,\\ (t_1,\dots,t_{n-1},t;a') & \text{für } i_n = i,\ \ t_nag' = ta'\notin A.\end{cases} \end{aligned} \tag{L.8}$$

Wir setzen diese Operation fort auf Wörter in $(G_i)_{i\in I}$ von beliebiger Länge:

$$\cdot : R\times W \to R, \quad r\cdot(g_1,g_2,\dots,g_{\ell-1},g_\ell) := ((\cdots((r\cdot g_1)\cdot g_2)\dots)\cdots g_{\ell-1})\cdot g_\ell.$$

Für reduzierte Wörter $r = (t_1,t_2,\dots,t_n;a) \in R \subset W$ folgt $e\cdot r = r$ per Induktion über n.

Die Gruppenoperationen $\cdot : R\times G_i \to R$ stimmen auf $A < G_i$ überein, daher ist das Produkt $r\cdot w$ invariant obigen Umformungen (L.6) des Wortes $w = (g_1,\dots,g_\ell) \in W$.

Für $e\cdot(g_1,\dots,g_\ell) = (t_1,\dots,t_n;a)$ folgt $g_1\cdots g_\ell = t_1\cdots t_na$ per Induktion über ℓ. Alle Umformungen sind von obiger Art (L.6). Dies beweist, dass jede Äquivalenzklasse $[w] \in G$ genau ein reduziertes Wort r in $(G_i)_{i\in I}$ über A enthält, nämlich $r = e\cdot w$. □

Erläuterung. Die Konstruktion durch Quotientenbildung ist routinierte Technik, der Nachweis der Normalform glänzt durch raffinierte Eleganz. Der hier verwendete Trick geht zurück auf Bartel VAN DER WAERDEN, *Free products of groups*, Amer. J. Math. 70 (1948) 527–528.

Zur besseren Einordnung kommentiere ich die Vorgehensweise. Die Bijektion (L.7) definiert die Operation $R \times G_i \to R$ besonders geschickt, denn wir sehen ihre Eigenschaften sofort ohne Rechnung. Alternativ können wir sie direkt ausschreiben wie in (L.8), allerdings benötigen wir dann vier statt zwei Fallunterscheidungen. Für den weiteren Beweis benötigen wir die Eigenschaft der Gruppenoperation, also $r \cdot e_i = r$ und $(r \cdot g) \cdot g' = r \cdot (gg')$ für alle $r \in R$ und $g, g' \in G_i$. Dies direkt mit (L.8) nachzurechnen ist möglich aber mühsam, denn es erfordert die Unterscheidung von etwa 16 Fällen. (Versuchen Sie's als lehrreiche Übung.) Van der Waerdens Trick trivialisiert dieses Problem.

Statt im Quotienten $G = W/_{\equiv}$ mit Äquivalenzklassen zu arbeiten, können wir direkt mit reduzierten Wörtern $R \subset W$ als eindeutigen Repräsentanten rechnen: Formel (L.8) erklärt ihre Multiplikation $\cdot : R \times R \to R$. Auch hier ist der Nachweis der Gruppeneigenschaft direkt möglich aber mühsam. Der obige Beweis umgeht dank der raffinierten Abkürzung alle Schwierigkeiten. Beide Sichtweisen ergänzen sich: Für den Nachweis algebraischer Eigenschaften ist die implizite Formel (L.7) vorteilhaft. Die explizite Formel (L.8) hingegen nützt für konkrete Rechnungen bzw. Implementierungen.

Als Analogie erinnere ich an prominente Beispiele: Die Konstruktion des Rings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ durch Äquivalenzklassen ist geschickt, denn sie erleichtert den Nachweis der Ringstruktur. Die eindeutigen Repräsentanten $0, 1, \dots, n-1$ sind für konkrete Rechnungen / Implementierung nützlich, aber für Beweise unhandlich. Dank euklidischer Division sind beide Sichtweisen äquivalent. Sie ergänzen sich!

Die Konstruktion des Bruchkörpers $\mathbb{Q} = \{\, a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \,\}$ durch Äquivalenzklassen ist geschickt, denn sie erleichtert den Nachweis der Körperstruktur. Gekürzte Brüche als eindeutige Repräsentaten (dank euklidischem Algorithmus) sind für die konkrete Rechnungen / Implementierung nützlich, für manche Beweise aber unhandlich. Beide Sichtweisen sind äquivalent und ergänzen sich.

Zur Konstruktion freier Gruppen (L3G) und freier Produkte (L9B) und Amalgame (L9B) haben wir Wörter modulo Äquivalenz genutzt. Die Normalform reduzierter Wörter nutzen wir für konkrete Rechnungen. In allen Beispielen gilt: Quotienten und Normalformen ergänzen sich. Wir nutzen daher die Vorzüge beider Sichtweisen, jeweils wo sie am vorteilhaftesten sind.

Amalgame werden in der Topologie für Fundamentalgruppen genutzt. Zudem können wir damit die Gruppe $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ verstehen, wie in nachfolgender Übung, und das allein ist alle Mühen wert.

Übung L9F. Die Normalform für $G = \bigast_{i\in I}^{A} G_i$ nützt in vielen konkreten Rechnungen:

Ein reduziertes Wort $(t_1, \dots, t_n; a)$ in $(G_i)_{i\in I}$ über A heißt *zyklisch reduziert*, falls $n \leq 1$ oder $i_1 \neq i_n$ gilt. Ein Element $g \in G$ heißt *zyklisch reduziert*, wenn es sich so darstellen lässt.

(1) Sei $F = F(S) = \bigast_{s\in S} \langle\, s \mid - \,\rangle$ frei. Bestimmen Sie das Zentrum $Z(F)$ und alle Elemente endlicher Ordnung. Jedes $g \in F$ ist konjugiert zu einem Element $s_1^{e_1} \cdots s_\ell^{e_\ell}$ minimaler Länge ℓ (zyklisch reduziert, eindeutig bis auf zyklische Umordnung).

(2) Im Amalgam $G = \bigast_{i\in I}^{A} G_i$ ist jedes Gruppenelement $g \in G$ konjugiert entweder zu einem zyklisch reduzierten Element oder zu einem $g_i \in G_i$.

(3) Jedes zyklisch reduzierte Element $g \in G$ hat unendliche Ordnung.
Jedes Element $g \in G$ endlicher Ordnung ist konjugiert zu einem $g_i \in G_i$.
Sind alle Faktoren G_i torsionsfrei, so auch ihr Amalgam G.

(4) In der unendlichen Diedergruppe $D_\infty = \langle\, s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2 \,\rangle$ ist jedes Element endlicher Ordnung konjugiert entweder zu s_0 oder zu s_1. Was bedeutet das geometrisch? Somit sind $\langle\, s_0 \,\rangle$ und $\langle\, s_1 \,\rangle$ die 2–Sylow–Gruppen, aber nicht zueinander konjugiert.

(5) Hat eine Matrix $A \in \mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z} = \langle\, S, T \mid S^3 = T^2,\ T^4 = 1 \,\rangle$ endliche Ordnung n, so gilt $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Genauer gilt sogar: A ist konjugiert zu ± 1, $\pm S$, $\pm S^2$, $\pm T$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§L9f. Das Ping-Pong-Lemma. Das nachfolgend entwickelte Ping-Pong-Lemma L9G ist ein bequemes und effizientes Kriterium für Probleme folgenden Typs:

Beispiel (Sanov 1947)**.** In $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ betrachten wir $s_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $s_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestehen zwischen s_1 und s_2 Relationen, oder ist die von ihnen erzeugte Gruppe $G = \langle s_1, s_2 \rangle$ frei?

Allgemeiner betrachten wir in $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ die Matrizen $s_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \sigma_1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $s_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Für welche Parameter $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}$ ist $G = \langle s_1, s_2 \rangle$ frei? Der Spezialfall fragt nach $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$.

Das Ping-Pong-Lemma L9G charakterisiert die freie Gruppe $G = \langle s_i : i \in I \mid - \rangle$. Wir beginnen mit dem typischen Beispiel: Sei X die Menge aller reduzierten Wörter über $\{ s_i \mid i \in I \}$ und $X_i \subset X$ die Teilmenge der Wörter, die auf $s_i^{\pm}$ enden. Diese Mengen sind nicht-leer und disjunkt. Für die Operation $X \times G \to X : (x, g) \mapsto xg$ gilt dann:

(P1) Für alle $j \neq i$ gilt $X_j \not\subset X_i$, aber für alle $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ gilt $X_j s_i^k \subset X_i$.

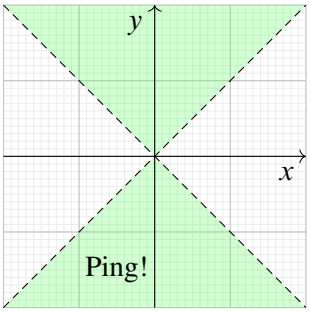
Das Ping-Pong-Lemma garantiert hierzu die Umkehrung (L9G): Operiert eine Gruppe $G = \langle s_i : i \in I \rangle$ mit $|I| \geq 2$ auf einer Menge X und gilt (P1) für geeignete Teilmengen $X_i \subset X$, so ist G frei über $\{ s_i \mid i \in I \}$, kurz $G = \langle s_i : i \in I \mid - \rangle$. Dieses einfache Kriterium ist sehr wirkungsvoll! Es genügt, eine passende Ping-Pong-Operation $X \times G \to X$ zu finden, etwa dank unserer Kenntnis der Gruppe G und ihrer (geometrischen) Operationen:

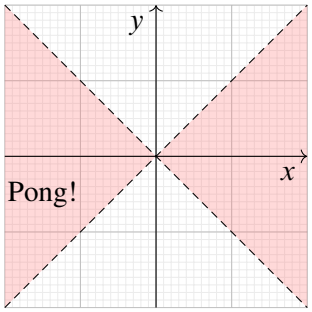
Beispiel (Fortsetzung)**.** Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $s_1^k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \sigma_1 k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $s_2^k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_2 k & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wie üblich operiert die Gruppe $G = \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ von rechts auf der Ebene $X = \mathbb{C}^2$ vermöge

$$X \times G \to X : (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy).$$

Sei zunächst $|\sigma_1|, |\sigma_2| \geq 2$. Lässt sich Bedingung (P1) erfüllen? Hierzu nutzen wir

$$X_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |x| < |y| \right\} \qquad \text{und} \qquad X_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |x| > |y| \right\}.$$





Diese Mengen sind disjunkt, somit $X_1 \not\subset X_2$ und $X_2 \not\subset X_1$. Für $|x| > |y|$ und $|\lambda| \geq 2$ gilt:

$$(x', y') = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, \lambda x + y) \quad \Longrightarrow$$

$$|y'| = |\lambda x + y| \geq |\lambda x| - |y| > |\lambda| \cdot |x| - |x| = (|\lambda| - 1)|x| \geq |x| = |x'|$$

Für alle $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ gilt somit $X_2 s_1^k \subset X_1$, ebenso $X_1 s_2^k \subset X_2$. Damit ist die Bedingung (P1) erfüllt. Das Ping-Pong-Lemma L9G garantiert nun, dass $\{s_1, s_2\}$ in $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ frei ist.

Für $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ist $s_1 = s_2 = 1$ sicher nicht frei. Für $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$ gilt $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$, und somit sind s_1, s_2 nicht frei. (Sie erzeugen $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$, siehe L3X.) Im Allgemeinen ist die Freiheit von $\{s_1, s_2\} \subset \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ ein schwieriges Problem und weitgehend noch offen.

Die Voraussetzung $|I| \geq 2$ ist technisch nötig. Andernfalls ist die Bedingung (P1) leer, also trivialerweise immer erfüllt. Die zyklische Gruppe $C_n = \langle\, s_1 \mid s_1^n = 1 \,\rangle$ ist frei über s_1 für $n = 0$ aber nicht für $n \geq 1$. Wir fassen diesen banalen Sonderfall wie folgt zusammen:

(Q1) Sei $I = \{1\}$ und $G = \langle\, s_1 \,\rangle$ sowie $s_1^n = e$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Bei minimalem n ist die Gruppe $G = \langle\, s_1 \mid s_1^n = 1 \,\rangle \cong \mathbb{Z}/n$ zyklisch der Ordnung n und nicht frei über s_1.

Bevor wir das Ping-Pong-Lemma beweisen, suchen wir noch schönere Formulierungen.

Allgemeiner sei $G = \ast_{i\in I} G_i$ das freie Produkt der Untergruppen $\{e\} \lneq G_i < G$. Sei X die Menge aller reduzierten Wörter über $(G_i)_{i\in I}$ und hierin $X_i \subset X$ die Teilmenge der Wörter, die auf ein Element in G_i enden (L9B). Diese Mengen sind nicht-leer und disjunkt. Für die Operation $X \times G \to X : (x, g) \mapsto xg$ gilt dann:

(P2) Für alle $j \neq i$ gilt $X_j \not\subset X_i$, aber für alle $g \in G_i \smallsetminus \{e\}$ gilt $X_j g \subset X_i$.

Auch hierzu gilt die Umkehrung (L9G), allerdings mit einer Ausnahme: Die Diedergruppe $D_n = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^n = 1 \,\rangle$ enthält die Untergruppen $G_i = \langle\, s_i \mid s_i^2 = 1 \,\rangle$ der Ordnung 2. Für $n = 0$ ist die unendliche Diedergruppe $D_0 = G_1 * G_2$ ein freies Produkt. Für $n \geq 1$ hingegen hat D_n die Ordnung $2n$ und ist kein freies Produkt. Jedes Gruppenelement schreibt sich eindeutig als alternierendes Produkte bis maximal zur Länge n:

$$D_n = \{\, 1,\ s_1,\ s_2,\ s_1 s_2,\ s_2 s_1,\ s_1 s_2 s_1,\ s_2 s_1 s_2,\ \ldots,\ s_1 s_2 s_1 \cdots = s_2 s_1 s_2 \cdots \}$$

Seien $X_1, X_2 \subset G$ die Mengen der Wörter un/gerader Länge. Dann gilt (P2), aber dennoch ist G nicht frei. Das Ping-Pong-Lemma L9G besagt, dass diese Ausnahme tatsächlich die einzige ist. Wir fassen diesen Sonderfall wie folgt zusammen:

(Q2) Sei $I = \{1,2\}$ und $G_i = \{e, s_i\}$ sowie $(s_1 s_2)^n = e$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
Bei minimalem n ist $G = D_n$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$.

Diese Ausnahme ist leicht abzufangen: Lediglich der Fall $I = \{1,2\}$ und $|G_1| = |G_2| = 2$ erfordert eine Prüfung auf $(s_1 s_2)^n = e$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wenn wir $|I| \geq 3$ annehmen, so tritt dieser Fall nicht auf, ebensowenig für $I = \{1,2\}$ und $|G_1| \geq 3$ oder $|G_2| \geq 3$.

Die freie Gruppe $G = \langle\, s_i : i \in I \mid - \,\rangle$ ist der Spezialfall mit $G_i = \langle\, s_i \mid - \,\rangle \cong \mathbb{Z}$: Die Charakterisierung (P2) spezialisiert sich zu (P1), und die Ausnahme (Q2) tritt nicht auf.

Noch allgemeiner sei $G = \ast^A_{i\in I} G_i$ das Amalgam der Untergruppen $A \lneq G_i < G$. Sei X die Menge aller Wörter in Normalform (L9E), und hierin $X_i \subset G$ die Teilmenge der Wörter, die auf ein Element in G_i enden. Diese Mengen sind nicht-leer und disjunkt, also $X_i \neq \emptyset$ und $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Für die Operation $X \times G \to X : (x, g) \mapsto xg$ gilt dann:

(P3) Für alle $j \neq i$ gilt $X_j \not\subset X_i$, aber für alle $g \in G_i \smallsetminus A$ gilt $X_j g \subset X_i$.
Für alle $i \in I$ und $a \in A$ hingegen gilt $X_i a \subset X_i$.

Auch hierzu gilt die Umkehrung (L9G), wiederum mit einer Ausnahme:

(Q3) Sei $I = \{1,2\}$ und $G_i = A \sqcup s_i A$ sowie $(s_1 s_2)^n \in A$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Bei minimalem n gilt $G/A = D_n$, und jedes Element von G erlaubt die eindeutige Normalform gemäß $G = \{\, a,\ s_1 a,\ s_2 a,\ s_1 s_2 a,\ s_2 s_1 a,\ \ldots,\ s_1 s_2 s_1 \cdots a = s_2 s_1 s_2 \cdots a \mid a \in A \,\}$.

Diese Ausnahme ist leicht abzufangen: Lediglich der kleinste Fall $I = \{1,2\}$ und der kleinste Index $|G_1/A| = |G_2/A| = 2$ erfordert eine Prüfung auf $(s_1 s_2)^n \in A$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Auch für diese Ausnahme ist die Struktur der Gruppe G vollkommen explizit.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Das freie Produkt ist der Spezialfall $A = \{e\}$: Die Charakterisierung (P3) spezialisiert sich zu (P2), und die Ausnahme (Q3) vereinfacht sich zu (Q2).

Nach diesen Beispielen und Vorbereitungen können wir nun das Ping-Pong-Lemma in voller Schönheit formulieren und beweisen. Ich betone den Dreischritt der Verallgemeinerung, da der Beweis in allen drei Fällen gleich verläuft.

Satz L9G (Ping-Pong-Lemma)**.** *Gegeben sei die Operation $X \times G \to X : (x, g) \mapsto g$.*

(1) Die Gruppe G werde erzeugt von Elementen $(s_i)_{i\in I}$, wobei $|I| \geq 2$. Gilt (P1) für geeignete Teilmengen $X_i \subset X$, so ist G frei über $\{ s_i \mid i \in I \}$, kurz $G = \langle s_i : i \in I \mid - \rangle$.

(2) Die Gruppe G werde erzeugt von den Untergruppen G_i mit $\{e\} < G_i < G$ $(i \in I)$. Gilt (P2), so ist G das freie Produkt, kurz $G = \ast_{i\in I} G_i$, oder es gilt die Ausnahme (Q2).

(3) Die Gruppe G werde erzeugt von den Untergruppen G_i mit $A < G_i < G$ $(i \in I)$. Gilt (P3), so ist G das Amalgam, kurz $G = \ast^A_{i\in I} G_i$, oder es gilt die Ausnahme (Q3).

Bemerkung. Für $I = \emptyset$ ist $G = \{e\}$. Für $I = \{1\}$ gilt $G = G_1$. In beiden Fällen sind die Aussagen (2) und (3) trivialerweise richtig. Wir nehmen daher fortan $|I| \geq 2$ an.

BEWEIS. Wir zeigen nur die letzte Aussage (3), denn (2) und (1) sind Spezialfälle.

Die Inklusionen $G_i \hookrightarrow G = \langle G_i : i \in I \rangle$ induzieren den Gruppenhomomorphismus $\varphi : \ast_{i\in I} G_i \twoheadrightarrow G$. Dieser faktorisiert zu $\psi : \ast^A_{i\in I} G_i \twoheadrightarrow G$. Wir zeigen, dass ψ injektiv ist.

Gegeben sei $g = g_1 g_2 \cdots g_n a \in G$ mit $a \in A$ und $g_k \in G_{i_k} \smallsetminus A$ wobei $i_k \neq i_{k+1}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Wir zeigen, dass $g = e$ nur für $n = 0$ und $a = e$ möglich ist.

Der Fall $n = 0$ ist klar. Im Falle $n = 1$ gilt $g = g_1 a \notin A$, also $g \neq e$. Im Folgenden sei also $n \geq 2$; wir zeigen $g \neq e$ mit Hilfe der gegebenen Operation $X \times G \to X$.

FALL A: Sei $|I| \geq 3$. Wir wählen $i_0 \in I \smallsetminus \{i_1, i_n\}$ und vergleichen

$$\begin{aligned} X_{i_0} g &= X_{i_0} g_1 g_2 \cdots g_n a \subset X_{i_1} g_2 \cdots g_n a \subset \ldots \subset X_{i_{n-1}} g_n a \subset X_{i_n} a \subset X_{i_n}, \\ X_{i_0} e &= X_{i_0} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \not\subset X_{i_n}. \end{aligned}$$

Das unterschiedliche Ergebnis $X_{i_0} g \neq X_{i_0} e$ dieser Operation zeigt $g \neq e$.

FALL B: Sei $I = \{1, 2\}$ und $|G_1 : A| = |G_2 : A| = 2$. Ist $n \geq 2$ und $g = e$, so tritt die oben diskutierte Ausnahme (Q3) ein. Ist dies ausgeschlossen, so folgt $G = G_1 *_A G_2$.

FALL C: Sei $I = \{1, 2\}$ und $|G_1 : A| \geq 3$ oder $|G_2 : A| \geq 3$.

Dies ist der kritische Fall. Für $i_1 = i_n$ können wir weiterhin $i_0 \in I \smallsetminus \{i_1\}$ wählen wie im Fall A und erhalten $X_{i_0} g \neq X_{i_0} e$, also $g \neq e$. Im Falle $i_1 \neq i_n$ erlaubt $I = \{i_1, i_n\}$ keine dritte Wahl. Wir wählen $i_0 = i_n$, doch der obige Vergleich $X_{i_0} g \subset X_{i_n}$ und $X_{i_0} e = X_{i_n}$ kann $g = e$ noch nicht ausschließen. Hierzu zeigen wir nun als Verschärfung von (P3), dass $X_{i_0} g \subsetneq X_{i_n}$ gilt, also die Inklusion strikt ist:

Lemma: Sei $|G_i : A| \geq 3$. Für alle $j \neq i$ und $g \in G_i \smallsetminus A$ gilt dann $X_j g \subsetneq X_i$.

BEWEIS DES LEMMAS: Zu $g \in G_i \smallsetminus A$ existiert $h \in G_i$, sodass die drei Nebenklassen A, Ag, Ah untereinander verschieden sind. Insbesondere gilt $gh^{-1} \in G_i \smallsetminus A$. Sei $j \neq i$. Dank (P3) gilt $X_j g, X_j h, X_j g h^{-1} \subset X_i$, also $X_j g \subset X_i h$. Wegen $X_j \not\subset X_i$ gilt $X_j h \not\subset X_i h$, also auch $X_j h \not\subset X_j g$. Somit gilt $X_j g \subsetneq X_j g \cup X_j h \subset X_i$. Damit ist das Lemma bewiesen.

BEWEIS VON FALL C: Wir wählen $i_0 \in I \smallsetminus \{i_1\}$ und nutzen $X_{i_0} g \subset X_{i_n}$ aus Fall A. Dank des Lemmas ist mindestens eine Inklusion strikt, also $X_{i_0} g \subsetneq X_{i_n}$. Für $g = e$ müsste demnach $X_{i_0} \subsetneq X_{i_n}$ gelten: Dies ist weder für $i_0 = i_n$ noch für $i_0 \neq i_n$ möglich. □

Bemerkung. Das Ping-Pong-Lemma gilt für Gruppen, *nicht* für Monoide: Auf $X = \mathbb{N}^2$ operieren $s_1 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$ und $s_2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 + 1)$. Für $X_1 = \mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}$ und $X_2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $X_2 \not\subset X_1$ und $X_1 \not\subset X_2$ sowie $X_2 s_1^k \subset X_1$ und $X_1 s_2^k \subset X_2$ für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, analog zu (P1). Dennoch ist das erzeugte Monoid $[s_1, s_2] \cong (\mathbb{N}^2, +)$ nicht frei!

Bemerkung. Die Idee des Ping-Pong-Lemmas geht zurück auf Felix KLEIN. Er untersuchte damit ebene Möbius–Transformationen und die Gruppe $\mathrm{PSL}_2 \mathbb{Z}$ (siehe L9H). Es ist eines der Werkzeuge der *Geometrischen Gruppentheorie* und hat zahlreiche Anwendungen, darunter einige spektakuläre; Jacques TITS bewies damit 1972 die *Tits–Alternative*: Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Jede endlich erzeugte Gruppe $G < \mathrm{GL}_n K$ enthält entweder eine freie Gruppe $\langle s_1, s_2 \mid - \rangle$ oder aber eine auflösbare Gruppe von endlichem Index.

Beispiel. Die Gruppe $\mathrm{PSL}_2 \mathbb{Z} = \mathrm{SL}_2 \mathbb{Z} / \{\pm 1\}$ wird erzeugt von $s = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ und $t = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Es gilt $s^3 = t^2 = 1$, wir haben also die Untergruppen $G_1 = \langle s \rangle \cong \mathbb{Z}/3$ und $G_2 = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}/2$. Gelten Relationen zwischen G_1 und G_2, oder ist $\mathrm{PSL}_2 \mathbb{Z}$ ihr freies Produkt?

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2 \mathbb{Z}$ wird erzeugt von $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, siehe L3X. Es gilt $s^6 = t^4 = -1$, wir haben also die Untergruppen $G_1 = \langle s \rangle \cong \mathbb{Z}/6$ und $G_2 = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}/4$ mit der gemeinsamen Untergruppe $A = \langle -1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$. Gelten weitere Relationen zwischen G_1 und G_2, oder ist G das Amalgam, kurz $G = G_1 *_A G_2 \cong \mathbb{Z}/6 *_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/4$?

Die folgende Übung L9H beantwortet dies geometrisch mit dem Ping-Pong-Lemma.

Zur Einstimmung betrachten wir Abbildung L:58. Die Gruppen $\mathrm{SL}_2 \mathbb{C} > \mathrm{SL}_2 \mathbb{R} > \mathrm{SL}_2 \mathbb{Z}$ operieren auf der Ebene $\mathbb{C}$, genauer auf der komplex-projektiven Geraden $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$ wie in der Übung L9H angegeben. Ich notiere hier die Operation $\mathbb{CP}^1 \times \mathrm{SL}_2 \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ von rechts. Die Abbildungen $t : z \mapsto -1/z$ und $u : z \mapsto z + 1$ sowie $s = ut : z \mapsto -1/(z+1)$ erhalten die reelle Achse $\mathbb{R}$ und ebenso die obere Halbebene $\mathbb{C}_{\mathrm{Im}>0}$. Gezeigt ist die Wahl eines Fundamentalbereichs (blau, mit Etikett „e“) und seine Bilder unter $u, t, s, \ldots$

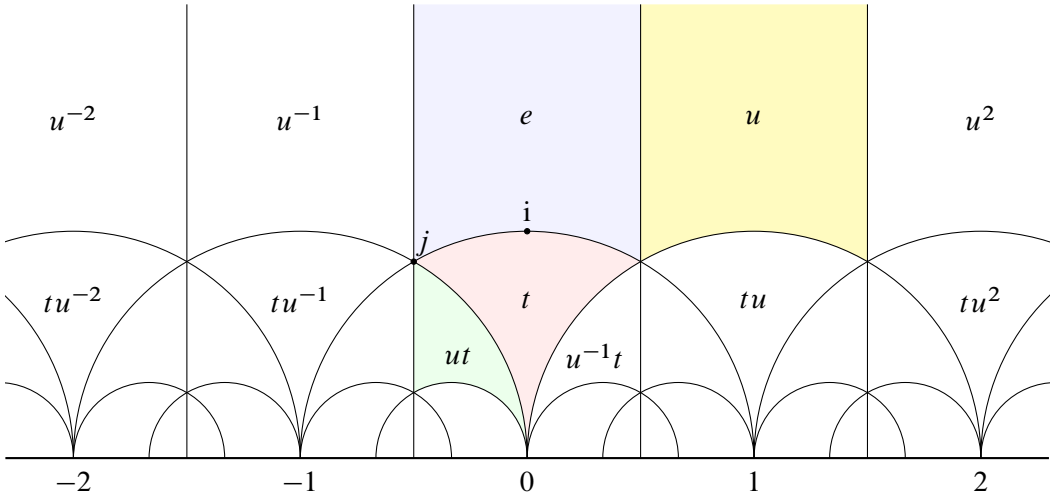


ABBILDUNG L:58. Operation von $s, t, u \in \mathrm{PSL}_2 \mathbb{Z}$ auf der Halbebene $\mathbb{C}_{\mathrm{Im}\geq 0}$

Die Abbildung t hat Ordnung 2 mit Fixpunkt i, also $t^2 = e$ und $\mathrm{i} \cdot t = \mathrm{i}$. Die Abbildung s hat Ordnung 3 mit Fixpunkt $j = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3} = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$, also $s^3 = e$ und $j \cdot s = j$. Dies sind Drehungen bezüglich der hyperbolischen Geometrie auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Im}>0}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung L9H (Hecke–Gruppen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und $\sigma = 2\cos(\pi/n)$. Die Gruppe $G < \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ werde erzeugt von $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sigma \end{smallmatrix}\right)$ und $t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Für $n = 3$ gilt $\sigma = 1$ und $G = \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$.

Entsprechend werde die Gruppe $H < \mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ erzeugt von $s = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sigma \end{smallmatrix}\right]$ und $t = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Unser Ziel ist der Nachweis von $G = \langle s \rangle *_A \langle t \rangle$ und $H = \langle s \rangle * \langle t \rangle$.

(1) Bestimmen Sie die Eigenwerte von s und t und ihre Ordnung in $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ und $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$.

(2) Die Gruppen $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ bzw. $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ operieren von rechts auf der komplex-projektiven Geraden $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$, analog zu §K2m, durch die *gebrochen-linearen Funktionen*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad : \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \infty \mapsto \frac{a}{c}, \qquad -\frac{d}{c} \mapsto \infty.$$

Durch Einschränkung operieren die Untergruppen $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ auf der reell-projektiven Geraden $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{RP}^1$ sowie auf den Halbebenen $\mathbb{C}_{\mathrm{Im}>0}$ und $\mathbb{C}_{\mathrm{Im}<0}$.

Unsere Matrizen $s, t \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ operieren (wie in Abbildung L:58 skizziert) durch

$$s : z \mapsto z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sigma \end{pmatrix} = \frac{-1}{z+\sigma}, \quad t : z \mapsto z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{z}, \quad u = st : z \mapsto z + \sigma.$$

(3) Untersuchen Sie $X_1 =]-\infty, 0]$ und $X_2 =]0, \infty]$ in $X = \widehat{\mathbb{R}}$: Ist die Voraussetzung des Ping-Pong-Lemmas erfüllt? Was genau folgt hieraus für die Gruppen G und H?

(4) Diskutieren Sie schließlich den wichtigen Spezialfall $n = 3$ und die Gruppen $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ und $\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z}$: Erhalten Sie einen alternativen, geometrischen Beweis zu Satz L3X?

✻ **L9H.** (1) Es gilt $\det(t - \lambda 1) = \left(\begin{smallmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right) = \lambda^2 + 1$; demnach hat t die Eigenwerte $\pm i$, die Ordnung 4 in $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ und Ordnung 2 in $\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z}$. (Probe!) Entsprechend gilt $\det(s - \lambda 1) = \left(\begin{smallmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \sigma-\lambda \end{smallmatrix}\right) = \lambda^2 - \sigma\lambda + 1$; demnach hat s die Eigenwerte $-\exp(\pm\pi\mathrm{i}/n)$, die Ordnung $2n$ in $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ und Ordnung n in $\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z}$. (Probe für $n = 3, 4$.)

(2) Wir rechnen die Operation geduldig nach: Es gilt $z \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = z$ sowie

$$\left(z \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \frac{za+b}{zc+d} \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \frac{\frac{za+b}{zc+d}a' + b'}{\frac{za+b}{zc+d}c' + d'} = \frac{z(aa'+cb') + (ba'+db')}{z(ac'+cd') + (bc'+dd')},$$

$$z \cdot \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\right) = z \cdot \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix} = \frac{z(aa'+cb') + (ba'+db')}{z(ac'+cd') + (bc'+dd')}.$$

Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ operiert trivial, allgemeiner: Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{smallmatrix}\right)$ operieren gleich. Somit induziert die Operation von $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ eine Operation der Quotientengruppe $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C} = \mathrm{SL}_2\mathbb{C}/\{\pm 1\}$.

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $z \in \widehat{\mathbb{R}}$ liegt auch das Ergebnis z' in $\widehat{\mathbb{R}}$. Das Komplement $\widehat{\mathbb{C}} \smallsetminus \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{C}_{\mathrm{Im}>0} \sqcup \mathbb{C}_{\mathrm{Im}<0}$ zerfällt in zwei Gebiete. Für $ad - bc > 0$ und $z = \mathrm{i}$ finden wir das Bild $z' = (a\mathrm{i} + b)(-c\mathrm{i} + d)/(c^2 + d^2) = [(ac + bd) + (ad - bc)\mathrm{i}]/(c^2 + d^2)$, also $\mathrm{Im}z' > 0$. Daraus folgt $\mathbb{C}_{\mathrm{Im}>0} \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{C}_{\mathrm{Im}>0}$. (Alternative: Sie können dies auch direkt nachrechnen für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $y > 0$.)

(3) Die Teilmengen $X_1, X_2 \subset X$ sind nicht-leer und disjunkt, insbesondere gilt $X_1 \not\subset X_2$ und $X_2 \not\subset X_1$. Die Abbildung $z \mapsto z \cdot t = -1/z$ erfüllt $X_1 t \subset X_2$. Für die Abbildung $z \mapsto z \cdot s = -1/(\sigma + z)$ finden wir

$$]0, \infty] \quad \mapsto \quad]-1/\sigma, 0] \quad \mapsto \quad]-1/(\sigma - 1/\sigma), -1/\sigma] \quad \mapsto \quad \dots \quad \mapsto \quad]-\infty, -\sigma] \quad \mapsto \quad]0, \infty].$$

(Rechnen Sie dies zunächst für $n = 3$ und $\sigma = 1$ explizit nach. Führen Sie dann den allgemeinen Fall aus.) Für alle $k = 1, 2, \dots, n-1$ gilt somit $X_2 s^k \subset X_1$. Damit sind die Voraussetzungen des Ping-Pong-Lemmas erfüllt: In $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ gilt $\langle s, t \rangle = \langle s \rangle * \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}/n * \mathbb{Z}/2$. In $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ gilt $\langle s, t \rangle = \langle s \rangle *_A \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}/2n *_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/4$.

(4) Im Spezialfall $n = 3$ gilt $\sigma = 1$. Die Matrizen $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugen $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$: Dies zeigt man wie in Satz L3X durch den euklidischen Algorithmus. Wir finden die Relationen $s^3 = t^2 = -1$ und somit $s^6 = t^4 = 1$. Anschließend zeigt man, dass alle weiteren Relationen hieraus als Konsequenzen folgen, zum Beispiel algebraisch wie in L3X. Die vorliegende Übung beweist diese Aussage geometrisch.

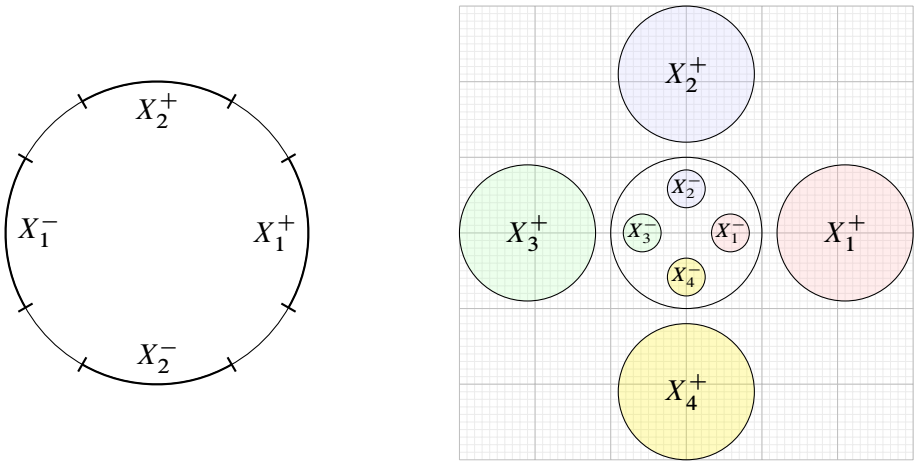


ABBILDUNG L:59. Spiegelungen an Sphären erzeugen eine Schottky–Gruppe.

Beispiel (Schottky 1877)**.** Sei X ein topologischer Raum, darin $X_1^\pm, \dots, X_n^\pm \subset X$ disjunkte Teilmengen und $f_1, \dots, f_n : X \xrightarrow{\sim} X$ Homöomorphismen mit $f_i(X \smallsetminus X_i^-) \subset X_i^+$. Dann erfüllen die Mengen $X_i = X_i^- \cup X_i^+$ die Ping-Pong-Bedingung (P1). Somit ist die erzeugte Gruppe $G = \langle f_1, \dots, f_n \rangle < \mathrm{Homeo}(X)$ frei über $\{f_1, \dots, f_n\}$.

(1) Auf der Kreislinie $X = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{RP}^1$ betrachten wir disjunkte Intervalle $X_i^\pm$, etwa wie in L:59. Hierzu gibt es Homöomorphismen $f_i : X \xrightarrow{\sim} X$ mit $f_i(X \smallsetminus X_i^-) \subset X_i^+$, etwa $f_i \in \mathrm{PGL}_2 \mathbb{R}$ dank 3–facher Transitivität (§K2m). Somit ist die erzeugte Gruppe $G = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ frei über $\{f_1, \dots, f_n\}$. Zur Übung können Sie explizite Daten angeben.

(2) Auf der Sphäre $X = \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$ betrachten wir disjunkte Kreisscheiben $X_i^\pm$, etwa wie in L:59. Sei $f_i : X \xrightarrow{\sim} X$ die Möbius–Transformation (A1O) komponiert aus der Spiegelung am Kreis ∂X_i^- und einer zweiten Spieglung mit $X_i^- \xrightarrow{\sim} X_i^+$. Somit ist die erzeugte Gruppe $G = \langle f_1, \dots, f_n \rangle < \mathrm{Möb}(\mathbb{S}^2) \cong \mathrm{PSL}_2 \mathbb{C}$ frei über $\{f_1, \dots, f_n\}$.

Beispiel. Die orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_3 \mathbb{R}$ enthält die beiden Rotationen

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Sie erzeugen $\langle f, g \rangle \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3 \cong \mathrm{PSL}_2 \mathbb{Z}$. Somit enthält $\mathrm{SO}_3 \mathbb{R}$ eine freie Gruppe vom Rang 2, siehe Stan Wagon: *The Banach–Tarski Paradox*, Cambridge University Press (1985), Theorem 2.1. Das hat erstaunliche Konsequenzen: Man kann die Kugel $\mathbb{D}^3$ in fünf Teile zerlegen und durch Drehung und Verschiebung zu zwei Kopien $\mathbb{D}^3 \cup [\mathbb{D}^3 + (3,0,0)]$ zusammensetzen. (Ich würde das liebend gerne vorführen, doch die Zerlegung benötigt das Auswahlaxiom und ist nicht konstruktiv.) Dieser unglaubliche Satz ist das berühmt-berüchtigte Banach–Tarski–Paradox. Es besagt ganz allgemein: Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es Zerlegungen $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$ und $Y = Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$ und Bewegungen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ mit $\alpha_1(X_1) = Y_1, \dots, \alpha_n(X_n) = Y_n$. Es zeigt insbesondere, dass es kein endlich-additives Maß $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$ auf *allen* Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ geben kann, das bewegungsinvariant ist und $0 < \mu(\mathbb{D}^3) < \infty$ erfüllt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

KAPITEL M

Überlagerungen topologischer Räume

§M0. Einführung und Überblick

Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist eine besonders schöne und einfache Abbildung topologischer Räume. Sie kennen und nutzen bereits typische Beispiele wie Polarkoordinaten

$$p \;:\; \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \;:\; (r,t) \mapsto (r\cos t, r\sin t).$$

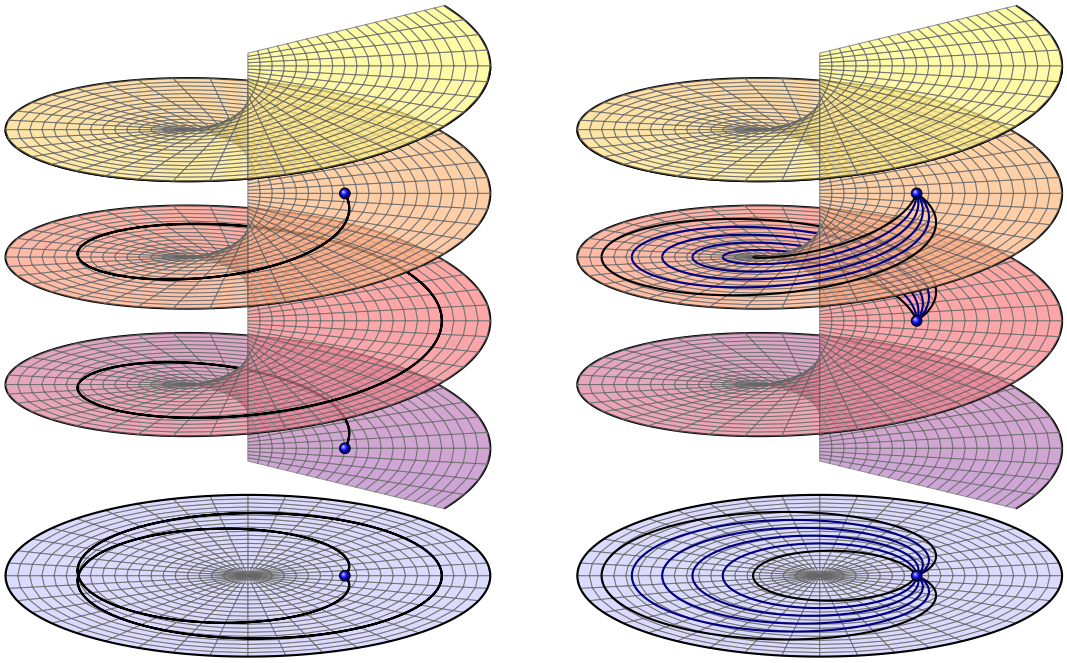


ABBILDUNG M:1. Polarkoordinaten visualisiert als Wendelfläche;
Hochhebung eines Weges (links) und einer Homotopie (rechts)

Lokal sieht eine *Überlagerung* $p : \tilde{X} \to X$ aus wie ein „Stapel Pfannkuchen“ (M:3). Das bedeutet, der Raum X wird überdeckt durch offene Mengen $U \subset X$, deren Urbild $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} \tilde{U}_i$ disjunkte Vereinigung offener Mengen $\tilde{U}_i \subset \tilde{X}$ ist, die jeweils durch p homöomorph auf U abgebildet werden (M1A). Diesen Begriff will ich sogleich illustrieren.

§M0a. Zentrale Beispiele. Überlagerungen begegnen uns früh in der mathematischen Ausbildung, spätestens bei der Einführung komplexer Zahlen $\mathbb{C}$, und von da an ständig:

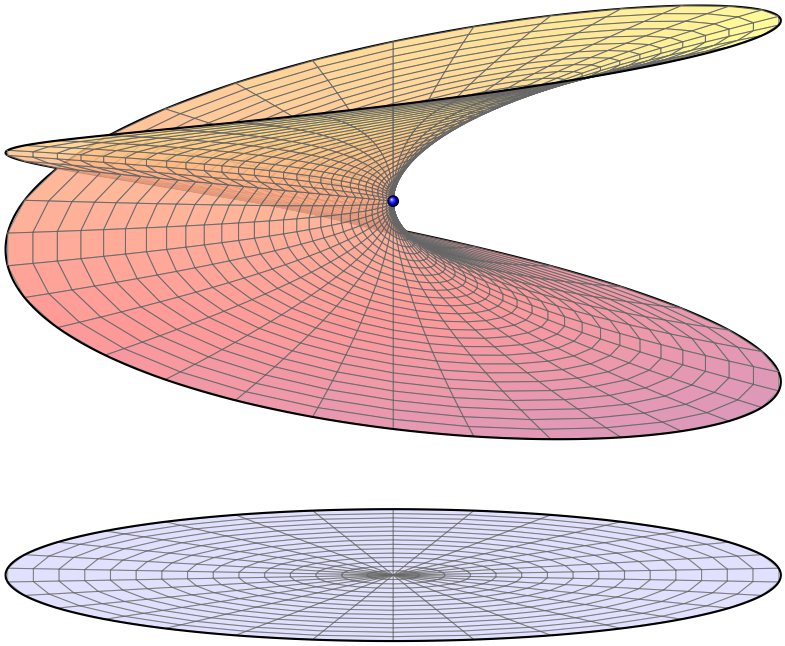


ABBILDUNG M:2. Die Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$

- Die Potenzfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w \mapsto w^n$ ist eine Überlagerung (verzweigt im Punkt 0). Warum gibt es (anders als im Reellen) keine stetige Wurzelfunktion „$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$“?
- Die Lösung quadratischer Gleichungen $z^2 + pz + q = 0$ durch die Mitternachtsformel: Wie ist die Lösungsformel $\{z_1, z_2\} = \{-p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}\}$ topologisch zu verstehen?
- Allgemein polynomielle Gleichungen: Jede Polynomabbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ ist eine n–blättrige verzweigte Überlagerung (M1H).
- Die trigonometrische Parametrisierung der Kreislinie ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Warum ist die Polardarstellung $z = r \cdot (\cos t + \mathrm{i} \sin t)$ für $z \in \mathbb{C}^\times$ nicht eindeutig?
- Die komplexe Exponentialfunktion ist gegeben durch $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^k / k!$. Warum gibt es (anders als im Reellen) keinen stetigen Logarithmus „$\ln : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$“?

Diese Konstruktionen und Fragestellungen reichen zurück bis zu den Anfängen der komplexen Zahlen: Schon die (reelle!) quadratische Gleichung $z^2 + 1 = 0$ provoziert die Einführung von „$\sqrt{-1} = \pm\mathrm{i}$“. Der Fundamentalsatz der Algebra (J1T) für polynomielle Gleichungen über $\mathbb{C}$ besagt, dass jede Gleichung $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}$ besitzt (jeweils mit algebraischer Vielfachheit gezählt). Diese überaus erfolgreichen Anwendungen sind bis heute ein guter Grund zur Nutzung komplexer Zahlen, in der Mathematik ebenso wie in Naturwissenschaften und im Ingenieurwesen.

All diese zentralen Beispiele sind Überlagerungen. Allein dies würde eine ausführliche Behandlung von Überlagerungen rechtfertigen. Die allgemeine Betrachtung beschert uns zudem zahlreiche weitere Beispiele und nützliche Anwendungen, wie etwa Überlagerungen von Graphen, von Flächen und von Lie–Gruppen wie $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$.

§M0b. Gruppen wollen operieren! Im vorangegangenen Kapitel L haben wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ kennengelernt und in ersten Anwendungen bestimmt. Dieses Kapitel untersucht das duale Konzept der Überlagerungen $p : (\tilde{X},\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$.

Diese Dualität entspricht einem allgemeinen Paradigma: *Gruppen wollen operieren!* Wir müssen einer Gruppe nur einen geeigneten Bereich zur Verfügung stellen, auf dem sie operieren kann, und schon entfaltet sie dort ihre Wirkung und enthüllt ihre Wesenszüge.

Dies gilt insbesondere für Fundamentalgruppen: Sie operieren auf Überlagerungen. Fundamentalgruppen und Überlagerungen sind in einem präzisen Sinne dual zueinander. Die Dualität vereinfacht viele Berechnungen und ermöglicht wirkungsvolle Anwendungen.

