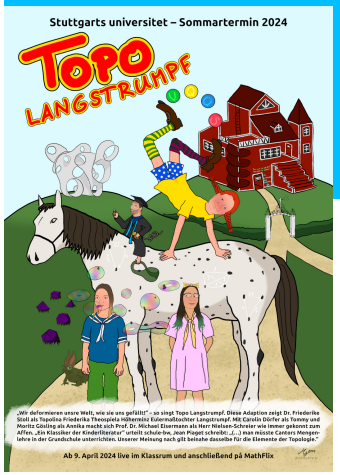
Grundlagen der Topologie

analytisch – geometrisch – algebraisch



erkennen.
beweisen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
eiserm.de/lehre/Topologie

Universität Stuttgart
Sommersemester 2024
Stand 31. Juli 2024

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Urheberrecht und Haftungsausschluss

Die hier angebotenen Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen zu nicht-kommerziellen Zwecken in der Lehre verwendet werden, sofern die Quelle wie folgt vollständig angegeben wird.

> Prof. Dr. Michael Eisermann: Vorlesungsunterlagen zur Topologie,
> Institut für Geometrie und Topologie (IGT), Universität Stuttgart,
> `michael-eisermann.de/lehre/Topologie`

Diese Unterlagen werden genutzt zur Vorlesung *Topologie* und richten sich vornehmlich an Studierende der Mathematik. Sie vermitteln einschlägiges mathematisches Grundlagenwissen.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich. Bitte betrachten Sie alle Quellen kritisch, wie immer; nicht alles ist wahr und gut und hilfreich.

Wie nutzen Sie diese Notizen?

Diese Vortragsfolien sind ein Extrakt meines Skripts zur Topologie,
das durch Vorlesungen der letzten Jahre gewachsen und erprobt ist.
Vortrag und Skript haben verschiedene Ziele und ergänzen sich:
Der Vortrag gibt einen Überblick, das Skript dient zur Vertiefung.

Ich bemühe mich in der Vorlesung, die zentralen Ideen zu motivieren und die wesentlichen Definitionen, Sätze und Beweise präzise auszuführen.
Diese Darstellung ist so ausführlich wie nötig und so knapp wie möglich;
einiges verstehen Sie sofort, für anderes benötigen Sie Zeit und Muße.

Um diese Ideen und Werkzeuge wirklich zu begreifen, müssen Sie alles selbst in die Hand nehmen, erproben, anwenden, vertiefen, kurz: üben!
Das Skript bietet Ihnen hierzu passende Übungen mit Lösungen sowie zahlreiche weitere Illustrationen, Erläuterungen und Ergänzungen.

Auf unserer Lernplattform Ilias finden Sie neben den Vorlesungsvideos zudem unser wöchentliches Topologie-Quiz und die Übungsblätter mit Hausaufgaben sowie unsere Lösungen nach Abgabe der Aufgaben.
Forum und Umfrage runden das Gesamtpaket ab.

Wie nutzen Sie diese Notizen?

Ich möchte Vortrag und Skript synchron halten, soweit dies möglich ist.
Die Nummerierung der Abschnitte, Definitionen, Sätze, Beispiele usw.
habe ich daher beibehalten, auch wenn dadurch Sprünge entstehen.
Der Übergang zwischen Vortrag und Skript wird dadurch nahtlos.

Diese Vorlesung ist eine Einführung, zwar gründlich doch begrenzt.
Mit dem ausführlicheren Skript bietet sie eine Brücke zur Literatur,
sie ist in sich geschlossen und zugleich offen, ein erster Anfang.
Bitte lesen Sie Lehrbücher, sobald Sie sich sicher genug fühlen!

Es gibt wahrlich viele exzellente Bücher zur Mathematik, insbesondere
auch zur Topologie und ihren vielfältigen Ausprägungen, Vertiefungen
und Anwendungen etwa als analytisch-mengentheoretische Topologie,
algebraische, geometrische, differentielle, ...

Nur durch eigenständige Lektüre lernen Sie verschiedene Sichtweisen
kennen in mathematischem Stil und Inhalt, Auswahl und Aufbau, ...
Selbst wenn Sie manche Lehrbücher zunächst nur anlesen, sind dies doch
wichtige Kondensationskeime um später darauf zurückzukommen.

Topologie 2024 – Worauf freuen und was erhoffen Sie sich?

Bevor ich über die Topologie spreche, beginnen wir bei Ihnen:
Was erhoffen Sie sich von dieser Veranstaltung zur Topologie?

Willkommen zur Topologie!

Meine Ziele und Wünsche für diese Veranstaltung:

1. Freude an Mathematik! Wir wollen unseren Spaß haben.
   Das klingt egoistisch, doch vielleicht springt der Funke über.
2. Sie engagieren sich kontinuierlich, wir betreuen Sie bestens.
   Das ist Ihr Schlüssel zu Ihrem Erfolg. Gestalten Sie Ihr Studium!
3. Sie lernen wunderschöne und nützliche Mathematik.
   Gemeinsam schaffen wir dafür beste Voraussetzungen.

Sie sind jung, lernfähig, wissbegierig. Die mathematischen Werkzeuge, die Sie hier in Ihrem Studium erlernen, nützen Ihnen ein Leben lang. Ihre Investition lohnt sich, jetzt schon kurzfristig, noch mehr langfristig.

Ich bin zu alt, um nur zu spielen,
zu jung, um ohne Wunsch zu sein.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust* (1808)

Wir bieten Ihnen eine sensationell gute, preisgekrönte Veranstaltung. Diese verlangt Ihr volles Engagement. Prüfen und entscheiden Sie sich!

Was macht die Topologie so einzigartig?

Viele halten die Topologie für abstrakt und schwierig,
doch nur Wenige haben Recht!

Sie wissen aus Erfahrung: Analysis ist konkret… und dadurch beliebig kompliziert. Lineare Algebra ist abstrakt… und dadurch meist einfach. Die Topologie ist beides: wunderbar abstrakt und vollkommen konkret! Mathematik zu studieren ist harte, ehrliche Arbeit… und es lohnt sich.

Erfahrungsgemäß bereitet die Topologie Teilnehmer:innen nachhaltig Freude, deshalb wurde unsere Lehre mehrfach mit Preisen ausgezeichnet.

We choose to study Topology this very semester,
not because it is easy, but because it is hard,
because that goal will serve to organize and
measure the best of our energies and skills.
frei nach John F. Kennedy (1917–1963)

Ich freue mich, dass Sie sich für die Topologie entscheiden.
Freuen Sie sich auf ein spannendes und lehrreiches Semester!

Was macht die Topologie so einzigartig?

Ihr Mathematikstudium hat zwei zentrale, sich ergänzende Ziele: **Wissen und Können**, Verstehen und Anwenden, Theorie und Praxis. Darin liegt der besondere Reiz der Mathematik, und ihre Schwierigkeit. (Ich betone dies, weil es für viele keineswegs selbstverständlich ist.)

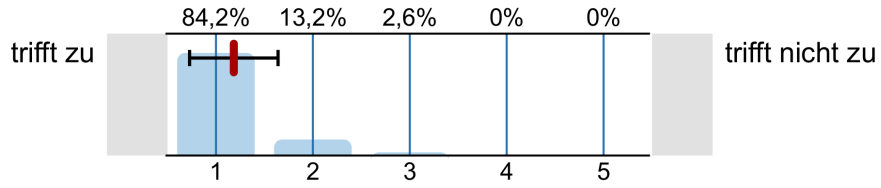
Die Lineare Algebra behandelt Vektoren und Matrizen, lineare Räume und lineare Abbildungen. Das sind sehr einfache Objekte, aber abstrakt. Abstraktion hilft, sie strukturiert und vereinfacht! Ein Vektorraum etwa sieht immer gleich aus, Sie müssen nur seine Dimension kennen.

Die Analysis behandelt reelle Zahlen und Funktionen, Stetigkeit und Konvergenz, Ableitungen und Integrale, uvm. Das ist zwar ganz konkret, kann aber beliebig kompliziert werden: Eine reelle Funktion, selbst stetig, kann die verrücktesten Dinge tun! Diese Komplexität liegt in der Natur.

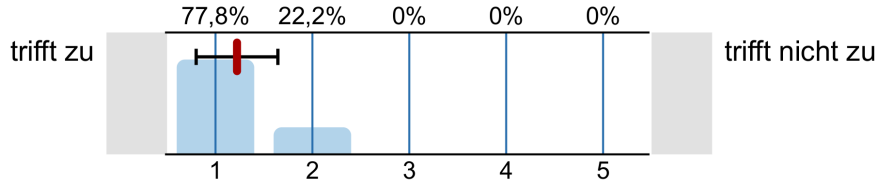
Meine scherzhafte Formulierung entspricht jahrzehntelanger Erfahrung: Die Topologie vereint beide Aspekte: Sie ist sehr konkret und hilft direkt. Sie kann auch beliebig kompliziert und sehr abstrakt sein. Das ist gut so: Abstrakt heißt nicht anwendungsfern, sondern vielseitig anwendbar!

Unsere Topologie ist sensationell gut.

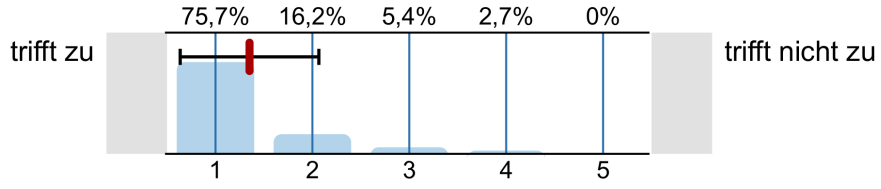
Die Lehrveranstaltung ist außerordentlich gut organisiert.



Vor und nach den Lehrveranstaltungen wird auf die Belange der Studierenden eingegangen.

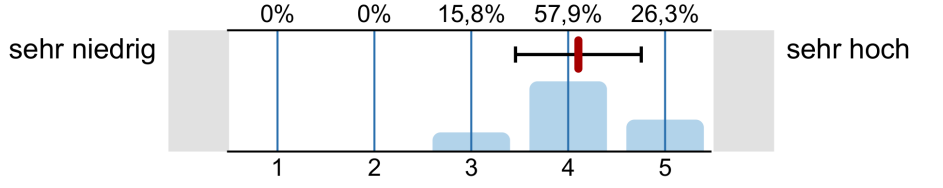


Ich habe durch den Besuch dieser Lehrveranstaltung viel gelernt.

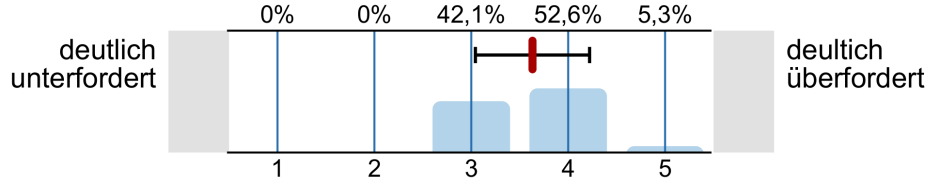


⚠ Seien wir klar und ehrlich: Studieren heißt sich bemühen!

Im Vergleich zu anderen Lehrveranstaltungen sind die Anforderungen in dieser Lehrveranstaltung an mich...



Die Lehrveranstaltung hat mich...



Redliche Mühe mag nicht jede:r.
Ein einsamer Hater schrieb: „Alles in allem eine Vorlesung, für die man sehr viel selbst tun musste, und die ich niemandem empfehlen würde.“

Unsere Topologie ist sensationell gut.

Wir müssen uns entscheiden zwischen dem richtigen Weg und dem leichten.
Albus Dumbledore zu Harry Potter auf die Frage der Topologie

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!
[Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!]

Warum erzähle ich Ihnen das? Sie können mit uns rechnen!
Die Mathematik bietet viel und verlangt viel, das gilt insbesondere für die Topologie. Diese Veranstaltung ist unser Angebot an Sie.
Ich möchte, dass Sie vernünftig handeln und erfolgreich studieren.

Ich kann Ihnen den Weg zeigen, doch gehen müssen Sie ihn selbst.
Die Rückmeldungen sind insgesamt sehr positiv, die Befragungen sind sensationell gut, besonders für eine Grundvorlesung am Studienanfang.
Unser Gesamtpaket zur Topologie ist hervorragend.

Dafür arbeite ich extrem hart, genauer: Ihr gesamtes Topologie-Team!
Von Ihnen erwarte ich dasselbe: ernsthaftes Engagement und Mitarbeit.
Mir ist wichtig, diese Grundfrage anfangs ein für alle mal zu klären.
Anschließend können wir uns auf Inhalte konzentrieren.

Full disclosure: Was sagt der einsame Hater?

Die meisten Rückmeldungen sind begeistert. Doch es gibt den gelegentlichen Hater, den ich zu verstehen suche, so wie diese verlorene Seele: (1) *„In den Vorlesungsvideos wurde größtenteils nur der Text auf den Folien vorgelesen…“* Bitte lösen Sie sich von pauschalen Vorurteilen und nutzen Sie hilfreiche Angebote. Um Sie zu unterstützen, gehe ich Schritt für Schritt alles mit Ihnen durch. Zur visuellen Unterstützung erstelle ich sorgfältig meine Folien. Ich finde es nur fair und ehrlich, Ihnen diese sorgsam vorzutragen und hilfreich zu erläutern. (2) *„… und Hinweise zu unzähligen Dingen gegeben, die man selbst leicht nachrechnet.“* Ja, Erläuterung sind mir sehr wichtig. (3) *„Es wurden zwar zahlreiche Beispiele gegeben, diese verwirrten allerdings oft noch mehr als dass sie zum Verständnis des Stoffes beitrugen.“* Genau da hilft das eigenständige Nachrechnen. (4) *„Insgesamt erscheint das Ziel der behandelten Inhalte oftmals nicht klar.“* Das ist schade, denn darauf achte ich sehr. Zuhören hilft. (5) *„Allgemein sind die Scheinkriterien in dieser Vorlesung vergleichsweise hoch.“* Aber nein, jede ernsthafte Veranstaltungen erfordert Arbeit. (6) *„Die Übungsblätter wirken mit Text überflutet.“* Die motivierenden Erläuterungen auf der Rückseite finden die meisten hilfreich, man darf sie auch ignorieren. (7) *„Die scheinbar witzig gemeinten Anmerkungen, die sich durch Vorlesung und Übung ziehen, wirken unpassend und lassen Ernsthaftigkeit vermissen (so im übrigen auch noch in keiner Vorlesung erlebt).“* Stimmt, humorlos können andere besser. (8) *„Anstatt in der Übung das aktuelle Übungsblatt zu besprechen, wurde irgendwie über das neue Blatt geredet.“* Ja, wichtig ist, im gemeinsamen Takt zu bleiben. (9) *„Alles in allem eine Vorlesung, für die man sehr viel selbst tun musste, und die ich niemandem empfehlen würde.“* Ja, Ihre eigene Arbeit ist gut und wichtig. Die Teilnahme ist freiwillig. Überlegen Sie, was Sie wirklich wollen: schöne Mathematik, illustrative Beispiele, gute Erklärungen, intensive Betreuung, eigener Lernerfolg, … oder eben nicht.

Seien wir ehrlich, respektvoll und konstruktiv!

Ich nehme Ihr Lob und Ihre Kritik sehr ernst, ich versuche sehr genau, Ihre Rückmeldungen zu verstehen, daraus zu lernen, besser zu werden. Denselben Ernst und dieselbe Redlichkeit erwarte ich auch von Ihnen. Bitte formulieren Sie daher Ihre Vorschläge ehrlich und konstruktiv.

Natürlich ist es schwierig bis unmöglich, es allen genehm zu machen. Bedürfnisse und Möglichkeiten der Studierenden sind sehr heterogen. Wir helfen Ihnen, Schritt für Schritt, das gesamte Semester, und bauen dabei auf Ihr konstantes, aufrichtiges Bemühen. Hierzu sagt Konfuzius:

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.

Viele Faktoren fördern Ihren Erfolg, vor allem jedoch: Ihre Aktivierung! *Man kann ein Pferd zum Brunnen führen, aber trinken muss es selbst.* Darauf antworten leistungspunktdressierte Bachelor-Studierende gerne: *Ein gutes Pferd springt nur so hoch, wie es muss.* Das wäre sehr schade, denn ein Studium kann so viel mehr sein. Machen Sie das beste daraus!

Unser Ilias-Kurs ist informativ und liebevoll gestaltet.

Topologie 2024

Grundlagen der Topologie: analytisch, geometrisch, algebraisch

Aktionen

Inhalt | Timeline | Info | Einstellungen | Mitglieder | Metadaten | Export | Voransicht als Mitglied aktivieren

Zeigen | Verwalten | Sortieren

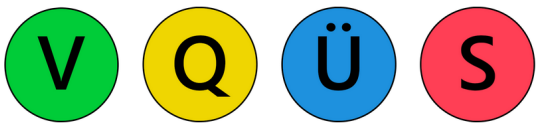
Neues Objekt hinzufügen | Seite gestalten

Herzlich willkommen zur Topologie!

Vorfreude / Umfrage / AnswerGarden zur *Topologie - Worauf freuen und was erhoffen Sie sich?*

In diesem Ilias-Kurs finden Sie Informationen und Online-Materialen zu unserer Veranstaltung:

- Zur Vorlesung gibt es ein **erprobtes Skript und Folien**.
- Jede Woche lösen Sie hier in Ilias ein **hilfreiches Quiz**. Damit wiederholen Sie den aktuellen Vorlesungsstoff und sind so für die Übungen bestens vorbereitet.
- Für die **Übungen** erhalten Sie jede Woche ein Übungsblatt, das Sie in den Präsenzübungen mit Ihren Kommiliton:innen lösen und anschließend ausarbeiten.
- Im **Forum** können Sie anonym Ihre Fragen stellen und erhalten kompetente, freundliche Auskunft.



Termine

Vorlesung

- Dienstag, 11:30 - 13:00 Uhr, in V57.04
- Freitag, 09:45 - 11:15 Uhr, in V57.06

Die **erste Vorlesung** findet am Dienstag, den 9. April, statt.

Quizze

Erstes Quiz zur Wiederholung: von Montag, 8. April, 9:00 Uhr bis Mittwoch, 10. April, 14:00 Uhr

Danach findet das Quiz immer von Freitag, 9:00 Uhr bis Montag, 23:00 Uhr statt (Quiz 2 also vom 12. bis 15. April).

Gruppenübungen

- Dienstag, 14:00 - 15:30 Uhr, in V57 8.135
- Dienstag, 15:45 - 17:15 Uhr, in V57 8.135

Die **Anmeldung zu den Gruppenübungen** findet am Dienstag, den 9. April, von 13:30 bis 17:00 Uhr hier in Ilias statt. Um sich zu einer Gruppe anzumelden, treten Sie der Iliasgruppe im Übungsordner bei.

Die **ersten Übungen** finden bereits am Dienstag, den 9. April, statt. In der ersten Vorlesungswoche gibt es noch kein Übungsblatt. Stattdessen können Sie am 9. April Quiz 1 zusammen mit Ihren Kommiliton:innen in der Gruppenübung lösen. Da die Anmeldung zu den Übungen noch im Gange ist, können Sie sich hierfür eine der beiden Gruppen aussuchen. Ab Woche 2 gibt es dann jede Woche ein Übungsblatt.

Mein Skript und die extrahierten Folien sind frei erhältlich.

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen.
JOHANN WOLFGANG VON GOETHE (1749–1832), *Faust*

TOPOLOGIE

Vorlesungsfolien zur Topologie

Auf Wunsch von Studierenden stelle ich parallel zur Vorlesung und zusätzlich zum Skript meine daraus extrahierten Vorlesungsfolien zur Verfügung. Formate: 1x1 (Bildschirm), 1x2 (Broschüre), 2x2 (Spiralbindung), 2x4 (Adlerauge).

Die Kapitel werden Woche für Woche frisch erstellt und die Dateien dann aktualisiert hier hochgeladen. Auch Verbesserungen der unvermeidlichen Fehler werden schnellstmöglich eingepflegt. Es ist noch nicht alles perfekt, aber vermutlich jetzt schon eine brauchbare Hilfe für diejenigen, die damit arbeiten wollen. Möge es nützen!

- *Wie kann ich einzelne Kapitel herunterladen?*

Skript zur Topologie

Lernziele und Inhalte laut Modulhandbuch

Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse der Topologie und ihrer Anwendungen: Sie können sicher mit topologischen Begriffen, Konstruktionen und Argumenten umgehen; die behandelten Methoden selbstständig, sicher, korrekt, kritisch und kreativ anwenden; mathematische Probleme korrekt formulieren und selbständig lösen; Problemstellungen abstrahieren und mathematisch argumentieren.

Inhalte: Grundlagen der allgemeinen Topologie: Metrische Räume, topologische Räume, Konvergenz und Stetigkeit, Unterräume und Quotientenräume, Summenräume und Produkträume, Abzählbarkeit, Trennungsaxiome, Metrisierbarkeit, Kompaktheit, Zusammenhang, Homotopie, Anwendungen. Grundlagen der geometrischen Topologie: Simplizialkomplexe, Euler–Charakteristik, Umlaufzahl / Abbildungsgrad, Topologie des euklidischen Raumes, Klassifikation der geschlossenen Flächen, Anwendungen. Grundlagen der algebraischen Topologie: Fundamentalgruppen und Überlagerungen, Anwendungen.

Ziele Ihrer universitären Ausbildung

Aus dieser ambitionierten Zielsetzung ergibt sich die Vorgehensweise:

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen,
  sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren,
  sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion,
  sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben.
  Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte,
  sondern um eigenständige Anwendung.

Wir gehen keinen verlockend leichten Irrweg, sondern gleich den einzig richtigen. Der Anstieg ist steil, doch das Ziel ist hehr. Es lohnt sich!

Freuen Sie sich auf schöne und nützliche Mathematik!

Einführung: Was ist und was soll die Topologie?

Analytische Topologie	**Universelle Werkzeuge**	**Geometrische Topologie**	**Algebraische Topologie**
Distanzlehre: Metrik	Kompaktheit und Kompaktifizierung	Simpliziale Komplexe	Fundamental-gruppen
Stetigkeitslehre: Topologie	Zusammenhang und Homotopie	Abbildungsgrad & Topologie des $\mathbb{R}^n$	Überlagerungen
Topologische Konstruktionen	Die Sprache der Kategorien	Klassifikation der Flächen	*Into the great wide open …*

Zeitplan für dieses Semester

☺ Alle Informationen zur Topologie finden Sie in unserem liebevoll gestalteten Ilias-Kurs sowie ergänzend auf der öffentlichen Webseite.

Vorlesung ab dem 09.04.2024:

VL	wöchentlich	Dienstag	11:30 – 13:00	V 57.04
VL	wöchentlich	Freitag	9:45 – 11:15	V 57.06

Gruppenübungen ab der ersten Vorlesungswoche.
Anmeldung über Ilias ab Dienstag, 09.04. um 13:30

Der **Übungsschein** ist Voraussetzung für die Abschlussklausur: mindestens 50% in den wöchentlichen Quizzen und Hausübungen.

Abschlussklausur: Sep/Okt und Feb/Mrz, siehe C@mpus

Doch vorerst dieses halbe Jahr / Nehmt ja der besten Ordnung wahr.
Fünf Stunden habt ihr jeden Tag; / Seyd drinnen mit dem Glockenschlag!
Habt euch vorher wohl präparirt, / Paragraphos wohl einstudirt,
Damit ihr nachher besser seht, / Daß er nichts sagt, als was im Buche steht.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust* (1808)

Wie gelingt Ihnen die Topologie?

Falls Sie (auch) wegen der Leistungspunkte hier sind, erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich studieren. Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus Ana 1-3 und Lina 1-2
- **wöchentliche Bearbeitung** von Vorlesung, Quiz und Übungen

Die Topologie entspricht 9 Leistungspunkten: insgesamt 270h

- **Präsenz:** 14 Wochen à 4h Vorlesung + 2h Übung $\approx$ 80h
- **Individuelle Arbeit:** ein weiterer Tag (8h) pro Woche $\approx$ 110h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: 2 bis 3 Wochen $\approx$ 80h

Das ist keine Übertreibung sondern jahrzehntelange Erfahrung:
6 Präsenzstunden pro Woche erfordern 12 Stunden eigene Arbeit.

Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht.
Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.
[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

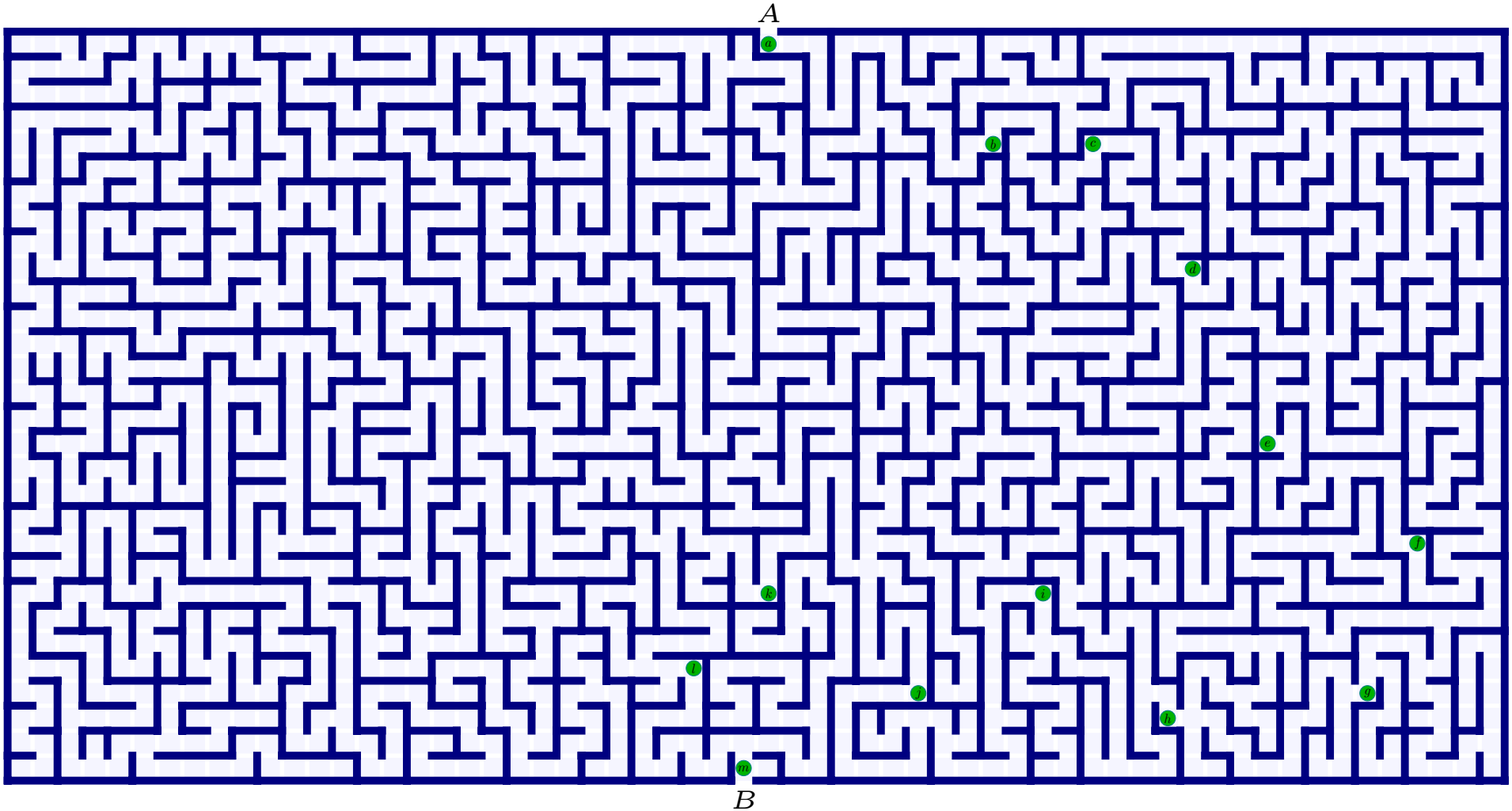
Wie gelingt Ihnen das Studium?

Die Universität als Wissenstrichter?

Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrisische Motivation! Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Sätze erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig und sorgsam durcharbeiten, um es zu beherrschen.

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

Ich führe Argumente sorgsam vor. Sie arbeiten alles gründlich nach.



Ich zeige Ihnen den Weg von A nach B. Dazu teilen wir uns die Arbeit:
Ich erkläre die wesentlichen Etappen. Sie ergänzen und klären Details.

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

⚠ Ihr Uni-Studium fordert und fördert Ihr selbständiges Arbeiten!
Ich vertraue, dass Sie lernen wollen und sich die nötige Zeit nehmen.
Der Schlüssel zu Ihrem Erfolg sind Ihre Aktivierung, Ihre Investition, Ihr persönliches Engagement und Ihre kontinuierliche, ernsthafte Mitarbeit.

Ich präsentiere Ihnen schöne und nützliche Mathematik und leite Sie durch die Vorlesung. Kleinschrittig oder summarisch? Zu große Schritte frustrieren und entmutigen, zu kleine Schritten bremsen und langweilen. Das richtige Tempo ist eine Frage der Erfahrung und der Verhandlung.

In Vorlesung $n+1$ nutze ich die Ergebnisse der Vorlesungen 1 bis n.
In der Mathematik bauen Begriffe und Techniken stark aufeinander auf, mehr als in jeder anderen Wissenschaft. Das ist Fluch und Segen zugleich, sowohl Herausforderung beim Erlernen als auch Effizienz im Fortschritt.

Shakespeares Werke können Sie in nahezu beliebiger Reihenfolge und Auswahl lesen. Für mathematische Lehrwerke gilt dies definitiv nicht!
Arbeiten Sie kontinuierlich mit, nach und vor, Vorlesungen und Übungen, bleiben Sie am Ball, nur so kann es gelingen, so macht es allen Freude.

Wie detailliert soll die Darstellung sein?

Beweise in einem Lehrbuch für Studienanfänger sind recht ausführlich, für ein Expertenpublikum werden Beweise deutlich knapper formuliert. Semester für Semester entwickeln Sie sich vom Anfänger zum Experten.

Was also ist ein Beweis genau? Wie detailliert ausgeführt muss er sein? Wie groß dürfen die logischen Schritte maximal sein? Hierzu sind zwei Antworten möglich: formal-dogmatisch oder sozial-pragmatisch.

Dogmatische Antwort: In einem vollständig formalisierten Beweis ist jeder Schritt die Anwendung einer Schlussregel. Wir beginnen mit einer Liste von wahren Aussagen (Axiome, Voraussetzungen) und erweitern diese schrittweise durch logisches Schließen, jeweils mit Angabe der verwendeten Schlussregel. Am Ende steht die ersehnte Behauptung.

Im obigen Bild ist das der vollständig ausgeführte Lösungsweg, etwa als eine lange Folge von kleinen Beweisschritten, jeder davon ist elementar. Die Richtigkeit kann ein Computer mechanisch prüfen (*proof checker*). Für menschliche Leser ist die mechanische Prüfung leider mühsam und wenig lehrreich, sie vermittelt meist keine Idee, Vision oder Inspiration.

Wie detailliert soll die Darstellung sein?

Pragmatische Antwort: Traditionell schreiben wir Beweise nicht für Maschinen, sondern für Menschen. Es gibt immer mehr Ausnahmen, etwa in der Programmierung, aber denken wir an diese Vorlesung.

Für ein menschliches Gegenüber ist es üblich, nicht alle elementaren Schritte auszuführen, sondern den Beweisgang allein durch geeignete Zwischenpunkte abzustecken. Das ist effizienter, sowohl für Sender:in als auch für Empfänger:in. Die Zwischenpunkte sollen eng genug sein, sodass der Empfänger den Weg dazwischen selbst rekonstruieren kann.

Das rechte Maß, ob detailliert ausgeführt oder nur grob skizziert, hängt somit vom Empfänger ab! Beweise in Lehrbüchern sind recht detailliert, Artikel in Fachzeitschriften sind knapper und Beweise oft nur skizziert. Die Komprimierung verschiebt die Beweislast von Sender zu Empfänger. Die Balance ist eine Kunst, sie beruht auf Konvention und Erfahrung.

Beispiel: Im Aufbau dieser Vorlesung versuche ich, die entscheidenden Zwischenschritte anzugeben. Routinierte Rechnungen hingegen führe ich meist nicht aus, sondern übertrage sie Ihnen. Das ist richtig so!

Legende / Leseanleitung: Folien zur Topologie

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen;
dies kennzeichnet die Folien, die in der Vorlesung behandelt werden.
Ich möchte Vortrag und Skript synchron halten, soweit dies möglich ist.
Die Nummerierung der Abschnitte, Definitionen, Sätze, Beispiele usw.
habe ich daher beibehalten, auch wenn dadurch Sprünge entstehen.
Der Übergang zwischen Vortrag und Skript wird dadurch nahtlos.

Legende / Leseanleitung: Folien zur Topologie

Ich präsentiere hier Ideen, Techniken und Anwendungen, Definitionen und Sätze, Aufgaben und Lösungen. Dabei versuche ich, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier auch schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung und den Leser:innen als Erläuterung.

Legende / Leseanleitung: Folien zur Topologie

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem ersten Kapitel zur Vorschau; dies gibt zunächst eine Übersicht zentraler Themen der Topologie und dient somit zu einer frühen Orientierung, als Ausblick und Motivation. Diese Versprechen werde ich in den folgenden Wochen einlösen.

Kapitel A: Was ist und was soll die Topologie?

A1 Homöomorphismen und topologische Invarianten
A2 Euklidische Geometrie: Polytope und Isometrien
A3 Von Geometrie zu Topologie: Eulers Polyederformel
A4 Zentrale Anwendung: die Klassifikation kompakter Flächen
A5 Von Topologie zu Geometrie: der Satz von Gauß–Bonnet

Kapitel B: Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$

B1 Grundlagen: Zahlen, Logik und Mengen

- B1.1 Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- B1.2 Mengen, Relationen und Funktionen
- B1.3 Zermelo–Fraenkel–Axiome

B2 Die Mächtigkeit von Mengen

- B2.1 Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein
- B2.2 Cantors Diagonalargumente und Hilberts Hotel
- B2.3 Die Mächtigkeit der reellen Zahlen: $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

B3 Intermezzo: Axiome und Modelle

- B3.1 Hausdorff: die Ordnung der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, \leq)$
- B3.2 Tarski: die Saga der *high school identities für* $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$
- B3.3 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ und Quaternionen $\mathbb{H}$ als Matrizen

Kapitel C: Distanzlehre: metrische Räume

C1 Skalarprodukte und Normen auf Vektorräumen
C2 Metrische Räume und ihre Topologie
C3 Konvergenz und Stetigkeit
C4 Vollständige metrische Räume
C6 Der kleine Horrorladen

Kapitel D: Stetigkeitslehre: topologische Räume

D1 Topologische Räume

D2 Stetige Abbildungen

D3 Umgebungen und Umgebungsbasen

D4 Anwendung auf Funktionenräume

D5 Inneres, Abschluss, Rand

D6 Basen und Erzeugendensysteme

D7 Baire–Räume und Borel–Mengen

Kapitel E: Topologische Konstruktionen

E1 Teilräume $A \subseteq X$ und Einbettungen $X \hookrightarrow Y$

E2 Quotientenräume X/R und Identifizierungen $X \twoheadrightarrow Y$

E3 Summen $X \sqcup Y$ und $\coprod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume

E4 Produkte $X \times Y$ und $\prod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume

E5 Trennungsaxiome und Metrisierung

E6 Geometrische Anwendungen

E7 Topologische Gruppen

Kapitel F: Kompaktheit und Kompaktifizierung

F1 Kompakte topologische Räume
F2 Kompakte metrische Räume
F3 Lokale Kompaktheit
F4 Kompaktifizierung
F5 Eigentliche Abbildungen
F6 Geometrische Anwendungen

Kapitel G: Zusammenhang und Homotopie

G1 Zusammenhang
G2 Wegzusammenhang
G3 Lokaler Zusammenhang
G4 Homotopie stetiger Abbildungen
G5 Retrakte und Deformationsretrakte

Kapitel H: Die Sprache der Kategorien

H1 Kategorien… organisieren die Mathematik.

H2 Kommutative Diagramme… schaffen Überblick.

H3 Universelle Objekte… lösen universelle Probleme.

H4 Funktoren… übersetzen zwischen Kategorien.

H5 Transformationen… übersetzen zwischen Funktoren.

H6 Adjungierte Funktoren… begegnen uns überall.

Kapitel I: Simpliziale Komplexe

I1 Affine Simplizialkomplexe
I2 Kombinatorische Simplizialkomplexe
I3 Triangulierung und Unterteilungen
I4 Simpliziale Approximation

Kapitel J: Abbildungsgrad auf Sphären und Topologie des Raumes $\mathbb{R}^n$

J1 Die Umlaufzahl ebener Wege

J2 Der Satz von Jordan–Schoenflies

J3 Der Abbildungsgrad auf Sphären

J4 Der Brouwersche Fixpunktsatz

J5 Der Satz vom Igel und Vektorfelder auf Sphären

J6 Der Satz von Borsuk–Ulam und Anwendungen

J7 Topologische Invarianz: Dimension, Rand, Gebiet, Orientierung

Kapitel K: Klassifikation kompakter Flächen

K1 Mannigfaltigkeiten
K2 Projektive Räume
K3 Der Flächenkalkül

Kapitel L: Fundamentalgruppen topologischer Räume

L1 Das Fundamentalgruppoid eines Raumes

L2 Die Fundamentalgruppe eines punktierten Raumes

L3 Präsentationen von Gruppen

L4 Polygonale Fundamentalgruppen

L5 Wegintegrale und Potentiale von Vektorfeldern

L6 Simpliziale Fundamentalgruppen

Kapitel M: Überlagerungen topologischer Räume

M0 Bündel und Faserbündel
M1 Überlagerungen topologischer Räume
M2 Hochhebung von Wegen und Homotopien
M3 Gruppenoperationen und Galois–Überlagerungen
M4 Kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung
M5 Galois–Korrespondenz: Untergruppe vs Überlagerung

Kapitel A

Was ist und was soll die Topologie?

Ihr naht euch wieder, schwankende Gestalten,
Die früh sich einst dem trüben Blick gezeigt.
Versuch ich wohl, euch diesmal fest zu halten?
Fühl ich mein Herz noch jenem Wahn geneigt?

Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust*

Inhalt dieses Kapitels A

1 Homöomorphismen und topologische Invarianten

2 Euklidische Geometrie: Polytope und Isometrien

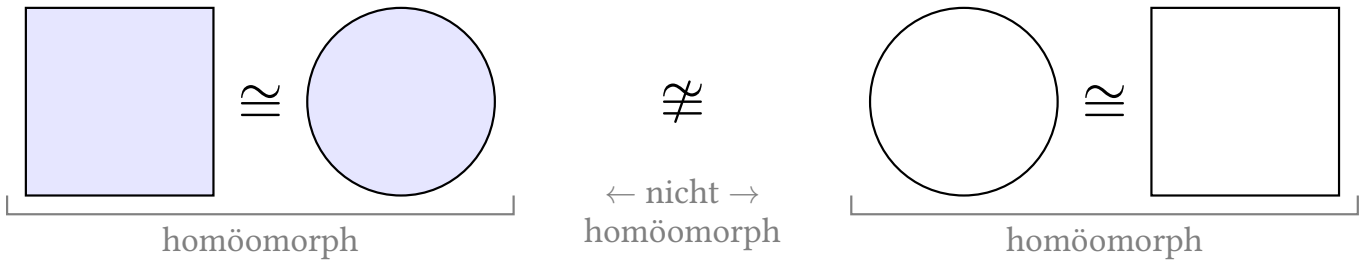
3 Von Geometrie zu Topologie: Eulers Polyederformel

4 Zentrale Anwendung: die Klassifikation kompakter Flächen

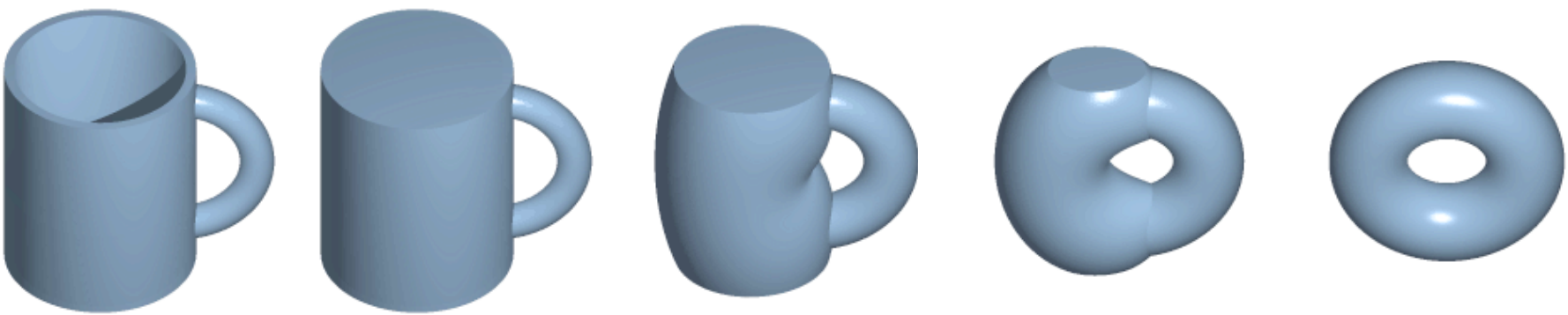
5 Von Topologie zu Geometrie: der Satz von Gauß–Bonnet

Topologie ist qualitative Geometrie.

Topologie ist die ‘Lehre vom Ort und der gegenseitigen Lage’, griechisch τόπος [tópos] ‘Ort, Lage’, λόγος [lógos] ‘Wort, Einsicht, Lehre’, ὅμοιος [homoios] ‘gleich, ähnlich’, μορφή [morphé] ‘Form, Gestalt, Anmut’.



Homöomorph heißt ‘gleiche Form’, *homotop* heißt ‘stetig deformierbar’.
Das beweisen wir durch einen Homöomorphismus bzw. eine Homotopie.



Wie beweisen wir, dass zwei Objekte *nicht* die gleiche Form haben?
Wir nutzen Invarianten: Euler–Charakteristik, Fundamentalgruppe, …

Historische Anfänge der Topologie

📖 Johann Benedict Listing (1808–1882): *Vorstudien zur Topologie* (1848)

Bereits Gauß untersuchte Knoten und Verschlingungen im $\mathbb{R}^3$ etwa als stromdurchflossene Leiter zu Magnetfeld und Induktion. Sein Schüler Listing führte diese topologischen Ideen fort. Das berühmte Band, das Möbius 1858 entdeckte, findet sich bereits zehn Jahre zuvor bei Listing.

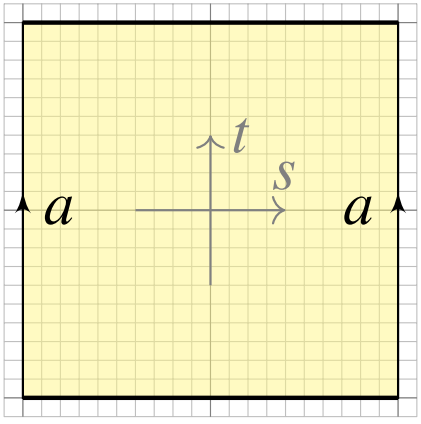
📖 Henri Poincaré (1854–1912): *Analysis Situs* (1895 bis 1904)

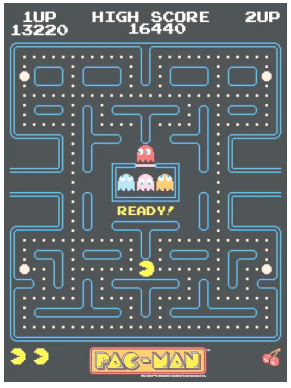
Poincaré untersuchte insbesondere dreidimensionale Mannigfaltigkeiten und formulierte seine berühmte Vermutung, die hundert Jahre später zum Millenium-Problem wurde und durch Grigori Perelman gelöst: Unter allen geschlossenen, zusammenhängenden 3–Mannigfaltigkeiten gibt es genau eine einfach-zusammenhängende, nämlich die Sphäre $\mathbb{S}^3$.

📖 Felix Hausdorff (1868–1942): *Grundzüge der Mengenlehre* (1914)

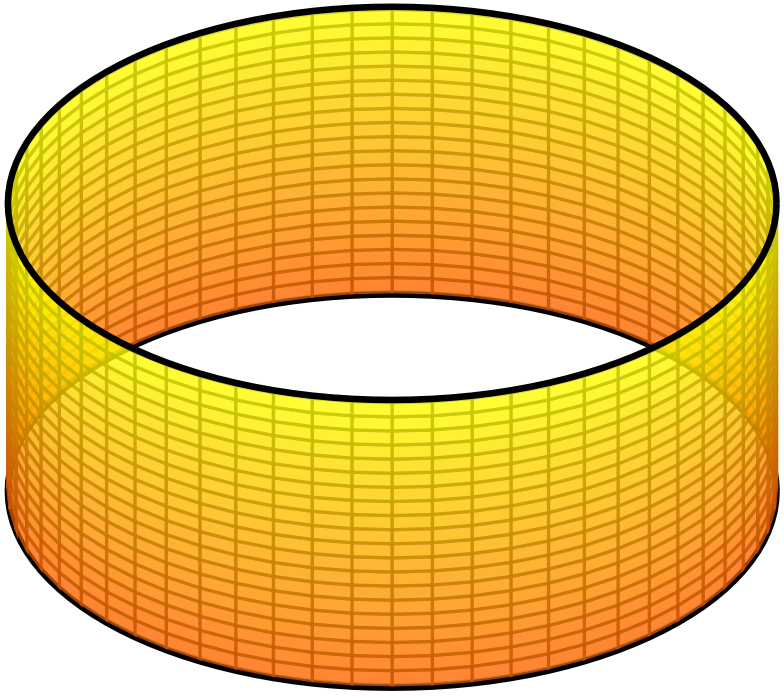
Die entstehende Topologie zählte man damals noch zur Mengenlehre. Sie erfährt hier in Kapitel VII. „Punktmengen in allgemeinen Räumen“ ihre erste systematische Darstellung in einem Lehrbuch. Dem Schöpfer der Mengenlehre, Georg Cantor, in dankbarer Verehrung gewidmet.

Beispiel für Flächen: Zylindermantel





$\longrightarrow$

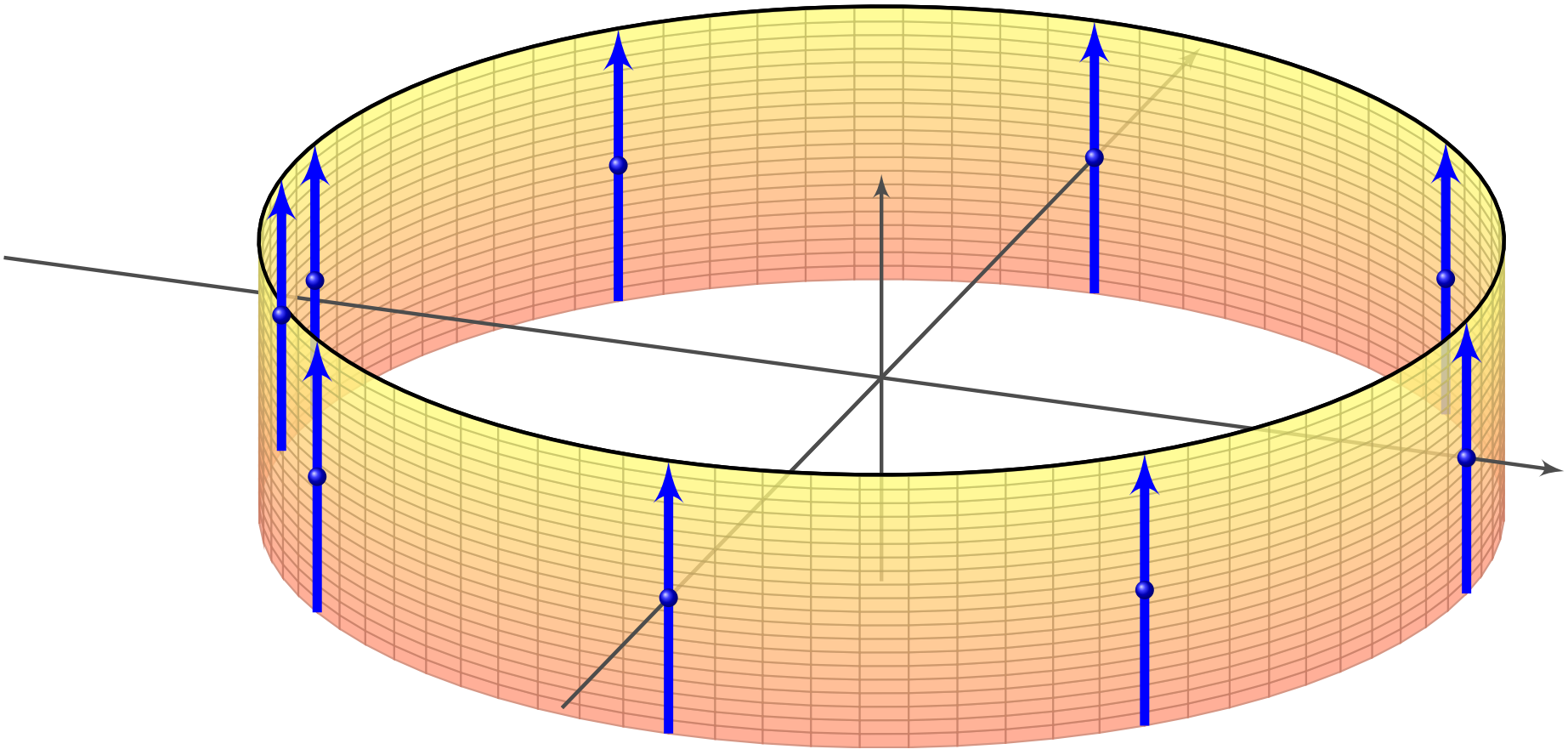


Zylinderkoordinaten?

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = r^2,\ -1 \leq z \leq 1 \right\}$$

$$f : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi s) \\ r\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$

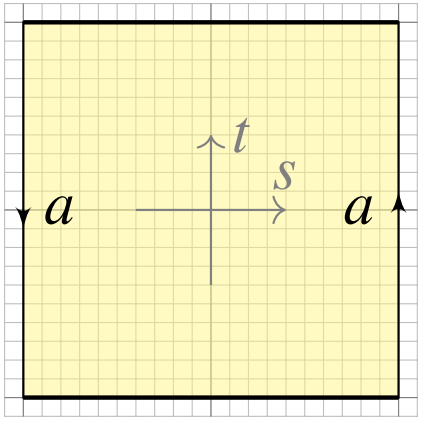
Beispiel für Flächen: Zylindermantel

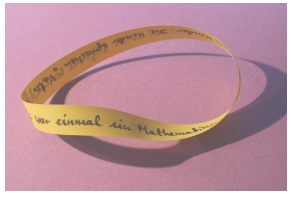


$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = r^2,\ -1 \leq z \leq 1 \right\}$$

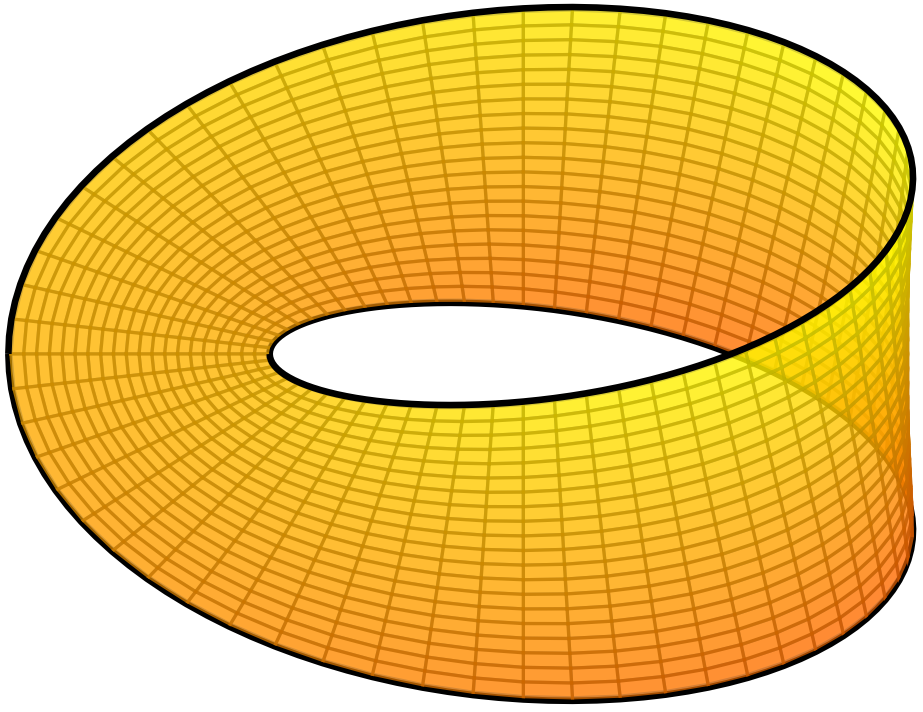
$$f : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi s) \\ r\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$

Beispiel für Flächen: Möbius–Band





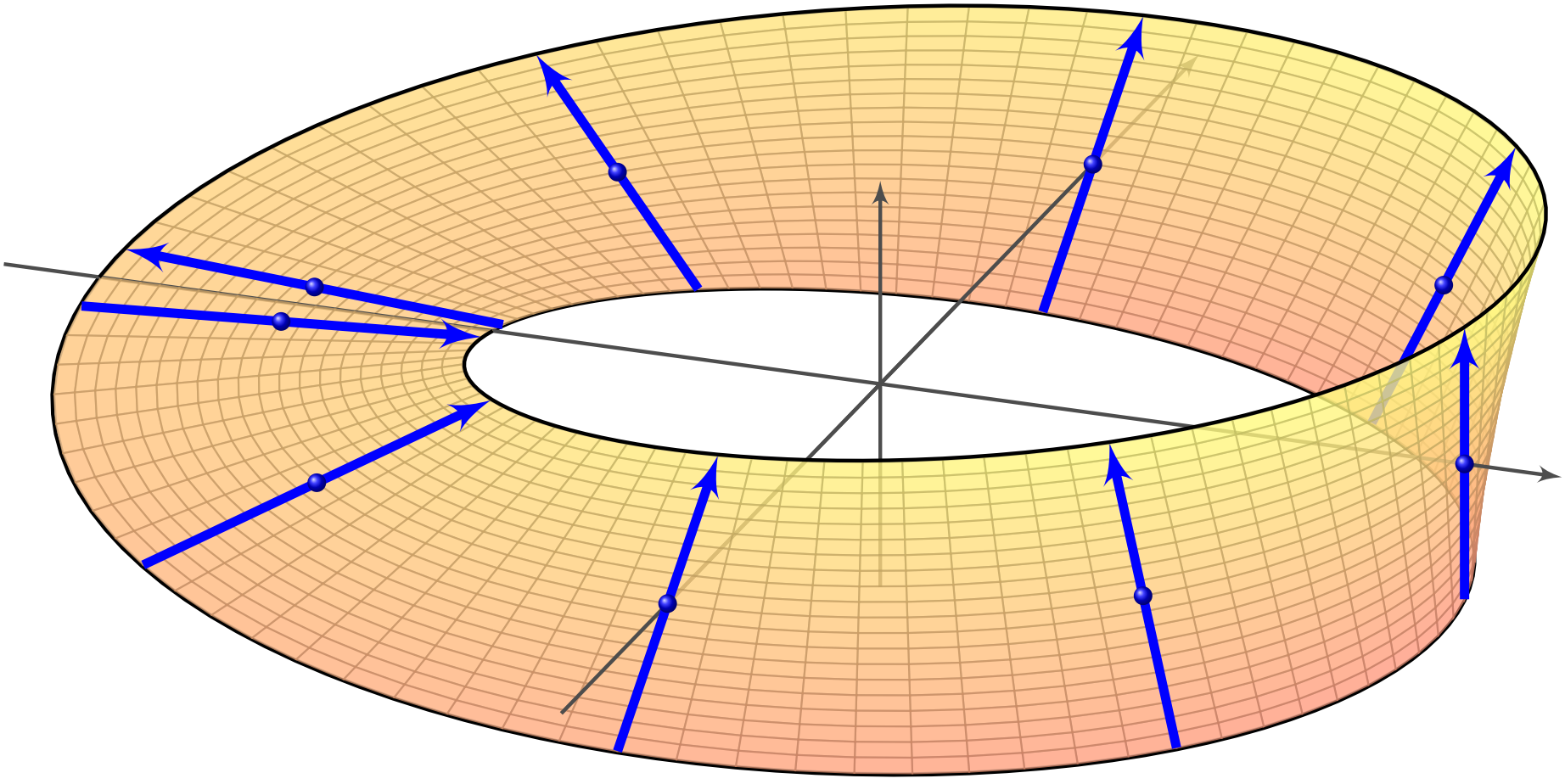
$\longrightarrow$



Möbius–Koordinaten?

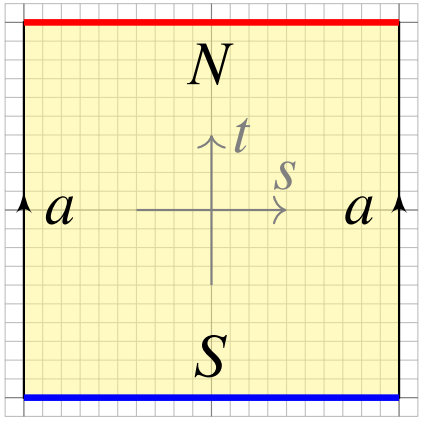
$$g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto g\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r + t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [r + t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$

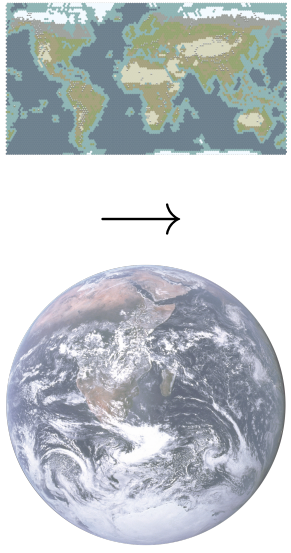
Beispiel für Flächen: Möbius–Band

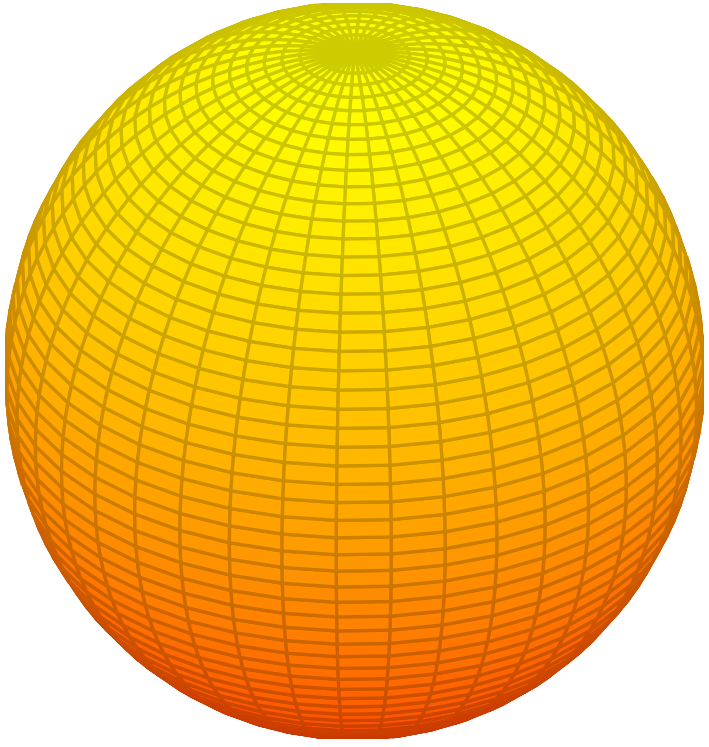


$$g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto g\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r + t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [r + t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$

Beispiel für Flächen: Sphäre





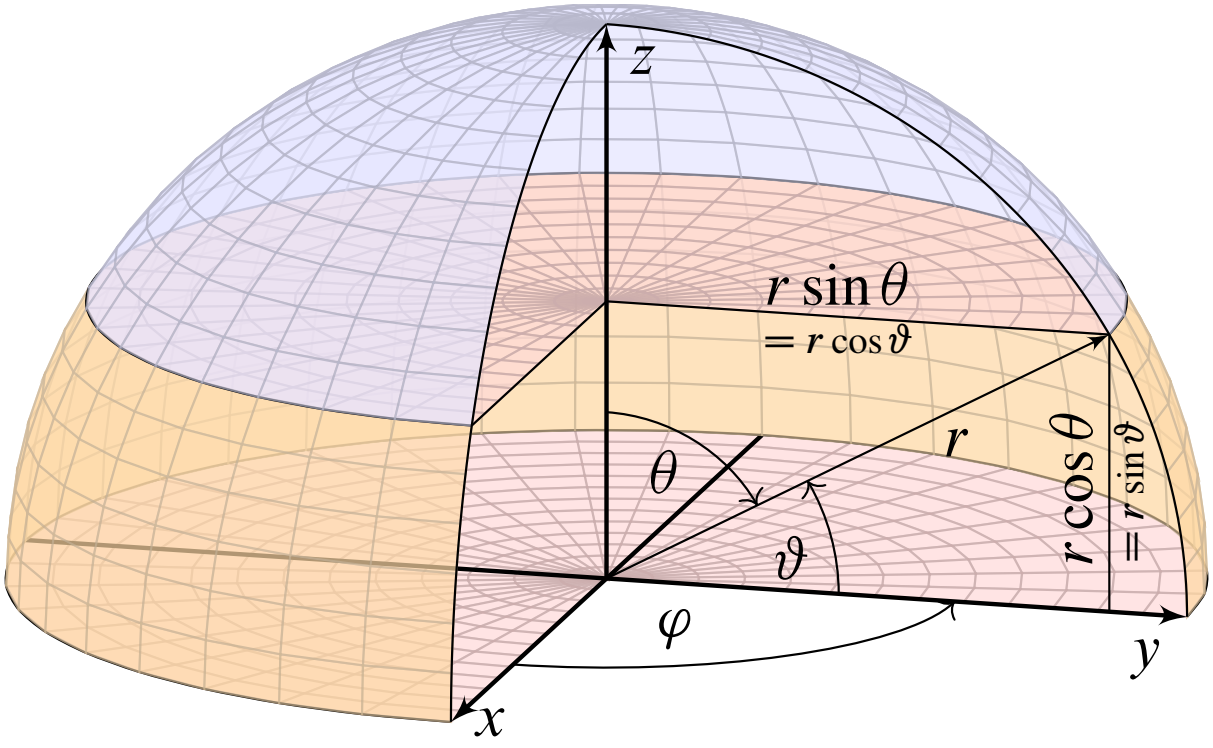


Kugelkoordinaten?

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \}$$

$$k : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto k\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi t/2)\cos(\pi s) \\ r\cos(\pi t/2)\sin(\pi s) \\ r\sin(\pi t/2) \end{pmatrix}$$

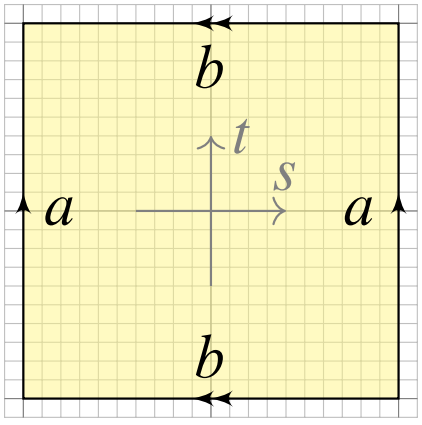
Beispiel für Flächen: Sphäre

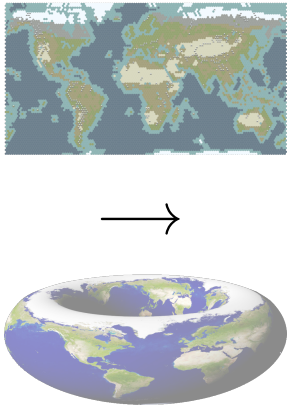


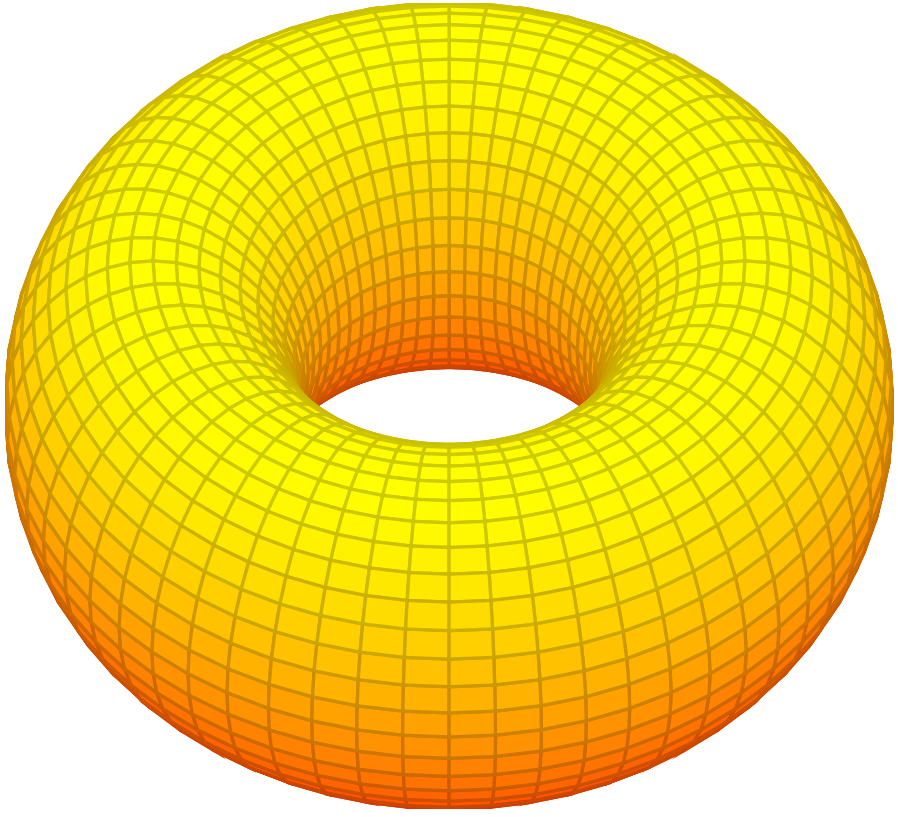
$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Beispiel für Flächen: Torus



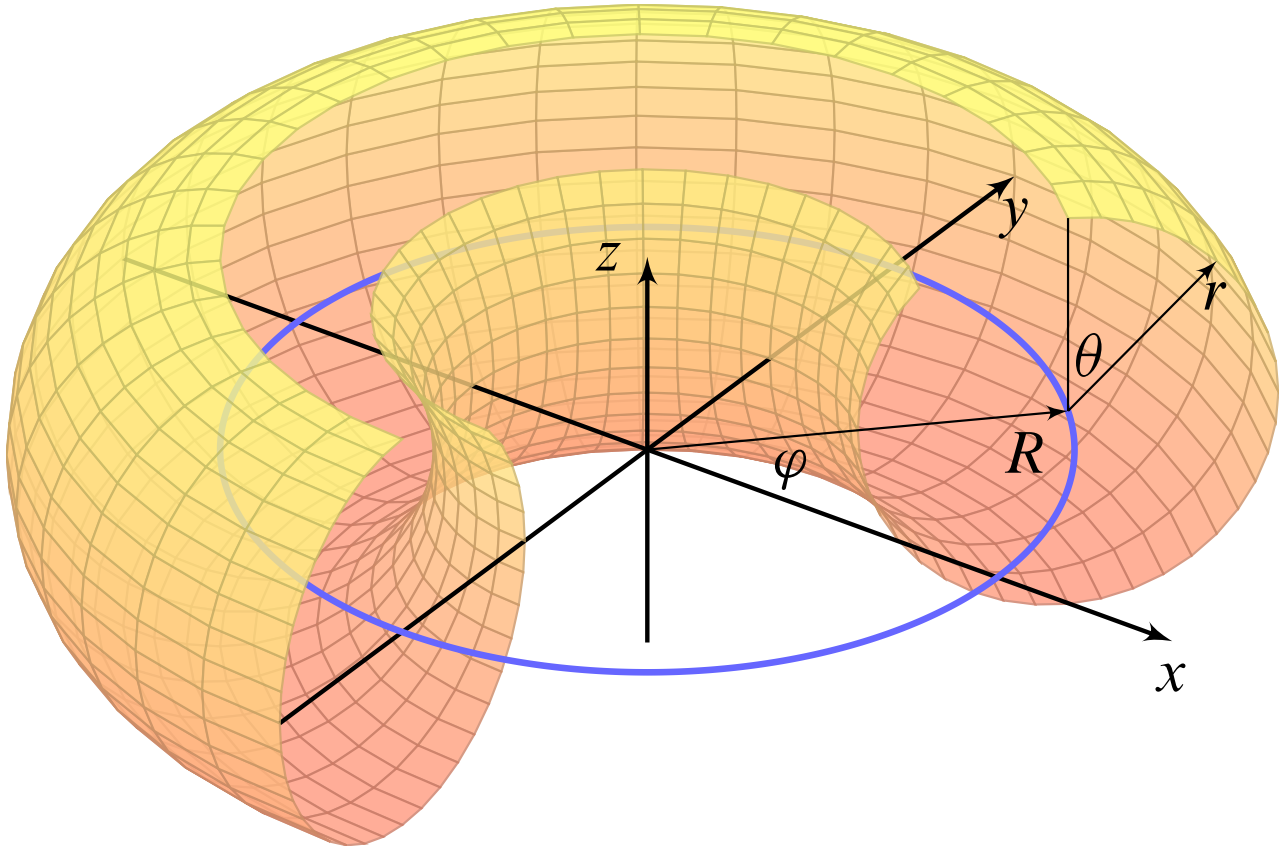




Toruskoordinaten?

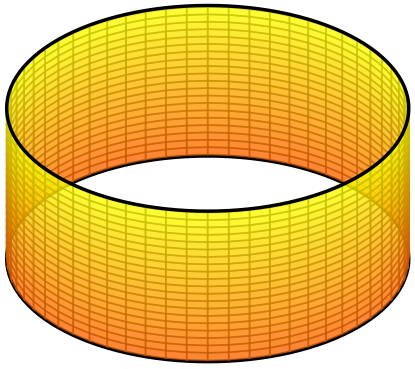
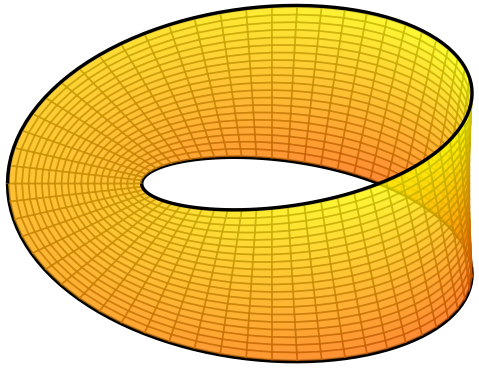
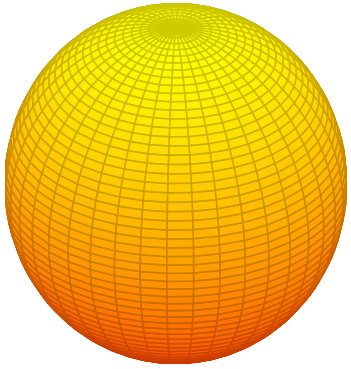
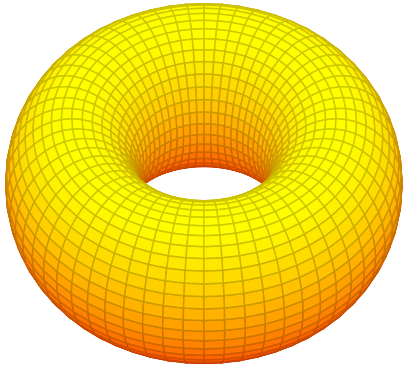
$$h : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto h\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [R + r\sin(\pi t)]\cos(\pi s) \\ [R + r\sin(\pi t)]\sin(\pi s) \\ r\cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

Beispiel für Flächen: Torus



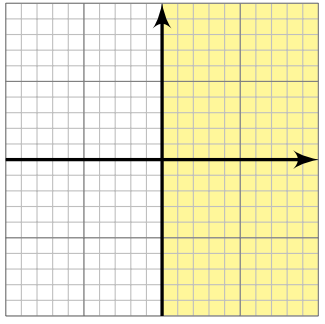
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \rho \sin\theta) \cos\varphi \\ (R + \rho \sin\theta) \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Was sind Flächen?

Eine **Kurve** sieht lokal aus wie die reelle Halb/Gerade $\mathbb{R}^1_{\geq 0}$.
Eine **Fläche** sieht lokal aus wie die reelle Halb/Ebene $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$.

Als lokale Modelle dienen uns der euklidische Raum $\mathbb{R}^m$
und der euklidische Halbraum $\mathbb{R}^m_{\geq 0} := \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \geq 0 \,\}$.



Definition A0A: topologische Mannigfaltigkeit

Ein Raum $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **m–dimensionale Mannigfaltigkeit**,
eventuell mit Rand ∂M, falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler
Homöomorphismus $(M, a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m, 0)$ oder $(M, a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m_{\geq 0}, 0)$ existiert.

Im ersten Falle ist a ein **innerer Punkt** von M, kurz $a \in \operatorname{Int} M$,
im zweiten Falle ist a ein **Randpunkt** von M, kurz $a \in \partial M$.

Können wir alle kompakten Flächen klassifizieren?

The theorem of classification of surfaces is a top-class mathematical achievement, comparable with the discovery of America or X-rays.
Vladimir Arnold (1937–2010), *On teaching mathematics* (1997)

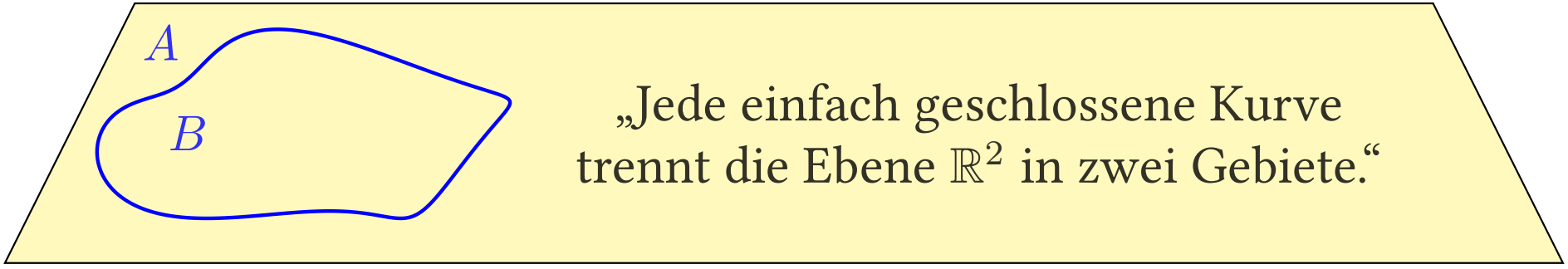
Auf dem Weg werden wir viele faszinierende Themen kennenlernen!

- Grundlagen: topologische Räume und stetige Abbildungen
- Konstruktionen: Teilräume, Quotienten, Produkte, Summen, etc.
- Eigenschaften: Kompaktheit und (Weg)Zusammenhang uvm.
- Struktur: Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexe
- Invarianten: Euler–Charakteristik, Fundamentalgruppe

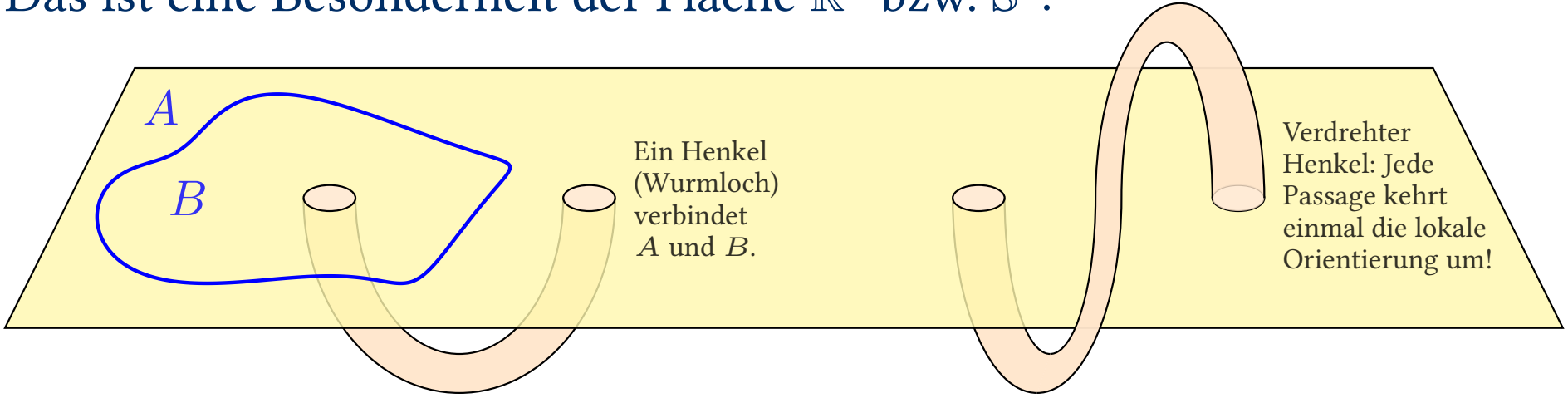
"Elementary" does not mean easy to understand.
"Elementary" means that very little is required
to know ahead of time in order to understand it,
except to have an infinite amount of intelligence.
Richard P. Feynman (1918–1988, Physiknobelpreis 1965)

Mannigfaltigkeiten, lokal vs global

Praktische Erfahrung und geometrische Anschauung führen zu Jordans Kurvensatz: einfach zu formulieren, doch notorisch schwer zu beweisen!



Hirten und Burgen nutzen dies seit Jahrhunderten!
Das ist eine Besonderheit der Fläche $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{S}^2$:



In was für einer Welt leben wir eigentlich?

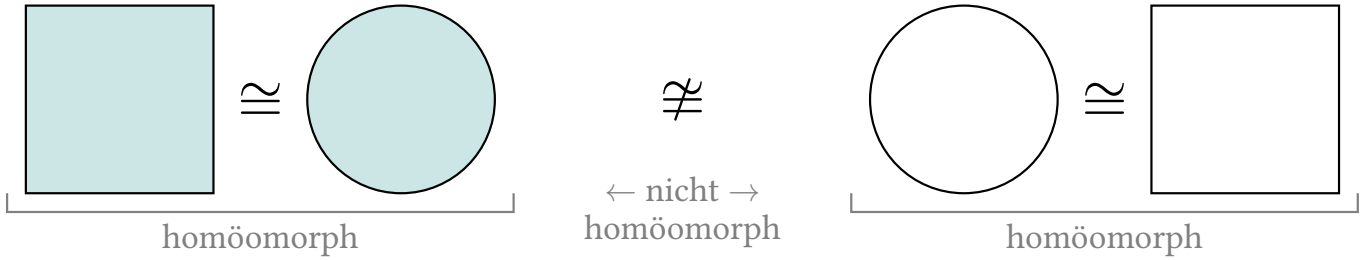
Wir vergleichen die uns umgebende Welt meist mit dem euklidischen Modellraum $\mathbb{R}^3$. Zumindest lokal in unserer unmittelbaren Umgebung scheint diese Idealisierung eine gute Näherung an unsere alltägliche Erfahrung zu sein. Ist der uns umgebende Raum deshalb auch global homöomorph zum Modellraum $\mathbb{R}^3$? Das ist keineswegs zwingend!

Wenn wir ehrlich sind, kennen wir vom Universum nur einen sehr kleinen Ausschnitt: In unserer unmittelbaren Umgebung lässt sich jeder Punkt durch drei Koordinaten eindeutig darstellen, so haben wir es in der Schule gelernt. Eine solche lokale Karte beschreibt unsere Umgebung, nicht aber das gesamte Universum: Verschiedene Räume sind denkbar!

Dieses Phänomen ist zweidimensional leichter fasslich. Beginnen wir also mit Flächen! Die Erdoberfläche um uns herum ist zweidimensional, lokal homöomorph zur Ebene $\mathbb{R}^2$. Ist die Erde deshalb eine Scheibe? Nein, sehr verschiedene Flächen sind denkbar! Um Ihre Phantasie anzuregen, habe ich oben vier konkrete Beispiele explizit ausgeführt.

Unser Ziel ist die Klassifikation aller kompakten Flächen!

Was bedeutet Homöomorphie?



Definition A1A: Homöomorphismus

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmengen (später: topologische Räume).

Ein **Homöomorphismuspaar** $(f, g) : X \cong Y$ besteht aus zwei stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

In diesem Fall nennen wir X und Y **homöomorph**, geschrieben $X \cong Y$.

⚠ Die Kurzschreibweise $X \cong Y$ ist allzu bequem und daher gefährlich. Die explizite Ausführung $(f, g) : X \cong Y$ ist präzise und informativ!

Aufgabe: Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation. **Nachrechnen:**
Reflexivität: $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : X \cong X$
Symmetrie: $(f, g) : X \cong Y \;\Rightarrow\; (g, f) : Y \cong X$
Transitivität: $(f, f') : X \cong Y \wedge (g, g') : Y \cong Z \Rightarrow (g \circ f, f' \circ g') : X \cong Z$

Was bedeutet Homöomorphie?

Beispiel A1B: reelle Gerade und offenes Intervall

Es gilt $\mathbb{R} \cong]-1,1[$, genauer $(f,g) : \mathbb{R} \cong]-1,1[$ vermöge der Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to]-1,1[: x \mapsto x/(1+|x|),$$
$$g :]-1,1[\to \mathbb{R} : y \mapsto y/(1-|y|).$$

Dieselben Formeln liefern einen Homöomorphismus $(f,g) : \mathbb{Q} \cong]-1,1[_{\mathbb{Q}}$.

Beweis: Nachrechnen! (1) Die Abbildungen f und g sind wohldefiniert:
(1a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x)| = |x|/(1+|x|) < 1$, also $f(x) \in]-1,1[$.
(1b) Für jedes $y \in]-1,1[$ erfüllt der Nenner die Bedingung $1-|y| > 0$.
(2) Beide Abbildungen sind stetig, da Komposition stetiger Abbildungen.
(3) Schließlich sind sie zueinander invers, wie wir geduldig nachrechnen:

$$g(f(x)) \overset{\text{Def}}{=} \frac{x/(1+|x|)}{1-|x/(1+|x|)|} \overset{\mathbb{R}}{=} \frac{x}{1+|x|-|x|} \overset{\mathbb{R}}{=} x, \quad \text{also } g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

$$f(g(y)) \overset{\text{Def}}{=} \frac{y/(1-|y|)}{1+|y/(1-|y|)|} \overset{\mathbb{R}}{=} \frac{y}{1-|y|+|y|} \overset{\mathbb{R}}{=} y, \quad \text{also } f \circ g = \mathrm{id}_{]-1,1[}$$

Bälle und Sphären

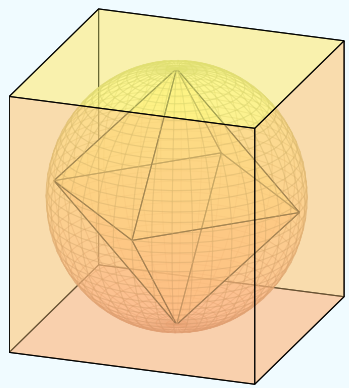
Definition A1c: Bälle und Sphären

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ nutzen wir je nach Anwendung und Bedarf

$$\begin{aligned}
&\text{die Taxinorm} && |x|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|, \\
&\text{die Maximumsnorm} && |x|_\infty := \max\{\,|x_1|, \dots, |x_n|\,\}, \\
&\text{die euklidische Norm} && |x|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}\,.
\end{aligned}$$

Letztere definiert den **Einheitsball** und die **Einheitssphäre**:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^n &:= \{\, x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 \leq 1 \,\} \\
\mathbb{B}^n &:= \{\, x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 < 1 \,\} \\
\mathbb{S}^{n-1} &:= \{\, x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 = 1 \,\}
\end{aligned}$$

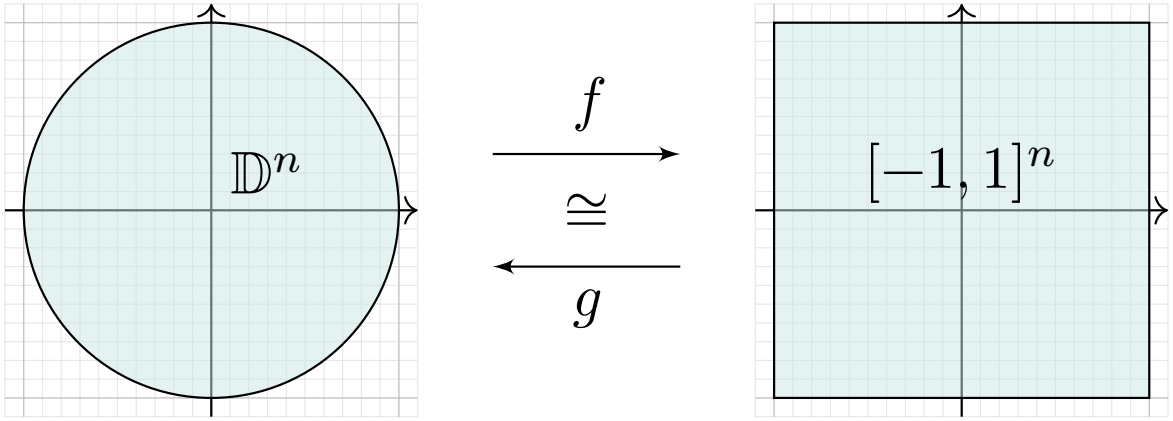


Ebenso erhalten wir **Würfel** $|x|_\infty \leq 1$ und **Kreuzpolytop** $|x|_1 \leq 1$.

Beispiel / Übung A1d: euklidischer Raum und offene Bälle

Es gilt $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{B}^n$ und $\mathbb{R}^n \cong \,]-1,1[^n$ dank der Homöomorphismen A1b.

Sind Ball und Würfel homöomorph?



Beispiel / Übung A1E: abgeschlossener Ball und Würfel

Es gilt $\mathbb{D}^n \cong [-1,1]^n$ dank $f : \mathbb{D}^n \to [-1,1]^n : x \mapsto x/(1-|x|_2+|x|_\infty)$ und $g : [-1,1]^n \to \mathbb{D}^n : y \mapsto y/(1-|y|_\infty+|y|_2)$. Rechnen Sie es nach!

Definition A1F: topologische Invarianten

Eine Eigenschaft geometrischer Objekte heißt **topologisch invariant**, wenn sie unter Homöomorphismen erhalten bleibt.

Beispiele: Beschränktheit oder Abgeschlossenheit im Raum $\mathbb{R}^n$ sind *nicht* topologisch invariant, siehe $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{B}^n$. Hingegen sind Kompaktheit (F1J) und Zusammenhang (G1E) invariant, somit $\mathbb{D}^n \ncong \mathbb{B}^n$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ncong \mathbb{R}$.

Wegzusammenhang ist eine topologische Invariante.

Definition A1G: Wegzusammenhang

Ein Raum $X \neq \emptyset$ heißt **wegzusammenhängend**, kurz wegzshgd, wenn sich je zwei Punkte a, b in X durch einen Weg verbinden lassen, das heißt es gibt eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

Beispiel / Übung A1H: Anwendungen des Wegzusammenhangs

(1) Wegzusammenhang ist topologisch invariant. Stärker:

(2) Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ stetig und surjektiv. Ist X wegzshgd, so auch Y.

(3) Der Raum $\mathbb{R} \setminus \{z\}$ ist nicht wegzshgd, dank Zwischenwertsatz.

(4) Für $n \geq 2$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ wegzusammenhängend.

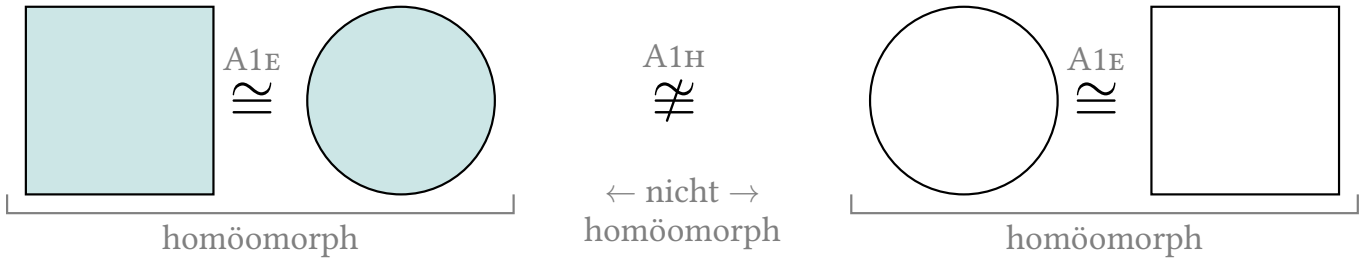
(5) Für $n \geq 2$ gilt $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n$: Jeder Punkt trennt $\mathbb{R}$, aber keiner trennt $\mathbb{R}^n$.

(6) Ebenso gilt $[0,1] \not\cong [0,1]^2$ und allgemein $[0,1] \not\cong [0,1]^n$ für alle $n \geq 2$.

(7) Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ sind $]a,b[$, $[a,b[$, $[a,b]$ paarweise nicht homöomorph.

(8) Es gilt $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{D}^2$: Je zwei Punkte $\{a \neq b\}$ trennen $\mathbb{S}^1$, aber niemals $\mathbb{D}^2$.

Werkzeuge: Homöomorphismen und Invarianten



☺ Das ist eine erste Klassifikation, wir haben diese vier einfachen Räume in Homöomorphieklassen eingeteilt; später Kurven A4A und Flächen A4J.

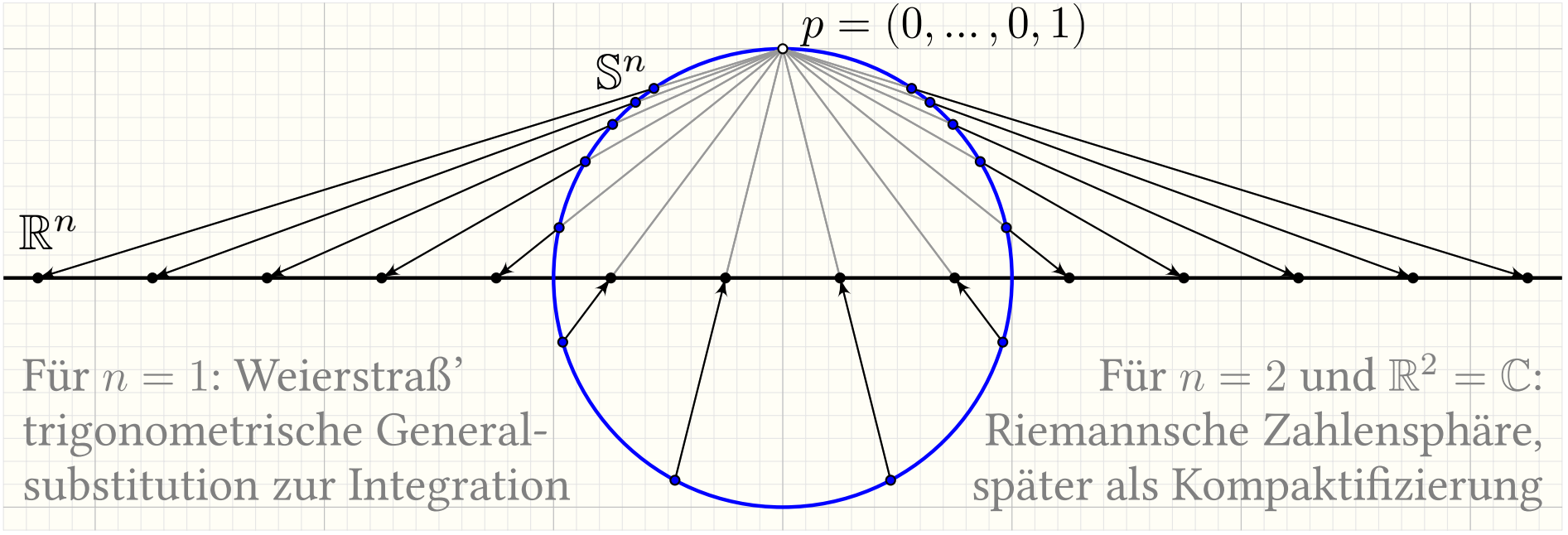
? Wie zeigen wir, dass zwei Räume homöomorph sind? Der direkte und meist beste Weg ist, einen expliziten **Homöomorphismus** anzugeben!

Ein solches Argument ist **konstruktiv**: *Just do it!* (Beispiel A1E)
Dies haben wir oben für Quadrat und Kreisscheibe explizit ausgeführt, ebenso für Quadratrand und Kreislinie. Das zeigt „≅“ für diese Beispiele.

? Wie zeigen wir hingegen, dass zwei Räume nicht homöomorph sind? Aufgeben genügt nicht, wir müssen ein **Hindernis** benennen!

Ein solches Argument ist **obstruktiv**: *No one can!* (Beispiel A1H)
Dies haben wir für Kreisscheibe und Kreisrand explizit ausgeführt.
Das zeigt „≇“ zwischen den linken und rechten Beispielen.

Stereographische Projektion: ein Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$



Beispiel / Übung A1L: stereographische Projektion

Es gilt $(f, g) : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$, explizit für $p = (0, \dots, 0, 1)$ vermöge

$$f : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n),$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{p\} : (y_1, \dots, y_n) \mapsto \frac{1}{|y|_2^2 + 1}(2y_1, \dots, 2y_n, |y|_2^2 - 1).$$

Die stereographische Projektion

Diese Übung hat zwei Varianten / Schwierigkeitsstufen / Härtegrade:

(1) *Ohne die Angabe von Formeln* müssen Sie selbst kreativ werden, um geeignete Funktionen (f, g) zu finden. Hier gelingt das noch relativ leicht anhand der Skizze mit dem Strahlensatz für f und der Mitternachtsformel zur Lösung quadratischer Gleichungen für g. Versuchen Sie es!

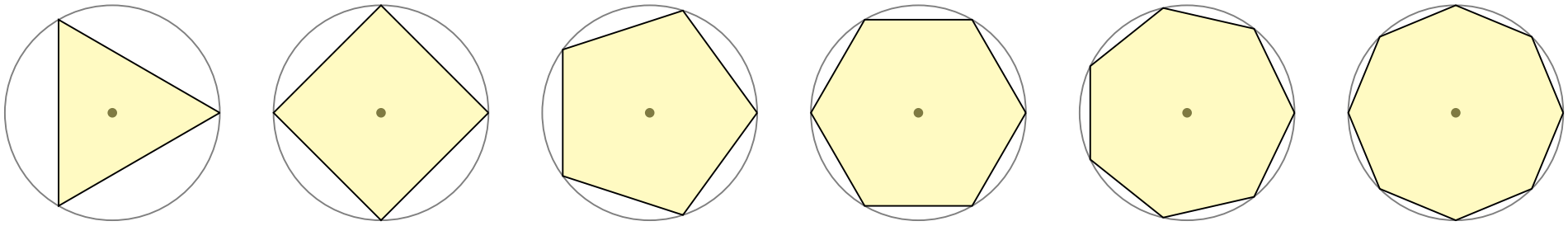
(2) *Mit Angabe der Formeln:* Stehen die Formeln erst einmal vor Ihnen, so wie hier, dann genügt sorgfältiges Nachrechnen. Versuchen Sie es!

Folgerung: Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit. Wiederholen Sie hierzu noch einmal die zugehörige Definition A0A.

Die stereographische Projektion scheint zunächst recht erstaunlich, mit Übung und Gewöhnung jedoch wird sie einfach und natürlich. Sie ist eine Spezialfall der Inversion an einer Sphäre (A1M).

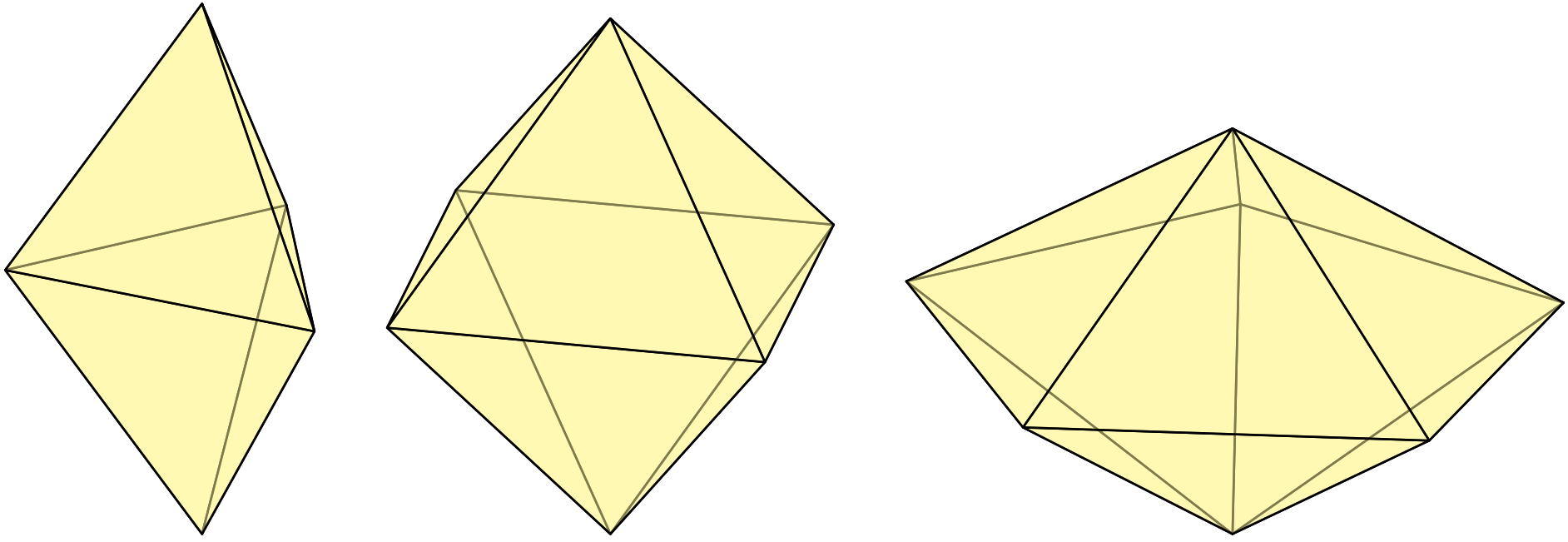
Im Skript finden Sie weitere Beispiele zu Homöomorphismen, manche praktisch wie „Winkel geradebiegen“, andere unglaublich wie $\mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}$. Erweitern Sie Ihr Repertoire und Ihre technische Fingerfertigkeit!

Beispiel: reguläre Vielecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$

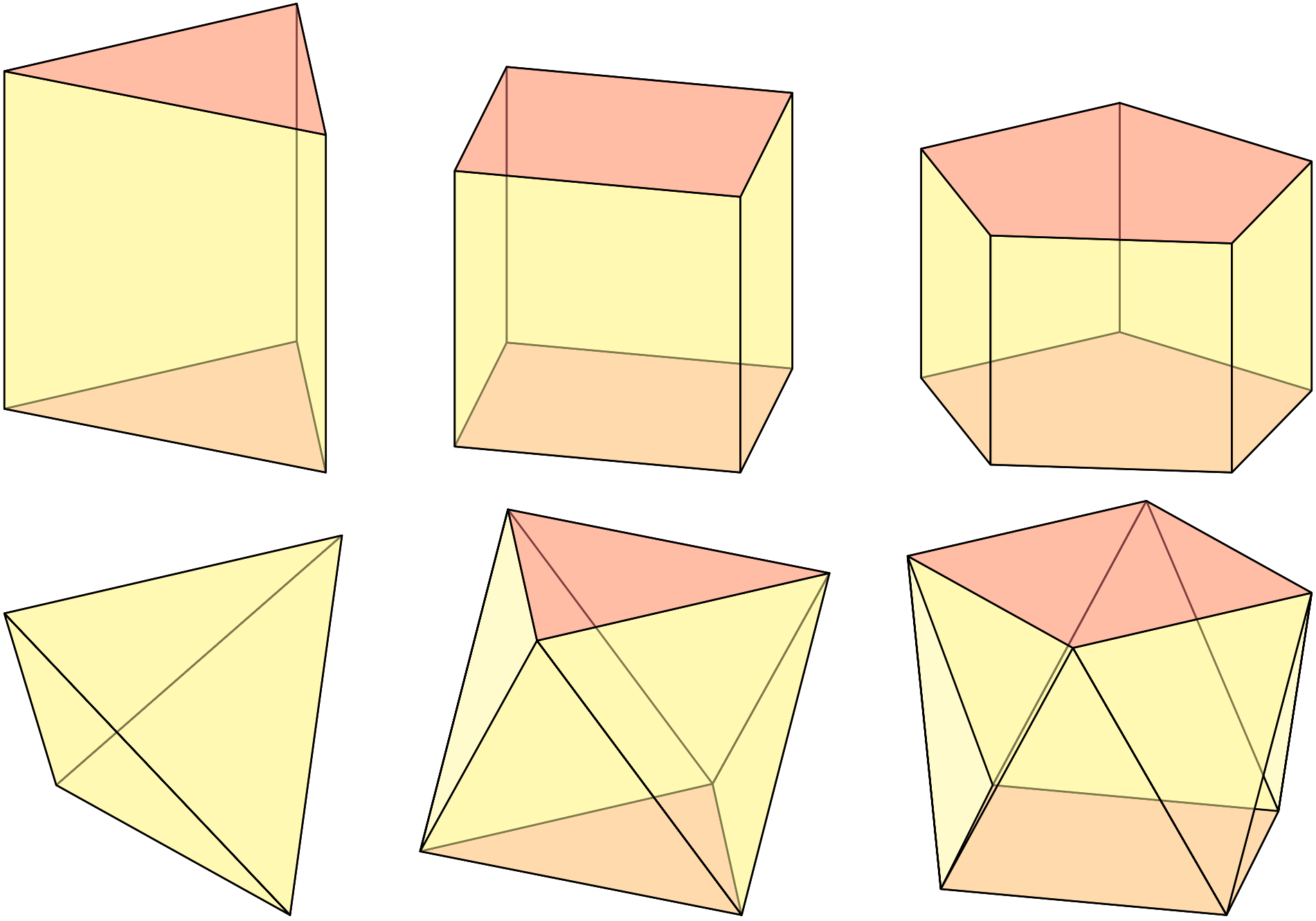


Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Die Eckpunkte $v_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n} = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n))$ mit $k \in \mathbb{Z}$ haben als konvexe Hülle $P_n = [v_1, \ldots, v_n]$ das **reguläre n–Eck**.

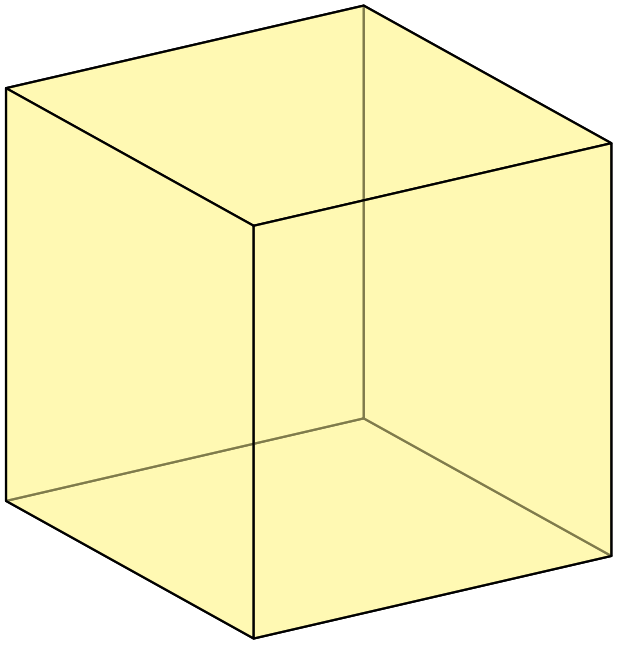
Im Raum $\mathbb{R}^3$ bilden wir darüber den Doppelkegel von passender Höhe:

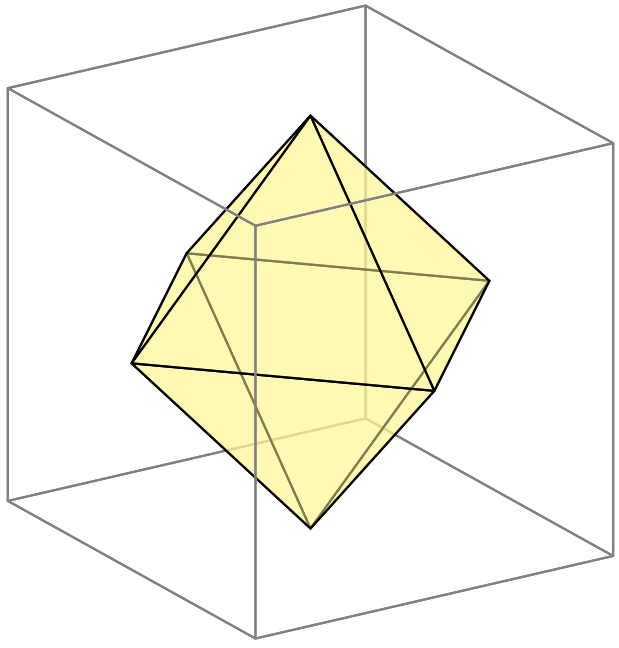


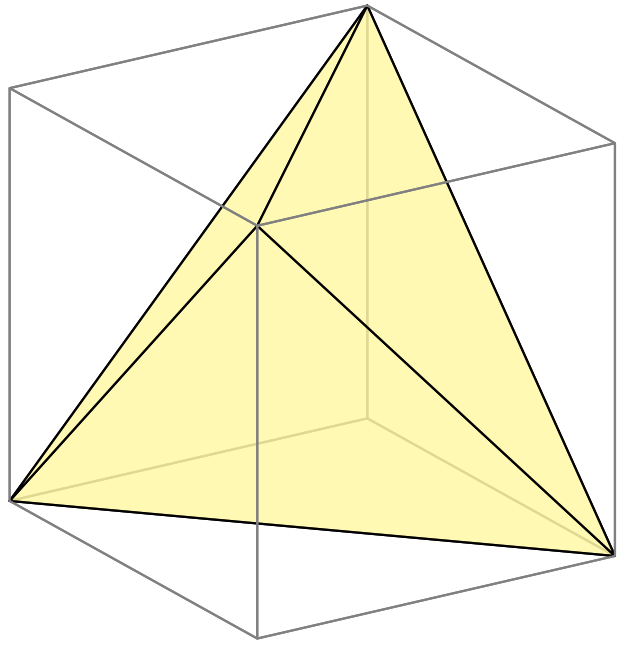
Prisma und Antiprisma über einem regulären n–Eck

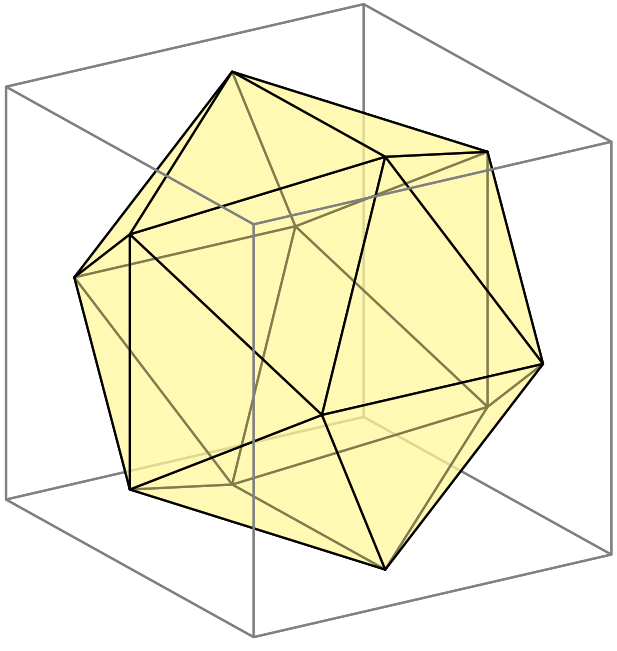


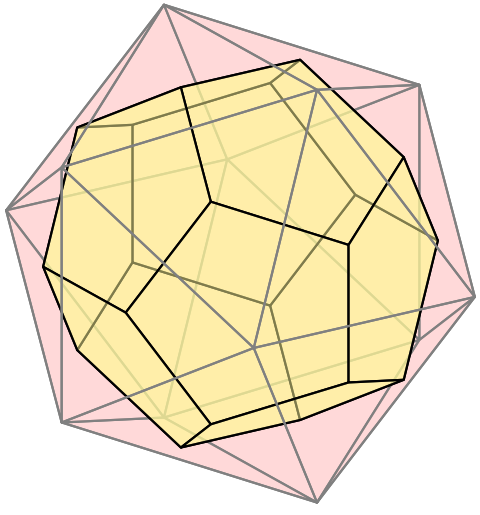
Die fünf platonischen Körper im $\mathbb{R}^3$

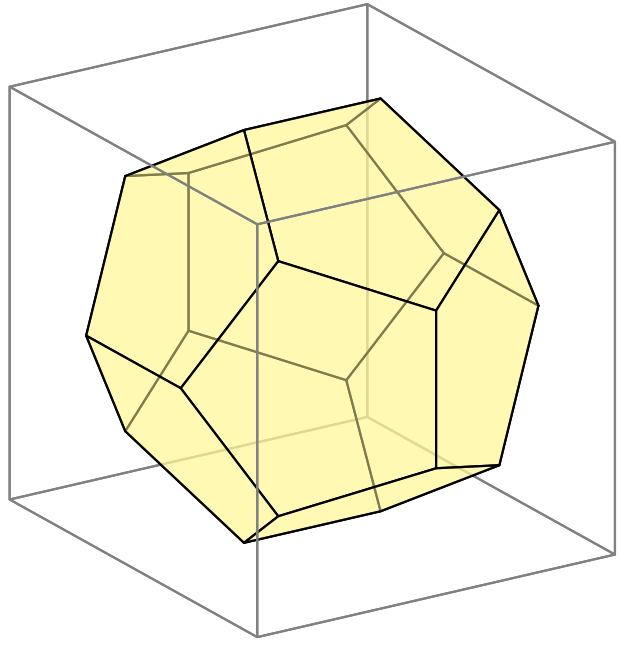












Euklids Klassifikation regulärer 3–Polytope

Was ist das Besondere an diesen fünf wunderschönen Beispielen? Sie sind offensichtlich besonders symmetrisch. Was heißt das genau? Gibt es weitere Beispiele? Oder kennen wir bereits alle Möglichkeiten? Die Antwort ist der Höhepunkt von Euklids epochalem Werk *Elemente*:

Satz A2J: Klassifikation regulärer 3–Polytope, Euklid 3. Jh. v.u.Z.

(1) Symmetrie: Jeder dieser fünf platonischen Körper $P \subset \mathbb{R}^3$ ist regulär, d.h. die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$ operiert transitiv auf den Fahnen.

Ausführlich: Jede Fahne $(E < K < F < P)$, bestehend aus einer Ecke E in einer Kante K in einer Facette F des Polytops P, kann durch eine Isometrie des Raumes $\mathbb{R}^3$ in jede andere Fahne überführt werden.

(2) Diese Liste ist vollständig: Jedes reguläre 3–Polytop $Q \subset \mathbb{R}^3$ ist ähnlich zu genau einem unserer fünf platonischen Körper.

Ausführlich: Von Q zum Modell P führt eine Ähnlichkeitsabbildung $h : (\mathbb{R}^3, Q) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^3, P) : x \mapsto \lambda A x + v$ mit einem Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und einer Verschiebung $v \in \mathbb{R}^3$.

Was ist ein Polytop?

Definition A2B: Polytop

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen $a, b \in V$ ist

$$[a,b] := \{\, (1-t)a + tb \,|\, t \in \mathbb{R},\ \ 0 \le t \le 1 \,\}.$$

Wir nennen $X \subseteq V$ **konvex**, falls für $a, b \in X$ stets $[a,b] \subseteq X$ gilt.
(Das impliziert Wegzusammenhang.) Zum Beispiel ist der gesamte Raum V konvex, ebenso jeder Halbraum und jeder affine Teilraum in V, auch $\emptyset$.

Ist $X_i \subseteq V$ konvex für jedes $i \in I$, so auch der Durchschnitt $X = \bigcap_{i\in I} X_i$.
Das von $v_0, \dots, v_\ell \in V$ aufgespannte **Polytop** ist ihre konvexe Hülle:

$$\begin{aligned} P = [v_0, \dots, v_\ell] &:= \bigcap \{\, X \,|\, X \subseteq V \text{ konvex mit } \{v_0, \dots, v_\ell\} \subseteq X \,\} \\ &= \{\, t_0 v_0 + \dots + t_\ell v_\ell \,|\, t_0, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}_{\ge 0},\ t_0 + \dots + t_\ell = 1 \,\} \end{aligned}$$

Die positiven Konvexkombinationen bilden das **(geometrische) Innere**:

$$\operatorname{Int}[v_0, \dots, v_\ell] := \{\, t_0 v_0 + \dots + t_\ell v_\ell \,|\, t_0, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}_{>0},\ t_0 + \dots + t_\ell = 1 \,\}$$

Was ist ein Polytop?

Definition A2B: Polytop

Die verbleibenden Punkte bilden den **(geometrischen) Rand**:

$$\partial[v_0, v_1, \dots, v_\ell] := [v_0, v_1, \dots, v_\ell] \setminus \operatorname{Int}[v_0, v_1, \dots, v_\ell]$$

Der von $P \subseteq V$ aufgespannte **affine Teilraum** ist die affine Hülle:

$$\begin{aligned} A = \operatorname{aff}(P) &:= \bigcap \{ X \,|\, X \subseteq V \text{ affiner Teilraum mit } P \subseteq X \} \\ &= \{ s_0 x_0 + \dots + s_k x_k \,|\, x_0, \dots, x_k \in P,\ s_0, \dots, s_k \in \mathbb{R},\ s_0 + \dots + s_k = 1 \} \\ &= \{ t_0 v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_\ell v_\ell \,|\, t_0, t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R},\ t_0 + t_1 + \dots + t_\ell = 1 \} \\ &= \{ v_0 + t_1(v_1 - v_0) + \dots + t_\ell(v_\ell - v_0) \,|\, t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R} \} \\ &= v_0 + U \ \text{ mit } \ U = \langle v_1 - v_0, \dots, v_\ell - v_0 \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Wir nennen $\dim P := \dim A := \dim U$ die **Dimension** des Polytops P.
Damit gilt $\dim(P \times Q) = \dim P + \dim Q$, wobei wir $\dim \emptyset := -\infty$ setzen.

Was besagt Eulers Polyederformel?

	$f_0 =$ ♯Ecken	$f_1 =$ ♯Kanten	$f_2 =$ ♯Facetten	$\chi = f_0 - f_1 + f_2$
Hexaeder	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Tetraeder	4	6	4	2
Ikosaeder	12	30	20	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Doppelkegel	$q+2$	$3q$	$2q$	2
Prisma	$2q$	$3q$	$q+2$	2
Antiprisma	$2q$	$4q$	$2q+2$	2

Satz A3A: Euler 1750 (für $n = 3$), Poincaré 1895

Für jedes n–dimensionale Polytop $P \neq \emptyset$ gilt:

$$\sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(P) = 1$$

Hierbei ist $f_d(P) = \sharp\{ Q \leq P \,|\, \dim Q = d \}$ die Anzahl der d–dim. Seiten.

Warum ist Eulers Polyederformel so phantastisch?

Es ist verwunderlich, dass eine so einfache und grundlegende Gleichung erst so spät entdeckt wurde. Ein *Beweis* ist selbst in Dimension 3 nicht leicht zu finden, doch die *Vermutung* drängt sich anhand zahlreicher Beispiele geradezu auf. David Richeson schreibt hierzu in seinem Buch *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology* (2008):

> *They all missed it. The ancient Greeks – mathematical luminaries such as Pythagoras, Theaetetus, Plato, Euclid, and Archimedes, who where infatuated with polyhedra – missed it. Johannes Kepler, the great astronomer, so in awe of the beauty of polyhedra that he based an early model of the solar system on them, missed it. In his investigation of polyhedra the mathematician and philosopher René Descartes was but a few logical steps away from discovering it, yet he too missed it. These mathematicians, and so many others, missed a relationship that is so simple that it can be explained to any schoolchild, yet is so fundamental that it is part of the fabric of modern mathematics. The great Swiss mathematician Leonhard Euler did not miss it. On November 14, 1750, in a letter to his friend, the number theorist Christian Goldbach, Euler wrote, "It astonishes me that these general properties of stereometry have not, as far as I know, been noticed by anyone else."*

Polytopale Komplexe: allgemein und einfach

Definition A3B: endlicher polytopaler Komplex

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Eine Familie $\mathscr{K} = \{P_1, \dots, P_m\}$ von (zunächst endlich vielen) Polytopen $P_i \subseteq V$ ist ein **polytopaler Komplex**, falls gilt:

0. Das leere Polytop gehört zu $\mathscr{K}$, kurz $\emptyset \in \mathscr{K}$. (langweilig, aber nützlich)
1. Je zwei Polytope $P \neq Q$ in $\mathscr{K}$ sind innerlich disjunkt, $\operatorname{Int} P \cap \operatorname{Int} Q = \emptyset$.
2. Für jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ gilt $\partial P = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ mit $Q_1, \dots, Q_k \in \mathscr{K}$.

Die **Dimension** und die **Skelette** von $\mathscr{K}$ definieren wir durch

$$\dim \mathscr{K} := n = \sup\{\dim P \,|\, P \in \mathscr{K}\}, \quad \mathscr{K}_{\leq d} := \{P \in \mathscr{K} \,|\, \dim P \leq d\},$$
$$f_d(\mathscr{K}) := \sharp \mathscr{K}_d \quad \text{wobei} \quad \mathscr{K}_d := \{P \in \mathscr{K} \,|\, \dim P = d\}.$$

Die **Euler–Charakteristik** des Komplexes $\mathscr{K}$ ist die Wechselsumme

$$\chi(\mathscr{K}) := \sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(\mathscr{K}) = \sum_{\emptyset \neq P \in \mathscr{K}} (-1)^{\dim P}.$$

Der Komplex $\mathscr{K}$ definiert sein **Polyeder** als Vereinigung aller Polytope:

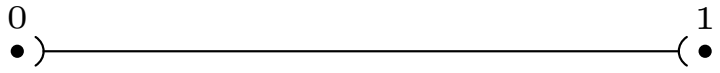
$$|\mathscr{K}| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup_{P \in \mathscr{K}} P = \bigsqcup_{P \in \mathscr{K}} \operatorname{Int} P \subseteq V$$

Polytopale Komplexe: erste Beispiele

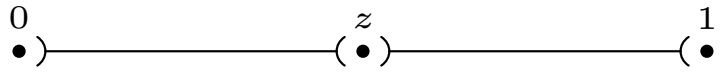
Der Komplex $\mathscr{K}$ in V beschreibt genau den Aufbau des Polyeders $K \subseteq V$.

$$\{\mathscr{K} \text{ Komplex in } V\} \xrightarrow[\mathscr{K} \mapsto K = \bigcup \mathscr{K}]{|\text{-}|} \twoheadrightarrow \{K \subseteq V \text{ Polyeder}\}$$

Beispiel: Das Intervall $K = [0,1]$ können wir auf viele Arten zerlegen:



$$\mathscr{K} = \{[0,1], \{0\}, \{1\}, \emptyset\}$$
$$\chi(\mathscr{K}) = 2 - 1 = 1$$



$$\mathscr{K}' = \{[0,z], [z,1], \{0\}, \{z\}, \{1\}, \emptyset\}$$
$$\chi(\mathscr{K}') = 3 - 2 = 1$$

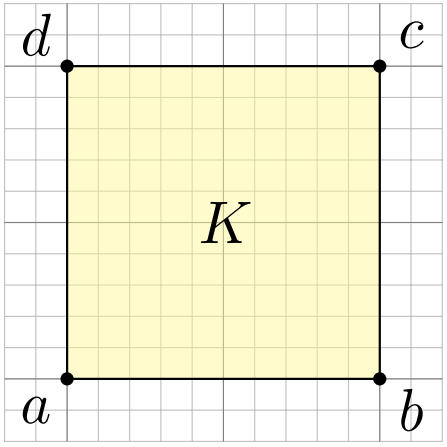
Die Zuordnung $|\text{-}| : \mathscr{K} \mapsto K$ ist surjektiv, nicht injektiv! Sie vergisst den Aufbau $\mathscr{K}$ und behält als Ergebnis nur die Vereinigungsmenge $K = \bigcup \mathscr{K}$.

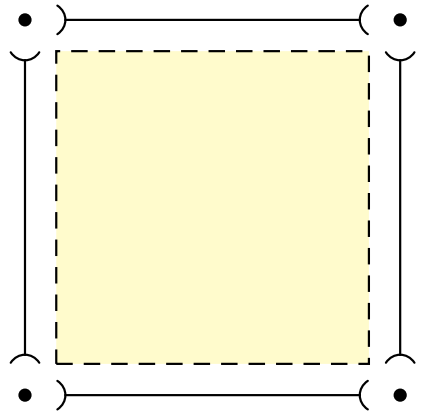
Beispiel: Für jedes Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Familie $\mathscr{K} = \langle P \rangle := \{Q \leq P\}$ aller Seiten ein polytopaler Komplex zu dem Polyeder $|\mathscr{K}| = P$ (A2E). (Hierzu müssen wir den Begriff der *Seite* ausführen, siehe Skript.)

Auch die Familie $\partial\mathscr{K} = \{Q < P\}$ aller echten Seiten ist ein polytopaler Komplex; das zugehörige Polyeder ist demnach der Rand $|\partial\mathscr{K}| = \partial P$. Unsere Beispiele mit $\dim P = 3$ erfüllen $\chi(\mathscr{K}) = 1$ und $\chi(\partial\mathscr{K}) = 2$.

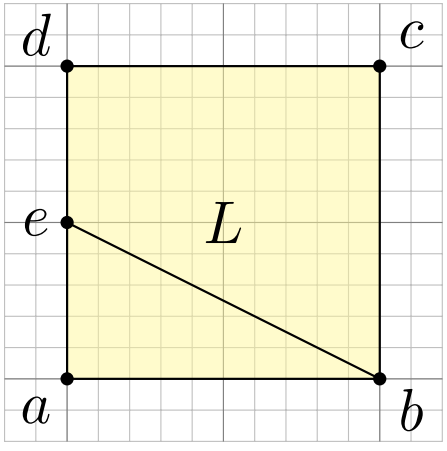
Polytopale Komplexe: erste Beispiele

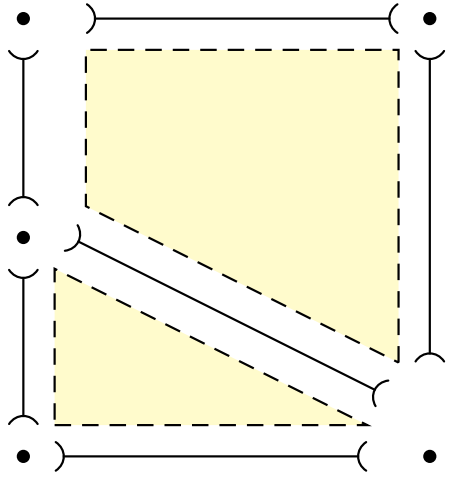
Beispiel: Das Quadrat $K = [-1,1]^2$ können wir auf viele Arten zerlegen:





$$\mathscr{K} = \langle\, [a,b,c,d] \,\rangle$$
$$= \{\, \emptyset,\ [a],[b],[c],[d],$$
$$[a,b],[b,c],[c,d],[d,a],$$
$$[a,b,c,d] \,\}$$
$$\chi(\mathscr{K}) = 4 - 4 + 1 = 1$$





$$\mathscr{L} = \langle\, [a,b,e],[b,c,d,e] \,\rangle$$
$$= \{\, \emptyset,\ [a],[b],[c],[d],[e],$$
$$[a,b],[b,c],[c,d],[d,e],[e,a],$$
$$[e,b],[a,b,e],[b,c,d,e] \,\}$$
$$\chi(\mathscr{L}) = 5 - 6 + 2 = 1$$

Satz A3c: Poincaré 1895 (verallgemeinert Eulers Polyederformel)

Für jeden Komplex $\mathscr{K}$ mit konvexem Polyeder $|\mathscr{K}| \neq \emptyset$ gilt $\chi(\mathscr{K}) = 1$.

Polytopale Komplexe: erste Beispiele

Dieser wunderschöne Satz ist einfach, glasklar und elegant,
aber keineswegs leicht zu beweisen. Ganz im Gegenteil!

Mit vielen Beweisen in der Literatur bin ich nicht recht glücklich:
Sie beweisen entweder nur einen eingeschränkten Spezialfall
oder sind technisch sehr aufwändig — oder schlicht falsch.
(Hier gilt tatsächlich: Geht es zu leicht, so ist es falsch.)

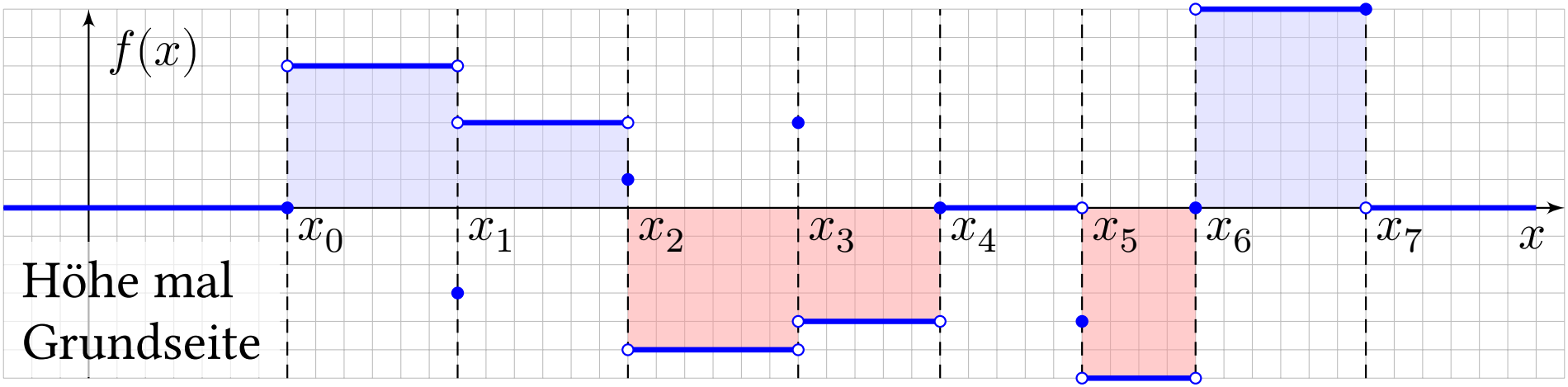
Der beste, aber längste Weg führt über die Algebraische Topologie:
Die Homologietheorie ist eine wunderbare und produktive Maschine!
Sie ist zwar aufwändig aufzubauen, liefert dann aber am Fließband diesen Satz und dazu noch viele weitere quasi gratis.

Der folgende schöne Beweis stammt von Hugo Hadwiger (1908–1981), *Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie*, J. Reine Angew. Math. 194 (1955), 101–110. Die Argumente sind vollkommen elementar doch phantastisch raffiniert. Elementar bedeutet nicht unbedingt einfach!

Bereits der Satz ist wunderschön, der Beweis ist sogar noch schöner!
Genießen Sie dieses Kleinod mathematischen Scharfsinns.

Eindimensionale Treppenfunktionen und ihr Integral

Für Treppenfunktionen bestimmen wir das Integral / den Flächeninhalt:



Jede **Treppenfunktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stückweise konstant: Zu f existiert eine Unterteilung $P = \{ x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell \} \subseteq \mathbb{R}$ und $y_1, \ldots, y_\ell \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$ sowie $f(x) = 0$ für $x < x_0$ und für $x > x_k$.

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} y_k \; \mathbf{1}_{]x_{k-1},x_k[} + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k) \; \mathbf{1}_{\{x_k\}}$$

Das **Längen-Maß** $\lambda(\emptyset) = \lambda(\{a\}) = 0$ und $\lambda(]a,b[) = b - a$ ist additiv:

$$\lambda(]a,b[) + \lambda(\{b\}) + \lambda(]b,c[) = \lambda(]a,c[) \quad \text{für alle } a < b < c \text{ in } \mathbb{R}$$

Das **Euler–Maß** $\mu(\{a\}) = +1$ und $\mu(]a,b[) = -1$ erfüllt dies ebenfalls!
Wir nennen solch eine Abbildung ein **additives Intervallmaß**.

Eindimensionale Treppenfunktionen und ihr Integral

Satz A3D: Existenz und Eindeutigkeit des eindim. Integrals

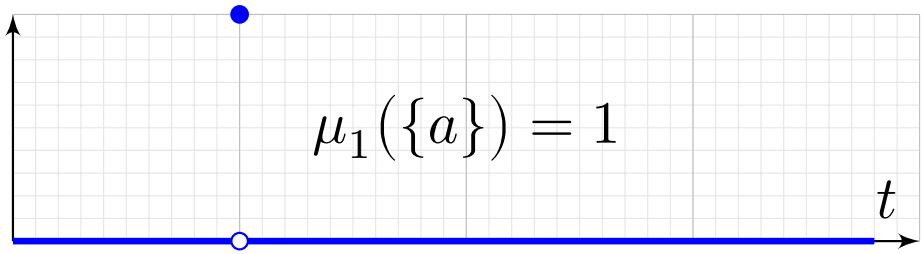
Die Treppenfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\Lambda_1 = T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, erzeugt von den Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{a\}}$ und $\mathbf{1}_{]a,b[}$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$.

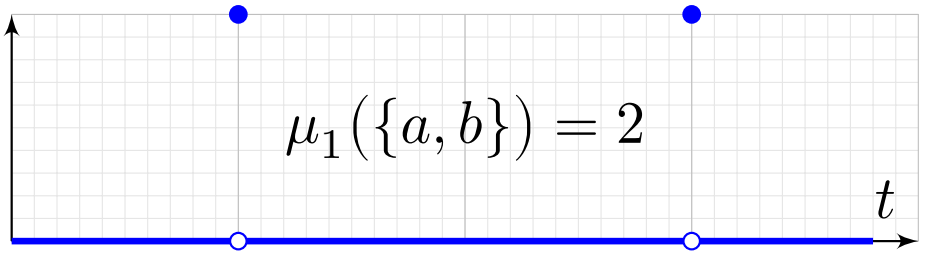
Zu jedem additiven Intervallmaß λ existiert genau eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\lambda_1 : \Lambda_1 \to \mathbb{R}$ mit $\lambda_1(\mathbf{1}_{\{a\}}) = \lambda(\{a\})$ und $\lambda_1(\mathbf{1}_{]a,b[}) = \lambda(]a, b[)$.

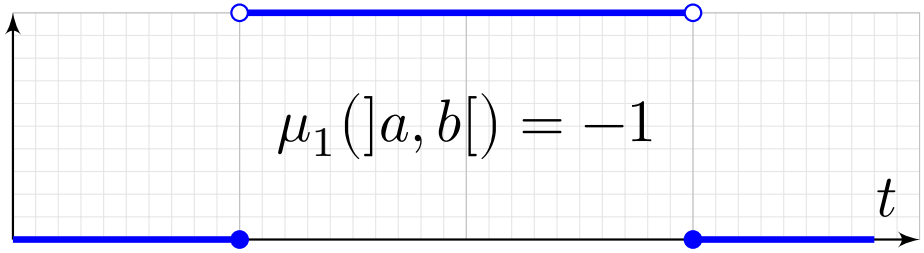
Beweis: (1) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise konstant bezüglich P bzw. Q, so auch bezüglich $P \cup Q$. Letzteres gilt dann auch für $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
(2) Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{a\}}$ und $\mathbf{1}_{]a,b[}$ erzeugen Λ_1, wie oben gesehen.
(3) Eindeutigkeit: λ_1 ist auf diesem Erzeugendensystem festgelegt.
(4) Existenz: Wir konstruieren das **Integral** von f bezüglich P vermöge der Formel $\lambda_1(f, P) := \sum_{k=1}^{\ell} y_k \, \lambda(]x_{k-1}, x_k[) + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k) \, \lambda(\{x_k\})$.
(5) Verfeinern $P' = P \cup \{t\}$ ergibt $\lambda_1(f, P') = \lambda_1(f, P)$ dank Additivität.
(6) Zu zwei Unterteilungen P' und P'' ist $P = P' \cup P''$ eine gemeinsame Verfeinerung. Dank (5) folgt $\lambda_1(f, P') = \lambda_1(f, P) = \lambda_1(f, P'')$. Unser Integral $\lambda_1(f) := \lambda_1(f, P)$ ist unabhängig von P, also wohldefiniert. QED

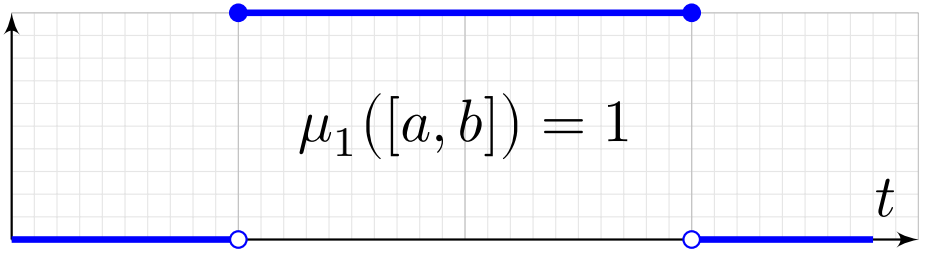
Das Euler–Maß: eindimensionale Beispiele

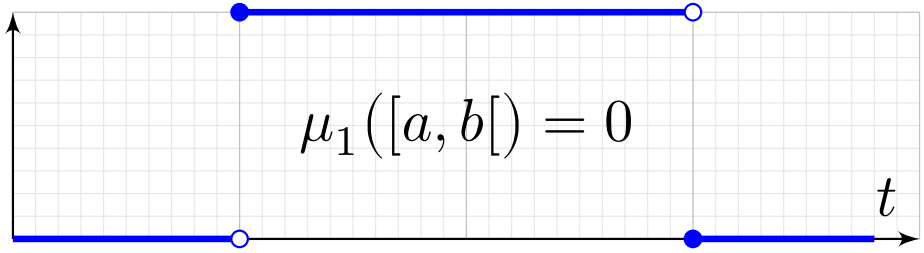
Beispiel: Jedes Intervall $X \subseteq \mathbb{R}$ ist Euler–messbar: Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_X : \mathbb{R} \to \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion, und wir nutzen Satz A3D.

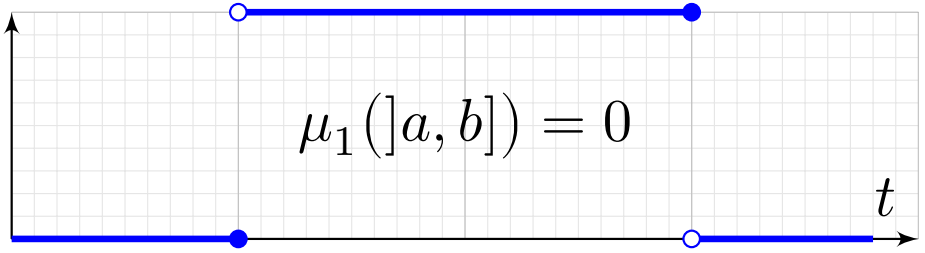








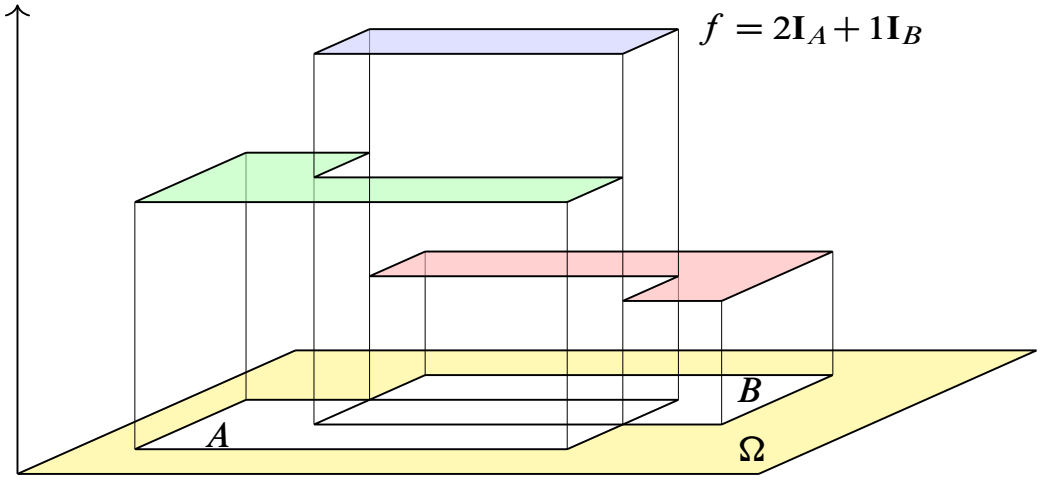


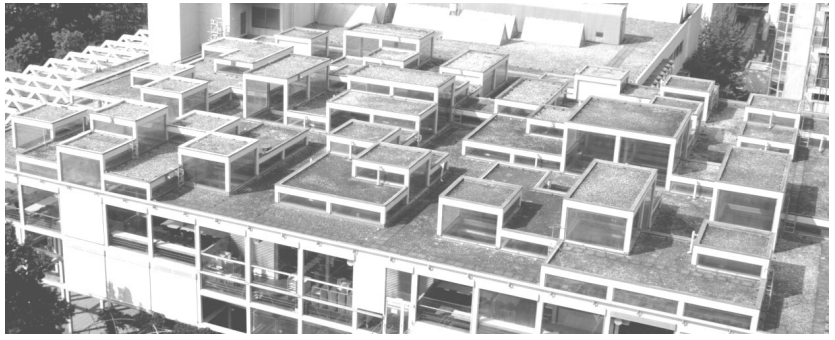


Eindimensionale Treppenfunktionen und ihr Integral kennen Sie bereits vom Anfang der Analysis, als ersten Schritt des Riemann–Integrals. Alles gilt für das Längen-Maß λ ebenso wie für das Euler–Maß μ!

Mehrdimensionale Funktionen und iterierte Integrale

Wir können dies nun auf mehrdimensionale Funktionen fortsetzen: Satz A3E konstruiert zu μ das Integral, das System $\mathscr{M}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ der **Euler–messbaren** Mengen und hierauf das **Euler–Maß** $\mu_n : \mathscr{M}_n \to \mathbb{R}$.





Die Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen aus Sicht der Mathematik

In jeder Dimension $n = 1, 2, 3, \ldots$ definieren wir rekursiv das System $\Lambda_n \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der λ–integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und das Integral $\lambda_n : \Lambda_n \to \mathbb{R}$ nach dem Vorbild iterierter Integrale à la Fubini:

$$\lambda_n(f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Mehrdimensionale Funktionen und iterierte Integrale

Satz A3E: Existenz und Eindeutigkeit des mehrdim. Integrals

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennen wir **λ–integrierbar**, falls $f \in \Lambda_1$ gilt.
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, ist **λ–integrierbar**, kurz $f \in \Lambda_n$, wenn zu jedem $t \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_t : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x,t)$ integrierbar ist, $f_t \in \Lambda_{n-1}$, ebenso die Integralfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \lambda_{n-1}(f_t)$, $F \in \Lambda_1$.

(1) Die so definierte Menge $\Lambda_n \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum und das **Integral** $\lambda_n : \Lambda_n \to \mathbb{R} : f \mapsto \lambda_n(f) := \lambda_1(F)$ ist $\mathbb{R}$–linear.
Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nennen wir **λ–messbar**, falls $\mathbf{1}_X \in \Lambda_n$ gilt; in diesem Falle definieren wir ihr **Maß** durch $\lambda_n(X) := \lambda_n(\mathbf{1}_X)$.

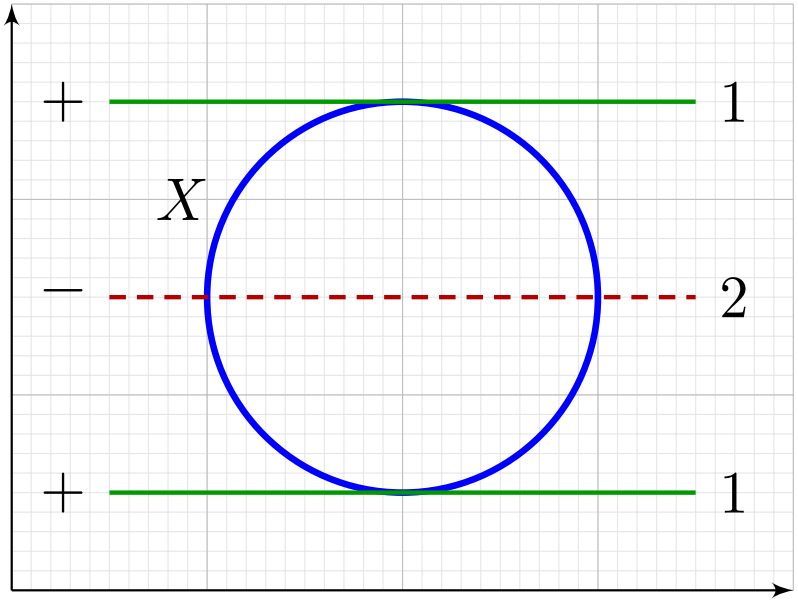
(2) Additivität: Die leere Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ ist messbar, mit $\lambda_n(\emptyset) = 0$.
Sind drei der Mengen X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$ messbar, so auch die vierte:
Es gilt $\mathbf{1}_X + \mathbf{1}_Y = \mathbf{1}_{X \cup Y} + \mathbf{1}_{X \cap Y}$, dank Linearität von λ_n folgt daraus

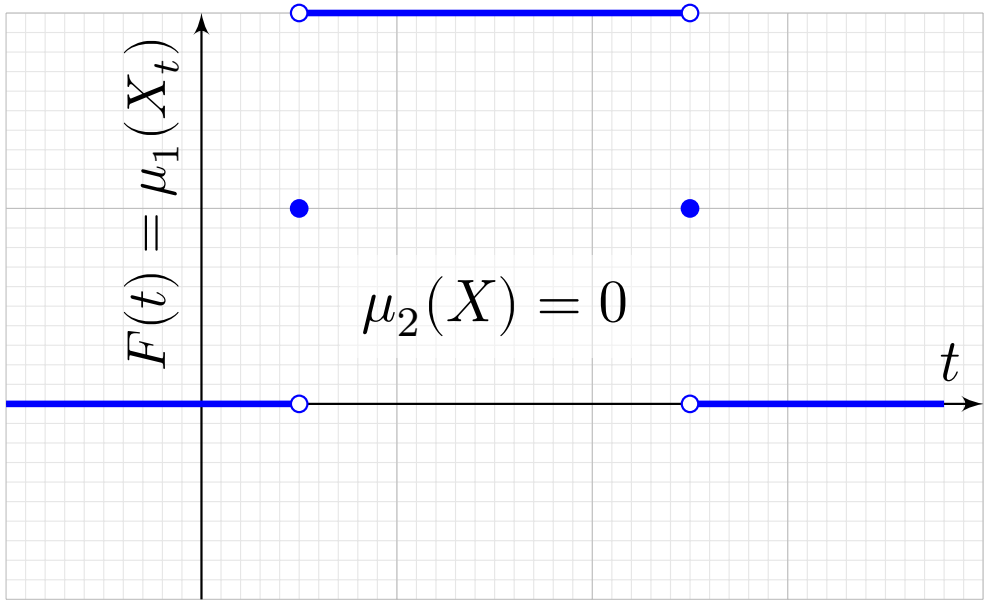
$$\lambda_n(X \cup Y) = \lambda_n(X) + \lambda_n(Y) - \lambda_n(X \cap Y).$$

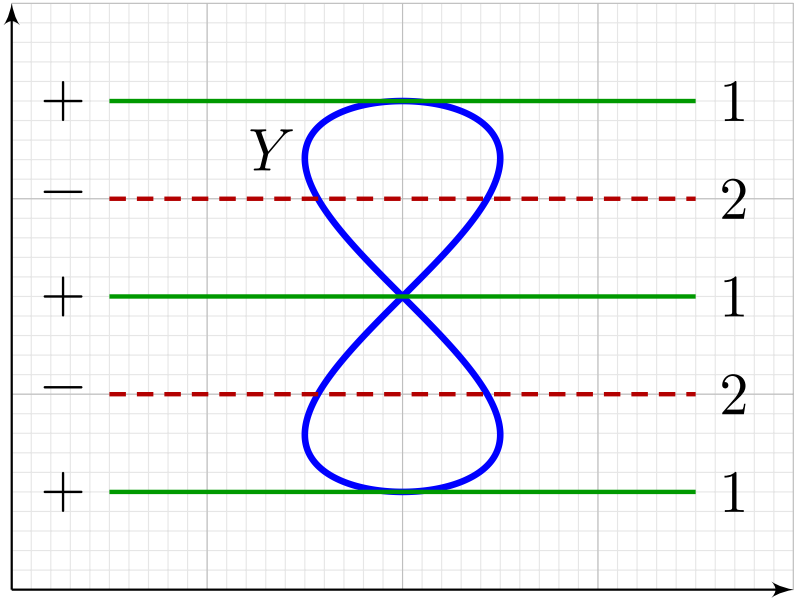
Bei disjunkter Vereinigung gilt demnach $\lambda_n(X \sqcup Y) = \lambda_n(X) + \lambda_n(Y)$.

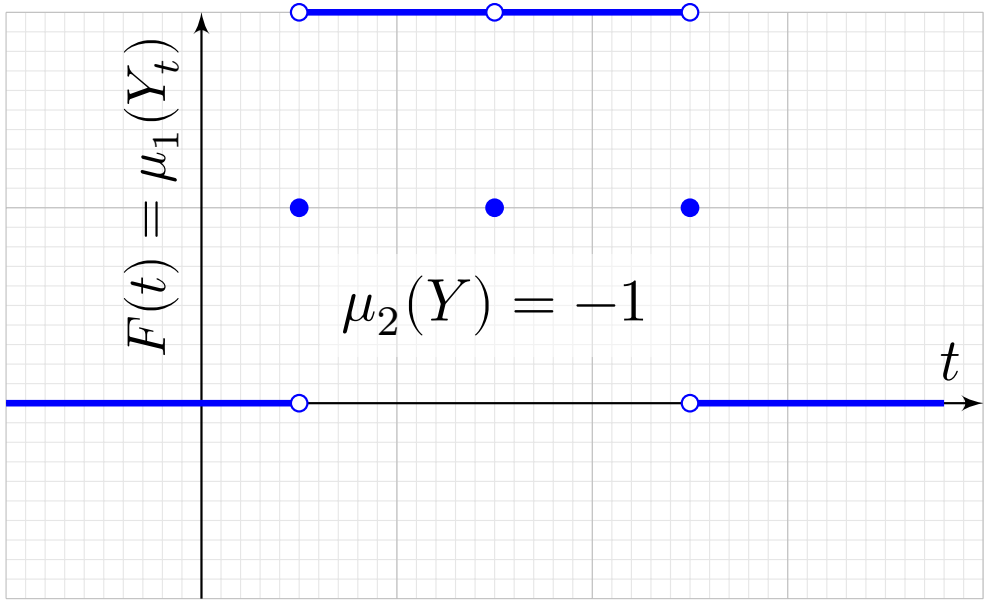
Beweis: Aussagen (1) und (2) folgen per Induktion über die Dimension n.

Das Euler–Maß: zweidimensionale Beispiele

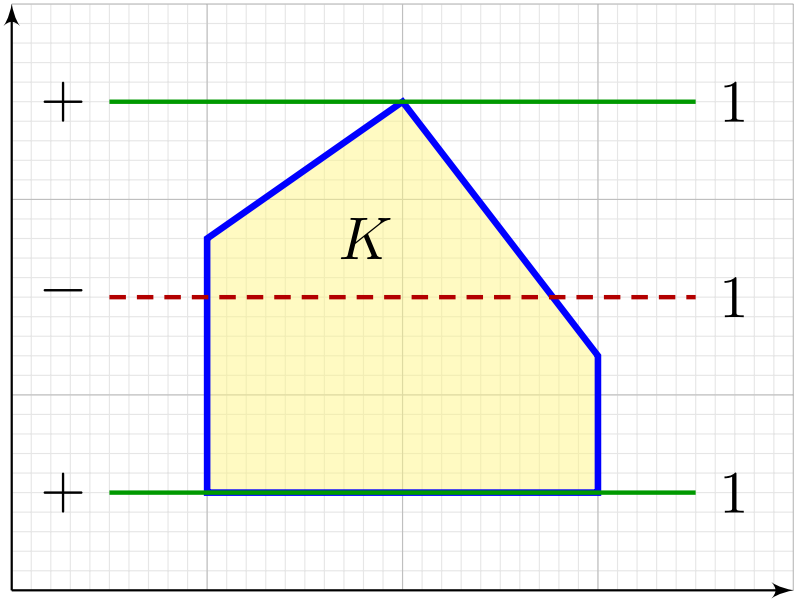


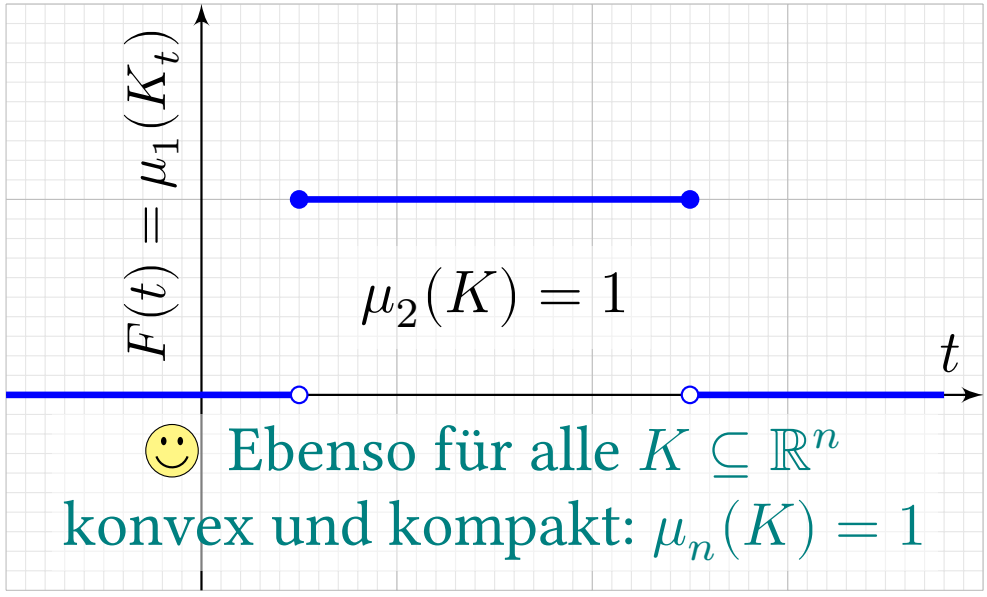




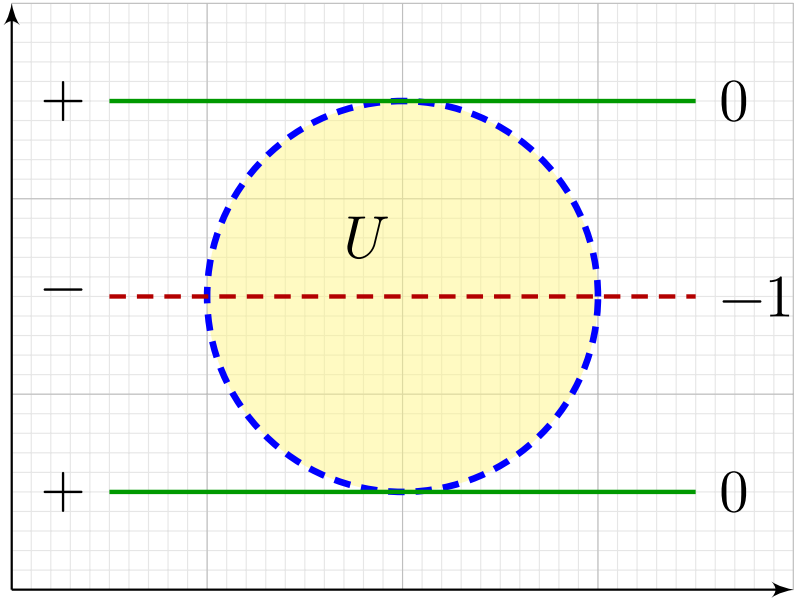


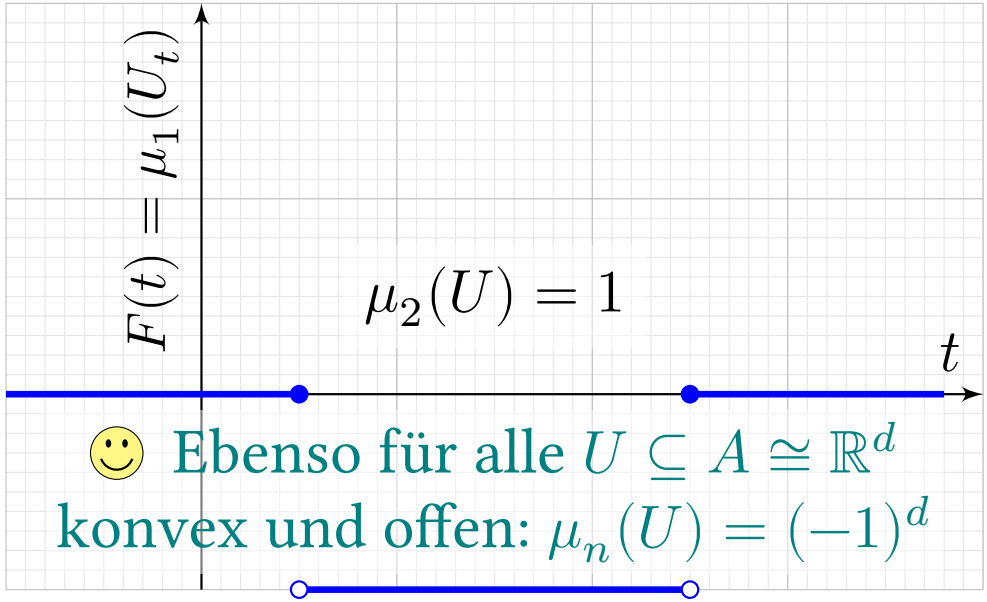
Das Euler–Maß: konvexe Mengen





☺ Ebenso für alle $K \subseteq \mathbb{R}^n$
konvex und kompakt: $\mu_n(K) = 1$





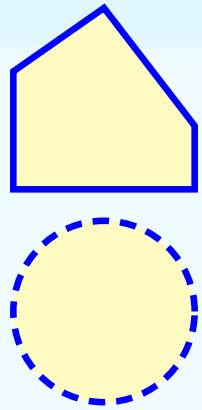
☺ Ebenso für alle $U \subseteq A \cong \mathbb{R}^d$
konvex und offen: $\mu_n(U) = (-1)^d$

Das Euler–Maß berechnet die Euler–Charakteristik!

$$\{\,\mathscr{K} \text{ Komplex in } \mathbb{R}^n\,\} \xrightarrow[\mathscr{K}\mapsto K=\bigcup\mathscr{K}]{|\text{-}|} \twoheadrightarrow \{\,K\subseteq\mathbb{R}^n \text{ Polyeder}\,\}$$

$$\chi \searrow \quad \mathbb{Z} \quad \nwarrow \mu_n$$

Satz A3G: Euler–Maß μ_n und Euler–Charakteristik χ



(1) Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer, konvex und kompakt,
so ist K Euler–messbar, $K \in \mathscr{M}_n$, und $\mu_n(K) = 1$.

(2) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht–leer, konvex und offen in $A = \operatorname{aff}(U) \cong \mathbb{R}^d$,
so gilt ist U Euler–messbar, $U \in \mathscr{M}_n$, und $\mu_n(U) = (-1)^d$.

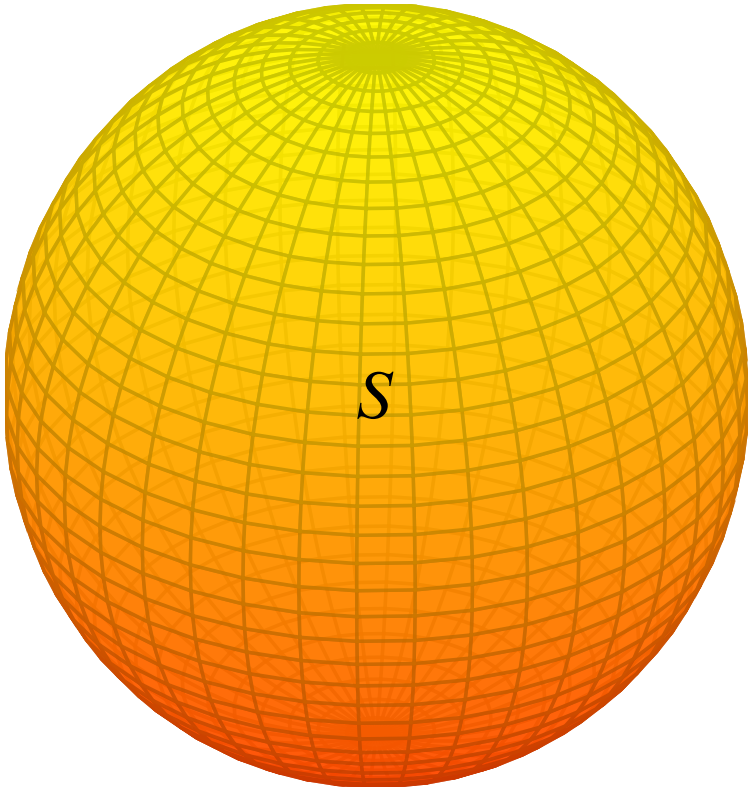
(3) Für jeden (endlichen) polytopalen Komplex $\mathscr{K}$ in $\mathbb{R}^n$ folgt:

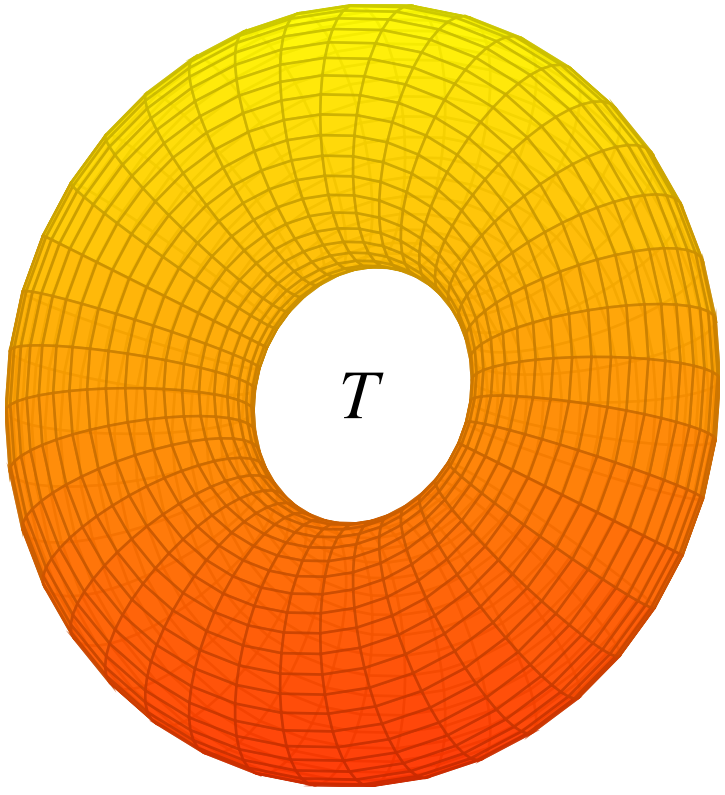
$$K := |\mathscr{K}| = \bigsqcup_{\emptyset\neq P\in\mathscr{K}} \operatorname{Int} P \in \mathscr{M}_n \quad \overset{(2)}{\underset{A3E}{\Longrightarrow}} \quad \mu_n(K) = \sum_{\emptyset\neq P\in\mathscr{K}} (-1)^{\dim P} = \chi(\mathscr{K})$$

Ist K konvex, so beweist (1) die Poincaré–Formel $\chi(\mathscr{K}) = 1$ (Satz A3C).

Beweis: Nachrechnen, wie in obigen Beispielen, per Induktion über n.

Effiziente Umformulierung zur Morse–Euler–Formel





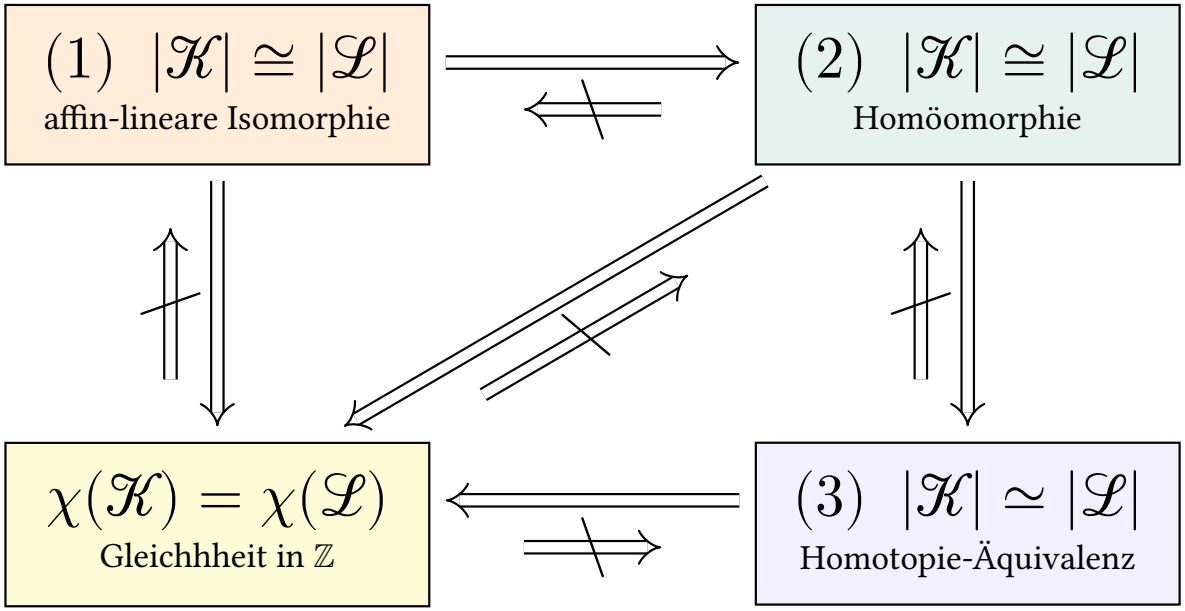
Korollar A3н: Morse–Euler–Formel

Für jedes (endliche) Polyeder $K = |\mathscr{K}| \subseteq \mathbb{R}^n$ erhalten wir (umformuliert)

$$\chi(\mathscr{K}) = \mu_n(K) = \sum_{t\in\mathbb{R}} \mu_{n-1}(K_t) - \frac{1}{2}\left[\lim_{s\nearrow t} \mu_{n-1}(K_s) + \lim_{s\searrow t} \mu_{n-1}(K_s)\right].$$

Für Flächen (regulär wie oben) gilt Extremum $\mapsto +1$ und Sattel $\mapsto -1$.

Die Euler–Charakteristik ist topologisch invariant.



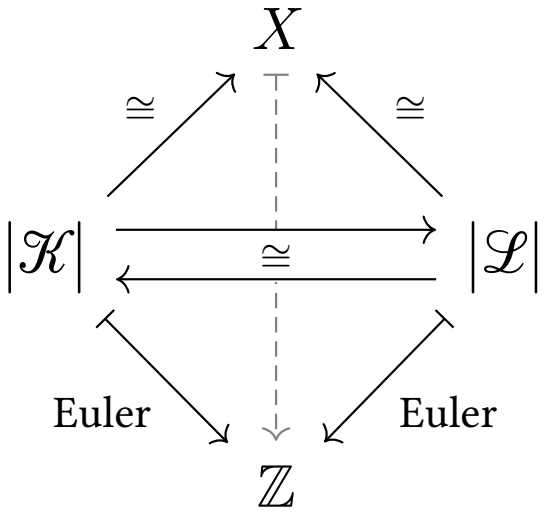
Satz A3J: topologische Invarianz der Euler–Charakteristik

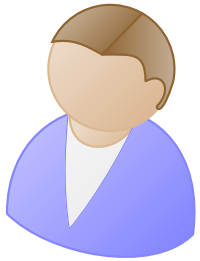
Seien $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ endliche polytopale Komplexe. Existiert zwischen den Polyedern $|\mathscr{K}|$ und $|\mathscr{L}|$ ein Homöomorphismus $(f, g) : |\mathscr{K}| \cong |\mathscr{L}|$, oder auch nur eine Homotopie-Äquivalenz $(f, g) : |\mathscr{K}| \simeq |\mathscr{L}|$, so folgt daraus bereits die Gleichheit $\chi(\mathscr{K}) = \chi(\mathscr{L})$ der Euler–Charakteristiken.

Folgerung: Die Sphäre S und der Torus T sind nicht homöomorph!
Aus den topologischen Invarianten $\chi(S) = 2 \neq 0 = \chi(T)$ folgt $S \ncong T$.

Die Euler–Charakteristik ist wohldefiniert.

Alice



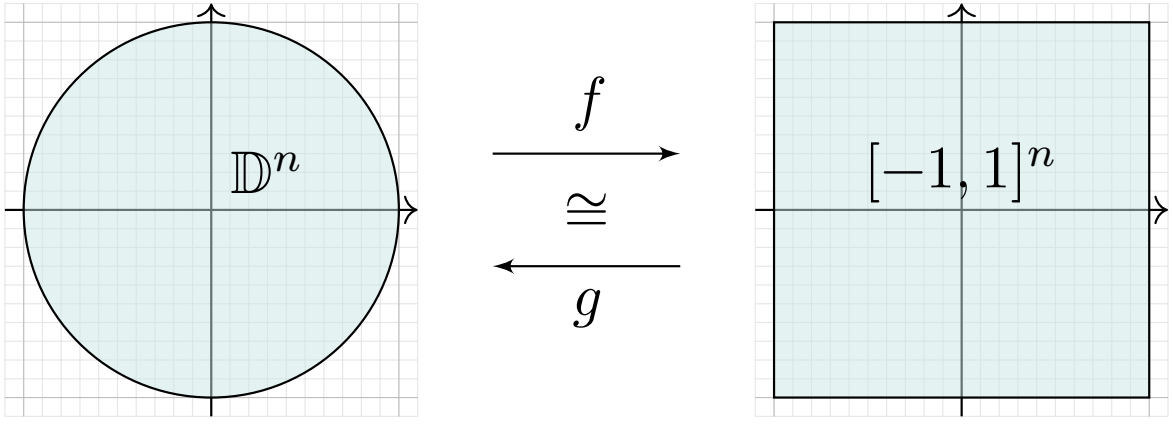

Bob

Definition A3L: Euler–Charakteristik

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (später: ein topologischer Raum). Gilt $X \cong |\mathscr{K}|$ für einen (endlichen) polytopalen Komplex $\mathscr{K}$, so setzen wir $\chi(X) := \chi(\mathscr{K})$.
Dies ist wohldefiniert dank der topologischen Invarianz A3J.

Invarianzsätze sind typisch in der Mathematik: Die Rechnung erfordert eine Parametrisierung, das Endergebnis ist jedoch davon unabhängig!
(a) Elementezahl einer Menge X vermöge Abzählung, $X \cong \{1, \dots, n\}$.
(b) Dimension eines K–Vektorraums V vermöge Basiswahl, $V \cong K^n$.
(c) Integral entlang einer Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ vermöge $\int_\gamma f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Die Euler–Charakteristik ist wohldefiniert.



Der n–dimensionale Würfel $W^n = [-1,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Polytop.
Der Komplex $\mathscr{W}^n = \langle W^n \rangle := \{ Q \leq W^n \}$ besteht aus allen Seiten,
und $\partial\mathscr{W}^n := \{ Q < W^n \}$ aus allen echten Seiten, der Dimension $< n$.

Korollar A3N: Euler–Charakteristik von Bällen und Sphären

Wir haben Homöomorphismen $\mathbb{D}^n \cong [-1,1]^n$ und $\mathbb{S}^{n-1} \cong \partial[-1,1]^n$ (A1E).
Aus topologischer Invarianz A3J und Polyederformel A3C folgt

$$\chi(\mathbb{D}^n) := \chi(\mathscr{W}^n) = 1 \quad \text{und} \quad \chi(\mathbb{S}^{n-1}) := \chi(\partial\mathscr{W}^n) = 1 - (-1)^n.$$

Kleinste Beispiele: $\chi(\mathbb{S}^0) = 2$, $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$, $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, $\chi(\mathbb{S}^3) = 0$, ...

Eindimensionale Mannigfaltigkeiten: Kurven

Ein Raum $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **m–dimensionale Mannigfaltigkeit**, eventuell mit Rand ∂M, falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler Homöomorphismus $(M, a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m, 0)$ oder $(M, a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m_{\geq 0}, 0)$ existiert.

Für **Kurven** (also $m = 1$) haben wir sofort vier konkrete Beispiele:

1–Mannigfaltigkeit	ohne Rand	mit Rand
nicht kompakt	die reelle Gerade $\mathbb{R}$	die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0}$
kompakt	die Kreislinie $\mathbb{S}^1$	das Intervall $[0, 1]$

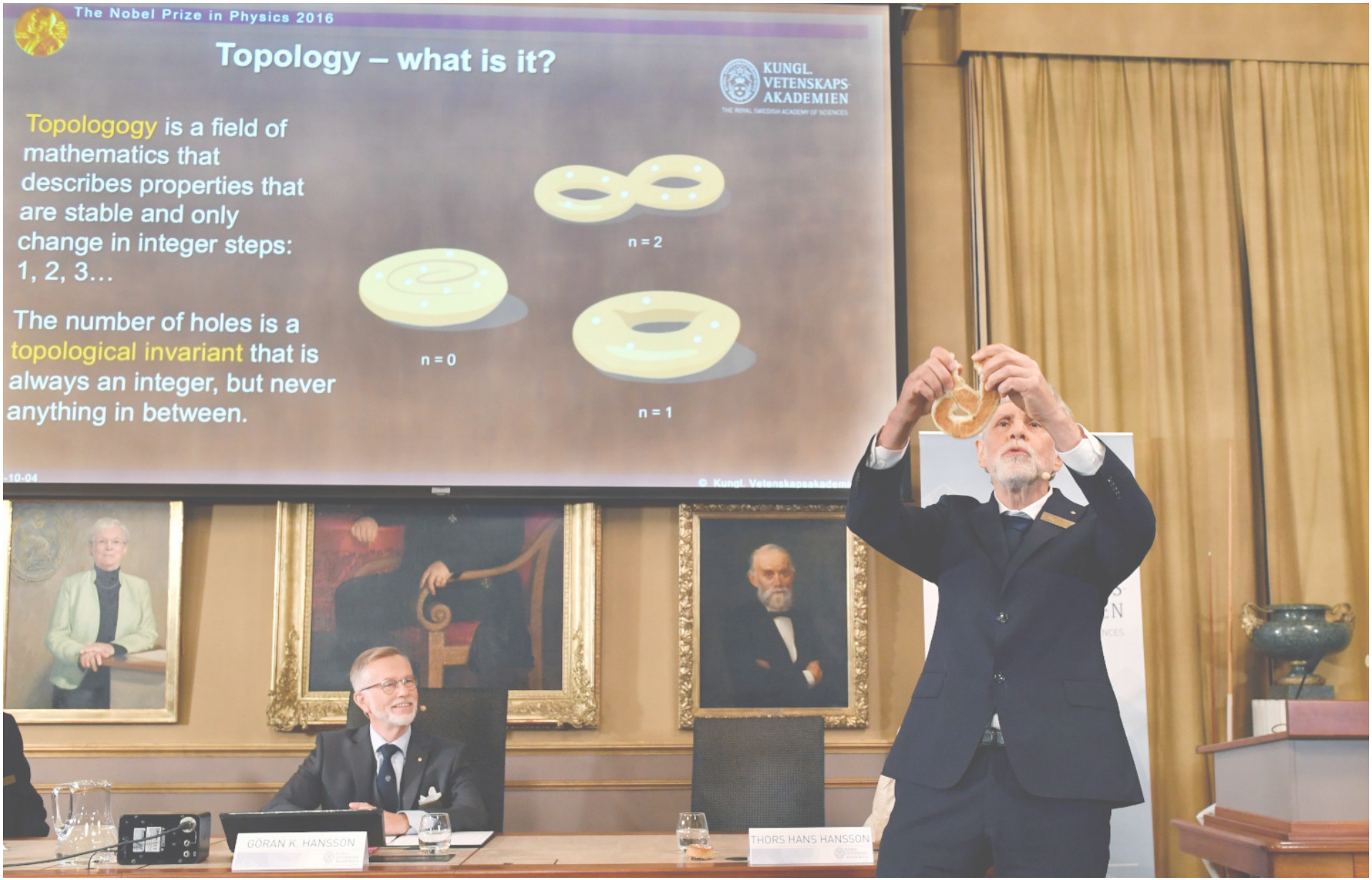
Satz K1N: topologische Klassifikation der Kurven

Jede zusammenhängende Kurve (eindimensionale Mannigfaltigkeit) ist homöomorph zu genau einem der Modellräume $[0, 1]$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Jede kompakte Kurve besteht somit aus $p \in \mathbb{N}$ Intervallen und $q \in \mathbb{N}$ Kreislinien, ist also homöomorph zu genau einem der Modellräume

$$E_{p,q} = \big(\{1, \dots, p\} \times [0, 1] \big) \cup \big(\{p+1, \dots, p+q\} \times \mathbb{S}^1 \big) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^3.$$

Topologie, exotische Phasen und Quantencomputing

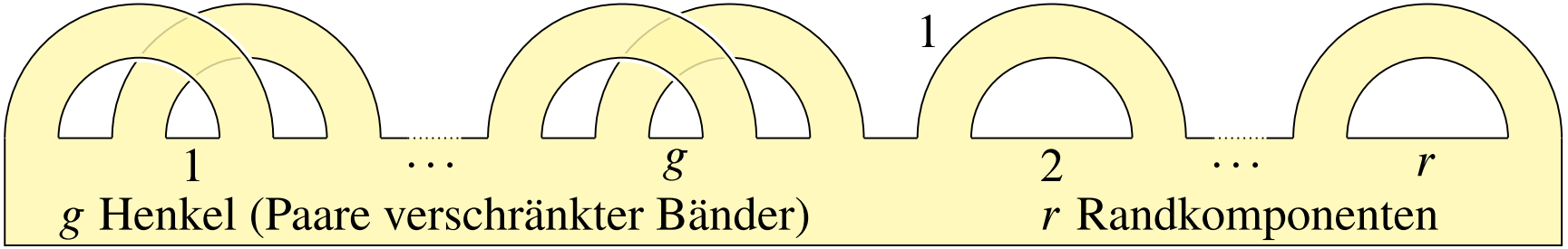


Topologie ist anwendbare Mathematik: nicht nur schön, auch nützlich!

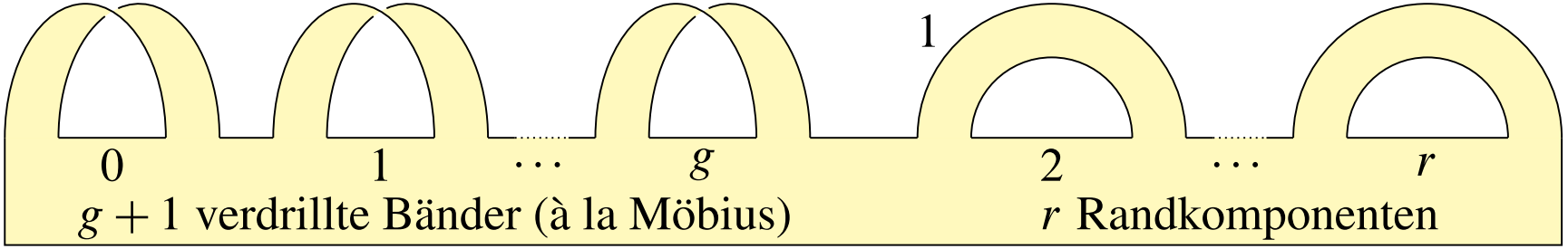
Modelle berandeter Flächen: erstens glatt

Zu Parametern $g \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ konstruieren wir Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$:

$F^{+}_{g,r} =$



$F^{-}_{g,r} =$



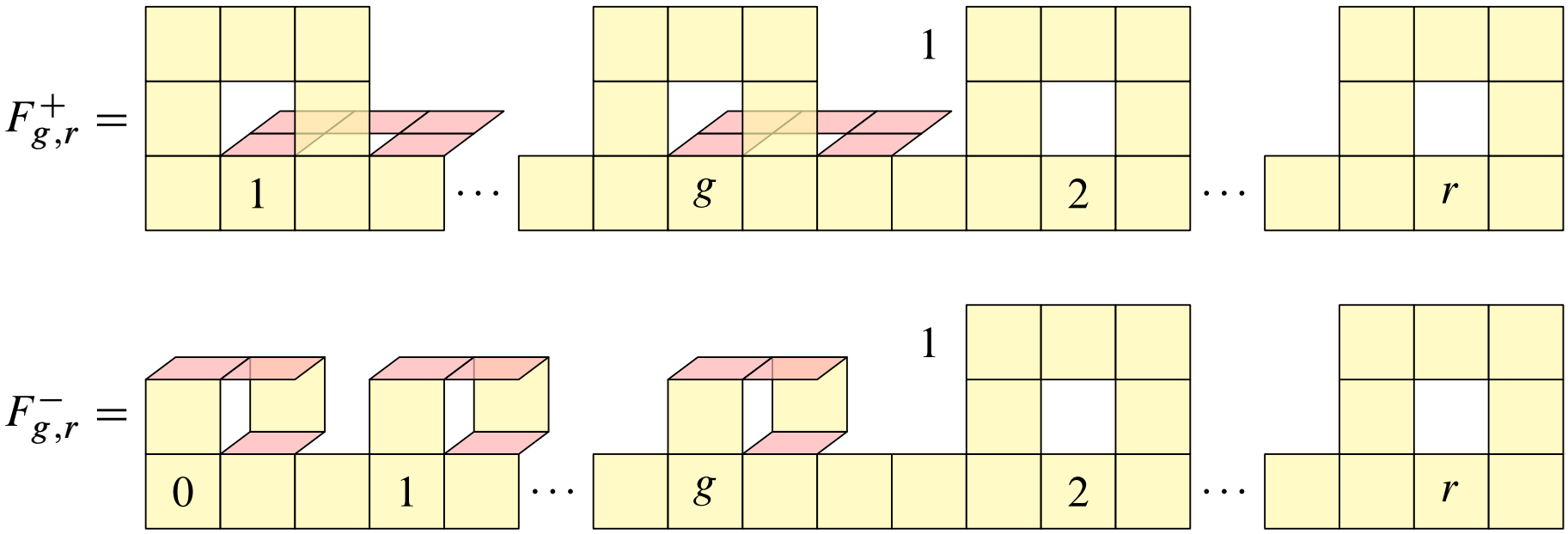
Glatte Modelle $F^{\pm}_{g,r} \subseteq \mathbb{R}^3$ berandeter Flächen

Beispiele: $F^{+}_{0,1} \cong$ Kreisscheibe, $F^{+}_{0,2} \cong$ Kreisring $\cong$ Zylindermantel, $F^{-}_{0,1} \cong$ Möbius–Band, $F^{-}_{0,2} \cong$ Möbius–Band mit einem Loch, …

Der Parameter $g \in \mathbb{N}$ heißt **Geschlecht**. Die Fläche $F^{+}_{g,r}$ ist **orientierbar** (zweiseitig), hingegen ist die Fläche $F^{-}_{g,r}$ **nicht-orientierbar** (einseitig). Der Parameter r ist die Anzahl der **Randkomponenten**. Diese Begriffe sind anschaulich plausibel, doch die korrekte Definition ist raffiniert.

Modelle berandeter Flächen: zweitens polytopal

Diese Flächen können wir auch als polytopale Komplexe realisieren:



Kubische Modelle $F^{\pm}_{g,r} \subseteq \mathbb{R}^3$ berandeter Flächen

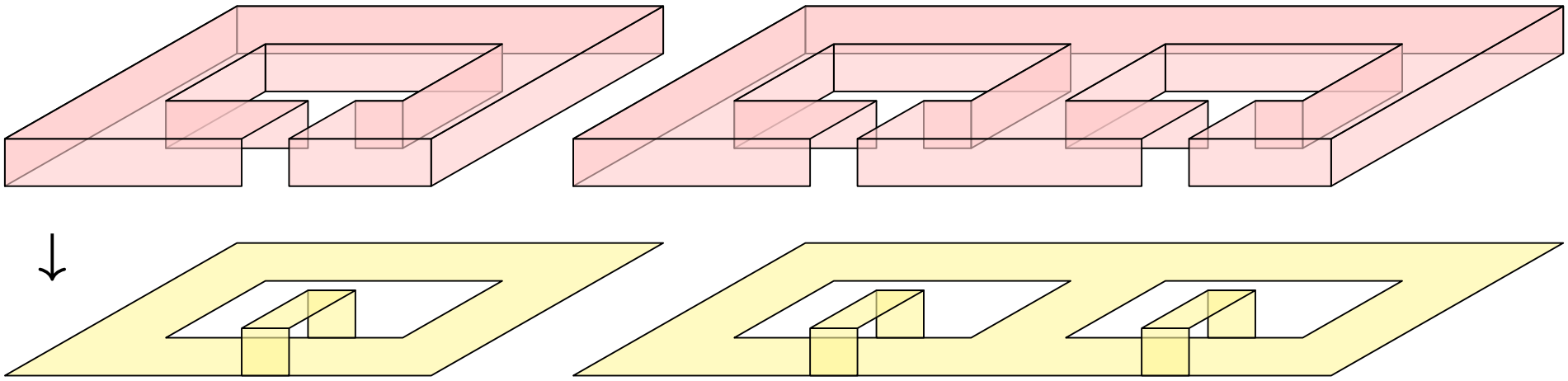
Übung: Erklären Sie Rand und Orientierbarkeit an diesen Modellen!
Verstecken sich unter unseren Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ homöomorphe Paare?

$$\chi(F^+_{g,r}) = 2 - 2g - r, \qquad \chi(F^-_{g,r}) = 1 - g - r$$

Wir nutzen dankend die topologische Invarianz von Euler–Charakteristik, Randkomponenten und Orientierbarkeit: Alle Modelle sind verschieden!

Schließung von $F^+_{g,1}$ zu $F^+_{g,0}$

Die berandete Fläche $F^+_{g,1}$ wird geschlossen zu $F^+_{g,0}$ durch Ankleben einer Kreisscheibe $D \cong F^+_{0,1}$ entlang des gemeinsamen Randes $S \cong \partial F^+_{g,1}$:



Aufgabe: Berechnen Sie auch hier die Euler–Charakteristik $\chi(F^+_{g,0})$!

Lösung: Wir haben $F^+_{g,0} = F^+_{g,1} \cup D$ und $F^+_{g,1} \cap D = S$ mit $D \cong \mathbb{D}^2$ und $S \cong \mathbb{S}^1$, also $\chi(D) = \chi(\mathbb{D}^2) = 1$ und $\chi(S) = \chi(\mathbb{S}^1) = 0$ dank Invarianz A3ɪ. Dank Additivität A3ᴇ(2) erhalten wir wunderbar leicht und bequem:

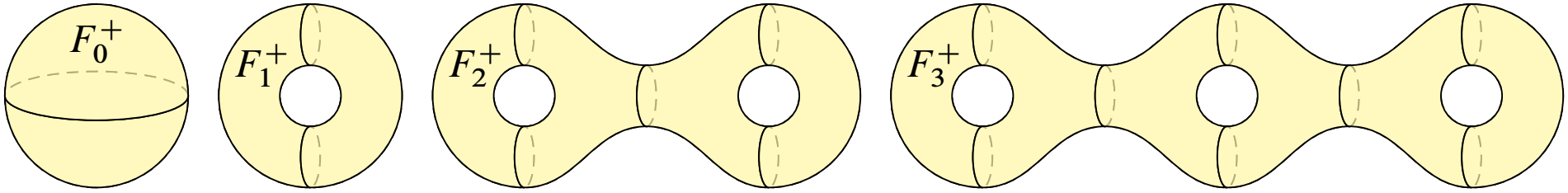
$$\chi(F^+_{g,0}) \;=\; \chi(F^+_{g,1}) + \chi(D) - \chi(S) \;=\; (2-2g-1) + 1 - 0 \;=\; 2-2g$$

☺ Wie gut, dass wir bereits die passenden, effizienten Werkzeuge haben!

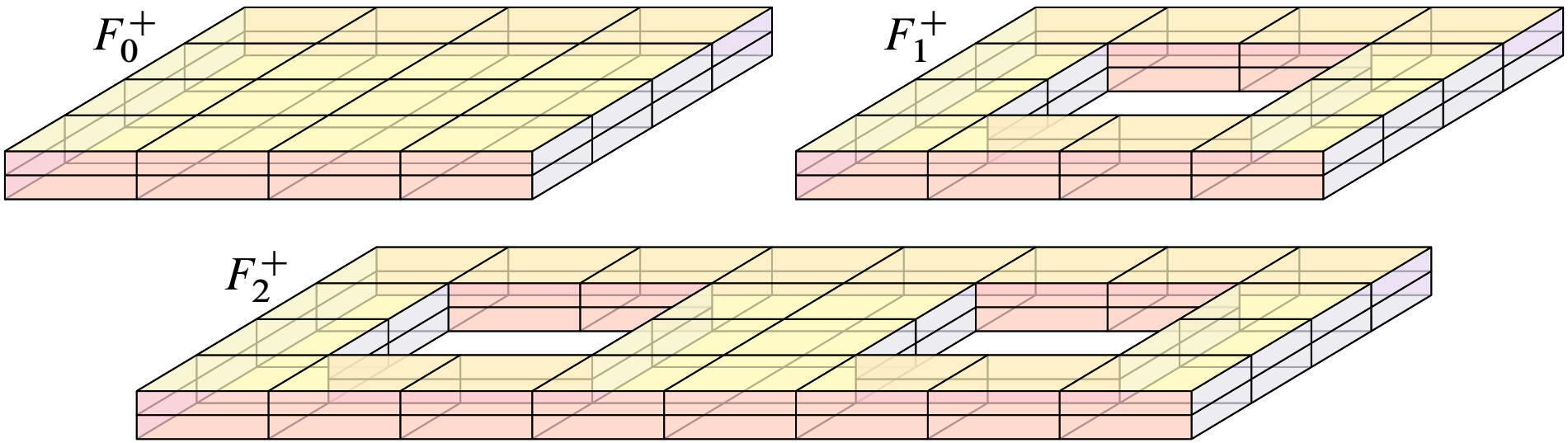
Fun fact: Beim Autobau heißt das „Hochzeit“ von Motor und Karosserie.

Bildquelle: Bundesministerium für Bildung und Forschung, www.bmbf.de

Modelle geschlossener Flächen



Glatte Modelle $F_g^+ \subseteq \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen



Kubische Modelle $F_g^\pm \subseteq \mathbb{R}^3$ geschlossener Flächen

☺ Unsere Modelle sind wunderbar konkret und zudem symmetrisch:
Die Punktspiegelung $x \mapsto -x$ operiert auf den Modellflächen $F_g^+ = -F_g^+$.

Modelle geschlossener Flächen

Meist wollen wir die Fläche $F^{\pm}_{g,r}$ nur „bis auf Homöomorphie“ darstellen, dazu genügt ein Repräsentant, etwa ein glattes oder kubisches Modell. Die konkrete Wahl eines Repräsentanten ist willkürlich und unerheblich.

Wenn wir genauer arbeiten wollen, etwa auf der Fläche F Koordinaten einführen oder über die Punktspiegelung $F \to F : x \mapsto -x$ nachdenken, dann müssen wir uns auf ein konkretes und explizites Modell festlegen.

Genau dazu dienen uns die obigen Konstruktionen: Insbesondere kubisch können wir alles vollkommen explizit als Teilmenge im $\mathbb{R}^3$ angeben. Wenn Sie möchten, führen Sie dies aus, etwa als Computer-Graphik.

Wir werden beide Techniken noch weiter vertiefen, und beide spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle: sowohl (polytopale, simpliziale, zelluläre) Komplexe als auch (topologische, glatte) Mannigfaltigkeiten.

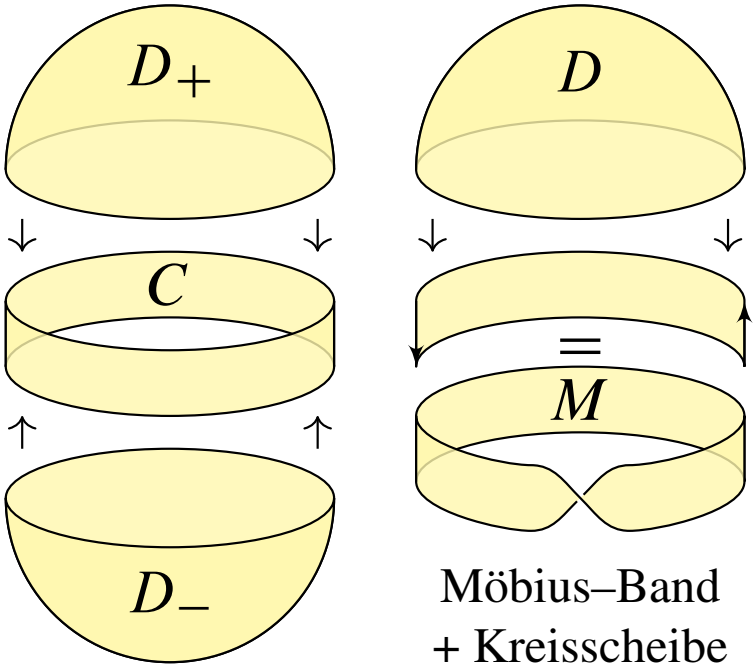
Was Sie hier sehen ist also nicht nur eine einmalige *ad hoc* Konstruktion für unsere Flächen, sondern der Anfang einer universellen Sprache zur Beschreibung geometrischer Objekte (Numerik, CAD, Gaming, CGI).

Nicht-orientierbare Flächen: die projektive Ebene

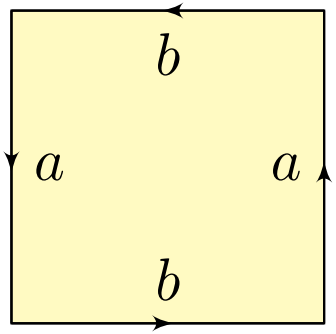
Wir identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$ von F_g^+.
Der Quotientenraum ist die **nicht-orientierbare Fläche** $F_g^- := F_g^+ / \{\pm\}$.

Die Anschauung verlässt uns hier, wir brauchen topologische Werkzeuge.
Die Quotientenbildung für topologische Räume erklären wir später,
einstweilen genügt diese Ankündigung als Ausblick und Motivation.
Vielleicht fragen Sie sich, wie F_g^- aussieht. Ich habe Sie gewarnt!

Berühmtestes Beispiel ist die **reell–projektive Ebene** $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2 / \{\pm\}$.



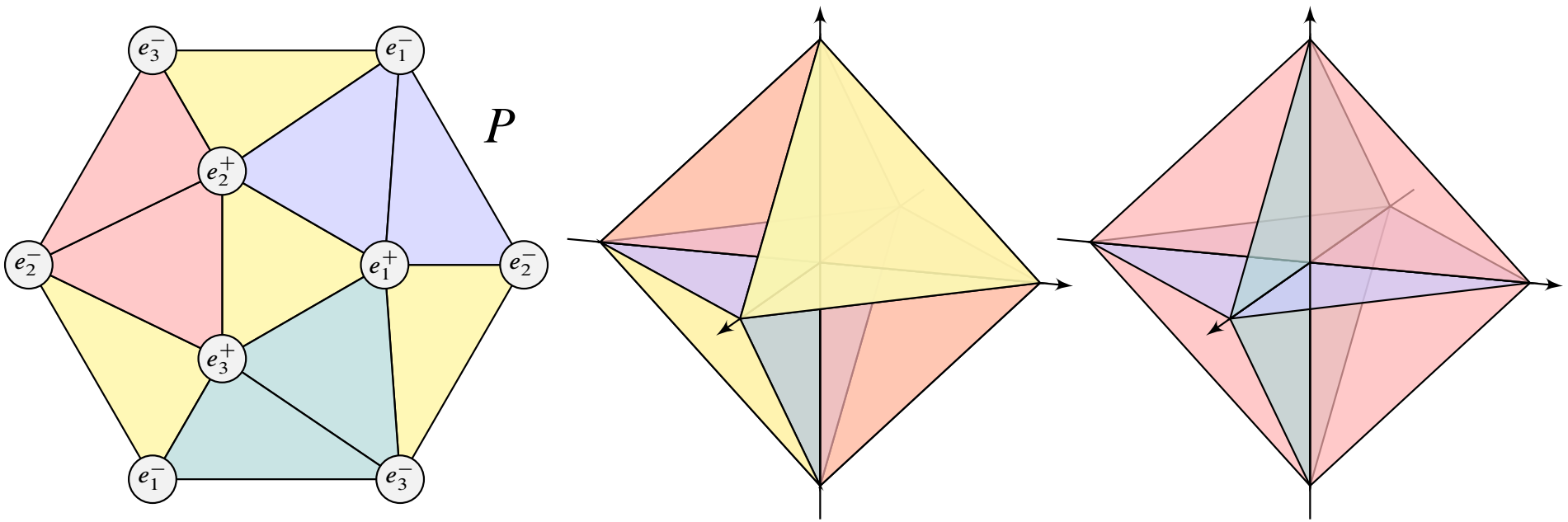
Möbius–Band
+ Kreisscheibe



Bastelbogen

Projektive Ebene als polytopaler Komplex

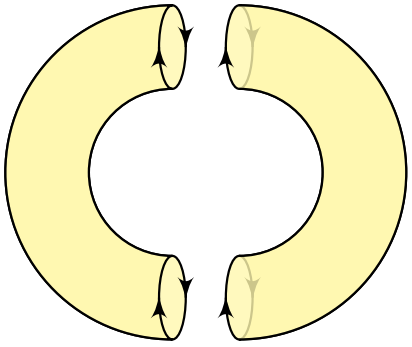
Die Konstruktion ist eigentlich leicht: Wir beginnen mit der Sphäre $\mathbb{S}^2$ und identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$. Vermutlich können Sie sich das Ergebnis, die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$, dennoch nicht recht vorstellen. Das liegt ganz einfach daran, dass Sie beschränkt sind… auf die drei Dimensionen des vertrauten Anschauungsraumes.



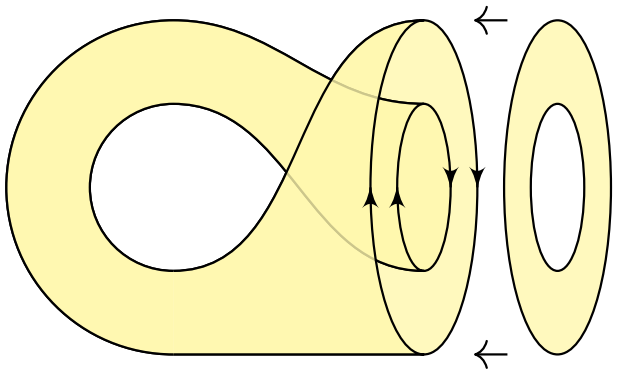
Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ lässt sich nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten! Werner Boy fand 1901 in seiner Dissertation immerhin eine Immersion $\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ mit harmlosen Doppelpunkten und nur einem Dreifachpunkt.

Nicht-orientierbare Flächen: die Kleinsche Flasche

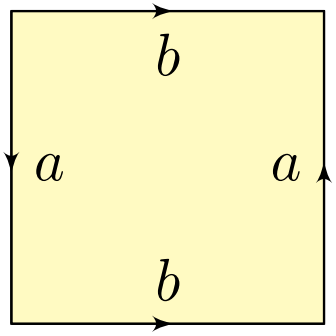
Zweit-berühmtestes Beispiel ist die **Kleinsche Flasche** $F_1^- = F_1^+/\{\pm\}$.



Torus F_1^+ zerlegt
in zwei Halbtori



Kleinsche Flasche
aus einem Halbtorus

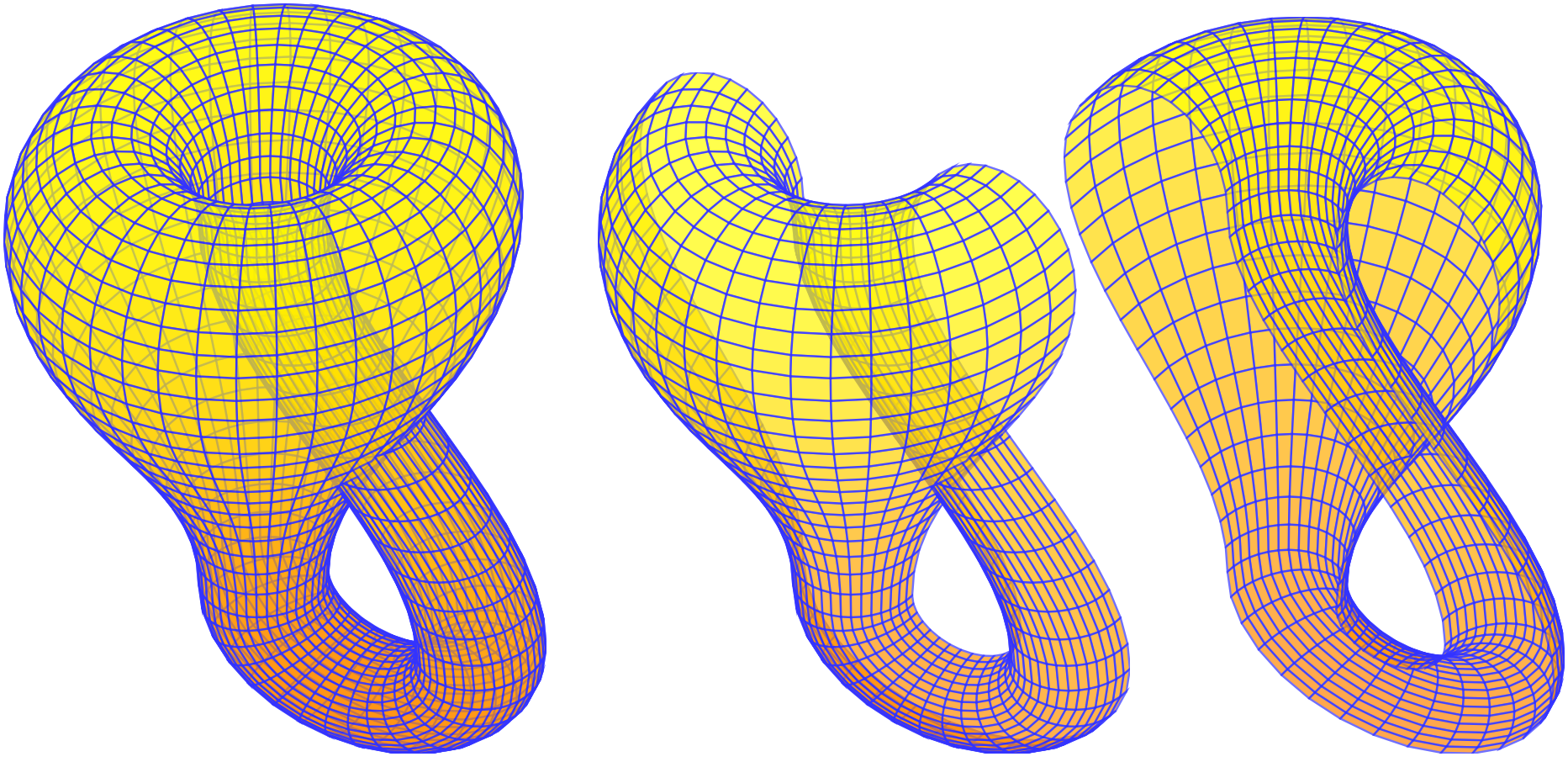


Bastelbogen

Auch hier ist die Konstruktion eigentlich leicht: Wir beginnen mit einem Torus $T = F_1^+$ und identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$. Das Ergebnis ist die Kleinsche Flasche $F_1^- = F_1^+/\{\pm\}$. Auch sie lässt sich nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten. Die Skizze zeigt nur eine Immersion $F_1^- \looparrowright \mathbb{R}^3$, die fiktiven Selbstdurchdringungen müssen wir dabei ignorieren.

Die abstrakte Konstruktion ist präzise und erfreulich leicht,
die konkrete Visualisierung fällt schwer und bleibt vage.

Kleinsche Flasche als Verklebung zweier Möbius–Bänder



Wir können fast alle Flächen im Raum $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Darüber sollten wir uns freuen. Einzige Ausnahme sind die nicht-orientierbaren, geschlossenen Flächen F_g^-. Erst im $\mathbb{R}^4$ ist für diese genügend Platz.

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

Satz A4F: Unterscheidung unserer Flächenmodelle

Für alle $g, r \in \mathbb{N}$ gilt $\chi(F^+_{g,r}) = 2 - 2g - r$ und $\chi(F^-_{g,r}) = 1 - g - r$.

Dank der topologischen Invarianz von Euler–Charakteristik, Rand und Orientierbarkeit sind keine zwei Modellflächen $F^\pm_{g,r}$ homöomorph.

Anders gesagt, aus $(g, r, \varepsilon) \neq (h, s, \delta)$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{\pm\}$ folgt $F^\varepsilon_{g,r} \ncong F^\delta_{h,s}$.

Existieren außer unseren obigen Beispielen $F^\pm_{g,r}$ noch weitere Flächen? Erstaunlicherweise nicht! Dazu benötigen wir zwei weitere Ergebnisse:

(1) Jede Fläche X kann trianguliert werden, kurz $X \cong |\mathcal{K}|$ (Radó 1925).

(2) Ist die Fläche $|\mathcal{K}|$ kompakt und zusammenhängend, so können wir sie durch „Schneiden und Kleben“ umformen in eine der triangulierten Modellflächen $F^\pm_{g,r}$ (stückweise affin, ganz elementar und explizit).

Satz A4J: Klassifikationssatz für kompakte Flächen

Jede kompakte zusammenhängende Fläche (eventuell mit Rand) ist homöomorph zu genau einem unserer obigen Modelle $F^\pm_{g,r}$.

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

Die Skulptur *Rubato* in Malmö der schwedischen Bildhauerin Eva Hild

Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

Das ist der berühmte Klassifikationssatz für kompakte Flächen!
Ich fasse nochmal zusammen und betone unser Vorgehen:

Zunächst haben wir konkrete Beispiele $F^{\pm}_{g,r}$ konstruiert und untersucht.
Jedes ist tatsächlich eine kompakte Fläche, und Satz A4F garantiert,
dass unsere Liste redundanzfrei ist, also keine Doppelungen enthält:
Je zwei Flächen dieser Liste sind zueinander nicht homöomorph!

Anschließend zeigen wir, das unsere Liste sogar vollständig ist:
Jede kompakte zusammenhängende Fläche, egal wie kompliziert sie auch sein mag, ist homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$.
Diese Vollständigkeitsaussage werden wir in Kapitel K ausführen.

Das ist das Musterbeispiel einer Klassifikation: Jede kompakte zshgde Fläche F wird bis auf Homöomorphie eindeutig durch diese drei Daten charakterisiert: Ihre Orientierbarkeit $\varepsilon(F) \in \{\pm\}$, die Anzahl $r(F) \in \mathbb{N}$ ihrer Randkomponenten sowie ihre Euler–Charakteristik $\chi(F)$; letztere lässt sich leicht in das Geschlecht $g(F)$ umrechnen. Dieser einfache Algorithmus löst das Homöomorphieproblem kompakter Flächen!

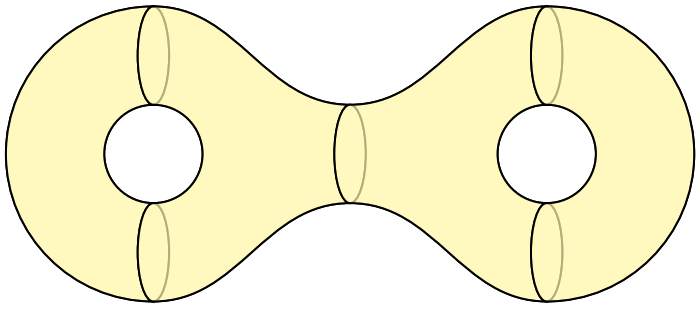
Wir können alle kompakten Flächen klassifizieren!

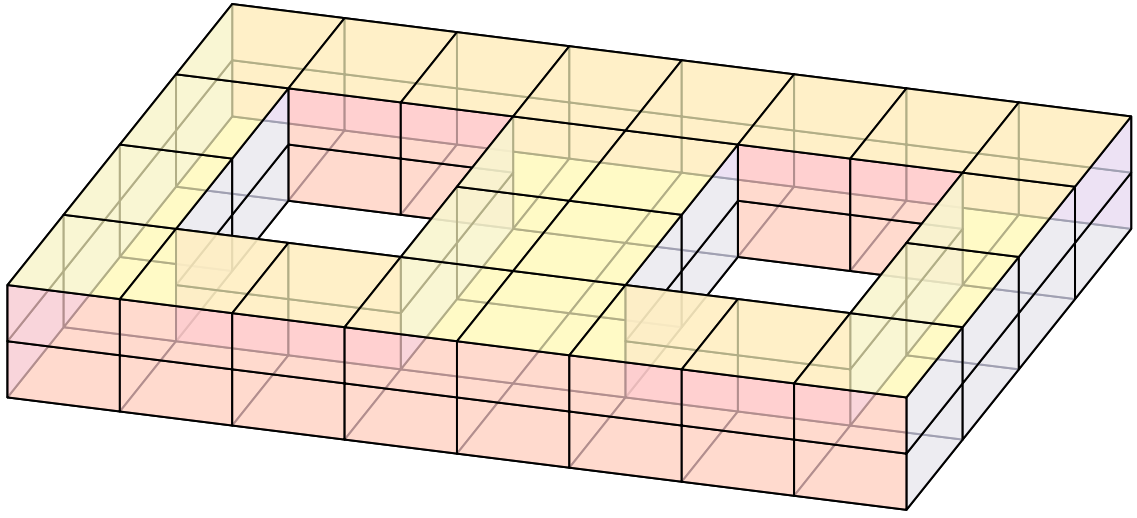
Wenn Sie dieses Einleitungskapitel gründlich durcharbeiten, werden Sie stolz feststellen, dass erste wichtige Sätze sofort in Ihrer Reichweite liegen und wir erfreulich viele hier sogar schon beweisen können.
Sie spüren bereits die Mühe, doch nießen auch sofort die Früchte.

Andere Sätze kann ich hier nur als Vorschau ankündigen; ihre Beweise benötigen die soliden Grundlagen, Begriffe und Techniken der Topologie. Genau das ist unser Ziel und unsere Motivation für die nächsten Wochen, diese Verheißungen wollen wir in den Folgekapiteln einlösen.

Nur einige wenige Sätze borge ich mir aus der Algebraischen Topologie: Die Invarianz der Euler–Charakteristik ist für Rechnungen sehr bequem, daher will ich Ihnen dieses wunderbare Werkzeug keinesfalls verwehren. Der Beweis der Invarianz beruht allgemein auf Homologie-Theorie, doch speziell für Flächen wird uns dies mit der Fundamentalgruppe gelingen. Ich nehme für Sie einen Kredit auf und zahle ihn nach und nach zurück. Das explorierende Vorgehen stellt Motivation und Anwendungen voran, der mathematisch-logische Aufbau erfolgt dann im zweiten Durchgang.

Was ist die Gesamtkrümmung einer Fläche?





Vorgelegt sei eine geschlossene Fläche F. Welche Beziehung besteht zwischen ihrer Gesamtkrümmung $\kappa(F)$ und Euler–Charakteristik $\chi(F)$? Die Antwort ist erstaunlich, ebenso elegant wie richtungsweisend:

Satz A5F: Descartes 1620, Gauß 1825, Bonnet 1848, Dyck 1888

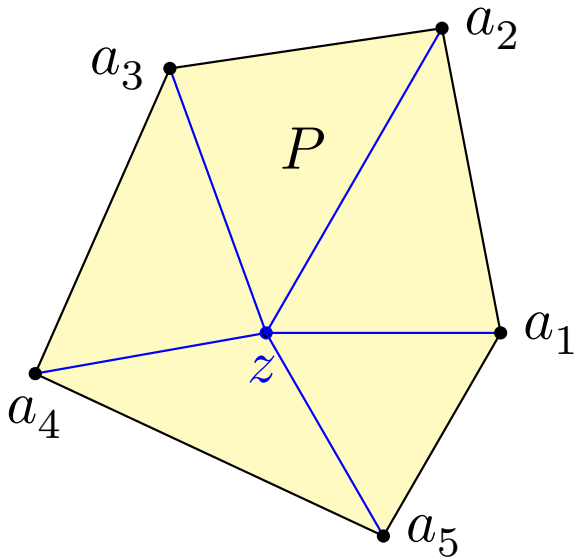
Für jede geschlossene Fläche F gilt die Gleichung $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$.

Für **glatte Flächen** lernen Sie die hierzu nötigen Begriffe und Techniken in der Differentialgeometrie. Für **polytopale Flächen** ist alles sehr viel einfacher, vollkommen elementar und sofort in unserer Reichweite!

Erinnerung: Innenwinkel eines n–Ecks

Je drei Punkte $a \neq z \neq b$ in $\mathbb{R}^d$ definieren einen Winkel mit Scheitel z:
Das **absolute Winkelmaß** $\angle(a,z,b) \in [0,\pi]$ definieren wir durch

$$\angle(a,z,b) := \arccos\left(\frac{\langle a-z \,|\, b-z\rangle}{|a-z|\cdot|b-z|}\right) \in [0,\pi].$$



Wir betrachten zunächst ein zweidimensionales Polytop $P = [a_1, \dots, a_n]$ im Raum $\mathbb{R}^d$.

Der **Innenwinkel** in $a_k \in \operatorname{vert} P$ ist $\angle(P, a_k) := \angle(a_{k-1}, a_k, a_{k+1})$.

Lemma A5c: Innenwinkel eines n–Ecks

Die Innenwinkelsumme $\angle P := \sum_{k=1}^{n} \angle(P, a_k)$ beträgt $\angle P = (n-2)\pi$.

Beweis: Wir zerlegen P in Dreiecke und summieren deren Innenwinkel.

Wie definieren wir die Krümmung einer polytopalen Fläche?

Definition A5D: Krümmung einer polytopalen Fläche

Sei $F = |\mathscr{K}| \subseteq \mathbb{R}^d$ eine geschlossene polytopale Fläche. Ihre **Krümmung** im Eckpunkt $z \in F$ ist der Vollwinkel 2π minus die anliegenden Winkel:

$$\kappa(F, z) := 2\pi - \sum_{P \gg z} \angle(P, z)$$

Jeder Nicht-Eckpunkt $z \in F$ wird zu einem Eckpunkt nach geeigneter Unterteilung von $\mathscr{K}$ zu $\mathscr{K}'$, wie oben gezeigt, und dann gilt $\kappa(F, z) = 0$. Die Krümmung ist daher immer konzentriert in den Ecken $z \in \operatorname{vert} \mathscr{K}$.

Die **Gesamtkrümmung** der Fläche F ist die Summe

$$\kappa(F) := \sum_{z \in F} \kappa(F, z).$$

Bemerkung: Anschaulich misst die lokale Krümmung κ im Punkt z das Wachstum von Kreisen um z für kleine Radien r, hier ist Umfang $\operatorname{vol}_1 S(z, r) = (2\pi - \kappa)r$ und der Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2 B(z, r) = (\pi - \kappa/2)r^2$.

Der Satz von Gauß–Bonnet mit genial-einfachem Beweis

Satz A5F: Gauß–Bonnet für polytopale Flächen

Für jede geschlossene polytopale Fläche $F = |\mathcal{K}|$ gilt $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$.

Beweis: Der Komplex $\mathcal{K}$ habe f_0 Ecken, f_1 Kanten und f_2 Facetten.
Wir summieren die Innenwinkel aller Facetten gemäß Lemma A5C:

$$\sum_{P\in\mathcal{K}_2}\sum_{z\ll P}\angle(P,z) = \sum_{P\in\mathcal{K}_2}[n_P-2]\pi = \pi\Big[\sum_{P\in\mathcal{K}_2} n_P\Big] - 2\pi f_2 = 2\pi f_1 - 2\pi f_2$$

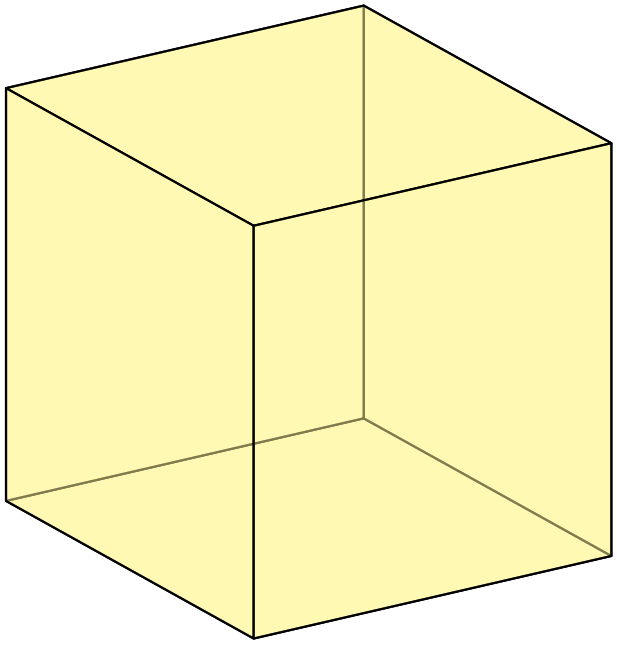
Jede Facette $P \in \mathcal{K}_2$ hat n_P Ecken und n_P Kanten. Jede Kante liegt in genau zwei Facetten, da die Fläche F keinen Rand hat. Somit gilt:

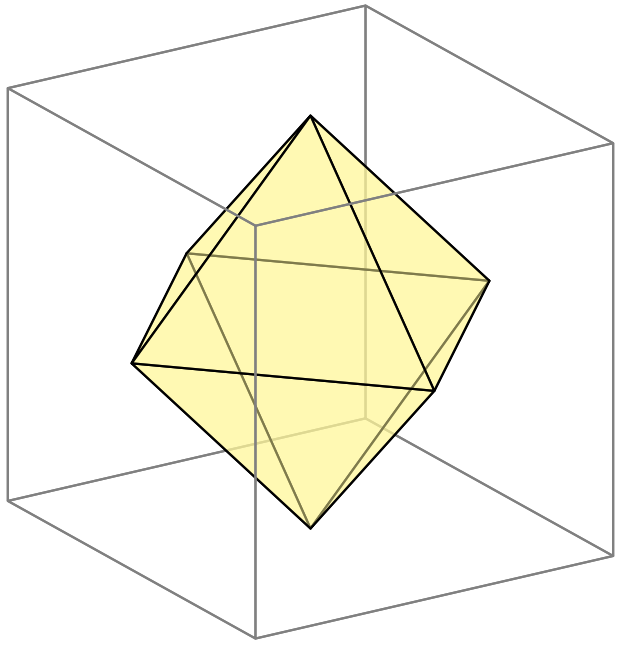
$$\kappa(F) = \sum_{z\in F}\kappa(F,z) = \sum_{\{z\}\in\mathcal{K}_0}\Big[2\pi - \sum_{P\gg z}\angle(P,z)\Big] = 2\pi f_0 - 2\pi f_1 + 2\pi f_2$$

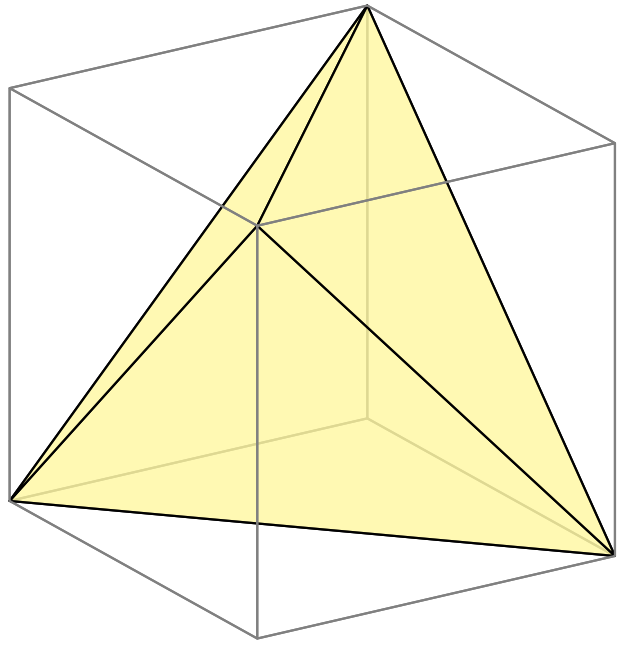
Die Gesamtkrümmung ist also gleich $2\pi \cdot \chi(F)$, wie behauptet. QED

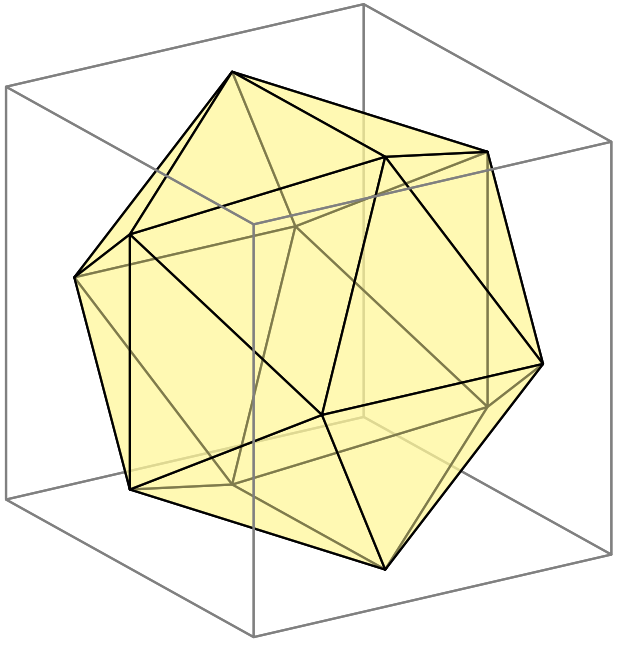
Übung: Gilt das allgemein für kompakte polytopale Flächen mit Rand? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden Satz!

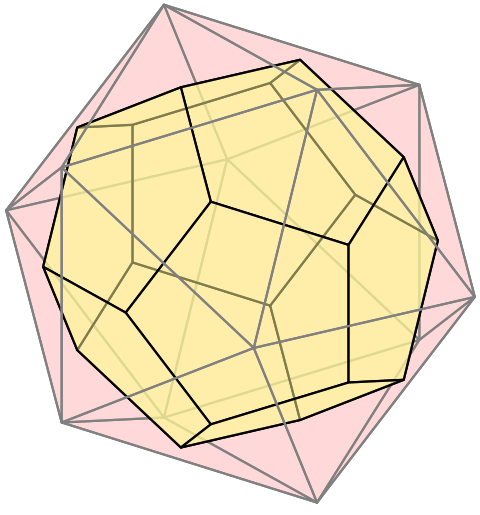
Beispiele zur Krümmung: die fünf platonischen Körper

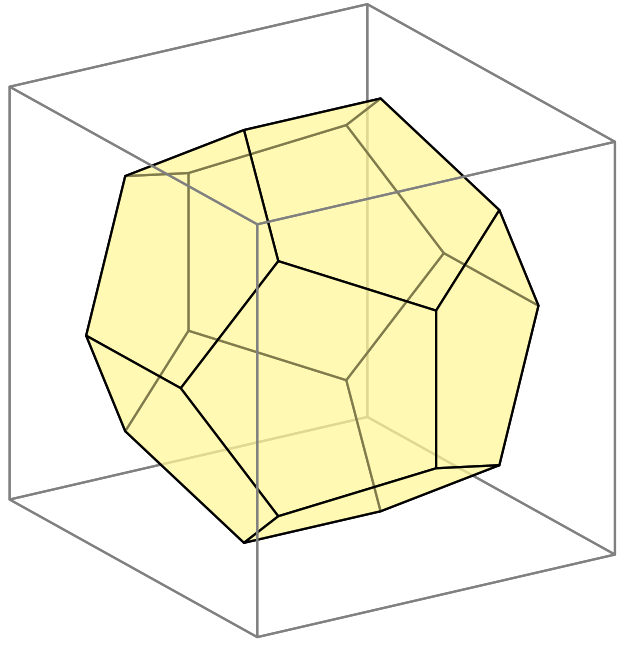












Was ist so aufregend am Satz von Gauß–Bonnet?

Der Satz von Gauß–Bonnet ist eine fundamentale Beziehung zwischen lokalen geometrischen Daten (der Krümmung) einerseits und globalen topologischen Daten (wie der Euler–Charakteristik) andererseits.

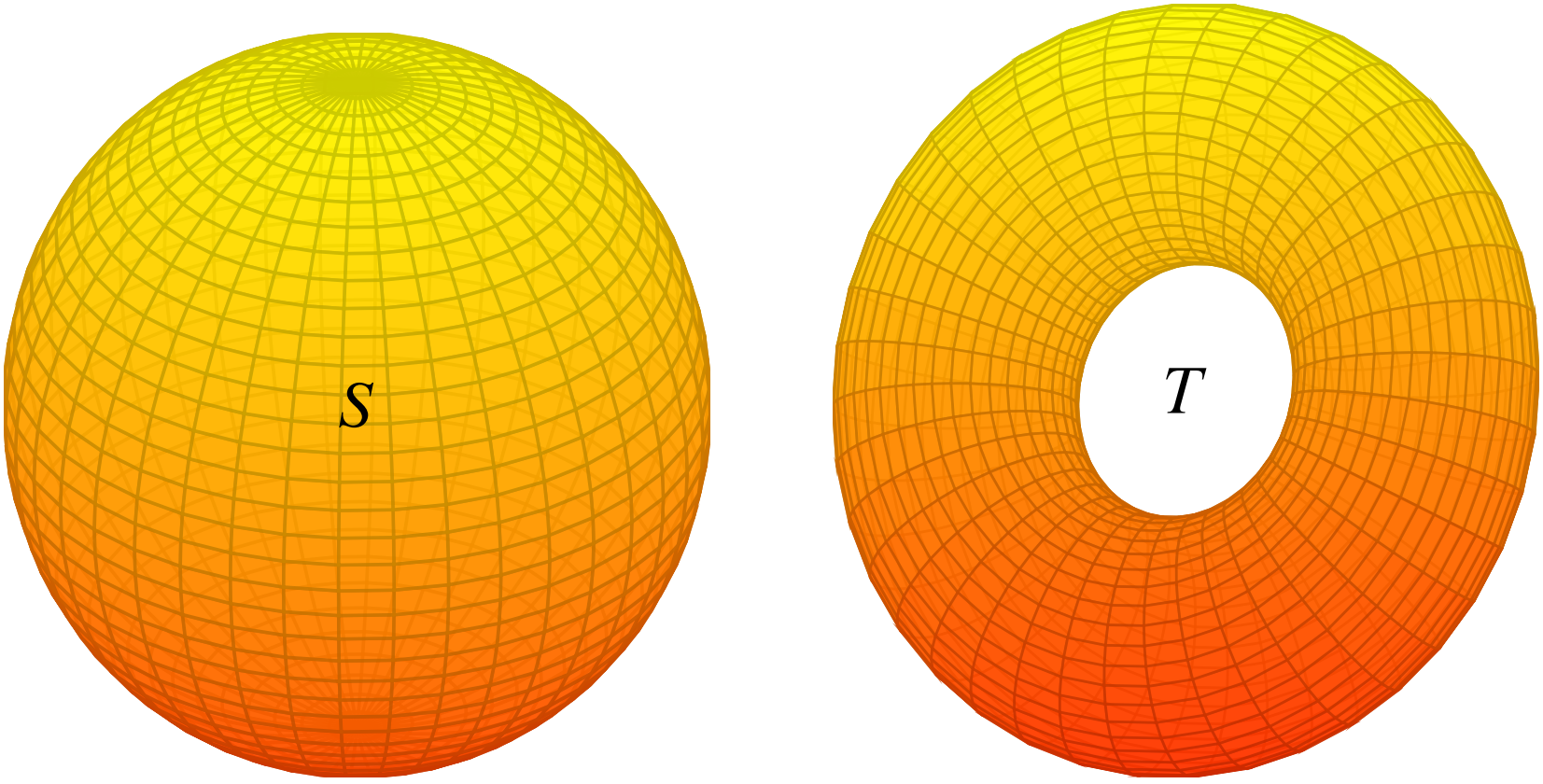
Sie ist die erste in einer Reihe wichtiger Formeln dieses Typs.

Geometrische Eigenschaften bleiben unter Isometrien erhalten, topologische Eigenschaften allgemein unter Homöomorphismen.
Jede Beziehung zwischen diesen beiden Welten ist bemerkenswert!

Aufgabe: Als erste Anwendung, nennen Sie alle geschlossenen zshgden Flächen F mit überall nicht-negativer Krümmung $\kappa \geq 0$.

Lösung: Dank Gauß–Bonnet A5F gilt $\chi(F) \geq 0$. Dank Klassifikation A4J erfüllen dies unter allen denkbaren Flächen nur vier, nämlich die Sphäre $\mathbb{S}^2 \cong F_0^+$ und der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$, sowie ihre nicht-orientierbaren Quotienten, die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2/\{\pm\} = F_0^-$ und die Kleinsche Flasche $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm\} \cong F_1^-$. Diese vier Kandidaten lassen sich tatsächlich mit überall nicht-negativer Krümmung $\kappa \geq 0$ realisieren.

Von polytopalen zu glatten Flächen und zurück



Die polytopale Formulierung der Krümmung ist elegant und elementar.
Auch den Satz können wir direkt und ohne weitere Hilfsmittel beweisen.
Die glatte Formulierung erfordert Werkzeuge der Differentialgeometrie:
glatte Mannigfaltigkeiten, Riemannsche Metrik, Krümmung, Integral, …
Beide Sichtweisen gehen durch Approximation ineinander über.
Mehr zu diesem schönen Thema lernen Sie in der Geometrie…

Von polytopalen zu glatten Flächen und zurück

Damit beschließen wir unseren ersten Rundgang durch die Topologie.
Diese Verheißungen wollen und werden wir in der Folge einlösen.

Mein Ziel für dieses Kapitel war es, einen ersten Überblick zu geben,
und Ihnen zugleich schon erste handfeste Werkzeuge bereitzustellen,
sodass Sie nun selbständig und sicher damit arbeiten können.

Unsere gut abgestimmten Übungen geben Ihnen Gelegenheit dazu.
Sie werden erfreut feststellen, wie viel Sie nun schon selbst können.
Bitte nehmen Sie diese Aufgabe gewissenhaft wahr. Nur so gelingt es.

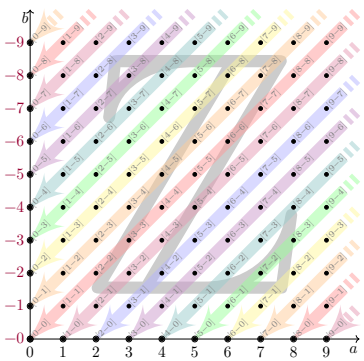
Auch wer Mathematik hauptsächlich für die Anwendungen auf Physik und andere Wissenschaften lernt, also vielfach sich selbst weitere mathematische Hilfssätze zurechtlegen muss, kann auf dem betretenen Pfade nur dann sicher weiterschreiten, wenn er gehen gelernt hat, d.h. zwischen falsch und wahr, zwischen Vermutungen und Beweisen (oder, wie manche so schön sagen, zwischen unstrengen und strengen Beweisen) unterscheiden kann.
Edmund Landau (1877–1938), *Grundlagen der Analysis* (1930)

Kapitel B

Aufbau des Zahlensystems

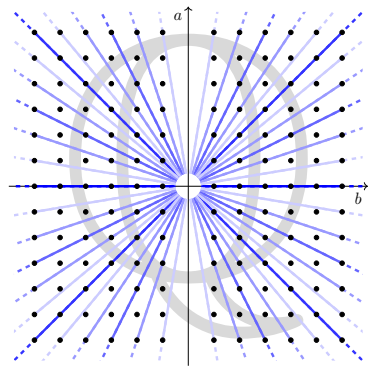
$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$$

$$(\mathbb{N}, 0, s): \quad 0 \overset{s}{\longmapsto} 1 \overset{s}{\longmapsto} 2 \overset{s}{\longmapsto} 3 \overset{s}{\longmapsto} 4 \overset{s}{\longmapsto} 5 \overset{s}{\longmapsto} 6 \overset{s}{\longmapsto} 7 \overset{s}{\longmapsto} 8 \overset{s}{\longmapsto} 9 \overset{s}{\longmapsto} \dots$$



Bitte vergiss alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. Bitte denke bei allem an das Schulpensum; denn Du hast es doch nicht vergessen.

Edmund Landau (1877–1938)



Inhalt dieses Kapitels B

1. Grundlagen: Zahlen, Logik und Mengen
   - Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
   - Mengen, Relationen und Funktionen
   - Zermelo–Fraenkel–Axiome

2. Die Mächtigkeit von Mengen
   - Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein
   - Cantors Diagonalargumente und Hilberts Hotel
   - Die Mächtigkeit der reellen Zahlen: $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

3. Intermezzo: Axiome und Modelle
   - Hausdorff: die Ordnung der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, \leq)$
   - Tarski: die Saga der *high school identities für* $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$
   - Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ und Quaternionen $\mathbb{H}$ als Matrizen

Was sind und was sollen die Zahlen?

Seit Urzeiten nutzen Menschen Zahlen und entwickeln das Rechnen.
Doch was genau sind Zahlen? Und wie entstehen die Rechenregeln?

RICHARD DEDEKIND

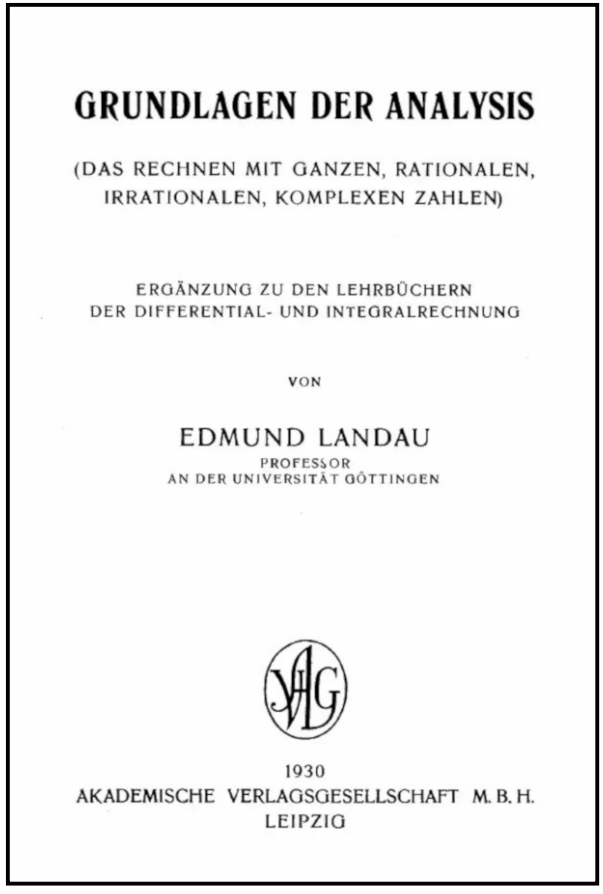
Was sind und was sollen die Zahlen?

Zehnte Auflage

Stetigkeit und Irrationale Zahlen

Siebente Auflage

1888


GRUNDLAGEN DER ANALYSIS

(DAS RECHNEN MIT GANZEN, RATIONALEN, IRRATIONALEN, KOMPLEXEN ZAHLEN)

ERGÄNZUNG ZU DEN LEHRBÜCHERN DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

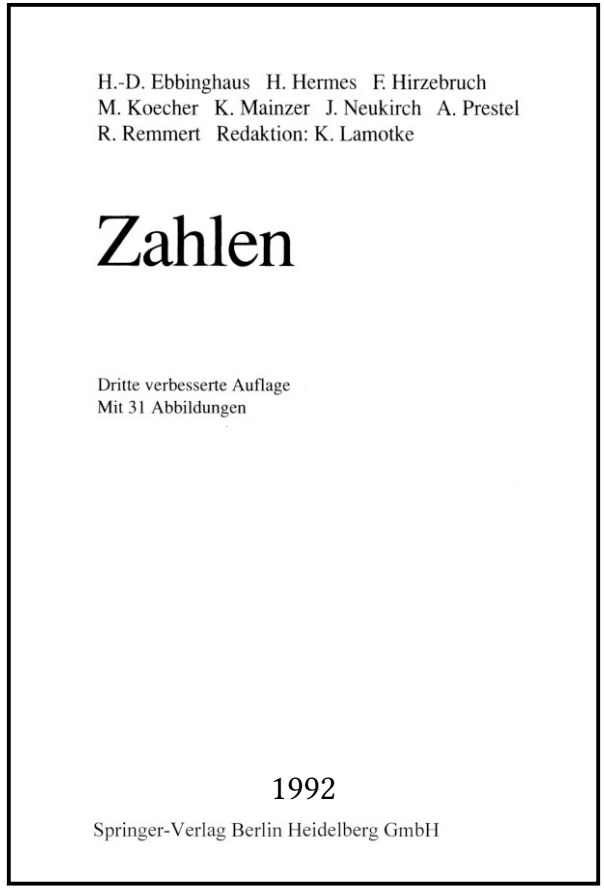
VON

EDMUND LANDAU

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

1930

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H. LEIPZIG


H.-D. Ebbinghaus H. Hermes F. Hirzebruch
M. Koecher K. Mainzer J. Neukirch A. Prestel
R. Remmert Redaktion: K. Lamotke

Zahlen

Dritte verbesserte Auflage
Mit 31 Abbildungen

1992

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Bitte vergiss alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. Bitte denke bei allem an die entsprechenden Stellen des Schulpensums; denn Du hast es doch nicht vergessen. (E. Landau, Vorwort für den Lernenden)

Was sind und was sollen die Zahlen?

Allen ernsthaften Studierenden der Mathematik empfehle ich, lieber früher als später, den Aufbau des Zahlensystems zu studieren.

Richard Dedekind hat sich in den Jahren 1872–1888 gründlichst mit dem Aufbau der natürlichen Zahlen und ihrer Arithmetik auseinandergesetzt. Als logische Grundlage für sein Unterfangen nutzte er gewinnbringend die damals gerade entstehende Mengenlehre. Diese trägt bis heute!

Auch Edmund Landaus Lehrbuch von 1930 ist ein Klassiker. Hier wurde erstmals der Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den rationalen $\mathbb{Q}$, den reellen $\mathbb{R}$ und schließlich den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ systematisch und präzise ausgeführt. Es ist berühmt für Landaus (von ihm selbst so genannten) „unbarmherzigen Telegrammstil“ und oft zitiert dank seiner beiden prägnanten Vorworte, „Vorwort für den Lernenden“ und „Vorwort für den Kenner“. Auch heute noch erhellend!

Beide Klassiker sind in kommentierten Neuauflagen gut zugänglich. Heutige Studierende finden vielleicht neuere Lehrbücher sympathischer. Ich empfehle das wunderschöne Buch *Zahlen* von Ebbinghaus *et al.*

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Die Grundlage aller Mathematik und Anwendung ist das Zahlensystem:

natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$
rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{z/n \mid z, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$
reelle Zahlen	$\mathbb{R} =$ „$\mathbb{Q}$ und alle Grenzwerte“
komplexe Zahlen	$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Wie können Sie diese Zahlbereiche *definieren* und dann *konstruieren*? ihre Rechenregeln *formulieren* und ihre Eigenschaften *beweisen*? auf einem Computer korrekt *implementieren* bzw. effizient *approximieren*? Wie können Sie dies selbst *verstehen* und dann anderen *vermitteln*?

Als logisches Fundament und geeignete Sprache nutzen wir die Mengenlehre – für das Zahlensystem wie auch für alles Weitere.
Ich fasse hier in knappen Worten, doch präzise die grundlegenden Rechenregeln zusammen, die Sie im ersten Semester gelernt haben.

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Satz B1A: Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

(0) Die **natürlichen Zahlen** $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein kommutativer Halbring, und $(\mathbb{N}, 0, s : n \mapsto n+1)$ erfüllt die Dedekind–Peano–Axiome.

(1) Die **ganzen Zahlen** $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein Integritätsring mit $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$ und entstehen durch Differenzbildung gemäß $\mathbb{Z} = \{\, a - b \,|\, a, b \in \mathbb{N} \,\}$.

(2) Die **rationalen Zahlen** $(\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein Körper mit $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$ und entstehen durch Bruchbildung gemäß $\mathbb{Q} = \{\, z/n \,|\, z, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \,\}$.

(3) Die **reellen Zahlen** $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein Körper mit $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$ und vollständig geordnet durch $x \leq y \ \Leftrightarrow\ \exists a \in \mathbb{R} : x + a^2 = y$.

(4) Die **komplexen Zahlen** $(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ sind ein Körper mit $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}] = \{\, x + \mathrm{i}y \,|\, x, y \in \mathbb{R} \,\}$ mit $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{i}^2 = -1$.

(5) Die so definierten Objekte $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ existieren: Es gibt Modelle. Je zwei Modelle sind isomorph, sogar eindeutig isomorph für $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erlauben über $\mathbb{R}$ genau zwei Automorphismen $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \mathrm{conj}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + \mathrm{i}y \mapsto x \pm \mathrm{i}y$, genannt Identität und Konjugation.

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Ich wünsche mir, dass Sie den Aufbau des Zahlensystems kennen. Schwache Version: Sie verstehen die obigen Definitionen und können damit arbeiten. Das ist meistens der Fall, und darauf werde ich bauen, wir werden im Folgenden diese Strukturen nutzen. Sie sollen daher verstehen, was diese Definitionen genau sagen, und sich überzeugen, dass sie die vertrauten Zahlbereiche zutreffend beschreiben.

Starke Version: Sie haben den Aufbau Schritt für Schritt durchgeführt, also die zugehörigen Konstruktionen und Beweise detailliert ausgeführt. Das ist meist nicht der Fall. Ich bedaure das, werde es aber hier nicht heilen können. Am Anfang des Studiums kann man diese Konstruktion vermutlich nicht recht würdigen, und später im Studium machen sich die meisten dann andere Sorgen. Das ist unglücklich, aber leider typisch.

Ich begnüge mich daher hier mit einer Erinnerung bzw. einem Appell. Das ist hoffentlich verschmerzlich und folgt dem historischen Vorbild: Mit jedem Zahlbereich wurde lange gerechnet, ehe er begründet wurde. Wenn Sie bereit dazu sind, studieren Sie gründlich – die Grundlagen!

Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Übung zur Wiederholung: Was bedeuten diese algebraischen Begriffe, kommutativer Halb/Ring, Divisionsring und Körper? Homomorphismen?

Was ist ein geordneter Körper? Was bedeutet hier Vollständigkeit? Welche äquivalenten Formulierungen kennen Sie hierfür?

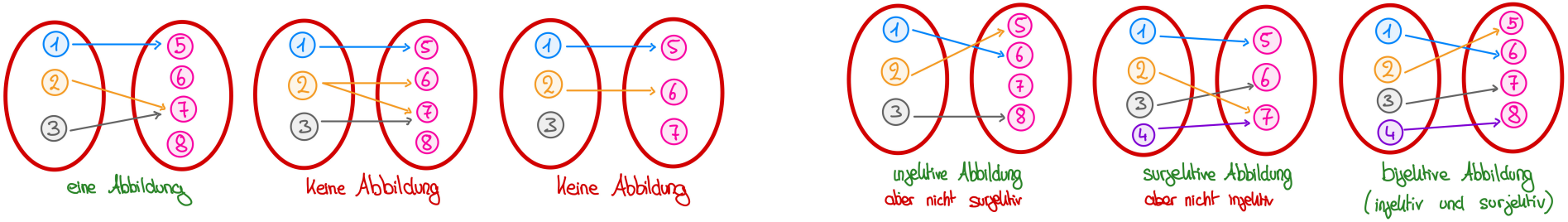
Warum existieren die genannten Objekte? Wie konstruieren Sie diese? Warum sind sie eindeutig? Wie konstruieren Sie die Isomorphismen?

🙂 Der obige zusammenfassende Satz ist eine konzise Erinnerung und definiert eine klare Schnittstelle, auf der wir im Folgenden aufbauen.

```
from __experience__ import numbersystem
from __firstyear__  import numbersystem
from __future__     import numbersystem
```

🙂 Vielleicht überkommt Sie nun doch die mathematische Neugier… Ich empfehle das wunderschöne Buch *Zahlen* von Ebbinghaus *et al.*

Schon der Aufbau des Zahlensystems zeigt uns eindringlich:
Wir benötigen solide Grundlagen in Logik und Mengenlehre!
Diese benötigen wir überall, insbesondere in der Topologie.



This is not to say that the contents of this book are unusually difficult or profound. What is true is that the concepts are very general and very abstract, and that, therefore, they may take some getting used to. [...]

The student's task in learning set theory is to steep himself in unfamiliar but essentially shallow generalities till they become so familiar that they can be used with almost no conscious effort.

Paul Halmos (1916–2006), *Naive set theory*

Universelle Grundlage: Logik und Mengenlehre

Übung zur Wiederholung: Was genau besagt Russels Antinomie? Warum ist sie eine logische Katastrophe? Wie lösen wir diese ernste Grundlagenkrise durch Rechenregeln / Axiome für die Mengenlehre?

Was ist eine Relation? eine Funktion? Wie erklären Sie ihre Komposition? Was bedeutet injektiv, surjektiv, bijektiv? Wie verhält sich dies zu Links/Rechts/Inversen? Wo benötigen Sie dazu das Auswahlaxiom?

Wie faktorisieren Sie eine Funktion über eine Injektion? eine Surjektion? Was bedeutet eine Funktion ist „wohldefiniert“? Was kann schiefgehen? Was ist also immer zu prüfen, wenn Sie eine Funktion definieren?

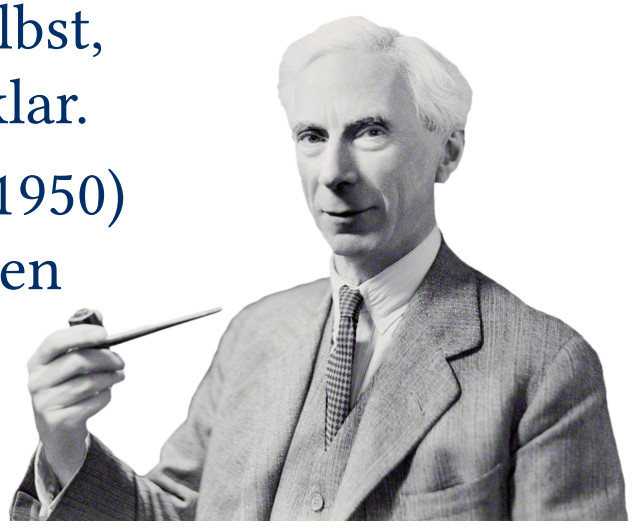
Was bedeutet Äquivalenzrelation? Was ist der zugehörige Quotient? Was ist ein Repräsentantensystem? eine wohldefinierte Eigenschaft? Nennen Sie prominente Beispiele, auch aus Schulmathematik und Alltag.

Was ist eine Ordnungsrelation? eine Präordnung? total vs partiell? kleinstes/größtes Element vs minimale/maximale Elemente? Infimum/Supremum? Nennen Sie aussagekräftige Gegen/Beispiele!

Grundlagenkrise: Russels Antinomie (1903)

Für jede Menge x gilt: Entweder enthält x sich selbst, geschrieben $x \in x$, oder nicht, $x \notin x$. So weit, so klar.

Bertrand Russel (1872–1970, Literaturnobelpreis 1950) veröffentlichte 1903 folgende Antinomie der naiven Mengenlehre: Wir untersuchen die Klasse



$$\mathscr{R} = \{\, x \mid x \notin x \,\}.$$

Für jede Menge x gilt $x \in \mathscr{R} \Leftrightarrow x \notin x$. Ist $\mathscr{R}$ eine Menge? Falls ja, so folgt $\mathscr{R} \in \mathscr{R} \Leftrightarrow \mathscr{R} \notin \mathscr{R}$. Logische Katastrophe: Wahr und Falsch sind äquivalent!
Falls die Menge $\mathscr{R}$ existiert, so bricht unsere gesamte Logik zusammen.

☹ Nicht alles, was wir formulieren können, ist tatsächlich sinnvoll.
Einzig möglicher Ausweg: Diese Klasse $\mathscr{R}$ ist gar keine Menge!
Die allzu naive Frage „Gilt $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$ oder $\mathscr{R} \notin \mathscr{R}$?“ ist damit sinnlos.

☺ Wir müssen die Konstruktion von Mengen reglementieren!
So restriktiv wie nötig, um Paradoxien wie die obige zu vermeiden.
So expressiv wie möglich, um alles zu formulieren, was wir brauchen.

Die Zermelo–Fraenkel–Axiome: ZF+AC = ZFC

Wir arbeiten in einem Mengenuniversum $(\mathcal{U}, \in, =, \{\}, \bigcup, \mathfrak{P}, \mathfrak{A}_\bullet, \mathfrak{B}_\bullet, \omega, \mathfrak{C})$.
Auf dieser virtuellen Maschine führen wir die gesamte Mathematik aus.

(ZF0) **Fundierung:** In $(\mathcal{U}, \in)$ ist jede Kette $M_0 \ni M_1 \ni M_2 \ni \dots$ endlich.

(ZF1) **Extensionalität:** Für $A, B \in \mathcal{U}$ gilt $A = B$, falls $A \subseteq B$ und $A \supseteq B$.

(ZF2) **Aufzählung:** Zu $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{U}$ existiert $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{U}$.

(ZF3) **Vereinigung:** Zu jeder Menge $S \in \mathcal{U}$ existiert $\bigcup S \in \mathcal{U}$.

(ZF4) **Potenz:** Zu jeder Menge $A \in \mathcal{U}$ existiert $\mathfrak{P}(A) \in \mathcal{U}$.

(ZF5) **Aussonderung:** Zu jedem Prädikat $\varphi : \mathcal{U} \to \{0, 1\}$ und jeder Menge $B \in \mathcal{U}$ existiert die Aussonderungsmenge $A = \{\, x \in B \mid \varphi(x) \,\} \in \mathcal{U}$.

(ZF6) **Ersetzung:** Zu jeder Zuordnung $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ und jeder Menge $A \in \mathcal{U}$ existiert die Ersetzungsmenge $B = \{\, f(x) \mid x \in A \,\} \in \mathcal{U}$.

(ZF7) **Unendlichkeit:** Es existiert die unendliche Menge $\omega \in \mathcal{U}$ erzeugt durch $\emptyset \in \omega$ und rekursiv $\forall n \in \omega : (n \cup \{n\}) \in \omega$.

(ZF8) **Auswahl:** Die Zuordnung $\mathfrak{C} : \mathcal{U}^* \to \mathcal{U} : a \mapsto x$ erfüllt $x \in a$.

Übung: Explizieren Sie die Definition aller hier verwendeten Begriffe!

Wie vergleichen wir die Größe von Mengen?

Definition B2Q: Mächtigkeit von Mengen

Die Mächtigkeit von Mengen X und Y vergleichen wir wie folgt durch Abbildungen, mit Hilfe von Bijektionen, Injektionen und Surjektionen:

1. Äquipotenz $X \cong Y$ bedeutet, es existiert eine Bijektion $(h, k) : X \cong Y$. Die Mengen X und Y sind gleich groß / gleichmächtig / äquipotent.
2. Die Relation $X \preceq Y$ bedeutet, es existiert eine Injektion $f : X \hookrightarrow Y$. Interpretation: „Die Menge X ist höchstens so groß wie Y.“
3. $Y \succeq X$ bedeutet, es existiert eine Surjektion $g : Y \twoheadrightarrow X$ oder $X = \emptyset$. Interpretation: „Die Menge Y ist mindestens so groß wie X.“

Gilt $X \cong \{1, \ldots, n\}$, so ist X **endlich**, mit Elementezahl $\sharp X = n$.
Gilt $X \cong \mathbb{N}$, so nennen wir die Menge X **abzählbar unendlich**.
Abzählbar bedeutet $X \preceq \mathbb{N}$, das heißt X ist entweder endlich oder abzählbar unendlich; andernfalls ist X **überabzählbar**.

Vor Cantor galten unendliche Mengen als paradox, insbesondere ihre Größenvergleiche. Cantors genial-einfache Definition räumt damit auf.

Wie vergleichen wir die Größe von Mengen?

Beispiel: Im Hörsaal befinden sich weniger Personen (X) als Sitze (Y): Dazu muss ich weder X noch Y zählen, Hinsetzen $X \hookrightarrow Y$ genügt!

Die Relation $X \preceq Y :\Leftrightarrow \exists f : X \hookrightarrow Y$ ist reflexiv dank $\mathrm{id}_X : X \hookrightarrow X$ und transitiv, denn die Komposition zweier Injektionen ergibt eine Injektion.

Die Relation $Y \succeq X :\Leftrightarrow (\exists g : Y \twoheadrightarrow X) \vee X = \emptyset$ ist äquivalent zu $X \preceq Y$: Zu jeder Surjektion $g : Y \twoheadrightarrow X$ existiert $f : X \hookrightarrow Y$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (AC). Umgekehrt, zu $f : X \hookrightarrow Y$ existiert $g : Y \twoheadrightarrow X$, oder es gilt $X = \emptyset$.

Strikt kleiner: Wie üblich schreiben wir $X \prec Y$ für $X \preceq Y \wedge Y \not\preceq X$.
Strikt größer: Wie üblich schreiben wir $Y \succ X$ für $Y \succeq X \wedge X \not\succeq Y$.

Die Relation $X \cong Y :\Leftrightarrow \exists (h, k) : X \cong Y$ ist reflexiv dank $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : X \cong X$, symmetrisch dank Vertauschung und transitiv dank Komposition.

Satz von Cantor–Bernstein (B20): Aus $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$ folgt $X \cong Y$, denn aus $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$ konstruieren wir $(h, k) : X \cong Y$.

Beispiel: Wie ermitteln zwei Kinder, die noch nicht zählen können, wer mehr Legosteine hat? Vergleichbarkeitssatz B2R von Cantor–Zermelo!

Beispiel: endliche Mengen

Für alle natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gelten die vertrauten Beziehungen:

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} &\cong \{1, \dots, n\} &&\Leftrightarrow && m = n \\ \{1, \dots, m\} &\preceq \{1, \dots, n\} &&\Leftrightarrow && m \leq n \\ \{1, \dots, m\} &\prec \{1, \dots, n\} &&\Leftrightarrow && m < n \end{aligned}$$

Das klingt plausibel und leuchtet sofort ein, verdient aber einen Beweis. Führen Sie zur Wiederholung das Argument per Induktion sorgsam aus. Das bedeutet, dass die Mächtigkeit *endlicher* Mengen genau das leistet, was wir uns erhoffen, nämlich den üblichen Vergleich nach Elementezahl.

Es gilt $\{1, \dots, n\} \prec \mathbb{N}$. Warum? Zunächst haben wir $\mathrm{inc} : \{1, \dots, n\} \hookrightarrow \mathbb{N}$. Umgekehrt, ist $f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, so ist f nicht surjektiv. Auch das klingt plausibel und leuchtet sofort ein, verdient aber dennoch einen Beweis. Hierzu betrachten $m = \sup(f) \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ gilt $m = 0$. Für $n \geq 1$ gilt induktiv $m = \max\{\ f(n),\ \sup(f|_{\{1,\dots,n-1\}})\ \} \in \mathbb{N}$. Das nachfolgende Element $m + 1$ liegt nicht im Bild von f.

Beispiel: Galileis Paradox (1638)

Aufgabe: Ist die Menge $Q = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ der Quadratzahlen kleiner als die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ der natürlichen Zahlen?
Galilei schloss voreilig, dass Größenvergleiche für unendliche Mengen unsinnig sind. Cantor erkannte, dass dies dennoch möglich ist.

Lösung: (1) Im Sinne der Inklusion haben wir $Q \subsetneq \mathbb{N}$.
Im Poset $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ist demnach Q strikt kleiner als $\mathbb{N}$.

(2) Wir haben die Bijektion $(h, k) : \mathbb{N} \cong Q$ mit $h(x) = x^2$ und $k(y) = \sqrt{y}$.
Im Sinne der Mächtigkeit sind beide Mengen demnach gleich groß!

⚠ Die Formulierungen „größer als“ oder „kleiner als“ oder „gleich groß“ sind daher missverständlich, solange der Kontext nicht präzisiert wird. Das Ergebnis hängt entscheidend davon ab, welche Ordnungsrelation wir dabei zu Grunde legen, wie hier an $\subseteq$ und $\preceq$ eindrücklich zu sehen.

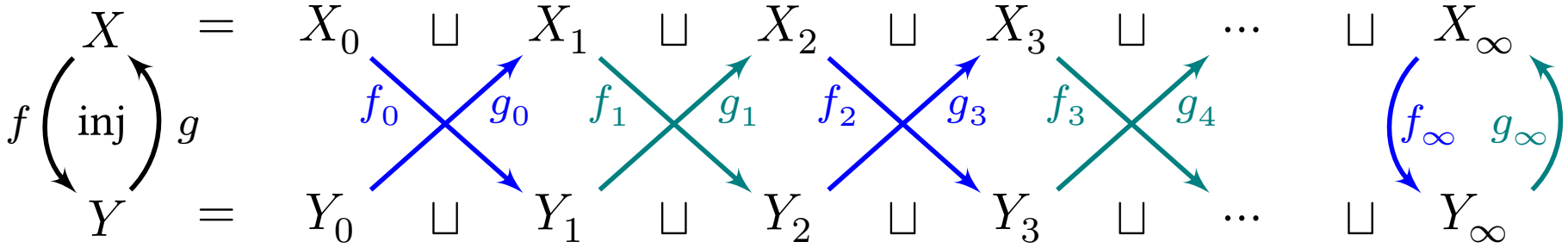
🙂 Um mögliche Missverständnisse zu vermeiden, sagen wir statt *gleich groß* genauer *gleichmächtig* oder *äquipotent* im Sinne der Definition B2Q.
Die Mengen $\mathbb{N}$ und Q sind demnach gleichmächtig, sie haben dieselbe **Mächtigkeit**, wir sagen auch: sie haben dieselbe **Kardinalität**.

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Satz B2o: Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Aus $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$ folgt $X \cong Y$. Genauer: Aus Injektionen $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$ konstruieren wir explizit eine Bijektion $(h, k) : X \cong Y$.

Jedes Element $x_0 \in X$ hat seine Urbildkette $x_0 \overset{f}{\hookleftarrow} y_1 \overset{g}{\hookleftarrow} x_2 \overset{f}{\hookleftarrow} y_3 \overset{g}{\hookleftarrow} \dots$ maximaler Länge $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Die Elemente der Länge n bilden die Menge $X_n \subseteq X$. Entsprechend definieren wir $Y_n \subseteq Y$. Wir erhalten:



Cantors Reißverschluss: Auf $X = \bigsqcup_n X_n$ und $Y = \bigsqcup_n Y_n$ zerlegen wir f und g jeweils in die Bijektionen $f_n : X_n \xrightarrow{\sim} Y_{n+1}$ und $g_n : Y_n \xrightarrow{\sim} X_{n+1}$. So erhalten wir zueinander inverse Bijektionen $(h, k) : X \cong Y$ vermöge $h = f_0 \sqcup g_0^{-1} \sqcup f_2 \sqcup g_2^{-1} \sqcup \dots \sqcup f_\infty$ und $k = g_0 \sqcup f_0^{-1} \sqcup g_2 \sqcup f_2^{-1} \sqcup \dots \sqcup f_\infty^{-1}$.

🙂 Cantors Reißverschluss gelingt konstruktiv, ohne das Auswahlaxiom!

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Der Äquivalenzsatz B20 hat eine faszinierend turbulente Geschichte. Er wurde 1887 von Georg Cantor formuliert, aber erst zehn Jahre später 1897 bewiesen. Dies gelang dem damals erst 19-jährigen Studenten Felix Bernstein in Cantors Seminar an der Universität Halle. Zeitgleich und unabhängig veröffentlichte Ernst Schröder einen Beweis, der sich jedoch später als fehlerhaft erwies. Bereits 1887 fand Richard Dedekind einen Beweis, den er aber nicht veröffentlichte. Das genial-einfach-konstruktive Reißverschlussverfahren wurde 1906 von Julius König veröffentlicht.

Satz B20 garantiert, dass wir Mengen nach Mächtigkeit ordnen können. Wir definieren die strikte Ordnung $X \prec Y$ durch $X \preceq Y$ und $Y \not\preceq X$ und entsprechend $X \succ Y$ durch $X \succeq Y$ und $Y \not\succeq X$. Demnach gilt also *höchstens* eine der drei Alternativen $X \prec Y$ oder $X \cong Y$ oder $X \succ Y$.

Der Vergleichbarkeitssatz B2R von Cantor–Zermelo vervollständigt dies durch die Aussage, dass sich je zwei Mengen vergleichen lassen; demnach gilt *genau* eine der drei Alternativen $X \prec Y$ oder $X \cong Y$ oder $X \succ Y$. (Letzteres benötigt das Auswahlaxiom, etwa in Form von Zorns Lemma.)

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Beweis: Gegeben sind $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$. Die beiden Mengen

$$X_0 := X \setminus g(Y) \quad \text{und} \quad Y_0 := Y \setminus f(X)$$

enthalten alle Elemente ohne Urbild. Per Rekursion enthalten

$$X_{n+1} := g(Y_n) \quad \text{und} \quad Y_{n+1} := f(X_n)$$

alle Elemente mit Urbildfolge der Länge $n+1$. Schließlich enthalten

$$X_\infty := \bigcap\nolimits_{\ell\in\mathbb{N}} (g \circ f)^\ell(X) \quad \text{und} \quad Y_\infty := \bigcap\nolimits_{\ell\in\mathbb{N}} (f \circ g)^\ell(Y)$$

alle Elemente mit unendlicher Urbildfolge. Wir definieren

$$h : X \to Y : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \bigsqcup_{\ell\in\mathbb{N}} X_{2\ell} \sqcup X_\infty, \\ y & \text{für } x = g(y) \in \bigsqcup_{\ell\in\mathbb{N}} X_{2\ell+1}, \end{cases}$$

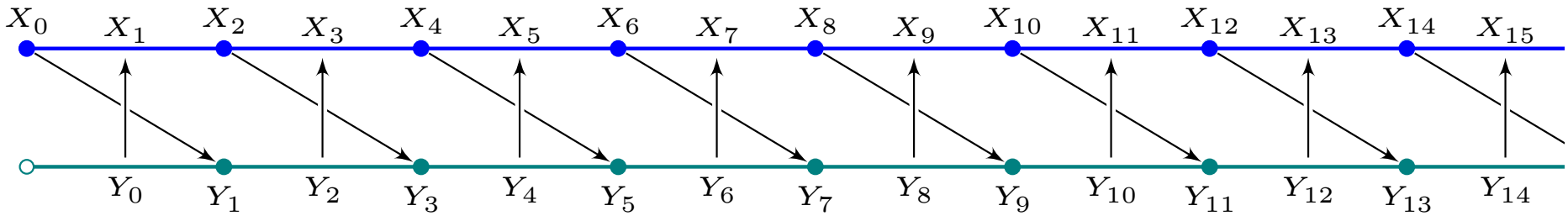
$$k : Y \to X : y \mapsto \begin{cases} x & \text{für } y = f(x) \in \bigsqcup_{\ell\in\mathbb{N}} Y_{2\ell+1} \sqcup Y_\infty, \\ g(y) & \text{für } y \in \bigsqcup_{\ell\in\mathbb{N}} Y_{2\ell}. \end{cases}$$

Damit gilt $k \circ h = \mathrm{id}_X$ und $h \circ k = \mathrm{id}_Y$, wie gewünscht. QED

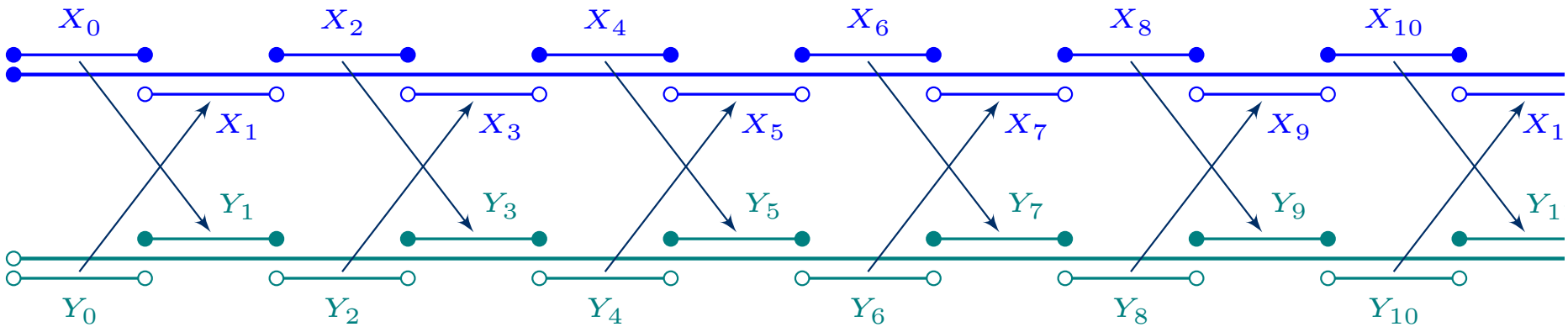
Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Beispiel: Die Intervalle $X = [0, \infty[$ und $Y =]0, \infty[$ sind gleichmächtig.

Beweis: Wir haben $f : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x + 1$ und $g = \mathrm{inc} : Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$. Cantor–Bernstein konstruiert daraus die Bijektion $(h, k) : X \cong Y$ mit $(h, k) : \mathbb{N} \cong \mathbb{N}_{\geq 1} : x \leftrightarrow x + 1$ und $h(x) = k(x) = x$ für $x \notin \mathbb{N}$. Skizze:



Alternative: Wir nutzen $f : x \mapsto x + 1$ und $g : y \mapsto y + 1$. Skizze:



Beispiel: Die Intervalle $X = [0, 3]$ und $Y = [0, 2[$ sind gleichmächtig vermöge $f : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x/2$ und $g : Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$. Siehe Satz B2L.

Mächtigkeit der Primzahlmenge

Aufgabe: Ist die Menge $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ der Primzahlen strikt kleiner als die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ der natürlichen Zahlen?

Lösung: (1) Im Sinne der Inklusion haben wir $\mathbb{P} \subsetneq \mathbb{N}$.
Im Poset $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ist demnach $\mathbb{P}$ strikt kleiner als $\mathbb{N}$.

(2) Dennoch existiert eine Bijektion $(h, k) : \mathbb{N} \cong \mathbb{P}$.
Im Sinne der Mächtigkeit sind beide Mengen gleich groß!

Ausführliche Konstruktion: Dank Satz ?? ist die Menge $\mathbb{P}$ unendlich.
Ihre Elemente können wir aufsteigend anordnen zu $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$.
Dies stiftet die (kanonische, isotone) Bijektion $h : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P} : n \mapsto p_n$.

🙂 Computer-Algebra-Systeme implementieren diese Abbildung $h : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}$ als eine Funktion, etwa `Prime[n]` oder `ithprime(n)`.

⚠ Die Bijektion $h : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}$ ist leicht zu *definieren*, aber aufwändig zu *berechnen*. Beispiele: Was ist $h(1000)$? $h(10^6)$? $h(10^9)$? $h(10^{12})$?
Immerhin haben wir explizite und recht genaue Schranken für das Wachstum dieser Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ (Primzahlsatz).

Mächtigkeit der Primzahlmenge

Woher wissen wir, dass es wirklich *unendlich* viele Primzahlen gibt?
Das ist ein Satz… wir haben einen Beweis… sogar eine Konstruktion:
Zu je gegebenen Primzahlen $p_0, \dots, p_n$ liefert Euklids Konstruktion

$$p_{n+1} := \operatorname{lpf}(p_0 \cdots p_n + 1)$$

eine weitere Primzahl. So erhalten wir eine Injektion $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{P} : n \mapsto p_n$.
Es gibt jedoch keinen Grund, dass diese Abbildung f zudem surjektiv ist.
Wir haben also nur eine Injektion $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{P}$, das ist schon viel wert.
Umgekehrt liefert die Inklusion $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ gratis eine Injektion $g : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{N}$.

Wäre es nicht schön, wenn wir allgemein aus Injektionen $f : X \hookrightarrow Y$
und $g : Y \hookrightarrow X$ eine Bijektion $(h, k) : X \cong Y$ konstruieren könnten?
Genau das leistet der Äquivalenzsatz B2o von Cantor–Bernstein,
ebenso einfach wie elegant, ebenso konstruktiv wie explizit.

Zugegeben, die Bijektion $\mathbb{P} \cong \mathbb{N}$ ist dazu nur ein allzu einfaches Beispiel,
das wir leicht auch anders lösen können, ganz konkret wie oben gezeigt.
Doch es illustriert den konstruktiven Nutzen des Äquivalenzsatzes.

Der Vergleichbarkeitssatz von Cantor–Zermelo

Ist die Relation $\preceq$ total? Lassen sich also je zwei Mengen X und Y vergleichen gemäß $X \preceq Y$ oder $Y \preceq X$? Das scheint plausibel, erfordert aber einen Beweis. Für endliche Mengen gelingt dies durch Abzählung, für beliebige unendliche Mengen benötigen wir das Auswahlaxiom!

Satz B2R: Vergleichbarkeitssatz von Cantor–Zermelo

Zu je zwei Mengen X und Y existiert eine Injektion $X \hookrightarrow Y$ oder $Y \hookrightarrow X$.

Beweis: Eine **partielle Bijektion** zwischen X und Y ist eine Bijektion $(h, k) : A \cong B$ zwischen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$, also $k \circ h = \mathrm{id}_A$ und $h \circ k = \mathrm{id}_B$. Wir definieren $(h, k) \subseteq (h', k')$ durch $A \subseteq A'$ und $B \subseteq B'$ sowie $h(x) = h'(x)$ für alle $x \in A$ und $k(y) = k'(y)$ für alle $y \in B$.

Ist S eine Kette partieller Bijektionen, so ist auch ihre Vereinigung $\bigcup S$ eine partielle Bijektion. Wir können das Lemma von Zorn anwenden: Es existiert eine maximale partielle Bijektion $(h, k) : A \cong B$.

Wäre $A \subsetneq X$ und $B \subsetneq Y$, so könnten wir (h, k) fortsetzen. Also gilt $A = X$ und somit $h : X \hookrightarrow Y$, oder es gilt $B = Y$ und somit $k : Y \hookrightarrow X$. QED

Der Vergleichbarkeitssatz von Cantor–Zermelo

Der Vergleich $X \preceq Y$ von Mengen ist eine Präordnung, da reflexiv und transitiv. Nach dem Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein ist er zudem antisymmetrisch bis auf Bijektion: Aus $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$ folgt $X \cong Y$. Wir stellen nun erfreut fest, dass der Vergleich total ist.

Der Vergleichbarkeitssatz B2R von Cantor–Zermelo ist zwar hilfreich, doch notgedrungen nicht-konstruktiv: Er benötigt das Auswahlaxiom, im oben angegebenen Beweis in Form von Zorns Lemma.

Wenn wir also die Mächtigkeit von zwei Mengen vergleichen wollen, so garantiert dieser Satz, dass der Vergleich im Prinzip immer gelingt, gibt uns aber keinen Hinweis, wie dies konkret zu bewerkstelligen sei.

Der Äquivalenzsatz B2O von Cantor–Bernstein hingegen benötigt nicht das Auswahlaxiom: Das oben angegebene Reißverschlussverfahren ist konstruktiv, aus $(f, g) : X \rightleftarrows Y$ konstruieren wir explizit $(h, k) : X \cong Y$.

Wenn wir also die Gleichmächtigkeit von zwei Mengen zeigen wollen, so genügt es, gegenseitige Injektionen herzustellen. Das ist oft wesentlich einfacher und wird uns in der praktischen Anwendung oft nützen.

Mächtigkeit der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Satz B2A: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig, kurz $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$.

Beweisidee: Dies gelingt explizit vermöge $(f, g) : \mathbb{N} \cong \mathbb{Z} : a \leftrightarrows b$ mit

$a \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$b \in \mathbb{Z}$	0	-1	$+1$	-2	$+2$	-3	$+3$	-4	$+4$	-5	$+5$	...

Aufgabe: Formulieren Sie dieses Bijektionspaar explizit.

Lösung: Wir fassen diese Idee in explizite Formeln:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : a \mapsto \begin{cases} a/2 & \text{falls } a \in 2\mathbb{N}, \\ -(a+1)/2 & \text{falls } a \in 2\mathbb{N}+1, \end{cases}$$

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : b \mapsto \begin{cases} 2b & \text{falls } b \geq 0, \\ -2b-1 & \text{falls } b < 0. \end{cases}$$

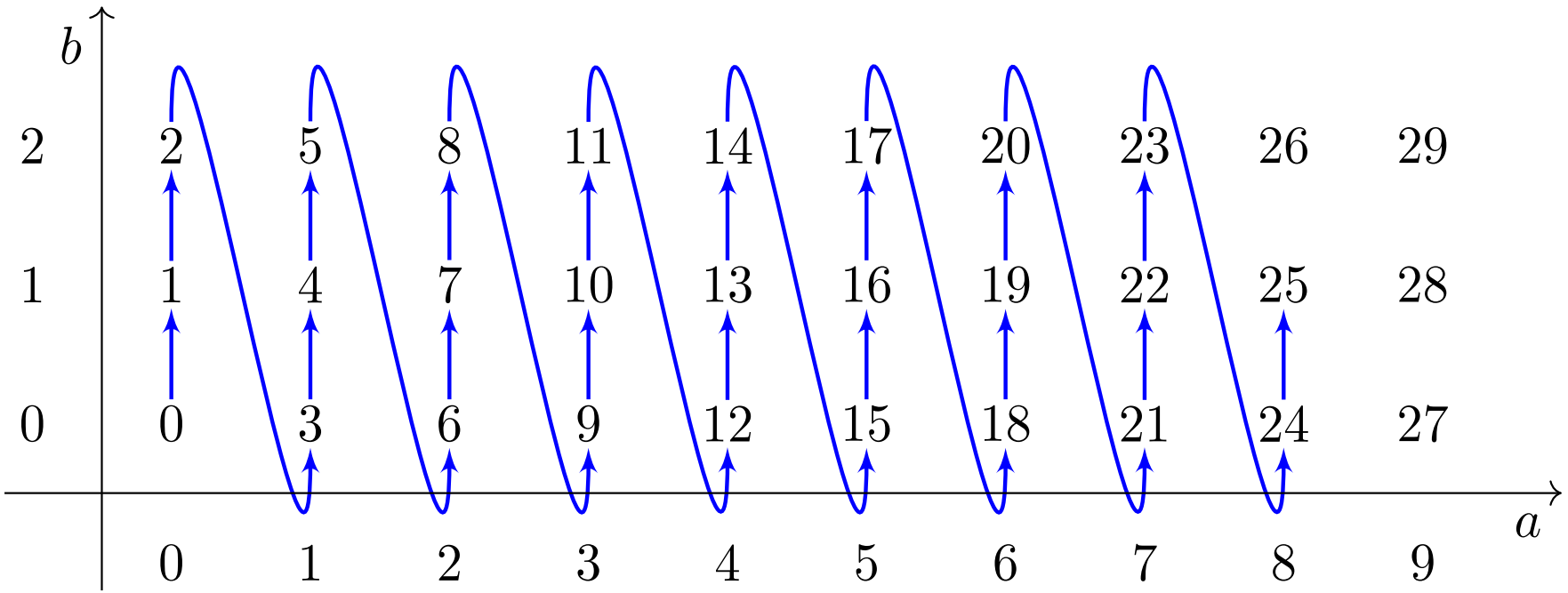
Diese Abbildungen sind wohldefiniert und zueinander invers, es gilt also $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Nachrechnen!

QED

Mächtigkeit des Produkts $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$

Satz B2B: Auch $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$ ist abzählbar.

Die Mengen $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig.



Aufgabe: Formulieren Sie dieses Bijektionspaar explizit.

Lösung: Wir nutzen zunächst $\{1, \dots, n\} \cong \{0, \dots, n-1\} : k \leftrightarrows k-1$.
Zudem haben wir das Bijektionspaar $(f, g) : \mathbb{N} \times \{0, \dots, n-1\} \cong \mathbb{N}$
mit $f(a, b) = na + b$ und $g(c) = (c \operatorname{quo} n, c \operatorname{rem} n)$. QED

Grundrechenarten für Mächtigkeiten

Satz B2c: Grundrechenarten für Mächtigkeiten

Gegeben seien Bijektionen $(\alpha, \alpha') : A \cong A'$ und $(\beta, \beta') : B \cong B'$.
Daraus erhalten wir kanonische Bijektionen für Summe und Produkt:

$$(\alpha \sqcup \beta, \alpha' \sqcup \beta') : A \sqcup B \cong A' \sqcup B',$$
$$(\alpha \times \beta, \alpha' \times \beta') : A \times B \cong A' \times B',$$

Für die Abbildungsmengen erhalten wir die kanonische Bijektion

$$(\varphi, \varphi') : \operatorname{Abb}(A, B) \cong \operatorname{Abb}(A', B')$$

vermöge $\varphi(f) = \beta \circ f \circ \alpha'$ und $\varphi'(f') = \beta' \circ f' \circ \alpha$. Zudem haben wir

$$(\psi, \psi') : (Z^X)^Y \cong Z^{X \times Y} : f \leftrightarrows g$$

vermöge $g(x, y) = f(y)(x)$ für $f : Y \to \operatorname{Abb}(X, Z)$ und $g : X \times Y \to Z$.

Beweis: Diese Abbildungen sind wohldefiniert und zueinander invers:
Alles liegt explizit vor, es genügt sorgsames Nachrechnen! QED

Grundrechenarten für Mächtigkeiten

Für die erste Bijektion $A \sqcup B \cong A' \sqcup B'$ setzen wir Disjunktheit voraus, also $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$. Dies können wir immer erzwingen durch

$$(\{1\} \times A) \sqcup (\{2\} \times B) \cong (\{1\} \times A') \sqcup (\{2\} \times B')$$

Anschaulich gesagt, wir ersetzen die Menge A durch die Kopie $\{1\} \times A$; zwischen beiden übersetzen wir durch die kanonische Bijektion (ι_2, pr_2). Entsprechend verfahren wir für $\{2\} \times B$ sowie $\{1\} \times A'$ und $\{2\} \times B'$.

Beispiel: Es gilt $(\{1\} \times \mathbb{N}) \sqcup (\{2\} \times \mathbb{N}) = \{1,2\} \times \mathbb{N} \cong \{0,1\} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$. Dies ist die Vereinigung von zwei disjunkten Kopien der Menge $\mathbb{N}$, die Mächtigkeit bleibt dabei gleich, wie oben gesehen (B2B).

Beispiel: Aus $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ folgt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dank B2C.
Wir werden im Folgenden sehen, dass $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$ gilt (**??**).

Beispiel: Aus $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ folgt $\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{N}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ dank B2C.
Wir zeigen im Folgenden $\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ (B2D).

Mächtigkeit des Produkts $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(0,4) \mapsto 10$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$(5,4)$
$(0,3) \mapsto 6$	$(1,3) \mapsto 11$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$(5,3)$
$(0,2) \mapsto 3$	$(1,2) \mapsto 7$	$(2,2) \mapsto 12$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(5,2)$
$(0,1) \mapsto 1$	$(1,1) \mapsto 4$	$(2,1) \mapsto 8$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$
$(0,0) \mapsto 0$	$(1,0) \mapsto 2$	$(2,0) \mapsto 5$	$(3,0) \mapsto 9$	$(4,0)$	$(5,0)$

Es existieren Bijektionen $(f, g) : \mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$. Sogar verblüffend elegant:

Satz B2A: Cantors erstes Diagonalargument

Die Abbildung $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a, b) \mapsto a + (a + b)(a + b + 1)/2$ ist bijektiv.

Cantors Paarungsfunktion $f : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$

🙂 Es ist höchst erstaunlich, dass uns die Bijektion $f : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ explizit mit einer so einfachen Funktion gelingt, einem Polynom zweiten Grades!

Aufgabe: Formulieren Sie explizit das Bijektionspaar $(f, g) : \mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$.

Lösung: Wir übersetzen die obige Skizze in eine Rekursion:

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 : \quad g(0) = (0,0) \text{ und } g(n+1) = \varphi(g(n)),$$

$$\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2 : (a,b) \mapsto \begin{cases} (a+1, b-1) & \text{falls } b > 0, \\ (0, a+1) & \text{falls } b = 0. \end{cases}$$

Explizit ausgeschrieben gilt demnach $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 : c \mapsto (a,b)$ mit $s = \max\{ n \in \mathbb{N} \mid n(n+1)/2 \leq c \}$ und $a = c - s(s+1)/2$ und $b = s - a$.

Die Umkehrfunktion ist erfreulich einfach (dank dem kleinen Gauß):

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a,b) \mapsto a + (a+b)(a+b+1)/2$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert und zueinander invers, also $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^2}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Nachrechnen, per Induktion! QED

Abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

Die Vereinigung $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}}\{i\}\times\mathbb{N}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist abzählbar dank **??**. Allgemein:

Satz B2B: abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

Jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar:
Sei I eine abzählbare Indexmenge. Zu jedem Index $i\in I$ sei A_i eine abzählbare Menge. Dann ist auch $A=\bigcup_{i\in I}A_i$ abzählbar.

Beweis: Gegeben seien $f:I\hookrightarrow\mathbb{N}$ und $g_i:A_i\hookrightarrow\mathbb{N}$ für jedes $i\in I$.

$$\begin{tikzcd}
A=\bigcup_{i\in I}A_i \arrow[rr, hook, dashed, "h"] \arrow[d, hook, shift left, "r"] & & \mathbb{N} \\
A'=\bigsqcup_{i\in I}\{i\}\times A_i \arrow[u, two heads, shift left, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[rr, hook, "(i,a)\mapsto(f(i),g_i(a))"] & & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[u, hook, "??"']
\end{tikzcd}$$

Nach Indexwechsel dürfen wir $I\subseteq\mathbb{N}$ annehmen. Eine Rechtsinverse zu $\mathrm{pr}_2:A'\twoheadrightarrow A$ ist $r:a\mapsto(j,a)$ mit $j=\min\{\,i\in I\,|\,a\in A_i\,\}$ dank **??**.
Somit gilt $A\preceq A'\preceq\mathbb{N}\times\mathbb{N}\preceq\mathbb{N}$. Dank Transitivität folgt $A\preceq\mathbb{N}$. $\boxed{\text{QED}}$

Abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

Korollar B2D: Mächtigkeit von $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$

(1) Es gilt $\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(2) Es gilt $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \cong \mathbb{N}$ für die Menge aller Folgen mit endlichem Träger:

$$\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} := \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,\middle|\, \sharp\,\mathrm{supp}(f) < \infty \right\}.$$

(3) Hingegen ist die Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \}$ überabzählbar.

Beweis: (1) Induktion über $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: Für $n = 1$ gilt $\mathbb{N}^1 \cong \mathbb{N}$.
Für $n \geq 2$ finden wir $\mathbb{N}^n = \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ dank **??**.

(2) Die Menge $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ ist eine abzählbare Vereinigung (**??**) gemäß

$$\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,\middle|\, \mathrm{supp}(f) \subseteq \{0, \dots, n\} \right\}.$$

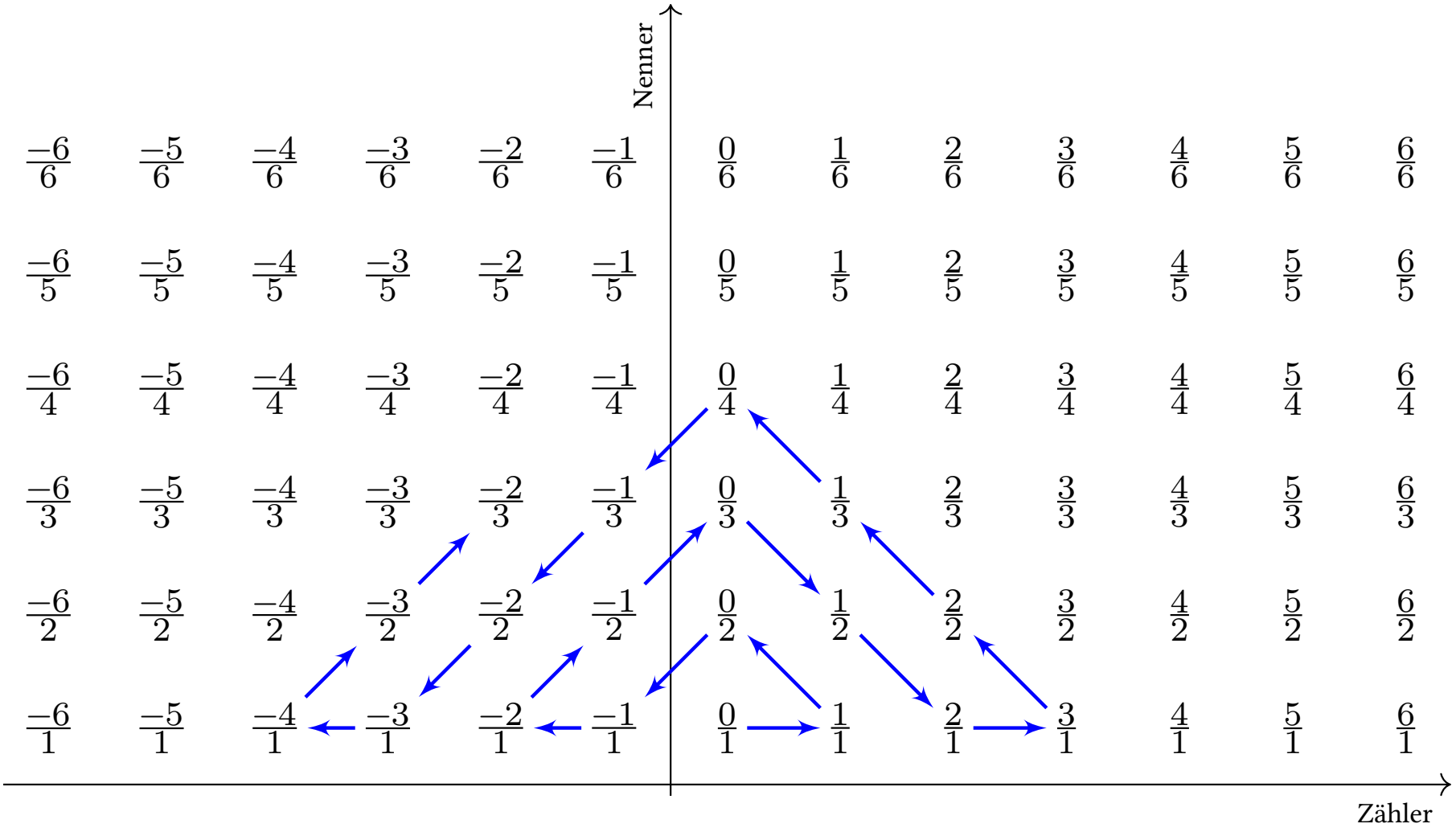
(3) Wir haben $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar;
das beweisen wir unten mit Cantors zweitem Diagonalargument B2G.

Beispiel: Der Fundamentalsatz der Arithmetik zeigt $(\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, +) \cong (\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot)$
vermöge der Zuordnung $(a_0, a_1, a_2, \dots) = a \mapsto n = 2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \cdots$.

Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Satz B2E: Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich, kurz $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$.



Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Es gibt viele Möglichkeiten, eine solche Abzählung auszuführen.
Die Skizze zeigt eine anschauliche, graphische Vorgehensweise.
📖 Eine raffiniert-explizite Abzählung konstruieren N. Calkin, H. Wilf: *Recounting the Rationals.* Amer. Math. Monthly 107 (2000) 360-363.

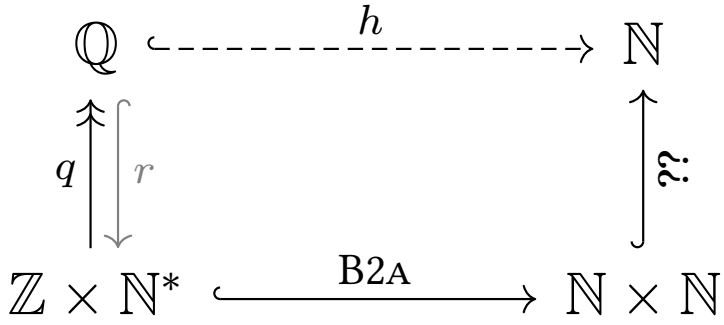
Wir wollen eine Bijektion $\mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{Q}$ konstruieren. Bei der oben skizzierten Abzählung werden tatsächlich alle rationalen Zahlen durchlaufen, jedoch müssen mehrfache Darstellungen derselben Zahl übergangen werden. Die Grundidee ist anschaulich anhand der Skizze vollkommen klar, doch eine vollständige Präzisierung scheint zunächst schwierig.

Um dies sorgfältig und explizit auszuformulieren, ist es geschickt, unsere bisherigen Konstruktionen gewinnbringend einzusetzen:
Wir haben einerseits $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, andererseits ist $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\, z/n \mid z \in \mathbb{Z} \,\}$ abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, also abzählbar dank **??**.
Aus $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{N}$ erhalten wir $(h, k) : \mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ dank Satz B2o.
Damit gelingt eine ebenso präzise wie konkrete Konstruktion.
Wir müssen nur den Mut fassen, alles auszuschreiben!

Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Beweis: Wir haben einerseits die Inklusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, also $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$.
Die rationalen Zahlen sind also mindestens abzählbar unendlich.

Andererseits haben wir die Surjektion $q : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \twoheadrightarrow \mathbb{Q} : (a, b) \mapsto a/b$.



Somit gilt $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$. Dank Transitivität folgt $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$.
Die rationalen Zahlen sind also höchstens abzählbar unendlich.

🙂 Dank Cantor–Bernstein B2o gilt $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$. QED

Bemerkung: Die Quotientenabbildung $q : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \twoheadrightarrow \mathbb{Q} : (a, b) \mapsto a/b$ erlaubt eine schöne explizite Rechtsinverse $r : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : c \mapsto (a, b)$ mit $c = a/b$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$: Dies ist die eindeutige Darstellung als vollständig gekürzter Bruch. Wir haben also $(r, q) : \mathbb{Q} \leftrightarrows \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

🙂 *Beautiful is better than ugly. Explicit is better than implicit.*

Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Korollar B2F: Mächtigkeit von $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$

(1) Es gilt $\mathbb{Q}^n \cong \mathbb{N}$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(2) Es gilt $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} \cong \mathbb{N}$ für die Menge aller Folgen mit endlichem Träger:

$$\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} := \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid \sharp\,\mathrm{supp}(f) < \infty \}.$$

(3) Hingegen ist die Menge $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \}$ überabzählbar.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussagen als Wiederholung und Übung.

Lösung: Dies beweisen wir wörtlich wie in B2D mit Hilfe von Satz B2C.

(1) Wir führen Induktion über $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: Für $n = 1$ gilt $\mathbb{Q}^1 \cong \mathbb{N}$ (B2E).
Für $n \geq 2$ finden wir induktiv $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q}^{n-1} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (??).

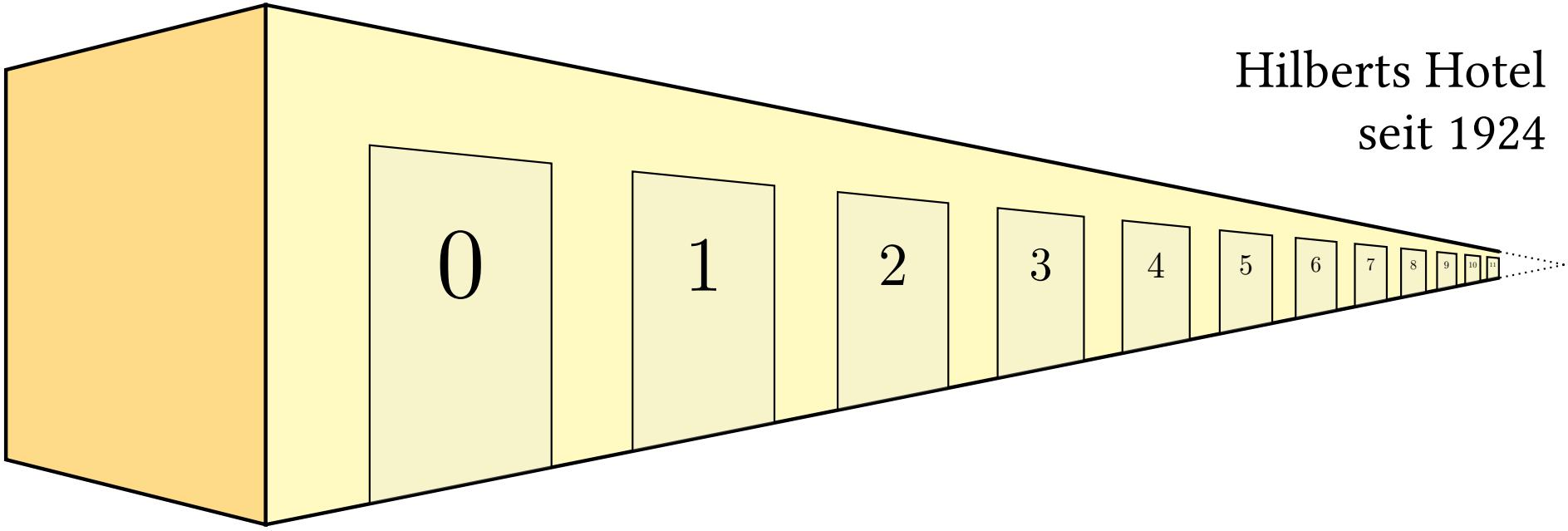
(2) Die Menge $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ ist eine abzählbare Vereinigung (??) gemäß

$$\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid \mathrm{supp}(f) \subset \{0, \dots, n\} \}$$

(3) Wir haben $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar;
das beweisen wir unten mit Cantors zweitem Diagonalargument B2G.

Hilberts Hotel

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können. (David Hilbert)



Hilberts Hotel hat die Zimmer $0, 1, 2, 3, \ldots$. Alle Zimmer sind belegt.
Ein weiterer Gast kommt noch unter, dank $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$,
... auch abzählbar viele neue Gäste, dank $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto 2n$,
... sogar $\mathbb{N}^2 \hookrightarrow \mathbb{N} : (a, b) \mapsto a + (a + b)(a + b + 1)/2$.

Hilberts Hotel

Wenn in einem **endlichen Hotel** alle Zimmer belegt sind, dann kann kein Gast mehr aufgenommen werden, auch wenn die Managerin die Gäste neu auf die Zimmer verteilt. Es hilft alles nichts! (Invarianz **??**)

Anders in **Hilberts Hotel** mit unendlich vielen Zimmern $0, 1, 2, 3, \ldots$: Sind alle Zimmer belegt, so kann noch ein Gast aufgenommen werden! Der Gast von Zimmer 0 zieht nach 1, der von 1 nach 2, usw.

Ebenso zwei Gäste, oder drei, oder vier… Nun kommt ein Hilbert–Bus mit unendlich vielen neuen Gästen. Die Managerin quartiert die alten Gäste um vermöge der Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$. Die neuen Gäste beziehen ihre Zimmer vermöge $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} + 1 : n \mapsto 2n + 1$. Zusammen erhalten wir so die Bijektion $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} : (i, n) \mapsto 2n + i$ (Satz B2B).

Schließlich kommen unendlich viele Busse, jeder mit unendlich vielen Gästen. Kein Problem, wir haben eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ (Satz **??**).

Übung: Wie verteilen Sie die Zimmer jeweils neu? Schreiben Sie zur Wiederholung alle relevanten Bijektion möglichst schön und explizit aus!

Hilberts Hotel

HOTEL INFINITY, lyrics © 2000 by Lawrence Mark Lesser

On a dark desert highway — not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done —
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

[CHORUS] "Welcome to the Hotel called Infinity —
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the Hotel called Infinity —
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

Hilberts Hotel

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number:
that frees the odd-numbered rooms." [Chorus]

Last thing I remember at the end of my stay —
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

(`larrylesser.com/greatest-lesser-hits`, *Hotel Infinity*)

Mächtigkeit der Potenzmenge

Cantors zweites Diagonalargument: Kann $f : X \to \mathfrak{P}(X)$ surjektiv sein?

$$A := \{\, x \in X \,|\, x \notin f(x) \,\} \subseteq X.$$

Angenommen, es gäbe ein Element $x \in X$ mit $f(x) = A$.

- Gilt $x \in A$, so folgt $x \notin f(x) = A$, ein Widerspruch.
- Gilt $x \notin A$, so folgt $x \in f(x) = A$, ein Widerspruch.

Wir schließen: Es existiert kein Element $x \in X$ mit $f(x) = A$.

Satz B2G: Cantors zweites Diagonalargument

Zu jeder Menge X ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ mächtiger, kurz $X \prec \mathfrak{P}(X)$.
Ausführlich gilt $X \preceq \mathfrak{P}(X)$, dank $X \hookrightarrow \mathfrak{P}(X) : x \mapsto \{x\}$, aber $X \not\cong \mathfrak{P}(X)$.

Für endliche Mengen ist das klar, aus $\sharp X = n$ folgt $\mathfrak{P}(X) = 2^n > n$.
Für unendliche Mengen war dies Cantors erschütternde Erkenntnis:
Es gibt verschiedene Unendlichkeiten, insb. überabzählbare Mengen!

Beispiel: Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.

Mächtigkeit der Potenzmenge

☺ Dieser berühmte Beweis ist genial einfach und einfach genial!
Der Trick heißt traditionell *Cantors zweites Diagonalargument*.
Cantors erstes Diagonalargument beweist $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$, siehe **??**.

Das Argument erinnert uns eindringlich an das Barbier-Paradoxon und die Russelsche Antinomie (B107). Diese logische Katastrophe der allzu naiven Mengenlehre beheben wir durch freiwillige Beschränkung auf die streng reglementierten Mengenkonstruktionen nach Zermelo–Fraenkel und machen seither sehr gute Erfahrungen damit. Hier nun taucht eine Variante dieser Idee erneut auf, als Cantors zweites Diagonalargument.

Im vorliegenden Beweis ist alles kristallklar, alles geht mit rechten Dingen zu: Wir widerlegen die Aussage $A \in \operatorname{Im}(f)$, ganz einfach.
Zudem ist dies ein wunderbares Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch zusammen mit einer einfachen Fallunterscheidung.

☺ Ich hoffe, unsere soliden Vorbereitungen zahlen sich hier (und überall) für Sie aus, und Sie genießen die schönen Wow-und-Aha–Erlebnisse.

Illustration zu Cantors Diagonalverfahren

Aufgabe: Illustrieren Sie diesen Beweis im Spezialfall $X = \mathbb{N}$.

Lösung: Gegeben sei eine Folge von Mengen $A_0, A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$,
etwa $A_0 = \emptyset$, $A_1 = \{0, 1, 3\}$, $A_2 = \mathbb{N}$, $A_3 = 2\mathbb{N}$, $A_4 = 2\mathbb{N} + 1$, ...
Diese Mengen können wir übersichtlich in einer Tabelle anordnen:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
A_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
A_1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	...
A_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
A_3	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...
A_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
...	...										

Als Tabelle schreiben wir $a_{ij} = 1$, falls $A_i \ni j$, und $a_{ij} = 0$, falls $A_i \not\ni j$.
Entlang der Diagonalen bilden wir die Menge $A = \{\, i \in \mathbb{N} \mid a_{ii} = 0 \,\}$.
Sie kommt nicht in unserer Liste vor, denn $i \in A_i \Leftrightarrow i \notin A$. QED

Illustration zu Cantors Diagonalverfahren

Es gibt keine Abzählung $A_0, A_1, A_2, \ldots$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
Jede solche Folge $A_0, A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$ lässt immer noch Mengen aus.
Dieses Argument ist, wie gesagt, genial einfach und einfach genial!

Satz B2G optimiert diesen schönen Beweis zu der allgemeinen Aussage $X \prec \mathfrak{P}(X)$, also $X \preceq \mathfrak{P}(X)$ und $X \not\approx \mathfrak{P}(X)$. Der Spezialfall $X = \mathbb{N}$ ist besonders wichtig und anschaulich, daher betone ich diese Illustration.

Dieses Argument nutzen wir später nochmal, geschickt abgewandelt, um zu zeigen, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist. Genauer gilt $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, dies erklären wir in Satz B2N.

Bemerkung: Die Menge $\mathbb{N}$ ist unendlich und bereits schwer vorstellbar. Dank der Dedekind-Peano-Axiome haben wir sie jedoch gut im Griff.

Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar und somit unverstellbar viel größer. Damit ist nicht Schluss: Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist noch riesiger.

Lesen und beweisen und würdigen Sie nochmals Satz B2G.
Cantors Diagonalverfahren ist zurecht berühmt.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Wir wissen, dank Cantors zweitem Diagonalargument B2G, dass es zu jeder Menge X eine strikt mächtigere Menge Y gibt, etwa $Y = \mathfrak{P}(X)$. Dies können wir insbesondere anwenden auf die abzählbar unendliche Menge $\mathbb{N}$: Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist demnach überabzählbar.

Die Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^n$ hingegen sind abzählbar, gleichmächtig mit $\mathbb{N}$. Das ist anfangs überraschend, denn sie enthalten offensichtlich „mehr“ Elemente als $\mathbb{N}$. Tatsächlich haben wir explizite Bijektionen konstruiert, sie sind erste eindrückliche Beispiele an Sorgfalt und Kunstfertigkeit.

Ein gewaltiger Sprung entsteht bei der Vervollständigung vom Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zum Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen: Im Gegensatz zur abzählbaren Menge $\mathbb{Q}$ ist die Menge $\mathbb{R}$ überabzählbar! Genauer konstruieren wir in Satz Satz B2N eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ ist eine überaus erstaunliche Erkenntnis. Wir werden sie auf zwei Arten beweisen: Zunächst als Aufwärmübung die leichtere Aussage, dass die Menge $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Das gelingt direkt als eine raffinierte Variante von Cantors Diagonalverfahren B2G.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Aufgabe: Zeigen Sie, nach Vorbild von Cantors Diagonalverfahren B2G, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist.

Beweis-Idee: Vorgelegt sei eine reelle Folge $r_0, r_1, r_2, \ldots \in [0,1]$.
Wir schreiben r_k dezimal und konstruieren per Diagonalverfahren eine weitere Zahl $s \in [0,1]$, die noch nicht in dieser Liste vorkommt.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
r_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
r_1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	...
r_2	4	1	4	2	1	3	5	6	2	3	...
r_3	7	3	2	0	5	0	8	0	7	5	...
r_4	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	...
r_5	7	1	8	2	8	1	8	2	8	4	...
...	...										

In unserem Beispiel konstruieren wir $s = 0.549546\ldots$ mit $s \neq r_k$.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Lösung: Wegen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist die Menge $\mathbb{R}$ offensichtlich unendlich.
Wir behaupten, dass bereits das Intervall $[0,1]$ nicht abzählbar ist.

Wir führen einem Widerspruchsbeweis. Angenommen, das Intervall $[0,1]$ wäre abzählbar, das heißt, es gäbe eine Bijektion $\mathbb{N} \cong [0,1] : k \mapsto r_k$.

Wir können jede dieser reellen Zahlen $r_k \in [0,1]$ dezimal darstellen als $r_k = 0.r_{k0}r_{k1}r_{k2}\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r_{kn}10^{-n-1}$ mit Ziffern $r_{kn} \in \mathbb{Z}_{10} = \{0,\dots,9\}$.
Wir betrachten die reelle Zahl s mit den Ziffern $s_n = (r_{nn} + 5) \operatorname{rem} 10$.
Somit gilt $|s - r_k| \geq 4 \cdot 10^{-k-1}$, also insbesondere $s \neq r_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wir erhalten $s \in [0,1]$, aber $s \notin \{\, r_k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$. Das ist ein Widerspruch!
Demnach ist das Intervall $[0,1]$ überabzählbar, und somit auch $\mathbb{R}$. QED

🙂 Auch dieser Beweis ist genial einfach und einfach genial!

Diese Aussage und ihren schönen Beweis wollen wir nun optimieren.
Dazu untersuchen wir zunächst die hier benutzte Dezimaldarstellung etwas genauer. Die Basis $B = 10$ ist dabei vollkommen willkürlich; es lohnt sich, gleich eine beliebige Basis $B \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ zu betrachten.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Wir haben gerade bewiesen, dass die Menge $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.
Jedoch gibt es viele überabzählbare Mengen, neben $\mathbb{R}$ kennen wir $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sowie $\mathfrak{P}\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ usw.
Genauer wollen wir eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ konstruieren.

🙂 Auch hierzu bietet uns das Diagonalverfahren hilfreiche Intuition:
Wenn wir reelle Zahlen in der Basis $B = 2$ entwickeln, so erhalten wir beinahe eine Bijektion $[0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Zusammen mit einer geeigneten Bijektion $\mathbb{R} \cong [0,1]$ erhalten wir so $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, wie ersehnt.

⚠ Leider ist die B–adische Entwicklung für manche reellen Zahlen zweideutig, das müssen wir in unserer Konstruktion berücksichtigen.
Die technische Ausführung nutzt daher den Satz von Cantor–Bernstein.
Damit können wir die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ genau bestimmen, wie erhofft.

Das ist nicht nur eine interessante technische Herausforderung, sondern liefert uns zugleich einige interessante Folgerungen wie $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Wir nehmen also mutig einen zweiten Anlauf und untersuchen genauer die B–adische Entwicklung reeller Zahlen und damit deren Mächtigkeit.

Entwicklung reeller Zahlen in Basis B

Sei $B \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, etwa binär $B = 2$, ternär $B = 3$ oder dezimal $B = 10$:

$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\ \ldots$$
$$0.1 = 0.09999\,99999\,99999\,99999\,99999\,99999\ \ldots$$

Satz B2M: B–adische Entwicklung

Jede Ziffernfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0, \ldots, B-1\}$ definiert eine reelle Zahl

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k} \quad \in \quad [0,1].$$

Umgekehrt lässt sich jede reelle Zahl $a \in [0,1]$ so als eine B–adische Entwicklung schreiben (auf mindestens eine, höchstens zwei Weisen).

$$q : \{0, \ldots, B-1\}^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow [0,1] : (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \mapsto a$$

Zu jeder reellen Zahl $a \in]0,1]$ existiert genau eine solche B–adische Entwicklung, bei der unendlich viele Ziffern von 0 verschieden sind.

$$r : [0,1] \hookrightarrow \{0, \ldots, B-1\}^{\mathbb{N}} : a \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Entwicklung reeller Zahlen in Basis B

Für $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k}$ gilt $0 = s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq 1$, also existiert der Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$, denn $(\mathbb{R}, \leq)$ ist vollständig! Die B–adische Reihe definiert so die Abbildung $q : \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow [0,1]$.

Umgekehrt konstruieren wir $r : [0,1] \to \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} : a \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv: Gegegen sei $a \in \,]0,1]$ und $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_B^n$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k} < a$. Dazu definieren wir dann $a_{n+1} = \max\{\, z \in \mathbb{Z}_B \mid s_n + zB^{-n-1} < a \,\}$. Im Sonderfall $a = 0$ setzen wir $r(0) = (0, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}}$.

Nach Konstruktion ist r rechtsinvers zu q, das bedeutet $q \circ r = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Insbesondere ist q somit surjektiv, doch leider nicht injektiv: Zahlen wie $a = 0.1000\ldots = 0.0AAA\ldots$ haben zwei Darstellungen, wobei $A = B - 1$. Das gilt für alle Brüche $a = z/B^n \in [0,1[$ mit Zähler $z \in \{1, \ldots, B^n\}$.

Daher ist eine Bijektion $\mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} \cong [0,1]$ nicht ganz so einfach zu konstruieren. Immerhin erhalten wir eine Bijektion $(q|_X^Y, r|_Y^X) : X \cong Y$ zwischen den echten Teilmengen $X = \{1, \ldots, B-1\}^{\mathbb{N}} \subsetneq \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}}$ und $Y = q(X) \subsetneq [0,1]$. Der folgende Satz fügt alle diese Vorbereitungen sorgsam zusammen.

Mächtigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Satz B2N: Mächtigkeit von $\mathbb{R}$

(1) Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, genauer gilt $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
(2) Somit ist $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}^d$ für $d \geq 2$ und zu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\}$.
(3) Strikt mächtiger sind hingegen $\mathfrak{P}(\mathbb{R}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\}$.

Beweis: (1) Wir konstruieren Injektionen $\mathbb{R} \hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Dank Cantor–Bernstein B2O erhalten wir eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Explizit: (1a) Wir haben Bijektionen $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]-1,+1[: x \mapsto x/(1+|x|)$ (A1B) sowie $g :]-1,+1[\xrightarrow{\sim}]0,1[: x \mapsto (x+1)/2$. Die Binärentwicklung stiftet die Injektion $r :]0,1[\hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dank Satz B2M für $B = 2$.

(1b) Satz B2M für $B = 3$ stiftet eine Injektion $q : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow]0,1] \subset \mathbb{R}$.

(2) Wir haben Bijektionen $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \{1,\dots,d\} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aus $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ folgt $\mathbb{R}^d \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\{1,\dots,d\}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. QED

Übung: Führen Sie die letzten Rechnungen aus mit Hilfe von Satz B2C. Alle Bijektionen sind wunderbar explizit und im Rückblick genial einfach.

Mächtigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Schon das Ergebnis $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$ ist erstaunlich, ebenso $\mathbb{N}^d \cong \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \cong \mathbb{N}$. Ebenso möchte man vermuten, dass $\mathbb{R}^d$ „wesentlich mehr“ Punkte hat als $\mathbb{R}$, doch ganz im Gegenteil finden Bijektionen $\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}$ und sogar $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$.

Dieses Thema wird Sie in Ihrem Studium immer wieder beschäftigen: Natürlich möchten Sie jedem Raum $\mathbb{R}^d$ seine Dimension „$\dim \mathbb{R}^d = d$“ zusprechen. Allein die Mächtigkeit macht jedoch keinen Unterschied! Die Dimension erhält erst durch zusätzliche Struktur ihren Sinn: bezüglich linearer Abbildungen von $\mathbb{R}$–Vektorräumen, oder Diffeomorphismen, oder Homöomorphismen, … Dazu später mehr im Studium.

Cantors **Kontinuumshypothese** (kurz CH) besagt: Aus $\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ folgt $X \cong \mathbb{N}$ oder $X \cong \mathbb{R}$. **Verallgemeinert** (GCH): Für jede unendliche Menge A und $A \preceq X \preceq \mathfrak{P}(A)$ gilt $X \cong A$ oder $X \cong \mathfrak{P}(A)$. Das heißt, nach A hat $\mathfrak{P}(A)$ die nächst größere Mächtigkeit, es liegt nichts dazwischen. Dies ist unabhängig von ZFC: Ausgehend von einem ZFC-Universum existieren Modelle, in denen GCH gilt (Kurt Gödel 1940), und ebenso Modelle, in denen GCH nicht gilt (Paul Cohen 1963, Fields-Medaille 1966).

Lässt sich jede reelle Zahl berechnen?

Unendlichkeit kommt in verschiedenen Größen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Wie lässt sich das anwenden? Gut, dass Sie fragen!

ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

By A. M. Turing.

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

The "computable" numbers may be described briefly as the real numbers whose expressions as a decimal are calculable by finite means.

📖 A.M. Turing: *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem.* Proc. London Math. Soc. 42 (1937) 230–65.

Alan Turing fragte 1936: Können wir jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ berechnen? Nein! Es gibt nur abzählbar viele Programme, doch $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Ausführlich: Wählen Sie eine Programmiersprache. Diese verwendet zu ihrer Codierung ein endliches Alphabet $\mathcal{A}$. Die Menge $\mathcal{A}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^n$ ist abzählbar (??), daher gibt es nur abzählbar viele Programme.

Lässt sich jede reelle Zahl berechnen?

Dieses Abzählargument ist heute vollkommen plausibel und naheliegend. Berechenbare Zahlen wurden erstmals 1912 von Emile Borel eingeführt, allerdings noch informell-intuitiv formuliert. Auch als Alan Turing 1936 seinen Artikel schrieb, gab es noch gar keine Computer. Sein epochaler Artikel definiert die Turing–Maschine als universelles Rechenmodell und beweist, dass Hilberts berühmtes Entscheidungsproblem unlösbar ist.

🙂 Damit beginnt die Informatik – noch vor den ersten Computer!

Naiv-anschaulich wollen wir unsere Zahl $x \in \mathbb{R}$ durch ein Programm schrittweise dezimal ausschreiben. Für viele wichtige Zahlen gelingt dies:

$$22/7 = 3.14285\,71428\,57142\,85714\,\ldots$$
$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\,\ldots$$
$$\mathrm{e} = 2.71828\,18284\,59045\,23536\,\ldots$$

Lässt sich jede Folge $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ oder $g : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, 9\}$ berechnen? Allgemein stellt sich die Frage ebenso für $h : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Antwort: Nein! Die Menge $\mathbb{R} \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar (B2N).

Was genau sind berechenbare reelle Zahlen?

Zur Vereinfachung verstehen wir „berechenbar“ zunächst halbformal als realisierbar in einer typischen Programmiersprache wie Python oder C++ oder äquivalent hierzu abstrakt auf einer Turing–Maschine. Wir müssen diese „mentalen“ Prozesse formalisieren, um Unmöglichkeit zu beweisen. Damit vereinbaren wir berechenbare reelle Zahlen elegant wie folgt:

Definition B2H: berechenbare reelle Zahl

Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **berechenbar** oder auch **rekursiv**, wenn sie durch eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ approximiert wird gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{f(n)-1}{2^n} < a < \frac{f(n)+1}{2^n}.$$

Übung: Die berechenbaren Zahlen bilden den Teilkörper $\mathrm{REC} \leq (\mathbb{R}, +, \cdot)$: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ berechenbar, so auch $a \pm b$ (leicht) und $a \cdot b$ (interessant) sowie im Falle $b \neq 0$ auch a/b (spannend). Zur Division a/b müssen wir $b \neq 0$ voraussetzen, können es selbst aber nicht effektiv überprüfen:

⚠ Die Gleichheit im Körper $(\mathrm{REC}, +, \cdot)$ ist nicht berechenbar.

Berechenbare Zahlen und das Entscheidungsproblem

⚠ Die Frage „Gilt $a = 0$?“ lässt sich alleine mit einer Approximation f im Allgemeinen nicht effektiv beantworten. Sie ist nur semi-entscheidbar:

Gilt $a = 0$, so gibt uns keine Approximation $f(n) = 0$ eine Garantie; für $n' > n$ könnte $f(n') = 0$ gelten, oder ein $f(n') \neq 0$ auftauchen.

Gilt $a \neq 0$, so existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) \neq 0$, und das beweist $a \neq 0$. Genauer: Aus $f(n) > 0$ folgt $a > 0$. Aus $f(n) < 0$ folgt $a < 0$.

Beispiel: Wir definieren die Zahl $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$ durch $a_n = 1$ falls $n \geq 4$ gerade ist und nicht Summe zweier Primzahlen, andernfalls $a_n = 0$. Wir können a beliebig genau approximieren, diese Zahl ist berechenbar im Sinne von B2H. Dennoch wissen wir nicht, ob $a = 0$ oder $a > 0$ gilt. Die Goldbach–Vermutung besagt $a = 0$, und sie ist immer noch offen.

Statt Goldbach können Sie hier Ihre Lieblingsvermutung einsetzen. Das Argument gilt für jede Familie von entscheidbaren Aussagen $A(n)$ und ihre Zusammenfassung zu $\exists n \in \mathbb{N} : A(n)$. Dies ist äquivalent zu $a > 0$ für $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$, und ist im Allgemeinen unentscheidbar.

Gibt es transzendente Zahlen?

Ist jede Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ Nullstelle eines rationalen Polynoms $A \in \mathbb{Q}[X]^*$?
Nein! Es gibt nur abzählbar viele rationale Polynome und Nullstellen.

Ausführlich: Erfüllen die Potenzen α^n eine $\mathbb{Q}$–lineare Relation?

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n \stackrel{?}{=} 0$$

Falls nicht, so heißt α **transzendent**. Falls doch, so heißt α **algebraisch**:
Die Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ ist Nullstelle eines Polynoms $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]^*$.

Beispiele: Jede rationale Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist algebraisch, als Nullstelle des Polynoms $X - \alpha \in \mathbb{Q}[X]^*$. Die reelle Zahl $\alpha = \sqrt{3}$ ist nicht rational, aber immerhin algebraisch, denn α ist Nullstelle von $X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]^*$.
Ist $7^{2/3}$ algebraisch? Ja, $A = X^3 - 7^2 \in \mathbb{Q}[X]^*$ erfüllt $A(7^{2/3}) = 0$.

Gibt es transzendente Zahlen? Ja, dank Cantors Abzählargument **??**:
Die algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ sind abzählbar, doch $\mathbb{R}$ ist überabzählbar!

Vereinfacht zusammengefasst: Fast alle reellen Zahlen sind transzendent.
Wenn Sie „zufällig“ eine wählen, so ist sie „fast sicher“ transzendent.

Gibt es transzendente Zahlen?

Satz B21: Die algebraischen Zahlen sind abzählbar.

Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt **algebraisch** über $\mathbb{Q}$, wenn sie Nullstelle eines rationalen Polynoms $P \in \mathbb{Q}[X]^*$ ist. Andernfalls heißt α **transzendent**.

$$\mathbb{A} := \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X]^*} \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid P(\alpha) = 0 \}$$

Die Menge $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ der algebraischen Zahlen ist abzählbar, kurz $\mathbb{A} \cong \mathbb{N}$.
Somit ist das Komplement $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ überabzählbar, genauer $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}$.

Beweis: Die Menge aller Polynome vom Grad $< n$ ist abzählbar:

$$\mathbb{Q}[X]_{<n} \underset{\text{Def}}{\cong} \mathbb{Q}^n \underset{\text{B2E}}{\cong} \mathbb{N}^n \underset{\text{B2D}}{\cong} \mathbb{N}$$

Die abzählbare Vereinigung $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[X]_{<n}$ ist abzählbar (??).
Zu jedem Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]^*$ ist die Nullstellenmenge in $\mathbb{R}$ endlich.
Somit ist die abzählbare Vereinigung $\mathbb{A} = \bigcup_P P^{-1}(0)$ abzählbar (??).
Wir haben also $\mathbb{A} \preceq \mathbb{N}$. Zusammen mit $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$ folgt $\mathbb{A} \cong \mathbb{N}$ (B2O). QED

Algebraische vs transzendente Zahlen

Bereits im 18. Jahrhundert entwickelte sich langsam die Vorstellung von Transzendenz und die Vermutung, dass es transzendente Zahlen gibt, so etwa bei Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Leonhard Euler (1707–1783). Euler formulierte zwar keine klare Definition, war aber überzeugt, dass es solche „schwer fassbaren“ Zahlen geben müsse. Ebenso wie „irrational“ für ‘unvernünftig’ ist auch „transzendent“ für ‘jenseits aller Vernunft’ zunächst ein negativer Begriff des Erstaunens, ja des Erschreckens. Diese Zahlen sind algebraisch nicht zugänglich.

Erste Konstruktionen und Nachweise transzendenter Zahlen gelangen 1844 Joseph Liouville (1809–1882), etwa für die Liouville-Konstante

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.110001000000000000000001000\,\ldots$$

Georg Cantor bewies 1874 erneut die Existenz transzendenter Zahlen: Überraschenderweise sind sogar fast alle reellen Zahlen transzendent! Im Gegensatz zu Liouville ist Cantors Beweis jedoch nicht konstruktiv; er hilft nicht, einer fest gegebenen Zahl Transzendenz nachzuweisen.

Algebraische vs transzendente Zahlen

⚠ Die Angabe des betrachteten Grundkörpers ist wichtig.
Wenn wir nichts weiter dazusagen, arbeiten wir in $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$.

Übung: Jede komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ ist algebraisch über $\mathbb{R}$, nämlich Nullstelle eines quadratischen Polynoms $P \in \mathbb{R}[X]^*$.

Jeder komplexen Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ ordnen wir ihren Grad über $\mathbb{Q}$ zu:

$$\deg_{\mathbb{Q}} : \mathbb{C} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} : \alpha \mapsto \inf\{\deg P \,|\, P \in \mathbb{Q}[X]^* \wedge P(\alpha) = 0\}$$

Die algebraischen Zahlen sind die von endlichem Grad:

$$\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{C} \,|\, \deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) < \infty\} = \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X]^*} \{\alpha \in \mathbb{C} \,|\, P(\alpha) = 0\}$$

Jede algebraische Zahl hat demnach ein Minimalpolynom:

$$\mu : \mathbb{A} \to \mathbb{Q}[X] : \alpha \mapsto \mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]^1_n,\ n = \deg_{\mathbb{Q}}(\alpha),\ \mu_\alpha(\alpha) = 0$$

Beispiel: Für $\alpha = \pm\sqrt{2}$ gilt $\mu_\alpha = X^2 - 2$. Demnach ist μ nicht injektiv, denn μ_α hat mehrere Nullstellen, die **konjugierten Elemente** zu α.
(Im Beweis von B2I können wir daher nicht $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{Q}[X]$ nutzen.)

Transzendenz von e und π

Cantors grundlegende Elementezählung hat erstaunliche Konsequenzen:

☺ Wenn Sie zufällig gleichverteilt eine reelle Zahl $\alpha \in [0,1]$ wählen, dann ist das Ergebnis mit 100% Wahrscheinlichkeit transzendent.
Das ist Segen und Fluch von elegant-nicht-konstruktiven Beweisen.

☹ Sobald Sie jedoch eine konkrete Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ vorliegen haben, ist es meist extrem schwierig, ihr Transzendenz nachzuweisen.
Hierzu nenne ich zwei berühmte Ergebnisse:

Beispiel: Die Eulersche Zahl e ist transzendent. (C. Hermite, 1873)

$$\mathrm{e} = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Beispiel: Die Kreiszahl π ist transzendent. (F. Lindemann, 1882)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Allgemein: Ist $\alpha \in \mathbb{C}^*$ algebraisch, so ist $\mathrm{e}^\alpha \in \mathbb{C}$ transzendent.

Transzendenz von e und π

☺ Damit löste Lindemann ein über zweitausend Jahre altes Problem:
Die Quadratur des Kreises allein mit Zirkel und Lineal ist unmöglich!

Bei der Vergeblichkeit der so ausserordentlich zahlreichen Versuche, die Quadratur des Kreises mit Cirkel und Lineal auszuführen, hält man allgemein die Lösung der bezeichneten Aufgabe für unmöglich; es fehlte aber bisher ein Beweis dieser Unmöglichkeit; nur die Irrationalität von π und von π^2 ist festgestellt. Jede mit Cirkel und Lineal ausführbare Construction lässt sich mittelst algebraischer Einkleidung zurückführen auf die Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen, also auch auf die Lösung einer Reihe von quadratischen Gleichungen, deren erste rationale Zahlen zu Coefficienten hat, während die Coefficienten jeder folgenden nur solche irrationale Zahlen enthalten, die durch Auflösung der vorhergehenden Gleichungen eingeführt sind. Die Schlussgleichung wird also durch wiederholtes Quadriren übergeführt werden können in eine Gleichung geraden Grades, deren Coefficienten rationale Zahlen sind. Man wird sonach die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises darthun, wenn man nachweist, dass die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung irgend welchen Grades mit rationalen Coefficienten sein kann. Den dafür nöthigen Beweis zu erbringen, ist im Folgenden versucht worden.

Ferdinand von Lindemann (1852–1939), *Über die Zahl π* (1882)

Transzendenz der eulerschen Zahl $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$

Ich beweise als Ausblick hier nur die Transzendenz von e und folge dabei
📖 A. Gelfond: *Transcendental and algebraic numbers.* Dover 1960. 42–44
Hermites Beweis ist eine geniale Kombination aus Analysis und Algebra.

Beweis: Wir zeigen $\mathbb{Q}$–lineare Unabhängigkeit durch Widerspruch.
(0) Bei linearer Abhängigkeit gäbe es $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_0 \neq 0$ und

$$a_0 + a_1\,\mathrm{e} + a_2\,\mathrm{e}^2 + \cdots + a_n\,\mathrm{e}^n = 0.$$

Wir dürfen und werden im Folgenden $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ annehmen, notfalls multiplizieren wir die Gleichung (0) mit einem gemeinsamen Nenner.

(1) Es gilt $\partial_x\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$. Für $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ folgt dank partieller Integration:

$$\mathrm{e}^x \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t}\,f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,f(0) - f(x) + \mathrm{e}^x \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t}\,f'(t)\,\mathrm{d}t$$

(2) Für $f \in \mathbb{R}[t]_{\leq N}$ und $F := f + f' + \cdots + f^{(N)}$ iterieren wir (1) zu:

$$\mathrm{e}^x \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t}\,f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,F(0) - F(x)$$

🙂 Das ist Hermites genialer Kunstgriff. Davon profitieren wir.

(3) Wir summieren (2) für $x = k = 0, \ldots, n$ zu:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \, \mathrm{e}^k \int_{t=0}^{k} \mathrm{e}^{-t} \, f(t) \, \mathrm{d}t = F(0) \sum_{k=0}^{n} a_k \, \mathrm{e}^k - \sum_{k=0}^{n} a_k F(k)$$

Sei nun $p > \max\{n, |a_0|\}$ prim und $f(t) = t^{p-1}(t-1)^p \cdots (t-n)^p/(p-1)!$.

(4) Es gilt $F(0) \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, denn wir finden $0 = f(0) = \ldots = f^{(p-2)}(0)$ und $f^{(p-1)}(0) = [(-1)^n n!]^p \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ und schließlich $f^{(i)}(0) \in p\mathbb{Z}$ für $i \geq p$.

(5) Für $k = 1, \ldots, n$ hingegen gilt $F(k) \in p\mathbb{Z}$, denn hier finden wir $0 = f(k) = \ldots = f^{(p-1)}(k)$ und schließlich $f^{(i)}(k) \in p\mathbb{Z}$ für $i \geq p$.

(6) Dank $a_0 \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ liegt $a_0 F(0)$ in $\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, somit auch $\sum_{k=0}^{n} a_k F(k)$.

(7) Die linke Seite von (3) schätzen wir grob nach oben ab durch:

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k \, \mathrm{e}^k \int_{t=0}^{k} \mathrm{e}^{-t} \, f(t) \, \mathrm{d}t\Big| &\leq \Big[\sum_{k=1}^{n} |a_k| \, \mathrm{e}^k\Big] \int_{t=0}^{n} |f(t)| \, \mathrm{d}t \\ \leq \Big[\sum_{k=1}^{n} |a_k| \, \mathrm{e}^k\Big] \, n^{(n+1)p}/(p-1)! &= a \, b^p/(p-1)! \to 0 \end{aligned}$$

(8) Damit erreichen wir folgenden Widerspruch für große Primzahlen p: Die rechte Seite von (3) liegt in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, die linke jedoch in $]-1, 1[$. QED

Bemerkenswerte Bijektionen

Satz B2J: unendliches Komplement

Sei U eine unendliche Menge und $E \subset U$ eine endliche Teilmenge.
Dann ist das Komplement $U \setminus E$ unendlich, genauer gilt $U \setminus E \cong U$.

Aufgabe: Konstruieren Sie explizit eine Bijektion $(g, g') : U \setminus E \cong U$.

Lösung: Das Komplement $U \setminus E$ ist unendlich: Wäre $U \setminus E$ endlich,
so auch die Vereinigung $U = (U \setminus E) \cup E$; das ist ein Widerspruch.

Seien $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ die Elemente der Menge E. Wir setzen diese
Nummerierung fort zu einer Injektion $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow U : k \mapsto x_k$ dank **??**.
Sei $F = \nu(\mathbb{N}_{\geq n}) \subseteq U$. Wir haben $(g', g) : E \cup F \cong F : x_k \leftrightarrows x_{n+k}$.
Dies erweitern wir zur ersehnten Bijektion $(g', g) : U \cong U \setminus E$
durch $g'(x) = g(x) = x$ für alle $x \in U \setminus (E \cup F)$.

☺ Die Konstruktion geeigneter Bijektionen ist eine eigene Kunst.
Glücklicherweise verfügen Sie über wirksame, allgemeine Werkzeuge.
Jedoch erfordert deren Nutzen in weiteren Konstruktionen etwas Übung.

Bemerkenswerte Bijektionen

Satz B2κ: überabzählbares Komplement

Sei U eine überabzählbare Menge und $A \subset U$ höchstens abzählbar.
Dann ist das Komplement $U \setminus A$ überabzählbar, genauer gilt $U \setminus A \cong U$.

Aufgabe: Konstruieren Sie explizit eine Bijektion $(g, g') : U \setminus A \cong U$.

Lösung: Das Komplement $U \setminus A$ ist überabzählbar: Wäre $U \setminus A$ abzählbar, so auch $U = (U \setminus A) \cup A$ dank **??**; das ist ein Widerspruch.

Demnach existiert eine Injektion $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow U \setminus A$ dank **??**. Sei $B = \nu(\mathbb{N})$.
Die Vereinigung $A \cup B$ ist abzählbar dank **??** und zudem unendlich.
Somit existiert eine Bijektion $(g', g) : A \cup B \cong B$. Wir erweitern diese zu $(g', g) : U \cong U \setminus A$ durch $g'(x) = g(x) = x$ für alle $x \in U \setminus (A \cup B)$.