Diese allzu kurze Einführung dient zunächst nur zur Orientierung und Motivation. Die nötigen Begriffe und Techniken werden wir im Verlaufe dieses Kapitels ausführen. Als unser Ziel skizziere ich die folgenden drei zentralen Sätze der Überlagerungstheorie.

§M0c. Kurze exakte Sequenz. Zahlreiche und besonders schöne Überlagerungen entstehen nach folgendem Muster als Quotienten geeigneter Gruppenoperationen:

Satz M0A. *Für jede freie diskontinuierliche Operation $G \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{q} X$ ist der Quotient q eine Überlagerung. Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so nennen wir dies eine* Galois–Überlagerung. *Für diese erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen*

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{h} G \longrightarrow 1.$$

Exaktheit bedeutet „Bild = Kern“: $q_\sharp$ ist injektiv, h ist surjektiv und $\operatorname{im}(q_\sharp) = \ker(h)$. Diese exakte Sequenz induziert demnach einen Isomorphismus $\bar{h} : \pi_1(X,x_0)/\operatorname{im}(q_\sharp) \xrightarrow{\sim} G$.

Eine Überlagerung $G \curvearrowright (\tilde{X},\tilde{x}_0) \xrightarrow{q} (X,x_0)$ heißt *universell*, wenn der überlagernde Raum $(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ einfach zusammenhängend ist, also $\pi_0(\tilde{X}) = \{\tilde{X}\}$ und $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) = \{1\}$ gilt. Der Satz beschert uns in diesem Falle einen Isomorphismus $h : \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{\sim} G$.

Kennt man also eine universelle Überlagerung, so erhält man hieraus die Fundamentalgruppe. Dies gelingt zum Beispiel für die folgende Auswahl von Anwendungen:

Topologischer Raum	Universelle Überlagerung
X einfach zusammenhängend, etwa $X = \mathbb{R}^n$	$\{1\} \curvearrowright X \xrightarrow{\sim} X$
einfach gelochte Ebene $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$	$2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times$
Kreislinie $\mathbb{S}^1$, projektive Gerade $\mathbb{RP}^1$	$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$
Sphäre $\mathbb{S}^n$ der Dimension $n \geq 2$	$\{1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$
projektiver Raum $\mathbb{RP}^n$ der Dimension $n \geq 2$	$\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$
orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$	$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$
orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$	$\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$
Linsenraum $L(p,q)$	$\mathbb{Z}/p \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow L(p,q)$
Fläche $F_0^\pm$, also $\mathbb{S}^2$ oder $\mathbb{RP}^2$	$G_0^\pm \curvearrowright \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow F_0^\pm$, sphärisch
Fläche $F_1^\pm$, Torus oder Kleinsche Flasche	$G_1^\pm \curvearrowright \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow F_1^\pm$, euklidisch
Fläche $F_g^\pm$ von höherem Geschlecht $g \geq 2$	$G_g^\pm \curvearrowright \mathbb{H}^2 \twoheadrightarrow F_g^\pm$, hyperbolisch
Bouquet B von $\lvert S\rvert$ Kreislinien	$\langle S \mid - \rangle \curvearrowright \Gamma \twoheadrightarrow B$, Cayley–Graph

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M0d. Galois–Korrespondenz. Überlagerungen sind eine kleine aber feine Theorie. Ihren ersten Höhepunkt und eine elegant-prägnante Zusammenfassung erfährt sie durch folgenden Hauptsatz der Überlagerungstheorie: die Galois–Korrespondenz zwischen Untergruppen $H < \pi_1(X, x_0)$ und zusammenhängenden Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$.

Satz M0B. *Sei X zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Dann existiert eine universelle Überlagerung $G \curvearrowright (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q} (X, x_0)$ mit $G = \pi_1(X, x_0)$. Allgemein gilt:*

(1) Jede Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ und somit eine Untergruppe $\operatorname{im}(p_\sharp) < G$.

(2) Zu jeder Untergruppe $H < G$ existiert eine zusammenhängende Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $\operatorname{im}(p_\sharp) = H$. Diese ist eindeutig bis auf Isomorphie.

Bemerkung. Dieser Satz mag auf den ersten Blick abstrakt anmuten, doch lässt er bereits die Kraft dieser Korrespondenz erahnen: Überlagerungen sind geometrische Objekte, die zugehörigen Untergruppen sind algebraische Objekte, und die Korrespondenz erlaubt eine treue Übersetzung von der einen in die andere Kategorie und zurück. So lassen sich geometrische Fragen mit algebraischen Methoden behandeln, und oft genug auch umgekehrt.

Beispiel. Als eine schöne Anwendung nenne ich den Satz von Nielsen–Schreier (M5D): In einer freien Gruppe ist jede Untergruppe frei. Diesen rein algebraischen Satz kann man rein algebraisch beweisen, aber topologisch geht es wesentlich leichter und übersichtlicher.

Bemerkung. Die Vorsichtsmaßnahme, dass X lokal einfach zusammenhängend sein soll, ist recht milde; alle Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexe erfüllen sie. Zur Galois–Korrespondenz genügt schwächer, dass X *semilokal einfach zusammenhängend* ist (M5Q).

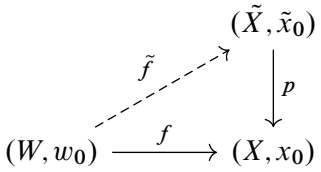
§M0e. Analogie. Die Bestimmung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ durch Auffinden einer universellen Überlagerung $G \curvearrowright \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ ähnelt in gewisser Weise der Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch Auffinden einer Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Hat man das Glück oder Geschick, eine Stammfunktion F explizit zu beschaffen, so ist der Nachweis der Eigenschaft $F' = f$ und die weitere Rechnung meist leicht. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung garantiert, dass es zu jeder stetigen Funktion f solch eine Stammfunktion F gibt. Konkrete Berechnungen können aber durchaus schwierig sein, wie jeder weiß, der sich daran versucht hat. Schlimmer noch: Man kann leicht Funktionen f hinschreiben, deren Stammfunktion sich nicht durch die üblichen Funktionen „in geschlossener Form“ ausdrücken lässt, zum Beispiel $f(x) = \exp(-x^2)$ oder $f(x) = \sin(x)/x$.

Mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ verhält es sich ähnlich: Haben wir eine universelle Überlagerung $G \curvearrowright \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ konkret vorliegen, so können wir hieraus die Gruppe $\pi_1(X, x_0) \cong G$ ablesen. Der Hauptsatz der Überlagerungstheorie besagt insbesondere, dass es zu jedem (hinreichend zusammenhängenden) Raum X eine solche Überlagerung gibt. Aber auch hier kann die konkrete Bestimmung und die Untersuchung dieser Überlagerung beliebig schwierig sein. Man kann leicht Gruppen hinschreiben, die unmittelbar auf unlösbare algorithmische Probleme führen (Wortproblem, Isomorphieproblem, siehe §L3v).

In vielen günstigen Fällen lassen sich diese Schwierigkeiten lösen, wie die genannten Beispiele erahnen lassen. Die Überlagerungstheorie stiftet dann eine nützliche Übersetzung zwischen topologischen und algebraischen Daten. Sie ist daher eine grundlegende Technik der Topologie und ein willkommenes Hilfsmittel in Geometrie und Algebra.

§M0f. Hochhebungskriterium. Seien $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ stetige Abbildungen mit gleichem Zielraum. Eine *Hochhebung* von f bezüglich p ist eine Abbildung $\tilde{f} : (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, die stetig ist (!) und $p \circ \tilde{f} = f$ erfüllt. Als Diagramm:



Das Hochhebunsproblem begegnet uns bei Polarkoordinaten (M2A) und ebenso bei der komplexen Exponentialfuntion (M2B) und der komplexen Potenzfunktion (M2C).

Für Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ können wir das Problem vollständig lösen: Gemäß des folgenden Satzes ist die Fundamentalgruppe das einzige Hindernis.

Satz M0C. *Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Sei (W, w_0) wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Genau dann erlaubt eine gegebene stetige Abbildung $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ eine stetige Hochhebung $\tilde{f} : (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$, wenn $f_\sharp(\pi_1(W, w_0)) \subset p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ gilt. In diesem Fall ist die Hochhebung $\tilde{f}$ eindeutig.*

Ist W einfach zusammenhängend, $\pi_1(W, w_0) = \{1\}$, so hebt sich *jede* stetige Abbildung $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

Dieser Satz hat außer der Galois–Korrespondenz zahlreiche geometrische und algebraische Anwendungen, etwa für Überlagerungen von Polyedern (**??**), Mannigfaltigkeiten (**??**) oder topologischen Gruppen (**??**), insbesondere Lie–Gruppen wie etwa die klassischen Matrixgruppen $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Beispiel. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Ist X ein Polyeder, etwa ein Graph oder eine triangulierte Fläche, so auch $\tilde{X}$: Jede Triangulierung $h : |K| \xrightarrow{\sim} X$ hebt sich simplexweise zu einer Triangulierung $\tilde{h} : |\tilde{K}| \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$ und einer simplizialen Überlagerung $q : \tilde{K} \to K$ mit $p \circ \tilde{h} = h \circ |q|$. Hat p genau n Blätter und ist K endlich, so auch $\tilde{K}$ und $\chi(\tilde{K}) = n\chi(K)$.

Beispiel. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Ist X eine Mannigfaltigkeit, so auch $\tilde{X}$: Jeder Atlas $\mathscr{A} = (h_i)_{i \in I}$ lokaler Karten $h_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ hebt sich zu einem Atlas $\tilde{\mathscr{A}} = (\tilde{h}_{\tilde{\imath}})_{\tilde{\imath} \in \tilde{I}}$ lokaler Karten $\tilde{h}_{\tilde{\imath}} : \tilde{U}_{\tilde{\imath}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$. Die Kartenwechsel sind dieselben, jeweils eingeschränkt auf die Schnittmenge. Ist also $(X, \mathscr{A})$ eine orientierte / glatte Mannigfaltigkeit, so auch $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{A}})$.

Beispiel. Mutter aller Überlagerungen ist die Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, ebenso die Einschränkung $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$, $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Die Verträglichkeit mit der Gruppenstruktur ist hierbei kein Zufall sondern Notwendigkeit:

Sei $p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \to (G, e)$ eine Überlagerung zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Räume. Jede topologische Gruppe $(G, \cdot, e, \iota)$ hebt sich eindeutig zu einer topologischen Gruppe $(\tilde{G}, \tilde{\cdot}, \tilde{e}, \tilde{\iota})$ mit Gruppenhomomorphismus p. Sein Kern $K = p^{-1}(e)$ ist diskret und zentral in $\tilde{G}$, wir erhalten also eine *zentrale Erweiterung* $K \to \tilde{G} \to G$.

Beispiel. Sei $p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \to (G, e)$ eine zusammenhängende Überlagerung. Ist $(G, \mathscr{A}, \cdot)$ eine Lie–Gruppe, also eine Mannigfaltigkeit mit differenzierbarem Atlas $\mathscr{A}$ und Gruppenstruktur $\cdot$, so heben sich diese Strukturen wie zuvor eindeutig zu einer Lie–Gruppe $(\tilde{G}, \tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\cdot})$

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M1. Überlagerungen topologischer Räume

§M1a. Überlagerungen. Jede *Überlagerung* $p : \tilde{X} \to X$ sieht lokal aus wie ein „Stapel Pfannkuchen“, wie in Abbildung M:3 skizziert. Diese Idee wollen wir nun formalisieren.

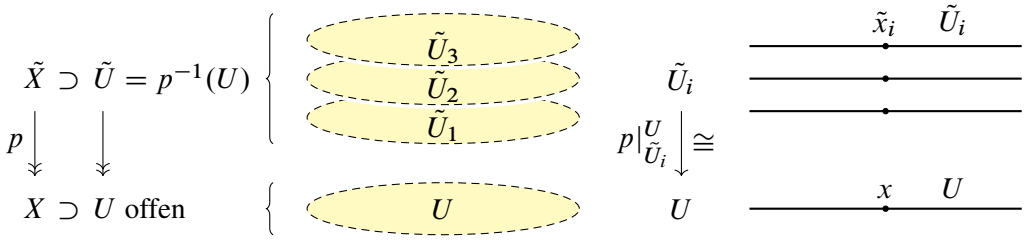


ABBILDUNG M:3. Lokales Bild einer Überlagerung als „Pfannkuchenstapel“

Beispiel. Eine *triviale Überlagerung* ist die Projektion $q : X \times F \to X : (x, y) \mapsto x$, wobei der überlagerte Raum X beliebig und die Faser F diskret ist, etwa $F = \{1, \dots, n\}$.

Wesentlich flexibler und interessanter sind *lokal-triviale* Abbildungen $p : \tilde{X} \to X$. Für diese verlangen wir nur, dass p lokal homöomorph zur Projektion q ist. Das bedeutet:

Definition M1A. Sei $p : \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ eine stetige Surjektion topologischer Räume.

Eine offene Menge $U \subset X$ wird durch $p : \tilde{X} \to X$ *trivial überlagert* wenn gilt: Das Urbild $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} \tilde{U}_i$ ist disjunkte Vereinigung offener Mengen $\tilde{U}_i \subset \tilde{X}$, und für jedes $i \in I$ ist die Einschränkung $p_i := p|^U_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to U$ ein Homöomorphismus.

Die Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ heißt *Überlagerung*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ besitzt, die von p trivial überlagert wird. Sie heißt *n–blättrig*, wenn $|p^{-1}(x)| = n$ für alle $x \in X$ gilt. Sie heißt *trivial*, wenn ganz X trivial überlagert wird.

Konvention. Zur Betonung nennen wir X den *überlagerten Raum*, $\tilde{X}$ den *überlagernden Raum* und p die *überlagernde Abbildung*. Es gibt dann eine Überdeckung $X = \bigcup_{U\in\mathscr{U}} U$ durch offene Mengen $U \subset X$, von denen jede einzelne durch p trivial überlagert wird. Wir sagen kurz p ist *trivial* über $U \in \mathscr{U}$, oder auch p ist *lokal-trivial* über $(X, \mathscr{U})$.

Verwechslungsgefahr. Die Begriffe *Überlagerung* und *Überdeckung* treten hier nebeneinander auf, haben aber rein gar nichts gemeinsam. In englischen Texten heißt ‘Überlagerung’ *covering map* oder kurz *covering*, und ‘Überdeckung’ heißt *cover* oder leider auch *covering*. Verwechslungen lassen sich dann nur aus dem Kontext klären. Auf französisch sind *revêtement* und *recouvrement* unmissverständlich. Auf deutsch werden wir *Überlagerung* und *Überdeckung* fein säuberlich auseinanderhalten.

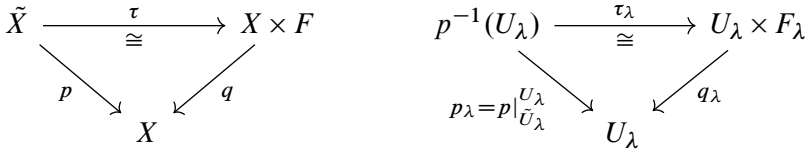
Bemerkung. Die Stetigkeit von $p : \tilde{X} \to X$ muss in M1A nicht gesondert gefordert werden: Dank der vorausgesetzten lokalen Trivialität ist jede Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus. Somit ist p insbesondere stetig und offen und eine Identifizierung (E2L).

Bemerkung. Für $p : \tilde{X} \to X$ heißt $p^{-1}(x) := p^{-1}(\{x\}) \subset \tilde{X}$ die *Faser* über $x \in X$. Wird eine offene Menge $U \subset X$ durch p trivial überlagert, so ist für jedes $x \in U$ die Faser $p^{-1}(x) = \bigsqcup_{i\in I} \{\tilde{x}_i\}$ diskret in $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} \tilde{U}_i$, denn $p^{-1}(x) \cap \tilde{U}_i = \{\tilde{x}_i\}$. Die Kardinalität $|p^{-1}(x)| = |I|$ heißt *Blätterzahl* von p über U. Für jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist die Blätterzahl lokal konstant. Ist X zusammenhängend, so ist die Blätterzahl konstant.

§M1b. Trivialisierungen. Zur Illustration zunächst einige triviale Beispiele:

Beispiel. Für jeden topologischen Raum X ist $\mathrm{id}_X : X \to X$ eine Überlagerung, und allgemeiner jeder Homöomorphismus $p : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} X$. Umgekehrt ist jede einblättrige Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ein Homöomorphismus. (Zum Verständnis der Definition beweise man dies.)

Beispiel. Einfachstes Modell einer Überlagerung ist, wie eingangs genannt, die Projektion $q : X \times F \to X : (x, y) \mapsto x$ mit diskreter Faser $F \neq \emptyset$. Dies ist eine triviale Überlagerung und jede triviale Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist zu einer solchen Projektion $q : X \times F \to X$ äquivalent, das heißt, es existiert eine *Trivialisierung* $\tau : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} X \times F$ mit $p = q \circ \tau$.



Im Spezialfall $F = \{1\}$ sind q und p Homöomorphismen wie im vorigen Beispiel.

Bemerkung. Jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ erlaubt einen *Atlas* von Trivialisierungen,

$$\mathscr{A} = \big(\tau_\lambda : \tilde{U}_\lambda = p^{-1}(U_\lambda) \xrightarrow{\sim} U_\lambda \times F_\lambda\big)_{\lambda \in \Lambda},$$

bestehend aus offenen Mengen $U_\lambda \subset X$ mit $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ und diskreten Fasern F_λ sowie Homöomorphismen $\tau_\lambda : \tilde{U}_\lambda = p^{-1}(U_\lambda) \xrightarrow{\sim} U_\lambda \times F_\lambda$ mit $p_\lambda = q_\lambda \circ \tau_\lambda : \tilde{U}_\lambda \to U_\lambda$. Diese Formulierung ist offensichtlich äquivalent zur oben gegebenen Definition M1A.

In der Sprache der *Bündel* (§J5) sind demnach Überlagerungen $p : \tilde{X} \to X$ genau die lokal-trivialen Bündel mit diskreten Fasern. Sind alle Fasern homöomorph zu F, so ist p ein Faserbündel mit diskreter Faser, also eine Überlagerung mit konstanter Blätterzahl $|F|$.

§M1c. Unzusammenhängende Blätter. Unsere Definition M1A ist zunächst möglichst allgemein formuliert und umfasst daher auch pathologisch anmutende Beispiele:

Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{Q} \times \{\pm 1\} \to \mathbb{Q} : (x, y) \mapsto x$ ist eine triviale Überlagerung. Als Blätter taugen $\tilde{U}_\pm = \mathbb{Q} \times \{\pm 1\}$, aber ebenso $\tilde{V}_\pm = \{\,(x, y) \mid y = \pm \operatorname{sign}(x^2 - 2)\,\}$. Für die Überlagerung ist es gleichgültig, wie die Zerlegung des Urbilds $p^{-1}(U) \subset \tilde{X}$ in Blätter $\tilde{U}_i$ über U vorgenommen wird, lediglich der Homöomorphismus $p_i : \tilde{U}_i \xrightarrow{\sim} U_i$ wird gefordert. Im Allgemeinen gibt es zu p viele verschiedene Trivialisierungen, hier neben $\mathrm{id} : \mathbb{Q} \times \{\pm 1\} \to \mathbb{Q} \times \{\pm 1\}$ etwa $\tau : \mathbb{Q} \times \{\pm 1\} \to \mathbb{Q} \times \{\pm 1\} : (x, y) \mapsto (x, y \operatorname{sign}(x^2 - 2))$.

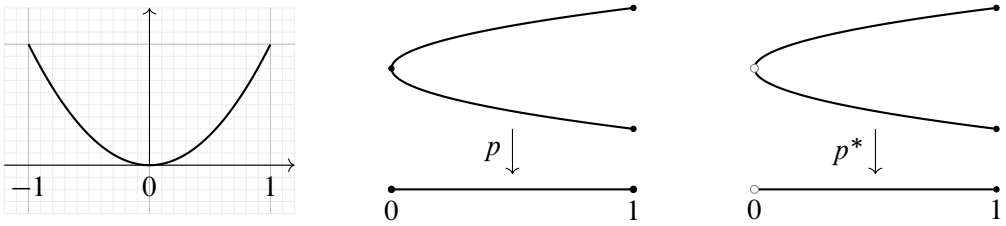
Bemerkung. Die Eindeutigkeit der Zerlegung $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} \tilde{U}_i$ ergibt sich genau dann, wenn die überlagerte Menge U zusammenhängend ist, und somit auch jedes homöomorphe Bild $\tilde{U}_i$: In diesem Fall ist $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} \tilde{U}_i$ die Zerlegung in Komponenten und somit eindeutig (bis auf die willkürliche Wahl der Indizes $i \in I$ zu ihrer Nummerierung).

Manche Autoren fordern daher für Überlagerungen, dass die trivialisierenden Mengen $U \subset X$ zusammenhängend sein sollen. Ist X lokal zusammenhängend, so ist diese Verschärfung immer möglich. Da lokaler Wegzusammenhang später ohnehin benötigt wird, kann man sich von vorneherein auf solche Räume beschränken; Mannigfaltigkeiten, simpliziale und zelluläre Komplexe gehören jedenfalls dazu. Solange es schmerzfrei geht, versuche ich zunächst mit möglichst geringen Voraussetzungen auszukommen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M1d. Erste Beispiele. Definition M1A mag zunächst etwas technisch scheinen, aber ihre Feinheiten sind mit Bedacht gewählt. Folgende Beispiele illustrieren die Subtilität:

Beispiel. Die Projektion $p : [0,1]^2 \to [0,1] : (x,y) \mapsto x$ ist *keine* Überlagerung, denn die Faser $p^{-1}(x) = \{x\} \times [0,1]$ ist nicht diskret. Zwar ist für $x \in U \subset [0,1]$ die Urbildmenge $p^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung von $U_i = U \times \{i\}$ mit $i \in [0,1]$, und auch die Einschränkung $p_i = p|^U_{U_i} : U_i \xrightarrow{\sim} U$ ist ein Homöomorphismus, doch die U_i sind nicht offen in $[0,1]^2$.



Beispiel. Die Abbildung $p : \tilde{X} = [-1,1] \to X = [0,1] : x \mapsto x^2$ ist *keine* Überlagerung. Für die offene Teilmenge $U = [0,1]$ in X ist das Urbild $\tilde{U} = [-1,1]$ offen in $\tilde{X}$ und homöomorph zu U. Irgendein Homöomorphismus $\tilde{U} \xrightarrow{\sim} U$ genügt jedoch nicht, er muss durch p gestiftet werden. Das ist hier unmöglich, denn $|p^{-1}(0)| = 1$ aber $|p^{-1}(x)| = 2$ für $x \neq 0$.

Die Einschränkung $p^* : \tilde{X} \smallsetminus \{0\} \to X \smallsetminus \{0\}$ hingegen ist eine (triviale) Überlagerung!

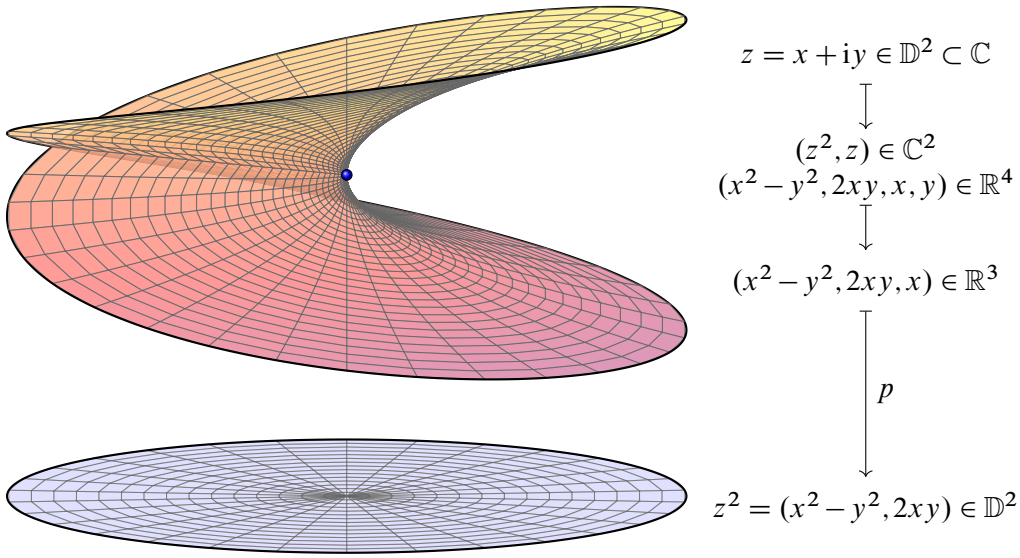


ABBILDUNG M:4. Die Abbildung p ist keine Überlagerung, p^* hingegen schon.

Beispiel. Sei $\mathbb{D}^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$. Die Abbildung $p : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2 : z \mapsto z^2$ ist *keine* Überlagerung. Zwar ist $U = \mathbb{D}^2$ offen in $\mathbb{D}^2$, ebenso das Urbild $\tilde{U} = \mathbb{D}^2$ in $\mathbb{D}^2$, und beide sind homöomorph. Irgendein Homöomorphismus $\tilde{U} \xrightarrow{\sim} U$ genügt jedoch nicht, er muss durch p gestiftet werden. Das ist hier unmöglich, denn $|p^{-1}(0)| = 1$ aber $|p^{-1}(z)| = 2$ für $z \neq 0$.

Die Einschränkung $p^* : \mathbb{D}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{D}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist eine (nicht-triviale) Überlagerung!

§M1e. Die Mutter aller Überlagerungen. Die fundamentalen Beispiele von Überlagerungen sind die komplexe Exponentialfunktion und die komplexe Potenzfunktion:

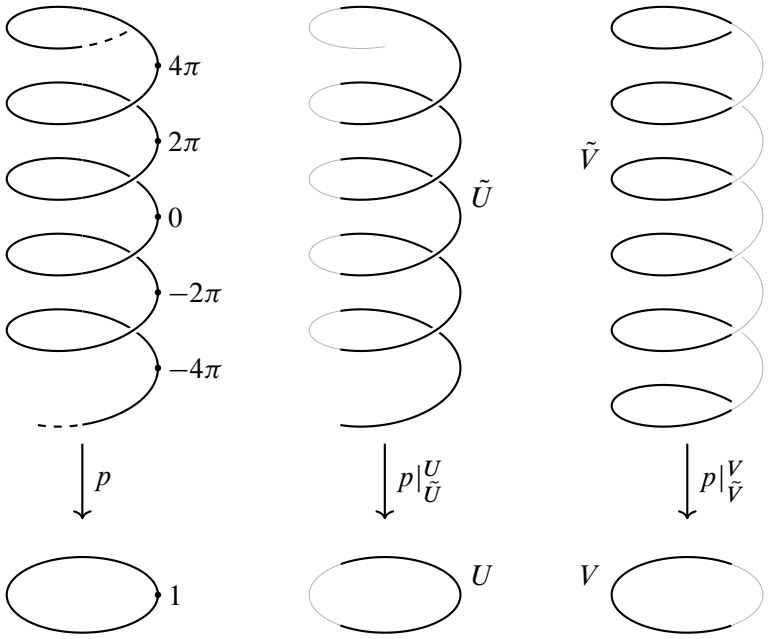


ABBILDUNG M:5. Die Überlagerung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = (\cos t, \sin t)$ (§E2l)

Beispiel M1B. Das Paradebeispiel aus der Analysis ist die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot) \quad \text{mit} \quad \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Dies ist ein stetiger surjektiver Gruppenhomomorphismus mit diskretem Kern

$$\ker(\exp) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \exp(z) = 1 \right\} = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}.$$

Dies ist eine Überlagerung, ebenso die hieraus gewonnene Kreisparametrisierung (§E2l)

$$p : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot) \quad \text{mit} \quad p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t.$$

Die reelle Exponentialfunktion ist ein Homöomorphismus (einblättrige Überlagerung)

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \quad \text{mit Inversem} \quad \ln : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}, +).$$

Alle drei fügen sich zu folgendem kommutativen Diagramm von Überlagerungen.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & & \\
{\scriptstyle\exp}\downarrow & \searrow^{\text{quot}} & \\
\mathbb{C}^\times & \xleftarrow[\cong]{\overline{\exp}} & \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} & & \\
{\scriptstyle p}\downarrow & \searrow^{\text{quot}} & \\
\mathbb{S}^1 & \xleftarrow[\cong]{\bar{p}} & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & \xleftarrow[\cong]{x+\mathrm{i}y \leftarrow\shortmid (x,y)} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\
{\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (x,y)\mapsto (\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y})} \\
\mathbb{C}^\times & \xleftarrow[\cong]{rs \leftarrow\shortmid (r,s)} & \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{S}^1
\end{array}$$

Dies ist die wohlbekannte Polardarstellung komplexer Zahlen $z \in \mathbb{C}^\times$ in der Form $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

✻ **M1B. Die komplexe Exponentialfunktion.** Zur Ausführung wiederholen Sie bitte sorgfältig alle Argumente: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ absolut konvergent. Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar mit $\exp' = \exp$ und erfreut sich folgender Eigenschaften:

(1) Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.
(2) Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$ existiert $z \in \mathbb{C}$ sodass $\exp(z) = w$.
(3) Es existiert $\pi \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass $\exp(z) = 1$ äquivalent ist zu $z \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

Eigenschaft (1) bedeutet, dass $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Dies folgt unmittelbar aus dem Cauchy–Produkt für Potenzreihen. Insbesondere gilt $\exp(z)\exp(-z) = 1$ und somit $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Eigenschaft (2) besagt, dass exp surjektiv ist. Eine lokale Umkehrfunktion erhalten wir durch $\ln : B(1,1) \to \mathbb{C} : 1+z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k/k$, siehe C5I. Eigenschaft (3) besagt, dass der Kern von exp die Untergruppe $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ ist: Genau dann gilt $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, wenn $z_1 - z_2 \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Diese Bedingung legt die Zahl $\pi \in \mathbb{R}_{>0}$ eindeutig fest. Hieraus ergeben sich alle weiteren Eigenschaften: Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ ist reell differenzierbar mit $\exp' = \exp$ und erfreut sich folgender Eigenschaften:

(1) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ und somit $\exp(x) > 0$.
(2) Die Funktion exp ist streng wachsend und streng konkav.
(3) Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv.

Es existiert also eine Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, die *natürliche Logarithmusfunktion*, mit $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $\exp \circ \ln = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$. Sie erfreut sich folgender Eigenschaften:

(1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.
(2) Die Funktion log ist stetig, differenzierbar, und es gilt $\log'(x) = 1/x$.
(3) Die Funktion log ist demnach streng monoton wachsend und streng konkav.

Insbesondere sind $\exp : (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $\ln : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}, +)$ zueinander inverse stetige Gruppenisomorphismen. Auf der imaginären Achse hingegen erhalten wir den Gruppenhomomorphismus

$$p : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot) \quad \text{mit} \quad p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t.$$

Für $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ gilt nämlich $\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, also $|z|^2 = z\overline{z} = 1$ und somit $z \in \mathbb{S}^1$. Die Zerlegung in $\cos t = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ und $\sin t = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ folgt durch Vergleich der Potenzreihen und wird *Euler–Formel* genannt.

Zweige des komplexen Logarithmus. Surjektivität von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ bzw. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ bedeutet: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ können wir in Polarkoordinaten als $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \mathbb{R}$ schreiben. Hierbei ist der *Betrag* $r = |z|$ durch z eindeutig bestimmt, das *Argument* t hingegen nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π. Für $\theta \in \mathbb{R}$ setzen wir $U_\theta := \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ und $\tilde{U}_\theta := \mathbb{R} + \mathrm{i}\cdot]\theta - \pi, \theta + \pi[$. Hierauf ist die Exponentialfunktion ein Homöomorphismus $\exp : \tilde{U}_\theta \xrightarrow{\sim} U_\theta$. Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit $\ln_\theta : U_\theta \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_\theta$ und nennen dies einen *Zweig* des komplexen Logarithmus. Der *Hauptzweig* ist $\ln_0 : \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R} + \mathrm{i}\cdot]-\pi, +\pi[$. Für alle anderen Zweige gilt $U_\theta = U_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ und $\tilde{U}_\theta = \tilde{U}_0 + \mathrm{i}\theta$ sowie $\ln_\theta(z) = \ln_0(z \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) + \mathrm{i}\theta$.

Die Exponentialfunktion ist eine Überlagerung. Wir schreiben $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ mit $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ als $z = \exp(w)$ mit $w = \ln\rho + \mathrm{i}\theta$. Hierüber liegt die Faser $\exp^{-1}(z) = \{\, w + 2\pi\mathrm{i}k \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$. Die offene Umgebung U_θ von z wird trivial überlagert: Es gilt $\exp^{-1}(U_\theta) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{U}_\theta + 2\pi\mathrm{i}k$. Eingeschränkt ist die Exponentialfunktion ein Homöomorphismus $\exp : \tilde{U}_\theta + 2\pi\mathrm{i}k \xrightarrow{\sim} U_\theta$; ihre Umkehrfunktion ist der Zweig $z \mapsto \ln_\theta(z) + 2\pi\mathrm{i}k$. Somit ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ eine Überlagerung. Gleiches gilt für $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ mit $p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$.

Die komplexe Potenzfunktion ist eine Überlagerung. Der Kern der Potenzabbildung $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ mit $p_n(w) = w^n$ wird erzeugt von $\xi_n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$, das heißt $\ker(p_n) = \langle\, \xi_n \,\rangle = \{\, \xi_n^k \mid k = 0, \ldots, n-1 \,\}$. Das bedeutet, genau dann gilt $u^n = v^n$, wenn $v = u\xi_n^k$ gilt. Über jedem Punkt $z = p_n(w)$ liegt also die Faser $p_n^{-1}(z) = \{\, w\xi_n^k \mid k = 0, \ldots, n-1 \,\}$. Aus einer Polardarstellung $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ mit $\rho > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$ erhält man eine n–te Wurzel durch $w = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n}$. Für den Winkel sind verschiedene Wahlen $\theta_k = \theta + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ möglich, und diese führen zu den n verschiedenen Wurzeln $w_k = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n} = w\xi_n^k$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Für $\theta \in \mathbb{R}$ wird die offene Menge $U = \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \{\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mid r > 0,\ \theta - \pi < t < \theta + \pi \,\}$ trivial überlagert: Es gilt nämlich $p_n^{-1}(U) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \tilde{U}_k$ mit $\tilde{U}_0 = \mathbb{R}_{>0} + \frac{\mathrm{i}}{n}\cdot]\theta - \pi, \theta + \pi[$ und $\tilde{U}_k = \tilde{U}_0 + 2\pi\mathrm{i}k/n$, und eingeschränkt ist die Potenzfunktion ein Homöomorphismus $p_n : \tilde{U}_k \xrightarrow{\sim} U$. Somit ist $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ eine Überlagerung. Gleiches gilt für die Einschränkung $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Beispiel M1C. Das Paradebeispiel aus der Algebra ist die komplexe Potenzfunktion

$$p_n : (\mathbb{C}^\times, \cdot) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot) : w \mapsto w^n$$

Dies ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Die Abbildung p_0 ist konstant. Für $n \geq 1$ hingegen ist p_n surjektiv, und der Kern ist die Untergruppe der n–ten Einheitswurzeln

$$\ker(p_n) = W_n := \{\, \xi \in \mathbb{C} \mid \xi^n = 1 \,\} = \{\, \mathrm{e}^{2\pi i k/n} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \,\}.$$

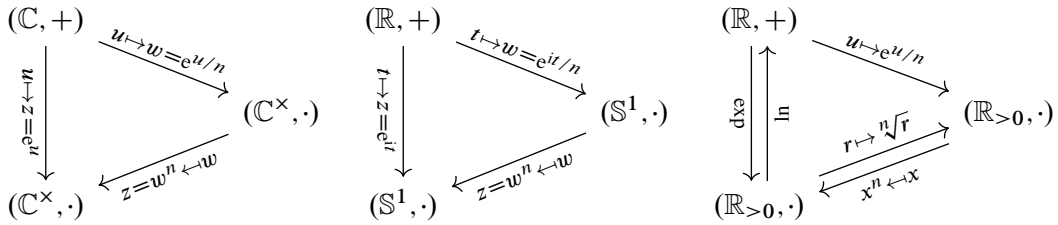
Somit ist p_n eine n–blättrige Überlagerung, ebenso die Einschränkung $p_n : (\mathbb{S}^1, \cdot) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$.

Bemerkung. Komplexe Wurzeln sind nützlich und keineswegs trivial! Alle Studierenden der Mathematik, Natur- und Ingenieurwissenschaften lernen spätestens im ersten Semester die komplexen Zahlen kennen und damit auch die obigen Überlagerungen, wenn auch nicht unter diesem Namen oder gar als abstraktes Konzept. Es gilt zunächst, damit zu rechnen.

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die n–te Wurzel von $z = 0$ ist nur 0 (mit algebraischer Vielfachheit n).

Die n–ten Wurzeln von $z = 1$ sind alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $\xi^n = 1$, also die obige Menge W_n.

Zu einer beliebigen komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ berechnen wir *eine* Wurzel $w \in \mathbb{C}^\times$ mit $w^n = z$ wie folgt: Wir wählen eine Polardarstellung $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \mathbb{R}$ und erhalten $w = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/n}$. Alle weiteren Lösungen sind dann ξw mit $\xi \in W_n$. Wir nutzen somit folgende kommutative Diagramme zur universellen Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$:



Im reellen Fall ist die Abbildung $p : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^n$ ein Homöomorphismus. Als Umkehrfunktion erhalten wir die Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dies ist ein Gruppenautomorphismus $p : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Ebenso sind $\exp : (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $\ln : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}, +)$ zueinander inverse, stetige Gruppenisomorphismen. Das Ziehen der n–ten Wurzel in $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ wird damit ganz einfach zur Division durch n in $(\mathbb{R}, +)$. Das letzte Diagramm für $\exp : (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist topologisch trivial, aber rechnerisch höchst effizient: Die Entwicklung des reellen Logarithmus $\ln : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}, +)$ durch John NAPIER (1550–1617) bietet eine enorme Arbeitserleichterung, die bis in die 1970er Jahre in Form von Tabellenwerken und Rechenschiebern als Handwerkszeug genutzt wurde.

Bemerkung. Als einfachsten Spezialfall betone ich die Quadratabbildung:

- Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist, wie oben gesehen, keine Überlagerung: In jeder Umgebung des Nullpunkts ist p nicht einmal ein lokaler Homöomorphismus.
- Die Abbildung $p : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^2$ ist eine triviale zweiblättrige Überlagerung. Die Wurzelfunktionen $s_\pm = \pm\sqrt{\ } : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ sind stetig und erfüllen $p \circ s_\pm = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^\times}$.
- Im komplexen Fall ist die Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w \mapsto w^2$ stetig und surjektiv aber nicht injektiv: Zu $z = 0$ gibt es ein Urbild, zu jedem $z \in \mathbb{C}^\times$ genau zwei Urbilder $\pm w$.
- Die Abbildung $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : w \mapsto w^2$ ist eine nicht-triviale zweiblättrige Überlagerung. Hier existiert keine stetige Wurzelfunktion $s = \text{„}\sqrt{\ }\text{“} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

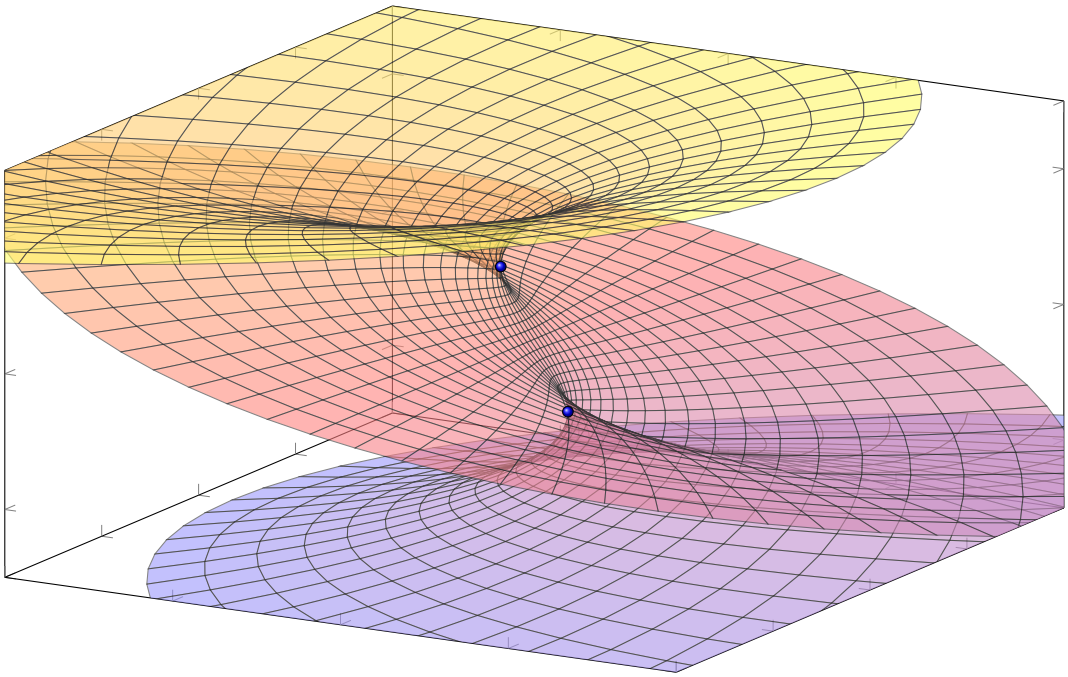


ABBILDUNG M:6. Die verzweigte Überlagerung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^3 - 3z$: Kritische Punkte sind ± 1, da $p'(\pm 1) = 0$; kritische Werte $p(\pm 1) = \pm 2$.

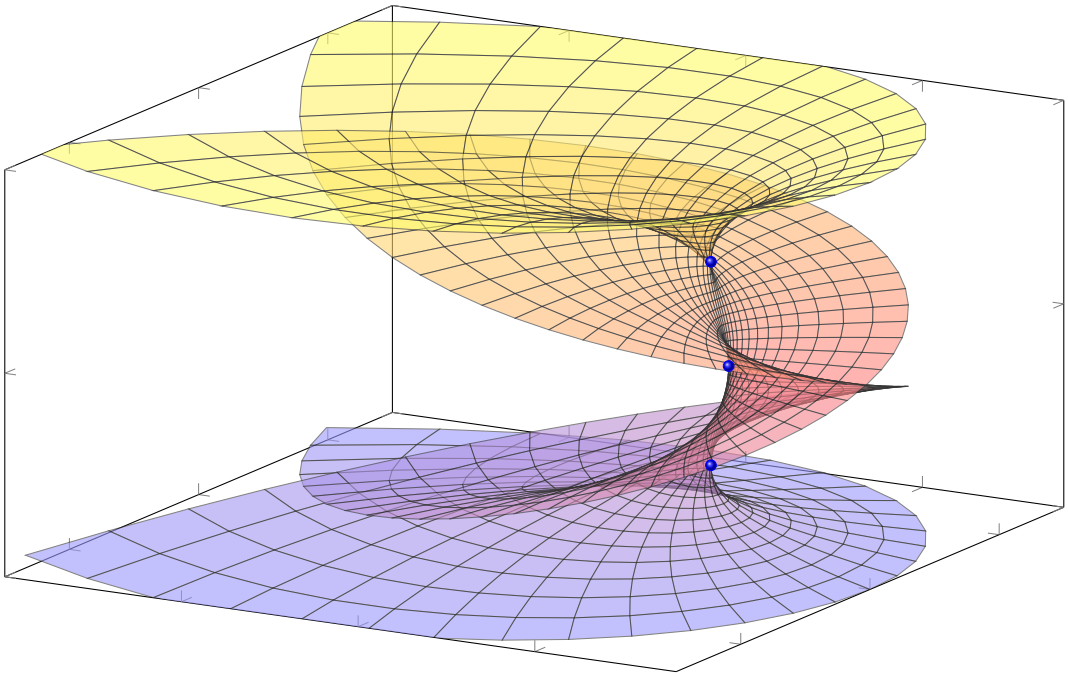


ABBILDUNG M:7. Die Überlagerung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^4 - 2z^2$ verzweigt über den kritischen Werten $\{0, -1\}$. Ihre kritischen Punkte sind $\{0, \pm 1\}$.

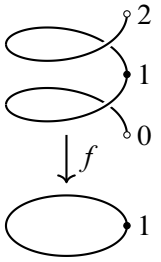
§M1f. Verzweigte Überlagerungen. Die Potenzfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w \mapsto w^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist eine schöne und wichtige Abbildung. Leider ist sie keine Überlagerung im eng gesteckten Sinne unserer Definition M1A, denn keine Umgebung von 0 wird trivial überlagert: Es gilt $p^{-1}(0) = \{0\}$ aber $|p^{-1}(z)| = n$ für alle $z \neq 0$. Die Abbildung p ist vielmehr das Modell einer *verzweigten Überlagerung* wie in Abbildung M:4 gezeigt.

Definition M1D. Sei $p : \tilde{Y} \to Y$ stetig und $X \subset Y$ die Vereinigung aller trivial überlagerten offenen Mengen $U \subset Y$. Ist X dicht in Y, so nennen wir p eine *verzweigte Überlagerung* sowie $Y \smallsetminus X$ den *Verzweigungsort* und $y \in Y \smallsetminus X$ einen *Verzweigungspunkt*.

Beispiel. Sei $q : \mathbb{C} \times \{1, \dots, \ell\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $q(w,k) = w^{n_k}$ wobei $n_1, \dots, n_\ell \geq 1$ und $n = n_1 + \cdots + n_\ell$. Über $\mathbb{C}^\times$ ist dies eine n–blättrige Überlagerung. Über dem Verzweigungspunkt 0 hingegen liegen nur ℓ Urbilder, jeweis mit *Verzweigungsindex* $n_1, \dots, n_\ell$.

Diesen allgemeineren Überlagerungsbegriff verwendet man in der Funktionentheorie und in der algebraischen Geometrie (Formel von Riemann–Hurwitz). Die Überlagerungen im Sinne unserer Definition M1A nennt man dann zur Betonung *unverzweigt*.

§M1g. Lokale Homöomorphismen. Jede Überlagerung ist gemäß M1A ein lokaler Homöomorphismus, aber die Umkehrung gilt nicht:



Beispiel M1E. Die Abbildung $f :]0,2[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist stetig und surjektiv und sogar ein lokaler Homöomorphismus, aber keine Überlagerung. Jede offene Menge $U \subset \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{1\}$ wird trivial (zweiblättrig) überlagert. Aber keine offene Umgebung von 1 wird trivial überlagert!

Mit Kompaktheit ist wie immer alles schöner und einfacher:

Satz M1F. *Sei $f : \tilde{Y} \to Y$ eine stetige Abbildung. Wir nennen $x \in Y$ einen (topologisch)* regulären Wert, *falls f um jedes Urbild $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$ ein lokaler Homöomorphismus ist.*

(1) Ist $f : \tilde{Y} \to Y$ eine stetige Abbildung kompakter Hausdorff–Räume, so wird um jeden regulären Wert $x \in Y$ eine Umgebung trivial überlagert, mit endlicher Blätterzahl.

(2) Dank Einpunktkompaktifizierung gilt dies ebenso für jede eigentliche Abbildung $f : \tilde{Y} \to Y$ lokal-kompakter Hausdorff–Räume.

BEWEIS. (1) Die Menge $\{x\}$ ist abgeschlossen in Y, also die Faser $f^{-1}(x) = \{\tilde{x}_i \mid i \in I\}$! abgeschlossen in $\tilde{Y}$, somit kompakt. Zu jedem Urbild $\tilde{x}_i$ existiert eine offene Umgebung $\tilde{W}_i$ in $\tilde{Y}$ mit $W_i = f(\tilde{W}_i)$ offen in Y, sodass die Einschränkung von f einen Homöomorphismus $f_i : \tilde{W}_i \xrightarrow{\sim} W_i$ stiftet. Insbesondere gilt $f^{-1}(x) \cap \tilde{W}_i = \{\tilde{x}_i\}$, somit ist $\tilde{x}_i$ ein isolierter Punkt in $f^{-1}(x)$. Kompakt und diskret bedeutet endlich. Sei also $I = \{1, \dots, n\}$.

Da $\tilde{Y}$ hausdorffsch ist, können wir $\tilde{W}_i \cap \tilde{W}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ annehmen.

Wir hätten gerne, dass die offene Menge $W := W_1 \cap \cdots \cap W_n$ trivial überlagert wird. Leider ist manchmal $f^{-1}(W)$ nicht ganz in $\tilde{W} := \tilde{W}_1 \cup \cdots \cup \tilde{W}_n$ enthalten: Im obigen Beispiel M1E ist genau dies das tückische Problem! Wir korrigieren dies wie folgt:

Die Menge $V = W \smallsetminus f(\tilde{Y} \smallsetminus \tilde{W})$ ist offen in Y und wird trivial überlagert.

Die Menge $\tilde{A} = \tilde{Y} \smallsetminus \tilde{W}$ ist abgeschlossen in $\tilde{Y}$, also kompakt. Demnach ist ihr Bild $A = f(\tilde{A})$ in Y kompakt, also abgeschlossen. Somit ist $Y \smallsetminus A$ offen, ebenso $V = W \smallsetminus A$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Nach Konstruktion gilt $x \in V$ sowie $f^{-1}(V) \subset \tilde{W}$, also schließlich $f^{-1}(V) = \tilde{V}_1 \cup \cdots \cup \tilde{V}_n$ mit $\tilde{V}_i := f_i^{-1}(V) \subset \tilde{W}_i$ und $f_i : \tilde{V}_i \xrightarrow{\sim} V$, wie gewünscht. □

Korollar M1G. *Sei $f : \tilde{Y} \to Y$ eine eigentliche Abbildung lokal-kompakter Hausdorff–Räume. Sei $\tilde{C} \subset \tilde{Y}$ die Menge der kritischen Punkte $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, in denen f kein lokaler Homöomorphismus ist, und $C = f(\tilde{C})$ die Menge der kritischen Werte. (Genau dann ist f ein lokaler Homöomorphismus ist, wenn $\tilde{C} = C = \emptyset$ gilt.)*

Wir setzen $X := Y \setminus C$ und $\tilde{X} := f^{-1}(X) = \tilde{Y} \setminus f^{-1}(f(\tilde{C}))$. Dann ist die Einschränkung $p = f|_{\tilde{X}}^{X} : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung mit endlicher Blätterzahl. □

Beispiel. Die Potenzabbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ ist stetig und für $n \geq 1$ eigentlich. Für $n \geq 2$ ist sie in 0 kein lokaler Homöomorphismus. Wenn wir diesen kritischen Punkt entfernen, so erhalten wir die Überlagerung $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto z^n$. Allgemein gilt:

Satz M1H. *Jede komplexe Polynomabbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ von Grad $n \geq 1$ mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ist eine verzweigte Überlagerung. Die Verzweigungspunkte sind die kritischen Werte $p(z)$ mit $p'(z) = 0$. Außerhalb dieser endlichen Menge ist p eine n–blättrige (unverzweigte) Überlagerung $p : \mathbb{C} \supset \tilde{X} \to X \subset \mathbb{C}$.*

BEWEIS. Für $n \geq 1$ ist diese Abbildung eigentlich, denn $p(z) \to \infty$ für $z \to \infty$. In jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $p'(z) \neq 0$ ist p ein lokaler Homöomorphismus dank des lokalen Umkehrsatzes (C5Q). Andernfalls ist $p(z+w) = b_0 + b_k w^k + \cdots + b_n w^n$ topologisch äquivalent zur Potenzfunktion $w \mapsto w^k$ mit $k \geq 2$ und somit eine verzweigte Überlagerung (M1D).

Die Menge $C = \{ z \in \mathbb{C} \mid p'(z) = 0 \}$ der kritischen Punkte ist endlich, somit auch die Menge $p(C)$ der kritischen Werte. Daher ist $X = \mathbb{C} \setminus p(C)$ wegzusammenhängend. Wir setzen $\tilde{X} = p^{-1}(X) = \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(C))$. Die Einschränkung $p : \tilde{X} \to X$ ist ein lokaler Homöomorphismus, dank Satz M1F also eine Überlagerung. Die Blätterzahl ist konstant, denn X ist wegzusammenhängend. Hieraus folgt $p(\tilde{X}) = X$, insgesamt also $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Dies impliziert den Fundamentalsatz der Algebra (B3D): Es existiert eine Nullstelle $z_n \in \mathbb{C}$ mit $p(z_n) = 0$. Durch wiederholte Polynomdivision folgt $p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$.

Für jeden Wert $a \in \mathbb{C}$ gilt entsprechend $p(z) - a = (z - z_1^*) \cdots (z - z_n^*)$. Somit hat die Faser $p^{-1}(a) = \{z_1^*, \ldots, z_n^*\}$ genau dann n Elemente, wenn $p'(z_k^*) \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt, also a kein kritischer Wert ist. Somit ist $p : \tilde{X} \to X$ eine n–blättige Überlagerung. □

Bemerkung. Auch für reelle Polynome $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhalten wir nach Entfernen der kritischen Punkte eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$. Allerdings sind hier $X = \mathbb{R} \setminus p(C)$ und $\tilde{X} = p^{-1}(X) = \mathbb{R} \setminus p^{-1}(p(C))$ nicht zusammenhängend und die Blätterzahl von p ist im Allgemeinen nicht konstant, wie einfache Beispiele zeigen:

- Für $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ gilt $p'(x) = 2x$, somit $C = \{0\}$ und $p(C) = \{1\}$ und $p^{-1}(p(C)) = \{0\}$. Wir erhalten also die Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ von $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ durch $\tilde{X} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Blätterzahl über $\mathbb{R}_{>1}$ ist 2, über $\mathbb{R}_{<1}$ hingegen 0.
- Für $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x$ gilt $p'(x) = 3x^2 - 3$, somit $C = \{\pm 1\}$ und $p(C) = \{\pm 2\}$ und $p^{-1}(p(C)) = \{\pm 1, \pm 2\}$. Wir überlagern $X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ durch $\tilde{X} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 2\}$. Die Blätterzahl über $]-2, 2[$ ist 3, aber nur 1 über $]-\infty, -2[$ und $]2, \infty[$.

Entscheidend ist daher, dass $\mathbb{C}$ zusammenhängend bleibt, nachdem wir endlich viele Punkte entfernen. Alle anderen Aussagen gelten ebenso für reelle Polynome $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

§M1h. Geometrische Beispiele. Unser kleiner Beispielfundus an Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexen liefert folgende Beispiele von Überlagerungen:

Beispiel. Ein Paradebeispiel aus der Geometrie ist die Überlagerung $q : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$. Diese entsteht als Quotient aus der Sphäre $\mathbb{S}^n$ durch Identifikation antipodaler Punkte $\pm x$. Dies ist eine zweiblättrige Überlagerung. Da $\mathbb{S}^n$ zusammenhängend ist, ist q nicht trivial.

Bemerkung. Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ mit $k \geq 2$ Blättern und zusammenhängenden Überlagerungsraum $\tilde{X}$ kann nicht trivial sein. Ist nämlich eine k–blättrige Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ trivial, so ist $\tilde{X} \cong X \times \{1, \dots, k\}$ für $k \geq 2$ nicht zusammenhängend.

Beispiel. Ein Paradebeispiel aus der Flächentheorie ist die Überlagerung $q : F_g^+ \to F_g^-$. Die nicht-orientierbare Fläche F_g^- haben wir aus der orientierbaren Fläche F_g^+ erhalten als Quotienten, wobei jeweils gegenüberliegende Punkte identifiziert werden. Dies ist eine zweiblättrige Überlagerung, daher gilt $\chi(F_g^+) = 2\chi(F_g^-) = 2-2g$. Speziell für $g = 0$ haben wir $q : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ wie oben. Für $g = 1$ überlagert der Torus F_1^+ die Kleinsche Flasche F_1^-.

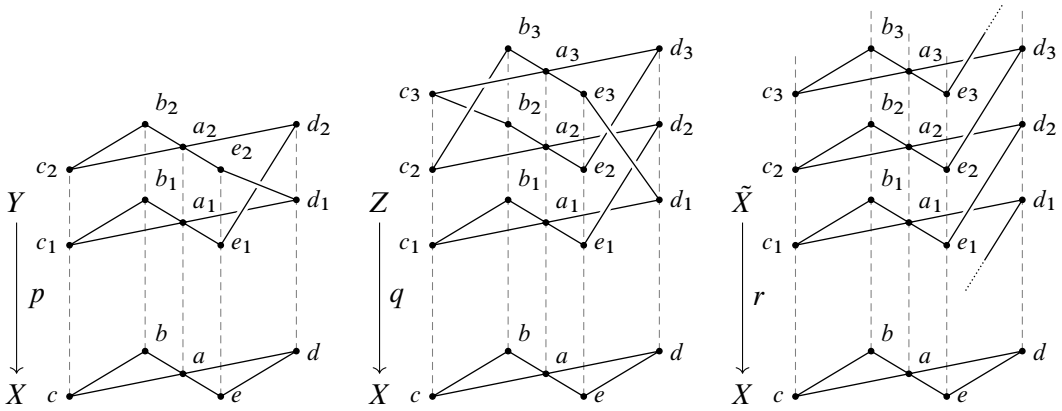


ABBILDUNG M:8. Überlagerungen von Graphen

Beispiel M1I. Abbildung M:8 zeigt drei Graphen X, Y, Z mit simplizialen Abbildungen $p : Y \to X$ und $q : Z \to X$. Dies sind Überlagerungen, denn jeder Eckenstern wird trivial überlagert (M1K). Beide sind zusammenhängend und somit nicht trivial. Die Euler–Charakteristik ist multiplikativ: Hier gilt $\chi(X) = -1$ und $\chi(Y) = -2$ und $\chi(Z) = -3$.

Die Überlagerung p hat eine Symmetrie, indem man die beiden Punkte jeder Faser vertauscht (siehe M:16). Somit gilt $X = Y/\{\pm 1\}$. Entsprechendes gilt für die unendliche Überlagerung $r : \tilde{X} \to X = \tilde{X}/\mathbb{Z}$. Die Überlagerung q hingegen hat keine solche Symmetrie; sie dient uns als einfachstes Beispiel einer nicht normalen Überlagerung.

Beispiel M1J. Wenn wir beim endlichen Graphen X aus Abbildung M:8 die Eckpunkte zu kleinen Kugeln aufdicken ($\cong \mathbb{D}^3$) und die Kanten zu schmalen Vollzylindern ($\cong \mathbb{D}^2 \times [0,1]$), so erhalten wir einen Henkelkörper $N(X)$. Sein Rand $A = \partial N(X)$ ist eine Fläche vom Geschlecht 2, also $\chi = -2$. Entsprechend ist $B = \partial N(Y)$ eine Fläche vom Geschlecht 3, also $\chi = -4$, und $C = \partial N(Z)$ eine Fläche vom Geschlecht 4, also $\chi = -6$. Wir erhalten eine zweiblättrige Überlagerung $B \to A$ und eine dreiblättrige Überlagerung $C \to A$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung M1K. Obiges Beispiel M1I motiviert folgende Definition: Eine *simpliziale Überlagerung* $p : K \to L$ ist eine simpliziale Abbildung, die für jede Ecke a von K den Eckenstern $\mathrm{St}(a,K) := \{\, S \in K \mid \{a\} \cup S \in K \,\}$ bijektiv auf den Eckenstern $\mathrm{St}(p(a),L)$ abbildet. In diesem Falle ist die topologische Realisierung $|p| : |K| \to |L|$ eine Überlagerung. *Warnung:* Im Allgemeinen genügt lokale Homöomorphie nicht, wie Beispiel M1E lehrt.

✻ **M1K.** Zur Ecke $x \in \Omega(L)$ sei $A = \{\, a \in \Omega(K) \mid p(a) = x \,\}$ die Menge der Ecken über x. Für $a \neq a'$ in A gilt $\mathrm{St}(a,K) \cap \mathrm{St}(a',K) = \emptyset$. Andernfalls läge eine Ecke b im Schnitt, also $a,a' \in \mathrm{St}(b,K)$ und wegen $p(a) = p(a') = x$ wäre p auf diesem Stern nicht injektiv. Somit wird der offene Eckenstern $\mathring{\mathrm{st}}(x,L) \subset |L|$ trivial überlagert durch die offenen Eckensterne $\bigsqcup_{a\in A} \mathring{\mathrm{st}}(a,K)$. Da dies für jede Ecke gilt, ist $|p| : |K| \to |L|$ eine Überlagerung, lokal-trivial über der offenen Überdeckung $|L| = \bigcup_{x\in\Omega(L)} \mathring{\mathrm{st}}(x,L)$ durch offene Eckensterne.

Übung M1L.
(1) Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Dann ist zu jedem Teilraum $Y \subset X$ und $\tilde{Y} = p^{-1}(Y)$ die Einschränkung $q = p|^{Y}_{\tilde{Y}} : \tilde{Y} \to Y$ eine Überlagerung.
(2) Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung sowie $\tilde{Y} \subset \tilde{X}$ eine Teilmenge und $Y = p(\tilde{Y})$. Dann ist die Einschränkung $q = p|^{Y}_{\tilde{Y}} : \tilde{Y} \to Y$ im Allgemeinen keine Überlagerung.
(3) Zu jeder Familie $(p_i)_{i\in I}$ von Überlagerungen $p_i : \tilde{X}_i \to X_i$ ist auch ihre Summe $p : \bigsqcup_{i\in I} \tilde{X}_i \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$ mit $p(x,i) = (p_i(x),i)$ eine Überlagerung.
(4) Zu jeder Familie $(p_i)_{i\in I}$ von Überlagerungen $p_i : \tilde{X}_i \to X$ über demselben Raum ist auch $p : \bigsqcup_{i\in I} \tilde{X}_i \to X$ mit $p(x,i) = p_i(x)$ eine Überlagerung.
(5) Ist X lokal (weg)zusammenhängend, so zerfällt $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ in die topologische Summe seiner (Weg)Komponenten X_i. Über jedem Teilraum X_i liegt das Urbild $\tilde{X}_i = p^{-1}(X_i)$, auch $\tilde{X} = \bigsqcup_{i\in I} \tilde{X}_i$ ist eine topologische Summe, und für jedes $i \in I$ ist die Einschränkung $p_i = p|^{X_i}_{\tilde{X}_i} : \tilde{X}_i \to X_i$ eine Überlagerung.
(6) Ist X lokal (weg)zusammenhängend, so können wir X nach Zerlegung wie in (5) als (weg)zusammenhängend annehmen. Auch $\tilde{X}$ ist lokal (weg)zusammenhängend, zerfällt also in die topologische Summe $\tilde{X} = \bigsqcup_{i\in I} \tilde{X}_i$ seiner (Weg)Komponenten $\tilde{X}_i$. Für jedes $i \in I$ ist die Einschränkung $p_i = p|^{X}_{\tilde{X}_i} : \tilde{X}_i \to X$ eine Überlagerung.

Durch Einschränkung auf (Weg)Komponenten können wir somit sowohl den überlagerten Raum X als auch den Überlagerungsraum $\tilde{X}$ als (weg)zusammenhängend annehmen.

Übung M1M. Das Produkt von zwei Überlagerungen $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ wie oben ist eine Überlagerung $p : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ des Torus vermöge $p(t_1,t_2) = (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t_1}, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t_2})$. Gleiches gilt für $p : \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ mit $p(z_1,z_2) = (z_1^k, z_1^\ell)$ mit $k,\ell \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. Allgemein:

(1) Zu jeder Familie $(p_i)_{i\in I}$ von Überlagerungen $p_i : \tilde{X}_i \to X_i$ ist auch ihr Produkt $p : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} \tilde{X}_i$ eine Überlagerung. Die Blätterzahl ist multiplikativ.

Zur Erinnerung: Sei $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ gegeben durch $p(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Für welche n ist p ein Homöomorphismus? Wie lautet die Umkehrfunktion?
(3) Für welche n ist p eine Überlagerung? Wie viele Blätter hat sie?

Sei $p : \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ gegeben durch $p(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$.

(4) Für welche a,b,c,d ist p ein Homöomorphismus? Wie lautet die Umkehrfunktion?
(5) Für welche a,b,c,d ist p eine Überlagerung? Wie viele Blätter hat sie?
(6) Formulieren Sie eine analoge Aussage für $p : (\mathbb{S}^1)^n \to (\mathbb{S}^1)^n$.

Übung M1N. Lokale Eigenschaften übertragen sich bei Überlagerungen $p : \tilde{X} \to X$:

(1) Genau dann ist $\tilde{X}$ lokal (weg)zusammenhängend, wenn X es ist.
(2) Genau dann ist $\tilde{X}$ lokal einfach zusammenhängend, wenn X es ist.
(3) Genau dann ist $\tilde{X}$ lokal zusammenziehbar, wenn X es ist.
(4) Genau dann ist $\tilde{X}$ lokal euklidisch, wenn X es ist.
(5) Genau dann ist $\tilde{X}$ hausdorffsch, wenn X es ist.
(6) Genau dann ist $\tilde{X}$ erstabzählbar, wenn X es ist.

Auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom und Metrisierbarkeit (M1O) übertragen sich:

(7) Hat $\tilde{X}$ eine abzählbare Basis der Topologie, so auch der überlagerte Raum X.
(8) Hat X eine abzählbare Basis der Topologie, so auch jede Komponente von $\tilde{X}$.

✻ **M1N.** Die Aufgaben erfordern Sorgfalt, sind aber leicht. Wir zeigen nur die letzte Behauptung.

(8) *Hochhebung einer abzählbaren Basis:* Sei $X = \bigcup_{U\in\mathscr{U}} U$ eine Überdeckung mit trivial überlagerten offenen Mengen $U \subset X$. Wenn X abzählbare Basis hat, so können wir $\mathscr{U}$ als abzählbar annehmen (D6V). Ist $U \subset X$ trivial überlagert durch $p : \bigsqcup_{i\in I} \tilde{U}_i \to U$, so hat mit U auch jede homöomorphe Kopie $\tilde{U}_i$ eine abzählbare Basis. Alle diese Mengen $\tilde{U}_i$ liefern eine offene Überdeckung $\tilde{X} = \bigcup_{a\in\Omega} \tilde{X}_a$. Diese betrachten wir als Graphen K mit Eckenmenge Ω. Zwei Ecken a, b sind benachbart, wenn $\tilde{X}_a \cap \tilde{X}_b \neq \emptyset$. Diese Graph ist lokal abzählbar: Wenn U und V disjunkt sind, dann auch alle $\tilde{U}_i$ und $\tilde{V}_j$. Andernfalls trifft $\tilde{U}_i$ über U höchstens abzählbar viele $\tilde{V}_j$ über V, denn die Schnittmengen $\tilde{U}_i \cap \tilde{V}_j$ in $\tilde{U}_i$ sind offen und disjunkt. Somit ist jede Komponente C des Komplexes K abzählbar. Sei $\Omega(C)$ ihre Eckenmenge und $\tilde{X}_C = \bigsqcup_{a\in\Omega(C)} \tilde{X}_a$. Dies definiert eine topologische Summe $\tilde{X} = \bigsqcup_{C\in\pi_0(K)} \tilde{X}_C$, und jeder der Räume $\tilde{X}_C$ hat nach Konstruktion eine abzählbare Basis der Topologie. Jede Komponente von $\tilde{X}$ ist Teilraum eines $\tilde{X}_C$, hat also abzählbare Topologie.

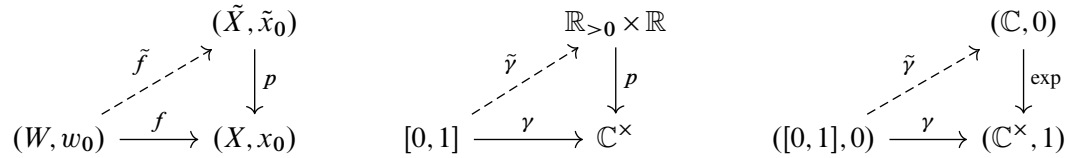
Übung M1O. Sei $f : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, oder allgemeiner ein lokaler Homöomorphismus. Wird der Raum X durch $d : X \times X \to [0,\infty]$ metrisiert, so existiert eine Metrik $d : {\times}X \times {\times}X \to [0,\infty]$, sodass f lokal ein isometrischer Homöomorphismus ist.

✻ **M1O.** Nach Voraussetzung existiert eine offene Überdeckung $\tilde{X} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{X}_\lambda$, sodass $X_\lambda = f(\tilde{X}_\lambda)$ in X offen und die Einschränkung $f_\lambda : \tilde{X}_\lambda \to X_\lambda$ ein Homöomorphismus ist. Wir definieren $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to [0,\infty]$ als Infimum $\tilde{d}(x,y) := \inf \sum_{k=1}^{n} d(f(x_{i-1}), f(x_i))$ über alle Folgen $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ in $\tilde{X}$, sodass $x_{i-1}, x_i \in \tilde{X}_\lambda$ für ein $\lambda \in \Lambda$. Man sieht, dass $\tilde{d}$ symmetrisch ist und der Dreiecksungleichung genügt. Nach Konstruktion gilt zudem $\tilde{d}(x,y) \geq d(f(x), f(y))$ für alle $x, y \in \tilde{X}$. Für $x, y \in \tilde{X}_\lambda$ gilt somit $\tilde{d}(x,y) = d(f(x), f(y))$, das heißt, $f_\lambda : \tilde{X}_\lambda \to X_\lambda$ ist ein isometrischer Homöomorphismus. Da die Mengen $\tilde{X}_\lambda$ offen in $\tilde{X}$ sind, induziert $\tilde{d}$ die vorgegebene Topologie nicht nur auf jedem $\tilde{X}_\lambda$ sondern sogar auf dem gesamten Raum $\tilde{X}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M2. Hochhebung von Wegen und Homotopien

§M2a. Hochhebung. Seien $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ stetige Abbildungen mit gleichem Zielraum. Eine *Hochhebung* von f bezüglich p ist eine Abbildung $\tilde{f} : (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, die stetig ist (!) und $p \circ \tilde{f} = f$ erfüllt. Als Diagramm:

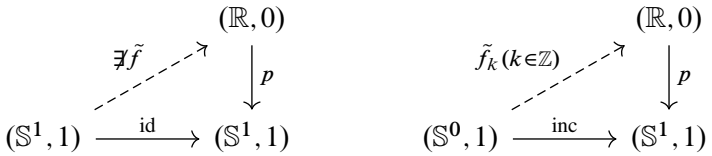


Beispiel M2A. Das Problem stellt sich bereits für Polarkoordinaten $p : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ mit $p(r, \varphi) = r\, e^{i\varphi}$. Den gegebenen Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^\times$ mit Startpunkt $\gamma(0) = r_0\, e^{i\varphi_0}$ wollen wir darstellen als $\gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$. Wir erhalten $r : [0, 1] \to \mathbb{R}_{>0}$ durch $r(t) = |\gamma(t)|$. Zudem möchten wir den Winkel hochheben zu einem stetigen Argument $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit Startwert $\varphi(0) = \varphi_0$. Gemäß Satz M2G ist dies möglich und wegen $r > 0$ auch eindeutig.

Beispiel M2B. Dasselbe Problem begegnet uns bei der Exponentialfuntion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$: Den gegebenen Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^\times$ möchten wir darstellen als $\gamma(t) = e^{\tilde{\gamma}(t)}$ mit einer stetigen Funktion $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Typischerweise sind Anfangswerte gegeben, also $\gamma(0) = e^{\tilde{\gamma}(0)}$. Satz M2G garantiert, dass dann die Hochhebung immer eindeutig möglich ist. In der Notation des vorigen Beispiels gilt dann $\tilde{\gamma}(t) = \ln r(t) + i\varphi(t)$. Dies erfüllt $\gamma = e^{\tilde{\gamma}}$, also „$\tilde{\gamma} = \log \gamma$“, obwohl kein stetiger komplexer Logarithmus $\log : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ existiert.

Beispiel M2C. Gleiches gilt für die Potenzfunktion $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : w \mapsto w^n$ und $n \geq 2$: Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ existieren n verschiedene Wurzeln $w \in \mathbb{C}^\times$ mit $w^n = z$. Wenn wir z bewegen, so wollen wir w stetig mitbewegen: Den Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^\times$ mit Startpunkt $\gamma(0) = z_0$ möchten wir darstellen als $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)^n$ mit einer stetigen Funktion $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Hierzu wählen wir einen Startpunkt $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $w_0^n = z_0$. Satz M2G garantiert, dass dann die Hochhebung von γ zu $\tilde{\gamma}$ immer eindeutig möglich ist. Dies löst „$\tilde{\gamma} = \sqrt[n]{\gamma}$“, obwohl keine stetige komplexe Wurzelfunktion existiert.

Beispiel M2D. Weder Eindeutigkeit noch Existenz von Hochhebungen sind automatisch:

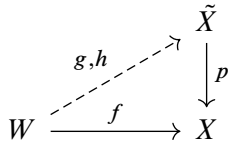


(1) Die Identität $\mathrm{id} : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{S}^1, 1)$ ist nicht nullhomotop (J4A) und erlaubt daher keine Hochhebung bezüglich der Überlagerung $p : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{S}^1, 1) : t \mapsto e^{2\pi i t}$.

(2) Für $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ erlaubt die Inklusion $f : (\mathbb{S}^0, 1) \hookrightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ mehrere Hochhebungen bezüglich p: Zwar ist $\tilde{f}(1) = 0$ festgelegt, aber $\tilde{f}(-1) \in 1/2 + \mathbb{Z}$ ist frei wählbar.

BEWEIS. (1) Jede stetige Abbildung $\tilde{f} : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{R}, 0)$ ist zusammenziehbar vermöge $\tilde{H} : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{H}(t, x) = t\, \tilde{f}(x)$. Gälte $p \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so wäre $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ zusammenziehbar vermöge $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $H = p \circ \tilde{H}$. Das widerspricht J4A. □

§M2b. Eindeutigkeit der Hochhebung. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und W zusammenhängend, so sind Hochhebungen von $f : W \to X$ zu $\tilde{f} : W \to \tilde{X}$ eindeutig:



Proposition M2E. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $f : W \to X$ stetig und $g,h : W \to \tilde{X}$ Hochhebungen, also stetig mit $f = p \circ g = p \circ h$. Dann definieren die beiden Teilmengen*

$$A = \{\, w \in W \mid g(w) = h(w) \,\},$$
$$B = \{\, w \in W \mid g(w) \neq h(w) \,\}$$

eine offene Zerlegung $W = A \sqcup B$. Ist der Raum W zusammenhängend, so bleiben nur zwei Alternativen: Entweder gilt $(A,B) = (W,\emptyset)$ oder $(A,B) = (\emptyset,W)$. Das bedeutet:

- *Gilt $g(w) = h(w)$ für ein $w \in W$, so folgt $g(w) = h(w)$ für alle $w \in W$.*
- *Gilt $g(w) \neq h(w)$ für ein $w \in W$, so folgt $g(w) \neq h(w)$ für alle $w \in W$.*

BEWEIS. Zu $w \in W$ und $f(w) \in X$ sei $U \subset X$ eine trivial überlagerte offene Umgebung: Sei $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} \tilde{U}_i$ eine Zerlegung in offene Mengen $\tilde{U}_i \subset \tilde{X}_i$, und p stiftet Homöomorphismen $p_i : \tilde{U}_i \xrightarrow{\sim} U$. Wegen $pg(w) = ph(w) = f(w)$ existieren $j,k \in I$ mit $g(w) \in \tilde{U}_j$ und $h(w) \in \tilde{U}_k$. Dann ist $V = g^{-1}(\tilde{U}_j) \cap h^{-1}(\tilde{U}_k)$ eine offene Umgebung von w. Nach Konstruktion gilt $g|_V = p_j^{-1} \circ f|_V$ sowie $h|_V = p_k^{-1} \circ f|_V$. Aus $w \in A$ folgt $j = k$ und somit $g|_V = h|_V$, also $V \subset A$. Aus $w \in B$ folgt $j \neq k$ und somit sind $g(V) \subset \tilde{U}_j$ und $h(V) \subset \tilde{U}_k$ disjunkt, also gilt $V \subset B$. Somit sind A und B offen in W. □

Durch Angabe eines Basispunktes erhalten wir folgende Eindeutigkeitsaussage:

Korollar M2F (Eindeutigkeit möglicher Hochhebungen)**.** *Sei $p : (\tilde{X},\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ eine Überlagerung und $f : (W,w_0) \to (X,x_0)$ eine stetige Abbildung. Ist der Raum W zusammenhängend, so existiert zu f höchstens eine Hochhebung: Sind $g,h : (W,w_0) \to (\tilde{X},\tilde{x}_0)$ stetig und erfüllen beide $p \circ g = p \circ h = f$, so gilt $g = h$ dank M2E.* □

Beispiel. Zu $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ betrachten wir die n–fache Überlagerung $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto z^n$. Jeder Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ mit $\gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$ erlaubt die Hochhebungen $\tilde{\gamma}_k : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ mit $\tilde{\gamma}(t) = \sqrt[n]{r(t)}\, e^{i\varphi(t)/n}\, e^{2\pi i k/n}$. Für die Wahl des Startpunktes $\tilde{\gamma}_k(0)$ haben wir n Möglichkeiten: Diese entstehen durch die Operation der n–ten Einheitswurzeln $e^{2\pi i k/n}$ für $k = 0,1,\ldots,n-1$. Nach Festlegung des Startpunktes $\tilde{\gamma}_k(0)$ gilt Eindeutigkeit: Da die Abbildung p lokal-trivial ist, ist zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,1]$ klar, wie der Weg $\tilde{\gamma}$ weitergeht.

Speziell für Wege, $W = [0,1]$, ist das Hochhebungsproblem besonders einfach: Hier gilt zur Eindeutigkeit auch die Existenz von Hochhebungen, wie wir nun zeigen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M2c. Hochhebung von Wegen und Homotopien. Das Hochhebungsproblem lösen wir zunächst im wichtigen Spezialfall von Würfeln $W = [0,1]^n$:

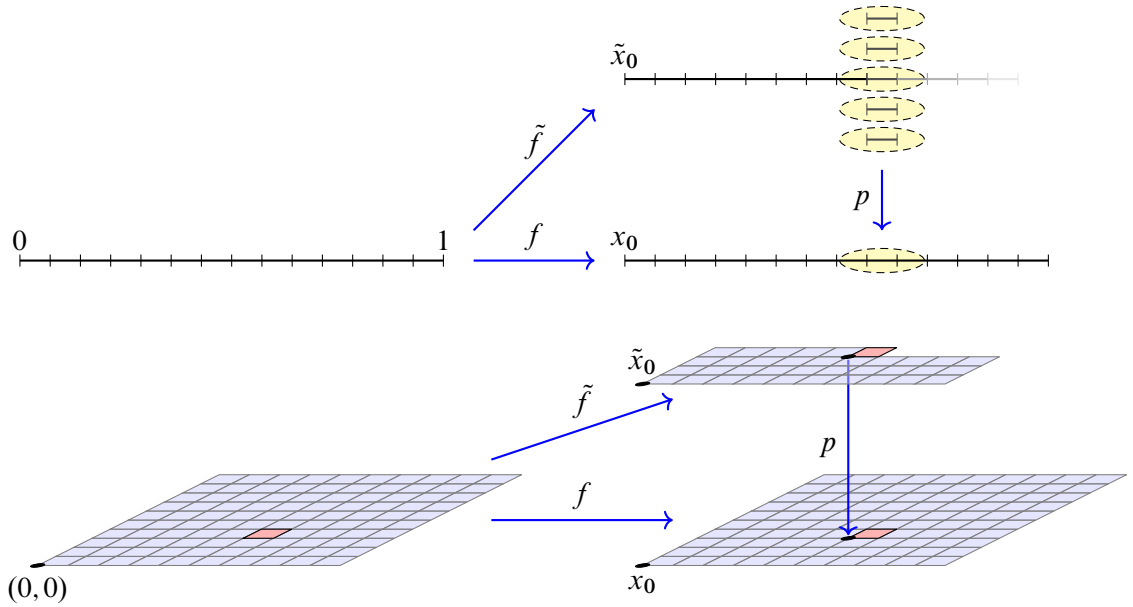


ABBILDUNG M:9. Hochheben von f bezüglich einer Überlagerung p

Satz M2G. *Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann existiert zu jeder stetigen Abbildung $f : ([0,1]^n, 0) \to (X, x_0)$ genau eine Hochhebung $\tilde{f} : ([0,1]^n, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, also eine stetige Abbildung $\tilde{f} : [0,1]^n \to \tilde{X}$ mit Startwert $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ und $p \circ \tilde{f} = f$.*

BEWEIS. Zur Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ existiert eine Überdeckung $X = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$ durch offene Mengen $U \subset X$, die von p trivial überlagert werden: Es gilt $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ mit $\tilde{U}_i \subset \tilde{X}$ offen, und $p_i := p|^U_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \xrightarrow{\sim} U$ ist ein Homöomorphismus.

Zunächst der elementare Fall: Angenommen, das Bild von $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ liegt ganz in einer solchen Menge $U \in \mathscr{U}$. Über x_0 in U liegt $\tilde{x}_0$ in $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$. Für den Index $i \in I$ mit $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}_i$ erfüllt $\tilde{f} := p_i^{-1} \circ f : (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ dann $p \circ \tilde{f} = f$.

Allgemeiner Fall: Wir zerlegen W in kleine Würfel der Kantenlänge $1/N$, also

$$W_k := \left[\frac{k_1-1}{N}, \frac{k_1}{N}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n-1}{N}, \frac{k_n}{N}\right] \quad \ni \quad w_k := \left(\frac{k_1-1}{N}, \ldots, \frac{k_n-1}{N}\right)$$

für $k \in \{1, \ldots, N\}^n$. Da f stetig ist, erhalten wir aus der offenen Überdeckung $X = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$ eine offene Überdeckung $W = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} f^{-1}(U)$. Da W kompakt ist, existiert dank F2E ein $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sodass jeder Würfel W_k in einer der Mengen $f^{-1}(U)$ liegt, also $f(W_k) \subset U$. Dies ist der elementare Fall: Jede Abbildung $f_k := f|_{W_k} : W_k \to X$ lässt sich eindeutig hochheben zu $\tilde{f}_k : W_k \to \tilde{X}$ sobald wir den Startwert $\tilde{f}_k(w_k) \in p^{-1}(f(w_k))$ vorgeben. Ausgehend von f_0 können wir alle f_k eindeutig so hochheben, dass die $\tilde{f}_k$ auf den gemeinsamen Rändern $W_k \cap W_{k'}$ übereinstimmen: Hierzu nutzen wir die Eindeutigkeit der Hochhebung für Würfel der Dimension $n-1$ (M2F). Die Zusammensetzung $\tilde{f} = \bigcup_k \tilde{f}_k$ ist wohldefiniert und stetig nach Verklebesatz E1P. Aus $p \circ \tilde{f}_k = f_k$ für alle k folgt $p \circ \tilde{f} = f$. □

§M2d. Die Homotopie-Hochhebungs-Eigenschaft. Wir können den Hochhebungssatz M2G wie folgt verallgemeinern von Würfeln $[0,1]^n$ auf beliebige Produkte $[0,1]\times W$:

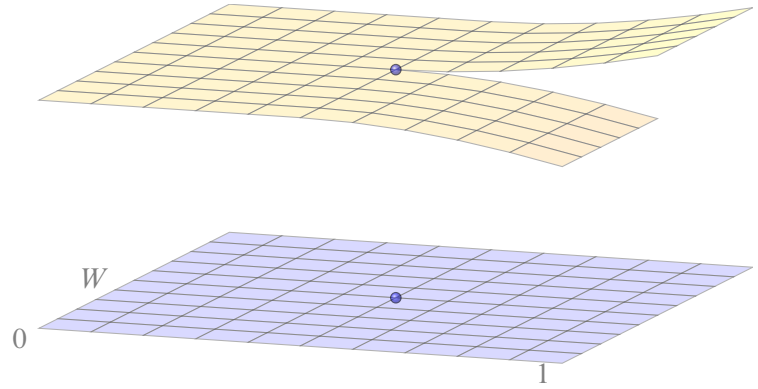
$$\begin{array}{ccc} \{0\}\times W & \xrightarrow{\tilde h_0} & E \\ {\scriptstyle\text{inc}}\big\downarrow & \overset{\exists!\tilde h}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ [0,1]\times W & \xrightarrow{\ h\ } & B \end{array}$$

Satz M2H. *Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung und $h : [0,1]\times W \to B$ eine Homotopie. Zu $h_0 : \{0\}\times W \to B$ sei eine stetige Hochhebung $\tilde h_0 : \{0\}\times W \to E$ gegeben, also $p\circ\tilde h_0 = h_0$. Dann existiert zu $\tilde h_0$ genau eine stetige Fortsetzung $\tilde h : [0,1]\times W \to E$ mit $p\circ\tilde h = h$.*

Anschaulich ist $h_t : W \to B$ eine stetige Bewegung von $h_0 : W \to B$ nach $h_1 : W \to B$. Wir setzen voraus, dass wir den Start h_0 hochheben können zu $\tilde h_0 : W \to E$ mit $p\circ\tilde h_0 = h_0$. Dann können wir der Bewegung h_t in der Überlagerung $p : E \to B$ folgen: Ausgehend von $\tilde h_0$ erhalten wir die Bewegung $\tilde h_t : W \to E$, wie im Satz formuliert.

BEWEIS. Die *Eindeutigkeit* folgt aus dem Hochhebungssatz M2G für Wege: Zu jedem Punkt $w \in W$ existiert genau eine Hochhebung des Weges $h : [0,1]\times\{w\} \to B$ zu einem Weg $\tilde h : [0,1]\times\{w\} \to E$ mit $\tilde h(0,w) = \tilde h_0(w)$ und $p\circ\tilde h(t,w) = h(t,w)$ für alle $t \in [0,1]$.

Zur *Existenz* definieren wir $\tilde h : [0,1]\times W \to E$ genau so durch wegweise Hochhebung. Es bleibt allerdings noch die Stetigkeit in jedem Punkt $(t_0,w_0) \in [0,1]\times W$ nachzuweisen.

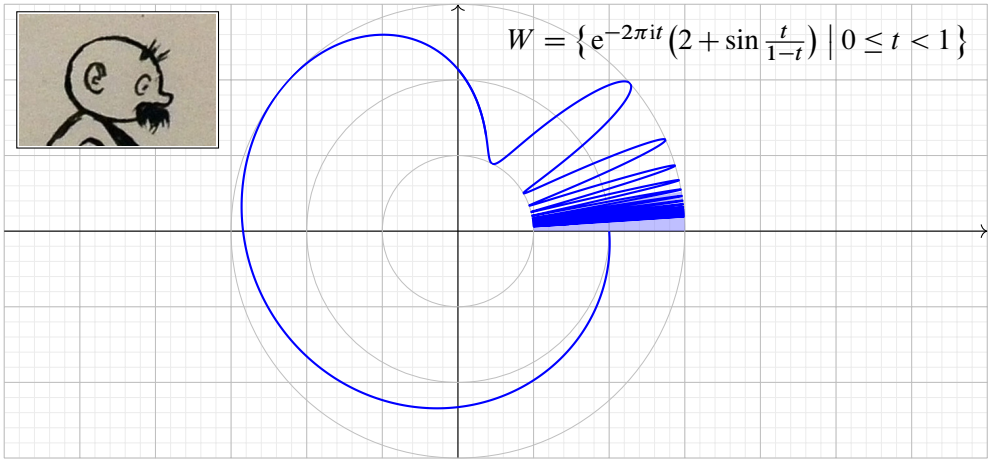


Zu $h(t_0,w_0) \in B$ existiert eine offene Umgebung $U \subset B$ mit lokaler Trivialisierung $\tau : \tilde U = p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U\times F$ wobei $\mathrm{pr}_1\circ\tau = p|U$. Gemäß Produkttopologie existieren offene Umgebungen $t_0 \in J \subset [0,1]$ und $w_0 \in V \subset W$ mit $h(J\times V) \subset U$. Die Komposition $k := \tau\circ\tilde h|_{J\times V} : J\times V \to \tilde U \xrightarrow{\sim} U\times F$ erfüllt $\mathrm{pr}_1\circ k = h|_{J\times V}$, und $f := \mathrm{pr}_2\circ k : J\times V \to F$ ist unabhängig von $t \in J$. Für $(t,w) \in J\times V$ gilt somit $\tilde h(t,w) = \tau^{-1}(h(t,w), f(w))$.

Ist $\tilde h|_{\{t\}\times V}$ stetig für irgendein $t \in J$, so ist auch f stetig und somit auch $\tilde h|_{J\times V}$. Die Umkehrung ist klar: Ist $\tilde h|_{J\times V}$ stetig, so auch die Einschränkung $\tilde h|_{\{t\}\times V}$ für jedes $t \in J$.

Wir fixieren $w_0 \in W$ und betrachten die Menge S aller $t \in [0,1]$, sodass $\tilde h$ stetig in (t,w_0) ist. Die Menge $S \subset [0,1]$ ist offen und abgeschlossen (dank der vorigen Äquivalenz) und enthält 0, also gilt $S = [0,1]$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]



Übung M2I. Aus dem Hochhebungssatz M2H folgt der für Würfel (M2G). Allgemeiner:

(1) Ist W zusammenziehbar, so lässt sich jede stetige Abbildung $f : (W, w_0) \to (B, b_0)$ eindeutig hochheben bezüglich jeder Überlagerung $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$.
(2) Ist X zusammenziehbar, so ist jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ trivial.

Zeigen Sie, dass der Pseudokreis $W \subset \mathbb{C}$ nicht zusammenziehbar ist:

(3) Der Pseudokreis W ist zwar einfach zusammenhängend, also $\pi_0(W) = \{W\}$ und $\pi_1(W, 1) = \{1\}$, dennoch erlaubt er nicht-triviale Überlagerungen $p_n : \tilde{W}_n \to W$.
(4) Wir betrachten die Überlagerung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$. Hat die stetige Abbildung $q : W \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z/|z|$ eine Hochhebung $\tilde{q} : W \to \mathbb{R}$, das heißt stetig mit $p \circ \tilde{q} = q$?

✻ **M2I.** (1) Zusammenziehbar bedeutet, es existiert eine Homotopie $H : [0,1] \times W \to W$ von $H_0 = \text{const}$ nach $H_1 = \mathrm{id}_W$, also von $H(0, w) = w_0$ nach $H(1, w) = w$. Somit ist $h = f \circ H : [0,1] \times W \to B$ eine Homotopie von $h_0(w) = b_0$ nach $h_1 = f$. Den geschlossenen Weg $t \mapsto h_t(w_0)$ von b_0 nach b_0 heben wir hoch zu einem Weg mit dem Endpunkt e_0 und einem Startpunkt $\tilde{e}_0$. Wir definieren die Anfangshochhebung $\tilde{h}_0 : \{0\} \times W \to E$ durch $\tilde{h}_0(0, w) = \tilde{e}_0$. Dank Satz M2H erhalten wir als Hochhebung eine stetige Abbildung $\tilde{h} : [0,1] \times W \to E$ mit $p \circ \tilde{h} = h$. Somit erfüllt $\tilde{f} := \tilde{h}_1$ die Bedingung $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(w_0) = e_0$.

(2) Wir nutzen (1) zur Konstruktion einer Trivialisierung $\tau : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} X \times I$: Wir wählen einen Basispunkt $x_0 \in X$ und betrachten die Faser $p^{-1}(x_0) = \{ \tilde{x}_i \mid i \in I \}$. Zu jedem $i \in I$ heben wir $\mathrm{id} : (X, x_0) \to (X, x_0)$ zu $\sigma_i : (X, x_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_i)$ mit $p \circ \sigma_i = \mathrm{id}_X$. Dank Eindeutigkeit sind die Bilder $\tilde{X}_i = \sigma_i(X)$ disjunkt, also $\tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dank Existenz liegt jeder Punkt von $\tilde{X}$ in einem Bild $\tilde{X}_i$. Jedes ist offen, also ist $\tilde{X} = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ eine offene Zerlegung. Wir definieren $\sigma : X \times I \to \tilde{X}$ durch $\sigma(x, i) = \sigma_i(x)$ und $\tau : \tilde{X} \to X \times F$ durch $\tau(\tilde{x}) = (p(\tilde{x}), i)$ falls $\tilde{x} \in \tilde{X}_i$. Es gilt $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ und $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{X \times F}$.

(3) Wir konstruieren zu jedem $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine zusammenhängende n–blättrige Überlagerung $p_n : \tilde{W} \to W$. Wir nutzen die n–blättrige Überlagerung $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto z^n$. Das Urbild unseres Pseudokreises $W = \{ e^{-2\pi i t}(2 + \sin(t/(1-t))) \mid 0 \leq t < 1 \}$ ist dann die n–fache kreisförmige Wiederholung dieses Musters, genauer $\tilde{W} := p_n^{-1}(W) = \{ e^{-2\pi i (t+k)/n}(2 + \sin(t/(1-t)))^{1/n} \mid 0 \leq t < 1,\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \}$. Die Einschränkung $p_n : \tilde{W} \to W : z \mapsto z^n$ ist dann eine n–blättrige Überlagerung (M1L). Der Überlagerungsraum $\tilde{W}$ ist zusammenhängend: Eine Skizze macht dies plausibel, formal gelingt der Beweis mit G1G und G1I.

(4) Nein! Wir betrachten die Parametrisierung $\gamma : [0,1[\to W : t \mapsto e^{-2\pi i t}(2 + \sin(t/(1-t)))$. Diese Abbildung ist stetig, ebenso die Komposition $g = q \circ \gamma : [0,1[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{-2\pi i t}$. Sie lässt sich bezüglich $p : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{S}^1, 1) : t \mapsto e^{2\pi i t}$ eindeutig hochheben zu $\tilde{g} : [0,1[\to \mathbb{R} : t \mapsto -t$. Angenommen, es gäbe $\tilde{q} : W \to \mathbb{R}$ stetig mit $p \circ \tilde{q} = q$ und $\tilde{q}(1) = 0$. Dann müsste $\tilde{q}(\gamma(t)) = -2\pi i t$ gelten. Somit wäre $\tilde{q}$ im Punkt 1 unstetig.