Beispiele: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.
Die Menge $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Die Menge $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ der algebraischen Zahlen ist abzählbar, also $\mathbb{A} \cong \mathbb{N}$.
Die transzendenten Zahlen $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ sind überabzählbar, $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}$. (**??**)

Mächtigkeit von Intervallen

Satz B2L: Mächtigkeit von Intervallen

(1) Jedes rationale Invervall $I \subseteq \mathbb{Q}$ ist entweder leer, $I = \emptyset$, einelementig, $I = \{a\}$, oder abzählbar unendlich, $I \cong \mathbb{Q}$.

(2) Jedes reelle Invervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist entweder leer, $I = \emptyset$, einelementig, $I = \{a\}$, oder überabzählbar, $I \cong \mathbb{R}$.

(3) Allgemein sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{K}$ mit mindestens zwei Elementen ist gleichmächtig zur Menge $\mathbb{K}$.

Beweis: (3) Gegeben seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Daraus folgt $[a, b]_{\mathbb{K}} \subseteq I$. Wir haben einerseits die Inklusion $f : I \hookrightarrow \mathbb{K}$. Andererseits haben wir die Bijektion $\mathbb{K} \cong]-1, 1[_{\mathbb{K}}$ aus **??**, somit $g : \mathbb{K} \cong]-1, 1[_{\mathbb{K}} \cong]a, b[_{\mathbb{K}} \hookrightarrow I$. Der Satz von Cantor–Bernstein B2O konstruiert aus den Injektionen $f : I \hookrightarrow \mathbb{K}$ und $g : \mathbb{K} \hookrightarrow I$ die ersehnte Bijektion $(h, k) : I \cong \mathbb{K}$. QED

☺ Diese Konstruktion ist kurz und elegant und wunderbar explizit. Die folgende Aufgabe beleuchtet schöne, konkrete Konstruktionen, die sogar ganz ohne den Satz von Cantor–Bernstein auskommen.

Mächtigkeit von Intervallen

Aufgabe: Konstruieren Sie explizit (möglichst einfache) Bijektionen $(f, f') : [a, b] \cong [0, 1]$, $(g, g') : [0, 1] \cong [0, 1[$ und $(h, h') :]0, 1] \cong]0, 1[$.

(Es gelingt natürlich mit dem allgemeinen Satz via Cantor–Bernstein B20, die Herausforderung ist hier jedoch eine möglichst simple Konstruktion.)

Lösung: (0) Zunächst gilt $(\tau, \tau) : [a, b] \cong [a, b]$ dank $\tau : x \mapsto b + a - x$, und durch Einschränkung $(\tau, \tau) :]a, b[\cong]a, b[$ und $(\tau, \tau) : [a, b[\cong]a, b]$.

(1) Eine Bijektion $(f, f') : [a, b] \cong [0, 1]$ gelingt affin-linear und isoton mit $f(x) = (x - a)/(b - a)$ und $f'(y) = a + y(b - a)$. Damit gilt $f' \circ f = \mathrm{id}_{[a,b]}$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Durch Einschränkung erhalten wir die Bijektionen $(f, f') : [a, b[\cong [0, 1[$ und $(f, f') :]a, b] \cong]0, 1]$ und $(f, f') :]a, b[\cong]0, 1[$.

(2) In $[0, 1]$ betrachten wir $X := \{ 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \} = \{1, 1/2, 1/4, \dots\}$ und $Y := X/2 = \{1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$. Wir definieren $g : [0, 1] \to [0, 1[$ durch $g(x) = x/2$ für $x \in X$ und $g(x) = x$ sonst, sowie $g' : [0, 1[\to [0, 1]$ durch $g'(y) = 2y$ für $y \in Y$ und $g'(y) = y$ sonst. Damit gilt $g' \circ g = \mathrm{id}_{[0,1]}$ und $g \circ g' = \mathrm{id}_{[0,1[}$. Wörtlich genauso konstruieren wir $(h, h') :]0, 1] \cong]0, 1[$.

Die Ordnung der rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, \leq)$ haben weder Minimum noch Maximum, sie sind abzählbar und außerdem dicht. Letzteres bedeutet: Zu je zwei Punkten $u < v$ in $\mathbb{Q}$ existiert ein Zwischenpunkt $z \in \mathbb{Q}$ mit $u < z < v$. Diese Eigenschaften charakterisieren $(\mathbb{Q}, \leq)$ bis auf Ordnungsisomorpie:

Satz B3A: Ordnung der rationalen Zahlen

Seien $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ nicht-leere, total geordnete Mengen, ohne Minimum und Maximum, zudem abzählbar und dicht.

(1) Dann existiert ein Ordnungsisomorphismus $(X, \leq) \cong (Y, \leq)$.

Beispiele: Für $X = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\, a/2^n \mid a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \,\}$ gilt $(X, \leq) \cong (\mathbb{Q}, \leq)$.
Es gilt $(]-1, 1[_{\mathbb{Q}}, \leq) \cong (\mathbb{Q}, \leq)$, dies gelingt wunderbar explizit dank A1B.

Gegenbeispiele: Die geordneten Mengen $([0, 1]_{\mathbb{Q}}, \leq)$ und $([0, 1[_{\mathbb{Q}}, \leq)$ und $(]0, 1]_{\mathbb{Q}}, \leq)$ sind abzählbar und dicht, haben aber Minimum oder Maximum; daher sind sie nicht isomorph zu $(]0, 1[_{\mathbb{Q}}, \leq) \cong (\mathbb{Q}, \leq)$.
Es gilt $(\mathbb{Z}, \leq) \ncong (\mathbb{Q}, \leq)$, denn die Ordnung $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist nicht dicht.
Es gilt $(\mathbb{R}, \leq) \ncong (\mathbb{Q}, \leq)$, denn die Menge $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Die Ordnung der rationalen Zahlen

Beweis: Wir konstruieren eine ordnungstreue Bijektion $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ nach der „Zick-Zack-Methode“ von Cantor (1895) und Hausdorff (1914).

Vorgelegt seien Abzählungen $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} X : k \mapsto a_k$ und $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} Y : k \mapsto b_k$. Rekursiv konstruieren wir $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$ mit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ und $\emptyset = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ mit $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ und darauf ordnungstreue Bijektionen $f_n : X_n \to Y_n$ mit $f_{n+1}|_{X_n}^{Y_n} = f_n$. Der Anfang $n = 0$ ist trivial.

Sei $n \geq 0$ und $f_n : X_n \xrightarrow{\sim} Y_n$ bereits konstruiert. Für n gerade sei $i \in \mathbb{N}$ minimal mit $a_i \notin X_n$. Sei $j \in \mathbb{N}$ minimal mit $b_j \notin Y_n$, sodass $a_i \mapsto b_j$ die Bijektion $f_n : X_n \xrightarrow{\sim} Y_n$ monoton fortsetzt. Solch ein b_j existiert, da $f_n(X_n) = Y_n$ endlich ist und $Y \supset Y_n$ dicht ohne Extrema. Wir setzen $X_{n+1} := X_n \cup \{a_i\}$ und $Y_{n+1} := Y_n \cup \{b_j\}$ und $f_{n+1} = f_n \cup \{(a_i, b_j)\}$.

Hausdorffs Kniff: Für n ungerade tauschen wir die Rollen von X und Y. Das geschickte Hin-und-Her garantiert $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ und $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Die Isomorphismen $f_n : X_n \xrightarrow{\sim} Y_n$ erfüllen $f_{n+1}|_{X_n}^{Y_n} = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, vereinigen sich also zum Isomorphismus $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to Y$. QED

Die Ordnung der rationalen Zahlen

Diese genial-einfache Konstruktion zeigt noch etwas mehr:

Satz B3: Ordnung der rationalen Zahlen

(2) Jeder Ordnungsisomorphismus $g : (A, \leq) \xrightarrow{\sim} (B, \leq)$ zwischen endlichen Teilmengen $A \subset X$ und $B \subset Y$ lässt sich fortsetzen zu einem Ordnungsisomorphismus $f : (X, \leq) \xrightarrow{\sim} (Y, \leq)$.

(3) Dazu genügt, dass $A \cap [u, v]$ endlich ist für alle $u, v \in X$, ebenso B in Y.

Beweis: Wir beginnen die obige Konstruktion mit $f_n = g : A \xrightarrow{\sim} B$. Die Ausführung empfehle ich als Übung zur Wiederholung.

⚠ Für beliebige Teilmengen A und B gilt diese Fortsetzbarkeit nicht!

Gegenbeispiel: Zu $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ und $B = \{\, 1 - 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subset \mathbb{Q}$ ist $g : A \xrightarrow{\sim} B : n \mapsto 1 - 2^{-n}$ ein Ordnungsisomorphismus. Er lässt sich nicht fortsetzen zu $f : (\mathbb{Q}, \leq) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}, \leq)$: Angenommen, wir hätten $f : (\mathbb{Q}, \leq) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}, \leq)$ mit $f|_A^B = g$. Zu $y = 1 > 1 - 2^{-n}$ gehört dann $x = f^{-1}(y) \in \mathbb{Q}$ mit $x > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und das ist unmöglich.

Die Ordnung der rationalen Zahlen

Cantor bewies dieses Ergebnis bereits 1884. Sein Artikel zur *Theorie der Ordnungstypen* wurde von der Zeitschrift Acta Mathematica zunächst zur Publikation angenommen, doch der Herausgeber Mittag–Leffler war persönlich von dem Thema nicht überzeugt und bat Cantor, den Artikel zurückzuziehen. So erschien der Satz erst 1895, elf Jahre später.

Aufgabe: Cantor bewies den Satz noch nicht mit der Zick-Zack-Methode, sondern mit der einseitigen Variante. Gelingt die Konstruktion dennoch?

Lösung: Ja! In Cantors Konstruktion gilt weiterhin $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
Wir müssen nur $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ zeigen, also die Surjektivität von f.
Angenommen, es gäbe ein $b_j \in Y \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Wir wählen j minimal.
Sei $n \geq 0$ minimal, sodass $\{b_0, \dots, b_{j-1}\} \subseteq Y_n = \{f(a_0), \dots, f(a_{n-1})\}$.
Sei $i \geq n$ minimal, sodass a_i genauso zu $a_0, \dots, a_{n-1}$ liegt wie b_j zu $f(a_0), \dots, f(a_{n-1})$. In Cantors Konstruktion gilt dann $f_i : a_i \mapsto b_j$.
Das widerspricht unserer Annahme. Also ist f surjektiv.

☺ Hausdorffs eleganter Zick-Zack-Kniff vereinfacht das Argument, und verleiht dem verblüffenden Satz einen ebenso genialen Beweis.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

Samson und Dalila, Gemälde von Peter Paul Rubens um 1610, National Gallery London

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

Wir spielen auf zwei totalen Ordnungen, hier ein konkretes Beispiel:

$$X = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7\}$$
$$Y = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9\}$$

In Runde $n = 1, 2, 3, \ldots$ ziehen die Spieler Elemente $(a_n, b_n) \in X \times Y$:
(0) Verfügbar sind $X_n = X \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ und $Y_n = Y \setminus \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$.
(1) Samson (*spoiler*) wählt ein Element, entweder $a_n \in X_n$ oder $b_n \in Y_n$.
(2) Delila (*duplicator*) wählt komplementär dazu $b_n \in Y_n$ oder $a_n \in X_n$.

Dabei muss stets Monotonie gelten, also $a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j$ für alle i, j.
Anschaulich verbinden wir alle Paare (a_i, b_i) ohne Überkreuzungen.

Samson bekommt anfangs $5€$ und zahlt $1€$ an Delila für jede Antwort.
Samson will einen Unterschied zwischen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ aufdecken.
Delila will dies verhindern oder zumindest möglichst lange verzögern.

Im Casino spielen zwei Teams, Links und Rechts. Um die unglückliche Asymmetrie aufzuheben, spielt Team Links auf der linken Tafel Samson und auf der rechten Tafel Delila, Team Rechts entsprechend umgekehrt.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

Erfolgreiche Strategien ähneln einer binären Suche: Teile und herrsche! Sie wollen eine nachweislich optimale Strategie? Hier ist die Challenge:

Satz B3A: Isomorphiespiel zwischen endlichen Totalordnungen

Zu $k := |X| < |Y| < \infty$ sei $\nu(k)$ die kleinste Zahl n, für die Samson eine Strategie hat, mit der er spätestens in Runde $n+1$ gewinnt. Dann gilt

$$\nu(k) = \lfloor \log_2(k+1) \rfloor.$$

Aufgabe: Wie findet man dieses schöne Ergebnis? Bestimmen Sie $\nu(k)$ für kleine Werte $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Daraus entsteht eine Vermutung!

Lösung: Kleine Werte können Sie leicht austüfteln. Dabei entsteht die folgende Tabelle, dazu eine allgemeine Vermutung und Beweisidee.

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	…	14	15	…	30	31	…
$\nu(k) =$	0	1	1	2	2	2	2	3	…	3	4	…	4	5	…

Die Werte entstehen aus $\lambda(0) = 0$ rekursiv durch $\lambda(k+1) = \lambda(\lfloor k/2 \rfloor) + 1$. Inkremente entstehen nur bei $1, 3, 7, 15, \dots$, also gilt $\lambda(k) = \lfloor \log_2(k+1) \rfloor$.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

Beweis: Wir beweisen (1) $\nu(k) \leq \lambda(k)$ und (2) $\nu(k) \geq \lambda(k)$ per Induktion über $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ gilt $\nu(0) = 0 = \lambda(0)$. Im Folgenden sei also $k \geq 1$.

(1) Samson halbiert $Y = Y_{<b} \sqcup \{b\} \sqcup Y_{>b}$ mit $|Y_{>b}| - |Y_{<b}| \in \{0, 1\}$. Nach Delilas Zug $X = X_{<a} \sqcup \{a\} \sqcup X_{>a}$ gilt $|X_{<a}| \neq |Y_{<b}|$ oder $|X_{>a}| \neq |Y_{>b}|$. Daraus wählt Samson (X', Y') mit $|X'|$ minimal. Damit erreicht Samson $|X'| \leq \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ und spielt weiter auf (X', Y'). Per Induktion folgt:

$$\nu(k) \;\leq\; 1 + \nu(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;\leq\; 1 + \lambda(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;=\; \lambda(k)$$

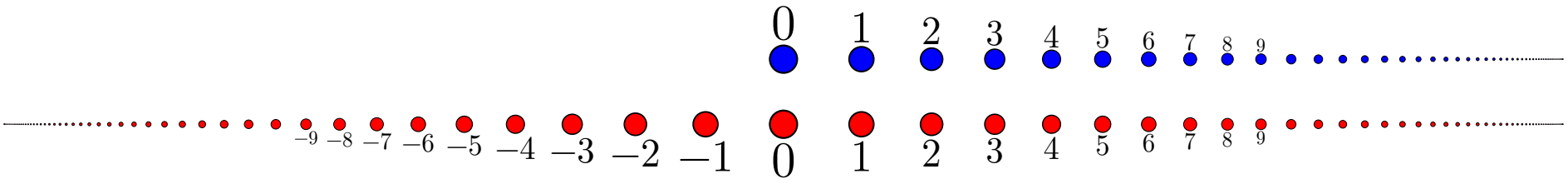
(2) Egal wie Samson zieht, entweder $a \in X$ oder $b \in Y$, Delila kann stets so parieren, dass jedes der beiden Intervallpaare (X', Y') links und rechts $\lfloor (k-1)/2 \rfloor \leq |X'| < |Y'|$ oder $|X'| = |Y'|$ erfüllt. Per Induktion folgt:

$$\nu(k) \;\geq\; 1 + \nu(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;\geq\; 1 + \lambda(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;=\; \lambda(k)$$

Das beweist den Satz durch Konstruktion optimaler Strategien. QED

Ganz praktisch können Sie diese Strategien direkt erproben: Spielen! Sowohl (1) als auch (2) erfordern einige Fallunterscheidungen: Übung!

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila



Wir spielen $(\mathbb{N}, \leq)$ gegen $(\mathbb{Z}, \leq)$. Samsons Gewinnstrategie als Formel:

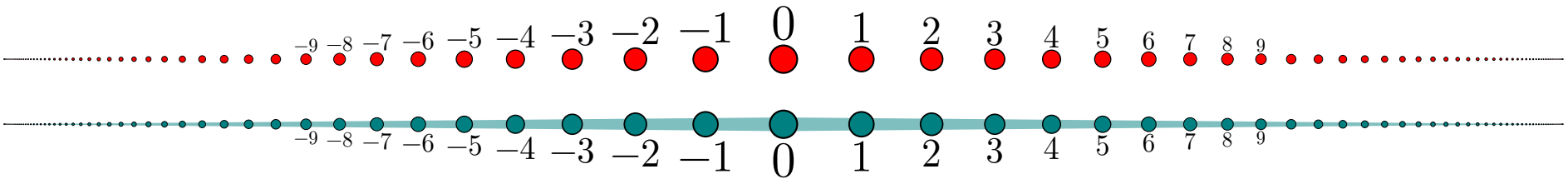
$$\exists a_1 \in \mathbb{N} \ \forall a_2 \in \mathbb{N} : a_1 \leq a_2$$
$$\forall b_1 \in \mathbb{Z} \ \exists b_2 \in \mathbb{Z} \ : b_1 > b_2$$

Die erste Aussage ist wahr für $(\mathbb{N}, \leq)$. Die zweite Aussage negiert die erste und ist wahr für $(\mathbb{Z}, \leq)$; wir ersetzen $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und a_n durch b_n. Diese Formel unterscheidet also beide Strukturen! Das übersetzt Samson in seine Gewinnstrategie, indem er jeweils die Existenzquantoren spielt.

Ausführlich: Samson wählt das kleinste Element $a_1 = 0$ in $(\mathbb{N}, \leq)$. Delila antwortet mit irgendeinem Element b_1 in $(\mathbb{Z}, \leq)$. Samson wählt dazu nun b_2 in $(\mathbb{Z}, \leq)$ mit $b_2 < b_1$. Daraufhin muss Delila aufgeben.

☺ Die Anzahl der Runden entspricht der Anzahl der Variablen.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila



Wir spielen $(\mathbb{Z}, \leq)$ gegen $(\mathbb{Q}, \leq)$. Samsons Gewinnstrategie als Formel:

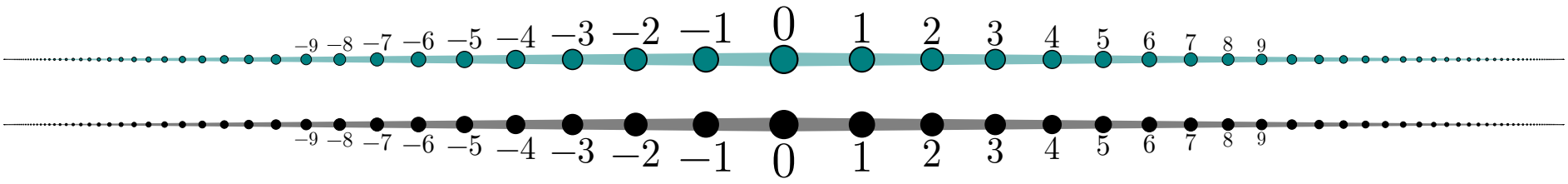
$$\exists a_1 \in \mathbb{Z}\ \ \exists a_2 \in \mathbb{Z}\ \ \forall a_3 \in \mathbb{Z} : [\, a_1 < a_2 \wedge (a_1 \geq a_3 \vee a_3 \geq a_2)\,]$$
$$\forall b_1 \in \mathbb{Q}\ \ \forall b_2 \in \mathbb{Q}\ \ \exists b_3 \in \mathbb{Q} : [\, b_1 \geq b_2 \vee (b_1 < b_3 \wedge b_3 < b_2)\,]$$

Die zweite Aussage ist wahr für $(\mathbb{Q}, \leq)$; sie besagt, die Ordnung ist dicht. Die erste Aussage negiert die zweite und ist wahr für $(\mathbb{Z}, \leq)$, da nicht dicht. Diese Formel unterscheidet also beide Strukturen! Das übersetzt Samson in seine Gewinnstrategie, indem er die Existenzquantoren spielt.

Ausführlich: Samson wählt zwei Elemente a_1 und $a_2 = a_1 + 1$ in $(\mathbb{Z}, \leq)$. Delila antwortet mit Elementen b_1 und b_2 in $(\mathbb{Q}, \leq)$ mit $b_1 < b_2$. Samson wählt b_3 in $(\mathbb{Q}, \leq)$ mit $b_1 < b_3 < b_3$. Daraufhin muss Delila aufgeben.

☺ Die Anzahl der Runden entspricht der Anzahl der Variablen.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila



Wir spielen $(\mathbb{Q}, \leq)$ gegen $(\mathbb{R}, \leq)$. Hier kommt das Spiel nie zum Ende!

Die geordneten Mengen $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind nicht isomorph, schon die zugrundeliegenden Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ erlauben keine Bijektion: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Dennoch führt das Isomorphiespiel (in nur endlicher Zeit) zu keiner Entscheidung: Weder Samson noch Delila kann einen Gewinn erzwingen, da dem jeweils anderen immer noch weitere Zugmöglichkeiten bleiben.

Gleichbedeutend: Diese beiden Ordnungen sind **elementar äquivalent**, jede Aussage der Logik erster Stufe (endlich viele Quantoren je über eine Elementvariable) hat für $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ denselben Wahrheitswert.

☺ Es gibt nicht-isomorphe Modelle, die elementar äquivalent sind!

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

Wir erklären die **n–Äquivalenz** $(X, \leq) \equiv_n (Y, \leq)$ zweier Ordnungen dadurch, dass Delila immer mindestens n Runden überstehen kann.

Dem gegenüber steht der **Quantorenrang** $\mathrm{qr}(\varphi)$ einer Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\leq)$ als die Schachtelungstiefe der Quantoren: Ist φ atomar, also von der Form $(x \leq y)$, so gilt $\mathrm{qr}(\varphi) := 0$. Rekursiv definieren wir $\mathrm{qr}(\neg\varphi) := \mathrm{qr}(\varphi)$ und $\mathrm{qr}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{qr}(\varphi \wedge \psi) := \max\{\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)\}$ für alle Junktoren sowie $\mathrm{qr}(\forall x : \varphi) = \mathrm{qr}(\exists x : \varphi) := \mathrm{qr}(\varphi) + 1$ für die Quantoren. Wir schreiben $\mathrm{FO}_n(\leq)$ für die Menge aller Formeln von Quantorenrang höchstens n.

Satz B3B: Korrespondenzsatz von Ehrenfeucht–Fraïssé

Genau dann gilt n–Äquivalenz $(X, \leq) \equiv_n (Y, \leq)$, wenn jede Formel $\varphi \in \mathrm{FO}_n(\leq)$, vom Quantorenrang $\leq n$, auf beiden Modellen denselben Wahrheitswert ergibt, formal geschrieben $((X, \leq) \vDash \varphi) \Leftrightarrow ((Y, \leq) \vDash \varphi)$.

Der Beweis gelingt per Induktion über n. Dies wird hier nicht ausgeführt.

📖 N. Immermann: *Descriptive Complexity.* Springer 1999, Thm. 6.10.
L. Libkin: *Elements of Finite Model Theory.* Springer 2012, Thm. 3.9.

Die Saga der *high school identities*

Satz B3c: Grundregeln zur Termumformung, Dedekind 1888

(0) In den natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$:

(A1)	$x + y = y + x$	(M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
(A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	(M2)	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(A3)	$x + 0 = x$	(M3)	$x \cdot 1 = x$
(D0)	$x \cdot 0 = 0$	(D1)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
(P0)	$x^0 = 1$	(P1)	$x^{y+z} = x^y \cdot x^z$
(P2)	$x^1 = x$	(P3)	$x^{y \cdot z} = (x^y)^z$
(P4)	$1^x = 1$	(P5)	$(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$
(P6)	$0^x = 0$ für $x \neq 0$		

Dies sind die 15 Grundregeln, die wir aus der Schule kennen und lieben und alltäglich in jeder Rechnung einsetzen, etwa zur Zifferndarstellung. Wie üblich kürzen wir $x \cdot y$ ab zu xy, sparen Klammern gemäß Potenz-vor-Punkt-vor-Strich und nutzen $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $5 = 4 + 1$, ...

Die Saga der *high school identities*

Beispiel: Es gelten weitere nützliche Identitäten, für alle $x, y \in \mathbb{N}$ etwa:

$$x + (y \cdot x) = x \cdot (y + 1)$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Übung: Müssen wir diese Identitäten als weitere Axiome hinzufügen? Nein, wir können sie aus den obigen Grundregeln ableiten! Allgemein:

Satz B3c: polynomiale Identitäten

(1) Gilt $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ für zwei Formeln f und g über $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ und alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, so können wir diese Gleichheit bereits aus den ersten acht Grundregeln (A123, M123, D01) ableiten.

Beweisskizze: Beide Seiten der Gleichung sind Polynome in $x_1, \dots, x_n$. Ausmultiplizieren und Monomesammeln bringt sie in Standardform. Für diese genügt es, die Koeffizienten zu vergleichen. (Warum?) QED

☺ Der Kalkül der obigen Grundregeln ist in diesem Sinne *vollständig* und jede Identität im Halbring $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ ist algorithmisch *entscheidbar*.

Die Saga der *high school identities*

Der Logiker Alfred Tarski (1901–1983) vermutete in den 1960er Jahren die Vollständigkeit auch für $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$, mit Potenzierung, konnte dies aber nicht beweisen. Diese Frage wurde berühmt als *Tarski's high school algebra problem:* Lässt sich jede Identität in $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ aus den 15 Grundregeln ableiten? Diese harmlos anmutende Frage beschäftigte viele prominente Logiker und erwies sich als überraschend schwierig.

Alex Wilkie zeigte 1981, dass Tarskis Vermutung falsch ist. Das war eine große Überraschung, und der Beweis ist erfreulich konkret und leicht:

Satz B3c: Wilkie 1981

(2) In $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{N}$ die folgende Identität $W(x, y)$:

$$\begin{aligned} & ((1+x)^y + (1+x+x^2)^y)^x \cdot ((1+x^3)^x + (1+x^2+x^4)^x)^y \\ = \; & ((1+x)^x + (1+x+x^2)^x)^y \cdot ((1+x^3)^y + (1+x^2+x^4)^y)^x \end{aligned}$$

(3) Sie lässt sich jedoch nicht aus Dedekinds 15 Grundregeln (0) ableiten.

Aufgabe: Beweisen Sie zunächst die Gültigkeit von Wilkies Identität (2).

Die Saga der *high school identities*

Lösung: (2) Zu $x \in \mathbb{N}$ haben wir $\bar{x} := 1 - x + x^2 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und damit

$$1 + x^3 = (1 - x + x^2)(1 + x),$$
$$1 + x^2 + x^4 = (1 - x + x^2)(1 + x + x^2).$$

Das ist der entscheidende Trick, ab hier genügen Dedekinds Grundregeln. Genauer: Für $x = 0$ setzen wir $\bar{x} = 1$, für $x = v + 1$ setzen wir $\bar{x} = 1 + vx$. Dank (1) folgt die obige Faktorisierung für alle $x \in \mathbb{N}$. (Nachrechnen!) Beide Seiten von Wilkies Identität $W(x, y)$ sind demnach gleich

$$((1 + x)^y + (1 + x + x^2)^y)^x \cdot \bar{x}^{xy} \cdot ((1 + x)^x + (1 + x + x^2)^x)^y.$$

Können wir dies allein aus den Grundregeln ableiten? Wilkies zeigte, dass dies unmöglich ist. Wie können wir dies beweisen? Wenn Sie zeigen wollen, dass etwas *möglich* ist, dann ist meist der beste Beweis, es zu tun! Wenn Sie zeigen wollen, dass etwas *nicht möglich* ist, dann genügt nicht, es nicht zu tun… oder erfolglos zu versuchen und frustriert aufzugeben. Die Unmöglichkeit beweisen wir, indem wir ein Hindernis benennen!

Die Saga der *high school identities*

📖 S.N. Burris, K.A. Yeats: *The saga of the high school identities.* Algebra Universalis 52 (2004) 325–342. Zum Beweis der Unmöglichkeit (3) zitiere ich ihr verblüffendes Argument durch ein 13elementiges Gegenmodell:

$+$	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	2	3	4	4	2	3	d	3	3	3	3	4
2	2	3	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
a	a	2	3	4	4	b	4	b	3	h	3	3	4
b	b	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
c	c	d	3	4	4	b	4	b	3	3	3	3	4
d	d	3	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4
e	e	3	4	4	4	h	4	3	4	4	3	h	4
f	f	3	4	4	4	3	4	3	4	3	4	3	4
g	g	3	4	4	4	3	4	3	4	h	3	4	4
h	h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

$\cdot$	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
2	0	2	4	4	4	b	4	b	4	4	4	4	4
3	0	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
a	0	a	b	4	4	c	b	c	b	h	4	4	4
b	0	b	4	4	4	b	4	b	4	4	4	4	4
c	0	c	b	4	4	c	b	c	b	4	4	4	4
d	0	d	4	4	4	b	4	b	4	4	4	4	4
e	0	e	4	4	4	h	4	4	4	4	4	h	4
f	0	f	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
g	0	g	4	4	4	4	4	4	4	h	4	4	4
h	0	h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

$\hat{}$	0	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	4	4	4	4	4	4	f	4	4	4
3	1	3	4	4	4	e	4	4	4	g	4	e	h
4	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
a	1	a	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
b	1	b	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
c	1	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	1	d	4	4	4	f	4	4	4	4	4	4	4
e	1	e	4	4	4	4	4	4	4	h	4	4	4
f	1	f	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
g	1	g	4	4	4	h	4	4	4	4	4	h	4
h	1	h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Satz B3c: Burris–Yeats 2004

(4) Dieses Modell $(X, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ auf der Menge $X = \{0, 1, 2, 3, 4, a, \dots, h\}$ erfüllt Dedekinds 15 Grundregeln, aber nicht Wilkies Identität $W(a, e)$.

Die Saga der *high school identities*

Übung: Schreiben Sie ein Python-Programm, das für $(X, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ alle 15 Grundregeln nachprüft und alle Ausnahmen für $W(x, y)$ findet.

Lösung: Die Elemente der Menge X codieren wir durch $0, 1, \ldots, 12$ und hinterlegen die obigen Tabellen als drei Arrays `add`, `mul`, `exp`.

```
print('Axioms', all([ add[x][y] == add[y][x]                                  #A1
               and add[add[x][y]][z] == add[x][add[y][z]]                      #A2
               and add[x][0] == x                                              #A3
               and mul[x][y] == mul[y][x]                                      #M1
               and mul[mul[x][y]][z] == mul[x][mul[y][z]]                      #M2
               and mul[x][1] == x                                              #M3
               and mul[x][0] == 0                                              #D0
               and mul[x][add[y][z]] == add[mul[x][y]][mul[x][z]]              #D1
               and exp[x][0] == 1                                              #P0
               and exp[x][add[y][z]] == mul[exp[x][y]][exp[x][z]]              #P1
               and exp[x][1] == x                                              #P2
               and exp[x][mul[y][z]] == exp[exp[x][y]][z]                      #P3
               and exp[1][x] == 1                                              #P4
               and exp[mul[x][y]][z] == mul[exp[x][z]][exp[y][z]]              #P5
               and (exp[0][x] == 0 or x == 0)                                  #P6
    for x in range(0,13) for y in range(0,13) for z in range(0,13) ]))
```

Die Saga der *high school identities*

Im Nachhinein ist das genial einfach. Doch wie kommt man darauf? Das ist Teil einer langen Saga: Wilkies ursprünglicher Beweis (1981) war rein syntaktisch. Gurevič fand 1985 ein Gegenmodell mit 60 Elementen, später ein kleineres mit 34. Burris reduzierte dies 1988 auf 29 Elemente, 1990 auf 17, zusammen mit Yeats 2001 schließlich auf 13; ihre Methode verband monatelange Computersuche mit sachkundiger Optimierung.

Burris und Yeats vermuten, dass sie damit das Minimum gefunden haben, also keine noch kleineren Gegenmodelle existieren. Eine erschöpfende Computersuche könnte hier Klarheit schaffen, ist aber aufwändig und soweit ich weiß bisher noch nicht vollständig durchgeführt worden.

Vermutlich empfinden Sie den Beweis als kurz und einfach, doch das obige Gegenmodell als „künstlich“ und wenig erhellend. Völlig zu Recht! Seine Konstruktion durch „brute force“ bleibt leider noch unbefriedigend.

Bisher scheint kein „natürliches“ oder erhellendes Gegenmodell bekannt. Noch lehrreicher als ein möglichst kleines, aber obskures Gegenmodell wäre ein elegantes Gegenmodell, gut verständlich und aussagekräftig.

Die Saga der *high school identities*

Was passiert, wenn wir zu Dedekinds Grundregeln noch Wilkies Identität hinzufügen? Sind die Umformungsregeln damit vollständig? Nein! Gurevič konstruierte für jedes ungerade n eine Identität $W_n(x,y)$:

$$(A^x + B^x)^y \cdot (C^y + D^y)^x = (A^y + B^y)^x \cdot (C^x + D^x)^y,$$

wobei $A = 1 + x$ und $B = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ sowie $C = 1 + x^n$ und $D = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2}$. Für $n = 3$ ist dies die Identität von Wilkie. Die gesamte Familie dieser Identitäten gilt in $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$, sie kann jedoch aus keiner endlichen Menge von Axiomen abgeleitet werden.

📖 R. Gurevič: *Equational theory of positive numbers with exponentiation is not finitely axiomatizable.* Ann. Pure and Applied Logic 49 (1990) 1–30

Warum erzähle ich das? Es lehrt uns, die sorgsame Konstruktion von $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{})$ zu würdigen, und zeigt, dass selbst Grundlagen wie die *„high school identities“* zu interessanten und kniffligen Forschungsfragen führen, sobald wir nur genau hinsehen. Die hier illustrierten Techniken durch Beweis und Gegenbeispiel verhelfen Ihnen überall zur Klarheit.

Matrixkalkül: komplexe Zahlen als 2×2–Matrizen

Satz B3D: die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Matrizen über $\mathbb{R}$

Im Matrixring $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, 0_{2\times 2}, \cdot, 1_{2\times 2})$ betrachten wir die Teilmenge

$$C := \left\{ z = \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sie bildet einen Teilring. Das bedeutet, sie enthält $0_{2\times 2}$ und $1_{2\times 2}$ und ist abgeschlossen unter Matrixaddition, Negation und Multiplikation:

$$\left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} u & -v \\ v & u \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} xu-yv & -(yu+xv) \\ yu+xv & xu-yv \end{smallmatrix}\right]$$

Jedes Element $z \neq 0$ in $(C, \cdot)$ ist invertierbar, denn $\det(z) = x^2 + y^2 > 0$:

$$\left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2} \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right]$$

Somit ist $(C, +, \cdot)$ ein Divisionsring. Er ist zudem sogar kommutativ:

$$\left[\begin{smallmatrix} u & -v \\ v & u \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} ux-vy & -(uy+vx) \\ uy+vx & ux-vy \end{smallmatrix}\right]$$

Somit ist C ein Körper. Er ist isomorph zu den komplexen Zahlen:

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \cong (C, +, \cdot) \,:\, x + \mathrm{i}y \leftrightarrows \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right]$$

Matrixkalkül: komplexe Zahlen als 2×2–Matrizen

Wir betrachten hier nicht die gesamte Menge $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2–Matrizen, sondern nur eine spezielle Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Diese ist abgeschlossen unter Addition, Negation und Multiplikation: Für je zwei Matrizen $z, w \in C$ gilt $z + w \in C$, $-w \in C$ und $z \cdot w \in C$. Zudem gilt $0_{2\times 2} \in C$ und $1_{2\times 2} \in C$. Wir nennen dies einen **Teilring**.

🙂 Allein daraus folgt bereits, dass $(C, +, 0_{2\times 2}, \cdot, 1_{2\times 2})$ ein Ring ist.

Übung: Wiederholen Sie die acht Ringaxiome und prüfen Sie jedes einzelne hier nach. Sie werden sehen, dass es *trivialerweise* erfüllt ist.

Struktur $(C, +, \cdot)$	$(C, +)$				$(C, +, \cdot)$		$(C, \cdot)$			
Eigenschaft	Ass	Ntr	Inv	Com	DL	DR	Ass	Ntr	Inv*	Com
erben als Teilring	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	–	–
extra nachrechnen									✓	✓

Trivial bedeutet, es folgt ohne weiteres Zutun sofort aus der Definition. Erst nachdem Sie sich selbst einmal diese notwendige doch lehrreiche Mühe gemacht haben, sind Sie berechtigt auszurufen: „Das ist trivial!“

Matrixkalkül: Quaternionen als 2×2–Matrizen

Satz B3E: die Quaternionen $\mathbb{H}$ als Matrizen über $\mathbb{C}$

Im Matrixring $(\mathbb{C}^{2\times 2}, +, 0_{2\times 2}, \cdot, 1_{2\times 2})$ betrachten wir die Teilmenge

$$H := \left\{ q = \left[\begin{smallmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Sie bildet einen Teilring. Das bedeutet, sie enthält $0_{2\times 2}$ und $1_{2\times 2}$ und ist abgeschlossen unter Matrixaddition, Negation und Multiplikation:

$$\left[\begin{smallmatrix} z_1 & -w_1 \\ \overline{w_1} & \overline{z_1} \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} z_2 & -w_2 \\ \overline{w_2} & \overline{z_2} \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2} & -z_1 w_2 - w_1 \overline{z_2} \\ \overline{w_1} z_2 + \overline{z_1} w_2 & -\overline{w_1} w_2 + \overline{z_1} z_2 \end{smallmatrix}\right]$$

Jedes Element $q \neq 0$ in $(H, \cdot)$ ist invertierbar, $\det(q) = |z|^2 + |w|^2 > 0$:

$$\left[\begin{smallmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{z\overline{z} + w\overline{w}} \left[\begin{smallmatrix} \overline{z} & w \\ -\overline{w} & z \end{smallmatrix}\right]$$

Somit ist $(H, +, \cdot)$ ein Divisionsring. Er ist jedoch nicht kommutativ:

$$E = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right],\ I = \left[\begin{smallmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right],\ J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right] \quad \Rightarrow$$

$\cdot$	I	J	K
I	$-E$	K	$-J$
J	$-K$	$-E$	I
K	J	$-I$	$-E$

Dieser Divisionsring ist isomorph zu Hamiltons Quaternionen:

$$(\mathbb{H}, +, \cdot) \cong (H, +, \cdot) : \alpha + \beta\mathrm{i} + \gamma\mathrm{j} + \delta\mathrm{k} \leftrightarrows \alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K.$$

Matrixkalkül: Quaternionen als 2×2–Matrizen

Die Teilmenge $H \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist ein Teilring: Es gilt $0_{2\times 2} \in H$ und $1_{2\times 2} \in H$.
Für je zwei Matrizen $z, w \in H$ gilt $z + w \in H$, $-w \in H$ und $z \cdot w \in H$.

☺ Allein daraus folgt bereits, dass $(H, +, 0_{2\times 2}, \cdot, 1_{2\times 2})$ ein Ring ist.

Struktur $(H,+,\cdot)$	$(H,+)$				$(H,+,\cdot)$		$(H,\cdot)$			
Eigenschaft	Ass	Ntr	Inv	Com	DL	DR	Ass	Ntr	Inv*	Com
erben als Teilring	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	–	–
extra nachrechnen									✓	–

☺ Unsere sorgsame Vorbereitung zum Matrixkalkül zahlt sich hier aus!
Die Ringaxiome haben wir für $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$ allgemein nachgewiesen.
Das können wir immer wieder wunderbar nutzen, so auch hier.

☺ Ohne weitere Mühe sehen wir sofort, dass H ein Schiefkörper ist.
Das ist eine explizite, doch sparsame Konstruktion der Quaternionen.
Die direkte, naive Konstruktion ist möglich, aber eher mühsamer.

Aufgabe: Lassen sich so auch die Oktaven in $\mathbb{H}^{2\times 2}$ darstellen? **Lösung:**
Nein, die Multiplikation in $\mathbb{H}^{2\times 2}$ ist assoziativ, die Oktaven jedoch nicht.

Kapitel C

Distanzlehre: metrische Räume

Alles messen, was messbar ist –
und messbar machen, was noch nicht messbar ist.
Galileo Galilei (1564–1642)

Inhalt dieses Kapitels C

1 Skalarprodukte und Normen auf Vektorräumen

2 Metrische Räume und ihre Topologie

3 Konvergenz und Stetigkeit

4 Vollständige metrische Räume

5 Der kleine Horrorladen

Von Linearer Algebra über die Analysis zur Topologie

Lineare Algebra, Geometrie ... ... Analysis, Topologie

$$\text{Skalarprodukt} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Norm} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Metrik} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Topologie}$$

speziell, rigide, mehr Tiefe ... ... mehr Breite, flexibel, allgemein

In diesem Kapitel vollziehen wir den Dreischritt von Skalarprodukten zu Normen zu Metriken zu Topologien. Dies sind vier allgegenwärtige mathematische Grundstrukturen. Sie kennen diese bereits aus der Linearen Algebra und analytischen Geometrie sowie der Analysis, jetzt fortgeführt in der Topologie, später in der Funktionalanalysis.

Meist arbeiten wir allgemein mit Topologien. Oft ist es jedoch sinnvoll, Metriken zu nutzen, oder soweit möglich Normen und Skalarprodukte. Je nach Anwendung nutzen wir dankend passende Werkzeuge: Starke Strukturen erlauben mehr Tiefe, allgemeine Strukturen mehr Breite. Wir schauen uns daher auch jeweils das Umkehrproblem an

Von Linearer Algebra über die Analysis zur Topologie

Dieses Kapitel ist ein Rückblick auf die ersten Semester mit einigen Präzisierungen und Ergänzungen. Ich erstrebe damit eine gemeinsame Grundlage und einen reichhaltigen Beispielfundus für die Topologie. Weniger ist mehr? Nein. Mehr Beispiele helfen zu mehr Verstehen.

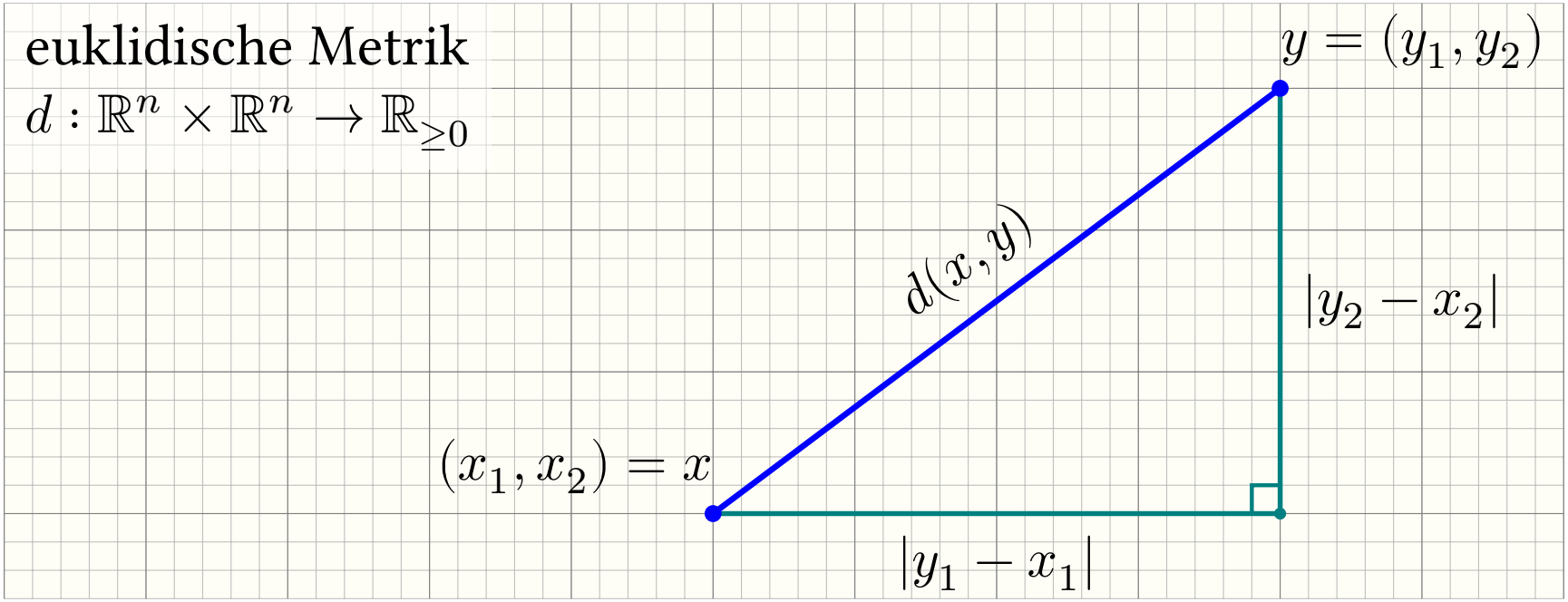
Ich importiere hier freizügig Themen aus der Linearen Algebra und der Analysis, die Sie ja alle gehört haben (sofern Sie Mathematik studieren), manchmal auch aus der Stochastik oder der Numerik oder anschauliche Beispiele aus der Physik, der Informatik oder weiteren Anwendungen.

Vorkenntnisse der Teilnehmer:innen sind naturgemäß unterschiedlich. Wenn Sie dabei schöne Themen wiedererkennen, dürfen Sie sich freuen und stolz sein auf ihre mathematische Allgemeinbildung. Wenn nicht, dann motiviert Sie dieser Ausblick vielleicht, mehr wissen zu wollen.

Ich will und muss mich hier kurz fassen — aber doch nicht zu kurz!
Ich versuche dabei, die Mathematik vernetzt darzustellen und hilfreiche Querverbindungen zu zeigen. Ich vertraue auf Ihre Neugier.

Die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^n$ aller reellen n–Tupel.



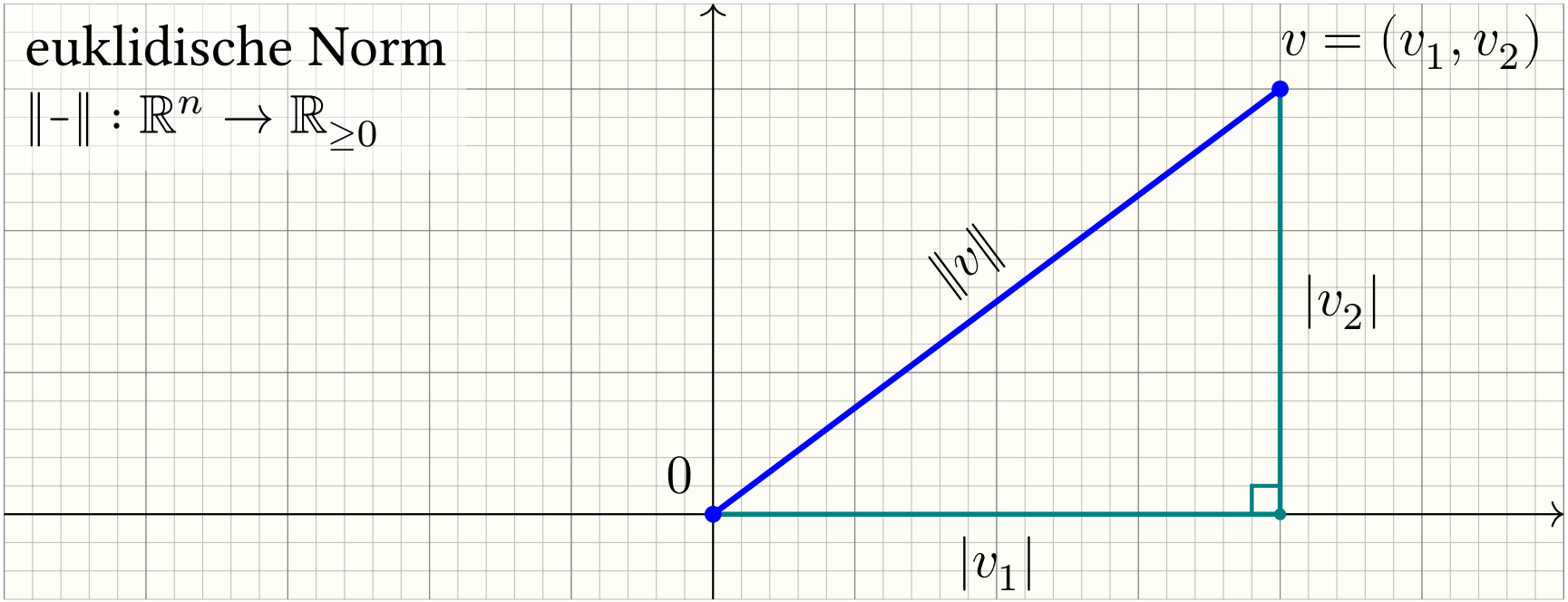
Die **euklidische Metrik** $d(x, y)$ misst den Abstand vom Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ zum Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, also die Länge des Vektors $y - x$. Dank Pythagoras gilt:

$$d(x, y) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + \cdots + |y_n - x_n|^2}$$

Unsere Skizze zeigt dies für $n = 2$. **Übung:** Skizzieren und begründen Sie dies ebenso für $n = 3$. Der allgemeine Fall $n \in \mathbb{N}$ gelingt per Induktion.

Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.



Die **euklidische Norm** $\|v\|$ misst die Länge des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ als den Abstand vom Ursprung 0 zum Punkt v. Dank Pythagoras gilt:

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2}$$

Das Normquadrat $\|v\|^2 = v_1^2 + \cdots + v_n^2$ ist eine **quadratische Form**. Die zugehörige Bilinearform ist das **euklidische Skalarprodukt**.

Verallgemeinerung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Wir formulieren Skalarprodukte nicht nur über $\mathbb{R}$, auch über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$.
Zur Erinnerung: Auf dem Körper $\mathbb{R}$ haben wir die **triviale Konjugation**

$$\mathrm{conj}_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \overline{\alpha} = \alpha.$$

Demnach gilt $|\alpha|^2 = \overline{\alpha}\alpha = \alpha\overline{\alpha} = \alpha^2 \geq 0$, mit Gleichhheit gdw $\alpha = 0$.
Auf $\mathbb{C} = \{ z = \alpha + \mathrm{i}\beta \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$ haben wir die **komplexe Konjugation**

$$\mathrm{conj}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = \alpha + \mathrm{i}\beta \mapsto \overline{z} = \alpha - \mathrm{i}\beta.$$

Demnach gilt $|z|^2 = \overline{z}z = z\overline{z} = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, mit Gleichhheit gdw $z = 0$.
Auf $\mathbb{H} = \{ q = \alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{k}\delta \,|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}$ haben wir entsprechend

$$\mathrm{conj}_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : q = \alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{k}\delta \mapsto \overline{q} = \alpha - \mathrm{i}\beta - \mathrm{j}\gamma - \mathrm{k}\delta.$$

Es gilt $|q|^2 = q\overline{q} = \overline{q}q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 0$, mit Gleichhheit gdw $q = 0$.
Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{\overline{x}} = x$ sowie $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ und $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$
Dies setzen wir fort auf Matrizen über $\mathbb{K}$: Zur Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times J}$ definieren wir die **adjungierte Matrix** $A^\dagger := \overline{A}^\top \in \mathbb{K}^{J \times I}$ durch Transkonjugation.

Verallgemeinerung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Wir formulieren systematisch diese drei Fälle gemeinsam. Es lohnt sich! Denkökonomie: Die Arbeit über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ verläuft weitgehend parallel. In ihrem Zusammenspiel und im Kontrast können wir viel lernen!

Grundlegend ist der reelle Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dieser ist insbesondere in kleiner Dimension $n = 2, 3$ wunderbar anschaulich. Davon wollen wir ausgehen und auf beliebige (auch unendliche) Dimension verallgemeinern.

Für viele Anwendungen (in Mathematik, Physik, Ingenieurwesen, …) reichen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht aus, daher nutzen wir die Erweiterung zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Das gilt insbesondere für Skalarprodukte.

Die Quaternionen $\mathbb{H}$ werden erfahrungsgemäß nicht so häufig genutzt wie $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, oft genug sind sie jedoch eine sehr hilfreiche Ergänzung.

Den reellen Fall versteht man besser, wenn man auch komplex denkt, und fürs Komplexe hilft es, die Quaternionen im Hinterkopf zu haben.

Kurzum: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind oft nicht genug, die Quaternionen $\mathbb{H}$ sind manchmal zu viel, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind meist genau richtig.

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$

Beispiel C1A: das euklidische Skalarprodukt auf dem Raum $\mathbb{K}^n$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das **Standardskalarprodukt**

$$\langle \text{-} | \text{-} \rangle : V \times V \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u \,|\, v \rangle := \overline{u_1} v_1 + \cdots + \overline{u_n} v_n = u^\dagger v.$$

Für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

S0: positive Semidefinitheit, $\langle u \,|\, u \rangle \geq 0 = \langle 0 \,|\, 0 \rangle$

S1: positive Definitheit, $\langle u \,|\, u \rangle > 0$ für $u \neq 0$

S2: konjugierte Symmetrie, $\langle v \,|\, u \rangle = \overline{\langle u \,|\, v \rangle}$

S3: Linearität rechts, $\langle u \,|\, v\lambda + w\mu \rangle = \langle u \,|\, v \rangle \lambda + \langle u \,|\, w \rangle \mu$

Aus (S2) und (S3) folgt konjugierte Linearität in der ersten Variablen:

S4: konjugierte Linearität links, $\langle u\lambda + v\mu \,|\, w \rangle = \overline{\lambda} \langle u \,|\, w \rangle + \overline{\mu} \langle v \,|\, w \rangle$

Zu (S4) sagen wir kurz **semilinear**, zu (S3&4) demnach **sesquilinear** (lat. *sesqui*, ‘anderthalb’). Zu (S2) sagt man **hermitesch**, zu Ehren von Charles Hermite (1822–1901), über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bedeutet das **symmetrisch**.

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$

Wir nennen dies das **euklidische** oder **Standardskalarprodukt** auf $\mathbb{K}^n$.
Allgemein über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist es eine **hermitesche Sesquilinearform**, speziell über $\mathbb{R}$ eine **symmetrische Bilinearform**.

Dank (S2) gilt $\langle u \,|\, u \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$, wir können also die Ordnung von $\mathbb{R}$ nutzen und von Positivität sprechen: (S0) fordert $\langle u \,|\, u \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und (S1) ergänzt stärker $\langle u \,|\, u \rangle \neq 0$ für alle $u \neq 0$, also $\langle u \,|\, u \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Aussagen (S0–4) nach.

Lösung: Wir nutzen die Anordnung der reellen Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$:

(S0) Für jeden Koeffizienten $u_i \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{u_i} u_i = |u_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Für jeden Vektor $u \in \mathbb{K}^n$ folgt $\langle u \,|\, u \rangle = |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0$.

(S1) Im Falle $u \neq 0$ gilt $u_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$.
Daraus folgt sofort die strikte Ungleichung $\langle u \,|\, u \rangle \geq |u_i|^2 > 0$.

Wir nutzen, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ein Ring ist und die Konjugation ein Ringantiautomorphismus. Damit rechnen Sie (S2–4) geduldig nach.
Da $\mathbb{H}$ nicht-kommutativ ist, achten wir auf die Reihenfolge der Faktoren.

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$

Bemerkung: Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist $(u, v) \mapsto u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ positiv definit, auf $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{H}^n$ jedoch nicht, denn $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1 < 0$.

⚠ Zur Korrektur müssen wir eine der beiden Variablen konjugieren.
Ich plädiere entschieden für die erste, dadurch werden Formeln schöner.
Diese Konvention ist in der physikalischen Literatur weitgehend üblich.

⚠ Manche Autoren wählen die zweite; das ist eine Geschmacksfrage.
So findet es sich vor allem in der älteren, mathematischen Literatur.
Beide Konventionen sind per Konjugation ineinander umzurechnen.

🙂 Wir legen uns auf eine Konvention fest und befolgen diese fortan.

Bemerkung: Es gilt $\langle u \,|\, 0 \rangle = 0$ dank (S3) und $\langle 0 \,|\, v \rangle = 0$ dank (S4).
Insbesondere gilt demnach immer $\langle 0 \,|\, 0 \rangle = 0$, und aus (S1) folgt (S0).

Die Formulierung der Eigenschaften (S0–3) ist daher etwas redundant;
ich möchte damit die positive Definitheit (S1) besonders hervorheben.

Gilt in späteren Anwendungen statt positiver Definitheit (S1) nur die schwächere Eigenschaft (S0), so heißt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ **positiv semidefinit**.

Anwendungen von Skalarprodukt, Norm und Metrik

☺ Mit dem Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ messen wir Winkel und Längen.
Daraus gewinnen wir für V wichtige geometrische Werkzeuge:

Norm: Die Länge eines Vektors $v \in V$ ist $|v| = \|v\| = \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$.

Cauchy–Schwarz–Ungleichung: Es gilt $|\langle u \mid v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Orthogonalität: $u, v \in V$ stehen senkrecht, wenn $\langle u \mid v \rangle = 0$.

Winkel: $\operatorname{re}\langle u \mid v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$ mit $\alpha = \angle(u, v) \in [0, \pi]$.

Dreiecksungleichung: Es gilt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Metrik: Der Abstand zweier Vektoren u, v ist $\|u - v\|$.

Konvergenz $v_n \to v$ in V ist definiert durch $\|v_n - v\| \to 0$.

Vollständigkeit: Jede Cauchy–Folge in V konvergiert in V.

Stetigkeit von Funktionen $f : V \to W$, linear oder nicht.

Differenzierbarkeit, lineare und höhere Approximation.

☺ Wir wollen dies möglichst allgemein erklären und effizient nutzen.
Dazu erheben wir die wesentlichen Eigenschaften (S1–3) zur Definition.

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

☺ Allein aus den grundlegenden Eigenschaften (S1–3) folgt:

Satz C1B: Cauchy–Schwarz–Ungleichung (CSU)

(1) Für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**:

$$|\langle u \,|\, v\rangle|^2 \leq \langle u \,|\, u\rangle \, \langle v \,|\, v\rangle \qquad \text{bzw.} \qquad |\langle u \,|\, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v über $\mathbb{K}$ linear abhängig sind.

(2) Für alle Vektoren $u, v \in V$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

N0: Positivität, $\|u\| \geq 0 = \|0\|$

N1: Definitheit, $\|u\| > 0$ für $u \neq 0$

N2: Homogenität, $\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda|$

N3: Dreiecksungleichung, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Aufgabe: Beweisen Sie die Cauchy–Schwarz–Ungleichung und damit N3! Früher hieß es, man erkenne eine Mathematiker:in daran, ob sie die Cauchy–Schwarz–Ungleichung beweisen könne. Probieren Sie es!

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Es gibt viele Beweisvarianten für die Cauchy–Schwarz–Ungleichung.
Der folgende Beweis ist geometrisch motiviert und leicht zu merken.

Lösung: (0) Wir erinnern zunächst an die **orthogonale Zerlegung**.
Sei $u \in V$ mit $\|u\|^2 \neq 0$. Wir können jeden Vektor $v \in V$ eindeutig zerlegen in $(v_\parallel, v_\perp)$ mit $v = v_\parallel + v_\perp$ wobei $v_\parallel \in u\,\mathbb{K}$ und $\langle u \,|\, v_\perp \rangle = 0$. Explizit gilt:

$$v_\perp = v - v_\parallel \quad \text{und} \quad v_\parallel = u\lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = \langle u \,|\, v \rangle / \langle u \,|\, u \rangle.$$

Dies folgt aus $0 \overset{!}{=} \langle u \,|\, v_\perp \rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle u \,|\, v - u\lambda \rangle \overset{\text{(S3)}}{=} \langle u \,|\, v \rangle - \langle u \,|\, u \rangle \lambda$.

(1) **Cauchy–Schwarz:** Für $u = 0$ ist alles klar. Im Folgenden sei $u \neq 0$.
Wir nutzen die orthogonale Zerlegung $v = v_\parallel + v_\perp$, wie oben vorbereitet.

$$\|v\|^2 \overset{(0)}{=} \|v_\parallel\|^2 + \|v_\perp\|^2 \geq \|v_\parallel\|^2 \overset{(0)}{=} |\langle u \,|\, v \rangle|^2 / \|u\|^2$$

Daraus folgt die erste Ungleichung, und die zweite dank Monotonie der Wurzelfunktion $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gleichheit entspricht Parallelität. QED

Vektorräume mit Skalarprodukt und mit Norm

☺ Wir erheben die grundlegenden Eigenschaften nun zur Definition:

Definition C1c: Skalarprodukt und Norm

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung $\langle \text{-} | \text{-} \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, die die Eigenschaften (S1–3) erfüllt. Das Paar $(V, \langle \text{-} | \text{-} \rangle)$ heißt dann **$\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt**, oder auch **Prä–Hilbert–Raum** und bei Vollständigkeit **Hilbert–Raum**.

Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\| \text{-} \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die (N1–3) erfüllt. Das Paar $(V, \| \text{-} \|)$ heißt **normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum**, **normierter Raum**, oder auch **Prä–Banach–Raum** und bei Vollständigkeit **Banach–Raum**.

Jedes Skalarprodukt definiert eine zugehörige Norm $\|u\| := \sqrt{\langle u \,|\, u \rangle}$: Aus (S1–3) folgt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung und somit (N1–3).

In Anwendungen tritt auch $\|u\| = \infty$ auf. Wir nennen $\| \text{-} \| : V \to [0, \infty]$ mit (N1–3) eine **Pseudonorm**. Eine **(Pseudo)Halbnorm** erfüllt nur (N2,3).

Aufgabe: Rechnen Sie hierzu die folgende hilfreiche Konstruktion nach.

Vektorräume mit Skalarprodukt und mit Norm

Proposition C1c: von Pseudohalbnorm zu Norm

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Pseudohalbnorm $\|\text{-}\| : V \to [0,\infty]$. Dann sind $V_{<\infty} = \{\, v \in V \,|\, \|v\| < \infty \,\}$ und $V_0 = \{\, v \in V \,|\, \|v\| = 0 \,\}$ Untervektorräume. Auf dem Quotientenvektorraum $V_{<\infty}/V_0$ induziert $\|\text{-}\|$ eine echte Norm.

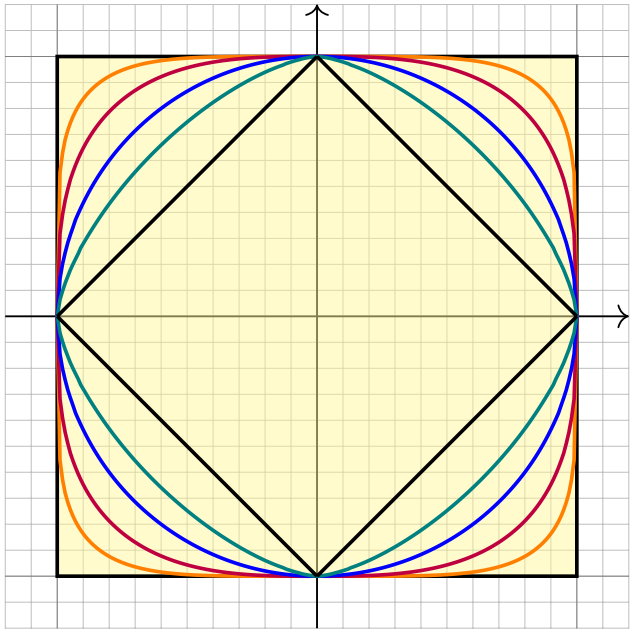
☺ Diese genial-einfache Idee finden Sie insbesondere bei der L^p–Norm und der Konstruktion des Raumes $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu) := \mathscr{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)/\mathcal{N}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

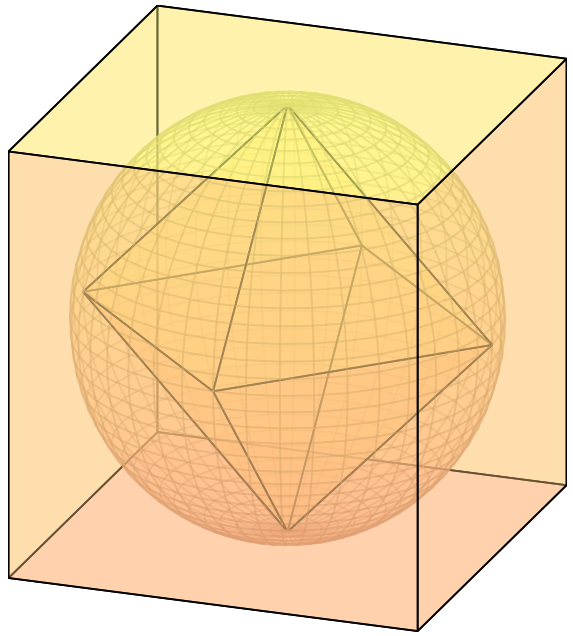
Beweis: Gilt $\|u\| < \infty$ und $\|v\| < \infty$, so folgt $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\| < \infty$ und $\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda| < \infty$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist $V_{<\infty}$ ein Untervektorraum.

Gilt $\|u\| = 0$ und $\|v\| = 0$, so folgt entsprechend $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\| = 0$ und $\|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda| = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist V_0 ein Untervektorraum.

Für $u, v \in V_{<\infty}$ mit $u - v \in V_0$ gilt $\|u\| = \|u - v + v\| \le \|u - v\| + \|v\| = \|v\|$ und $\|v\| = \|v - u + u\| \le \|v - u\| + \|u\| = \|u\|$, insgesamt folgt also $\|u\| = \|v\|$. Auf dem Quotienten $V_{<\infty}/V_0$ ist somit $|u + V_0| := \|u\|$ wohldefiniert und zudem endlich. Homogenität und Dreiecksungleichung vererben sich, zudem ist $|\text{-}|$ auf $V_{<\infty}/V_0$ nun positiv definit, also eine echte Norm. QED

Prominente Normen auf $\mathbb{K}^n$





Beispiel / Übung: Auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^n$ haben wir die

p–Norm	$\lvert x\rvert_p := (\lvert x_1\rvert^p + \cdots + \lvert x_n\rvert^p)^{1/p},$
Taxinorm	$\lvert x\rvert_1 := \lvert x_1\rvert + \cdots + \lvert x_n\rvert,$
euklidische Norm	$\lvert x\rvert_2 := \sqrt{\lvert x_1\rvert^2 + \cdots + \lvert x_n\rvert^2},$
Maximumsnorm	$\lvert x\rvert_\infty := \max\{\lvert x_1\rvert, \ldots, \lvert x_n\rvert\}.$

Für alle $p \in [1,\infty]$ und $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le n|x|_\infty$.
Für $p \searrow 1$ gilt $|x|_p \nearrow |x|_1$. Für $p \nearrow \infty$ gilt $|x|_p \searrow |x|_\infty$.

Prominente Normen auf $\mathbb{K}^n$

🙂 Skalarprodukte sind sehr nützlich, Normen gibt es noch viel mehr!

Dies sind tatsächlich Normen! Die Eigenschaften (N0–2) sind klar,
der interessante Punkt ist der Nachweis der Dreicksungleichung!
Für $p = 2$ folgt dies aus der Cauchy–Scharz–Ungleichung (C1B).
Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist es eine leichte Übung. (Versuchen Sie es!)
Allgemein benötigen Sie hierzu die Hölder–Minkowski–Ungleichung.

Die p–Normen bilden eine überabzählbare Familie von Normen auf $\mathbb{K}^n$.
Für $p \in [1, \infty]$ interpoliert diese Familie von der Taxinorm ($p = 1$)
über die euklidische Norm ($p = 2$) bis zur Maximumsnorm ($p = \infty$).
Noch spannender sind unendlich-dimensionale Räume, ℓ^p und L^p, deren
Konstruktion wir anschließend in groben Zügen zusammenfassen.

Die Skizze zeigt die Bälle um den Nullpunkt mit Radius 1. Für $p = 2$ ist
die der vertraute euklidische Ball, für $p = \infty$ der Würfel, für $p = 1$ das
Kreuzpolytop. Sicher fragen Sie sich jetzt, ob auch diese p–Normen von
einem Skalarprodukt herkommen. Das gilt tatsächlich nur für $p = 2$!
Der folgende Satz beantwortet genau diese Frage.

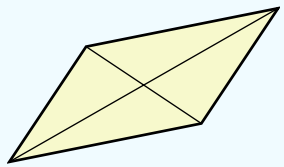
Vom Skalarprodukt zur Norm und zurück

Lemma C1J: Parallelogrammgleichung und Polarisation

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$.

(1) Die Norm $|u| = \sqrt{\langle u \,|\, u \rangle}$ erfüllt die **Parallelogrammgleichung**

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2 \quad \text{für alle } u, v \in V.$$



(2) Das Skalarprodukt rekonstruieren wir dank der **Polarisationsformel**

$$\langle u \,|\, v \rangle = \sum_{\varepsilon \in B} \frac{|u + v\varepsilon|^2 - |u - v\varepsilon|^2}{4\varepsilon} \quad \text{mit } B = \{1\}, \{1, \mathrm{i}\}, \{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}.$$

Beispiel: Es gilt $2|e_1|_p^2 + 2|e_2|_p^2 = 4$, aber $|e_1 + e_2|_p^2 + |e_1 - e_2|_p^2 = 2 \cdot 2^{2/p}$.

Satz C1K: Jordan–von Neumann 1935

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Erfüllt eine beliebige Norm $|\text{-}|$ auf V die Parallelogrammgleichung, so definiert die Polarisationsformel ein Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ auf V, und zwar das einzige mit Norm $|\text{-}|$.

Vom Skalarprodukt zur Norm und zurück

Skalarprodukt $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Norm $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Metrik $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Topologie

☺ Mit der Parallellogrammgleichung haben wir ein einfaches Kriterium um festzustellen, ob eine vorgelegte Norm von einem Skalarprodukt induziert wird oder nicht. Bemerkenswerterweise ist diese Bedingung nicht nur notwendig (C1J), sondern auch hinreichend (C1K).

☺ Dieses Ergebnis dient Ihrer mathematische Kultur und Inspiration, außerdem ist es als Werkzeug für konkrete Beispiele oft hilfreich.
Für einen ersten Durchgang genügt es, die Aussage zu verstehen und anwenden zu können. Anschließend möchten Sie vielleicht mehr:

Übung: Beweisen Sie das Lemma, und wenn Sie mutig sind, den Satz.
Eine Lösung finden Sie im Skript oder bei den Meistern selbst:

📖 P. Jordan, J.v. Neumann: *On inner products in linear metric spaces.* Annals of Mathematics 36 (1935) 719–723

Vektorräume mit Skalarprodukt: ℓ^2

Beispiel / Übung C1D: der Hilbert–Raum ℓ^2

Für jede Menge Ω ist der **Funktionenraum** $\mathbb{K}^\Omega = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \}$ über $\mathbb{K}$ ein Vektorraum mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation.

(1) Der **Träger** von f ist $\operatorname{supp}(f) := \{ x \in \Omega \,|\, f(x) \neq 0 \}$. Die Teilmenge

$$\mathbb{K}^{(\Omega)} := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \,\big|\, \operatorname{supp}(f) \text{ endlich } \}$$

ist ein Untervektorraum in $\mathbb{K}^\Omega$. Hierauf haben wir das **Skalarprodukt**

$$\langle \text{-} | \text{-} \rangle : \mathbb{K}^{(\Omega)} \times \mathbb{K}^{(\Omega)} \to \mathbb{K} : (f, g) \mapsto \langle f \,|\, g \rangle := \textstyle\sum_{x \in \Omega} \overline{f(x)}\, g(x).$$

Die kanonische Basis $(e_a)_{a \in \Omega}$ von $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ ist orthonormal bzgl. $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$.

(2) Vervollständigt erhalten wir aus $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ den **Hilbert–Raum**

$$\ell^2(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \,\big|\, \textstyle\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2 < \infty \}.$$

Es gilt $\mathbb{K}^{(\Omega)} \leq \ell^2 \leq \mathbb{K}^\Omega$, und das obige Skalarprodukt setzt sich auf ℓ^2 fort.

Vektorräume mit Skalarprodukt: L^2

Beispiel / Übung C1E: der Hilbert–Raum L^2

(1) Sei $a < b$ in $\mathbb{R}$. Wir betrachten den Vektorraum $\mathscr{C} = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Hierauf haben wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{x=a}^{b} \overline{f(x)}\, g(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad \tau = b - a.$$

(2) Die Funktionen $e_k : [a,b] \to \mathbb{C} : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x}$ mit $\omega = 2\pi/\tau$ und $k \in \mathbb{Z}$ sind orthonormal und eine Basis der **trigonometrischen Polynome**:

$$T = T([a,b],\mathbb{C}) := \left\{ f = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ c_{-n}, \dots, c_n \in \mathbb{C} \right\}$$

(3) Reell betrachten wir $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Beide Basen lassen sich ineinander umrechnen dank der Euler–Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x} = \cos(k\omega x) + \mathrm{i}\sin(k\omega x)$.

☺ Die komplexe Formulierung ist einfacher und schöner!

Beispiel / Übung C1E: der Hilbert–Raum L^2

(4) Vervollständigt erhalten wir aus $T < \mathscr{C}$ den Raum

$$\mathscr{L}^2([a,b],\mathbb{K}) := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{K} \text{ messbar} \,\middle|\, \int_{x=a}^{b} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Hierbei gilt $T < \mathscr{C} < \mathscr{L}^2 < \mathbb{K}^{[a,b]}$, und das obige Skalarprodukt setzt sich auf $\mathscr{L}^2$ fort, allerdings ist es hier nur noch semidefinit:

Aus $\int |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0$ folgt $f(x) = 0$ nicht unbedingt für alle x, sondern nur für fast alle $x \in [a,b]$. Das heißt, es existiert eine Teilmenge $N \subseteq [a,b]$ vom Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_1(N) = 0$, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus N$.

Diese Nullfunktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathscr{N} := \{\, f : [a,b] \to \mathbb{K} \,|\, f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in [a,b] \,\}.$$

🙂 Nullfunktionen wollen und können und werden wir vernachlässigen. Sie liefern bei der Integration keinen Beitrag, sind somit masselos.

Vektorräume mit Skalarprodukt: L^2

Beispiel / Übung C1E: der Hilbert–Raum L^2

(5) Der relevante Vektorraum ist demnach der Quotientenvektorraum

$$L^2([a,b],\mathbb{K}) := \mathscr{L}^2([a,b],\mathbb{K})/\mathcal{N}.$$

Hierauf ist das obige Skalarprodukt $(f,g) \mapsto \langle f \,|\, g \rangle$ wohldefiniert und nun auch tatsächlich positiv-definit. Zudem ist $L^2([a,b],\mathbb{K})$ vollständig, wir erhalten also schließlich einen Hilbert–Raum.

(6) Die Räume ℓ^2 und L^2 sehen verschieden aus, sind aber isometrisch: Es gilt die bemerkenswerte Fourier–Isometrie $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \cong L^2([a,b],\mathbb{C})$!

$$\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})} \cong T([a,b],\mathbb{C}) \;: e_k \leftrightarrow e_k$$
$$\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \cong L^2([a,b],\mathbb{C}) : e_k \leftrightarrow e_k$$

- Das ist die abstrakte Grundlage der L^2–Theorie für Fourier–Reihen.
- Entsprechendes gilt für die Räume ℓ^p und L^q mit $p,q \in [1,\infty]$.

Vektorräume mit Norm: ℓ^p

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum ℓ^p

(1) Sei Ω eine Menge. Auf dem Funktionenraum $\mathbb{K}^\Omega = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \}$ definieren wir die **Supremumsnorm**, auch **ℓ^∞–Norm** genannt, durch

$$\|f\|_\infty := |f|_\Omega = \sup\{ |f(x)| \,\big|\, x \in \Omega \}.$$

Die beschränkten Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\ell^\infty(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \,\big|\, \|f\|_\infty < \infty \}.$$

(2) Entsprechend definieren wir die **ℓ^p–Norm** für $1 \leq p < \infty$ durch

$$\|f\|_p := \left(\sum_{x\in\Omega} |f(x)|^p\right)^{1/p}.$$

Die p–summierbaren Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\ell^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \,\big|\, \|f\|_p < \infty \}.$$

Hierauf ist $\|\text{-}\|_p$ tatsächlich eine Norm dank **Minkowski–Ungleichung**.
Besonders einfach und prominent sind die drei Spezialfälle $p = 1, 2, \infty$.

Vektorräume mit Norm: ℓ^p

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum ℓ^p

(3) Der Raum $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ ist vollständig, also ein Banach–Raum.

(4) Für je zwei konjugierte Exponenten $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir das **Produkt** $\cdot : \ell^p \times \ell^q \to \ell^1$ und daraus die **Paarung**

$$\langle \text{-} | \text{-} \rangle : \ell^p \times \ell^q \to \mathbb{K} : \langle f \,|\, g \rangle = \sum_{x \in \Omega} \overline{f(x)}\, g(x).$$

Das Produkt $\overline{f}g$ ist absolut summierbar dank der **Hölder–Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{\ell^1} \leq \|f\|_{\ell^p} \cdot \|g\|_{\ell^q}$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung, und die Paarung ist das oben diskutierte Skalarprodukt auf ℓ^2.

Für alle $1 < p < \infty$ ist dies eine duale Paarung, das heißt $(\ell^p)' \cong \ell^q$.

(5) Für $\sharp\Omega \geq 2$ und $p \neq 2$ erfüllt $\|\text{-}\|_{\ell^p}$ nicht die Parallelogrammgleichung, denn $\|e_a + e_b\|_{\ell^p}^2 + \|e_a - e_b\|_{\ell^p}^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} \;\neq\; 2\|e_a\|_{\ell^p}^2 + 2\|e_b\|_{\ell^p}^2 = 2 + 2.$

Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski

Satz C1o: die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski

(0) Für $s, t \geq 0$ mit $s + t = 1$ und $a, b > 0$ gilt die **Young–Ungleichung**:

$$a^s \cdot b^t \leq sa + tb$$

(1) Für $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ folgt die **Hölder–Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

(2) Für $p \in [1, \infty]$ folgt hieraus die **Minkowski–Ungleichung**:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis: (0) Wir nutzen $(\exp, \ln) : (\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Die Funktion $\exp$ ist streng wachsend und konvex, also ist $\ln$ streng wachsend und konkav.

$$\ln(a^s \cdot b^t) = \ln(a^s) + \ln(b^t) = s \ln(a) + t \ln(b) \leq \ln(sa + tb)$$

Anwendung von $\exp$ ergibt die behauptete Ungleichung $a^s \cdot b^t \leq sa + tb$.

Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski

(1) Für die Randfälle $p = 1$ und $q = \infty$ bzw. $p = \infty$ und $q = 1$ prüft man die Hölder–Ungleichung direkt nach. Sie ist zudem erfüllt, wenn f oder g eine Nullfunktion ist. Wir können also $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ annehmen. Die Ungleichung ist homogen in f und g, nach Division durch die Norm können wir also $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ annehmen. In jedem Punkt $x \in \Omega$ gilt:

$$\big|f(x) \cdot g(x)\big| = \big(\big|f(x)\big|^p\big)^{1/p} \cdot \big(\big|g(x)\big|^q\big)^{1/q} \leq \tfrac{1}{p}\big|f(x)\big|^p + \tfrac{1}{q}\big|g(x)\big|^q$$

Durch Summation / Integration über $x \in \Omega$ wird hieraus:

$$\textstyle\sum_{x\in\Omega} |f(x) \cdot g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}\sum_{x\in\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\sum_{x\in\Omega} |g(x)|^q\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(2) Für $p \in \{1, \infty\}$ prüft man die Minkowski–Ungleichung direkt nach. Sei also $1 < p, q < \infty$ und zudem $\|f + g\|_p > 0$. Dank Hölder (1) gilt:

$$\big\||f + g|^p\big\|_1 = \big\||f + g| \cdot |f + g|^{p-1}\big\|_1 \leq \big\||f| \cdot |f + g|^{p-1}\big\|_1 + \big\||g| \cdot |f + g|^{p-1}\big\|_1$$
$$\leq \|f\|_p \cdot \big\||f + g|^{p-1}\big\|_q + \|g\|_p \cdot \big\||f + g|^{p-1}\big\|_q = \big[\|f\|_p + \|g\|_p\big]\big\||f + g|^{(p-1)q}\big\|_1^{1/q}$$

Aus $1/p + 1/q = 1$ folgt $(p-1)q = p$, der letzte Faktor ist also $\big\||f + g|^p\big\|_1^{1/q}$. Nach Division erhalten wir die ersehnte Minkowski–Ungleichung. QED

Vektorräume mit Norm: L^p

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum L^p

(1) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, etwa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit Lebesgue–Maß μ oder Ω diskret mit Zählmaß $\mu(A) = \sharp A$. Für $1 \leq p < \infty$ definieren wir die **L^p–Halbnorm** und jede messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ durch

$$\|f\|_p := \left(\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Die p–integrierbaren Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \,\middle|\, \|f\|_p < \infty \right\}.$$

Der relevante Vektorraum ist der Quotientenvektorraum

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathscr{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

Hierauf ist $\|\text{-}\|_p$ tatsächlich eine Norm dank **Minkowski–Ungleichung**.

⚠ Wir unterscheiden Funktionen f und Äquivalenzklassen $\bar{f} = f + \mathcal{N}$. Eine solche „$L^p$–Funktion“ $\bar{f} \in L^p$ hat keine punktweisen Werte „$\bar{f}(x)$“.

Vektorräume mit Norm: L^p

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum L^p

(2) Die **L^∞–Halbnorm** definieren wir durch das **essentielle Supremum**:

$$\begin{aligned} |f|_\Omega &= \sup|f(x)| &&:= \inf\{\, a \in \mathbb{R} \,|\, \{x \,||f(x)| > a\} = \emptyset \,\}, \\ \|f\|_\infty &= \operatorname{ess\,sup}|f(x)| &&:= \inf\{\, a \in \mathbb{R} \,|\, \mu(\{x \,||f(x)| > a\}) = 0 \,\}. \end{aligned}$$

Die essentiell beschränkten Funktionen bilden den Untervektorraum

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \,|\, \|f\|_\infty < \infty \,\}.$$

Der relevante Vektorraum ist der Quotientenvektorraum

$$L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)/\mathscr{N}(\Omega, \mathscr{A}, \mu).$$

Hierauf ist $\|\text{-}\|_\infty$ tatsächlich eine Norm, genannt die **L^∞–Norm**.

Für das Zählmaß gilt $L^p(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \sharp) = \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \sharp) = \ell^p(\Omega)$.
Für $1 < p < q < \infty$ gilt $\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq \ell^\infty$, im Allgemeinen strikt.
Für $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ gilt $L^1 \supset L^p \supset L^q \supset L^\infty$, im Allgemeinen strikt.

Vektorräume mit Norm: L^p

Beispiel / Übung C1L: der Banach–Raum L^p

(3) Der Raum $L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ist vollständig, also ein Banach–Raum.

(4) Für je zwei konjugierte Exponenten $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir das **Produkt** $\cdot : L^p \times L^q \to L^1$ und daraus die **Paarung**

$$\langle \text{-} | \text{-} \rangle : L^p \times L^q \to \mathbb{K} : \langle f \,|\, g \rangle := \int_{x \in \Omega} \overline{f(x)}\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Das Produkt $\overline{f}g$ ist absolut integrierbar dank der **Hölder–Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**, und die Paarung ist das oben diskutierte Skalarprodukt auf L^2.

Für alle $1 < p < \infty$ ist dies eine **duale Paarung**, das heißt $(L^p)' \cong L^q$.

🙂 Die L^p–Räume sind zentral für Analysis, Numerik und Stochastik: Erwartungswert, Co/Varianz, höhere Momente, Grenzwertsätze, …

Vektorräume mit Norm: L^p

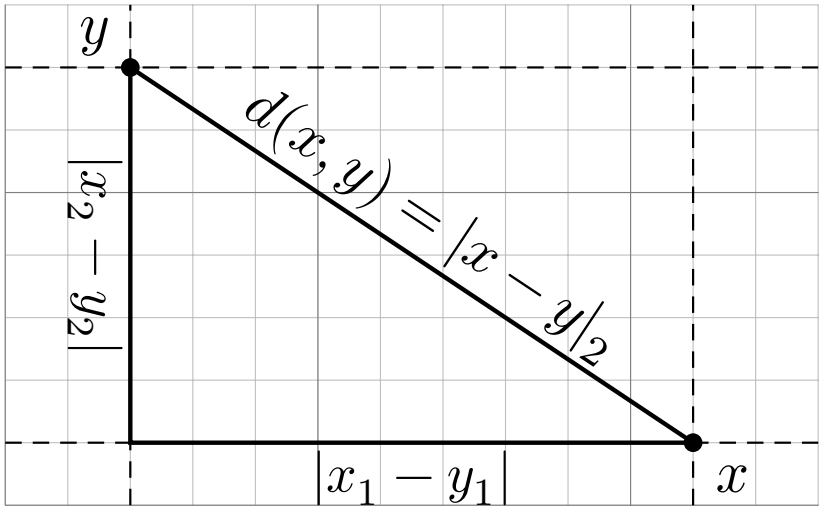
Die L^p–Räume spielen eine zentrale Rolle in der **Analysis**, insb. der Maß- und Integrationstheorie. Der Buchstabe L erinnert an Henri Lebesgue (1875–1941) und seinen grundlegenden Integralbegriff.

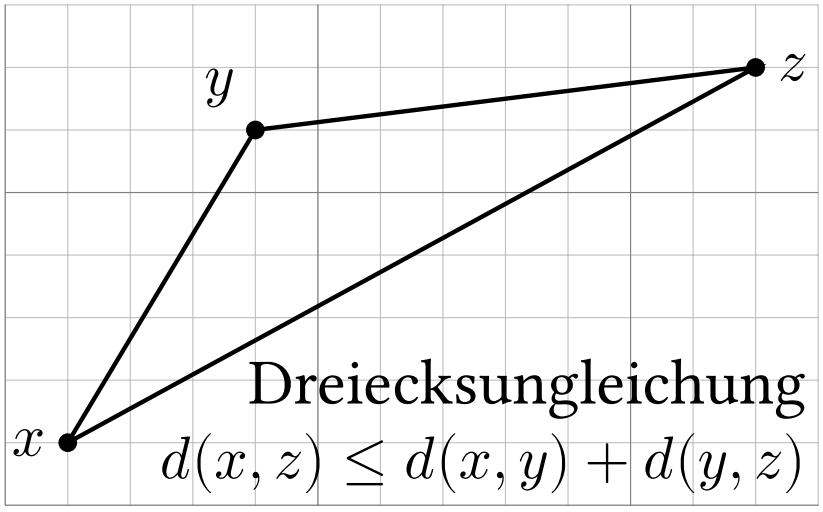
Die L^p–Norm sind ebenso wichtig in der **Numerik** und **Optimierung**: sie wertet Abweichungen / bestraft Fehler mit dem Exponenten p. Besonders prominent sind auch hier die Fälle $p = 1, 2, \infty$: L^1-, quadratische, gleichmäßige Approximation.

Die L^p–Räume finden sich auch ganz natürlich in der **Stochastik**: Dort ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also $\mu(\Omega) = 1$, und messbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ modellieren Zufallsvariablen. Das Integral $m_1 = \int_{x\in\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x$ ist der Erwartungswert, dazu ist offensichtlich absolute Integrierbarkeit $f \in \mathscr{L}^1$ die Minimalforderung.

Quadratische Integrierbarkeit $f \in \mathscr{L}^2$ sichert die Existenz der Varianz $m_2 = \int_{x\in\Omega} |f(x) - m_1|^2\,\mathrm{d}x$, das Skalarprodukt misst die Covarianz. Entsprechend nutzt man die höheren Momente $m_p = \int_{x\in\Omega} |f(x) - m_1|^p\,\mathrm{d}x$, zum Beispiel im zentralen Grenzwertsatz mit expliziten Fehlerschranken.

Metrische Räume: die euklidische Metrik





Satz C2A: die euklidische Metrik

Auf $X = \mathbb{R}^n$ definieren wir die **euklidische Metrik** $d : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \sqrt{\langle x-y \,|\, x-y \rangle} = |x-y|_2 = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \cdots + |x_n-y_n|^2}.$$

Diese Abbildung erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$:

M0:	Positivität,	$d(x,y) \geq 0 = d(x,x)$
M1:	Definitheit,	$d(x,y) > 0$ für $x \neq y$
M2:	Symmetrie,	$d(x,y) = d(y,x)$
M3:	Dreiecksungleichung,	$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Metrische Räume: die euklidische Metrik

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussagen für die euklidischen Metrik:

Lösung: Klar sind (M0–2), einzig die Dreiecksungleichung (M3) ist nicht trivial. Sie folgt aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung (C1B) dank der Dreiecksungleichung (N3): $|x-z|_2 = |x-y+y-z|_2 \leq |x-y|_2 + |y-z|_2$.

🙂 Dies formuliert anschauliche Eigenschaften des Abstands: (M0) Der Abstand von x nach x ist Null, der von x nach y ist Null oder positiv. (M1) Der Abstand zwischen $x \neq y$ ist positiv. Umgekehrt: Ist der Abstand von x nach y gleich Null, so ist dies nur für $x = y$ möglich. Anders gesagt: Aus $d(x,y) = 0$ folgt $x = y$. (M2) Der Abstand von x nach y ist gleich dem Abstand von y nach x. (M3) Die Dreiecksungleichung besagt, dass in einem Dreieck die Summe der Längen von zwei Seiten nicht kleiner sein kann als die Länge der dritten Seite, siehe Abbildung.

Anschaulich gesagt: Der Weg von x nach z wird nicht kürzer, wenn wir einen Umweg über y machen, sondern möglicherweise nur länger.

Metrische Räume: allgemeine Definition

☺ Wir erheben diese grundlegenden Eigenschaften nun zur Definition:

Definition C2B: Metrik

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty]$, die (M0–3) erfüllt. Das Paar (X, d) nennen wir einen **metrischen Raum** mit Trägermenge X und Metrik d. (Der Wert ∞ ist erlaubt und meist unproblematisch, siehe unten die gestutzte / gestauchte Metrik.)

Ausführlich fordern wir demnach für alle $x, y, z \in X$:

M0: Positivität, $d(x, y) \geq 0 = d(x, x)$

M1: Definitheit, $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$

M2: Symmetrie, $d(x, y) = d(y, x)$

M3: Dreiecksungleichung, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Für eine **Halbmetrik** d fordern wir nur (M0,2,3), nicht unbedingt (M1). Allgemeiner als eine Metrik darf eine Halbmetrik also durchaus zwei verschiedenen Punkten $x \neq y$ in X den Abstand $d(x, y) = 0$ beimessen.

Metrische Räume: allgemeine Definition

Gilt $d(x,y) < \infty$ für alle $x, y \in X$, so nennen wir d eine **endliche Metrik**. Das benötigen wir insbesondere für metrische Eigenschaften wie Dehnungsschranken, Lipschitz-Stetigkeit und Kontraktionen.

Topologisch gesehen ist es oft bequem, den Begriff der Metrik wie in C2B weiter zu fassen und den Wert $d(x,y) = \infty$ zunächst zuzulassen. Manche Autor:innen nennen dies eine **Pseudometrik** oder *erweiterte Metrik*. Hierdurch wird keines der folgenden (topologischen!) Argumente komplizierter, doch viele Konstruktionen einfacher und einheitlicher.

Für die nötigen Rechnungen in $[0,\infty]$ vereinbaren wir $0 \leq a \leq \infty$ sowie $a + \infty = \infty + a = \infty$ für alle $a \in [0,\infty]$; dies entspricht den üblichen Konvention der erweiterten Zahlengeraden $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Durch Weglassen der Forderung (M1) schwächen wir den Begriff der Metrik zur Halbmetrik ab. Halbmetriken sind weniger wirkungsvoll, kommen aber in manchen Anwendungen natürlich vor und sind daher ein sinnvoller Hilfsbegriff. Auch wenn man ihn schließlich vermeiden will, so ist es meist bequem ihn zunächst zuzulassen.

Euklidische und diskrete Metrik

Skalarprodukt $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Norm $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Metrik $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Topologie

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Jedes Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ auf V definiert durch $|u| = \sqrt{\langle u \,|\, u \rangle}$ eine zugehörige Norm auf V (Satz C1B).

Jede Halb/Norm $|\text{-}| : V \to [0, \infty]$ definiert eine zugehörige Halb/Metrik $d : V \times V \to [0, \infty] : (x, y) \mapsto |x - y|$, denn aus (N0–3) folgt sofort (M0–3): $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

Prominente Beispiele sind $\mathbb{K}^n$ sowie $\ell^p(\Omega)$ und $L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ für $p \in [1, \infty]$.

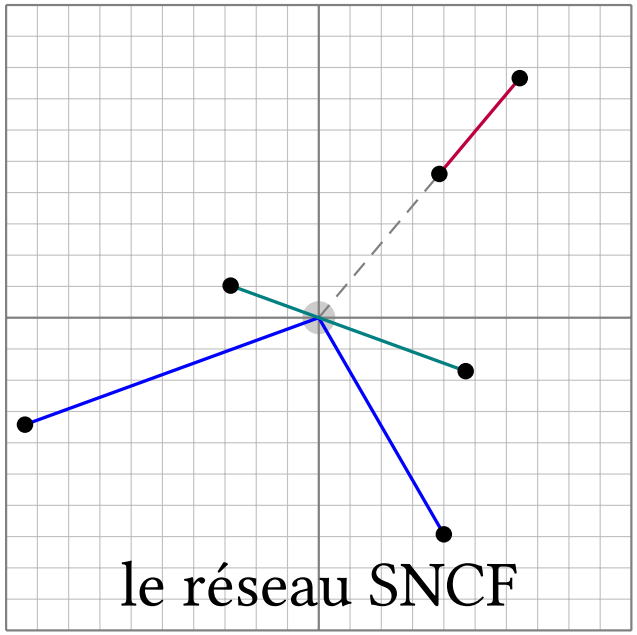
Beispiel / Übung C2c: die diskrete Metrik

Auf jeder Menge X lässt sich eine besonders einfache Metrik definieren, die nur die Werte 0 und 1 annimmt: Die **diskrete Metrik** auf X ist

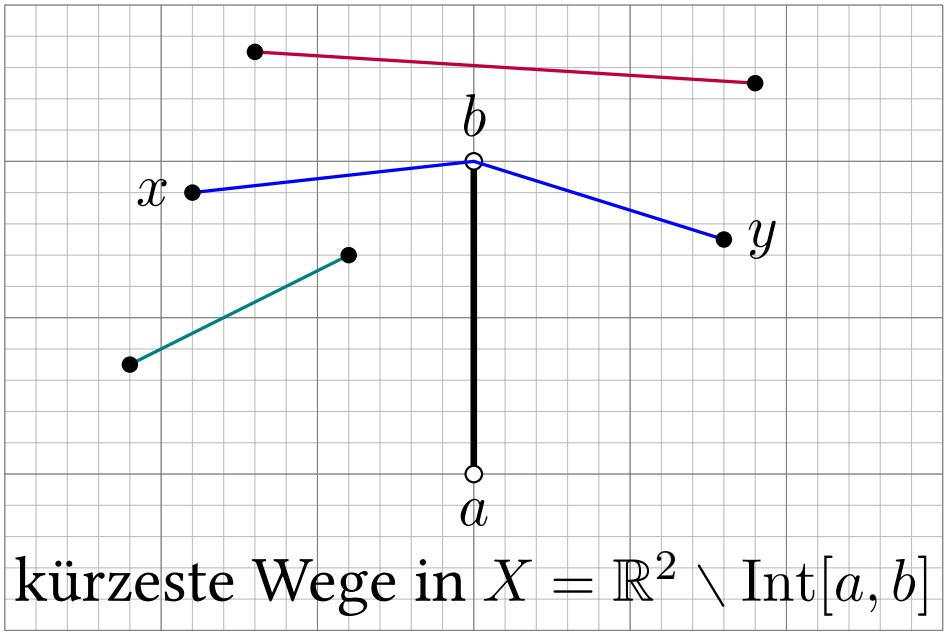
$$d : X \times X \to \{0, 1\} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die für jede Metrik geforderten Eigenschaften (M0–3) prüft man leicht.

Eisenbahnmetrik und Wegmetrik



le réseau SNCF



kürzeste Wege in $X = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Int}[a, b]$

Beispiel / Übung C2D: die französische Eisenbahnmetrik

Die **französische Eisenbahnmetrik** ist

$$d = d_{\mathrm{SNCF}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto \begin{cases} |x - y| & \text{falls } \mathbb{R}x = \mathbb{R}y, \\ |x| + |y| & \text{falls } \mathbb{R}x \neq \mathbb{R}y. \end{cases}$$

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein euklidischer Teilraum, allgemein ein metrischer Raum (X, d). Wir definieren die **Wegmetrik** $đ : X \times X \to [0, \infty]$ für je zwei Punkte $x, y \in X$ als die infimale Länge aller Wege von x nach y.

Neue Räume aus alten: Teil und Summe

Beispiel / Übung C2E: Teilraum

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge.
Die Einschränkung $d_A := d|_{A\times A} : A \times A \to [0, \infty]$ ist eine Metrik auf A.
Wir nennen (A, d_A) einen **Teilraum** von (X, d) mit **Teilraummetrik** d_A.

Soweit nicht anders vereinbart, statten wir jede Teilmenge $A \subseteq X$
mit dieser Metrik aus und machen sie so zu einem Teilraum (A, d_A).
Insbesondere erbt somit jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ die euklidische Metrik.

Beispiel / Übung C2F: Summenraum

Sei $(X_i, d_i)_{i\in I}$ eine Familie metrischer Räume (X_i, d_i) mit $i \in I$. Auf ihrer disjunkten Vereinigung $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ definieren wir die **Summenmetrik**

$$d : X \times X \to [0, \infty] : d(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & \text{falls } x, y \in X_i, \\ \infty & \text{falls } x \in X_i, y \in X_j, i \neq j. \end{cases}$$

Wir nennen $(X, d) =: \bigsqcup_{i\in I}(X_i, d_i)$ den **Summenraum** zu $(X_i, d_i)_{i\in I}$.

Neue Räume aus alten: Produkt und Potenz

Beispiel / Übung C2G: Produktraum

Sei $(X_i, d_i)_{i\in I}$ eine Familie metrischer Räume (X_i, d_i) mit $i \in I$.
Auf dem Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ definieren wir die **Supremumsmetrik**

$$d : X \times X \to [0,\infty] : d(x,y) = \sup\{\, d_i(x_i, y_i) \,\big|\, i \in I \,\}.$$

Wir nennen $(X,d) =: \prod_{i\in I}(X_i, d_i)$ den **Produktraum** zu $(X_i, d_i)_{i\in I}$.

Allgemein haben wir auf $X = \prod_{i\in I} X_i$ die **ℓ^p–Metrik** für $1 \le p \le \infty$.
Ist I endlich und sind alle Metriken d_i endlich, so ist auch d endlich.
Allgemein haben wir auf Y^X ebenso die ℓ^p–Metrik für $1 \le p \le \infty$:

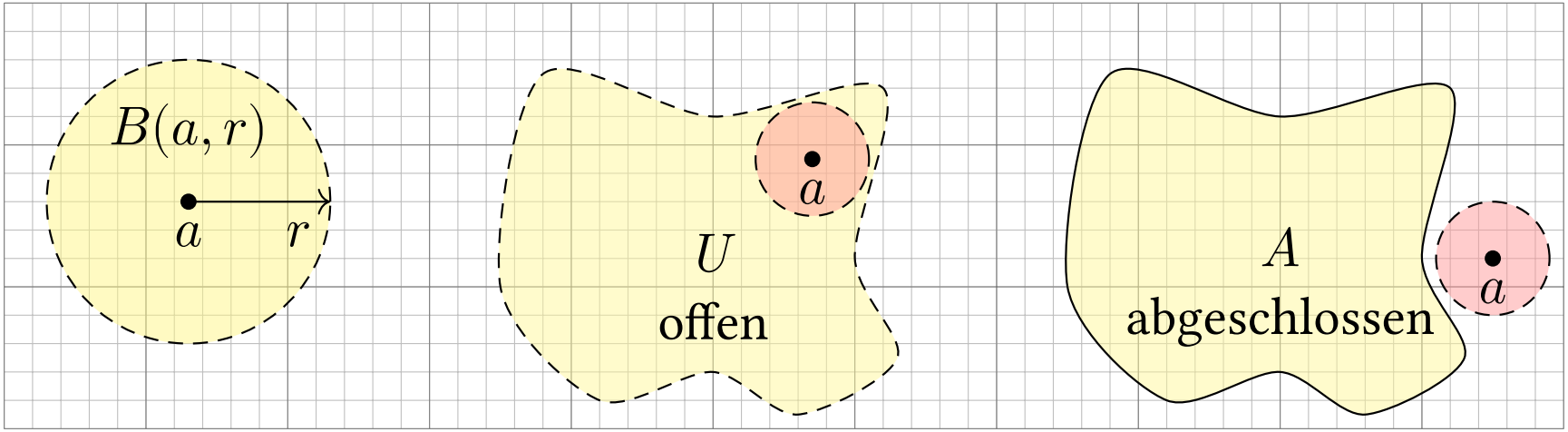
Beispiel / Übung C2H: Abbildungsraum

Sei X eine Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Auf der Menge
$Y^X = \mathrm{Abb}(X,Y) = \{\, f : X \to Y\}$ definieren wir die **Supremumsmetrik**

$$d(f,g) = \big|d_Y(f,g)\big|_X = \sup\{\, d_Y(f(x), g(x)) \,\big|\, x \in X \,\}.$$

Wir nennen $(Y^X, d) =: (Y, d_Y)^X$ den **Abbildungsraum**.

Offene und abgeschlossene Mengen



Definition C2L: metrische Topologie

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zum Punkt $a \in X$ und Radius $r \in [0,\infty]$ definieren wir den **offenen** / **abgeschlossenen Ball** / die **Sphäre** durch

$$B_{(X,d)}(a,r) := \{x \in X \mid d(a,x) < r\},$$
$$\bar{B}_{(X,d)}(a,r) := \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\},$$
$$S_{(X,d)}(a,r) := \{x \in X \mid d(a,x) = r\}.$$

Anschaulich im $\mathbb{R}^n$, wie oben skizziert. Die Sphäre $S(a,r)$ gehört zum abgeschlossenen Ball $\bar{B}(a,r)$, nicht aber zum offenen Ball $B(a,r)$.

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition C2L: metrische Topologie

Wir nennen $U \subseteq X$ **Umgebung** von a, falls $B(a,\varepsilon) \subseteq U$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X : \left[\, d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U \,\right]$$

Das System aller Umgebungen von a in (X,d) bezeichnen wir mit

$$\mathcal{U}_a(X,d) := \left\{ U \subseteq X \,\middle|\, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : B(a,\varepsilon) \subseteq U \right\}.$$

Eine Menge $U \subseteq X$ ist **offen**, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist:

$$\begin{aligned} & \forall a \in U \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : B(a,\varepsilon) \subseteq U \\ \Leftrightarrow \quad & \forall a \in U \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall x \in X : \left[\, d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U \,\right] \end{aligned}$$

Das System aller offenen Mengen im Raum (X,d) ist die **Topologie**:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(X,d) &:= \left\{ U \subseteq X \,\middle|\, U \text{ offen in } (X,d) \right\} \\ &= \left\{ U \subseteq X \,\middle|\, \forall a \in U \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : B(a,\varepsilon) \subseteq U \right\} \end{aligned}$$

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Metrische Topologie: erste Eigenschaften

Proposition C2M: Eigenschaften der metrischen Topologie

Sei (X, d) ein metrischer Raum (oder allgemeiner d eine Halbmetrik).

Jeder offene Ball $B(a, r)$ ist offen in der Topologie von (X, d),
jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}(a, r)$ ist abgeschlossen in (X, d).

Die offenen Mengen in (X, d) erfreuen sich folgender Eigenschaften:

O1: Die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind offen:

$$\emptyset, X \in \mathcal{T}$$

O2: Sind $U_1, \dots, U_n$ offen, dann auch $U_1 \cap \dots \cap U_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} : U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$$

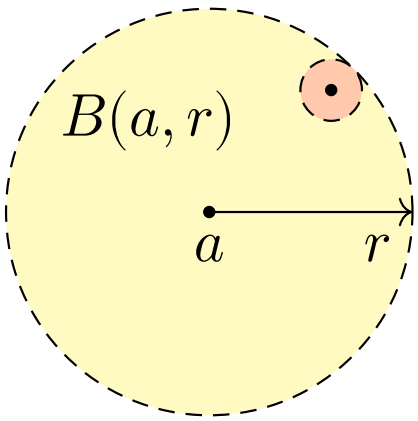
O3: Sind alle U_i offen für $i \in I$, dann auch $\bigcup_{i \in I} U_i$:

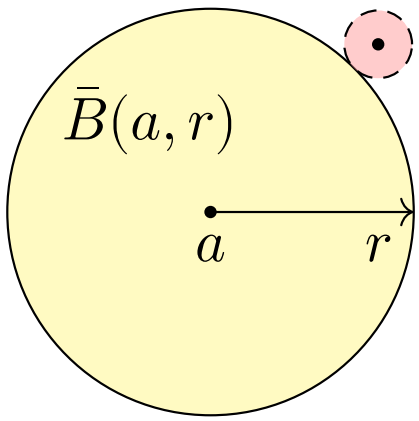
$$\forall (I \to \mathcal{T} : i \mapsto U_i) : \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$$

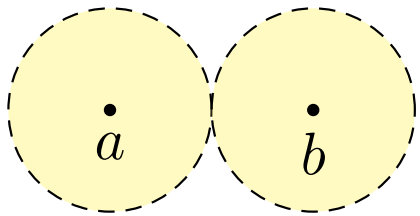
Die abgeschlossenen Mengen sind komplementär zu den offenen, somit stabil unter A2: endlichen Vereinigungen und A3: beliebigen Schnitten.

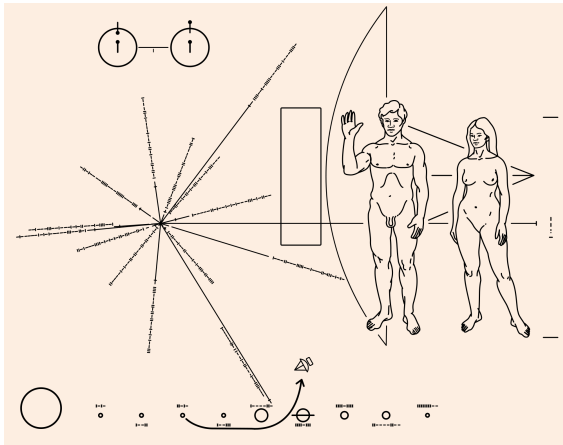
Metrische Topologie: erste Eigenschaften

Hier die graphische Beweisidee für die ersten beiden Behauptungen:
Jeder offene Ball ist offen, jeder abgeschlossene Ball ist abgeschlossen.
Steht die Hausdorff–Eigenschaft sogar auf der Pioneer-Plakette?







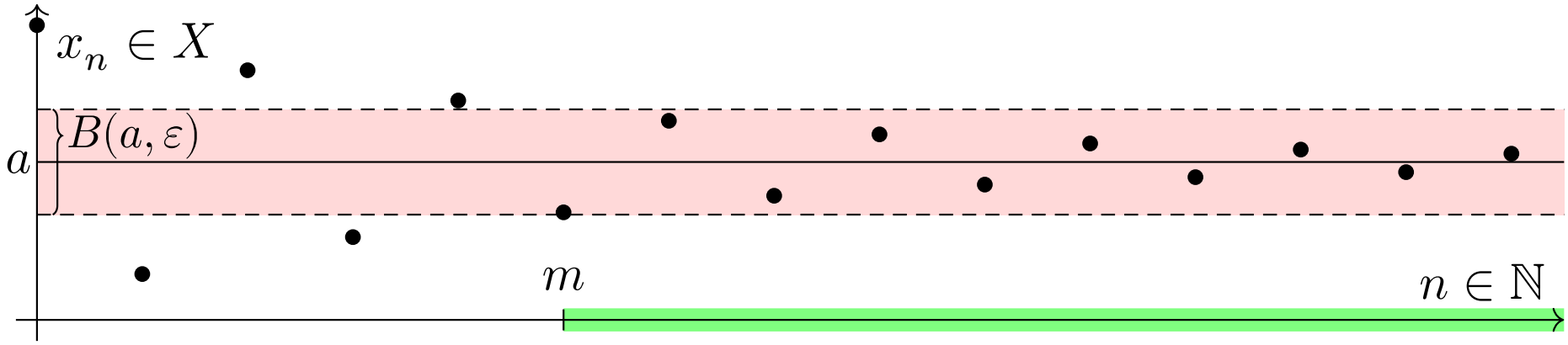


Proposition C2o: die Hausdorff–Eigenschaft

In jedem metrischen Raum (X,d) gilt die Hausdorff–Eigenschaft (T_2):
Zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X existieren disjunkte offene Umgebungen.

Beweis: Es gilt $r := d(a,b) > 0$ dank (M1). Die Bälle $U = B(a,r/2) \ni a$ und $V = B(b,r/2) \ni b$ sind offen (C2M) und disjunkt: Aus $x \in U \cap V$ folgt $r = d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < r/2 + r/2 = r$, Widerspruch! QED

Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum



Definition C3A: Konvergenz einer Folge

Gegeben seien eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein Punkt a in einem metrischen Raum (X,d). Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen a, falls $d(x_n,a)\to 0$:

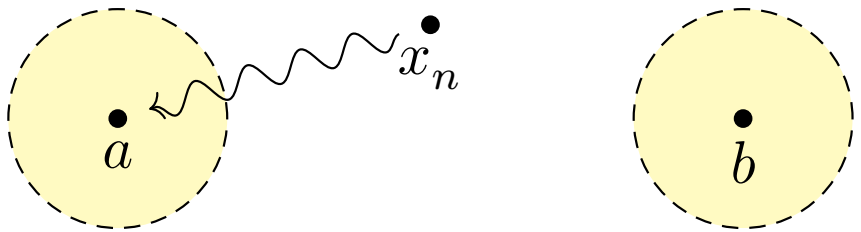
$$
\begin{aligned}
&(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,d) \quad :\Leftrightarrow \quad d(x_n,a)\to 0 \text{ für } n\to\infty \\
\Leftrightarrow\quad & \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}_{\geq m} : d(x_n,a)<\varepsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}_{\geq m} : x_n\in B(a,\varepsilon) \\
\Leftrightarrow\quad & \text{Jede Umgebung } U\in\mathcal{U}_a \text{ enthält schließlich alle Folgenglieder } x_n.
\end{aligned}
$$

🙂 Die letzte Formulierung verwendet die Metrik nicht explizit, sondern nur offene Mengen: Konvergenz ist somit eine topologische Eigenschaft!

Kann eine Folge mehrere Grenzwerte haben?

Konvergenz in (X, d) ist eine **zweistellige Relation** zwischen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Punkten a. Wir schreiben kurz $x_n \to a$ oder $x_n \xrightarrow{d} a$.
Zur Betonung der Indizes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir „$x_n \to a$ für $n \to \infty$“.

⚠ Die bequeme Schreibweise $\lim x_n = a$ ist problematisch, solange die Konvergenz nicht geklärt ist: eventuell existiert kein Grenzwert „$\lim x_n$“!
Kann eine Folge in (X, d) womöglich mehrere Grenzwerte haben?

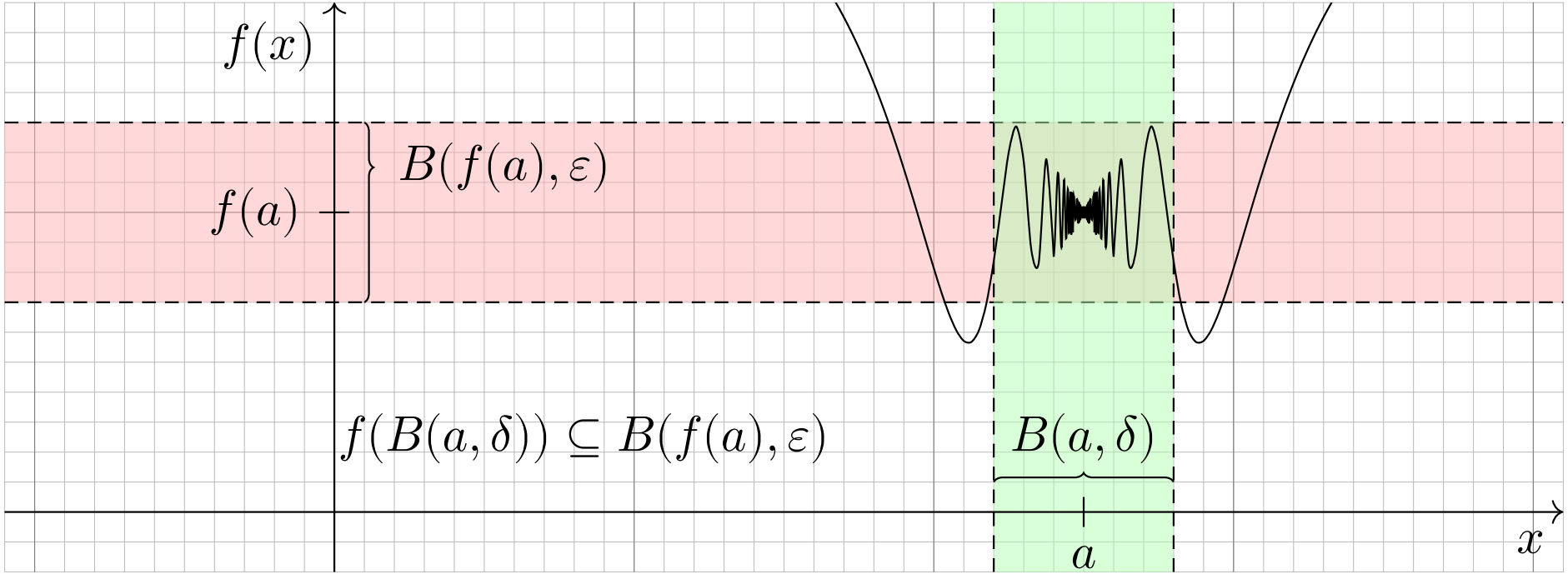


Satz C3B: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) hat höchstens einen Grenzwert: Aus $x_n \to a$ und $x_n \to b$ folgt $a = b$.

Beweis: Sei $x_n \to a$ und $a \neq b$. Dank Hausdorff–Eigenschaft existieren $U \in \mathcal{U}_a$ und $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \to a$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq m$. Folglich gilt $x_n \notin V$, somit $x_n \not\to b$. QED

Stetigkeit von Abbildungen



☺ Für eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umschreibt man Stetigkeit gemeinhin so, dass der Graph von f „keine Sprünge macht“, oder sich „ohne abzusetzen in einem Zug zeichnen lässt“.

☹ Das mag der Intuition nützen, ist aber keine tragfähige Definition! Anschauung kann die Definition motivieren, sie aber nicht ersetzen. Probieren Sie es: Ist die Funktion $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2)$ stetig?

☺ Wir brauchen nicht nur Intuition, sondern tragfähige Definitionen!

Stetigkeit von Abbildungen

Definition C3E: Stetigkeit von Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig im Punkt** $a \in X$, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a),\varepsilon)$ gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon$$

Gilt dies in jedem Punkt $a \in X$, so nennen wir $f : X \to Y$ **stetig** (auf X):

$$\forall a \in X\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon$$

Strenger nennen wir $f : X \to Y$ **gleichmäßig stetig** (auf X), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall a \in X\ \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon$$

Die Menge der stetigen Abbildungen bezeichnen wir mit

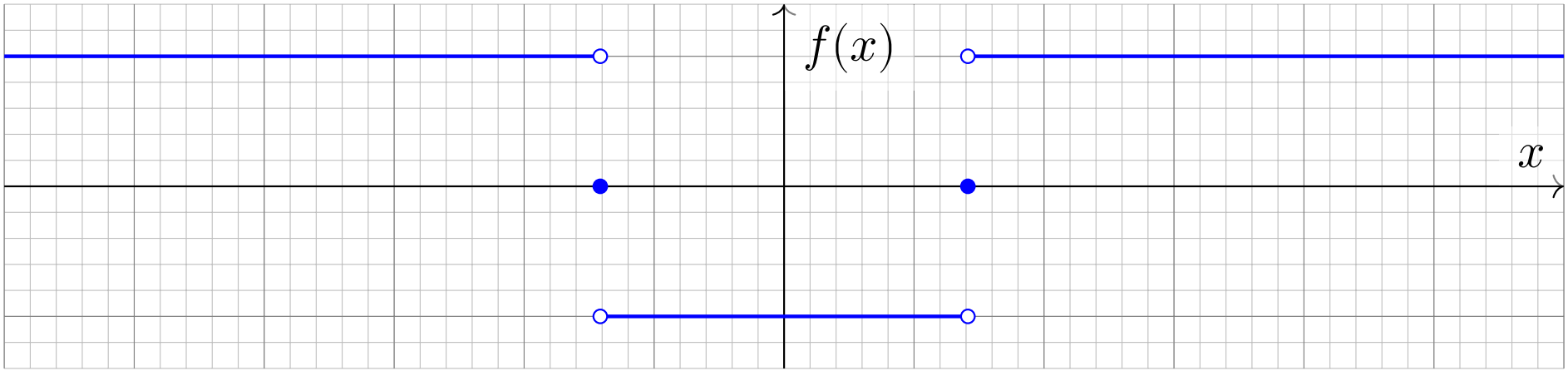
$$\mathscr{C}(X,d_X;Y,d_Y) := \{\, f : X \to Y \mid f \text{ stetig} \,\} \quad \text{bzw.}$$
$$\mathscr{C}_u(X,d_X;Y,d_Y) := \{\, f : X \to Y \mid f \text{ gleichmäßig stetig} \,\}.$$

☺ Diese Begriffe und zahlreiche Beispiele kennen Sie aus der Analysis!

Mahnende Beispiele für un/stetige Funktionen

Aufgabe: Untersuchen Sie punktweise und gleichmäßige Stetigkeit von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2),$$
$$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \ : \ x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2).$$



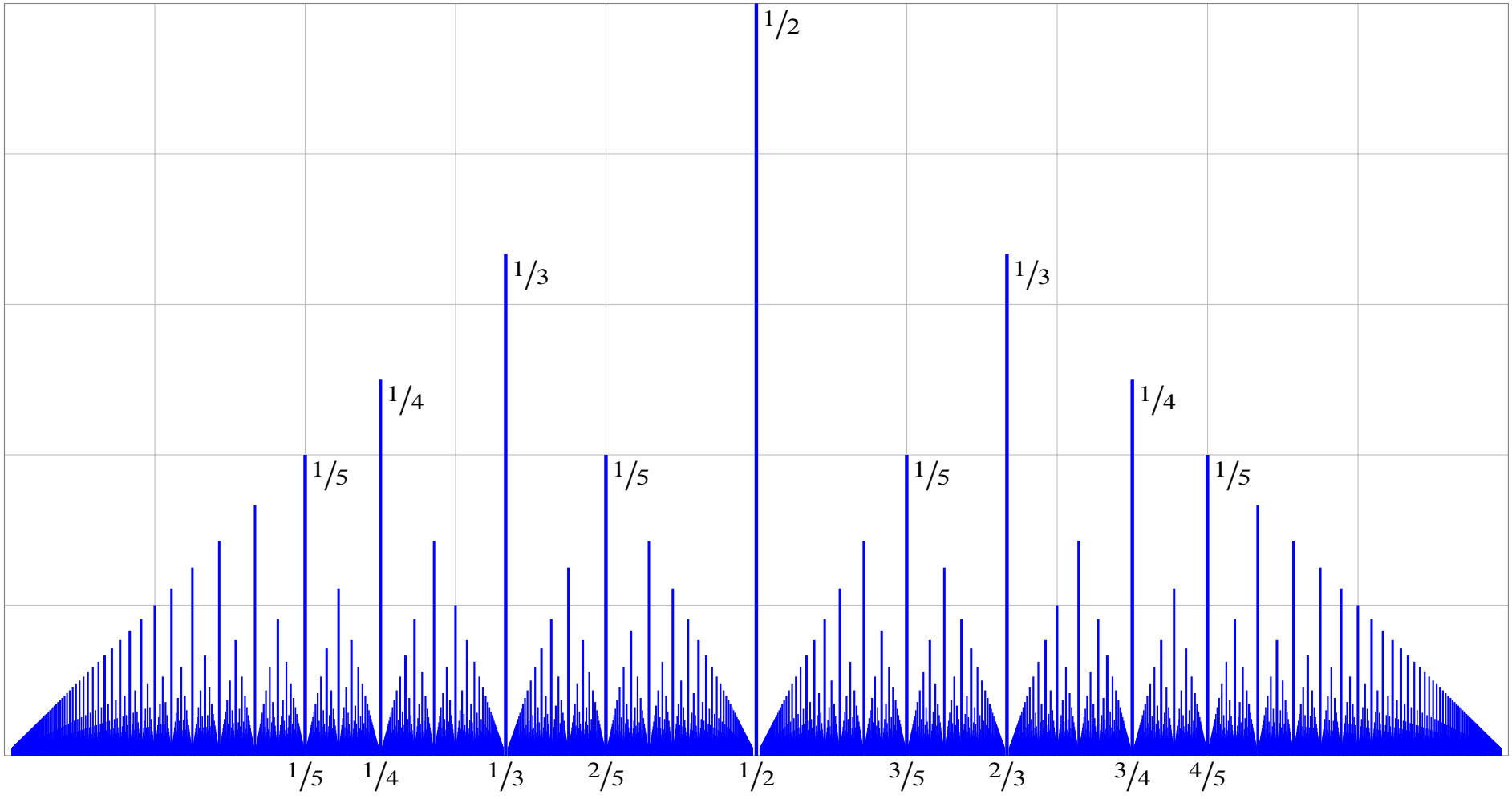
Lösung: (1) Die Funktion f ist stetig bis auf die Sprungstellen $a = \pm\sqrt{2}$: Zu allen $\delta > 0$ existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $|a - x| < \delta$ und $|g(a) - g(x)| \geq 1$. Da f nicht stetig ist, kann f auch nicht gleichmäßig stetig sein.

(2) Die Funktion g hingegen hat keine solchen Sprungstellen, sie ist sogar lokal konstant, somit stetig, aber nicht gleichmäßig: Zu $0 < \varepsilon \leq 2$ und $\delta > 0$ existieren $a, x \in \mathbb{Q}$ mit $|a - x| < \delta$ und $|g(a) - g(x)| \geq \varepsilon$.

Mahnende Beispiele für un/stetige Funktionen

Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die (1) überall unstetig ist? (2) nur in $\mathbb{Q}$?

Lösung: (1) Ja, die **Dirichlet–Funktion** $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nirgends stetig.
(2) Ja, die **kleine Dirichlet–Funktion** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(p/q) = 1/q$ für jeden gekürzten Bruch $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Stetigkeit ist eine topologische Eigenschaft.

Satz C3G: Charakterisierungen der Stetigkeit

Für jede Abbildung $f : X \to Y$ metrischer Räume sind äquivalent:

(1) f ist folgenstetig: Aus $x_n \to a$ in X folgt $f(x_n) \to f(a)$ in Y.
(2) f ist stetig auf X (im Sinne der obigen ε–δ–Definition C3E).
(3) Für jede offene Menge V in Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X:

$$\forall V \in \mathcal{T}_Y : \; f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$$

Lokal um jeden Punkt $a \in X$ sind äquivalent:

(4) f ist folgenstetig in a: Aus $x_n \to a$ in X folgt $f(x_n) \to f(a)$ in Y.
(5) f ist stetig im Punkt a (im Sinne der obigen ε–δ–Definition C3E).
(6) Für jede Umgebung V von $f(a)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a:

$$\forall V \in \mathcal{U}_{f(a)} : \; f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_a$$

Die Formulierungen (3,6) verwenden die Metrik nicht explizit, sondern nur offene Mengen: Stetigkeit ist somit eine topologische Eigenschaft!

Stetigkeit ist eine topologische Eigenschaft.

Konvergenz C3A und Stetigkeit C3G sind topologische Eigenschaften!

In der Analysis geht es über die **qualitativen** Fragen der Konvergenz und Stetigkeit hinaus auch **quantitativ** darum, wie schnell eine Folge konvergiert oder wie stark $f(x)$ mit x variiert. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ oder in jedem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum ist das wichtigste Instrument die Differenzierbarkeit zur linearen Approximation, oder noch höhere Ableitungen zur polynomialen Approximation (Taylor–Entwicklung).

Zur feineren Untersuchung dienen ebenso die Lipschitz–Stetigkeit (§C2f) oder die Hölder–Stetigkeit (§C2g). Speziell in der Numerik wird eine geeignete Metrik explizit für praktische Fehlerschranken genutzt.
Dies sind daher keine topologischen, sondern metrische Eigenschaften.
Hierbei kommt es wirklich auf die Abstände an, auf die Streckung bzw. Stauchung, auf den Fehler, also die Distanz zum gesuchten Grenzwert.

Qualitativ-topologische Methoden ersetzen nicht, sondern ergänzen die quantitativ-metrischen, je nach Anwendung und Sichtweise.

Topologisch äquivalente Metriken

In vielen Fällen kommt es uns nicht auf die Metrik selbst an, sondern nur auf Konvergenz und Stetigkeit, also insbesondere auf offene Mengen!

Definition C31: topologischer Vergleich von Metriken

Zwei Metriken $d, e : X \times X \to [0, \infty]$ heißen **(topologisch) äquivalent**, wenn sie dieselben offenen Mengen definieren, kurz $\mathcal{T}(X, d) = \mathcal{T}(X, e)$.

Gilt $\mathcal{T}(X, d) \supseteq \mathcal{T}(X, e)$, so nennen wir d **feiner** als e, oder e **gröber** als d. Der Kürze halber bedeutet „feiner“ hierbei „mindestens so fein wie“.

Äquivalent, jeder ε–Ball bezüglich e enthält einen δ–Ball bezüglich d:

$$\forall a \in X \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \; : \; B_{(X,d)}(a, \delta) \subseteq B_{(X,e)}(a, \varepsilon).$$

Äquivalenz bedeutet also, d ist feiner als e, und e ist feiner als d.
Wir nennen d **echt feiner** als e, falls $\mathcal{T}(X, d) \supsetneq \mathcal{T}(X, e)$ gilt.

Dieselben Begriffe verwenden wir ebenso für Normen: Zwei Normen sind topologisch äquivalent, wenn Sie dieselbe Topologie induzieren.

Topologisch äquivalente Metriken

Beispiel / Übung C3к: Vergleich von L^p–Normen

Als konkrete Illustration einige klassische Beispiele: Sei $1 \leq p < q \leq \infty$.

1. Auf $\mathbb{R}^n$ sind die ℓ^p–Norm und die ℓ^q–Norm äquivalent:
$$|x|_\infty \leq |x|_p \leq |x|_1 \leq n \cdot |x|_\infty$$
2. Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die ℓ^p–Norm echt feiner als die ℓ^q–Norm:
$$\|f\|_{\ell^q} \leq \|f\|_{\ell^p}$$
3. Auf $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ ist die L^q–Norm echt feiner als die L^p–Norm:
$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}$$
4. Auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind die L^p– und die L^q–Norm unvergleichbar, das heißt, keine ist feiner als die andere.

Topologisch äquivalente Metriken

Proposition C3J: topologischer Vergleich von Metriken

Für je zwei Metriken d, e auf X sind gleichbedeutend:

1. Die Metrik d ist feiner als die Metrik e (im Sinne der Definition C3I).
2. Jede Umgebung bezüglich e ist auch eine Umgebung bezüglich d.
3. Jede offene Menge bezüglich e ist auch offen bezüglich d.
4. Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, e) : x \mapsto x$ ist stetig.
5. Gilt $x_n \to a$ bezüglich d, dann gilt auch $x_n \to a$ bezüglich e.
6. Ist $f : X \to Y$ stetig bezüglich e, dann ist f stetig bezüglich d.
7. Ist $f : Y \to X$ stetig bezüglich d, dann ist f stetig bezüglich e.

Seien $|\text{-}|$ und $\|\text{-}\|$ Normen auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum V.

8. Genau dann ist $|\text{-}|$ feiner als $\|\text{-}\|$, falls $\|x\| \leq L\,|x|$ für alle $x \in V$ und eine geeignete Konstante $L \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.
9. Topologische Äquivalenz bedeutet $\ell\,|x| \leq \|x\| \leq L\,|x|$ für alle $x \in V$ und geeignete Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$.

Topologisch äquivalente Metriken

Skalierung von Metriken

Beispiel / Übung C3L: gestauchte & gestutzte Metrik

Ist $d : X \times X \to [0, \infty]$ eine Metrik, so auch die **gestauchte Metrik**

$$d' : X \times X \to [0, 1] : (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Hieraus lässt sich die ursprüngliche Metrik d rekonstruieren gemäß

$$d : X \times X \to [0, \infty] : (x, y) \mapsto \frac{d'(x, y)}{1 - d'(x, y)}.$$

Hierbei entspricht $d(x, y) = \infty$ dem Wert $d'(x, y) = 1$ und umgekehrt.

Entsprechend erhalten wir aus d die **gestutzte Metrik**

$$d^* : X \times X \to [0, 1] : (x, y) \mapsto \min\{ d(x, y), 1 \}.$$

Die drei Metriken d, d' und d^* sind topologisch äquivalent. Insbesondere können wir von d stets zu einer endlichen Metrik d' oder d^* übergehen.

Skalierung von Metriken

Beispiel / Übung C3L: gestauchte & gestutzte Metrik

Die hierbei verwendete Skalierung $f : [0,\infty] \to [0,\infty]$ mit $f(t) = t/(1 \pm t)$ bzw. $f(t) = \min\{t, 1\}$ erfreut sich folgender drei Eigenschaften:

(1) f ist positiv definit: Es gilt $f(0) = 0$ und $f(t) > 0$ für $t > 0$.
(2) f ist monoton wachsend: Für alle $s \leq t$ in $[0,\infty]$ gilt $f(s) \leq f(t)$.
(3) f ist subadditiv: Für alle $s, t \in [0,\infty]$ gilt $f(s+t) \leq f(s) + f(t)$.

In diesem Fall ist mit d auch $d' = f \circ d$ eine Metrik und feiner als d.
Ist f zudem stetig in 0, dann sind d und d' topologisch äquivalent.

Beweis: Definition einsetzen und nachrechnen!
Eine konkrete Anwendung und ein Gegen/Beispiel:

Mit d ist auch d^α für $0 < \alpha \leq 1$ eine Metrik und topologisch äquivalent.
Diese *Schneeflockenmetrik* C7I führt zu einer völlig anderen Geometrie.

Die Funktion $f = \mathbf{1}_{]0,\infty]} : [0,\infty] \to \{0,1\}$ erfüllt (1–3). Für jede Metrik d ist $d' = f \circ d$ die diskrete Metrik, und i.A. nicht topologisch äquivalent.

Skalierung von Metriken

Skalierung von Metriken

Abstand zwischen Mengen

Definition C3M: Abstand zwischen Punkten und Mengen

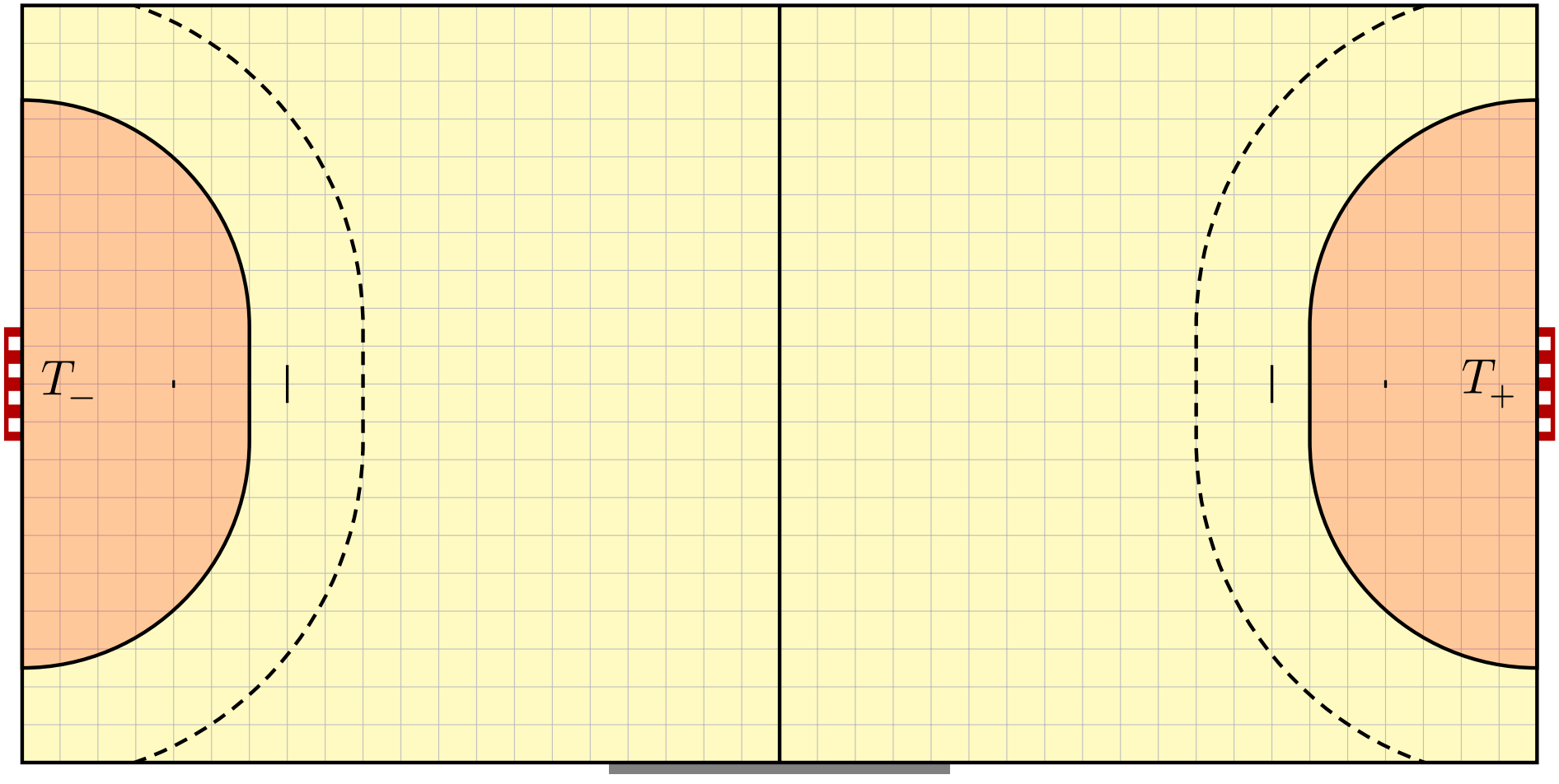
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir messen den Abstand zwischen Punkten und Mengen als das Infimum der punktweisen Abstände:

$$
\begin{aligned}
d : X \times \mathfrak{P}X &\to [0,\infty], & d(a,B) &:= \inf\{\, d(a,y) \,|\, y \in B \,\} \\
d : \mathfrak{P}X \times X &\to [0,\infty], & d(A,b) &:= \inf\{\, d(x,b) \,|\, x \in A \,\} \\
d : \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X &\to [0,\infty], & d(A,B) &:= \inf\{\, d(x,y) \,|\, x \in A,\ y \in B \,\} \\
\operatorname{diam} : \mathfrak{P}X &\to [0,\infty], & \operatorname{diam}(A) &:= \sup\{\, d(x,y) \,|\, x,y \in A \,\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe: Zeichnen Sie ein Handballfeld gemäß Regel 1 der *International Handball Federation* (IHF, `www.ihf.info`), aber jeweils in der ℓ^p–Metrik:

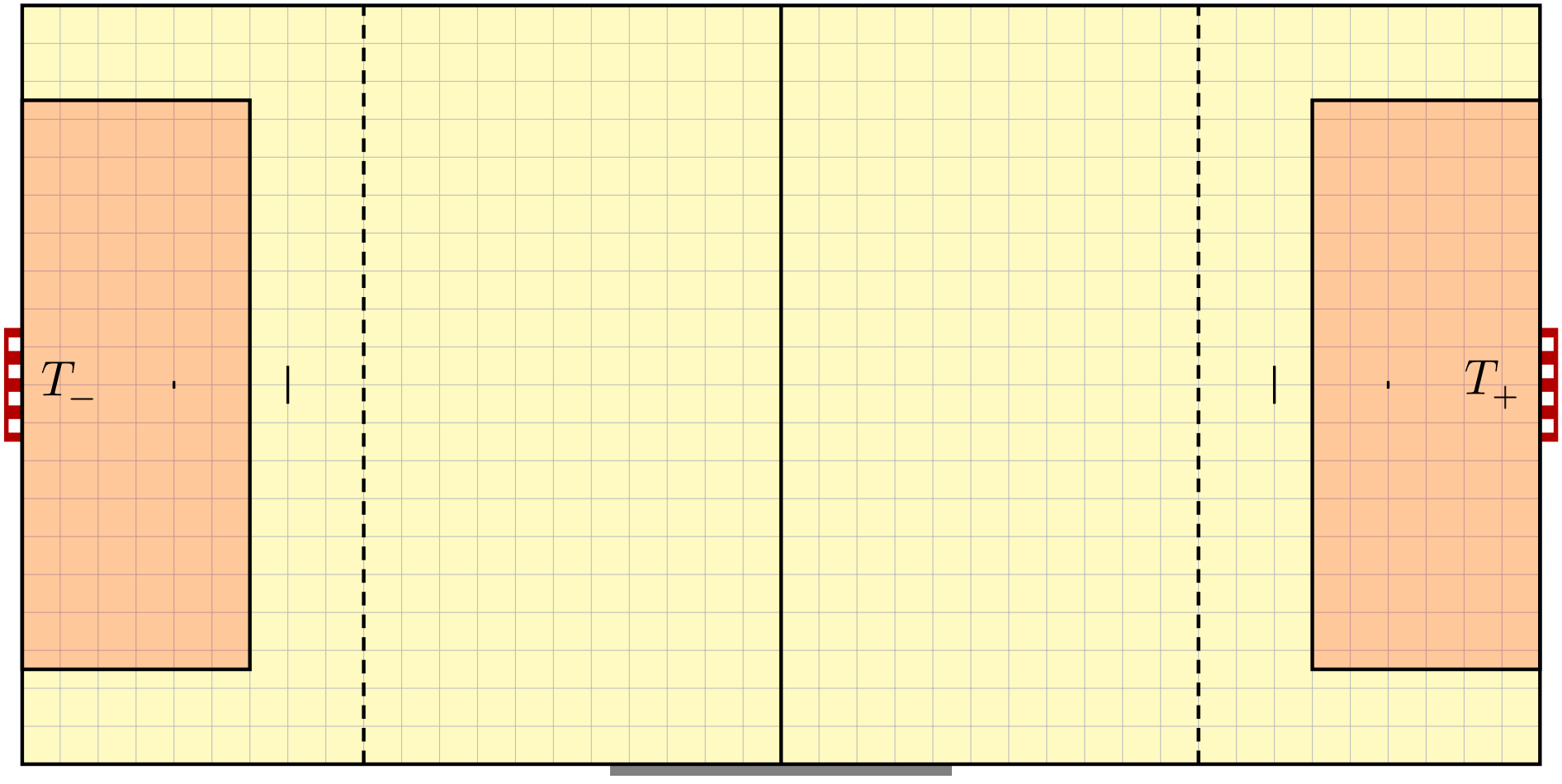
$$
\begin{aligned}
X &= [-20,20] \times [-10,10] \subseteq \mathbb{R}^2 && \text{die Spielfläche} \\
T &= \{-20,20\} \times [-1.5,1.5] && \text{die beiden Torlinien} \\
S &= \{\, x \in X \,|\, d(x,T) = 6 \,\} && \text{Sechs-Meter-Linie („Kreis“)} \\
N &= \{\, x \in X \,|\, d(x,T) = 9 \,\} && \text{Neun-Meter-Linie („Freiwurflinie“)}
\end{aligned}
$$

Handballfeld in der euklidischen Metrik, ℓ^2



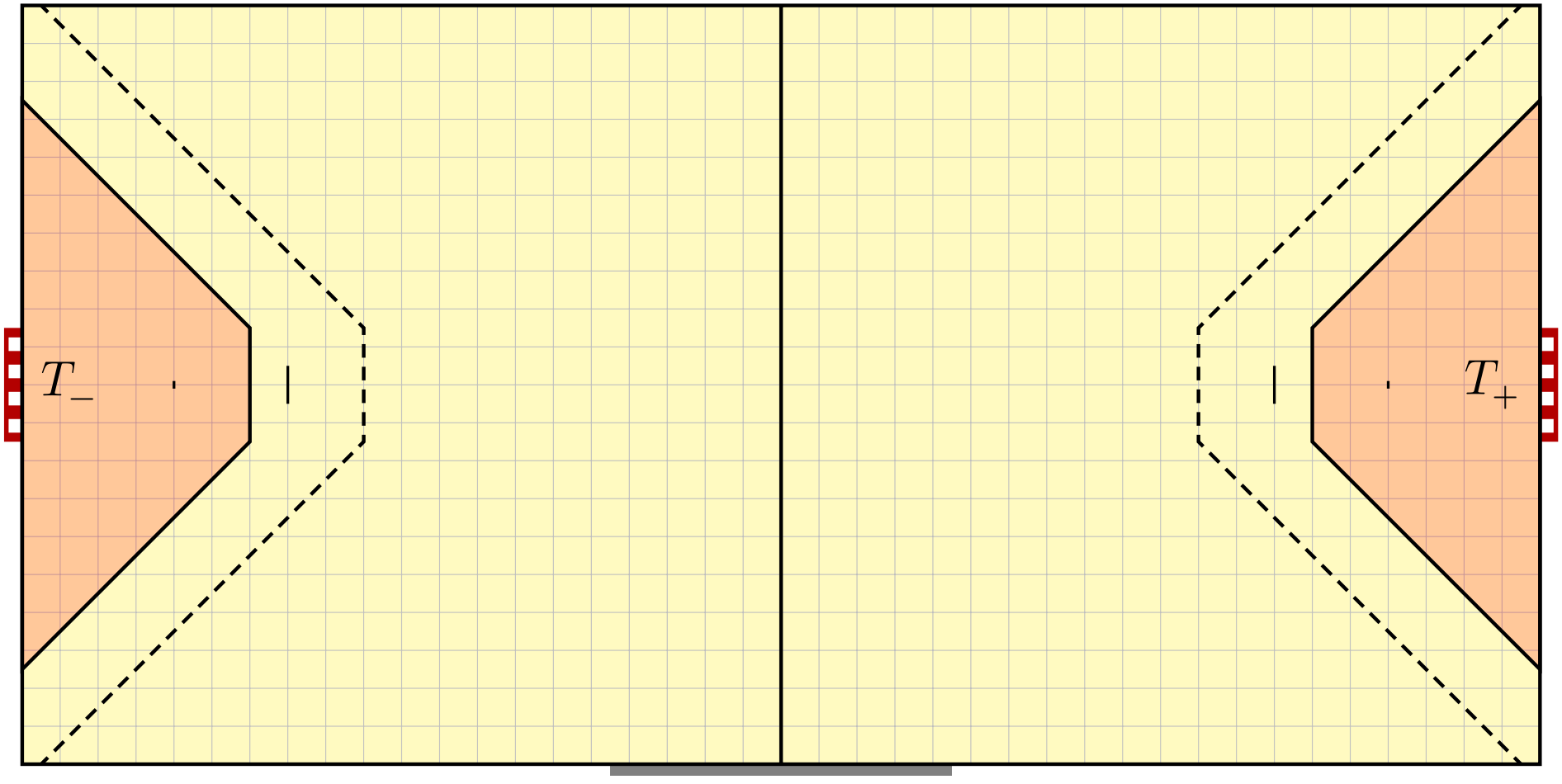
☺ Der sogenannte „Kreis“ ist gar keiner! Die Sechs-Meter-Linie besteht gemäß Regel 1:4 aus zwei Viertelkreisen und einem Geradenstück.

Handballfeld in der Maximumsmetrik, ℓ^∞



☺ In der Maximumsmetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Rechteck.
Fun fact: Im Fußball folgen Tor- und Strafraum dieser Konvention.

Handballfeld in der Taximetrik, ℓ^1



☺ In der Taximetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Trapez.
Das sieht ulkig aus und illustriert eindrücklich diese Metrik.

Abstand und Abschluss

Proposition C3N: Abstand und Abschluss

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen.
(1) Für $f : X \to [0, \infty] : x \mapsto d(x, A)$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.
Das bedeutet f ist 1–lipschitz-stetig, und somit insbesondere stetig.

(2) Für $x \in A$ gilt $d(x, A) = 0$. Genau dann ist A abgeschlossen, wenn auch die Umkehrung gilt: Für alle $x \in X$ mit $d(x, A) = 0$ folgt $x \in A$.
Als direkte Folgerung erhalten wir folgende Trennungseigenschaft:

(3) Trennungseigenschaft $T_{5^1/_2}$: Zu $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt existiert $f : X \to [0, 1]$ stetig mit $f^{-1}(\{0\}) = A$ und $f^{-1}(\{1\}) = B$.

Für $A \neq \emptyset \neq B$ gelingt dies explizit durch die **Urysohn–Funktion**

$$f_{A,B} : X \to [0, 1] : x \mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Beweis: Definition einsetzen und nachrechnen!

Abstand und Abschluss

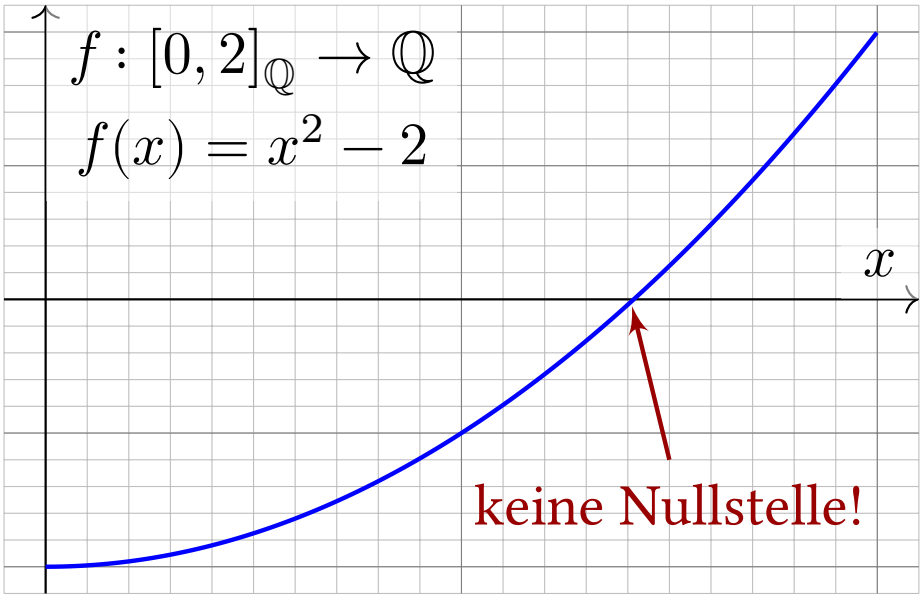
🙂 Jeder metrische Raum (X, d) hat viele stetige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$.
Besonders einfach und nützlich sind Abstandsfunktionen $f(x) = d(x, A)$.

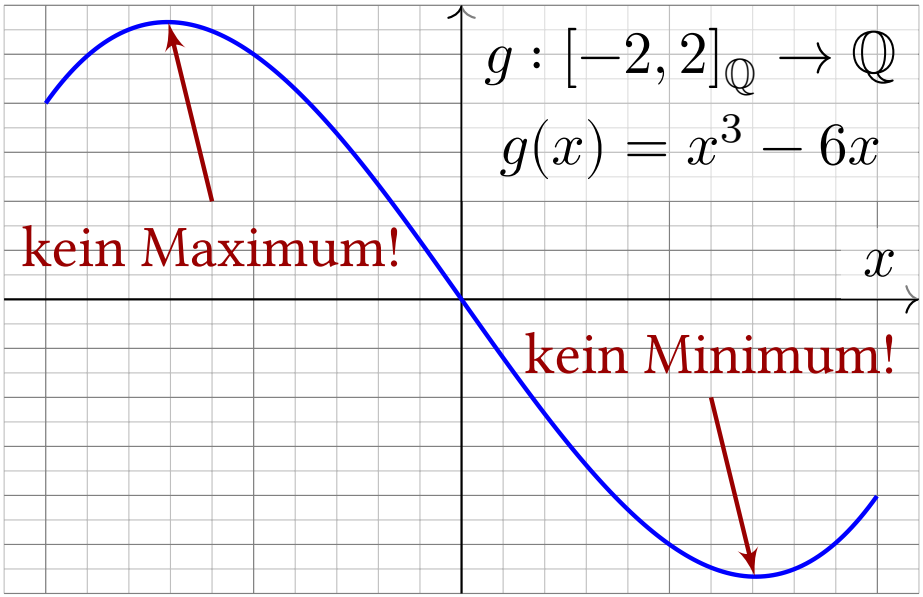
🙂 Mit stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ können wir alle Punkte $a \neq b$ in X trennen und sogar alle disjunkten abgeschlossenen Mengen A, B.

Die Konstruktion in Aussage (3) ist leicht und wunderbar explizit,
denn wir gehen von einer vorhandenen Metrik d auf X aus.
Dies garantiert Reichhaltigkeit: Allein die Anwesenheit der Metrik d
erlaubt die Konstruktion von maßgeschneiderten stetigen Funktionen.

Wir werden später umgekehrt versuchen, eine gegebene Topologie zu metrisieren (Metrisierungssatz E5R von Urysohn) dank geeigneter Trennungseigenschaften (E5A). Die Hausdorff–Eigenschaft (T_2, C2O) ist eine der schwächsten, die Existenz von Urysohn–Funktionen ($T_{5^1/_2}$) ist die stärkste dieser Trennungseigenschaften.

Zwischenwerte, Minimum und Maximum





Satz C3A: Zwischenwertsatz / Zusammenhang

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat die Zwischenwerteigenschaft:
Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ existiert $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.

Satz C3B: Minimum und Maximum / Kompaktheit

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt Infimum und Supremum an:
Es existieren $x_0, x_1 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für alle $x \in [a,b]$.

Übung: Intervallschachtelung und Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Zwischenwerte, Minimum und Maximum

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ bilden das Fundament der Analysis.
Ihre entscheidende Eigenschaft ist die Supremums-Vollständigkeit.
Ohne diese Eigenschaft stehen wichtige Werkzeuge nicht zur Verfügung,
etwa der Zwischenwertsatz oder das Satz von Minimum und Maximum.

Die obigen Beispiele zeigen dieses „Fehlverhalten“ drastisch:

- Eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, sogar eine Polynomfunktion, kann das Vorzeichen wechseln, ohne eine Nullstelle zu haben!
- Eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, sogar eine Polynomfunktion, kann von wachsend zu fallend übergehen, ohne ein Maximum zu haben!

Übung: Für stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann dies nicht passieren!
Beweisen Sie die beiden obigen Sätze durch Intervallschachtelung.
An welcher Stelle und wie nutzen Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$?

☺ Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist etwas Besonderes und sehr Wertvolles!
Die Löchrigkeit von $\mathbb{Q}$ illustriert den Konstrast eindrücklich. Die
Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ löst auf einen Schlag all diese Probleme.

Konvergente Folgen und Cauchy–Folgen

Erinnerung: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) **konvergiert** gegen einen Punkt $a \in X$, wenn der Abstand $d(x_n,a)$ schließlich beliebig klein wird.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,d) \quad :\Leftrightarrow \quad d(x_n,a) \to 0 \text{ für } n\to\infty$$
$$:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : d(x_n,a) < \varepsilon$$

Konvergenz in (X,d) ist eine **zweistellige Relation** zwischen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Punkten a in X. Wir schreiben hierfür kurz $x_n \to a$.

Oft noch praktischer wäre ein Kriterium für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allein: Wir möchten Konvergenz nachweisen, ohne den Grenzwert zu kennen!

Definition C4A: Cauchy–Folge

Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Cauchy–Folge** in (X,d), wenn der Durchmesser $\delta_n := \sup_{p,q\geq n} d(x_p,x_q)$ des Folgenendstücks beliebig klein wird:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy in } (X,d) \quad :\Leftrightarrow \quad \delta_n \searrow 0$$
$$:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall p,q \in \mathbb{N}_{\geq n} : d(x_p,x_q) \leq \varepsilon$$

Vollständige metrische Räume

⚠ Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge, aber nicht umgekehrt.

Lemma C4b: Konvergenz impliziert Cauchy.

Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ ist eine Cauchy–Folge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dank Konvergenz $x_n \to a$ existiert $n \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_p, a) < \varepsilon/2$ für alle $p \geq n$. Für alle $p, q \geq n$ folgt somit $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, a) + d(a, x_q) < \varepsilon$. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge. QED

Definition C4c: vollständiger metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy–Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) konvergiert, also ein Punkt $a \in X$ existiert mit $x_n \to a$.

Beispiel: Im Raum $X =]0, 1]$ mit euklidischer Metrik ist $x_n = 2^{-n}$ eine Cauchy–Folge, aber nicht konvergent. (Im Raum $[0, 1]$ gilt $x_n \to 0$.)

Beispiel: Im Raum $\mathbb{Q}$ mit euklidischer Metrik ist $x_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ eine Cauchy–Folge, hat aber in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert. (In $\mathbb{R}$ gilt $x_n \to \mathrm{e}$.)

Konvergente Folgen und Cauchy–Folgen

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** in (X,d), wenn ein Punkt $a \in X$ mit der Eigenschaft $x_n \to a$ existiert. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$(1) \quad \exists a \in X \ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ \ \exists m \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \ : \ d(x_n, a) < \varepsilon$$

Übung: Zur Cauchy–Bedingung für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) ist äquivalent:

$$(2) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ \ \exists a \in X \ \ \exists m \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \ : \ d(x_n, a) < \varepsilon$$

Somit gilt die Abschwächung „(1) $\Rightarrow$ (2)“ durch Quantorentausch!

Warum formulieren wir die Cauchy–Bedingung dennoch traditionell wie in Definition C4A? Ich denke, C4A ist die bessere Sichtweise: Der Durchmesser des Folgenendstücks $(x_n)_{n\geq m}$ wird beliebig klein. Die Einführung eines geeigneten „Mittelpunkts“ $a \in X$ ist zwar immer möglich, doch eher künstlich und lenkt daher vom Wesentlichen ab. Die Präsentation mathematischer Ideen und Argumente ist immer auch eine Frage des Stils, der Didaktik und der Akzentsetzung.

Konvergente Folgen und Cauchy–Folgen

Vollständige metrische Räume

Satz C4D: Vollständigkeit der reellen Zahlen

Der Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit euklidischer Metrik $d(x,y) = |x-y|$ ist vollständig. Ebenso sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{C}^m$ vollständig bezüglich jeder p–Metrik, $p \in [1, \infty]$.

Beweis: (1) Die definierende Eigenschaft des geordneten Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen ist die Supremums-Vollständigkeit (B2C).

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$. Sie ist insbesondere beschränkt, also liegen $a = \liminf x_n$ und $b = \limsup x_n$ in $\mathbb{R}$. Dabei gilt $a \le b$.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $|x_p - x_q| \le \varepsilon$ für alle $p, q \ge n$. Insbesondere gilt $x_n - \varepsilon \le x_p \le x_n + \varepsilon$ für alle $p \ge n$, also $x_n - \varepsilon \le a \le b \le x_n + \varepsilon$, somit $b - a \le 2\varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, folgt $a = b$, also $x_n \to a$.

(2) Erinnerung: Für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt $|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le m \cdot |x|_\infty$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}^m$. Für die k–te Koordinate ist dann $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$. Dank Vollständigkeit (1) existiert ein Punkt $a_k \in \mathbb{R}$ mit $x_{n,k} \to a_k$. Daraus folgt $x_n \to a$ in $\mathbb{R}^m$. QED

Vollständige metrische Räume

☺ Erst dank Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ greifen die Werkzeuge, die Sie aus der Analysis kennen und lieben: Grenzwerte, Ableitungen, Integrale, etc. Wichtige Funktionenräume der Analysis sind vollständig, insbesondere alle ℓ^p–Räume und L^p–Räume. Dies sind also Banach–Räume. (C1C)

Lemma C4E: abgeschlossene Teilräume

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Genau dann ist (A, d_A) vollständig, wenn A abgeschlossen in (X, d) ist.

Satz C4F: Produkträume

Ist $(X_i, d_i)_{i\in I}$ eine Familie vollständiger metrischer Räume, dann ist $(X, d) = \prod_{i\in I}(X_i, d)$ vollständig bezüglich der Supremumsmetrik C2G.

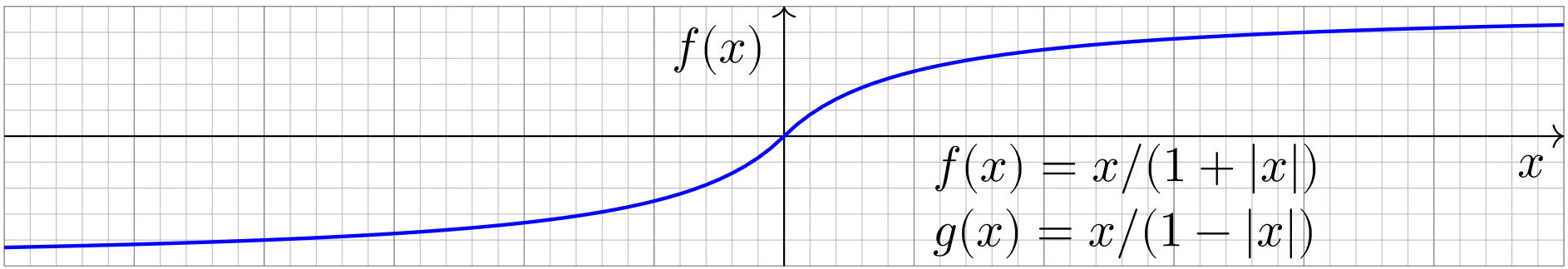
Satz C4G: stetige Abbildungen

Ist (Y, d_Y) vollständig, so auch $(Y, d_Y)^X$ bezüglich der Supremumsmetrik (C4F) und somit auch der abgeschlossene Teilraum $\mathscr{C}(X, d_X; Y, d_Y)$ (C4E).

Ist Vollständigkeit eine topologische Eigenschaft?

Aufgabe: (1) Ist Vollständigkeit eine topologische Eigenschaft?
(2) Bleiben Cauchy–Folgen unter Homöomorphismen erhalten?
(3) Bleibt Vollständigkeit erhalten unter äquivalenten Metriken?

Lösung: (1) Nein! Ein Gegenbeispiel ist $(f, g) : \mathbb{R} \cong]-1, +1[$ (A1B).
Mit der euklidischen Metrik ist $\mathbb{R}$ vollständig, $]-1, +1[$ jedoch nicht.



(2) Nein! Die Folge $y_n = n/(1 + n) \nearrow 1$ in $]-1, +1[$ ist Cauchy bezüglich der euklidischen Metrik, nicht jedoch $x_n = g(y_n) = n \nearrow +\infty$ in $\mathbb{R}$.

(3) Nein! Mit der euklidischen Metrik $e(x, y) = |x - y|$ ist $\mathbb{R}$ vollständig, nicht jedoch mit der äquivalenten Metrik $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

Ist Vollständigkeit eine topologische Eigenschaft?

Allein mit der Topologie können wir Konvergenz (C3A) und Stetigkeit (C3G) formulieren. Dies sind daher topologische Eigenschaften.

Die Cauchy–Bedingung hingegen ist keine topologische Invariante, wie oben gezeigt, sondern eine genuin metrische Eigenschaft.

Illustration zu Banachs Fixpunktsatz

Beispiel: Legen Sie im Hörsaal eine Karte des Campus auf den Tisch. Dann fällt genau ein Punkt der Karte auf den geographischen Punkt, den er bezeichnet.

Hat jede Kontraktion $f : (X, d) \to (X, d)$ einen Fixpunkt?

Nein, etwa $f(x) = x/2$ auf $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Der Raum (X, d) muss dazu vollständig sein!

Banachs Fixpunktsatz ist ein universelles Werkzeug.

Aufgabe: (1) Illustrieren Sie Iterationen und Banachs Fixpunktsatz.
(2) Sie kennen bereits spektakuläre Anwendungen: Nennen Sie einige!
(3) Wiederholung: Formulieren und beweisen Sie Banachs Fixpunktsatz.

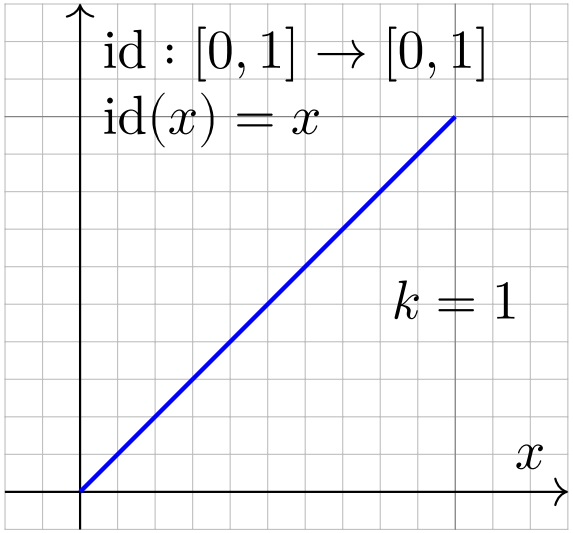
Lösung: (1) Bildhaftes Beispiel: Wenn Sie von Ihrer geographischen Umgebung X eine Landkarte im Maßstab $k = 1 : n$ (mit $n > 1$) vor sich auf den Tisch legen, dann definiert die Zuordnung jedes realen Punktes zu seinem Bildpunkt eine k–kontraktive Abbildung $f : X \to X$. Genau ein Punkt der Karte liegt auf dem geographischen Punkt, den er bezeichnet.

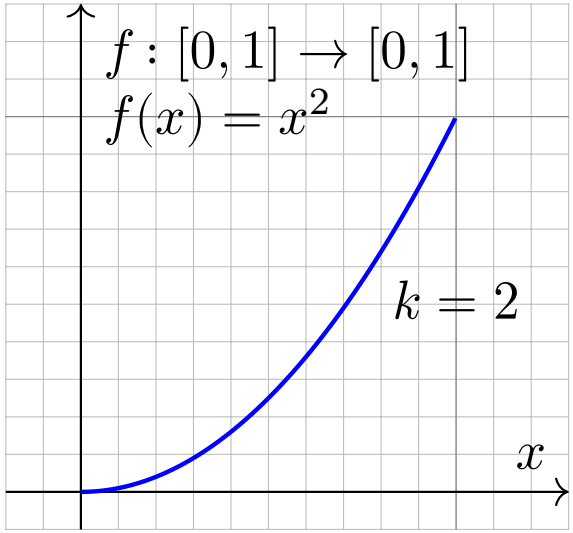
(2) Mit dem Iterationsverfahren können Sie viele Gleichungen numerisch lösen wie $x = \cos(x)$ für $x \in [0, 1]$. Das **Newton–Verfahren** baut darauf auf und verbessert ganz wesentlich die Konvergenzgeschwindigkeit.

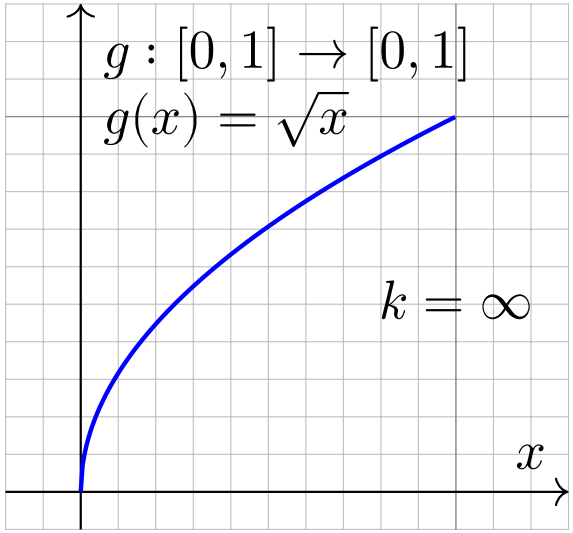
Weitere Anwendungen sind der **Satz von Picard–Lindelöf** zur Lösung von Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ und der **lokale Umkehrsatz** zur Konstruktion lokaler Diffeomorphismen $(f, g) : \mathbb{R}^n \supseteq U \cong V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Diese Sätze sind schon spektakulär, doch nur die ersten Anwendungen im Grundstudium, als Spitze des Eisbergs! Viele weitere kommen hinzu.

Dehnungsschranken und Kontraktionen







Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) Räume mit endlichen Metriken und $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Eine Abbildung $f : (X, d_Y) \to (Y, d_Y)$ heißt **k–lipschitz–stetig**, falls gilt:

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq k\, d_X(a, b) \qquad \text{für alle } a, b \in X$$

Im Falle $0 \leq k < 1$ nennen wir f **kontraktiv** oder eine **k–Kontraktion**.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| \leq \|A\| \cdot |x - y|$ bezüglich der Operatornorm.

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : X \to \mathbb{R}^m$ diff'bar mit $\|f'\| \leq k$.
Für alle $x, y \in X$ existiert $z \in [x, y]$, sodass $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$.
Demnach gilt $|f(x) - f(y)| \leq \|f'(z)\| \cdot |x - y| \leq k\,|x - y|$.

Dehnungsschranken und Kontraktionen

Wir nennen eine solche Funktion f auch **dehnungsbeschränkt**.
Der **metrische Differenzenquotient** ist hier beschränkt gemäß

$$\frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} \leq k \qquad \text{für alle } a \neq b \text{ in } X.$$

Für $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ definieren wir daher die **Lipschitz–Norm**

$$\|f\|_{\text{Lip}} = \operatorname{Lip}(f) := \sup\left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} \,\middle|\, a \neq b \text{ in } X \right\}.$$

Die folgende Formulierung vereinheitlicht Ausnahmen und Sonderfälle:

$$\|f\|_{\text{Lip}} := \inf\{ k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \forall a, b \in X : d_Y(f(a), f(b)) \leq k\, d_X(a, b) \}$$

Dies entspricht der **Operatornorm** von linearen Abbildungen normierter Vektorräume. Genau dann gilt $\|f\| < \infty$, wenn f lipschitz–stetig ist.

Genau dann gilt $\|f\| = 0$, wenn f konstant ist. Speziell für die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ gilt $\|\mathrm{id}_X\| = 1$, im Sonderfall $X = \{x\}$ jedoch nur $\|f\| = 0$.

Für die Komposition von Abbildungen gilt $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

Banachs Fixpunktsatz

Satz C4Q: Fixpunktsatz von Banach, 1922

Sei (X, d) ein metrischer Raum, nicht-leer und vollständig. Hierauf sei $f : X \to X$ eine k–Kontraktion: Wir haben eine Kontraktionskonstante $k \in [0, 1[$, und für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$. Dann folgt:

(1) Zur Abbildung f existiert genau ein Fixpunkt $a \in X$, mit $f(a) = a$.

(2) Dieser ist Grenzwert jeder Iteration mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$.

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gelten dabei die beiden Fehlerschranken

$$d(a, x_n) \quad \leq \quad \underbrace{\frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1})}_{\text{a posteriori}} \quad \leq \quad \underbrace{\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)}_{\text{a priori}} \quad \searrow \quad 0.$$

(4) Allgemeiner genügt $d(f^n(x), f^n(y)) \leq k_n\, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$. Damit gilt die feinere Fehlerschranke

$$d(a, x_n) \;\leq\; d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k_j \;\searrow\; 0.$$

☺ Das garantiert Eindeutigkeit, Existenz, Konstruktion und Effizienz.

Banachs Fixpunktsatz: Erläuterung

📖 S. Banach: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fund. Math. 3 (1922) 133–181.

Die Aussage (1) garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes. Die Konstruktion (2) liefert eine extrem praktische Approximation.

Gemäß (3) ist die Konvergenz $x_n \to a$ hierbei mindestens so schnell wie die Konvergenz der geometrischen Folge $k^n \searrow 0$: Dies nutzen wir bei iterativen Berechnungen als *a priori* Abschätzung des Zeitaufwandes, nach der Rechnung haben wir die (bessere) *a posteriori* Abschätzung.

Dieser wunderbare Satz geht auf Stefan Banach (1892–1945) zurück, der nützliche Zusatz (4) stammt von Johannes Weissinger (1913–1995). Zum Beispiel genügt es, dass eine gewisse Iteration f^m kontraktiv ist, also $d(f^m(x), f^m(y)) \leq k\, d(x,y)$ für eine Konstante $k \in [0,1[$ erfüllt.

Ebenso kommt es vor, dass höhere Iterationen f^n stärker kontrahieren, und die Reihe $\sum k_n$ somit viel kleiner ausfällt als die geometrische $\sum k^n$. Für die *qualitative* Konvergenzaussage (2) ist dies zunächst unwesentlich, doch ungemein hilfreich für die *quantitative* Fehlerabschätzung (3-4).

Banachs Fixpunktsatz: Beweis der Konvergenz

Beweis: *Eindeutigkeit:* Für je zwei Fixpunkte $a = f(a)$ und $b = f(b)$ gilt $d(a,b) = d(f(a),f(b)) \leq k\,d(a,b)$ mit $k < 1$, also $d(a,b) = 0$, somit $a = b$.

Existenz: Wir wählen $x_0 \in X \neq \emptyset$ und setzen $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Per Induktion gilt $d(x_{n+1},x_n) \leq k^n d(x_1,x_0)$: Für $n = 0$ ist dies trivial, für $n \geq 1$ gilt $d(x_{n+1},x_n) = d(f(x_n),f(x_{n-1})) \leq k\,d(x_n,x_{n-1}) \leq k^n d(x_1,x_0)$.

Dank Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $n \leq p < q$:

$$\begin{aligned} d(x_q,x_p) &\leq d(x_q,x_{q-1}) + \cdots + d(x_{p+2},x_{p+1}) + d(x_{p+1},x_p) \\ &\leq (k^{q-p-1} + \cdots + k + 1)\,d(x_{p+1},x_p) = \frac{1-k^{q-p}}{1-k} d(x_{p+1},x_p) \\ &\leq \frac{k^p - k^q}{1-k} d(x_1,x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1,x_0) \quad \searrow \quad 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Demnach ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge im metrischen Raum (X,d). Da (X,d) vollständig ist, existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$.

Da f kontraktiv und somit stetig ist, folgt aus $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Grenzübergang $a = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$.

Banachs Fixpunktsatz: Beweis der Fehlerschranke

Die Ungleichung für $n = p$ und $q \to \infty$ ergibt die Fehlerabschätzung (3):

$$d(a, x_n) \quad \leq \quad \underbrace{\frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1})}_{\text{a posteriori}} \quad \leq \quad \underbrace{\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)}_{\text{a priori}} \quad \searrow \quad 0$$

Aussage (4) beweisen wir genauso: Wegen $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$ gilt $k_n \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass $k_n \leq 1/2$ für alle $n \geq m$, das heißt f^n ist kontraktiv für alle $n \geq m$. Sind $a = f(a)$ und $b = f(b)$ Fixpunkte von f, so auch von f^n, also folgt $a = b$ wie oben.

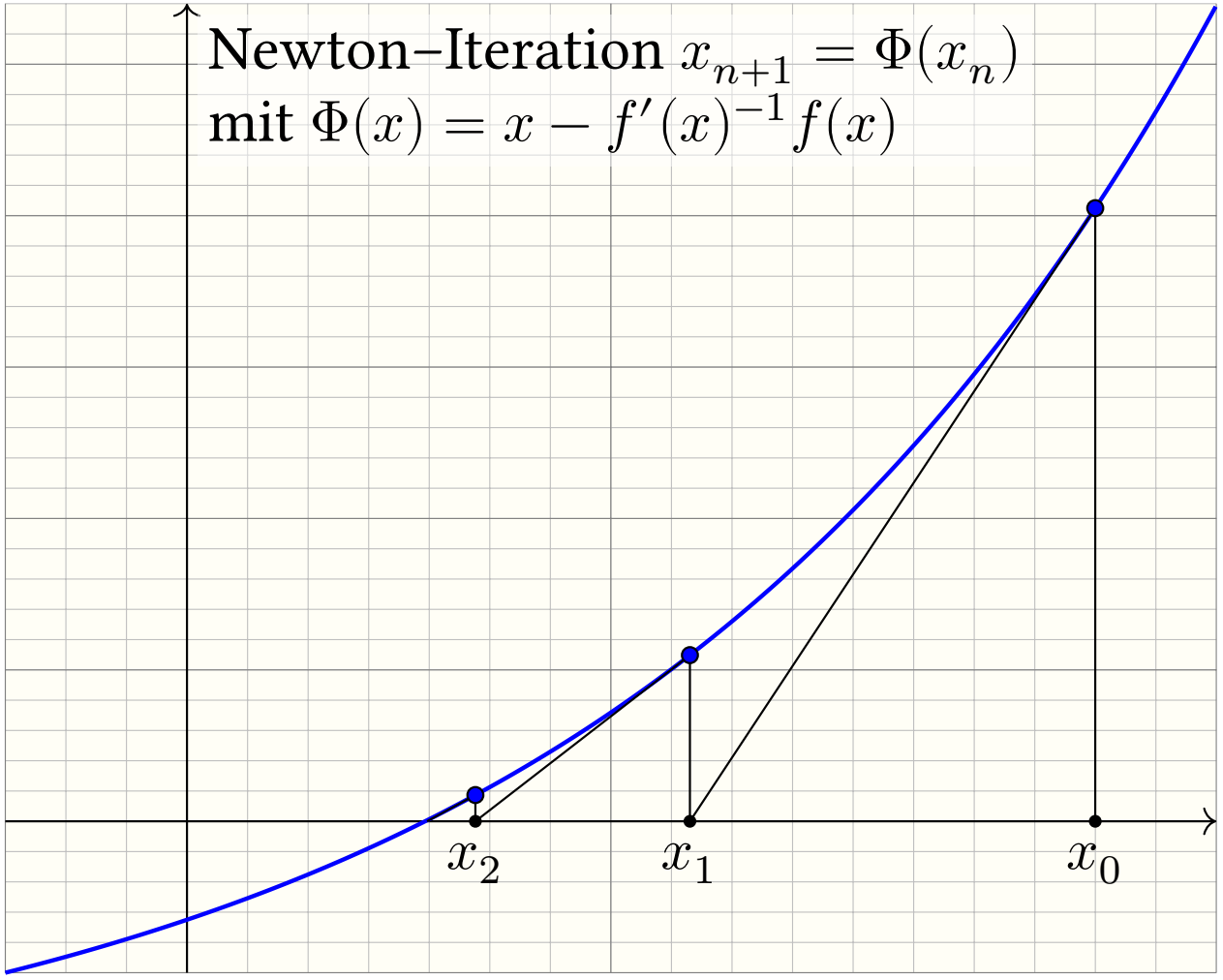
Für jede iterative Folge mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ erhalten wir für $n \leq p < q$ wie oben $d(x_q, x_p) \leq d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k_j$. Somit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X, d), also existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$.

Für $n = p$ und $q \to \infty$ erhalten wir die feinere Fehlerabschätzung

$$d(a, x_n) \leq d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k_j \quad \searrow \quad 0.$$

Das beinhaltet, für $k_j = k^j$, die beiden Abschätzungen aus (3).
Wie immer bei Konvergenz gilt auch hier: Ende gut, alles gut. QED

Das Newton–Verfahren: zunächst eindimensional



Newton–Verfahren: Wir approximieren $f(x)$ um x_n linear durch die Tangente $t_n(x) := f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Wir wählen dann x_{n+1} als Lösung der Gleichung $t_n(x) = 0$, also $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n)$.

Das Newton–Verfahren: zunächst eindimensional

Beispiel: Wir wollen $f(x) = 0$ lösen für $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^2 - 5$.
Hier gilt $\Phi(x) = x - f'(x)^{-1} f(x) = \frac{1}{2}(x + 5x^{-1})$. Bei Start in $x_0 = 3$ gilt:

$x_1 = 2.333333333\ 3333333333\ 3333333333\ 3333333333\ 3333333333\ 3333333333\ 3333333333\ 3333333333\ 3333333333\ 3333333333\ \ldots$
$x_2 = 2.238095238\ 0952380952\ 3809523809\ 5238095238\ 0952380952\ 3809523809\ 5238095238\ 0952380952\ 3809523809\ 5238095238\ \ldots$
$x_3 = 2.236068895\ 6433637284\ 7011144883\ 4853090172\ 2391084093\ 2117527862\ 2087132725\ 4305977710\ 2330293819\ 6555217831\ \ldots$
$x_4 = 2.236067977\ 4999781940\ 9459355858\ 1450106481\ 6791373492\ 0068732213\ 8411033512\ 6926436974\ 7359075319\ 4335606197\ \ldots$
$x_5 = 2.236067977\ 4997896964\ 0917367667\ 6333757435\ 4077823754\ 2075538822\ 8773452271\ 4630972268\ 1785602169\ 6469834141\ \ldots$
$x_6 = 2.236067977\ 4997896964\ 0917366873\ 1276235440\ 6183596115\ 2573838583\ 9112783137\ 6550839691\ 0615434360\ 9449977892\ \ldots$
$x_7 = 2.236067977\ 4997896964\ 0917366873\ 1276235440\ 6183596115\ 2572427089\ 7245410520\ 9256378048\ 9941441440\ 8378782274\ \ldots$

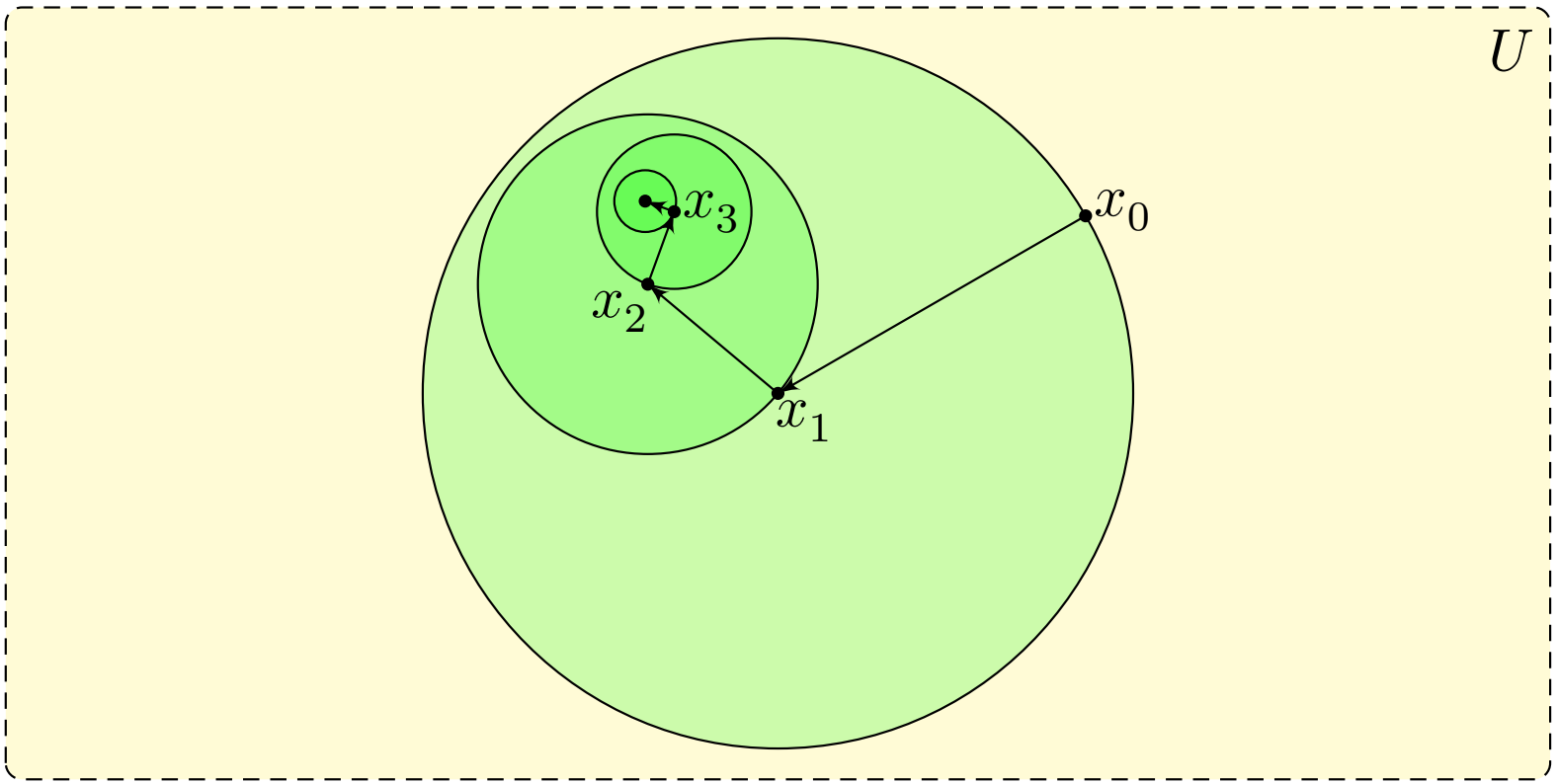
☺ In günstigen Fällen konvergiert das Newton–Verfahren, und dann meist sehr schnell. Wir sprechen hier von quadratischer Konvergenz: Die Zahl der gültigen Dezimalstellen verdoppelt sich bei jeder Iteration! Beweisen Sie dazu folgenden Satz, als Wiederholung aus der Analysis:

Satz C4v: Newton, eindimensional

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0 < f(b)$ stetig differenzierbar und konvex. Dann gilt: (1) Es existiert genau eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$. (2) Bei Start in $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$ ist die Newton–Folge $(\Phi^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert, konvergiert gegen ξ, und die Konvergenz ist quadratisch.

Das Newton–Verfahren: Konvergenzsatz von Kantorovich

Das Newton–Verfahren lässt sich nicht nur auf Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anwenden, sondern ebenso auf $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oder ganz allgemein auf differenzierbare Selbstabbildungen $f : E \to E$ eines Banach–Raums E.



☺ Der folgende raffinierte Satz perfektioniert das Newton–Verfahren. Für wenig mehr Aufwand werden wir reichlich belohnt durch einfach berechenbare Voraussetzungen und starke explizite Fehlerschranken.

Das Newton–Verfahren: Konvergenzsatz von Kantorovich

Satz C4x: Newton–Verfahren nach Kantorovich, 1948

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ diff'bar und $\Phi(x) = x - f'(x)^{-1} f(x)$ die Newton–Abbildung. Zum Startpunkt $x_0 \in U$ fordern wir:

$\mathbf{A}(x_0)$: Die Ableitung $f'(x_0)$ ist invertierbar. Sei $x_1 := \Phi(x_0)$ der nächste Punkt der Newton–Iteration und $r_1 := |x_1 - x_0|$ die erste Schrittlänge.

$\mathbf{B}(x_0)$: Der abgeschlossene Ball $V_1 := \bar{B}(x_1, r_1)$ liegt ganz in U. Hierauf gilt die Lipschitz–Bedingung $|f'(v) - f'(u)| \leq L_1 |v - u|$ für ein $L_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$\mathbf{C}(x_0)$: Auch $f'(x_1)$ ist invertierbar, und es gilt $k_1 := L_1 r_1 |f'(x_1)^{-1}| \leq 1$.

Dann hat f in V_1 genau eine Nullstelle ξ. Es gilt $x_n = \Phi^n(x_0) \to \xi$ gemäß

$$|x_n - \xi| \leq 2|x_n - x_{n+1}| \leq \underbrace{k_n |x_n - x_{n-1}|}_{\text{a posteriori}} \leq \underbrace{2^{1-n} \cdot k_1^{2^n - 1} \cdot |x_1 - x_0|}_{\text{a priori}} \searrow 0.$$

Beweisidee: Per Induktion gelten die Aussagen $\mathbf{A}(x_n)$, $\mathbf{B}(x_n)$, $\mathbf{C}(x_n)$ mit $r_{n+1} \leq \frac{k_n}{2} r_n$ und $L_{n+1} \leq L_n$ und $k_{n+1} \leq k_n^2$. (Übung: Führen Sie dies aus!)

Lösung des AWP durch iterierte Integration

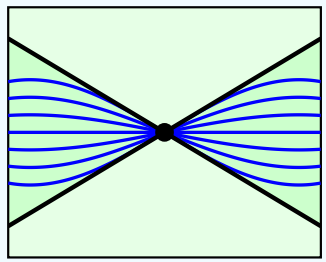
Wir erklären eine allgemeine Lösungsmethode, um 1890 entwickelt von Picard und Lindelöf, für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Der folgende Satz garantiert (1) die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und zudem (2) ein Konstruktionsverfahren zur Approximation dieser Lösung mit (3) expliziter Fehlerschranke. Was will man mehr?

Geometrische Voraussetzungen für die Picard–Lindelöf–Iteration:

Sei $I = [t_0 - a, t_0 + b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall um t_0 mit $a, b \leq T$.
Sei $K = \bar{B}(y_0, r) \subseteq \mathbb{K}^n$ der Ball um y_0 mit Radius $r > 0$.
Sei $f : I \times K \to \mathbb{K}^n$ stetig, somit beschränkt, also $|f| \leq M$.
Hierbei gelte $T \cdot M \leq r$, notfalls verkleinern wir T und I.



Zudem erfülle f für alle $t \in I$ und $u, v \in K$ die **Lipschitz–Bedingung**

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L\,|u - v|.$$

Ist etwa $f(t, y)$ stetig differenzierbar nach y, so genügt $|\partial f / \partial y| \leq L$.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Satz C4R: Picard–Lindelöf–Iteration

Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

(1) Das Anfangswertproblem hat genau eine Lösung $y : I \to K$.

(2) Diese ist die Grenzfunktion der Picard–Lindelöf–Iteration

$$u_0 = y_0, \quad u_{n+1}(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, u_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in I$ gilt die gleichmäßige Fehlerschranke

$$\big|y(t) - u_n(t)\big| \;\le\; \max_I \big|u_1 - u_0\big|\,\mathrm{e}^{LT} \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \;\to\; 0.$$

(4) Die Lösung y hängt stetig vom Anfangswert y_0 ab: Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \to K$ eine Lösung zum Startwert $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$ auf einem Intervall $\tilde{I}$ mit $t_0 \in \tilde{I}$, so laufen die Lösungen y und $\tilde{y}$ höchstens exponentiell auseinander:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \;\le\; |y_0 - \tilde{y}_0| \cdot \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \qquad \text{für alle } t \in I \cap \tilde{I}$$

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Aufgabe: Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1.$$

Lösung: Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$u_0(t) = 1$$

$$u_1(t) = 1 + \int_{\tau=0}^{t} u_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t$$

$$u_2(t) = 1 + \int_{\tau=0}^{t} u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2$$

$$u_3(t) = 1 + \int_{\tau=0}^{t} u_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3!}t^3$$

$$u_4(t) = 1 + \int_{\tau=0}^{t} u_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3!}t^3 + \tfrac{1}{4!}t^4$$

Per Induktion und Grenzübergang $n \to \infty$ finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \quad \to \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \exp(t)$$

⚠ Das erfordert Vollständigkeit! Auf $\mathbb{K}[t]$ gelingt die Konstruktion nicht.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Aufgabe: Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$y'(t) = -t\,y(t), \quad y(0) = 1.$$

Lösung: Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$u_0(t) = 1$$

$$u_1(t) = 1 - \int_{\tau=0}^{t} \tau u_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \tfrac{1}{2}t^2$$

$$u_2(t) = 1 - \int_{\tau=0}^{t} \tau u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{8}t^4$$

$$u_3(t) = 1 - \int_{\tau=0}^{t} \tau u_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{8}t^4 - \tfrac{1}{48}t^6$$

$$u_4(t) = 1 - \int_{\tau=0}^{t} \tau u_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{8}t^4 - \tfrac{1}{48}t^6 + \tfrac{1}{384}t^8$$

Per Induktion und Grenzübergang $n \to \infty$ finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} \quad \to \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \exp(-t^2/2)$$

⚠ Das erfordert Vollständigkeit! Auf $\mathbb{K}[t]$ gelingt die Konstruktion nicht.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Aufgabe: (A) Sei $y : I \to K$ stetig. Unsere **Differentialgleichung**

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I \text{ und } y(t_0) = y_0$$

ist äquivalent zu folgender (für uns vorteilhaften) **Integralgleichung**:

$$y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \text{für alle } t \in I$$

Somit sind Lösungen $y : I \to K$ genau die **Fixpunkte** der Abbildung

$$\Psi : C(I, K) \to C(I, \mathbb{K}^n), \quad (\Psi u)(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

(B) Tatsächlich gilt $\Psi : C(I, K) \to C(I, K)$: Wir können Ψ also **iterieren**!

(C) Für je zwei Funktionen $u, v \in C(I, K)$ gilt die **Fehlerschranke**

$$\left|\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)\right| \;\le\; \max_{[t_0,t]} \left|u - v\right| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \;\le\; \max_{I} \left|u - v\right| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

Für $n \to \infty$ gilt $(LT)^n/n! \to 0$. Demnach ist Ψ^n schließlich **kontraktiv**: Zu $0 < \alpha < 1$ existiert $n \in \mathbb{N}$ sodass $\left|\Psi^n u - \Psi^n v\right|_I \le \alpha \left|u - v\right|_I$ gilt.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Lösung: (A) Dank HDI. Die Integralgleichung besagt $y = \Psi y$.

(B) Für $u \in C(I, K)$ zeigen wir $\Psi u \in C(I, K)$ durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \big|\Psi u(t) - y_0\big| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} \big|f(\tau, u(\tau))\big|\,\mathrm{d}\tau\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} M\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &= |t - t_0|M \qquad\qquad \le TM \qquad\qquad \le r \end{aligned}$$

(C) Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Für $n \ge 1$ folgt sie induktiv:

$$\begin{aligned} \big|\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)\big| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \Psi^{n-1}u(\tau)) - f(\tau, \Psi^{n-1}v(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t} L\,\big|\Psi^{n-1}u(\tau) - \Psi^{n-1}v(\tau)\big|\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t} \max_{[t_0,t]}\big|u - v\big| \cdot \frac{L^n|\tau - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &= \max_{[t_0,t]}\big|u - v\big| \cdot \frac{L^n|t - t_0|^n}{n!} \quad \le \quad \max_{I}\big|u - v\big| \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \end{aligned}$$

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Diese Rechnungen beweisen den Satz C4R von Picard–Lindelöf:

Der Raum $C(I,K)$ ist vollständig bezüglich der Supremumsnorm.
Daher können wir auf Ψ den **Fixpunktsatz von Banach** anwenden:

(1) Die Abbildung $\Psi : C(I,K) \to C(I,K)$ hat genau einen Fixpunkt y.
☺ Dank (A) hat unser AWP somit genau eine Lösung $y : I \to K$.

(2) Wir erhalten die Lösung y durch sukzessive Approximation.
☺ Für jede Funktion $u_0 \in C(I,K)$ konvergiert $u_n = \Psi^n u_0$ gegen y.

Für den Fixpunkt $v_0 = y$ liefert die Iteration $v_n = \Psi^n v_0 = y$.
Dank der Fehlerschranke (D) erhalten wir also:

$$\big|y(t) - u_n(t)\big| \;\le\; \max_{[t_0,t]} \big|y-u\big| \cdot \frac{L^n |t-t_0|^n}{n!} \;\le\; \max_{I} \big|y-u\big| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

☺ Die Konvergenz $u_n \to y$ der Approximationen u_n gegen die Lösung y ist demnach mindestens so schnell wie die Konvergenz $(LT)^n/n! \to 0$.

☺ Die in (3) angegebene Verschärfung nutzt nur u_0, u_1:
Auf der rechten Seite stehen also nur bekannte Daten.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

(3) Wir formulieren die Fehlerschranke nur mit u_0 und u_1:

$$\big|u_n(t) - u_{n+1}(t)\big| = \big|\Psi^n u_0(t) - \Psi^n u_1(t)\big| \le \max_{[t_0,t]}\big|u_0 - u_1\big| \cdot \frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}\big|u_n(t) - u_{n+p}(t)\big| &\le |u_n(t) - u_{n+1}(t)| + \cdots + |u_{n+p-1}(t) - u_{n+p}(t)| \\ &\le \sum_{k=n}^{\infty} \max_{[t_0,t]}\big|u_0 - u_1\big| \cdot \frac{L^k|t-t_0|^k}{k!} \;\le\; \max_{[t_0,t]}\big|u_1 - u_0\big|\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \cdot \frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}\end{aligned}$$

Für $p \to \infty$ erhalten wir die gewünschte Ungleichung für $|u_n(t) - y(t)|$.

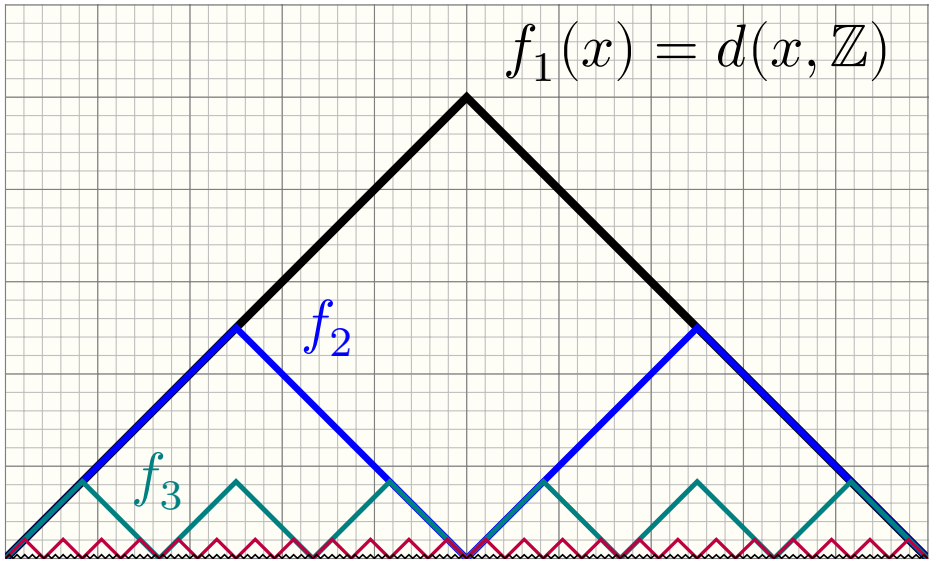
(4) Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \to K$ eine Lösung zum Startwert $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$, so gilt dank (A) $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \tilde{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau$. Wir beginnen die Picard–Lindelöf–Iteration mit der Funktion $u_0 = \tilde{y}$ und erhalten im ersten Schritt die Verschiebung

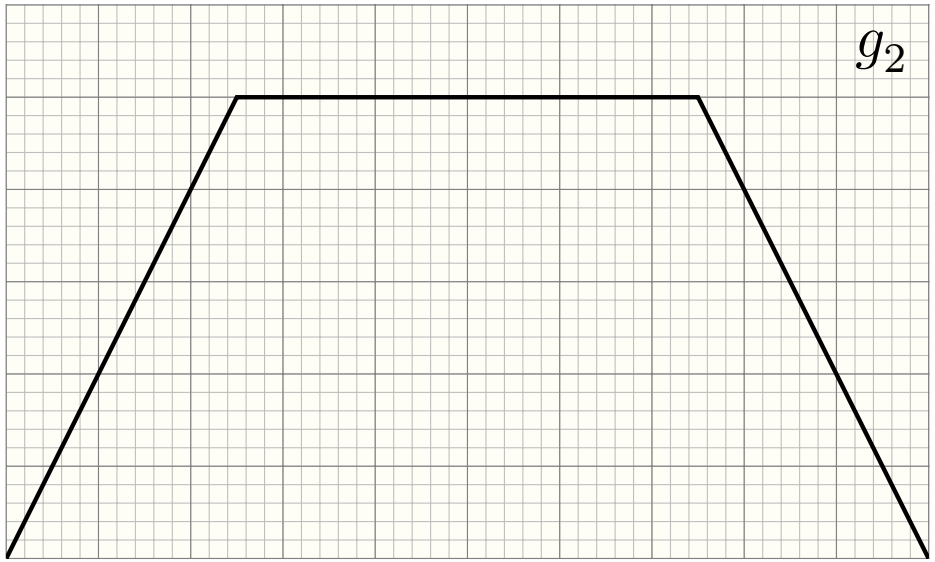
$$u_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \tilde{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau = y_0 - \tilde{y}_0 + u_0(t), \quad \text{dank (3) also}$$

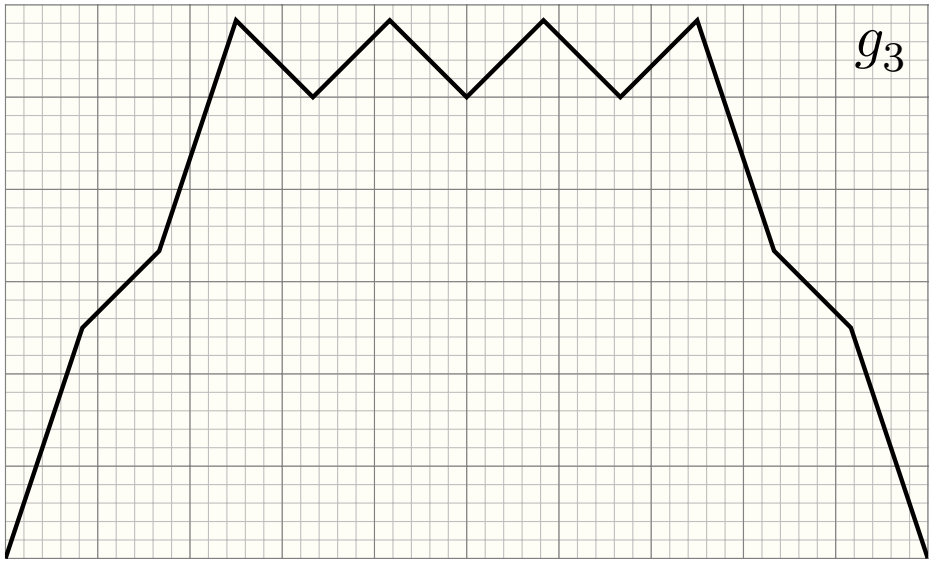
$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \le |y_0 - \tilde{y}_0| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k|t-t_0|^k}{k!} = |y_0 - \tilde{y}_0|\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|}\,.$$

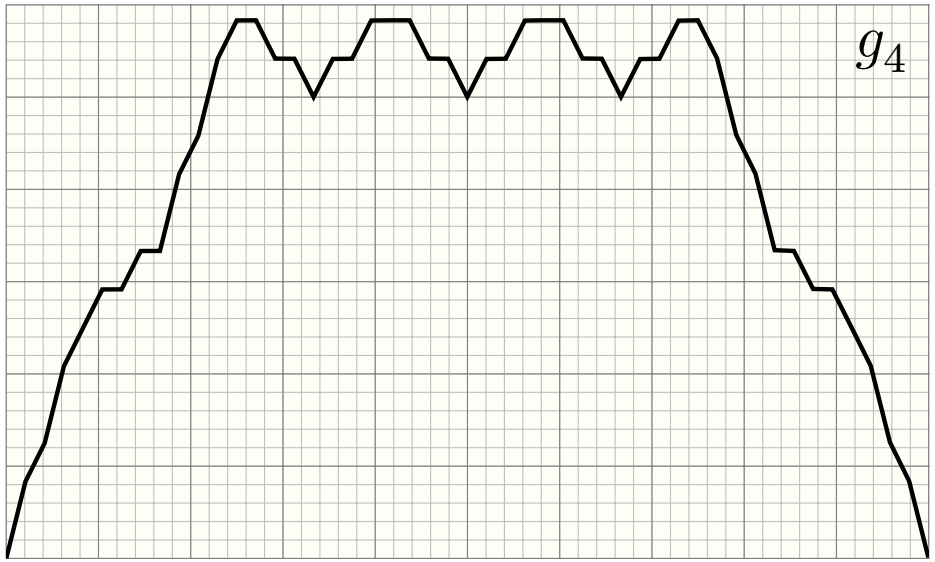
Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

Aufgabe: Skizzieren Sie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ sowie $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.









Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

Diese genial-einfache doch verblüffende Konstruktion wurde 1901 von Teiji Takagi (1875–1960) veröffentlicht, einem Schüler von David Hilbert.
📖 Teiji Takagi: *A Simple Example of the Continuous Function without Derivative.* Proc. Phys. Math. Japan 1 (1901) 176–177

Aufgabe: Konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise? monoton? gleichmäßig?

Lösung: Wegen $f_n \geq 0$ gilt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$. Wegen $|f_n| \leq \frac{1}{2n!}$ gilt

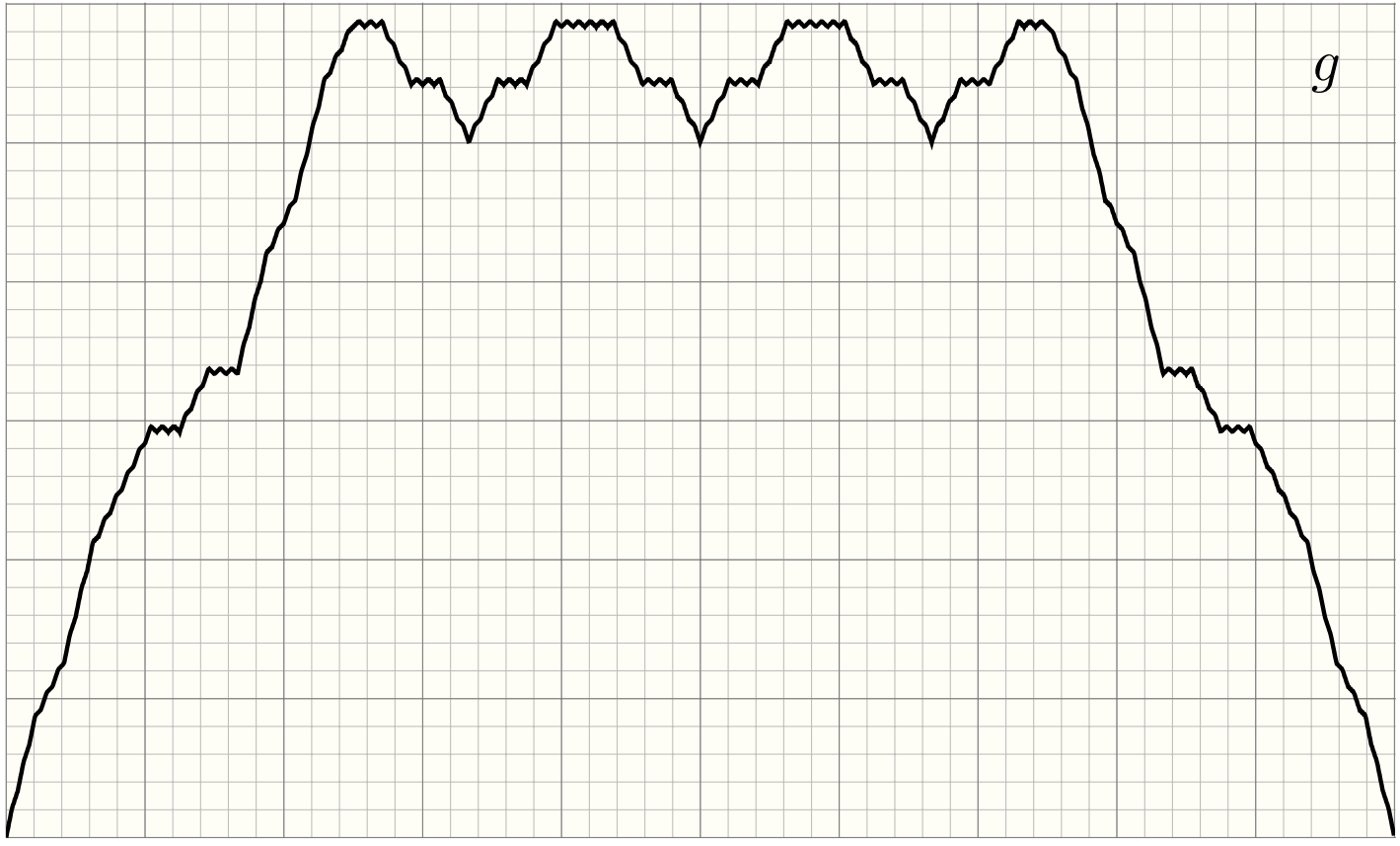
$$g_n(x) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k!} \;=\; \frac{\mathrm{e}-1}{2} \;\approx\; 0.85914.$$

In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert bezeichnen wir mit $g(x)$. Die Konvergenz $g_n \to g$ ist monoton und gleichmäßig, denn es gilt

$$0 \;\leq\; g(x) - g_n(x) \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k!} \;\leq\; \frac{1}{k!} \;\searrow\; 0.$$

Somit ist g stetig – wenn auch extrem rau, wie wir gleich sehen.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar



Satz C6A: Takagi 1901

Für die **Takagi–Funktion** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} d(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ gilt:
(1) Die Funktion g ist stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.
(2) Die Funktion g ist auf keinem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ monoton.
(3) Sie nimmt in jedem Punkt $x \in \mathbb{Q}$ ein striktes lokales Minimum an.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

Beweis: (1a) Die Funktion $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig für jedes $k \in \mathbb{N}$, also auch $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Zudem gilt $0 \leq g(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k!} \leq \frac{1}{k!} \searrow 0$. Die Konvergenz $g_n \to g$ ist also gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Daher ist auch die Grenzfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

(1b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion f_n zwischen den Punkten $\frac{1}{2n!}\mathbb{Z}$ stückweise affin mit Steigung ± 1. Somit ist f_n affin auf $[x - \frac{1}{4n!}, x]$ oder auf $[x, x + \frac{1}{4n!}]$. Für $n \geq 3$ wählen wir $h_n = \pm\frac{1}{(n+1)!}$ so, dass f_n zwischen x und $x + h_n$ affin ist. Gleiches gilt dann für alle f_k mit $1 \leq k \leq n$. Für $k \geq n + 1$ hingegen gilt $f_k(x + h_n) = f_k(x)$. Der Differenzenquotient ist

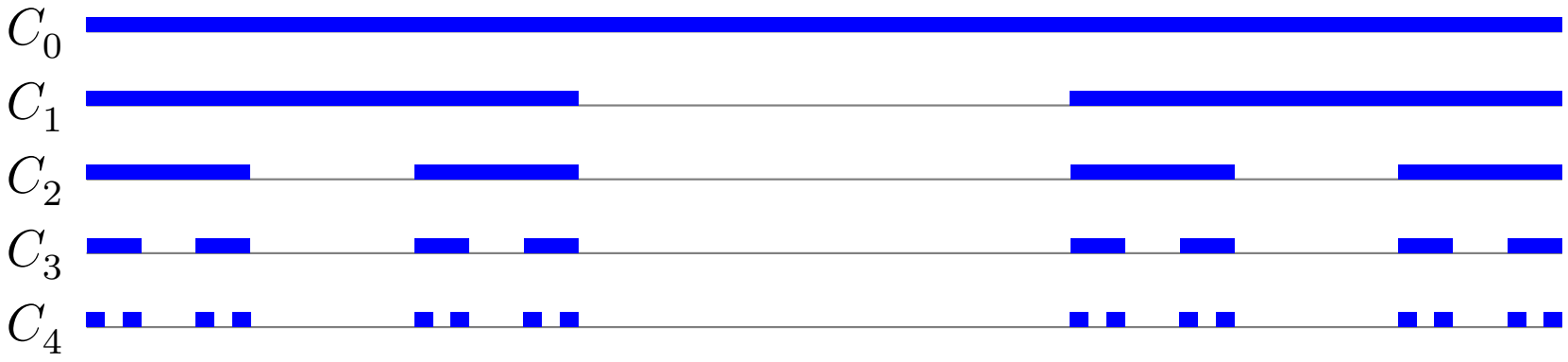
$$q_n \;:=\; \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \pm 1.$$

Daher hat die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert. Das heißt, f ist in x nicht differenzierbar.

Aus (3) folgt (2); es reicht also, Aussage (3) zu beweisen. Jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ lässt sich schreiben als $x = a/n!$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. (Warum?) Wir zeigen $g(u) > g(x)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $0 < |u - x| < r := 1/(2n)!$. Die Funktion $g_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f_k$ ist auf $[x - r, x + r]$ stückweise affin, und die Steigung liegt überall zwischen $1 - n$ und $n - 1$. Die Funktion $h = \sum_{k=n}^{2n-1} f_k$ hingegen erfüllt $h(u) = n|u - x|$ für alle $u \in [x - r, x + r]$. Demnach ist die Summe $g_{2n-1} = g_{n-1} + h$ streng fallend auf $[x - r, x]$ und streng wachsend auf $[x, x + r]$. Insbesondere ist x das strikte Minimum von g_{2n-1} eingeschränkt auf $[x - r, x + r]$. Für alle $k \geq 2n$ gilt $f_k(x) = 0$ und $f_k(u) \geq 0$ für alle u. Deshalb ist x das strikte Minimum auch von g eingeschränkt auf die hinreichend kleine Umgebung $[x - r, x + r]$. QED

Cantor-Mitteldrittel-Wischmenge

Cantor–Menge $C = \bigcap_n C_n$ mit $C_0 = [0,1]$ und $C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right)$



Satz C6D: bemerkenswerte Eigenschaften der Cantor–Menge

(1) Die Cantor–Menge C ist kompakt und hat Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_1(C) = 0$, ihr Komplement $[0,1] \setminus C$ ist offen und dicht in $[0,1]$, doch $C + C = [0,2]$.

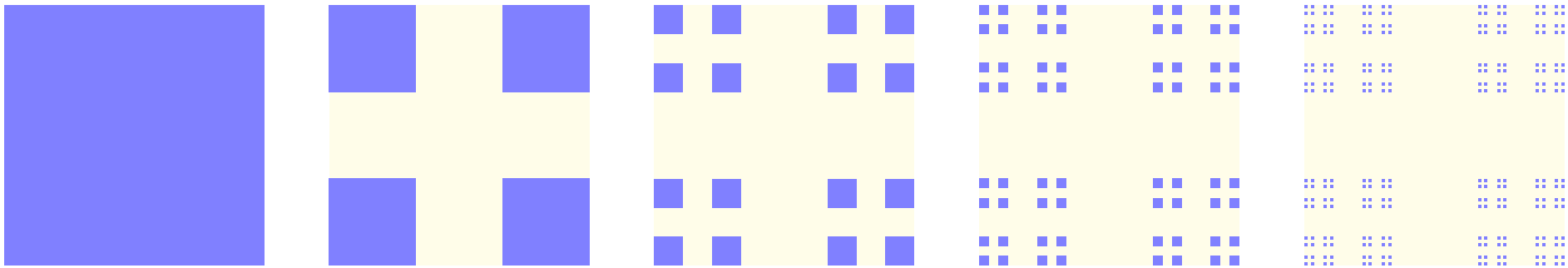
(2) Wir haben die Bijektion $\varphi : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} C : (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 3^{-k-1}$ und stetige Surjektion $f : C \twoheadrightarrow [0,1] : \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 3^{-k-1} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, 2^{-k-2}$.

(3) Die Teufelstreppe $g : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ setzt f monoton fort und ist stetig, stückweise konstant auf $[0,1] \setminus C$, somit fast überall diff'bar mit $g'(x) = 0$.

(4) Sei $\varepsilon > 0$ und $h : [0,1] \to [0,1+\varepsilon] : h(x) = g(x) + \varepsilon x$. Dies ist ein Homöomorphismus und bildet C von Maß 0 ab auf $h(C)$ vom Maß 1.

Fette Cantor–Mengen

Diese Eigenschaften rechnet man geduldig nach, mit den Begriffen und Techniken dieses Kapitels. Wir veranschaulichen $C + C = [0, 2]$ wie folgt:



Der **Cantor–Staub** $C \times C = \bigcap_n C_n \times C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ ist diagonal blickdicht!

Die **fette Cantor–Menge** $C(q)$ zu $q \in \,]0,1[^{\mathbb{N}}$: Wie zuvor sei $C_0 := [0, 1]$. Aus $C_n = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} [a_k, b_k]$ konstruieren wir $C_{n+1} := \bigsqcup_{k=1}^{2^n} [a_k, t_k^-] \sqcup [t_k^+, b_k]$ durch $t_k^\pm = \frac{1}{2}(a_k + b_k) \pm \frac{1-q_n}{2}(b_k - a_k)$ und erhalten $C(q) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Nach Konstruktion gilt $C_n \searrow C$ und $\mathrm{vol}_1(C_n) = q_1 q_2 \cdots q_n \searrow \mathrm{vol}_1(C)$. Für $p = (2/3)_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir Cantors Wischmenge mit $\mathrm{vol}_1 C(p) = 0$. Für $q = (a^{(2^{-n})})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a \in \,]0,1[$ gilt $\mathrm{vol}_1 C(q) = \prod_{n=1}^{\infty} a^{(2^{-n})} = a$.

Alle Cantor–Mengen sind homöomorph: Zu je zwei Folgen $p, q \in \,]0,1[^{\mathbb{N}}$ existiert ein Homöomorphismus $h : [0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ mit $h(C(p)) = C(q)$.

Cantor und Netto: Gilt $[0,1] \cong [0,1]^2$?

Gibt es Bijektionen $[0,1] \cong [0,1]^2$? — Ja! (Cantor 1878)

Gibt es stetige Bijektionen $[0,1] \cong [0,1]^2$? — Nein! (Netto 1879)

Georg Cantor bewies 1878 den erstaunlichen Satz, dass das Intervall $[0,1]$ und das Quadrat $[0,1]^2$ gleich viele Punkte haben, also eine Bijektion $[0,1] \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow [0,1]^2$ existiert. (Wir haben dies bereits in Satz B2N gezeigt.) Dies warf die Frage auf, ob *stetige* Bijektionen $[0,1] \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow [0,1]^2$ existieren.

Beweis: Wäre die Bijektion $f : [0,1] \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow [0,1]^2$ stetig, so wäre f dank der Kompaktheit des Startraums $[0,1]$ und der Hausdorff–Eigenschaft des Zielraums $[0,1]^2$ ein Homöomorphismus (F1L). Das widerspricht A1H.

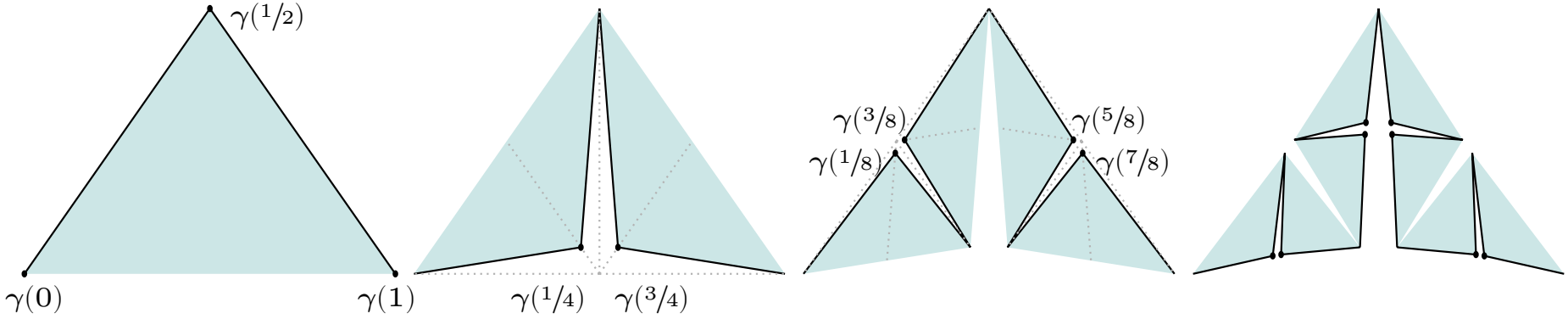
Es blieb die Frage, ob statt stetiger Bijektionen noch stetige Surjektionen $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$ möglich sind. Dies scheint zunächst kaum vorstellbar, doch Giuseppe Peano (1858–1932) überraschte 1890 die Fachwelt mit der ersten Konstruktion einer flächenfüllenden Kurve. Ebenso existieren Einbettungen $[0,1] \hookrightarrow [0,1]^2$ mit positivem Frächeninhalt. Für all diese Konstruktionen nutzen wir dankend die gleichmäßige Konvergenz.

Peano und Osgood: flächenfüllende Wege

Satz C6g: Peano 1890

Es gibt stetige Surjektionen $\gamma : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$.

Wir beweisen dies mit der eleganten Konstruktion von William Osgood (1864–1943) und erhalten zudem das folgende bemerkenswerte Ergebnis.



Satz C6h: Osgood 1903

Es gibt stetige Injektionen $\gamma : [0,1] \hookrightarrow [0,1]^2$ mit positivem Flächeninhalt: Für das Bild $\Gamma = \gamma([0,1]) \subset [0,1]^2$ ist jedes Maß $\mathrm{vol}_2(\Gamma) \in [0,1[$ erreichbar.

Cantor selbst schrieb einst: „Je le vois, mais je ne le crois pas!“ [Ich sehe es, aber ich kann es nicht glauben!] Besser, wir können es nachrechnen!

Kapitel D

Stetigkeitslehre: topologische Räume

In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor.

Egbert Brieskorn (1936–2013)

Inhalt dieses Kapitels D

1 Topologische Räume

2 Stetige Abbildungen

3 Umgebungen und Umgebungsbasen

4 Anwendung auf Funktionenräume

5 Inneres, Abschluss, Rand

6 Basen und Erzeugendensysteme

7 Baire–Räume und Borel–Mengen

Rückblick und Motivation

$$\text{Skalarprodukt} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Norm} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Metrik} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Topologie}$$

Wir haben uns in den ersten Vorlesungen viel Zeit genommen.
Kapitel A: Einführung in und Ausblick auf dieses Semester
Kapitel B: Grundlagen und Aufbau des Zahlensystems
Kapitel C: von metrischen Räumen zur Topologie
☺ Damit ist die Bühne bereitet für die Topologie!

Wir werden die topologischen Begriffe als allgemeine Definitionen extrahieren und damit neue Anwendungsmöglichkeiten eröffnen.
Viele Sätze werden klarer, manche Beweise leichter durch Abstraktion, geeignete Verallgemeinerung und Fokussierung auf das Wesentliche.
Andere Fragen lassen sich jetzt überhaupt erst formulieren.

Wenn du ein Schiff bauen willst,
lehre deine Leute nicht nur ihr Handwerk,
sondern erwecke ihre Sehnsucht nach dem Meer!

Ausblick und Motivation

Aus dem vorangegangenen Kapitel C kennen wir den Begriff der *Metrik* $d : X \times X \to [0, \infty]$ und das Vokabular der *metrischen Räume* (X, d). Viele Eigenschaften können wir auf den Grundbegriff der *offenen Mengen* zurückführen, insbesondere die *Konvergenz* von Folgen in X (C3A) und die *Stetigkeit* von Abbildungen $f : X \to Y$ (C3G), später ebenso die Begriffe *Zusammenhang* und *Kompaktheit*. Die dabei wesentlichen Eigenschaften (O1–3) des Systems $\mathcal{T}$ aller offenen Mengen in (X, d) haben wir in Satz C2M wie folgt zusammengefasst:

O1: Die leere Menge $\emptyset$ und der gesamte Raum X sind offen.
O2: Sind $U_1, \dots, U_n$ offen, dann auch $U_1 \cap \dots \cap U_n$.
O3: Sind alle U_i offen für $i \in I$, dann auch $\bigcup_{i \in I} U_i$.

Für die Topologie verzichten wir nun auf die Messung von Abständen in X und legen allein ein System $\mathcal{T}$ offener Mengen zugrunde (D1A). Die grundlegenden Eigenschaften (O1–3) werden nun zu Axiomen: Ein *topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ besteht aus einer Trägermenge X und einem System $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen, das (O1–3) erfüllt.

Abstraktion: strukturelle Klarheit und vielseite Anwendung

Dies ist eine kühne Verallgemeinerung! Es ist bemerkenswert, dass man aus so wenig Struktur noch eine respektable Theorie aufbauen kann.

Mit einem *Skalarprodukt* können wir Geometrie betreiben, etwa Winkel und Längen messen. Eine *Norm* misst keine Winkel, aber noch die Länge von Vektoren; das genügt zur Differentialrechnung. Bei einer *Metrik* verlangen wir keine Vektorraumstruktur mehr, aber wir können noch Isometrien betrachten oder Dehnungsbedingungen. Bei einer *Topologie* schließlich können wir nicht mehr von Abständen sprechen, aber alle topologischen Begriffe stehen zur Verfügung: Konvergenz, Stetigkeit, Homöomorphie, Kompaktheit, Zusammenhang, etc. lassen sich rein topologisch formulieren, das heißt allein mit Hilfe der offenen Mengen.

Die wichtigsten Beispiele topologischer Räume sind die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und ihre Teilräume $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Diese spielen bereits in der Analysis eine herausragende Rolle und werden auch uns im Folgenden als Modelle dienen, als Fundament und Illustration.

Abstraktion: strukturelle Klarheit und vielseite Anwendung

Darüber hinaus eröffnet sich uns eine Fülle weiterer Beispiele: metrische Topologien und Ordnungstopologien, diskrete und indiskrete Topologien, Topologien auf Funktionenräumen, Teilräume und Quotienten, Summen und Produkte, etc. Als *Werkstücke* illustrieren diese zunächst den Begriff der Topologie; im weiteren Verlauf werden sie uns auch als *Werkzeuge* für topologische Untersuchungen dienen.

Metrische Räume sind eine reichhaltige und nützliche Struktur; wo sie uns zur Verfügung steht, werden wir daraus Nutzen ziehen. Wie wir noch sehen werden, sind topologische Räume jedoch wesentlich allgemeiner als metrische Räume und erlauben flexiblere Konstruktionen. Diese größere Flexibilität ist die Hauptmotivation, topologische Räume zu betrachten: Gelegentlich existiert keine geeignete Metrik, oder sie wäre nur mühsam zu konstruieren, oder sie ist gänzlich nebensächlich. Für all diese Fälle bietet die Topologie einen nützlichen allgemeinen Rahmen.

Wozu und warum gerade diese Axiome?

In der Maßtheorie betrachtet man σ–Algebren auf einer Trägermenge X und verlangt Stabilität unter Komplementen, *abzählbaren* Durchschnitten und *abzählbaren* Vereinigungen (D71). In der Topologie hingegen sind die Axiome nicht symmetrisch: Wie oben motivert verlangen wir Stabilität unter (O2) *endlichen* Durchschnitten und (O3) *beliebigen* Vereinigungen. Dass dies für die weitere Theorie die „richtige“ Definition ist, kann letztlich nur die Erfahrung zeigen; die erfolgreichen Anwendungen in diesem und folgenden Kapiteln werden dies ausführlich belegen.

Dürfen wir Bildern vertrauen? Können wir Formeln veranschaulichen? Mathematik umschrieb man einst als *die Lehre von Zahlen und Figuren.* Diese beiden Aspekte sind noch immer grundlegend und höchst aktuell. Insbesondere in der Topologie erweisen sie ihren gegenseitigen Nutzen: Bilder betonen die wesentliche Idee, Formeln liefern die unverzichtbare Präzision. Viele mathematische, insbesondere topologische Argumente lassen sich auf beide Weisen darstellen. Die Kunst besteht darin, beide zu beherrschen und ineinander übersetzen zu können.

Anschaulich oder formal? Am besten beides!

Idealerweise soll die Topologie zur Zweisprachigkeit erziehen! Manchem mag die Topologie allzu anschaulich erscheinen, und ja, die Anschauung und ihre Sprechweisen setzen wir bewusst ein. Es lohnt sich in fast allen Fällen, topologische Argumente mit Bildern zu illustrieren. Allerdings dürfen dekorative Beispiele nicht darüber hinwegtäuschen, dass wir ein solides Handwerk von Sätzen und Beweisen erlernen wollen und dafür eine äußerst präzise Ausdrucksweise benötigen. Anderen wiederum mag die Topologie allzu abstrakt erscheinen, und auch das ist sie ganz bewusst, wie die moderne Mathematik allgemein: Gerade ihre Allgemeinheit und Präzision garantieren vielseitige und effiziente Anwendungen.

Die Spannung zwischen diesen beiden Polen ist durchaus produktiv:

C'est par la logique que l'on prouve
et par l'intuition que l'on découvre.
Henri Poincaré (1854–1912)

Topologien und topologische Räume

Definition D1A: topologischer Raum

Eine **Topologie** auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, für das gilt:

O1: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.

O2: Aus $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ folgt $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}$. (Für $n = 0$ also $X \in \mathcal{T}$.)

O3: Aus $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$. (Für $I = \emptyset$ also $\emptyset \in \mathcal{T}$.)

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt dann ein **topologischer Raum** mit **Trägermenge** X und **Topologie** $\mathcal{T}$. Die Elemente $x \in X$ nennen wir **Punkte** des Raumes.

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt eine Teilmenge $U \subseteq X$ **offen**, falls $U \in \mathcal{T}$ gilt, und $A \subseteq X$ **abgeschlossen**, falls ihr Komplement offen ist, $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

$$\mathcal{T} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{T}^c := \{\, A = X \setminus O \,|\, O \in \mathcal{T} \,\}$$

Die abgeschlossenen Mengen sind komplementär zu den offenen, somit stabil unter A2: endlichen Vereinigungen und A3: beliebigen Schnitten.

⚠ Die Trägermenge X allein bestimmt noch nicht die Topologie $\mathcal{T}$!
Wir sagen „der Raum X“ nur, wenn die Topologie $\mathcal{T}$ im Kontext klar ist.

Diskrete und indiskrete Topologie

Beispiel D1B: diskrete Topologie

Auf jeder Menge X ist $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ eine Topologie. Wir nennen sie die **diskrete Topologie**. In dieser Topologie ist jede Teilmenge von X offen (und abgeschlossen). Dies ist die größte, also feinste Topologie auf X.

Beispiel D1C: indiskrete Topologie

Auf jeder Menge X ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie. Wir nennen sie die **indiskrete Topologie**. In dieser sind nur die Teilmengen $\emptyset$ und X offen (und abgeschlossen). Dies ist die kleinste, also gröbste Topologie auf X.

Kleinste Beispiele: Auf $X = \emptyset$ ist $\mathcal{T} = \{\emptyset\}$ die einzige Topologie.
Ebenso auf der Menge $X = \{a\}$ ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ die einzige Topologie.

Auf der Menge $X = \{a \neq b\}$ gibt es zwischen der indiskreten $\{\emptyset, X\}$ und der diskreten $\mathfrak{P}(X)$ genau zwei Topologien: $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\{\emptyset, \{b\}, X\}$.

$n = \sharp X$	0	1	2	3	4	5	6	7
t_n	1	1	4	29	355	6942	209527	9535241

Metrische Topologie und Metrisierbarkeit

Beispiel D1D: metrische Topologie $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}(X,d)$

Jede Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ auf X definiert ihre **metrische Topologie**
$\mathcal{T}(X,d) := \{ O \subseteq X \mid \forall a \in O\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in X : d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in O \}$.

Dies ist tatsächlich eine Topologie, dank C2M. Übung zur Wiederholung!

Beispiel: Die Menge $X = \mathbb{R}^n$, allgemein jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, trägt die **euklidische Topologie** $\mathcal{T}_d$ dank der euklidischen Metrik $d(x,y) = |x-y|$.

Definition D1E: metrisierbare Topologie

Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf der Menge X heißt **metrisierbar**,
falls eine Metrik $d : X \times X \to [0,\infty]$ existiert, für die $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ gilt.

Beispiele: Die diskrete Topologie $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ auf X ist metrisierbar,
etwa durch die diskrete Metrik (C2C) mit $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$.

Die indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ auf X mit $\sharp X \geq 2$ wird von keiner Metrik induziert, denn $\mathcal{T}$ fehlt hierzu die Hausdorff–Eigenschaft (C2O).

Vergleich von Topologien

Definition D1f: Vergleich von Topologien

Sind $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \subseteq \mathfrak{P}(X)$ Topologien auf X, dann heißt $\mathcal{T}_2$ **feiner** als $\mathcal{T}_1$ und entsprechend $\mathcal{T}_1$ **gröber** als $\mathcal{T}_2$. Gilt dabei strikte Inklusion $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$, so heißt $\mathcal{T}_2$ **echt feiner** als $\mathcal{T}_1$ und entsprechend $\mathcal{T}_1$ **echt gröber** als $\mathcal{T}_2$.

Einfachste Beispiele:

- Auf jeder Menge X ist die diskrete Topologie $\mathfrak{P}(X)$ die feinste und die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ die gröbste aller Topologien auf X.
- Auf $X = \{a \neq b\}$ haben wir außer $\{\emptyset, X\}$ und $\mathfrak{P}(X)$ zwei Topologien: $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ und $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ sind unvergleichbar.

Interessante Beispiele aus der Analysis (C3k): Sei $1 \leq p < q \leq \infty$.

- Auf $\mathbb{R}^n$ sind die ℓ^p–Topologie und die ℓ^q–Topologie gleich.
- Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die ℓ^p–Topologie echt feiner als die ℓ^q–Topologie.
- Auf $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ ist die L^q–Topologie echt feiner als die L^p–Topologie.
- Auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind die L^p– und die L^q–Topologie unvergleichbar.

Koendliche und koabzählbare Topologie

$$\mathcal{T}_{\text{indiskret}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{koendlich}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{koabzählbar}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{diskret}}$$

$\longleftarrow$ gröber: weniger offene Mengen

$\longrightarrow$ feiner: mehr offene Mengen

Beispiel D1н: koendliche Topologie

In der **koendlichen Topologie** auf der Grundmenge X sind die abgeschlossenen Mengen genau X und alle endlichen Teilmengen:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ ist endlich}\}$$

Diese Topologie ist genau dann diskret, wenn X endlich ist.

Beispiel D1ı: koabzählbare Topologie

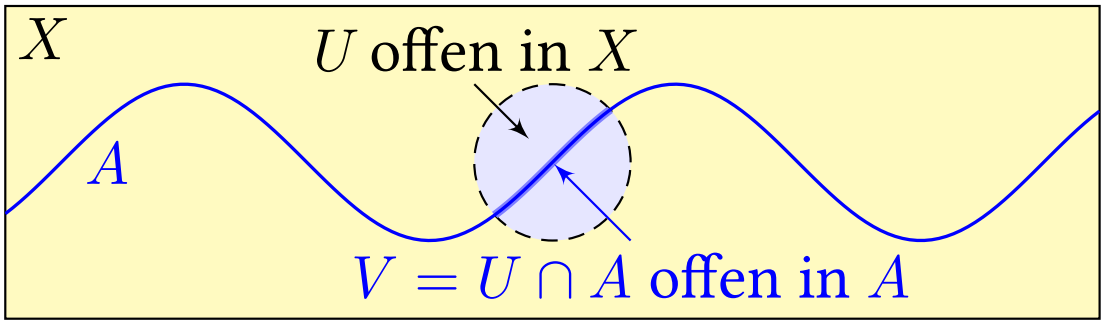
In der **koabzählbaren Topologie** auf der Grundmenge X sind die abgeschlossenen Mengen genau X und alle abzählbaren Teilmengen:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ ist abzählbar}\}$$

Diese Topologie ist genau dann diskret, wenn X abzählbar ist.

Teilraumtopologie: Definition

☺ Wir konstruieren neue topologische Räume aus alten.



Definition D1κ: Teilraumtopologie aka Spurtopologie

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Inklusion $\iota_A : A \hookrightarrow X$. Die **Teilraumtopologie** von A in $(X, \mathcal{T}_X)$ ist

$$\mathcal{T}_A := \left\{ A \cap U = \iota_A^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \mathcal{T}_X \right\} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X.$$

Wir nennen $(A, \mathcal{T}_A)$ den **Teilraum** von $(X, \mathcal{T}_X)$ auf der Teilmenge $A \subseteq X$.

Soweit nichts anderes vereinbart wird, statten wir jede Teilmenge $A \subseteq X$ mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A$ aus. Statt „$V \subseteq A$ ist offen / abgeschlossen im Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$“ sagen wir kurz „V ist offen / abgeschlossen in A“.

Teilraumtopologie: Eigenschaften

Beispiele: (1) Für $O \subseteq X$ offen, $O \in \mathcal{T}_X$, gilt $\mathcal{T}_O = \{ U \in \mathcal{T}_X \,|\, U \subseteq O \}$.
(2) Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ diskret/indiskret/koendlich/koabzählbar, so auch $(A, \mathcal{T}_A)$.
(3) Die Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ ist die euklidische (E2I). Allgemein:

$$\begin{array}{ccc} (X, d_X) & \xmapsto{\text{metrische Topologie}} & (X, \mathcal{T}_X) \\ \text{metrischer Teilraum} \uparrow & & \uparrow \text{topologischer Teilraum} \\ (A, d_A) & \xmapsto{\text{metrische Topologie}} & (A, \mathcal{T}_A) \end{array}$$

$$B_{(A,d_A)}(a, \varepsilon) = A \cap B_{(X,d_X)}(a, \varepsilon) \implies \mathcal{T}_A = \mathcal{T}(A, d_A)$$

Satz D1L: Teilräume von metrischen Räumen

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum mit Topologie $\mathcal{T}_X := \mathcal{T}(X, d_X)$ (D1D).
Die Teilraummetrik d_A auf A (C2E) induziert die Topologie $\mathcal{T}(A, d_A)$.
Diese stimmt überein mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A := \iota_A^* \mathcal{T}_X$ (D1K).
Ist also der Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ metrisierbar, dann auch jeder Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$.

Ordnungstopologie

Definition D1M: Ordnungstopologie $\mathcal{T}_< = \mathcal{T}(X, <)$

Jede Totalordnung $<$ auf X definiert die zugehörige **Ordnungstopologie**
$\mathcal{T}_< = \mathcal{T}(X, <) := \{ O \subseteq X \,|\, \forall x \in O \;\; \exists a, b \in X \sqcup \{\pm\infty\} : x \in]a, b[\subseteq O \}$.

Beispiele: (1) Die Ordnungstopologie auf $X = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ ist die euklidische.
(2) In $(\mathbb{R}, \leq)$ sind $A = \{-1,\ 2^{-k} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{0,\ 2^{-k} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ ordnungsisomorph, haben also dieselbe Ordnungstopologie. Jedoch sind ihre metrisch-euklidischen Teilraumtopologien in $\mathbb{R}$ sehr verschieden!

$$\begin{array}{ccccc}
(X, <) & & \xmapsto{\text{Ordnungstopologie}} & & (X, \mathcal{T}_X) \\
\Big\uparrow{\scriptstyle \text{Ordnungs-Teilraum}} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle \text{topologischer Teilraum}} \\
(A, <) & \xmapsto{\text{Ord'top.}} & (A, \mathcal{T}(A, <)) & \xleftarrow{\neq} & (A, \mathcal{T}_A)
\end{array}$$

(3) Für $A \subseteq X$ gilt $\mathcal{T}(A, <) \subseteq \mathcal{T}_A$, aber nicht immer Gleichheit:
Im Beispiel (2) ist $(A, \mathcal{T}_A)$ diskret, $(A, \mathcal{T}(A, <))$ jedoch nicht.

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Definition

Definition D2A: stetige Abbildungen

Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume. Sie heißt **stetig**, wenn zu jeder offenen Menge V im Zielraum $(Y, \mathcal{T}_Y)$ das Urbild $f^{-1}(V)$ im Startraum $(X, \mathcal{T}_X)$ offen ist. Gleiches gilt für abgeschlossen.

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textbf{stetig} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{T}_Y^c : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X^c \end{aligned}$$

Die Menge aller stetigen Abbildungen bezeichnen wir mit

$$\mathcal{C}(X, \mathcal{T}_X; Y, \mathcal{T}_Y) := \{ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ stetig} \}.$$

Wir nutzen $\mathcal{C}(X, Y)$, wenn die Topologien aus dem Kontext klar sind.

Hingegen nennen wir f **offen**, wenn zu jeder offenen Menge U in $(X, \mathcal{T}_X)$ die Bildmenge $f(U)$ in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ offen ist. Entsprechend **abgeschlossen**:

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textbf{offen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{T}_X : f(U) \in \mathcal{T}_Y \\ f \text{ ist } \textbf{abgeschlossen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{T}_X^c : f(A) \in \mathcal{T}_Y^c \end{aligned}$$

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Kategorie

Bemerkung D2B: Stetige Abbildungen bilden eine Kategorie.

Wir betrachten topologische Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$. Die Identität $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ ist stetig. Sind $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, dann ist auch $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$.

Wir erhalten die Kategorie Top: Ihre Objekte sind topologische Räume $X, Y, Z, \ldots$. Die Morphismenmenge $\mathscr{C}(X, Y)$ besteht aus allen stetigen Abbildungen $X \to Y$. Die Komposition $\circ : \mathscr{C}(Y, Z) \times \mathscr{C}(X, Y) \to \mathscr{C}(X, Z)$ ist die für Abbildungen übliche Hintereinanderausführung.

Ebenso bilden topologische Räume und ihre offenen Abbildungen eine Kategorie, ebenso abgeschlossene Abbildungen. Weitere Beispiele:

- Mengen (mit Struktur) und ihre (strukturerhaltenden) Abbildungen.
- Vektorräume über einem Körper K und ihre linearen Abbildungen.
- Offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ihre differenzierbaren Abbildungen.

In Kapitel H diskutieren wir ausführlich die Sprache der Kategorien.

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Beispiele

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume mit den induzierten metrischen Topologien $\mathcal{T}_X$ auf X und $\mathcal{T}_Y$ auf Y. Satz C3G besagt:

Genau dann ist $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ stetig im metrischen Sinne (C3E), wenn $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig ist im topologischen Sinne (D2A).

☺ Stetigkeit, Offenheit und Abgeschlossenheit sind unabhängig:

Bei diskretem Startraum ist jede Abbildung $f : (X, \mathfrak{P}X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, aber i.A. weder offen noch abgeschlossen, z.B. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : k \mapsto 2^{-k}$.

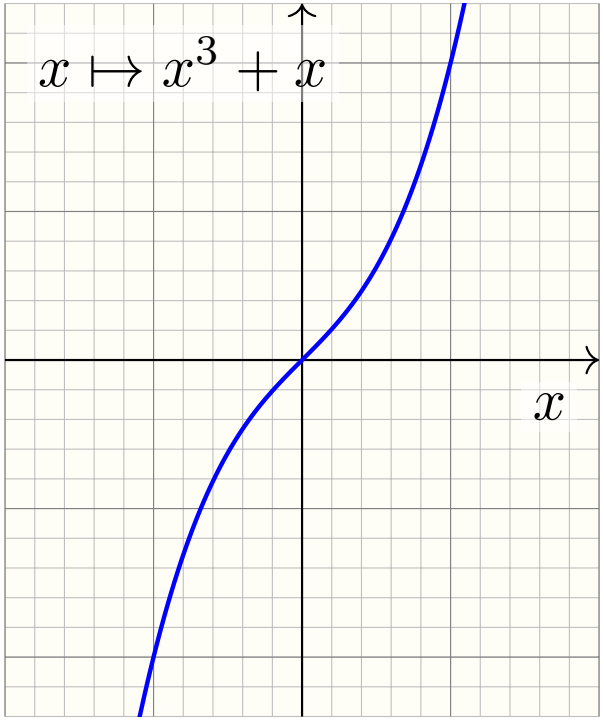
Bei diskretem Zielraum ist jede Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathfrak{P}Y)$ offen und abgeschlossen, aber i.A. nicht stetig, z.B. $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$.

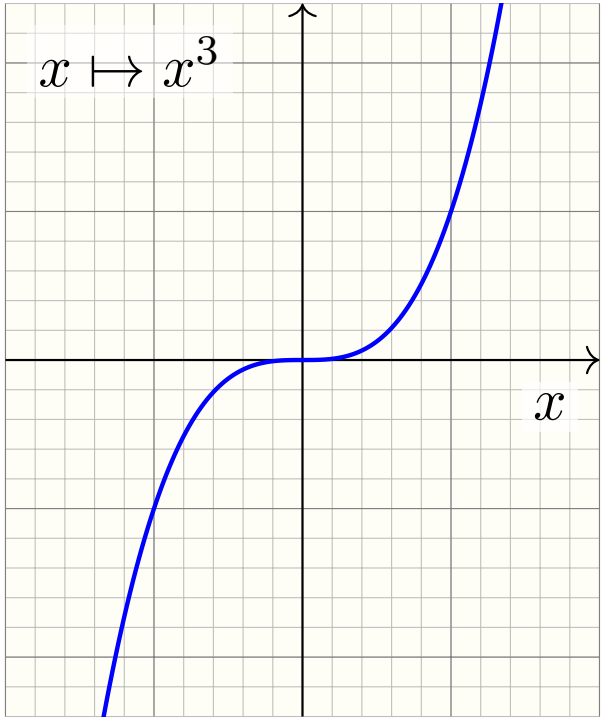
Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan(x)$ ist stetig und offen, aber nicht abgeschlossen, denn $f(\mathbb{R}) =]-\pi/2, +\pi/2[$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

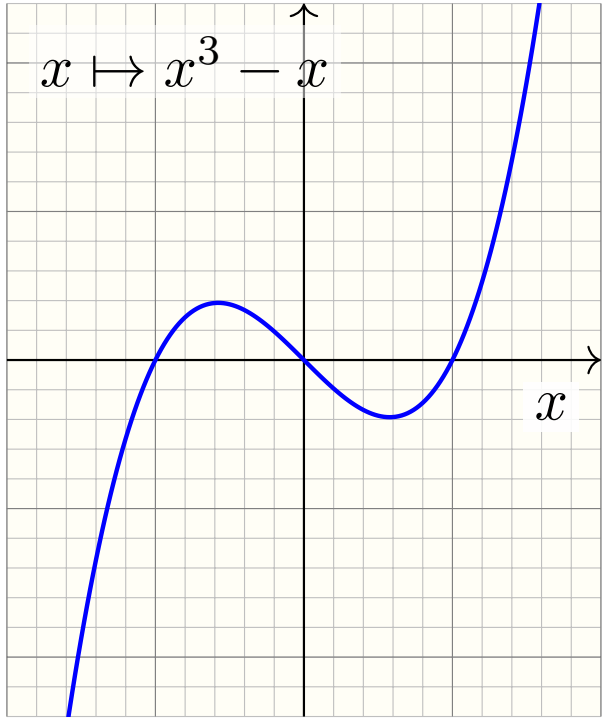
Die Einschränkung $h : \mathbb{R} \to]-\pi/2, +\pi/2[$ ist ein Homöomorphismus. Hier ist der Zielraum maßgeblich, wie so oft in der Mathematik!

Stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen: Beispiele

Zu $a \in \mathbb{R}$ ist $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + ax$ stetig und abgeschlossen (später leicht dank Einpunktkompaktifizierung), aber offen nur für $a \geq 0$, dann sogar ein Homöomorphismus. Für $a > 0$ ist f_a ein Diffeomorphismus.







Für $a < 0$ hat f_a ein lokales Maximum $x_0 < 0$ bzw. Minimum $x_1 > 0$. Darum ist $U =]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subseteq \mathbb{R}$ offen, das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ aber nicht!

Stetige Abbildungen: Homöomorphismen

Definition D2A: Homöomorphismen

Ein **Homöomorphismuspaar** $(f,g):(X,\mathcal{T}_X)\cong(Y,\mathcal{T}_Y)$ besteht aus stetigen Abbildungen $f:X\to Y$ und $g:Y\to X$ mit $g\circ f=\mathrm{id}_X$ und $f\circ g=\mathrm{id}_Y$.

In diesem Fall nennen wir die Räume $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ **homöomorph**, geschrieben $(X,\mathcal{T}_X)\cong(Y,\mathcal{T}_Y)$ oder kurz $X\cong Y$, falls beide Topologien aus dem Kontext klar sind, etwa $\mathbb{R}\cong\,]-1,1[$ mit euklidischen Topologien.

Erinnerung / Übung: Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation.
Das gilt allgemein für Isomorphie (etwa strukturerhaltende Bijektion).

Pars pro toto: Die Kurzschreibweise $X\cong Y$ ist bequem, aber gefährlich.
Die Ausführung $(f,g):(X,\mathcal{T}_X)\cong(Y,\mathcal{T}_Y)$ ist präzise und informativ!

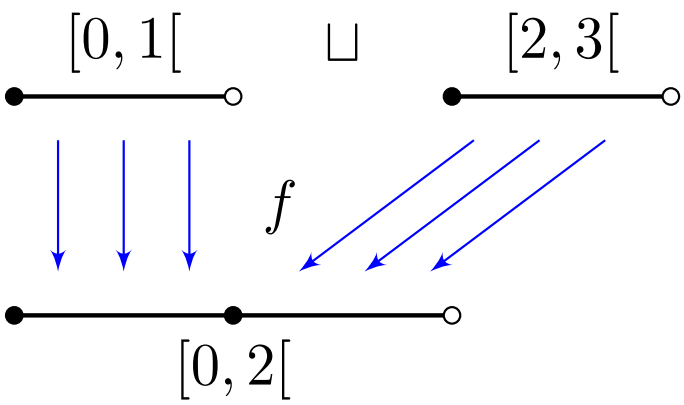
Genau dann definiert $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ einen Homöomorphismus, wenn f stetig und bijektiv ist und auch die Umkehrfunktion f^{-1} stetig ist.

Bemerkung: Für jede Bijektion $f:X\xrightarrow{\sim}Y$ sind äquivalent:
(1) $f^{-1}:Y\to X$ ist stetig, (2) f ist offen, (3) f ist abgeschlossen.

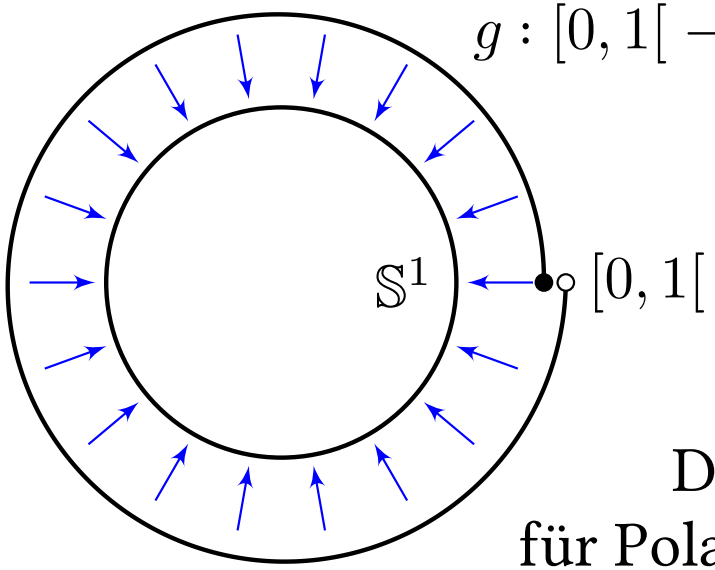
Stetige Bijektionen sind noch keine Homöomorphismen!

Bemerkung D2c: bijektiv und stetig

Ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so kann f^{-1} dennoch unstetig sein!



Bijektiv und stetig,
aber nicht offen!



Dies nutzen wir
für Polarkoordinaten!

⚠ Wir nutzen hier die euklidischen (Teilraum-)Topologien.
Bezüglich der Ordnungstopologien ist f ein Homöomorphismus.
Bezüglich der französischen Eisenbahnmetrik d_{SNCF} auf $\mathbb{R}^2$ ist g offen.

Universelles Gegenbeispiel: Die Identität $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ ist genau dann stetig, wenn $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$ gilt, genau dann offen, wenn $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ gilt.

Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!

Beispiel D2E: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Auf $\mathscr{C}^k = \mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ betrachten wir die linearen Abbildungen

$$D : \mathscr{C}^1 \to \mathscr{C}^0 : F \mapsto f, \qquad f(x) = \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x},$$

$$I : \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 : f \mapsto F, \qquad F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dank HDI gilt $DI(f) = f$ und $ID(F) = F - F(a)$. Wir erhalten so

$$(I,D) : \mathscr{C}^0 \cong \mathscr{C}^1_0 \quad := \{\, F \in \mathscr{C}^1 \mid F(a) = 0 \,\}.$$

Bezüglich der Supremumsnormen ist I stetig, genauer gilt

$$|F(x)| = \left|\int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{t=a}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le (b-a)\cdot |f|_{[a,b]}.$$

Leider ist D nicht stetig, wie die Folge $G_n(x) = \sin(n^2x)/n$ in $\mathscr{C}^1$ zeigt: Für große n gilt $|G_n|_{[a,b]} = 1/n \searrow 0$, aber $|G_n'|_{[a,b]} = n \nearrow \infty$. Was tun? Auf $\mathscr{C}^1$ verfeinern wir die Supremumsnorm zu $|F|_{\mathscr{C}^1} := |F|_{[a,b]} + |F'|_{[a,b]}$.

Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!

Den HDI kennen Sie schon lange, sogar schon aus der Schule, richtig erklärt und bewiesen aus dem ersten Semester Analysis. Auch Beispiele wie $G_n(x) = \sin(n^2 x)/n$ sind Ihnen vertraut. Griffiger Slogan: *Integrieren glättet, Differenzieren raut auf!*

Dieses Beobachtung motiviert, auf den Räumen $\mathscr{C}^k$ nicht einfach nur die Supremumsnorm zu betrachten: Diese ignoriert alle Ableitungen! Für $f \in \mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ nutzt man daher als $\mathscr{C}^k$–Norm

$$|f|_{\mathscr{C}^k} = \sum_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]} \quad \text{oder} \quad \left(\sum_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]}^{p}\right)^{1/p} \quad \text{oder} \quad \max_{i=0}^{k} |f^{(i)}|_{[a,b]}.$$

Dies sind Normen auf $\mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ und untereinander äquivalent.

Verallgemeinert für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$ erhalten wir so die Sobolev–Normen und durch Vervollständigung die Sobolev–Räume. Sie sind Grundlage für die Lösung partieller Differentialgleichungen, sie dienen als natürliche Definitionsbereiche der Differentialoperatoren und ebenso zur Fehlerabschätzungen numerischer Näherungsverfahren.

Umgebungen eines Punktes

Definition D3A: Umgebung eines Punktes

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $a \in X$ ein Punkt. Eine Menge $O \subseteq X$ heißt **offene Umgebung von** a in $(X, \mathcal{T})$, wenn $a \in O \in \mathcal{T}$ gilt.

Das System aller offenen Umgebungen bezeichnen wir mit

$$\mathcal{U}_a^{\circ}(X, \mathcal{T}) := \{O \in \mathcal{T} \,|\, a \in O\}.$$

Allgemeiner nennen wir $U \subseteq X$ eine **Umgebung von** a in $(X, \mathcal{T})$, wenn U eine offene Umgebung umfasst, wenn also $O \in \mathcal{T}$ existiert mit $a \in O \subseteq U$.

Das System aller Umgebungen von a in $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{U}_a(X, \mathcal{T}) := \{U \subseteq X \,|\, \exists O \in \mathcal{T} : a \in O \subseteq U\}.$$

Ebenso definieren wir (offene) Umgebungen einer Menge $M \subseteq X$.

Beispiel: In $(\mathbb{R}, \leq)$ ist $]s, t[$ mit $s < a < t$ eine offene Umgebung von a. Auch $[s, t]$ sowie $[s, t[$ und $]s, t]$ sind Umgebungen von a, aber nicht offen.

Offene Mengen und Umgebungen

Proposition D3c: offene Mengen und Umgebungen

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte $x \in U$ ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Ist U offen in $(X, \mathcal{T})$, dann ist U Umgebung jedes Punktes $x \in U$ nach Definition D3A. „$\Leftarrow$“: Ist $U \subseteq X$ eine Umgebung jedes Punktes $x \in U$, dann existiert zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x \subseteq U$. Somit ist $U = \bigcup_{x \in U} O_x$ offen dank (O3) in D1A. QED

Definition D3E: Umgebungsbasis

Eine Familie $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a$ heißt **Umgebungsbasis** von a im Raum $(X, \mathcal{T})$, wenn jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_a$ eine Basisumgebung $V \in \mathcal{B}_a$ enthält:

$$\mathcal{U}_a \overset{!}{=} \big\{ U \subseteq X \,\big|\, \exists V \in \mathcal{B}_a : V \subseteq U \big\}.$$

Somit bestimmt $\mathcal{B}_a$ das gesamte Umgebungssystem $\mathcal{U}_a$ von a in $(X, \mathcal{T})$, die Basisumgebungen $V \in \mathcal{B}_a$ *erzeugen* alle Umgebungen $U \in \mathcal{U}_a$.

Umgebungsbasen eines Punktes

Beispiele: Ein Punkt $a \in X$ erlaubt (i.A. viele) Umgebungsbasen:

Das System $\mathscr{B}_a := \mathscr{U}_a$ *aller* Umgebungen ist eine UBasis von a in $(X, \mathscr{T})$, ebenso das System $\mathscr{B}'_a := \mathscr{U}_a^{\mathrm{o}}$ aller *offenen* Umgebungen von a.

Im metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Bälle (C2L) eine UBasis, $\mathscr{B}_a = \{\, B(a,r) \,|\, r \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$, ebenso $\mathscr{B}'_a = \{\, B(a,r_n) \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ für $r_n \searrow 0$.
Die abgeschlossenen Bälle $\{\, \bar{B}(a,r_n) \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ bilden ebenso eine UBasis.
Im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ sind dies sogar kompakte Umgebungen.

Im diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist $\mathscr{B}_a = \{\{a\}\}$ eine UBasis von $a \in X$.
Genau dann ist $\mathscr{B}'_a \subseteq \mathscr{U}_a$ eine UBasis von a, wenn $\mathscr{B}_a \subseteq \mathscr{B}'_a$ gilt.

Im indiskreten Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist $\mathscr{B}_a = \{X\}$ die einzige UBasis von a.
Das ist die einzige Topologie, für die alle UBasen eindeutig sind.

Für $a \in \mathbb{R}$ bilden die Intervalle die UBasis $\mathscr{B}_a = \{\,]s,t[\,|\, s < a < t \text{ in } \mathbb{R} \,\}$, ebenso $\mathscr{B}'_a = \{\,]s_n,t_n[\,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ für monotone Folgen $s_n \nearrow a \swarrow t_n$.
Ist $(X, <)$ eine total geordnete Menge, dann bilden die Intervalle $]s,t[$ mit $s < a < t$ und $s,t \in \hat{X} = X \sqcup \{\pm\infty\}$ eine UBasis von a im Raum $(X, \mathscr{T}_<)$.

Das erste Abzählbarkeitsaxiom

Definition D3F: das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **erstabzählbar im Punkt** $a \in X$, wenn er eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$ besitzt.
Gilt dies in jedem Punkt $a \in X$, so heißt $(X, \mathcal{T})$ **erstabzählbar**.

Beispiel: Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist erstabzählbar dank $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$, ebenso jeder indiskrete Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ dank $\mathcal{B}_a = \{X\}$.

Beispiel D3G: Jeder metrische Raum ist erstabzählbar.

Jeder metrische Raum (X, d) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (1AA): Zu $a \in X$ sind die Bälle $B(a, 2^{-k})$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsbasis.

Anwendung: Auf jeder überabzählbaren Menge X ist die koendliche / koabzählbare Topologie nicht erstabzählbar, somit nicht metrisierbar.

Bemerkung: Sei $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine UBasis von a in $(X, \mathcal{T})$. Gemäß D3A existiert $V_n^\circ \in \mathcal{T}$ mit $a \in V_n^\circ \subseteq V_n$, also eine offene UBasis $\{V_n^\circ \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für $U_n := V_0^\circ \cap \cdots \cap V_n^\circ$ ist auch $\{U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots\}$ eine UBasis.

Konvergenz von Folgen: Definition

Definition D31: Konvergenz und Häufungspunkte

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis, etwa die triviale Wahl $\mathcal{B}_a = \mathcal{U}_a$.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Raum $(X, \mathcal{T})$ **konvergiert** gegen $a \in X$, wenn jede Umgebung U von a in $(X, \mathcal{T})$ schließlich alle Folgenglieder enthält.

$$\begin{aligned}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_a\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U\end{aligned}$$

Schwächer heißt $a \in X$ **Häufungspunkt** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn jede Umgebung U von a in $(X, \mathcal{T})$ unendlich viele Folgenglieder enthält:

$$\begin{aligned}(x_n)_{n\in N} \nrightarrow a \text{ in } (X,\mathcal{T}) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_a\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}_{\geq m} : x_n \in U\end{aligned}$$

Statt „$x_n \to a$“ schreibt man auch „$\lim x_n = a$“; das kann gefährlich sein. Ehrlicher wäre die Schreibweise als Menge $\operatorname{Lim} x_n := \{\, a \in X \mid x_n \to a \,\}$.

Konvergenz von Folgen: Beispiele

Beispiele: In jedem metrischen Raum (X, d) ist die Konvergenz $x_n \to a$ bezüglich der Metrik d (C3A) und der metrischen Topologie $\mathcal{T}_d$ (D3I) gleichbedeutend dank der Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \{\, B(a, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$.

In $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit der Ordnungstopologie gilt $x_n \to +\infty$ genau dann, wenn zu jeder Schranke $s \in \mathbb{R}$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n > s$ für alle $n \geq m$ gilt. Entsprechendes gilt für $x_n \to -\infty$.

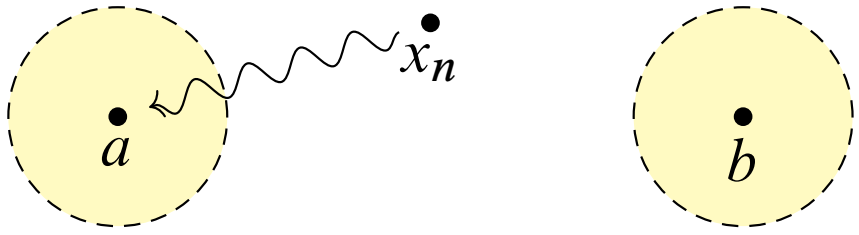
Im diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist $\{a\}$ offen und somit eine Umgebung. Hier konvergieren daher nur die schließlich konstanten Folgen.

Im indiskreten Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist die Menge X die einzige Umgebung. Hier konvergiert daher jede Folge gegen jeden Punkt („chaotisch“).

Definition D3J: Hausdorff–Eigenschaft

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **hausdorffsch** (T_2) oder **separiert**, wenn zu je zwei Punkten $a \neq b$ in X disjunkte Umgebungen existieren, das heißt, es gibt U, V mit $a \in U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ sowie $U \cap V = \emptyset$.

Hausdorff–Eigenschaft und eindeutige Grenzwerte



Satz D3κ: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, dann hat jede Folge in $(X, \mathcal{T})$ höchstens einen Grenzwert. Die Umkehrung gilt, falls $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $x_n \to a$. Zu $b \neq a$ existieren dank Hausdorff $U \in \mathcal{U}_a$ und $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $x_n \to a$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq m$. Folglich gilt $x_n \notin V$, somit $x_n \not\to b$.

„$\Leftarrow$“: Seien a, b nicht separiert in $(X, \mathcal{T})$, das heißt, je zwei Umgebungen von a und b schneiden sich. Ist $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar, so existiert eine UBasis $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ von a und $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots$ von b. Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x_n \in U_n \cap V_n$. Es folgt $x_n \to a$ und $x_n \to b$, also $a = b$. QED

Hausdorff–Eigenschaft und eindeutige Grenzwerte

⚠ Auf Erstabzählbarkeit können wir in Satz D3K nicht verzichten!

Beispiel: Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ die koabzählbare Topologie (D1I). Hierin gilt $x_n \to a$ genau dann, wenn die Folge (x_n) schließlich konstant ist, also ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n = a$ für alle $n \geq m$ gilt. Ist X überabzählbar, dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht hausdorffsch.

⚠ Der Folgenbegriff ist also zu schwach, um Hausdorff zu garantieren. Das liegt an der restriktiven Indexmenge $\mathbb{N}$. Solche Probleme lösen wir, indem wir Folgen verallgemeinern zu **Netzen** (D8D) oder **Filtern** (D8L).

🙂 Für jeden metrischen Raum (X, d) ist die Topologie $\mathcal{T}_d$ hausdorffsch (C2O) und erstabzählbar (D3G). Diese hilfreichen Eigenschaften sind wir gewohnt vom Raum $\mathbb{R}^n$. Allgemein müssen wir sie prüfen oder fordern.

Übung: Ist die Ordnungstopologie $\mathcal{T}$ auf $(X, <)$ hausdorffsch?

Lösung: Ja. Beweis: Seien $a < b$ in $(X, <)$. Wenn es ein $z \in X$ mit $a < z < b$ gibt, so sind $a \in X_{<z} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>z} \in \mathcal{T}$ disjunkte offene Umgebungen; andernfalls genügen $a \in X_{<b} \in \mathcal{T}$ und $b \in X_{>a} \in \mathcal{T}$.

Stetigkeit und Offenheit von Abbildungen

Definition D3N: Stetigkeit und Offenheit in einem Punkt

Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung topologischer Räume, $x \mapsto y$, sowie $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T}_X)$ und $\mathcal{B}_y \subseteq \mathcal{U}_y(Y, \mathcal{T}_Y)$ Umgebungsbasen.

$$
\begin{aligned}
f \text{ ist } \textbf{stetig in } x \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{U}_y : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{B}_y : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \\
f \text{ ist } \textbf{offen in } x \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_x : f(U) \in \mathcal{U}_y \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{B}_x : f(U) \in \mathcal{U}_y
\end{aligned}
$$

Beispiel: Für metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) nutzen wir UBasen der offenen Bälle. Wir erhalten damit sofort die übliche ε–δ–Definition:

- Genau dann ist $f : X \to Y$ stetig in $x \mapsto y$, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $f(B(x, \delta)) \subseteq B(y, \varepsilon)$ gilt.
- Genau dann ist $f : X \to Y$ offen in $x \mapsto y$, wenn zu jedem $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass $B(y, \varepsilon) \subseteq f(B(x, \delta))$ gilt.

Lokale Homöomorphismen

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}_X) & \xrightarrow[\text{stetig}]{f} & (Y, \mathcal{T}_Y) \\ \text{inc}\uparrow & & \uparrow\text{inc} \\ (U, \mathcal{T}_U) & \xrightarrow[\text{homöo}]{f|_U^V} & (V, \mathcal{T}_V) \end{array}$$

Definition D3o: lokaler Homöomorphismus

Wir nennen $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ einen **lokalen Homöomorphismus um** $x \in X$ mit Bild $y = f(x)$, falls $U \in \mathcal{U}_x^o(X, \mathcal{T}_X)$ und $V \in \mathcal{U}_y^o(Y, \mathcal{T}_Y)$ existieren mit $f(U) = V$, sodass $f|_U^V : U \to V$ ein Homöomorphismus ist. Gilt dies um jeden Punkt $x \in X$, so ist f ein **lokaler Homöomorphismus**.

Beispiele: Jeder lokale Homöomorphismus ist stetig und offen.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist um $x \neq 0$ ein lokaler Homöo, lokale Umkehrung $y \mapsto \pm\sqrt{y}$. In $x = 0$ ist f nicht offen, auch nicht lokal injektiv.

Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ ist stetig und offen, auch in $z = 0$.
Um jeden Punkt $z \neq 0$ ist sie ein lokaler Homöo, nicht jedoch in $z = 0$.
Lokale Umkehrfunktionen sind Zweige der komplexen Wurzelfunktion.

Stetigkeit vs Folgenstetigkeit

Satz D3P: Stetigkeit vs Folgenstetigkeit

Ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig in $a \in X$, dann sendet f jede konvergente Folge $(x_n) \to a$ in X auf eine konvergente Folge $(f(x_n)) \to b = f(a)$ in Y.

Die Umkehrung gilt, falls a in $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare UBasis besitzt.

Ist der Startraum $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar, zum Beispiel metrisierbar, dann ist die Stetigkeit von f äquivalent zur Folgenstetigkeit.

Beweis: „⇒“: Zu $V \in \mathcal{U}_b$ gilt $U := f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_a$. Zu $x_n \to a$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq m$, somit $f(x_n) \in V$. Also $f(x_n) \to f(a)$.

„⇐“: Ist f in a nicht stetig, so existiert $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U := f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}_a$. Sei $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ eine Umgebungsbasis von a. Für jeden Index $n \in \mathbb{N}$ gilt $U_n \not\subseteq U$, denn andernfalls wäre U eine Umgebung von a. Wir wählen $x_n \in U_n \setminus U$ und erhalten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ gemäß D3I. Wegen $x_n \notin U$ gilt $f(x_n) \notin V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f(x_n) \not\to f(a)$. QED

Stetigkeit vs Folgenstetigkeit

⚠ Auf Erstabzählbarkeit können wir in Satz D3P nicht verzichten!

Beispiel: Sei X überabzählbar, etwa $X = \mathbb{R}$. Hierauf sei $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$ die diskrete Topologie (D1B) und $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$ die koabzählbare Topologie (D1I). Die identische Abbildung $f : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}) : x \mapsto x$ ist nicht stetig, doch folgenstetig: Konvergiert $x_n \to a$ in $(X, \mathcal{T}')$, so ist (x_n) schließlich konstant gleich a. Daher konvergiert $(f(x_n))$ in $(X, \mathcal{T})$ gegen $f(a)$.

⚠ Hier sind Folgen also zu schwach, um die Unstetigkeit zu erkennen. Das liegt an der restriktiven Indexmenge $\mathbb{N}$. Solche Probleme lösen wir, indem wir Folgen verallgemeinern zu **Netzen** (D8D) oder **Filtern** (D8L).

Satz D3s: Konvergenz von Teilfolgen

Wenn eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ gegen a in $(X, \mathcal{T})$ konvergiert, dann ist a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Umkehrung gilt, falls a in $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare UBasis besitzt.

Übung: Führen Sie dies nach obigem Vorbild aus!

Re/Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Satz D3v: Re/Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zu jedem $x \in X$ sei $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis. Diese erfreuen sich folgender Eigenschaften.

UB1: Es gilt $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$, und für alle $U \in \mathcal{B}_x$ gilt $x \in U \subseteq X$.

Umgebungen sind stabil unter (paarweisen, also endlichen) Schnitten:

UB2: Zu $U, V \in \mathcal{B}_x$ existiert $W \in \mathcal{B}_x$ mit $W \subseteq U \cap V$.

Jede Umgebung enthält eine offene Umgebung, das heißt ausführlich:

UB3: In jeder Menge $U \in \mathcal{B}_x$ liegt eine Teilmenge V mit $x \in V \subseteq U$, sodass gilt: Zu jedem Punkt $y \in V$ existiert $W \in \mathcal{B}_y$ mit $W \subseteq V$. (D3c)

Erfüllt umgekehrt eine Familie $(\mathcal{B}_x \subseteq \mathfrak{P}X)_{x \in X}$ die Bedingungen (UB1–2), dann definiert sie auf X eine Topologie

$$\mathcal{T} := \left\{ O \subseteq X \,\middle|\, \forall x \in O \;\; \exists U \in \mathcal{B}_x \;:\; U \subseteq O \right\}.$$

Die letzte Bedingung (UB3) garantiert $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T})$, somit ist $\mathcal{B}_x$ tatsächlich eine Umgebungsbasis des Punktes x im Raum $(X, \mathcal{T})$.

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

☺ Das ist ein sehr einfaches, doch oft nützliches Konstruktionsprinzip!

Aufgabe: Was ist hier zu zeigen? Zeigen Sie es!
Alles liegt explizit vor, rechnen Sie es sorgfältig nach.

Beweis: Ist $\mathscr{B}_x \subseteq \mathfrak{P}X$ eine Umgebungsbasis des Punktes x in $(X, \mathscr{T})$, dann folgen die Eigenschaften (UB1–3) unmittelbar aus der Definition.

Nehmen wir umgekehrt an, die Familie $(\mathscr{B}_x \subseteq \mathfrak{P}X)_{x\in X}$ erfüllt (UB1–2).
Das so definierte Mengensystem $\mathscr{T} \subseteq \mathfrak{P}X$ erfüllt dann (O1) dank (UB1).
Für (O2) ist nachzuweisen, dass für $U, V \in \mathscr{T}$ auch $W = U \cap V$ in $\mathscr{T}$ liegt.
Zu jedem $x \in W$ existieren $U_x, V_x \in \mathscr{B}_x$ mit $U_x \subseteq U$ und $V_x \subseteq V$.
Dank (UB2) existiert $W_x \in \mathscr{B}_x$ mit $W_x \subseteq U_x \cap V_x \subseteq U \cap V = W$.
Also gilt $W \in \mathscr{T}$. Axiom (O3) ist trivialerweise erfüllt.

Somit ist $\mathscr{T}$ tatsächlich eine Topologie auf X. Die dritte Bedingung (UB3) garantiert $\mathscr{B}_x \subseteq \mathscr{U}_x(X, \mathscr{T})$. Nach Konstruktion von $\mathscr{T}$ ist demnach $\mathscr{B}_x$ eine Umgebungsbasis von x in $(X, \mathscr{T})$. QED

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Beispiel D3w: metrische Topologie aus Umgebungsbasen

Jede Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$ definiert eine Topologie $\mathcal{T}_d$ gemäß D1D:
Als Umgebungsbasis jedes Punktes $x \in X$ wählen wir die offenen Bälle,

$$\mathcal{B}_x = \{\, B(x, \varepsilon) \,|\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}.$$

Die Bedingung (UB1) ist trivialerweise erfüllt, und (UB2) gilt dank

$$B(x, \varepsilon) \cap B(x, \varepsilon') \;\overset{\supseteq}{=}\; B(x, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Dank Satz D3v erhalten wir daraus die Topologie

$$\mathcal{T}_d = \{\, O \subseteq X \,\big|\, \forall x \in O \;\; \exists B(x, \varepsilon) \in \mathcal{B}_x : B(x, \varepsilon) \subseteq O \,\}.$$

Dank Dreiecksungleichung ist jeder offene Ball offen (C2M),
somit gilt auch die letzte Bedingung (UB3), und daher ist $\mathcal{B}_x$
eine Umgebungsbasis des Punktes x im Raum $(X, \mathcal{T}_d)$.

Konstruktion einer Topologie aus Umgebungsbasen

Beispiel D3x: Ordnungstopologie aus Umgebungsbasen

Jede Totalordnung $<$ auf X definiert eine Topologie $\mathcal{T}_<$ gemäß D1M:
Als Umgebungsbasis jedes Punktes $x \in X$ wählen wir offene Intervalle,

$$\mathcal{B}_x = \{\,]a,b[\mid a,b \in X \sqcup \{\pm\infty\},\ a < x < b \,\}.$$

Trivialerweise gelten (UB1) und (UB3), und (UB2) gilt dank

$$]a,b[\cap]a',b'[\ \supseteq\ ]\max\{a,a'\}, \min\{b,b'\}[.$$

Dank Satz D3v erhalten wir daraus die Topologie

$$\mathcal{T}_< = \{\, O \subseteq X \,|\, \forall x \in O\ \ \exists]a,b[\in \mathcal{B}_x :]a,b[\subseteq O \,\}.$$

🙂 Die Konstruktion einer Topologie aus vorgegebenen UBasen
ist oft sehr natürlich und bequem, so wie hier in diesen Beispielen.
Wir wollen dies nun auf erste wichtige Funktionenräume anwenden.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Aufgabe: Lässt sich auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die punktweise / kompakte / gleichmäßige Konvergenz topologisieren / metrisieren / normieren? Wir wollen also eine Topologie / Metrik / (Pseudo/Halb)Norm auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ finden, die genau die gewünschte Konvergenz induziert, oder ihre Unmöglichkeit beweisen.

Vorgelegt sei eine Folge reeller Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Zu $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die (x, ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$U(f; x, \varepsilon) := \big\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, |f(x) - g(x)| < \varepsilon \big\}.$$

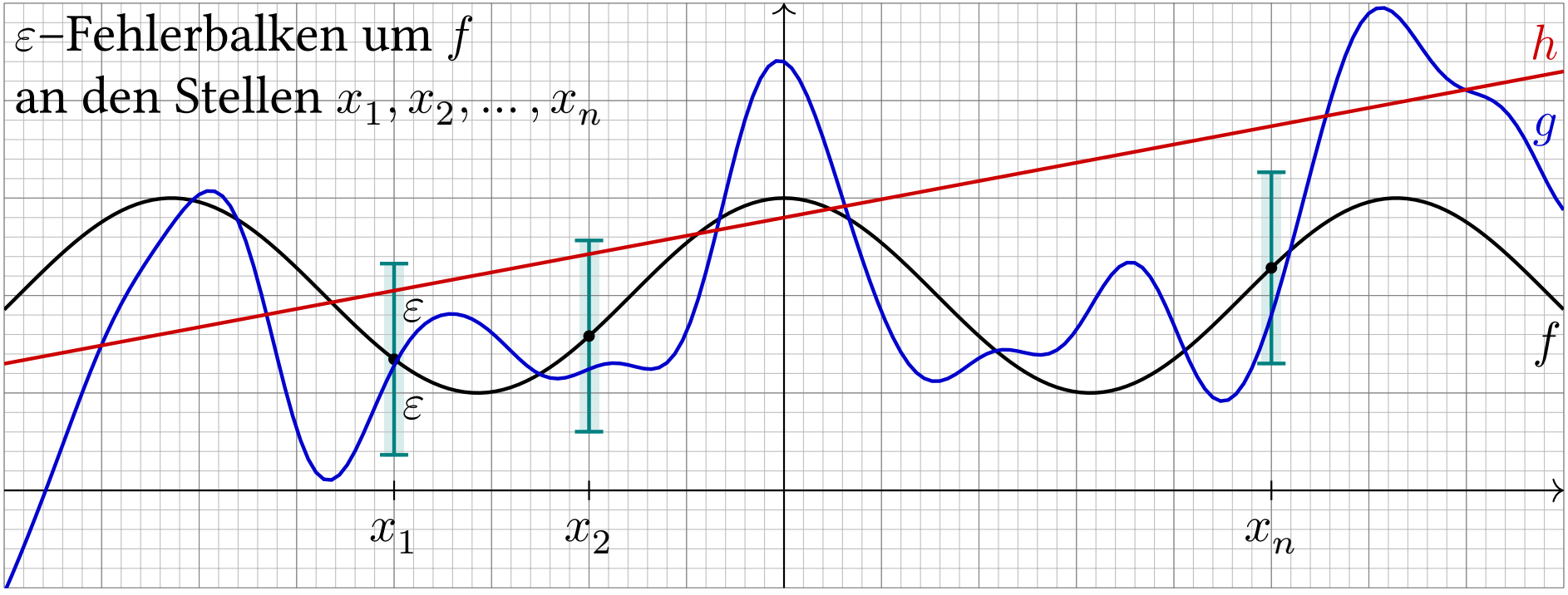
Hier gilt (UB1,3), nicht (UB2). Zu $J = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$U(f; J, \varepsilon) := \big\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, |f - g|_J < \varepsilon \big\} = \textstyle\bigcap_{x \in J} U(f; x, \varepsilon).$$

Diese Umgebungen erfüllen nun sowohl (UB1,3) als auch (UB2), denn

$$U(f; J, \varepsilon) \cap U(f; J', \varepsilon') \quad \supseteq \quad U(f;\ J \cup J',\ \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}).$$

Die Topologie der punktweisen Konvergenz



Definition D4A: Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f; J, \varepsilon)$ definieren gemäß D3v auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ der **punktweisen Konvergenz**: Genau dann ist eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen in $\mathcal{T}_{\text{pw}}$, wenn sie zu jedem $f \in O$ eine Umgebung $U(f; J, \varepsilon)$ enthält.

$$\left\{ O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, \forall f \in O \;\; \exists J = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : U(f; J, \varepsilon) \subseteq O \right\}$$

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Satz D4B: Punktweise Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist nicht metrisierbar.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}[x]$ ist hausdorffsch, aber nicht erstabzählbar, also nicht metrisierbar.

Beweis: (T_2) Zu $f \neq g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$.
Für $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x_0) - g(x_0)| > 0$ gilt dann $U(f;x_0,\varepsilon) \cap U(g;x_0,\varepsilon) = \emptyset$.

(1AA) Seien $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Umgebungen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $U(f;J_n,\varepsilon_n) \subseteq U_n$ mit $J_n \subseteq \mathbb{R}$ endlich und $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$. Somit ist $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar, aber $\mathbb{R}$ überabzählbar (B2N), also $J \subsetneq \mathbb{R}$.

Wir wählen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus J$ und zeigen $U_n \not\subseteq U(f;x_0,1)$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $g_n = f + h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|h_n(x_0)| \geq 1$ und $h_n|_{J_n} = 0$. Somit gilt $g_n \in U(f;J_n,\varepsilon_n) \subseteq U_n$, aber $g_n \notin U(f;x_0,1)$, also $U_n \not\subseteq U(f;x_0,1)$.

Demnach ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Umgebungsbasis von f in $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\mathcal{T}_{\mathrm{pw}})$. QED

Ist X überabzählbar, so ist $\mathbb{R}^X$ nicht erstabzählbar, also nicht metrisierbar.
Hingegen sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ erstabzählbar, sogar metrisierbar, siehe D4E.

Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Unsere Konstruktion der Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist im Rückblick zwar recht direkt und einfach, doch sie scheint etwas mühselig. Wir fragen uns daher: Geht es auch einfacher, etwa durch eine geeignete Metrik? Die erstaunliche und lehrreiche Antwort ist: Nein!

Wie beweisen wir, dass ein Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht metrisierbar ist?
Aufgeben genügt nicht, wir müssen ein Hindernis benennen!

Jede metrische Topologie hat zwei wichtige Eigenschaften:
Sie ist hausdorffsch (D3J) und erstabzählbar (D3F).

Diese Kriterien sind also notwendig zur Metrisierbarkeit (D1E): Ist $\mathcal{T}$ nicht hausdorffsch oder nicht erstabzählbar, so auch nicht metrisierbar!

Das erste Kriterium, die Hausdorff–Eigenschaft, ist für $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\mathrm{pw}})$ erfüllt, das zweite Kriterium, die Erstabzählbarkeit, jedoch nicht! Das gilt selbst auf den Teilräumen $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathbb{R}[x]$. Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}[x]$ wird von keiner Metrik induziert.

Wir verallgemeinern dies später zu Produkttopologien.

Gleichmäßige Konvergenz

Gegeben sei eine Folge reeller Funktionen $f_0, f_1, f_2, \ldots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \; [\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \,]$$

Gleichmäßige Konvergenz ist die Konvergenz in der Supremumsmetrik:

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad :\Leftrightarrow \quad |f - f_n|_{\mathbb{R}} \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \; [\, \forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \,]$$

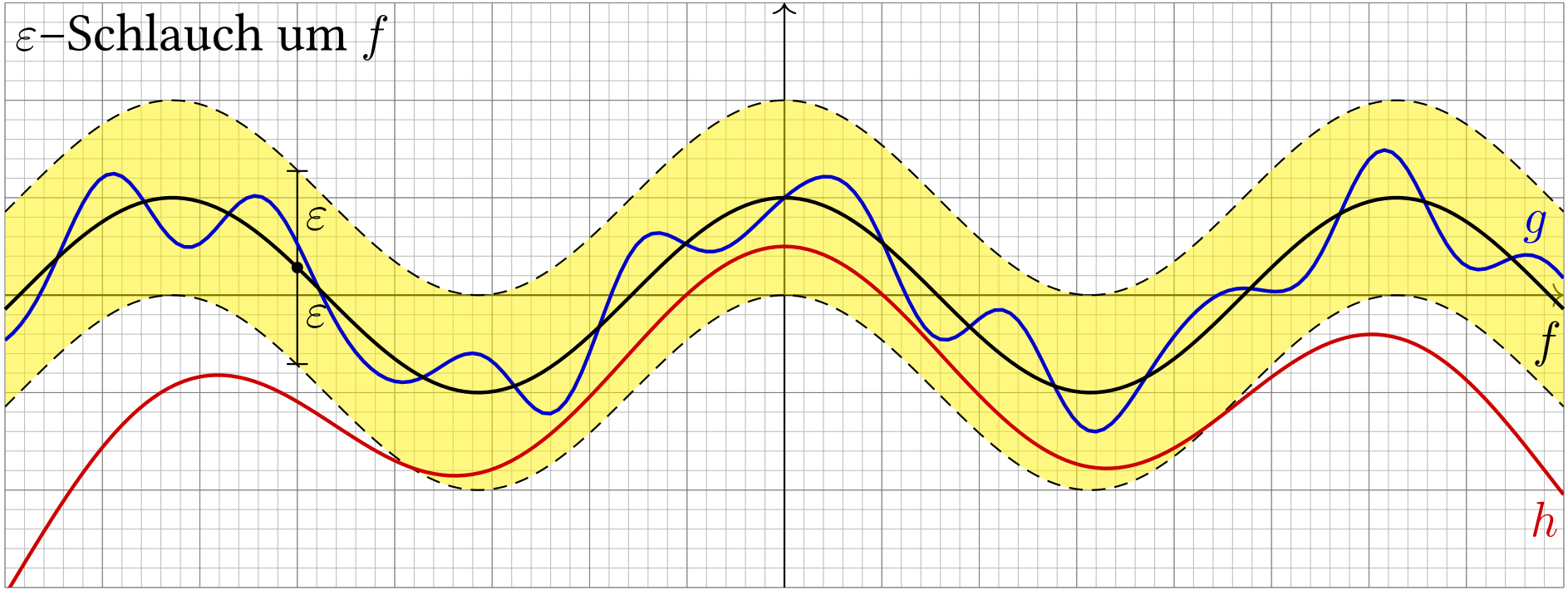
Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir daher die ε–Umgebung von $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f, \varepsilon) := \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, |f - g|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \}.$$

Diese Umgebungen erfüllen die erforderlichen Bedingungen (UB1–3), insbesondere gilt (UB2) dank $U(f, \varepsilon) \cap U(f, \varepsilon') = U(f, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\})$.

🙂 Das geht erfreulich leicht. Warum? Normen sind ein wunderbares Werkzeug; wo sie uns zur Verfügung stehen, nutzen wir sie gerne!

Gleichmäßige Konvergenz



Definition D4c: Topologie $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f,\varepsilon)$ definieren gemäß D3v auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{uni}}$ der **gleichmäßigen Konvergenz**: Genau dann ist $O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f,\varepsilon)$ enthält.

$$\mathcal{T}_{\text{uni}} = \left\{ O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, \forall f \in O \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : U(f,\varepsilon) \subseteq O \right\}$$

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition C3P: punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Gegeben sei eine Menge X und ein metrischer Raum (Y, d_Y) sowie eine Folge von Funktionen $f_0, f_1, f_2, \ldots, f : X \to Y$. Wir definieren:

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in X : d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad :\Leftrightarrow \quad d(f_n, f) = |d_Y(f_n, f)|_X \to 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \ \forall x \in X : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

⚠ Bei punktweiser Konvergenz kann die Stetigkeit zerbrechen!

Beispiel: Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$.

Die Konvergenz $f_n \to f$ gilt punktweise, aber nicht gleichmäßig:
Das Supremum des Abstandes ist $|f_n - f|_{[0,1]} = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Satz C3Q: Die gleichmäßige Konvergenz erhält Stetigkeit.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f_n : X \to Y$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f : X \to Y$ konvergiert.

1. Sind alle f_n stetig in $a \in X$ / auf ganz X, dann auch f.
2. Sind alle f_n gleichmäßig stetig auf X, dann auch f.
3. Sind alle f_n sogar L–lipschitz–stetig, dann auch f.

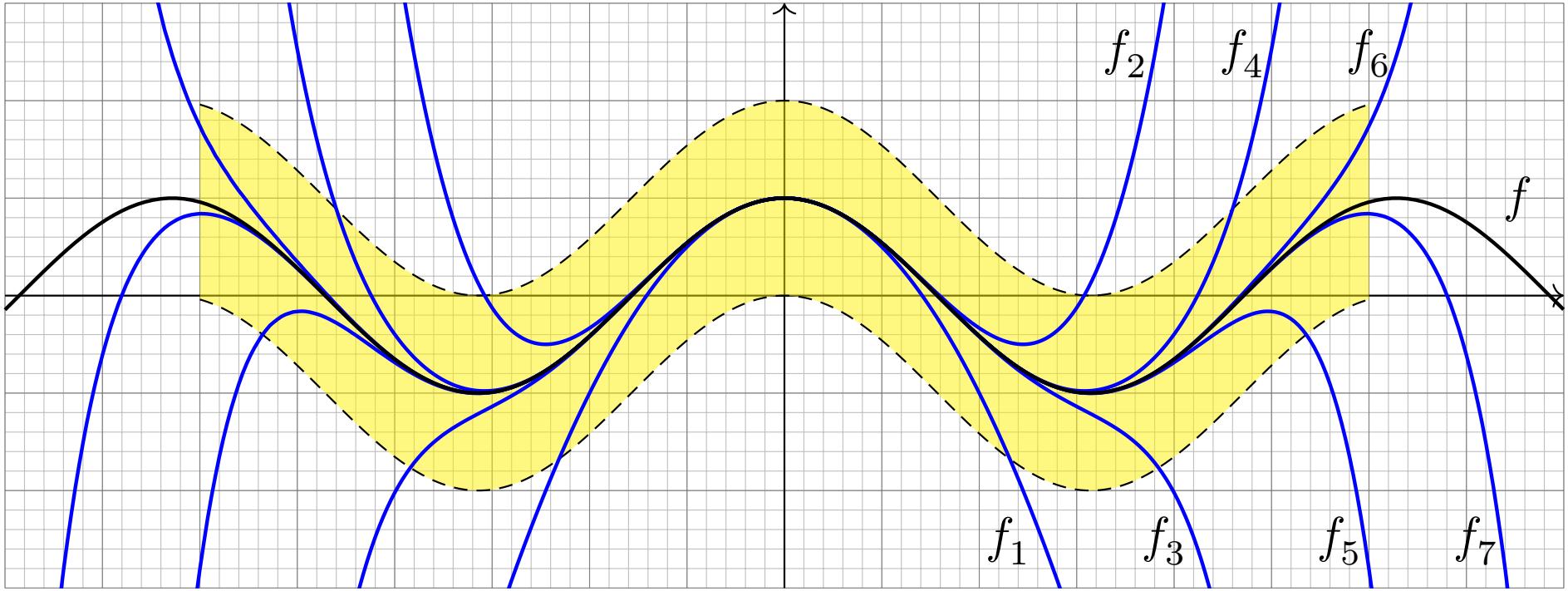
Übung: Wiederholen Sie hierzu den $\varepsilon/3$–Beweis aus der Analysis!

Beweis: (1) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $d(f_n, f) \to 0$ existiert ein Index $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n, f) \leq \varepsilon/3$. Da f_n stetig ist, existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ sodass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, a) < \delta$ die Ungleichung $d_Y(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3$ gilt. Daraus folgt:
$d_Y(f(x), f(a)) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(a)) + d_Y(f_n(a), f(a)) < \varepsilon$

Die Aussagen (2) und (3) beweist man genauso. Übung! QED

Kompakte Konvergenz

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$



Eine Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **konvergiert kompakt** gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn auf jedem kompakten Intervall $K = [-r, r]$ gleichmäßige Konvergenz gilt:

$$f_n \to f \text{ kompakt} \qquad :\Leftrightarrow \qquad \forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f - f_n|_{[-r,r]} \to 0$$

Übung: Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiert kompakt im Inneren ihres Konvergenzkreises $B(z_0, \rho)$ mit $\rho = 1/\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}$.

Kompakte Konvergenz

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir die (K,ε)–Umgebung von f in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch

$$U(f;K,\varepsilon) := \big\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, |f-g|_K < \varepsilon \big\}.$$

Diese Umgebungen erfüllen (UB1–3), insbesondere gilt (UB2) dank

$$U(f;K,\varepsilon) \;\cap\; U(f;K',\varepsilon') \quad\supseteq\quad U(f;\; K\cup K',\; \min\{\varepsilon,\varepsilon'\}).$$

Für $K \subset \mathbb{R}$ endlich ist dies zu schwach, für $K = \mathbb{R}$ oft zu stark.
Für $K \Subset \mathbb{R}$ kompakt erhalten wir den ausgewogenen Kompromiss!

Definition D4D: Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Die Umgebungen $U(f;K,\varepsilon)$ definieren gemäß D3v auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie $\mathcal{T}_{\text{kpkt}}$ der **kompakten Konvergenz**: Genau dann ist eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen, wenn sie mit jedem $f \in O$ auch eine Umgebung $U(f;K,\varepsilon)$ enthält:

$$\mathcal{T}_{\text{kpkt}} = \big\{ O \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\big|\, \forall f \in O \;\; \exists r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;:\; U(f;[-r,r],\varepsilon) \subseteq O \big\}$$

🙂 Ebenso für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Ist X lokal-kompakt, so heißt dies auch **lokal gleichmäßige Konvergenz**. Sie erhält die Stetigkeit! (C3Q)

Die kompakte Konvergenz ist nicht normierbar.

Übung D4F: Die kompakte Konvergenz ist nicht normierbar.

(1) Es gelten strikte Inklusionen $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}} \subsetneq \mathcal{T}_{\mathrm{kpkt}} \subsetneq \mathcal{T}_{\mathrm{uni}}$ (von gröber zu feiner). Hier ist $\mathcal{T}_{\mathrm{uni}}$ sogar pseudonormierbar, aber $\mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$ ist nicht metrisierbar.

(2) Es gilt (a) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \ell^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supseteq \mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und (b) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \supseteq \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}[x]$. Auf welchen dieser Räume ist die kompakte Konvergenz normierbar?

Lösung: (2) Auf keinem! (2a) Sei $\|\text{-}\| : \mathscr{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ eine Pseudonorm. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f_n \neq 0$ und Träger in $[n-1, n+1]$. Es gilt $\|f_n\| \neq 0$, skaliert $\|f_n\| \geq 1$, also $\|f_n\| \not\to 0$, aber $f_n \to 0$ kompakt.

(2b) Angenommen, eine Pseudonorm $\|\text{-}\| : \mathbb{R}[x] \to [0,\infty]$ induziert die kompakte Konvergenz. Für jede Polynomfunktion $f \in \mathbb{R}[x]$ gilt $\|f\| < \infty$, denn $2^{-n} f \to 0$ kompakt, also $\|2^{-n} f\| = 2^{-n}\|f\| \to 0$, somit $\|f\| < \infty$.

Sei $a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f_n(x) = a_n x^n$ und $\|f_n\| = 1$. Wegen $\|f_n\| \not\to 0$ gilt $f_n \not\to 0$ kompakt: Es gibt ein Intervall $[-r,r] \subseteq \mathbb{R}$ mit $|f_n|_{[-r,r]} = a_n r^n \not\to 0$.
Für $g_n = 2^{-n} f_n$ gilt $\|g_n\| = 2^{-n} \to 0$, aber $|g_n|_{[-2r,2r]} = a_n r^n \not\to 0$. QED

Die kompakte Konvergenz ist metrisierbar.

Zu $r \in \mathbb{N}$ ist die gleichmäßige Konvergenz auf $[-r,r]$ metrisierbar, sogar (pseudohalb)normierbar durch die Supremumsnorm $|\text{-}|_{[-r,r]}$.
Auf $\mathscr{C}([-r,r],\mathbb{R})$ ist dies eine Norm, auf $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nur eine Halbnorm.

Wir stutzen dies zur äquivalenten, aber endlichen Metrik (C3L)
$d_r(f,g) = |f-g|^*_{[-r,r]} = \sup\{\, |f(x)-g(x)|^* \,|\, x \in [-r,r] \,\} \in [0,1]$.
Auf $\mathscr{C}([-r,r],\mathbb{R})$ ist dies eine Metrik, auf $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nur eine Halbmetrik.

Satz D4E: Metrisierung der kompakten Konvergenz

Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ fassen wir die Halbmetriken $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zusammen zu

$$d : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to [0,1] : d(f,g) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} d_k(f,g).$$

Dies ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, und es gilt $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_{\text{kpkt}}$.

Übung: Zeigen Sie (M0–3) sowie $\mathscr{T}_d \subseteq \mathscr{T}_{\text{kpkt}}$ und $\mathscr{T}_d \supseteq \mathscr{T}_{\text{kpkt}}$.

Beispiel: Der Vektorraum $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\mathscr{T}_{\text{kpkt}}$ ist hausdorffsch, metrisiert durch eine abz. Familie von Halbnormen (D4E), und vollständig (C3Q).
Dies verallgemeinert Banach–Räume und heißt ein **Fréchet–Raum**.

Metrisierung durch eine Familie von Halbmetriken

🙂 Die Konstruktion des obigen Satzes D4E ist flexibel und vielseitig anwendbar, daher will ich das allgemeine Prinzip würdig ausführen.

Sei $D = (d_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbmetriken $d_i : X \times X \to [0,\infty]$ auf einer gemeinsamen Trägermenge X. Darauf wollen wir eine gemeinsame Topologie $\mathcal{T}_D$ definieren, als die gröbste Topologie, in der alle d_i–Bälle für $i \in I$ offen sind. Zu jedem Punkt $a \in X$ und jeder endlichen Menge $J \subseteq I$ und jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir dazu die Basisumgebung durch

$$U(a;J,\varepsilon) := \big\{\, x \in X \,\big|\, \forall i \in J : d_i(x,a) < \varepsilon \,\big\} = \textstyle\bigcap_{i\in J} B_i(a,\varepsilon)$$

sowie die Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \big\{ U(a;J,\varepsilon) \,\big|\, J \subseteq I \text{ endlich}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \big\}$. Diese Umgebungen erfüllen die Umgebungsaxiome (UB1–3), denn

$$U(a;J,\varepsilon) \;\cap\; U(a;J',\varepsilon') \quad\supseteq\quad U(a;\; J\cup J',\; \min\{\varepsilon,\varepsilon'\}).$$

Dank Satz D3v erhalten wir so zu $D = (d_i)_{i\in I}$ die Topologie

$$\mathcal{T}_D := \big\{\, O \subseteq X \,\big|\, \forall a \in O \;\; \exists J \subseteq I \text{ endlich } \;\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;:\; U(a;J,\varepsilon) \subseteq O \,\big\}.$$

Metrisierung durch eine Familie von Halbmetriken

Diese elegante Konstruktion fasst unsere Beispiele zu $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ zusammen: Punktweise Konvergenz entspricht $d_x(f,g) = |f(x) - g(x)|$ für $x \in \mathbb{R}$. Für gleichmäßige Konvergenz genügt eine Metrik, $d(f,g) = |f-g|_\mathbb{R}$. Kompakte Konvergenz entspricht $d_k(f,g) = |f-g|_{[-k,k]}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Für die kompakte Konvergenz einer komplexen Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k (z-z_0)^k$ betrachten wir den Konvergenzradius $\rho \in [0,\infty]$. Die gleichmäßige Konvergenz auf dem Ball $\bar{B}(z_0,r)$ mit $0 \le r < \rho$ wird induziert von der Supremumsmetrik $d_r(f,g) = |f-g|_{\bar{B}(z_0,r)}$. Es genügt dann eine abzählbare Familie von Radien $r_k \nearrow \rho$ zu betrachten.

Diese allgemeine Konstruktion von $\mathcal{T}_D$ und die folgende Metrisierung ist sehr flexibel. Wir werden sie später auch für die Produkttopologie nutzen (E4v), insbesondere für die Metrisierbarkeit des Hilbert–Würfels $[0,1]^\mathbb{N}$ und somit schließlich für den Metrisierbarkeitssatz von Urysohn (E5R).

Bemerkung: Jede Halbmetrik $d_i : X \times X \to [0,\infty]$ können wir stutzen (C3L) zur äquivalenten Halbmetrik $d_i^* : X \times X \to [0,1]$, das ist vorteilhaft.

Metrisierung durch eine Familie von Halbmetriken

Satz D4G: Metrisierung

Sei $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Halbmetriken $d_i : X \times X \to [0,1]$.
Wir wählen $a_i > 0$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$, etwa $a_i = 2^{-i-1}$, und definieren

$$d : X \times X \to [0,1] \quad \text{durch} \quad d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i d_i(x,y).$$

(a) Die Abbildung d ist wohldefiniert und eine Halbmetrik auf X.

(b) Es gilt $\mathcal{T}_D = \mathcal{T}_d$: Die Halbmetrik d erzeugt die Topologie $\mathcal{T}_D$.

(c) Äquivalent sind dann: (c1) Die Halbmetrik d ist eine Metrik.
(c2) Die Topologie $\mathcal{T}_D$ ist metrisierbar. (c3) $\mathcal{T}_D$ ist hausdorffsch.
(c4) Zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $d_i(x,y) > 0$.

Übung: Zeigen Sie diesen Satz; er optimiert den vorigen Satz D4E, bereitet aber kaum zusätzliche Mühe. Aussagen (a) und (c) sind leicht. Spannend ist Aussage (b), also die Inklusionen $\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{T}_d$ und $\mathcal{T}_D \supseteq \mathcal{T}_d$.

Metrisierung durch eine Familie von Halbmetriken

Zum Beweis vergleichen Sie in (b) die beiden Umgebungsbasen:

(b1) Sei $a \in X$. Zu jeder endlichen Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}$ und jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_d(a, \delta) \subseteq U(a; J, \varepsilon)$. Das zeigt $\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{T}_d$.

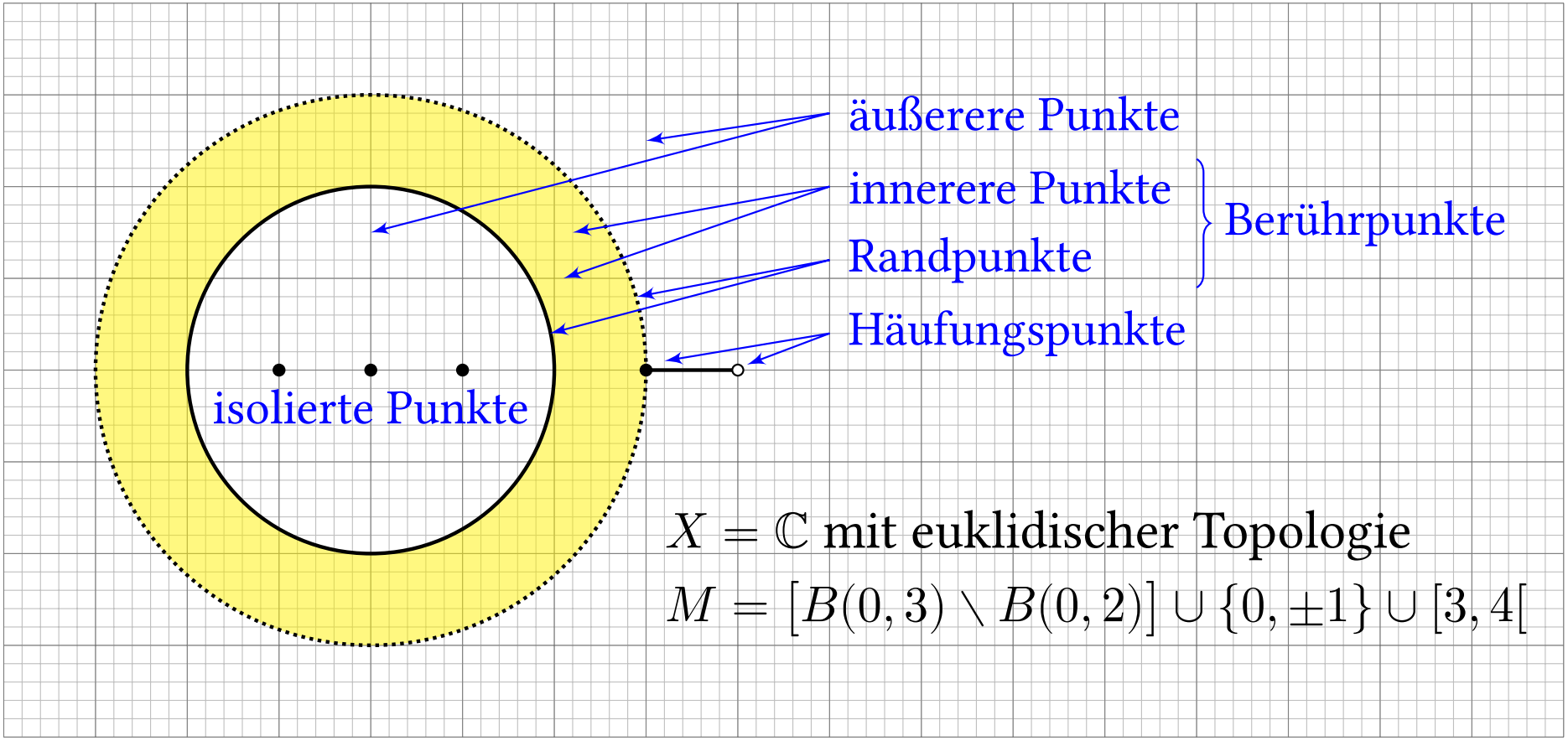
(b2) Umgekehrt gibt es zu jedem $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ eine endliche Menge $J \subseteq \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $U(a; J, \varepsilon) \subseteq B_d(a, \delta)$ gilt. Das zeigt $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_D$.

Sie wiederholen und festigen hier nochmals das nötige Vokabular. Die Aufgabe ist knifflig, da hilft nur, sie selbständig sorgfältig auszuführen! Die gute Nachricht: Wenn Sie das können, dann werden ε und δ Sie nie mehr schrecken! „Epsilon, wo ist dein Stachel? Delta, wo ist dein Sieg?“

Diese raffinierte Metrisierung begegnet Ihnen zum Beispiel in der Funktionalanalysis bei lokalkonvexen Räumen, speziell Fréchet–Räumen, das sind topologische Vektorräume, die durch eine abzählbare Familie von Halbnormen vollständig topologisiert werden. Meist erlaubt diese Topologie keine Norm, aber immerhin eine Metrik, wie hier konstruiert.

Topologische Grundbegriffe

Geometrisch-topologische Begriffe wie innerer Punkt und äußerer Punkt und Randpunkt scheinen anschaulich klar, etwa für Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Wie definiert man sie? Das ist wichtig, um damit sicher zu arbeiten, insbesondere in Situationen, wo unsere Anschauung versagt.



Topologische Grundbegriffe

Definition D5A: topologische Grundbegriffe

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Ein Punkt $a \in X$ heißt...

innerer Punkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad M \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$
(Die Menge M ist eine Umgebung von a.)

äußerer Punkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad (X \setminus M) \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T})$
(Das Komplement $X \setminus M$ ist eine Umgebung von a.)

Randpunkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a : U \cap M \neq \emptyset \neq U \setminus M$
(Jede Umgebung von a trifft sowohl M als auch $X \setminus M$.)

Berührpunkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a : U \cap M \neq \emptyset$
(Jede Umgebung von a trifft die Menge M.)

isolierter Punkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \exists U \in \mathcal{U}_a : U \cap M = \{a\}$
(Eine genügend kleine Umgebung von a hat mit M nur a gemeinsam.)

Häufungspunkt von M in $(X, \mathcal{T})$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}_a : (U \setminus \{a\}) \cap M \neq \emptyset$
(Jede Umgebung von a trifft außer a mindestens einen Punkt von M.)

Inneres, Abschluss, Rand

Die Menge aller inneren Punkte von M in $(X, \mathcal{T})$ heißt das **Innere** oder auch der **offene Kern** von M in $(X, \mathcal{T})$, geschrieben

$$\mathring{M} = K_{(X,\mathcal{T})}(M) := \{ a \in X \,|\, M \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T}) \} \overset{!}{=} \bigcup \{ U \subseteq M \,|\, U \in \mathcal{T} \}.$$

Das Innere ist demnach die größte offene Menge, die in M enthalten ist. Es gilt $M \supseteq M^\circ = (M^\circ)^\circ$. Genau dann ist M offen, wenn $M = M^\circ$ gilt.

Die Menge aller Berührpunkte von M in $(X, \mathcal{T})$ heißt der **Abschluss** oder auch die **abgeschlossene Hülle** von M in $(X, \mathcal{T})$, geschrieben

$$\overline{M} = H_{(X,\mathcal{T})}(M) := \{ a \in X \,|\, \forall U \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T}) : U \cap M \neq \emptyset \} \overset{!}{=} \bigcap \{ A \supseteq M \,|\, X \setminus A \in \mathcal{T} \}.$$

Der Abschluss ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst. Es gilt $M \subseteq \overline{M} = \overline{\overline{M}}$. Genau dann ist M abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ gilt.

Kern und Hülle sind dual unter Komplementen, also $X \setminus M^\circ = \overline{X \setminus M}$.

Die Menge aller Randpunkte von M in $(X, \mathcal{T})$ ist der topologische **Rand**

$$\delta_{(X,\mathcal{T})}(M) := \overline{M} \setminus M^\circ = H_{(X,\mathcal{T})}(M) \setminus K_{(X,\mathcal{T})}(M).$$

Inneres, Abschluss, Rand

⚠ Diese topologischen Begriffe sind **relativ**: Sie hängen nicht nur von der Menge M ab, sondern auch vom umgebenden Raum $(X, \mathcal{T})$. Daher ist die ausführliche Schreibweise $K_{(X,\mathcal{T})}(M)$ und $H_{(X,\mathcal{T})}(M)$ unter Angabe des Raumes $(X, \mathcal{T})$ präziser und vermeidet Missverständnisse. Die Kurzschreibweise M° und $\overline{M}$ ist oft bequemer, setzt jedoch voraus, dass der umgebende Raum aus dem Kontext eindeutig hervorgeht.

Beispiel: Wir betrachten die Teilmenge $M =]0,1[\cup]1,2] \cup \{3\}$ in jedem der drei Räume $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ jeweils mit der euklidischen Topologie:

In $\mathbb{R}_{>0}$ gilt: $\mathring{M} =]0,1[\cup]1,2[, \quad \overline{M} =]0,2] \cup \{3\}, \quad \delta M = \{1,2,3\}.$

In $\mathbb{R}$ gilt: $\mathring{M} =]0,1[\cup]1,2[, \quad \overline{M} = [0,2] \cup \{3\}, \quad \delta M = \{0,1,2,3\}.$

In $\mathbb{C}$ gilt: $\mathring{M} = \emptyset, \quad \overline{M} = [0,2] \cup \{3\}, \quad \delta M = [0,2] \cup \{3\}.$

Bemerkung: Sind zu $(X, \mathcal{T})$ Umgebungsbasen $(\mathscr{B}_x)_{x \in X}$ gegeben, oder eine Metrik $d : X \times X \to [0, \infty]$, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert, so gilt:

$$\mathring{M} = \{ x \in X \,|\, \exists U \in \mathscr{B}_x : U \subseteq M \} = \{ x \in X \,|\, d(x, X \setminus M) > 0 \}$$

$$\overline{M} = \{ x \in X \,|\, \forall U \in \mathscr{B}_x : U \cap M \neq \emptyset \} = \{ x \in X \,|\, d(x, M) = 0 \}$$

Abschluss und Folgengrenzwerte

In der Analysis haben Sie den Abschluss $\overline{A}$ einer Menge A im Raum (X, d) vielleicht definiert als die Menge aller Folgengrenzwerte von Folgen in A mit Grenwerten in X. Die Äquivalenz stiftet der folgende Satz:

Satz D5c: Abschluss und Folgengrenzwerte

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt.
Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, mit $a_n \to x$ in $(X, \mathcal{T})$, so gilt $x \in \overline{A}$.
Die Umkehrung gilt, falls x eine abzählbare Umgebungsbasis erlaubt.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Es gelte $a_n \to x$. Jede Umgebung U von x in $(X, \mathcal{T})$ enthält schließlich alle Folgenglieder a_n, also $U \cap A \neq \emptyset$. Gemäß D5A gilt $x \in \overline{A}$.

„$\Leftarrow$“: Sei $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ eine UBasis von x. Aus $x \in \overline{A}$ folgt $A \cap U_n \neq \emptyset$. Wir wählen $a_n \in A \cap U_n$. Gemäß D3I gilt $a_n \to x$. QED

Korollar D5D: abgeschlossen und folgenabgeschlossen

Jede (topologisch) abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist folgenabgeschlossen.
Die Umkehrung gilt, falls der umgebende Raum $(X, \mathcal{T})$ erstabzählbar ist.

Lokal-endliche Familien

Für jede endliche Familie zeigen wir gleich $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$.
Für unendliche Familien gilt dies nicht, $\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \overline{\{x\}} = \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} = \overline{\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}}$.
Der gute Kompromiss sind *lokal-endliche* Familien in folgendem Sinne:

Definition D5F: lokal-endliche Familien

Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $A_i \subseteq X$ nennen wir...

- **endlich**, wenn die Indexmenge I endlich ist,
- **endlich** im Punkt $x \in X$, wenn $I_x = \{ i \in I \mid x \in A_i \}$ endlich ist,
- **punktweise endlich**, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ endlich ist,
- **lokal-endlich** um x im Raum $(X, \mathcal{T})$, wenn eine offene Umgebung U existiert, also $x \in U \in \mathcal{T}$, sodass $I_U = \{ i \in I \mid A_i \cap U \neq \emptyset \}$ endlich ist,
- **lokal-endlich** im Raum $(X, \mathcal{T})$, falls dies um jedem Punkt $x \in X$ gilt.

Trivialerweise gilt $I \supseteq I_U \supseteq I_x$. Daraus folgen die Implikationen

$$\text{endlich} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{lokal-endlich} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{punktweise endlich}.$$

Die Umkehrungen gelten nicht, siehe $([n, n+1])_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(\{x\})_{x \in \mathbb{Q}}$ in $\mathbb{R}$.

Lokal-endliche Vereinigung

Beispiel: In $\mathbb{R}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty}[1/n, 1] =]0, 1]$ und $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\overline{\{x\}} = \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} = \overline{\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}}$.
Die Vereinigung der Abschlüsse ist nicht der Abschluss der Vereinigung, sondern nur eine (evtl. strikte) Teilmenge. Das untersuchen wir genauer:

Satz D5G: lokal-endliche Vereinigung

(1) In jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt die Inklusion

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \quad \supseteq \quad \bigcup_{i\in I}\overline{A_i}.$$

(2) Gleichheit gilt gdw $A := \bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$ abgeschlossen ist. Insbesondere gilt

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \quad = \quad \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}.$$

(3) Ist die Familie $(A_i)_{i\in I}$ lokal-endlich, so auch $(\overline{A_i})_{i\in I}$, (4) und es gilt

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \quad = \quad \bigcup_{i\in I}\overline{A_i}.$$

Ist eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen lokal-endlich, dann ist auch ihre Vereinigung $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.

Lokal-endliche Vereinigung

Beweis: Wir vergleichen $A := \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ mit $B := \bigcup_{i\in I} A_i$.

(1) Aus $A_i \subseteq B \subseteq \overline{B}$ folgt $\overline{A_i} \subseteq \overline{B}$, also $A \subseteq \overline{B}$.

(2) Es gilt $B \subseteq A$. Ist A abgeschlossen, so folgt $\overline{B} \subseteq A$.
Dies gilt insbesondere, falls die Indexmenge I endlich ist, dank (A2).

(3) Sei $x \in U \in \mathcal{T}$ und $I_U := \{\, i \in I \,|\, A_i \cap U \neq \emptyset \,\}$.
Aus $A_i \subseteq X \setminus U$ folgt $\overline{A_i} \subseteq X \setminus U$. Demnach gilt $I_U = \{\, i \in I \,|\, \overline{A_i} \cap U \neq \emptyset \,\}$.
Die Menge I_U wird also durch den Abschluss $A_i \mapsto \overline{A_i}$ nicht größer.

(4) Wir zeigen: $X \setminus A$ ist offen. Zu jedem Punkt $x \in X \setminus A$ existiert eine offene Umgebung U, also $x \in U \in \mathcal{T}$, sodass I_U endlich ist. Wir betrachten

$$U' := U \setminus A \overset{\text{Def}}{=} U \setminus \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \overset{(3)}{=} U \setminus \bigcup_{i\in I_U} \overline{A_i} \overset{(2)}{=} U \setminus \overline{\bigcup_{i\in I_U} A_i}.$$

Demnach ist $U' \subseteq X \setminus A$ eine offene Umgebung von x in $X \setminus A$.

Das Komplement $X \setminus A$ ist Umgebung jedes seiner Punkte,
also offen (D3c), somit ist $A = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ abgeschlossen. QED

Dichte vs diskrete Teilmengen

Definition D5J: dichte vs diskrete Teilmengen

Wir nennen $M \subseteq X$ **diskret** in $(X, \mathcal{T})$, falls jeder Punkt $x \in M$ isoliert ist, das heißt, es existiert eine offene Umgebung $U \in \mathcal{T}$ mit $M \cap U = \{x\}$.
Äquivalent hierzu: Der Teilraum $(M, \mathcal{T}_M)$ ist diskret (D1K, D1B).

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **dicht** in $(X, \mathcal{T})$, falls $\overline{M} = X$ gilt.
Das heißt $M \cap U \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$.

Hingegen heißt M **nirgends dicht** in $(X, \mathcal{T})$, wenn $\overline{M}^\circ = \emptyset$ gilt.
Äquivalent: In keiner offenen Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ ist $M \cap U$ dicht.

Beispiele: In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ dicht, aber nicht diskret, ebenso $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$.
In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Z}$ diskret, abgeschlossen, doch nirgends dicht, ebenso $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

In $(\mathbb{R}, +)$ ist jede diskrete Untergruppe von der Form $\mathbb{Z}a$ für ein $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
In $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ ist $X = \{ \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k\xi} \mid k \in \mathbb{Z} \}$ diskret für $\xi \in \mathbb{Q}$, dicht für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

In $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit $1 \leq p < \infty$ sind $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ und $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ dicht, in $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ nicht.
Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ ist $\{ \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \text{ endlich} \}$ diskret.
Im Banach–Raum $\ell^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ ist $\{ \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \}$ diskret.

Stetige Funktionen sind auf dichten Teilmengen festgelegt.

Satz D5L: Vergleich stetiger Funktionen auf dichten Teilmengen

Seien $f, g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ hausdorffsch. Dann ist $O = \{\, x \in X \mid f(x) \neq g(x) \,\}$ offen, $\{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}$ abgeschlossen. Aus $A \subseteq X$ und $f|_A = g|_A$ folgt $f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$; ist A dicht in X, so folgt $f = g$.

Beweis: Sei $x \in O$. Zu $f(x) \neq g(x)$ in Y existieren $U, V \in \mathcal{T}_Y$ mit $f(x) \in U$ und $g(x) \in V$ mit $U \cap V = \emptyset$. Für $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ gilt $x \in W \in \mathcal{T}_X$. Für jeden Punkt $x' \in W$ gilt $f(x') \in U$ und $g(x') \in V$, also $f(x') \neq g(x')$. Somit gilt $W \subseteq O$. Also ist O offen (D3c). QED

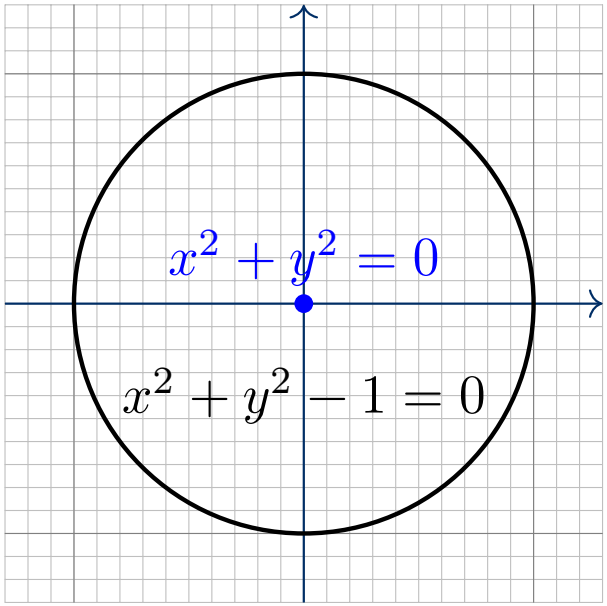
Beispiel / Übung D5M: stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$

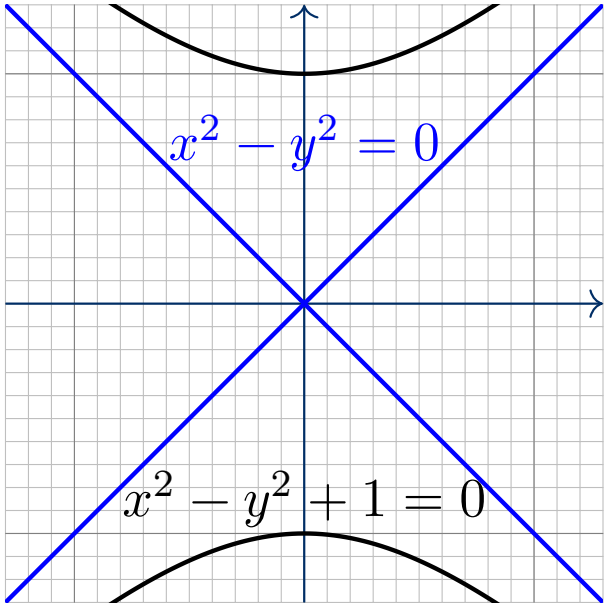
Ist die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ injektiv? surjektiv?

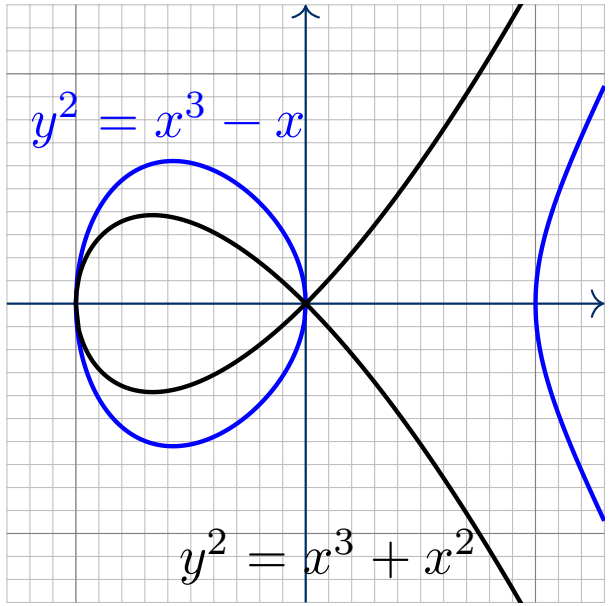
Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv dank D5L, aber nicht surjektiv: Funktionen wie $x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2)$ sind stetig auf $\mathbb{Q}$.

Mächtigkeit: Es gilt $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, also $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, hingegen nur $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$.

Polynome vs Polynomfunktionen







Zum Multiindex $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ gehört das **Monom** $X^\nu = X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$.
Jede Linearkombination ist ein **Polynom** $P = \sum_\nu p_\nu X^\nu$ in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.
Dies definiert die **Polynomfunktion** $f_P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : x \mapsto P(x) = \sum_\nu p_\nu x^\nu$.

Dürfen wir P mit f_P identifizieren? Ist $P \mapsto f_P$ injektiv?

⚠ Für jeden endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen schlägt das fehl!
Die Polynomalgebra $\mathbb{F}_q[X]$ ist unendlich, doch $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_q)$ ist endlich.
Konkret: Für $P = X^q - X \in \mathbb{F}_q[X]$ gilt $P \neq 0$, aber $f_P = 0$ dank Lagrange.
Speziell für $P = X^2 + X \in \mathbb{F}_2[X]$ gilt $P(0) = 0$ und $P(1) = 0$, also $f_P = 0$.

Polynomiale Nullstellenmengen sind magere Nullmengen.

Lemma D5N: Polynome vs Polynomfunktionen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sowie $U \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $a \in U$. Dann ist die Zuordnung

$$\Phi_U : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \to \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{K}) : P = \sum_\nu p_\nu X^\nu \mapsto f_P|_U$$

injektiv: Wir dürfen $a = 0$ annehmen und erhalten $p_\nu = \partial^\nu f_P(0)/\nu!$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist es somit möglich, und weitgehend üblich, die Polynome aus $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ als Funktionen in $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathscr{C}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ aufzufassen.

Satz D5O: Polynomiale Nullstellenmengen sind magere Nullmengen.

Zu jedem Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ mit $P \neq 0$ ist die Nullstellenmenge $N = f_P^{-1}(0)$ in $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen, zudem nirgends dicht, $N^\circ = \emptyset$ (dank D5N) und hat Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_n(N) = 0$ (dank Fubini und Induktion). Demnach ist $f_P^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

Das ist eine Besonderheit von Polynomen! Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist Nullstellenmenge einer *stetigen* Funktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ (C3N).

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind fast alle Matrizen invertierbar.

Beispiel D5P: Determinante

Die **Determinante** ist eine Polynomfunktion in den Matrixeinträgen:

$$\det_n : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Für $n = 2$ gilt $\det_2 \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right] = ad - bc$. Für $n = 3$ gilt Sarrus' Jägerzaunregel:

$$\det_3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{cases} +\, a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -\, a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{cases}$$

Im Raum $\mathbb{K}^{n\times n}$ der $n \times n$–Matrizen ist die **allgemeine lineare Gruppe**

$$\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} := \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,\middle|\, A \text{ ist invertierbar} \right\} \overset{!}{=} \det_n^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$$

offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

🙂 Anschaulich: Fast alle Matrizen sind invertierbar, nicht-invertierbare Matrizen werden invertierbar durch geeignete beliebig kleine Störung, invertierbare bleiben es bei jeder hinreichend kleinen Störung.

Vergleich stetiger Funktionen auf dichten Teilmengen

Das charakteristische Polynom ist eine stetige Abbildung

$$\chi_n : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}[X]^1_n : M \mapsto P_M(X) = \det(X1_{n\times n} - M).$$

Es ist invariant unter Konjugation durch $B \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$:

$$P_{B^{-1}MB} \overset{\text{Def}}{=} \det(X1_{n\times n} - B^{-1}MB) \overset{\text{Mat}}{=} \det(B^{-1}\cdot(X1_{n\times n} - M)\cdot B)$$
$$\overset{\text{Mult}}{=} \det B^{-1}\cdot\det(X1_{n\times n} - M)\cdot\det B \overset{\text{Com}}{=} P_M$$

Speziell für $M = BA$ erhalten wir die Gleichung $P_{AB} = P_{BA}$.

Satz D5q: charakteristische Polynome

Für jedes Paar quadratischer Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ stimmen die charakteristischen Polynome P_{AB} und P_{BA} überein.

Beweis: Die Abbildungen $f, g : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}[X]^1_n$, $f(B) = P_{AB}$, $g(B) = P_{BA}$ sind stetig und stimmen auf der dichten Menge $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ überein. QED

Paul Halmos, *Finite dimensional vector spaces* (1958), §53, exercise 13.

Übung: Der Satz gilt sogar allgemein über jedem kommutativen Ring.

Über $\mathbb{C}$ sind fast alle Matrizen diagonalisierbar.

Fundamentalsatz der Algebra: Zu $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{C}[X]_n^1$ existieren Nullstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $P = (X - z_1) \cdots (X - z_n)$.

Wir nennen P **separabel**, wenn alle n Nullstellen verschieden sind.

Die **Diskriminante** $\Delta_n(P) := \prod_{i<j}(z_i - z_j)^2$ ist symmetrisch in $z_1, \ldots, z_n$, also ein Polynom in $a_1, \ldots, a_n$. (Hauptsatz der symmetrischen Polynome)

Den Fall $n = 2$ kennen Sie aus der Schule: $\Delta_2(X^2 + pX + q) = p^2 - 4q$

Satz D5R: Fast alle Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Wir nutzen das charakteristische Polynom $\chi_n : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}[X]_n^1$ wie oben und die Diskriminante $\Delta_n : \mathbb{K}[X]_n^1 \to \mathbb{K}$. Beides sind Polynomfunktionen.

(1) Im Raum $\mathbb{K}[X]_n^1 \cong \mathbb{K}^n$ aller Polynome ist die Menge $\Sigma := \Delta_n^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ der separablen Polynome offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

(2) Im Raum $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Menge $S := \chi_n^{-1}(\Sigma) = (\Delta_n \circ \chi_n)^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ der separablen Matrizen offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

(3) In $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Menge D der über $\mathbb{C}$ diagonalisierbaren Matrizen dicht, $\overline{D} = \mathbb{K}^{n\times n}$, ihr Inneres ist die Menge der separablen Matrizen, $D^\circ = S$.

Der Satz von Cayley–Hamilton

☺ Anschaulich: Fast alle Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind separabel, somit über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, separable Matrizen bleiben es bei hinreichend kleiner Störung, nicht-separable werden es nach geeigneter kleiner Störung.

☺ Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) eine Matrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$ wählen, so ist sie mit Wahrscheinlichkeit 100% separabel, somit über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, ebenso alle Matrizen in einer Umgebung. Die verbleibenden Fälle sind so gesehen vernachlässigbar. Die Jordan–Form ist trotzdem wichtig, um *alle* Fälle behandeln zu können; nicht jede Matrix ist zufällig gewählt!

Satz D5s: Cayley–Hamilton

Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ annulliert ihr char. Polynom, kurz $P_A(A) = 0_{n\times n}$.

Beweis: Die Aussage gilt (1) für jede Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, (2) damit dank Konjugations-Invarianz für jede diagonalisierbare Matrix, (3) damit dank Dichtheit D5R für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. QED

☺ Bitte bewundern Sie, wie herrlich einfach manche Argumente werden durch die geschickte Verwendung der Stetigkeit, hier von Polynomen.

Basis einer Topologie

Definition D6A: Basis einer Topologie

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ offener Mengen ist eine **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{S} \,\middle|\, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \right\}$ gilt: Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist Vereinigung geeigneter basisoffener Mengen $B \in \mathcal{B}$.

Beispiele: Jede Topologie $\mathcal{T}$ erlaubt (i.A. viele) Basen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$:

Jeder Raum $(X, \mathcal{T})$ hat als Basen trivialerweise $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. Für jede indiskrete Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ sind dies die beiden einzigen.

Für jeden diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist $\mathcal{B} = \{\, \{x\} \,|\, x \in X \,\}$ eine Basis der Topologie. Hier ist $\mathcal{B}$ die kleinste Basis, also in jeder Basis enthalten.

Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ ist zugleich die Ordnungstopologie. Hier ist $\mathcal{B} = \{\,]a, b[\,|\, a, b \in \mathbb{R} \,\}$ eine Basis, ebenso $\mathcal{B}' = \{\,]a, b[\,|\, a, b \in \mathbb{Q} \,\}$.

Für jeden metrischen Raum (X, d) ist $\mathcal{B} = \{\, B(x, \varepsilon) \,|\, x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$, ebenso $\mathcal{B}' = \{\, B(x, 2^{-n}) \,|\, x \in X,\ n \in \mathbb{N} \,\}$.

Für den euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ ist auch $\{\, B(x, \varepsilon) \,|\, x \in \mathbb{Q}^n,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \,\}$ eine Basis der Topologie, zudem abzählbar (siehe D6H).

Basis einer Topologie

Hilfreiche Sprachkonvention: Wir nennen $U \in \mathcal{T}$ eine **offene Menge** und entsprechend $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine **basisoffene** Menge (bezüglich $\mathcal{B}$).