Dies zeigt, dass W nicht zusammenziehbar ist: Eigenschaft (4) widerspricht (1), und (3) widerspricht (2).

§M2e. Sichtweise als Bündel.

Satz M2J. *(1) Sei $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \{b_0\}$ und $B_1, B_2 \subset B$ abgeschlossen. Ist $p : E \to B$ trivialisierbar über B_1 und über B_2, so auch über B.*

(2) Jedes lokal-trivialisierbare Bündel $p : E \to [0,1]$ ist trivial.

(3) Sei $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \{b_0\}$ und $B_1, B_2 \subset B$ abgeschlossen. Ist $p : E \to B \times C$ trivial über $B_1 \times C$ und $B_2 \times C$, so auch über $B \times C$.

(4) Jedes lokal-trivialisierbare Bündel $p : E \to [0,1]^n$ ist trivial.

BEWEIS. (1) Zu $p_i = p|B_i : E_i \to B_i$ sei $\tau_i : B_i \times F_i \xrightarrow{\sim} E_i$ eine Trivialisierung. Die Faser $p^{-1}(b_0)$ wird dabei auf zwei verschiedene Arten parametrisiert:

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow[u\mapsto\tau_1(b_0,u)]{\cong} & p^{-1}(b_0) \\ \cong\big\downarrow h:=\tau_2(b_0,\cdot)^{-1}\circ\tau_1(b_0,\cdot) & & \big\| \\ F_2 & \xrightarrow[u\mapsto\tau_2(b_0,u)]{\cong} & p^{-1}(b_0) \end{array}$$

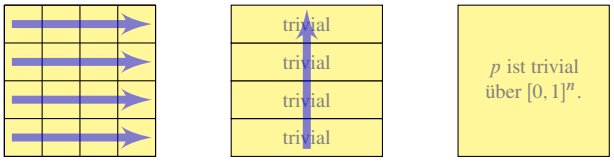
Sei $(\tau_i, \sigma_i) : B_i \times F_i \cong E_i$ eine Trivialisierung von p_i für $i = 1,2$. Durch die obige Umparametrisierung $(h,k) : F_1 \cong F_2$ erhalten wir daraus $\tau_2' = \tau_2 \circ (\mathrm{id}_B \times h) : B_2 \times F_1 \to E_2$ und $\sigma_2' = (\mathrm{id}_B \times k) \circ \sigma_2 : E_2 \to B_2 \times F_1$ mit $(\tau_2', \sigma_2') : B_2 \times F_1 \cong E_2$ und zudem $(\tau_2', \sigma_2') = (\tau_1, \sigma_1)$ auf $\{b_0\} \times F_1$. Ihre Verklebung $(\tau, \sigma) : B \times F_1 \xrightarrow{\sim} E$ trivialisiert p.

(2) Zu p existiert eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $B = [0,1]$, sodass $p|U_i$ trivial ist über jedem $U_i \subset B$. Wir unterteilen B in $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gleichlange Teile $B_i = [(i-1)/\ell, i/\ell]$ für $i = 1, \ldots, \ell$. Ist ℓ groß genug, so ist $p|B_i$ trivial über jedem B_i, dank Lebesgue–Zahl! (F2B) Dank (1) ist p trivial über $B_1 \cup \ldots \cup B_i$ für $i = 1, \ldots, \ell$, also über B.

(3) Zu $B_i^* = B_i \times C$ und $p_i = p|B_i^*$ sei $(\tau_i, \sigma_i) : B_i^* \times F_i \cong E_i$ eine Trivialisierung. Über $B_0^* = \{b_0\} \times C$ wird auf zwei Arten trivialisiert:

$$\begin{array}{ccc} C \times F_1 & \xrightarrow[(c,u)\mapsto\tau_1(b_0,c,u)]{\cong} & p^{-1}(\{b_0\}\times C) \\ \cong\big\downarrow h:=\tau_2(b_0,\cdot)^{-1}\circ\tau_1(b_0,\cdot) & & \big\| \\ C \times F_2 & \xrightarrow[(c,u)\mapsto\tau_2(b_0,c,u)]{\cong} & p^{-1}(\{b_0\}\times C) \end{array}$$

Durch die Umparametrisierung $(h,k) : F_1 \cong F_2$ erhalten wir $\tau_2' = \tau_2 \circ (\mathrm{id}_B \times h) : B_2^* \times F_1 \to E_2$ und $\sigma_2' = (\mathrm{id}_B \times k) \circ \sigma_2 : E_2 \to B_2^* \times F_1$ mit $(\tau_2', \sigma_2') : B_2^* \times F_1 \cong E_2$ und zudem $(\tau_2', \sigma_2') = (\tau_1, \sigma_1)$ auf $B_0^* \times F_1$. Ihre Verklebung $(\tau, \sigma) : B^* \times F_1 \xrightarrow{\sim} E$ trivialisiert p.



(4) Zu p existiert eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $B = [0,1]^n$, sodass $p|U_i$ trivial ist über jedem $U_i \subset B$. Wir unterteilen B in $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ Würfel $B_i = \prod_{k=1}^n [(i_k - 1)/\ell, i_k/\ell]$ für $i \in \{1, \ldots, \ell\}^n$. Ist ℓ groß genug, so ist $p|B_i$ trivial über jedem B_i, dank Lebesgue–Zahl! (F2B) Dank (3) ist p trivial über B, nach obigen Verklebeschema. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M2f. Zurückziehen eines Bündels. Sei $p : E \to B$ ein Bündel $g : B' \to B$ eine beliebige stetige Abbildung. Ihr *Faserprodukt* $E' = B' \times_g E := \{(b', e) \in B' \times E \mid g(b') = p(e)\}$ definiert das *zurückgezogene Bündel* $g^* p := p' : E' \to B' : (b', e) \mapsto b'$ und den Bündelmorphismus $(f, g) : p' \to p$ mit $f : E' \to E : (b', e) \mapsto e$.

$$\begin{array}{ccc} ? & & E \\ & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\ g\ } & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\ f=\mathrm{pr}_2\ } & E \\ \downarrow p'=\mathrm{pr}_1 & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\ g\ } & B \end{array}$$

Satz M2K. *Ist $p : E \to B$ lokal-/trivial, so auch jede Zurückziehung $g^* p : E' \to B'$.*

BEWEIS. (1) Sei $(\tau, \sigma) : B \times F \cong E : (b, u) \leftrightarrows e$ eine Trivialisierung von p. Daraus erhalten wir die Trivialisierung $(\tau', \sigma') : B' \times F \cong E' : (b', u) \leftrightarrows (b', e)$ von p' durch $\tau'(b', u) = (b', \tau(g(b'), u))$ und $\sigma'(b', e) = (b', \mathrm{pr}_2 \sigma(e))$. Ist τ' wohldefiniert? Ja, denn $p(e) = p(\tau(g(b'), u)) = g(b')$. Die Stetigkeit von τ', σ' ist klar, ebenso $p' \circ \tau' = \mathrm{pr}_1$ und $\mathrm{pr}_1 \circ \sigma' = p'$.

$$\begin{aligned} \sigma' \circ \tau' &: (b', u) \mapsto (b', e = \tau(g(b'), u)) \mapsto (b', \mathrm{pr}_2 \sigma(e)) = (b', u), \\ \tau' \circ \sigma' &: (b', e) \mapsto (b', u = \mathrm{pr}_2 \sigma(e)) \mapsto (b', \tau(g(b'), u)) \\ &\qquad = (b', \tau(p(e), \mathrm{pr}_2 \sigma(e))) = (b', \tau(\sigma(e))) = (b', e). \end{aligned}$$

Somit ist (τ', σ') ein Bündelisomorphismus $B' \times F \cong E'$, wie behauptet.

(2) Ist p trivial über $U \subset B$, so ist p' trivial über $U' = g^{-1}(U) \subset B'$. □

Satz M2L. *Sei $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine lokal-triviales Bündel. Zu jeder stetigen Abbildung $g : ([0,1]^n, 0) \to (B, b_0)$ existiert eine Hochhebung $\tilde{g}$ über p, also eine stetige Abbildung $\tilde{g} : ([0,1]^n, 0) \to (E, e_0)$ mit $p \circ \tilde{g} = g$.*

BEWEIS. Das zurückgezogene Bündel $p' = g^* p : E' \to [0,1]^n$ ist lokal-trivial dank M2K, somit trivial dank M2J: Es existiert also eine Trivialisierung $\tau : [0,1]^n \times F \xrightarrow{\sim} E'$ mit $(0, u_0) \mapsto (0, e_0)$.

$$\begin{array}{ccccc} [0,1]^n \times F & \xrightarrow{\ \tau\ } & E' & \xrightarrow{\ f=\mathrm{pr}_2\ } & E \\ \uparrow \downarrow \mathrm{pr}_1 & & \downarrow p'=\mathrm{pr}_1 & & \downarrow p \\ [0,1]^n & = & [0,1]^n & \xrightarrow{\ g\ } & B \end{array}$$

Die Abbildung $\tilde{g} : [0,1]^n \to E$ mit $\tilde{g}(x) = \mathrm{pr}_2 \tau(x, u_0)$ ist stetig, erfüllt $\tilde{g}(0) = e_0$ und $p \circ \tilde{g}(x) = p \circ \mathrm{pr}_2 \tau(x, u_0) = g(x)$. □

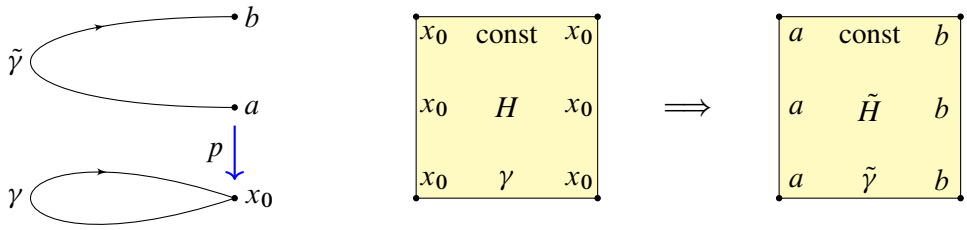
Bemerkung. Daraus folgt insbesondere der obige Satz M2G als schöner Spezialfall: Die Existenz gilt für jedes lokal-triviales Bündel, dank Satz M2L. Das ist eine nützliche Eigenschaft, die wir weiter nutzen können. Die Eindeutigkeit ist eine besondere Eigenschaft von Überlagerungen, gemäß M2E: Da die Faser diskret ist, hat eine weitere Hochhebung keine Möglichkeit abzuweichen. Genau dies zeigt unser obiger Beweis.

§M2g. Erste Anwendungen. Die Hochhebung von Wegen und Homotopien stiftet den grundlegenden Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ und Überlagerungen $p:(\tilde X,\tilde x_0)\to(X,x_0)$. Bevor wir diesen zu einer allgemein Theorie und schließlich zur Galois–Korrespondenz ausbauen, möchte ich schon jetzt eine Folgerung betonen:

Korollar M2M. *(1) Sei $p:\tilde X\twoheadrightarrow X$ eine Überlagerung. Ist $\tilde X$ wegzusammenhängend und X einfach zusammenhängend, so ist p ein Homöomorphismus.*

(2) Ist X lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend, so ist jede Überlagerung $p:\tilde X\twoheadrightarrow X$ trivial gemäß $\tau:X\times F\xrightarrow{\sim}\tilde X$ mit $p\circ\tau(x,y)=x$.

BEWEIS. (1) Nach Voraussetzung ist p surjektiv (M1A). Es genügt zu zeigen, dass p injektiv ist. Seien $a,b\in\tilde X$ zwei Punkte mit gleichem Bild $p(a)=p(b)=:x_0$. Nach Voraussetzung ist $\tilde X$ wegzusammenhängend. Daher existiert ein Weg $\tilde\gamma:[0,1]\to\tilde X$ von $\tilde\gamma(0)=a$ nach $\tilde\gamma(1)=b$. Sein Bild $\gamma=p\circ\tilde\gamma:[0,1]\to X$ ist somit eine Schleife in (X,x_0).



Nach Voraussetzung ist X einfach zusammenhängend. Daher existiert eine Homotopie $H:\gamma\simeq\text{const}$, also eine stetige Abbildung $H:[0,1]^2\to X$ mit $H(0,t)=\gamma(t)$ sowie $H(0,t)=H(s,0)=H(s,1)=x_0$ für alle $s,t\in[0,1]$. Dank M2G existiert eine Hochhebung zu einer stetigen Abbildung $\tilde H:[0,1]^2\to\tilde X$ mit $p\circ\tilde H=H$ und Startpunkt $\tilde H(0,0)=a$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Hochhebung (M2F) erhalten wir für die Randwege das obige Bild: Hieraus folgt $a=b$. Somit ist p injektiv, insgesamt also ein Homöomorphismus.

(2) Mit X ist auch $\tilde X$ lokal wegzusammenhängend (M1N). Daher zerfällt $\tilde X=\bigsqcup\pi_0(\tilde X)$ in die topologische Summe seiner Wegkomponenten (G3C). Für $\tilde X_i\in\pi_0(X)$ erhalten wir durch Einschränkung $p_i:\tilde X_i\to X$ eine Überlagerung (M1L). Dank (1) ist p_i ein Homöomorphismus. Demnach ist $p:\tilde X=\bigsqcup\pi_0(\tilde X)\twoheadrightarrow X$ eine triviale Überlagerung. □

Beispiel. Es gibt nicht-triviale Überlagerungen $p:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ und $p:\mathbb{R}^2\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{R}^2\smallsetminus\{0\}$, zum Beispiel die komplexe Quadratabbildung $z\mapsto z^2$ oder allgemein $z\mapsto z^n$ mit $|n|\geq 2$.

Hingegen ist jede Überlagerung $p:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ oder $p:\mathbb{R}^3\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{R}^3\smallsetminus\{0\}$ trivial, denn der Basisraum $\mathbb{S}^2\simeq\mathbb{R}^3\smallsetminus\{0\}$ ist einfach zusammenhängend (L2U).

Ebenso ist für $n\geq 3$ jede Überlagerung $p:\tilde X\to\mathbb{S}^{n-1}$ trivial, ebenso $p:\tilde X\to\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}$.

Diese einfache Beobachtung hat erstaunliche algebraische Konsequenzen, wie der Satz von Gelfand–Mazur (M2O) und der Satz von Hopf (M2Q) eindrücklich zeigen.

Bemerkung. Die Galois–Korrespondenz beinhaltet die Umkehrung zu M2M: Genau dann ist X einfach zusammenhängend, wenn jede Überlagerung $p:\tilde X\twoheadrightarrow X$ trivial ist.

Bemerkung. Auf den lokalen Wegzusammenhang des Basisraumes X (und damit des Überlagerungsraumes $\tilde X$) können wir in M2M nicht verzichten. Der Pseudokreis $W\subset\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend, erlaubt aber nicht-triviale Überlagerungen $p:\tilde W\to W$ (M2I).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M2h. Der Satz von Gelfand–Mazur. Zur Erinnerung: Die reelle Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{R}, +, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ ist ein Gruppenisomorphismus und Diffeomorphismus.

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{C}, +, 0) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$, lokaler Diffeomorphismus und universelle Überlagerung.

Sei $(A, \cdot, 1)$ über $\mathbb{R}$ eine Banach–Algebra mit Eins. Die Gruppe $A^\times$ der invertierbaren Elemente ist offen in A (C5H). Für jedes Element $x \in A$ konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut und somit auch in A (C5I). Für alle $x, y \in A$ mit $xy = yx$ gilt $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$. Insbesondere folgt $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$. Somit ist $\exp(x)$ in A invertierbar, und es gilt $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$. Die Funktion $\exp : A \to A^\times$ ist stetig, sogar $\mathscr{C}^\infty$. Für jedes Element $x \in A$ mit $|x| < 1$ konvergiert die Logarithmusreihe

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

absolut und somit auch in A. Die Funktion $\ln : B(1,1) \to A$ ist stetig, sogar $\mathscr{C}^\infty$. Es gilt $\exp'(x) = \exp(x)$ und $\ln'(a) = a^{-1}$. Für alle $a \in B(1,1)$ folgt hieraus $\exp(\ln(a)) = a$ (C5I). Somit ist $\exp : (A, 0) \to (A^\times, 1)$ ein lokaler Diffeomorphismus um 0.

Für jede *kommutative* Banach–Algebra ist die Situation besonders schön (C5I), so wie wir dies bereits von $\exp : (\mathbb{R}, +, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ und $\exp : (\mathbb{C}, +, 0) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$ kennen:

Satz M2N. *Für jede kommutative Banach–Algebra $(A, +, 0, \cdot, 1)$ gilt:*

(1) $\exp : (A, +, 0) \to (A^\times, \cdot, 1)$ *ist ein Gruppenhomomorphismus mit diskretem Kern.*
(2) Die Bildmenge ist $\exp(A) = A_1^\times$*, die (Weg)Komponente des Einselements in* $A^\times$*.*
(3) $\exp : (A, 0) \to (A_1^\times, 1)$ *ist lokaler Diffeomorphismus und universelle Überlagerung.*

Aus diesen analytischen Eigenschaften gewinnen wir eine algebraische Folgerung:

Satz M2O (Gelfand–Mazur)**.** *Ist eine Banach–Algebra A ein Körper, so ist* $\dim_{\mathbb{R}}(A) \geq 3$ *unmöglich. Es bleibt nur* $\dim_{\mathbb{R}}(A) \in \{1, 2\}$*, folglich ist A isomorph zum Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.*

BEWEIS. Aus $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$ folgt $A \cong \mathbb{R}$ dank B4D. Aus $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$ folgt $A \cong \mathbb{C}$ dank B4E. Sei nun $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 3$. Wir werden zeigen, dass dieser Fall nicht vorkommen kann.

Da A ein Körper ist, gilt $A^\times = A \smallsetminus \{0\}$. Im Falle $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 3$ ist $A^\times$ einfach zusammenhängend (L2U). Somit ist die Überlagerung $\exp : (A, +) \to (A^\times, \cdot)$ ein Homöomorphismus (M2M). Sie ist dann insbesondere ein Gruppenisomorphismus. Diese Gruppen sind aber nicht isomorph: In der Gruppe $(A^\times, \cdot)$ hat das Element -1 die Ordnung 2, denn $-1 \neq 1$ und $(-1)^2 = 1$. Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $(A, +)$ hingegen gibt es außer 0 keine Elemente endlicher Ordnung. An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 3$. □

Bemerkung. Wir haben den Satz von Gelfand–Mazur mit der Überlagerung $\exp : A \to A^\times$ bewiesen. Es gelingt ebenso mit der Quadratabbildung $q : A^\times \to A^\times : x \mapsto x^2$. Diese ist eine zweifache Überlagerung (M2S), im Falle $\dim_{\mathbb{R}}(A) \geq 2$ zusammenhängend, und für $\dim_{\mathbb{R}}(A) \geq 3$ einfach zusammenhängend, also wie gesehen unmöglich. Versuchen Sie dies als Übung! Wir führen diesen Beweisgang für den nachfolgenden Satz von Hopf aus.

§M2i. Der Satz von Hopf. Viele unserer topologischen Konstruktionen gründen auf dem Körper $(\mathbb{R},+,\cdot)$ der reellen Zahlen und dem Körper $(\mathbb{C},+,\cdot)$ der komplexen Zahlen sowie dem hierauf entfalteten Zusammenspiel von Algebra und Topologie.

Die Algebra hat topologische Konsequenzen, wie das folgende Beispiel illustriert:

Satz M2P. *In Dimension $n \geq 2$ gilt $\mathbb{RP}^n \ncong \mathbb{S}^n$. In Dimension 1 hingegen gilt $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$: Die Quadratabbildung $q : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^2$ induziert $\bar{q} : \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 : \{\pm z\} \mapsto z^2$.*

BEWEIS. Für $n \geq 2$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend, also $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = \{1\}$. Für den projektiven Raum hingegen gilt $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) = \mathbb{Z}/2$ (M4I). Dies zeigt $\mathbb{RP}^n \ncong \mathbb{S}^n$.

Für $n = 1$ nutzen wir $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ und die komplexe Multiplikation. Die Quadratabbildung q ist stetig und surjektiv (C3W). Aus $z = \pm w$ folgt $z^2 = w^2$. Umgekehrt gilt $q(z) = q(w)$ genau dann, wenn $z = \pm w$: Aus $z^2 = w^2$ folgt $0 = z^2 - w^2 = (z-w)(z+w)$, da $\mathbb{C}$ kommutativ ist, also $z = w$ oder $z = -w$, da $\mathbb{C}$ nullteilerfrei ist.

Auf $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{S}^1/\{\pm 1\}$ induziert q die stetige Bijektion $\bar{q} : \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 : \{\pm z\} \mapsto z^2$ (E2H). Da $\mathbb{RP}^1$ kompakt und $\mathbb{S}^1$ hausdorffsch ist, ist $\bar{q}$ ein Homöomorphismus (F1L). □

Die Topologie hat algebraische Konsequenzen, wie der folgende Satz eindrücklich zeigt:

Satz M2Q (Hopf)**.** *Sei $(A,+,\cdot)$ eine endlich-dimensionale $\mathbb{R}$–Algebra mit Einselement.*

(1) Ist $(A,+,\cdot)$ assoziativ, kommutativ und nullteilerfrei, dann ist $(A,+,\cdot)$ ein Körper, zudem gilt $\dim_{\mathbb{R}} A \in \{1,2\}$ und somit $(A,+,\cdot) \cong (\mathbb{R},+,\cdot)$ oder $(A,+,\cdot) \cong (\mathbb{C},+,\cdot)$.

(2) Ist $(A,+,\cdot)$ nur kommutativ und nullteilerfrei, so gilt dieselbe Schlussfolgerung. Die Assoziativität wird hier also nicht gefordert sondern gefolgert!

Aussage (1) zeigt erneut den Fundamentalsatz der Algebra (B3D). Die bemerkenswerte Verschärfung (2) bewies Heinz HOPF 1940. Er formulierte dies wie folgt:

„Auch wenn man die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation nicht ausdrücklich postuliert, ist der Körper der komplexen Zahlen der einzige kommutative Erweiterungskörper endlichen Grades über dem Körper der reellen Zahlen."

Zur Erinnerung an die hier verwendeten Begriffe siehe B4A.

BEWEIS. (2) Sei $n := \dim_{\mathbb{R}} A < \infty$. In Dimension $n = 1$ gilt $(A,+,\cdot) \cong (\mathbb{R},+,\cdot)$ dank B4D. In Dimension $n = 2$ gilt $(A,+,\cdot) \cong (\mathbb{C},+,\cdot)$ dank B4E. Im Folgenden sei $n \geq 2$.

Wir können $A = \mathbb{R}^n$ annehmen und das Produkt von A übertragen zu $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dies ist eine $\mathbb{R}$–bilineare Abbildung und somit stetig bezüglich der euklidischen Topologie.

Wie im Satz M2P nutzen wir die Quadratabbildung $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x^2 := x \cdot x$. Sie ist stetig und identifiziert gegenüberliegende Punkte, denn $q(-x) = q(x)$. Ist $(A,\cdot)$ kommutativ und nullteilerfrei, so gilt $q(x) = q(y)$ nur für $x = \pm y$: Aus $x^2 = y^2$ folgt $x^2 - y^2 = 0$, somit $(x-y)(x+y) = x^2 + x\cdot y - y\cdot x - y^2 = 0$, also $x = y$ oder $x = -y$.

Wir betrachten die Abbildung $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x^2/|x^2|$. Auf dem Quotienten $\mathbb{RP}^{n-1}$ induziert f die stetige Injektion $\bar{g} : \mathbb{RP}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} : \{\pm x\} \mapsto x^2/|x^2|$ (E2H).

Da $\mathbb{RP}^{n-1}$ und $\mathbb{S}^{n-1}$ zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeiten derselben Dimension $n-1$ sind, ist $\bar{g}$ surjektiv (M2R). Da $\mathbb{RP}^{n-1}$ kompakt und $\mathbb{S}^{n-1}$ hausdorffsch ist, ist $\bar{g}$ ein Homöomorphismus (F1L). Dies ist nur für $n = 2$ möglich (M2P). □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Im Beweis von M2Q nutzen wir die Invarianz des Gebietes zu folgender Anwendung:

Satz M2R. *Seien X, Y Mannigfaltigkeiten derselben Dimension, $X \neq \emptyset$ geschlossen und Y zusammenhängend. Dann ist jede stetige Injektion $h : X \to Y$ ein Homöomorphismus.*

BEWEIS. Da X kompakt und Y hausdorffsch ist, ist h abgeschlossen (F1L). Dank der topologischen Invarianz des Gebietes ist h offen (K1R). Insbesondere ist $h(X) \neq \emptyset$ offen und abgeschlossen in Y, dank Zusammenhang also $h(X) = Y$. Somit ist $h : X \to Y$ eine stetige Bijektion, sogar ein Homöomorphismus da offen / abgeschlossen. □

Die Invarianz des Gebietes (K1R) ist ein tiefliegender topologischer Satz. Wir können ihn umgehen und alternativ den lokalen Umkehrsatz der Differentialrechnung verwenden:

Satz M2S. *Sei $(A, +, \cdot)$ eine $\mathbb{R}$–Algebra mit Einselement, kommutativ und nullteilerfrei, mit $2 \leq \dim_{\mathbb{R}} A < \infty$. Dann ist die Quadratabbildung $q : A \to A : x \mapsto x \cdot x$ surjektiv. Genauer gilt: Die Einschränkung $q : A^* \to A^*$ ist eine zweifache Überlagerung.*

Für $A = \mathbb{C}$ ist dies die vertraute zweifache Überlagerung $q : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto z^2$.

BEWEIS. Wie zuvor können wir $A = \mathbb{R}^n$ annehmen. Es gilt $q(a + x) = a^2 + 2a \cdot x + x^2$. Daher ist die Abbildung q differenzierbar und ihre Ableitung an der Stelle $a \in A$ ist die lineare Abbildung $q'(a) : A \to A : x \mapsto 2a \cdot x$. Da $(A, \cdot)$ nullteilerfrei ist, ist $q'(a)$ injektiv für jedes $a \neq 0$. Dank $\dim_{\mathbb{R}} A < \infty$ ist $q'(a)$ dann sogar bijektiv. Die Menge $A^* = A \smallsetminus \{0\}$ ist offen in A. Dank des lokalen Umkehrsatzes C5Q ist $q : A^* \to A^*$ ein lokaler Diffeomorphismus, insbesondere also ein lokaler Homöomorphismus. Dank M1F ist $q : A^* \to A^*$ eine (zweifache) Überlagerung. Insbesondere ist sie surjektiv, somit auch $q : A \to A$. □

Bemerkung. Der Satz von Hopf (M2Q) ist verblüffend: Auf eine einfache algebraische Frage gibt er eine einfache algebraische Antwort, doch sein Beweis ist topologisch.

Können wir bei der Charakterisierung von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ weitere Forderungen weglassen?

Lassen wir die Endlichkeit der Dimension fallen, so erlaubt der Körper $\mathbb{R}$ unendlich-dimensionale Erweiterungen, etwa den Polynomring $\mathbb{R}[X_i : i \in I]$ in den Variablen $(X_i)_{i \in I}$ oder den zugehörigen Bruchkörper $\mathbb{R}(X_i : i \in I) = \{\, p/q \mid p, q \in \mathbb{R}[X : i \in I] \,\}$ der rationalen Funktionen. Endlich-dimensionale Körpererweiterungen oder auch nur kommutative Divisionsalgebren mit Eins gibt es hingegen nur zwei, nämlich $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (M2Q).

Erlauben wir Nullteiler, so zeigt B4E als weitere $\mathbb{R}$–Algebra $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ schon in Dimension 2. Die Situation in höherer Dimension ist eher unübersichtlich aber durchaus interessant.

Erlauben wir auch nicht-kommutative Divisionsalgebren, so existieren über die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ hinaus zwei weitere Beispiele: die Quaternionen $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, die von Hamilton konstruiert wurden, und die Oktaven $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$, auch Oktonionen oder Cayley–Zahlen genannt. Für $\mathbb{H}$ ist die Multiplikation noch assoziatitiv, für $\mathbb{O}$ gilt dies nicht mehr.

Gibt es neben $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ noch weitere endlich-dimensionale Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$? Heinz HOPF zeigte 1940, dass die Dimension eine Potenz von 2 sein muss. Michel KERVAIRE und John MILNOR zeigten 1958, dass die Dimension nur $1, 2, 4, 8$ sein kann. Damit sind alle endlich-dimensionalen Divisionsalgebren mit Einselement klassifiziert.

Diese rein algebraische Frage lässt sich mit topologischen Hilfsmitteln lösen – und soweit bekannt auch nur zusammen mit der Topologie und nicht mit der Algebra allein. Mehr hierzu erklärt das schöne Buch *Zahlen* von Ebbinghaus *et al* (Springer, 1992).

§M2j. Der Satz von MacBeath: von Operation zu Präsentation. Zu einer vorgegebenen Gruppe $(G,\cdot,1)$ möchten wir möglichst systematisch eine Präsentation $G \cong [\,S \mid R\,]$ durch Erzeuger S und Relationen $R \subset S^* \times S^*$ konstruieren.

Beispiel. Die einfachste Möglichkeit ist zunächst, wenn auch recht ineffizient, die *globale Verknüpfungstafel* $\cdot : G \times G \to G : (g,h) \mapsto gh$ als eine Präsentation (S,R) zu lesen, wobei

$$S := \{\, s_g \mid g \in G \,\} \qquad \text{und}$$
$$R := \{\, (s_g s_h, s_{gh}) \mid g,h \in G \,\}.$$

Die Einbettung $\tilde\varphi : S \hookrightarrow G : s_g \mapsto g$ setzt sich fort zum Homomorphismus $\tilde\varphi : S^* \twoheadrightarrow G$ auf dem freien Monoid S^*. Dieser erfüllt $\tilde\varphi(s_g s_h) = \tilde\varphi(s_{gh}) = gh$ und induziert somit den Isomorphismus $(\varphi,\psi) : [\,S \mid R\,] \cong G$ mit $\varphi([s_g]) = g$ und $\psi(g) = [s_g]$. (Übung!)

Eine kleine Ersparnis erreichen wir, wenn wir statt der gesamten Gruppe G nur die Teilmenge $G' := G \smallsetminus \{1\}$ betrachten. Wir erhalten dann die *reduzierte Präsentation* mit

$$S' := \{\, s_g \mid g \in G' \,\} \qquad \text{und}$$
$$R' := \{\, (s_g s_h, s_{gh}) \mid g,h \in G' \,\}.$$

Im Vergleich gilt $S' = S \smallsetminus \{s_1\}$. In R' tritt dennoch $gh = 1$ auf, wir interpretieren dabei $s_1 = e$ als leeres Wort. Wir erhalten so $S'^{\leq 1} = S'^0 \cup S'^1 = \{e\} \cup S'$ und $R' \subset S'^2 \times S'^{\leq 1}$. Wie oben gilt $(\varphi,\psi) : [\,S' \mid R'\,] \cong G$ mit $\varphi([s_g]) = g$ und $\psi(g) = [s_g]$. (Übung!)

Wir betrachten im Folgenden eine Gruppenoperation $\alpha : G \times X \to X : (g,x) \mapsto g \cdot x$ auf einem topologischen Raum $X \neq \emptyset$. Der Satz von MacBeath (M2T) konstruiert hierzu eine (recht effiziente) Präsentation $[\,S \mid R\,]$. Dies wollen wir nun erklären und illustrieren.

Definition M2T (MacBeath–Präsentation)**.** Sei $(G,\cdot,1)$ eine Gruppe, $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum und $\alpha : G \times X \to X : (g,x) \mapsto g \cdot x$ eine Gruppenoperation durch Homöomorphismen, kurz $\alpha : G \curvearrowright X$. Sei $V \subset X$ eine Teilmenge mit $G \cdot V = X$, also $X = \bigcup_{g \in G} g \cdot V$. Zu diesen Daten (G,X,α,V) definieren wir die *MacBeath–Präsentation* (S,R) durch

$$S := \{\, s_g \mid g \in G,\ V \cap gV \neq \emptyset \,\} \qquad \text{und}$$
$$R := \{\, (s_g s_h, s_{gh}) \mid g,h \in G,\ V \cap gV \cap ghV \neq \emptyset \,\}.$$

Für alle $g,h \in G$ mit $V \cap gV \cap ghV \neq \emptyset$ gilt $g,h,gh \in S$, denn $V \cap gV \neq \emptyset$ und $V \cap hV \neq \emptyset$ und $V \cap ghV \neq \emptyset$, somit ist $R \subset S^2 \times S^1$ tatsächlich wohldefiniert.

Die Einbettung $\tilde\varphi : S \hookrightarrow G : s_g \mapsto g$ setzt sich fort zum Homomorphismus $\tilde\varphi : S^* \twoheadrightarrow G$ auf dem freien Monoid S^* und zum Gruppenhomomorphismus $\varphi : [\,S \mid R\,] \to G : [s_g] \mapsto g$.

Als *reduzierte MacBeath–Präsentation* definieren wir entsprechend

$$S' := \{\, s_g \mid g \in G',\ V \cap gV \neq \emptyset \,\} \qquad \text{und}$$
$$R' := \{\, (s_g s_h, s_{gh}) \mid g,h \in G',\ V \cap gV \cap ghV \neq \emptyset \,\}.$$

Im Vergleich gilt $S' = S \smallsetminus \{s_1\}$. In R' tritt dennoch $gh = 1$ auf, wir interpretieren dabei $s_1 = e$ als leeres Wort. Wir erhalten so $S'^{\leq 1} = S'^0 \cup S'^1 = \{e\} \cup S'$ und $R' \subset S'^2 \times S'^{\leq 1}$.

Nach Konstruktion erhalten wir $[\,S' \mid R'\,] \cong [\,S \mid R\,]$. (Übung: Warum und wie genau?)

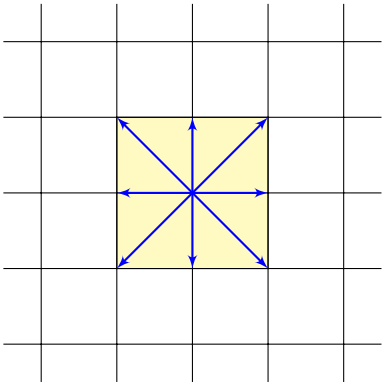
Beispiel. Im trivialen Falle $V = X$ erhalten wir die obige *globale Verknüpfungstafel*.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Bemerkung. Beide Erzeugermengen $S' \subset S$ sind symmetrisch: Aus $s_g \in S$ folgt $s_{g^{-1}} \in S$. Die Relationenmenge R' enthält die für Gruppen trivialen Relationen $s_g s_{g^{-1}} = s_1$ für alle $s_g \in S'$. Die Relationenmenge R enthält ebenso $s_g s_{g^{-1}} = s_1$ für alle $s_g \in S$ und zudem die für Monoide trivialen Relationen $s_1 s_g = s_g$ und $s_g s_1 = s_g$ für alle $s_g \in S$.

Beispiel M2u. Die Gruppe $G = (\mathbb{Z}^2, +)$ operiert auf der euklidischen Ebene $X = \mathbb{R}^2$ durch Translation $G \times X \to X : (z, x) \mapsto z + x$. Für die offene Menge $V =]-1,1[^2$ gilt $G \cdot V = X$, das heißt, $(gV)_{g \in G}$ ist eine offene Überdeckung von X. Alternativ, für die abgeschlossene Menge $V = [0,1]^2$ ist $(gV)_{g \in G}$ eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung

In der zugehörigen MacBeath–Präsentation (S, R) besteht S aus 9 Erzeugern. Zwischen diesen gilt die folgende *lokale Verknüpfungstafel*: Die Menge R besteht aus 49 Relationen, davon sind 25 trivial (mit „∘“ und „□“ markiert, alle anderen mit „△“).



	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$(-1,+1)$	$(0,-1)$	$(0,0)$	$(0,+1)$	$(+1,-1)$	$(+1,0)$	$(+1,+1)$
$(-1,-1)$					∘	△		△	□
$(-1,0)$				△	∘	△	△	□	△
$(-1,+1)$				△	∘		□	△	
$(0,-1)$		△	△		∘	□		△	△
$(0,0)$	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
$(0,+1)$	△	△		□	∘		△	△	
$(+1,-1)$		△	□		∘	△			
$(+1,0)$	△	□	△	△	∘	△			
$(+1,+1)$	□	△		△	∘				

Die 25 trivialen Relationen erzwingen, dass s_1 neutral ist und s_g invers zu $s_{g^{-1}}$. Die 24 nicht-trivialen Relationen können wir nutzen, um die Gruppenerzeuger auf $a = (1,0)$ und $b = (0,1)$ zu reduzieren und alle Relationen auf die Kommutation $ab = ba$. (Übung!)

In der reduzierten MacBeath–Präsentation (S', R') besteht $S' = S \smallsetminus \{s_1\}$ nur aus 8 Erzeugen und R' nur aus 32 Relationen. Die Reduktion auf die beiden Erzeuger $a = (1,0)$ und $b = (0,1)$ mit der einzigen Relation $ab = ba$ gelingt hier ebenso. (Übung!)

Der Erfolg dieser Präsentation beruht auf folgendem allgemeinen Satz:

Satz M2v (MacBeath 1964)**.** *Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe, $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum und $\alpha : G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \cdot x$ eine Gruppenoperation durch Homöomorphismen.*

Sei $V \subset X$ offen und $G \cdot V = X$, also $(gV)_{g \in G}$ eine offene Überdeckung von X, oder $V \subset X$ abgeschlossen und $(gV)_{g \in G}$ eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung.

Für die oben definierte MacBeath–Präsentation (S, R) gilt dann:

(1) Ist X zusammenhängend, so ist die Menge $S \hookrightarrow G$ ein Erzeugendensystem, das heißt, der kanonische Monoidhomomorphismus $\tilde{\varphi} : S^* \twoheadrightarrow G$ ist surjektiv.

(2) Ist X sogar einfach zusammenhängend und zudem V wegzusammenhängend, so erhalten wir hieraus die Präsentation $\varphi : [S \mid R] \xrightarrow{\sim} G$.

Dieselben Aussagen gelten folglich auch für die reduzierte MacBeath–Präsentation (S', R').

Bemerkung. Diese Konstruktion liefert eine erste Präsentation (S, R) unserer Gruppe G und macht die Gruppe so konkret greifbar. Die MacBeath–Präsentation (S, R) ist besonders symmetrisch und somit hochgradig redundant; meist wird man versuchen, sie noch weiter zu vereinfachen wie in M2U, etwa elementar durch Tietze–Transformationen (L3S).

Vor dem Beweis möchte ich die Präsentation durch Gegen/Beispiele illustrieren: Wir wollen zunächst verstehen, ob die Voraussetzungen des Satzes tatsächlich benötigt werden, und was passieren kann, wenn sie fehlen. Diese duale Vorgehensweise ist in der Mathematik erfahrungsgemäß immer empfehlenswert und auch hier erhellend.

Übung M2W. Die folgenden einfachen Gegen/Beispiele zeigen eine Liegruppe $(X, +, 0)$ der Dimension ≤ 1 und eine diskrete Untergruppe $G < X$, die durch Translation auf X operiert. Gegeben sind Teilmengen $V_i \subset X$ mit $GV_i = X$. Lässt sich der Satz anwenden? Bestimmen Sie die MacBeath–Präsentation. Welche Gruppe wird so präsentiert?

(1) Sei $X = \mathbb{Z}$ und $G = \mathbb{Z}$ sowie $V_1 = \{0, 1\}$ und $V_2 = \{0, -1\}$ und $V_3 = \{0\}$.

(2) Sei $X = \mathbb{R}$ und $G = \mathbb{Z}$ sowie $V_1 =]-1, 1[$ und $V_2 = [0, 1]$ und $V_3 = [0, 1[$.

(3) Sei $X = \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ und $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sowie $V_1, V_2, V_3 \subset X$ wie zuvor.

(4) Sei $X = \mathbb{R}$ und $G = \mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ betrachten wir die unzusammenhängenden Mengen $V_1 =]\pm 1[\cup]n \pm 1[$ und $V_2 = [0, 1] \cup [n, n + 1]$ und $V_3 = [0, 1[\cup [n, n + 1[$.

∗ **M2W.** (1) Zwar sind $V_1, V_2, V_3 \subset X$ offen-abgeschlossen und erfüllen $GV_i = X$, aber $X = \mathbb{Z}$ ist unzusammenhängend, daher lässt sich der Satz hier nicht anwenden. Tatsächlich finden wir $S_1 = \{s_0, s_{\pm 1}\}$, und $R_1 = \{(s_0 s_0, s_0), \dots, (s_{\pm 1} s_{\mp 1}, s_0)\}$ besteht nur aus den trivialen Relationen, also $[\, S_1 \mid R_1 \,] \xrightarrow{\sim} G$ mit mehr Glück als Verstand. Dasselbe gilt für V_2 mit $(S_2, R_2) = (S_1, R_1)$, nicht jedoch für V_3: Hier finden wir $S_3 = \{s_0\}$ und $R_3 = \{(s_0 s_0, s_0)\}$, also $[\, S_3 \mid R_3 \,] \xrightarrow{\sim} \{0\} \lneq G$. Wir erhalten also nicht die erhoffte Gruppe G!

(2) Der Satz lässt sich auf V_1 und V_2 anwenden, auf V_3 jedoch nicht. Konkret für $V_1 =]-1, 1[$ finden wir $S_1 = \{s_0, s_{\pm 1}\}$, und $R_1 = \{(s_0 s_0, s_0), \dots, (s_{\pm 1} s_{\mp 1}, s_0)\}$ besteht nur aus den trivialen Relationen, also $[\, S_1 \mid R_1 \,] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Dasselbe gilt für $V_2 = [0, 1]$ mit $(S_2, R_2) = (S_1, R_1)$, nicht jedoch für $V_3 = [0, 1[$: Hier finden wir $S_3 = \{s_0\}$ und $R_3 = \{(s_0 s_0, s_0)\}$, also $[\, S_3 \mid R_3 \,] \xrightarrow{\sim} \{0\} \lneq G$.

(3) Auf V_1 und V_2 lässt sich immerhin der erste Teil des Satzes anwenden, der zweite jedoch nicht, da $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ nicht einfach zusammenhängend ist. Wir erhalten dieselben Präsentationen (S_i, R_i) wie in (2), denn lokal sieht der Kreis $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ genauso aus wie die Gerade $\mathbb{R}$. Doch diesmal ist $\mathbb{Z} \cong [\, S \mid R \,] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n = G$ kein Isomorphismus. Das Beispiel V_3 schlägt wie zuvor völlig fehl mit $[\, S_3 \mid R_3 \,] \xrightarrow{\sim} \{0\} \lneq G$.

(4) Auf V_1 und V_2 lässt sich der erste Teil des Satzes anwenden, der zweite jedoch nicht, da V_1 und V_2 nicht zusammenhängend sind. Tatsächlich finden wir $(S_1, R_1) = (S_2, R_2)$ und nach Vereinfachung $[\, S_1 \mid R_1 \,] \cong \langle\, s_1, s_n \mid s_1 s_n = s_n s_1 \,\rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Ganz offensichtlich wird die Relation $s_1^n = s_n$ geometrisch nicht erfasst.

Das Beispiel V_3 schlägt fehl wie zuvor, aber auf eine interessante Art. Hier finden wir $S_3 = \{s_0, s_{\pm n}\}$, und $R_3 = \{(s_0 s_0, s_0), \dots, (s_{\pm n} s_{\mp n}, s_0)\}$ besteht nur aus den trivialen Relationen, also $[\, S_3 \mid R_3 \,] \cong \mathbb{Z}$ mit mehr Glück als Verstand. Der kanonische Homomorphismus $\varphi : [\, S_3 \mid R_3 \,] \xrightarrow{\sim} n\mathbb{Z} \lneq \mathbb{Z}$ ist jedoch kein Isomorphismus.

Bemerkung. Wir kommen nun endlich zum Beweis des Satzes von MacBeath (M2V). Hier gibt es zwei verschiedene Zugänge, die in gewisser Weise dual zueinander sind:

(b) Durch Konstruktion einer Überlagerung $q : Y \to X$ nach Serre (1980);
das ist elegant und kurz, aber auch genial und abstrakt.

(a) Direkt über Wege und Homotopien in X nach MacBeath (1964);
das ist naheliegend und anschaulich, dafür aber länglich.

Ich werde im Folgenden *beide* Beweise ausführen, auch wenn das redundant erscheint. Beide haben ihre Vorzüge. Doppelt bewiesen hält besser? Didaktisch gesehen schon!

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

BEWEIS. (1) *Erzeugnis:* Sei $H = \tilde{\varphi}(S^*) < G$ die von $S \hookrightarrow G$ erzeugte Untergruppe. Die Menge $K = G \smallsetminus H$ ist ihr Komplement. Wir wollen $H = G$ und $K = \emptyset$ zeigen.

Es gilt $HV \cap KV = \emptyset$, denn für $v \in HV \cap KV$ gilt $v = hv_1 = kv_2$ mit $h \in H$ und $k \in K$ sowie $v_1, v_2 \in V$, also $v_1 = h^{-1}kv_2$, somit $h^{-1}k \in H$ und $k \in H$, ein Widerspruch.

(1a) Sei V offen. Dann ist $X = GV = HV \sqcup KV$ disjunkte offene Vereinigung.

(1b) Sei V abgeschlossen und $(gV)_{g\in G}$ eine lokal-endliche Überdeckung von X. Dann ist $X = GV = HV \sqcup KV$ disjunkte Vereinigung abgeschlossener Mengen dank D5G.

Da X zusammenhängend ist, und $HV \supset 1V = V \neq \emptyset$ gilt, folgt $K = \emptyset$.

(2) *Relationen:* Die MacBeath–Präsentation $H := [\,S \mid R\,]$ kommt mit dem kanonischen Gruppenhomomorphismus $\varphi : H \twoheadrightarrow G : [s_g] \mapsto g$. Surjektivität gilt dank (1). Wir wollen Injektivität zeigen. Hierzu sei $K = \ker(\varphi)$ der Kern. Wir zeigen im Folgenden $K = \{1\}$.

(2a) *Abstrakter Beweis durch Überlagerungen:* Wir betrachten H als diskreten Raum. Sei $Z = H \times V$ das Produkt und $Y = Z/\!\sim$ der Quotient modulo $(h, v) \sim (h', v')$ falls $\varphi(h)v = \varphi(h')v'$ in X gilt und $h' = h[s_g]$ in H für ein $s_g \in S$.

Dies ist eine Äquivalenzrelation: Reflexivität gilt dank $s_1 \in S$. Symmetrie gilt dank $[s_g]^{-1} = [s_{g^{-1}}]$. Die Transitivität ist kritisch: Aus $(h, v) \sim (h', v')$ und $(h', v') \sim (h'', v'')$ wollen wir $(h, v) \sim (h'', v'')$ schließen. Ausgeschrieben sei $\varphi(h)v = \varphi(h')v'$ mit $h' \in h[s_g]$ und $\varphi(h')v' = \varphi(h'')v''$ mit $h'' \in h'[s_{g'}]$. Dann gilt $\varphi(h)V \cap \varphi(h)gV \cap \varphi(h)gg' \in V$, also $V \cap gV \cap gg' \in V$. nach Definition von R haben wir $(s_g s_{g'}, s_{gg'}) \in R$, also $[s_g s_{g'}] = [s_{gg'}]$. Wir schließen $\varphi(h)v = \varphi(h'')v''$ mit $h'' = h[s_{gg'}]$, kurz $(h, v) \sim (h'', v'')$.

Der so konstruierte Raum Y ist wegzusammenhängend, da der Raum V wegzusammenhängend ist und die Gruppe $H = [\,S \mid R\,]$ von $\{\,[s_g] \mid s_g \in S\,\}$ erzeugt wird. (Übung!)

Die Projektion $p : Z \to X : (h, v) \mapsto \varphi(h)v$ ist stetig und surjektiv dank der Voraussetzung $GV = X$. Sie induziert die stetige Surjektion $q : Y \twoheadrightarrow X : [h, v] \mapsto \varphi(h)v$. Die Abbildung q ist eine Überlagerung mit $q^{-1}(V) = K \times V$. (Übung!) Da X einfach zusammenhängend ist, muss q trivial sein (M2M). Wir schließen $K = \{1\}$, wie behauptet.

(2b) *Konkreter Beweis durch Wege und Homotopien:* Sei $w = s_{g_1} s_{g_2} \cdots s_{g_n} \in S^*$ ein Wort mit trivialem Bild $\tilde{\varphi}(w) = 1$ in G. Wir zeigen, dass sich das Wort w allein durch die Relationen in $R \subset S^2 \times S^1$ trivialisieren lässt.

Zur Vereinfachung der Notation sei $g_1 = 1$. Für $k = 0, 1, \ldots, n$ definieren wir das Produkt $p_k = g_1 g_2 \cdots g_k$; insbesondere gilt also $p_0 = p_1 = p_n = 1$. Für $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt $p_{k-1}V \cap p_k V \neq \emptyset$. Da V wegzusammenhängend ist, gilt dies auch für $p_{k-1}V \cup p_k V$.

Wir wählen einen Fußpunkt $x_0 \in V$ sowie für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ einen Zwischenpunkt $x_k \in p_{k-1}V \cap p_k V$ und $x_n = x_0$. Es existiert ein Weg $\gamma_k : [0, 1] \to p_{k-1}V \cup p_k V$ von x_{k-1} nach x_k. Wir erhalten so den Weg $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n : [0, 1] \to X$ vom Startpunkt x_0 nach x_1 in $p_1 V = V$ nach x_2 in $p_2 V$ … nach x_{n-1} in $p_{n-1}V$ und schließlich nach $x_n = x_0$ in $p_n V = V$. Somit ist γ eine Schleife in (X, x_0). Da X einfach zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie $H : \gamma \sim x_0$, also eine stetige Abbildung $H : [0, 1]^2 \to X$ mit $H(0, t) = \gamma(t)$ sowie $H(s, 0) = H(s, 1) = H(1, t) = x_0$ für alle $s, t \in [0, 1]$.

Wir nutzen die offene Überdeckung $(gV)_{g\in G}$ von X und die Kompaktheit von $[0, 1]^2$. Wie in M:10 teilen wir das Quadrat $[0, 1]^2$ in m^2 gleichgroße Quadrate, wobei wir $m = nn'$

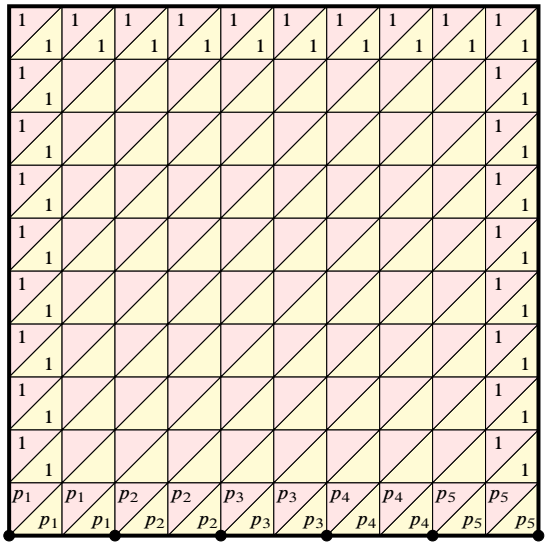


ABBILDUNG M:10. Triangulierung des Quadrats $[0,1]^2$ in $2m^2$ kleine Dreiecke

mit $n' \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ annehmen. Für n' hinreichend groß wird jedes Quadrat Q ganz in eine der offenen Mengen $g_Q V$ abgebildet. Zudem können wir erreichen, wiederum für n' hinreichend groß, dass für jedes Randquadrat Q das Element g_Q wie angegeben gewählt wird.

Wir teilen nun jedes der m^2 Quadrate in zwei Dreiecke wie in M:10 skizziert. Jeder Ecke $a = (j,k)/m$ dieser Triangulierung weisen wir das Gruppenelement g_a des Quadrats $Q_a = [(j,k)/m, (j+1,k)/m, (j+1,k+1)/m, (j,k+1)/m]$ rechts oberhalb davon zu. Alle Ecken auf dem Rand $\partial[0,1]^2$ bleiben dabei wie zuvor bestimmt. Sind (a,b) die Endpunkte einer Kante, so gilt $g_a V \cap g_b V \neq \emptyset$, also $V \cap g_a^{-1} g_b V \neq \emptyset$. Wir schreiben $s_{a,b} := s_{g_a^{-1} g_b} \in S$ an die orientierte Kante (a,b).

Sind a,b,c die Eckpunkte eines Dreiecks, so ist $s_{a,b} s_{b,c} = s_{a,c}$ eine Relaton in R. Genauer gilt $g_a V \cap g_b V \cap g_c V \neq \emptyset$, also $V \cap g_a^{-1} g_b V \cap g_a^{-1} g_b g_b^{-1} g_c V \neq \emptyset$.

In der obigen Triangulierung lesen wir in jeder Zeile $j = 0, 1, \ldots, m$ ein Wort w_j ab. Ganz unten, für $j = 0$, finden wir $w_0 = (s_1 \cdots s_1 s_{g_1})(s_1 \cdots s_1 s_{g_2}) \cdots (s_1 \ldots s_1 s_{g_n})$, und dieses ist R–äquivalent zu unserem ursprünglichen Wort w. Ganz oben, für $j = m$, finden wir $w_m = s_1 s_1 \cdots s_1$, und dieses ist R–äquivalent zum trivialen Wort, wie gewünscht. Nach Konstruktion sind die Zeilenwörter $w_0, w_1, \ldots, w_m$ alle R–äquivalent. Das beweist, dass sich das Wort w allein durch die Relationen in $R \subset S^2 \times S^1$ trivialisieren lässt. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M3. Gruppenoperationen und Galois–Überlagerungen

§M3a. Operation einer Gruppe auf einem topologischen Raum. Wir untersuchen nun die überaus nützliche Konstruktion von Überlagerungen durch Gruppenoperationen. Diese verwenden wir anschließend zur Berechnung von Fundamentalgruppen und werden sie schließlich im Zuge der Galois–Korrespondenz als universelle Konstruktion erkennen.

Beispiel. Die Gruppe $\{\pm 1\}$ operiert auf der Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch Punktspiegelung. Die zugehörige Quotientenabbildung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ ist eine Überlagerung.

Beispiel. Die Gruppe $\{\pm 1\}$ operiert auf der Modellfläche $F_g^+ \subset \mathbb{R}^3$ durch Punktspiegelung. Die zugehörige Quotientenabbildung $\{\pm 1\} \curvearrowright F_g^+ \to F_g^-$ ist eine Überlagerung.

Definition M3A. Sei $(G,\cdot,1)$ eine Gruppe und X eine Menge. Eine *Linksoperation* von G auf X ist eine Abbildung $\varphi : G \times X \to X : (g,x) \mapsto g \cdot x$ oder kurz gx, sodass gilt:

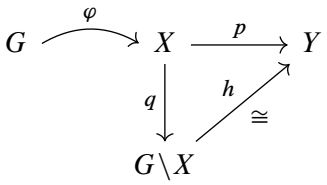
$$1 \cdot x = x \quad \text{und} \quad g' \cdot (g \cdot x) = (g' \cdot g) \cdot x \quad \text{für alle } g, g' \in G \text{ und } x \in X.$$

Wir definieren $x \sim y$ falls $y = gx$ für ein $g \in G$. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Reflexivität: $x = 1x$. Symmetrie: Aus $y = gx$ folgt $g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = 1x = x$. Transitivität: Aus $y = gx$ und $z = g'y$ folgt $z = g'(gx) = (g'g)x$.

Die Äquivalenzklasse $Gx := \{ gx \mid g \in G \}$ nennen wir die *Bahn* von $x \in X$ unter der Operation von G. Der *Bahnenraum* ist die Quotientenmenge $G\backslash X := \{ Gx \mid x \in X \}$. Die Quotientenabbildung ist $q : X \to G\backslash X : x \mapsto Gx$. Trägt X eine Topologie, so versehen wir $G\backslash X$ mit der Quotiententopologie. Zusammenfassend schreiben wir:

$$G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X \xrightarrow{q} G\backslash X$$

Etwas allgemeiner und flexibler schreiben wir $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X \xrightarrow{p} Y$, wenn $\varphi : G \times X \to X$ eine Operation der Gruppe G auf dem Raum X und $p : X \to Y$ äquivalent zum Quotienten ist, also ein Homöomorphismus $h : G\backslash X \xrightarrow{\sim} Y$ mit $p = h \circ q$ existiert. Als Diagramm:



In diesem Falle ist h eindeutig durch φ und p bestimmt und muss daher nicht explizit angegeben werden. Wir schreiben kurz $G \curvearrowright X \to Y$, wenn die Operation φ und die Abbildung p aus dem Kontext hervorgehen. Im Zweifel sollte man wiederholen, was gemeint ist.

Definition M3B. Eine *Rechtsoperation* der Gruppe $(G,\cdot,1)$ auf einer Menge X ist eine Abbildung $\psi : X \times G \to X$, geschrieben $(x,g) \mapsto x \cdot g$ oder kurz xg, sodass

$$x \cdot 1 = x \quad \text{und} \quad (x \cdot g) \cdot h = x \cdot (g \cdot h) \quad \text{für alle } g, h \in G \text{ und } x \in X.$$

In diesem Falle schreiben wir die Bahn $xG = \{ xg \mid g \in G \}$, die Quotientenmenge $X/G := \{ xG \mid x \in X \}$ und die Quotientenabbildung $q : X \to X/G : x \mapsto xG$.

Für Linkstranslationen $\varphi_g : X \to X : x \mapsto gx$ gilt $\varphi_1 = \mathrm{id}_X$ und $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$; hieraus folgt $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_1 = \mathrm{id}_X$ und $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_1 = \mathrm{id}_X$, also $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$. Die Operation φ entspricht somit dem Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Sym}(X) : g \mapsto \varphi_g$. Die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(X)$ besteht aus allen Bijektionen $f : X \xrightarrow{\sim} X$. Diese lassen wir von links auf X operieren, definieren also ihre Komposition durch $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

Die Rechtstranslationen $\psi_g : X \to X : x \mapsto xg$ erfüllen $\psi_1 = \mathrm{id}_X$ aber $\psi_g \circ \psi_h = \psi_{hg}$. Die Operation ψ entspricht somit dem Antihomomorphismus $G \to \mathrm{Sym}(X) : g \mapsto \psi_g$ in die symmetrische Gruppe über X. Wir erhalten einen Homomorphismus, wenn wir Bijektionen $f : X \xrightarrow{\sim} X$ umgekehrt verknüpfen durch $(f \mathbin{\bar\circ} g)(x) := g(f(x))$ für alle $x \in X$.

Aus jeder Rechtsoperation erhalten wir eine Linksoperation durch $gx = xg^{-1}$, denn $(gh)x = x(gh)^{-1} = x(h^{-1}g^{-1}) = (xh^{-1})g^{-1} = (hx)g^{-1} = g(hx)$. Es genügt also im Folgenden nur einen Fall zu diskutieren, sagen wir Linksoperationen. Bei Überlagerungen werden wir gleichzeitig sowohl eine Links- als auch eine Rechtsoperationen betrachten, daher sind beide Sichtweisen nützlich und wichtig. Wir halten links und rechts auseinander.

§M3b. Beispiele. Wir beginnen wieder mit den zentralen, klassischen Beispielen:

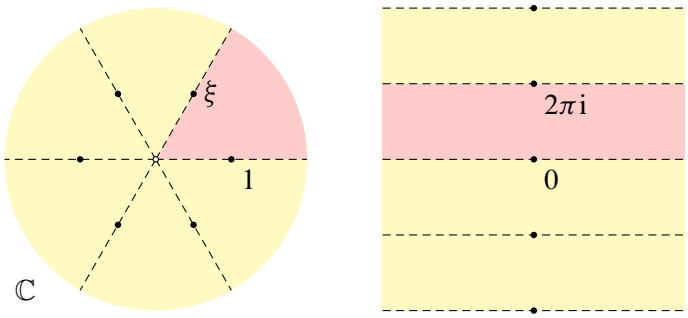


ABBILDUNG M:11. Beispiele von Bahnen bei Operationen $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$

Beispiel M3c. Wir kennen bereis die folgenden Gruppenoperationen und Überlagerungen:

$$2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times, \qquad 2\pi\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1 \qquad \text{mit } p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$

$$W_n \overset{\cdot}{\curvearrowright} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{p_n} \mathbb{C}^\times, \qquad W_n \overset{\cdot}{\curvearrowright} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{p_n} \mathbb{S}^1 \qquad \text{mit } p_n(z) = z^n.$$

Die Potenzfunktion $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto z^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist topologisch äquivalent zum Quotienten $q_n : \mathbb{C}^\times \to W_n \backslash \mathbb{C}^\times$ nach der Untergruppe $W_n = \{1, \xi_n, \xi_n^2, \ldots, \xi_n^{n-1}\} < \mathbb{C}^\times$ der n–ten Einheitswurzeln, wobei $\xi_n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$. Die Äquivalenz wird gestiftet durch den Homöomorphismus $\overline{p_n} : W_n \backslash \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times : W_n z \mapsto z^n$.

Gleiches gilt für die Einschränkung $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ist topologisch äquivalent zum Quotienten $q : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Hier operiert $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ durch Addition. Ebenso ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ äquivalent zu $q : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Diese Beispiele sind abelsche Gruppen, und die Quotienten sind Gruppenhomomorphismen. Die Operation ist jeweils die Operation des Kerns durch (Links-)Translation.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

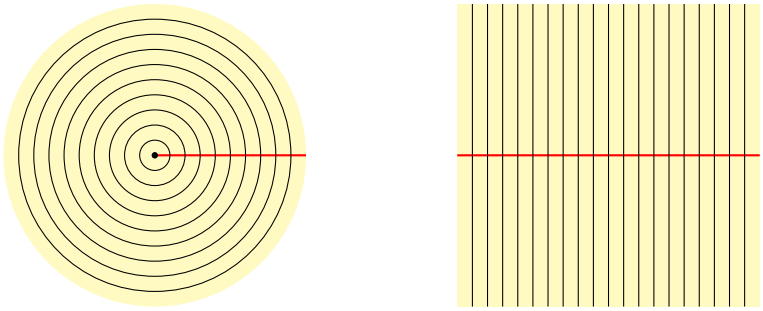


ABBILDUNG M:12. Beispiele von Bahnen zweier Operationen $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$

Beispiel M3D. Die Gruppe $(\mathbb{R},+)$ operiert auf $\mathbb{C}$ vermöge $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C} : (t,z) \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} z$.

Die Bahn des Punktes $z \in \mathbb{C}$ ist die Kreislinie mit Radius $|z|$ um den Nullpunkt. Die Quotientenabbildung $q : \mathbb{C} \to Q$ ist äquivalent zu $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} : z \mapsto |z|$.

Genauer: Da die Abbildung p invariant unter der Operation ist, induziert sie die stetige Abbildung $\overline{p} : Q \to \mathbb{R}_{\geq 0} : \overline{p}([z]) = |z|$. Der Schnitt $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x,0)$ liefert die stetige Abbildung $\overline{s} = q \circ s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to Q : x \mapsto [(x,0)]$. Es gilt $\overline{p} \circ \overline{s} = \mathrm{id}$ und $\overline{s} \circ \overline{p} = \mathrm{id}$.

Beispiel M3E. Die Gruppe $(\mathbb{R},+)$ operiert auf $\mathbb{C}$ vermöge $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C} : (t,z) \mapsto \mathrm{i}t + z$.

Die Bahn des Punktes $z \in \mathbb{C}$ ist die Gerade durch z parallel zur imaginären Achse. Die Quotientenabbildung $q : \mathbb{C} \to Q$ ist äquivalent zu $p : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : (x + \mathrm{i}y) \mapsto x$.

Genauer: Da die Abbildung p invariant unter der Operation ist, induziert sie die stetige Abbildung $\overline{p} : Q \to \mathbb{R} : [x + \mathrm{i}y] \mapsto x$. Der Schnitt $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto x + 0\mathrm{i}$ liefert die stetige Abbildung $\overline{s} = q \circ s : \mathbb{R} \to Q : x \mapsto [x + 0\mathrm{i}]$. Es gilt $\overline{p} \circ \overline{s} = \mathrm{id}$ und $\overline{s} \circ \overline{p} = \mathrm{id}$.

Beide Beispiele fassen wir kurz zusammen als $\mathbb{R} \overset{\varphi}{\curvearrowright} \mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mathbb{R} \overset{\psi}{\curvearrowright} \mathbb{C} \xrightarrow{q} \mathbb{R}$. Gruppe und Raum sind gleich, aber die Operationen und Quotienten sind gänzlich verschieden!

Beispiel M3F. Wir haben $\mathbb{Z}^2 \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} (\mathbb{S}^1)^2$. Die Untergruppe $\mathbb{Z}^2$ von $(\mathbb{R}^2,+)$ operiert durch Translation. Der Quotient ist äquivalent zu $p : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{S}^1)^2 : (t_1,t_2) \mapsto (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t_1}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t_2})$.

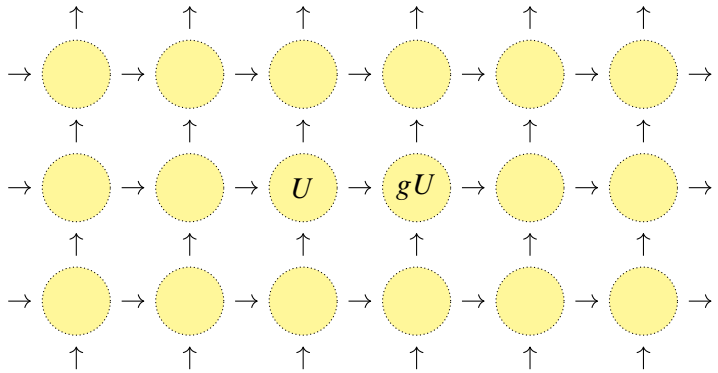


ABBILDUNG M:13. Freie diskontinuierliche Operation, hier von $\mathbb{Z}^2$ auf $\mathbb{R}^2$

§M3c. Freie Operationen. Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum und $\varphi : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation. Wir sagen, G *operiert durch Homöomorphismen*, wenn für jedes $g \in G$ die Linkstranslation $\varphi_g : X \to X : x \mapsto gx$ stetig ist. Dann ist $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ ebenfalls stetig, und φ entspricht dem Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Homeo}(X) : g \mapsto \varphi_g$. Insbesondere operiert G auf der Topologie $\mathcal{T}$ vermöge $\varphi : G \times \mathcal{T} \to \mathcal{T} : (g, U) \mapsto gU$.

Die Operation φ heißt *frei* (oder *fixpunktfrei*, *ohne Fixpunkte*), wenn $gx \neq x$ für alle $x \in X$ und $g \in G \smallsetminus \{1\}$ gilt; das heißt, für jeden Punkt $x \in X$ ist die Abbildung $G \to Gx : g \mapsto gx$ bijektiv. Insbesondere ist φ dann *treu* (*effektiv*): Zu $g \neq g'$ in G existiert $x \in X$ mit $gx \neq g'x$; das heißt, der Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Sym}(X)$ ist injektiv.

Satz M3G. *Sei $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X \overset{q}{\to} Y$ eine Operation durch Homöomorphismen.*

(1) Genau dann ist φ frei und q eine Überlagerung, wenn gilt: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine Umgebung $U \subset X$, sodass $U \cap gU = \emptyset$ für alle $g \in G \smallsetminus \{1\}$.

(2) Genau dann ist Y hausdorffsch, wenn gilt: Zu je zwei Punkten $x, x' \in X$ mit $Gx \neq Gx'$ existieren Umgebungen $U, U' \subset X$, sodass $U \cap gU' = \emptyset$ für alle $g \in G$.

BEWEIS. Dies folgt direkt aus den Definitionen. Übung: Prüfen Sie es sorgsam nach! □

✻ **M3G.** (1) „⇐“: Jeder Punkt $y \in Y$ des Quotientenraumes ist eine Bahn $y = Gx$ mit $x \in X$. Nach Voraussetzung existiert eine offene Umgebung U von x in X, sodass $U \cap gU = \emptyset$ für alle $g \in G \smallsetminus \{1\}$ gilt. Es gilt dann $gU \cap g'U = \emptyset$ für alle $g \neq g'$ in G. Die Menge $V := q(U)$ ist offen in der Quotiententopologie von Y, denn ihr Urbild $q^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in G} gU$ ist offen in X. Für jedes $g \in G$ ist die Einschränkung $q|_{gU}^{V} : gU \to V$ ein Homöomorphismus, da bijektiv, stetig und offen. Demnach ist $q : X \to Y$ eine Überlagerung.

„⇒“: Angenommen, q ist eine Überlagerung. Zu jedem $x \in X$ hat $y = q(x) \in Y$ eine offene Umgebung $V \subset Y$, die von q trivial überlagert wird, also $q^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset X$ offen und $q_i : U_i \xrightarrow{\sim} V$ ist ein Homöomorphismus für jedes $i \in I$. Sei $i \in I$ mit $x \in U_i =: U$. Für jedes $g \in G \smallsetminus \{1\}$ gilt $U \cap gU = \emptyset$; andernfalls gäbe $x' \in U$ mit $gx' \in U$ und wegen $x' \neq gx'$ wäre $q_i : U_i \to V$ nicht injektiv.

(2) „⇐“: Für $y \neq y'$ in Y wählen wir Urbilder $x, x' \in X$ mit $q(x) = Gx = y$ und $q(x') = Gx' = y'$. Nach Voraussetzung gibt es offene Umgebungen $U \ni x$ und $U' \ni x$, sodass $U \cap gU' = \emptyset$ für alle $g \in G$. Die Bilder $V = q(U) \ni y$ und $V' = q(V') \ni y'$ sind offen in Y, denn $q^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} gU$ und $q^{-1}(V') = \bigcup_{g \in G} gU'$ sind offen in X. Zudem sind V und V' disjunkt, denn $q^{-1}(V)$ und $q^{-1}(V')$ sind disjunkt.

„⇒“: Angenommen Y ist hausdorffsch. Seien $x, x' \in X$ mit $Gx \neq Gx'$. Im Quotientenraum Y erlauben die Punkte $y = Gx$ und $y' = Gx'$ disjunkte offene Umgebungen $V \ni y$ und $V' \ni y'$. Die Urbilder $U := q^{-1}(V) \ni x$ und $U' := q^{-1}(V') \ni x'$ sind offen und disjunkt, und für alle $g \in G$ gilt $gU = U$ und $gU' = U'$.

Definition M3H. Wir nennen die Operation $\varphi : G \times X \to X$ *überlagernd* (traditionell auch *frei diskontinuierlich*), wenn Bedingung (1) gilt, und *hausdorffsch*, wenn Bedingung (2) gilt.

> **Verwechslungsgefahr.** Der Begriff *frei diskontinuierlich* wird von manchen Autoren strenger gefasst, sodass er (1) und (2) beinhaltet. Auch weitere Varianten kommen vor, wie *fixpunktfrei und eigentlich diskontinuierlich*. Ich habe hier den Satz M3G vorangestellt, damit wir uns zunächst klar machen, was die Bedingungen bedeuten. Die vereinbarten Namen sind dann hoffentlich ausreichend sprechend.

Beispiele. In den vorangegangenen Beispielen ist die Operation M3D nicht frei, M3E ist frei aber nicht frei diskontinuierlich, M3C und M3F sind frei diskontinuierlich.

Bemerkung. Ist die Operation frei diskontinuierlich, so ist sie insbesondere frei. Die Umkehrung gilt nicht. Die Hausdorff–Eigenschaft ist hiervon unabhängig:

- Die Operation $\cdot : \{\pm 1\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht frei aber hausdorffsch.
- Die folgende Operation ist frei diskontinuierlich aber nicht hausdorffsch.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Übung M3I. Auf $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ operiert $G = \langle\, g \mid - \,\rangle \cong \mathbb{Z}$ durch $g : (x,y) \mapsto (2x, 2^{-1}y)$. (1) Diese Operation ist frei diskontinuierlich. (2) Der Quotient $G\backslash X$ ist nicht hausdorffsch.

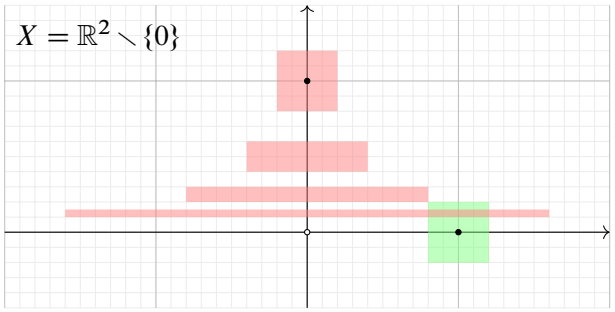


ABBILDUNG M:14. Frei diskontinuierlich aber nicht hausdorffsch

✻ **M3I.** (1) Sei $(x,y) \in X$, also $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. Angenommen $x > 0$. Dann ist $U =]3x/4, 3x/2[\times \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von (x,y) mit $g^k U \cap U = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. Entsprechendes gilt für $x < 0$ oder $y > 0$ oder $y < 0$. Demnach ist die Operation $G \times X \to X$ frei diskontinuierlich im Sinne der Definition M3H.

(2) Die Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ haben disjunkte Orbits $G\cdot(1,0) \neq G\cdot(0,1)$. Seien $U \ni (1,0)$ und $V \ni (0,1)$ Umgebungen. Das bedeutet, es existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset U$ und $]-\varepsilon, \varepsilon[\times]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset V$ gilt. Wir wählen $n \in \mathbb{Z}$ so, dass $2^{-n} < \varepsilon$ gilt. Dann ist $(2^{-n}, 1) \in V$ und $g^n(2^{-n}, 1) = (1, 2^{-n}) \in U \cap g^n V$. Das bedeutet, egal wie klein wir U und V wählen, wir haben $U \cap gV \neq \emptyset$ für unendliche viele $g \in G$.

§M3d. Galois–Überlagerungen. Gruppenoperationen und Quotienten sind wichtige Konstruktionen. Daher geben wir dieser Situation einen würdigen Namen:

Definition M3J. Wir nennen $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} \tilde{X} \overset{q}{\to} X$ eine *Galois–Überlagerung*, wenn die Operation φ überlagernd und der Raum $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist. Ist $\tilde{X}$ sogar einfach zusammenhängend, so nennen wir $q : \tilde{X} \to X$ eine *universelle Überlagerung* von X.

Nahezu alle unsere bisher betrachteten Überlagerungen entstehen auf diese Weise.

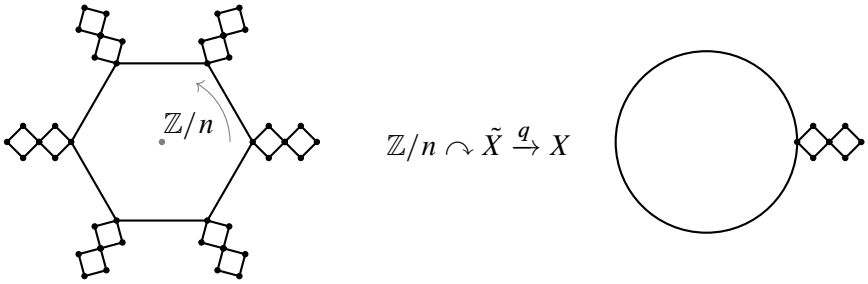


ABBILDUNG M:15. Quotient einer freien $\mathbb{Z}/n$–Operation durch Rotation

Beispiel M3K. Abbildung M:15 zeigt einen Graphen $\tilde{X} \subset \mathbb{C}$ aus einem regulären n–Eck R und an jeder Ecke eine Kette von k Quadraten. Somit gilt $\chi(\tilde{X}) = -nk$. (Die Skizze zeigt $n = 6$ und $k = 2$.) Auf dem Raum $\tilde{X}$ operiert die zyklische Gruppe der n–ten Einheitswurzeln $(W_n, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/n, +)$ frei durch Rotation. Der Quotientenraum $X = W_n\backslash\tilde{X}$ besteht aus einer Kreislinie $\mathbb{S}^1 = W_n\backslash R$ und einer einzigen Kette von k Quadraten, also $\chi(X) = -k$.

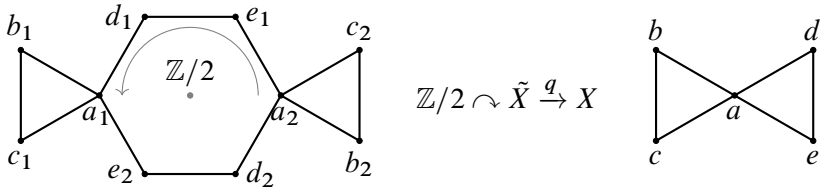


ABBILDUNG M:16. Quotient einer freien $\mathbb{Z}/2$–Operation durch Rotation

Beispiel. Der einfachste Fall $n = 2$ und $k = 1$ ergibt die Überlagerung aus Abbildung M:16, vereinfacht mit Dreieck statt Quadrat. Dies ist die Überlagerung aus Abbildung M:8.

Beispiel M3L. Wenn wir beim Graphen $\tilde{X}$ aus Abbildung M:15 (oder M:16) die Eckpunkte zu kleinen Kugeln aufdicken ($\cong \mathbb{D}^3$) und die Kanten zu Vollzylindern ($\cong \mathbb{D}^2 \times [0,1]$), so erhalten wir einen Henkelkörper $N(\tilde{X})$. Sein Rand $\tilde{F} = \partial N(\tilde{X})$ ist eine Fläche vom Geschlecht $1 + nk$, also $\chi(\tilde{F}) = -2nk$. Auch hierauf operiert $\mathbb{Z}/n$ frei durch Rotation. Der Quotient $F = \partial N(X)$ ist eine Fläche vom Geschlecht $1 + k$, also $\chi(F) = -2k$.

§M3e. Diskrete Untergruppen. Folgende Konstruktion für Galois-Überlagerungen ist besonders schön und typisch für topologisch-algebraische Anwendungen:

Satz M3M. *Sei $(G, \cdot, e)$ eine topologische Gruppe und $K < G$ eine diskrete Untergruppe. Dann operiert K frei diskontinuierlich durch Linkstranslation $K \times G \to G : (k, g) \mapsto k \cdot g$. Ist G zudem wegzusammenhängend, so ist $K \curvearrowright G \twoheadrightarrow Q$ eine Galois–Überlagerung.*

BEWEIS. Da $K \subset G$ diskret ist, existiert $W \subset G$ offen mit $K \cap W = \{e\}$. Da die Abbildung $G \times G \to G : (a, b) \mapsto ab^{-1}$ stetig ist, existieren offene Umgebungen V_1, V_2 von e in G mit $V_1 \cdot V_2^{-1} \subset W$. Mit $U = V_1 \cap V_2$ erhalten wir eine offene Umgebung von e in G mit $U \cdot U^{-1} \subset W$. Für jedes $g \in G$ ist dann Ug eine offene Umgebung. Aus $kUg \cap Ug \neq \emptyset$ mit $k \in K$ folgt $ku_1 g = u_2 g$ also $k = u_2 u_1^{-1} \in U \times U^{-1} \subset W$, also $k = e$. □

Beispiele. Unsere obigen Paradebeispiele entstehen aus diskreten Untergruppen:

$$W_n \curvearrowright \mathbb{C}^\times \xrightarrow{p_n} \mathbb{C}^\times, \qquad 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times, \qquad \mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,$$
$$W_n \curvearrowright \mathbb{S}^1 \xrightarrow{p_n} \mathbb{S}^1, \qquad 2\pi\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1, \qquad \mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n \to (\mathbb{S}^1)^n.$$

Beispiel. Die diskreten Untergruppen von $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$ sind endliche Rotationsgruppen der euklidischen Ebene: Jede ist zyklisch von der Form $C_n = \{ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \}$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$. In der Gruppe $\mathrm{O}_2\mathbb{R}$ sind zudem Spiegelungen erlaubt, und wir erhalten neben C_n auch jede endliche Diedergruppe $D_n > C_n$. Für $n \geq 3$ ist dies die Isometriegruppe eines regulären n–Ecks, bestehend aus n Rotationen und n Spiegelungen (siehe §L3p).

Beispiel. Beispiele diskreter Untergruppen in $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ erhalten wir aus Isometriegruppen von Polyedern im $\mathbb{R}^3$: Der Kegel über einem regulären n–Eck liefert C_n für $n = 3, 4, 5, \ldots$, der Doppelkegel liefert D_n. Neben diesen beiden unendlichen Familien haben wir drei sporadische Beispiele: Das Tetraeder liefert A_4, Oktaeder / Hexaeder S_4, Dodekaeder / Ikosaeder A_5. Jede diskrete Untergruppe von $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ ist eine dieser Gruppen. Erlaubt man zudem Spiegelungen, so gilt eine analoge Klassifikation für diskrete Gruppen in $\mathrm{O}_3\mathbb{R} = \mathrm{SO}_3\mathbb{R} \times \{\pm\mathrm{id}\}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M3f. Erste Eigenschaften von Galois–Überlagerungen.

Übung M3N. (1) Sei $\varphi : G \times X \to X$ eine Operation einer endlichen Gruppe G auf einem Hausdorff–Raum X. Dann ist der Quotientenraum $G\backslash X$ hausdorffsch.
(2) Sei X ein Hausdorff–Raum und G eine endliche Gruppe. Ist die Gruppenoperation $\varphi : G \times X \to X$ frei, so ist sie bereits frei diskontinuierlich.
(3) Für unendliche Gruppen gilt dies nicht: Sei a eine irrationale Zahl und $\xi = e^{2\pi i a}$. Die Operation $\mathbb{Z} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : (k, z) \mapsto \xi^k z$ ist frei aber nicht frei diskontinuierlich.
(4) Sei X kompakt hausdorffsch. Ist eine Gruppenoperation $\varphi : G \times X \to X$ frei diskontinuierlich, so ist die Gruppe G endlich.
(5) Für nicht-kompakte Räume gilt dies nicht, wie $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ zeigt.

Übung M3O. (1) Jede zweiblättrige Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ erlaubt eine Operation $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright \tilde{X} \to X$. Diese ist eindeutig und frei diskontinuierlich.
(2) Finden Sie eine dreiblättrige Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ohne Operation durch $\mathbb{Z}/3$. *Hinweis:* Ein solches Beispiel findet sich in unserem obigen Beispielfundus.
(3) Erlaubt die Überlagerung $G \curvearrowright \tilde{X} \to X$ einen Schnitt, so ist sie trivial. *Erinnerung:* Ein *Schnitt* zu $p : \tilde{X} \to X$ ist eine stetige Abbildung $s : X \to \tilde{X}$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$.
(4) Finden Sie eine nicht-triviale Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ mit Schnitt $s : X \to \tilde{X}$. *Hinweis:* Diese ist notwendigerweise nicht galoisch und nicht zusammenhängend.

Übung M3P. Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ erzeugt $\xi = e^{2\pi i a}$ in $\mathbb{S}^1$ die Untergruppe

$$H = \langle \xi \rangle = \{ \xi^k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

(1) Ist $a \in \mathbb{Q}$ rational, so ist H endlich und insbesondere diskret in $\mathbb{S}^1$.
Ist $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ irrational, so ist die Untergruppe H unendlich und dicht in $\mathbb{S}^1$.
Letzteres definiert eine freie Operation $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{S}^1$, die nicht frei diskontinuierlich ist.
(2) In der Gruppe $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ diskutiere man die von $\xi = (e^{2\pi i a}, e^{2\pi i b})$ erzeugte Untergruppe: Unter welchen Bedingungen ist sie diskret? endlich? unendlich? dicht?
(3) Bestimmen Sie alle diskreten Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$.

Übung M3Q. Sei K ein Simplizialkomplex und die Gruppe G operiere simplizial auf K durch $\varphi : G \times \Omega \to \Omega : (g, a) \mapsto ga$, das heißt für jeden Simplex $S \in K$ gilt $gS \in K$.

(1) Für jeden Eckenstern $\mathrm{St}(a, K) := \{ S \in K \mid \{a\} \cup S \in K \}$ und $g \in G \smallsetminus \{1\}$ gelte $g\,\mathrm{St}(a, K) \cap \mathrm{St}(a, K) = \emptyset$. Dann ist der Quotient $q : K \to G\backslash K$ eine simpliziale Überlagerung (M1K) und die topologische Realisierung $|q| : |K| \to |G\backslash K|$ eine Überlagerung.

(2) Schwächer gelte $gS \neq S$ für jeden Simplex $S \in K$ und $g \in G \smallsetminus \{1\}$. Dann operiert die Gruppe G frei diskontinuierlich auf der topologischen Realisierung $|K|$. Zudem ist der Quotient $q : |K| \twoheadrightarrow G\backslash|K|$ triangulierbar; hierzu genügt etwa die zweifache baryzentrische Unterteilung von K. Beispiele wie M3K zeigen, dass eine Unterteilung tatsächlich nötig ist.

Übung M3R. (1) Sei $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} \tilde{X} \overset{q}{\to} X$ eine Operation durch Homöomorphismen, überlagernd und hausdorffsch. Ist $\tilde{X}$ eine topologische Mannigfaltigkeit, so auch X.

(2) Ist $\tilde{X}$ eine glatte Mannigfaltigkeit und operiert G durch Diffeomorphismen, so ist auch X eine glatte Mannigfaltigkeit und $q : \tilde{X} \to X$ ein lokaler Diffeomorphismus.

§M4. Kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

§M4a. Hochhebung von Wegeklassen. Die Hochhebung von Wegen (M2G) ist das fundamentale Werkzeug der Überlagerungstheorie. Abbildung M:17 illustriert die Hochhebung von Wegen, sowie Fasertransport und Verknüpfung, die wir nun diskutieren wollen.

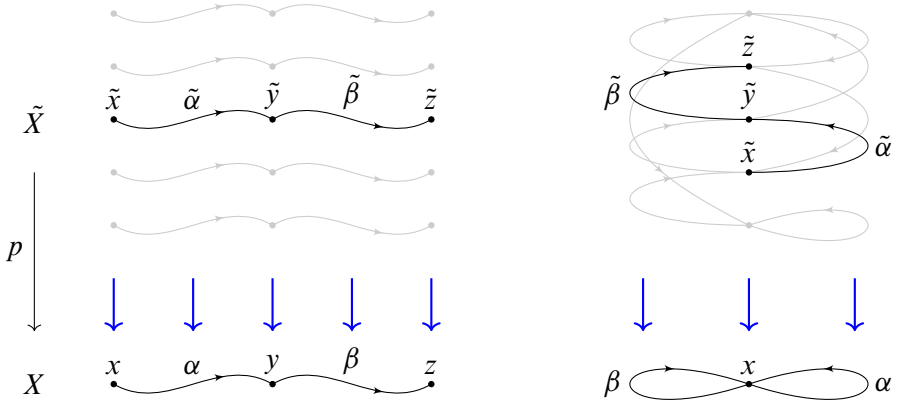


ABBILDUNG M:17. Hochhebung von Wegen, Verknüpfung und Fasertransport

Für jeden topologischen Raum X bezeichnen wir mit $P(X,x_0)$ die Menge aller Wege in X, die in x_0 beginnen. Entsprechend sei $\Pi(X,x_0) = P(X,x_0)/\sim$ die Menge aller Homotopieklassen von Wegen in X, die in x_0 beginnen. Mit diesen Bezeichnungen gilt nun:

Satz M4A. *Jede Überlagerung $p : (\tilde{X},\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ induziert folgende Bijektionen:*

$$\begin{array}{ccccc}
p_\sharp(\tilde{\alpha}) := p\circ\tilde{\alpha} & P(\tilde{X},\tilde{x}_0) & \xrightarrow{\text{quot}} & \Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0) & p_\sharp([\tilde{\alpha}]) := [p\circ\tilde{\alpha}] \\
 & p_\sharp \downarrow \cong \uparrow p_\flat & & p_\sharp \downarrow \cong \uparrow p_\flat & \\
p_\flat(\alpha) := \tilde{\alpha} & P(X,x_0) & \xrightarrow{\text{quot}} & \Pi(X,x_0) & p_\flat([\alpha]) := [\tilde{\alpha}]
\end{array}$$

Jede stetige Abbildung p induziert $p_\sharp$ wie angegeben. Für jede Überlagerung p definiert die Hochhebung von Wegen und Homotopien (M2G) die Umkehrabbildungen $p_\flat$.

BEWEIS. Dank M2G erlaubt jeder Weg $\alpha : ([0,1],0) \to (X,x_0)$ eine eindeutige Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1],0) \to (\tilde{X},\tilde{x}_0)$. Wir setzen $p_\flat(\alpha) := \tilde{\alpha}$. Aus $p\circ\tilde{\alpha} = \alpha$ folgt $p_\sharp \circ p_\flat = \mathrm{id}$. Aus der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt $p_\flat \circ p_\sharp = \mathrm{id}$.

Die Abbildung $p_\sharp$ geht von P auf den Quotienten Π über: Jede Homotopie $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}'$ ergibt eine Homotopie $p\tilde{H} : p\tilde{\alpha} \sim p\tilde{\alpha}'$. Somit ist $p_\sharp([\tilde{\alpha}]) := [p\circ\tilde{\alpha}]$ wohldefiniert.

Auch $p_\flat$ geht von P auf den Quotienten Π über: Jede Homotopie $H : \alpha \sim \alpha'$ hebt sich dank M2G zu einer Homotopie $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}'$. Somit ist $p_\flat([\alpha]) := [\tilde{\alpha}]$ wohldefiniert.

Für die Homotopie H verlangen wir feste Endpunkte, $H(s,0) = x_0$ und $H(s,1) = x_1$ für alle $s \in [0,1]$. Dies erfüllt auch die Hochhebung: $\tilde{H}(s,0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{H}(s,1) = \tilde{x}_1$ für alle $s \in [0,1]$; dank Eindeutigkeit ist jede Hochhebung eines konstanten Weges selbst konstant.

Nach Konstruktion gilt dann auch auf den Quotienten $p_\sharp \circ p_\flat = \mathrm{id}$ und $p_\flat \circ p_\sharp = \mathrm{id}$. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M4b. Untergruppen. Die Menge $\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ besteht aus allen (Homotopieklassen von) Wegen, die in $\tilde{x}_0$ beginnen. Die Fundamentalgruppe ist die Teilmenge $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \subset \Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ aller Wegeklassen, die in $\tilde{x}_0$ beginnen und auch enden. Aus Satz M4A folgt somit:

Korollar M4B. *Für jede Überlagerung $p : (\tilde{X},\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ ist der induzierte Gruppenhomomorphismus $\pi_1(p) = p_\sharp : \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \to \pi_1(X,x_0) : [\alpha] \mapsto [p\circ\alpha]$ injektiv.* □

Für eine beliebige stetige Abbildung $f : (X,x) \to (Y,y)$ ist der induzierte Gruppenhomomorphismus $f_\sharp : (X,x) \to (Y,y)$ keineswegs injektiv (L4H). Korollar M4B ist daher eine bemerkenswerte Eigenschaft, und sie hat sofort erstaunliche Konsequenzen:

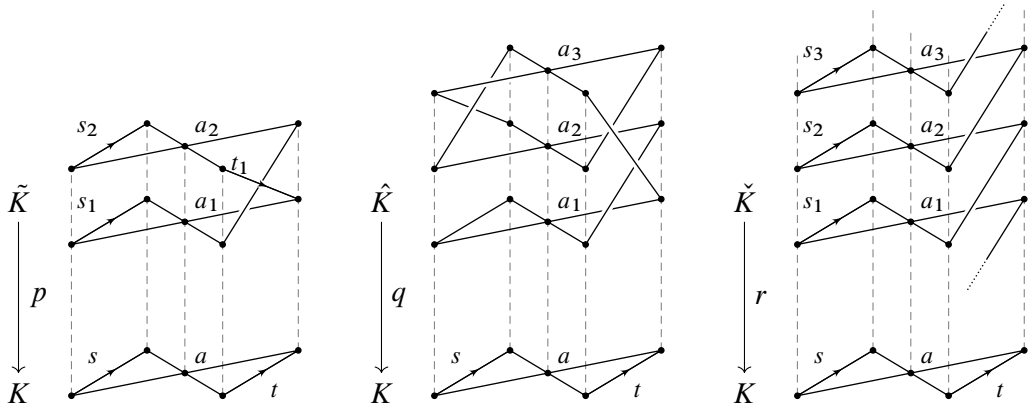


ABBILDUNG M:18. Überlagerungen von Graphen

Beispiel M4C. Abbildung M:18 zeigt links die zweiblättrige simpliziale Überlagerung $p : \tilde{K} \to K$. Wir wählen einen Spannbaum $T \subset K$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(K,a)$ wird frei erzeugt von den verbleibenden Kanten $K \smallsetminus T = \{s,t\}$ (L6D), hier also:

$$\pi_1(K,a) = \langle\, s,t \mid - \,\rangle$$

Ebenso wählen wir einen Spannbaum $\tilde{T} \subset \tilde{K}$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K},a_1)$ wird dann frei erzeugt von den verbleibenden Kanten $\tilde{K} \smallsetminus \tilde{T} = \{s_1,s_2,t_1\}$, also:

$$\pi_1(\tilde{K},a_1) = \langle\, s_1,s_2,t_1 \mid - \,\rangle$$

Der (injektive!) Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K},a_1) \to \pi_1(K,a)$ ist gegeben durch

$$p_\sharp(s_1) = s, \quad p_\sharp(s_2) = tst^{-1}, \quad p_\sharp(t_1) = t^2.$$

Somit enthält die freie Gruppe $\langle\, s,t \mid - \,\rangle$ vom Rang 2 freie Untergruppen vom Rang 3, etwa $U = \langle\, s,tst^{-1},t^2 \,\rangle$. Diese erstaunliche Eigenschaft steht im Gegensatz zu Vektorräumen über einem Körper K: Jeder Untervektorraum $U < K^r$ hat Dimension $\leq r$. Sie steht ebenso im Gegensatz zu freien *abelschen* Gruppen: Jede Untergruppe $U < \mathbb{Z}^r$ ist frei abelsch vom Rang $\leq r$. Dies sind besondere Eigenschaften; für freie Gruppen gelten sie nicht!