Proposition D6B: äquivalente Umformulierungen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sind äquivalent:

(1) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist die Vereinigung *geeigneter* $B \in \mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{S} \,\middle|\, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \right\} \quad \text{das heißt} \quad \forall U \in \mathcal{T}\ \exists \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} : U = \bigcup \mathcal{S}.$$

(2) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ ist die Vereinigung *aller* $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$:

$$\forall U \in \mathcal{T} : U = \bigcup \mathcal{S} \quad \text{mit} \quad \mathcal{S} = \{ B \in \mathcal{B} \,|\, B \subseteq U \}.$$

(3) Jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ enthält zu $x \in U$ eine Umgebung $B \in \mathcal{B}$:

$$\forall U \in \mathcal{T}\ \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U.$$

(4) Jeder Punkt x in $(X, \mathcal{T})$ hat als eine Umgebungsbasis das System

$$\mathcal{B}_x = \{ B \in \mathcal{B} \,|\, x \in B \}.$$

Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

Satz D6c: Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

Jede Basis $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ einer Topologie $\mathscr{T}$ auf X hat folgende Eigenschaften:

B1: Es gilt $X = \bigcup \mathscr{B}$.

B2: Zu $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ existiert $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{B}$ mit $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{S}$.

Äquivalent hierzu sind die folgenden lokalen Umformulierungen:

B1': Für jeden Punkt $x \in X$ existiert ein $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B$.

B2': Zu $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ existiert $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Erfüllt umgekehrt ein beliebiges Mengensystem $\mathscr{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ diese Bedingungen, dann ist $\mathscr{B}$ eine Basis der so definierten Topologie

$$\mathscr{T} := \left\{ \bigcup \mathcal{S} \,\middle|\, \mathcal{S} \subseteq \mathscr{B} \right\} = \left\{ U \subseteq X \,\middle|\, \forall x \in U \;\; \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq U \right\}.$$

Nachrechnen: Ist $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ eine Basis der Topologie $\mathscr{T}$, so gilt (O1) $\Rightarrow$ (B1) und (O2) $\Rightarrow$ (B2). Die Äquivalenz (B1) $\Leftrightarrow$ (B1') und (B2) $\Leftrightarrow$ (B2') ist klar. Umgekehrt für $\mathscr{B} \mapsto \mathscr{T}$ gilt: (B1) $\Rightarrow$ (O1), (B2) $\Rightarrow$ (O2), (O3) ist klar. QED

Re/Konstruktion einer Topologie aus einer Basis

Bitte schreiben Sie zur Übung alle genannten Implikationen selbst aus. Prüfen Sie sorgsam, dass Sie Definitionen und Argumente verstehen, angefangen bei den Äquivalenzen (B1) $\Leftrightarrow$ (B1') und (B2) $\Leftrightarrow$ (B2'). Solche Fingerübungen sind zwar leicht, aber dennoch notwendig.

Bei der Konstruktion $\mathscr{B} \mapsto \mathscr{T}$ ist die Implikation (B1) $\Rightarrow$ (O1) klar, lediglich die Implikation (B2) $\Rightarrow$ (O2) ist nicht ganz offensichtlich.

Wir zeigen stattdessen (B2') $\Rightarrow$ (O2): Seien $U_1, U_2 \in \mathscr{T}$ und $U := U_1 \cap U_2$. Zu jedem Punkt $x \in U$ existieren Mengen $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ mit $x \in B_1 \subseteq U_1$ und $x \in B_2 \subseteq U_2$. Dank (B2') existiert hierzu eine Menge $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2 = U$. Das bedeutet $U \in \mathscr{T}$.

Das Axiom (O3) schließlich ist klar nach Konstruktion. Ausführlich: Sei $U_i \in \mathscr{T}$ und $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Zu jedem Punkt $x \in U$ existiert $i \in I$ mit $x \in U_i$, und somit ein $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq U_i \subseteq U$. Das bedeutet $U \in \mathscr{T}$. Nach Konstruktion gilt $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$, somit ist $\mathscr{B}$ eine Basis der Topologie $\mathscr{T}$.

Die Fürstenberg–Topologie

Zur Erheiterung und Allgemeinbildung diskutieren wir als Anwendung Fürstenbergs topologischen Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen: *On the infinitude of primes*, American Mathematical Monthly 62 (1955).

ON THE INFINITUDE OF PRIMES

HARRY FURSTENBERG, Yeshiva University

In this note we would like to offer an elementary "topological" proof of the infinitude of the prime numbers. We introduce a topology into the space of integers S, by using the arithmetic progressions (from $-\infty$ to $+\infty$) as a basis. It is not difficult to verify that this actually yields a topological space. In fact, under this topology, S may be shown to be normal and hence metrizable. Each arithmetic progression is closed as well as open, since its complement is the union of other arithmetic progressions (having the same difference). As a result, the union of any finite number of arithmetic progressions is closed. Consider now the set $A = \bigcup A_p$, where A_p consists of all multiples of p, and p runs through the set of primes $\geqq 2$. The only numbers not belonging to A are -1 and 1, and since the set $\{-1, 1\}$ is clearly not an open set, A cannot be closed. Hence A is not a finite union of closed sets which proves that there are an infinity of primes.

Die Fürstenberg–Topologie

Behauptung: Die Menge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ der Primzahlen ist unendlich. **Beweis:**

(0) Eine **arithmetische Progression** in $\mathbb{Z}$ ist eine Menge der Form

$$P(a,b) = a + b\mathbb{Z} = \{\, a + nb \mid n \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \geq 1.$$

(1) Die Familie $\mathscr{B} = \{\, P(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \geq 1 \,\}$ ist Basis einer Topologie $\mathscr{T}$. Wir prüfen für $\mathscr{B}$ die Basisaxiome direkt nach: (B1') Es gilt $\mathbb{Z} = P(0,1)$. (B2') Für $x \in P(a,b) \cap P(c,d)$ gilt $x \in P(x,bd) \subseteq P(a,b) \cap P(c,d)$.

(2) In der so erzeugten **Fürstenberg–Topologie** $\mathscr{T}$ ist $P(a,b)$ offen und zudem abgeschlossen, denn $\mathbb{Z} \setminus P(a,b) = \bigcup_{0<k<b} P(a+k,b)$.

(3) Jede Zahl $v \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ wird von einer Primzahl $p \in \mathbb{P}$ geteilt. Die Vereinigung $V = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} (p\mathbb{Z})$ hat als Komplement $\mathbb{Z} \setminus V = \{\pm 1\}$.

(4) Wäre die Menge $\mathbb{P}$ endlich, so wäre V zudem abgeschlossen, also $\{-1, +1\}$ offen, was offensichtlich falsch ist. QED

Euklids Beweis ist ebenso instruktiv und zudem konstruktiv. Wiederholen Sie diesen Beweis und vergleichen Sie die beiden!

Erzeugung von Topologien

Satz D6F: Erzeugung einer Topologie

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein beliebiges System von Teilmengen in X. Wir setzen $\mathcal{B} := \left\{ E_1 \cap \dots \cap E_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E} \right\}$ und $\mathcal{T} := \left\{ \bigcup \mathcal{S} \,\middle|\, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \right\}$.

Für $n = 0$ interpretieren wir hier den leeren Durchschnitt als $X \in \mathcal{B}$.
Das System $\mathcal{B}$ erfüllt (B1–2), dank Satz D6C ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X.

Genauer ist $\mathcal{T} =: \tau(\mathcal{E})$ die gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{E}$ enthält;
$\mathcal{T}$ heißt die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie**, $\mathcal{B}$ die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Basis**,
und $\mathcal{E}$ ein **Erzeugendensystem** oder eine **Subbasis** der Topologie $\mathcal{T}$.

In der Linearen Algebra bedeutet „Basis“ erzeugend und minimal.
Für eine Basis der Topologie fordern wir keinerlei Minimalität.

Satz D6G: Stetigkeitskriterium auf einem Erzeugendensystem

Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologischer Räume mit $\mathcal{T}_Y = \tau(\mathcal{E})$ ist genau dann stetig, wenn für alle $U \in \mathcal{E}$ stets $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ gilt.

Übung: Rechnen Sie dies sorgfältig nach, mit Hilfe von Satz E1A.

Erzeugung von Topologien

Beispiele: (0) Für $\mathcal{E} = \emptyset$ erhalten wir $\mathcal{B} = \{X\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.
Für $n = 0$ interpretieren wir den leeren Durchschnitt als $X \in \mathcal{B}$.

(1) Ist $\mathcal{E}$ selbst schon eine Topologie auf X, so gilt $\mathcal{E} = \mathcal{B} = \mathcal{T}$, da stabil unter endlichen Schnitten (O2) und beliebigen Vereinigungen (O3).

(2) Sei $(X, <)$ total geordnet und $\mathcal{E} = \{\,]a, +\infty[, \,]-\infty, b[\mid a, b \in X \,\}$.
Wir erhalten daraus die Basis $\mathcal{B} = \{X\} \cup \mathcal{E} \cup \{\,]a, b[\mid a, b \in X \,\}$
und die Ordnungstopologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_<$ auf der Menge X (D1M).

(3) Jeder Vektor $a \in \mathbb{S}^n$ definiert den zugehörigen offenen Halbraum

$$H_a = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n > a_0 \,\}.$$

Das System $\mathcal{H} = \{\, H_a \mid a \in \mathbb{S}^n \,\}$ erzeugt die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$.
Hierzu genügen bereits für $i = 1, \ldots, n$ und $a \in \mathbb{R}$ die offenen Halbräume $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > a \,\}$ und $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i < a \,\}$, also $\mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ mit $U \in \mathcal{E}$ aus (2).

Beweis: Es gilt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, also $\tau(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Umgekehrt enthält $\tau(\mathcal{H})$ alle offenen Würfel (ℓ^∞–Bälle), also gilt $\tau(\mathcal{H}) \supseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Zur Erinnerung: Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle ℓ^p–Normen äquivalent dank $|x|_\infty \leq |x|_p \leq |x|_1 \leq n \cdot |x|_\infty$.

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom

Definition D6H: das zweite Abzählbarkeitsaxiom (2AA)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **zweitabzählbar**,
wenn die Topologie eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ erlaubt.

Beispiele: Für die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$ bilden die offenen Intervalle die Basis $\mathcal{B} = \{\,]a,b[\,|\,a,b \in \mathbb{R}\,\}$. Mit rationalen Endpunkten erhalten wir hierin die abzählbare Basis $\mathcal{B}' = \{\,]a,b[\,|\,a,b \in \mathbb{Q}\,\}$.

Für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden die offenen Quader die Basis

$$\mathcal{B} = \{\,]a_1,b_1[\times \cdots \times]a_n,b_n[\,\big|\,a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{R}\,\}.$$

Mit rationalen Eckpunkten erhalten wir hierin die abzählbare Basis

$$\mathcal{B}' = \{\,]a_1,b_1[\times \cdots \times]a_n,b_n[\,\big|\,a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{Q}\,\}.$$

Bemerkung: Es gilt 2AA $\Rightarrow$ 1AA dank $\mathcal{B}_x = \{\,B \in \mathcal{B}\,|\,x \in B\,\}$ in D6B(4).
Die Umkehrung gilt nicht, wie wir gleich an Beispielen sehen, etwa D6K.
Zweitabzählbarkeit ist global, Erstabzählbarkeit lokal um jeden Punkt.

Kardinalität einer zweitabzählbaren Topologie

Satz D6I: Kardinalität einer zweitabzählbaren Topologie

(0) Ist $\mathscr{B}$ eine Basis der Topologie $\mathscr{T}$, so erhalten wir die Injektion

$$\Phi : \mathscr{T} \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathscr{B}) : U \mapsto \{ B \in \mathscr{B} \mid B \subseteq U \} \qquad \text{mit Retraktion}$$
$$\Psi : \mathfrak{P}(\mathscr{B}) \twoheadrightarrow \mathscr{T} : \mathcal{S} \mapsto \bigcup \mathcal{S} \qquad \text{denn } \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathscr{T}} \text{ dank D6B.}$$

(1) Ist $\mathscr{B}$ abzählbar, $\mathscr{B} \hookrightarrow \mathbb{N}$, so folgt $\mathrm{card}(\mathscr{T}) \leq \mathrm{card}(\mathbb{R})$, denn

$$\mathscr{T} \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathscr{B}) \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R} \quad \text{dank B2N.}$$

(2) Für die euklidische Topologie $\mathscr{T}$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, gilt $\mathrm{card}(\mathscr{T}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

Beweis: Die Aussagen (0) und (1) sind klar wie im Satz ausgeführt.

(2) Die euklidische Topologie $\mathscr{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt eine abzählbare Basis $\mathscr{B}$, also gilt $\mathscr{T} \hookrightarrow \mathbb{R}$. In Dimension $n \geq 1$ haben wir umgekehrt eine Injektion $\mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow \mathscr{T} : r \mapsto B(0,r)$ mit $r = \mathrm{diam}\, B(0,r)/2$. Dank Cantor–Bernstein B2O erhalten wir eine Bijektion $\mathscr{T} \cong \mathbb{R}$, also $\mathrm{card}(\mathscr{T}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$. QED

⚠ Hingegen ist die diskrete Topologie $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ wesentlich größer als $\mathbb{R}$.

Diskrete Teilmengen und Basen

Aufgabe: In $\mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{Z}^2$ diskret. Geht diskret auch überabzählbar?

Lemma D6J: diskrete Teilmengen und Basen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ diskret und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine Basis. Zu jedem $a \in A$ existiert $U_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap A = \{a\}$. Dazu existiert $B_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in B_a \subseteq U_a$, also $B_a \cap A = \{a\}$. Somit ist $A \hookrightarrow \mathcal{B} : a \mapsto B_a$ injektiv.

Ist $(X, \mathcal{T})$ zweitabzählbar, so ist jede diskrete Teilmenge $A \subseteq X$ abzählbar. Ist $A \subseteq X$ diskret und überabzählbar, so ist $(X, \mathcal{T})$ nicht zweitabzählbar.

Beispiel: Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ ist zweitabzählbar.
Also ist jede diskrete Teilmenge A in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ ist demnach abzählbar.

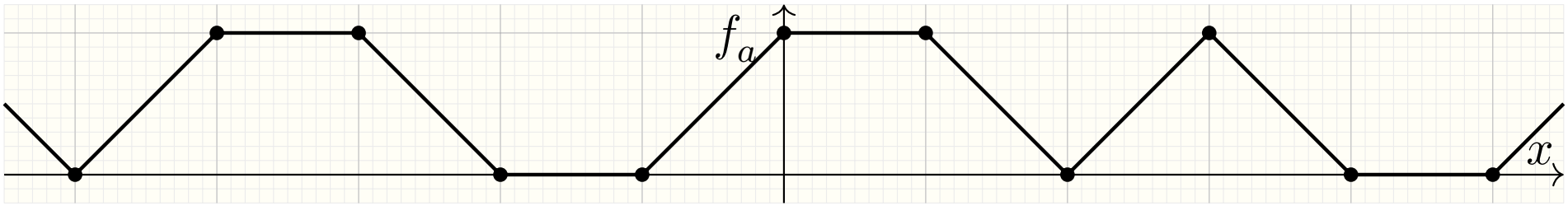
Aufgabe: Es gilt 2AA $\Rightarrow$ 1AA. Gilt auch umgekehrt 1AA $\Rightarrow$ 2AA?

Satz D6K: der Vektorraum $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Supremumsnorm

Der Raum $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist erstabzählbar (D3G), aber nicht zweitabzählbar, denn er enthält eine überabzählbare diskrete Teilmenge $F \subseteq \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.

Beweis: Die Menge $A = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ist überabzählbar, genauer $A \cong \mathbb{R}$ (B2N).
Zu $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ sei $f_a : \mathbb{R} \to [0,1]$ die stückweise affine Interpolation,
also $f_a(x) = (1-t)a_k + ta_{k+1}$ für alle $x = k+t$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in [0,1]$.



Die Zuordnung $A \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) : a \mapsto f_a$ ist injektiv, denn $a = f_a|_{\mathbb{Z}}$.
Mit A ist daher auch $F = \{\, f_a \mid a \in A \,\} \subseteq \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ überabzählbar.

Die Menge F ist diskret in $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm,
denn für $a \neq b$ in A gilt $|f_a - f_b|_{\mathbb{R}} = 1$, also $B(f_a,1) \cap F = \{f_a\}$.

Demnach ist $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nicht zweitabzählbar. Gemäß D6J gilt genauer:
Jede Basis der Topologie ist mindestens so mächtig wie $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. QED

So lernen Sie Mathematik: Definitionen, Sätze, Beweise, Gegen/Beispiele.
Schrittweise wächst Ihr topologisches Repertoire und Ihr Beispielfundus;
damit können Sie grundlegende Fragen wie die obigen beantworten.

Dichte Teilmengen und Separabilität

Definition D6L: separabler topologischer Raum

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält, d.h. es existiert $A \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$.

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist separabel, denn $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar und dicht.

Satz D6M: Zweitabzählbar impliziert separabel.

Ist $(X, \mathcal{T})$ zweitabzählbar, d.h. es existiert eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, so ist $(X, \mathcal{T})$ separabel, d.h. es existiert A abzählbar und dicht in $(X, \mathcal{T})$.

Beweis: Zu jeder Menge $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ wählen wir einen Punkt $a_B \in B$. Mit $\mathcal{B}$ ist auch $A = \{\, a_B \mid B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\} \,\}$ abzählbar. Zudem ist A dicht: Jede offene Menge $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ enthält eine Menge $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, somit gilt $a_B \in B \subseteq U$, also $A \cap U \neq \emptyset$. QED

Aufgabe: Gilt die Umkehrung? **Lösung:** Nein, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ ist separabel dank $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, erfüllt aber nicht 1AA (D4B) / 2AA (D6B).

Dichte Teilmengen und Separabilität

Ausführung: Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dicht ist in der Topologie $\mathcal{T}_{\text{pw}}$ der punktweisen Konvergenz. Zu jeder Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und jeder Umgebung $U = U(f; \{x_1, \dots, x_n\}, \varepsilon)$ existiert zuerst ein reelles Polynom $g = \sum_{k=0}^{n-1} g_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ mit $g(x_i) = f(x_i)$ dank Lagrange–Interpolation. Wir können nun g approximieren durch $h = \sum_{k=0}^{n-1} h_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$\max_{i=1}^{n} |h(x_i) - g(x_i)| \;\leq\; \max_{k=0}^{n-1} |h_k - g_k| \cdot \max_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} |x_i^k| \;\overset{!}{<}\; \varepsilon.$$

Somit gilt $h \in U$, wie gewünscht. Die Teilmenge $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist demnach dicht, zudem abzählbar, also ist unser Raum $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\text{pw}})$ separabel.

⚠ Unterscheide **separabel** und **separiert** (= hausdorffsch, siehe D3J). Leider klingt beides sehr ähnlich, bedeutet aber völlig Verschiedenes.

Anschaulich besagt Zweitabzählbarkeit und ebenso Separabilität, dass die betrachtete Topologie $\mathcal{T}$ gewissermaßen „nicht allzu groß“ ist.

Das werden wir daher in vielen Anwendungen als Bedingung nutzen. Eine erste schöne Anwendungen bietet bereits der obige Satz D6I.

Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Die ersehnte Umkehrung gilt immerhin für alle metrischen Räume:

Satz D6N: Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Sei (X,d) ein metrischer Raum und darin $A \subseteq X$ abzählbar und dicht. Dann erlaubt die metrische Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X die abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{\, B(a,r_k) \,|\, a \in A,\ k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Radien $r_k \searrow 0$, etwa $r_k = 2^{-k}$.

Beispiel: Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt die abzählbaren Basen

$$\{\, B(a,2^{-k}) \,|\, a \in \mathbb{Q}^n,\ k \in \mathbb{N} \,\},$$
$$\{\, B(a,r) \,|\, a \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}_{>0} \,\}.$$

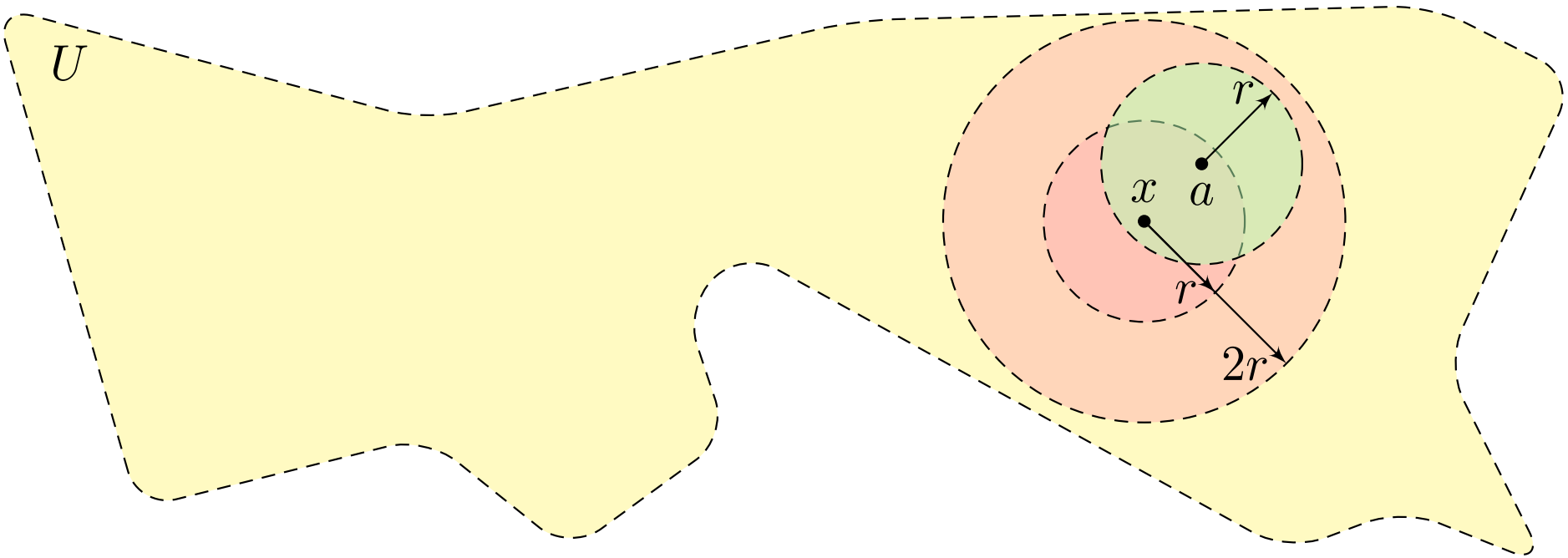
Zweitabzählbarkeit haben wir eingangs gesehen, nun noch schöner. Daraus folgt die Mächtigkeit $\operatorname{card}(\mathcal{T}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$ dank D6I.

Korollar D6O: separabel und zweitabzählbar

Ein metrisierbarer topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist genau dann separabel, wenn er zweitabzählbar ist („$\Rightarrow$“ dank D6N und „$\Leftarrow$“ dank D6M). QED

Metrisch & separabel impliziert zweitabzählbar.

Beweis von D6N: Gegeben ist $\mathscr{B} = \{ B(a, r_k) \mid a \in A,\ k \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathscr{T}_d$.
Für jede offene Menge $U \in \mathscr{T}_d$ behaupten wir $U = \bigcup \{ B \in \mathscr{B} \mid B \subseteq U \}$.
Die Inklusion „$\supseteq$“ ist klar, wir zeigen „$\subseteq$“: Hierzu sei $x \in U$.



Da U offen ist in (X, d), existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.
Dank $r_k \searrow 0$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $r_k < \varepsilon/2$, also $B(x, 2r_k) \subseteq U$.
Da A dicht ist in (X, d), existiert $a \in A \cap B(x, r_k)$.
Somit gilt $x \in B(a, r_k) \subseteq B(x, 2r_k) \subseteq U$.

QED

Erste Beispiele zur Separabilität

Satz D6P: separable Räume stetiger Funktionen

Der Banach–Raum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm ist nicht zweitabzählbar (D6K) und somit auch nicht separabel (D6N).

Hingegen ist $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ separabel und somit zweitabzählbar (D6N): Dank Weierstraß–Approximation ist $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ dicht.

🙂 Auch die ℓ^p–Räume bieten einen reichhaltigen Beispielfundus, an dem Sie Ihre Intuition schulen und Ihre Werkzeuge schärfen:

Satz D6Q: separable ℓ^p–Räume

Sei $1 \leq p < \infty$. Im Banach–Raum $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ ist $D = \mathbb{Q}^{(\Omega)}$ bzw. $(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^{(\Omega)}$ dicht und $\{\,\mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \text{ endlich}\,\}$ diskret. Genau dann ist der Raum $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ separabel und zweitabzählbar, wenn Ω abzählbar ist.

Hingegen ist $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ weder separabel noch zweitabzählbar, denn hierin ist $\{\,\mathbf{1}_A \mid A \subseteq \mathbb{N}\,\}$ überabzählbar und diskret.

Erste Beispiele zur Separabilität

Beweis: Der Raum $\ell^p(\Omega) = \ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ trägt die ℓ^p–Norm $|\text{-}|_p$ (C1L).
Hierin ist D eine dichte Teilmenge (D5K). Ist Ω abzählbar, so auch D.
Dank D6N erfüllt der Raum $\ell^p(\Omega)$ dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Umgekehrt ist $\{\, \mathbf{1}_A \mid A \subseteq \Omega \text{ endlich} \,\}$ diskret. Ist also Ω überabzählbar,
so erfüllt $\ell^p(\Omega)$ nach D6J nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom, und
nach Satz D6N besitzt $\ell^p(\Omega)$ auch keine dichte abzählbare Teilmenge.

Für $p = \infty$ verhält sich der Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ grundlegend anders:
Wir haben die injektive Abbildung $\iota : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N}) : A \mapsto \mathbf{1}_A$.
Das Bild ist überabzählbar und diskret, denn $|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|_\infty = 1$ für $A \neq B$.

Nach D6J erlaubt die Topologie auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ somit keine abzählbare Basis.
Nach D6N besitzt $\ell^\infty(\mathbb{N})$ auch keine dichte abzählbare Teilmenge. QED

☺ So lernen Sie Mathematik: Definitionen, Sätze, Gegen/Beispiele.
Schritt für Schritt wächst Ihr topologisches Repertoire.

Satz D6R: separable Hilbert–Räume

Jeder separable Hilbert–Raum $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist isometrisch zu einem euklidischen Raum $\mathbb{K}^n = \ell^2(\{1, \dots, n\})$ oder zu $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Beweis: Im Falle $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ existiert eine Basis $b_1, \dots, b_n \in V$, dank Gram–Schmidt C1H eine Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n \in V$. Diese ONB stiftet die lineare Isometrie $V \cong \mathbb{K}^n : e_i \leftrightarrows e_i$.

Im Falle $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$ nutzen wir die vorausgesetzte Separabilität: Es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq V$. Gram–Schmidt bildet daraus eine orthonormale Familie $e_0, e_1, e_2, \dots$.

Die Abbildung $f : \ell^2(\mathbb{N}) \to V$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ ist wohldefiniert, da V vollständig ist und somit die angegebene Reihe konvergiert.

Nach Konstruktion ist f linear. Dank Orthonormalität ist f isometrisch und somit injektiv. Der Aufspann $U = \langle e_0, e_1, e_2, \dots\rangle_{\mathbb{K}}$ enthält A, der Abschluss ist also $\overline{U} = V$. Somit ist f surjektiv. QED

Eine schöne Anwendung zur Separabilität

☺ Das ist ein sehr elegantes und auch beruhigendes Ergebnis!

Die euklidischen Räume $\mathbb{K}^n = \ell^2(\{1,\dots,n\})$ und $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ sind recht einfach strukturiert, sehr übersichtlich und uns seit langem vertraut. In diesen „Koordinatenräumen“ können wir wie gewohnt rechnen. Manche nennen sie daher die „kanonischen Hilbert–Räume“.

Der Satz garantiert, dass jeder Hilbert–Raum genau so aussieht – im unendlich-dimensionalen Fall unter der vorsichten Einschränkung, dass der Raum separabel sein soll, also wie gesagt „nicht allzu groß“. Sie sehen hier sehr schön, wie wohltuend alles zusammenwirkt.

Natürlich gibt es auch nicht-separable Hilbert–Räume, etwa $\ell^2(\Omega,\mathbb{K})$ für jede beliebige überabzählbare Menge Ω. Genau hierzu haben wir den vorangegangenen Satz D6Q.

In der Analysis und vielen Anwendungen, insbesondere in der Physik, sind jedoch die separablen Hilbert–Räume besonders interessant, in der Fourier–Theorie etwa $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ oder $\ell^2(\mathbb{Z}^n,\mathbb{K})$.

Offen und dicht bedeutet „fast alles“.

Dichte Mengen sind nicht schnitt-stabil, siehe $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Besser:
Aufgabe: Sind $V_1, \dots, V_n$ offen und dicht in $(X, \mathcal{T})$, so auch $V_1 \cap \dots \cap V_n$.

Lösung: Offen ist klar dank (O2), zu dicht sei $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}$.
Da V_1 in $(X, \mathcal{T})$ dicht und auch offen ist, gilt $\emptyset \neq U \cap V_1 \in \mathcal{T}$.
So fortfahrend erhalten wir induktiv $\emptyset \neq U \cap V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{T}$.

Hingegen geht für *abzählbare* Schnitte $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} V_k$ in $(X, \mathcal{T})$ die Offenheit meist verloren, in günstigen Fällen bleibt die Dichtheit jedoch erhalten.
Diese besondere topologische Eigenschaft verdient einen Namen:

Definition D7B: Baire–Raum

Ein Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Baire–Raum**, wenn für jede Familie $V_1, V_2, V_3, \dots$ offener und dichter Teilmengen in $(X, \mathcal{T})$ auch $V = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$ dicht ist.

Beispiele: Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}X)$, etwa $\mathbb{Z}^n$, ist Baire, denn $V_k = X$.
Für $n \geq 1$ ist $\mathbb{Q}^n$ hingegen kein Baire–Raum, denn $\bigcap_{x\in\mathbb{Q}^n} (\mathbb{Q}^n \setminus \{x\}) = \emptyset$.

Glücklicherweise ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ein Baire–Raum, ebenso jeder vollständig metrisierbare Raum, dank folgendem Satz von Baire.

Satz von Baire

Satz D7c: Baire 1899

Jeder vollständige metrische Raum (X, d) ist ein Baire–Raum, das heißt: Sind $V_1, V_2, V_3, \ldots$ offen und dicht in (X, d), so ist auch $V = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$ dicht.

Beweis: Zu $a_0 \in X$ und $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ zeigen wir $B(a_0, r_0) \cap V \neq \emptyset$. Sei $k \geq 1$. Da V_k in $(X, \mathcal{T})$ dicht und offen ist, gilt $\emptyset \neq V_k \cap B(a_{k-1}, r_{k-1}) =: U_k \in \mathcal{T}$. Wir wählen $a_k \in U_k$ und $r_k \in \,]0, r_{k-1}/2]$ mit $\bar{B}(a_k, r_k) \subseteq B(a_k, 2r_k) \subseteq U_k$.

Wir erhalten:

$$\begin{array}{ccccccc} & V_1 & & V_2 & & V_3 & \\ & \cup\!| & & \cup\!| & & \cup\!| & \\ B(a_0, r_0) & \supseteq & B(a_1, r_1) & \supseteq & B(a_2, r_2) & \supseteq & B(a_3, r_3) \supseteq \ldots \quad \text{mit } r_k \searrow 0 \end{array}$$

Für alle $k \geq n$ gilt $a_k \in B(a_n, r_n)$. Somit ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge. Dank Vollständigkeit von (X, d) existiert $a \in X$ mit $a_k \to a$ für $k \to \infty$. Es folgt $a_k \to a \in \bar{B}(a_n, r_n) \subseteq U_n \subseteq V_n$, also $a \in B(a_0, r_0) \cap V$. QED

Beispiel: Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist nicht abzählbare Vereinigung von Geraden A_k; die Komplemente $V_k := \mathbb{R}^2 \setminus A_k$ sind offen und dicht, also $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$ dicht. Anders als $\mathbb{Q}^n$ ist $\mathbb{R}^n$ nicht abz. Vereinigung affiner Teilräume $A_k \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Anwendung: die Banach–Dimensionslücke

Mit der ℓ^p–Norm ist $\mathbb{R}[x]_{<n} \cong \mathbb{R}^n$ vollständig, doch $\mathbb{R}[x] \cong \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ nicht.
Aufgabe: Ist der Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ aller Polynome vollständig normierbar?

Satz D7D: die Dimensionslücke bei Banach–Räumen

Die Dimension jedes Banach–Raums ist endlich oder überabzählbar.

Beweis: Sei $(V, |\text{-}|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum mit abz. Basis $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Für $A_k := \langle b_0, \dots, b_k \rangle_{\mathbb{K}}^{!}$ gilt $V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ sowie $\overline{A_k} = A_k$ und $A_k^\circ = \emptyset$.
Das Komplement $V_k := V \setminus A_k$ ist offen und dicht und $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} V_k = \emptyset$.
Nach dem Satz von Baire ist $(V, |\text{-}|)$ nicht vollständig. QED

Eine Teilmenge A in $(X, \mathcal{T})$ mit $\overline{A}^\circ = \emptyset$ heißt **nirgends dicht**, das heißt, $B = X \setminus A$ enthält mit $B^\circ = X \setminus \overline{A}$ eine offene dichte Teilmenge, $\overline{B^\circ} = X$.

Jede abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen heißt **mager** (von erster Baire–Kategorie); das Komplement heißt **komager** (oder **residuell**).
Ist eine Menge nicht mager, so heißt sie **fett** (zweite Baire–Kategorie).

Beispiele: In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$ mager, somit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ komager und fett.
Die Menge $\mathbb{R}$ ist fett in $\mathbb{R}$, aber mager in $\mathbb{C}$. Es kommt auf den Raum an!

Interpretation als Baire–Maß

Mager ist stabil bezüglich Teilmengen und abzählbaren Vereinigungen. Auf jedem Raum $(X, \mathcal{T})$ erhalten wir daher das σ–additive **Baire–Maß**

$$\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty] : M \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } M \text{ mager in } (X, \mathcal{T}) \text{ ist,} \\ \infty & \text{sonst, } M \text{ ist fett in } (X, \mathcal{T}). \end{cases}$$

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Baire–Raum, so gilt $\mu(V) > 0$ für alle $V \subseteq X$ mit $V^\circ \neq \emptyset$. Gilt zudem $X \neq \emptyset$, so ist eine komagere Teilmenge $C \subseteq X$ nicht mager, andernfalls wäre ganz $X = C \sqcup (X \setminus C)$ mager, ein Widerspruch.

Übung D7G: Baire und Lebesgue sind orthogonal.

Für $n \geq 1$ ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n = M \sqcup N$ disjunkte Vereinigung einer Baire–mageren Menge M und einer Lebesgue–Nullmenge N.

Beweis: Sei $\mathbb{Q}^n = \{ q_i \mid i \in \mathbb{N} \}^!$. Dann ist $U_k = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(q_i, 2^{-i-1}/k)$ offen und dicht und hat Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_n(U_k) \leq 2/k$. Der abzählbare Schnitt $N = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ hat demnach Lebesgue–Maß $\mathrm{vol}_n(N) = 0$, ist aber dennoch komager. Sein Komplement $M = \mathbb{R}^n \setminus N$ ist also mager. QED

Borel–Mengen, zunächst G_δ und F_σ

Offene Mengen sind stabil unter *endlichen* Schnitten, abgeschlossene stabil unter *endlichen* Vereinigungen. Abzählbar gilt dies nicht mehr:

$$[a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a-2^{-n}, b+2^{-n}[, \qquad \bar{B}(a,r) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(a,r+2^{-n})$$
$$]a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+2^{-n}, b-2^{-n}], \qquad B(a,r) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(a,r-2^{-n})$$

Definition D7h: G_δ und F_σ

In $(X,\mathcal{T})$ ist eine **G_δ–Menge** abzählbarer Durchschnitt offener Mengen, eine **F_σ–Menge** ist abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen.

Beispiel: In jedem metrischen Raum (X,d) gilt dank Proposition C3n:

$$A \in \mathcal{T}_d^c \implies A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\, x\in X \mid d(x,A) < 2^{-n} \,\} \quad \text{ist } G_\delta$$
$$U \in \mathcal{T}_d \implies U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\, x\in X \mid d(x, X\setminus O) \geq 2^{-n} \,\} \quad \text{ist } F_\sigma$$

Der Buchstabe F steht für *abgeschlossen* (frz. *fermé*) und σ für abzählbare Vereinigung (*Summe*). Entsprechend steht G für *offen* (*Gebiet*) und δ steht für abzählbaren Durchschnitt. Diese Bezeichnungen sind traditionell.

Borel–Mengen, zunächst G_δ und F_σ

Das Komplement jeder F_σ–Menge ist eine G_δ–Menge und umgekehrt. Die G_δ–Mengen in $(X, \mathcal{T})$ sind stabil unter abzählbaren Schnitten und endlichen Vereinigungen: Für alle offene Mengen $G_{i,j} \in \mathcal{T}$ gilt

$$\bigcap_{i=0}^{\infty}\left[\bigcap_{j=0}^{\infty} G_{i,j}\right] = \bigcap\left\{ G_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\},$$
$$\bigcup_{i=0}^{n}\left[\bigcap_{j=0}^{\infty} G_{i,j}\right] = \bigcap\left\{ G_{0,j_0} \cup \cdots \cup G_{n,j_n} \,\middle|\, (j_0,\dots,j_n) \in \mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}\right\}.$$

Die F_σ–Mengen in $(X, \mathcal{T})$ sind stabil unter abzählbaren Vereinigungen und endlichen Schnitten: Für alle abgeschlossenen Mengen $F_{i,j} \in \mathcal{T}^c$ gilt

$$\bigcup_{i=0}^{\infty}\left[\bigcup_{j=0}^{\infty} F_{i,j}\right] = \bigcup\left\{ F_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\},$$
$$\bigcap_{i=0}^{n}\left[\bigcup_{j=0}^{\infty} F_{i,j}\right] = \bigcup\left\{ F_{0,j_0} \cap \cdots \cap F_{n,j_n} \,\middle|\, (j_0,\dots,j_n) \in \mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}\right\}.$$

Allerdings sind F_σ–Mengen nicht stabil unter *abzählbaren* Schnitten. Durch abzählbare Schnitte von F_σ–Mengen erhält man die $F_{\sigma\delta}$–Mengen. Durch abzählbare Vereinigungen $F_{\sigma\delta}$–Mengen erhält man dann die $F_{\sigma\delta\sigma}$–Mengen, usw. Ebenso gewinnt man aus den G_δ–Mengen durch abzählbare Vereinigungen die $G_{\delta\sigma}$–Mengen, dann $G_{\delta\sigma\delta}$–Mengen usw.

Abzählbare Mengenoperationen: σ–Algebren

Definition D7ı: σ–Algebra

Eine **σ–Algebra** auf einer Menge X ist ein System $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, für das gilt:
σ1: Es gilt $X \in \mathscr{A}$, und aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $X \setminus A \in \mathscr{A}$.
σ2: Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ gilt $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$.

Beispiel: Auf der σ–Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ aller Lebesgue–messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir das Lebesgue–Maß $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty] : A \mapsto \mathrm{vol}_n(A)$.

Proposition D7ȷ: erzeugte σ–Algebra

Ist $\mathscr{A}_\lambda \subseteq \mathfrak{P}(X)$ für $\lambda \in \Lambda$ eine σ–Algebra auf X, so auch $\mathscr{A} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{A}_\lambda$.
So erzeugt jedes Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ die zugehörige σ–Algebra

$$\sigma(X,\mathcal{E}) := \bigcap \big\{ \mathscr{A} \,\big|\, \mathcal{E} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(X) \text{ und } \mathscr{A} \text{ ist eine } \sigma\text{–Algebra auf } X \big\}.$$

Nach Konstruktion ist dies die kleinste σ–Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält.

Beweis: Eigenschaften (σ1–2) übertragen sich sofort von $\mathscr{A}_\lambda$ auf $\mathscr{A}$.
Beispiel: Zum Raum $(X,\mathcal{T})$ ist $\sigma(X,\mathcal{T}) \subseteq \mathfrak{P}(X)$ die **Borel–σ–Algebra**.

Abzählbare Mengenoperationen: σ–Algebren

Die Borel–σ–Algebra $\sigma(X,\mathcal{T})$ wird erzeugt von den offenen Mengen, $\mathcal{T}$, von den abgeschlossenen, $\mathcal{T}^c$, und vielen weiteren Mengensystemen. Erste Schritte von $\mathcal{T}$ zu $\sigma(X,\mathcal{T})$ sind die oben beschriebenen Mengen vom Typ F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$, etc. Diese Konstruktion durch *Ausschöpfung* erfordert überabzählbar viele Schritte bis zur Stabilität. Proposition D7J erreicht dieselbe Konstruktion durch *Eingrenzung* auf einen Schlag.

Die Borel–Mengen sind zwar bereits schwindelerregend allgemein, doch $\sigma(X,\mathcal{T})$ bleibt erstaunlich klein: Die euklidische Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$ (D6I). Diese wird nicht erhöht durch abzählbare Operationen, und so hat schließlich auch $\sigma(\mathbb{R}^n,\mathcal{T})$ die Kardinalität von $\mathbb{R}$. Hingegen ist die Menge $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)\cong 2^{\mathbb{R}}$ aller Teilmengen wesentlich größer! Schon die σ–Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ aller Lebesgue–messbaren ist gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{R})\cong 2^{\mathbb{R}}$; sie enthält alle Teilmengen der Cantor–Menge $C\cong\mathbb{R}$.

In diesem Sinne sind „die allermeisten“ $M\subseteq\mathbb{R}^n$ keine Borel–Mengen. Die Borel–Hierarchie erlaubt induktiv ein Mindestmaß an Kontrolle. Dies wollen wir in den folgenden Beispielen illustrieren.

Beispiel für nicht G_δ

Übung D7κ:

In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ keine G_δ–Menge (abzählbarer Durchschnitt offener Mengen).

Lösung: Wäre $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ mit $U_n \subseteq \mathbb{R}$ offen, dann wäre U_n dicht in $\mathbb{R}$, also komager, somit auch $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Doch in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ mager. QED

Erinnerung: Jede komagere Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ ist fett, also nicht mager, sonst wäre $\mathbb{R} = C \sqcup (\mathbb{R} \setminus C)$ mager, doch das widerspricht Baires Satz D7c.

Alternative: Sei $\mathbb{Q} = \{\, q_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}^!$ eine Abzählung. Auch $U'_n = U_n \setminus \{q_n\}$ ist offen und dicht in $\mathbb{R}$, doch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U'_n = \emptyset$ widerspricht Baires Satz D7c.

Damit können wir die folgende Frage (c) beantworten: Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Stetigkeitsmenge S_f eine G_δ–Menge (D7ʟ), also $S_f \neq \mathbb{Q}$. Diese scheinbar einfache Frage erfordert eine erstaunlich tiefsinnige Untersuchung. Dies ist der Beginn der *deskriptiven Mengenlehre*.

📖 J.C. Oxtoby: *Measure and Category.* Springer 2012.
A.S. Kechris: *Classical Descriptive Set Theory.* Springer 1995.

Welche Stetigkeitsmengen sind möglich?

Aufgabe: Existiert $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig genau in (a) $\emptyset$? (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? (c) $\mathbb{Q}$?

Lösung: (a) Ja, die Dirichlet–Funktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (b) Ja, die kleine Dirichlet–Funktion $f(p/q) = 1/q$ für $p/q \in \mathbb{Q}$ gekürzt, sonst $f(x) = 0$.
Frage (c) ist härter und erfordert einen anderen, obstruktiven Ansatz:

Satz D7L: Jede Stetigkeitsmenge S_f ist G_δ.

Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine beliebige Abbildung metrischer Räume. Dann ist $S_f := \{\, a \in X \mid f \text{ ist stetig im Punkt } a \,\}$ eine G_δ–Menge.

Beweis: Wir definieren die **Oszillation** von f im Punkt $a \in X$ durch

$$\omega(a) := \inf_{\delta>0} \operatorname{diam} f(B(a,\delta)).$$

Genau dann ist f stetig in a, wenn $\omega(a) = 0$ gilt. Wir haben also

$$S_f = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \{\, a \in X \mid \omega(a) < 2^{-n} \,\}.$$

Die letzteren Mengen sind offen: Gilt $\omega(a) < \varepsilon$, so existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\operatorname{diam} f(B(a,\delta)) < \varepsilon$. Für alle $x \in B(a,\delta)$ folgt daraus $\omega(x) < \varepsilon$. QED

Baire–Osgood: Stetigkeit nach punktweiser Konvergenz

Aufgabe: Ist $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ punktweiser Limes stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Lösung: Die Dirichlet–Funktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nirgends stetig.
Nach dem folgenden Satz von Baire–Osgood ist das zu wenig Stetigkeit.
(Für die kleine Dirichlet–Funktion hingegen gelingt es. Übung!)

Satz D7M: Baire–Osgood

Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, zudem (X, d) vollständig.
Seien $(f_n : X \to Y)_{n \in \mathbb{N}}$ stetig mit punktweisem Grenzwert $f_n \to f$.
Dann ist $S_f \subseteq X$ komager, also f „fast überall“ stetig.

Erinnerung (C3Q): Bei gleichmäßiger Konvergenz $f_n \to f$ gilt $S_f = X$.
Bei punktweiser Konvergenz geht Stetigkeit im Allgemeinen verloren,
doch erstaunlich viel bleibt erhalten, denn $S_f \subseteq X$ ist komager.

Beispiel: Die Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergieren
punktweise gegen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$.
Hier ist $S_f = [0, 1[$ komager in $[0, 1]$, wie von Baire–Osgood vorhergesagt.

Baire–Osgood: Stetigkeit nach punktweiser Konvergenz

Beweis: Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir $F := \{\, a \in X \,|\, \omega(a) \geq 5\varepsilon \,\}$. Wir haben oben gesehen, dass F abgeschlossen ist. Wir zeigen, dass F nirgends dicht ist, also $F^\circ = \emptyset$. Damit ist $X \setminus S_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\, a \in X \,|\, \omega(a) \geq 2^{-n} \,\}$ mager.

(0) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist $C_n := \bigcap_{i,j\geq n} \{\, x \in X \,|\, e(f_i(x), f_j(x)) \leq \varepsilon \,\}$ in (X,d) abgeschlossen. Es gilt $C_n \subseteq C_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$: Dank punktweiser Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ in (Y,e) ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge.

(1) Wir nehmen an, F° wäre nicht leer, somit auch nicht mager in (X,d). Dank $F^\circ = \bigcup_n (F^\circ \cap C_n)$ existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\emptyset \neq F^\circ \cap C_n^\circ =: U$. (Andernfalls wäre $F^\circ \cap C_n$ nirgends dicht in F° und somit F° mager. Das widerspricht Baires Satz, siehe hierzu die nachfolgende Aufgabe.)

(2) Für alle $x \in U$ gilt $e(f_n(x), f(x)) = \lim_{k\to\infty} e(f_n(x), f_k(x)) \leq \varepsilon$. Die Funktion f_n ist stetig: Zu jedem $a \in U$ existiert also ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $e(f_n(a), f_n(x)) \leq \varepsilon$ für alle $x \in B(a,\delta)$ gilt.

(3) Dank Dreiecksungleichung folgt $e(f_n(a), f(x)) \leq 2\varepsilon$ für alle $x \in B(a,\delta)$, also $\omega(a) \leq 4\varepsilon$. Das widerspricht $a \in B(a,\delta) \subseteq U \subseteq F$. QED

Offen in Baire ist Baire.

Die Baire–Eigenschaft vererbt sich auf offene Teilräume. Das hilft im vorigen Beweis und auch sonst häufig, daher führen wir dies nun aus:

Aufgabe: Ist $Y \subseteq X$ offen und $(X, \mathcal{T})$ ein Baire–Raum, so auch $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Lösung: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n \subseteq Y$ offen und dicht im Teilraum $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wir zeigen, dass die Schnittmenge $U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht ist in $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Dank $Y \in \mathcal{T}$ gilt $U_n \in \mathcal{T}$ und $V_n := U_n \cup (X \setminus \overline{Y}) \in \mathcal{T}$. Zudem ist V_n dicht in $(X, \mathcal{T})$: Für $\emptyset \neq O \in \mathcal{T}$ gilt entweder $O \cap Y = \emptyset$, somit $O \subseteq X \setminus \overline{Y}$, oder $\emptyset \neq O \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, somit $O \cap Y \cap U_n \neq \emptyset$, also jedenfalls $O \cap V_n \neq \emptyset$.

Nach Voraussetzung ist $(X, \mathcal{T})$ ein Baire–Raum, also ist die Schnittmenge $V := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cup (X \setminus \overline{Y})$ dicht in $(X, \mathcal{T})$. Jede offene Menge $O \in \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$ schneidet also V. Da O und $X \setminus \overline{Y}$ disjunkt sind, schneidet O demnach $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Das bedeutet, U ist dicht in $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Die Baire–Eigenschaft vererbt sich nicht auf abgeschlossene Teilräume!
Übung: In $\mathbb{C}$ hat der Teilraum $H = \mathbb{C}_{\mathrm{im}>0}$ die Baire–Eigenschaft, daher auch $X = H \cup \mathbb{Q}$, der darin abgeschlossene Teilraum $\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

Baire: Differenzierbarkeit ist selten.

☺ „Fast jede“ stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist nirgends differenzierbar: Auf $I = [0,1]$ betrachten wir dazu den Raum $\mathscr{C}(I) = \{\, f : I \to \mathbb{R} \text{ stetig} \,\}$ aller stetigen reellen Funktionen mit der Supremumsnorm. Darin sei

$$A_n := \big\{\, f \in \mathscr{C}(I) \,\big|\, \exists x \in I \;\; \forall y \in B(x, 2^{-n}) \;:\; |f(x) - f(y)| \leq n|x - y| \,\big\}.$$

Ist f in irgendeinem Punkt $x \in I$ diff'bar, so gilt $f \in A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Aufgabe: Jede Menge A_n ist (a) abgeschlossen und (b) nirgends dicht. Somit ist A mager in $\mathscr{C}(I)$: „Fast keine“ stetige Funktion ist diff'bar.

☺ Diese Abschätzung liefert einen Überblick und beweist erneut die Existenz stetiger Funktionen, die nirgends diff'bar sind. Dabei wird allerdings kein einziges konkretes Beispiel konstruiert. Eine elegante Konstruktion liefert Takagi C6A mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} d(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$.

Vergleichen Sie dies mit Cantors elegant-abstraktem Existenzbeweis „fast alle reellen Zahlen sind transzendent“ und dagegen mühsam-explizite Transzendenzbeweise für einzelne Zahlen, etwa für $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$.

Corominas–Sunyer: Charakterisierung reeller Polynome

📖 E. Corominas, F. Sunyer: *Sur des conditions pour qu'une fonction infiniment dérivable soit un polynôme.* CRAS 238 (1954) 558–559.

Aufgabe: Für jede glatte Funktion $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gilt:

$$f \in \mathbb{R}[x] \overset{\text{(a)}}{\iff} \exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0$$
$$\overset{\text{(b)}}{\iff} \forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = 0$$

Lösung: (a) „⇒“: Für $f \in \mathbb{R}[X]_{<n}$ gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k x^k$, also $\partial^n f = 0$.
„⇐“: Dies folgt aus dem Satz von Taylor durch Verschwinden des Rests.

(b) Die Implikation „⇒“ ist trivial, formal durch Quantorentausch.
Erstaunlich ist die Umkehrung „⇐“, sie ist höchst raffinierte Kunst.

(1) Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A_n := \{\, x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) = 0 \,\}$ abgeschlossen.
Für das Innere gilt $A_n^\circ = \bigcup_{i \in I_n}]s_i, t_i[$ mit $[s_i, t_i] \cap [s_j, t_j] = \emptyset$ für $i \neq j$.

(2) Wir haben $A_n^\circ \subseteq A_{n+1}^\circ$, dabei kommen disjunkte Intervalle hinzu.
Es genügt, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^\circ = \mathbb{R}$ zu zeigen: Dann gilt $A_n^\circ \neq \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $A_n^\circ = \mathbb{R}$, sonst erschienen Randpunkte $x \in \delta A_n^\circ$ nicht in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^\circ = \mathbb{R}$.

Corominas–Sunyer: Charakterisierung reeller Polynome

Wir wollen zeigen, dass die Menge $X := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ$ leer ist.

(3) Zunächst ist X abgeschlossen und ohne isolierte Punkte. Wir wenden Baires Satz D7c auf X an: Nach Voraussetzung gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$, also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \cap A_n)$. Demnach muss für ein $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X \cap A_n$ nicht-leeres Inneres in X haben. Das heißt $\emptyset \neq X \cap J \subseteq X \cap A_n$ für ein Intervall $J =]a, b[$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$, also $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in X \cap J$.

(4) Da alle $x \in X \cap J$ Häufungspunkte sind, folgt $f^{(k)}(x) = 0$ für $k \geq n$ per Induktion durch $f^{(k+1)}(x) = \lim_{x'\to x}(f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x'))/(x - x')$.

(5) Unser Intervall J enthält auch Intervalle K komplementär zu X. Dort gilt $f^{(m)}|_K = 0$ für ein m abhängig von K. Für $m \leq n$ gilt $f^{(n)}|_K = 0$. Für $m > n$ gilt $f^{(n)}(x) = \ldots = f^{(m)}(x) = 0$ an den Endpunkten, denn diese gehören zu $J \cap X$. Durch Integration gelangen wir von $f^{(m)}|_K = 0$ zu $f^{(n)}|_K = 0$. Dies gilt für jedes Intervall K in $J \setminus X$, also schließlich $f^{(n)}|_J = 0$. Somit gilt $J \subseteq A_n$ und $J \cap X = \emptyset$, ein Widerspruch.

🙂 Die Äquivalenz (b) scheint unglaublich, ist aber wahr. Ihr Beweis ist ein Lehrstück mathematischen Scharfsinns und technischer Virtuosität.

Kapitel E

Topologische Konstruktionen

Mathematics is security. Certainty. Truth. Beauty. Insight.
Structure. Architecture. I see mathematics, the part of human knowledge
that I call mathematics, as one thing — one great, glorious thing.
Whether it is differential topology, or functional analysis,
or homological algebra, it is all one thing.

Paul R. Halmos (1916–2006)

Inhalt dieses Kapitels E

1. Teilräume $A \subseteq X$ und Einbettungen $X \hookrightarrow Y$
2. Quotientenräume X/R und Identifizierungen $X \twoheadrightarrow Y$
3. Summen $X \sqcup Y$ und $\coprod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume
4. Produkte $X \times Y$ und $\prod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume
5. Trennungsaxiome und Metrisierung
6. Geometrische Anwendungen
7. Topologische Gruppen

Ausblick und Motivation

Dieses Kapitel folgt dem Leitmotiv: „Neue Räume aus alten!“
Dazu diskutieren wir die vier Grundrechenarten der Topologie:

§E1 Teilräume $A \subseteq X$ eines topologischen Raumes

§E2 Quotienten X/R eines topologischen Raumes

§E3 Summen $X \sqcup Y$ und $\coprod_{i\in I} X_i$ topologischer Räume

§E4 Produkte $X \times Y$ und $\prod_{i\in I} X_i$ topologischer Räume

Pars pro toto: Wir nutzen zunehmend freizügig die Abkürzung „der Raum X“ wo wir vollständig „der Raum $(X, \mathcal{T})$“ sagen müssten. Die implizit gemeinte Topologie $\mathcal{T}$ auf der Grundmenge X muss dann jeweils aus dem Kontext klar und unmissverständlich hervorgehen.

Für metrische Räume haben wir Teilräume (C2E) und Summen (C2F).
An Quotienten und Produkten hingegen scheitern Metriken meist (E4V).
Für topologische Räume gelingen einheitlich alle vier Konstruktionen!
Abschließend klären wir Metrisierung in §E5: Aus dem Fortsetzungssatz von Tietze (E5N) erhalten wir den Metrisierungssatz von Urysohn (E5R).

Ausblick und Motivation

Aus alten Räumen, die wir bereits hergestellt haben, wollen wir neue Räume konstruieren, die die jeweils gewünschten Eigenschaften haben. Parallel dazu konstruieren wir stetige Funktionen. Aus den Definitionen von Teilraum, Quotient, Summe und Produkt folgt sofort die zugehörige universelle Abbildungseigenschaft (UAE) in Form einer Faktorisierung. Diese abstrakte Charakterisierung ist ein erstes praktisches Werkzeug.

Stetiges Verkleben E1P ist ein universelles Werkzeug zur Konstruktion stetiger Abbildungen. Wir klären damit in befriedigender Weise, wann *stückweise definierte* Funktionen stetig sind. Tietzes Fortsetzungssatz E5N kommt bescheiden daher, doch entfaltet oft eine erstaunliche Wirkung. Zur Illustration führe ich in §E6 erste geometrische Anwendungen vor.

Abschließend betrachten wir kurz topologische Gruppen. Topologische und algebraische Grundbegriffe arbeiten hier wunderbar zusammen und stärken sich gegenseitig. Hier können wir all unsere Techniken erproben und schärfen. Dieses wunderschöne Thema verdient eigentlich eine eigene Vorlesung, doch ich will es hier in §E7 zumindest bewerben.

Erinnerung: Ur/Bilder und Mengenoperationen

Satz E1A: Ur/Bilder und Mengenoperationen

Sei $f : X \to Y$. Für alle $A, A', A_i \subseteq X$ und $B, B', B_i \subseteq Y$ mit $i \in I \neq \emptyset$ gilt:

$$f^* : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X) \text{ Urbild} \qquad f_* : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y) \text{ Bild}$$

$$B \mapsto f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}, \qquad A \mapsto f(A) := \{f(x) \mid x \in A\},$$

$$B \subseteq B' \implies f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B'), \qquad A \subseteq A' \implies f(A) \subseteq f(A'),$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(Y) = X, \qquad f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(X) \ddot{\subseteq} Y,$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \dot{\subseteq} \bigcap_{i\in I} f(A_i),$$

$$f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B'), \qquad f(A \setminus A') \dot{\supseteq} f(A) \setminus f(A'),$$

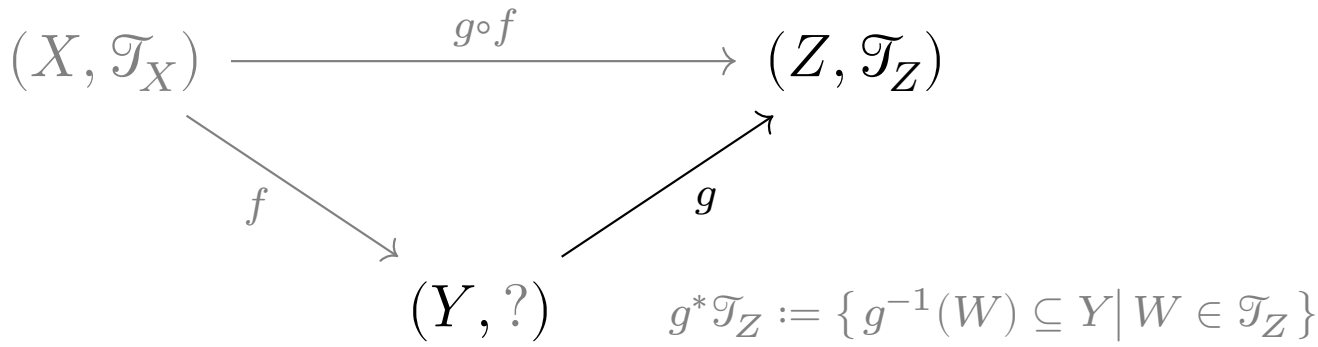
$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \ddot{\subseteq} B, \qquad f^{-1}(f(A)) \dot{\supseteq} A.$$

Für jede injektive / surjektive Abbildung f gilt statt „$\dot{\subseteq}$“ / „$\ddot{\subseteq}$“ stärker „$=$“.

Übung: Erinnern Sie sich an Ihr erstes Semester? Schön war die Zeit!

Initiale und finale Topologie

Wir transportieren Topologien durch Abbildungen vom Ziel zum Start:



Definition E1B: initiale Topologie / Zurückziehen / *pull back*

(1) Jede Abbildung $g : Y \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ definiert auf Y die **initiale Topologie**

$$g^*\mathcal{T}_Z := \{ g^{-1}(W) \subseteq Y \,|\, W \in \mathcal{T}_Z \}.$$

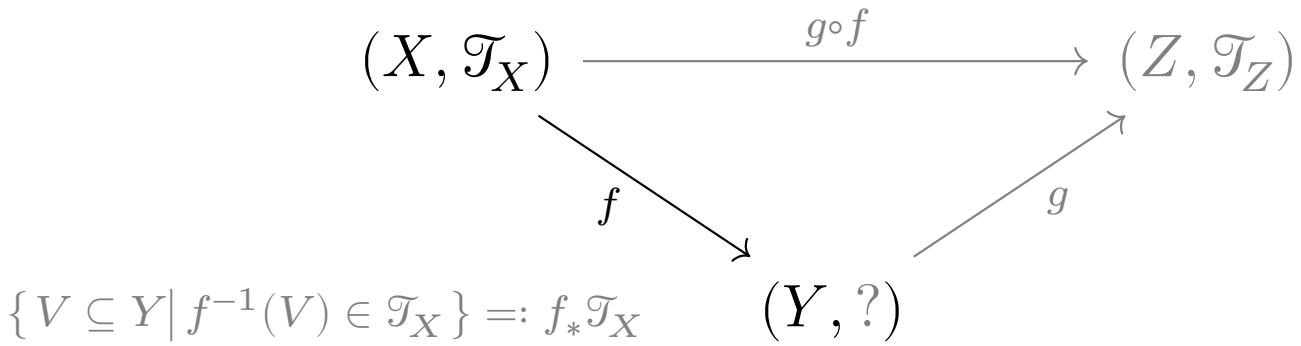
(1a) Genau dann ist $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \supseteq g^*\mathcal{T}_Z$. (D2A)
Demnach ist $g^*\mathcal{T}_Z$ die gröbste Topologie auf Y, für die g stetig ist. (D1F)

(1b) Eine Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, g^*\mathcal{T}_Z)$ stetig ist. (UAE)

Aufgabe: Rechnen Sie (a) und (b) sorgsam nach, siehe folgende Skizze.

Initiale und finale Topologie

Wir transportieren Topologien durch Abbildungen vom Start zum Ziel:



Definition E1B: finale Topologie / Vorschieben / *push forward*

(2) Jede Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to Y$ definiert auf Y die **finale Topologie**

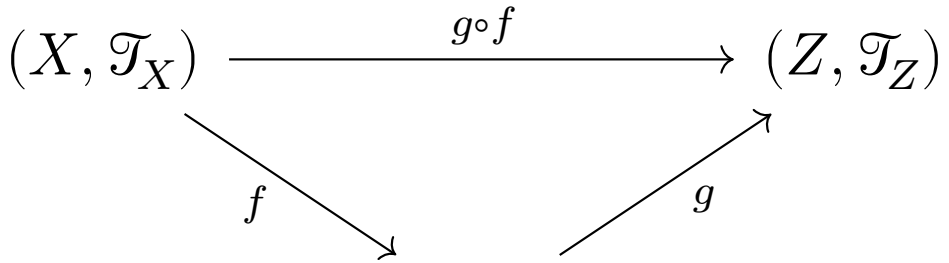
$$f_* \mathcal{T}_X := \{ V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \}.$$

(2a) Genau dann ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \subseteq f_* \mathcal{T}_X$. (D2A)
Demnach ist $f_* \mathcal{T}_X$ die feinste Topologie auf Y, für die f stetig ist. (D1F)

(2b) Eine Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $g : (Y, f_* \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig ist. (UAE)

Aufgabe: Rechnen Sie (a) und (b) sorgsam nach, siehe folgende Skizze.

Initiale und finale Topologie



Beweis: Dies sind tatsächlich Topologien dank des vorigen Satzes E1A. Die Aussagen (a) sind trivial, da direkte Umformulierung der Definition.

(1b) Ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, g^* \mathcal{T}_Z)$ stetig, so auch $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ als Komposition (D2B) mit der stetigen Abbildung $g : (Y, g^* \mathcal{T}_Z) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$.

Ist umgekehrt $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, so gilt für jedes $W \in \mathcal{T}_Z$ stets $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{T}_X$. Jede offene Menge $V \in g^* \mathcal{T}_Z$ ist von der Form $V = g^{-1}(W)$ für ein $W \in \mathcal{T}_Z$, also gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$, somit ist f stetig.

(2b) Ist $g : (Y, f_* \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, so auch $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ als Komposition mit der stetigen Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, f_* \mathcal{T}_X)$.

Ist umgekehrt $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig, so gilt für jedes $W \in \mathcal{T}_Z$ stets $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{T}_X$, also $g^{-1}(W) \in f_* \mathcal{T}_X$, somit ist g stetig. QED

Teilräume und initiale Topologie

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $\iota_A : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ die Inklusion einer Teilmenge $A \subseteq X$. Die **Teilraumtopologie** von A in $(X, \mathcal{T}_X)$ ist

$$\mathcal{T}_A := \left\{ A \cap U = \iota_A^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \mathcal{T}_X \right\} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X.$$

Wir nennen $(A, \mathcal{T}_A)$ den **Teilraum** von $(X, \mathcal{T}_X)$ auf der Teilmenge $A \subseteq X$. Seine Topologie $\mathcal{T}_A = \iota_A^* \mathcal{T}_X$ ist die initiale Topologie bezüglich ι_A (E1B), also die gröbste Topologie auf A, für die $\iota_A : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ stetig ist.

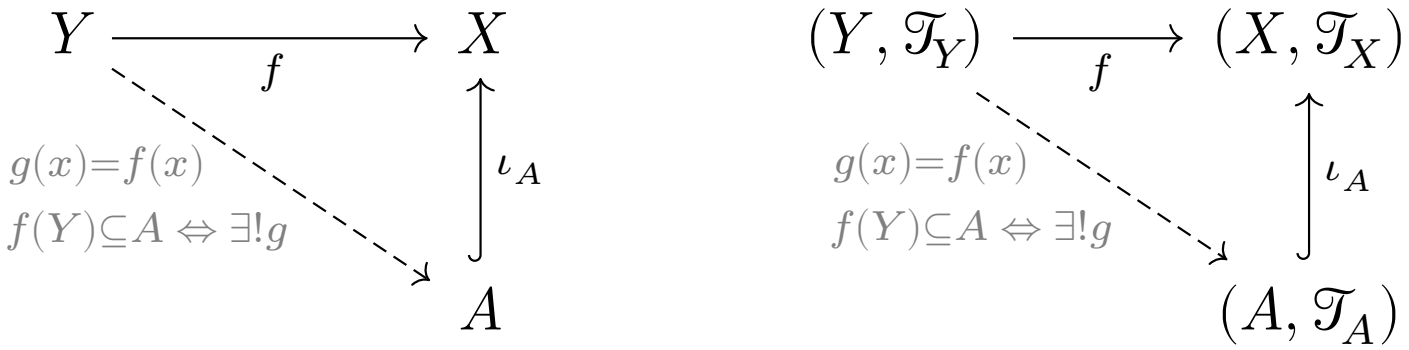
Beispiel / Übung E1G: zur Erinnerung und Wiederholung

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für den Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$ in $(X, \mathcal{T}_X)$:

0. Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ hausdorffsch bzw. metrisierbar, so auch $(A, \mathcal{T}_A)$.
1. Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ erstabzählbar, so auch $(A, \mathcal{T}_A)$: Ist $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x(X, \mathcal{T}_X)$ eine UBasis, dann ist $\mathcal{B}'_x = \{ U \cap A \,|\, U \in \mathcal{B}_x \} \subseteq \mathcal{U}_x(A, \mathcal{T}_A)$ eine UBasis.
2. Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ zweitabzählbar, so auch $(A, \mathcal{T}_A)$: Ist $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{T}_X$ eine Basis, dann ist $\mathcal{B}_A = \{ U \cap A \,|\, U \in \mathcal{B}_X \} \subseteq \mathcal{T}_A$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_A$.

Wiederholung: Führen Sie selbst alle nötigen Argumente sorgsam aus.

Universelle Abbildungseigenschaft des Teilraums



Satz E1ı: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

(0) Auf jeder Teilmenge $A \subseteq X$ von $(X, \mathcal{T}_X)$ ist die Teilraumtopologie

$$\mathcal{T}_A := \left\{ A \cap U = \iota_A^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \mathcal{T}_X \right\} =: \iota_A^* \mathcal{T}_X$$

die gröbste, für die die Inklusion $\iota_A : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X) : a \mapsto a$ stetig ist.

(1) Genau dann faktorisiert $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ gemäß $f = \iota_A \circ g$ mit $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (A, \mathcal{T}_A)$ stetig, wenn f stetig ist und $f(Y) \subseteq A$ erfüllt.

(2) Postkomposition und Faktorisierung $g \leftrightarrows f$ mit $f = \iota_A \circ g$ stiften somit die Bijektion $(\Phi, \Psi) : \mathcal{C}(Y, A) \cong \left\{ f \in \mathcal{C}(Y, X) \,\middle|\, f(Y) \subseteq A \right\} : g \leftrightarrows f$.

Beweis: Klar nach Definition E1ʙ der initialen Topologie $\mathcal{T}_A = \iota_A^* \mathcal{T}_X$. QED

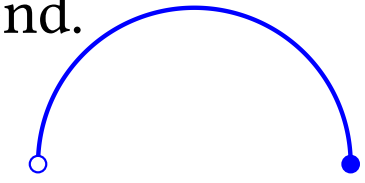
Einbettungen sind verallgemeinerte Teilräume.

Eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ ist stetig, wenn $\mathcal{T}_Y \supseteq f^*\mathcal{T}_X$ gilt.
Für jeden Teilraum $\iota : (Y, \mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ gilt $\mathcal{T}_Y := \iota_Y^*\mathcal{T}_X$. Allgemein:

Definition E1κ: Einbettung = Homöomorphismus auf das Bild

Eine injektive Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ topologischer Räume heißt **Einbettung**, wenn $\mathcal{T}_Y = f^*\mathcal{T}_X$ gilt. Äquivalent hierzu: $f = \iota_A \circ \bar{f}$ ist die Inklusion $\iota_A : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ des Teilraums $A = f(Y) \subseteq X$ nach einem Homöomorphismus $\bar{f} : (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{\sim} (A, \mathcal{T}_A)$.

Beispiel: Für $0 < a < 2\pi$ ist $f_a : [0, a[\to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ einbettend.
Hingegen ist $f_{2\pi}$ stetig und injektiv, aber nicht einbettend.
Für $a > 2\pi$ ist f_a nicht injektiv, also auch nicht einbettend.



Bemerkung E1λ: Einbettungen bilden eine (Unter)Kategorie.

Zu jedem Raum ist die Identität $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ eine Einbettung.
Sind $f : (X, \mathcal{T}_X) \hookrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ Einbettungen, ist auch ihre Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Y)$.

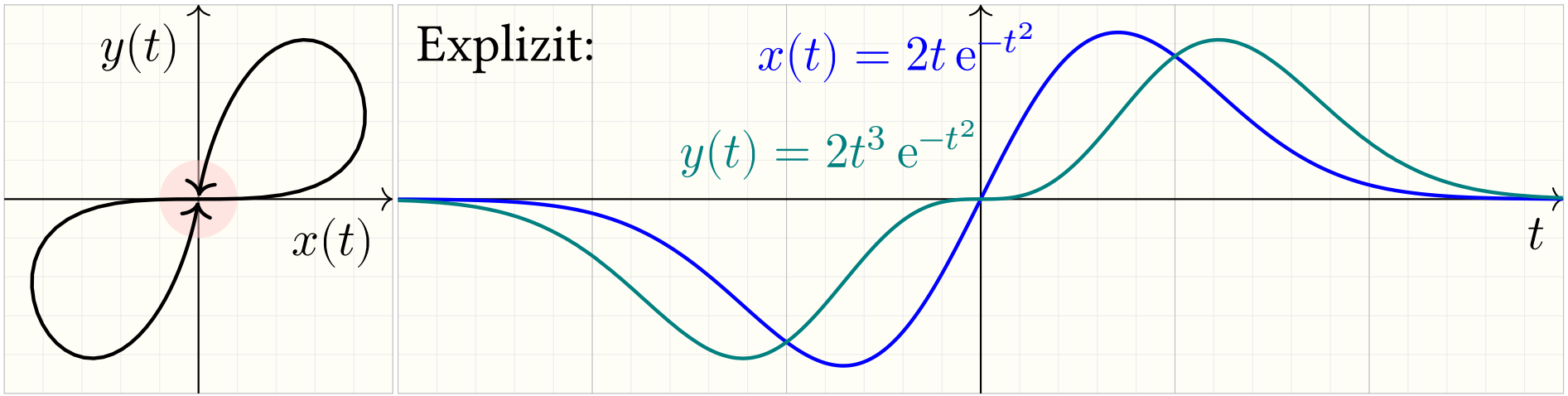
Einbettungen sind verallgemeinerte Teilräume.

Beispiel: Für $m < n$ haben wir die kanonische Einbettung

$$s : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Das können wir schon direkt nachrechnen, noch leichter mit Werkzeug.
Dazu entwickeln wir in Satz E2I ein einfaches und effizientes Kriterium.

Es gibt auch stetige Injektionen $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, die nicht einbetten!



Übung: Skizzieren Sie $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}$ und $y(t) = 2t^3\mathrm{e}^{-t^2}$ sowie $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f = (\mathrm{id}, x)$ und $g = (\mathrm{id}, y)$ und $h = (x, y)$.
Welche dieser Abbildungen sind injektiv? Welche sind einbettend?

Das Überdeckungskriterium

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $X_i \subseteq X$ heißt **Überdeckung** von X, falls $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ gilt. Wir nennen $(X_i)_{i\in I}$ **offen** bzw. **abgeschlossen**, falls jede Menge X_i in $(X, \mathcal{T})$ dies ist. Lokal-endliche Familien kennen wir aus D5F und Satz D5G.

Satz E1N: Überdeckungskriterium

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ eine Überdeckung.

(1) Ist eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, so auch lokal auf X_i jede Einschränkung $f_i = f|_{X_i} : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$. Die Umkehrung gilt, wenn $(X_i)_{i\in I}$ (a) offen ist oder (b) lokal-endlich abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.

(2) Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ und ihr Komplement $V = X \setminus U$ gilt:

$U \in \mathcal{T}$, offen im Raum $(X, \mathcal{T})$	$\iff$	$V \in \mathcal{T}^c$, abgeschlossen
$\Downarrow$ Def. D1K $\quad \Uparrow$ (a) dank (O3)		$\Downarrow$ Def. D1K $\quad \Uparrow$ (b) dank D5G
$\forall i \in I : U_i := X_i \cap U \in \mathcal{T}_i$	$\iff$	$\forall i \in I : V_i := X_i \cap V \in \mathcal{T}_i^c$

Das Überdeckungskriterium

Beweis: (2) Die Äquivalenzen „$\Leftrightarrow$“ sind Teil der Definition D1A, und die Implikationen „$\Downarrow$“ sind trivial nach Definition D1K der Teilraumtopologie. Wir zeigen die interessante Implikation „$\Uparrow$“ in den Fällen (a) und (b):

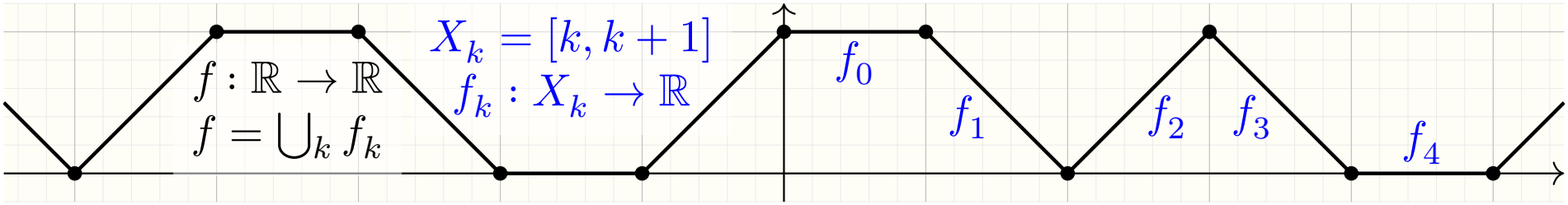
(2a) Wir haben $U = U \cap X = U \cap (\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I}(U \cap X_i) = \bigcup_{i\in I} U_i$. Gegeben ist $U_i \in \mathcal{T}_i$. Gemäß D1K existiert $U_i' \in \mathcal{T}$ mit $U_i' \cap X_i = U_i$. Aus $X_i \in \mathcal{T}$ folgt $U_i \in \mathcal{T}$ dank (O2). Also $U = \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ dank (O3).

(2b) Wir haben $V = V \cap X = V \cap (\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I}(V \cap X_i) = \bigcup_{i\in I} V_i$. Sei $V_i \subseteq X_i$ abgeschlossen in $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Gemäß D1K existiert $V_i' \subseteq X$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$ mit $V_i' \cap X_i = V_i$. Dank (A2) ist also auch V_i abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$. Da $(V_i)_{i\in I}$ lokal-endlich in $(X, \mathcal{T})$ ist, ist auch $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$ dank Satz D5G.

(1) „$\Rightarrow$“: Sei f stetig. Für $O \in \mathcal{T}_Y$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$, nach D1K also ist $f_i^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap X_i$ offen in $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Somit ist $f_i : X_i \to Y$ stetig.

„$\Leftarrow$“: Sei $f_i : X_i \to Y$ stetig für jedes $i \in I$. Für $O \in \mathcal{T}_Y$ ist $U_i = f_i^{-1}(O)$ offen in $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Dank (2) ist $f^{-1}(O) = \bigcup_{i\in I} U_i$ offen in $(X, \mathcal{T})$. QED

Wie können wir stetige Funktionen stetig verkleben?



Wir wollen eine Abbildung $f : X \to Y$ stückweise aus $f_k : X_i \to Y$ zusammensetzen und dabei zugleich die Stetigkeit von f garantieren.

Beispiele: Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \qquad g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ für } x^2 > 2 \\ 1 \text{ für } x^2 < 2 \end{cases},$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 1 \text{ für } x \geq 0 \end{cases}, \qquad k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} \text{ für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} \text{ für } x \leq 0 \end{cases}.$$

Jede dieser Funktionen setzt sich zusammen aus zwei stetigen Funktionen, dennoch sind nur g, k stetig, f, h hingegen nicht.

Idealerweise ist unsere Überdeckung des Definitionsbereichs offen oder lokal-endlich abgeschlossen. Damit ist die stetige Verklebung leicht!

Das Verklebelemma

☺ So können wir Abbildungen $f : X \to Y$ stückweise zusammensetzen:

Satz E1P: Verkleben stetiger Funktionen

(0) Gegeben sei eine Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ und darauf Abbildungen $f_i : X_i \to Y$ für $i \in I$. Genau dann existiert $f : X \to Y$ mit $f|_{X_i} = f_i$ für alle $i \in I$, wenn Kompatibilität $f_i|_{X_i\cap X_j} = f_j|_{X_i\cap X_j}$ für alle $i, j \in I$ gilt.

In diesem Falle ist $f = \bigcup_{i\in I} f_i : X \to Y$ die ersehnte Abbildung.

(1) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ sei (a) offen oder (b) lokal-endlich abgeschlossen. Hierauf seien $f_i : X_i \to Y$ stetig und kompatibel gemäß $f_i|_{X_i\cap X_j} = f_j|_{X_j\cap X_i}$ für alle $i, j \in I$.

Dann ist $f = \bigcup_{i\in I} f_i : X \to Y$ eine Abbildung und stetig.

Beweis: (0) Dank $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ und $f_i|_{X_i\cap X_j} = f_j|_{X_i\cap X_j}$ ist $f = \bigcup_{i\in I} f_i$ eine Abbildung von X nach Y: Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$. Diese Abbildung $f : X \to Y$ erfüllt $f|_{X_i} = f_i$ für jedes $i \in I$.

(1) Die Stetigkeit von f folgt aus dem Überdeckunskriterium E1N. QED

Äquivalenzrelation und Quotient

In der Mathematik sind **Äquivalenzrelationen** und **Quotienten** überaus nützlich, daher allgegenwärtig, und für viele Konstruktionen unerlässlich.

Eine binäre **Relation** R auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$.
Infix $x\,R\,y$ bedeutet $(x, y) \in R$, gesprochen „x, y stehen in der Relation R“.

Wir nennen R eine **Äquivalenzrelation**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

Reflexivität,	**Refl**(X, R):	$\Delta_X \subseteq R$,	$x\,R\,x$
Symmetrie,	**Sym**(X, R):	$R = R^\top$,	$x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
Transitivität,	**Tran**(X, R):	$R \bullet R \subseteq R$,	$x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$

Die **Äquivalenzklasse** von $x \in X$ bezüglich R ist die Menge

$$[x] = [x]_R = [x]_{X,R} := \{\, y \in X \mid x\,R\,y \,\}.$$

Dank Reflexivität gilt $[x]_R \ni x$: Jede Äquivalenzklasse ist nicht-leer.
Aus $[x]_R \ni y$ folgt $[x]_R \supseteq [y]_R$ dank Transitivität, und $[x]_R \subseteq [y]_R$ dank Symmetrie, also $[x]_R = [y]_R$. Wir erhalten demnach eine Zerlegung!

- ☺ Je zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt.
- ☺ Jedes Element $x \in X$ liegt in genau einer Klasse, nämlich $[x]$.

Äquivalenzrelation und Quotient

Der **Quotient** von X bezüglich R ist die Menge aller Äquivalenzklassen:

$$(X, R) \;\mapsto\; X/R := \left\{ [x]_R \,\middle|\, x \in X \right\}$$

Dies ist eine Zerlegung von X, also $X/R \subseteq \mathfrak{P}(X)^*$ und $X = \bigsqcup X/R$.
Umgekehrt definiert jede Zerlegung $X = \bigsqcup P$ eine Äquivalenzrelation $R = \{ (x, x') \in X \times X \mid \exists c \in P : c \supseteq \{x, x'\} \}$ mit $P = X/R$. (Übung!)
So entsprechen sich die Äquivalenzrelationen und die Zerlegungen.

Die zugehörige **Quotientenabbildung** oder **kanonische Surjektion** ist

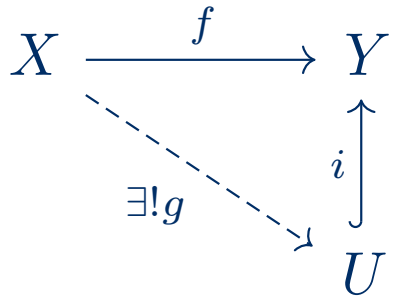
$$q = q_R = q_{X,R} : X \twoheadrightarrow X/R : x \mapsto [x]_R.$$

Ist $c \in X/R$ eine Äquivalenzklasse, so nennen wir jedes Element $x \in c$ einen **Repräsentanten** der Klasse c. Die Wahl eines Repräsentanten ist im Allgemeinen willkürlich, weder eindeutig noch irgendwie kanonisch…
und im Allgemeinen auch nicht erforderlich: Die Quotientenkonstruktion wurde gerade dazu erschaffen, um uns von Repräsentanten zu befreien!

🙂 Statt mit Elementen $x \in X$ arbeiten wir nun mit Klassen $c \in X/R$.

Faktorisierung über eine Injektion

Vorgelegt sei eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$ und eine Injektion $i : U \hookrightarrow Y$, etwa eine Inklusion. Zu (f, i) suchen wir eine Faktorisierung $f = i \circ g$ mit $g : X \to U$, also $f(x) = i(g(x))$ für alle $x \in X$.



Eindeutigkeit: Aus $f = i \circ g = i \circ g'$ folgt $g = g'$ dank Injektivität von i.

Satz E2A: eindeutige Faktorisierung über eine Injektion

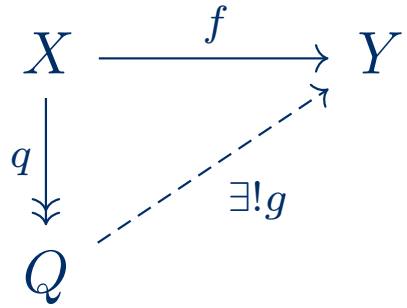
Zu jeder Abbildung $f : X \to Y$ und Injektion $i : U \hookrightarrow Y$ existiert $g : X \to U$ mit $f = i \circ g$ genau dann, wenn $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} i$; diesenfalls gilt $g = i^\top \circ f$, kurz $\{ g : X \to U \} \cong \{ f : X \to Y \mid \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} i \}$, $g \mapsto i \circ g$, $i^\top \circ f \mapsfrom f$. Dabei gilt $R_g = R_f$ und $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$, also g surjektiv gdw $\operatorname{Im} i = \operatorname{Im} f$.

Beweis: „⇒“: klar. „⇐“: Wir definieren $g : X \to U$ durch $g(x) = i^{-1}(f(x))$, genauer $g = i^\top \circ f = (X, G, U)$ mit $G = \{ (x, u) \in X \times U \mid f(x) = i(u) \}$. Dies ist linkstotal, da $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} i$, und rechtseindeutig, da i injektiv. QED

In Worten: Zu jedem $x \in X$ und seinem Bild $y = f(x)$ wählen wir das (eindeutig existente) Urbild $u \in U$ mit $i(u) = y$ und setzen $g(x) := u$.

Faktorisierung über eine Surjektion

Vorgelegt sei eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$
und eine Surjektion $q : X \twoheadrightarrow Q$, etwa ein Quotient.
Zu (f, q) suchen wir eine Faktorisierung $f = g \circ q$
mit $g : Q \to Y$, also $f(x) = g(q(x))$ für alle $x \in X$.



Eindeutigkeit: Aus $f = g \circ q = g' \circ q$ folgt $g = g'$ dank Surjektivität von q.

Satz E2B: eindeutige Faktorisierung über eine Surjektion

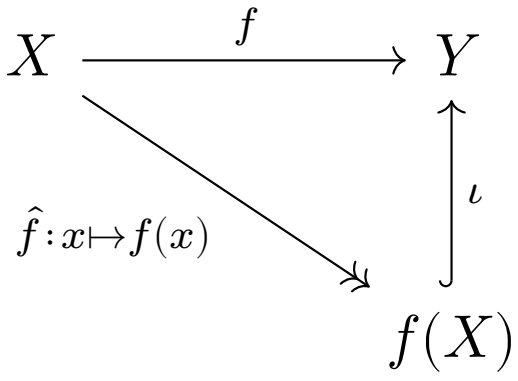
Zu $f : X \to Y$ und $q : X \twoheadrightarrow Q$ existiert $g : Q \to Y$ mit $f = g \circ q$ gdw
$R_q \subseteq R_f$, also $q(x) = q(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$; diesenfalls gilt $g = f \circ q^\top$,
kurz $\{ g : Q \to Y \} \cong \{ f : X \to Y \mid R_q \subseteq R_f \}$, $g \mapsto g \circ q$, $f \circ q^\top \hookleftarrow f$.
Dabei gilt $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ und $R_g = R_f / R_q$, also g injektiv gdw $R_q = R_f$.

Beweis: „⇒“: klar. „⇐“: Die genannte Relation $g = f \circ q^\top = (Q, G, Y)$
mit $G = \{ (\overline{x}, y) \in Q \times Y \mid \exists x \in X : q(x) = \overline{x} \wedge f(x) = y \}$ ist linkstotal,
da q surjektiv ist, und rechtseindeutig dank Kompatibilität $R_q \subseteq R_f$. QED

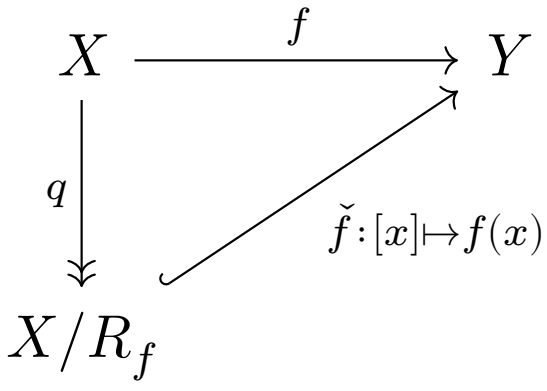
In Worten: Zu jedem $\overline{x} \in Q$ wählen wir willkürlich ein Urbild $x \in X$ mit
$q(x) = \overline{x}$ und setzen $g(\overline{x}) := f(x)$. Dies ist wohldefiniert dank $R_q \subseteq R_f$.

Surjektiv und injektiv machen dank Faktorisierung

Gegeben sei eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$. Im Allgemeinen ist f weder injektiv noch surjektiv. Dies können wir wie folgt korrigieren:



$$f(X) := \{\, f(x) \in Y \mid x \in X \,\}$$

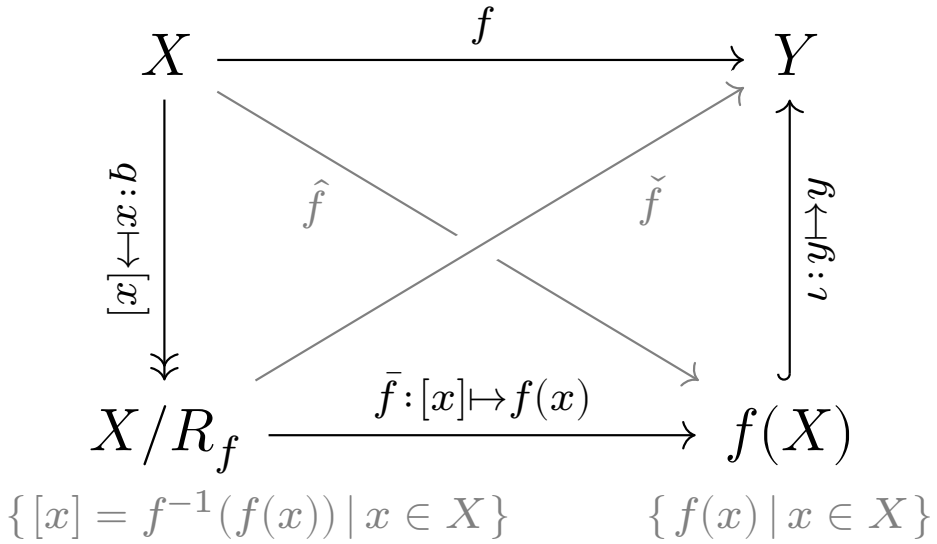


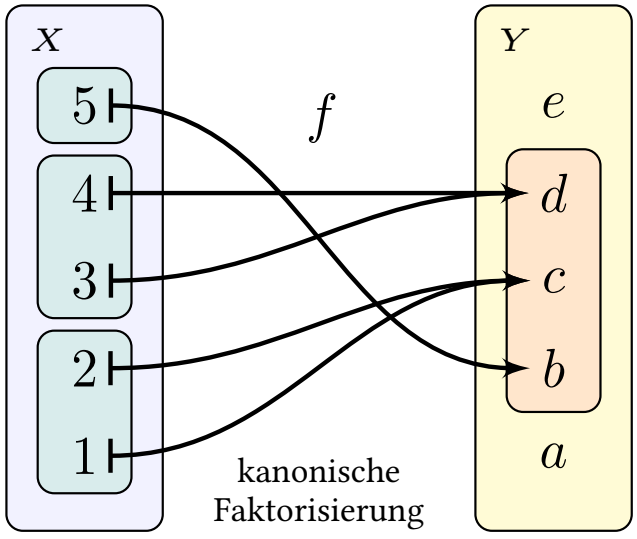
$$R_f := \{\, (x, x') \mid f(x) = f(x') \,\}$$

Surjektiv machen (links): Wir schränken $f : X \to Y$ zu $\hat{f} : X \twoheadrightarrow f(X)$ ein. Dies ist wohldefiniert und surjektiv dank Einschränkung auf das Bild. Wir erhalten die Faktorisierung $f = \iota \circ \hat{f}$ in Surjektion und Inklusion.

Injektiv machen (rechts): Die Abbildung $\check{f} : X/R_f \hookrightarrow Y : [x] \mapsto f(x)$ ist wohldefiniert und injektiv, denn es gilt $[x] = [x']$ gdw $f(x) = f(x')$. Wir erhalten die Faktorisierung $f = \check{f} \circ q$ in Quotient und Injektion.

Bijektiv machen dank kanonischer Faktorisierung





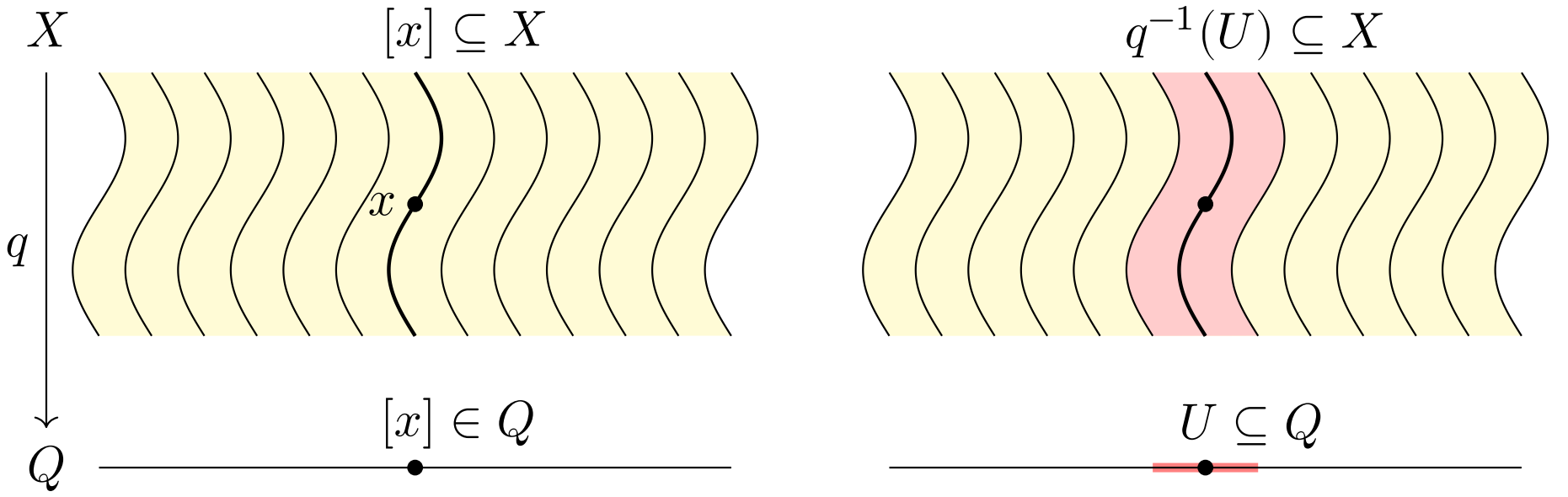
Satz E2A: die kanonische Faktorisierung

Jede Abbildung $f : X \to Y$ faktorisiert eindeutig gemäß $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$ in die Quotientenabbildung $q : X \twoheadrightarrow X/R_f$, die kanonische Bijektion $\bar{f} : X/R_f \xrightarrow{\sim} f(X) : [x] \mapsto f(x)$ und die Inklusion $\iota : f(X) \hookrightarrow Y$.

Beispiel: In obiger Illustration $f : X \to Y$ gilt $X/R_f = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$ und $f(X) = \{b,c,d\}$ sowie $\bar{f} : \{1,2\} \mapsto c$, $\{3,4\} \mapsto d$, $\{5\} \mapsto b$.

🙂 So können wir jede beliebige Abbildung $f : X \to Y$ kanonisch zerlegen in die drei einfacheren Abbildungen $q, \bar{f}, \iota$; diese sind sur/bi/injektiv.

Die Quotiententopologie



Definition E2B: Quotiententopologie und Quotientenraum

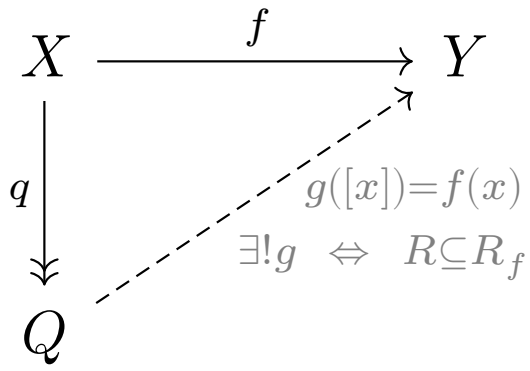
Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation und $Q = X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}$ mit $q : X \to Q : x \mapsto [x]_R$ der Quotient.

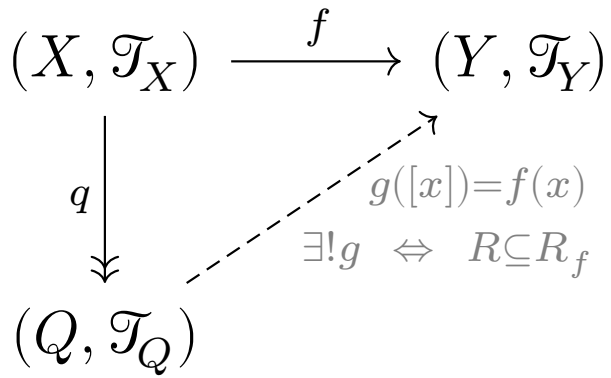
Die **Quotiententopologie** auf $Q = X/R$ ist die finale Topologie (E1B)

$$\mathcal{T}_Q := \{U \subseteq Q \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\} =: q_* \mathcal{T}_X.$$

Das Paar $(Q, \mathcal{T}_Q) =: (X, \mathcal{T}_X)/R$ nennen wir den **Quotientenraum**.

Universelle Abbildungseigenschaft des Quotienten





Satz E2c: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

(0) Auf jedem Quotienten $Q = X/R$ ist die Quotiententopologie

$$\mathcal{T}_Q := \{U \subseteq Q \,|\, q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\} := q_*\mathcal{T}_X$$

die feinste, für die der Quotient $q : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Q, \mathcal{T}_Q) : x \mapsto [x]_R$ stetig ist.

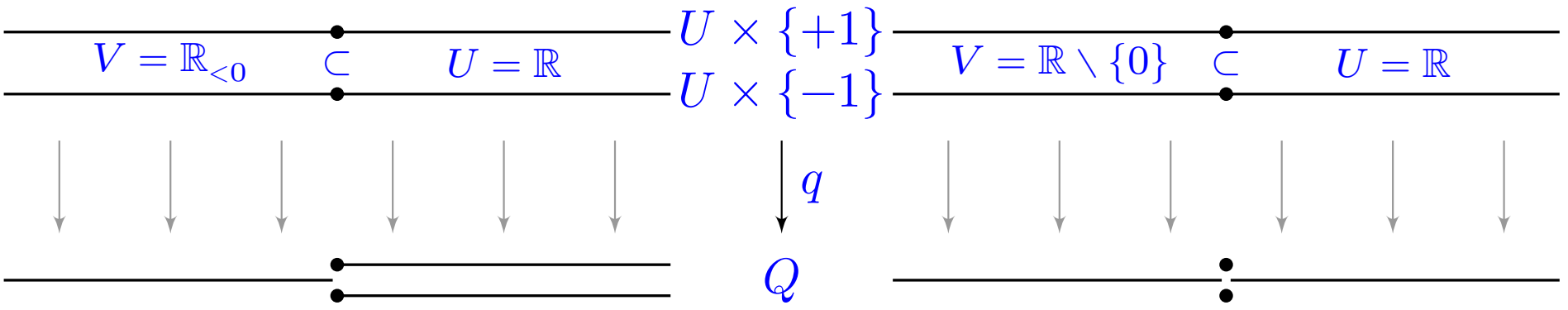
(1) Genau dann faktorisiert $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ gemäß $f = g \circ q$ mit $g : (Q, \mathcal{T}_Q) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, wenn f stetig ist und $R \subseteq R_f$ erfüllt.

(2) Präkomposition und Faktorisierung $g \leftrightarrows f$ mit $f = g \circ q$ stiften somit die Bijektion $(\Phi, \Psi) : \mathcal{C}(Q, Y) \cong \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \,|\, R \subseteq R_f\} : g \leftrightarrows f$.

Beweis: Klar nach Definition E1b der finalen Topologie $\mathcal{T}_Q = q_*\mathcal{T}_X$. QED

Zwei berühmt-berüchtigte Beispiele

Die verzweigte Gerade und die Gerade mit doppeltem Ursprung:



Beispiel / Übung E2E: lokal euklidisch aber nicht hausdorffsch

Seien $\emptyset \neq V \subsetneq U = \mathbb{R}^n$ offen. In $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht $X = U \times \{\pm 1\}$ aus zwei Kopien $U_\pm = U \times \{\pm 1\}$ von U. Wir verheften die beiden Kopien $V_\pm$:

$$(x, y) \sim (x', y') \quad :\Longleftrightarrow \quad (x, y) = (x', y') \ \vee \ x = x' \in V.$$

Die Äquivalenzklassen sind hier also $[(x, y)] = \{(x, y)\}$ für $x \in U \setminus V$ und $[(x, y)] = \{(x, \pm y)\}$ für $x \in V$. Damit ist der Quotient $q : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Q, \mathcal{T}_Q)$ ein lokaler Homöomorphismus vermöge $(q_\pm, s_\pm) : U_\pm \cong Q_\pm$. Der Raum Q ist lokal homöomorph zum Raum $\mathbb{R}^n$, aber dennoch nicht hausdorffsch!

Zwei berühmt-berüchtigte Beispiele

Sie kennen unsere (vorläufige) Definition A0A einer Mannigfaltigkeit:
Ein Raum $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **m–dimensionale Mannigfaltigkeit**,
eventuell mit Rand ∂M, falls zu jedem Punkt $a \in M$ ein lokaler
Homöomorphismus $(M, a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m, 0)$ oder $(M, a) \underset{\text{loc}}{\cong} (\mathbb{R}^m_{\geq 0}, 0)$ existiert.

Wir wollen uns von Teilräumen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ lösen und Mannigfaltigkeiten
auf der Grundlage allgemeiner topologischer Räume erklären.
Dabei wird klar, welche Bedingungen wir wirklich benötigen.
Die Hausdorff–Eigenschaft gehört jedenfalls dazu!

⚠ Aller Erfahrung nach vermuten Lernende an dieser Stelle, dass lokal euklidisch automatisch auch hausdorffsch nach sich zieht. Das ist ganz verständlich, die Phantasie muss erst geschult werden, anfangs fehlt es an einem Fundus konkreter Gegenbeispiele. Das ändert sich nun:

Obige Gegenbeispiele sind lokal euklidisch, aber nicht hausdorffsch!
Solch exotische Konstruktionen gelingen uns nur als Quotienten;
als Teilräume $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ lässt sich dies sicher nicht realisieren.

Identifizierungen sind verallgemeinerte Quotienten.

Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist stetig, wenn $f_* \mathcal{T}_X \supseteq \mathcal{T}_Y$ gilt.
Für jeden Quotienten $q : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ gilt $q_* \mathcal{T}_X =: \mathcal{T}_Y$. Allgemein:

Definition E2F: Identifizierung = Homöo auf dem Quotienten

Eine surjektive Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologischer Räume heißt **Identifizierung**, wenn $\mathcal{T}_Y = f_* \mathcal{T}_X$ gilt. Äquivalent hierzu: $f = \bar{f} \circ q$ ist der Quotient $q : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Q, \mathcal{T}_Q)$ bezüglich der Relation R_f gefolgt von einem Homöomorphismus $\bar{f} : (Q, \mathcal{T}_Q) \xrightarrow{\sim} (Y, \mathcal{T}_Y)$.

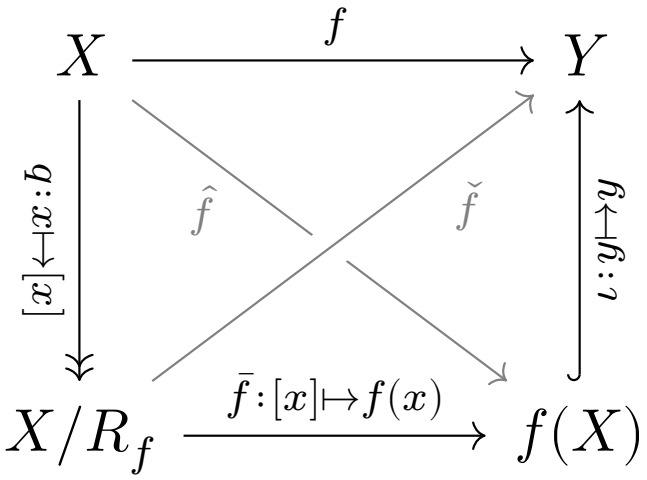
Beispiel: Für $a > 2\pi$ ist $f_a : [0, a[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ identifizierend (E2Q).
Hingegen ist $f_{2\pi}$ stetig und surjektiv, aber nicht identifizierend (D2C).
Für $0 < a < 2\pi$ ist f_a nicht surjektiv, also auch nicht identifizierend.

Bemerkung E2G: Identifizierungen bilden eine (Unter)Kategorie.

Zu jedem Raum ist die Identität $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ identifizierend.
Sind $f : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \twoheadrightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ identifizierend, so auch ihre Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \twoheadrightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$.

Die kanonische Faktorisierung stetiger Abbildungen

Wir machen f injektiv durch Quotient des Startraums von X zu X/R_f und erhalten die stetige Injektion $\check{f} : X/R_f \hookrightarrow Y$. Bijektiv machen liefert $\bar{f}$.



Wir machen f surjektiv durch Einschränkung des Zielraums von Y zu $f(X)$ und erhalten die stetige Surjektion $\hat{f} : X \twoheadrightarrow f(X)$. Bijektiv machen liefert $\bar{f}$.

Satz E2H: kanonische Faktorisierung stetiger Abbildungen

Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ faktorisiert gemäß $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$ in die Quotientenabbildung $q : X \twoheadrightarrow X/R_f : x \mapsto [x]$, die stetige Bijektion $\bar{f} : X/R_f \xrightarrow{\sim} f(X) : [x] \to f(x)$ und die Inklusion $\iota : f(X) \hookrightarrow Y : y \mapsto y$.

Im Allgemeinen ist $\bar{f}$ kein Homöomorphismus. Äquivalent sind:
(1) Die stetige Bijektion $\bar{f} : X/R_f \to f(X)$ ist ein Homöomorphismus.
(2) Die stetige Surjektion $\hat{f} : X \to f(X)$ ist eine Identifizierung.
(3) Die stetige Injektion $\check{f} : X/R_f \to Y$ ist eine Einbettung.

Ist f zudem offen / abgeschlossen, so auch $\bar{f}$, $\hat{f}$, $\check{f}$, und es gilt (1–3).

Einbettung mit Retraktion / Identifizierung mit Schnitt

Beispiel: Zwischen der n–Sphäre $X = \mathbb{S}^n$ und dem Raum $Y = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ haben wir die Inklusion $\iota : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x$ und die radiale Projektion $\rho : Y \twoheadrightarrow X : y \mapsto y/|y|$. Beide sind stetig und erfüllen $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.

Eine **Retraktion** des Raums Y auf einen Teilraum $X \subseteq Y$ ist eine stetige Abbildung $\rho : Y \to X$ mit $\rho|_X = \mathrm{id}_X$, kurz $(\iota, \rho) : X \rightleftarrows Y$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_X$.

Satz E21: Schnitt und Retraktion

Ein **Retraktionspaar** $(s, p) : (X, \mathcal{T}_X) \rightleftarrows (Y, \mathcal{T}_Y)$ besteht aus $s : X \to Y$ und $p : Y \to X$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$. Daraus folgt $\mathcal{T}_X = s^* \mathcal{T}_Y = p_* \mathcal{T}_Y$.

Wir nennen $s : X \hookrightarrow Y$ eine **Einbettung mit Retraktion** $p : Y \twoheadrightarrow X$ und $p : Y \twoheadrightarrow X$ eine **Identifizierung mit (globalem) Schnitt** $s : X \hookrightarrow Y$.

Beispiel: Zwischen den Räumen $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit $m < n$ haben wir die Einbettung $s : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ und die Projektion $p : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$.

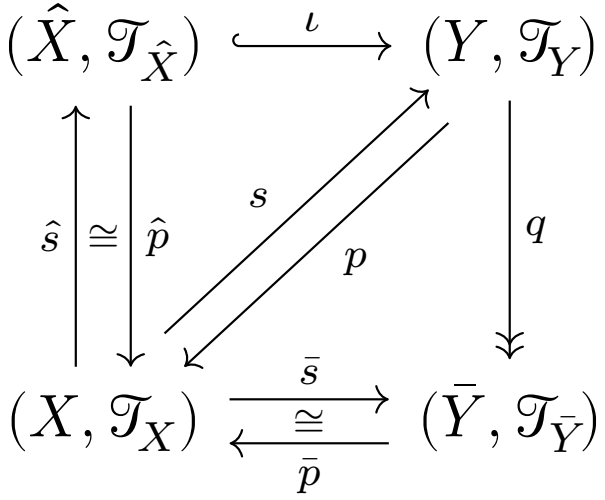
Einbettung mit Retraktion / Identifizierung mit Schnitt

Den Satz können wir auf zwei Arten beweisen: (1) Direkt Nachrechnen; Versuchen Sie es selbst, Sie lernen viel und schätzen die Abkürzung…
(2) Geschickt die kanonische Faktorisierung nutzen! Das gelingt so:

Die Abbildung $s = \iota \circ \hat{s}$ ist die stetige Bijektion $\hat{s}$ gefolgt von der Inklusion ι.

Linksinvers zu $\hat{s}$ ist $\hat{p} = p \circ \iota$, denn $\hat{p} \circ \hat{s} = p \circ s = \mathrm{id}_X$.

Es folgt $\hat{s}^{-1} = \hat{p} \circ \hat{s} \circ \hat{s}^{-1} = \hat{p}$. Die Umkehrung ist stetig!



Die Abbildung $p = \bar{p} \circ q$ ist der Quotient q gefolgt von der stetigen Bijektion $\bar{p}$.

Rechtsinvers zu $\bar{p}$ ist $\bar{s} = q \circ s$, denn $\bar{p} \circ \bar{s} = p \circ s = \mathrm{id}_X$.

Es folgt $\bar{p}^{-1} = \bar{p}^{-1} \circ \bar{p} \circ \bar{s} = \bar{s}$. Die Umkehrung ist stetig!

Übung E2J: *Let factorization do the work for you!*

Jedes Retraktionspaar $(s, p) : X \leftrightarrows Y$ induziert Homöomorphismen $(\hat{s}, \hat{p}) : X \cong \hat{X} := \mathrm{Im}(s)$ sowie $(\bar{s}, \bar{p}) : X \cong \bar{Y} := Y / R_p$.

Gegen/Beispiele zu Schnitt und Retraktion

Beispiel / Übung E2κ: Schnitt und Retraktion

(1) Die Inklusion $s : \{-1,1\} \hookrightarrow [-1,1]$ ist eine Einbettung, erlaubt aber keine Retraktion, also $p : [-1,1] \to \{-1,1\}$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\{-1,1\}}$.
Beweis: Nach dem Zwischenwertsatz C3A müsste p konstant sein.

(2) Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ können wir in $\mathbb{R}^2$ einbetten, aber nicht in $\mathbb{R}^1$; zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^1$ existiert $x \in \mathbb{S}^1$ mit $f(x) = f(-x)$,
dank ZWS für $g : [0,\pi] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\pi)})$ mit $g(\pi) = -g(0)$.

(3) Die Abbildung $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist eine Identifizierung (dank E2P), erlaubt aber keinen Schnitt $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$.
Als Schnitt wäre $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ stetig, also nicht injektiv nach (2).

(4) Ist $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, so existiert keine stetige Injektion $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$.
Zu $a \in U$ existiert $r > 0$ mit $B(a,2r) \subseteq U$, also $g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow U : s \mapsto a + rs$;
mit $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$ ergäbe dies eine stetige Injektion $f \circ g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^1$.

Wir erhalten erneut $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^1$: Diese Räume sind nicht homöomorph.
In höherer Dimension folgt dies aus dem Abbildungsgrad, siehe Kapitel J.

Gegen/Beispiele zu Schnitt und Retraktion

Gegenbeispiele wie (1) und (3) bewahren Sie vor naivem Irrglauben:
Nicht jede Einbettung $s : X \hookrightarrow Y$ erlaubt eine Retraktion $p : Y \twoheadrightarrow X$.
Nicht jede Identifizierung $p : X \twoheadrightarrow Y$ erlaubt einen Schnitt $s : Y \hookrightarrow X$.
(So verhält es sich in vielen Kategorien / Gebieten der Mathematik.)

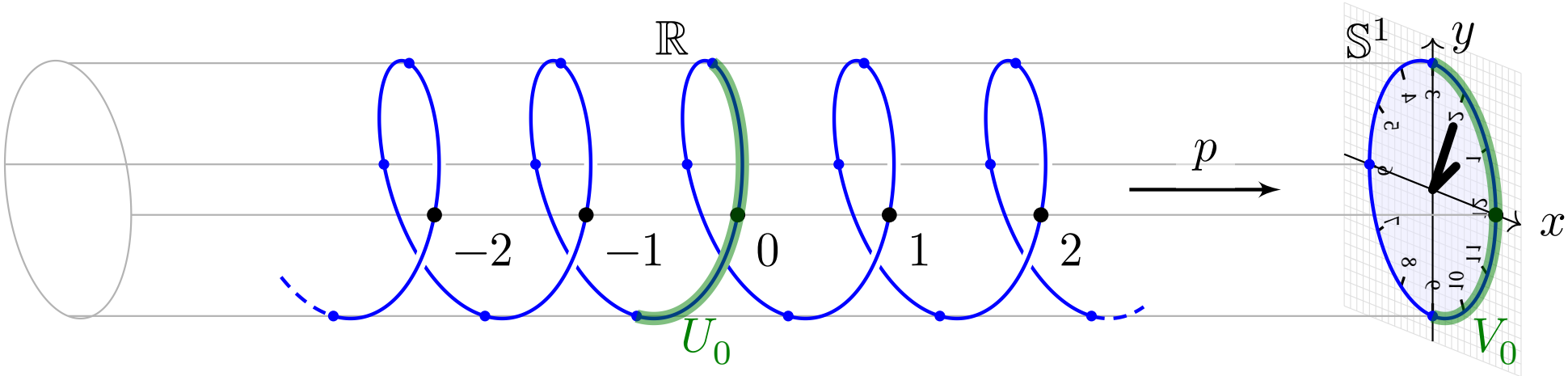
Die Folgerungen (2) und (4) sind interessant und hier schon erfreulich elegant beweisbar. In höherer Dimension benötigen wir dazu stärkere Werkzeuge, in Kapitel J gelingt uns dies mit dem Abbildungsgrad (als einer ersten spektakulären Anwendung der algebraischen Topologie).

Freuen Sie sich auf diese fundamentalen Ergebnisse der (geometrischen) Topologie: Zur Inklusion $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ existiert keine Retraktion des Balls $\mathbb{D}^n$ auf seinen Rand $\mathbb{S}^{n-1}$ (Brouwer J4E). Zu jeder stetigen Funktion $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert $x \in \mathbb{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$ (Borsuk–Ulam J6C).

Die Abbildung $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ untersuchen wir gleich genauer.
Es gibt immerhin lokale Schnitte, und wir erhalten so $(\bar{p}, \bar{s}) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.
Dies ist später das typische Beispiel einer Überlagerung, siehe M1B, und ermöglicht die Berechnung und Untersuchung von Fundamentalgruppen.

Polarkoordinaten als universelle Überlagerung der Kreislinie

Aufgabe: Faktorisieren Sie $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.



Lösung: Die Abbildung p ist stetig, aber weder injektiv noch surjektiv. Ihr Bild ist $p(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$. Genau dann gilt $p(t) = p(t')$, wenn $t - t' \in \mathbb{Z}$. Global ist „$p^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \ln(z)$“ grober Unfug! Dies gelingt nur lokal:

$$U_0 := \,]-1/4, 1/4[, \qquad V_0 := \{\, (x,y) \in \mathbb{S}^1 \,|\, x > 0 \,\},$$
$$p_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \qquad s_0 : V_0 \xrightarrow{\sim} U_0 : (x,y) \mapsto \tfrac{1}{2\pi} \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right).$$

Wir verschieben U_0 um $\theta \in \mathbb{R}$ und drehen V_0 um $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \theta} \in \mathbb{S}^1$:

$$U_\theta := U_0 + \theta, \qquad V_\theta := V_0 \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \theta},$$
$$p_\theta : U_\theta \xrightarrow{\sim} V_\theta : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \qquad s_\theta : V_\theta \xrightarrow{\sim} U_\theta : z \mapsto s_0\left(z \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \theta}\right) + \theta.$$

Polarkoordinaten als universelle Überlagerung der Kreislinie

Genau dann gilt $p(t) = p(t')$, wenn $t - t' \in \mathbb{Z}$. Für $t, t' \in \mathbb{R}$ definieren wir daher die Äquivalenz $t \sim t'$ durch $t - t' \in \mathbb{Z}$ und setzen $\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \mathbb{R}/_\sim$.
Die Schreibweise $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ entspricht der Untergruppe $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$.

Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist nicht surjektiv, ihr Bild ist $p(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 \subsetneq \mathbb{C}$.
Ausführlich: Aus $|p(t)| = 1$ folgt $p(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{S}^1$. Die Inklusion $p(\mathbb{R}) \supseteq \mathbb{S}^1$ folgt implizit dank Zwischenwertsatz C3A für $\cos$ und $\sin$, noch besser explizit:

Wir konstruieren offene Überdeckungen $\mathbb{R} = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} U_\theta$ und $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} V_\theta$, auf denen p den lokalen Homöomorphismus $(p_\theta, s_\theta) : U_\theta \cong V_\theta$ stiftet:
Es gilt $s_\theta \circ p_\theta = \mathrm{id}_{U_\theta}$ und $p_\theta \circ s_\theta = \mathrm{id}_{V_\theta}$ für $\theta = 0$ und damit für alle $\theta \in \mathbb{R}$.

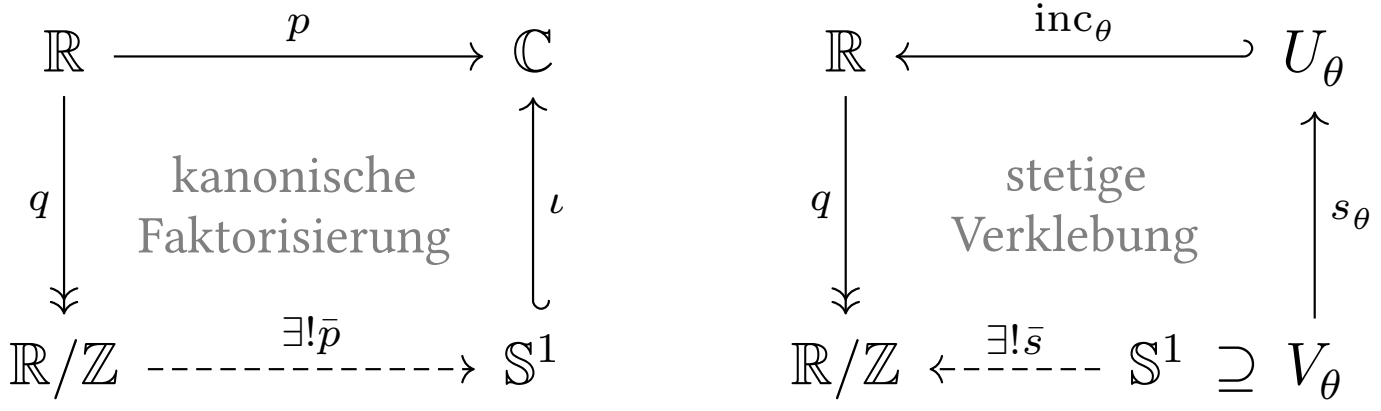
Die lokalen Schnitte $\mathrm{inc}_\theta \circ s_\theta : V_\theta \to U_\theta \to \mathbb{R}$ für $\theta \in \mathbb{R}$ lassen sich *nicht* zu einem globalen Schnitt $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ verkleben; maximal erreichen wir

$$(\tilde{p}_\theta, \tilde{s}_\theta) \;:\; \left]\theta - 1/2, \theta + 1/2\right[\;\cong\; \mathbb{S}^1 \setminus \{-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}\}.$$

Das Hindernis verschwindet für $\bar{s}_\theta = q \circ \mathrm{inc}_\theta \circ s_\theta : V_\theta \xrightarrow{\sim} U_\theta \hookrightarrow \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
Anders als $(s_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ erfüllt $(\bar{s}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ nun $\bar{s}_\theta|_{V_\theta \cap V_\xi} = \bar{s}_\xi|_{V_\xi \cap V_\theta}$ für alle $\theta, \xi \in \mathbb{R}$.
Verklebung E1P liefert die stetige Abbildung $\bar{s} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit $\bar{s}|_{V_\theta} = \bar{s}_\theta$.

Polarkoordinaten als universelle Überlagerung der Kreislinie

Polarkoordinaten nützen überall in der Mathematik und Anwendungen.
Der folgende Satz fügt all diese lokalen Daten elegant zusammen:



Satz E2P: Polarkoordinaten und universelle Überlagerung der Kreislinie

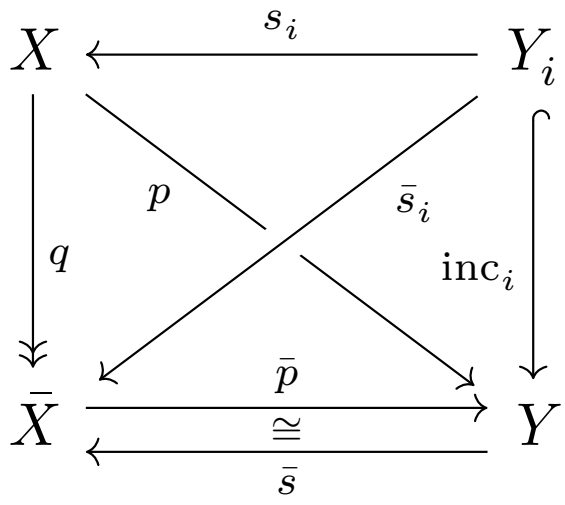
Dank kanonischer Faktorisierung E2H induziert die stetige Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ die stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1 : t + \mathbb{Z} \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$.

(1) Dies ist ein Homöomorphismus, denn p ist offen und somit auch $\bar{p}$.
Somit ist $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

(2) Die inverse Abbildung $\bar{s} : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ entsteht durch Verkleben E1P der lokalen Schnitte $\bar{s}_\theta = q \circ \mathrm{inc}_\theta \circ s_\theta : V_\theta \xrightarrow{\sim} U_\theta \hookrightarrow \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Verkleben lokaler Schnitte

Die stetige Surjektion p faktorisiert über den Quotienten q zur stetigen Bijektion $\bar{p}$. Für jede Rechtsinverse $\bar{s}$ mit $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_Y$ folgt $\bar{p}^{-1} = \bar{p}^{-1} \circ \bar{p} \circ \bar{s} = \bar{s}$.



Wir verlängern die lokalen Schnitte $s_i : Y_i \to X$ zu $\bar{s}_i = q \circ s_i : Y_i \to \bar{X}$ und verkleben diese zur stetigen Abbildung $\bar{s} : Y \to \bar{X}$. Dies liefert $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_Y$.

Satz E2Q: Verkleben lokaler Schnitte

Sei $p : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig. Die Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ sei offen oder lokal-endlich abgeschlossen. Für jeden Index $i \in I$ sei $s_i : Y_i \to X$ stetig mit $p \circ s_i = \mathrm{inc}_i : Y_i \hookrightarrow Y$. Über den Quotienten $q : X \twoheadrightarrow \bar{X} = X/R_p$ induzieren p und $(s_i)_{i \in I}$ das Homöormorphismuspaar $(\bar{p}, \bar{s}) : \bar{X} \cong Y$.

Beweis: Die Verklebung $\bar{s} = \bigcup_{i \in I} \bar{s}_i : Y \to \bar{X}$ ist wohldefiniert und stetig und erfüllt $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_Y$. Daraus folgt $\bar{p}^{-1} = \bar{p}^{-1} \circ \bar{p} \circ \bar{s} = \bar{s}$. QED

Komplexe Exponentialfunktion und Potenzen

Ähnlich wichtige und ebenso schöne Anwendungsbeispiele:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow[z\mapsto\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!]{\exp} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} & \xrightarrow[\cong]{\overline{\exp}} & \mathbb{C}^\times \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \xrightarrow[z\mapsto z^n]{p_n} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathbb{C}^\times/W_n & \xrightarrow[\cong]{\overline{p}_n} & \mathbb{C}^\times \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow[z\mapsto z^n]{p_n} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathbb{S}^1/W_n & \xrightarrow[\cong]{\overline{p}_n} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Beispiel / Übung E2R: komplexe Exponentialfunktion

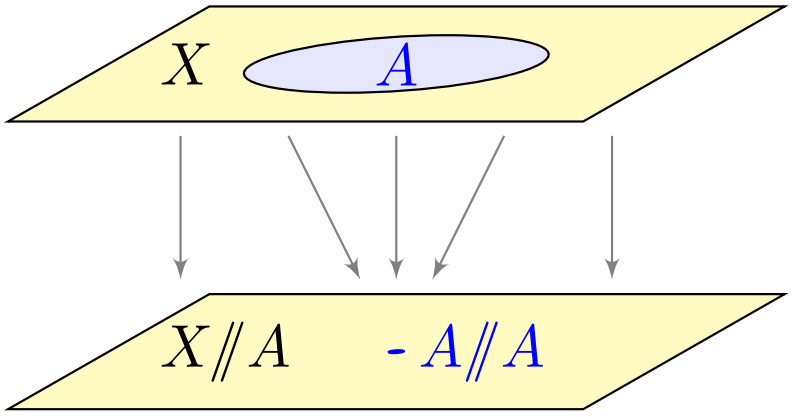
Die Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{C},+) \to (\mathbb{C}^\times,\cdot) : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist ein Gruppenhomomorphismus, periodisch gemäß $\mathrm{Ker}(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ und zudem ein lokaler Homöomorphismus, also identifizierend.

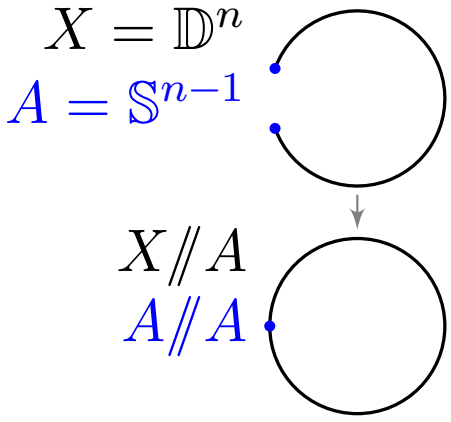
Die kanonische Faktorisierung E2H von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ liefert demnach den Homöomorphismus $\overline{\exp} : \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times : z + 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \mapsto \exp(z)$.
Dies ist somit ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

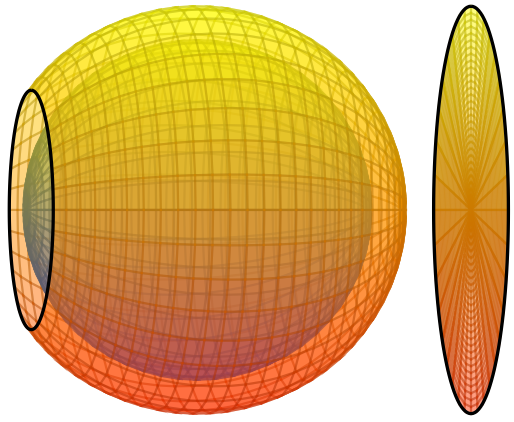
Entsprechendes gilt für $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ und $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^n$ und $\mathrm{Ker}(p_n) = W_n := \{\, w \in \mathbb{C} \mid w^n = 1 \,\} = \{\, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n} \mid k = 0, \ldots, n-1 \,\} \cong \mathbb{Z}/n$.

Zusammenschlagen eines Teilraumes

Wir wollen einen Teilraum $A \subseteq X$ zu einem Punkt zusammenschlagen:







Beispiel: Wenn Sie eine Schnur an ihren Enden zusammenkleben, so erhalten Sie eine Kreislinie. Wenn Sie im Ball $\mathbb{D}^n$ den Rand $\mathbb{S}^{n-1}$ zusammenschlagen, dann erhalten Sie die Sphäre $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1}$.

Definition E2s: Zusammenschlagung $X/\!\!/A$ eines Teilraumes $A \subseteq X$

Zu $\emptyset \neq A \subseteq X$ definieren wir auf X die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $x = y$ oder $\{x, y\} \subseteq A$. Als Quotientenraum erhalten wir

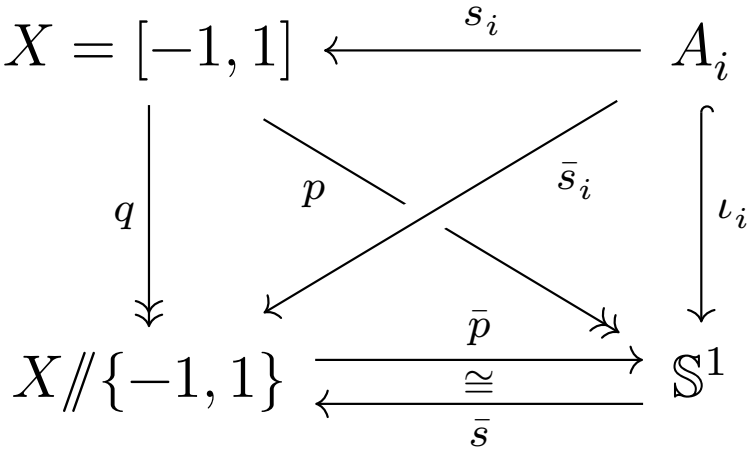
$$X/\!\!/A := X/_\sim = \{\, A,\, \{x\} \,|\, x \in X \setminus A \,\}.$$

⚠ Unterscheide Gruppenoperation $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und Zusammenschlagen $\mathbb{R}/\!\!/\mathbb{Z}$!

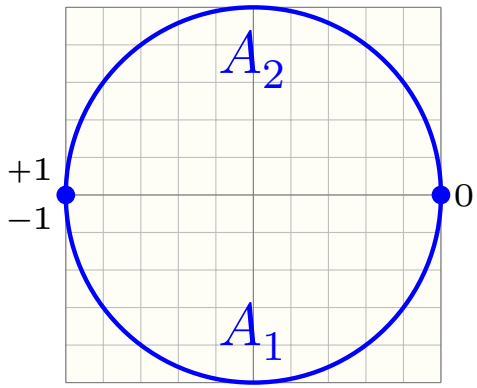
Verkleben eines Intervalls an den Endpunkten

Beispiel / Übung E2T: Verkleben eines Intervalls an den Endpunkten

Die Abbildung $p : [-1,1] \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}$ ist identifizierend, induziert also kanonisch einen Homöomorphismus $\bar{p} : [-1,1]/\!/\{-1,1\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}^1 : [t] \mapsto \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}$.

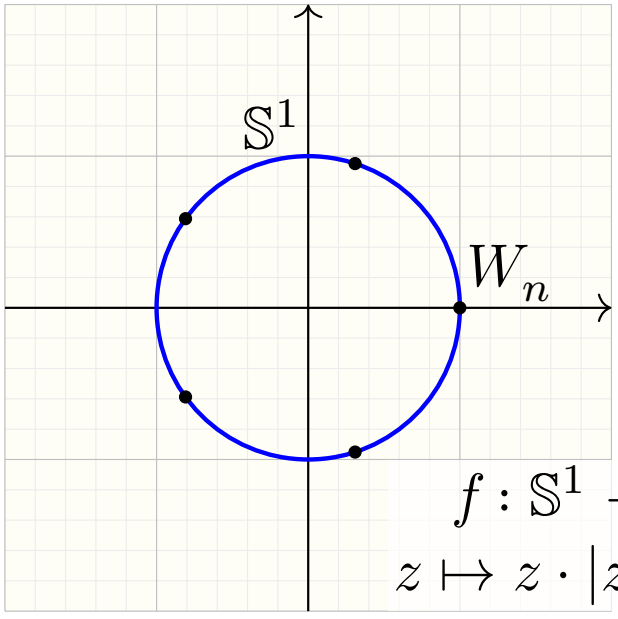


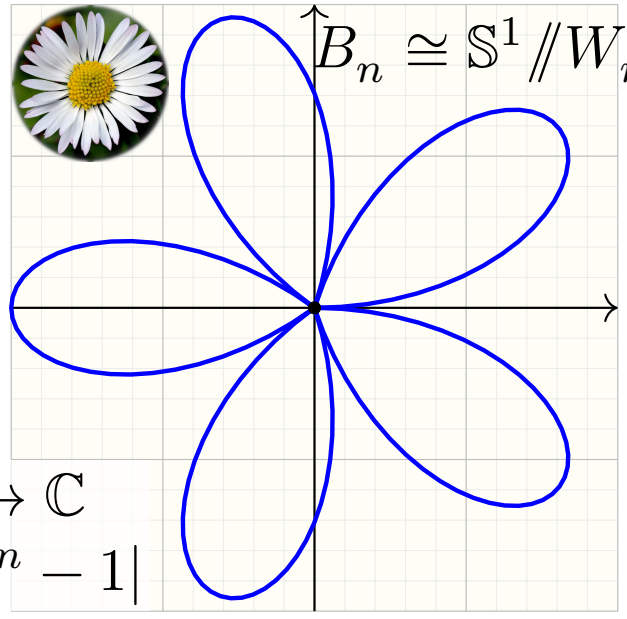
lokale Schnitte!

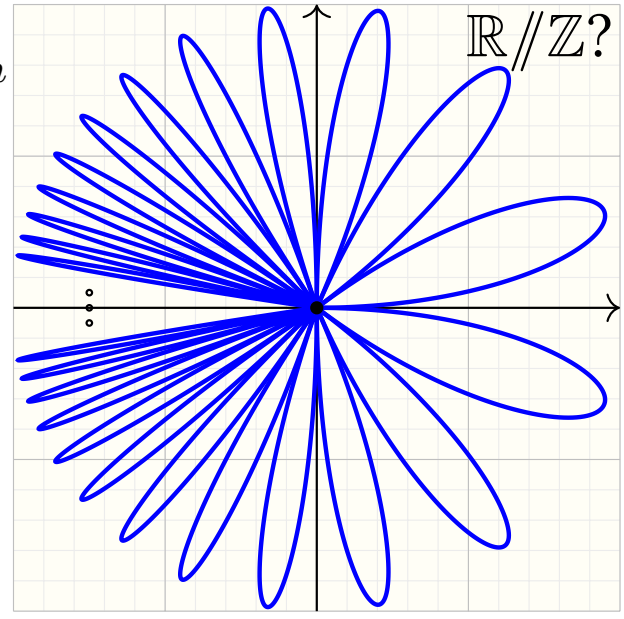


Beweis: Wie in E2P nutzen wir stetige Abbildungen $s_i : A_i \to [-1,1]$ mit $A_1 = \{ z \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{Im}(z) \leq 0 \} = \{ \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t} \mid t \in [-1,0] \}$ mit $s_1(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}) = t \in [-1,0]$, $A_2 = \{ z \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0 \} = \{ \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t} \mid t \in [0,+1] \}$ mit $s_2(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}) = t \in [0,+1]$. Sie lassen sich *nicht* verkleben, aufgrund $s_1(-1) = -1$ und $s_2(-1) = +1$, doch für $\bar{s}_i = q \circ s_i : A_i \to [-1,1]/\!/\{-1,1\}$ verschwindet dieses Problem. Dank Verklebelemma E1P ist $\bar{s} : \mathbb{S}^1 \to [-1,1]/\!/\{-1,1\}$ mit $\bar{s}|_{A_i} = \bar{s}_i$ stetig. Wir erhalten $\bar{p} \circ \bar{s} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $\bar{s} \circ \bar{p} = \mathrm{id}_{[-1,1]/\!/\{-1,1\}}$ wie in E2Q. QED

Un/endliches Bouquet von Kreislinien







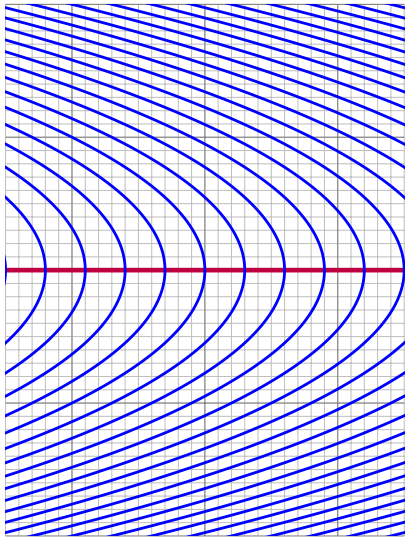
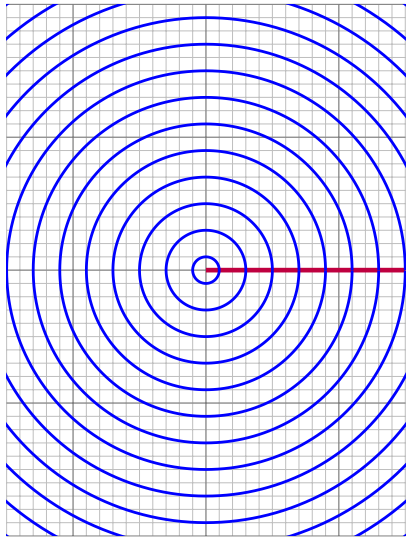
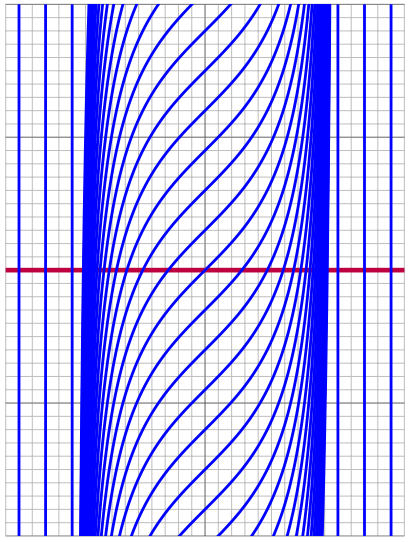
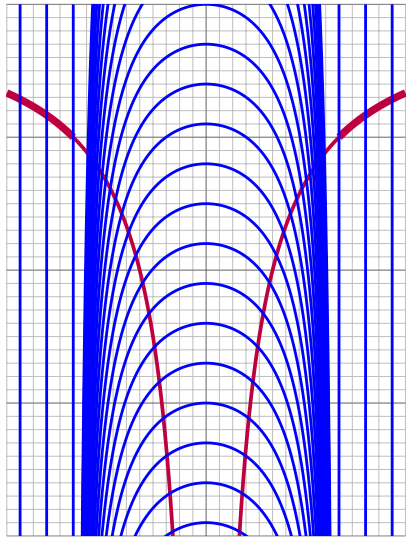
Beispiel / Übung E2w: unendliches Bouquet von Kreislinien

Der Quotient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\!\!/\mathbb{Z}$ (nicht $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$!) entsteht durch Verheften aller ganzzahligen Punkte in $\mathbb{R}$, vermöge $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x = y \vee \{x, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.
Dies nennen wir das **unendliche Bouquet von Kreislinien**.

(1) In $\mathbb{R}/\!\!/\mathbb{Z}$ konvergieren $[n]_{n\in\mathbb{N}}$ und $[2^{-n}]_{n\in\mathbb{N}}$, nicht aber $[n + 2^{-n}]_{n\in\mathbb{N}}$.
(2) Beide Abzählbarkeitsaxiome gelten für $\mathbb{R}$, aber keines für $\mathbb{R}/\!\!/\mathbb{Z}$.
(3) Der Quotientenraum $\mathbb{R}/\!\!/\mathbb{Z}$ ist hausdorffsch, aber nicht metrisierbar.

Anders als $\mathbb{S}^1 /\!\!/ W_n$ lässt sich $\mathbb{R}/\!\!/\mathbb{Z}$ nur schlecht zeichnen. Warum?

Blätterung: Zerlegung der Ebene in Kurven

Beispiel / Übung E2Y: Blätterungen à la Georges Reeb

Welche Quotienten $q : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow Q = \mathbb{R}^2/_\sim$ ergeben folgende Äquivalenzen?

(1) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$.

(2) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

(3) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $|x_1| = |x_2| \geq 1$, oder $|x_1| < 1$ und $|x_2| < 1$ und $y_1 - x_1/(1 - x_1^2) = y_2 - x_2/(1 - x_2^2)$.

(4) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $|x_1| = |x_2| \geq 1$, oder $|x_1| < 1$ und $|x_2| < 1$ und $y_1 + 1/(1 - x_1^2) = y_2 + 1/(1 - x_2^2)$.

Welche dieser Räume sind lokal euklidisch? Welche sind hausdorffsch?

Blätterung: Zerlegung der Ebene in Kurven

Obige Skizze zeigt die Äquivalenzklassen in Blau und mögliche Repräsentanten in Rot.

(1) Die stetige Surjektion $p : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x + y^2$ erfüllt $p(x_1,y_1) = p(x_2,y_2)$ gdw $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$. Gemäß E2H induziert p eine stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}^2/_\sim \to \mathbb{R}$ mit $p = \bar{p} \circ q$. Der stetige Schnitt $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x,0)$ liefert $(\bar{p},\bar{s}) : \mathbb{R}^2/_\sim \cong \mathbb{R}$ gemäß E2J.

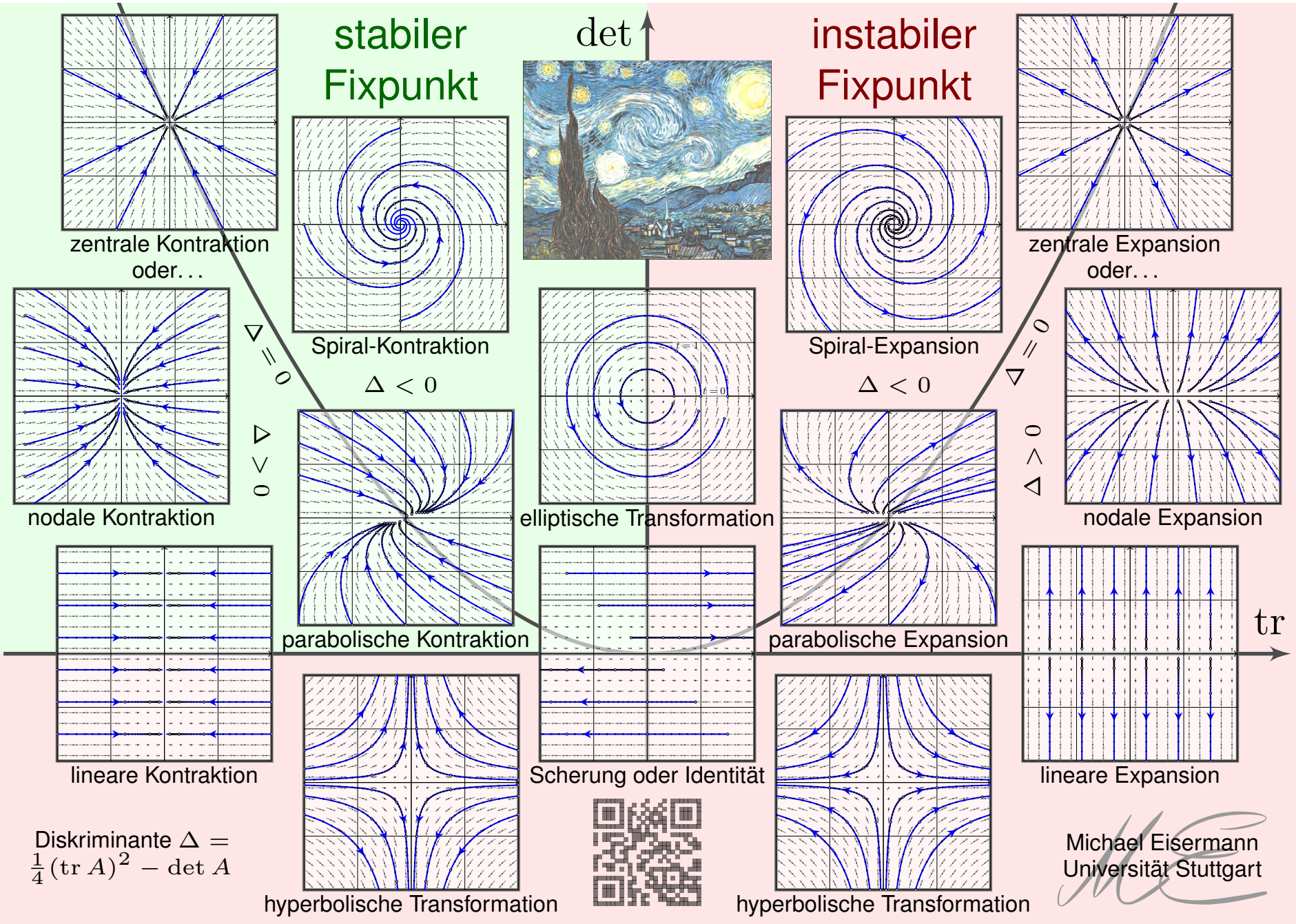
(2) Die stetige Surjektion $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ erfüllt $p(x_1,y_1) = p(x_2,y_2)$ gdw $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$. Gemäß E2H induziert p eine stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}^2/_\sim \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Der stetige Schnitt $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x,0)$ liefert $(\bar{p},\bar{s}) : \mathbb{R}^2/_\sim \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ gemäß E2J.

(3) Analog zu (1) finden wir auch hier $(\bar{p},\bar{s}) : \mathbb{R}^2/_\sim \cong \mathbb{R}$. Rechnen Sie dies explizit aus!

(4) Äquivalenzklassen sind senkrechte Geraden mit Abszisse $x \geq 1$ oder $x \leq -1$, sowie die Funktionsgraphen F_c von $f_c(x) = c - 1/(1-x^2)$ für $-1 < x < 1$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten zudem den Graphen G der Funktion $g(x) = -1/|x|$ für $x \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jede der Geraden schneidet G in genau einem Punkt $(x,g(x))$ mit $|x| \geq 1$, und jede Kurve F_c schneidet G in genau zwei Punkten $(\pm x, g(x))$ mit $|x| < 1$. Wir gehen deshalb zum Quotienten $\mathbb{R}^*/_\approx$ über bezüglich der Äquivalenz $x \approx x$ für $|x| \geq 1$ und $x \approx \pm x$ für $0 < |x| < 1$. Damit erhalten wir die stetige Surjektion $p : \mathbb{R}^2/_\sim \cong \mathbb{R}^*/_\approx$. Umgekehrt haben wir die stetige Surjektion $s : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2 \to Q : x \mapsto [x, g(x)]$. Nach Faktorisierung wie in E2J erhalten wir den Homöomorphismus $(\bar{p},\bar{s}) : \mathbb{R}^2/_\sim \cong \mathbb{R}^*/_\approx$. Dies ist die verzweigte Gerade aus Beispiel E2E!

Alle vier Quotientenräume sind lokal euklidisch der Dimension 1, also lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Der letzte Quotientenraum ist jedoch erstaunlicherweise nicht hausdorffsch. So ganz exotisch ist diese Situation gar nicht, wie wir jetzt sehen. Sie tritt jedenfalls in der Natur auf.

Differentialgleichung: Zerlegung des Phasenraums in Bahnen



Differentialgleichung: Zerlegung des Phasenraums in Bahnen

Auf dem euklidischen Raum $X = \mathbb{R}^n$ bzw. $X^* = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ untersuchen wir die lineare Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ mit konstanter Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Lösungskurve durch $x \in X$ ist gegeben durch $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}\,x$. Dies sind die Flusslinien der Operation der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ durch

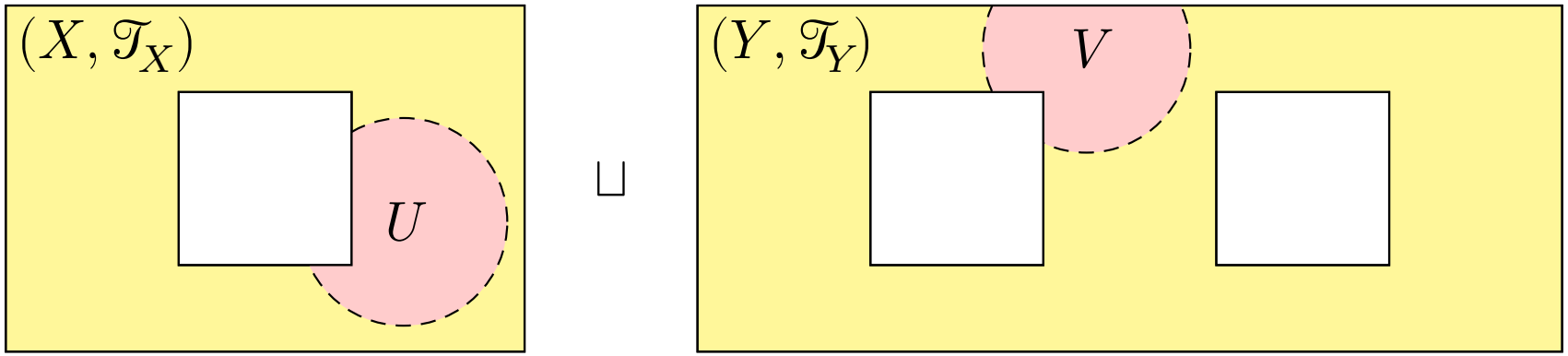
$$\Phi : \mathbb{R} \times X \to X : (t, x) \mapsto \mathrm{e}^{tA}\,x.$$

Übung: Skizzieren Sie für die Matrizen $H = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ und $K = \left[\begin{smallmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right]$ mit $a \in \mathbb{R}$ die Bahnen. Bestimmen Sie die Quotientenräume $X/_\sim$ und $X^*/_\sim$ durch explizite Homöomorphismen zu vertrauteren Räumen, Teilräume des $\mathbb{R}^n$ oder Quotientenräume wie der verzweigten Geraden (E2E). Welche dieser Räume sind lokal euklidisch? Welche sind hausdorffsch? Sehen Sie einen Zusammenhang zur obigen Reeb–Blätterung?

Allgemein: Wiederholen Sie die Klassifikation der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bis auf Konjugation durch die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$. Diskutieren Sie die so entstehenden Quotientenräume $Q_A = X/_\sim$ und $Q_A^* = X^*/_\sim$. Dies ist ein erster, einfacher Schritt zur **topologischen Klassifikation** der Fixpunkte dynamischer Systeme, hier zweidimensional skizziert.

Summe zweier topologischer Räume

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und disjunkt, $X \cap Y = \emptyset$.



Definition E3A: Summe zweier topologischer Räume

Wir bilden die **disjunkte Vereinigung** $X \sqcup Y := X \cup Y$ mit $X \cap Y = \emptyset$ und erhalten die Inklusionen $i : X \hookrightarrow X \sqcup Y : x \mapsto x$ und $j : Y \hookrightarrow X \sqcup Y : y \mapsto y$. Hierauf definieren wir die **Summentopologie** durch

$$\mathcal{T} := \left\{ U \sqcup V \middle| U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \right\} = i_* \mathcal{T}_X \cap j_* \mathcal{T}_Y.$$

Wir erhalten den **Summenraum** $(X \sqcup Y, \mathcal{T}) =: (X, \mathcal{T}_X) \sqcup (Y, \mathcal{T}_Y)$, genannt die **Summe** oder **disjunkte Vereinigung** der Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

In diesem Raum sind die Teilmengen X und Y offen und abgeschlossen.

Summe zweier topologischer Räume

Beispiel: Es gilt $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ und $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_n^- \mathbb{R}$ nicht nur als Mengen, sondern auch als Räume mit der Summentopologie.

Es gilt $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<0} \sqcup \mathbb{Q}_{\geq 0}$ als Mengen, aber nicht als topologische Räume, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}} \sqcup \mathbb{Q}_{>\sqrt{2}}$ als offene Mengen, somit als topologische Räume.

Bemerkung: Im Raum $(Z, \mathcal{T}_Z)$ seien $X, Y \subseteq Z$ disjunkt. Äquivalent sind:
(1) Die Teilraumtopologie auf $X \sqcup Y$ in $(Z, \mathcal{T}_Z)$ ist die Summentopologie.
(2) In $(Z, \mathcal{T}_Z)$ existieren $A \supseteq X$ und $B \supseteq Y$ offen mit $A \cap Y = X \cap B = \emptyset$.

Bemerkung: Sei $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen. In diesem Falle ist ihre **Summe** oder **(interne) disjunkte Vereinigung** nichts weiter als ihre Vereinigung – mit der Zusage der Disjunktheit:

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \quad \text{wobei} \quad X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset \text{ für } \lambda \neq \mu.$$

Was tun, wenn die vorgegebene Familie $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ nicht disjunkt ist? Dann machen wir sie disjunkt, indem wir jede Menge X_λ durch ihre Kopie $\{\lambda\} \times X_\lambda$ ersetzen. *Was nicht disjunkt ist, wird disjunkt gemacht!*

Summe einer Familie topologischer Räume

Definition E3c: Summe einer Familie topologischer Räume

Sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume. Wir definieren die **(externe) disjunkte Vereinigung** der Trägermengen $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ durch

$$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \{\lambda\} \times X_\lambda.$$

Hierzu gehören die **kanonischen Injektionen** $i_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X : x \mapsto (\lambda, x)$. Der Index $\lambda \in \Lambda$ unterscheidet die disjunkten Teilräume $\{\lambda\} \times X_\lambda$ in X. Sind alle $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ disjunkt, so können wir ebenso $X = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ nutzen.

Die **Summentopologie** auf X definieren wir durch

$$\mathcal{T} = \left\{ \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \,\middle|\, U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \right\} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (i_\lambda)_* \mathcal{T}_\lambda.$$

Die Eigenschaften (O1–3) prüft man leicht nach. Auf X ist $\mathcal{T}$ die feinste Topologie, für die alle Injektionen $i_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig sind (E3B).

Wir nennen $(X, \mathcal{T}) =: \coprod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ den **Summenraum** zu $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Summe einer Familie topologischer Räume

Mit der Summentopologie ist $i_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \to (X, \mathcal{T})$ eine Einbettung, also ein Homöomorphismus auf den Bildraum $i_\lambda(X_\lambda) = \{\lambda\} \times X_\lambda$.

Meist identifizieren wir X_λ mit seiner Kopie $X'_\lambda = i_\lambda(X_\lambda) := \{\lambda\} \times X_\lambda$ und somit die externe Summe $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ mit der internen $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X'_\lambda$.

Im Summenraum $(X, \mathcal{T})$ ist jeder Teilraum X'_λ offen, denn $X'_\lambda \in \mathcal{T}$, und abgeschlossen, denn das Komplement $X \setminus X'_\lambda = \bigcup_{\mu\neq\lambda} X'_\mu$ ist offen.

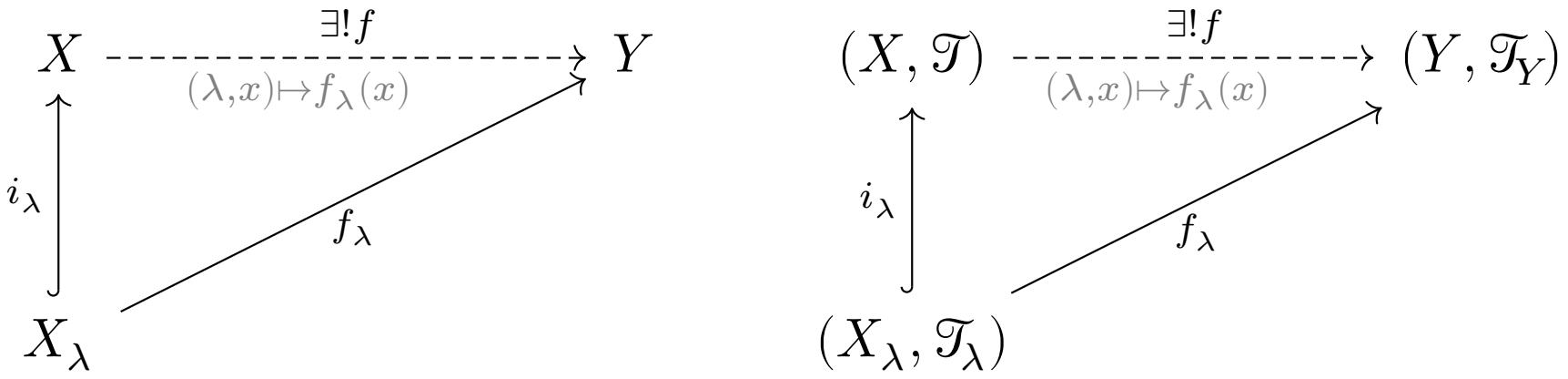
Beispiel: Es gilt $\mathbb{Q} = \bigsqcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$ als Mengen, nicht als topologische Räume: die Topologie links ist euklidisch, die Summentopologie rechts ist diskret.

Es gilt $\mathbb{Q} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} (]\xi_k, \xi_{k+1}[\cap \mathbb{Q})$ als Räume, rechts mit Summentopologie, wobei $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : k \mapsto \xi_k$ strikt monoton und beidseitig unbeschränkt.

Bemerkung: Sei $X = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ eine Zerlegung in Teilräume $X_\lambda \subseteq X$. Genau dann trägt X die Summentopologie, wenn alle X_λ offen sind.

Zu $X_\lambda \subseteq Z$ existiere $U_\lambda \supseteq X_\lambda$ offen, sodass $U_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ für alle $\lambda \neq \mu$. Dann ist die Teilraumtopologie auf $X = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ die Summentopologie.

Universelle Abbildungseigenschaft des Summenraumes



Satz E3F: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

(0) Die Summentopologie $\mathcal{T}$ auf $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ist die feinste, die alle Injektionen $i_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}) : x \mapsto (\lambda, x)$ stetig macht.

(1) Zu jeder Familie $(f_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \to (Y, \mathcal{T}_Y))_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen existiert genau eine stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ mit $f \circ i_\lambda = f_\lambda$.

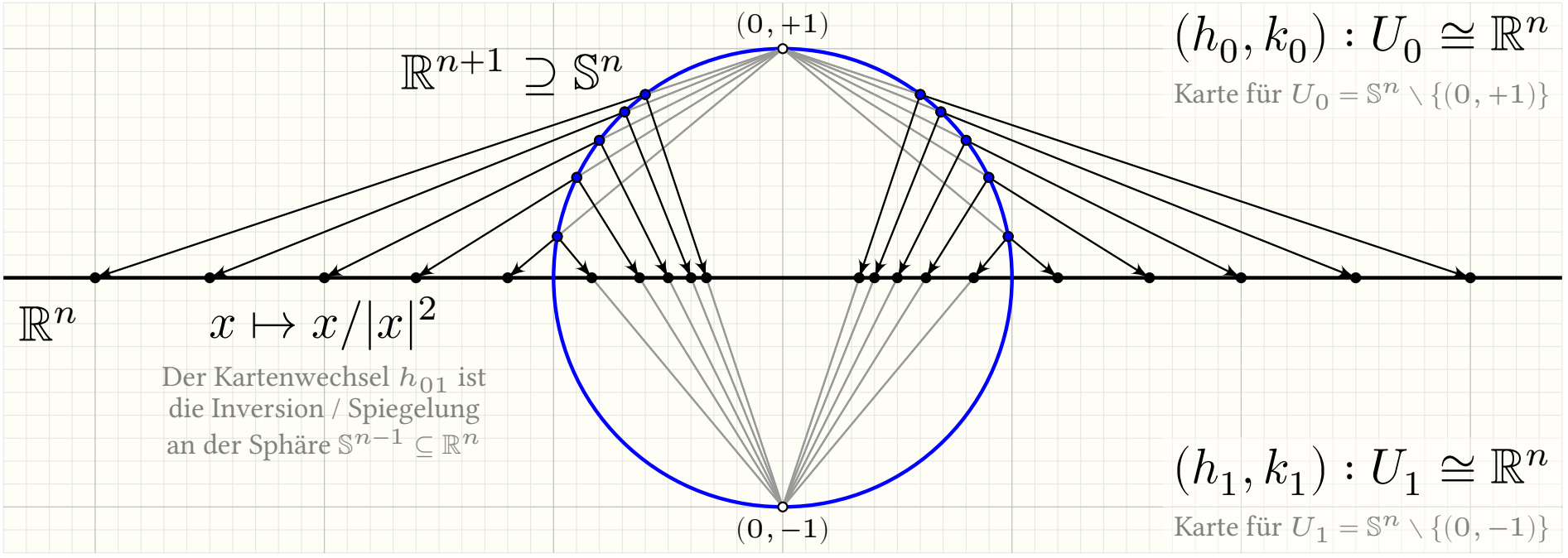
(2) Zerlegung und Summe $f \leftrightarrows (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit $f_\lambda = f \circ i_\lambda$ und $f = \coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ stiften somit die Bijektion $(\Phi, \Psi) : \mathcal{C}(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Y) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}(X_\lambda, Y)$.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition E3c der Summentopologie.
Stetigkeit von f: Für $V \in \mathcal{T}_Y$ gilt $f^{-1}(V) = \coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. QED

Universelle Abbildungseigenschaft des Summenraumes

Die Konstruktion des Summenraums ist natürlich und recht einfach. Die universelle Abbildungseigenschaft ist der einfachste Spezialfall des Verklebelemmas E1P: Die Teilräume $X_\lambda \subseteq X$ mit $\lambda \in \Lambda$, genauer ihre homöomorphen Kopien $X'_\lambda \subseteq X$, sind eine offene Zerlegung von X. Jede Familie $(f_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \to (Y, \mathcal{T}_Y))_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen lässt sich zur stetigen Abbildung $f = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_i \circ \iota_\lambda^{-1} : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ verkleben, denn jede paarweise Überlappung ist leer und somit kein Hindernis.

Ein Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$



Beispiel / Übung E31: Verheften von Hemisphären

Wir erhalten explizite Homöomorphismen $(f, g) : X/_\sim \cong \mathbb{S}^n$.

(1) Sei $X_0 = X_1 = \mathbb{R}^n$. Auf dem Summenraum $X = X_0 \sqcup X_1$ sei die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $(0, x) \sim (1, x/|x|^2)$ für alle $x \neq 0$.

(2) Sei $X_0 = X_1 = \mathbb{D}^n$. Auf dem Summenraum $X = X_0 \sqcup X_1$ sei die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $(0, x) \sim (1, x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Verheften zweier Räume

Definition E3J: Verheften zweier Räume entlang einer Abbildung

Sei $f : Y \supseteq B \twoheadrightarrow A \subseteq X$ stetig. Die **Verheftung** von X und Y entlang f ist

$$q : X \sqcup Y \twoheadrightarrow X \cup_f Y := \frac{X \sqcup Y}{f(y) \sim y,\ y \in B}.$$

Äquivalenzklassen sind $\{x\} \sqcup f^{-1}(x)$ für $x \in A$ sowie $\{z\}$ für $z \notin A \sqcup B$.

Beispiele: (0) Für $A = B = \emptyset$ ist $X \cup_f Y \cong X \sqcup Y$ die topologische Summe.
(1) Für $f : Y \supseteq \{y_0\} \rightharpoonup \{x_0\} \subseteq X$ erhalten wir das **Bouquet**

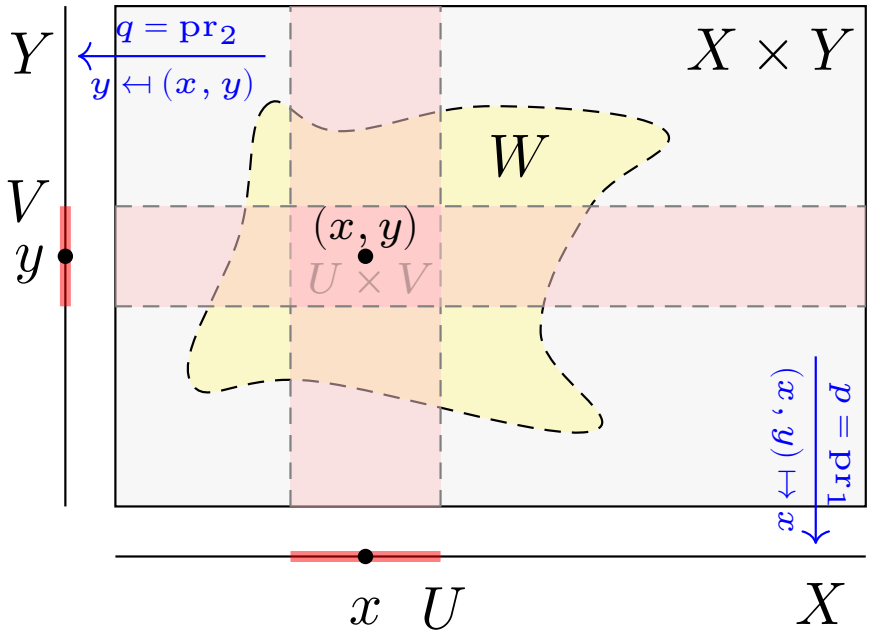
$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := \frac{X \sqcup Y}{x_0 \sim y_0} = X \cup_f Y.$$

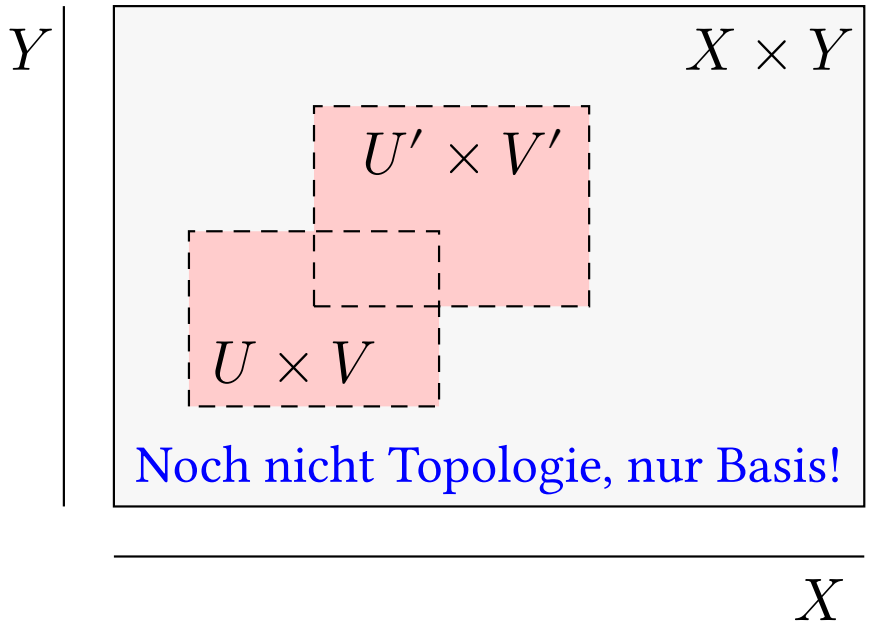
(2) Für $X = \{x_0\}$ erhalten wir die **Zusammenschlagung**

$$Y /\!\!/ B := \frac{\{x_0\} \sqcup Y}{x_0 \sim y,\ y \in B} = X \cup_f Y.$$

Vorige Beispiele: (3) Für $f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ erhalten wir $\mathbb{D}^n \cup_f \mathbb{D}^n \cong \mathbb{S}^n$. (E3I)
(4) Für $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x \mapsto x/|x|^2$ erhalten wir $\mathbb{R}^n \cup_g \mathbb{R}^n \cong \mathbb{S}^n$.
(5) Für $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ ist $\mathbb{R}^n \cup_h \mathbb{R}^n$ der Raum mit doppeltem Ursprung. (E2E)

Produkt zweier topologischer Räume





Zu Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ betrachten wir das kartesische **Produkt**

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X,\ y \in Y \}$$

der Trägermengen, also die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$. Hierzu gehören die **Projektionen** $p = \mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$ und $q = \mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y : (x, y) \mapsto y$. Wir möchten nun das Produkt $X \times Y$ mit der **Produkttopologie** $\mathcal{T}$ ausstatten, sodass p und q stetig werden. Die feinste Topologie hierzu wäre die diskrete. Wie wählen die gröbste!

Produkt zweier topologischer Räume

Definition E4A: Produkt zweier topologischer Räume

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Auf der Trägermenge $X \times Y$ definieren wir die Produkttopologie $\mathcal{T}$ durch die **Produktbasis**

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y := \left\{ U \times V \,\middle|\, U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \right\} \\ &= \left\{ p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \,\middle|\, U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \right\}.\end{aligned}$$

Anschaulich besteht die Basis $\mathcal{B}$ aus den offenen Kästchen $U \times V$.
Dies ist noch nicht die gesamte Topologie $\mathcal{T}$, sondern nur eine Basis:

Diese Familie erfüllt die Basisaxiome (B1–2) aus D6C und definiert so die **Produkttopologie** $\mathcal{T} := \left\{ \bigcup \mathcal{S} \,\middle|\, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \right\}$, punktweise ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} = \Big\{\, W \subseteq X \times Y \;\Big|\; &\forall (x,y) \in W \;\; \exists U \in \mathcal{T}_X \;\; \exists V \in \mathcal{T}_Y : \\ &(x,y) \in U \times V \subseteq W \,\Big\}\end{aligned}$$

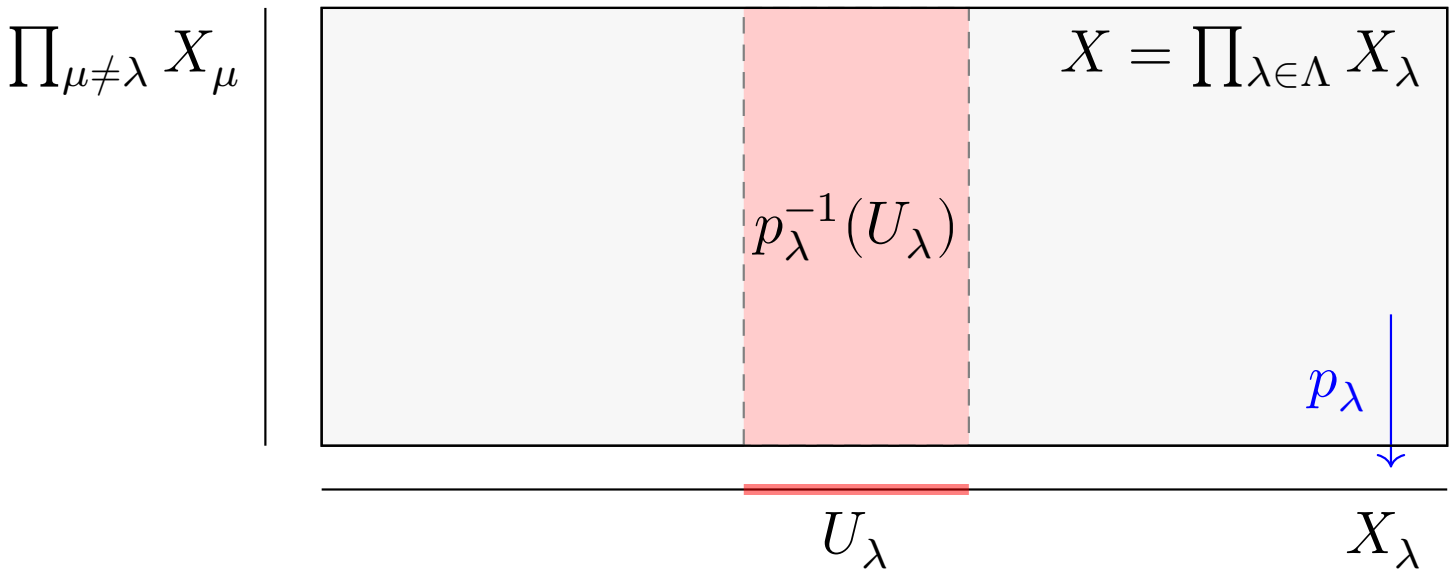
Wir erhalten den **Produktraum** $(X \times Y, \mathcal{T}) =: (X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$.

Produkt einer Familie topologischer Räume

Im Folgenden sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume.
Wir definieren das **Produkt** der Trägermengen $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ durch

$$X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \{x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid \forall \lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_\lambda\}$$
$$= \{x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : \lambda \mapsto x_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_\lambda\}.$$

Hierzu gehören die **kanonischen Projektionen** $p_\lambda : X \to X_\lambda : x \mapsto x_\lambda$.



Wir möchten das Produkt X mit einer Topologie $\mathcal{T}$ ausstatten, sodass alle Projektionen p_λ stetig sind. Die feinste, $\mathfrak{P}(X)$? Wie wählen die gröbste: Die offenen Zylinder $p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ mit $U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$ erzeugen die Produkttopologie.

Produkt einer Familie topologischer Räume

Definition E4c: Produkt einer Familie topologischer Räume

Die **Produkttopologie** $\mathcal{T}$ auf $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ wird erzeugt von

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^* \mathcal{T}_\lambda = \{ p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda,\, U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \}$$
$$= \{ \textstyle\prod_{\mu\in\Lambda} U_\mu \,|\, U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda, \text{ sonst } U_\mu = X_\mu \text{ für alle } \mu \neq \lambda \}.$$

Nach Satz D6f erhalten wir eine Basis $\mathcal{B}$ für $\mathcal{T}$ mittels endlicher Schnitte:

$$\mathcal{B} = \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda := \{ p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \dots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \,|\, n \in \mathbb{N},\, \lambda_i \in \Lambda,\, U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i} \}$$
$$= \{ \textstyle\prod_{\mu\in\Lambda} U_\mu \,|\, U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \text{ für endlich viele } \lambda \in \Lambda; \text{ sonst } U_\mu = X_\mu \}$$

Diese erfüllt die Basisaxiome (B1–2) und definiert so die Topologie

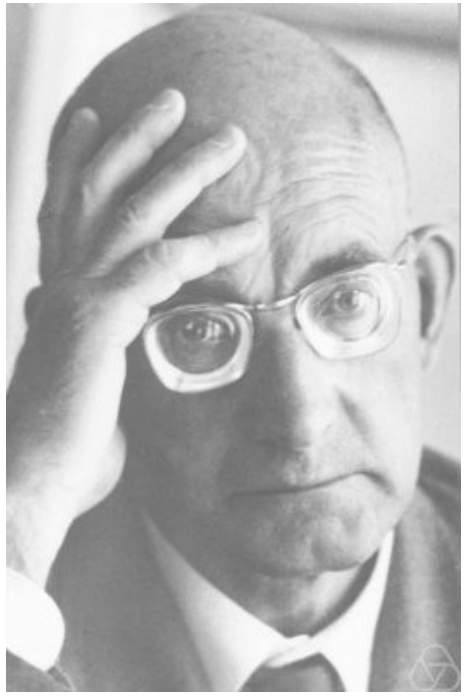
$$\mathcal{T} = \{ \textstyle\bigcup \mathcal{S} \,|\, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \} = \{\, W \subseteq X \;|\; \forall x \in W\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$$
$$\exists U_{\lambda_1} \in \mathcal{T}_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n} \in \mathcal{T}_{\lambda_n} \,:\, x \in p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \dots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \subseteq W \}.$$

Wir nennen $(X, \mathcal{T}) =: \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ den **Produktraum** zu $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Produkt einer Familie topologischer Räume

Felix Hausdorff
(1868–1942)

Eliakim H. Moore
(1862–1932)

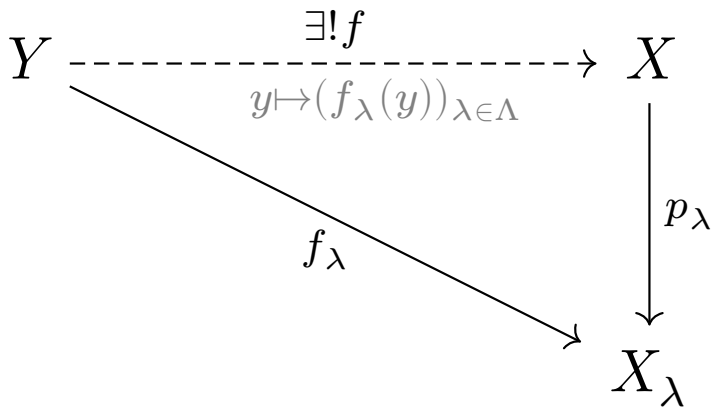


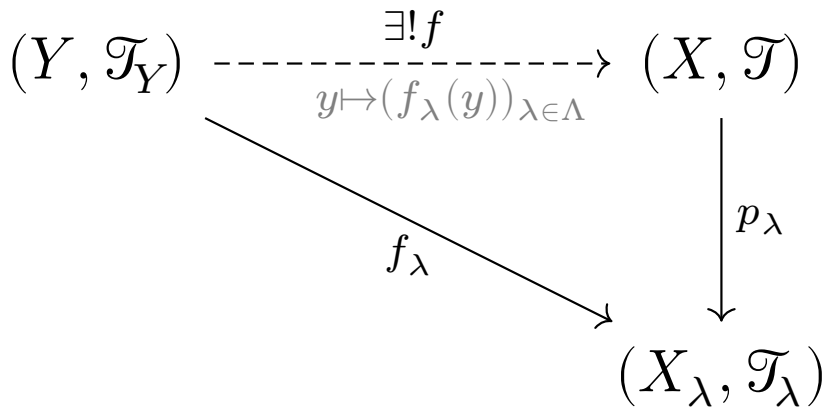
Pawel Alexandroff
(1896–1982)

Andrei Tychonoff
(1906–1993)

Die Teilraumtopologie wurde 1914 von Felix Hausdorff eingeführt, die Quotiententopologie 1925 von Eliakim Moore und zeitgleich 1926 von Pawel Alexandroff, die Produkttopologie 1930 von Andrei Tychonoff. Die topologische Summe wurde von Nicolas Bourbaki (1940) eingeführt. Seine *Topologie générale* (1947) etablierte die kategorielle Sichtweise und universelle Abbildungseigenschaft von Initial- und Finaltopologien.

Universelle Abbildungseigenschaft des Produktraumes





Satz E4D: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

(0) Die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ist die gröbste, die alle Projektionen $p_\lambda : (X, \mathcal{T}) \to (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) : x \mapsto x_\lambda$ stetig macht.

(1) Zu jeder Familie $(f_\lambda : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ stetiger Abbildungen existiert genau eine stetige Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T})$ mit $p_\lambda \circ f = f_\lambda$.

(2) Zerlegung und Produkt $f \leftrightarrows (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit $f_\lambda = p_\lambda \circ f$ und $f = \prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ stiften somit die Bijektion $(\Phi, \Psi) : \mathcal{C}(Y, \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}(Y, X_\lambda)$.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition E4C der Produkttopologie. Stetigkeit dank D6G: Für $U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$ gilt $f^{-1}(p_\lambda^{-1}(U_\lambda)) = f_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{T}_Y$. QED

Produkttopologie: Erzeugung und Basen

Endliche Produkte $(X, \mathcal{T}) = (X_1, \mathcal{T}_1) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$ sind etwas einfacher zu beschreiben. Auf der Produktmenge $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= p_1^* \mathcal{T}_1 \cup \cdots \cup p_n^* \mathcal{T}_n = \left\{ p_i^{-1}(U_i) \,\middle|\, i = 1, \ldots, n,\ U_i \in \mathcal{T}_i \right\} \\
&= \left\{ X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n \,\middle|\, i = 1, \ldots, n,\ U_i \in \mathcal{T}_i \right\}, \\
\mathcal{B} &= \left\{ p_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(U_n) \,\middle|\, U_1 \in \mathcal{T}_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_n \right\} \\
&= \left\{ U_1 \times \cdots \times U_n \,\middle|\, U_1 \in \mathcal{T}_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_n \right\} = \mathcal{T}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_n, \\
\mathcal{T} &= \left\{ \bigcup \mathcal{S} \,\middle|\, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \right\} \\
&= \left\{ W \subseteq X \,\middle|\, \forall x \in W \ \exists U_1 \in \mathcal{T}_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_n : x \in U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq W \right\}.
\end{aligned}$$

Allgemeiner: Aus Basen $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_1$, ..., $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{T}_n$ erhalten wir die Basis $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_n = \left\{ U_1 \times \cdots \times U_n \,\middle|\, U_1 \in \mathcal{B}_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}_n \right\} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

Beispiel: Der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$ hat als eine mögliche Basis die offenen Quader, $\mathcal{B}_n = \{]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\,|\, a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n \text{ in } \mathbb{R} \}$. Somit gilt $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_1) \times \cdots \times (\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_1) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$ dank $\mathcal{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_n$. Für $k + \ell = n$ gilt $\mathcal{B}_k \otimes \mathcal{B}_\ell = \mathcal{B}_n$, also $(\mathbb{R}^k, \mathcal{T}_k) \times (\mathbb{R}^\ell, \mathcal{T}_\ell) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n)$.

Produkttopologie: Erzeugung und Basen

Wird $\mathcal{T}_\lambda$ erzeugt von $\mathcal{E}_\lambda \subseteq \mathcal{T}_\lambda$, für jedes $\lambda \in \Lambda$, so wird $\mathcal{T}$ erzeugt von

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^* \mathcal{E}_\lambda = \left\{ \prod_{\mu\in\Lambda} U_\mu \;\middle|\; \begin{array}{l} U_\lambda \in \mathcal{E}_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda, \\ U_\mu = X_\mu \text{ für alle } \mu \neq \lambda \end{array} \right\}.$$

Hat $\mathcal{T}_\lambda$ als Basis $\mathcal{B}_\lambda \subseteq \mathcal{T}_\lambda$, für jedes $\lambda \in \Lambda$, so hat $\mathcal{T}$ als Basis

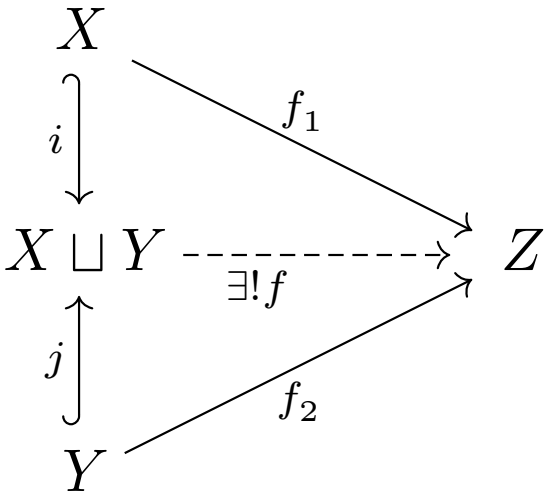
$$\mathcal{B} = \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda = \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} U_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda \text{ für endlich viele } \lambda \in \Lambda, \\ U_\lambda = X_\lambda \text{ sonst} \end{array} \right\}.$$

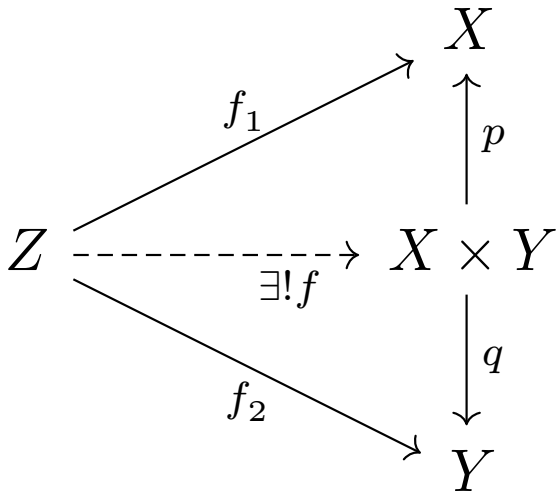
Die Endlichkeitsbedingung ist wesentlich: Wir fordern $U_\lambda = X_\lambda$ für fast alle $\lambda \in \Lambda$. Dies ergibt sich zwangsläufig aus unserem Wunsch, dass $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie sein soll, die alle Projektionen p_λ stetig macht.

Ohne die Endlichkeitsbedingung erhalten wir statt der Produkttopologie die sogenannte **Boxtopologie**; sie hat ganz anderen Eigenschaften! (E4Q)

Beispiel: Auf der Menge $\mathbb{R}^X = \{ f : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \} = \prod_{x\in X} \mathbb{R}$ ist die Produkttopologie E4C die Topologie der punktweisen Konvergenz D4A, denn aus $\mathcal{B}_x = \{]a,b[\mid a < b \text{ in } \mathbb{R} \}$ wird $\mathcal{B} = \bigotimes_{x\in X} \mathcal{B}_x$ und $\tau(\mathcal{B}) = \mathcal{T}_{\mathrm{pw}}$.

Zusammenfassung: Summen und Produkte





Die universelle Abbildungseigenschaft von Summe und Produkt:

$$\mathscr{C}(X \sqcup Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(X, Z) \times \mathscr{C}(Y, Z) : f \mapsto (\, f_1 = f \circ i,\ f_2 = f \circ j \,)$$
$$\mathscr{C}(Z, X \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(Z, X) \times \mathscr{C}(Z, Y) : f \mapsto (\, f_1 = p \circ f,\ f_2 = q \circ f \,)$$

Die Schreibweise $B^A := \mathscr{C}(A, B)$ und $X + Y := X \sqcup Y$ ist suggestiv:

$$Z^{(X+Y)} \cong Z^X \times Z^Y \quad \text{und} \quad (X \times Y)^Z \cong X^Z \times Y^Z$$

Diese Rechenregeln gelten für beliebige Summen und Produkte,
zudem Neutralität, Kommutativität, Assoziativität und Distributivität.

☺ Übung / Frage aus dem Publikum: Gilt damit die binomische Formel?

Zusammenfassung: Summen und Produkte

Für jede Bijektion $\varphi : \Lambda' \xrightarrow{\sim} \Lambda$ gilt das allgemeine Kommutativgesetz:

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \coprod_{\lambda'\in\Lambda'} X_{\varphi(\lambda')} : \quad (\varphi(\lambda'), x) \leftrightarrows (\lambda', x)$$
$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda'\in\Lambda'} X_{\varphi(\lambda')} : \quad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \leftrightarrows (x_{\varphi(\lambda')})_{\lambda'\in\Lambda'}$$

Für jede Zerlegung $\Lambda = \coprod_{i\in I} \Lambda_i$ gilt das allgemeine Assoziativgesetz:

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \coprod_{i\in I}\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda_i} X_\lambda\Big) : \quad ((i,\lambda), x) \leftrightarrows (i, (\lambda, x))$$
$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{i\in I}\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda_i} X_\lambda\Big) : \quad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \leftrightarrows ((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_i})_{i\in I}$$

Für $\Lambda = \prod_{i\in I} \Lambda_i$ gilt das allgemeine Distributivgesetz:

$$\prod_{i\in I}\Big(\coprod_{\lambda_i\in\Lambda_i} X_{\lambda_i}\Big) \cong \coprod_{\lambda\in\Lambda}\Big(\prod_{i\in I} X_{\lambda_i}\Big) : \quad (\lambda_i, x_{\lambda_i})_{i\in I} \leftrightarrows ((\lambda_i)_{i\in I}, (x_{\lambda_i})_{i\in I})$$

All diese Abbildungen sind stetig dank UAE, also Homöomorphismen.

Topologische Eigenschaften von Summen und Produkten

Übung E4s: Hausdorff–Eigenschaft und Diagonale

Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ ist hausdorffsch gdw die Diagonale $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ im Produktraum $X \times X$ abgeschlossen ist.

Beweis: Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist hausdorffsch, wenn gilt:
Zu $x \neq y$ in X existieren $U, V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Das Komplement $(X \times X) \setminus \Delta_X$ ist offen in der Produkttopologie:
Zu $x \neq y$ in X existieren $U, V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$.

Übung E4t: Vergleich stetiger Funktionen

Sind $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen und der Zielraum Y hausdorffsch, so ist die Menge $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen im Startraum X. Aus $A \subseteq X$ und $f|_A = g|_A$ folgt $f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$; ist A dicht in X, so folgt $f = g$.

Beweis: Die Abbildung $h : X \to Y \times Y : x \mapsto (f(x), g(x))$ ist stetig (UAE).
Somit ist $h^{-1}(\Delta_Y) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X. QED

Metrisierung von Produkträumen

Satz E4v: Metrisierung von Produkträumen

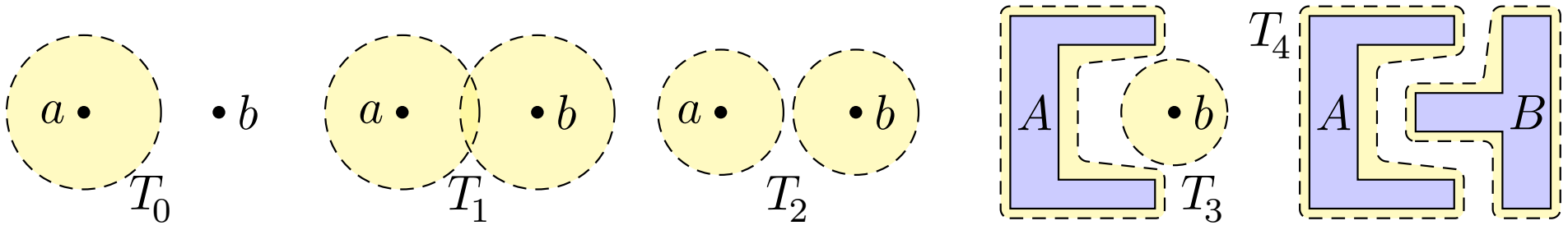
Sei $(X,\mathcal{T}) = \prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i)$ das Produkt topologischer Räume $(X_i,\mathcal{T}_i)$, und jeder enthalte mindestens zwei Elemente $x_i \neq x_i'$. Dann sind äquivalent:

1. Der Produktraum $(X,\mathcal{T})$ ist metrisierbar.
2. Jeder Faktor $(X_i,\mathcal{T}_i)$ ist metrisierbar, und I ist abzählbar.

Beweis: „(2) ⇒ (1)“: Für $i \in I$ sei $d_i : X_i \times X_i \to [0,1]$ eine Metrik für $\mathcal{T}_i$. Da I abzählbar ist, können wir $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen mit $\sum_{i\in I} a_i \leq 1$. Dank Satz D4G wird die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $X = \prod_{i\in I} X_i$ erzeugt durch die Metrik $d : X \times X \to [0,1] : (x,y) \mapsto \sum_{i\in I} a_i d_i(x_i,y_i)$.

„(1) ⇒ (2)“: Wir haben $(s_i,p_i) : X_i \cong X_i' := \prod_{j\in I} A_j$ mit $A_i = X_i$ und $A_j = \{x_j\}$ für $j \neq i$. Ist X metrisierbar, so auch jeder Teilraum X_i' (D1L). Wie in Satz D4B für $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ folgt: Ist die Indexmenge I überabzählbar, so ist der Produktraum $(X,\mathcal{T}) = \prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i)$ nicht erstabzählbar. QED

Trennungseigenschaften metrischer Räume



Satz E5A: Trennung durch offene Mengen…

Jeder metrische Raum (X, d) erfreut sich folgender Eigenschaften:

T_0: Zu $a \neq b$ in X hat einer eine Umgebung, die den anderen nicht trifft.

T_1: Zu $a \neq b$ in X hat jeder eine Umgebung, die den anderen nicht trifft.
Äquivalent hierzu: Für jeden Punkt $a \in X$ ist $\{a\}$ in X abgeschlossen.

T_2: Zu $a \neq b$ in X existieren disjunkte Umgebungen. (Hausdorff C2o/D3J)

T_3: Zu $A \in \mathcal{T}_X^c$ und $b \in X \setminus A$ existieren disjunkte Umgebungen.

T_4: Zu $A, B \in \mathcal{T}_X^c$ disjunkt existieren disjunkte Umgebungen.

T_5: Zu $A, B \subseteq X$ mit $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$ existieren disjunkte Umgebungen.

Konstruktion: Im Falle $A \neq \emptyset \neq B$ genügen hierzu die offenen Mengen $U = \{\, x \in X \,|\, d(x, A) < d(x, B) \,\}$ und $V = \{\, x \in X \,|\, d(x, B) < d(x, A) \,\}$.

Trennungseigenschaften metrischer Räume

Satz E5A: Trennung durch... stetige reelle Funktionen

Ebenso trennen wir Punkte und Mengen durch stetige Funktionen:

$T_{2\frac{1}{2}}$: Zu $a \neq b$ in X existiert $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$.

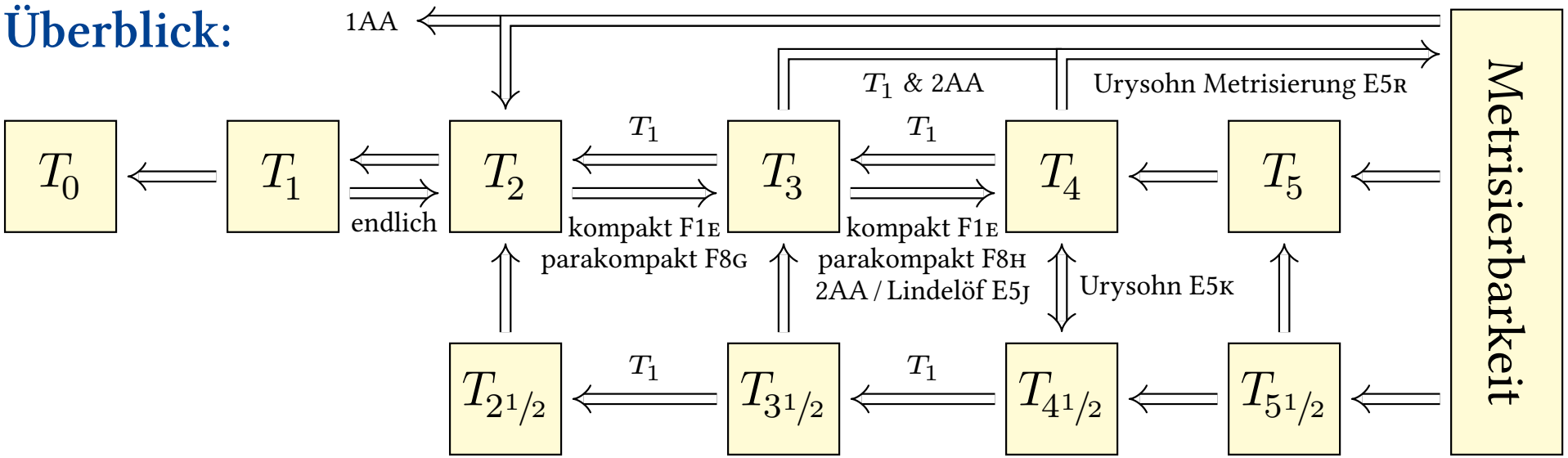
$T_{3\frac{1}{2}}$: Zu $A \in \mathcal{T}_X^c$ und $b \in X \setminus A$ existiert f mit $f|_A = 0$ und $f(b) = 1$.

$T_{4\frac{1}{2}}$: Zu $A, B \in \mathcal{T}_X^c$ disjunkt existiert f mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$, ...

$T_{5\frac{1}{2}}$: sogar $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$, genannt **Urysohn–Funktion**.

Im Falle $A \neq \emptyset \neq B$ genügt $f : X \to [0,1] : x \mapsto d(x,A)/(d(x,A) + d(x,B))$.

Überblick:



Trennungseigenschaften topologischer Räume

Die Trennungseigenschaften gelten nicht in jedem topologischen Raum. Extremes Beispiel: Die indiskrete Topologie erfüllt nicht einmal T_0, T_1, T_2.

Definition E5B: Trennungseigenschaften

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt T_i**–Raum**, wenn er die obige Eigenschaft T_i hat. Traditionell üblich sind folgende Bezeichnungen:

		T_2	*hausdorffsch / separiert*
T_1	&	T_3	*regulär*
T_1	&	$T_{3\frac{1}{2}}$	*vollständig regulär / Tychonoff*
T_1	&	T_4	*normal*
T_1	&	$T_{4\frac{1}{2}}$	*Dies folgt aus normal!*
T_1	&	T_5	*vollständig normal*
T_1	&	$T_{5\frac{1}{2}}$	*perfekt normal*

Dank Lemma von Urysohn (E5K) gilt: perfekt normal $\Rightarrow$ vollständig normal $\Rightarrow$ normal $\Rightarrow$ vollständig regulär $\Rightarrow$ regulär $\Rightarrow$ hausdorffsch.

Trennungseigenschaften topologischer Räume

Beispiel: Wir versehen $Z = [0,1]^2$ mit der lexikographischen Ordnung.

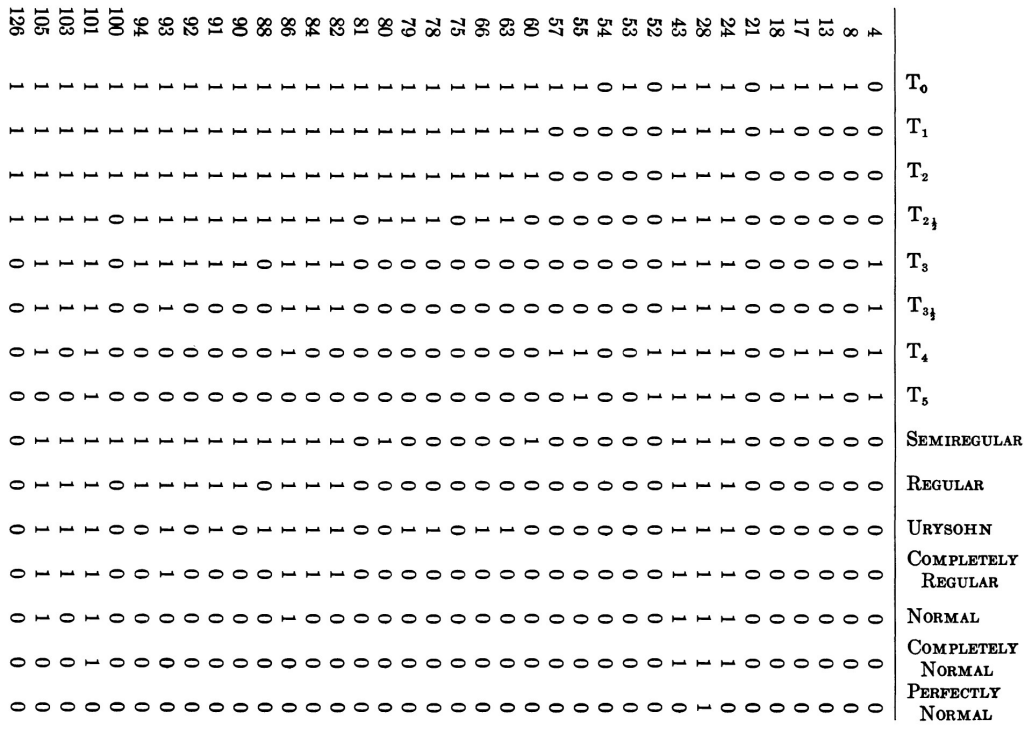
Satz E5D: Ordnungstopologie und Trennungseigenschaften

Sei $(X, <)$ total geordnet und $\mathcal{T}$ die Ordnungstopologie (D1M).
Dann erfüllt $(X, \mathcal{T})$ alle Trennungsaxiome T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5.

L.A. Steen, J.A. Seebach:
Counterexamples in Topology

Aus T_3 folgt nicht T_4. Beispiele dazu sind allerdings nicht leicht zu finden. Man kann es zunächst selbst versuchen… oder gleich in *Counterexamples* nachschlagen.

Der Übersicht entnehmen wir, dass dort Beispiele 82, 84, 90–94, 103 die von uns gesuchte Eigenschaft haben. Beispiel 84 ist die Sorgenfrey–Ebene (D6Z).



Lindelöf–Eigenschaft und Lemma von Tychonoff

Übung D6v: Zweitabzählbarkeit impliziert die Lindelöf–Eigenschaft.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis. Dann enthält jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung: Zu $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}$ existiert $J \subseteq I$ abzählbar mit $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Bemerkung: Kompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ fordert stärker J endlich, siehe F1A.

Beweis: Die Teilmenge $\mathcal{C} := \{\, V \in \mathcal{B} \mid \exists i \in I : V \subseteq U_i \,\} \subseteq \mathcal{B}$ ist abzählbar. Hierauf wählen wir eine Zuordnung $j : \mathcal{C} \to I : V \mapsto j(V)$ mit $V \subseteq U_{j(V)}$. Es gilt $X = \bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{V\in\mathcal{C}} U_{j(V)}$: Zu $x \in X$ existiert $i \in I$ mit $x \in U_i$. Dazu existiert $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subseteq U_i$. Somit gilt $V \in \mathcal{C}$ und $x \in V \subseteq U_{j(B)}$. QED

Lemma E5J: Tychonoff

Sei $(X, \mathcal{T})$ lindelöf, etwa zweitabzählbar. Dann impliziert T_3 bereits T_4.

Beweis: Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$.
Wir konstruieren $A \subseteq U \in \mathcal{T}$ und $B \subseteq V \in \mathcal{T}$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Das Lemma von Tychonoff: Beweis

(1) Nach Voraussetzung T_3 existieren zu jedem Punkt $a \in A$ disjunkte offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $B \subseteq U'_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap U'_a = \emptyset$.

Die offene Überdeckung $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{a\in A} U_a$ erlaubt eine abzählbare Teilüberdeckung dank D6v (Lindelöf–Eigenschaft).

Nach Nummerierung mit $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir daher $\tilde{U}_n, \tilde{U}'_n \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{U}_n$ sowie $B \subseteq \tilde{U}'_n$ und $\tilde{U}_n \cap \tilde{U}'_n = \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(2) Sei $U_n := \bigcup_{k=0}^{n} \tilde{U}_k$ und $U'_n := \bigcap_{k=0}^{n} \tilde{U}'_k$. Damit gilt $U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und $U'_0 \supseteq U'_1 \supseteq U'_2 \supseteq \ldots \supseteq B$ sowie $U_n \cap U'_n = \emptyset$.

Mit vertauschten Rollen von A und B erhalten wir $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ und $V'_0 \supseteq V'_1 \supseteq V'_2 \supseteq \ldots \supseteq A$ mit $V_n \cap V'_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Schließlich gilt $A \subseteq U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(U_k \cap V'_k)$ und $B \subseteq V := \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}}(V_\ell \cap U'_\ell)$. Nach Konstruktion sind U und V offen und disjunkt, denn

$$U \cap V = \bigcup_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} (U_k \cap V'_k) \cap (V_\ell \cap U'_\ell).$$

Für $k \leq \ell$ gilt $U_k \cap U'_\ell = \emptyset$. Für $\ell \leq k$ gilt $V_\ell \cap V'_k = \emptyset$. QED

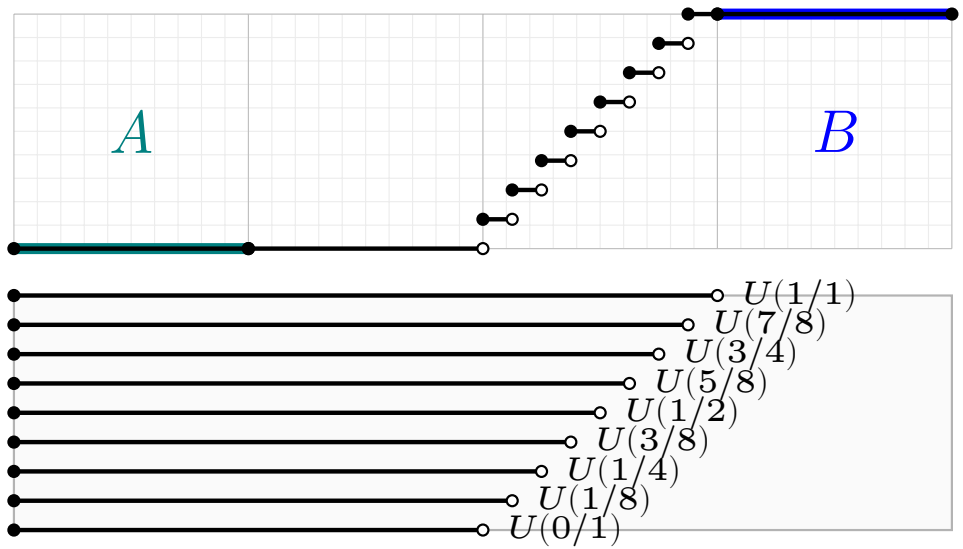
Das Lemma von Urysohn

Lemma E5κ: Urysohn, 1925

Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt: Aus T_4 folgt $T_{4^1/_2}$.

Ausgeschrieben: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_4–Raum; zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Mengen $A, B \subseteq X$ existieren disjunkte offene Umgebungen. Dann gilt $T_{4^1/_2}$: Es existiert $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

Beweisidee:



Beweis: (1) Die dichte Teilmenge $D = [0,1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ in $[0,1]$ können wir abzählen durch die Folge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} = (0, 1, {}^1/_2, {}^1/_4, {}^3/_4, {}^1/_8, {}^3/_8, {}^5/_8, {}^7/_8, \dots)$.

Das Lemma von Urysohn

Zu jedem $r \in D$ konstruieren wir rekursiv eine offene Menge $U(r) \in \mathcal{T}$, sodass für $r < s$ stets $\overline{U(r)} \subseteq U(s)$ gilt. Wir beginnen mit $U(1) := X \setminus B$. Dank T_4 existiert $U(0) \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1) = X \setminus B$.

Seien $U(r_0), \dots, U(r_{n-1}) \in \mathcal{T}$ bereits konstruiert. Seien $k, \ell < n$ die Indizes der direkten Nachbarn $r_k < r_n < r_\ell$; für alle $i < n$ gelte also $r_i \notin]r_k, r_\ell[$. Dank T_4 existiert $U(r_n) \in \mathcal{T}$ mit $\overline{U(r_k)} \subseteq U(r_n) \subseteq \overline{U(r_n)} \subseteq U(r_\ell)$.

(2) Wir definieren

$$f : X \to [0,1] : x \mapsto \begin{cases} \inf\{ r \in D \mid x \in U(r) \} & \text{falls } x \in U(1), \\ 1 & \text{falls } x \in B = X \setminus U(1). \end{cases}$$

Wegen $A \subseteq U(0)$ gilt $f|_A = 0$. Wegen $B = X \setminus U(1)$ gilt $f|_B = 1$.

(3) Die Intervalle $[0, a[$ und $]b, 1]$ mit $a, b \in [0,1]$ erzeugen die euklidische Topologie auf $[0,1]$. Dank Satz D6G genügt es, die Stetigkeit von f damit zu testen: Es gilt $f(x) < a$ gdw $x \in U(r)$ für ein $r \in D$ mit $r < a$; also ist $f^{-1}([0,a[) = \bigcup_{r<a} U(r)$ offen. Es gilt $f(x) > b$ gdw $x \notin U(s)$ für ein $s \in D$ mit $s > b$; also ist $f^{-1}(]b,1]) = \bigcup_{s>b} X \setminus U(s) = \bigcup_{r>b} X \setminus \overline{U(r)}$ offen. QED

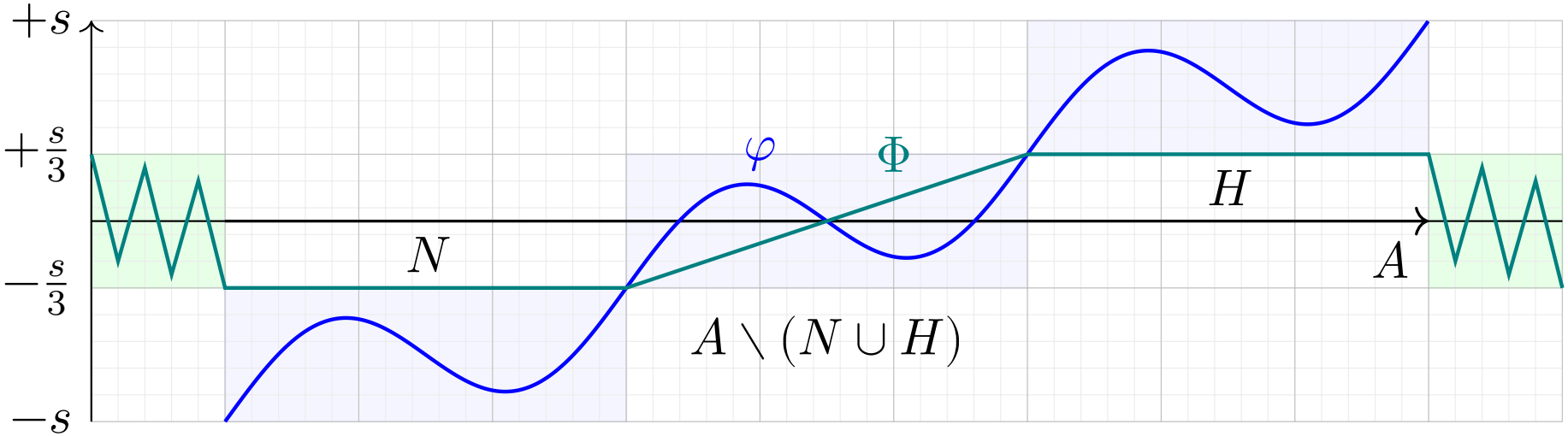
Der Fortsetzungssatz von Tietze

Satz E5L: Fortsetzungssatz von Tietze

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_4–Raum und darin $A \subseteq X$ abgeschlossen.
Zu $f : A \to [a, b]$ stetig existiert $F : X \to [a, b]$ stetig mit $F|_A = f$.

Lemma E5M: Konstruktion einer Näherungsfortsetzung

Zu $\varphi : A \to [-s, s]$ stetig existiert $\Phi : X \to [-\frac{s}{3}, \frac{s}{3}]$ stetig mit $|\varphi - \Phi|_A \leq \frac{2}{3}s$.



Beweis: In A sind $N = \varphi^{-1}([-s, -\frac{s}{3}])$ und $H = \varphi^{-1}([\frac{s}{3}, s])$ abgeschlossen, also auch in X. Dank Urysohn (E5K) existiert $\Phi : X \to [-\frac{s}{3}, \frac{s}{3}]$ stetig mit $\Phi|_N = -\frac{s}{3}$ und $\Phi|_H = \frac{s}{3}$. Somit gilt $|\varphi(a) - \Phi(a)| \leq \frac{2}{3}s$ für alle $a \in A$. QED

Der Fortsetzungssatz von Tietze

Satz E5L: Fortsetzungssatz von Tietze

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_4–Raum und darin $A \subseteq X$ abgeschlossen.
Zu $f : A \to [a, b]$ stetig existiert $F : X \to [a, b]$ stetig mit $F|_A = f$.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $[a, b] = [-1, 1]$. Zu $\varphi_0 = f : A \to [-1, 1]$ existiert dank Lemma E5M eine Näherungsfortsetzung $\Phi_0 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.
Der Fehler auf A ist eine stetige Funktion $\varphi_1 = f - \Phi_0|_A : A \to [-1, 1] \cdot \frac{2}{3}$.
Hierzu wiederum existiert $\Phi_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \cdot \frac{2}{3}$. Rekursiv erhalten wir

$$\text{(1)} \qquad \Phi_n : X \to [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^n \quad \text{stetig mit}$$

$$\text{(2)} \qquad \varphi_{n+1} = f - (\Phi_0 + \cdots + \Phi_n)|_A \; : \; A \to [-1, 1] \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Dank (1) konvergiert $F_n = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k$ gleichmäßig auf X, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\Phi_k\right|_X \;\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^k \;=\; 1.$$

Die Grenzfunktion $F : X \to [-1, 1]$ ist demnach stetig (C3Q).
Dank (2) gilt $\left|f - F_n|_A\right|_A \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \to 0$, also $F|_A = f$. QED

Der Fortsetzungssatz von Tietze

Korollar E5N: Fortsetzungssatz von Tietze

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_4–Raum und darin $A \subseteq X$ abgeschlossen.
(1) Zu $f : A \to \mathbb{R}^n$ stetig existiert $F : X \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $F|_A = f$.
(2) Dasselbe gilt statt $\mathbb{R}^n$ für jeden euklidischen Retrakt $(\iota, \rho) : Y \rightleftarrows \mathbb{R}^n$.

Beweis: (1) Wir setzen $f = (f_1, \dots, f_n)$ stetig fort zu $F = (F_1, \dots, F_n)$.
Dank UAE (E4D) genügt $n = 1$. Wir nutzen den Homöomorphismus (A1B)

$$h : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]-1, 1[: x \mapsto x/(1 + |x|).$$

Die Komposition $\varphi := h \circ f : A \to]-1, 1[$ ist stetig. Dank E5L existiert $\Phi : X \to [-1, 1]$ stetig mit $\Phi|_A = \varphi$. Die Menge $B = \Phi^{-1}(\{-1, 1\})$ ist in X abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Dank E5K existiert $g : X \to [0, 1]$ stetig mit $g|_A = 1$ und $g|_B = 0$. Somit ist das Produkt $\Psi = g \cdot \Phi : X \to]-1, 1[$ stetig und $\Psi|_A = \varphi$. Schließlich ist $F = h^{-1} \circ \Psi : X \to \mathbb{R}$ stetig und $F|_A = f$.

(2) Sei $f : A \to Y$ stetig. Zu $g := \iota \circ f : A \to \mathbb{R}^n$ existiert $G : X \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $G|_A = g$. Wir erhalten $F := \rho \circ G : X \to Y$ stetig mit $F|_A = f$. QED

Der Fortsetzungssatz von Tietze

Brouwer und Lebesgue bewiesen die Fortsetzungseigenschaft E5N zunächst nur für euklidische Räume $X = \mathbb{R}^n$, Tietze (1915) dann für metrische Räume (E5Q), Urysohn (1925) schließlich für alle T_4–Räume.

Übung E5O: Die Fortsetzungseigenschaft impliziert T_4.

Erlaubt $(X, \mathcal{T})$ zu $C \subseteq X$ abgeschlossen und $g : C \to \mathbb{R}$ stetig immer eine stetige Fortsetzung $G : X \to \mathbb{R}$, dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_4–Raum.

Lösung: Seien $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.
Dann ist $C = A \sqcup B$ abgeschlossen und $g = \mathbf{1}_B : C \to \mathbb{R}$ stetig.
Hierzu existiert $G : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $G|_C = g$. Für $f = (G \wedge 1) \vee 0$ gilt dann $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$, wie für $T_{4\frac{1}{2}}$ gefordert (E5A). QED

Auf der anderen Seite ist der Zielraum $\mathbb{R}^n$ wesentlicher Teil des Satzes:

Übung E5P: topologisches Hindernis zur Fortsetzung

In $X = [-1, 1]$ ist $A = \{-1, 1\}$ abgeschlossen. Sei $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Erlaubt die stetige Abbildung $f : A \to Y : a \mapsto a$ eine stetige Fortsetzung $F : X \to Y$?

Der Metrisierungssatz von Urysohn

Satz E5R: Metrisierungssatz von Urysohn, 1924

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein zweitabzählbarer Raum. Dann sind äquivalent:
(1) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist metrisierbar.
(2) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist regulär (T_1 & T_3).
(3) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist normal (T_1 & T_4).
(4) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt T_1 und $T_{4^1/_2}$.
(5) $(X, \mathcal{T})$ ist homöomorph zu einem Teilraum im Hilbert–Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Beweis: „(5) $\Rightarrow$ (1)“: Der Hilbert–Würfel ist metrisierbar (E4v) etwa durch $d : [0,1]^{\mathbb{N}} \times [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1] : (x,y) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1}|x_k - y_k|$. Jede Einbettung $f : X \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$ liefert somit eine Teilraummetrik $d_X(a,b) = d(f(a), f(b))$.

„(1) $\Rightarrow$ (2,3,4)“: E5A. „(2) $\Rightarrow$ (3)“: Tychonoff E5J. „(3) $\Rightarrow$ (4)“: Urysohn E5K.

„(4) $\Rightarrow$ (5)“: Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}$.
Sei I die Menge aller Paare $i = (U, V)$ mit $U, V \in \mathcal{B}$ und $\overline{U} \subseteq V$.
Zu $i \in I$ existiert $f_i : X \to [0,1]$ stetig mit $f_i|_{\overline{U}} = 0$ und $f_i|_{X \setminus V} = 1$.
Die Abbildung $f : X \to [0,1]^I : x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}$ ist eine Einbettung. QED

Der Metrisierungssatz von Urysohn

Lemma E5s: Einbettung in einen Produktraum

Sei $F = (f_i)_{i\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$.

1. Die Abbildung $f : X \to \prod_{i\in I} X_i$ mit $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$ ist stetig.
2. Genau dann ist f injektiv, wenn F alle Punkte von X trennt, also zu $a \neq b$ in X ein Index $i \in I$ existiert mit $f_i(a) \neq f_i(b)$.
3. Die Abbildung $f : X \to f(X)$ ist offen, wenn die Familie F alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$ von Punkten $b \in X \setminus A$ trennt, also jeweils ein Index $i \in I$ existiert mit $f_i(b) \notin \overline{f_i(A)}$.

Gelten alle drei Bedingungen, so ist f eine Einbettung.

Beweis: Stetigkeit (1) ist die universelle Abbildungseigenschaft des Produkts (E4D). Injektivität (2) folgt nach Definition der Menge $\prod_{i\in I} X_i$. (3) Sei $U \in \mathcal{T}$ und $A = X \setminus U$. Zu $b \in U$ existiert $i \in I$ mit $f_i(b) \notin \overline{f_i(A)}$. Demnach ist $f(X) \setminus \overline{f(A)} \subseteq f(U)$ offene Umgebung von $f(b)$ in $f(X)$. In $f(X)$ ist $f(U)$ Umgebung jedes ihrer Punkte, also offen (D3C). QED

Der Metrisierungssatz von Urysohn

Bemerkung: Der Hilbert–Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist metrisierbar und zudem separabel dank $[0,1]_{\mathbb{Q}}{}^{(\mathbb{N})} \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$ und somit zweitabzählbar (D60).
Der Hilbert–Würfel ist somit ein universeller metrischer Raum:
Jeder separable metrisierbare Raum lässt sich hierin einbetten.

Damit haben wir sehr einfache, notwendige und hinreichende Kriterien!

$$T_2 \,\&\, \text{1AA} \quad \Longleftarrow \quad \text{Metrisierbarkeit} \quad \Longleftarrow \quad T_1 \,\&\, T_3 \,\&\, \text{2AA}$$

Bemerkung: Dies können wir direkt auf Mannigfaltigkeiten anwenden:
Lokal euklidisch & hausdorffsch & zweitabzählbar impliziert metrisierbar.

1. Jeder lokal euklidische Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt T_1:
   Jeder Punkt $x \in X$ hat eine offene Umgebung $(U, x) \cong (\mathbb{R}^n, 0)$.
2. Es gibt exotische Gegenbeispiele ohne T_2, siehe E2E. Gilt zudem T_2, so folgt T_3 und sogar $T_{3^1/_2}$ (später dank lokaler Kompaktheit).
3. Es gibt exotische Gegenbeispiele ohne 2AA.
   Gilt zudem 2AA, so ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar.

Der große Metrisierungssatz von Bing–Nagata–Smirnov

Urysohns Metrisierungssatz löst die allermeisten praktischen Probleme. Wir betrachten dabei nur „kleine“ Räume (2AA) und lassen zwischen notwendig (T_2 & 1AA) und hinreichend (T_1 & T_3 & 2AA) eine Lücke. Eine Generation nach Urysohn wurde sein Werk vollendet:

Satz E5u: Bing–Nagata–Smirnov, 1950–51

Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind äquivalent:

(1) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist metrisierbar.

(2) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist regulär (T_1 & T_3), und die Topologie $\mathcal{T}$ erlaubt eine σ–lokal-endliche Basis $\mathcal{B} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(k)$, d.h. jede Familie $\mathcal{B}(k)$ ist lokal-endlich: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U, also $x \in U \in \mathcal{T}$, die nur endlich viele Mengen aus $\mathcal{B}(k)$ schneidet.

(3) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist regulär (T_1 & T_3), und die Topologie $\mathcal{T}$ erlaubt eine σ–diskrete Basis $\mathcal{B} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(k)$, d.h. jede Familie $\mathcal{B}(k)$ ist diskret: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U, also $x \in U \in \mathcal{T}$, die höchstens eine Menge aus $\mathcal{B}(k)$ schneidet.

Euklidische Retrakte

Vorgelegt sei eine Inklusion / Einbettung $\iota : Y \hookrightarrow X$. Eine **Retraktion** ist eine stetige Abbildung $\rho : X \twoheadrightarrow Y$ mit $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_Y$. Dann heißt $(\iota, \rho) : Y \leftrightarrows X$ ein **Retraktionspaar** und der Teilraum $A := \iota(Y) \subseteq X$ ein **Retrakt**.

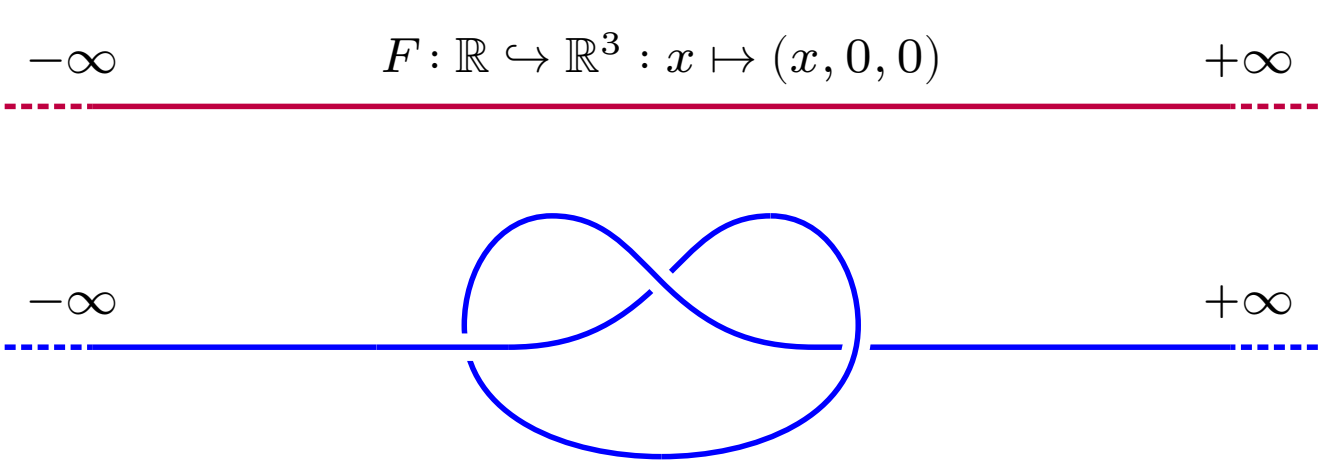
Aufgabe: (1) Hat $X = \mathbb{R}^n$ zweipunktige Retrakte $Y = \{a, b\}$?
Nein! Anschaulich: $\rho : X \to Y$ mit $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_Y$ müsste X „zerreißen“.
Formal: Der Raum X ist wegzusammenhängend, aber Y nicht.
Demnach gibt es keine stetige Surjektion $\rho : X \twoheadrightarrow Y$. (A1H)

(2) Ist $Y = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ in $X = \mathbb{R}^n$ ein Retrakt? auch $Z = \mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$?
(a) Ja! Eine Retraktion zu ι ist $\rho : X \to Y : x \mapsto (\max\{0, x_1\}, 0, \dots, 0)$.
(b) Nein, denn Z ist nicht abgeschlossen in X, nach (3) also kein Retrakt.

(3) Ist jeder Retrakt $A \subseteq X$ in einem Hausdorff–Raum X abgeschlossen?
Ja! Für $\rho : X \to A$ stetig mit $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_A$ gilt $A = \{\, x \in X \,|\, \mathrm{id}(x) = \rho(x) \,\}$.
Dank Satz D5L ist die Teilmenge A in X abgeschlossen.

(4) Erlaubt die Gerade $F : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x, 0, 0)$ eine Retraktion?
Ja! Hierzu genügt $G : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x$.

Euklidische Retrakte



(5) Erlaubt jede abgeschlossene Einbettung $F : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Retraktion?
Selbst für einen Knoten, egal wie kompliziert? Das ist keineswegs klar!
Ja! Wir haben $A := F(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F = \iota_A \circ f$ mit $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} A$. Tietze E5N:
Zu $g = f^{-1} : A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ existiert $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $G|_A = g$, also $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

(6) Elegant und allgemein: Sei $(\iota, \rho) : K \rightleftarrows \mathbb{R}^m$ ein euklidischer Retrakt.
Ist dann *jede* abgeschlossene Einbettung $F : K \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Retrakt?
Ja! Wir haben $A := F(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F = \iota_A \circ f$ mit $f : K \xrightarrow{\sim} A$. Tietze E5N:
Zu $g = \iota \circ f^{-1} : A \xrightarrow{\sim} K \to \mathbb{R}^m$ existiert $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $G|_A = g$.
Für $\rho \circ G : \mathbb{R}^n \to K$ gilt also $\rho \circ G \circ F = \rho \circ G|_A \circ f = \rho \circ \iota = \mathrm{id}_K$.

Euklidische Retrakte

Für die Gerade $F(x) = (x, 0, 0)$ ist eine Retraktion offensichtlich. Aber für einen beliebigen Knoten $F : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, etwa wie oben skizziert, sieht man zunächst keine Retraktion, vielleicht glaubt man überhaupt nicht daran. Mit den Werkzeugen der Vorlesung können Sie diese Frage kurz und elegant lösen: Wenn die Phantasie versagt, hilft der Fortsetzungssatz von Tietze! Er garantiert uns die Existenz stetiger Abbildungen, die wir sonst nur mühsam beschaffen können. Wenn Sie zusätzlich Anschauung oder Intuition wollen, so kann ich zwei Geschichten anbieten:

Physikalische Intuition: Wir denken uns $A = F(\mathbb{R})$ als Draht mit stetiger Temperaturverteilung $u : A \xrightarrow{\sim}]-1, 1[$, strikt monoton längs A, zudem zeitlich konstant gehalten. Der umgebende Raum $\mathbb{R}^3 \setminus A$ habe anfangs die Temperatur 0. Nun lassen wir die Wärme im $\mathbb{R}^3$ fließen. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ herrscht schließlich eine Temperatur $U(x) \in]-1, 1[$.
In $x \in A$ ist dabei $U(x) = u(x)$ die vorgegebene Temperatur; damit ist $G = u^{-1} \circ U : \mathbb{R}^3 \to A$ eine Retraktion. Was beweist das? Noch gar nichts. Aber es ist eine schöne Geschichte.

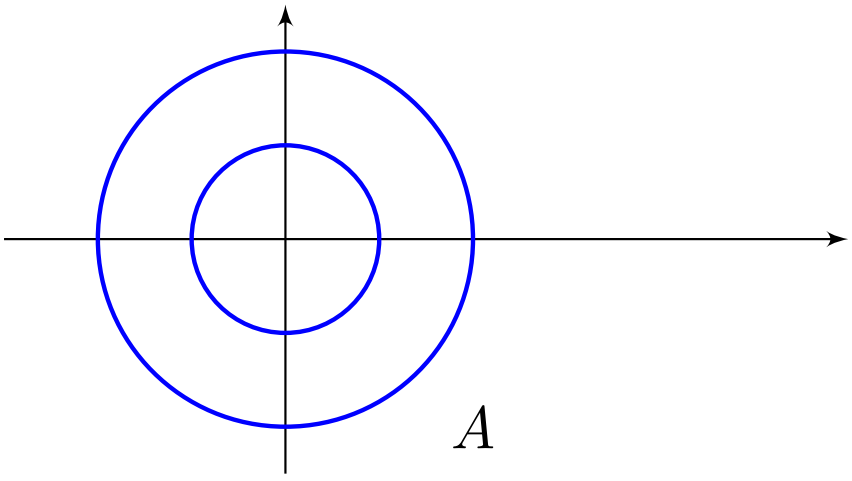
Euklidische Retrakte

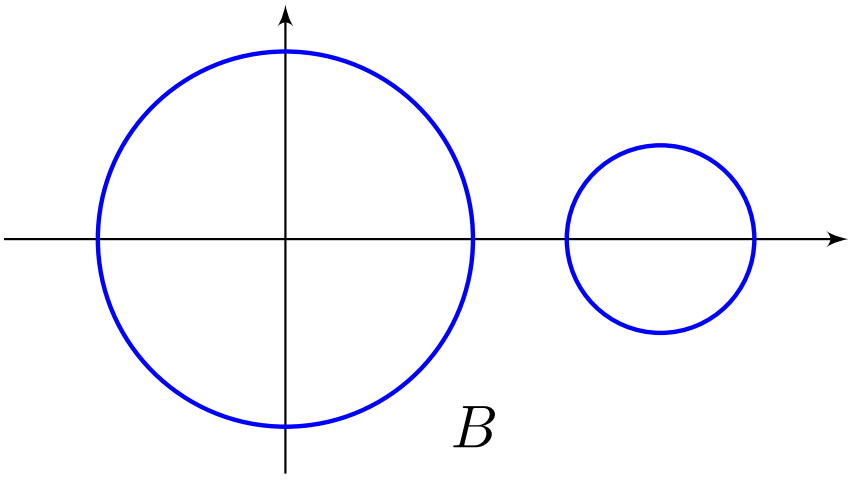
Geometrische Intuition: Ist die abgeschlossene Einbettung $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ zahm (etwa stückweise affin oder glatt), so können wir f aufdicken zu einer Schlauchumgebung $F : \mathbb{R} \times \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(x, 0, 0) = f(x)$. Dabei ist $B = F(\mathbb{R} \times \mathbb{D}^2)$ eine abgeschlossene Umgebung von A in $\mathbb{R}^3$ sowie $F(\mathbb{R} \times \mathbb{B}^2)$ offen und $F(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ der Rand: Hier können wir es explizit so herstellen, später können wir diese Eigenschaften allgemein folgern aus der Invarianz des Gebietes (J7κ).

Wir konstruieren damit $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: Außerhalb von B setzen wir $G = 0$. Auf B setzen wir $G \circ F(x, y, z) = x(1 - y^2 - z^2)$. Die Verklebung ist stetig und erfüllt $G \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Was beweist das? Wesentlich mehr als nötig! Die Konstruktion von F benötigt Sorgfalt und gelingt nur für zahme Knoten, nicht für wilde. Eine weitere Anregung Ihrer Phantasie…

Sie sehen daran vor allem, wie einfach und elegant und durchschlagend wirkungsvoll Tietzes Fortsetzungssatz ist: Er beschert uns die Existenz stetiger Abbildungen, die wir sonst nur mühsam beschaffen können. Mit jeder weiteren Anwendung lernt man ihn noch mehr zu schätzen.

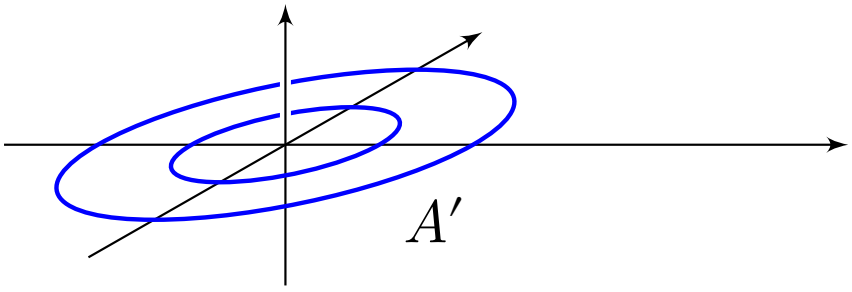
Ambiente Homöomorphismen und euklidische Stabilisierung

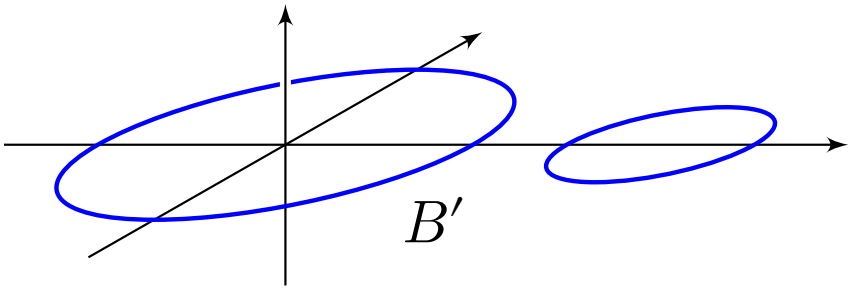




Gegeben sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismuspaar $(\varphi, \psi) : A \cong B$. Existiert ein **ambienter Homöomorphismus** $(\Phi, \Psi) : (\mathbb{R}^n, A) \cong (\mathbb{R}^n, B)$?

⚠ Oben gelingt dies nicht! Anschaulich: In A liegen die beiden Kreise ineinander, in B nebeneinander. Formal: In $\mathbb{R}^2 \setminus B$ kann man jeden Punkt x mit ∞ verbinden und muss höchstens einmal durch B laufen; in $\mathbb{R}^2 \setminus A$ gelingt das nicht. In $\mathbb{R}^3$ ist mehr Spielraum, hier gilt $(\mathbb{R}^3, A') \cong (\mathbb{R}^3, B')$:





Ambiente Homöomorphismen und euklidische Stabilisierung

Satz E6D: euklidische Stabilisierung

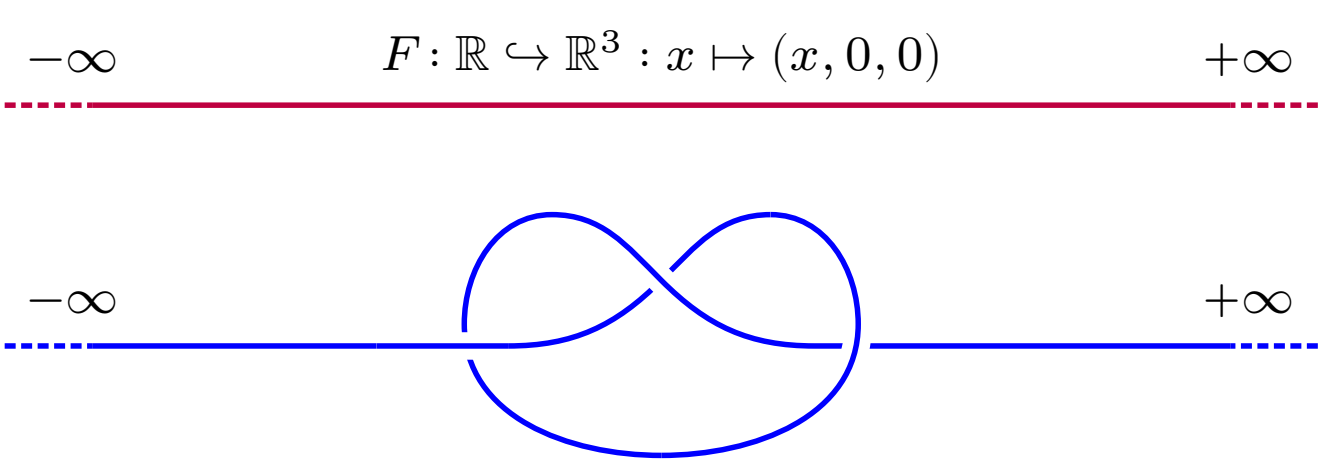
Seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen sowie $(\varphi, \psi) : A \cong B$.
In $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s$ betrachten wir $A' = A \times \{0\}$ und $B' = \{0\} \times B$.
Hierzu existiert ein Homöomorphismus $(\Phi, \Psi) : (\mathbb{R}^s, A') \cong (\mathbb{R}^s, B')$
mit $\Phi(a, 0) = (0, \varphi(a))$ für $a \in A$ und $\Psi(0, b) = (\psi(b), 0)$ für $b \in B$.

Beweis: Wir nutzen auch hier den Fortsetzungssatz von Tietze (E5N):
Zu $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightsquigarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $h|_A = \varphi$.
Zu $\psi : \mathbb{R}^n \supseteq B \rightsquigarrow A \subseteq \mathbb{R}^m$ existiert $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig mit $k|_B = \psi$.
Daraus erhalten wir die ersehnten Homöomorphismen wie folgt:

$$H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : H(x, y) = (\, x,\, y + h(x)\,)$$
$$K : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : K(x, y) = (\, x + k(y),\, y\,)$$

Wir betrachten $a \in A$ und $b \in B$ mit $(\varphi, \psi) : a \leftrightarrows b$.
Für $\Phi := K^{-1} \circ H : \mathbb{R}^s \rightsquigarrow \mathbb{R}^s$ gilt $(a, 0) \mapsto (a, b) \mapsto (0, b)$.
Für $\Psi := H^{-1} \circ K : \mathbb{R}^s \rightsquigarrow \mathbb{R}^s$ gilt $(0, b) \mapsto (a, b) \mapsto (a, 0)$. QED

Jeder Knoten in $\mathbb{R}^3$ wird in $\mathbb{R}^4$ auflösbar!



Seien $f, g : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ abgeschlossene Einbettungen („lange Knoten“).
Existiert ein ambienter Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $\varphi \circ f = g$?

⚠ Im obigen Beispiel gelingt dies nicht. (Ein Beweis ist keineswegs offensichtlich und gelingt uns später mit der Fundamentalgruppe.)

Aufgabe: Zu $F, G : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ existiert $\Phi : \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^4$ mit $\Phi \circ F = G$.

Lösung: Es genügt, dies speziell für $G(x) = (0, 0, 0, x)$ zu beweisen.
Wie im vorigen Satz betrachten wir $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^1$
und stabilisieren diese zu $F(x) = (f(x), 0)$ und $G(x) = (0, 0, 0, x)$.
Wir erhalten $(\Phi, \Psi) : \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$ mit $\Phi \circ F = G$ und $\Psi \circ G = F$. QED

Jeder Knoten in $\mathbb{R}^3$ wird in $\mathbb{R}^4$ auflösbar!

Bemerkung: Wir können Satz E6D zur euklidischen Stabilisierung hier direkt auf $F, G : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ anwenden und erhalten dann einen ambienten Homöomorphimus $(\Phi, \Psi) : \mathbb{R}^6 \cong \mathbb{R}^6$. Die Dimension 6 ist unnötig groß. Wenn wir sparsam sind, dann genügt $\mathbb{R}^4$, so wie hier erklärt. Ambiente Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation, wir wählen als einfachsten Repräsentanten den trivialen Knoten $x \mapsto (x, 0, 0)$.

Übung: Versuchen Sie, das Entknotungsproblem im $\mathbb{R}^4$ direkt und explizit für die beiden oben skizzierten langen Knoten zu lösen, gerne zunächst anschaulich, dann formal. Wie überführen Sie F in G im $\mathbb{R}^4$? Um bequem zu rechnen, seien die Einbettungen stückweise affin-linear. Die zusätzliche Dimension erlaubt Kreuzungswechsel, damit können Sie jeden Knoten aus dem $\mathbb{R}^3$ im $\mathbb{R}^4$ entknoten.

🙂 Im $\mathbb{R}^3$ ist die oben gezeigte Kleeblattschlinge nicht entknotbar.
Das ist anschaulich glaubwürdig, doch nicht leicht zu beweisen.
Es gelingt uns später mit der Fundamentalgruppe, siehe L443

Was ist eine topologische Gruppe?

Definition E7A: topologische Gruppe

Eine **T–Gruppe** $(G, \mathcal{T}, \mu, e, \iota)$ ist ein topologischer Raum $(G, \mathcal{T})$ und eine Gruppe (G, μ, e, ι), sodass Multiplikation $\mu : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a \cdot b$ und Inversion $\iota : G \to G : a \mapsto a^{-1}$ stetig sind. Wir nennen dies eine **topologische Gruppe**, wenn zudem $\{e\}$ abgeschlossen ist, $G \setminus \{e\} \in \mathcal{T}$. Letzteres ist äquivalent zur Hausdorff–Eigenschaft T_2, siehe unten.

Für je zwei Elemente $a, b \in G$ und jede Umgebung W von $a \cdot b$ existieren Umgebungen U von a und V von b mit $U \cdot V \subseteq W$. Zu jedem $a \in G$ und jeder Umgebung V von a^{-1} existiert eine Umgebung U von a mit $U^{-1} \subseteq V$.

Beispiele: Jede Gruppe (G, μ, e, ι) mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, G\}$ ist eine T–Gruppe, besser noch mit $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(G)$ eine **diskrete topologische Gruppe**.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_{\mathbb{K}}, +, 0, -)$ und $(\mathbb{K}^\times, \mathcal{T}_{\mathbb{K}^\times}, \cdot, 1, {}^{-1})$.
In $\mathbb{C}^\times$ haben wir $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{\mathbb{S}^1}, \cdot, 1, {}^{-1})$ als topologische Untergruppe.

Vektorgruppe $(\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{K}^n}, +, 0, -)$, Matrixgruppe $(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}, \mathcal{T}_{\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}}, \cdot, 1, {}^{-1})$.
Übung: Warum sind Matrixmultiplikation und Inversion stetig?

Erste Eigenschaften topologischer Gruppen

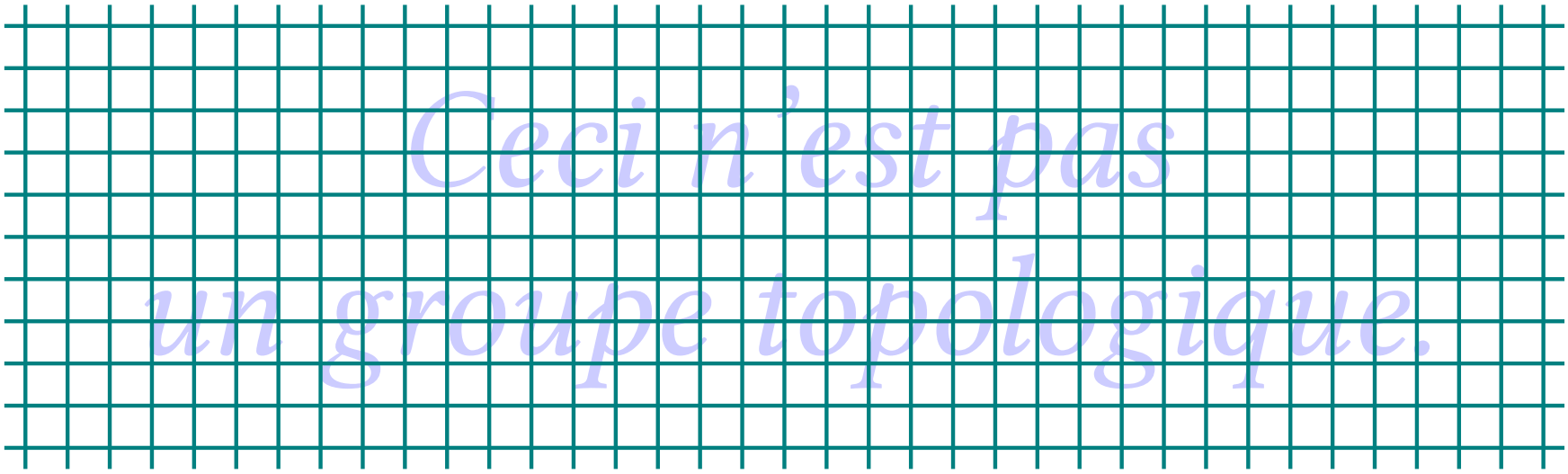
Sei (G, μ, e, ι) eine Gruppe. Für jede Topologie $\mathcal{T}$ auf G sind äquivalent:
(1) Das Produkt $\mu : G \times G \to G$ und die Inversion $\iota : G \to G$ sind stetig.
(2) Das Inversionsprodukt $\alpha : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a^{-1} \cdot b$ ist stetig.
(3) Das Inversionsprodukt $\beta : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ ist stetig.

Damit ist ι ein Homöomorphismus, ebenso $x \mapsto ax$ und $x \mapsto xa$
sowie $h : x \mapsto ax^{-1}b$ mit $h(a) = b$ und $h(b) = a$. Äquivalent sind:
$\{e\}$: Die Teilmenge $\{e\}$ ist abgeschlossen in $(G, \mathcal{T})$, also $G \setminus \{e\} \in \mathcal{T}$.
T_0: Zu $a \neq b$ hat einer eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.
T_1: Zu $a \neq b$ hat jeder eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.
T_2: Zu $a \neq b$ existieren disjunkte Umgebungen. (Hausdorff–Eigenschaft)

Beweis: „$\{e\} \in \mathcal{T}^c \Rightarrow T_2$“: Für $a \neq b$ gilt $a^{-1}b \in G \setminus \{e\}$. Dank Stetigkeit existieren $a \in U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ mit $U^{-1}V \subseteq G \setminus \{e\}$, also $U \cap V = \emptyset$.
Es gilt „$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$“ und „$T_1 \Rightarrow \{e\} \in \mathcal{T}^c$“, und h zeigt „$T_0 \Rightarrow T_1$“. QED

Bemerkung: Jede endliche topologische Gruppe ist somit diskret.
Erst für unendliche Gruppen wird die Topologie interessant.

Kann jeder Raum eine topologische Gruppe werden?



Aufgabe: Der euklidische Raum $\mathbb{R}^2$ lässt sich zu einer topologischen Gruppe machen, ebenso $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Auch $C = A \cup B$?

Lösung: Für jede topologische Gruppe $(G, \mathcal{T}, \mu, e, \iota)$ ist der zugrunde liegende Raum $(G, \mathcal{T})$ **homogen**: Zu je zwei Punkten $a, b \in G$ existiert ein Homöomorphismus $h : G \to G$ mit $h(a) = b$, etwa $h(x) = ax^{-1}b$.

Unser Raum C ist nicht homogen: Jeder Punkt $a \in \mathbb{Z}^2 \subsetneq C$ trennt kleine zusammenhängende Umgebungen in vier Komponenten, jeder Punkt $b \in C \setminus \mathbb{Z}^2$ nur in zwei. Demnach existiert kein Homöomorphismus $h : C \to C : a \mapsto b$, somit keine topologische Gruppenstruktur auf C.

Wann ist eine topologische Gruppe metrisierbar?

Zur Metrisierung haben wir notwendige und hinreichende Kriterien:

$$T_2 \,\&\, \text{1AA} \quad \Longleftarrow \quad \text{Metrisierbarkeit} \quad \Longleftarrow \quad T_1 \,\&\, T_3 \,\&\, \text{2AA}$$

Für topologische Gruppen hingegen ist alles einfacher und viel besser: Die notwendigen Bedingungen sind für Gruppen bereits hinreichend!

Satz E7J: Metrisierung topologischer Gruppen

Eine topologische Gruppe $(G, \mathcal{T}, \mu, e, \iota)$ ist genau dann metrisierbar, wenn sie eine abzählbare Umgebungsbasis $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots \supseteq \{e\}$ erlaubt. In diesem Fall kann die Topologie wahlweise durch eine linksinvariante oder eine rechtsinvariante Metrik definiert werden. Eine biinvariante Metrik existiert genau dann, wenn es eine abzählbare Umgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die zudem $g\,U_n\,g^{-1} = U_n$ für alle $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Eine Metrik $d : G \times G \to \mathbb{R}$ heißt **linksinvariant**, wenn $d(zx, zy) = d(x, y)$ für alle $x, y, z \in G$ gilt, und **rechtsinvariant**, wenn $d(xz, yz) = d(x, y)$ gilt, sowie **biinvariant**, wenn beides gilt. Zur Konstruktion siehe Skript.

Kapitel F

Kompaktheit und Kompaktifizierung

Habe nun, ach! Philosophie, // Juristerei und Medizin,
Und leider auch Topologie // Durchaus studiert, mit heißem Bemühn.
Da steh' ich nun, ich armer Tor, // Und bin so klug als wie zuvor!

Nun sag, wie hast du's mit dem Auswahlaxiom? Du bist ein
herzlich guter Mann, allein ich glaub, du hältst nicht viel davon.

frei nach Goethe (1749–1832), *Faust*, zur Gretchen-Grundlagen-Frage:
Zählt Tychonoffs Theorem noch zur Topologie oder schon zur Theologie?

Inhalt dieses Kapitels F

1 Kompakte topologische Räume

2 Kompakte metrische Räume

3 Lokale Kompaktheit

4 Kompaktifizierung

5 Eigentliche Abbildungen

6 Geometrische Anwendungen

Kompakt heißt topologisch endlich.

☺ Jede *endliche* Menge $X \neq \emptyset$ erfreut sich besonderer Eigenschaften:

(3) Jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihre Extrema an:
Es existieren $a, b \in X$ mit $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$.

(2) Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ in X nimmt einen Wert a unendlich oft an:
Es existieren Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ mit $x_{n_0} = x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = a$.

(1) Jede Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ enthält eine endliche Teilüberdeckung:
Es existieren Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

☺ Dem entsprechen topologische Eigenschaften eines Raums $(X, \mathcal{T})$,
die Sie in verschiedenen Varianten aus der Analysis kennen und lieben:

(1) **Kompaktheit:** Jede *offene* Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, mit $U_i \in \mathcal{T}$,
enthält eine endliche Teilüberdeckung, also $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

(2) **Folgenkompaktheit:** Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ im Raum $(X, \mathcal{T})$ enthält
eine *konvergente* Teilfolge, also $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ mit $x_{n_k} \to a$.

(3) **Pseudokompaktheit:** Jede *stetige* Funktion $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$
nimmt ihre Extrema an, also $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$.

Kompakt heißt topologisch endlich.

Nach Vollständigkeit ist Kompaktheit der wichtigste Grundbegriff der Analysis. Viele Sätze gelten nur bei Kompaktheit, siehe obige Beispiele. Andere Sätze sind für kompakte Räume leicht, sonst aber nur schwer zu beweisen. Wir sind daher im Allgemeinen gut beraten, bei der Erkundung schwierigen Terrains zunächst von kompakten Räumen auszugehen.

Umgekehrt kommt es vor, dass kompakte Räume für bestimmte Fragen ungeeignet sind, etwa weil sie für die gewünschten Konstruktionen „zu klein“ sind. Manch wichtiger Raum, wie die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$, ist eben nicht kompakt. Hier leistet lokale Kompaktheit (§F3) gute Dienste, mit Kompaktifizierung (§F4) und eigentlichen Abbildungen (§F5).

Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum X ist genau dann lokal-kompakt, wenn er endlich-dimensional ist, also $n = \dim_{\mathbb{R}} X < \infty$ gilt (F6U). In diesem Fall ist er sogar linear homöomorph zum euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (F6S). Die einzige Vektorraumtopologie auf $\mathbb{R}^n$ ist somit die euklidische (F6O). Dieses schöne Ergebnis bestärkt unsere bisherige Erfahrung, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ besonders gute Eigenschaften hat.

Kompakte topologische Räume

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $U_i \subseteq X$ heißt **Überdeckung** von X, falls $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt. Sie heißt **offen**, falls jede Menge U_i offen in X ist, also $U_i \in \mathcal{T}$. Sie heißt **abzählbar**, wenn I abzählbar ist, und **endlich**, wenn I endlich ist. Eine **Teilüberdeckung** ist eine Teilfamilie $(U_i)_{i\in J}$ mit $J \subseteq I$ und weiter überdeckend, $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Die folgende Definition hat sich als fundamental herauskristallisiert:

Definition F1A: Kompaktheit / Überdeckungseigenschaft

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält:

Zu jeder Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen $U_i \in \mathcal{T}$ mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ existieren endliche viele Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Manche Autoren folgen Bourbaki und nennen F1A nur **quasikompakt**, für kompakte Räume verlangen sie zudem die Hausdorff–Eigenschaft. Ich sage nicht „quasikompakt“, sondern kurz und einfach „kompakt“, und spreche gegebenenfalls von einem kompakten Hausdorff–Raum.

Kompakte topologische Räume

Beispiele: Ein diskreter Raum $(X, \mathfrak{P}(X))$ ist kompakt gdw X endlich ist.
Jeder indiskrete Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist kompakt… und laaaaaaangweilig.

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} B(0,r)$ nicht kompakt.
Diese offene Überdeckung enthält keine endliche Teilüberdeckung!

Die offene Überdeckung $\mathbb{R} =]-\infty, -99[\cup]+99, +\infty[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n-1, n+1[$
erlaubt eine endliche Teilüberdeckung. Dennoch ist $\mathbb{R}$ nicht kompakt!

⚠ Kompaktheit F1A fordert, dass *jede* offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung erlaubt. *Irgendeine* existiert immer, etwa $X = \bigcup\{X\}$.

Auch das beschränkte Intervall $]0, 1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]2^{-n}, 1]$ ist nicht kompakt.
Diese offene (!) Überdeckung enthält keine endliche Teilüberdeckung!

☺ Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ gilt eine erfreuliche Charakterisierung:

Satz von Heine–Borel (F10): Ein euklidischer Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt gdw die Menge A in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.

⚠ Das ist nicht die Definition von Kompaktheit, sondern eine Folgerung!
Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist es ein bequemes Kriterium, notwendig und hinreichend.

Absolute und relative Kompaktheit in einem Raum

Definition F1B: absolute / relative Kompaktheit einer Teilmenge

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(1) Wir nennen $A \subseteq X$ **kompakt im Raum** $(X, \mathcal{T}_X)$, wenn jede offene Überdeckung von A in $(X, \mathcal{T}_X)$ eine endliche Teilüberdeckung enthält:

Zu $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{T}_X$ existiert $J \subseteq I$ endlich mit $A \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i$.

Dank Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A = \{ U = V \cap A \,|\, V \in \mathcal{T}_X \}$ ist äquivalent:
(0) Der Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$ ist **kompakt** gemäß obiger Definition F1A:

Zu $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_A$ existiert $J \subseteq I$ endlich mit $A = \bigcup_{i \in J} U_i$.

(2) Wir nennen $A \subseteq X$ **relativ kompakt im Raum** $(X, \mathcal{T}_X)$, falls der Abschluss $\overline{A}$ in $(X, \mathcal{T}_X)$ kompakt ist.

Erfreulicherweise sind die ex- und intrinsische Sichtweise äquivalent, (1) als Teilmenge A in $(X, \mathcal{T})$ und (0) als eigenständiger Raum $(A, \mathcal{T}_A)$. Relative Kompaktheit (2) bezieht sich immer auf den umgebenden Raum.

Absolute und relative Kompaktheit in einem Raum

Beispiele: Jede endliche Teilmenge $A \subseteq X$ ist kompakt in $(X, \mathcal{T})$.

Sind $A_1, \dots, A_n$ (relativ) kompakt in $(X, \mathcal{T})$, so auch $A_1 \cup \dots \cup A_n$ (D5G).
Für $A_1 \cap \dots \cap A_n$ benötigen wir die Hausdorff–Eigenschaft! (F1F, F1G)

In $\mathbb{R}$ ist $A = \{\, 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ nicht kompakt, siehe $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}]2^{-n}, 2[$.
Der Abschluss $\overline{A} = A \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$ ist hingegen kompakt (F1C, F1O).

Beispiel / Übung F1c: Kompaktheit einer konvergenten Folge

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_\infty$ eine konvergente Folge.
Dann ist die Menge $A = \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{x_\infty\}$ kompakt in $(X, \mathcal{T})$.

In $\mathbb{R}$ ist das Intervall $A =]0, 1]$ nicht kompakt, siehe $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}]2^{-n}, 2[$,
es ist aber relativ kompakt, denn $\overline{]0, 1]} = [0, 1]$ ist kompakt (F1D, F1O).

In $\mathbb{R}^n$ ist der offene Ball $\mathbb{B}^n = B(0, 1) = \bigcup_{r<1} B(0, r)$ zwar nicht kompakt,
doch relativ kompakt, denn der Abschluss $\mathbb{D}^n = \bar{B}(0, 1)$ ist kompakt (F1O).

In $\mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ relativ kompakt (F1O),
denn $A = \overline{B}$ ist abgeschlossen und immer noch beschränkt.

Kompaktheit von Intervallen

In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $X = [a, b]$ mit $a \leq b$ kompakt. Allgemein sei $(X, <)$ eine totalgeordnete Menge, $X \neq \emptyset$, mit Ordnungstopologie $\mathcal{T}_<$ (D1M).

Satz F1D: Kompaktheit von Intervallen

Genau dann ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_<)$ mit $X \neq \emptyset$ kompakt, wenn jede Teilmenge $E \subseteq X$ ein Supremum und ein Infimum in $(X, <)$ besitzt.

Beispiele: Für $X = \{0 < \ldots < n\}$ ist $\mathcal{T}_<$ diskret und $(X, \mathcal{T}_<)$ kompakt.
In $\mathbb{R}$ ist $[a, b]$ kompakt. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, siehe

$$\mathbb{R} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_{<s} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_{>t} = \bigcup_{r\in\mathbb{N}}]-r, r[$$

ebensowenig die Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq a} = \bigcup_{s\geq a} [a, s[$ und $\mathbb{R}_{\leq b} = \bigcup_{s\leq b}]s, b]$.
In $\mathbb{Q}$ ist $[a, b]_\mathbb{Q}$ mit $a < b$ nicht kompakt; für $\xi \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}$ gilt

$$[a, b]_\mathbb{Q} \;=\; \bigcup_{u<\xi} [a, u[_\mathbb{Q} \;\sqcup\; \bigcup_{v>\xi}]v, b]_\mathbb{Q}.$$

Jede endliche Teilüberdeckung liefert nur $[a, u[_\mathbb{Q} \cup]v, b]_\mathbb{Q}$ mit $u < \xi < v$, lässt also eine erhebliche Lücke und überdeckt niemals ganz $[a, b]_\mathbb{Q}$.

Kompaktheit von Intervallen

Satz F1D: Kompaktheit von Intervallen

Genau dann ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_<)$ mit $X \neq \emptyset$ kompakt, wenn jede Teilmenge $E \subseteq X$ ein Supremum und ein Infimum in $(X, <)$ besitzt.

Beweis: Wir zeigen „$\Rightarrow$“ durch Kontraposition (wie in obigen Beispielen).

(1) Hätte $(X, <)$ kein Supremum, so wäre $X = \bigcup_{s \in X} X_{<s}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Infimum entsprechend. Im Folgenden sei also $a = \inf X$ und $b = \sup X$ in X, somit $X = [a, b]$.

(2) Zu $E \subseteq X$ sei $T := \{\, t \in X \mid E \leq t \,\}$ die Menge der oberen Schranken. Angenommen T hat kein Minimum. Wir erhalten die offene Überdeckung

$$X \;=\; \bigcup_{u \in E} X_{<u} \;\sqcup\; \bigcup_{v \in T} X_{>v}.$$

(2a) Für $x \in X$ gilt entweder $x \in T = \bigcup_{v \in T} X_{>v}$ oder $x < u$ für ein $u \in E$.
(2b) Diese erlaubt keine endliche Teilüberdeckung, andernfalls hätten wir $T =]t_1, b] \cup \cdots \cup]t_n, b] =]t, b]$ mit $t = \min\{t_1, \ldots, t_n\} \in T$, Widerspruch!

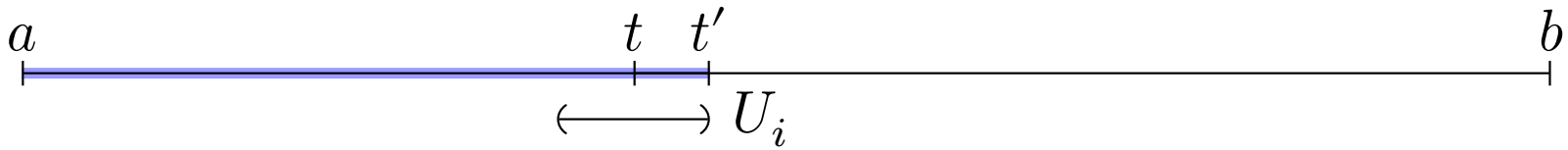
Kompaktheit von Intervallen

Satz F1D: Kompaktheit von Intervallen

Genau dann ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_<)$ mit $X \neq \emptyset$ kompakt, wenn jede Teilmenge $E \subseteq X$ ein Supremum und ein Infimum in $(X, <)$ besitzt.

Beweis: „⇐“: Wir haben $a = \inf X$ und $b = \sup X$, also $X = [a, b]$.
Sei $X = [a, b] = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_<$ eine offene Überdeckung.

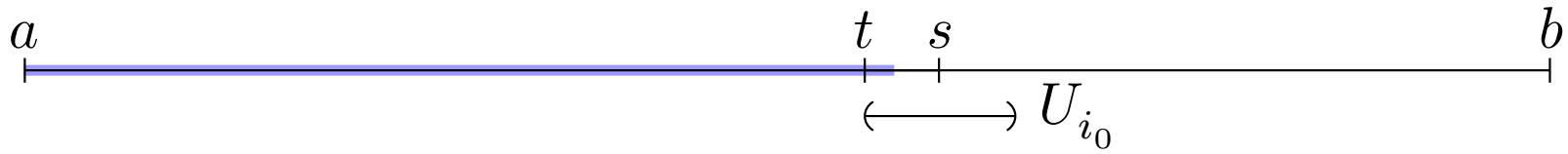
Sei E die Menge aller $t \in [a, b]$, für die $[a, t]$ endlich überdeckt wird, also $[a, t] \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ für geeignete $i_1, \ldots, i_n \in I$. Offensichtlich gilt $a \in E$.
Wir zeigen nun $E = [a, b]$ durch „ordnungsvollständige Induktion“.



(3) Zu jedem $t \in E$ mit $a \leq t < b$ existiert $t' \in E$ mit $t < t' \leq b$.

Beweis: Aus $[a, t] \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ folgt $t \in U_i$ für ein $i \in \{i_1, \ldots, i_n\}$.
Da die Menge U_i in $(X, \mathcal{T}_<)$ offen ist, existiert $t' \in]t, b]$ mit $[t, t'[\subseteq U_i$.
Zu t' existiert $i_0 \in I$ mit $t' \in U_{i_0}$. Somit gilt $[a, t'] \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Kompaktheit von Intervallen



(4) Für $s := \sup E$ gilt $s \in E$, also $s = \max E$.

Beweis: Dank (3) gilt $s > a$. Zu $s \in U_{i_0}$ existiert $t \in [a, s[$ mit $]t, s] \subseteq U_{i_0}$.
Es gilt $t \in E$, also $[a, t] \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ für geeignete $i_1, \ldots, i_n \in I$.
Somit gilt $[a, s] \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$, also $s \in E$.

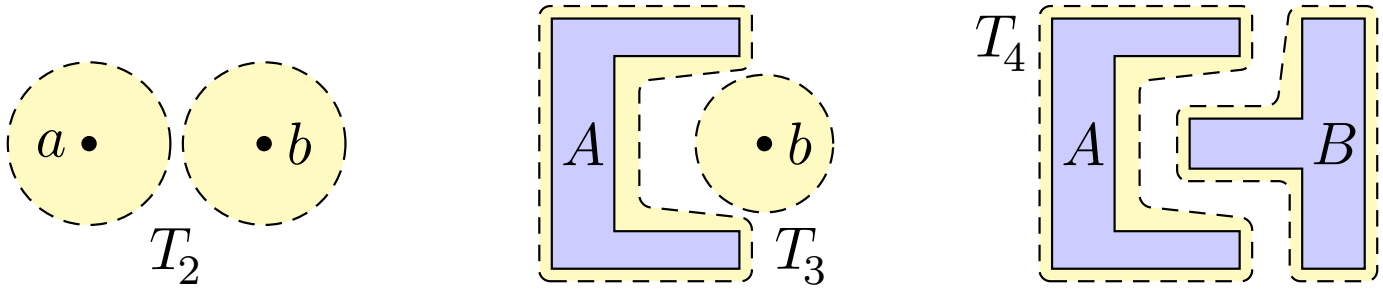
Nach (3) gilt $s = b$. Ganz $X = [a, b]$ wird endlich überdeckt. QED

Illustration: Wir betrachten erneut $[a, b]_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{u<\xi} [a, u[_{\mathbb{Q}} \sqcup \bigcup_{v>\xi}]v, b]_{\mathbb{Q}}$.
Hier ist $E = [a, \xi[_{\mathbb{Q}}$, denn $[a, t]_{\mathbb{Q}}$ wird endlich überdeckt für $t < \xi$, aber nicht für $t > \xi$. Aussage (3) gilt weiterhin, doch ohne Vollständigkeit schlägt Schritt (4) fehl: Die Menge E erlaubt kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Anwendung: Wir ordnen $Z = [0, 1]^2$ lexikographisch, d.h. $(x, y) < (x', y')$ bedeutet $x < x'$ oder ($x = x'$ und $y < y'$). Ist der Raum $(Z, \mathcal{T}_<)$ kompakt?

Übung: In der geordneten Menge $(Z, <)$ existieren alle Suprema / Infima.
Der zugehörige topologische Raum $(Z, \mathcal{T}_<)$ ist dank Satz F1D kompakt.

Kompaktheit und Hausdorff–Eigenschaft



Lemma F1E: $T_2 \Rightarrow T_3$ für kompakte Teilmengen $A \subseteq X$

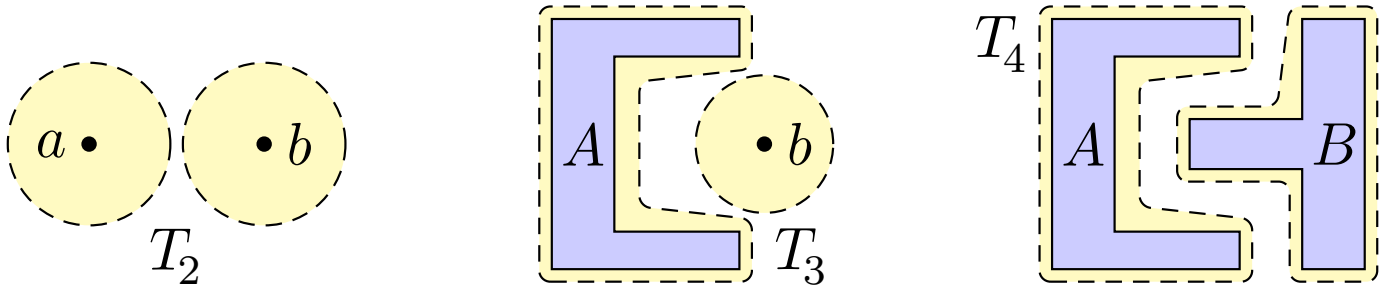
Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, darin $A \subseteq X$ kompakt und $b \in X \setminus A$.
Dann existieren U, V mit $A \subseteq U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ und $U \cap V = \emptyset$.

Beweis: Dank Hausdorff–Eigenschaft (T_2) existieren zu jedem Punkt $a \in A$ offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $b \in V_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$.

Wir erhalten $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a$. Da A kompakt ist, existiert $J \subseteq A$ endlich mit $A \subseteq \bigcup_{a\in J} U_a =: U$. Damit ist $V := \bigcap_{a\in J} V_a \ni b$ offen und $U \cap V = \emptyset$, denn $U \cap V = (\bigcup_{a\in J} U_a) \cap V = \bigcup_{a\in J}(U_a \cap V) \subseteq \bigcup_{a\in J}(U_a \cap V_a) = \emptyset$. QED

☺ Sie kennen diese Technik bereits aus dem Lemma von Tychonoff E5J, dort statt Kompaktheit mit der schwächeren Lindelöf–Eigenschaft D6v. Mit Kompaktheit wird alles endlich und damit erfreulich einfach!

Kompaktheit und Hausdorff–Eigenschaft



Satz F1E: $T_2 \Rightarrow T_4$ für kompakte Teilmengen $A, B \subseteq X$

Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch und darin $A, B \subseteq X$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$. Dann existieren U, V mit $A \subseteq U \in \mathcal{T}$ und $B \subseteq V \in \mathcal{T}$ und $U \cap V = \emptyset$.

☺ Der Beweis ist wörtlich derselbe wie im vorangegangenen Lemma wobei wir „b“ durch „B“ ersetzen. Dennoch benötigen wir erst einmal das Lemma, um uns damit hochzuarbeiten. Ich führe dies noch einmal aus:

Beweis: Dank dem vorigen Lemma existieren zu jedem Punkt $a \in A$ offene Umgebungen $a \in U_a \in \mathcal{T}$ und $B \subseteq V_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$.

Wir erhalten $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$. Da A kompakt ist, existiert $J \subseteq A$ endlich mit $A \subseteq \bigcup_{a \in J} U_a =: U$. Damit ist $V := \bigcap_{a \in J} V_a \supseteq B$ offen und $U \cap V = \emptyset$, denn $U \cap V = (\bigcup_{a \in J} U_a) \cap V = \bigcup_{a \in J} (U_a \cap V) \subseteq \bigcup_{a \in J} (U_a \cap V_a) = \emptyset$. QED

Kompakte Teilräume

Satz F1F: Abgeschlossen in Kompaktum ist kompakt.

Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, so ist jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ kompakt.

Beweis: Sei $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung. Diese erweitern wir durch die offene Menge $X \setminus A$: Zu $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$ existiert $J \subseteq I$ endlich mit $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i\in J} U_i$, also $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$. QED

Satz F1G: Kompakt in Hausdorff ist abgeschlossen.

Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, so ist jede kompakte Teilmenge A abgeschlossen.

Beweis: Nach Lemma F1E ist das Komplement $C := X \setminus A$ offen, denn die Menge C ist Umgebung jedes ihrer Punkte (D3c). Erinnerung: Zu jedem $b \in C$ existieren offene Umgebungen U_b, V_b mit $A \subseteq U_b \in \mathcal{T}$ und $b \in V_b \in \mathcal{T}$ und $U \cap V = \emptyset$. Demnach ist $C = \bigcup_{b\in C} V_b$ offen. QED

Folgerung: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorff–Raum. Darin sind die kompakten Teilräume $A \subseteq X$ genau die abgeschlossenen Teilmengen. Dank Satz F1E ist demnach $(X, \mathcal{T})$ automatisch ein T_4–Raum.

Kompakte Teilräume

Korollar F1H: Heine–Borel–Lebesgue in $\mathbb{R}$

Ein Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt,
wenn die Menge A in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen (F1G).
Die offene Überdeckung $A \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{N}}]-r, r[= \mathbb{R}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, also $A \subseteq]-r, r[$ für ein $r \in \mathbb{N}$, somit ist A beschränkt.

„$\Leftarrow$“: Da A beschränkt ist, existiert $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $A \subseteq [-r, r]$. Das Intervall ist kompakt (F1D). Hierin ist A abgeschlossen, also kompakt (F1F). QED

Der Satz war der entscheidende Durchbruch zum heutigen Verständnis von Kompaktheit. Seine Entwicklung dauerte 50 Jahre! Dirichlet nutzte die endliche Überdeckungseigenschaft implizit bereits 1852, später Heine, Weierstrass und Pincherle. Borel benannte und bewies sie 1895 als erster explizit, zunächst noch für abzählbare Überdeckungen, anschließend dann Cousin, Lebesgue und Schoenflies für beliebige Überdeckungen.

Stetige Abbildungen kompakter Räume

Satz F1ɟ: Das stetige Bild eines Kompaktums ist kompakt.

Sei $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig. Ist $A \subseteq X$ kompakt, so auch $f(A) \subseteq Y$.

Beweis: Vorgelegt sei $f(A) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{T}_Y$. Daraus folgt $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i := f^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}_X$.
Hierzu existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
Wir schließen $f(A) \subseteq f(U_{i_1}) \cup \cdots \cup f(U_{i_n}) \subseteq V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$.
Das bedeutet, die Bildmenge $f(A) \subseteq Y$ ist kompakt. QED

Satz F1ĸ: Minimum und Maximum reeller Funktionen

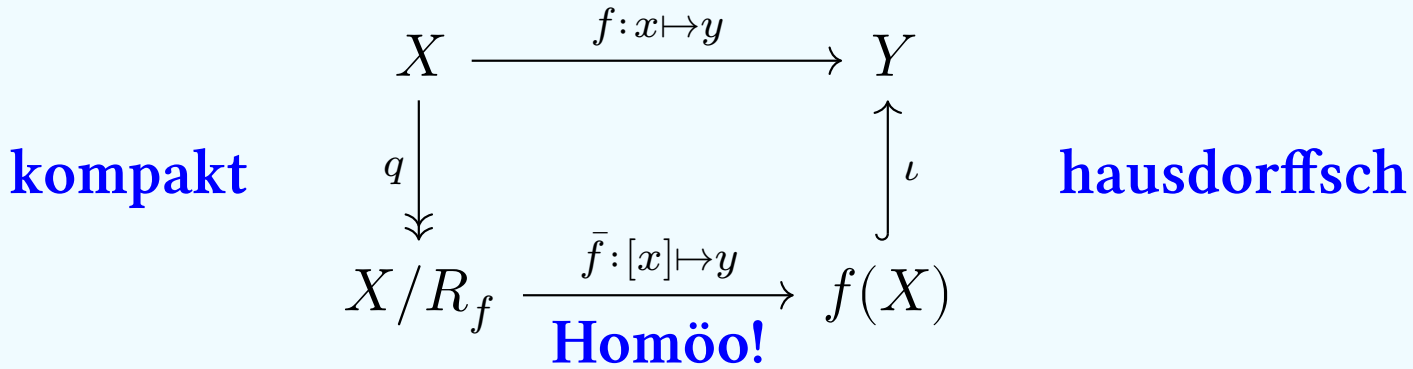
Sei $X \neq \emptyset$ kompakt. Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt ihre Extrema an: Es existieren Punkte $a, b \in X$ mit $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Nimmt f ihr Supremum s nicht an, so wäre $X = \bigcup_{a<s} f^{-1}(\mathbb{R}_{<a})$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. (Zu jedem $x \in X$ existiert $a \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) < a < s$, also $x \in f^{-1}(\mathbb{R}_{<a})$. Bei endlicher Teilüberdeckung steht $X \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_{<a})$ im Widerspruch zu $a < s$.) QED

Das Kompakt-Hausdorff-Kriterium: Abgeschlossenheit

Satz F1L: das Kompakt-Hausdorff-Kriterium

Sei X kompakt und Y hausdorffsch. (0) Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen. Die kanonische Faktorisierung ergibt daher:



(1) Jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ist ein Homöomorphismus.
(2) Jede stetige Surjektion $f : X \to Y$ ist eine Identifizierung.
(3) Jede stetige Injektion $f : X \to Y$ ist eine Einbettung.

Beweis: (0) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen.
Da X kompakt ist, ist A kompakt (F1F).
Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (F1J).
Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (F1G). QED

Das Kompakt-Hausdorff-Kriterium: Anwendungsbeispiele

Aufgabe: Faktorisieren Sie $p : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$, vergleiche Satz E2T.

kompakt

$$\begin{array}{ccc} X = [0,1] & \xrightarrow{p : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}} & Y = \mathbb{C} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \iota} \\ X /\!\!/ \{0,1\} & \xrightarrow[\textbf{Homöo!}]{\bar{p} : [t] \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}} & p(X) = \mathbb{S}^1 \end{array}$$

hausdorffsch

Aufgabe: Faktorisieren Sie $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$, vergleiche Satz E2P.

kompakt

$$\begin{array}{ccccc} [0,1] & \subseteq & \mathbb{R} & \xrightarrow{p : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}} & \mathbb{C} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q|_{[0,1]}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \iota} \\ q([0,1]) = & & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow[\textbf{Homöo!}]{\bar{p} : [t] \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

hausdorffsch

Der Quotientenraum ist kompakt (F1J) und $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ hausdorffsch (D1K).
Daher ist die stetige Bijektion $\bar{p}$ sogar ein Homöomorphismus (F1L).
In E2T / E2P haben wir explizit die stetige Umkehrung konstruiert.

Kompakt-Hausdorff-Gleichgewicht

🙂 Lernen Sie das Kompakt-Hausdorff-Kriterium zu nutzen, es lohnt sich!
Es vereinfacht Ihre Arbeit, Konstruktionen und Beweise erheblich.
Wir werden seine wohltuende Einfachheit im Folgenden oft nießen.
Manche Resultate und Techniken beruhen ausschließlich darauf!

🙂 Zur Abrundung noch eine amüsant-lehrreiche Beobachtung:

Die Hausdorff–Eigenschaft benötigt möglichst viele offene Mengen,
um je zwei Punkte $a \neq b$ durch disjunkte Umgebungen zu trennen.

Die Kompaktheit hingegen benötigt möglichst wenige offene Mengen,
damit jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Aus dem Kompakt–Hausdorff–Kriterium F1L folgt:

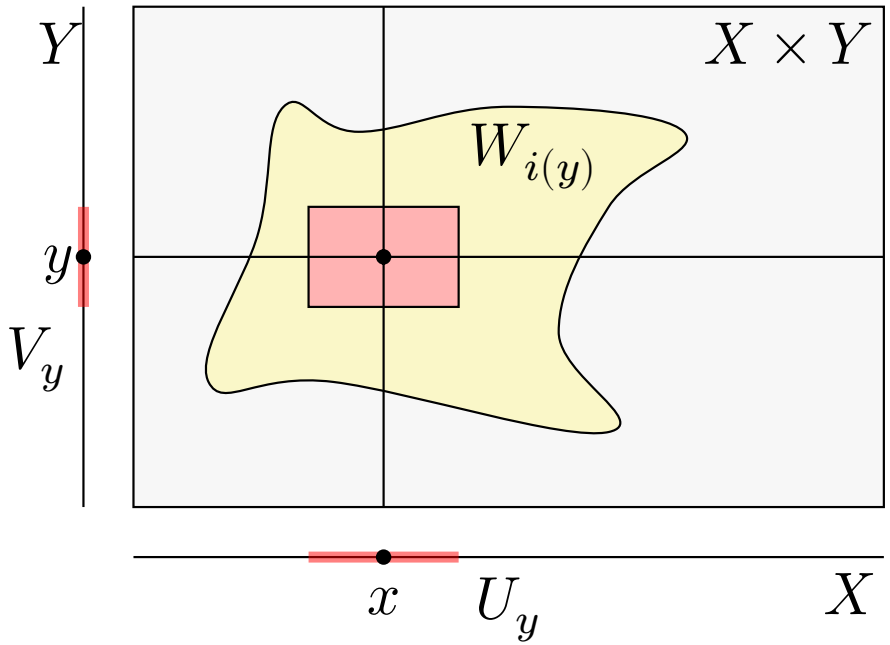
Korollar F1A: Kompakt-Hausdorff-Gleichgewicht

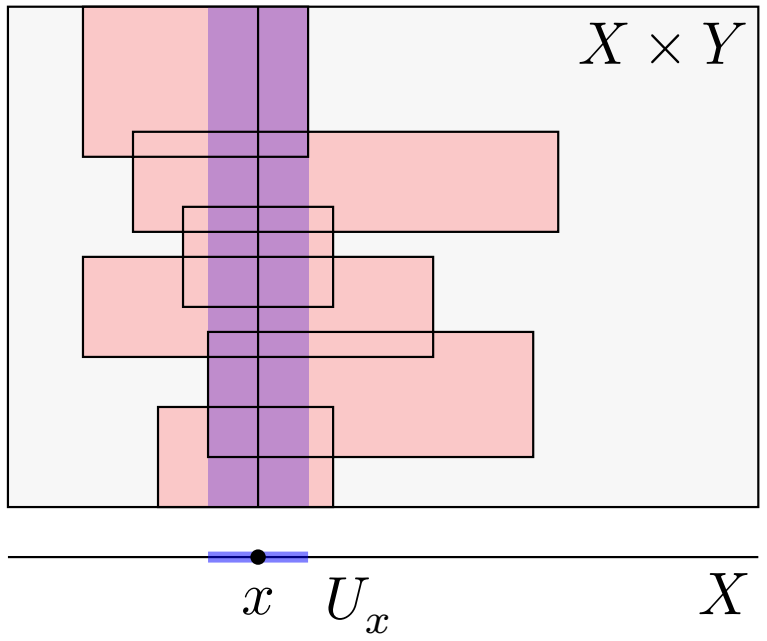
Jeder kompakte Hausdorff–Raum $(X, \mathcal{T})$ ist im perfekten Gleichgewicht:
Jede echt feinere Topologie $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$ ist hausdorffsch, aber nicht kompakt.
Jede echt gröbere Topologie $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$ ist kompakt, aber nicht hausdorffsch.

Der kleine Satz von Tychonoff

Satz F1N: kleiner Satz von Tychonoff

Sind $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ kompakt, so auch $(X \times Y, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$.





Beweis: Sei $X \times Y = \bigcup_{i \in I} W_i$ mit $W_i \in \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung.
Wir fixieren $x \in X$. Zu jedem $y \in Y$ existiert $i(y) \in I$ mit $(x, y) \in W_{i(y)}$.
Hierzu existieren $U_y \in \mathcal{T}_X$ und $V_y \in \mathcal{T}_Y$ mit $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq W_{i(y)}$.
Die offene Überdeckung $Y = \bigcup_{y \in Y} V_y$ enthält $V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} = Y$.
Der Durchschnitt $U_x := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ erfüllt $x \in U_x \in \mathcal{T}_X$.

Der kleine Satz von Tychonoff

Für die endliche Indexmenge $J_x := \{i(y_1), \dots, i(y_n)\}$ gilt demnach:

$$U_x \times Y \subseteq (U_x \times V_{y_1}) \cup \dots \cup (U_x \times V_{y_n}) \subseteq \bigcup_{j \in J_x} W_j$$

Die offene Überdeckung $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ enthält $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k} = X$.
Für die endliche Indexmenge $J := J_{x_1} \cup \dots \cup J_{x_k} \subseteq I$ folgt schließlich:

$$X \times Y \subseteq (U_{x_1} \times Y) \cup \dots \cup (U_{x_k} \times Y) \subseteq \bigcup_{j \in J} W_j$$

Damit haben wir zu jeder offenen Überdeckung $(W_i)_{i \in I}$ von $X \times Y$ eine endliche Teilüberdeckung $(W_i)_{i \in J}$ gefunden. QED

Korollar F1N: Kompaktheit endlicher Produkte

(1) Seien $X_1, \dots, X_n \neq \emptyset$ topologische Räume. Genau dann ist das Produkt $X = X_1 \times \dots \times X_n$ kompakt, wenn jeder Faktor $X_1, \dots, X_n$ kompakt ist.

Beweis: „⇒“: Ist X kompakt, so auch das stetige Bild $p_i(X) = X_i$ (F1J).
Die Umkehrung „⇐“ folgt aus Satz F1N per Induktion über n. QED

Der Satz von Heine–Borel

Korollar F1N: kompakte Quader

(2) Jeder Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Beweis: In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $[a, b]$ kompakt bezüglich der euklidischen Topologie (F1D). Auf $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ stimmt die euklidische Topologie mit der Produkttopologie überein. QED

Satz F1O: Heine–Borel–Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

Ein euklidischer Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn die Menge A in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen (F1G). Die offene Überdeckung $A \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{N}} B(0, r) = \mathbb{R}^n$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, also $A \subseteq B(0, r)$ für ein $r \in \mathbb{N}$, somit ist A beschränkt.

„$\Leftarrow$“: Da A beschränkt ist, existiert $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $A \subseteq [-r, r]^n$. Der Würfel ist kompakt (F1N). Hierin ist A abgeschlossen, also kompakt (F1F). QED

Der Satz von Heine–Borel

Beispiel: Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}(a,r)$ kompakt, ebenso die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \,\}$.

🙂 Sie kennen Heine–Borel als einen wichtigen Satz aus der Analysis. Wir erhalten einen unabhängigen, topologisch strukturierten Beweis: Kompaktheit für Intervalle (F1D), Teilräume (F1F, F1G), stetige Bilder (F1J) und schließlich endliche Produkte (F1N).

⚠ Der Satz F1O von Heine–Borel ist eine Besonderheit des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und gilt nicht für beliebige metrische Räume. Gegenbeispiel: In jedem diskreten metrischen Raum (X,d) ist jede Teilmenge $A \subseteq X$ abgeschlossen und beschränkt, aber nur endliche sind kompakt.

Beispiel: In $X = \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ist $A = \bar{B}(0,1) = [-1,1]^{\mathbb{N}}$ nicht kompakt, denn $E = \{\, e_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subseteq A$ ist abgeschlossen, diskret, aber unendlich. (F1F)

Aufgabe: Konstruieren Sie daraus explizit eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. **Lösung:** Zu $n \in \mathbb{N}$ ist $U_n := X \setminus \{\, e_k \mid k \geq n \,\}$ offen, und $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$ erlaubt keine endliche Teilüberdeckung.

Klassische Matrixgruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir die $\mathbb{K}$–Algebra $\mathbb{K}^{n\times n}$ aller $n \times n$–Matrizen über $\mathbb{K}$ mit der euklidischen Norm (C1P) und hierin die **allgemeine/spezielle lineare/orthogonale/unitäre Gruppe**:

$$\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,|\, \det A \neq 0\}, \qquad \mathrm{SL}_n\,\mathbb{K} = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,|\, \det A = 1\}$$
$$\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, A^\top A = 1_{n\times n}\}, \quad \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} = \{A \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \,|\, \det A = 1\}$$
$$\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \,|\, \overline{A}^\top A = 1_{n\times n}\}, \quad \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} = \{A \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} \,|\, \det A = 1\}$$

Sind diese Teilmengen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ dicht? offen? abgeschlossen? kompakt?

Die Determinante ist eine Polynomfunktion, also insbesondere stetig: $\det_n : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

Orthogonalität $A^\top A = AA^\top = 1_{n\times n}$ und Unitärität $\overline{A}^\top A = A\overline{A}^\top = 1_{n\times n}$ entsprechen Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$, diese sind insbesondere stetig.

Die Zeilen (bzw. Spalten) jeder Matrix $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ sind eine Orthonormalbasis, insbesondere gilt $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{S}^{n-1}$. Somit ist $\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt dank Heine–Borel.

Klassische Matrixgruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Satz F1q: Klassische Matrixgruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

In $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} = \det_n^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ offen und dicht, hingegen ist die Untergruppe $\mathrm{SL}_n\,\mathbb{K} = \det_n^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen und nirgends dicht. Für $n \geq 2$ ist $\mathrm{SL}_n\,\mathbb{K}$ nicht beschränkt, da $\mathrm{diag}(a, a^{-1}, 1, \dots, 1) \in \mathrm{SL}_n\,\mathbb{K}$.

Die Untergruppen $\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} > \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ sowie $\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} > \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$ sind kompakt, dank Heine–Borel F1o, da abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^\times &= \mathrm{GL}_1\,\mathbb{R} > \mathrm{GO}_1\,\mathbb{R} = \left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, a^2 = 1\right\} = \{\pm 1\} = \mathbb{S}^0 \\
\mathbb{C}^\times &= \mathrm{GL}_1\,\mathbb{C} > \mathrm{GU}_1\,\mathbb{C} = \left\{a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C} \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1\right\} = \mathbb{S}^1
\end{aligned}$$

Hierin sind $\mathrm{SL}_1\,\mathbb{R} = \mathrm{SO}_1\,\mathbb{R} = \mathrm{SL}_1\,\mathbb{C} = \mathrm{SU}_1\,\mathbb{C} = \{1\}$ trivial. Für $n = 2$ gilt:

$$\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} a, b \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{S}^1$$

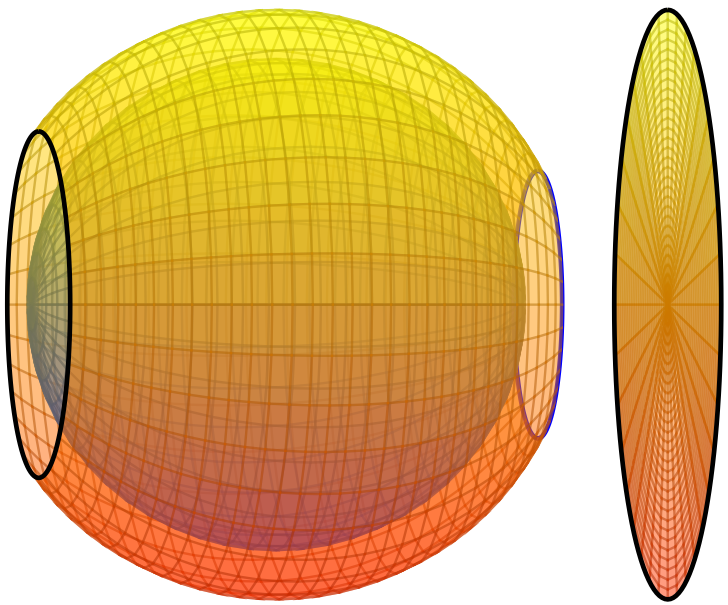
$$\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a + \mathrm{i}b & -c + \mathrm{i}d \\ c + \mathrm{i}d & a - \mathrm{i}b \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} a, b, c, d \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{array} \right\} \cong \mathbb{S}^3$$

Rand eines Balles zusammenschlagen

Bemerkenswert: Die drei Sphären $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ sind topologische Gruppen.
Sensationell: Dies sind die einzigen Sphären mit top. Gruppenstruktur!

Satz F1R: Rand eines Balles zusammenschlagen

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $([0,1] \times \mathbb{S}^{n-1}) /\!\!/ (\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{D}^n$ und $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$.



$$\begin{array}{ccc}
[0,1] \times \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow[\text{Kugelkoordinaten}]{\tilde{p}:(r,s)\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)} & \mathbb{R}^{n+1} \\
\Big\downarrow \tilde{q}:(r,s)\mapsto rs \text{ abgeschlossen dank F1L} & & \Big\| \\
\mathbb{D}^n & \xrightarrow[\text{wohldefiniert und stetig}]{p:rs\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)} & \mathbb{R}^{n+1} \\
& \text{abgeschlossen dank F1L} & \\
\Big\downarrow q:rs\mapsto[rs] & & \Big\uparrow \iota \\
\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow[\text{Homöomorphismus dank F1L!}]{\bar{p}:[rs]\mapsto(\cos(\pi r),\sin(\pi r)s)} & \mathbb{S}^n
\end{array}$$

Wir nutzen Polarkoordinaten $\tilde{q}$. Die Kugelkoordinaten $\tilde{p}$ induzieren somit p, und deren kanonische Faktorisierung liefert den Homöomorphismus $\bar{p}$.
Wir wenden hier zweimal das Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L an!

Rand eines Balles zusammenschlagen

Übung: Führen Sie dies aus! Wie hilft das Kompakt-Hausdorff-Kriterium?

Skizze: Wir nutzen hier Polarkoordinaten $\tilde{q}$, also „Radius mal Richtung“. Dabei schlägt $\tilde{q}$ den Boden $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ zusammen. Das Bild ist $\mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L ist $\tilde{q}$ identifizierend.

Die Kugelkoordinaten $\tilde{p}$ induzieren somit $p : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ wie angegeben. Die kanonische Faktorisierung von p liefert dann die stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$. Diese ist ein Homöomorphismus, erneut dank F1L.

Anschauung oder Formalisierung? Beides! Dies ist ein Paradebeispiel: Die geometrische Aussage ist anschaulich plausibel, aber wir müssen beweisen, dass sie in unserem topologischen Modell tatsächlich gilt. Die technisch sorgfältige Ausführung erfordert eine Reihe nicht-trivialer Begriffe und Techniken: metrische und allgemeiner topologische Räume, stetige / offene / abgeschlossene Abbildungen und Homöomorphismen, kanonische Faktorisierung und das Kompaktheit-Hausdorff-Kriterium. Das Zusammenspiel dieser Begriffe und Techniken beschert uns klare, präzise Aussagen und leichte, tragfähige Argumente, so wie hier.

Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{Q}$

Wir betrachten eine reelle vs rationale Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$:

$$
\begin{array}{lll|lll}
A_0 = [1 & , 2 &]_{\mathbb{R}} & B_0 = [1 & , 2 &]_{\mathbb{Q}} \\
A_1 = [1.4 & , 1.5 &]_{\mathbb{R}} & B_1 = [1.4 & , 1.5 &]_{\mathbb{Q}} \\
A_2 = [1.41 & , 1.42 &]_{\mathbb{R}} & B_2 = [1.41 & , 1.42 &]_{\mathbb{Q}} \\
A_3 = [1.414 & , 1.415 &]_{\mathbb{R}} & B_3 = [1.414 & , 1.415 &]_{\mathbb{Q}} \\
A_4 = [1.4142 & , 1.4143 &]_{\mathbb{R}} & B_4 = [1.4142 & , 1.4143 &]_{\mathbb{Q}} \\
A_5 = [1.41421, & 1.41422 &]_{\mathbb{R}} & B_5 = [1.41421, & 1.41422 &]_{\mathbb{Q}} \\
\multicolumn{3}{c|}{\dots} & \multicolumn{3}{c}{\dots} \\
\multicolumn{3}{c|}{\Longrightarrow \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\sqrt{2}\}} & \multicolumn{3}{c}{\Longrightarrow \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset}
\end{array}
$$

In $\mathbb{R}$ entspricht (3) dem beliebten Intervallschachtelungsprinzip:
Zu $\mathbb{R} \supseteq [a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$ existiert $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.
Gilt zudem $b_n - a_n \searrow 0$, so ist x eindeutig, also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$.

Für offene Intervalle kann der Schnitt leer sein: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0, 2^{-n}[= \emptyset$
Ebenso für abgeschlossene Intervalle in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
Was fehlt? Kompaktheit ist genau die richtige Forderung!

Die Endliche-Schnitt-Eigenschaft

Eine Familie $(F_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $F_i \subseteq X$ erfüllt die **Endliche-Schnitt-Eigenschaft**, falls $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset$ gilt für jede endliche Indexmenge $J \subseteq I$.

Lemma F1s: *finite intersection property (FIP)*

Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind äquivalent:

(1) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist kompakt: Jede Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ durch offene Mengen $U_i \in \mathcal{T}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung,

$$X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}.$$

(2) Hat eine Familie $(F_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen $F_i \in \mathcal{T}^c$ leeren Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, so ist bereits ein endlicher Durchschnitt leer,

$$F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} = \emptyset.$$

(3) Hat $(F_i)_{i\in I}$ mit $F_i \in \mathcal{T}^c$ die Endliche-Schnitt-Eigenschaft (FIP) $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} \neq \emptyset$ für alle $i_1, \ldots, i_n \in I$, so gilt insgesamt $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Beweis: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Komplementbildung, (2) $\Leftrightarrow$ (3) Kontraposition. QED

Der Satz von Tychonoff

Nach dem kleinen Satz F1N hier nun der große Satz von Tychonoff:

Satz F1T: Tychonoff 1930

Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ topologische Räume mit $a_i \in X_i$ für alle $i \in I$.
Das Produkt $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ ist genau dann kompakt,
wenn jeder Faktor $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für $i \in I$ kompakt ist.

Beispiele: Der diskrete Raum $\{0, 1\}$ ist kompakt, also auch $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
Diesen Raum $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ kann man sich besser vorstellen, wenn man ihn in $\mathbb{R}$ einbettet; er ist homöomorph zur Cantor–Menge $C \subseteq [0, 1]$, siehe E4W.

Jeder Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt, siehe F1N.
Jeder Quader $\prod_{k\in\mathbb{N}}[a_k, b_k]$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt, insbesondere $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.
Jeder Quader $\prod_{x\in\mathbb{R}}[a_x, b_x]$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist kompakt, insbesondere $[0, 1]^{\mathbb{R}}$.

Beweis des Satzes: „⇒“: Ist X kompakt, so auch $p_i(X) = X_i$.
Dies ist der leichte Teil: Jede Projektion $p_i : X \to X_i$ ist stetig (E4D).
Zudem ist p_i surjektiv: Zu $x_i \in X_i$ gilt $p_i(x) = x_i$ mit $x_j = a_j$ für $j \neq i$.
Ist der Raum X kompakt, so auch das stetige Bild $p_i(X) = X_i$ (F1J).

Der Satz von Tychonoff

„⇐“: Sei $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}^c$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit FIP (F1s). Zur Kompaktheit von $(X, \mathscr{T})$ zeigen wir $\bigcap \mathscr{A} \neq \emptyset$, kurz und elegant; wenige Zeilen destillieren hundert Jahre bis Tychonoff und Bourbaki.

Wir setzen $\mathscr{F}_0 := \{ V_1 \cap \dots \cap V_n \mid n \in \mathbb{N},\ V_1, \dots, V_n \in \mathscr{A} \} \supseteq \mathscr{A}$; zu $n = 0$ vereinbaren wir wie üblich $X \in \mathscr{F}_0$. Wir betrachten alle Familien $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ und Eigenschaft (a): Für $U, V \in \mathscr{F}$ gilt $\emptyset \neq U \cap V \in \mathscr{F}$. Dank Zorns Lemma existiert ein maximales $\mathscr{F}$; für dieses gilt zudem (b): Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ für alle $V \in \mathscr{F}$ gilt $U \in \mathscr{F}$.

FIP gilt für $\mathscr{F}$, dank E1A auch für $\{ p_i(V) \mid V \in \mathscr{F} \}$ und $\{ \overline{p_i(V)} \mid V \in \mathscr{F} \}$. Da der Raum $(X_i, \mathscr{T}_i)$ kompakt ist, existiert $x_i \in \bigcap_{V \in \mathscr{F}} \overline{p_i(V)}$ dank F1s. Wir zeigen nun, dass der Punkt $x = (x_i)_{i \in I}$ im Durchschnitt $\bigcap \mathscr{A}$ liegt. Für $x_i \in U_i \in \mathscr{T}_i$ gilt $U_i \cap p_i(V) \neq \emptyset$ für alle $V \in \mathscr{F}$, also $p_i^{-1}(U_i) \cap V \neq \emptyset$. Dank (b) gilt $p_i^{-1}(U_i) \in \mathscr{F}$. Dank (a) $U = p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \in \mathscr{F}$.

Jede Umgebung $U' \in \mathscr{T}$ von $x = (x_i)_{i \in I}$ enthält eine solche Menge U (E4c), schneidet also jedes $V \in \mathscr{F}$, somit gilt $x \in \overline{V}$. Speziell für jedes $V \in \mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$ bedeutet das $x \in \overline{V} = V$, also $x \in \bigcap \mathscr{A}$. QED

Abstand zwischen Teilmengen

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wie in C3M vereinbart, messen wir den Abstand zwischen Mengen als das Infimum der punktweisen Abstände:

$$d : \mathfrak{P}X \times X \to [0,\infty], \quad d(A,b) := \inf\{\, d(x,b) \,|\, x \in A \,\}$$
$$d : \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X \to [0,\infty], \quad d(A,B) := \inf\{\, d(x,y) \,|\, x \in A,\ y \in B \,\}$$

Existiert $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, so folgt $d(A,B) = 0$. Die Umkehrung gilt nicht:

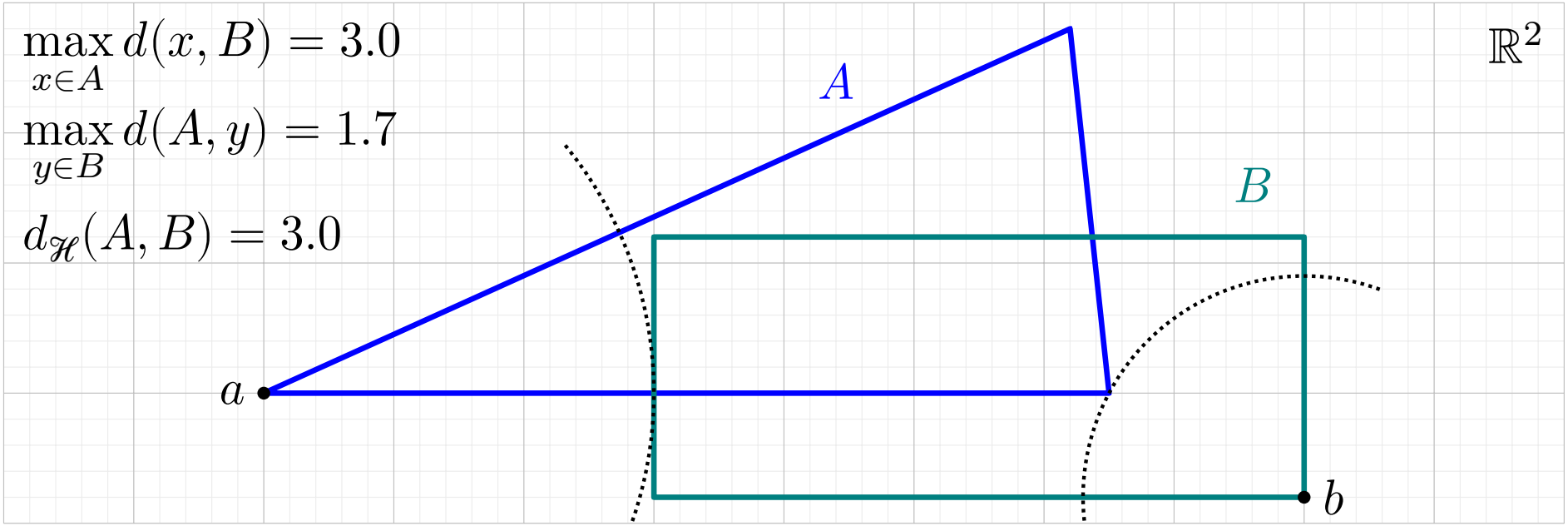
Beispiel: In $\mathbb{R}^2$ sind die Achse $A = \{\,(x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\,\}$ und die Hyperbel $B = \{\,(x,1/x) \,|\, x \neq 0\,\}$ abgeschlossen und disjunkt, doch $d(A,B) = 0$.

Satz F2A: positiver Abstand von kompakt zu abgeschlossen

Sind $A, B \subseteq X$ disjunkt, A abgeschlossen, B kompakt, so gilt $d(A,B) > 0$.

Beweis: Seien A und B nicht leer und die Metrik d endlich.
Die Abstandsfunktion $f : B \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto d(A,x)$ ist stetig (C3N).
Da B kompakt ist, existiert $b \in B$ mit $d(A,B) = d(A,b) > 0$ (F1K).
Die Funktion f nimmt ihr Infimum in einem Punkt $b \in B$ an.
Da A abgeschlossen ist und $b \notin A$ gilt, folgt $d(A,b) > 0$. QED

Hausdorff–Abstand zwischen Teilmengen



Für Teilmengen A, B in (X,d) definieren wir den **Hausdorff–Abstand**

$$d_{\mathscr{H}}(A,B) := \sup\{\, d(x,B),\ d(A,y) \,\big|\, x \in A,\ y \in B \,\}.$$

Dies misst anschaulich, wie „nahe“ oder „ähnlich“ sich A und B sind.
Für Kompakta gilt $d_{\mathscr{H}}(A,B) = \max\{\, \max_{a\in A}\min_{b\in B} d(a,b), \max_{b\in B}\min_{a\in A} d(a,b) \,\}$.

Aufgabe: Auf $\mathfrak{P}(X)$ ist $d_{\mathscr{H}}$ eine Halbmetrik, mit $d_{\mathscr{H}}(A,B) = 0$ gdw $\overline{A} = \overline{B}$.
Auf der Menge $\mathcal{T}_d^c$ aller abgeschlossenen Teilmengen ist $d_{\mathscr{H}}$ eine Metrik.
Wir erhalten die isometrische Einbettung $\iota : (X,d) \hookrightarrow (\mathcal{T}_d^c, d_{\mathscr{H}}) : x \mapsto \{x\}$.

Hausdorff–Abstand zwischen Teilmengen

Lösung: Symmetrie ist klar. Definitheit ist interessant:

$$\begin{aligned} d(x,B) = 0 &\overset{\text{C3N}}{\iff} x \in \overline{B} \\ \sup_{x\in A} d(x,B) = 0 &\iff A \subseteq \overline{B} \\ d_{\mathscr{H}}(A,B) = 0 &\iff \overline{A} = \overline{B} \end{aligned}$$

Auch die Dreiecksungleichung ist etwas raffiniert: Seien $A, B, C \subseteq X$. Für alle $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ gelten dann die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} & d(a,C) \leq d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) \\ \implies & d(a,C) \leq d(a,b) + d(b,C) \leq d(a,b) + d_{\mathscr{H}}(B,C) \\ \implies & d(a,C) \leq d(a,B) + d_{\mathscr{H}}(B,C) \leq d_{\mathscr{H}}(A,B) + d_{\mathscr{H}}(B,C) \end{aligned}$$

Per Symmetrie gilt $\{\, d(a,C),\, d(A,c) \,\} \leq d_{\mathscr{H}}(A,B) + d_{\mathscr{H}}(B,C)$.
Daraus folgt $d_{\mathscr{H}}(A,C) \leq d_{\mathscr{H}}(A,B) + d_{\mathscr{H}}(B,C)$, wie behauptet.

Bemerkung: Per Definition gilt $d_{\mathscr{H}}(\emptyset,\emptyset) = 0$ und $d_{\mathscr{H}}(A,\emptyset) = \infty$ für $A \neq \emptyset$. Wir können $\emptyset$ daher getrost ausschließen, das ist traditionell üblich.

Hausdorff–Abstand zwischen Teilmengen

☺ Für nicht-leere Kompakta $A, B \subseteq X$ gilt Definitheit und Endlichkeit.
Wir erhalten so die (endliche) **Hausdorff–Metrik** $d_{\mathscr{H}} : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
auf der Menge $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{T}_d^c$ aller nicht-leeren Kompakta in (X, d).

Die Maximin-Definition ist raffiniert und liefert genau das Richtige.
Ihre Berechnung ist selbst für Polytope nicht ganz offensichtlich.
Die Hausdorff–Metrik ist ein zentrales Werkzeug in fraktaler Geometrie
und Bilderkennung. Sie hat exzellente mathematische Eigenschaften:

☺ Ist (X, d) vollständig / totalbeschränkt / kompakt, so auch $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$:

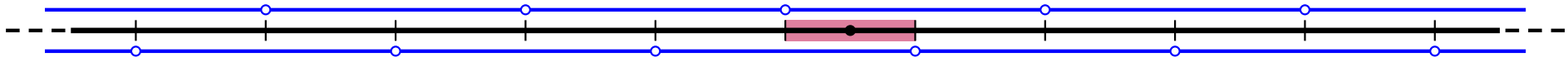
(1) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gelte $d_{\mathscr{H}}(A_n, A_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Sei $A \subseteq X$ die Menge der Grenzwerte $x = \lim x_n$ mit $x_n \in A_n$ und $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Dann gilt $d_{\mathscr{H}}(A, A_n) \to 0$.

(2) Totalbeschränktheit von (X, d) bedeutet: Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $E \subseteq X$ endlich mit $X = \bigcup_{x\in E} B(x, \varepsilon/2)$. Sei $F = \mathfrak{P}(E)^* = \{\, A \subseteq E \mid A \neq \emptyset \,\}$.
Dann wird $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$ überdeckt von den $d_{\mathscr{H}}$–Bällen $B(A, \varepsilon)$ mit $A \in F$.

(3) Kompaktheit von $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$ folgt aus (1) und (2) dank Satz F2E.

Lebesgue–Zahl einer Überdeckung

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zur Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ ist $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ eine **Lebesgue–Zahl**, falls gilt: Zu jedem $a \in X$ existiert $i \in I$ mit $B(a,\delta) \subseteq U_i$.
Anwendung: Für $a \in A \subseteq X$ mit $\operatorname{diam}(A) < \delta$ gilt $A \subseteq B(a,\delta) \subseteq U_i$.



Beispiel: Zur offenen Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+2[$ genügt $\delta \in]0, 1/2]$.
Hingegen hat $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]x_k, x_{k+2}[$ mit $x_k = \ln k$ keine Lebesguezahl $\delta > 0$.

Satz F2B: Lebesgue–Zahl einer Überdeckung

Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Dann erlaubt jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine Lebesgue–Zahl $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert ein Index $i(x) \in I$ mit $x \in U_{i(x)}$ und somit $\varepsilon_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x, 2\varepsilon_x) \subseteq U_{i(x)}$. Zur offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X} B(x,\varepsilon_x)$ existiert $E \subseteq X$ endlich mit $X = \bigcup_{x\in E} B(x,\varepsilon_x)$.
Sei $\delta := \min\{\varepsilon_x \mid x \in E\} > 0$. Jeder Punkt $a \in X$ erfüllt $a \in B(x,\varepsilon_x)$ für ein $x \in E$. Also gilt $B(a,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon_x+\delta) \subseteq B(x,2\varepsilon_x) \subseteq U_{i(x)}$. QED

Lebesgue–Zahl einer Überdeckung

Ist $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Lebesgue–Zahl zur Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ so auch jede kleinere Zahl δ', mit $0 < \delta' \leq \delta$. Im obigen Beispiel ist $\delta = 1/2$ maximal.

⚠ Die Existenz einer Lebesgue–Zahl hängt von der Metrik d ab, sie ist tatsächlich eine *metrische* Eigenschaft und keine *topologische*:

Beispiel: Auf $\mathbb{R}$ haben wir neben der euklidischen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ die äquivalente Metrik $e(x,y) := |\exp(x) - \exp(y)|$: Da $(\exp, \ln) : \mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{>0}$ ein Homöomorphismus ist, definieren d und e dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}$. Bezüglich e erlaubt $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]x_n, x_{n+2}[$ die Lebesgue–Zahl $\delta = 1/2$.

⚠ Für Kompaktheit ist die Existenz einer Lebesgue–Zahl $\delta > 0$ zu jeder offenen Überdeckung notwendig, aber nicht hinreichend:

Beispiel: In (X,d) mit diskreter Metrik ist $\delta \in]0,1]$ eine Lebesgue–Zahl zu jeder Überdeckung, auch wenn X unendlich ist, somit nicht kompakt. (Hingegen ist $\delta \geq 1$ nur dann eine Lebesgue–Zahl für eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, wenn $U_i = X$ für ein $i \in I$ gilt.)

🙂 Hierzu fehlt noch die Totalbeschränktheit, die wir jetzt erklären.

Totalbeschränkte metrische Räume

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **beschränkt**, wenn gilt: Für einen bzw. jeden Punkt $a \in X$ ist die Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto d(x, a)$ beschränkt. Für $r \in \mathbb{R}$ mit $f < r$ folgt $X = B(a, r)$. Wir verschärfen diese Bedingung:

Definition F2c: totalbeschränkter metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **totalbeschränkt**, wenn gilt:
Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wird X überdeckt von endlich vielen ε–Bällen.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq X \;:\; X = B(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_n, \varepsilon)$$

D.h. die Abstandsfunktion $f(x) = d(x, A)$ erfüllt $f(x) < \varepsilon$ für alle $x \in X$.

Beispiel: Jeder kompakte metrische Raum (X, d) ist totalbeschränkt.

Totalbeschränkt impliziert beschränkt: Aus $X = B(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_n, \varepsilon)$ folgt $d(x, a_1) < r := \varepsilon + \max d(a_1, a_k)$. Die Umkehrung gilt nicht:

Beispiel: Jeder Raum (X, d) mit diskreter Metrik ist beschränkt, aber totalbeschränkt nur genau dann, wenn X endlich ist.

Totalbeschränkte metrische Räume

Beispiel: In $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist $\bar{B}(0,1)$ beschränkt, aber nicht totalbeschränkt:
Die kanonische Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $|e_k - e_\ell|_\infty = 1$ für alle $k \neq \ell$.
Zu $\varepsilon = 1/2$ überdecken endlich viele Bälle $B(a_k, \varepsilon)$ nicht $\bar{B}(0,1)$,
denn jeder Ball $B(a_k, \varepsilon)$ enthält höchstens einen der Punkte e_n.

Beispiel: In $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik ist $[-r, r]^n$ totalbeschränkt.
Genau dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ totalbeschränkt, wenn A beschränkt ist:

Proposition F2D:

Ist (X, d) totalbeschränkt, so auch jeder Teilraum $A \subset X$.

Beweis: Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $X = \bigcup_{i\in I} B(x_i, \varepsilon/2)$ mit I endlich.
Sei $J = \{\, i \in I \,|\, \exists a_i \in A \cap B(x_i, \varepsilon/2) \,\}$. Aus $x_i \in B(a_i, \varepsilon/2)$ folgt
$B(x_i, \varepsilon/2) \subset B(a_i, \varepsilon)$, also $A \subset \bigcup_{i\in I} B(x_i, \varepsilon/2) \subset \bigcup_{i\in I} B(a_i, \varepsilon)$. QED

⚠ Für Kompaktheit ist Totalbeschränktheit nicht hinreichend:

Beispiel: Das rationale Intervall $[0,1]_\mathbb{Q}$ mit euklidischer Metrik ist
totalbeschränkt (F2D), aber nicht kompakt (F1D).

Kompaktheit für metrische Räume

Satz F2E: siebenfache Kompaktheit für metrische Räume

Für jeden nicht-leeren metrischen Raum (X, d) sind äquivalent:

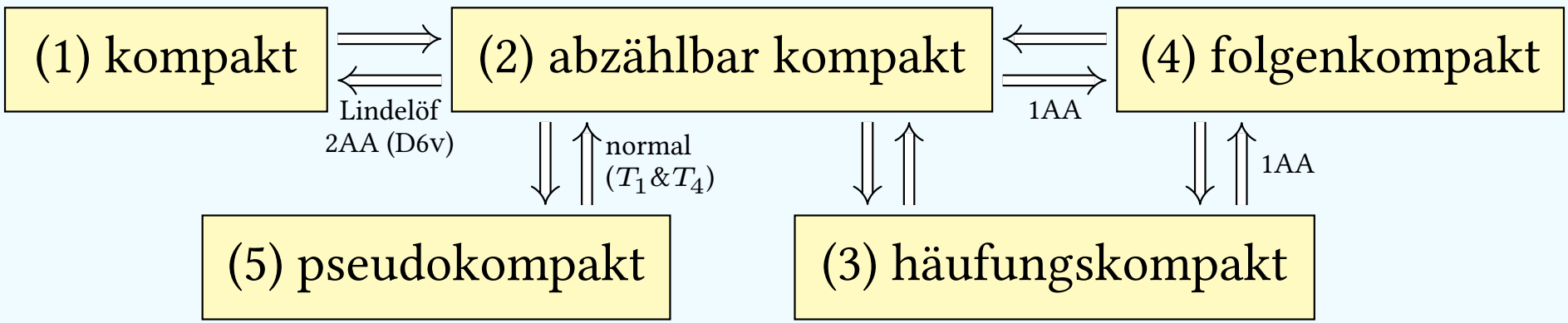
1. **Kompaktheit**: Jede (beliebige) offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.
2. **Abzählbare Kompaktheit:** Jede abzählbare offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.
3. **Häufungskompaktheit:** Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt.
4. **Folgenkompaktheit:** Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat eine konvergente Teilfolge; es gibt $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ und $x \in X$ sodass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to x$.
5. **Pseudokompaktheit:** Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt ihre Extrema an; es gibt $a, b \in X$ mit $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in X$.
6. **Lebesgue–Kompaktheit:** (X, d) ist totalbeschränkt und jede offene Überdeckung von X erlaubt eine Lebesgue–Zahl $\delta > 0$.
7. **Heine–Borel–Lebesgue–Kompaktheit:** Der metrische Raum (X, d) ist vollständig und totalbeschränkt.

Kompaktheit für topologische Räume

Die ersten fünf dieser Kompaktheitsbegriffe können wir auf topologische Räume übertragen. Dort sind sie im Allgemeinen nicht äquivalent!

Satz F2F: fünffache Kompaktheit für topologische Räume

Für topologische Räume gelten folgende Beziehungen:



⚠ Anders als für metrische Räume sind für topologische Räume Kompaktheit und Folgenkompaktheit unabhängige Eigenschaften:
Das heißt: Ein kompakter Raum muss nicht folgenkompakt sein (F2G).
Umgekehrt muss ein folgenkompakter Raum nicht kompakt sein (F2H).
Schließlich braucht ein pseudokompakter Raum nicht abzählbar kompakt zu sein (F2I), also auch nicht kompakt oder folgenkompakt.

Kompaktheit für topologische Räume

Hier später mehr, vorerst siehe Skript.

Kompaktheit für topologische Räume

Kompaktheit für topologische Räume

Kompaktheit für topologische Räume

Kompaktheit für topologische Räume

Kompaktheit für topologische Räume

Lokal-kompakte Räume

Definition F3A: lokale Kompaktheit

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **lokal-kompakt** im Punkt $a \in X$, wenn jede Umgebung U von a eine kompakte Umgebung V enthält:

$$\forall U \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T}) \;\; \exists V \in \mathcal{U}_a(X, \mathcal{T}) : V \subseteq U \text{ und } V \text{ kompakt}$$

Das heißt, der Punkt a erlaubt beliebig kleine kompakte Umgebungen: Die kompakten Umgebungen von a bilden eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}_a^{\mathrm{k}}$.

Gilt dies in jedem Punkt $a \in X$, so nennen wir $(X, \mathcal{T})$ **lokal-kompakt**.

Aufgabe: Ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt und hausdorffsch, so erlaubt die Topologie eine Basis aus relativ kompakten Mengen.

Lösung: Jede kompakte Umgebung $V \in \mathcal{U}_a^{\mathrm{k}}$ ist abgeschlossen (F1G). Jede Teilmenge $W \subseteq V$ ist also relativ kompakt, denn $\overline{W} \subseteq V$ ist abgeschlossen und somit kompakt (F1F). Ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt, das heißt in jedem Punkt $a \in X$, so erhalten die Basis $\mathcal{B} = \{ V^\circ \mid V \in \mathcal{U}_a^{\mathrm{k}},\ a \in X \}$.

Lokal-kompakte Räume

Beispiele: Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sind die kompakten Umgebungen $\bar{B}(x, \varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine UBasis. Jeder diskrete Raum ist lokal-kompakt, zum Beispiel der Teilraum $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist demnach lokal-kompakt dank $\bar{B}(x, \varepsilon) \subseteq U$. Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt dank $\bar{B}(x, \varepsilon) \cap A$. Auch $U \cap A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal-kompakt, zur Umkehrung siehe Satz F3F.

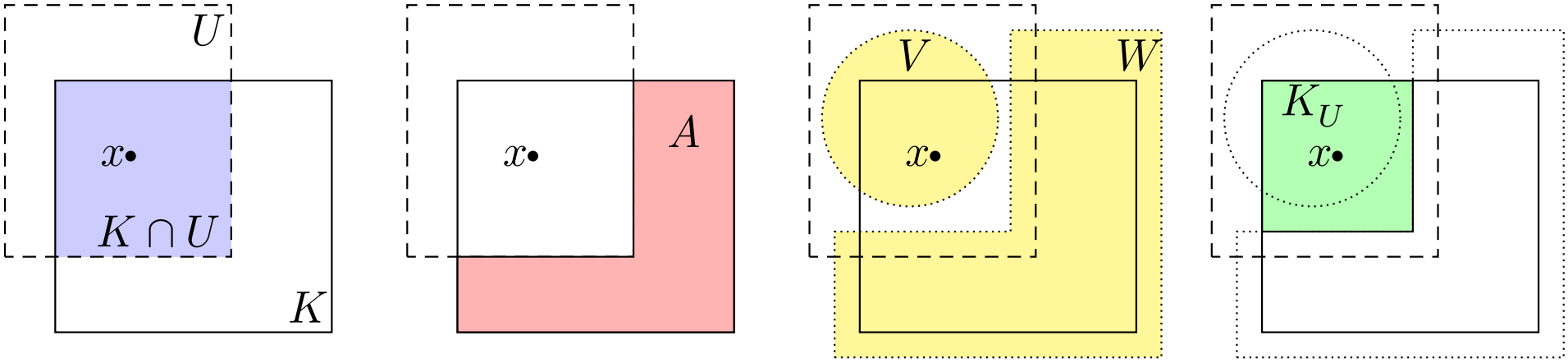
⚠ Der Teilraum $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht lokal-kompakt: Jede Umgebung U von x in $\mathbb{Q}$ enthält ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]_{\mathbb{Q}}$ mit $a < x < b$. Wäre U kompakt, so auch I (F1F), was jedoch falsch ist (F1D).

Die Menge $X = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \cup \{X\}$ ist kompakt, aber nicht lokal-kompakt. Jeder Punkt hat *eine* kompakte Umgebung, X, aber nicht *beliebig kleine*. Hierzu verhilft uns die Hausdorff–Eigenschaft:

Satz F3c: Jeder kompakte Hausdorff–Raum ist lokal-kompakt.

Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch. Existiert zum Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung $K \in \mathcal{U}_x^{\mathrm{k}}$, dann ist $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt im Punkt x.

Jeder kompakte Hausdorff–Raum ist lokal-kompakt.



Beweis: Zu jeder offenen Umgebung $U \in \mathcal{U}_x^o$ konstruieren wir eine kompakte Umgebung $K_U \subseteq U$ von x wie oben skizziert: Im Teilraum K ist $K \cap U$ offen, also $A := K \setminus U$ abgeschlossen, somit kompakt (F1F).

Im Hausdorff–Raum X gibt es offene disjunkte Umgebungen V von x und W von A (F1E). Im Teilraum K ist $K \cap W$ offen, also $K_U := K \setminus W$ abgeschlossen, somit kompakt (F1F). Zudem gilt $K \cap V \subseteq K_U \subseteq U$.

(Warum? Siehe Skizze! Aus $V \cap W = \emptyset$ folgt $K \cap V \subseteq K \setminus W = K_U$. Aus $W \supseteq A$ folgt $K_U = K \setminus W \subseteq K \setminus A = K \cap U \subseteq U$.)

Mit K und V sind auch $K \cap V$ und K_U Umgebungen von x in X. QED

Welche Teilräume sind lokal-kompakt?

Lokale Kompaktheit vererbt sich nicht auf *jeden* Teilraum, siehe $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, doch zum Beispiel im $\mathbb{R}^n$ auf jeden offenen / abgeschlossenen Teilraum. Diesem interessanten Phänomen wollen wir auf den Grund gehen:

Lemma F3E: Lokale Kompaktheit vererbt sich...

Ist der topologische Raum X lokal-kompakt, so auch
(1) jeder offene und (2) jeder abgeschlossene Teilraum $Y \subseteq X$.

Beispiele: $[0,1]$ und $]0,1[$ sind lokal-kompakt, aber auch $[0,1[\subset]-1,1[$.

Beweis: (1) Jede Umgebung V von x in Y ist auch eine Umgebung von x in X (D1K). Nach Voraussetzung enthält V eine kompakte Umgebung U von x in X. Somit ist $U \subseteq V$ eine kompakte Umgebung von x in Y.

(2) Jede Umgebung V von x in Y ist von der Form $V = \tilde{V} \cap Y$, wobei $\tilde{V}$ eine Umgebung von x in X ist (D1K). Die Umgebung $\tilde{V}$ enthält eine kompakte Umgebung $\tilde{U}$ von x in X. In $\tilde{U}$ ist $U := \tilde{U} \cap Y$ abgeschlossen, also kompakt (F1F). Somit ist $U \subseteq V$ eine kompakte Umgebung von x in Y. QED

Welche Teilräume sind lokal-kompakt?

Satz F3F: … auf lokal-abgeschlossene Teilräume.

Sei $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch. Für $Y \subseteq X$ sind äquivalent:

1. Der Teilraum Y ist lokal-kompakt (im Sinne der Definition F3A).
2. Jeder Punkt $x \in Y$ hat eine kompakte Umgebung in Y (F3C).
3. Jeder Punkt $x \in Y$ hat eine offene Umgebung U in X, sodass $Y \cap U$ in U abgeschlossen ist.
4. Es gilt $Y = U \cap A$ mit $U \subseteq X$ offen und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Hierzu sagen wir: Y ist **lokal-abgeschlossen** im Raum $(X, \mathcal{T})$.

Bemerkung: Der Satz enthält das vorige Lemma F3E als Spezialfall:
Jeder offene Teilraum $U \subseteq X$ ist lokal-kompakt (wähle $A = X$)
ebenso jeder abgeschlossene Teilraum $A \subseteq X$ (wähle $U = X$).

Beweis: Die Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)“ ist trivial.
Die Umkehrung „(2) $\Rightarrow$ (1)“ verdanken wir Satz F3C.

Welche Teilräume sind lokal-kompakt?

„(1) ⇒ (3)“: Sei V eine kompakte Umgebung von x in Y, also $V = Y \cap W$ für eine Umgebung W in X. Somit ist $U = W^\circ$ offen in X und $Y \cap U = V \cap U$ in U abgeschlossen, denn V ist abgeschlossen in X (F1G).

„(3) ⇒ (4)“: Zu jedem $x \in Y$ sei $x \in U_x \in \mathcal{T}$ und $Y \cap U$ abgeschlossen in U_x. Das bedeutet $Y \cap U_x = \overline{Y} \cap U_x$. Somit ist $Y \cap U$ abgeschlossen in U, denn $Y = Y \cap (\bigcup_{x \in Y} U_x) = \bigcup_{x \in Y} (\overline{Y} \cap U_x) = \overline{Y} \cap (\bigcup_{x \in Y} U_x)$.

„(4) ⇒ (1)“: In X ist die abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ lokal-kompakt und hierin ist die offene Teilmenge $Y \subseteq A$ lokal-kompakt (F3E). QED

Bemerkung: Der Satz zeigt für $A \subseteq X$ die erstaunliche Äquivalenz zwischen der intrinsischen Eigenschaft „lokal-kompakt“ des Teilraums A und der extrinsischen Eigenschaft „lokal-abgeschlossen“ im Raum X.

🙂 Der Satz F1O von Heine–Borel stiftet für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine ähnlich verblüffende Beziehung zwischen der intrinsischen Eigenschaft „kompakt“ des Teilraums A und der extrinsischen Eigenschaft „abgeschlossen und beschränkt“ im umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$.

Euklidische Umgebungsretrakte

Eine Inklusion / Einbettung $\iota : A \to X$ heißt **Umgebungsretrakt**, wenn eine $\rho : U \to A$ auf einer Umgebung U von $\iota(A)$ in X existiert.

Beispiel: Zu $A = \mathbb{S}^n$ sei $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $\rho : U \to \mathbb{S}^n : x \mapsto x/|x|$.

Im euklidischen Raum $X = \mathbb{R}^n$ nennen wir dies einen **euklidischen Umgebungsretrakt**, engl. *euclidean neighbourhood retract*, kurz **ENR**.

Übung F3H: euklidische Umgebungsretrakte

Wir nutzen die lokale Kompaktheit (F3F) des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$:

1. Jeder ENR $A \subset \mathbb{R}^n$ ist lokal-abgeschlossen und somit lokal-kompakt.

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph vermöge $h : A \xrightarrow{\sim} B$.

2. Ist A in $\mathbb{R}^m$ lokal-abgeschlossen, so auch B in $\mathbb{R}^n$.
3. Ist A in $\mathbb{R}^m$ ein ENR, so auch B in $\mathbb{R}^n$. *Hinweis:* Tietze (E5N)

Die Eigenschaft ENR ist also topologisch invariant: Ist *eine* Einbettung $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ ein ENR, so ist *jede* Einbettung $j : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ein ENR.

Euklidische Umgebungsretrakte

Lösung: (1) Sei U eine Umgebung von A in $\mathbb{R}^m$ und $\rho : U \to A$ eine Retraktion. Dann ist $A = \{\, x \in U^\circ \mid x = \rho(x) \,\}$ abgeschlossen in U°, also lokal-abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ (eine extrinsische Eigenschaft).

(2) Dank Satz F3F gelten folgende Äquivalenzen:
A in $\mathbb{R}^m$ ist lokal-abgeschlossen. $\Leftrightarrow$ A ist lokal-kompakt.
$\Leftrightarrow$ B ist lokal-kompakt. $\Leftrightarrow$ B in $\mathbb{R}^n$ ist lokal-abgeschlossen.
(Lokale Kompaktheit ist eine intrinsisch topologische Eigenschaft!)

(3) Es existiert $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit Inklusionen $i : A \hookrightarrow U$ und $j : U \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ sowie eine Retraktion $r : U \to A$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Nach (2) ist B in $\mathbb{R}^n$ lokal-abgeschlossen, also $B = O \cap C$ mit $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und somit ist B in O abgeschlossen. Die Abbildung $f = j \circ i \circ h^{-1} : B \to \mathbb{R}^m$ ist stetig. Dank des Fortsetzungssatzes von Tietze (E5N) existiert eine stetige Fortsetzung $F : O \to \mathbb{R}^m$ mit $F|_B = f$. Die Menge $U' = F^{-1}(U)$ ist offen in O und somit in $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung $r' = h^{-1} \circ r \circ F : U' \to B$ ist stetig und erfüllt $r'|_B = \mathrm{id}_B$. QED

Kompaktifizierung

Kompaktheit und Hausdorff–Eigenschaft sind wunderschön und nützlich.
Daher unser Ziel: Was noch nicht kompakt ist, wird kompakt gemacht!

Beispiele: Die Inklusionen $[0,1[\hookrightarrow [0,1]$ und $]-1,1[\hookrightarrow [-1,1]$ sind Kompaktifizierungen, ebenso $\mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow [0,\infty]$ und $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, denn der Zielraum ist hausdorffsch und kompakt (F1D) und Abschluss des Startraums. Ebenso ist $\mathbb{N} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Kompaktifizierung.

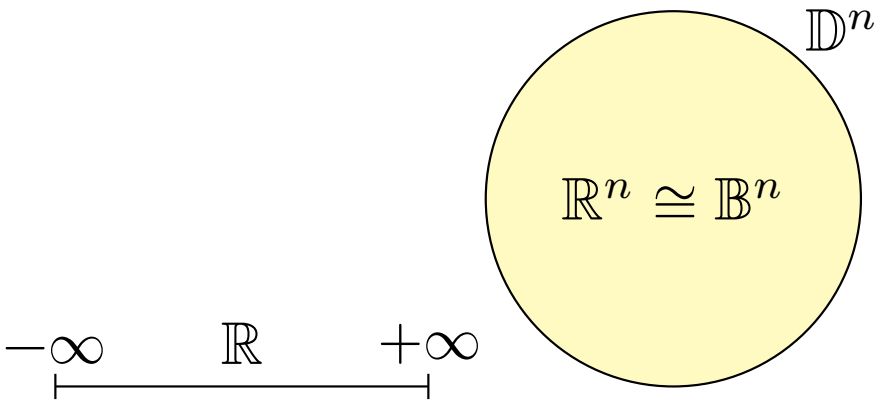
Ist ein topologischer Raum X nicht kompakt, so wollen wir ihn möglichst **kompaktifizieren**, das heißt, in einen kompakten Raum Y einbetten.
In Y ist dann der Abschluss $\overline{X}$ kompakt (F1F), daher genügt $Y = \overline{X}$.
Zudem wollen wir fortan immer die Hausdorff–Eigenschaft fordern.

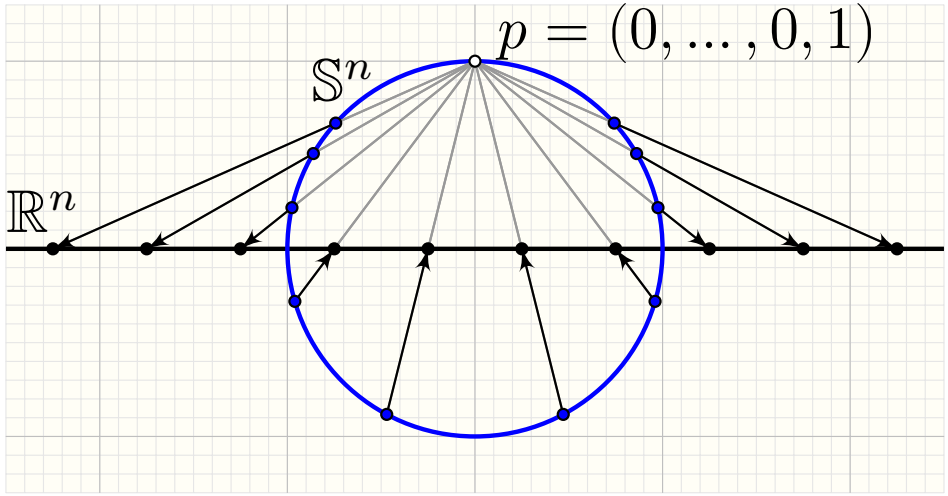
Dies motiviert die folgende Zielsetzung und Vereinbarung:

Definition F4A: (Hausdorff–)Kompaktifizierung

Sei X ein topologischer Raum. Eine (Hausdorff–)**Kompaktifizierung** von X ist ein Paar (Y,κ) aus einem kompakten (Hausdorff–)Raum Y zusammen mit einer Einbettung $\kappa : X \hookrightarrow Y$, wobei $Y = \overline{\kappa(X)}$ gilt.

Kompaktifizierung





Beispiel: Die Inklusion $\mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ ist eine Kompaktifizierung (F10), ebenso die Komposition $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n : x \mapsto x/(1+|x|)$.

Speziell in Dimension $n = 1$ ist $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim}]-1,1[\hookrightarrow [-1,1]$ topologisch äquivalent zur obigen Kompaktifizierung $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Beispiel: Stereographische Projektion $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ (A1L) kompaktifiziert mit nur einen Punkt, kurz „$\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$“.

Für $n = 1, 2$ erhalten wir die Kreislinie $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \cong \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und die Riemannsche Zahlensphäre $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \cong \widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Diese sind optimal sparsam: Ein einziger Punkt „∞“ genügt zur Kompaktifizierung!

Die Einpunktkompaktifizierung nach Alexandroff

Satz F4D: Einpunktkompaktifizierung nach Alexandroff, 1924

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\infty \notin X$ ein weiterer Punkt.
Auf $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ definieren wir die **Alexandroff–Topologie**

$$\widehat{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \cup \left\{ \widehat{X} \setminus K \,\middle|\, K \subseteq X \text{ kompakt und abgeschlossen in } (X, \mathcal{T}) \right\}.$$

Letzteres sind die offenen Umgebungen des Punktes ∞ im Raum $\widehat{X}$.
Damit ist $\widehat{\mathcal{T}}$ tatsächlich eine Topologie auf $\widehat{X}$: Es gilt (O1–3).

Der Raum $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ ist kompakt, und hierin ist $(X, \mathcal{T})$ ein offener Teilraum.
Die Topologie $\widehat{\mathcal{T}}$ auf $\widehat{X}$ ist die feinste mit diesen beiden Eigenschaften.

Wir nennen $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ die **Einpunktkompaktifizierung** von $(X, \mathcal{T})$ oder die **Alexandroff–Kompaktifizierung**. Genau dann ist $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ hausdorffsch, wenn $(X, \mathcal{T})$ lokal-kompakt hausdorffsch ist. In diesem Fall ist $\widehat{\mathcal{T}}$ auf $\widehat{X}$ die einzige kompakte Hausdorff–Topologie mit Teilraum $(X, \mathcal{T})$.

Beweis: Sorgfältig nachrechnen. Das ist eine lehrreiche Übung!

Die Einpunktkompaktifizierung nach Alexandroff

Bemerkung: Ist $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch, so ist jede kompakte Teilmenge K in X abgeschlossen (F1G) und die Konstruktion vereinfacht sich zu

$$\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \left\{ \widehat{X} \setminus K \,\middle|\, K \subseteq X \text{ kompakt} \right\}.$$

Bemerkung: Ist der Startraum $(X, \mathcal{T})$ bereits kompakt, so ist jede abgeschlossene Teilmenge K in X kompakt (F1F), und somit ist

$$\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \left\{ U \cup \{\infty\} \,\middle|\, U \in \mathcal{T} \right\}$$

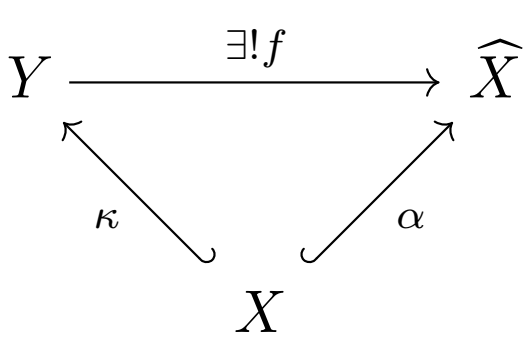
gerade die Summentopologie auf $\widehat{X} = X \sqcup \{\infty\}$ (E3A).

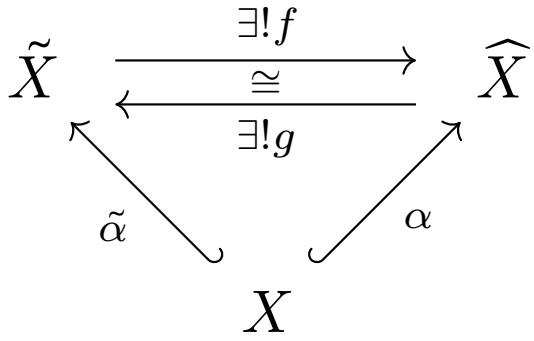
Korollar F4F: Charakterisierung lokal-kompakter Hausdorff–Räume

Die lokal-kompakten Hausdorff–Räume sind genau
die offenen Teilräume kompakter Hausdorff–Räume.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Lokale Kompaktheit vererbt sich (F3E).
„$\Rightarrow$“: Hierzu genügt die Einpunktkompaktifizierung (F4D). QED

Einpunktkompaktifizierungen sind minimal… und terminal.





Korollar F4G: universelle Abbildungseigenschaft

Sei X lokal-kompakt hausdorffsch, aber selbst noch nicht kompakt. Jede Einpunktkompaktifizierung $\alpha : X \to \widehat{X}$ erfreut sich folgender UAE; sie besagt, dass α terminal ist unter allen Kompaktifizierungen:

Zu jeder Kompaktifizierung $\kappa : X \to Y$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \to \widehat{X}$ mit $f \circ \kappa = \alpha$. Dabei wird der gesamte „Rand“ $Y \setminus \kappa(X)$ in Y zusammengeschlagen auf den einen Punkt ∞ in $\widehat{X}$.

Daraus folgt erneut Eindeutigkeit: Sind $\alpha : X \to \widehat{X}$ und $\tilde{\alpha} : X \to \tilde{X}$ zwei Einpunktkompaktifizierungen, dann existiert genau ein Homöomorphismus $(f, g) : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \widehat{X}$ mit $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ und $g \circ \alpha = \tilde{\alpha}$.

Beweis: Sorgfältig nachrechnen. Auch dies ist eine lehrreiche Übung!

Einpunktkompaktifizierungen sind minimal... und terminal.

Sei X lokal-kompakt hausdorffsch, aber selbst noch nicht kompakt.
Wir sehen zwei äquivalente Zugänge zur Einpunktkompaktifizierung:

1. Die konkrete Konstruktion der Grundmenge $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ mit der Alexandroff–Topologie $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\, \widehat{X} \setminus K \,|\, K \subseteq X \text{ kompakt} \,\}$.
2. Die abstrakte Charakterisierung als kleinste Kompaktifizierung im Sinne der obigen universellen Abbildungseigenschaft (UAE).

In (1) arbeiten wir konkret mit den *Elementen* von X und $\widehat{X}$ sowie den *offenen Mengen* in $\mathcal{T}$ und $\widehat{\mathcal{T}}$. Die Konstruktion erfordert ehrliche Arbeit.
In (2) betrachten wir nicht konkret, wie der Raum $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ *aufgebaut* ist, sondern bequem-abstrakt, was die Kompaktifizierung $\alpha : X \to \widehat{X}$ *leistet*.
Auch so lässt sich die Einpunktkompaktifizierung charakterisieren!

🙂 Analogie: Auch in der Informatik trennt man die Implementierung, also den internen Aufbau, von der Funktionaltität, also der nach außen sichtbaren Schnittstelle. Vorteil: Wir können das Objekt jederzeit durch ein anderes ersetzen mit gleichwertiger Funktionalität.

Mathematisch-philosophisches Leitmotiv

Einpunktkompaktifizierung, Produkt, Summe, Quotient, Teilraum, …
Viele mathematische Objekte lassen sich auf zwei Arten betrachten:

Menge mit Struktur $(X, \dots)$	**Morphismen** $\forall Y \exists! f : Y \to X$
interne Beschaffenheit:	externe Eigenschaften:
Beziehung zwischen Elementen	Beziehung zu anderen Objekten
Datenstruktur, Implementierung	Verhalten, Semantik, Axiome
Was ist X? Wie ist X aufgebaut?	Was tut X? Was leistet X für uns?
konkret und theoretisch	abstrakt und angewandt
explizite Bauanleitung	bequeme Bedienungsanleitung
Konstruktion $\Rightarrow$ Existenz	Definition $\Rightarrow$ Eindeutigkeit

Ebenso: Vektorraum V mit Basis $B = (b_i)_{i \in I}$, Polynomring $K[X]$, …
Auch natürliche Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$, ganze Zahlen $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$,
rationale Zahlen $(\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1, <)$, reelle Zahlen $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1, <)$, …

In Kapitel H formen wir diese Idee zu einer mathematischen Sprache,
mit der Sie effizient arbeiten und rechnen können, gar Sätze beweisen!

Mathematisch-philosophisches Leitmotiv

Dieses grundlegende Muster finden Sie nicht nur in der Mathematik, sondern ebenso in der Informatik, der Physik, der Technik, etc.

Die Etiketten „konkret“ und „abstrakt“ gefallen mir nicht besonders; sie sind manchmal hilfreich, doch oft verschleiern sie das Wesentliche!

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut.

Zur Klarstellung muss und will ich Partei ergreifen für die Abstraktion: Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

Wichtigstes Beispiel: Kompaktifizierungen des $\mathbb{R}^n$

Beispiel F4H: Kompaktifizierungen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$

(0) Die stereographische Projektion $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ (A1L) und Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung $\alpha : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (F4D) sind homöomorph: Es existiert $(f, g) : \mathbb{S}^n \cong \widehat{\mathbb{R}^n}$, sogar eindeutig (F4G).

(1) Von der Zweipunktkompaktifizierung $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \cong [-1, 1]$ zu Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung $\alpha : \mathbb{R} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$ haben wir $f : \bar{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ durch Zusammenschlagen $\pm\infty \mapsto \infty$. (E2T, F1R).

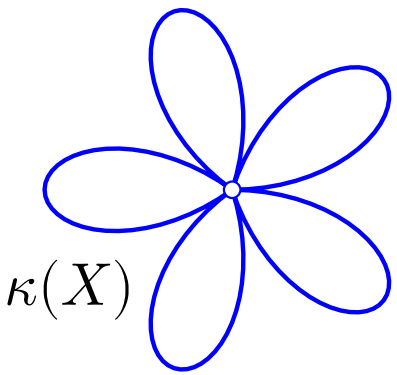
(2) Von der Ballkompaktifizierung $\kappa : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n : x \mapsto x/(1 + |x|)$ zur Einpunktkompaktifizierung $\alpha : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ haben wir $f : \mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ durch Zusammenschlagen des Randes (F1R).

Beispiel:

$X = [0, 5] \setminus \mathbb{Z}$

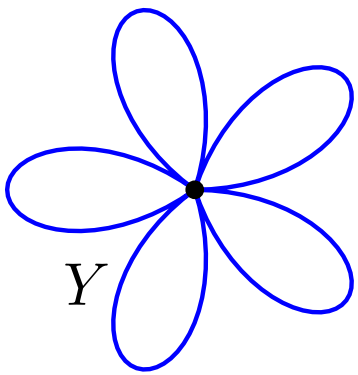
$Y = [0, 5] /\!\!/ \{0, \ldots, 5\}$

$\cong$



$\kappa(X)$

$\subseteq$



Y

Weitere Beispiele zur Einpunktkompaktifizierung

Beispiel / Übung F4ı: erste einfache Illustrationen

Bestimmen Sie zu der euklidischen Halbebene $A = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$
möglichst explizit eine Einpunktkompaktifizierung $\kappa : A \hookrightarrow K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dieselbe Aufgabe für $B =]0,1[$, $C = [0,1[\cup [2,3[$, $D =]0,1[\cup]2,3[$.
Wenn Sie möchten, denken Sie sich weitere Beispiele dieser Art aus!

Beispiel / Übung F4ȷ: etwas kniffligere Illustrationen

Nennen Sie zu Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung $\alpha_i : X_i \hookrightarrow \widehat{X_i}$
explizit eine homöomorphe Kompaktifizierung $\kappa_i : X_i \hookrightarrow Y_i$ mit $Y_i \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| \leq 1\}, \qquad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| < \infty\},$$
$$X_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| < 1\}, \qquad X_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < 1\},$$
$$X_5 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|, |x_2| < 1\}, \qquad X_6 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| < 1\},$$
$$X_7 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0, |x| < 1\}, \qquad X_8 \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen und sternförmig,}$$
$$X_9 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad \text{Bouquet } \mathbb{R}/\!/\mathbb{Z}\text{? hawaiianischer Ohrring } \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{S}^1 - \mathrm{i})/k\text{?}$$

Mathematisch-didaktisches Leitmotiv

Sätze formuliere ich möglichst explizit: Alle nötigen Daten liegen vor.
Der Beweis besteht im sorgsamen Nachrechnen aller Behauptungen.

Auch diese Pflicht muss getan werden, es ist ehrliche Arbeit, oft Routine.
Wir leiten Sie zu dieser Sorgfalt an, es wird Ihnen auch selbst gelingen.

Das ist mathematisches Handwerk und hat bekanntlich goldenen Boden.
Als Mathematiker:in wollen Sie genau wissen, wovon Sie sprechen.

Darüber hinaus geht es um zentrale Ideen, Bedeutung und Überblick,
mathematische Intuition, geometrische Anschauung und Beispiele.

Mathematik umschrieb man einst als *die Lehre von Zahlen und Figuren.*
Speziell in der Topologie erweisen beide ihren gegenseitigen Nutzen.

Dürfen wir Bildern vertrauen? Können wir Formeln veranschaulichen?
Lieber Anschauung oder Formalisierung? Sie benötigen beides!

Sie sollen beides beherrschen und ineinander übersetzen können.
C'est par la logique que l'on prouve et par l'intuition que l'on découvre.

Mathematisch-didaktisches Leitmotiv

Vielleicht sind Sie gerade etwas unglücklich, dass ich nicht alles vorführe,
oder unsicher, welche Arbeit Sie genau übernehmen sollen.

Tatsächlich will und kann ich nicht alles vorturnen, das wäre langweilig.
Es geht vielmehr darum, Sie zu mathematischer Arbeit anzuleiten,
Ihnen die nötigen Techniken zu erklären und Werkzeuge mitzugeben,
zu deren eigenständigen Nutzung zu ermutigen, Sie zu aktivieren.

Gib einem Menschen einen Fisch, und du ernährst ihn für einen Tag.
Lehre ihn zu fischen, und er ernährt sich sein Leben lang.

Die Auseinandersetzung mit der Mathematik ist für Sie harte Arbeit,
übrigens auch für mich und alle Beteiligten, doch es lohnt sich!
Unsere Arbeitsteilung ist nicht fix, sondern muss austariert werden.
Die Grenzziehung ist fein, erfahrungsgemäß funktioniert es recht gut.

Sie dürfen der Erfahrung Ihrer Dozenten vertrauen, sie meinen es gut,
doch nicht darauf ausruhen: Werden Sie kritisch und selbstständig!
Wo immer Sie das Leben hinführt, Ihre Lehrer werden nicht mitgehen.
Am Ende zählt allein Ihr solides Wissen und eigenständiges Können.

Eigentliche Abbildungen

Definition F5B: eigentliche Abbildung

Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **eigentlich**, engl. *proper*, wenn sie stetig und abgeschlossen ist mit kompakter Faser $f^{-1}(\{y\})$ über jedem $y \in Y$.

Beispiele: (1) Jeder Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist eigentlich.

(2) Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ von einem kompakten Raum X in einen Hausdorff–Raum Y ist eigentlich: f ist abgeschlossen (F1L) und über jedem Punkt $y \in Y$ ist die Faser $f^{-1}(\{y\})$ kompakt (F1F).

Satz F5C: Eigentliche Abbildungen haben starke Eigenschaften.

Sei $f : X \twoheadrightarrow Y$ surjektiv und eigentlich. Dann ist f identifizierend (E2H).

1. Ist X hausdorffsch, dann ist auch Y hausdorffsch.
2. Ist $K \subseteq Y$ kompakt, dann ist auch $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt.
3. Genau dann ist X lokal-kompakt, wenn Y lokal-kompakt ist.

Eigentliche Abbildungen

Aus (2) folgt: Die Komposition eigentlicher Abbildungen ist eigentlich.
Das ist allein aus der Definition F5B nicht sofort ersichtlich.

Die ausführlichen Beweise dieser Sätze finden Sie im Skript.

Ich möchte zunächst lieber die Begriffe und Eigenschaften erklären,
die formalen Beweise stelle ich für später zurück, falls dies nötig wird.
Sie haben in der ersten Hälfte dieses Kapitels gesehen, dass dies alles
zwar nicht wirklich schwer ist, aber doch Geduld und Mühe kostet.

Sie kennen nun alle nötigen Techniken, um es selbst zu versuchen.
Wo diese Ausführung zu schwer ist, helfen Skript und Literatur.
Aus Zeitgründen scheint mir dies ein guter Kompromiss.
Auf uns warten noch weitere schöne Themen!

Charakterisierung eigentlicher Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ \widehat{X} & \xrightarrow[\infty_X \mapsto \infty_Y]{\quad \hat{f} \quad} & \hat{Y} \end{array}$$

Satz F5E: Charakterisierung eigentlicher Abbildungen

Seien X, Y lokal-kompakte Hausdorff–Räume, etwa $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ sind äquivalent:

1. Die Abbildung f ist eigentlich (im Sinne der Definition F5B).
2. Für jedes Kompaktum $K \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt.
3. Die Fortsetzung von $f : X \to Y$ zu $\hat{f} : \widehat{X} \to \hat{Y}$ mit $\infty_X \mapsto \infty_Y$ ist stetig.

Beispiel: Zu $c \in \mathbb{C}$ definieren wir $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ durch $f(t) = \exp(ct)$.
Für $c = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt demnach $f(t) = \mathrm{e}^{at}(\cos bt + \mathrm{i} \sin bt)$.
Für $a \neq 0$ ist dies eine Einbettung, für $a = 0$ identifizierend.
Die Abbildung f ist eigentlich für $a > 0$, nicht für $a \leq 0$.

Charakterisierung eigentlicher Abbildungen

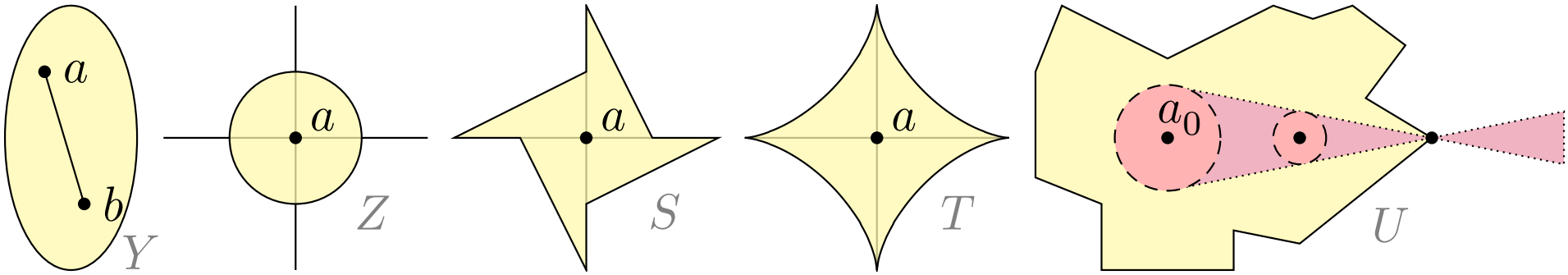
Bemerkung: Wir haben zunächst eigentliche Abbildungen zwischen allgemeinen topologischen Räumen diskutiert. Wenn man sich nur für eigentliche Abbildungen lokal-kompakter Hausdorff–Räume interessiert, dann kann man Bedingung (2) aus Satz F5E als Definition verwenden: Diese ist dann zwar nur auf einen Spezialfall zugeschnitten, aber die allgemeineren Ausführungen werden umgangen. Bei unserem Vorgehen ist F5E ein Satz, der aus der allgemeineren Definition abgeleitet wird. Manche Autoren behandeln ausschließlich diesen einfachen Spezialfall.

Übung F5F: eigentliche Polynomfunktionen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und hierauf $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
eine Polynomfunktion mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ und $a_n \neq 0$.
Genau dann ist f eigentlich, wenn $n \geq 1$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie Satz F5E zur Charakterisierung eigentlicher Abbildungen! Eine der drei Eigenschaften ist hier leicht zu sehen...
Durch Beispiele erfahren Sie den Nutzen topologischer Werkzeuge.

Konvex und sternförmig



Definition F6F: konvex und sternförmig

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen $a, b \in V$ ist

$$[a,b] := \big\{ (1-t)a + tb \,\big|\, t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1 \big\}.$$

Eine Teilmenge $X \subseteq V$ ist **konvex**, wenn gilt:

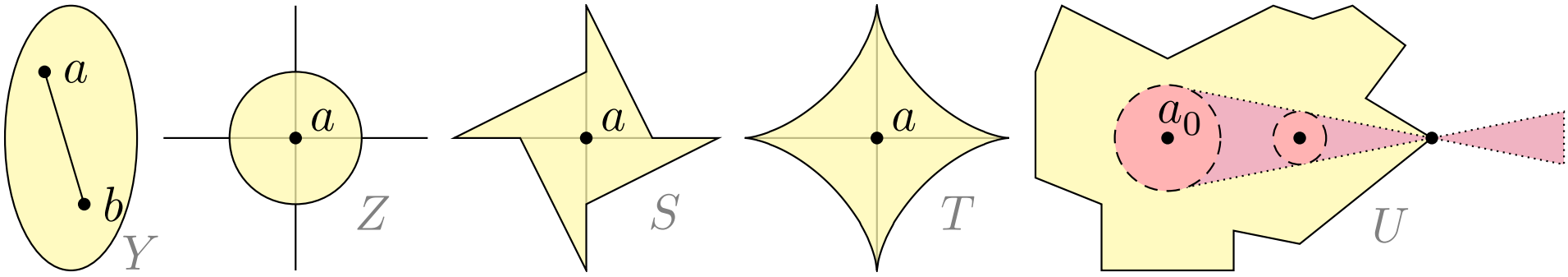
$$\forall a, b \in X \ : \ [a,b] \subseteq X$$

Die Menge X ist **sternförmig** zum Zentrum $a \in X$, wenn gilt:

$$\forall b \in X \ : \ [a,b] \subseteq X$$

Beispiel: In der Skizze sind Y und Z konvex, somit sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte; S und T sind sternförmig bezüglich a (und nur a).

Sternförmige Kompakta



Satz F6G: sternförmige Kompakta

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig zu $a \in X^\circ$. Jeder Randpunkt $b \in \delta X$ sei sichtbar gemäß $[a,b] \cap \delta X = \{b\}$. Dann folgt $X \cong \mathbb{D}^n$. Genauer:

(1) Wir haben den ambienten Homöomorphismus $h : (\mathbb{R}^n, X) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^n)$ dank Zentralprojektion $h(x) = x/\rho(x/|x|)$ für $x \neq 0$ und $h(0) = 0$.

(2) *Verschärfung:* Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig bezüglich jedes Punktes $a \in B(a_0, \varepsilon)$, so ist unser Homöomorphismus h bilipschitz.

Beweis: (1) Nach Translation können wir $a = 0$ annehmen. Wir haben $B(0,\varepsilon) \subseteq X \subseteq \bar{B}(0,R)$ für geeignete Konstanten $0 < \varepsilon \leq R$ und somit $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \to [\varepsilon, R] : s \mapsto \sup\{ r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \,|\, rs \in X \}$ mit $\delta X \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot s = \{ \rho(s) \cdot s \}$.

Sternförmige Kompakta

Die Projektion $f : \delta X \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$ ist wohldefiniert dank $0 \notin \delta X$, stetig, bijektiv dank $f^{-1}(s) = \rho(s) \cdot s$, also ein Homöomorphismus (F1L). Insbesondere ist $\rho : s \mapsto |f^{-1}(s)|$ stetig! Wir erhalten inverse Bijektionen

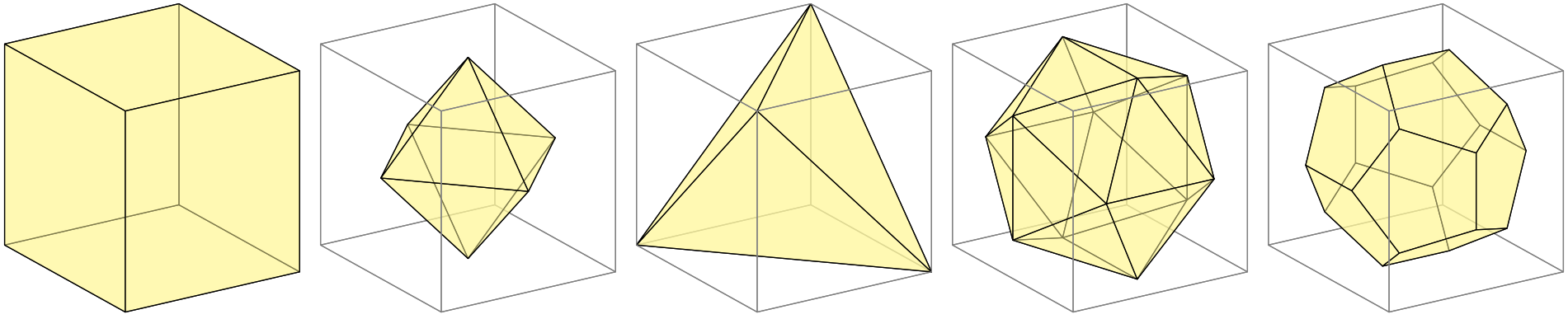
$$h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x/\rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

$$k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x \cdot \rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Beide sind stetig in $x \neq 0$, und in 0 dank $|h(x)| \leq |x|/\varepsilon$ und $|k(x)| \leq |x| \cdot R$. Das Homöomorphismuspaar (h, k) erfüllt $h(X) \subseteq \mathbb{D}^n$ und $k(\mathbb{D}^n) \subseteq X$.

(2) Wieder sei $a_0 = 0$. Für $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ liegt rs im Inneren von X für $0 \leq r < \rho(s)$, wie obige Skizze zeigt, denn für $t := r/\rho(s) < 1$ gilt $B(rs, (1-t)\varepsilon) = \{ (1-t)a + t\rho(s) \cdot s \,|\, a \in B(0, \varepsilon) \} \subseteq X$. Insbesondere gilt $\delta X \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot s = \{ \rho(s) \cdot s \}$ wie in (1) gefordert. Der Rand δX trifft nicht das Innere des Doppelkegels um $\rho(s) \cdot s$, somit ist ρ lipschitz-stetig. QED

Konvexe Körper



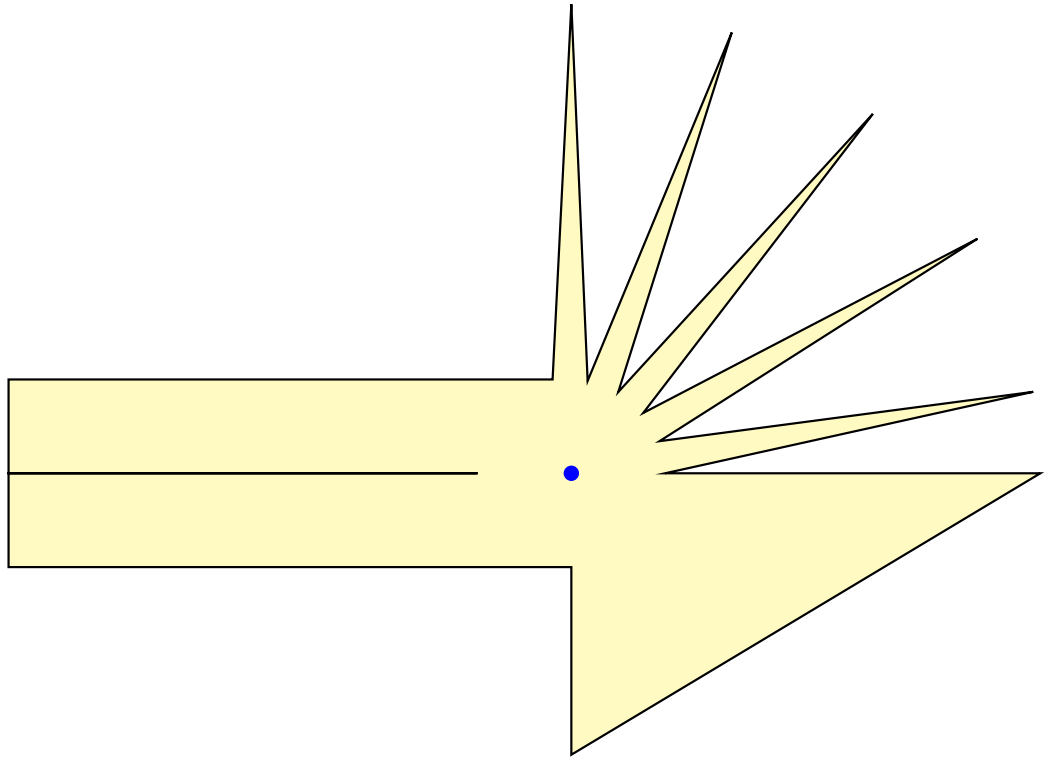
Satz F6H: Homöomorphie der konvexen Körper

(1) Jeder konvexe Körper $X \subseteq \mathbb{R}^n$, das heißt konvex und kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \neq \emptyset$, ist (bilipschitz) homöomorph zum Ball $\mathbb{D}^n$.

(2) Allgemein, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer, kompakt und konvex ist (bilipschitz) homöomorph zu $\mathbb{D}^k$ mit $0 \leq k \leq n$, vermöge $h : (\mathbb{R}^n, X) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^k)$.

Beweis: Aussage (1) ist ein (einfacher, aber wichtiger) Spezialfall von F6G. (2) Sei $v_0 \in X$. Nach Verschiebung gilt $v_0 = 0$. Seien $v_1, \dots, v_k \in X$ linear unabhängig mit k maximal. Nach Rotation gilt $X \subset \mathbb{R}^k$ mit $X^\circ \neq \emptyset$, denn $t_0 v_0 + \cdots + t_k v_k \in X^\circ$ für alle $t_0, \dots, t_k > 0$ mit $t_0 + \cdots + t_k = 1$. QED

Sternförmige offene Mengen



Satz F61: sternförmige offene Mengen

Jede sternförmige offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.
Noch besser: Wir können $0 \in U \subseteq \mathbb{B}^n$ annehmen. Dann existiert $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ lipschitz-stetig mit $g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ und $g|_U : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$.

Das beweist man ähnlich wie die Sätze für Kompakta. Versuchen Sie es, so fördern Sie Ihre mathematische Kreativität und technische Virtuosität.

Sternförmige offene Mengen

⚠ Offene Mengen des $\mathbb{R}^n$ können extrem franselig sein und der Rand $\delta U = \overline{U} \setminus U$ extrem irregulär. In unserer Konstruktion wird δU auf $\mathbb{S}^{n-1}$ geworfen. Hier haben wir außer Stetigkeit herzlich wenig Kontrolle. Doch auf dem Inneren U erhalten wir einen Homöomorphismus!

Beweis: Die offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei sternförmig bezüglich $a \in U$. Nach Verschiebung können wir $a = 0$ annehmen. Außerdem dürfen $U \subseteq \mathbb{B}^n$ wir voraussetzen, notfalls wenden wir den Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$ mit $h(x) = x/(1 + |x|)$ an (A1B).

Das Komplement $V = \mathbb{R}^n \setminus U$ ist abgeschlossen. Wir definieren $\psi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ durch $\psi(x) = d([0, x], V)$ und erhalten:

1. Für $x \in U$ gilt $\psi(x) > 0$. (C3N, F2A)
2. Es gilt $|\psi(x) - \psi(y)| \leq |x - y|$. (C3N)
3. Für $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\psi(rs)$ fallend in $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
4. Es gilt $\psi(x) = 0$ für alle $x \in V = \mathbb{R}^n \setminus U$.

Sternförmige offene Mengen

Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x/\psi(x)$ ist somit wohldefiniert dank (1), stetig dank (2), injektiv dank (3) und schließlich surjektiv dank (4) und Zwischenwertsatz (C3A) längs jeder Halbgeraden.

Zur stetigen Bijektion $f : \mathbb{B}^n \supseteq U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bleibt schließlich die Stetigkeit von f^{-1} nachzuweisen. (Mit fortgeschrittenen Hilfsmitteln können wir an die Invarianz des Gebietes appellieren, siehe Satz J7K.) Mit folgendem genial-einfachen Trick gelingt es elementar… durch Kompaktifizierung:

Für die Komposition $g = h \circ f : U \to \mathbb{B}^n$ gilt

$$g(x) = \frac{x/\psi(x)}{1 + |x/\psi(x)|} = \frac{x}{\psi(x) + |x|}$$

Die letzte Formel beschert uns eine stetige Fortsetzung $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$, die U bijektiv auf $\mathbb{B}^n$ abbildet und das Komplement $\mathbb{D}^n \setminus U$ auf den Rand $\mathbb{S}^{n-1}$. Da der Ball $\mathbb{D}^n$ kompakt ist, ist g eine abgeschlossene Abbildung (F1L). Dies gilt dann auch für die stetige Bijektion $g|_U^{\mathbb{B}^n} : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$, denn $g(A \cap U) = g(A) \cap \mathbb{B}^n$. Diese ist somit ein Homöomorphismus. QED

Sternförmige offene Mengen

Beispiele: Vergleichen Sie die Beispiele aus der Einleitung (A1B, A1D, A1E). In welchen Fällen erhalten Sie dieselben Homöomorphismen?

Bemerkung: Wir können diese elegante Konstruktion auf die vorigen Beispiele anwenden, etwa wie in die obigen Skizzen oder allgemein ein Kompaktum $X \subseteq \mathbb{D}^n$ sternförmig zu $a \in X^\circ$. Ist jeder Randpunkt $b \in \delta X$ von a aus sichtbar gemäß $[a,b] \cap \delta X = \{b\}$, so erhalten wir $g|_K : K \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$.

Andernfalls werden alle Randpunkte auf derselben Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot s$ auf denselben Punkt $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ geworfen. Unsere vorige Konstruktion aus F6G und F6H hat etwas stärkere Voraussetzungen, liefert dafür aber auch etwas mehr: einen *ambienten* Homöomorphismus.

🙂 Unsere schöne Konstruktion liefert zwar $g : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n$ lipschitz-stetig, aber ohne weiteres Zutun ist g nicht notwendigerweise differenzierbar. Jede sternförmige offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist sogar diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$. Das ist aber, soweit ich weiß, nur wesentlich aufwändiger zu beweisen. Ich fände es recht befriedigend, für einen Diffeomorphismus $g : U \cong \mathbb{B}^n$ eine ebenso elementare und elegante Konstruktion wie oben zu finden.

Sind auf $\mathbb{Q}^n$ über $\mathbb{Q}$ alle Normen äquivalent?

Der $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ erbt die euklidische Norm $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$.
Gibt es weitere, nicht-äquivalente Normen? Erstaunlicherweise ja!

Satz F6J: überabzählbar viele Normen auf $\mathbb{Q}^2$

Zu jedem $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $|\text{-}|_\xi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (a,b) \mapsto |a+b\xi|$ eine Norm.
Das sind überabzählbar viele Normen, alle topologisch verschieden!

Beweis: (1) Für $|\text{-}|_\xi$ gilt (N1), denn aus $|a+b\xi| = 0$ folgt $b = 0$ und $a = 0$.
Ausführlich: Aus $a+b\xi = 0$ und $b \neq 0$ folgt $\xi = -a/b \in \mathbb{Q}$, Widerspruch!
Homogenität (N2) und Dreiecksungleichung (N3) erbt $|\text{-}|_\xi$ von $|\text{-}|$.

Für $\xi \neq \zeta$ wählen wir eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \to \xi$ und setzen $b_n := -1$.
Dann gilt $|(a_n,b_n)|_\xi = |a_n + b_n\xi| \to 0$, aber $|(a_n,b_n)|_\zeta \to |\xi - \zeta| > 0$ und auch $|(a_n,b_n)| \to \sqrt{\xi^2+1} \geq 1$. Somit sind alle Topologien $\mathcal{T}(\mathbb{Q}^2, |\text{-}|_\xi)$ paarweise verschieden, und keine davon ist die euklidische. QED

Auf $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ könnten wir ähnliches vermuten, denn vermeintlich ist dieser Vektorraum noch „größer“ und bietet noch mehr Möglichkeiten.
Das Gegenteil ist der Fall: Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ sind äquivalent!

Auf $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ sind alle Normen äquivalent!

Satz F6κ: Normäquivalenz

(1) Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum V sind je zwei Normen $|\text{-}|$ und $\|\text{-}\|$ äquivalent: Es gibt Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\ell\,|x| \le \|x\| \le L\,|x| \quad \text{für alle} \quad x \in V.$$

Insbesondere induzieren sie auf V dieselbe Topologie $\mathcal{T}_{|\text{-}|} = \mathcal{T}_{\|\text{-}\|}$.

(2) Speziell für $V = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm $|\text{-}|$ ist die euklidische Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| = 1 \,\}$ kompakt und die Konkurrenznorm $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ stetig. Somit genügen die Konstanten

$$0 \;<\; \ell := \min\{\, \|x\| \,|\, x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\} \;\le\; L := \max\{\, \|x\| \,|\, x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\} \;<\; \infty.$$

Beweis: Es genügt, (2) zu beweisen. Für die kanonische Basis $e_1, \dots, e_n$ in $\mathbb{R}^n$ gilt $\|x\| = \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\| \le |x_1| \cdot \|e_1\| + \cdots + |x_n| \cdot \|e_n\| \le c|x|$ mit $c := \sqrt{\|e_1\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2}$, insbesondere $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| \le c|x - y|$. Somit ist $\|\text{-}\|$ stetig. Alles Weitere folgt dank Heine–Borel (F1ο, F1κ). QED

Geometrische Klassifikation aller Normen auf $\mathbb{R}^n$

Satz F6L: Skalarprodukte und Normen

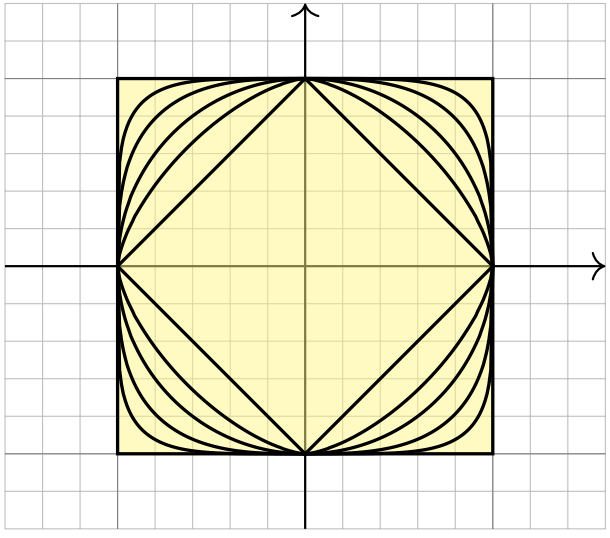
(1) Zu je zwei Skalarprodukten $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ und $\langle\!\langle\text{-}|\text{-}\rangle\!\rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ existiert ein linearer Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $\langle h(u) \,|\, h(v)\rangle = \langle\!\langle u \,|\, v\rangle\!\rangle$.

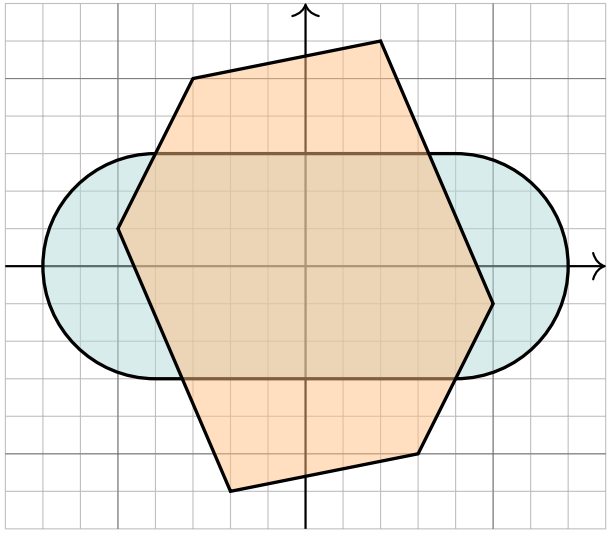
(2) Zu je zwei Normen $|\text{-}|$ und $\|\text{-}\|$ auf $\mathbb{R}^n$ existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, bilipschitz, mit $|h(v)| = \|v\|$ und $h(\lambda v) = \lambda h(v)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

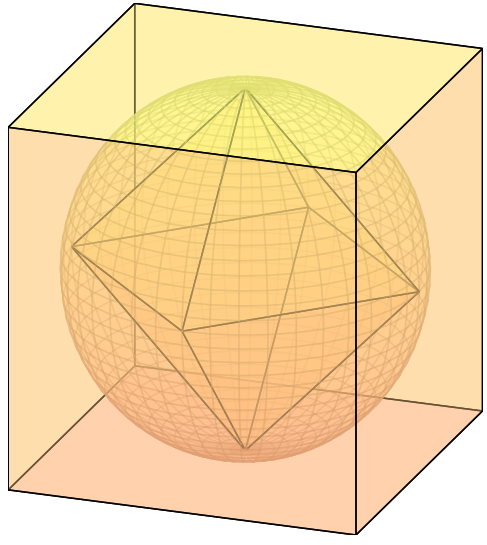
Beweis: (1) Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Gram–Schmidt (C1H) liefert eine Orthonormalbasis $u_1, \dots, u_n$ bezüglich $\langle\!\langle\text{-}|\text{-}\rangle\!\rangle$ und entsprechend $v_1, \dots, v_n$ bezüglich $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$. Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der lineare Isomorphismus mit $h(u_k) = v_k$ für alle k. Dann gilt $\langle h(u) \,|\, h(v)\rangle = \langle\!\langle u \,|\, v\rangle\!\rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(2) Wir haben die Bijektion $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(v) = (\|v\|/|v|) \cdot v$ und $h^{-1}(v) = (|v|/\|v\|) \cdot v$ für $v \neq 0$ sowie $h(0) = h^{-1}(0) = 0$. Dank F6K haben wir $0 < \ell \leq \|v\|/|v| \leq L < \infty$, also sind h und h^{-1} bilipschitz-stetig. QED

Geometrische Klassifikation aller Normen auf $\mathbb{R}^n$







Satz F6M: Symmetrische konvexe Körper entsprechen Normen.

(1) Zu jeder Norm $\|-\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist der abgeschlossene Einheitsball

$$K := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \,\}$$

kompakt und konvex mit $-K = K$ und $K^\circ \neq \emptyset$ (euklidisch offener Kern).

(2) Erfüllt eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ diese Eigenschaften, so existiert genau eine Norm $\|-\|$ mit Einheitsball K, nämlich $\|x\| = \inf\{\, r \in \mathbb{R}_{>0} \mid x/r \in K \,\}$.

Topologische Vektorräume

Definition F6N: topologischer Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ein **topologischer $\mathbb{K}$–Vektorraum** $(X, \mathcal{T}, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum $(X, +, \cdot)$ über $\mathbb{K}$ zusammen mit einer Hausdorff–Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass die Addition $+ : X \times X \to X$ und die Skalierung $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ stetig sind.

Wir nennen dann $\mathcal{T}$ eine **$\mathbb{K}$–Vektorraumtopologie** auf $(X, +, \cdot)$.

Beispiele: Jeder normierte Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum. Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definieren punktweise, gleichmäßige und kompakte Konvergenz jeweils eine Vektorraumtopologie, und diese drei sind sehr verschieden.

Satz F6s: die Vektorraumtopologie auf $\mathbb{R}^n$

Sei $\mathbb{R}^n$ der euklidische und X ein beliebiger topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum.

(1) Jede $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to X$ ist stetig.

(2) Ist $f : \mathbb{R}^n \to X$ linear und injektiv, so ist f abgeschlossen.

(3) Ist $f : \mathbb{R}^n \to X$ linear und bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.

Topologische Vektorräume

Auf $\mathbb{R}^n$ und jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum X sind alle Normen äquivalent (F6K), induzieren also dieselbe Topologie. Satz F6O beweist die Eindeutigkeit ohne die Voraussetzung der Normierbarkeit.

Dieses Ergebnis bestärkt unsere Erfahrung, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ besonders gute Eigenschaften hat, die sie unter allen denkbaren Topologien auf $\mathbb{R}^n$ auszeichnen. Die Aussage scheint geometrisch plausibel, beruht aber ganz wesentlich auf der Kompaktheit und somit letztlich auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

Als Kontrast betrachten wir den geordneten Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ mit seiner Ordnungstopologie; dies ist zugleich die Teilraumtopologie in $\mathbb{R}$. Für $\mathbb{Q}^n$ gilt der Satz von Heine–Borel nicht, zum Beispiel ist der Einheitsball $\{\, x \in \mathbb{Q}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \,\}$ beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{Q}^n$, aber nicht kompakt; schon das Intervall $[-1, 1]_{\mathbb{Q}}$ ist nicht kompakt (F1D). Unsere Beweise für $\mathbb{R}^n$ beruhen auf lokaler Kompaktheit, für $\mathbb{Q}^n$ brechen sie zusammen. Tatsächlich existieren auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ überabzählbar viele verschiedene Vektorraumtopologien (F6J).

Hier später mehr, vorerst siehe Skript.

Ohne Injektivität sind lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to X$ nicht abgeschlossen! Das Standardbeispiel ist die Projektion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$. In $\mathbb{R}^2$ ist die Hyperbel $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \}$ abgeschlossen, aber ihr Bild $f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ nicht.

Lokal-kompakte Vektorräume

Satz F6u: lokal-kompakte Vektorräume

Ein topologischer $\mathbb{R}$–Vektorraum X ist genau dann lokal-kompakt, wenn er endlich-dimensional ist, also $n = \dim_{\mathbb{R}} X < \infty$ und $X \cong \mathbb{R}^n$.
In diesem Fall ist er linear homöomorph zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Die Funktionalanalysis untersucht und nutzt je nach Bedarf normierte und auch ganz allgemein topologische Vektorräume.

Für endlich-dimensionale $\mathbb{R}$–Vektorräume genügt die Lineare Algebra.
Für unendlich-dimensionale Vektorräume genügt dies meist nicht,
der Durchbruch gelingt erst in Verbindung mit der Topologie!

Lemma F6T: Abschluss in topologischem Vektorraum

Sei $(X, \mathcal{T}, +, \cdot)$ ein topologischer Vektorraum und $\mathcal{B}_0$ eine UBasis von 0. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist der Abschluss $\overline{A} = \bigcap \{ A + U \,|\, U \in \mathcal{B}_0 \}$.

Beweis: Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{B}_x = \{ x - U \,|\, U \in \mathcal{B}_0 \}$ eine UBasis (F6Q). Genau dann gilt $x \in \overline{A}$, wenn $(x - U) \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{B}_0$ gilt: Das heißt, für jedes $U \in \mathcal{B}_0$ existiert ein $a \in A$ mit $a \in x - U$, also $x \in a + U$, kurz $x \in A + U$. QED

Beweis von Satz F6U: „⇐“: Gilt $\dim_{\mathbb{R}} X = n < \infty$, so existiert ein $\mathbb{R}$–Isomorphismus $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X$. Dank F6S ist dieser ein Homöomorphismus. Genau wie $\mathbb{R}^n$ ist dann auch X lokal-kompakt.

„⇒“: Sei nun umgekehrt X lokal-kompakt. Es existiert also eine offene Umgebung V von 0 in X mit kompaktem Abschluss $\overline{V}$.

Lokal-kompakte Vektorräume

Nach F6Q enthält jede Umgebung von 0 eine ausgewogene Umgebung U von 0, mit $U \subseteq 2U \subseteq 3U \subseteq \dots$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^n U$. Dank Kompaktheit folgt $V \subseteq \overline{V} \subseteq 2^n U$ für ein n, also $2^{-n}V \subseteq U$. Demnach ist $(2^{-n}V)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von 0. Mit V ist auch $x + \frac{1}{2}V$ offen (F6Q). Zur offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X}(x + \frac{1}{2}V)$ existieren $x_1, \dots, x_m \in X$ mit

$$\overline{V} \subseteq (x_1 + \tfrac{1}{2}V) \cup \dots \cup (x_m + \tfrac{1}{2}V).$$

Wir betrachten den erzeugten Vektorraum $Y := \mathbb{R}x_1 + \dots + \mathbb{R}x_m$. Es gilt $\dim_{\mathbb{R}} Y \leq m < \infty$. Aus $V \subseteq Y + \frac{1}{2}V$ und $\frac{1}{2}Y = Y$ folgt $\frac{1}{2}V \subseteq Y + \frac{1}{4}V$, also

$$V \quad \subseteq \quad Y + \tfrac{1}{2}V \quad \subseteq \quad Y + Y + \tfrac{1}{4}V \quad = \quad Y + \tfrac{1}{4}V.$$

Per Induktion folgt so $V \subseteq Y + 2^{-n}V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, nach F6T also

$$V \quad \subseteq \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y + 2^{-n}V \quad = \quad \overline{Y}.$$

Nach F6S ist Y in X abgeschlossen, also $V \subseteq Y$. Die Umgebung V von 0 in X ist absorbierend (F6Q), also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nV \subseteq Y$ und $X = Y$. QED

Lokal-kompakte Vektorräume

Cantor und Netto: Gilt $[0,1] \cong [0,1]^2$?

Gibt es Bijektionen $[0,1] \cong [0,1]^2$? — Ja! (Cantor 1878)

Gibt es stetige Bijektionen $[0,1] \cong [0,1]^2$? — Nein! (Netto 1879)

Georg Cantor bewies 1878 den erstaunlichen Satz, dass das Intervall $[0,1]$ und das Quadrat $[0,1]^2$ gleich viele Punkte haben, also eine Bijektion $[0,1] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [0,1]^2$ existiert. (Wir haben dies bereits in Satz B2N gezeigt.) Dies warf die Frage auf, ob *stetige* Bijektionen $[0,1] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [0,1]^2$ existieren.

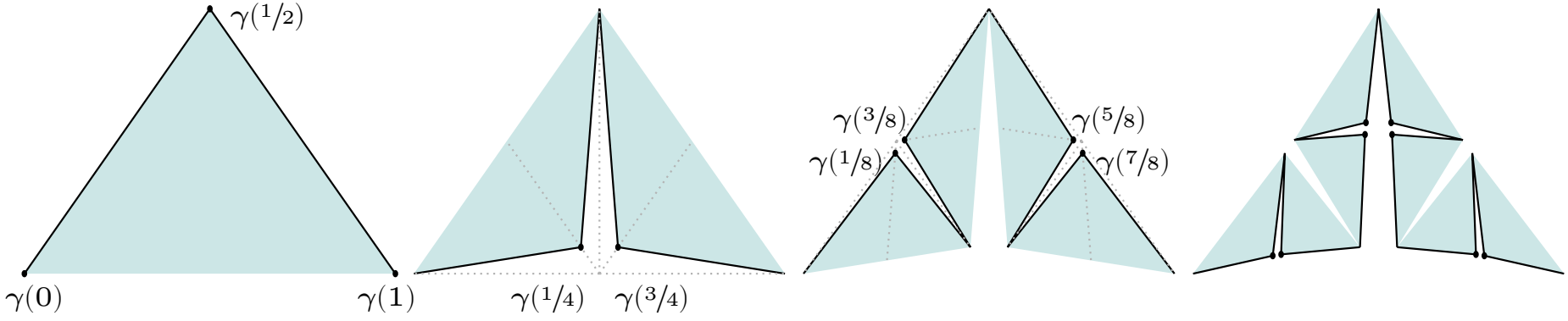
Beweis: Wäre die Bijektion $f : [0,1] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [0,1]^2$ stetig, so wäre f dank der Kompaktheit des Startraums $[0,1]$ und der Hausdorff–Eigenschaft des Zielraums $[0,1]^2$ ein Homöomorphismus (F1L). Das widerspricht A1H.

Es blieb die Frage, ob statt stetiger Bijektionen noch stetige Surjektionen $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$ möglich sind. Dies scheint zunächst kaum vorstellbar, doch Giuseppe Peano (1858–1932) überraschte 1890 die Fachwelt mit der ersten Konstruktion einer flächenfüllenden Kurve. Ebenso existieren Einbettungen $[0,1] \hookrightarrow [0,1]^2$ mit positivem Frächeninhalt. Für all diese Konstruktionen nutzen wir dankend die gleichmäßige Konvergenz.

Peano und Osgood: flächenfüllende Wege

Gibt es stetige Surjektionen $\gamma : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$? — Ja! (Peano 1890)

Gibt es stetige Injektionen $\gamma : [0,1] \hookrightarrow [0,1]^2$ mit positivem Flächeninhalt? — Ja, beliebig nahe an 100%! (Osgood 1903, siehe C6H). Konstruktion:



Aufgabe: Kann der volle Flächeninhalt in $X = [0,1]^2$ erreicht werden?

Lösung: Nein! Nach Netto ist γ nicht surjektiv. Das Bild ist kompakt (F1J), also in X abgeschlossen (F1G). Demnach existiert $a \in X \setminus \operatorname{Im}\gamma$ sowie ein Radius $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B = B_{(X,d)}(a,\varepsilon) \subseteq X \setminus \operatorname{Im}\gamma$ und somit $\operatorname{vol}_2 B > 0$.

🙂 Ein kleiner, aber positiver Flächeninhalt geht also immer verloren! Der *gesamte* Flächeninhalt ist niemals ganz erreichbar.

Erinnerung zu Schnitt und Retraktion

Beispiel / Übung E2κ: Schnitt und Retraktion

(1) Die Inklusion $s : \{-1,1\} \hookrightarrow [-1,1]$ ist eine Einbettung, erlaubt aber keine Retraktion, also $p : [-1,1] \to \{-1,1\}$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\{-1,1\}}$.
Beweis: Nach dem Zwischenwertsatz C3A müsste p konstant sein.

(2) Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ können wir in $\mathbb{R}^2$ einbetten, aber nicht in $\mathbb{R}^1$; zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^1$ existiert $x \in \mathbb{S}^1$ mit $f(x) = f(-x)$,
dank ZWS für $g : [0,\pi] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\pi)})$ mit $g(\pi) = -g(0)$.

(3) Die Abbildung $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist eine Identifizierung (dank E2P), erlaubt aber keinen Schnitt $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$.
Als Schnitt wäre $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ stetig, also nicht injektiv nach (2).

(4) Ist $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, so existiert keine stetige Injektion $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$.
Zu $a \in U$ existiert $r > 0$ mit $B(a,2r) \subseteq U$, also $g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow U : s \mapsto a + rs$;
mit $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$ ergäbe dies eine stetige Injektion $f \circ g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^1$.

Wir erhalten erneut $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^1$: Diese Räume sind nicht homöomorph.
In höherer Dimension folgt dies aus dem Abbildungsgrad, siehe Kapitel J.

Existiert ein Schnitt zu $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$?

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$ wickelt die Kreislinie $n$mal um sich selbst. In Polarkoordinaten ausgeschrieben gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \big(\cos(t), \sin(t)\big) \quad \mapsto \quad z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \big(\cos(nt), \sin(nt)\big)$$

Aufgabe: (1) Für welche $n \in \mathbb{N}$ erlaubt $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$ einen Schnitt? (2) Ist jede stetige Injektion $s : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^1$ bereits ein Homöomorphismus?

Lösung: (2) Ja! Wäre s nicht surjektiv, so stünde $s : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ im Widerspruch zu E2κ(2). Erinnerung: Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ lässt sich nicht in die Gerade $\mathbb{R}^1$ einbetten. Die stetige Bijektion s ist abgeschlossen, dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L, also ein Homöomorphismus.

(1) Ist $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so ist s dank (2) ein Homöomorphismus, also auch $p = s^{-1}$. Das gilt genau für $n = 1$.

Für $n = 0$ ist $p(z) = 1$ nicht surjektiv, erlaubt also keinen Schnitt.
Für $n = 1$ ist $p = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ ein Homöomorphismus, erlaubt also p^{-1} als Schnitt.
Für $n \geq 2$ ist p nicht injektiv, erlaubt also nach (2) keinen Schnitt.

Kapitel G

Zusammenhang und Homotopie

Every step of the way, we walk the line.
Your days are numbered, so are mine. […]
Got nothing for you, I had nothing before.
Don't even have anything for myself anymore. […]
You can always come back, but you can't come back all the way.

Bob Dylan, *Mississippi*

Inhalt dieses Kapitels G

1 Zusammenhang

2 Wegzusammenhang

3 Lokaler Zusammenhang

4 Homotopie stetiger Abbildungen

5 Retrakte und Deformationsretrakte

Einführung und Überblick

Die Zahlengerade $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend, nicht jedoch $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, auch $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, nicht jedoch $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$. Offenbar ist $\mathbb{Z}$ unzusammenhängend, doch wie steht es mit dem Raum $\mathbb{Q}$? Schon bei diesen einfachen und erst recht bei komplexeren Beispielen müssen wir unsere Intuition durch eine tragfähige Definition stützen!

Dieses Kapitel diskutiert **Zusammenhang** und **Wegzusammenhang** und beweist ihre grundlegenden Eigenschaften. Zwei Punkte a, b im Raum X heißen **verbindbar** durch einen Weg in X, wenn eine stetige Abbildung $h : [0,1] \to X$ existiert mit $h(0) = a$ und $h(1) = b$. Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen **Wegkomponenten** von X und dienen häufig als praktisches Unterscheidungsmerkmal.

Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen **homotop**, wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen, durch $H : [0,1] \times X \to Y$ stetig mit $H(0,x) = f(x)$ und $H(1,x) = g(x)$ für alle $x \in X$. Dies interpretieren wir als einen Weg $H : f \simeq g$ von f nach g im Abbildungsraum $\mathscr{C}(X,Y)$. Auch Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Einführung und Überblick

Durch Übergang von stetigen Abbildungen zu ihren Homotopieklassen gelangen wir zur **Homotopiekategorie**. Abstraktion hilft konkret!
Sie strukturiert, ordnet und vereinfacht. Sie ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen, und Homotopie ist hierzu ein gute Hilfe.

Die Aussage „die Räume X und Y sehen topologisch *gleich* aus“ wird präzisiert durch **Homöomorphie** $(f, g) : X \cong Y$, also stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$, die zusammen $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ erfüllen. Dies ist eine sehr starke Forderung, doch leider oft allzu starr. Zum Beispiel sieht die punktierte Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ recht ähnlich aus wie die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$: Beide haben ein Loch. Sie sind jedoch nicht homöomorph: Je zwei Punkte trennen $\mathbb{S}^1$, nicht aber $\mathbb{C}^*$.

Die Aussage „die Räume X und Y sehen topologisch *ähnlich* aus“ wird durch den Begriff der **Homotopie-Äquivalenz** $(f, g) : X \simeq Y$ präzisiert: Dies sind stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit Homotopien $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Das bedeutet anschaulich, die Räume X und Y lassen sich stetig ineinander deformieren. Das ist oft hilfreich.

Reelle Intervalle sind zusammenhängend.

Proposition G1A: äquivalente Zusammenhangseigenschaften

Für jedes nicht-leere Intervall $X \subseteq \mathbb{R}$ gilt dank Zwischenwertsatz (C3A):

(1) Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ hat die Zwischenwerteigenschaft:
Zu $a, b \in X$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ existiert $x \in X$ mit $f(x) = y$.

(2) Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ hat als Bild $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

(3) Jede stetige Funktion $f : X \to \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ist konstant. Allgemein: Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ in einen diskreten Zielraum Y ist konstant.

(4) Für jede offene Zerlegung $X = A \sqcup B$ gilt entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Für jeden nicht-leeren Raum $(X, \mathcal{T})$ sind Aussagen (1–4) äquivalent.

Beweis: Die Implikationen „(1) ⇒ (2) ⇒ (3)“ sind klar.

„(3) ⇒ (4)“: Ist $X = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung, so ist $f = \mathbf{1}_B$ stetig (E1P).
Dank (3) gilt dann entweder $A = f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ oder $B = f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

„(4) ⇒ (1)“: Angenommen für $y \in \mathbb{R}$ gilt $f(a) < y < f(b)$ aber $y \notin f(X)$.
Dann folgt $X = A \sqcup B$ mit $A = f^{-1}(\mathbb{R}_{<y}) \ni a$ und $B = f^{-1}(\mathbb{R}_{>y}) \ni b$. QED

Wann ist ein Raum un/zusammenhängend?

Definition G1B: un/zusammenhängend

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **zusammenhängend**, falls (4) gilt:
Für jede offene Zerlegung $X = A \sqcup B$ gilt entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.
Äquivalent hierzu: Jede stetige Abbildung $f : X \to \{0, 1\}$ ist konstant.

Gilt $X = A \sqcup B$ mit $A, B \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, so heißt X **unzusammenhängend**.
Äquivalent hierzu: Es existiert eine stetige Surjektion $f : X \twoheadrightarrow \{0, 1\}$.

Beispiele: Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist unzshgd gdw $\sharp X \geq 2$, zshgd gdw $\sharp X = 1$, und leer falls $\sharp X = 0$. Der leere Raum $\emptyset$ ist neutral, weder unzshgd noch zshgd; er enthält nichts, was zusammenhängen könnte.
Algebraische Analogie: Im Monoid $(\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot, 1)$ ist das Element 1 neutral, $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ sind prim / unzerlegbar, und $4, 6, 8, 9, 10, \ldots$ sind zerlegbar.

Jeder indiskrete Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ mit $X \neq \emptyset$ ist zusammenhängend.
Jedes reelle Intervall $X \subseteq \mathbb{R}$ mit $X \neq \emptyset$ ist zusammenhängend (G1A).
Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $X = \mathbb{R} \setminus \{t\} = \mathbb{R}_{<t} \sqcup \mathbb{R}_{>t}$ unzusammenhängend.
Ebenso ist $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<\xi} \sqcup \mathbb{Q}_{>\xi}$ mit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Zusammenhängende Ordnungstopologien

Wir arbeiten vor allem mit reellen Intervallen. Zu Ihrer Information:

Satz G1D: zusammenhängende Intervalle

Sei $(X, <)$ eine totalgeordnete Menge, $X \neq \emptyset$ mit Ordnungstopologie $\mathcal{T}$.

(1) Ist ein Teilraum I in $(X, \mathcal{T})$ zusammenhängend, so ist I ein Intervall.

(2) Genau dann ist jedes nicht-leere Intervall $I \subseteq X$ zusammenhängend, wenn $(X, <)$ ordnungsvollständig und dicht ist, d.h. zu je zwei Punkten $x < y$ in X existiert ein Zwischenpunkt $z \in X$ mit $x < z < y$ (ZPE).

Beweis: Skript / Übung!

Beispiele: Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, <)$ sind vollständig geordnet.
Dank G1D/G1A ist jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $I \neq \emptyset$ zusammenhängend.

Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, <)$ haben die Zwischenpunkteigenschaft, sind aber nicht vollständig geordnet. Wie gesehen ist $\mathbb{Q}$ unzshgd.

Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, <)$ sind vollständig geordnet, haben aber nicht die Zwischenpunkteigenschaft. Die Topologie ist diskret und unzshgd.

Stetiges Bild eines zusammenhängenden Raumes

Satz G1E: Stetige Surjektionen erhalten den Zusammenhang.

Sei $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so auch das Bild $f(X)$.

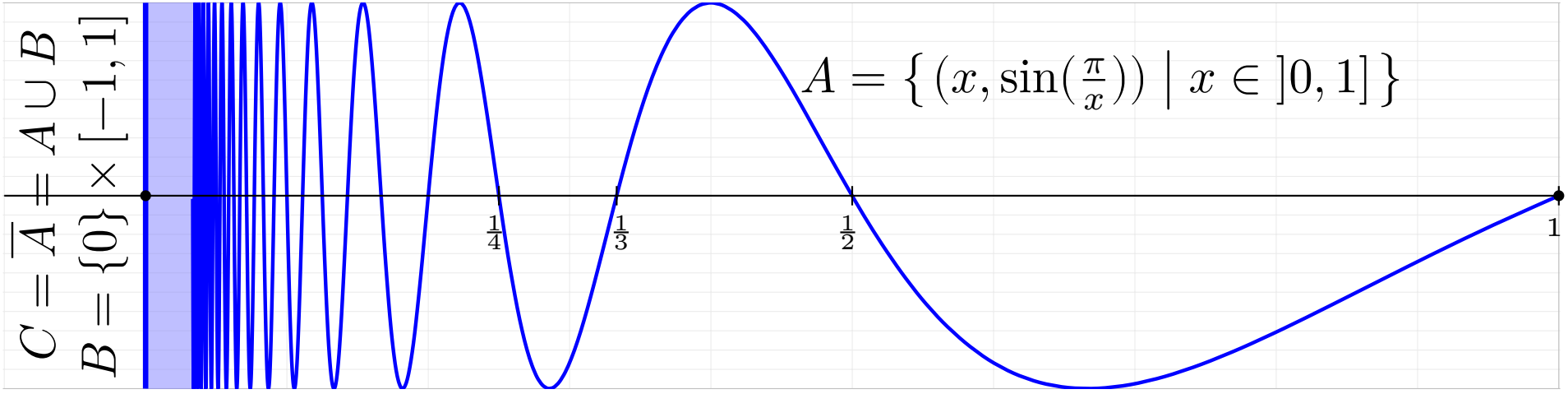
Beweis: Sei $f(X) = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung. Dann gilt $X = U \sqcup V$ mit $U = f^{-1}(A)$ und $V = f^{-1}(B)$. Ist X zusammenhängend, so folgt entweder $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$, also entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. QED

Alternativer Beweis: Ist $f(X)$ unzusammenhängend, so gibt es eine stetige Surjektion $g : f(X) \twoheadrightarrow \{0, 1\}$, somit auch $g \circ f : X \twoheadrightarrow \{0, 1\}$. QED

Beispiel: Ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ zusammenhängend? Nein!
Für $n = 1$ ist $\mathrm{GL}_1 \mathbb{R} = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ unzusammenhängend.
Für $n \geq 1$ ist $\det : \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\times$ stetig und surjektiv, $\mathrm{diag}(a, 1, \dots, 1) \mapsto a$.
Wir erhalten die offene Zerlegung in $\mathrm{GL}_n^{\pm} \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \gtrless 0 \}$.

☺ Noch feiner lässt sich $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ nicht zerlegen. Das bedeutet, die beiden Weg/Komponenten von $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ sind $\mathrm{GL}_n^{\pm} \mathbb{R}$, siehe G2N. Dazu müssen wir nur noch zeigen, dass $\mathrm{GL}_n^{\pm} \mathbb{R}$ weg/zusammenhängend ist.

Abschluss eines zusammenhängenden Teilraums



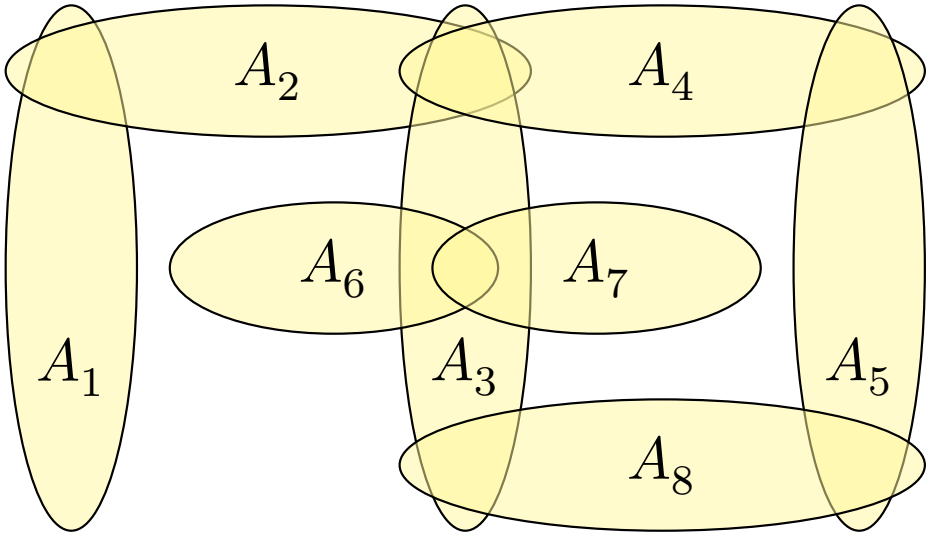
Sinuskurve des Topologen: Sind $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend?
Die Teilräume A, B sind stetige Bilder von Intervallen, also zshgd. Und C?

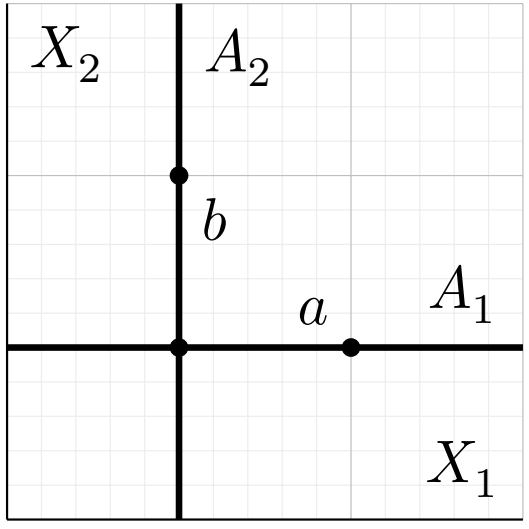
Lemma G1G: Der Abschluss erhält den Zusammenhang

In einem Raum X sei $A \subseteq Y \subseteq \overline{A}$. Ist A zusammenhängend, so auch Y.

Beweis: Sei $f : Y \to \{0,1\}$ stetig. Dann ist die Einschränkung $f|_A$ stetig und somit konstant, $f|_A = \mathrm{const}^c_A$, denn A ist zusammenhängend (G1A).
Die beiden stetigen Abbildungen f und const^c_Y stimmen auf A überein.
In Y ist A dicht, $\{0,1\}$ ist hausdorffsch, also $f = \mathrm{const}^c_Y$ (D5L). QED

Zusammenhängende Vereinigung





Lemma G11: zusammenhängende Vereinigung

Im Raum $(X, \mathcal{T})$ seien $(A_i)_{i\in I}$ mit $I \neq \emptyset$ zusammenhängende Teilräume. Zu jedem Indexpaar $i, j \in I$ existiere eine Kette $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$ mit $A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k} \neq \emptyset$ für $k = 1, \dots, n$. Dann ist $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ zusammenhängend.

Beweis: Sei $f : A \to \{0, 1\}$ stetig. Jede Einschränkung $f|_{A_i} : A_i \to \{0, 1\}$ ist stetig und somit konstant, $f|_{A_i} = c_i$, denn A_i ist zusammenhängend. Für jede Kette $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$ folgt $c_i = c_{i_0} = c_{i_1} = \cdots = c_{i_n} = c_j$.
Also ist f konstant. Das zeigt, dass A zusammenhängend ist. QED

Wie unzusammenhängend ist ein gegebener Raum?

Beispiel: Es gilt $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}\setminus\{t\}) = \{\mathbb{R}_{<t}, \mathbb{R}_{>t}\}$ und $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q}) = \{\{a\} \mid a\in\mathbb{Q}\}$.

Definition G1J: Zerlegung in Zusammenhangskomponenten

Zwei Punkte $a, b \in X$ heißen **zusammenhängend im Raum X**, wenn beide in einem zusammenhängenden Teilraum $C \subseteq X$ liegen.

Dank G1I ist dies eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse $\langle a\rangle_X$ von a in X heißt die **(Zusammenhangs-)Komponente** von a in X.

Dies zerlegt den Raum X in Komponenten, $\mathfrak{Z}(X) := \{\langle a\rangle_X \mid a\in X\}$.

Der Raum X ist zshgd gdw $\mathfrak{Z}(X) = \{X\}$, und unzshgd gdw $\sharp\mathfrak{Z}(X) \geq 2$. Für den leeren Raum $\emptyset$ gilt $\mathfrak{Z}(\emptyset) = \emptyset$; er ist weder zshdg noch unzshgd.

Beispiel: Für jeden diskreten Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ gilt $\mathfrak{Z}(X) = \{\{a\} \mid a\in X\}$.
Es gilt $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}\}$, $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}\setminus\{t\}) = \{\mathbb{R}_{<t}, \mathbb{R}_{>t}\}$ und $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q}) = \{\{a\} \mid a\in\mathbb{Q}\}$.

Obwohl $\mathbb{Q}$ nicht diskret ist, besteht jede Komponente $\langle a\rangle_{\mathbb{Q}} = \{a\}$ nur aus einem Punkt (G1C). Ein unzusammenhängender Raum X mit dieser Eigenschaft $\mathfrak{Z}(X) = \{\{a\} \mid a\in X\}$ heißt **total unzusammenhängend**.

Topologische Eigenschaften der Komponentenzerlegung

Satz G1κ: topologische Eigenschaften der Komponenten

1. Zu jedem Punkt $a \in X$ ist seine Komponente $\langle a \rangle_X$ der größte zshgde Teilraum von X, der a enthält.
2. Jede Komponente $\langle a \rangle_X$ ist abgeschlossen in X.
3. Ist $\mathfrak{Z}(X)$ (lokal-)endlich, so ist jede Komponente $\langle a \rangle_X$ offen.

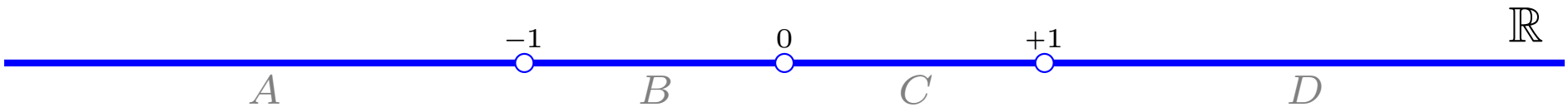
Letzteres bedeutet $X = \bigsqcup_{i \in I} \langle a_i \rangle_X$ mit der Summentopologie, wie etwa für $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Für $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ erhalten wir keine top. Summe.

Beweis: (1) Nach Definition G1J ist die Komponente $\langle a \rangle_X$ Vereinigung aller zshgden Teilräume $C \subseteq X$ mit $a \in C$, nach Lemma G1I also zshgd.

(2) Dank (1) und Lemma G1G ist $\overline{\langle a \rangle_X} \ni a$ zshgd, also $\overline{\langle a \rangle_X} \subseteq \langle a \rangle_X$.

(3) Das Komplement $\bigsqcup_{j \neq i} \langle a_j \rangle_X$ ist (lokal-)endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen, also abgeschlossen (D5G). QED

Zusammenhang in Summenräumen



Beispiel: Berechnen Sie $\mathfrak{Z}$ für den Raum $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. **Lösung:**
$\mathfrak{Z}(X) = \{\ \ A =]-\infty, -1[,\ \ B =]-1, 0[,\ \ C =]0, +1[,\ \ D =]+1, +\infty[\ \ \}$
Wir haben die offene Zerlegung $X = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$. Hier sind A, B, C, D zshgd, da nicht-leere reelle Intervalle (G1A, G1D). Allgemein gilt hierzu:

Satz G1L: Zusammenhang in einem Summenraum

(1) Im Summenraum $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ gilt $\langle a \rangle_X = \langle a \rangle_{X_i}$ für $a \in X_i$.

(2) Für die Zerlegung in Komponenten folgt $\mathfrak{Z}(\bigsqcup_{i \in I} X_i) = \bigsqcup_{i \in I} \mathfrak{Z}(X_i)$.

Beweis: (1) „$\supseteq$“: Der Teilraum $\langle a \rangle_{X_i}$ ist zshgd, also enthalten in $\langle a \rangle_X$.
„$\subseteq$“: Wir haben die offene Zerlegung $X = X_i \sqcup X_i'$ mit $X_i' = \bigcup_{j \neq i} X_j$.
Zu $C = \langle a \rangle_X$ erhalten wir die offene Zerlegung $C = (C \cap X_i) \sqcup (C \cap X_i')$.
Aus $a \in C \cap X_i$ folgt $C \cap X_i' = \emptyset$, also $C \subseteq X_i$, somit $\langle a \rangle_X \subseteq \langle a \rangle_{X_i}$.

Zusammenhang in Summenräumen

(2) Für die Komponenten des Summenraums $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}(X) &\overset{\text{Def}}{=} \{\langle a\rangle_X \,|\, a \in X\}\\ &\overset{(0)}{=} \bigcup_{i\in I}\{\langle a\rangle_X \,|\, a \in X_i\}\\ &\overset{(1)}{=} \bigcup_{i\in I}\{\langle a\rangle_{X_i} \,|\, a \in X_i\} \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{i\in I}\mathfrak{Z}(X_i)\end{aligned}$$

Hierbei gilt (0) für jede Vereinigung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, doch (1) erst für den Summenraum $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$. Die letzte Vereinigung ist disjunkt. QED

☺ Diese Summenregel ist sehr einfach und intuitiv und oft praktisch. Für diesen Satz ist wesentlich, dass die Zerlegung $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ *offen* ist.

Einfaches Gegenbeispiel: Für die disjunkte Zerlegung $X = [0,2] = A \sqcup B$ in die zusammenhängenden Mengen $A = [0,1[$ und $B = [1,2]$ gilt nicht etwa $\mathfrak{Z}(X) = \{A, B\}$, sondern schlicht $\mathfrak{Z}(X) = \{X\}$.

Raffinierter: Für die Sinuskurve des Topologen $C = \overline{A} = A \sqcup B$ sind A und B zshgd, aber es gilt nicht $\mathfrak{Z}(C) = \{A, B\}$, sondern $\mathfrak{Z}(C) = \{C\}$.

Zusammenhang in Produkträumen

Satz G1M: Zusammenhang eines Produktraums

(1) Genau dann ist $X = \prod_{i\in I} X_i$ zusammenhängend, wenn alle X_i es sind.

(2) Also $\langle a\rangle_X = \prod_{i\in I}\langle a_i\rangle_{X_i}$ und $\mathfrak{Z}(\prod_{i\in I} X_i) = \{\prod_{i\in I} A_i \,|\, A_i \in \mathfrak{Z}(X_i)\}$.

Beweis: (1) „⇒“: Ist X zusammenhängend, so auch $X_i = p_i(X)$ dank G1E.

„⇐“: (a) Sei I endlich, etwa $I = \{1,\dots,n\}$, also $X = X_1 \times\cdots\times X_n$.
Zu $a, b \in X$ ist $A_i := \{b_1\}\times\cdots\times\{b_{i-1}\}\times X_i\times\{a_{i+1}\}\times\cdots\times\{a_n\} \cong X_i$.
Es gilt $a \in A_1$ und $b \in A_n$ sowie $A_i \cap A_{i+1} \ni (b_1,\dots,b_i,a_{i+1},\dots,a_n)$.
Dank Lemma G1I ist $A := A_1 \cup\cdots\cup A_n$ zusammenhängend.

(b) Sei I unendlich und $a \in X$. Zu $J \subseteq I$ endlich sei $A_i = X_i$ für $i \in J$ und $A_i = \{a_i\}$ für $i \in I\setminus J$. Dann ist $A_J := \prod_{i\in I} A_i \cong \prod_{i\in J} X_i$ zshgd.
Auch $A := \bigcup\{A_J \,|\, J \subseteq I \text{ endlich}\}$ ist zshgd dank G1I, denn $a \in A_J$ für alle J. Somit ist auch der Abschluss $\overline{A} = X$ zshgd dank G1G.

Zusammenhang in Produkträumen

☺ Für endliche Produkte ist der Beweis intuitiv und naheliegend.
Die obige Skizze zu Lemma G1I illustriert den Fall $X = X_1 \times X_2$.
Für I endlich, etwa $I = \{1, \dots, n\}$, folgt die Aussage per Induktion.
Für unendliche Produkte ist der Abschluss der entscheidende Kniff!

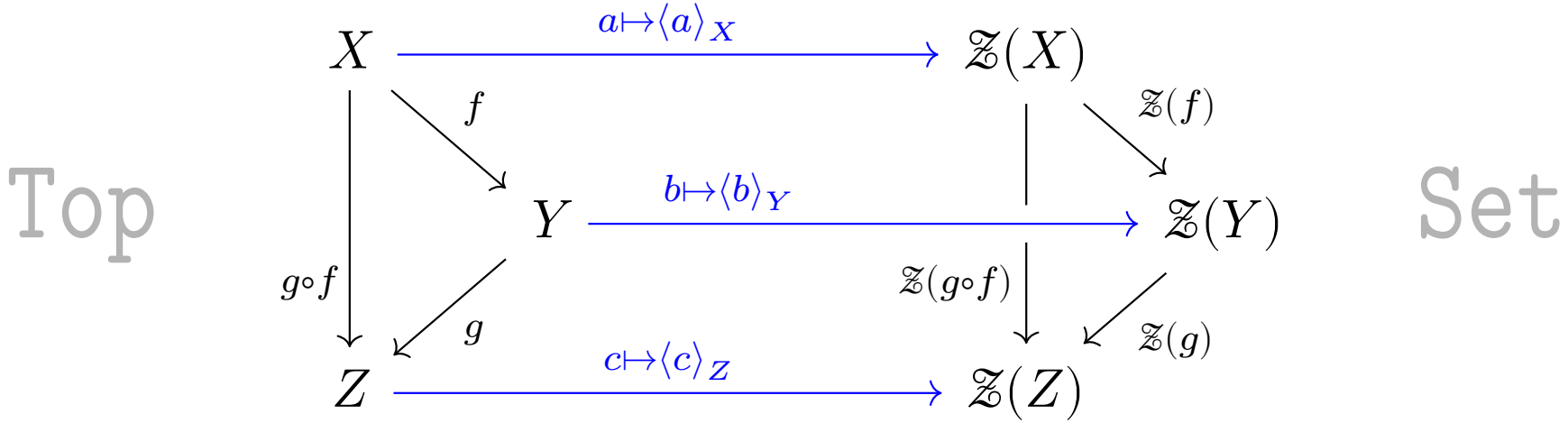
Aufgabe: Zeigen Sie die letzte Aussage $\overline{A} = X$. Folgern Sie Aussage (2).

Lösung: In $X = \prod_{i \in I} X_i$ zeigen wir $\overline{A} = X$ in der Produkttopologie.
Jede offene Menge $\emptyset \neq U \subseteq X$ enthält $\prod_{i \in I} U_i$ mit $\emptyset \neq U_i \subseteq X_i$ offen und $U_i = X_i$ für alle Indizes $i \in I \setminus J$ außerhalb einer endlichen Menge $J \subseteq I$.
Demnach gilt $U \cap A \supseteq U \cap A_J \neq \emptyset$. Somit ist A dicht in X, kurz $\overline{A} = X$.

(2) Für jeden Punkt $a \in X$ gilt die Inklusion $\langle a \rangle_X \supseteq \prod_{i \in I} \langle a_i \rangle_{X_i}$,
denn dieses Produkt enthält den Punkt a und ist zshgd dank (1).

Umgekehrt gilt $\langle a \rangle_X \subseteq \prod_{i \in I} \langle a_i \rangle_{X_i}$, denn das stetige Bild $p_i(\langle a \rangle_X)$ ist zshgd (G1E) und enthält a_i, also $p_i(\langle a \rangle_X) \subseteq \langle a_i \rangle_{X_i}$ für alle $i \in I$. QED

Funktorialität der Komponentenzerlegung



Satz G1N: Funktorialität der Komponentenzerlegung

Die Zuordnung $X \mapsto \mathfrak{Z}(X)$ hat folgende schöne Eigenschaften:

1. Ist $f : X \to Y$ stetig und $a \in X$, so gilt $f(\langle a \rangle_X) \subseteq \langle f(a) \rangle_Y$.
2. Somit ist $\mathfrak{Z}(f) : \mathfrak{Z}(X) \to \mathfrak{Z}(Y) : \langle a \rangle_X \mapsto \langle f(a) \rangle_Y$ wohldefiniert.
3. Es gilt $\mathfrak{Z}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathfrak{Z}(X)}$ und $\mathfrak{Z}(g \circ f) = \mathfrak{Z}(g) \circ \mathfrak{Z}(f)$.

Jeder Homöomorphismus $(f, g) : X \cong Y$ topologischer Räume induziert eine Bijektion $(\mathfrak{Z}(f), \mathfrak{Z}(g)) : \mathfrak{Z}(X) \cong \mathfrak{Z}(Y)$ der Komponenten.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgsam nach!

Funktorialität der Komponentenzerlegung

Lösung: (1) Die Komponente $\langle a \rangle_X$ ist zusammenhängend dank G1K, demnach auch ihr stetiges Bild $f(\langle a \rangle_X)$ im Zielraum Y dank G1E. Dieses enthält $f(a)$, also gilt $f(\langle a \rangle_X) \subseteq \langle f(a) \rangle_Y$ dank G1K.

(2) Die Vergröberung von $a \mapsto f(a)$ zu $\langle a \rangle_X \mapsto \langle f(a) \rangle_Y$ ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von dem willkürlich gewählten Repräsentanten a: Aus $\langle a \rangle_X = \langle b \rangle_X$ folgt $f(\langle a \rangle_X) = f(\langle b \rangle_X)$, also $\langle f(a) \rangle_Y = \langle f(b) \rangle_Y$.

(3) Die Aussage $\mathfrak{Z}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathfrak{Z}(X)}$ ist klar:

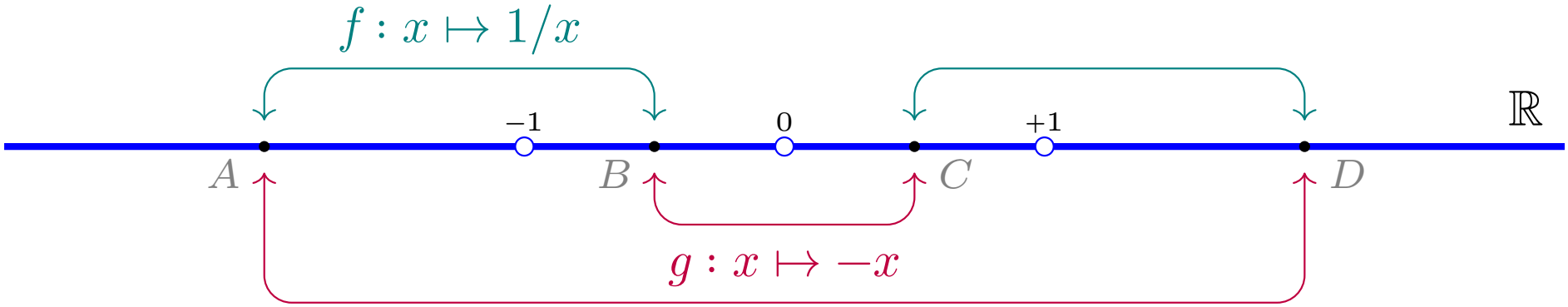
$$\mathfrak{Z}(\mathrm{id}_X)(\langle a \rangle_X) \overset{\text{Def}}{=} \langle \mathrm{id}_X(a) \rangle_X \overset{\text{Def}}{=} \langle a \rangle_X$$

Für die Komposition von $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gilt:

$$\mathfrak{Z}(g \circ f)(\langle a \rangle_X) \overset{\text{Def}}{=} \langle (g \circ f)(a) \rangle_Z \overset{\text{Def}}{=} \langle g(f(a)) \rangle_Z \overset{\text{Def}}{=} \mathfrak{Z}(g)(\langle f(a) \rangle_Y)$$
$$\overset{\text{Def}}{=} \mathfrak{Z}(g)(\mathfrak{Z}(f)(\langle a \rangle_X)) \overset{\text{Def}}{=} (\mathfrak{Z}(g) \circ \mathfrak{Z}(f))(\langle a \rangle_X)$$

Das zeigt $\mathfrak{Z}(g \circ f) = \mathfrak{Z}(g) \circ \mathfrak{Z}(f) : \mathfrak{Z}(X) \to \mathfrak{Z}(Z)$. QED

Funktorialität der Komponentenzerlegung



Aufgabe: Berechnen Sie $\mathfrak{Z}$ für $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ und $f, g, h, k : X \to X$ mit $f(x) = 1/x$ und $g(x) = -x$ und $h(x) = x^2$ und $k(x) = x^3$.

Lösung: Der Raum $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ zerfällt in die vier Komponenten $A =]-\infty, -1[$, $B =]-1, 0[$, $C =]0, +1[$, $D =]+1, +\infty[$. Wir haben also:

$\mathfrak{Z}(X)$	A	B	C	D
$\mathfrak{Z}(f)$	B	A	D	C
$\mathfrak{Z}(g)$	D	C	B	A
$\mathfrak{Z}(h)$	D	C	C	D
$\mathfrak{Z}(k)$	A	B	C	D

Funktorialität der Komponentenzerlegung

Ausführlich: Wie finden wir die Zerlegung $\mathfrak{Z}(X)$ in Komponenten?

Wir haben die offene Zerlegung $X = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$. Hier sind A, B, C, D zusammenhängend, da nicht-leere reelle Intervalle (siehe G1A, G1D). Dank G1L gilt $\mathfrak{Z}(X) = \mathfrak{Z}(A) \sqcup \mathfrak{Z}(B) \sqcup \mathfrak{Z}(C) \sqcup \mathfrak{Z}(D) = \{A, B, C, D\}$.

Wie finden wir $\mathfrak{Z}(f)$? Wir nutzen einfach die Definition aus Satz G1N!

Für $f : X \to X : x \mapsto 1/x$ gilt $\mathfrak{Z}(f) : A \mapsto B,\ B \mapsto A,\ C \mapsto D,\ D \mapsto C$. Warum? Wir wählen dazu irgendeinen Repräsentanten $a \in A$, etwa $a = 2$ und finden $f(a) = 1/2 \in B$. Damit gilt $\mathfrak{Z}(f) : A \mapsto B$. Ebenso finden wir $B \mapsto A$ und $C \mapsto D$ und $D \mapsto C$. Die Berechnung ist unabhängig vom willkürlich gewählten Repräsentanten, also wohldefiniert!

Es gilt $f \circ f = \mathrm{id}_X$, also $\mathfrak{Z}(f) \circ \mathfrak{Z}(f) = \mathrm{id}_{\mathfrak{Z}(X)}$. Weitere Beispiele:
Für $g : X \to X : x \mapsto -x$ gilt $\mathfrak{Z}(g) : A \mapsto D,\ B \mapsto C,\ C \mapsto B,\ D \mapsto A$.
Für $h : X \to X : x \mapsto x^2$ gilt $\mathfrak{Z}(h) : A \mapsto D,\ B \mapsto C,\ C \mapsto C,\ D \mapsto D$.

Übung: Berechnen Sie $\mathfrak{Z}$ zu $X = \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$ und $f : X \to X : a \mapsto a/3$.

Wege in einem topologischen Raum

Definition G2A: Wegzusammenhang

Ein **Weg** in einem Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$.
Dabei heißt $a = \gamma(0)$ der *Startpunkt* und $b = \gamma(1)$ der *Zielpunkt* von γ.
Wir sagen, γ *läuft von* a *nach* b *in* X, oder γ *verbindet* a *mit* b *in* X.

Wir nennen X **wegzusammenhängend**, falls $X \neq \emptyset$ gilt und zu jedem Paar $a, b \in X$ ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$ existiert.

Proposition G2B: erste einfache aber wichtige Beispiele

(0) Weg/Zusammenhang ist invariant unter Homöomorphismen.
(1) Jeder topologische $\mathbb{R}$–Vektorraum V, etwa $V = \mathbb{R}^n$, ist wegzshgd.
(2) Jede bezüglich x_0 sternförmige Menge $X \subseteq V$ ist wegzshgd (F6F).
(3) Für $\dim V \geq 2$ ist $V \setminus \{0\}$ wegzshgd (G2O), nicht jedoch für $\dim V = 1$.
(4) Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist wegzshgd für $n \geq 1$, nicht jedoch $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$.

Übung: Beweisen Sie dies durch Konstruktion geeigneter Wege.

Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang.

Lösung: Zum Aufwärmen als Fingerübung empfohlen! Für (0) siehe G2G.
Für (1) genügt ein Geradenstück, für (2) zwei Geradenstücke und G2F.
Für (3) siehe G2O. Für (4) genügt $n = 1$ und Polarkoordinaten.

Wir haben zwei Zusammenhangsbegriffe in unserem Werkzeugkasten und nutzen effizient ihr Zusammenspiel:

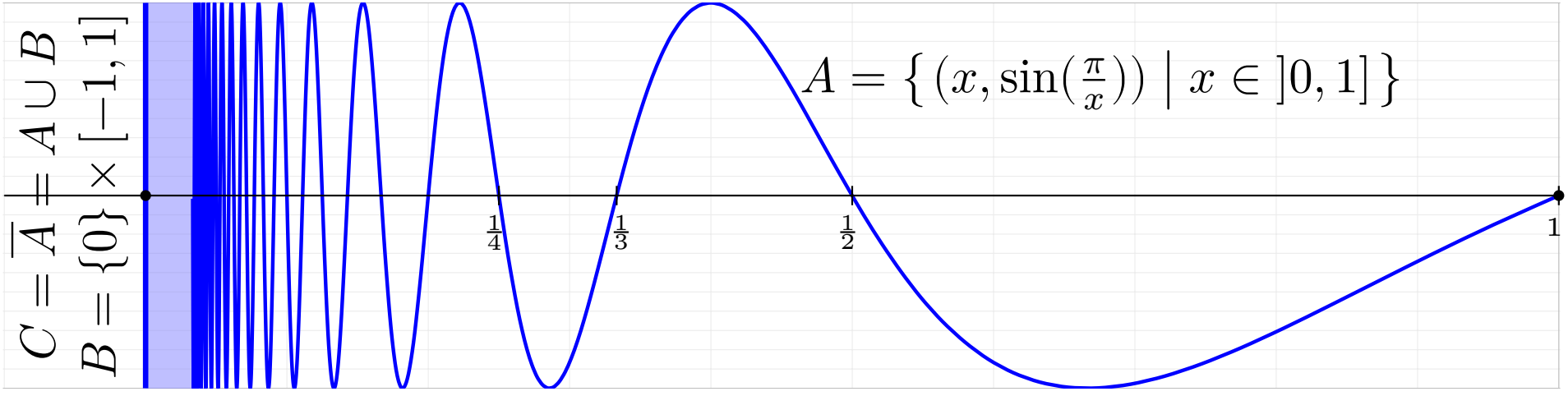
Satz G2c: logischer Zusammenhang der Zusammenhangsbegriffe

Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang, aber nicht umgekehrt.

Beweis: Sei X wegzshgd und $X = A \sqcup B$ eine offene Zerlegung.
Zu $a \in A$ und $b \in B$ existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von a nach b.
Die offene Zerlegung $[0,1] = \gamma^{-1}(A) \sqcup \gamma^{-1}(B)$ mit $0 \in \gamma^{-1}(A)$ und $1 \in \gamma^{-1}(B)$ widerspricht G1A. Also gilt entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. QED

⚠ Die Umkehrung gilt nicht! Sehen Sie ein Gegenbeispiel?
Wie überall lohnt sich auch hier ein großes Beispielrepertoire…

Die Sinuskurve des Topologen



Sinuskurve des Topologen: C ist zshgd, aber nicht wegzshgd! (G2L)
Es gibt keinen Weg $\gamma : [0,1] \to C$ von $\gamma(0) = (1,0)$ nach $\gamma(1) = (0,0)$.
Das scheint anschaulich plausibel: Jeder Versuch müsste unendlich vielen Oszillationen folgen und kann daher stetig (!) niemals B erreichen.

Eine präzise Ausführung erweist sich als knifflig… und daher lehrreich!
Sei $s := \inf\{\, t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in B \,\}$ und $b := \gamma(s)$. Zu $\varepsilon = 1$ existiert $r \in [0, s[$ mit $\gamma([r,s]) \subseteq B(b,\varepsilon) =: U$. Die Projektion $\mathrm{pr}_1 U \subseteq \mathbb{R}$ zerfällt in unendlich viele Intervalle nahe $\{0\}$. In U verbindet der Weg $\gamma|_{[r,s]}$ somit $\gamma(r) \in A$ und $\gamma(s) \in B$ in *verschiedenen* Komponenten. Widerspruch!

Die Sinuskurve des Topologen

Konkret ausgeführt: Für $U = C \cap (\mathbb{R} \times]-2, +1[)$ besteht $\mathrm{pr}_1 U \subseteq \mathbb{R}$ aus $[0, 1]$ ohne die Maximalstellen $x \in]0, 1]$ mit $\sin(\pi/x) = +1$. Explizit also:

$$\mathrm{pr}_1 U = [0, 1] \setminus \{\, 2/(1 + 4k) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$$

Im Falle $b \in U$ existiert $r \in [0, s[$ mit $\gamma([r, s]) \subseteq U$. Der projizierte Weg $\alpha := \mathrm{pr}_1 \circ \gamma|_{[r,s]} : [r, s] \to \mathrm{pr}_1 U$ verbindet $\alpha(r) > 0$ mit $\alpha(s) = 0$ in U
Das widerspricht dem Zwischenwertsatz!

Für $V = C \cap (\mathbb{R} \times]-1, +2[)$ besteht $\mathrm{pr}_1 V \subseteq \mathbb{R}$ aus $[0, 1]$ ohne die Minimalstellen $x \in]0, 1]$ mit $\sin(\pi/x) = -1$. Explizit also:

$$\mathrm{pr}_1 V = [0, 1] \setminus \{\, 2/(3 + 4k) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$$

Im Falle $b \in V$ existiert $r \in [0, s[$ mit $\gamma([r, s]) \subseteq V$. Der projizierte Weg $\alpha := \mathrm{pr}_1 \circ \gamma|_{[r,s]} : [r, s] \to \mathrm{pr}_1 V$ verbindet $\alpha(r) > 0$ mit $\alpha(s) = 0$.
Das widerspricht dem Zwischenwertsatz!

🙂 Sie sehen hier exemplarisch, wie nützlich die Funktorialität ist, um stetige Abbildungen geschickt zur Berechnung einzusetzen.

Was bedeutet „Dimension“?

Wann sind $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$ isomorph, also $(f,g):\mathbb{R}^p\cong\mathbb{R}^q$? Wann existiert $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ surjektiv? injektiv? Das hängt von der Struktur ab!

1. Linear, in $\mathtt{Lin}_{\mathbb{R}}$, vermöge eines $\mathbb{R}$–Vektorraumisomorphismus?
2. Differenzierbar, in $\mathscr{C}^1$, vermöge eines Diffeomorphismus?
3. Topologisch, in $\mathtt{Top}$, vermöge eines Homöomorphismus?
4. Als bloße Mengen, in $\mathtt{Set}$, vermöge einer Bijektion?

(1) Gauß–Algorithmus, Basis-Auswahl-und-Ergänzung sowie Steinitz' Austauschsatz begründen den Begriff der *(linearen) Dimension*: Über jedem Körper $\mathbb{K}$ sind die $\mathbb{K}$–Vektorräume $\mathbb{K}^p$ und $\mathbb{K}^q$ isomorph gdw $p=q$.

Der Rangsatz für lineare Abbildungen $f:\mathbb{K}^p\to\mathbb{K}^q$ garantiert noch mehr: Genau dann existiert f surjektiv / injektiv, wenn $p\geq q$ bzw. $p\leq q$ gilt.

Wiederholung: Formulieren und beweisen Sie diese fundamentalen Sätze. Gelten Sie über jedem Körper? DRing? CRing? sogar über jedem Ring? Äquivalent: Ist jede invertierbare Matrix zwangsläufig quadratisch? Überraschung: Über $R=\mathrm{End}_K(K[X])$ gilt $R^p\cong R^q$ für $p,q\geq 1$.

Gegenbeispiel: $R^p \cong R^q$ über $R = \mathrm{End}_K(K[X])$

Ein gut vestandenes Beispiel ist mehr wert
als drei schlecht verstandene Theoreme.

Sei K ein Körper, etwa $\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$, und hierüber $V = K^{(\mathbb{N})} = K[X]$ der Vektorraum der Folgen $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ mit endlichem Träger.

(a) Im Ring $R = (\mathrm{End}_K(V), +, \circ)$ seien $a, b, c, d : V \to V$ gegeben durch

$$a(x) = (x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \dots), \qquad c(x) = (x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, \dots),$$
$$b(x) = (0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots), \qquad d(x) = (x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots).$$

Dies zerlegt jedes Polynom $P \in K[X]$ in seinen geraden und ungeraden Anteil, $(c, d) : P \mapsto (P_0, P_1)$ mit $P = P_0(X^2) + XP_1(X^2)$. Reißverschluss:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cb \\ da & db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd = 1.$$

(b) Die Matrizen $\left[\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} a & b \end{smallmatrix}\right]$ stiften einen Isomorphismus $R^1 \cong R^2$.
(c) Per Induktion folgt $R^1 \cong R^n$ und somit $R^p \cong R^q$ für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Was bedeutet „Dimension“?

(2) Unter welcher Bedingung sind $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$ diffeomorph? Nun stehen wesentlich mehr Abbildungen als mögliche Kandidatinnen zur Auswahl. Dennoch gelingt auch Diffeomorphismen nur für $p = q$. Wie können Sie das beweisen? Die Differentialrechnung nutzt die Lineare Algebra!

Das Wechselspiel von differenzierbaren und linearen Abbildungen ist das genial-einfache Erfolgsrezept der Differentialrechnung: Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^p \supseteq U \to \mathbb{R}^q$ im Punkt a diff'bar, so haben wir als Ableitung in a die lineare Abbildung $D_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Bei Komposition gilt die Kettenregel. So nutzt man ganz bequem und selbstverständlich die obigen Ergebnisse der Linearen Algebra. **Aufgabe:** Führen Sie dies sorgsam aus! **Lösung:**

Sei $(F, G) : U \cong V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$, also stetig diff'bar mit $G \circ F = \mathrm{id}_U$ und $F \circ G = \mathrm{id}_V$. Sei $a \in U$ und $b = F(a) \in V$. Die Ableitungen $f = D_a F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ und $g = D_b G : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ sind linear und erfüllen $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^q}$. Dank (1) folgt $p = q$. Stärker noch gilt der Umkehrsatz und der Rangsatz: Lokale Koordinaten machen „stetig diff'bar“ und „linear“ äquivalent.

Was bedeutet „Dimension“?

(4) Als Warnung: Für Mengen ohne weitere Struktur sieht die Situation ganz anders aus! Für jedes Paar $p, q \geq 1$ existieren Bijektionspaare $(f, g) : \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^q$: Beide Mengen sind gleichmächtig, enthalten also gleichviele Elemente. Zur Erinnerung und Wiederholung:

Satz B2N: Mächtigkeit von $\mathbb{R}$

(1) Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, genauer gilt $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
(2) Somit ist $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}^d$ für $d \geq 2$ und zu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\}$.
(3) Strikt mächtiger sind hingegen $\mathfrak{P}(\mathbb{R}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\}$.

Entgegen unserer vagen Intuition ist für $1 \leq p < q$ die Menge $\mathbb{R}^q$ also keineswegs größer als $\mathbb{R}^p$. Den Unterschied macht nicht die „Größe“ der Menge, sondern allein die zusätzliche Struktur darauf: zunächst linear als Vektorraum, dann differenzierbar wie oben gesehen.

Es bleibt die Frage: Was gilt topologisch?

Was bedeutet „Dimension“ topologisch?

(3) Das bringt uns schließlich zu stetigen Abbildungen: Unter welcher Bedingung sind $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$ homöomorph? Sie vermuten richtig, auch das gelingt nur für $p = q$. Doch wie beweist man eine so schwindelerregend allgemeine Aussage? Stetige Abbildungen können sehr irregulär sein!

⚠ Erstaunlich: Es gibt stetige Surjektionen $\mathbb{R}^p \twoheadrightarrow \mathbb{R}^q$ für $1 \leq p < q$. Warum sollte es also nicht auch stetige Bijektionen $\mathbb{R}^p \rightleftarrows \mathbb{R}^q$ geben? Allgemeiner gefragt: Wenn eine stetige Abbildung $\mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^q$ (zumindest lokal) injektiv ist, folgt dann bereits $p \leq q$? Für jeden Homöomorphismus $\mathbb{R}^p \rightleftarrows \mathbb{R}^q$ folgt dann sowohl $p \leq q$ als auch $q \leq p$, also $p = q$ wie vermutet.

☹ Die so überaus nützliche Lineare Algebra und Differentialrechnung stehen uns hier nicht mehr zur Verfügung, da wir sie auf lediglich stetige Funktionen gar nicht erst anwenden können: Es gibt stetige Funktionen, die nirgends differenzierbar sind. Spätestens hier spüren wir, wie leicht die Dimensionsfrage in der Linearen Algebra und der Analysis doch ist (zumindest rückblickend, damals empfanden Sie es vielleicht schwer).

Was bedeutet „Dimension“ topologisch?

Das erhoffte Ergebnis gilt tatsächlich und lautet ganz allgemein:

Satz J7c: topologische Invarianz der Dimension, Brouwer 1911

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$ offen und nicht-leer.
Wenn eine stetige Injektion $U \hookrightarrow V$ existiert, dann gilt $p \leq q$.
Wenn ein Homöomorphismus $(f, g) : U \cong V$ existiert, dann gilt $p = q$.

Für diese topologische Frage benötigen wir raffiniertere Werkzeuge!
Dies gelingt uns in Kapitel J mit Hilfe des Abbildungsgrades.

Die *topologische Invarianz der Dimension* wurde erstmals 1911 von Brouwer bewiesen. Vor 1911 war der Satz ein berühmtes Problem, das als sehr beunruhigend empfunden wurde. Sie ahnen jetzt vielleicht warum.

🙂 Unsere geometrische Anschauung und stille Hoffnung ist gerettet!
Erst dieser fundamentale Satz ermöglicht uns, die Dimension einer (topologischen) Mannigfaltigkeit zu definieren. Das ist unverzichtbare Grundlage, schon für die Definition und Klassifikation von Flächen.

Sind die Räume $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$ für $p \neq q$ homöomorph?

☺ In kleiner Dimension verfügen wir bereits über genügend Werkzeuge:

Satz G2D: topologische Invarianz der Dimension 1

Es existiert kein Homöomorphismus $(f, g) : \mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$.

Beweis: Andernfalls wären die Räume $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ homöomorph vermöge $(f|_X^Y, g|_Y^X) : X \cong Y$. Das widerspricht G2B. QED

Übung: Für $n \geq 2$ existieren stetige Surjektionen $\mathbb{R}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$, aber keine stetigen Injektionen $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^1$. Zeigen Sie die folgende Verschärfung:

Satz G2D: topologische Invarianz der Dimension 1

Sei $n \geq 2$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht-leer.
Dann existiert keine stetige Injektion $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^1$.

Lösung: Dank $n \geq 2$ existiert eine stetige Injektion $g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow U$. Explizit: Zu $a \in U$ existiert $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a, 2r) \subseteq U$. Wir wählen $g(s) = (rs, 0)$. Komposition ergäbe $f \circ g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^1$, im Widerspruch zu E2K. QED

Sind die Räume $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$ für $p \neq q$ homöomorph?

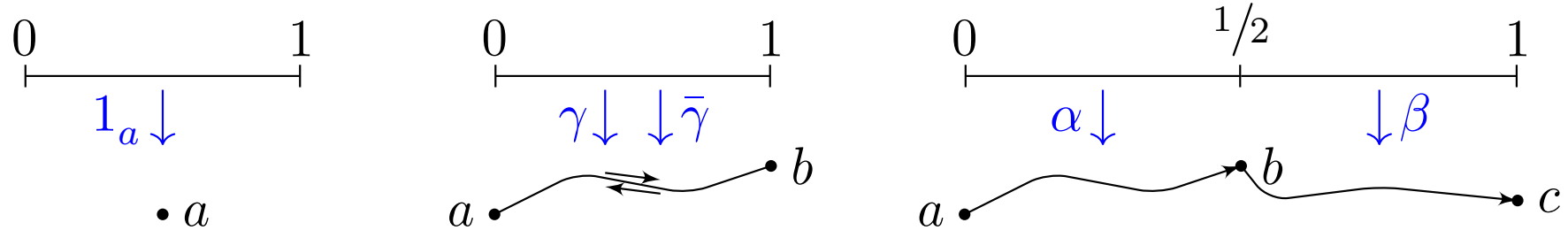
Wie definieren wir „Dimension“ und wie verhält sie sich?
Die vier Eingangsfragen erweisen sich als erstaunlich vielfältig!
Sie sind ein wunderschönes Beispiel für Querverbindungen innerhalb Ihres Mathematikstudiums. Das ist gut und richtig, so soll es sein.

Der Dimensionsbegriff ist nur scheinbar „offensichtlich“. Schon in der Linearen Algebra müssen wir dazu ernsthaft arbeiten, ebenso in Analysis und Topologie und Mengenlehre. Vermutlich kann man das erst im Rückblick würdigen, jedenfalls kann man dabei viel Schönes lernen!

Der Rangsatz für lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ über $\mathbb{R}$ garantiert:
Genau dann existiert f surjektiv / injektiv, wenn $p \geq q$ bzw. $p \leq q$ gilt.
Genau dann existiert ein linearer Isomorphismus, wenn $p = q$ gilt.

Topologisch gilt die entsprechende Aussage nicht mehr für stetige Surjektionen, aber glücklicherweise immer noch für stetige Injektionen, und somit insbesondere für Homöomorphismen.

Operationen auf Wegen



Definition G2F: Operationen auf Wegen

Die Menge aller Wege von a nach b im Raum X bezeichnen wir mit:

$$P(X,a,b) := \{\gamma : [0,1] \to X \text{ stetig} \,|\, \gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b\}$$

(1) Der **konstante Weg** $1_a \in P(X,a,a)$ ist $1_a : t \mapsto a$.
(2) Die **Wegumkehr** $^- : P(X,a,b) \to P(X,b,a)$ ist $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$.
(3) Die **Aneinanderhängung** $* : P(X,a,b) \times P(X,b,c) \to P(X,a,c)$ ist

$$\alpha * \beta : [0,1] \to X : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Die Abbildung $\alpha * \beta$ ist wohldefiniert dank $\alpha(1) = \beta(0) = b$ und stetig dank Verklebesatz E1P, denn $[0, 1/2]$ und $[1/2, 1]$ sind abgeschlossen.

Zerlegung in Wegkomponenten

Definition G2F: Verbindbarkeit und Wegkomponenten

Wir nennen zwei Punkte $a, b \in X$ **verbindbar** in X, falls $P(X, a, b) \neq \emptyset$. Dank obiger Konstruktionen (1–3) ist dies eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzklasse $[a]_X$ des Punktes a im Raum X nennen wir die **Weg(zusammenhangs)komponente** von a im Raum X. Dies definiert die Zerlegung $\pi_0(X) := \{\, [a]_X \mid a \in X \,\}$ von X in seine Wegkomponenten.

Genau dann ist X wegzusammenhängend, wenn $\pi_0(X) = \{X\}$ gilt.
Die Wegkomponente $[a]_X$ des Punktes a im Raum X ist der größte wegzusammenhängende Teilraum von X, der a enthält (analog zu G1K).

Beispiele: Jeder Punkt $t \in \mathbb{R}$ trennt $\mathbb{R}$ gemäß $\pi_0(\mathbb{R} \setminus \{t\}) = \{\, \mathbb{R}_{<t}, \mathbb{R}_{>t} \,\}$.
Für $n \geq 2$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist $X = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ wegzshgd, also $\pi_0(X) = \{X\}$.

Es gilt $\pi_0(\mathbb{Z}) = \{\, \{z\} \mid z \in \mathbb{Z} \,\}$ und $\pi_0(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \{\,]k, k+1[\mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ sowie $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q}) = \pi_0(\mathbb{Q}) = \{\, \{x\} \mid x \in \mathbb{Q} \,\}$: Der Raum $\mathbb{Q}$ ist total (weg)unzshgd.

Für die Sinuskurve des Topologen $C = \overline{A} = A \cup B$ gilt $\mathfrak{Z}(C) = \{C\}$, aber $\pi_0(C) = \{A, B\}$. Die Zerlegung $\pi_0(X)$ ist echt feiner als $\mathfrak{Z}(X)$.

Stetiges Bild eines wegzusammenhängenden Raumes

Satz G2G: Stetige Surjektionen erhalten den Wegzusammenhang.

Sei $f : X \to Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so auch das Bild $f(X)$.

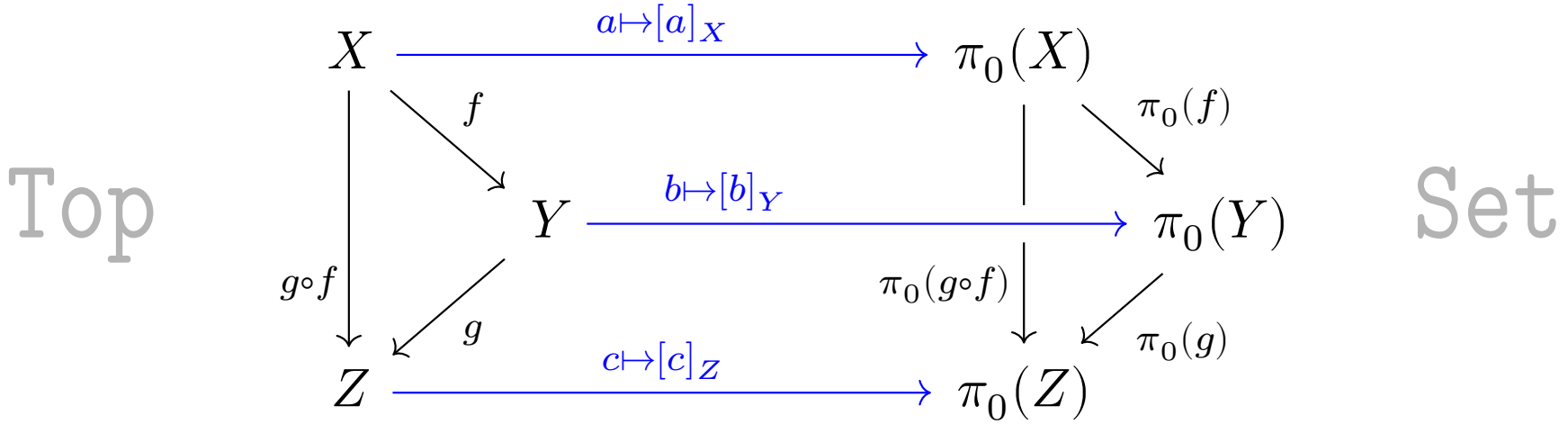
Beweis: Zu $a, b \in f(X)$ existieren $x, y \in X$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$ und hierzu ein Weg $\gamma \in P(X, x, y)$. Wir erhalten $f \circ \gamma \in P(Y, a, b)$. QED

Beispiel: Ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ wegzusammenhängend? Nein!
Für $n = 1$ ist $\mathrm{GL}_1 \mathbb{R} = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ nicht wegzusammenhängend.
Für $n \geq 1$ ist $\det : \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\times$ stetig und surjektiv, $\mathrm{diag}(a, 1, \ldots, 1) \mapsto a$.

Explizit: In der Gruppe $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ gibt es keinen Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ von der Identität $I = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ zur Spiegelung $S = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$: Dann wäre nämlich $\det \gamma(0) = +1$ und $\det \gamma(1) = -1$, also nach ZWS $\det \gamma(t) = 0$ für ein $t \in [0, 1]$. Die Matrix $\gamma(t)$ wäre nicht invertierbar!

☺ In G2N zeigen wir $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_n^- \mathbb{R}, \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}\}$: In der offenen Zerlegung $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^- \mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}$ sind beide Summanden wegzsgd.

Funktorialität der Wegkomponentenzerlegung



Satz G2H: Funktorialität der Wegkomponentenzerlegung

Die Zuordnung $X \mapsto \pi_0(X)$ hat folgende schöne Eigenschaften:

1. Ist $f : X \to Y$ stetig und $a \in X$, so gilt $f([a]_X) \subseteq [f(a)]_Y$.
2. Somit ist $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y) : [a]_X \mapsto [f(a)]_Y$ wohldefiniert.
3. Es gilt $\pi_0(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}$ und $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$.

Jeder Homöomorphismus $(f, g) : X \cong Y$ topologischer Räume induziert eine Bijektion $(\pi_0(f), \pi_0(g)) : \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$ der Wegkomponenten.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgsam nach, wie zu Satz G1N!

Wegzusammenhang in Summenräumen

Satz G2ı: Wegzusammenhang in einem Summenraum

(1) Im Summenraum $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ gilt $[a]_X = [a]_{X_i}$ für $a \in X_i$.

(2) Die Zerlegung in Wegkomponenten ist $\pi_0(\bigsqcup_{i\in I} X_i) = \bigsqcup_{i\in I} \pi_0(X_i)$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies für π_0 nach dem Vorbild von Satz G1L für $\mathbb{Z}$.

Lösung: (1) „$\supseteq$“: Der Teilraum $[X]_{X_i}$ ist zshgd, also enthalten in $[a]_X$.
„$\subseteq$“: Wir haben die offene Zerlegung $X = X_i \sqcup X_i'$ mit $X_i' = \bigcup_{j\neq i} X_j$.
Demnach liegt $[a]_X$ ganz im Summanden X_i, also ganz in $[a]_{X_i}$.

(2) Für die Wegkomponenten des Summenraums $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ folgt:

$$\begin{aligned}
\pi_0(X) &\overset{\text{Def}}{=} \{\, [a]_X \mid a \in X \,\} \\
&\overset{(0)}{=} \bigcup_{i\in I} \{\, [a]_X \mid a \in X_i \,\} \\
&\overset{(1)}{=} \bigcup_{i\in I} \{\, [a]_{X_i} \mid a \in X_i \,\} \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{i\in I} \pi_0(X_i)
\end{aligned}$$

Hierbei gilt (0) für jede Vereinigung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, doch (1) erst für den Summenraum $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$. Die letzte Vereinigung ist disjunkt. QED

Wegzusammenhang in Summenräumen

Das ist ein sehr anschauliches Ergebnis, darauf wären Sie bei Bedarf auch ganz alleine gekommen. Tatsächlich wird es oft einfach verwendet und nicht explizit ausgeführt. Ich betone diesen Satz hier auch nicht, weil er schwierig oder tiefsinnig wäre, sondern aus zwei didaktischen Gründen. Erstens möchte ich die Dualität von Summe und Produkt hervorheben. Zweitens sehen Sie hier, wie wichtig und hilfreich gute Notation ist.

Ich schreibe ganz bewusst $[a]_X$ für die Wegkomponente des Punktes a im umgebenden Raum X. Dies kürzt man später gerne ab zu $[a]$, falls hier nur ein Raum in Frage kommt. Doch vorerst üben wir Genauigkeit.

In der Formulierung des obigen Satzes und Beweises betrachten wir nämlich a sowohl in X_i als auch in X. Hier zahlt sich unsere umsichtige Notation bestens aus, die Argumente werden dadurch klar und einfach.

Wegzusammenhang in Produkträumen

Satz G2J: Wegzusammenhang eines Produktraumes

(1) Genau dann ist $X = \prod_{i\in I} X_i$ wegzshgd, wenn alle Faktoren X_i es sind.

(2) Es gilt $[a]_X = \prod_{i\in I}[a_i]_{X_i}$, also $\pi_0(\prod_{i\in I} X_i) = \{\prod_{i\in I} A_i \,|\, A_i \in \pi_0(X_i)\}$.

Beweis: (1) „⇒“: Ist X wegzshgd, so auch jeder Faktor $X_i = p_i(X)$ (G2G).

„⇐“: Sei $a, b \in X$. Zu jeder Koordinate $i \in I$ existiert $\gamma_i \in P(X_i, a_i, b_i)$.
Daraus erhalten wir den Weg $\gamma = \prod_{i\in I} \gamma_i \in P(X, a, b)$ dank UAE (E4D).

(2) Für jeden Punkt $a \in X$ gilt die Inklusion $[a]_X \supseteq \prod_{i\in I}[a_i]_{X_i}$,
denn dieses Produkt enthält a und ist wegzshgd dank (1).

Umgekehrt gilt $[a]_X \subseteq \prod_{i\in I}[a_i]_{X_i}$, denn das stetige Bild $p_i([a]_X) \ni a_i$
ist wegzshgd (G2G), und somit gilt $p_i([a]_X) \subseteq [a_i]_{X_i}$ für alle $i \in I$. QED

Wegzusammenhang in Produkträumen

Hier habe ich die Argumente möglichst knapp und effizient dargestellt. In Worten ausgeführt lautet das entscheidende Argument (1):

„⇐“: Vorgegeben seien beliebige Punkte $a, b \in X$. Da jeder Raum X_i wegzusammenhängend ist, existiert darin ein Weg $\gamma_i : [0,1] \to X_i$ von $\gamma_i(0) = a_i$ nach $\gamma_i(1) = b_i$. Daraus konstruieren wir die stetige Abbildung $\gamma = \prod_{i\in I} \gamma_i : [0,1] \to X$ mit $p_i \circ \gamma = \gamma_i$ dank UAE (E4D) des Produktraums. Dies ist ein Weg in X von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$. Somit ist auch der Produktraum $X = \prod_{i\in I} X_i$ wegzusammenhängend.

Vergleich: Warum ist Satz G2J für π_0 so viel leichter als Satz G1M für $\mathbb{Z}$?

Das Produkt $X = \prod_{i\in I} X$ verträgt sich besonders gut mit Abbildungen $f : Y \to X$ in das Produkt X *hinein*, genau dafür haben wir die *universelle Abbildungseigenschaft*, $\mathscr{C}(Y, \prod_{i\in I} X_i) \cong \prod_{i\in I} \mathscr{C}(Y, X_i)$ mit $f \mapsto (f_i)_{i\in I}$.

Für Abbildungen $X \to Y$ aus X *heraus* haben wir kein solch allgemeines Werkzeug. Der Zusammenhang fragt aber nach stetigen Abbildungen $X \to \{0,1\}$, daher mussten wir dort für Satz G1M etwas mehr arbeiten

Wegkomponenten der Matrixgruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$

Wie viele Komponenten haben die Matrixgruppen $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$?

Satz G2N: Wegkomponenten der Matrixgruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$

Es gilt $\pi_0(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R},\ \mathrm{GL}_n^-\,\mathbb{R}\}$ und $\pi_0(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}) = \{\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}\}$.

Beweis: (1) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $n = 1$ ist klar dank $\mathrm{GL}_1\,\mathbb{R} = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ebenso hat $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^-\,\mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}$ *mindestens* zwei Wegkomponenten.

Zunächst sei $n = 2$: Wir verbinden die Einheitsmatrix $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ durch Wege in $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$ mit allen *positiven* Elementarmatrizen $R_{12}(\mu) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $R_{21}(\mu) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$ sowie $S_1(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $S_2(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und schließlich $T_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dank Gauß–Algorithmus können wir jede *positive* Matrix $A \in \mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$ als Produkt dieser *positiven* Elementarmatrizen darstellen. Somit ist $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$ wegzusammenhängend.

Der allgemeine Fall $n \geq 2$ über $\mathbb{R}$ verläuft wörtlich genauso!
Der komplexe Fall ist leichter, da $\mathrm{GL}_1\,\mathbb{C} = \mathbb{C}^\times$ wegzshgd ist. QED

Wegkomponenten der Matrixgruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$

Erinnerung: Dank Satz G21 gilt allgemein $\pi_0(\bigsqcup_{i\in I} X_i) = \bigsqcup_{i\in I} \pi_0(X_i)$. Wir haben hier $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^-\,\mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}$ vorliegen. Daher genügt es, Wegzusammenhang für jeden der beiden Summanden nachzuweisen.

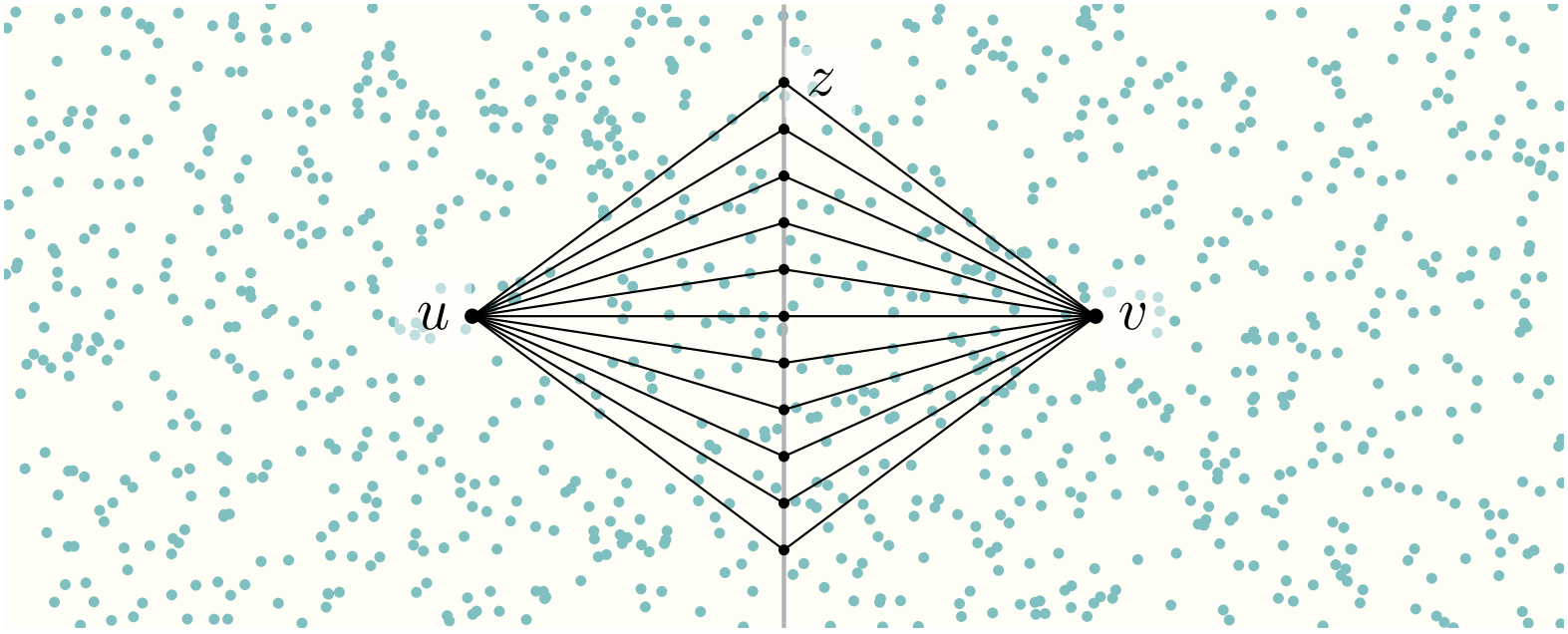
Übung: Bestimmen Sie $\pi_0\,\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ und $\pi_0\,\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$ wie oben skizziert:

(1) Finden Sie in $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ je einen Weg von $I = 1_{n\times n}$ zu den Matrizen $S_i(\lambda) = I + (\lambda - 1)E_{ii}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, zu $R_{ij}(\mu) = I + \mu E_{ij}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $i \neq j$, und zu $T_{ij} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji}$. Dies sind die guten alten Elementarmatrizen mit positiver Determinante.

(2) Zeigen Sie, dass der (positiv modifizierte) Gauß–Algorithmus mit den obigen Operationen $S_i(\lambda)$, $R_{ij}(\mu)$, T_{ij} einen Weg von jeder Matrix $A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ nach $\mathrm{diag}(\pm 1, 1, \ldots, 1)$ liefert.

(3) Bestimmen Sie damit $\pi_0(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R})$. *Zugabe:* Ebenso $\pi_0(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C})$. *Alternative:* Speziell über $\mathbb{C}$ hilft der folgende, ganz allgemeine Satz.

Wegzusammenhang der Matrixgruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$



Satz G2o: Jede komplexe Nichtnullstellenmenge ist wegzshgd.

(1) Sei $n \geq 2$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar, etwa $A = \mathbb{Q}^n$. Dann ist $X = \mathbb{R}^n \setminus A$ wegzusammenhängend (durch „fast gerade“, polygonale Wege in X).

(2) Sei $P \in \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n] \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : z \mapsto P(z)$. Dann ist die Nichtnullstellenmenge $X := f^{-1}(\mathbb{C}^\times) \subseteq \mathbb{C}^n$ wegzusammenhängend, somit zusammenhängend (G2c), sowie offen und dicht in $\mathbb{C}^n$ (D5o).

Zusatz: Weg/Zusammenhang und Dichtheit gelten noch allgemeiner sogar für abzählbare Durchschnitte $X := \bigcap_{k=0}^{\infty} f_k^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ in $\mathbb{C}^n$.

Wegzusammenhang der Matrixgruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$

Beweis: (1) Sei $u \neq v$ in X und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Mittelsenkrechte auf $[u, v]$. Es gibt überabzählbar viele Wege $\gamma = |u, z, v|$ von u über $z \in G$ nach v. Höchstens abzählbar viele davon treffen die Menge A.

(2) Zu $u \neq v$ in X sei $g : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ die komplexe Gerade durch $g(0) = u$ und $g(1) = v$, also $g(z) = u + z(v - u)$. Die Polynomfunktion $h = f \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(0) \neq 0 \neq h(1)$ hat nur endlich viele Nullstellen. Wie in (1) erhalten wir einen Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ von $\gamma(0) = 0$ nach $\gamma(1) = 1$ in $h^{-1}(\mathbb{C}^\times) \subseteq \mathbb{C}$. Somit läuft $g \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^n$ von u nach v in $f^{-1}(\mathbb{C}^\times) \subseteq \mathbb{C}^n$. QED

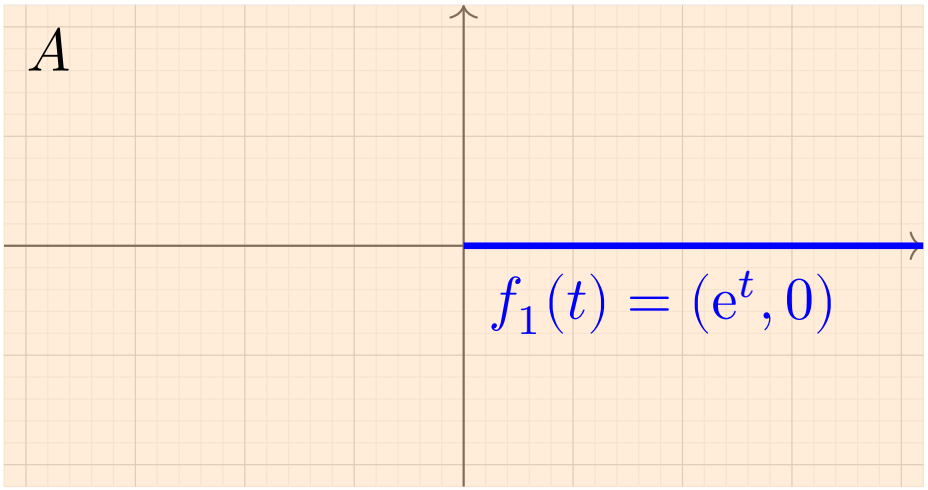
Beispiel: $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C} = \{\, A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \det A \neq 0 \,\}$ ist wegzusammenhängend.

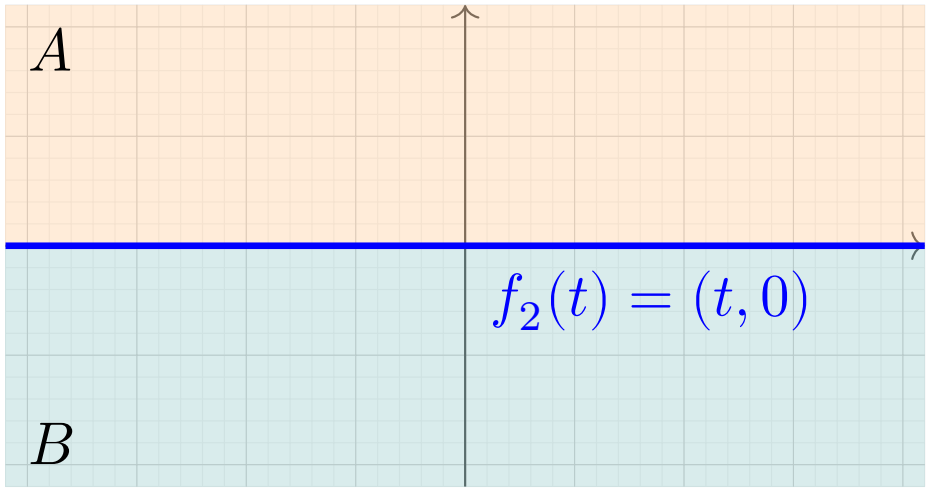
🙂 Der Teilraum $X := f^{-1}(\mathbb{C}^\times) \subseteq \mathbb{C}^n$ ist wegzusammenhängend, zudem lassen sich je zwei Punkte $u \neq v$ in X „fast gerade“ verbinden, durch einen Weg, der nur beliebig wenig vom Geradenstück abweicht.

⚠ Für reelle Polynome gilt die Aussage (2) nicht! So sind etwa die Nichtnullstellenmengen $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \,\}$ und $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} = \{\, A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0 \,\}$ unzusammenhängend.

Cantors Karussell: $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

Gibt es eine Einbettung $f_k : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, deren Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus f_k(\mathbb{R})$ genau k Wegkomponenten hat? Für $k = 1, 2, 3, \ldots$? unendlich? überabzählbar?



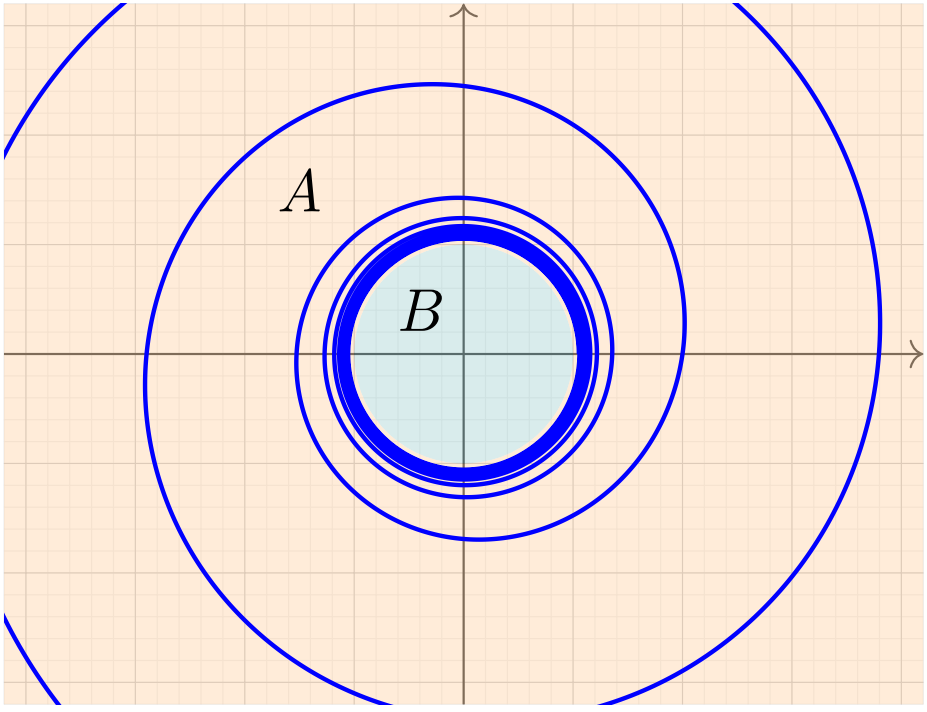


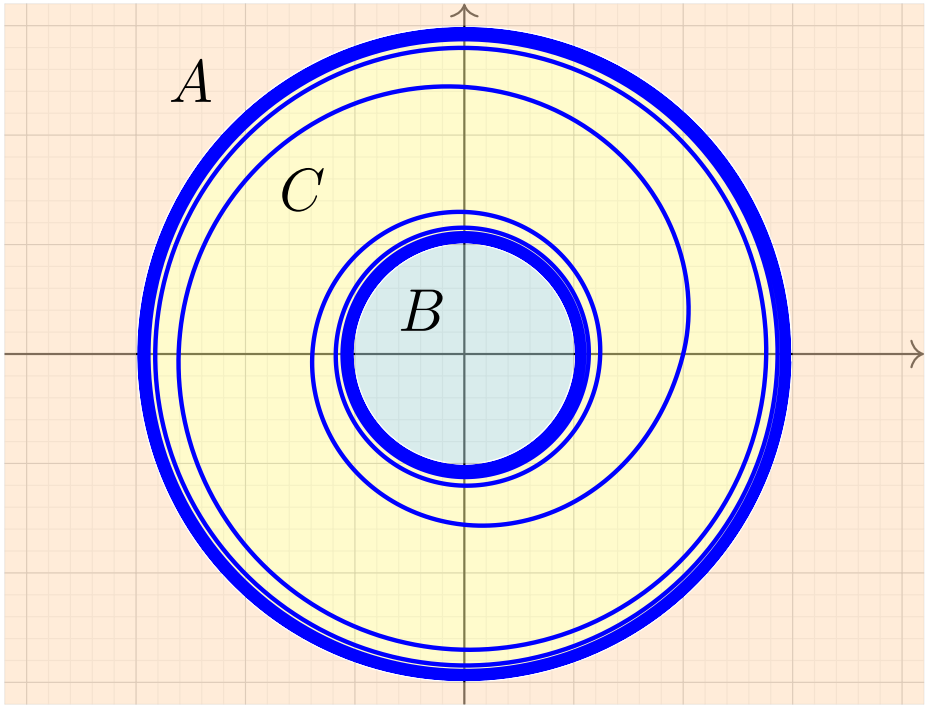
Beispiel: Die Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (e^t, 0)$ ist eine Einbettung. Sie trennt die Ebene $\mathbb{R}^2$ nicht: Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus f_1(\mathbb{R})$ ist sternförmig, hat also genau eine Wegkomponente: $\pi_0(X) = \{X\}$.

Beispiel: Die Standardeinbettung $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, 0)$ zerlegt $\mathbb{R}^2$ in zwei offene Halbebenen: $\pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus f_2(\mathbb{R})) = \{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}\}$ dank Zwischenwertsatz (C3A) für $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Hier sind Komponenten gleich Wegkomponenten. Gilt dies immer? Die Fälle $k = 1, 2$ waren leicht. Gelingt $k = 3$? Oder ist das unmöglich?

Cantors Karussell: $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$



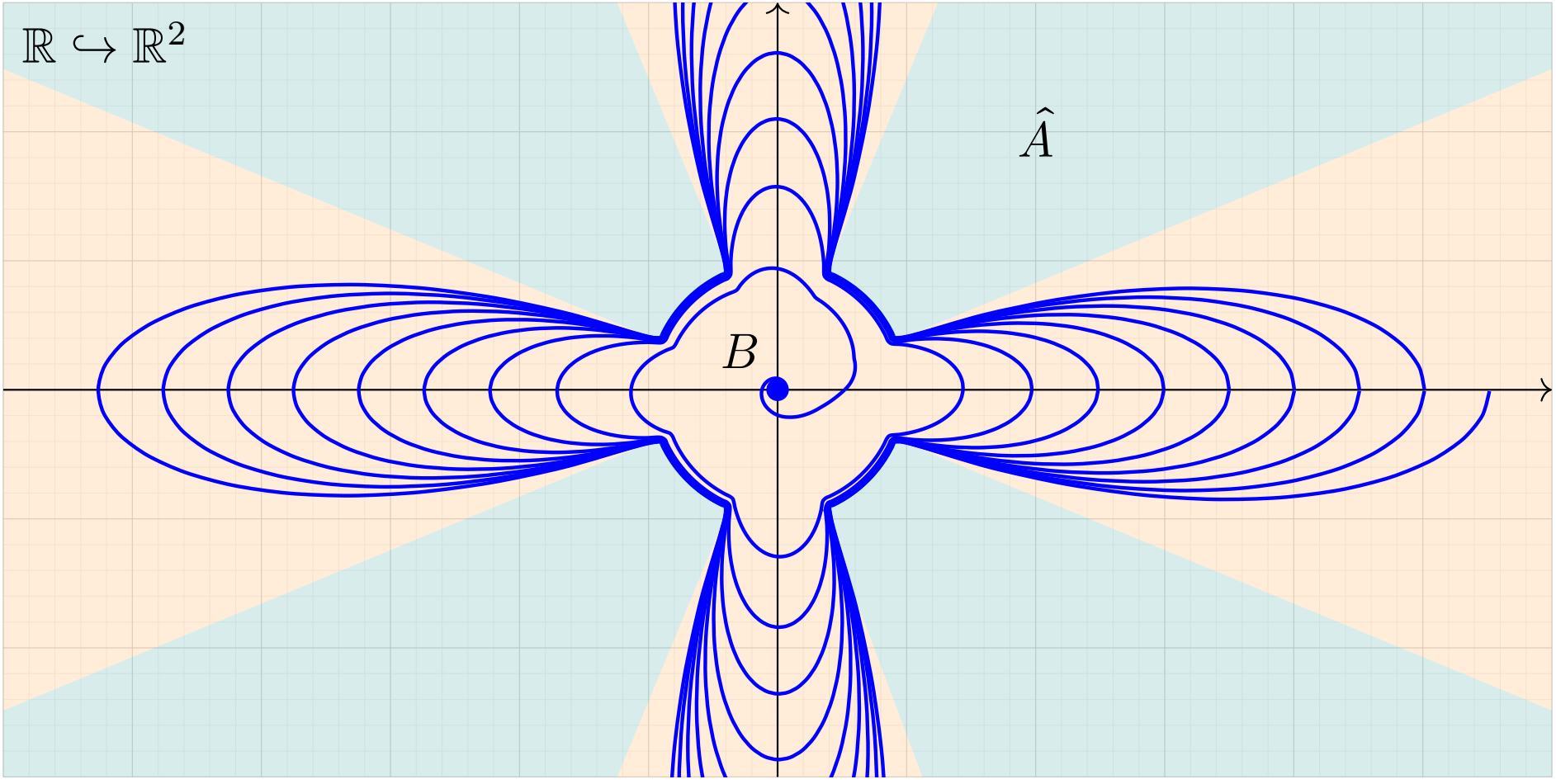


Beispiel: Auch $f_2^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 + \mathrm{e}^t)(\cos t, \sin t)$ ist eine Einbettung. Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus f_2^*(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, $\mathfrak{Z}(X) = \{X\}$, hat aber *zwei* Wegkomponenten: $\pi_0(X) = \{A, B\}$.

Beispiel: Auch $f_3(t) = \big[2 + t/(1 + |t|)\big] \cdot (\cos t, \sin t)$ ist eine Einbettung. Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus f_3(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, $\mathfrak{Z}(X) = \{X\}$, hat aber *drei* Wegkomponenten: $\pi_0(X) = \{A, B, C\}$.

Geht noch mehr? Sogar unendlich? überabzählbar?

Cantors Karussell: $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$



Versuchen Sie, eine geeignete Einbettung $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ auszuschreiben!
Mathematisches Schaffen ist sowohl Handwerk als auch Kunst.
Mathematik erfordert sowohl Kreativität als auch Präzision.

Cantors Karussell: $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

Beispiel / Übung G2τ: Cantors Karussell

Sei $g : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$ ein Homöomorphismus, etwa $g(t) = \mathrm{e}^t$. Sei $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig mit Nullstellenmenge $N = h^{-1}(0)$, etwa N eine Cantor–Menge mit Abstandsfunktion $h(s) = d(s, N)$. Damit konstruieren wir die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times \; : t \mapsto \frac{1 + g(t)\, h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{1 + g(-t)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,.$$

Dies ist eine Einbettung. Sind zudem g, h glatt, so auch f.
Das Komplement $X = \mathbb{C}^\times \setminus f(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend,
aber im Allgemeinen nicht wegzusammenhängend:

$$\pi_0(X) = \{\, B,\ \hat{A} \,\big|\, A \in \pi_0(N) \,\}$$

Die Menge $A \subseteq \mathbb{A}^\times$ hat den Schatten $\hat{A} := \mathbb{R}_{\geq 1} \cdot A = \{\, ta \,|\, t \geq 1,\ a \in A \,\}$.

🙂 Wir können h so wählen, dass N beliebig viele Wegkomponenten hat, sogar überabzählbar viele sind möglich, wie bei der Cantor–Menge.

Lokaler Weg/Zusammenhang

Definition G3A: lokaler Weg/Zusammenhang

(1) Ein Raum X heißt **lokal weg/zusammenhängend** im Punkt $a \in X$, wenn jede Umgebung U von a eine weg/zusammenhängende offene Umgebung V enthält. (2) Gilt diese Eigenschaft in jedem Punkt $a \in X$, so nennen wir den Raum X **lokal weg/zusammenhängend**.

Diese Festlegung der Begriffe besagt: (1) Im Raum X hat der Punkt a eine Umgebungsbasis bestehend aus weg/zshgden offenen Mengen.
(2) Die Topologie hat eine Basis aus weg/zshgden offenen Mengen.

Erinnerung: Wegzshgd impliziert zshgd (G2C), und dies gilt auch lokal.

Beispiele: Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist lokal weg/zshgd, denn zu jedem $a \in \mathbb{R}^n$ ist der offene Ball $B(a, \varepsilon)$ sternförmig zu a, also wegzshgd (G2B).

Ebenso ist jeder topologische $\mathbb{R}$–Vektorraum V lokal weg/zshgd (F6Q).
Ist X lokal weg/zshgd, so auch jeder offene Teilraum $U \subseteq X$.

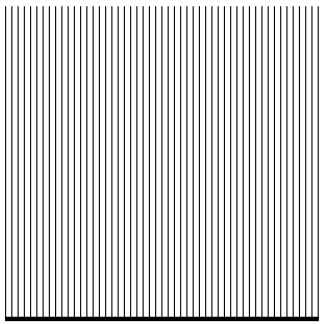
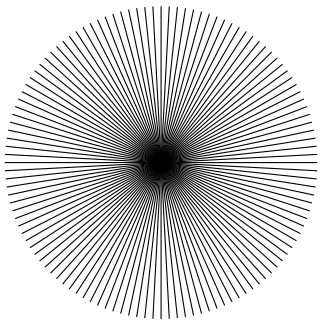
Der Raum $\mathbb{Q}$ ist weder weg/zshgd noch lokal weg/zshgd.

Lokaler vs globaler Weg/Zusammenhang

Lokaler und globaler Weg/Zusammenhang sind unabhängig:

In $\mathbb{R}$ sind die Teilräume $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$ und $X = [0,1] \cup [2,3]$ zwar nicht weg/zshgd, doch immerhin lokal weg/zshgd.

Die Sinuskurve des Topologen $C = A \cup B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht lokal. Lokaler Weg/Zshg gilt nur in $a \in A$, nicht in $b \in B$.

X  Z  $\neq$ SNCF

Der **rationale Kamm** $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^2$ ist weg/zshgd, aber nicht lokal; lokaler Weg/Zshg gilt nur in $(x,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

Der **rationale Stern** $Z = \{\, r\ \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ t \in \mathbb{Q} \}$ in $\mathbb{R}^2$ ist wegzshgd, aber nicht lokal zshgd. Lokaler Weg/Zshg gilt nur im Nullpunkt.

Die Menge $\mathbb{R}^n$ mit der französischen Eisenbahnmetrik ist wegzshgd und auch lokal wegzshgd, im Gegensatz zum vorigen Beispiel Z.

Zerlegung in Weg/Komponenten

Jeden topologischen Raum X zerlegen wir in seine Weg/Komponenten:

$$X = \bigsqcup \mathfrak{Z}(X) \quad \text{und} \quad X = \bigsqcup \pi_0(X)$$

Die Komponenten sind abgeschlossen (G1K) aber i.A. nicht offen, siehe $\mathbb{Q}$. Ist die Zerlegung $\mathfrak{Z}(X)$ endlich / lokal-endlich, dann ist jede Komponente offen (G1K), und $X = \bigsqcup \mathfrak{Z}(X)$ ist eine topologische Summe.

Die Wegkomponenten sind i.A. weder offen noch abgeschlossen, selbst wenn die Zerlegung endlich ist (Sinuskurve des Topologen G2L).

Satz G3c: offene Zerlegung in Weg/Komponenten

(1) Ist X lokal zusammenhängend, so ist jede Komponente offen (D3C), also die Zerlegung $X = \bigsqcup \mathfrak{Z}(X)$ offen, somit eine topologische Summe.

(2) Ist X lokal wegzusammenhängend, so ist die Zerlegung $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ offen, also eine topologische Summe. Daraus folgt $\pi_0(X) = \mathfrak{Z}(X)$.

Dies gilt für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, oder allgemein für jeden lokal euklidischen Raum X, insbesondere für jede Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand).

Zerlegung in Weg/Komponenten

Beispiel: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. In $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ offen, also lokal wegzshgd.
Komponenten und Wegkomponenten von $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ stimmen also überein:

$$\mathfrak{Z}(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}) = \pi_0(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R},\ \mathrm{GL}_n^-\,\mathbb{R}\},$$
$$\mathfrak{Z}(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}) = \pi_0(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}) = \{\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}\}.$$

Eine offene Zerlegung $X = \bigsqcup \mathfrak{Z}(X)$ bzw. $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ ist sehr nützlich, da wir uns auf weg/zshgde Teilräume in X konzentrieren können.
Diese haben einen gebührenden traditionellen Namen:

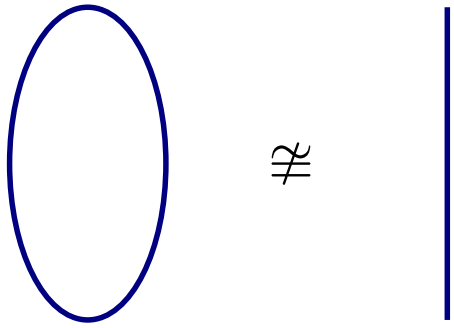
Definition G3D: Gebiet = offen und zusammenhängend

Sei X ein topologischer Raum, etwa $X = \mathbb{R}^n$ oder eine Mannigfaltigkeit.
Ein **Gebiet** U im Raum X ist eine offene zusammenhängende Menge.

🙂 Gemäß dieser Vereinbarung ist ein Gebiet U insbesondere niemals leer.
Das ist für viele Anwendungen sehr willkommen, da sie $\emptyset$ ausschließen.

Ist X lokal wegzshgd, etwa $X = \mathbb{R}^n$ oder eine Mannigfaltigkeit,
so ist jedes Gebiet U nicht nur zshgd, sondern auch wegzshgd.

Globaler Trennungsgrad: Komponenten um einen Punkt



$\not\simeq$

Der **globale Trennungsgrad** des Punktes a im Raum X ist

$$\mathrm{Deg}_X(a) := \sharp_{\mathbb{Z}}(\,\langle a\rangle_X \setminus \{a\}\,).$$

Beispiele: In $\mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Deg}(a) = 2$ für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}$.
In $[0,1]$ gilt $\mathrm{Deg}(0) = \mathrm{Deg}(1) = 1$, aber $\mathrm{Deg}(a) = 2$ für $0 < a < 1$.
In $\mathbb{S}^1$ gilt $\mathrm{Deg}(a) = 1$ für jeden Punkt $a \in \mathbb{S}^1$. Somit gilt $\mathbb{S}^1 \not\simeq [0,1]$.

Wir definieren hier $\mathrm{Deg}^{\mathbb{Z}}_X$ durch die Anzahl der *Komponenten*.
Entsprechend definieren wir $\mathrm{Deg}^{\pi_0}_X$ durch *Wegkomponenten*.
Für gutartige Räume stimmen beide Sichtweisen überein.

Buchstabensuppe: Klassifizieren Sie alle 26 lateinischen Großbuchstaben.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Globaler Trennungsgrad: Komponenten um einen Punkt

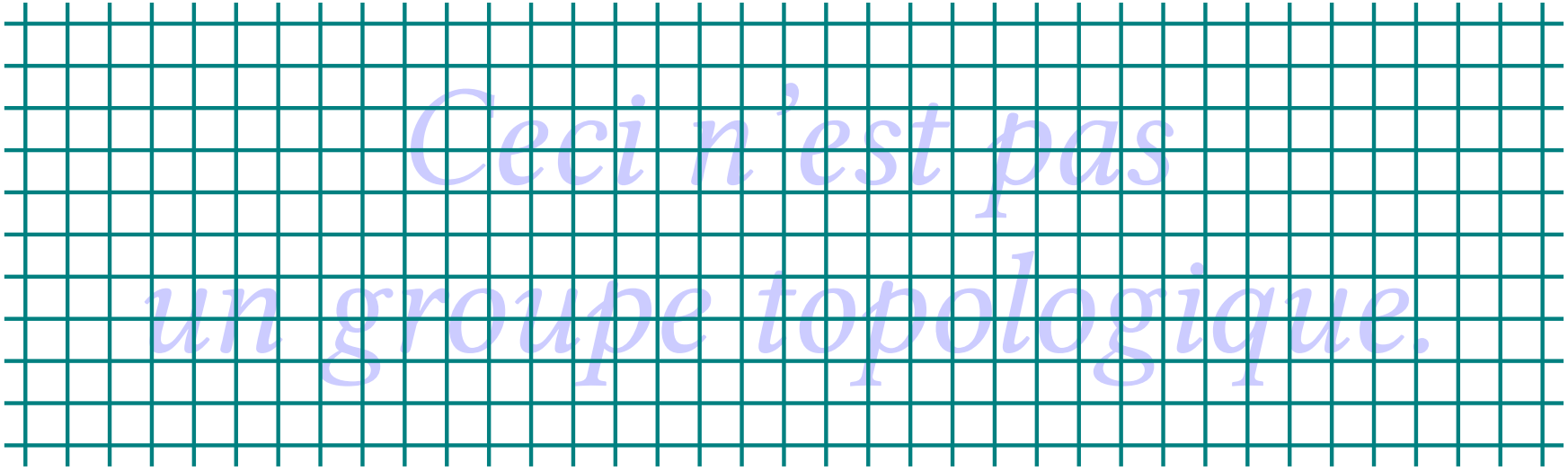
Buchstaben betrachten wir als kompakte Teilräume der Ebene: Nennen Sie Homöomorphieklassen und Invarianten in folgenden Situationen:

1. Jeder Buchstabe sei ideal dünn. *Hinweis:* Zusammenhang.
2. Jeder Buchstabe sei realistisch dick. *Hinweis:* Flächenklassifikation.
3. Welche Klassen ergeben sich bezüglich Homotopie-Äquivalenz? *Hinweis:* Die Euler–Charakteristik ist homotopie-invariant.

Sie erledigen diese Klassifikation sehr erfolgreich und treffsicher seit Sie zu lesen lernten. Während Sie diese Zeilen lesen, vollführt Ihr Gehirn eine überaus effiziente Mustererkennung…. Das ist erstaunlich robust und funktioniert selbst dann noch, wenn sich der Zeichensatz ändert.

(1) Aus topologischer Sicht können Sie bei dieser Aufgabe sowohl Ihre Anschauung üben, als auch präzise Argumente zum Zusammenhang. Zunächst bilden Sie Klassen und prüfen, dass die Buchstaben einer Klasse tatsächlich homöomorph sind. Umgekehrt sollen Buchstaben aus unterschiedlichen Klassen nicht homöomorph sein: Hierzu benötigen Sie geeignete topologische Invarianten, etwa Zusammenhangseigenschaften.

Lokaler Trennungsgrad: Enden um einen Punkt



Sei $\mathscr{B}$ eine UBasis von a in X, und für jedes Paar $U \subseteq V$ in $\mathscr{B}$ gelte:
Die Inklusion $\iota_U^V : U \hookrightarrow V$ induziert eine Bijektion der Komponenten.

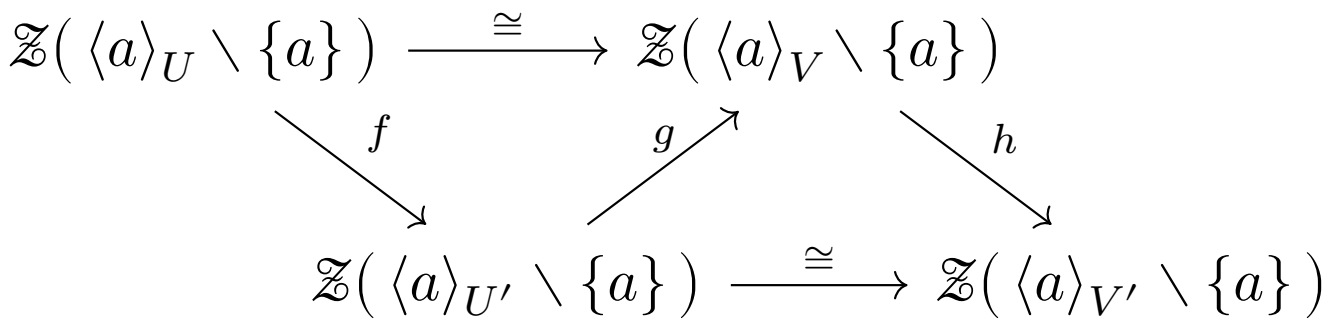
$$\mathfrak{Z}(\iota) \,:\, \mathfrak{Z}(\,\langle a\rangle_U \setminus \{a\}\,) \rightarrowtail \mathfrak{Z}(\,\langle a\rangle_V \setminus \{a\}\,)$$

Dann ist diese Kardinalität der **lokale Trennungsgrad** von a in X:

$$\deg_X(a) := \sharp\mathfrak{Z}(\,\langle a\rangle_U \setminus \{a\}\,) \quad \text{wobei } U \in \mathscr{B}$$

Beispiel: In $(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z}\times\mathbb{R})$ gilt $\deg(a) = 4$ für $a \in \mathbb{Z}^2$, sonst $\deg(a) = 2$.
In $\mathbb{R} \subset \widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{S}^1$ gilt $\deg(\infty) = 2$. In $\mathbb{R}^2 \subset \widehat{\mathbb{R}^2} \cong \mathbb{S}^n$ gilt $\deg(\infty) = 1$.

Lokaler Trennungsgrad: Enden um einen Punkt



Aufgabe: Warum ist der lokale Grad wohldefiniert? **Lösung:** Für je zwei Umgebungsbasen $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ von a in X mit der geforderten Eigenschaft gilt: Zu $V' \in \mathscr{B}'$ existiert $V \in \mathscr{B}$ mit $V \subseteq V'$, sodann $U' \in \mathscr{B}'$ mit $U' \subseteq V$ und schließlich $U \in \mathscr{B}$ mit $U \subseteq U'$. Die zugehörigen Inklusionen induzieren das oben gezeigte kommutative Diagramm Die Abbildung g ist surjektiv, denn $g \circ f$ ist surjektiv. Die Abbildung g ist injektiv, denn $h \circ g$ ist injektiv. Daher ist g eine Bijektion, und somit auch f und h.

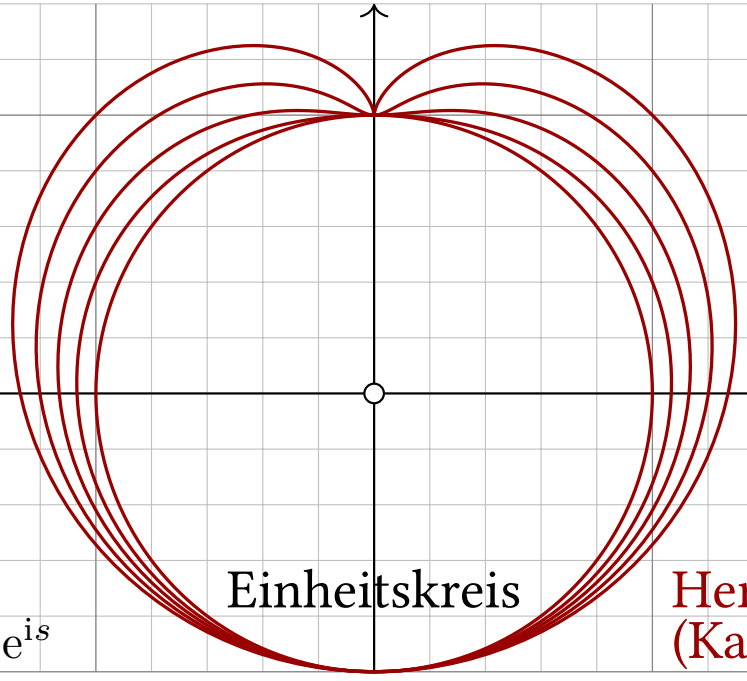
⚠ Die obige Definition des lokalen Trennungsgrades setzt voraus, dass sich dieser für hinreichend kleine Umgebungen nicht mehr ändert. Das muss jedoch nicht immer der Fall sein! Als beliebtes Gegenbeispiel betrachten wir in $\mathbb{C}$ den **Hawaiianischen Ohrring** $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\mathbb{S}^1 - \mathrm{i})$.

Homotopie: stetige Deformation

Startraum $X = \mathbb{S}^1$
Zielraum $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Deformation zwischen
$f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
von $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ zu
$g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}) = \mathrm{i} + (1 - \sin s)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$

Dies gelingt hier durch
die affine Homotopie
$H : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
$H(t, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}) = t\mathrm{i} + (1 - t \sin s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$



Wir
Homotopie!

Definition G4A: Homotopie

(0) Eine **Homotopie** ist eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y$.

Zu jedem Punkt $x \in X$ ist $H^x : [0,1] \to Y : t \mapsto H(t,x)$ stetig,
also ein Weg in Y vom Startpunkt $H(0,x)$ zum Zielpunkt $H(1,x)$.

Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,1]$ ist $H_t : X \to Y : x \mapsto H(t,x)$ stetig.
Wir betrachten H als eine stetige Deformation von H_0 nach H_1.

Homotopie und Zusammenziehung

🙂 Einfache Idee: Wir wollen f und g stetig ineinander deformieren.

Definition G4A: Homotopie und Zusammenziehung

(1) Seien $f, g : X \to Y$ stetig. Eine **Homotopie** $H : f \simeq g : X \to Y$ von f nach g in Y ist eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$, ausgeschrieben $H(0,x) = f(x)$ und $H(1,x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Wir nennen f, g **homotop** in Y, ausführlich $H : f \simeq g$, kurz $f \simeq g$.

(2) Im Fall $f \simeq g$ mit konstanter Abbildung $g = \mathrm{const}_X^a : X \to \{a\} \subseteq Y$ heißt f **nullhomotop** oder **zusammenziehbar** in Y, geschrieben $f \simeq *$.
Der Raum X heißt **zusammenziehbar**, falls $\mathrm{id}_X \simeq *$ gilt, kurz $X \simeq *$:
Es existiert $H : \mathrm{id}_X \simeq \mathrm{const}_X^a : X \to X$, also $H : [0,1] \times X \to X$ stetig mit $H(0,x) = x$ und $H(1,x) = a$ für alle $x \in X$ und einen Punkt $a \in X$.

⚠ Der Zielraum Y, in dem sich die Homotopie bewegen darf und muss, ist wesentlicher Bestandteil der Definition und wird explizit benötigt.

Beispiel: In $\mathbb{R}$ sind $f, g : \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = -1$ und $g(0) = +1$ homotop, nicht jedoch ihre Einschränkungen $f, g : \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ im Raum $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Affine Homotopie und Zusammenziehung

Beispiel G4B: affine Homotopie und Zusammenziehung

(1) Seien $f, g : X \to Y \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig mit $[f(x), g(x)] \subseteq Y$ für alle $x \in X$.
Dann gilt $H : f \simeq g$ dank affiner Homotopie $H(t, x) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

(2) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig zu a (F6F), zum Beispiel $X = \mathbb{R}^n$ zu $a = 0$.
Dann ist X zusammenziehbar auf a vermöge $H(t, x) = (1-t)x + ta$.

Daraus ergeben sich weitere nützliche Beispiele, siehe Satz G4L:

(3) Sei X zusammenziehbar vermöge $H : \mathrm{id}_X \simeq \mathrm{const}^a_X$, etwa wie in (2).
Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ homotop zur konstanten Abbildung $g = \mathrm{const}^b_X : X \to \{b\} \subseteq Y$ vermöge $K : f \simeq g$ mit $K_t = f \circ H_t$.

(4) Sei Y zusammenziehbar vermöge $H : \mathrm{id}_Y \simeq \mathrm{const}^b_Y$, etwa wie in (2).
Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ homotop zur konstanten Abbildung $g = \mathrm{const}^b_X : X \to \{b\} \subseteq Y$ vermöge $K : f \simeq g$ mit $K_t = H_t \circ f$.

Die Abbildung $K : [0, 1] \times X \to Y$ ist jeweils wohldefiniert und stetig, als Komposition stetiger Abbildungen, und führt von $K_0 = f$ nach $K_1 = g$.

Wie nutzen wir Homotopie?

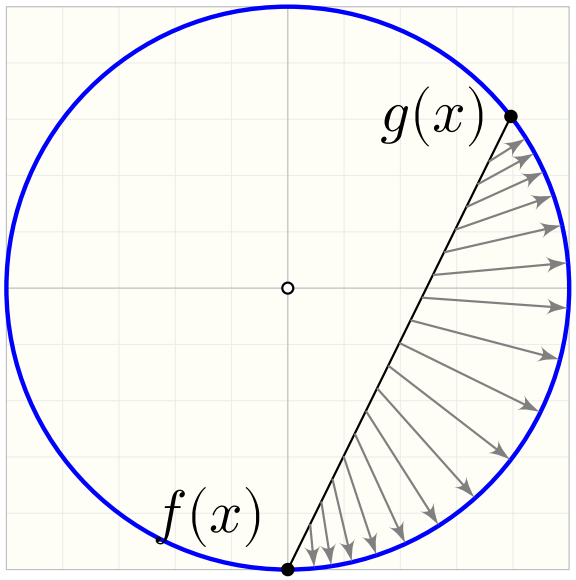
☹ Stetige Abbildungen $f : X \to Y$ gibt es meist unüberschaubar viele.
Die meisten davon interessieren uns gar nicht weiter, und wenn doch, so genügt uns meist ein homotope Abbildung $g \simeq f$, die im Wesentlichen dasselbe für uns leistet, aber hoffentlich schöner und einfacher ist.

🙂 Diese genial-einfache Idee vereinfacht vieles, indem sie stetige Abbildungen zu Homotopieklassen bündelt, siehe Definition G4H.
Damit verschaffen wir uns einen sehr effizienten Überblick und extrahieren in vielen günstigen Fällen relevante Informationen.

🙂 Die Räume Raum $\mathbb{R}^n$ und $\{0\}$ sind offensichtlich sehr verschieden, doch sie erweisen sich als homotopie-äquivalent, siehe Definition G4N.
Die Sphären $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2, \ldots$ hingegen sind nicht homotopie-äquivalent.
Anschaulich umschließen sie Löcher verschiedener Dimension (J7A).

Vielleicht scheint Ihnen der Homotopie-Begriff anfangs kompliziert, doch das Gegenteil ist der Fall: Er vereinfacht und strukturiert.
Fassen Sie also Mut und lernen Sie diese schöne Technik,
wir werden sie häufig gewinnbringend nutzen.

Nahe Abbildungen sind homotop.



Seien $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ stetig mit $d(f,g) < 2$.
Das heißt, zu $x \in \mathbb{S}^n$ sind die Bildpunkte $f(x)$ und $g(x)$ in $\mathbb{S}^n$ niemals antipodal.

Die Homotopie $K : (t,x) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x)$ verlässt die Sphäre, bleibt aber in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Wir komponieren K daher mit der radialen Retraktion $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n : y \mapsto y/|y|$.

Satz G4c: Nahe Abbildungen sind homotop.

Seien $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ stetig und nirgends antipodal, also $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt $H : f \simeq g : X \to \mathbb{S}^n$ vermöge der Homotopie

$$H : [0,1] \times X \to \mathbb{S}^n : (t,x) \mapsto \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}.$$

„affin–retrahiert“

Beweis: Der Nenner verschwindet nur für $t = 1/2$ und $f(x) = -g(x)$.
Letzteres ist ausgeschlossen, also ist H wohldefiniert und stetig.
Diese Homotopie H verläuft vom Start $H_0 = f$ zum Ziel $H_1 = g$. QED

Nahe Abbildungen sind homotop.

Dieser genial-einfache Trick lässt sich wie folgt verallgemeinern, indem wir die benutzten Hilfsmittel nochmal genau anschauen:

Satz G4c: Nahe Abbildungen sind homotop.

Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ein euklidischer Umgebungsretrakt, das heißt, es existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\rho : U \twoheadrightarrow Y$ stetig mit $\rho|_Y = \mathrm{id}_Y$.

(1) Ist der Zielraum Y kompakt, so existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $f, g : X \to Y$ stetig mit $d(f,g) < \varepsilon$ eine Homotopie $H : f \simeq g$ in Y existiert.

(2) Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $g : X \to Y$ stetig mit $d(f,g) < \varepsilon$ eine Homotopie $H : f \simeq g$ existiert.

Beweis: (1) Der Abstand $\varepsilon = d(Y, \mathbb{R}^n \setminus U)$ ist positiv dank Satz F2A. Aus $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ folgt $g(x) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$, also $[f(x), g(x)] \subseteq U$. Die affine Homotopie $K : [0,1] \times X \to U : (t,x) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x)$ ist demnach wohldefiniert. Komponiert mit der Retraktion ρ erhalten wir die Homotopie $H = \rho \circ K : [0,1] \times X \to Y$ von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$.

(2) Die Konstruktion gelingt ebenso, nun mit $\varepsilon = d(f(X), \mathbb{R}^n \setminus U)$. QED

Zusammenziehbare Abbildung in die Sphäre

Satz G4D: zusammenziehbare Abbildung in die Sphäre

Ist $f : X \to \mathbb{S}^n$ stetig und nicht surjektiv, $\exists a \in \mathbb{S}^n \setminus f(X)$, dann gilt $f \simeq *$.

Erster Beweis: Zu f und $g = \mathrm{const}_X^{-a}$ nutzen wir Satz G4C. QED

Zweiter Beweis: Es gilt $f : X \to \mathbb{S}^n \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n \simeq *$ (A1L, G4B). QED

Die Konstruktion einer Homotopie erfordert meist geometrisches Verständnis und technisches Geschick. Ebenso schwierig kann der Nachweis sein, dass zwei Abbildungen nicht homotop sind.

Ausblick: In Kapitel J zeigen wir $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \not\simeq *$. Satz J4A garantiert: Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist nicht zusammenziehbar. (Dies folgt auch dank Homotopie-Invarianz der Euler–Charakteristik.)

Aufgabe: Zeigen Sie $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^0} \not\simeq *$, also den einfachsten Fall $n = 0$.

Lösung: Hier ist $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$. Jede stetige Abbildung $H : [0,1] \times \mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}^0$ ist konstant auf $[0,1] \times \{x\}$ für $x = \pm 1$, denn der Zielraum $\mathbb{S}^0$ ist diskret. Aus $H_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^0}$ folgt $H_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^0} \neq \mathrm{const}$; somit ist H_1 nicht konstant.

Zusammenziehbare Abbildung in die Sphäre

🙂 Die Sphären $\mathbb{S}^n$ werden im Folgenden eine wichtige Rolle spielen, zunächst als einfache Werkstücke zum Lernen und Üben, dann als universelle Werkzeuge zur Untersuchung komplizierterer Räume.

So ist es auch mit den vorangegangenen Sätzen G4C und G4D:
Sie sind zunächst schöne Illustrationen für den Begriff der Homotopie.
Zugleich sind sie erste Hilfsmittel für Anwendungen der Homotopie,
die wir immer wieder gut nutzen können und später ausbauen werden.

Die letzte Aufgabe lässt sich allgemein formulieren und beweisen,
indem wir die benutzten Hilfsmittel nochmal genau anschauen:

Aufgabe: Jede Homotopie $H : [0,1] \times X \to Y$ in einen diskreten Raum Y ist konstant, erfüllt also $H(t,x) = H(0,x)$ für alle $t \in [0,1]$ und $x \in X$.
Dazu genügt bereits, dass Y total wegunzshgd ist, wie $\mathbb{Q}$.

Lösung: Für jeden Punkt $x \in X$ ist $[0,1] \times \{x\}$ wegzusammenhängend. Im Zielraum gilt $\pi_0(Y) = \{\,\{y\} \mid y \in Y\}$. Also ist H auf $[0,1] \times \{x\}$ konstant.

Operationen auf Homotopien

Für Homotopien definieren wir drei einfache, aber sehr nützliche Konstruktionen, wie zuvor bereits für Wege $\gamma : [0,1] \to Y$ in G2F.

Definition G4H: Operationen auf Homotopien

(1) Zu jeder gegebenen stetigen Abbildung $f : X \to Y$ definieren wir ihre **konstante Homotopie** $H : f \simeq f$ durch $H : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto f(x)$.

(2) Zu jeder Homotopie $H : f \simeq g$ definieren wir ihre **inverse Homotopie** $\bar{H} : g \simeq f$ durch $\bar{H} : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto H(1-t,x)$.

(3) Zu je zwei verknüpfbaren Homotopien $H : f \simeq g$ und $K : g \simeq h$ definieren wir ihre **Aneinanderhängung** $H * K : f \simeq h$ durch Verkleben:

$$H * K : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto \begin{cases} H(2t,x) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ K(2t-1,x) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert wegen $H_1 = K_0 = g$ und stetig dank Verklebesatz (E1P), denn die beiden Mengen $[0, 1/2] \times X$ und $[1/2, 1] \times X$ sind abgeschlossen im Definitionsbereich $[0,1] \times X$.

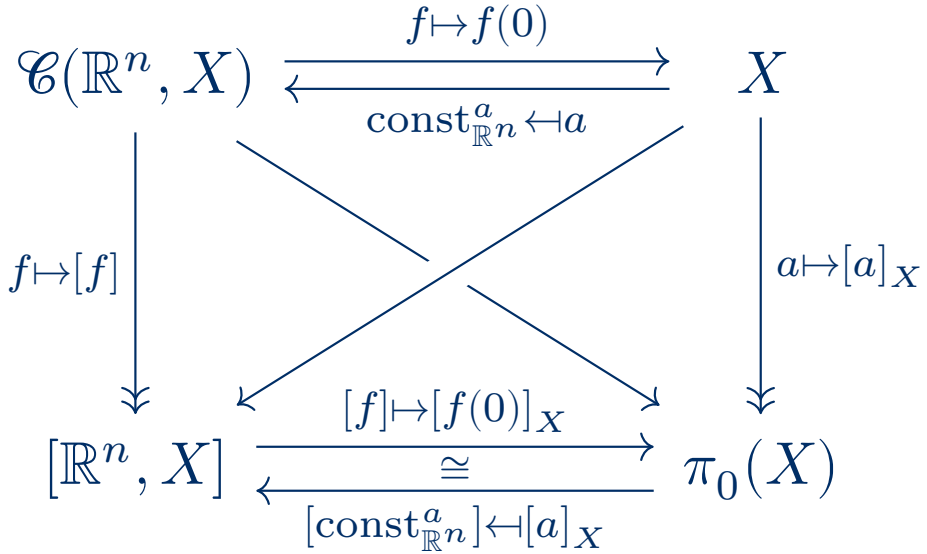
Homotopieklassen stetiger Abbildungen

Definition G4ʜ: Homotopieklasse einer stetigen Abbildung

Dank der Konstruktionen (1–3) ist Homotopie eine Äquivalenzrelation, geschrieben $\simeq$, auf der Menge $\mathscr{C}(X,Y)$ stetiger Abbildungen $f : X \to Y$. Die Quotientenmenge aller Homotopieklassen $[f]$ bezeichnen wir mit

$$[X,Y] := \mathscr{C}(X,Y)/_{\simeq} = \big\{\, [f] \,\big|\, f : X \to Y \text{ stetig} \,\big\}.$$

Beispiele: Es gilt $[X,\mathbb{R}^n] = \{[0]\}$ dank $H : 0 \simeq f$ vermöge $H(t,x) = tf(x)$. Wir haben $[\mathbb{R}^n, X] \cong \pi_0(X)$ vermöge $[f] \mapsto [f(0)]_X$ und $[\mathrm{const}^a_{\mathbb{R}^n}] \mapsfrom [a]_X$.



Die Homotopiekategorie hTop

Erinnerung: Bislang arbeiten wir in der Kategorie Top (D2B):
Ihre Objekte sind alle topologischen Räume $X, Y, Z, \ldots$.

Für je zwei topologische Räume X und Y besteht die betrachtete Morphismenmenge $\mathscr{C}(X,Y)$ aus allen stetigen Abbildungen $f : X \to Y$.

Die hier verwendete Komposition $\circ : \mathscr{C}(Y,Z) \times \mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{C}(X,Z)$ ist die für Abbildungen übliche Hintereinanderausführung $g \circ f$.

Wir fassen nun stetige Abbildungen zu Homotopieklassen zusammen.

☺ Mit diesen Homotopieklassen können wir genauso gut rechnen!

Satz G4L: Konstruktion der Homotopiekategorie hTop

(0) Aus Homotopien $F : f_0 \simeq f_1 : X \to Y$ und $G : g_0 \simeq g_1 : Y \to Z$ erhalten wir die Homotopie $H : g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 : X \to Z$ mit $H_t = G_t \circ F_t$.

(1) So definieren wir die Quotientenkategorie $\mathtt{hTop} = \mathtt{Top}/\text{Homotopie}$:
Objekte sind alle topologischen Räume $X, Y, Z, \ldots$ (dieselben wie in Top).
Morphismen sind Homotopieklassen $[f : X \to Y]$ stetiger Abbildungen.
Die Komposition $[g : Y \to Z] \circ [f : X \to Y] = [g \circ f]$ ist wohldefiniert.

Die Homotopiekategorie hTop

Sie haben in dieser Vorlesung schon einige Kategorien gesehen, noch viele mehr in den anderen Vorlesungen Ihres Mathestudiums. Bisher war jede ein einzelnes Beispiel, doch so langsam werden Sie ungeduldig und wollen endlich wissen, was Kategorien allgemein sind.

Sehr gut! Dann sind Sie bereit für die nächste Stufe der Erkenntnis… und der Abstraktion. Die Einführung mathematischer Begriffe ist allseits delikat und erfahrungsgemäß nicht leicht, insbesondere wenn ich damit Fragen beantworte, die Sie sich noch gar nicht gestellt haben.

Mein perfider Plan ist der folgende: Wir nutzen Kategorien ja sowieso überall, also spreche ich vorausahnend davon, bis Sie gar nicht mehr anders können, als Ihrer unstillbaren Neugier endlich Bahn zu brechen. Naja, es ist wie gesagt ein Plan. Manchmal gelingt er tatsächlich.

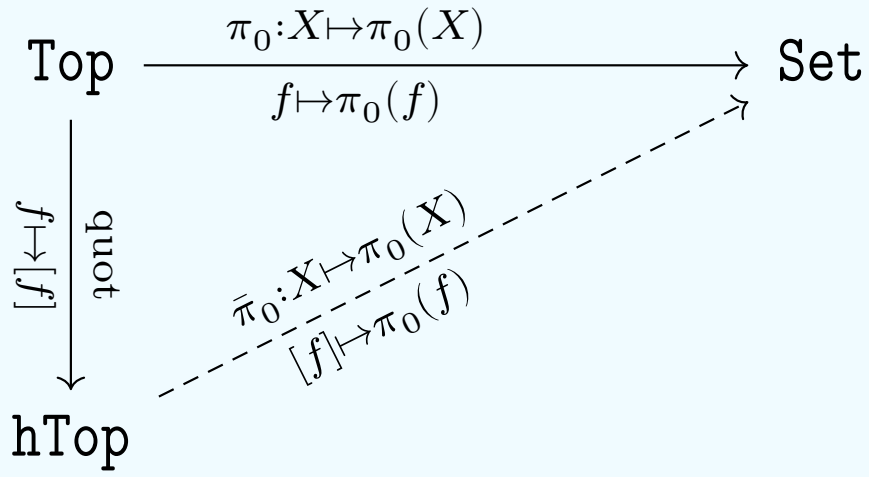
Kurzum, Sie kennen nun genug konkrete Beispiele von Kategorien und im folgenden Kapitel H werden wir diesem Begriff auf den Grund gehen. Vielleicht ist Ihnen das alles egal und Sie spüren keine Neugier mehr, sondern nur noch fremdbestimmtes Pauken. Das fände ich schade.

Der Funktor π_0 ist homotopie-invariant.

☺ Homotope Abbildungen $f \simeq g$ bilden Wegkomponenten gleich ab:

Satz G4м: Der Funktor $\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ ist homotopie-invariant.

Homotopie $H : f \simeq g : X \to Y$ impliziert $\pi_0(f) = \pi_0(g) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.



Somit ist $[X, Y] \to \mathrm{Abb}(\pi_0(X), \pi_0(Y)) : [f] \mapsto \pi_0(f)$ wohldefiniert.
Der Funktor $\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ induziert so den Funktor $\bar{\pi}_0 : \mathtt{hTop} \to \mathtt{Set}$.

Beweis: (0) Für $a \in X$ ist $t \mapsto H(t, a)$ ein Weg in Y von $f(a)$ nach $g(a)$.
(1) Demnach gilt $\pi_0(f)([a]_X) \overset{\text{Def}}{=} [f(a)]_Y \overset{(0)}{=} [g(a)]_Y \overset{\text{Def}}{=} \pi_0(g)([a]_X)$. QED

Der Funktor π_0 ist homotopie-invariant.

Beispiel: Für $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ gilt $\pi_0(X) = \{A < B < C < D\}$ mit den Wegkomponenten $A =]-\infty, -1[$, $B =]-1, 0[$, $C =]0, 1[$, $D =]1, \infty[$.
Für $Y = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ gilt $\pi_0(Y) = \{A < E < D\}$ mit $E =]-1, 1[$.

Für $f : X \to Y : x \mapsto |x|$ gilt $\pi_0(f) : A \mapsto D,\ B \mapsto E,\ C \mapsto E,\ D \mapsto D$.
Für $g : X \to Y : x \mapsto x^2$ gilt $\pi_0(g) : A \mapsto D,\ B \mapsto E,\ C \mapsto E,\ D \mapsto D$.
Es gilt $H : f \simeq g$ dank affiner Homotopie $H(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$.

☺ Hier sind $f, g : X \to Y$ homotop gdw $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. Allgemein gilt:

Satz G4s: Wann genügt π_0 zur Homotopie-Klassifikation?

Die Räume $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ und $Y = \bigsqcup \pi_0(Y)$ seien topologische Summen.

(1) Dank UAE gilt $\mathcal{C}(X, Y) = \prod_{A \in \pi_0(X)} \coprod_{B \in \pi_0(Y)} \mathcal{C}(A, B)$.
Modulo Homotopie folgt $[X, Y] = \prod_{A \in \pi_0(X)} \coprod_{B \in \pi_0(Y)} [A, B]$.

(2) Gilt $[A, B] = \{*\}$ für alle $A \in \pi_0(X)$ und $B \in \pi_0(Y)$,
dann ist $[X, Y] \to \mathrm{Abb}(\pi_0(X), \pi_0(Y)) : [f] \mapsto \pi_0(f)$ bijektiv.

☺ Letzteres gilt dank G4B insbesondere falls $A \simeq *$ für alle $A \in \pi_0(X)$ oder falls $B \simeq *$ für alle $B \in \pi_0(Y)$ gilt, wie in unserem obigen Beispiel.

Homotopie-Äquivalenz topologischer Räume

Erinnerung: Ein **Homöomorphismus** $(f, g) : X \cong Y$ besteht aus stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Die beiden Räume X und Y sind so gesehen **topologisch gleich**:
Die Abbildungen leisten eine (topologisch) verlustfreie Übersetzung.

Dies ist eine sehr starke und oft zu starre Forderung. Die punktierte Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ sind **topologisch ähnlich**:

Definition G4N: Homotopie-Äquivalenz

Eine **Homotopie-Äquivalenz** $(H, K) : (f, g) : X \simeq Y$ besteht aus stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit Homotopien $H : g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $K : f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, das heißt, f und g sind zueinander **homotopie-invers**

Meist schreibt man nur kurz $(f, g) : X \simeq Y$, wenn die Homotopien (H, K) aus dem Kontext klar sind oder ihre explizite Nennung unterdrückt wird.

Abkürzend nennen wir allein $f : X \to Y$ eine Homotopie-Äquivalenz, wenn hierzu $g : Y \to X$ stetig existiert mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

Wir nennen X und Y dann **homotopie-äquivalent**, geschrieben $X \simeq Y$.

Homotopie-Äquivalenz vergröbert... und vereinfacht!

Beispiel G4o: Es gilt $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{C}^\times$, aber $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^\times$.

Für $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathrm{GL}_1 \mathbb{C}$ und $\mathbb{S}^1 = \mathrm{GU}_1 \mathbb{C}$ gilt $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{C}^\times$, aber $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^\times$.

(1) $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{C}^\times$: Je zwei Punkte $a \neq b$ trennen $\mathbb{S}^1$, nicht jedoch $\mathbb{C}^\times$.
Eine weitere topologische Invariante: $\mathbb{S}^1$ ist kompakt, $\mathbb{C}^\times$ nicht.

(2) $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^\times$: Inklusion $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times : z \mapsto z$ und radiale Retraktion $g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z/|z|$ erfüllen $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $f \circ g : z \mapsto z/|z|$, somit $H : f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}$ vermöge $H : [0,1] \times \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : (t, z) \mapsto tz + (1-t)z/|z|$.

Bemerkung: Für alle stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gilt:

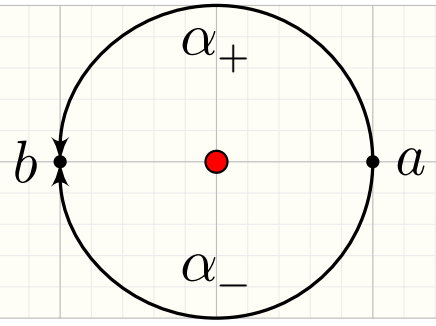
$$(f,g) : X \cong Y \implies (f,g) : X \simeq Y \implies (\pi_0(f), \pi_0(g)) : \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$$

Dies vergröbert und vereinfacht. Die Umkehrungen gelten nicht!

Es gilt $\mathbb{R}^1 \not\cong \mathbb{R}^2$ (G2D), aber $\mathbb{R}^1 \simeq \mathbb{R}^2 \simeq *$ (G4B). Es gilt $\mathbb{S}^1 \not\simeq \mathbb{S}^2$, etwa dank Homotopie-Invarianz der Euler–Charakteristik $\chi(\mathbb{S}^1) = 0 \neq 2 \neq \chi(\mathbb{S}^2)$, dennoch $(\pi_0(f), \pi_0(g)) : \pi_0(\mathbb{S}^1) \cong \pi_0(\mathbb{S}^2)$ für jedes Paar $(f,g) : \mathbb{S}^1 \rightleftarrows \mathbb{S}^2$.

Relative Homotopie

Wir verfeinern den Homotopie-Begriff für Abbildungen $f : X \to Y$, indem wir verlangen, dass sich die Punkte in $A \subseteq X$ nicht bewegen:



$X = [0,1]$, $Y = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
$\alpha_\pm : [0,1] \to \mathbb{C}^\times : t \mapsto \mathrm{e}^{\pm \pi \mathrm{i} t}$.
Im Raum Y gilt $\alpha_- \simeq \alpha_+$ aber nicht $\alpha_- \simeq \alpha_+$ relativ $A = \{0,1\}$.

Definition G5A: Homotopie relativ zu einem Teilraum

Eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y$ heißt **Homotopie relativ zum Teilraum** $A \subseteq X$, wenn $H(t,a) = H(0,a)$ für alle $t \in [0,1]$ und $a \in A$ gilt.

Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ mit $f|_A = g|_A$ heißen **homotop relativ** A, wenn es eine Homotopie $H : [0,1] \times X \to Y$ relativ A gibt von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$, geschrieben $H : f \simeq g : X \to Y \operatorname{rel} A$.

Im Spezialfall $A = \emptyset$ erhalten wir die übliche (absolute) Homotopie.
Wie im absoluten Fall ist Homotopie relativ A eine Äquivalenzrelation.

Relative Homotopie

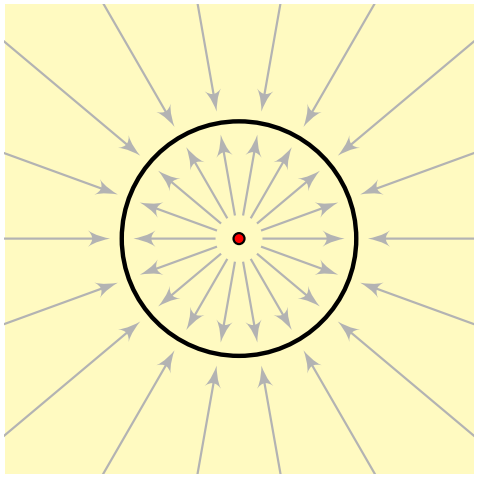
Eine Homotopie $H : f \simeq g : X \to Y$ ist eine stetige Deformation von der Abbildung $H_0 = f : X \to Y$ zu der Abbildung $H_1 = g : X \to Y$. Relativ $A \subseteq X$ verlangen wir, dass Punkte $x \in A$ nicht bewegt werden, das heißt $f(x) = H(t,x) = g(x)$ für alle $t \in [0,1]$. Damit kontrollieren wir Homotopien genauer und erhalten schärfere Begriffe und Methoden.

Bemerkung: Die Frage nach einer Homotopie $H : f \simeq g \operatorname{rel} A$ ist ein Problem der stetigen Fortsetzung, vergleiche den Satz E5N von Tietze.

Das skizzierte Beispiel zeigt zwei Wege $\alpha_\pm : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ mit gleichem Startpunkt $+1$ und gleichem Zielpunkt -1. Wir fragen nach Homotopie bei festgehaltenen Endpunkten. Physikalisch denken wir an zwei Seile, die an ihren Enden ± 1 fixiert sind. Anschaulich scheint plausibel, dass eine solche Homotopie von α_+ nach α_- wohl nicht möglich ist. Das gilt tatsächlich und wird uns noch viel nützen. Der Nachweis ist erstaunlich knifflig und wird uns in Kapitel J mit der Umlaufzahl gelingen.

Übung: Wenn Sie die Umlaufzahl schon aus der (reellen / komplexen) Analysis kennen, dann können Sie hier sofort $\alpha_+ \not\simeq \alpha_- \operatorname{rel} A$ zeigen.

Retrakte und Deformationsretrakte



Beispiel: Die Kreislinie $A = \mathbb{S}^1$ ist ein Retrakt in $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dank Inklusion $\iota : A \hookrightarrow X$ und radialer Retraktion $\rho : X \twoheadrightarrow A : x \mapsto x/|x|$, denn $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_A$.

Zwar gilt $\iota \circ \rho \neq \mathrm{id}_X$, doch immerhin $H : \iota \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X$ dank $H : [0,1] \times X \to X : (t,x) \mapsto (1-t)x + tx/|x|$. Die Punkte $a \in A$ werden dabei nicht bewegt.

Definition G5c: Retrakt und Deformationsretrakt

Seien $\iota : A \to X$ und $\rho : X \to A$ stetig. Das Paar $(\iota, \rho) : A \rightleftarrows X$ heißt...

Bezeichnung für (ι, ρ)	Bedingung an $\rho \circ \iota$	Bedingung an $\iota \circ \rho$
Retrakt	$\rho \circ \iota = \mathrm{id}_A$	–
schwacher Retrakt	$\rho \circ \iota \simeq \mathrm{id}_A$	–
Homöomorphismus	$\rho \circ \iota = \mathrm{id}_A$	$\iota \circ \rho = \mathrm{id}_X$
Homotopie-Äquivalenz	$\rho \circ \iota \simeq \mathrm{id}_A$	$\iota \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X$
Deformationsretrakt	$\rho \circ \iota = \mathrm{id}_A$	$\iota \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X$
starker Deformationsretrakt	$\rho \circ \iota = \mathrm{id}_A$	$\iota \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X$ rel $\iota(A)$

Erste einfache aber grundlegende Beispiele

Beispiele: In jedem Raum X ist jeder einpunktige Teilraum $A = \{a\} \subseteq X$ ein Retrakt vermöge $\iota : \{a\} \hookrightarrow X$ und $\rho : X \twoheadrightarrow \{a\}$, und ein Deformationsretrakt gdw X zusammenziehbar ist (G5E).

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig zum Zentrum a, so ist $\iota : \{a\} \hookrightarrow X$ ein starker Deformationsretrakt dank $H : \mathrm{id}_X \simeq \rho \circ \iota$ mit $H(t,x) = (1-t)x + ta$.

Satz G5D:

Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist ein Retrakt vermöge $\rho(x) = x/|x|$, sogar ein starker Deformationsretrakt dank $H : \iota \circ \rho \simeq \mathrm{id}$ rel $\mathbb{S}^n$ (affin).

Der Ball $\mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Retrakt vermöge $\rho(x) = x/|x|$ für $|x| \geq 1$, sogar ein starker Deformationsretrakt dank $H : \iota \circ \rho \simeq \mathrm{id}$ rel $\mathbb{D}^n$ (affin).

Auch negative Resultate sind interessant, doch meist schwieriger: Wir benötigen hierzu explizite Hindernisse, typischerweise Invarianten.

Es existiert keine Retraktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ oder $\rho : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ (J4E).
Übung: Für $n = 1$ zeigen Sie dies mit dem Zwischenwertsatz (C3A).

Erinnerung: Gram–Schmidt muss mit!

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$. Gegeben sei eine Basis $a_1, \dots, a_n \in V$. Das **Gram–Schmidt–Verfahren** konstruiert hieraus eine Orthonormalbasis $q_1, \dots, q_n \in V$. Ausführlich:

$$
\begin{aligned}
b_1 &:= a_1, & q_1 &:= b_1/|b_1|,\\
b_2 &:= a_2 - q_1\langle q_1 \,|\, a_2 \rangle, & q_2 &:= b_2/|b_2|,\\
b_3 &:= a_3 - q_2\langle q_2 \,|\, a_3 \rangle - q_1\langle q_1 \,|\, a_3 \rangle, & q_3 &:= b_3/|b_3|,\\
&\vdots & &\vdots\\
b_n &:= a_n - \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} q_k\langle q_k \,|\, a_n \rangle, & q_n &:= b_n/|b_n|.
\end{aligned}
$$

Aus $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ gewinnen wir so $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$. Dabei gilt $Q = AT$ und $A = QR$ mit oberen Dreiecksmatrizen $R = T^{-1}$.

$$
T, R \;\in\; \mathrm{B}_n^+\mathbb{K} := \begin{bmatrix} \mathbb{R}_{>0} & \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & \ddots & \mathbb{K} \\ 0 & 0 & \mathbb{R}_{>0} \end{bmatrix} \qquad \text{konvex!}
$$

Schreiben Sie diese **QR-Zerlegung** $g : A \mapsto (Q, R)$ für $n \leq 3$ explizit aus!

Erinnerung: Gram–Schmidt muss mit!

Die allgegenwärtigen Matrixgruppen fordern und fördern die Vernetzung verschiedener Themen in Ihrem umfassenden Mathematikstudium.

Den Gauß–Algorithmus und das Gram–Schmidt–Verfahren kennen und lieben Sie aus der Linearen Algebra. Diese Methoden spielen dort eine zentrale Rolle, sowohl für konkrete Rechnungen in Beispielen und Anwendungen als auch für den Aufbau der Theorie.

Ihre Bedeutung geht jedoch weit darüber hinaus: Diese Methoden und ihre Weiterentwicklungen sind wichtig für die gesamte Mathematik.

Die Numerik untersucht und entwickelt sie unter numerischen Aspekten wie algorithmische Komplexität und Stabilität unter Störungen.

In der Topologie betrachten wir sie unter topologischen Aspekten, sie konstruieren Homöomorphismen und Homotopie-Äquivalenzen.

In Algebra und Analysis und Geometrie sind die klassischen Gruppen, allgemein Lie–Gruppen, zentrale Untersuchungsgegenstände und auch Werkzeuge. Sie sind ein reicher Quell an Beispielen und inspirierenden Fragen, von konkret-kompliziert bis abstrakt-elegant.

Das Gram–Schmidt–Verfahren liefert Retraktionen $\rho : \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \to \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ sogar starke Deformationsretraktionen. Ausführlich erhalten wir:

Beispiel / Übung G5G: Gram–Schmidt als Deformationsretraktion

(1) Wir erhalten den Homöomorphismus $(h, g) : \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \times \mathrm{B}_n^+\mathbb{R} \cong \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ aus Multiplikation $h : (Q, R) \mapsto QR$ und QR-Zerlegung $g : A \mapsto (Q, R)$. Unsere expliziten Formeln für h und g zeigen jeweils die Stetigkeit.

(2) Die Gruppe $\mathrm{B}_n^+\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ ist konvex, $\mathrm{B}_n^+\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^m$ mit $m = n(n+1)/2$.

Hierin ist die Untergruppe $\{1\} \subseteq \mathrm{B}_n^+\mathbb{R}$ ein starker Deformationsretrakt, somit auch $\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}$. Speziell für $n = 2$ folgt $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R} \simeq \mathrm{GO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ (dank Satz F1Q).

Aus $\pi_0\,\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} = \{\mathrm{GL}_n^\pm\,\mathbb{R}\}$ folgt $\pi_0\,\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} = \{\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} = \mathrm{GO}_n^+\,\mathbb{R}, \mathrm{GO}_n^-\,\mathbb{R}\}$.

(3) Ebenso ist $\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} \subseteq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$ ein starker Deformationsretrakt.
Die Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend, also auch $\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C}$.
Speziell für $n = 1$ finden wir erneut $\mathrm{GU}_1\,\mathbb{C} = \mathbb{S}^1 \leftrightarrows \mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1\,\mathbb{C}$.

LA Pride – Lineare Algebra und stolz darauf!

🙂 Wie anfangs versprochen, Homotopie vereinfacht und strukturiert!
Wir wenden dies auf die wunderschönen klassischen Gruppen an,
die Sie bereits seit der Linearen Algebra kennen, nutzen und lieben.
Das sind ehrliche und wichtige Beispiele, sie lohnen jede Mühe.

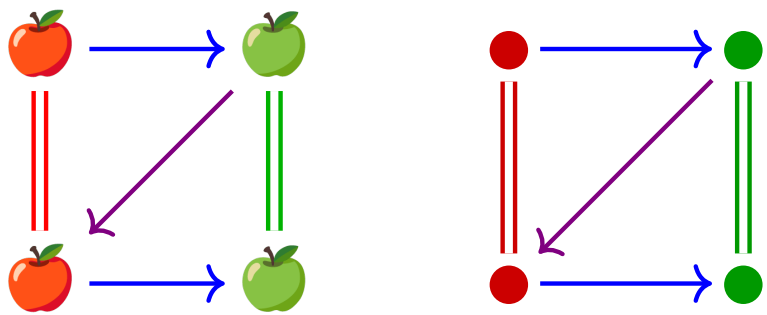
Die Gruppen $\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ sind recht verschieden: Die orthogonale Gruppe $\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ ist kompakt, die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ nicht. Zudem sind beides Mannigfaltigkeiten – verschiedener Dimension! Dasselbe gilt für die Gruppen $\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} \subseteq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$ über dem Körper $\mathbb{C}$.

Wenn wir jedoch stetige Deformationen erlauben, diese Räume also nur bis auf Homotopie-Äquivalenz betrachten, so wird alles viel einfacher und wesentlich übersichtlicher: Wie oben erklärt gilt $\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \simeq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} \simeq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$, sogar als starke Deformationsretrakte.

Liebend gerne würde ich Ihnen dies in eindrücklichen Bildern vorführen. Für $\mathrm{GU}_1\,\mathbb{C} = \mathbb{S}^1 \not\rightleftarrows \mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1\,\mathbb{C}$ gelingt dies wunderbar, doch danach ist unsere leider nur dreidimensionale Anschauung völlig unzureichend. Wo die Anschauung versagt, helfen präzise Begriffe und Techniken.

Kapitel H

Die Sprache der Kategorien



Oublions les choses, ne considérons que les rapports.
[Vergessen wir die Dinge, betrachten wir nur die Beziehungen.]
Georges Braques (1882–1963), Mitbegründer des Kubismus

Inhalt dieses Kapitels H

1. Kategorien… organisieren die Mathematik.
2. Kommutative Diagramme… schaffen Überblick.
3. Universelle Objekte… lösen universelle Probleme.
4. Funktoren… übersetzen zwischen Kategorien.
5. Transformationen… übersetzen zwischen Funktoren.
6. Adjungierte Funktoren… begegnen uns überall.

Einführung und Überblick

Gewisse Phänomene beobachten wir immer wieder. Das gilt insbesondere in der Mathematik, mit ausreichend Erfahrung und geschultem Blick. Sie verdienen einen Namen, nur so können wir darüber sprechen, präzise danach forschen und effizient damit arbeiten. Erste Beispiele:

Dinge verarbeiten, etwas tun	$\longrightarrow$	Mengen und Abbildungen
Operationen, Symmetrien	$\longrightarrow$	Monoide und Gruppen
Addition, Multiplikation	$\longrightarrow$	Ringe und Körper
Winkel, Längen messen	$\longrightarrow$	Skalarprodukt, Norm
Abstand und Stetigkeit	$\longrightarrow$	Metrik und Topologie

Abstraktion hilft konkret! Sie strukturiert, ordnet und vereinfacht. Dadurch werden ihre Einzelfälle effizient und präzise zusammengefasst. Diese ordnende Vorgehensweise ist Kennzeichen jeder Wissenschaft und in der Mathematik besonders klar ausgeprägt und systematisiert.

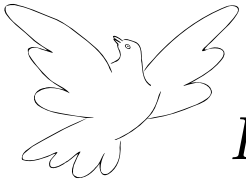
Ein gut verstandenes Beispiel nützt mehr als drei unverstandene Sätze. Ein gut verstandener Satz bündelt 1003 Beispiele. Nutzen Sie beides!

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
Ludwig Wittgenstein (1889–1951), *Tractatus logico-philosophicus* (1921)

Die Sprache der **Kategorien** hilft uns, häufig wiederkehrende Strukturen und Argumente effizient zu formulieren und prägnant zu kommunizieren. Genau dies ist das Ziel und der Nutzen jeder hochentwickelten Sprache: Sie ermöglicht uns, verschiedene Phänomene einheitlich zu beschreiben, Analogien zu erkennen und strukturelle Gemeinsamkeiten zu erfassen. Genau dies erleben und praktizieren Sie in allen Gebieten der Mathematik seit Ihren ersten Semestern. Diese Erfahrung können wir nun bündeln.

Die **Kategorientheorie** ist in diesem Sinne die Grammatik dieser Sprache, damit können wir nicht nur Kategorien in konkreten Beispiele anwenden, sondern auch allgemeine Aussagen und Konstruktionen für Kategorien und Funktoren formulieren und beweisen. Die **Kategorienpraxis** nutzt diese Sprache intuitiv, manchmal bewusst und noch öfter unbewusst. Wir wollen nun unsere guten Erfahrungen systematisieren und unsere erfolgreiche Sprache bewusst machen: von der Praxis zur Theorie!

Wo können Sie mehr erfahren?



Category theory takes a bird's eye view of mathematics. From high in the sky, details become invisible, but we can spot patterns that were impossible to detect from ground level.

📖 Tom Leinster: Basic Category Theory (2014), online frei erhältlich
Saunders MacLane: Categories for the Working Mathematician (1998)
Emily Riehl: Category Theory in Context (2014)

Je mehr Mathematik Sie bereits kennen, desto mehr Struktur können Sie hier wiedererkennen und im Rückblick illustrative Beispiele genießen. Drei Einführungen mit Blick zur funktionalen Programmierung:

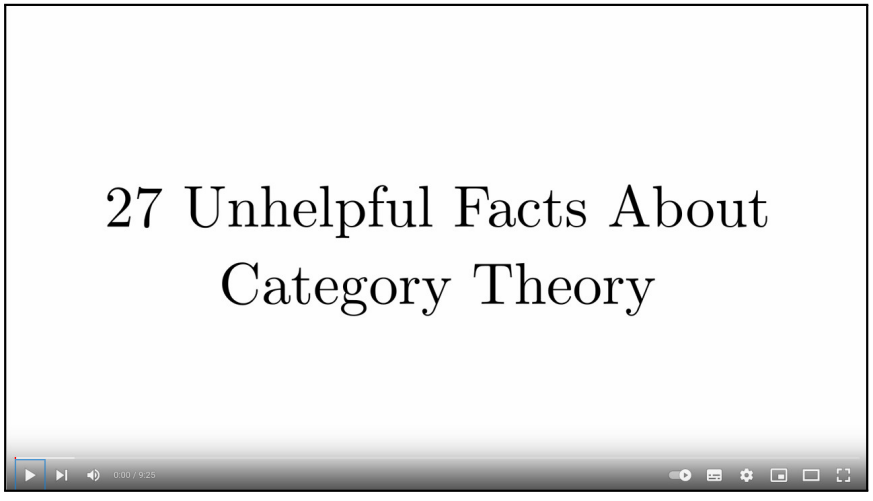
📖 Steve Awodey: Category Theory (2010)
Bartosz Milewski: Category Theory for Programmers (2019)
M. Barr, C. Wells: Category Theory for Computer Science (1998)

Die community-basierte Version ist *The nLab*: eine kollaborative Online-Referenz auf Forschungsniveau. Das sollten Sie mal gesehen haben, sehr beeindruckend und auch recht nerdig, auf eine gute Art.

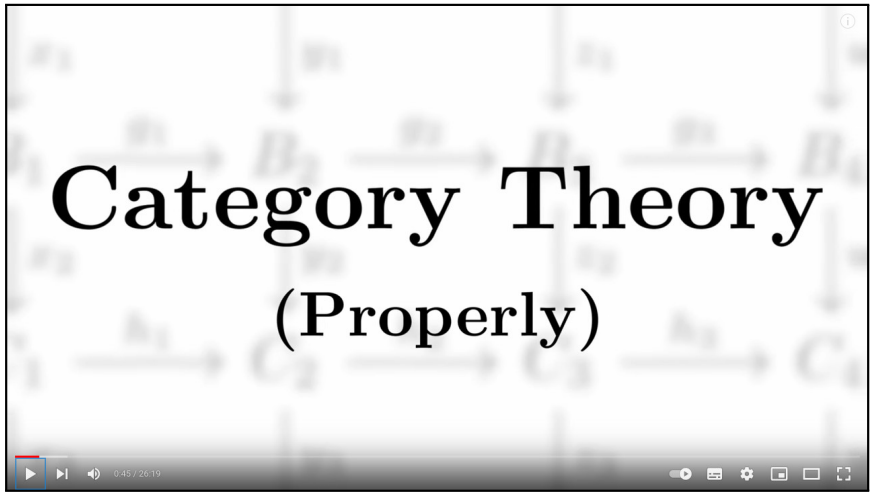
Wo können Sie mehr erfahren?

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut. Insbesondere der Mathematik wird oft Abstraktion vorgeworfen, meist aus pauschalem Unverständnis, ohne Grund noch Nutzen zu verstehen

Innerhalb der Mathematik trifft dieser Vorwurf oft die Kategorientheorie. Ihre Adepten empfinden „abstrakt“ als Lob für elegante Einfachheit und sprechen selbst ironisch-anerkennend von „*general abstract nonsense*“. Hierzu zwei amüsante und doch lehrreiche Videos von Oliver Lugg:



youtu.be/H0Ek86IH-3Y



youtu.be/yAi3XWCBkDo

Lohnt sich die Mühe?

Viele halten Kategorien für abstrakten Quatsch,
doch nur Wenige haben Recht.

Auf Nachfrage von Studierenden der Topologie im SoSe 2022 organisierte ich im WiSe 2022/23 ein Seminar zur Kategorientheorie. Gespräche in den Folgesemestern zeigten: Wider alle Erwartungen, Kategorien haben Anwendungen! Wer die Sprache der Kategorien beherrscht, kann diese Struktur überall erkennen und gewinnbringend nutzen, natürlich in der Mathematik, und sogar in der Informatik und der Physik.

Die eine oder der andere ist jetzt enttäuscht, vielleicht sogar alle beide. Versprochen wurde ein wunderschönes Thema allein um seiner Eleganz und der tieferen Erkenntnis willen, reine Mathematik garantiert ohne Anwendungszwang, *pour l'honneur de l'esprit humain*. Nun stellt sich heraus, dass selbst die Kategorientheorie im mathematischen Alltag durchaus nutzbringend eingesetzt wird, zwar nicht muss, aber doch kann.

Wir üben uns in Toleranz, auch dieser Kollateralnutzen ist willkommen!

Lohnt sich die Mühe?

This concept of category is an omni-purpose affair. […]
It frames a possible template for any mathematical theory:
the theory should have nouns and verbs, i.e., objects, and morphisms, and there should be an explicit notion of composition related to the morphisms;
the theory should, in brief, be packaged by a category.

There is hardly any species of mathematical object that doesn't fit into this convenient, and often enlightening, template.

Barry Mazur, *When is one thing equal to some other thing?* (2007)

Wir Menschen können eine Sprache auf zwei Arten lernen: als Kind typischerweise intuitiv durch Nachahmung und interaktive Erfahrung, später dann ergänzt durch Regeln und eine systematische Grammatik.

Die Sprache der Kategorien ist ein extrem mächtiges Hilfsmittel. Damit können Sie einfache Dinge verblüffend kompliziert ausdrücken, aber glücklicherweise auch sehr komplizierte Dinge einfach formulieren. Das ist mit natürlichen Sprachen nicht anders, ihr Nutzen entsteht durch guten Gebrauch. Üben Sie das rechte Maß an Abstraktion!

Wo begegnen uns Kategorien? Überall!

In der Topologie untersuchen und nutzen wir stetige Abbildungen:

$$\texttt{Top} = (\ \underbrace{\text{topologische Räume } A}_{\text{(a) Objekte}},\ \underbrace{\text{stetige Abb. } f : A \to B}_{\text{(b) Morphismen}},\ \underbrace{\text{Komposition } \circ}_{\text{(c) Verknüpfung}}\ )$$

(a) Objekte sind topologische Räume $A, B, C, D, \ldots$.
(b) Morphismen sind stetige Abb. $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, ...
Für jeden Raum B ist die Identität $\mathrm{id}_B : B \to B : b \mapsto b$ stetig.
(c) Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ stetig, so auch ihre Verknüpfung
$g \circ f : A \to C$ gegeben durch die Komposition $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

(0) Jede Abbildung f bestimmt ihren Start $s(f) = A$ und ihr Ziel $t(f) = B$.

$$f : A \to B$$

(1) Bei Verknüpfung ist id_B neutral: Für alle $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt

$$\mathrm{id}_B \circ f = f \quad \text{und} \quad g \circ \mathrm{id}_B = g.$$

(2) Die Verknüpfung ist assoziativ: Für verknüpfbare Abbildungen gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

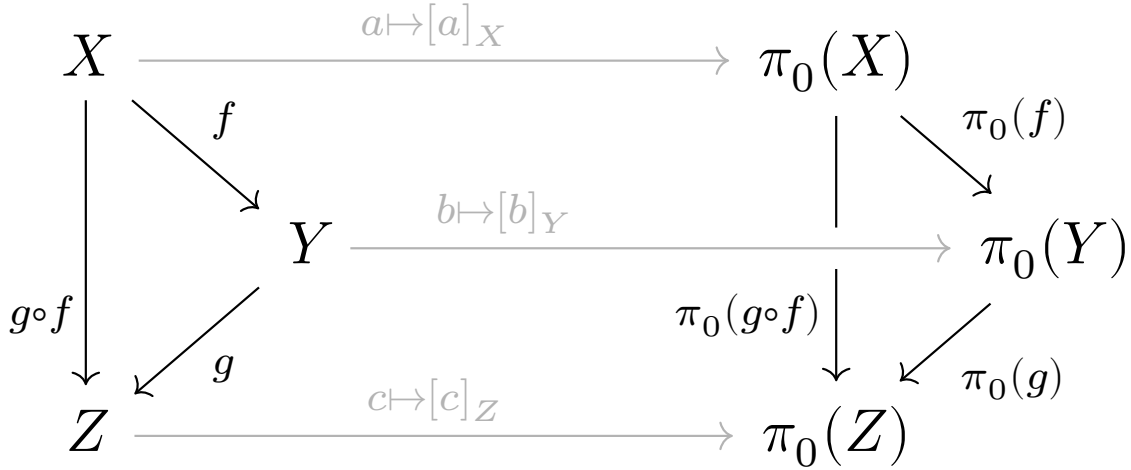
Wo begegnen uns Kategorien? Überall!

Grundlegend für die gesamte Mathematik sind Mengen und Funktionen:

$$\texttt{Set} = (\ \underbrace{\text{Mengen } X}_{\text{(a) Objekte}},\ \underbrace{\text{Abbildungen } f : X \to Y}_{\text{(b) Morphismen}},\ \underbrace{\text{Komposition } \circ}_{\text{(c) Verknüpfung}}\ )$$

Auch diese Daten (a,b,c) erfüllen die Rechenregeln (0,1,2) einer **Kategorie!**
Wir nutzen diese **Kategorien** und zudem **Funktoren** zwischen ihnen:

Top



Set

Der Funktor $\pi_0 : \texttt{Top} \to \texttt{Set}$ ordnet jedem topologischen Raum X eine Menge $\pi_0(X)$ zu und jeder stetigen Abbdildung $f : X \to Y$ eine Funktion $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ und respektiert Identitäten und Kompositionen.

Wo begegnen uns Kategorien? Überall!

Die **Lineare Algebra** untersucht und nutzt lineare Abbildungen:

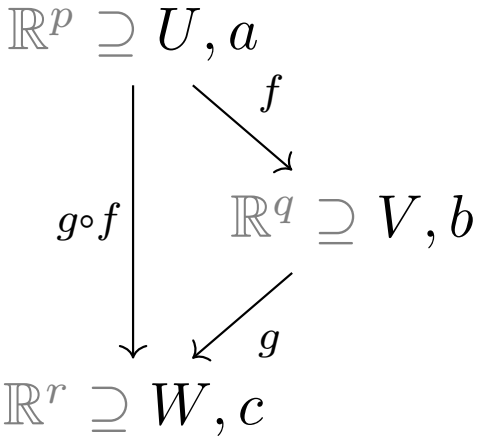
$$\mathtt{Vec}_K = (\underbrace{K\text{–Vektorräume } V}_{\text{(a) Objekte}},\ \underbrace{K\text{–lineare Abb. } f : V \to W}_{\text{(b) Morphismen}},\ \underbrace{\text{Komposition} \circ}_{\text{(c) Verknüpfung}})$$

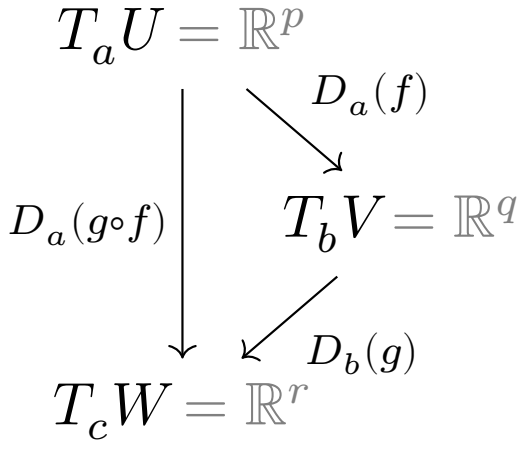
Die **Analysis** untersucht und nutzt differenzierbare Abbildungen:

$$\mathscr{C}^1 = (\underbrace{U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}}_{\text{(a) Objekte}},\ \underbrace{f : U \to V \text{ stetig differenzierbar}}_{\text{(b) Morphismen}},\ \underbrace{\text{Komposition} \circ}_{\text{(c) Verknüpfung}})$$

Auch diese Daten (a,b,c) erfüllen die Rechenregeln (0,1,2) einer **Kategorie!**
Die Ableitung $D : \mathscr{C}^1_* \to \mathtt{Vec}_{\mathbb{R}}$ ist dank Kettenregel ein **Funktor!**

$\mathscr{C}^1_*$





$\mathtt{Vec}_{\mathbb{R}}$

Wo begegnen uns Kategorien? Überall!

Die Daten von $\mathtt{Vec}_K$ und $\mathscr{C}^1$ definieren die Objekte und ihre Morphismen; die Verknüpfung $\circ$ ist die für Abbildungen übliche Komposition. Es gilt:
(0) Jede Abbildung f bestimmt ihren Start $s(f)$ und ihr Ziel $t(f)$.
(1) Die Identität ist neutral. (2) Die Verknüpfung ist assoziativ.

Zur Ableitung $D : \mathscr{C}^1_* \to \mathtt{Vec}_{\mathbb{R}}$ müssen wir einen Punkt $a \in U$ angeben, an dem die Ableitung $D_a(f) = f'(a)$ berechnet werden soll.
Dazu besteht $\mathscr{C}^1_*$ aus Objekten (U, a) mit $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und U offen sowie Morphismen $f : (U, a) \to (V, b)$ mit $f : U \to V$ stetig diff'bar und $f(a) = b$.

Die Ableitung D ordnet (U, a) den Tangentialraum $T_aU = \mathbb{R}^n$ zu und $f : (U, a) \to (V, b)$ die Ableitung $D_af : T_aU \to T_bV$, aka Jacobi–Matrix.
Dabei gilt $D(\mathrm{id}_{(U,a)}) = \mathrm{id}_{T_aU}$ und die Kettenregel $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$.
Das bedeutet kurz gesagt: Die Ableitung D ist ein kovarianter **Funktor!**

☺ Wer hätte das gedacht: Sie benutzen Kategorien und Funktoren nicht nur hier in der Topologie, sondern schon seit einigen Semestern überall in der Mathematik – anfangs noch unbewusst, ohne es zu bemerken. Nun werden Sie sich dieser grundlegenden Struktur bewusst.

Diese Begriffe wollen wir nun präzisieren und nutzen lernen.

Diese ersten Beispiele zeigen bereits eindrücklich: Von Anbeginn Ihres Studiums nutzen Sie ganz natürlich Kategorien und Funktoren. Erst zaghaft und unbewusst, dann zunehmend und selbstbewusst.

Wie ein Fisch im Wasser schwimmt, wie ein Vogel in der Luft fliegt, so bewegen Sie sich in Ihrem Mathematikstudium in Kategorien, auch wenn Sie davon vermutlich lange noch nichts bemerken.

Sie benötigen dafür zunächst keine Sprache, um darüber zu reden, Sie tun es einfach. Die diversen Beispiele sehen alle ähnlich aus, doch erst ab einer kritischen Masse lohnt sich die Abstraktion.

Ich denke, die kritische Masse ist nun erreicht: Wir haben genug eindrückliche Beispiele, um diese in geeignete Begriffe zu fassen. Weitere Beispiele werden folgen, die Investition wird sich lohnen.

Schaffen wir also Ordnung! *Simplify your Math!*

All Categories Are Beautiful!

Viele Menschen sind begeistert von Kategorien und bekunden dies auch, daher finden wir überall den Leitspruch: *All Categories Are Beautiful!*

All Categories Are Beautiful!

Hier eine kurze Werbung für Kategorien vor der Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen. *Once you know, you cannot unsee it!*

All Cats Are Beautiful!

Auch unsere Fachgruppe Mathematik liebt Kategorien, engl. *categories*, liebevoll abgekürzt *cats*. Hier sehen wir zwei *emotional support cats*.

Kategorien: Daten und Eigenschaften

Definition H1A: Kategorie

Eine **Kategorie** $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ besteht aus drei **Daten**:

(a) eine Klasse Ob, deren Elemente wir **Objekte** von $\mathtt{C}$ nennen,

(b) zu je zwei Objekten A, B eine Klasse $\mathrm{Mor}(A, B)$ von **Morphismen**,

(c) zu je drei Objekten $A, B, C \in \mathrm{Ob}$ eine **Verknüpfung** von Morphismen,

$$\circ : \mathrm{Mor}(B,C) \times \mathrm{Mor}(A,B) \to \mathrm{Mor}(A,C) : (g,f) \mapsto g \circ f \quad \text{„}g \text{ nach } f\text{“},$$
$$\bullet : \mathrm{Mor}(A,B) \times \mathrm{Mor}(B,C) \to \mathrm{Mor}(A,C) : (f,g) \mapsto f \bullet g \quad \text{„}f \text{ dann } g\text{“}.$$

Diese drei Daten müssen die folgenden drei **Eigenschaften** erfüllen:

(0) **Disjunktion:** Für $(A,B) \neq (A',B')$ gilt $\mathrm{Mor}(A,B) \cap \mathrm{Mor}(A',B') = \emptyset$. Für $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ von $A =: s(f)$ nach $B := t(f)$ schreiben wir $f : A \to B$.

(1) **Identität:** Zu jedem $B \in \mathrm{Ob}$ existiert eine Identität $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}(B,B)$ mit $\mathrm{id}_B \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_B = g$ für alle $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ und $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$.

(2) **Assoziativität:** Es gilt die Gleichheit $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ für alle $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}$ und $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$, $h \in \mathrm{Mor}(C,D)$.

Kategorien: Daten und Eigenschaften

Zur Angabe einer Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ benötigen wir drei **Daten**:
(a) Welche Objekte und (b) welche Morphismen gehören zur Kategorie $\mathtt{C}$?
(c) Wie werden die Morphismen in $\mathtt{C}$ verknüpft? Diese drei Daten (a,b,c) müssen dann noch die drei grundlegenden Eigenschaften (0,1,2) erfüllen.

In unserer Definition H1A einer Kategorie $\mathtt{C}$ sprechen wir nicht von der *Menge* $\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$, sondern vorsichtig von der *Klasse* $\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ aller Objekte in $\mathtt{C}$.

Beispiel: Wir möchten von der Kategorie `Set` aller Mengen sprechen. Diese ist jedoch nachweislich zu groß, um selbst eine Menge zu sein.

Beweis: Die Annahme einer „Menge U aller Mengen“ führt zwangsläufig zu Widersprüchen, insbesondere der **Russelschen Antinomie** (B107):

In der Menge U hätten wir die Teilmenge $R = \{\, x \in U \mid x \notin x \,\}$ aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Dies ist eine Menge, also $R \in U$. Für jede Menge $x \in U$ gilt $x \in R \Leftrightarrow x \notin x$, insbesondere $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.

Das ist eine logische Katastrophe: Wahr und Falsch wären äquivalent! Falls die Allmenge U existiert, so bricht unsere gesamte Logik zusammen. Einziger Ausweg: Die Allklasse U ist selbst keine Menge. QED

Kategorien: Daten und Eigenschaften

Konvention: Eine Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ heißt **klein**, wenn ihre Objektklasse Ob und ihre Morphismenklasse Mor beides Mengen sind. Die Kategorie $\mathtt{C}$ heißt **lokal klein**, wenn zu je zwei Objekten $A, B \in \mathrm{Ob}$ die zugehörige Morphismenklasse $\mathrm{Mor}(A, B)$ eine Menge ist.

Beispiele: Die Kategorie $\mathtt{Set}$ ist nicht klein, aber immerhin lokal klein. Dasselbe gilt für die Kategorien $\mathtt{Top}$ und $\mathtt{Vec}_K$. Die Kategorie $\mathscr{C}^1$ ist klein.

Eigenschaft (0) nutzen wir (unterbewusst) überall in der Mathematik, zuerst bereits wenn wir über Injektivität und Surjektivität sprechen.

Die Eigenschaft (1) bestimmt die Identität id_B zu B eindeutig: Sind $\mathrm{id}_B, \mathrm{id}'_B \in \mathrm{Mor}(B, B)$ neutral, so folgt $\mathrm{id}'_B = \mathrm{id}_B \circ \mathrm{id}'_B = \mathrm{id}_B$.

Die Assoziativität (2) kennen wir von Abbildungen aus den konkreten Beispielen $\mathtt{Set}$, $\mathtt{Top}$, $\mathtt{Vec}_K$, $\mathscr{C}^1$ etc. und fordern sie nun allgemein

⚠ Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen. Es kommt für Kategorien nicht primär darauf an, was die Objekte und Morphismen konkret sind, sondern dass sie die Rechenregeln erfüllen.

Kategorien: Daten und Eigenschaften

Stehen mehrere Kategorien $\mathtt{C}, \mathtt{D}, \ldots$ in Rede, so schreiben wir genauer $A, B, C \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(B, C)$ und $g \circ_{\mathtt{C}} f$, oder bequem kürzer $A, B, C \in \mathtt{C}$, $f \in \mathtt{C}(A, B)$, $g \in \mathtt{C}(B, C)$ und $g \circ f$.

Die Linksreihung ist traditionell üblich, aber manchmal unglücklich. Wir sollten zur Betonung genauer von einer **Linkskategorie** sprechen:

$$\circ : \mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(A, C) : (g, f) \mapsto g \circ f \quad \text{„}g \text{ nach } f\text{“}$$

Eine **Rechtskategorie** hat als Verknüpfung entsprechend:

$$\bullet : \mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C) \to \mathrm{Mor}(A, C) : (f, g) \mapsto f \bullet g \quad \text{„}f \text{ dann } g\text{“}$$

Beide Schreibweisen sind äquivalent und austauschbar und nur eine Frage der gemeinsamen Tradition oder des persönlichen Geschmacks. Ich werde gelegentlich die Schreibweise als Rechtskategorie nutzen, wenn dies der intuitiven Lese- und Schreibrichtung entspricht. (H115) Die erprobte Notation $f \bullet g = g \circ f$ vermeidet dabei Missverständnisse. In jeder konkreten Kategorie gilt $f \bullet g = g \circ f : a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a))$.

Unterkategorien: Idee

Wir beginnen mit einer Kategorie, etwa Top. (A) Darin erhalten wir eine Unterkategorie, indem wir nur gewisse Objekte zulassen, etwa

$$\texttt{Haus} = (\text{ Hausdorff–Räume } X, \text{ stetige Abb. } f : X \to Y, \text{ Komposition } \circ).$$

Gleiches gilt für (lokal-)kompakte (Hausdorff–)Räume, oder allgemein für topologische Räume mit bestimmten zusätzlichen Eigenschaften.

(B) Alternativ können wir nur gewisse Morphismen zulassen, etwa

$$\texttt{Emb} = (\text{ top. Räume } X, \text{ Einbettungen } f : X \to Y, \text{ Komposition } \circ).$$

Gleiches gilt für Identifizierungen, offene / abgeschlossene / eigentliche Abbildungen, (lokale) Homöomorphismen und viele weitere Beispiele.

Hierbei ist zu prüfen, dass jede Identität diese Eigenschaft erfüllt, und die geforderte Eigenschaft bei Komposition erhalten bleibt.

Damit sind die Unterkategorien Haus, Emb, usw. selbst Kategorien. Diese grundlegende Forderung formulieren wir nun als Definition.

Unterkategorien: Präzisierung

Definition H1B: Unterkategorie

Eine **Unterkategorie** $\mathtt{S} = (\mathrm{Ob}_{\mathtt{S}}, \mathrm{Mor}_{\mathtt{S}}, \circ)$ in $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}, \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}, \circ)$, geschrieben $\mathtt{S} \leq \mathtt{C}$, besteht aus (a) einer Teilklasse $\mathrm{Ob}_{\mathtt{S}} \subseteq \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ von Objekten sowie (b) für jedes Paar $A, B \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{S}}$ einer Teilklasse $\mathrm{Mor}_{\mathtt{S}}(A,B) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(A,B)$.

Dabei verlangen wir folgende Eigenschaften:
(1) Für jedes Objekt $B \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{S}}$ der Unterkategorie gilt $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{S}}(B,B)$.
(2) Für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{S}}(A,B)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{S}}(B,C)$ gilt $g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{S}}(A,C)$.

Damit ist $\mathtt{S}$ eine Kategorie mit der von $\mathtt{C}$ eingeschränkten Verknüpfung.

Die Unterkategorie $\mathtt{S} \leq \mathtt{C}$ heißt **weit**, wenn $\mathrm{Ob}_{\mathtt{S}} = \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ gilt, also nur die Morphismen eingeschränkt werden, aber nicht die Objekte, und **voll**, wenn $\mathrm{Mor}_{\mathtt{S}}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(A,B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{S}}$ gilt, also nur die Objekte eingeschränkt werden, aber nicht die Morphismen.

Beispiele: Die Unterkategorie $\mathscr{C}^1 \leq \mathtt{Top}$ ist weder weit noch voll.
Die Unterkategorie $\mathtt{Emb} \leq \mathtt{Top}$ aller Einbettungen ist weit, nicht voll.
Die Unterkategorie $\mathtt{Haus} \leq \mathtt{Top}$ aller Hausdorff–Räume ist voll, nicht weit.

Unterkategorien: Anwendungen

🙂 Unterkategorien sind eine extrem vielseitige und bequeme Methode, um neue Kategorien aus alten zu konstruieren. Das hilft erfreulich oft. Dieses Vorgehen durch Einschränkung ist sehr natürlich, und in Ihrem Studium haben Sie schon Dutzende von Unter/Kategorien gesehen!

🙂 Die Definition von $\mathtt{S} \leq \mathtt{C}$ ist dann naheliegend: Wir wollen, dass $\mathtt{S}$ selbst eine Kategorie ist mit denselben Kompositionen und Identitäten. Sie kennen Unterstrukturen von zahlreichen mathematischen Strukturen wie Unter/Gruppen, Unter/Vektorräumen, etc… nun Unter/Kategorien.

🙂 Für eine volle Unterkategorie $\mathtt{S} \leq \mathtt{C}$ ist nichts weiter zu prüfen: Dank der Gleichheit $\mathrm{Mor}_{\mathtt{S}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(A, B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{S}}$ sind beide Bedingungen (1) und (2) in H1B automatisch erfüllt. Neutralität und Assoziativität vererben sich von $\mathtt{C}$ nach $\mathtt{S}$.

⚠ Nur bei Einschränkung der Morphismen zu $\mathrm{Mor}_{\mathtt{S}}(A, B) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(A, B)$ müssen wir die beiden Eigenschaften (1) und (2) tatsächlich prüfen. Damit ist $\mathtt{S}$ eine Kategorie mit der von $\mathtt{C}$ eingeschränkten Verknüpfung: Disjunktion, Neutralität und Assoziativität übertragen sich von $\mathtt{C}$ auf $\mathtt{S}$.

Grundlegende Beispiele: Mengen und Relationen

Grundlegend für die gesamte Mathematik sind Mengen und Relationen:

$$\begin{aligned}
\texttt{Rel} &= (\text{Mengen } X, \text{Relationen } F \subseteq X \times Y, \quad \text{Komposition } \circ), \\
\texttt{Set} &= (\text{Mengen } X, \text{Abbildungen } f : X \to Y, \text{Komposition } \circ), \\
\texttt{Set}_{\subseteq} &= (\text{Mengen } X, \text{Inklusionen } \iota : X \subseteq Y, \quad \text{Komposition } \circ). \\
\texttt{FinSet} &= (\text{endliche } X, \text{Abbildungen } f : X \to Y, \text{Komposition } \circ), \\
\texttt{NatSet} &= (n \in \mathbb{N}, \qquad \text{Abbildungen } f : m \to n, \text{Komposition } \circ).
\end{aligned}$$

Wie üblich ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen
$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, und rekursiv $n = \{0, \dots, n-1\}$.

In den Kategorien `Set` und `FinSet` erhalten wir zudem interessante Unterkategorien durch Injektionen und Surjektionen und Bijektionen.
In `NatSet` haben wir die Unterkategorie der monotonen Abbildungen.

Übung: Warum sind dies Unter/Kategorien? Welche sind weit? voll?

☺ Diese Beispiele sind sehr konkrete und vertraute Kategorien.
Darauf aufbauend betrachten wir Mengen mit zusätzlicher Struktur...

Relationen und Abbildungen

Eine **Relation zwischen den Mengen X und Y** ist eine Teilmenge $F \subseteq X \times Y$ des Produkts. Zu jeder Menge X haben wir ihre **Diagonale**

$$\Delta_X = \{ (x,x) \,|\, x \in X \} \subseteq X \times X.$$

Zu $F \subseteq X \times Y$ haben wir ihre **Inverse** oder **Umkehrung**

$$F^{-1} = F^\top = \{ (y,x) \,|\, (x,y) \in F \} \subseteq Y \times X.$$

Zu $F \subseteq X \times Y$ und $G \subseteq Y \times Z$ ist ihre **Komposition**

$$H =: F \bullet G = G \circ F \subseteq X \times Z \quad \text{definiert durch}$$
$$H = \{ (x,z) \in X \times Z \,|\, \exists y \in Y : (x,y) \in F \wedge (y,z) \in G \}.$$

Die Linkskomposition $\circ$ ist üblich, die Rechtskomposition $\bullet$ natürlich.

Assoziativität $(F \bullet G) \bullet H = F \bullet (G \bullet H)$ bzw. $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$.
Neutralität $\Delta_X \bullet F = F \bullet \Delta_Y = F$ bzw. $F \circ \Delta_X = \Delta_Y \circ F = F$.
Umkehrung $(F \bullet G)^\top = G^\top \bullet F^\top$ bzw. $(G \circ F)^\top = F^\top \circ G^\top$.

Relationen und Abbildungen

Eine **Relation** $f = (X, F, Y)$ besteht aus ihrer **Startmenge** X und ihrer **Zielmenge** Y sowie ihrem **Graphen** $F \subseteq X \times Y$. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} &\text{Definitionsmenge} && \operatorname{Def}(f) := \operatorname{pr}_1 F = \{\, x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in F \,\}, \\ &\text{Bildmenge} && \operatorname{Im}(f) := \operatorname{pr}_2 F = \{\, y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in F \,\}. \end{aligned}$$

Zu jeder Menge X haben wir ihre **Identität**

$$\mathrm{id}_X = (X, \Delta_X, X) \quad \text{mit} \quad \Delta_X = \{\, (x, x) \mid x \in X \,\}.$$

Zu $f = (X, F, Y)$ haben wir ihre **Inverse** oder **Umkehrung**

$$f^{-1} = f^\top = (Y, F^\top, X) \quad \text{mit} \quad F^\top = \{\, (y, x) \mid (x, y) \in F \,\}.$$

Zu $f = (X, F, Y)$ und $g = (Y, G, Z)$ haben wir ihre **Komposition**

$$\begin{aligned} h = (X, H, Z) =: g \circ f = f \bullet g \quad &\text{mit} \\ H = \{\, (x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in F \wedge (y, z) \in G \,\}. & \end{aligned}$$

Übung: Dies definiert eine Kategorie!

Relationen und Abbildungen

Wir nennen $f = (X, F, Y)$ **linkstotal**, wenn $\mathrm{pr}_1 F = X$ gilt, also zu jedem $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Wir nennen f **rechtstotal**, wenn $\mathrm{pr}_2 F = Y$ gilt, also zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $(x, y) \in F$.

$$
\begin{aligned}
f \text{ linkstotal} &\iff \mathrm{pr}_1 : F \to X \text{ surjektiv} \\
f \text{ rechtstotal} &\iff \mathrm{pr}_2 : F \to Y \text{ surjektiv} \\
f \text{ linkseindeutig} &\iff \mathrm{pr}_1 : F \to X \text{ injektiv} \\
f \text{ rechtseindeutig} &\iff \mathrm{pr}_2 : F \to Y \text{ injektiv}
\end{aligned}
$$

Wir nennen f **linkseindeutig**, wenn zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ existiert mit $(x, y) \in F$. Das heißt, aus $(x, y), (x', y) \in F$ folgt $x = x'$.
Wir nennen f **rechtseindeutig**, wenn zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Das heißt, aus $(x, y), (x, y') \in F$ folgt $y = y'$.

Eine Relation $f = (X, F, Y)$ heißt **Funktion** oder **Abbildung**, wenn sie linkstotal und rechtseindeutig ist, also zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Wir sagen hierzu, f ordnet dem Element $x \in X$ das Element $y \in Y$ zu, und schreiben kurz $f : x \mapsto y$ oder $f(x) = y$.

Relationen und Abbildungen

Übung: Für jede Relation $f = (X, F, Y)$ haben wir $F \bullet F^\top \subseteq X \times X$ und $F^\top \bullet F \subseteq Y \times Y$. Genauer gelten dabei folgende Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
F \bullet F^\top \supseteq \Delta_X &\quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ ist linkstotal} \\
F \bullet F^\top \subseteq \Delta_X &\quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ ist linkseindeutig} \\
F^\top \bullet F \supseteq \Delta_Y &\quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ ist rechtstotal} \\
F^\top \bullet F \subseteq \Delta_Y &\quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ ist rechtseindeutig}
\end{aligned}
$$

Genau dann gilt $f \bullet f^\top = \mathrm{id}_X$ und $f^\top \bullet f = \mathrm{id}_Y$, wenn f eine Bijektion ist:

$$
\begin{cases}
\forall x \in X\ \exists! y \in Y : (x, y) \in F & \text{das heißt } f \text{ ist eine Funktion} \\
\forall y \in Y\ \exists! x \in X : (x, y) \in F & \text{das heißt } f^\top \text{ ist eine Funktion}
\end{cases}
$$

In Worten bedeutet das: Die Relation F zwischen X und Y ordnet jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu und umgekehrt jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$.

Daher heißt F auch **Eins-zu-Eins-Korrespondenz** zwischen X und Y. Diesen älteren Sprachgebrauch finden Sie insbesondere noch in vielen englischsprachigen Büchern und mathematischen Anwendungen.

Einfache Beispiele: Präordnung als Kategorie (*proset*)

☺ Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen.

Beispiel H1c: Jede prägeordnete Menge definiert eine Kategorie.

Jede **prägeordnete Menge** $(X, \leq)$ definiert eine Kategorie

$$(X, \leq, \circ) \text{ mit } \mathrm{Ob} = X \text{ und } \mathrm{Mor}(a,b) = \begin{cases} \{(a,b)\} & \text{falls } a \leq b, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Objekte sind hier die Elemente $a \in X$, Morphismen $a \to b$ sind die Paare (a,b) mit $a \leq b$, die Komposition ist $(a,b) \bullet (b,c) = (a,c)$.

Dies ist wohldefiniert dank Transitivität und offensichtlich assoziativ. Reflexivität $a \leq a$ sorgt für die Existenz der Identität $\mathrm{id}_a = (a,a)$.

Umgekehrt definiert jede Kategorie $\mathtt{C}$ eine Präordnung auf $\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$, indem wir $a \leq b$ definieren durch $\mathrm{Mor}(a,b) \neq \emptyset$. Ist jede $\mathtt{C}$–Morphismenmenge höchstens einelementig, so entspricht $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}, \leq, \circ)$ einer Präordnung. Prominentes Beispiel ist die Kategorie $\mathtt{Set}_{\subseteq}$ wie oben erklärt, ebenso die Kompaktifizierungen $\kappa : X \to Y$ eines Raumes X.

Einfache Beispiele: Monoid als Kategorie

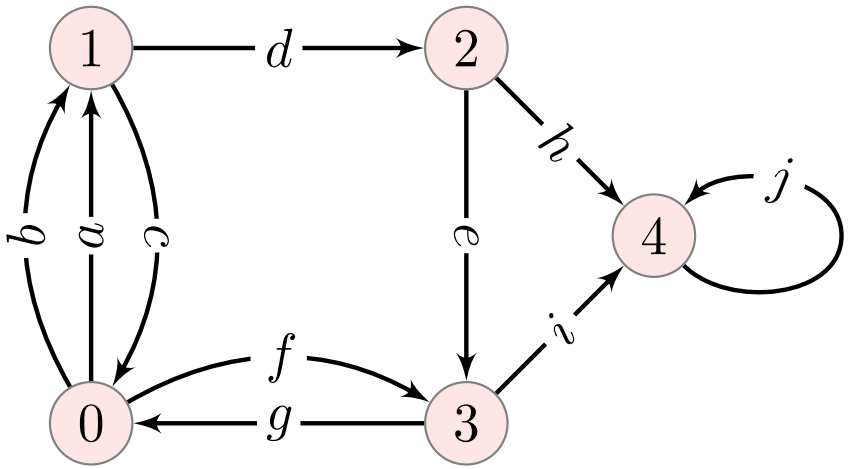
Ein **Monoid** $(M, \circ, e)$ besteht aus einer Menge M mit assoziativer Verknüpfung $\circ : M \times M \to M$ und neutralem Element $e \in M$.
Dies definiert eine Kategorie $\mathtt{M} = (*, M, \circ)$ mit nur einem Objekt $*$, der Morphismenmenge $\mathtt{M}(*,*) = M$ und der Verknüpfung $\circ$.

Umgekehrt definiert jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ in einer Kategorie $\mathtt{C}$ das Monoid $\mathrm{End}_{\mathtt{C}}(X) = (\mathtt{C}(X,X), \circ, \mathrm{id}_X)$ aller **Endomorphismen** von X.
Wir setzen hierbei meist stillschweigend voraus, dass die betrachtete Kategorie $\mathtt{C}$ lokal klein ist: Alle Klassen $\mathtt{C}(X,Y)$ sind also Mengen.

🙂 Prominente Beispiele: In $\mathtt{Vec}_K$ bzw. $\mathtt{Mod}_K$ (siehe unten) erhalten wir den Endomorphismenring $\mathrm{End}_K(X) = \mathrm{Hom}_K(X,X)$.
In $\mathtt{Mat}_K$ erhalten wir den Matrizenring $\mathrm{End}_K(n) = (K^{n\times n}, \cdot, 1)$.
Hier haben wir neben der Verknüpfung $\circ$ zudem eine Addition.

Besteht im folgenden Beispiel der Graph Γ nur aus einer Ecke v und der Kantenmenge A, so hat die Wegekategorie Γ^* nur das Objekt v, und die Morphismenmenge $\mathrm{End}(v) = A^*$ ist das freie Monoid über A.
Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen.

Einfache Beispiele: Graph und Wegekategorie



$$C_0 = \{0, 1, \dots, 4\}$$
$$C_1 = \{a, b, \dots, j\}$$
$$(s,t) : a \mapsto (0,1)$$
$$b \mapsto (0,1)$$
$$\dots$$
$$j \mapsto (4,4)$$

Ein **(gerichteter) Graph** $\Gamma = (C_0, C_1, s, t)$ besteht aus einer Eckenmenge C_0 und einer Kantenmenge C_1 und zwei Abbildungen $s, t : C_1 \to C_0$, die jeder Kante $e \in C_1$ ihren Start $s(e) \in C_0$ und ihr Ziel $t(e) \in C_0$ zuordnen.

Wir definieren die **Wegekategorie** $\Gamma^* = (C_0, C_1^*, s, t, \bullet)$ kurz $(C_0, C_1^*, \bullet)$: Ein Morphismus $w = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n) \in \Gamma^*(v_0, v_n)$ vom Start $s(w) = v_0$ zum Ziel $t(w) = v_n$ ist ein Weg endlicher Länge $n \in \mathbb{N}$ mit $s(e_k) = v_{k-1}$ und $t(e_k) = v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$. Die Verknüpfung von Wegen w, w' mit $t(w) = s(w')$ ist ihre Aneinanderhängung gemäß

$$(v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m) \bullet (v_m, e_{m+1}, v_{m+1}, \dots, e_n, v_n)$$
$$:= (v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m, e_{m+1}, v_{m+1}, \dots, e_n, v_n).$$

Einfache Beispiele: Graph und Wegekategorie

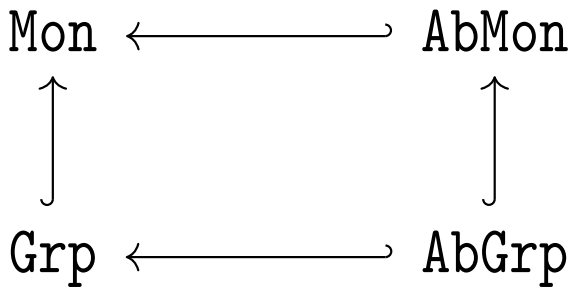
Graphen haben viele Anwendungen, sie sind grundlegende Datenstrukturen in der Informatik und auch in der Spieltheorie.
Dort interpretiert man den Ausgangspunkt v_0 als Startzustand.
Im aktuellen Zustand v_i stehen gewisse Aktionen zu Verfügung:
Die Kante / Aktion $a : v_i \to u$ führt zu einem neuen Zustand $v_{i+1} = u$.
Der Spielverlauf ist demnach ein Weg vom Start v_0 zum Ziel v_n.
Komposition bedeutet anschaulich Hintereinanderausführung.

⚠ Ich habe hier für Wege die Rechtskomposition gewählt;
das entspricht der üblichen Schreib- und Leserichtung.
Wir sehen daran, dass neben den üblichen Linkskategorien
auch Rechtskategorien ebenso natürlich sein können.

Auch in diesem Kapitel werden uns Graphen gute Dienste leisten:
Wir können damit elegant kommutative Diagramme erklären (H2A).
Schließlich ist jede Kategorie $\mathbb{C}$ ein „Graph mit Komposition“ (H1Q).
Die Objekte sind die Ecken, die Morphismen sind die Kanten,
und für diese haben wir zusätzlich eine Komposition.

Grundlegende Beispiele: Monoide und Gruppen

Aus der (Linearen) Algebra kennen Sie Monoide und Gruppen:



Diese bilden Kategorien:

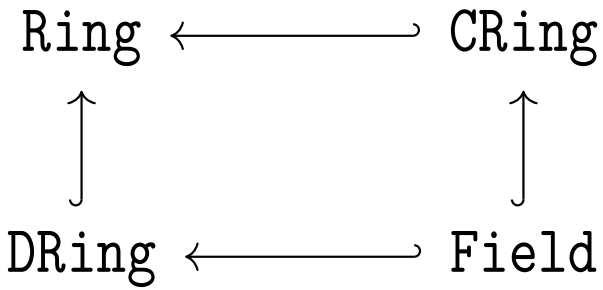
$$\begin{aligned}
\texttt{Mon} &= (\text{Monoide}, && \text{Monoidhom.}, && \text{Komposition} \circ) \\
\texttt{Grp} &= (\text{Gruppen}, && \text{Gruppenhom.}, && \text{Komposition} \circ) \\
\texttt{AbMon} &= (\text{abelsche Monoide}, && \text{Monoidhom.}, && \text{Komposition} \circ) \\
\texttt{Ab} = \texttt{AbGrp} &= (\text{abelsche Gruppen}, && \text{Gruppenhom.}, && \text{Komposition} \circ)
\end{aligned}$$

Aufgabe: Warum sind dies Unter/Kategorien? Welche sind weit? voll?

Lösung: Keine dieser Unterkategorien ist weit: Die Objekte werden echt eingeschränkt. Jede dieser Unterkategorien ist voll: Zwischen Gruppen ist jeder Monoidhomomorphismus auch ein Gruppenhomomorphismus.

Grundlegende Beispiele: Ringe und Körper

Aus der (Linearen) Algebra kennen Sie Ringe und Körper:



Diese bilden Kategorien:

$$\begin{aligned}
\texttt{Ring} &= (\text{Ringe } (R,+,0,\cdot,1), && \text{Ringhom.}, && \text{Komposition } \circ)\\
\texttt{DRing} &= (\text{Divisionsringe}, && \text{Ringhom.}, && \text{Komposition } \circ)\\
\texttt{CRing} &= (\text{kommutative Ringe}, && \text{Ringhom.}, && \text{Komposition } \circ)\\
\texttt{CDRing} = \texttt{Field} &= (\text{Körper}, && \text{Körperhom.}, && \text{Komposition } \circ)
\end{aligned}$$

Aufgabe: Warum sind dies Unter/Kategorien? Welche sind weit? voll?

Lösung: Keine dieser Unterkategorien ist weit: Die Objekte werden echt eingeschränkt. Jede dieser Unterkategorien ist voll: Zwischen Körpern ist jeder Ringhomomorphismus auch ein Körperhomomorphismus.

Grundlegende Beispiele: Lineare Algebra

Im Folgenden sei K ein Körper, allgemeiner genügt ein Ring.
Die Lineare Algebra untersucht und nutzt lineare Abbildungen:

$$\begin{aligned}
\mathtt{Vec}_K &= (\, K\text{–Vektorräume } V,\ K\text{–lineare Abb.}, \text{Komposition} \circ \,) \\
\mathtt{FinVec}_K &= (\, V \text{ endlich erzeugt},\ \ K\text{–lineare Abb.}, \text{Komposition} \circ \,) \\
\mathtt{NatVec}_K &= (\, V = K^n \text{ mit } n \in \mathbb{N}, K\text{–lineare Abb.}, \text{Komposition} \circ \,)
\end{aligned}$$

Algebra, Analysis, Numerik, Physik und zahlreiche Anwendungen nutzen intensiv, insb. über $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, die Kategorie der Matrizen:

$$\mathtt{Mat}_K = (\, \text{Objekte } n \in \mathbb{N},\ \text{Matrizen } K^{m\times n},\ \cdot : K^{p\times q} \times K^{q\times r} \to K^{p\times r} \,)$$

Morphismen $A : n \to m$ sind hier Matrizen $A \in K^{m\times n} := \mathrm{Mat}_K(n, m)$, das entspricht der linearen Abbildung $f_A : K^n \to K^m : x \mapsto y = Ax$.
Die Komposition ist die Matrizenmultiplikation, wobei jeweils nur Matrizen passender Größe miteinander multipliziert werden können.

☺ Objekte & Morphismen sind nicht immer Mengen & Abbildungen.
Matrizen sind ein besonders schönes und eindrückliches Beispiel.

Grundlegende Beispiele: Analysis

Die Analysis untersucht und nutzt differenzierbare Abbildungen:

$$\mathscr{C}^1 = (\, U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}, \quad f : U \to V \text{ stetig diff'bar}, \qquad \text{Komposition}\,)$$
$$\mathscr{C}^1_* = (\, (U,a) \text{ mit } a \in U, f : (U,a) \to (V,b) \text{ mit } f(a) = b, \text{Komposition}\,)$$

Die Ableitung $D : \mathscr{C}^1_* \to \mathtt{Vec}_{\mathbb{R}} : f \mapsto f'(a)$ erfüllt die Kettenregel $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$, erweist sich also als Funktor!

Bemerkung: Ebenso konstruieren wir aus `Set` und `Top` die Kategorien $\mathtt{Set}_*$ und $\mathtt{Top}_*$ durch Auszeichnung eines Fußpunktes.

Übung: Prüfen Sie möglichst viele der obigen Beispiele sorgsam nach. Warum sind dies Unter/Kategorien? Welche Sätze benötigen Sie dazu?

Wenn Sie diese Beispiele anschauen, dann stellen Sie erstaunt fest: Schon im ersten Studienjahr lernen Sie ein paar Dutzend Kategorien kennen, anfangs noch ohne zu ahnen, was Kategorien überhaupt sind.

Nun endlich wissen Sie es und können die Gemeinsamkeit benennen! Damit strukturieren und vereinfachen Sie wiederkehrende Argumente.

Gegen/Beispiele: Ist alles eine Kategorie?

Vielleicht glauben Sie jetzt: Alles und jedes ist eine Kategorie.
Doch nicht alles, was nach einer Kategorie aussieht, ist auch eine!

Aufgabe: Wir betrachten Matrizen $\mathtt{Mat}_{\mathbb{K}}$, wie üblich, nun mit Einträgen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{>0}$, $[0,\infty]$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Welche Daten und welche Eigenschaften einer Kategorie gelingen für $\mathtt{Mat}_{\mathbb{K}}$, welche nicht?
(Über einem Ring $\mathbb{K}$ gelingt alles. Genügt sogar ein Halbring $\mathbb{K}$?)

Aufgabe: Zu jedem topologischen Raum X definieren wir $P(X)$:
Die Objekte sind die Punkte $a, b, \ldots \in X$. Die Morphismen von a nach b sind die Wege $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Die Verknüpfung $*$ ist Aneinanderhängung (L101). Welche Eigenschaften einer Kategorie gelten für $P(X)$, welche nicht? (Für Graphen gelingt alles, siehe H115.)

Aufgabe: Zu $0 \leq \ell \leq L \leq \infty$ definieren wir $\mathtt{BiLip}(\ell, L)$: Die Objekte sind die (mehrpunktigen) Intervalle $I, J, \ldots \subseteq \mathbb{R}$. Die Morphismen sind die Abbildungen $f : I \to J$ mit $\ell|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in I$. Die Verknüpfung ist die Komposition. Welche Eigenschaften einer Kategorie gelten für $\mathtt{BiLip}(\ell, L)$, welche nicht?

Zusammenfassung: Kategorie als Graph mit Komposition

Die eingangs formulierte Definition H1A können wir abschließend wie folgt strukturieren: Da $\mathrm{Mor}(A,B)$ und $\mathrm{Mor}(A',B')$ für $(A,B) \neq (A',B')$ disjunkt sind, können wir jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ eindeutig seinen Start $s(f) = A$ und sein Ziel $t(f) = B$ zuordnen. Statt für jedes Objekt A die Existenz einer Identität $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A,A)$ zu *fordern* und dann ihre Eindeutigkeit nachzuweisen, können wir A direkt seine Identität id_A *zuordnen*. Wir erhalten zusammenfassend:

Definition H1Q: Kategorie als Graph mit Komposition

Ein **(gerichteter) Graph** $\mathtt{C} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, s, t)$ besteht aus folgenden Daten:
(a) eine Klasse $\mathtt{C}_0$; ihre Elemente heißen **Ecken / Elemente / Objekte**,
(b) eine Klasse $\mathtt{C}_1$; ihre Elemente heißen **Kanten / Pfeile / Morphismen**,
sowie zwei Abbildungen $s, t : \mathtt{C}_1 \to \mathtt{C}_0$, engl. *source* und *target*, die jedem Pfeil $f \in \mathtt{C}_1$ seinen **Start** $s(f) = A \in \mathtt{C}_0$ und **Ziel** $t(f) = B \in \mathtt{C}_0$ zuordnen.

In der Graphentheorie spricht man traditionell von Ecken und Kanten. Alternativ schreiben wir $\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}} = \mathtt{C}_0$ und $\mathrm{Mor}_{\mathtt{C}} = \mathtt{C}_1$ wie in Definition H1A.

Zusammenfassung: Kategorie als Graph mit Komposition

Für Objekte $A, B \in \mathtt{C}_0$ schreiben wir kurz $A, B \in \mathtt{C}$. Für Morphismen $f \in \mathtt{C}_1$ vom Start $s(f) = A$ zum Ziel $t(f) = B$ schreiben wir kurz $f \in \mathtt{C}(A, B)$ oder $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ oder $f : A \to B$, wenn $\mathtt{C}$ klar ist.
Wir setzen hierzu $\mathtt{C}(A, B) := \{\, f \in \mathtt{C}_1 \mid s(f) = A,\ t(f) = B \,\}$.

Definition H1Q: Kategorie als Graph mit Komposition

Eine **(Links-)Kategorie** $\mathtt{C} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, s, t, \circ, \mathrm{id})$ hat zudem folgende Daten:
(c) eine Verknüpfung $\circ : \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1 \to \mathtt{C}_1 : (g, f) \mapsto g \circ f$ auf der Klasse aller verknüpfbaren Morphismen, $\mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1 = \{\, (g, f) \in \mathtt{C}_1 \times \mathtt{C}_1 \mid s(g) = t(f) \,\}$,
(d) eine Abbildung $\mathrm{id} : \mathtt{C}_0 \to \mathtt{C}_1 : A \mapsto \mathrm{id}_A$, die jedem Objekt $A \in \mathtt{C}_0$ einen Morphismus $\mathrm{id}_A \in \mathtt{C}_1$ zuordnet, genannt die **Identität** von A.

Diese Daten müssen folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Es gilt $A = s(\mathrm{id}_A) = t(\mathrm{id}_A)$ für jedes Objekt $A \in \mathtt{C}_0$
und $f = f \circ \mathrm{id}_{s(f)} = \mathrm{id}_{t(f)} \circ f$ für jeden Morphismus $f \in \mathtt{C}_1$.
(2) Es gilt $s(g \circ f) = s(f)$ und $t(g \circ f) = t(g)$ für alle $(g, f) \in \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1$
und $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ für alle $(h, g, f) \in \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1 \,{}_s\!\times_t \mathtt{C}_1$.

Zusammenfassung: Kategorie als Graph mit Komposition

Für eine **(Rechts-)Kategorie** $\mathtt{C} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, s, t, \bullet, \mathrm{id})$ fordern wir analog:
(c) eine Verknüpfung $\bullet : \mathtt{C}_1 \,{}_t\!\times_s \mathtt{C}_1 \to \mathtt{C}_1 : (f, g) \mapsto g \bullet f$ auf der Klasse aller verknüpfbaren Morphismen, $\mathtt{C}_1 \,{}_t\!\times_s \mathtt{C}_1 = \{\, (f, g) \in \mathtt{C}_1 \times \mathtt{C}_1 \mid t(f) = s(g) \,\}$.
(1) Es gilt $f = f \bullet \mathrm{id}_{t(f)} = \mathrm{id}_{s(f)} \bullet f$ für jeden Morphismus $f \in \mathtt{C}_1$.
(2) Es gilt $s(f \bullet g) = s(f)$ und $t(f \bullet g) = t(g)$ für alle $(g, f) \in \mathtt{C}_1 \,{}_t\!\times_s \mathtt{C}_1$ und $(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$ für alle $(f, g, h) \in \mathtt{C}_1 \,{}_t\!\times_s \mathtt{C}_1 \,{}_t\!\times_s \mathtt{C}_1$.

Rückschau: Kategorien verallgemeinern *Graphen*, und jeder Graph $\Gamma = (C_0, C_1, s, t)$ definiert seine *Wegekategorie* $\Gamma^* = (C_0, C_1^*, s, t, \bullet, \mathrm{id})$. Hier entspricht die Rechtsreihung gemäß $\bullet$ bequem der Leserichtung.

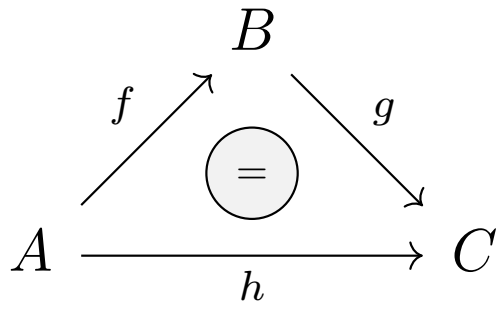
Beispiel: Jede Menge X mit einer reflexiven und transitiven Relation $\leq$ auf $X \times X$ definiert als zugehörige Kategorie $(X, \leq, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{trans}, \mathrm{refl})$.

Kategorien verallgemeinern ebenso *Monoide* (H2H): In einem Monoid sind je zwei Elemente verknüpfbar, in einer Kategorie gilt dies partiell, wie durch den zugrundeliegenden Graphen (C_0, C_1, s, t) formalisiert. Im fundamentalen Beispiel von *Matrizen* ist dies aller Welt vertraut.

Kommutative Diagramme

Wir arbeiten in einer gegebenen Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$. Die folgende graphische Notation erweist sich als ungemein effizient und hilfreich.

$$\left.\begin{aligned} &f \in \mathrm{Mor}(A, B) \\ &g \in \mathrm{Mor}(B, C) \\ &h \in \mathrm{Mor}(A, C) \\ &h = g \circ f \end{aligned}\right\} \quad \Longleftrightarrow$$



Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ schreiben wir gerne als Pfeile $f : A \to B$. Diese setzen wir nun zu (kommutativen) Diagrammen zusammen.

Definition H2A: kommutatives Diagramm

Ein **Diagramm** in der Kategorie $\mathtt{C}$ ist ein (gerichteter) Graph, wobei jede Ecke mit einem Objekt aus $\mathtt{C}$ beschriftet ist und jede Kante mit einem hierzu passenden Morphismen aus $\mathtt{C}$.

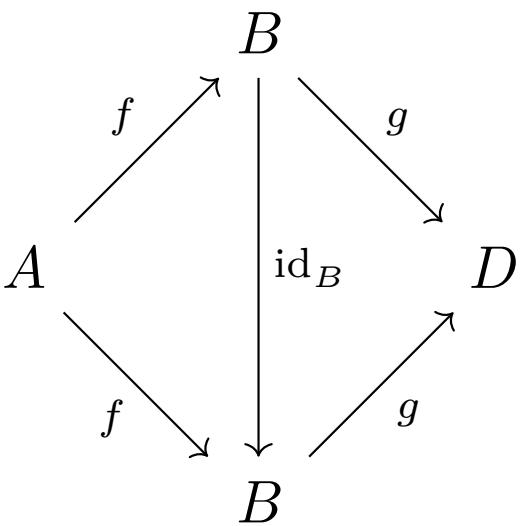
Ein solches Diagramm heißt **kommutativ**, wenn zwischen je zwei Ecken die Komposition entlang aller Wege denselben Morphismus in $\mathtt{C}$ ergibt.

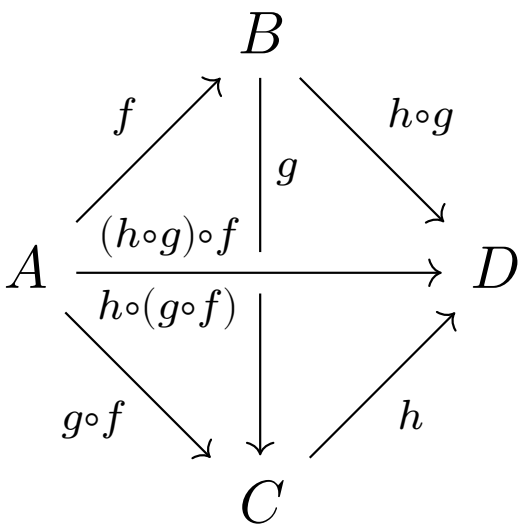
Kommutative Diagramme

☺ „Alle Wege führen nach Rom“, hier also zum selben Morphismus: Kommutative Diagramme sind eine sehr intuitive, graphische Sichtweise!

Im obigen Beispiel: Es ist egal, ob wir den Pfeilen f und g folgen oder die Abkürzung h nehmen, beide Wege ergeben dasselbe Ergebnis in $\mathtt{C}$.

Beispiel: Identität $\mathrm{id}_B \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_B = g$ sowie Assoziativität $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ besagen, dass folgende Diagramme kommutieren:

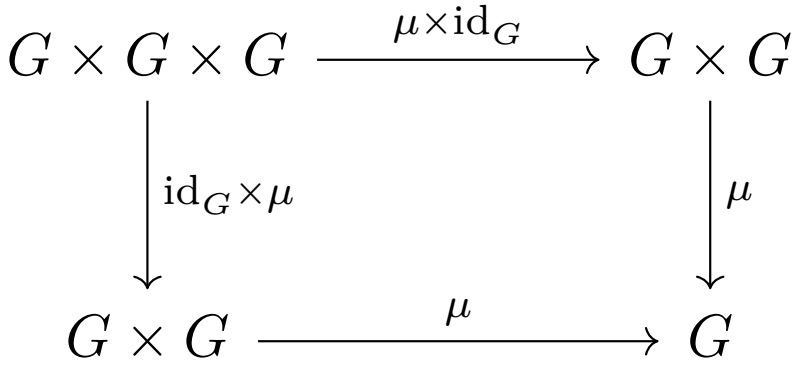


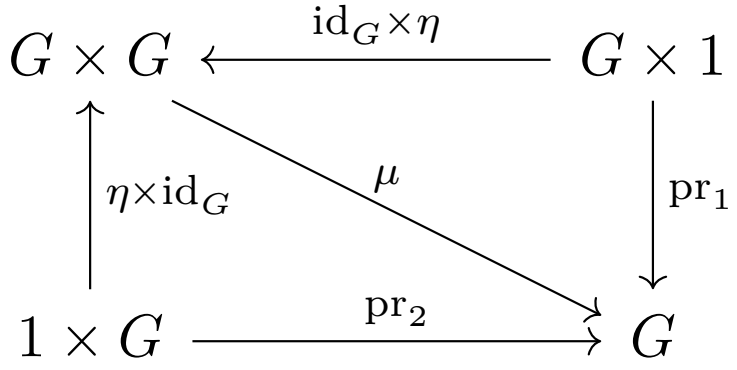


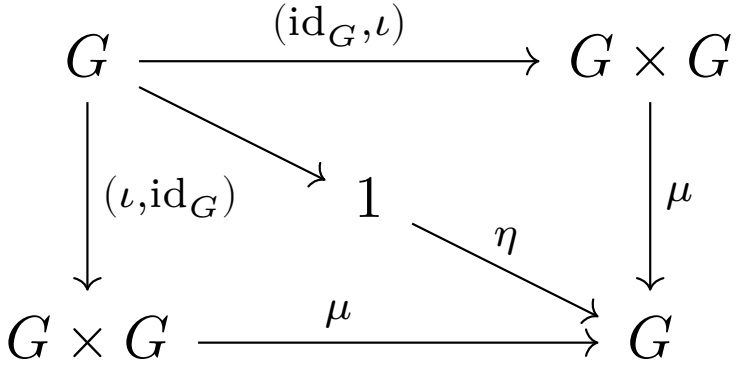
Gruppenaxiome als kommutative Diagramme

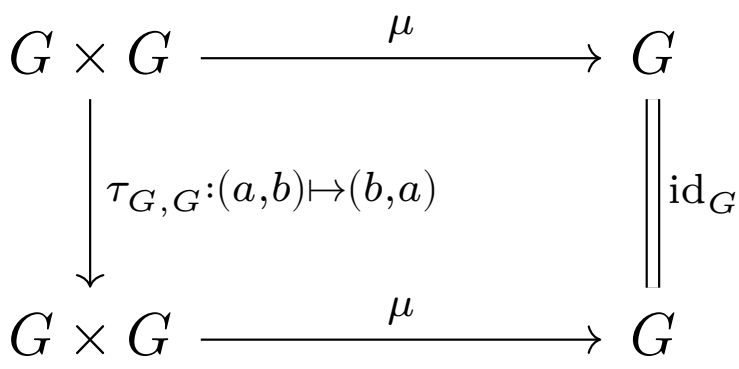
Aufgabe: Eine **Gruppe** (G, μ, η, ι) ist eine Menge G zusammen mit einem Produkt $\mu : G \times G \to G$, einem neutralen Element $\eta : 1 = \{*\} \to G$ und einer Inversion $\iota : G \to G$, sodass die Gruppenaxiome erfüllt sind. Schreiben Sie diese Axiome als kommutative Diagramme in `Set`.

Lösung: Assoziativität, Neutrales, Inversion, Kommutativität:









Gruppenaxiome als kommutative Diagramme

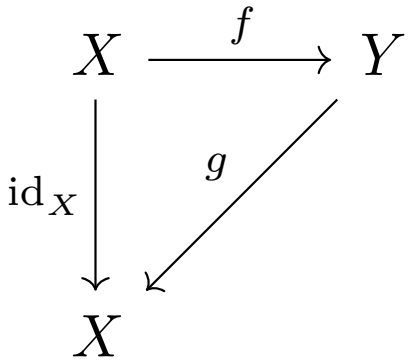
☺ Kommutative Diagramme in `Set` (`Top`, `Grp`, …) codieren **All-Aussagen**:
Zwischen zwei Ecken A und Z verlaufen Morphismen $f, g : A \to Z$.
Die Komutativitätsbedingung lautet dann: Für alle $a \in A$ gilt $f(a) = g(a)$.
Das gilt insbesondere für algebraische Strukturen, wie hier zu sehen.

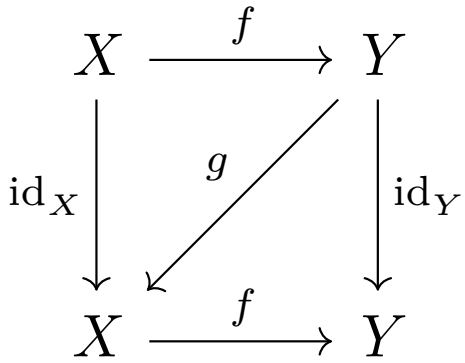
Existenz-Aussagen wie „Es gibt ein neutrales Element $e \in G$.“ oder „Zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in G$.“ codieren wir nicht implizit, sondern durch Abbildungen, als explizit gegebene Daten, hier das neutrale Element $\eta : 1 \to G$ und die Inversion $\iota : G \to G$.

Das ist für die konkrete Arbeit vorteilhaft, etwa auf dem Computer (CAS). Sie fordern: „Gib mir das Neutrale!“ oder „Gib mir das Inverse zu a!“. Als Antwort möchten Sie nicht bloß die Zusage „Es gibt eine Lösung.“, sondern tatsächlich das ersehnte Element. *Explicit is beautiful.*

☺ Diese Sichtweise ergibt eine wunderbar explizite Datenstruktur. Dieselben Diagramme statt wie oben in `Set` nun in `Haus` definieren eine **topologische Gruppe**. In der Kategorie `Diff` der $\mathscr{C}^\infty$–glatten Mannigfaltigkeiten definieren sie eine **Lie–Gruppe**. So elegant!

Isomorphismen





Definition H2c: Isomorphismen

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Morphismen in einer Kategorie $\mathtt{C}$.

Gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so nennen wir g **linksinvers** zu f (oder eine **Retraktion**) und f **rechtsinvers** zu g (oder einen **Schnitt**, auch **Coretraktion**).

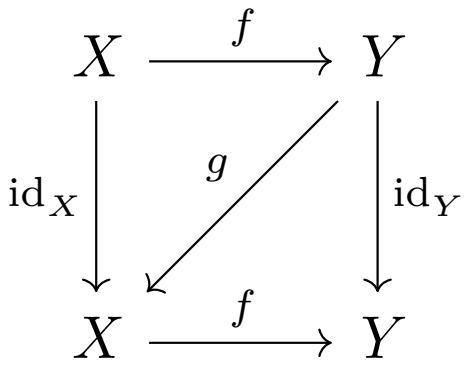
(1) Gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ in $\mathtt{C}$, so nennen wir $(f, g) : X \cong Y$ **zueinander invers** oder ein **$\mathtt{C}$–Isomorphismuspaar**.

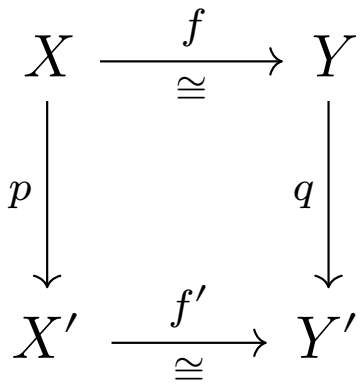
Eindeutigkeit: Ist g linksinvers zu f und g' rechtsinvers, so folgt $g = g'$:

$$g \overset{\text{rNtr}}{=} g \circ \mathrm{id}_Y \overset{\text{rInv}}{=} g \circ (f \circ g') \overset{\text{Ass}}{=} (g \circ f) \circ g' \overset{\text{lInv}}{=} \mathrm{id}_X \circ g' \overset{\text{lNtr}}{=} g'.$$

Dann nennen wir g *den* inversen Morphismus zu f, geschrieben $g =: f^{-1}$.

Isomorphismen





Definition H2c: Isomorphismen

(2) Wir nennen $f : X \to Y$ **invertierbar** oder einen **C–Isomorphismus**, geschrieben $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, wenn in $\mathtt{C}$ ein inverser Morphismus $g : Y \xrightarrow{\sim} X$ existiert, somit also $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ erfüllt ist.

(3) Zwei Objekte X und Y in $\mathtt{C}$ heißen **C–isomorph**, geschrieben $X \cong Y$, wenn $\mathtt{C}$–Isomorphismen $(f, g) : X \cong Y$ existieren, also ein Paar von Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(4) Morphismen $p : X \to X'$ und $q : Y \to Y'$ in $\mathtt{C}$ heißen **C–isomorph**, wenn in $\mathtt{C}$ Isomorphismen $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ und $f' : X' \xrightarrow{\sim} Y'$ existieren mit $f' \circ p = q \circ f$, geschrieben $(f, f') : p \xrightarrow{\sim} q$.

Prominente Beispiele

Zur Illustration nenne ich einige einfache, aber prominente Beispiele:

Kategorie	Isomorphismen $(f, g) : X \cong Y$	Isomorphie $X \cong Y$
$(X, \leq)$	$(a \leq b,\, b \leq a) : a \cong b$	mit Antisymmetrie: $a = b$
$(*, M, \circ)$	invertierbare Elemente	einziges Objekt $* = *$
$\mathtt{Set}_{\subseteq}$	$(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y) : X = Y$	Gleichheit $X = Y$
$\mathtt{Set}$	Bijektionen $(f, g) : X \cong Y$	$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$
Mat_K	invertierbare Matrizen	Gleichheit $m = n$
$\mathtt{Vec}_K$	K–lineare Isomorphismen	$\dim_K(X) = \dim_K(Y)$
$\mathtt{Grp}$	Gruppenisomorphismen	Isomorphie $X \cong Y$
$\mathscr{C}^k$	Diffeomorphismen	Diffeomorphie $X \cong Y$
$\mathtt{Top}$	Homöomorphismen	Homöomorphie $X \cong Y$
$\mathtt{hTop}$	Homotopie-Äquivalenzen	Homotopie-Äquivalenz $X \simeq Y$

Übung: Nennen Sie mindestens zehn weitere Kategorien und erklären Sie in jeder davon möglichst explizit die Isomorphismen.

Prominente Beispiele

Aufgabe: Sei $\Gamma = (C_0, C_1, s, t)$ ein Graph und $\Gamma^* = (C_0, C_1^*, s, t, \circ)$ seine Wegekategorie (H115). Bestimmen Sie alle Isomorphismen in Γ^*.

Lösung: Für jede Ecke v ist $\mathrm{id}_v = (v)$ der Weg von v nach v der Länge 0. Dieser ist trivialerweise in Γ^* invertierbar, denn es gilt $\mathrm{id}_v \circ \mathrm{id}_v = \mathrm{id}_v$.

Jeder andere Weg hat Länge ≥ 1. Bei Komposition in Γ^* addieren sich die Weglängen in $\mathbb{N}$. Daher gibt es in Γ^* keine weiteren Isomorphismen.

Vornehm gesagt, die Weglänge ist ein Funktor von Γ^* in das Monoid $(\mathbb{N}, +, 0)$, und in Letzterem ist nur das neutrale Element 0 invertierbar.

Aufgabe: Ist jede invertierbare Matrix $A \in R^{p \times q}$ quadratisch, also $p = q$?

Lösung: Über jedem Körper oder Divisionsring R gilt dies tatsächlich dank Gauß–Algorithmus. Es gilt auch über jedem kommutativen Ring mit $1 \neq 0$ dank Determinante. (Führen Sie es zur Übung sorgsam aus!)

Bizarres ist über nicht-kommutativen Ringen möglich, siehe G206: Sei K ein Körper, hierüber $V = K^{(\mathbb{N})}$ und $R = \mathrm{End}_K(V)$. Für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $R^p \cong R^q$, dazu gehören invertierbare Matrizen $A \in R^{q \times p}$.

Beispiel: die Gauß–Normalform

Sei R ein Divisionsring. Gegeben seien $m, n, r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq \min\{m, n\}$.
Die **Modellmatrix** der Größe $m \times n$ vom Rang r über dem Ring R ist

$$D = D^r_{m\times n} := \begin{bmatrix} 1_{r\times r} & 0_{r\times k} \\ 0_{\ell\times r} & 0_{\ell\times k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in R^{m\times n}.$$

Die zugehörige R–lineare **Modellabbildung** ist die Projektion-Inklusion

$$f_D : R^n \to R^m : (x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_n)^\top \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)^\top.$$

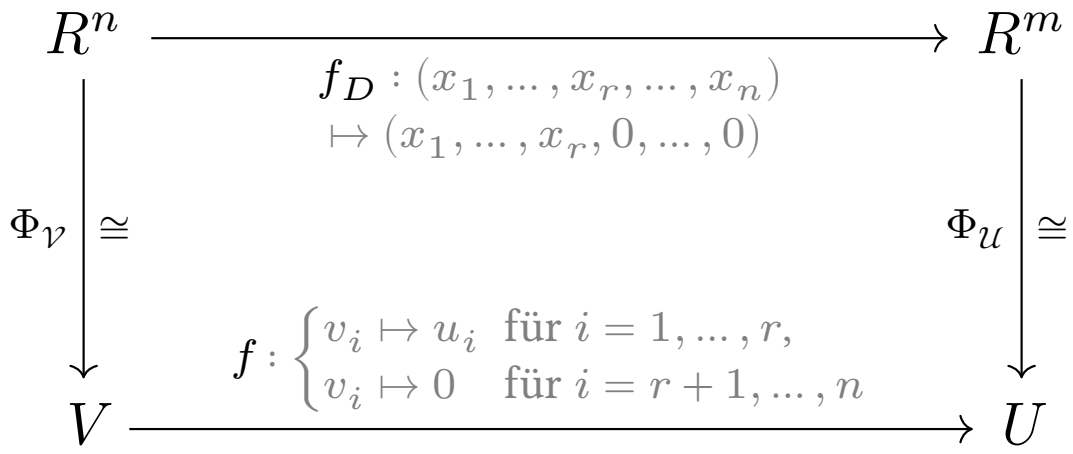
Daran lesen wir Bild und Kern ab, zudem Rang und Defekt falls definiert:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} &= \langle e_1, \ldots, e_r \rangle^!_R \leq R^m \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rang} = \dim \operatorname{Im} = r \\ \operatorname{Ker} &= \langle e_{r+1}, \ldots, e_n \rangle^!_R \leq R^n \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{def} = \dim \operatorname{Ker} = n - r \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\operatorname{rang} + \operatorname{def} = n$, wie allgemein vom Rangsatz garantiert.

Gauß–Normalform eines Vektorraumhomomorphismus

☺ Die Modellabbildung f_D ist besonders einfach und übersichtlich.
Erstaunlicherweise lässt sich *jede* R–lineare Abbildung so darstellen!



Satz H2D: Gauß–Normalform eines Vektorraumhomomorphismus

Sei R ein Divisionsring, zum Beispiel ein Körper wie $R = \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$.

Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung von R–Vektorräumen endlicher Dimension $n := \dim_R(V)$ und $m := \dim_R(U)$ mit Rang $r := \operatorname{rang}_R(f)$.

Dazu existieren Basen $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_m)$ von U und $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, \dots, r$ und $f(v_i) = 0$ für alle $i = r+1, \dots, n$.

Somit wird f dargestellt durch die Modellmatrix $D^r_{m \times n}$.

Beispiel: der lokale Umkehrsatz

🙂 Der lokale Umkehrsatz ist ein zentrales Ergebnis und ein universelles Werkzeug der Analysis. Er erlaubt uns unter gewissen Voraussetzungen, eine differenzierbare Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lokal als eine lineare Abbildung zu betrachten. Das ist eine wunderbare Vereinfachung!

Wir wollen diesen Satz hier in kategorieller Sprechweise ausformulieren. Lokalisierung auf „beliebig kleine Umgebungen“ führt uns zur Kategorie

$$g\mathscr{C}^k_* = (\,\mathbb{N},\ \mathscr{C}^k\text{–Funktionskeime } [f] : (U \subseteq \mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b),\ \circ\,).$$

In der Kategorie $\mathscr{C}^k_*$ nennen wir Funktionen $f_1 : (U_1 \subseteq \mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ und $f_2 : (U_2 \subseteq \mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ **äquivalent**, wenn eine offene Umgebung $U \subseteq U_1 \cap U_2$ von a in $\mathbb{R}^m$ existiert mit $f_1|_U = f_2|_U$. Die Äquivalenzklasse $[f]$ von $f : (U, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ heißt **$\mathscr{C}^k$–Funktionskeim**, engl. *germ*.

Wir komponieren Keime $[f : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)]$ und $[g : (\mathbb{R}^n, b) \to (\mathbb{R}^p, c)]$ zum Keim $[g] \circ [f] = [g \circ f|_{U'}]$ mit $U' = f^{-1}(V)$. Dies ist wohldefiniert. Genau dann ist ein Keim $[f] : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ invertierbar, wenn ein Keim $[g] : (\mathbb{R}^n, b) \to (\mathbb{R}^m, a)$ existiert mit $[g] \circ [f] = [\mathrm{id}]$ und $[f] \circ [g] = [\mathrm{id}]$.

Beispiel: der lokale Umkehrsatz

Satz H2F: der lokale Umkehrsatz (für alle $k \geq 1$)

Ein $\mathscr{C}^k$–Funktionskeim $[f] : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ ist invertierbar, also ein lokaler $\mathscr{C}^k$–Diffeomorphismus, gdw $f'(a) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist.

☺ Der Ableitungsfunktor $D : g\mathscr{C}^k_* \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}$ **reflektiert** Isomorphismen. Analogie: Die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ reflektiert Invertierbarkeit.

Wir sagen, $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ hat **konstanten Rang** r, wenn $\operatorname{rang} f'(x) = r$ für alle $x \in U$ gilt. Der Keim $[f]$ hat **konstantem Rang** r, wenn dies für einen Repräsentanten gilt, also auf einer hinreichend kleinen Umgebung U von a in $\mathbb{R}^m$. Dann sieht f lokal aus wie die lineare Abbildung $f'(0)$:

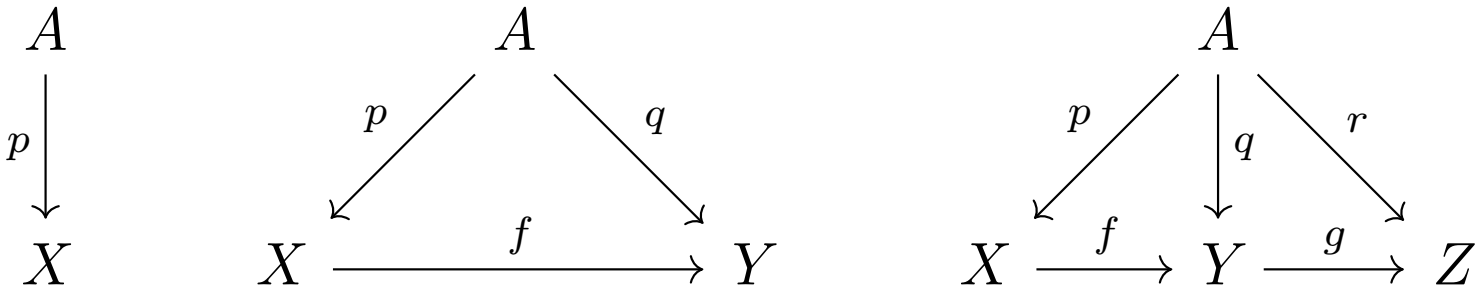
Satz H2G: der lokale Rangsatz (für alle $k \geq 1$)

Zu jedem $\mathscr{C}^k$–Funktionskeim $[f] : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ von konstantem Rang r existieren $[\varphi] : (\mathbb{R}^m, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^m, a)$ und $[\psi] : (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, b)$ mit $[\psi]^{-1} \circ [f] \circ [\varphi] : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0) : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

☺ Geometrisch formuliert: In den Koordinaten $[\varphi], [\psi]$ wird $[f]$ linear.

Die Kategorie $\mathtt{C}^A_\downarrow$ der „Objekte unter A“

Die Kategorie $\mathtt{C}^A_\downarrow$ aller **Morphismen mit Start A** entsteht wie folgt:



(a) Objekte in $\mathtt{C}^A_\downarrow$ sind die $\mathtt{C}$–Morphismen $p : A \to X$. („Objekte unter A“)
(b) In $\mathtt{C}^A_\downarrow$ ist jeder Morphismus $f : p \to q$ von $p : A \to X$ nach $q : A \to Y$ gegeben durch einen Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathtt{C}$, der $f \circ p = q$ erfüllt.
(c) Die Verknüpfung von Morphismen in $\mathtt{C}^A_\downarrow$ ist die Verknüpfung in $\mathtt{C}$.

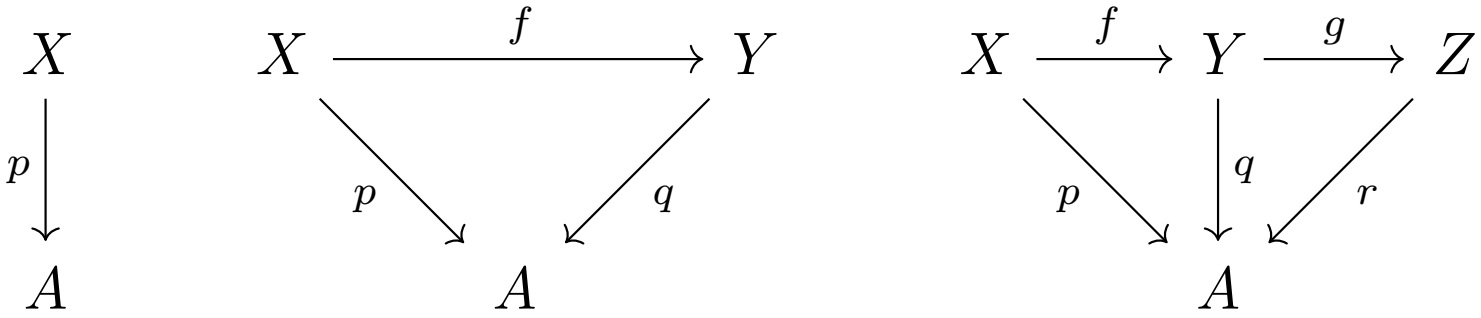
Das obige Diagramm zeigt, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist.
Isomorphismus $f : p \xrightarrow{\sim} q$ in $\mathtt{C}^A_\downarrow$ bedeutet $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ in $\mathtt{C}$ mit $f \circ p = q$.

Beispiel: Isomorph zum Quotienten $X \twoheadrightarrow Q$ sind Identifizierungen (E2F).

Beispiel: $\mathtt{Field}^K_\downarrow$ ist die Kategorie der *Körpererweiterungen* $K \hookrightarrow L$.
Taditionell sagt man hier *über* K, das entspricht $\mathtt{Field}^\uparrow_K$.

Die Kategorie $\mathtt{C}^{\downarrow}_{A}$ der „Objekte über A“

Die Kategorie $\mathtt{C}^{\downarrow}_{A}$ aller **Morphismen mit Ziel A** entsteht wie folgt:



(a) Objekte in $\mathtt{C}^{\downarrow}_{A}$ sind die $\mathtt{C}$–Morphismen $p : X \to A$. („Objekte über A“)
(b) In $\mathtt{C}^{\downarrow}_{A}$ ist jeder Morphismus $f : p \to q$ von $p : X \to A$ nach $q : Y \to A$ gegeben durch einen Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathtt{C}$, der $p = q \circ f$ erfüllt.
(c) Die Verknüpfung von Morphismen in $\mathtt{C}^{\downarrow}_{A}$ ist die Verknüpfung in $\mathtt{C}$.

Das obige Diagramm zeigt, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist.
Isomorphismus $f : p \xrightarrow{\sim} q$ in $\mathtt{C}^{\downarrow}_{A}$ bedeutet $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ in $\mathtt{C}$ mit $p = q \circ f$.

Beispiel: Isomorph zur Inklusion $A \hookrightarrow X$ sind Einbettungen (E1κ).

Beispiel: $\mathtt{Top}^{\downarrow}_{X}$ ist die Kategorie der *topologischen Räume über X*.
Hierin sind die *Überlagerungen* von X eine Unterkategorie (§M1).

Auch die Morphismen bilden eine Kategorie.

Für jede Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}, \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}, \circ_{\mathtt{C}})$ wird $\mathtt{D} = \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}$ zu einer Kategorie:

$$\begin{array}{c} X \\ {\scriptstyle p}\downarrow \\ X' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

(a) Objekte in $\mathtt{D}$ sind die $\mathtt{C}$–Morphismen $p : X \to X'$.
(b) Jeder $\mathtt{D}$–Morphismus $(f, f') : p \to q$ ist ein Paar von $\mathtt{C}$–Morphismen $f : X \to Y$ und $f' : X' \to Y'$ mit der Kommutativität $f' \circ_{\mathtt{C}} p = q \circ_{\mathtt{C}} f$.
(c) Die Verknüpfung in $\mathtt{D}$ ist $(g, g') \circ_{\mathtt{D}} (f, f') = (g \circ_{\mathtt{C}} f, g' \circ_{\mathtt{C}} f')$.

Das obige Diagramm zeigt, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist.
Die Isomorphismen $(f, f') : p \xrightarrow{\sim} q$ in $\mathtt{D}$ kennen wir bereits aus H2c:
Dies ist die Isomorphie (oder Äquivalenz) von $\mathtt{C}$–Morphismen.

🙂 Die elegante Sprache der Kategorien erlaubt konzise Formulierungen.
Das Erlernen kostet anfangs Mühe, doch auf lange Sicht lohnt es sich.

Auch die Morphismen bilden eine Kategorie.

Übung H2E:

Führen Sie die Definition H2C wie folgt aus:

0. Die Komposition zweier Isomorphismen ist ein Isomorphismus.
1. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf den Objekten von $\mathtt{C}$.
2. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf den Morphismen von $\mathtt{C}$.
3. Nennen Sie die Isomorphieklassen von Objekten und Morphismen in $\mathtt{FinVec}_K$ durch eine (möglichst einfaches) Repräsentantensystem.
4. Nennen Sie ebenso diese Isomorphieklassen in $\mathtt{FinSet}$.

Kategorien formulieren universelle Gesetzmäßigkeiten und blenden dazu bewusst die Feinstruktur aus. Sie trennen die allgemeine Struktur von speziellen Eigenschaften. Diese Abstraktion vergröbert und vereinfacht, sie verschafft uns einen ersten Überblick, die eigentliche Arbeit steckt weiterhin in den Feinheiten: Gauß–Algorithmus und lokaler Umkehrsatz sind wesentlich tiefsinniger als unsere bescheidene Kategorientheorie!

Universelle Objekte

Beispiel: In der Kategorie Set gilt: Zu jeder Menge X existiert genau eine Abbildung $0 = \emptyset \to X$ sowie genau eine Abbildung $X \to \{0\} = 1$.

Definition H3A: initial, terminal, Nullobjekt

Sei $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ eine Kategorie. Wir vereinbaren:

$$
\begin{aligned}
I \in \mathrm{Ob} \text{ ist } \textbf{initial} \text{ in } \mathtt{C} &\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall X \in \mathrm{Ob} \;\; \exists! u \in \mathrm{Mor}(I, X) \\
T \in \mathrm{Ob} \text{ ist } \textbf{terminal} \text{ in } \mathtt{C} &\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall X \in \mathrm{Ob} \;\; \exists! v \in \mathrm{Mor}(X, T) \\
N \in \mathrm{Ob} \text{ ist } \textbf{Nullobjekt} \text{ in } \mathtt{C} &\quad :\Longleftrightarrow \quad N \text{ ist initial und terminal in } \mathtt{C}
\end{aligned}
$$

Ausführlich: Ein Objekt I ist **initial** in $\mathtt{C}$, wenn zu jedem Objekt X in $\mathtt{C}$ genau ein Morphismus $u : I \to X$ existiert, also $\mathrm{Mor}(I, X) = \{u\}$ gilt.

Ein Objekt T ist **terminal** (oder **final**) in $\mathtt{C}$, wenn zu jedem Objekt X genau ein Morphismus $v : X \to T$ existiert, also $\mathrm{Mor}(X, T) = \{v\}$ gilt.

Ein **Nullobjekt** N in $\mathtt{C}$ ist sowohl initial als auch terminal, also $|\mathrm{Mor}(N, X)| = |\mathrm{Mor}(X, N)| = 1$ für jedes Objekt X in $\mathtt{C}$.

Prominente Beispiele

Zur Illustration nenne ich einige einfache, aber prominente Beispiele:

Kategorie	initiale	terminale	Nullobjekte
$(X, \leq)$	kleinste	größte	–
$(\mathbb{N}, \mid_{\mathbb{N}})$	1	0	–
`Rel`	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
`Set`, `Top`	$\emptyset$	$\{e\}$	–
$\mathtt{Set}_*$, $\mathtt{Top}_*$, `Grp`	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$
$\mathtt{Vec}_K$, $\mathtt{Mod}_K$, `Ab`	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
dyn. Systeme (A, a, α)	$(\mathbb{N}, 0, s)$	$(\{0\}, 0, c)$	–
`Ring` (immer mit Eins)	$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$	$(\{0\}, +, \cdot)$	–
$\mathtt{Field}_p$ (Charakteristik p)	$\mathbb{F}_p$ bzw. $\mathbb{Q}$	–	–
archimedische Körper	$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$	$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$	–
Kompaktifizierungen	Stone–Čech	Alexandroff	–

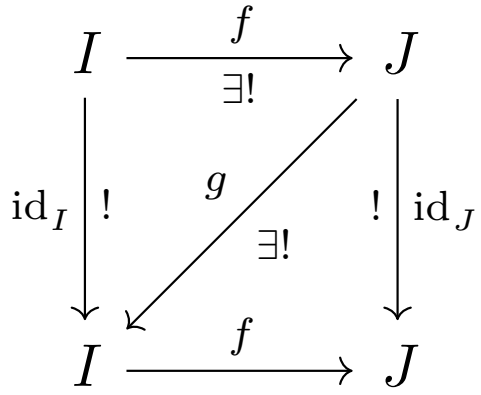
Übung: Prüfen Sie möglichst viele der obigen Beispiele sorgsam nach.

Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus

Satz H3c: Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus

Sei $\mathbb{C}$ eine Kategorie. Zwischen je zwei initialen Objekten I, J existiert genau ein Isomorphismus $(f, g) : I \cong J$. Ebenso für terminale Objekte.

Eine Kategorie $\mathbb{C}$ braucht im Allgemeinen kein initiales Objekt zu haben. Wenn eines existiert, so ist es im Allgemeinen nicht eindeutig, wie oben zu sehen, aber je zwei sind eindeutig isomorph! Nachrechnen dank „*general abstract nonsense*“:



Beweis: Es existiert genau ein Morphismus $f : I \to J$, denn I ist initial, und ebenso genau ein Morphismus $g : J \to I$, denn auch J ist initial.

Wir haben nun die beiden Morphismen $g \circ f : I \to I$ und $\mathrm{id}_I : I \to I$.
Es folgt $g \circ f = \mathrm{id}_I$, denn dies ist der einzige Morphismus $I \to I$.

Ebenso ist $f \circ g = \mathrm{id}_J : J \to J$ der einzige Morphismus $J \to J$.
Somit ist $(f, g) : I \cong J$ ein Isomorphismus, und zwar der einzige. QED

Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus

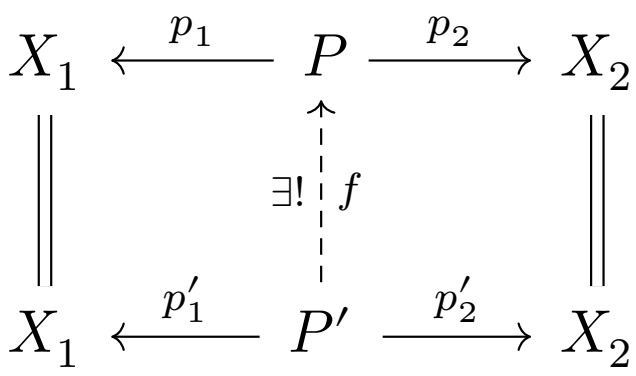
Diese **Eindeutigkeit bis auf Isomorphie** rechtfertigt unseren üblichen Sprachgebrauch: Wir sagen *die* triviale Gruppe, *der* Nullvektorraum, *der* einelementige topologische Raum, *der* Ring der ganzen Zahlen, *der* Körper der rationalen Zahlen, *der* Körper der reellen Zahlen, *der* Körper mit p Elementen, etc. Diese Objekte sind nicht eindeutig, aber immerhin eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus. Das ist genau die Erleuchtung des obigen allgemeinen Satzes. Sie kennen diesen Trick von der Einpunktkompaktifizierung F4G.

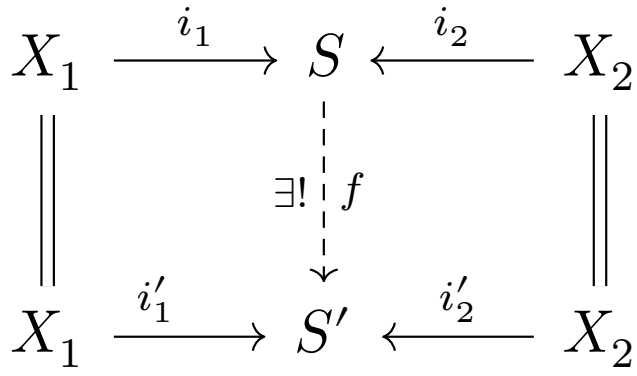
Der Beweis ist wunderbar elegant und vollkommen trivial, somit ein schönes Beispiel für die ordnende Kraft von „*general abstract nonsense*“. Nehmen Sie sich Stift und Papier und beweisen Sie es nochmal selbst. Dann erst dürfen Sie ausrufen: „Ja, das ist trivial… und doch genial.“

Die Feststellung nützt in jeder der zahlreichen Situationen, in denen wir ein Objekt durch eine **universelle Abbildungseigenschaft** definieren: Wenn überhaupt eine Lösung existiert, so ist sie automatisch eindeutig – bis auf einen eindeutigen Isomorphismus. Noch besser geht es nicht!

Produkte und Summen in einer Kategorie

Wir charakterisieren Produkte und Summen (Coprodukte) durch ihre universelle Abbildungseigenschaft / UAE (in Top siehe E4D und E3F).





Das allgemeine Muster formulieren wir nun wie folgt als Definition.
Sei $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ eine Kategorie und $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ zwei Objekte.

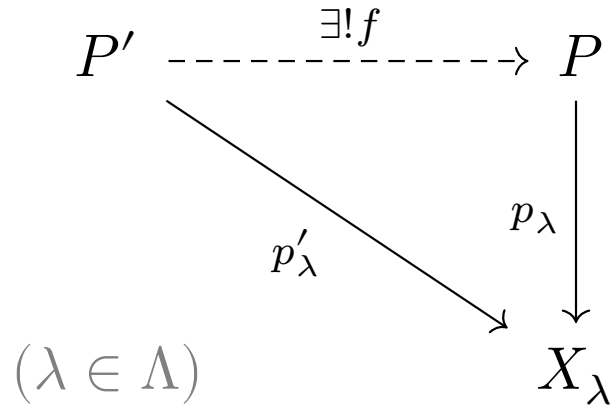
Ein **Produkt** von X_1, X_2 in $\mathtt{C}$ ist eine terminale Familie $(X_1 \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} X_2)$ in der Kategorie all dieser Familien, geschrieben $\mathtt{C}(X_1 \leftarrow \bullet \rightarrow X_2)$

Eine **Summe** von X_1, X_2 in $\mathtt{C}$ ist eine initiale Familie $(X_1 \xrightarrow{i_1} S \xleftarrow{i_2} X_2)$ in der Kategorie all dieser Familien, geschrieben $\mathtt{C}(X_1 \rightarrow \bullet \leftarrow X_2)$.

Die Lösung ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Produkt in einer Kategorie

Vorgegeben sei eine Familie $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Objekten $X_\lambda \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$.



universelle Eigenschaft des Produkts

Die Kategorie $\mathtt{C}^{\downarrow}_{X}$ hat als **Objekte über X** alle Familien $(P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ mit $P \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ und $p_\lambda \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(P, X_\lambda)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Ein Morphismus $f : (P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ist ein $\mathtt{C}$–Morphismus $f : P' \to P$ mit $p_\lambda \circ f = p'_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Die Verknüpfung in $\mathtt{C}^{\downarrow}_{X}$ ist die aus $\mathtt{C}$.

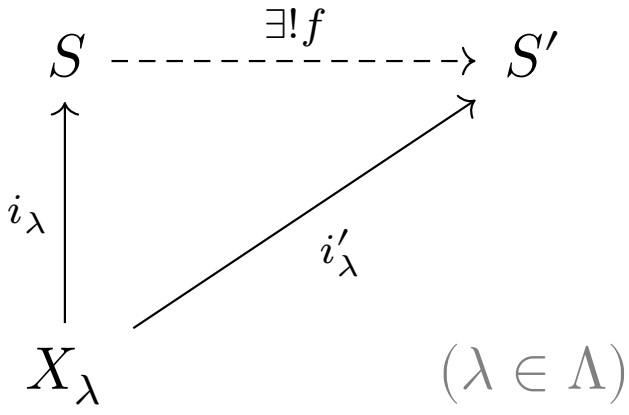
Definition H3D: Produkt in einer Kategorie $\mathtt{C}$

Ein **Produkt** der Objekte $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathtt{C}$ ist ein terminales Objekt $(P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}^{\downarrow}_{X}$: Zu jedem Konkurrenzobjekt $(P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}^{\downarrow}_{X}$ existiert genau ein Morphismus $(P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}^{\downarrow}_{X}$.

Summe / Coprodukt in einer Kategorie

Vorgegeben sei eine Familie $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Objekten $X_\lambda \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$.

universelle Eigenschaft der Summe



Die Kategorie $\mathtt{C}^X_\downarrow$ hat als **Objekte unter X** alle Familien $(S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ mit $S \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ und $i_\lambda \in \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(X_\lambda, S)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Ein Morphismus $f : (S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (S', (i'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ist ein $\mathtt{C}$–Morphismus $f : S \to S'$ mit $f \circ i_\lambda = i'_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Die Verknüpfung in $\mathtt{C}^X_\downarrow$ ist die aus $\mathtt{C}$.

Definition H3E: Summe / Coprodukt in einer Kategorie $\mathtt{C}$

Eine **Summe** der Objekte $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathtt{C}$ ist ein initiales Objekt $(S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}^X_\downarrow$: Zu jedem Konkurrenzobjekt $(S', (i'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}^X_\downarrow$ existiert genau ein Morphismus $(S, (i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \to (S', (i'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ in $\mathtt{C}^X_\downarrow$.

Produkte und Summen in einer Kategorie

☺ Dank H3c ist das Produkt eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie! Falls dies existiert, so wählen wir eines, $(P = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, p_\lambda : P \to X_\lambda)$, und nennen p_λ die kanonischen Morphismen (aka „Projektionen“).

Die universelle Eigenschaft entspricht für $A \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ der Bijektivität von

$$\Phi \;:\; \mathrm{Mor}(A, \textstyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Mor}(A, X_\lambda) \;:\; f \mapsto (p_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda}.$$

☺ Dank H3c ist das Coprodukt eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie! Falls dies existiert, so wählen wir eines, $(S = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, i_\lambda : X_\lambda \to S)$, und nennen i_λ die kanonischen Morphismen (aka „Injektionen“).

Die universelle Eigenschaft entspricht für $Z \in \mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$ der Bijektivität von

$$\Psi \;:\; \mathrm{Mor}(\textstyle\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Z) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Mor}(X_\lambda, Z) \;:\; f \mapsto (f \circ i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}.$$

☺ Für $\Lambda = \emptyset$ ist das Co/Produkt das initiale/terminale Objekte in $\mathtt{C}$. Für $\Lambda = \{1\}$ gilt $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = X_1$ mit $p_1 = \mathrm{id}_{X_1}$ und $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = X_1$ mit $i_1 = \mathrm{id}_{X_1}$. (Dies ist jeweils nur eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.)

Produkte und Summen in einer Kategorie

☺ Kurz und prägnant als Slogan zusammengefasst:
Das Produkt $(P = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (p_\lambda : P \to X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ist terminal *über* X.
Die Summe $(S = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (i_\lambda : X_\lambda \to S)_{\lambda\in\Lambda})$ ist initial *unter* X.

Zur Illustration nenne ich einige prominente und vertraute Beispiele:

Kategorie	Produkt	Summe / Coprodukt
$(X, \leq)$	$\inf\{ x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$	$\sup\{ x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$
$(\mathbb{N}, \mid_{\mathbb{N}})$	$\mathrm{ggT}(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$	$\mathrm{kgV}(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$
$\mathtt{Set}_\subseteq$	$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{Set}$, $\mathtt{Top}$	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{Set}_*$, $\mathtt{Top}_*$	$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{Grp}$	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$*_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{Ab}$, $\mathtt{Vec}_K$, $\mathtt{Mod}_K$	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$
$\mathtt{CRing}$	$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$

Produkte und Summen in einer Kategorie

Nicht jede Kategorie $\mathtt{C}$ hat initiale / terminale Objekte. Selbst wenn diese vorliegen, existieren in $\mathtt{C}$ vielleicht nicht alle Summen / Produkte.

Beispiel: In $(\mathbb{N}, \leq)$ existiert ein initiales Objekt 0, aber kein terminales.
Es existieren beliebige Produkte $\inf\{ x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \} = \min\{ x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$,
aber i.A. nur endliche Summen $\sup\{ x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \} = \max\{ x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$.

Es ist daher eine besondere Auszeichnung einer Kategorie $\mathtt{C}$,
wenn diese universellen Objekte immer als Lösungen existieren,
also die Kategorie $\mathtt{C}$ diese universellen Konstruktionen unterstützt.

Auch deshalb haben wir in der Kategorie $\mathtt{Top}$ große Sorgfalt auf die universellen Konstruktionen verwendet. Anschließend haben wir diese genauer untersucht, innere Eigenschaften formuliert und bewiesen.

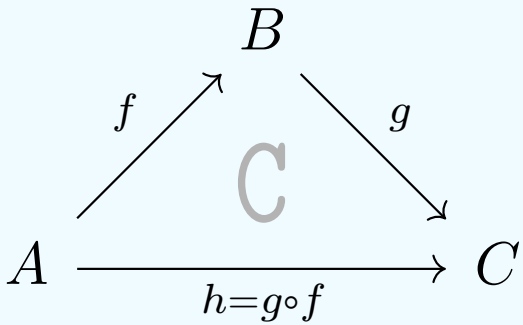
Das ist typisch: Die kategorielle Sichtweise ordnet und strukturiert, sie gibt einen Anfang vor, anschließend untersuchen wir die Feinstruktur.

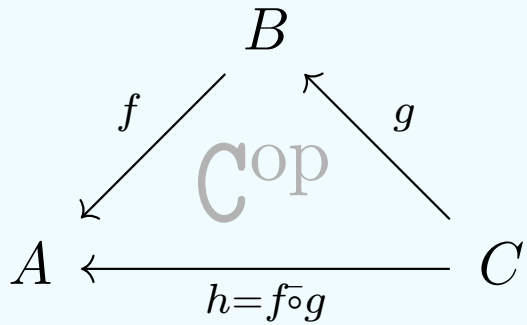
🙂 Zur Übung können Sie dies für Ihre Lieblingskategorien ausführen, zum Beispiel $\mathtt{Set}$, $\mathtt{Vec}_K$, $\mathtt{Top}$, $\mathtt{Grp}$, ...

Entgegengesetzte Kategorie

Definition H3o: entgegengesetzte Kategorie

Zu jeder Kategorie $\mathtt{C}$ können wir formal alle Pfeile umdrehen und erhalten die **entgegengesetzte Kategorie** $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}$ mit $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}(B,A) = \mathtt{C}(A,B)$:





Diese hat dieselben Objekte und dieselben Morphismen wie $\mathtt{C}$, aber alle Morphismen werden umgedreht notiert, also $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}(B,A) = \mathtt{C}(A,B)$ und

$$\bar{\circ} : \mathtt{C}^{\mathrm{op}}(B,A) \times \mathtt{C}^{\mathrm{op}}(C,B) \to \mathtt{C}^{\mathrm{op}}(C,A) : (f,g) \mapsto f \,\bar{\circ}\, g = g \circ f.$$

Mit $\mathtt{C} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, s, t, \circ, \mathrm{id})$ ist auch $\mathtt{C}^{\mathrm{op}} = (\mathtt{C}_0, \mathtt{C}_1, t, s, \bar{\circ}, \mathrm{id})$ eine Kategorie.

Beispiel: Zur Kategorie $(X, \leq)$ entgegengesetzt ist $(X, \geq)$.
Durch zweimaliges Umdrehen erhalten wir $(\mathtt{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathtt{C}$.

Entgegengesetzte Kategorie

Übung: Schreiben Sie die Dualisierung von $\mathtt{C}$ zu $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}$ vollständig aus als „Graph mit Komposition“ im Sinne von Definition H1Q.

Jedes kommutative Diagramm in $\mathtt{C}$ entspricht durch Umdrehen aller Pfeile einem kommutativen Diagramm in $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}$, und umgekehrt. Insbesondere haben $\mathtt{C}$ und $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}$ genau dieselben Isomorphismen. Für das Dualisieren erhalten wir folgende Übersetzungen:

Eigenschaft in $\mathtt{C}$	Eigenschaft in $\mathtt{C}^{\mathrm{op}}$
invertierbar – Isomorphismus	Isomorphismus – invertierbar
links-/rechtsinvertierbar	rechts-/linksinvertierbar
links-/rechtskürzbar	rechts-/linkskürzbar
Nullobjekt	Nullobjekt
initial / terminal	terminal / initial
Coprodukt / Produkt	Produkt / Coprodukt
ko-/kontravarianter Funktor	kontra-/kovarianter Funktor
$F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$	$F : \mathtt{C}^{\mathrm{op}} \to \mathtt{D}$

Darstellung von Morphismen als Matrizen

Aufgabe: (1) Sei $\mathtt{C}$ eine Kategorie. Darin existiere ein Nullobjekt 0 sowie zu jeder Familie $A_1, \dots, A_n \in \mathtt{C}$ eine Summe $S = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ und ein Produkt $P = A_1 \times \cdots \times A_n$. Dies definiert den kanonischen Morphismus

$$f : A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \to A_1 \times \cdots \times A_n \quad \text{durch die Matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Schreibweise bedeutet ausführlich: Für jedes Paar $(\ell, k) \in \{1, \dots, n\}^2$ ist $f_{\ell k} = p_\ell \circ f \circ i_k : A_k \to A_\ell$ gegeben durch die Identität $f_{\ell k} = \mathrm{id}_{A_k}$ falls $k = \ell$ sowie den Nullmorphismus $f_{\ell k} : A_k \to 0 \to A_\ell$ falls $k \neq \ell$.

Beispiel: In $\mathtt{Mod}_K$ ist f ein Isomorphismus: Summe gleich Produkt! Dieser besonderen Eigenschaft wollen wir nun auf den Grund gehen.

Aufgabe: Von einer **additiven Kategorie** $\mathtt{C}$ verlangen wir (1) und zudem: (2) Für je zwei Objekte $A, B \in \mathtt{C}$ ist $(\mathtt{C}(A,B), +, 0)$ eine abelsche Gruppe, und alle Kompositionen $\circ : \mathtt{C}(B,C) \times \mathtt{C}(A,B) \to \mathtt{C}(A,C)$ sind $\mathbb{Z}$–bilinear. Folgern Sie daraus, dass obiger Morphismus f ein Isomorphismus ist.

Darstellung von Morphismen als Matrizen

Lösung: Wir konstruieren $g : P \to S$ durch $g := \sum_{k=1}^{n} i_k \circ p_k \in \mathtt{C}(P, S)$.
Es gilt $g \circ f = \mathrm{id}_S$, denn $g \circ f \circ i_k = \sum_{\ell=1}^{n} i_\ell \circ p_\ell \circ f \circ i_k = i_k$ für alle k.
Aus $g \circ f \circ i_k = \mathrm{id}_S \circ i_k$ folgt $g \circ f = \mathrm{id}_S$ dank UAE gemäß Definition H3E.
Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}_P$, denn $p_\ell \circ f \circ g = \sum_{k=1}^{n} p_\ell \circ f \circ i_k \circ p_k = p_\ell$ für alle ℓ.
Aus $p_\ell \circ f \circ g = p_\ell \circ \mathrm{id}_P$ folgt $f \circ g = \mathrm{id}_P$ dank UAE gemäß Definition H3D.

In jeder additiven Kategorie sind *endliche* Summen und Produkte gleich!
(Zunächst nur *isomorph*, daher können wir beide gleich *wählen*.)

Aufgabe: (3) Für das Biprodukt (= Summe = Produkt) schreiben wir $\oplus$.
Jeder $\mathtt{C}$–Morphismus f von $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ nach $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$
schreibt sich als Matrix $F = (f_{\ell k})$ mit Koeffizienten $f_{\ell k} = p_\ell \circ f \circ i_k$.
Welche der üblichen Rechenregeln für Matrizen gelten hier?

Lösung: Alle! Rechnen Sie Addition und Multiplikation sorgsam nach.

🙂 Das erklärt, wo die Rechenregeln für Matrizen eigentlich herkommen.
Jeder endlich erzeugte K–Vektorraum V erlaubt eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$,
zerfällt gemäß $V = Kb_1 \oplus \cdots \oplus Kb_n$ mit $Kb_i \cong K$, und $\mathrm{End}_K(K, K) \cong K$.
Zudem erweitern wir mögliche Anwendungen, etwa auf Blockmatrizen!

Natürliche und ganze Zahlen als initiale Objekte

Wir betrachten die Kategorie $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{end}}$: Objekte sind Tripel (A, a, α) bestehend aus einer Menge A, einem Fußpunkt $a \in A$, und einer Selbstabbildung $\alpha : A \to A$. Morphismen $f : (A, a, \alpha) \to (B, b, \beta)$ sind Abbildungen $f : A \to B$ mit $f(a) = b$ und $f \circ \alpha = \beta \circ f$.

$$\begin{array}{ccccc} \{a\} & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & A & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\ \{b\} & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} & B & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

Anwendung: Jedes Objekt (A, a, α) beschreibt ein *dynamisches System* mit Zustandsmenge A, Startzustand $a \in A$ und Dynamik $\alpha : A \to A$.

In $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{end}}$ liegen die vollen Unterkategorien $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{bij}}$ und $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{inj}}$ und $\mathtt{Set}_*^{\mathrm{sur}}$: Für ihre Objekte (A, a, α) verlagen wir dabei noch zusätzlich, dass die Selbstabbildung $\alpha : A \to A$ bijektiv / injektiv / surjektiv ist.

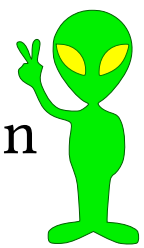
Aufgabe: Bestimmen Sie initiale Objekte in jeder dieser Kategorien.
Hinweis: Wiederholen Sie hierzu die Dedekind–Peano–Axiome für die natürlichen Zahlen und darauf aufbauend Dedekinds Rekursionssatz.

Natürliche und ganze Zahlen als initiale Objekte

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{N} & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{N} \\ \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\ \{a_0\} & \xhookrightarrow{\text{inc}} & A & \xrightarrow{\alpha} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \xmapsto{\nu} & 1 & \xmapsto{\nu} & 2 & \xmapsto{\nu} & 3 & \xmapsto{\nu} & \dots \\ \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ a_0 & \xmapsto{\alpha} & a_1 & \xmapsto{\alpha} & a_2 & \xmapsto{\alpha} & a_3 & \xmapsto{\alpha} & \dots \end{array}$$

Lösung: (1) Initial in $\mathtt{Set}_*^{\text{end}}$ sind die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ mit der Nachfolgerabbildung $\nu : n \mapsto n+1$. Das ist die Aussage von Dedekinds Rekursionssatz: Zu jedem Objekt $(A, a, \alpha) \in \mathtt{Set}_*^{\text{end}}$ konstruieren wir $f : \mathbb{N} \to A : n \mapsto a_n$ durch die Rekursion $a_0 = a$ und $a_{n+1} = \alpha(a_n)$.

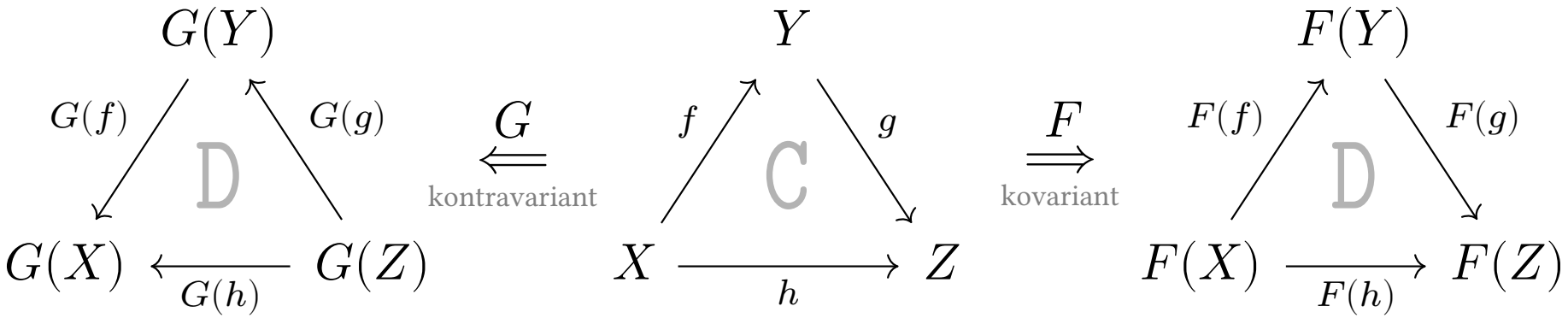
Als Korollar erhalten wir die Einzigkeit der natürlichen Zahlen: Zu je zwei Modellen $(N, 0, \nu)$ und $(N', 0', \nu')$ der natürlichen Zahlen existiert genau ein Isomorphismus $(f, f') : (N, 0, \nu) \cong (N', 0', \nu')$.



Jede:r darf sich ihre natürlichen Zahlen vorstellen, wie sie mag. Zwischen je zwei Modellen übersetzt der eindeutige Isomorphismus.

(2) Initial in $\mathtt{Set}_*^{\text{bij}}$ sind die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, 0, \zeta)$ mit $\zeta : n \mapsto n+1$.
(3) Initial in $\mathtt{Set}_*^{\text{inj}}$ ist $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ genau wie in (1), denn ν ist injektiv.
(4) Die Kategorie $\mathtt{Set}_*^{\text{sur}}$ hat kein initiales Objekt! (Übung / Skript)

Kovariante und kontravariante Funktoren



Eine Kategorie $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ besteht aus Objekten und Morphismen und ihrer Komposition. Ein **Funktor** $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ist eine strukturerhaltende Abbildung: Er übersetzt kommutative Diagramme der Startkategorie $\mathtt{C}$ in kommutative Diagramme der Zielkategorie $\mathtt{D}$. Entsprechend $G : \mathtt{C}^{\mathrm{op}} \to \mathtt{D}$.

Beispiele: (1) Wir haben den **kovarianten Potenzmengenfunktor**

$$\mathfrak{P}_* : \mathtt{Set} \to \mathtt{Set} : X \mapsto \mathfrak{P}(X) \quad \text{mit Vorschieben auf die Bildmenge}$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (f_* : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y) : A \mapsto \{\, f(a) \in Y \,|\, a \in A \,\}).$$

(2) Wir haben den **kontravarianten Potenzmengenfunktor**

$$\mathfrak{P}^* : \mathtt{Set} \to \mathtt{Set} : X \mapsto \mathfrak{P}(X) \quad \text{mit Zurückziehen auf die Urbildmenge}$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (f^* : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X) : B \mapsto \{\, x \in X \,|\, f(x) \in B \,\}).$$

Kovariante und kontravariante Funktoren

Beweis: (1) Für jede Menge X gilt offensichtlich $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}(X)}$.
Für Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)_*(A) &\overset{\text{Def}}{=} \{\, g(f(a)) \mid a \in A \,\} \\ &\overset{\text{Def}}{=} \{\, g(b) \mid b \in f_*(A) \,\} \overset{\text{Def}}{=} g_*(f_*(A)) \overset{\text{Def}}{=} (g_* \circ f_*)(A).\end{aligned}$$

(2) Für jede Menge X gilt offensichtlich $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}(X)}$.
Für Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)^*(C) &\overset{\text{Def}}{=} \{\, x \in X \mid g(f(x)) \in C \,\} \\ &\overset{\text{Def}}{=} \{\, x \in X \mid f(x) \in g^*(C) \,\} \overset{\text{Def}}{=} f^*(g^*(C)) \overset{\text{Def}}{=} (f^* \circ g^*)(C).\end{aligned}$$

Für Ur/Bildmengen schreibt man kurz $f(A) = f_*(A)$ und $f^{-1}(B) = f^*(B)$. Dieser Missbrauch der Notation ist bequem, aber unglücklich, denn er unterscheidet weder f_* von der ursprünglichen Abbildung f, noch f^* von der (eventuell existierenden) inversen Abbildung f^{-1}. Der Kontext sagt, was gemeint ist, doch die Doppelbedeutung verwirrt Anfänger:innen. Wie so oft gilt es zwischen Bequemlichkeit und Klarheit abzuwägen.

Kovariante und kontravariante Funktoren

Definition H4c: Funktor

Seien $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ Kategorien. Ein **(kovarianter) Funktor** $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ordnet jedem $\mathtt{C}$–Objekt $X \in \mathtt{C}$ ein $\mathtt{D}$–Objekt $F(X) \in \mathtt{D}$ zu und jedem $\mathtt{C}$–Morphismus $f : X \to Y$ einen $\mathtt{D}$–Morphismus $F(f) : F(X) \to F(Y)$, wobei $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \mathtt{C}$ gilt sowie $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle verknüpfbaren $\mathtt{C}$–Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$.

Ein **kontravarianter Funktor** $G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ist ein Funktor $G : \mathtt{C}^{\mathrm{op}} \to \mathtt{D}$. Ausführlich heißt das: G ordnet jedem $\mathtt{C}$–Objekt $X \in \mathtt{C}$ ein $\mathtt{D}$–Objekt $G(X) \in \mathtt{D}$ zu und jedem $\mathtt{C}$–Morphismus $f : X \to Y$ einen $\mathtt{D}$–Morphismus $G(f) : G(Y) \to G(X)$, wobei $G(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{G(X)}$ für alle $X \in \mathtt{C}$ gilt sowie $G(g \circ f) = G(f) \circ G(g)$ für alle $\mathtt{C}$–Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$.

Beispiele: Ein Funktor $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ ist eine monotone Abbildung. Die Funktoren $\pi_0, \mathscr{Z} : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ sind kovariant, ebenso die (Vergiss-) Funktoren $\mathtt{Met} \to \mathtt{Top} : (X, d) \mapsto (X, \mathcal{T}_d)$ und $\mathtt{Top} \to \mathtt{Set} : (X, \mathcal{T}) \mapsto X$. Transposition $^\top : \mathtt{Mat}_K \to \mathtt{Mat}_K$ ist kontravariant, $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$.

Einfache Beispiele zu Funktoren

Beispiel: Wir können prägeordnete Mengen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ als Kategorien auffassen (H1G). Ein kovarianter Funktor $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ ist eine monoton wachsende Abbildung, das heißt, $x \leq y$ impliziert $f(x) \leq f(y)$. Ein kontravarianter Funktor $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ ist eine monoton fallende Abbildung, das heißt, $x \leq y$ impliziert $f(x) \geq f(y)$.

Beispiel: Ein konstanter Funktor $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ordnet jedem Objekt X in $\mathtt{C}$ ein festes Objekt Y in $\mathtt{D}$ zu und jedem Morphismus in $\mathtt{C}$ die Identität id_Y. Dieser ist kovariant und kontravariant (als seltene Ausnahme).

Beispiel: Für jede Kategorie $\mathtt{C}$ ist die Identität $\mathrm{id}_{\mathtt{C}} : \mathtt{C} \to \mathtt{C}$ ein Funktor. Sind $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ und $G : \mathtt{D} \to \mathtt{E}$ Funktoren, so auch ihre Komposition $G \circ F : \mathtt{C} \to \mathtt{E}$. Kategorien und Funktoren bilden eine Kategorie!