Übung M4D. (1) Bestimmen Sie, ob $v = t^3, w = sts^{-1}t^{-1} \in \langle\, s,t \mid - \,\rangle$ in der Untergruppe $U = \langle\, s,tst^{-1},t^2 \,\rangle$ liegen. Wenn möglich stellen Sie a und b als Wort in s,tst^{-1},t^2 dar.

(2) Untersuchen Sie ebenso die Überlagerungen q und r aus Abbildung M:18: Bestimmen Sie freie Erzeuger sowie die Homomorphismen $q_\sharp$ und $r_\sharp$ der Fundamentalgruppen.

§M4c. Fasertransport. Die Hochhebung von Wegen (M4A) transportiert Fasern:

Satz M4E. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Zu jedem Weg $\alpha : ([0,1],0) \to (X,x)$ und Startwert $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1],0) \to (\tilde{X},\tilde{x})$. Wir setzen $\tilde{x}\cdot[\alpha] := \tilde{\alpha}(1)$. Dies ist wohldefiniert und erfüllt $\tilde{x}\cdot[1_x] = \tilde{x}$ und $\tilde{x}\cdot([\alpha]\cdot[\beta]) = (\tilde{x}\cdot[\alpha])\cdot[\beta]$.*

Jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ definiert einen Funktor $F : \Pi(X) \to \mathtt{Set}$ wie folgt: Jedem Punkt $x \in X$ wird seine Faser $F_x = p^{-1}(x) = \{\, \tilde{x} \in \tilde{X} \mid p(\tilde{x}) = x \,\}$ zugeordnet. Jeder Wegeklasse $[\alpha] : x \to y$ wird die Abbildung $F_\alpha : F_x \to F_y : \tilde{x} \mapsto \tilde{x}\cdot[\alpha]$ zugeordnet.

Bemerkung. Da jeder Morphismus $[\alpha] : x \to y$ in der Kategorie $\Pi(X)$ invertierbar ist, dank Wegumkehr $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ und $\alpha * \bar{\alpha} \sim 1_x$ und $\bar{\alpha} * \alpha \sim 1_y$, ist die zugehörige Abbildung $F_{[\alpha]} : F_x \xrightarrow{\sim} F_y$ eine Bijektion, denn $F_{[\bar{\alpha}]} \circ F_{[\alpha]} = \mathrm{id}_{F_x}$ und $F_{[\alpha]} \circ F_{[\bar{\alpha}]} = \mathrm{id}_{F_y}$. Über jeder Wegkomponente von X haben also je zwei Fasern F_x und F_y dieselbe Mächtigkeit.

BEWEIS. Zur Wohldefiniertheit seien $\alpha, \alpha' \in P(X,x,y)$ und $H : \alpha \sim \alpha'$ eine Homotopie bei festen Endpunkten. Diese hebt sich zu einer Homotopie $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}'$, ebenfalls mit festen Endpunkten. Insbesondere gilt $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$, und somit ist $\tilde{x}\cdot[\alpha] = \tilde{x}\cdot[\alpha']$ wohldefiniert.

Ist $\alpha = 1_x$ konstant, so auch $\tilde{\alpha} = 1_{\tilde{x}}$, also gilt $\tilde{x}\cdot[1_x] = 1_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$.

Zur Verknüpfung betrachten wir Abbildung M:17 (links): Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein Weg von $\alpha(0) = x$ nach $\alpha(1) = y$. Weiter sei $\beta : [0,1] \to X$ ein Weg von $\beta(0) = y$ nach $\beta(1) = z$. Wir verknüpfen diese zum Weg $\gamma = \alpha * \beta$ von x über y nach z. Die Hochhebung $\tilde{\alpha}$ läuft dann von $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ zu einem Punkt $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$. Die anschließende Hochhebung $\tilde{\beta}$ läuft von $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$ zu einem Punkt $\tilde{z} \in p^{-1}(z)$. Ihre Verknüpfung $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ erfüllt $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, ist also die Hochhebung von $\gamma = \alpha * \beta$. Sie läuft von $\tilde{x}$ über $\tilde{y}$ nach $\tilde{z}$. Hieraus folgt:

$$\tilde{x}\cdot([\alpha]\cdot[\beta]) = \tilde{x}\cdot[\gamma] = \tilde{z},$$
$$(\tilde{x}\cdot[\alpha])\cdot[\beta] = \tilde{y}\cdot[\beta] = \tilde{z}. \qquad \square$$

Definition M4F. Die *Monodromie* der Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist die Rechtsoperation $F_x \times \pi_1(X,x) \to F_x$ der Fundamentalgruppe in x auf der Faser über x.

Beispiel. Wir betrachten $p : \tilde{K} \to K$ aus Abbildung M:18: Die Monodromie ist $a_1 \cdot s = a_1$, $a_2 \cdot s = a_2$ und $a_1 \cdot t = a_2$, $a_2 \cdot t = a_1$, anschaulich: Wechsel der Etagen über die Treppe.

Für die Überlagerung $q : \hat{K} \to K$ gilt die Monodromie $a_1 \cdot s = a_1$, $a_2 \cdot s = a_3$, $a_3 \cdot s = a_2$ und $a_1 \cdot t = a_2$, $a_2 \cdot t = a_3$, $a_3 \cdot t = a_1$.

Beispiel. Für die Überlagerung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ ist uns der Fasertransport bereits vertraut: Zu jedem Weg $\alpha : ([0,1],0) \to (\mathbb{S}^1,x)$ und jedem Startwert $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1],0) \to (\mathbb{R},\tilde{x})$. Die Bedingung $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ bedeutet $\mathrm{e}^{2\pi i \tilde{\alpha}(t)} = \alpha(t)$. Somit misst $\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(0)$ die Winkeländerung. Der Fasertransport ist hier

$$\tilde{x}\cdot[\alpha] = \tilde{x} + \deg(\alpha).$$

In Abbildung M:5 können wir uns $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{R}$ aus Draht vorstellen und ähnlich einem Abakus als Punkte $x \in \mathbb{S}^1$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ eine bewegliche Perle auffädeln. Jeder Weg $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ verschiebt diese Perle auf $\mathbb{S}^1$ von x nach y und gleichzeitig die hieran gekoppelte Perle auf $\mathbb{R}$ von $\tilde{x}$ nach $\tilde{y}$. Die Differenz $\tilde{y} - \tilde{x}$ zählt die Umläufe. Dieses einfache Beispiel ist richtungweisend für die weitere Entwicklung und wird in Satz M4G vervollkommnet.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M4d. Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung. Das vorige Beispiel konstruiert den Gruppenisomorphismus $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ durch Hochhebung von Wegen über $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ mit $p(t) = \exp(2\pi i t)$. Wir wollen diese elegante Technik so weit möglich verallgemeinern. Dies wird sich als effiziente Berechnungsmethode erweisen.

Hierzu sei $G \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{q} X$ eine frei diskontinuierliche Operationen (M3H). Der Quotient q ist dann eine Überlagerung (M3G). Wir übersetzen Abbildung M:19 in Satz M4G:

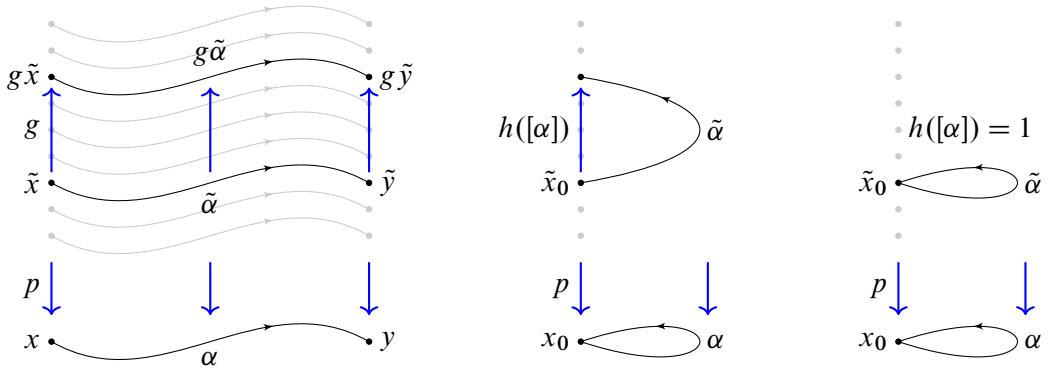


ABBILDUNG M:19. Gruppenoperation $G \curvearrowright \tilde{X}$ und Fasertransport $\tilde{X} \curvearrowleft \Pi(X)$

Satz M4G (kurze exakte Sequenz)**.** *Für jede Überlagerung $G \curvearrowright (\tilde{X},\tilde{x}_0) \xrightarrow{q} (X,x_0)$ gilt:*

(1) Die Operation von G auf $\tilde{X}$ kommutiert mit dem Fasertransport durch $\Pi(X)$:

$$(g\cdot\tilde{x})\cdot[\alpha] = g\cdot(\tilde{x}\cdot[\alpha])$$

für alle $g \in G$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ sowie $x = q(\tilde{x})$ und $[\alpha] \in \Pi(X,x)$.

(2) Wir erhalten daraus den Gruppenhomomorphismus

$$h : \pi_1(X,x_0) \to G \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_0\cdot[\alpha] = h([\alpha])\cdot\tilde{x}_0.$$

(3) Sein Kern ist $\ker(h) = q_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ und sein Bild ist

$$\operatorname{im}(h) = \big\{\, g\in G \;\big|\; \tilde{x}_0 \text{ und } g\cdot\tilde{x}_0 \text{ sind durch einen Weg in } \tilde{X} \text{ verbindbar} \,\big\}.$$

Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so gilt $\operatorname{im}(h) = G$, und wir erhalten die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{h} G \longrightarrow 1.$$

Dies fasst die geometrische Situation algebraisch zusammen. Exaktheit bedeutet, an jeder Stelle gilt „Bild = Kern“: $q_\sharp$ ist injektiv, h ist surjektiv, und $\operatorname{im}(q_\sharp) = \ker(h)$.

Anders gesagt, wir erhalten einen Isomorphismus $\bar{h} : \pi_1(X,x_0)/q_\sharp\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} G$.

Zur Erinnerung (M3J): Ist $G \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{q} X$ eine frei diskontinuierliche Operation und $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so nennen wir q eine *Galois–Überlagerung*. Ist $\tilde{X}$ sogar einfach zusammenhängend, so nennen wir $q : \tilde{X} \to X$ eine *universelle Überlagerung* von X. Aus Satz M4G erhalten wir in diesem Falle einen Isomorphismus $h : \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{\sim} G$.

BEWEIS DES SATZES. Der Satz ist vollkommen explizit, zum Beweis genügt geduldiges Nachrechnen. Alle hierzu benötigten Hilfsmittel haben wir bereits vorbereitet.

Wir wissen aus Satz M3G, dass $q : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist. Die Aussagen des Satzes folgen nun dank der eindeutigen Hochhebung von Wegen und Homotopien:

(1) Zu jedem Weg $\alpha : ([0,1],0) \to (X,x)$ und jedem Anfangspunkt $\tilde{x} \in q^{-1}(x)$ existiert eine eindeutige Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1],0) \to (\tilde{X},\tilde{x})$, also $q \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Seien $y = \alpha(1)$ und $\tilde{y} := \tilde{\alpha}(1)$ ihre Endpunkte. Für $g \in G$ erfüllt $g\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ dann $q \circ (g\tilde{\alpha}) = q\tilde{\alpha} = \alpha$. Dies ist die Hochhebung von α mit Startpunkt $g\tilde{x}$ und Endpunkt $g\tilde{y}$, also $(g \cdot \tilde{x}) \cdot [\alpha] = g \cdot (\tilde{x} \cdot [\alpha])$.

(2) Jede Schleife $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ hebt sich zu $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Wegen $q \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ gilt $q(\tilde{\alpha}(1)) = x_0$, also $\tilde{\alpha}(1) = g\tilde{x}_0$ für genau ein Gruppenelement $g \in G$. Dies definiert $h : \pi_1(X,x_0) \to G$ durch $h([\alpha]) = g$, also $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = h([\alpha]) \cdot x_0$.

Dies ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für alle $[\alpha],[\beta] \in \pi_1(X,x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned} h([\alpha]\cdot[\beta])\cdot\tilde{x}_0 &= \tilde{x}_0 \cdot ([\alpha]\cdot[\beta]) = (\tilde{x}_0 \cdot [\alpha])\cdot[\beta] = (h([\alpha])\cdot\tilde{x}_0)\cdot[\beta] \\ &= h([\alpha])\cdot(\tilde{x}_0\cdot[\beta]) = h([\alpha])\cdot(h([\beta])\cdot\tilde{x}_0) = (h([\alpha])\cdot h([\beta]))\cdot\tilde{x}_0 \end{aligned}$$

(3) Wir zeigen $\ker(h) = \operatorname{im}(q_\sharp)$: Für $[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$ gilt $h([\alpha]) = 1$ genau dann, wenn die Hochhebung $\tilde{\alpha}$ mit Startwert $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ auch in $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0$ endet (**??**), also $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ gilt. Demnach ist $h([\alpha]) = 1$ äquivalent zu $[\alpha] \in q_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$.

Nun zum Bild $\operatorname{im}(h)$. Es gilt „$\supset$“: Wenn ein Weg $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $g \cdot \tilde{x}_0$ existiert, dann ist $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ eine Schleife in (X,x_0) mit $h([\alpha]) = g$. Es gilt auch „$\subset$“: Aus $h([\alpha]) = g$ folgt $g \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$, also ist die Hochhebung $\tilde{\alpha}$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $g \cdot \tilde{x}_0$.

Die kurze exakte Sequenz ist die prägnante Zusammenfassung von (3) und M4B. □

§M4e. Anwendung auf die komplexe Exponentialfunktion und Potenzfunktionen.

Beispiel M4H. Die Überlagerung $\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} (\mathbb{R},0) \xrightarrow{p} (\mathbb{S}^1,1)$ mit $p(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$ induziert:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{R},0) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \mathbb{Z} \\ \downarrow\cong & & \deg\downarrow\cong & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{C},0) & \xrightarrow{\exp_\sharp} & \pi_1(\mathbb{C}^\times,1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \mathbb{Z} \\ \downarrow\cong & & \deg\downarrow\cong & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Gleiches gilt für die Überlagerung $\mathbb{Z} \overset{\varphi}{\curvearrowright} (\mathbb{C},0) \xrightarrow{\exp} (\mathbb{C}^\times,1)$. Auch hier entspricht die Operation $\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C} : (k,z) \mapsto 2\pi i k + z$ entspricht der Periode der Exponentialfunktion.

Die Überlagerung $W_n \overset{\cdot}{\curvearrowright} (\mathbb{S}^1,1) \xrightarrow{p} (\mathbb{S}^1,1)$ mit $p(z) = z^n$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ induziert:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \xrightarrow{h} & W_n \\ \deg\downarrow\cong & & \deg\downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{quot}} & \mathbb{Z}/n \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{C}^\times,1) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(\mathbb{C}^\times,1) & \xrightarrow{h} & W_n \\ \deg\downarrow\cong & & \deg\downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{quot}} & \mathbb{Z}/n \end{array}$$

Gleiches gilt für die Überlagerung $W_n \overset{\cdot}{\curvearrowright} (\mathbb{C}^\times,1) \xrightarrow{p} (\mathbb{C}^\times,1)$ mit $p(z) = z^n$. Der Gruppenisomorphismus $(\mathbb{Z}/n,+) \xrightarrow{\sim} (W_n,\cdot)$ ist gegeben durch $k + n\mathbb{Z} \mapsto \xi_n^k$ mit $\xi_n = \mathrm{e}^{2\pi i/n}$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M4f. Anwendung auf projektive Räume.

Beispiel M4I. Die Überlagerung $\{\pm1\} \dot\curvearrowright (\mathbb{S}^1, e_1) \xrightarrow{q} (\mathbb{RP}^1, \bar e_1)$ mit $q(x) = \{\pm x\}$ induziert:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) & \xhookrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(\mathbb{RP}^1, \bar e_1) & \xrightarrow{h} & \{\pm1\} \\
\downarrow{\scriptstyle \deg}\cong & & \downarrow{\scriptstyle \deg}\cong & & \downarrow\cong \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{quot}} & \mathbb{Z}/2
\end{array}$$

Dies ist das vorige Beispiel im Spezialfall $n = 2$. Insbesondere gilt $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ (M2P).

Die Überlagerung $\{\pm1\} \dot\curvearrowright (\mathbb{S}^n, e_1) \xrightarrow{q} (\mathbb{RP}^n, \bar e_1)$ mit $n \geq 2$ induziert:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathbb{S}^n, e_1) & \xhookrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(\mathbb{RP}^n, \bar e_1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \{\pm1\} \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z}/2
\end{array}$$

Für $n \geq 2$ ist dies die universelle Überlagerung von $\mathbb{RP}^n$, denn $\mathbb{S}^n$ ist einfach zusammenhängend, also wegzusammenhängend mit trivialer Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{1\}$. (Dies folgt aus simplizialer Approximation und stereographischer Projektion, siehe L2U)

Für die projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ haben wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2$ mit der simplizialen Fundamentalgruppe ausgerechnet, wie für alle Flächen $F_g^\pm$ (L6M). Hieraus konnten wir die Fundamentalgruppe aller projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ gewinnen (L6T).

Wesentlicher einfacher ist die obige Berechnung aus der universellen Überlagerung: Diese bekommen wir bei der Konstruktion der Räume $\mathbb{RP}^n$ gleich mitgeliefert. Der Rest ist dann eine einfache Anwendung der kurzen exakten Sequenz M4G.

§M4g. Anwendung auf die Gruppe $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$.

Beispiel M4J. Wir haben den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\rho(t) \in \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ bewirkt eine Rotation um den Winkel $2\pi t$.

Der Gruppenhomomorphismus ρ ist surjektiv (F1Q) mit Kern $\mathbb{Z}$.

Wir erhalten so die universelle Überlagerung $\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R} \xrightarrow{\rho} \mathrm{SO}_2$.

Daher gilt $\mathrm{SO}_2 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$ und $\pi_1(\mathrm{SO}_2, 1) \cong \mathbb{Z}$. Ausführlich:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathbb{R}, 0) & \xhookrightarrow{\rho_\sharp} & \pi_1(\mathrm{SO}_2, 1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \mathbb{Z} \\
\downarrow\cong & & \downarrow{\scriptstyle \deg}\cong & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Dieses Ergebnis für $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ ist schön und elegant, aber wenig überraschend. Es dient uns hier als Kontrast zum nächsten Beipiel $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$, wo die Berechnung der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}, 1) \cong \mathbb{Z}/2$ spürbar schwieriger und interessanter ist.

§M4h. Anwendung auf die Gruppe $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$.

Beispiel M4K. Wir wissen $\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{RP}^3$ aus K2P oder besser K2S: Die Sphäre $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ ist eine Gruppe. Konjugation stiftet den Gruppenhomomorphismus $q : (\mathbb{S}^3, \cdot) \to (\mathrm{SO}_3, \cdot)$. dieser ist surjektiv mit Kern $\{\pm 1\}$, also eine Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}_3$:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathbb{S}^3,1) & \xhookrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(\mathrm{SO}_3,1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \{\pm 1\} \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z}/2
\end{array}$$

§M4i. Der Dodekaederraum $A_5 \backslash \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$.

Beispiel M4L. Jedes kompakte Polyeder $P \subset \mathbb{R}^3$ hat eine endliche Isometriegruppe $G = \mathrm{Isom}^+(P)$. Besonders interessant sind die fünf regulären Polyeder (platonische Körper): Das Tetraeder ergibt $G \cong A_4$ der Ordnung 12, Oktaeder / Hexaeder ergeben $G \cong S_4$ der Ordnung 24, Dodekaeder / Ikosaeder ergeben $G \cong A_5$ der Ordnung 60. Dies sind diskrete Untergruppen von SO_3. Der Gruppenhomomorphismus $q : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$ mit $\ker(q) = \{\pm 1\}$ ergibt eine diskrete Untergruppe $\tilde{G} = q^{-1}(G)$ in $\mathbb{S}^3$ der Ordnung 24, 48 bzw. 120.

Die Überlagerung $\tilde{G} \curvearrowright \mathbb{S}^3 \xrightarrow{p} X = \tilde{G}\backslash\mathbb{S}^3$ bzw. $G \curvearrowright \mathrm{SO}_3 \xrightarrow{p} X = G \backslash \mathrm{SO}_3$ ergibt:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathbb{S}^3,1) & \xhookrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow[\cong]{h} & \tilde{G} \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\
\{1\} & \longrightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \tilde{G}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathrm{SO}_3,1) & \xhookrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{h} & G \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\
\{\pm 1\} & \longrightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{q} & G
\end{array}$$

Der Fall des Dodekaeders weist eine Besonderheit auf: Die alternierende Gruppe A_5 der Ordnung 60 ist einfach, hat also neben $\{1\}$ und A_5 keine normalen Untergruppen. Insbesondere gilt für die Kommutatoruntergruppe $[A_5, A_5] = A_5$. Die Abelschmachung ist demnach trivial, $(A_5)_{\mathrm{ab}} = \{1\}$. Gleiches gilt für die Gruppe $\tilde{A}_5 = q^{-1}(A_5) < \mathbb{S}^3$ der Ordnung 120.

Bemerkung. Der *Dodekaederraum* $\tilde{A}_5\backslash\mathbb{S}^3$ und die Sphäre $\mathbb{S}^3$ unterscheiden sich durch ihre Fundamentalgruppen, aber die Abelschmachung sieht diesen Unterschied nicht. Anders als bei Flächen (1) genügt die Abelschmachung allein also nicht zur Unterscheidung. Dieses schöne Beispiel ist auch historisch bedeutsam: Henri PONCARÉ hat es 1904 gefunden und so seine vermutete Charakterisierung (2) der 3–Sphäre geklärt bzw. korrigiert (3).

(1) Erinnerung: Ist F eine zusammenhängende, geschlossene 2–Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(F)/_{\mathrm{ab}} = \{1\} = \pi_1(\mathbb{S}^2)/_{\mathrm{ab}}$, so folgt $F \cong \mathbb{S}^2$ dank Flächenklassifikation (L6N).

(2) Naive Vermutung: Ist M eine zusammenhängende, geschlossene 3–Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(F)/_{\mathrm{ab}} = \{1\} = \pi_1(\mathbb{S}^3)/_{\mathrm{ab}}$, so folgt ebenso $M \cong \mathbb{S}^2$. Das ist falsch (M4L).

(3) Die *Poincaré–Vermutung* aus dem Jahr 1904 besagt: Jede einfach zusammenhängende, geschlossene 3–dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3–Sphäre.

Diese Vermutung war lange eines der zentralen ungelösten Probleme der Topologie. Grigori PERELMAN hat die Vermutung 2002 mit geometrischen Methoden bewiesen.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M4j. Anwendung auf Linsenräume. Auf der ungerade-dimensionalen Sphäre

$$\mathbb{S}^{2n-1} = \{ (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1 \}.$$

können wir die zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}/p, +)$ operieren lassen. Hierzu wählen wir natürliche Zahlen $1 \le q_1,\dots,q_n < p$ mit $\operatorname{ggT}(q_k, p) = 1$ und definieren $h : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^{2n-1}$ durch

$$h(z_1,\dots,z_n) = \big(e^{2\pi i q_1/p} z_1, \dots, e^{2\pi i q_n/p} z_n\big).$$

Dies ist ein Homöomorphismus mit $h^p = \mathrm{id}$ und definiert somit die stetige Operation $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^{2n-1} : (k,x) \mapsto h^k(x)$. Diese ist frei somit auch frei diskontinuierlich, da die Gruppe $\mathbb{Z}/p$ endlich ist (M3N). Der Quotientenraum

$$L = L(p;q_1,\dots,q_n) := (\mathbb{Z}/p)\backslash\mathbb{S}^{2n-1}$$

heißt *Linsenraum* zu den Parametern $(p,q_1,\dots,q_n)$. Wir erhalten so die Überlagerung

$$\mathbb{Z}/p \curvearrowright \mathbb{S}^{2n-1} \xrightarrow{f} L.$$

Nach Konstruktion ist L eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2n-1$, zudem kompakt, geschlossen und orientierbar. Auch die glatte Struktur von $\mathbb{S}^{2n-1}$ überträgt sich auf L.

Für $p = 2$ gilt $q_1 = \dots = q_n = 1$ und $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright \mathbb{S}^{2n-1} \xrightarrow{f} L = \mathbb{RP}^{2n-1}$ wie oben diskutiert.

Allgemein existiert $r \in \mathbb{Z}$ sodass $rq_1 \equiv 1 \pmod p$; wenn wir von h zu h^r übergehen, so erhalten wir denselben Quotientenraum, können aber zur Vereinfachung $q_1 = 1$ annehmen.

Im Falle $n = 1$ erhalten wir $\mathbb{Z}/p \curvearrowright \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^1 \cong L(p;1)$ mit $f(z) = z^p$, wie oben diskutiert. Für $n \ge 2$ ist die Fundamentalgruppe der Linsenräume leicht auszurechnen, da $\mathbb{S}^{2n-1}$ einfach zusammenhängend und somit die die universelle Überlagerung ist.

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \xhookrightarrow{f_\sharp} & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \xrightarrow{h} & \mathbb{Z}/p \\
{\scriptstyle\deg}\downarrow\cong & & {\scriptstyle\deg}\downarrow\cong & & \| \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot p} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{quot}} & \mathbb{Z}/p
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathbb{S}^{2n-1},e_1) & \xhookrightarrow{f_\sharp} & \pi_1(L,x_0) & \xrightarrow[\cong]{h} & \mathbb{Z}/p \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z}/p
\end{array}$$

Allein der Parameter p bestimmt die Fundamentalgruppe: Diese ist zyklisch mit p Elementen. Auch die weiteren Parameter $q_1,\dots,q_n$ gehen auf subtile Weise in die Topologie des Raumes $L(p;q_1,\dots,q_n)$ ein. Zur Illustration nenne ich (hier ohne Beweis) die Klassifikation der dreidimensionalen Linsenräume $L(p,q) = L(p;1,q)$:

Satz M4M. *(1) Genau dann existiert ein Homöomorphismus $L(p,q) \cong L(p,q')$, wenn die arithmetische Bedingung $q' \equiv \pm q^{\pm 1} \pmod p$ gilt.*
(2) Genau dann existiert eine Homotopie-Äquivalenz $L(p,q) \simeq L(p,q')$, wenn die arithmetische Bedingung $qq' \equiv \pm n^2 \pmod p$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Beispiel. Es gilt $L(5,1) \ncong L(5,2)$ und sogar $L(5,1) \not\simeq L(5,2)$.

Hingegen gilt $L(7,1) \ncong L(7,2)$, aber $L(7,1) \simeq L(7,2)$.

Insbesondere existieren geschlossene 3–Mannigfaltigkeiten, die homotopie-äquivalent aber nicht homöomorph sind. Für geschlossene 2–Mannigfaltigkeiten verhält sich dies anders: Aus dem Klassifikationssatz und der Fundamentalgruppe (L6O) folgt, dass zwei geschlossene Flächen genau dann homotopie-äquivalent sind, wenn sie homöomorph sind.

§M4k. Anwendung auf Torus und Kleinsche Flasche. Die vorigen Beispiele sind unserer kleinen Theorie leicht zugänglich, denn sie werden schon aufgrund ihrer Konstruktion mit einer passenden Überlagerung geliefert. Auch für Flächen ist dies möglich. Sphäre $\mathbb{S}^2 \cong F_0^+$ und projektive Ebene $\{\pm\} \curvearrowright \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^2 \cong F_0^-$ haben wir oben diskutiert. Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$ und Kleinsche Flasche F_1^- erhalten wir als Quotienten der Ebene $\mathbb{R}^2$:

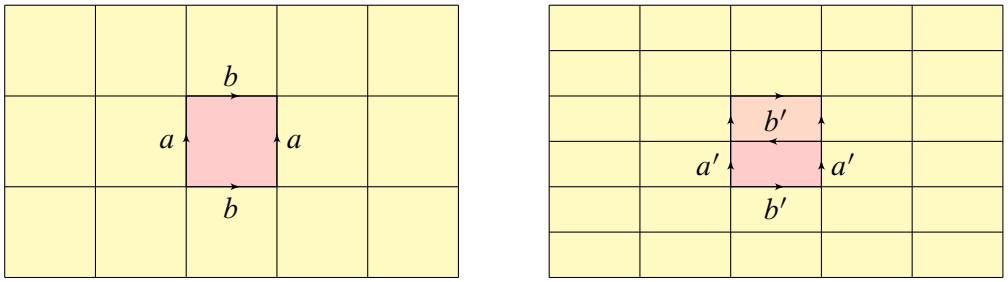


ABBILDUNG M:20. Universelle Überlagerung von Torus und Kleinscher Flasche

Wir betrachten die Homöomorphismen $g,h,k : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit

$$g : (x,y) \mapsto (x+1,y), \quad h : (x,y) \mapsto (x,y+1), \quad k : (x,y) \mapsto (1-x, y+1/2).$$

Es gilt $k^2 = h$. Die Gruppe $H = \langle\, g,h \mid gh = hg \,\rangle$ operiert frei diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^2$ und entspricht der Operation der Untergruppe $\mathbb{Z}^2 < \mathbb{R}^2$ durch Translation. Wir erhalten

$$H \curvearrowright \mathbb{R}^2 \xrightarrow{q} \mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \quad \text{mit} \quad q(x,y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}).$$

Hieraus lesen wir erneut die Fundamentalgruppe des Torus $\mathbb{T}^2$ ab:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{R}^2,0) & \xhookrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(\mathbb{T}^2,1) & \xrightarrow[\cong]{h} & H \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z}^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{R}^2,0) & \xhookrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(K,x_0) & \xrightarrow[\cong]{h} & G \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\ 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\mathrm{id}} & G \end{array}$$

Diese Konstruktion liefert ebenso eine universelle Überlagerung der Kleinschen Flasche K gemäß $G \curvearrowright \mathbb{R}^2 \to K$ und erlaubt so die Berechnung der Fundamentalgruppe:

Die Gruppe $G = \langle\, g,k \mid gkgk^{-1} = 1 \,\rangle$ operiert frei diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^2$, wie in Abbildung M:20 skizziert. Der Quotientenraum $G\backslash\mathbb{R}^2$ ist homöomorph zur Kleinschen Flasche K: Das Rechteck $R = [0,1] \times [0,1/2]$ wird entlang der Kanten verheftet wie $abab^{-1}$.

Beispiel M4N. Beide Fundamentalgruppen fügen sich zusammen. Die zweifache Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{T}^2 \to K$ der Kleinschen Flasche ergibt die folgende kurze exakte Sequenz:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{T}^2,1) & \xhookrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(K,x_0) & \xrightarrow{h} & \{\pm 1\} \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\ H & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & G & \xrightarrow{\mathrm{quot}} & \{\pm 1\} \end{array}$$

Hier entspricht die zweiblättrige Überlagerung $q : \mathbb{T}^2 \to K$ dem Quotienten modulo $[(x,y)] \equiv [(1-x, y+1/2)]$, wie in A:28 und K3D illustriert. Der zweiblättrigen Überlagerung q entspricht algebraisch die Untergruppe $H < G$ vom Index 2.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M4l. Universelle Überlagerung der Flächen.

Satz M4o. *Für jede geschlossene Flächen $F_g^\pm$ können wir eine universelle Überlagerung $G \curvearrowright X \twoheadrightarrow F_g^\pm$ explizit angeben und zudem mit einer der folgenden Geometrien versehen:*

- *Sphärisch, $g = 0$: Hier haben wir $G \curvearrowright \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow F_0^\pm$ wie oben.*
- *Euklidisch, $g = 1$: Hier haben wir $G \curvearrowright \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow F_1^\pm$ wie oben.*
- *Hyperbolisch, $g \geq 2$: Hier haben wir $G \curvearrowright \mathbb{H}^2 \twoheadrightarrow F_g^\pm$.*

Die drei Überlagerungsräume sind $\mathbb{S}^2$ mit sphärischer Geometrie, $\mathbb{R}^2$ mit euklidischer Geometrie und die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$ mit hyperbolischer Geometrie. Die Gruppe $G < \mathrm{Isom}^\pm(X)$ operiert jeweils durch Isometrien frei diskontinuirlich.

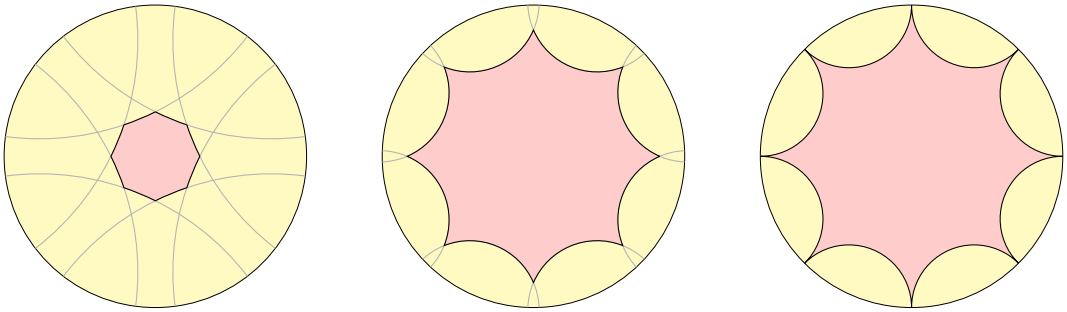


ABBILDUNG M:21. Hyperbolische n–Ecke mit beliebig kleinen Innenwinkeln

BEWEIS. Den hyperbolischen Raum realisieren wir (nach Poincaré) als offene Kreisscheibe $\mathbb{H}^2 = \mathbb{B}^2$ mit einer Metrik, sodass die Kreise senkrecht zum Rand $\mathbb{S}^1$ Geodäten sind. Durch je zwei Punkte $p \neq q$ in $\mathbb{H}$ verläuft genau eine Geodäte L. Es existiert genau eine Spiegelung an L, also eine orientierungsumkehrende Isometrie von $\mathbb{H}$, die L punktweise fest lässt. Die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ operiert transitiv auf allen Punkten $p \in \mathbb{H}^2$. Bei festem Punkt $p = 0$ operiert $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2, 0)$ einfach transitiv auf allen Richtungen $s \in \mathbb{S}^1$.

In $\mathbb{H}^2$ können wir ein reguläres $4g$–Eck P finden mit geodätischen Kanten und Innenwinkel $\pi/2g$. Im euklidischen Fall $g = 1$ ist dies ein Quadrat in der Ebene, für $g \geq 2$ geht das nur hyperbolisch: Wir wählen die Eckpunkte $r\,\mathrm{e}^{2\pi i k/4g}$ für $k = 1, 2, \ldots, 4g$ und $0 < r < 1$ und verbinden diese durch Geodäten. Für $r \to 0$ gehen die Innenwinkel gegen den euklidischen Wert $\pi - \pi/2g$. Für $r \to 1$ gehen die Innenwinkel gegen 0, monoton fallend und stetig in r; daher existiert genau ein Wert r mit den Innenwinkeln $\pi/2g$.

Die Seiten von P bestehen aus geodätischen Segmenten. Wir nennen sie umlaufend $a_1^+, b_1^+, a_1^-, b_1^-, \cdots, a_g^+, b_g^+, a_g^-, b_g^-$. Es existiert genau eine Isometrie $A_k^+ \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, die a_k^- auf a_k^+ mit gegenläufiger Orientierung abbildet. Ebenso existiert genau eine Isometrie $B_k^+ \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, die b_k^- auf b_k^+ mit gegenläufiger Orientierung abbildet. In jedem Eckpunkt fügen sich $4g$ Innenwinkel zu 2π zusammen wie die Stücke einer Pizza. Die erzeugte Gruppe $G = \langle\, A_1^\pm, B_1^\pm, \ldots, A_g^\pm, B_g^\pm \,\rangle < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ operiert frei diskontinuierlich auf $\mathbb{H}^2$. Das $4g$–Eck P ist ein Fundamentalbereich, und die Identifikationen auf den Kanten ist gerade so, dass wir die Fläche $F_g^+ = G\backslash\mathbb{H}^2$ erhalten. Entsprechend für $F_g^- = G\backslash\mathbb{H}^2$. □

§M4m. Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir nehmen M als zusammenhängend an.

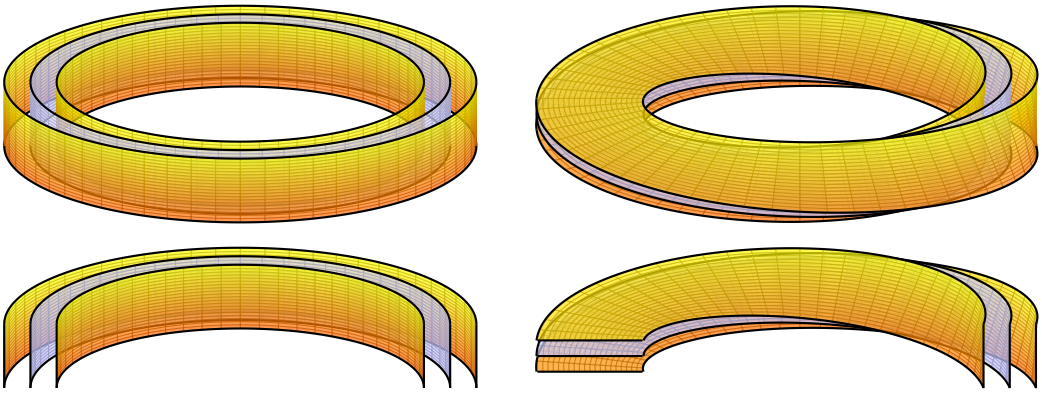


ABBILDUNG M:22. Orientierungsüberlagerungen $p : \tilde{M} \to M$

Konstruktion: Gegeben sei ein Atlas $\mathscr{A}$ von M aus Karten $k : M \supset U_k \xrightarrow{\sim} V_k \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Jedes Kartengebiet U_k sei zusammenhängend. Zwei Karten h, k um $a \in M$ sind *gleich orientiert*, geschrieben $h \approx_a k$, wenn der Kartenwechsel $(V_{hk}, h(a)) \xrightarrow{\sim} (V_{kh}, k(a))$ orientierungserhaltend ist (J7P). Dies ist eine Äquivalenzrelation. Sei $[k]_a$ die Äquivalenzklasse aller Karten $h \in \mathscr{A}$ mit $h \approx_a k$. Wir nehmen an, dass unser Atlas $\mathscr{A}$ um jeden Punkt $a \in M$ Karten beider Orientierungen enthält, und setzen

$$\tilde{M} := \big\{ (a, [k]_a) \;\big|\; k \in \mathscr{A},\ a \in U_k \big\}.$$

Zu $k \in \mathscr{A}$ setzen wir $\tilde{U}_k := \{ (a, [k]_a) \mid a \in U_k \}$ und $\tilde{k} : \tilde{U}_k \xrightarrow{\sim} V_k : (a, [k]_a) \mapsto k(a)$. Die Mengen $\tilde{k}^{-1}(V)$ mit $k \in \mathscr{A}$ und $V \subset V_k$ offen erfüllen (UB1–3) aus D3V, definieren also eine Topologie auf $\tilde{M}$. Damit ist $\tilde{M}$ eine Mannigfaltigkeit, der Atlas $\tilde{\mathscr{A}} = \{ \tilde{k} \mid k \in \mathscr{A} \}$ ist orientiert, und die Projektion $p : \tilde{M} \to M : (a, [k]_a) \mapsto a$ eine zweiblättrige Überlagerung mit $\tilde{k} = k \circ p$ für jede Karte $k \in \mathscr{A}$. Hierauf operiert die Gruppe $\{\pm 1\}$ (M3O):

$$\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M} \xrightarrow{p} M \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_\sharp} \pi_1(M, x_0) \xrightarrow{\text{sign}} \{\pm 1\}$$

Anschaulich (L8E): Jeder Weg $\gamma : [0,1] \to M$ transportiert lokale Orientierungen. Für einen geschlossenen Weg mit Start und Ziel in x_0 erhalten wir $\text{sign}([\gamma]) = \pm 1$, je nachdem, ob der Weg γ die Orientierung erhält oder umkehrt. Dies definiert den Gruppenhomomorphismus $\text{sign} : \pi_1(M, x_0) \to \{\pm 1\}$. Genau dann ist die Mannigfaltigkeit M orientierbar, wenn sign trivial ist, also $\text{sign}([\gamma]) = +1$ für alle Schleifen γ in (M, x_0) gilt. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit orientierbar; allgemeiner genügt, dass $\pi_1(M, x_0)$ oder $H_1(M) = \pi_1(M, x_0)_{\text{ab}}$ endlich von ungerader Ordnung ist.

Satz M4P. *(1) Ist M nicht-orientierbar, so ist der Homomorphismus* $\text{sign} : \pi_1(M, x_0) \to \{\pm 1\}$ *surjektiv, und die zweiblättrige Überlagerung $p : \tilde{M} \to M$ ist zusammenhängend.*

(2) Ist M orientierbar, so ist der Homomorphismus $\text{sign} : \pi_1(M, x_0) \to \{\pm 1\}$ *trivial, und die zweiblättrige Überlagerung $p : \tilde{M} \to M$ ist trivial, also unzusammenhängend.*

Jeder der beiden Schnitte $s : M \to \tilde{M}$ ist dann eine Orientierung: In jedem Punkt $a \in M$ wählt $s(a) = [k]_a$ eine lokale Orientierung, lokal kohärent in allen Punkten. □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Bemerkung. Unser räumliches Universum scheint eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit zu sein. Es ist denkbar, dass diese Mannigfaltigkeit M nicht-orientierbar sein könnte. Als Gedankenexperiment schicken wir eine Probe (Raumsonde, Elementarteilchen) auf eine lange Rundreise: Bei einem orientierungsumkehrenden Weg kehrt sie gespiegelt zurück.

Beispiele. Abbildung M:22 zeigt links den Zylindermantel $M \cong \mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ und seine Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \to M$. Dank Orientierbarkeit von M zerfällt $\tilde{M}$ in zwei Komponenten, jede entspricht der Wahl einer Orientierung, als Schnitt $s : M \to \tilde{M}$.

Abbildung M:22 zeigt rechts das Möbius–Band $M \cong \mathbb{S}^1 \ltimes [-1,1]$ und seine Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \to M$: Das mittlere Band ist die Mannigfaltigkeit M, die beiden äußeren bilden $\tilde{M}$; die untere Graphik zeigt einen Querschnitt. Dank Nicht-Orientierbarkeit von M ist $\tilde{M}$ zusammenhängend; es gilt $\tilde{M} \cong \mathbb{S}^1 \times [-1,1]$. (Sie können es basteln!)

Die Operation $\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M}$ vertauscht die beiden lokalen Orientierungen.

Beispiele. Die Orientierungsüberlagerung der projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist die zweiblättrige Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^2$, der zur Konstruktion von $\mathbb{RP}^2$ genutzt wurde.

Die Orientierungsüberlagerung der Kleinschen Flasche F_1^- ist der Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, genauer der Quotient $\{\pm 1\} \curvearrowright F_1^+ \twoheadrightarrow F_1^-$, wie in M4N ausgeführt.

Allgemein: Die Orientierungsüberlagerung der nicht-orientierbaren Fläche F_g^- ist die vertraute zweiblättrige Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright F_g^+ \twoheadrightarrow F_g^-$.

Übung M4Q. Was ist die Orientierungsüberlagerung des projektiven Raumes $\mathbb{RP}^n$?

⁕ **M4Q.** Die naheliegende Vermutung ist die vertraute Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$. Das ist allerdings nur in gerader Dimension $n = 2m$ richtig: In diesem Falle ist $\mathbb{RP}^n$ tatsächlich nicht-orientierbar. In ungerader Dimension $n = 2m+1$ hingegen ist $\mathbb{RP}^n$ orientierbar, und die Orientierungsüberlagerung ist trivial, äquivalent zu $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{RP}^n \times \{\pm 1\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$. Wir erhalten also *nicht* die Sphäre! Der erste Fall $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ ergibt die Orientierungsüberlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{RP}^1 \times \{\pm 1\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^1$ und nicht $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^1$. Ebenso interessant ist $\mathbb{RP}^3 \cong \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$: Diese Mannigfaltigkeit ist orientierbar (L6Z), wie jede Lie–Gruppe sogar parallelisierbar. Die Orientierungsüberlagerung ist auch hier $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{RP}^3 \times \{\pm 1\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^3$ und nicht $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^3$.

Übung M4R. Unsere Konstruktion zu Satz M4P beginnt mit einer Mannigfaltigkeit M und nutzt einen Atlas $\mathscr{A}$ als zusätzliches Datum. Wir konstruieren so aus $(M,\mathscr{A})$ eine orientierte Mannigfaltigkeit $(\tilde{M},\tilde{\mathscr{A}})$ und zweiblättrige Überlagerung $p : (\tilde{M},\tilde{\mathscr{A}}) \to (M,\mathscr{A})$.

Angenommen, die Mannigfaltigkeit $(M,\mathscr{A})$ ist $\mathscr{C}^k$–glatt. Gilt dies dann auch für die überlagernde Mannigfaltigkeit $(\tilde{M},\tilde{\mathscr{A}})$? und die Abbildung $p : (\tilde{M},\tilde{\mathscr{A}}) \to (M,\mathscr{A})$?

⁕ **M4R.** Glattheit eines Atlas $\tilde{\mathscr{A}}$ ist eine Eigenschaft der Kartenwechsel in $\tilde{\mathscr{A}}$. In unserem Fall sind die Karten in $\tilde{\mathscr{A}}$ „dieselben“ wie in $\mathscr{A}$, wobei je nach Orientierungsverhalten jedes Kartengebiet verdoppelt wird. Die Kartenwechsel in $\tilde{\mathscr{A}}$ sind ebenfalls „dieselben“ wie in $\mathscr{A}$, eventuell auf kleineren Überlappungen. Alle Eigenschaften der Kartenwechsel in $\mathscr{A}$ übertragen sich somit unmittelbar auf die Kartenwechsel in $\tilde{\mathscr{A}}$.

Korollar M4S. *Für das Produkt zusammenhängender Mannigfaltigkeiten M und N gilt*

$$\pi_1(M \times N,(a,b)) \cong \pi_1(M,a) \times \pi_1(N,b) \quad \textit{wie in L2O und}$$
$$\operatorname{sign}_{M\times N}([\gamma]) = \operatorname{sign}_M([\mathrm{pr}_M \circ \gamma]) \cdot \operatorname{sign}_N([\mathrm{pr}_N \circ \gamma]).$$

Demnach ist $M \times N$ genau dann orientierbar, wenn M und N orientierbar sind.