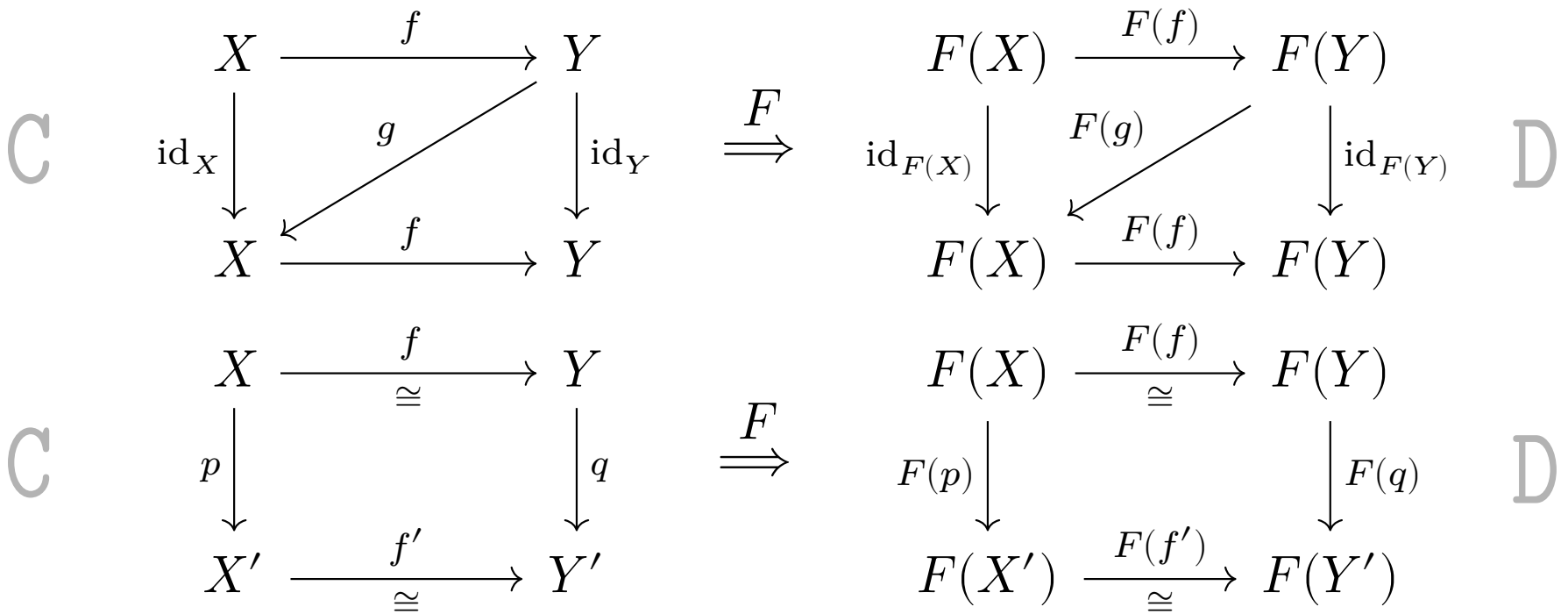
Fußnote: Die Kategorie aller kleinen Kategorien bereitet keine Probleme. Die „Kategorie aller Kategorien“ hingegen ist in sich widersprüchlich wie die „Menge aller Mengen“ in Russels Antinomie (B107). Grothendieck schlug dazu vor, jeweils vom aktuellen ZFC–Mengenuniversum zu einem größeren übergehen, in dem die aktuellen Klassen zu Mengen werden.

Funktoren erhalten Isomorphie.

Satz H4F: Funktoren erhalten Isomorphie.

Sei $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ein Funktor (kovariant, ebenso kontraviant $G : \mathtt{C}^{\mathrm{op}} \to \mathtt{D}$).
(0) Ist f in $\mathtt{C}$ links-/rechtsinvertierbar, so auch $F(f)$ in $\mathtt{D}$, getauscht für G.
(1) Ist f in $\mathtt{C}$ ein Isomorphismus, dann ist $F(f)$ in $\mathtt{D}$ ein Isomorphismus.
(2) Sind zwei Objekte $X \cong Y$ in $\mathtt{C}$ isomorph, so auch $F(X) \cong F(Y)$ in $\mathtt{D}$.
(3) Sind Morphismen $p \cong q$ in $\mathtt{C}$ isomorph, so auch $F(p) \cong F(q)$ in $\mathtt{D}$.

Beweis: Das folgt unmittelbar aus den Definitionen:



Die Funktoren $\pi_0, \mathfrak{Z} : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$

Weg/Komponenten (G2H/G1N) definieren die kovarianten Funktoren

$$\begin{aligned}
\pi_0 &: \mathtt{Top} \to \mathtt{Set} : X \mapsto \pi_0(X), \\
&\qquad (f : X \to Y) \mapsto (\, \pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y) : [a]_X \mapsto [f(a)]_Y), \\
\mathfrak{Z} &: \mathtt{Top} \to \mathtt{Set} : X \mapsto \mathfrak{Z}(X), \\
&\qquad (f : X \to Y) \mapsto (\, \mathfrak{Z}(f) : \mathfrak{Z}(X) \to \mathfrak{Z}(Y) : \langle a \rangle_X \mapsto \langle f(a) \rangle_Y).
\end{aligned}$$

Jeder Homöomorphismus $(f, g) : X \cong Y$ topologischer Räume, also ein $\mathtt{Top}$–Isomorphismus, induziert Bijektionen $(\pi_0(f), \pi_0(g)) : \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$ und $(\mathfrak{Z}(f), \mathfrak{Z}(g)) : \mathfrak{Z}(X) \cong \mathfrak{Z}(Y)$, also $\mathtt{Set}$–Isomorphismen.

Der Quotient zur Homotopiekategorie (G4L) ist der Funktor

$$\begin{aligned}
\mathrm{quot} &: \mathtt{Top} \to \mathtt{hTop} : X \mapsto X, \\
&\qquad (f : X \to Y) \mapsto ([f] : X \to Y).
\end{aligned}$$

Homotopie-Invarianz (G4M) induziert $\bar{\pi}_0 : \mathtt{hTop} \to \mathtt{Set} : [f] \mapsto \pi_0(f)$ als Faktorisierung $\pi_0 = \bar{\pi}_0 \circ \mathrm{quot}$. Auch für $\bar{\pi}_0$ schreiben wir kurz π_0.

Hom-Funktoren

Sei $\mathtt{C}$ eine *lokal kleine* Kategorie. Zu jedem Paar von Objekten $X, Y \in \mathtt{C}$ ist dann $\mathtt{C}(X,Y) \in \mathtt{Set}$ die *Menge* aller Morphismen von X nach Y.

Übung H4J: Hom-Funktor, kovariant und kontravariant

(1) Zu jedem festen Objekt $Z \in \mathtt{C}$ erhalten wir den kovarianten Funktor

$$\begin{aligned}\mathtt{C}(Z,-) : \mathtt{C} \to \mathtt{Set} : X &\mapsto \mathtt{C}(Z,X),\\ (f : X \to Y) &\mapsto (f_* : \mathtt{C}(Z,X) \to \mathtt{C}(Z,Y) : h \mapsto f \circ h).\end{aligned}$$

(2) Dual hierzu erhalten wir den kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned}\mathtt{C}(-,Z) : \mathtt{C} \to \mathtt{Set} : X &\mapsto \mathtt{C}(X,Z),\\ (f : X \to Y) &\mapsto (f^* : \mathtt{C}(Y,Z) \to \mathtt{C}(X,Z) : h \mapsto h \circ f).\end{aligned}$$

Beispiel: Sie kennen bereits den Funktor $\pi_0 = [\{*\}, -] : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$.
In Kapitel J untersuchen wir den Funktor $[\mathbb{S}^n, -] : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$.

Aus der Linearen Algebra kennen Sie über jedem Körper K
den Dualisierungs-Funktor $\mathrm{Hom}_K(-,K) : \mathtt{Vec}_K \to \mathtt{Vec}_K$.

Hom-Funktoren

(1) Wir rechnen geduldig nach, dass $\mathtt{C}(Z,-)$ ein kovarianter Funktor ist:

(a) Für jedes Objekt $X \in \mathtt{C}$ gilt $\mathtt{C}(Z, \mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\mathtt{C}(Z,X)}$,
denn für $h \in \mathtt{C}(Z,X)$ gilt $(\mathrm{id}_X)_*(h) = \mathrm{id}_X \circ h = h$ dank Neutralität.

(b) Für je zwei Morphismen $f : V \to X$ und $g : X \to Y$ in $\mathtt{C}$ gilt

$$\mathtt{C}(Z, g \circ f) = (g \circ f)_* = g_* \circ f_* = \mathtt{C}(Z,g) \circ \mathtt{C}(Z,f),$$

denn für jeden Morphismus $h \in \mathtt{C}(Z,V)$ gilt dank Assoziativität

$$(g \circ f)_*(h) = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g_*(f \circ h) = g_*(f_*(h)) = (g_* \circ f_*)(h).$$

(2) Genauso zeigen wir, dass $\mathtt{C}(-,Z)$ ein kontravarianter Funktor ist:

(a) Für jedes Objekt $X \in \mathtt{C}$ gilt $\mathtt{C}(\mathrm{id}_X, Z) = (\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{\mathtt{C}(X,Z)}$,
denn für $h \in \mathtt{C}(X,Z)$ gilt $(\mathrm{id}_X)^*(h) = h \circ \mathrm{id}_X = h$ dank Neutralität.

(b) Für je zwei Morphismen $f : V \to X$ und $g : X \to Y$ in $\mathtt{C}$ gilt

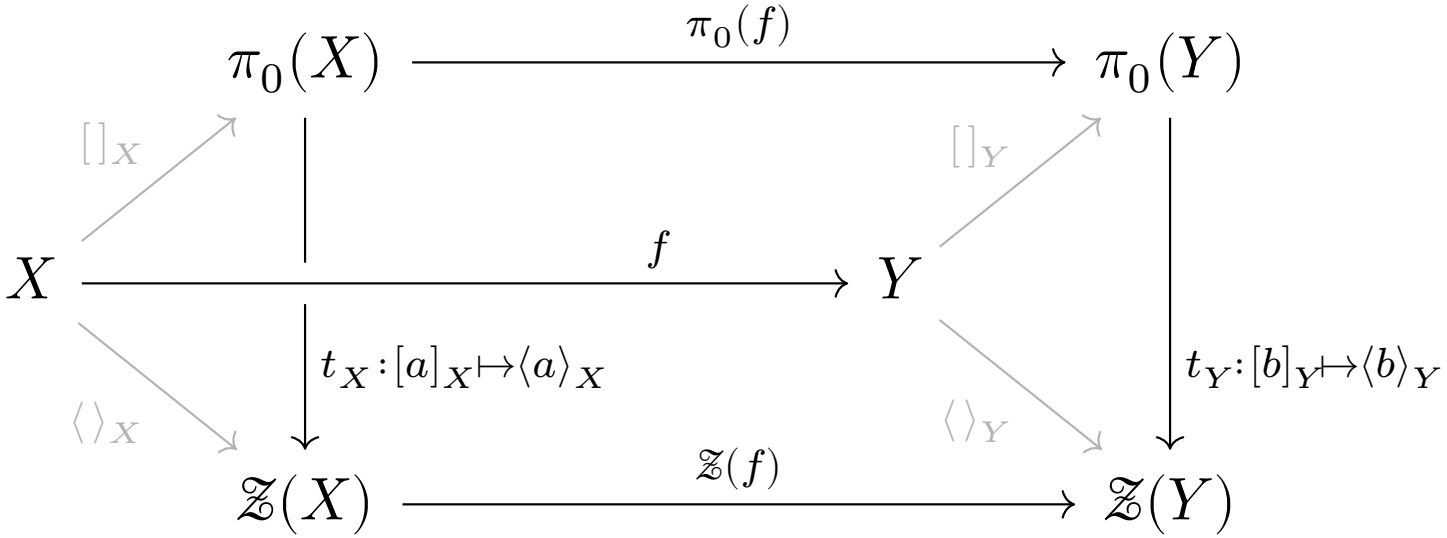
$$\mathtt{C}(g \circ f, Z) = (g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \mathtt{C}(f,Z) \circ \mathtt{C}(g,Z),$$

denn für jeden Morphismus $h \in \mathtt{C}(Y,Z)$ gilt dank Assoziativität

$$(g \circ f)^*(h) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = f^*(h \circ g) = f^*(g^*(h)) = (f^* \circ g^*)(h).$$

Was ist eine natürliche Transformationen?

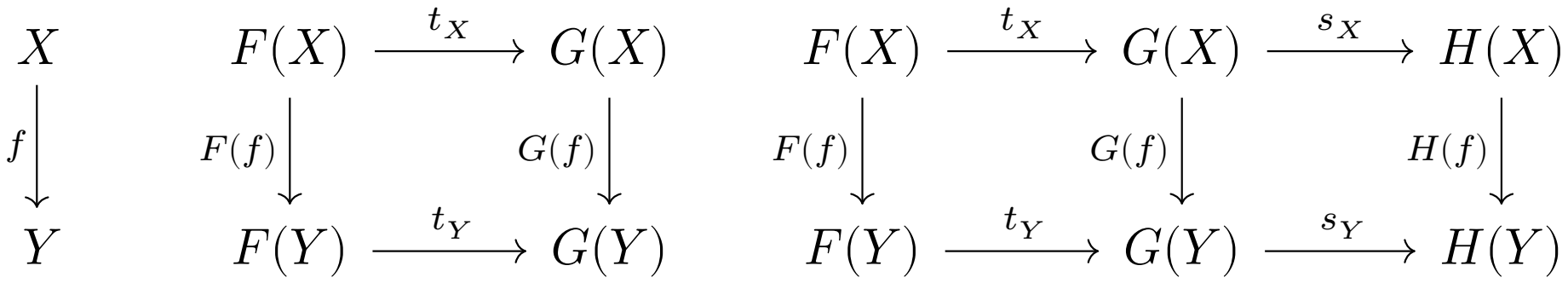
Wir beginnen mit einem vertrauten Beispiel aus der Topologie.
Es gilt $X = \bigsqcup \pi_0(X) = \bigsqcup \mathfrak{Z}(X)$. Die Zerlegung $\pi_0(X)$ ist feiner als $\mathfrak{Z}(X)$.



Zwischen den Funktoren $\pi_0, \mathfrak{Z} : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ besteht die obige Beziehung.
Wir nennen die **Transformation** $t : \pi_0 \to \mathfrak{Z} : [a] \mapsto \langle a \rangle$ **natürlich** (H5B):
Zu $f : X \to Y$ gilt $t_Y \circ \pi_0(f) = \mathfrak{Z}(f) \circ t_X$, das obige Rechteck kommutiert.

Auf der vollen Unterkategorie `lcTop` der lokal wegzusammenhängenden Räume ist t sogar eine **natürliche Äquivalenz**, geschrieben $t : \pi_0 \simeq\!\!\to \mathfrak{Z}$, denn gemäß Satz G3C gilt hier sogar die Gleichheit $\pi_0(X) = \mathfrak{Z}(X)$.

Natürliche Transformationen: Morphismen von Funktoren



Definition H5B: natürliche Transformation

(1) Seien $F, G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ Funktoren. Eine **Transformation** $t : F \to G$ ordnet jedem $\mathtt{C}$–Objekt X einen $\mathtt{D}$–Morphismus $t_X : F(X) \to G(X)$ zu.

(2) Wir nennen t **natürlich**, wenn für jeden $\mathtt{C}$–Morphismus $f : X \to Y$ die Kommutativität $t_Y \circ F(f) = G(f) \circ t_X$ gilt.

(3) Funktoren $F, G, H : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ und nat. Transformationen $t : F \to G$, $s : G \to H$ bilden eine Kategorie mit $(s \circ t)_X = s_X \circ t_X$ für alle $X \in \mathtt{C}$.

Eine **natürliche Äquivalenz** $(t, s) : F \cong G$ von Funktoren besteht aus nat. Transformationen $t : F \to G$ und $s : G \to F$ mit $s \circ t = \mathrm{id}_F$ und $t \circ s = \mathrm{id}_G$. Für jedes $\mathtt{C}$–Objekt X ist $(t_X, s_X) : F(X) \cong G(X)$ ein $\mathtt{D}$–Isomorphismus.

Beispiel: Die Determinante ist natürlich.

$$\begin{array}{ccc} R = M_1(R) & \xleftarrow{\det_R^n} & M_n(R) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & \texttt{Ring} & \downarrow{\scriptstyle M_n(f)} \\ S = M_1(S) & \xleftarrow{\det_S^n} & M_n(S) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R^\times = \mathrm{GL}_1(R) & \xleftarrow{\det_R^n} & \mathrm{GL}_n(R) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{GL}_1(f)} & \texttt{Grp} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{GL}_n(f)} \\ S^\times = \mathrm{GL}_1(S) & \xleftarrow{\det_S^n} & \mathrm{GL}_n(S) \end{array}$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir den Funktor $M_n : \texttt{Ring} \to \texttt{Ring} : R \mapsto R^{n\times n}$; zu $f : R \to S$ definieren wir $M_n(f) : M_n(R) \to M_n(S) : (a_{ij}) \mapsto (f(a_{ij}))$.

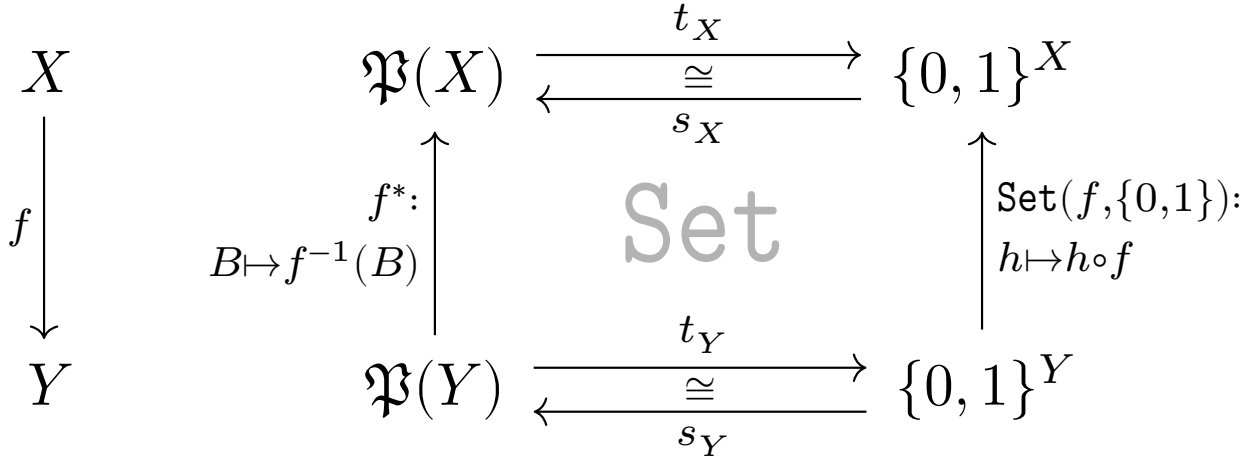
Für R in $\texttt{CRing} \leq \texttt{Ring}$ haben wir die Determinante $\det_R^n : M_n(R) \to R$. Diese ist überall durch dieselbe Formel definiert und somit natürlich!

Zu $M_n : \texttt{CRing} \to \texttt{Ring}$ erhalten wir so die natürliche Transformation $\det : M_n \to M_1$, und zu $\mathrm{GL}_n : \texttt{CRing} \to \texttt{Grp}$ ebenso $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$.

Beispiel: Es ist egal, ob Sie $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \ldots$ berechnen, das Ergebnis $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) = -2$ ist über jedem Ring „natürlich“ dasselbe!

Aufgabe: Über welchen endlichen Körpern ist $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar?
Lösung: Wir nutzen $\det_{\mathbb{Z}}^2(A) = -2$ und $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p$: invertierbar gdw $p \neq 2$.

Beispiel: Potenzmenge und Indikatorfunktionen



Die Transformation $t_X : \mathfrak{P}(X) \to \{0,1\}^X$ ordnet jeder Teilmenge $A \subseteq X$ ihre **Indikatorfunktion** $\mathbf{1}_A : X \to \{0,1\}$ zu, und $s_X : \{0,1\}^X \to \mathfrak{P}(X)$ ordnet jeder Funktion $h : X \to \{0,1\}$ ihren **Träger** $\mathrm{supp}(h) \subseteq X$ zu.

🙂 Besser noch: Dies erweist sich nun als eine natürliche Äquivalenz!
Elegant zusammengefasst: Der *kontravariante* Potenzmengenfunktor $\mathfrak{P}^*$ lässt sich als Hom-Funktor darstellen, dank $(t,s) : \mathfrak{P}^* \cong \mathtt{Set}(-,\{0,1\})$.

⚠ Für den *kovarianten* Potenzmengenfunktor $\mathfrak{P}_*$ gelingt das nicht!
Zur Darstellung suchen wir eine Menge A mit $(t,s) : \mathfrak{P}_* \cong \mathtt{Set}(A,-)$.
Wir finden $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, aber $\mathtt{Set}(A,\emptyset) = \emptyset$ für jede Menge $A \neq \emptyset$.
Es gilt $\mathtt{Set}(\emptyset,X) = \{\emptyset\}$, aber $\mathfrak{P}(X) \neq \{\emptyset\}$ für jede Menge $X \neq \emptyset$.

Isomorphie und Äquivalenz von Kategorien

Wie für mathematische Objekte üblich haben wir auch für Kategorien einen Isomorphiebegriff, zudem einen schwächeren Äquivalenzbegriff:

Definition H5E: Isomorphie vs Äquivalenz

Eine **Isomorphie** $(F,G) : \mathtt{C} \cong \mathtt{D}$ zwischen zwei Kategorien $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ besteht aus Funktoren $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ und $G : \mathtt{D} \to \mathtt{C}$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathtt{C}}$ und $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathtt{D}}$.

Für eine **Äquivalenz** $(F,G) : \mathtt{C} \simeq \mathtt{D}$ verlangen wir etwas schwächer nur natürliche Äquivalenzen $(t,t') : G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathtt{C}}$ und $(s,s') : F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathtt{D}}$.

🙂 Die Lineare Algebra nutzt höchst effizient die Matrizenrechnung, und dies beruht auf der folgenden Äquivalenz zu linearen Abbildungen.

Aufgabe: Erklären Sie die Isomorphie / Äquivalenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen. **Lösung:** Folgender Satz ist der erste Schritt:

Satz H5F: Matrizen und lineare Abbildungen

Für jeden Ring K haben wir die Isomorphie $(L,M) : \mathtt{Mat}_K \cong \mathtt{NatMod}_K$. Hingegen gilt $\mathtt{FinMod}_K \ncong \mathtt{Mat}_K$, denn die Objekte sind über/abzählbar.

Äquivalenz von Matrizen und linearen Abbildungen

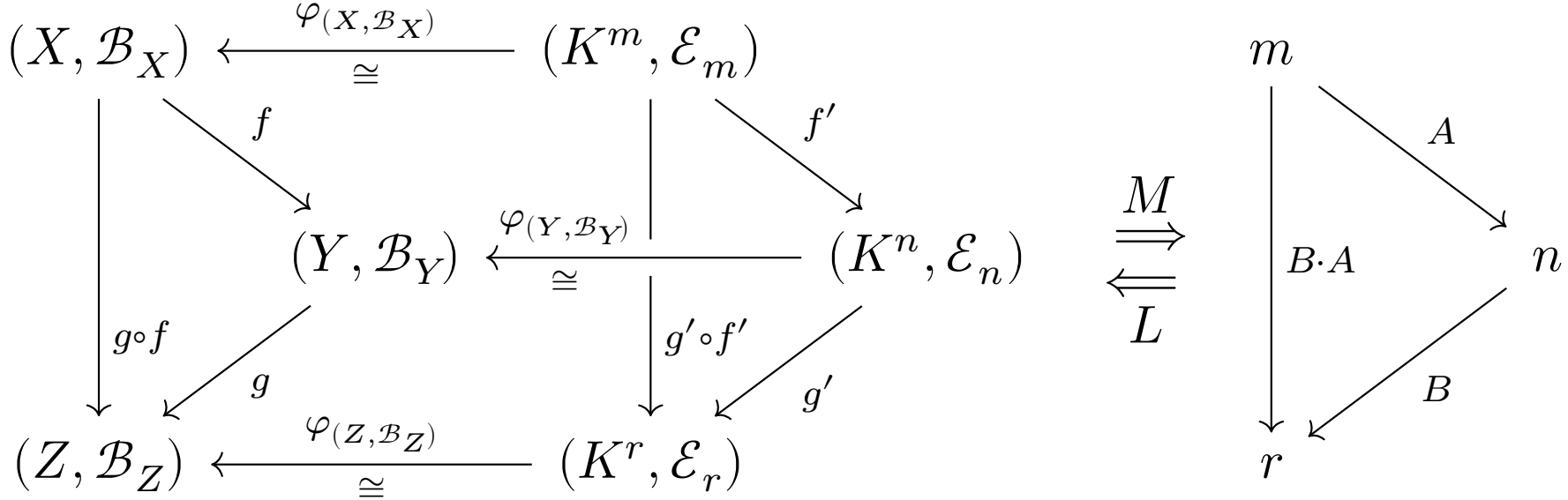
Beweis: Der Funktor $L : \mathtt{Mat}_K \to \mathtt{NatMod}_K$ ordnet jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ den Koordinatenraum $L(n) = K^n$ zu und jeder Matrix $A \in K^{n\times m}$ die lineare Abbildung $L(A) : K^m \to K^n : v \mapsto Av$. Die Matrixmultiplikation wurde vorausschauend so definiert, dass hier $L(B \cdot A) = L(B) \circ L(A)$ gilt.

Umgekehrt haben wir den Funktor $M : \mathtt{NatMod}_K \to \mathtt{Mat}_K$: Dem Raum K^n wird seine Dimension $n \in \mathbb{N}$ zugeordnet und jeder linearen Abbildung $f : K^m \to K^n$ die zugehörige Matrix $M(f) \in K^{m\times n}$: Bezüglich der kanonischen Basen gilt $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i a_{ij}$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_{ij}, und wir setzen $M(f) := (a_{ij})_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$. Auch hier gilt $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$. Wir sehen $M \circ L = \mathrm{id}_{\mathtt{Mat}_K}$ und $L \circ M = \mathrm{id}_{\mathtt{NatMod}_K}$. So erhalten wir den Isomorphismus $(L, M) : \mathtt{Mat}_K \cong \mathtt{NatMod}_K$. QED

Nach diesem Erfolg möchten wir den Funktor $M : \mathtt{NatMod}_K \to \mathtt{Mat}_K$ auf $\mathtt{FinMod}_K$ ausdehnen: Wir wollen jeder K–linearen Abbildung $f : X \to Y$ eine Matrix $A \in K^{n\times m}$ zuordnen. Hierzu müssen wir allerdings Basen von X und Y wählen. Nicht immer existiert eine Basis, und falls eine existiert, so gibt es meist viele und darunter keine kanonische Wahl.

Äquivalenz von Matrizen und linearen Abbildungen

Wir machen die Not zur Tugend und betrachten Paare $(X, \mathcal{B}_X)$, wobei X ein K–Modul ist und $\mathcal{B}_X = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von X. Als Morphismen $f : (X, \mathcal{B}_X) \to (Y, \mathcal{B}_Y)$ betrachten wir K–lineare Abbildungen $f : X \to Y$ wie zuvor. Wir erhalten so die Kategorie $\mathtt{FinMod}_K^b$ der endlich-basierten K–Moduln und die volle Unterkategorie $\mathtt{NatMod}_K^b$ mit Objekten $(K^n, \mathcal{E}_n)$, wobei $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis ist. (Speziell hier gibt es eine kanonische Wahl!) Zu jedem Objekt $(X, \mathcal{B}_X)$ mit $\mathcal{B}_X = (x_1, \dots, x_n)$ haben wir den Koordinatenisomorphismus $\varphi : (K^n, \mathcal{E}_n) \xrightarrow{\cong} (X, \mathcal{B}_X)$ mit $e_k \mapsto x_k$. Elegant zusammengefasst:



Äquivalenz von Matrizen und linearen Abbildungen

Das steckt hinter dem Kochrezept: „Jede lineare Abbildung können wir als Matrix darstellen… nach Wahl je einer Basis von Start und Ziel!“

Satz H5G: Matrizen und lineare Abbildungen

Es gilt $(L, M) : \mathtt{Mat}_K \simeq \mathtt{FinMod}_K^b$: Die Kategorie der Matrizen ist (nicht isomorph, aber) äquivalent zur Kategorie der endlich-basierten Moduln.

Beweis: Dank Satz H5F haben wir $L : \mathtt{Mat}_K \rightsquigarrow \mathtt{NatMod}_K \hookrightarrow \mathtt{FinMod}_K^b$ und $M : \mathtt{FinMod}_K^b \to \mathtt{Mat}_K$ wie oben im Diagramm erklärt. Nach Konstruktion gilt $M \circ L = \mathrm{id}_{\mathtt{Mat}_K}$. Umgekehrt gilt jedoch $L \circ M \neq \mathrm{id}_{\mathtt{FinMod}_K^b}$, denn für jeden basierten Modul $(X, \mathcal{B}_X)$ mit $\mathcal{B}_X = (x_1, \dots, x_n)$ bekommen wir $(L \circ M)(X, \mathcal{B}_X) = L(n) = (K^n, \mathcal{E}_n)$. Dank der gegebenen Basen haben wir den Koordinatenisomorphismus $\varphi : (K^n, \mathcal{E}_n) \rightsquigarrow (X, \mathcal{B}_X) : e_k \mapsto x_k$. Das stiftet die natürliche Äquivalenz $\varphi : L \circ M \rightsquigarrow \mathrm{id}_{\mathtt{FinMod}_K^b}$. QED

🙂 Das Geschäft der Basiswahl ist anfangs verwirrend, dann sehr einfach. Sie verstehen jetzt vielleicht etwas besser, was hierbei genau passiert: Die Lineare Algebra konstruiert und nutzt eine natürliche Äquivalenz!

Adjungierte Funktoren

Wir betrachten den topologischen Vergissfunktor:

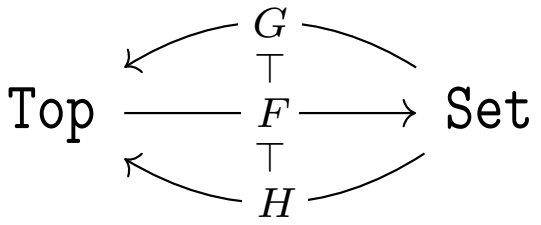
$$F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set} : \quad Y = (M_Y, \mathcal{T}_Y) \mapsto M_Y, \quad f \mapsto f$$

Umgekehrt statten wir jede Menge X mit der in/diskreten Topologie aus:

$$G : \mathtt{Set} \to \mathtt{Top} : \quad X \mapsto (X, \{\emptyset, X\}), \quad f \mapsto f$$
$$H : \mathtt{Set} \to \mathtt{Top} : \quad X \mapsto (X, \mathfrak{P}(X)), \quad f \mapsto f$$

Für jeden topologischen Raum $X \in \mathtt{Top}$ und jede Menge $Y \in \mathtt{Set}$ gilt:

$$\mathtt{Set}(FX, Y) \cong \mathtt{Top}(X, GY) : f \leftrightarrows f$$
$$\mathtt{Set}(Y, FX) \cong \mathtt{Top}(HY, X) : f \leftrightarrows f$$



Definition H6c: Adjunktion

Eine **Adjunktion** $(\varphi, \varphi') : F \dashv G : \mathtt{D} \rightleftarrows \mathtt{C}$ besteht aus zwei gegenläufigen Funktoren $F : \mathtt{D} \to \mathtt{C}$ und $G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ und einer natürlichen Bijektion $(\varphi_{X,Y}, \varphi'_{X,Y}) : \mathtt{C}(FX, Y) \cong \mathtt{D}(X, GY)$ für jedes Paar $X \in \mathtt{D}$ und $Y \in \mathtt{C}$.

Adjungierte Funktoren

Wir schreiben $(\varphi, \varphi') : F \dashv G$ kurz $\varphi : F \dashv G$ oder noch kürzer $F \dashv G$. Wir nennen auch kurz das Paar (F, G) eine Adjunktion, dabei ist F **linksadjungiert** zu G, und entsprechend G **rechtsadjungiert** zu F.

Die Natürlichkeit von (φ, φ') bedeutet: Für jeden Morphismus $f : Y \to Y'$ in $\mathtt{C}$ bzw. $g : X' \to X$ in $\mathtt{D}$ kommutieren die folgenden Diagramme:

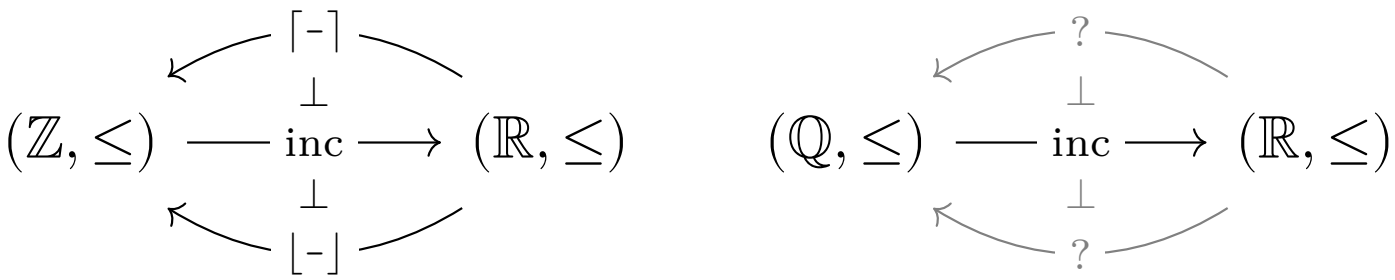
$$\begin{array}{ccc}
\mathtt{C}(FX, Y) & \underset{\varphi'_{X,Y}}{\overset{\varphi_{X,Y}}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} & \mathtt{D}(X, GY) \\
{\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)_*} \\
\mathtt{C}(FX, Y') & \underset{\varphi'_{X,Y'}}{\overset{\varphi_{X,Y'}}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} & \mathtt{D}(X, GY')
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathtt{C}(FX, Y) & \underset{\varphi'_{X,Y}}{\overset{\varphi_{X,Y}}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} & \mathtt{D}(X, GY) \\
{\scriptstyle F(g)^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\
\mathtt{C}(FX', Y) & \underset{\varphi'_{X',Y}}{\overset{\varphi_{X',Y}}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} & \mathtt{D}(X', GY)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f_* &: \mathtt{C}(A, Y) \to \mathtt{C}(A, Y') &&: \alpha \mapsto f \circ \alpha, \\
G(f)_* &: \mathtt{D}(A, GY) \to \mathtt{D}(A, GY') &&: \alpha \mapsto G(f) \circ \alpha, \\
g^* &: \mathtt{C}(X, B) \to \mathtt{C}(X', B) &&: \beta \mapsto \beta \circ g, \\
F(g)^* &: \mathtt{D}(FX, B) \to \mathtt{D}(FX', B) &&: \beta \mapsto \beta \circ F(g).
\end{aligned}$$

Numerisches Beispiel: Aufrunden und Abrunden

The slogan is "Adjoint functors arise everywhere."
Saunders Mac Lane (1909–2005), *Categories for the Working Mathematician*

Der Name kommt von der Adjunktionsformel für Skalarprodukte.
Die kategorielle Adjunktion begegnet uns häufig in der Mathematik, meist unter verschiedenen Namen. Hier ein erstes amüsantes Beispiel:



Aufgabe: (1) Wir betrachten $\mathrm{inc} : (\mathbb{Z}, \leq) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ als Funktor. (H1G)
Existiert hierzu ein ein linksadjungierter Funktor? ein rechtsadjungierter Funktor? Ist die Lösung eindeutig? Geben Sie sie möglichst explizit an!

(2) Dieselben Fragen für den Funktor $\mathrm{inc} : (\mathbb{Q}, \leq) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$. Dies zeigt: Nicht jeder Funktor erlaubt einen links- oder rechtsadjungierten Funktor. Adjunktion ist eine ganz besondere und sehr wertvolle Eigenschaft.

Numerisches Beispiel: Aufrunden und Abrunden

Lösung: (1a) Zum Inklusionsfunktor $g = \mathrm{inc} : (\mathbb{Z}, \leq) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \leq) : y \mapsto y$ suchen wir einen Linksadjungierten $f : (\mathbb{R}, \leq) \to (\mathbb{Z}, \leq) : x \mapsto f(x)$. Das bedeutet $(\mathbb{Z}, \leq)(f(x), y) \cong (\mathbb{R}, \leq)(x, g(y))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{Z}$. Zu festem $x \in \mathbb{R}$ heißt das: Für alle $y \in \mathbb{Z}$ gilt $f(x) \leq y$ genau dann, wenn $x \leq y$. Das bedeutet ganzzahlig Aufrunden, $f(x) = \lceil x \rceil$.

(1b) Wir suchen einen Rechtsadjungierten $h : (\mathbb{R}, \leq) \to (\mathbb{Z}, \leq) : x \mapsto h(x)$. Das bedeutet $(\mathbb{R}, \leq)(g(y), x) \cong (\mathbb{Z}, \leq)(y, h(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{Z}$. Wie in (1a) finden wir nun ganzzahliges Abrunden, $h(x) = \lfloor x \rfloor$.

(2) Zu festem $x \in \mathbb{R}$ suchen wir ein $\bar{x} \in \mathbb{Q}$, sodass für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt: (a) $\bar{x} \leq y \Leftrightarrow x \leq y$ bzw. (b) $y \leq \bar{x} \Leftrightarrow y \leq x$. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, müsste dazu $\bar{x} = x$ gelten. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist daher keine solche Wahl $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ möglich.

🙂 Auf- und Abrunden ist die Grundlage der **Fließkomma-Arithmetik** und somit jeder Computer-Implementierung numerischer Mathematik.

Allgemein für partiell geordnete Mengen (*posets*) erhalten wir den Begriff der **Galois–Verbindung** (*Galois connection*), etwa in der Galois–Theorie.

Das freie Monoid X^* über dem Alphabet X

Beispiel: Wir betrachten den Vergissfunktor (engl. *underlying set*)

$$U : \mathtt{Mon} \to \mathtt{Set} : \quad Y = (M, \cdot, e) \mapsto M, \quad h \mapsto h.$$

Zu jeder Menge X sei $FX = (X^*, \cdot, e)$ das freie Monoid über X. Jede Abbildung $g : X \to X'$ setzen wir multiplikativ fort zu $F(g) : FX \to FX'$.

$$F : \mathtt{Set} \to \mathtt{Mon} : \quad X \mapsto (X^*, \cdot, e), \quad g \mapsto F(g)$$

Damit gilt das **Prinzip der multiplikativen Fortsetzung / PMF:**

$$\mathtt{Set}(X, UY) \cong \mathtt{Mon}(FX, Y) : g \mapsto h$$

Zu $g : X \to UY$ gehört die multiplikative Fortsetzung $h : FX \to Y$.
Dies ist der eindeutige Monoidhomomorphismus h mit $h|_X = g$.

Übung: Rechnen Sie die Natürlichkeit von $(\varphi, \varphi') : g \leftrightarrows h$ geduldig nach.

Wiederholung: Wie konstruiert man zu X das freie Monoid $(X^*, \cdot, e)$?
Die Menge $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ besteht aus allen Wörten $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ endlicher Länge mit der Aneinanderhängung $\cdot$ und dem leeren Wort e.

Die freie Gruppe $\langle X \rangle$ über dem Alphabet X

Beispiel: Wir betrachten den Vergissfunktor (engl. *underlying set*)

$$U : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Set} : \quad Y = (G, \cdot, e, ^{-1}) \mapsto G, \quad h \mapsto h$$

Zu jeder Menge X sei $FX = (\langle X \rangle, \cdot, e, ^{-1})$ die freie Gruppe über X. Jede Abbildung $g : X \to X'$ setzen wir multiplikativ fort zu $F(g) : FX \to FX'$.

$$F : \mathtt{Set} \to \mathtt{Grp} : \quad X \mapsto (\langle X \rangle, \cdot, e, ^{-1}), \quad g \mapsto F(g)$$

Damit gilt das **Prinzip der multiplikativen Fortsetzung / PMF:**

$$\mathtt{Set}(X, UY) \cong \mathtt{Grp}(FX, Y) : g \mapsto h$$

Zu $g : X \to UY$ gehört die multiplikative Fortsetzung $h : FX \to Y$.
Dies ist der eindeutige Gruppenhomomorphismus h mit $h|_X = g$.

Übung: Rechnen Sie die Natürlichkeit von $(\varphi, \varphi') : g \leftrightarrows h$ geduldig nach.

Wiederholung: Wie konstruiert man die freie Gruppe $(\langle X \rangle, \cdot, e, ^{-1})$?
Über dem Alphabet $A = X \times \{\pm\} = \{ x^{\pm} \mid x \in X \}$ bilden wir das Monoid A^* und daraus den Quotienten modulo der Kongruenz $x^+x^- = e = x^-x^+$.

Der linearer Raum KX zu einer vorgegebenen Basis X

Beispiel: Sei K ein Körper. Wir betrachten den Vergissfunktor:

$$U : \mathtt{Vec}_K \to \mathtt{Set} : \quad Y = (V, +, \cdot) \mapsto V, \quad h \mapsto h$$

Zu jeder Menge X sei $FX = (KX, +, \cdot)$ der K–Vektorraum mit Basis X.
Jede Abbildung $g : X \to X'$ setzen wir linear fort zu $F(g) : FX \to FX'$.

$$F : \mathtt{Set} \to \mathtt{Vec}_K : \quad X \mapsto (KX, +, \cdot), \quad g \mapsto F(g)$$

Damit gilt das **Prinzip der linearen Fortsetzung / PLF:**

$$\mathtt{Set}(X, UY) \cong \mathtt{Vec}_K(FX, Y) : g \mapsto h$$

Zu $g : X \to UY$ gehört die lineare Fortsetzung $h : FX \to Y$ mit $h|_X = g$.

Übung: Rechnen Sie die Natürlichkeit von $(\varphi, \varphi') : g \rightleftarrows h$ geduldig nach.

Wiederholung: Wie konstruiert man zu X den Raum $(KX, +, \cdot)$?
Der Koordinatenraum $(K^{(X)}, +, \cdot)$ hat die kanonische Basis $(e_x)_{x \in X}$.
Wir erhalten $KX := K^{(X)}$, wobei wir $x \in X$ mit $e_x \in K^{(X)}$ identifizieren.
(Alles gelingt wörtlich genauso über jedem beliebigen Ring K mit $1 \neq 0$.)

Der Polynomring $K[X]$ zu vorgegebener Variablenmenge X

Beispiel: Sei K ein CRing. Wir betrachten den Vergissfunktor:

$$U : \mathtt{CAlg}_K \to \mathtt{Set} : \quad Y = (A, +, \cdot) \mapsto A, \quad h \mapsto h$$

Hier ist $\mathtt{CAlg}_K$ die Kategorie der kommutativen K–Algebren, also CRinge $(A, +, \cdot)$ mit Eins und festem Ringhomomorphismus $K \to A : a \mapsto a1$.

Zu jeder Menge X sei $FX = (K[X], +, \cdot)$ der Polynomring über K.
Jede Abbildung $g : X \to X'$ setzen wir fort zu $F(g) : FX \to FX'$.

$$F : \mathtt{Set} \to \mathtt{CAlg}_K : \quad X \mapsto (K[X], +, \cdot), \quad g \mapsto F(g)$$

Damit gilt die **universelle Eigenschaft des Polynomrings:**

$$\mathtt{Set}(X, UY) \cong \mathtt{CAlg}_K(FX, Y) : g \mapsto h$$

Zu $g : X \to UY$ gehört die Fortsetzung $h : FX \to Y$ mit $h|_X = g$.
Es existiert genau ein solcher K–Algebrenhomomorphismus h.

Wiederholung: Wie konstruiert man den Polynomring $(K[X], +, \cdot)$?
Wir nutzen $K[X] := KM$ über dem abelschen Monoid $M = (\mathbb{N}^{(X)}, +, 0)$.

Kapitel I

Simpliziale Komplexe

I have a dream that one day every valley shall be exalted,
every hill and mountain shall be made low,
the rough places will be made plain,
and the crooked places will be made straight.

Martin Luther King (1929–1968), Washington 1963

Simpliziale Approximation erfüllt diesen mathematischen Traum,
sie macht stetiges linear, kompliziertes simpel, hässliches schön.

Inhalt dieses Kapitels I

1 Affine Simplizialkomplexe

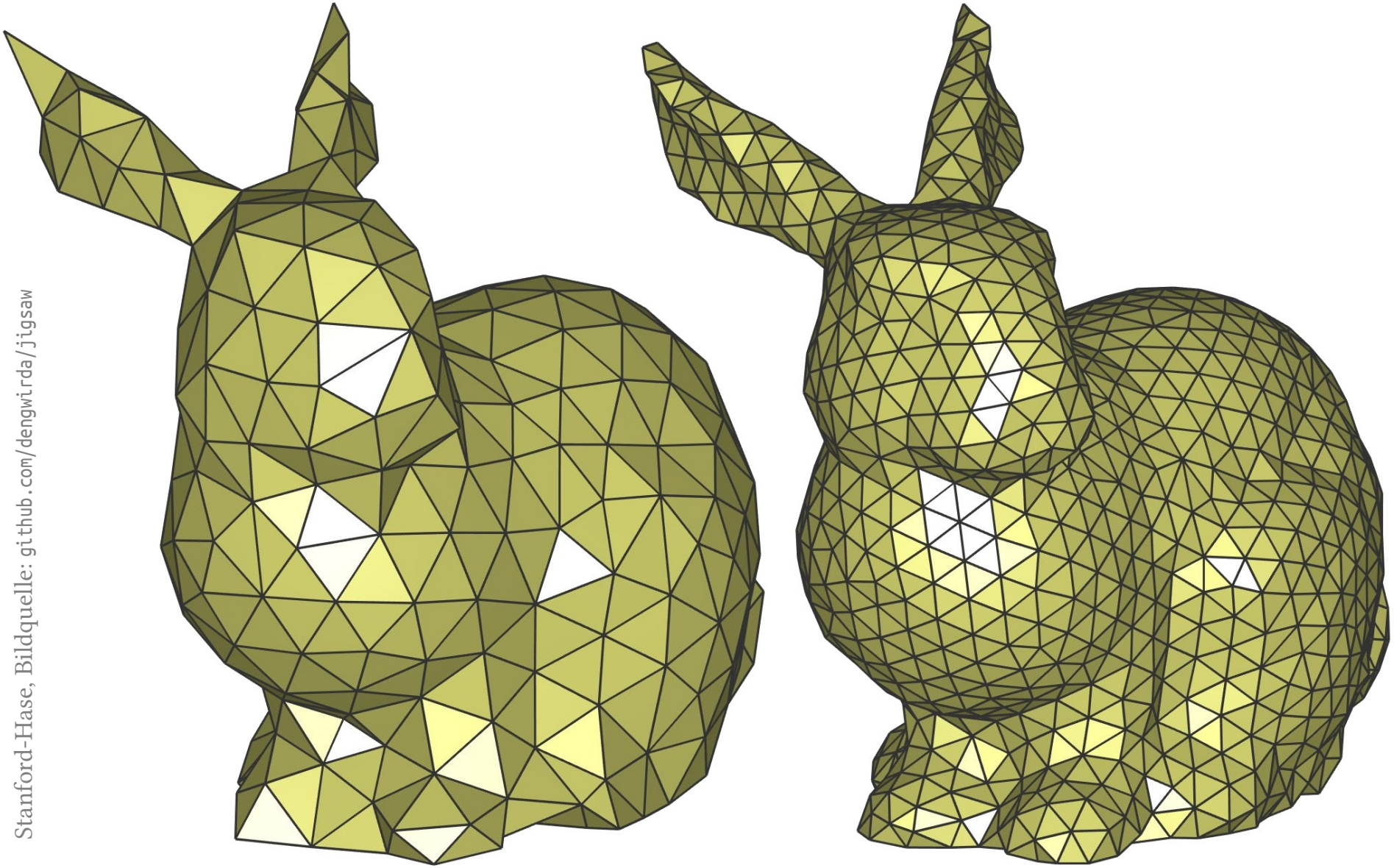
2 Kombinatorische Simplizialkomplexe

3 Triangulierung und Unterteilungen

4 Simpliziale Approximation

Simplizialkomplexe: Computergraphik und Videospiele

Sie kennen, nutzen und lieben lineare Räume und lineare Abbildungen.
Unser Ziel sind nun „stückweise lineare“ Räume und Abbildungen.



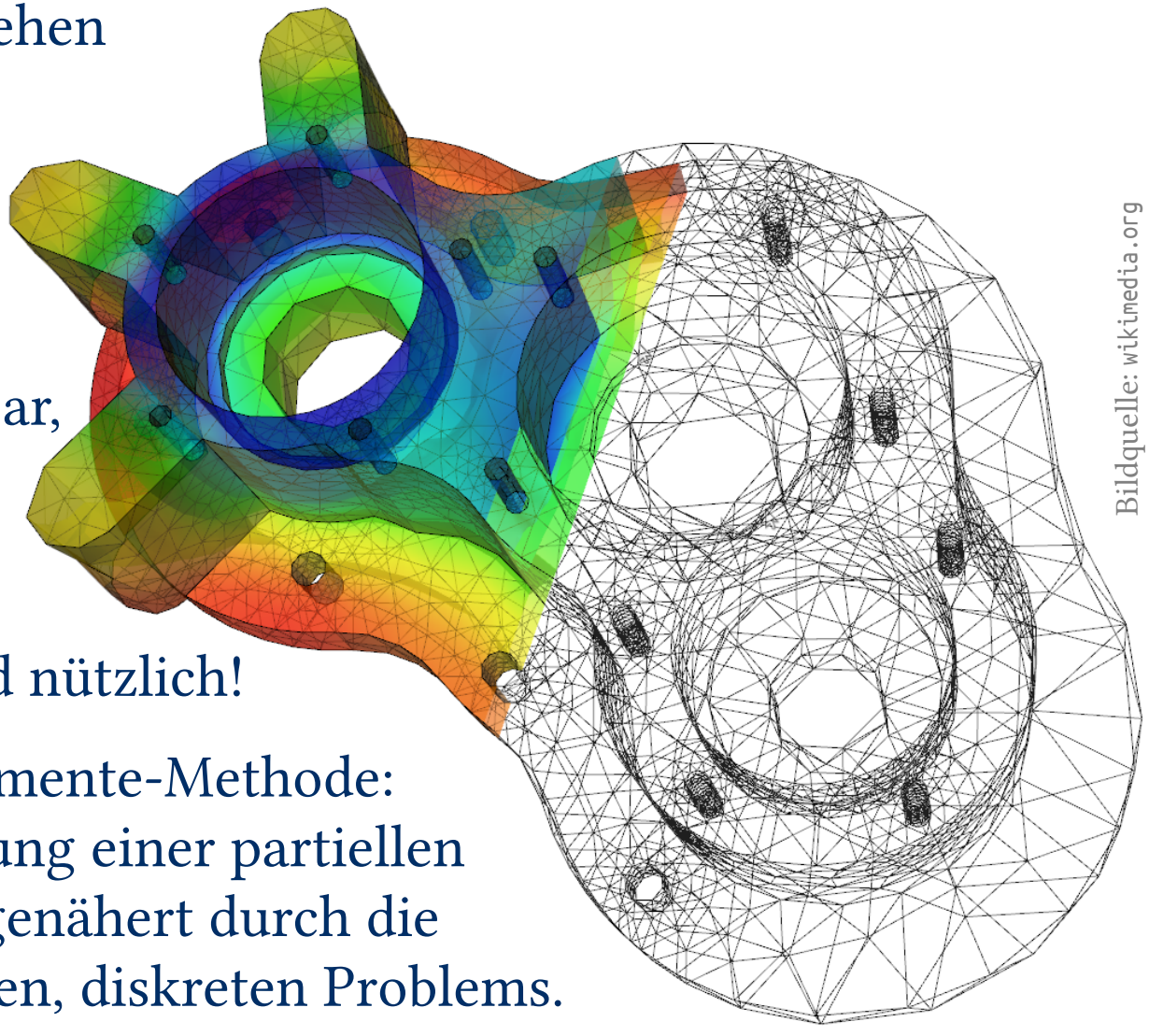
Stanford-Hase, Bildquelle: github.com/dengwirda/jigsaw

Simplizialkomplexe: numerische Methoden

Simplizialkomplexe bestehen aus Simplizes: Punkten, Kanten, Dreiecken, Tetraedern, usw.

Simpliziale Abbildungen sind stückweise affin-linear, von Simplex auf Simplex.

Solche **Triangulierungen** sind extrem vielseitig und nützlich!

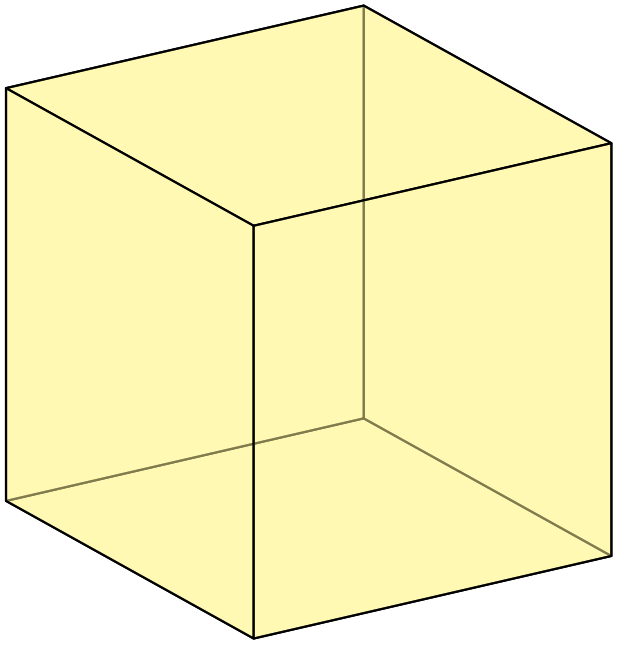
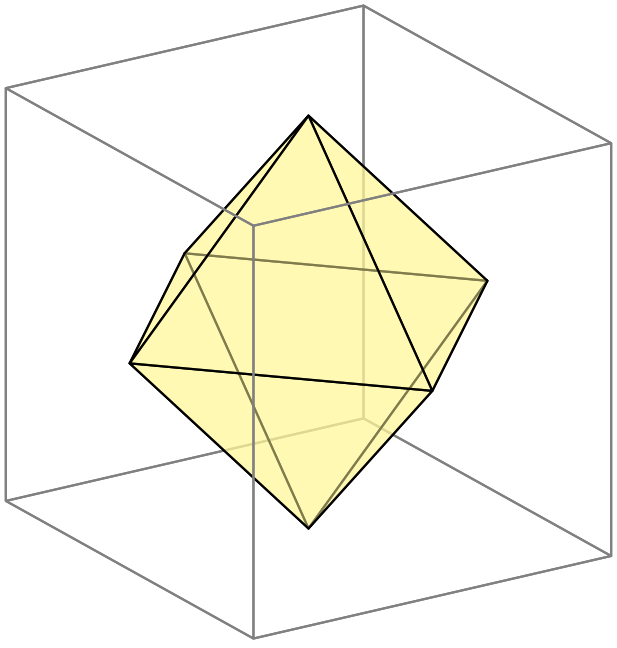
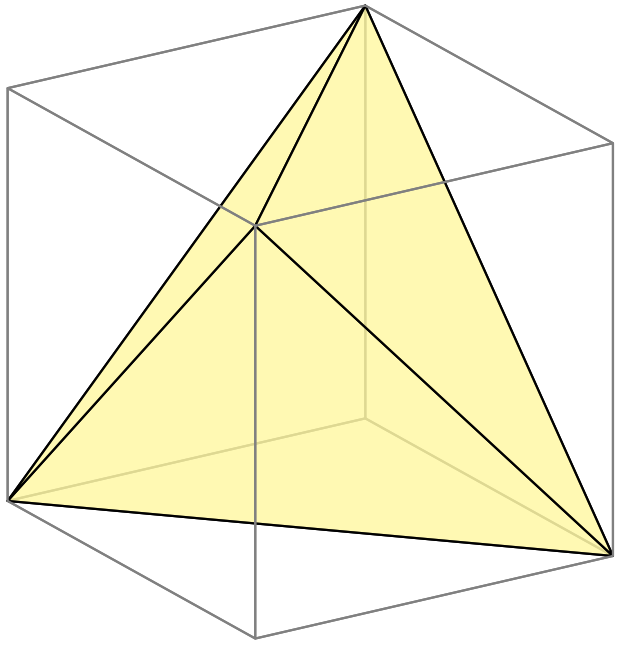
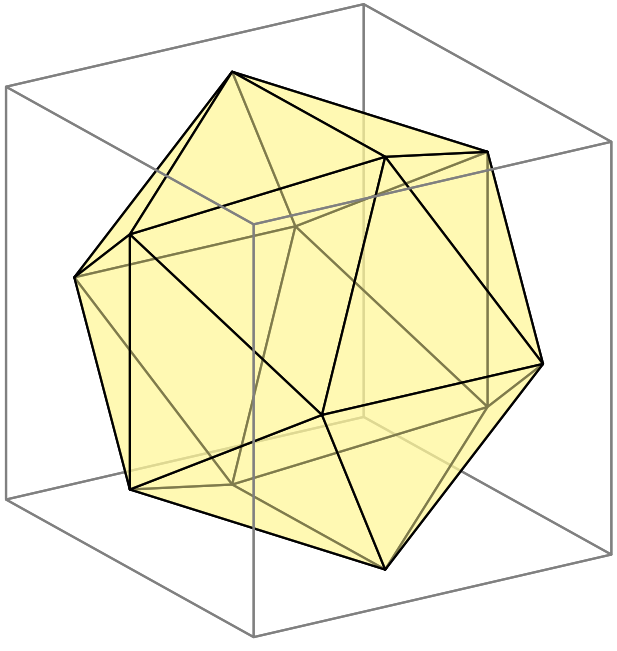
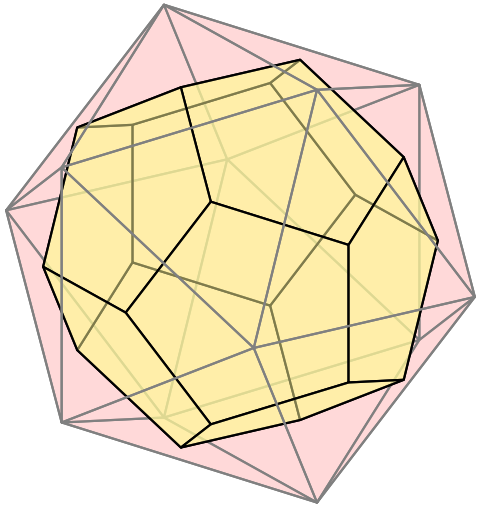
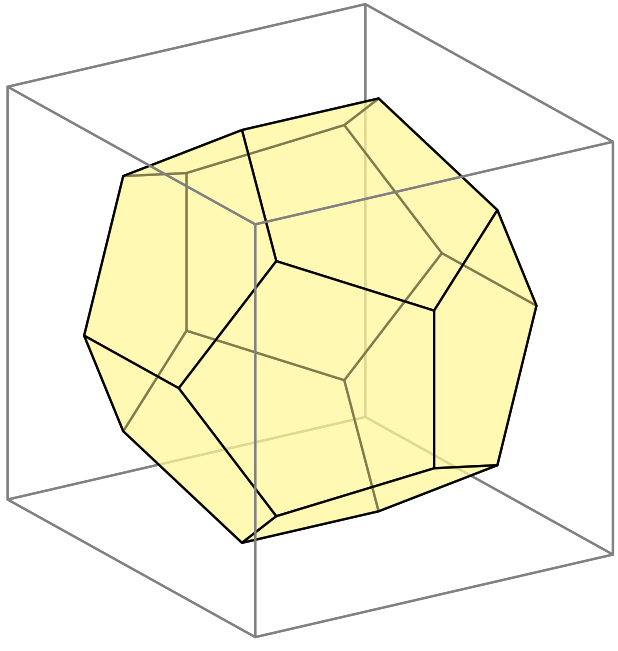


Bildquelle: wikimedia.org

Numerik, insb. Finite-Elemente-Methode: Hier wird die exakte Lösung einer partiellen Differentialgleichung angenähert durch die Lösung eines vereinfachten, diskreten Problems.

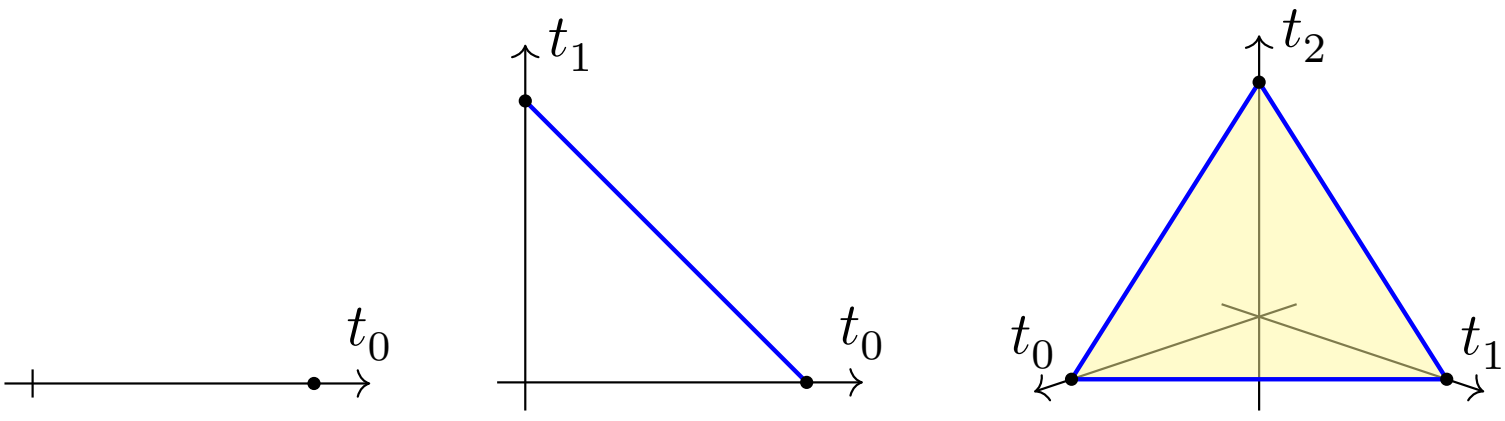
Ebenso Computergraphiken, Videospiele, 3D-Druck und Fertigung: Effiziente Datenstruktur für die Geometrie… und die Topologie!

Erinnerung: Polytope und polytopale Komplexe

Der Standardsimplex $\Delta^n = [e_0, \dots, e_n] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Unter allen Polyedern sind Simplizes die allereinfachsten, eben simpel:



Definition I1A: Standardsimplex $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Der **n–dimensionale Standardsimplex** ist

$$\Delta^n := [e_0, \dots, e_n] = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, t_0, \dots, t_n \geq 0,\ t_0 + \dots + t_n = 1 \right\}.$$

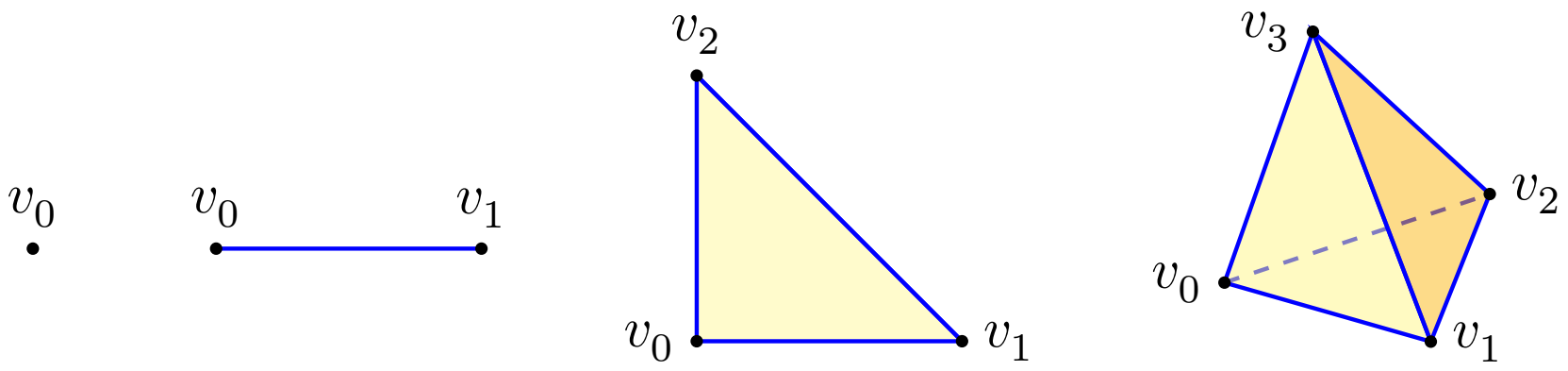
Hierzu haben wir das **(geometrische) Innere**

$$\operatorname{Int} \Delta^n := \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, t_0, \dots, t_n > 0,\ t_0 + \dots + t_n = 1 \right\}$$

und den **(geometrischen) Rand** $\partial\Delta^n := \Delta^n \setminus \operatorname{Int} \Delta^n$.

Affine Simplizes $\Delta = [v_0, \dots, v_n] \subseteq V$

Unter allen Polyedern sind Simplizes die allereinfachsten, eben simpel:



Definition I1A: affiner Simplex $\Delta \subseteq V$

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierin seien die Punkte $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ **affin unabhängig**, also $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0 \in V$ linear unabhängig.

Der **affine n–Simplex** $\Delta := [v_0, v_1, \dots, v_n]$ ist ihre konvexe Hülle.

$$h : \Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta : (t_0, t_1, \dots, t_n) \mapsto t_0 v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$$
$$= v_0 + t_1(v_1 - v_0) + \dots + t_n(v_n - v_0)$$

Mittels $h : \Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta$ versehen wir Δ mit seiner **euklidischen Topologie**.

Affine Simplizes $\Delta = [v_0, \dots, v_n] \subseteq V$

Jeder Simplex bestimmt seine Eckenmenge (als Extrempunkte), damit seine affine Dimension (als Eckenzahl minus 1) und all seine Seiten:

$$\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] \quad \mapsto \quad \operatorname{vert}(\Delta) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\},$$

$$\Delta \quad \mapsto \quad \dim(\Delta) := \dim \operatorname{aff}(\Delta) = n = \sharp \operatorname{vert}(\Delta) - 1,$$

$$\{Q \leq \Delta\} \cong \mathfrak{P}\{v_0, v_1, \dots, v_n\} : Q \mapsto \operatorname{vert} Q,\ [S] \nleftarrow S, \quad f_d(\Delta) = \tbinom{n+1}{d+1},$$

$$\Delta = \bigcup_{[S] \leq \Delta} [S] = \bigsqcup_{[S] \leq \Delta} \operatorname{Int}[S], \qquad \partial\Delta = \bigcup_{[S] < \Delta} [S] = \bigsqcup_{[S] < \Delta} \operatorname{Int}[S], \qquad \operatorname{Int}\Delta = \Delta \setminus \partial\Delta$$

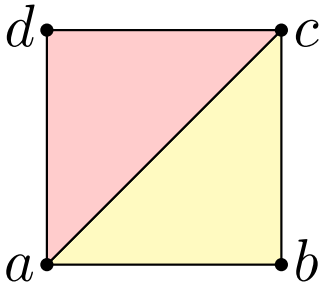
Die Eckpunkte $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ sind affin unabhängig über $\mathbb{R}$.
Daher ist die Seitenstruktur denkbar einfach. Daraus folgt sofort $f_d(\Delta)$.

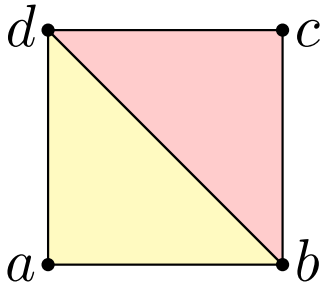
Die leere Familie spannt den leeren Simplex $[\emptyset] = \emptyset$ auf, mit $\dim \emptyset = -1$ (per Konvention für Simplizes; für Polytope ist $\dim \emptyset = -\infty$ sinnvollver).

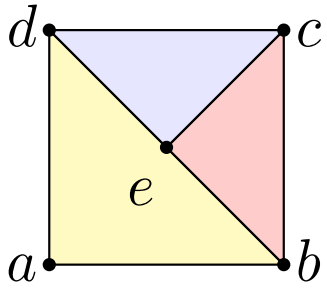
Wie bei jedem Polytop ist insbesondere auch bei jedem Simplex Δ der Rand $\partial\Delta$ die Vereinigung aller echten Seiten $[S] < \Delta$.

Affine Simplizialkomplexe

Aus Simplizes bauen wir Komplexe, nach simplen aber strengen Regeln!







$$\mathscr{K} = \langle [a,b,c], [a,c,d] \rangle$$
$$\mathscr{L} = \langle [a,b,d], [b,c,d] \rangle$$
$$\mathscr{P} = \langle [a,b,d], [b,c,e], [c,d,e] \rangle$$

Beispiel: Die Komplexe $\mathscr{K}, \mathscr{L}$ sind simplizial, doch $\mathscr{P}$ nur polytopal.

Definition I1c: affiner Simplizialkomplex / aff. SKomplex

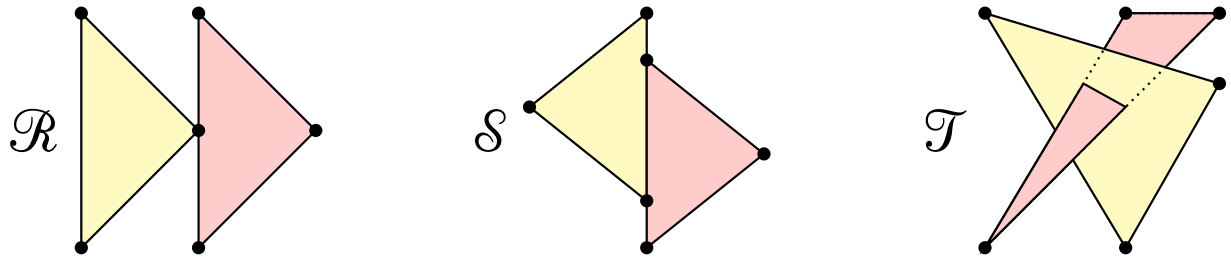
Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $\mathscr{K}$ eine Familie affiner Simplizes $\Delta \subseteq V$. Wir nennen $\mathscr{K}$ einen **affinen Simplizialkomplex** in V, wenn gilt:

0. Es gilt $\emptyset \in \mathscr{K}$.
1. Abschluss: Für alle $\Delta' \leq \Delta \in \mathscr{K}$ gilt $\Delta' \in \mathscr{K}$.
2. Schnitt: Für alle $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathscr{K}$ gilt $\Delta_1 \cap \Delta_2 \leq \Delta_1, \Delta_2$.

Für jede Familie $\mathscr{M}$ von Simplizes erreichen wir (0,1) durch Übergang zu $\mathscr{K} = \langle \mathscr{M} \rangle := \{\emptyset\} \cup \{ \Delta' \mid \Delta' \leq \Delta \in \mathscr{M} \}$; so bleibt nur noch (2) zu prüfen.

Affine Simplizialkomplexe

Beispiel: Welche der folgenden Komplexe $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ sind simplizial?



Durch $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ erreichen wir Forderung (0) und (1), aber (2) schlägt fehl:
So wie hier gezeigt sind die drei Komplexe $\mathscr{R}, \mathscr{S}, \mathscr{T}$ nicht simplizial!

☺ Wir reparieren dies später durch simpliziale Unterteilung (I3L).

Ausformuliert verlangen wir also: (2) Je zwei Simplizes $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathscr{K}$ haben als Schnittmenge $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$ eine gemeinsame Seite, das heißt, Δ ist eine Seite sowohl von Δ_1 als auch von Δ_2, eventuell leer.

(1) Für jeden Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$ in unserer Familie ist auch jede Seite $\Delta' \leq \Delta$ ein Element der Familie $\mathscr{K}$.

(0) Der leere Simplex gehört zu $\mathscr{K}$, kurz $\emptyset \in \mathscr{K}$.
Das ist zwar langweilig, aber als Konvention oft nützlich.

Affine Simplizialkomplexe

Definition I1c: affiner Simplizialkomplex

Die **Dimension** und das n**–Skelett** von $\mathscr{K}$ definieren wir durch

$$\dim \mathscr{K} := \sup\{\dim \Delta \,|\, \Delta \in \mathscr{K}\}, \qquad \mathscr{K}_{\leq n} := \{\Delta \in \mathscr{K} \,|\, \dim \Delta \leq n\},$$
$$\mathscr{K}_{<n} := \{\Delta \in \mathscr{K} \,|\, \dim \Delta < n\}, \qquad \mathscr{K}_n := \{\Delta \in \mathscr{K} \,|\, \dim \Delta = n\}.$$

Die **Eckenmenge** des Simplizialkomplexes $\mathscr{K}$ ist

$$\Omega(\mathscr{K}) := \bigcup\{\operatorname{vert} \Delta \,|\, \Delta \in \mathscr{K}\} \quad \text{also} \quad \Omega(\mathscr{K}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{K}_0 : a \mapsto \{a\}.$$

Das **Polyeder** $|\mathscr{K}| \subseteq V$ ist die Vereinigung aller affinen Simplizes:

$$\big|\mathscr{K}\big| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup_{\Delta\in\mathscr{K}} \Delta = \bigsqcup_{\Delta\in\mathscr{K}} \operatorname{Int} \Delta$$

Wir versehen $|\mathscr{K}|$ mit der **simplizialen Topologie** $\mathscr{T}_{\mathscr{K}}$: Genau dann ist $U \subseteq |\mathscr{K}|$ offen, wenn $U \cap \Delta \subseteq \Delta$ offen ist in jedem Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$. Komplementär gilt dasselbe dann für abgeschlossene Mengen $A \subseteq |\mathscr{K}|$.

Das heißt, $f : |\mathscr{K}| \to X$ ist stetig gdw $f|_\Delta : \Delta \to X$ stetig ist auf jedem Simplex $\Delta \in \mathscr{K}$, also jede Komposition $f \circ h : \Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta \to X$ stetig ist.

Affine Simplizialkomplexe

Übung: Jeder affine Simplizialkomplex $\mathscr{K}$ (I1C) ist ein Polytopalkomplex (I3K), aber nicht umgekehrt, selbst wenn $\mathscr{K}$ nur aus Simplizes besteht.

Lösung: Lesen und vergleichen Sie sorgfältig beide Definitionen!
Für simpliziale Komplexe sind wir strenger als für polytopale.

Beispiel: In der obigen Illustration sind die Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ simplizial, hingegen ist $\mathscr{P}$ nur polytopal, nicht simplizial. (Zur Reparatur siehe I3L)

🙂 Wir können also unsere Vorbereitung für polytopale Komplexe hier wunderbar nutzen und auf simpliziale Komplexe übertragen.

Ist der Komplex $\mathscr{K}$ endlich, so haben wir endliche **Seitenzahlen**

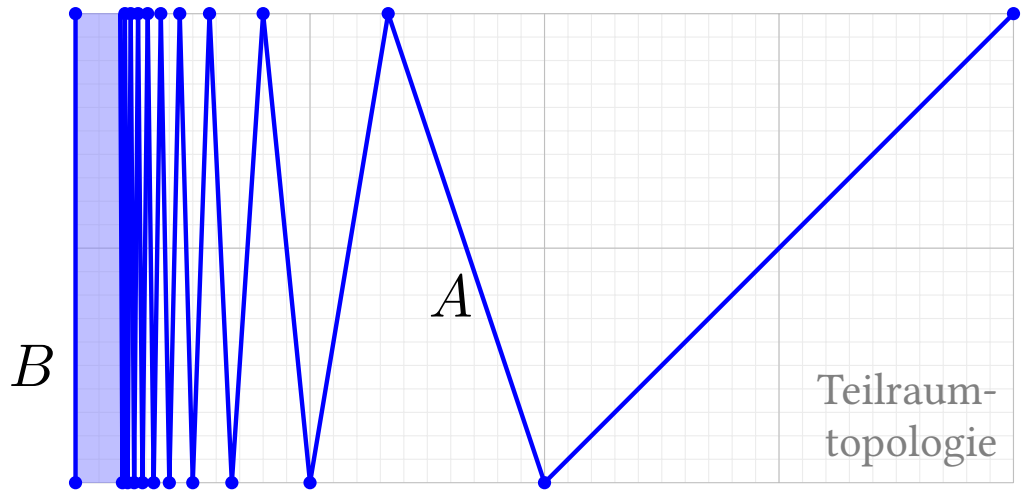
$$f_d(\mathscr{K}) := \sharp \mathscr{K}_d.$$

Wir definieren dann die **Euler–Charakteristik** als Wechselsumme

$$\chi(\mathscr{K}) := \sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d(\mathscr{K}) = \sum_{\emptyset \neq \Delta \in \mathscr{K}} (-1)^{\dim \Delta}.$$

⚠ Der Komplex $\mathscr{K}$ bestimmt das Polyeder $|\mathscr{K}|$, aber nicht umgekehrt.
Zur Invarianz der Euler–Charakteristik $\chi(\mathscr{K})$ siehe Kapitel A.

Simpliziale Topologie vs Teilraumtopologie



$$a_n = \left(\tfrac{4}{n+1}, (-1)^n\right)$$
$$\mathscr{A} = \langle [a_n, a_{n+1}] \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$
$$\mathscr{B} = \langle [(0, \pm 1)] \rangle$$
$$\mathscr{C} = \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$$

Beispiel I1F: simpliziale Topologie vs Teilraumtopologie

Die Abbildung zeigt die Sinuskurve des Topologen in einer simplizialen Version $\mathscr{C} = \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ mit Polyedern $A = |\mathscr{A}|$ und $B = |\mathscr{B}|$ und $C = |\mathscr{C}|$.

In $C = A \cup B$ mit der simplizialen Topologie $\mathscr{T}_{\mathscr{C}}$ sind A und B beide offen (und abgeschlossen), und somit ist $C = A \sqcup B$ eine topologische Summe.

In der Teilraumtopologie $\mathscr{T}_C$ von C in $\mathbb{R}^2$ hingegen ist A offen, aber nicht abgeschlossen, komplementär ist B abgeschlossen, aber nicht offen.

Simpliziale Topologie vs Teilraumtopologie

Satz I1G: simpliziale Topologie vs Teilraumtopologie

Sei V ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{R}$, zum Beispiel $V = \mathbb{R}^n$.

(1) Für jeden Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ in V ist die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{K}$ feiner als die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$ in V, also $\mathcal{T}_\mathcal{K} \supseteq \mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$.

(2) Ist der Komplex $\mathcal{K}$ in V lokal-endlich, so gilt $\mathcal{T}_\mathcal{K} = \mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$. (E1N, I1C)

Beweis: (1) Zum Simplex $\Delta = [v_0, \dots, v_n]$ als Teilraum in V haben wir den Homöomorphismus $h : \Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta : (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n$ dank F1L. Ist $U \subseteq |\mathcal{K}|$ offen in $\mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$, so auch in jedem Simplex, also in $\mathcal{T}_\mathcal{K}$.

(2) Jeder Simplex $\Delta \in \mathcal{K}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{T}_{|\mathcal{K}|}$ (F1G) und $\mathcal{T}_\mathcal{K}$ (I1C). In beiden Topologien ist die Überdeckung $|\mathcal{K}| = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{K}} \Delta$ abgeschlossen. Ist sie lokal-endlich, so definiert dies die Topologie (E1N, I1C). QED

☺ Die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{K}$ des Polyeders $|\mathcal{K}|$ hängt nur von der kombinatorischen Struktur des Komplexes $\mathcal{K}$ ab, aber nicht von seiner Lage in V. Genau das ist Zweck und Nutzen der simplizialen Topologie.

Simpliziale Teilkomplexe

Definition I1ı: simplizialer Teilkomplex

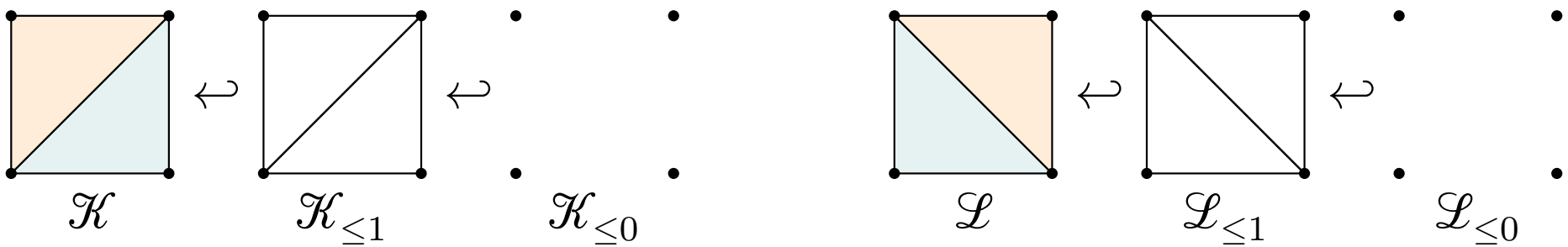
Sei $\mathscr{K}$ ein affiner Simplizialkomplex. Ein **Teilkomplex** $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}$ ist eine Teilmenge $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{K}$ mit (0) $\emptyset \in \mathscr{L}$ und (1) $\Delta' \leq \Delta \in \mathscr{L} \Rightarrow \Delta' \in \mathscr{L}$.

Übung: Die Bedingung I1c(2), also $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathscr{K} \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 \leq \Delta_1, \Delta_2$, vererbt sich von $\mathscr{K}$ auf $\mathscr{L}$, somit ist $\mathscr{L}$ ein affiner Simplizialkomplex.

Beispiele: Jede Teilmenge $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{K}$ erzeugt einen Teilkomplex

$$\mathscr{L} = \langle \mathscr{M} \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\, \Delta' \,|\, \Delta' \leq \Delta \in \mathscr{M} \,\}.$$

Das n**–Skelett** $\mathscr{K}_{\leq n} := \{\, \Delta \in \mathscr{K} \,|\, \dim \Delta \leq n \,\}$ ist ein Teilkomplex in $\mathscr{K}$:



Bemerkung: In $(|\mathscr{K}|, \mathscr{T}_{\mathscr{K}})$ ist $(|\mathscr{L}|, \mathscr{T}_{\mathscr{L}})$ ein Teilraum und abgeschlossen wie immer dank simplizialer Topologie I1c auf beiden Polyedern.

Simpliziale Abbildungen

Definition I1κ: simpliziale Abbildung

Eine **simpliziale Abbildung** $f : \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ affiner Simplizialkomplexe ist eine Abbildung $f : \Omega(\mathscr{K}) \to \Omega(\mathscr{L})$ der Eckenmengen, sodass gilt:

$$\Delta = [s_0, s_1, \dots, s_n] \in \mathscr{K} \quad \Longrightarrow \quad \Delta' = [f(s_0), f(s_1), \dots, f(s_n)] \in \mathscr{L}$$

Wir erhalten die affin-lineare Fortsetzung $|f|_\Delta : \Delta \to \Delta' \hookrightarrow |\mathscr{L}|$ durch

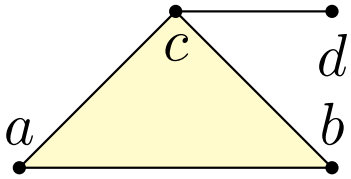
$$f(t_0 s_0 + t_1 s_1 + \cdots + t_n s_n) = t_0 f(s_0) + t_1 f(s_1) + \cdots + t_n f(s_n)$$

für alle $t \in \Delta^n$. Durch Verkleben auf allen Simplizes $\Delta \in \mathscr{K}$ erhalten wir die **geometrische Realisierung** $|f| : |\mathscr{K}| \to |\mathscr{L}|$.

Wir nennen $|f|$ **stückweise affin** oder **simplizial** bezüglich $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$. Diese Abbildung $|f|$ ist stetig… dank simplizialer Topologie (I1c).

Beispiel: Für jeden Teilkomplex $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}$ ist $\iota : \mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{K} : s \mapsto s$ simplizial und $|\iota| : |\mathscr{L}| \hookrightarrow |\mathscr{K}|$ eine Einbettung… dank simplizialer Topologie!

Kombinatorische Simplizialkomplexe



$$\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] \quad \leftrightarrow \quad \operatorname{vert}(\Delta) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$$
$$\mathscr{K} = \{\Delta \,|\, \Delta \in \mathscr{K}\} \quad \leftrightarrow \quad K = \{\operatorname{vert}(\Delta) \,|\, \Delta \in \mathscr{K}\}$$

$$\mathscr{K} = \langle [a,b,c],[c,d] \rangle = \{\emptyset,\ [a],[b],[c],[d],\ [a,b],[a,c],[b,c],[c,d],[a,b,c]\}$$
$$K = \langle \{a,b,c\},\{c,d\} \rangle = \{\emptyset,\ \{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\ \{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{c,d\},\{a,b,c\}\}$$

Definition I2A: kombinatorischer Simplizialkomplex / komb. SKomplex

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Eine endliche, affin unabhängige Menge $S \subseteq V$ heißt **kombinatorischer Simplex** der Dimension $\dim S := \sharp S - 1$.

Ein **kombinatorischer Simplizialkomplex K in V** ist eine Familie kombinatorischer Simplizes $S \subseteq V$, für die gilt:

0. Es gilt $\emptyset \in K$.
1. Abschluss: Für alle $T \subseteq S \in K$ gilt $T \in K$.
2. Schnitt: Für alle $S, T \in K$ gilt $[S] \cap [T] = [S \cap T]$.

Für jede Familie M von Simplizes erreichen wir (0,1) durch Übergang zu $K = \langle M \rangle := \{\emptyset\} \cup \{T | T \subseteq S \in M\}$; so bleibt nur noch (2) zu prüfen.

Kombinatorische Simplizialkomplexe

Der hier erklärte Übergang vom affinen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ zum kombinatorischen Simplizialkomplex K und zurück ist sehr einfach: Statt des Simplex $\Delta \in \mathcal{K}$ speichern wir nur die Eckenmenge $\operatorname{vert} \Delta \in K$. Diese äquivalente Sichtweise ist wesentlich bequemer und effizienter!

🙂 Genau so implementieren wir dies auf einem Computer: Die Menge $\Delta \subseteq V$ enthält unendlich viele Punkte (falls $\dim \Delta \geq 1$) und lässt sich nicht als Aufzählung all ihrer Elemente speichern. Die Eckenmenge $S = \operatorname{vert} \Delta \subseteq V$ hingegen ist endlich und bestimmt $\Delta = [S]$ eindeutig.

🙂 Die effiziente Sichtweise als kombinatorischer Simplizialkomplex K ist bequemer, dafür etwas abstrakter. Die Sichtweise als affiner Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ ist etwas schwerfälliger, dafür anschaulicher, daher habe ich dies als Einstieg gewählt. Beide sind äquivalent!

🙂 Die Buchhaltung ist kombinatorisch für K sogar noch etwas leichter, da wir nun direkt mit den (endlichen) Eckenmengen $S \in K$ arbeiten Wir übertragen nun alle Begriffe vom affinen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ zum kombinatorischen Simplizialkomplex K. Das gelingt einfach und direkt.

Kombinatorische Simplizialkomplexe

Definition I2A: kombinatorischer Simplizialkomplex

Die **Dimension** und das n**–Skelett** von K definieren wir durch

$$\dim K := \sup\{\dim S \,|\, S \in K\}, \qquad K_{\leq n} := \{S \in K \,|\, \dim S \leq n\},$$
$$K_{<n} := \{S \in K \,|\, \dim S < n\}, \qquad K_n := \{S \in K \,|\, \dim S = n\}.$$

Die **Eckenmenge** des Simplizialkomplexes K ist

$$\Omega(K) := \bigcup K = \bigcup_{S\in K} S \quad \text{also} \quad \Omega(K) \xrightarrow{\sim} K_0 : a \mapsto \{a\}.$$

Jeder kombinatorische SKomplex K definiert einen affinen SKomplex $\mathscr{K} = \{[S] \,|\, S \in K\}$. Umgekehrt, $\mathscr{K}$ bestimmt $K = \{\operatorname{vert}(\Delta) \,|\, \Delta \in \mathscr{K}\}$.

Das **Polyeder** $|K| \subseteq V$ ist die Vereinigung aller affinen Simplizes:

$$|K| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup_{S\in K} [S] = \bigsqcup_{S\in K} \operatorname{Int}[S]$$

Jeden Simplex $[S]$ versehen wir mit seiner euklidischen Topologie (I1A).
Das Polyeder $|K|$ versehen wir mit der **simplizialen Topologie** $\mathscr{T}_K$ (I1C).

Kombinatorische Simplizialkomplexe

Der kombinatorische Simplizialkomplex K bestimmt das Polyeder $|K|$. Dies ist seine geometrische Realisierung, entscheidend ist die Topologie. Wir versehen $|K|$ mit der durch K definierten **simplizialen Topologie** $\mathcal{T}_K$:

Genau dann ist $U \subseteq |K|$ offen, wenn $U \cap [S] \subseteq [S]$ offen ist in jedem Simplex mit $S \in K$. Dasselbe gilt dann für $A \subseteq |\mathcal{K}|$ abgeschlossen.

Genau dann ist $f : |K| \to X$ stetig, wenn $f|_{[S]} : [S] \to X$ für jeden Simplex $S \in K$ stetig ist, also jede Komposition $f \circ h : \Delta^n \cong [S] \to X$ stetig ist.

Wie zuvor in I1K definieren wir: Eine **simpliziale Abbildung** $f : K \to L$ kombinatorischer SKomplexe ist eine Abbildung $f : \Omega(K) \to \Omega(L)$ der Eckenmengen, sodass für jeden Simplex $S \in K$ gilt $f(S) \in L$.

Durch affine Fortsetzung $|f|_{[S]} : [S] \to |L|$ und Verkleben über alle $S \in K$ erhalten wir die **geometrische Realisierung** $|f| : |K| \to |L|$ auf den Polyedern. Sie ist stetig dank simplizialer Topologie.

Abstrakte Simplizialkomplexe

Definition I2B: abstrakter Simplizialkomplex / abs. SKomplex

Ein **(abstrakter) Simplizialkomplex** K ist eine Familie endlicher Mengen mit den Eigenschaften (0) $\emptyset \in K$ und (1) $T \subseteq S \in K \Rightarrow T \in K$.

Jede beliebige Familie M endlicher Mengen erzeugt einen abstrakten Simplizialkomplex $K = \langle M \rangle := \{\emptyset\} \cup \{T \,|\, T \subseteq S \in M\}$.

Jede Menge $S \in K$ nennen wir einen **(abstrakten) Simplex** von K der Dimension $\dim S := \sharp S - 1$. Wie zuvor definieren wir

$$\dim K := \sup\{\dim S \,\big|\, S \in K\}, \qquad K_{\leq n} := \{S \in K \,\big|\, \dim S \leq n\},$$
$$K_{<n} := \{S \in K \,\big|\, \dim S < n\}, \qquad K_n := \{S \in K \,\big|\, \dim S = n\}.$$

Die **Eckenmenge** des Simplizialkomplexes K ist

$$\Omega(K) := \bigcup K = \bigcup_{S \in K} S \quad \text{also} \quad \Omega(K) \rightleftharpoons K_0 : a \mapsto \{a\}.$$

Wir nennen K **lokal-endlich**, wenn jede Ecke $a \in \Omega$ nur in endlich vielen Simplizes enthalten ist, das heißt, die Menge $\{S \in K \,|\, a \in S\}$ ist endlich.

Abstrakte Simplizialkomplexe

Jeder affine Simplizialkomplex $\mathscr{K}$ in V wird durch seine Simplizes $\Delta \in \mathscr{K}$ festgelegt, und jeder affine Simplex $\Delta \subseteq V$ ist durch seine Eckenmenge $\mathrm{vert}(\Delta)$ festgelegt. Wie oben erklärt erhalten wir so aus $\mathscr{K}$ in V den kombinatorischen Simplizialkomplex K in V.

Jeder kombinatorische Simplex $S \in K$ ist eine endliche Menge $S \subseteq V$ und affin unabhängig in V, er spannt also einen affinen Simplex $[S]$ in V auf. So rekonstruieren wir $\mathscr{K}$ aus K, es geht keine Information verloren. Dies verdanken wir der Lageinformation jedes Punktes $s \in S$ in V.

🙂 Wir können schließlich den umgebenden Vektorraum V vergessen und allein die abstrakte Struktur der Simplizes $S \in K$ betrachten. Diese koordinatenfreie Beschreibung ist äußerst knapp und effizient. Die Geometrie geht dabei verloren, doch die Topologie bleibt erhalten!

Genauer gesagt können wir zu K eine Darstellung $f : K \to V$ wählen und erhalten so die geometrische Realisierung $|K|_f$ mittels f. Je zwei Realisierungen sind homöomorph (Satz I2E).

Geometrische Realisierung

Der abstrakte SKomplex K hat Ecken $s \in \Omega(K)$ noch ohne Lagedaten.

Definition I2c: Darstellung und geometrische Realisierung

Eine **(affine) Darstellung** $f : K \to V$ eines abstrakten SKomplexes K in einem $\mathbb{R}$–Vektorraum V ist eine Injektion $f : \Omega(K) \hookrightarrow V$, für die gilt:

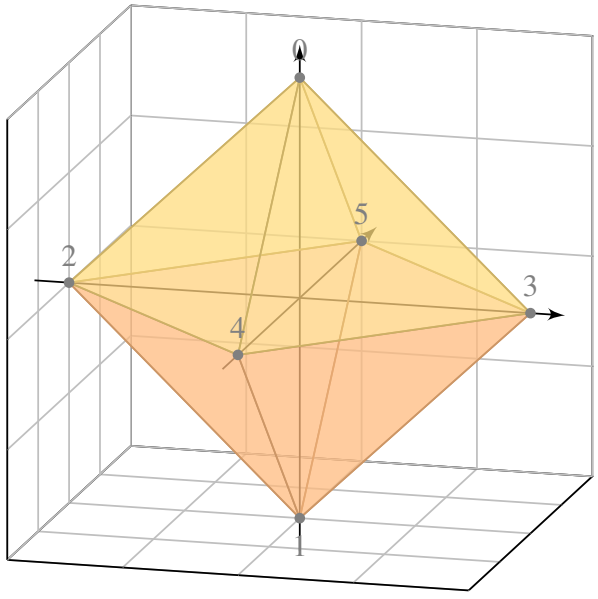
1. Für jeden Simplex $S \in K$ ist $f(S) \subseteq V$ affin unabhängig.
   Somit ist $|S|_f := [f(S)] \subseteq V$ ein affiner Simplex in V.
2. Für alle $S, T \in K$ gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = [f(S \cap T)]$.
   Somit ist $\mathscr{K} := \{\, [f(S)] \,|\, S \in K \,\}$ ein affiner Simplizialkomplex in V.

Aus dem **abstrakten** Simplizialkomplex K wird als Bild unter f in V der **kombinatorische** Simplizialkomplex $f(K) = \{\, f(S) \subseteq V | \, S \in K \,\}$ und daraus der **affine** Simplizialkomplex $\mathscr{K} := \{\, [f(S)] \subseteq V | \, S \in K \,\}$.

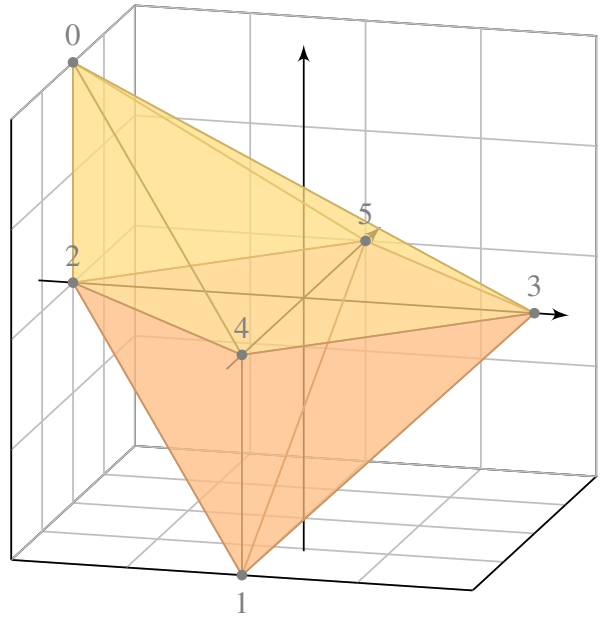
Das Polyeder $|K|_f := |\mathscr{K}|$ nennen wir die **geometrische Realisierung**des abstrakten SKomplexes K mittels der affinen Darstellung $f : K \to V$.

☺ Wir trennen (K, f) in kombinatorische Daten K und geometrische f.

Anwendungsbeispiel in der Graphiksprache *TikZ*

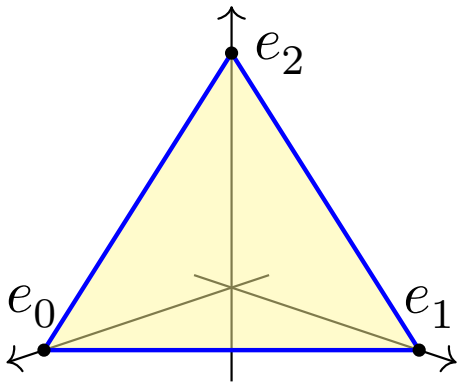



```
\addplot3[ patch, patch type=triangle,
  patch table={ % Liste der 2-Simplizes
    0 2 4 \\ % Dreieck oben links vorne
    0 3 4 \\ % Dreieck oben rechts vorne
    0 2 5 \\ % Dreieck oben links hinten
    0 3 5 \\ % Dreieck oben rechts hinten
    1 2 4 \\ % Dreieck unten links vorne
    1 3 4 \\ % Dreieck unten rechts vorne
    1 2 5 \\ % Dreieck unten links hinten
    1 3 5 \\ % Dreieck unten rechts hinten
  } ]
table{ % Liste der Koordinaten der Eckpunkte
   0  0 +2 \\ % Punkt 0 (oben)
   0  0 -2 \\ % Punkt 1 (unten)
  -2  0  0 \\ % Punkt 2 (links)
  +2  0  0 \\ % Punkt 3 (rechts)
   0 -2  0 \\ % Punkt 4 (vorne)
   0 +2  0 \\ % Punkt 5 (hinten)
};
```




```
\addplot3[ patch, patch type=triangle,
  patch table={ % Liste der 2-Simplizes
    0 2 4 \\ % Dreieck oben links vorne
    0 3 4 \\ % Dreieck oben rechts vorne
    0 2 5 \\ % Dreieck oben links hinten
    0 3 5 \\ % Dreieck oben rechts hinten
    1 2 4 \\ % Dreieck unten links vorne
    1 3 4 \\ % Dreieck unten rechts vorne
    1 2 5 \\ % Dreieck unten links hinten
    1 3 5 \\ % Dreieck unten rechts hinten
  } ]
table{ % Liste der Koordinaten der Eckpunkte
  -2  0 +2 \\ % Punkt 0 (oben links)
   0 -2 -2 \\ % Punkt 1 (unten vorne)
  -2  0  0 \\ % Punkt 2 (links)
  +2  0  0 \\ % Punkt 3 (rechts)
   0 -2  0 \\ % Punkt 4 (vorne)
   0 +2  0 \\ % Punkt 5 (hinten)
};
```

Die kanonische Darstellung



Beispiel: Jeden (abstrakten) Simplizialkomplex K mit endlicher Eckenmenge $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ können wir darstellen durch $e : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1} : s \mapsto e_s$ auf die Standardbasis $e_0, e_1, \dots, e_n$. Wir erhalten $|K|$ als Teilkomplex des Standardsimplex $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

☺ Dieselbe Konstruktion gelingt für unendliche Eckenmengen!

Definition I2D: kanonische Darstellung

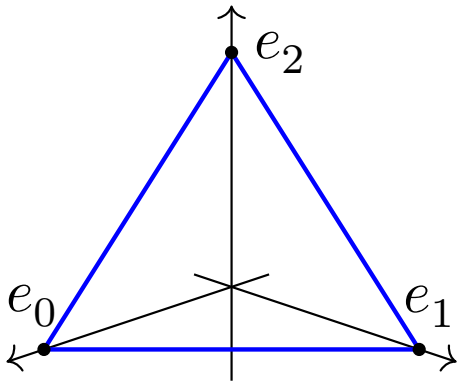
Die **kanonische Darstellung** des Komplexes K ist $e : K \to \mathbb{R}^{(\Omega)} : s \mapsto e_s$.

Wir nutzen hier den vertrauten Vektorraum $\mathbb{R}^{(\Omega)} \leq \mathbb{R}^{\Omega}$ aller Funktionen $x : \Omega \to \mathbb{R}$ mit endlichem Träger $\operatorname{supp}(x) = \{ s \in \Omega \,|\, x(s) \neq 0 \}$.

Kanonische Basis $(e_s)_{s\in\Omega}$ sind die Funktionen $e_s : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $e_s(s) = 1$ und $e_s(s') = 0$ für $s' \neq s$. Wir erhalten so die kanonische Darstellung e und den zugehörigen affinen Simplizialkomplex $\mathscr{K} = \{ [e(S)] \,|\, S \in K \}$.

Für Punkte $x \in [e(S)]$ gilt $\operatorname{supp}(x) \subseteq S$ sowie $x \geq 0$ und $\sum_{s\in S} x(s) = 1$.

Die kanonische Realisierung



Beispiel: Wir betrachten $K = \langle \{0,1\}, \{1,2\}, \{2,0\} \rangle$ und die kanonische Darstellung der Eckenmenge $\Omega = \{0,1,2\}$ durch die kanonische Basis e_0, e_1, e_2 in $\mathbb{R}^{(\Omega)}$, also $e : \{0,1,2\} \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto e_s$.

Definition I2D: kanonische Realisierung

Das zugehörige Polyeder ist die **kanonische Realisierung** von K:

$$|K| := |K|_e = \bigcup \big\{ [e(S)] \,\big|\, S \in K \big\} = \bigcup_{S \in K} [e(S)]$$
$$= \big\{ x : \Omega \to [0,1] \,\big|\, \operatorname{supp}(x) \in K,\ \textstyle\sum_{s \in \Omega} x(s) = 1 \big\}.$$

Jeder Punkt $x \in |K| \subseteq \mathbb{R}^{(\Omega)}$ schreibt sich eindeutig als endliche Summe $x = \sum_s x(s)\, e(s)$ mit baryzentrischen Koordinaten $x(s) \geq 0$, $\sum_s x(s) = 1$.

Der Träger $S = \operatorname{supp}(x) \in K$ ist die Eckenmenge des kleinsten Simplex, der den Punkt $x \in |K|$ enthält. Diese Sichtweise ist oft praktisch.

Je zwei Realisierungen sind homöomorph.

Satz I2E: Je zwei Realisierungen sind homöomorph.

Sei K ein abstrakter Simplizialkomplex und $|K| \subseteq \mathbb{R}^{(\Omega)}$ seine kanonische Realisierung. Sei $f : K \to V$ eine beliebige Darstellung in einem Vektorraum V und $|K|_f \subseteq V$ die so entstehende Realisierung.

Dann erhalten wir den stückweise affin-linearen Homöomorphismus

$$h : |K| \xrightarrow{\sim} |K|_f : e(s) \mapsto f(s), \quad \text{also} \quad \sum_{s\in\Omega} x(s) \cdot e(s) \mapsto \sum_{s\in\Omega} x(s) \cdot f(s).$$

Beweis: Da wir f als Darstellung voraussetzen, ist h bijektiv (I2C). Auf jedem Simplex $S \in K$ ist die Einschränkung $(h, h^{-1}) : [e(S)] \cong [f(S)]$ ein Homöomorphismus (I1A). Auch global ist daher $(h, h^{-1}) : |K| \cong |K|_f$ ein Homöomorphismus bezüglich der simplizialen Topologien (I1C). QED

☺ Die Geometrie hängt von der Darstellung f ab, die Topologie nicht!
Ist nichts anderes gegeben, so wählen wir die kanonische Realisierung.
In dieser Darstellung identifizieren wir meist $s \in \Omega$ mit $e(s) \in \mathbb{R}^{(\Omega)}$.

Je zwei Realisierungen sind homöomorph.

Die Definitionen I2B und I2C trennen die kombinatorischen Daten K von den geometrischen Daten f. Der Komplex K gibt den Bauplan vor, allerdings noch ohne Angabe von Längen, Winkeln, Volumina etc.
Die Darstellung $f : K \to V$ realisiert dies in einem Vektorraum V.

Bildlich gesprochen ist V der Bauplatz, die Punkte $f(s) \in V$ stecken die Ecken ab. Der abstrakte Bauplan K sagt *was* gebaut wird, die Darstellung $f : K \to V$ sagt *wo* und *wie* gebaut wird.
Dies präzisiert die genaue Lage und Bemaßung.

Schließlich wird das Polyeder $|K|_f \subseteq V$ mit „kontinuierlicher Raumsoße“ ausgegossen. O, ja, dieses ideale mathematische Wundermaterial! Nachhaltig, umweltfreundlich, kostengünstig und topologisch flexibel.

Wir schauen uns in Stuttgart und der Architekturgeschichte um und denken unwillkürlich an Beton: Seit ca. 1950 baut der *Brutalismus* auf Sichtbeton und folgt damit Le Corbusier (frz. *béton brut*, roher Beton).

🙂 Dagegen sind unsere Konstruktionen sehr sparsam und schonend.

Teilkomplexe und simpliziale Abbildungen

Definition I2F: simplizialer Teilkomplex

Sei K ein Simplizialkomplex (kombinatorisch I2A oder abstrakt I2B).
Ein **Teilkomplex** $L \leq K$ ist eine Teilmenge $L \subseteq K$ mit den Eigenschaften (0) $\emptyset \in L$ und (1) $T \subseteq S \in L \Rightarrow T \in L$. Somit ist L ein Simplizialkomplex.

Kombinatorische Komplexe (I2A) erben die Schnittbedingung (2).
Abstrakte Komplexe (I2B) verlagern dies auf Darstellungen (I2C).

Definition I2G: simpliziale Abbildung

Eine **simpliziale Abbildung** $f : K \to L$ zwischen Simplizialkomplexen ist eine Abbildung $f : \Omega(K) \to \Omega(L)$ der Eckenmengen, sodass gilt:

$$S = \{ s_0, s_1, \dots, s_n \} \in K \quad \Longrightarrow \quad f(S) = \{ f(s_0), f(s_1), \dots, f(s_n) \} \in L$$

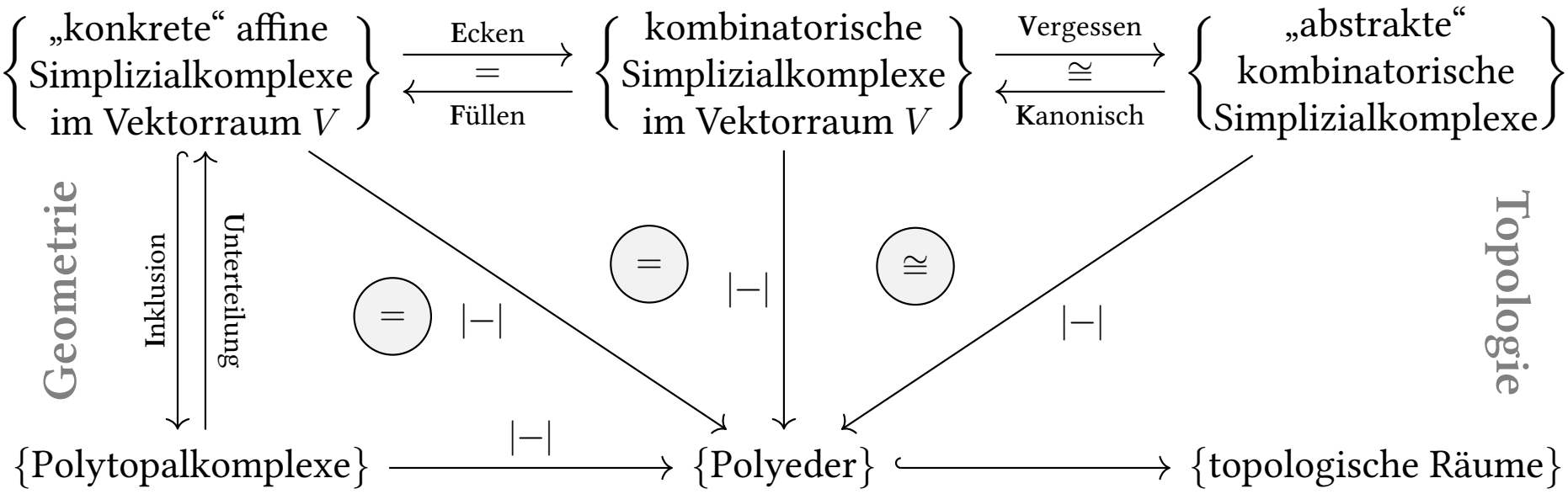
Die **geometrische Realisierung** von $f : K \to L$ ist die affine Fortsetzung

$$|f| : |K| \to |L| \quad \text{mit} \quad \textstyle\sum_{s \in \Omega(K)} x(s) \cdot s \mapsto \sum_{s \in \Omega(K)} x(s) \cdot f(s).$$

Dies ist wohldefiniert (I2E) und stetig dank simplizialer Topologie (I1C).

Zusammenschau der drei Varianten

Simpliziale Komplexe gibt es in drei nützlichen Geschmacksrichtungen:



Übung / Wiederholung: Definieren Sie explizit diese Kategorien und beweisen Sie die für jede Kategorie erforderlichen Eigenschaften (H1A).

Die geometrische Realisierung $|-|$ ist ein Funktor in die Kategorie Top. Es gilt $F \circ E = \mathrm{id}$ und $E \circ F = \mathrm{id}$: Diese Kategorien sind isomorph (H5E).

Zudem haben wir natürliche Transformationen $V \circ K \to \mathrm{id}$ dank I2D und $K \circ V \to \mathrm{id}$ dank I2E: Diese Kategorien sind äquivalent (H5E).

Die simpliziale Metrik

Jeder Simplizialkomplex K definiert sein Polyeder $|K|$ und die simpliziale Topologie $\mathcal{T}_K$. Zudem können wir $|K|$ mit einer Metrik d_K ausstatten:

Definition I2ı: simpliziale Metrik

Sei K ein Simplizialkomplex mit Eckenmenge Ω. Auf $\mathbb{R}^{(\Omega)}$ wählen wir die Supremumsnorm $|-|_\infty$. Auf der kanonischen Realisierung $|K| \subseteq \mathbb{R}^{(\Omega)}$ erhalten wir durch Einschränkung die **simpliziale Metrik**

$$d = d_K : |K| \times |K| \to [0,1] : (x,y) \mapsto \max\{\, |x(s) - y(s)| \,\big|\, s \in \Omega \,\}.$$

Andere Normen, wie die euklidische, sind ebenso möglich: Auf jedem endlich-dim. Teilraum induzieren alle Normen dieselbe Topologie (F6K), und somit auch auf jedem Simplex (Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L).

Mit dem kanonischen Homöomorphismus $h : |K| \xrightarrow{\sim} |K|_f$ aus Satz I2E übertragen wir die simpliziale Metrik der kanonischen Realisierung $|K|$ zur gleichnamigen Metrik $d_K : |K|_f \times |K|_f \to [0,1]$ auf jeder weiteren geometrischen Realisierung $|K|_f$ durch eine beliebige Darstellung f.

Metrisierung der simplizialen Topologie

Satz I2J: Metrisierung der simplizialen Topologie

Auf $|K|$ ist die simpliziale Topologie feiner als die metrische, also $\mathcal{T}_K \supseteq \mathcal{T}_d$. Ist K lokal-endlich, so gilt $\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_d$. Andernfalls ist $\mathcal{T}_K$ nicht metrisierbar.

Beweis: (1) Jeder Ball $B_K(x, r)$ um $x \in |K|$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist offen in $\mathcal{T}_K$ (I1C), denn $B_K(x, r) \cap [S]$ ist offen in jedem Simplex $[S]$. Also gilt $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_K$.

(2) Metrische und simpliziale Topologie sind auf jedem Simplex gleich. Jeder Simplex $[S]$ mit $S \in K$ ist abgeschlossen in der Topologie $\mathcal{T}_d$ (F1G). Ist zudem K lokal-endlich, so ist $\mathcal{K} = \{\, [S] \mid S \in K \,\}$ eine lokal-endliche, abgeschlossene Überdeckung von $|K|$ mit der metrischen Topologie $\mathcal{T}_d$. Dank E1N stimmen metrische $\mathcal{T}_d$ und simpliziale Topologie $\mathcal{T}_K$ überein.

(3) Ist K hingegen nicht lokal-endlich, so ist mindestens eine Ecke $a \in \Omega$ in unendlich vielen Simplizes enthalten: Es existieren unendlich viele Kanten $\{a, a_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dies entspricht einem unendlichen Stern zu a, und hierin hat a keine abzählbare Umgebungsbasis (Übung I2K, siehe unendliches Bouquet). Somit ist $|K_{\leq 1}| \subseteq |K|$ nicht metrisierbar. QED

Minimale Dimension für Einbettungen

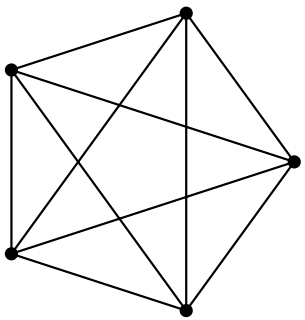
Wir können jeden SKomplex K kanonisch realisieren durch $|K| \subseteq \mathbb{R}^{(\Omega)}$. Die Dimension $\dim \mathbb{R}^{(\Omega)} = \sharp\Omega$ ist i.A. jedoch verschwenderisch groß!

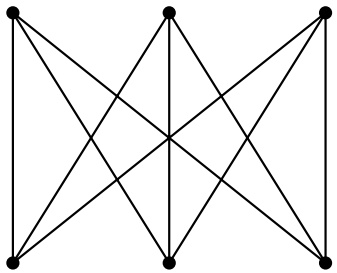
Beispiel: Wir können jeden endlichen Graphen ($\dim K \leq 1$) im Raum $\mathbb{R}^3$ darstellen, dafür ist genug Platz, unabhängig von seiner Eckenzahl $\sharp\Omega$.

Hierzu genügt $f : \Omega \hookrightarrow \{\, (k^1, k^2, k^3) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ entlang der Momentkurve; je vier ihrer Punkte sind affin unabhängig. (Warum? Übung!)

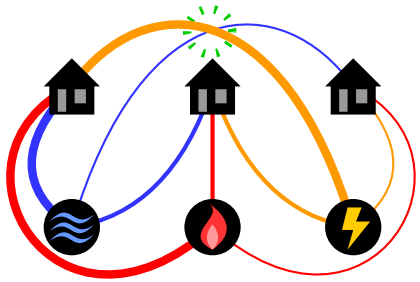
In der Ebene $\mathbb{R}^2$ gelingt eine solche Einbettung nicht immer:

K_5





$K_{3,3}$



Satz (van Kampen 1932, Flores 1933): Sei $K = \langle \Delta^{2m+2} \rangle_{\leq m}$ das m–Skelett des $(2m+2)$–Simplex. Dann lässt sich $|K|$ affin im Raum $\mathbb{R}^{2m+1}$ einbetten, aber nicht im $\mathbb{R}^{2m}$. Beispiel: Für $K = \langle \Delta^4 \rangle_{\leq 1} = K_5$ gilt $\mathbb{R}^3 \hookleftarrow |K| \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

Minimale Dimension für Einbettungen

Welche endlichen Graphen K lassen sich in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten?

Für einfache Beispiele gelingt dies leicht, für die gezeigten Graphen K_5 und $K_{3,3}$ ist es jedoch unmöglich. Der Beweis ist trickreich und beruht zwangsläufig auf der Topologie der Ebene: Jeder endliche Graph lässt sich in eine Fläche F_g^+ mit hinreichend hohem Geschlecht g einbetten!

Vollständige Auskunft gibt der Satz von Kuratowski (1930): Ein endlicher Graph K lässt sich genau dann in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten, wenn er keinen Teilgraph enthält, der isomorph ist zu K_5 oder $K_{3,3}$ oder eine Unterteilung davon. (`en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph`)

Die allgemeine Frage lautet: Vorgelegt sei ein endlicher Graph K.
Was ist das minimale Geschlecht $g = g(K)$, sodass eine Einbettung $|K| \hookrightarrow F_g^+$ existiert? (`en.wikipedia.org/wiki/Graph_embedding`)
Planare Graphen haben Geschlecht 0, hier antwortet Kuratowski.
Es gilt $g(K_n) = \lceil (n-3)(n-4)/12) \rceil$ und $g(K_{m,n}) = \lceil (m-2)(n-2)/4 \rceil$.

Der allgemeine Fall ist algorithmisch lösbar, aber nachweislich komplex.

Der Einbettungssatz von Whitney

Satz I2Q: Einbettungssatz von Whitney, simplizial

Sei K ein Simplizialkomplex. (1) Existiert eine Einbettung $|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, so ist K abzählbar und lokal-endlich. (2) Ist K abzählbar und lokal-endlich und $\dim K \leq m$, so existiert eine Darstellung $f : K \to \mathbb{R}^n$ mit $n = 2m + 1$, somit eine affine Einbettung $|f| : |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Für Eckpunkte in allgemeiner Lage sorgt zum Beispiel $f : \Omega \hookrightarrow \{ (k^1, k^2, k^3, \dots, k^n) \mid k \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Beweis: (1) Als Teilraum ist $|K|$ metrisierbar, also lokal-endlich (I2J). Die Eckenmenge $\Omega \hookrightarrow |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist diskret, also abzählbar (D6J).

(2) Die Momentkurve $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (t^1, t^2, t^3, \dots, t^n)$ schneidet jede Hyperebene $A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \}$ höchstens n mal, denn das Polynom $a_0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n$ hat höchstens n Nullstellen. Somit sind je $n + 1$ Punkte der Momentkurve affin unabhängig.

Für $S, T \in K$ besteht $f(S \cup T)$ aus $\leq 2m + 2$ Punkten. Im Simplex $\Delta = [f(S \cup T)]$ gilt $[f(S)] \cap [f(T)] = [f(S) \cap f(T)] = [f(S \cap T)]$. Somit ist $f : K \to \mathbb{R}^n$ eine Darstellung. In $\mathbb{R}^n$ ist $([f(S)])_{S \in K}$ lokal-endlich, also $|f| : |K| \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung (I1G). QED

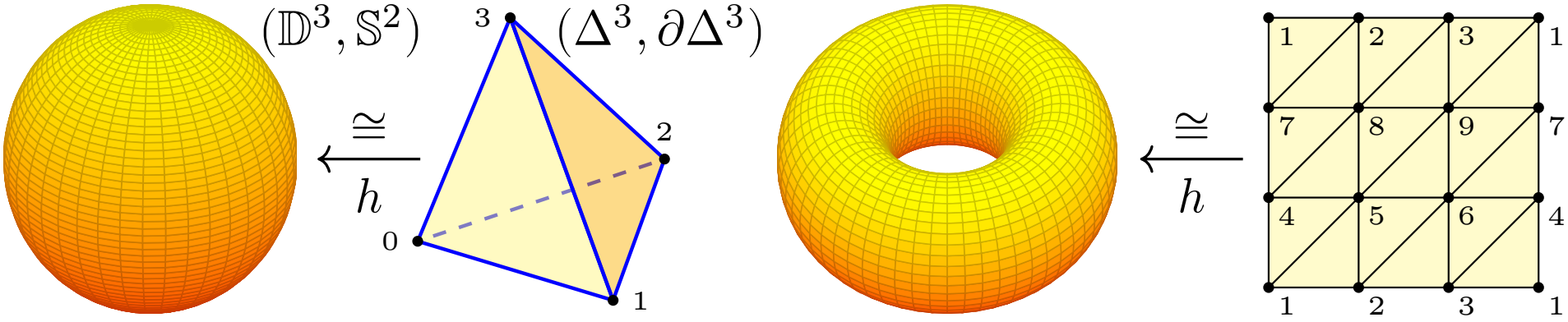
Der Einbettungssatz von Whitney

Whitneys klassischer Einbettungssatz stammt ursprünglich aus der Differentialtopologie: Zu jeder glatten m–dim. Mannigfaltigkeit M existieren glatte Einbettungen $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$. Hier lässt sich sogar noch eine Dimension sparen: Der starke Einbettungssatz garantiert $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$. Die Aussage $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ heißt daher auch schwacher Einbettungssatz. (`en.wikipedia.org/wiki/Whitney_embedding_theorem`)

Ich habe hier den Einbettungssatz für Simplizialkomplexe ausgeführt und ihm ebenfalls den Namen Whitney angedichtet: Das ist nur eine griffige mathematische Analogie, keine akkurate historische Zuordnung. Whitney hätte dies vermutlich als Übungsaufgabe eingestuft, zu Recht! Es ist eine sehr schöne Übung, daher empfehle ich sie hier.

Der simpliziale Fall ist – wie so oft – sehr direkt und technisch leicht: Alle vorgegebenen Daten sind hier bereits stückweise affin-linear. Statt Differentialrechnung benötigen wir daher nur lineare Algebra (affine Unabhängigkeit) und Kombinatorik (Dimensionen zählen). Dieser Satz ist ein würdiger Abschluss dieses Abschnitts.

Was sind Triangulierungen?



Definition I3A: Triangulierung eines topologischen Raumes

Sei X ein topologischer Raum. Eine **Triangulierung** (K, h, k) von X ist ein Simplizialkomplex K mit einem Homöomorphismus $(h, k) : |K| \cong X$.
Wir nennen X **triangulierbar**, falls eine Triangulierung existiert.

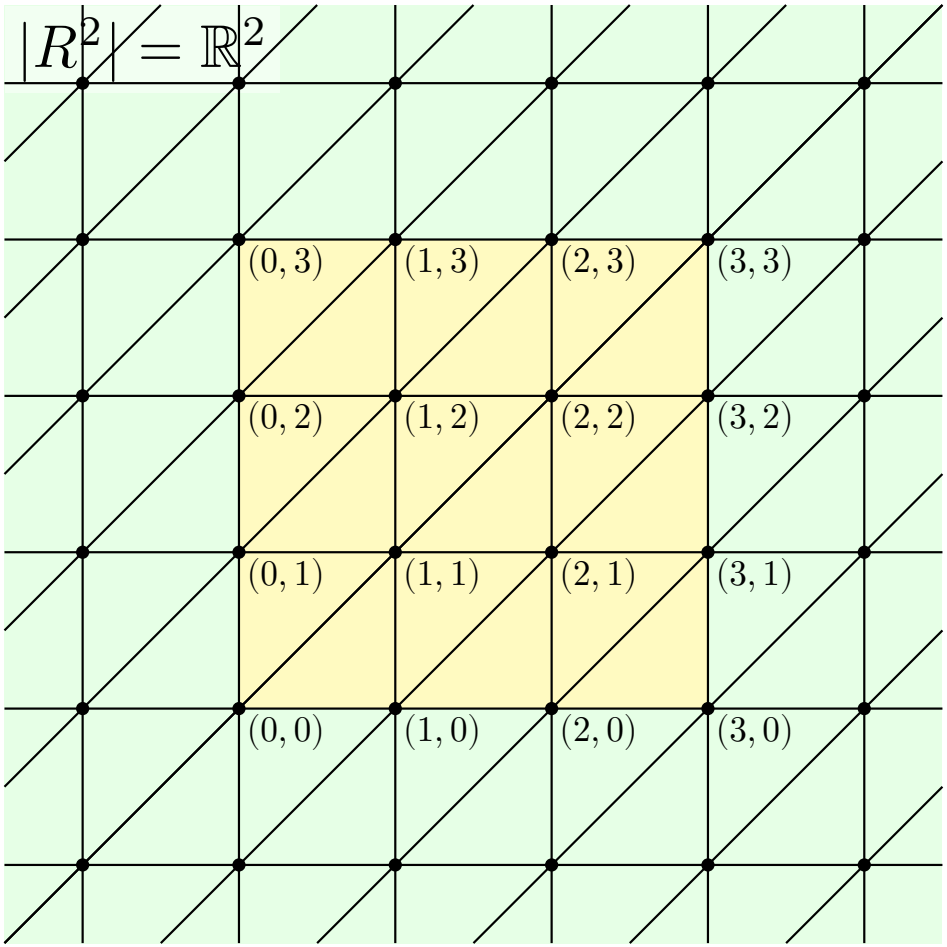
Beispiel: $\Delta^n \cong \mathbb{D}^n$ und $\partial\Delta^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$ dank radialer Projektion (Satz F6G).
Hierzu haben wir affine bzw. kombinatorische Simplizialkomplexe:

$$\mathscr{D}^n = \langle \Delta^n \rangle = \{ \Delta' \mid \Delta' \leq \Delta^n \} \quad \text{und} \quad \mathscr{S}^{n-1} = \{ \Delta' \mid \Delta' < \Delta^n \}$$
$$D^n = \mathfrak{P}\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \quad \text{und} \quad S^{n-1} = D^n \setminus \{\{e_0, e_1, \dots, e_n\}\}$$

Wir erhalten $|D^n| = |\mathscr{D}^n| = \Delta^n \cong \mathbb{D}^n$ und $|S^{n-1}| = |\mathscr{S}^{n-1}| = \partial\Delta^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$.

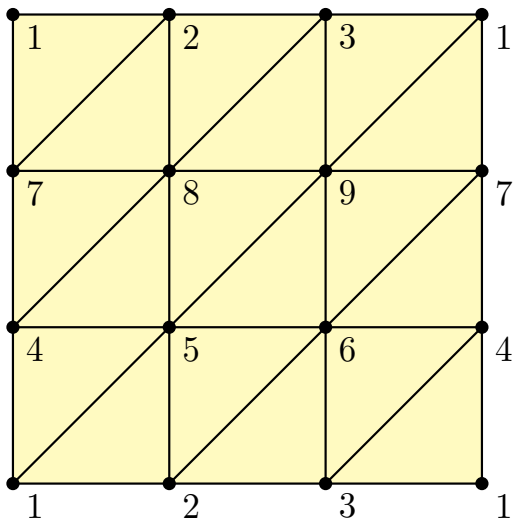
Triangulierung der Ebene $\mathbb{R}^2$ und des Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Wir triangulieren $\mathbb{R} = |R|$ mit $R = \langle \{a, a{+}1\} \mid a \in \mathbb{Z} \rangle$, ebenso $\mathbb{R}^2 = |R^2|$, $R^2 = \langle \{(a,b),(a,b{+}1),(a{+}1,b{+}1)\}, \{(a,b),(a{+}1,b),(a{+}1,b{+}1)\} \mid a, b \in \mathbb{Z} \rangle$.



$$(3\mathbb{Z})^2 \curvearrowright R^2 \twoheadrightarrow T$$

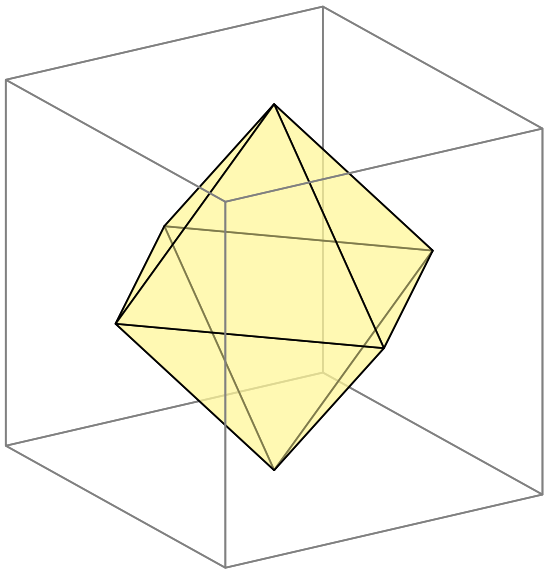
$$(3\mathbb{Z})^2 \curvearrowright |R^2| \twoheadrightarrow |T|$$

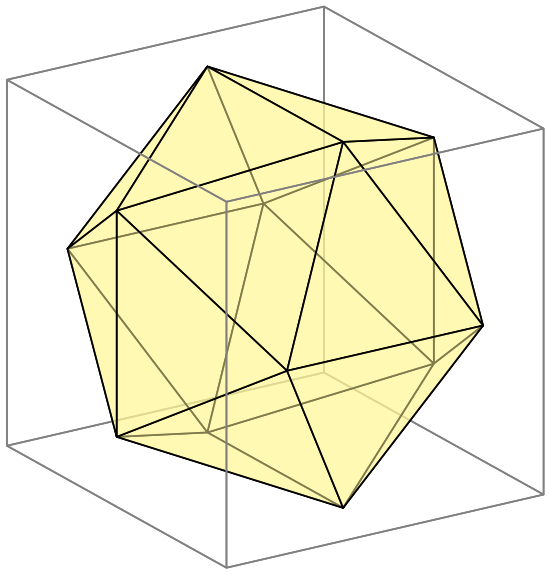


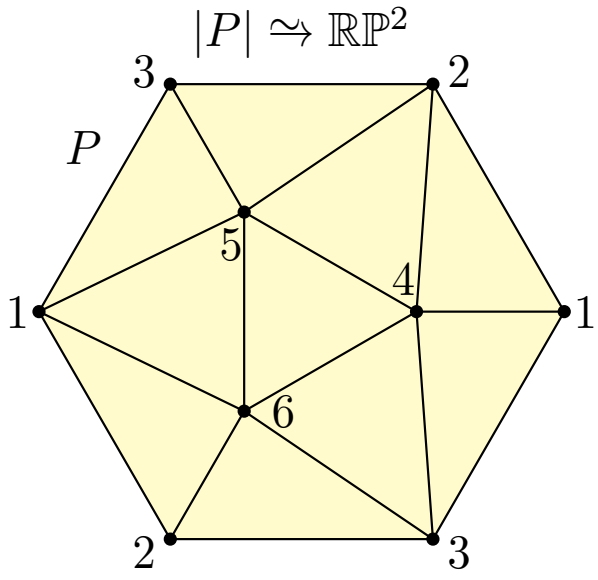
$$|T| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

- Durch $\mathbb{R}^2/(3\mathbb{Z})^2$ erhalten wir die 9–Ecken-Triangulierung des Torus.
- Es genügen 8, sogar 7 Ecken, ... weniger geht nicht! (Heawood K3B)

Triangulierung von $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{RP}^2$







Beispiel / Übung I3D: die 6–Ecken-Triangulierung des $\mathbb{RP}^2$

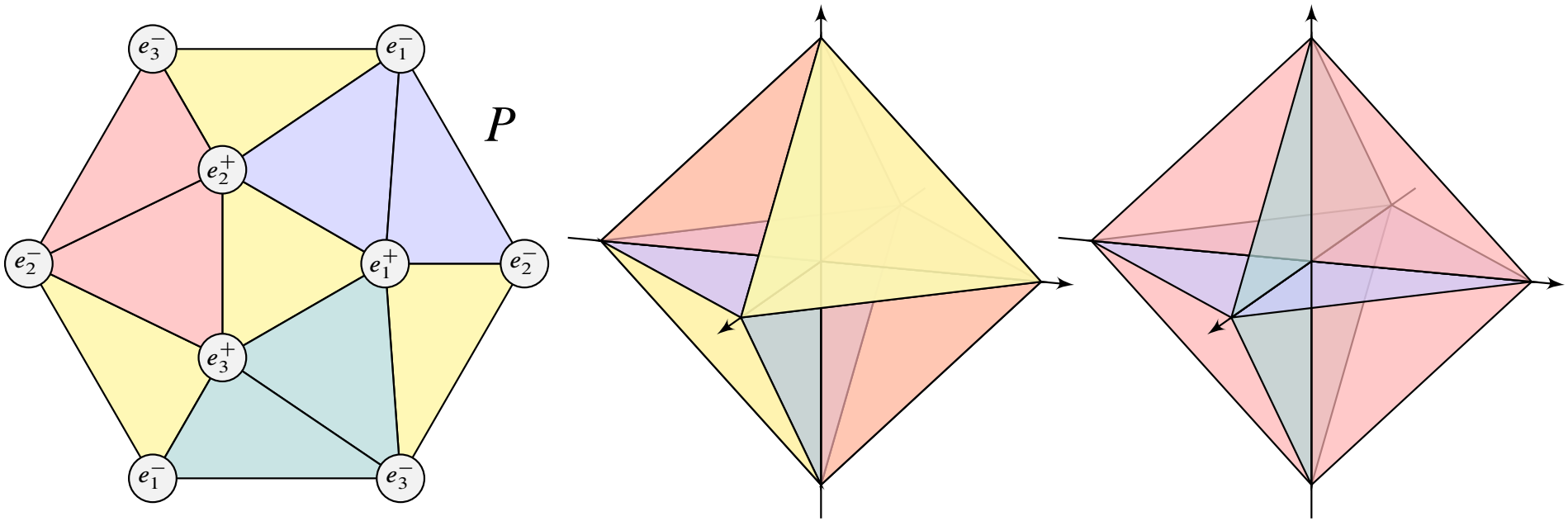
In Dimension $n = 2$ nutzen wir den Ikosaederrand K zu $h : |K| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$. Der Quotient $P = K/\{\pm\}$ ist ein Simplizialkomplex wie oben gezeigt. Wir erhalten die 6–Ecken-Triangulierung $|P| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2/\{\pm\} = \mathbb{RP}^2$ der projektiven Ebene. Die Polyeder $|K|, |P|$ sind geschlossene Flächen mit $\chi(K) = 12 - 30 + 20 = 2$ und $\chi(P) = 6 - 15 + 10 = \frac{1}{2}\chi(K) = 1$.

☺ Hier bewähren sich *abstrakte* Simplizialkomplexe ganz wunderbar!

⚠ Das Oktaeder hingegen genügt noch nicht für diese Konstruktion.

Triangulierung der projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$

Diese Konstruktion ist sehr elegant und recht natürlich. Wir erhalten einen abstrakten Simplizialkomplex P mit 6 Ecken, daher können wir P kanonisch in $\mathbb{R}^6$ realisieren. Dank $\dim P = 2$ können wir P schon in $\mathbb{R}^5$ einbetten (Whitney I2Q), mit etwas mehr Mühe sogar in $\mathbb{R}^4$.



Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ lässt sich nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten! Werner Boy fand 1901 in seiner Dissertation immerhin eine Immersion $\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ mit harmlosen Doppelpunkten und nur einem Dreifachpunkt. Diese Immersion ist hier als „simpliziales Origami“ dargestellt.

Erinnerung: polytopale Komplexe

Definition I3K: polytopaler Komplex

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $\mathscr{K}$ eine Familie von Polytopen in V.

Wir nennen $\mathscr{K}$ einen **polytopalen Komplex**, falls gilt:

0. Das leere Polytop gehört zu $\mathscr{K}$, kurz $\emptyset \in \mathscr{K}$. (langweilig, aber nützlich)
1. Je zwei Polytope $P \neq Q$ in $\mathscr{K}$ sind innerlich disjunkt, $\operatorname{Int} P \cap \operatorname{Int} Q = \emptyset$.
2. Für jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ gilt $\partial P = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ mit $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathscr{K}$.

Das **Polyeder** $|\mathscr{K}| \subseteq V$ ist die Vereinigung aller Polytope:

$$\left|\mathscr{K}\right| := \bigcup \mathscr{K} = \bigcup_{P \in \mathscr{K}} P = \bigsqcup_{P \in \mathscr{K}} \operatorname{Int} P$$

Jedes Polytop $P \in \mathscr{K}$ versehen wir mit seiner euklidischen Topologie im aufgespannten Raum $\operatorname{aff} P \cong \mathbb{R}^n$, alternativ durch $\Delta^\ell \twoheadrightarrow P$ dank F1L.

Wir versehen $|\mathscr{K}|$ mit der **polytopalen Topologie** $\mathscr{T}_{\mathscr{K}}$: Genau dann ist $U \subseteq |\mathscr{K}|$ offen, wenn $U \cap P \subseteq P$ offen ist in jedem Polytop $P \in \mathscr{K}$.

$\mathscr{K}$ simplizial (I1C) $\Rightarrow$ $\mathscr{K}$ polytopal (I3K) $\Rightarrow$ $\beta(\mathscr{K})$ simplizial (I3M)

Erinnerung: polytopale Komplexe

⚠ In der Einleitung (A3B) haben wir zwecks Vereinfachung zunächst nur *endliche* polytopale Komplexe untersucht. Wir erlauben fortan auch unendliche Komplexe. Dazu erklären wir hier die polytopale Topologie; für endliche Komplexe in $\mathbb{R}^n$ ist dies die Teilraumtopologie, siehe I1G.

Wir zuvor definieren wir die **Dimension** und das n**–Skelett** durch

$$\dim \mathscr{K} := \sup\{\dim P \,|\, P \in \mathscr{K}\}, \quad \mathscr{K}_{\leq n} := \{P \in \mathscr{K} \,|\, \dim P \leq n\},$$

Manchmal sind auch folgende Bezeichnungen nützlich:

$$\mathscr{K}_{<n} := \{P \in \mathscr{K} \,|\, \dim P < n\}, \quad \mathscr{K}_n := \{P \in \mathscr{K} \,|\, \dim P = n\}.$$

🙂 Alle polytopalen und simplizialen Bezeichnungen stimmen überein. Es gibt dabei allerdings eine kleine Diskrepanz der Konventionen:

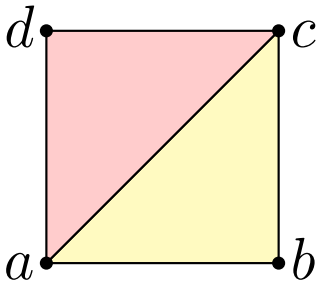
Für das leere Polytop $\emptyset$ vereinbaren wir die polytopale Dimension $\dim \emptyset = -\infty$. Damit gilt die Produktformel $\dim(P \times Q) = \dim P + \dim Q$.

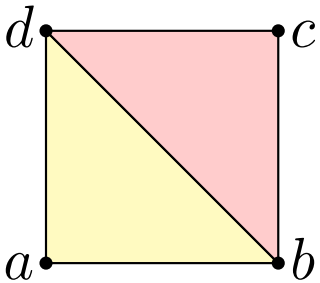
Für den leeren Simplex $\emptyset$ vereinbaren wir die simpliziale Dimension $\dim \emptyset = -1$. Das ist für simpliziale Konstruktionen natürlicher.

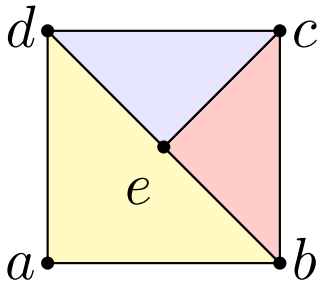
Erinnerung: polytopale Komplex

Übung: Jeder affine Simplizialkomplex $\mathscr{K}$ (I1C) ist ein Polytopalkomplex (I3K), aber nicht umgekehrt, selbst wenn $\mathscr{K}$ nur aus Simplizes besteht.

Lösung: Lesen und vergleichen Sie sorgfältig beide Definitionen!
Für simpliziale Komplexe sind wir strenger als für polytopale.







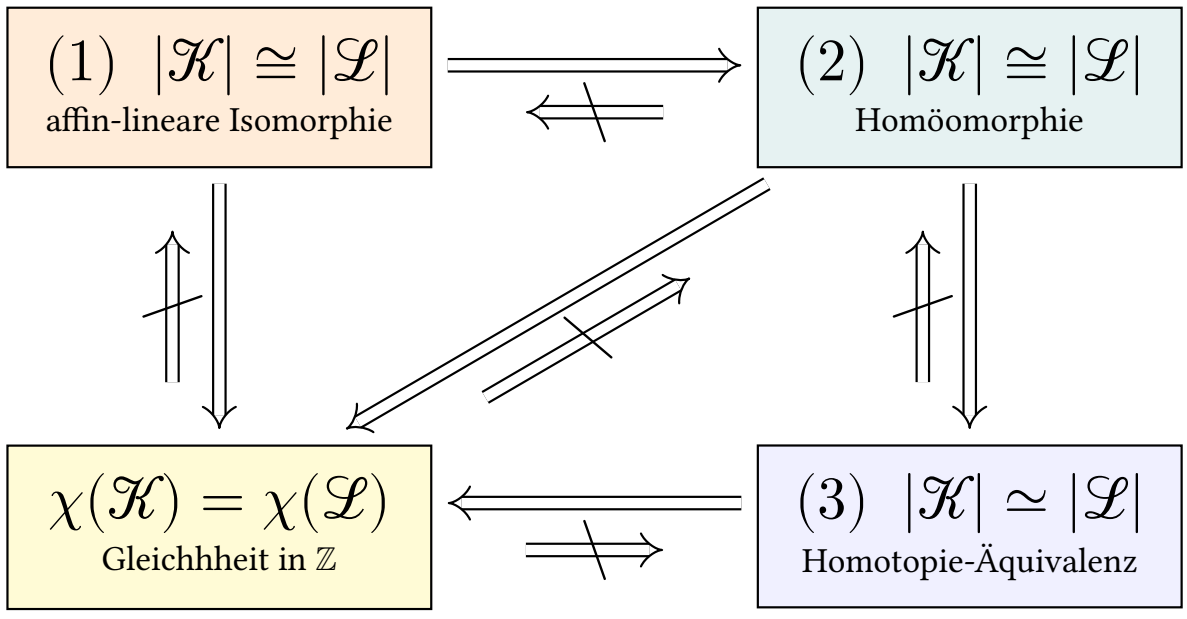
$$\mathscr{K} = \langle [a,b,c], [a,c,d] \rangle$$
$$\mathscr{L} = \langle [a,b,d], [b,c,d] \rangle$$
$$\mathscr{P} = \langle [a,b,d], [b,c,e], [c,d,e] \rangle$$

Beispiel: In der obigen Illustration sind die Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ simplizial, hingegen ist $\mathscr{P}$ nur polytopal, nicht simplizial. (Zur Reparatur siehe I3L)

Übung: (nach dem simplizialen Vorbild von Satz I1G)
Sei V ein topologischer Vektorraum, zum Beispiel $V = \mathbb{R}^n$.
Darin sei $\mathscr{K}$ ein Polytopalkomplex. (1) Die polytopale Topologie $\mathscr{T}_{\mathscr{K}}$ ist feiner als die Teilraumtopologie $\mathscr{T}_{|\mathscr{K}|}$ in V, also $\mathscr{T}_{\mathscr{K}} \supseteq \mathscr{T}_{|\mathscr{K}|}$.
(2) Ist der Komplex $\mathscr{K}$ in V lokal-endlich, so gilt $\mathscr{T}_{\mathscr{K}} = \mathscr{T}_{|\mathscr{K}|}$.

Erinnerung: polytopale Komplex

Wir erinnern an die topologische Invarianz der Euler–Charakteristik.
Für endliche polytopale (speziell: simpliziale) Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ gilt:



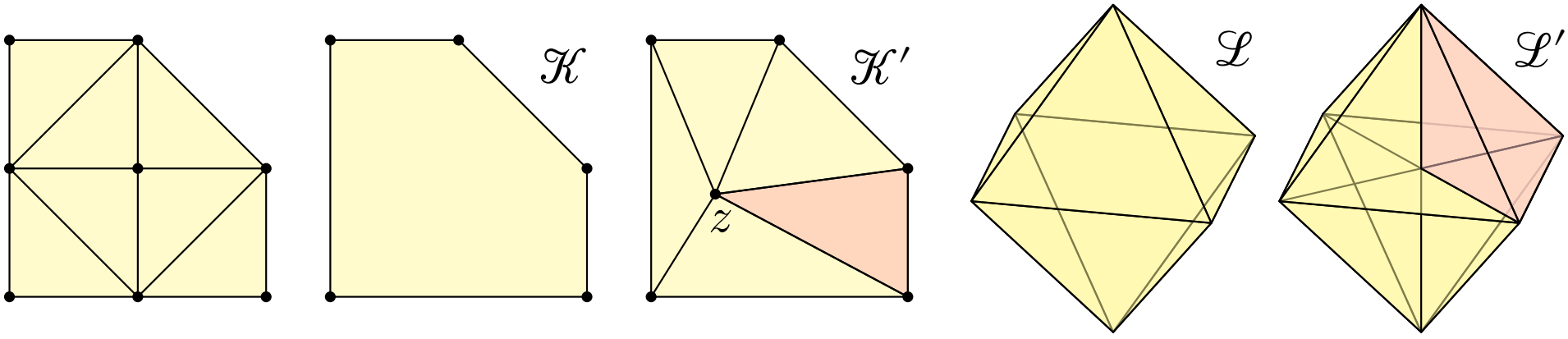
☺ Wir können alle Ergebnisse, Sätze und Techniken für polytopale Komplexe auch für den Spezialfall der simplizialen Komplexe nutzen.

☺ Wir zeigen nun folgende Umkehrung durch simpliziale Unterteilung:

$\mathscr{K}$ simplizial (I1C) $\Rightarrow$ $\mathscr{K}$ polytopal (I3K) $\Rightarrow$ $\beta(\mathscr{K})$ simplizial (I3M)

Simpliziale Unterteilungen

Für jeden polytopalen Komplex $\mathcal{K}$ können wir das Polyeder $|\mathcal{K}|$ triangulieren durch zentrische Unterteilung und erhalten $\mathcal{K}'$:



Definition I3L: Unterteilung, polytopal und simplizial

Eine **Unterteilung** $\mathcal{K}' \preccurlyeq \mathcal{K}$ ist ein Komplex $\mathcal{K}'$ mit $|\mathcal{K}'| = |\mathcal{K}|$, und jedes Polytop $P \in \mathcal{K}$ ist Vereinigung endlich vieler Polytope $P' \in \mathcal{K}'$.

Ist $\mathcal{K}'$ simplizial, so nennen wir $\mathcal{K}' \preccurlyeq \mathcal{K}$ **simpliziale Unterteilung**.

Eine Unterteilung $(\mathcal{K}', \mathcal{L}) \preccurlyeq (\mathcal{K}, \mathcal{L})$ **relativ** zum Teilkomplex $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ bedeutet $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}' \preccurlyeq \mathcal{K}$: Nur Polytope $P \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ werden unterteilt.

Für $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ ist $(\mathcal{K}', \mathcal{L}) \preccurlyeq (\mathcal{K}, \mathcal{L})$ eine absolute Unterteilung $\mathcal{K}' \preccurlyeq \mathcal{K}$. Allgemein identifizieren wir den Komplex $\mathcal{K}$ mit dem Paar $(\mathcal{K}, \{\emptyset\})$.

Zentrische Unterteilung

Satz I3M: zentrische Unterteilung

Sei $\mathscr{K}$ ein polytopaler Komplex, $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}$ ein simplizialer Teilkomplex, etwa $\mathscr{L} = \{\emptyset\}$ oder $\mathscr{L} = \mathscr{K}_{\leq 1}$, sowie $z : \mathscr{K} \setminus \mathscr{L} \to |\mathscr{K}| : P \mapsto z_P \in \operatorname{Int} P$.

Daraus konstruieren wir rekursiv den Simplizialkomplex $\mathscr{K}'$ als relative **zentrische Unterteilung**, $\mathscr{L} \leq \mathscr{K}' \preccurlyeq \mathscr{K}$, gemäß ${\mathscr{K}_{\leq 0}}' = \mathscr{K}_{\leq 0}$ und

$$ {\mathscr{K}_{\leq n}}' = {\mathscr{K}_{<n}}' \cup \mathscr{L}_n \cup \left\{ [v_0, \dots, v_k, z_P] \,\middle|\, \begin{array}{c} P \in \mathscr{K}_n \setminus \mathscr{L}_n, \\ \partial P \supseteq [v_0, \dots, v_k] \in {\mathscr{K}'_{<n}} \end{array} \right\} \preccurlyeq \mathscr{K}_{\leq n}. $$

Die **baryzentrische Unterteilung** $\beta(\mathscr{K}, \mathscr{L}) := (\mathscr{K}', \mathscr{L})$ erhalten wir mit

$$ P \;\mapsto\; \operatorname{vert}(P) = \{x_1, \dots, x_n\} \;\mapsto\; z_P = \tfrac{1}{n} x_1 + \dots + \tfrac{1}{n} x_n \in \operatorname{Int} P. $$

Im absoluten Falle $\mathscr{L} = \{\emptyset\}$ schreiben wir kurz $\beta(\mathscr{K}) := \beta(\mathscr{K}, \{\emptyset\})$.

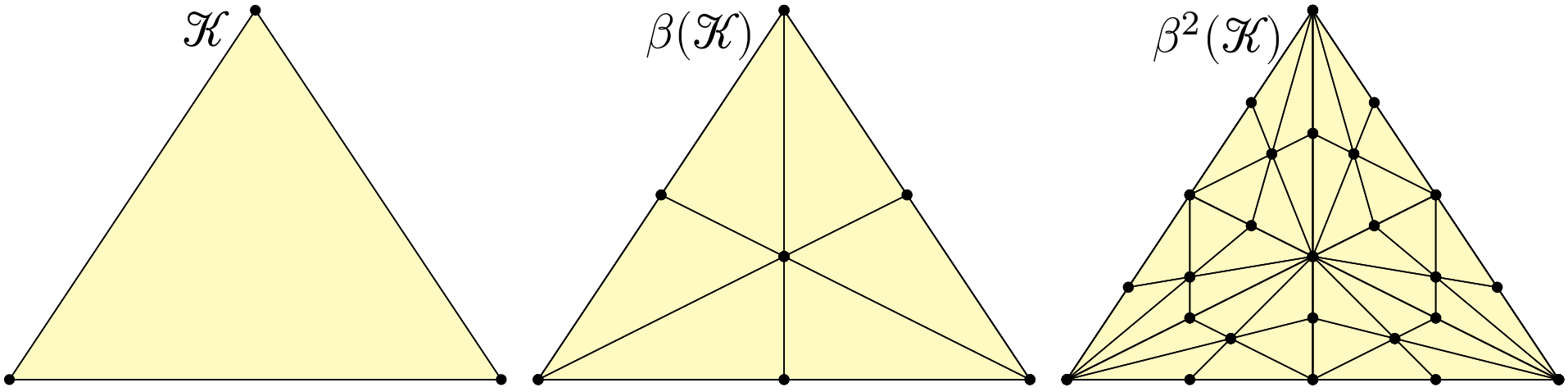
Beweis: Alles ist explizit angegeben, es genügt induktives Nachprüfen!

Für (affine) simpliziale und polytopale Komplexe gilt folgende Beziehung:

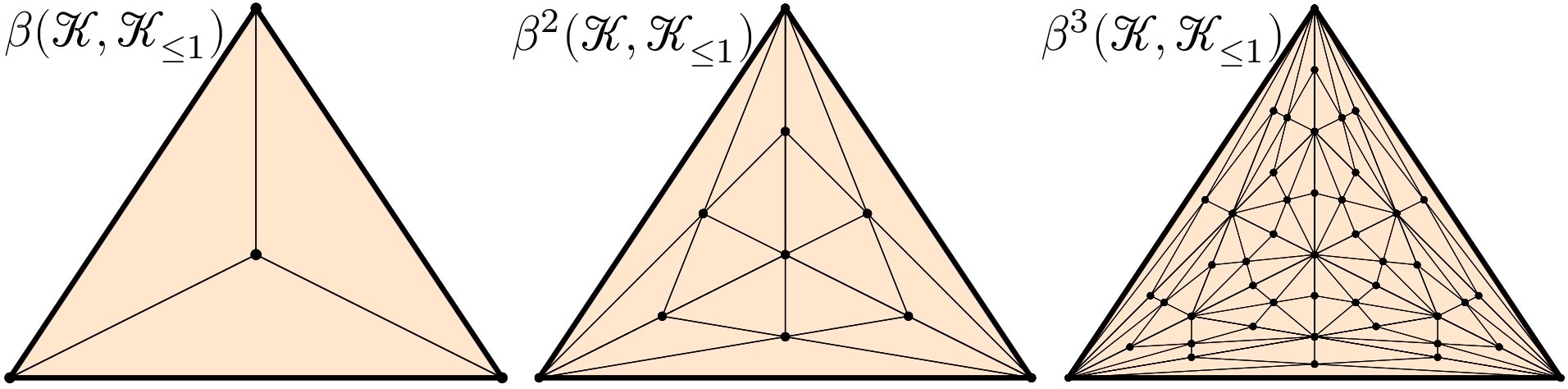
$\mathscr{K}$ simplizial (I1C) $\Rightarrow$ $\mathscr{K}$ polytopal (I3K) $\Rightarrow$ $\beta(\mathscr{K})$ simplizial (I3M)

Baryzentrische Unterteilung, absolut und relativ

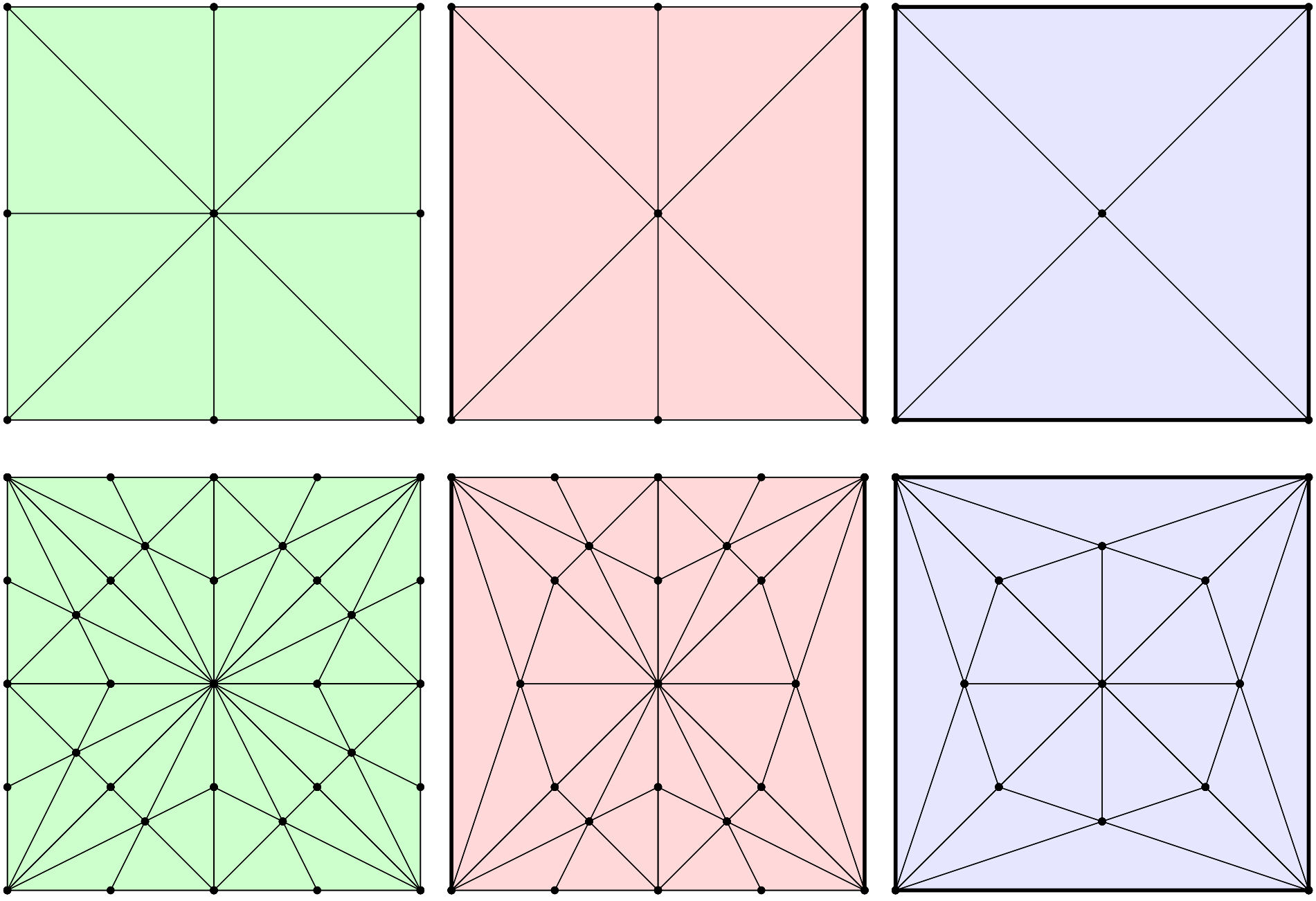
Baryzentrische Unterteilung eines Dreiecks $\mathscr{K} = \langle \Delta^2 \rangle$:



Baryzentrische Unterteilung eines Dreiecks $\mathscr{K}$ relativ zum Rand $\mathscr{K}_{\leq 1}$:

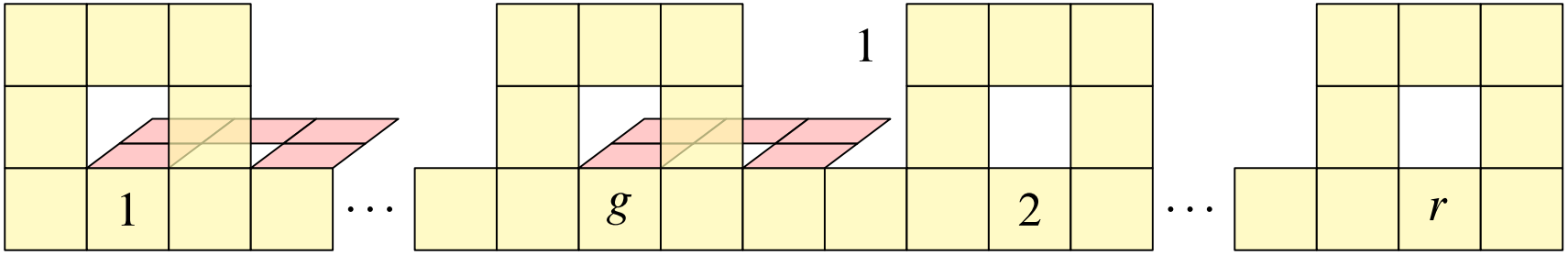


Baryzentrische Unterteilung, absolut und relativ

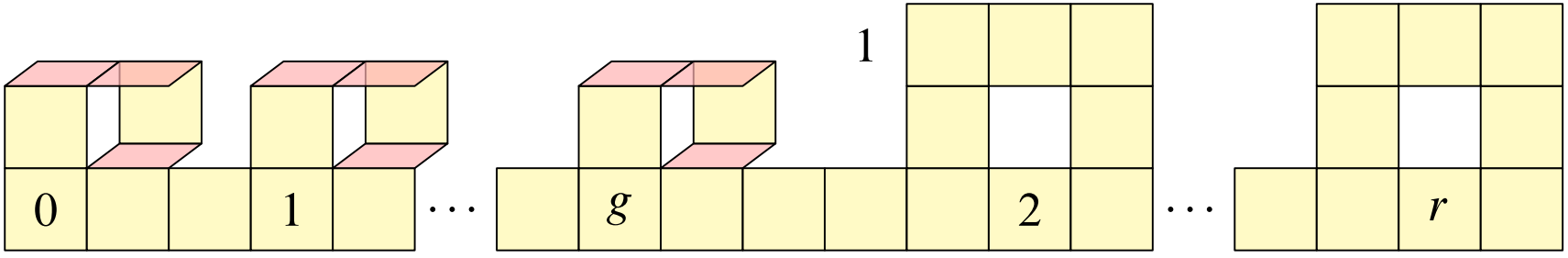


Triangulierung unserer Modellflächen

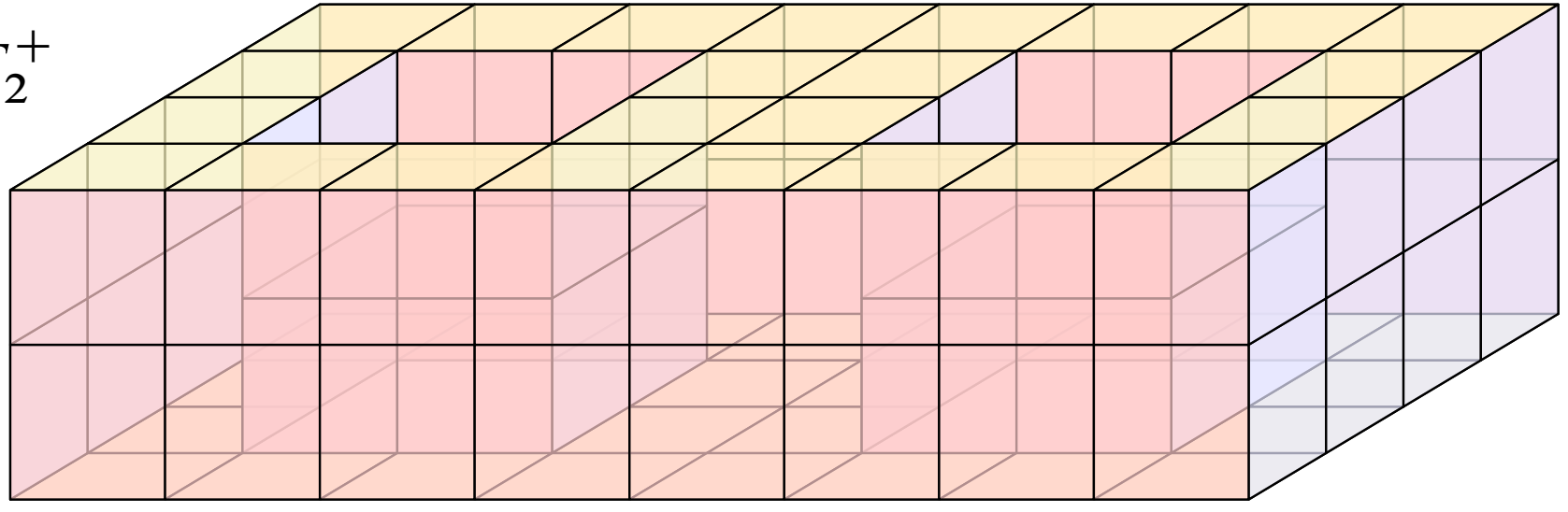
$F^+_{g,r} =$



$F^-_{g,r} =$



F^+_2



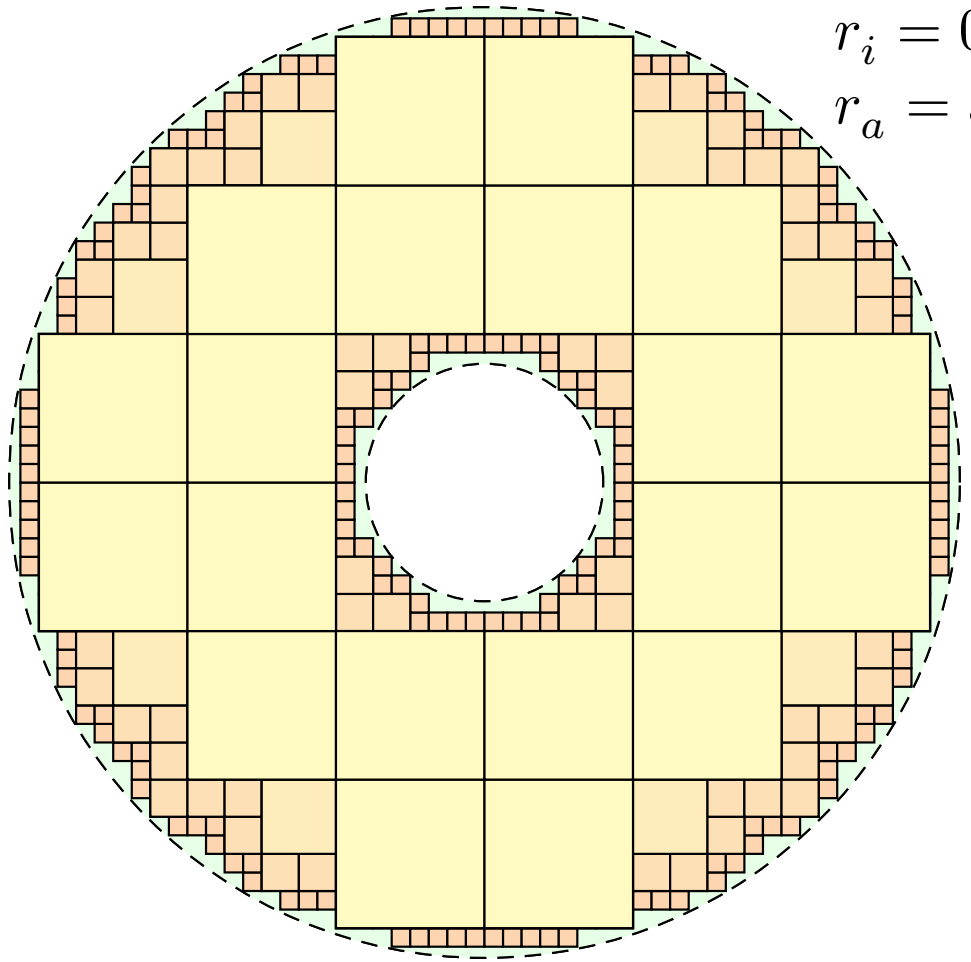
Jede offene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist triangulierbar.

Satz I3т: Runge 1884

Jede offene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ lässt sich affin triangulieren.

Beweis: Wir überdecken X mit immer kleiner werdenden Würfeln.

Fliesenteris für die Menge X:
Da X in $\mathbb{R}^n$ offen ist, wird jeder Punkt $x \in X$ irgendwann überdeckt.

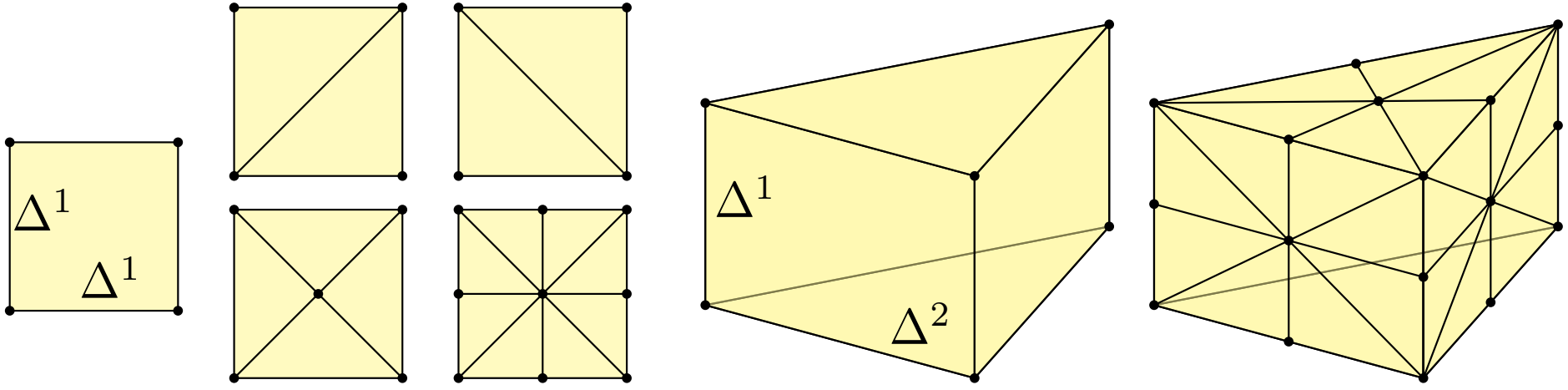


Wir erhalten zu $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine lokal-endliche Überdeckung durch abgeschlossene Würfel.

Produkt von Simplizes und von Polytopen

Simplizes sind, wie ihr Name sagt, sehr einfache Objekte und haben viele gute Eigenschaften — aber leider auch einen Schönheitsfehler:

Das Produkt $\Delta^p \times \Delta^q$ mit $p, q \geq 1$ ist kein Simplex, sondern ein Polytop!



☺ Polytope sind stabil unter Produktbildung, Simplizes leider nicht.

Bereits für die bequeme Behandlung von Produkten lohnt sich unsere Investition in die Untersuchung polytopaler Komplexe. Zudem sind viele natürliche Beispiele nicht simplizial, sondern zunächst nur polytopal.

☺ Unterteilung liefert einen simplizialen Komplex.

Produkt von simplizialen / polytopalen Komplexen

Satz I3v: Produkt von simplizialen / polytopalen Komplexen

(1) Sind $\mathscr{K}$ in V und $\mathscr{L}$ in W polytopale Komplexe, so auch ihr Produkt

$$\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L} := \left\{ P \times Q \,\middle|\, P \in \mathscr{K},\ Q \in \mathscr{L} \right\} \quad \text{in } V \times W.$$

Unterteilung $\mathscr{M} = \beta(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L})$ trianguliert $|\mathscr{M}| = |\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}| = |\mathscr{K}| \times |\mathscr{L}|$.

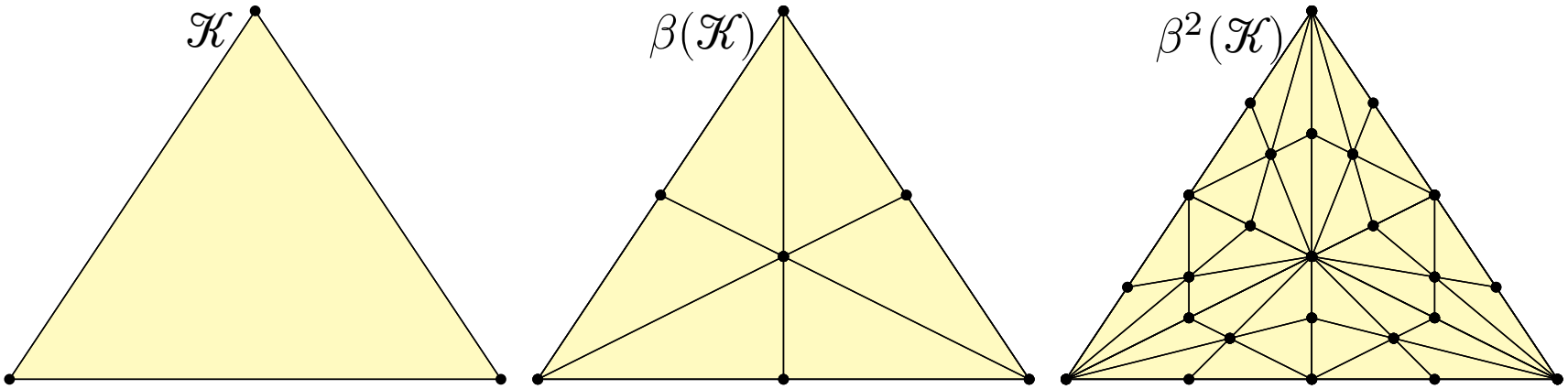
(2) Sind die Komplexe $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ lokal-endlich, so auch $\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}$ und $\mathscr{M}$, und die polytopale Topologie $\mathcal{T}_{\mathscr{M}} = \mathcal{T}_{\mathscr{K}\boxtimes\mathscr{L}}$ auf $|\mathscr{M}| = |\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}|$ stimmt überein mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $|\mathscr{K}| \times |\mathscr{L}|$ (E1N).
Andernfalls ersetze $\mathcal{T}$ durch die kompakt erzeugte Topologie $k\mathcal{T}$ (F3R).

Wir erhalten so $|\mathscr{K}| \times |\mathscr{L}| = |\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}| = |\mathscr{M}|$ als topologische Räume.

(3) Verträglichkeit: Für alle Teilkomplexe $\mathscr{A} \leq \mathscr{K}$ und $\mathscr{B} \leq \mathscr{L}$ wird das Produkt $|\mathscr{A}| \times |\mathscr{B}|$ trianguliert durch den Teilkomplex $\beta(\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}) \leq \mathscr{M}$.

(4) Es gilt $\dim(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}) = \dim(\mathscr{K}) + \dim(\mathscr{L})$, sogar für $\dim\{\emptyset\} = -\infty$.
Für endliche Polytopalkomplexe gilt zudem $\chi(\mathscr{K} \boxtimes \mathscr{L}) = \chi(\mathscr{K}) \cdot \chi(\mathscr{L})$.

Simpliziale Approximation, Vorschau und Kurzfassung



Satz I4A: simpliziale Approximation, Vorschau und Kurzfassung

Seien K und L Simplizialkomplexe. Jede stetige Abbildung $f : |K| \to |L|$ ist homotop zu einer simplizialen Abbildung $|\varphi| : |K'| \to |L|$ auf $K' \preccurlyeq K$.

Genauer: Es existiert eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$ desselben Polyeders $|K'| = |K|$ sowie eine simpliziale Abbildung $\varphi : K' \to L$ mit Realisierung $g = |\varphi| : |K'| \to |L|$ und eine affine Homotopie $H : f \simeq g$ vermöge

$$H : [0,1] \times |K'| \to |L| : (t,x) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x).$$

Ist der Komplex K endlich, so genügt hierzu iterierte baryzentrische Unterteilung, also $K' = \beta^m K$ für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$.

Simpliziale Approximation, Vorschau und Kurzfassung

Wir haben bislang vorrangig topologische Räume X untersucht und in vielen wichtigen Fällen Triangulierungen $|K| \cong X$ konstruiert.

☺ Wir ersetzen einen komplizierten Raum X durch einen simplen $|K|$.

Der nächste wichtige Schritt ist nun, stetige Abbildungen $f : X \to Y$ bzw. äquivalent hierzu $f : |K| \to |L|$ auf Polyedern zu untersuchen. Eine solche stetige Abbildung $f : |K| \to |L|$ wird im Allgemeinen nicht die durch K und L definierten simplizialen Strukturen respektieren.

Hier müssen wir korrigieren: Wir ersetzen $f : |K| \to |L|$ durch eine simpliziale Abbildung $|\varphi| : |K| \to |L|$, per simplizialer Approximation. Dabei machen wir einen Fehler — *ganz bewusst, zur Approximation* — doch er ist klein: Unsere beiden Abbildungen $f \simeq |\varphi|$ sind homotop.

Genauer liegen f und $g = |\varphi|$ so nah beieinander, dass eine affine Homotopie sie verbinden kann, also die denkbar einfachste Lösung:

$$H : [0,1] \times |K'| \to |L| : (t,x) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x).$$

☺ Wir ersetzen eine komplizierte Abbildung f durch eine simple g.

Kleine Sphären in großen: $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ für $k < n$

Satz I4B: kleine Sphären in großen zusammenziehen

Für alle $0 \leq k < n$ gilt $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$.

Beweis: (1) Verfehlt $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ einen Punkt $y \in \mathbb{S}^n$, so gilt $f \simeq *$ (G4D).

⚠ Es gibt flächenfüllende Wege $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$ (Peano, Hilbert, ...)
Somit existieren stetige Surjektionen $f : \mathbb{S}^k \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n$ für alle $1 \leq k < n$.

(2) Hier rettet uns der simpliziale Approximationssatz I4A!

Triangulierung als Koordinaten

simpliziale Approximation

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{S}^k & \xrightarrow[\text{stetig}]{f} & \mathbb{S}^n & & f \simeq * \\
h \uparrow \cong & = & k \uparrow \cong & & \Uparrow \\
\partial\Delta^{k+1} & \xrightarrow[\text{stetig}]{g} & \partial\Delta^{n+1} & & g \simeq * \\
\| & \simeq & \| & & \Uparrow \\
|K| & \xrightarrow[\text{simplizial}]{|\varphi|} & |S^n| & \Longrightarrow & |\varphi| \simeq *
\end{array}$$

Aus Dimensionsgründen ist $|\varphi|$ nicht surjektiv, also $|\varphi| \simeq *$ (G4D). QED

Kleine Sphären in großen: $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ für $k < n$

Erinnerung: Wir triangulieren $\Delta^n \cong \mathbb{D}^n$ und $\partial\Delta^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$ durch

$$\mathscr{D}^n = \langle\, \Delta^n \,\rangle = \{\, \Delta' \,|\, \Delta' \leq \Delta^n \,\} \quad \text{und} \quad \mathscr{S}^{n-1} = \{\, \Delta' \,|\, \Delta' < \Delta^n \,\}.$$

Dies entspricht den kombinatorischen Simplizialkomplexen

$$D^n = \mathfrak{P}\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \quad \text{und} \quad S^{n-1} = D^n \setminus \{\{e_0, e_1, \dots, e_n\}\}.$$

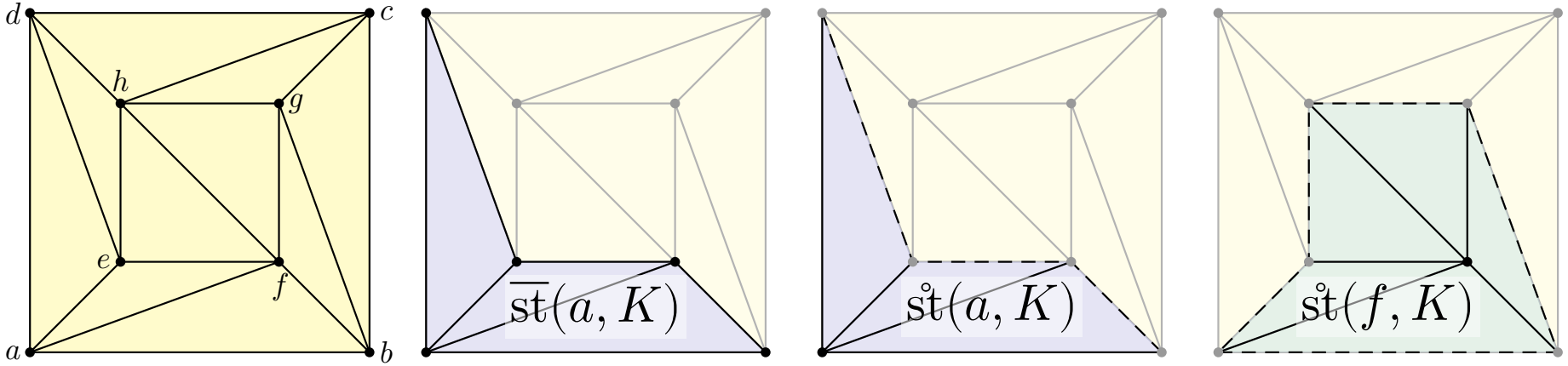
In der vorliegenden Anwendung triangulieren wir unsere Sphären vermöge $h : \partial\Delta^{k+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^k$ und $k : \partial\Delta^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ (I3c). Statt $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ betrachten wir äquivalent $g = k^{-1} \circ f \circ h : \partial\Delta^{k+1} \to \partial\Delta^{n+1}$.

Nun kommt die entscheidende Vereinfachung: Dank Satz I4A existiert zu g eine simpliziale Approximation $\varphi : S^k \succcurlyeq K \to S^n$, also $g \simeq |\varphi|$.

Es gilt $\dim K = \dim S^k = k < n = \dim S^n$. Daher trifft $|\varphi|$ nicht das Innere $\mathrm{Int}[T]$ des n–Simplex $T = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Dank (1) folgt $|\varphi| \simeq *$.

Noch schöner: Das Komplement $\partial\Delta^{n+1} \setminus \mathrm{Int}[T] = \overline{\mathrm{st}}(e_0) \simeq e_0$ ist sternförmig zur Ecke e_0, damit folgt $f \simeq g \simeq |\varphi| \simeq *$. QED

Eckenstern



Definition I4c: Eckenstern

Der **abgeschlossene Stern** um die Ecke $a \in \Omega$ in K ist

$$\overline{\mathrm{st}}(a) = \overline{\mathrm{st}}(a,K) := \bigcup \{\, [S] \,|\, a \in S \in K \,\}.$$

Der **offene Stern** um die Ecke $a \in \Omega$ in K ist

$$\begin{aligned}
\mathring{\mathrm{st}}(a) = \mathring{\mathrm{st}}(a,K) &:= B_K(a,1) && \text{in der simplizialen Metrik (I2I)} \\
&= \{\, x \in |K| \,|\, x(a) > 0 \,\} && \text{in baryzentrischen Koordinaten (I2D)} \\
&= \bigsqcup \{\, \mathrm{Int}[S] \,|\, a \in S \in K \,\} && \text{als Vereinigung offener Simplizes.}
\end{aligned}$$

Letzteres gilt, denn jeder Punkt $x \in |K|$ liegt im Inneren genau eines Simplex $S = \mathrm{supp}(x)$, und $x(a) > 0$ ist gleichbedeutend mit $a \in S$.

Polyeder sind lokal zusammenziehbar.

Die offenen Sterne $\mathring{\mathrm{st}}(a,K)$ überdecken das Polyeder $|K|$. Sowohl in der simplizialen als auch in der metrischen Topologie ist der offene Stern $\mathring{\mathrm{st}}(a,K)$ offen und der abgeschlossene Stern $\overline{\mathrm{st}}(a,K)$ abgeschlossen.

Satz I4D: Polyeder sind lokal zusammenziehbar.

(1) Jede Ecke $a \in \Omega(K)$ ist starker Deformationsretrakt ihres Sterns:

$$H : [0,1] \times \overline{\mathrm{st}}(a) \to \overline{\mathrm{st}}(a) : (t,x) \mapsto ta + (1-t)x$$

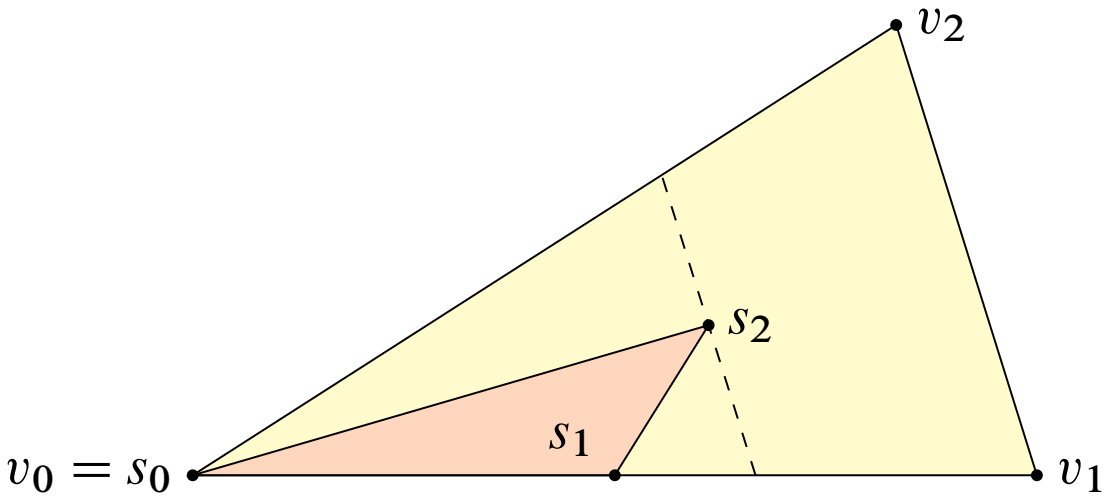
Diese Abbildung H ist wohldefiniert und stetig auf jedem Simplex. Gleiches gilt für jeden offenen Ball $B_K(a,r) \subseteq |K|$ mit Radius $r \in]0,1]$.

(2) Jeder Punkt $a \in |K|$ ist Eckpunkt einer zentrischen Unterteilung (I3M) und dank (1) starker Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in $|K|$ etwa der Eckenstern $\mathring{\mathrm{st}}(a,K') \subseteq |K|$ in der zentrischen Unterteilung K'.

Aufgabe: Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ ist triangulierbar, $\mathbb{Q}$ hingegen nicht.

Lösung: Wir triangulieren $\mathbb{R} = |R|$ etwa durch $R = \langle \{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z} \rangle$. Der Raum $\mathbb{Q}$ ist nicht lokal zusammenziehbar / zusammenhängend.

Schrumpfungsfaktor der baryzentrischen Unterteilung



Lemma I4E: Schrumpfungsfaktor der baryzentrischen Unterteilung

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Norm $|-|$ und Metrik d. Jeder n–Simplex $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] \subseteq V$ realisiert seinen Durchmesser auf den Ecken:

$$\operatorname{diam}(\Delta) = \max\{\, d(v_i, v_j) \,|\, i, j = 0, \dots, n \,\}.$$

Nach baryzentrischer Unterteilung gilt für jeden Simplex $\Delta' \in \beta\langle\, \Delta \,\rangle$:

$$\operatorname{diam}(\Delta') \leq q \operatorname{diam}(\Delta) \quad \text{mit} \quad q = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Iteration liefert somit Durchmesser $\leq q^m \operatorname{diam} \Delta \searrow 0$.

Beliebig feine simpliziale Unterteilung

☺ Damit können wir Simplizes beliebig fein unterteilen! Genauer:

Satz I4F: beliebig feine simpliziale Unterteilung

Gegeben sei ein kombinatorischer Simplizialkomplex K in V und eine offene Überdeckung $U = (U_i)_{i\in I}$, also $|K| = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_K$.

(1) Dann existiert zu K eine U–feine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, das heißt, für jede Ecke $a \in \Omega(K')$ liegt der Stern $\overline{\mathrm{st}}(a, K')$ ganz in einer der Mengen U_i.

(2) Ist $A \leq K$ ein Teilkomplex, sodass für jede Ecke $a \in \Omega(A)$ der Stern $\overline{\mathrm{st}}(a, A)$ bereits ganz in einer der Mengen U_i liegt, so braucht A nicht unterteilt zu werden, es genügt eine relative Unterteilung mit $A \leq K'$.

(3) Ist der Komplex K endlich, so genügt hierzu iterierte baryzentrische Unterteilung, absolut $K' = \beta^m K$ oder relativ $(K', A) = \beta^m(K, A)$.

Beweis für K endlich und $A = \{\emptyset\}$: Da $|K|$ kompakt ist, existiert zu der offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ eine Lebesgue–Zahl $\lambda > 0$ (F2B). Iterierte baryzentrische Unterteilung liefert $q^m \searrow 0$ (I4E).

Allgemein: Induktion über Skelette, Lebesgue für jeden Simplex. QED

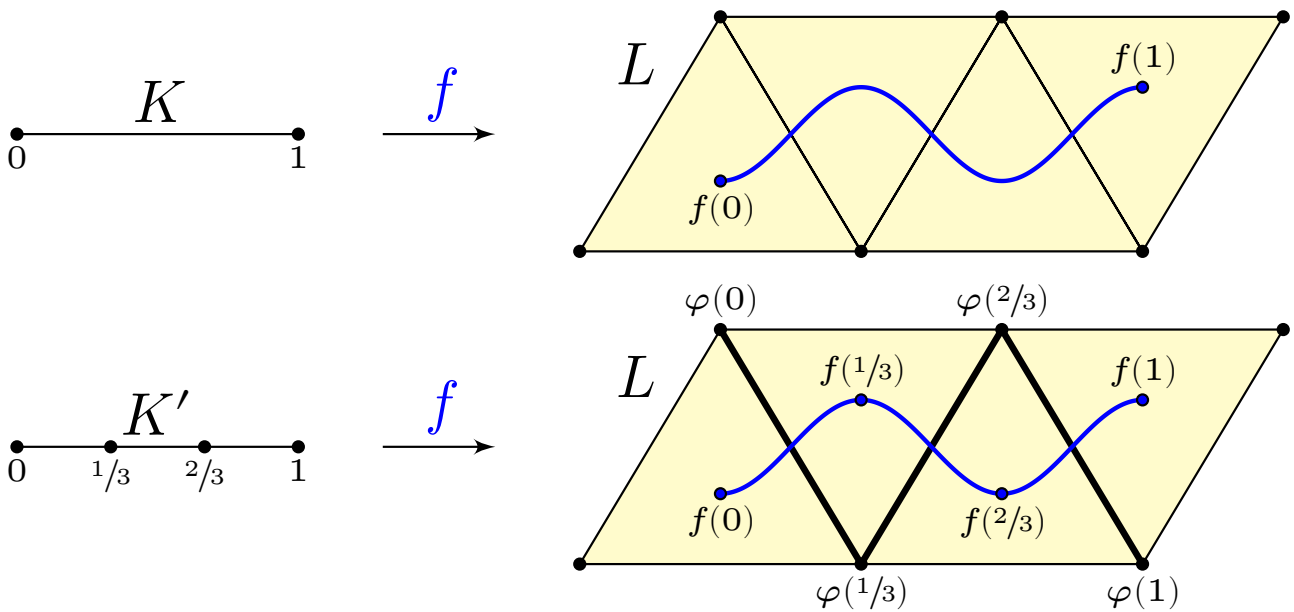
Sternartige Abbildungen und simpliziale Approximation

Definition I4H: sternartige Abbildungen

Seien K, L Simplizialkomplexe und $f : |K| \to |L|$ eine stetige Abbildung.

Wir nennen f **sternartig** bezüglich K und L, wenn f jeden offenen Stern $\mathring{\mathrm{st}}(a, K)$ in einen offenen Stern $\mathring{\mathrm{st}}(b, L)$ abbildet. Demnach existiert also $\varphi : \Omega(K) \to \Omega(L)$ mit $f(\mathring{\mathrm{st}}(a, K)) \subseteq \mathring{\mathrm{st}}(\varphi(a), L)$ für jede Ecke $a \in \Omega(K)$.

In diesem Falle nennen wir φ eine **simpliziale Approximation** von f.



Übung: Es gibt zu f bezüglich K' und L drei weitere Approximationen.

Homotopie zur simplizialen Approximation

Lemma I4ı: Homotopie zur simplizialen Approximation

Jede simpliziale Approximation $\varphi : \Omega(K) \to \Omega(L)$ von $f : |K| \to |L|$ erfüllt:

(1) Die Abbildung φ ist simplizial (I2G): Für alle $S \in K$ gilt $\varphi(S) \in L$.

(2) Für jedes $x \in |K|$ liegen $f(x)$ und $|\varphi|(x)$ im Simplex $[\operatorname{supp} f(x)] \subseteq |L|$.

(3) Es gilt $f \simeq |\varphi|$ vermöge der Homotopie $H(t,x) = (1-t)f(x) + t|\varphi|(x)$.

Beweis: Es gilt $x \in \mathring{\operatorname{st}}(s_0, K) \cap \cdots \cap \mathring{\operatorname{st}}(s_n, K)$ gdw $s_0, \ldots, s_n \in \operatorname{supp}(x)$ (I4c).

(1) Zum Simplex $S = \{s_0, \ldots, s_n\} \in K$ wählen wir einen inneren Punkt $x \in \operatorname{Int}[S] \subseteq \mathring{\operatorname{st}}(s_0, K) \cap \cdots \cap \mathring{\operatorname{st}}(s_n, K)$. Nach Voraussetzung zu f und φ gilt dann $f(x) \in \mathring{\operatorname{st}}(\varphi(s_0), L) \cap \cdots \cap \mathring{\operatorname{st}}(\varphi(s_n), L)$. Das wiederum bedeutet $\varphi(S) = \{\varphi(s_0), \ldots, \varphi(s_n)\} \subseteq \operatorname{supp} f(x)$. Mit $\operatorname{supp} f(x) \in L$ folgt $\varphi(S) \in L$.

(2) Sei $x \in \operatorname{Int}[S]$ mit $S \in K$. Dank (1) gilt $|\varphi|(x) \in [\varphi(S)] \subseteq [\operatorname{supp} f(x)]$.

(3) Die Abbildung $H : [0,1] \times |K| \to |L|$ mit $H(t,x) = (1-t)f(x) + t|\varphi|(x)$ ist wohldefiniert dank (2) und stetig auf jedem Simplex von $\langle \{0,1\} \rangle \times K$, somit stetig in der simplizialen Topologie auf $[0,1] \times |K|$ (I1c). QED

Der simpliziale Approximationssatz

Satz I4J: simpliziale Approximation

(1) Seien K und L Simplizialkomplexe und $f : |K| \to |L|$ stetig.
Dann existiert eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, auf der f sternartig ist zu $\varphi : \Omega(K') \to \Omega(L)$ und somit homotop zu $g = |\varphi| : |K'| \to |L|$ vermöge

$$H : [0,1] \times |K'| \to |L| : (t,x) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x).$$

(2) Ist die Abbildung f bereits simplizial auf einem Teilkomplex $A \leq K$, so können wir $A \leq K'$ zusichern, also $g|_{|A|} = f|_{|A|}$ und $H : f \simeq g \operatorname{rel} |A|$.

(3) Ist der Komplex K endlich, so genügt hierzu iterierte baryzentrische Unterteilung, absolut $K' = \beta^m K$ oder relativ $(K', A) = \beta^m(K, A)$.

Beweis: Es gilt $|L| = \bigcup_{b \in \Omega(L)} \mathring{\operatorname{st}}(b, L)$, also $|K| = \bigcup_{b \in \Omega(L)} f^{-1}(\mathring{\operatorname{st}}(b, L))$.
Dank Satz I4F existiert eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, sodass zu jeder Ecke $a \in \Omega(K')$ ein $\varphi(a) \in \Omega(L)$ existiert mit $\mathring{\operatorname{st}}(a, K') \subseteq f^{-1}(\mathring{\operatorname{st}}(\varphi(a), L))$, also $f(\mathring{\operatorname{st}}(a, K')) \subseteq \mathring{\operatorname{st}}(\varphi(a), L)$. Also ist f sternartig zu $\varphi : \Omega(K') \to \Omega(L)$. QED

Kleine Sphären in großen: $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ für $k < n$

Satz I4B: kleine Sphären in großen zusammenziehen

Für alle $0 \leq k < n$ gilt $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ ist nullhomotop, $f \simeq *$, also homotop zu einer konstanten Abbildung.

Beweis: Wir nutzen simpliziale Approximation (Satz I4J):

Triangulierung als Koordinaten

simpliziale Approximation

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{S}^k & \xrightarrow[\text{stetig}]{f} & \mathbb{S}^n & & f \simeq * \\
h \uparrow \cong & = & k \uparrow \cong & & \Uparrow \\
\partial\Delta^{k+1} & \xrightarrow[\text{stetig}]{g} & \partial\Delta^{n+1} & & g \simeq * \\
\| & \simeq & \| & & \Uparrow \\
|K| & \xrightarrow[\text{simplizial}]{|\varphi|} & |S^n| & \Longrightarrow & |\varphi| \simeq *
\end{array}$$

Aus Dimensionsgründen ist $|\varphi|$ nicht surjektiv, also $|\varphi| \simeq *$ (G4D). QED

Die simpliziale Technik führt uns ins gelobte Land der Topologie:
Sie macht stetiges linear, kompliziertes simpel, hässliches schön!

Kapitel J

Abbildungsgrad auf Sphären und Topologie des Raumes $\mathbb{R}^n$

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician.
The devil says: I will give you this powerful machine, it will answer
any question you like. All you need to do is give me your soul:
give up geometry and you will have this marvelous machine.
Sir Michael Atiyah (1929–2019)

Inhalt dieses Kapitels J

1 Die Umlaufzahl ebener Wege

2 Der Satz von Jordan–Schoenflies

3 Der Abbildungsgrad auf Sphären

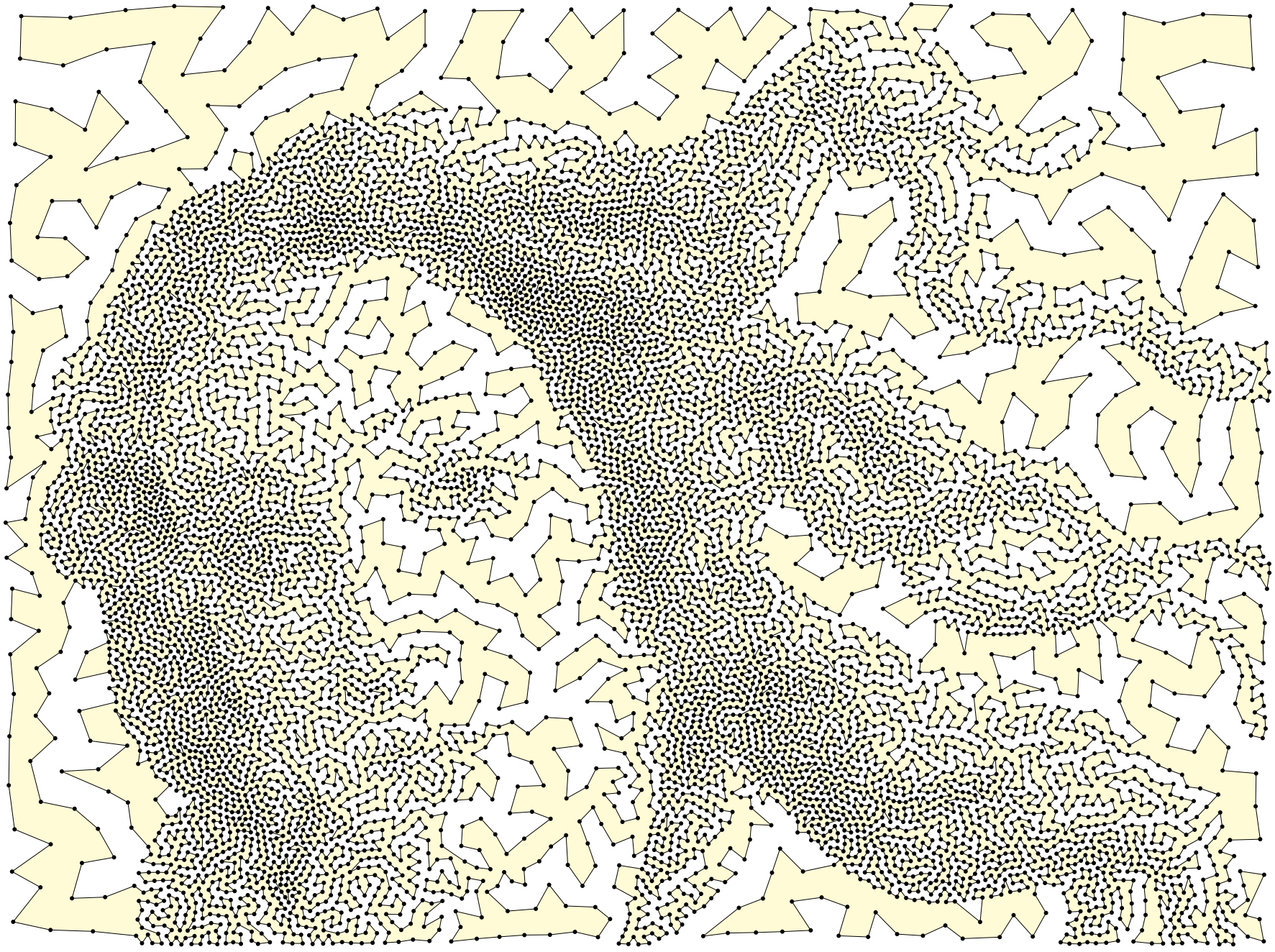
4 Der Brouwersche Fixpunktsatz

5 Der Satz vom Igel und Vektorfelder auf Sphären

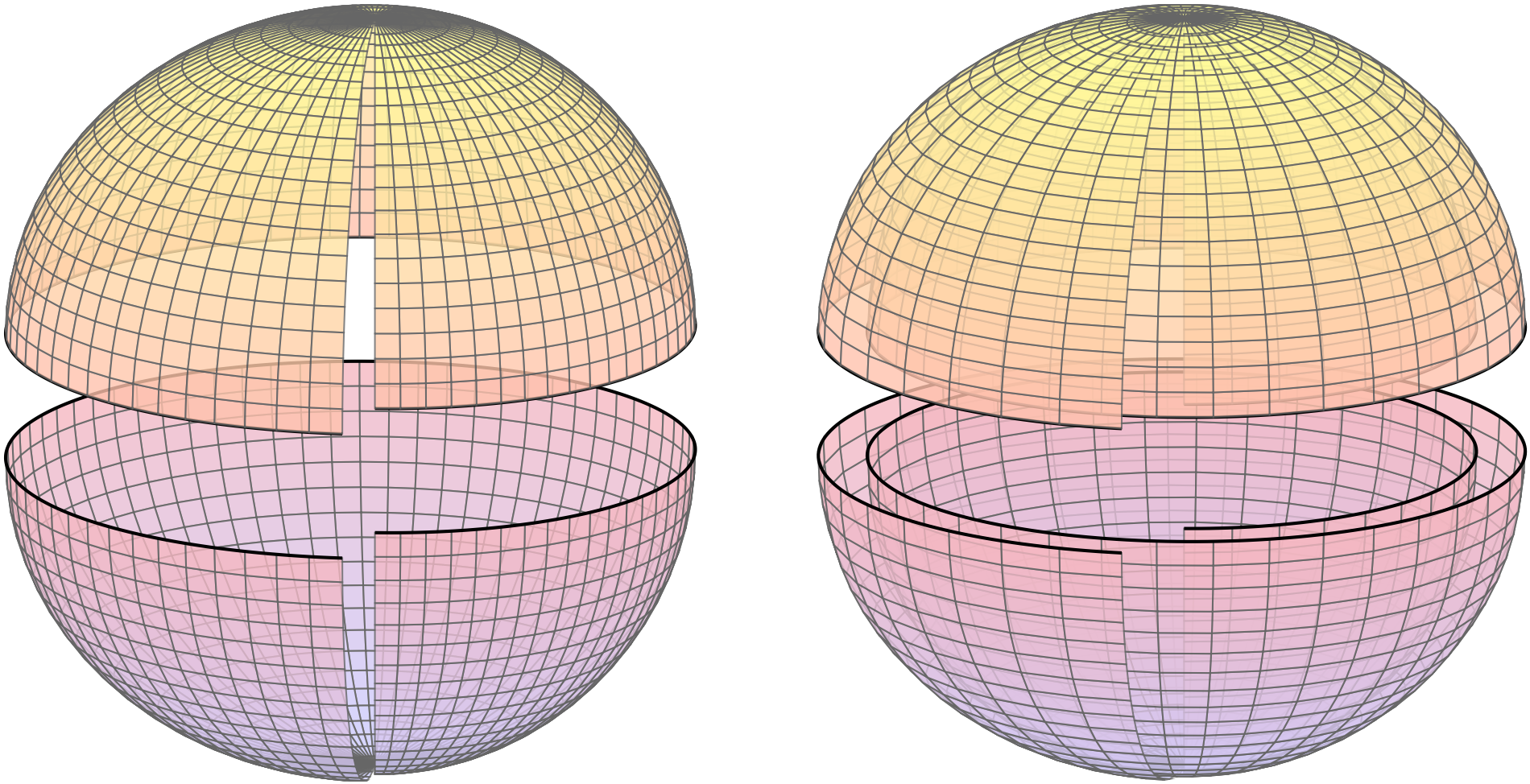
6 Der Satz von Borsuk–Ulam und Anwendungen

7 Topologische Invarianz: Dimension, Rand, Gebiet, Orientierung

Umlaufzahl und Topologie der Ebene $\mathbb{R}^2$



Abbildungsgrad und Topologie des Raumes $\mathbb{R}^n$

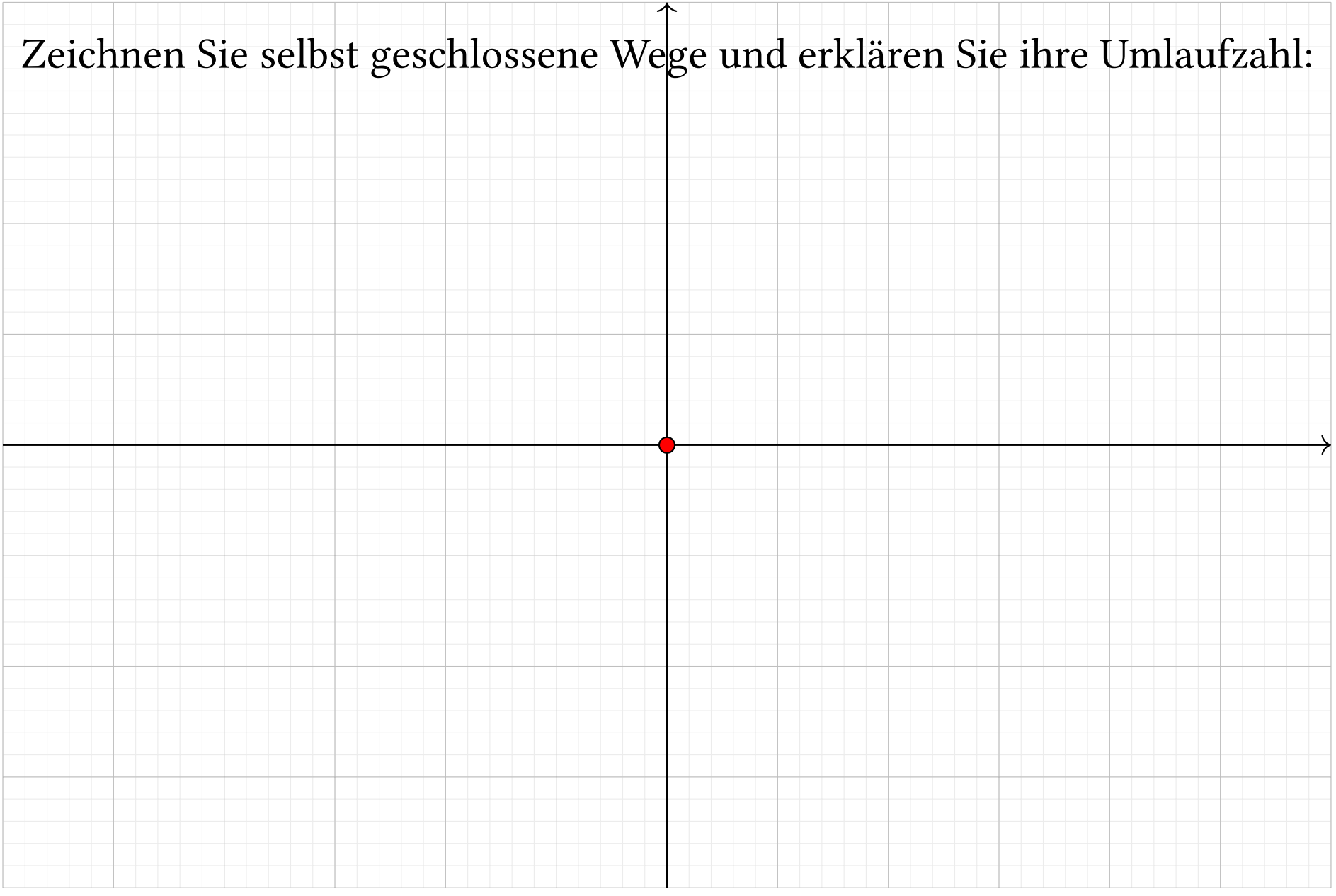


$$\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (r\cos t, r\sin t, x_2, \dots, x_n) \mapsto (r\cos(kt), r\sin(kt), x_2, \dots, x_n)$$

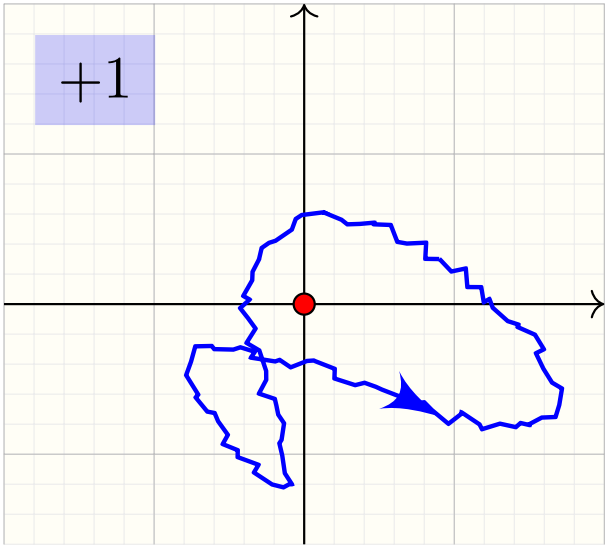
In Zylinderkoordinaten: Diese Modellabbildung $\varphi_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $k \in \mathbb{Z}$ wickelt die x_0–x_1–Ebene k–mal um den Nullpunkt, entsprechend wickelt φ_k^n die Sphäre k–mal um sich selbst wie skizziert.

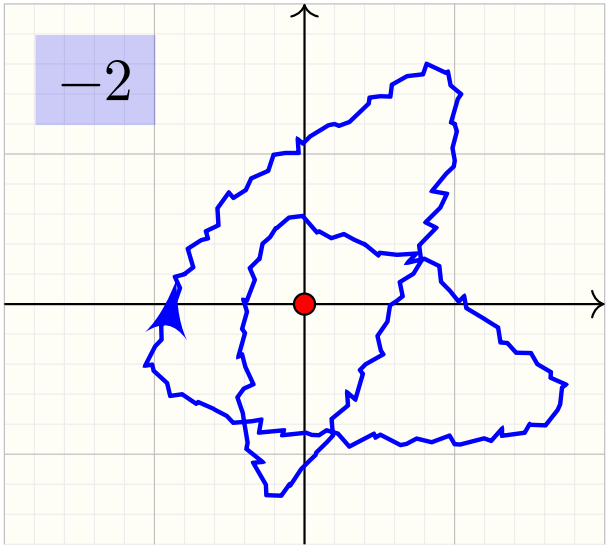
Umlaufzahl: erste Beispiele

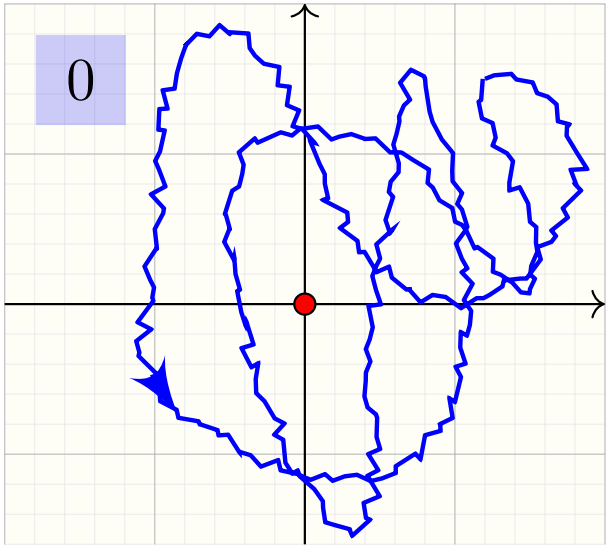
Zeichnen Sie selbst geschlossene Wege und erklären Sie ihre Umlaufzahl:

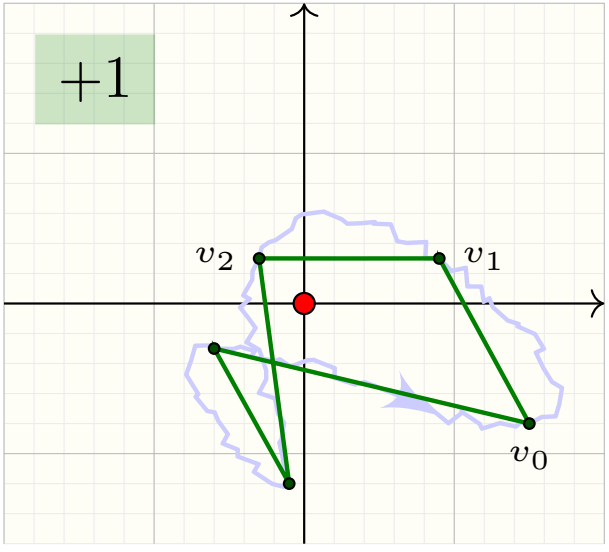


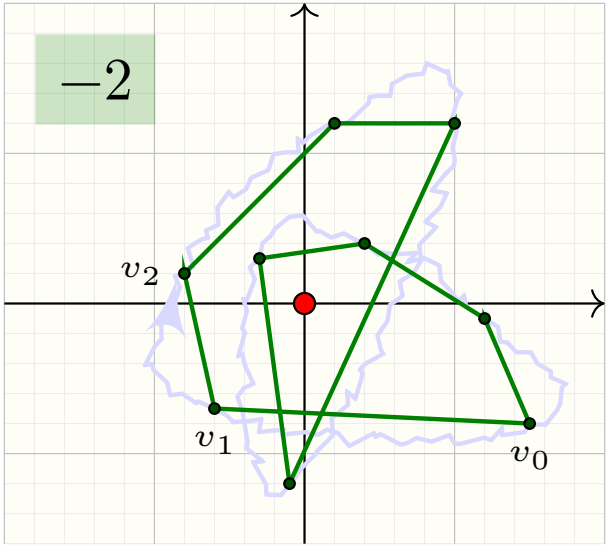
Umlaufzahl: erste Beispiele

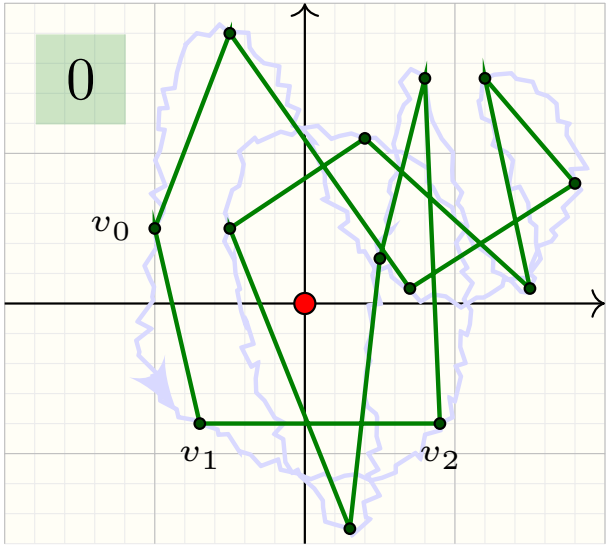






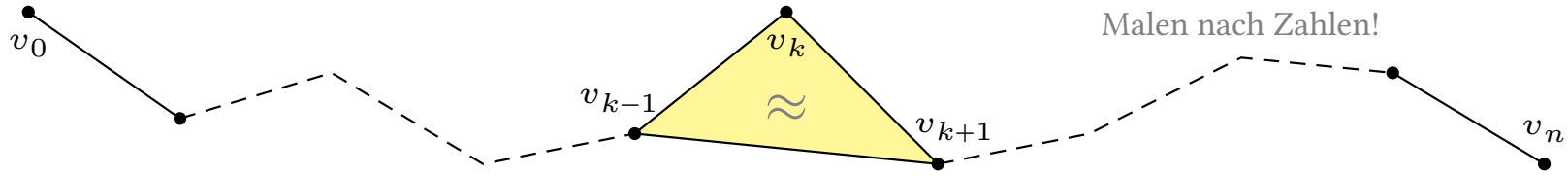






Stetige Abbildungen $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ können unvorstellbar kompliziert sein.
Wir berechnen die Umlaufzahl mit polygonalen Wegen: Approximation!

Was sind Polygonzüge?



Definition J1A: Polygonzüge

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge,
zum Beispiel $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen oder ein Polyeder $X = |K|$.

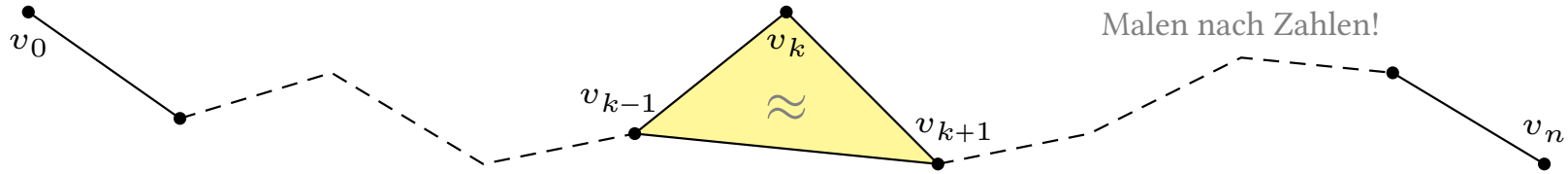
(1) Ein **Polygonzug** $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in X ist eine Punktfolge $v_0, v_1, \dots, v_n$ mit $[v_0, v_1], \dots, [v_{n-1}, v_n] \subseteq X$. Wir nennen w **geschlossen** falls $v_0 = v_n$.

(2) Der **umgekehrte Polygonzug** $\bar{w} = v_n \dots v_1 v_0$ verläuft ebenso in X. Zum Punkt $a \in X$ ist $\mathrm{id}_a = a$ der **konstante Polygonzug** der Länge 0.

(3) Polygonzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = v'_0 v'_1 \dots v'_m$ sind **verknüpfbar** falls $v_n = v'_0$; ihre **Verknüpfung** ist dann $w * w' := v_0 v_1 \dots v_n v'_1 \dots v'_m$.

☺ Wir erhalten die Kategorie $P^{\mathrm{pl}}(X)$: (a) Objekte sind $a, b, c, \dots \in X$.
(b) Morphismen von a nach b sind die Polygonzüge $w : a \to b$ in X.
(c) Verknüpfung ist Aneinanderhängung $(w : a \to b) * (w' : b \to c)$.
Übung: Was ist hierzu noch zu zeigen? Zeigen Sie es!

Was ist polygonale Homotopie?



Definition J1A: polygonale Homotopie

(4) Eine **elementare Homotopie** $w \Rightarrow w'$ in X ist eine Umformung von $w = v_0 \ldots v_{k-1} v_k v_{k+1} \ldots v_n$ zu $w' = v_0 \ldots v_{k-1} v_{k+1} \ldots v_n$ mit $[v_{k-1}, v_k, v_{k+1}] \subseteq X$. Wir vereinbaren zudem $v_0 v_0 \Rightarrow v_0$ für die konstanten Polygonzüge.

(5) Als Äquivalenzrelation erzeugt dies die **polygonale Homotopie** $\approx$.

☺ Verträglichkeit: Aus $w_1 \approx w_1'$ und $w_2 \approx w_2'$ folgt $w_1 * w_2 \approx w_1' * w_2'$.

☺ Wir erhalten so die Quotientenkategorie $\Pi^{\mathrm{pl}}(X) = P^{\mathrm{pl}}(X)/_{\approx}$:

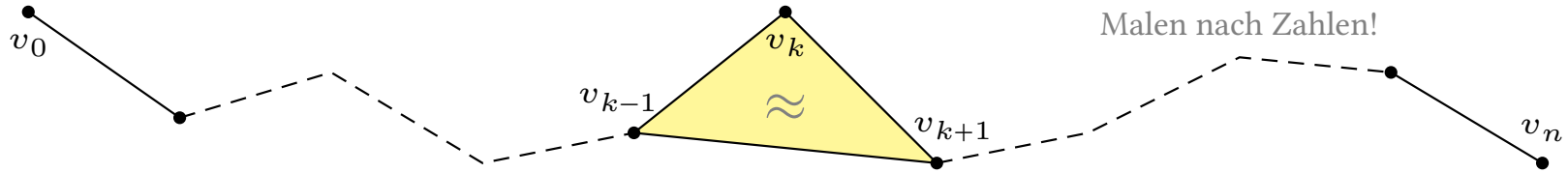
(a) Objekte sind die Punkte $a, b, c, \ldots \in X$ der betrachteten Menge X.

(b) Morphismen von a nach b sind die Zugklassen $[w : a \to b]$ in X.

(c) Verknüpfung ist die Aneinanderhängung $[w_1] * [w_2] = [w_1 * w_2]$.

☺ Darin ist jede Zugklasse $[w : a \to b]$ invertierbar durch $[\bar{w} : b \to a]$, denn $w * \bar{w} \approx \mathrm{id}_a$ und $\bar{w} * w \approx \mathrm{id}_b$, also $[w] * [\bar{w}] = [\mathrm{id}_a]$ und $[\bar{w}] * [w] = [\mathrm{id}_b]$. Eine Kategorie mit dieser Eigenschaft nennen wir ein **Gruppoid**.

Polygonzüge und polygonale Homotopie



Jeder Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in X definiert einen Weg $|w| : [0,1] \to X$.

Hierzu wählen wir eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ von $[0,1]$, kanonisch die **äquidistante Unterteilung** $t_k = {}^k\!/_n$ für $k = 0, 1, \dots, n$.

An jeder Stützstelle t_k ist der Bildpunkt $v_k = \gamma(t_k)$ vorgegeben.
Dazwischen interpolieren wir affin-linear (Verklebesatz E1P):

$$\gamma(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} v_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} v_k \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n \text{ und } t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Dies nennen wir die **geometrische Realisierung** von w, geschrieben

$$\gamma = |w| : [0,1] \to V \quad \text{mit} \quad |w| = |v_0 v_1 \dots v_n| := \begin{vmatrix} {}^0\!/_n & {}^1\!/_n & \dots & {}^n\!/_n \\ v_0 & v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix}.$$

Jede polygonale Homotopie $w \approx w'$ von Polygonzügen in X induziert eine Homotopie $|w| \sim |w'|$ relativ $\{0,1\}$ der zugehörigen Wege in X.

Polygonzüge und polygonale Homotopie

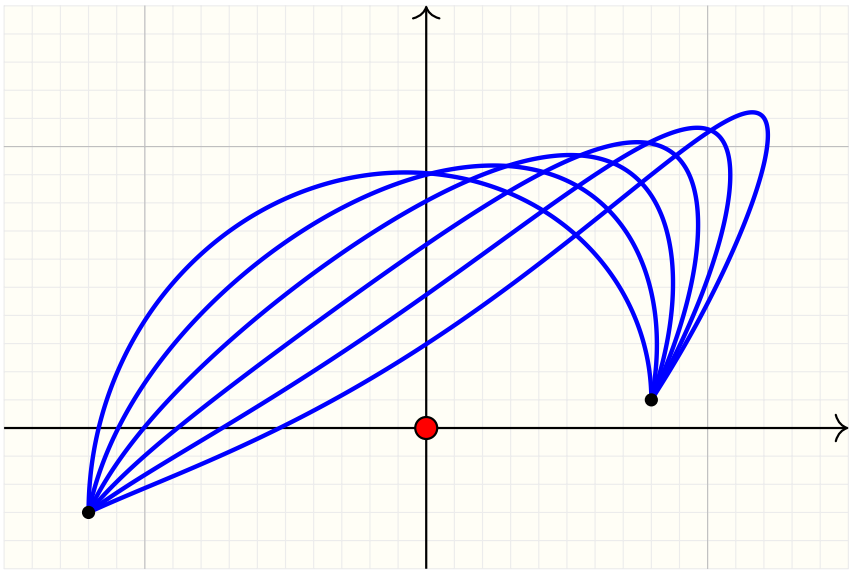
Aufgabe: Explizieren Sie diese Homotopie $|w| \sim |w'|$ relativ $\{0,1\}$.

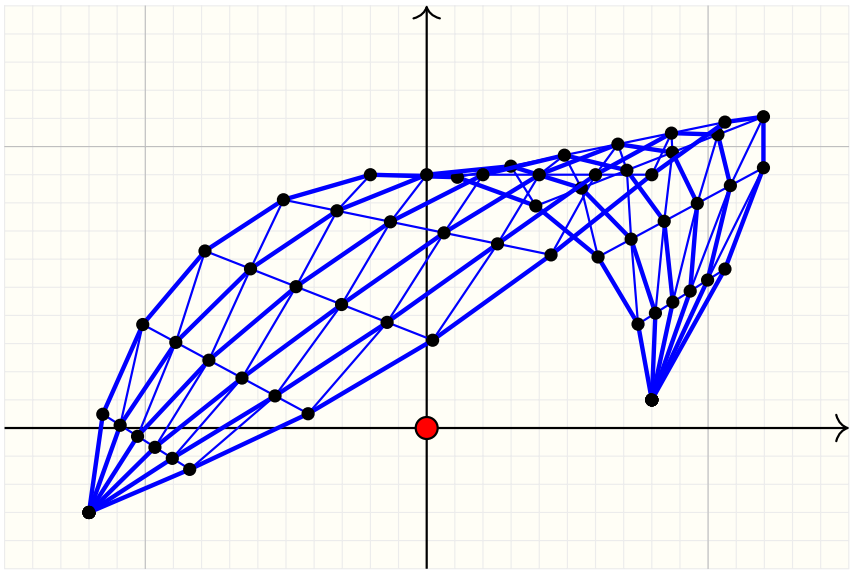
Lösung: (1) Sei $w_0 = v_0 \dots v_{k-1} v_k v_{k+1} \dots v_n$ ein Polygonzug in X und $\Delta = [v_{k-1}, v_k, v_{k+1}] \subseteq X$. Wir verschieben v_k auf v_{k-1} vermöge $[0,1] \to X : t \mapsto u_t$ mit $u_t = (1-t)v_k + tv_{k-1}$. Dank $\Delta \subseteq X$ verläuft zu jeder Zeit $t \in [0,1]$ der Polygonzug $w_t = v_0 \dots v_{k-1} u_t v_{k+1} \dots v_n$ in X. Diese Familie $H_t = |w_t|$ definiert die Homotopie $H : |w_0| \sim |w_1|$ in X.

(2) Anschließend löschen wir den doppelten Punkt aus dem Polygonzug: Für den Polygonzug $w' = v_0 \dots v_{k-1} v_{k+1} \dots v_n$ gilt $w \Rightarrow w'$ in X. Wir haben die Unterteilungen $t_i = i/n$ für $i = 0, \dots, n$ und $t'_j = j/(n-1)$ für $j = 0, \dots, n-1$. Wir bilden $t_0, \dots, t_{k-1}$ ab auf $t'_0, \dots, t'_{k-1}$ und $t_k, \dots, t_n$ auf $t'_{k-1}, \dots, t'_{n-1}$. Dies setzen wir stückweise affin fort zu $h : [0,1] \to [0,1]$. Wir erhalten damit die ersehnte Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $H(t,s) = |w'|((1-t)h(s) + ts)$ von $H_0 = |w|$ nach $H_1 = |w'|$.

☺ Der Aufbau expliziter Formeln erfordert Kreativität und Präzision. Liegen die Formeln erst einmal vor, so genügt sorgfältiges Nachrechnen.

Polygonale Approximation





Satz J1B: polygonale Approximation

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, oder allgemein $X = |K| \subseteq V$ ein Polyeder.

(1) Jeder Weg $\gamma : [0,1] \to X$ ist in X homotop relativ $\{0,1\}$ zu einem polygonalen Weg $|w|$ in X, kurz $\gamma \sim |w| = |v_0 v_1 \ldots v_n|$.

(2) In X gilt $|w| \sim |w'|$ genau dann, wenn $w \approx w'$ gilt.

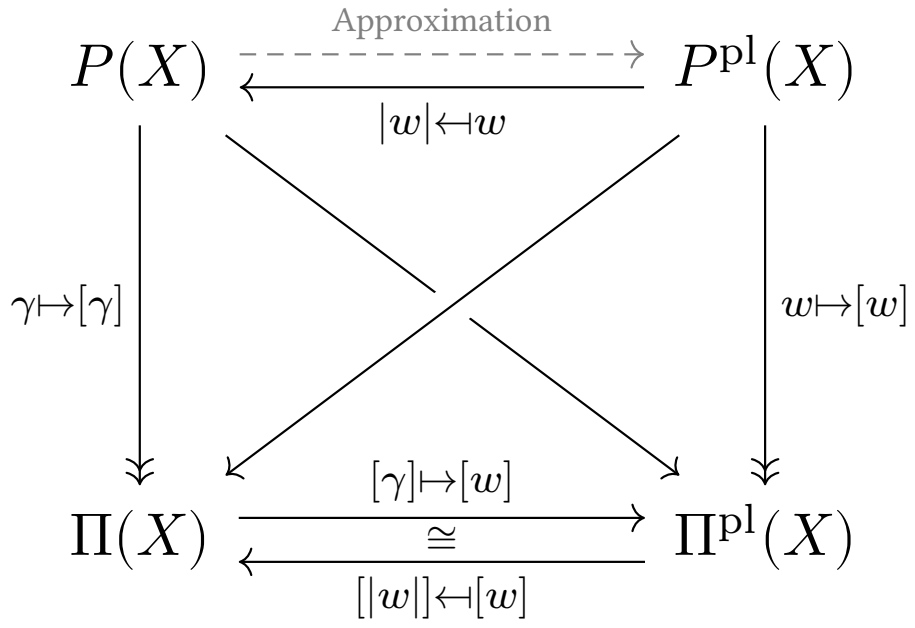
Beweis: Triangulierung (I3T) und simpliziale Approximation (I4J). QED

Wir vereinfachen Wege/Homotopie zu polygonalen Wegen/Homotopie.
Ab hier ist alles elementar: Für Polygonzüge genügt Schulmathematik.

Fazit: Wege/Homotopie vs Polygonzüge/Homotopie

Jeder Polygonzug w in X definiert einen Weg $|w| : [0,1] \to X$. Umgekehrt möchten wir jedem Weg $\gamma : [0,1] \to X$ seine polygonale Approximation w in X zuweisen, doch hierzu gibt es leider (unendlich) viele Wahlen.

Wege in X modulo $\sim$, Homotopie relativ $\{0,1\}$

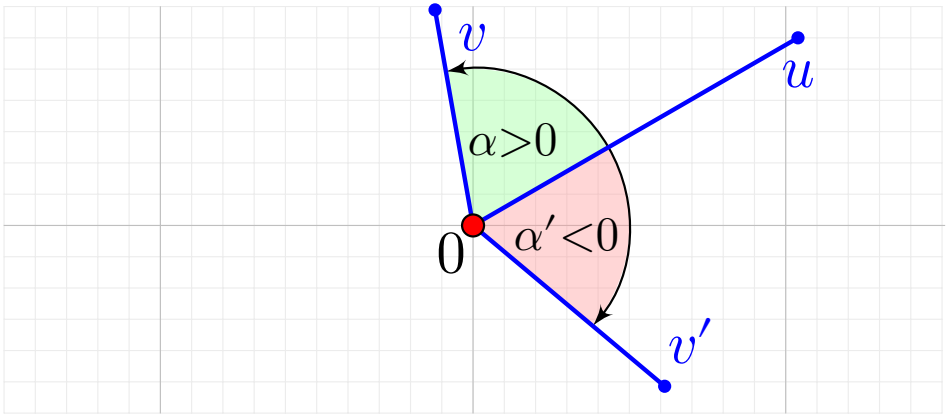


Polygonzüge modulo $\approx$, polygonale Homotopie

☺ Wohldefiniert ist dies erst modulo polygonaler Homotopie, $\gamma \mapsto [w]$, denn alle polygonalen Approximationen zu γ sind polygonal homotop.

☺ Erst auf den Quotienten erhalten wir die Bijektion $\Pi(X) \cong \Pi^{\mathrm{pl}}(X)$. Das Ergebnis ist schön und einfach. Sorgfältige Notation klärt und hilft.

Umlaufzahl als Winkelzuwachs



Definition J1c: Umlaufzahl als Winkelzuwachs

Für $u, v \in \mathbb{C}^*$ mit $v \notin \mathbb{R}_{<0} \cdot u$ definieren wir den **orientierten Winkel**

$$\sphericalangle(u,v) := \alpha \in \,]-\pi, \pi[\quad \text{durch die Bedingung} \quad \frac{v}{|v|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\ \frac{u}{|u|}.$$

Sei $w = v_0 v_1 \ldots v_n$ ein Polygonzug in $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir definieren

$$\deg(w) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k) \quad \in \mathbb{R}.$$

Dies ist wohldefiniert, denn $[v_{k-1}, v_k] \subseteq \mathbb{C}^*$ garantiert $v_k \notin \mathbb{R}_{<0} \cdot v_{k-1}$.
Wir nennen $\deg(w)$ die **Umlaufzahl** oder **Windungszahl** von w um 0.

Umlaufzahl als Winkelzuwachs

☺ Diese Konstruktion liefert zugleich einen effizienten Algorithmus! In reellen Koordinaten $u = (u_1, u_2)$ und $v = (v_1, v_2)$ bedeutet der Winkel

$$\frac{1}{|v|}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|u|}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Für das Skalarprodukt $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$ und das Kreuzprodukt $u \times v = u_1 v_2 - u_2 v_1$ folgt dann

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}, \qquad \sin\alpha = \frac{u \times v}{|u| \cdot |v|}.$$

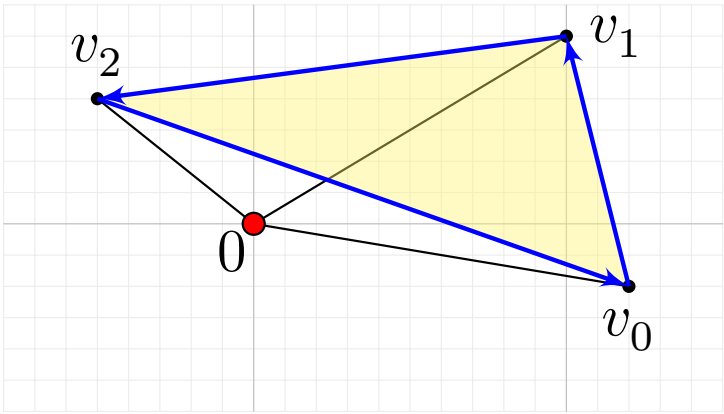
☺ Die erste Gleichung genügt, um den **absoluten Winkel** $|\alpha| \in [0, \pi]$ zu bestimmen; das beruht allein auf dem Skalarprodukt und gelingt in jedem euklidischen Vektorraum. Das **Vorzeichen** entspricht der Orientierung des Winkels wie oben skizziert. Dies gelingt nur in der Ebene $\mathbb{R}^2$, wo wir Links- und Rechtsdrehung unterscheiden können.

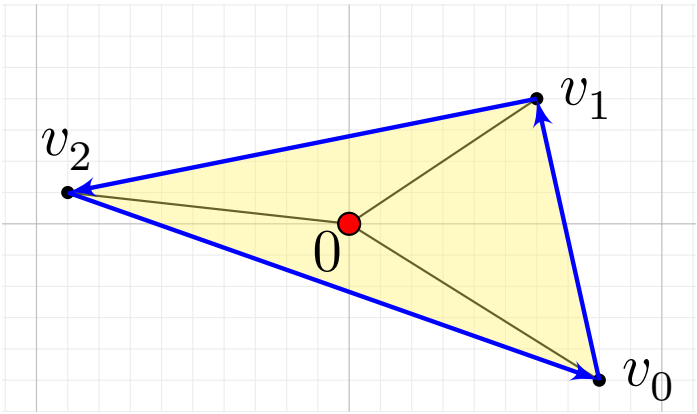
☺ Dank polygonaler Approximation genügt eine *Summe* zur Definition der Umlaufzahl. Wir entwickeln später weitere nützliche Formeln.

Umlaufzahl als Winkelzuwachs

Beispiel / Übung J1D: Rechenregeln für Umlaufzahlen

(1) Für den konstanten Polygonzug gilt $\deg(v_0) = 0$, bei Umkehrung $\deg(\bar{w}) = -\deg(w)$, bei Verknüpfung $\deg(w * w') = \deg(w) + \deg(w')$.
(2) Ist $w = v_0 v_1 \ldots v_n$ in $\mathbb{C}^*$ geschlossen, also $v_0 = v_n$, so gilt $\deg(w) \in \mathbb{Z}$.





Beispiel / Übung J1E: Baby–Jordan für Dreiecke

Sei $\Delta = [v_0, v_1, v_2] \subseteq \mathbb{C}$ ein Dreieck und $w = v_0 v_1 v_2 v_0$.
(0) Im Falle $0 \notin \Delta$ gilt $\deg(w) = 0$, wie oben skizziert.
(1) Im Falle $0 \in \operatorname{Int} \Delta$ gilt $\deg(w) = \pm 1$, je nach Orientierung.
Im Falle $0 \in \partial\Delta$ läuft w durch 0, und die Umlaufzahl ist nicht definiert.

Umlaufzahl als Winkelzuwachs

Übung: Beweisen Sie diese einfachen, aber nützlichen Rechenregeln.

Beispiel J1D: (1) Die erste Aussage folgt sofort aus der Definition J1c.
(2) Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ ein Polygonzug in $\mathbb{C}^*$. Für $\ell = 0, \dots, n$ setzen wir $\alpha_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$. Per Induktion erhalten wir $v_\ell/|v_\ell| = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\ell}\ v_0/|v_0|$, denn $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot) : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
Gilt $v_n = v_0$, so folgt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n} = 1$, also $\alpha_n \in \mathbb{Z}2\pi$ und $\deg(w) \in \mathbb{Z}$.

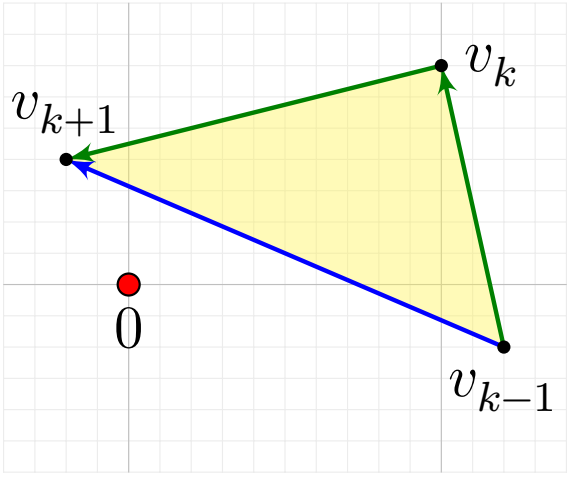
Beispiel J1E: (0) Der Punkt 0 liegt in mindestens einer der drei äußeren Halbebenen, die von den Seiten des Dreiecks aufgespannt werden.
Durch Drehung können wir $\Delta \subseteq \mathbb{C}_{\mathrm{re}>0}$ erreichen, somit $\deg(w) = 0$.

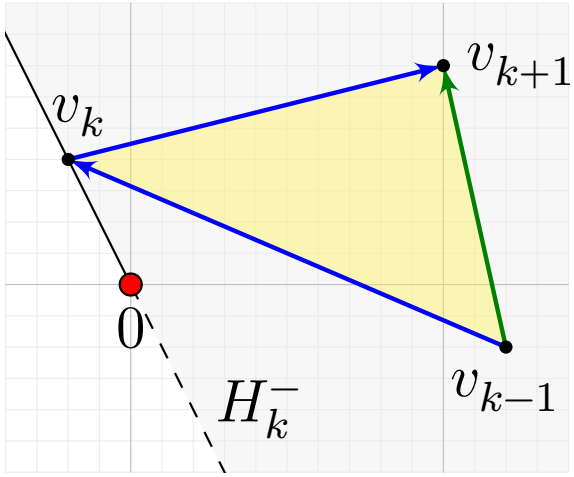
(1) Nach Drehung können wir $v_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ annehmen.
Im Fall (1a) gilt $v_1 \in \mathbb{C}_{\mathrm{im}>0}$ und $v_2 \in \mathbb{C}_{\mathrm{im}<0}$ sowie $\deg(w) = +1$.
Im Fall (1b) gilt $v_1 \in \mathbb{C}_{\mathrm{im}<0}$ und $v_2 \in \mathbb{C}_{\mathrm{im}>0}$ sowie $\deg(w) = -1$.

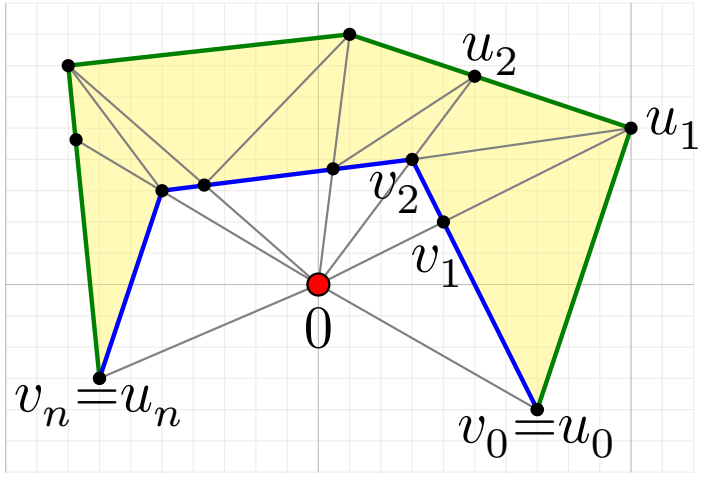
Die Umlaufzahl unterscheidet das Innere und das Äußere des Dreiecks.
(Dies perfektioniert der Satz J2D von Jordan für polygonale Kurven.)

☺ Dies sind anschauliche, einfache, aber grundlegende Rechenregeln.
Daraus erhalten wir nun schrittweise immer interessantere Sätze.

Klassifikation aller Polygonzüge modulo Homotopie







J1F: Aus polygonaler Homotopie $w \approx w'$ in $\mathbb{C}^*$ folgt $\deg(w) = \deg(w')$.
Dies folgt aus Beispiel J1E(0): Der Winkelzuwachs ändert sich nicht.

J1G: Jeder Polygonzug $w = v_0 v_1 \ldots v_n$ in $\mathbb{C}^*$ ist kürzbar bis alle Winkel $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$ selbes Vorzeichen haben (positiv / negativ / null mit $n \leq 1$).
Andernfalls liegen v_{k-1}, v_k, v_{k+1} in einer Halbebene, sind also kürzbar!

Satz J1H: Klassifikation aller Polygonzüge modulo Homotopie

Seien $w = v_0 v_1 \ldots v_n$ und $w' = u_0 u_1 \ldots u_m$ Polygonzüge mit gleichem Start $v_0 = u_0$ und Ziel $v_n = u_m$. Dann gilt $w \approx w'$ gdw $\deg(w) = \deg(w')$.

Übung: Beweisen Sie diese Klassifikation wie oben skizziert.

Klassifikation aller Polygonzüge modulo Homotopie

Beweis: „⇒“: Die Homotopie-Invarianz haben wir in J1F festgestellt.

„⇐“: (a) **Kürzen.** Wir kürzen w und w' gemäß J1G.
Im Falle $w = w' = v_0$ oder v_0v_1 ist nichts weiter zu zeigen.
Wir nehmen daher $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k) > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$ an.
Wegen $\deg(w) = \deg(w')$ folgt $\sphericalangle(u_{k-1}, u_k) > 0$ für alle $k = 1, \dots, m$.

(b) **Unterteilen.** Durch Einfügen von Zwischenpunkten erreichen wir $m = n$ und $\sphericalangle(v_{k-1}, v_k) = \sphericalangle(u_{k-1}, u_k)$ für alle Indizes $k = 1, \dots, n$.
Per Induktion gilt $v'_k \in \mathbb{R}_{>0} \cdot v_k$ für $k = 0, 1, \dots, n$.

(c) **Homotopie.** Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir die folgenden $2n$ elementaren polygonalen Homotopien (wie in der Skizze illustriert):

$$
\begin{array}{lcllcl}
w & = & v_0v_1v_2v_3 \dots v_{n-1}v_n & \approx & v_0u_1v_1v_2v_3 \dots v_{n-1}v_n \\
& \approx & v_0u_1v_2v_3 \dots v_{n-1}v_n & \approx & v_0u_1u_2v_2v_3 \dots v_{n-1}v_n \\
& \approx & v_0u_1u_2v_3 \dots v_{n-1}v_n & \approx & v_0u_1u_2u_3v_3 \dots v_{n-1}v_n \\
& \approx & \dots & & \\
& \approx & v_0u_1u_2u_3 \dots u_{n-1}v_n & = & w'
\end{array}
$$

Klassifikation aller Wege modulo Homotopie

Korollar J1I: Klassifikation aller Wege modulo Homotopie

(1) Jeden Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ können wir approximieren durch einen Polygonzug w in $\mathbb{C}^*$ mit $\gamma \sim |w|$ in $\mathbb{C}^*$ und definieren $\deg(\gamma) := \deg(w)$.

Für jede andere Approximation w' mit $\gamma \sim |w'|$ folgt $|w| \sim |w'|$, somit $w \approx w'$ dank J1B(2), also $\deg(w) = \deg(w')$ dank J1F.

(2) Seien $\gamma, \gamma' : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ Wege mit gleichem Start $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und Ziel $\gamma(1) = \gamma'(1)$. Genau dann gilt $\gamma \sim \gamma'$, wenn $\deg(\gamma) = \deg(\gamma')$ gilt.

Wir approximieren $\gamma \sim |w|$ und $\gamma' \sim |w'|$ durch Polygonzüge w, w':

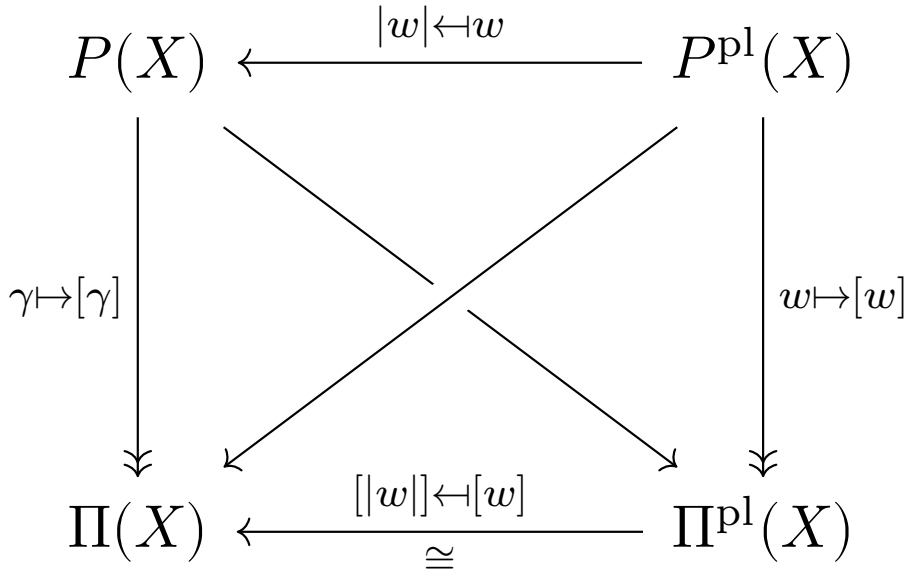
$$\begin{array}{ccccc} \deg(\gamma) = \deg(\gamma') & \overset{(1)}{\iff} & \deg(w) = \deg(w') & \overset{\text{J1H}}{\iff} & w \approx w' \\ & \overset{\text{J1B}}{\iff} & |w| \sim |w'| & \overset{(1)}{\iff} & \gamma \sim \gamma'. \end{array}$$

🙂 Das vollendet die Klassifikation der Wege in $\mathbb{C}^*$ modulo Homotopie. In $\mathbb{R}^n$ sind je zwei Wege mit gleichem Start und Ziel homotop $\operatorname{rel} \{0,1\}$. Der Raum $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist der erste interessante, nicht-triviale Fall, und die Umlaufzahl löst das Homotopie-Problem vollständig, wie hier erklärt.

Fazit: Klassifikation der Wege in $\mathbb{C}^*$

Allgemein:

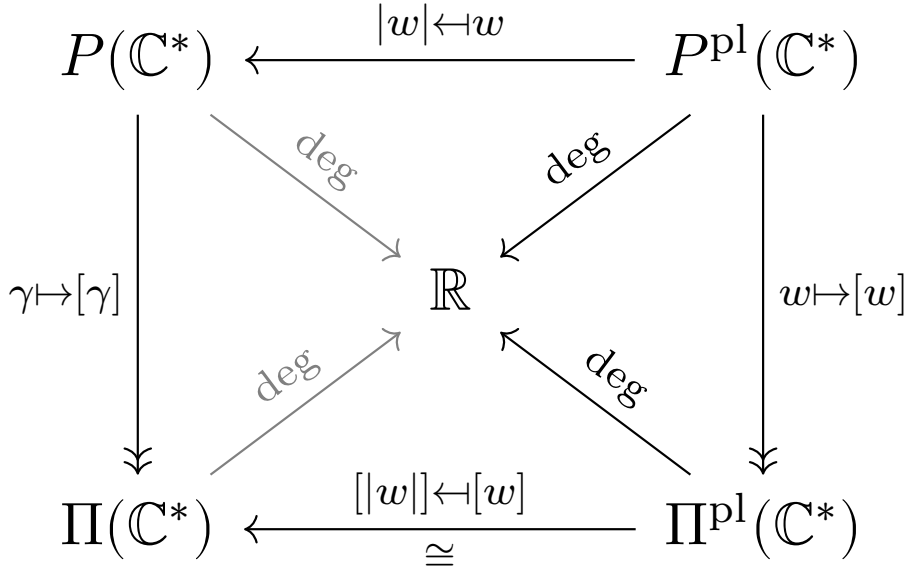
Wege in X modulo $\sim$, Homotopie relativ $\{0,1\}$



Polygonzüge modulo $\approx$, polygonale Homotopie

Speziell:

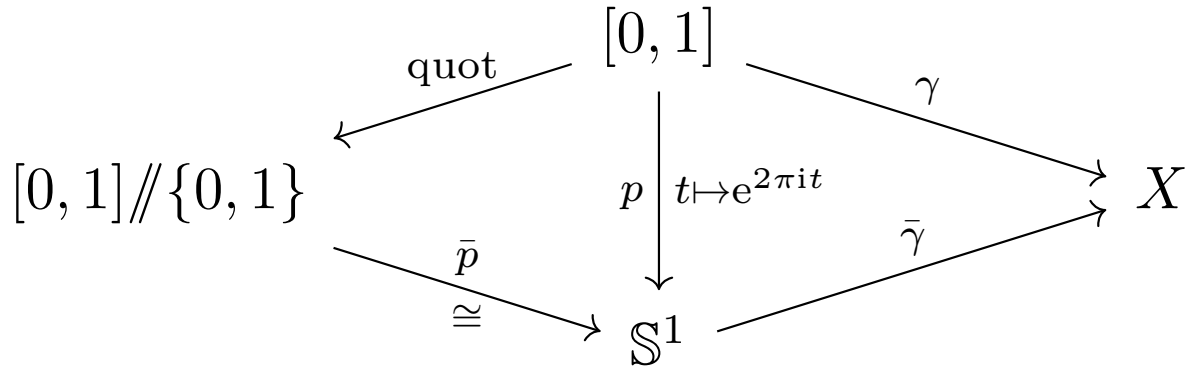
Wege in $\mathbb{C}^*$ modulo $\sim$, Homotopie relativ $\{0,1\}$



Polygonzüge modulo $\approx$, polygonale Homotopie

Die Umlaufzahl $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$

Für geschlossene Wege nutzen wir $[0,1]/\!/\{0,1\} \cong \mathbb{S}^1$ (E2T):



Zu jeder ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir die **Modellabbildung** $\varphi_k^1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^k$, reell also $(\cos t, \sin t) \mapsto (\cos(kt), \sin(kt))$.

Satz J1J: Umlaufzahl für geschlossene Wege

Die Umlaufzahl stiftet die Bijektion $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.
Die inverse Bijektion ist $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] : k \mapsto [\varphi_k^1 : z \mapsto z^k]$.

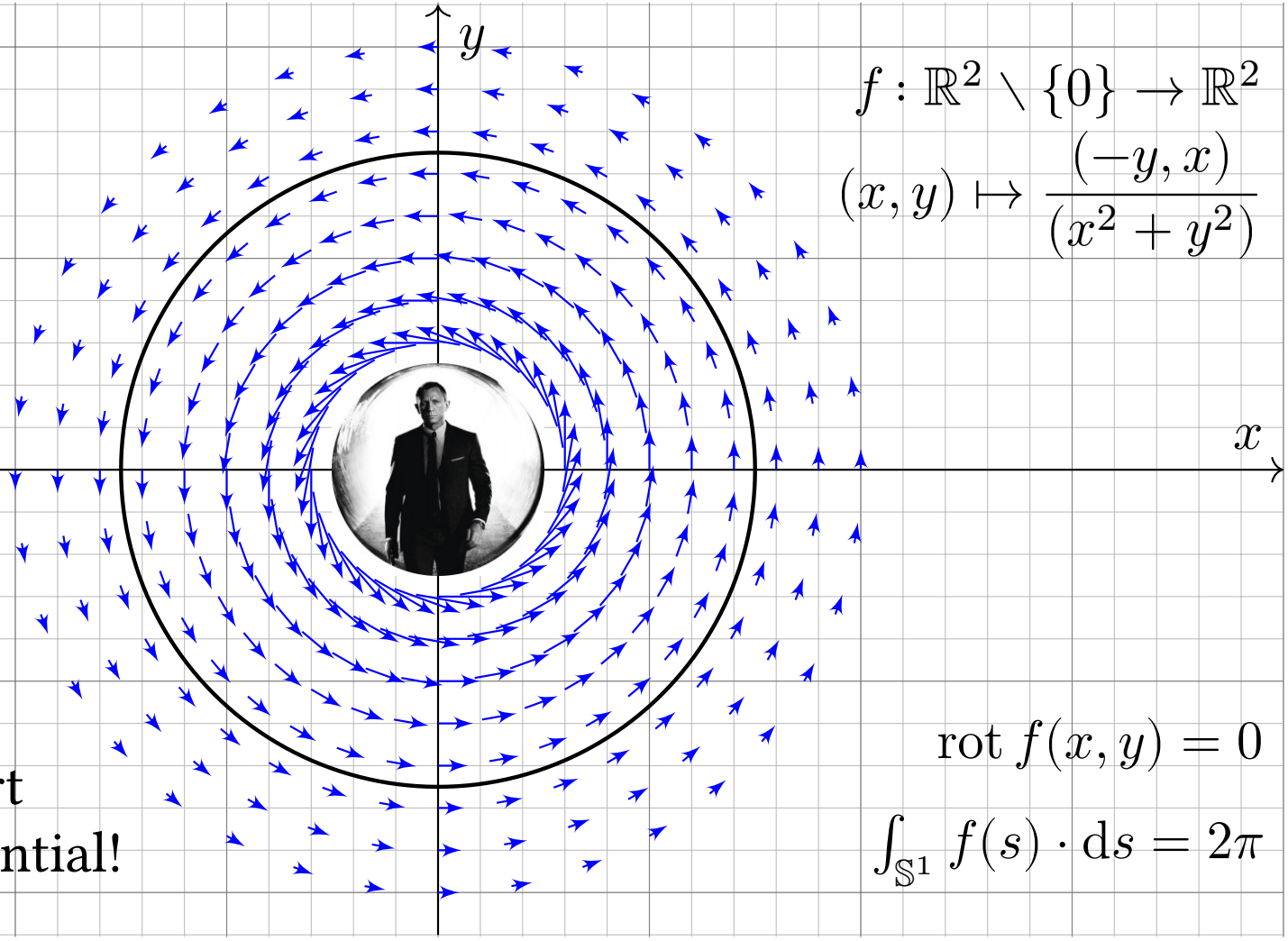
Übung: Gleiches gilt für $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*] \cong [\mathbb{C}^*, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*]$. Genauer: Die Homotopie-Äquivalenz $(\iota, \rho) : \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^*$ (G4O) induziert die Bijektion $(\iota_*, \rho_*) : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*]$ mit $\iota_* : [f] \mapsto [\iota \circ f]$ und $\rho_* : [g] \mapsto [\rho \circ g]$. (G4T)

Berechnung der Umlaufzahl als Wegintegral / Residuum

Für stückweise stetig diff'bare Wege $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt:

$$\deg(\gamma) \;=\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{t=0}^{1} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{1} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} f \cdot \mathrm{d}\gamma$$

Das berühmt-berüchtigte Wirbelfeld...

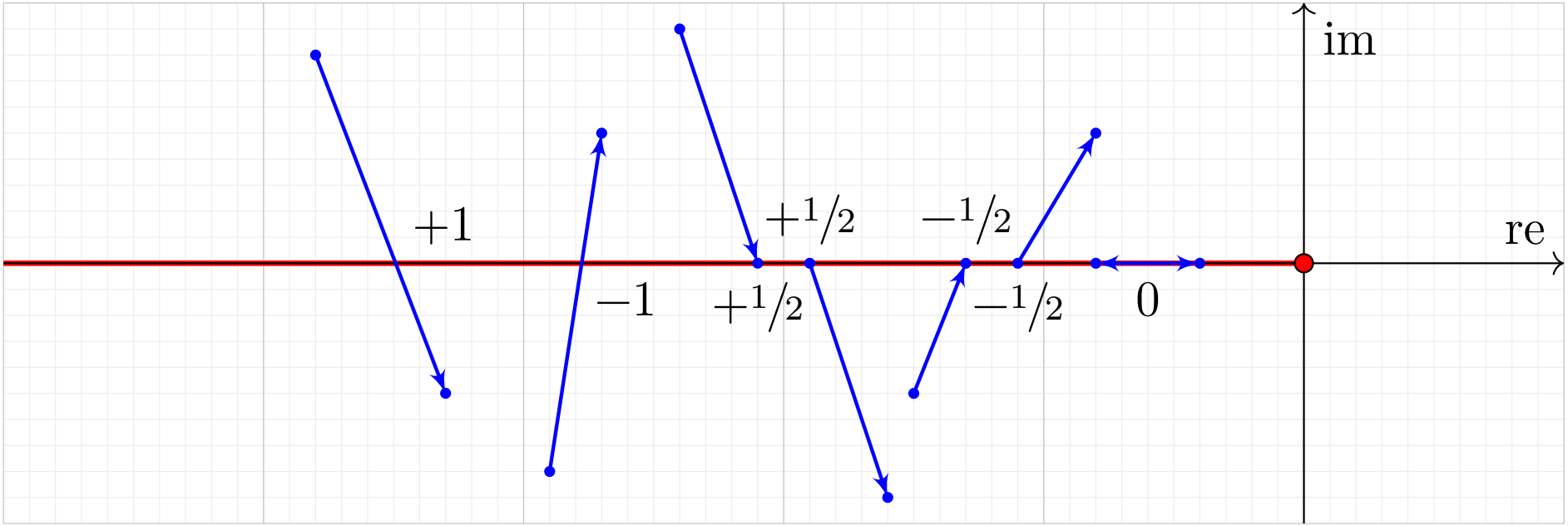


$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto \frac{(-y,x)}{(x^2+y^2)}$$

ist rotationsfrei, dennoch existiert hierzu kein Potential!

$$\operatorname{rot} f(x,y) = 0$$
$$\int_{\mathbb{S}^1} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$$

Berechnung der Umlaufzahl durch Achsübergänge



Für jede Kante $[u, v] \subseteq \mathbb{C}^*$ zählen wir den Achsübergang durch

$$\eta(u,v) := \begin{cases} 0 & \text{falls } [u,v] \cap \mathbb{R}_{<0} = \emptyset, \\ \frac{1}{2}\left[\operatorname{sign}\operatorname{im}(u) - \operatorname{sign}\operatorname{im}(v)\right] & \text{falls } [u,v] \cap \mathbb{R}_{<0} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Für jeden geschlossenen Polygonzug $w = v_0 v_1 \ldots v_n$ in $\mathbb{C}^*$ gilt dann

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k) \;=:\; \deg(w) \;\overset{!}{=}\; \eta(w) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \eta(v_{k-1}, v_k).$$

☺ Diese Konstruktion liefert einen sehr effizienten Algorithmus!

Berechnung der Umlaufzahl durch Achsübergänge

Als bildliche Analogie beobachten wir eine Uhr nur mit Minutenzeiger: Wie viele Stunden vergehen? Dies können wir messen, indem wir die Winkeländerung des Zeiger integrieren bzw. summieren. Hier genügen zur Approximation Beobachtungen in Abständen von $[0, 60[$ Minuten. Ist das Ergebnis ganzzahlig, so genügt es, die Übergänge des Zeigers über 12 Uhr zu zählen, oder 6 Uhr oder 9 Uhr oder jede andere Stelle.

Aufgabe: Beweisen Sie die oben formulierte Gleichheit.

Lösung: Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ mit $v_0 = v_n = 1$, notfalls multipliziere mit v_0^{-1}. Für $\ell = 0, \dots, n$ zählen wir Winkel $\alpha_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} \sphericalangle(v_{k-1}, v_k)$ und Übergänge $\eta_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} \eta(v_{k-1}, v_k)$. Per Induktion gilt $\alpha_\ell \in]2\pi\eta_\ell - \pi, 2\pi\eta_\ell + \pi[$. Schließlich haben wir $\alpha_n \in \mathbb{Z}2\pi$ und $\eta_n \in \mathbb{Z}$, also $\alpha_n = 2\pi\eta_n$. QED

☺ Die Umlaufzahl ist sehr einfach und doch fundamental. Sie tritt in der Mathematik und ihren Anwendungen vielfach auf, neben Topologie vor allem in der reellen Analysis (als Wegintegral von Vektorfeldern in der Ebene $\mathbb{R}^2$, siehe oben) und der komplexen Analysis / Funktionentheorie als Cauchy–Index geschlossener Wege in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

Fundamentalsatz der Algebra

Satz J1T: Fundamentalsatz der Algebra

Zu jedem Polynom $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ existieren Nullstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass $F(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$.

Dank Polynomdivision genügt uns *eine* Nullstelle $z_n \in \mathbb{C}$ mit $F(z_n) = 0$.

Anschaulich: Sei $n \geq 1$ und $c_n \neq 0$. Zum Radius $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren wir $\gamma_r : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} : s \mapsto F(rs)$. Für große r dominiert $r^n s^n$, mit Umlaufzahl n. Für kleine r dominiert der konstante Term c_n: Die Umlaufzahl ist 0. Die Homotopie von γ_0 zu γ_r muss über 0 laufen: F hat eine Nullstelle!

Beweis / Übung J1U: Zu F definieren wir die Abbildung

$$H \;:\; [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \;:\; (t, z) \mapsto \begin{cases} t^n F(z(1-t)/t) & \text{für } t > 0, \\ z^n & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

(1) Die Abbildung H ist ein Polynom in t und z, also insbesondere stetig.
(2) Die Umlaufzahlen sind $\deg(H_0) = n$ und $\deg(H_1) = 0$, wobei $c_n \neq 0$.
(3) Hat F keine Nullstellen in $\mathbb{C}$, so gilt $H : z^n \simeq *$ in $\mathbb{C}^*$, also $n = 0$. QED

Fundamentalsatz der Algebra

☺ Dieses genial-einfache Argument zeigt die **Existenz** einer Nullstelle. Zudem können wir mit diesem Verfahren alle **Nullstellen lokalisieren**!

Übung J1U: Beweisen Sie folgende Präzisierungen und Anwendungen.

(4) Sind $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ geschlossene Wege, so auch ihr Produkt $\gamma = \alpha \cdot \beta : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)$, und $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.

(5) Sei $R = [a,b,c,d] \subseteq \mathbb{C}$ ein Rechteck und $\gamma = |a,b,c,d,a|$ der Weg längs des Randes ∂R, positiv orientiert. Hat F keine Nullstellen auf ∂R, so gilt

$$\#_{\text{mult}} \big\{ z \in R \,\big|\, F(z) = 0 \big\} \;=\; \deg(F \circ \gamma).$$

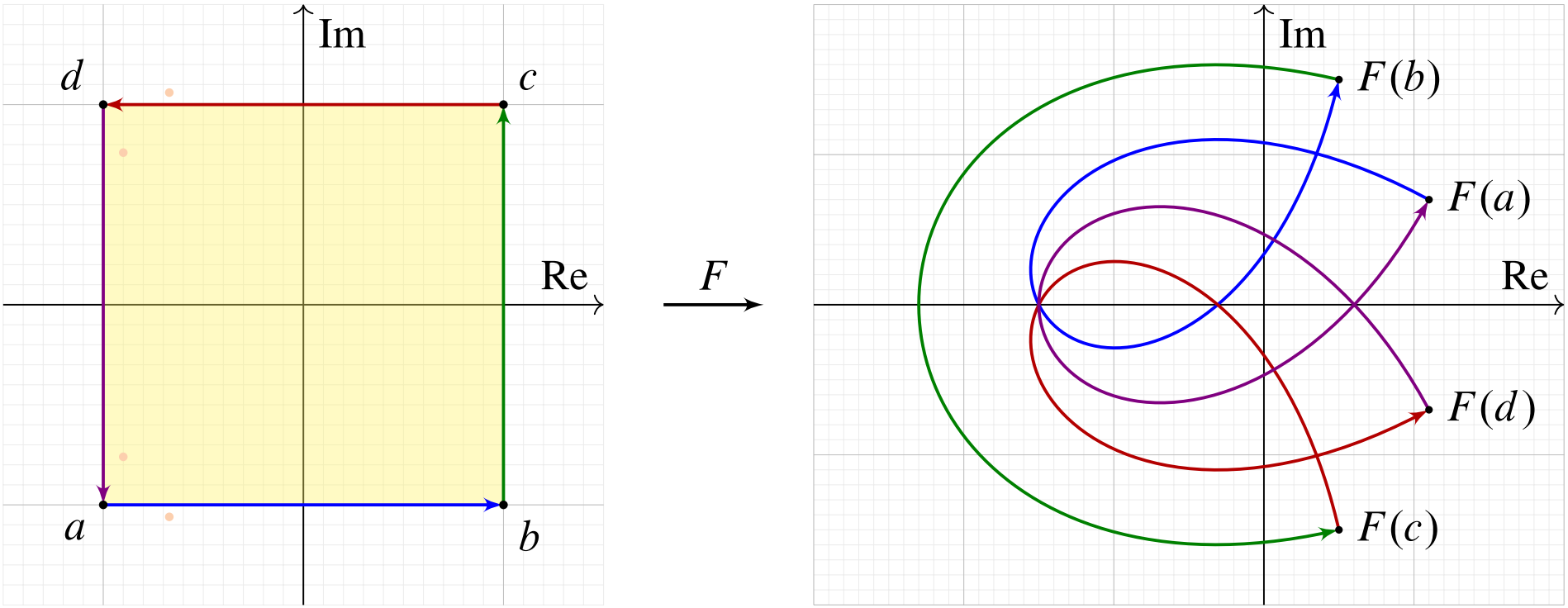
Der Fall $n = 1$ ist leicht, für $n \geq 2$ hilft (4) und der Fundamentalsatz J1T.

(6) Die folgenden Abbildungen zeigen Wege γ und ihre Bilder $F \circ \gamma$. Bestimmen Sie $\deg(F \circ \gamma)$ und lokalisieren Sie Nullstellen von F.

(7) Erklären und vergleichen Sie die beiden Lokalisierungsverfahren:
☺ Reelle Nullstellen von $P \in \mathbb{R}[x]$ finden wir durch Intervallhalbierung, komplexe Nullstellen von $F \in \mathbb{C}[z]$ finden wir durch Rechteckviertelung!

Lokalisierung komplexer Nullstellen

Die Umlaufzahl von $F(z) = z^5 - 5z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 3z - 12$ entlang γ:



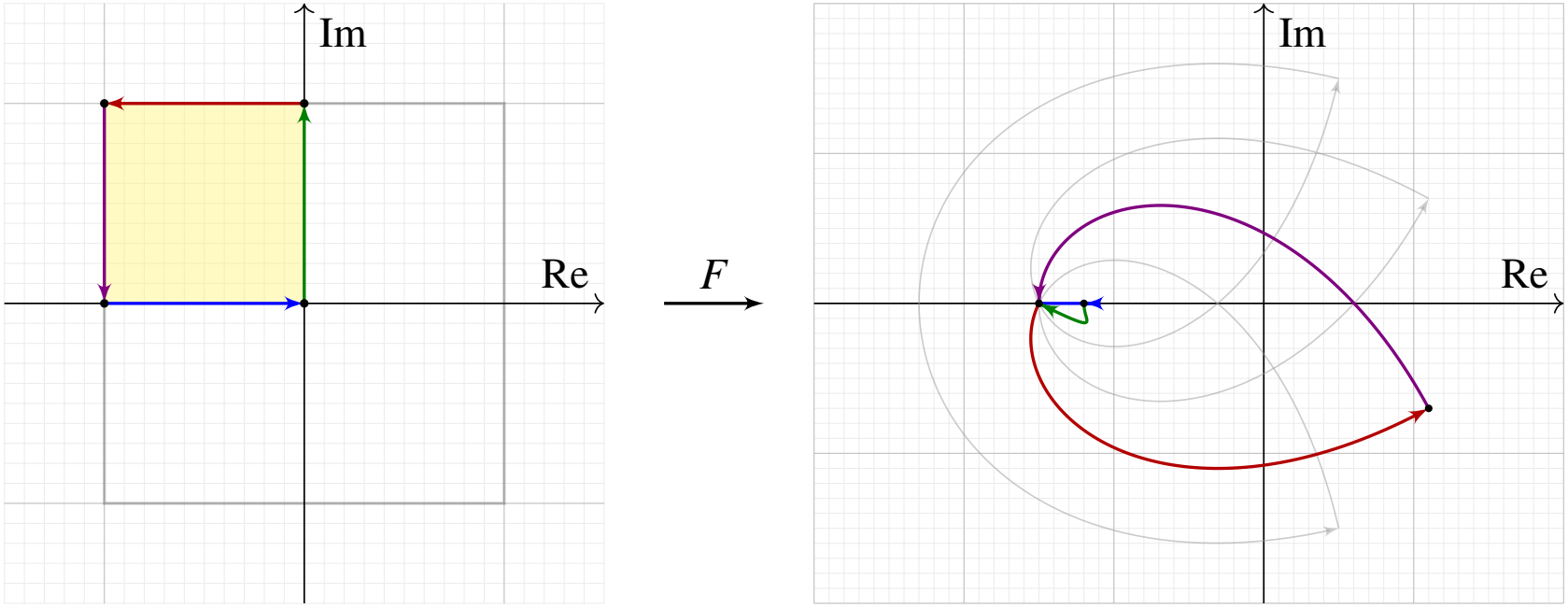
Fundamentalsatz / Übung J1U: Sei $R = [a, b, c, d] \subseteq \mathbb{C}$ ein Rechteck und $\gamma = |a, b, c, d, a|$ der Weg längs des Randes ∂R, positiv orientiert.

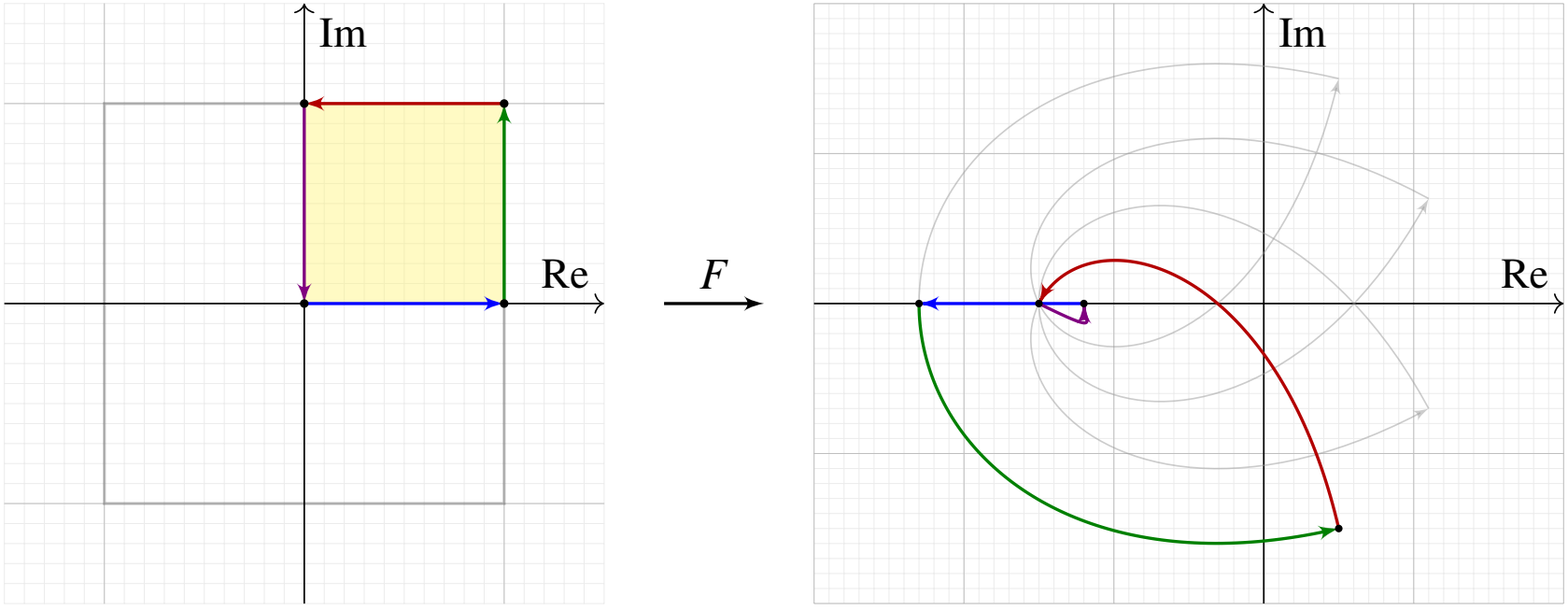
Wenn $F \in \mathbb{C}[z]$ keine Nullstellen auf dem Rand ∂R hat, so gilt

$$\#_{\text{mult}} \left\{ z \in R \,\middle|\, F(z) = 0 \right\} \;=\; \deg(F \circ \gamma).$$

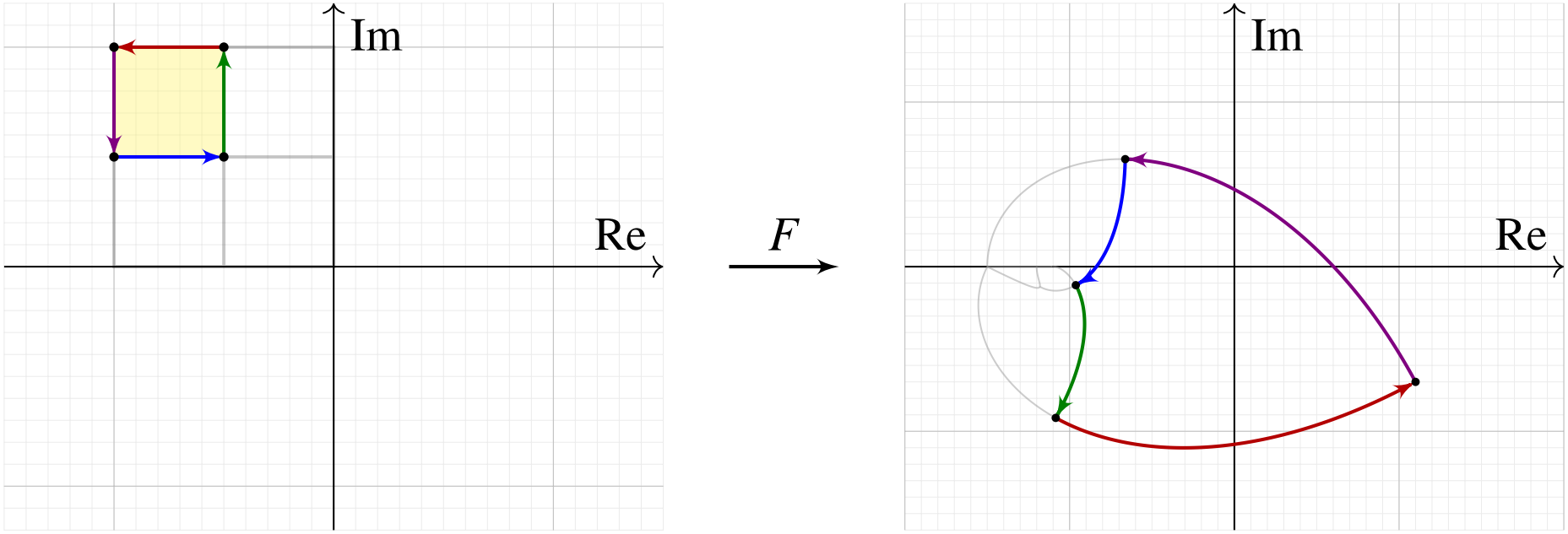
☺ Aus Intervallhalbierung in $\mathbb{R}$ wird Rechteckviertelung in $\mathbb{C}$.

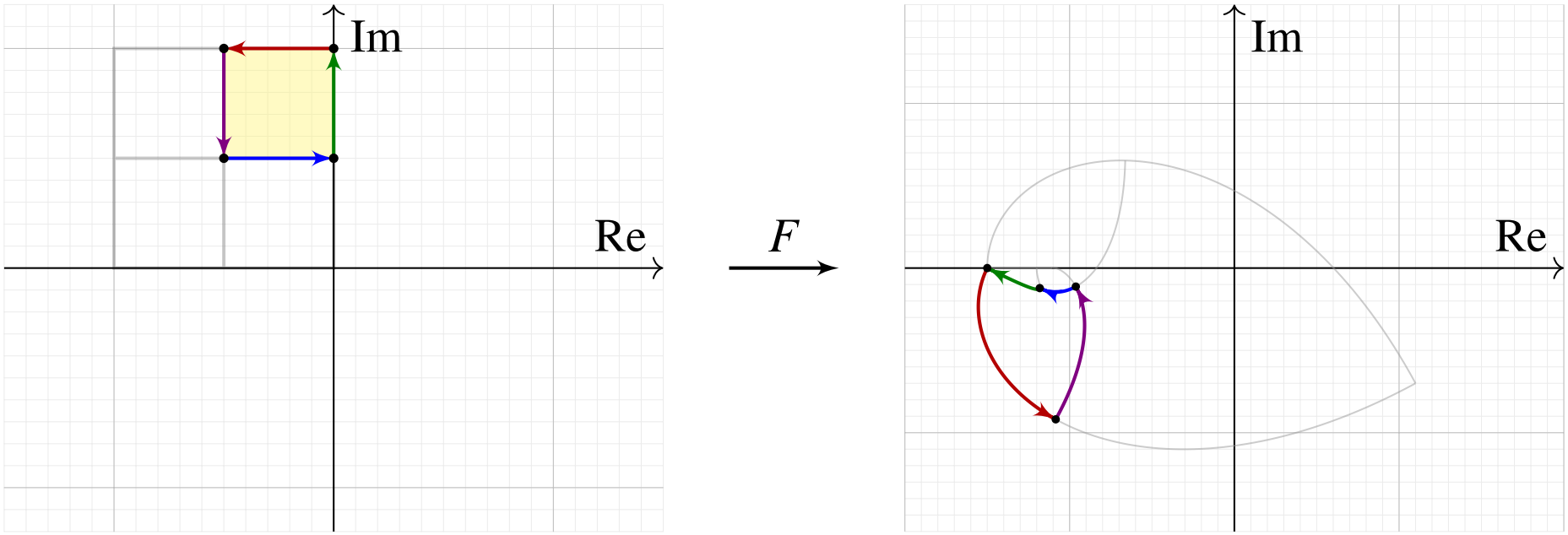
Lokalisierung komplexer Nullstellen



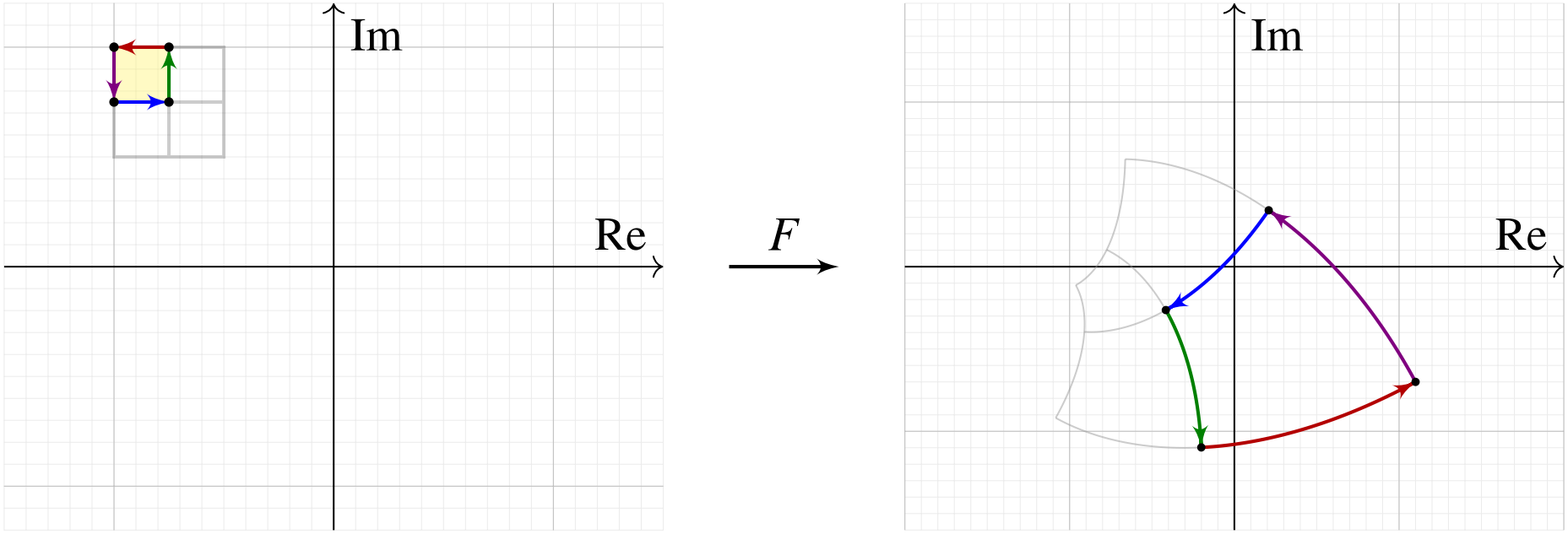


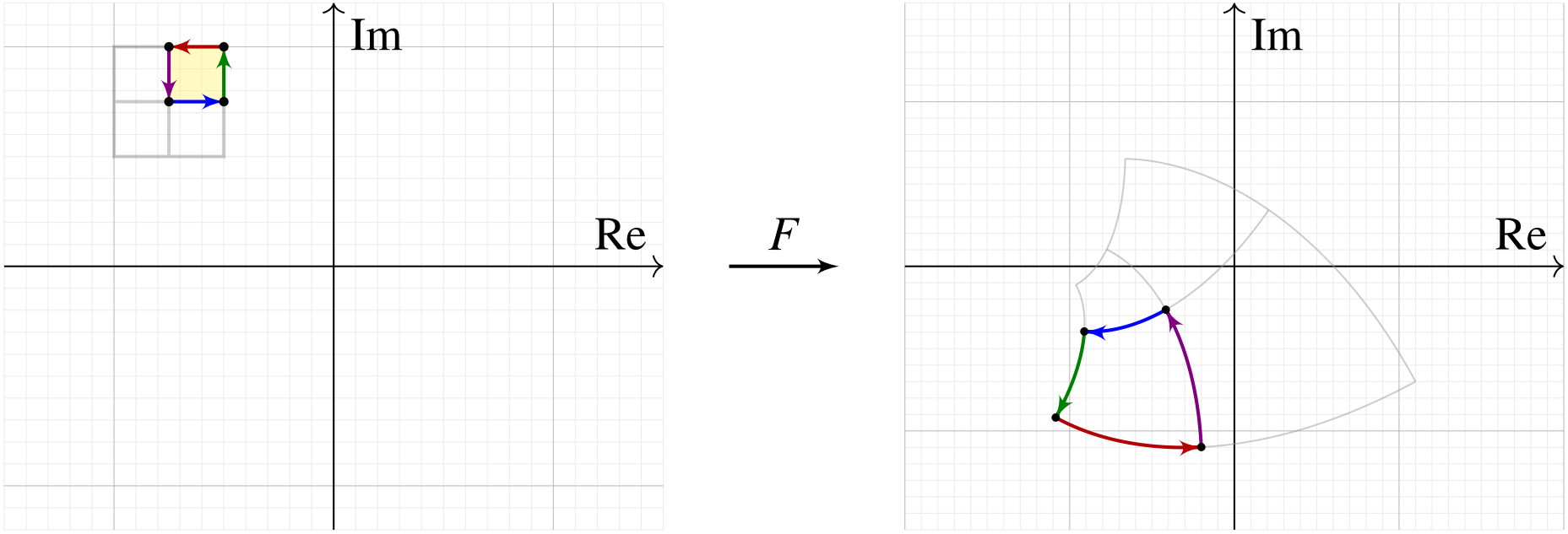
Lokalisierung komplexer Nullstellen





Lokalisierung komplexer Nullstellen



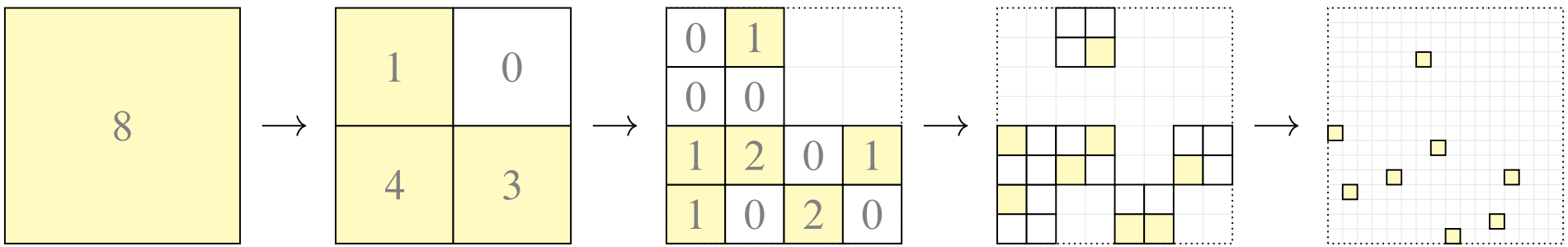


Lokalisierung komplexer Nullstellen

Hermann Weyl schrieb hierzu in seinem Artikel *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* 1921 die weisen Worte:

Ein Existenzsatz verkündet
„das Vorhandensein eines Schatzes,
ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. […]
Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle,
sondern die im Beweise geführte Konstruktion.“

☺ Das oben erklärte Verfahren erlaubt uns, den Schatz zu heben!



Algebraische Berechnung durch euklidische Division / Sturm–Ketten oder numerische Näherung der Winkelsumme / des Wegintegrals, Optimierung zu schnellsten Nullstellenfindern (Schönhage 1982)

Lokalisierung komplexer Nullstellen

🙂 Reelle Nullstellen von $P \in \mathbb{R}[x]$ finden wir durch Intervallhalbierung, komplexe Nullstellen von $F \in \mathbb{C}[z]$ finden wir durch Rechteckviertelung!

Verfahren: Zum Polynom $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathbb{C}[z]$ wählen wir ein Startquadrat $D = [-r, r]^2$, das alle n Nullstellen enthält, etwa $r = \sum_{k=1}^{n} |c_k|$, siehe C3Y. Dieses unterteilen wir in vier Teilquadrate. In jedem können wir nun die Umlaufzahl berechnen (J1S) und somit die Anzahl der Nullstellen (J1U). Wir behalten nur die nicht-leeren.

Auf diese Weise können wir alle Nullstellen beliebig genau lokalisieren. Haben wir alle Nullstellen ausreichend genau voneinander getrennt, so können wir schließlich zum Newton–Verfahren übergehen (J1Z): Es muss in unmittelbarer Nähe einer Nullstelle z_0 gestartet werden, konvergiert dann aber blitzschnell gegen die anvisierte Nullstelle.

Der Fundamentalsatz der Algebra und seine effiziente Implementierung sind ein Höhepunkt der Mathematik in schönster Einheit: Algebra und Topologie verbinden sich mit Analysis und Numerik. Ist das „rein“ oder „angewandt“? Beides! Es ist Mathematik, wunderschön und nützlich!

Nullstellensuche in der Ebene $\mathbb{R}^2$

Die Technik der Nullstellensuche ist nicht auf komplexe Polynome $F \in \mathbb{C}[z]$ beschränkt, sondern funktioniert allgemein für jede stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \supseteq R \to \mathbb{R}^2$, insbesondere Polynomfunktionen.

Lemma J1v: ebene Nullstellensuche

Sei $R = [a, b, c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $\gamma = |a, b, c, d, a|$ der Randweg.

1. Sei $F : R \to \mathbb{R}^2$ stetig. Hat F keine Nullstelle, so folgt $\deg(F \circ \gamma) = 0$.
2. Hat F keine Nullstelle auf dem Rand δR und gilt $\deg(F \circ \gamma) \neq 0$, so hat F eine Nullstelle im Innere $\operatorname{Int} R$ unseres Rechtecks.
3. Ein solche Nullstelle kann durch wiederholte Rechteckviertelung beliebig genau lokalisiert werden.

Konkret für Polynomfunktionen $F : \mathbb{R}^2 \supseteq R \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ können wir die Umlaufzahl $\deg(F \circ \gamma)$ algebraisch durch Sturm–Ketten berechnen (siehe Skript, J1s).

Nullstellensuche in der Ebene $\mathbb{R}^2$

Beweis: (1) Hat $F : R \to \mathbb{R}^2$ keine Nullstelle, so haben wir die Homotopie $H : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $H_t = F \circ ((1-t)a + t\gamma)$, also $H : \text{const} \simeq F \circ \gamma$ und $\deg(F \circ \gamma) = 0$. Per Kontraposition folgt die Aussage (2).

(3) Wir beginnen mit einem Rechteck $R_0 \subseteq \mathbb{R}^2$, so dass $F|\partial R_0$ keine Nullstelle hat und $\deg(F|\partial R_0) \neq 0$ erfüllt. Wir unterteilen unser Rechteck $R_0 = A \cup B \cup C \cup D$ in vier gleichgroße Teilrechtecke. Dabei gilt

$$1 = \deg(F|\partial R_0) = \deg(F|\partial A) + \deg(F|\partial B) + \deg(F|\partial C) + \deg(F|\partial D).$$

Also existiert ein $R_1 \in \{A, B, C, D\}$ mit $\deg(F|R_1) \neq 0$. (Jede Nullstelle auf dem Rand löst ebenfalls unser Problem, sollte aber bei diesem Verfahren abgefangen und gesondert behandelt werden, wie in J1R.)

So fortfahrend erhalten wir $R_0 \supseteq R_1 \supseteq \cdots \supseteq R_n$ mit $\deg(F|R_n) \neq 0$, also existiert eine Nullstelle von F in R_n. Wir können R_n bis zu jeder gewünschten Präzision verkleinern. QED

Brouwers Fixpunktsatz, konstruktive Fassung

Brouwers Fixpunktsatz J4H in Dimension $n \in \mathbb{N}$ besagt: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat einen Fixpunkt $a \in \mathbb{D}^n$, mit $f(a) = a$.
In Dimension $n = 1$ folgt dies leicht aus dem Zwischenwertsatz.
Mit der Umlaufzahl können wir jetzt bereits den Fall $n = 2$ beweisen.

Ich formuliere diesen berühmten Satz hier konstruktiv, als Algorithmus zur Lokalisierung eines Fixpunkts, etwa für polynomielle Abbildungen.
Statt der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ betrachten wir lieber das Quadrat $[-1,1]^2$; das ist topologisch äquivalent, aber algorithmisch vorteilhaft.

Satz J1w: Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ hat einen Fixpunkt; ein solcher kann durch iterierte Rechteckviertelung lokalisiert werden.

Bemerkung: Für jede *kontraktive* Abbildung $f : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ garantiert der Banachsche Fixpunktsatz (C4Q) Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes und liefert zudem ein effizientes Näherungsverfahren.
Voraussetzung und Folgerung sind hier wesentlich stärker.

Brouwers Fixpunktsatz, konstruktive Fassung

Beweis: Wir nutzen die Maximumsnorm $|(x,y)| := \max\{|x|,|y|\}$, denn für diese haben wir $R := [-1,1]^2 = \{\, z \in \mathbb{R}^2 : |z| \leq 1 \,\}$. Darauf betrachten wir die affine Homotopie $H : [0,1] \times R \to \mathbb{R}^2$ mit $H_t(z) = z - tf(z)$ von $H_0 = \mathrm{id}_R$ nach $H_1 = F$ mit $F(z) = z - f(z)$.

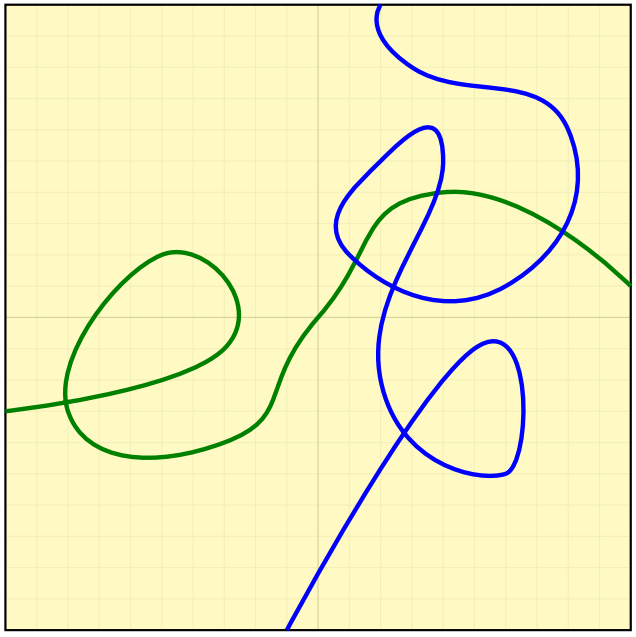
(a) Es gilt $|H_t(z)| = |z - tf(z)| \geq |z| - t|f(z)| = 1 - t|f(z)|$ für jeden Randpunkt $z \in \partial R$. Hier gilt $H_t(z) = 0$ genau dann, wenn $t = 1$ und $z = f(z)$, also einen Fixpunkt auf dem Rand vorliegt.

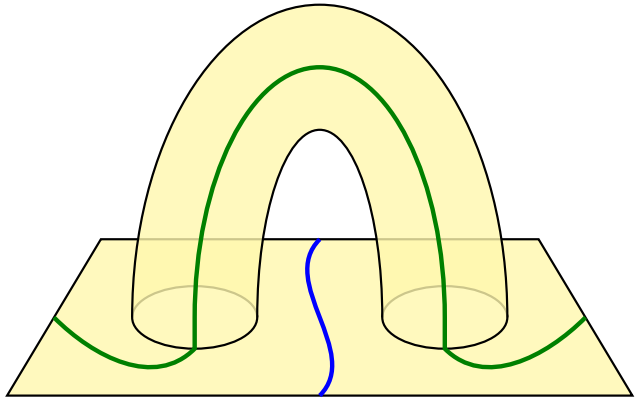
(b) Andernfalls gilt $H_t(z) \neq 0$ für alle $z \in \partial R$ und $t \in [0,1]$. Dank Homotopie-Invarianz (J1J) gilt $\deg(F|\partial R) = \deg(\mathrm{id}|\partial R) = 1$. Dank Lemma J1v hat F eine Nullstelle $z \in \operatorname{Int} R$, es gilt also $0 = F(z) = z - f(z)$, und somit hat f einen Fixpunkt.

Das beweist die Existenz eines Fixpunktes $z \in R$. Darüber hinaus liefert Lemma J1v ein Verfahren zur Lokalisierung eines Fixpunktes. QED

Kreuzende Wege schneiden sich.

Als eine weitere schöne Anwendung der Umlaufzahl beweisen wir nun: Je zwei Wege in einem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$, die gegenüberliegende Seiten verbinden, sich also „kreuzen“, haben einen Schnittpunkt.





Diese Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$ hat als Rand $\partial F = \partial[-1, 1]^2$, aber hier kann man gegenüberliegende Seiten auch ohne Kreuzung verbinden. (Lötbrücke!)

Die Existenz eines Schnittpunktes ist keineswegs selbstverständlich. Sie beruht *lokal* auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ (J1Y) sowie *global* auf der Form der Fläche: Andere Flächen haben diese Eigenschaft nicht!

Kreuzende Wege schneiden sich.

Satz J1x: Kreuzende Wege schneiden sich.

Seien $f, g : [-1,1] \to [-1,1]^2$ stetig mit $f_1(\pm 1) = \pm 1$ und $g_2(\pm 1) = \pm 1$.
Dann kreuzen sich diese Wege: Es existieren $s, t \in [-1,1]$ mit $f(s) = g(t)$.
Eine solche Lösung kann durch Rechteckviertelung lokalisiert werden.

Beweis: Für $h : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2 : (s,t) \mapsto (f_1(s) - g_1(t), g_2(t) - f_2(s))$ gilt $h(s,t) = 0$ gdw $f(s) = g(t)$: Die Kreuzungspunkte sind die Nullstellen!
(a) Hat h eine Nullstelle auf dem Rand, so ist dies ein Kreuzungspunkt.
(b) Hat h keine Nullstellen auf dem Rand, so gilt $\deg(h|\partial[-1,1]^2) = 1$.

Genauer: Die affine Homotopie $H : [0,1] \times \partial[-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $H(r,s,t) := (1-r)(s,t) + rh(s,t)$ geht von $H_0(s,t) = (s,t)$ nach $H_1(s,t) = h(s,t)$ und verläuft in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: In jedem Randpunkt $(s,t) \in \partial[-1,1]^2$ weist der Vektor $h(s,t)$ nicht in das Quadrat $[-1,1]^2$ hinein, denn $f_1(-1) \leq g_1(t) \leq f_1(1)$ und $g_2(-1) \leq f_2(s) \leq g_2(1)$.
Dank Homotopie-Invarianz folgt $\deg(h|\partial[-1,1]^2) = \deg(H_0) = 1$.

Dank Lemma J1v hat h eine Nullstelle $(s,t) \in \mathrm{Int}[-1,1]^2$. QED

Kreuzende Wege schneiden sich.

Der Satz beruht auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Es ist immer wieder heilsam, sich drastische Gegenbeispiele über $\mathbb{Q}$ vor Augen zu führen:

Übung J1Y: Vollständigkeit ist wesentlich!

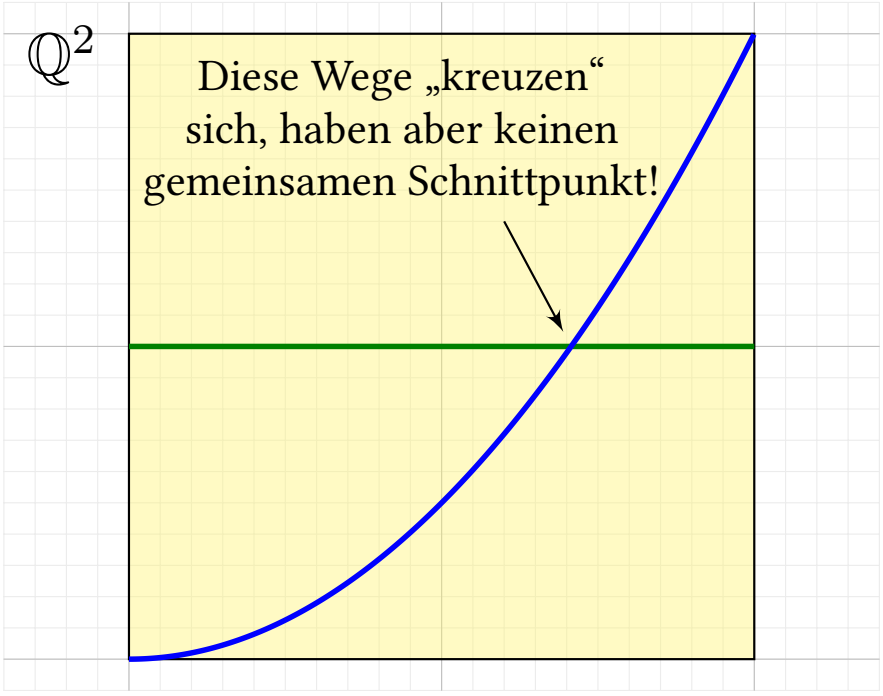
(1) Über $\mathbb{Q}$ gibt es stetige Abbildungen $f, g : [-1,1]_{\mathbb{Q}} \to [-1,1]^2_{\mathbb{Q}}$ mit $f_1(\pm 1) = \pm 1$ und $g_2(\pm 1) = \pm 1$, aber $f(s) \neq g(t)$ für alle $s, t \in [-1,1]_{\mathbb{Q}}$.

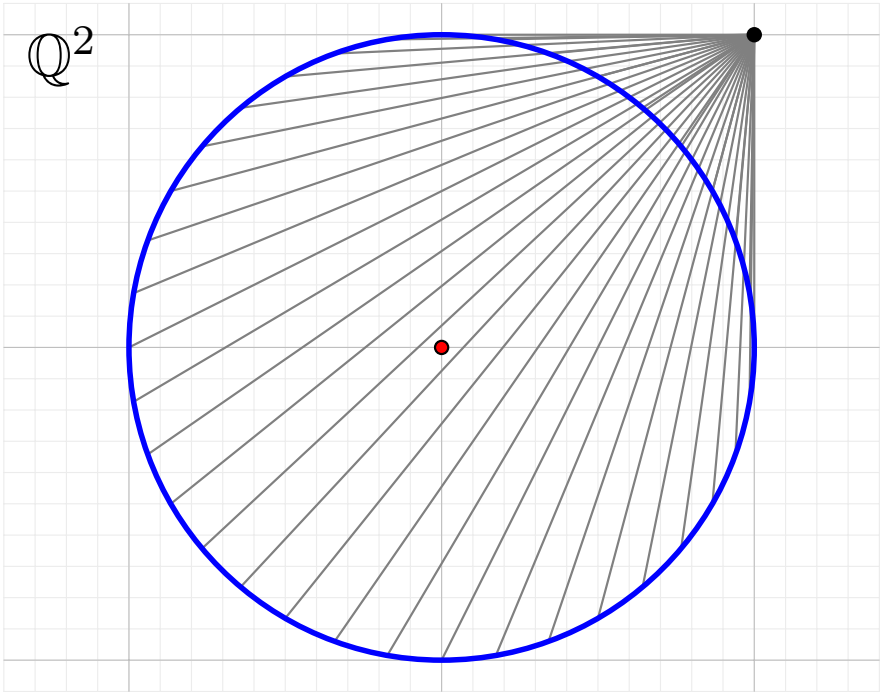
(2) Über $\mathbb{Q}$ gibt es Homotopien $H : [0,1] \times \mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$ von $H_0 = \mathrm{id}$ nach $H_1 = \mathrm{const}$, wobei $\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}} := \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{Q}^2 = \{\,(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$.

Anders als über $\mathbb{R}$ gibt es über $\mathbb{Q}$ keine homotopie-invariante Umlaufzahl!

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ sind ordnungsvollständig. Daraus folgen insbesondere alle topologischen Eigenschaften, wie Zusammenhang und Kompaktheit von $[a,b]$. Über $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ jedoch gilt all dies nicht! Unsere topologische Anschauung wird über $\mathbb{R}$ bestätigt, doch über $\mathbb{Q}$ enttäuscht. Dieser Kontrast betont erneut, wie wichtig ein sorgsamer Aufbau ist, sowohl Werkzeuge (Definitionen, Sätze, Beweise) als auch Beispiele.

Kreuzende Wege schneiden sich.

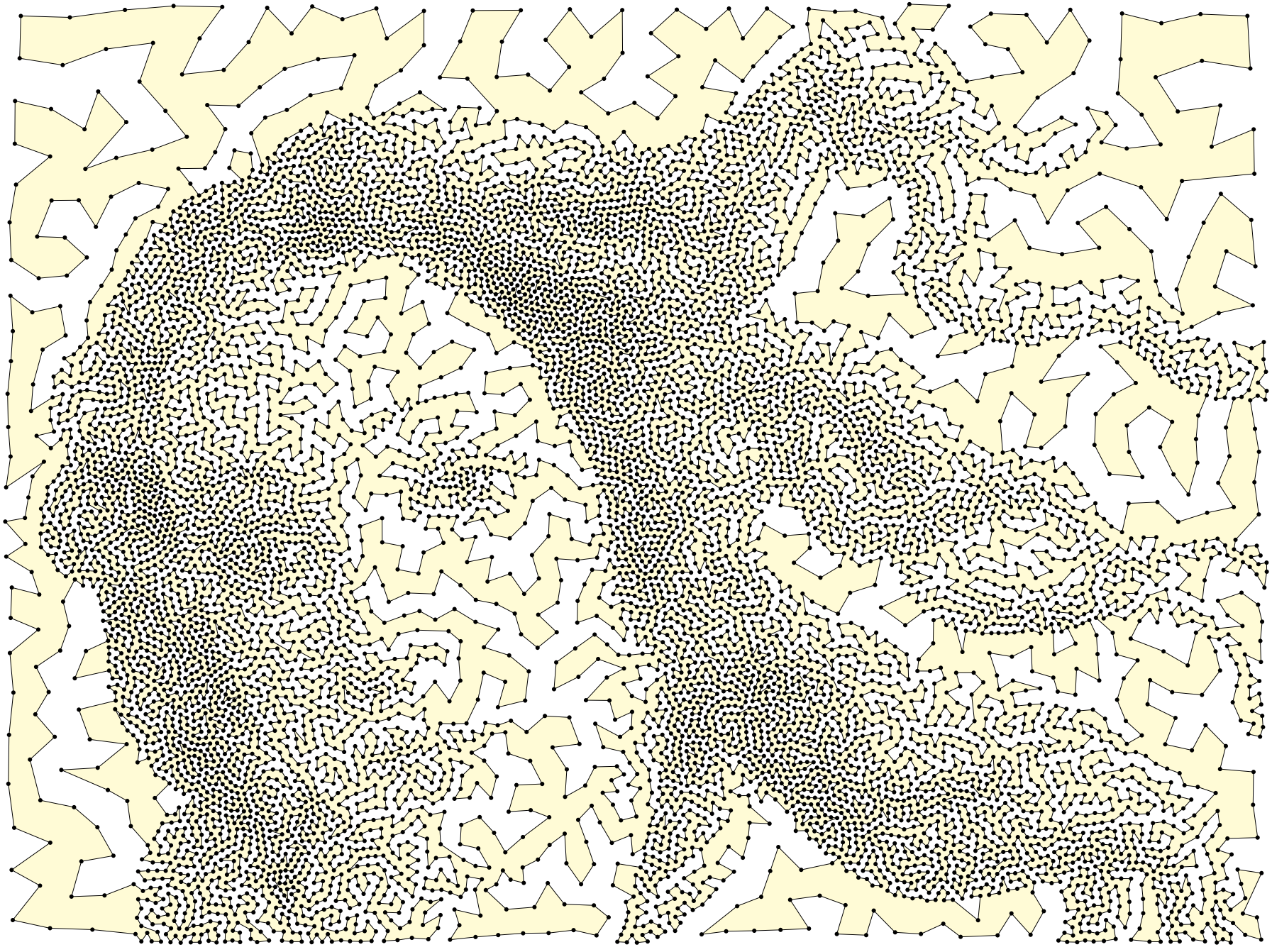




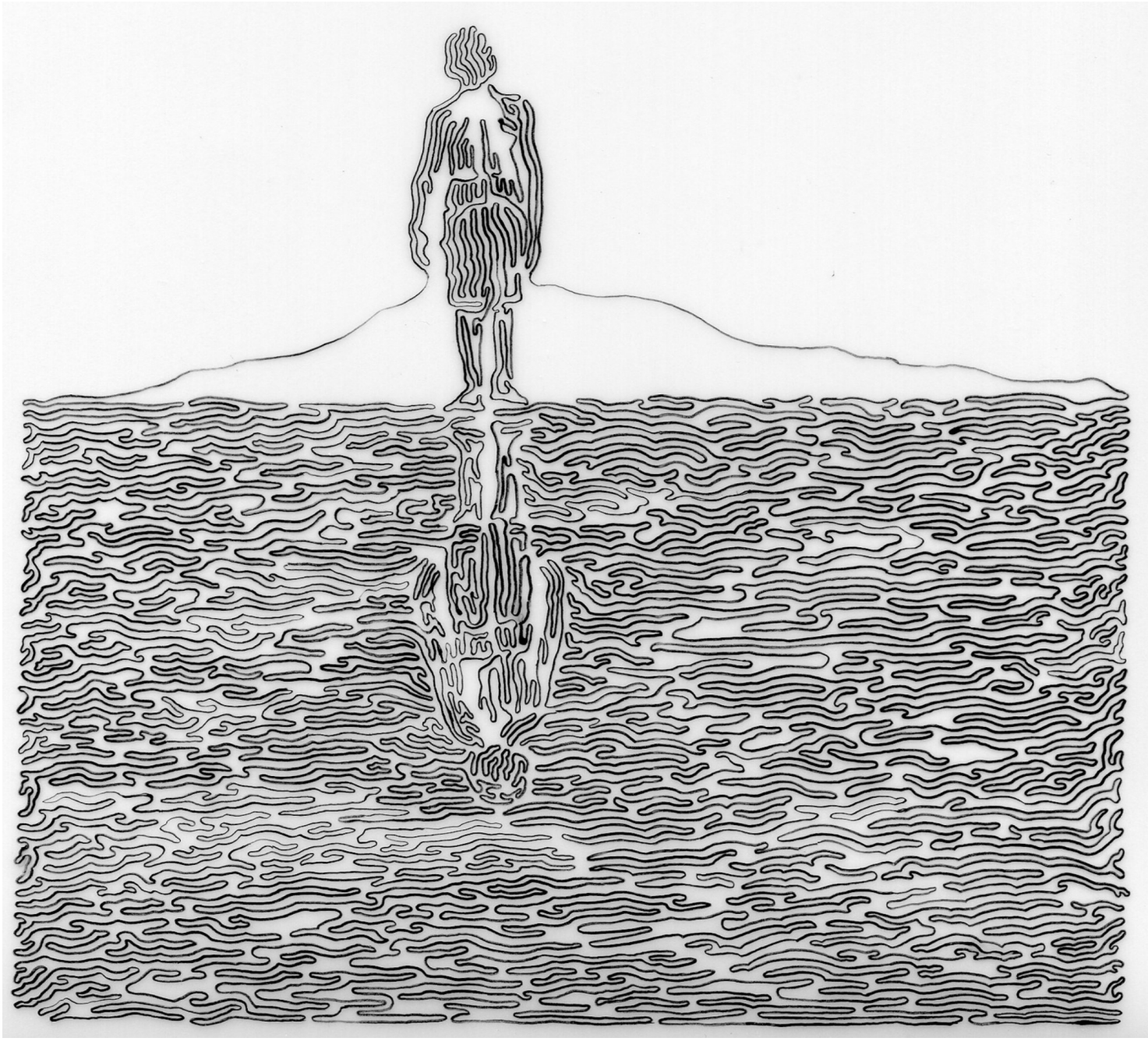
Lösung: (1) Die Abbildungen $f, g : [-1,1]_{\mathbb{Q}} \to [-1,1]^2_{\mathbb{Q}}$ mit $f(s) = (s, 0)$ und $g(t) = (t, (t+1)^2/2 - 1)$ erfüllen $f_1(\pm 1) = \pm 1$ und $g_2(\pm 1) = \pm 1$. Dennoch gilt $f(s) \neq g(t)$ für alle $s, t \in [-1,1]_{\mathbb{Q}}$, denn $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(2) Die affine Abbildung $H(s,q) = (1-s)q + s(1,1)$ ist stetig und erfüllt $H(0,q) = q$ und $H(1,q) = (1,1)$. Wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt $\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} \cdot (1,1) = \emptyset$, also $H(s,q) \neq 0$ für alle $s \in [0,1]$ und $q \in \mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}$.

Erste Beispiele zur Motivation



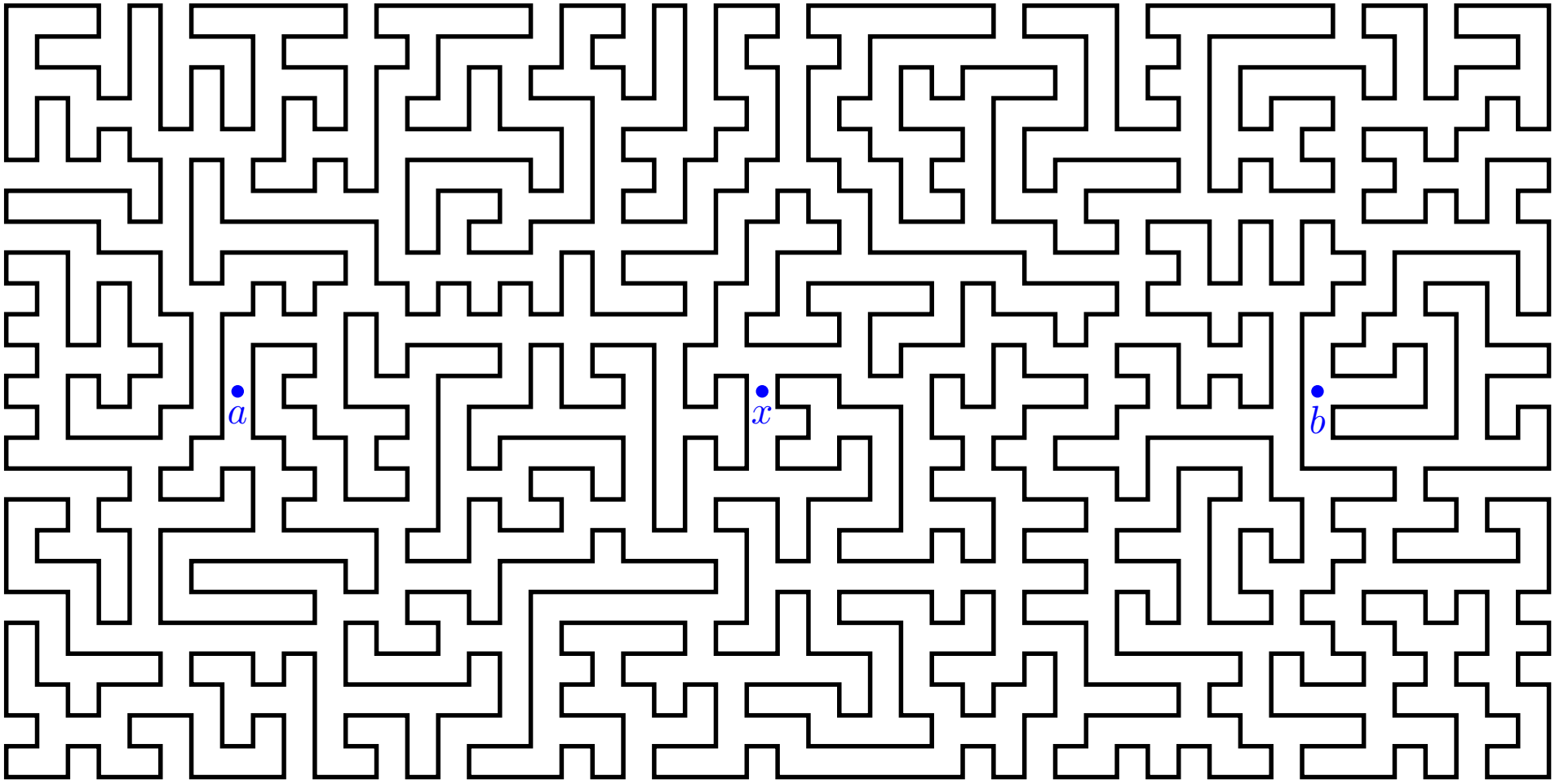
Erste Beispiele zur Motivation



F. Ross, W.T. Ross, *The Jordan curve theorem is non-trivial,*
Journal of Mathematics and the Arts 5 (2011) 213–219.

Erste Beispiele zur Motivation

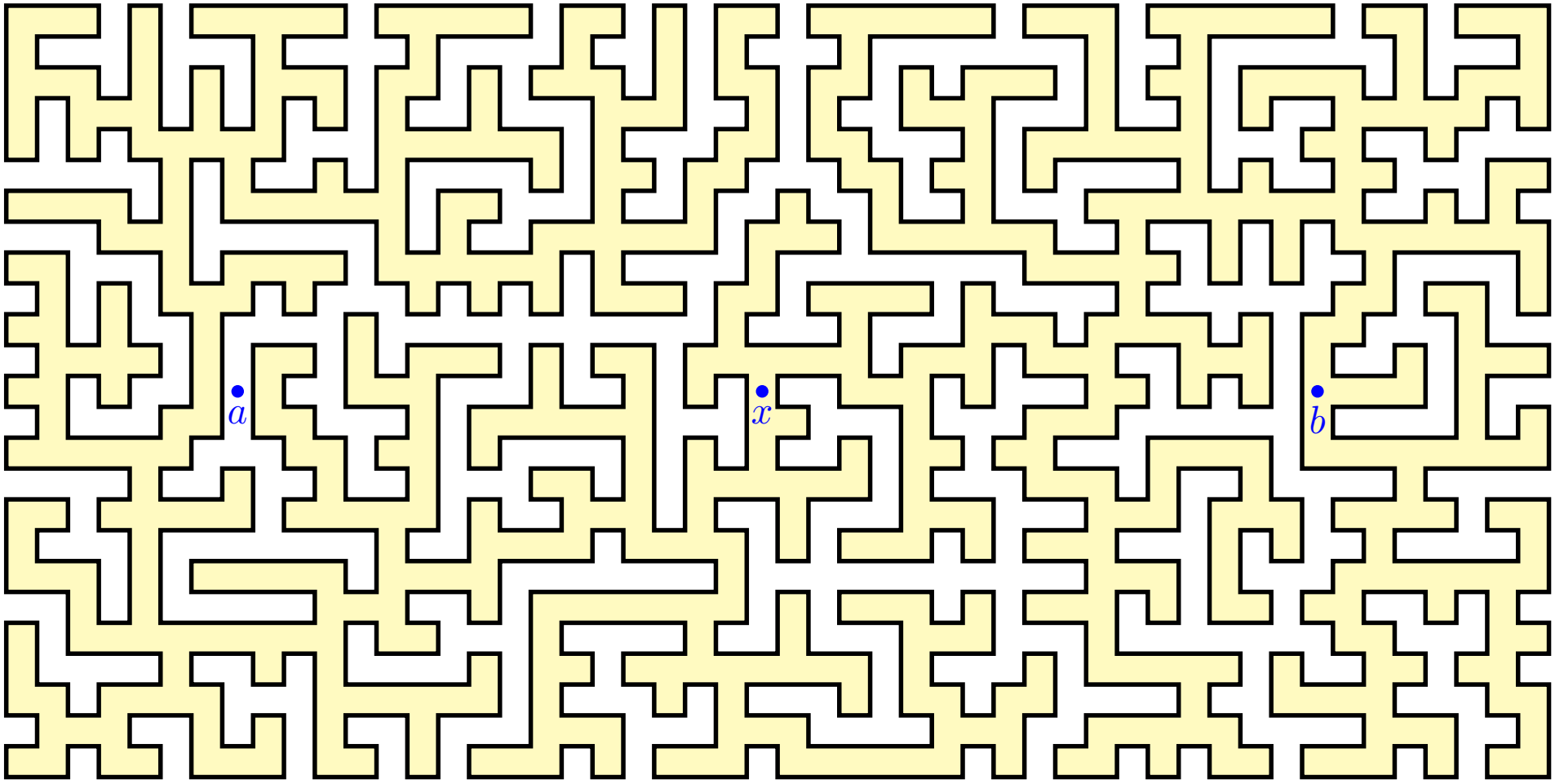
Die folgende Abbildung zeigt eine polygonale Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $C \cong \mathbb{S}^1$.



Können Sie x, a, b durch Wege im Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ verbinden?
Wie können Sie das effizient feststellen, berechnen, zertifizieren?

Erste Beispiele zur Motivation

Innere und äußere Punkte unterscheiden wir durch ihre Umlaufzahl!



Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ besteht aus zwei Gebieten A (weiß) und B (gelb); das innere Gebiet B ist homöomorph zur Kreisscheibe, $B \cong \mathbb{B}^2$, $\overline{B} \cong \mathbb{D}^2$.

Der Satz von Jordan und Schoenflies

Satz J2A: Jordan–Schoenflies

Für jede Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \rightarrowtail C \subseteq \mathbb{R}^2$, ganz egal wir kompliziert, gilt:

(1) Jordan: Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ zerfällt in genau zwei Gebiete, ein unbeschränktes „Äußeres“ A und ein beschränktes „Inneres“ B,

$$A = \{ x \in \mathbb{R}^2 \setminus C \,|\, \deg_2(f - x) = 0 \} \quad \text{unbeschränkt in } \mathbb{R}^2,$$
$$B = \{ x \in \mathbb{R}^2 \setminus C \,|\, \deg_2(f - x) = 1 \} \quad \text{beschränkt in } \mathbb{R}^2.$$

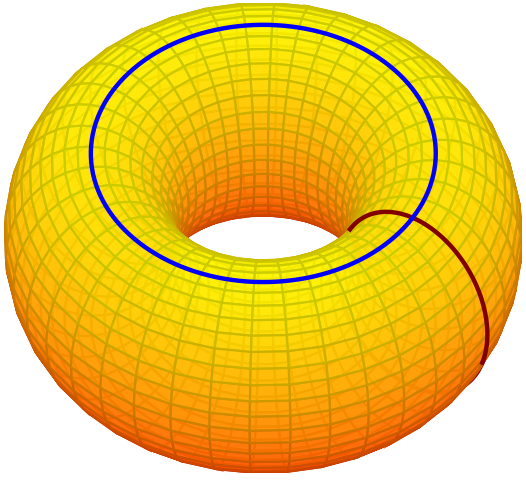
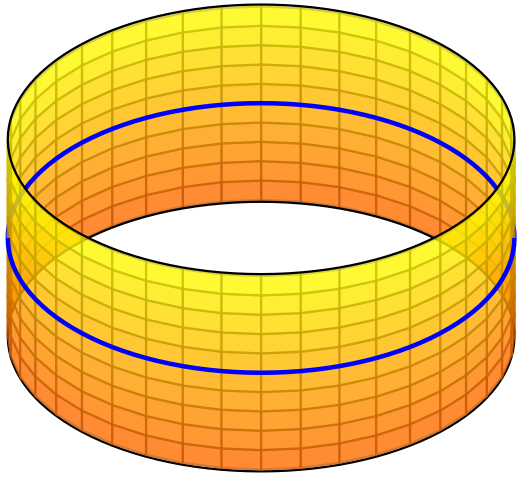
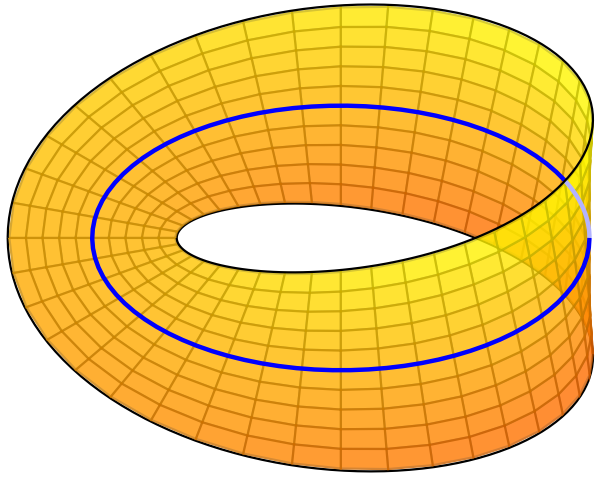
(2) Somit ist $\nu : \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg_2(f - x)$ bijektiv, $A \mapsto 0$, $B \mapsto 1$. Zu ihrer Unterscheidung nutzen wir die Umlaufzahl $\deg_2 = \deg \bmod 2$.

(3) Der gemeinsame Rand dieser beiden Gebiete ist $\delta A = \delta B = C$. Ihre Abschlüsse in $\mathbb{R}^2$ sind demnach $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$.

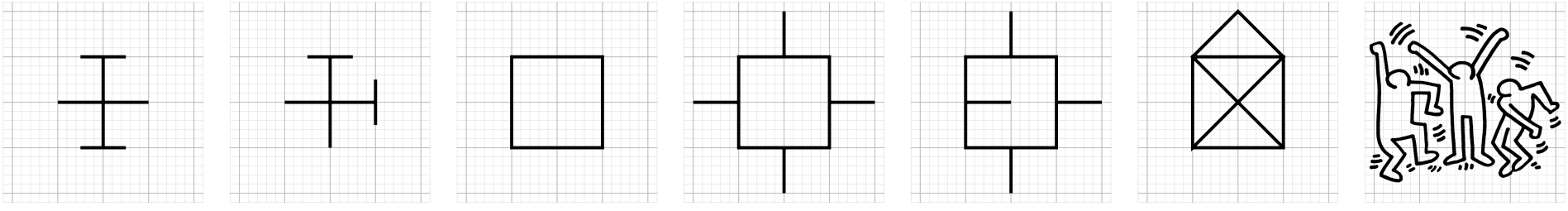
(4) Schoenflies: Es existiert ein Homöomorphismus $h : (\mathbb{R}^2, C) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^1)$, das heißt $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(C) = \mathbb{S}^1$, somit $h(B) = \mathbb{B}^2$ und $h(\overline{B}) = \mathbb{D}^2$.

Der Satz von Jordan und Schoenflies

Der Satz von Jordan–Schoenflies ist eine Besonderheit der Ebene $\mathbb{R}^2$.
Je nach Fläche F ist das Trennungsverhalten von $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow F$ verschieden:

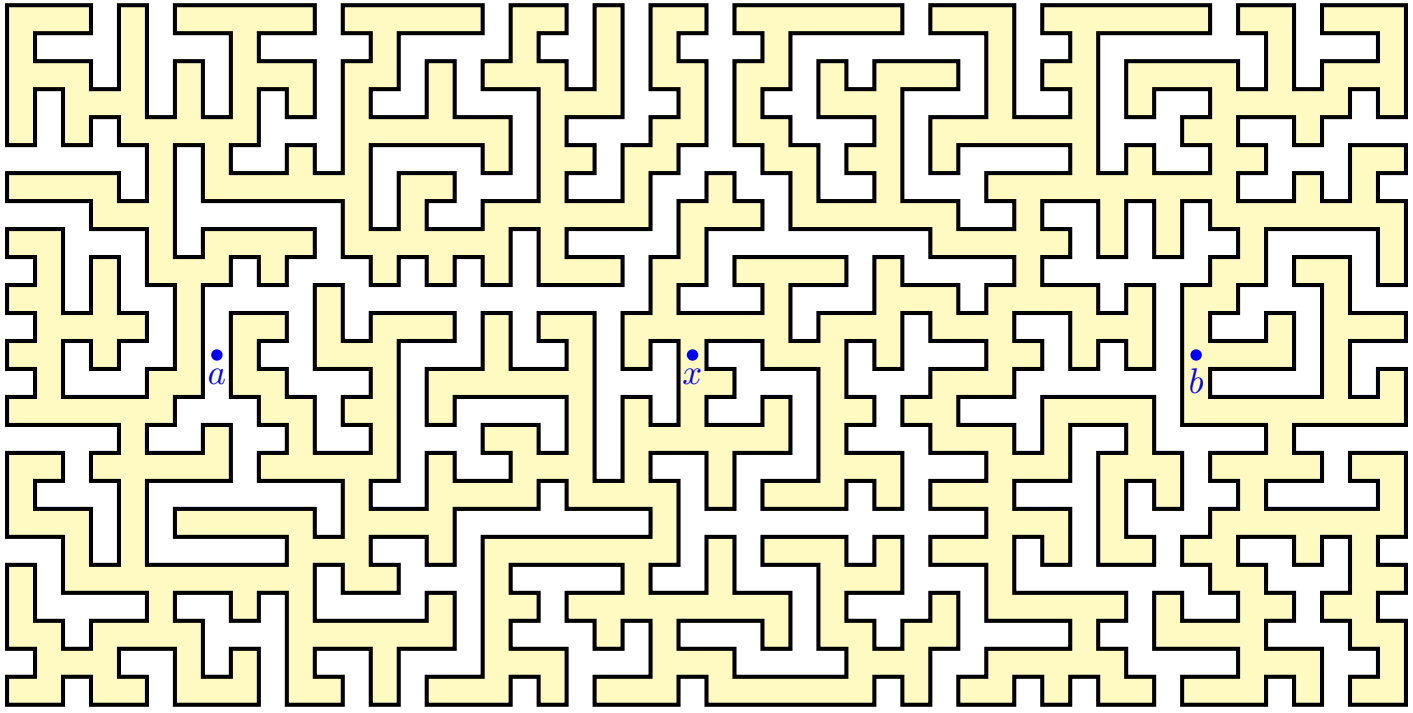




Auch die Kurve $C \cong \mathbb{S}^1$ ist wesentlich. Für Graphen sieht es anders aus:



Auch dieses Thema verbindet „reine“ und „angewandte“ Mathematik,
„abstrakte“ Theorie innen und „konkrete“ Anwendungen außen!

Der Satz von Jordan und Schoenflies



Wir betrachten $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ als die komplexe Ebene und nutzen so die starken Werkzeuge der komplexen Analysis (aka Funktionentheorie):

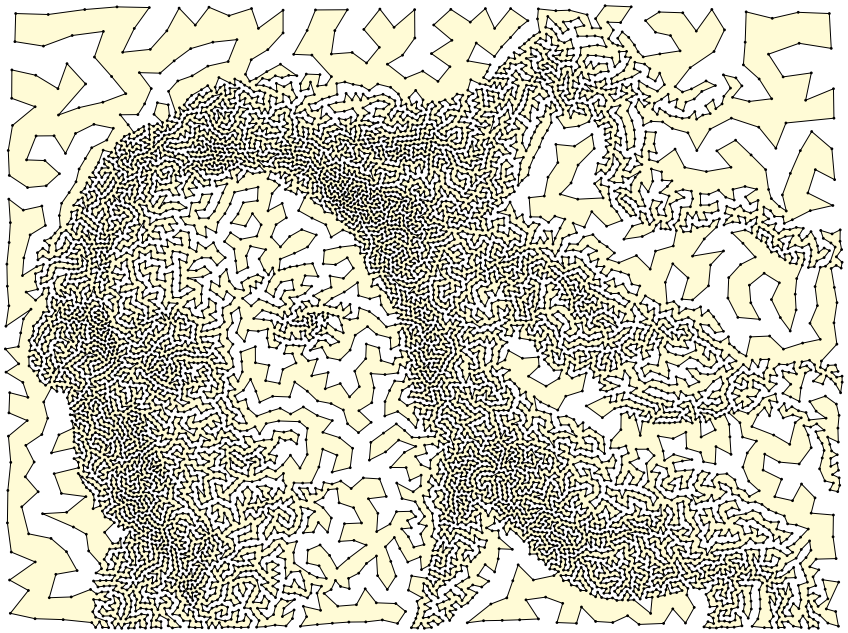
Satz J2B: Riemann–Carathéodory Abbildungssatz

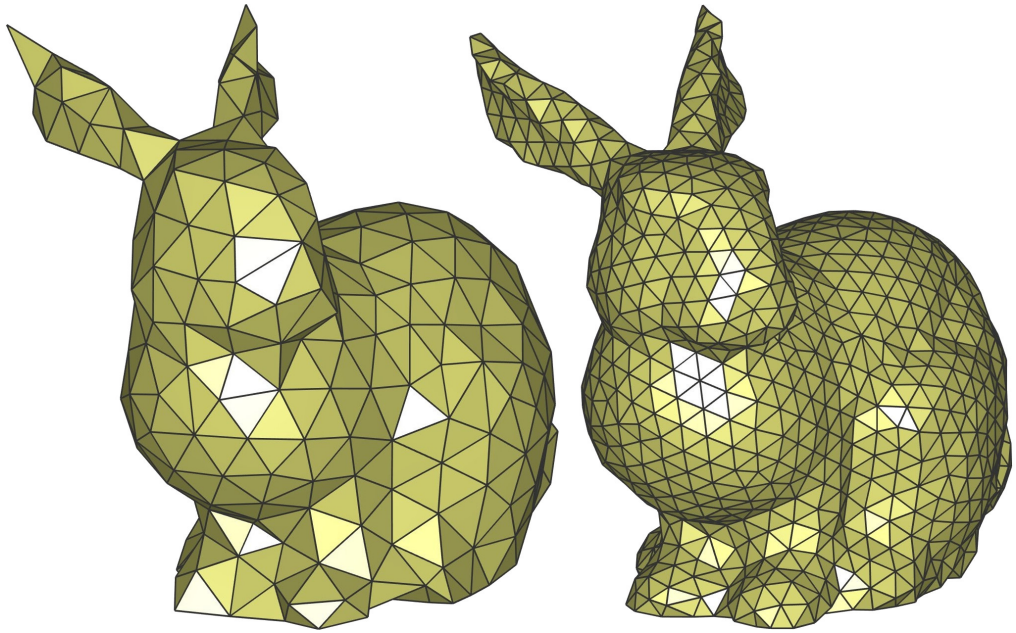
In obiger Situation existiert eine komplexe Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, die auf ganz $\mathbb{D}^2$ konvergiert und einen Homöomorphismus $g : \mathbb{D}^2 \rightarrow\!\!\!\!\!\sim\; \overline{B}$ stiftet sowie einen biholomorphen Diffeomorphismus $g : \mathbb{B}^2 \rightarrow\!\!\!\!\!\sim\; B$.

Der Satz von Jordan und Schoenflies

Wir arbeiten im Folgenden polygonal statt nur stetig oder stückw. glatt.

☺ Das bedeutet stärkere Voraussetzungen und stärkere Folgerungen.





☺ Zu gegebenen Daten erhalten wir explizite Formeln und Algorithmen!
Das ist Grundlage aller graphischen Oberflächen (GUI, CAD, GIS, etc):
Jeder Mausklick, jedes *touch event* löst eine solche Berechnung aus!

☺ In Computergraphiken und Videospielen werden Objekte simplizial gespeichert und zur Darstellung auf die Bildebene projiziert; dabei müssen Überschneidungen erkannt und korrekt behandelt werden.

Der Satz von Jordan für polygonale Kurven

Satz J2D: Satz von Jordan für polygonale Kurven

Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in $\mathbb{R}^2$ ein einfach geschlossener Polygonzug.
Für die so beschriebene polygonale Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$ bedeutet das:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow[\text{einfach geschlossen}]{\gamma = |v_0 v_1 \dots v_n|} & \mathbb{R}^2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{inc}} \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow[\cong]{f} & C \end{array}$$

$$\begin{aligned} &C = [v_0, v_1] \cup \dots \cup [v_{n-1}, v_n] \subseteq \mathbb{R}^2, \\ &v_1, \dots, v_n = v_0 \text{ paarweise verschieden}, \\ &[v_0, v_1[, \dots, [v_{n-1}, v_n[\text{ paarweise disjunkt} \end{aligned}$$

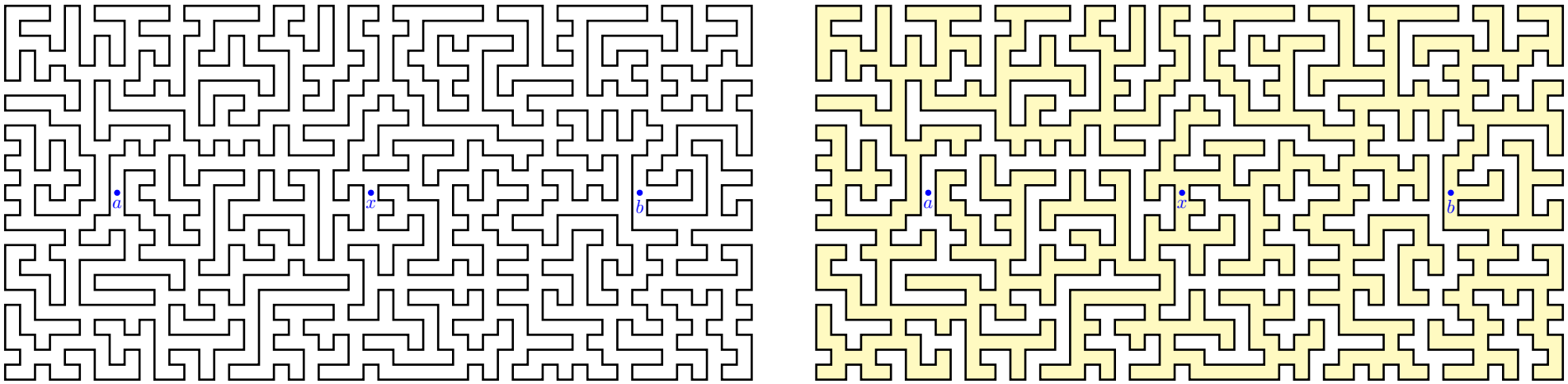
Dann zerfällt $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ in genau zwei Gebiete A und B, explizit

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \setminus C \,\middle|\, \deg_2(\gamma - x) = 0 \right\} \quad \text{unbeschränkt in } \mathbb{R}^2, \\ B &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \setminus C \,\middle|\, \deg_2(\gamma - x) = 1 \right\} \quad \text{beschränkt in } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Somit ist $\nu : \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \{0,1\} : [x] \mapsto \deg_2(\gamma - x)$ bijektiv, $A \mapsto 0$, $B \mapsto 1$.

Für den Rand gilt $\delta A = \delta B = C$, also $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$.

Der Satz von Jordan für polygonale Kurven



Beweis: Die Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt (F1J), da Bild von $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (F1O). Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ ist offen, somit lokal wegzshgd (G3A).

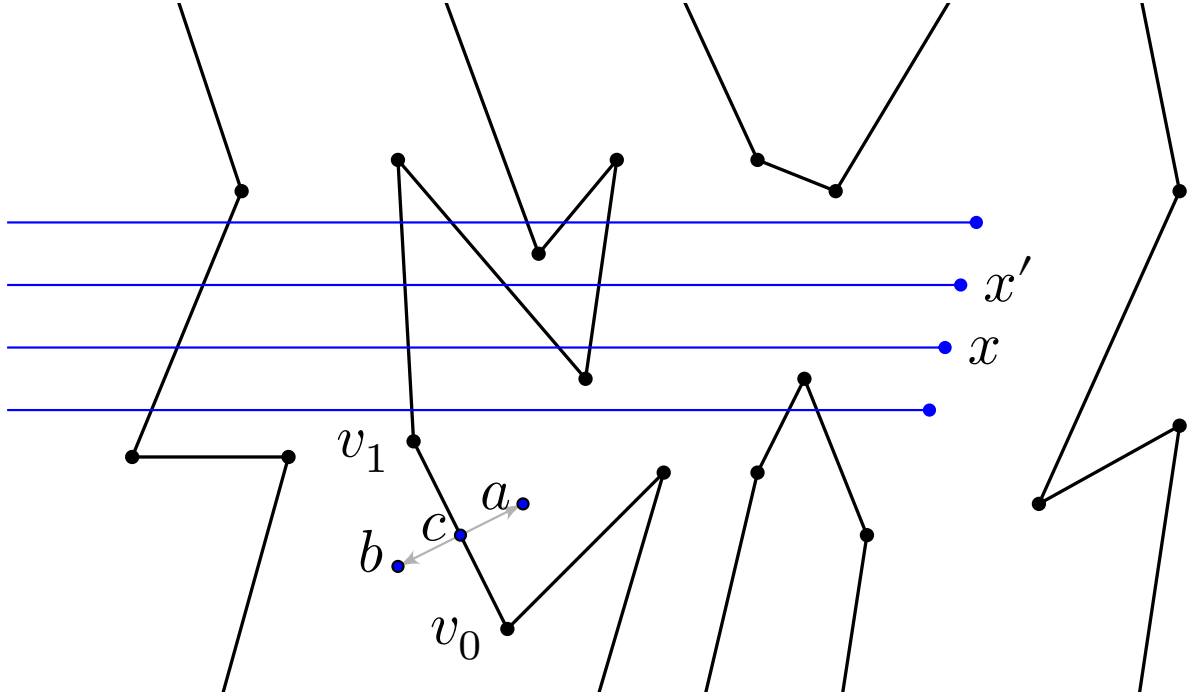
Somit ist $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ eine topologische Summe: Jede Komponente $U \in \pi_0(X)$ ist ein Gebiet, also offen und zusammenhängend (G3C).

Da C beschränkt ist, hat X genau eine unbeschränkte Komponente. Wir bestimmen nun explizit die Zerlegung $\pi_0(X)$. Dazu zeigen wir:

1. X hat mindestens zwei Komponenten A und B.
2. X hat höchstens zwei Komponenten.

☺ Der Beweis ist konstruktiv und liefert einen effizienten Algorithmus: Zu jedem Punkt $x \in X$ können wir berechnen, ob $x \in A$ oder $x \in B$ gilt.

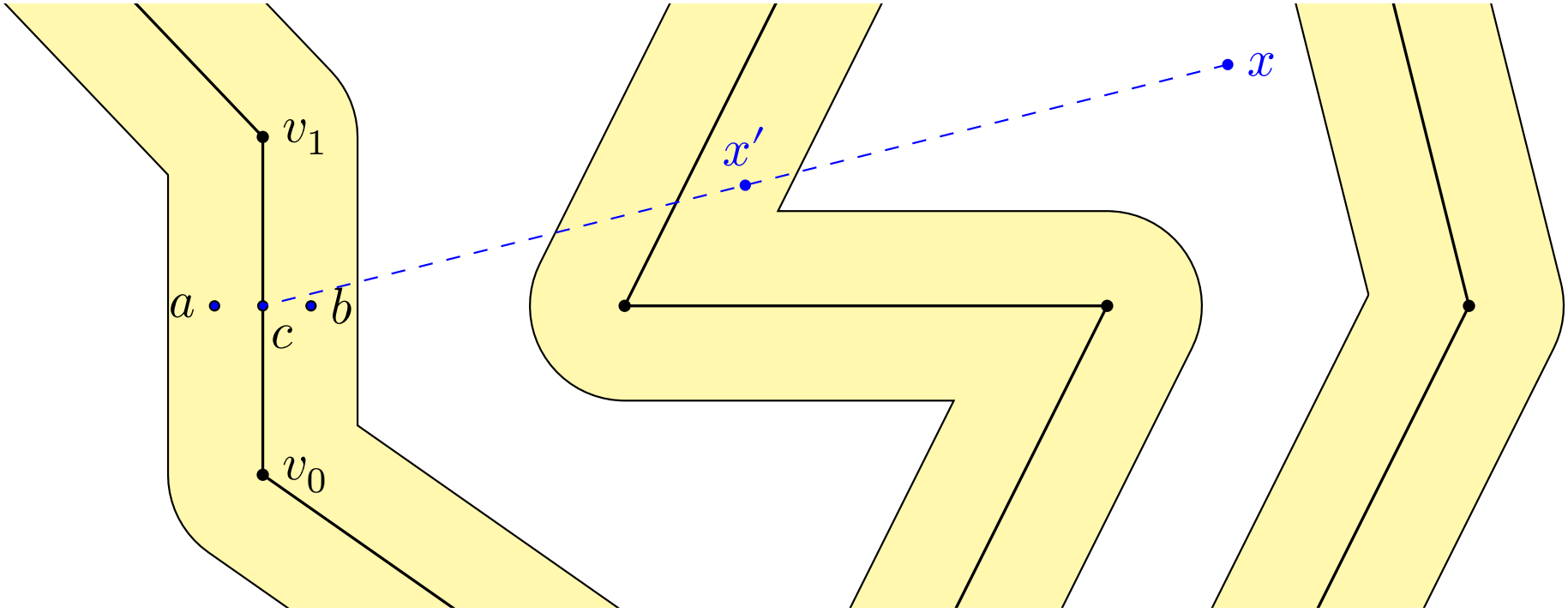
Der Satz von Jordan für polygonale Kurven



(1a) Wir haben $\nu : \pi_0(X) \to \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg(\gamma - x) \bmod 2$.
Elegante Begründung: Die Umlaufzahl ist homotopie-invariant! (J1J)
Alternativ nach obiger Skizze: $\deg(\gamma - x)$ ist lokal konstant auf X.

(1b) Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ hat mindestens zwei Komponenten:
Die Funktion ν ist surjektiv, da verschieden auf beiden Seiten jeder Kante:
Jeder Punkt $c \in C$ der Kurve berührt A und B. Wir wählen $c = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1$ und nahe Punkte $a, b \in X$ so, dass $\nu([a]) = 0$ und $\nu([b]) = 1$ gilt.

Der Satz von Jordan für polygonale Kurven



(2a) Um C legen wir einen engen Schlauch $U = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, C) \leq \varepsilon \,\}$. Dabei gilt $(U, C) \cong (\mathbb{S}^1 \times [-1, 1], \mathbb{S}^1 \times \{0\})$ oder $(U, C) \cong$ Möbius–Band.

(2b) Das Komplement $V = U \setminus C$ hat höchstens zwei Komponenten, nämlich $\pi_0(V) = \{\, [a]_V, [b]_V \,\}$: „Gehe immer an der Wand entlang.“

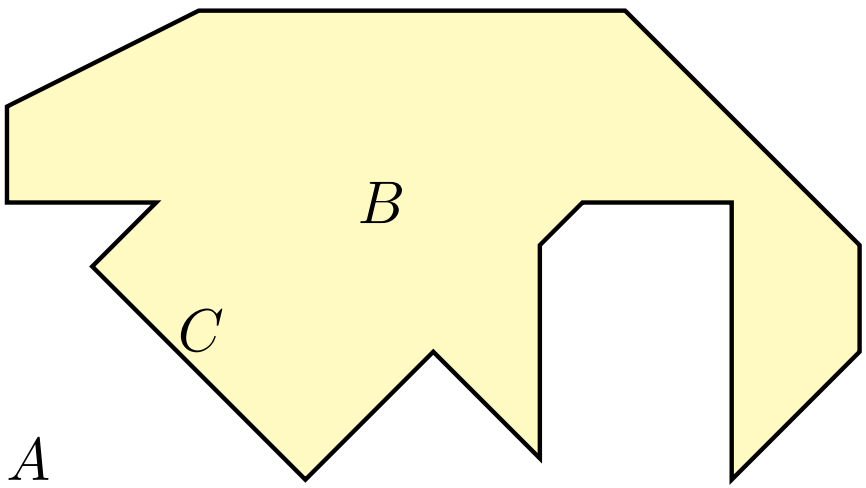
(2c) Das Komplement $X = \mathbb{R}^2 \setminus C$ hat höchstens zwei Komponenten, nämlich $\pi_0(X) = \{\, [a]_X, [b]_X \,\}$: „Gehe zur Wand, dann (2b).“ QED

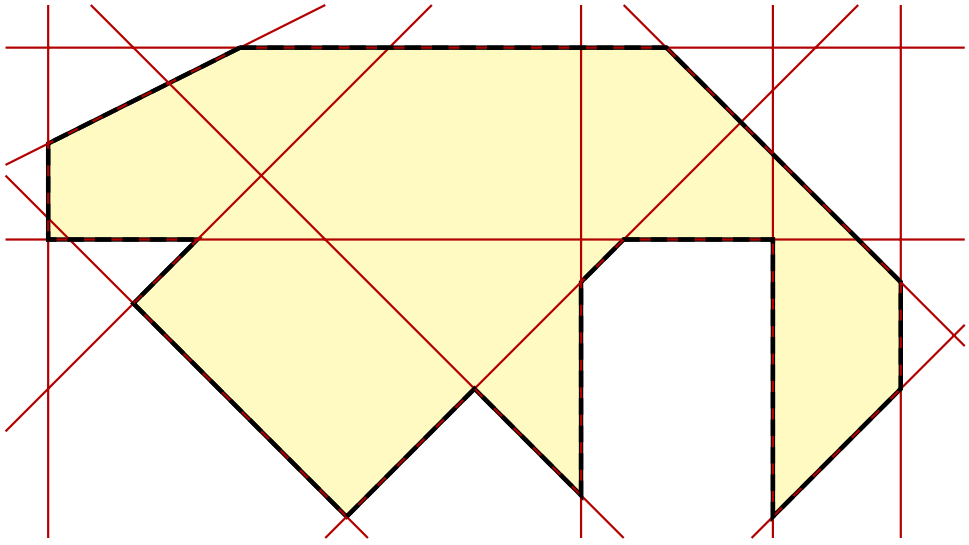
Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven

Wir nutzen weiterhin die obigen Bezeichnungen $\mathbb{R}^2 \setminus C = A \sqcup B$.

Lemma J2F: Triangulierung

Das Kompaktum $\overline{B} = B \cup C$ können wir affin triangulieren, $\overline{B} = |\mathcal{K}|$.

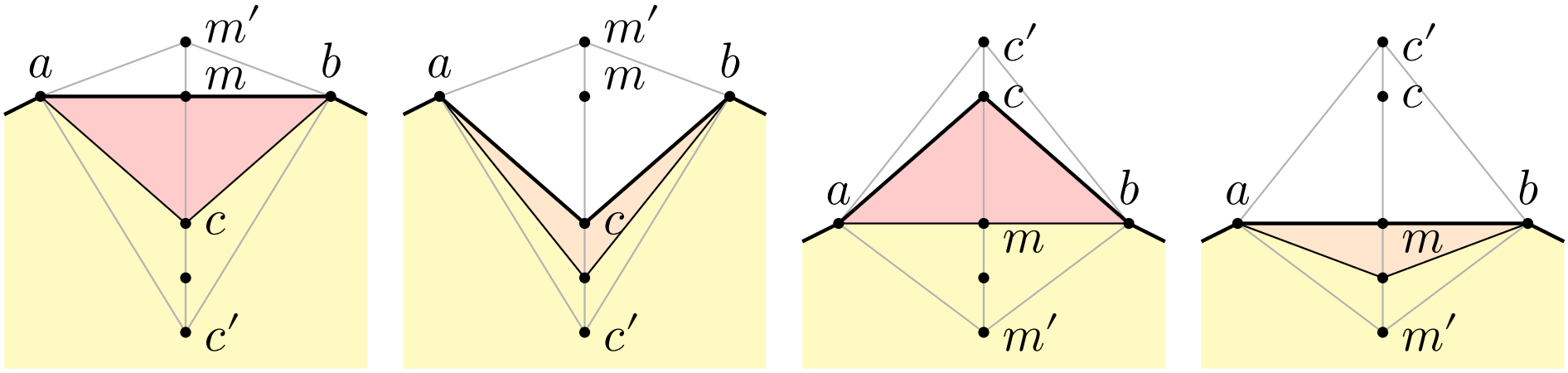




Beweis: Die Kanten definieren Geraden, diese zerlegen $\overline{B}$ polytopal, baryzentrische Unterteilung liefert eine simpliziale Zerlegung $\mathcal{K}$. QED

☺ Es geht auch sparsamer: Allein die Eckpunkte $v_0, v_1, \ldots, v_n$ genügen! Versuchen Sie es in konkreten Beispielen, allgemein siehe Übung J2K.

Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven



Definition J2G: einklappbares Dreieck

Wir nennen $\Delta \in \mathscr{K}_2$ ein **Randdreieck**, wenn mindestens eine Seite im Rand C liegt, und **einklappbar**, wenn $\Delta \cap C$ aus genau einer oder zwei Kanten besteht, also $\Delta = [a,b,c]$ mit $\Delta \cap C = [a,b]$ oder $[a,c] \cup [c,b]$.

Nicht einklappbar ist $\Delta \cap C = [a,b] \cup \{c\}$ oder $\Delta \cap C = [a,b] \cup [b,c] \cup [c,a]$.
Einklappbare Dreiecke können wir tatsächlich einklappen:

Lemma J2H: Dreiecke einklappen

Zu jedem einklappbaren Dreieck $\Delta \in \mathscr{K}_2$ existiert ein stückweise affiner Homöomorphismus $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $k(\overline{B}) = \overline{B \setminus \Delta} = |\mathscr{K}'|$ wie gezeigt.

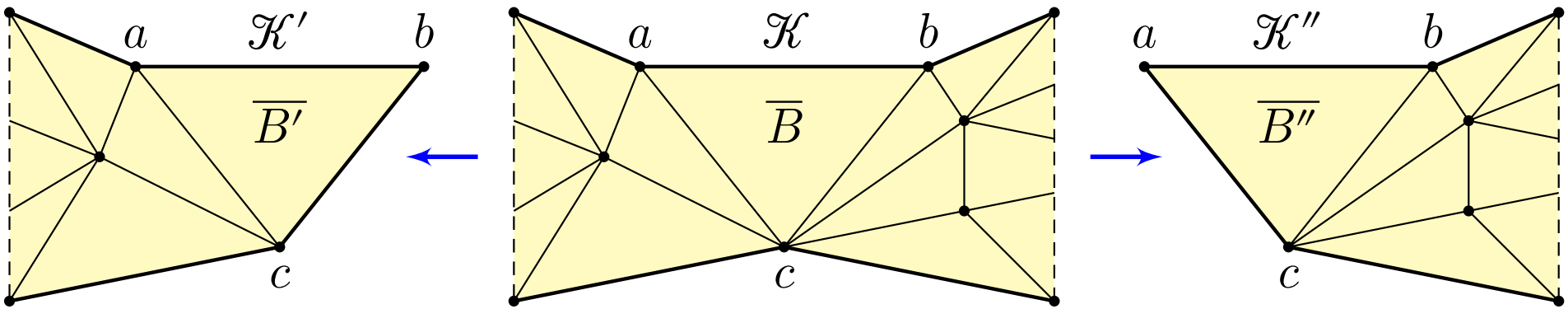
Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven

Lemma J2ı: Es gibt einklappbare Dreiecke.

Hat $\mathcal{K}$ mindestens zwei Dreiecke, so ist mindestens **eins** einklappbar.

Versuch: Wir führen Induktion über die Anzahl $n = \sharp\mathcal{K}_2$ der Dreiecke. Für $n = 2$ sind beide Dreiecke einklappbar. Sei also fortan $n \geq 3$.

Es gibt ein Randdreieck $\Delta \in \mathcal{K}_2$. Ist Δ einklappbar, so sind wir fertig. Andernfalls haben wir $\Delta = [a, b, c]$ mit $\Delta \cap C = [a, b] \cup \{c\}$:



Wir erhalten Jordan–Kurven C' und C'' sowie Triangulierungen $\mathcal{K}' \leq \mathcal{K}$ von $\overline{B'}$ und $\mathcal{K}'' \leq \mathcal{K}$ von $\overline{B''}$ mit $\mathcal{K}' \cap \mathcal{K}'' = \langle \Delta \rangle$ und $\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'' = \mathcal{K}$.

Nach Induktionsvoraussetzung existieren jeweils einklappbare Dreiecke $\Delta' \in \mathcal{K}'$ und $\Delta'' \in \mathcal{K}''$... schlimmstenfalls $\Delta = \Delta' = \Delta''$... ☹ Sackgasse!

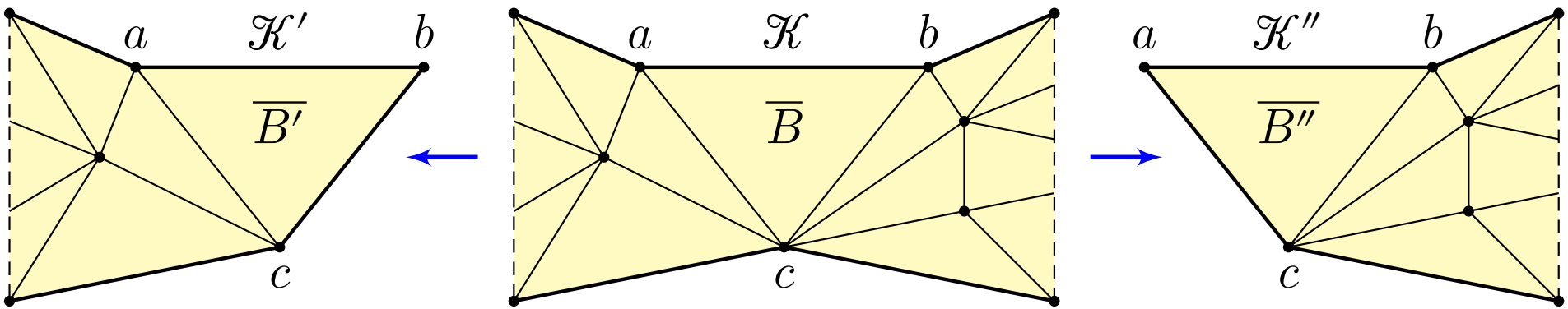
Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven

Lemma J2ı: Es gibt einklappbare Dreiecke.

Hat $\mathcal{K}$ mindestens zwei Dreiecke, so sind mindestens **zwei** einklappbar.

Beweis: Wir führen Induktion über die Anzahl $n = \sharp\mathcal{K}_2$ der Dreiecke. Für $n = 2$ sind beide Dreiecke einklappbar. Sei also fortan $n \geq 3$.

Es gibt mind. zwei Randdreiecke. Sind sie einklappbar, so sind wir fertig. Andernfalls haben wir $\Delta = [a, b, c]$ mit $\Delta \cap C = [a, b] \cup \{c\}$:



Wir erhalten Jordan–Kurven C' und C'' sowie Triangulierungen $\mathcal{K}' \leq \mathcal{K}$ von $\overline{B'}$ und $\mathcal{K}'' \leq \mathcal{K}$ von $\overline{B''}$ mit $\mathcal{K}' \cap \mathcal{K}'' = \langle \Delta \rangle$ und $\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'' = \mathcal{K}$.

Nach Induktionsvoraussetzung existieren jeweils einklappbare Dreiecke $\Delta' \in \mathcal{K}' \setminus \{\Delta\}$ und $\Delta'' \in \mathcal{K}'' \setminus \{\Delta\}$. Diese bleiben einklappbar in $\mathcal{K}$. QED

Inventor's paradox nach George Pólya

Die *stärkere* Aussage ist hier *einfacher* zu beweisen. Wie kann das sein?
Das ist bei vollständiger Induktion ein häufiges, ja typisches Phänomen!
George Pólya nannte dies treffenderweise das **inventor's paradox**:

The typical proposition A accessible to proof by mathematical induction has an infinity of cases $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. The case A_0 is often easy; at any rate, A_0 has to be handled by specific means. Once A_0 is established, we have to prove A_{n+1} assuming A_n.

A proposition A' stronger than A may be easier to prove than A.

In fact, let A' consist of the cases $A'_0, A'_1, A'_2, \dots, A'_n, \dots$. In passing from A to A' we make the burden of the proof heavier: we have to prove the stronger A'_{n+1} instead of A_{n+1}. Yet we make also the support of the proof stronger: we may use the more informative A'_n instead of A_n.

Lernen ist induktiv: Ihre Investition von gestern ist Ihr Ertrag von heute.
Ihre Investition von heute ist Ihr Ertrag von morgen. So geht es weiter…
Jetzt mehr zu leisten, erlaubt anschließend mehr zu nutzen, usw.

Inventor's paradox nach George Pólya

[I]n trying to devise a proof by mathematical induction,
you may fail for two opposite reasons.
You may fail because you try to prove too much:
[given A_n,] your A_{n+1} is too heavy a burden.
Yet you may also fail because you try to prove too little:
your A_n is too weak a support [to deduce A_{n+1}].

You have to balance the statement of your theorem
so that the support is just enough for the burden.

George Pólya, 1887–1985, *Mathematics and plausible reasoning, vol. I, Induction and analogy in mathematics*, 1954, p. 119

Wenn Sie eigenständig Induktionsbeweise führen, müssen Sie also
(1) die Behauptung $A(n)_{n\geq m}$ geeignet formulieren und ausbalancieren
(2) und damit anschließend den Induktionsbeweis sorgfältig ausführen.

Viele Übungsaufgaben verlangen nur (2), das ist leichter, aber künstlich.
Aufgabe (1) erfordert verzweigtes Erkunden und planvolles Probieren.
Für (1) benötigen Sie meist Kreativität, für (2) nur solides Handwerk.

Weniger ist mehr? Weniger ist schwer!

Ich *konnte* an dieser besonderen Gelegenheit nicht achtlos vorbeigehen,
ich *musste* Ihnen den ersten, erfolglosen Beweisversuch zeigen,
damit Sie den zweiten, erfolgreichen Beweis würdigen können.
Ich wünsche Ihnen ein lebenslang wirksames Aha!

In Ihrem Studium sehen und lösen Sie viele Aufgaben, von folgender künstlicher Form: „Zeigen Sie Aussage A_n per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.“
Wie Sie aus Ihrer Erfahrung wissen, kann das leicht oder schwer sein.
Immerhin wissen Sie sofort und genau, welche Aussage A_n zu zeigen ist.

In der Praxis stehen Sie vor einem zusätzlichen, natürlichen Problem:
Wenn Ihnen niemand die Aufgabe hilfreich entlastend vorformuliert,
dann müssen Sie sich selbst vortasten und irgendwann entscheiden:
Welche Aussagenfamilie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wollen Sie überhaupt zeigen?

Dasselbe gilt insgesamt für Ihr Studium: Solide Grundlagen kosten anfangs Mühe, doch dann tragen sie reiche Früchte. Das lohnt sich!
Leben allgemein ist ein Balanceakt zwischen Investition und Konsum.
Ihre Vorbereitung von heute ist Ihr Nutzen von morgen!

Weniger ist mehr? Weniger ist schwer!

Beispiel: Wir betrachten $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2 = 1/1 + 1/4 + 1/9 + \cdots + 1/n^2$. Beweisen Sie die Schranke $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Gelingt Induktion?

Erste Beweisversuche per Induktion schlagen fehl: Der Schritt misslingt. Es ist leichter, eine stärkere Aussage zu beweisen, etwa $s_n \leq 2 - 1/n$.

Beweis: Induktionsanfang: $s_1 = 1 \leq 2 - 1/1$. Induktionsschritt:

$$s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{n}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} = 2 - \frac{1}{n}$$

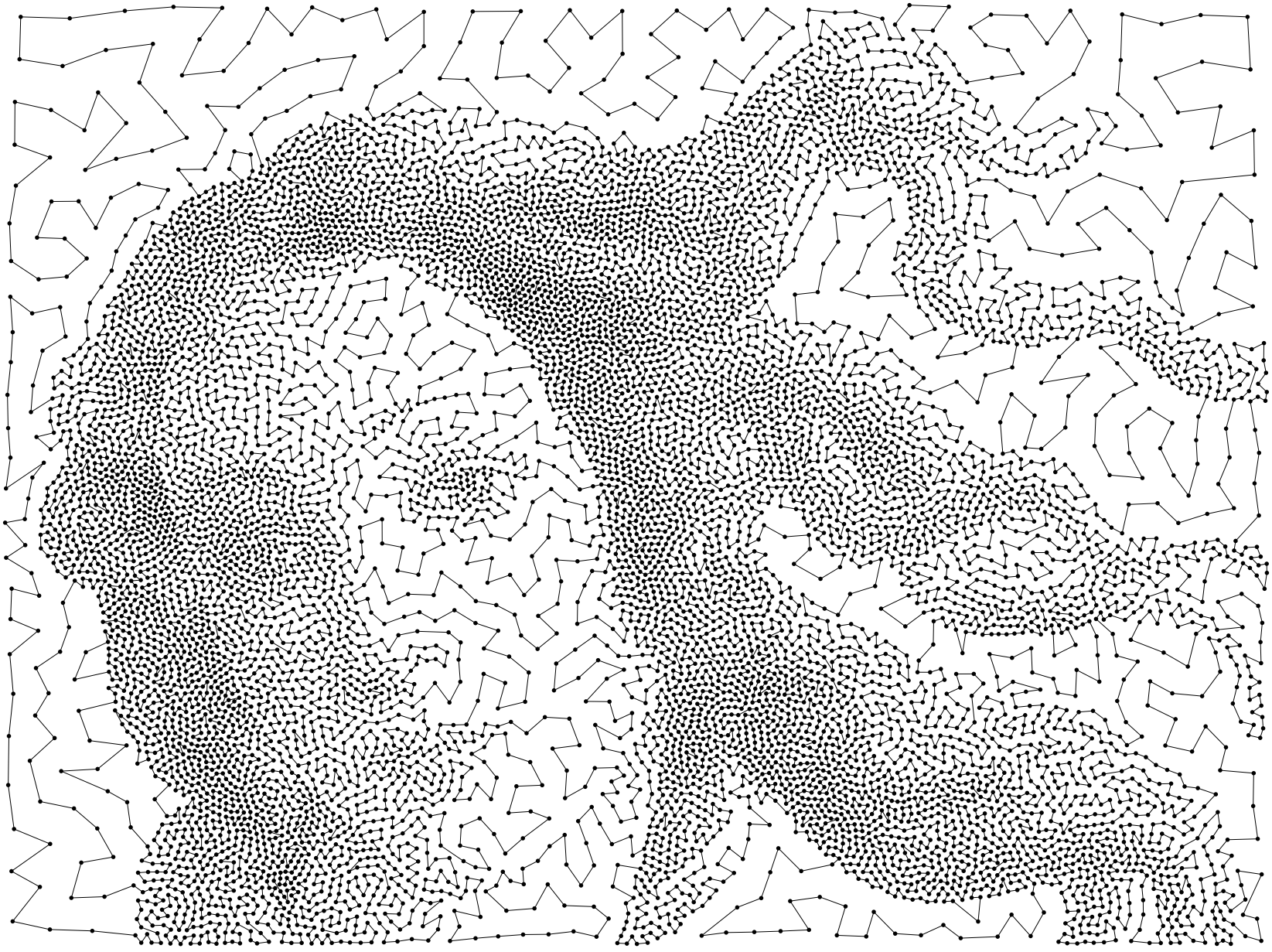
Alternative: Für alle $k \geq 2$ gilt $1/k^2 \leq 1/k(k-1) = 1/(k-1) - 1/k$, also $\sum_{k=2}^{n} 1/k^2 = \sum_{k=2}^{n} 1/(k-1) - 1/k = 1 - 1/n$ (Teleskopsumme).

Monotonie und oberer Schranke garantieren Konvergenz $s_n \nearrow s \in [1, 2]$. Es war lange ein berühmtes Problem, den Grenzwert s zu berechnen. Euler fand 1735 den richtigen Wert $s = \pi^2/6 = 1.64493\ldots$.

Das Problem der Balance entsteht nicht nur bei vollständiger Induktion, sondern bereits in endlichen Argumentationsketten und Rechnungen. Wir formulieren Übungsaufgaben daher wohlüberlegt und detailliert!

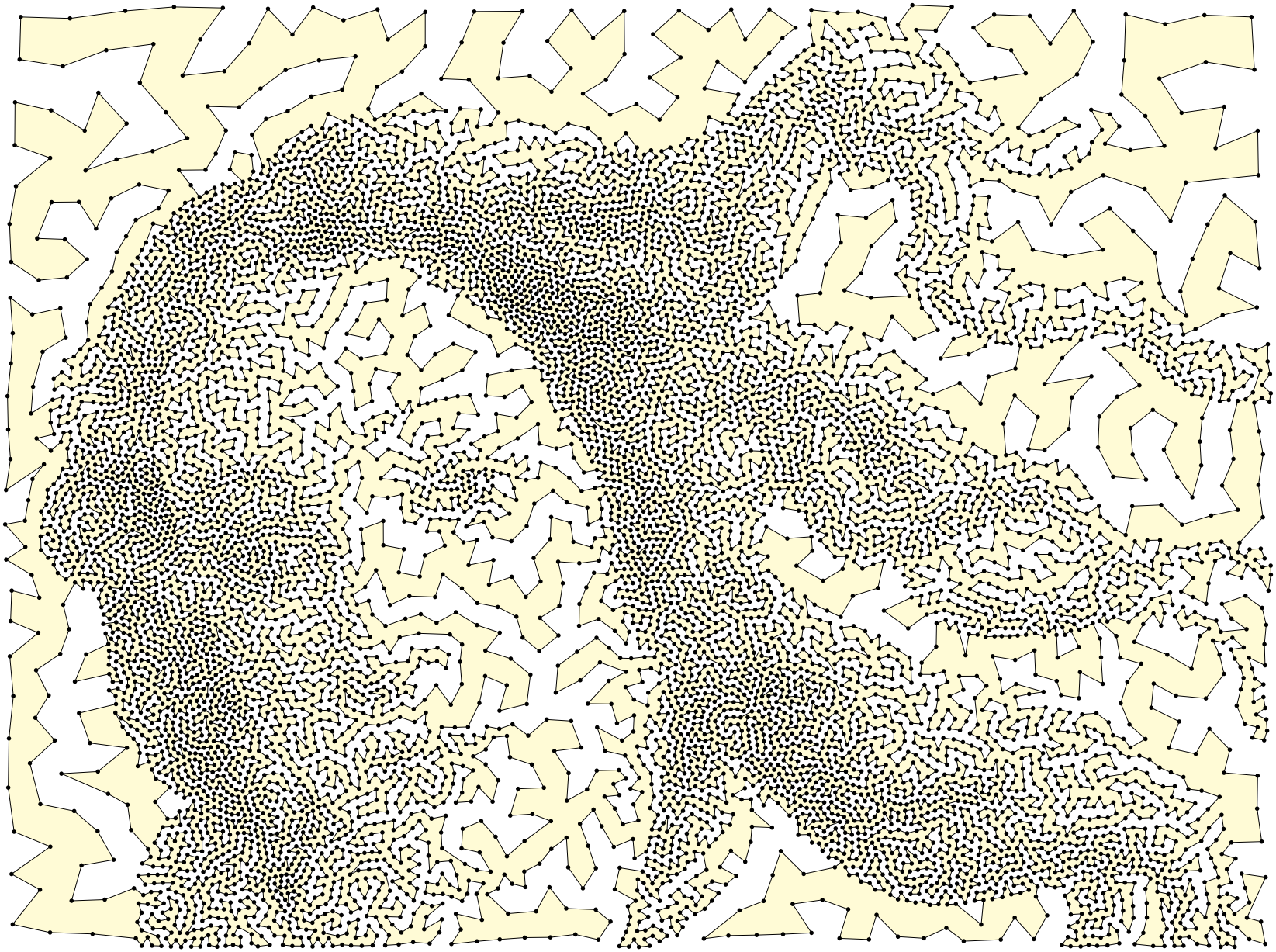
Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven

Jordan: Jede Kurve $\mathbb{S}^1 \cong C \subseteq \mathbb{R}^2$ trennt $\mathbb{R}^2$ in zwei Gebiete A und B.



Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven

Schoenflies: Das innere Gebiet ist homöomorph zu einer Kreisscheibe.



Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven

Satz J2J: Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven

(0) Für jede polygonale Kurve $\mathbb{S}^1 \cong C \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt $(\mathbb{R}^2, C) \cong (\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^1)$,
d.h. es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(C) = \mathbb{S}^1$.

(1) Genauer: Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C = A \sqcup B$ zerfällt in zwei Gebiete,
A unbeschränkt und B beschränkt, mit $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$.

Sei $\mathcal{K}$ eine affine Triangulierung von $\overline{B}$ und $D \in \mathcal{K}_2$ ein Dreieck.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung des Kompaktums $\overline{B \setminus D}$.

Dann existiert ein stückweiser affiner Homöomorphismus
$h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(\overline{B}) = D$ und Träger $\operatorname{supp}(h) \subseteq U$.

Beweis: (1) Induktion über $n = \sharp\mathcal{K}_2$: Für $n = 1$ genügt $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
Für $n \geq 2$ können wir ein Dreieck $\Delta \in \mathcal{K}_2 \setminus \{D\}$ einklappen (J2I) durch
einen stückweise affinen Homöomorphismus mit Träger in U (J2H).

(0) Dank (1) haben wir zunächst $h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $h(\overline{B}) = D$.
Radiale Projektion (F6G) liefert $k : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $k(D) = \mathbb{D}^2$.
Komposition ergibt $k \circ h : (\mathbb{R}^2, \overline{B}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^2, D) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^2, \mathbb{D}^2)$. QED

Der Satz von Schoenflies für polygonale Jordan–Kurven

🙂 Die genauere und ausführliche Formulierung (1) besagt anschaulich: Wir müssen in der Ebene nur so viel bewegen wie offensichtlich nötig, eine beliebig kleine offene Umgebung U genügt hierzu.

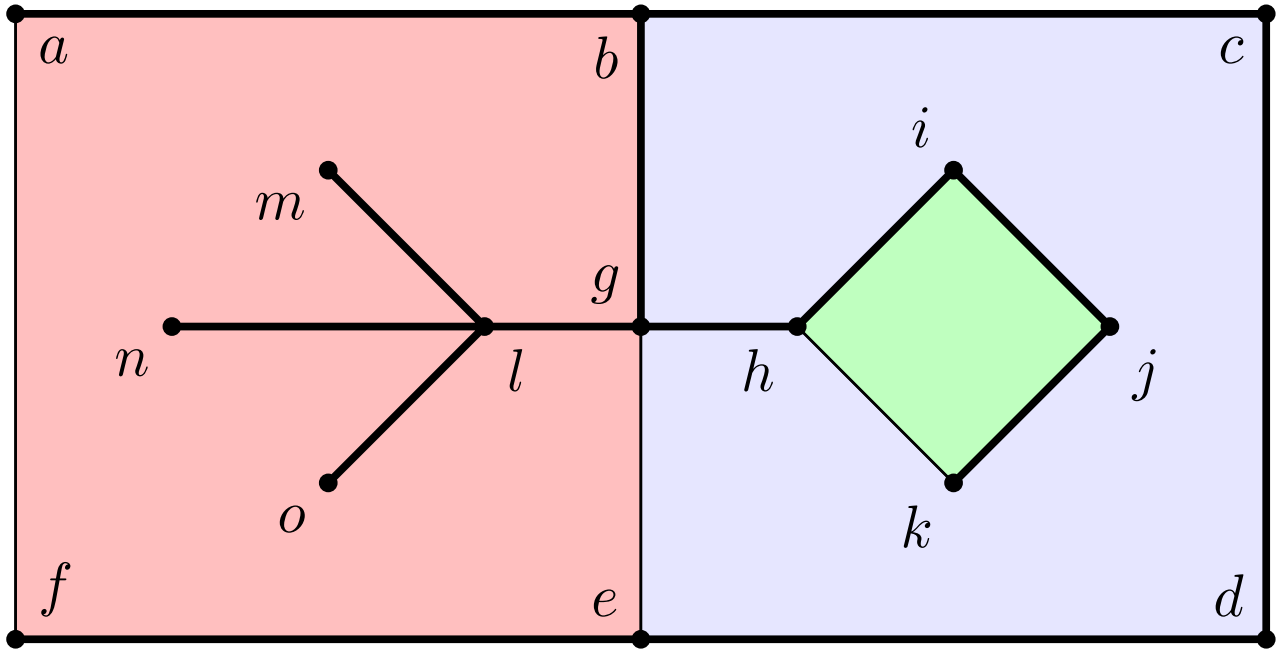
🙂 Der Satz von Jordan–Schoenflies gilt nicht nur für polygonale Einbettungen $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ sondern ganz allgemein für alle Einbettungen! Die beiden Sätze sind dann allerdings weit schwieriger zu beweisen.

Ich gehe hier den leichteren Weg und setze polygonale Einbettung $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ voraus. Daran können Sie die kombinatorisch-topologischen Grundideen gut erlernen und müssen sich im ersten Durchgang nicht mit technischen Schwierigkeiten belasten. Alles ist wunderbar explizit!

In der komplexen Analysis (aka Funktionentheorie) lernen Sie später den wunderbaren Riemannschen Abbildungssatz (J2B), der das Problem vollkommen allgemein und extrem elegant löst. Freuen Sie sich drauf!

Einstweilen arbeiten wir ganz elementar mit simplizialen Methoden.

Der Satz von Jordan–Schoenflies für polygonale Graphen



Sei $|K|$ in $\mathbb{R}^2$ ein simplizialer Graph, endlich und zusammenhängend.
Sei $T \leq K$ ein Spannbaum und $S = K \setminus T$ die zusätzlichen Kanten.
Dann besteht das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus |K|$ aus $1 + \sharp S$ Gebieten,
nämlich ein unbeschränktes und $\sharp S$ beschränkte Gebiete.

Für jedes beschränkte Gebiet $B \in \pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus |K|)$ gilt $B \cong \mathbb{B}^2$.
Weiterhin gilt $\delta B \subseteq C = |K|$, im Allgemeinen jedoch $\delta B \subsetneq C$.
Weiterhin gilt $\mathbb{D}^2 \twoheadrightarrow \overline{B}$, im Allgemeinen jedoch nicht $\mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} \overline{B}$.

Übung: Beweisen Sie diese Verallgemeinerung nach obigem Vorbild.

Lösung: Induktion über die Anzahl $n = \sharp S$ zusätzlicher Kanten.
Im Falle $n = 0$ ist K ein endlicher Baum und das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus |K|$ ist zusammenhängend: K hat Blätter, diese können wir einklappen.

Jede weitere Kante $s = \{a, b\} \in S$ läuft durch eine Gebiet U und trennt dieses in zwei. Höchstens zwei ist klar wie zuvor. Mindestens zwei dank Umlaufzahl: Es existiert ein Weg u von b nach a im Spannbaum T.
Somit ist $w = ab * u$ geschlossen. Die Umlaufzahl $\deg_2(\gamma - x)$ nimmt verschiedene Werte an auf beiden Seiten der Kante $[a, b]$.

Der Graph K hat $f_0 \geq 1$ Ecken und $f_1 = f_0 - 1 + \sharp S$ Kanten.
Zusammen mit $f_2 = 1 + \sharp S$ Gebieten erhalten wir $f_0 - f_1 + f_2 = 2$.
☺ Das ist genau die Euler–Charakteristik der Sphäre, $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

Die Schoenflies–Konstruktion verläuft wie zuvor, aber trickreicher:
Wir erhalten $\mathbb{D}^2 \twoheadrightarrow \overline{B}$, allerdings mit Identifizierungen am Rand.
Das genügt für einen Homöomorphismus $\mathbb{B}^2 \simeq B$ im Inneren.

📖 H. Rademacher, O. Toeplitz: *Von Zahlen und Figuren.* Springer 1933

[…] stellen wir uns vor, die Figur bedeute […] ein System von Äckern, die Grenzen seien Deiche, die sie voneinander trennen, im äußeren Gebiete rundherum fließe Wasser, und nun solle Deich nach Deich so niedergelegt werden, daß der Reihe nach alle Äcker unter Wasser kommen. Dazu braucht man durchaus nicht alle Deiche niederzulegen; vielmehr soll es vermieden werden, irgendeinen Deich zu öffnen, der bereits von beiden Seiten bespült ist; jeweils sollen nur solche Deiche eingerissen werden, die auf der einen Seite bespült sind, auf der anderen noch nicht, so daß sie wirklich jedesmal einen neuen Acker erschließen. Es ist klar, daß man jedenfalls $f-1$ Deiche niederlegen muß, um alle die $f-1$ Äcker, die außer dem Außengebiet vorhanden sind, zu bewässern. Es ist aber auch klar, daß der Prozeß tatsächlich fortgeführt werden kann, so lange noch irgendein Acker unbewässert ist, also bis alle $f-1$ Äcker bewässert sind; der Prozeß kann also nicht enden, ehe volle $f-1$ Deiche niedergelegt sind.
Die Zahl der niedergelegten Deiche ist daher genau $f-1$.

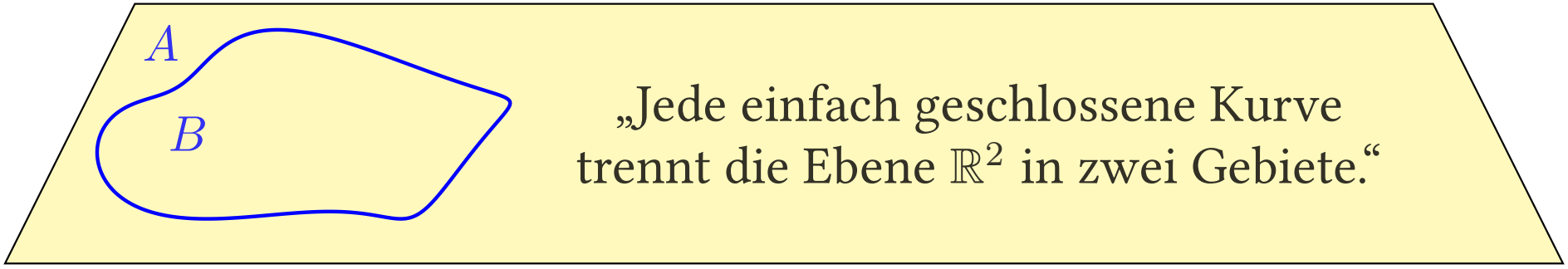
Der Satz von Jordan–Schoenflies für polygonale Graphen

Das ist höchst erstaunlich: Nicht die genauen Lagedaten, sondern allein die recht groben topologischen Eigenschaften des Graphen $|K| \subseteq \mathbb{R}^2$ bestimmen die Anzahl der Komponenten des Komplements $\mathbb{R}^2 \setminus |K|$.
Hat der Graph $|K| \subseteq \mathbb{R}^2$ die Euler–Charakteristik $\chi(K) = 1 - \sharp S$,
so hat das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus |K|$ genau $1 + \sharp S$ Komponenten.
In der Summe erhalten wir $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ für $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Wir sehen die Anfänge einer bemerkenswerten Dualität! In schönster Allgemeinheit ist dies die Poincaré–Alexander–Lefschetz–Dualität zwischen Homologie und Cohomologie in der Algebraischen Topologie.
Dies konnten wir oben recht leicht per Induktion über $\sharp S$ beweisen.
Zur Vereinfachungen nutzen wir zwei wesentliche Einschränkungen:
$|K| \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein endlicher Graph und zudem affin-linear eingebettet.

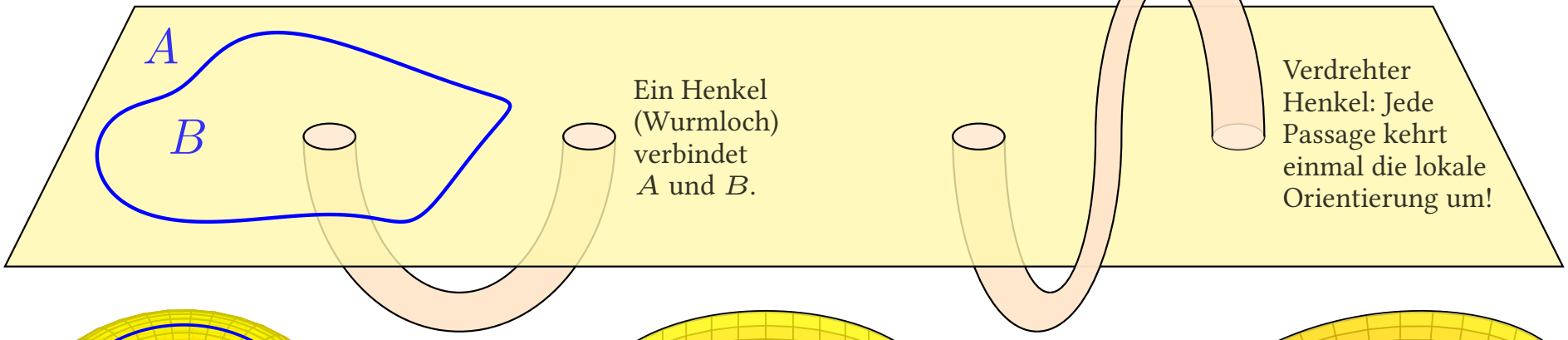
Übung: Sei K in $\mathbb{R}^2$ ein lokal-endlicher zusammenhängender Graph.
Erklären Sie eine Bijektion zwischen den Kanten $S = K \setminus T$ und den beschränkten Komponenten $B \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus |K|$, sowohl allgemein als auch an konkreten Beispielen wie $|K| = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{R}^2$.

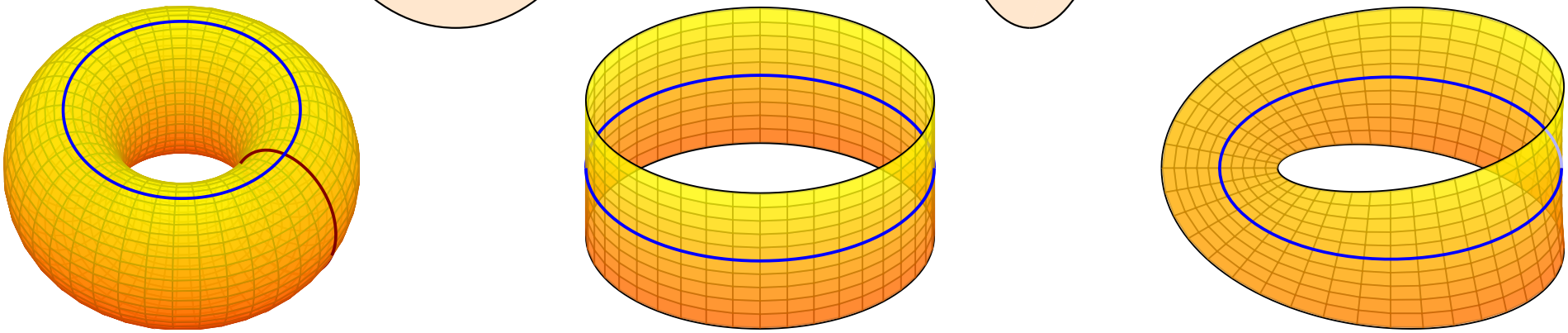
Trennungseigenschaften und Geschlecht von Flächen



„Jede einfach geschlossene Kurve trennt die Ebene $\mathbb{R}^2$ in zwei Gebiete.“

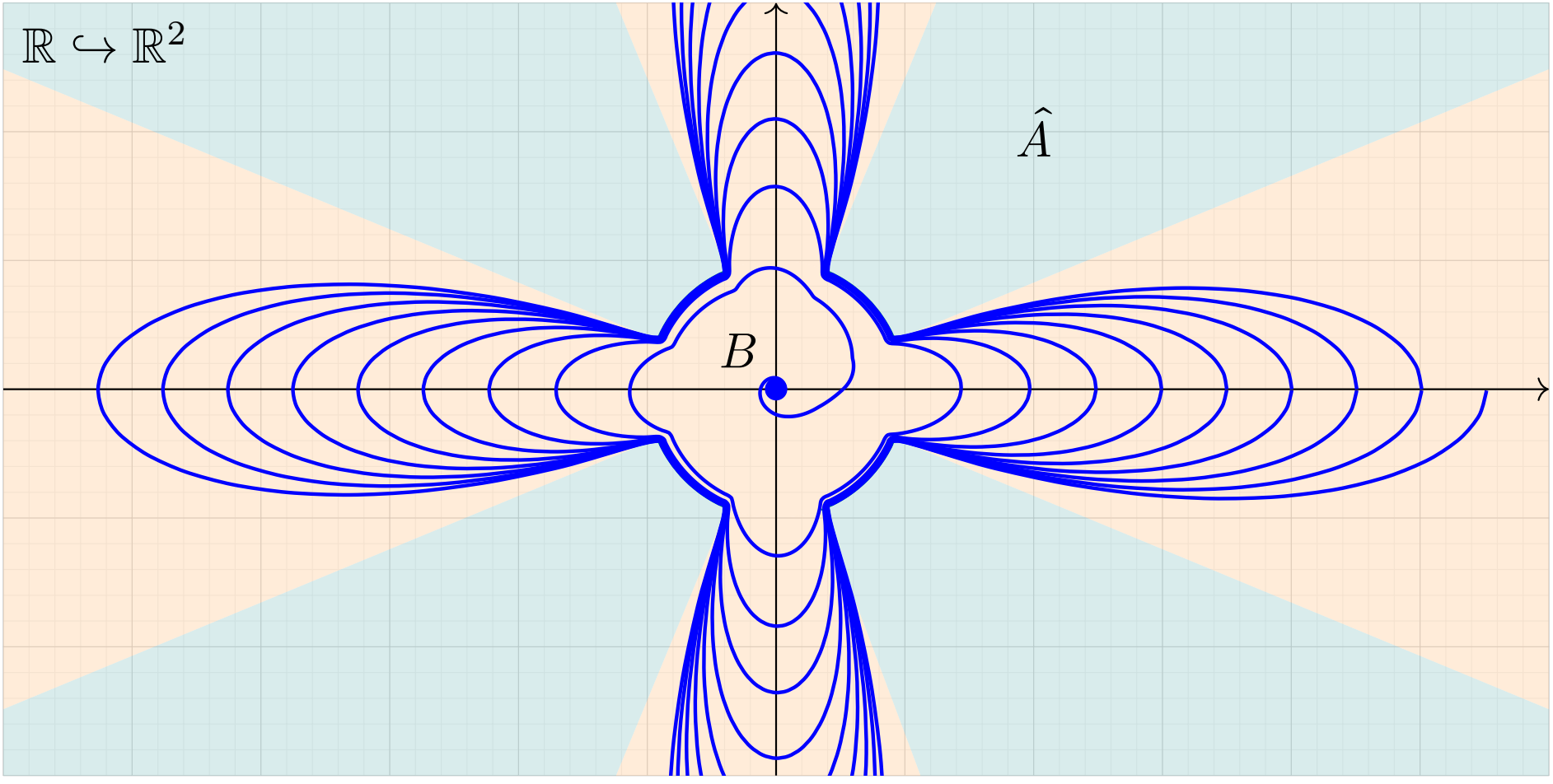
Das ist eine Besonderheit der Fläche $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{S}^2$!





Übung: Welche der Flächen $X = F^+_{g,r}$ haben die Jordan–Eigenschaft?

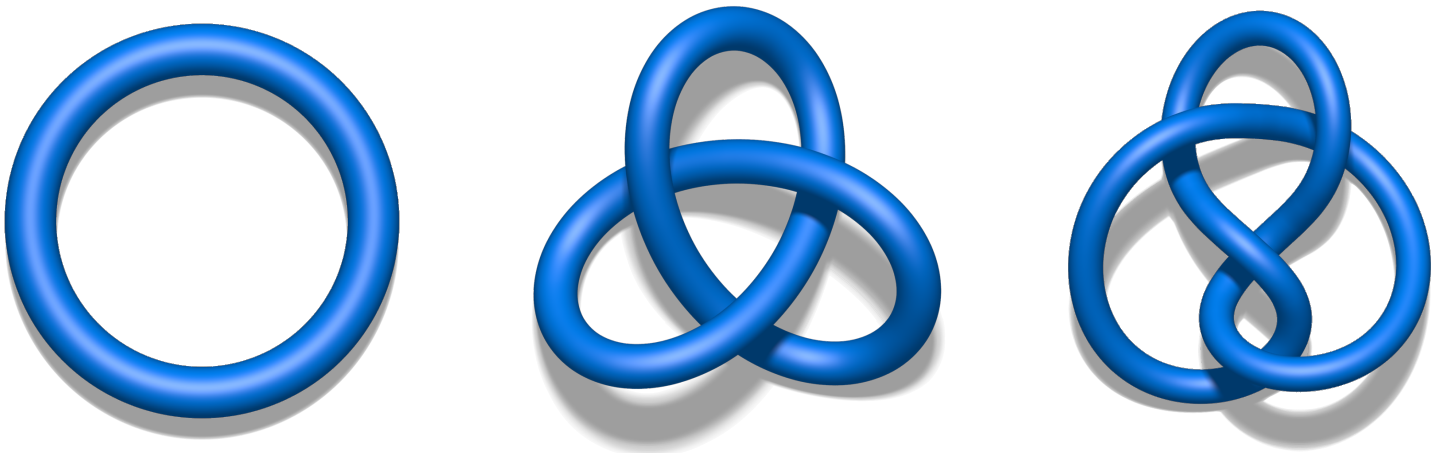
Cantors Karussel $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$



🙂 Jede Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ trennt die Ebene in genau zwei Gebiete.
⚠ Für Einbettungen $g : \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ hingegen kann das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus g(\mathbb{R}^1)$ beliebig viele Wegkomponenten haben, etwa $1, 2, 3, \ldots$ sogar überabzählbar viele, siehe Cantors Karussell G2T.

Verknotete Einbettungen $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$

$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$



Knoten

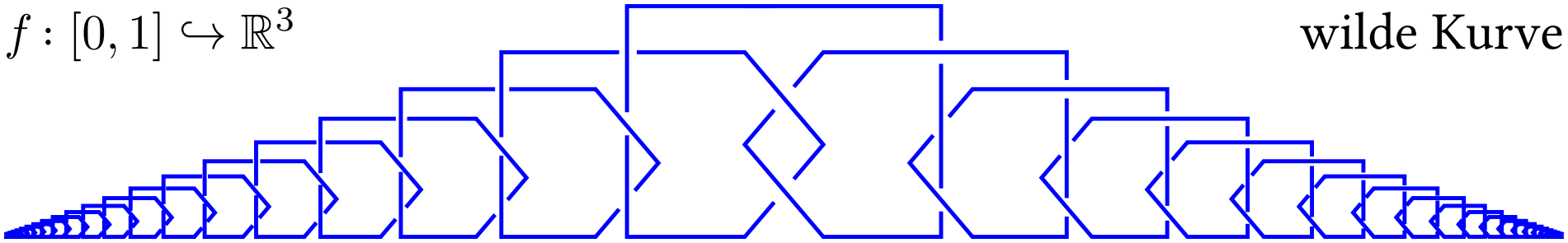
Seien C und V topologische Räume, etwa $C = \mathbb{D}^k, \mathbb{S}^k, \ldots$ und $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$. Wir betrachten Einbettungen $f_0, f_1 : C \hookrightarrow V$. Ihre Bilder $C_0 = f_0(C)$ und $C_1 = f_1(C)$ sind homöomorph, können aber verschieden in V liegen:

(a) Haben $X_0 = V \setminus C_0$ und $X_1 = V \setminus C_1$ gleich viele Komponenten?
(b) Existiert ein Homöomorphismus $V \setminus C_0 \cong V \setminus C_1$ der Komplemente?
(c) Existiert ein Homöomorphismus $(V, C_0) \cong (V, C_1)$ der Raumpaare?

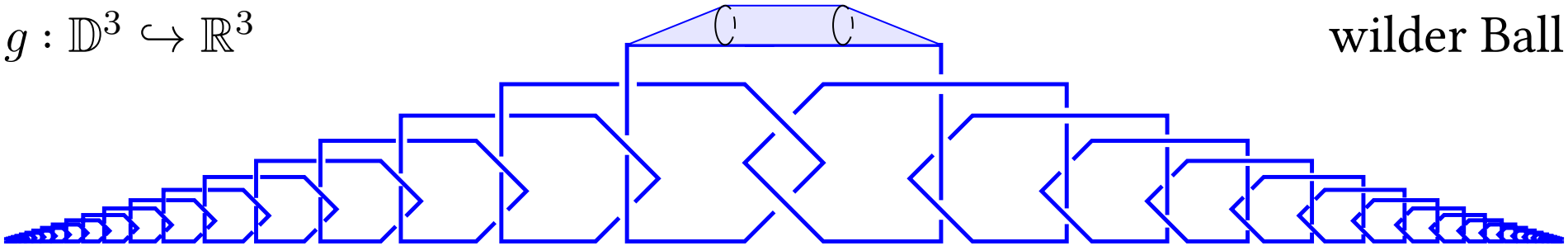
Hier gilt (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Für $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ gilt (c) dank Jordan–Schoenflies. Für die oben gezeigten Knoten $f_0, f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ sind die Komplemente nicht homöomorph, sie haben nicht-isomorphe Fundamentalgruppen π_1. Die Knotentheorie ist ein aktives mathematisches Forschungsgebiet.

Artin–Fox: wilde Kurve $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

$f : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ wilde Kurve



$g : \mathbb{D}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ wilder Ball



📖 R.H. Fox, E. Artin: *Some wild cells and spheres in three-dimensional space.* Ann. of Math. 49 (1948) 979–990. Ich zitiere die obigen Monster. Das Komplement $X = \mathbb{S}^3 \setminus f([0,1])$ ist nicht zusammenziehbar, denn $\pi_1(X) \neq \{1\}$. Gleiches gilt für das Äußere der Aufdickung $g : \mathbb{D}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Verdopplung dieser Konstruktion liefert eine beidseitig wilde Einbettung $h : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ mit $\pi_0(\mathbb{S}^3 \setminus h(\mathbb{S}^2)) = \{A, B\}$, aber $A \not\cong \mathbb{B}^3 \not\cong B$. Schoenflies gilt nicht für wilde Einbettungen $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, nur für zahme, etwa glatte.

Der Jordansche Nicht-Trennungssatz

Satz J2R: Nicht-Trennungssatz

Für jede einfache Kurve $[0,1] \cong C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $n \geq 2$ gilt:

1. Das Komplement $A = \mathbb{R}^n \setminus C$ ist wegzusammenhängend.
2. Der Rand des Komplements $\mathbb{R}^n \setminus C$ in $\mathbb{R}^n$ ist die Menge C.

In kleiner Dimension $n \leq 2$ oder für polygonale Kurven C gilt stärker:

3. Es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \setminus C \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
4. Es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(C) = [0,1]$.

Die Schwierigkeit dieses Satzes liegt in der schwachen Voraussetzung: Zwar ist der Teilraum $C \cong [0,1]$ sehr einfach, aber er kann kompliziert im Raum $\mathbb{R}^n$ liegen, etwa wie obige Artin–Fox–Kurve. Wir denken auch an Osgood–Kurven $C \subseteq \mathbb{R}^2$ (C6H) mit positivem Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(C) > 0$.

Übung: Beweisen Sie Satz J2R, beginnend mit (4), für polygonale Kurven $C = [v_0, v_1] \cup \cdots \cup [v_{\ell-1}, v_\ell]$ per Induktion über die Länge $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Der Jordansche Nicht-Trennungssatz

Satz J2T: der Jordansche Nicht-Trennungssatz

Für jede Einbettung $f : [0,1]^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Im} f$ wegzusammenhängend.

Für die Topologie der Ebene interessiert uns zunächst $n = 2$, und hier insbesondere Einbettungen $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Der Beweis verläuft jedoch in allen Dimensionen gleich, daher formuliere ich ihn hier allgemein. Als Hilfsmittel benötigen wir folgendes Ergebnis, auf das ich hier vorgreife:

Lemma J4E:

Es gibt keine stetige Retraktion $r : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ des Balls auf seinen Rand.

Für $n = 1$ genügt der Zwischenwertsatz, für $n = 2$ die Umlaufzahl:

Beweis: Die Inklusion $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2 : s \mapsto s$ ist zusammenziehbar vermöge $H : \iota \simeq *$ mit $H(t,s) = (1-t)s$. Gäbe es $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so folgt $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1} = r \circ \iota \simeq \mathrm{const}$. Dies widerspricht der Homotopie-Invarianz der Umlaufzahl J1J, denn $\deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}) = 1$ aber $\deg(\mathrm{const}) = 0$. QED

Der Jordansche Nicht-Trennungssatz

Beweis des Satzes: Die Bildmenge $C = f([0,1]^k) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt (F1J), demnach in $\mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen dank Heine–Borel (F1O). Wir wenden Tietzes Fortsetzungssatz an (E5L): Die stetige Abbildung $g = f^{-1} : C \to [0,1]^k$ erlaubt eine stetige Fortsetzung $G : \mathbb{R}^n \to [0,1]^k$. Wir erhalten eine Retraktion $q := f \circ G : \mathbb{R}^n \to C$, denn $q|_C = \mathrm{id}_C$.

Das Komplement $X = \mathbb{R}^n \setminus C$ ist offen, somit lokal wegzshgd, daher ist $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ topologische Summe von Gebieten (G3C). Sei $A \in \pi_0(X)$ die unbeschränkte und B die Vereinigung aller anderen Komponenten. Es gilt $\overline{A} \subseteq A \cup C$ und $\overline{B} \subseteq B \cup C$, also $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq C$. Wir verkleben (E1P)

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in \overline{A} \cup C, \\ q(x) & \text{für } x \in \overline{B}. \end{cases}$$

Angenommen, es existierte ein Punkt $b \in B$. Nach Verschieben sei $b = 0$, nach Stauchen zudem $C \subseteq \mathbb{B}^n$. Wegen $0 \notin \mathrm{Im}(h)$ ist $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $r(x) = h(x)/|h(x)|$ wohldefiniert und stetig. Zudem gilt $r(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq A$. Diese Retraktion widerspricht Lemma J4E. QED

Der Jordansche Nicht-Trennungssatz

Einbettungen $[0,1]^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ können erschreckend kompliziert sein, wie zum Beispiel Osgood–Kurven $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ mit positiven Flächeninhalt oder Artin–Fox–Kurven $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ mit verknotetem Komplement.
Ein möglichst großes Beispielrepertoire schult unsere Anschauung.

Jedoch trennt keine noch so komplizierte Einbettung $f : [0,1]^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ den Raum, das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Im} f$ bleibt wegzusammenhängend! Diese Tatsache mag anschaulich plausibel sein, doch obige Beispiele lassen an der Verlässlichkeit unserer topologischen Intuition zweifeln.

Zum Glück müssen wir uns nicht allein auf unsere Intuition verlassen, wir können diesen Satz beweisen, und sogar vergleichsweise leicht.
Das verdanken wir unseren starken Werkzeugen aus der analytischen Topologie (Heine–Borel, Tietze, Verklebesatz, …) und ersten Werkzeugen der algebraischen Topologie (hier Umlaufzahl, Abbildungsgrad, …).

Die Beweisidee ist raffiniert, doch die Ausführung gelingt nun leicht.
Die obigen Beispiele zeigen, dass es nicht noch leichter gelingen kann.

Der Jordansche Trennungssatz

Der Jordansche Trennungssatz ist wunderbar einfach und übersichtlich für polygonale Kurven (J2D). Wir beweisen nun den allgemeinen Fall.

Satz J2v: Jordanscher Trennungssatz

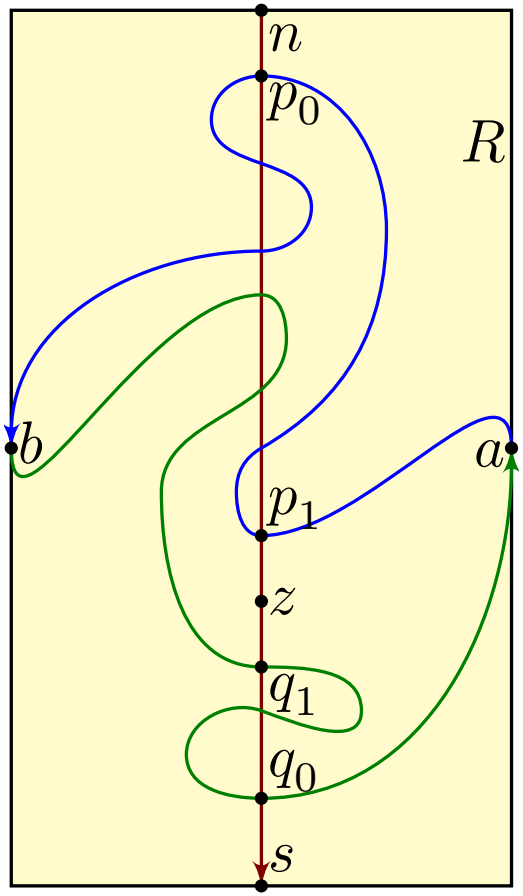
(1) Für jede Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \rightarrowtail C \subseteq \mathbb{R}^2$ zerfällt das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C = A \sqcup B$ in zwei Gebiete, A unbeschränkt, B beschränkt.

(2) Wir haben $\pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus C) = \{A, B\} \xrightarrow{\sim} \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg(f - x) \bmod 2$.

(3) Für den Rand gilt $\delta A = \delta B = C$, also $\overline{A} = A \cup C$ und $\overline{B} = B \cup C$.

Beweis: (0) Die Abstandsfunktion $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto |f(s_1) - f(s_2)|$ ist stetig. Da $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ kompakt ist, nimmt sie ihr Maximum an: Es gibt $s_1, s_2 \in \mathbb{S}^1$ sodass $a = f(s_1)$ und $b = f(s_2)$ maximalen Abstand haben, kurz $|a - b| = \operatorname{diam}(C)$. Nach Umparametrisierung von $\mathbb{S}^1$ können wir $s_1 = 1$ und $s_2 = -1$ annehmen. Nach Drehung und Skalierung und Verschiebung von $\mathbb{R}^2$ können wir $a = (1, 0)$ und $b = (-1, 0)$ annehmen. Damit liegt C im Rechteck $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ und $\partial R \cap C = \{a, b\}$.

Der Jordansche Trennungssatz



Nach dieser Vorbereitung vereinbaren wir:

Der Weg $\alpha : [0,1] \xrightarrow{\sim} C_+ : t \mapsto f(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t})$ führt von a nach b längs des oberen Halbkreises, der Weg $\beta : [0,1] \xrightarrow{\sim} C_- : t \mapsto f(-\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t})$ von b zurück nach a längs des unteren Halbkreises. Vom „Nordpol“ $n = (0,2)$ zum „Südpol“ $s = (0,-2)$ führt der Weg $\gamma : [0,1] \xrightarrow{\sim} [n,s]$ mit $\gamma(t) = (1-t)n + ts$ und schneidet sowohl α als auch β (ZWS).

Wir können annehmen, dass γ zuerst α schneidet, andernfalls ersetzen wir $f : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} C$ durch $f \circ \mathrm{conj}$.

Sei p_0 der erste und p_1 der letzte Schnittpunkt von γ mit α; eventuell gilt $p_0 = p_1$. Nach p_1 muss γ noch β schneiden: Andernfalls führt der Weg $np_0 \underline{\alpha} p_1 s$ von n nach s, ohne β zu schneiden, im Widerspruch zu J1x. Nach p_1 sei q_1 der erste und q_0 der letzte Schnittpunkt von γ mit β; eventuell gilt $q_0 = q_1$. Sei $z = (p_1 + q_1)/2$ der Mittelpunkt.

Der Jordansche Trennungssatz

(2a) Wir berechnen $\deg(f - z) = 1$. Zunächst approximieren wir den Weg $np_0 \underline{\alpha} p_1 z$ im Komplement von $[z, s]$ und β durch einen Polygonzug $w = np_0 \ldots p_1 z$ in R. Falls nötig machen wir $|w|$ doppelpunktfrei, indem wir an jedem Doppelpunkt die unnötige Schleife abschneiden. Nach dem polygonalen Jordan–Satz (J2D) zerlegt $\gamma^* = |w * zs|$ das Rechteck R in zwei Komponenten. Wir approximieren β im Komplement von $|w|$ polygonal durch β^*. Der Weg β^* überschreitet γ^* ungeradzahlig oft, und zwar ausschließlich über $[z, s]$. Das zeigt $\deg(f - z) = 1$ dank J1M.

(1a) Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ hat somit mindestens zwei Komponenten.

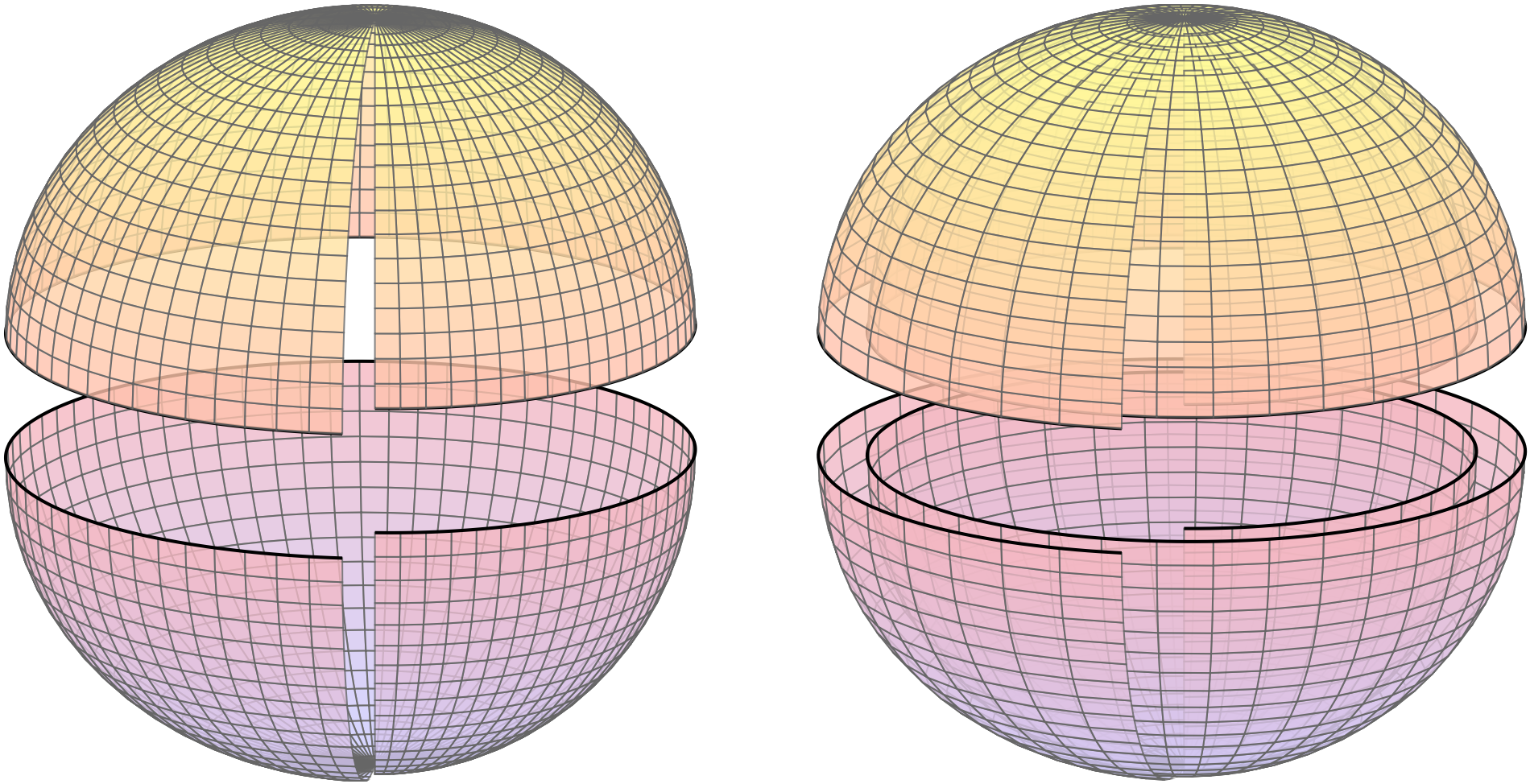
(3) Für jede Komponente $U \in \pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus C)$ gilt $\delta U = C$: Hierzu sei A die unbeschränkte und B eine beschränkte Komponente; eine solche existiert dank (1a). Es gilt $\overline{A} \subseteq A \cup C$ und $\overline{B} \subseteq B \cup C$, also $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq C$. Wir nehmen $\overline{A} \cap \overline{B} \subsetneq C$ an. Dann existiert eine Kurve $[0, 1] \leadsto C' \subseteq C$ mit $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq C'$. Damit wären $A \neq B$ zwei verschiedene Wegkomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus C'$, im Widerspruch zum Nicht-Trennungssatz J2T.

(1) Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ hat genau zwei Komponenten und
(2) die Abbildung $\nu : \pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus C) \to \{0,1\} : [x] \mapsto \deg_2(f - x)$ ist bijektiv.

Hierzu sei A die unbeschränkte und $B = [z]$ die beschränkte Komponente aus (1a). Angenommen, es gäbe eine weitere Komponente U von $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Diese ist ebenfalls beschränkt, $U \subseteq \operatorname{Int} R$. Der Weg δ verlaufe gemäß $np_0 \underline{\quad\alpha\quad} p_1 q_1 \underline{\quad\beta\quad} q_0 s$ in $A \cup B \cup C$, weder durch U noch a oder b. Seien $B(a,\varepsilon)$ und $B(b,\varepsilon)$ disjunkt von δ. Nach (3) gilt $a, b \in \delta U$, also existieren $a' \in B(a,\varepsilon) \cap U$ und $b' \in B(b,\varepsilon) \cap U$. Da U wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\eta' : [0,1] \to U$ von a' nach b'. Der Weg η gemäß $aa' \underline{\quad\eta'\quad} b'b$ schneidet δ nicht, erneut im Widerspruch zu J1x. Daran zerbricht unsere Annahme, somit gibt es keine weitere Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$. QED

🙂 Dieser Beweis ist extrem raffiniert. Soviel Sorgfalt ist wirklich nötig, denn Jordan–Kurven in der Ebene können phantastisch kompliziert sein. Sie verstehen jetzt, warum ich den polygonalen Fall vorangestellt habe. Den allgemeinen Fall empfehle ich zum gewissenhaften Selbststudium.

Modellabbildung $\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ zum Abbildungsgrad $k \in \mathbb{Z}$



$$\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (r\cos t, r\sin t, x_2, \dots, x_n) \mapsto (r\cos(kt), r\sin(kt), x_2, \dots, x_n)$$

In Zylinderkoordinaten: Diese Modellabbildung $\varphi_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $k \in \mathbb{Z}$ wickelt die x_0–x_1–Ebene k–mal um den Nullpunkt, entsprechend wickelt φ_k^n die Sphäre k–mal um sich selbst wie skizziert.

Definition des Abbildungsgrades $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to \mathbb{Z}$

Zur Erinnerung: $[X,Y] = \mathscr{C}(X,Y)/_{\simeq} = \{\,[f] \mid f : X \to Y\}$ ist die Menge aller Homotopieklassen $[f]$ stetiger Abbildungen $f : X \to Y$, siehe G4H. Das vergröbert unsere Sichtweise und vereinfacht die Klassifikation:

Satz J3A: Brouwer 1912, Hopf 1927

In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ stiftet $k \mapsto [\varphi_k^n]$ eine Bijektion $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$. Die Inverse ist der Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to \mathbb{Z} : [f] \mapsto \deg(f)$.

$$[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \underset{[\varphi_k^n] \mapsto k}{\overset{\deg}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathbb{Z}.$$

Das bedeutet: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, egal wie kompliziert, ist homotop zu genau einer Modellabbildungen φ_k^n, mit $k =: \deg(f)$.

Die eindeutige Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $f \simeq \varphi_k^n$ heißt der Abbildungsgrad von f. Anschaulich zählt er also, wie oft f die Sphäre um sich selbst wickelt.

Die Homotopie-Äquivalenz $(\iota, \rho) : \mathbb{S}^n \rightleftarrows \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ stiftet die Bijektionen $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong [\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}] \cong [\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbb{S}^n] \cong [\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}]$.

Definition des Abbildungsgrades $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \to \mathbb{Z}$

🙂 Homotopie vereinfacht dramatisch und extrahiert das Wesentliche:
Die Menge $\mathscr{C}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n)$ aller stetigen Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist riesig und sehr unübersichtlich. Der Abbildungsgrad destilliert hieraus eine wichtige Kennzahl: $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ zählt, wie oft f die Sphäre umwickelt.

Beweis-Ideen: In Dimension $n = 1$ haben wir den Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ durch die Umlaufzahl ganz elementar konstruiert:
als Winkelsumme J1J, Wegintegral J1K und durch Achsübergänge J1M.

Jeder dieser Ansätze funktioniert auch in beliebiger Dimension $n \in \mathbb{N}$.
Die Konstruktion ist technisch aufwändiger, ich führe dies hier nicht aus.

📖 J.W. Milnor: *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton 1965
Ein wunderschönes Thema für ein Pro/Seminar im 3./4. Semester!

🙂 Uns genügt im Folgenden die axiomatische **Definition** von $\deg$.
Die **Eindeutigkeit** von $\deg$ ist unmittelbar klar aufgrund der Definition.
Daraus werden wir alle für uns interessanten **Eigenschaften** ableiten.
Die **Konstruktion** verschiebe ich auf die Algebraische Topologie.

Geschichtliche Entwicklung des Abbildungsgrades

Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.*)

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

§ 1.

Der Grad einer stetigen Abbildung einer geschlossenen zweiseitigen Mannigfaltigkeit.

Unter einem *Simplexsterne* des n-dimensionalen Zahlenraumes verstehen wir eine in einer Umgebung eines Punktes O überall dicht liegende, endliche Menge von nicht in das Innere voneinander eindringenden und den Punkt O als Eckpunkt besitzenden Simplexen, deren je zwei eine p-dimensionale $(0 \leqq p \leqq n-1)$ Seite gemeinsam haben, sonst aber keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen.

Unter einem *n-dimensionalen Elemente* E verstehen wir das eindeutige und stetige Bild eines Simplexes S des n-dimensionalen Zahlenraumes.

Unter den *Eckpunkten* bez. *p-dimensionalen Seiten* von E verstehen wir alsdann die Bilder der Eckpunkte bez. der p-dimensionalen Seiten von S.

Wir bilden nun aus n-dimensionalen Elementen eine solche zusammenhängende Punktmenge Z, daß je zwei dieser Elemente entweder keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, oder eine p-dimensionale $(0 \leqq p \leqq n-1)$ Seite (und dann zugleich alle in ihr liegenden Seiten geringerer Dimensionenzahl) gemeinsam haben, übrigens aber keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, während in jedem Eckpunkte die daselbst zusammenstoßenden Elemente in derselben Weise, wie die Simplexe eines gewissen Simplexsternes des n-dimensionalen Zahlenraumes, aneinander schließen.

Die in dieser Weise konstruierte Punktmenge Z soll eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* heißen, und zwar, wenn die Zahl ihrer Elemente endlich ist, eine *geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit;* wenn die Zahl ihrer Elemente unendlich ist, eine *offene n-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Von

Heinz Hopf in Berlin.

Brouwer hat die Umkehrbarkeit seines Satzes, daß zwei zu derselben „Klasse“ gehörige, d. h. stetig ineinander überführbare Abbildungen einer n-dimensionalen, geschlossenen, zweiseitigen Mannigfaltigkeit μ auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ' denselben „Grad“ besitzen[1]), für den Fall $n = 2$ untersucht und dieses Problem durch Angabe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen erledigt, die zwei Abbildungen außer der Übereinstimmung ihrer Gradzahlen erfüllen müssen, um zu derselben Klasse zu gehören[2])[3]). Während einige der dabei angewandten Methoden und gewonnenen Ergebnisse nicht an die Dimensionenzahl 2 gebunden sind[4]), läßt sich, soviel ich sehe, der Beweis gerade des wichtigsten der hierher gehörigen Brouwerschen Sätze nicht ohne weiteres auf den Fall mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten übertragen. Dieser Satz lautet: „Ist $n = 2$, und μ' die *Kugel*, so gehören zwei Abbildungen gleichen Grades zur gleichen Klasse“[2]).

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des entsprechenden Satzes für *alle* n. Er wird — ohne Benutzung des Brouwerschen Resultats — durch Schluß von $n-1$ auf n geführt.

Nachdem gezeigt ist, daß es *höchstens eine* Klasse von Abbildungen gegebenen Grades der gegebenen Mannigfaltigkeit μ auf die n-dimensionale Kugel gibt, liegt die Frage nahe, ob eine solche Klasse stets *existiert.* Daß diese Frage, wie gezeigt wird (§ 4), zu bejahen ist, ist nicht selbstverständlich; denn es hat z. B. jede Abbildung einer Fläche vom Geschlecht 0 auf eine Fläche höheren Geschlechts den Grad 0[3])[4]).

Brouwer konstruierte 1912 den Abbildungsgrad mit simplizialer Technik.
Hopf bewies 1927 die Bijektivität per Induktion über die Dimension n.

Die axiomatische Methode: *Theft or honest toil?*

Satz J3A garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Abbildungsgrades. Wie in der Informatik erklärt dies eine *black box* mit wohldefinierter Schnittstelle. Der erhoffte didaktische Vorteil ist, möglichst schnell zu interessanten Anwendungen vorzudringen. Dinge zu *postulieren*, ohne sie zu beweisen, ist natürlich nicht die feine mathematische Art. Laut Bertrand Russell hat diese Methode dennoch viele Vorteile, und zwar dieselben wie Diebstahl gegenüber ehrlicher Arbeit:

> *The method of "postulating" what we want has many advantages; they are the same as the advantages of theft over honest toil.*
> Bertrand Russel (1872–1970)

Versöhnlicher will ich es so sagen: Ich nehme hier einen Kredit auf, den ich später begleichen muss, indem ich den Abbildungsgrad nachträglich *konstruiere* und die gewünschten Eigenschaften sorgsam *nachweise*, (1) in der Algebraischen Topologie / Homologie, (2) in der Analysis oder (3) in der Differentialtopologie. Einstweilen nutzen wir ihn als *Werkzeug*.

Life is uncertain. Eat dessert first!

Analogie zur Signatur: Definition und Eigenschaften

Für $n = 0$ gilt $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$. Der Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0] \to \{\pm 1, 0\}$ ist das Signum / die Signatur, mit $\deg(\pm\mathrm{id}) = \pm 1$ und $\deg(\mathrm{const}^{\pm 1}_{\mathbb{S}^0}) = 0$.

Zu jeder endlichen Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ und Abbildung $f : X \to X$ haben wir

$$\operatorname{sign}(f) = \prod_{\{i<j\}\subseteq X} \frac{f(i) - f(j)}{i - j} = \prod_{\{i\neq j\}\subseteq X} \frac{f(i) - f(j)}{i - j} \quad \in \{\pm 1, 0\}.$$

Es gilt $\operatorname{sign}(f) = 0$, falls f nicht bijektiv ist, und $\operatorname{sign}(f) = \pm 1$, falls f eine gerade / ungerade Permutation ist. Die Abbildung $\operatorname{sign} : X^X \to \{\pm 1, 0\}$ ist multiplikativ, das heißt $\operatorname{sign}(f \circ g) = \operatorname{sign}(f) \cdot \operatorname{sign}(g)$ für alle $f, g : X \to X$.

🙂 Diese Eigenschaft *charakterisiert* die Signatur eindeutig: Für $|X| \geq 2$ ist sign die einzige multiplikative Surjektion $(X^X, \circ, \mathrm{id}_X) \twoheadrightarrow (\{\pm 1, 0\}, \cdot, 1)$.

🙂 Die Signatur dient zur *Konstruktion* der Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$. Dies ist die einzige multilineare, alternierende, normierte Abbildung.

🙂 Der Abbildungsgrad $\deg(f)$ stetiger Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ (J0A) ist ebenso grundlegend wie die Signatur $\operatorname{sign}(f)$ von Abbildungen $f : X \to X$ und die Determinante $\det(f)$ linearer Abbildungen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

Analogie zur Determinante: Definition und Eigenschaften

Satz B1Y: Definition und Eigenschaften der Determinante

Sei K ein kommutativer Ring. In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine multilineare, alternierende, normierte Abbildung $\det_{\mathbb{K}}^{n} : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$.

Diese **Determinante** erfreut sich folgender Eigenschaften:

1. Es gilt $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$. (Leibniz)
2. Die Determinante ist transpositionsinvariant: $\det(A^\top) = \det(A)$.
3. Die Determinante ist multiplikativ: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
4. Genau dann ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, wenn $\det(A) \in \mathbb{K}$ dies ist.
5. Genauer gilt $AA' = A'A = \det(A)E$, also $A^{-1} = \det(A)^{-1}A'$. (Cramer)

Zu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definieren wir hierbei die adjunkte Matrix A' durch ihre Koeffizienten $a'_{ij} := \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

☺ Explizite polynomielle Formel. ☺ Sofort praktisch für kleine n.
☹ Naive Anwendung der Leibniz–Formel ist für große n aufwändig ($n!$).
☺ Eine effiziente Berechnung gelingt mit dem Gauß–Algorithmus (n^3).

Analogie zur Determinante: Definition und Eigenschaften

Der Satz besteht aus drei wichtigen Aussagen: Zunächst (1) Existenz und (2) Eindeutigkeit, dann erst (3) zahlreiche gute Eigenschaften wie Formeln, Symmetrien, Multiplikativität, verschiedene Algorithmen, … Unsere obige Liste ist dabei noch keineswegs abschließend!

Um hier Ordnung und Klarheit zu schaffen, ist es sinnvoll, zu allererst zu definieren, was die Determinante genau *ist*, und dann nach und nach auszuführen, was Sie für uns *tut*. Die Anwendungen sind überaus vielfältig, wie sie wissen: vom charakteristischen Polynom in der Linearen Algebra bis zur Volumenverzerrung bei der mehrdimensionalen Integration.

Wir bauen unsere Definition und Sätze auf: logisch und didaktisch! Nachdem wir uns die Formulierung der Ziele genau überlegt haben, müssen wir die Aussagen beweisen: (1) Existenz: Die Leibniz–Formel definiert eine Abbildung und erfüllt alle Forderungen! (2) Eindeutigkeit: Jede multilineare, alternierende, normierte Abbildung $\det_{\mathbb{K}}^{n} : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ erfüllt die Leibniz–Formel! (3) Eigenschaften: sorgfältiges Nachrechnen!

Der Abbildungsgrad ist multiplikativ.

Die folgenden Sätze verdanken wir den nützlichen Modellabbildungen φ_k^n und der vollständigen Homotopieklassifikation J3A nach Brouwer–Hopf.

Korollar J3B: Surjektivität

Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig und $\deg(f) \neq 0$, so ist f surjektiv.

Beweis: Aus $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ folgt $f \simeq * \simeq \varphi_0^n$, also $\deg(f) = 0$. QED

Korollar J3C: Multiplikativität

Für $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig gilt $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$. Somit ist der Abbildungsgrad $([\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n], \circ, \mathrm{id}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ ein Monoidisomorphismus.

Beweis: Für $k = \deg(f)$ und $\ell = \deg(g)$ gilt $f \simeq \varphi_k^n$ und $g \simeq \varphi_\ell^n$ dank J3A. Hieraus folgt $f \circ g \simeq \varphi_k^n \circ \varphi_\ell^n = \varphi_{k\ell}^n$, also $\deg(f \circ g) = k\ell$ erneut dank J3A. Zudem gilt $\mathrm{id} = \varphi_1$ und somit $\deg(\mathrm{id}) = 1$. QED

☺ Auch das Monoid $([\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n], \circ, \mathrm{id})$ ist demnach kommutativ:
Für alle stetigen Abbildungen $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt $f \circ g \simeq g \circ f$.

Der Abbildungsgrad erkennt Homotopie-Äquivalenzen.

Korollar J3D: Homotopie-Äquivalenzen

Vorgelegt sei eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ in Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
(1) Genau dann ist f eine Homotopie-Äquivalenz, wenn $\deg(f) = \pm 1$ gilt.
(2) Speziell für jeden Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ folgt $\deg(f) = \pm 1$.

Beweis: (1) „⇒“: Aus $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ folgt $\deg(f) \cdot \deg(g) = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$.
Auch umgekehrt aus $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ folgt $\deg(g) \cdot \deg(f) = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$.

In $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ hat die Gleichung $a \cdot b = 1$ nur die Lösungen $a = b = \pm 1$.
Aus Topologie wird Algebra, und letztere ist hier viel einfacher!

„⇐“: Gilt $\deg(f) = \pm 1$, so folgt $f \simeq \varphi^n_{\pm 1}$, also $f \circ f \simeq \varphi^n_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.
In diesem glücklichen Fall wird aus Algebra wieder Topologie! QED

Beispiel: Für Identität φ^n_1 und Spiegelung φ^n_{-1} gilt $\deg(\varphi^n_{\pm 1}) = \pm 1$.
Ein Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ heißt **orientierungserhaltend**, falls $\deg(f) = +1$, und **orientierungsumkehrend**, falls $\deg(f) = -1$.

Orientierung untersuchen wir zum Ende des Kapitels noch genauer.

Abbildungsgrad und Determinante

Korollar J3E: lineare Isomorphismen

Für $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ definieren wir $f_A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto Ax/|Ax|$.
Dank $Ax \neq 0$ für alle $x \neq 0$ ist f_A wohldefiniert und stetig.

(0) Für $E_\pm = \mathrm{diag}(1, \pm 1, 1, \dots, 1)$ gilt $f_{E_\pm} = \varphi^n_{\pm 1}$, also $\det(f_{E_\pm}) = \pm 1$.
(1) Allgemein gilt $\deg(f_A) = \operatorname{sign}\det(A)$, somit $\deg(-\mathrm{id}) = (-1)^{n+1}$.
(2) Für $A \in \mathrm{GO}_{n+1}(\mathbb{R})$ gilt $f_A(x) = Ax$ und $\deg(A) = \det(A) \in \{\pm 1\}$.

Wir nutzen die Zerlegung in Wegkomponenten (G2N):

$$\pi_0(\mathrm{GL}_{n+1}\,\mathbb{R}) = \{\ \ \mathrm{GL}^+_{n+1}\,\mathbb{R} = [E_+],\ \ \mathrm{GL}^-_{n+1}\,\mathbb{R} = [E_-]\ \ \}$$

Beweis: (1) Dank Gauß (G2N) existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_{n+1}\,\mathbb{R}$ von $\gamma(0) = A$ nach $\gamma(1) = E_\pm$, somit eine Homotopie $\Gamma : f_A \simeq f_{E_\pm} : t \mapsto f_{\gamma(t)}$,

$$\Gamma\ :\ [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n\ :\ (t,x) \mapsto \gamma(t)(x)/|\gamma(t)(x)|.$$

Hieraus folgt $\deg(f_A) = \deg(f_{E_\pm}) = \pm 1 = \operatorname{sign}\det(A)$. QED

Abbildungsgrad und Determinante

☺ Mit diesen Rechenregeln können wir den Abbildungsgrad $\deg(f)$ unmittelbar für viele relevante Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ berechnen! Das folgt, Schritt für Schritt, allein aus der axiomatischen Definition. Diese ist bereits handfest genug für alle nötigen Rechnungen.

Wir können den Abbildungsgrad präzise *definieren*, dieser Schritt ist leicht und sichert immerhin die *Eindeutigkeit*. Jedoch haben wir ihn nicht *konstruiert*, also seine *Existenz* noch nicht bewiesen. Dazu vertrauen wir einstweilen auf die Homotopieklassifikation J3A nach Brouwer–Hopf.

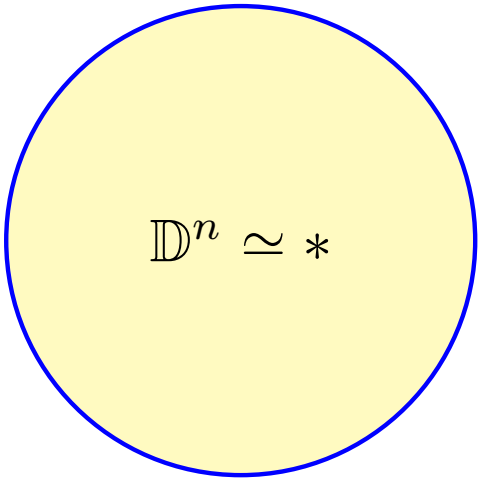
Falls Ihnen diese Rechnungen noch Kopfzerbrechen bereiten,
seien Sie voll Vorfreude und ohne Sorge, mutig und frohgemut:

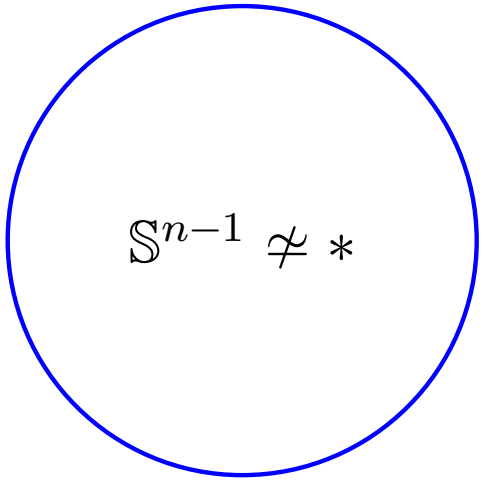
Auch an die Signatur $\operatorname{sign} : (\operatorname{End}(X), \circ, \operatorname{id}_X) \to (\{\pm 1, 0\}, \cdot, 1)$ und die Determinante $\det : (\operatorname{End}_K(V), \circ, \operatorname{id}_V) \to (K, \cdot, 1)$, ihre *Definition* und hilfreiche *Rechenregeln* mussten Sie sich am Anfang der Linearen Algebra erst gewöhnen, dann konnten Sie mit diesen Werkzeugen reich ernten.

Für den Abbildungsgrad, seine Definition und seine Rechenregeln ist es ganz genauso: Sie werden sich rasch gewöhnen und dann reich ernten.

Die Sphäre ist nicht zusammenziehbar.

Der Ball $\mathbb{D}^n$ ist zusammenziehbar, die Randsphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ hingegen nicht!





Satz J4A: $\mathbb{S}^n \not\simeq *$

Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist nicht zusammenziehbar: Die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist nicht homotop zur konstanten Abbildung $\mathrm{const} : \mathbb{S}^n \to \{*\} \subseteq \mathbb{S}^n$.

Beweis: Wir wenden den Abbildungsgrad (J3A) an:
Es gilt $\deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$ und $\deg(\mathrm{const}) = 0$, also $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \not\simeq \mathrm{const}$. QED

Alternative: Wir wenden den Funktor $[\mathbb{S}^n, -]$ (G4L) an:
Es gilt $[\mathbb{S}^n, \{*\}] = \{*\}$, aber $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$ dank J3A. QED

Mehrdimensionaler Zwischenwertsatz

Die anschaulich-geometrische Frage, ob ein „Loch“ vorliegt oder nicht, ist nicht bloß Spielerei, sondern hat handfeste Konsequenzen für die Lösung von Gleichungssystemen. Zur Erinnerung:

Satz J4B: eindimensionaler Zwischenwertsatz (ZWS, C3A)

Zu jeder stetigen Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(-1)f(1) < 0$ existiert (mindestens) ein Punkt $x \in]-1, 1[$ mit $f(x) = 0$.

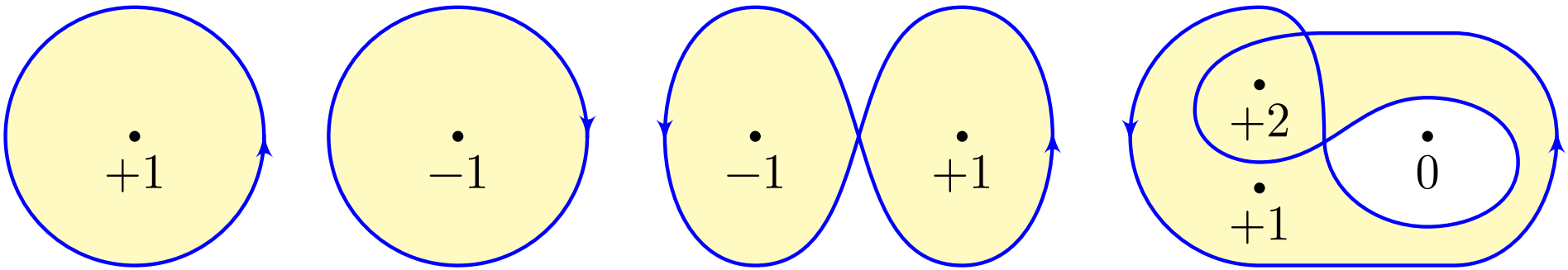
Das ist klar für $f(x) = ax + b$, mit der expliziten Lösung $x = -b/a$. Schon für Polynomfunktionen $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ist die Aussage über $\mathbb{Q}$ falsch, und über $\mathbb{R}$ äußerst bemerkenswert! Der Zwischenwertsatz ist äquivalent zur Vollständigkeit der reellen Zahlen (G1s).

Satz J4c: eindimensionaler Zwischenwertsatz (ZWS, C3A)

Sei $f : \mathbb{D}^1 \to \mathbb{R}$ stetig. Für $y \in \mathbb{R}$ zwischen $a = f(-1)$ und $b = f(1)$ existiert $x \in \mathbb{B}^1$ mit $f(x) = y$, kurz $(y - a)(b - y) > 0 \Rightarrow y \in f(\mathbb{B}^1)$.

Mehrdimensionaler Zwischenwertsatz

Für stetige Funktionen $f : \mathbb{D}^1 \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ kontrolliert demnach das Verhalten auf dem Rand $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ das Verhalten im Inneren $\mathbb{B}^1 =]-1, 1[$: Alle Zwischenwerte *müssen* angenommen werden. (Weitere Werte *können* angenommen werden.)



In Dimension $n \geq 2$ betrachten wir den Ball $\mathbb{D}^n$ mit Randsphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ und den Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}] \xrightarrow{\simeq} [\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}] \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$. Für $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zählt $\deg(f)$, wie oft f die Sphäre um den Nullpunkt wickelt. Allgemein für $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ mit $y \notin f(\mathbb{S}^{n-1})$ zählt $\deg(f - y)$, wie oft f die Sphäre um den Punkt y wickelt.

Mehrdimensionaler Zwischenwertsatz

Der eindimensionaler Zwischenwertsatz (C3A) ist, wie Sie bereits wissen, ein allgegenwärtiges Werkzeug der reellen Analysis. Der Abbildungsgrad erweitert dies wie folgt zum mehrdimensionalen Zwischenwertsatz; dieser wird sich als ebenso vielseitig und nützlich erweisen.

Satz J4D: mehrdimensionaler Zwischenwertsatz

Sei $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig mit Rand $g = f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Zu jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Im} g$ mit $\deg(g - y) \neq 0$ existiert $x \in \mathbb{B}^n$ mit $f(x) = y$, kurz $y \in f(\mathbb{B}^n)$.

Beweis: *Kontraposition:* Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$ zeigen wir $\deg(g - y) = 0$. Nach Verschiebung können wir $y = 0$ annehmen, das vereinfacht.

Die Abbildung $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ mit $H(r, s) := f(rs)$ ist stetig, also eine Homotopie von $H_0(s) = f(0)$ nach $H_1(s) = f(s)$. Sie verläuft ganz in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ aufgrund unserer Annahme $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}^n$.

Dank Homotopie-Invarianz folgt $\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg(H_0) = 0$. QED

Retraktion auf den Rand

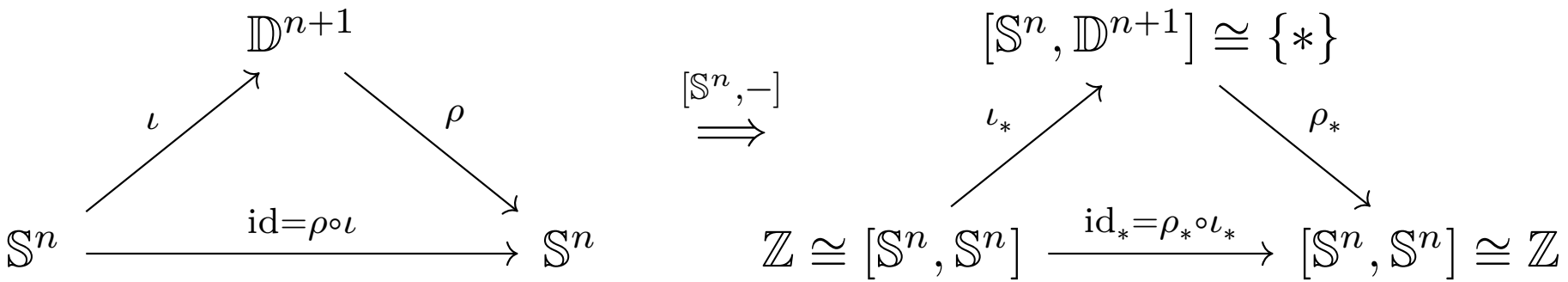
Lemma J4E:

Es gibt keine stetige Retraktion $\rho : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ des Balls auf seinen Rand.

Für $n = 0$ und $[-1, 1] \to \{-1, 1\}$ folgt dies dank Zwischenwertsatz (C3A).
Für $n = 1$ und $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ gelingt der Beweis mit der Umlaufzahl, siehe J234.

Beweis: Die Inklusion $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ ist zusammenziehbar (G4B).
Gäbe es ρ, so folgt $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} = \rho \circ \iota \simeq *$. Das widerspricht $\mathbb{S}^n \not\simeq *$ (J4A). QED

Alternative: Wir wenden den Funktor $[\mathbb{S}^n, -]$ (G4L) an:

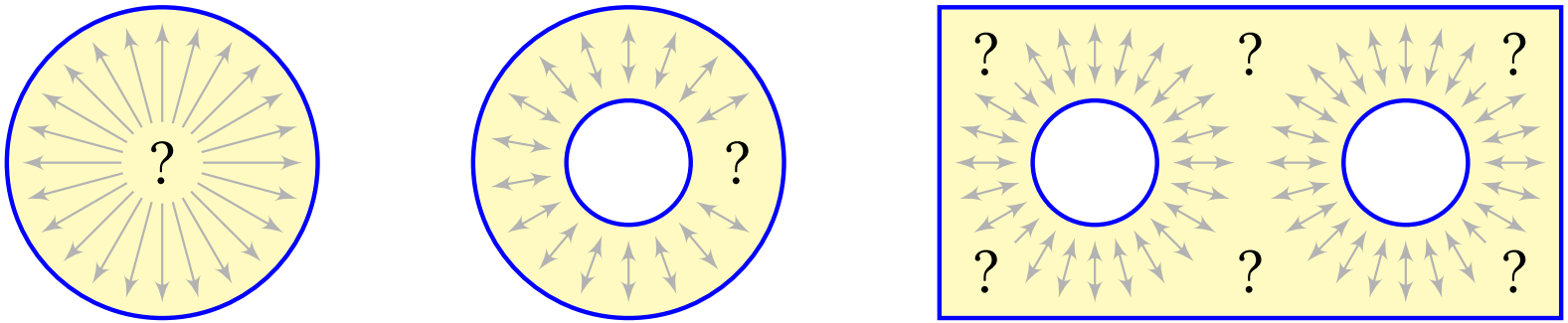


Das Diagramm rechts in Set ist unmöglich, also auch links in Top. QED

Dieses geniale, funktorielle Argument findet sich bereits in der Bibel:
„Eher geht ein Kamel durch ein Nadelöhr, als $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ durch 0 faktorisiert.“

Retraktion auf den Rand

Es existiert eine Retraktion von $A = [0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$ auf den Rand $\delta A = \{0\}$, sogar eine starke Deformationsretraktion. Was gilt hierzu allgemein?



Satz J4F:

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit $A^\circ \neq \emptyset$, so existiert keine Retraktion $\rho : A \to \delta A$.

Beweis: Nach Verschiebung gilt $0 \in A^\circ$, nach Skalierung zudem $A \subseteq \mathbb{D}^n$. Angenommen, es gäbe eine Retraktion $\rho : A \to \delta A$. Daraus erhalten wir

$$g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto \begin{cases} \rho(x)/|\rho(x)| & \text{für } x \in A, \\ x/|x| & \text{für } x \in \mathbb{D}^n \setminus A^\circ. \end{cases}$$

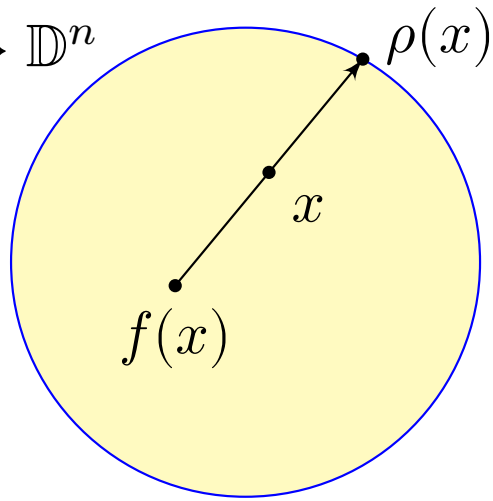
Dank Verklebesatz E1P ist g stetig. Zudem gilt $g(x) = x$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Eine solche Retraktion von $\mathbb{D}^n$ auf $\mathbb{S}^{n-1}$ ist nach J4E unmöglich. QED

Der Brouwersche Fixpunktsatz

Jede stetige Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ hat (mindestens) einen Fixpunkt.

$f : [a, b] \to [a, b]$
$g(x) = x - f(x)$

$f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$



Satz J4H: Fixpunktsatz von Brouwer, 1909

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat (mindestens) einen Fixpunkt, das heißt, es existiert mindestens ein Punkt $a \in \mathbb{D}^n$ mit $f(a) = a$.

Beweis: Angenommen, für alle $x \in \mathbb{D}^n$ gälte $f(x) \neq x$. Zu $x \in \mathbb{D}^n$ existiert genau ein $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $x + t(x - f(x)) =: \rho(x)$ im Rand $\mathbb{S}^{n-1}$ liegt. Die so definierte Abbildung $\rho : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ ist stetig. (Ausrechnen!) Für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt $\rho(x) = x$. Das widerspricht J4E. QED

Der Brouwersche Fixpunktsatz

Ausführung: Zu $y = f(x)$ finden wir $|x + t(x - y)|^2 - 1 = at^2 - 2bt - c$ mit $a = \sum_i (x_i - y_i)^2 > 0$ und $b = \sum_i x_i(y_i - x_i)$ und $c = 1 - \sum_i x_i^2 \geq 0$. Die Lösung $t(x) := (b + \sqrt{b^2 + ac})/a \geq 0$ ist stetig, und somit auch die gesuchte Abbildung $\rho : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x + t(x) \cdot (x - f(x))$. Für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt $\rho(x) = x$, denn $c = 0$ und $b < 0$, also $t(x) = 0$.

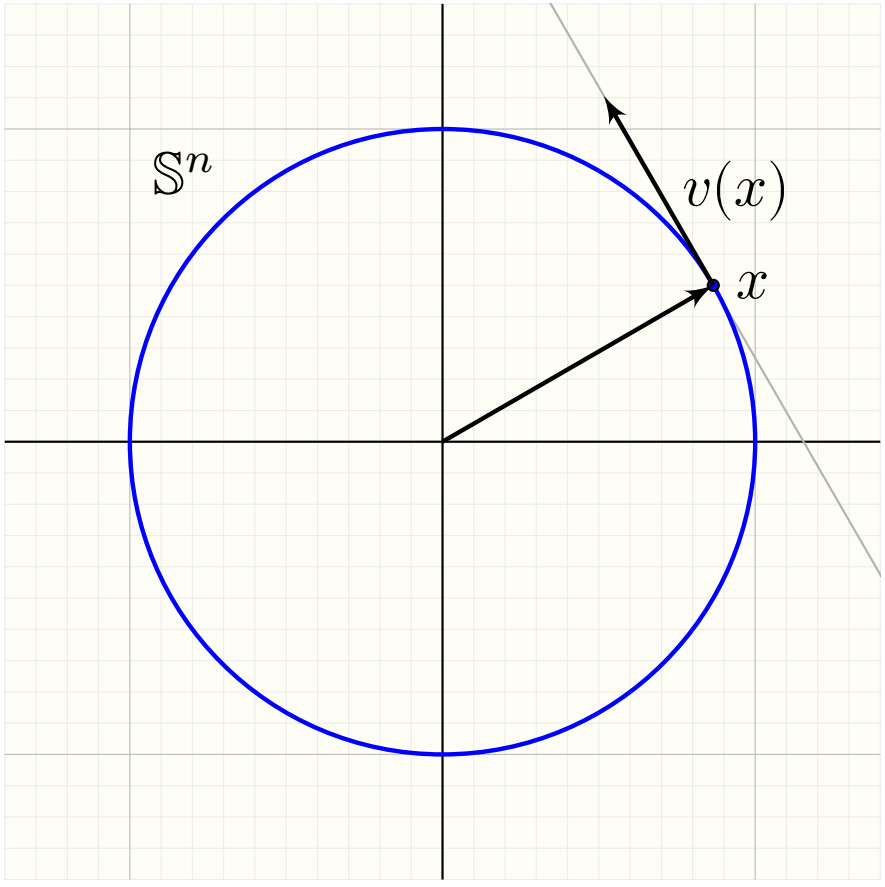
⚠ Fälschlicherweise wird der Strahl manchmal umgekehrt von x über $f(x)$ in den Rand geführt. Das liefert keine Retraktion auf den Rand!

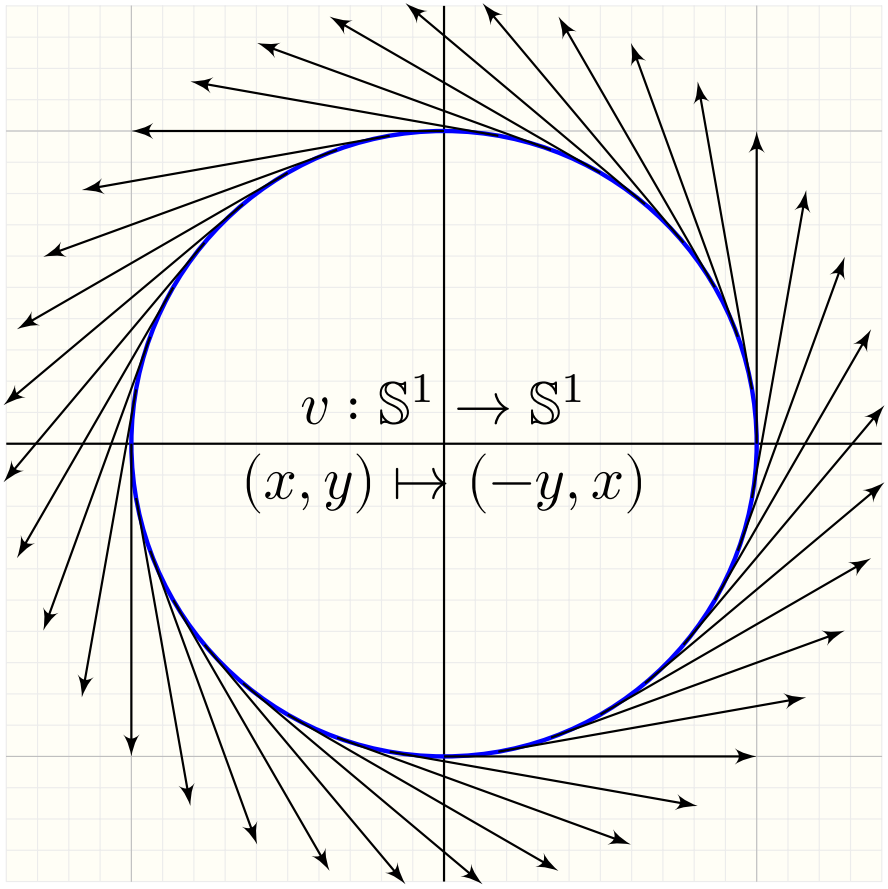
Zum Kontrast: Für jede *kontraktive* Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ garantiert der Banachsche Fixpunktsatz (C4Q) Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes und liefert zudem ein effizientes Näherungsverfahren.

Ausblick: Der Brouwersche Fixpunktsatz hat zahlreiche Anwendungen, etwa zur Existenz von Gleichgewichten in den Wirtschaftwissenschaften, insbesondere Nash–Gleichgewichte in der Spieltheorie.

Bemerkung: Für die Praxis stellt sich die schwierigere Frage, einen solchen Fixpunkt zu finden, oder wenigstens zu approximieren. Das gelingt allgemein wie im Fall $n = 2$ durch Rechteckviertelung, siehe J1W.

Vektorfelder auf Sphären





Definition J5A: Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$

Ein tangentiales **Vektorfeld** auf der Sphäre $\mathbb{S}^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid x \rangle = 1 \}$ ist eine stetige Abbildung $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle x \mid v(x) \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$.

Der Satz vom gekämmten Igel

Statt „tangentiales Vektorfeld“ sagen wir vereinfacht kurz „Vektorfeld“.
In jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ steht $v(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ senkrecht auf den Ortsvektor x.
Die obige Skizze illustriert diese Definition im einfachsten Fall $n = 1$.

Satz J5B: Satz vom gekämmten Igel

Für tangentiale Vektorfelder, $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle x \,|\, v(x) \rangle = 0$, gilt:
(1) Ist n ungerade, so existieren nirgends-verschwindende Vektorfelder v.
(2) Ist n gerade, so hat jedes Vektorfeld v mindestens eine Nullstelle.

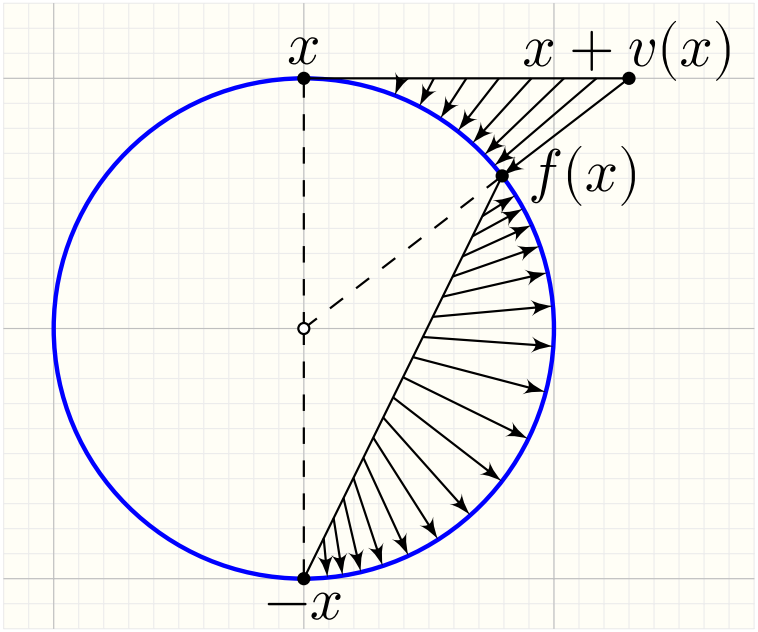
Beweis: (1) Sei $n = 2k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann haben wir

$$v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \mapsto (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und stetig mit $\langle x \,|\, v(x) \rangle = 0$ und $v(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$, also ein nirgends-verschwindendes Vektorfeld!

Dieses *konstruktive* Argument ist leicht. Für (2) benötigen wir wesentlich raffinierter ein *obstruktives* Argument: Für n gerade ist ein Vektorfeld ohne Nullstelle unmöglich. Hier hilft der Abbildungsgrad als Invariante!

Der Satz vom gekämmten Igel



(2) Jedes tangentiale Vektorfeld $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiert eine Homotopie

$$H : \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq f \text{ vermöge } H : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (t,x) \mapsto \frac{x + tv(x)}{|x + tv(x)|}.$$

Aus $v(x) \neq 0$ folgt $f(x) \neq x$. Gilt dies für alle $x \in \mathbb{S}^n$, so folgt (G4c)

$$K : f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \text{ vermöge } K : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (t,x) \mapsto \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}.$$

Aus $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ folgt $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = \deg(-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$ (J3E).
Das ist nur für ungerades n möglich. QED

Der Satz vom gekämmten Igel

Der Satz vom Igel (engl. *hairy ball theorem*) hat einen klangvollen und sprechenden Namen: Kann man einen Igel wirbelfrei kämmen? Nein! Herrscht jederzeit an mindestens einem Ort der Erde Windstille? Ja!

Die meteorologische Anwendung macht stillschweigend die Annahme, dass wir nur die horizontale Windgeschwindigkeit betrachten. Der Satz besagt dann, dass es mindestens einen windstillen Punkt geben muss.

Hierzu müssen wir die globale Form der Erdoberfläche kennen, also $\mathbb{S}^2$. Auf der Torusfläche $F_1^+ = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ hingegen existieren Vektorfelder ganz ohne Nullstellen: Versuchen Sie, ein solches zu zeichnen, es ist leicht! Auf geschlossenen Flächen F_g^+ mit Geschlecht $g \neq 1$ gelingt dies nicht.

Hierzu gilt allgemein der erstaunliche Satz von Poincaré–Hopf:

Satz J5c: Poincaré–Hopf

Sei M eine glatte zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeit. Genau dann existiert auf M ein nirgends-verschwindendes Vektorfeld $f : M \to TM$, wenn die Euler–Charakteristik $\chi(M)$ verschwindet.

Gerade und ungerade Abbildungen

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ oder $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ heißt

0. **gerade**, falls $f(-x) = +f(x)$ für alle x gilt,
   z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{2k}$ und $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}/(2k)!$,
1. **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt,
   z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{2k+1}$ und $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$.

Beispiel: Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir wie zuvor $\varphi_k^1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^k$.

0. Ist k gerade, so ist φ_k^1 gerade: $\varphi_k^1(-z) = +\varphi_k^1(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$.
1. Ist k ungerade, so ist φ_k^1 ungerade: $\varphi_k^1(-z) = -\varphi_k^1(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$.

Satz J6A: Borsuk–Ulam

Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig.

0. Ist f gerade, $f(-x) = +f(x)$, dann ist $\deg(f)$ gerade;
   möglicherweise gilt $\deg(f) = 0$ und somit $f \simeq *$.
1. Ist f ungerade, $f(-x) = -f(x)$, dann ist $\deg(f)$ ungerade;
   insbesondere gilt $\deg(f) \neq 0$ und somit $f \not\simeq *$.

Gerade und ungerade Abbildungen

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir die Modellabbildung $\varphi_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\varphi_k(r\cos(t), r\sin(t), x_2, \dots, x_n) = (r\cos(kt), r\sin(kt), x_2, \dots, x_n).$$

Es gilt $|\varphi_k(x)| = |x|$, durch Einschränkung erhalten wir $\varphi_k^n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.

0 Ist k gerade und $n \geq 2$, so ist φ_k^n weder gerade noch ungerade.

☹ Der gerade Fall ist in Dimension $n \geq 2$ leider widerspenstiger.

1 Ist k ungerade, so ist φ_k^n ungerade: $\varphi_k^n(-x) = -\varphi_k^n(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$.

☺ Der ungerade Falle gelingt in jeder Dimension n genau gleich!

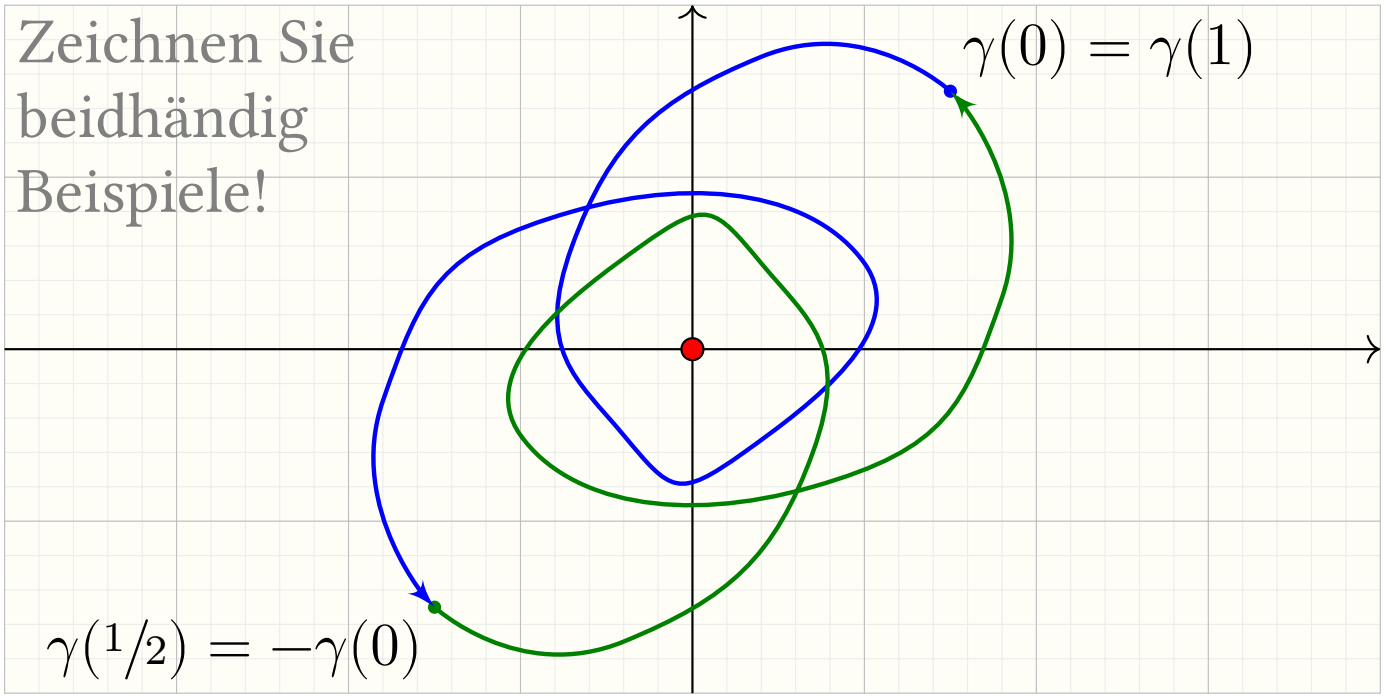
Wir interessieren uns im Folgenden vor allem für ungerade Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Hier gilt $f \not\simeq *$, dies führt zu erstaunlichen Anwendungen. Gerade Abbildungen nennen ich hier zur didaktischen Abrundung.

Statt $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ betrachte ich homotopie-äquivalent $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: Das lässt sich leichter visualisieren, wie im Folgenden für $n = 1$ gezeigt.

Allgemein sei $f : X \to Y$ stetig mit $X \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $-X = X$ und $-Y = Y$. Wir nennen f un/gerade, falls $f(-x) = \mp f(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Der Satz von Borsuk–Ulam

Der Fall $n = 0$ ist klar: Hier gilt $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$, und $\deg(f)$ ist die Signatur:
(0) Für $f = \mathrm{const}^{\pm 1}_{\mathbb{S}^0}$ gilt $\deg(f) = 0$. (1) Für $f = \pm\mathrm{id}$ gilt $\deg(f) = \pm 1$.



Fall $n = 1$: Statt $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ betrachten wir $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^* : t \mapsto f(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t})$.

(1) Wir haben $\gamma(t + 1/2) = -\gamma(t)$, somit $\deg(\gamma|_{[0,1/2]}) = k + 1/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Dank Symmetrie folgt $\deg(\gamma|_{[1/2,1]}) = k + 1/2$, in Summe $\deg(\gamma) = 2k + 1$.

(0) Es gilt $\gamma(t + 1/2) = \gamma(t)$, also $\deg(\gamma|_{[0,1/2]}) = k = \deg(\gamma|_{[1/2,1]})$. QED

Der Satz von Borsuk–Ulam

Alternativer Beweis im Fall $n = 1$: Wir wählen eine Richtung $s \in \mathbb{S}^1$, so dass die Gerade $A = \mathbb{R}s$ die beiden Punkte $\pm\gamma(0)$ nicht enthält.

(1) Wir haben $\gamma(t + 1/2) = -\gamma(t)$. Der Weg $\gamma|_{[0,1/2]}$ überquert somit die Gerade $2k + 1$ mal, da sich $\gamma(0)$ und $\gamma(1/2) = -\gamma(0)$ gegenüberliegen.
Dank Symmetrie überquert auch $\gamma|_{[1/2,1]}$ die Gerade $2k + 1$ mal.
Die Umlaufzahl von γ ist die halbe Summe, also $\deg(\gamma) = 2k + 1$.

(0) Für $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ gerade haben wir $\gamma(t + 1/2) = \gamma(t)$ für alle t.
Der Weg $\gamma|_{[0,1/2]}$ überquert die Gerade $2k$ mal, da $\gamma(1/2) = \gamma(0)$.
Dank Symmetrie überquert auch $\gamma|_{[1/2,1]}$ die Gerade $2k$ mal.
Die Umlaufzahl von γ ist die halbe Summe, also $\deg(\gamma) = 2k$. QED

Beweise im allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$ verlaufen sinngemäß genauso, erfordern allerdings genaue Buchführung und sind aufwändiger.

Übung: Ist n gerade und $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gerade, so folgt $f \simeq *$.

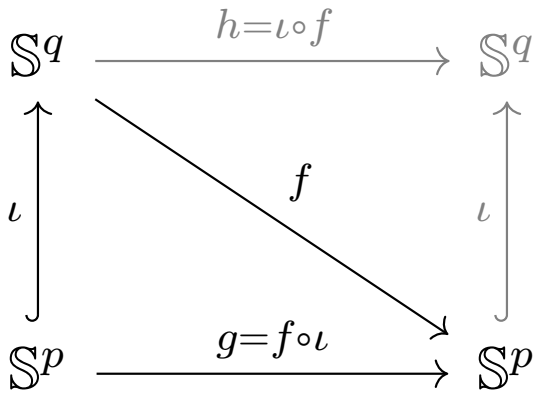
Lösung: Für $\sigma : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto -x$ gilt $\deg(\sigma) = (-1)^{n+1} = -1$. (J3E)
Aus $f = f \circ \sigma$ folgt $\deg(f) = \deg(f \circ \sigma) = \deg(f) \cdot \deg(\sigma) = -\deg(f)$. (J3C)
In der Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0)$ impliziert dies $\deg(f) = 0$. Somit gilt $f \simeq *$. (J3A)

Ungerade Abbildungen zwischen Sphären

Für $p < q$ in $\mathbb{N}$ gibt es ungerade stetige Abbildungen $\mathbb{S}^p \to \mathbb{S}^q$, etwa

$$\iota : (x_0, \dots, x_p) \mapsto (x_0, \dots, x_p, 0, \dots, 0).$$

Umgekehrt ist dies für $f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^p$ nicht möglich!



Korollar J6B:

Für $p < q$ in $\mathbb{N}$ gibt es keine ungerade stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^p$.

Beweis: Ist $f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^p$ stetig und ungerade, so auch $g = f \circ \iota : \mathbb{S}^p \to \mathbb{S}^p$. Dank J6A ist $\deg(g)$ ungerade. Andererseits gilt $\iota \simeq *$ (G4D), also $g \simeq *$ und somit $\deg(g) = 0$ (J3A). Daran zerbricht unsere Annahme. QED

Ungerade Abbildungen zwischen Sphären

Alternative: Auch $h = \iota \circ f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^q$ ist ungerade. Dank J6A ist $\deg(h)$ ungerade. Andererseits ist mit ι auch h zusammenziehbar, also $h \simeq *$ und $\deg(h) = 0$. An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme. QED

Das erste Argument nutzt nur den Abbildungsgrad $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^p] \to \mathbb{Z}$,
das zweite dagegen nutzt ihn höherdimensional für $[\mathbb{S}^q, \mathbb{S}^q] \to \mathbb{Z}$.

Wenn man nur mit der Umlaufzahl arbeiten möchte, also $p = 1$,
etwa aus didaktischen Gründen, so bietet sich der erste Beweis an.

Daher habe ich den einfacheren und sparsameren Beweis vorangestellt.

Allein mit der Umlaufzahl $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \to \mathbb{Z}$ erhalten wir immerhin:
Für $1 = p < q$ in $\mathbb{N}$ gibt es keine ungerade stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^1$.

Diese technische Beschränkung scheint mir unnatürlich und willkürlich.
Ich nutze daher den Abbildungsgrad, als Kredit, wie oben erklärt.

Das macht unsere Argumente nicht schwerer, sondern einfacher:
Sätze und Beweise lauten so in allen Dimensionen gleich.

Einbettungsdimension von Sphären

Existieren zu jedem Zeitpunkt auf der Erde $\cong \mathbb{S}^2$ gegenüberliegende Punkte $\pm x$ mit derselben Temperatur f_1 und demselben Luftdruck f_2?
Für $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ genügt bereits der Zwischenwertsatz, siehe Übung E2K.

Korollar J6c: Borsuk–Ulam

Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, so existiert ein Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Insbesondere gilt $\mathbb{S}^n \not\hookrightarrow \mathbb{R}^n$: Es existiert keine Einbettung $f : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

Beweis: Angenommen, es gälte $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Dann wäre

$$g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

wohldefiniert und stetig und ungerade. Dies widerspricht J6B. QED

Die **Einbettungsdimension** $\operatorname{edim}(X) := \inf\{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists f : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n \,\}$ eines topologischen Raumes X ist $n \in \mathbb{N}$, falls $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und $X \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$.

Beispiel: Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ hat die Einbettungsdimension $n+1$.

Einbettungsdimension euklidischer Gebiete

Jedes Gebiet $V \subseteq \mathbb{R}^q$ hat die Einbettungsdimension q. Genauer:

Korollar J6D: Einbettungsdimension euklidischer Gebiete

Sei $p < q$. Zu $V \subseteq \mathbb{R}^q$ offen, $a \in V$, existiert keine stetige Injektion $V \hookrightarrow \mathbb{R}^p$.

Beweis: Es gibt $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a, 2r) \subseteq V$, also $\mathbb{S}^{q-1} \hookrightarrow V : s \mapsto a + rs$.
Die Komposition $\mathbb{S}^{q-1} \hookrightarrow V \hookrightarrow \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ widerspricht J6C. QED

Anwendungsbeispiel: Sind M und N nicht-leere Mannigfaltigkeiten mit $\dim M = p < q = \dim N$, so existiert keine stetige Injektion $f : N \hookrightarrow M$.
Zu $f(a) = b$ existieren offene Umgebungen $U \cong \mathbb{R}^p$ von b und $V \cong \mathbb{R}^q$ von a mit $f(V) \subseteq U$. Wäre f injektiv, so hätten wir $\mathbb{R}^q \cong V \hookrightarrow U \cong \mathbb{R}^p$.

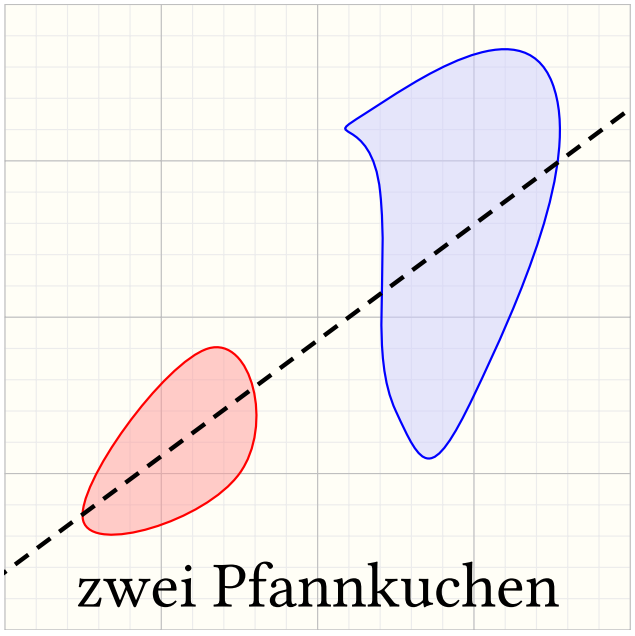
Als direkte Folgerung erhalten wir den folgenden wichtigen Satz:

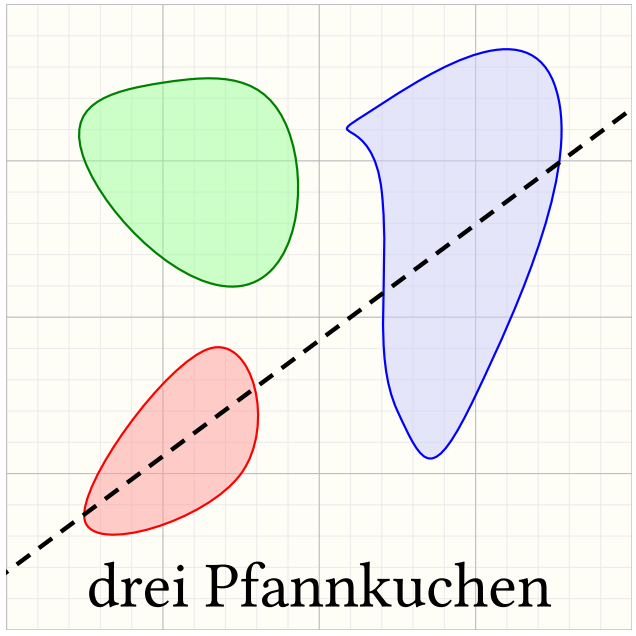
Satz J7C: topologische Invarianz der Dimension, Brouwer 1911

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$ nicht-leere offene Teilmengen, wobei $p, q \in \mathbb{N}$.
Wenn ein Homöomorphismus $(f, g) : U \cong V$ existiert, dann folgt $p = q$.

Beweis: Aus $\mathbb{R}^q \supseteq V \xrightarrow{\sim} U \subseteq \mathbb{R}^p$ folgt $q \leq p$. Ebenso $p \leq q$. QED

Der Satz vom Schinken-Käse-Brot





Definition J6E: Schinken-Käse-Brot

Ein Schinken-Käse-Brot besteht aus Brot mit Käse und Schinken.

Kann man ein Schinken-Käse-Brot im $\mathbb{R}^3$ durch einen geraden Schnitt so teilen, dass jede Hälfte gleich viel Brot, Käse und Schinken enthält?

Satz J6F: Satz vom Schinken-Käse-Brot für Kompakta

Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann existiert eine affine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $\mathrm{vol}_n(A_k \cap H_+) = \mathrm{vol}_n(A_k \cap H_-)$ für alle $k = 1, \dots, n$ gilt.

Der Satz vom Schinken-Käse-Brot

Vor dem Beweis möchte ich den Satz etwas allgemeiner formulieren.
Einschränkung definiert das Borel–Maß μ_k mit $\mu_k(B) := \mathrm{vol}_n(A_k \cap B)$.

Satz J6G: Schinken-Käse-Brot für Borel–Maße

Seien $\mu_1, \dots, \mu_n : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ endliche Borel–Maße auf $\mathbb{R}^n$, etwa WMaße oder Massen / Ladungen, für die jede affine Hyperebene Maß 0 habe.

Dann existiert eine affine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$, die den Raum in zwei affine Halbräume $H_\pm$ teilt, sodass $\mu_k(H_+) = \mu_k(H_-)$ für alle $k = 1, \dots, n$.

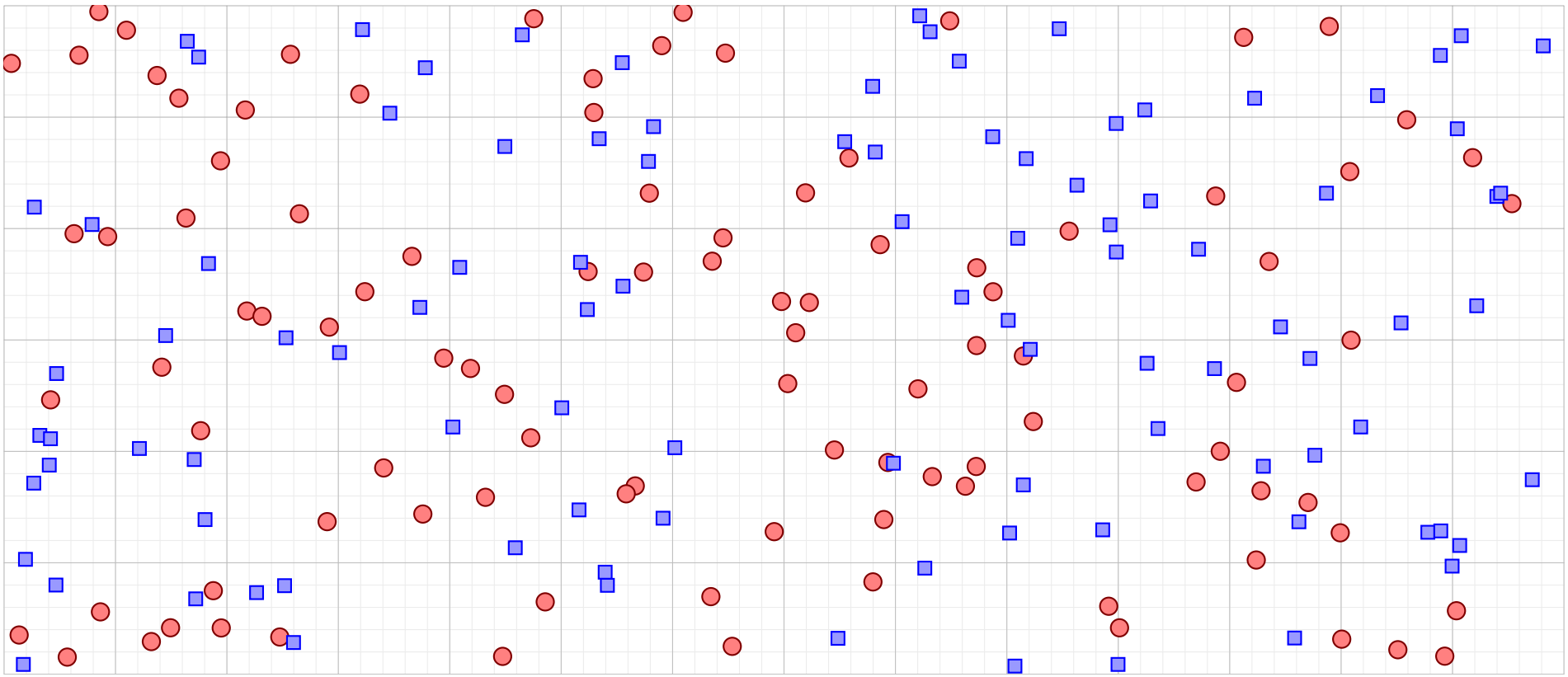
Beweis: Jeder Vektor $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiert die beiden affinen Halbräume $H_\pm(v) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n \gtrless v_0 \,\}$.
Dabei gilt $H_+(-v) = H_-(+v)$, sowie $H_+(e_0) = \emptyset$ und $H_-(e_0) = \mathbb{R}^n$.

Die Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f_k(v) := \mu_k(H_+(v))$ ist stetig. (Übung!
Das ist anschaulich plausibel; formal mit majorisierter Konvergenz J6H.)

Dank Korollar J6C existiert ein Punkt $v \in \mathbb{S}^n$ mit $f(v) = f(-v)$.
Das bedeutet $\mu_k(H_+(v)) = \mu_k(H_-(v))$ für alle $k = 1, \dots, n$. QED

Das Problem der fairen Teilung

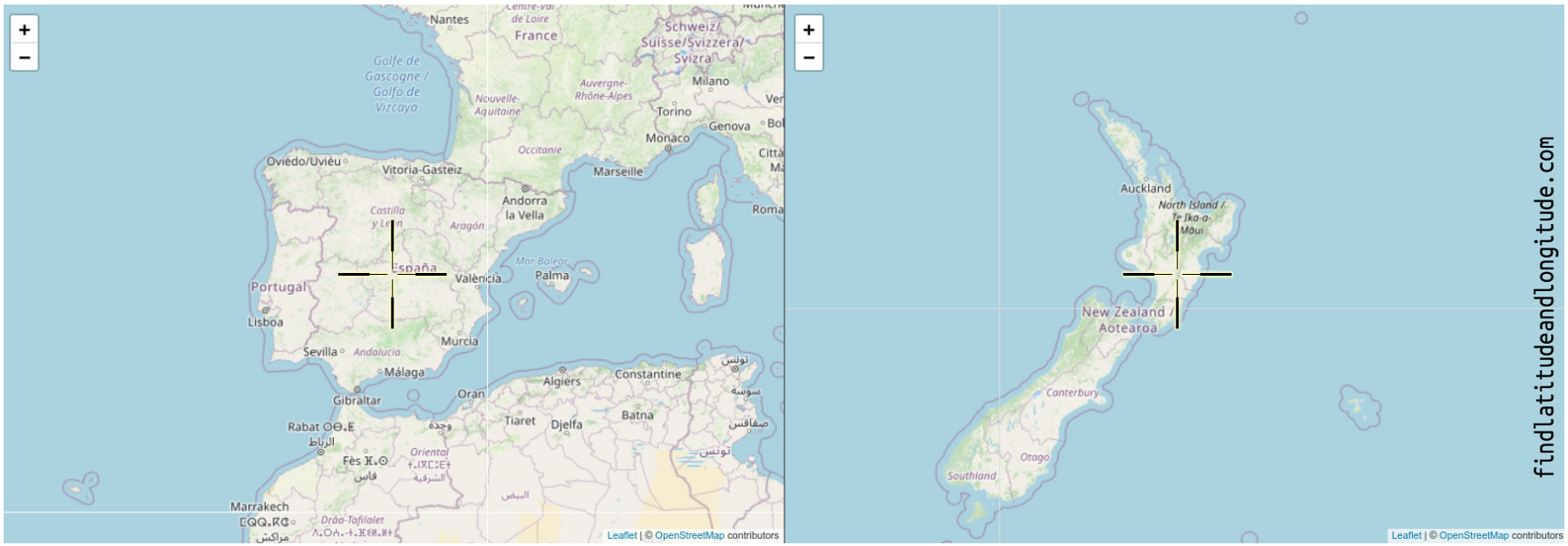
Spieltheorie, faire Teilung eines Kuchens: Wie / Ist dies möglich?
Der „Kuchen“ steht für diverse Ressourcen: Land, Güter, Lizenzen, …
Borsuk–Ulam theorem and stolen necklaces, `you2.be/yuVqxCSsE7c`.



Diskret-algorithmisch: Zeichnen Sie rote und blaue Punkte in der Ebene.
Finden Sie eine Gerade, die die rote und die blaue Punktwolke halbiert.
Warum muss es eine geben? Wie findet man eine? zudem effizient?

Der Satz von Lusternik–Schnirelman

Auf $\mathbb{S}^2 \cong$ Erdoberfläche betrachten wir die drei (abgeschlossenen) Mengen $A_0 =$ Land, $A_1 =$ Pazifik, $A_2 =$ andere Meere. Damit gilt $\mathbb{S}^2 = A_0 \cup A_1 \cup A_2$. Enthält eine der Mengen ein Antipodenpaar?



Satz J6L: Lusternik–Schnirelman

Sei $\mathbb{S}^n = A_0 \cup \cdots \cup A_n$ eine abgeschlossene (bzw. offene) Überdeckung, dann enthält mindestens eine der Mengen A_k ein Antipodenpaar $\pm x$.

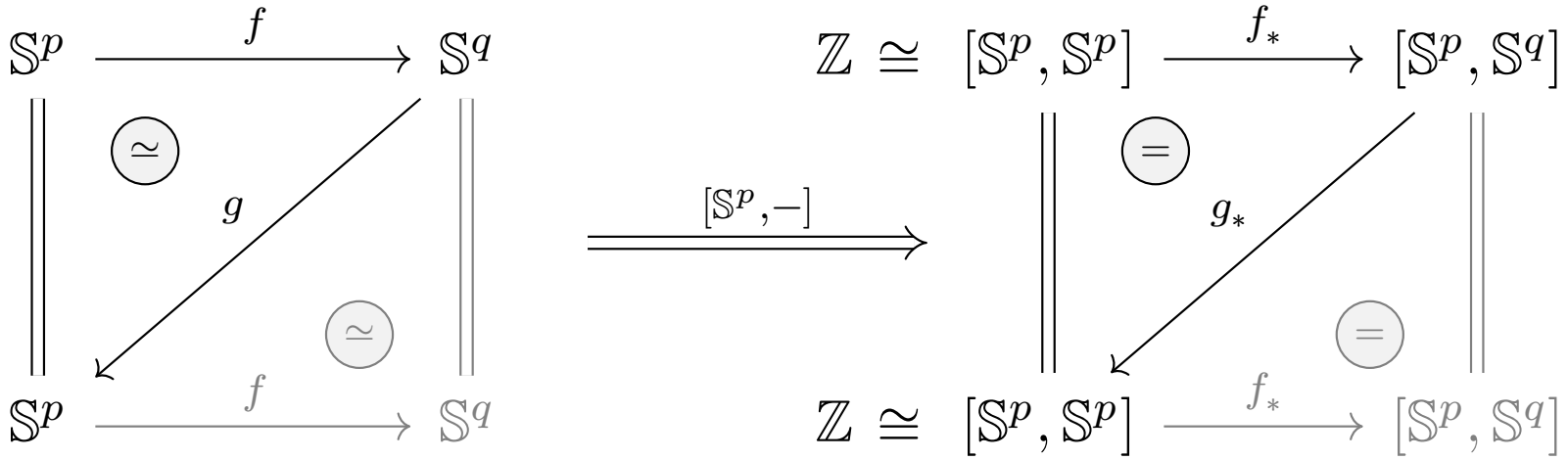
Übung: $n = 1$ mit ZWS, allgemein Borsuk–Ulam mit $f_k(x) = \operatorname{dist}(x, A_k)$.

Topologische Invarianz der Dimension: die Sphäre $\mathbb{S}^n$

Satz J7A: Klassifikation der Sphären $\mathbb{S}^n$ bis auf schwache Retraktion

Für alle $p \neq q$ in $\mathbb{N}$ gilt (1) $\mathbb{S}^p \not\cong \mathbb{S}^q$, sogar (2) $\mathbb{S}^p \not\simeq \mathbb{S}^q$. Genauer: (3) Es gibt keine stetigen Abbildungen $f : \mathbb{S}^p \to \mathbb{S}^q$ und $g : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^p$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^p}$.

Beweis: (3a) Im Falle $p < q$ wäre $f \simeq *$ (I4B), also $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^p} \simeq *$ (G4L), Widerspruch (J4A)! (3b) Im Falle $p > q$ wäre $g \simeq *$, Widerspruch! QED



Alternative: Wir nutzen den Funktor $[\mathbb{S}^p, -]$ (G4L). Aus $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^p}$ folgt $g_* \circ f_* = \mathrm{id}_*$ mit (a) f_* konstant oder (b) g_* konstant. Das ist unmöglich! „Eher geht ein Kamel durch ein Nadelöhr, als $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ durch 0 faktorisiert."

Topologische Invarianz der Dimension: die Sphäre $\mathbb{S}^n$

Dieser Satz beantwortet die Frage: *Was ist ein Loch der Dimension n?* Auch dieser Satz ist anschaulich plausibel, aber keineswegs leicht zu beweisen oder gar selbstverständlich. Erst mit geeigneten Werkzeugen wird der Beweis „trivial“: Wir danken erneut dem Abbildungsgrad!

Alle Begriffe und Werkzeuge greifen hier wunderbar ineinander: Homöomorphismen von Räumen und Homotopie von Abbildungen, die simpliziale Approximation zur Konstruktion und der Abbildungsgrad als Obstruktion. Damit können wir elegant und effizient arbeiten.

Im Satz J7A sind die Sphären zunächst **Werkstücke**, also Gegenstand unserer Untersuchung: Anschaulich umschließt die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ein Loch der Dimension n, und diese sind anschaulich von verschiedener Natur. Wir können nun präzisieren, was wir meinen, und dies auch beweisen!

In den folgenden Sätze dienen die Sphären als **Werkzeuge**, sie werden Hilfsmittel unserer Untersuchung: Wir analysieren damit die Topolgie der euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ und beweisen die topologische Invarianz der Dimension, des Randes, des Gebietes und der Orientierung.

Topologische Invarianz der Dimension: der Raum $\mathbb{R}^n$

Korollar J7B: Klassifikation der Räume $\mathbb{R}^n$ bis auf Homöomorphie

Für alle $p \neq q$ in $\mathbb{N}$ gilt zwar $\mathbb{R}^p \simeq * \simeq \mathbb{R}^q$, aber dennoch $\mathbb{R}^p \not\cong \mathbb{R}^q$.

Beweis: Sei $(h, k) : \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^q$ ein Homöomorphismus, wobei $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Daraus folgern wir $p = q$. Dazu betrachten wir einen Punkt $a \in \mathbb{R}^p$ und den Bildpunkt $b = h(a) \in \mathbb{R}^q$ und erhalten $(h^\circ, k^\circ) : \mathbb{R}^p \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^q \setminus \{b\}$:

$$(\mathbb{R}^p, a) \underset{k}{\overset{h}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} (\mathbb{R}^q, b)$$

$$h^\circ := h|^{\mathbb{R}^q \setminus \{b\}}_{\mathbb{R}^p \setminus \{a\}} \qquad\qquad k|^{\mathbb{R}^p \setminus \{a\}}_{\mathbb{R}^q \setminus \{b\}} =: k^\circ$$

$$\mathbb{S}^{p-1} \underset{\simeq}{\overset{\text{G5D}}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^p \setminus \{a\} \underset{k^\circ}{\overset{h^\circ}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathbb{R}^q \setminus \{b\} \underset{\simeq}{\overset{\text{G5D}}{\rightleftarrows}} \mathbb{S}^{q-1}$$

Daraus folgt $\mathbb{S}^{p-1} \simeq \mathbb{S}^{q-1}$. Dank J7A folgt $p = q$. QED

Alternative: Jeder Homöomorphismus $(h, k) : \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^q$ setzt sich fort zu $(\hat{h}, \hat{k}) : \mathbb{S}^p \cong \mathbb{S}^q$ auf den Alexandroff–Kompaktifizierungen (F4D). Erneut dank J7A folgt daraus die behauptete Gleichheit $p = q$.

Topologische Invarianz der Dimension: der Raum $\mathbb{R}^n$

Ich habe das Korollar für die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ formuliert,
das ist technisch einfacher und das Argument wird durchsichtiger.
Dasselbe gilt allgemein für euklidische Gebiete $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$:

Satz J7c: topologische Invarianz der Dimension, Brouwer 1911

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$ nicht-leere offene Teilmengen, wobei $p, q \in \mathbb{N}$.
Wenn ein Homöomorphismus $(f, g) : U \cong V$ existiert, dann folgt $p = q$.

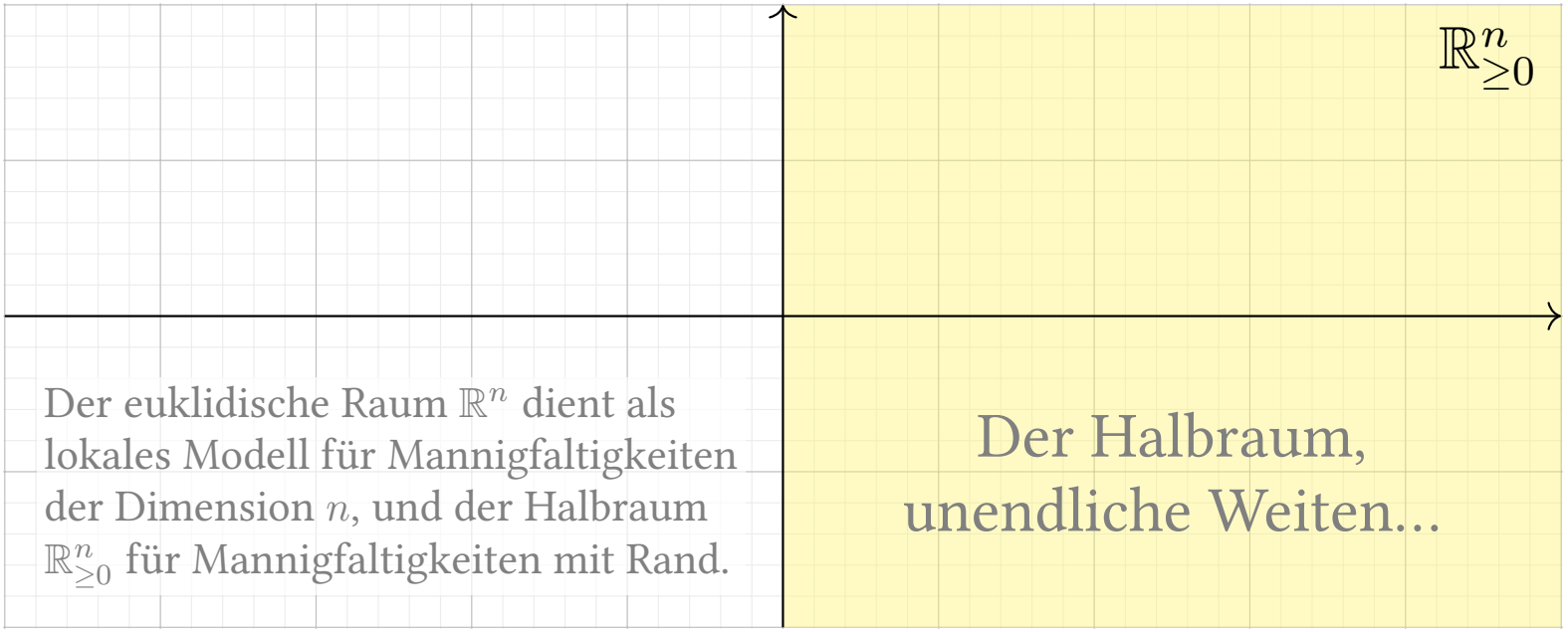
Mit Borsuk–Ulam können wir die Invarianz noch verschärfen (J6D).
Ohne Borsuk–Ulam behelfen wir uns mit folgendem Lemma:

Lemma J7D: topologische Charakterisierung der Dimension

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Dann gilt:
$$n = \min\big\{\, k \in \mathbb{N} \,\big|\, \forall U \in \mathcal{U}_a(X) : [\mathbb{S}^{k-1}, U \setminus \{a\}] \neq \{*\} \,\big\}$$

Für $n = 1$ ist das ein vertrautes Argument: Jeder Punkt $a \in U \subseteq \mathbb{R}^1$ trennt
jede noch so kleine Umgebung. Das Lemma perfektioniert diesen Trick.
Übung: Beweisen Sie dies durch Diskussion der Fälle $k = n$ und $k < n$.

Geometrischer Rand und Inneres



Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachten wir den n–dimensionalen Halbraum

$$\mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 \geq 0 \}.$$

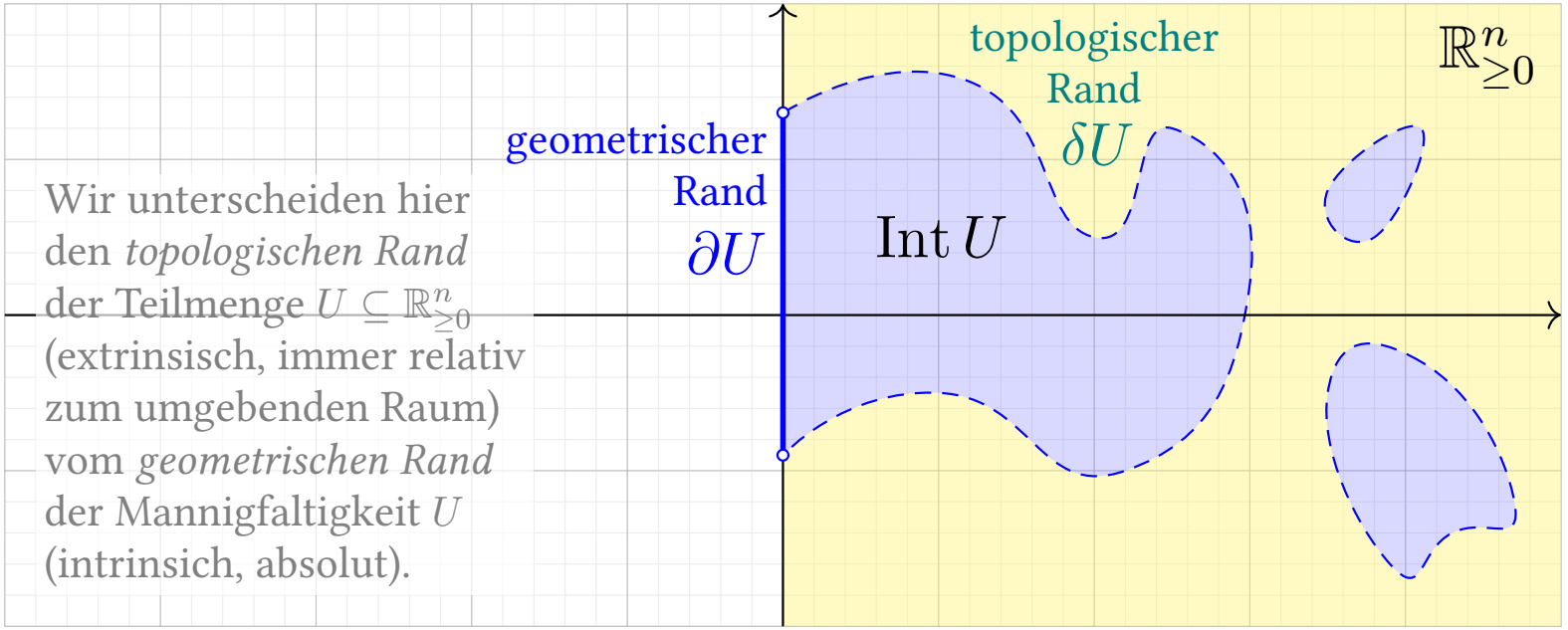
Sein Rand ist die $(n-1)$–dimensionale Hyperebene

$$\partial \mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 = 0 \}.$$

Sein Inneres ist der offene n–dimensionale Halbraum

$$\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\geq 0} := \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 > 0 \}.$$

Geometrischer Rand und Inneres



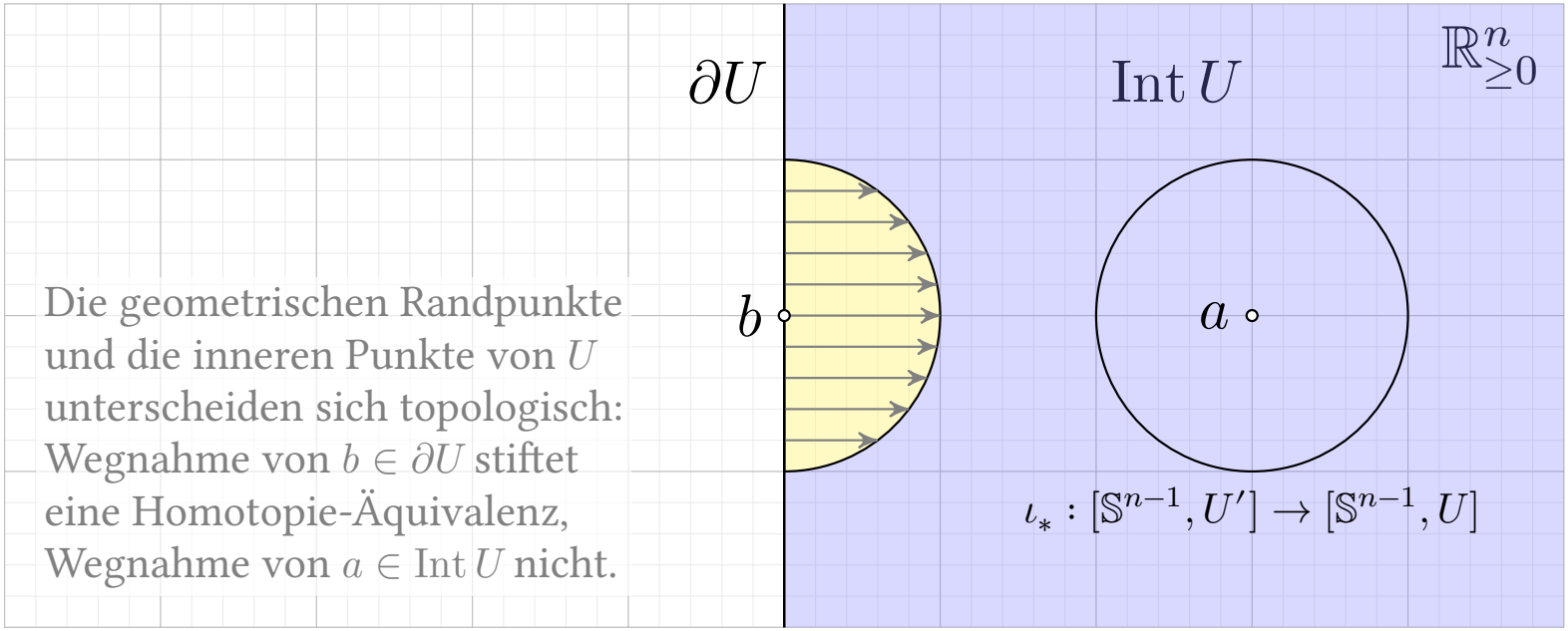
Definition J7G: geometrischer Rand und Inneres

Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ zerlegen wir in

- den **geometrischen Rand** $\partial U := U \cap \partial \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und
- das **geometrische Innere** $\operatorname{Int} U := U \cap \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.

Der topologische Rand $\delta U \supseteq \partial U$ in $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ist im Allgemeinen strikt größer.
Diese Definition nutzt zunächst die geometrische Lage von U in $\mathbb{R}^n$.
Diese Zerlegung ist tatsächlich eine topologische Eigenschaft!

Topologische Invarianz des geometrischen Randes



Lemma J7H: topologische Charakterisierung innerer Punkte

(1) Für $b \in \partial U$ ist $\iota : U \setminus \{b\} =: U' \hookrightarrow U$ eine Homotopie-Äquivalenz.
(2) Für $a \in \operatorname{Int} U$ ist $\iota : U \setminus \{a\} =: U' \hookrightarrow U$ keine Homotopie-Äquivalenz.

Satz J7I: topologische Invarianz des geometrischen Randes

Wie zuvor seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen. Für jeden Homöomorphismus $h : U \xrightarrow{\sim} V$ gilt dann $h(\partial U) = \partial V$ und $h(\operatorname{Int} U) = \operatorname{Int} V$.

Topologische Invarianz des geometrischen Randes

Aufgabe: Übersetzen Sie die Skizze sorgfältig in Formeln.
Beweisen Sie damit das Lemma und folgern Sie den Satz.

Lösung: (1) Zu $b \in \partial U$ existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(b, 2\varepsilon) \cap \mathbb{R}^n_{\geq 0} \subseteq U$. Nach Verschieben gilt $b = 0$, nach Skalieren $\varepsilon = 1$. Sei $V = U \setminus B(0,1)$ und

$$\rho : U \to V : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } |x| \geq 1, \\ (\sqrt{1 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}, x_2, \ldots, x_n) & \text{für } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Damit ist V ein starker Deformationsretrakt in U und in $U' = U \setminus \{b\}$, jeweils dank affiner Homotopie. Dank Transitivität folgt $\iota : U' \simeq U$.

(2) Wir wählen $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(a, 2r) \subseteq U$ und erhalten $(g, f) : \mathbb{S}^{n-1} \rightleftarrows U'$ mit Einbettung $g(s) = a + rs$ und Retraktion $f(x) = (x - a)/|x - a|$.

Wir haben $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}} \not\simeq *$ dank J4A, somit auch $g \not\simeq *$ dank G4L.
Hingegen ist $\iota \circ g : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow U$ zusammenziehbar in $B(a, 2r)$ (G4B).

Demnach ist ι keine Homotopie-Äquivalenz. Die induzierte Abbildung $\iota_* : [\mathbb{S}^{n-1}, U'] \to [\mathbb{S}^{n-1}, U]$ ist nicht injektiv, denn $\{[*] \neq [g]\} \to \{[*]\}$. QED

Der Trennungssatz von Jordan–Brouwer

Satz J2w: Trennungssatz von Jordan ($n = 2$) und Brouwer ($n \geq 2$)

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Für jede Einbettung $f : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

(1) Das Komplement $X = \mathbb{R}^n \setminus S$ zerfällt in genau zwei Gebiete,

$$A = \{ x \in \mathbb{R}^n \setminus S \,|\, \deg_2(f - x) = 0 \} \quad \text{unbeschränkt in } \mathbb{R}^n,$$
$$B = \{ x \in \mathbb{R}^n \setminus S \,|\, \deg_2(f - x) = 1 \} \quad \text{beschränkt in } \mathbb{R}^n.$$

(2) Somit ist $\nu : \pi_0(X) = \{A, B\} \xrightarrow{\sim} \{0, 1\} : [x] \mapsto \deg_2(f - x)$ bijektiv.
Zur Unterscheidung nutzen wir den Abbildungsgrad $\deg_2 = \deg \bmod 2$.

(3) Der gemeinsame Rand dieser beiden Gebiete ist $\delta A = \delta B = S$.
Ihre Abschlüsse in $\mathbb{R}^n$ sind demnach $\overline{A} = A \cup S$ und $\overline{B} = B \cup S$.

(4) Für $\mathbb{S}^k \hookrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $k \leq n - 2$ ist $\mathbb{R}^n \setminus S$ wegzusammenhängend.
Für jede Einbettung $\mathbb{D}^k \hookrightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}^n \setminus D$ wegzusammenhängend.

☹ Die Aussagen sind anschaulich plausibel, aber schwer zu beweisen.
☺ Erst geeignete Werkzeuge machen den Beweis leicht: Homologie!
☺ Der Fall $n = 2$ gelingt elementar (Satz von Jordan, siehe J2v).

Topologische Invarianz des Gebietes

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein **Gebiet**, das heißt offen und weg/zusammenhängend.
Stetige Injektionen $U \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ existieren für $m \geq n$, nicht für $m < n$ (J6D).
In der kritischen Dimension $m = n$ passiert etwas ganz Besonderes:

Satz J7K: topologische Invarianz des Gebietes

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Jede stetige Injektion $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist offen, das heißt, das Bild $V = f(U)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \xrightarrow{\sim} V$ ein Homöomorphismus.

Dies ist eine topologische Entsprechung des lokalen Umkehrsatzes.
Für $n = 1$ ist dies eine lehrreiche Übung zum Zwischenwertsatz (G2E).

Für $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ müssen Start und Ziel dieselbe Dimension n haben, zum Beispiel ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$ stetig und injektiv, aber nicht offen.

In unendlicher Dimension gilt die Aussage nicht: Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ oder $\ell^p(\mathbb{N})$ ist $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$ stetig und injektiv, aber nicht offen.

Auch in endlicher Dimension gilt die Aussage nicht für Halbräume:
$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x + 1$ ist stetig und injektiv, aber nicht offen.

Der Satz ist, wie gesagt, eine Besonderheit der euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$.

Topologische Invarianz des Gebietes

Beweis: Sei $n \geq 2$ und $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv.

Wir zeigen, dass die Abbildung f offen ist in jedem Punkt $a \in U$.
Nach Verschiebung sei $a = 0$ und nach Skalierung $B(0, 2) \subseteq U$.

Die Einschränkung $f : \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} S := f(\mathbb{S}^{n-1})$ ist stetig und bijektiv, also ein Homöomorphismus (F1L). Dies definiert zwei Zerlegungen:

$$\mathbb{R}^n \setminus S \;=\; \underbrace{A \sqcup B}_{\text{Jordan–Brouwer}} \;=\; \underbrace{A' \sqcup B'}_{\text{mit } B' := f(\mathbb{B}^n)}$$

(1) Dank dem Trennungssatz J2W und $n \geq 2$ zerfällt das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus S = A \sqcup B$ in zwei Gebiete, A unbeschränkt und B beschränkt.

(2) Andererseits zerlegen wir $\mathbb{R}^n \setminus S$ in $B' = f(\mathbb{B}^n)$ und $A' = \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$.
Wir wollen zeigen, dass B' in $\mathbb{R}^n$ offen ist. Hierzu zeigen wir $B' = B$.

Mit $\mathbb{B}^n \subseteq U$ ist auch das Bild $B' = f(\mathbb{B}^n)$ wegzusammenhängend (G1E).
Dank J2W trennt $f(\mathbb{D}^n)$ den Raum $\mathbb{R}^n$ nicht, also ist $A' = \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$ wegzusammenhängend, zudem offen und unbeschränkt (F1O).

Topologische Invarianz des Gebietes

Wir vergleichen die beiden Zerlegungen des Komplements $\mathbb{R}^n \setminus S$:

(a) Da A' wegzshgd ist, gilt entweder $A' \subseteq A$ oder $A' \subseteq B$.
Da A' unbeschränkt ist, aber B beschränkt, folgt $A' \subseteq A$.

(b) Da B' wegzshgd ist, gilt entweder $B' \subseteq B$ oder $B' \subseteq A$.
Letzteres ist unmöglich, da sonst $A' \sqcup B' \subseteq A \subsetneq A \sqcup B$.

Wir erhalten so die Inklusionen $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$.
Zusammen mit $A' \sqcup B' = A \sqcup B$ folgt $A' = A$ und $B' = B$.

Somit ist $f(\mathbb{B}^n) = B$ offen in $\mathbb{R}^n$. Ebenso $f(r\mathbb{B}^n)$ für alle $0 < r \leq 1$.
Das bedeutet, die Abbildung f ist offen im Punkt a, somit überall. QED

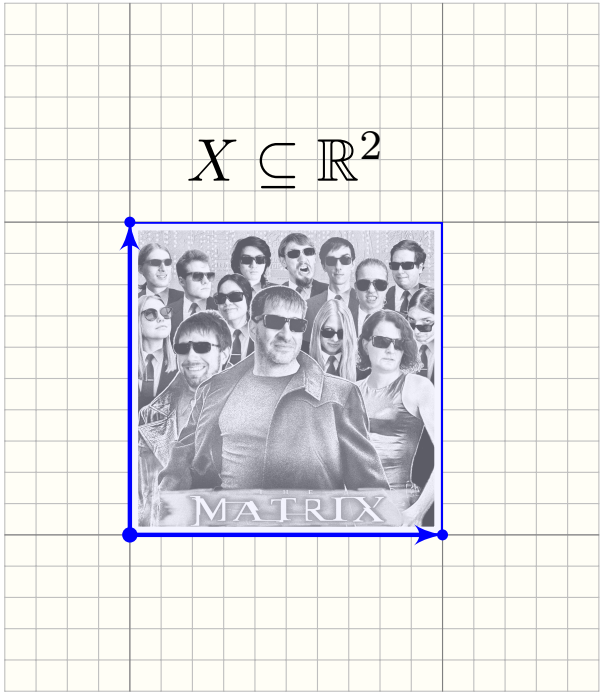
Übung J7M: Invarianz des Gebietes, der Sonderfall $n = 1$

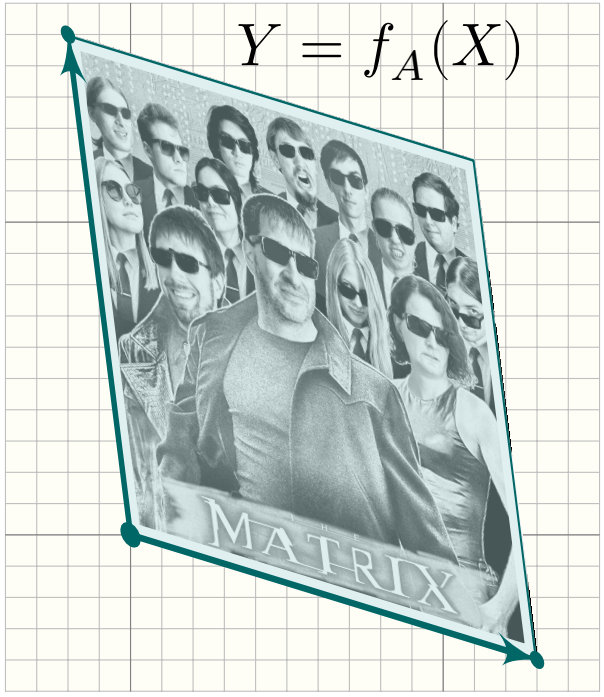
Gehen Sie den Beweis sorgfältig durch und formulieren Sie ihn für $n = 1$.
(1) Es gelingt sinngemäß genauso, und die Änderungen sind lehrreich!
(0) Es gelingt auch direkt mit dem Zwischenwertsatz! (siehe Satz D2F)

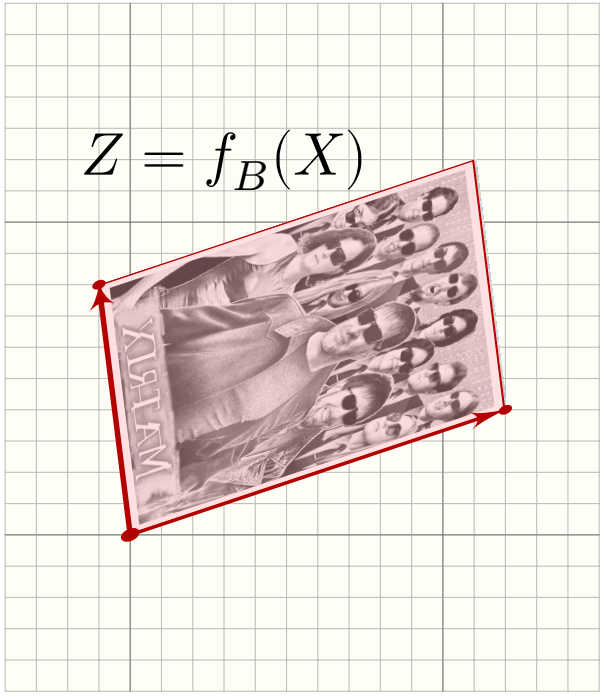
Die Determinante misst Volumen und Orientierung.

Wie wirken die folgenden Matrizen auf Flächeninhalt und Orientierung?

$$A = \begin{bmatrix} 1.3 & -0.2 \\ -0.4 & 1.6 \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad B = \begin{bmatrix} -0.1 & 1.2 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$







Wir finden hier $\det(f_A) = \det(A) = +2$ und $\det(f_B) = \det(B) = -1$.

Der Flächeninhalt wird von f_A verdoppelt, aber von f_B beibehalten.
Die Orientierung wird von f_A beibehalten, aber von f_B umgekehrt.

Die Determinante misst Volumen und Orientierung.

Die Verzerrung des Volumens wird gemessen durch den Betrag

$$v : (\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot, 1_{n\times n}) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}, \cdot, 1) \xrightarrow{\text{abs}} (\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot, 1) : A \mapsto |\det(A)|,$$
$$(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}, \cdot, 1_{n\times n}) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}^\times, \cdot, 1) \xrightarrow{\text{abs}} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1).$$

Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus v ist die Gruppe

$$\mathrm{SL}_n^{\pm}(\mathbb{R}) := \mathrm{Ker}(v) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, \det(A) = \pm 1 \right\}.$$

Das Orientierungsverhalten wird gemessen durch das Vorzeichen

$$\varepsilon : (\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot, 1_{n\times n}) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}, \cdot, 1) \xrightarrow{\text{sign}} (\{\pm 1, 0\}, \cdot, 1),$$
$$(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}, \cdot, 1_{n\times n}) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}^\times, \cdot, 1) \xrightarrow{\text{sign}} (\{\pm 1\}, \cdot, 1).$$

Es zerlegt die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ in zwei Klassen:

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, \det(A) > 0 \right\} = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$$
$$\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, \det(A) < 0 \right\} \quad \text{Nebenklasse!}$$

Es gilt $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n^+ \sqcup \mathrm{GL}_n^-$ und $\mathrm{GL}_n^- = B \cdot \mathrm{GL}_n^+$ für jede Matrix $B \in \mathrm{GL}_n^-$.

Orientierung erhalten vs umkehren

Beispiele: Wir haben oben $A \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ gesehen.
Zu $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ gehören alle Drehungen (vorerst noch anschaulich).
Zu $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ gehören alle Spiegelungen (vorerst nur anschaulich).

Ist V ein $\mathbb{R}$–linearer Raum endlicher Dimension, so setzen wir:

$$\mathrm{GL}^+(V) := \left\{ f : V \to V \middle| \det_V(f) > 0 \right\}$$
$$\mathrm{GL}^-(V) := \left\{ f : V \to V \middle| \det_V(f) < 0 \right\}$$

Jeder Automorphismus $f \in \mathrm{GL}^+(V)$ heißt **orientierungserhaltend**.
Jeder Automorphismus $f \in \mathrm{GL}^-(V)$ heißt **orientierungsumkehrend**.

Hierbei sind $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \trianglelefteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}^+(V) \trianglelefteq \mathrm{GL}(V)$ Untergruppen, nicht jedoch $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}^-(V)$. Letztere sind nur die Nebenklassen!

🙂 Wir haben nun erklärt, wann ein $\mathbb{R}$–Automorphismus $f : V \to V$ „die Orientierung erhält“ oder hingegen „die Orientierung umkehrt“.

❓ Dabei haben wir noch nicht definiert, was „die Orientierung“ ist.
Das ist kein Versehen, sondern die logisch richtige Reihenfolge!

Was bedeutet ($\mathbb{R}$–lineare) Orientierung?

Anschaulich: Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ wird orientiert durch ihre Ordnung $\leq$.
Doch wie orientieren wir die Ebene $\mathbb{R}^2$? oder den Raum $\mathbb{R}^3$? allgemein V?
Das ist zunächst keineswegs offensichtlich. Es erfordert Scharfsinn!
Nach längerer Überlegung bieten sich folgende Möglichkeiten:

(1) Geometrische Sichtweise: Gegeben seien zwei Basen $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ des $\mathbb{R}^n$. Sie sind **gleichsinnig orientiert**, wenn es einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ gibt: Die Spalten von $\gamma(t)$ sind zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,1]$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

(2) Algebraische Sichtweise: Gauß–Algorithmus und Determinante zeigen: Genau dann ist (1) möglich, wenn die Basiswechselmatrix $\mathrm{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ **positive Determinante** hat, also $\det \mathrm{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} > 0$ erfüllt.
Diese algebraische Eigenschaft nutzen wir in der Definition J7o.

(3) Pragmatische Sichtweise: Wir benötigen ein Entscheidungsverfahren.
Eine **Orientierung** sagt zu jeder Basis, ob sie positiv oder negativ ist, wobei gleichsinnig orientierte Basen denselben Wert bekommen und gegensinnig orientierte Basen entgegengesetzte Werte, siehe J7o.

Wie orientieren wir einen $\mathbb{R}$–Vektorraum?

Definition J7o: Orientierungen eines $\mathbb{R}$–Vektorraums

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum endlicher Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \in \mathbb{N}$.

(0) Zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von V über $\mathbb{R}$ heißen **gleichsinnig orientiert**, wenn die Basiswechselmatrix positive Determinante hat, $\varepsilon(\mathrm{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}) = +1$. Dies ist eine Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch, transitiv.

(1) Eine **Orientierung** von V ist eine Zuordnung $\alpha : \{\text{Basen}\} \to \{\pm 1\}$ mit $\alpha(\mathcal{C}) = \alpha(\mathcal{B}) \cdot \varepsilon(\mathrm{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})$ für je zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von V über $\mathbb{R}$. Das Paar (V, α) nennen wir einen **orientierten** $\mathbb{R}$–Vektorraum.

(2) Die **Standardorientierung** auf $\mathbb{R}^n$ ist $\varepsilon : \mathcal{B} \mapsto \operatorname{sign} \det(\mathcal{B})$. Mit dieser Orientierung ist die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ positiv. Auf jedem $\mathbb{R}$–Vektorraum V gibt es genau zwei Orientierungen, $\pm\alpha$.

(3) Ein $\mathbb{R}$–linearer Isomorphismus $h : (V, \alpha) \xrightarrow{\sim} (V', \alpha')$ heißt **orientierungserhaltend/umkehrend**, falls $\alpha' \circ h = \pm\alpha$ gilt, also $\alpha'(h(b_1), \dots, h(b_n)) = \pm\alpha(b_1, \dots, b_n)$ für jede Basis $b_1, \dots, b_n$ von V.

Aufgabe: Beweisen Sie sorgsam alle hier gemachten Behauptungen.

Wie orientieren wir einen $\mathbb{R}$–Vektorraum?

☺ Beachten Sie, dieses raffinierte Vorgehen ist korrekt und notwendig!

Lösung: (0) Dies ist eine Äquivalenzrelation, denn $\varepsilon = \operatorname{sign} \circ \det$ ist ein Gruppenhomomorphismus, kurz $\varepsilon : (\mathrm{GL}_n \mathbb{R}, \cdot, E) \to (\{\pm 1\}, \cdot, 1)$.
(0a) Reflexivität: Es gilt $\mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = E$ also $\det \mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = 1 > 0$. (0b) Transitivität: Es gilt $\mathrm{T}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \mathrm{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \mathrm{T}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$. Aus $\det \mathrm{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} > 0$ und $\det \mathrm{T}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} > 0$ folgt $\det \mathrm{T}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} > 0$.
(0c) Symmetrie: Es folgt $\mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \mathrm{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = E$. Aus $\det \mathrm{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} > 0$ folgt $\det \mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} > 0$.

(2a) Die Abbildung ε ist eine Orientierung, denn die Determinante ist multiplikativ. Auf $\mathbb{R}^n$ gibt es genau zwei Orientierungen, nämlich $\pm\varepsilon$.
(2b) Jeder $\mathbb{R}$–Isomorphismus $h : V \xrightarrow{\sim} V'$ transportiert jede Orientierung α auf V zur Orientierung $h_*(\alpha) := \alpha \circ h^{-1}$ auf V', mit $h_*(-\alpha) = -h_*(\alpha)$.
(2c) Jede Basis $\mathcal{B}$ von V über $\mathbb{R}$ stiftet einen Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$. Auf V erhalten wir genau zwei Orientierungen, nämlich $\pm(\Phi_{\mathcal{B}})_*(\varepsilon)$.

Genau dann sind Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von V über $\mathbb{R}$ gleichsinnig/gegensinnig, wenn $\varepsilon(\mathrm{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}) = \pm 1$, also $\alpha(\mathcal{B}) = \pm\alpha(\mathcal{C})$. Somit ist (1,2) äquivalent zu (0).
Auf der Menge aller Basen von V operiert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ von rechts frei und transitiv (durch Basiswechsel), ebenso $\mathrm{GL}(V)$ von links (dank PLF).

Wie orientieren wir einen $\mathbb{R}$–Vektorraum?

Beispiele: (0) Auf $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist die Standardorientierung $\varepsilon : () \mapsto +1$.
(1) Die Gerade $\mathbb{R}^1$ teilt $\varepsilon = \operatorname{sign} : \mathbb{R}^\times \to \{\pm 1\}$ in „links“ und „rechts“.
(2) Auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ besagt $\varepsilon(b_1, b_2) = \pm 1$, ob wir b_1 auf b_2 drehen „entgegen“ oder „im Uhrzeigersinn“. (Rechte-/Linke-Hand-Regel)

Auf dem Raum $\mathbb{R}^n$ teilt ε alle Basen in „rechtshändig“ und „linkshändig“.
Jede Basis $\mathcal{B}$ von V definiert eindeutig eine Orientierung $[\mathcal{B}] := \alpha_{\mathcal{B}}$ mit $\alpha_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = +1$; diese ist demnach explizit gegeben durch $\alpha_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) := \varepsilon(\mathrm{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})$.
Wir erklären damit unsere Basis $\mathcal{B}$ als positiv, daraus folgt alles weitere.
Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ergibt die Standardorientierung $\varepsilon = [e_1, \dots, e_n]$.

Zu $[\mathcal{B}] = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ gilt $-[\mathcal{B}] = [-b_1, b_2, \dots, b_n] = [b_2, b_1, \dots, b_n] = \dots$.
Jeder $\mathbb{R}$–lineare Isomorphismus $h : (V, [\mathcal{B}]) \xrightarrow{\sim} (V', [\mathcal{B}'])$ transportiert die Orientierung $[\mathcal{B}] = [b_1, \dots, b_n]$ auf V zu $h_*([\mathcal{B}]) = [h(b_1), \dots, h(b_n)]$ auf V'.
Er ist orientierungserhaltend/umkehrend, falls $h_*([\mathcal{B}]) = \pm[\mathcal{B}']$ gilt.

Ein Automorphismus $h : V \xrightarrow{\sim} V$ ist orientierungserhaltend/umkehrend, falls $f([\mathcal{B}]) = \pm[\mathcal{B}]$ gilt für eine (und damit jede) Orientierung $[\mathcal{B}]$ auf V.
Das war unser Ausgangspunkt, alles fügt sich schließlich zusammen.

Wie orientieren wir einen $\mathbb{R}$–Vektorraum?

Aufgabe: Wie orientieren Sie folgende Vektorräume?

$$\begin{aligned} &(1) \quad U = \{\, x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \,\} && \leq \mathbb{R}^4 \\ &(2) \quad V = \langle 1, \cos, \sin \rangle^!_{\mathbb{R}} && \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

(3) Wie verhält sich die Ableitung $\partial : W \to W$ auf $W = \langle \cos, \sin \rangle^!_{\mathbb{R}}$?
Ist sie orientierungserhaltend oder -umkehrend? zudem volumentreu?

Lösung: (1) Es gibt zwei Orientierungen, keine ist schöner als die andere. Wir müssen eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ *wählen*, um eine Orientierung $[\mathcal{B}]$ auf U zu *vereinbaren*. (2) Die beiden möglichen Orientierungen sind $[1, \cos, \sin] = [\cos, \sin, 1] = \ldots$ und $[1, \sin, \cos] = [\cos, 1, \sin] = \ldots$.
(3) Wir wählen eine *beliebige* Basis von W, etwa $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$.

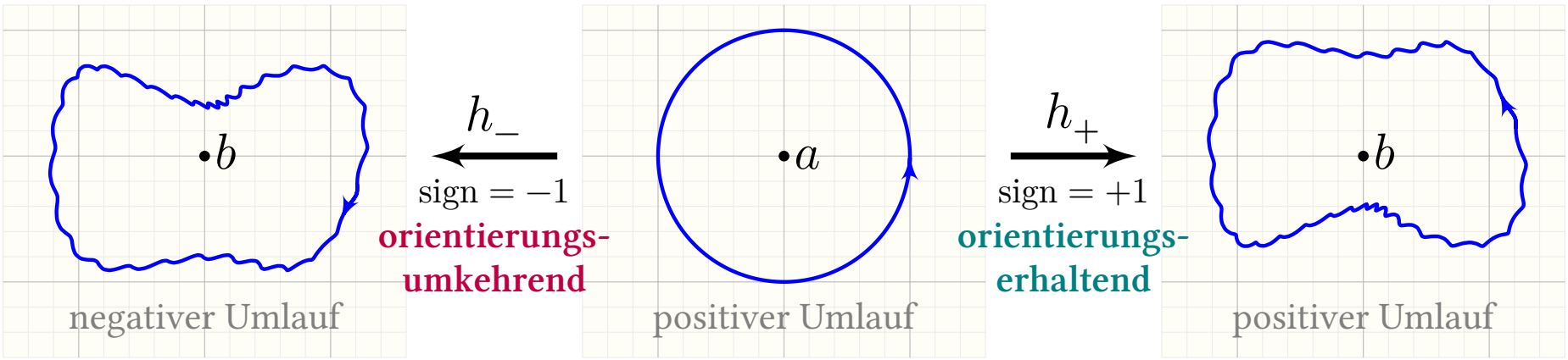
$$A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det\nolimits_W(\partial) = \det\nolimits^2_{\mathbb{R}}(A) = +1$$

Somit ist $\partial : W \to W$ orientierungserhaltend und zudem volumentreu, kurz $\partial \in \mathrm{SL}(W)$. Die Rechnung erfordert willkürliche Wahl einer Basis, das Ergebnis ist glücklicherweise davon unabhängig, also wohldefiniert!

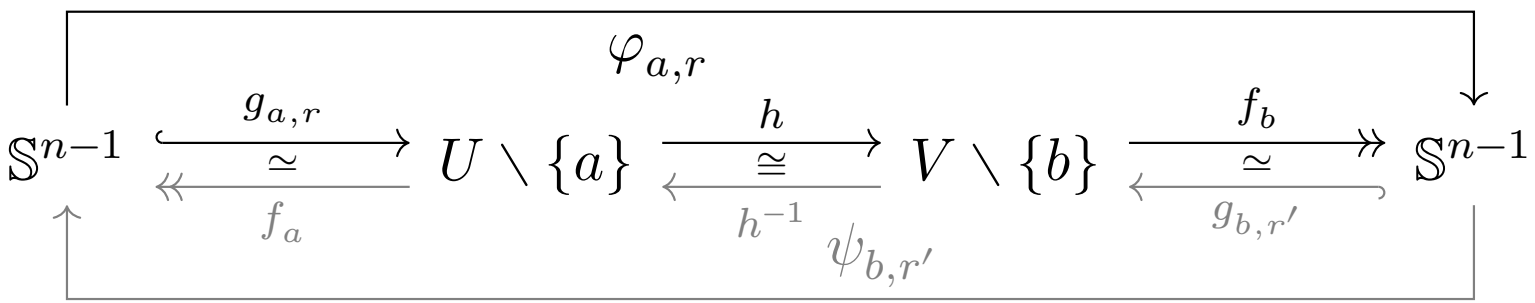
Topologische Definition des Orientierungsverhaltens

Für jeden Diffeomorphismus $h : (U \subseteq \mathbb{R}^n, a) \xrightarrow{\sim} (V \subseteq \mathbb{R}^n, b)$ entscheidet das Vorzeichen $\operatorname{sign} \det h'(a) \in \{\pm 1\}$ über das Orientierungsverhalten.

Allgemein für Homöomorphismen? Hier rettet uns der Abbildungsgrad!



So definieren und messen wir das **Orientierungsverhalten** von h in a:



Wir komponieren h mit der Einbettung $g_{a,r} : s \mapsto a + rs$ und Projektion $f_b : y \mapsto (y - b)/|y - b|$ und definieren $\operatorname{sign}(h, a) := \deg(\varphi_{a,r}) \in \{\pm 1\}$.

Topologische Definition des Orientierungsverhaltens

Beachten Sie die Progression der begrifflichen Verallgemeinerung:

(1) Schon linear ist die Definition des Orientierungsbegriffs raffiniert: Sie benötigen alle Techniken der Linearen Algebra und präzise Begriffe!

(2) Für differenzierbare Abbildungen nutzen wir dankend die Ableitung (als Funktor) und führen das Problem auf lineare Abbildungen zurück!

(3) Topologisch wird die technische Schwierigkeit offenbar: Wir haben noch weniger Struktur, insbesondere keine linearen Abbildungen mehr!

Die obige Skizze erklärt, wie wir hierzu den Abbildungsgrad einsetzen: Wir betrachten eine Sphäre um a und ihr Bild unter $h : (U, a) \rightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow (V, b)$. Dies ergibt eine kleine Sphäre um b, und wir messen ihre Orientierung. Hierzu genügen uns stetige Abbildungen… und der Abbildungsgrad!

Das ist geometrisch wunderbar anschaulich, aber technisch aufwändig. Der größte Aufwand steckt in der Konstruktion des Abbildungsgrades. Wir fügen nun die Puzzleteile zusammen und übersetzen, wieder einmal, die anschauliche Skizze in präzise Formeln. Voilà, alles wird gut.

Einfachster Fall: Dimension $n = 1$

🙂 Besonders schön und einfach ist die Situation in Dimension $n = 1$:
Hier sind Stetigkeit und Monotonie engstens verbunden, siehe Satz D2F.

Der Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0] \to \{\pm 1, 0\}$ ist die Signatur, siehe J306.
Wir haben $\mathbb{S}^0 = \{-1, +1\}$ und $\deg = \operatorname{sign} : [\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0] \to \{\pm 1, 0\}$:

$$\deg(\mathrm{id}) = +1, \qquad \deg(-\mathrm{id}) = -1, \qquad \deg(\mathrm{const}) = 0.$$

Aufgabe: Was bedeutet $\operatorname{sign}(h, a) := \deg(\varphi_{a,r})$ im Fall $n = 1$? **Lösung:**
Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen. Jeder Homöomorphismus $h : (U, a) \xrightarrow{\sim} (V, b)$
ist um a streng monoton, entweder (1) wachsend oder (2) fallend.

Global: Auf jeder Komponente ist h streng wachsend / fallend.
(Auf verschiedenen Komponenten ist das Verhalten unabhängig.)

Ist h ein Diffeomorphismus, so folgt (1) $h'(a) > 0$ oder (2) $h'(a) < 0$.
(Wachsend impliziert $h' \geq 0$, fallend $h' \leq 0$, zudem gilt $h'(a) \neq 0$.)

Allgemein, falls h nur ein Homöomorphismus ist, so finden wir:

(1) $\varphi_{a,r}: \quad \pm 1 \;\mapsto\; a \pm r \;\mapsto\; h(a \pm r) \gtrless b \;\mapsto\; \pm 1, \quad$ also $\deg(\varphi_{a,r}) = +1.$

(2) $\varphi_{a,r}: \quad \pm 1 \;\mapsto\; a \pm r \;\mapsto\; h(a \pm r) \lessgtr b \;\mapsto\; \mp 1, \quad$ also $\deg(\varphi_{a,r}) = -1.$

Höhere Dimension: $n \geq 2$

Für diesen einfachsten Fall benötigen wir den Abbildungsgrad nicht wirklich, er ist nur eine wunderlich komplizierte (oder doch elegante?) Formulierung der Monotonie. Dennoch ist es sehr schön und beruhigend, dass unsere allgemeine Betrachtung in diesem Spezialfall die vertrauten Begriffe „wachsend“ vs „fallend“ für $h : \mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}$ ergibt.

⚠ Ab Dimension $n \geq 2$ benötigen wir stärkere Werkzeuge!

🙂 In der Analysis setzt man h als Diffeomorphismus voraus und nutzt die Jacobi–Matrix $h'(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Volumenverzerrung $|\det h'(a)|$ spielt eine wichtige Rolle in der Integration, speziell im Transformationssatz. Das Vorzeichen $\operatorname{sign} \det h'(a) \in \{\pm 1\}$ misst das Orientierungsverhalten. Hier arbeiten Analysis (Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$) und Lineare Algebra (Determinante) wieder einmal wunderbar zusammen!

🙂 Oft haben wir den Luxus der Differenzierbarkeit nicht, oder wollen vielleicht gar nicht erst die Last auf uns nehmen, sie nachzuweisen. Die Volumenverzerrung können wir nun nicht mehr kontrollieren, das Orientierungsverhalten hingegen immer noch… dank Abbildungsgrad!

Topologische Definition des Orientierungsverhaltens

Aufgabe: Formulieren Sie die obige Konstruktion nun allgemein für jeden Homöomorphismus $h : (U, a) \xrightarrow{\sim} (V, b)$ mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(1) Warum ist $\operatorname{sign}(h, a) \in \{\pm 1\}$ wohldefiniert, unabhängig von r?
(2) Warum ist $a \mapsto \operatorname{sign}(h, a)$ lokal konstant? anschaulich? formal?

Lösung: (1) Wir nutzen die obigen Abbildungen und schauen genau hin:

Sei $\bar{B}(a, r_0) \subseteq U$ und $r \in]0, r_0]$. Dank Homotopie-Invarianz ist $\deg(\varphi_{a,r})$ unabhängig von r. Ebenso für $\psi_{b,r'}$ und $\bar{B}(b, r_0') \subseteq V$ und $r' \in]0, r_0']$.

Es gilt $f_a \circ g_{a,r} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, zudem $g_{a,r} \circ f_a \simeq \mathrm{id}_{U'}$ auf $U' = \bar{B}(a, r_0) \setminus \{a\}$.
Es gilt $f_b \circ g_{b,r'} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, zudem $g_{b,r'} \circ f_b \simeq \mathrm{id}_{V'}$ auf $V' = \bar{B}(b, r_0') \setminus \{b\}$.

Wir wählen $r_1 \in]0, r_0]$ mit $h(\bar{B}(a, r_1)) \subseteq \bar{B}(b, r_0')$. Für $r \in]0, r_1]$ gilt dann $\psi_{b,r'} \circ \varphi_{a,r} = f_a \circ h^{-1} \circ g_{b,r'} \circ f_b \circ h \circ g_{a,r} \simeq f_a \circ h^{-1} \circ h \circ g_{a,r} = f_a \circ g_{a,r} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$.
Daraus folgt $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg(\psi_{b,r'} \circ \varphi_{a,r}) = \deg(\psi_{b,r'}) \cdot \deg(\varphi_{a,r})$ dank Multiplikativität (J3C), also $\deg(\varphi_{a,r}) = \deg(\psi_{b,r'}) \in \{\pm 1\}$ (J3D).

(2) Weiterhin sei $\bar{B}(a, r_0) \subseteq U$ für ein $r_0 > 0$. Wir fixieren nun $r = r_0/2$. Für alle $\tilde{a} \in B(a, r)$ gilt $\varphi_{a,r} \simeq \varphi_{\tilde{a},r}$ und somit $\operatorname{sign}(h, a) = \operatorname{sign}(h, \tilde{a})$.

Topologische Definition des Orientierungsverhaltens

Nach diesen sorgfältigen Vorbereitungen können wir nun feierlich und erfreulich allgemein das Orientierungsverhalten erklären:

Definition J7P: Orientierungsverhalten, topologisch

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $h : (U, a) \xrightarrow{\sim} (V, b)$ ein Homöomorphismus. Das **Orientierungsverhalten** von $h : (U, a) \xrightarrow{\sim} (V, b)$ definieren wir durch

$$\operatorname{sign}(h, a) := \deg(\varphi_{a,r}) \quad \text{wobei } r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } \bar{B}(a, r) \subseteq U.$$

Dies ist wohldefiniert, also unabhängig vom gewählten Radius r. Nach obiger Rechnung ist der Abbildungsgrad entweder $+1$ oder -1.

Im Falle $\operatorname{sign}(h, a) = +1$ nennen wir h in a **orientierungserhaltend**, im Falle $\operatorname{sign}(h, a) = -1$ nennen wir h in a **orientierungsumkehrend**.

Die Abbildung $a \mapsto \operatorname{sign}(h, a)$ ist zudem lokal konstant. Ist sie global konstant, etwa für U zshgd, so schreiben wir diesen Wert kurz $\operatorname{sign}(h)$.

Im letzten Falle ist $h : U \xrightarrow{\sim} V$ nicht nur lokal um jeden Punkt, sondern global **orientierungserhaltend** oder global **orientierungsumkehrend**.

Verbindung zum linearen / glatten Fall

Unsere allgemeine, topologische Definition deckt sich mit den speziellen, einfacheren Definitionen aus der Linearen Algebra und der Analysis:

Übung J7Q: Verbindung zum linearen / glatten Fall

(1) Für $A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$ gilt $\operatorname{sign}(A, 0) = \operatorname{sign}\det A$.

(2) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $h : (U, a) \xrightarrow{\sim} (V, b)$ ein Homöomorphismus. Ist h in a diff'bar mit $h'(a) \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$, so gilt $\operatorname{sign}(h, a) = \operatorname{sign}\det h'(a)$.

Lösung: (1) Nach Satz G2N zerfällt $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ in zwei Wegkomponenten: $\pi_0(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_n^{\pm}\,\mathbb{R}\}$. Für $\det A \gtrless 0$ ist A mit $E_{\pm} = \operatorname{diag}(1, \pm 1, 1, \ldots, 1)$ verbindbar durch einen Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$, dank Gauß–Algorithmus.

Das Orientierungsverhalten ändert sich nicht während der Homotopie $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} : (t, x) \mapsto (\gamma(t)\,x)/|\gamma(t)\,x|$. Für $E_{\pm}$ können wir es schließlich leicht ablesen und erhalten $\operatorname{sign}(A, 0) = \operatorname{sign}(E_{\pm}, 0) = \pm 1$.

☺ Den linearen Fall (1) nutzen wir auch glatt (2): Differenzierbarkeit bedeutet (affin-)lineare Approximation mit vernachlässigbarem Fehler.

Verbindung zum linearen / glatten Fall

(2) Durch Verschiebung erreichen wir $a = 0$ und $b = 0$, das ist bequemer.

Differenzierbarkeit im Punkt $a = 0$ mit Ableitung $h'(0) = A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ bedeutet $|h(x) - Ax|/|x| \to 0$ für $|x| \to 0$. Dank Kompaktheit von $\mathbb{S}^{n-1}$ gilt $c := \min\{\, |Ax| \mid |x| = 1 \,\} > 0$, also $|Ax| \geq c \cdot |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Dank des vorausgesetzten Grenzwerts existiert ein Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\bar{B}(0, r) \subseteq U$ und hierauf die Approximation $|h(x) - Ax| < c \cdot |x|$. Gemäß Definition J7P berechnen wir nun den Abbildungsgrad von

$$\varphi = h \circ g : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow U \setminus \{0\} \to V \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : s \mapsto h(rs).$$

Die Komposition $\varphi = h \circ g$ ist homotop zu $A \circ g$ vermöge der affinen Homotopie $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $H(t, s) = th(rs) + (1 - t)A(rs)$. Unsere obige Abschätzung $|h(x) - Ax| < c \cdot |x| \leq |Ax|$ garantiert nun

$$\big|H(t, s)\big| = \big|A(rs) + t[h(rs) - A(rs)]\big| \geq \big|A(rs)\big| - t\big|h(rs) - A(rs)\big| > 0.$$

Demnach haben h und A um 0 dasselbe Orientierungsverhalten!
Dank (1) schließen wir $\operatorname{sign}(h, 0) = \deg(H_1) = \deg(H_0) = \operatorname{sign} \det A$. QED

Zwischenbilanz unserer Topologie: Soll und Haben

hier bereits bewiesen…	später verallgemeinern…
Abbildungsgrad $(\deg, \varphi) : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$	
$n \leq 1$: Satz J1J	$n \geq 2$: Algebraische Topologie
Jordan–Brouwer: Trennungssatz für $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$	
$n \leq 1$: Satz J2V	$n \geq 2$: Algebraische Topologie
Schoenflies: Entknotung von $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ (glatt $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$)	
polygonal: Satz J2J	Funktionentheorie (Knotentheorie)
Borsuk–Ulam: Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ungerade, so auch $\deg(f)$.	
$n \leq 1$: Satz J6A	$n \geq 2$: Algebraische Topologie
Homotopie–Invarianz der Euler–Charakteristik	
Graphen und Flächen: π_1	Algebraische Topologie: H_*

Zwischenbilanz unserer Topologie: Soll und Haben

Die Umlaufzahl $\deg(\gamma)$ eines (geschlossenen) Weges $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ ist anschaulich sofort verständlich, Konstruktion und Beweis gelingen leicht: Polygonal genügt dafür etwas Trigonometrie, im bescheidenen Umfang der Schulmathematik, das scheint mir bemerkenswert und attraktiv.

In der Analysis begegnet Ihnen die Umlaufzahl als Wegintegral von Vektorfeldern in der Ebene, siehe J118, ebenso in der komplexen Analysis (aka Funktionentheorie) als Cauchy–Index geschlossener Wege.

Mit dem so erstellten Werkzeug $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ können wir schon eine erstaunliche und erfreuliche Vielfalt von Sätzen beweisen, allen voran den Fundamentalsatz der Algebra in effektiver Formulierung! Sodann erhalten wir alle Aussagen dieses Kapitels für die Topologie der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Auch in höherer Dimension $n \geq 2$ können wir jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ihren Abbildungsgrad $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ zuordnen und dann seine Homotopie-Invarianz nachweisen. Für $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ setzen sich Aussagen und Beweistechniken von $n = 1$ fort, doch die Argumente zur Konstruktion dieses Werkzeugs werden technisch aufwändiger.

Zwischenbilanz unserer Topologie: Soll und Haben

Didaktisch gesehen bestehen hier drei Wahlmöglichkeiten:

(1) Bei einer ersten Präsentation in der Vorlesung (oder bei einer ersten Lektüre) kann man sich auf den Fall $n = 1$ konzentrieren und nur diesen beweisen. Die hiermit erreichbaren Anwendungen genügen bereits für alles, was wir für die Flächenklassifikation in Kapitel K benötigen. Leider lässt dies alle naheliegenden Fragen für $n \geq 2$ offen.

(2) Die vollständige Konstruktion des Abbildungsgrades in Dimension $n \geq 2$ ist etwas aufwändiger, und ihr Kosten-Nutzen-Verhältnis hängt vom Kontext der Vorlesung ab. Am effizientesten gelingt dies in der Algebraischen Topologie im Rahmen der Homologie und Homotopie, durch die erfolgreiche Berechnung von $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$.

(3) Als Mittelweg können wir die Eigenschaften des Abbildungsgrades für $n = 1$ beweisen, und ohne Mehrkosten für $n \geq 1$ bereits formulieren. Mit dieser axiomatischen Einführung können wir die geometrischen Folgerungen ernten. Die Beweise unserer Anwendungen sind dieselben, der allgemeine Fall scheint mir sogar einfacher und durchsichtiger.

Zwischenbilanz unserer Topologie: Soll und Haben

Ich folge dem Mittelweg (3). Den allgemeinen Satz $(\deg, \varphi) : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \cong \mathbb{Z}$ von Brouwer–Hopf (J3A) haben wir in diesem Kapitel (nur) für $n = 1$ diskutiert und elegant bewiesen, doch wollen ihn für alle $n \geq 1$ nutzen. Die Umlaufzahl ist erst unser Werkstück in J1, sodann Werkzeug in J2. Für den Abbildungsgrad in Dimension $n \geq 2$ überspringen wir frech die Erstellung als Werkstück und nutzen ihn sofort als Werkzeug.

Für Brouwer–Hopf gibt es schöne und elementare Beweise, sie sind geometrisch erhellend, aber doch mühevoll. Es scheint mir effizienter, diesen Satz später aus Homologie- und Homotopietheorie zu gewinnen. Differentialtopologisch kann man dem Büchlein von Milnor folgen. Der Aufbau der Maschinerie ist umfangreich, doch jedenfalls lohnend, und die Sätze von Brouwer und Hopf erhalten wir als Spezialfälle gratis!

Für ein erstes Kennenlernen der Topologie des Raums $\mathbb{R}^n$ will ich den obigen Satz von Brouwer–Hopf axiomatisch als „black box“ verwenden. Etwas versöhnlicher will ich es so sagen: Ich nehme hier einen Kredit auf, den die Algebraischen Topologie / Differentialtopologie begleicht.

Kapitel K

Klassifikation kompakter Flächen

Topology is like modern art: It is easy to draw pictures,
but it takes a lot of sophistication to interpret them.
Hansjörg Geiges, *How to draw up to five-dimensional manifolds?*

Inhalt dieses Kapitels K

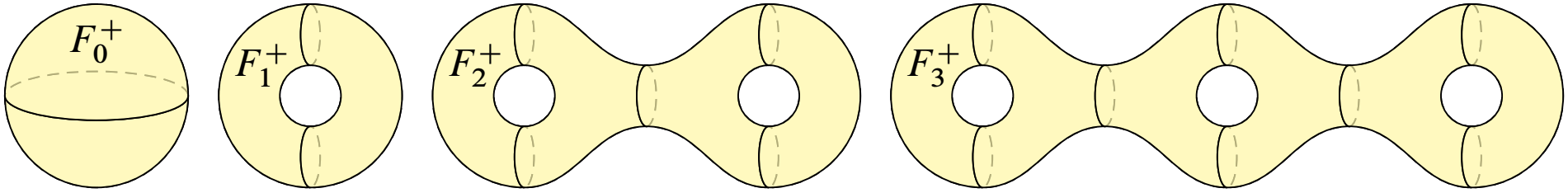
1 Mannigfaltigkeiten

2 Projektive Räume

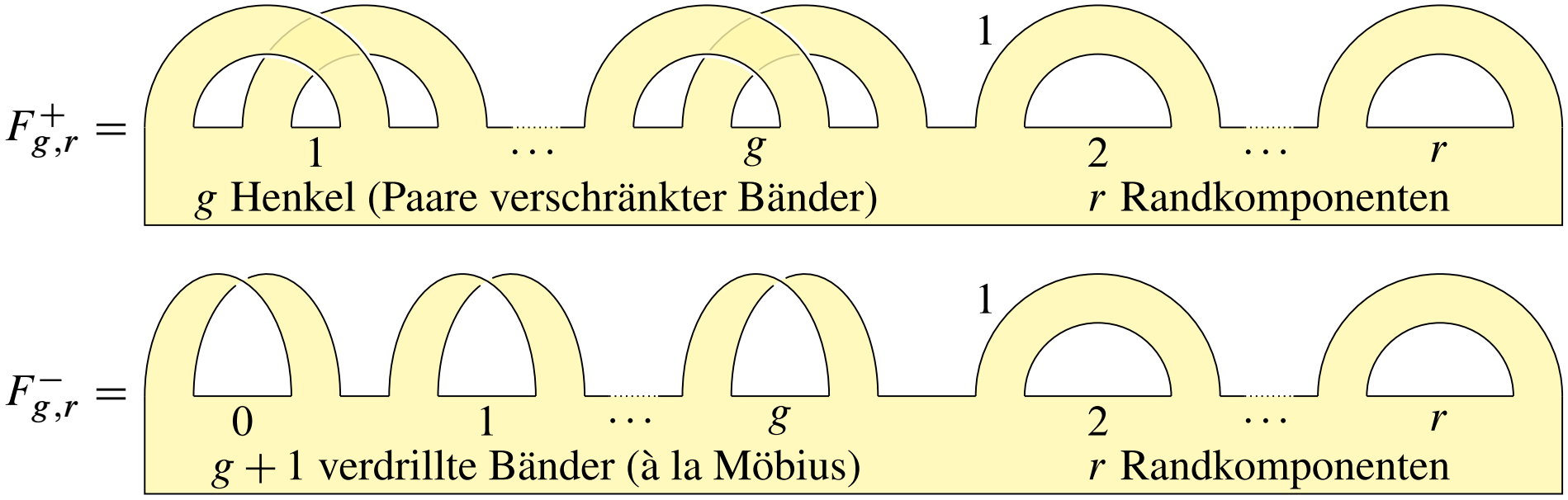
3 Der Flächenkalkül

Motivation und Zielsetzung

Zur Erinnerung und als Motivation für die folgenden Untersuchungen zeige ich nochmals die Protagonisten dieses Kapitels: kompakte Flächen!



Die Konstruktion der Modellflächen kennen Sie aus Kapitel A.
Nun verfügen wir über die nötigen Werkzeuge zur Klassifikation!



Motivation und Zielsetzung

Das Beste kommt zum Schluss! Begonnen haben wir diese Vorlesung in Kapitel A mit Polyedern und Flächen. Nun verfügen wir über die nötigen topologischen Werkzeuge: Wir können die Klassifikation der kompakten triangulierten Flächen nicht nur formulieren, sondern auch beweisen!

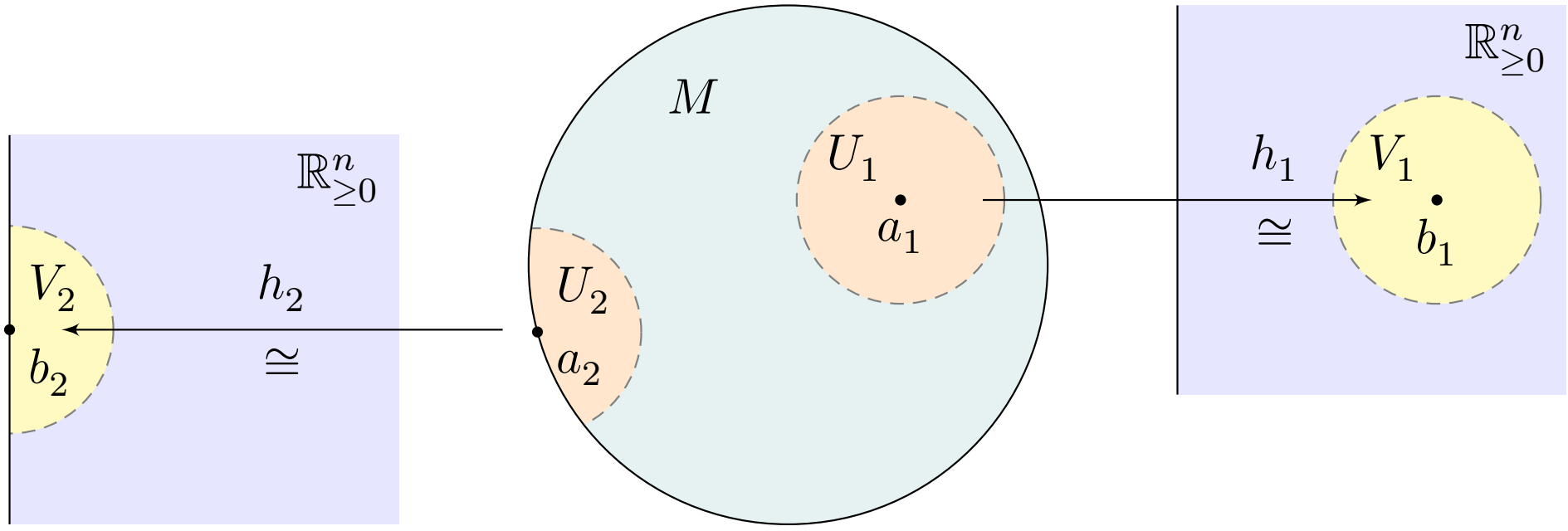
Dabei lassen wir nochmals alle Themen in Revue passieren: metrische und topologische Räume, stetige Abbildungen und Homöomorphismen, topologische Konstruktionen wie Teilräume, Quotienten, Summen und Produkte, Eigenschaften wie Kompaktheit und (Weg)Zusammenhang, und *last but not least* die Topologie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$.

Sie dürfen stolz sein auf Erreichtes und sich freuen auf Anwendungen:

- Mannigfaltigkeiten und insbesondere projektive Räume,
- Flächen und ihre Klassifikation durch den Flächenkalkül.

Leider besteht auch die Gefahr, dass ich Sie unterwegs verloren habe, und Sie mit den Begriffen und Techniken noch etwas hinterherhängen. Das wäre schade! Falls nötig holen Sie die nötigen Grundlagen nach und kommen bitte im zweiten Durchgang auf dieses Kapitel zurück.

Topologische Mannigfaltigkeiten: Definition



Definition K1B: topologische Mannigfaltigkeit

Ein topologischer Raum M heißt n**–Mannigfaltigkeit** (Mfkt), wenn gilt:

(0) Der Raum M ist hausdorffsch und jede Komponente zweitabzählbar.
(Unter Bedingung (1) ist Eigenschaft (0) äquivalent zur Metrisierbarkeit.)

(1) Der Raum M ist lokal n–euklidisch, das heißt: Zu jedem Punkt $a \in M$ existiert ein Homöomorphismus $(h, k) : (U, a) \cong (V, b)$ von einer offenen Umgebung $U \subseteq M$ von a auf eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ von b.

Topologische Mannigfaltigkeiten: Definition

Bemerkung: (1) Wir nutzen den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ als Modell. Damit können wir lokal euklidische Räume untersuchen und eine schöne und umfangreiche Theorie der *Mannigfaltigkeiten ohne Rand* entwickeln. Doch wichtige Beispiele wie der Ball $\mathbb{D}^n$ entziehen sich diesem Begriff solange wir den Rand nicht erfassen. Wir untersuchen daher gleich *Mannigfaltigkeiten mit Rand*, mit dem Halbraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ als Modell.

(0a) Lokal euklidisch impliziert die Trennungseigenschaft T_1, aber nicht die Hausdorff–Eigenschaft T_2, wie die verzweigte Gerade (E2E) zeigt. Die Hausdorff–Eigenschaft muss daher gesondert gefordert werden!

(0b) Lokal euklidisch impliziert erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar: Es gibt lokal euklidische Hausdorff–Räume ohne abzählbare Basis der Topologie, wie die lange Gerade (F9K). Meist wird man daher neben lokal euklidisch und hausdorffsch auch Zweitabzählbarkeit fordern, zumindest für jede Komponente, oder äquivalent hierzu: Metrisierbarkeit (K1X).

☺ All diese topologischen Erfahrungen antizipieren wir vorausschauend in der sorgsamen Formulierung unserer zentralen Definition K1B.

Topologische Mannigfaltigkeiten: Definition

Wir nennen $h : M \supseteq U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ eine **lokale Karte** von M und $k = h^{-1}$ ein **lokales Koordinatensystem** oder eine **lokale Parametrisierung**, mit (jeweils offenem) Kartengebiet $U \subseteq M$ und Parametergebiet $V \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.

Definition K1B: topologische Mannigfaltigkeit

Die Menge der Punkte im Rand / im Inneren von M bezeichnen wir mit

$$\partial M := \left\{ a \in M \,\middle|\, \exists \text{ Karte } h : h(a) \in \partial \mathbb{R}^n_{\geq 0} \right\}, \qquad (\exists \Rightarrow \forall \text{ dank J7I})$$
$$\operatorname{Int} M := \left\{ a \in M \,\middle|\, \exists \text{ Karte } h : h(a) \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\geq 0} \right\}. \qquad (\exists \Rightarrow \forall \text{ dank J7I})$$

Eine Mannigfaltigkeit M mit $\partial M = \emptyset$ heißt **unberandet**, sowie **geschlossen** falls zudem kompakt, und **offen** falls nicht-kompakt.

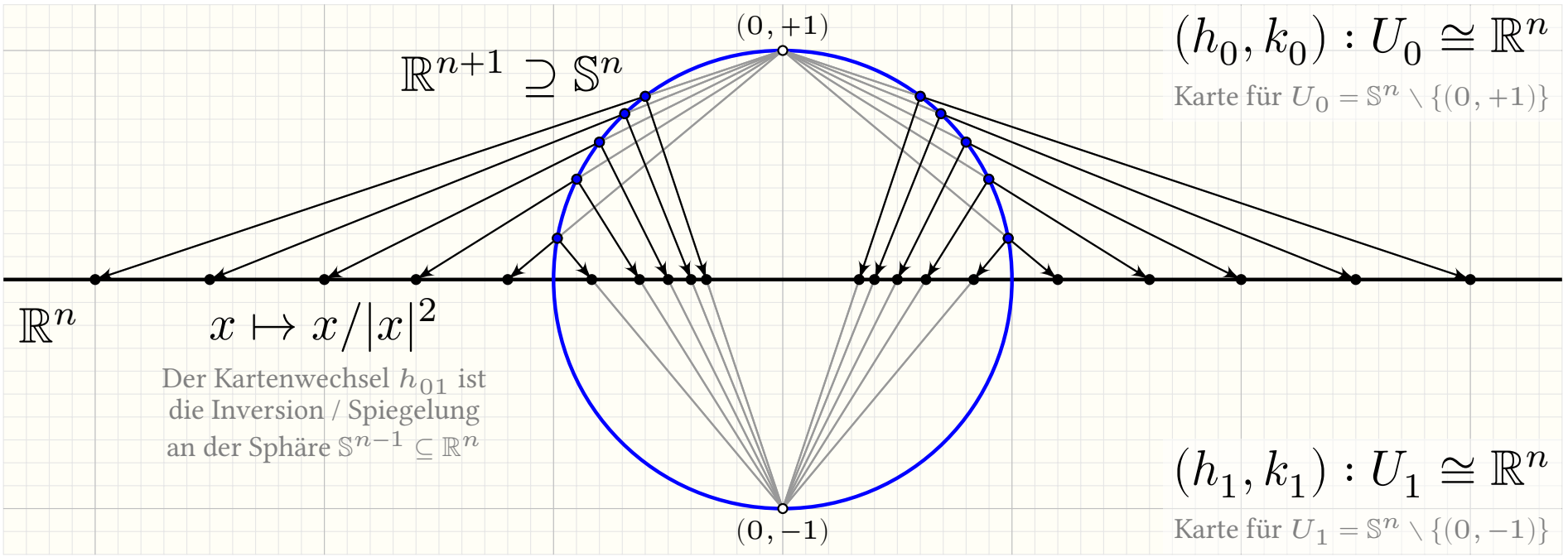
Ein **Atlas** $\mathscr{A}$ von M ist eine Kartenfamilie, die den Raum M überdeckt,

$$\mathscr{A} = \left(h_i : M \supseteq U_i \xrightarrow{\sim} V_i \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}\right)_{i \in I} \quad \text{mit} \quad M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Bemerkung: Als Modellraum taugt statt $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ebenso der Ball $\mathbb{D}^n$ (A1M) und der Würfel $[-1, 1]^n$ (A1E), da untereinander lokal homöomorph.

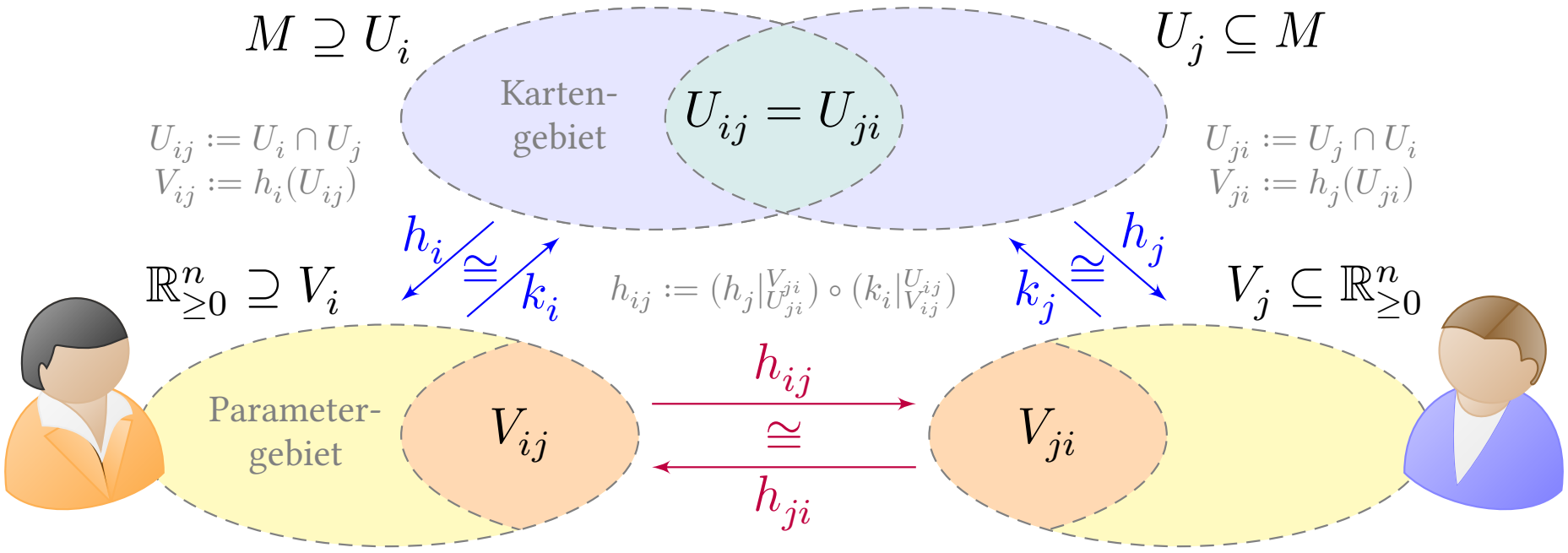
Topologische Mannigfaltigkeiten: erste Beispiele

Beispiele: Der leere Raum $\emptyset$ ist eine n–Mfkt für alle $n \in \mathbb{N}$.
(0) Jeder diskrete Raum $(X, \mathfrak{P}X)$ ist eine 0–Mannigfaltigkeit.
(1) Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine offene n–Mannigfaltigkeit.
(2) Der Halbraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ist eine n–Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial\mathbb{R}^n_{\geq 0}$.
(3) Der Ball $\mathbb{D}^n$ ist eine kompakte n–Mannigfaltigkeit mir Rand $\mathbb{S}^{n-1}$.
(4) Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist eine geschlossene n–Mannigfaltigkeit, $\partial\mathbb{S}^n = \emptyset$.



(5) Ist M eine n–Mfkt, so auch $U \subseteq M$ offen, wobei $\partial U = U \cap \partial M$.
(6) Die verzweigte Gerade (E2E) ist lokal euklidisch, aber keine Mfkt.

Kartenwechsel aka Koordinatentransformation



Satz K1c: Dimension, Rand und Inneres sind wohldefiniert.

(1) Ist der Raum $M \neq \emptyset$ sowohl m–Mfkt als auch n–Mfkt, so folgt $m = n$.
(2) Für jede n–Mfkt M gilt $M = \operatorname{Int} M \cup \partial M$ und $\operatorname{Int} M \cap \partial M = \emptyset$.

Beweis: (1) Seien $h_1 : M \supseteq U_1 \xrightarrow{\cong} V_1 \subseteq \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ und $h_2 : M \supseteq U_2 \xrightarrow{\cong} V_2 \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ Karten um $a \in M$. Der Kartenwechsel $(h_{12}, h_{21}) : V_{12} \cong V_{21}$ zeigt $m = n$ dank der topologischen Invarianz der Dimension, siehe Satz J7J.

(2) Gilt $h_1(a) \in \partial \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ in *einer* Karte, dann in *jeder*, siehe Satz J7I. QED

Kartenwechsel aka Koordinatentransformation

🙂 Kartenwechsel kennen Sie seit den Anfängen der Linearen Algebra: Sie betrachten einen Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alice wählt für V eine Basis $\mathcal{A}$ und definiert so ihr (über $\mathbb{K}$ lineares!) Koordinatensystem $k_1 = \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^m \xrightarrow{\sim} V$. Bob wählt davon unabhängig $\mathcal{B}$ und $k_2 = \Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} V$. Von Alice zu Bob vermittelt der Kartenwechsel $h_{12} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$, umgekehrt $h_{21} = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^m$. Grundstein ist, zunächst linear, die Invarianz der Dimension: $m = n$! Da alles $\mathbb{K}$–linear ist, codieren wir diese Koordinatentransformation als zueinander inverse Basiswechselmatrizen $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}, \mathrm{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Dasselbe sehen Sie hier, mit zwei Unterschieden: (1) Statt Linearität fordern wir Stetigkeit. (2) Statt global sind Karten nur noch lokal.

🙂 Auch im Alltag wechseln Sie die Sichtweise bei Bedarf: Alice kennt ihr Gebiet U_i der Realität M und nutzt hier ihre Koordinaten $k_i : V_i \xrightarrow{\sim} U_i$. Bob nutzt seine Koordinaten $k_j : V_j \xrightarrow{\sim} U_j$ für sein Gebiet der Realität. Beide Gebiete können verschieden sein, doch wo sie sich überlappen, dort können sich Alice und Bob durch Koordinatenwechsel verständigen.

Differenzierbare Atlanten und glatte Mannigfaltigkeiten

Lokal können wir in Koordinaten $k_i : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \supseteq V_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq M$ rechnen, und $h_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$ wechseln die Koordinaten. Für diese – und nur für diese! – verfügen wir über die Topologie und Analysis euklidischer Räume!

Wenn wir in lokalen Koordinaten k_i differenzieren wollen, so soll unsere Rechnung auch in allen anderen Koordinaten k_j weiter sinnvoll bleiben. Das führt uns ganz natürlich zu folgender Definition:

Definition K1F: Differenzierbarkeit

Ein Atlas $\mathscr{A}$ von M heißt **$\mathscr{C}^r$–glatt** oder $\mathscr{C}^r$–differenzierbar ($1 \leq r \leq \infty$), falls in $\mathscr{A}$ alle Kartenwechsel r–mal stetig differenzierbar sind, $h_{ij} \in \mathscr{C}^r$.

Eine Mfkt M heißt **$\mathscr{C}^r$–glättbar**, falls sie einen $\mathscr{C}^r$–Atlas $\mathscr{A}$ erlaubt.
Das Paar $(M, \mathscr{A})$ nennen wir dann eine **$\mathscr{C}^r$–glatte Mannigfaltigkeit**.

Eine **$\mathscr{C}^r$–Diff'barkeitsstruktur** auf M ist ein maximaler $\mathscr{C}^r$–Atlas $\mathscr{A}$.
Das ist eine zusätzliche Struktur auf M, geschickt codiert im Atlas $\mathscr{A}$.

☺ Hier beginnt die Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie, Allgemeine Relativität, … Freuen Sie sich auf die folgenden Semester!

Differenzierbare Atlanten und glatte Mannigfaltigkeiten

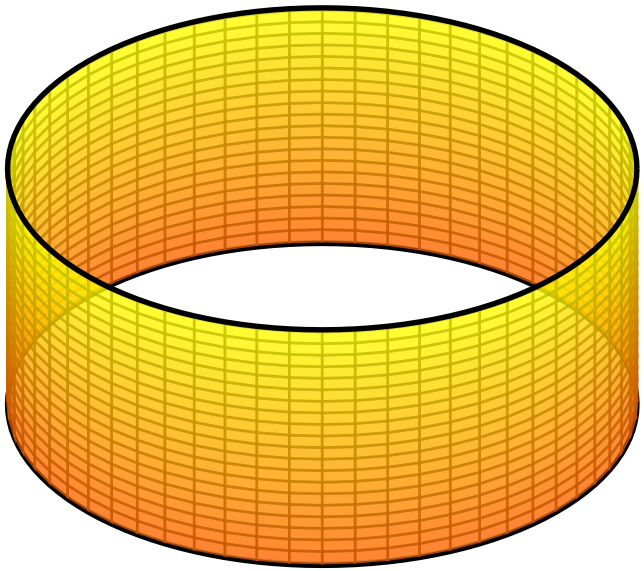
🙂 Objektiv relevant ist nur, was unter Kartenwechseln erhalten bleibt. Alice differenziert fröhlich in ihrem Koordinatensystem, Bob in seinem. Beides lässt sich ineinander umrechnen, falls die Kartenwechsel h_{ij} genügend differenzierbar sind, das ist der Grund für diese Definition.

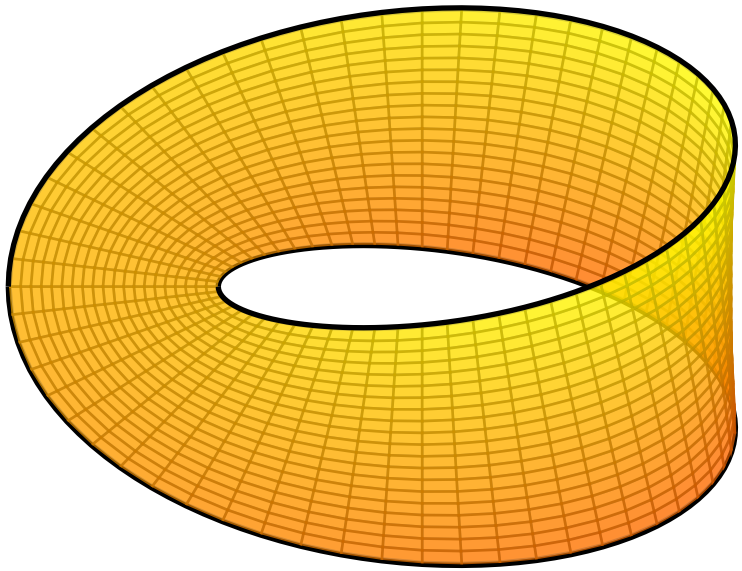
Eine topologische Mannigfaltigkeit zu sein, ist eine *Eigenschaft* des topologischen Raumes M. Hingegen ist die Differenzierbarkeit keine Eigenschaft von M, sondern des gewählten Atlas $\mathscr{A}$. Die Wahl eines $\mathscr{C}^r$–Atlas ist eine zusätzliche *Struktur* auf M, daher schreiben wir $(M, \mathscr{A})$.

Auf manchen topologischen Mannigfaltigkeiten (der Dimension ≥ 4) existiert gar keine Differenzierbarkeitsstruktur, auf anderen mehrere. Diese Sensation entdeckte John Milnor 1956 (Fields–Medaille 1962). Auf der orientierten Sphäre $\mathbb{S}^7$ existieren genau 28 paarweise nicht-diffeomorphe Diff'barkeitsstrukturen. Explizit werden diese realisiert durch $\mathbb{S}^7_k = \{\, z \in \mathbb{S}^9 \subseteq \mathbb{C}^5 \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0 \,\}$ für $k = 1, \ldots, 28$.

📖 Egbert Brieskorn: *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten.* Inventiones Mathematicae 2 (1966) 1–14.

Orientierte Atlanten und orientierte Mannigfaltigkeiten





Definition K1E: Orientierung

Ein Atlas $\mathscr{A}$ von M heißt **orientiert**, wenn alle Kartenwechsel h_{ij} in $\mathscr{A}$ orientierungserhaltend sind, also $\operatorname{sign}(h_{ij}) = +1$ erfüllen (J7P).

Eine Mfkt M heißt **orientierbar**, falls ein orientierter Atlas $\mathscr{A}$ existiert. Das Paar $(M, \mathscr{A})$ nennen wir dann eine **orientierte Mannigfaltigkeit**.

Eine **Orientierung** auf M ist ein maximaler orientierter Atlas $\mathscr{A}$.
Das ist eine zusätzliche Struktur auf M, geschickt codiert im Atlas $\mathscr{A}$.

Beispiel: Der Zylindermantel ist orientierbar, das Möbius–Band nicht.

Beispiele für Atlanten: glatt oder orientierbar?

Beispiel / Übung K1G: glatt oder orientierbar?

Für den Raum $M =]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir die vier Karten

$$h_1, h_2, h_3, h_4 : M \xrightarrow{\sim}]-1,1[: x \mapsto +x,\ -x,\ +x^3,\ -x^3.$$

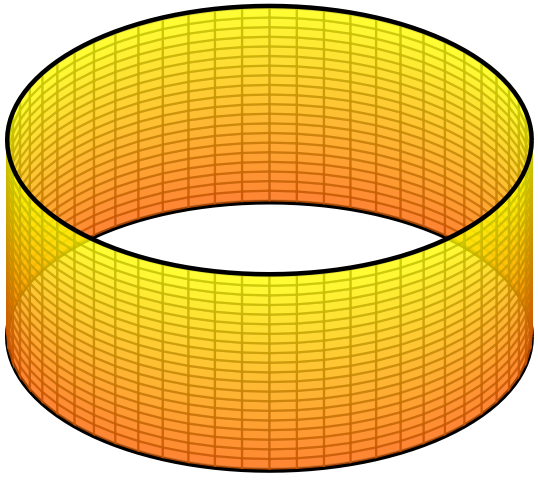
(1) Ist die Familie $\mathscr{A} = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ ein Atlas für M? orientiert? glatt?

(2) Welche Teilatlanten von $\mathscr{A}$ sind orientiert? glatt? beides?

Atlas	glatt?	orientiert?
(h_1, h_2, h_3, h_4)	✘	✘
(h_1, h_2)	✓	✘
(h_1, h_3)	✘	✓
(h_i)	✓	✓

Der Kartenwechsel $h_{31} : x \mapsto x^{1/3}$ ist nicht differenzierbar (im Punkt 0).
Der Kartenwechsel $h_{12} = h_{21} : x \mapsto -x$ ist orientierungsumkehrend.

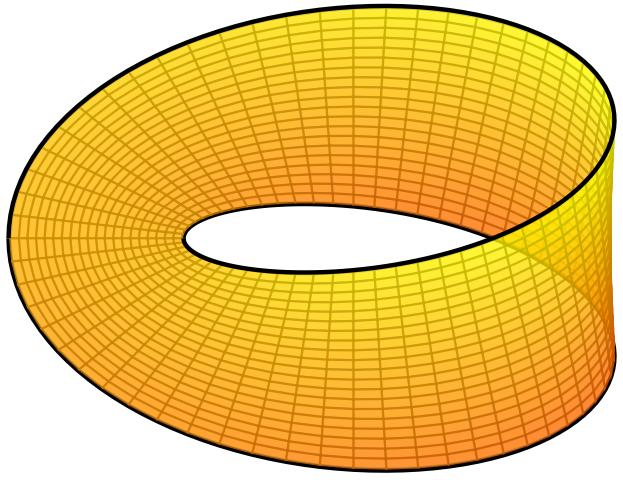
Warum ist das Möbius–Band nicht orientierbar?



$$f, g : \mathbb{R} \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3$$

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(\pi s) \\ 3\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [3+t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [3+t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$



Aufgabe: Konstruieren Sie zu Zylindermantel Z und Möbius–Band M jeweils einen Atlas aus zwei Karten, beide glatt, für Z zudem orientierbar.

Lösung: Für Z wählen wir die Koordinaten k_1, k_2 als f eingeschränkt auf $V_1 :=]0,2[\times [-1,1]$ und $V_2 :=]1,3[\times [-1,1]$ mit Ziel $U_i := f(V_i) \subseteq M$. Der Kartenwechsel $h_{12} : V_{12} \xrightarrow{\sim} V_{21}$ von $V_{12} = (]0,1[\cup]1,2[) \times [-1,1]$ nach $V_{12} = (]1,2[\cup]2,3[) \times [-1,1]$ ist $(x,y) \mapsto (x+2,y)$ für $x \in]0,1[$ und $(x,y) \mapsto (x,y)$ für $x \in]1,2[$. Dies ist glatt und orientierungserhaltend.

Für M nutzen wir g genauso und erhalten h_{12} mit $(x,y) \mapsto (x+2,-y)$ für $x \in]0,1[$. Dies ist weiterhin glatt, aber orientierungsumkehrend.

Warum ist das Möbius–Band nicht orientierbar?

Kann das Möbius–Band dennoch orientiert werden? Nein!

Satz K1н: Nachweis der Nicht-Orientierbarkeit

Sei $(M, \mathscr{A})$ eine orientierte n–Mannigfaltigkeit, $n \geq 2$ und $\mathscr{A} = (h_i)_{i \in I}$.

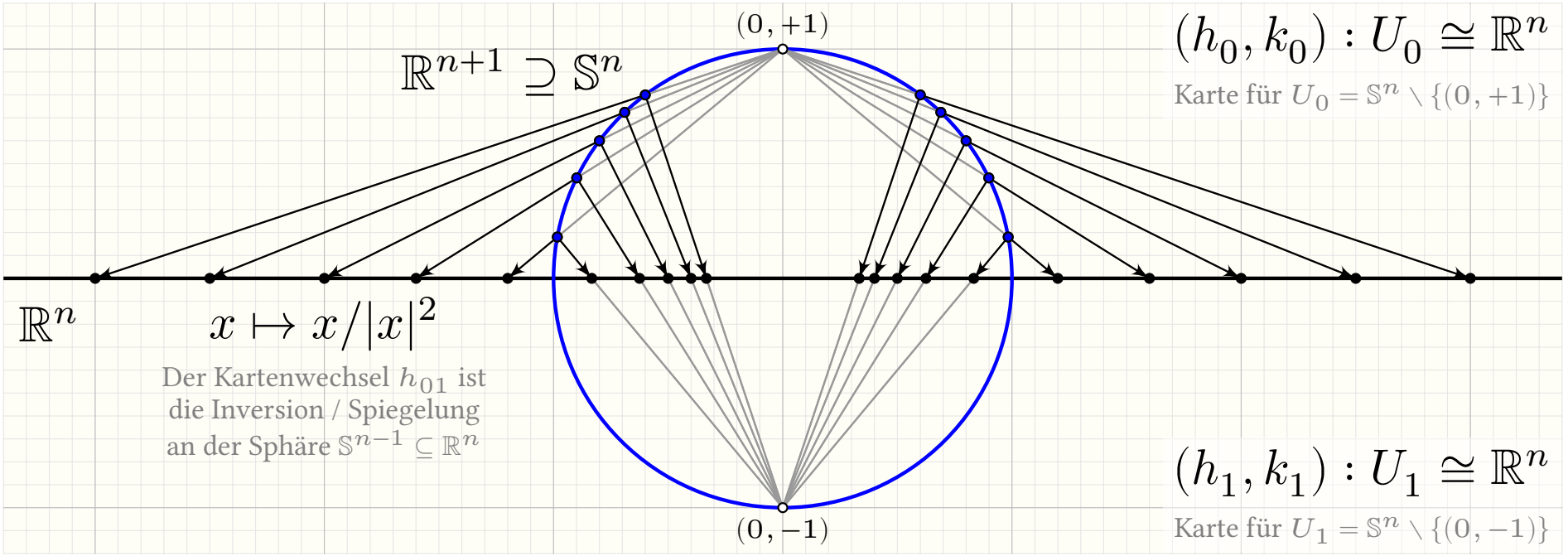
(1) Sei $h_0 : U_0 \rightsquigarrow V_0$ eine weitere Karte, $0 \notin I$ und U_0 zshgd. Dann existiert ein Vorzeichen $s \in \{\pm 1\}$ mit $\operatorname{sign}(h_{0i}, a) = s$ für alle $i \in I$ mit $a \in V_{0i}$.

(2) Jeden Atlas $\mathscr{B} = (h_j)_{j \in J}$ zusammenhängender Karten können wir somit orientieren wie $\mathscr{A}$, indem wir jede negative Karte h_j spiegeln.

(3) Unser obiger Atlas (h_1, h_2) des Möbius–Bandes M erlaubt keine solche Korrektur. Demnach ist das Möbius–Band M nicht orientierbar.

Beweis: (1) Wir definieren $s(a)$ durch $s(a) := \operatorname{sign}(h_{0i}, a)$ mit $i \in I$ und $a \in V_{0i}$. Mindestens ein solcher Index $i \in I$ existiert, dank $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. Für je zwei solche Indizes $i, j \in I$ ist das Ergebnis gleich, da wir $\mathscr{A}$ als orientiert voraussetzen, also $\operatorname{sign} h_{ij} = +1$. Somit ist $s(a)$ wohldefiniert. Zudem ist s lokal konstant auf V_0. Da wir V_0 als zusammenhängend voraussetzen, ist s konstant. Die weiteren Aussagen (2,3) sind klar. QED

Ein minimaler Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$



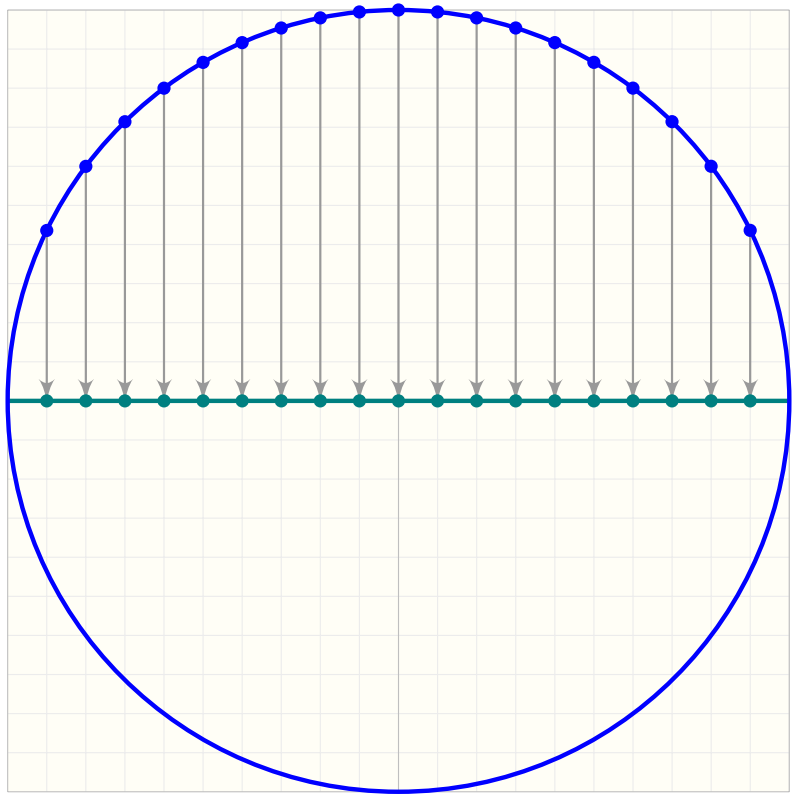
Beispiel / Übung K1ı: ein minimaler Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$

(1) Finden Sie für die Sphäre $\mathbb{S}^n$ einen möglichst kleinen (und einfachen) Atlas $\mathscr{A}$. Gelingt dies glatt? analytisch? algebraisch? gar rational?

(2) Konstruieren Sie einen nicht-orientierten Atlas von $\mathbb{S}^n$ sowie zwei gegenläufig orientierte Atlanten.

Lösung: Diese Konstruktion haben Sie in Übung E3ı bereits ausgeführt! Nun fügt sich alles wunderbar in die Sichtweise der Mannigfaltigkeiten.

Ein zweiter schöner Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$

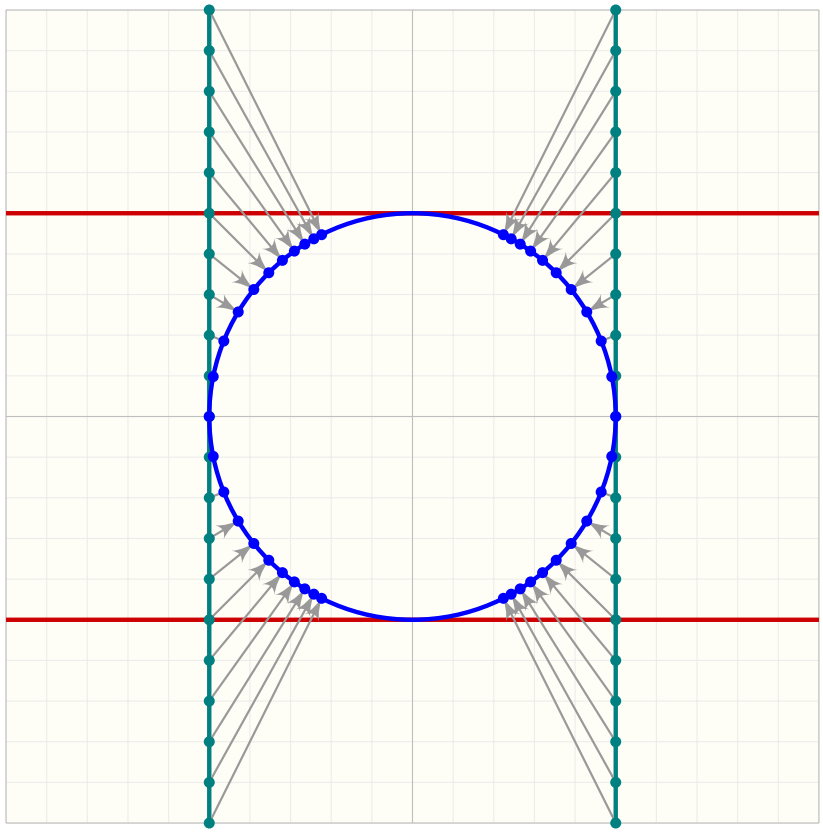


Wir betrachten die Sphäre $\mathbb{S}^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1 \}$ mit den lokalen Karten $h_i^\pm : U_i^\pm \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n : x \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ auf $U_i^\pm = \{ x \in \mathbb{S}^n \mid \pm x_i > 0 \}$ für $i = 0, \dots, n$. Ist dies ein Atlas auf $\mathbb{S}^n$?

Schreiben Sie die Umkehrabbildungen $k_i^\pm$ und alle Kartenwechsel $h_{ij}^{\pm\pm}$ explizit aus, insbesondere für die einfachsten Beispiele $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{S}^2$.

☺ Dieser schöne Atlas ist naheliegend, leider benötigt er $2n + 2$ Karten.

Ein dritter schöner Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$



Auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ betrachten wir für $i = 0, \dots, n$ die lokalen Koordinaten $k_i^\pm : \mathbb{R}^n \rightleftharpoons U_i^\pm : x \mapsto (x_1, \dots, x_i, \pm 1, x_{i+1}, \dots, x_n)/\sqrt{1 + |x|^2}$.

Was ist das Kartengebiet $U_i^\pm$? Wie lauten die Umkehrabbildungen $h_i^\pm$? Ist dies ein Atlas auf $\mathbb{S}^n$? Schreiben Sie alle Kartenwechsel explizit aus.

🙂 Auch dieser schöne Atlas benötigt $2n + 2$ Karten. Wir nutzen ihn für den projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ und seinen Atlas mit $n + 1$ Karten (K2F).

Rekonstruktion der Mannigfaltigkeit aus ihren Karten

Jedes Paar $(M, \mathscr{A})$ aus einer Mfkt M mit Atlas $\mathscr{A} = (h_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i)_{i \in I}$ bestimmt die Kartenwechsel $(h_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji})_{i,j \in I}$. Umgekehrt können wir die Mannigfaltigkeit M rekonstruieren durch das Verkleben der Karten:

Übung K1U: Rekonstruktion

Sei $X = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ die topologische Summe der Parametergebiete $V_i \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Die lokalen Parametrisierungen $k_i : V_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq M$ definieren $k : X \twoheadrightarrow M$.

Auf dem Summenraum X wird die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $(i, x) \sim (j, h_{ij}(x))$ für alle Indizes $i, j \in I$ und $x \in V_{ij}$. Durch Übergang zum Quotienten erhalten wir den Homöomorphismus $\bar{k} : X/_\sim \xrightarrow{\sim} M$.

🙂 Allein aus den Kartenwechseln $(h_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji})_{i,j \in I}$ rekonstruieren wir die gesamte Mannigfaltigkeit M bis auf Homöomorphie; dazu genügt es, die Parametergebiete $(V_i)_{i \in I}$ nach dieser Anleitung zu verkleben.

Dies erklärt noch einmal eindrücklich, wie die Kartenwechsel $(h_{ij})_{i,j \in I}$ die gesamte Information über M codieren. Dies kommt ganz praktisch zum Ausdruck bei Differenzierbarkeit K1F und Orientierbarkeit K1E.

Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: der Rand

Übung K1T: Inneres $\operatorname{Int} M$ und Rand ∂M

Für alle n–Mannigfaltigkeiten M und N gilt:

0. Inneres und Rand sind disjunkt, hausdorffsch und zweitabzählbar.
1. Das Innere $\operatorname{Int} M$ ist eine n–Mannigfaltigkeit ohne Rand.
2. Der Rand ∂M ist eine $(n-1)$–Mannigfaltigkeit ohne Rand.
3. Im Raum M ist die Teilmenge $\operatorname{Int} M$ offen und ∂M abgeschlossen.
4. Ist die Mannigfaltigkeit M kompakt, so auch ihr Rand ∂M.
5. Jeder Homöomorphismus $f : M \xrightarrow{\sim} N$ induziert $f|_{\partial M}^{\partial N} : \partial M \xrightarrow{\sim} \partial N$.
6. Für jede kompakte Fläche F gilt $\partial F \cong \{1, \dots, r\} \times \mathbb{S}^1$ für ein $r \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Sind $X = \mathbb{D}^3 \setminus \frac{1}{2}\mathbb{B}^3$ und $Y = \mathbb{D}^3 \setminus \left(\left(\frac{1}{4}\mathbb{B}^3 + \frac{1}{2}e_1\right) \cup \left(\frac{1}{4}\mathbb{B}^3 - \frac{1}{2}e_1\right)\right)$ Mannigfaltigkeiten? zshgd? kompakt? berandet? homöomorph?

Lösung: Beides sind 3–dim. Mfkten, zshgd und kompakt. Dabei gilt $\partial X \cong \{1,2\} \times \mathbb{S}^2$ und $\partial Y = \{1,2,3\} \times \mathbb{S}^2$, also $\partial X \ncong \partial Y$, somit $X \ncong Y$.

Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: der Rand

Bitte gehen Sie diesee Aussagen sorgsam durch und formulieren Sie Ihre Lösung hierzu. Es ist eine gute Übung zum Verständnis dieser Begriffe.

Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: der Rand

Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: der Rand

Retraktion auf den Rand?

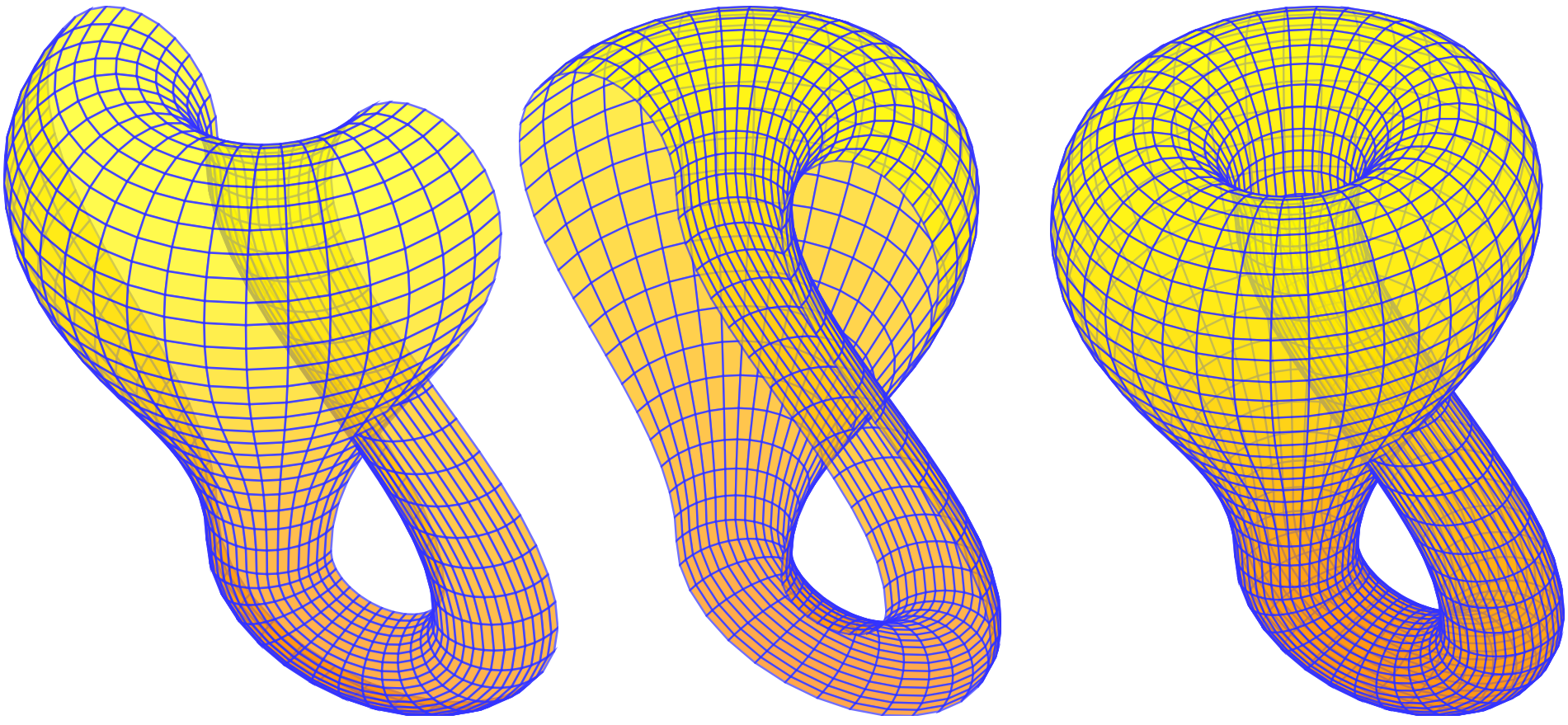
Beweis: Angenommen, $\rho : M \to \partial M$ wäre eine Retraktion auf den Rand.

(0) Dank $M \neq \emptyset$ gilt $\partial M \neq \emptyset$, also existiert $(U, \partial U) \subseteq (M, \partial M)$ offen mit einer Karte $(U, \partial U) \cong (\mathbb{R}^n_{\geq 0}, \partial \mathbb{R}^n_{\geq 0})$. Für die Einpunktkompaktifizierung $\hat{U} = U \cup \{\infty\}$ und $\partial \hat{U} = \partial U \cup \{\infty\}$ gilt demnach $(\hat{U}, \partial \hat{U}) \cong (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$.

(1) Der Abschluss $\overline{U}$ in M ist kompakt (F1F). Daher existiert eine stetige Abbildung $f_1 : \bar{U} \twoheadrightarrow \hat{U}$, nämlich das Zusammenschlagen $\bar{U} \setminus U \to \{\infty\}$. Verkleben mit $f_2 : M \setminus U \to \{\infty\}$ liefert $f : (M, \partial M) \twoheadrightarrow (\hat{U}, \partial \hat{U})$ stetig.

Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: Verdopplung

Beispiele: Verdopplung des Einheitsballs ergibt $D(\mathbb{D}^n) \cong \mathbb{S}^n$.
Verdopplung des Möbius–Bandes ergibt die Kleinsche Flasche.



Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: Verdopplung

Lösung: Wir betrachten $X = M \times \{\pm 1\}$ mit Involution $\sigma(x, \pm 1) = (x, \mp 1)$ und den Quotienten $M^* := X/_\sim$ bezüglich $(x, +1) \sim (x, -1)$ für $x \in \partial M$. Die Komposition $M \hookrightarrow X \twoheadrightarrow M^*$ ist eine Einbettung. Wir identifizieren M mit seinem Bild in M^* und schreiben $M \subseteq M^*$. Die Involution $\sigma : X \to X$ induziert eine stetige Involution $\sigma : M^* \to M^*$ mit Fixpunktmenge $\mathrm{fix}(\sigma) = \partial M$, es gilt $M^* = M \cup \sigma M$ und $M \cap \sigma M = \partial M$.

Wir zeigen nun, dass $M^* := X/_\sim$ eine n–Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Hausdorff–Eigenschaft und eine abzählbare Basis weist man leicht nach. Jede Karte $(h, k) : M \supseteq U \cong V \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ von M setzen wir fort zur Karte $(h^*, k^*) : M^* \supseteq U^* \cong V^* \subseteq \mathbb{R}^n$ von M^*. Hierbei ist U offen in M, also ist $U^* = U \cup \sigma U$ offen in M^*. Weiters ist V offen in $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, also ist $V^* = V \cup \sigma V$ offen in $\mathbb{R}^n$. Wir setzen $h^*(x) = x$ für $x \in U$ und $h^*(x) = \sigma h \sigma(x)$ für $x \in \sigma U$ sowie $k^*(y) = k(y)$ für $y \in V$ und $k^*(y) = \sigma k \sigma(y)$ für $y \in \sigma V$. Dies ist wohldefiniert dank $U \cap \sigma U \subseteq \partial M$ und $h(\partial M) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.
Die Abbildungen h^* und k^* sind stetig dank Verklebesatz E1P.
Somit ist $(h^*, k^*) : U^* \cong V^*$ ein Homöomorphismus, wie gefordert.

Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: Verdopplung

Aus jedem Atlas $\mathscr{A} = (h_i)_{i\in I}$ von M gewinnen wir den Atlas $\mathscr{A}^* = (h_i^*)_{i\in I}$ der Verdopplung M^*. Ist der Atlas $\mathscr{A}$ zudem orientiert, so auch $\mathscr{A}^*$, und die Involution $\sigma : M^* \to M^*$ ist orientierungsumkehrend. Somit besteht $M^* = M \cup M'$ aus unserer Mannigfaltigkeit M und ihrem Spiegelbild $M' = \sigma(M)$, verklebt entlang ihres Randes $\partial M = M \cap M' = \partial M'$.

Schließlich sei der Atlas $\mathscr{A}$ glatt, also alle Kartenwechsel h_{ij} in $\mathscr{A}$ seien $\mathscr{C}^r$–differenzierbar, wobei $r \geq 1$. Hier ist Orthogonalität eine technisch notwendige Vorkehrung: Wir müssen für jede Kartenwechsel h_{ij} in $\mathscr{A}$ voraussetzen bzw. einrichten, dass auf dem Rand ∂M die Ableitung $\partial_1 h_{ij}$ senkrecht steht auf $e_2, \dots, e_n$. (Andernfalls entstehen Knicke.)
Ist dies alles erfüllt, so ist auch der Atlas $\mathscr{A}^*$ glatt, $\sigma : M^* \to M^*$ ist eine glatte Involution, und $M \hookrightarrow M^*$ ist eine glatte Einbettung.

🙂 Diese Konstruktion ist *kanonisch*, kommt also ohne willkürliche Wahlen aus. Sie ist zudem *natürlich*, denn zu $f : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ erhalten wir die Fortsetzung $f^* : M^* \to N^*$ mit $f^* \circ \sigma_M = \sigma_N \circ f^*$.
Satz K1Y zeigt eine schöne Anwendung des Verdopplungstricks.

Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: Produkte

Übung K1w: Produkt von Mannigfaltigkeiten

Sind M und N Mannigfaltigkeiten, so auch $M \times N$. Wir wählen Atlanten

$$\mathscr{A} = (h_i : M \supseteq U_i \xrightarrow{\sim} U_i' \subseteq [-1,1]^m)_{i\in I} \quad \text{auf } M,$$
$$\mathscr{B} = (k_j : N \supseteq V_j \xrightarrow{\sim} V_j' \subseteq [-1,1]^n)_{j\in J} \quad \text{auf } N.$$

Daraus erhalten wir auf $M \times N$ den Produktatlas:

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} := (h_i \times k_j : M \times N \supseteq U_i \times V_j \xrightarrow{\sim} U_i' \times V_j' \subseteq [-1,1]^{m+n})_{(i,j)\in I\times J}$$

(1) Für $M \neq \emptyset \neq N$ gilt demnach $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.

(2) Sind die Atlanten $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ orientiert bzw. $\mathscr{C}^r$–glatt, so auch $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

(3) Für den Rand gilt Leibniz, $\partial(M \times N) = [(\partial M) \times N] \cup [M \times (\partial N)]$ als Verheftung entlang ihres gemeinsamen Randes $(\partial M) \times (\partial N)$.

☺ Zum Beispiel ist $\partial(M \times [-1,1]) \cong M^*$ die Verdopplung von M (K1v).

Für Komponenten gilt $\pi_0(M \times N) = \{\, X \times Y \,|\, X \in \pi_0(M),\ Y \in \pi_0(N) \,\}$.

Neue Mannigfaltigkeiten aus alten: Produkte

Wir nutzen hier als Modellraum den n–dimensionalen Würfel $[-1,1]^n$. Als Modell taugt ebenso der abgeschlossene Ball $\mathbb{D}^n$, da homöomorph (A1E), und der euklidische Halbraum $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, da lokal homöomorph (A1M). Wir haben also die Wahl. Die Würfel haben den Vorteil, dass sie stabil sind unter Produkten, und genau das nutzen wir dankend in K1w.

Für glatte Mannigfaltigkeiten sind noch $\mathbb{D}^n$ und $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ lokal diffeomorph und werden daher gerne als Modellräume genutzt. Sie sind leider nicht abgeschlossen unter Produkten: Es entstehen „glatte Mannigfaltigkeiten mit Ecken“. Auch hier sind Würfel das allgemeinere, flexiblere Modell, daher plädiere ich hier für Würfel $[-1,1]^n$. *Choose your models wisely!*

Je nach Anwendung mag die volle Allgemeinheit überflüssig sein, Mannigfaltigkeiten mit Ecken werden daher nur behandelt wo nötig. Insbesondere für geschlossene Mannigfaltigkeiten ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ das universelle lokale Modell. Ich erkläre Ihnen umsichtig alle gebräuchlichen Varianten, so sind Sie für jede Situation gerüstet.

Vorsicht Rand: geometrisch vs topologisch

⚠ Bitte unterscheiden Sie aufmerksam den **topologischen Rand** δM eines Teilraums $M \subseteq \mathbb{R}^N$ (dieser ist extrinsisch definiert, relativ zum umgebenden Raum) vom **geometrischen Rand** der Mannigfaltigkeit M (dieser gehört intrinsich zu M, absolut, unabhängig von Einbettungen).

🙂 Letzteres gründen wir auf offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ in unserem Modellraum (J7G) und übertragen alles auf Mannigfaltigkeiten (K1B). Dies gelingt dank der topologischen Invarianz des Randes (J7I).

Beispiel: Für den geometrischen Rand gilt $\partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ und $\partial \mathbb{S}^{n-1} = \emptyset$. Im Raum $\mathbb{R}^n$ ist der topologische Rand $\delta \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ und $\delta \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1}$. Beides heißt „Rand“, bedeutet aber jeweils ganz verschiedene Dinge.

Der Randoperator ∂ ordnet jeder n–Mfkt M eine $(n-1)$–Mfkt ∂M zu. Dabei gilt $\partial \partial M = \emptyset$ dank K1T, diese $(n-2)$–Mfkt ist also immer leer!

🙂 Diese fundamentale Eigenschaft hat mannigfache Anwendungen, direktet geometrisch in der Bordismustheorie, entsprechend algebraisch in Kettenkomplexen, analytisch in Integralsätzen, damit in der Physik!

Der geometrische Rand als topologische Invariante

Hier eine verblüffend einfache und schöne Illustration, wie effizient wir mit Mannigfaltigkeiten und ihren Eigenschaften rechnen können:

Aufgabe: Wir betrachten den Volltorus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ und die aufgedickte Torusfläche $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$. (0) Skizzieren Sie diese im $\mathbb{R}^3$.

(1) Sind die Räume S und T Mannigfaltigkeiten (eventuell mit Rand)?
(2) Lassen sie sich durch ihre Euler–Charakteristiken unterscheiden?
(3) Sind die Räume S und T homöomorph?

Lösung: (1) Ja, das Produkt von Mannigfaltigkeiten (mit Rand) ist eine Mannigfaltigkeit (mit Rand), siehe vorige Übung K1w.

(2) Wir finden $\chi(S) = \chi(\mathbb{S}^1) \times \chi(\mathbb{D}^2) = 0 \cdot 1 = 0$
und $\chi(T) = \chi(\mathbb{S}^1) \times \chi(\mathbb{S}^1) \times \chi(\mathbb{D}^1) = 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$.
☹ Diese algebraische Invariante hilft uns hier leider nicht weiter.

(3) Nein! Aus $S \cong T$ folgt $\partial S \cong \partial T$, dank Invarianz des Randes (J7ı).
Wir haben hier $\partial S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ zshgd, aber $\partial T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$ unzshgd.
☺ Diese geometrische Eigenschaft unterscheidet diese beiden Räume.

Mannigfaltigkeiten sind metrisierbar

In Kapitel E haben wir Urysohns Metrisierungssatz E5R erarbeitet. Diesen können wir insbesondere auf Mannigfaltigkeiten wunderbar anwenden (Wiederholung von E5T), problemlos nun auch mit Rand:

Übung K1x: Jede Mannigfaltigkeit ist metrisierbar.

Aus lokal euklidisch, hausdorffsch und zweitabzählbar folgt metrisierbar:

1. Jeder lokal euklidische Raum $(M, \mathcal{T})$ hat die Trennungseigenschaft T_1.
2. Es gibt Gegenbeispiele ohne T_2 (E2E). Gilt zudem T_2, so folgt T_3 und sogar $T_{3\frac{1}{2}}$. *Hinweis:* Diese Konstruktion nutzt lokale Kompaktheit.
3. Gilt zudem 2AA (komponentenweise), so ist $(M, \mathcal{T})$ metrisierbar.

Lösung: (1) Zu $a \neq b$ in M existiert U mit $b \in U \in \mathcal{T}$ und einer Karte $h : (U, b) \xrightarrow{\sim} (V, c)$ auf $V \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ offen. Im Falle $a \notin U$ ist alles klar. Im Falle $a \in U$ auch, denn die Eigenschaft T_1 gilt in $U \cong V \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.

(2a) Gegenbeispiele: Die verzweigte Gerade (E2E) oder die Gerade mit doppeltem Usprung (E2E) sind lokal euklidisch, aber nicht hausdorffsch.

Mannigfaltigkeiten sind metrisierbar

(2b) Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen und $b \notin A$. Wir können $U \cap A = \emptyset$ annehmen, notfalls ersetzen wir U durch $U \setminus A$. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\bar{B}(c,r) \subseteq h(U)$. Die Funktion $g : V \to \mathbb{R} : x \mapsto \max\{0, 1 - |x-c|/r\}$ ist stetig mit kompaktem Träger $D := \bar{B}(c,r) \subseteq V$ (F1O).

Zu $f_1 := g \circ h : U \to [0,1]$ ist der Träger $K = h^{-1}(D)$ kompakt (F1J). Im Hausdorff–Raum $(M, \mathcal{T})$ ist K demnach abgeschlossen (F1G). (Das wäre falsch ohne T_2, siehe obige Gegenbeispiele E2E.)

Wir ergänzen f_1 durch die Nullfunktion $f_2 : M \setminus K \to [0,1] : x \mapsto 0$. Dank Verklebesatz (E1P) ist $f = f_1 \cup f_2 : M \to [0,1]$ stetig. Dabei gilt $f|_A = 0$ und $f(b) = 1$, wie für die Trennungseigenschaft $T_{3\frac{1}{2}}$ gefordert.

(3a) Dank (2) gilt die Trennungseigenschaft T_3. Ist $(M, \mathcal{T})$ zweitabzählbar, so können wir unmittelbar Urysohns Metrisierungssatz E5R anwenden.

(3b) Unser Raum $(M, \mathcal{T})$ ist lokal euklidisch, somit lokal wegzshgd. Daher ist $M = \bigsqcup \pi_0(M)$ die topologische Summe aller Wegkomponenten (G3C). Es genügt also, die Metrisierung für jede Komponente sicherzustellen. Für den Gesamtraum M nutzen wir dann die Summenmetrik (C2F). QED

Invarianz des Gebietes für Mannigfaltigkeiten

Beispiel: Wir können die Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ nicht in $\mathbb{R}^n$ einbetten (J6C).

Satz K1Y: Invarianz des Gebietes für Mannigfaltigkeiten

Seien M und N zwei n–Mannigfaltigkeiten und N zusammenhängend.

(1) Sei $M \neq \emptyset$ geschlossen, also kompakt und ohne Rand, $\partial M = \emptyset$. Dann ist jede stetige Injektion $f : M \hookrightarrow N$ ein Homöomorphismus.

(2) Sei $M \neq \emptyset$ kompakt, eventuell mit Rand ∂M. Dann ist jede stetige Injektion $f : (M, \partial M) \hookrightarrow (N, \partial N)$ ein Homöomorphismus.

Beweis: (1) Dank Invarianz des Gebietes (K1R) ist $f : M \hookrightarrow N$ offen, insbesondere ist $f(M) \subseteq N$ offen. Mit M ist auch $f(M)$ kompakt (F1J), also abgeschlossen in N (F1G), da N hausdorffsch ist. Da $\emptyset \neq f(M) \subseteq N$ offen und abgeschlossen ist, folgt $f(M) = N$, da N zusammenhängend ist. Somit ist f bijektiv, stetig und offen, also ein Homöomorphismus.

(2) Gemäß K1v verdoppeln wir f zu $f^* : M^* \hookrightarrow N^*$ mit $f^* \circ \sigma_M = \sigma_N \circ f^*$. Dank (1) ist f^* ein Homöomorphismus, also auch f. QED

Euklidische Einbettung geschlossener Mannigfaltigkeiten

Übung: Jede geschlossene m–Mfkt M lässt sich in einen $\mathbb{R}^N$ einbetten:

(1) Es gibt eine offene Überdeckung $M = U_1 \cup \dots \cup U_\ell$ mit $\varphi_k : U_k \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$.
(2) Kompaktifizierung liefert stetige Fortsetzungen $\bar{\varphi}_k : M \to \mathbb{S}^m$.
(3) Wir erhalten die Einbettung $\varphi = (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_\ell) : M \hookrightarrow (\mathbb{S}^m)^\ell \subseteq \mathbb{R}^{(m+1)\ell}$.

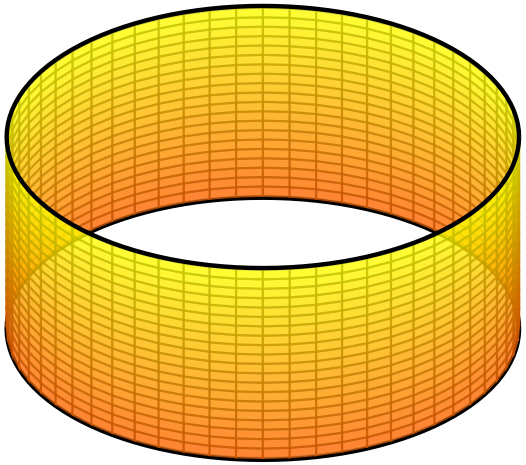
☺ Genial einfach! Insbesondere folgt daraus erneut Metrisierbarkeit.

Bemerkung: Die Dimension $N = (m+1)\ell$ ist unnötig groß, was unserem einfachen Beweis geschuldet ist. Eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ ist immer möglich, siehe Munkres, Corollary 50.8: „Every compact m–manifold can be imbedded in $\mathbb{R}^{2m+1}$." Exercise 6 auf Seite 315 zeigt, dass dies sogar für nicht-kompakte, doch zweitabzählbare Mannigfaltigkeiten gilt.

Bemerkung: Es ist eine interessante, schwierige Frage, zu M die kleinste Dimension d zu bestimmen, für die eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ möglich ist.

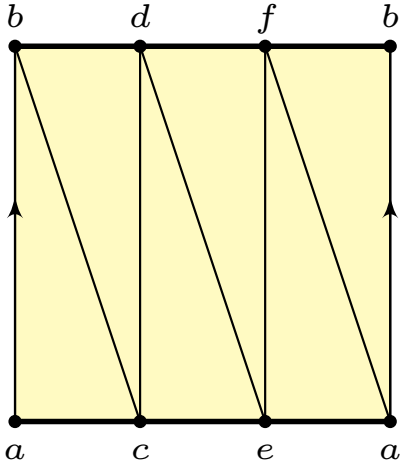
Beispiel: Wir kennen bereits die Einbettungsdimension $\operatorname{edim}(\mathbb{S}^n) = n+1$. Für geschlossene Flächen gilt $\operatorname{edim}(F_g^+) = 3$, denn $F_g^+ \not\pitchfork \mathbb{R}^2$ dank K1Y, sowie $\operatorname{edim}(F_g^-) = 4$, was allerdings etwas schwieriger zu beweisen ist.

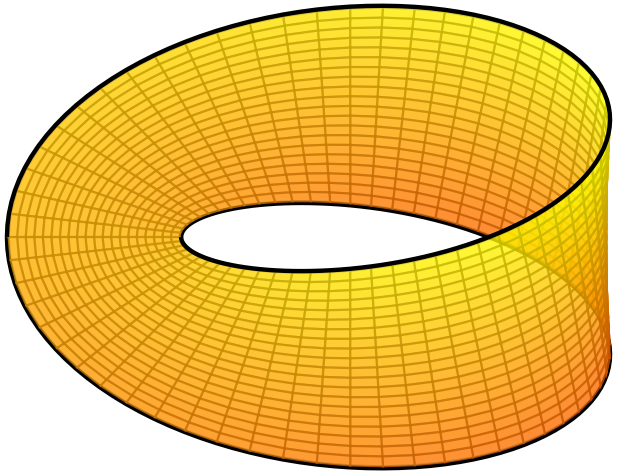
Können wir Mannigfaltigkeiten triangulieren?



$$f : \mathbb{R} \times [-1,1] \twoheadrightarrow Z \subseteq \mathbb{R}^3 :$$

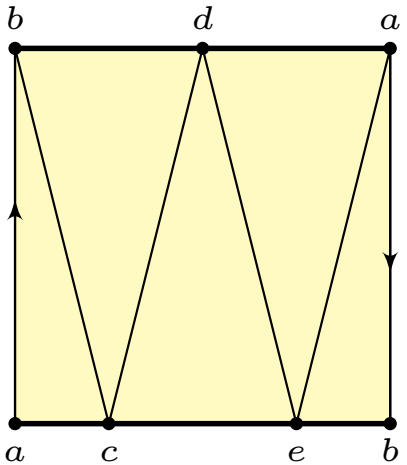
$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(\pi s) \\ 3\sin(\pi s) \\ t \end{pmatrix}$$





$$g : \mathbb{R} \times [-1,1] \twoheadrightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3 :$$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [3+t\sin(\pi s/2)]\cos(\pi s) \\ [3+t\sin(\pi s/2)]\sin(\pi s) \\ t\cos(\pi s/2) \end{pmatrix}$$



Übung: Zylindermantel Z und Möbius–Band M erlauben Atlanten mit nur zwei Karten. (Mit einer einzigen Karte gelingt dies nicht, siehe K1Y.) Dies gelingt glatt, wie hier zu sehen, für Z sogar orientiert. Beide Flächen lassen sich zudem triangulieren. (Obige Eckenzahl ist minimal. Warum?)

Welche Mannigfaltigkeiten können wir triangulieren?

Triangulierungsvermutung für topologische Mannigfaltigkeiten:
Jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit M ist triangulierbar,
d.h. es existiert ein endlicher Simplizialkomplex K mit $|K| \cong M$.

☺ Dies gilt für $\mathscr{C}^1$–glatte Mannigfaltigkeiten, leider nicht allgemein!

Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie: Seien K und L
Simplizialkomplexe mit homöomorphen Realisierungen $|K| \cong |L|$.
Dann existieren isomorphe Unterteilungen $K' \preccurlyeq K$ und $L' \preccurlyeq L$.

☺ Dies gilt glücklicherweise in Dimension ≤ 3, leider nicht allgemein!

Für Mannigfaltigkeiten der Dimension ≤ 3 gelten beide Vermutungen,
für Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 4 hingegen sind beide falsch!

Satz K1L: Triangulierbarkeit für Mfkten der Dimension ≤ 3

Jede topologische Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 3 ist triangulierbar.
Je zwei Triangulierungen sind isomorph nach geeigneter Unterteilung.

☺ Triangulierungen vereinfachen unsere Arbeit dramatisch!

Klassifikation der Kurven aka eindim. Mannigfaltigkeiten

Für 1–Mannigfaltigkeiten haben wir zunächst vier konkrete Beispiele:

1–Mannigfaltigkeit	ohne Rand	mit Rand
nicht kompakt	die reelle Gerade $\mathbb{R}$	die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0}$
kompakt	die Kreislinie $\mathbb{S}^1$	das Intervall $[0,1]$

Satz K1N: topologische Klassifikation der Kurven

Jede zusammenhängende Kurve (eindimensionale Mannigfaltigkeit) ist homöomorph zu genau einem der Modellräume $[0,1]$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

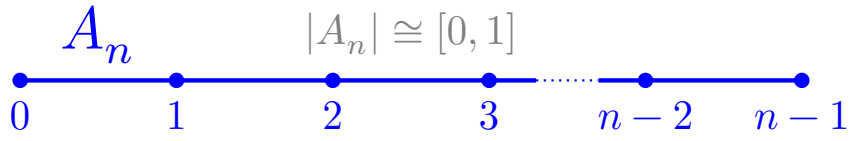
Jede kompakte Kurve K besteht somit aus $p \in \mathbb{N}$ Intervallen und $q \in \mathbb{N}$ Kreislinien, ist also homöomorph zu genau einem der Modellräume

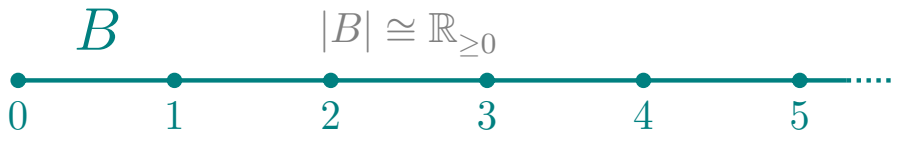
$$E_{p,q} = \big(\,\{1,\dots,p\} \times [0,1]\,\big) \cup \big(\,\{p+1,\dots,p+q\} \times \mathbb{S}^1\,\big) \;\subseteq\; \mathbb{R} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^3.$$

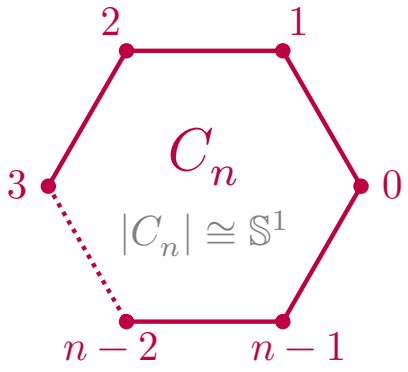
Der Satz ist anschaulich plausibel, doch die Voraussetzung ist schwach. Ohne weitere Hilfsmittel ist der Beweis eher länglich und mühsam… Versuchen Sie es! Eine Anleitung gibt David Gale, *The classification of 1–manifolds: A take-home exam*, Am. Math. Monthly 94 (1987) 170–175.

Klassifikation der simplizialen Kurven

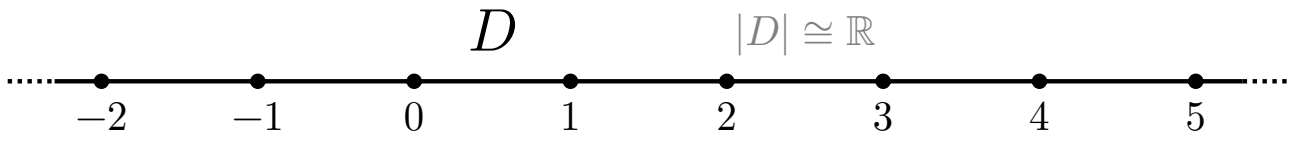
☺ Wir nutzen triangulierte Mfkten, das ist stärker… und damit leichter!
Nach Satz K1L ist jede Kurve (eindim. Mannigfaltigkeit) triangulierbar.







Jede dieser Skizzen zeigt einen Simplizialkomplex K der Dimension 1, also einen Graphen aus Ecken und Kanten. Die geometrische Realisierung $|K|$ ist eine zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit. Sie ist kompakt für A_n und C_n, unberandet für C_n und D.



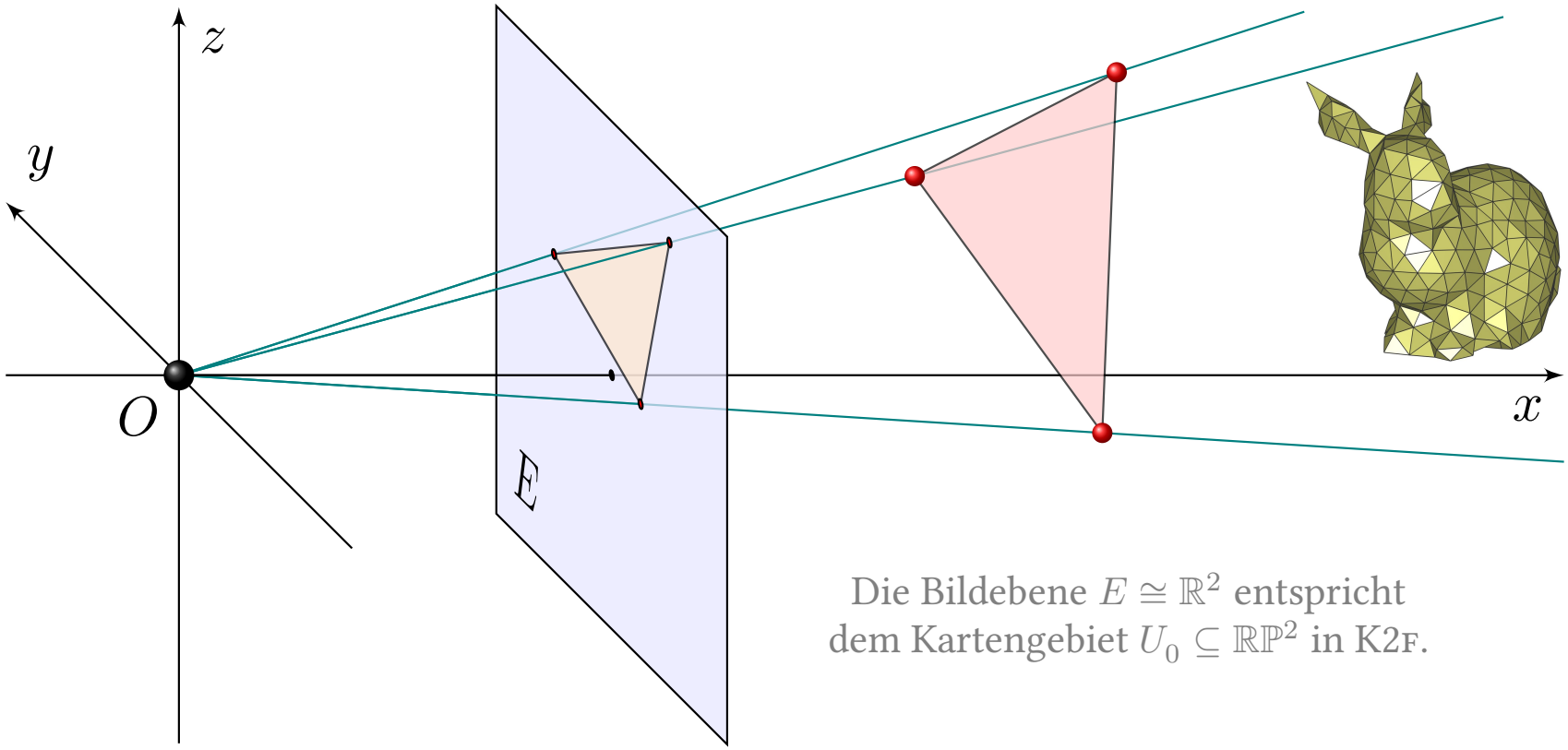
Übung K1o: Klassifikation simplizialer Kurven

Sei K ein Simplizialkomplex und $X = |K|$ seine Realisierung.

1. Genau dann ist X eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, wenn $\dim K \leq 1$ gilt, und jede Ecke in genau einer oder zwei Kanten liegt.
2. Ist K zudem zshgd, so ist K isomorph zu einem der obigen Modelle. Jede zshgde Kurve ist homöomorph zu einem der vier Modellräume.

Perspektive: Geraden werden zu Punkten.

Auge oder Kamera nutzen die Zentralprojektion auf eine Bildebene E:
Alle Punkte auf einer Ursprungsgeraden werden zu einem Bildpunkt.

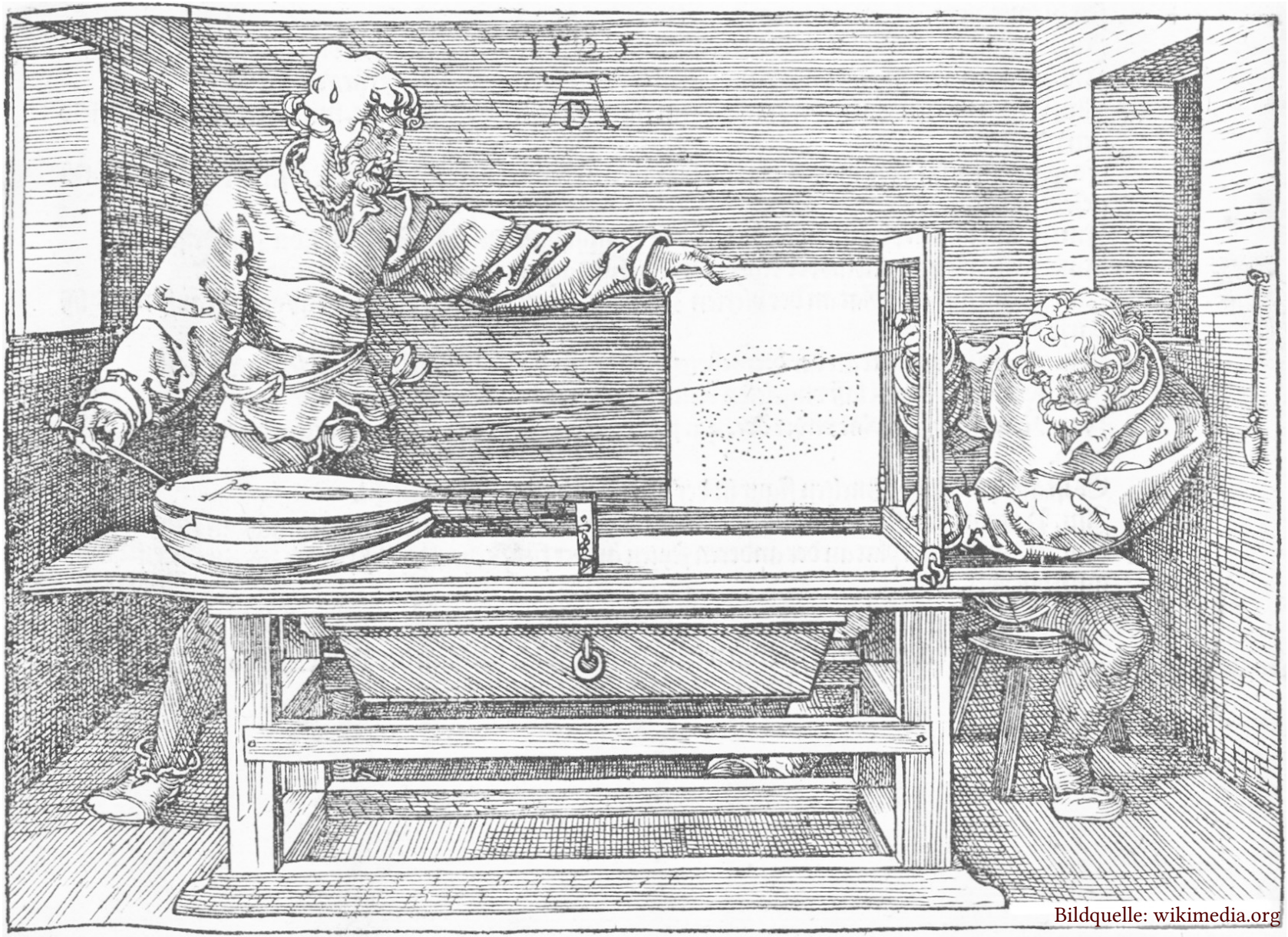


Die Bildebene $E \cong \mathbb{R}^2$ entspricht
dem Kartengebiet $U_0 \subseteq \mathbb{RP}^2$ in K2F.

Die Projektion löscht die Tiefeninformation: Die dreidimensionale Szene wird zum zweidimensionalen Bild projiziert, perspektivische Darstellung.
Zusätzliche Tiefeninformation ist wichtig für praktische Anwendungen:
Astronomie (Parallaxe), Photographie (Tiefenschärfe), Computer Vision.

Perspektive: Geraden werden zu Punkten.

Erforschung der Grundlagen perspektivischer Darstellung in der Renaissance...



Bildquelle: wikimedia.org

In den letzten Jahrzehnten hat die Computergraphik diese Technik perfektioniert.

Albrecht Dürers *Underweysung* zum Perspektivproblem

Projektive Räume: Geraden sind die neuen Punkte!

Definition K2A: der projektive Raum $\mathbb{P}(V)$

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ seine multiplikative Gruppe.

Diese operiert durch Multiplikation $\mathbb{K}^\times \dot{\curvearrowright} V$ auf jedem $\mathbb{K}$–Vektorraum V, ebenso $\mathbb{K}^\times \dot{\curvearrowright} V^\sharp$ auf der Menge $V^\sharp = V \setminus \{0\}$ aller Nicht-Null-Vektoren.

Jede Bahn / Äquivalenzklasse ist eine Gerade (jeweils ohne Nullpunkt).
Wir definieren den **projektiven Raum** $\mathbb{P}(V)$ als den Quotientenraum:

$$\mathbb{K}^\times \dot{\curvearrowright} V^\sharp \overset{q}{\twoheadrightarrow} \mathbb{P}(V) := V^\sharp/\mathbb{K}^\times \,:\, x \mapsto q(x) = [x] = \mathbb{K}^\times \cdot x$$

Der Übergang von V zu $\mathbb{P}(V)$ heißt **Projektiv(is)ierung**.

Genau dann erzeugen zwei Vektoren $x, y \in V^\sharp$ dieselbe Gerade $\mathbb{K}x = \mathbb{K}y$, geschrieben $x \sim y$, wenn ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ mit $\lambda x = y$ existiert.
Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $V^\sharp$. Die Äquivalenzklasse $\mathbb{K}^\times \cdot x$ ist die von x aufgespannte Gerade (hier immer ohne den Nullpunkt 0).
Der Quotientenraum $V^\sharp/_\sim$ ist der oben definierte projektive Raum $\mathbb{P}(V)$.
Kurz gesagt, als Slogan: Die Punkte von $\mathbb{P}(V)$ sind die Geraden von V.

Projektive Räume: homogene Koordinaten

Als kanonisches Beispiel betrachten wir den **Koordinatenraum**

$$V = \mathbb{K}^{n+1} = \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \,|\, x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \}.$$

Den **projektiven Raum** schreiben wir dann $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{KP}^n$ mit

$$q : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{KP}^n \,:\, (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \dots : x_n] = \mathbb{K}^\times \cdot x.$$

Diese Schreibweise nennen wir **homogene Koordinaten**, denn

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n] \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{K}^\times.$$

☺ Speziell im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ trägt $\mathbb{K}^{n+1}$ die euklidische Topologie, $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist ein Teilraum, und $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{KP}^n$ der Quotientenraum. Diese Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ untersuchen wir im Folgenden genauer.

Diese Quotientenkonstruktion ist wunderbar einfach, konkret, explizit. Schwierig ist allein die globale Form des Quotientenraumes, dazu später.

Die Projektivierung können wir auf jeden Vektorraum anwenden, auch auf unendlich-dimensionale Vektorräume und auf Untervektorräume.

Projektive Räume: Teilräume

Projektivierung respektiert Teilräume: Ist $U \leq V$ ein Untervektorraum, so operiert $\mathbb{K}^\times$ auf der Teilmenge $U^\sharp \subseteq V^\sharp$, und wir erhalten $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$. Für die Koordinatenräume haben wir die kanonischen Einbettungen

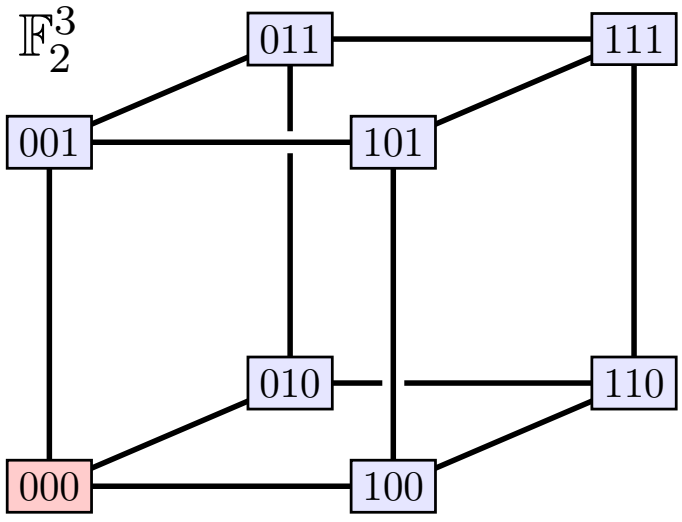
$$\begin{aligned} \text{inc} : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1} : &\quad (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}, 0) \\ \text{inc} : \mathbb{KP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{KP}^n : &\quad [x_0 : \dots : x_{n-1}] \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : 0] \end{aligned}$$

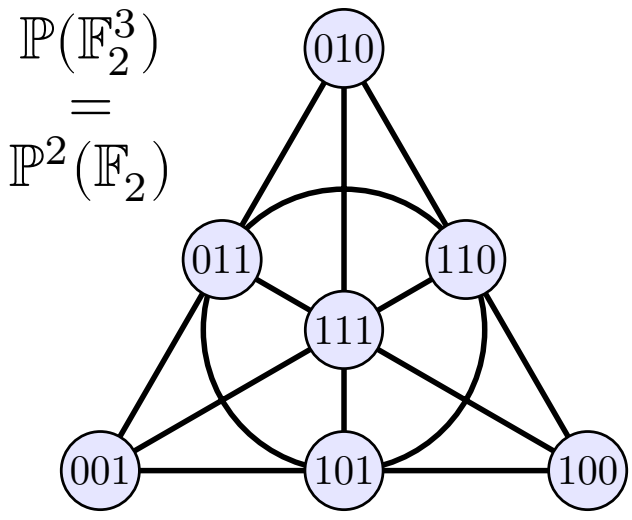
$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{K}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^4 & \longrightarrow & \dots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbb{K}^1 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^3 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^4 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{KP}^0 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{KP}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{KP}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{KP}^3 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ operiert auf $\mathbb{K}^{n+1}$ durch lineare Abbildungen und somit auch auf $\mathbb{KP}^n$. Vielfache operieren dabei gleich, wir erhalten daher eine Operation der **projektiven linearen Gruppe** $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) := \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})/\mathbb{K}^\times$ auf dem projektiven Raum $\mathbb{KP}^n$.

Projektive Räume: die Fano–Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$

Das kleinste Beispiel erhalten wir für den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ und $n = 2$:





Hier besteht $V = \mathbb{F}_2^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ aus acht Vektoren, also $V^\sharp = \mathbb{F}_2^3 \setminus \{0\}$ aus sieben. Jeder Vektor $v \in V^\sharp$ spannt die Gerade $\{0, v\} \subseteq \mathbb{F}_2^3$ auf, seine Äquivalenzklasse ist also $\{v\}$. Die sieben Geraden in $\mathbb{F}_2^3$ sind die Punkte des projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.

Die obige Illustration zeigt $\mathbb{F}_2^3$ als Würfel und $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$ als **Fano–Ebene**. Die sieben Ebenen in $\mathbb{F}_2^3$ betrachten wir als Geraden in $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$. Dies ist ein berühmt-elegantes Minimalmodell der **Inzidenzgeometrie**. Je zwei Punkte inzidieren mit genau einer Geraden, und umgekehrt.

Projektive Räume über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$

Beispiel / Übung K2B: endliche projektive Räume

Wie viele Elemente hat $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$? Wie erklären Sie das geometrisch?

- Die Menge $\mathbb{F}_q^{n+1}$ hat q^{n+1} Elemente. Jede Gerade $\mathbb{F}_q \cdot v$ hat q Elemente.
- Dies ist keine Zerlegung, da alle Geraden den Nullpunkt enthalten.

Lösung: Die Menge $V^\sharp = \mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{0\}$ hat genau $q^{n+1} - 1$ Elemente.
Jede Gerade $\mathbb{F}_q^\times v$ hat genau $q - 1$ Elemente. Dies ist eine Zerlegung!

$$\sharp\mathbb{P}(V) = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

Beispiele:

$$\sharp\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) = \frac{8 - 1}{2 - 1} = 7 = 1 + 2 + 4$$

$$\sharp\mathbb{P}^3(\mathbb{F}_5) = \frac{625 - 1}{5 - 1} = 156 = 1 + 5 + 25 + 125$$

Dahinter steckt die Zellzerlegung $\mathbb{KP}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{K}^n$.

Projektive Räume über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$

☺ Wir nutzen dankend die Bahnengleichung, hier frei.
Touristin fragt Schäfer: „Wie zählen Sie so schnell Ihre Schafe?“
— „Das ist ganz einfach, ich zähle die Beine und teile durch vier.“

☺ Hinter der geometrischen Summe steckt tatsächlich Geometrie!

$$\mathbb{KP}^{n-1} = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_n = 0\},$$
$$\mathbb{KP}^n \setminus \mathbb{KP}^{n-1} = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_n = 1\} \cong \mathbb{K}^n.$$

Aus der kanonischen **Filtrierung** $\mathbb{KP}^0 \subseteq \mathbb{KP}^1 \subseteq \mathbb{KP}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{KP}^n$
gewinnen wir die **Zellzerlegung** $\mathbb{KP}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{K}^n$.

☺ Dies erklärt die Formel $\sharp\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ geometrisch:
Die abstrakten Zahlen $1, q, q^2, \ldots, q^n$ entsprechen konkreten Objekte!
Ja, Sie lesen richtig: Zahlen sind abstrakt, Objekte sind konkret.

☺ Das ist eine Illustration für algebraisch-geometrischen Zahlenzauber.
Diese Art der **Konkretisierung** ist oft nützlich und überaus erfolgreich.
Vornehm heißt dies **Kategorifizierung**: Unsere abstrakt-algebraische
Rechnung wird in einer konkreten Kategorie erklärt und interpretiert.

Lobgesang der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$

Als motivierenden Ausblick nenne ich die folgenden Ergebnisse als Ziele:

Satz K2c: Lobgesang der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ ist eine unberandete Mannigfaltigkeit, zusammenhängend, der Dimension $\dim \mathbb{RP}^n = n$ und $\dim \mathbb{CP}^n = 2n$. (Wir zählen die reelle Dimension; $\mathbb{CP}^n$ ist komplex n–dimensional.)

Er ist ein Sphärenquotient, $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ und $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, also kompakt. Die Koordinaten $\kappa : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{KP}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$ kompaktifizieren $\mathbb{K}^n$ mit Rand $\mathbb{KP}^{n-1}$ und heften eine einzige Zelle an.

Der kanonische Atlas $\mathscr{A} = (h_0, \dots, h_n)$ ist $\mathscr{C}^\infty$–glatt, analytisch, rational. Die Mfkt $\mathbb{RP}^n$ ist orientierbar für n ungerade, aber nicht-orientierbar für $n \geq 2$ gerade. Die Mfkt $\mathbb{CP}^n$ ist kanonisch orientiert in jeder Dimension n.

Kleine Beispiele: Für geschlossene Flächen gilt $F_0^+ = \mathbb{S}^2$ und $F_0^- = \mathbb{RP}^2$. Für $n \neq 1$ gilt $\mathbb{RP}^n \ncong \mathbb{S}^n$ und $\mathbb{CP}^n \ncong \mathbb{S}^{2n}$, doch $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$. Für Matrixgruppen gilt $\mathrm{GO}_1 \mathbb{R} = \mathbb{S}^0$ und $\mathrm{SO}_2 \mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathrm{SO}_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$.

Lobgesang der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$

Für jeden endlichen Körper $\mathbb{K}$ ist $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ kombinatorisch interessant.
Geometrisch-topologisch interessieren wir uns vor allem für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Hier entfalten die projektiven Räume $\mathbb{KP}^n$ eine Vielfalt faszinierender Eigenschaften, sie sind ein idealer Test unserer Begriffe und Werkzeuge.

Jedoch, leicht anschaulich sind die projektiven Räume $\mathbb{KP}^n$ leider nicht.
Das mag manche:r als Makel empfinden, einige meiden sie ängstlich oder verteufeln sie gar zu den Schrecken der sieben Weltmeere.
Das ist natürlich übertrieben und völlig fehlgeleitet.

Sehen wir es positiv: Da wir $\mathbb{KP}^n$ zwar *global* definieren, aber meist nicht leicht als Ganzes überblicken können, eignet sich die *lokale* Sichtweise der Mannigfaltigkeiten hier als Hilfsmittel und ideales Denkwerkzeug.
Dies werden wir daher erfolgreich einsetzen, üben und vertiefen.

Zudem werden hier nahezu alle topologischen Begriffe und Techniken mobilisiert: Einbettungen, Quotienten, Kompakt–Hausdorff-Kriterium, Kompaktifizieren und Verkleben, uvm. Außerdem hat $\mathbb{KP}^n$ neben seiner geometrischen Anwendung auch physikalische Bedeutung.

Erinnerung: die Sphäre $\mathbb{S}^n$ als Teilraum

Die n–dimensionale Sphäre ist der Teilraum

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^{n+1}.$$

Die kanonische Einbettung $\mathrm{inc} : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (x, 0)$ beschert uns:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{R}^1 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \dots & & (\mathbb{R}\text{–Hyperebene}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
\mathbb{S}^0 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{S}^3 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \dots & & (\text{Äquator/Schnitt})
\end{array}$$

Jede Sphäre ungerader Dimension $n = 2m + 1$ erhalten wir als Teilraum

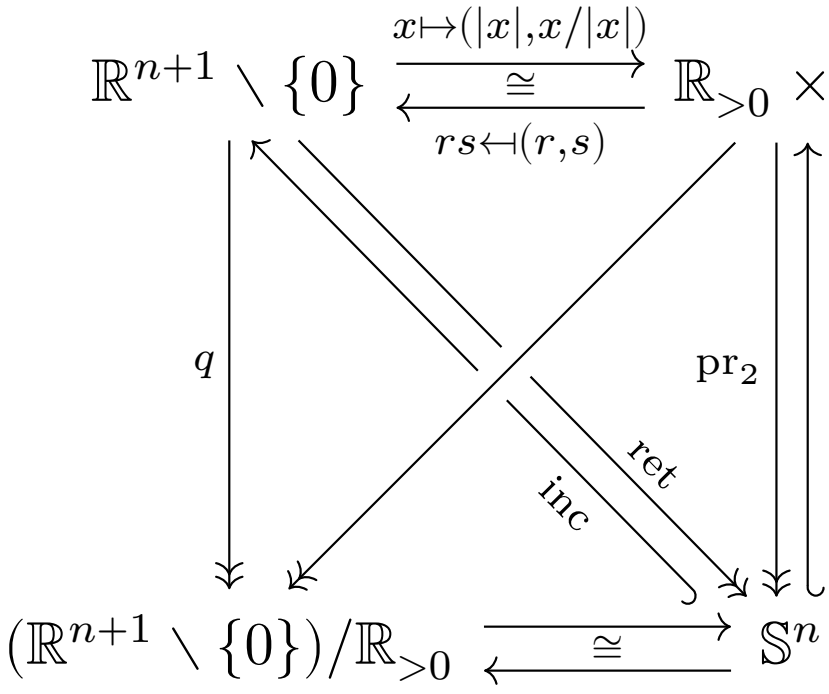
$$\mathbb{S}^{2m+1} = \left\{ (z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} \,\middle|\, |z_0|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 1 \right\} \quad \subseteq \quad \mathbb{C}^{m+1}.$$

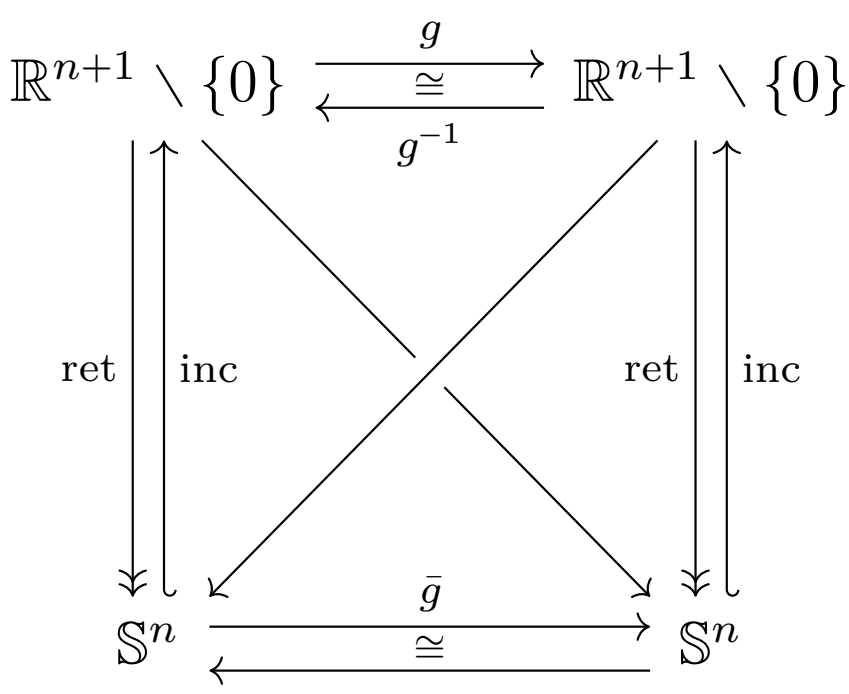
Die kanonische Einbettung $\mathrm{inc} : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} : z \mapsto (z, 0)$ beschert uns:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{C}^1 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{C}^4 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \dots & & (\mathbb{C}\text{–Hyperebene}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
\mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{S}^3 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{S}^5 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \mathbb{S}^7 & \xrightarrow{\mathrm{inc}} & \dots & & (\text{Schnittmenge})
\end{array}$$

Erinnerung: die Sphäre $\mathbb{S}^n$ als Quotient

Im Raum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ nutzen wir Polarkoordinaten $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^n$:

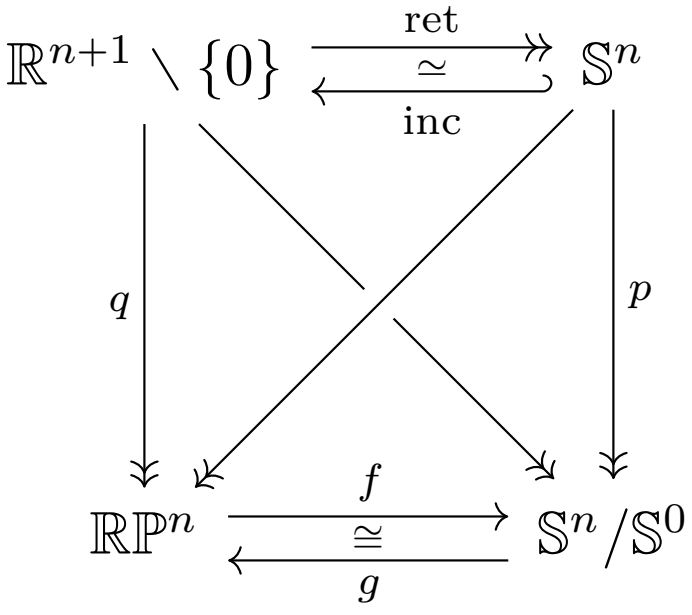


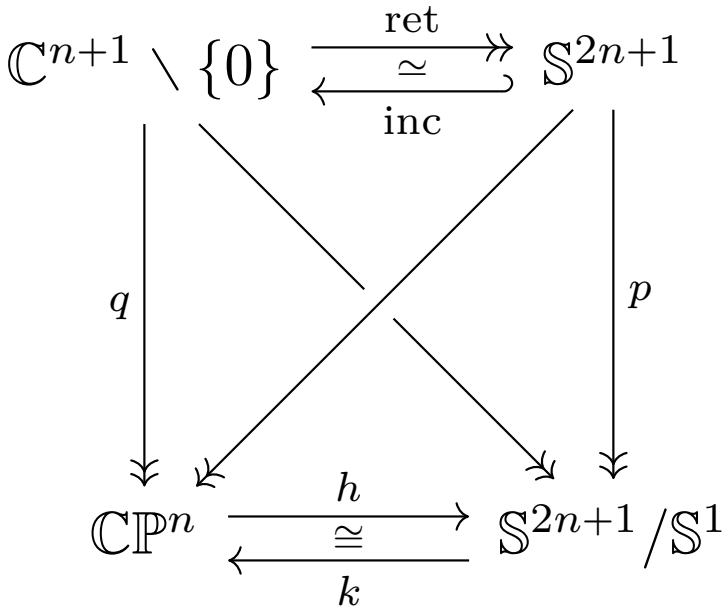


Jeder lineare Automorphismus $g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ induziert einen Homöomorphismus $\bar{g} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto g(x)/|g(x)|$ mit $r \circ g = \bar{g} \circ r$.
Diese Operation $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{S}^n$ haben wir in J3E bereits genutzt.

Positive Vielfache $\lambda g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ operieren dabei gleich, wir erhalten daher eine Operation der Quotientengruppe $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$.

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ als Sphärenquotient





☺ Wir nutzen viermal die universelle Eigenschaft des Quotienten:
Die obere Zeile faktorisiert wie angegeben und liefert in der unteren
$(f,g) : \mathbb{RP}^n \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ mit $f : \mathbb{R}^\times \cdot x \mapsto \mathbb{S}^0 \cdot x/|x|$ und $g : \mathbb{S}^0 \cdot a \mapsto \mathbb{R}^\times \cdot a$ bzw.
$(h,k) : \mathbb{CP}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ mit $h : \mathbb{C}^\times \cdot x \mapsto \mathbb{S}^1 \cdot x/|x|$ und $k : \mathbb{S}^1 \cdot a \mapsto \mathbb{C}^\times \cdot a$.

Übung K2D: Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ ist Quotient einer Sphäre.

In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ haben wir $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ und $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.
Insbesondere sind alle projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ kompakt (F1J).

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ als Sphärenquotient

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir die folgenden kanonischen Einbettungen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{R}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^2 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{R}^4 & \hookrightarrow & \dots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbb{S}^0 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^2 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^3 & \hookrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{RP}^0 & \xhookrightarrow{+1\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^1 & \xhookrightarrow{+2\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^2 & \xhookrightarrow{+3\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^3 & \hookrightarrow & \dots
\end{array}$$

Hierbei entsteht $\mathbb{RP}^n$ aus $\mathbb{RP}^{n-1}$ durch Anheften einer n–Zelle $\mathbb{D}^n$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{C}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^2 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{C}^4 & \hookrightarrow & \dots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^3 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^5 & \xhookrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{S}^7 & \hookrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{CP}^0 & \xhookrightarrow{+2\text{–Zelle}} & \mathbb{CP}^1 & \xhookrightarrow{+4\text{–Zelle}} & \mathbb{CP}^2 & \xhookrightarrow{+6\text{–Zelle}} & \mathbb{CP}^3 & \hookrightarrow & \dots
\end{array}$$

Hierbei entsteht $\mathbb{CP}^n$ aus $\mathbb{CP}^{n-1}$ durch Anheften einer $2n$–Zelle $\mathbb{D}^{2n}$.
Für die Euler–Charakteristik folgt $\chi(\mathbb{RP}^n) = \frac{1+(-1)^n}{2}$ und $\chi(\mathbb{CP}^n) = 1 + n$.

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ als euklidischer Teilraum

Zu jedem Vektor $s \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ definieren wir $F(s) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ als

(a) die orthogonale Projektion $F(s) : x \mapsto s\langle s \,|\, x\rangle / \langle s \,|\, s\rangle$,

(b) die orthogonale Projektion $F(s) : x \mapsto x - s\langle s \,|\, x\rangle / \langle s \,|\, s\rangle$,

(c) die Hyperebenenspiegelung $F(s) : x \mapsto x - 2s\langle s \,|\, x\rangle / \langle s \,|\, s\rangle$.

Die Abbildung $F(s) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ entspricht folgender Matrix:

(a) $f(s) = s \cdot \overline{s}^\top / \langle s \,|\, s\rangle$ mit $\mathbb{K}s = \operatorname{Ker}[f(s) - 1_{n\times n}]$,

(b) $f(s) = 1_{n\times n} - s \cdot \overline{s}^\top / \langle s \,|\, s\rangle$ mit $\mathbb{K}s = \operatorname{Ker} f(s)$,

(c) $f(s) = 1_{n\times n} - 2s \cdot \overline{s}^\top / \langle s \,|\, s\rangle$ mit $\mathbb{K}s = \operatorname{Ker}[f(s) + 1_{n\times n}]$.

Die so definierte Abbildung $f : \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ ist demnach stetig!

Übung K2E: der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ als euklidischer Teilraum

Wir erhalten die euklidische Einbettung $\bar{f} : \mathbb{KP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{K}^{n\times n} : [s] \mapsto f(s)$ dank kanonischer Faktorisierung und Kompakt-Hausdorff-Kriterium. Insbesondere ist der Raum $\mathbb{KP}^n$ hausdorffsch und zweitabzählbar (E1G), sogar metrisierbar durch $d([s],[s']) = |f(s) - f(s')|$ dank Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ als euklidischer Teilraum

Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{KP}^n$ eine Mannigfaltigkeit ist. Lokale Karten ergeben sich kanonisch und sind erfreulich leicht, wie wir gleich sehen. Zur Definition K1B gehört aber auch die Hausdorff–Eigenschaft und die Zweitabzählbarkeit. Der Raum $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ hat diese guten Eigenschaften offensichtlich, doch diese können bei Quotientenbildung verloren gehen!

Erinnerung: Der Raum $X = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}$ ist hausdorffsch, nicht jedoch die verzweigte Gerade $Y = X/_\sim$ (E2E). Der Raum $\mathbb{R}$ ist zweitabzählbar, das unendliche Bouquet $\mathbb{R}/\!/\mathbb{Z}$ jedoch ist nicht einmal erstabzählbar (E2W).

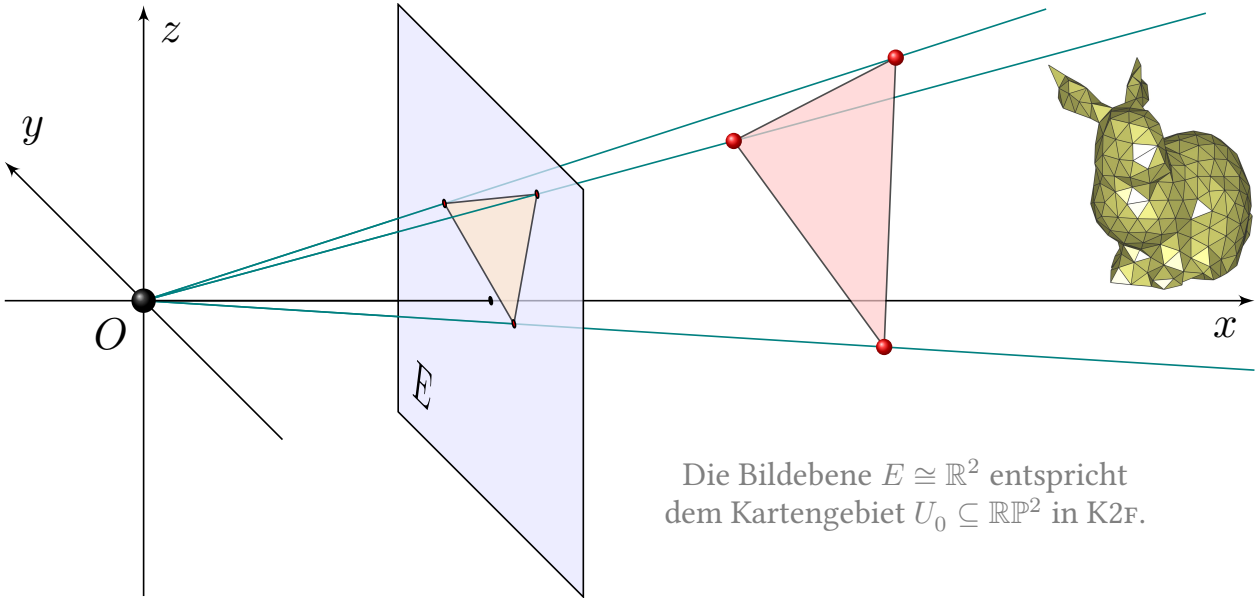
Für den projektiven Raum $\mathbb{KP}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ müssen wir daher befürchten, dass auch bei diesem Quotienten gute topologische Eigenschaften zerbrechen könnten. Dies tritt glücklicherweise nicht ein, genau das beweisen wir effizient-elegant durch die obige Einbettung

$$\bar{f} : \mathbb{KP}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)} : [s] \mapsto f(s).$$

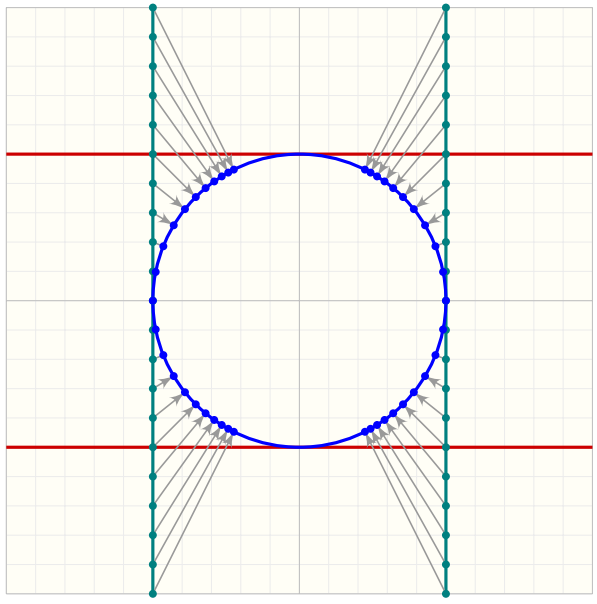
Die kanonische Faktorisierung E2H von f liefert die stetige Injektion $\bar{f}$. Dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium F1L ist $\bar{f}$ eine Einbettung.