BEWEIS. Rechnen Sie dies sorgsam nach als Übung und Wiederholung (K1W). □

§M4n. Cayley–Graphen von Gruppen. Sei $(G,\cdot,1)$ eine Gruppe und $S \subset G$ eine Teilmenge. Der *Cayley–Graph* $\Gamma(G,S)$ besteht aus der Eckenmenge $\Omega = G$ und je einer Kante von g nach gs für jedes $g \in G$ und $s \in S$. Zur Vereinfachung setzen wir $S \cap S^{-1} = \emptyset$ voraus und definieren den Cayley–Graph des Paares (G,S) dann als Simplizialkomplex

$$\Gamma = \Gamma(G,S) := \big\{ \emptyset,\ \{g\},\ \{g,gs\} \;\big|\; g \in G,\ s \in S \big\}.$$

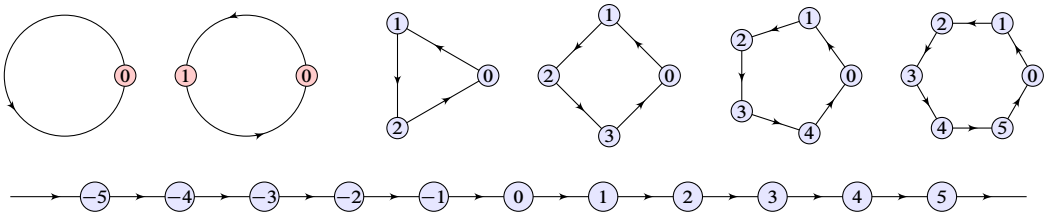


ABBILDUNG M:23. Cayley–Graphen $\Gamma(\mathbb{Z}/n,\{1\})$ und $\Gamma(\mathbb{Z},\{1\})$

Abbildung M:23 zeigt zwei Problemfälle: Für $s = 1$ erhalten wir eine Schleife (1–Eck), für $s^2 = 1$ mit $s \neq 1$ eine doppelte Kante (2–Eck). Diese sind simplizial nicht direkt realisierbar, wohl aber nach Unterteilung jeder Kante. Für $\Gamma'(G,S)$ wählen wir als Eckenmenge $\Omega = G \cup (G \times \{\pm\} \times S)$ mit Kanten $\{g,(g,\pm,s)\}$ und $\{(g,+,s),(gs,-,s)\}$. Mit diesem Trick können wir die Vorsichtsmaßnahme $S \cap S^{-1} = \emptyset$ fallenlassen.

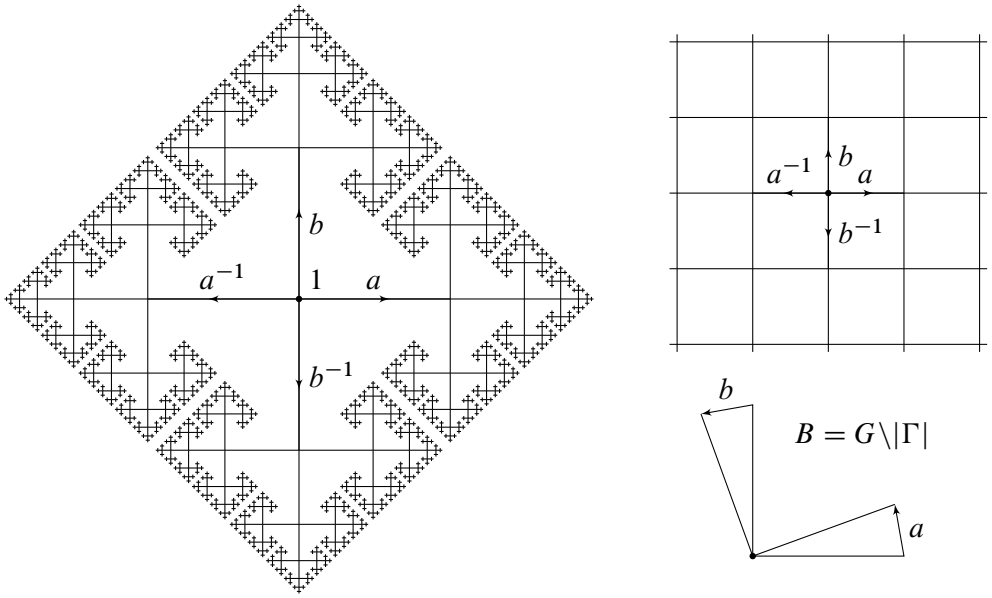


ABBILDUNG M:24. Der Graph der freien Gruppe $\langle a,b \mid - \rangle$ ist ein Baum. Der Graph der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^2 \cong \langle\, a,b \mid ab = ba \,\rangle$ ist ein Gitter.

Übung M4T. (1) Genau dann ist der Cayley–Graph $\Gamma(G,S)$ bzw. $\Gamma'(G,S)$ zusammenhängend, wenn die Gruppe G von der Teilmenge S erzeugt wird.

(2) Genau dann ist $\Gamma(G,S)$ bzw. $\Gamma'(G,S)$ einfach zusammenhängend, also ein Baum, wenn die Gruppe G von der Teilmenge S frei erzeugt wird.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Satz M4U. *Sei G eine Gruppe, $S \subset G$ ein Erzeugendensystem und $\Gamma = \Gamma(G,S)$ der Cayley–Graph. Die Gruppe G operiert frei und simplizial auf Γ durch Linkstranslation und somit frei diskontinuierlich auf dem Raum $|\Gamma|$. Der Quotientenraum $B := G\backslash|\Gamma|$ ist ein Bouquet von Kreislinien, eine für jeden Erzeuger $s \in S$.*

Die so konstruierte Überlagerung $G \curvearrowright |\Gamma| \xrightarrow{q} B$ ergibt folgende Gruppen:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\Gamma,1) & \xhookrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(B,b_0) & \xrightarrow{\quad h \quad} & G \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
\langle R \mid - \rangle & \xrightarrow{\text{inc}} & \langle S \mid - \rangle & \xrightarrow{\text{quot}} & \langle S \mid R \rangle
\end{array}$$

Dies formalisiert eine sehr anschauliche Beobachtung: Die Fundamentalgruppe von B wird frei erzeugt von den Erzeugern $s \in S$, und die Fundamentalgruppe von Γ besteht aus allen Relationen, die zwischen diesen Erzeugern in der Gruppe G gelten. Eine Relation $r \in \langle S \mid - \rangle$ ist ein Wort über dem Alphabet $A = S \sqcup S^{-1}$, dessen Produkt in $(G,\cdot,1)$ verschwindet. Im Graphen $(\Gamma,1)$ entspricht dies einem Weg, der in 1 startet und endet.

BEWEIS. Nach Konstruktion ist die Operation $G \curvearrowright |\Gamma|$ frei diskontinuierlich (M3Q), also ist $q : |\Gamma| \twoheadrightarrow B := G\backslash|\Gamma|$ eine Überlagerung (M3G). Die Unterteilung Γ' hat den zusätzlichen Vorteil, dass $G \curvearrowright \Gamma' \twoheadrightarrow G\backslash\Gamma'$ eine simpliziale Überlagerung ist (M1K). Hieraus folgt die kurze exakte Sequenz (M4G). Die Fundamentalgruppe von Graphen ist frei (L6D). □

Beispiel. Für $G = (\mathbb{Z}/n,+,0)$ und $S = \{1\}$ erhalten wir wie in Abbildung M:23:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\Gamma,0) & \xhookrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(B,b_0) & \xrightarrow{\quad h \quad} & G \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{quot}} & \mathbb{Z}/n
\end{array}$$

Dies ist topologisch äquivalent zu $W_n \curvearrowright \mathbb{S}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ aus Beispiel M4H.

Beispiel. Für $G = (\mathbb{Z},+,0)$ und $S = \{1\}$ wird hieraus wie in Abbildung M:23:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\Gamma,0) & \xhookrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(B,b_0) & \xrightarrow{\quad h \quad} & G \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Dies ist topologisch äquivalent zu $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ aus Beispiel M4H.

Beispiel. Wird die Gruppe $(G,\cdot,1)$ frei von S erzeugt, so erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\Gamma,1) & \xhookrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(B,b_0) & \xrightarrow[\cong]{\quad h \quad} & G \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\
1 & \longrightarrow & \langle S \mid - \rangle & \xrightarrow{\cong} & G
\end{array}$$

In diesem Falle ist der Cayley–Graph $\Gamma = \Gamma(G,S)$ ein Baum, und wir erhalten eine universelle Überlagerung $G \curvearrowright |\Gamma| \to B$. Abbildung M:24 illustriert den Fall $G = \langle a,b \mid - \rangle$.

§M4o. Cayley–Komplexe. Gegeben sei eine Gruppenpräsentation $G = \langle S \mid R \rangle$ durch Erzeuger S und Relationen R. Aus dem Paar (S, R) konstruieren wir den *Cayley–Komplex* $\tilde{K}(S, R)$ wie folgt: Als 1–Skelett beginnen wir mit dem Cayley–Graph $|\Gamma(G, S)|$ wie oben erklärt. Für jeden Startpunkt $g \in G$ in diesem Graphen definiert jede Relation $r \in R$ einen geschlossenen Weg. Längs dieses Weges kleben wir eine 2–Zelle $\mathbb{D}^2$ ein, parametrisiert wie in §K3c. Wir erhalten so den 2–dimensionalen Komplex $\tilde{K}(S, R)$.

Diese Konstruktion gelingt ebenso simplizial: Wir nutzen die simpliziale Unterteilung $\Gamma'(S, R)$. Aus diesem 1–Skelett gewinnen wir den 2–dimensionalen Simplizialkomplex $\tilde{K}'(S, R)$ durch das Anheften von simplizialen 2–Zellen wie in §L6l.

Satz M4v. *Die Gruppe $G = \langle S \mid R \rangle$ operiert frei diskontinuierlich auf dem Cayley–Komplex $\tilde{K}(S, R)$. Der Quotient $G \curvearrowright \tilde{K}(S, R) \twoheadrightarrow K(S, R)$ ist eine universelle Überlagerung.*

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\tilde{K}, 1) & \xhookrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(K, 1) & \xrightarrow{h} & G \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\ \{1\} & \hookrightarrow & \langle S \mid R \rangle & \xrightarrow{\cong} & G \end{array}$$

BEWEIS. Die Darstellung $\pi_1(K, 1) = \langle S \mid R \rangle$ können wir dank Satz L6s ablesen (L8m). Somit ist h ein Isomorphismus, und folglich ist der Kern $\pi_1(\tilde{K}, x_0)$ trivial.

Alternativ kann man zuerst zeigen, dass $\tilde{K}$ einfach zusammenhängend ist. Jeder geschlossene Kantenzug in $\tilde{K}$ entspricht einem Produkt von Relationen aus R (und ihren Konjugierten) und lässt sich somit über die angehefteten 2–Zellen zusammenziehen. □

Bemerkung. Wie in L8m erhalten wir zu jeder Gruppe $G = \langle S \mid R \rangle$ einen Raum $K(S, R)$ mit der vorgegebenen Fundamentalgruppe $\pi_1(K, 1) \xrightarrow{\sim} G$. Zudem erhalten wir nun eine universelle Überlagerung $G \curvearrowright \tilde{K}(S, R) \twoheadrightarrow K(S, R)$. Die gesamte Konstruktion lässt sich simplizial ausführen. Die Simplizialkomplexe $\tilde{K}$ und K sind dabei explizit gegeben, das heißt, so explizit wie unsere Kenntnis der vorgegebenen Gruppe G.

Beispiel. Für jede freie Gruppe $F = \langle S \mid - \rangle$ liefert diese Präsentation ohne Relationen als Cayley–Komplex $\tilde{K} = \Gamma(F, S)$ den Cayley–Graphen, als einen Baum wie oben.

Für $\mathbb{Z} \cong \langle s \mid - \rangle$ zum Beispiel erhalten wir $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. Dieselbe Gruppe kann man auf verschiedene Weisen präsentieren. Aus $\mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid ab^{-1} \rangle$ erhalten wir eine etwas aufgedickte Gerade. Beide Konstruktionen sind nicht homöomorph aber homotopie-äquivalent.

Beispiel. Für $\mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ erhalten wir als Cayley–Komplex $\tilde{K}$ die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$: Das 0–Skelett besteht aus dem Gitter $\mathbb{Z}^2$, das 1–Skelett aus den dazwischen liegenden Kanten, und das 2–Skelett füllt die Quadrate aus, denn an jedem Gitterpunkt wird je ein Quadrat angeheftet. Topologisch ist das äquivalent zu $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Beispiel. Für die Flächengruppen $G_g^\pm$ mit $g \geq 1$ liefert die Standardpräsentation aus Satz L6m als Cayley–Komplex die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$ wie oben skizziert. Für $G_0^- = \mathbb{Z}/2 = \langle c \mid c^2 \rangle$ liefert diese Präsentation als Cayley–Komplex die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$. Für $G_0^+ = \{1\} = \langle - \mid 1 \rangle$ liefert diese (etwas künstliche) Präsentation als Cayley–Komplex tatsächlich die Sphäre $\mathbb{S}^2 = \mathbb{D}^2 /\!\!/ \mathbb{S}^1$ (F1r).

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M4p. Der Todd–Coxeter–Algorithmus. Ich möchte im Folgenden den überaus nützlichen Todd–Coxeter–Algorithmus (TCA) darstellen. Er zählt systematisch Nebenklassen auf und löst damit folgendes Problem:

Satz M4w. *Gegeben sei eine endliche Gruppenpräsentation* (S, R).

(1) Ist die so präsentierte Gruppe $G = \langle S \mid R \rangle$ *endlich, so findet der TCA die Anzahl der Elemente* $|G|$ *und erstellt die Multiplikationstabelle* $G \times S \to G$.

(2) Allgemeiner: Hat die Untergruppe $H < G$ *endlichen Index, so findet der TCA die Anzahl der Nebenklassen* $|H\backslash G|$ *sowie die Multiplikationstabelle* $H\backslash G \times S \to H\backslash G$.

Fall (1) ist der Spezialfall von (2) für $H = \{1\}$. Wir lösen daher im Folgenden gleich das allgemeine Problem (2). Für die Anschauung ist zunächst (1) hilfreicher.

Daten: Gegeben sei die Menge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ der Erzeuger. Wie üblich nutzen wir das Alphabet $A := \{s_1^\pm, s_2^\pm, \dots, s_p^\pm\}$. Gegeben sei die Menge $R = \{r_1, r_2, \dots, r_q\} \subset A^*$ der Relationen. Die Untergruppe $H < G$ werde erzeugt von $U = \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\} \subset A^*$.

Die Rechtsnebenklassen $Hg \subset G$ zerlegen die Gruppe $G = Hg_1 \sqcup Hg_2 \sqcup \cdots \sqcup Hg_n$, geschrieben $H\backslash G := \{\, Hg \mid g \in G \,\} = \{Hg_1, Hg_2, \dots, Hg_n\}$. Gesucht ist ihre Anzahl n sowie Repräsentanten $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$. Wir können und werden immer $g_1 = 1$ annehmen.

Die Rechtstranlation definiert die Operation $H\backslash G \times G \to H\backslash G : (Hg, g') \mapsto Hgg'$. Für jedes Element g' ist dies eine Permutation der endlichen Menge $H\backslash G$. Es genügt, diese Operation für jeden Erzeuger $s \in S$ anzugeben, oder expliziter für alle $s^\pm \in A$, also

$$H\backslash G \times A \to H\backslash G : (Hg, s^\pm) \mapsto Hg\pi(s^\pm).$$

Die gesuchte *Multiplikationstabelle* ist von der Form $T : \{1, 2, \dots, n\} \times A \to \{1, 2, \dots, n\}$: Die Zeilen $i = 1, 2, \dots, n$ stehen für die Nebenklassen $C_i = Hg_i$. Die Spalten $a \in A$ stehen für das Alphabet über den Erzeugern. Der Eintrag $T(i, a) = j$ bedeutet $C_i \cdot \pi(a) = C_j$

Die Tabelle T definiert die Operation $\{1, 2, \dots, n\} \times A^* \to \{1, 2, \dots, n\} : (i, w) \mapsto iw$ des freien Monoids A^* auf der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$. Hierbei gelten folgende Regeln:

(1) Die Erzeuger $s^\pm \in A$ operieren durch inverse Permutationen.
(2) Jede Relation $r \in R \subset A^*$ operiert trivial auf $1, 2, \dots, n$.
(3) Die Elemente $u \in U \subset A^*$ operieren trivial auf 1.
(4) Die Operation ist transitiv auf $\{1, 2, \dots, n\}$.

Zur Konstruktion beginnen wir mit $n = 1$ und wenden diese Regeln an. Dabei werden wir zunächst eine *partielle Multiplikationstabelle* erstellen, bei der Einträge noch undefiniert sind; diese notieren wir durch den Wert 0, also $T : \{1, 2, \dots, n\} \times A \to \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Als bequeme Schreibweise wird der Eintrag 0 frei gelassen und „undefiniert“ genannt. Damit ist jeweils klar, ob die Multiplikationstabelle T nur partiell definiert ist. Wir lassen daher meist das Adjektiv „partiell“ weg und sprechen kurz von der *Tabelle* T.

Wir ergänzen die obige Operation durch $0a = 0$ für alle $a \in A$. Hierdurch definiert jede partielle Tabelle T eine Operation $\{0, 1, 2, \dots, n\} \times A^* \to \{0, 1, 2, \dots, n\} : (i, w) \mapsto iw$ des freien Monoids A^* auf der Menge $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Zu jeder gegebenen Tabelle T können wir nun die obigen Regeln (1–4) überprüfen und die Tabelle gegebenenfalls korrigieren, erweitern oder kürzen, bis schließlich eine vollständige Tabelle vorliegt. Dies ist der Todd–Coxeter–Algorithmus, den wir nun ausführen.

Expansion: Wir beginnen mit der leeren Tabelle $T : \{1\} \times A \to \{0,1\} : (1,a) \mapsto 0$.

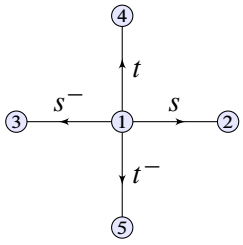
Angenommen, die vorgelegte Tabelle $T : \{1,2,\dots,n\} \times A \to \{0,1,2,\dots,n\}$ enthält einen undefinierten Eintrag $T(i,a) = 0$. Dann können wir $T(i,a) = n+1$ setzen und die Tabelle um eine Zeile erweitern zu $T : \{1,2,\dots,n,n+1\} \times A \to \{0,1,2,\dots,n,n+1\}$. Die neue Zeile ist undefiniert bis auf $T(n+1,a^{-1}) = i$, als Umkehrung zu $T(i,a) = n+1$.

Beispiel. Wir illustrieren die Expansion für $G = \langle s,t \mid - \rangle$. Wir beginnen mit der leeren Tabelle, die nur das Element 1 enthält, aber die Operation von s, s^-, t, t^- ist noch undefiniert:

	s	s^-	t	t^-
1	0	0	0	0

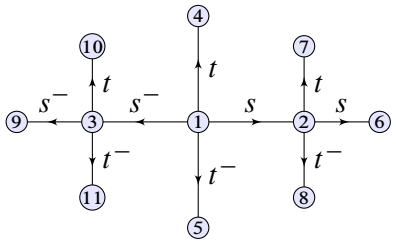
Nun füllen wir die Zeile 1 durch neue Elemente, also vierfach wiederholte Expansion:

	s	s^-	t	t^-
1	2	3	4	5
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	1
5	0	0	1	0



Auch die neu entstandenen Felder können wir nun füllen. Zur Illustration fülle ich hier nur die Zeilen 2 und 3 durch neue Elemente $6,7,\dots,11$; die neuen Zeilen schreibe ich nicht aus.

	s	s^-	t	t^-
1	2	3	4	5
2	6	1	7	8
3	1	9	10	11
4	0	0	0	1
5	0	0	1	0
…	…	…	…	…



Für die freie Gruppe $G = \langle s,t \mid - \rangle$ können wir so die Tabelle zeilenweise immer weiter expandieren: G ist unendlich, daher bricht der Algorithmus nie ab, es sprießt der Baum aus Abbildung M:24. Zur Endlichkeit verhelfen uns wie folgt erst die Relationen $R \subset A^*$.

Reduktion: Vorgelegt sei eine (partielle) Tabelle $T : \{1,2,\dots,n\} \times A \to \{0,1,2,\dots,n\}$. Wir prüfen in Zeile $i \in \{1,2,\dots,n\}$ die Relation $r \in R$ wie folgt:

(a) Trivialität: Gilt $ir = i$, so lassen wir die Tabelle T unverändert.
(b) Deduktion: Sei $r = uav \in A^* \times A \times A^*$ sowie $iu = j > 0$ und $iv^{-1} = k > 0$ aber $ja = 0$ und $ka^- = 0$. Dann setzen wir $T(j,a) = k$ und $T(k,a^-) = j$.
(c) Identifikation: Sei $r = uv \in A^* \times A^*$ und $iu = j > 0$ und $iv^{-1} = k > 0$ aber $j \neq k$. (Ist dies für mehrere $r = uv = u'v'$ möglich, so wählen wir u maximaler Länge.) Wir fusionieren die Zeilen j und k wie nachfolgend beschrieben.
(d) Unvollständigkeit: Sei $r = uvw \in A^* \times A^* \times A^*$ sowie $iu = 0$ und $iw^{-1} = 0$. Dann kann noch keine Schlussfolgerung gezogen werden, und T bleibt unverändert.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Im Falle (d) nennen wir die Tabelle T *unvollständig* bezüglich (i,r). Im Falle (a–c) nennen wir T *vollständig* bezüglich (i,r). Genauso verfahren wir für $i = 1$ und $u \in U$. Gilt Vollständigkeit für alle $(i,r) \in \{1,2,\dots,n\} \times R$ und $(1,u) \in \{1\} \times U$, so nennen wir die Tabelle T *vollständig*. In diesem Falle endet der Algorithmus.

Bemerkung. Die Deduktion (b) schließt einen bislang undefinierten Tabelleneintrag aus bereits definierten Einträgen und den vorgegebenen Relationen (wie beim Keuzworträtsel).

Bemerkung. Die Identifikation (c) ist nötig, da der Algorithmus zunächst redundante Nebenklassen erzeugen kann, die sich erst später als identisch herausstellen. Dieses Aufblähen kostet Speicher und Rechenzeit, lässt sich aber prinzipiell nicht vermeiden:

Beispiel. Seien $1 < m < n$ in $\mathbb{N}$ teilerfremd, also $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$ und somit $km + \ell n = 1$ für geeignete Koeffizienten $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Die Gruppe $G = \langle\, s \mid s^m = 1,\ s^n = 1 \,\rangle$ ist trivial, denn es gilt $s = s^1 = s^{km+\ell n} = (s^m)^k (s^n)^\ell = 1$. Der Todd–Coxeter–Algorithmus muss jedoch mindestens m Nebenklassen erzeugen, bevor die Konsequenz $s = 1$ entdeckt werden kann.

Bemerkung. Die Fusion der Zeilen j und k der Tabelle T verläuft so: Wir können $j < k$ annehmen; notfalls tauschen wir j und k. Wir ersetzen überall in der Tabelle die Einträge $k, k+1, k+2, \dots, n$ durch $j, k, k+1, \dots, n-1$. Wir übertragen jeden definierten Eintrag $T(k,a) \neq 0$ nach $T(j,a)$: Im Falle $T(j,a) \neq 0$ vermerken wir diese Fusion in einer Warteschlange und führen sie anschließend aus. Sind alle Einträge von Zeile k nach Zeile j übertragen, so löschen wir schließlich die Zeile k. Solange die Warteschlange noch nicht leer ist, führen wir die nächste Fusion aus.

Beispiel. Zur Illustration wenden wir den Todd–Coexter–Algorithmus an auf die Präsentation $G = \langle\, s,t \mid s^2 = 1,\ t^3 = 1,\ sts^{-1}t^{-1} = 1 \,\rangle$ und $H = \{1\}$. In einer zweiten Tabelle notieren wir als Nebenrechnung die Operation der Relationen.

	s	s^-	t	t^-
1	0	0	0	0

s	s	t	t	t	s	t	s^-	t^-
1	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0	**1**

Zunächst expandieren wir in der ersten Zeile die ersten beiden Leerstellen zu 2 und 3:

	s	s^-	t	t^-
1	2	3	0	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0

s	s	t	t	t	s	t	s^-	t^-
1	→ 2 | 3 ←	**1**	0	0	**1**	→ 2	0	0	**1**
2	1 ←	**2**	0	0	**2**	0	0	0	**2**
3	→ 1	**3**	0	0	**3**	→ 1	0	0	**3**

Die Relationen rechts fordern die Identifikation $2 \equiv 3$. Nach dieser Fusion erhalten wir:

	s	s^-	t	t^-
1	2	2	0	0
2	1	1	0	0

s	s	t	t	t	s	t	s^-	t^-
1	2	**1**	0	0	**1**	2	0	0	**1**
2	1	**2**	0	0	**2**	1	0	0	**2**

Nun expandieren wir in der ersten Zeile die letzten beiden Leerstellen zu 3 und 4:

	s	s^-	t	t^-
1	2	2	3	4
2	1	1	0	0
3	0	0	0	1
4	0	0	1	0

	s	s	t	t	t	s	t	s^-	t^-
1	2	**1** →	3	!	4 ←	**1**	2	0	3 ← **1**
2	1	**2**	0		0	**2**	1 →	3	0 **2**
3	0	**3**	!	4 ←	1 ←	**3**	0	0	0 **3**
4	0	**4** →	1 →	3	!	**4**	0	2 ←	1 ← **4**

Die Relationen rechts zeigen die Deduktion $3t = 4$ und $4t^{-1} = 3$. Wir erhalten so:

	s	s^-	t	t^-
1	2	2	3	4
2	1	1	0	0
3	0	0	4	1
4	0	0	1	3

	s	s	t	t	t	s	t	s^-	t^-
1	2	**1**	3	4	**1**	2	0	3	**1**
2	1	**2**	0	0	**2**	1	3	0	**2**
3	0	**3**	4	1	**3**	0	0	4 ←	**3**
4	0	**4**	1	3	**4**	0	2	1	**4**

Schließlich expandieren wir in der zweiten Zeile die letzten beiden Leerstellen zu 5 und 6:

	s	s^-	t	t^-
1	2	2	3	4
2	1	1	5	6
3	0	0	4	1
4	0	0	1	3
5	0	0	0	2
6	0	0	2	0

	s	s	t	t	t	s	t	s^-	t^-
1	2	**1**	3	4	**1**	2 →	5	! 3	**1**
2	1	**2** →	5	!	6 ← **2**	1	3	! 5 ←	**2**
3	0	**3**	4	1	**3**	0	0	4	**3**
4	0	**4**	1	3	**4**	! 6 ←	2	1	**4**
5	0	**5**	!	6 ←	2 ← **5**	0	0	0	**5**
6	0	**6** →	2 →	5	! **6**	! 4 ←	1 ←	2 ←	**6**

Die Relationen rechts zeigen die Deduktion $5t = 6$ und $6t^{-1} = 5$, zudem $3s = 5$ und $5s = 3$ sowie $4s = 6$ und $6s = 4$. Wir erhalten schließlich die vollständige Tabelle:

	s	s^-	t	t^-
1	2	2	3	4
2	1	1	5	6
3	5	5	4	1
4	6	6	1	3
5	3	3	6	2
6	4	4	2	5

	s	s	t	t	t	s	t	s^-	t^-
1	2	**1**	3	4	**1**	2	5	3	**1**
2	1	**2**	5	6	**2**	1	3	5	**2**
3	5	**3**	4	1	**3**	5	6	4	**3**
4	6	**4**	1	3	**4**	6	2	1	**4**
5	3	**5**	6	2	**5**	3	4	6	**5**
6	4	**6**	2	5	**6**	4	1	2	**6**

Diese Rechnung zeigt, dass unsere Gruppe $G = \langle s,t \mid s^2 = 1,\ t^3 = 1,\ sts^{-1}t^{-1} = 1 \rangle$ genau 6 Elemente hat, nämlich $G = \{ 1, 2{=}s, 3{=}t, 4{=}t^{-1}, 5{=}st, 6{=}st^{-1} \}$. Zudem zeigt die Tabelle links die Multiplikationstabelle für $(G, \cdot, 1)$ mit Hilfe der Erzeuger s, t.

Bemerkung. Der Todd–Coxeter–Algorithmus ist eine ideale Aufgabe für einen elektronischen Rechner. Computer-Algebra-Systeme wie GAP bieten effiziente Implementierungen.

Bei Expansion und Reduktion können wir die Reihenfolge der Schritte wählen; zur Formulierung des Algorithmus und insbesondere zur Implementierung auf einem Computer müssen diese Wahlen noch präzisiert werden. Wir können zum Beispiel immer den ersten undefinierten Eintrag expandieren und dann reduzieren bezüglich aller Relationen in der gegebenen Reihenfolge. Diese Wahlen ändern das Ergebnis höchstens bis auf Umnummerierung, sie können aber den Rechenaufwand empfindlich beeinflussen. In unserem Beispiel hätten wir die anfängliche Fusion vermeiden können: Sehen Sie wie?

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M5. Galois–Korrespondenz zwischen Untergruppen und Überlagerungen

§M5a. Vorläufige Formulierung. Wir erinnern zunächst an unser zentrales Beispiel und bewundern die Dualität von Fundamentalgruppe und Überlagerungen:

Beispiel. Zur Kreislinie können wir die Fundamentalgruppe explizit berechnen dank

$$\deg : (\pi_1(\mathbb{S}^1,1),\cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z},+).$$

Vorübergehend identifiziere ich beide Gruppen und schreibe kurz $\pi_1(\mathbb{S}^1,1)=\mathbb{Z}$.

Die Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind $n\mathbb{Z}$ mit $n\in\mathbb{N}$. Zu jedem $n\geq 1$ haben wir die Überlagerung

$$p_n : (\mathbb{S}^1,1) \to (\mathbb{S}^1,1) : z \mapsto z^n \quad \text{mit} \quad \operatorname{im}(p_n)_\sharp = n\mathbb{Z}.$$

Im Sonderfall $n=0$ haben wir die universelle Überlagerung

$$p_0 : (\mathbb{R},0) \to (\mathbb{S}^1,1) : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \quad \text{mit} \quad \operatorname{im}(p_0)_\sharp = 0\mathbb{Z}.$$

Die Beobachtung dieses Beispiels gilt allgemein für alle (vernünftigen) Räume: Überlagerungen von (X,x_0) entsprechen den Untergruppen von $\pi_1(X,x_0)$. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist diese *Galois–Korrespondenz*, die ich vorläufig hier schon formulieren kann:

Satz M5A. *Sei X zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend.*

(1) Jede Überlagerung $p : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(Y,y_0) \hookrightarrow \pi_1(X,x_0)$ und somit eine Untergruppe $\operatorname{im}(p_\sharp)$.

(2) Zu jeder Untergruppe H in $\pi_1(X,x_0)$ existiert eine zusammenhängende Überlagerung $p : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ mit $\operatorname{im}(p_\sharp) = H$. *Diese ist eindeutig bis auf Isomorphie.*

Wenn wir Überlagerungen verstehen, so verstehen wir Untergruppen, und umgekehrt.

Bemerkung. Die topologische Voraussetzung, dass X lokal einfach zusammenhängend sei, ist recht milde: Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexe erfüllen sie automatisch. Lokale Vorsichtsmaßnahmen sind leider notwendig, wir werden sie später noch wesentlich abschwächen (M5Q). Ich wähle hier zunächst eine möglichst bequeme Formulierung.

Beispiel. Zu $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir zwei Überlagerungen $p_{\pm n} : (\mathbb{S}^1,1) \to (\mathbb{S}^1,1) : z \mapsto z^{\pm n}$. Beide führen zur selben Untergruppe $\operatorname{im}(p_{\pm n})_\sharp = \pm n\mathbb{Z}$. Tatsächlich sind beide isomorph vermöge des Homöomorphismus $h : (\mathbb{S}^1,1) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{S}^1,1) : z \mapsto z^{-1}$.

Auch die gegenläufigen Parametrisierungen $p_\pm : (\mathbb{R},0) \to (\mathbb{S}^1,1) : t \mapsto \mathrm{e}^{\pm 2\pi i t}$ sind isomorph vermöge des Homöomorphismus $h : (\mathbb{R},0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R},0) : t \mapsto -t$.

Bemerkung. Satz M5A ist die topologische Inkarnation der Galois–Korrespondenz aus der Algebra. Die geniale Grundidee geht auf Évariste GALOIS (1811–1832) zurück, ursprünglich für algebraische Körpererweiterungen $K|L$ und ihre Automorphismengruppen $\operatorname{Aut}(K|L)$. Die Galois–Theorie ist ein faszinierendes Beispiel dafür, dass manch konkretes Problem erst lösbar wird, wenn man es mit der nötigen Abstraktion behandelt: Sie dient zur Lösung klassischer Probleme wie die (Nicht-)Auflösbarkeit algebraischen Gleichungen oder der (Nicht-)Konstruierbarkeit von regelmäßigen n–Ecken mit Zirkel und Lineal.

Bevor ich die Galois–Korrespondenz beweise, möchte ich Beispiele und Anwendungen präsentieren, um vorweg zu zeigen, dass sich die Mühe auszahlt, wie immer so auch hier.

§M5b. Galois–Korrespondenz für Graphen. Für jeden vorgelegten Graphen K können wir besonders einfach und explizit *alle* Überlagerungen $p : \tilde{K} \to K$ konstruieren.

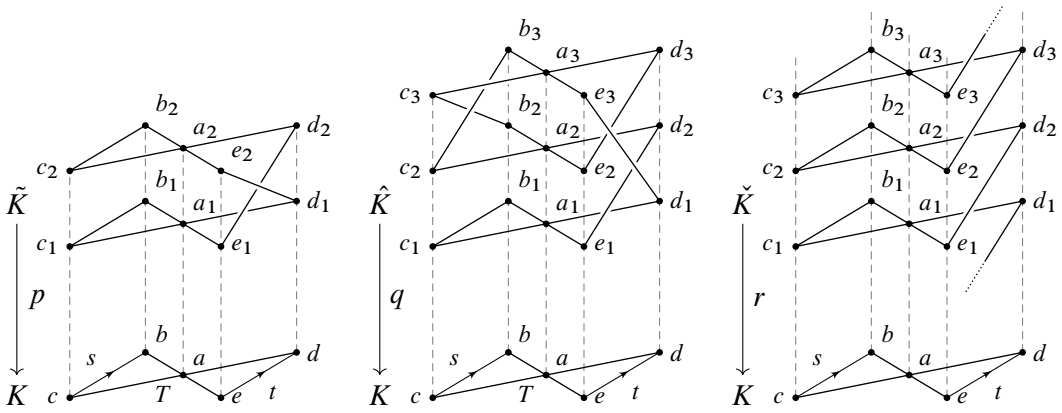


ABBILDUNG M:25. Überlagerungen von Graphen

Beispiel. Die erste Überlagerung $p : \tilde{K} \to K$ aus M:25 hat die Faser $F = p^{-1}(a) = \{1,2\}$. Hierauf operiert $\pi_1(K,a) = \langle s,t \mid - \rangle$ durch $1\cdot s = 1$, $2\cdot s = 2$ und $1\cdot t = 2$, $2\cdot t = 1$.

Bei der zweiten Überlagerung $q : \hat{K} \to K$ operiert $\pi_1(K,a)$ auf der Faser $F = \{1,2,3\}$ durch $1\cdot s = 1$, $2\cdot s = 3$, $3\cdot s = 2$ und $1\cdot t = 2$, $2\cdot t = 3$, $2\cdot t = 3$.

Bei $r : \check{K} \to K$ operiert $\pi_1(K,a)$ auf $F = \mathbb{Z}$ durch $k\cdot s = k$ und $k\cdot t = k+1$.

Die Überlagerung können wir allein aus diesen drei Daten rekonstruieren: dem Graphen (K,x_0) und der Faser F mit der Operation $\varphi : F \times \pi_1(K,x_0) \to F$ durch Monodromie.

Daten: Sei K ein zusammenhängender simplizialer Graph. Wir wählen eine Ecke $x_0 \in \Omega$ und einen Spannbaum $T \subset K$ (I3J). Gemäß L6D ist die Fundamentalgruppe frei:

$$\pi_1(K,x_0) \xrightarrow{\sim} G = \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \smallsetminus T \;\big|\; s_{ab}s_{ba} = 1 : \{a,b\} \in K \smallsetminus T \,\big].$$
$$\cong \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \;\big|\; s_{ab} = 1 : \{a,b\} \in T,\ s_{ab}s_{ba} = 1 : \{a,b\} \in K \,\big].$$

Sei $\varphi : F \times \pi_1(K,x_0) \to F : (u,g) \mapsto u\cdot g$ eine Operation dieser Gruppe auf einer Menge $F \neq \emptyset$. Für jede Kante $\{a,b\} \in K$ ist $u \mapsto u\cdot s_{ab}$ eine Permutation der Menge F.

Satz M5B. *Die Daten (K,F,φ) definieren auf der Eckenmenge $\tilde{\Omega} = F \times \Omega$ den Graphen*

$$\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K := \big\{\, \{(u,a),(u',b)\} \;\big|\; u,u' \in F,\ \{a,b\} \in K,\ u' = u\cdot s_{ab} \,\big\}.$$

Die Projektion $p : \tilde{K} \to K : (u,a) \mapsto a$ ist eine simpliziale Überlagerung mit Faser F und Monodromie φ. Gleiches gilt für ihre topologische Realisierung $|p| : |\tilde{K}| \to |K|$.

BEWEIS. Zu jeder Ecke $a \in \Omega$ wird der Stern $\mathrm{St}(a,K) := \langle\, \{a,b\} \in K \,\rangle$ trivial überlagert durch die Eckensterne $\mathrm{St}((u,a),\tilde{K}) = \langle\, \{(u,a),(u',b)\} \in \tilde{K} \,\rangle$ mit $u \in F$. Für $u \neq v$ in F gilt $\mathrm{St}((u,a),\tilde{K}) \cap \mathrm{St}((v,a),\tilde{K}) = \emptyset$ wie in M:26: Läge $(u',b) = (v',b)$ im Schnitt, so wäre $u\cdot s_{ab} = u' = v' = v\cdot s_{ab}$ und somit $u = v$. Somit ist p eine simpliziale Überlagerung und $|p|$ eine Überlagerung (M1K). □

Beispiel. Die Daten des vorigen Beispiels ergeben die Graphen aus M:25.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

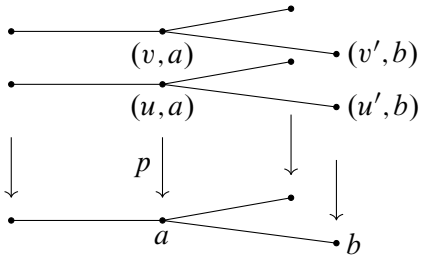


ABBILDUNG M:26. Die simpliziale Überlagerung $p : F \overset{\varphi}{\rtimes} K \to K : (u,a) \mapsto a$

Korollar M5C. *Sei $H < G = \pi_1(K,x_0)$. Auf der Quotientenmenge $F = H\backslash G$ operiert G durch Rechtsmultiplikation $\varphi : F \times G \to F : (Ha,g) \mapsto Hag$. Der Graph $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K$ ist zusammenhängend, da G transitiv operiert. Die Überlagerung $p : (\tilde{K},\tilde{x}_0) \to (K,x_0)$ mit $\tilde{x}_0 = (H,x_0)$ induziert $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K},\tilde{x}_0) \to \pi_1(K,x_0)$ mit $\operatorname{im}(p_\sharp) = H$. Speziell für $H = \{1\}$ und $F = \pi_1(K,x_0)$ erhalten wir die universelle Überlagerung.* □

§M5c. Der Satz von Nielsen–Schreier. Als erste schöne Anwendung erhalten wir:

Satz M5D (Nielsen 1921, Schreier 1927)**.** *Sei F eine freie Gruppe. (1) Jede Untergruppe $G < F$ ist frei. (2) Bei endlichem Index $[F : G] < \infty$ gilt zudem*

$$\operatorname{rang}(G) - 1 = [\operatorname{rang}(F) - 1] \cdot [F : G].$$

BEWEIS. (1) Zu $F = \langle S \mid - \rangle$ konstruieren wir einen zusammenhängenden Graphen K mit $\pi_1(K,x_0) = F$ (L6D). Zur Untergruppe $G < F$ existiert eine zusammenhängende Überlagerung $p : (\tilde{K},\tilde{x}_0) \to (K,x_0)$ mit $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K},\tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} G < F$ (M5C). Auch $\tilde{K}$ ist ein Graph. Daher ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K},\tilde{x}_0)$ frei (L6D) und somit auch G.

(2) Ist $\operatorname{rang}(F) = |S|$ endlich, so wählen wir den Graphen K endlich. Dank L6D gilt $\chi(K) = 1 - \operatorname{rang}(F)$. Die Blätterzahl der Überlagerung p ist gleich dem Index $n = [F : G]$ dank M5C. Sind der Graph K und die Blätterzahl n endlich, so auch der überlagernde Graph $\tilde{K}$, und es folgt $1 - \operatorname{rang}(G) = \chi(\tilde{K}) = n\,\chi(K) = n(1 - \operatorname{rang}(F))$. □

Beispiel. Im Falle $\operatorname{rang}(F) = 1$ haben wir $F \cong \mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $G < \mathbb{Z}$ ist frei: Die Gruppe $G = n\mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$ hat Rang 1 und endlichem Index n. Die triviale Gruppe $G = \{0\}$ ist frei vom Rang 0. Hier ist der Index unendlich und die obige Formel nicht anwendbar.

Jede freie Gruppe $F = \langle s_1, \ldots, s_r \mid - \rangle$ vom Rang r enthält offensichtlich freie Untergruppen für jeden kleineren Rang $0 \leq r' < r$, nämlich $\langle s_1, \ldots, s_{r'} \mid - \rangle$. Erstaunlicherweise enthält F auch Untergruppen von größerem Rang, wie wir bereits aus M4C wissen:

Übung M5E. Sei F eine freie Gruppe vom Rang ≥ 2. Dann enthält F freie Untergruppen von jedem endlichen Rang, und sogar von abzählbar unendlichem Rang.

✻ **M5E.** Es genügt, die freie Gruppe $F = \langle s,t \mid - \rangle$ vom Rang 2 zu untersuchen. Sei K ein Graph mit $\pi_1(K,x_0) = F$ wie in M:25. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n : F \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : s \mapsto 0, t \mapsto 1$. Der Kern $G_n = \ker(\varphi_n)$ erfüllt $F/G_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Hierzu gehört die Überlagerung $p_n : (\tilde{K},\tilde{x}_0) \to (K,x_0)$ mit $\pi_1(p_n) : \pi_1(\tilde{K},\tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} G_n < F$. Wir erhalten so die freie Untergruppe $G_n < F$ von Rang $\operatorname{rang}(G_n) = 1 + n$ für $n \geq 1$ bzw. von unendlichem Rang für $n = 0$: Zur Überlagerung $p_0 = r : \check{K} \to K$ aus M:25 ist $\pi_1(p_0) : \pi_1(\check{K},a_0) \to \pi_1(K,a)$ injektiv mit $\tilde{s}_k \mapsto t^k s t^{-k}$. Somit enthält F die freie Untergruppe $G_0 = \langle t^k s t^{-k} : k \in \mathbb{Z} \mid - \rangle$.

§M5d. Galois–Korrespondenz für Simplizialkomplexe. Wie in §M5b erklärt können wir für jeden Graphen explizit *alle* Überlagerungen $p : \tilde{K} \to K$ konstruieren. Das Verfahren eignet sich ebenso für Simplizialkomplexe K beliebiger Dimension. Der einzige Unterschied ist, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(F, x_0)$ im Allgemeinen nicht mehr frei ist.

Daten Sei K ein zusammenhängender Simplizialkomplex, $x_0 \in \Omega$ eine Ecke und $T \subset K$ ein Spannbaum. Gemäß L6I wird $\pi_1(K, x_0) = [\, S \mid R \,]$ präsentiert durch

$$S = \{\, s_{ab} \mid \{a,b\} \in K \,\} \qquad \text{als Erzeuger mit den Relationen}$$
$$R = \{\, s_{ab} \mid \{a,b\} \in T \,\} \cup \{\, s_{ab} s_{ba} \mid \{a,b\} \in K \,\} \cup \{\, s_{ab} s_{bc} s_{ca} \mid \{a,b,c\} \in K \,\}.$$

Im Falle $\dim K = 1$ ist K ein Graph, und wir erhalten die Situation aus §M5b. Auch die folgende Konstruktion übertragen wir nahezu wörtlich aus der Diskussion von Graphen.

Sei $\varphi : F \times \pi_1(K, x_0) \to F$ eine Gruppenoperation auf einer Menge $F \neq \emptyset$, geschrieben $(u, g) \mapsto u \cdot g$. Das bedeutet, für jede Kante $\{a,b\} \in K$ ist $u \mapsto u \cdot s_{ab}$ eine Permutation der Menge F, und $u \mapsto u \cdot s_{ba}$ ist hierzu die inverse Permutation. Für jedes Dreieck $\{a,b,c\} \in K$ gilt $u \cdot s_{ab} \cdot s_{bc} \cdot s_{ca} = u$. Jede Spannbaumkante $\{a,b\} \in T$ operiert trivial.

Satz M5F. *Die Daten (K, F, φ) definieren auf der Eckenmenge $\tilde{\Omega} = F \times \Omega$ den Komplex*
$\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K := \big\{ \{(u_0, a_0), \ldots, (u_n, a_n)\} \,\big|\, u_0, \ldots, u_n \in F, \{a_0, \ldots, a_n\} \in K, u_j = u_i \cdot s_{a_i a_j} \big\}$.
Dies ist ein Simplizialkomplex und $p : \tilde{K} \to K : (u, a) \mapsto a$ eine simpliziale Überlagerung mit Faser F und Monodromie φ. Gleiches gilt für $|p| : |\tilde{K}| \to |K|$.

BEWEIS. Mit K ist auch $\tilde{K}$ ein abstrakter Simplizialkomplex (I2A): $\tilde{K}$ ist ein System endlicher Mengen und abgeschlossen unter Bildung von Teilmengen.

Die Projektion p ist eine simpliziale Überlagerung (M1K): Zu jeder Ecke $a \in \Omega$ wird der Stern $\mathrm{St}(a, K)$ trivial überlagert durch die Eckensterne $\mathrm{St}((u, a), \tilde{K})$, siehe M5B.