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ als Mannigfaltigkeit

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zeigen, dass der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ eine wunderschöne Mannigfaltigkeit ist!



Die Bildebene $E \cong \mathbb{R}^2$ entspricht dem Kartengebiet $U_0 \subseteq \mathbb{RP}^2$ in K2F.



Die ursprüngliche Idee der Projektivierung liefert uns Karten für die Sphäre $\mathbb{S}^n$, siehe K115, und den projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$, siehe K2F. Die folgende Übung führt dies in epischer Schönheit aus.

Die Fragen leiten Sie schrittweise an und bieten Ihnen die wunderbare Gelegenheit, alle nötigen Begriffe hier zu wiederholen und einzuüben. Fingerfertigkeit und Verständnis trainieren Sie mit Stift und Papier!

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ als Mannigfaltigkeit

Übung K2F: Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit.

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit:

0. Er ist kompakt (K2D), hausdorffsch und zweitabzählbar (K2E).
1. Darin ist $U_i := \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_i \neq 0\} = \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_i = 1\}$ offen.
2. Es gilt $\mathbb{KP}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ mit den kanonischen Karten $(h_i, k_i) : U_i \cong \mathbb{K}^n$ gegeben durch $k_i : (y_1, \ldots, y_n) \mapsto [y_1 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : \ldots : y_n]$ und $h_i : [x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \ldots : x_n] \mapsto x_i^{-1}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.
3. Als Komplement von U_n im Raum $\mathbb{KP}^n$ erhalten wir $\mathbb{KP}^{n-1}$.

Wir schauen noch etwas genauer hin:

4. Bestimmen Sie explizit die Kartenwechsel $h_{ij} : \mathbb{K}^n \supseteq V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji} \subseteq \mathbb{K}^n$.
5. Ist $\mathbb{KP}^n$ mit dem Atlas $\mathscr{A} = (h_0, \ldots, h_n)$ eine glatte Mannigfaltigkeit?
6. Ist der Atlas $\mathscr{A}$ orientiert? Ist die Mannigfaltigkeit $\mathbb{KP}^n$ orientierbar?
7. Für $0 \leq m \leq n$ ist $\mathbb{KP}^m \subseteq \mathbb{KP}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit.

☺ Alle Daten liegen explizit vor: Es genügt sorgsames Nachrechnen!

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ als Kompaktifizierung

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ ist kompakt (K2D) und hausdorffsch (K2E).

Übung K2G: der projektive Raum als Kompaktifizierung $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{KP}^n$

Die Einbettung $\kappa = k_n : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} U_n \subseteq \mathbb{KP}^n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_1 : \ldots : x_n : 1]$ ist eine Hausdorff–Kompaktifizierung (F4A) mit $\mathbb{KP}^n = \mathbb{KP}^{n-1} \cup \kappa(\mathbb{K}^n)$.

Im Falle $n = 1$ ist dies Alexandroffs Einpunktkompaktifizierung (F4D):

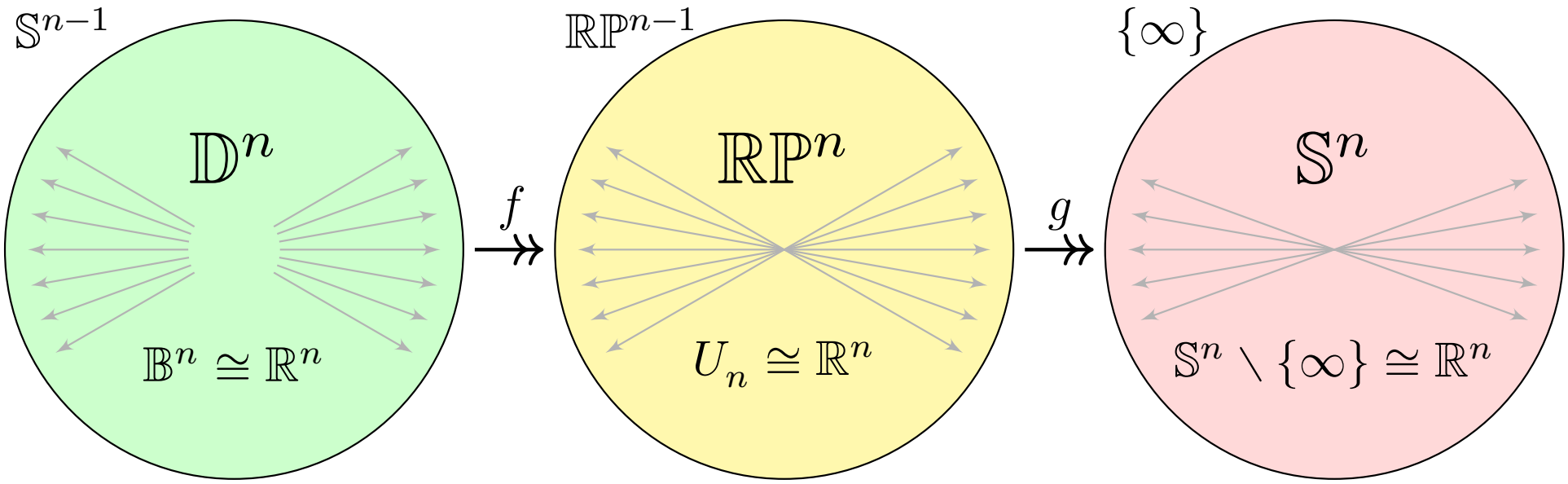
$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U_1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^1 & = & \mathbb{RP}^0 \cup \kappa(\mathbb{R}) & \cong & \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{S}^1 \\ \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} U_1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^1 & = & \mathbb{CP}^0 \cup \kappa(\mathbb{C}) & \cong & \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2 \end{array}$$

Lösung: Das Bild $\kappa(\mathbb{K}^n)$ ist dicht in $\mathbb{KP}^n$: Jeder Punkt in $\mathbb{KP}^n \setminus \kappa(\mathbb{K}^n)$ ist von der Form $[x_1 : \ldots : x_n : 0]$ mit $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ und somit Grenzwert (Fernpunkt) der Geraden $\mathbb{K} \to \mathbb{KP}^n : \lambda \mapsto [\lambda x_1 : \ldots : \lambda x_n : 1]$ für $\lambda \to \infty$.

Besonders übersichtlich ist $\mathbb{KP}^1$: Hier wird nur ein Punkt $\infty = [1 : 0]$ hinzugefügt. Wir erhalten die Einpunktkompaktifizierung (F4D)!

☺ Die Homöomorphie $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ wollen wir noch genauer untersuchen und dazu noch schönere Homöomorphismen konstruieren!

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ als Kompaktifizierung



Zu $\mathbb{R}^n$ kennen Sie die Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{\infty\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ sowie die Ballkompaktifizierung $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ mit ihrem „unendlich fernen Rand“ $\mathbb{D}^n \setminus \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Genau dazwischen sitzt der projektive Raum $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} U_n \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$ mit seinen „Fernpunkten“ $\mathbb{RP}^n \setminus U_n = \mathbb{RP}^{n-1}$.

Wir haben $\mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n$, jeweils durch Identifikation auf dem Rand. Die Einpunktkompaktifizierung ist terminal, siehe F4G, speziell F1R. Bei $\mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$ identifizieren wir gegenüberliegende Punkte $\pm x \in \mathbb{S}^{n-1}$ Genauso für $\mathbb{CP}^n$ mit $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^{2n} \hookrightarrow \mathbb{D}^{2n}$, auf dem Rand $\mathbb{S}^{2n-1}$ operiert $\mathbb{S}^1$.

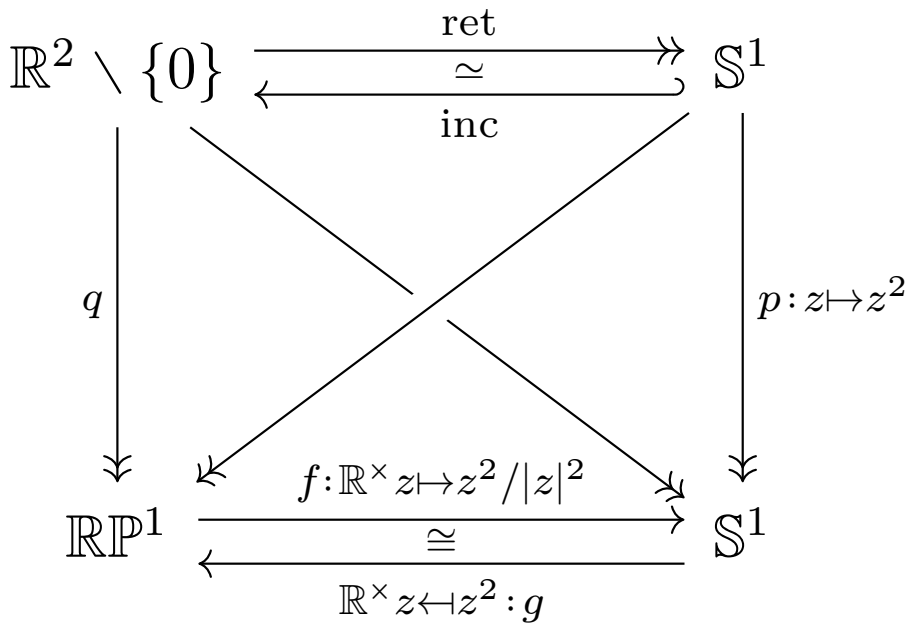
Die reell-projektive Gerade $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$

Übung K2κ: der reell-eindimensionale Sonderfall $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$

Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$, möglichst glatt.

⚠ Der Fall $n = 1$ ist die Ausnahme. Für $n \neq 1$ gilt $\mathbb{S}^n/\{\pm\} \ncong \mathbb{S}^n$!

Lösung: Besonders elegant und einfach ist folgende Konstruktion:

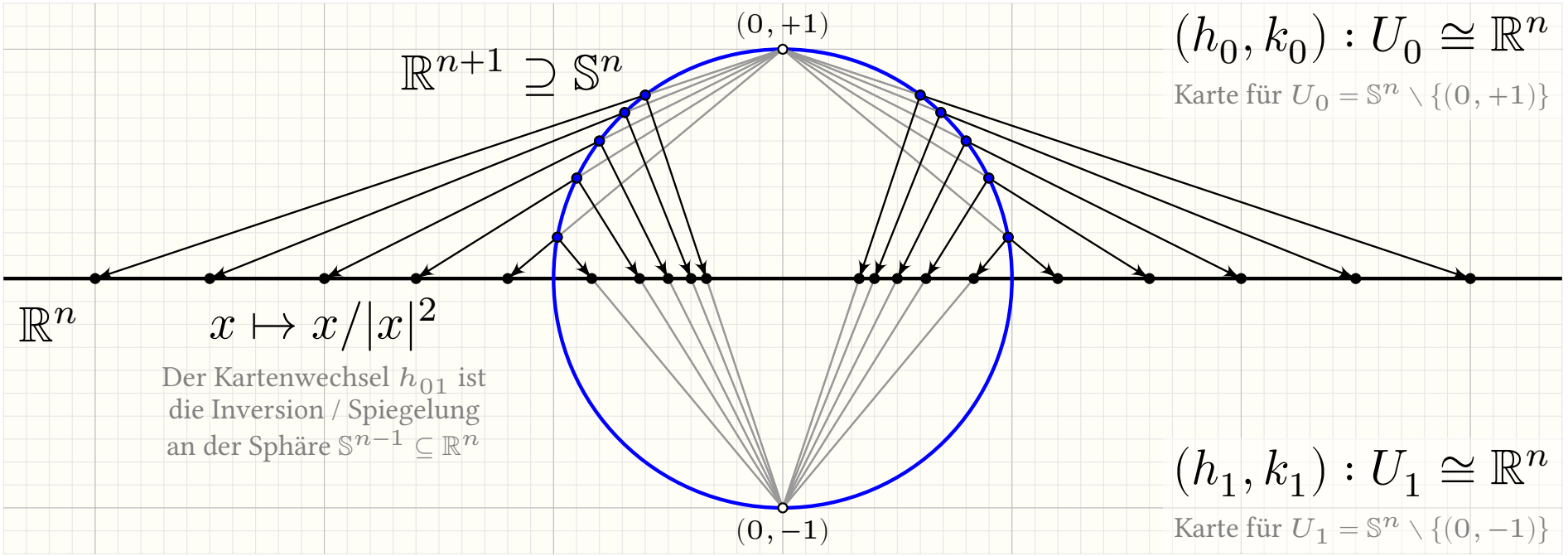


Alternativ gelingt Zusammenschlagen $[-1,1]/\!/\{-1,1\} \cong \mathbb{S}^1$ (K2ȷ).
Leider erhalten wir damit zunächst nur einen Homöomorphismus.

Erinnerung: ein minimaler Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$

Beispiel / Übung K1ı: ein minimaler Atlas für die Sphäre $\mathbb{S}^n$

Konstruieren Sie für die Sphäre $\mathbb{S}^n$ einen glatten und orientierten Atlas.

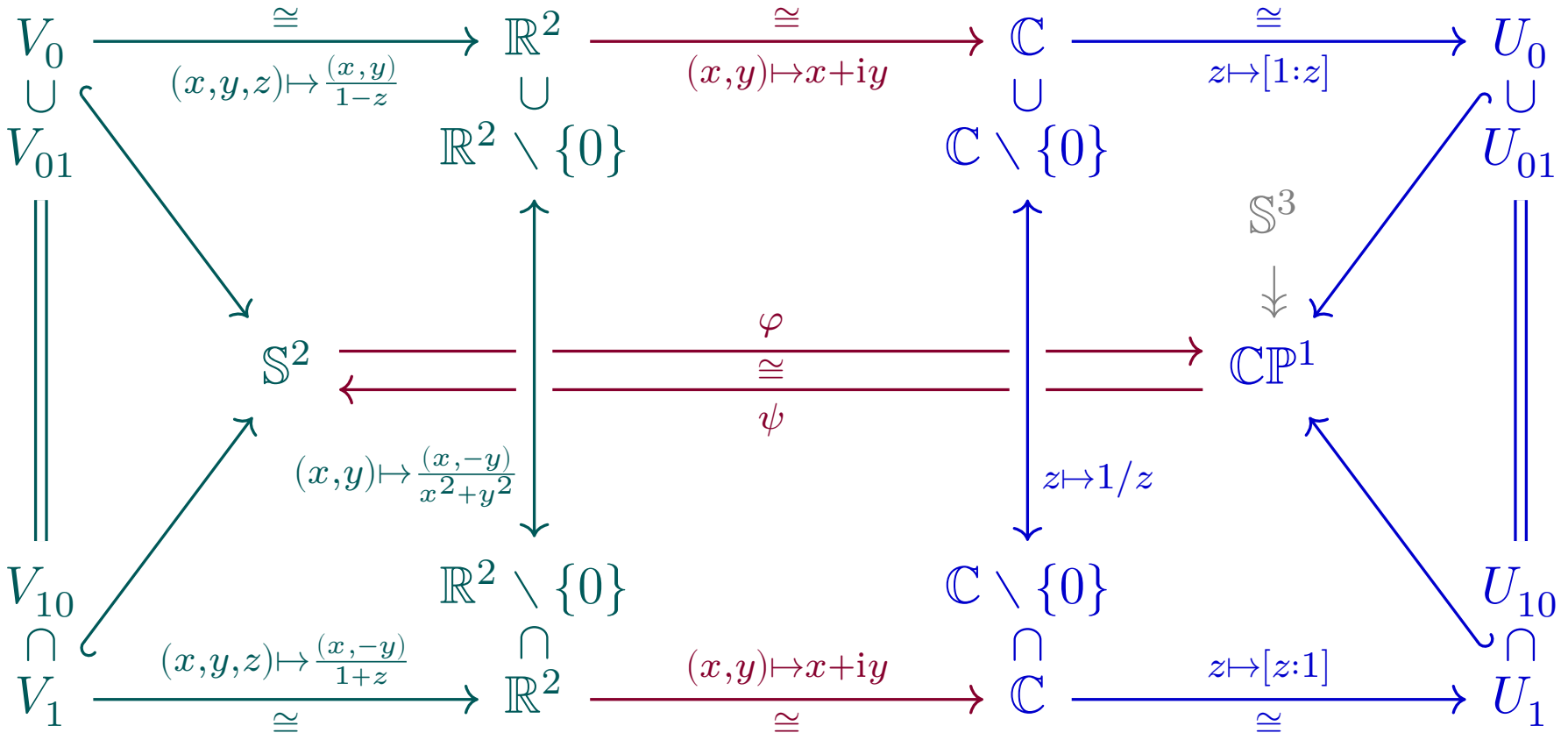


Lösung: Unser Atlas $\mathscr{A} = (h_0, h_1)$ besteht aus zwei stereographischen Projektionen $h_0 : V_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bzgl. Nordpol und $h_1 : V_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bzgl. Südpol. Der Kartenwechsel $x \mapsto x/|x|^2$ ist glatt, zudem analytisch, sogar rational. Zur Orientierung müssen wir eine der beiden spiegeln, sagen wir h_1.

Die komplex-projektive Gerade $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$

Übung K2L: der komplex-eindimensionale Sonderfall $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$

Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$, möglichst glatt.



Links steht ein Atlas für $\mathbb{S}^2$ (K1I), rechts steht ein Atlas für $\mathbb{CP}^1$ (K2F). Verkleben (E1P) ergibt $(\varphi,\psi) : \mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$. Dasselbe gilt für $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$.

Die Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ aka Bloch–Sphäre

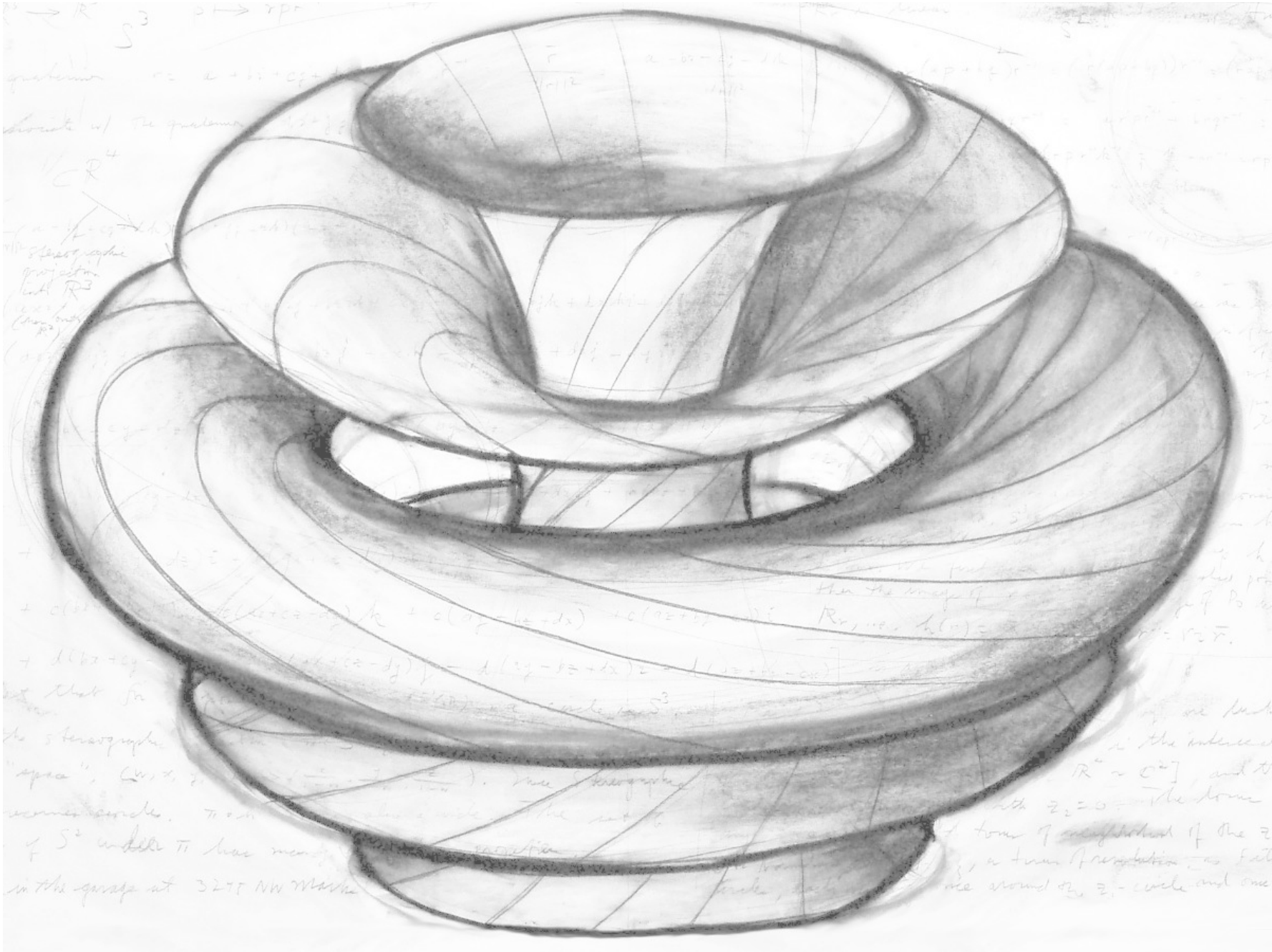
Übung: Global und wunderbar explizit erhalten wir $p : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$,

$$p(a,b,c,d) = (\,2ac + 2bd,\; 2ad - 2bc,\; c^2 + d^2 - a^2 - b^2\,).$$

Diese Polynomfunktion $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist stetig. Die $\mathbb{S}^1$–Invarianz ist klar: Sie erhält das Skalarprodukt $ac + bd$, das Kreuzprodukt $ad - bc$ und die Normquadrate $a^2 + b^2$ und $c^2 + d^2$. Die Bildmenge erfüllt $p(\mathbb{S}^3) \subseteq \mathbb{S}^2$, denn $(2ac+2bd)^2 + (2ad-2bc)^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = 1$. Die Surjektivität $p(\mathbb{S}^3) = \mathbb{S}^2$ und Homöomorphie $\bar{p} : \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ scheinen zunächst schwer… doch dann rettet uns $p = \psi \circ q$. Rechnen Sie es nach!

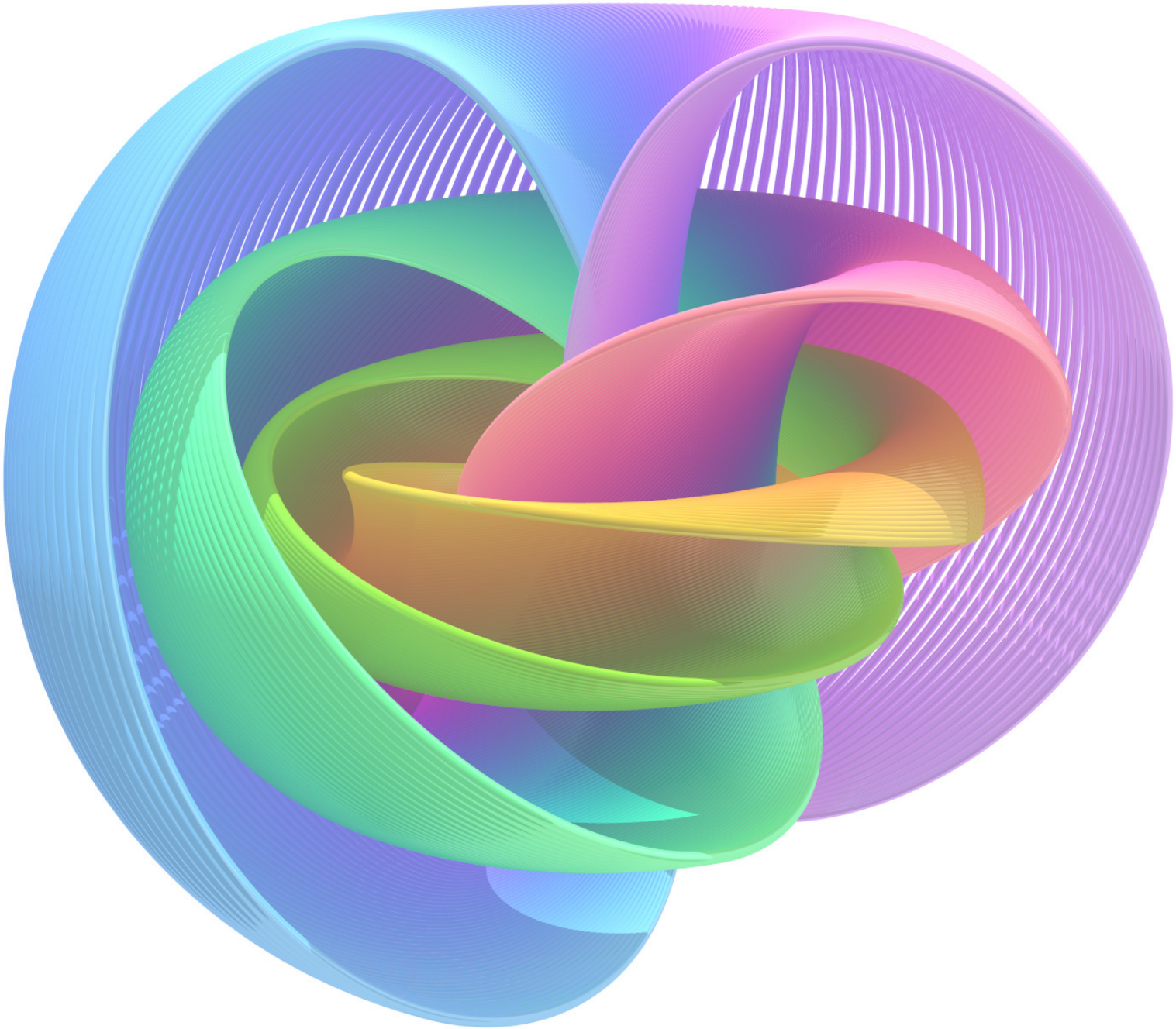
Bemerkung: Für $k < n$ wissen wir bereits $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ (I4B).
Im Falle $k = n$ haben wir $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (J3A). Für $k > n$ wurde zunächst $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ vermutet. Für $n = 1$ stimmt dies tatsächlich, dank Hochhebung auf die universelle Überlagerung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$.
Für $n \geq 2$ blieb die Frage zunächst offen. Heinz Hopf zeigte 1931, dass $p : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ nicht zusammenziehbar ist, kurz $p \not\simeq *$, somit $[\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2] \neq \{*\}$.
Diese Sensation öffnete der Homotopietheorie eine neue Welt.

Die Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ aka Bloch–Sphäre



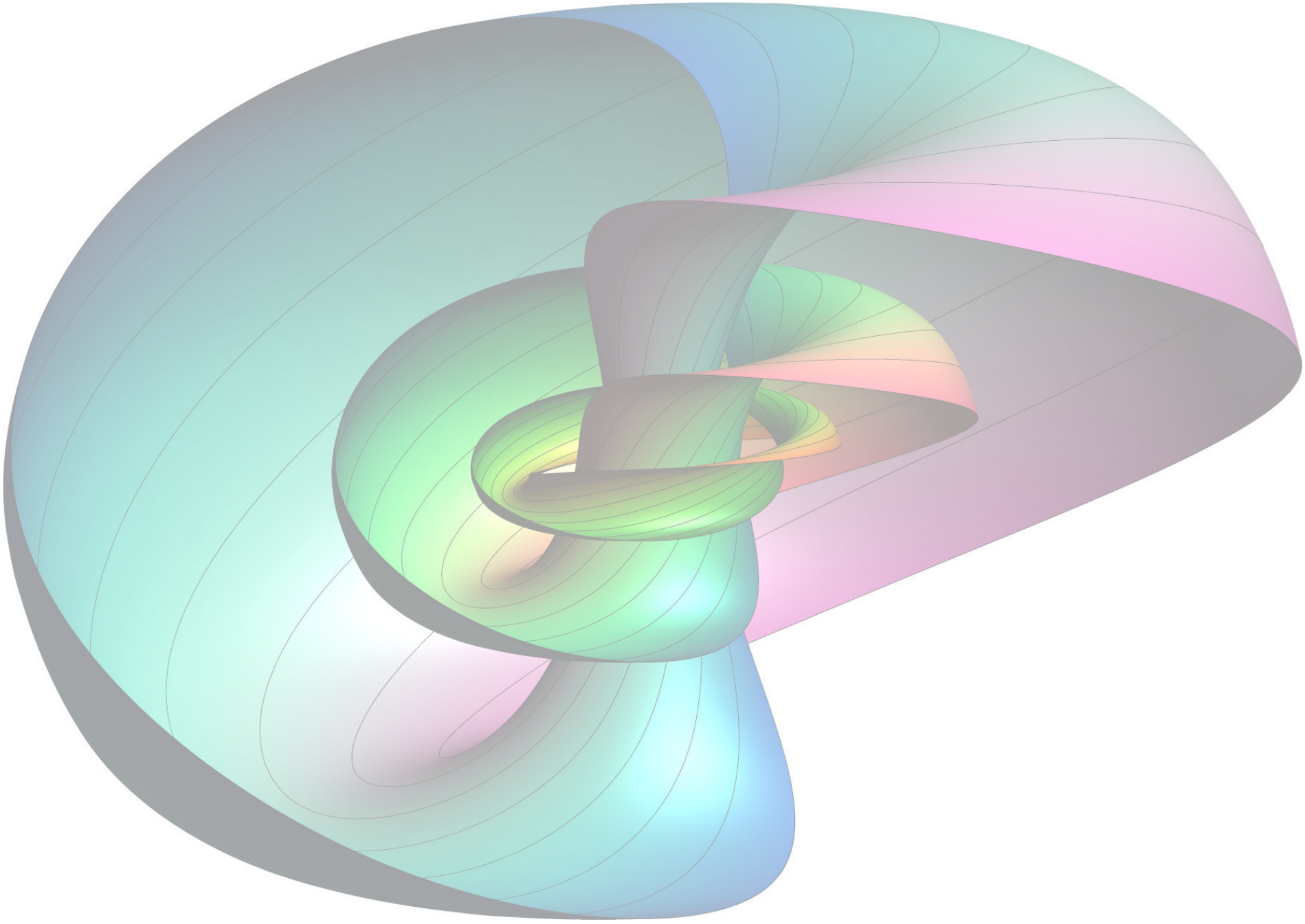
Bildquelle: Lun-Yi Tsai / news.tufts.edu/magazine/fall2009

Die Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ aka Bloch–Sphäre



Bildquelle: wikimedia / nilesjohnson.net / animiert youtu.be/AKotMPGFJYk

Die Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ aka Bloch–Sphäre



Die Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ aka Bloch–Sphäre

Die Konstruktion der komplex-projektiven Geraden $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ führt zur **Hopf–Faserung** $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$. Zuerst beschrieben und untersucht wurde dieses faszinierende Objekt von Heinz Hopf: *Über die Abbildungen der dreidim. Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. 104 (1931) 637–665.

Übung: (1) Wie liegen die $\mathbb{S}^1$–Orbits in $\mathbb{S}^3$? un/verschlungen? Zeichnen Sie einige Orbits in stereographischer Projektion $\mathbb{S}^3 \setminus \{(0,0,0,1)\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$, so wie in obigen Graphiken so eindrücklich und ästhetisch dargestellt.

(2) Zum Kontrast: Zerlegen Sie die Sphäre $\mathbb{S}^3$ in Kreislinien, die sich nicht paarweise verschlingen. (Konkret: Zerlegen Sie $\mathbb{R}^3$ in eine Gerade und darum unverschlungene Kreislinien wie beim Magnetfeld eines Leiters.)

(3) Wer sich das bildgewaltig vorführen lassen möchte, dem empfehle ich die wunderschönen Videos von Étienne Ghys *et al.*, `youtu.be/SxDxUrBSZBM`, und von Niles Johnson, `youtu.be/AKotMPGFJYk`. Auch in der Erzeugung der Graphiken steckt viel schöne Mathematik: Wie würden Sie das anstellen? Versuchen Sie es gerne, dabei lernen Sie Projektivierung, homogene Koordinaten und alle obigen Techniken aus eigener Erfahrung.

Anwendung im Quantencomputing: Qubit und Bloch–Sphäre

Die **klassische Physik** beschreibt den Zustand eines Systems durch deterministische Größen, etwa Massen $m_k \in \mathbb{R}$ mit Positionen $u_k \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeiten $v_k \in \mathbb{R}^3$. **Newtons Himmelsmechanik** können wir so elegant als ein Differentialgleichungssystem formulieren:

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Die **Quantenmechanik** beschreibt jeden Zustand durch einen Vektor in einem $\mathbb{C}$–Vektorraum und projiziert diese zu Wahrscheinlichkeiten. Damit modelliert sie Zufall mit Superposition, Wellenphänomene, etc. Warum diese Beschreibung? Weil sie erfolgreich erklärt und vorhersagt!

Als kleinste Informationseinheit kann ein **Bit** nur den Zustand 0 oder 1 annehmen. Die Quantenmechanik erlaubt zudem **Überlagerungen**: Jeder Zustand ist eine Linearkombination $s = a|0\rangle + b|1\rangle$ mit komplexen Amplituden $a, b \in \mathbb{C}$, wobei $(a, b) \neq (0, 0)$. Die möglichen Zustände und der Nullvektor bilden somit einen zweidimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraum.

Anwendung im Quantencomputing: Qubit und Bloch–Sphäre

Physikalisch **messbar** sind jedoch nicht der Zustand $s = a|0\rangle + b|1\rangle$ oder die Amplituden $a, b \in \mathbb{C}$, sondern nur die Absolutquadrate $|a|^2, |b|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: Diese bestimmen die Wkt, dass der Zustand 0 bzw. 1 gemessen wird.

Das Längenquadrat des Zustandsvektors $s \neq 0$ ist $|s|^2 = |a|^2 + |b|^2 > 0$. Normiert zu $|s| = 1$ erhalten wir Wahrscheinlichkeiten: $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Der **normierte Zustand** s mit $|s| = 1$ liegt demnach auf der 3–Sphäre:

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$$

Auch die Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{S}^1$ ändert den Zustand nur unwesentlich; sie bewirkt eine **globale Phasenverschiebung** und ist nicht messbar. Wir bilden den Quotienten nicht nur modulo $\mathbb{R}_{>0}$, sondern modulo $\mathbb{C}^\times$:

$$\mathbb{CP}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$$

Die komplex-projektive Gerade $\mathbb{CP}^1$ aka **Bloch–Sphäre** beschreibt den Quantenzustand jedes Systems mit genau zwei Basiszuständen. Dies ist die Grundeinheit der Quanteninformation und heißt **Qubit**. Für $n+1$ orthogonale Basiszuständen erhalten wir entsprechend $\mathbb{CP}^n$.

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

So manche:r stöhnt an dieser Stelle: „Jetzt übertreibt der gute Prof: Erst sollen wir Mathematik lernen, jetzt auch noch Quantenmechanik!“

Ja, bitte nehmen Sie mögliche Anwendungen interessiert zur Kenntnis! Der Blick über den Tellerrand lohnt sich, gerade an der Uni Stuttgart.

Sind solche Exkurse übertrieben? ablenkend? oder gar überfordernd? Ich nenne drei Gründe für akademische Neugier und Abenteuerlust:

1. Wir sollten uns freuen, dass mathematische Begriffe und Techniken so überraschend vielseitig anwendbar sind: Was Sie in einem Gebiet lernen, hier Topologie, können Sie in anderen Gebieten wiederverwenden.

2. Speziell im Fall des Quantencomputing ist realistisch absehbar, dass dies Ihr Leben nachhaltig beeinflussen wird. Ich will daher nicht kommentarlos an diesem wichtigen Anwendungsbeispiel vorübergehen.

3. Das Studium mathematischer Grundlagen ist fundamental wichtig. Wir wollen abstrahieren, um zahlreiche Einzelfälle zusammenzufassen, zugleich auch motivieren, konkretisieren, illustrieren. Nur so geht es!

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

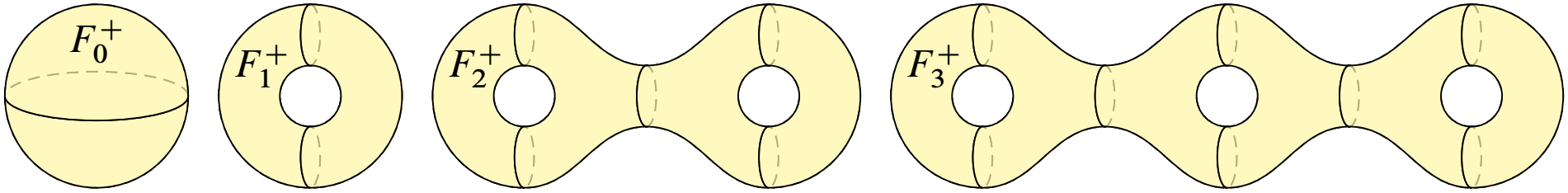
Der Spagat zwischen diesen beiden Polen ist eine fragile Kunst:
Einerseits die abstrakten Grundlagen: einfach, elegant, allgemein.
Andererseits die konkreten Einzelfälle: verwirrend, sonderbar, speziell.

Manche vertauschen hier die Adjektive, das halte ich für einen Fehler.
Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.
Studierende wünschen zu Recht motivierende Beispiele, Querverbindung zwischen den Themen und auch Bezug zu möglichen Anwendungen.
Wir sollten uns also über jede Gelegenheit freuen, wo dies gelingt!

Wird der Wunsch nach Beispielen und Anwendungen jedoch ernsthaft erfüllt, so fangen erfahrungsgemäß auch immer einige an zu jammern:
Der Ruf nach Anwendungsbeispielen entsprang nicht ihrer Neugier, sondern der naiven Sehnsucht nach Einfachheit. Die ist oft unerfüllbar:
Ehrliche Anwendungen sind meist nicht leichter zu verstehen, sondern komplizierter als die übergeordnete Theorie. Sie benötigen beides!

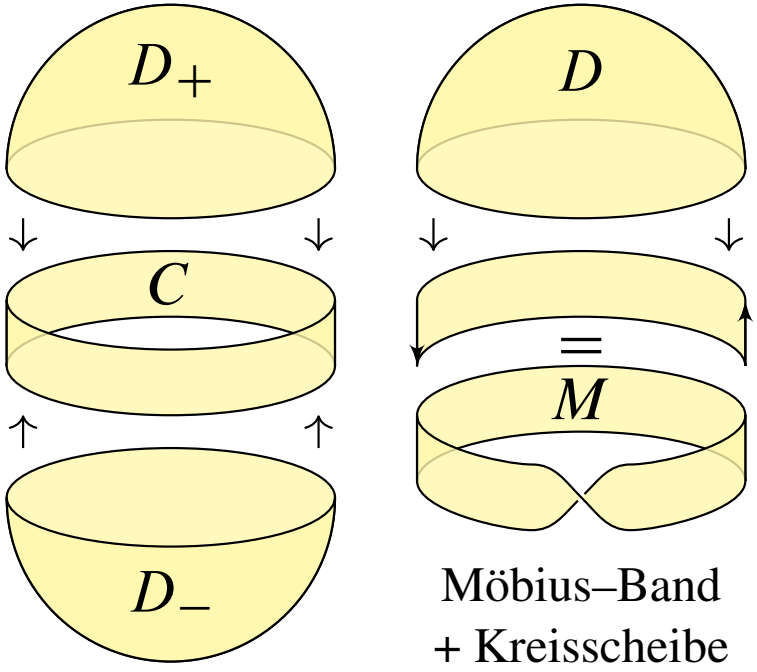
Be careful what you wish for, it might just come true!

Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm\}$



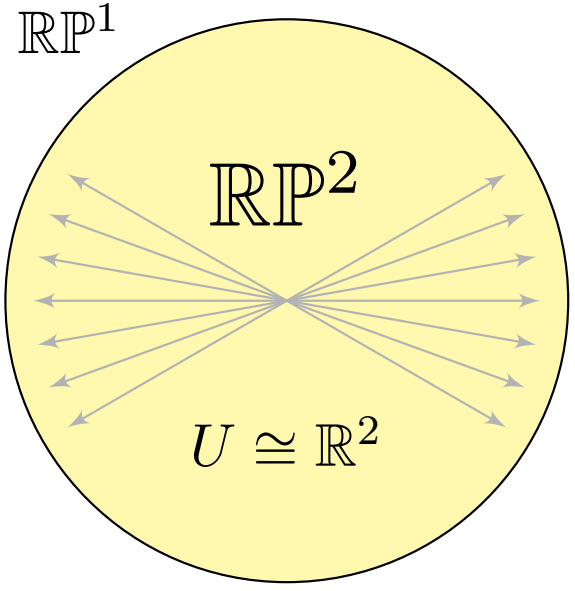
Wir identifizieren je zwei gegenüberliegende Punkte $\pm x$ von F_g^+.
Der Quotientenraum ist die **nicht-orientierbare Fläche** $F_g^- := F_g^+/\{\pm\}$.

Berühmtestes Beispiel ist die **reell–projektive Ebene** $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2/\{\pm\}$.



Möbius–Band
+ Kreisscheibe

Kompaktifizierung



Anheften von Zellen und Euler–Charakteristik

Übung K2J: rekursiver Aufbau durch Anheften von Zellen

(1) Wir erhalten die Räume $\{*\} = \mathbb{RP}^0 \subseteq \mathbb{RP}^1 \subseteq \mathbb{RP}^2 \subseteq \mathbb{RP}^3 \subseteq \ldots$ durch Anheften je einer Zelle $\mathbb{D}^n$ längs ihres Randes, $\mathbb{D}^n \supseteq \mathbb{S}^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$.

(2) Für $n = 1$ erhalten wir erneut $\mathbb{S}^1 \backsimeq \mathbb{D}^1 /\!\!/ \mathbb{S}^0 \eqsim \mathbb{RP}^1$ (Satz E2T, K2G).

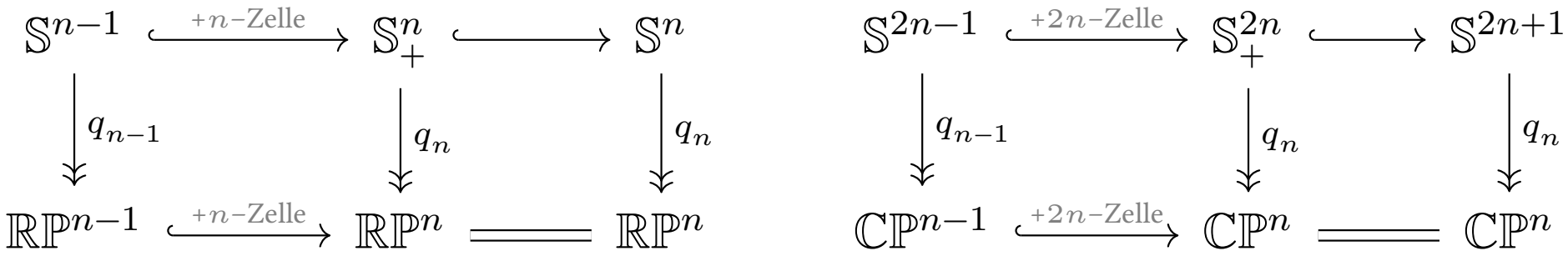
(3) Wir erhalten die Räume $\{*\} = \mathbb{CP}^0 \subseteq \mathbb{CP}^1 \subseteq \mathbb{CP}^2 \subseteq \mathbb{CP}^3 \subseteq \ldots$ durch Anheften je einer Zelle $\mathbb{D}^{2n}$ längs des Randes, $\mathbb{D}^{2n} \supseteq \mathbb{S}^{2n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$.

(4) Für $n = 1$ erhalten wir erneut $\mathbb{S}^2 \backsimeq \mathbb{D}^2 /\!\!/ \mathbb{S}^1 \eqsim \mathbb{CP}^1$ (Satz F1R, K2G).

(5) Die Euler–Charakteristik ist $\chi(\mathbb{RP}^n) = \frac{1+(-1)^n}{2}$ und $\chi(\mathbb{CP}^n) = 1 + n$. Insbesondere gilt $\mathbb{RP}^n \ncong \mathbb{S}^n$ für n gerade und $\mathbb{CP}^n \ncong \mathbb{S}^{2n}$ für alle $n \neq 1$.

🙂 Der Aufbau eines Raumes X als **Zellkomplex** durch sukzessives Anheften von Zellen ist eine extrem effiziente Beschreibung. Für $\mathbb{RP}^2$ und $\mathbb{KP}^n$ haben wir dies oben graphisch dargestellt. Solche Zellkomplexe nutzen wir in der Algebraischen Topologie, etwa zur Berechnung der Fundamentalgruppe $\pi(X, x_0)$ sowie später der Homologie $H_*(X)$ und der Cohomologie $H^*(X)$. Hiervon kündet die Euler–Charakteristik.

Anheften von Zellen: $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{RP}^{n-1} \cup_q \mathbb{D}^n$



Lösung: (1) Reeller Fall: In $\mathbb{S}^n$ betrachten wir die obere Hemisphäre:

$$\mathbb{S}^n_+ = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \,\middle|\, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$$

$$\mathbb{D}^n \cong \mathbb{S}^n_+ : (x_0, \dots, x_{n-1}) \rightleftarrows (x_0, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - |x_0|^2 - \dots - |x_{n-1}|^2})$$

$$\partial \mathbb{S}^n_+ = \partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^n = \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{S}^n \right\}$$

Die Einschränkung der Quotientenabbildung $q_n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ auf die n–Zelle $\mathbb{S}^n_+ \cong \mathbb{D}^n$ ist stetig und surjektiv, also eine Identifizierung dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium (F1L). Sie identifiziert dabei nur Punkte auf dem Rand $\partial \mathbb{S}^n_+ = \mathbb{S}^{n-1}$, und zwar gemäß $q_{n-1} : \mathbb{S}^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$.
Wir erhalten so die behauptete Verheftung einer n–Zelle (E3J):

$$\mathbb{RP}^n \;=\; \mathbb{RP}^{n-1} \cup q_n(\mathbb{S}^n_+) \;\cong\; \mathbb{RP}^{n-1} \cup_{q_{n-1}} \mathbb{D}^n$$

Anheften von Zellen: $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{CP}^{n-1} \cup_q \mathbb{D}^{2n}$

🙂 Oben haben wir das Anheften als Kompaktifizierung gesehen (K220). Die Skizze macht das Vorgehen anschaulich, die Formel liefert Präzision. Ebenso wie den reell-projektiven Raum $\mathbb{RP}^n \supseteq \mathbb{RP}^{n-1}$ erhalten wir auch den komplex-projektiven Raum $\mathbb{CP}^n \supseteq \mathbb{CP}^{n-1}$ durch Verheften:

(2) Komplexer Fall: In $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ betrachten wir ebenso

$$\mathbb{S}^{2n}_+ = \{\,(z_0,\dots,z_n) \in \mathbb{S}^{2n+1} \mid z_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,\}$$
$$\mathbb{D}^{2n} \cong \mathbb{S}^{2n}_+ \,:\, (z_0,\dots,z_{n-1}) \leftrightarrows (z_0,\dots,z_{n-1},\sqrt{1-|z_0|^2-\dots-|z_{n-1}|^2}\,)$$
$$\partial\mathbb{S}^{2n}_+ = \partial\mathbb{D}^{2n} = \mathbb{S}^{2n-1} = \mathbb{S}^{2n+1} \cap \mathbb{C}^n = \{\,(z_0,\dots,z_{n-1},0) \in \mathbb{S}^{2n+1}\,\}.$$

Die Einschränkung der Quotientenabbildung $q_n : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ auf die $2n$–Zelle $\mathbb{S}^{2n}_+ \cong \mathbb{D}^{2n}$ ist stetig und surjektiv, also eine Identifizierung dank Kompakt-Hausdorff-Kriterium (F1L). Sie identifiziert dabei nur Punkte auf dem Rand $\partial\mathbb{S}^{2n}_+ = \mathbb{S}^{2n-1}$, und zwar gemäß $q_{n-1} : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$. Wir erhalten so die behauptete Verheftung einer $2n$–Zelle (E3J):

$$\mathbb{CP}^n \;=\; \mathbb{CP}^{n-1} \cup q_n(\mathbb{S}^{2n}_+) \;\cong\; \mathbb{CP}^{n-1} \cup_{q_{n-1}} \mathbb{D}^{2n}$$

Erinnerung an die Lineare Algebra: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Wir wollen $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$ zeigen. Zunächst die anschauliche Erklärung, die nötigen Beweise entnehmen wir dankend der Linearen Algebra:

Es gilt $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$. **Aufgabe:** Warum? **Lösung:** Jedes Element in $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ ist eine Drehung $\rho(s,\theta)$ um eine Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit Drehwinkel $\theta \in [0,\pi]$. Dabei gilt $\rho(s,0) = \mathrm{id}$ für alle $s \in \mathbb{S}^2$ sowie $\rho(s,\pi) = \rho(-s,\pi)$, ansonsten ist die Darstellung eindeutig. Das Paar (s,θ) stellen wir durch den Punkt $s \cdot \theta/\pi \in \mathbb{D}^3$ dar. Mit $s \sim -s$ für $s \in \mathbb{S}^2$ erhalten wir $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{D}^3/_\sim \cong \mathbb{RP}^3$.

Aufgabe: Formulieren Sie die Drehung $\rho(s,\theta) \in \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ explizit!
Lösung: Dies leistet die wunderbar praktische Rodrigues–Formel:

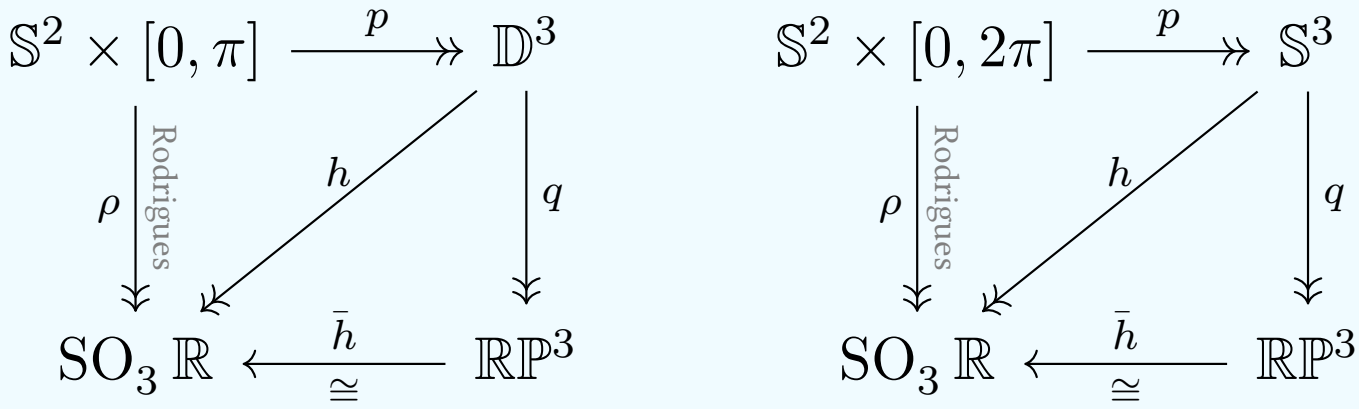
$$\rho(s,\theta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta) \cdot s \times x + (1 - \cos(\theta)) \cdot s \times (s \times x)$$

Wir nutzen hier das beliebte Kreuzprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (a,b) \mapsto a \times b$. Diese Formel zu *finden* erfordert Kreativität. Steht sie erst einmal vor uns, so können wir sie leicht *beweisen*; zum Nachrechnen genügt Handwerk: Wir ergänzen $s \in \mathbb{S}^2$ zu einer Orthonormalbasis $s, u, v \in \mathbb{R}^3$ mit $s \times u = v$. Dann gilt $s \mapsto s$ sowie $u \mapsto \cos(\theta)u + \sin(\theta)v$ und $v \mapsto -\sin(\theta)u + \cos(\theta)v$.

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{RP}^3$

Übung K2P: Die Rodrigues–Formel beweist $\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{RP}^3$.

Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$, direkt mit der Rodriques–Formel oder elegant mit Quaternionen $\mathbb{H} \supseteq \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$.



(1) Wir haben die stetige Surjektion ρ dank der Rodrigues–Formel $\rho(s,\theta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta)\cdot s \times x + (1-\cos(\theta))\cdot s \times (s \times x)$.

Diese explizite Formel zeigt die Stetigkeit von $\rho : \mathbb{S}^2 \times [0,2\pi] \to \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$. Surjektivität und Identifizierungen entnehmen wir der Linearen Algebra.

(2) Wir faktorisieren ρ über Kugelkoordinaten $p : \mathbb{S}^2 \times [0,2\pi] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^3$ mit $p(s,\theta) = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)s)$ zu $h : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} : p(s,\theta) \mapsto \rho(s,\theta)$.

Die kanonische Faktorisierung (E2H) liefert $\bar{h} : \mathbb{RP}^3 \xrightarrow{\cong} \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ (F1L).

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{RP}^3$

Die Übung für Sie besteht darin, wie immer, die angegebenen Daten und Argumente sorgfältig nachzuvollziehen: Was ist zu zeigen? Warum und wie genügen hierzu die obigen expliziten Angaben? Welche topologischen Werkzeuge erleichtern dabei Ihre Arbeit?

Variante 1: Wir betrachten $\mathbb{S}^2 \times [0,\pi] = X \to \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ wie oben erklärt. Die kanonische Faktorisierung nutzt die Identifikationen $(s,0) \sim (s',0)$ und $(s,\pi) \sim (-s,\pi)$ und führt zu $\mathbb{D}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^3 \cong X/_\sim \rightarrowtail \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$. Das ist kurz und anschaulich, leider nicht ganz glatt, da $\mathbb{D}^3$ berandet ist.

Variante 2: Wir betrachten $\mathbb{S}^2 \times [0,2\pi] = Y \to \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ wie in der Übung. Die kanonische Faktorisierung nutzt die Identifikationen $(s,0) \sim (s',0)$ und $(s,2\pi) \sim (s',2\pi)$ sowie $(s,\theta) \sim (-s,2\pi-\theta)$. Auch dies führt zu $\mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^3 \cong Y/_\sim \rightarrowtail \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$. Das ist ebenso einfach, zudem fast glatt.

Variante 3: Wir betrachten Quaternionen $\mathbb{H} \supseteq \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ und nutzen hier bequem die Konjugation $\psi : \mathbb{S}^3 \curvearrowright \operatorname{Im}\mathbb{H} : (A,Y) \mapsto AYA^{-1}$, siehe Skript (K2s). Das ist am elegantesten und liefert eine glatte Überlagerung,

Lobgesang der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$

Als Rückblick fasse ich die erreichten Ergebnisse feierlich zusammen:

Satz K2c: Lobgesang der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$

Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ ist eine unberandete Mannigfaltigkeit, zusammenhängend, der Dimension $\dim \mathbb{RP}^n = n$ und $\dim \mathbb{CP}^n = 2n$. (Wir zählen die reelle Dimension; $\mathbb{CP}^n$ ist komplex n–dimensional.)

Er ist ein Sphärenquotient, $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ und $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, also kompakt. Die Koordinaten $\kappa : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{KP}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$ kompaktifizieren $\mathbb{K}^n$ mit Rand $\mathbb{KP}^{n-1}$ und heften eine einzige Zelle an.

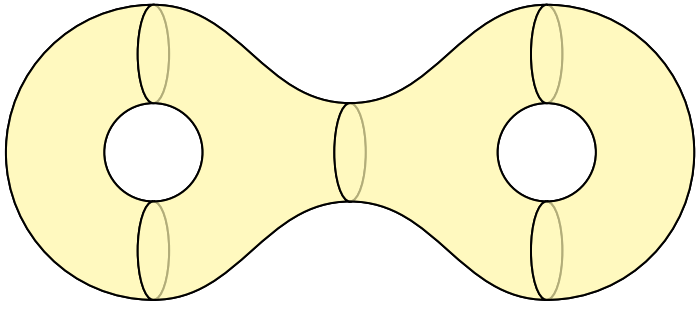
Der kanonische Atlas $\mathscr{A} = (h_0, \dots, h_n)$ ist $\mathscr{C}^\infty$–glatt, analytisch, rational. Die Mfkt $\mathbb{RP}^n$ ist orientierbar für n ungerade, aber nicht-orientierbar für $n \geq 2$ gerade. Die Mfkt $\mathbb{CP}^n$ ist kanonisch orientiert in jeder Dimension n.

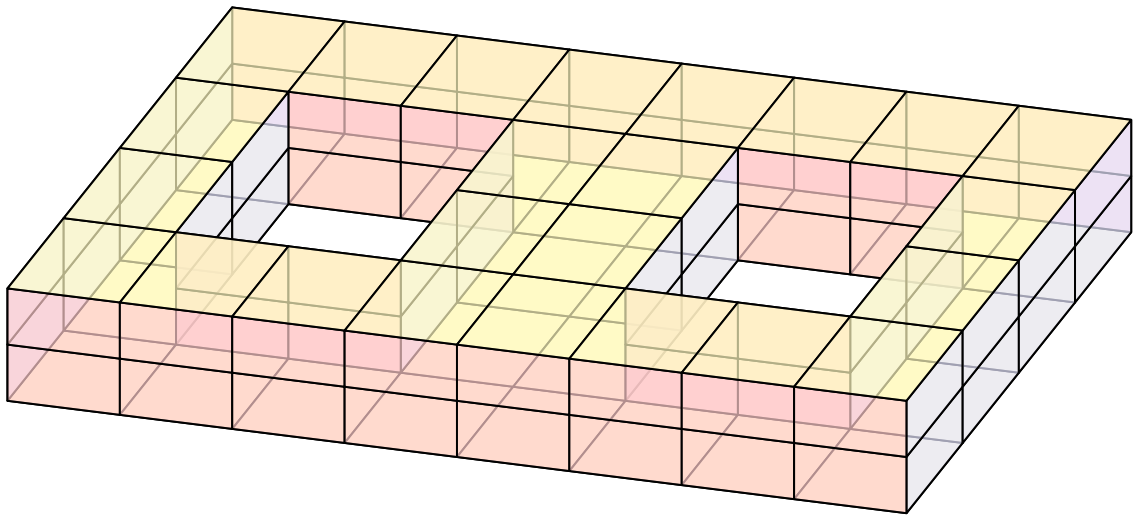
Kleine Beispiele: Für geschlossene Flächen gilt $F_0^+ = \mathbb{S}^2$ und $F_0^- = \mathbb{RP}^2$. Für $n \neq 1$ gilt $\mathbb{RP}^n \ncong \mathbb{S}^n$ und $\mathbb{CP}^n \ncong \mathbb{S}^{2n}$, doch $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$. Für Matrixgruppen gilt $\mathrm{GO}_1 \mathbb{R} = \mathbb{S}^0$ und $\mathrm{SO}_2 \mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathrm{SO}_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$.

Klassifikation der kompakten Flächen

Wir wollen alle kompakten Flächen F klassifizieren (zweidim. Mfkten).
Wir dürfen, können und werden F als zusammenhängend annehmen.
Die Fläche F darf berandet sein oder unberandet (geschlossen).

Jede Fläche kann trianguliert werden, kurz $F \cong |K|$. (Radó 1925, K1L)





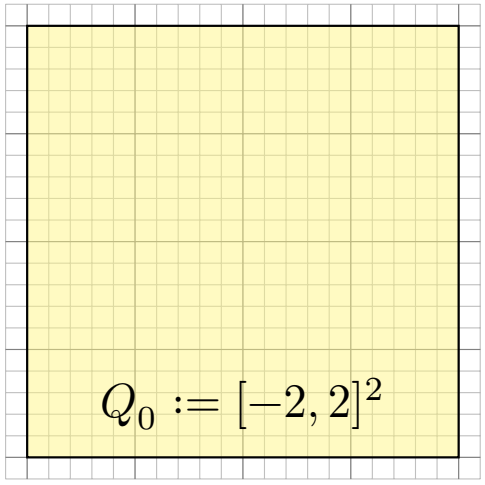
Vorgehen zur Klassifikation:
Wir vollenden nun die Klassfikation in voller Pracht und Schönheit!

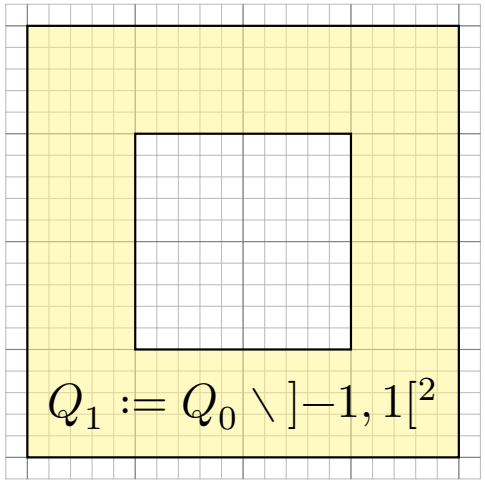
(0) Als Beispiele konstruieren wir zunächst unsere Modellflächen $F^{\varepsilon}_{g,r}$.

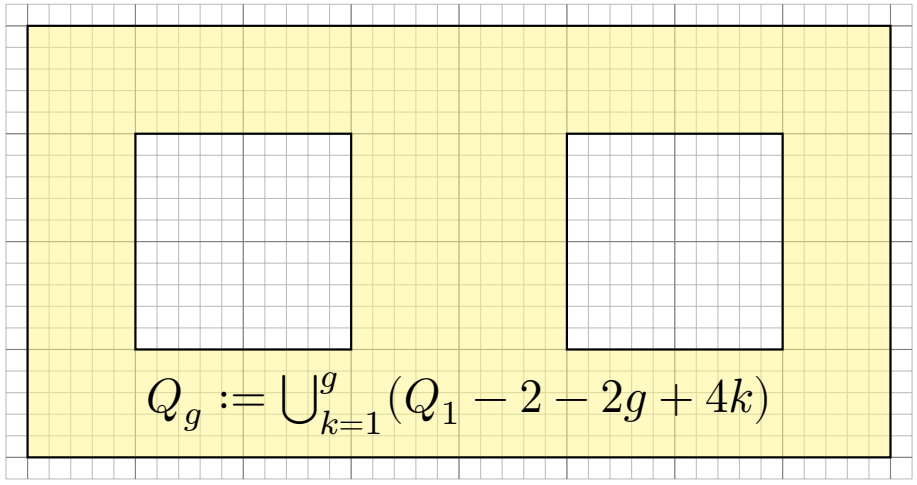
(1) Wir zeigen, dass unsere Liste keine Dopplungen enthält: Invarianten!

(2) Wir zeigen, dass unsere Liste vollständig ist: Schneiden und Kleben!

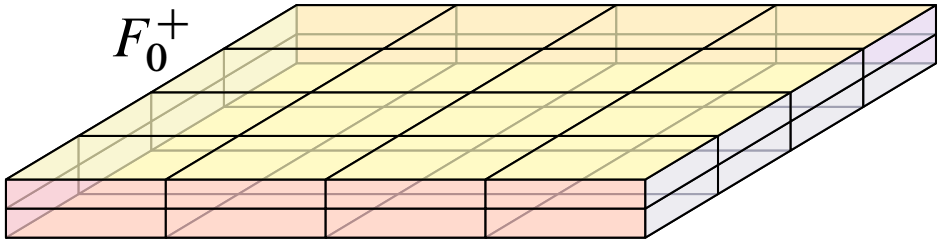
Kubische Modelle geschlossener Flächen

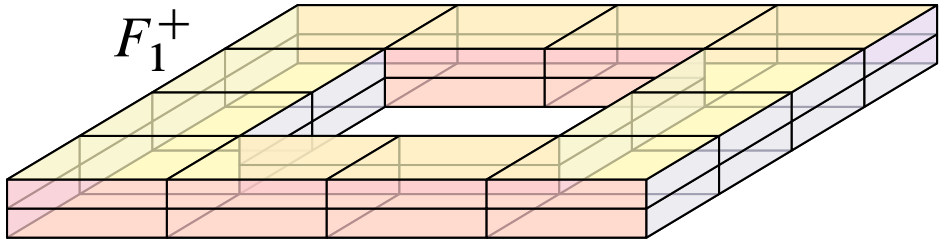


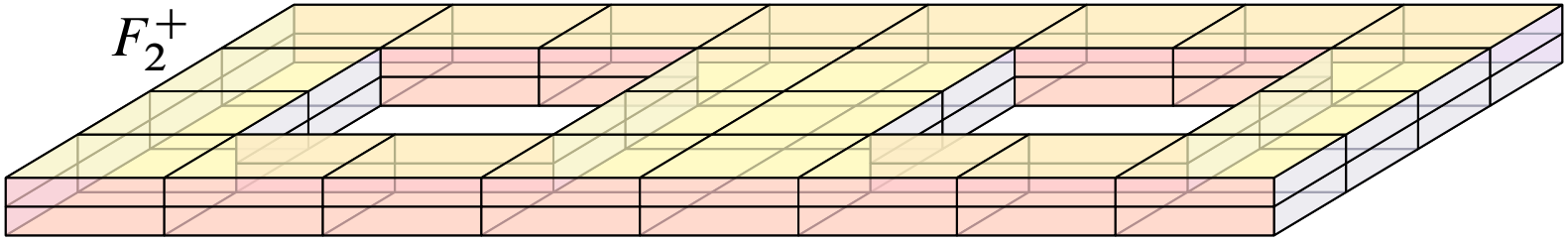




Der Grundriss $Q_g \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt den Henkelkörper $H_g = Q_g \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^3$ und dieser die Randfläche $F_g^+ = \partial H_g = (\partial Q_g \times [-1,1]) \cup (Q_g \times \{-1,1\})$.



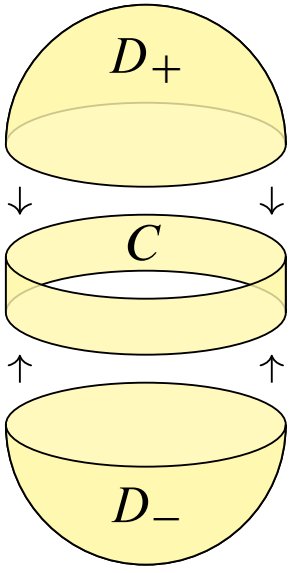


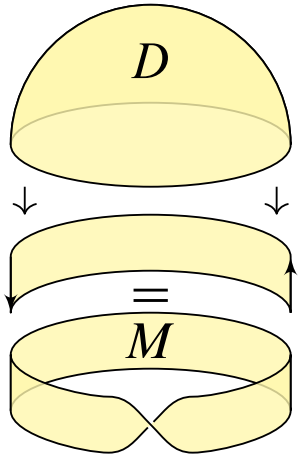


Triangulierte Modelle geschlossener Flächen

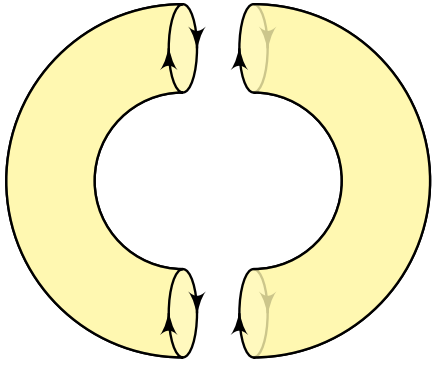
Wir erhalten die Modellfläche F_g^+ explizit als kubischen Komplex $\mathscr{K}$.
Unterteilung (I3M) ergibt den simplizialen Komplex $K_g^+ = \beta(\mathscr{K}, \mathscr{K}_{\leq 1})$.

Durch Identifikation gegenüberliegender Punkte von F_g^+ erhalten wir als Quotientenraum die **nicht-orientierbare Fläche** $F_g^- = F_g^+/\{\pm\}$.
Unsere Triangulierung K_g^+ auf F_g^+ überträgt sich zu K_g^- auf F_g^-.

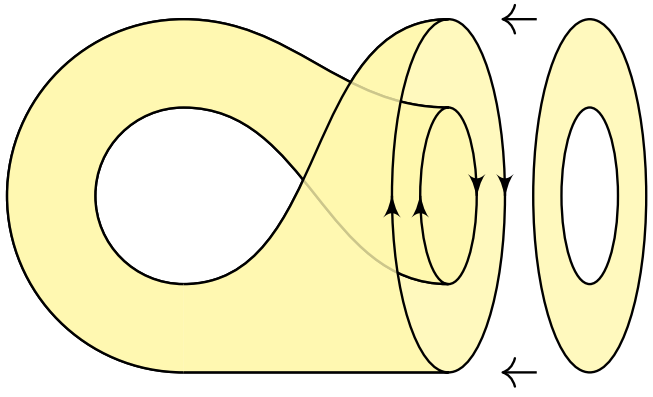




Möbius–Band
+ Kreisscheibe



Torus F_1^+ zerlegt
in zwei Halbtori



Kleinsche Flasche
aus einem Halbtorus

Berühmtestes Beispiel ist die **reell–projektive Ebene** $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2/\{\pm\}$.
Zweit-berühmtestes Beispiel ist die **Kleinsche Flasche** $F_1^- = F_1^+/\{\pm\}$.

Zusammenfassung unserer Modellflächen $F_g^\pm$

Satz K3A: unsere Modellflächen $F_g^\pm$ mit $g \in \mathbb{N}$

(1) Der Grundriss $Q_g \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine kompakte Fläche mit Rand ∂Q_g.
Der Henkelkörper $H_g = Q_g \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist demnach eine kompakte 3–Mannigfaltigkeit mit Rand $F_g^+ := \partial H_g = (\partial Q_g \times [-1,1]) \cup (Q_g \times \{\pm 1\})$.
Dies ist eine zusammenhängende geschlossene orientierte Fläche.

Die Räume Q_g, H_g, F_g^+ sind kubuliert und nach Unterteilung trianguliert, mit Euler–Charakteristik $\chi(Q_g) = \chi(H_g) = 1 - g$ und $\chi(F_g^+) = 2 - 2g$.

(2) Die Punktspiegelung $x \mapsto -x$ erhält $H_g = -H_g$ und $F_g^+ = \partial H_g$.
Ihr einziger Fixpunkt ist 0, auf der Randfläche F_g^+ ist sie fixpunktfrei.
Der Quotientenraum $F_g^- := F_g^+ / \{\pm\}$ ist eine zshgde geschlossene nicht-orientierbare Fläche, ebenso trianguliert, mit $\chi(F_g^-) = 1 - g$.

Hierbei sind $F_g^\pm$ untereinander nicht homöomorph dank topologischer Invarianz der Orientierbarkeit (J7P) und der Euler–Charakteristik (A3J).

Beweis: Alle Daten liegen explizit vor, nun sorgfältig nachrechnen!
Dies ist eine schöne und lehrreiche Übung zu all diesen Begriffen.

Eigenschaften triangulierter Flächen

Verständnisfrage: Warum ist F_g^- nicht orientierbar? Wie erkennen und beweisen Sie das möglichst effizient? **Lösung:** Wir betrachten im Rand ∂Q_g die äußere Kreislinie C. Der Zylindermantel $C \times [-1,1] \subseteq F_g^+$ ergibt im Quotienten modulo Antipoden ein Möbius–Band $C/\{\pm 1\}$. Voilà!

🙂 Diese Konstruktion präzisiert die Einleitung mit handfesten Begriffen und Techniken: Sie können jetzt alles explizit nachprüfen!

Damit haben wir zwei der drei Klassifikfationsschritte bereits vollzogen:

(0) Wir konstruieren zunächst unsere Modellflächen $F_{g,r}^{\varepsilon}$ als Beispiele.

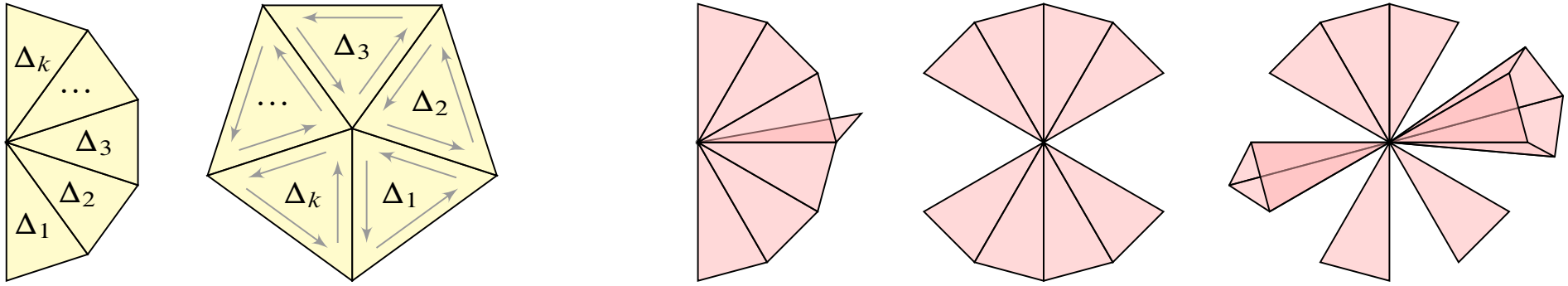
(1) Wir zeigen, dass unsere Liste keine Dopplungen enthält: Invarianten!

(2) Wir zeigen, dass unsere Liste vollständig ist: Schneiden und Kleben!

Wir wollen nun die Klassifikation mit Schritt (2) krönen und abschließen. Hierzu nutzen wir Triangulierungen und ihre besonderen Eigenschaften.

Sei K ein Simplizialkomplex mit Polyeder $|K|$. Genau dann ist $|K|$ eine Fläche, wenn jeder Eckenstern wie links in folgender Abbildung aussieht:

Eigenschaften triangulierter Flächen



☺ Wir übersetzen topologische Eigenschaften in kombinatorische:

Satz K3B: simpliziale Flächen, Charakterisierung

Sei K ein Simplizialkomplex. Ist das Polyeder $|K|$ eine Fläche, so gilt:

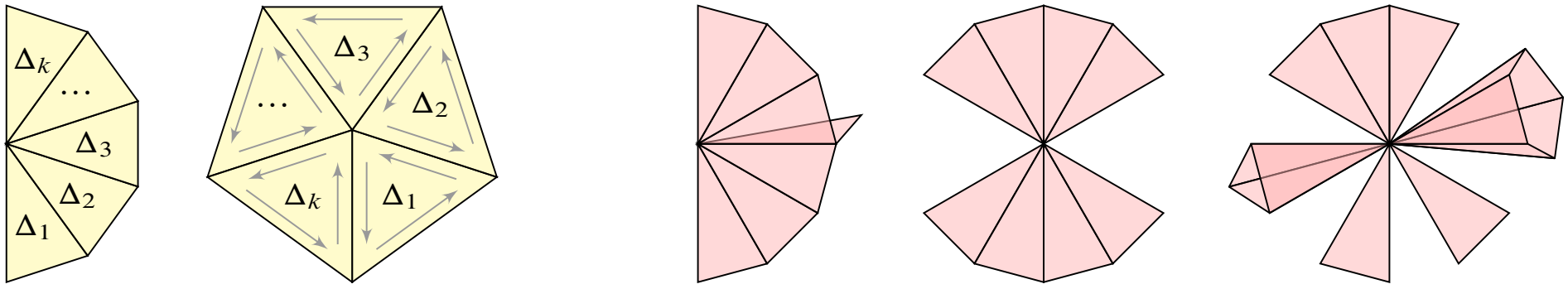
(a) Jeder Simplex von K liegt in einem 2–Simplex:
Dies ist notwendig wegen Invarianz der Dimension (J7C).

(b) Jede Kante liegt in genau einem oder zwei 2–Simplizes:
Dies ist notwendig wegen Jordanschem Kurvensatz (J2A).

(c) Jede Ecke liegt in endlich vielen 2–Simplizes $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$, wobei jeweils Δ_i und Δ_{i+1} eine Kante teilen: lokaler Zusammenhang (G3A).

Sind umgekehrt (a,b,c) erfüllt, so ist das Polyeder $|K|$ eine Fläche.

Eigenschaften triangulierter Flächen



Satz K3B: simpliziale Flächen, Eigenschaften

Die so triangulierte Fläche $|K|$ hat dann folgende Eigenschaften:

(1) Genau dann ist die Fläche $|K| \neq \emptyset$ zusammenhängend, wenn sich je zwei 2–Simplizes $\Delta, \Delta' \in K_2$ verbinden lassen durch eine Galerie von 2–Simplizes $\Delta = \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_\ell = \Delta' \in K_2$ mit $\Delta_{i-1} \cap \Delta_i \in K_1$.

(2) Eine Orientierung der Fläche $|K|$ entspricht einer Orientierung für jeden 2–Simplex $\Delta \in K_2$, sodass je zwei benachbarte 2–Simplizes kompatibel orientiert sind, wie skizziert, also ihre gemeinsame Kante $\Delta \cap \Delta' = \{a, b\} \in K_1$ gegenläufig orientieren.

(3) Den Rand $\partial|K| = |\partial K|$ bilden alle Kanten, die in genau einem 2–Simplex liegen, also $\partial K = \langle \{a, b\} \in K_1 \mid \exists! c \in \Omega : \{a, b, c\} \in K_2 \rangle$.

Eigenschaften triangulierter Flächen

Satz K3B: simpliziale Flächen, Heawood–Ungleichung

(4) Genau dann ist $|K|$ kompakt, wenn K endlich ist, und geschlossen, wenn jede Kante in genau zwei 2–Simplizes liegt, also $\partial K = \{\emptyset\}$ gilt.

(5) Für $|K| \neq \emptyset$ geschlossen folgt daraus die **Heawood–Ungleichung**:

$$2f_0 \geq 7 + \left\lceil \sqrt{49 - 24\chi} \right\rceil$$

Beweis: (5) Hier gilt $2f_1 = 3f_2$. Immer gilt $f_1 \leq \binom{f_0}{2} = \frac{f_0(f_0-1)}{2}$. Für die Euler–Charakteristik folgt $\chi = f_0 - f_1 + f_2 = f_0 - \frac{1}{3}f_1 \geq f_0 - \frac{1}{6}f_0(f_0-1)$, also $f_0^2 - 7f_0 + 6\chi \geq 0$. Dank Mitternachtsformel folgt Heawood.

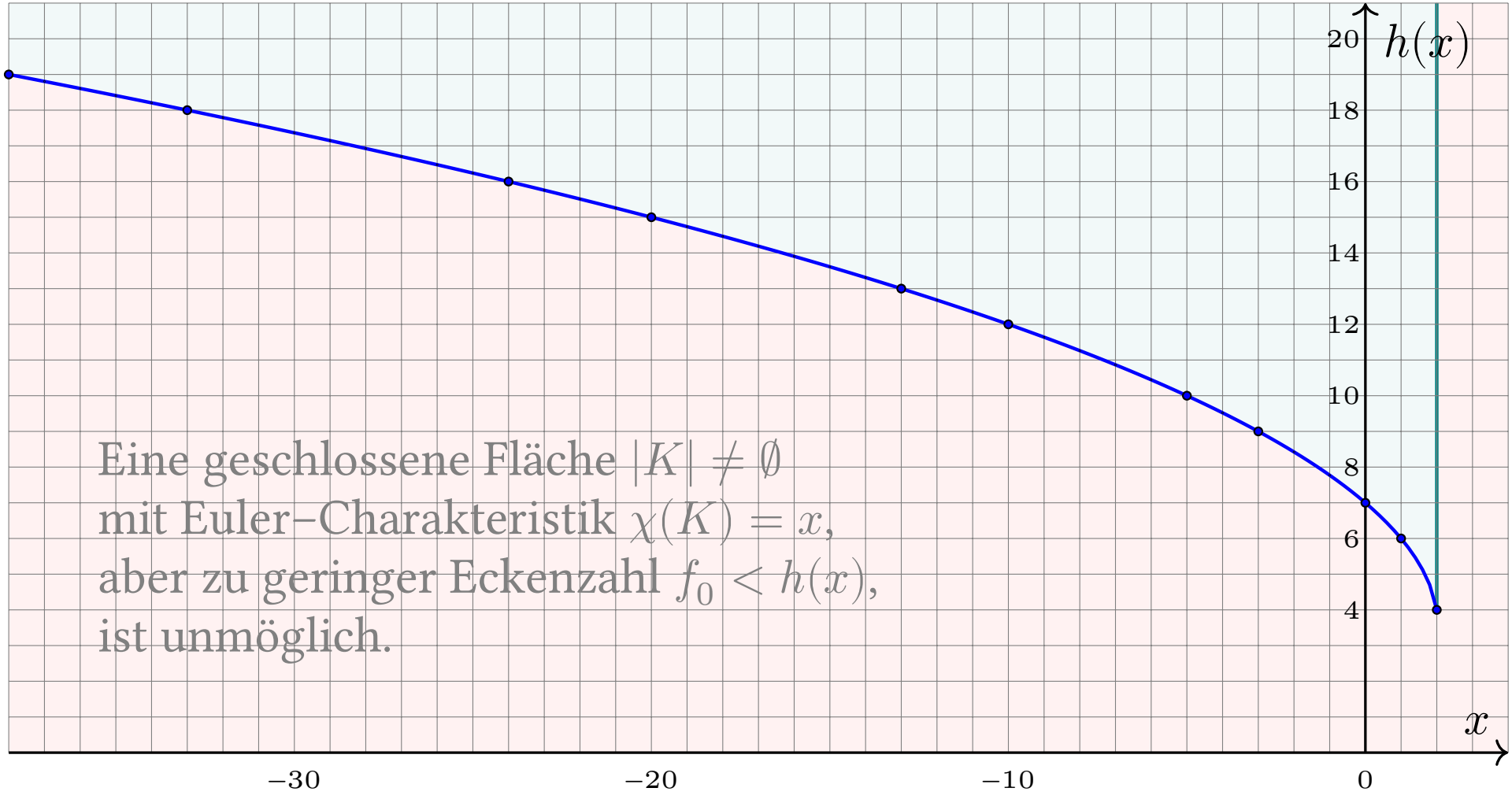
Der zweite Fall „$2f_0 \leq 7 - \lfloor \ldots \rfloor$“ ist geometrisch nicht realisierbar, da mit $f_0 \leq 3$ Ecken keine geschlossene Fläche $|K| \neq \emptyset$ möglich ist. QED

Beispiele für kleine Euler–Charakteristik:

$\chi =$	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8
$f_0 \geq$	4	6	7	8	9	9	10	10	11	11	12

Die Heawood–Ungleichung

Skizze der Heawood–Funktion $h : \mathbb{R}_{\leq 2} \to \mathbb{R} : h(x) = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24x})$.
Diese Funktion verläuft bemerkenswert oft durch ganzzahlige Punkte.



Eine geschlossene Fläche $|K| \neq \emptyset$
mit Euler–Charakteristik $\chi(K) = x$,
aber zu geringer Eckenzahl $f_0 < h(x)$,
ist unmöglich.

Die Heawood–Ungleichung

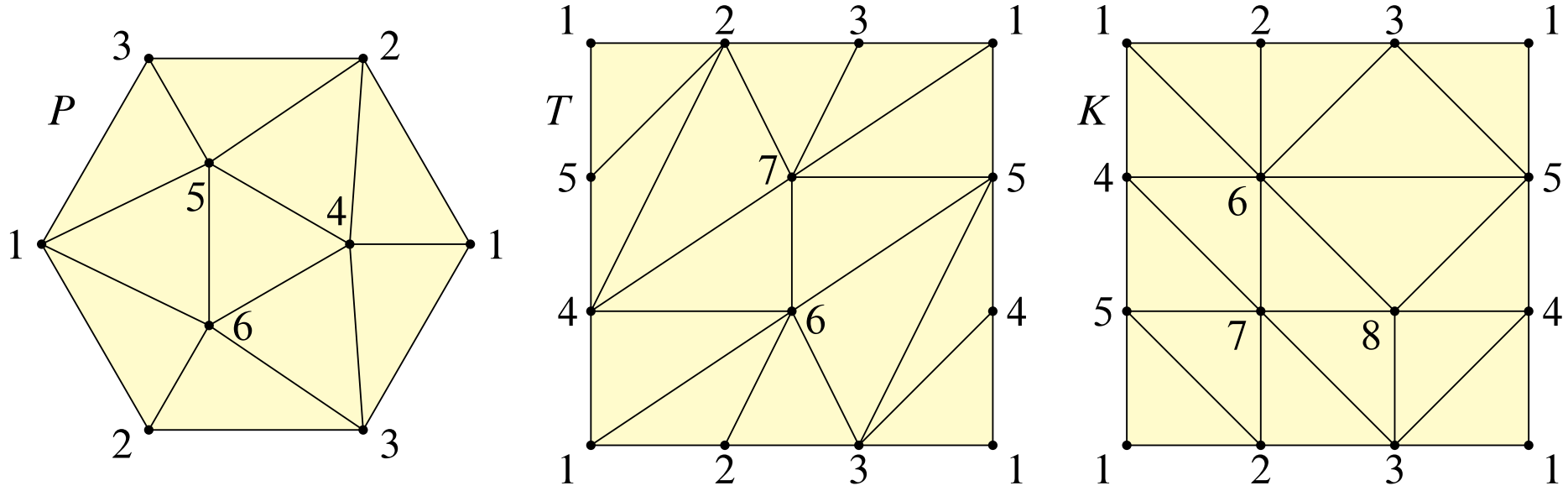
☺ Die Heawood–Ungleichung $2f_0 \geq 7 + \sqrt{49 - 24\chi}$ folgt sofort aus der beliebten Mitternachtsformel zur Lösung quadratischer Gleichungen.
Bitte rechnen Sie es selbst nach, es macht Freude… und Aha!
Vier Unbekannte und drei Un/Gleichungen, einsetzen, voilà!

1950 formulierte Ernst Peschl (1906–1986) in seinem Seminar an der Universität Bonn folgende Frage: Was ist die minimale Eckenzahl zur Triangulierung der Flächen $F_g^{\pm}$? Die Frage hatten sich vermutlich schon viele zuvor gestellt, er präsentierte sie wissensdurstigen Studierenden, darunter Gerhard Ringel. Diesen sollte die Frage nicht mehr loslassen, bis er sie 30 Jahre später vollständig lösen konnte. Auch heute noch im Rückblick ist das ein sensationelles Ergebnis: Die minimale Eckenzahl ist überhaupt nur für ganz wenige Mannigfaltigkeiten bekannt.

Wie finden wir minimale Triangulierungen der Fläche $F_g^{\pm}$?
Wie können wir sicher sein, dass sie wirklich minimal sind?
Zunächst scheint die untere Schranke sehr einfach und allzu grob.
Wir schauen deshalb genauer hin… und erleben ein Wunder!

Minimale Triangulierungen

$\chi =$	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$f_0 \geq$	4	6	7	8	9	9	10	10	11	11	12



☺ Die Heawood–Ungleichung ist scharf für die Sphäre $F_0^+ \cong \mathbb{S}^2 \cong \partial\Delta^3$ und die projektive Ebene $F_0^- \cong \mathbb{RP}^2$ sowie den Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$:
Diese lassen sich mit 4, 6, 7 Ecken triangulieren, wie oben gezeigt.

☹ Die Kleinsche Flasche $F_1^- = F_1^+/\{\pm 1\}$ hingegen lässt sich nicht mit 7 Ecken triangulieren, dies gelingt erst mit 8 Ecken.
Der Nachweis erfolgt durch systematisches Ausprobieren.

Minimale Triangulierungen

Die Konstruktion minimaler Triangulierungen ist überraschend schwer.
Die Vorgaben sind extrem knapp! Heawood–Ungleichung für Flächen:

$g =$	0	1	2	3	10	20	50	100	200	500
F_g^+	4	7	9	10	15	19	28	39	53	81
F_g^-	6	7	8	9	12	15	21	29	39	59

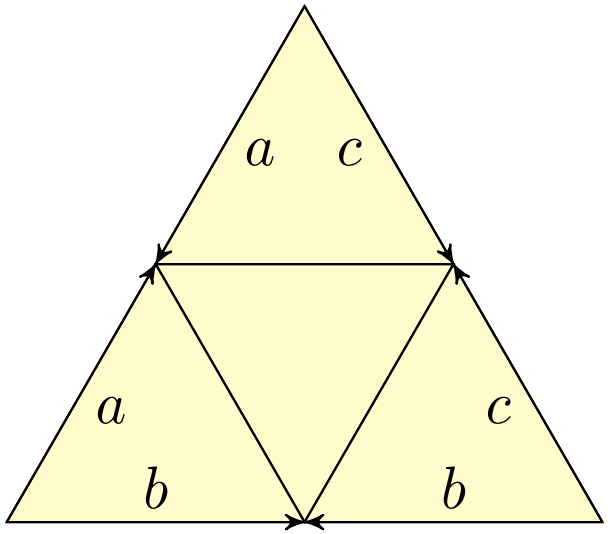
- ☺ Für die ersten drei Flächen F_0^+, F_0^-, F_1^+ ist die Ungleichung scharf.
- ☹ Die nächsten drei F_1^-, F_2^+, F_2^- benötigen jeweils eine Ecke mehr.

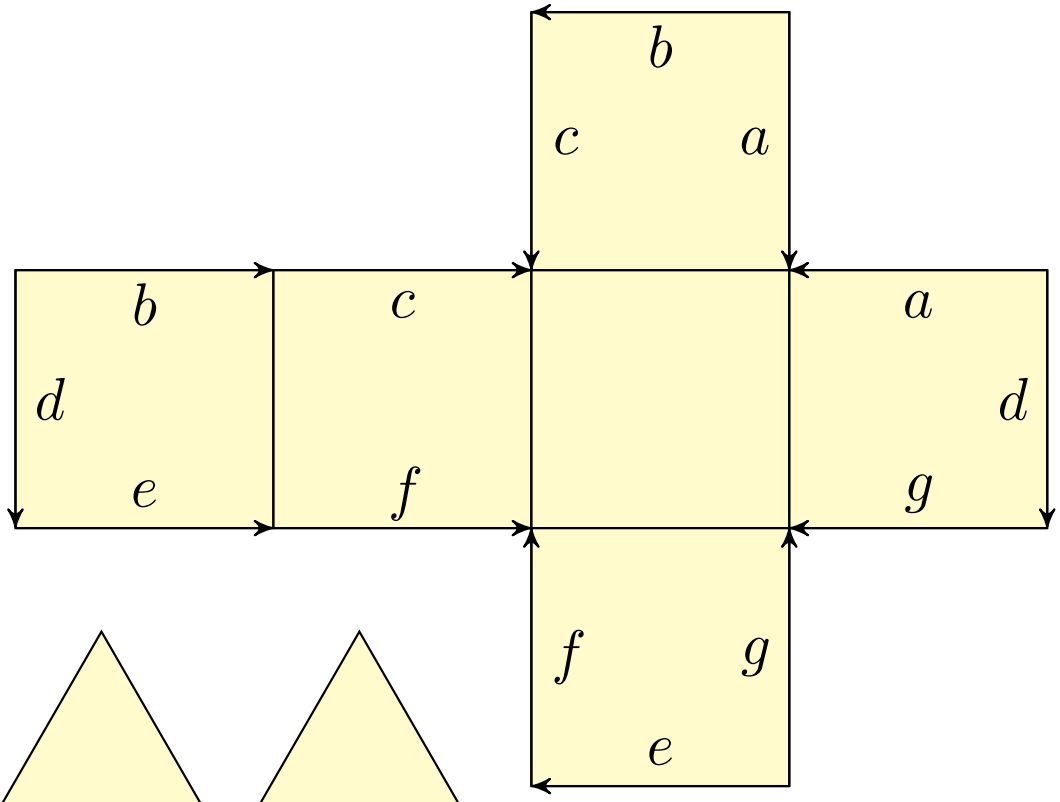
Wie geht es weiter? Sensation: Die Heawood–Ungleichung ist scharf für *alle* geschlossenen Flächen mit nur diesen drei Ausnahmen!

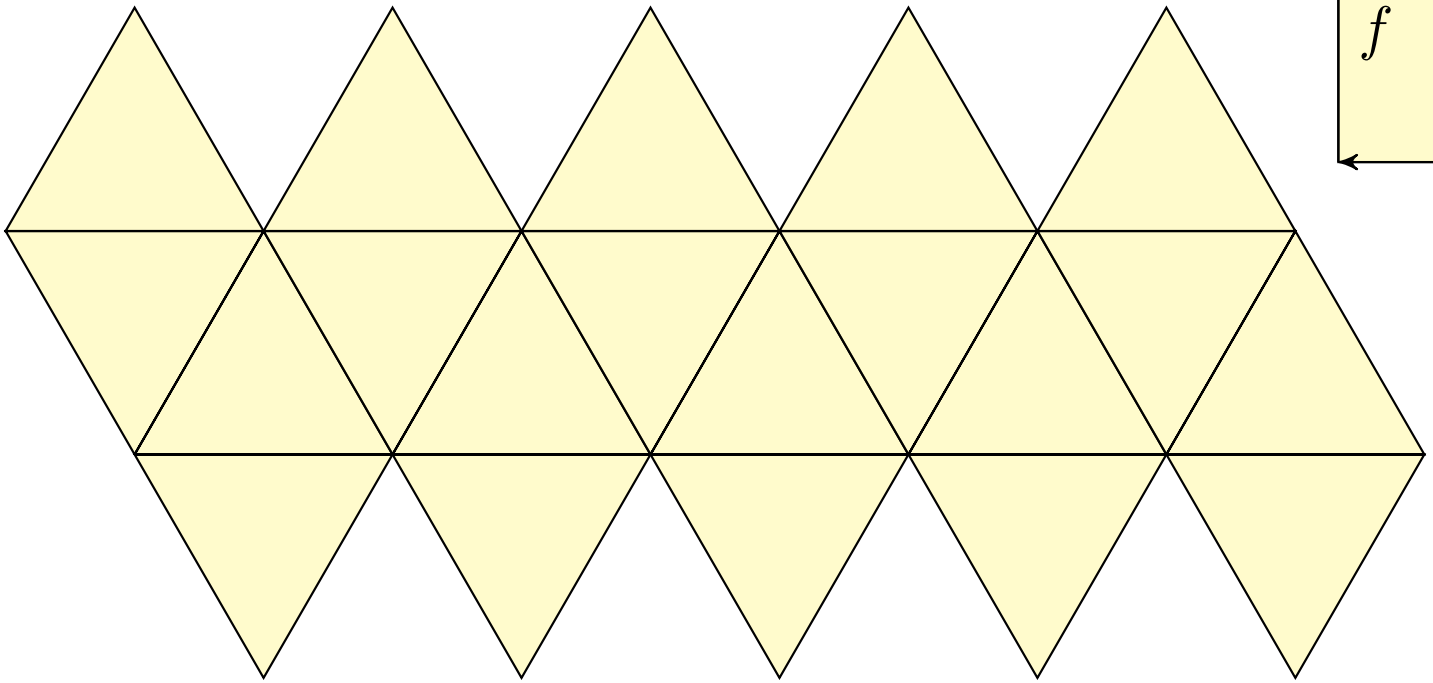
Gerhard Ringel fand 1955 minimale Triangulierungen für die Flächen F_g^-, und zusammen mit Mark Jungerman 1980 schließlich für die Flächen F_g^+.

„Die Formel ist zu kurz, um richtig zu sein“, argwöhnte ein Kollege.
„Die Formel ist zu schön, um nicht wahr zu sein“, entgegnete Ringel.

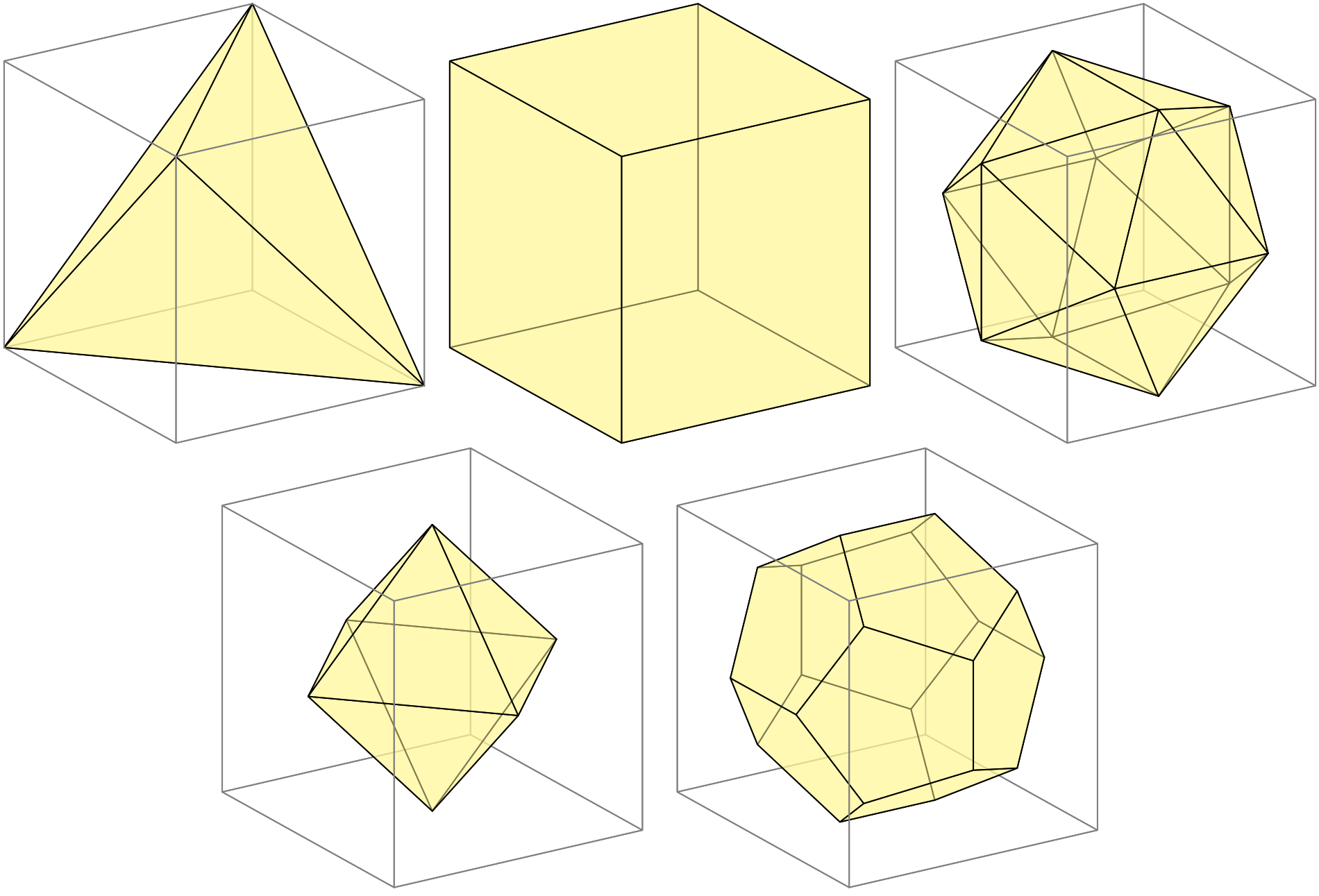
Polygonmodelle geschlossener Flächen



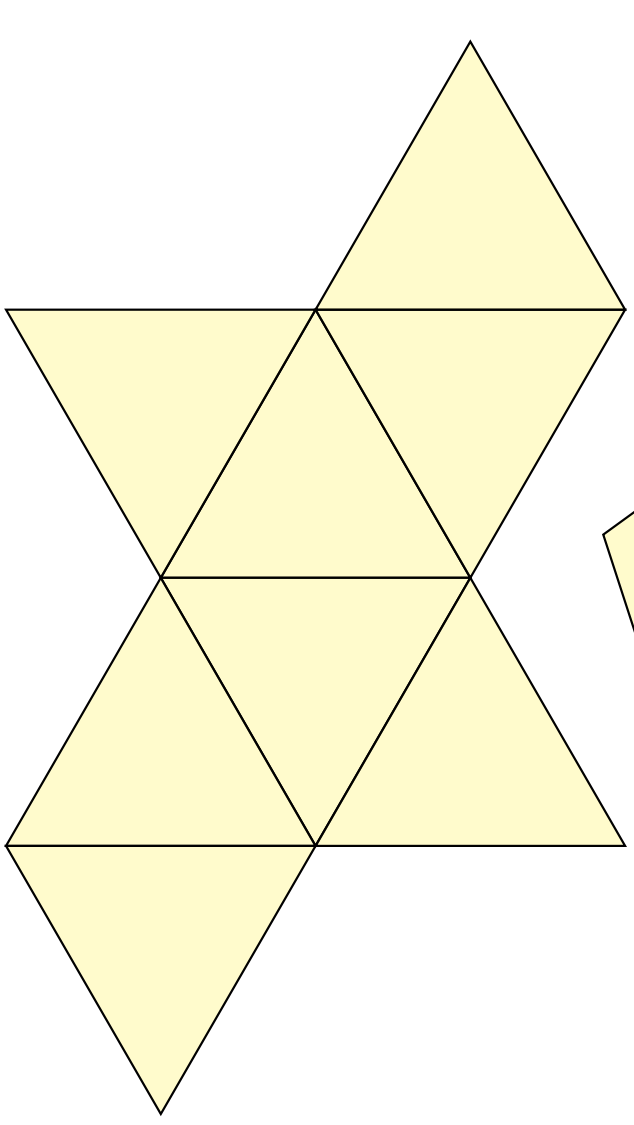


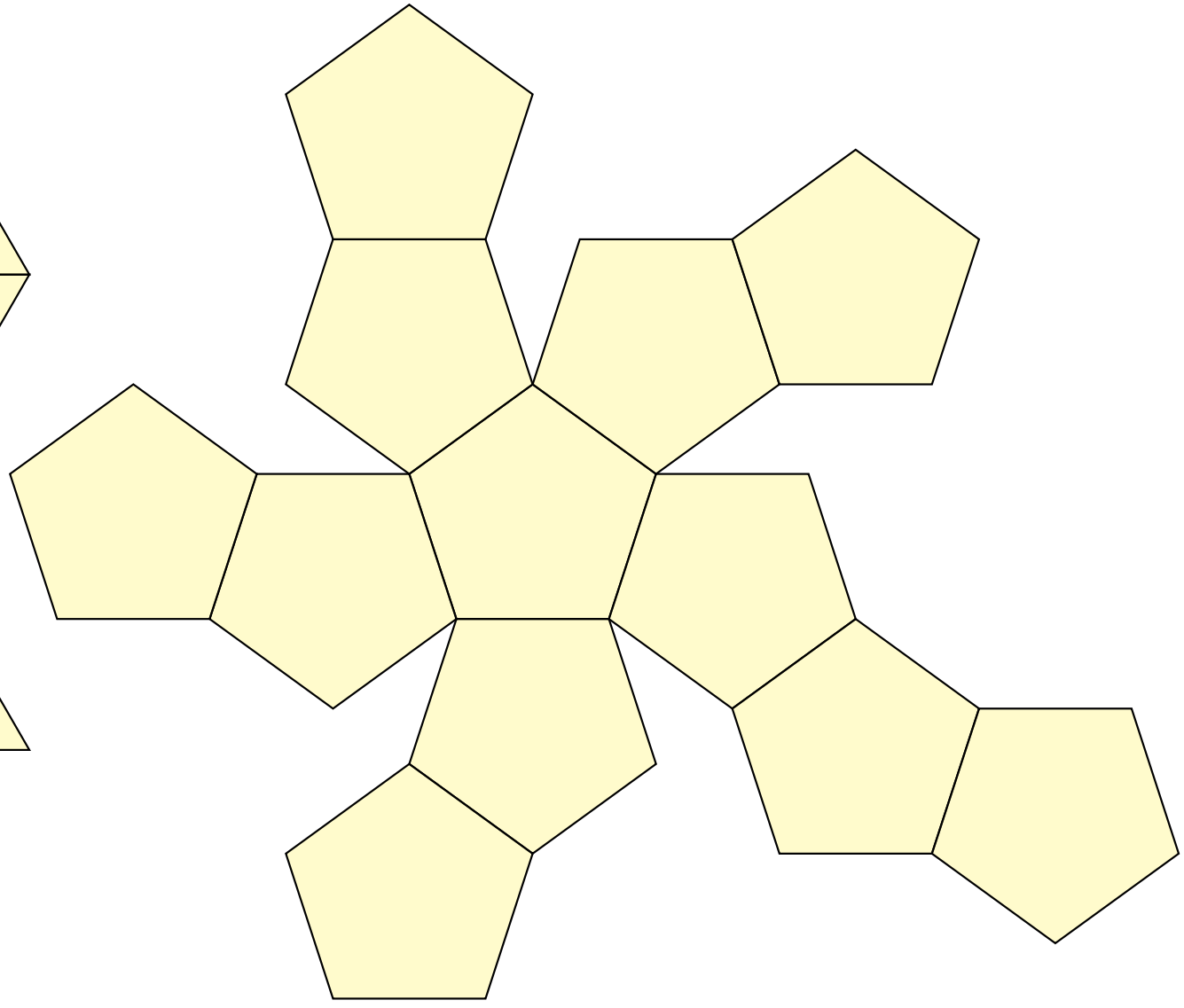


Polygonmodelle geschlossener Flächen



Polygonmodelle geschlossener Flächen





Polygonmodelle geschlossener Flächen

🙂 Sie kennen diese Bastelanleitungen vermutlich aus der Schule:
Dort betrachtet man Polyeder, die fünf regulären und vielleicht weitere.

Als praktische Bastelanleitung und mathematische Beschreibung kann man solch ein Polyeder aufschneiden und in die Ebene legen. Umgekehrt können wir aus der ebenen Darstellung das Polyeder rekonstruieren, durch Verkleben entlang der gleich beschrifteten Kanten.

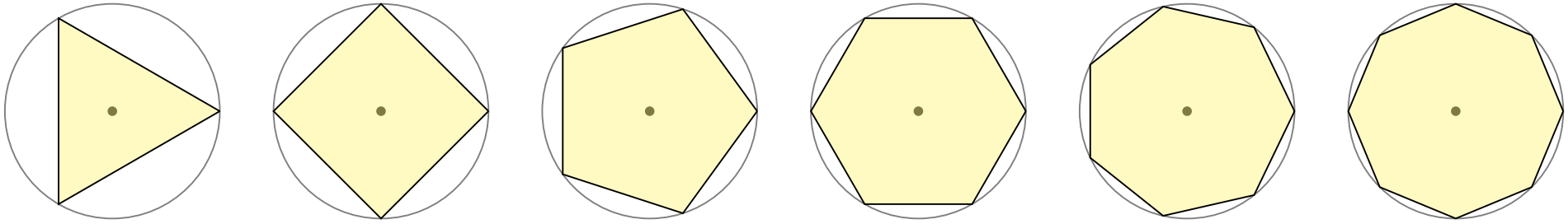
🙂 Bei diesen Bastelanleitungen nutzen wir implizit die Geometrie:
Diese schreibt eindeutig vor, welche Kanten wir miteinander verkleben.

Topologisch gesehen ist alles flexibel und wir können jede Verklebung willkürlich vorgeben. Daher werden wir diese zusätzliche Daten explizit als Verklebevorschrift codieren. Dies führt uns zu Flächenwörten und somit zu einer sehr effizienten Beschreibung geschlossener Flächen.

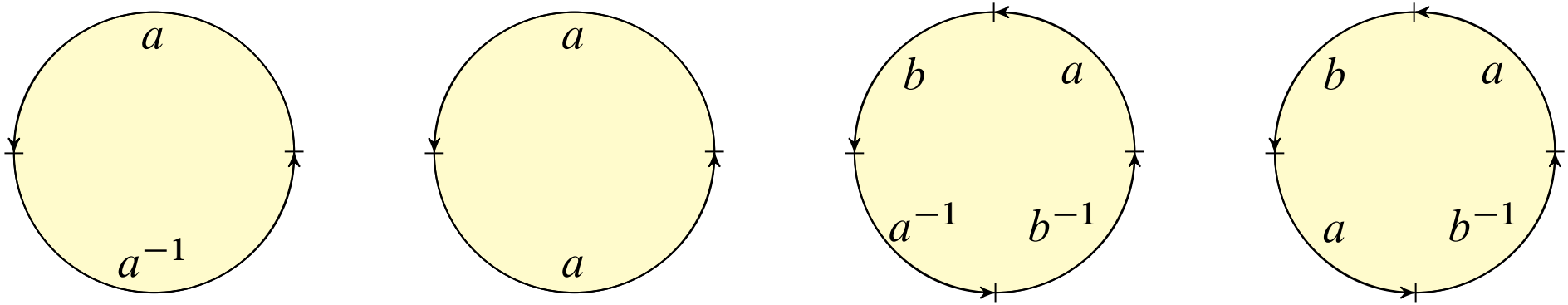
Polygonmodell und Verklebevorschrift

Wir benennen die Verklebevorschrift nun explizit! Kanten mit gleichem Buchstaben verkleben wir entsprechend der angegebenen Orientierung:

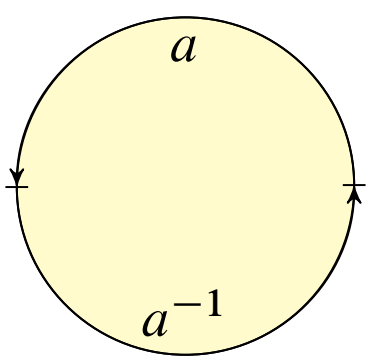
Geometrisch gelingt dies sehr leicht mit einem regulären n–Eck:

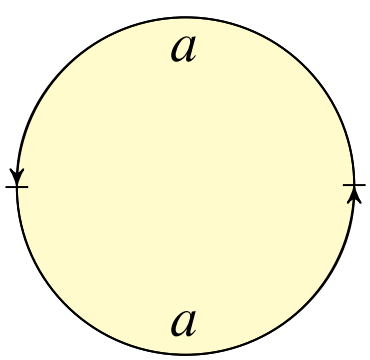


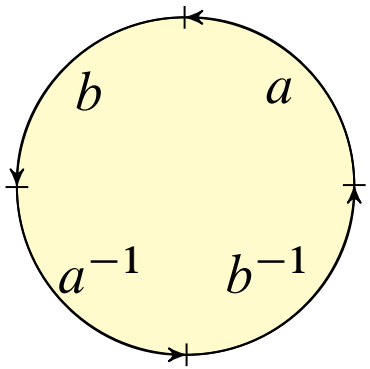
Ein topologisch äquivalentes Modell (F6G) ist die Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$:

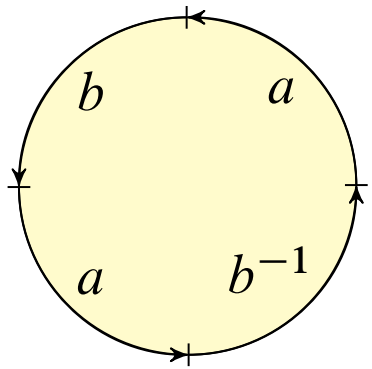


Polygonmodell und Verklebevorschrift









Definition K3c: Polygonmodell und Flächenwort

Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$ teilen wir in $n \geq 1$ gleichlange Kreisbögen $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \exp\left[\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}(k-1+t)\right]$ für $k = 1, 2, \dots, n$.

Gegeben sei ein Alphabet $A = \{a^{\pm1}, b^{\pm1}, c^{\pm1}, \dots\}$ mit fixpunktfreier Involution $A \to A : x \mapsto x^{-1}$. Hierüber sei $w = w_1 \cdots w_n \in A^n$ ein Wort.

- Bei $w_k = w_\ell$ identifizieren wir $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(t)$ für jedes $t \in [0,1]$.
- Bei $w_k = w_\ell^{-1}$ identifizieren wir $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(1-t)$ für jedes $t \in [0,1]$.

Dies erzeugt eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$.
Den Quotientenraum bezeichnen wir mit $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle := \mathbb{D}^2/_\sim$.

Im Sonderfall $n = 0$ vereinbaren wir $\mathbb{D}^2/\langle\rangle := \mathbb{S}^2$. Dies entspricht der Zusammenschlagung $\mathbb{D}^2 /\!/ \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$ des Randes zu einem Punkt (F1R).

Polygonmodell und Verklebevorschrift

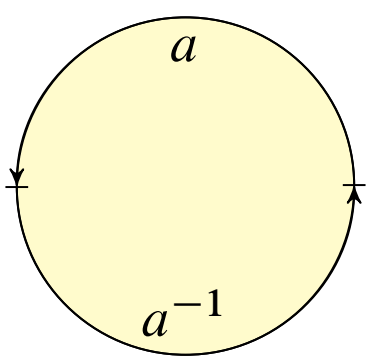
Wir wollen alle geschlossenen Flächen F beschreiben und klassifizieren.
Eine universelle Darstellung sind simpliziale oder zelluläre Komplexe.
Speziell für Flächen ist das Polygonmodell aus K3C extrem effizient,
es reduziert die Notation auf das absolute Minimum.

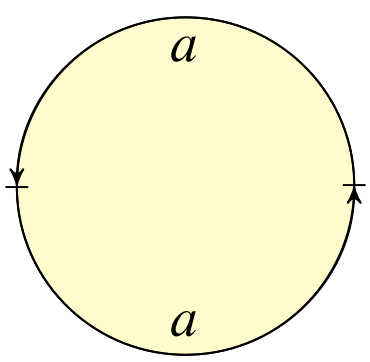
Die gesamte Konstruktion von $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ codieren wir präzise und kurz
durch das Wort w als Verklebevorschrift entlang des Randes.
Das ist wieder einmal eine genial einfache Notation!
Ihren Nutzen werden wir gleich nießen können.

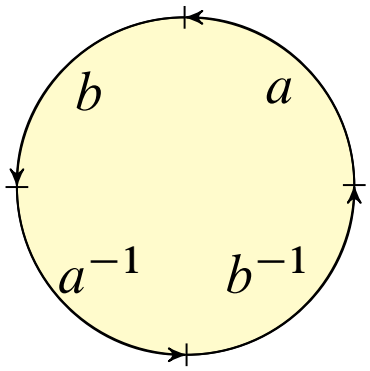
Welche Flächen können wir so darstellen? Alle!
Das folgende Beispiel K3D zeigt die kleinsten Fälle,
der anschließende Satz K3E klärt den allgemeinen Fall:
Alle Flächen lassen sich im Polygonmodell $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ schreiben!

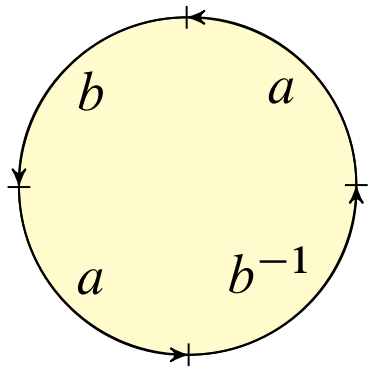
Dies führt uns zu den Flächenwörtern w wie in K3E erklärt.
Mit diesen Wörtern können wir wunderbar rechnen (Satz K3F).
Dies beschert uns schließlich den effizienten Flächenkalkül und
nach einfacher Rechnung die lang ersehnte Flächenklassifikation!

Polygonmodell und Verklebevorschrift









Beispiel / Übung K3D: kleinste Beispiele

Konstruieren Sie möglichst explizit folgende Homöomorphismen:

1. $\mathbb{D}^2/\langle aa^{-1}\rangle \cong \mathbb{S}^2$ (zweidimensionale Sphäre)
2. $\mathbb{D}^2/\langle aa\rangle \cong \mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\mathbb{S}^0$ (reell-projektive Ebene)
3. $\mathbb{D}^2/\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (zweidimensionaler Torus)
4. $\mathbb{D}^2/\langle abab^{-1}\rangle \cong (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm 1\}$ (Kleinsche Flasche)

Die Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ ist kompakt (F1O), und der rechts stehende Raum X ist hausdorffsch. Wir nutzen das Kompakt-Hausdorff-Kriterium (F1L).

Skizzieren und formalisieren Sie eine geeignete Abbildung $\mathbb{D}^2 \twoheadrightarrow X$ mit dem ersehnten Zielraum und den angegebenen Identifizierungen.

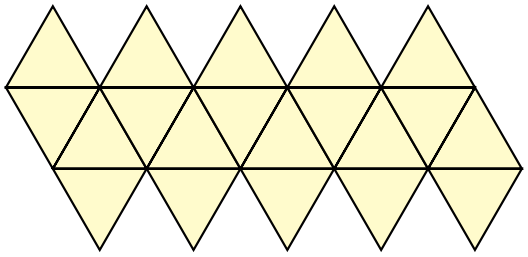
Darstellung von Flächen durch Flächenwörter

Satz K3E: Darstellung einer Fläche durch ein Flächenwort

(0) Der Quotientenraum $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ ist zusammenhängend, kompakt und triangulierbar durch einen endlichen zweidimensionalen Komplex.

(1) Jede triangulierte, zusammenhängende, kompakte Fläche F ist homöomorph zu $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ für ein geeignetes Wort w.

Beweis: (1) Wir nutzen die Triangulierung $|K| \rightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow F$. Ihr dualer Graph Γ hat als Ecken die Dreiecke von K, Kanten von Γ sind benachbarte Dreiecke in K mit gemeinsamer Kante. Nach K3B ist Γ zshgd.



Wir wählen einen Spannbaum $T \subseteq \Gamma$ und verkleben alle Dreiecke von K entlang der Kanten in T zu einem Polyeder D. Es gilt $D \cong \mathbb{D}^2$ durch Einklappen wie beim simplizialen Satz von Schoenflies (J2I).

Die verbleibenden Kanten in $\Gamma \setminus T$ codieren die abschließende Verklebung auf dem Rand von D, sodass $D/\langle w \rangle \rightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow |K| \rightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow F$. QED

Darstellung von Flächen durch Flächenwörter

☺ Viele von Ihnen dürften dieselbe Idee bereits aus der Schule kennen:

Dort betrachtet man Polyeder (die fünf regulären und vielleicht weitere).
Als praktische Bastelanleitung und mathematische Beschreibung
kann man solch ein Polyeder aufschneiden und in die Ebene legen.

☺ Genau das tun wir hier: Polyeder schneiden und kleben!

Um dies möglichst allgemein und doch präzise formulieren zu können,
nutzen wir die Darstellung durch polytopale / simpliziale Komplexe.
Das ist ein Beispiel für Schulmathematik vom höheren Standpunkt.

☺ Anders als zu Schulzeiten verfügen wir nun über alle nötigen Begriffe
und Techniken, um die Sachlage allgemein und präzise zu behandeln.

Aussage (1) beruht auf Satz K3B, der Charakterisierung simplizialer
Flächen, denn wir benötigen diese kombinatorischen Eigenschaften.

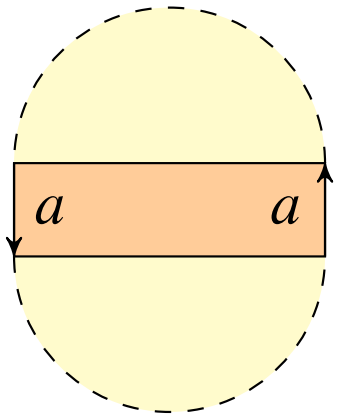
Darstellung von Flächen durch Flächenwörter

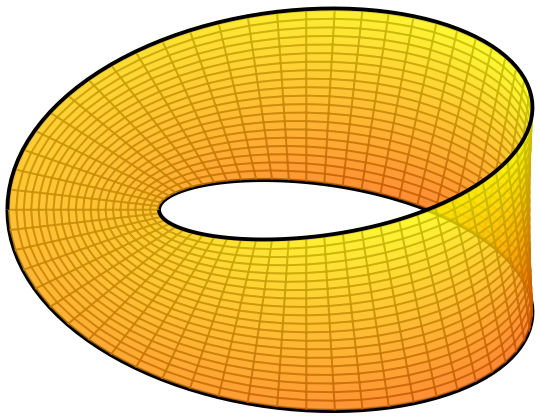
Satz K3E: Darstellung einer Fläche durch ein Flächenwort

(2) Für unsere Modellflächen $F_g^{\pm}$ finden wir als Standarddarstellung $F_g^+ \cong \mathbb{D}^2/\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ und $F_g^- \cong \mathbb{D}^2/\langle c_0 c_0 \cdots c_g c_g \rangle$.

(3) Genau dann ist der Quotient $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ eine geschlossene Fläche, wenn jeder Buchstabe im Wort w exakt zweimal auftritt (K3B/K3F). In diesem Falle nennen wir w ein (geschlossenes) **Flächenwort**.

(4) Tritt ein Buchstabe im Flächenwort w zweimal mit gleichen Exponenten auf, dann ist die Fläche $\mathbb{D}^2/\langle w \rangle$ nicht orientierbar. Andernfalls ist die Fläche **orientierbar** (K3B/K3F).





Darstellung von Flächen durch Flächenwörter

Beweis: (2) Man kann geeignete Homöomorphismen anschaulich skizzieren bzw. explizit konstruieren; das ist eine lehrreiche Übung. Die vier einfachsten Beispiele sind Gegenstand der vorigen Übung K3D.

Bequemer: Jede unserer Modellflächen $F_g^\pm$ können wir dank (1) als Polygonmodell darstellen und dank Satz K3F in Normalform bringen. Das ist formal richtig und kürzer, aber weniger anschaulich.

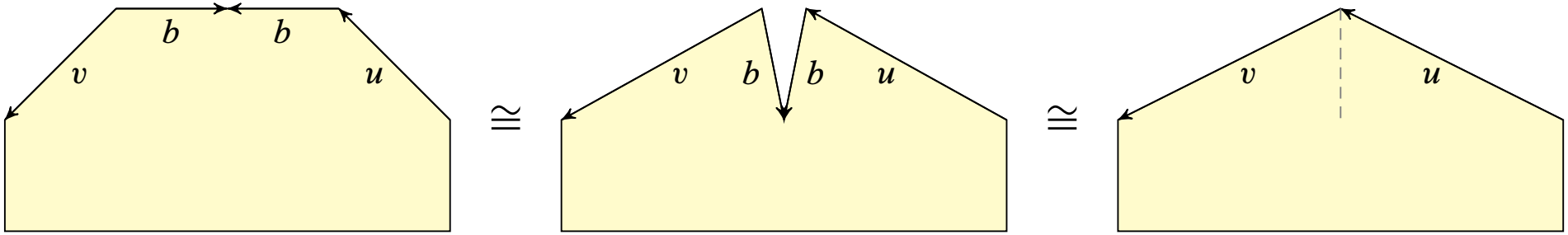
(3) „$\Rightarrow$“: Ist $\mathbb{D}^2/\langle w\rangle$ eine geschlossene Fläche, so muss nach Satz K3B jeder Buchstabe, der im Wort w auftritt, genau zweimal vorkommen. (Einmal erzeugt Rand, dreimal oder mehr ist nicht lokal euklidisch.)

„$\Leftarrow$“: Jedes Flächenwort w überführen wir dank Satz K3F in Normalform (2), und diese ist leicht als Fläche erkennbar, genauer: $\mathbb{D}^2/\langle w\rangle \cong F_g^\pm$.

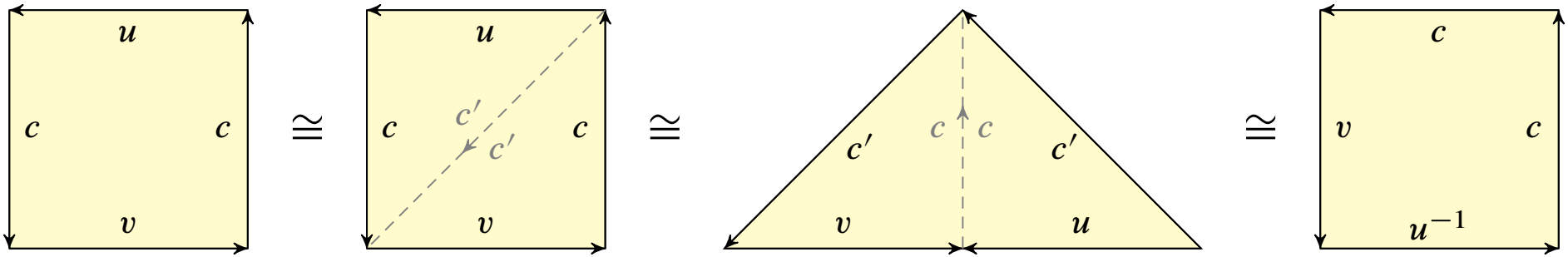
(4) Tritt im Flächenwort w ein Buchstabe zweimal mit den gleichen Exponenten auf, so lässt sich ein Möbius–Band in die Fläche $\mathbb{D}^2/\langle w\rangle$ einbetten, diese ist somit nicht-orientierbar. Andernfalls überführen wir das Wort w dank K3F in Normalform (2), und F_g^+ ist orientierbar. QED

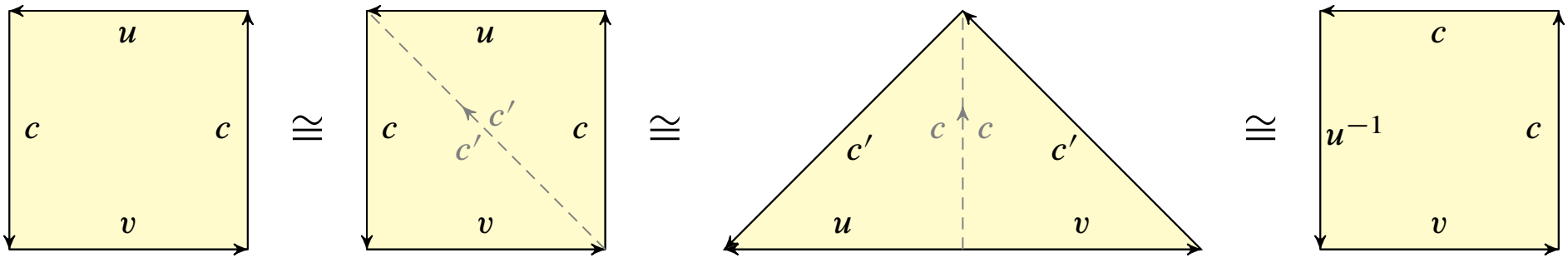
Flächenkalkül: Umformung von Flächenwörtern

Wir können inverse Nachbarn bb^{-1} einklappen:



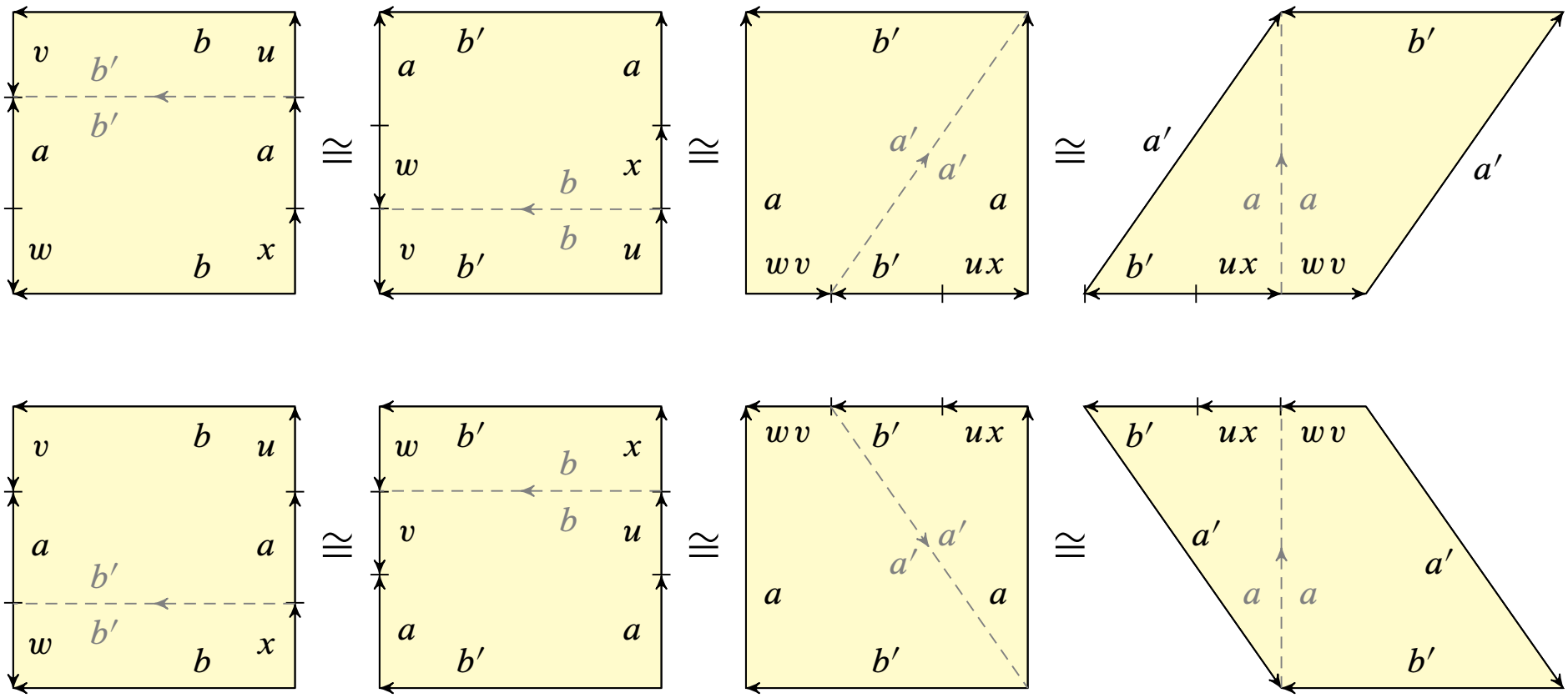
Wir können jede Kreuzhaube cc zusammenfassen:





Flächenkalkül: Umformung von Flächenwörtern

Wir können jeden Henkel $aba^{-1}b^{-1}$ zusammenfassen:



☺ Dieser Flächenkalkül ist sehr einfach, konzise und effizient.

Die Regeln gelten, sobald a, b, c im restlichen Wort nicht vorkommen.

Das **Inverse** des Wortes $w = w_1 w_2 \cdots w_\ell$ ist $w^{-1} = w_\ell^{-1} \cdots w_2^{-1} w_1^{-1}$.

Sein **Träger** $\operatorname{supp} w = \{ w_1^{\pm}, w_2^{\pm}, \ldots, w_\ell^{\pm} \}$ sammelt alle Buchstaben.

Reduktion von Flächenwörtern auf Normalform

Satz K3F: Reduktion von Flächenwörtern auf Normalform

Folgende Umformungen liefern homöomorphe Quotienten $\mathbb{D}/\langle \dots \rangle$:

1. $uvw \equiv vwu$ (zyklische Umordnung)
2. $ua^{\varepsilon}va^{\delta}w \equiv ub^{\varepsilon}vb^{\delta}w \equiv ub^{-\varepsilon}vb^{-\delta}w$ (Austauschen freier Buchstaben)
3. $ubb^{-1}v \equiv uv$ (Einklappen inverser Nachbarn)
4. $cucv \equiv u^{-1}ccv$ (Gruppieren einer Kreuzhaube)
5. $uv\,cc\,w \equiv u\,cc\,vw$ (Verschieben einer Kreuzhaube)
6. $aubva^{-1}wb^{-1}x \equiv aba^{-1}b^{-1}xwvu$ (Gruppieren eines Henkels)
7. $uv\,aba^{-1}b^{-1}\,w \equiv u\,aba^{-1}b^{-1}\,vw$ (Verschieben eines Henkels)
8. $uaba^{-1}b^{-1}ccv \equiv uaabbccv$ (Kreuzhaube transformiert Henkel)

Hierbei sind $a, b, c, \dots \in A$ Buchstaben, $u, v, w, x, \dots \in A^*$ Teilwörter und $w \mapsto w^{-1}$ die Inversion. In (2) dürfen a, b sonst nirgends vorkommen.

Beweis: Umformungen (1–2) sind klar, (3–7) haben wir oben gezeigt. Eine Kreuzhaube und einen Henkel verwandelt (4) in drei Kreuzhauben gemäß $aba^{-1}b^{-1}cc \overset{(4)}{\equiv} aba^{-1}cbc \overset{(4)}{\equiv} abbc^{-1}ac \overset{(4)}{\equiv} aacb^{-1}b^{-1}c \overset{(4)}{\equiv} aabbcc$.

Reduktion von Flächenwörtern auf Normalform

Satz K3F: Reduktion von Flächenwörtern auf Normalform

Damit können wir jedes Flächenwort überführen in eine Normalform, $\mathbb{D}^2/\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle \cong F_g^+$ oder $\mathbb{D}^2/\langle c_0 c_0 \cdots c_g c_g \rangle \cong F_g^-$.
Somit ist jede zusammenhängende geschlossene Fläche homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen $F_g^\pm$.

Beweis: Wir können jede Kreuzhaube zusammenfassen (4) und an den Anfang des Wortes schieben (5), ebenso jeden Henkel (6,7). Wir erhalten ein Flächenwort $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}\ c_1 c_1 \cdots c_\ell c_\ell\ u$.

In u hat jedes Buchstabenpaar entgegengesetzte Exponenten (keine Kreuzhauben) und je zwei Paare sind unverschränkt (keine Henkel). Ist das Wort u nicht leer, so gibt es ein innerstes Paar $u = \cdots x x^{-1} \cdots$; dieses können wir löschen (3). So fortfahrend löschen wir ganz u.

Kreuzhauben fressen Henkel auf (8). Wir erreichen also eine der beiden Normalformen. Verschiedene Normalformen liefern nicht-homöomorphe Flächen dank Orientierbarkeit und Euler–Charakteristik. QED

Simpliziale und topologische Klassifikation

Satz K3G: simpliziale Klassifikation geschlossener Flächen

Sei K ein Simplizialkomplex und $F = |K|$ eine zshgde geschlossene Fläche. Dann existiert ein stückweise affiner Homöomorphismus $(h, k) : F \cong F_g^\varepsilon$ zu genau einer unserer Modellflächen $F_g^\varepsilon = |L|$.

Somit gilt die Hauptvermutung für geschlossene Flächen:
Zwischen geeigneten Unterteilungen $K' \preccurlyeq K$ und $L' \preccurlyeq L$
existiert ein simplizialer Isomorphismus $K' \cong L'$.

Korollar K3H: topologische Klassifikation geschlossener Flächen

Sei F eine (topologische) Fläche. Dank Satz K1L ist F triangulierbar. Gemäß K3G ist F homöomorph zu einer unserer Modellflächen F_g^ε, und zwar zu genau einer dank der topologischen Invarianten (χ, ε).

Demnach sind zwei zusammenhängende geschlossene Flächen F und F' genau dann homöomorph, wenn sie übereinstimmen in Orientierbarkeit $\varepsilon(F) = \varepsilon(F')$ und Euler–Charakteristik $\chi(F) = \chi(F')$.

Simpliziale und topologische Klassifikation

☺ Sie sehen, wie zu Beginn dieses Kapitels angekündigt:
Triangulierungen vereinfachen unsere Arbeit dramatisch!
Simplizialkomplexe sind eine universelle und effiziente Datenstruktur.
Damit beschreiben wir auch simpliziale Flächen präzise und bequem.

Den Klassifikationssatz können wir damit sehr leicht beweisen,
schließlich sogar rein kombinatorisch-algebraisch und gänzlich
unbeschwert von geometrisch-topologischen Komplikationen.
Dieser Ansatz und sein Erfolg sind überaus bemerkenswert.

Der Triangulierungssatz K1L garantiert: *Jede* Fläche ist triangulierbar,
also als ein Simplizialkomplex realisierbar. Sein Beweis ist sehr technisch
und wesentlich aufwändiger. Wir beweisen diesen Satz
daher hier nicht, nutzen ihn aber dennoch dankend zur Abrundung.

Zur Betonung, Klarstellung und Redlichkeit, formuliere ich daher den
simplizialen und den topologischen Fall getrennt. Dies offenbart eine
Finesse: Die simpliziale Klassifikation hat stärkere Voraussetzungen, aber
auch stärkere Folgerungen, nämlich die Hauptvermutung.

Lobpreis der guten Notation

☺ Der Weg war lang, doch das Ergebnis ist schön, einfach und elegant.

Wir übersetzen das ursprüngliche geometrisch-topologische Problem in einen kombinatorisch-algebraischen Kalkül – und verlustfrei zurück!

☺ Das ist typisch für gute Notation, insbesondere in der Mathematik: Wir können damit alles präzise benennen und effizient berechnen.

By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems, and in effect increases the mental power of the race. Before the introduction of the Arabic notation, multiplication was difficult, and the division even of integers called into play the highest mathematical faculties. Probably nothing in the modern world would have more astonished a Greek mathematician than to learn that, under the influence of compulsory education, the whole population of Western Europe, from the highest to the lowest, could perform the operation of division for the largest numbers. (…) Our modern power of easy reckoning with decimal fractions is the almost miraculous result of the gradual discovery of a perfect notation.

Alfred North Whitehead (1861–1947), *An Introduction to Mathematics* (1911)

Lobpreis der guten Notation

Sie kennen bereits einige sehr erfolgreiche mathematische Kalküle, diese beruhen auch und vor allem auf einer zweckmäßigen Notation:

Die **Stellenschreibweise** für natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ und ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, sowie die **Bruchrechnung** für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Das kostet in der Schulmathematik erst einige Jahre, doch es lohnt sich und hilft überall: Die Rechenregeln sind nicht willkürlich, sondern effizient und nützlich.

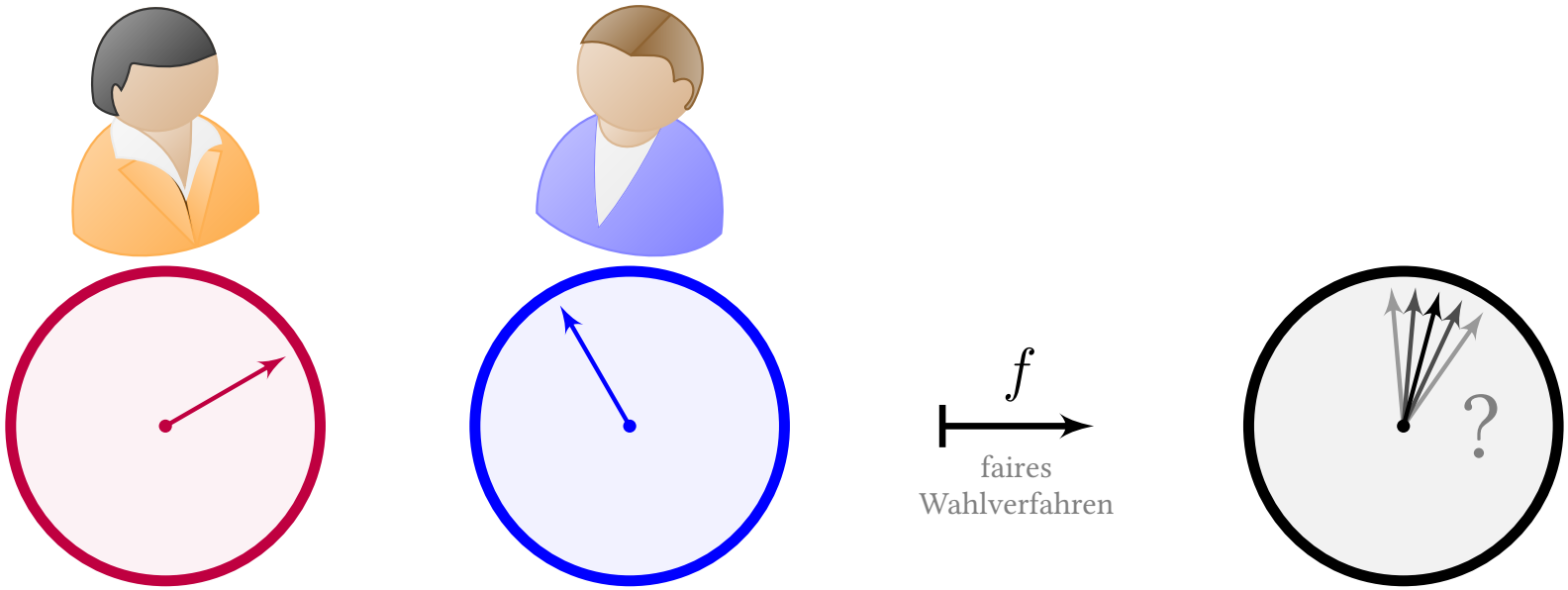
Später lernen Sie **Differenzieren und Integrieren**, und auch dies kann man formal als einen Kalkül auffassen und kommt damit recht weit — bis zum Abitur! Das ist nicht bloß formal, dahinter steckt eine wichtige Bedeutung, nämlich Grenzwerte, wie Sie aus der Analysis wissen.

Der **Matrizenkalkül** ist eine wichtige Technik für die Lineare Algebra und die Numerik. Eine Vielzahl mathematischer Objekte lässt sich durch Matrizen beschreiben und behandeln, zum Beispiel lineare Abbildungen, quadratische Formen, gewichtete Graphen, stochastische Prozesse, etc.

Der **stochastische Kalkül** formalisiert das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten. Es ist bemerkenswert, dass sich das kalkülisieren lässt!

Anwendung der Topologie: stetige Richtungswahl

Alice und Bob wählen frei und unabhängig voneinander jeweils eine Richtung in der Ebene: Alice wählt $x \in \mathbb{S}^1$, und Bob wählt $y \in \mathbb{S}^1$.
Sie suchen nun einen Kompromiss $z = f(x, y)$, also ein Wahlverfahren, das aus ihren Stimmabgaben ein gemeinsames Endergebnis extrahiert.

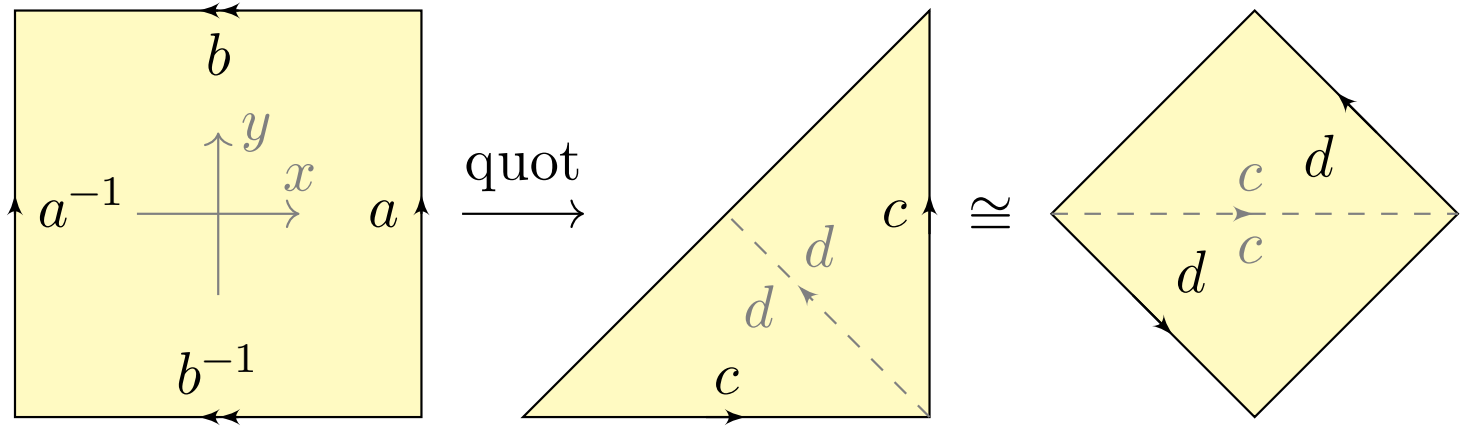


Als Wahlverfahren suchen wir eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.
Wir fordern Symmetrie, $f(x, y) = f(y, x)$, und Einhelligkeit, $f(x, x) = x$.

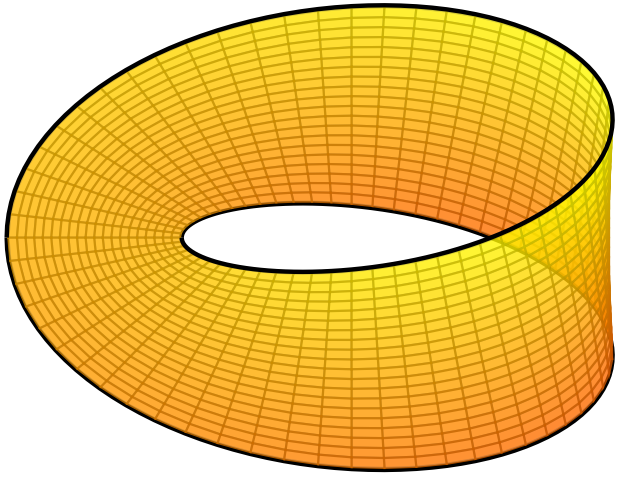
Aufgabe: Finden Sie alle in diesem Sinne fairen Wahlverfahren!
Naive Beispiele: Genügt $(x, y) \mapsto \text{const}$? oder xy? oder $\sqrt{xy}$?

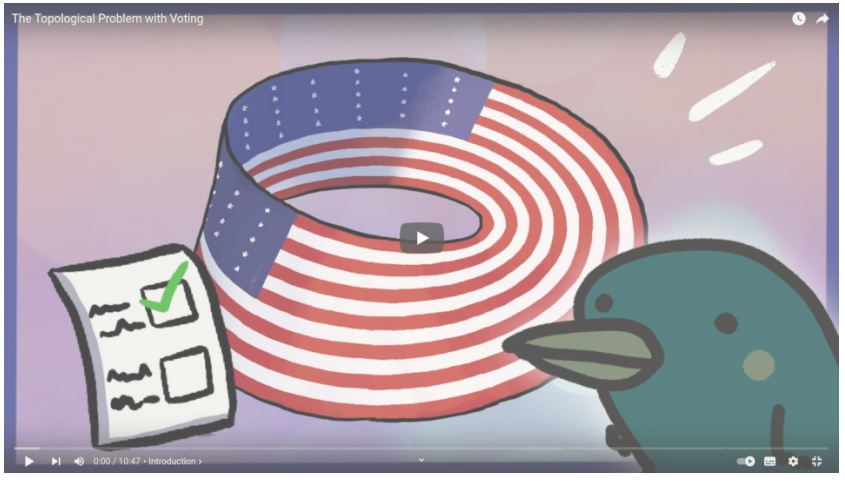
Anwendung der Topologie: stetige Richtungswahl

Lösung: (1) Symmetrie bedeutet, f faktorisiert über den Quotienten $M = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/_{(x,y)\sim(y,x)}$ zu $g : M \to \mathbb{S}^1$. Dies ist ein Möbius–Band!



(2) Einhelligkeit bedeutet Retraktion $(i, g) : \mathbb{S}^1 \leftrightarrows M$ auf den Rand.





Anwendung der Topologie: stetige Richtungswahl

Behauptung: Es existiert keine Retraktion $(i, g) : \mathbb{S}^1 \overset{\subset}{\rightleftarrows} M$ auf den Rand.
Gegeben ist $i : \mathbb{S}^1 \to M : x \mapsto [x, x]$, gesucht $g : M \to \mathbb{S}^1$ mit $g \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.

Wir haben den Deformationsretrakt $(\iota, \rho) : \mathbb{S}^1 \simeq M$ auf die Mittelachse.
Explizit in Formeln? Gerne! $\iota : z \mapsto [+\sqrt{z}, -\sqrt{z}]$ und $\rho(x, y) = -xy$.

Wir hätten $(\varphi, \psi) : \mathbb{S}^1 \rightleftarrows \mathbb{S}^1$ mit $\varphi = \rho \circ i$ und $\psi = g \circ \iota$ und $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$,
somit $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}) = \deg(\psi \circ \varphi) = \deg(\psi) \cdot \deg(\varphi)$, also $\deg(\varphi) = \pm 1$.

Es gilt jedoch $\deg(\varphi) = \pm 2$. Daran zerbricht unsere Annahme:
Es gibt keine Retraktion g, somit kein faires Wahlverfahren f. QED

🙂 Dieses Argument ist verblüffend raffiniert und doch einfach elegant.
Unsere topologischen Werkzeuge glänzen durch effiziente Anwendung:
(1) Flächenkalkül und (2) Umlaufzahl sowie Stetigkeit, Quotienten, etc.

Kaum macht man es richtig, schon funktioniert's!

Dieses schöne topologische Anwendungsbeispiel verdanken wir Graciela Chichilnisky, einer argentinisch-US-amerikanischen Mathematikerin und Wirtschaftswissenschaftlerin, `en.wikipedia.org/wiki/Graciela_Chichilnisky`.

Anwendung der Topologie: stetige Richtungswahl

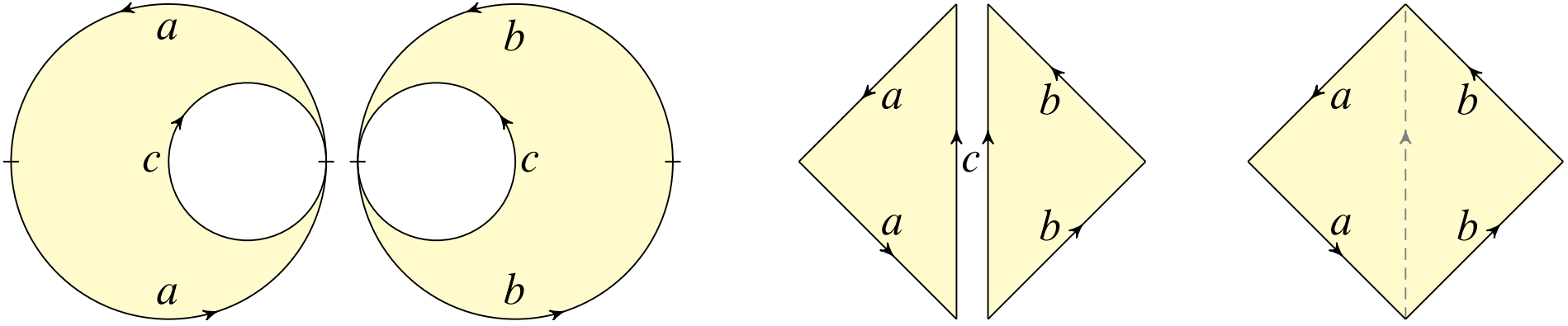
Sie sehen hier ein erstes schönes und durchaus typisches Ergebnis der Sozialwahltheorie [*social choice theory*], auch Theorie kollektiver Entscheidungen [*theory of collective choice*]. Diese untersucht Wahlen und Abstimmungen, also ganz allgemein Gruppenentscheidungen durch Aggregation individueller Präferenzen zu einer kollektiven Präferenz.

Meist sucht man nach bestimmten „fairen“ Wahlverfahren, so wie hier. Der erste Schritt ist die mathematische Präzisierung der Fragestellung! Oft erweisen sich jedoch die naiv-gutgemeinten Forderungen als in sich widersprüchlich und erlauben somit nachweislich keine Lösung, so wie oben gezeigt. Daher beschäftigt sich die Sozialwahltheorie nicht nur mit der Konstruktion von Lösungen, sondern auch mit Unmöglichkeitssätzen.

Mathematik hilft überall, sogar in weit entfernt geglaubten Gebieten… Die Sozialwahltheorie verbindet Mathematik mit Volkswirtschaftslehre, Politikwissenschaft, Psychologie, Philosophie, Rechtswissenschaft, uvm. Berühmt ist der „Satz vom Diktator“ nach Kenneth Arrow (1921–2017); für diese und weitere Arbeiten erhielt er 1972 den Wirtschaftsnobelpreis.

Anwendungsbeispiel: Verdopplung des Möbius–Bandes

Mit dem Flächenkalkül können Sie rechnen, effizient und sicher!

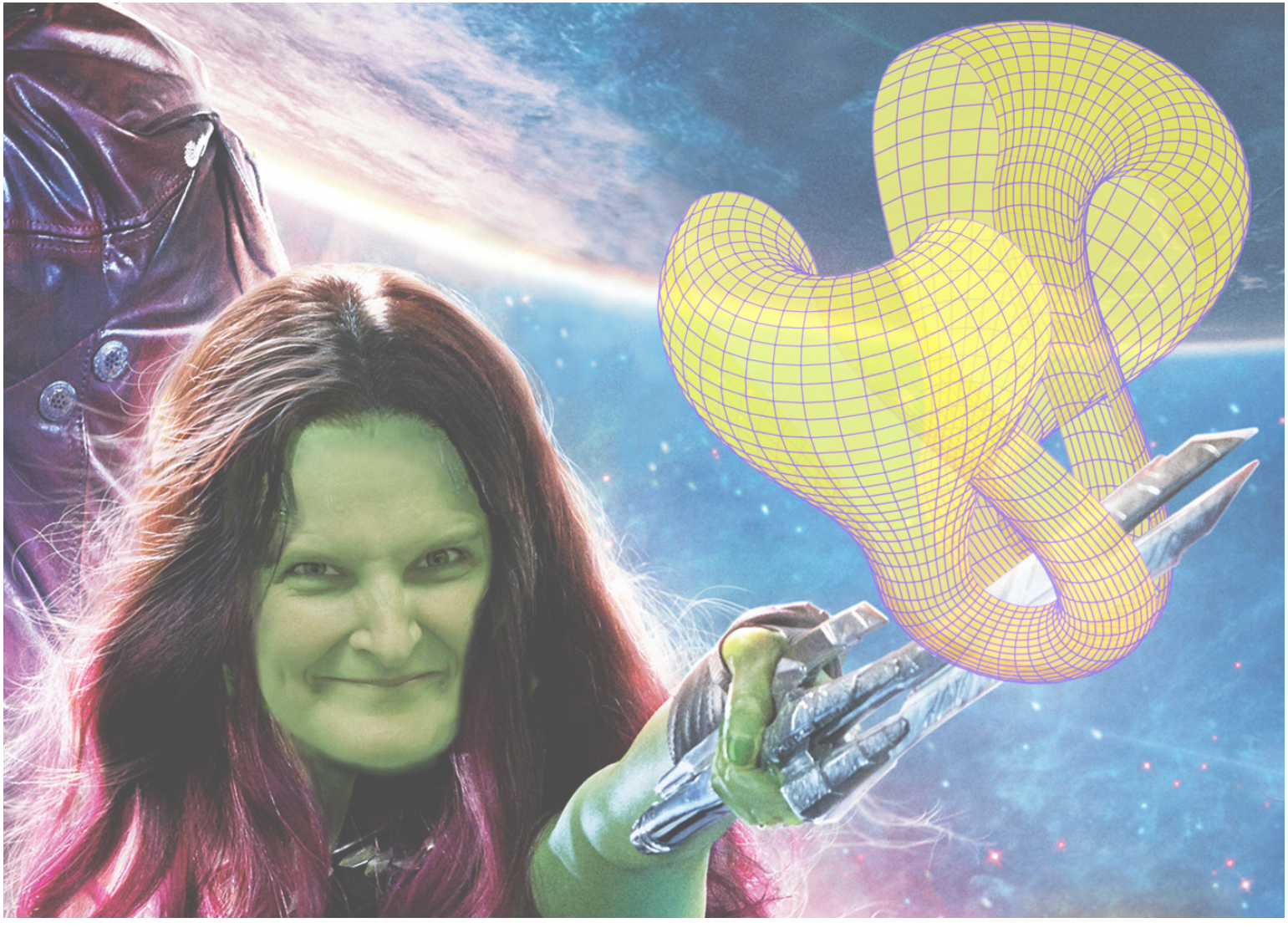


Beispiel / Übung K3м: die verbundene Summe $\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$

Entfernen Sie aus $\mathbb{RP}^2$ eine Kreisscheibe; schreiben Sie das so entstehende Möbius–Band als Flächenwort aus drei Buchstaben. Welche Fläche F entsteht, wenn Sie zwei Möbius–Bänder an ihrem Rand verkleben?

Anleitung: Verschiedene Lösungswege stehen Ihnen nun offen:
(1) Formulieren Sie F als Flächenwort und bringen Sie es in Normalform.
(2) Berechnen Sie χ, r, ε und nutzen Sie den Flächenklassifikationssatz.
(3) Versuchen Sie es anschaulich / zeichnerisch / ohne Theorie (A412).

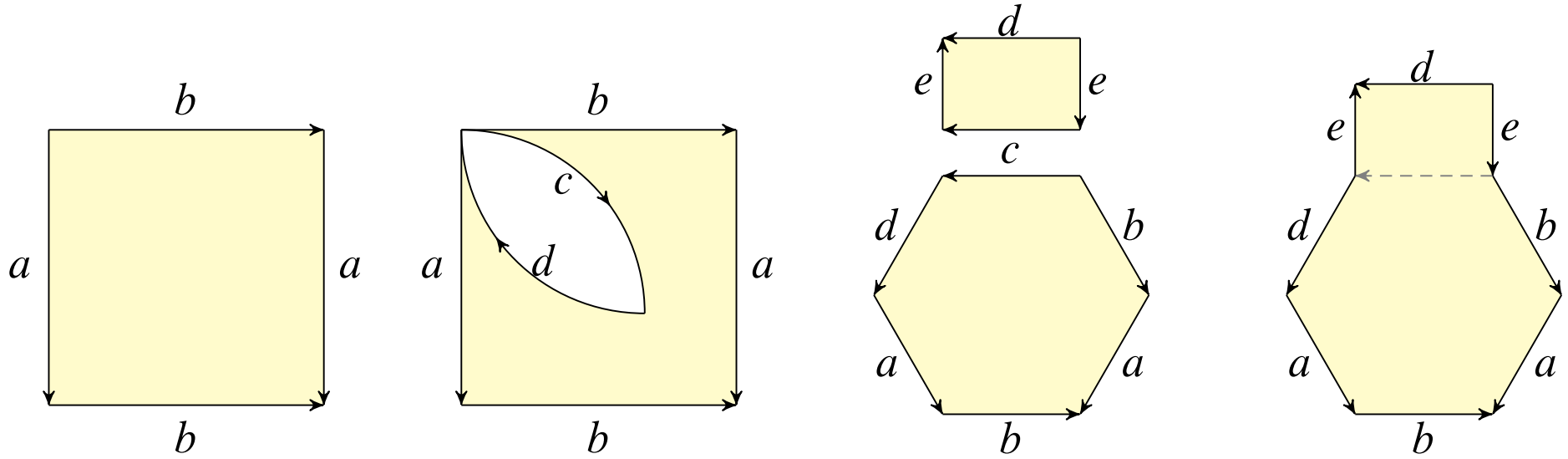
Anwendungsbeispiel: Verdopplung des Möbius–Bandes



☺ Geometrische Intuition und Anschauung sind willkommene Hilfen.
Nun sind Sie nicht mehr darauf allein angewiesen, sie können rechnen!

Anwendungsbeispiel: der Satz von Dyck

Walther Dyck (1856–1934) löste 1888 folgendes Problem:



Beispiel / Übung K3N: die verbundene Summe Torus $\sharp\, \mathbb{RP}^2$

Entfernen Sie aus einem Torus eine Kreisscheibe und kleben Sie am so geschaffenen Rand ein Möbius–Band ein. Welche Fläche F entsteht?

Anleitung: *Kreuzhaube fressen Henkel auf.* (R.W. Fassbinder, 1974)

(1) Formulieren Sie F als Flächenwort und bringen Sie es in Normalform.
(2) Berechnen Sie χ, r, ε und nutzen Sie den Flächenklassifikationssatz.
(3) Versuchen Sie es anschaulich / zeichnerisch / ohne Theorie.

Anwendungsbeispiel: der Satz von Dyck

Der Flächenkalkül erweitert Ihren Werkzeugkasten ganz wesentlich. Sie verfügen nun über beides: geometrisch-anschauliche Skizzen und kombinatorisch-algebraische Rechnungen. Das ist schön und gut, beide sind nützlich, sie stützen und ergänzen sich gegenseitig.

In einfachen Fällen führt die Anschauung schneller und leichter zum Ziel. In den meisten Fällen jedoch führt der Kalkül weiter als die Intuition. Ideal ist es daher, beides zu entwickeln, sowohl die Anschauung zu schulen als auch den Kalkül zu perfektionieren. So geht Mathematik!

Ich hoffe sehr, dass diese Vorlesung Ihnen beides vermitteln konnte: intuitive Anschauung und präzise Rechnung. Beides wird Ihnen nützen.

C'est par la logique que l'on prouve
et par l'intuition que l'on découvre.
[Mit der Logik beweisen wir,
mit der Intuition entdecken wir.]
Henri Poincaré (1854–1912)

Klassifikation kompakter Flächen mit / ohne Rand

Klassifikation kompakter Flächen mit / ohne Rand

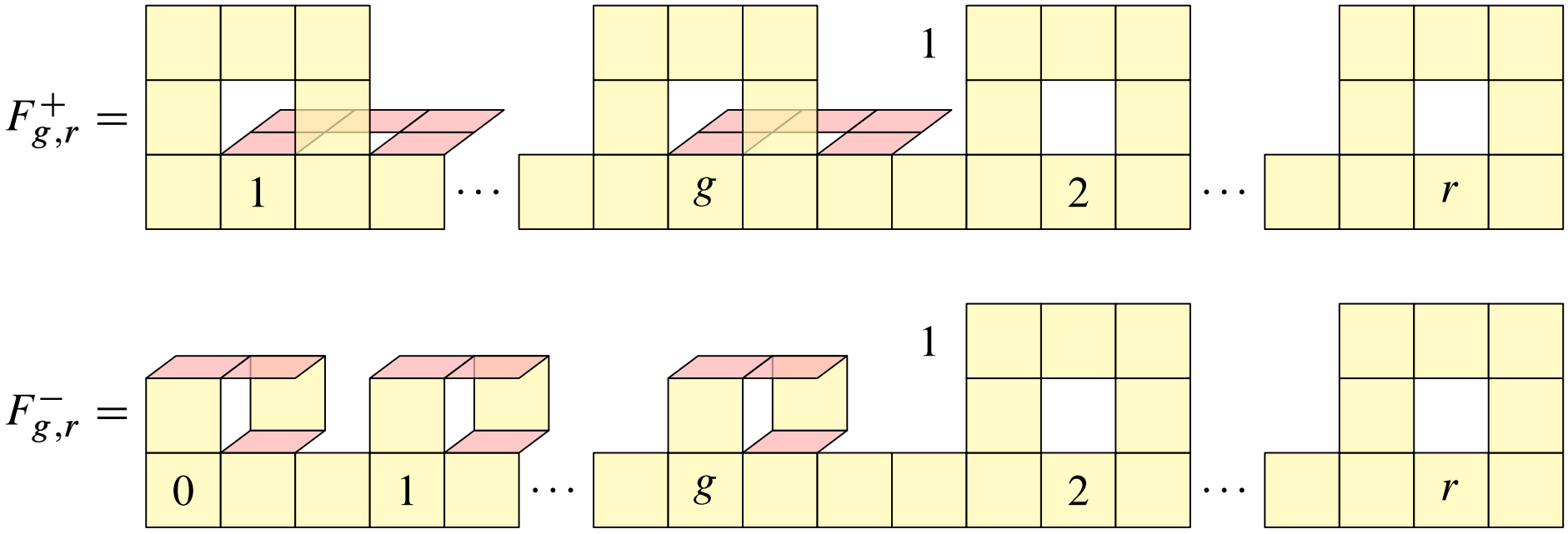
In Natur und Mathematik begegnen Ihnen nicht nur geschlossene Flächen, sondern häufig auch Flächen mit Rand. Zur Vereinfachung haben wir zunächst geschlossene Flächen klassifiziert, nun kostet es kaum Mehraufwand, die Flächen mit Rand ebenso zu klassifizieren.

Wir gehen wie oben vor und beginnen mit konkreten Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$. Allgemein betrachten wir schließlich eine beliebige kompakte Fläche F, trianguliert, zusammenhängend, kompakt und eventuell mit Rand. Durch Schneiden und Kleben können wir F in $F^{\pm}_{g,r}$ überführen!

Für diese naheliegende Erweiterung bieten sich zwei Beweiswege: Wir erweitern den Flächenkalkül um Buchstaben, die nicht in Paaren, sondern auch einzeln auftreten dürfen. Das codiert einem Teil des Randes. Die entsprechenden Rechenregeln können wir entsprechend erweitern.

Alternativ und einfacher: Wir schließen jede Randkomponente durch Anheften einer Kreisscheibe und nutzen dann die Klassifikation der geschlossenen Flächen. (Übung: Formulieren Sie dies genau aus.) Auf allen Wege erhalten wir den folgenden eleganten Satz.

Klassifikation kompakter Flächen mit / ohne Rand

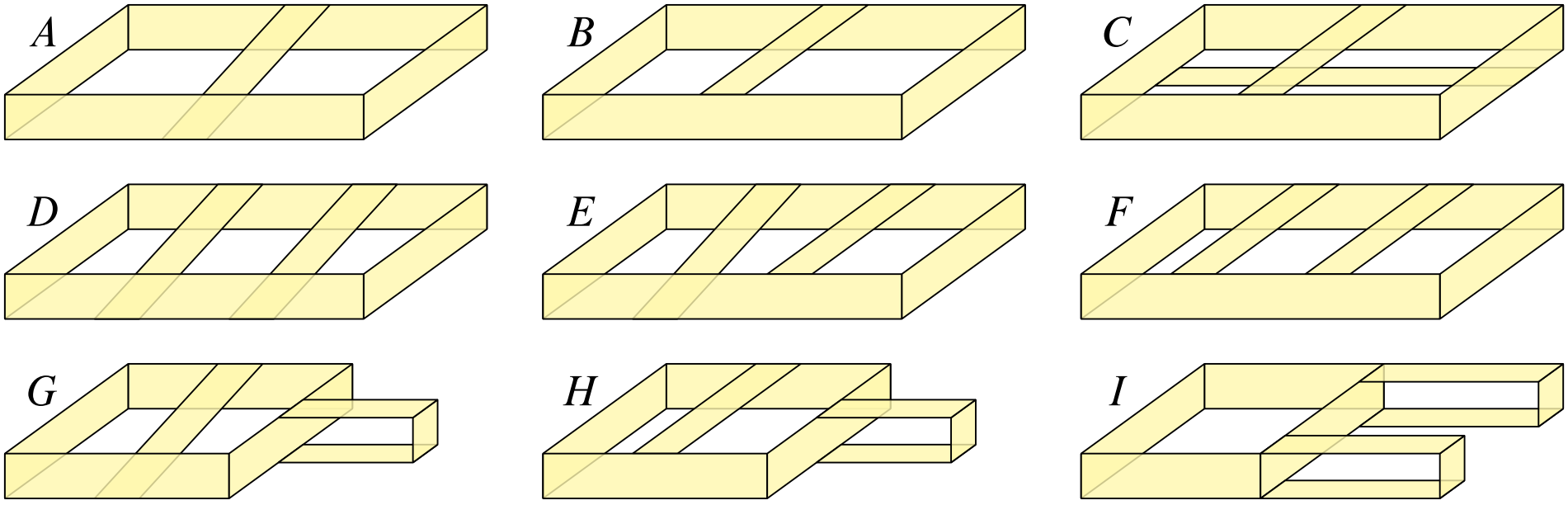


Satz K31: simpliziale Klassifikation kompakter Flächen

Sei K ein Simplizialkomplex und $F = |K|$ eine zshgde kompakte Fläche, eventuell mit Rand. Dann existiert ein stückw. affiner Homöomorphismus $(h, k) : F \cong F^\varepsilon_{g,r}$ zu genau einer unserer obigen Modellflächen $F^\varepsilon_{g,r}$.

Für alle $g, r \in \mathbb{N}$ gilt dabei $\chi(F^+_{g,r}) = 2 - 2g - r$ und $\chi(F^-_{g,r}) = 1 - g - r$. Allein aus den drei Daten (χ, r, ε), oder äquivalent hierzu (g, r, ε), folgt bereits die Homöomorphie $F \cong F^\varepsilon_{g,r}$ zur obigen Modellfläche.

Klassifikation kompakter Flächen mit / ohne Rand



☺ Mit unseren topologischen und kombinatorischen Werkzeugen können Sie alle kompakten Flächen beschreiben und klassifizieren.

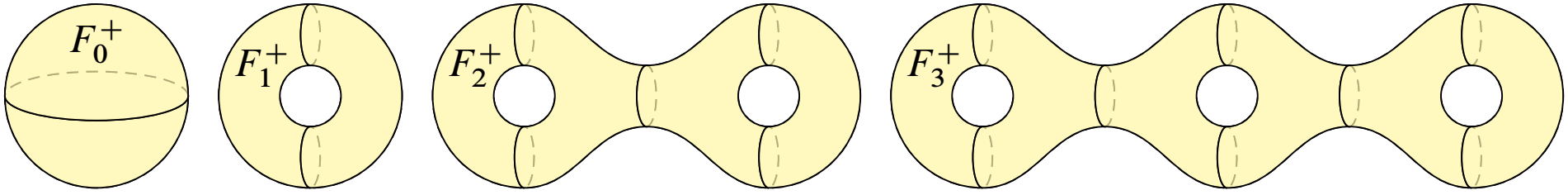
Das Gelingen dieser Klassifikation ist keineswegs selbstverständlich, sondern überaus glücklich. Mathematik schafft Ordnung und Klarheit!

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
Ludwig Wittgenstein (1889–1951), *Tractatus logico-philosophicus* (1922)

Poincaré–Vermutung: Wie erkennen wir die Sphäre?

In Dimension $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir n–Mannigfaltigkeiten M, zusammenhängend und geschlossen (also kompakt und ohne Rand).

Dimension $n = 1$: Hier gibt es nur die Kreislinie, $M \cong \mathbb{S}^1$ (K1N).
$n = 2$: Dank Klassifikation K3G kennen wir alle Möglichkeiten:



Wie können wir die Sphäre charakterisieren / leicht erkennen?
Für $M \cong \mathbb{S}^2$ gilt $[\mathbb{S}^1, M] = \{*\}$. Für $M \ncong \mathbb{S}^2$ gilt $[\mathbb{S}^1, M] \neq \{*\}$.

Charakterisierung der 2–Sphäre bis auf Homöomorphie

Für jede geschlossene 2–Mfkt M mit $[\mathbb{S}^0, M] = [\mathbb{S}^1, M] = \{*\}$ gilt $M \cong \mathbb{S}^2$.

Poincaré–Vermutung (1904), Satz von Hamilton–Perelman (2003)

Für jede geschlossene 3–Mfkt M mit $[\mathbb{S}^0, M] = [\mathbb{S}^1, M] = \{*\}$ gilt $M \cong \mathbb{S}^3$.

Poincaré–Vermutung: Wie erkennen wir die Sphäre?

„In was für einer Welt leben wir eigentlich?“, so fragten wir uns in der Einleitung. Sie kennen nun das nötige Vokalubar der Mannigfaltigkeiten und die Klassifikation der kompakten Flächen. Die topologischen Eigenschaften bestimmen die (Erdober-)Fläche, auf der wir leben!

Grundannahme: Wir leben auf einer zshgden, orientierten geschlossenen Fläche, also kompakt, doch ohne Rand. (Flacherdler verabschieden sich.) Wir müssen also „nur“ noch unter den Modellen F_g^+ unterscheiden: Leben wir auf einer Sphäre oder einem Torus oder Doppeltorus usw?

Wenn die Krümmung überall positiv ist, oder zumindest in ihrer Summe, dann bleibt nur die Sphäre! Der Satz von Gauß–Bonnet sagt allgemein $\kappa(F) = 2\pi \cdot \chi(F)$ und bestimmt somit χ und die Fläche eindeutig. Aus lokalen (Krümmungs-)Daten schließen wir die globale Form!

Alternative: Die Bedingung $[\mathbb{S}^1, X] = \{*\}$ bedeutet, in X lässt sich jedes (beliebig elastische) Gummiband zusammenziehen. Dies ist für die Sphäre F_0^+ erfüllt, für alle anderen Flächen F_g^+ mit $g \geq 1$ hingegen nicht. Mehr hierzu im nächsten Kapitel zu Fundamentalgruppen!

Poincaré–Vermutung: Wie erkennen wir die Sphäre?

Allzu naive Verallgemeinerung

Für jede geschlossene 4–Mfkt M mit $[\mathbb{S}^0, M] = [\mathbb{S}^1, M] = \{*\}$ gilt $M \cong \mathbb{S}^4$?

Das ist falsch, ein einfaches Gegenbeispiel ist $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. (Übung!)
Wir fordern daher stärker $[\mathbb{S}^0, M] = [\mathbb{S}^1, M] = \cdots = [\mathbb{S}^{n-1}, M] = \{*\}$.

Homotopie–Charakterisierung der n–Sphäre

Sei M eine geschlossene n–Mfkt mit $[\mathbb{S}^k, M] = \{*\}$ für $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$.
Dann folgt Homotopie-Äquivalenz $M \simeq \mathbb{S}^n$.

Verallgemeinerte Poincaré–Vermutung (in drei Varianten)

Sei M eine geschlossene n–Mfkt mit $[\mathbb{S}^k, M] = \{*\}$ für $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$.
Dann folgt Homöomorphie / PL-Isomorphie / Diffeomorphie $M \cong \mathbb{S}^n$.

`Top`: Wahr für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. `PL`: Wahr für $n \neq 4$, unbekannt für $n = 4$.
`Diff`: Wahr für $n = 1, 2, 3, 5, 6$. Falsch für $n = 7$. Unbekannt für $n = 4$.

Poincaré–Vermutung: Wie erkennen wir die Sphäre?

Antworten auf diese grundlegenden Fragen markieren mathematische Höhepunkte des 20. Jahrhunderts und wirken auch in das 21. hinein. Diese beeindruckenden, tiefliegenden Arbeiten wurden mit einer Reihe von Fields–Medaillen ausgezeichnet und haben neue Gebiete erschlossen.

„In was für einer Welt leben wir eigentlich?“, so fragen sich auch heute noch Astronom:innen mit Blick auf unser Universum. Seine globale Gestalt ist zuerst eine Frage der Phantasie, dann eine mathematische Frage nach Beispielen und Klassifikationen. Das suggeriert eine Reihe von Möglichkeiten und drängt schließlich zur physikalischen Frage nach diskriminierenden Beobachtungen und Messungen.

Ich erwähne dies vor allem, um die Flächenklassifikation in das rechte, selbstbewusst-bescheidene Licht zu rücken. Sie dürfen stolz sein auf diese Errungenschaft. Sie markiert kein Ende, sondern einen Anfang.

The theorem of classification of surfaces is a top-class mathematical achievement, comparable with the discovery of America or X-rays.

Vladimir Arnold (1937–2010), *On teaching mathematics* (1997)

Kapitel L

Fundamentalgruppen topologischer Räume

Heinz (29 Jahre alt): Ich ziehe so eine Art unsichtbare Linie hinter mir her. […] Und dann habe ich einmal probiert, um eine Litfaßsäule herumzugehen, und schon hatte ich den Salat. Die Linie war verwickelt. […] Wenn ich zum Beispiel zur Arbeit fahre, morgens, dann versuche ich abends exakt denselben Weg zurückzufahren, um die Linie wieder aufzusammeln.

Jürgen Domian, *Extreme Leben* (1996)

Inhalt dieses Kapitels L

1 Das Fundamentalgruppoid eines Raumes

2 Die Fundamentalgruppe eines punktierten Raumes

3 Präsentationen von Gruppen

4 Polygonale Fundamentalgruppen

5 Wegintegrale und Potentiale von Vektorfeldern

6 Simpliziale Fundamentalgruppen

Wir rechnen mit Wegen!

Wege beschreiben, wie wir uns bewegen, etwas tun, Dinge verarbeiten. *Methode* kommt von altgr. μετα [metá] ‘über’ und ὁδός [hodós] ‘Weg’. Bislang nutzen wir Wege, hier also stetige Abbildungen $\alpha : [0,1] \to X$, vorrangig um den Wegzusammenhang eines Raumes X zu behandeln. Doch Wege leisten noch viel mehr: Wir können mit Wegen rechnen! Diese fundamentale Idee ist Gegenstand des vorliegenden Kapitels.

In Analysis und Physik nutzen wir Wege für **Wegintegrale** und lösen damit das Potentialproblem für Vektorfelder: Genau dann besitzt das $\mathscr{C}^0$–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf dem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathscr{C}^1$–Potential $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$, wenn das Wegintegral $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma$ verschwindet entlang jedes geschlossenen Weges γ in U. In diesem Falle erhalten wir das ersehnte Potential F durch das (nun wegunabhängige!) Wegintegral

$$F(x) = F(x_0) + \int_{s=x_0}^{x} f(s) \bullet \mathrm{d}s.$$

Umgekehrt gesehen: Mit geeigneten Vektorfeldern können wir Wege untersuchen und so zum Beispiel die Umlaufzahl bestimmen, siehe J118.

Wir rechnen mit Wegen!

Für Wege haben wir drei grundlegende **Operationen**: den konstanten Weg 1_a, die Wegumkehr $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ sowie die Aneinanderhängung $\alpha * \beta$. Wegverbindbarkeit ist demnach reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Äquivalenzklassen sind die Wegkomponenten des Raums X (G2F).

In der Topologie nutzen wir Wege zunächst für $\pi_0(X)$ und dann für die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(X, x_0)$ und ebenso elegant wie allgemein für das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ eines Raumes X. Dies wollen wir erklären, erst sorgsam definieren, dann effizient berechnen. Dabei wiederholen sich die obigen drei Operationen nun für Homotopien von Wegen!

Ausblick: Diese Theorie lässt sich in höherer Dimension weiter treiben. Dies nutzt man in so diversen Gebieten wie der Algebraischen Topologie, der höheren Kategorientheorie und der Logik / Homotopietypentheorie (*Homotopy Type Theory*, kurz *HoTT*). Wege beschreiben Umformungen, Programme, Beweise, …. Die HoTT tritt an als konstruktive Alternative zur bewährten Mengenlehre, als Grundlage für die gesamte Mathematik, insbesondere als Brücke zur Informatik und zu Beweisassistenten.

Worum geht es in der Algebraischen Topologie?

Die Algebraische Topologie untersucht topologische Räume und ihre stetigen Abbildungen durch die Übersetzung in algebraische Objekte und ihre Homomorphismen. Jedem topologischen Raum X wird hierzu ein algebraisches Objekt $F(X)$ zugeordnet, typischerweise eine Gruppe wie $\pi_1(X, x_0)$ oder je nach Situation auch nur eine Menge wie $\pi_0(X)$ oder sogar ein Ring wie $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$. Zudem wird jeder stetigen Abbildung $g : X \to Y$ ein Homomorphismus $F(g) : F(X) \to F(Y)$ zugeordnet.

Diese Zuordnung soll *funktoriell* sein, das heißt, die Komposition stetiger Abbildungen $g : X \to Y$ und $h : Y \to Z$ soll übergehen in die Komposition von Homomorphismen, also $F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ soll natürlch übergehen in den identischen Homomorphismus $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$. Wir sagen zusammenfassend, F ist ein *Funktor* von der Kategorie `Top` der topologischen Räume in die Kategorie `Grp` der Gruppen (bzw. Mengen, Ringe, …).

Der Funktor F leistet die ersehnte Übersetzung.

Worum geht es in der Algebraischen Topologie?

In diesem Kapitel führen wir die *Fundamentalgruppe* ein und lernen so den Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ kennen. Dieser ist, wie der Name andeutet, für die Topologie von fundamentaler Bedeutung. Im nächsten Kapitel werden wir diese Entwicklung fortführen durch das duale Konzept der Überlagerungen und in gewisser Weise vollenden.

Ein solcher Funktor liefert ein algebraisches Abbild des ursprünglich topologischen Sachverhalts. Oft ist das algebraische Abbild gröber, somit leichter zu verstehen, und erlaubt eine Lösung des Problems. Die Fundamentalgruppe unterscheidet zum Beispiel bequem und präzise alle geschlossenen Flächen, damit vollenden wir die Klassifikation (L6N).

In günstigen Fällen funktioniert die Übersetzung auch umgekehrt, und die Topologie erleuchtet die Algebra, wie im Satz von Nielsen-Schreier (M5D). Seine Aussage ist rein algebraisch: In jeder freien Gruppe ist jede Untergruppe frei. Der Beweis hingegen gelingt am besten topologisch, mit der Fundamentalgruppe und Überlagerungen von Graphen.

Abstraktion und Konkretion arbeiten zusammen.

Die Algebraische Topologie konstruiert und nutzt geeignete Funktoren, um von topologischen Räumen ein algebraisches Abbild zu erstellen, das ausreichend akkurat ist, zumindest für große und interessante Klassen von Fragestellungen. Konstruktion und Anwendung solcher Funktoren sind meist subtil und raffiniert, aber auch von ganz eigener Schönheit.

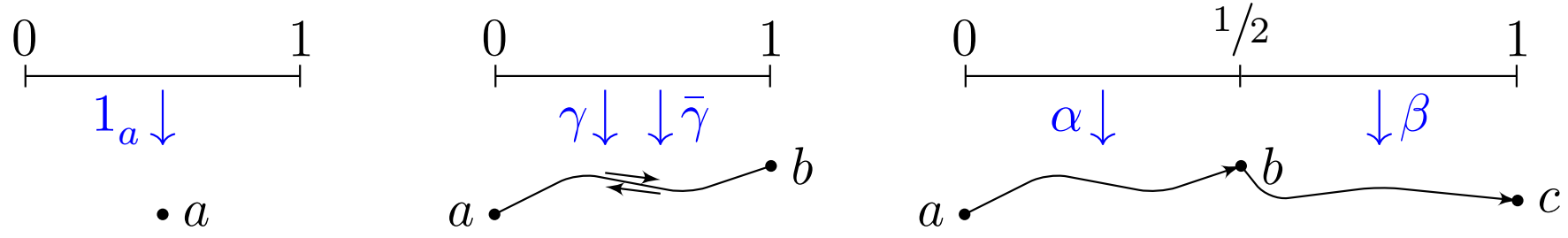
Die Schwierigkeit ist oft nicht die allgemeine *Definition* der Invariante / unseres Funktors, sondern die *Berechnung* in konkreten Anwendungen. Uns gelingt erfreulich rasch folgende kleine, aber feine Auswahl:

topologischer Raum	Fundamentalgruppe (bis auf Isomorphie)	Ref
$X \simeq *$ zsziehbar	$\{1\}$	L2N
$\mathbb{S}^n,\ n \geq 2$	$\{1\}$	L2U
$\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^*$	$(\mathbb{Z}, +)$	L4C
$\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \dots, a_g\}$	$\langle s_1, \dots, s_g \,\vert\, - \rangle$	L4D
$\mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_g\}, n \geq 3$	$\{1\}$	L4E

Abstraktion und Konkretion arbeiten zusammen.

topologischer Raum	Fundamentalgruppe (bis auf Isomorphie)	Ref
zshgd. Graph K	$\langle s_1, \dots, s_g \mid - \rangle$, endlich: $\chi(K) = 1 - g$	L6D
$\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1/\{\pm 1\} \cong \mathbb{S}^1$	$(\mathbb{Z}, +)$	L2E
$\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2/\{\pm\}$	$(\mathbb{Z}/2, +)$	L6L
$\mathbb{RP}^n$, $n \geq 2$	$(\mathbb{Z}/2, +)$	L6T
$\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2 \mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$	$(\mathbb{Z}, +)$	L6U
$\mathrm{GL}_3^+ \mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$	$(\mathbb{Z}/2, +)$	L6U
$\mathrm{GL}_2 \mathbb{C} \simeq \mathrm{GU}_2 \mathbb{C}$	$(\mathbb{Z}, +)$	L8I
Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$	L2O
Kleinsche Flasche	$\langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$	L6M
Fläche F_g^+	$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$	L6M
Fläche F_g^-	$\langle c_0, c_1, \dots, c_g \mid c_0 c_0 c_1 c_1 \cdots c_g c_g \rangle$	L6M
Fläche $F_{g,r}^+$, $r \geq 1$	$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_2, \dots, d_r \mid - \rangle$	L6H
Fläche $F_{g,r}^-$, $r \geq 1$	$\langle c_0, c_1, \dots, c_g, d_2, \dots, d_r \mid - \rangle$	L6H

Operationen auf Wegen



Definition L1A: Operationen auf Wegen

Die Menge aller Wege von a nach b im Raum X bezeichnen wir mit:

$$P(X,a,b) := \{\gamma : [0,1] \to X \text{ stetig} \,|\, \gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b\}$$

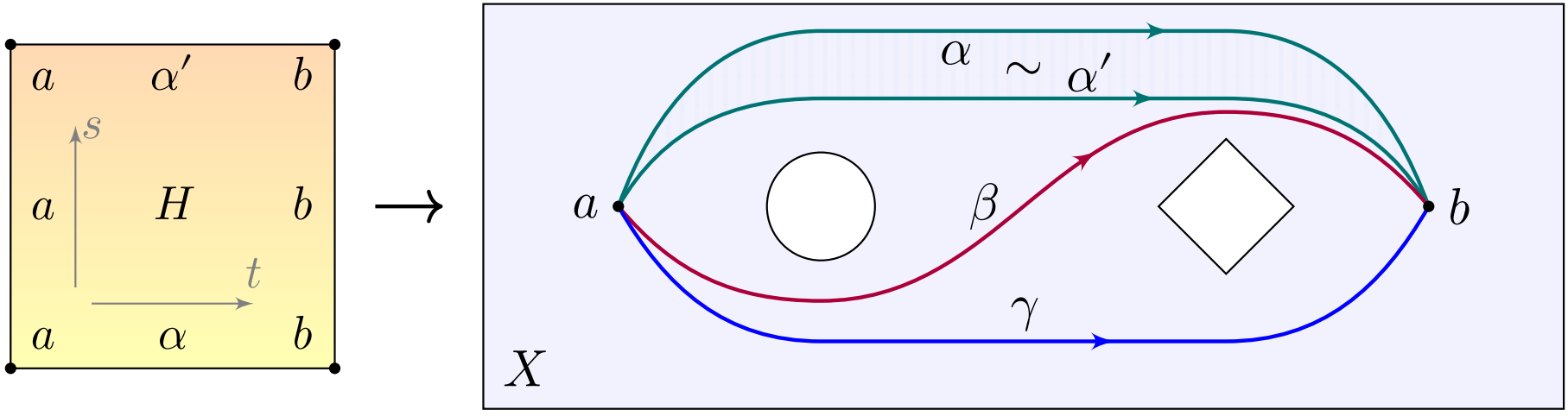
(1) Der **konstante Weg** $1_a \in P(X,a,a)$ ist $1_a : t \mapsto a$.
(2) Die **Wegumkehr** $^- : P(X,a,b) \to P(X,b,a)$ ist $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$.
(3) Die **Aneinanderhängung** $* : P(X,a,b) \times P(X,b,c) \to P(X,a,c)$ ist

$$\alpha * \beta : [0,1] \to X : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Die Abbildung $\alpha * \beta$ ist wohldefiniert dank $\alpha(1) = \beta(0) = b$ und stetig dank Verklebesatz E1P, denn $[0, 1/2]$ und $[1/2, 1]$ sind abgeschlossen.

Äquivalenz von Wegen

Damit definieren wir Wegkomponenten $\pi_0(X)$ wie in Kapitel G. Nun schauen wir uns die möglichen Wege von a nach b in X genauer an:



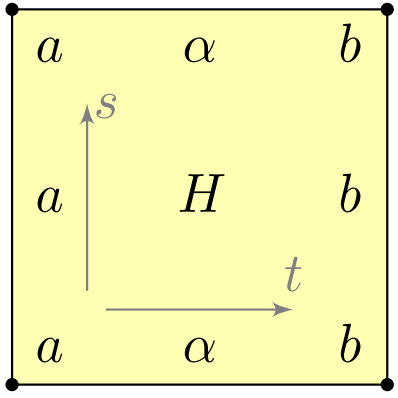
Definition L1B: Äquivalenz von Wegen

Zwei Wege $\alpha, \alpha' \in P(X, a, b)$ heißen **äquivalent**, oder ausführlich: **homotop bei festen Endpunkten**, geschrieben $H : \alpha \sim \alpha'$, falls eine Homotopie $H : \alpha \simeq \alpha' \text{ rel } \{0, 1\}$ existiert, also eine stetige Abbildung $H : [0, 1]^2 \to X$ mit $H(0, t) = \alpha(t)$ und $H(1, t) = \alpha'(t)$ sowie $H(s, 0) = a$ und $H(s, 1) = b$ für alle $s, t \in [0, 1]$. Graphisch stellen wir die Homotopie H wie oben durch das Quadrat $[0, 1]^2$ mit beschrifteten Kanten dar.

Operationen auf Homotopien

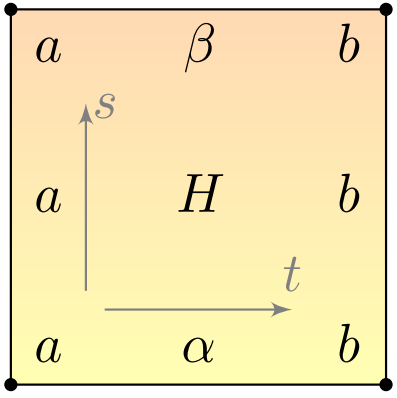
Die Relation $\sim$ auf $P(X, a, b)$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
Wie bei Wegen nutzen wir folgende drei Operationen für Homotopien:

Reflexivität

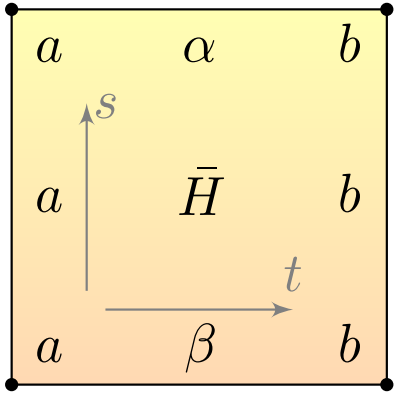


,

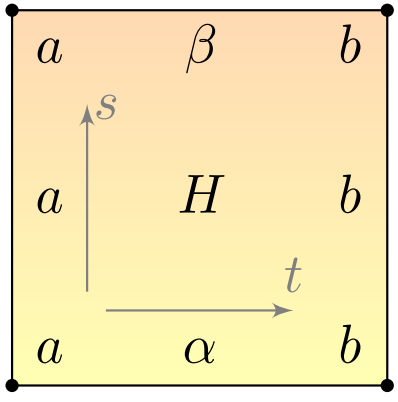
Symmetrie



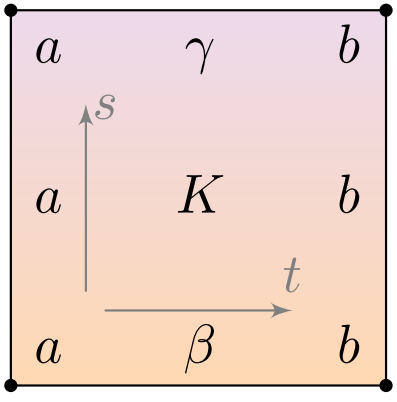
$\Longrightarrow$



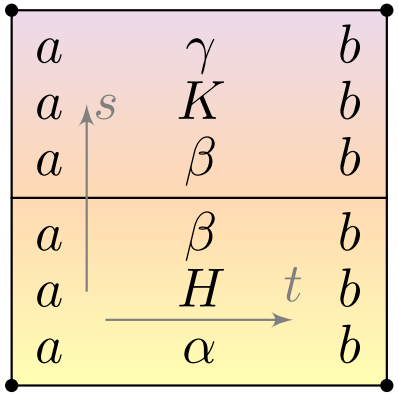
Transitivität



&



$\Longrightarrow$



Operationen auf Homotopien

Aufgabe: Übersetzen Sie diese Skizzen in explizite Formeln.
Begründen Sie so die (immer implizit) behauptete Stetigkeit.

Lösung: (1) Reflexivität: Für jeden Weg $\alpha : [0,1] \to X$ gilt $H : \alpha \sim \alpha$ für die in s konstante Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X : H(s,t) \mapsto \alpha(t)$. Diese Abbildung ist offensichtlich stetig, dank UAE des Produkts.

(2) Symmetrie: Aus jeder Homotopie $H : \alpha \sim \beta$ folgt $\bar{H} : \beta \sim \alpha$ für die in s umgekehrte Homotopie $\bar{H} : [0,1] \times [0,1] \to X : (s,t) \mapsto H(1-s,t)$. Diese Abbildung ist stetig, da Komposition stetiger Abbildungen.

(3) Transitivität: Aus Homotopien $H : \alpha \sim \beta$ und $K : \beta \sim \gamma$ folgt wie skizziert $H \underset{1}{*} K : \alpha \sim \gamma$ durch die in s verknüpfte Homotopie

$$H \underset{1}{*} K : [0,1] \times [0,1] \to X : (s,t) \mapsto \begin{cases} H(2s,t) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ K(2s-1,t) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Die Stetigkeit von $H * K$ folgt aus dem Verklebesatz (E1P).

Verknüpfung von Wegeklassen

Proposition L1c: Verknüpfung von Wegeklassen

(0) Äquivalenz von Wegen ist eine Äquivalenzrelation auf $P(X,a,b)$. Die Quotientenmenge bezeichnen wir mit $\Pi(X,a,b) := P(X,a,b)/_\sim$.

(1) Aus $H : \alpha \sim \beta$ folgt $\bar{H} : \bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$ mit $\bar{H}(s,t) = H(s,1-t)$. Wir erhalten somit durch Wegumkehr eine wohldefinierte Umkehr von Wegeklassen,

$$^{-} : \Pi(X,a,b) \to \Pi(X,b,a) \quad \text{mit} \quad \overline{[\alpha]} := [\overline{\alpha}].$$

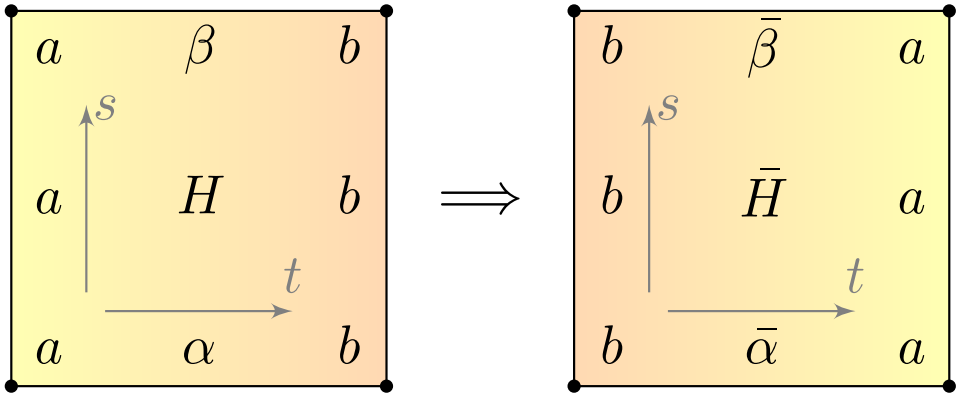
(2) Aus $H : \alpha \sim \alpha'$ in $P(X,a,b)$ und $K : \beta \sim \beta'$ in $P(X,b,c)$ folgt $H \underset{2}{*} K : \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ in $P(X,a,c)$. Wir erhalten somit

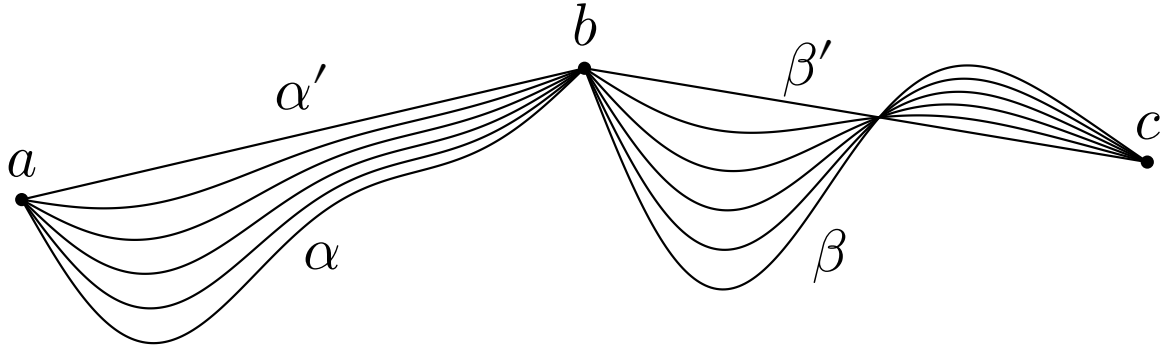
$$\cdot : \Pi(X,a,b) \times \Pi(X,b,c) \to \Pi(X,a,c) \quad \text{mit} \quad [\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta].$$

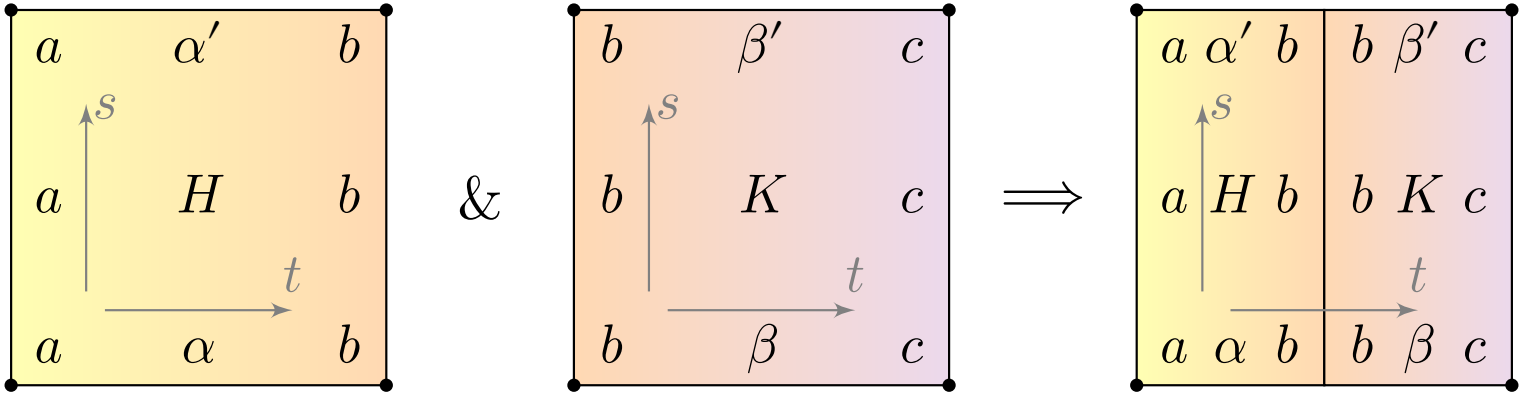
In Worten: Wir verknüpfen verknüpfbare Wegeklassen $[\alpha] \in \Pi(X,a,b)$ und $[\beta] \in \Pi(X,b,c)$ durch die Aneinanderhängung ihrer Repräsentanten gemäß $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta] \in \Pi(X,a,c)$. Dank (2) ist dies wohldefiniert.

Verknüpfung von Wegeklassen

Skizze:







Verknüpfung von Wegeklassen

Aufgabe: Übersetzen Sie diese Skizzen in explizite Formeln.
Begründen Sie so die (immer implizit) behauptete Stetigkeit.

Lösung: (0) Reflexivität, Symmetrie und Transitivität haben wir bereits oben geklärt. Die Äquivalenz $\sim$ trägt also ihren Namen zurecht!

(1) Inversion: Aus jeder Homotopie $H : \alpha \sim \beta$ folgt $\bar{H} : \bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$ für die in t umgekehrte Homotopie $\bar{H} =: [0,1] \times [0,1] \to X : (s,t) \mapsto H(s,1-t)$.

(2) Verknüpfung: Aus Homotopien $H : \alpha \sim \alpha'$ und $K : \beta \sim \beta'$ folgt wie skizziert $H \underset{2}{*} K : \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ durch die in t verknüpfte Homotopie

$$H \underset{2}{*} K : [0,1] \times [0,1] \to X : (s,t) \mapsto \begin{cases} H(s,2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ K(s,2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

🙂 Verknüpfung der Homotopien gibt eine Homotopie der Verknüpfung.

Die Stetigkeit von $H * K$ folgt aus dem Verklebesatz (E1P). Die Inversion und die Verknüpfung sind demnach wohldefiniert auf Wegeklassen.

Verknüpfung von Wegeklassen

Sind diese Rechnungen langweilig? Ja! Sind sie dennoch nötig? Auch ja! Manchen fällt die(se) Mathematik unnötig schwer, weil sie leichtsinnig springen von „Das ist banal!“ zu „Das ist unverständlich!“. Machen Sie es richtig, lernen Sie mit Stift und Papier und rechnen Sie alles nach!

Zunächst einmal sind diese Feststellungen alle sehr naheliegend und präzisieren offensichtliche Beobachtungen zu Wegen und Homotopien. Darauf wären Sie auch alleine gekommen, vermutlich wäre Ihnen all das nur viel zu einfach vorgekommen, um es sorgfältig aufzuschreiben.

Warum mache ich mir dann diese pedantische Mühe? Ganz einfach: Diese Rechenregeln mögen zwar zunächst unscheinbar daherkommen, doch wir werden uns im Folgenden immer wieder darauf berufen. Daher fangen wir ganz unten an und legen ein solides Fundament.

Soweit die logische Sicht. Aus didaktischer Sicht erkläre ich alle Konstruktionen kleinschrittig genug, dass Sie gut folgen können, aber möglichst nicht zu kleinlich, um Langeweile zu vermeiden. Das Beste ist wie immer die Arbeitsteilung. Klären Sie die Details!

Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Satz L1D: Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Jeder topologische Raum X definiert eine Kategorie $\Pi(X)$:

(a) Objekte sind die Punkte $a, b, c, d, \ldots \in X$ des Raumes X.

(b) Morphismen $[\alpha] : a \to b$ sind die Wegeklassen von a nach b in X.

(c) Die Verknüpfung ist die Aneinanderhängung von Wegeklassen.

Diese Verknüpfung erfreut sich folgender Eigenschaften:

(1) Identität: Für $\alpha : a \to b$ gilt $1_a * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * 1_b$, also

$$[1_a] \cdot [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] \cdot [1_b].$$

(2) Inversion: Für $\alpha : a \to b$ gilt $\alpha * \bar{\alpha} \sim 1_a$ und $\bar{\alpha} * \alpha \sim 1_b$, also

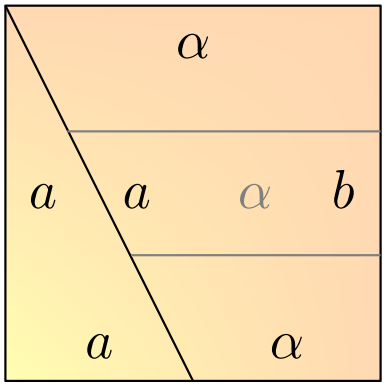
$$[\alpha] \cdot [\bar{\alpha}] = [1_a] \quad \text{und} \quad [\bar{\alpha}] \cdot [\alpha] = [1_b].$$

(3) Assoziativität: Für $a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} d$ gilt $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$, also

$$([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]).$$

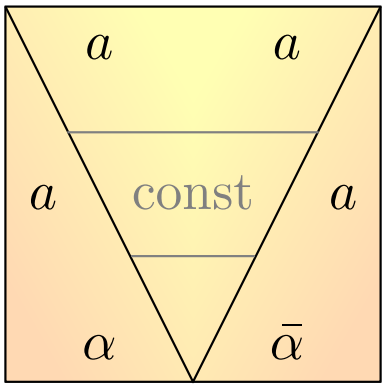
Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Beweis: Wir konstruieren passende Homotopien $H : [0,1] \times [0,1] \to X$:



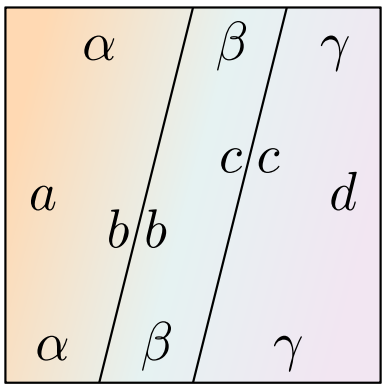
(1) Identität $H : 1_a * \alpha \sim \alpha$,

$$H(s,t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ \alpha(\frac{2t-1+s}{1+s}) & \text{für } \frac{1-s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$



(2) Inversion $H : \alpha * \bar{\alpha} \sim 1_a$,

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ \alpha(1-s) & \text{für } \frac{1-s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ \alpha(2-2t) & \text{für } \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$



(3) Assoziativität $H : (\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$,

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1+s}{4}, \\ \beta(4t-1-s) & \text{für } \frac{1+s}{4} \le t \le \frac{2+s}{4}, \\ \gamma(\frac{4t-2-s}{2-s}) & \text{für } \frac{2+s}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Definition L1E: Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Wir nennen $\Pi(X)$ das **Fundamentalgruppoid** des Raumes X.

Allgemein ist ein **Gruppoid** $\mathtt{G}$ eine Kategorie, in der jeder Morphismus invertierbar ist. Ein **Gruppoidhomomorphismus** ist ein Funktor zwischen Gruppoiden. Diese bilden die Kategorie $\mathtt{Grpoid}$.

Bemerkung: Hat das Gruppoid $\mathtt{G}$ nur ein Objekt, $\mathrm{Ob}_{\mathtt{G}} = \{x\}$, so besteht $\mathtt{G}$ nur aus der einen Gruppe $G = \mathrm{Aut}(x) = \mathrm{Mor}_{\mathtt{G}}(x, x)$. Umgekehrt können wir jedes Gruppoid $\mathtt{G}$ als verallgemeinerte Gruppe betrachten: Zwar sind nicht alle Paare von Morphismen verknüpfbar, doch für verknüpfbare gilt stets Assoziativität, und es gibt neutrale und inverse Elemente.

Beispiel: In der vertrauten Kategorie $\mathtt{FinVec}_K$ der endlich-dimensionalen Vektorräume über einem Körper K betrachten wir die Unterkategorie $\mathtt{FinVec}_K^{\times}$ aller Isomorphismen. Dies ist ein Gruppoid. Genau dann sind zwei Vektorräume verbindbar, liegen also in derselben „Komponente“, wenn Sie gleiche Dimension haben. Kanonische Repräsentanten sind K^n.

Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Wir werden später zu Fundamentalgruppen übergehen, doch vorerst ist das Fundamentalgruppoid das natürlichere und näherliegende Konzept. Für die ohnehin notwendigen, langweilig-grundlegenden Nachweise kostet es kaum Mehraufwand, dafür bietet es nützliche Flexibilität.

Das Fundamentalgruppoid ist ein zutiefst demokratisches Konzept: Alle Punkte $a \in X$ sind gleichberechtigt! Es gibt kein Zentrum und keinen ausgezeichneten Punkt, der schöner wäre als andere.
Genau so demokratisch ist allgemein auch unser Raum X.

Für die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ müssen / wollen / werden wir die perfekte Symmetrie brechen und einen Punkt $x_0 \in X$ auszeichnen. Das ist meist ein Akt der Willkür, kann aber Rechnungen vereinfachen. Vorerst folgen wir dem Credo der anarchistischen Bewegung:

Ni Dieu ni Maître *de conférences*
[Kein Gott, kein Herr Assistenzprofessor]

Wege/klassen unter stetigen Abbildungen

Satz L1ı: stetige Abbildung

(1) Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Homomorphismus der zugehörigen Fundamentalgruppoide, nämlichden Funktor

$$f_\sharp = \Pi(f) : \Pi(X) \to \Pi(Y), \quad X \ni a \mapsto f(a) \in Y,$$
$$([\alpha] : a \to b) \mapsto ([f \circ \alpha] : f(a) \to f(b)).$$

In Worten: Wir ordnen jedem Punkt $a \in X$ seinen Bildpunkt $f(a) \in Y$ zu und jeder Wegeklasse $[\alpha] : a \to b$ in X ihr Bild $[f \circ \alpha] : f(a) \to f(b)$ in Y.

(2) Zusammengefasst: Wir erhalten den Funktor $\Pi : \mathtt{Top} \to \mathtt{Grpoid}$.
Er ordnet jedem Raum X sein Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ zu und jeder stetigen Abbildung $f : X \to Y$ den Funktor $\Pi(f) : \Pi(X) \to \Pi(Y)$.

Aufgabe: Dies folgt direkt aus den Definitionen, ist demnach trivial.
Falls Sie üben wollen oder zweifeln: Was ist zu zeigen? Zeigen Sie es!
Auch triviale Rechnungen wollen durchgeführt und geprüft werden.
Dann dürfen Sie selbstbewusst ausrufen: „Ja, es ist wirklich trivial!“

Wege/klassen unter stetigen Abbildungen

Beweis: (1) Wir rechnen nach, dass $f_\sharp$ tatsächlich ein Funktor ist.
Für den konstanten Weg 1_a in $a \in X$ gilt $f_\sharp([1_a]) = [f \circ 1_a] = [1_{f(a)}]$.
Für die Verknüpfung sehen wir ebenso durch Einsetzen der Definitionen:

$$f_\sharp([\alpha] \cdot [\beta]) \overset{\text{Def}}{=} f_\sharp([\alpha * \beta]) \overset{\text{Def}}{=} [f \circ (\alpha * \beta)]$$
$$\overset{\text{Def}}{=} [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \overset{\text{Def}}{=} [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] \overset{\text{Def}}{=} f_\sharp([\alpha]) \cdot f_\sharp([\beta]).$$

Somit ist $f_\sharp : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ ein Funktor, wie behauptet. Daraus folgt die Inversion, allgemein für jeden Gruppoidhomomorphismus, hier konkret

$$[f \circ \overline{\alpha}] = [\overline{f \circ \alpha}] = \overline{[f \circ \alpha]}.$$

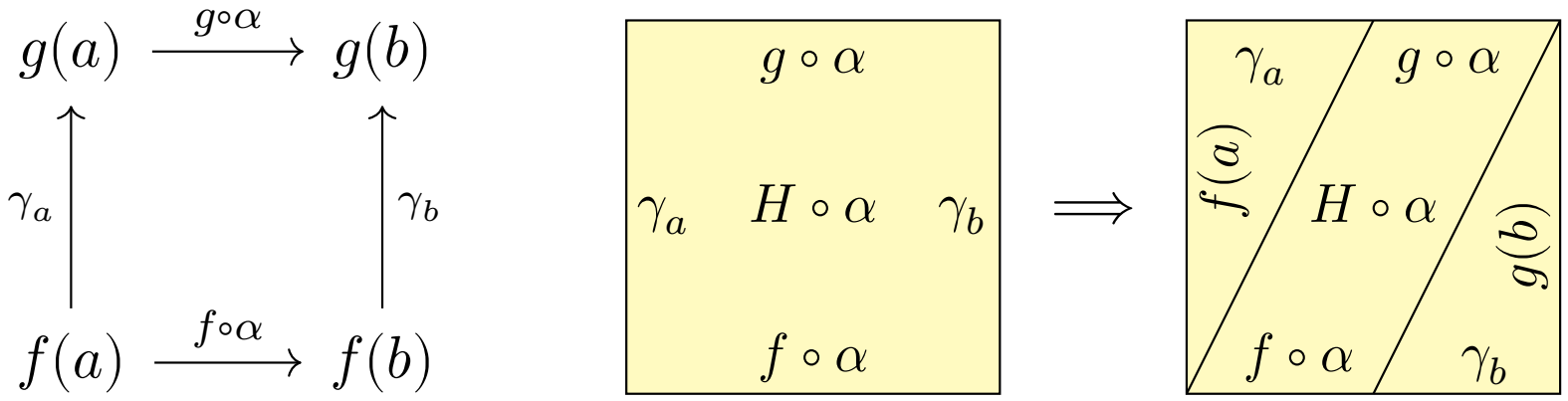
(2) Wir rechnen nach, dass $\Pi : \texttt{Top} \to \texttt{Grpoid}$ ein Funktor ist.

Für $\mathrm{id}_X : X \to X$ gilt $\Pi(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Pi(X)}$, denn es gilt $a \mapsto \mathrm{id}_X(a) = a$ für alle Punkte $a \in X$ und $[\alpha] \mapsto [\mathrm{id}_X \circ \alpha] = [\alpha]$ für alle Wege α in X.

Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ in $\texttt{Top}$ gilt $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ in $\texttt{Grpoid}$, denn $a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a))$ und $[\alpha] \mapsto [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)]$. QED

Wege/klassen unter Homotopien

Sei $H : [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Zu $a \in X$ erhalten wir $\gamma_a : [0,1] \to Y : t \mapsto H(t,a)$. Für $\alpha \in P(X,a,b)$ folgt:



Umwandlung von H zu K mit festen Endpunkten,

$$K(s,t) = \begin{cases} H(2t,a) & \text{für } 0 \le t \le \frac{s}{2}, \\ H(s,\alpha(2t-s)) & \text{für } \frac{s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ H(2t-1,b) & \text{für } \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Lemma L1j: Homotopie

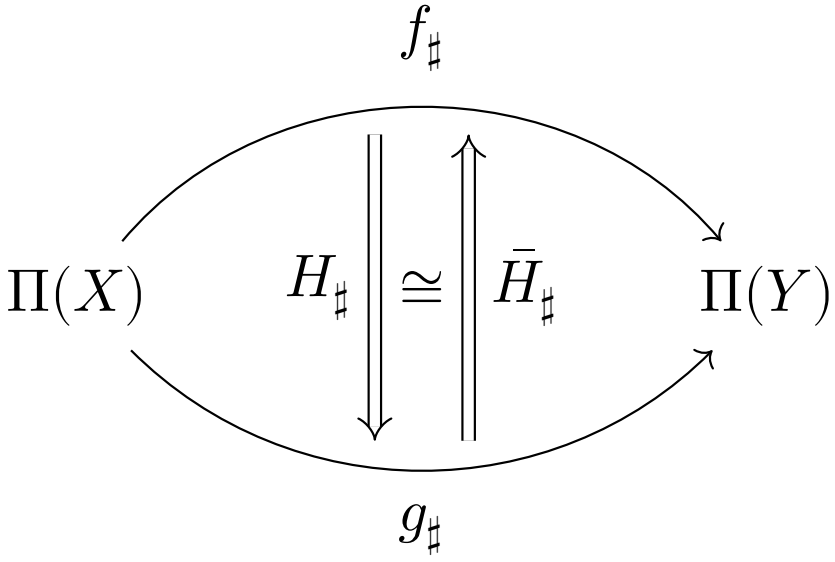
Sei $H : f \simeq g$ eine Homotopie. Für jeden Weg $\alpha \in P(X,a,b)$ folgt $K : (f \circ \alpha) * \gamma_b \sim \gamma_a * (g \circ \alpha)$ mit $\gamma_a(t) = H(t,a)$ und $\gamma_b(t) = H(t,b)$.

Wege/klassen unter Homotopien

Satz L1κ: natürlicher Isomorphismus

Jede Homotopie $(H, \bar{H}) : f \simeq g : X \to Y$ stetiger Abbildungen induziert einen natürlichen Isomorphismus $(H_\sharp, \bar{H}_\sharp) : f_\sharp \cong g_\sharp : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ der zugehörigen Funktoren / Fundamentalgruppoidhomomorphismen.

Als hilfreiches Sinnbild:



Beweis: Was ist hier zu zeigen? Zeigen Sie es! Diese Fingerübung erfordert das sorgsame Lesen und Umsetzen obiger Definitionen.

Und nun?

Die Konstruktion des Fundamentalgruppoids $\Pi(X)$ ist zwar abstrakt, aber leicht: Wir haben in diesem Abschnitt die wichtigsten Eigenschaften formuliert und bewiesen. Der Nachweis verlangt jeweils die Konstruktion einer passenden Homotopie, und hierzu mussten wir nicht lange suchen. Das ist eine leichte Übung in begrifflicher Sorgfalt; sie ist notwendig, um technische Sicherheit zu gewinnen und alle Details zu klären.

Viel schlauer sind wir dadurch noch nicht: Unser eigentliches Ziel ist es, topologische Räume X, Y und stetige Abbildungen $f : X \to Y$ besser zu verstehen. Als Werkzeug haben wir nun die Kategorie $\Pi(X)$, doch diese ist vorerst nur *abstract general nonsense*. Als algebraische Struktur ist sie zwar vielseitig einsetzbar, zum Beispiel für Wegintegrale (§L5), doch für direkte Anwendung und Berechnung leider noch etwas unübersichtlich.

Wir brauchen Werkzeuge, möglichst wirksam und effizient!

Und nun?

Wir wollen hierzu eine weitere Vereinfachung vornehmen und von $\Pi(X)$ zur Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ übergehen. Diese können wir dann in konkreten Beispielen explizit berechnen, sodass wir topologische Räume unterscheiden und stetige Abbildungen vergleichen können.

Studienanfänger:innen klagen: „Die abstrakten Definitionen sind schwer, zum Glück sind konkrete Beispiele und explizite Rechnungen leicht.“ In der Algebraischen Topologie, wie in vielen realen Anwendungen, ist es genau umgekehrt: Fragen ist leicht, Antworten ist schwer.

Für die Algebraische Topologie besteht die Schwierigkeit nicht in der abstrakten Definition von $\Pi(X)$ bzw. $\pi_1(X, x_0)$, also nicht in der Frage „Wie verhalten sich Wege in X?“, sondern in der informativen Antwort, expliziten Berechnung, möglichst konkret und einfach zu handhaben.

In diesem Kapitel wollen wir beide Aspekte zum guten Ende führen: elegant-allgemeine Methoden und effizient-konkrete Anwendungen! Das kostet etwas Geduld, schwer ist es glücklicherweise nicht.

Anwendung in der Analysis: Wegintegrale

Vielleicht denken Sie beim ersten Kontakt: Das Fundamentalgruppoid ist zwar mathematisch elegant, hat aber wohl kaum Anwendungen, oder? Weit gefehlt! Im Gegenteil, Sie nutzen es nahezu überall. Als berühmtes Beispiel kennen Sie das folgende Potentialproblem von Vektorfeldern.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dies können wir integrieren über jeden stückweise $\mathscr{C}^1$–glatten Weg $\gamma : [a, b] \to U$.

$$I_f : (P'(U), *) \to (\mathbb{R}, +) : \gamma \mapsto \int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Hierbei ist $P'(U)$ die Menge aller stückweise $\mathscr{C}^1$–glatten Wege.
Das Integral $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma$ ist invariant bei Umparametrisierung von γ.
Zudem verträgt es sich mit den üblichen Operationen auf Wegen:

1. Für jeden konstanten Weg $\gamma = 1_a$ gilt $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = 0$.
2. Für den zu γ inversen Weg $\bar{\gamma}$ gilt $\int_{\bar{\gamma}} f \bullet \mathrm{d}\gamma = -\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma$.
3. Für die Aneinanderhängung gilt $\int_{\alpha * \beta} f \bullet \mathrm{d}\gamma = \int_\alpha f \bullet \mathrm{d}\alpha + \int_\beta f \bullet \mathrm{d}\beta$.

Anwendung in der Analysis: Wegintegrale

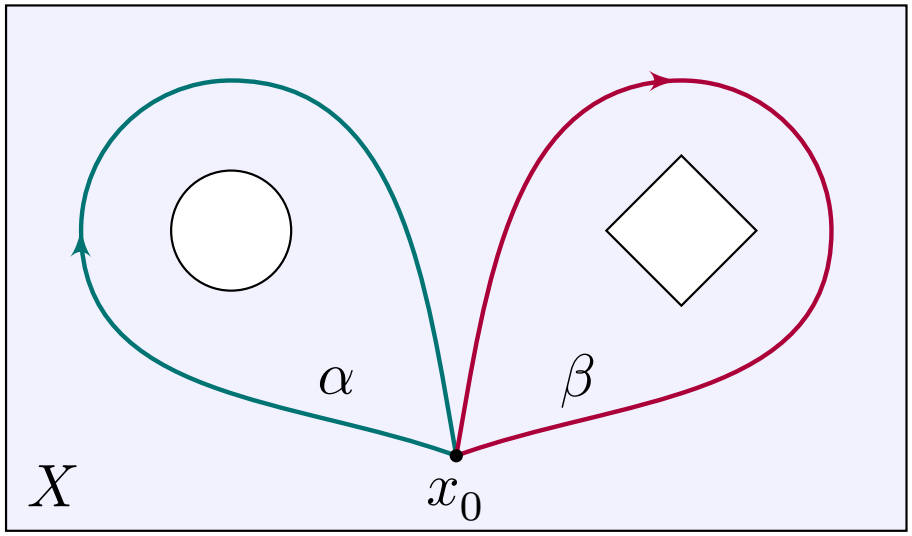
Wir erhoffen uns einen Funktor $\Pi(U) \to \mathbb{R}$, doch im Allgemeinen ändert sich das Wegintegral $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma$ bei Homotopie von γ. Invarianz gilt, wenn f *rotationsfrei* ist, wie wir in L5L zeigen und im Hauptsatz L5M nutzen.

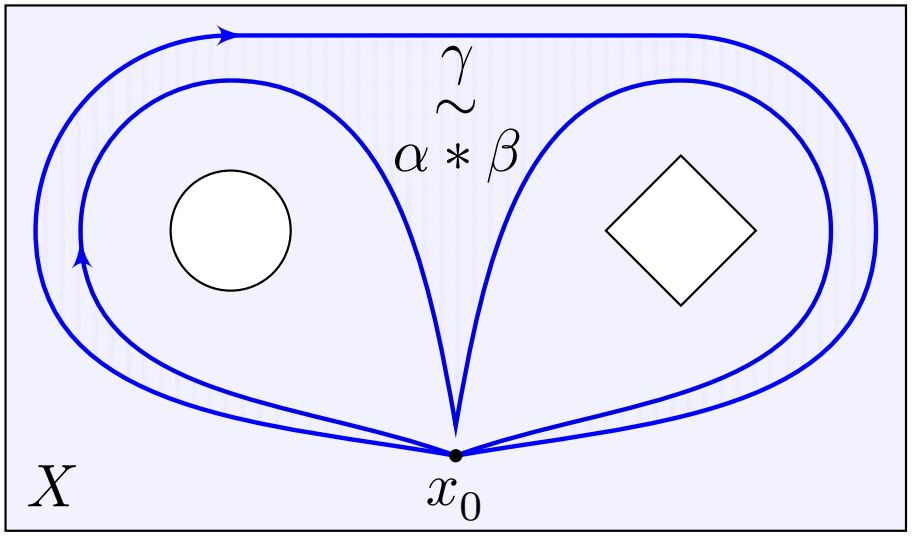
Hauptsatz, Integrationsteil: Genau dann besitzt das $\mathscr{C}^0$–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf dem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathscr{C}^1$–Potential $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$, wenn das Wegintegral $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma$ verschwindet entlang jedes geschlossenen Weges γ in U. In diesem Falle erhalten wir das ersehnte Potential F durch das (nun wegunabhängige!) Wegintegral

$$F(x) = F(x_0) + \int_{s=x_0}^{x} f(s) \bullet \mathrm{d}s.$$

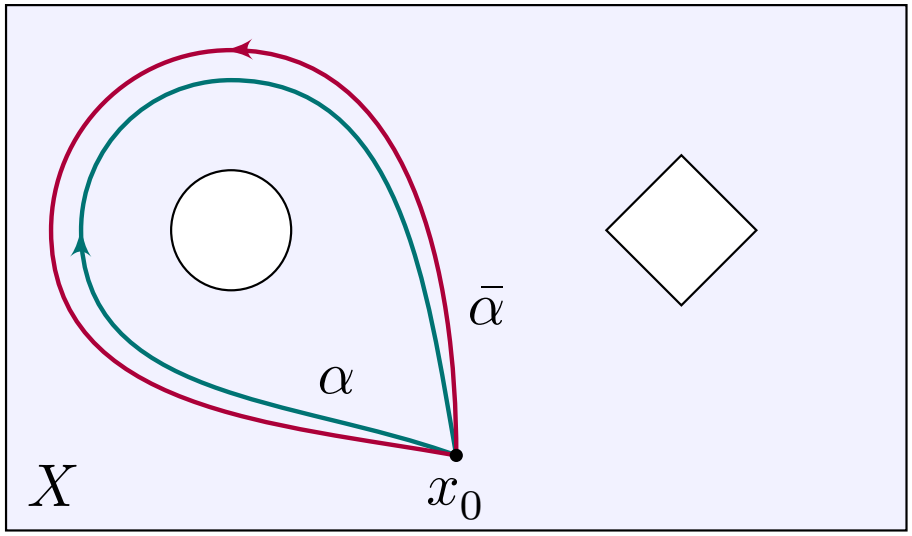
Der Differentialteil geht noch weiter. Hierzu sei f zudem $\mathscr{C}^1$–glatt. Notwendig für ein Potential ist dann die lokale Bedingung, dass die Rotation $\partial_j f_i - \partial_i f_j$ verschwindet für alle i, j. Dies sorgt bereits dafür, dass das Wegintegral von f homotopie-invariant wird. Hinreichend ist weiterhin die obige globale Bedingung. Es genügt nun, diese auf einem Erzeugendensystem von $\pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$ zu prüfen, was meist leicht ist.

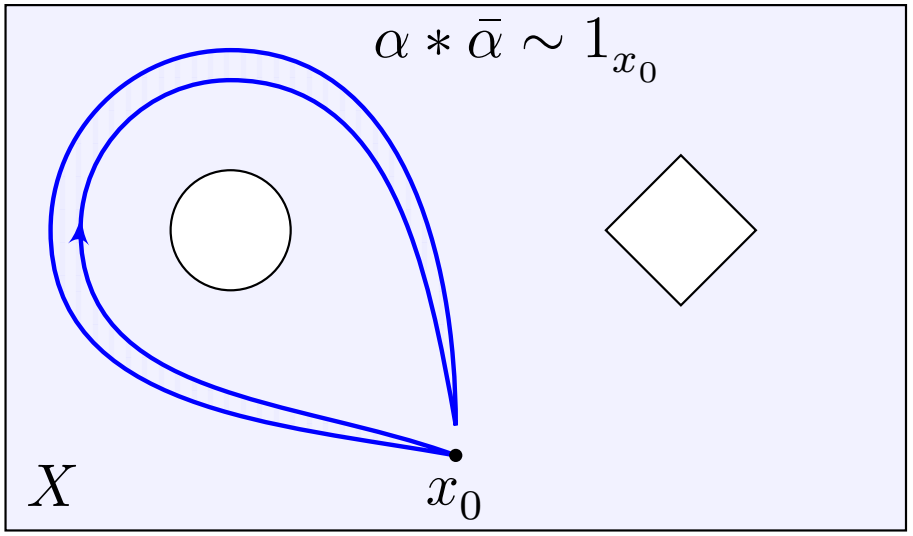
Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$





Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist leicht erklärt und visualisiert:
Schleifen in (X, x_0) modulo Homotopie bei festem Start und Ziel in x_0.





Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$

Erinnerung: Zum Raum X haben wir das **Fundamentalgruppoid**

$$\Pi(X) := P(X)/_\sim = \frac{\{\text{Wege } \alpha : [0,1] \to X\}}{\text{Homotopie in } X \text{ relativ } \{0,1\}}.$$

Start $a \in X$ und Ziel $b \in X$ sind dabei beliebige Punkte im Raum X.
Dies vereinfachen wir, indem wir $x_0 \in X$ als Start und Ziel festlegen!

Definition L2A: Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$

Zum Raum X mit Fußpunkt $x_0 \in X$ haben wir die **Fundamentalgruppe**

$$\pi_1(X, x_0) := \Pi(X, x_0, x_0) = \frac{\{\text{Schleifen } \alpha : ([0,1], \{0,1\}) \to (X, x_0)\}}{\text{Homotopie in } X \text{ relativ } \{0,1\}}$$

weiter mit der Verknüpfung $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$ durch Aneinanderhängen.
Damit ist $(\pi_1(X, x_0), \cdot, [1_{x_0}])$ tatsächlich eine Gruppe, siehe L1D.

Grundlegende Beispiele: Es gilt $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{1\}$ da sternförmig (G4B).
Wir haben $(\deg, \varphi) : (\pi_1(\mathbb{C}^*, 1), \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +) : [t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i k t}] \leftrightarrows k$ dank J1I.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$

Ausführlich in Worten: Eine **Schleife** in (X, x_0) ist ein geschlossener Weg $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Zwei Schleifen α, α' in (X, x_0) sind **äquivalent**, wenn es eine Homotopie $H : \alpha \simeq \alpha' \text{ rel } \{0,1\}$ gibt, also eine stetige Deformation von α nach α' bei festgehaltenen Endpunkten (L1B).

Das Paar $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ ist eine Gruppe (L1D): Die Äquivalenzklasse $[1_{x_0}]$ des konstanten Weges ist neutral in $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$. Zu jeder Schleife α in (X, x_0) ist der umgekehrte Weg $\bar{\alpha}$ ebenfalls eine Schleife in (X, x_0), und die Äquivalenzklassen $[\alpha]$ und $[\bar{\alpha}]$ sind zueinander invers in $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$. Schließlich ist die Verknüpfung von Wegeklassen assoziativ.

⚠ Für die drei Gruppeneigenschaften ist der Übergang zu Wegeklassen wesentlich: Im Schleifenraum $\Omega(X, x_0) := P(X, x_0, x_0)$ gelten Neutrales, Inversion und Assoziativität nicht! Diese drei erreichen wir erst modulo Homotopie bei festgehaltenen Endpunkten.

🙂 Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist leicht zu definieren und zu visualisieren. Anfangs muss man sich an den Begriff der Homotopie gewöhnen, doch glücklicherweise haben Sie damit schon Übung.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$

Ich habe zunächst den allgemeineren Begriff des Fundamentalgruppoids $\Pi(X)$ vorangestellt, nicht allein um zu verallgemeinern, sondern um zu vereinfachen, da die nötigen Nachweise wörtlich dieselben sind:

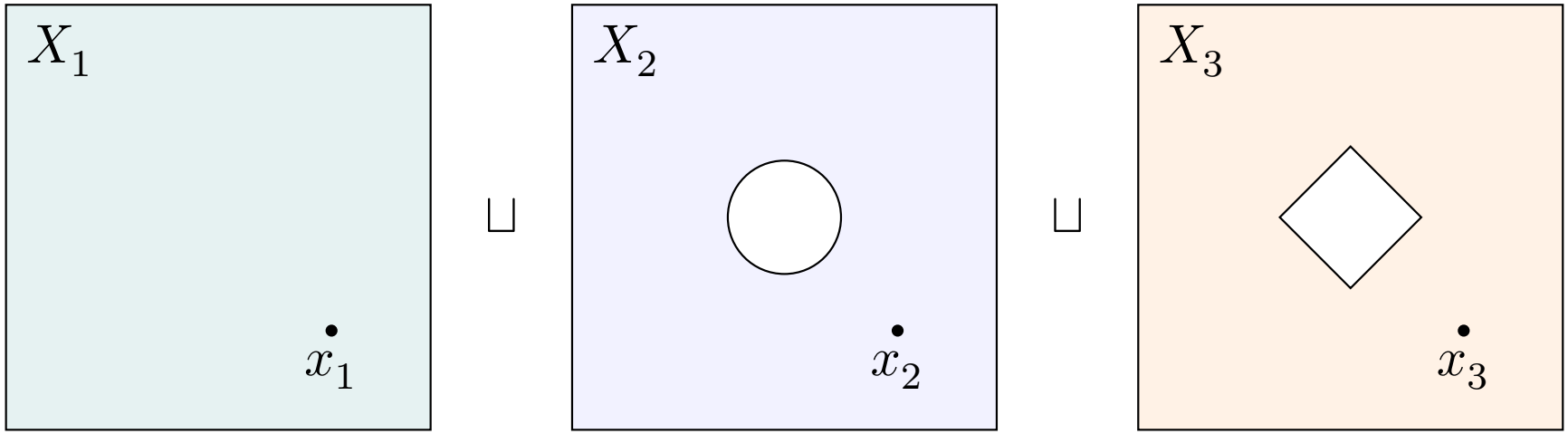
Alle Argumente aus Abschnitt §L1 nutzen wir nun dankend für die Fundamentalgruppe. Sie werden auch nicht leichter, wenn wir (unnötig früh) Start und Ziel auf einen willkürlichen Punkt $x_0 \in X$ festlegen. Im Gegenteil ist der allgemeine Fall eleganter, klarer und flexibler.

Im Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ erweist sich die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0) = \Pi(X, x_0, x_0)$ nun als natürlich-willkommener Spezialfall. Vorteil: Gruppen sind übersichtlicher und einfacher zu verstehen. Nachteil: Wir müssen einen Fußpunkt willkürlich wählen.

Bemerkung: Diese willkürliche Lokalisierung begegnet uns recht oft: In jeder Kategorie $(\mathtt{C}, \circ)$ bilden die Endomorphismen $\mathrm{End}(a) = \mathtt{C}(a, a)$ ein Monoid und darin die Automorphismen $\mathrm{Aut}(a) = \mathrm{End}(a)^\times$ eine Gruppe. In der Linearen Algebra betrachtet man so die Endo/Automorphismen eines linearen Raumes V und lässt dabei die anderen Räume außer Acht.

Der Fußpunkt ist wesentlich!

Die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ zu verschiedenen Fußpunkten $x_0 \neq x_1$ in X sind niemals *gleich*, sie sind sogar disjunkt, da sie nach Definition verschiedene Elemente enthalten! Es kann durchaus vorkommen, dass sie nicht einmal *isomorph* sind:

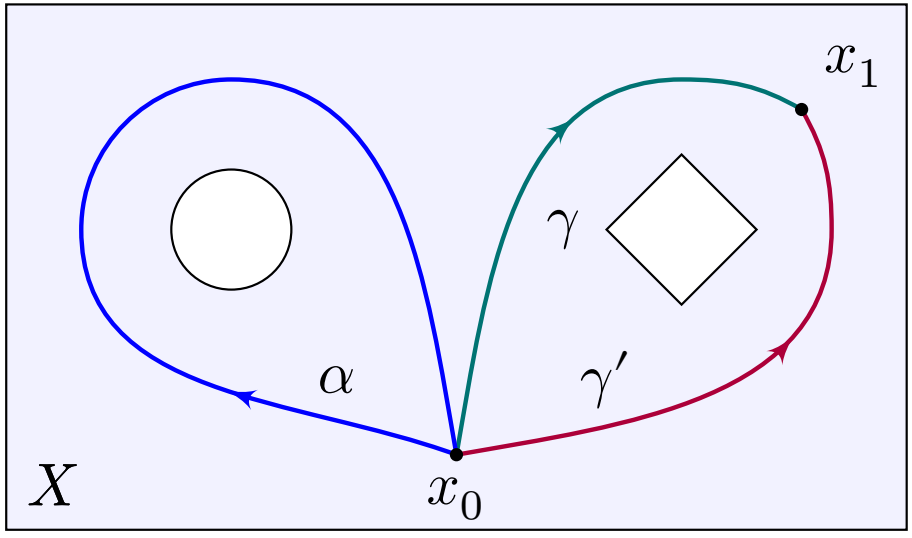


Beispiel: Für $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ gilt $\pi_1(X, x_1) \ncong \pi_1(X, x_2) \cong \pi_1(X, x_3)$.

Wir wissen $\pi_1(X, x_1) = \{1\}$, da sternförmig (G4B), sowie $\pi_1(X, x_2) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(X, x_3) \cong \mathbb{Z}$, dank Umlaufzahl J1I. Die letzten beiden Gruppen sind *zufällig* isomorph, doch leider gibt es keinen *natürlichen* Isomorphismus, sondern nur *willkürliche* Isomorphismen $(h, k) : \pi_1(X, x_2) \cong \pi_1(X, x_3)$.

Verschieben des Fußpunktes

Fußpunkte in derselben Wegkomponente liefern isomorphe Gruppen!



Satz L2B: Verschieben des Fußpunktes

Jeder Weg $\gamma \in P(X, x_0, x_1)$ induziert einen Gruppenisomorphismus

$$(h_\gamma, h_{\bar\gamma}) : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1), \quad [\alpha] \mapsto [\bar\gamma * \alpha * \gamma], \quad [\gamma * \beta * \bar\gamma] \mapsfrom [\beta].$$

Wir erhalten den Funktor $\Pi(X) \to \texttt{Grp}$ mit $x_0 \mapsto \pi_1(X, x_0)$ und $[\gamma] \mapsto h_\gamma$.

Ist $\gamma' \in P(X, x_0, x_1)$ ein weiterer Weg, so unterscheiden sich h_γ und $h_{\gamma'} = c^{-1} \cdot h_\gamma \cdot c$ durch die Konjugation mit $c = [\bar\gamma * \gamma'] \in \pi_1(X, x_1)$.

Verschieben des Fußpunktes

☺ Alles liegt explizit vor uns, es genügt sorgsames Nachrechnen!

Beweis: (1) Wir zeigen, dass h_γ ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$h_\gamma([\alpha]) \cdot h_\gamma([\alpha']) \overset{\text{Def}}{=} [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \cdot [\bar{\gamma} * \alpha' * \gamma] \overset{\text{Def}}{=} [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma} * \alpha' * \gamma]$$
$$\overset{\text{Inv}}{=} [\bar{\gamma} * \alpha * \alpha' * \gamma] \overset{\text{Def}}{=} h_\gamma([\alpha * \alpha']) \overset{\text{Def}}{=} h_\gamma([\alpha] \cdot [\alpha'])$$

(2) Dies definiert einen Funktor: Aus $H : \gamma \sim \gamma'$ in $P(X, x_0, x_1)$ folgt

$$h_\gamma([\alpha]) \overset{\text{Def}}{=} [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \overset{H}{=} [\bar{\gamma}' * \alpha * \gamma'] \overset{\text{Def}}{=} h_{\gamma'}([\alpha])$$

Für den konstanten Weg $\gamma = 1_{x_0}$ gilt $h_\gamma = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$, denn

$$h_\gamma([\alpha]) \overset{\text{Def}}{=} [\bar{1}_{x_0} * \alpha * 1_{x_0}] \overset{\text{Ass}}{=} [\alpha].$$

Für die Komposition von $\gamma : x_0 \to x_1$ und $\gamma' : x_1 \to x_2$ folgt

$$(h_{\gamma'} \circ h_\gamma)([\alpha]) \overset{\text{Def}}{=} h_{\gamma'}(h_\gamma([\alpha])) \overset{\text{Def}}{=} [\bar{\gamma}' * \bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \gamma'] \overset{\text{Def}}{=} h_{\gamma*\gamma'}([\alpha]).$$

(3) Insbesondere gilt $h_{\bar{\gamma}} \circ h_\gamma = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und $h_\gamma \circ h_{\bar{\gamma}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_1)}$, das heißt, h_γ und $h_{\bar{\gamma}}$ sind zueinander invers. Ebenso folgt die Konjugation. QED

Der Fußpunkt ist und bleibt wesentlich!

Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ kommutativ, dann stimmen alle so definierten Isomorphismen h_γ überein, und wir können $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ natürlich identifizieren. Ist zudem X wegzusammenhängend, so dürfen wir kurz $\pi_1(X)$ schreiben. Das ist eine seltene Ausnahme!

Im Allgemeinen ist die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ nicht kommutativ, daher gibt es keinen *natürlichen* Isomorphismus zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ für verschiedene Fußpunkte $x_0 \neq x_1$ in X. Wir können diese Gruppen daher nicht einfach als gleich betrachten. Der Fußpunkt bleibt wesentlich!

Zwischen den Fundamentalgruppen verschiedener Wegkomponenten besteht überhaupt kein Zusammenhang! Ausgehend vom Fußpunkt verbleiben Wege in dieser Komponente. Die topologische Summe $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ erfüllt $\pi_1(X, x_i) = G_i$ je nach Wahl des Fußpunktes x_i.

Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ ist die natürliche gemeinsame Beschreibung: Es enthält alle Informationen über Wegkomponenten $\pi_0(X)$ und Fundamentalgruppen $\pi(X, x_0)$ sowie deren durch Wege induzierten Isomorphismen $(h_\gamma, h_{\bar{\gamma}}) : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

Funktorialität: allgemeine Rechenregel

Ein **punktierter Raum** (X, x_0) ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten Punkt $x_0 \in X$. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$ schreiben wir kurz $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Mit der üblichen Komposition erhalten wir die Kategorie $\mathtt{Top}_*$ der punktierten Räume.

Satz L2D: π_1 ist ein Funktor.

Jedem punktierten Raum (X, x_0) ordnen wir seine Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ zu. Jede stetige Abbildung $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ punktierter Räume induziert ihren zugehörigen Gruppenhomomorphismus der Fundamentalgruppen

$$f_\sharp = \pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha].$$

Wir erhalten so den (kovarianten) Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$.

🙂 Das fasst wunderbar elegant wichtige Rechenregeln für π_1 zusammen: Die Fundamentalgruppe ist nicht nur auf punktierten Räumen definiert, sie verwandelt zudem stetige Abbildungen in Gruppenhomomorphismen und verträgt sich „natürlich“ mit Identität und Komposition!

Funktorialität: allgemeine Rechenregel

☺ Alles liegt explizit vor uns, es genügt sorgsames Nachrechnen!

Beweis: Jede Homotopie $H : \alpha \sim \alpha'$ induziert $(f \circ H) : (f \circ \alpha) \sim (f \circ \alpha')$, also ist $f_\sharp$ wohldefiniert. Zudem ist $f_\sharp$ ein Gruppenhomomorphismus:

$$f_\sharp([\alpha] \cdot [\beta]) \overset{\text{Def}}{=} f_\sharp([\alpha * \beta]) \overset{\text{Def}}{=} [f \circ (\alpha * \beta)]$$
$$\overset{\text{Def}}{=} [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \overset{\text{Def}}{=} [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] \overset{\text{Def}}{=} f_\sharp([\alpha]) \cdot f_\sharp([\beta])$$

Für die Identität gilt $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$, denn:

$$\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)})([\alpha]) \overset{\text{Def}}{=} [\mathrm{id}_{(X,x_0)} \circ \alpha] \overset{\text{Def}}{=} [\alpha]$$

Schließlich respektiert π_1 die Komposition:

$$\pi_1(g \circ f)([\alpha]) \overset{\text{Def}}{=} [(g \circ f) \circ \alpha] \overset{\text{Ass}}{=} [g \circ (f \circ \alpha)]$$
$$\overset{\text{Def}}{=} \pi_1(g)([f \circ \alpha]) \overset{\text{Def}}{=} \pi_1(g)(\pi_1(f)([\alpha])) \overset{\text{Def}}{=} (\pi_1(g) \circ \pi_1(f))([\alpha])$$

Somit ist $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ ein (kovarianter) Funktor, wie behauptet. QED

Funktorialität: erstes Beispiel

Beispiel: Dank Umlaufzahl $(\deg, \varphi) : [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*] \cong \mathbb{Z}$ (J1I) wissen wir $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) = \{[\alpha^k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mit dem Weg $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$. Zu $n \in \mathbb{Z}$ betrachten wir $p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* : z \mapsto z^n$ und finden:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}^*, 1) & \xrightarrow[z \mapsto z^n]{p_n} & (\mathbb{C}^*, 1) \\
\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) & \xrightarrow[[\alpha^k] \mapsto [\alpha^{kn}]]{\pi_1(p_n)} & \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \\
\deg \downarrow \cong \uparrow \varphi & \alpha(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} & \deg \downarrow \cong \uparrow \varphi \\
(\mathbb{Z}, +) & \xrightarrow[k \mapsto kn]{\cdot n} & (\mathbb{Z}, +)
\end{array}$$

☺ Hier kann man die Funktorialität direkt als Potenzgesetze ablesen: Für die Komposition gilt $p_n \circ p_m = p_{mn} : z \mapsto (z^m)^n = z^{mn}$ und somit $\pi_1(p_n \circ p_m) : [\alpha^k] \mapsto [(\alpha^k)^{mn}]$ und $\pi_1(p_n) \circ \pi_1(p_m) : [\alpha^k] \mapsto [((\alpha^k)^m)^n]$.

☺ Wörtlich dasselbe gilt für die stetigen Abbildungen $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$ und $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^* : z \mapsto z^n$ und $\mathbb{C}^* \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n / |z^n|$.

Funktorialität: erstes Beispiel

Bislang können wir nur für sehr wenige Räume die Fundamentalgruppe ausrechnen, diese missliche Lage wollen und werden wir bald verbessern. Vorerst betrachten wir jedoch nur die kleinen und einfachen Beispiele, die wir mit unseren bisherigen Werkzeugen sofort behandeln können.

🙂 Das obige Diagramm erinnert an die Lineare Algebra, tatsächlich zeigt es die Wahl einer Basis $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) : k \mapsto [\alpha^k]$ und stellt damit unseren Endomorphismus $\pi_1(f)$ durch eine ganzzahlige Matrix $n \in \mathbb{Z}^{1\times 1}$ dar.
In diesen Koordinaten gelingt unsere Rechnung erfreulich übersichtlich!

🙂 Die hierzu nötige Vorbereitung besteht aus zwei Teilen. Einerseits benötigen die allgemeinen Rechenregeln: π_1 ist ein Funktor! Andererseits brauchen wir konkrete Daten, hier nutzen wir den wunderbar expliziten Isomorphismus $(\deg, \varphi) : [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*] \cong \mathbb{Z}$ dank Umlaufzahl (J11).

🙂 Auch wenn dieses Miniaturbeispiel noch allzu einfach ist, so illustriert es doch das Zusammenspiel dieser beiden Zutaten: abstrakt und konkret. So wird es im Folgenden auch für interessantere Beispiele aussehen.

Isomorphismen und Retrakte

Korollar L2E: Isomorphismen und Retrakte

Wie jeder Funktor erhält $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ Isomorphismen und Retrakte, so wie wir dies in Satz H4F bereits allgemein nachgerechnet haben:

1. Jeder Homöomorphismus $(f,g) : (X,x_0) \cong (Y,y_0)$ in $\mathtt{Top}_*$ induziert einen Isomorphismus $(f_\sharp, g_\sharp) : \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(Y,y_0)$ in $\mathtt{Grp}$.
2. Jeder Retrakt $(f,g) : (X,x_0) \rightleftarrows (Y,y_0)$ in $\mathtt{Top}_*$ induziert einen Retrakt $(f_\sharp, g_\sharp) : \pi_1(X,x_0) \rightleftarrows \pi_1(Y,y_0)$ in $\mathtt{Grp}$.

Übung: Wiederholen Sie dieses abstrakt-einfache Argument für Funktoren allgemein und wenden Sie es dann hier speziell an.

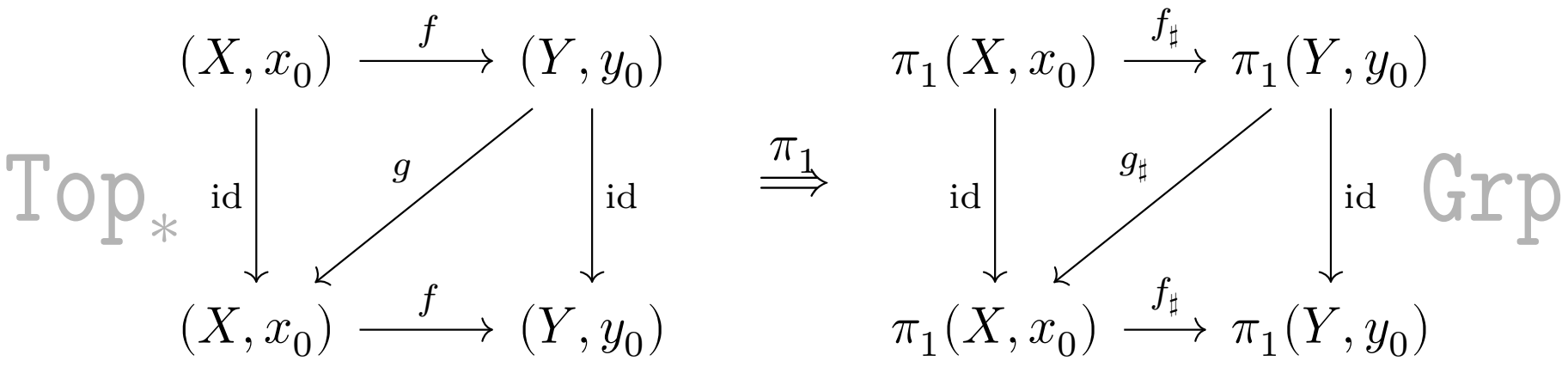
Beweis: (2) Aus $g \circ f = \mathrm{id}_{(X,x_0)}$ folgt dank Funktorialität (L2D)

$$\pi_1(g) \circ \pi_1(f) \;=\; \pi_1(g \circ f) \;=\; \pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) \;=\; \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}.$$

(1) Aus $f \circ g = \mathrm{id}_{(Y,y_0)}$ folgt ebenso $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. QED

Isomorphismen und Retrakte

Wir haben das alles bereits allgemein nachgrechnet, siehe Satz H4F, nun profitieren Sie von Ihrer guten Vorbereitung. Zur Wiederholung und weil es so elegant und einfach ist, hier nochmal als kommutatives Diagramm:



Wir Menschen sind Augenwesen, daher lohnt es sich, Formeln *und* Bilder zu nutzen, ganz genauso linearen Text *und* übersichtliche Diagramme. Beides ergänzt sich hilfreich, bitte lernen Sie daher, beides zu nutzen: So arbeiten Sie effizienter, sowohl beim Lernen als auch beim Anwenden.

Anwendung: komplexe Wurzeln

Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden stetigen Abbildungen p_n erlaubt eine stetige Rechtsinverse r_n, das bedeutet $p_n \circ r_n = \mathrm{id}$?

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} && p_n : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^n \\
&\text{(b)} && p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n \\
&\text{(c)} && p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* : z \mapsto z^n \\
&\text{(d)} && p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n
\end{aligned}
$$

Lösung: (a) Für $n \geq 1$ haben wir $r_n = \sqrt[n]{x}$. (b) Ebenso für n ungerade. In (a,b) ist p_n dann sogar ein Homöomorphismus, also r_n eindeutig. Andernfalls ist p_n nicht surjektiv, daher existiert keine Rechtsinverse.

(c) Hier ist $\pi_1(p_n) \cong (\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z})$ rechtsinvertierbar nur für $n = 1$.

(d) Dies führen wir zurück auf (c): Die Abbildung $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfüllt $p_n(0) = 0$ und $p_n(\mathbb{C}^*) \subseteq \mathbb{C}^*$. Für jede Rechtsinverse $r_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folgt $r_n(0) = 0$ und $r(\mathbb{C}^*) \subseteq \mathbb{C}^*$. Die Einschränkung $r_n^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ wäre rechtsinvers zu $p_n^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, was (c) widerspricht.

Anwendung: komplexe Wurzeln

Was bedeutet das? Wir suchen eine stetige Wurzelfunktion $r_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. Diese soll die definierende Gleichung $(r_n(z))^n = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ erfüllen. Für $n = 1$ genügt $r_1 = \mathrm{id}$. Für $n \geq 2$ hingegen ist es unmöglich!

☺ Auch diese Rechnung formuliere ich ausführlich als Diagramm. Es organisiert übersichtlich alle Daten und betont die Funktorialität:

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{C}^*,1) & \xrightarrow[???]{r_n} & (\mathbb{C}^*,1) & \xrightarrow[z\mapsto z^n]{p_n} & (\mathbb{C}^*,1) \\
\pi_1(\mathbb{C}^*,1) & \xrightarrow[???]{\pi_1(r_n)} & \pi_1(\mathbb{C}^*,1) & \xrightarrow[[\alpha^k]\mapsto[\alpha^{kn}]]{\pi_1(p_n)} & \pi_1(\mathbb{C}^*,1) \\
\deg \downarrow \cong \uparrow \varphi & & \deg \downarrow \cong \uparrow \varphi & & \deg \downarrow \cong \uparrow \varphi \\
(\mathbb{Z},+) & \xrightarrow[k\mapsto km]{\cdot m} & (\mathbb{Z},+) & \xrightarrow[k\mapsto kn]{\cdot n} & (\mathbb{Z},+)
\end{array}$$

Aus $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_{(\mathbb{C}^*,1)}$ folgt $\pi_1(p_n) \circ \pi_1(r_n) = \mathrm{id}_{\pi_1(\mathbb{C}^*,1)}$, also $mn = 1$. Das ist nur für $n = \pm 1$ möglich, zusammen mit $n \in \mathbb{N}$ bleibt nur $n = 1$. Am Ende ist die Rechnung in $\mathbb{Z}$ ganz leicht. Funktorialität sei Dank!

Homotopie-Invarianz bei festem Fußpunkt

🙂 Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ sind homotopie-invariant dank ihrer Definition. Allerdings hängen sie vom gewählten Fußpunkt x_0 ab, und diese Abhängigkeit wollen und müssen wir sorgfältig berücksichtigen.

Satz L2G: Homotopie-Invarianz bei festem Fußpunkt

Jede Homotopie $H : f \simeq g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ relativ x_0
induziert Gleichheit $\pi_1(f) = \pi_1(g) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Wir erhalten so den (kovarianten) Funktor $\pi_1 : \mathtt{hTop}_* \to \mathtt{Grp}$.

Beweis: Die Abbildung $H : [0, 1] \times X \to Y$ ist stetig mit $H(0, x) = f(x)$ und $H(1, x) = g(x)$ für alle $x \in X$ sowie $H(s, x_0) = y_0$ für alle $s \in [0, 1]$.

Für jeden Weg $\alpha : [0, 1] \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ folgt $K : f \circ \alpha \sim g \circ \alpha$ vermöge der Homotopie $K : [0, 1] \times [0, 1] \to Y : (s, t) \mapsto H(s, \alpha(t))$.

Diese Homotopie führt von $K(0, t) = f(\alpha(t))$ nach $K(1, t) = g(\alpha(t))$ bei festen Endpunkten $K(s, 0) = K(s, 1) = H(s, x_0) = y_0$ für alle $s, t \in [0, 1]$.

Also gilt $f_\sharp([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [g \circ \alpha] = g_\sharp([\alpha])$. QED

Homotopie-Invarianz bei festem Fußpunkt

Korollar L2H: Isomorphismen und Retrakte

Wie jeder Funktor erhält $\pi_1 : \mathtt{hTop}_* \to \mathtt{Grp}$ Isomorphismen und Retrakte, so wie wir dies in Satz H4F bereits allgemein nachgerechnet haben:

1. Jede Homotopie-Äquivalenz $(f,g) : (X,x_0) \simeq (Y,y_0)$ in $\mathtt{Top}_*$, mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)}$ rel $\{x_0\}$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,y_0)}$ rel $\{y_0\}$, induziert einen Isomorphismus $(f_\sharp, g_\sharp) : \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(Y,y_0)$ in $\mathtt{Grp}$.
2. Jeder schwache Retrakt $(f,g) : (X,x_0) \rightleftarrows (Y,y_0)$ in $\mathtt{Top}_*$, das bedeutet $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)}$ rel $\{x_0\}$, induziert einen Retrakt $(f_\sharp, g_\sharp) : \pi_1(X,x_0) \rightleftarrows \pi_1(Y,y_0)$ in $\mathtt{Grp}$, also $g_\sharp \circ f_\sharp = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Übung: Wiederholen Sie dieses abstrakt-einfache Argument für Funktoren allgemein und wenden Sie es dann hier speziell an.

Korollar L2I: starke Deformationsretrakte

Ist $(\iota,\rho) : (X,x_0) \simeq (Y,y_0)$ ein starker Deformationsretrakt, $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_X$ und $\iota \circ \rho \simeq \mathrm{id}_Y$ rel $\iota(X)$, so folgt $(\iota_\sharp, \rho_\sharp) : \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(Y,y_0)$ in $\mathtt{Grp}$.

Homotopie-Invarianz bei festem Fußpunkt

Beispiel L2J: Kreislinie und gelochte Ebene

Aus $(\iota, \rho) : (\mathbb{S}^1, 1) \simeq (\mathbb{C}^*, 1)$ folgt $(\iota_\sharp, \rho_\sharp) : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$.

Inklusion $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ und Retraktion $\rho : \mathbb{C}^* \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z/|z|$ erfüllen $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $H : \iota \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ rel $\mathbb{S}^1$ mit $H(t, z) = (1-t)z + tz/|z|$ (G4O). Eine weitere schöne Anwendung: Wie berechnen wir $\pi_1(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}, 1_{n\times n})$?

Beispiel L2K: $\pi_1(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}, 1_{n\times n})$

Das Gram–Schmidt–Verfahren (G5G) zeigt, dass $\mathrm{GO}_n \subseteq \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n \subseteq \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}$ starke Deformationsretrakte sind. Damit finden wir:

$$\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2 \mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1 \quad \text{dank F1Q} \quad \Longrightarrow \quad \pi_1 \cong \mathbb{Z} \quad \text{dank J1I}$$
$$\mathrm{GL}_3^+ \mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3 \quad \text{dank K2P} \quad \Longrightarrow \quad \pi_1 \cong \mathbb{Z}/2 \quad \text{dank L6T}$$

Die Gruppe $\pi_1(\mathrm{SO}_3 \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2$ ist physikalisch höchst relevant: Sie erklärt, warum es Spin–$1/2$–Teilchen geben kann. Diese wiederum führen zum Pauli–Ausschlussprinzip und damit zur Stabilität der Materie.

Homotopie-Invarianz bei festem Fußpunkt

Wir sehen hieran eindrucksvoll die vereinfachende Kraft der Homotopie: Den 4–dimensionalen Raum $\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, ad - bc > 0 \right\}$ können wir zusammenziehen auf den 1–dimensionalen Unterraum $\mathrm{SO}_2 \mathbb{R} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cong \mathbb{S}^1$. Für Letzteren lässt sich π_1 leicht ausrechnen. Noch drastischer fällt dies für $\mathrm{SO}_3 \subseteq \mathrm{GL}_3^+ \mathbb{R}$ aus.

Beispiel L2L:

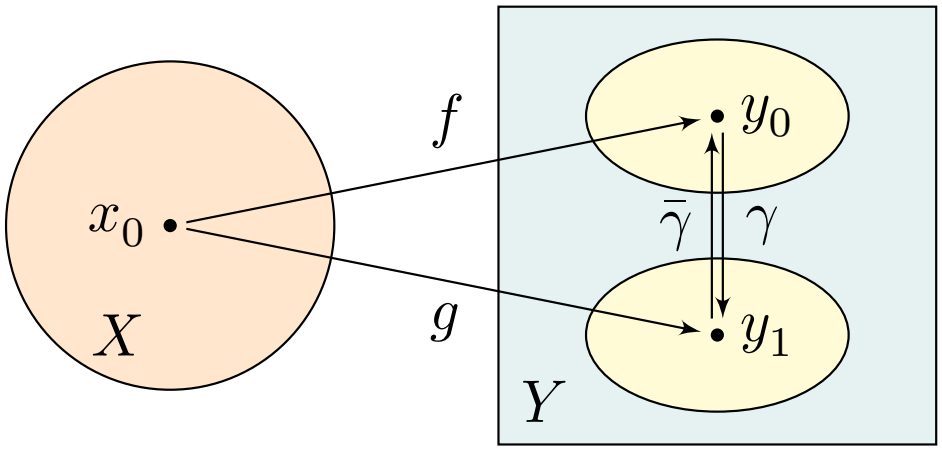
Ist $\{x_0\}$ ein starker Deformationsretrakt von X, so ist $\pi_1(X, x_0)$ trivial.

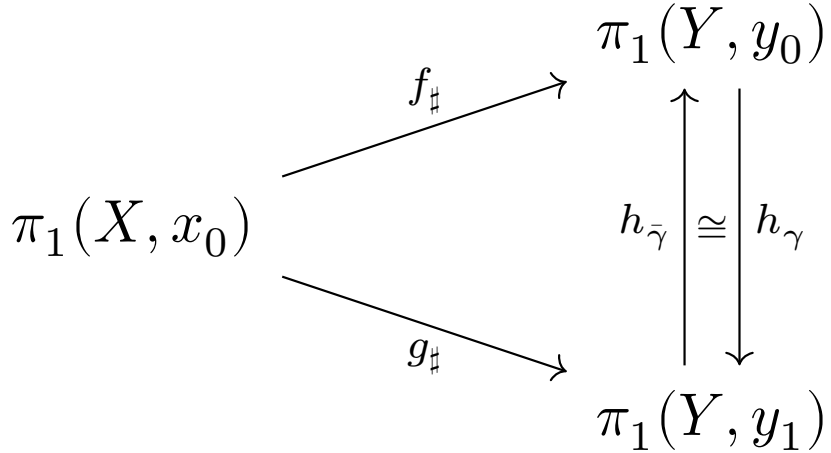
Dies zeigt erneut, dass die Gruppe $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ trivial ist. Auch im rationalen Kamm $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1]_{\mathbb{Q}} \times [0,1])$ ist der Punkt $x_0 = (0,0)$ ein starker Deformationsretrakt, also ist $\pi_1(X, x_0)$ trivial.

⚠ Hingegen ist $x_1 = (0,1)$ in X kein starker Deformationsretrakt (G5E). Wir wissen aber auf anderen Wegen aus L2B, dass auch $\pi_1(X, x_1)$ trivial sein muss, denn X ist wegzusammenhängend. Diese Feinheiten bei der nötigen Fußpunktwahl wollen wir nun noch etwas genauer ausleuchten.

Homotopie-Invarianz bei beweglichen Fußpunkten

Sobald Homotopien die Fußpunkte bewegen, müssen wir unsere obigen Argumente verfeinern und Formeln korrigieren. Das gelingt wie folgt:





Sei $H : f \simeq g : X \to Y$ eine Homotopie. Im Allgemeinen sind $y_0 := f(x_0)$ und $y_1 := g(x_0)$ verschieden, daher haben die Gruppenhomomorphismen $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ und $g_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$ verschiedene Zielgruppen! Doch H induziert eine Konjugation zwischen ihnen entlang dem Weg $\gamma : [0, 1] \to Y : t \mapsto H(t, x_0)$ des Fußpunktes. Das bedeutet:

Satz L2M: Homotopie konjugiert.

Aus $H : f \simeq g : X \to Y$ folgt $g_\sharp = h_\gamma \circ f_\sharp$ mit dem Weg $\gamma(t) = H(t, x_0)$.

Homotopie-Invarianz bei beweglichen Fußpunkten

Beweis: Für jede Schleife α in (X, x_0) ist $f \circ \alpha$ eine Schleife in (Y, y_0) und $g \circ \alpha$ eine Schleife in (Y, y_1). Dank L1J gilt in $P(X)$ bzw. $\Pi(X)$:

$$(g \circ \alpha) \sim \bar{\gamma} * (f \circ \alpha) * \gamma \qquad \Longrightarrow \qquad [g \circ \alpha] = [\bar{\gamma}] \cdot [f \circ \alpha] \cdot [\gamma]$$

Die induzierten Gruppenhomomorphismen

$$f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$
$$g_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1) : [\alpha] \mapsto [g \circ \alpha]$$

sind demnach konjugiert gemäß $g_\sharp = h_\gamma \circ f_\sharp$. QED

☺ Fixiert H den Fußpunkt wie in L2G, so gilt $h_\gamma = \mathrm{id}$ und $f_\sharp = g_\sharp$.

Im Falle $y_0 = y_1$ wird der Fußpunkt während der Homotopie bewegt, kehrt aber schließlich in seine Ausgangsposition zurück. In diesem Falle ist γ eine Schleife in (Y, y_0), und h_γ ist die Konjugation durch $c = [\gamma]$ in der Gruppe $\pi_1(Y, y_0)$. Ist diese zudem abelsch, dann ist jede Konjugation trivial, und wir dürfen die Bewegung des Fußpunktes in Y ignorieren. Das ist eine erfreuliche, aber leider seltene Ausnahme!

Homotopie-Invarianz bei beweglichen Fußpunkten

Korollar L2N: Homotopie-Äquivalenz

(1) Sei $f : X \to Y$ eine Homotopie-Äquivalenz. Für $x_0 \in X$ und $y_0 = f(x_0)$ ist dann $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenisomorphismus.

(2) Ist X zusammenziehbar, $X \simeq *$, so gilt $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ für alle $x_0 \in X$.

Das Kriterium (2) vereinfacht unser voriges Argument L2L, da wir nun auch ohne starken Deformationsretrakt $\{x_0\} \subseteq X$ auskommen.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit Homotopien $H : g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $K : f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Anwendung des Funktors π_1 und Homotopie-Invarianz (L2M) ergibt $\pi_1(g) \circ \pi_1(f) = h_\alpha$ mit $\alpha(t) = H(t, x_0)$ und $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) = h_\beta$ mit $\beta(t) = K(t, y_0)$, also $h_\alpha^{-1} \circ \pi_1(g) \circ \pi_1(f) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) \circ h_\beta^{-1} = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$.
Der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f)$ ist demnach sowohl links- als auch rechts-invertierbar, somit invertierbar (H2K). QED

Homotopie-Invarianz bei beweglichen Fußpunkten

Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ ist natürlich, aber weniger übersichtlich, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist etwas übersichtlicher, dafür aber weniger natürlich, da wir willkürlich einen Fußpunkt wählen müssen.

Am liebsten möchte man die Vorzüge des Fußpunktes nutzen, aber seine Nachteile ignorieren; manche Lehrbücher tun so. Das ist nur zulässig, solange man die nötigen Präzisierungen und Reparaturen jederzeit nachholen kann. Für den Anfang kann ich diese Schludrigkeit nicht empfehlen; erfahrungsgemäß kommt sie später von ganz allein.

Machen wir es also richtig und nehmen wir die Begriffe ernst. Für die Definition der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist und bleibt der Fußpunkt $x_0 \in X$ wesentlich und darf nicht leichtfertig weggelassen werden.

Das ist naturgemäß der Preis, den wir zahlen müssen, wenn wir das elegant-allgemeine Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ in einem Punkt zur bequem-speziellen Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ lokalisieren wollen.

Einfacher und höherer Zusammenhang

Definition L2s: einfacher und höherer Zusammenhang

Für jeden topologischen Raum X vereinbaren wir folgende Begriffe:

$$
\begin{array}{ccc}
X \text{ ist wegzusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & \pi_0(X) = \{X\} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
X \text{ ist } 0\text{–zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & [\mathbb{S}^0, X] = \{*\} \\
\Uparrow \not\Downarrow \mathbb{S}^1 & & \Uparrow \\
X \text{ ist einfach zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & \pi_0(X) = \{X\} \text{ und } \pi_1(X, x_0) = \{1\} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
X \text{ ist } 1\text{–zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & [\mathbb{S}^0, X] = \{*\} \text{ und } [\mathbb{S}^1, X] = \{*\} \\
\Uparrow \not\Downarrow \mathbb{S}^2 & & \Uparrow \\
X \text{ ist } n\text{–zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & [\mathbb{S}^k, X] = \{*\} \text{ für alle } 0 \leq k \leq n \\
\Uparrow \not\Downarrow \mathbb{S}^{n+1} & & \Uparrow \\
X \text{ ist } \infty\text{–zusammenhängend} & :\Longleftrightarrow & [\mathbb{S}^k, X] = \{*\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \\
\Uparrow \not\Downarrow W & & \Uparrow \\
X \text{ ist zusammenziehbar} & :\Longleftrightarrow & [X, X] = \{*\} \\
\Uparrow \not\Downarrow & & \\
X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ sternförmig} & &
\end{array}
$$

Einfacher und höherer Zusammenhang

Satz L2T: einfacher Zusammenhang

Genau dann ist X einfach zusammenhängend, wenn für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ die Menge $\Pi(X, x_0, x_1)$ genau eine Wegeklasse enthält.

Beweis: Wegzusammenhang bedeutet $\Pi(X, x_0, x_1) \neq \emptyset$ für jedes Paar $x_0, x_1 \in X$. Jede Wahl $[\gamma] \in \Pi(X, x_0, x_1)$ definiert ein Bijektionspaar

$$\Pi(X, x_0, x_1) \cong \pi_1(X, x_0), \quad [\beta] \mapsto [\alpha] = [\beta * \bar{\gamma}], \quad [\beta] = [\alpha * \gamma] \mapsfrom [\alpha].$$

Damit ist die Äquivalenz der beiden Aussagen klar. QED

Bemerkung: Zur Bedingung $[\mathbb{S}^k, X] = \{*\}$ ist äquivalent, dass jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^k \to X$ zusammenziehbar ist und $\pi_0(X) = \{X\}$ gilt (G4R).

Speziell für $k = 1$ bedeutet das $\pi_0(X) = \{X\}$ und $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.
Diese Eigenschaft des Raumes X ist von Fußpunkten unabhängig: Da X wegzusammenhängend ist, sind je zwei Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph (L2B). Ist eine trivial, so sind alle trivial.

Beispiel / Übung L2U: Zusammenhang der Sphären

Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist k–zusammenhängend für $k < n$, aber nicht für $k = n$.

Beweis: Für $n = 0$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ unzusammenhängend.
Für $n \geq 1$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ hingegen $(n-1)$–zusammenhängend:
Für $0 \leq k < n$ ist jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ zusammenziehbar,
kurz $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ (I4B). Jedoch ist $\mathbb{S}^n$ nicht n–zusammenhängend,
denn die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist nicht zusammenziehbar (J4A).
Genauer gilt $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (J3A), also $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \neq \{*\}$. QED

Bemerkung: Auch für $k > n$ könnte man $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ vermuten, das ist jedoch falsch! Die Vermutung entsteht aus einem allzu verständlichen Grund, nämlich Mangel an Anschauung, Erfahrung, Phantasie, etc.
Wie sehen solche Abbildungen aus? Die Frage blieb lange offen.

Heinz Hopf zeigte 1931, dass die Hopf–Faserung $p : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$
mit $p(a,b,c,d) = (2ac + 2bd, 2ad - 2bc, c^2 + d^2 - a^2 - b^2)$
nicht zusammenziehbar ist, kurz $p \not\simeq *$, somit $[\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2] \neq \{*\}$.

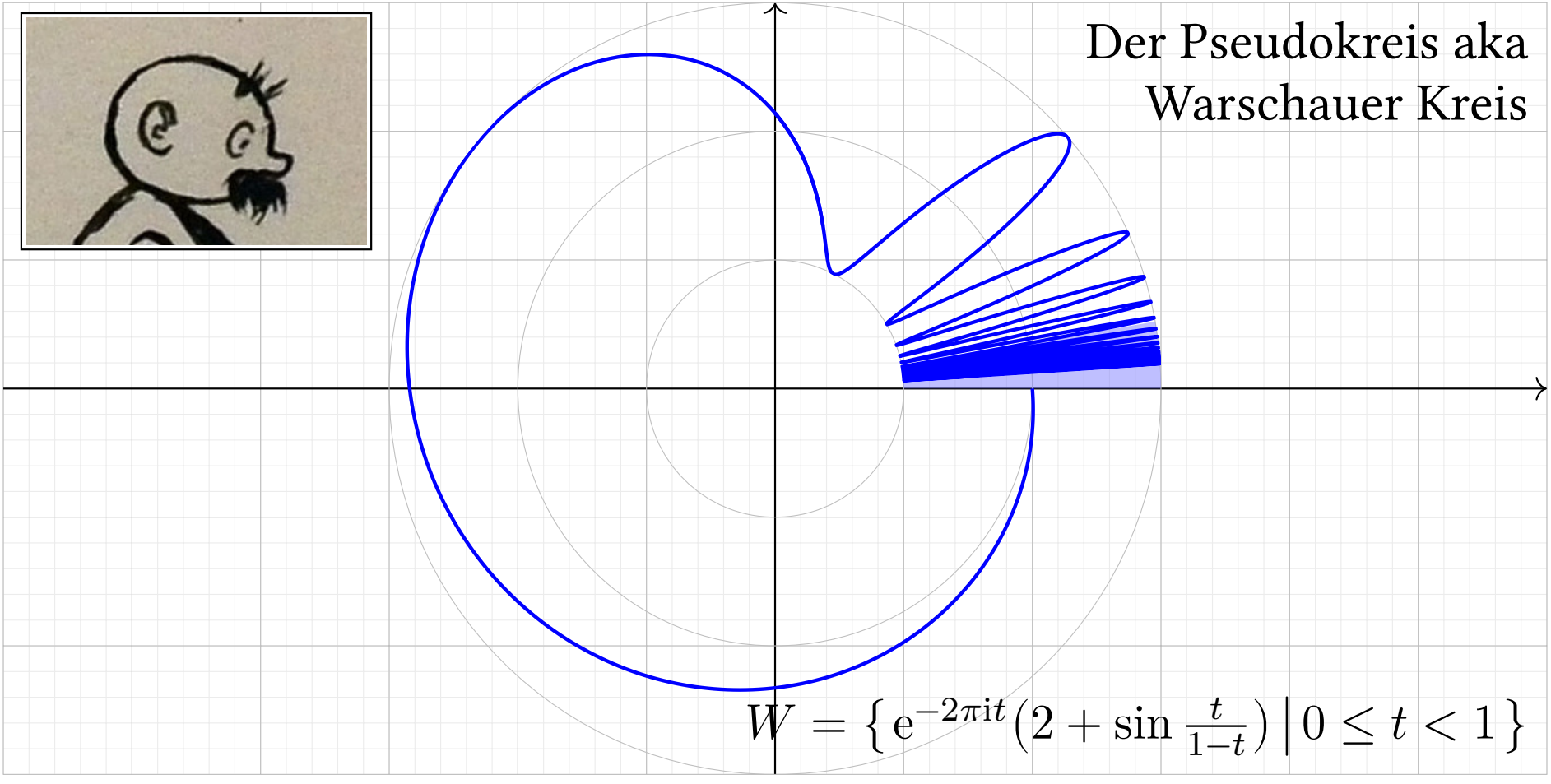
Einfacher und höherer Zusammenhang

Anschaulich misst der Funktor $[\mathbb{S}^k, -]$ Löcher der Dimension k.

Es ist viel nützlicher, stetige Abbildungen und Homotopien zu definieren und $[\mathbb{S}^k, X]$ zu berechnen als naiv-vage über das Konzept „Loch“ zu spekulieren. Selbst wenn X irgendwo eingebettet ist, sollen topologische Begriffe wie der Zusammenhang von X hiervon unabhängig sein. Kurzum: Mit $[\mathbb{S}^k, X]$ können wir k–dimensionale Löcher begreifen.

Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^k \to X$ ist genau dann nullhomotop (G4A), also im Raum X zusammenziehbar, geschrieben $f \simeq *$, wenn eine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{D}^{k+1} \to X$ mit $F|_{\mathbb{S}^k} = f$ existiert (G4F). Anschaulich testet $f : \mathbb{S}^k \to X$ auf ein k–dimensionales Loch: Ein solches liegt vor, wenn zu f keine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{D}^{k+1} \to X$ mit $F|_{\mathbb{S}^k} = f$ existiert.

Wie erkennen wir Zusammenziehbarkeit?



Dieser interessante Raum ist ein berühmt-berüchtigtes Gegenbeispiel:
Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $[\mathbb{S}^k, W] = \{*\}$, dennoch ist W nicht zusammenziehbar!

Wie erkennen wir Zusammenziehbarkeit?

Bemerkung: Offensichtlich gilt: Ist X zusammenziehbar, so auch n–zusammenhängend für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht:

Der oben gezeigte Teilraum $W \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Pseudokreis** oder **Warschauer Kreis**. Er ist n–zusammenhängend für alle n, aber dennoch ist W nicht zusammenziehbar. Die Aussage $[\mathbb{S}^n, W] = \{*\}$ ist relativ leicht zu zeigen. (Versuchen Sie es!) Hingegen ist $\mathrm{id}_W \not\simeq *$ nicht so leicht (siehe M2I).

Übung: Der Pseudokreis umschließt augenscheinlich ein inneres Gebiet. In diesem „Löwenkäfig des Topologen“, sagen wir im Nullpunkt, sitzt ein Löwe, den wir als punktförmig annehmen. Kann er aus dem Käfig entkommen? Genauer gesagt: entlang eines stetigen Weges in der Ebene? (Fliegen, Springen, Tunneln, Teleportation, etc. sind hier keine Option.)

Bemerkung: Statt W nutzt man auch den Abschluss $\overline{W} = W \cup [1,3]$ mit ähnlichen Eigenschaften. Der Raum $\overline{W} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt und wickelt die Sinuskurve des Topologen um die Kreislinie $\mathbb{S}^1$. Er schließt sich recht eigenartig, doch man kann darin nicht umlaufen.

Wie erkennen wir Zusammenziehbarkeit?

🙂 Für „vernünftige“ Räume können solche Pathologien nicht auftreten. Der folgende schöne und durchschlagende Satz von Henry Whitehead (1904–1960) ist grundlegend für die Homotopietheorie:

Satz L2v: Whitehead 1949

Sei X triangulierbar, also homöomorph zur Realisierung $|K|$ eines Simplizialkomplexes K; es genügt eine Homotopie-Äquivalenz $X \simeq |K|$, etwa ein Zellkomplex oder eine Mannigfaltigkeit.

Genau dann ist X zusammenziehbar, wenn jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^n \to X$ zusammenziehbar ist, also $[\mathbb{S}^n, X] = \{*\}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

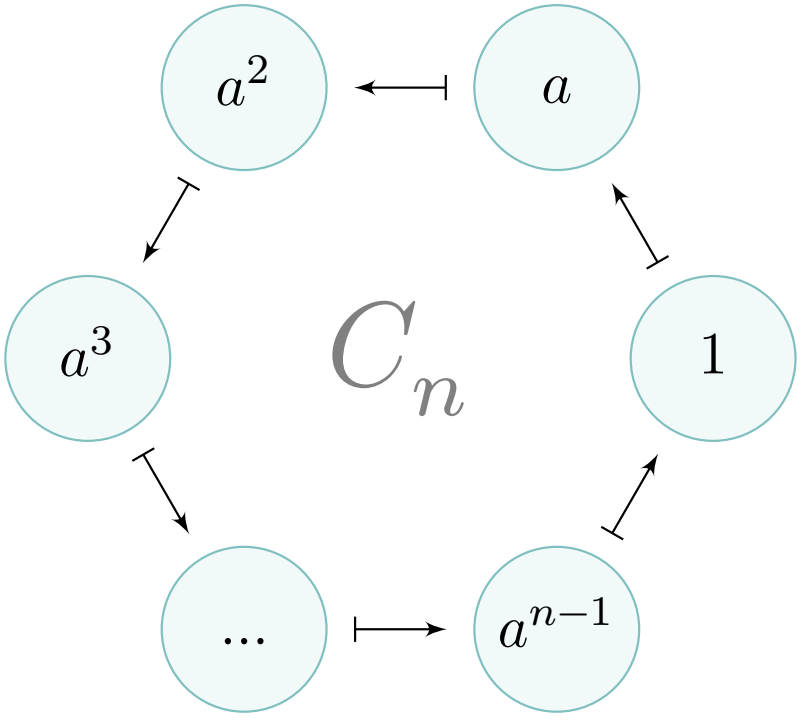
📖 J.H.C. Whitehead: *Combinatorial homotopy I, II.* Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) 213–245, 453–496. Damit wird die Frage, ob unser Raum X zusammenziehbar ist, in einfachere Teilfragen zerlegt und somit einer Induktion über die Dimension $n = 0, 1, 2, \ldots$ zugänglich. Diese Technik wird in der Algebraischen Topologie genutzt und ausgebaut.

Wie erkennen wir Zusammenziehbarkeit?

Zur Untersuchung eines topologischen Raumes X sind die Menge $\pi_0(X)$ und die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ meist die ersten Schritte. Die Algebraische Topologie ergänzt dies durch die höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X, x_0)$ sowie die Homologie $H_*(X)$ und die Kohomologie $H^*(X)$ uvm.

So entsteht nach und nach ein umfangreicher Werkzeugkasten, der für topologische Fragen algebraische Antworten ermöglicht und umgekehrt. Als eines der wichtigsten Werkzeuge erläutern wir im Folgenden π_1.

Was sind und was sollen Präsentationen?



Beispiel: Die zyklische Gruppe $C_n = \{a, a^2, a^3, \dots, a^n = 1\}$ der Ordnung n wird erzeugt vom Element a mit der Relation $a^n = 1$. Dies schreiben wir

$$C_n = \langle a \,|\, a^n = 1 \rangle \quad \text{oder kurz} \quad C_n = \langle a \,|\, a^n \rangle.$$

Übung: Diese Gruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vermöge

$$h : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \xrightarrow{\sim} (C_n, \cdot) : k + n\mathbb{Z} \mapsto a^{k+n\mathbb{Z}}$$

Was sind und was sollen Präsentationen?

Beispiel: Die unendlich zyklische Gruppe $C = \langle a \,|\, - \rangle$ wird frei von a erzeugt, ohne Relationen. Sie ist demnach isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$ vermöge

$$h : (\mathbb{Z}, +) \xrightarrow{\sim} (C, \cdot) : k \mapsto a^k.$$

Beispiel: In der Gruppe $G = \langle a, b \,|\, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ gilt Vertauschung $ab = ba$. Wir können also jedes Produkt $a^{k_1}b^{\ell_1} \cdots a^{k_n}b^{\ell_n}$ umordnen zu $a^k b^\ell$. Weitere Relationen gibt es nicht. Wir erhalten also den Gruppenisomorphismus

$$h : (\mathbb{Z}^2, +) \xrightarrow{\sim} (G, \cdot) : (k, \ell) \mapsto a^k b^\ell.$$

Beispiel: Die Gruppe $F(\{a, b\}) = \langle a, b \,|\, - \rangle$ wird **frei** von a, b erzeugt, also ohne jegliche Relationen bis auf die unvermeidlichen Kürzungen $aa^{-1} = a^{-1}a = bb^{-1} = b^{-1}b = 1$, die trivial in jeder Gruppe gelten.

Jedes Element schreibt sich eindeutig als reduziertes Wort, etwa $a^3b^{-2}ab^5$. Diese Gruppe ist nicht-kommutativ: Die Wörter $ab \neq ba$ sind reduziert. Dennoch können wir in jeder freien Gruppe $F(S)$ effizient rechnen.

Was sind und was sollen Präsentationen?

☺ Anschaulich macht die Präsentation $G = \langle S \,|\, R \rangle$ zwei Aussagen:

(1) Erzeugung: Jedes Gruppenelement $g \in G$ ist Produkt $g = s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}$ der Erzeuger $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ und ihrer Inversen, also $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{Z}$.

(2) Äquivalenz: Die Relationen klären jede Mehrdeutigkeit. Genau dann ergeben zwei solche Produkte dasselbe Element $g \in G$, wenn sie durch eine Folge der angegebenen Relationen R ineinander übergehen.

Dies wollen wir nun präzisieren und ausführen. In (1) bereitet die Idee einer erzeugenden Teilmenge $S \subseteq G$ wenig begriffliche Schwierigkeiten. In (2) hingegen müssen wir zunächst erklären, was Relationen sein sollen.

Variante 1: Wir erklären das freie Monoid A^* über einem Alphabet A. Dann definieren Relationen $K \subseteq A^* \times A^*$ das präsentierte Monoid $[\, A \,|\, K \,]$. Präsentierte Gruppen $\langle S \,|\, R \rangle$ sind ein Spezialfall.

Variante 2: Wir erklären zunächst die freie Gruppe $F = \langle S \,|\, - \rangle$, ohne Relationen. Anschließend können wir Relationen $R \subseteq F$ als Wörter über S einführen und zur Quotientengruppe $\langle S \,|\, R \rangle := F / \langle R^F \rangle$ übergehen.

Was sind und was sollen Präsentationen?

Die sorgsame Ausführung dieses Plans ist zwar einfach, doch länglich. Ich gebe einen soliden Crash-Kurs als funktionstüchtigen Überblick. Anschließend können wir mit topologischen Anwendungen beginnen.

Jede Gruppe lässt sich so präsentieren durch Erzeuger und Relationen. Das codiert alle nötigen Rechenregeln, daher sind Präsentationen ein universelles Werkzeug, um Gruppen zu konstruieren und zu untersuchen.

Viele unendliche Gruppen erlauben eine endliche Präsentation und damit eine konzise Beschreibung. Die kombinatorische Gruppentheorie (CGT) stellt hierzu umfangreiche Techniken zur Verfügung. In günstigen Fällen können wir gruppentheoretische Fragen damit erfreulich effizient lösen, idealerweise möglichst allgemein durch geeignete Algorithmen.

📖 J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer, 1995.
R.C. Lyndon, P.E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer, 2001.
H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer, 1957.

Das freie Monoid A^* über einem Alphabet A

Sei A eine Menge, die wir als **Alphabet** betrachten, und

$$A^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ a_1, a_2, \dots, a_n \in A \right\}$$

die Menge aller **Wörter** über dem Alphabet A. Ihre **Verkettung** ist

$$\circ : A^* \times A^* \to A^* : (a_1, \dots, a_m) \circ (b_1, \dots, b_n) := (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n).$$

Das n–Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n \subseteq A^*$ schreiben wir kurz $a_1 a_2 \cdots a_n$.
Für $n = 1$ identifizieren wir so das einelementige Wort $(a) \in A^1 \subseteq A^*$ mit dem Buchstaben $a \in A$; hierdurch wird $A \subseteq A^*$ eine Teilmenge.

Für $n = 0$ bezeichnt $e := ()$ das leere Wort. Damit ist $(A^*, \circ, e)$ das **freie Monoid** über A: Nach Konstruktion schreibt sich jedes Element $w \in A^*$ eindeutig als Produkt $w = a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit den Faktoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. Wie üblich kann dabei zur Abkürzung das Produktsymbol $\circ$ auch weggelassen werden. Wie in jedem Monoid schreiben wir für das n–fache Produkt $uu \cdots u$ kurz u^n, also $u^0 := e$, $u^1 := u$, $u^2 := uu$, $u^3 := uuu$, und rekursiv $u^{n+1} := u^n \circ u$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Monoidpräsentation durch Erzeuger und Relationen

Wir wollen Relationen $w \equiv w'$ einführen. Gegeben sei $K \subseteq A^* \times A^*$; wir erlauben **Ersetzungen** $uwv \to uw'v$ mit $u, v \in A^*$ und $(w, w') \in K$. Diese erzeugen die Äquivalenzrelation $\equiv$ auf A^* als die reflexive, symmetrische, transitive Hülle von $\to$. (Zwei Wörter in A^* sind genau dann äquivalent, wenn sie durch eine endliche Folge von Ersetzungen und ihren Umkehrungen ineinander übergehen.) Sie ist eine **Kongruenz** auf $(A^*, \circ)$, d.h. aus $u \equiv u'$ und $v \equiv v'$ folgt $u \circ v \equiv u' \circ v'$. Somit ist auf der Quotientenmenge $A^*/_{\equiv}$ die Verknüpfung $[u] \cdot [v] := [u \circ v]$ wohldefiniert.

Definition L3A: Monoidpräsentation

Das durch (A, K) **präsentierte Monoid** ist das Tripel $([\, A \,|\, K \,], \cdot, 1)$ mit

$$[\, A \,|\, K \,] := A^*/K := A^*/_{\equiv}, \quad [u] \cdot [v] := [u \circ v], \quad 1 := [e]$$

und dem Quotientenhomomorphismus $\pi_{(A,K)} : A^* \to A^*/K : u \mapsto [u]$.

Für $[\, \{a_1, a_2, \dots\} \,|\, \{(u_1, v_1), \dots\} \,]$ schreiben wir $[\, a_1, a_2, \dots \,|\, u_1 = v_1, \dots \,]$.

Monoidpräsentation: Wortproblem

⚠ Die Äquivalenzklasse $[w] \in [\, A \,|\, K \,]$ kürzt man oft fahrlässig mit w ab. Dieser Missbrauch der Notation ist bequem und daher weit verbreitet. Vor dem Schlendrian machen Sie es bitte möglichst lange richtig.

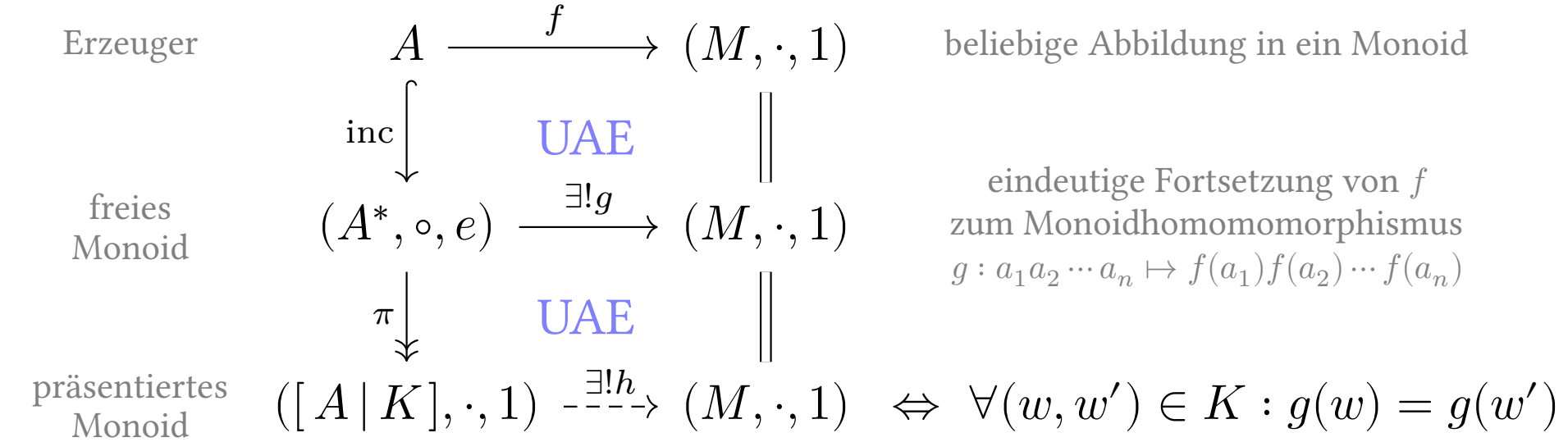
Warnung: Die Frage der Gleichheit in $[\, A \,|\, K \,]$ ist beliebig schwierig… Im Allgemeinen ist das **Wortproblem** in $(A^*, \equiv)$ algorithmisch unlösbar! Wir können im Allgemeinen nicht entscheiden, ob zwei Repräsentanten $u, v \in A^*$ äquivalent sind oder nicht, also im Quotienten $[\, A \,|\, K \,] = A^*/_{\equiv}$ dieselbe Klasse $[u] = [v]$ darstellen oder verschiedene Klassen $[u] \neq [v]$.

Beispiel: Wir schreiben $[\, A \,|\, - \,] = [\, A \,|\, \{\} \,]$ für das (freie) Monoid erzeugt von A mit der leeren Relationenmenge $K = \{\}$. Die etwas umständlich-redundante Schreibweise soll betonen, dass *keine* Relationen vorliegen.

🙂 In diesem Falle gilt $[w] = \{w\}$ für jedes Wort $w \in A^*$. Wir erhalten demnach den Monoidisomorphismus $A^* \cong [\, A \,|\, - \,]$ mit $w \leftrightarrows [w] = \{w\}$. Hier ist das Wortproblem trivial: Genau dann gilt $u \equiv v$ in $(A^*, \equiv)$, wenn $u = v$ in $(A^*, =)$ gilt. Letzteres prüfen wir buchstabenweise.

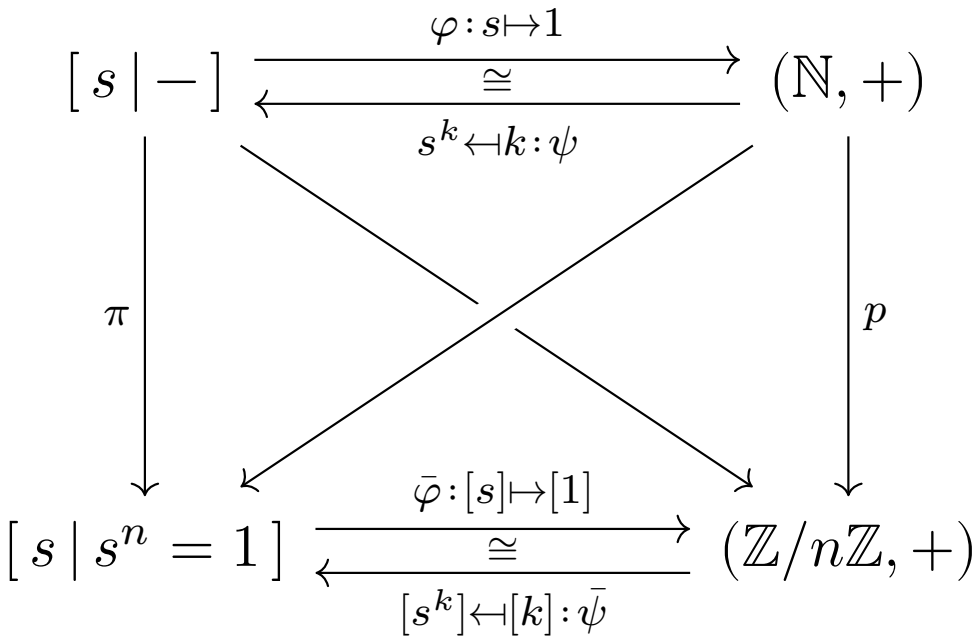
Monoidpräsentation: universelle Abbildungseigenschaft

☺ Im Monoid $[\,A \mid K\,]$ mag der Vergleich von Elementen schwierig sein, die Konstruktion von Homomorphismen $[\,A \mid K\,] \to M$ gelingt leicht!



Jede Abbildung $f : A \to M$ in ein Monoid $(M, \cdot, 1)$ setzt sich eindeutig fort zu dem Monoidhomomorphismus $g : (A^*, \circ, e) \to (M, \cdot, 1)$. Das ist die universelle Abbildungseigenschaft des freien Monoids A^*. Genau dann induziert g einen Monoidhomomorphismus $h : ([\,A \mid K\,], \cdot, 1) \to (M, \cdot, 1)$ mit $g = h \circ \pi$, wenn „$K \subseteq \mathrm{Ker}(g)$“ gilt, genauer gesagt $g(w) = g(w')$ für alle $(w, w') \in K$. Dann nämlich gilt Gleichheit $g(w) = g(w')$ für alle Wörter $w, w' \in A^*$ mit $w \equiv w'$, und wir erhalten $h : [w] \mapsto g(w)$.

Monoidpräsentation: das freie zyklische Monoid



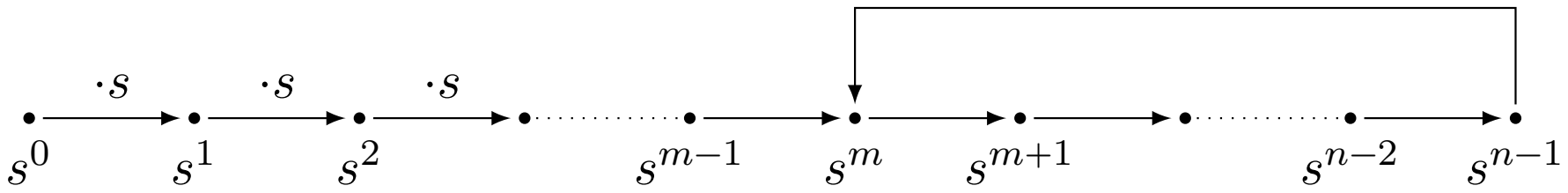
Für das freie Monoid $M = [\, s \mid - \,] := [\, \{s\} \mid \{\} \,]$ über einem Erzeuger s haben wir $(\varphi, \psi) : (M, \cdot) \cong (\mathbb{N}, +)$ dank $\varphi : s \mapsto 1$ und $\psi : k \mapsto s^k$. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Für das Monoid $C_n = [\, s \mid s^n = 1 \,] := [\, \{s\} \mid \{(s^n, e)\} \,]$ finden wir $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) : (C_n, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/n, +)$ dank $\bar{\varphi} : [s] \mapsto (1 + n\mathbb{Z})$ und $\bar{\psi} : (k + n\mathbb{Z}) \mapsto [s^k]$.

🙂 Wir *konstruieren* zunächst φ und ψ auf den ursprünglichen Mengen, *vor* der Quotientenbildung, denn hier gelingt es leicht. Damit *induzieren* wir $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ auf den Quotienten, und (erst) hier gilt der Isomorphismus.

Monoidpräsentation: zyklische Monoide

Aufgabe: Wie viele Elemente hat $C_{n,m} := [\, s \mid s^n = s^m \,]$ mit $0 \leq m < n$?

Lösung: Für $m = 0$ ist dies die zyklische Gruppe der Ordnung n.
Wir konstruieren den **Cayley–Graphen** von $C_{n,m}$ bezüglich $\{s\}$:



Folgen aus $s^n = s^m$ eventuell noch weitere, versteckte Relationen?
Nein, und das zeigen wir am besten durch ein konkretes Modell!

Hier verhilft uns der Satz von Cayley zu einer expliziten Darstellung:
Wir realisieren $C_{n,m}$ als ein konkretes Monoid von Abbildungen!

Hierzu betrachten wir die Menge $X = \{0, \ldots, n-1\}$ und die Abbildung $\sigma : X \to X$ mit $\sigma(k) = k+1$ für $0 \leq k < n-1$ und $\sigma(n-1) = m$.
Dann sind $\mathrm{id}_X = \sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^{n-1}$ paarweise verschieden und $\sigma^n = \sigma^m$.
Das Monoid $M = \{\, \sigma^k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ hat somit genau n Elemente, und wir erhalten den Monoidisomorphismus $(C_{n,m}, \cdot, 1) \xrightarrow{\sim} (M, \circ, \mathrm{id}_X) : s \mapsto \sigma$

Monoidpräsentation: Flächen und verbundene Summe

Welche Monoidpräsentation steckt hinter der Flächenklassifikation?

Sei $\mathscr{F} = \{ [F_g^{\pm}] \mid g \in \mathbb{N} \}$ die Menge aller Homöomorphieklassen zshgder geschlossener Flächen. Hierauf ist die verbundene Summe $\sharp : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ wohldefiniert durch $[A] \sharp [B] \mapsto [A \sharp B]$ (K4c), assoziativ, kommutativ, neutral ist $[\mathbb{S}^2]$. Schneiden und Kleben zeigt: Alle geschlossenen Flächen werden erzeugt vom Torus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$ und der reell-projektiven Ebene $P = \mathbb{RP}^2 \cong F_0^-$, zudem gilt die Dycksche Relation K3n.

$$F_g^+ \cong \mathbb{S}^2 \sharp T^{\sharp g}, \quad F_g^- \cong P^{\sharp(g+1)}, \quad T \sharp P \cong P \sharp P \sharp P.$$

Der Klassifikationssatz K4c besagt $(\mathscr{F}, \sharp, [\mathbb{S}^2]) \cong [\, t, p \mid tp = pt = p^3 \,] =: M$. Ausführlich: Die UAE liefert den Monoidhomomorphismus $h : M \to \mathscr{F}$ mit $t \mapsto [T]$ und $p \mapsto [P]$, da die Relationen $tp = pt = p^3$ in $\mathscr{F}$ erfüllt sind. Surjektivität von h gilt, da $\mathscr{F}$ von $[T], [P]$ erzeugt wird. Es bleibt noch die Injektivität zu zeigen: Jedes Wort in t, p können wir dank der Relationen umformen zu t^g bzw. p^{g+1} mit $g \in \mathbb{N}$. Die Bilder $[T^{\sharp g}]$ bzw. $[P^{\sharp(g+1)}]$ sind verschieden dank unserer topologischen Invarianten: Orientierbarkeit und Euler–Charakteristik. Das Monoid $(\mathscr{F}, \sharp, [\mathbb{S}^2])$ ist nicht zyklisch!

Monoidpräsentation: effizient und universell

Lässt sich jedes Monoid $(M, \cdot, 1)$ so präsentieren? Ja!

(1) Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ haben wir den Monoidhomomorphismus $g : A^* \to M : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 \cdots a_n$. Dieser ist surjektiv gdw die Menge A das Monoid M erzeugt. Die Wahl von A passen wir dem Beispiel an. Wenn uns partout nichts Besseres einfällt, so genügt etwa $A = M$.

(2) Anschließend wählen wir eine Menge von Relationen $K \subseteq A^* \times A^*$, die in K gelten, wir stellen also $g(u) = g(v)$ für alle $(u, v) \in K$ sicher. Daher induziert $g : A^* \twoheadrightarrow M$ den Homomorphismus $h : [\, A \,|\, K \,] \twoheadrightarrow M$. Dieser ist injektiv, wenn K *alle* Relationen in M erzeugt. Wenn uns partout nicht Besseres einfällt, so genügt $K = \{\, (u, v) \,|\, g(u) = g(v) \,\}$. Je nach Anwendung ist auch hier eine geschicktere Wahl möglich.

Beispiel: Wir betrachten die Verknüpfung $\cdot : M \times M \to M$ als (große) Multiplikationstafel und setzen $A := M$ und $K := \{\, ((a, b), (c)) \,|\, a \cdot b = c \,\}$. Für jedes Wort $w \in A^*$ gilt dann $w \equiv g(w)$. (Warum?) Daraus erhalten wir die Präsentation $(h, k) : [\, A \,|\, M \,] \xrightarrow{\sim} M$ mit $h([w]) = g(w)$ und $k(a) = [a]$, denn $h \circ k : a \mapsto [a] \mapsto a$ und $k \circ h : [w] \mapsto g(w) \mapsto [g(w)]$.

Die freie Gruppe $F(S) = \langle S \,|\, - \rangle$ und freie Reduktion

Beispiel: $\langle a, b \,|\, - \rangle = \{ 1,\ a^{e_1},\ b^{e_1},\ a^{e_1}b^{e_2},\ b^{e_1}a^{e_2},\ a^{e_1}b^{e_2}a^{e_3},\ b^{e_1}a^{e_2}b^{e_3},\ \ldots \}^!$
mit $e_i \in \mathbb{Z}^*$. Jedes Gruppenelement tritt genau einmal auf, insb. $ab \neq ba$.

Zur Erzeugermenge S betrachten wir das „verdoppelte“ Alphabet

$$A = S^{\pm} := S \times \{\pm 1\} = \{ s^+ = (s, +), s^- = (s, -) \,|\, s \in S \}.$$

Die Inversion $^{-1} : A \to A : s^{\pm} \mapsto s^{\mp}$ ist eine fixpunktfreie Involution.
Wir nutzen die Injektion $\iota : S \hookrightarrow A : s \mapsto s^+$ und schreiben kurz $s = s^+$.
Wir wollen $s^+s^- = s^-s^+ = 1$ und erhalten so die **freie Gruppe** über S:

$$F(S) := \langle S \,|\, - \rangle := [\, A \,|\, K \,] \quad \text{mit} \quad K = \{ (s^+s^-, e), (s^-s^+, e) \,|\, s \in S \}.$$

🙂 Wortproblem: Wir können jedes Gruppenwort über $S = \{ s_i \,|\, i \in I \}^!$ reduzieren zu $w = s_{i_1}^{e_1} s_{i_2}^{e_2} \cdots s_{i_\ell}^{e_\ell}$ mit $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_\ell$ und $e_1, e_2, \ldots, e_\ell \in \mathbb{Z}^*$.
Frei reduzierte Wörter sind genau dann äquivalent, wenn sie gleich sind.

🙂 Schöne und erhellende Übung: Dieses Ersetzungssystem (A, K) ist *terminierend* und *konfluent*, mündet also immer im selben Ergebnis, siehe
📖 V. Diekert *et al*: *Discrete Algebraic Methods*, de Gruyter 2016, Kapitel 8.

Gruppenpräsentation durch Erzeuger und Relationen

Definition L3B: Gruppenpräsentation

Zur Erzeugermenge S nutzen wir das Alphabet $A = S^{\pm} \supseteq S$.
Zur Relationenmenge $R \subseteq A^*$ setzen wir

$$K := \{(r, e) \,|\, r \in R\} \cup \{(s^+s^-, e), (s^-s^+, e) \,|\, s \in S\}.$$

Die durch (S, R) **präsentierte Gruppe** ist dann $\langle S \,|\, R \rangle := [\, A \,|\, K \,]$ mit

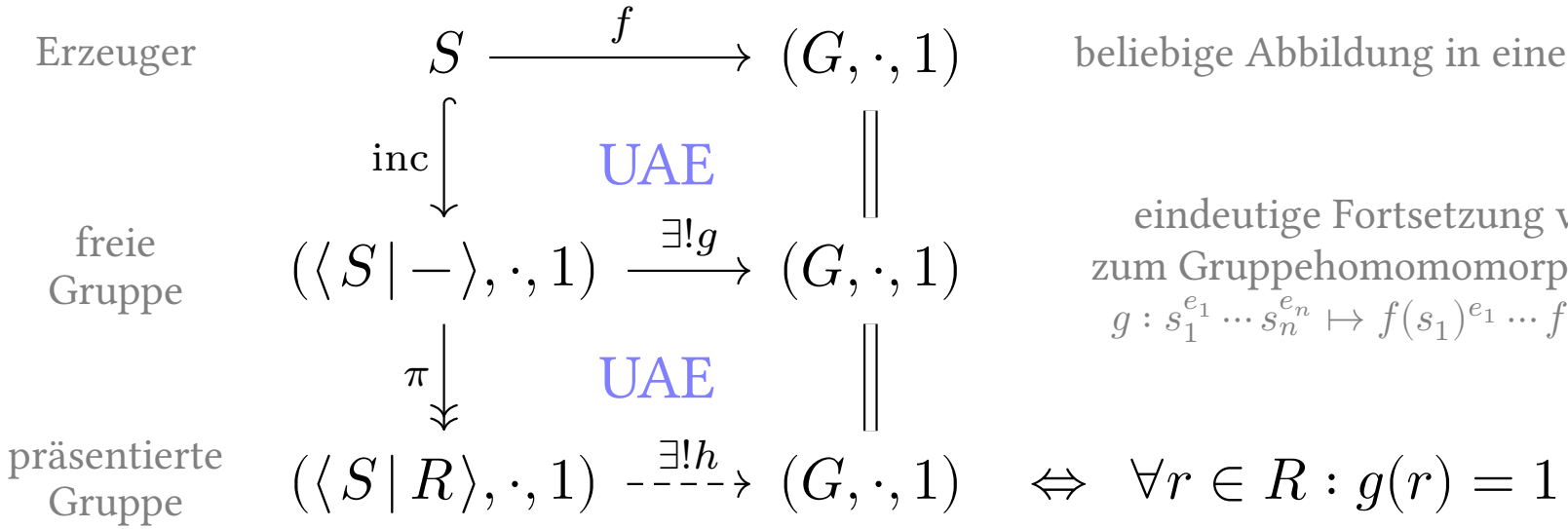
$$[a_1 \cdots a_n] = g \mapsto g^{-1} = [a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}],$$

denn es gilt $g \cdot g^{-1} = 1$ und $g^{-1} \cdot g = 1$. Jede **Relation** $u = v$ können wir nun als **Relator** $r := uv^{-1} \stackrel{!}{=} 1$ schreiben. Statt $\langle \{s_1, s_2, \dots\} \,|\, \{r_1, r_2, \dots\} \rangle$ schreiben wir $\langle s_1, s_2, \dots \,|\, r_1, r_2, \dots \rangle$ oder $\langle s_1, s_2, \dots \,|\, r_1 = r_2 = \dots = 1 \rangle$.

Wir nutzen Monoide als die einfachere und grundlegendere Struktur. Anschließend betrachten wir Gruppen als Spezialfall, indem wir jeden Erzeuger $s \in S$ verdoppeln zu $s^{\pm}$ und die Relation $s^+s^- = 1$ hinzufügen. Gruppen und ihre Präsentationen stehen fortan im Fokus.

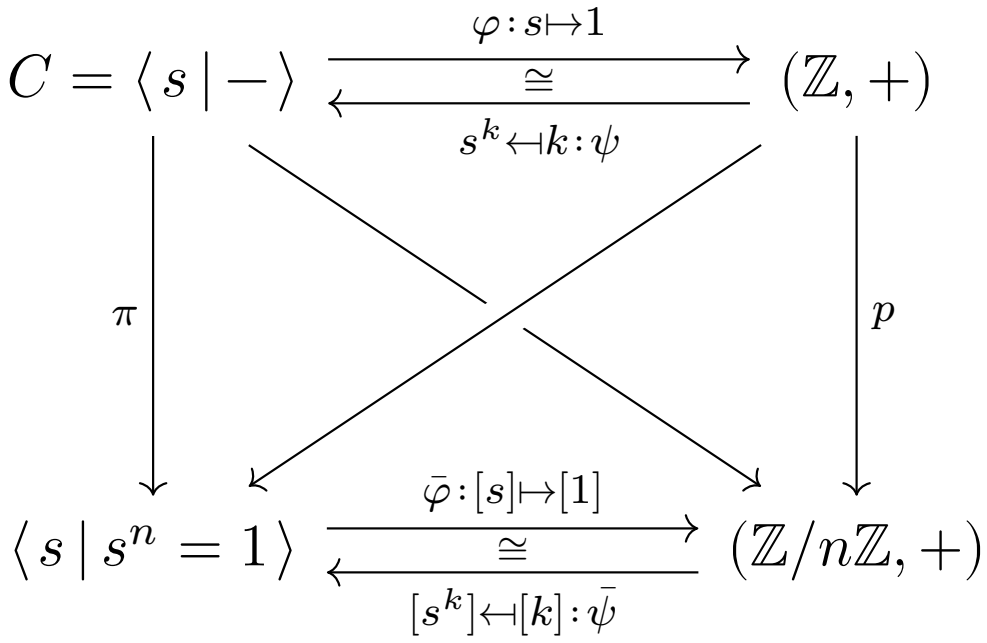
Gruppenpräsentation: universelle Abbildungseigenschaft

☺ In der Gruppe $\langle S \,|\, R \rangle$ mag der Vergleich von Elementen schwierig sein, die Konstruktion von Homomorphismen $\langle S \,|\, R \rangle \to G$ gelingt leicht!



Jede Abbildung $f : S \to G$ in eine Gruppe $(G, \cdot, 1)$ setzt sich eindeutig fort zu dem Gruppenhomomorphismus $g : (\langle S \,|\, - \rangle, \cdot, 1) \to (G, \cdot, 1)$. Das ist die universelle Abbildungseigenschaft der freien Gruppe $F(S) = \langle S \,|\, - \rangle$. Genau dann induziert g einen / den ersehnten Gruppenhomomorphismus $h : (\langle S \,|\, R \rangle, \cdot, 1) \to (G, \cdot, 1)$ mit $g = h \circ \pi$, wenn $R \subseteq \mathrm{Ker}(g)$ gilt, das heißt $g(r) = 1$ für alle $r \in R$. Dann nämlich gilt $g(w) = g(w')$ für alle Wörter $w, w' \in A^*$ mit $w \equiv w'$, und wir erhalten $h : [w] \mapsto g(w)$.

Gruppenpräsentation: zyklische Gruppen



Ausführlich setzen wir $f : \{s^{\pm}\} \to \{\pm 1\}$ fort zu $g : \{s^{\pm}\}^* \to \mathbb{Z}$, prüfen die Relationen $g(s^+ s^-) = g(s^- s^+) = g(e) = 0$, und erhalten so $\varphi : C \to \mathbb{Z}$. Umgekehrt, für $\psi : k \mapsto s^k$ prüfen wir, dass $(C, \cdot)$ eine Gruppe ist, und nutzen die universelle Eigenschaft der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$, ebenso frei über 1.

🙂 Wir *konstruieren* zunächst φ und ψ auf den ursprünglichen Mengen, *vor* der Quotientenbildung, denn hier gelingt es leicht. Damit *induzieren* wir $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ auf den Quotienten, und (erst) hier gilt der Isomorphismus.

Die freie abelsche Gruppe

Beispiel: Monoide und Gruppen sind im Allgemeinen nicht kommutativ. Zur Kommutativität genügt, dass alle Erzeuger kommutieren, etwa dank expliziter Vertauschungsregel als Teil der Relationen:

$$\left[s_1, \dots, s_n \,\middle|\, s_i s_j = s_j s_i : i, j = 1, \dots, n \right] \cong \mathbb{N}^n : \; s_i \leftrightarrows e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\left\langle s_1, \dots, s_n \,\middle|\, s_i s_j = s_j s_i : i, j = 1, \dots, n \right\rangle \cong \mathbb{Z}^n : \; s_i \leftrightarrows e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Dies nennen wir das **freie abelsche Monoid** bzw. die **freie abelsche Gruppe** über den n Erzeugern $s_1, \dots, s_n$. Stillschweigend gehen wir bei $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ immer davon aus, dass alle Buchstaben verschieden sind, also $s_i \neq s_j$ für alle $i \neq j$ gilt. Dies schreiben wir kurz $S = \{s_1, \dots, s_n\}^!$.

Genauso gelingt das freie abelsche Monoid bzw. die freie abelsche Gruppe über jeder beliebigen Erzeugermenge S, egal ob endlich oder unendlich.

Aufgabe: Präsentieren Sie $(\mathbb{Z}_{>0}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$. **Fundamentalsatz:**

$$(\mathbb{Z}_{>0}, \cdot) \xleftarrow{\sim} \left[p : p \in \mathbb{P} \,\middle|\, pq = qp : p, q \in \mathbb{P} \right] \cong \mathbb{N}^{(\mathbb{P})} \; : \; p \mapsto p$$

$$(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot) \xleftarrow{\sim} \left\langle p : p \in \mathbb{P} \,\middle|\, pq = qp : p, q \in \mathbb{P} \right\rangle \cong \mathbb{Z}^{(\mathbb{P})} \; : \; p \mapsto p$$

Präsentation einer vorgegebenen Gruppe

Definition L3κ: Präsentation einer vorgegebenen Gruppe

Eine **Präsentation** der Gruppe G ist ein Quadrupel (S, R, h, k) aus einer Präsentation (S, R) und einem Isomorphismuspaar $(h, k) : \langle S \mid R \rangle \cong G$.

Gilt $G = \langle S \rangle$ für eine endliche Teilmenge $S \subseteq G$, so heißt die Gruppe G **endlich erzeugt** durch S. Gilt stärker $G \cong \langle S \mid R \rangle$ mit S und R endlich, so nennen wir G **endlich präsentiert** durch (S, R).

Wenn nur die Existenz von S endlich oder (S, R) endlich gefordert ist, so sprechen wir von **endlich erzeugbar** und **endlich präsentierbar**.

Beispiel: Wir haben $(h, k) : \langle s \mid s^n \rangle \cong (\mathbb{Z}/n, +)$ mit $s^k \mathrel{⇆} k + n\mathbb{Z}$.

🙂 Der Isomorphismus $h : \langle S \mid R \rangle \xrightarrow{\sim} G$ parametrisiert G durch $\langle S \mid R \rangle$. Die Umkehrung k schreibt Elemente von G als Wörter über S modulo R. Wegen $k = h^{-1}$ genügt es, nur h anzugeben. Das ist meist bequemer.

🙂 Wir stehen vor zwei entgegengesetzten Aufgaben: „Hier ist (S, R), bestimme die Gruppe $\langle S \mid R \rangle$!“ vs „Hier ist G, finde eine Präsentation!“

Gruppenpräsentation: $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$

Aufgabe: Präsentieren Sie $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$.

Lösung: Wie oben gilt $(h, k) : \langle s \,|\, - \rangle \cong \mathbb{Z}$ mit $h(s) = 1$ und $k(n) = s^n$.

Jede rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ schreibt sich als Bruch $r = z/n!$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Somit wird $(\mathbb{Q}, +)$ erzeugt von $r_n = 1/n!$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dabei gilt $n \cdot r_n = r_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir erhalten so die Präsentation

$$(\mathbb{Q}, +) \twoheadleftarrow \left\langle s_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \,\middle|\, s_n^n = s_{n-1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \right\rangle =: (G, \cdot) : \tfrac{1}{n!} \mapsfrom s_n.$$

Dieser Gruppenhomomorphismus $h : (G, \cdot) \to (\mathbb{Q}, +)$ ist wohldefiniert, denn jede definierende Relation $s_n^n = s_{n-1}$ in $(G, \cdot)$ ist dank $nr_n = r_{n-1}$ in $(\mathbb{Q}, +)$ erfüllt. zudem ist h surjektiv, denn $(r_n = h(s_n))_{n \geq 1}$ erzeugt $(\mathbb{Q}, +)$. Die Umkehrung $k(z/n!) = s_n^z$ ist wohldefiniert, denn aus $a/p! = b/q!$ mit $p \leq q$ folgt $b = a(p+1) \cdots q$ sowie $k(a/p!) = s_p^a = \ldots = s_q^b = k(b/q!)$.

☺ Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist abelsch und **torsionsfrei**: Außer dem neutralen Element 0 enthält $(\mathbb{Q}, +)$ keine Elemente endlicher Ordnung. Dennoch ist die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ nicht frei abelsch. Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist **divisibel**: Zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existiert $w \in \mathbb{Q}$ mit $nw = x$.

Gruppenpräsentation: kanonisch

Erlaubt jede Gruppe eine Präsentation? Ja! Wenn uns partout nichts Besseres einfällt, so genügt hierzu die Multiplikationstabelle:

Beispiel L3E: Multiplikationstabelle als kanonische Präsentation

Jedes Monoid / jede Gruppe $(G,\cdot)$ erlaubt eine **Präsentation** (S,R), etwa

$$\big[\,G\,\big|\,(\,a\circ b,\,c\,)\,:a,b,c\in G,\,a\cdot b=c\,\big]\cong(G,\cdot)\,:\,[a]\leftrightarrows a,$$
$$\big\langle\,G\,\big|\,a\circ b\circ c^{-1}:a,b,c\in G,\,a\cdot b=c\,\big\rangle\cong(G,\cdot)\,:\,[a]\leftrightarrows a.$$

Ist G endlich / abzählbar, so können wir S,R endlich / abzählbar wählen.

Ist G endlich mit n Elementen, so können wir die Verknüpfungstafel $\cdot : G\times G\to G$ interpretieren als eine endliche Präsentation durch n Erzeuger und n^2 Relationen. Das ist mit wachsendem n schrecklich ineffizient, aber im Prinzip immer möglich. Je nach Anwendung sind geschicktere Wahlen möglich, kleiner und effizienter.

Übung: Beweisen Sie, dass wir in L3E tatsächlich einen kanonischen Isomorphismus erhalten. Das ist eine gute Übung zum Verständnis.

Gruppenpräsentation: Wünsche werden wahr!

Was bedeutet eine Präsentation, praktisch und anschaulich? Beispiel:

$$P := \langle x, y \,|\, x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1 \rangle$$

Wir wünschen uns eine Gruppe $(G, \cdot, 1_G)$ mit Elementen $x_G, y_G \in G$, welche die geforderten Relationen erfüllen, $x_G^3 = y_G^3 = (x_G \cdot y_G)^2 = 1_G$.

(1) Triviale Lösung: Die Gruppe $T = \{1_T\}$ erfüllt dies, mit $x_T = y_T = 1_T$. Diese triviale Darstellung gelingt ebenso für jede Präsentation $\langle S \,|\, R \rangle$.

(2) Die zyklische Gruppe $(C = \langle (1,2,3) \rangle, \circ, \mathrm{id})$ erfüllt unseren Wunsch mit $x_C = (1,2,3)$ und $y_C = (3,2,1)$, denn $x_C \circ y_C = \mathrm{id}$.

(3) Die alternierende Gruppe $(G = A_4, \circ, \mathrm{id})$ erfüllt unseren Wunsch mit $x_G = (1,2,3)$ und $y_G = (2,3,4)$, denn $x_G \circ y_G = (1,2)(3,4)$.

Anschaulich suchen wir also die „größte“ Gruppe $(G, \cdot, 1)$, die von x_G, y_G erzeugt wird und die geforderten Relationen $x_G^3 = y_G^3 = (x_G \cdot y_G)^2 = 1$ erfüllt. Die Gruppe $G = A_4$ mit $x_G = (1,2,3)$ und $y_G = (2,3,4)$ scheint hierfür eine gute Kandidatin, aber ist sie wirklich maximal?

Gruppenpräsentation: Wünsche werden wahr!

🙂 UAE! So definieren wir die Gruppe $P := \langle x, y \,|\, x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1 \rangle$ als „maximale Lösung“ durch ihre universelle Abbildungseigenschaft:

(a) Die Gruppe P kommt mit den ausgezeichneten Elementen $x_P, y_P \in P$, und diese erfüllen die geforderten Relationen $x_P^3 = y_P^3 = (x_P \cdot y_P)^2 = 1$.

(b) Zu jeder konkurrierenden Gruppe G mit Elementen $x_G, y_G \in G$ und den geforderten Relationen $x_G^3 = y_G^3 = (x_G \cdot y_G)^2 = 1_G$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $h : P \to G : x_P, y_P \mapsto x_G, y_G$.

Aufgabe: (1) Existiert eine solche Lösung? (2) Inwiefern ist sie eindeutig?

Lösung: (1) Ja, die Existenz verdanken wir unserer obigen Konstruktion als Äquivalenzklassen von Wörtern. (2) Ja, sind P und Q zwei Lösungen, so sind sie eindeutig isomorph! Es existiert genau ein Homomorphismus $h : P \to Q : x_P, y_P \mapsto x_Q, y_Q$ und umgekehrt $k : Q \to P : x_Q, y_Q \mapsto x_P, y_P$. Für diese gilt $k \circ h = \mathrm{id}_P$, denn dies ist der einzige Homomorphismus $P \to P$ mit $x_P, y_P \mapsto x_P, y_P$. Ebenso gilt $h \circ k = \mathrm{id}_Q$, denn dies ist der einzige Homomorphismus $Q \to Q$ mit $x_Q, y_Q \mapsto x_Q, y_Q$.

Gruppenpräsentation: Wünsche werden wahr!

Übung: Für $P := \langle x, y \,|\, x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1 \rangle$ finden wir das Modell A_4 mit $x_G = (1,2,3)$ und $y_G = (2,3,4)$, denn $x_G \cdot y_G = (1,2)(3,4)$.
Zeigen Sie, mit viel Geduld, dass P höchstens 12 Elemente hat.
Folgern Sie daraus $P \cong A_4$ mit $x \mapsto (1,2,3)$ und $y \mapsto (2,3,4)$.

Übung: Für $Q := \langle x, y \,|\, x^5 = y^2 = (xy)^3 = 1 \rangle$ finden wir als Modell die alternierende Gruppe A_5 mit $x_G = (1,2,3,4,5)$ und $y_G = (1,2)(3,4)$.
Zeigen Sie, mit noch mehr Geduld, dass Q höchstens 60 Elemente hat.
Folgern Sie daraus $Q \cong A_5$ mit $x \mapsto (1,2,3,4,5)$ und $y \mapsto (1,2)(3,4)$.

🙂 Für sehr kleine Beispiele kann man solche Rechnungen gerade noch per Hand durchführen und dabei viel lernen. Probieren Sie es selbst!
Eine Ausführung bietet `math.stackexchange.com/questions/4588584`.

Die systematische Behandlung führt zum **Todd–Coxeter–Algorithmus**.
Ist die präsentierte Gruppe P endlich, so *konstruiert* er eine vollständige Liste aller Elemente, und sein Abschluss *beweist* die Vollständigkeit.

Gruppenpräsentation: Wünsche werden wahr!

☺ Bequem nutzbar, effizient implementiert und gründlich getestet finden Sie dies zum Beispiel in GAP, `https://docs.gap-system.org/doc/ref/chap47`.

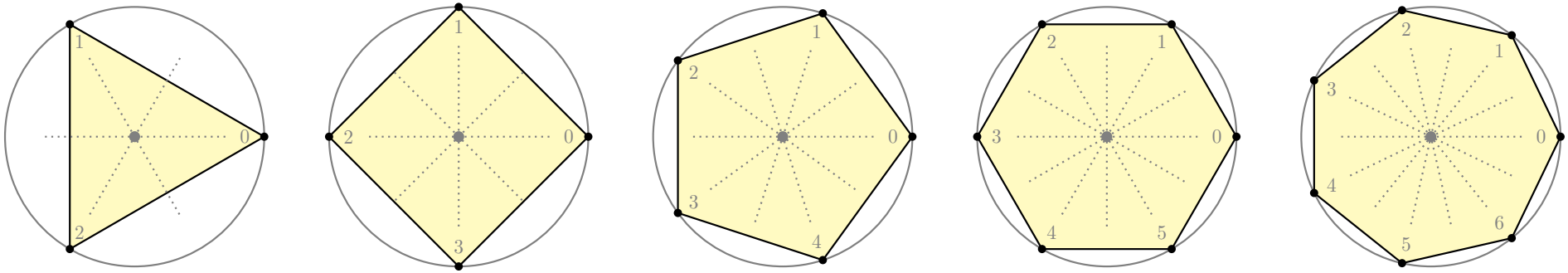
Zur Illustration zeige ich die beiden obigen Elementezählungen mit GAP. GAP erkennt zudem typische Gruppen: symmetrisch, alternierend, uvm.

```
gap> F := FreeGroup( "x", "y" );;
gap> x := F.1;; y := F.2;;
gap> G := F / [ x^3, y^3, (x*y)^2 ];;
gap> [ Size(G), StructureDescription(G) ];
[ 12, "A4" ]

gap> F := FreeGroup( "x", "y" );;
gap> x := F.1;; y := F.2;;
gap> G := F / [ x^5, y^2, (x*y)^3 ];;
gap> [ Size(G), StructureDescription(G) ];
[ 60, "A5" ]
```

Die Diedergruppe als Isometrien des regulären n–Ecks

Wir betrachten das reguläre n–Eck $P_n \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ zu $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$:



Die **Diedergruppe** D_n^{I} besteht aus den euklidischen Isometrien von P_n:

$$D_n^{\mathrm{I}} = \Big\{ \underbrace{\rho_k : z \mapsto z\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}}_{\text{genau } n \text{ Drehungen}},\ \underbrace{\sigma_k : z \mapsto \overline{z}\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}}_{\text{... und } n \text{ Spiegelungen}} \ \Big|\ k = 0, \dots, n-1 \Big\} \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$$

Beispiel: Die acht Elemente von D_4^{I} sind $\rho_k : z \mapsto z\,\mathrm{i}^k$ und $\sigma_k : z \mapsto \overline{z}\,\mathrm{i}^k$.

Es gilt $\mathrm{id} = \rho_0 \in D_n^{\mathrm{I}}$, und zu $f, g \in D_n^{\mathrm{I}}$ gilt $f \circ g \in D_n^{\mathrm{I}}$ sowie $f^{-1} \in D_n^{\mathrm{I}}$.
In der Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{C})$ ist daher D_n^{I} eine **Untergruppe**.
Die Menge D_n^{I} mit der Komposition $\circ$ ist somit selbst eine **Gruppe**:
(a) Die Komposition $\circ : D_n^{\mathrm{I}} \times D_n^{\mathrm{I}} \to D_n^{\mathrm{I}}$ ist wohldefiniert und assoziativ.
(b) Die Isometrie $\mathrm{id} = \rho_0 \in D_n^{\mathrm{I}}$ ist neutral bezüglich Komposition.
(c) Zu jeder Isometrie $f \in D_n^{\mathrm{I}}$ existiert eine inverse Isometrie $g \in D_n^{\mathrm{I}}$.

Die Diedergruppe als Isometrien des regulären n–Ecks

Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand d erhält, also $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Verschiebungen sind Isometrien, ebenso Drehungen und Spiegelungen.

Die Isometrien, die uns hier interessieren, fixieren alle den Ursprung. Die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}, 0)$ besteht aus allen Drehungen $z \mapsto za$ und allen Spiegelungen $z \mapsto \bar{z}a$, wobei $a \in \mathbb{S}^1$, also $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$.

Zur expliziten Konstruktion von $P_n = [w_0, w_1, \dots, w_{n-1}]$ wählen wir als Eckpunkte die $n$ten Einheitswurzeln $w_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Übung: $D_n^{\mathrm{I}} = \{\, g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}, 0) \mid f(P_n) = P_n \,\}$ ist eine Unter/Gruppe. Erstellen Sie für $n = 4$ die Verknüpfungstabelle, möglichst übersichtlich.