Die Faser über x_0 ist $p^{-1}(x_0) = F \times \{x_0\} \cong F$. Nach Konstruktion operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0) = [\, S \mid R \,]$ hierauf durch die vorgegebene Monodromie φ. □

Korollar M5G. *Sei $H < G = \pi_1(K, x_0)$. Auf der Quotientenmenge $F = H \backslash G$ operiert G durch Rechtsmultiplikation $\varphi : F \times G \to F : (Ha, g) \mapsto Hag$. Der Komplex $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K$ ist zusammenhängend, da G transitiv operiert. Die Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 = (H, x_0)$ induziert $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(K, x_0)$ mit $\mathrm{im}(p_\sharp) = H$. Speziell für $H = \{1\}$ und $F = \pi_1(K, x_0)$ erhalten wir die universelle Überlagerung.* □

BEWEIS. Wir setzen den zugrundeliegenden Simplizialkomplex K als zusammenhängend voraus, um die Existenz eines Spannbaumes $T \subset K$ zu sichern (Satz I3J). Jede Etage von $F \times T$ ist somit zusammenhängend. Da die Gruppe G zudem transitiv auf F operiert, erreichen wir jede Etage durch die Operation der verbleibenden Kanten $\{a,b\} \in K \smallsetminus T$.

Sei $w = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein geschlossener Kantenpfad im Komplex (K, x_0). Das zugehörige Gruppenelement ist $[w] = s_{a_0 a_1} s_{a_1 a_2} \cdots s_{a_{n-1} a_n} \in G$. Der nach $(\tilde{K}, \tilde{x}_0)$ hochgehobene Kantenpfad $\tilde{w} = \tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_{n-1} \tilde{a}_n$ geht vom Start $\tilde{a}_0 = \tilde{x}_0$ zum Ziel $\tilde{a}_n = \tilde{x}_0 \cdot [w]$. Dieser ist genau dann geschlossen, wenn $[w] \in H$ gilt. Hieraus folgt $\mathrm{im}(p_\sharp) = H$.

Speziell für $H = \{1\}$ ist der so konstruierte Komplex $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K$ einfach zusammenhängend, also eine universelle Überlagerung (im Sinne von M3J). □

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M5e. Der Reidemeister–Schreier–Algorithmus. Präsentationen $G = \langle S \mid R \rangle$ durch Erzeuger S und Relationen R sind ein zentraler Gegenstand der kombinatorischen Gruppentheorie. Dabei entsteht das Problem, zu einer Untergruppe $H < G$ eine Präsentation $H = \langle S' \mid R' \rangle$ zu konstruieren. Das folgende Verfahren löst dieses Problem. Es lässt sich rein algebraisch beweisen, aber topologisch geht es wesentlich leichter und übersichtlicher.

Satz M5H (Reidemeister, Schreier 1927)**.** *Sei $H < G$ eine Untergruppe von endlichem Index $n = |G : H| < \infty$. Ist G endlich erzeugt bzw. endlich präsentiert, so auch H:*

(a) Zu $G = \langle S \rangle$ existiert $H = \langle S' \rangle$ mit $|S'| - 1 = n(|S| - 1)$.

(b) Zu $G = \langle S \mid R \rangle$ existiert $H = \langle S' \mid R' \rangle$ mit $|S'| - 1 = n(|S| - 1)$ und $|R'| = n|R|$.

Übung M5I. Beweisen Sie den Satz M5H mit Überlagerungstheorie. Genauer:

(1) Formulieren Sie eine topologisch-simpliziale Konstruktion (bzw. im endlichen Fall einen Algorithmus), die zu jeder Präsentation $G = \langle S \mid R \rangle$ und jeder Untergruppe $H = \langle U \rangle < G$ eine Präsentation $H = \langle S' \mid R' \rangle$ liefert.
(2) Bei unendlichem Index gelten die Endlichkeitsaussagen M5H im Allgemeinen nicht.
(3) Zum Vergleich: Der Satz M5D von Nielsen–Schreier impliziert (a). Umgekehrt impliziert (b) den Satz von Nielsen–Schreier, zumindest für jede freie Gruppe G von endlichem Rang und jede Untergruppe $H < G$ von endlichem Index.

Bemerkung. Das Reidemeister–Schreier–Verfahren liefert zwar endliche Präsentationen, doch diese sind im Allgemeinen groß und unhandlich. Für praktische Zwecke wird man versuchen, sie möglichst zu reduzieren, durch geeignete Tietze–Transformationen (L3S).

✻ **M5I.** (1) Jede Gruppe ist Fundamentalgruppe (L8M): Gegeben sei die Präsentation $G = \langle S \mid R \rangle$. Die freie Gruppe $\langle S \mid - \rangle \cong \pi_1(K_1, x_0)$ ist Fundamentalgruppe eines Graphen K_1 (L6D). Hieraus erhalten wir $\langle S \mid R \rangle \cong \pi_1(K, x_0)$ durch Anheften von 2–Zellen (L6S), wobei jede Relation einer 2–Zelle entspricht.

Dank Galois–Korrespondenz M5G entspricht H einer endlichen Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $\mathrm{im}(p_\sharp) = H$. Der Überlagerungsraum $\tilde{K}$ entsteht aus dem Graphen $p : (\tilde{K}_1, \tilde{x}_0) \to (K_1, x_0)$ durch Anheften derselben 2–Zellen, jeweils auf jede Etage hochgehoben. Die Gruppe $\pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_0) = \langle S' \mid - \rangle$ ist frei und liefert die gewünschten Erzeuger dank $\pi_1(\mathrm{inc}) : \pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_0) = \langle S' \mid - \rangle \twoheadrightarrow \langle S' \mid R' \rangle = \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0)$.

Hieraus folgt (a): Im endlichen Fall gilt $\chi(K_1) = 1 - |S|$ und $1 - |S'| = \chi(\tilde{K}_1) = n\chi(K_1)$.

Ebenso folgt (b): Die 2–Zellen von $\tilde{K}$ entsprechen den Relationen einer Präsentation $H = \langle S' \mid R' \rangle$.

Diese topologisch-simpliziale Konstruktion können wir algebraisch-kombinatorisch formalisieren: Wir erhalten hieraus den *Reidemeister–Schreier–Algorithmus*. Seine Ausführung ist in jedem Einzelfall klar, seine allgemeine Formulierung ist allerdings mühsam; ich empfehle die geometrische Veranschaulichung!

(2) Diese Warnung haben wir bereits für freie Gruppen ausgeführt (M5E): Die freie Gruppe $F = \langle s, t \mid - \rangle$ vom Rang 2 enthält die freie Untergruppe $G = \langle t^k s t^{-k} : k \in \mathbb{Z} \mid - \rangle$ von unendlichem Rang und Index.

(3) Jedes endliche Erzeugendensystem $G = \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$ definiert eine Surjektion $\varphi : F \twoheadrightarrow G$ der freien Gruppe $F = \langle x_1, \ldots, x_k \mid - \rangle$ auf G mit $\varphi(x_i) = g_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Hat H in G Index $n = |G : H|$, so auch das Urbild $\varphi^{-1}(H)$ in F. Nach dem Satz M5D von Nielsen–Schreier gilt $\varphi^{-1}(H) = \langle y_1, \ldots, y_\ell \mid - \rangle$ mit $\ell - 1 = n(k-1)$. Für $h_j = \varphi(y_j)$ mit $j = 1, \ldots, \ell$ gilt $H = \langle h_1, \ldots, h_\ell \rangle$. Also ist die Untergruppe $H < G$ endlich erzeugt, und wir erhalten die Schranke (a) für die Erzeugerzahl.

In (b) können wir die freie Gruppe $G = \langle S \mid R \rangle$ mit $R = \emptyset$ betrachten. Für $H = \langle S' \mid R' \rangle$ gilt dann $|S'| - 1 = n(|S| - 1)$ und $R' = \emptyset$, also ist auch H frei und es gilt die Nielsen–Schreier–Index-Formel. Das ist beruhigend zu wissen, aber nicht weiter überraschen: Unser Beweis (1) wird im Fall freier Gruppen direkt zu einem Beweis des Satzes M5D von Nielsen–Schreier.

Übung M5J. Aus Satz **??** kennen wir folgende Präsentation der symmetrischen Gruppe:

$$S_n = \left\langle t_1,\dots,t_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \\ (t_i t_j)^3 = 1 & \text{für } |i-j| = 1 \\ (t_i t_j)^2 = 1 & \text{für } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

mit den elementaren Transpositionen $t_i = (i, i+1)$. Konstruieren Sie hieraus eine Präsentation der alternierenden Gruppe $A_n = \ker(\mathrm{sign} : S_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\})$ mit Hilfe des Reidemeister–Schreier–Verfahrens. Beginnen Sie mit dem Fall $n = 3$; hier ist $S_3 = D_3$ die Diedergruppe der Ordnung 6 (L3M) und $A_3 \cong \mathbb{Z}/3$ ist zyklisch der Ordnung 3. (Die so entstehende Präsentation ist weder besonders schön noch kurz. Aber sie kann als Ausgangspunkt dienen und in einem zweiten Arbeitsschritt mit Tietze–Transformationen vereinfacht werden.)

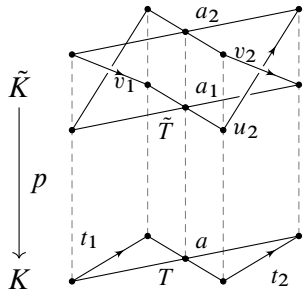


ABBILDUNG M:27. Reidemeister–Schreier für $A_n < S_n$

✻ **M5J.** Wir folgen dem topologischen Reidemeister–Schreier–Verfahren aus der vorigen Übung M5I wie in Abbildung M:27 veranschaulicht. Aus der Präsentation von S_n konstruieren wir den Komplex K und einen Spannbaum T. Zu $\mathrm{sign} : S_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ ist die Überlagerung $p : \tilde{K} \to K$ zweiblättrig. Für jeden Erzeuger t_i gilt $\mathrm{sign}(t_i) = -1$, er wechselt daher die Etagen. Gezeigt sind die 1–Skelette. Hieran angeheftet sind die 2–Zellen, in K genau eine pro Relation, beginnend und endend bei a, in $\tilde{K}$ genau zwei pro Relation, eine bei a_1 und eine bei a_2. (Die Anheftung ist jeweils klar, ich versuche allerdings nicht, sie graphisch darzustellen.)

Wir wählen einen Spannbaum $\tilde{T} \subset \tilde{K}$; das ist weitgehend willkürlich. Das Verfahren akzeptiert jeden Spannbaum, eine geschickte Wahl kann jedoch zur Vereinfachung dienen. Die jeweils verbleibenden Kanten $K \smallsetminus T = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ und $\tilde{K} \smallsetminus \tilde{T} = \{v_1, u_2, v_2, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}\}$ sind durch Pfeile orientiert und mit Erzeugern beschriftet. Man beachte: „u_1“ gehört zum Spannbaum und wird daher gelöscht (im Folgenden ausgegraut). Der von p induzierte Gruppenhomomorphismus $\pi_1(p) : \pi_1(\tilde{K}, a_1) = A_n \hookrightarrow S_n = \pi_1(K, a)$ ist gegeben durch $v_1 \mapsto t_1^2$, $u_2 \mapsto t_2 t_1^{-1}$, $v_2 \mapsto t_1 t_2$, …, $u_{n-1} \mapsto t_{n-1} t_1^{-1}$, $v_{n-1} \mapsto t_1 t_{n-1}$. Dies liefert die Erzeuger der Untergruppe $A_n < S_n$. (Ein anderer Spannbaum $\tilde{T} \subset \tilde{K}$ liefert andere Erzeuger.)

Jedes Wort w in den Erzeugern $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ entspricht einer Schleife γ in (K, a). Sie hebt sich eindeutig zu einem Weg $\tilde{\gamma}$ in $(\tilde{K}, a_1)$; dieser schließt sich genau dann, wenn w ein Gruppenelement in A_n beschreibt. In diesem Falle lesen wir entlang $\tilde{\gamma}$ das Wort $\tilde{w}$ in den Erzeugern $\{v_1, u_2, v_2, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}\}$ ab. Dies nennt man das *Schreier–Ersetzungsverfahren* (engl. *rewriting process*). Dieses wenden wir nun auf die Relationen an:

Die Relation t_1^2 hebt sich zu $u_1 v_1$ und $v_1 u_1$. Die Relation t_2^2 hebt sich zu $u_2 v_2$ und $v_2 u_2$. Allgemein für $i = 2, \dots, n-1$ hebt sich t_i^2 zu $u_i v_i$ und $v_i u_i$. Zur Kontrolle: Diese projizieren zu t_i^2 und $t_1 t_i^2 t_1^{-1}$.

Die Relation $(t_1 t_2)^3$ hebt sich zu $(u_1 v_2)^3$ und $(v_1 u_2)^3$. Für $2 \leq i \leq n-2$ hebt sich $(t_i t_{i+1})^3$ zu $(u_i v_{i+1})^3$ und $(v_i u_{i+1})^3$. Zur Kontrolle: Diese projizieren zu $(t_i t_{i+1})^3$ und $(t_1 t_i t_{i+1} t_1^{-1})^3 = t_1 (t_i t_{i+1})^3 t_1^{-1}$.

Für $i \geq 3$ hebt sich $(t_1 t_i)^2$ zu $(u_1 v_i)^2$ und zu $(v_1 u_i)^2$. Für $2 \leq i < j \leq n-1$ und $j \geq i+2$ hebt sich $(t_i t_j)^2$ zu $(u_i v_j)^2$ und $(v_i u_j)^2$. Zur Kontrolle: Diese projizieren zu $(t_i t_j)^2$ und $t_1 (t_i t_j)^2 t_1^{-1}$.

Damit haben wir alle Relationen von S_n zu Relationen von A_n hochgehoben. (Das allgemeine Muster wird hierdurch klar und kann nun leicht als allgemeiner, rein textbasierter Algorithmus formuliert werden.)

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M5f. Anwendung auf Flächengruppen. Zu Graphen K gehören die freien Gruppen $\pi_1(K,x_0) \cong \langle S \mid - \rangle$, zu geschlossenen Flächen $F_g^\pm$ gehören die Flächengruppen

$$\pi_1(F_g^+,x_0) \quad\cong\quad G_g^+ := \left\langle a_1,b_1,\dots,a_g,b_g \;\middle|\; a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}=1 \right\rangle,$$
$$\pi_1(F_g^-,x_0) \quad\cong\quad G_g^- := \left\langle c_0,c_1,\dots,c_g \;\middle|\; c_0c_0c_1c_1\cdots c_gc_g=1 \right\rangle.$$

Analog zum Satz M5D von Nielsen–Schreier für freie Gruppen gilt hier folgender Satz:

Satz M5K. *Jede Untergruppe $U < G_g^+$ von endlichem Index n ist selbst isomorph zu einer Flächengruppe. Genauer gilt $U \cong G_h^+$ mit $h = 1-n(1-g)$.*

BEWEIS. Zu G_g^+ existiert eine zusammenhängende orientierbare geschlossene simpliziale Fläche K mit $\pi_1(K,x_0) = G_g^+$. Zur Untergruppe U existiert dank M5G eine zusammenhängende Überlagerung $p : (\tilde K,\tilde x_0) \to (K,x_0)$ mit $p_\sharp : \pi_1(\tilde K,\tilde x_0) \xrightarrow{\sim} U < G_g^+$. Hierbei ist $\tilde K$ eine zusammenhängende orientierbare geschlossene simpliziale Fläche. Dank Flächenklassikation (K3G) gilt $|\tilde K| \cong F_h^+$ für ein $h \in \mathbb{N}$ und somit $U \cong G_h^+$. Für die Euler–Charakteristik gilt $2-2h = \chi(\tilde K) = n\chi(K) = n(2-2g)$, also $h = 1-n(1-g)$. □

Beispiel. Für den Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ haben wir $G_1^+ \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $U < G_1^+$ von endlichem Index ist von der Form $U = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$ mit zwei Basisvektoren $u,v \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Somit gilt $U \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \cong G_1^+$, wie von Satz M5K vorhergesagt.

Korollar M5L. *Von allen Flächengruppen $G_g^\pm$ mit $g \in \mathbb{N}$ ist nur $G_0^+ = \{1\}$ frei.*

Für $r \geq 1$ Randkomponenten hingegen ist jede der Gruppen $\pi_1(F_{g,r}^\pm, x_0)$ frei (L6H).

Unsere Präsentation von $G_g^\pm$ folgt aus der Flächenklassifikation und hat eine Relation. Das schließt keineswegs aus, dass $G_g^\pm$ frei ist, denn eventuell ist auch eine Präsentation ohne Relationen möglich. Zur Illustration betrachte man $\langle a,b \mid a=b \rangle \cong \langle a \mid - \rangle$.

Um zu zeigen, dass eine Gruppe frei ist, müssen wir eine Basis angeben. Um zu zeigen, dass sie nicht frei ist, müssen wir eine Eigenschaft finden, die der Freiheit im Wege steht.

BEWEIS. Die Abelschmachung zeigt, dass die Flächengruppe G_g^- mit $g \in \mathbb{N}$ nicht frei ist, denn $(G_g^-)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}^g$ hat Torsion, nämlich das Element der Ordnung 2.

Angenommen, eine der Flächengruppen $G = G_g^+$ mit $g \geq 1$ wäre frei. Wegen $G_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ hat G dann den Rang $2g \geq 2$. Zudem existieren Untergruppen $U < G$ zu jedem Index $n \geq 2$ (M5E). Nach Nielsen–Schreier M5D ist U frei vom Rang $r = 1-n(1-2g)$, also $U_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^r$. Nach M5K gilt aber auch $U \cong G_h^+$ mit $h = 1-n(1-g)$ und somit $U_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2h}$. Wir erhalten die Gleichung $1-n(1-2g) = 2-2n(1-g)$, also $n = 1$. □

Bemerkung. Ein rein algebraischer Beweis von Satz M5K und Korollar M5L ist möglich aber mühsam. Warum ist unser topologischer Beweis dann so leicht? Weil wir für Graphen und Flächen maßgeschneiderte topologische Techniken haben! In seiner Gesamtheit ist auch dieser Beweis nicht gerade kurz: Wie benötigen die Flächenklassifikation, Fundamentalgruppen und Überlagerungen. Doch schließen wir: Der weite Weg hat sich gelohnt!

Übung M5M. Sei $G = G_g^\pm$ eine Flächengruppe. Zur Wiederholung und Illustration:

(1) Jede Untergruppe $U < G$ von endlichem Index ist selbst eine Flächengruppe.
(2) Bei unendlichem Index gilt dies im Allgemeinen nicht.

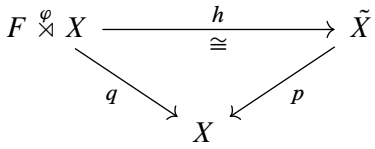
§M5g. (Re)Konstruktion von Überlagerungen. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Zur Erinnerung: Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ operiert auf der Faser $F = p^{-1}(x_0)$ durch Fasertransport (M4E), wir erhalten so die Monodromie (M4F)

$$\varphi : F \times \pi_1(X, x_0) \to F : (\tilde{x}_0, [\alpha]) \mapsto \tilde{x}_0 \cdot [\alpha].$$

Satz M5N. *Sei (X, x_0) wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ wird bis auf Homöomorphie bestimmt durch den Basisraum (X, x_0), die Faser $F = p^{-1}(x_0)$ und die Monodromie $\varphi : F \times \pi_1(X, x_0) \to F : (\tilde{x}_0, [\alpha]) \mapsto \tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$.*

Beispiel. Genau dann ist die Überlagerung p trivial, wenn ihre Monodromie φ trivial ist.

Zum Beweis konstruieren wir aus diesen Daten ein *getwistetes Produkt* $Y = F \overset{\varphi}{\times} X$ mit einer Überlagerung $q : Y \to X$ sowie einen Homöomorphismus $h : Y \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$ mit $q = p \circ h$.



BEWEIS. *Konstruktion des Raumes Y:* Der Fasertransport liefert die Surjektion

$$\Phi : F \times \Pi(X, x_0) \twoheadrightarrow \tilde{X} : (\tilde{x}_0, [\beta]) \mapsto \tilde{x}_0 \cdot [\beta].$$

Da X wegzusammenhängend ist, existiert zu jedem Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ein Weg $\beta : [0,1] \to X$ von x_0 nach $x = p(\tilde{x})$. Für $\tilde{x}_0 = \tilde{x} \cdot [\bar{\beta}]$ folgt $p(\tilde{x}_0) = x_0$, also $\tilde{x}_0 \in F$ und $\tilde{x} = \tilde{x}_0 \cdot [\beta]$.

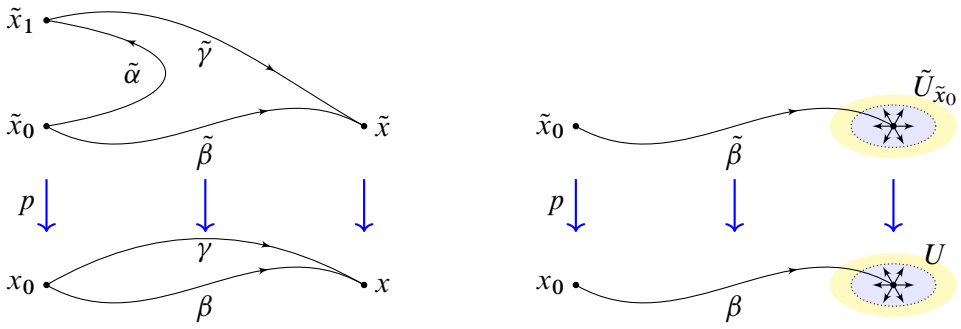


ABBILDUNG M:28. Die Operation $\Phi : F \times \Pi(X, x_0) \twoheadrightarrow \tilde{X}$

Die Abbildung Φ ist im Allgemeinen nicht injektiv: Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ operiert auf $F \times \Pi(X, x_0)$ durch $(\tilde{x}_0, [\beta]) \cdot [\alpha] = (\tilde{x}_0 \cdot [\alpha], [\alpha]^{-1} \cdot [\beta])$ und lässt Φ invariant (M:28).

Gilt $\tilde{x}_0 \cdot [\beta] = \tilde{x}_1 \cdot [\gamma]$, so leistet die Schleife $\alpha = \beta * \overline{\gamma}$ in X den Transport $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = \tilde{x}_1$. Somit haben wir $(\tilde{x}_1, [\gamma]) = (\tilde{x}_0 \cdot [\alpha], [\alpha]^{-1} \cdot [\beta])$. Wir bilden daher die Quotientenmenge

$$Y = F \overset{\varphi}{\times} X := F \underset{\pi_1(X,x_0)}{\times} \Pi(X, x_0) := \frac{F \times \Pi(X, x_0)}{\pi_1(X, x_0)}.$$

Die Äquivalenzrelation ist hier $(\tilde{x}_0, [\beta]) \sim (\tilde{x}_0 \cdot [\alpha], [\alpha]^{-1} \cdot [\beta])$ für $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Damit erhalten wir aus der Surjektion Φ die ersehnte Bijektion $h : Y \xrightarrow{\sim} \tilde{X} : [\tilde{x}_0, [\beta]] \mapsto \tilde{x}_0 \cdot [\beta]$. Zudem erhalten wir die Projektion $q = p \circ h : Y \to X : [\tilde{x}_0, [\beta]] \mapsto p(\tilde{x}_0 \cdot [\beta]) = \beta(1)$.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Konstruktion der Topologie auf Y: Nach Voraussetzung besitzt jeder Punkt x in X eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}(X,x)$ aus wegzusammenhängenden offenen Umgebungen $U \subset X$, die durch p trivial überlagert werden. Sei β ein Weg von x_0 nach x in X. Die Faser über x ist $p^{-1}(x) = F \cdot [\beta]$. Demnach gilt $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\tilde{x}_0 \in F} \tilde{U}_{\tilde{x}_0}$ mit $\tilde{U}_{\tilde{x}_0}$ offen und wegzusammenhängend, indiziert durch $\tilde{x}_0 \cdot [\beta] \in \tilde{U}_{\tilde{x}_0}$, und p induziert Homöomorphismen $p_{\tilde{x}_0} : \tilde{U}_{\tilde{x}_0} \xrightarrow{\sim} U$.

Für die Blätter $\tilde{U}_{\tilde{x}_0}$ über U gilt $\tilde{U}_{\tilde{x}_0} = \{\, \tilde{x}_0 \cdot [\beta] \cdot [\gamma] \mid \gamma \in P(U,x) \,\}$. In Y entspricht dies der Menge $h^{-1}(\tilde{U}_{\tilde{x}_0}) = \{\, [\tilde{x}_0, [\beta] \cdot [\gamma]] \mid \gamma \in P(U,x) \,\}$. Dies definiert die Umgebungsbasis

$$\mathcal{B}\big(Y, [\tilde{x}_0, [\beta]]\big) = \big\{\, [\tilde{x}_0, [\beta]] \cdot \Pi(U,x) \;\big|\; U \in \mathcal{B}(X,x) \,\big\}.$$

Die gegebene Umgebungsbasis $\mathcal{B}(X,x)$ erfüllt (UB1–3) aus D3V, und gleiches gilt für die hochgehobene Umgebungsbasis $\mathcal{B}(Y, [\tilde{x}_0, [\beta]])$. Die so definierte Topologie auf Y macht $h : Y \to \tilde{X}$ zu einem Homöomorphismus und $q : Y \to X$ zu einer Überlagerung. □

Beispiel. Genau dann ist die Überlagerung p trivial, wenn ihre Monodromie φ trivial ist, also $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = \tilde{x}_0$ für alle $\tilde{x}_0 \in F$ und $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt. In diesem Fall ist p äquivalent zu $q : F \times X \to X : (\tilde{x}_0, x) \mapsto x$. Die Trivialisierung $h : F \times X \xrightarrow{\sim} \tilde{X} : (\tilde{x}_0, x) \mapsto \tilde{x}_0 \cdot [\beta]$ gelingt durch Hochhebung von Wegen: Zu $x \in X$ wählen wir einen Weg $\beta : [0,1] \to X$ von x_0 nach x und heben ihn zum Weg $\tilde{\beta} : [0,1] \to \tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}$. Die Abbildung h ist wohldefiniert dank trivialer Monodromie, und erweist sich als Homöomorphismus, dank lokalem Wegzusammenhang wie im obigen Beweis gesehen.

Beispiel. Als Spezialfall erhalten wir Korollar M2M: Ist der Basisraum X lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend, so ist jede Überlagerung $p : \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ trivial.

Beispiel. Ohne lokalen Wegzusammenhang wäre die Aussage des Satzes M5N falsch, wie der Pseudokreis $W \subset \mathbb{C}$ zeigt (M2I). Die Fundamentalgruppe $\pi_1(W,1)$ ist trivial, dennoch erlaubt er nicht-triviale Überlagerungen $p_n : \tilde{W}_n \to W$, zusammenhängend und n–blättrig.

Die Konstruktion von $Y = F \overset{\varphi}{\times} X$ hängt nur vom Basisraum (X, x_0), der Faser F und der Monodromie φ ab. Auch die Frage, ob eine Teilmenge $U \subset X$ trivial überlagert wird, lässt sich durch ein einfaches Monodromiekriterium beantworten:

Korollar M5O (Monodromie und Hochhebung)**.** *In der Situation von Satz M5N sei $U \subset X$ wegzusammenhängend und $x \in U$. Dann gilt* (1) ⇔ (2) ⇔ (3) ⇐ (4) ⇐ (5)*:*

(1) Die Menge U wird durch p trivial überlagert (M1A).
(2) Die Gruppe $\pi_1(U,x)$ operiert trivial auf der Faser $F_x = p^{-1}(x)$.
(3) Für einen (und damit jeden) Weg β von x_0 nach x in X und jede Schleife γ in (U,x) gilt $\tilde{x}_0 \cdot [\beta * \gamma * \bar{\beta}] = \tilde{x}_0$ für alle $\tilde{x}_0 \in F = p^{-1}(x_0)$.
(4) Die Inklusion $\iota : (U,x) \hookrightarrow (X,x)$ induziert den trivialen Gruppenhomomorphismus $\iota_\sharp : \pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$, das heißt, jede Schleife γ in (U,x) ist zusammenziehbar in (X,x). Wir nennen dann $U \subset X$ relativ einfach zusammenhängend (M5Q).
(5) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(U,x)$ ist trivial, das heißt, jede Schleife γ in (U,x) ist zusammenziehbar in (U,x). Anders gesagt, U ist einfach zusammenhängend.

BEWEIS. Die Implikationen (1) ⇒ (2) ⇐ (4) ⇐ (5) sind klar, ebenso die Äquivalenz (2) ⇔ (3) durch Konjugation. Die Implikation (3) ⇒ (1) folgt aus der expliziten Konstruktion von Satz M5N dank $p \cong q$ und $q^{-1}(U) = \bigsqcup_{\tilde{x}_0 \in F} \{\, [\tilde{x}_0, [\beta]] \cdot \Pi(U,x) \,\}$. □

§M5h. Konstruktion von Überlagerungen. Die zuvor ausgeführte *Rekonstruktion* (M5N) nutzen wir nun direkt zur *Konstruktion* neuer Überlagerung:

Satz M5P. *Sei (X,x_0) wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend sowie $\varphi : F\times\pi_1(X,x_0)\to F$ eine Operation auf einer Menge $F\neq\emptyset$. Jeder Punkt $x\in X$ besitze eine wegzusammenhängende offene Umgebung $U\subset X$, sodass $\pi_1(U,x)$ trivial auf F operiert.*

Das bedeutet ausführlich: Für einen (und damit jeden) Weg β von x_0 nach x in X und jede Schleife γ in (U,x) gelte $\tilde{x}_0\cdot[\beta*\gamma*\bar{\beta}]=\tilde{x}_0$ für alle $\tilde{x}_0\in F=p^{-1}(x_0)$.

Dann definiert das getwistete Produkt $Y=F\mathbin{\tilde{\times}}X$ eine Überlagerung $q:Y\to X$ mit Faser F und Monodromie φ. Diese Überlagerung ist eindeutig bis auf Homöomorphie.

BEWEIS. Die Überlagerung $q:Y\to X$ konstruieren wir wie in M5N durch

$$Y:=\frac{F\times\Pi(X,x_0)}{\pi_1(X,x_0)}\quad\text{und}\quad q:Y\to X:[\tilde{x}_0,[\beta]]\mapsto\beta(1).$$

Nach Voraussetzung besitzt jeder Punkt x in X eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}(X,x)$ aus wegzusammenhängenden offenen Umgebungen $U\subset X$, sodass $\pi_1(U,x)$ trivial auf F operiert. Zu jedem $\tilde{x}_0\in F$ und $\beta\in P(X,x_0,x)$ definiert dies die Umgebungsbasis

$$\mathcal{B}\big(Y,[\tilde{x}_0,[\beta]]\big)=\big\{\,[\tilde{x}_0,[\beta]]\cdot\Pi(U,x)\;\big|\;U\in\mathcal{B}(X,x)\,\big\}.$$

Die so definierte Topologie auf Y macht $q:Y\to X$ zu einer Überlagerung. □

Definition M5Q. Sei X ein topologischer Raum. Zur Erinnerung:

(1) Wir nennen eine Teilmenge $U\subset X$ *wegzusammenhängend* (G2A), wenn zu je zwei Punkten $x,x'\in U$ ein Weg $\gamma:[0,1]\to U$ von $\gamma(0)=x$ nach $\gamma(1)=x'$ existiert.

(2) Der Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend* im Punkt $x\in X$, wenn jede Umgebung von x eine wegzusammenhängende offene Umgebung enthält. Das heißt, x hat eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden offenen Umgebungen.

(3) Gilt dies in jedem Punkt $x\in X$, so nennen wir X *lokal wegzusammenhängend*. Das heißt, die Topologie hat eine Basis aus wegzusammenhängenden offenen Mengen.

Ebenso lokalisieren wir einfachen Zusammenhang:

(4) Wir nennen $U\subset X$ *einfach zusammenhängend* (L2S), wenn U wegzusammenhängend ist, $\pi_0(U)=\{U\}$, und triviale Fundamentalgruppe hat, $\pi_1(U,x)=\{1\}$.

(5) Wir nennen X *lokal einfach zusammenhängend* in x wenn jede Umgebung V eine einfach zusammenhängende offene Umgebung U enthält. Das heißt, x hat eine Umgebungsbasis aus einfach zusammenhängenden offenen Umgebungen (F3D).

(6) Gilt dies in jedem Punkt $x\in X$, so nennen wir X *lokal einfach zusammenhängend*. Das heißt, die Topologie hat eine Basis aus einfach zusammenhängenden offenen Mengen.

Der obige Satz M5P veranlasst uns zu folgender Vereinbarung:

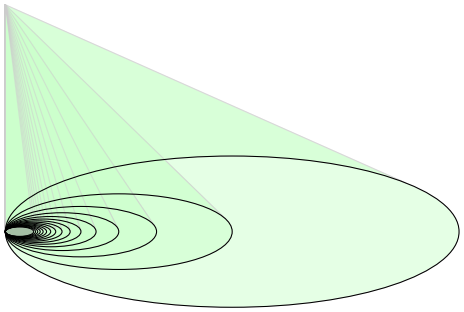
(7) Eine Umgebung U von x in X heißt *relativ einfach zusammenhängend*, wenn jede Schleife in (U,x) zusammenziehbar ist in (X,x). Das heißt, der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(\mathrm{inc}):\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ zur Inklusion $\mathrm{inc}:(U,x)\hookrightarrow(X,x)$ ist trivial.

(8) Der Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x\in X$ eine solche, relativ einfach zusammenhängende Umgebung $U\subset X$ besitzt.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

Abkürzend nennen wir X *hinreichend zusammenhängend*, wenn X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist.

Beispiel. Der hawaiianische Ohrring $W \subset \mathbb{R}^2$ ist wegzusammenhängend, auch lokal, aber nicht einfach zusammenhängend, weder lokal noch ebensowenig semilokal. Der Kegel X mit Spitze $(0,0,1)$ ist zusammenziehbar, somit einfach zusammenhängend. In $(0,0,0)$ ist X nicht lokal einfach zusammenhängend, wohl aber semilokal einfach zusammenhängend!



Bemerkung. Dieses berüchtigte Wortmonster beschreibt genau den relevanten Sachverhalt. Zur Notwendigkeit dieser Vorsichtsmaßnahme siehe M5T. Die Bezeichnung *lokal relativ einfach zusammenhängend* wäre noch treffender, doch ich beuge mich der Tradition.

Beispiele. In vielen Anwendungen sind die Räume hinreichend zusammenhängend, etwa

- jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit,
- jeder zusammenhängende Simplizialkomplex,
- jeder zusammenhängende und lokal zusammenziehbare Raum,
- jeder zusammenhängende und lokal einfach zusammenhängende Raum.

Bemerkung. Wir können schwach und stark lokalisieren (F3D). Für *lokal einfach zusammenhängend* haben wir stark lokalisiert, für *semilokal einfach zusammenhängend* hingegen nur schwach. Im letzten Falle sind jedoch alle Lokalisierungen gleichbedeutend:

Für jeden Punkt $x \in X$ sind äquivalent:

(1) Es existiert eine relativ einfach zusammenhängende Umgebung $U \subset X$.
(2) Es existiert eine relativ einfach zusammenhängende offene Umgebung $U \subset X$.
(3) Jede Umgebung V von x enthält eine relativ einfach zusammenhängende Umgebung $W \subset V$.
(4) Jede Umgebung V von x enthält eine relativ einfach zusammenhängende offene Umgebung $W \subset V$.

Die Implikationen (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) sind trivial. Hier gilt auch die Umkehrung „(1) $\Rightarrow$ (4)“: Dank (1) existiert eine relativ einfach zusammenhängende Umgebung U von x. Zu jeder Umgebung V von x ist dann $W = U^\circ \cap V^\circ$ eine offene Umgebung von x. Die Inklusion $\mathrm{inc} : (W,x) \hookrightarrow (U,x) \hookrightarrow (X,x)$ induziert den Gruppenhomomorphismus $\pi_1(\mathrm{inc}) : \pi_1(W,x) \to \pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$, und dieser ist somit trivial.

§M5i. Galois–Korrespondenz für hinreichend zusammenhängende Räume. Wir gehen allen topologischen Pathologien aus dem Weg und betrachten einen hinreichend zusammenhängenden Raum X im Sinne von M5Q, also wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Dann gilt:

Korollar M5R. *Sei X hinreichend zusammenhängend und $x_0 \in X$.*

(0) Jede Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ definiert als ihre Monodromie (M4F) eine Operation $\varphi : F \times \pi_1(X, x_0) \to F$ auf der Faser $F = p^{-1}(x_0)$.

(1) Umgekehrt existiert zu jeder Operation $\varphi : F \times \pi_1(X, x_0) \to F$ eine Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit der vorgegebenen Monodromie φ (M5P). Diese Überlagerung p ist eindeutig bis auf Homöomorphie. □

Somit stehen Überlagerungen (bis auf Homöomorphie) in Bijektion mit Operationen der Fundamentalgruppe. Der Spezialfall transitiver Operationen ist dabei besonders wichtig:

Satz M5S. *Sei X hinreichend zusammenhängend und $x_0 \in X$.*

(0) Jede Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ und somit eine Untergruppe $\operatorname{im}(p_\sharp) < \pi_1(X, x_0)$.

(1) Zu jeder Untergruppe $H < \pi_1(X, x_0)$ existiert eine zusammenhängende Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit $\operatorname{im}(p_\sharp) = H$. Diese ist eindeutig bis auf Homöomorphie.

(2) Zu jedem Homomorphismus $h : \pi_1(X, x_0) \to G$ existiert eine Galois–Überlagerung $G \curvearrowright (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ mit exakter Sequenz $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_\sharp} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} G$.

(3) Speziell für $H = \{1\}$ und $h = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ erhalten wir die universelle Überlagerung.

Somit stehen zusammenhängende Überlagerungen (bis auf Homöomorphie) in Bijektion zu Untergruppen der Fundamentalgruppe. Galois–Überlagerungen (bis auf Homöomorphie) entsprechen normalen Untergruppen, also Homomorphismen der Fundamentalgruppe.

BEWEIS. Die Injektivität (0) haben wir bereits in M4B festgestellt.

(1) Sei $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$. Auf der Quotientenmenge $F = H\backslash\Gamma$ operiert Γ durch Rechtsmultiplikation $\varphi : F \times \Gamma \to F : (Ha, g) \mapsto Hag$. Der Raum $\tilde{X} = F \overset{\varphi}{\times} X$ aus M5P ist zusammenhängend, da Γ transitiv operiert. Die Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 = (H, x_0)$ induziert $p_\sharp : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ mit $\operatorname{im}(p_\sharp) = H$.

(2) Dies ist ein Spezialfall von (1) mit $H = \ker(h)$ und $F = G \cong H\backslash\Gamma$. Auf G operiert Γ durch $\varphi : G \times \Gamma \to G : (a, g) \mapsto a \cdot h(g)$. Wir erhalten $\tilde{X} = G \overset{\varphi}{\times} X$ aus M5P. Die Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 = (1, x_0)$ induziert $p_\sharp : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ mit $\operatorname{im}(p_\sharp) = H$. Zudem operiert G von links durch $G \times \tilde{X} \to \tilde{X} : (g, [a, [\beta]]) \mapsto [ga, [\beta]]$. □

Damit haben wir die Überlagerungen über (X, x_0) als Objekte klassizifiert. Im nächsten Abschnitt (§M6) behandeln wir das Hochhebungskriterium. Damit können wir schließlich auch die Abbildungen (Morphismen) zwischen den Überlagerungen verstehen. Dies wird den krönenden Schlussstein zur Überlagerungstheorie bilden.

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]

§M5j. Berühmte Gegenbeispiele. Als Vorsichtsmaßnahme verlangen wir semilokal einfach zusammenhängend. Wir erinnern an den *hawaiianischen Ohrring* $W \subset \mathbb{D}^2$ (L8J) und den *harmonischen Archipel* $A \subset \mathbb{R}^3$ (L8K) wie in folgender Abbildung skizziert. Zur Wiederholung: Ihre Fundamentalgruppen $\pi_1(W,0)$ und $\pi_1(A,0)$ sind überabzählbar.

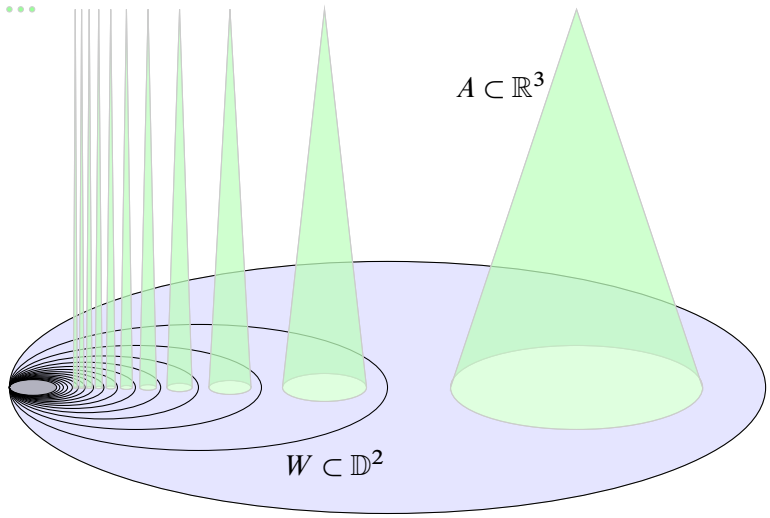


ABBILDUNG M:29. Hawaiianischer Ohrring und harmonischer Archipel

Diese Räume zeigen, dass die Galois–Korrespondenz hier fehlschlägt:

Übung M5T. (1) Die Räume W und A sind wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend aber nicht semi-lokal einfachzusammenhängend (im Punkt 0).

(2) Jede Überlagerung $p : \tilde{A} \twoheadrightarrow A$ ist trivial, also äquivalent zu einem Produkt.

(3) Es gibt keine einfach zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{A} \twoheadrightarrow A$.

(4) Es gibt keine einfach zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{W} \twoheadrightarrow W$.

(5) Es gibt nicht-triviale Überlagerungen $p_n : \tilde{W} \twoheadrightarrow W$, etwa wie in M:30.

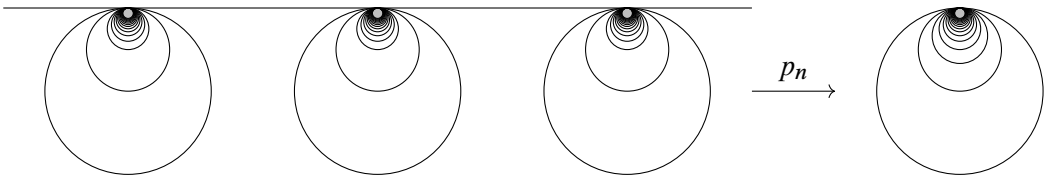


ABBILDUNG M:30. Hawaiianische Kette und Hawaiianischer Ohrring

Übung M5U. (1) Ist der Teilraum $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus (\mathbb{Q} \times \{0\})$ in $\mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend? einfach zusammenhängend? semi-lokal einfach zusammenhängend? Hat X nicht-triviale Überlagerungen? Existiert eine einfach zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$?

Dieselben Fragen für (2) $X = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ und (3) $X = (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \cup \mathbb{Z})$ und (4) $X = (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ und (5) $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus (C \times \{0\})$ mit der Cantor–Menge $C \subset [0,1]$ aus C6C und (6) $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus C^2$, das Komplement des Cantor–Staubs (C:15).

✻ **M5U.** (1) Wir nutzen $p_{w,n} : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus w : z \mapsto w + z^n$ und $p_{w,0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto w + \exp(z)$.

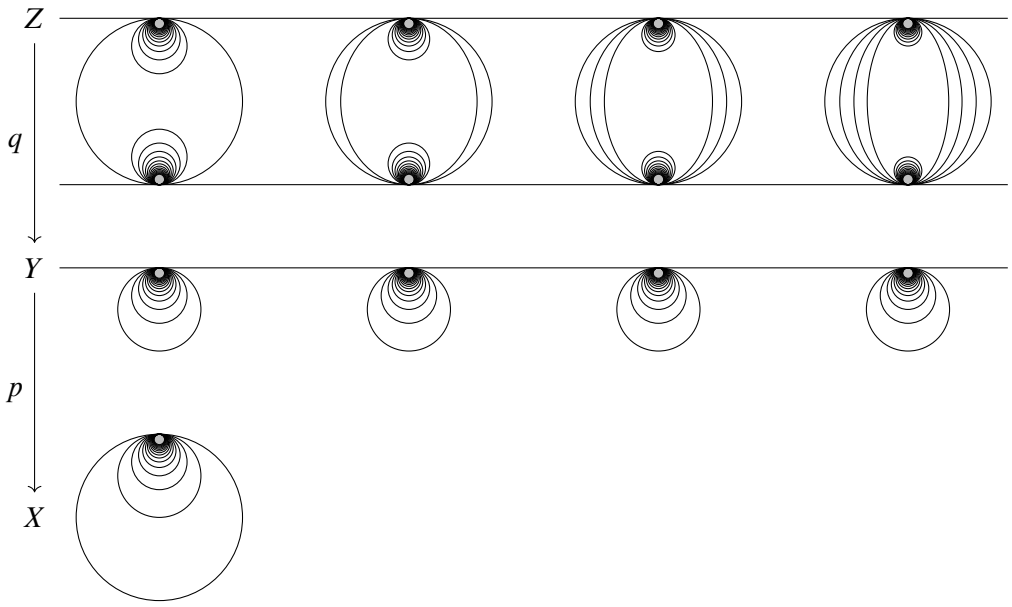


ABBILDUNG M:31. Das hawaiianische Band Z überlagert die Kette Y und diese den Ohrring X, doch die Komposition ist keine Überlagerung!

Übung M5V (Komposition und Faktorisierung)**.** Sind $q : Z \to Y$ und $p : Y \to Z$ Überlagerungen, so ist ihre Komposition $r = p \circ q : Z \to X$ im Allgemeinen keine Überlagerung!

(1) Auf $X = \mathbb{S}^1$ und $Y = Z = \mathbb{Z}^* \times \mathbb{S}^1$ sind $p : Y \to X : (n,z) \mapsto z$ und $q : Z \to Y : (n,z) \mapsto (n,z^n)$ Überlagerungen, aber $p \circ q : Z \to X : (n,z) \mapsto z^n$ nicht.
(2) In Abbildung M:31 sind die Räume X, Y, Z zudem wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend (aber nicht semilokal einfach zusammenhängend).
(3) Sind $q : Z \to Y$ und $p : Y \to Z$ Überlagerungen, und ist p über jedem Punkt $x \in X$ endlich, so ist auch die Komposition $r = p \circ q : Z \to X$ eine Überlagerung.
(4) Seien X, Y, Z hinreichend zusammenhängend (im Sinne der Definition M5Q) Sind $q : Z \to Y$ und $p : Y \to Z$ Überlagerungen, so auch $r = p \circ q : Z \to X$.

Im Folgenden sei X lokal wegzusammenhängend sowie $q : Z \to Y$ und $p : Y \to X$ stetige Surjektionen mit Komposition $r = p \circ q : Z \to X$. Dann gilt folgende Faktorisierung:

(5) Sind r und p Überlagerungen, dann auch q.
(6) Sind r und q Überlagerungen, dann auch p.

Haben die Überlagerungen p, q, r jeweils die Blätterzahl k, ℓ, m, so gilt $m = k\ell$.

§M6. Das allgemeine Hochhebungskriterium

[Vorsicht, Baustelle! Dieser Abschnitt wird noch eingefügt, vielleicht, irgendwann.]

© 2024 Michael Eisermann [eiserm.de]