Es bleibt die Frage: Warum gilt $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}, P_n) = D_n^{\mathrm{I}}$ wie oben angegeben? Klar ist „$\supseteq$“. Wir zeigen umgekerht „$\subseteq$“: Hierzu sei $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}, P_n)$. Als Isometrie bildet g Ecken auf Ecken ab und Kanten auf Kanten. Zunächst drehen wir $g(w_0)$ auf w_0, dann spiegeln wir ggf. $g(w_1)$ auf w_1. So finden wir eine Drehung oder Spiegelung $f \in D_n^{\mathrm{I}}$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$: Alle Ecken werden festgehalten, also ganz $\mathbb{C}$. Das zeigt $g = f^{-1} \in D_n^{\mathrm{I}}$.

Die Diedergruppe in Matrixdarstellung

Drehungen und Spiegelungen können wir durch Matrizen darstellen:

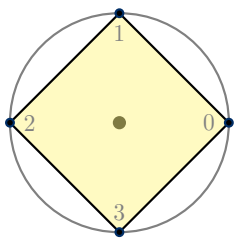
$$R_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & -\sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}, \quad S_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & \sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & -\cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}$$

Diese $2n$ Matrizen fassen wir zusammen zur **Dieder-Matrixgruppe**:

$$D_n^{\mathrm{M}} = \{ R_0, R_1, \dots, R_{n-1}, S_0, S_1, \dots, S_{n-1} \} \subseteq \mathrm{GL}_2 \mathbb{R}$$

Beispiel: Die acht Elemente der Diedergruppe $D_4^{\mathrm{M}} \leq \mathrm{GL}_2 \mathbb{Z}$ sind

$$R_0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \quad R_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \quad R_2 = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right], \quad R_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right],$$
$$S_0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right], \quad S_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \quad S_2 = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \quad S_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right].$$



Es gilt $E = R_0 \in D_n^{\mathrm{M}}$, und zu $A, B \in D_n^{\mathrm{M}}$ gilt $A \cdot B \in D_n^{\mathrm{M}}$ sowie $A^{-1} \in D_n^{\mathrm{M}}$.
In der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_2 \mathbb{R}$ ist D_n^{M} eine **Untergruppe**.
Die Menge D_n^{M} mit Matrixmultiplikation $\cdot$ ist somit selbst eine **Gruppe**:
(a) Die Multiplikation $\cdot : D_n^{\mathrm{M}} \times D_n^{\mathrm{M}} \to D_n^{\mathrm{M}}$ ist wohldefiniert und assoziativ.
(b) Die Einheitsmatrix $E = R_0 \in D_n^{\mathrm{M}}$ ist neutral bezüglich Multiplikation.
(c) Zu jeder Matrix $A \in D_n^{\mathrm{M}}$ existiert eine inverse Matrix $B \in D_n^{\mathrm{M}}$.

Die Diedergruppe in Matrixdarstellung

Zu jedem Ring $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir den Matrixring $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$. Die invertierbaren Matrizen bilden die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$. Eine **Matrixgruppe** ist eine Untergruppe $G \leq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$, d.h. sie enthält die Einheitsmatrix und ist abgeschlossen unter Komposition und Inversion; wir haben also $E \in G$, und für $A, B \in G$ gilt $A \cdot B \in G$ sowie $A^{-1} \in G$. Die Menge G mit Matrixmultiplikation $\cdot$ ist somit selbst eine **Gruppe**.

Wir nutzen dies hier speziell für den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ operiert auf $\mathbb{R}^n$ durch $x \mapsto Ax$. So können wir Drehungen und Spiegelungen bequem durch Matrizen darstellen:

$$\rho_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto R_k \cdot x, \qquad \sigma_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto S_k \cdot x$$

Wie üblich ist es sinnvoll, Matrizen und Abbildungen zu unterscheiden. Damit ist ρ_k die Drehung um den Winkel $2\pi k/n$ und σ_k die Spiegelung an der Achse, die gegen die x–Achse im Winkel $\pi k/n$ geneigt ist.

Übung: Zeigen Sie, dass D_n^{M} eine Matrixgruppe ist, wie angegeben. Erstellen Sie für $n = 4$ die Verknüpfungstabelle, möglichst übersichtlich.

Die Diedergruppe in Permutationsdarstellung

Wir können die Isometrien durch Permutationen der Ecken darstellen:

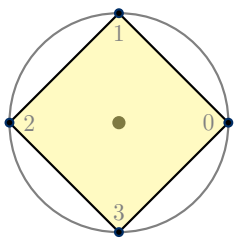
$$r_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n : x \mapsto k + x, \qquad s_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n : x \mapsto k - x$$

Diese fassen wir zusammen zur **Dieder-Permutationsgruppe**:

$$D_n^{\mathrm{P}} = \{ r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \} \subseteq \mathrm{S}_n$$

Beispiel: Die acht Permutationen der Diedergruppe $D_4^{\mathrm{P}} < \mathrm{S}_4$ sind

$$r_0 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right], \quad r_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{smallmatrix}\right], \quad r_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \quad r_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right],$$
$$s_0 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right], \quad s_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right], \quad s_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right], \quad s_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right].$$



Es gilt $\mathrm{id} = r_0 \in D_n^{\mathrm{P}}$, und zu $a, b \in D_n^{\mathrm{P}}$ gilt $a \circ b \in D_n^{\mathrm{P}}$ sowie $a^{-1} \in D_n^{\mathrm{P}}$.
In der symmetrischen Gruppe S_n ist daher D_n^{P} eine **Untergruppe**.
Die Menge D_n^{P} mit der Komposition $\circ$ ist somit selbst eine **Gruppe**:
(a) Die Komposition $\circ : D_n^{\mathrm{P}} \times D_n^{\mathrm{P}} \to D_n^{\mathrm{P}}$ ist wohldefiniert und assoziativ.
(b) Die Identität $\mathrm{id} = r_0 \in D_n^{\mathrm{P}}$ ist neutral bezüglich Komposition.
(c) Zu jeder Permutation $a \in D_n^{\mathrm{P}}$ existiert eine inverse $b \in D_n^{\mathrm{P}}$.

Die Diedergruppe in Permutationsdarstellung

Zu jeder Menge X bildet die Menge S_X aller Bijektionen $\sigma : X \xrightarrow{\sim} X$ die symmetrische Gruppe $(\mathrm{S}_X, \circ, \mathrm{id}_X)$. Im Spezialfall $X = \{1, \dots, n\}$ oder wie hier $X = \mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ schreiben wir dafür kurz S_n. Wir identifizieren $\mathbb{Z}_n$ mit der Eckenmenge $W_n = \{w_0, \dots, w_{n-1}\}$

Jede Isometrie $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}, P_n)$ wirkt auf der Eckenmenge W_n, erfüllt also $g(W_n) = W_n$. Die Einschränkung $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}, P_n) \to \mathrm{Sym}(W_n)$ ordnet so jeder Isometrie g eine Permutation $\sigma = g|_{W_n}^{W_n}$ zu. Umgekehrt wird die Isometrie g bereits durch ihre Eckenpermutation σ eindeutig festgelegt, die Einschränkung $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}, P_n) \to \mathrm{Sym}(W_n) : g$ ist also injektiv.

Wir setzen dazu $n \geq 3$ voraus. Für $n = 2$ und $P_2 = [-1, 1]$ gilt das nicht, denn $D_2^{\mathrm{I}} = \{\pm\mathrm{id}, \pm\mathrm{conj}\}$ hat Ordnung 4, doch $\mathrm{S}_{\{-1,1\}}$ nur Ordnung 2.

Übung: Zeigen Sie, dass D_n^{P} eine Unter/Gruppe ist, das heißt, sie enthält die Identität und ist abgeschlossen unter Komposition und Inversion. Damit erfüllt D_n^{P} die Gruppeneigenschaften (a–c) wie oben angegeben. Erstellen Sie für $n = 4$ die Verknüpfungstabelle, möglichst übersichtlich.

Diese drei Darstellungen sind isomorph.

Die Gruppe $D_n^{\mathrm{I}} < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ und $D_n^{\mathrm{M}} < \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ und $D_n^{\mathrm{P}} \leq \mathrm{S}_n$ begreifen wir konkret als Untergruppe der Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ der Ebene, der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ und der symmetrischen Gruppe S_n. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ sind die Gruppen D_n^{I} und D_n^{M} und D_n^{P} isomorph:

$$\begin{array}{ccccc} (D_n^{\mathrm{M}}, \cdot) & \overset{\varphi}{\underset{\varphi^{-1}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}}} & (D_n^{\mathrm{I}}, \circ) & \overset{\psi}{\underset{\psi^{-1}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}}} & (D_n^{\mathrm{P}}, \circ) \\ R_k, S_k & & \rho_k, \sigma_k & & r_k, s_k \end{array}$$

In der Gruppe D_n^{I} ist die Menge $C_n^{\mathrm{I}} = \{\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}\}$ der Drehungen eine Untergruppe: Sie ist abgeschlossen unter Komposition, sie enthält das neutrale Element $\rho_0 = \mathrm{id}$ und zu jedem Element f sein Inverses f^{-1}. Arbeitsersparnis: Assoziativität vererbt sich automatisch von D_n^{I} auf C_n^{I}.

Die Gruppe $(C_n^{\mathrm{I}}, \circ, \mathrm{id})$ ist isomorph zur zyklischen Gruppe $(\mathbb{Z}_n, +, 0)$:

$$h : (\mathbb{Z}_n, +, 0) \xrightarrow{\sim} (C_n^{\mathrm{I}}, \circ, \mathrm{id}) : k \mapsto \rho_k$$

Die Menge $D_n^{\mathrm{I}} \setminus C_n^{\mathrm{I}}$ der Spiegelungen hingegen ist keine Untergruppe: Die Komposition von zwei Spiegelungen ist selbst keine Spiegelung!

Was lernen wir daran?

Zur Anschauung und Motivation ist es meist hilfreich, so wie hier mit konkreten Beispielen anzufangen. Ich tue dies mit Absicht und Bedacht: Ein gut gewähltes, interessantes Beispiel bereichert unseren Fundus. Es ist keine Wegwerf-Illustration, sondern verdient Wertschätzung.

Was ist wesentlich an einer „Gruppe“? Das ist nicht leicht zu extrahieren! Jedes konkrete Beispiel ist dekoriert mit zufälligen, überflüssigen Details. Die Diedergruppen D_n^{I}, D_n^{M}, D_n^{P} etwa sind nicht „klinisch steril“, sondern verbinden diverse Aspekte von Gruppen, Untergruppen, Operationen.

Wir fokussieren uns auf **das Wesentliche** und definieren unsere Begriffe schließlich **axiomatisch**. Dieser kühne Sprung klärt und vereinfacht! Beim ersten Durchgang wird Ihnen dieses Vorgehen noch schwerfallen, weil es für Sie zunächst ungewohnt ist, doch es bewährt sich schnell.

Die Suche nach klärender Abstraktion ist nicht nur subjektiv-didaktisch, sondern auch objektiv-historisch real. In der Geschichte der Mathematik hat es recht lange gedauert, die grundlegenden Begriffe herauszuschälen, wie Monoid und Gruppe, Ring und Körper, Modul und Vektorraum, etc.

Präsentation der Diedergruppe

Satz L3м: Präsentation der Diedergruppe

Für die Diedergruppe D_n mit $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir die Präsentationen

$$(1)\ \ h : D_n^* := \langle s,t \,|\, s^2,\ t^2,\ (st)^n \rangle \qquad \twoheadrightarrow D_n : s \mapsto s_0,\ t \mapsto s_1$$
$$(2)\ \ h' : D_n^+ := \langle r,s \,|\, s^2,\ r^n,\ srs = r^{-1} \rangle \twoheadrightarrow D_n : s \mapsto s_0,\ r \mapsto r_1$$

Für kleine n gilt $D_3 \cong S_3$ und $D_2 \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ und $D_1 \cong \mathbb{Z}/2$, und $D_0 = D_\infty$ ist isomorph zu $D_0^* \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ und zu $D_0^+ \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2$.

Beweis: Die Coxeter–Präsentation (1) nutzt Spiegelungen:
(1a) In D_n gilt $s_k^2 = 1$ und $s_i s_j = r_{i-j}$, somit $(s_0 s_1)^n = 1$. (Nachrechnen!)
(1b) Der Gruppenhomomorphismus h ist wohldefiniert und surjektiv.
(1c) Sogar injektiv? Wir können D_n^* vollständig aufzählen:

$$D_n^* = \{1,\ s,\ t,\ st,\ ts,\ sts,\ tst,\ \ldots,\ sts\cdots = tst\cdots\}$$

Daraus folgt $\sharp D_n^* \leq 2n$. Demnach ist $h : D_n^* \twoheadrightarrow D_n$ bijektiv. QED

Präsentation der Diedergruppe

☺ Für die zweite Präsentation gehen wir genauso vor:

(2a) In D_n gilt $s_k^2 = 1$ und $r_k^n = 1$ sowie $s_\ell r_k s_\ell = r_{-k}$ für alle k, ℓ.
(2b) Der Gruppenhomomorphismus h' ist wohldefiniert und surjektiv.
(2c) Sogar injektiv? Auch D_n^* können wir vollständig aufzählen:

$$D_n^+ = \{ r^k s^\ell \mid k \in \mathbb{Z}/n,\ \ell \in \mathbb{Z}/2 \}.$$

Daraus folgt $\sharp D_n^+ \leq 2n$. Demnach ist $h' : D_n^+ \twoheadrightarrow D_n$ bijektiv. QED

☺ Alternativ zeigt diese Aufzählung direkt, dass h bzw. h' injektiv ist, denn die Bilder der aufgezählten Elemente sind paarweise verschieden! Diese allgemeinere Sichtweise hilft daher auch bei *unendlichen* Gruppen.

☺ Zur Präsentation $h : \langle S \mid R \rangle \xrightarrow{\sim} G$ geben wir die drei Daten S und R und $f : S \to G$ an und prüfen daran die drei behaupteten Eigenschaften:
(a) *Definition:* Die angegebenen Relationen gelten in der Zielgruppe.
(b) *Surjektion:* Die Erzeuger reichen aus; sie erzeugen alle Elemente.
(c) *Injektion:* Die Relationen reichen aus; sie erzeugen alle Relationen.

Artin–Tits– und Coxeter–Präsentation

☺ Diedergruppen werden erzeugt von Reflektionen. H.S.M. Coxeter (1907–2003) untersuchte solche **Spiegelungsgruppen** ab 1935. Parallel arbeitete Emil Artin (1898–1962) und später Jaques Tits (1930-2021) an solchen Präsentationen, bei denen die Relation $s^2 = 1$ weggelassen wird.

Wir betrachten Präsentationen mit Erzeugern $s, t, \ldots$ und Relationen der speziellen Form $ststst\ldots = tstst\ldots$, der Länge $m \in \mathbb{N}$ auf beiden Seiten. Hierzu definieren wir das Wechselprodukt $(s,t)^m := ststst\ldots$ der Länge m.

Gegeben sei eine Menge S und dazu eine **Coxeter–Matrix** $M = (m_{st})_{s,t\in S}$ der vorgeschriebenen Exponenten $m_{st} = m_{ts} \in \mathbb{N}$ mit $m_{ss} = 1$.

Coxeter–Gruppe: $W_M := \langle S \,|\, (st)^{m_{st}} : s,t \in S \rangle$

Artin–Tits–Gruppe: $A_M := \langle S \,|\, (s,t)^{m_{st}} = (t,s)^{m_{ts}} : s,t \in S \rangle$

Artin–Tits–Monoid: $A_M^+ := [\, S \,|\, (s,t)^{m_{st}} = (t,s)^{m_{ts}} : s,t \in S \,]$

Dabei entsteht W_M aus A_M und aus A_M^+ durch Hinzufügen der Relationen $s^2 = 1$ für alle $s \in S$, denn $(st)^m = 1$ bedeutet damit $(s,t)^m = (t,s)^m$.

Artin–Tits– und Coxeter–Präsentation

Beispiele: Die Diedergruppe erhalten wir für $S = \{s, t\}$ und $M = \left[\begin{smallmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Das freie Monoid $A_M^+ = [\,S\,|\,-\,]$ und die freie Gruppe $A_M = \langle\, S\,|\,-\,\rangle$ erhalten wir für die Coxeter–Matrix M mit $m_{st} = 0$ für alle $s \neq t$.

Mit $m_{st} = 2$ für alle $s \neq t$ sind $A_M^+ = [\,S\,|\,st = ts : s, t \in S\,] \cong \mathbb{N}^{(S)}$ und $A_M = \langle\, S\,|\,st = ts : s, t \in S\,\rangle \cong \mathbb{Z}^{(S)}$ frei abelsch sowie $W_M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(S)}$.

Auch die symmetrische Gruppe S_n lässt sich so gewinnen, siehe L3w:

$$\mathrm{S}_n \cong \left\langle t_1, \ldots, t_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{rl} t_i^2 = 1 & : 1 \leq s < n \\ t_i t_j = t_j t_i & : |i-j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & : |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \ldots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \ldots & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Gilt $m_{st} = m_{ts} = 1$ für $s \neq t$, so folgt die Gleichheit $s = t$, wir können also Erzeuger sparen. Daher schließt man dieses Fall aus.

☺ Endliche Coxeter–Gruppen wurden 1935 von Coxeter klassifiziert in vier Familien und sechs Ausnahmen, `en.wikipedia.org/wiki/Coxeter_group`.

Wann ist und wie wird eine Gruppe abelsch?

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe. Für je zwei Elemente a, b sind äquivalent:

1. Es gilt $ab = ba$, das heißt, die Elemente a und b **kommutieren**.
2. Es gilt $b^{-1}ab = a$; die **Konjugation** $\gamma_b : x \mapsto x^b = b^{-1}xb$ fixiert a.
3. Es gilt $b = a^{-1}ba$; die **Konjugation** $\gamma_a : x \mapsto x^a = a^{-1}xa$ fixiert b.
4. Es gilt $a^{-1}b^{-1}ab = 1$; der **Kommutator** $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$ ist trivial.

Der Kommutator $[a, b]$ misst für a, b die Abweichung vom Kommutieren. Alle Kommutatoren in G erzeugen gemeinsam die **Kommutatorgruppe**

$$G' := \langle [G, G] \rangle = \langle [a, b] \,\big|\, a, b \in G \rangle.$$

Sie misst, wie weit G von der Kommutativität abweicht; genau dann ist G **abelsch**, wenn $G' = \{1\}$ gilt. Wir können jede Gruppe G abelsch machen, indem wir zur Quotientengruppe G_{ab} von G modulo G' übergehen:

$$\alpha_G : G \twoheadrightarrow G_{\mathrm{ab}} := G/G' : a \mapsto aG'$$

Diese **Abelschmachung** oder **Abelianisierung** führen wir nun aus.
Frei nach Goethe: *Und bist du nicht abelsch, so brauch' ich G'walt.*

Kommutatormenge vs Kommutatorgruppe

Mit $[G,G] = \{\, [a,b] \,|\, a,b \in G \,\}$ bezeichne ich die Kommutator*menge*. Sie enthält das neutrale Element $1 = [1,1]$ und ist zudem abgeschlossen unter Inversion, denn es gilt $[a,b]^{-1} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba = [b,a]$. Hingegen ist die Menge $[G,G] \subseteq G$ im Allgemeinen *nicht* abgeschlossen unter Multiplikation. Die kleinsten Gegenbeispiele haben 96 Elemente.

📖 Ian D. MacDonald: *Commutators and their products.* Amer. Math. Monthly 93 (1986) 440–444. Ich zitiere aus der emphatischen Einleitung:

The beginner still has a problem. The groups with which he is familiar tend to have small orders or straightforward structures. Products of commutators in such groups tend to be commutators. An impression therefore comes about that "non-commutators" are unusual; maybe even pathological. It is our aim to persuade this beginner that "non-commutators" exist in an abundance of groups. […] The attitude that there are only a few exotic examples, kept in glass cases in some museum of groups, is wrong.

📖 Oystein Ore: *Some remarks on commutators.* Proc. Amer. Math. Soc. (1951) 307–314, Theorem 1: Jede gerade Permutation ist ein Kommutator.

Die Abelschmachung einer Gruppe

Wir führen die Abelschmachung nun detailliert aus. Damit der Quotient $\alpha_G : G \twoheadrightarrow G/G'$ nicht nur eine Menge, sondern wirklich eine Gruppe liefert, muss die Untergruppe G' in G normal sein, also invariant unter Konjugation. Diese grundlegende Beobachtung rechnen wir nun nach:

Satz L3N: Abelschmachung einer Gruppe

(0) In G ist G' normal. Die Quotientengruppe $G_{\mathrm{ab}} := G/G'$ ist abelsch.

Beweis: (0) Die Konjugation mit $c \in G$ bildet die Kommutatormenge $[G,G] = \{\,[a,b] \mid a,b \in G\,\}$ in sich selbst ab, denn für alle $a,b \in G$ gilt $[a,b]^c = c^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)c = (c^{-1}a^{-1}c)(c^{-1}b^{-1}c)(c^{-1}ac)(c^{-1}bc) = [a^c, b^c]$.

Demnach ist die von der Menge $[G,G]$ erzeugte Kommutatoruntergruppe $G' = \langle [G,G] \rangle$ konjugationsinvariant, also normal in G, kurz $G' \trianglelefteq G$. Demnach vererbt G die Gruppenstruktur vermöge $\alpha_G : G \twoheadrightarrow G/G'$.

Für $a,b \in G$ gilt $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab \in G'$, also $a^{-1}b^{-1}abG' = G'$ und somit $abG' = baG'$. Das bedeutet, die Quotientengruppe $G/G' = \{\,aG' \mid a \in G\,\}$ mit der Verknüpfung $(aG') \cdot (bG') = (ab)G'$ ist abelsch. QED

Die Kommutatoruntergruppe ist invariant.

Bemerkung: Ist $f : G \to G$ ein beliebiger Endomorphismus von G, so gilt $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$, also $f([G,G]) \subseteq [G,G]$ und $f(G') \subseteq G'$. In diesem Sinne ist $G' \leq G$ eine „vollinvariante“ Untergruppe. Invarianz gilt somit insbesondere für jeden Automorphismus $f : G \xrightarrow{\sim} G$, demnach ist G' eine „charakteristische“ Untergruppe. Invarianz gilt speziell für jeden inneren Automorphismus $f : G \xrightarrow{\sim} G : x \mapsto x^g$, demnach ist G' eine „normale“ Untergruppe. Allein darauf kommt es bei der Quotientenbildung an.

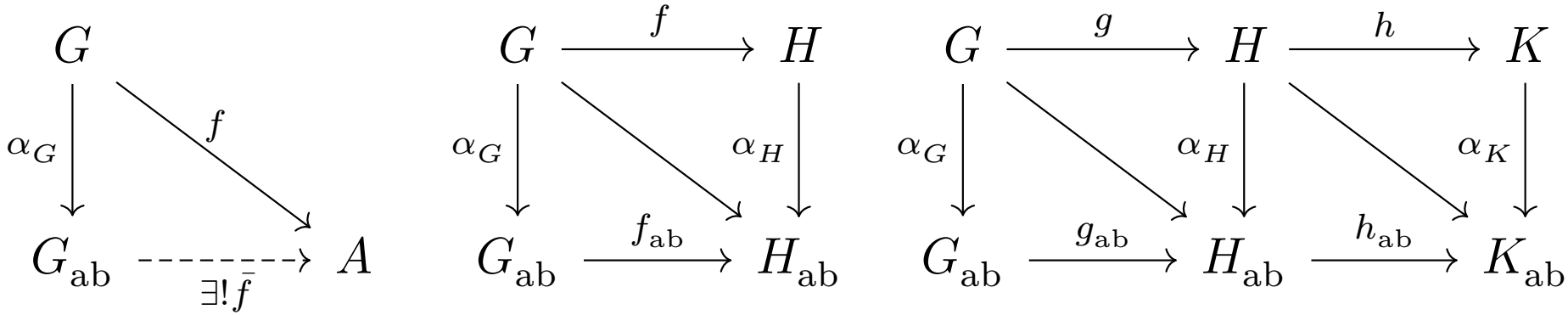
Aufgabe: Es gilt $K \trianglelefteq G$ und G/K abelsch gdw $G' \leq K \leq G$.

Lösung: „$\Rightarrow$“: Sei G/K abelsch, also $aK \cdot bK = bK \cdot aK$ für alle $a, b \in G$. Daraus folgt $abK = baK$, also $(ba)^{-1}abK = K$, und somit $[a,b] \in K$. Somit gilt $[G,G] \leq K$ und $G' = \langle [G,G] \rangle \leq K$, wie behauptet.

„$\Leftarrow$“: Wir wissen bereits, dass G/G' eine abelsche Gruppe ist. Jede Untergruppe H mit $\{1\} \leq H \leq G/G'$ ist demnach normal. Dank Korrespondenz ist jede Gruppe K mit $G' \leq K \leq G$ normal.

Ausführlich: Für alle $k \in K$ und $g \in G$ gilt $k^g \in K$, denn wir haben $k^{-1} \cdot k^g = [k,g] \in G' \leq K$ und somit $k^g = k \cdot [k,g] \in K \cdot K = K$.

Die Abelschmachung eines Gruppenhomomorphismus



Satz L3N: Abelschmachung eines Gruppenhomomorphismus

(1) Der Quotient $\alpha_G : G \to G_{\mathrm{ab}} : a \mapsto aG'$ hat die universelle Eigenschaft: Zu jedem Homomorphismus $f : G \to A$ in eine abelsche Gruppe existiert genau ein Homomorphismus $\bar{f} : G_{\mathrm{ab}} \to A$ mit $f = \bar{f} \circ \alpha_G$.

(2) Jedem Homomorphismus $f : G \to H$ ordnet die Abelschmachung den eindeutigen Homomorphismus $f_{\mathrm{ab}} : G_{\mathrm{ab}} \to H_{\mathrm{ab}}$ mit $\alpha_H \circ f = f_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_G$ zu.

Beweis: (1) Für alle Elemente $a, b \in G$ gilt $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in \mathrm{Ker}(f)$, denn $f(a^{-1}b^{-1}ab) = f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) = 1$. Dank $G' \leq \mathrm{Ker}(f)$ induziert f den Homomorphismus $\bar{f} : G/G' \to A : aG' \mapsto f(a)$.

(2) Die Komposition $\alpha_H \circ f : G \to H_{\mathrm{ab}}$ induziert $f_{\mathrm{ab}} : G_{\mathrm{ab}} \to H_{\mathrm{ab}}$. QED

Die Abelschmachung ist ein Funktor.

Satz L3N: Funktorialität

(3) Die Abelschmachung ist ein Funktor $\mathrm{ab} : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}$.
(3a) Für die Identität jeder Gruppe G gilt $(\mathrm{id}_G)_{\mathrm{ab}} = \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}}$.
(3b) Für $g : G \to H$ und $h : H \to K$ gilt $(h \circ g)_{\mathrm{ab}} = h_{\mathrm{ab}} \circ g_{\mathrm{ab}}$.
Genauer ist $(\mathrm{inc}, \mathrm{ab}) : \mathtt{Ab} \rightleftarrows \mathtt{Grp}$ eine Retraktion.

Beweis: (3a) Für $f = \mathrm{id}_G : G \to G$ ergibt die Abelschmachung (2) durch Einsetzen $f_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_G = \alpha_G \circ f = \alpha_G = \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}} \circ \alpha_G$. Dank der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft (1) folgt hieraus $f_{\mathrm{ab}} = \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}}$.

(3b) Für $f = h \circ g : G \to K$ folgt $f_{\mathrm{ab}} = h_{\mathrm{ab}} \circ g_{\mathrm{ab}}$ aus obigem Diagramm:
Es gilt $f_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_G = \alpha_K \circ f = \alpha_K \circ h \circ g = h_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_H \circ g = h_{\mathrm{ab}} \circ g_{\mathrm{ab}} \circ \alpha_G$.
Dank der Eindeutigkeit (1) folgt $f_{\mathrm{ab}} = h_{\mathrm{ab}} \circ g_{\mathrm{ab}}$, wie behauptet.

Speziell auf der Unterkategorie $\mathtt{Ab} \leq \mathtt{Grp}$ aller abelschen Gruppen ist die Abelschmachung $\mathrm{ab} : \mathtt{Ab} \to \mathtt{Ab}$ äquivalent zum identischen Funktor $\mathrm{id}_{\mathtt{Ab}}$.
In diesem Sinne ist die Abelschmaschung $\mathrm{ab} : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}$ eine Retraktion zur Inklusion $\mathrm{inc} : \mathtt{Ab} \to \mathtt{Grp}$, kurz $(\mathrm{inc}, \mathrm{ab}) : \mathtt{Ab} \rightleftarrows \mathtt{Grp}$. QED

Die Abelschmachung ist ein Funktor.

☺ Die Aussage „$\mathrm{ab} : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}$ ist ein Funktor“ bedeutet ausführlich:

Wir ordnen gemäß (0) jeder Gruppe $G \in \mathtt{Grp}$ eine abelsche Gruppe $G_{\mathrm{ab}} \in \mathtt{Ab}$ zu und gemäß (2) jedem Homomorphismus $f : G \to H$ von Gruppen einen Homomorphismus $f_{\mathrm{ab}} : G_{\mathrm{ab}} \to H_{\mathrm{ab}}$ abelscher Gruppen.

Diese Zuordnung respektiert alle Identitäten gemäß (3a) und alle Kompositionen gemäß (3b). Diese Eigenschaften sind sehr nützlich, daher fassen wir sie zum Begriff des „Funktors“ zusammen.

☺ Die abstrakte Konstruktion und ihre Eigenschaften lassen sich leicht nachrechnen, wie hier zu sehen. Im Folgenden wird es darum gehen, konkrete Beispiele auszurechnen. Bemerkenswerterweise sind hier die speziellen Rechnungen weit komplizierter als die allgemeine Theorie… und sicher auch wesentlich interessanter. (So ist es ja recht oft.)

Zur Einstimmung nenne ich das Verhalten der Abelschmachung unter Sur/In/Bijektionen: Allgemeine Aussagen sind recht leicht, spezielle Gegen/Beispiele verbinden kreative Kunst mit solidem Handwerk.

Abelschmachung und Sur/In/Bijektivität

Satz L3N: Abelschmachung und Sur/In/Bijektivität

(4) Ist $g : G \to H$ bijektiv oder surjektiv, so auch $g_{\mathrm{ab}} : G_{\mathrm{ab}} \to H_{\mathrm{ab}}$. Injektivität hingegen bleibt bei Abelschmachung nicht erhalten!

(5) Für jeden inneren Automorphismus $f : G \to G : x \mapsto x^g = g^{-1}xg$ mit $g \in G$ gilt nach Abelschmachung $f_{\mathrm{ab}} = \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}} : G_{\mathrm{ab}} \to G_{\mathrm{ab}}$.

Beweis: (4a) Ist der Homomorphismus $g : G \to H$ bijektiv, so ist auch $h = g^{-1} : H \to G$ ein Homomorphismus, kurz $(g, h) : G \cong H$. Wie jeder Funktor erhält ab Isomorphismen: Aus $h \circ g = \mathrm{id}_G$ und $g \circ h = \mathrm{id}_H$ folgt $h_{\mathrm{ab}} \circ g_{\mathrm{ab}} = \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}}$ und $g_{\mathrm{ab}} \circ h_{\mathrm{ab}} = \mathrm{id}_{H_{\mathrm{ab}}}$, kurz $(g_{\mathrm{ab}}, h_{\mathrm{ab}}) : G_{\mathrm{ab}} \cong H_{\mathrm{ab}}$.

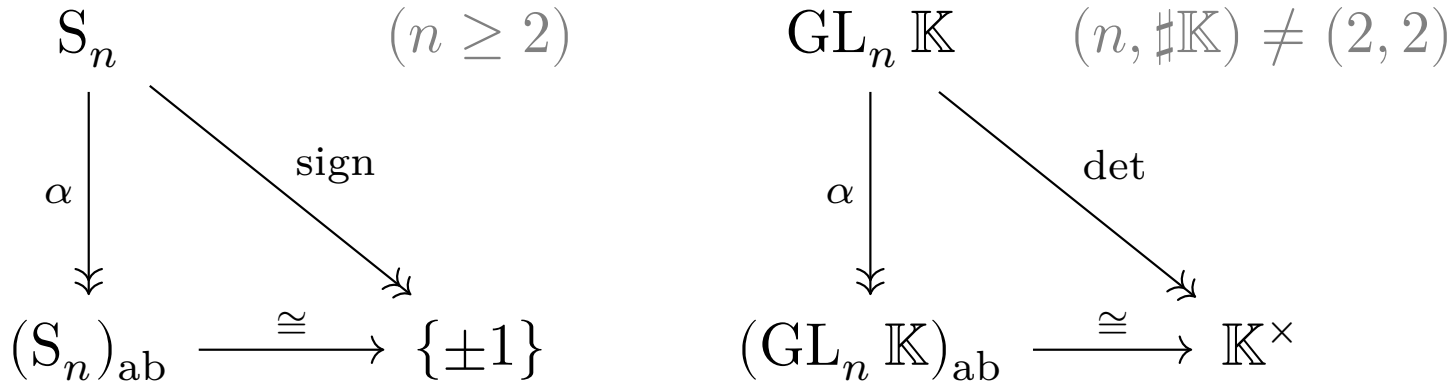
(4b) Aus $f : G \twoheadrightarrow H$ folgt $\alpha_H \circ f : G \twoheadrightarrow H_{\mathrm{ab}}$ und somit $\bar{f} : G_{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow H_{\mathrm{ab}}$.

(4c) Wir betrachten die Abelschmachung $\mathrm{sign} : \mathrm{S}_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die Inklusion $\iota : \langle (1, 2, \ldots, n) \rangle \hookrightarrow \mathrm{S}_n$ ist injektiv, nicht jedoch ihre Abelschmachung $\iota_{\mathrm{ab}} : \langle (1, 2, \ldots, n) \rangle_{\mathrm{ab}} \to (\mathrm{S}_n)_{\mathrm{ab}} \cong \{\pm 1\}$ für $n \geq 3$.

(5) Nach Konstruktion gilt $x \equiv x^g \bmod G'$, da $x^{-1}x^g = [x, g] \in G'$. QED

Abelschmachung vs Signatur und Determinante

Die Lineare Algebra zeigt Ihnen zwei wichtige Abelschmachungen: die Signatur $\operatorname{sign}_n : \mathrm{S}_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und die Determinante $\det_{\mathbb{K}}^n : \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^\times$ für jeden Körper, ausgenommen $(n, \sharp\mathbb{K}) = (2,2)$.

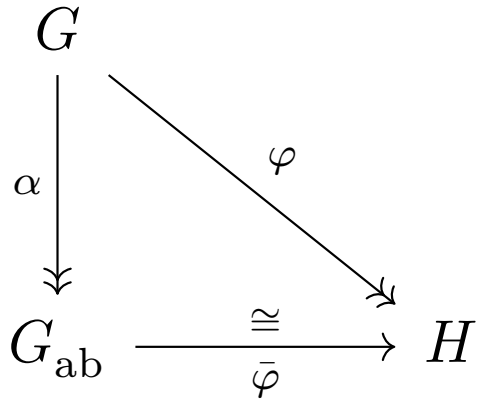


Genauer bedeutet das: Der induzierte Gruppenhomomorphismus $(\mathrm{S}_n)_{\mathrm{ab}} \to \{\pm 1\}$ bzw. $(\mathrm{GL}_n \mathbb{K})_{\mathrm{ab}} \to \mathbb{K}^\times$ erweist sich als Isomorphismus. In diesem Sinne ist die Abelschmachung α zwar nicht *gleich* der Signatur bzw. Determinante, aber doch immerhin *isomorph* (siehe folgende Folie).

🙂 Dies sind konkrete Inkarnationen der universellen Abelschmachung, sie werden überall in der Mathematik und ihren Anwendungen genutzt. Deshalb rechnen wir dies in den folgenden beiden Sätzen sorgsam nach.

Abelschmachung vs Signatur und Determinante

Wie oben definiert ist die Abelschmachung, streng formal betrachtet, der Quotientenhomomorphismus $\alpha : G \twoheadrightarrow G_{\mathrm{ab}} := G/G' : a \mapsto aG'$.
Signatur und Determinante tun „im Wesentlichen“ genau das, sie sind im Folgenden Sinne *äquivalent* zur Abelschmachung:



Ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ ist **äquivalent zur Abelschmachung** $\alpha : G \twoheadrightarrow G_{\mathrm{ab}} := G/G'$, falls $\mathrm{Ker}(\varphi) = G'$ gilt.

Anders gesagt: Der Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ hat eine abelsche Bildgruppe H, und der induzierte Gruppenhomomorphismus $\bar{\varphi} : G_{\mathrm{ab}} \to H : aG \mapsto \varphi(a)$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \alpha$ erweist sich als Isomorphismus.

Die Signatur als Abelschmachung

Satz L3o: die Abelschmachung der symmetrischen Gruppe S_n

(1) Die symmetrische Gruppe S_n hat als Kommutatorgruppe $\mathrm{S}_n' = \mathrm{A}_n$.
(2) Weiters gilt $\mathrm{A}_n' = \mathrm{A}_n$, außer in den Ausnahmefällen $n \in \{3, 4\}$.

Für $n = 1$ ist $\mathrm{sign}_1 : \mathrm{S}_1 \xrightarrow{\sim} \{1\}$ trivial. Für $n \geq 2$ ist $\mathrm{sign}_n : \mathrm{S}_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ äquivalent zur Abelschmachung, d.h. jeder Gruppenhomomorphismus $f : \mathrm{S}_n \to A$ in eine abelsche Gruppe A faktorisiert eindeutig über sign_n: Es existiert genau ein Homomorphismus $\bar{f} : \{\pm 1\} \to A$ mit $f = \bar{f} \circ \mathrm{sign}_n$.

Beweis: (1) „$\subseteq$“: Nach Definition gilt $\mathrm{A}_n := \mathrm{Ker}(\mathrm{sign}_n : \mathrm{S}_n \to \{\pm 1\})$. Da die Zielgruppe $\{\pm 1\}$ abelsch ist, folgt $\mathrm{S}_n' \subseteq \mathrm{A}_n$. Alternativ: Jeder Kommutator $[\sigma, \tau]$ mit $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$ ist gerade, also $\mathrm{S}_n' = \langle [\mathrm{S}_n, \mathrm{S}_n] \rangle \subseteq \mathrm{A}_n$.

„$\supseteq$“: Wir zeigen $\mathrm{S}_n' \supseteq \mathrm{A}_n$. Für $n \in \{1, 2\}$ gilt $\mathrm{A}_n = \{1\}$. Sei also $n \geq 3$. In der Gruppe $(\mathrm{S}_n, \circ, \mathrm{id})$ ist jeder 3–Zykel (i, j, k) ein Kommutator dank $[(i, k), (j, k)] = (i, k)(j, k)(i, k)(j, k) = (i, j, k)$. Die Gruppe A_n wird von 3–Zykeln erzeugt. (Induktion: Übung!) Also gilt $\mathrm{A}_n \subseteq \langle [\mathrm{S}_n, \mathrm{S}_n] \rangle = \mathrm{S}_n'$.

Die Signatur als Abelschmachung

(2) Für $n \geq 5$ folgt ebenso $\mathrm{A}_n' = \mathrm{A}_n$, denn jeder 3–Zykel liegt in A_n und ist ein Kommutator von zwei geeigneten 3–Zykeln, ebenfalls in A_n, gemäß $[(1,2,3),(1,4,5)] = (1,3,2)(1,5,4)(1,2,3)(1,4,5) = (1,3,5)$.

Für $n = 3$ ist $\mathrm{A}_3 = \langle (1,2,3) \rangle$ abelsch, also $\mathrm{A}_3' = \{\mathrm{id}\} \subsetneq \mathrm{A}_3$ trivial.
Für $n = 4$ ist $\mathrm{A}_4' = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \subsetneq \mathrm{A}_4$, genannt die Kleinsche Vierergruppe, und somit $\mathrm{A}_4'' = \{\mathrm{id}\}$. QED

Bemerkung: Zu jeder Gruppe $(G, \cdot, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die $n$te **abgeleitete Gruppe** $G^{(n)}$ durch $G^{(0)} := G$ und rekursiv $G^{(n+1)} := (G^{(n)})'$. Gilt $G^{(n)} = \{1\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir die Gruppe G **auflösbar**.

Die kleinen symmetrischen Gruppen $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3, \mathrm{S}_4$ sind somit auflösbar, ebenso $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$. Für $n \geq 5$ jedoch sind S_n und A_n nicht auflösbar. (Das entspricht der Auflösung von Polynomgleichungen vom Grad n: Für kleine Grade $n \leq 4$ existieren explizite Lösungsformeln, die mit den Körperoperationen und Wurzelziehen auskommen. Für $n \geq 5$ zeigt die Galois–Theorie, dass keine solche Lösungsformel existieren kann.)

Die Determinante als Abelschmachung

Analog zur Signatur $\operatorname{sign}_n : \mathrm{S}_n \to \{\pm 1\}$ erkennen wir schließlich auch die Determinante $\det^n_{\mathbb{K}} : \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \to \mathbb{K}^\times$ als Abelschmachung. Wir formulieren dies der Einfachheit halber nur über Körpern:

Satz L3P: die Abelschmachung der allgemeinen linearen Gruppe GL_n

(1) Für jeden Körper $\mathbb{K}$ gilt $\mathrm{GL}'_n \mathbb{K} = \mathrm{SL}_n \mathbb{K}$, außer für $n = 2$ und $\sharp\mathbb{K} = 2$.
(2) Weiters gilt $\mathrm{SL}'_n \mathbb{K} = \mathrm{SL}_n \mathbb{K}$, außer für $n = 2$ und $\sharp\mathbb{K} \in \{2, 3\}$.

Speziell für $n = 1$ ist $\det^1_{\mathbb{K}} : \mathrm{GL}_1 \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^\times$ ein Gruppenisomorphismus. Für $n \geq 2$ ist $\det^n_{\mathbb{K}} : \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^\times$ äquivalent zur Abelschmachung, das bedeutet, jeder Gruppenhomomorphismus $f : \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \to A$ in eine abelsche Gruppe A faktorisiert eindeutig über die Determinante $\det^n_{\mathbb{K}}$: Es existiert genau ein Homomorphismus $\bar{f} : \mathbb{K}^\times \to A$ mit $f = \bar{f} \circ \det^n_{\mathbb{K}}$.

Beweis: (1) „$\subseteq$“: Nach Definition gilt $\mathrm{SL}_n \mathbb{K} := \operatorname{Ker}(\det^n_{\mathbb{K}} : \mathrm{GL}_n \mathbb{K} \to \mathbb{K}^\times)$. Da die Zielgruppe $\mathbb{K}^\times$ abelsch ist, folgt $\mathrm{GL}'_n \mathbb{K} \subseteq \mathrm{SL}_n \mathbb{K}$. Alternativ: Jeder Kommutator $[A, B]$ mit $A, B \in \mathrm{GL}_n$ hat Determinante 1, liegt also in SL_n.

Die Determinante als Abelschmachung

„$\supseteq$“: Wir zeigen $\mathrm{GL}_n' \supseteq \mathrm{SL}_n$. Für $n = 1$ gilt $\mathrm{SL}_1 = \{1\}$. Sei also $n \geq 2$.
Sei $T_{ij}(a) = E + aE_{ij} \in \mathrm{SL}_n$ die Transvektion zu Indizes $i \neq j$ und $a \in \mathbb{K}$; auf der Diagonalen stehen Einsen, a an der Stelle (i, j), sonst Nullen.
Dank Gauß–Algorithmus wird SL_n erzeugt von Transvektionen.

Zwischen den Transvektionen gelten folgende **Steinberg–Relationen**:

(S0)	$T_{ij}(a)T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b)$	für alle $i \neq j$ und $a, b \in \mathbb{K}$,
(S1)	$\big[T_{ij}(a), T_{jk}(b)\big] = T_{ik}(ab)$	für i, j, k verschieden,
(S2)	$\big[T_{ij}(a), T_{k\ell}(b)\big] = 1_{n\times n}$	für $i \neq \ell$ und $j \neq k$.

Für $n \geq 3$ liegt jede Transvektion in $[\mathrm{SL}_n, \mathrm{SL}_n]$ dank (S1). Im Falle $n = 2$ nutzen wir einen anderen Trick: Für alle $u \in \mathbb{K}^\times$ und $U = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2$ gilt $[U, T_{ij}(a)] = T_{ij}(b)$ mit $b = a(1-u)$. Dank der Voraussetzung $\sharp\mathbb{K} \geq 3$ können wir $u \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ und $a = b/(1-u)$ wählen. Somit enthält GL_n' alle Transvektionen, also auch die davon erzeugte Untergruppe SL_n.

Die Determinante als Abelschmachung

(2) Für $n \geq 3$ folgt dank (S1) ebenso $\mathrm{SL}_n' \supseteq \mathrm{SL}_n$. Im Falle $n = 2$ variieren wir unseren vorigen Trick: Für alle $u \in \mathbb{K}^\times$ und $U = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2$ gilt $[U, T_{ij}(a)] = T_{ij}(b)$ mit $b = a(1-u^2)$. Dank der Voraussetzung $\sharp\mathbb{K} \geq 4$ können wir $u \in \mathbb{K} \setminus \{0, \pm 1\}$ und $a = b/(1-u^2)$ wählen. Somit enthält SL_n' alle Transvektionen, also auch die davon erzeugte Untergruppe SL_n.

Im Ausnahmefall $\mathrm{GL}_2 \mathbb{F}_2 = \mathrm{SL}_2 \mathbb{F}_2 \cong \mathrm{S}_3$ gilt $\mathrm{SL}_2 \mathbb{F}_2 \supsetneq \mathrm{GL}_2' \mathbb{F}_2 \cong \mathrm{A}_3$.
Für $\mathrm{GL}_2 \mathbb{F}_3$ gilt $\mathrm{GL}_2' \mathbb{F}_3 = \mathrm{SL}_2 \mathbb{F}_3$ mit $\sharp\,\mathrm{GL}_2 \mathbb{F}_3 = 48$ und $\sharp\,\mathrm{SL}_2 \mathbb{F}_3 = 24$, aber $\sharp\,\mathrm{SL}_2' \mathbb{F}_3 = 8$, wie man geduldig nachrechnet. QED

Bemerkung: Wir können nicht nur jede Gruppe, sondern allgemein jedes Monoid $(M, \cdot, 1)$ abelsch machen. Dies leistet der zugehörige Quotient $\alpha : (M, \cdot, 1) \to (M_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$ mit $M_{\mathrm{ab}} = M/_{\equiv}$, wobei die Kongruenz $\equiv$ auf M als Äquivalenzrelation erzeugt wird von $uabv \equiv ubav$ mit $u, a, b, v \in M$.

Die universelle Eigenschaft lautet nun: Zu jedem Homomorphismus $\varphi : (M, \cdot, 1) \to (A, \cdot, 1)$ in ein abelsches Monoid existiert genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : (M_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1) \to (A, \cdot, 1)$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \alpha$.

Signatur und Determinante als Abelschmachung

Die Abelschmachung zu *definieren* ist leicht, sie *auszurechnen* oft schwer. Die Rechnung liefert meist wertvolle Informationen über unsere Gruppe!

Die nötige Arbeit haben wir oben bereits für unsere liebsten Gruppen investiert und ernten nun auch allgemein für unsere liebsten Monoide:

Korollar L3P: Signatur und Determinante als Abelschmachung

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachten wir die Monoidhomomorphismen

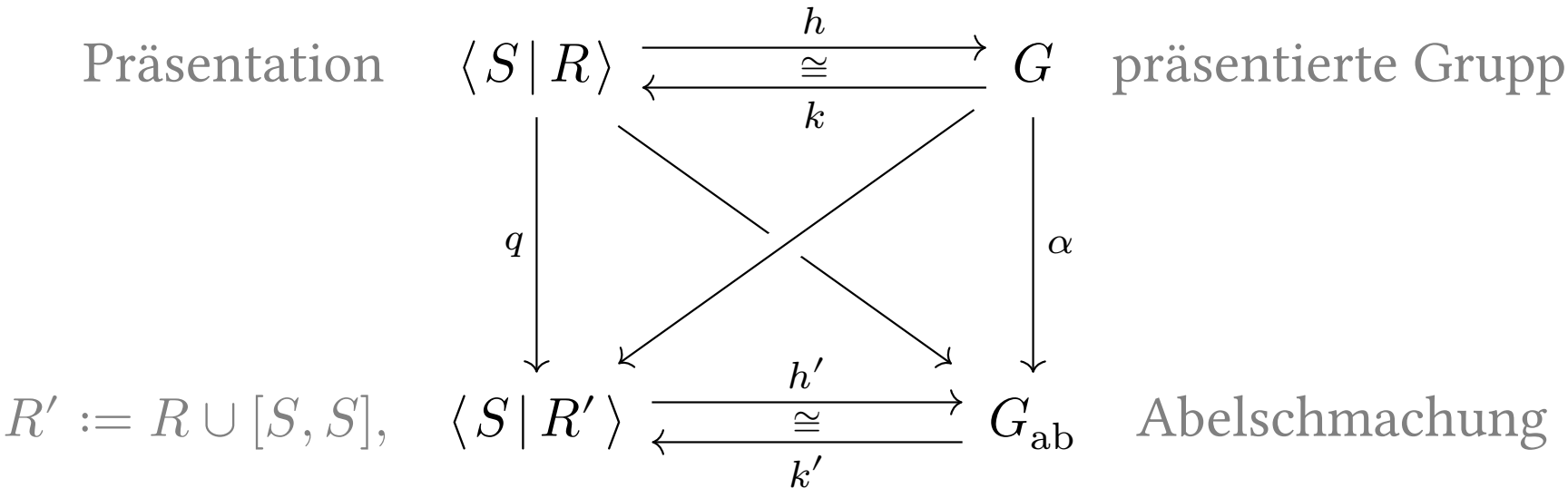
$$\begin{aligned} \operatorname{sign}_n &: (\mathrm{T}_n, \circ, \mathrm{id}) \twoheadrightarrow (\{\pm 1, 0\}, \cdot, 1), \\ \det_{\mathbb{K}}^n &: (\mathbb{K}^{n\times n}, \cdot, 1_{n\times n}) \twoheadrightarrow (\mathbb{K}, \cdot, 1). \end{aligned}$$

(1) Mit der Ausnahme $n = 1$ ist sign_n äquivalent zur Abelschmachung.
(2) Für jeden Körper $\mathbb{K}$, mit der einzigen Ausnahme $(n, \sharp\mathbb{K}) = (2, 2)$, ist die Determinante $\det_{\mathbb{K}}^n$ äquivalent zur Abelschmachung.

Übung: Zeigen Sie, dass alle nicht invertierbaren Elemente untereinander äquivalent sind bezüglich der abelschmachenden Kongruenz $\equiv$.

Abelschmachung einer Präsentation

Vorgelegt sei eine Präsentation (S, R, h, k) der Gruppe G mit Erzeugern S und Relationen R und dem Isomorphismus $(h, k) : \langle S \,|\, R \rangle \cong G$.



Satz L3Q: Abelschmachung einer Präsentation

Die Abelschmachung der Präsentation $(h, k) : \langle S \,|\, R \rangle \cong G$ liefert eine Präsentation der Abelschmachung, $(h', k') : \langle S \,|\, R \cup [S, S] \rangle \cong G_{\mathrm{ab}}$.

Aufgabe: Dies folgt aus der universellen Eigenschaft der Präsentation (L3J) und der Abelschmachung (L3N). Führen Sie alles sorgfältig aus!

Abelschmachung einer Präsentation

Beweis: (1) Die Komposition $\alpha \circ h : \langle S \,|\, R \rangle \to G_{\mathrm{ab}}$ erfüllt über die Relationen R hinaus auch R', induziert also den Homomorphismus $h' : \langle S \,|\, R' \rangle \to G_{\mathrm{ab}}$ mit $h' \circ q = \alpha \circ h$ dank universeller Eigenschaft L3J.

(2) Die aus (S, R) gewonnene Präsentation (S, R') mit $R' = R \cup [S, S]$ definiert eine abelsche Gruppe: In der Gruppe $\langle S \,|\, R' \rangle$ kommutieren alle Erzeuger $s, t \in S$, daher auch alle hiervon erzeugten Elemente, also *alle*.

(3) Die Komposition $q \circ k : G \to \langle S \,|\, R' \rangle$ geht dank (2) in eine abelsche Gruppe, induziert also den Homomorphismus $k' : G_{\mathrm{ab}} \to \langle S \,|\, R' \rangle$ mit $k' \circ \alpha = q \circ k$ dank universeller Eigenschaft L3N.

(4) Da (h, k) ein Isomorphismuspaar ist, folgt dies auch für (h', k'):
Es gilt $k' \circ h' = \mathrm{id}$ und $h' \circ k' = \mathrm{id}$ auf Erzeugern, also allgemein.

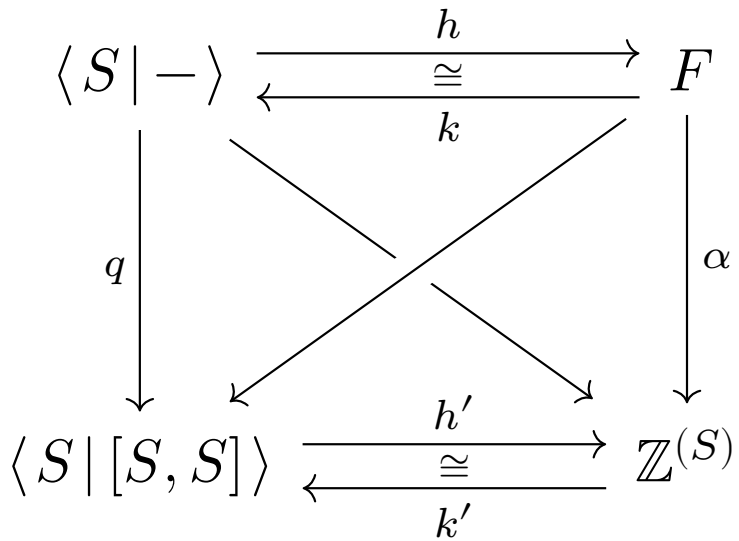
Ausführlich: Wir haben $k' \circ h' \circ q = k' \circ \alpha \circ h = q \circ k \circ h = q = \mathrm{id} \circ q$.
Dank Surjektivität / UAE von q folgt Rechtskürzbarkeit, $k' \circ h' = \mathrm{id}$.
Ebenso haben wir $h' \circ k' \circ \alpha = h' \circ q \circ k = \alpha \circ h \circ k = \alpha = \mathrm{id} \circ \alpha$.
Dank Surjektivität / UAE von α folgt Rechtskürzbarkeit, $h' \circ k' = \mathrm{id}$. QED

Abelschmachung der freien Gruppe

Beispiel: Für jede freie Gruppe F über einer Basis $S = \{s_1, \dots, s_r\} \subseteq F$ erhalten wir $F_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^r$ vermöge $s_k \mapsto e_k$ für $k = 1, \dots, r$, siehe L3c. Wir erhalten so die erneut die vertraute Präsentation

$$\langle s_1, \dots, s_r \,|\, s_i s_j = s_j s_i : i, j \in \{1, \dots, r\} \rangle \cong \mathbb{Z}^r.$$

Übersichtlich zusammengefasst als Diagramm:



Die Anzahl $\sharp S$ der Basiselemente ist der **Rang** der freien Gruppe F. Diese entspricht der Dimension eines Vektorraums. Dazu zeigen wir, dass diese Zahl unabhängig von der willkürlichen Wahl einer Basis ist.

Abelschmachung der freien Gruppe

Satz L3v: Rang einer freien Gruppe

Für je zwei Mengen S und T gilt:

$$F(S) \cong F(T) \text{ in } \mathtt{Grp} \quad \Longleftrightarrow \quad S \cong T \text{ in } \mathtt{Set}$$

Beweis: „$\Leftarrow$“: Dank UAE L3H setzt sich jede Bijektion $(f, g) : S \cong T$ eindeutig fort zu einem Gruppenisomorphismus $(\bar{f}, \bar{g}) : F(S) \cong F(T)$.

„$\Rightarrow$“: Nach L3H hat $\mathrm{Hom}(F(S), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ genau $2^{|S|}$ Elemente, und ebenso hat $\mathrm{Hom}(F(T), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ genau $2^{|T|}$ Elemente. Jeder Gruppenisomorphismus $F(S) \cong F(T)$ induziert $\mathrm{Hom}(F(S), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(F(T), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ also gilt $2^{|S|} = 2^{|T|}$. Im endlichen Falle folgt daraus $|S| = |T|$.

Allgemein: Wir vergleichen $A := F(S)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{(S)}$ und $B := F(T)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{(T)}$. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann sind die Quotienten $A/pA \cong (\mathbb{Z}/p)^{(S)}$ und $B/pB \cong (\mathbb{Z}/p)^{(T)}$ Vektorräume über $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ der Dimension $|S|$ bzw. $|T|$. Aus $F(S) \cong F(T)$ in $\mathtt{Grp}$ folgt $A \cong B$ in $\mathtt{Ab}$, und somit $A/pA \cong B/pB$ in $\mathtt{Ab}$ und in $\mathtt{Vec}_{\mathbb{F}_p}$, schließlich $S \cong T$ in $\mathtt{Set}$ dank Linearer Algebra. QED

Abelschmachung der Diedergruppe

Aufgabe: Nutzen Sie die beiden Präsentationen der Diedergruppe D_n aus Satz L3M und berechnen Sie damit die Abelschmachung für $n \geq 2$.

Lösung: Wir abelianisieren die Präsentation und vereinfachen!

(1) Die erste Präsentation, mit benachbarten Spiegelungen s, t ergibt:

$$\begin{aligned}
D_n &\cong \langle s,t \,|\, s^2=1,\ t^2=1,\ (st)^n=1 \rangle \\
(D_n)_{\mathrm{ab}} &\cong \langle s,t \,|\, s^2=1,\ t^2=1,\ (st)^n=1,\ st=ts \rangle \\
&\cong \langle s,t \,|\, s^2=1,\ t^2=1,\ s^n t^n=1,\ st=ts \rangle \\
\text{(a) } n \text{ ungerade:} \quad &\cong \langle s,t \,|\, s^2=1,\ t^2=1,\ st=1,\ st=ts \rangle \\
&\cong \langle s,t \,|\, s^2=1,\ t=s^{-1} \rangle \cong \langle s \,|\, s^2=1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \\
\text{(b) } n \text{ gerade:} \quad &\cong \langle s,t \,|\, s^2=1,\ t^2=1,\ st=ts \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2
\end{aligned}$$

Im letzten Vereinfachungsschritt müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob der Parameter n gerade oder ungerade ist. Die abelsch gemachte Gruppe ist in beiden Fällen tatsächlich verschieden!

Abelschmachung der Diedergruppe

(2) Die zweite Präsentation, mit Rotation r und Spiegelung s, ergibt:

$$\begin{aligned} D_n &\cong \langle r, s \,|\, r^n = 1,\ s^2 = 2,\ srs = r^{-1} \rangle \\ (D_n)_{\mathrm{ab}} &\cong \langle r, s \,|\, r^n = 1,\ s^2 = 2,\ srs = r^{-1},\ rs = sr \rangle \\ &\cong \langle r, s \,|\, r^n = 1,\ s^2 = 1,\ r^2 = 1,\ rs = sr \rangle \end{aligned}$$

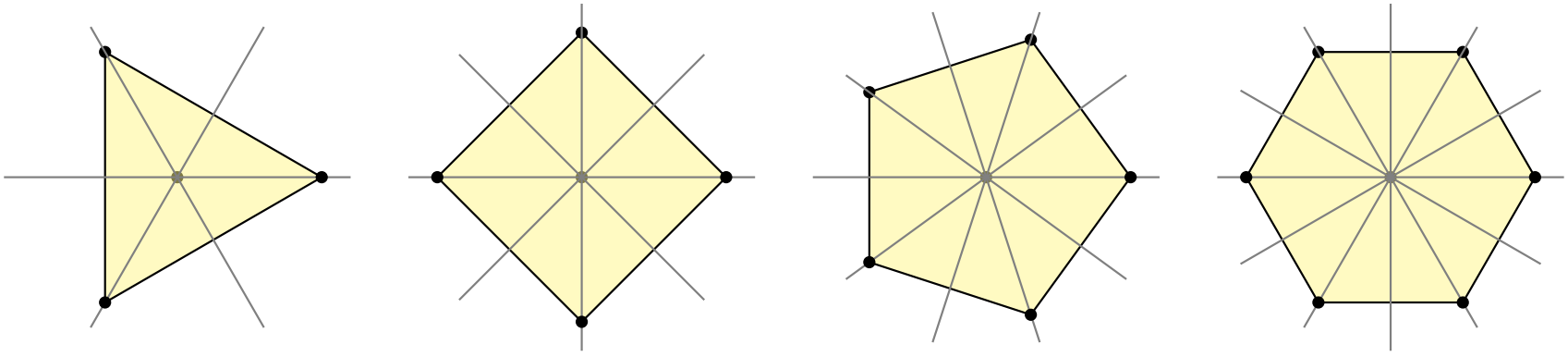
(a) n ungerade:
$$\begin{aligned} &\cong \langle r, s \,|\, r = 1,\ s^2 = 1,\ rs = sr \rangle \\ &\cong \langle r, s \,|\, r = 1,\ s^2 = 1 \rangle \cong \langle s \,|\, s^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \end{aligned}$$

(b) n gerade:
$$\cong \langle r, s \,|\, r^2 = 1,\ s^2 = 1,\ rs = sr \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

☺ Beide Präsentationen sind deutlich verschieden, doch beide liefern dieselbe Abelschmachung. Das ist kein Zufall, sondern eine Konsequenz von Satz L3Q: Die Abelschachung der Präsentation $(h, k) : \langle S \,|\, R \rangle \cong G$ präsentiert die Abelschmachung vermöge $(h', k') : \langle S \,|\, R' \rangle \cong G_{\mathrm{ab}}$, und $G_{\mathrm{ab}} = G/G'$ hängt nur von der Gruppe ab, nicht von der Präsentation.

☺ Anders gesagt: Wir rechnen in verschiedenen Koordinaten, doch das Ergebnis ist glücklicherweise koordinatenunabhängig!

Abelschmachung der Diedergruppe



Diese Rechnung hat eine schöne geometrische Interpretation.

(a) Im ungeraden Fall sind alle Spiegelungen $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ in $D_n \leq \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, P_n)$ konjugiert und werden daher durch die Abelschmachung $\alpha : D_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\} : s_k \mapsto -1$ identifiziert.

(b) Im geraden Fall hingegen gibt es zwei Arten von Spiegelungen: solche, deren Achse durch zwei gegenüberliegende Ecken von P_n geht, und solche, deren Achse durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten von P_n geht. Erstere sind untereinander konjugiert, auch Zweitere sind untereinander konjugiert, aber nicht Erstere mit Zweiteren. Die Abelschmachung $\alpha : D_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}^2$ schickt sie auf $(-1, 1)$ und $(1, -1)$.

Abelschmachung der Diedergruppe

Bemerkung: Wir betrachten speziell die Operation der Diedergruppe D_n auf den Eckpunkten des regulären Vielecks P_n und fassen so $D_n \leq S_n$ als eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe auf.

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\text{sign}} & \{\pm 1\} \\ \uparrow & & \uparrow h \\ D_n & \xrightarrow{\alpha} & \{\pm 1\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\text{sign}} & \{\pm 1\} \\ \uparrow & & \uparrow \text{proj} \\ D_n & \xrightarrow{\alpha} & \{\pm 1\}^2 \end{array}$$

Übung: Im Falle $n = 4k+1$ kommutiert das linke Diagramm mit $h = 1$, im Falle $n = 4k+3$ mit $h = \mathrm{id}$. In den Fällen $n = 4k$ und $n = 4k+2$ kommutiert das rechte Diagramm jeweils mit geeigneter Projektion.

☺ Dieses einfache Beispiel zeigt eindrücklich: Die Abelschmachungen von Gruppe und Untergruppe können recht verschieden ausfallen!

Tietze–Transformationen

Jede Gruppe G erlaubt unendlich viele Präsentationen $\langle S \,|\, R \rangle \cong G$.
Zum Beispiel ändern die folgenden **Tietze–Transformationen**
die Präsentation (S, R), nicht aber die präsentierte Gruppe G:

(T1) *Einfügen oder Löschen redundanter Relationen:*
$(S, R) \leftrightarrow (S, R \sqcup R')$ mit $R' \subseteq \langle R^{F(S)} \rangle$.

(T2) *Einfügen oder Löschen redundanter Erzeuger:*
$(S, R) \leftrightarrow (S \sqcup S', R \sqcup R')$ mit $R' = \{ s' w(s')^{-1} \,|\, s' \in S' \}$, $w : S' \to F(S)$.

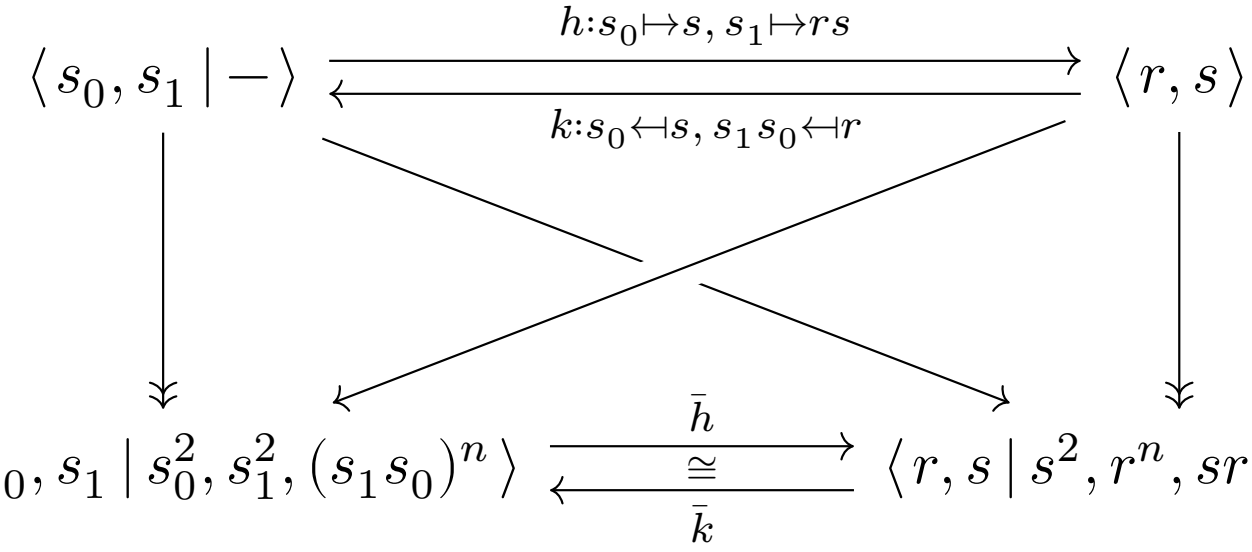
☺ Besonders interessant sind endliche Präsentationen. In diesem Falle erhalten wir (T1,2) durch wiederholtes einfaches Einfügen oder Löschen. (Unendliche Präsentationen behandeln wir genauso ohne Mehraufwand.)

Beispiel: Wir haben oben $(D_n)_{\mathrm{ab}}$ berechnet durch Abelschmachung einer Präsentationen. Dabei haben wir die Tietze–Transformationen schon intuitiv richtig angewendet. Dies präzisieren wir nun formal.

Aufgabe: Vergleichen Sie die beiden Präsentationen der Diedergruppe aus Satz L3M: Wie können Sie diese ineinander transformieren?

Tietze–Transformationen

Lösung: Wir vergleichen die beiden Präsentationen aus L3M:



Diese Isomorphismen übersetzen wir nun in Tietze–Transformationen:

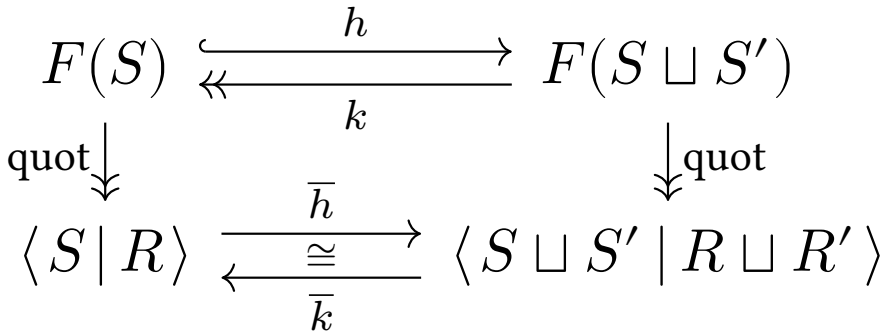
$$
\begin{aligned}
& \langle s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2, (s_1 s_0)^n \rangle \\
\cong\ & \langle s_0, s_1, r, s \mid s_0^2, s_1^2, (s_1 s_0)^n, r = s_1 s_0, s = s_0 \rangle \\
=\ & \langle s_0, s_1, r, s \mid s_0^2, s_1^2, (s_1 s_0)^n, r = s_1 s_0, s = s_0, s^2, r^n, srsr, s_0 = s, s_1 = rs \rangle \\
=\ & \langle s_0, s_1, r, s \mid s^2, r^n, srsr, s_0 = s, s_1 = rs \rangle \\
\cong\ & \langle r, s \mid s^2, r^n, srsr \rangle
\end{aligned}
$$

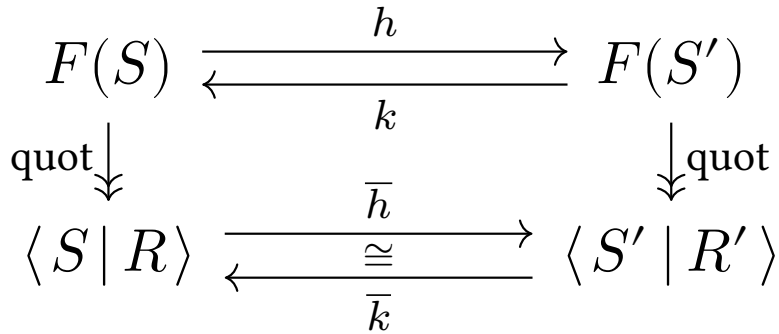
Tietze–Transformationen

Satz L3s: Tietze 1908

(1) Zwei (endliche) Präsentationen (S, R) und (S', R') stellen genau dann isomorphe Gruppen $\langle S \,|\, R \rangle \cong \langle S' \,|\, R' \rangle$ dar, wenn sie sich durch (endliche) Tietze–Transformationen ineinander überführen lassen.

(2) Genauer gilt: Jeder Gruppenisomorphismus $(\bar{h}, \bar{k}) : \langle S \,|\, R \rangle \cong \langle S' \,|\, R' \rangle$ lässt sich durch Tietze–Transformationen erzeugen.





Beweis: (1) „⇐“: Für (T1) gilt $\langle (R \sqcup R')^F \rangle = \langle R^F \rangle$, also $\langle S \,|\, R \rangle = \langle S \,|\, R' \rangle$. Für (T2) gilt: Die Inklusion $h : S \hookrightarrow S \sqcup S'$ induziert $\bar{h}$. Die Retraktion $k : F(S \sqcup S') \to F(S)$ mit $s \mapsto s$ für $s \in S$ und $s' \mapsto w(s')$ für $s' \in S'$ induziert $\bar{k}$. Es gilt $k \circ h = \mathrm{id}_{F(S)}$ und demnach ebenso $\bar{k} \circ \bar{h} = \mathrm{id}_{\langle S|R \rangle}$.

Tietze–Transformationen

Umgekehrt gilt $h \circ k : s' \mapsto w(s') \equiv s' \bmod R'$, also $\bar{h} \circ \bar{k} = \mathrm{id}_{\langle S \sqcup S' | R \sqcup R' \rangle}$.
So induziert die Tietze–Transformation $(S, R) \leftrightarrow (S \sqcup S', R \sqcup R')$ den Tietze–Isomorphismus $(\bar{h}, \bar{k}) : \langle S \,|\, R \rangle \cong \langle S \sqcup S' \,|\, R \sqcup R' \rangle$.

Die Umkehrung „$\Rightarrow$“ folgt aus der stärkeren Aussage (2).

(2) Seien $\bar{h} : \langle S \,|\, R \rangle \xrightarrow{\sim} \langle S' \,|\, R' \rangle$ und $\bar{k} : \langle S' \,|\, R' \rangle \xrightarrow{\sim} \langle S \,|\, R \rangle$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. Wir heben diese hoch zu $h : F(S) \to F(S')$ und $k : F(S') \to F(S)$ auf den freien Gruppen.

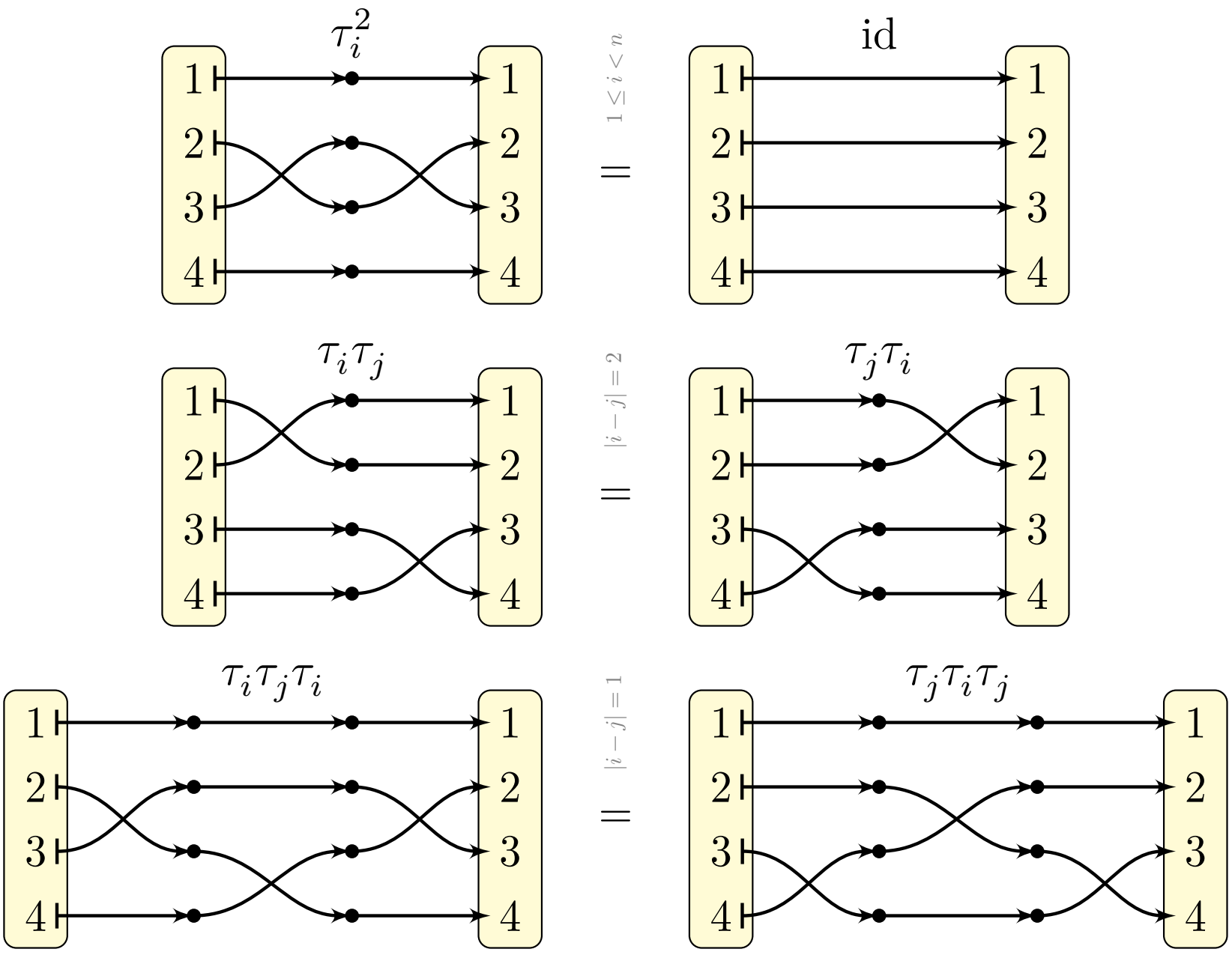
Wir können $S \cap S' = \emptyset$ annehmen. Wir betrachten dann die disjunkte Vereinigung $S^* := S \sqcup S'$ und $R^* := R \sqcup R' \sqcup R_h \sqcup R_k$ mit $R_h := \{ s\, h(s)^{-1} \mid s \in S \}$ und $R_k := \{ s'\, k(s')^{-1} \mid s' \in S' \}$.

Dank (T2) und (T1) erhalten wir die Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\varphi : \langle S \,|\, R \rangle &\xrightarrow{\sim} \langle S^* \,|\, R \sqcup R_k \rangle = \langle S^* \,|\, R \sqcup R_k \sqcup R' \sqcup R_h \rangle = \langle S^* \,|\, R^* \rangle, \\
\psi : \langle S' \,|\, R' \rangle &\xrightarrow{\sim} \langle S^* \,|\, R' \sqcup R_h \rangle = \langle S^* \,|\, R' \sqcup R_h \sqcup R \sqcup R_k \rangle = \langle S^* \,|\, R^* \rangle.
\end{aligned}$$

Für diese gilt $\bar{h} = \psi^{-1} \circ \varphi$ und $\bar{k} = \varphi^{-1} \circ \psi$, wie gewünscht. QED

Die fundamentalen Transpositionen und ihre Relationen



Die fundamentalen Transpositionen und ihre Relationen

Übung: Schreiben Sie diese Graphiken für $\tau_i = (i, i+1) \in \mathbb{S}_n$ aus als Zykel und rechnen Sie so nach, dass diese Relationen allgemein gelten.

☺ Die Relation $\tau_i^2 = \mathrm{id}$ besagt lediglich, dass τ_i die Ordnung 2 hat. Dies gilt für jede beliebige Transposition, insbesondere auch hier.

☺ Die zweite Relation kennen Sie bereits im allgemeineren Kontext: Je zwei disjunkte Permutationen kommutieren, also auch hier.

☺ Die dritte Relation $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$ für $|i - j| = 1$ ist Artins berühmte Zopfrelation; sie tritt hier natürlich für benachbarte Transpositionen auf.

Diese Relationen respektieren die Parität $\varepsilon : \mathrm{S}_n \to \mathbb{Z}_2$, denn modulo 2 ist die Anzahl der Kreuzungen / Transpositionen auf beiden Seiten gleich! Das zeigt graphisch-anschaulich den Ursprung dieser Invariante.

Übung: Sei $h : (\mathrm{S}_n, \circ, \mathrm{id}_X) \to (A, \cdot, 1)$ ein Homomorphismus in eine abelsche Gruppe und $a = h(\tau_1) \in A$ das Bild von τ_1. Dann gilt $a^2 = 1$ und $h(\sigma) = a^{\varepsilon(\sigma)}$ für alle $\sigma \in \mathrm{S}_n$, dank der fundamentalen Relationen.

Präsentation durch Erzeuger und Relationen

Jede **fundamentale Transposition** $\tau_i = (i, i+1) \in \mathrm{S}_n$ mit $1 \leq i < n$ vertauscht zwei Nachbarn. Dabei gelten die **fundamentalen Relationen** $\tau_i^2 = 1$ und $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ für $|i-j| \geq 2$ sowie $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$ für $|i-j| = 1$.

Satz L3w: Coxeter–Präsentation der symmetrischen Gruppe

Für die symmetrische Gruppe S_n erhalten wir die Präsentation

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_n & \cong & P_n := \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{ll} t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \\ \tau_i & \leftrightarrow & t_i \end{array}$$

dank des Gruppenisomorphismus $h : P_n \xrightarrow{\sim} S_n$ mit $t_i \mapsto \tau_i$ für $1 \leq i < n$.

Präsentation beinhaltet zwei Aussagen. (1) Erzeugung: Jede Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ ist ein Produkt der Fundamentaltranspositionen $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} \in \mathrm{S}_n$. (2) Äquivalenz: Die Relationen klären jede Mehrdeutigkeit. Genau dann ergeben zwei solche Produkte dieselbe Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$, wenn sie durch eine Folge der Fundamentalrelationen ineinander übergehen.

Präsentation durch Erzeuger und Relationen

Anschauung: Ein Wort in den elementaren Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, das sie hier graphisch ablesen, beschreibt den Verlauf des Kartrennens. Der Rennverlauf legt das Endergebnis $\sigma \in \mathrm{S}_n$ eindeutig fest.

Umgekehrt legt das Ergbnis σ den Rennverlauf *nicht* eindeutig fest, und den Unterschied sehen Sie hier: Er entsteht genau durch die hier gezeigten Relationen; diese führen vom einen zum anderen Verlauf.

Sie sehen also: In unserem anschaulichen Beispiel des Kartrennens steckt viel elementare, doch wunderschöne Mathematik: hier die Theorie der symmetrischen Gruppe und der elementaren Transpositionen.

🙂 Das ist schön und nützlich, damit können Sie wunderbar rechnen.
In Zukunft sehen Sie Rennen nie mehr mit denselben Augen,
sondern können den mathematischen Kern durchschauen.

Dieser Satz lässt sich graphisch veranschaulichen und so auch beweisen!
Ganz analog formuliert und beweist man Artins Präsentation der Zopfgruppe in der Knotentheorie / Geometrischen Topologie.

Algebraischer Beweis der Coxeter–Präsentation

Beweis: (0) Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die **symmetrische Gruppe**

$$\mathrm{S}_n = \{\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \,|\, \mathrm{supp}(\sigma) \subseteq \{1, \dots, n\}\},$$
$$\{\mathrm{id}\} = \mathrm{S}_1 \subseteq \mathrm{S}_2 \subseteq \mathrm{S}_3 \subseteq \mathrm{S}_4 \subseteq \dots \subseteq \mathrm{S}_{(\mathbb{N})}.$$

Ihre Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{(\mathbb{N})} := \{\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \,|\, \sharp\,\mathrm{supp}(\sigma) < \infty\}$
ist die Gruppe aller Permutationen $\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ mit endlichem Träger.

(1) Wir betrachten die Fundamentaltransposition $\tau_i = (i, i+1)$ und

$$\zeta_{i,j} := \tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \cdots \circ \tau_{j-1} = (i, i+1, \dots, j) \quad \text{mit } 1 \le i \le j \le n.$$

Induktion über n: Jede Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ schreibt sich eindeutig als

$$\sigma = \zeta_{i_n,n} \circ \cdots \circ \zeta_{i_2,2} \circ \zeta_{i_1,1} \quad \text{mit } 1 \le i_k \le k \text{ für alle } k.$$

(2) Die Gruppe S_n wird erzeugt von $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. (3) Zudem folgt $\sharp\,\mathrm{S}_n = n!$.

Die Erzeugung (2) folgt bereits aus der Existenz der Faktorisierung (1).
Die Abzählung (3) folgt aus der Bijektion $\sigma \leftrightarrows (i_n, \dots, i_3, i_2, i_1)$, also aus der Existenz und der Eindeutigkeit der Faktorisirung (1).

Algebraischer Beweis der Coxeter–Präsentation

(4) Der Gruppenhomomorphismus $h : P_n \to \mathrm{S}_n$ mit $t_i \mapsto \tau_i$ für $1 \leq i < n$ existiert, denn die Fundamentalrelationen von P_n gelten in S_n.

(5) Zudem ist h surjektiv, denn S_n wird erzeugt von $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$.

Wir haben also $h : P_n \twoheadrightarrow \mathrm{S}_n$. Knifflig ist allein die Injektivität von h: Erzeugen die Fundamentalrelationen bereits *alle* Relationen in S_n? Oder müssen wir weitere, noch unerkannte Relationen befürchten?

(6) In P_n definieren wir analog zu (1) das Produkt

$$z_{i,j} := t_i \cdot t_{i+1} \cdots t_{j-1} \quad \text{mit } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Induktion über n: Jedes Element $x \in P_n$ schreibt sich als

$$x = z_{i_n,n} \cdots z_{i_2,2} \cdot z_{i_1,1} \quad \text{mit } 1 \leq i_k \leq k \text{ für alle } k.$$

Diese Umformung gelingt allein dank der Fundamentalrelationen; dies erfordert geeignete Fallunterscheidungen und wird hier nicht ausgeführt. Schrittweise Umformung ist eine gute Übung: länglich, aber lehrreich.

(7) Aus (6) folgt $\sharp P_n \leq n!$. Demnach ist $h : P_n \twoheadrightarrow S_n$ bijektiv! QED

Graphischer Beweis der Coxeter–Präsentation

Wir Menschen sind Augenwesen. Die graphische Darstellung von Permutationen nutzen wir bisher nur zur bequemen Veranschaulichung.

Im Folgenden wollen wir diese Darstellung zu einem eleganten Beweisverfahren ausbauen. Dazu müssen wir genauer erklären, wie unsere graphische Darstellung genau funktioniert.

Graphischer Beweis der Coxeter–Präsentation

Abelschmachung der symmetrischen Gruppe

Aufgabe: Nutzen Sie die Coxeter–Präsentation der symmetrischen Gruppe S_n und berechnen Sie damit die Abelschmachung für $n \geq 2$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{S}_n & \cong & P_n \\ \tau_i & \mapsto & t_i \end{array} := \left\langle t_1, \ldots, t_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{ll} t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \end{array} \right\rangle$$

Lösung: Wir abelianisieren die Präsentation und vereinfachen:

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{S}_n)_{\mathrm{ab}} & \cong & P_n' \\ [\tau_i] & \mapsto & t_i \end{array} := \left\langle t_1, \ldots, t_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{ll} t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für alle } i, j \\ t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle t_1, \ldots, t_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{l} t_i = t_j \\ t_i^2 = 1 \end{array} \right\rangle \cong \langle t \,|\, t^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

☺ Die Abelschmachung der Gruppe S_n ist die Signatur, siehe Satz L3o. Präsentation und Abelschmachung bieten einen unabhängigen Zugang.

Abelsche Präsentationen und Invarianten

🙂 Diese Rechnung ist erfreulich einfach und wunderbar effizient. Dasselbe gelingt allgemein für jede endlich präsentierte Gruppe

$$G \cong \langle s_1, \dots, s_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle.$$

Ihre Abelschmachung können wir präsentieren durch Abelschmachung der Präsentation (L3Q), durch Hinzufügen aller Kommutatorrelationen $[s_i, s_j] = 1$ zwischen den Erzeugern $s_1, \dots, s_n$:

$$G_{\mathrm{ab}} \cong \langle s_1, \dots, s_n \,|\, r_1, \dots, r_m,\ s_i s_j s_i^{-1} s_i^{-1} \text{ für alle } i, j \rangle$$

⚠ Ob die Gruppe $\langle S \,|\, R \rangle$ abelsch ist, lässt sich aus der Präsentation (S, R) meist nicht ablesen (L-6). Für eine *abelsche* Präsentation fordern wir explizit $[S, S] \subseteq R$. als Teilmenge der gegebenen Relationen.

🙂 Für abelsche Präsentationen werden das Wortproblem und das Isomorphieproblem gelöst durch die Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen, also vom Gauß–Euklid–Algorithmus über $\mathbb{Z}$.

Abelsche Präsentationen und Invarianten

☺ Bequem nutzbar, effizient implementiert und gründlich getestet finden Sie dies zum Beispiel in GAP, `https://docs.gap-system.org/doc/ref/chap47`.

Zur Illustration mache ich zwei einfache Stichproben mit GAP:

```
gap> F := FreeGroup( "s", "t" );;
gap> s := F.1;; t := F.2;;
gap> G := F / [ s^2, t^2, (s*t)^5 ];;
gap> [ Size(G), AbelianInvariants(G), StructureDescription(G) ];
[ 10, [ 2 ], "D10" ]

gap> F := FreeGroup( "r", "s" );;
gap> r := F.1;; s := F.2;;
gap> G := F / [ r^6, s^2, s*r*s*r ];;
gap> [ Size(G), AbelianInvariants(G), StructureDescription(G) ];
[ 12, [ 2, 2 ], "D12" ]
```

☺ GAP erkennt Gruppen: dihedral, symmetrisch, alternierend, uvm.

Sie sehen hier alternative Namenskonventionen für Diedergruppen: Der Index beschreibt entweder die Eckenzahl oder die Elementezahl.

Abelsche Präsentationen und Invarianten

Zur Sicherheit teste ich ebenso unsere Präsentation von S_4 und S_5:

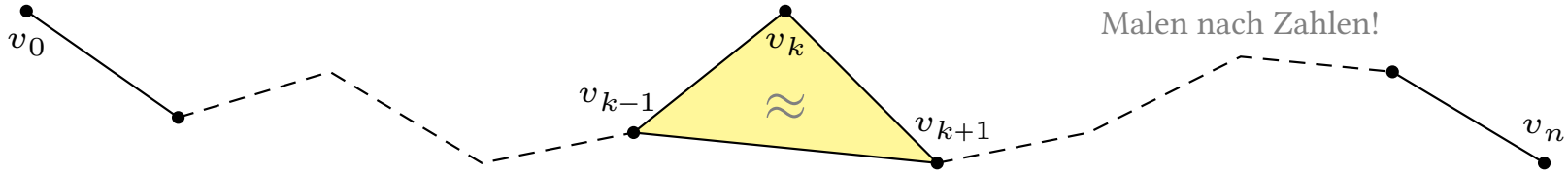
```
gap> F := FreeGroup( "t1", "t2", "t3" );;
gap> t1 := F.1;; t2 := F.2;; t3 := F.3;;
gap> G := F / [ t1^2, t2^2, t3^2, (t1*t2)^3, (t1*t3)^2, (t2*t3)^3 ];;
gap> [ Size(G), AbelianInvariants(G), StructureDescription(G) ];
[ 24, [ 2 ], "S4" ]

gap> F := FreeGroup( "t1", "t2", "t3", "t4" );;
gap> t1 := F.1;; t2 := F.2;; t3 := F.3;; t4 := F.4;;
gap> G := F / [ t1^2, t2^2, t3^2, t4^2, (t1*t2)^3, (t1*t3)^2, (t1*t4)
    ^2, (t2*t3)^3, (t2*t4)^2, (t3*t4)^3 ];;
gap> [ Size(G), AbelianInvariants(G), StructureDescription(G) ];
[ 120, [ 2 ], "S5" ]
```

Diese Abzählung zeigt erneut, dass unsere Relationen vollständig sind: Der Gruppenhomomorphismus $h : P_n \to \mathrm{S}_n : t_i \mapsto \tau_i$ ist wohldefiniert, da die Relationen in S_n gelten, und surjektiv, da $\mathrm{S}_n = \langle \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1} \rangle$. Mit $\sharp P_n \leq \sharp \mathrm{S}_n < \infty$ folgt, dass h bijektiv ist, also ein Isomorphismus.

Vereinfachung zur polygonalen Fundamentalgruppe

Wir nutzen Polygonzüge und polygonale Homotopie siehe J1A/L4A.



Sei $V = \mathbb{R}^d$ oder allgemeiner ein Vektorraum V, normiert oder lokal-konvex. Zu jedem Raum $X \subseteq V$, etwa offen oder ein Polyeder, definieren wir das **polygonale Fundamentalgruppoid** als Quotient

$$\Pi^{\mathrm{pl}}(X) := P^{\mathrm{pl}}(X)/_{\approx} = \frac{\{\text{Polygonzüge } w = v_0 v_1 \dots v_n \text{ in } X\}}{\text{polygonale Homotopie } \approx \text{ in } X}$$

mit der Verknüpfung $[w] \cdot [w'] = [w * w]$ durch Aneinanderhängen von Polygonzügen. Für jeden Punkt $x_0 \in X \subseteq V$ definieren wir so die **polygonale Fundamentalgruppe**:

$$\pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) := \Pi^{\mathrm{pl}}(X, x_0, x_0) = \frac{\{\text{geschlossene Polygonzüge in } (X, x_0)\}}{\text{polygonale Homotopie } \approx \text{ in } (X, x_0)}$$

Vereinfachung zur polygonalen Fundamentalgruppe

Satz L4B: polygonale Fundamentalgruppe

Sei X offen in $\mathbb{R}^d$ oder allgemein in einem Vektorraum V, normiert oder lokal-konvex. Dann haben wir den Gruppoidisomorphismus

$$\varphi : \Pi^{\mathrm{pl}}(X) \xrightarrow{\sim} \Pi(X) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Für jeden Fußpunkt $x_0 \in X$ induziert dies den Gruppenisomorphismus

$$\varphi : \pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Beweis: Triangulierung (I3T) und simpliziale Approximation (I4J). QED

☺ Wir haben also zwei äquivalente Sichtweisen:

$$\pi_1(X, x_0) := \frac{\{\text{Schleifen in } (X, x_0)\}}{\text{Homotopie in } (X, x_0)} \quad \cong$$

$$\pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) := \frac{\{\text{polygonale Schleifen in } (X, x_0)\}}{\text{polygonale Homotopie in } (X, x_0)}$$

Warum nicht gleich so?

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist für *jeden* topologischen Raum (X, x_0) definiert (L2A), denn sie beruht allein auf stetigen Abbildungen, nämlich Wegen $[0,1] \to X$ modulo Homotopien $[0,1]^2 \to X$. Dies macht sie zu einem universellen Werkzeug $\pi_1 : \mathtt{hTop}_* \to \mathtt{Grp}$, siehe L2D und L2G.

Bislang konnten wir jedoch nur sehr einfache Beispiele konkret ausrechnen, etwa sternförmige oder zusammenziehbare Räume (L2S) oder Sphären $\mathbb{S}^n$ (L2U). Das erste nicht-triviale Beispiel ist die Umlaufzahl $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Wir wollen diese Beispiele und noch viel mehr!

Wenn X ein „schöner“ Raum ist, etwa eine offene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ oder eine Mannigfaltigkeit, ein Simplizialkomplex oder ein Zellkomplex, dann nutzen wir die zusätzliche Struktur gerne und betrachten geschickt nur noch schöne Wege und schöne Homotopien betrachten.

Für $X \subseteq V$ offen haben wir zudem das polygonale Fundamentalgruppoid $\Pi^{\mathrm{pl}}(X)$ und hiermit $\pi_0^{\mathrm{pl}}(X)$ und $\pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0)$. Diese sind isomorph zur topologischen Variante, bieten aber zwei spürbare, wichtige Vorteile: Sie sind anschaulicher und erlauben explizite Berechnungen.

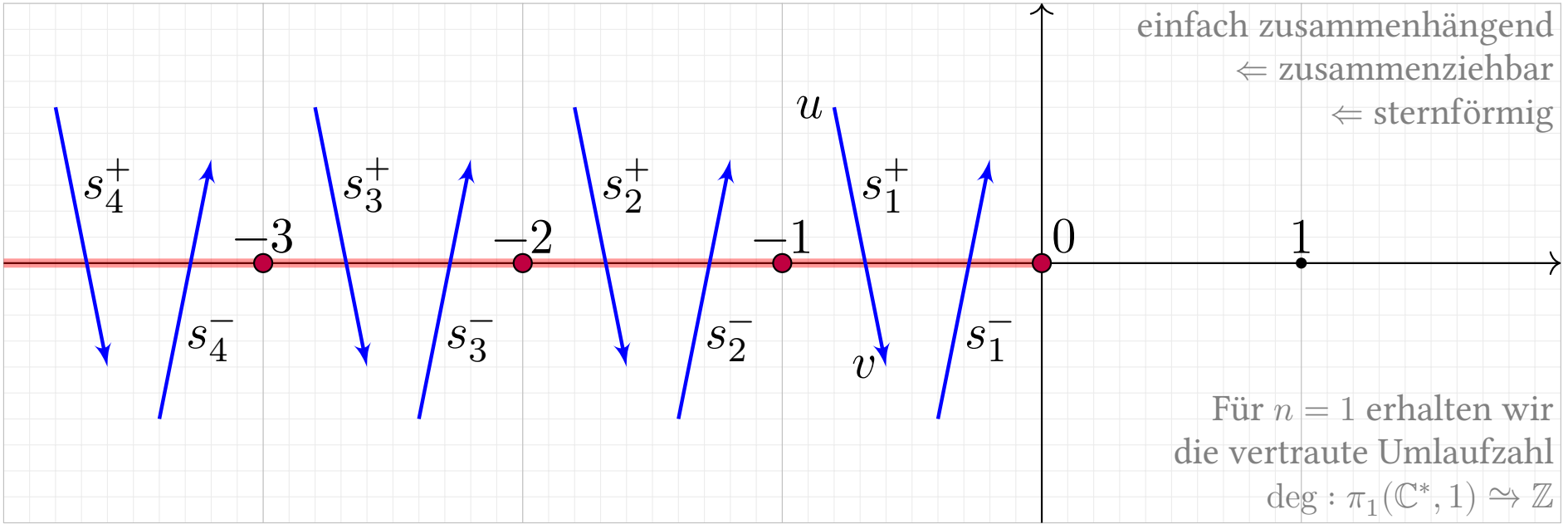
Warum nicht gleich so?

⚠ Stetige Abbildungen $[0,1] \to X$ sind ungeheuer allgemein und können zum Beispiel raumfüllend sein, siehe C6H. Naiv-intuitiv jedoch stellen wir uns Wege eher polygonal oder stückweise glatt vor. Satz L4B rechtfertigt diese intuitive Vorstellung: Dank Kompaktheit von $[0,1]^n$ und Offenheit von $X \subseteq V$ können wir lokal die lineare Struktur nutzen.

Warum haben wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ nicht gleich polygonal definiert? Erstens lässt sich nicht jeder Raum als offene Menge $X \subseteq V$ einbetten. Zweitens werden stetige Abbildungen $f : X \to Y$ unsere Polygonzüge meist nicht in Polygonzüge abbilden. Um das zu erreichen, müssten wir unsere Räume und Abbildungen drakonisch einschränken, und damit auch die Anwendbarkeit unseres Werkzeugs.

Wir trennen daher wie üblich die allgemeine *Definition* und die konkrete *Berechnung*: Da wir den Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ für *alle* topologischen Räume und *alle* stetigen Abbildungen nutzen wollen, legen wir Definition L2A zugrunde. Für konkrete Berechnungen nutzen wir dankend jede zweckdienliche Zusatzinformation, hier Satz L4B.

Fundamentalgruppe der n–fach gelochten Ebene



Satz L4D: Fundamentalgruppe der n–fach gelochten Ebene

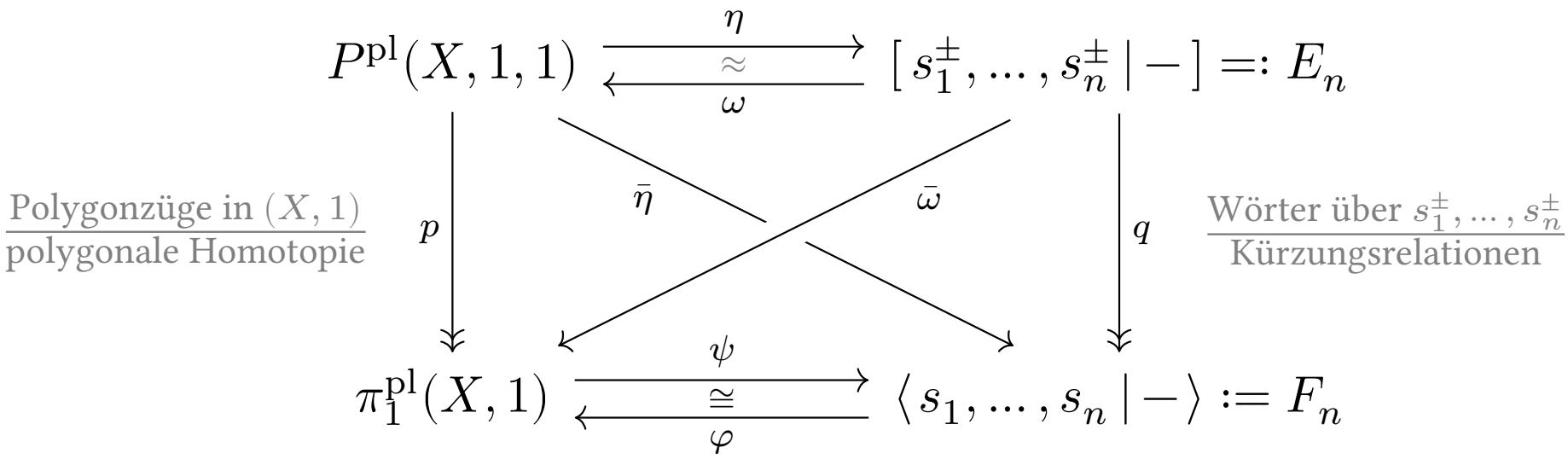
Die Fundamentalgruppe der n–fach gelochten Ebene

$$X = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots, 1-n\}$$

ist frei vom Rang n. Genauer haben wir $(\psi, \varphi) : \pi_1(X, 1) \cong F_n$ mit
$\psi : \pi_1(X, 1) \xrightarrow{\sim} F_n := \langle s_1, \dots, s_n \,|\, - \rangle$ wie in obiger Abbildung und
$\varphi : F_n \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, 1) : s_k \mapsto [|v_0 v_k^+ v_k^- v_0|]$ mit $v_0 = 1$ und $v_k^\pm = 1/2 - k \pm \mathrm{i}$.

Fundamentalgruppe der gelochten Ebene

Wir organisieren die Konstruktion entlang der beidseitigen Quotienten:

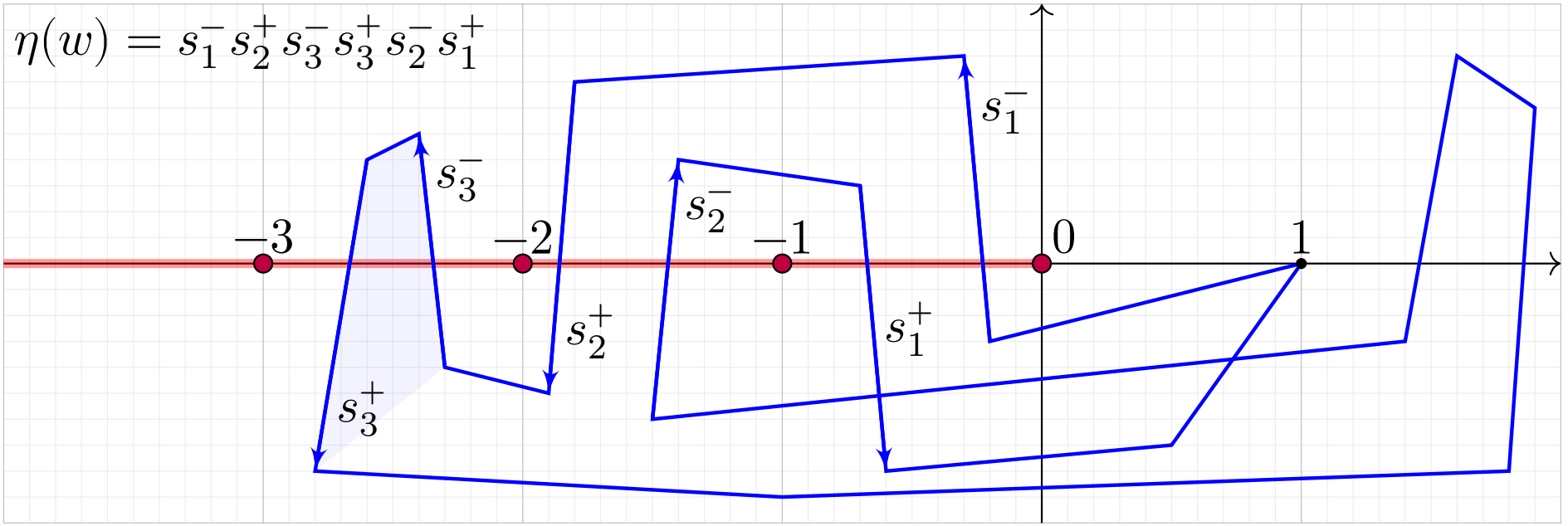


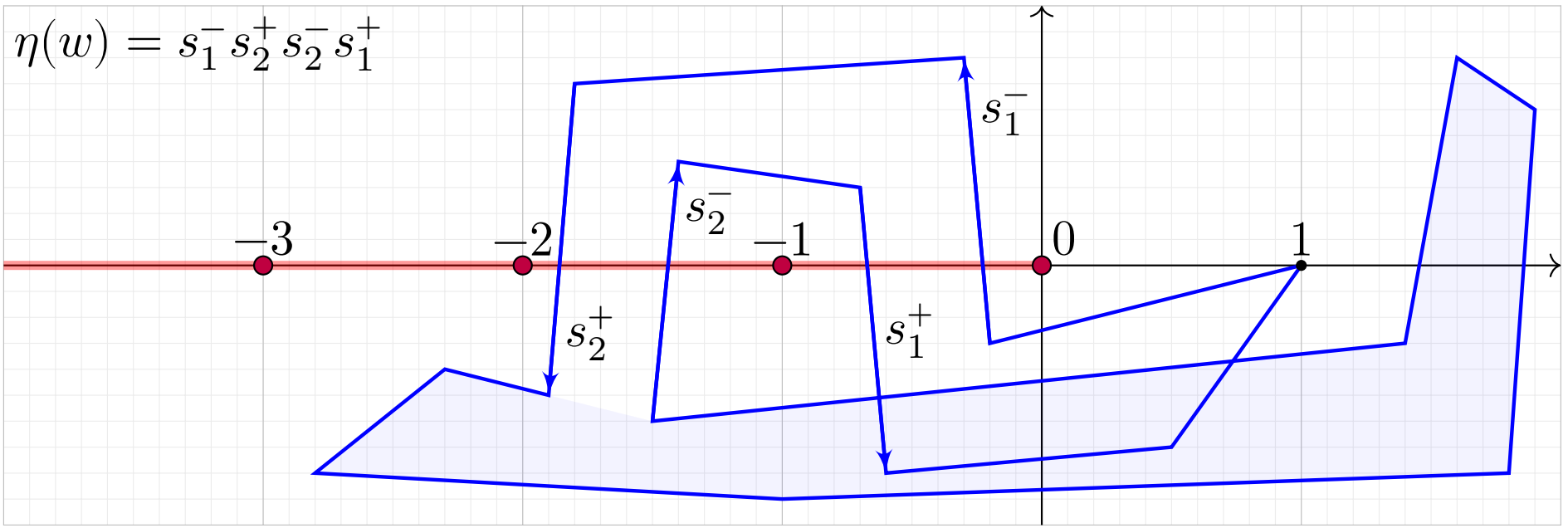
Aufgabe: (a) Die Homomorphismen ψ und φ sind wohldefiniert.
Für ψ folgt dies aus der Invarianz unter elementaren Homotopien.

(b) Die Konstruktion garantiert $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{F_n}$, also ist ψ surjektiv.

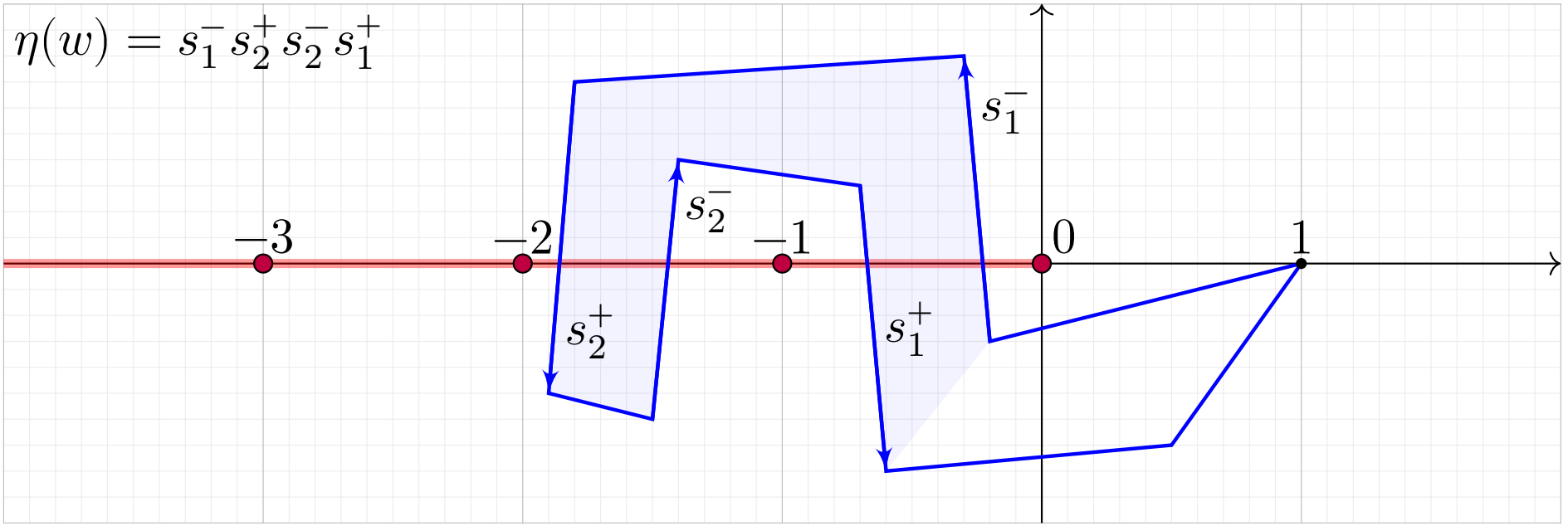
(c) Zur Injektivität von ψ zeigen wir $\operatorname{Ker} \psi = \{1\}$. Sei $w = v_0 v_1 \dots v_\ell$ ein Polygonzug in $(X,1)$ mit $\psi([w]) = 1$. Wir konstruieren eine Homotopie $w \approx v_0$ durch Induktion über die Anzahl N der Achsübergänge, parallel zur Kürzung des Wortes $\eta(w)$ im freien Monoid $[\, s_1^{\pm}, \dots, s_n^{\pm} \,|\, - \,]$.

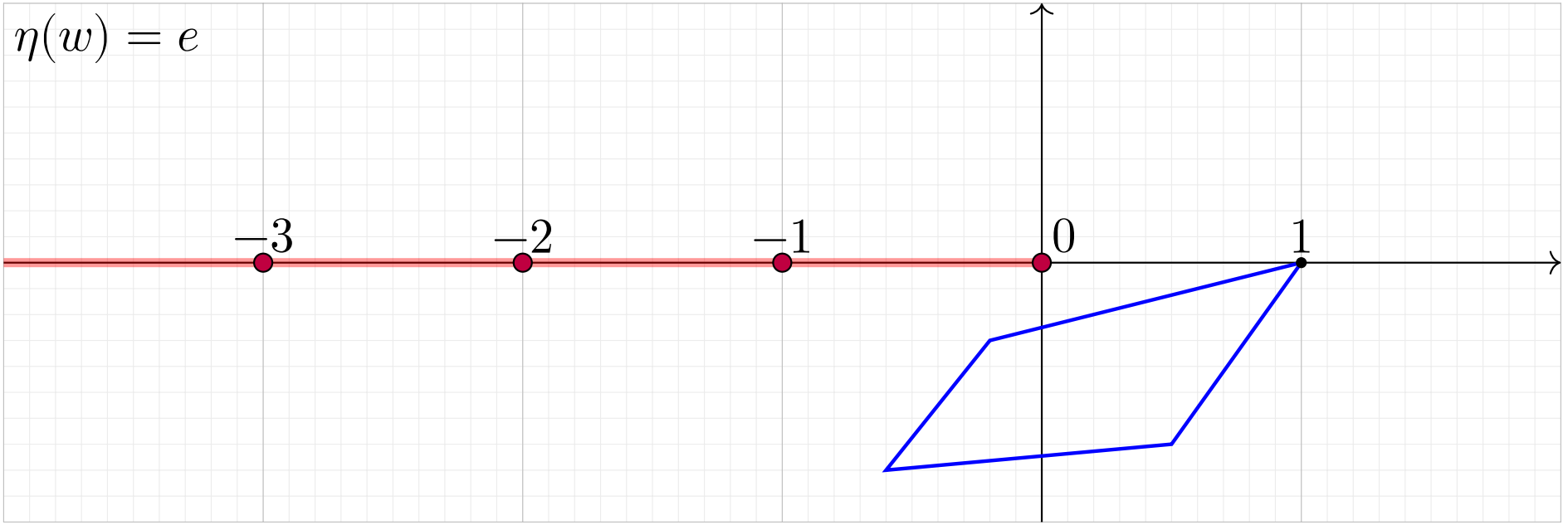
Fundamentalgruppe der gelochten Ebene



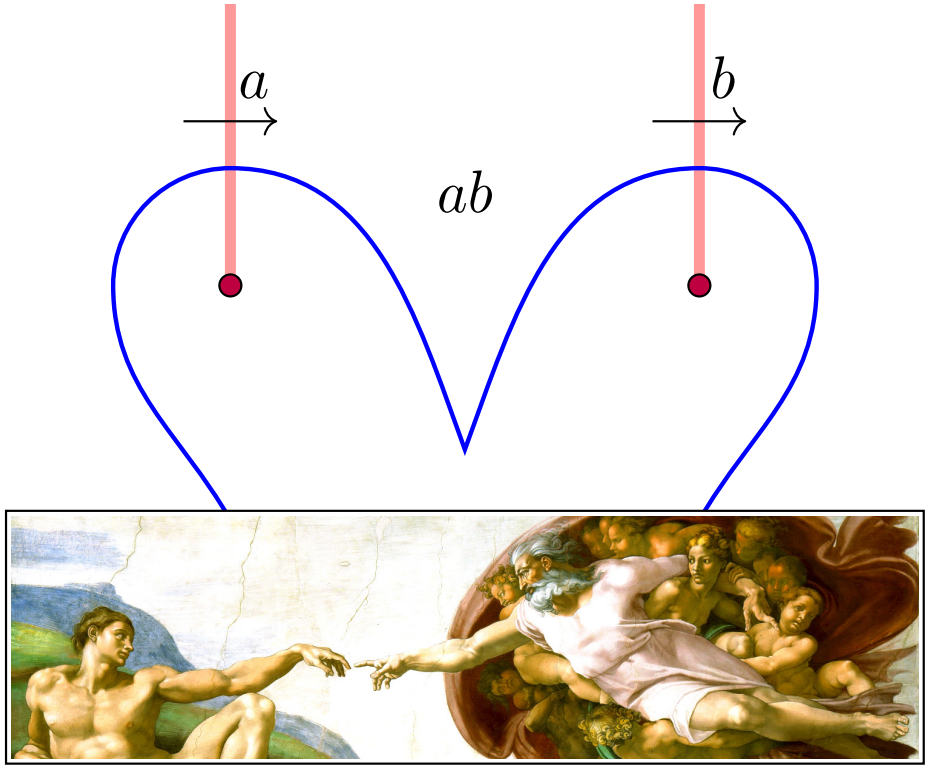


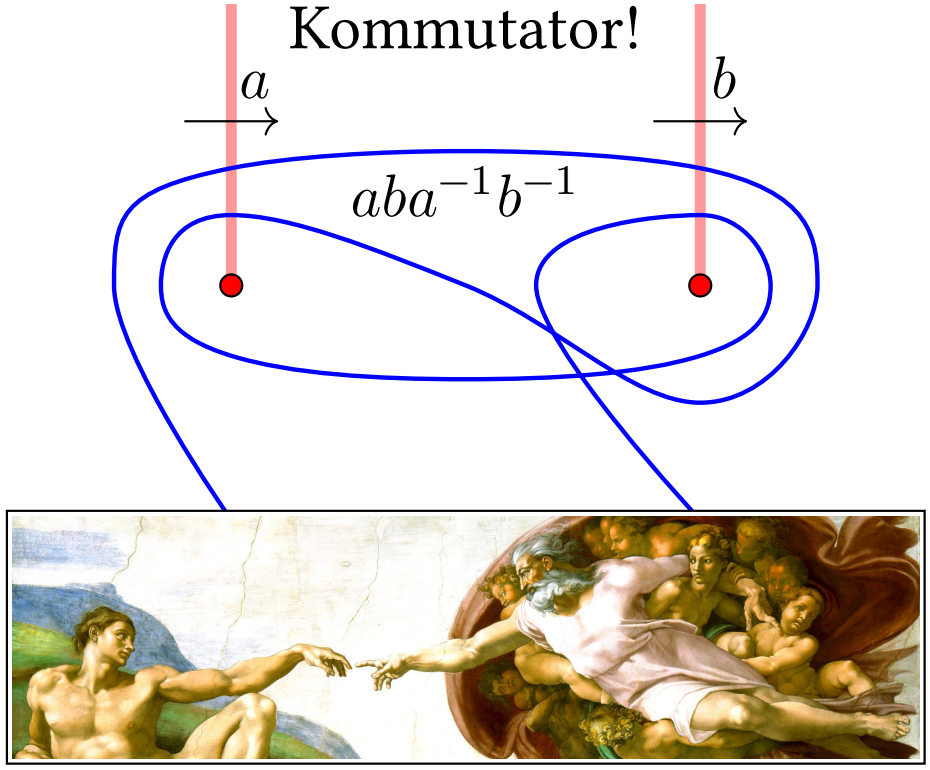
Fundamentalgruppe der gelochten Ebene





Das Gemälde des Topologen

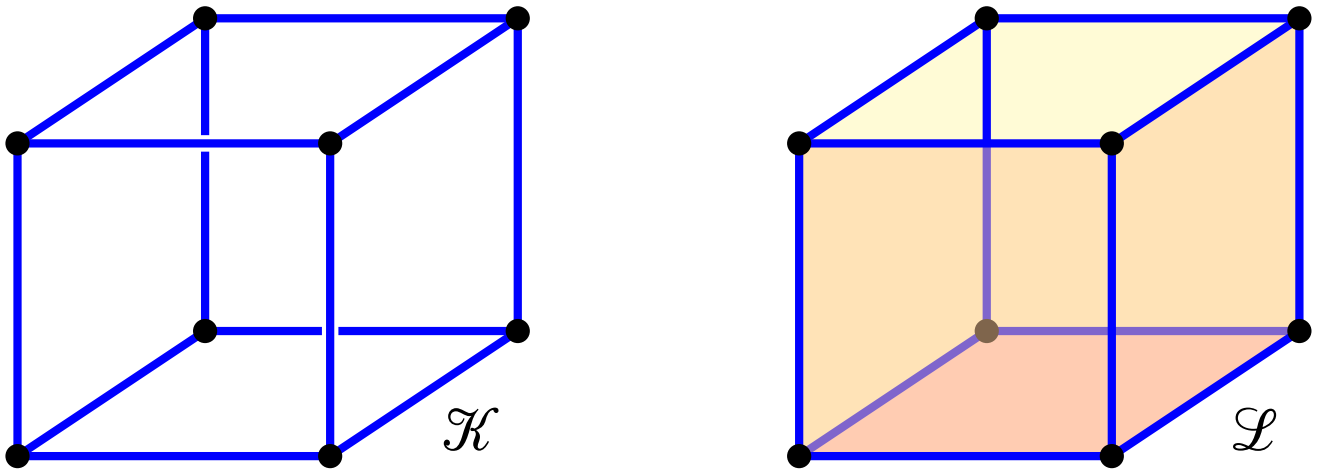




Aufgabe: In einer Wand stecken $n \geq 1$ Nägel. Können Sie hieran ein Bild an einer Schnur aufhängen, sodass das Bild hält, aber beim Ziehen eines beliebigen Nagels fällt? Für $n = 1$ ist das trivial. Für $n = 2$ hilft uns der Kommutator. für $n \geq 3$ iterieren wir Kommutatoren. Können Sie noch Schnur sparen und die Länge quadratisch in n beschränken?

Mutig durch Wände gehen!

☺ Diese Technik lässt sich weitreichend verallgemeinern, das kostet kaum Mehraufwand, und die Anwendungen sind spektakulär!
Ein Trick, der zweimal funktioniert, ist eine Methode.



Aufgabe: Sei $\mathscr{K}$ das 1–Skelett des Würfels $W = [-1,1]^3$. Präsentieren Sie $\pi_1(X, x_0)$ für das Komplement $X = \mathbb{R}^3 \setminus |\mathscr{K}|$ mit Fußpunkt $x_0 = (2,0,0)$.

Lösung: Wir wählen *fünf* der sechs Facetten, koorientieren jede davon (z.B. aus W heraus) und erhalten $(\psi, \varphi) : \pi_1(X, x_0) \cong \langle s_1, \dots, s_5 \mid - \rangle$ wie im vorigen Satz und Beweis. Diese einfache doch wirkungsvolle Technik wollen wir nun ausformulieren, möglichst präzise und gebrauchsfertig!

Wir zählen Wanddurchgänge.

In $\mathbb{R}^n$ seien $\mathscr{L} \geq \mathscr{K}$ Polytopalkomplexe, lokal-endlich, mit $\mathscr{L} \setminus \mathscr{K} \subseteq \mathscr{L}_{<n}$. Wir nennen $P \in \mathscr{L}_{n-1} \setminus \mathscr{K}$ eine **Wand**. Senkrecht auf P stehen $\pm u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Jedes Paar $s^{\pm} = (P, \pm u)$ ist eine **koorientierte Wand**. Wir definieren

$$S := \mathscr{L}_{n-1} \setminus \mathscr{K} \quad \text{und} \quad S^{\pm} := \big\{ (P,u) \,\big|\, P \in S,\, u \in \mathbb{S}^{n-1},\, P \perp u \big\}.$$

Wir definieren das freie Monoid $E = [\, S^{\pm} \,|\, - \,]$ und die freie Gruppe

$$F = \langle\, S \,|\, - \,\rangle := [\, S^{\pm} \,|\, s^+ s^- = 1 : s \in S \,].$$

Für jede Kante $[v_0, v_1] \subseteq X$ zählen wir den Wanddurchgang durch

$$\eta(v_0 v_1) := \begin{cases} 1 & \text{falls } [v_0, v_1] \cap |\mathscr{L}| = \emptyset, \\ (P,u) & \text{falls } [v_0, v_1] \cap P \neq \emptyset \text{ und } \langle\, u, v_1 - v_0 \,\rangle > 0. \end{cases}$$

Jedem Polygonzug $w = v_0 v_1 \ldots v_\ell$ in $\mathbb{C}^*$ ordnen wir das Produkt zu,

$$\eta(w) := \eta(v_0 v_1) \cdots \eta(v_{\ell-1} v_\ell) \in E$$

Jede Kante schneide höchstens eine Wand, und dies transvers.

Die freie Wirtinger–Präsentation

Satz L4D: Wirtinger–Präsentation, zunächst frei

In $\mathbb{R}^n$ seien $\mathscr{L} \geq \mathscr{K}$ Polytopalkomplexe und lokal-endlich.
Die Differenz $S := \mathscr{L} \setminus \mathscr{K} \subseteq \mathscr{L}_{n-1}$ bestehe nur aus Wänden.
Das Komplement $Y = \mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{L}|$ sei einfach zusammenhängend.

Dann ist die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{K}|$ frei, explizit gilt

$$(\psi, \varphi) \,:\, \pi_1(X, x_0) \cong \langle S \rangle := [\, S^{\pm} \,|\, s^+ s^- = 1 : s \in S \,].$$

☺ Der Beweis ist derselbe wie von Satz L4D zur gelochten Ebene.

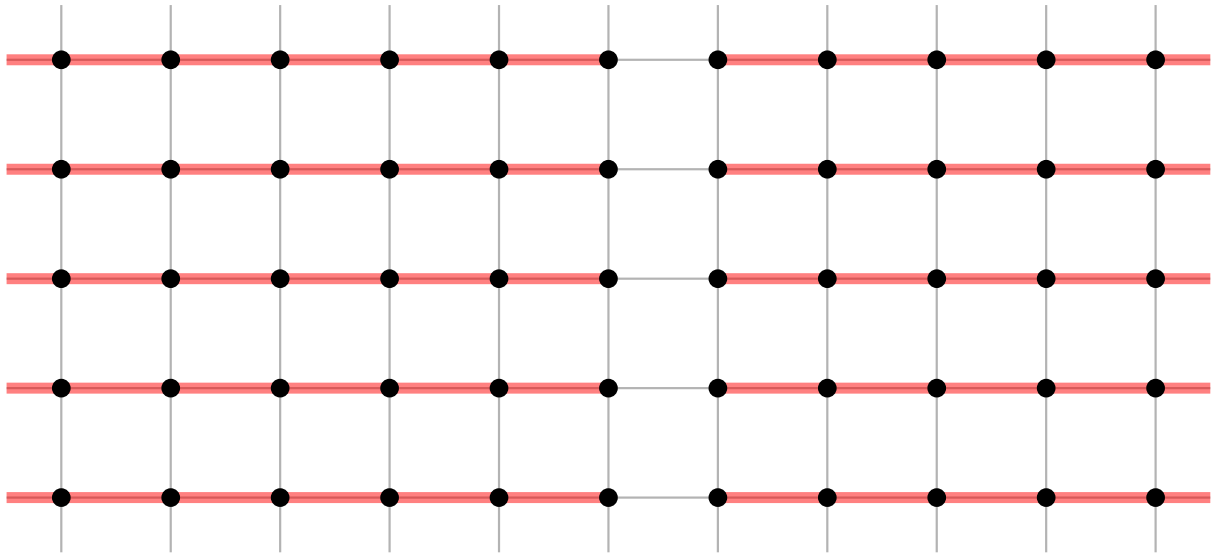
Beweis: (a) Die Abbildung $\psi : \pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) \to \langle S \rangle$ mit $\psi([w]) = [\eta(w)]$ ist wohldefiniert, da invariant unter elementaren Homotopien von w.

(b) Umgekehrt konstruieren wir $\varphi([s^{\pm}]) = [w_s^{\pm}]$ mit Wanddurchgang $\eta(w_s^{\pm}) = s^{\pm}$. Demnach ist ψ surjektiv, denn wir haben $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{F_n}$.

(c) Zur Injektivität von ψ zeigen wir $\operatorname{Ker} \psi = \{1\}$. Sei $w = v_0 v_1 \ldots v_\ell$ ein Polygonzug in (X, x_0) mit $\psi([w]) = 1$. Wir konstruieren eine Homotopie $w \approx x_0$ parallel zur Kürzung des Wortes $\eta(w)$ im Monoid $[\, S^{\pm} \,|\, - \,]$. QED

Die freie Wirtinger–Präsentation

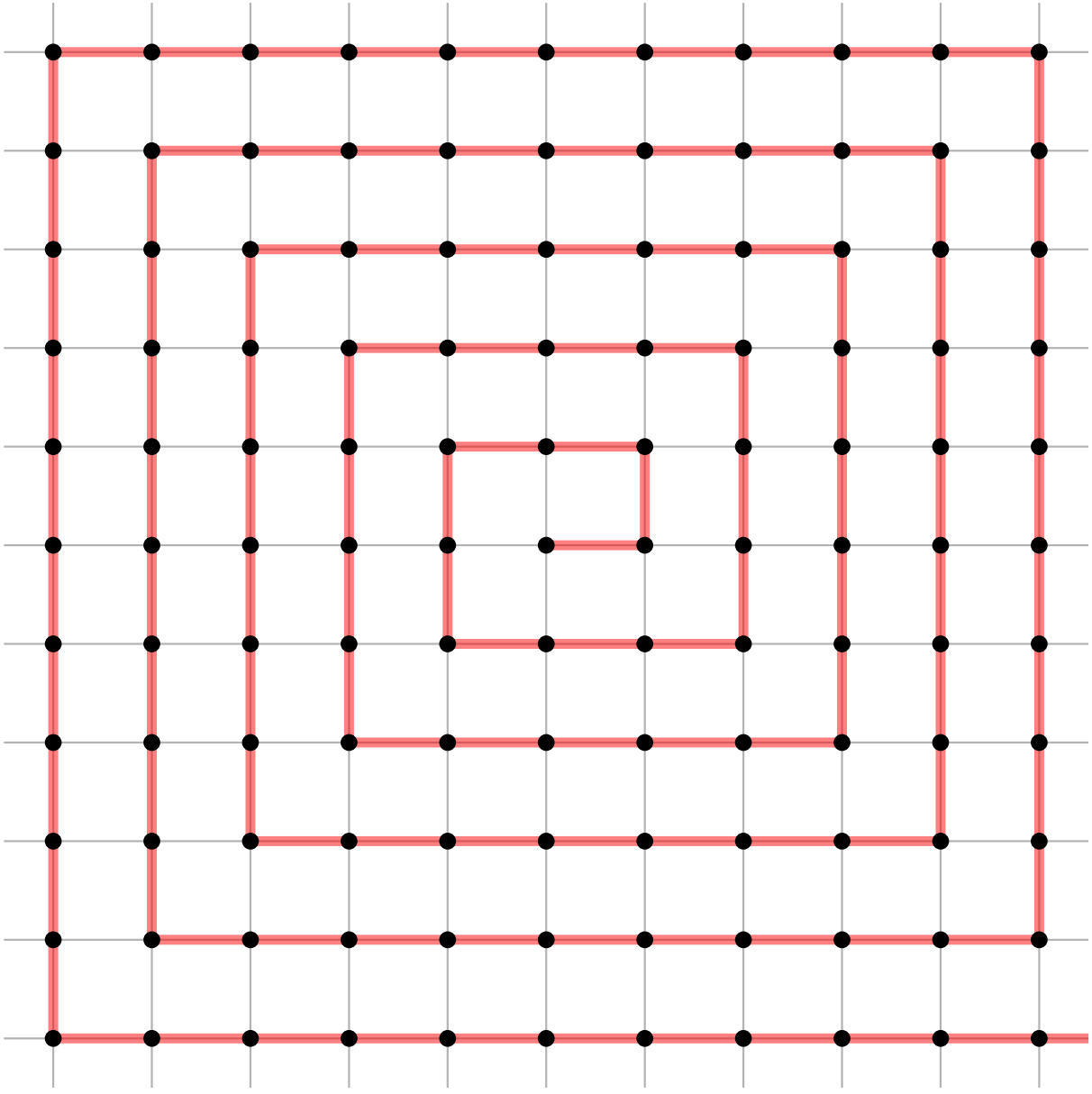
Aufgabe: Präsentieren Sie $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n, *)$ für $n \geq 2$, möglichst explizit.



Lösung: Wir ordnem jedem Punkt $x \in \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kante s_x zu, wie oben $s_x = [x, x - e_1]$ für $x_1 \leq 0$ und $s_x = [x, x + e_1]$ für $x_1 > 0$. Wir erhalten so die SKomplexe $\mathscr{L} \geq \mathscr{K}$ mit $\mathscr{K} = \{\emptyset\} \cup \{\,\{x\} \,|\, x \in \mathbb{Z}^n\,\}$ und $\mathscr{L} = \mathscr{K} \cup \{\,s_x \,|\, x \in \mathbb{Z}^n\,\}$. Das Komplement $Y = \mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{L}|$ ist zsziehbar, sogar affin vermöge $\{(1/2, 0)\} \leftrightarrows \{1/2\} \times \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrows \mathbb{R}^n$. Für das Komplement $X = \mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{K}|$ finden wir dank L4D $\pi_1(X, *) \cong \langle\, s_z \,|\, z \in \mathbb{Z}^2 \,\rangle$ für $n = 2$; für $n \geq 3$ folgt $\pi_1(X, *) = \{1\}$, da keine Wände vorliegen.

Die freie Wirtinger–Präsentation

Die Wahl von $\mathscr{L} \geq \mathscr{K}$ lässt viel Raum für kreative Ideen.



Korollar L4E: gelochte euklidische Räume

(1) Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ diskret und abgeschlossen. Für das Komplement $X = \mathbb{C} \setminus A$ und $x_0 \in X$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ frei über $|A|$ Erzeugern.

(2) Für $n \geq 3$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diskret und abgeschlossen ist das Komplement $X = \mathbb{R}^n \setminus A$ einfach zusammenhängend.

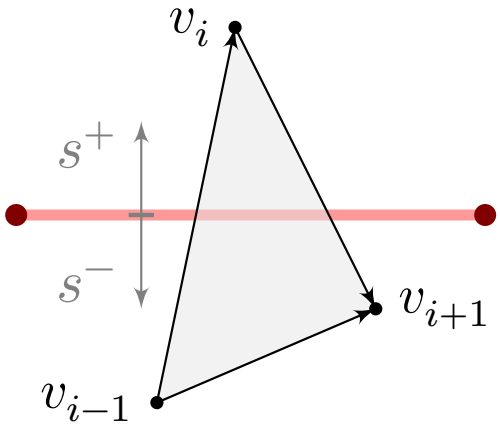
Beweis: (1) Die Menge $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ist abzählbar dank D6J. Dank Homogenität K1z konstruieren wir einen Homöomorphismus $h : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ mit $x_0 \mapsto 1$ und $a_k \mapsto -k$ für $k = 0, 1, 2, \dots$. Dank L2E genügt es also, den Spezialfall $A \subseteq -\mathbb{N}$ zu betrachten. Wie im vorigen Satz L4D konstruieren wir dann wunderbar explizit einen Gruppenisomorphismus $\psi : \pi_1(\mathbb{C} \setminus A, 1) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, s_2, s_3, \dots \,|\, - \rangle$.

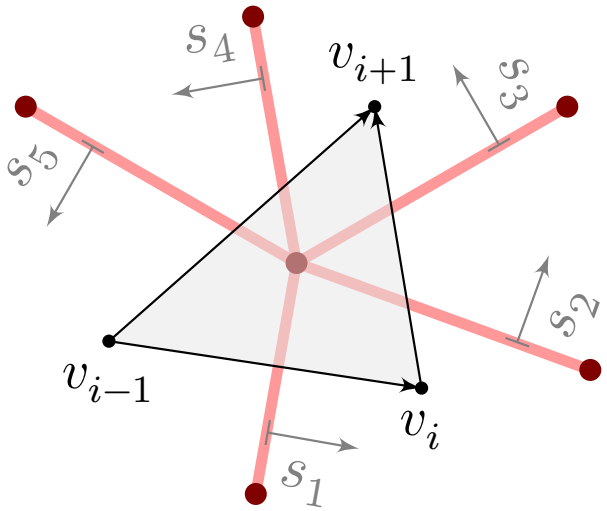
(2) Wie in (1) konstruieren wir $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(A) \subseteq (-\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Wie in der vorigen Aufgabe folgt $\pi_0(X) = \{X\}$ und $\pi_1(X, e_1) = \{1\}$. QED

Die freie Wirtinger–Präsentation

Wirtinger–Präsentation

Eine **Wand** ist ein Polytop $P \in \mathscr{L}_{n-1} \setminus \mathscr{K} =: S$, der Kodimension 1, und definiert zwei **koorientierte Wände** $s^{\pm} = (P, \pm u)$ mit $u \in P^{\perp} \cap \mathbb{S}^{n-1}$.
Bei elementaren Homotopien finden wir folgende Situationen:

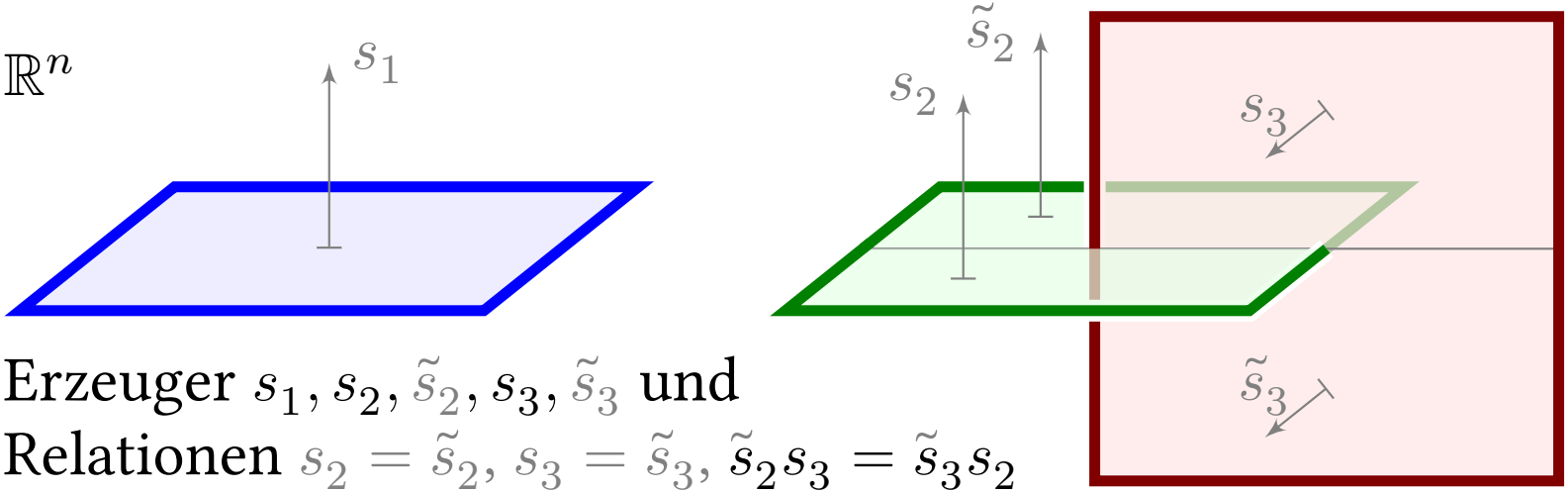




Ein **Grat** ist ein Polytop $Q \in \mathscr{L}_{n-2} \setminus \mathscr{K}$, der Kodimension 2. Hierzu seien $s_1^{\pm}, s_2^{\pm}, \dots, s_k^{\pm} \in S$ die Wände, die Q enthalten, zyklisch angeordnet und koorientiert in einer Ebene orthogonal zu Q. Dies definiert die Relation $r_Q : s_1 s_2 \cdots s_k = 1$. So erhalten wir alle benötigten Relationen:

$$R := \{ (s^+ s^-, 1) \,|\, s \in S \} \cup \{ r_Q \,|\, Q \in \mathscr{L}_{n-2} \setminus \mathscr{K} \}$$

Wirtinger–Präsentation



Erzeuger $s_1, s_2, \tilde{s}_2, s_3, \tilde{s}_3$ und
Relationen $s_2 = \tilde{s}_2$, $s_3 = \tilde{s}_3$, $\tilde{s}_2 s_3 = \tilde{s}_3 s_2$

Satz L4M: Wirtinger–Präsentation

In $\mathbb{R}^n$ seien $\mathscr{L} \geq \mathscr{K}$ lokal-endliche Polytopalkomplexe mit $\mathscr{L} \setminus \mathscr{K} \subseteq \mathscr{L}_{<n}$
Das Komplement $Y = \mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{L}|$ sei einfach zusammenhängend.

Dies präsentiert die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{R}^n \setminus |\mathscr{K}|$ durch

$$(\psi, \varphi) : \pi_1(X, x_0) \cong \left[S^{\pm} : \text{Wände} \,\middle|\, R : \text{Grate} \right]$$

Merkregel: Die Wände $P \in \mathscr{L}_{n-1} \setminus \mathscr{K}$ liefern die Erzeuger $S^{\pm}$, und die Grate $Q \in \mathscr{L}_{n-2} \setminus \mathscr{K}$ liefern die Relatoren $R \subseteq (S^{\pm})^*$ wie oben erkärt.

Bewegungsspielraum und Transversalität

Beweis: (a) In $\mathbb{R}^n$ sind $|\mathscr{L}|$ und $|\mathscr{K}|$ abgeschlossen, also Y und X offen. Um jeden Polygonzug $P = v_0 v_1 \ldots v_{\ell-1} v_\ell$ haben wir Spielraum: Dank Kompaktheit von $|P|$ haben wir $\varepsilon := \operatorname{dist}(|P|, |\mathscr{K}|) > 0$. Wenn wir jeden Eckpunkt v_i verschieben zu $v_i' \in B(v_i, \varepsilon)$, so verläuft $P' = v_0 v_1' \ldots v_{\ell-1}' v_\ell$ immer noch in X, und beide sind äquivalent, d.h. es gilt $P \approx P'$ in X.

(b) Dasselbe gilt für jede Folge von Δ–Zügen $P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_k$: Auch hier gibt es einen Abstand $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass wir innere Eckpunkte um δ verschieben dürfen, und dabei die Umformung in X erhalten bleibt.

Daher dürfen wir im Folgenden vereinfachend annehmen:
(c) Jede Kante schneidet höchstens eine Wand, und dies transvers.
(d) Jeder Δ–Zug schneidet höchstens einen Grad, und dies transvers.

Zwei Polytope P und Q in $\mathbb{R}^n$ sind transvers, wenn sie disjunkt sind oder sich in genau einem Punkt $a \in \operatorname{Int} P \cap \operatorname{Int} Q$ schneiden und zwar (affin-) linear unabhängig gemäß $\mathbb{R}^n = T_a P \oplus T_a Q$: Basen von $T_a P = \langle P - a \rangle_{\mathbb{R}}$ und $T_a Q = \langle Q - a \rangle_{\mathbb{R}}$ fügen sich zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$.

Wirtinger–Präsentation

(e) Die Abbildung $\psi : \pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) \to [\, S^{\pm} \mid R \,]$ mit $\psi([w]) = [\eta(w)]$ ist wohldefiniert: Aus Homotopie $w \approx w'$ wird Kongruenz $\eta(w) \equiv \eta(w')$.

(f) Umgekehrt konstruieren wir $\varphi([s^{\pm}]) = [w_s^{\pm}]$ mit Wanddurchgang $\eta(w_s^{\pm}) = s^{\pm}$: Jede Relation in R übersetzt sich in eine Homotopie.

(g) Demnach ist ψ surjektiv, denn nach Konstruktion gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{F_n}$.

(h) Wir betrachten schließlich $\varphi \circ \psi : w \mapsto \eta(w) \mapsto w'$. Die Polygonzüge w und w' durchstoßen dieselben Wände. Jede Wand ist zshgd, daher können wir die Durchstoßungen angleichen. Das Komplement Y ist einfach zshgd, das zeigt $w \approx w'$. Das bedeutet $\varphi \circ \psi : [w] \mapsto [w]$, also $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\pi_1}$. QED

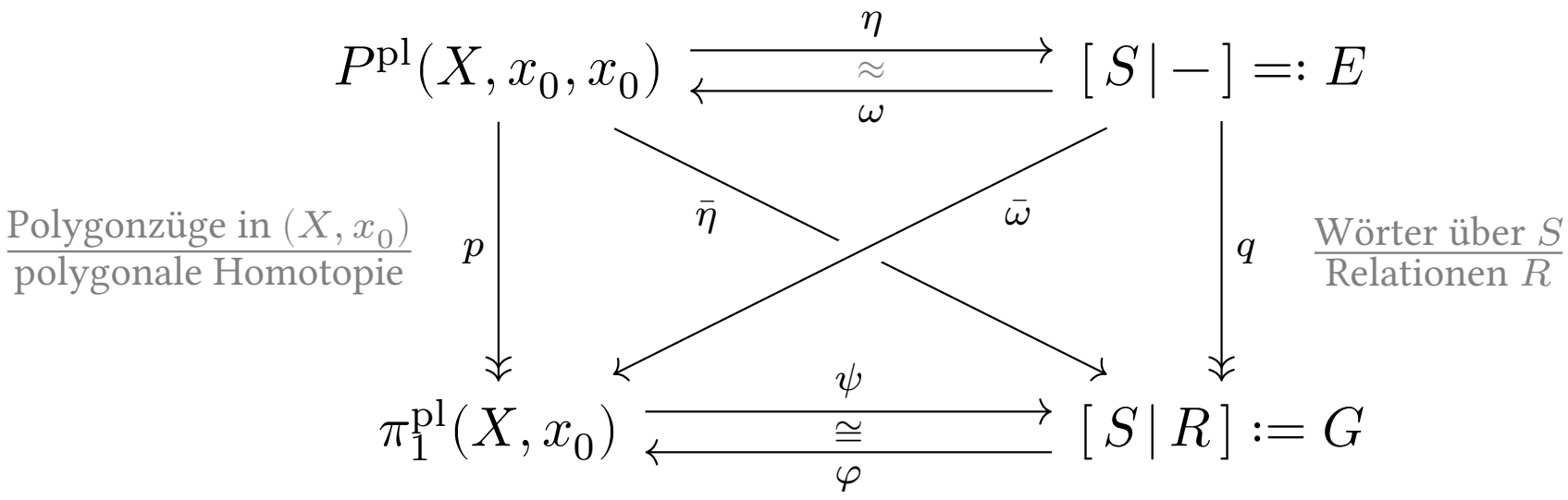
🙂 Wir sehen hier dreimal denselben Beweis, der sich vor unseren Augen in vollendeter Schönheit und erfreulicher Allgemeinheit entfaltet.

Zur Vorbereitung (a–d) nutzen wir unsere topologischen Werkzeuge und bringen polygonale Wege und Homotopien in *allgemeine Lage*.

In (e–h) übersetzen wir die topologischen Daten in algebraische Daten und verlustfrei zurück: Wir erhalten einen Gruppenisomorphismus!

Ausführung zur Wirtinger–Präsentation

Wir organisieren die Konstruktion entlang der beidseitigen Quotienten:



Aufgabe: Führen Sie diese Konstruktion detailliert aus:
Die Homomorphismen (e) ψ und (f) φ sind wohldefiniert,
denn die im Start geforderten Relationen sind auch im Ziel erfüllt.
Nach Konstruktion gilt (g) $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$ und (h) $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Versuchen Sie es unbedingt selbst. Sie können hier viel lernen, denn viele Isomorphien entstehen genau so! Ich führe dies für Sie vorbildlich aus.

Beweis: (e) Wir haben den Monoidhomomorphismus (von Seite L411)

$$\eta : P^{\mathrm{pl}}(X, x_0, x_0) \to [\, S \,|\, - \,].$$

Wir nehmen hierzu Transversalität (c) für alle Polygonzüge an.
Ebenso nutzen wir Transversalität (d) für polygonale Homotopie:
Jede elementare Homotopie links in X wird rechts zu einer Relation in R.
Somit induziert $\bar{\eta} = q \circ \eta$ den Gruppenhomomorphismus

$$\psi : \pi_1^{\mathrm{pl}}(X, x_0) \to G : \psi([w]) = [\eta(w)].$$

(f) Zur Wand $s = (P, u)$ sei x_P der Schwerpunkt und $v_s^{\pm} = x_P \pm \varepsilon u \in Y$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass die Kante $v_s^- v_s^+$ nur die Wand P trifft. Zu jedem $a \in Y$ sei $w(a)$ ein Polygonzug in Y von x_0 nach a. Speziell für $a = x_0$ wählen wir $w(a) = x_0$ konstant. So erhalten wir den Monoidhomomorphismus

$$\omega : [\, S \,|\, - \,] \to P^{\mathrm{pl}}(X, x_0, x_0) : s \mapsto w_s := w(v_s^-) * v_s^- v_s^+ * \overline{w}(v_s^+).$$

Ausführung zur Wirtinger–Präsentation

Jede Relation aus R übersetzt sich in eine simpliziale Homotopie in X:

(1) Aus s^+s^- wird $w(v_s^-) * v_s^- v_s^+ * \overline{w}(v_s^+) * w(v_s^+) * v_s^+ v_s^- * \overline{w}(v_s^-) \approx x_0$.

(2) Sei $Q \in \mathscr{L}_{n-2} \setminus \mathscr{K}$ ein Grat. Die zugehörige Relation $r_Q : s_1 \cdots s_k = 1$ wird zu $w(v_{s_1}^-) * v_{s_1}^- v_{s_1}^+ * \overline{w}(v_{s_1}^+) * \cdots * w(v_{s_k}^-) * v_{s_k}^- v_{s_k}^+ * \overline{w}(v_{s_k}^+) \approx x_0$.
Nach Kürzung entspricht dies einem kompletten Umlauf um Q.
So erhalten wir die behauptete polygonale Homotopie in X.

Somit induziert $\bar{\omega} = p \circ \omega$ den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : [\, S \,|\, R \,] \to \pi_1(X, x_0) : [s] \mapsto [w_s].$$

(g) Wir zeigen $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$. Unsere Konstruktion garantiert:

$$\eta \circ \omega : s \;\mapsto\; w_s = w(v_s^-) * v_s^- v_s^+ * \overline{w}(v_s^+) \;\mapsto\; s$$

Hier gilt wirklich Gleichheit $(\eta \circ \omega)(s) = s$, also $\eta \circ \omega = \mathrm{id}_E$.
Das bedeutet $\psi \circ \varphi : [s] \mapsto [w_s] \mapsto [s]$, also $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$.

Ausführung zur Wirtinger–Präsentation

(h) Wir zeigen $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Für jeden Polygonzug w in (X, x_0) gilt:

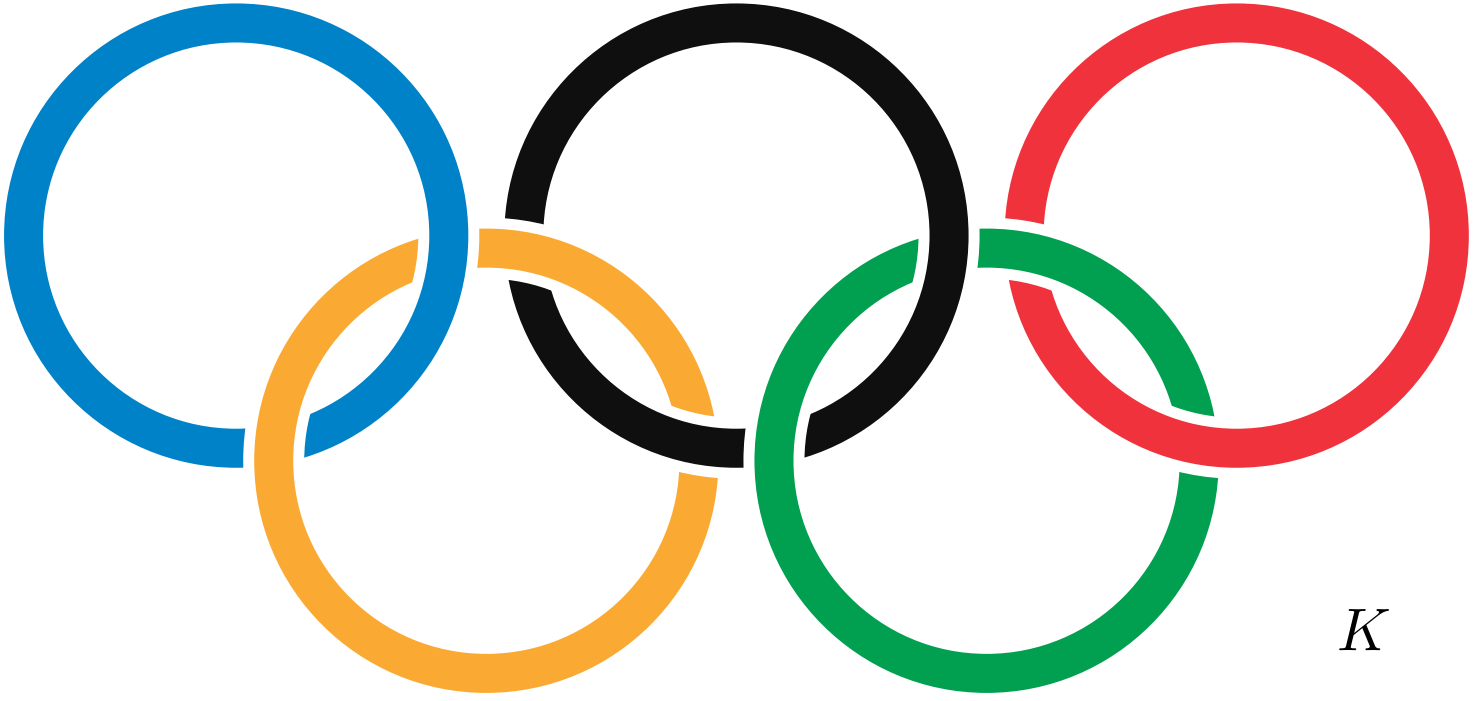
$$\omega \circ \eta : w \approx w_0 v_{s_1}^- v_{s_1}^+ w_1 \cdots v_{s_k}^- v_{s_k}^+ w_k \mapsto s_1 \cdots s_k$$
$$\mapsto w(s_1^-) * s_1^- s_1^+ * \overline{w}(s_1^+) * \cdots * w(s_k^-) * s_k^- s_k^+ * \overline{w}(s_k^+) \approx w$$

Als Homotopie in X können wir jeden Wanddurchgang von w zur Standardform $v_{s_i}^- v_{s_i}^+$ verschieben: Jede Wand ist konvex, also wegzshgd. Die Polygonzüge $w_0, w_1, \ldots, w_k$ verlaufen im einfach zshgden Raum Y. Demnach gilt $w_0 \approx w(s_1^-)$ und $w_1 \approx \overline{w}(s_1^+)w(s_2^-)$ und … $w_k \approx \overline{w}(s_k^+)$. Das liefert uns eine polygonale Homotopie $(\omega \circ \eta)(w) \approx w$ in X. Das bedeutet $\varphi \circ \psi : [w] \mapsto [w]$, also $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Wie behauptet ist (ψ, φ) ein Gruppenisomorphismuspaar. QED

🙂 Satz und Beweis sind idealtypisch für Isomorphie. Bitte gehen Sie alles sorgsam durch, dann formulieren Sie es nocheinmal selbst. Kaum macht man es richtig, schon funktioniert's!

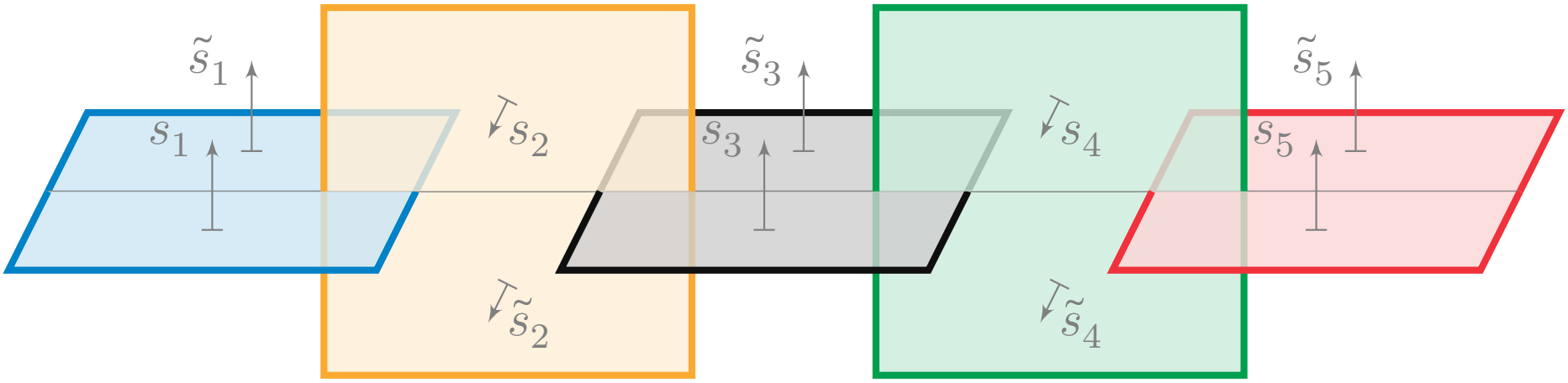
Anwendungsbeispiel: olympische Ringe



Aufgabe: Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x_0)$ des Komplements der oben gezeigten olympischen Ringe $K \subseteq \mathbb{R}^3$.

Not so fun fact: Das berüchtigte Olympiaschutzgesetz (OlympSchG) stellt das olympische Emblem unter alleinige Verfügungsgewalt des IOC/NOK. Ist diese Vorlesung illegal? Gilt die Freiheit der Lehre? (GG Art. 5.3.1) Gefährde ich damit zukünftige deutsche Olympiabewerbungen?

Anwendungsbeispiel: olympische Ringe



Lösung: Wir stellen die Ringe polytopal dar durch $\mathscr{K}$ und füllen $\mathscr{K}$ durch Wände zu $\mathscr{L}$ wie skizziert, so dass $\mathbb{R}^3 \setminus |\mathscr{L}|$ einfach zusammenhängt.
Dank Wirtinger L4M können wir bequem eine Präsentation ablesen:

Erzeuger: $s_i, \tilde{s}_i$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

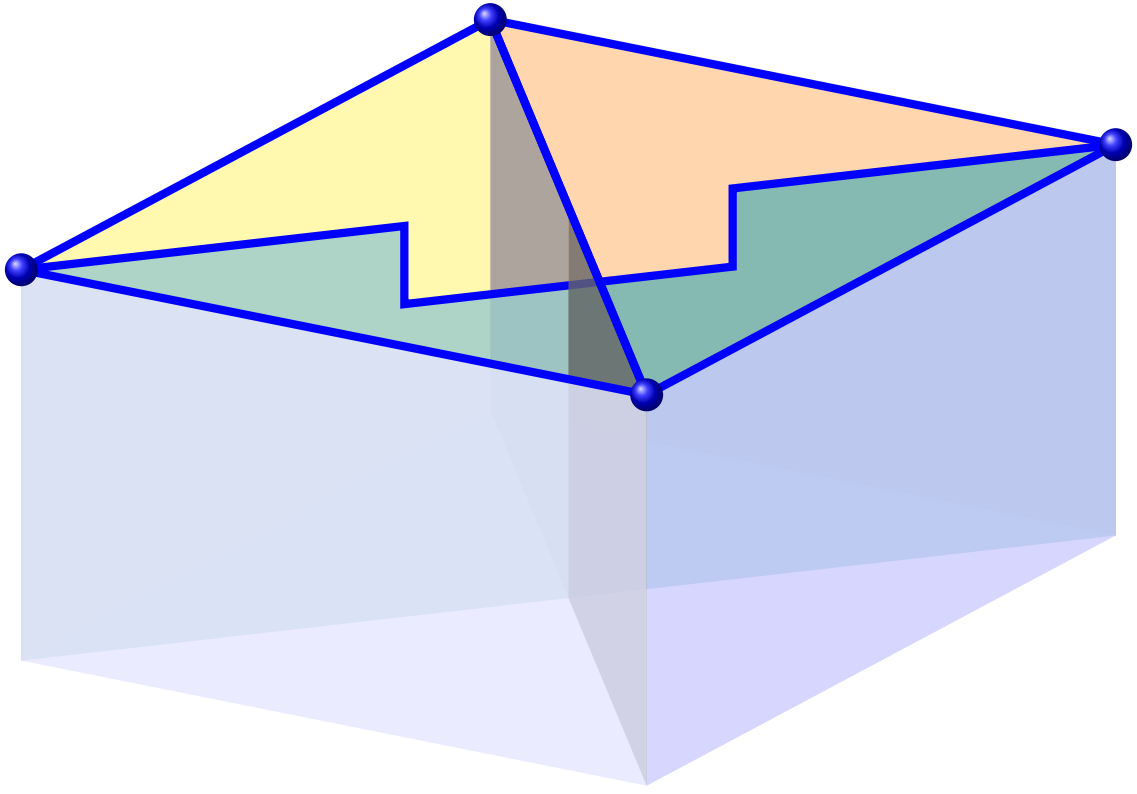
Relationen: $s_i = \tilde{s}_i$ und $\tilde{s}_i s_{i+1} = \tilde{s}_{i+1} s_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

Nach Vereinfachung erhalten wir die Präsentation $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus |\mathscr{K}|, x_0) \cong$

$$\langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \,|\, [s_1, s_2] = [s_2, s_3] = [s_3, s_4] = [s_4, s_5] = 1 \rangle$$

Übung: Ist diese Gruppe abelsch? Ist die Untergruppe $\langle s_1, s_3, s_5 \rangle$ frei? Existiert ein surjektiver Gruppenhomomorphismus auf $\langle a, b, c \,|\, - \rangle$?

Anwendungsbeispiel: Graph $|\mathscr{K}| \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$



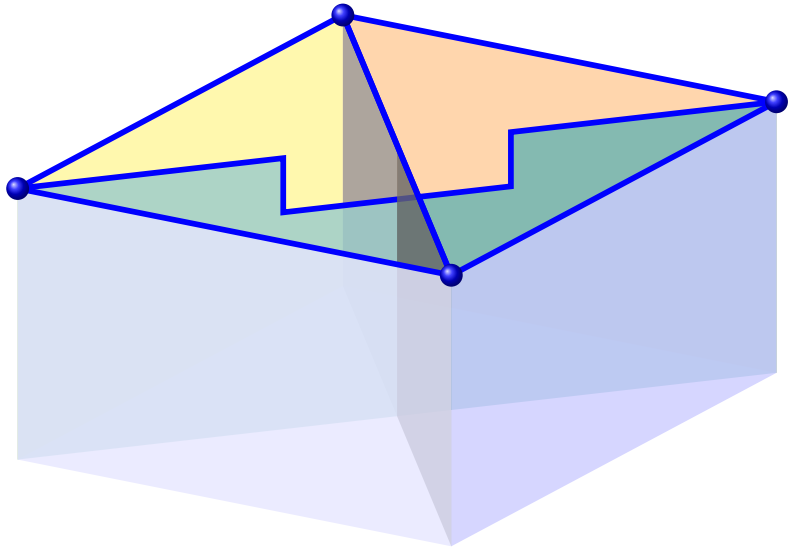
Aufgabe: Gegeben sei ein lokal-endlicher Graph $|\mathscr{K}| \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.
Wir können zudem Kreuzungen erlauben, wie oben skizziert.
Präsentieren Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus |\mathscr{K}|, x_0)$.

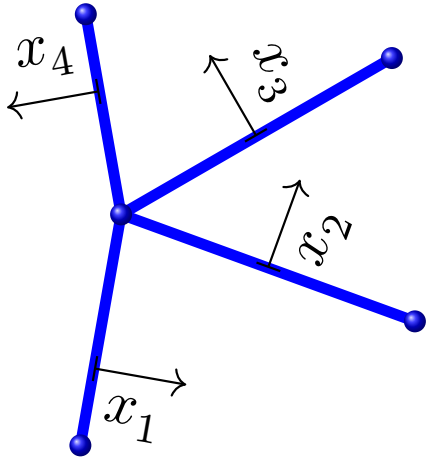
Lösung: Wir füllen durch Wände alles unterhalb von $|\mathscr{K}|$:

$$|\mathscr{L}| = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists (x,y,\tilde{z}) \in |\mathscr{K}| : z \leq \tilde{z} \right\}$$

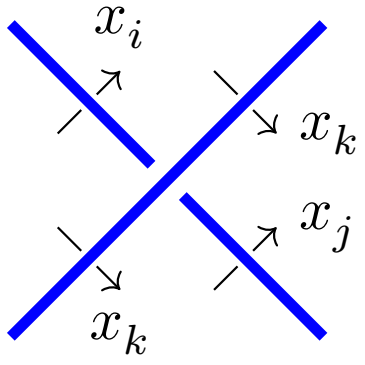
Anwendungsbeispiel: Graph $|\mathscr{K}| \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

Damit ist $\mathbb{R}^3 \setminus |\mathscr{L}|$ zusammenziehbar, somit einfach zusammenhängend
Dank Wirtinger L4M lesen wir Erzeuger und Relationen leicht ab:





$$x_1 \cdots x_n = 1$$

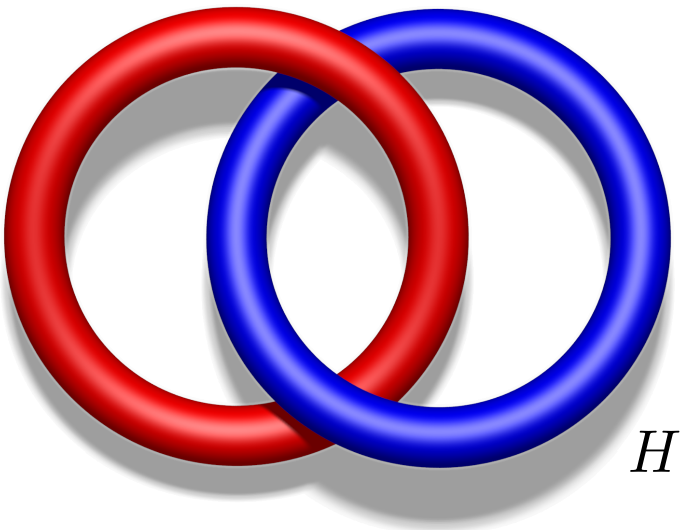


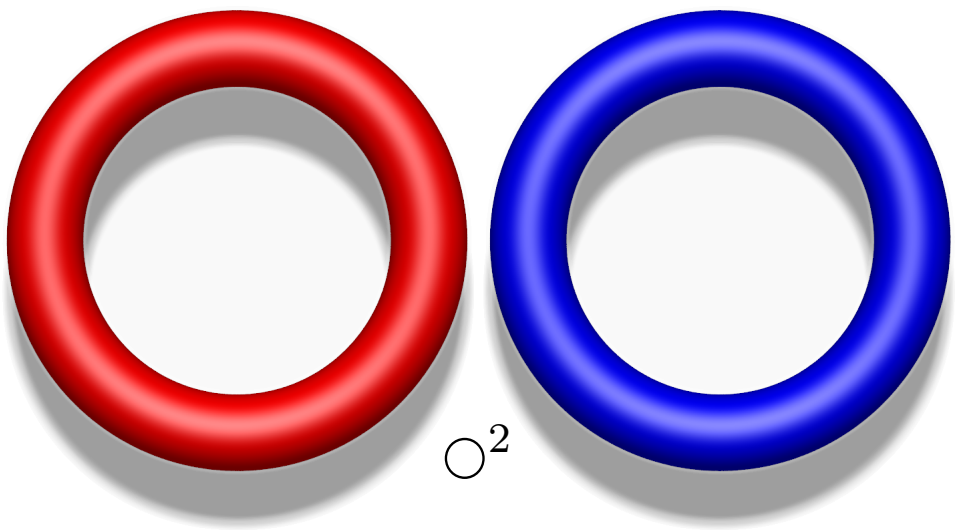
$$x_i x_k = x_k x_j$$

Satz L4P: Wirtinger 1905

Jeden endlichen Graphen $|\mathscr{K}| \subseteq \mathbb{R}^3$ können wir (nach kleiner Drehung) zu einem ebenen Diagramm projizieren; daran lesen wir bequem die Wirtinger–Präsentation (S, R) für $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus |\mathscr{K}|, x_0)$ ab: Jede Kante liefert einen Erzeuger, jede Ecke und jede Kreuzung eine Relation (wie oben).

Anwendung: Lässt sich die Hopf–Verschlingung entwirren?





Aufgabe: Existiert ein Homöomorphismus $(f, g) : (\mathbb{R}^3, H) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^2)$?

Lösung: Einschränkung von (f, g) ergibt einen Homöomorphismus der beiden Komplemente, $(f', g') : \mathbb{R}^3 \setminus H \cong \mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc^2$. Funktorialität liefert einen Isomorphismus $(\pi_1(f'), \pi_1(g'))$ der Fundamentalgruppen (L2E), also $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus H, *) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc^2, *) =: F$.

Die Gruppe $G \cong \langle s_1, s_2 \,|\, [s_1, s_2] \rangle$ ist abelsch, nicht jedoch $F \cong \langle s_1, s_2 \,|\, - \rangle$. An dieser topologischen Invariante zerbricht die anfängliche Vermutung eines Homöomorphismus $(\mathbb{R}^3, H) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^2)$. Insbesondere lässt sich die Hopf–Verschlingung H in $\mathbb{R}^3$ nicht entwirren zu $\bigcirc^2$.

Anwendung: Lässt sich die Hopf–Verschlingung entwirren?

Die hier gezeigten Knoten und Verschlingungen im $\mathbb{R}^3$ seien elastisch, beliebig dünn und unbegrenzt dehnbar. Geometrische Argumente und vertraute physikalische Hindernisse helfen uns hier nicht weiter. Glücklicherweise springt die Topologie ein, als „Gummigeometrie“.

Natürlich *vermuten* Sie gleich, aufgrund Ihrer physikalischen Erfahrung, dass sich die Hopf–Verschlingung H nicht entwirren lässt zur trivialen Verschlingungen $\bigcirc^2$. Doch wenn Sie ehrlich sind, wie oft und wie lange haben Sie es schon versucht? Ist das wirklich ein stichhaltiges Argument?

Es gibt unüberschaubar viele Möglichkeiten, H im $\mathbb{R}^3$ zu bewegen, zu deformieren, zu verwurschteln, … und vielleicht auch zu entwirren? Allein die recht wacklige Erfahrung, dass es bisher nicht gelungen ist, bedeutet noch lange nicht, dass es prinzipiell unmöglich wäre.

Wir interpretieren hier „entwirren“ als stetige Deformation des Raumes. Insbesondere erhalten wir als Endergebnis dieses Prozesses immer einen Homöomorphismus $(\mathbb{R}^3, \text{Start}) \cong (\mathbb{R}^3, \text{Ziel})$. Die obige Berechnung der Invariante π_1 zeigt, dass $(\mathbb{R}^3, H) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^2)$ unmöglich ist.

Anwendung: Lässt sich die Hopf–Verschlingung entwirren?

Bemerkung: Auf die Frage „Gilt $(\mathbb{R}^3, H) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^2)$?“ antworten wir hier „Nein, denn schon die Komplemente sind nicht homöomorph.“, genauer „Nein, schon die Gruppen der Komplemente sind nicht isomorph.“

Beachten Sie, dass die Frage gar nicht von Fundamentalgruppen spricht! So ist es immer in realistischen Anwendungen: Passende Werkzeuge müssen Sie selbst wählen, finden, probieren, …. In bewusst vereinfachten Übungsaufgaben wird Ihnen das Werkzeug gleich daneben gelegt; das ist für den Anfang gut gemeint, doch langfristig hoffnungslos unrealistisch. Lernen Sie Ihre Werkzeuge kennen und üben Sie den kreativen Gebrauch.

Bemerkung: Beide Gruppen F und G sind unendlich, genauer abzählbar unendlich. Als Invariante zur Unterscheidung $(\mathbb{R}^3, H) \ncong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^2)$ genügt demnach nicht allein die Anzahl der Gruppenelemente! Die relevante Information ist also nicht nur die *Zählung* der Homotopieklassen von Schleifen, sondern ihre *Verknüpfung*. Wir benötigen nicht nur die *Menge* $\pi_1(X, x_0)$, sondern wirklich die *Gruppe* $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$. Diese algebraische Struktur codiert einen wesentlichen Teil des untersuchten Raumes!

Anwendung: Lässt sich die Hopf–Verschlingung entwirren?

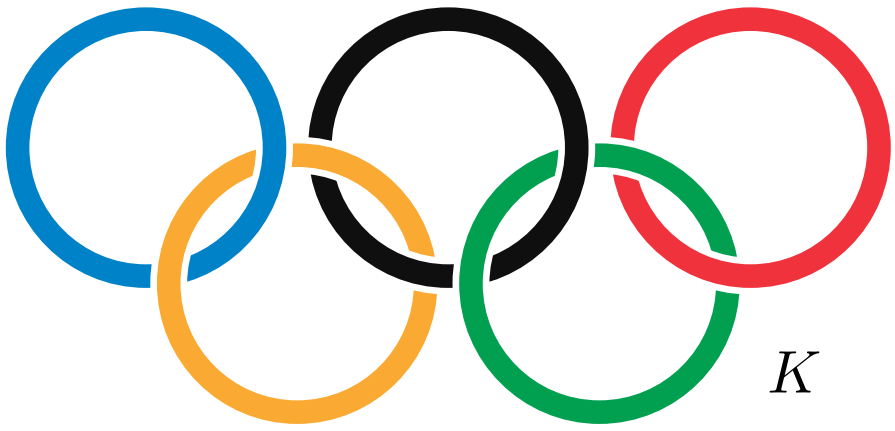
Hauptdarstellerin in all diesen Anwendungen ist die Gruppe, also die Menge $\pi_1(X, x_0)$ zusammen mit der spezifischen Gruppenstruktur „$\cdot$“, sie ist der springende Punkt! Deshalb heißt es *Algebraische Topologie*: Wir übersetzen *topologische* Fragen in *algebraische* Fragen, die wir leichter lösen können und dann zurückübersetzen.

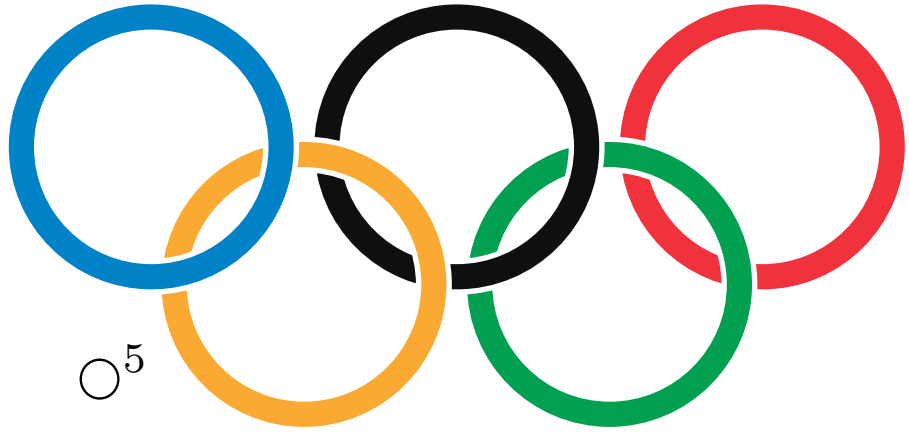
Bemerkung: Für Aussagen wie „G ist abelsch.“ und „F ist nicht abelsch.“ müssen wir in den hier präsentierten Gruppen $[\,S \,|\, R\,]$ tatsächlich mit Elementen rechnen. Diese Elemente sind Wortklassen, also Wörter über den Erzeugern S modulo Relationen erzeugt von R.

Schon zu $F = \langle\, s_1, s_2 \,|\, - \,\rangle$ stellt sich hier die Frage „Gilt $s_1 s_2 = s_2 s_1$?“, wir müssen also das Wortproblem in (S, R) lösen. Das ist meist schwer, im Allgemeinen sogar unlösbar. Freuen wir uns also an jedem Einzelfall, in dem wir dieses Problem lösen können. In der freien Gruppe gelingt dies denkbar einfach durch Reduktion auf gekürzte Wörter. Alles wird gut.

Bemerkung: Leichter als Elemente $x \in [\,S \,|\, R\,]$ sind Homomorphismen $[\,S \,|\, R\,] \to Z$. So lösen wir das Problem im Folgenden noch effizienter.

Anwendung: Lassen sich die olympischen Ringe entwirren?





Aufgabe: Existiert ein Homöomorphismus $(f, g) : (\mathbb{R}^3, K) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^5)$?

Lösung: Einschränkung von (f, g) ergibt $(f', g') : \mathbb{R}^3 \setminus K \cong \mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc^5$.
Funktorialität liefert $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc^5, *) =: F$.

Die Gruppe $F \cong \langle s_1, \dots, s_5 \,|\, - \rangle$ ist frei, (vermutlich) nicht jedoch

$$G \cong \langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \,|\, [s_1, s_2] = [s_2, s_3] = [s_3, s_4] = [s_4, s_5] = 1 \rangle.$$

Warum? Der Präsentation sieht man solche Eigenschaften nicht sofort an: Isomorphieproblem! Es gibt viele weitere Präsentationen, … auch freie? Einfacher Trick: Wir zählen Darstellungen in eine endliche Gruppe.

$$\sharp \operatorname{Hom}(F, \mathrm{S}_3) \;=\; 6^5 \;>\; \sharp \operatorname{Hom}(G, \mathrm{S}_3)$$

Anwendung: Lassen sich die olympischen Ringe entwirren?

🙂 Wie immer benötigen wir eine Konstruktion oder eine Obstruktion, hier einen Homöomorphismus $(\mathbb{R}^3, K) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^5)$ oder ein Hindernis. Die Fundamentalgruppe kommt uns da als Invariante wie gerufen. Sie haben nun ausreichend starkes Werkzeug!

Aufgabe: Ist die Gruppe G frei? **Lösung:** Die Abelschmachung ergibt $G_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^5$. Wäre G frei, so vom Rang 5. Dann wäre $\sharp \operatorname{Hom}(G, S_3) = 6^5$. Dies ist hier nicht der Fall, wie oben gesehen, also ist G nicht frei!

Der einfach-geniale Trick gelingt mit jeder nicht-abelschen Zielgruppe Z. Ein Computer kann $\operatorname{Hom}(G, Z)$ leicht vollständig auflisten und abzählen. Praktische Übung: Was genau ist hier zu prüfen? Programmieren Sie es!

🙂 In der Gruppe $\langle S \,|\, R \rangle$ mag der Vergleich von Elementen schwierig sein, die Konstruktion von Homomorphismen gelingt erfreulich leicht! Diese Weisheit, zugleich Warnung und Zuspruch, füllt sich nun in den Anwendungen mit konkreter Bedeutung. *Rechnen reinigt die Seele!*

Anwendung: Lassen sich die olympischen Ringe entwirren?

🙂 Die Gruppe G ist weder frei noch abelsch, sie ist *frei partiell abelsch*. Solche Gruppen gehören zu den **Artin–Tits–Gruppen**, siehe L335:

$$A_M := \left\langle S \,\middle|\, (s,t)^{m_{st}} = (t,s)^{m_{ts}} : s,t \in S \right\rangle$$

Diese umfassen ein breites Spektrum von freien Gruppen (mit $m_{st} = 0$ für alle $s \neq t$) zu abelschen Gruppen (mit $m_{st} = 2$ für alle $s \neq t$). Dazwischen liegen die *frei partiell abelschen* Gruppen (mit $m_{st} \in \{0, 2\}$ für alle $s \neq t$). Sie heißen auch *rechtwinklige Artin–Gruppen*, engl. *right-angled Artin groups*, kurz *RAAGs*. Auf den ersten Blick scheint dies eine recht spezielle und einfache Beispielklasse, doch sie hat sich als erstaunlich reichhaltig und zugleich bemerkenswert flexibel erwiesen. Diese Gruppen sind seit langem ein sehr aktives Forschungsgebiet, insbesondere geometrisch und algorithmisch, und haben zu wichtigen Anwendungen geführt.

📖 Ruth Charney: *An introduction to right-angled Artin groups.* Geometriae Dedicata 125 (2007) 141–158. `arXiv:math/0610668`

Anwendung: Lassen sich die olympischen Ringe entwirren?

Anschaulich scheint die ursprüngliche Frage klar: „Eine Entknotung kann unmöglich gelingen! Wie in aller Welt sollte so etwas aussehen?“ Das klingt verdächtig nach einem „Beweis durch Autorität“, oder nach „vollständiger Illusion“ oder auch „Beweis durch Mangel an Phantasie“. Wir haben in dieser Vorlesung schon einige Lösungen konstruiert, von denen man vielleicht voreilig ähnlich Pessimistisches ausgerufen hätte.

Hier können Sie sorgsam *induktiv* argumentieren: Wir haben oben gezeigt, dass sich die Hopf–Verschlingung nicht trennen lässt. Davon profitieren wir nun: Hier lässt sich das blau-gelbe Paar nicht trennen, ebensowenig gelb-schwarz, schwarz-grün, grün-rot. Wir denken uns dazu die anderen drei Komponenten entfernt und betrachten nur das jeweilige Hopf–Paar. Auch hier schreibt die Aufgabe den Lösungsweg nicht vor, Sorgfalt ist gefordert, Kreativität ist gewünscht.

Das zeigt sogar eine stärkere Aussage: Die olympischen Ringe lassen sich nicht in (zwei nicht-leere Teile) trennen, sagen wir in $\mathbb{R}^3_{<0}$ und $\mathbb{R}^3_{>0}$.

Anwendung: Wie sollte man sein Fahrrad *nicht* anschließen?

So gesehen vor einer Eisdiele!
Sind das drei olympische Ringe?
Good to go. Ready for take-away.

Überall in Ihrem Alltag entdecken Sie Mathematik, oft auch Topologie, sobald Sie mit mathematisch geöffneten Augen durchs Leben gehen!

Zugegeben, die Berechnung der Fundamentalgruppe ist an dieser Stelle nicht nötig, ausreichend Erfahrung genügt oft, so auch hier.

Dennoch ist es gut zu wissen, wie die Mathematik unsere Intuition stützt und auch dort noch wirkt, wo unsere naive Anschauung versagt.

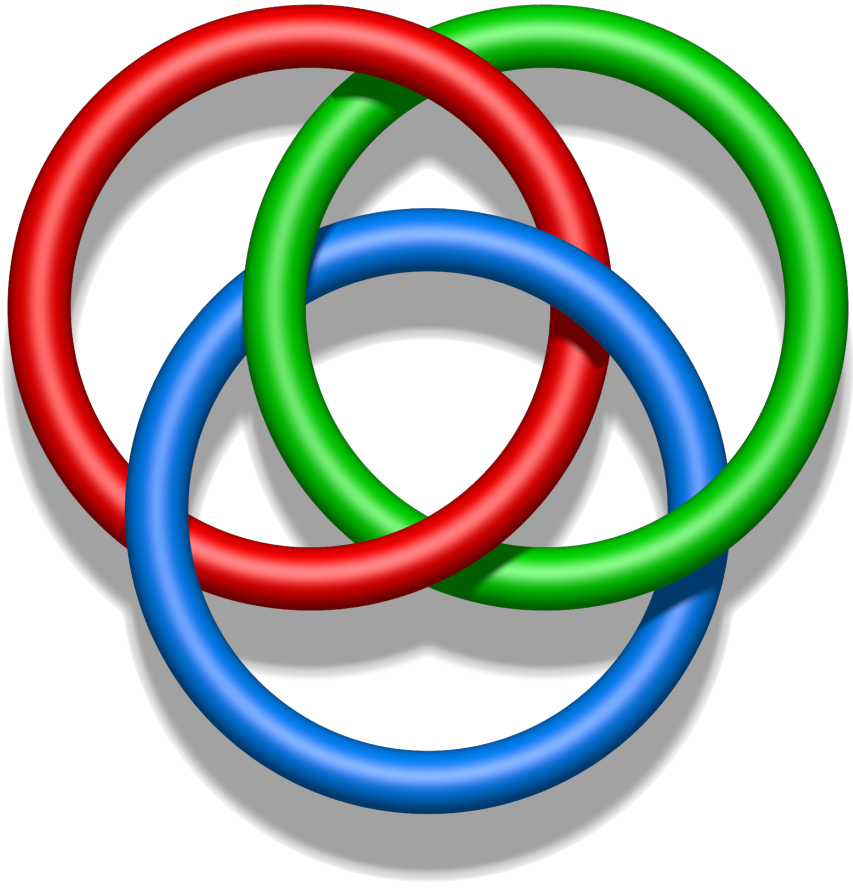
Anwendung: Wie sollte man sein Fahrrad *nicht* anschließen?

⚠ Beim Anschließen Ihres Fahrrads spielt, wie Sie wissen, die Geometrie und die physikalische Beschaffenheit die wichtigste Rolle. Fahrrad, Schloss, Ständer, etc. sind recht rigide, und sicherlich nicht beliebig dehnbar, wie in der Topologie frech-vereinfachend angenommen.

Liefert die Topologie also gar keine verwertbaren Aussagen? Oh doch, aber meist nur in eine bestimmte Richtung: *Wenn* Schloss und Rahmen verschlungen sind (à la Hopf), *dann* lassen sie sich nicht durch stetige Deformation voneinander trennen. Das ist ein *topologisches* Hindernis, das unabhängig von Geometrie und Physik besteht.

Sind die topologischen Hindernis aus dem Weg, so kann es weitere geben, etwa geometrische. Eventuell lässt sich das Fahrrad auf dem obigen Photo doch nicht so leicht aus dem Ständer heben, da der Bewegungsspielraum hierzu nicht ausreicht. Die Topologie macht hierüber keine Aussage. Verschlingung ist *hinreichend*, aber nicht *notwendig* zur Diebstahlsicherung. Achja, Dieb:innen respektieren oft nicht einmal die Topologie: Aufschneiden ist untopologisch!

Anwendung: Sind die Borromäischen Ringe trennbar?



Wenn Sie einen beliebigen der drei Ringe entfernen, dann sind die beiden anderen offensichtlich trennbar. Weniger offensichtlich: Ist B trennbar? Auch dies gelingt mit π_1... nach kurzer geschickter Rechnung.

Anwendung: Sind die Borromäischen Ringe trennbar?

Vorüberlegung: Wenn sich die Borromäischen Ringe B trennen lassen, also eine Komponente von den anderen beiden wegbewegen lässt, dann wäre B vollständig entwirrbar, also $(\mathbb{R}^3, B) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^3)$.
Wir vergleichen also B mit der trivialen Verschlingung $\bigcirc^3$.

Übung: (1) Präsentieren Sie $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus B, *)$ und $F := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc^3, *)$.
(2) Zeigen Sie, dass G von drei geeigneten Elementen erzeugt wird.
(3) Zeigen Sie $\sharp \operatorname{Hom}(G, \mathrm{S}_3) < 6^3$; es genügt *eine* kurze Rechnung.

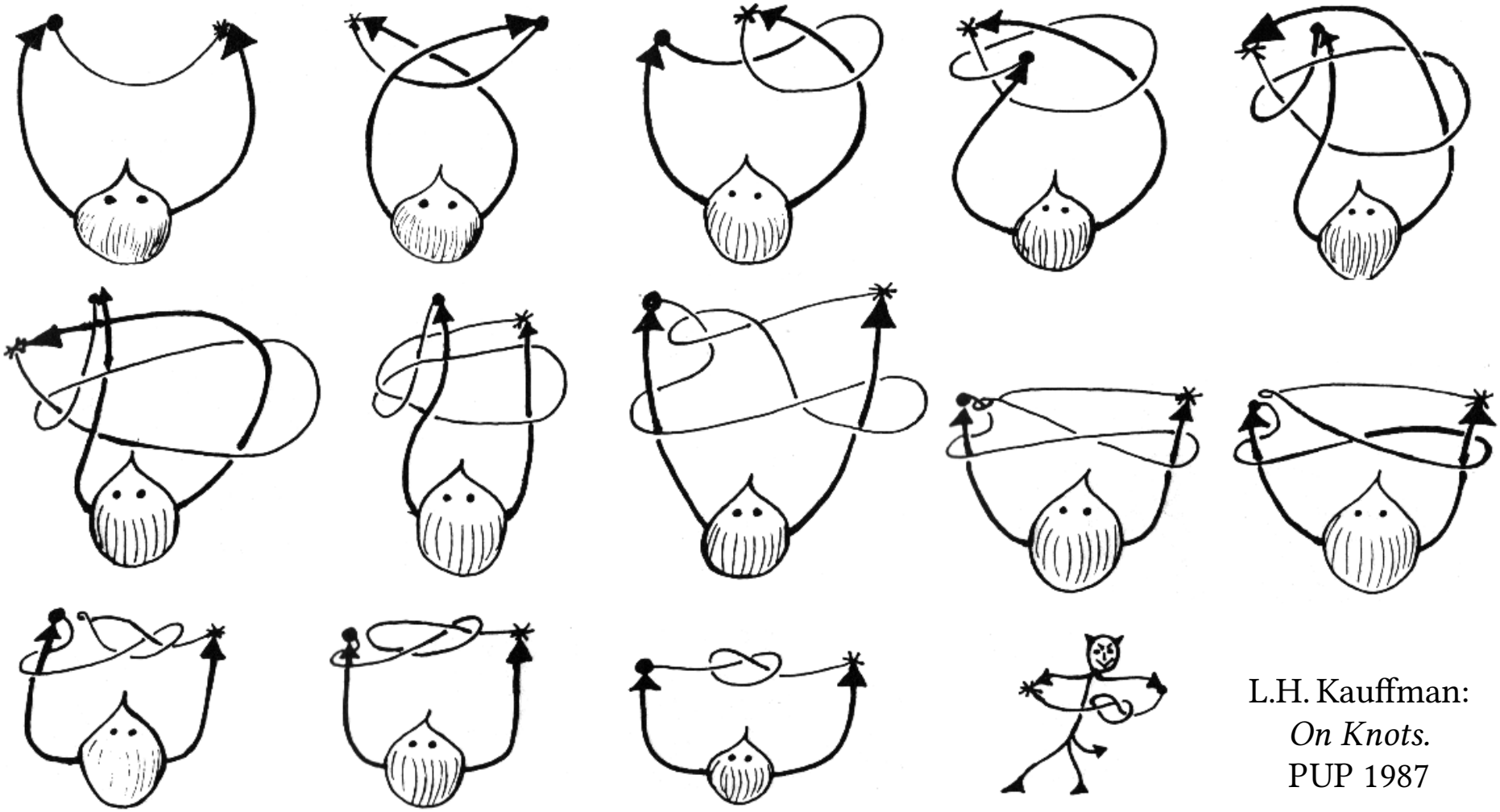
🙂 Die Borromäischen Ringe $B \subseteq \mathbb{R}^3$ lassen sich demnach nicht trennen!

Vielleicht fanden Sie die vorigen Beispiele allzu banal und offensichtlich.
Sie sind es nicht, doch unsere Anschauung ist geradezu überwältigend.

Die Borromäischen Ringe sind schon eine härtere Kopfnuss, insbesondere wenn man sie zum ersten Mal sieht und die naive Anschauung mangels Erfahrung versagt. Die Mathematik wirkt auch hier, präzise und effizient.

In der Knotentheorie entwickelt man weitere Werkzeuge hierzu.
Schon die Fundamentalgruppe ist erfreulich leicht und effizient.

Ein topologischer Betrug: Kauffmans Seiltrick



L.H. Kauffman:
On Knots.
PUP 1987

Eine Zauberin hält ein unverknotetes Seil an beiden Enden.
Sie behauptet, ohne loszulassen das Seil verknoten zu können.
Ist dieses verblüffende Kunststück auf ehrliche Weise möglich?

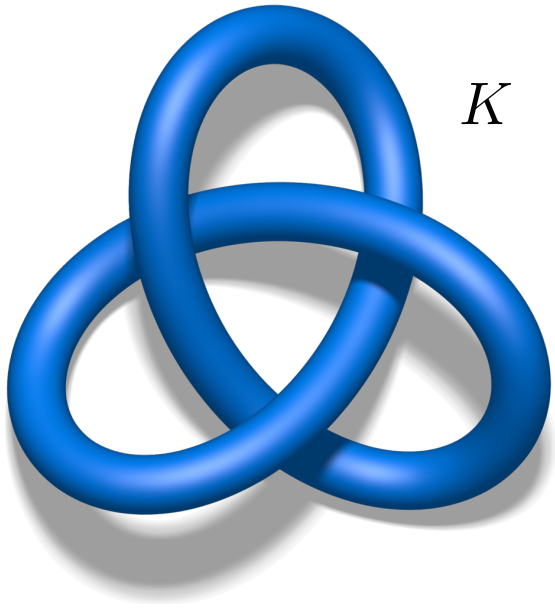
Ein topologischer Betrug: Kauffmans Seiltrick

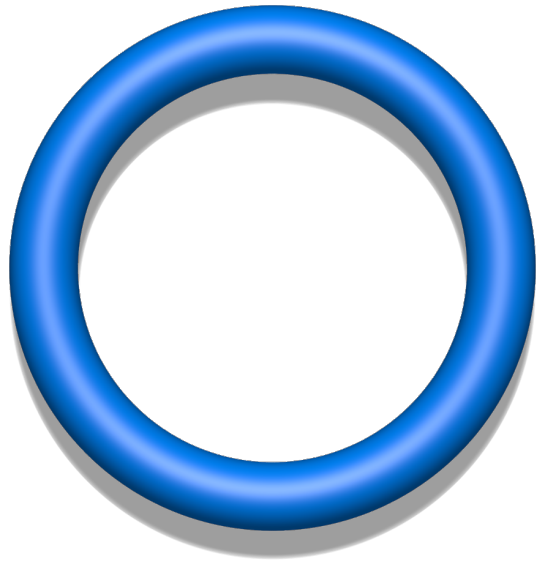
Im $\mathbb{R}^4$ gelingt es, siehe E607, doch dies spielt im $\mathbb{R}^3$. Sie wittern Betrug. „Es gelingt!“, behauptet die Zauberin selbstsicher. „Dann zeige mir wie!“, verlangen Sie und fordern in guter wissenschaftlicher Tradition einen konstruktiven Beweis. „Ich darf das Geheimnis nicht preisgeben und die Transformation nur unter einer Samtdecke vollziehen.“ – „Das klingt verdächtig.“ – „Vertraue mir! Ich habe diese Technik von meiner Meisterin gelernt, unter einem Schweigegelübde. Dieses geheime Wissen wird seit Generationen nur von Meisterinmund zu Schülerinohr weitergegeben.“

„Starke Behauptungen erfordern starke Beweise.“ – „Du musst glauben! Mit Schulmathematik kann man das nicht verstehen.“ Das Gespräch mit der selbsternannten Wundertopologin führt offensichtlich zu nichts. Sie beschließen der Sache selbständig kritisch auf den Grund zu gehen.

Schulmathematik genügt nicht, etwas Unimathematik hingegen schon! Sie suchen einen Beweis der Unmöglichkeit, also eine Obstruktion: transparent, nachvollziehbar, kommunizierbar. Das ist ehrliche Arbeit, das ist Wissenschaft, das ist Mathematik, die Kunst der Erkenntnis.

Anwendung: Lässt sich die Kleeblattschlinge entknoten?





Aufgabe: Existiert ein Homöomorphismus $(f, g) : (\mathbb{R}^3, K) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc)$?

Lösung: Wir finden $F := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc, *) \cong \langle x \,|\, - \rangle \cong \mathbb{Z}$ und dank Wirtinger L4M auch $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *) \cong \langle a, b, c \,|\, a^b = c,\ b^c = a,\ c^a = b \rangle$.

Sind diese Gruppen isomorph oder nicht? Ist G abelsch? Der Präsentation sieht man solche Eigenschaften nicht sofort an: Isomorphieproblem!

Trick: Wir finden $G \twoheadrightarrow \mathrm{S}_3$ mit $a, b, c \mapsto (1,2),\ (2,3),\ (3,1)$. Probe!
Somit ist die Gruppe G nicht abelsch, also $(\mathbb{R}^3, K) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc)$.

Anwendung: Lässt sich die Kleeblattschlinge entknoten?

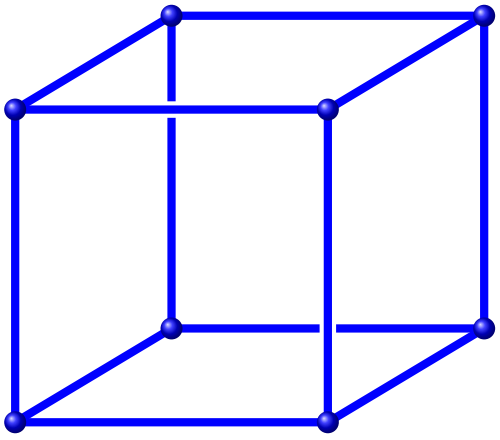
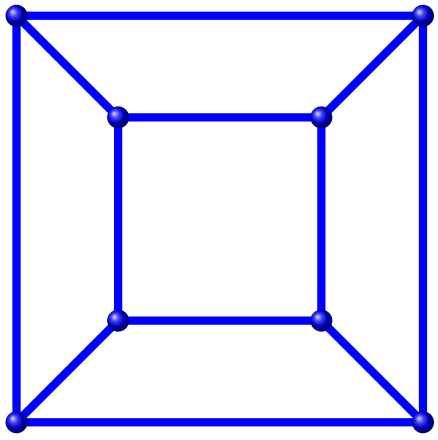
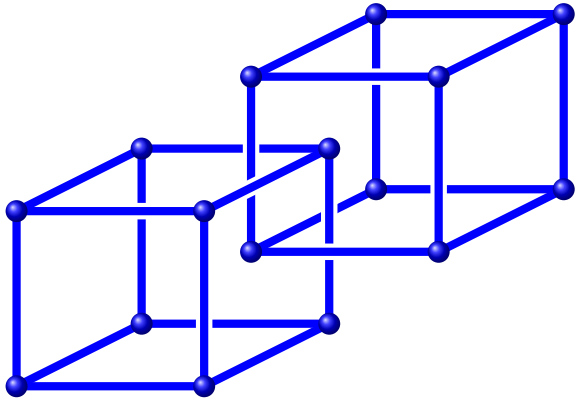
Die Knotentheorie untersucht Einbettungen von Kreislinien und Flächen im $\mathbb{R}^3$ oder allgemein von schönen Teilräumen im $\mathbb{R}^n$ modulo Bewegung. Sie nutzt und entwickelt hierzu geeignete Invarianten, als erstes die Fundamentalgruppe, dann Knotenpolynome und Knotenhomologie uvm.

Als Forschungsgebiet mögen Knoten etwas exotisch wirken, wie auch sonst alles, was man nicht kennt und nur von weiter Ferne betrachtet. Andererseits sind Knoten anschaulich „begreifbar“ und faszinierend „verwirrend“. In den letzten Jahrzehnten haben Mathematiker:innen hierzu erstaunlich raffinierte Techniken und Invarianten entwickelt.

🙂 *Fun fact:* Knotentheorie in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist langweilig – dank einem interessanten Satz! Dank Jordan–Schoenflies lässt sich jede Einbettung $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ entwirren zur Standardeinbettung $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Im polygonalen Fall haben wir dies algorithmisch bewiesen durch sukzessives Einklappen .

🙂 Knotentheorie im Raum $\mathbb{R}^3$ ist interessant – dank vieler interessanter Beispiele! Unser mathematisches Modell ist sinnvoll, es gibt nicht-triviale Knoten: Die Kleeblattschlinge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ lässt sich nicht entknoten!

Anwendungsbeispiel: Graphen $|\mathscr{K}| \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

Unsere vorigen Beispiele zeigen Knoten und Verschlingungen und sind daher besonders leicht fasslich: Damit haben wir alltägliche Erfahrung! Unsere Techniken behandeln ebenso auch allgemeine Graphen im $\mathbb{R}^3$. Damit erschließen wir uns ein riesiges Beispielrepertoire! Knoten und Verschlingungen sind darin nur ein (besonders schöner) Spezialfall.

Aufgabe: Sei $\mathscr{K}$ das 1–Skelett des Würfels $W = [-1,1]^3$. Präsentieren Sie $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus |\mathscr{K}|, x_0)$ mit mindestens drei verschiedenen Methoden. Warum erhalten Sie mitunter recht verschiedene Präsentationen? Warum erhalten Sie jedoch garantiert immer „dieselbe“ Gruppe G? In welchem Sinne sind alle Ihre Präsentationen äquivalent?

Anwendungsbeispiel: Graphen $|\mathcal{K}| \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

Lösung: (1) Wir können die Wirtinger–Präsentation der linken Skizze ablesen, wie in Satz L4P dargelegt. Das ist Schema F und gelingt immer.

(2) Noch einfacher gelingt es mit der mittleren Skizze: Wir bewegen dazu $K \subseteq \mathbb{R}^3$ in eine übersichtlichere Lage, das vereinfacht unsere Rechnung. Die präsentierte Gruppe ist dieselbe – wie immer bis auf Isomorphie.

(3) Noch einfacher gelingt es durch geometrisches Verständnis im $\mathbb{R}^3$, siehe L410. Wir wählen *fünf* der sechs Facetten, koorientieren jede davon, und erhalten sofort die *freie* Präsentation $\langle s_1, \dots, s_5 \mid - \rangle$.

🙂 Schema F gelingt immer. Verständnis ist effizienter. Denken hilft!
So ist es oft in der Mathematik, angefangen bei der Koordinatenwahl. Die richtige Sichtweise kann ein Problem vereinfachen, manchmal gar trivialisieren. Daher ist es gut, möglichst vielfältige Techniken und Lösungswege zu kennen und aktiv zu erproben. Mathematik verbindet sorgsames Handwerk mit erfinderischer Kreativität. Beides will geübt sein, beides kann erlernt werden, am besten an guten Vorbildern.

Anwendungsbeispiel: Flächen im $\mathbb{R}^4$

Unsere Anschauung ist am Raum $\mathbb{R}^3$ geschult, und hier trügt sie uns erstaunlich selten. Ganz verlässlich ist sie leider auch hier schon nicht… Mit unseren Techniken können wir ebenso in *jeder* Dimension rechnen!

Aufgabe: Wir betrachten $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$. Präsentieren Sie $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{S}^2, *)$. Was sagt Ihre „Intuition“ oder „Anschauung“ hierzu? Woher kommt sie? Wie verwandeln Sie dies in eine kommunizierbare, korrekte Rechnung?

🙂 Ich zeige bewusst keine Graphik hierzu, denn jeder Versuch muss zwangsläufig rabiat auf Dimension 3 oder gar 2 reduzieren, das will geübt sein. Sie sollten es selbst versuchen, um sich eine Brücke zu bauen vom $\mathbb{R}^3$, den Sie bereits kennen, in den $\mathbb{R}^4$, den Sie erst erkunden.

Fun fact: Im $\mathbb{R}^4$ ist die Kleeblattschlinge entknotbar, wie allgemein jeder Knoten $K \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$. Sehen Sie wie? Skizze? Koordinaten? Siehe E607!

Hier geht die mathematische Methode mutig voran,
die intuitive Anschauung folgt und wächst daran.

Solches Wissen zahlt sich aus, etwa wenn mal wieder Doctor Strange einem interdimensionalen Wesen wie Dormammu begegnet.

Anwendungsbeispiel: Flächen im $\mathbb{R}^4$

Lösung: Wir betrachten hier die Standardeinbettung $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$.
Als Wand der Kondimension 1 haben wir dazu den Ball $\mathbb{D}^3 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$.
Das Komplement ist einfach zshgd, dank $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{D}^3 \cong \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{D}^4 \cong \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$.
Die freie Wirtinger–Präsentation L4D liefert $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{S}^2, *) \cong \langle s_1 \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Genau genommen verlangt unser Satz L4D einen polytopalen Komplex.
Wir ersetzen also den Ball $\mathbb{D}^3$ mit Ran $\mathbb{S}^2$ topologisch äquivalent durch den Würfel $W = [-1,1]^3$ mit Rand $\partial[-1,1]^3$. Nun lässt sich Satz L4D direkt anwenden und liefert die gesuchte Fundamentalgruppe.

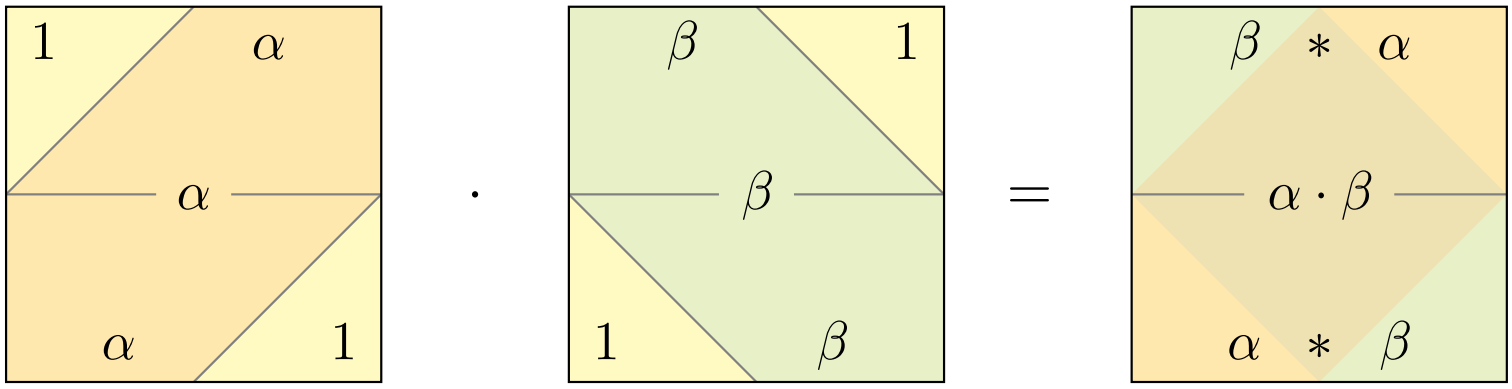
Die Rechnung gelingt unabhängig von der Dimension. Statt wie bisher „Skizzen zuerst“ wendet sich unsere Priorität nun zu „Formeln zuerst“.
Die Kunst besteht darin, beide zu beherrschen und ineinander übersetzen zu können. Idealerweise erzieht die Topologie Sie zur Zweisprachigkeit.

Mathematik umschrieb man einst als die Lehre von Zahlen und Figuren.
Diese Zusammenfassung zweier grundlegender Aspekte hat noch immer ihren Platz, insbesondere ihr gegenseitiger Nutzen in der Topologie:
Bilder betonen die Idee, Formeln liefern die Präzision.

Anwendung auf topologische Gruppen

Sei $(G, \mathcal{T}, \cdot, 1, ^{-1})$ eine topologische Gruppe. Allgemeiner genügt hier ein **H-Raum**, auch **Hopf–Raum** genannt, also ein topologischer Raum $(G, \mathcal{T})$ mit stetiger Multiplikation $\cdot : G \times G \to G$ und neutralem Element $1 \in G$.

Aufgabe: Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, 1)$ abelsch? **Lösung:** Ja!
Das ist höchst erstaunlich! Zuerst der frappierende Beweis durch Bild:



Auch die lineare Textfassung ist reinste Poesie: Zu je zwei Schleifen α, β in $(G, 1)$ haben wir dank L1D/L1C Homotopien $H : \alpha * 1 \sim \alpha \sim 1 * \alpha$ und $K : 1 * \beta \sim \beta \sim \beta * 1$. Das gilt soweit in jedem topologischen Raum $(G, 1)$. Nun können wir (stetig!) multiplizieren: Wir erhalten so die Homotopie $H \cdot K : \alpha * \beta \sim \alpha \cdot \beta \sim \beta * \alpha$. Demnach ist die Gruppe $\pi_1(G, 1)$ abelsch.

Anwendung auf topologische Gruppen

Aufgabe: Lässt sich der Raum $(X, \mathcal{T})$ zu einer topologischen Gruppe $(X, \mathcal{T}, \cdot, 1, {}^{-1})$ aufwerten? Ja – Konstruktion oder Nein – Obstruktion!

(1) $\mathbb{R}$? Ja! Es genügt $(\mathbb{R}, +, 0)$.
(2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$? Ja! Es genügt $(\mathbb{R}^\times, \cdot, 1)$.
(3) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$? Ja, homöomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(4) $\mathbb{C}$? Ja! Es genügt $(\mathbb{C}, +, 0)$.
(5) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? Ja! Es genügt $(\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$.
(6) $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$? Nein! $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, *)$ ist nicht abelsch!

(7) Bälle $\mathbb{D}^n$? Trivial für $n = 0$, unmöglich für $n \geq 1$.
(8) Sphären $\mathbb{S}^n$? Unter den Sphären kennen wir nur drei topologische Gruppen (F1Q), nämlich $\mathbb{S}^0 = \mathrm{GO}_1 \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1 = \mathrm{GU}_1 \mathbb{C} \cong \mathrm{SO}_2 \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}_2 \mathbb{C}$.

Umgekehrt bewies Élie Cartan 1936, dass diese Liste vollständig ist: Unter allen Sphären $\mathbb{S}^n$ sind nur $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ topologische Gruppen.

⚠ Die Konstruktion dieser drei Beispiele ist leicht, doch mögliche Obstruktionen für die verbleibenden Sphären sind viel schwieriger.

Anwendung auf topologische Gruppen

Vielleicht hätten Sie bei (3) leichtfertig ausgerufen: „Nein!“ und bei (6): „Keine Ahnung.“ Wie immer benötigen wir entweder eine Konstruktion oder ein Hindernis. Sie haben nun schon einige topologische Werkzeuge, und die Fundamentalgruppe beantwortet die Frage (6) sehr elegant.

(7) Hier hilft π_1 nicht weiter. (7a) Jede topologische Gruppe ist homogen (E703), doch Rand und Inneres von $\mathbb{D}^n$ sind topologisch verschieden (J7I). (7b) Alternative: Nach Brouwer J4H ist $\mathbb{D}^n$ ein Fixpunktraum, doch jedes Gruppenelement $g \neq e$ operiert fixpunktfrei, das schließt $n \geq 1$ aus.

(8) Folgende Aussagen gelten nur in Dimension $n = 1, 2, 4, 8$:
(a) Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist eine reelle Divisionsalgebra.
(b) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist parallelisierbar. (c) $\mathbb{S}^{n-1}$ ist ein Hopf–Raum.

📖 Elie Cartan: *La topologie des espaces répresentatives des groupes de Lie.* Enseign. Math. 35 (1936) 177–200. Hans Samelson: *Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten.* Comm. Math. Helvetici. 13 (1940) 144–155. John Frank Adams: *On the non-existence of elements of Hopf invariant one.* Ann. of Math. 72 (1960) 20–104. Ebbinghaus *et al*: *Zahlen.* Springer 1992.

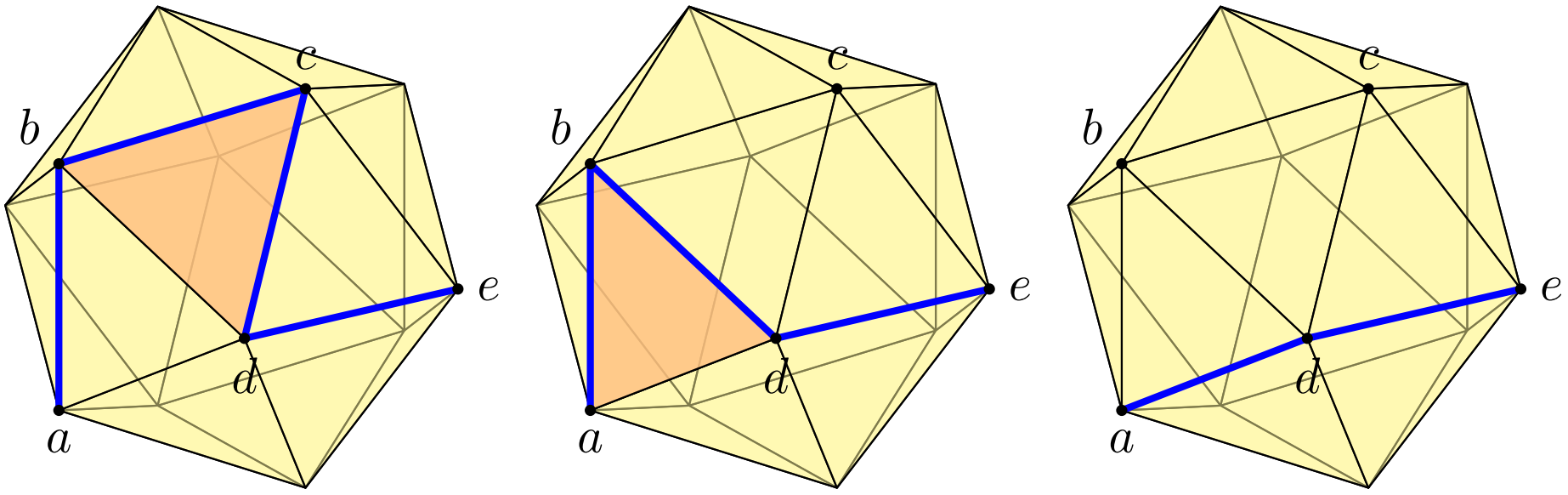
Anwendung auf topologische Gruppen

Aufgabe: Ist $(\mathbb{S}^n, \cdot, e)$ eine topologische Gruppe, $n \geq 1$, so ist n ungerade. Demnach können $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^6$, … keine topologischen Gruppen sein.
Hinweis: Erinnern Sie den Satz vom Igel und seinen Beweis!

Lösung: Wir wählen einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ von $\gamma(0) = e$ zu einem Punkt $\gamma(1) = a \in \mathbb{S}^n \setminus \{e\}$. Dann ist $H(t,x) = \gamma(t) \cdot x$ eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ nach $H_1 = f : x \mapsto ax$. Da f fixpunktfrei ist, existiert eine Homotopie K von $K_0 = f$ weiter nach $K_1 = -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$, wie üblich affin und retrahiert vermöge $K(t,x) = [(1-t)ax - tx]/|(1-t)ax - tx|$, siehe G4c. Aus $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ folgt $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = \deg(-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$ (J3E). Das ist nur für ungerades n möglich. QED

☺ Dieses elegante Argument kennen Sie bereits aus Satz J5B vom gekämmten Igel: Auf $\mathbb{S}^{2k}$ mit $k \geq 1$ hat jedes (stetige tangentiale) Vektorfeld eine Nullstelle. Mit dem Satz J5C von Poincaré–Hopf gilt: Ist $(M, \cdot, 1)$ eine geschlossene, zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 1 und zugleich eine topologische Gruppe, so gilt $\chi(M) = 0$. Das schließt erneut die Sphären $\mathbb{S}^{2k}$ für $k \geq 1$ aus, denn $\chi(\mathbb{S}^{2k}) = 2$.

Kantenzüge und Homotopien in einem Simplizialkomplex



Beispiel: Ein SKomplex K und Kantenzüge $abcde \approx abde \approx ade$.

Wir betrachten weiterhin Polygonzüge und polygonale Homotopie wie schon seit L4A. Dies spezialisieren wir nun für das Polyeder $|K|$ eines Simplizialkomplexes K. Wir verlangen zusätzlich zu L4A, dass Polygonzüge von Ecke zu Ecke laufen entlang der Kanten von K. Polygonale Homotopien laufen dann über die Dreiecke von K wie in der obigen Skizze illustriert. Dies führt zu einer weiteren starken Vereinfachung, die ich ob ihrer Eleganz nochmals ausformuliere.

Kantenzüge und Homotopien in einem Simplizialkomplex

Definition L6A: Kantenzüge

Sei K ein Simplizialkomplex mit Eckenmenge $\Omega = \Omega(K)$.

(1) Ein **Kantenzug** $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in K ist eine Folge von Eckpunkten $v_0, v_1, \dots, v_n \in \Omega$ mit der Kantenbedingung $\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\} \in K$.

(2) Der **umgekehrte Kantenzug** $\bar{w} = v_n \dots v_1 v_0$ verläuft ebenso in K. Zum Punkt $a \in \Omega$ ist $\mathrm{id}_a = a$ der **konstante Kantenzug** der Länge 0.

(3) Kantenzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = v'_0 v'_1 \dots v'_m$ sind **verknüpfbar** falls $v_n = v'_0$; ihre **Verknüpfung** ist dann $w * w' := v_0 v_1 \dots v_n v'_1 \dots v'_m$.

🙂 Wir erhalten die Kategorie $P(K)$: (a) Objekte sind $a, b, c, \dots \in \Omega$.
(b) Morphismen von a nach b sind die Kantenzüge $w : a \to b$ in K.
(c) Verknüpfung ist Aneinanderhängung $(w : a \to b) * (w' : b \to c)$.

Dabei addieren sich die Längen. Invertierbar sind also nur die Identitäten.
Insbesondere ist $\overline{w}$ noch nicht invers zu w, dazu nutzen wir Homotopie...

Kantenzüge und Homotopien in einem Simplizialkomplex

Definition L6A: simpliziales Fundamentalgruppoid

(4) Die Äquivalenz $\approx$ von Kantenzügen in K wird erzeugt durch **simpliziale Homotopien** $v_0 \dots v_{k-1} v_k v_{k+1} \dots v_n \approx v_0 \dots v_{k-1} v_{k+1} \dots v_n$ mit $\{v_{k-1}, v_k, v_{k+1}\} \in K$. Als Spezialfall vereinbaren wir $v_0 v_0 \approx v_0$. Damit gilt $w * \bar{w} \approx v_0$ für jeden Kantenzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in K.

(5) Zum Komplex K erhalten wir das **simpliziale Fundamentalgruppoid**

$$\Pi(K) := P(K)/_{\approx} = \frac{\{\text{Kantenzüge } w = v_0 v_1 \dots v_n \text{ in } K\}}{\text{simpliziale Homotopie} \approx \text{ in } K}$$

mit der Verknüpfung $[w] \cdot [w'] = [w * w]$ durch Aneinanderhängen.

Zu $x_0 \in \Omega(K)$ erhalten wir die **simpliziale Fundamentalgruppe**

$$\pi_1(K, x_0) := \Pi(K, x_0, x_0) = \frac{\{\text{geschlossene Kantenzüge in } (K, x_0)\}}{\text{simpliziale Homotopie} \approx \text{ in } (K, x_0)}.$$

☺ Diese Konstruktion ist extrem elegant, ebenso einfach wie allgemein.

Kantenzüge und Homotopien in einem Simplizialkomplex

Übung: Warum ist $\Pi(K)$ ein Gruppoid und $\pi_1(K, x_0)$ eine Gruppe? Was genau ist für diese Behauptungen zu zeigen? Zeigen Sie es!

Das rein kombinatorisch definierte Fundamentalgruppoid $\Pi(K)$ eines Simplizialkomplexes K ist an Einfachheit wohl kaum zu überbieten. Wir können es anschaulich visualisieren und präzise damit rechnen.

Das Gruppoid $\Pi(K)$ und die Gruppe $\pi_1(K, x_0)$ enthüllen grundlegende algebraische Strukturen. Sie sind unmittelbar auf dem Computer implementierbar und direkt algorithmischen Fragen zugänglich.

Das topologisch definierte Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ eines Raumes X erfordert etwas technische Vorbereitung: stetige Abbildungen, spezielle Homotopien, usw. Das ist nicht schwer, aber es muss getan werden (§L1).

Wir werden die simpliziale Sichtweise im Folgenden dazu nutzen, um die Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|, x_0)$ zu berechnen, das heißt möglichst explizit zu präsentieren. Das wird sich als effizientes Werkzeug erweisen.

Simpliziale vs topologische Fundamentalgruppe

Satz L6B: simpliziale Approximation

Für jeden Simplizialkomplex K haben wir den Gruppoidisomorphismus

$$\varphi : \Pi(K) \xrightarrow{\sim} \Pi(|K|, \Omega) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Für jeden Fußpunkt $x_0 \in \Omega$ erhalten wir den Gruppenisomorphismus

$$\varphi : \pi_1(K, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(|K|, x_0) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Beweis: Dies beweist man (wie Satz L4B) mit simplizialer Approximation (Satz I4J) von Schleifen und ihren Homotopien in $(|K|, x_0)$. QED

Wiedereinmal rettet uns, oh Wunder, die simpliziale Approximation,
so bringen wir die starken Werkzeuge der Linearen Algebra ins Spiel.
Die simpliziale Technik führt uns ins gelobte Land der Topologie:
Sie macht stetiges linear, kompliziertes simpel, hässliches schön!

Simpliziale vs topologische Fundamentalgruppe

Hier ist $\Pi(|K|, \Omega)$ eine Unterkategorie des Fundamentalgruppoids $\Pi(|K|)$: Objekte sind die Eckpunkte $a, b, c, \ldots \in \Omega$, also im Allgemeinen nicht alle Punkte des Polyeders $|K|$. Morphismen $[\alpha] : a \to b$ sind alle Wegeklassen zwischen je zwei Eckpunkten a und b. Morphismen werden hierbei also nicht eingeschränkt, wie haben demnach eine *volle* Unterkategorie (H1B).

🙂 Satz L6B erlaubt die bequem-effiziente Berechnung der (topologisch definierten) Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|, x_0)$ durch die (kombinatorisch definierte) simpliziale Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0)$ und umgekehrt.

🙂 Letztere entsteht aus Kantenzügen, also letztlich Textverarbeitung von Wörtern über dem Alphabet $\Omega(K)$ nach den obigen Regeln.
Wir nutzen dankend die Äquivalenz dieser beiden Sichtweisen.

Damit erhält die Fundamentalgruppe ihre einfachste, geradezu kristalline Form, direkt intuitiv zugänglich verbindet sie geometrische Bedeutung mit kombinatorischer Berechnung. Bemerkenswerterweise ist diese rigide simpliziale Form isomorph zur flexiblen topologischen Form.

Fundamentalgruppe eines Baumes

Als einfachen, aber grundlegenden Spezialfall betrachten wir zunächst einen *Baum*, also einen zusammenhängenden zykelfreien Graphen.

Satz L6c: Fundamentalgruppe eines Baumes

Für jeden Baum T gilt $|T| \simeq \{x_0\}$ und somit $\pi_1(T,x_0) = \pi_1(|T|,x_0) = \{1\}$.

Beweis: Wir haben $\pi_1(|T|,x_0) \cong \pi_1(T,x_0)$ dank dem vorigen Satz L6B. Wir können also sowohl topologisch als auch simplizial arbeiten.

$$\pi_1(\{x_0\},x_0) \overset{\text{L2L}}{\cong} \pi_1(|T|,x_0) \overset{\text{L6B}}{\cong} \pi_1(T,x_0) \overset{\text{I3H}}{\cong} \pi_1(\langle\{x_0\}\rangle,x_0)$$

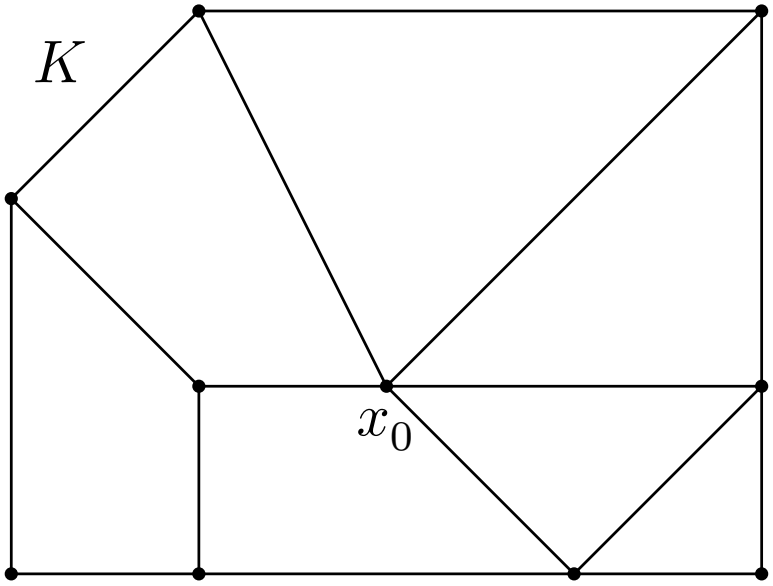
Topologische Sichtweise: Der topologische Raum $(|T|,x_0)$ ist stark zusammenziehbar (I3I). Damit folgt $\pi_1(|T|,x_0) \cong \pi_1(\{x_0\} = \{1\}$ dank Isomorphie L6B und Homotopie-Invarianz L2L. QED

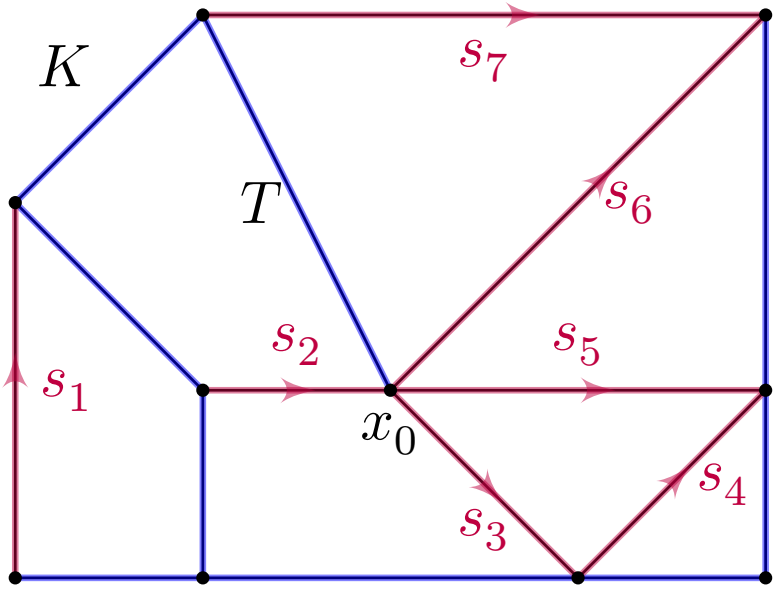
Simpliziale Sichtweise: Zwischen je zwei Ecken x_0 und a des Baums T existiert genau ein gekürzter Kantenzug w_a (I3H). Hieraus folgt insbesondere $\pi_1(T,x_0) \cong \pi_1(\langle\{x_0\}\rangle,x_0) = \{1\}$. QED

Wahl eines Spannbaums

Wiederholung: Jeder zshgde Graph erlaubt die Wahl eines Spannbaums!

Beispiel: Ein Graph K mit der Wahl eines Spannbaums $T \subseteq K$ (blau). Die orientierten Kanten in $K \setminus T$ (rot) erzeugen frei die Gruppe $\pi_1(K, x_0)$.





Für die Fundamentalgruppe sind Bäume zwar langweilig, doch nützlich, insbesondere Spannbäume sind oft eine wichtige Hilfskonstruktion. Wir untersuchen nun beliebige Graphen und anschließend beliebige Simplizialkomplexe. Ausgangspunkt ist die Wahl eines Spannbaums!

Graphen haben freie Fundamentalgruppen.

Satz L6D: Fundamentalgruppe eines Graphen

Sei K ein zshgder Graph, $x_0 \in \Omega$ eine Ecke und $T \subseteq K$ ein Spannbaum. Dann ist $\pi_1(K, x_0)$ frei über den Erzeugern $K \setminus T$. Explizit haben wir

$$(\psi, \varphi) : \pi_1(K, x_0) \cong F := [\, S \,|\, R \,] \quad \text{mit}$$

$$S = \{\, s_{ab}, s_{ba} \,|\, \{a, b\} \in K \setminus T \} \quad \text{als Erzeuger und}$$
$$R = \{\, s_{ab} s_{ba} \,|\, \{a, b\} \in K \setminus T \} \quad \text{als Relationen sowie}$$

$$\varphi : F \to \pi_1(K, x_0) : [s_{ab}] \mapsto [(x_0 \overset{T}{\dots} a) * ab * (b \overset{T}{\dots} x_0)] \quad \text{und}$$
$$\psi : \pi_1(K, x_0) \to F : [v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n] \mapsto [s_{v_0 v_1} s_{v_1 v_2} \cdots s_{v_{n-1} v_n}].$$

Zur bequemen Schreibweise vereinbaren wir $s_{ab} := 1$ für $\{a, b\} \in T$.

Die Hilfswege $x_0 \overset{T}{\dots} a$ und $b \overset{T}{\dots} x_0$ verlaufen vollständig im Spannbaum T. Mit kürzester Länge sind sie zudem eindeutig. Das können wir durch Kürzen immer erreichen und so kanonische Verbindungswege festlegen.

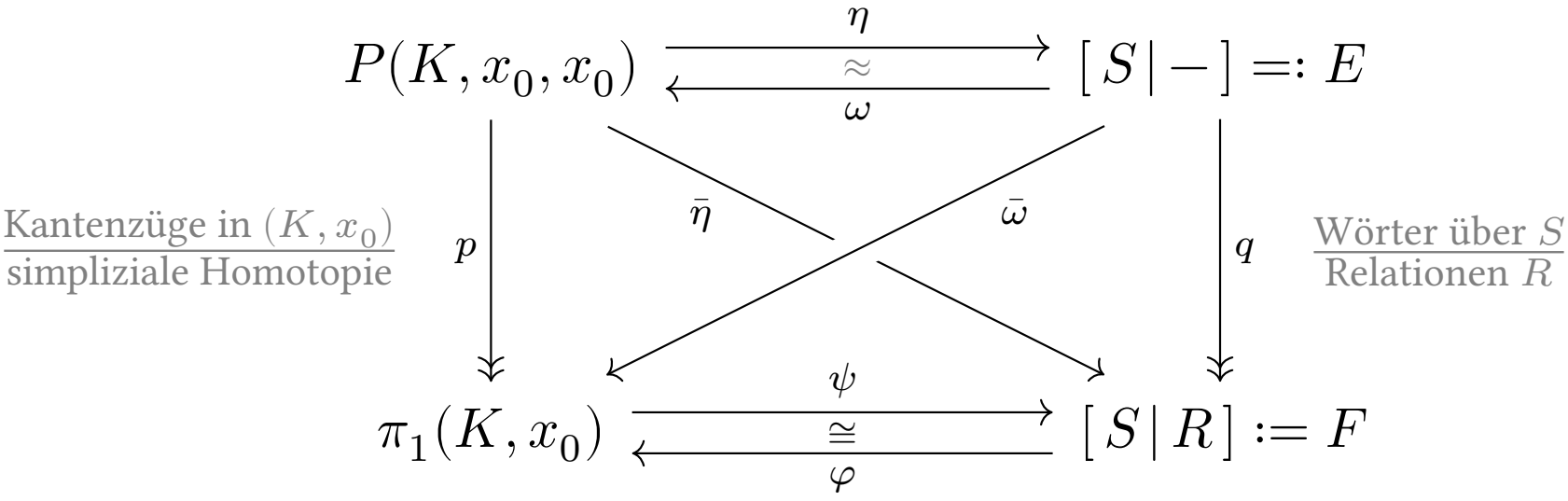
🙂 Ist K endlich, so ist $\pi_1(K, x_0)$ frei vom Rang $|K \setminus T| = 1 - \chi(K)$.

Graphen haben freie Fundamentalgruppen.

Aufgabe: Zeigen Sie dies nach dem Vorbild der Wirtinger–Präsentation.
Anleitung: Die Homomorphismen (a) ψ und (b) φ sind wohldefiniert.
(c) Die Konstruktion garantiert $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_F$, also ist ψ surjektiv.
(d) Zur Injektivität von ψ zeigen wir schließlich $\operatorname{Ker} \psi = \{1\}$.

☺ Wir verallgemeinern diese Präsentation in Satz L61 für beliebige Simplizialkomplexe und perfektionieren den Beweis. Der Spezialfall von Graphen ist jedoch wichtig genug, um hier separat ausgeführt zu werden.

Wir organisieren die Konstruktion entlang der beidseitigen Quotienten:



Graphen haben freie Fundamentalgruppen.

Beweis: (a) Wir konstruieren zunächst den Monoidhomomorphismus

$$\eta : P(K, x_0, x_0) \to [\, S \,|\, - \,] =: E.$$

Für jede orientierte Kante ab mit $\{a, b\} \in K$ definieren wir

$$\eta(ab) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{a, b\} \in T, \\ s_{ab} & \text{falls } \{a, b\} \notin T. \end{cases}$$

Zu jedem Kantenzug $w = v_0 v_1 \ldots v_n$ in K bilden wir das Produkt

$$\eta(v_0 v_1 \ldots v_n) := \eta(v_0 v_1)\eta(v_1 v_2) \cdots \eta(v_{n-1} v_n).$$

Da K keine 2–Simplizes hat, sind simpliziale Homotopien nur von der Form $uvu \approx uu \approx u$ oder $uvv \approx uv$ oder $uuv \approx uv$. In allen drei Fällen ist die Komposition $\bar{\eta} = q \circ \eta$ invariant unter simplizialen Homotopien. Somit induziert $\bar{\eta}$, wie behauptet, den Gruppenhomomorphismus

$$\psi : \pi_1(K, x_0) \to F : [w] \mapsto [\eta(w)].$$

Graphen haben freie Fundamentalgruppen.

(b) Zu jeder Ecke $a \in \Omega(K)$ existiert in T genau ein gekürzter Kantenzug w_a von x_0 nach a. Wir definieren damit $\omega(s_{ab}) = w_{ab} := w_a * ab * \overline{w_b}$
Für $\{a,b\} \in T$ gilt $w_{ab} \approx x_0$. Für $\{a,b\} \in K$ gilt $w_{ab}w_{ba} \approx x_0$.
Somit induziert $\bar{\omega} = p \circ \omega$ den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : F := [\, S \,|\, R \,] \to \pi_1(K, x_0) : [s_{ab}] \mapsto [w_{ab}].$$

(c) Surjektivität: Damit gilt $\eta(w_{ab}) = \eta(ab) = s_{ab}$, also ist ψ surjektiv.

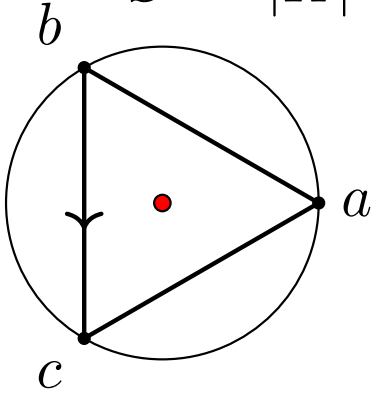
(d) Injektivität: Wir zeigen, dass ψ injektiv ist, also $\mathrm{Ker}(\psi) = \{[x_0]\}$.
Sei $w = v_0 v_1 \ldots v_n$ ein geschlossener Kantenzug in (K, x_0) mit $\eta(w) \equiv e$.
Wir konstruieren eine simpliziale Homotopie $w \approx x_0$ durch Induktion über die Anzahl N der Kanten in $K \setminus T$, also die Länge des Wortes $\eta(w)$.

Im Falle $N = 0$ liegt w im Baum T, ist also zusammenziehbar (L6c).
Im Falle $N \geq 1$ finden wir $w = w_1 * ab * w_2 * ba * w_3$ mit einer Kante $\{a,b\} \in K \setminus T$, und w_2 verläuft ganz im Baum T. Wir reduzieren den Kantenzug w durch simpliziale Homotopien zu $w_1 w_3$. QED

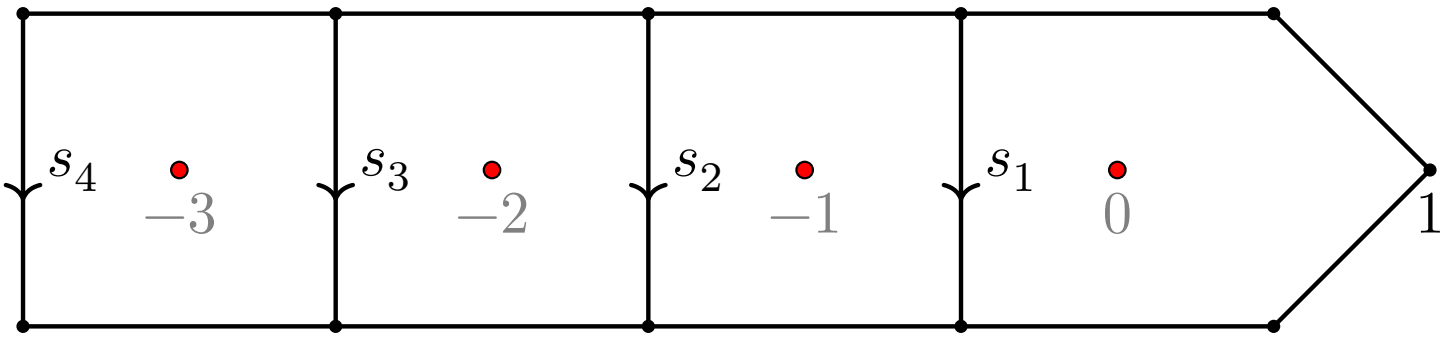
Vertraute Beispiele

Die simpliziale Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0)$ können wir leicht ablesen, das heißt wie oben erklärt durch Erzeuger und Relationen präsentieren. Damit lassen sich sofort erste interessante Beispiele berechnen:

$\mathbb{S}^1 \cong |K|$



$X := \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3\} \simeq |L|$



Die Fundamentalgruppe können wir nun simplizial berechnen:

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow[\text{L2E}]{\cong} \pi_1(|K|, a) \xrightarrow[\text{L6B}]{\cong} \pi_1(K, a) \xrightarrow[\text{L6D}]{\cong} \langle s_{bc} \,|\, - \rangle \cong \mathbb{Z}$$

$$\pi_1(X, 1) \xrightarrow[\text{L2I}]{\cong} \pi_1(|L|, 1) \xrightarrow[\text{L6B}]{\cong} \pi_1(L, 1) \xrightarrow[\text{L6D}]{\cong} \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \,|\, - \rangle$$

Vertraute Beispiele

Beispiel: (1) Wir erklären den Abbildungsgrad $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, diesmal jedoch simplizial. Hierzu triangulieren wir die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \cong |K|$ durch den Simplizialkomplex $K = \langle\, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\} \,\rangle$, wie oben gezeigt.
Als Spannbaum wählen wir (willkürlich) $T = \langle\, \{a,b\}, \{c,a\} \,\rangle$.
Es bleibt $K \setminus T = \{\{b,c\}\}$. Wir erhalten den Isomorphismus

$$\pi_1(K,a) \cong [\, s_{bc}, s_{cb} \,|\, s_{bc}s_{cb} = 1 \,] = \langle\, s_{bc} \,|\, - \,\rangle.$$

Im letzten Schritt wählen wir (nach der üblichen Konvention) eine der beiden Orientierungen, hier $s_{bc} \mapsto +1$ und $s_{cb} \mapsto -1$. Das Gesamtergebnis stimmt dann mit der Umlaufzahl $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ überein.

(2) Sei $X = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3\}$. Dank Satz L4D wissen wir bereits $\pi_1(X,1) \cong \langle\, s_1, s_2, s_3, s_4 \,|\, - \,\rangle$. Alternativ können wir einen Graphen L affin einbetten, sodass $\iota : |L| \hookrightarrow X$ ein starker Deformationsretrakt ist (L4G). Die obige Abbildung zeigt hierzu eine einfache Möglichkeit.
Die gesuchte Fundamentalgruppe ist dann isomorph zur simplizialen Fundamentalgruppe, und diese lesen wir leicht ab.

Anwendung: Euler–Charakteristik endlicher Graphen

Korollar L6G: Euler–Charakteristik endlicher Graphen

Seien K und L endliche Graphen. Aus Homöomorphie $|K| \cong |L|$ oder allgemeiner aus Homotopie-Äquivalenz $|K| \simeq |L|$ folgt die Gleichheit $\chi(K) = \chi(L)$ der Euler–Charakteristiken.

Beweis: (a) Zunächst seien K und L zusammenhängend.

$$\begin{aligned} & |K| \simeq |L| \\ \overset{\text{L2N}}{\Longrightarrow} \quad & \pi_1(|K|, a) \cong \pi_1(|L|, b) \\ \overset{\text{L6D}}{\Longrightarrow} \quad & 1 - \chi(K) = 1 - \chi(L) \end{aligned}$$

Die Gruppe $\pi_1(|K|, a)$ ist frei vom Rang $1 - \chi(K)$, ebenso ist $\pi_1(|L|, b)$ frei vom Rang $1 - \chi(L)$. Hieraus folgt $\chi(K) = \chi(L)$, denn der Rang freier Gruppen ist wohldefiniert (L3v), invariant unter Gruppenisomorphismen.

(b) Wir zerlegen in Komponenten, $K = \bigsqcup_{k=1}^{n} K_i$ und $L = \bigsqcup_{k=1}^{n} L_i$ mit K_i und L_i zusammenhängend und $|K_i| \simeq |L_i|$ für alle i.
Dank (a) folgt $\chi(K) = \sum_{i=1}^{n} \chi(K_i) = \sum_{i=1}^{n} \chi(L_i) = \chi(L)$. QED

Anwendung: Euler–Charakteristik endlicher Graphen

☺ Wir können χ durch Ecken und Kanten leicht abzählen. Invarianz unter Homöomorphismen ist allgemein schwierig. Für Graphen gelingt der direkte Nachweis nur mit Mühe, und schon Homotopie-Äquivalenz ist recht schwierig. Wunderbar elegant gelingt es dank Invarianz von π_1 (L2E, L2N) zusammen mit unserer effizienten Rechnung (L6D, L3v).

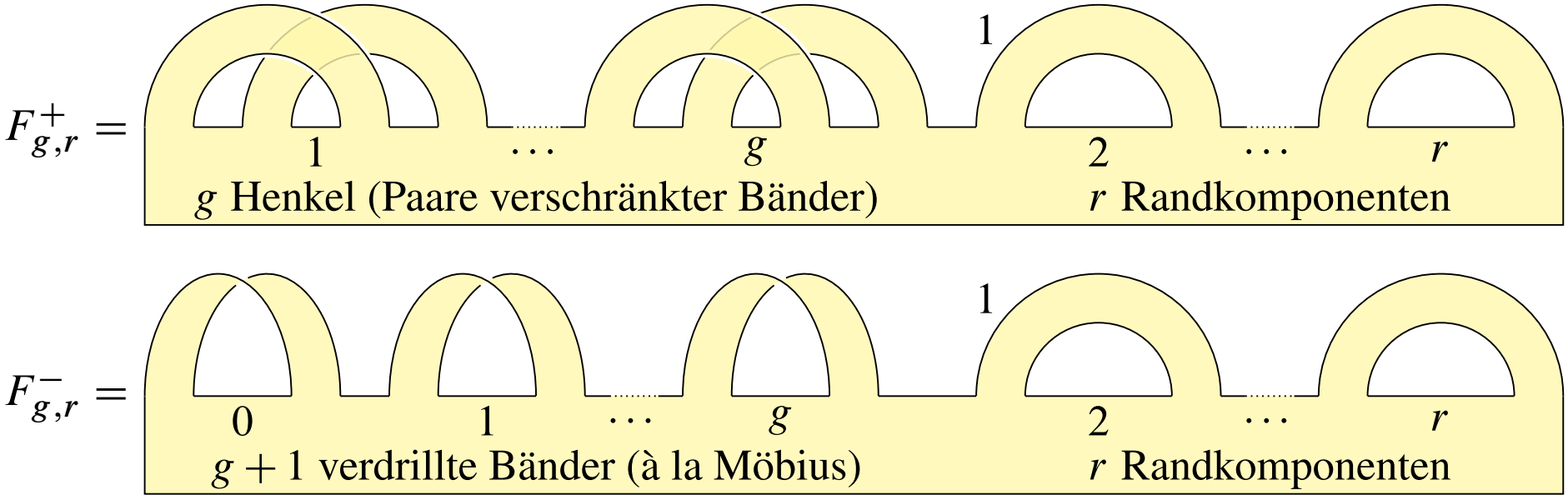
Erstaunlicherweise gilt die folgende Umkehrung. Für zshgde Graphen ist die Euler–Charakteristik eine vollständige Homotopie-Invariante!

Übung: (1) Warnung: $X = \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ und $Y = \{*\} \sqcup (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ haben zwar dieselbe Euler–Charakteristik, sind aber nicht homotopie äquivalent.

(2) Genau dann sind zwei zusammenhängende (!) endliche Graphen K und L homotopie-äquivalent, wenn die Gleichheit $\chi(K) = \chi(L)$ gilt. Die zur Umkehrung „$\Leftarrow$“ nötige Konstruktion gelingt wie folgt:

(3) Allgemein: Sei K ein beliebiger Graph und $T \subseteq K$ ein Spannwald. Dann ist die Zusammenschlagung $|K|/\!\!/|T|$ ein Bouquet von Kreislinien, und der Quotient $q : |K| \twoheadrightarrow |K|/\!\!/|T|$ ist eine Homotopie-Äquivalenz.

Berandete Flächen haben freie Fundamentalgruppen.



Satz L6H: Fundamentalgruppe kompakter Flächen

Seien $g, r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 1$. Dann ist $\pi_1(F^{\pm}_{g,r}, x_0)$ frei über $1 - \chi$ Erzeugern:

$$\pi_1(F^+_{g,r}, x_0) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_2, \dots, d_r \,|\, - \rangle, \quad \chi(F^+_{g,r}) = 2 - 2g - r,$$
$$\pi_1(F^-_{g,r}, x_0) \cong \langle c_0, c_1, \dots, c_g, d_2, \dots, d_r \,|\, - \rangle, \quad \chi(F^-_{g,r}) = 1 - g - r.$$

☺ Die Euler–Charakteristik ist demnach eine topologische Invariante für berandete Flächen unter Homöomorphismen, allgemeiner sogar unter Homotopie-Äquivalenz, wie oben schon für Graphen gesehen.

Berandete Flächen haben freie Fundamentalgruppen.

Aufgabe: Wie würden Sie diese Berechnung / den Beweis angehen? Welche Werkzeuge für Präsentationen haben Sie schon zur Hand?

Simplizialer Beweis: Die Fläche $F = F^{\pm}_{g,r}$ enthält einen geeigneten Graphen $|K|$ als starken Deformationsretrakt, mit Spannbaum T und je einer Kante $s_1, \dots, s_n \in K \setminus T$ für jedes Band der Fläche im obigen Modell. Aus $(\iota, \rho) : |K| \simeq F$ folgt $(\iota_\sharp, \rho_\sharp) : \pi_1(|K|, x_0) \cong \pi_1(F, x_0)$ dank L2H. Dank Satz L6D lesen wir daran die genannte freie Gruppe ab.

Dualer Beweis: Wir realisieren die Fläche $F = F^{\pm}_{g,r}$ kubisch im $\mathbb{R}^3$. Für die Fundamentalgruppe nutzen wir polygonale Wege modulo polygonaler Homotopie wie in §L4. Auf jedem der Bänder $1, \dots, n$ wählen wir einen Schnitt $S_1, \dots, S_n \subseteq F$ von Rand zu Rand. Ihr Komplement $F \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_n)$ ist zusammenziehbar. Der Gruppenisomorphismus $\pi_1(F, x_0) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, \dots, s_n \,|\, - \rangle$ zählt dann die Übergänge; wir kennen dies von der gelochten Ebene L4D und der Wirtinger–Präsentation L4M.

Berandete Flächen haben freie Fundamentalgruppen.

Im ersten Beweis zählen wir Übergänge über Kanten des Graphen $|K|$; diese haben Dimension 1. Im zweiten Beweis zählen wir Durchstoßungen von Wänden transvers zu $|K|$; diese haben Kodimension 1. Beide Beweise ergeben dasselbe, beide sind leicht und lehrreich. Ich präsentiere sie hier parallel, da wir hieran erneut im Keim eine schöne Dualität erkennen, die in der Algebraischen Topologie eine wichtige Rolle spielt.

Dasselbe Phänomen beobachten wir ebenso in den vorigen Beispielen L6E und L6F von Graphen in der Ebene. Wir haben es ebenso bei unserer Diskussion des Satzes von Jordan–Schoenflies bewundert: Die Zykel des Graphen entsprechen eingezäunten Gebieten des Komplements.

Dies entspricht der Dualität von Fundamentalgruppe und Überlagerung: Wir können entlang der Schnitte aufschneiden und zur universellen Überlagerung verkleben (Kapitel M). Im abelschen Fall gelangen wir zur Poincaré–Dualität von Homologie und Kohomologie. Diese ist ein zentrales Werkzeug der Algebraischen Topologie von Mannigfaltigkeiten.

Berandete Flächen haben freie Fundamentalgruppen.

☺ Wie oben schon für Graphen gilt auch hier die Umkehrung:

Übung: Zwei berandete, kompakte, zshgde Flächen sind genau dann homotopie-äquivalent, wenn sie gleiche Euler–Charakteristiken haben.

Satz L6H: Fundamentalgruppe kompakter Flächen

Die inneren Ränder in obiger Modelldarstellung entsprechen den Erzeugern $d_2, \dots, d_n$. Umlaufen des äußeren Randes entspricht dem Flächenwort $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} d_2 \cdots d_r$ bzw. $c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2 d_2 \cdots d_r$.

Aus $F^{\pm}_{g,1}$ gewinnen wir die geschlossene Fläche $F^{\pm}_g$ durch Verkleben des Randes mit einer Kreisscheibe. Für die Fundamentalgruppe folgt

$$\pi_1(F_g^+, x_0) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \,|\, a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle,$$
$$\pi_1(F_g^-, x_0) \cong \langle c_0, c_1, \dots, c_g \,|\, c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2 = 1 \rangle.$$

Beweis: Der Randweg entspricht dem Wort w in $\pi_1(F^{\pm}_g, x_0)$ und wird zusammenziehbar als Rand der angeklebten Kreisscheibe, siehe L6M. QED

Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

Satz L61: Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

Sei K ein SKomplex, $x_0 \in \Omega$ eine Ecke und $T \subseteq K$ ein Spannbaum.
Dann haben wir die Präsentation $(\psi, \varphi) : \pi_1(K, x_0) \cong G := [\, S \,|\, R \,]$ mit

$S = \{ s_{ab} \,|\, \{a,b\} \in K \}$ als Menge der Erzeuger und den Relationen

$R = \{ s_{ab} \,|\, \{a,b\} \in T \} \cup \{ s_{ab} s_{ba} \,|\, \{a,b\} \in K \} \cup \{ s_{ab} s_{bc} s_{ca} \,|\, \{a,b,c\} \in K \},$

$\varphi : G \to \pi_1(K, x_0) : [s_{ab}] \mapsto [(x_0 \overset{T}{\dots} a) * ab * (b \overset{T}{\dots} x_0)]$ und

$\psi : \pi_1(K, x_0) \to G : [v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n] \mapsto [s_{v_0 v_1} s_{v_1 v_2} \cdots s_{v_{n-1} v_n}].$

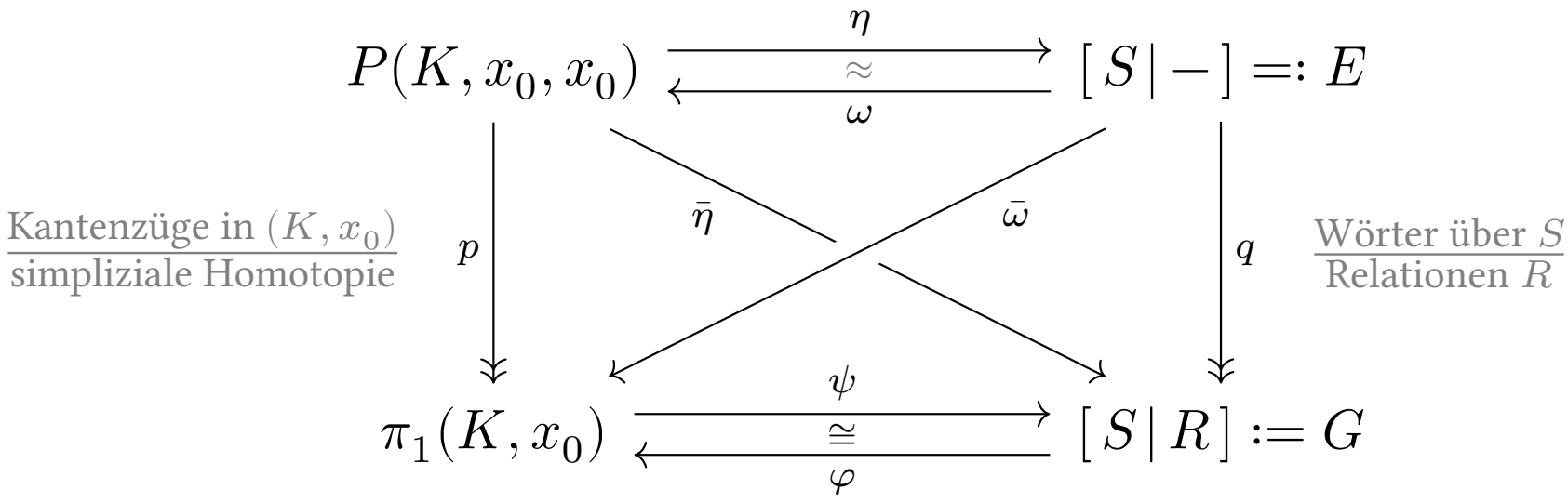
☺ Für jeden endlichen Komplex K wird $\pi_1(K, x_0)$ so endlich präsentiert.

Die Vereinbarung $s_{ab} = 1$ für $\{a,b\} \in T$ ist hier Teil der Relationen R.
Zwecks bequemer Schreibweise geben wir *alle* Kanten als Erzeuger an,
auch wenn viele redundant sind und durch Relationen gelöscht werden.

Die zweite Menge der Relationen folgt aus der dritten und ersten:
Dank $K_0 \subseteq T \subseteq K$ liegt jede Ecke a im Spannbaum, also gilt $s_{aa} = 1$.
Für jede Kante $\{a,b\} \in K$ folgt $\{a,b,a\} \in K$ und somit $s_{ab} s_{ba} s_{aa} = 1$.

Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

Wir organisieren die Konstruktion entlang der beidseitigen Quotienten:



Der Satz ist vollkommen explizit und gebrauchsfertig formuliert.
Zum Beweis genügt geduldiges Nachrechnen der Behauptungen:

Aufgabe: Die Homomorphismen (a) ψ und (b) φ sind wohldefiniert, denn die im Start geforderten Relationen sind auch im Ziel erfüllt. Nach Konstruktion gilt (c) $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$ und (d) $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\pi_1(K,x_0)}$.

Versuchen Sie es unbedingt selbst. Sie können hier viel lernen, denn viele Isomorphien entstehen genau so! Ich führe dies für Sie vorbildlich aus.

Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

Beweis: (a) Wir haben den Monoidhomomorphismus

$$\eta : P(K, x_0, x_0) \to [\, S \,|\, - \,] : v_0 v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_n \mapsto s_{v_0 v_1} s_{v_1 v_2} \cdots s_{v_{n-1} v_n}.$$

Für $\{a, b, c\} \in K$ gilt links Homotopie $abc \approx ac$ und rechts Kongruenz $s_{ab} s_{bc} \equiv s_{ac}$. Somit induziert $\bar{\eta} = q \circ \eta$ den Gruppenhomomorphismus

$$\psi : \pi_1(K, x_0) \to G : \psi([w]) = [\eta(w)].$$

(b) Zu jeder Ecke $a \in \Omega(K)$ existiert in T genau ein gekürzter Kantenzug w_a von x_0 nach a. Daher haben wir den Monoidhomomorphismus

$$\omega : [\, S \,|\, - \,] \to P(K, x_0, x_0) : s_{ab} \mapsto w_{ab} := w_a * ab * \overline{w_b}.$$

Jede Relation aus R übersetzt sich in eine simpliziale Homotopie in K:
(0) Für $\{a, b\} \in T$ liegt w_{ab} in T, also $w_{ab} \approx x_0$. (L6c)
(1) Für $\{a, b\} \in K$ gilt $w_{ba} = \overline{w_{ab}}$, also $w_{ab} * w_{ba} \approx x_0$.
(2) Für $\{a, b, c\} \in K$ gilt $w_{ab} w_{bc} w_{ca} \approx w_a\, ab\, \overline{w_b} w_b\, bc\, \overline{w_c} w_c\, ca\, \overline{w_a} \approx x_0$.
Somit induziert $\bar{\omega} = p \circ \omega$ den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : [\, S \,|\, R \,] \to \pi_1(K, x_0) : [s_{ab}] \mapsto [w_{ab}].$$

Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

(c) Wir zeigen $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$. Unsere Konstruktion garantiert:

$$\eta \circ \omega : s_{ab} \mapsto w_{ab} = w_a * ab * \overline{w_b} \mapsto \eta(w_a)\, s_{ab}\, \eta(\overline{w_b}) \equiv s_{ab}$$

Der Kantenzug w_a verläuft ganz in T, hier gilt $s_{ij} \equiv e$ für alle $\{i,j\} \in T$.
Das bedeutet $\psi \circ \varphi : [s_{ab}] \mapsto [w_{ab}] \mapsto [s_{ab}]$, also $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$.

(d) Wir zeigen $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\pi_1(K,x_0)}$. Für jeden Kantenzug w in (K, x_0) gilt:

$$\begin{aligned} \omega \circ \eta : w &= v_0 v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_n \mapsto s_{v_0 v_1} s_{v_1 v_2} \cdots s_{v_{n-1} v_n} \\ &\mapsto w_{v_0}\, v_0 v_1\, \overline{w_{v_1}}\, w_{v_1}\, v_1 v_2\, \overline{w_{v_2}} \cdots w_{v_{n-1}}\, v_{n-1} v_n\, \overline{w_{v_n}} \equiv w \end{aligned}$$

Die eingefügten Hilfswege im Spannbaum T kürzen sich paarweise weg.
An den beiden Rändern gilt zudem $v_0 = x_0 = v_n$, also $w_{v_0} = x_0 = \overline{w_{v_n}}$.
Das bedeutet $\varphi \circ \psi : [w] \mapsto [w]$, also $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\pi_1(K,x_0)}$.

Wie behauptet ist (ψ, φ) ein Gruppenisomorphismuspaar. QED

☺ Satz und Beweis sind idealtypisch für Isomorphie. Bitte gehen Sie alles sorgsam durch, dann formulieren Sie es nocheinmal selbst.

Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

Beispiel: Satz L6I beinhaltet Satz L6C über Bäume $K = T$:

$$\pi_1(K, x_0) \cong \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \,\big|\, s_{ab} : \{a,b\} \in T \big] \cong \{1\}.$$

Beispiel: Satz L6I beinhaltet ebenso Satz L6D über Graphen $K \supseteq T$:

$$\begin{aligned}\pi_1(K, x_0) &\cong \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \,\big|\, s_{ab} : \{a,b\} \in T,\ s_{ab}s_{ba} : \{a,b\} \in K \big] \\ &\cong \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \setminus T \,\big|\, s_{ab}s_{ba} : \{a,b\} \in K \setminus T \big].\end{aligned}$$

Stabilisierung dank simplizialer Approximation (Satz I4J).
Inklusion der Skelette induziert folgende Homomorphismen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K_{\leq 0} & \xhookrightarrow{\iota_0} & K_{\leq 1} & \xhookrightarrow{\iota_1} & K_{\leq 2} & \xhookrightarrow{\iota_2} & K_{\leq 3} & \hookrightarrow & \ldots & \hookrightarrow & K \\
\pi_0(K_{\leq 0}) & \overset{\pi_0(\iota_0)}{\twoheadrightarrow} & \pi_0(K_{\leq 1}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_0(K_{\leq 2}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_0(K_{\leq 3}) & \xrightarrow{\cong} & \ldots & \xrightarrow{\cong} & \pi_0(K) \\
 & & \pi_1(K_{\leq 1}) & \overset{\pi_1(\iota_1)}{\twoheadrightarrow} & \pi_1(K_{\leq 2}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(K_{\leq 3}) & \xrightarrow{\cong} & \ldots & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(K)
\end{array}$$

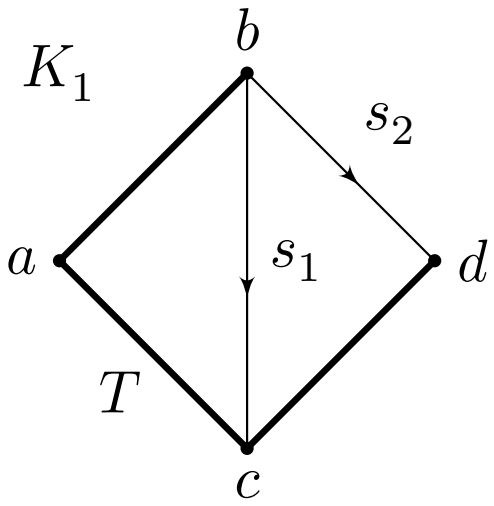
Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

Ausführlicher gesagt: Die Komponenten $\pi_0(|K|) = \pi_0(K)$ hängen nur vom 1–Skelett $K_{\leq 1}$ ab (I3G): Wir können Punkte ins 0–Skelett schieben und Wege ins 1–Skelett. Vornehm gesagt: $\pi_0(\iota_0)$ ist surjektiv, $\pi_0(\iota_1)$ und alle folgenden sind bijektiv.

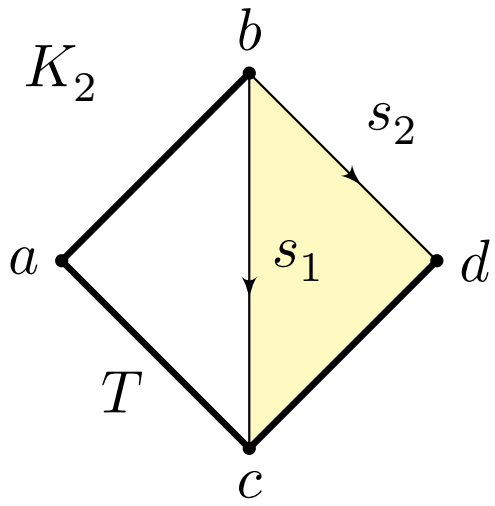
Entsprechend: Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|, x_0) \cong \pi_1(K, x_0)$ hängt nur vom 2–Skelett $K_{\leq 2}$ ab (L6B): Wir können Wege ins 1–Skelett $K_{\leq 1}$ schieben und Homotopien ins 2–Skelett $K_{\leq 2}$. Vornehm gesagt: $\pi_1(\iota_1)$ ist surjektiv, $\pi_1(\iota_2)$ und alle folgenden sind bijektiv.

Satz L6I präzisiert dies: Das 1–Skelett $K_{\leq 1}$ ist ein Graph und die Gruppe $\pi_1(K_{\leq 1}, x_0)$ frei (L6D). Diese liefert die Erzeuger, dank Surjektivität von $\pi_1(\iota_1) : \pi_1(K_{\leq 1}, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(K_{\leq 2}, x_0)$. Jedes Dreieck $\Delta \in K_{\leq 2} \setminus K_{\leq 1}$ liefert eine Relation, und diese erzeugen den Kern $\operatorname{Ker} \pi_1(\iota_1)$.

Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe



$$\pi_1(K_1, a) \cong \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$$
$$abca \leftrightarrow s_1, \quad abdca \leftrightarrow s_2$$

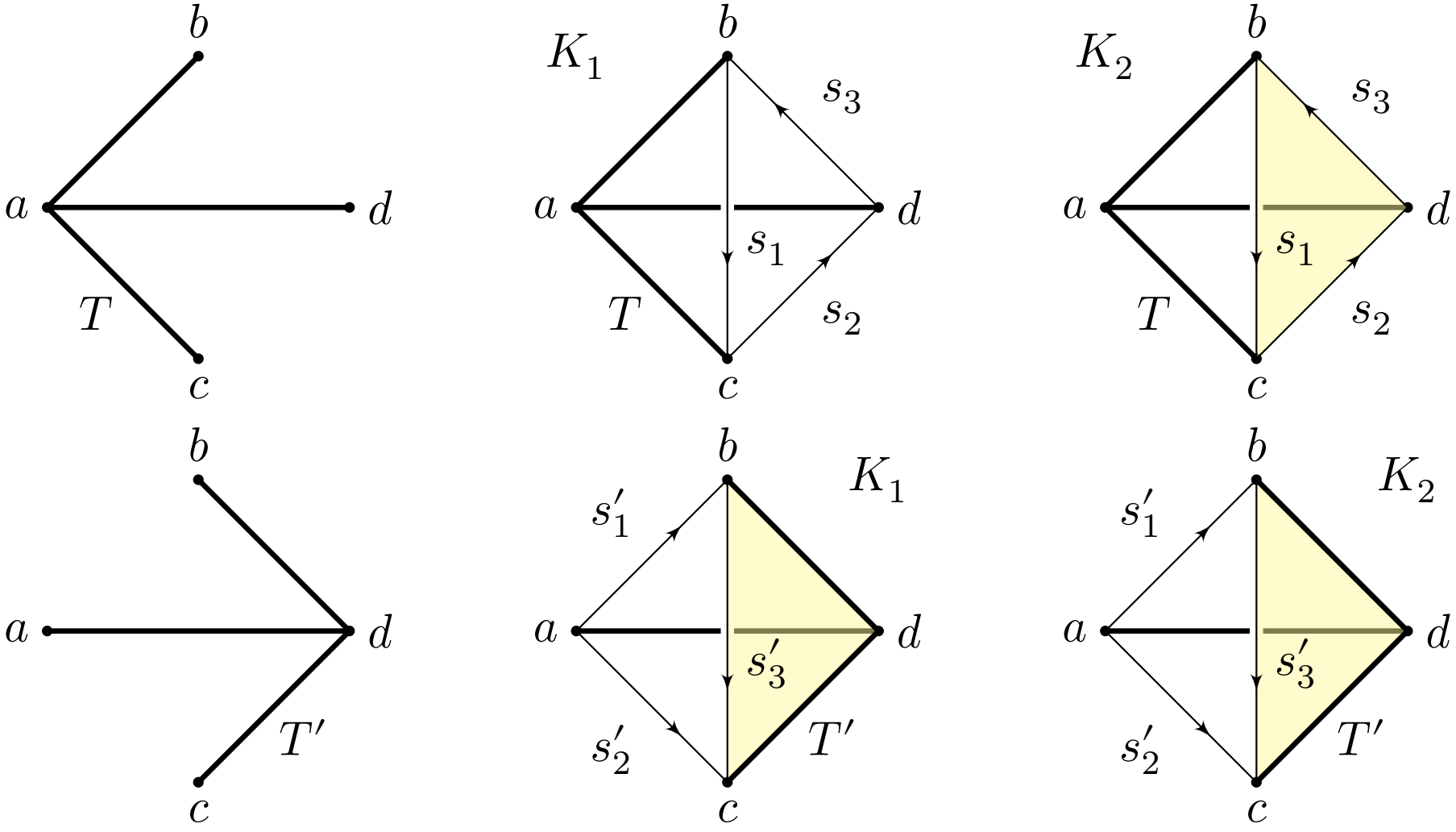


$$\pi_1(K_2, a) \cong \langle s_1, s_2 \mid s_1 = s_2 \rangle$$
$$abca \approx abdca \;\leftrightarrow\; s_1 = s_2$$

Wir bauen das obige Beispiel schrittweise auf: Für den Spannbaum T ist die Gruppe $\pi_1(T, a) = \{1\}$ trivial (L6c). Der Graph $K_1 \supseteq T$ fügt zwei Kanten ein; jede liefert einen freien Erzeuger (L6d). Der Komplex $K_2 \supseteq K_1$ fügt ein Dreieck hinzu; dieses liefert eine Relation (L6i).

Konkretes Beispiel: In (K_1, a) gilt $\psi([abcba]) = s_{ab}s_{bc}s_{bc}s_{ba} = s_1 s_1^{-1} = 1$ und $\psi([abcdba]) = s_{ab}s_{bc}s_{cd}s_{db}s_{ba} = s_1 s_2^{-1} \neq 1$. In (K_2, a) hingegen ist auch die zweite Schleife zusammenziehbar (über das Dreieck).

Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

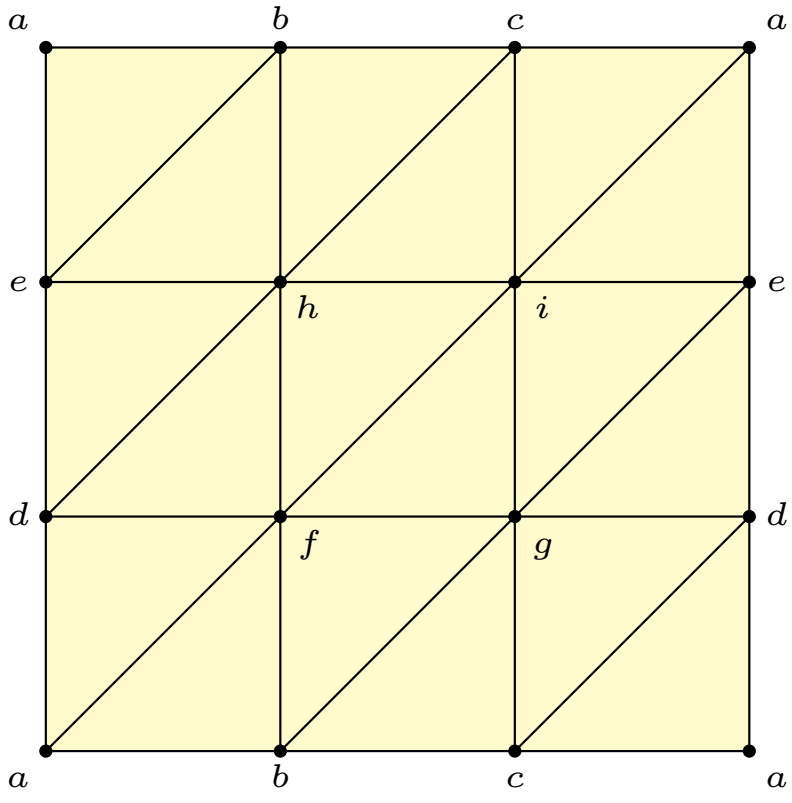


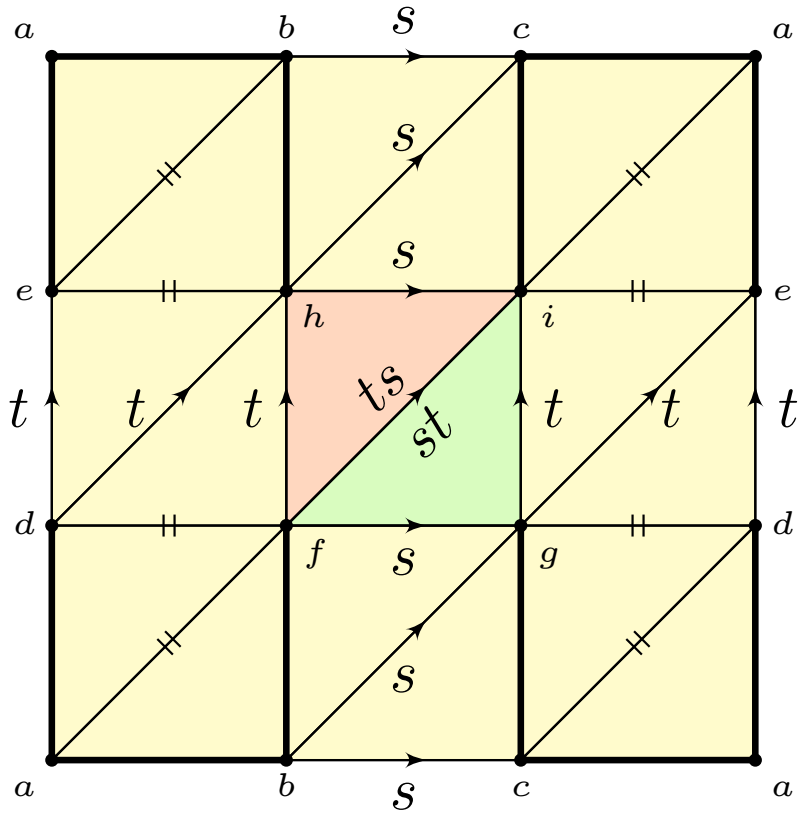
⚠ Zwei verschieden gewählte Spannbäume T und T' liefern zwei verschiedene Präsentationen derselben Gruppe! Beide können wir leicht ineinander umrechnen dank Tietze–Transformationen (L3s).

Beispiel: Fundamentalgruppe des Torus

Aufgabe: Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0)$, diesmal simplizial.
(Wir haben dies bereits als Produktgruppe abgeleitet, siehe L20.)

Lösung: Wir nutzen die Neun-Ecken-Triangulierung des Torus.





Diese Rechnung zeigt $\pi_1(K, a) \cong [\, S \,|\, R \,] \cong \langle\, s, t \,|\, st = ts \,\rangle \cong \mathbb{Z}^2$.

Beispiel: Fundamentalgruppe des Torus

Ausführlich: Wir wählen einen Spannbaum $T \subseteq K$, hier fett markiert. Damit lesen wir die Präsentation $\pi_1(K, a) \cong [\, S \,|\, R \,]$ ab. Diese wollen wir vereinfachen. Zu jeder Kante $\{x, y\} \in K \setminus T$ wählen wir eine Orientierung (x, y) und somit einen der beiden Erzeuger s_{xy}; der andere ist $s_{yx} = s_{xy}^{-1}$.

Die Erzeuger zu Kanten $\{x, y\} \in T$ des Spannbaums erfüllen $s_{xy} = 1$, können also weggelassen werden. Das betrifft hier die acht Kanten $s_{ab} = s_{ac} = s_{ad} = s_{ae} = s_{bf} = s_{bh} = s_{cg} = s_{ci} = 1$. Jedes Dreieck definiert eine Relation. Aus dem Dreick $\{a, b, f\}$ folgt $s_{af} = 1$, ebenso ergeht es $s_{df}, s_{be}, s_{eh}, s_{cd}, s_{dg}, s_{ai}, s_{ei}$. Damit löschen wir weitere 8 Kanten. Von den insgesamt 27 Kanten in K werden diese 16 Kanten auf 1 abgebildet.

Wir setzen $s_{bc} := s$ und finden $s_{bc} = s_{bg} = s_{fg} = s_{hc} = s_{hi} = s$ (mittlere Spalte). Wir setzen $s_{de} := t$ und finden $s_{de} = s_{dh} = s_{fh} = s_{ge} = s_{gi} = t$ (mittlere Zeile). Das vorletzte Dreieck $\{f, g, i\} \in K$ erzwingt $s_{fi} = st$. Bislang sind s, t noch frei, müssen also keine Relation erfüllen. Das letzte Dreieck $\{f, h, i\} \in K$ erzwingt $s_{fi} = ts$, also die Relation $st = ts$.

Beispiel: Fundamentalgruppe des Torus

Wir erhalten wir vollkommen explizit den Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{lll}
\pi_1(K,a) \cong [\,S \,|\, R\,] & \xrightarrow{\sim} \langle\, s,t \,|\, st = ts \,\rangle & \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2 : \\
s_{ab}, s_{ac}, s_{ad}, s_{ae}, s_{bf}, s_{bh}, s_{cg}, s_{ci} & \mapsto 1 & \mapsto (0,0) \\
s_{af}, s_{df}, s_{be}, s_{eh}, s_{cd}, s_{dg}, s_{ai}, s_{ei} & \mapsto 1 & \mapsto (0,0) \\
s_{bc}, s_{bg}, s_{fg}, s_{hc}, s_{hi} & \mapsto s & \mapsto (1,0) \\
s_{de}, s_{dh}, s_{fh}, s_{ge}, s_{gi} & \mapsto t & \mapsto (0,1) \\
s_{fi} & \mapsto st & \mapsto (1,1)
\end{array}$$

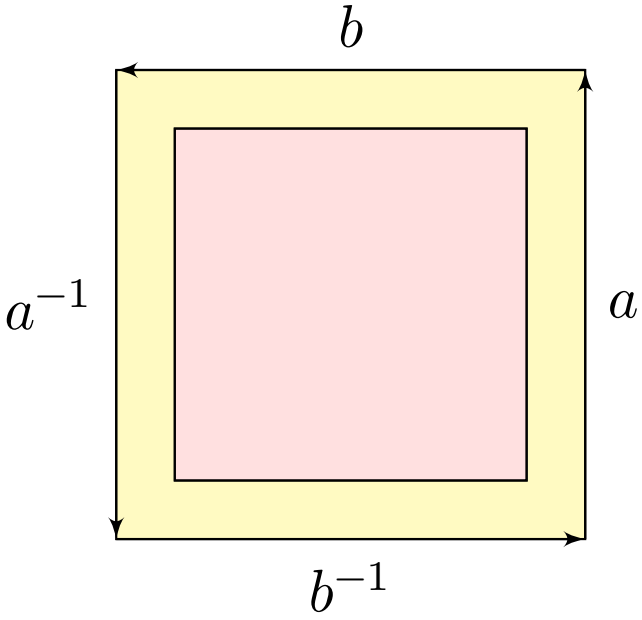
Der inverse Gruppenhomomorphismus ist demnach

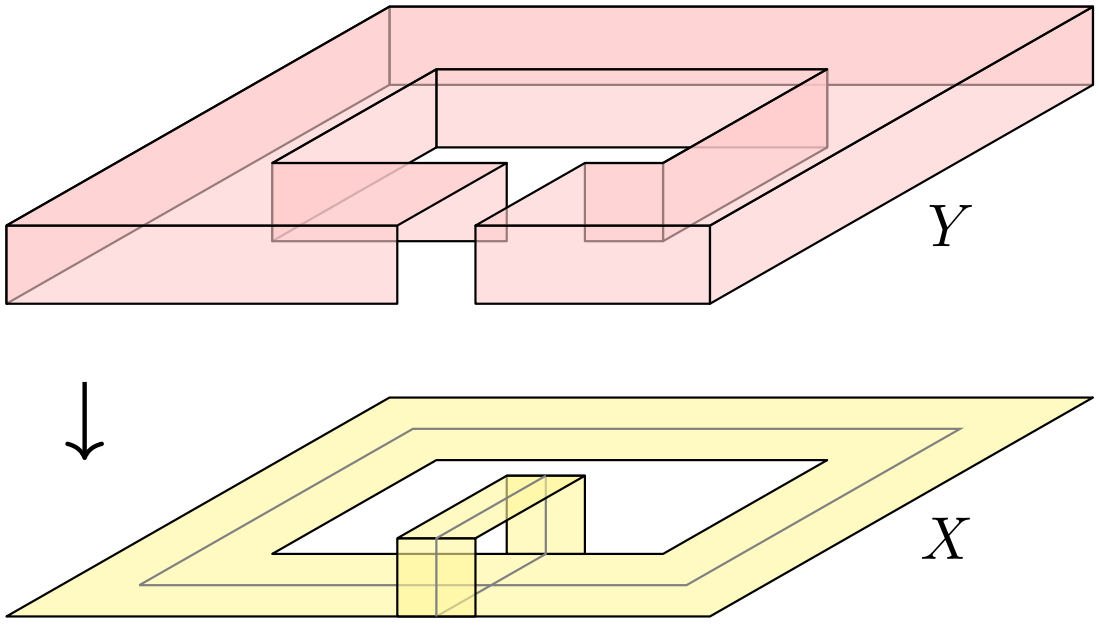
$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \pi_1(K,a) : (k,\ell) \mapsto s^k t^\ell \mapsto [abca]^k [adea]^\ell$$

Für $K' = K \setminus \{\{f,h,i\}\}$ haben wir $\pi_1(K',a) = \langle\, s,t \,|\, - \,\rangle$ berechnet.
Dies können wir alternativ geometrisch sehen, sogar noch leichter:
Der Randkomplex $L = \langle\, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{e,a\} \,\rangle$
ist ein Graph, dank L6D lesen wir $\pi_1(L,a) \cong \langle\, s,t \,|\, - \,\rangle$ ab.

Beispiel: Fundamentalgruppe des Torus

Vertraute geometrische Darstellung: Die rote 2–Zelle schließt die Fläche!





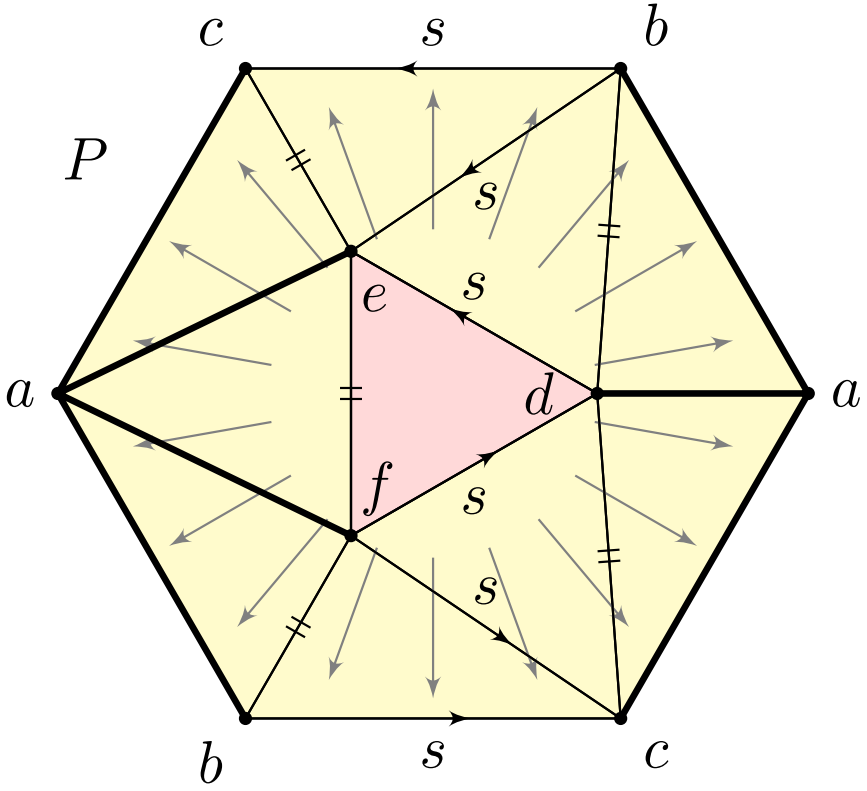
Die Inklusion $i : |L| \hookrightarrow |K'|$ ist ein starker Deformationsretrakt, als Retraktion $r : |K'| \twoheadrightarrow |L|$ dient uns hier die radiale Projektion, und $(i_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(L, a) \cong \pi_1(K', a)$ zeigt $s_{fi} s_{ih} s_{hf} \approx sts^{-1}t^{-1}$.

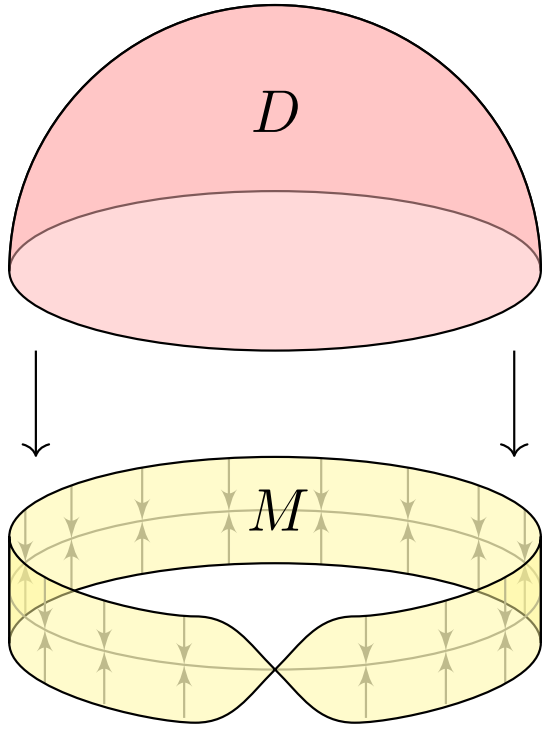
Die Inklusion $j : |K'| \hookrightarrow |K|$ fügt das letzte Dreieck $\{f, h, i\}$ hinzu und damit diese Relation. Diese Beobachtung vereinfacht die Berechnung! Wir werden diese Technik im Folgenden perfektionieren.

Beispiel: Fundamentalgruppe der projektiven Ebene

Aufgabe: Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)$, hier simplizial.

Lösung: Wir nutzen die Sechs-Ecken-Triangulierung (aus den 12 Ecken eines Ikosaeders durch Identifikation gegenüberliegender Punkte):





Wir erkennen das Möbius–Band $M = P \setminus \{\{d, e, f\}\}$ plus Kreisscheibe.
Diese Rechnung zeigt $\pi_1(\mathbb{RP}^2, a) \cong \pi_1(P, a) \cong \langle s \,|\, s^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$.

Beispiel: Fundamentalgruppe der projektiven Ebene

Simpliziale Sichtweise: Für $P \supseteq M$ wählen wir die Kanten des Sterns um den Punkt a als Spannbaum $T = \langle \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{a,f\} \rangle$. Das impliziert die Relationen $s_{ab} = s_{ac} = s_{ad} = s_{ae} = s_{bf} = 1$.

Die Kante $\{b,d\}$ fügt einen neuen Erzeuger hinzu, doch dieser wird durch das Dreieck $\{a,b,d\}$ gelöscht. Ebenso ergeht es den Kanten $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{c,e\}$ und schließlich $\{e,f\}$. Damit löschen wir weitere 5 Kanten.

Die Kante $\{b,c\}$ fügt einen neuen Erzeuger s hinzu. Die Kante $\{b,e\}$ ist hierzu äquivalent aufgrund des Dreiecks $\{b,c,d\}$. Ebenso die Kanten $\{d,e\}$, $\{f,c\}$ und $\{f,d\}$. Wir erhalten so aus Satz L6I den Isomorphismus

$$\psi_M : \pi_1(M,a) \xrightarrow{\sim} \langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Der Weg $\gamma = |adefda|$ umläuft den Rand des zentralen Dreiecks einmal, und wir lesen $\psi_M(\gamma) = s^2$ ab. In $P = M \cup \{\{d,e,f\}\}$ wird genau dies als Relation eingefügt. Wir erhalten so aus Satz L6I den Isomorphismus

$$\psi_P : \pi_1(P,a) \xrightarrow{\sim} \langle s \mid s^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2.$$

Beispiel: Fundamentalgruppe der projektiven Ebene

Geometrische Sichtweise: Der Komplex $M = P \setminus \{\{d, e, f\}\}$ ohne das zentrale Dreieck trianguliert das Möbius–Band, wie oben skizziert.

Hierin ist $S = \langle \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\} \rangle$ die Seele $|S| \cong \mathbb{S}^1$ des Bandes.
Für die Kreislinie wissen wir $\pi_1(S, a) \cong \langle s \,|\, - \rangle \cong \mathbb{Z}$ mit dem freien Erzeuger $s = [abca]$. Zudem sehen wir die starke Deformationsretraktion $(\rho, \iota) : |M| \simeq |S|$, also $\rho_\sharp : \pi_1(M, a) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S, a) \cong \langle s \,|\, - \rangle$.

Der Rand des Möbius–Bandes ist $\partial M = \langle \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, d\} \rangle$.
Der Weg $\gamma = |adefda|$ umläuft den Rand genau einmal, doch $\rho_\sharp([adefda]) = [abcabca] = s^2$ umläuft die Seele zweimal.
In $P = M \cup \{\{d, e, f\}\}$ wird dies als Relation eingefügt: $[abcabca] = [adefda] = 1$ in $\pi_1(P, a)$. Wir erhalten so die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{RP}^2, a) \cong \pi_1(P, a) \cong \langle s \,|\, s^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$.

🙂 Die simpliziale, lokale Sichtweise gelingt immer und bietet eine verlässliche, universelle Methode: das beliebte „Schema F“.
Die geometrische, globale Sichtweise ist raffinierter und effizienter.

Beispiel: Fundamentalgruppe der projektiven Ebene

Wir haben nun zwei Flächen wunderbar konkret durchgerechnet. Wenn Sie möchten, können Sie selbst weitere Beispiele präsentieren.

Was lernen wir daraus? Zunächst einmal, dass die simpliziale Präsentation immer gelingt. Für große Simplizialkomplexe ist diese Arbeit zwar etwas mühsam, doch in günstigen Beispielen wie oben lassen sich viele redundante Erzeuger leicht erkennen und löschen.

Zweitens lernen wir daran, dass die geometrische Sichtweise dasselbe Ergebnis liefert mit deutlich weniger Mühe. Das liegt ganz einfach daran, dass wir viele Simplizes bequem zu einer Zelle zusammenfassen. Satz L6P perfektioniert das „Anheften einer Zelle“.

Gewappnet mit diesen lehrreichen Vorbereitungen können wir nun zu *jeder* geschlossenen Fläche die Fundamentalgruppe präsentieren. Der folgende Satz enthält insbesondere die beiden vorigen Beispiele $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{RP}^2$. Da Sie diese beiden detailliert verstehen, wirkt der allgemeine Fall hoffentlich natürlich und weniger wunderlich.

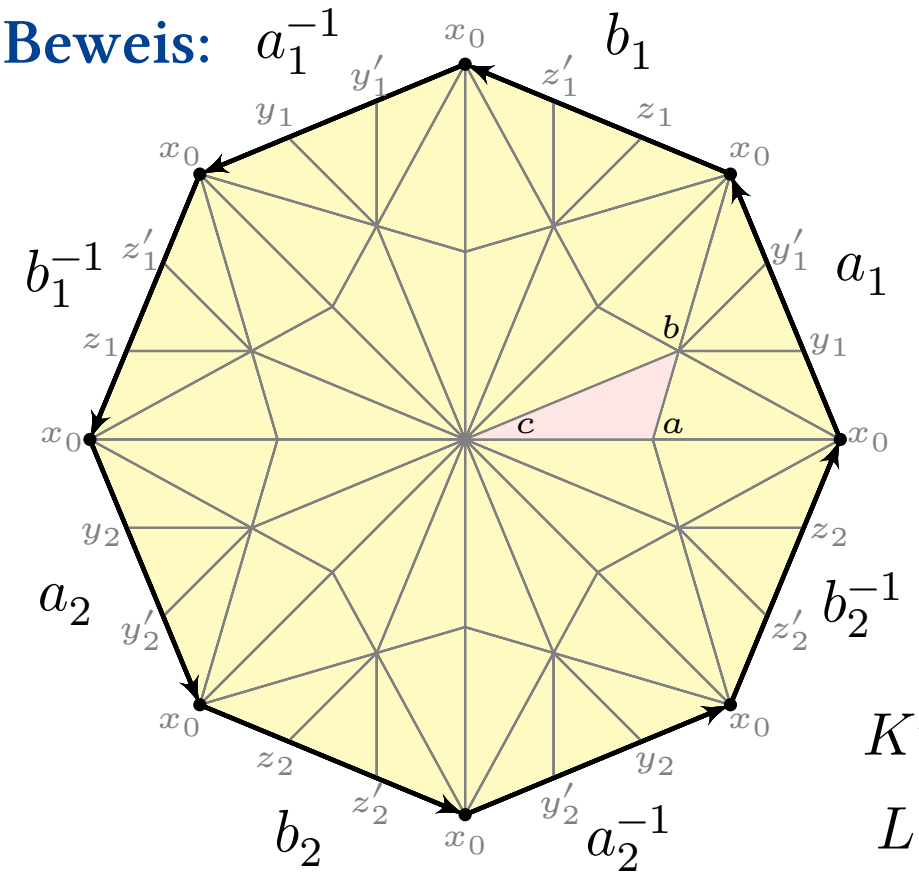
Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

Satz L6M: Flächengruppen

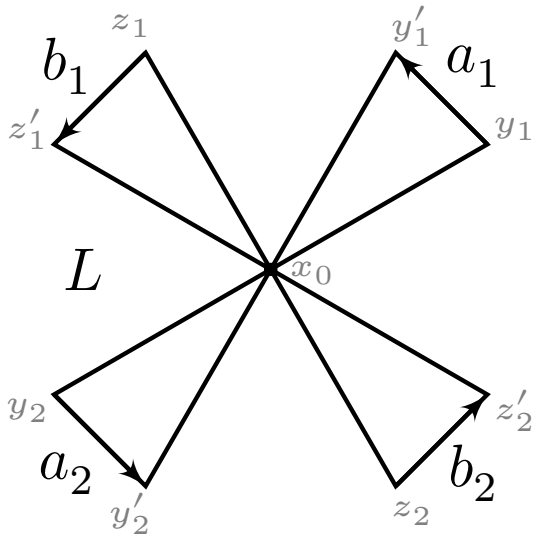
Für die geschlossenen Flächen $F_g^{\pm}$ haben wir Gruppenisomorphismen

$$\pi_1(F_g^+, x_0) \xrightarrow{\sim} G_g^+ := \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \,|\, a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle,$$
$$\pi_1(F_g^-, x_0) \xrightarrow{\sim} G_g^- := \langle c_0, c_1, \dots, c_g \,|\, c_0 c_0 c_1 c_1 \cdots c_g c_g = 1 \rangle.$$

Beweis:



$$|(K, L)| \cong (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)/\langle w \rangle$$



$$K' = K \setminus \{\{a, b, c\}\}$$
$$L \hookrightarrow K', |L| \simeq |K'|$$

Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

Beweis: Wir betrachten die Fläche $F = \mathbb{D}^2/\langle w\rangle$ im Polygonmodell (K3E) mit Flächenwort $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ der Länge $n = 4g$. Der Fall $w = c_0 c_0 \ldots c_g c_g$ mit $n = 2 + 2g$ ist analog. Wir realisieren $\mathbb{D}^2$ als n–Eck; jede Randkante unterteilen wir in drei Teilintervalle; das Innere unseres n–Ecks unterteilen wir ausreichend fein wie oben skizziert. Wir erhalten den Simplizialkomplex (K, L) mit $|K| \cong \mathbb{D}^2/\langle w\rangle$ und $|L| \cong \mathbb{S}^1/\langle w\rangle$.

Wir folgen nicht „Schema F“, sondern gehen geschickt geometrisch vor. Der Komplex L ist ein Graph: Alle Eckpunkte des n–Ecks werden in $|L|$ zu einem einzigen Punkt x_0. Jede der Kanten $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ bildet in L eine Schleife. Daher ist $\pi_1(|L|, x_0)$ frei mit den Erzeugern $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$. Das Umlaufen des n–Ecks ergibt unser Flächenwort w in $\pi_1(|L|, x_0)$.

Aus K entfernen wir ein Dreieck $\Delta = \{a, b, c\} \in K$ wie skizziert und erhalten den Teilkomplex $K' = K \setminus \{\Delta\}$. Die Inklusion $|i| : |L| \hookrightarrow |K'|$ erlaubt als Retraktion $r : |K'| \to |L|$ die radiale Projektion auf den Rand des n–Ecks, entsprechend $\mathbb{S}^1 \leftrightarrows \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ mit Retraktion $r(z) = z/|z|$. Das Paar $(|i|, r) : |L| \leftrightarrows |K'|$ ist ein starker Deformations-Retrakt.

Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

Wir schauen genau hin! Die Inklusionen $i : L \hookrightarrow K'$ und $j : K' \hookrightarrow K$ induzieren die folgenden Gruppenhomomorphismen:

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \,|\, - \rangle \xrightarrow[\text{L6D}]{\cong} \pi_1(L, x_0) \xrightarrow[\text{L2I}]{\cong} \pi_1(K', x_0) \xrightarrow[\text{L6I}]{\twoheadrightarrow} \pi_1(K, x_0)$$

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \longmapsto [w] \longmapsto [w'] \longmapsto 1$$

Das Paar $(|i|, r) : |L| \rightleftarrows |K'|$ ist ein starker Deformations-Retrakt, induziert also den zugehörigen Gruppenisomorphismus

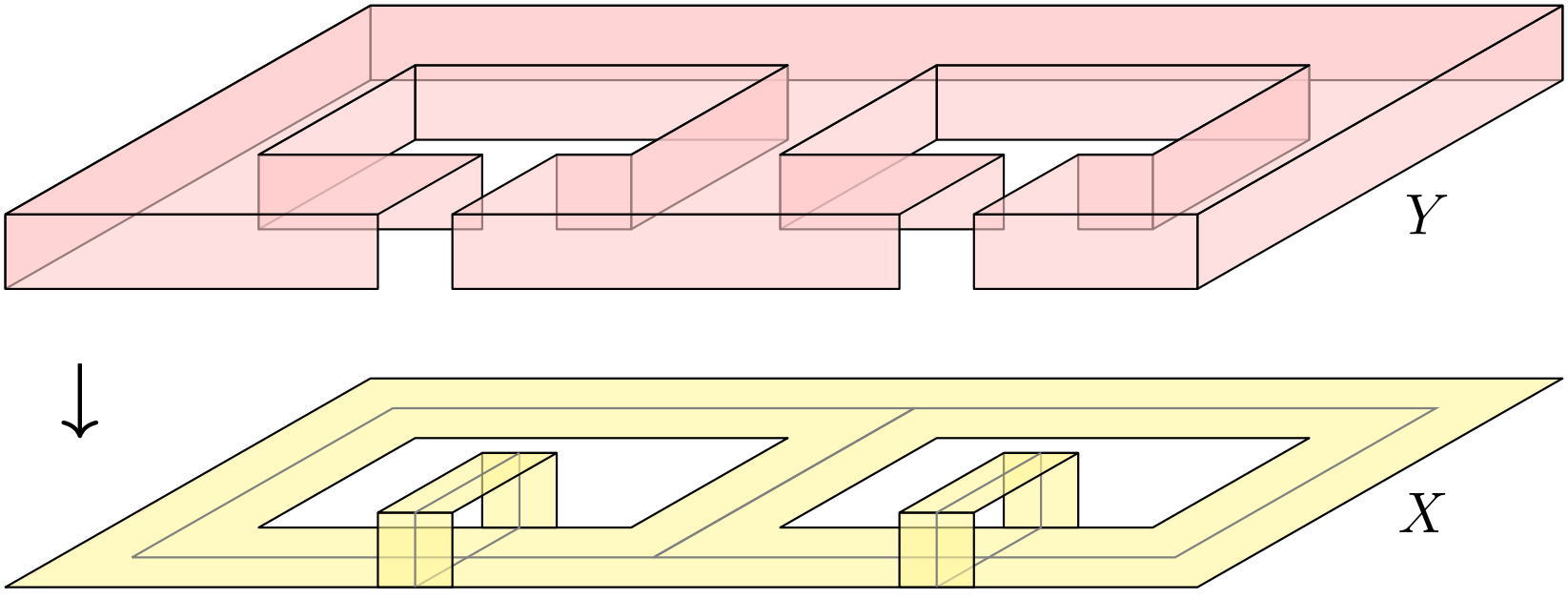
$$(|i|_\sharp, r_\sharp) : \pi_1(|K'|, x_0) \cong \pi_1(|L|, x_0).$$

Die Inklusion $j : K' \hookrightarrow K$ induziert den Homomorphismus $j_\sharp : \pi_1(K', x_0) \to \pi_1(K, x_0)$. Er ist surjektiv, denn es kommt nur ein Dreieck und damit eine Relation hinzu (L6I): Der Kantenzug $w' = x_0 abcax_0$ wird nullhomotop. Dank r sehen wir $w' \approx w$.

Beim Übergang von K' zu K fügt das zusätzliche Dreieck Δ die Relation w' hinzu. Das beweist die behauptete Präsentation. QED

Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

Vertraute geometrische Darstellung: Die rote 2–Zelle schließt die Fläche!



Dieses Argument gilt für alle geschlossenen Flächen: Wie in obiger Abbildung zerlegen wir $F_g^{\pm} = X \cup Y$ in zwei berandete Flächen $X \cong F_{g,1}^{\pm}$ und $Y \cong \mathbb{D}^2$. Der gemeinsame Rand $X \cap Y = \partial X = \partial Y$ stellt in $\pi_1(X, x_0)$ das Flächenwort w dar (L6H). Hingegen ist der Rand in $Y \cong \mathbb{D}^2$ zusammenziehbar. Wir erhalten hieraus $\pi_1(F_g^{\pm}, x_0)$ wie in Satz L6M.

Abelschmachung der Flächengruppen

$$H_g^+ := (G_g^+)_{\mathrm{ab}} = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \,\middle|\, [a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g] = 1 \right\rangle_{\mathrm{ab}}$$
$$= \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \,\middle|\, [a_i,a_j] = [a_i,b_j] = [b_i,b_j] = 1,\ [a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g] = 1 \right\rangle$$
$$= \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \,\middle|\, [a_i,a_j] = [a_i,b_j] = [b_i,b_j] = 1 \right\rangle \quad \cong \quad \mathbb{Z}^{2g}$$

$$(h, h^{-1}) : \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\sim} (G_g^+)_{\mathrm{ab}} : (k_1, \ell_1, \dots k_g, \ell_g) \leftrightarrows a_1^{k_1} b_1^{\ell_1} \cdots a_g^{k_g} b_g^{\ell_g}$$

$$H_g^- := (G_g^-)_{\mathrm{ab}} = \left\langle c_0, c_1, \dots, c_g \,\middle|\, c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2 = 1 \right\rangle_{\mathrm{ab}}$$
$$= \left\langle c_0, c_1, \dots, c_g \,\middle|\, [c_i,c_j] = 1,\ c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2 = 1 \right\rangle$$
$$= \left\langle t, c_0, c_1, \dots, c_g \,\middle|\, [c_i,c_j] = 1,\ t = c_0 c_1 \cdots c_g,\ t^2 = 1,\ [t,c_i] = 1 \right\rangle$$
$$= \left\langle t, c_1, \dots, c_g \,\middle|\, t^2 = 1,\ [t,c_i] = 1,\ [c_i,c_j] = 1 \right\rangle \quad \cong \quad \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g$$

$$h : \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g \xrightarrow{\sim} (G_g^-)_{\mathrm{ab}} : (k_0 + 2\mathbb{Z}, k_1, \dots, k_g) \mapsto c_0^{k_0} c_1^{k_0+k_1} \cdots c_g^{k_0+k_g}$$

$$h^{-1} : (G_g^-)_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g : c_0^{\ell_0} c_1^{\ell_1} \cdots c_g^{\ell_g} \mapsto (\ell_0 + 2\mathbb{Z}, \ell_1 - \ell_0, \dots, \ell_g - \ell_0)$$

Abelschmachung der Flächengruppen

Die Abelschmachung der Präsentation $(h,k) : \langle S \,|\, R \rangle \cong G$ liefert eine Präsentation der Abelschmachung G_{ab}, siehe L3Q: Es genügt, alle Kommutatorrelationen $[a,b] = 1$ mit $a, b \in S$ hinzuzufügen.

In $(G_g^+)_{\mathrm{ab}}$ wird hierbei die Relation $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1$ redundant.
In $(G_g^-)_{\mathrm{ab}}$ können wir den Erzeuger c_0 durch $t = c_0 c_1 \cdots c_n$ ersetzen.
Diese Rechnung gelingt hier *ad hoc* ohne große Schwierigkeiten.
Die Umformungen sind Beispiele von Tietze–Transformationen (L3S).

Aufgabe: Sind zwei dieser Gruppen isomorph? **Lösung:** Nein!

(1) Der Klassifikationssatz endlich erzeugter abelscher Gruppen garantiert, dass die Gruppen $H_g^\pm$ untereinander nicht isomorph sind.

(2) Alternativ gelingt dies direkt: Jede Gruppe H_g^- hat ein Element der Ordnung 2, dies gilt für keine der Gruppen H_g^+. Innerhalb jeder der beiden Familien genügt dann Zählen von Homomorphismen:
Wir finden hier $\sharp\mathrm{Hom}(H_g^+, \mathbb{Z}/2) = 2^{2g}$ und $\sharp\mathrm{Hom}(H_g^-, \mathbb{Z}/2) = 2^{g+1}$.
Alternativ hilft $\sharp\mathrm{Hom}(H_g^+, \mathbb{Z}/3) = 3^{2g}$ und $\sharp\mathrm{Hom}(H_g^-, \mathbb{Z}/3) = 3^g$.

(3) Schon $\sharp\mathrm{Hom}(G_g^\pm, \mathbb{Z}/p)$ unterscheidet die Flächengruppen!

Klassifikation kompakter Flächen

Satz L6N: Klassifikation geschlossener Flächen

Für die geschlossenen Flächen $F_g^\pm$ und ihre Gruppen $G_g^\pm = \pi_1(F_g^\pm, *)$ gilt

$$H_g^+ := (G_g^+)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g} \quad \text{und}$$
$$H_g^- := (G_g^-)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g.$$

Für je zwei Paare $(\varepsilon, g) \neq (\delta, h)$ mit $\varepsilon, \delta \in \{\pm\}$ und $g, h \in \mathbb{N}$ folgt daraus:

1. $H_g^\varepsilon \ncong H_h^\delta$ — Die abelsch gemachten Gruppen sind nicht isomorph.
2. $G_g^\varepsilon \ncong G_h^\delta$ — Die Flächengruppen sind nicht isomorph.
3. $F_g^\varepsilon \not\simeq F_h^\delta$ — Die Flächen sind nicht homotopie-äquivalent.
4. $F_g^\varepsilon \ncong F_h^\delta$ — Die Flächen sind nicht homöomorph.

Beweis: Wir nutzen dankend die zuvor entwickelten Funktoren:

$$\mathtt{Top}_* \xrightarrow[\text{G4L}]{\text{quot}} \mathtt{hTop}_* \xrightarrow[\text{L2N}]{\pi_1} \mathtt{Grp} \xrightarrow[\text{L3N}]{\text{ab}} \mathtt{Ab}$$

$$F_g^\varepsilon \cong F_h^\delta \implies F_g^\varepsilon \simeq F_h^\delta \implies G_g^\varepsilon \cong G_h^\delta \implies H_g^\varepsilon \cong H_h^\delta$$

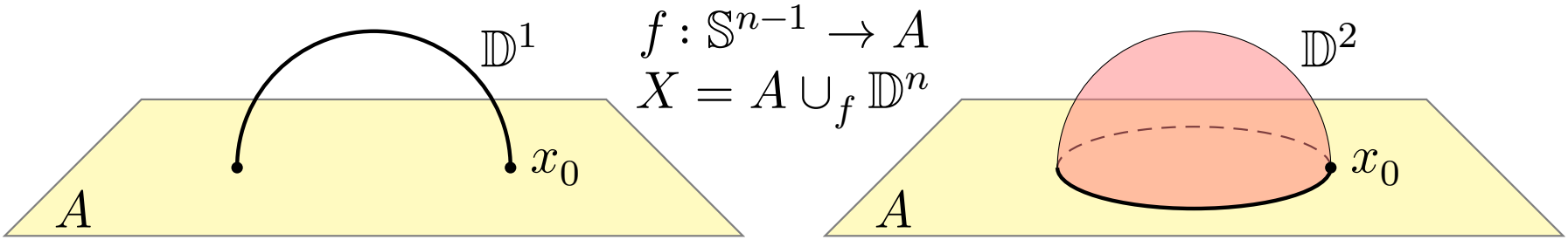
Klassifikation kompakter Flächen

☺ Jeder Funktor erhält Isomorphismen (H4F). Wir übersetzen so unser ursprüngliches Problem in $\mathtt{Top}_*$ in immer leichtere Probleme, bis wir es schließlich lösen können. In $\mathtt{Ab}$ gelingt es routiniert und erfreulich leicht! Durch Kontraposition erhalten wir die obigen Aussagen (1–4).

☺ Es ist ein bemerkenswerter Glücksfall, dass sich die Flächengruppen leicht berechnen lassen (L6M), und bereits ihre Abelschmachungen (L6N) zur Unterscheidung genügen. Dass alles am Ende so einfach wird, war nicht zu ahnen oder vorherzusehen. Wir freuen uns umso mehr über diesen wunderbaren Erfolg. Das Glück ist mit den Tüchtigen.

☺ Am Anfang dieser Vorlesung haben Sie die Euler–Charakteristik kennengelernt und seitdem gerne als Invariante genutzt. Die Invarianz beweist man am besten mit Homologie in der Algebraischen Topologie. Das musste ich hier als Kredit aufnehmen. Die Fundamentalgruppe bietet eine Alternative, und für diese können wir bereits jetzt alles beweisen! Für die Flächenklassifikation habe ich meinen Kredit damit beglichen.

Anheften von Zellen



Satz L6P: Anheften einer Zelle

Sei A wegzshgd und $X = A \cup_f \mathbb{D}^n$ entstehe durch Anheften einer n–Zelle. Als Fußpunkt wählen wir $x_0 = f(e_1)$. Die Inklusion $\iota : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ induziert den Gruppenhomomorphismus $\iota_\sharp : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

1. Für $n = 1$ ist $\iota_\sharp$ injektiv: $\pi_1(X, x_0)$ entsteht durch Hinzufügen eines freien Erzeugers $[\gamma]$, mit $\gamma : [0, 1] \to X$ von x_0 über $\mathbb{D}^1$ und in A zurück.
2. Für $n = 2$ ist $\iota_\sharp$ surjektiv: $\pi_1(X, x_0)$ entsteht durch Hinzufügen einer Relation $[\gamma] = 1$, die Schleife $\gamma(t) = f(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t})$ ist zusammenziehbar.
3. Für $n \geq 3$ ist $\iota_\sharp$ ein Isomorphismus.

Beispiele: So präsentieren wir (1) die Fundamentalgruppe jedes Graphen, (2) jedes SKomplexes, insbesondere die Flächengruppen $G_g^\pm = \pi_1(F_g^\pm, *)$.

Anheften von Zellen

Satz L6P gilt ebenso für das simultane Anheften beliebig vieler Zellen. Wir sind mit diesem nützlichen Prinzip bereits vertraut aus unseren Berechnungen der Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0)$ jedes zshgden Simplizialkomplexes K gemäß Satz L6I. Zunächst wählen wir einen Spannbaum $T \subseteq K$ (I3J); dieser ist zusammenziehbar (J8F).

1. $n = 1$: Anheften jeder weiteren Kante liefert einen freien Erzeuger.
2. $n = 2$: Anheften jedes Dreiecks liefert eine Relation (evtl. redundant).
3. Anheften höherer Simplizes ändert die Fundamentalgruppe nicht.

🙂 Diese zelluläre Sichtweise hat einen enormen praktischen Nutzen: Jeder vernünftige Raum X lässt sich als **Zellkomplex** darstellen, also durch sukzessives Anheften von Zellen $\mathbb{D}^0, \mathbb{D}^1, \mathbb{D}^2, \mathbb{D}^3, \ldots$ aufbauen:

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n, \quad X_n = X_{n-1} \bigcup_{f_n} (I_n \times \mathbb{D}^n), \quad f_n : I_n \times \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$$

Hierbei ist I_n irgendeine (diskrete) Indexmenge und zählt die n–Zellen. Dieser induktive Aufbau ist eine effiziente Beschreibung des Raumes und führt direkt uns zur Präsentation der Fundamentalgruppe.

Anwendung: projektive Räume

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{S}^0 & \xhookrightarrow{+\,1\text{–Zellen}} & \mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{+\,2\text{–Zellen}} & \mathbb{S}^2 & \xhookrightarrow{+\,3\text{–Zellen}} & \mathbb{S}^3 & \xhookrightarrow{+\,4\text{–Zellen}} & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}^0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}^0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}^0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}^0} & & \\
\mathbb{RP}^0 & \xhookrightarrow{+\,1\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^1 & \xhookrightarrow{+\,2\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^2 & \xhookrightarrow{+\,3\text{–Zelle}} & \mathbb{RP}^3 & \xhookrightarrow{+\,4\text{–Zelle}} & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{S}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{S}^3 & \hookrightarrow & \mathbb{S}^5 & \hookrightarrow & \mathbb{S}^7 & \hookrightarrow & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}^1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}^1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}^1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}^1} & & \\
\mathbb{CP}^0 & \xhookrightarrow{+\,2\text{–Zelle}} & \mathbb{CP}^1 & \xhookrightarrow{+\,4\text{–Zelle}} & \mathbb{CP}^2 & \xhookrightarrow{+\,6\text{–Zelle}} & \mathbb{CP}^3 & \xhookrightarrow{+\,8\text{–Zelle}} & \dots
\end{array}$$

Satz L6т: Fundamentalgruppen der projektiven Räume

($\mathbb{R}$) Die Inklusionen $\mathbb{RP}^0 \hookrightarrow \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{RP}^3 \hookrightarrow \dots$ induzieren

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_1\mathbb{RP}^0 & \xhookrightarrow[\iota_\sharp]{} & \pi_1\mathbb{RP}^1 & \xrightarrow[\iota_\sharp]{} & \pi_1\mathbb{RP}^2 & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \pi_1\mathbb{RP}^3 & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \\
\{1\} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \dots.
\end{array}$$

🙂 Die Schleife, die einmal um $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ läuft, erzeugt $\pi_1\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{Z}$ und überlebt in $\pi_1\mathbb{RP}^n$ mit $n \geq 2$ als das Element der Ordnung 2.

($\mathbb{C}$) Im komplexen Fall ist $\pi_1\mathbb{CP}^n$ trivial für alle $n \in \mathbb{N}$.

Anwendung: projektive Räume

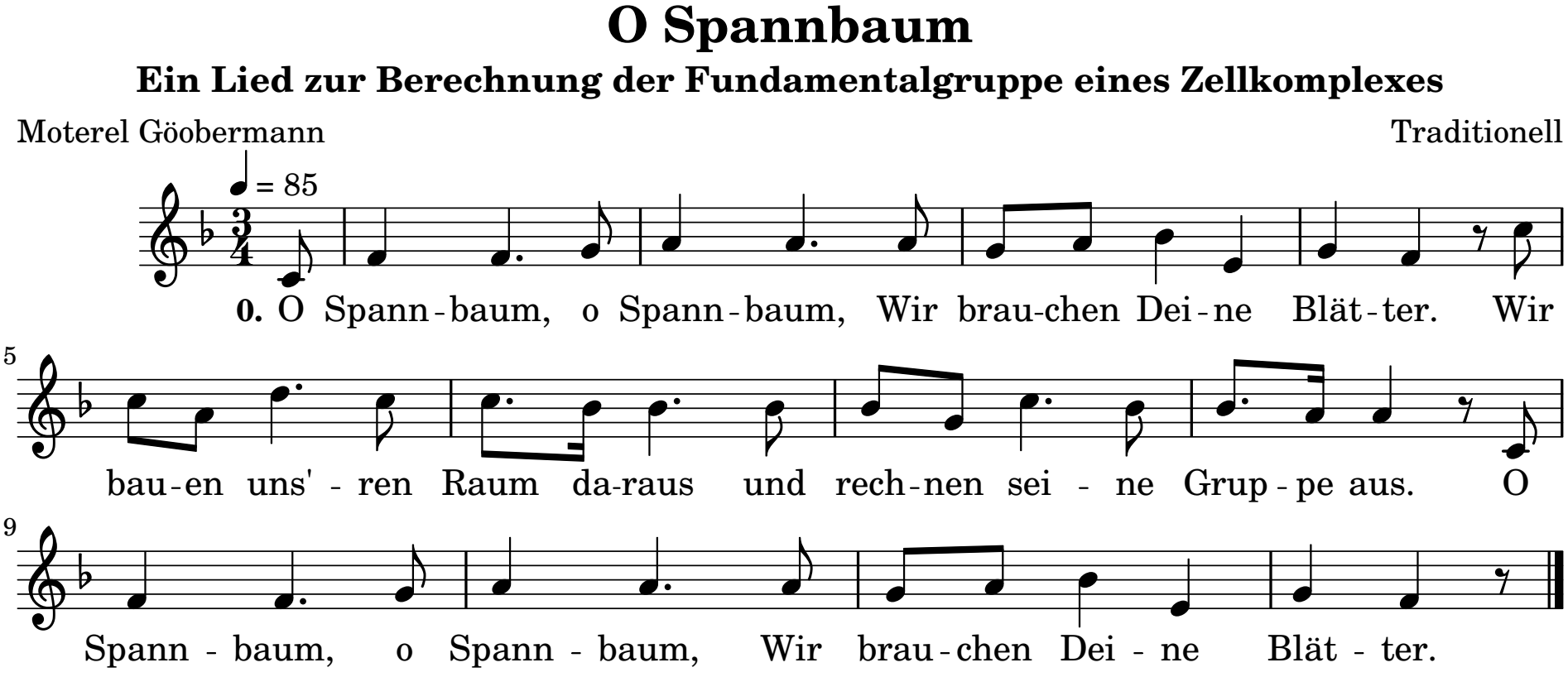
☺ Wir nutzen dankend die Zellstruktur von $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$, siehe K2J. Dieser induktive Aufbau beschert uns sofort die Fundamentalgruppe!

☺ Die kleinsten Beispiele $\mathbb{RP}^0 = \{*\}$ und $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{RP}^2$ sind speziell, daher haben wir diese separat durchgerechnet und ausführlich diskutiert. Ab da stabilisiert sich die Fundamentalgruppe, das heißt, für alle $n \geq 2$ stiftet die Inklusion den Isomorphismus $\pi_1(\mathrm{inc}) : \pi_1(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{RP}^{n+1})$.

☺ Auch komplex sind die kleinsten Beispiele $\mathbb{CP}^0 = \{*\}$ und $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ speziell und erstaunlich und lohnen unsere detaillierte Untersuchung. Die Fundamentalgruppe ist und bleibt hier jedoch von Anfang an trivial! (Der komplexe Fall ist wie so oft leichter als der reelle.)

Übung: Beweisen Sie folgende Konstruktion durch Ankleben von Zellen: Zu jeder beliebigen Gruppe G existiert ein Simplizialkomplex (K, x_0) mit einem Isomorphismus $h : \pi_1(K, x_0) \xrightarrow{\sim} G$. Ist G frei, so genügt ein Graph ($\dim K \leq 1$), allgemein genügt $\dim K \leq 2$. Genau dann kann K endlich gewählt werden, also $|K|$ kompakt, wenn G endlich präsentierbar ist.

O Spannbaum - Präsentation der Fundamentalgruppe



Eine schöne Zusammenarbeit von Moritz Gösling und Walter Huober auf Anregung von Michael Eisermann in der Algebraischen Topologie im Wintersemester 2017/2018. Uraufgeführt im Ökumenischen Zentrum bei einem unvergesslichen Musikabend des Fachbereichs Mathematik.

O Spannbaum - Präsentation der Fundamentalgruppe

0. O Spannbaum, o Spannbaum,
wir brauchen Deine Blätter.
Wir bauen uns'ren Raum daraus,
und rechnen seine Gruppe aus.
O Spannbaum, o Spannbaum,
wir brauchen Deine Blätter.

1. O Spannbaum, o Spannbaum,
trivial ist Deine Gruppe!
Wir spannen nun Erzeuger ein,
das wird des Graphen Gruppe sein.
O Spannbaum, o Spannbaum,
trivial ist Deine Gruppe.

2. O Einskomplex, o Einskomplex,
wie frei ist Deine Gruppe!
Wir kleben nun k–Zellen an,
das ändert uns're Gruppe dann.
O Einskomplex, o Einskomplex,
wie frei ist Deine Gruppe.

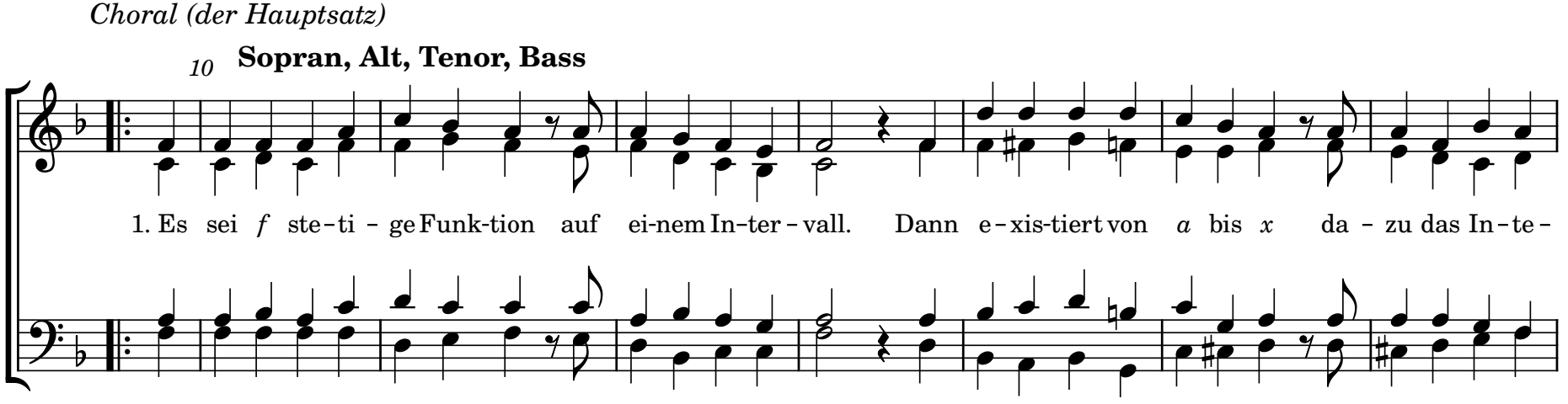
3. O Zweikomplex, o Zweikomplex,
was machen denn 2–Zellen?
Zusammenziehbar, wie sie sind,
sind Relationen dann ihr Kind.
O Zweikomplex, o Zweikomplex,
was machen denn 2–Zellen?

4. O Zellkomplex, o Zellkomplex,
wir kennen Deine Gruppe.
Für k gleich oder größer drei
ändert sich nichts, es bleibt dabei
O Zellkomplex, o Zellkomplex,
wir kennen Deine Gruppe.

5. O Zellkomplex, o Zellkomplex,
wir fanden Deine Gruppe.
Pi-Eins-Gruppen, das ist bekannt,
sind topologisch invariant.
O Zellkomplex, o Zellkomplex,
wir fanden Deine Gruppe.

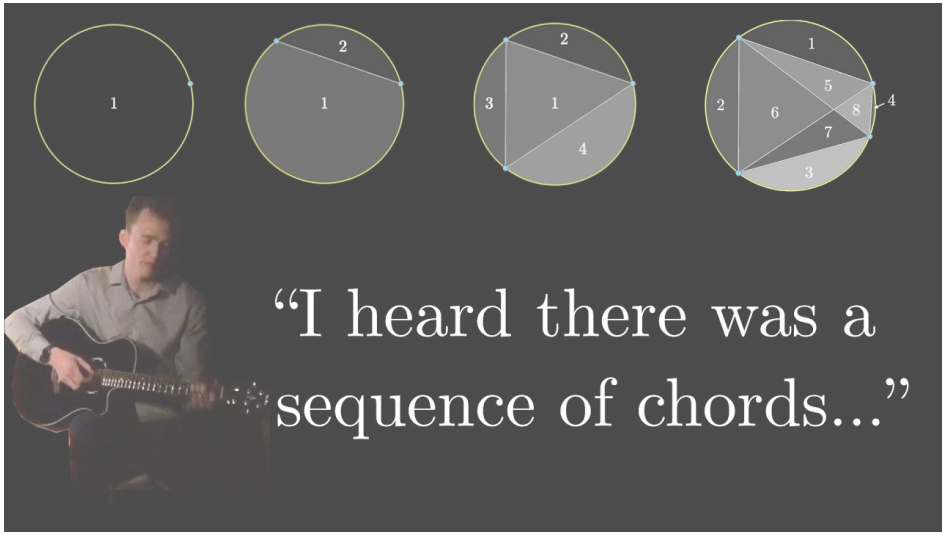
Mathematik in musikalischer Form

O Spannbaum vertont einen mathematischen Satz und steht damit in einer langen und ruhmreichen Tradition von Liedern über Mathematik, egal ob als Würdigung oder Merkhilfe oder aus überquellender Freude über eine beachtliche intellektuelle Leistung in vollendeter Form.



Berühmt ist hierzu im deutschsprachigen Raum die „Hauptsatzkantate – Vertonung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung nebst Beweis, Anwendungen und historischen Bemerkungen für vierstimmigen Chor, Mezzosopran-, Tenor-Solo und Klavier“, siehe `youtu.be/4n6aB4aasyg`. Geschrieben und vertont wurde sie vom Mathematiker Friedrich Wille (1935–1992), erschienen 1984 in seinem Buch *Humor in der Mathematik*.

Mathematik in musikalischer Form



Grant Sanderson alias 3blue1brown singt *How they fool ya (live)*, youtu.be/NOCsdhzo6Jg und warnt eindrücklich vor voreiligen Schlüssen.

Die Unendlichkeit der Primzahlen und das Problem der Primzwillinge besingt hinreißend *Ain’t No Twin Primes (live)*, youtu.be/djzKCZHeVjY.

Ansprechend finde ich auch *Hilberts Hotel* vertont als *Hotel Infinity* von Lawrence Mark Lesser, siehe B227, larrylesser.com/greatest-lesser-hits.

Er lehrt als Statistiker und verbindet Weisheit und Wortwitz in Liedform, siehe youtu.be/XGw6AtRWMA4&t=128s. Jetzt möchte ich mehr Statistik lernen.

Anwendung: orthogonale Gruppen

Dank G5G gilt $\mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_n \mathbb{R}$, somit $\pi_1 \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R} \cong \pi_1 \mathrm{SO}_n \mathbb{R}$, dank F1Q $\mathrm{SO}_1 \mathbb{R} = \{1\}$, $\mathrm{SO}_2 \mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$, $\mathrm{SO}_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$ und $\mathrm{SU}_1 \mathbb{C} = \{1\}$, $\mathrm{SU}_2 \mathbb{C} \cong \mathbb{S}^3$.

Satz L6U: Fundamentalgruppen der orthogonalen Gruppen

($\mathbb{R}$) Die Inklusionen $\mathrm{SO}_1 \hookrightarrow \mathrm{SO}_2 \hookrightarrow \mathrm{SO}_3 \hookrightarrow \mathrm{SO}_4 \hookrightarrow \ldots$ induzieren

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_1 \mathrm{SO}_1 & \xrightarrow[\iota_\sharp]{} & \pi_1 \mathrm{SO}_2 & \xrightarrow[\iota_\sharp]{} & \pi_1 \mathrm{SO}_3 & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \pi_1 \mathrm{SO}_4 & \xrightarrow[\iota_\sharp]{\cong} & \ldots \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\
\{1\} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \ldots
\end{array}$$

☺ Die Schleife, die eine volle Drehung realisiert, erzeugt $\pi_1 \mathrm{SO}_2 \cong \mathbb{Z}$ und überlebt in $\pi_1 \mathrm{SO}_n$ mit $n \geq 3$ als das Element der Ordnung 2.

($\mathbb{C}$) Im komplexen Fall ist $\pi_1 \mathrm{SU}_n$ trivial für alle $n \in \mathbb{N}$.

Den Anfang $\mathrm{SO}_2 \hookrightarrow \mathrm{SO}_3$ haben wir hier *ad hoc* behandelt. Die gesamte Folge erhält man in der Algebraischen Topologie aus der langen exakten Homotopie-Sequenz für Faserbündel. Diese Technik steht uns leider noch nicht zur Verfügung, ich bleibe diesen Teil daher vorerst schuldig.

Kölner Dom von Unbekannten um 360 Grad gedreht

Köln (dpo) — Unbekannte haben vergangene Nacht den Kölner Dom aus seiner Verankerung gelöst, leicht angehoben und um exakt 360 Grad gedreht. Die Tat war offensichtlich von langer Hand geplant, wurde sehr professionell ausgeführt und verlief nahezu spurenlos. […] Zur Stunde arbeitet ein Gutachterteam aus Statikern und Architekten fieberhaft daran, herauszufinden, in welche Richtung der Dom überhaupt gedreht wurde.

Wir tanzen $\pi_1\,\mathrm{SO}_2$: Drehungen in der Ebene!

Wenn Sie eine Figur in der Ebene $\mathbb{R}^2$ um 360° drehen, dann liegt sie genau wie zuvor. Nicht trivial jedoch ist der durchlaufene Weg

$$\alpha_2 : \mathbb{R} \supseteq [0,1] \to \mathrm{SO}_2 : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{bmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{SO}_2 \cong \mathbb{S}^1$ wird $\pi_1\,\mathrm{SO}_2$ frei von $[\alpha_2]$ erzeugt:

$$\pi_1(\mathrm{SO}_2, 1) = \langle [\alpha_2] \,|\, - \rangle \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z} : n \mapsto [\alpha_2]^n = [t \mapsto \alpha_2(nt)]$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\alpha_2(t) \in \mathrm{SO}_2$ die Rotation der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Winkel $2\pi t$. Somit ist α_2 eine Schleife in $(\mathrm{SO}_2, 1)$. Jedes Element in $\pi_1\,\mathrm{SO}_2$ ist eine n–fache Drehung und genau dann trivial, wenn $n = 0$ gilt.

☺ Wie in jeder toplogischen Gruppe $(G, \mathcal{T}, \cdot, 1)$ gilt auch hier $[\alpha]^k = [\alpha^k]$, denn $\alpha * \beta \sim \alpha \cdot \beta \sim \beta * \alpha$. (Übung zur Wiederholung, siehe L449!)

☺ Sie können das visualisieren, ja sogar körperlich spürbar erfahren, wenn Sie sich in ein Tuch oder Seil einwickeln und wieder auswickeln! Das ist eine Besonderheit der Ebene. Im Raum geschieht ein Wunder…

Wir tanzen $\pi_1\,\mathrm{SO}_3$: Drehungen im Raum!

Wenn Sie einen Körper im Raum $\mathbb{R}^3$ um 360° drehen, dann liegt er wieder genau wie zuvor. Wer bei der Bewegung nicht zugeschaut hat, bemerkt überhaupt keinen Unterschied. Doch die Fundamentalgruppe merkt sich diese Drehung! Nicht-trivial ist auch hier der durchlaufene Weg

$$\alpha_3 : \mathbb{R} \supseteq [0,1] \to \mathrm{SO}_3 : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

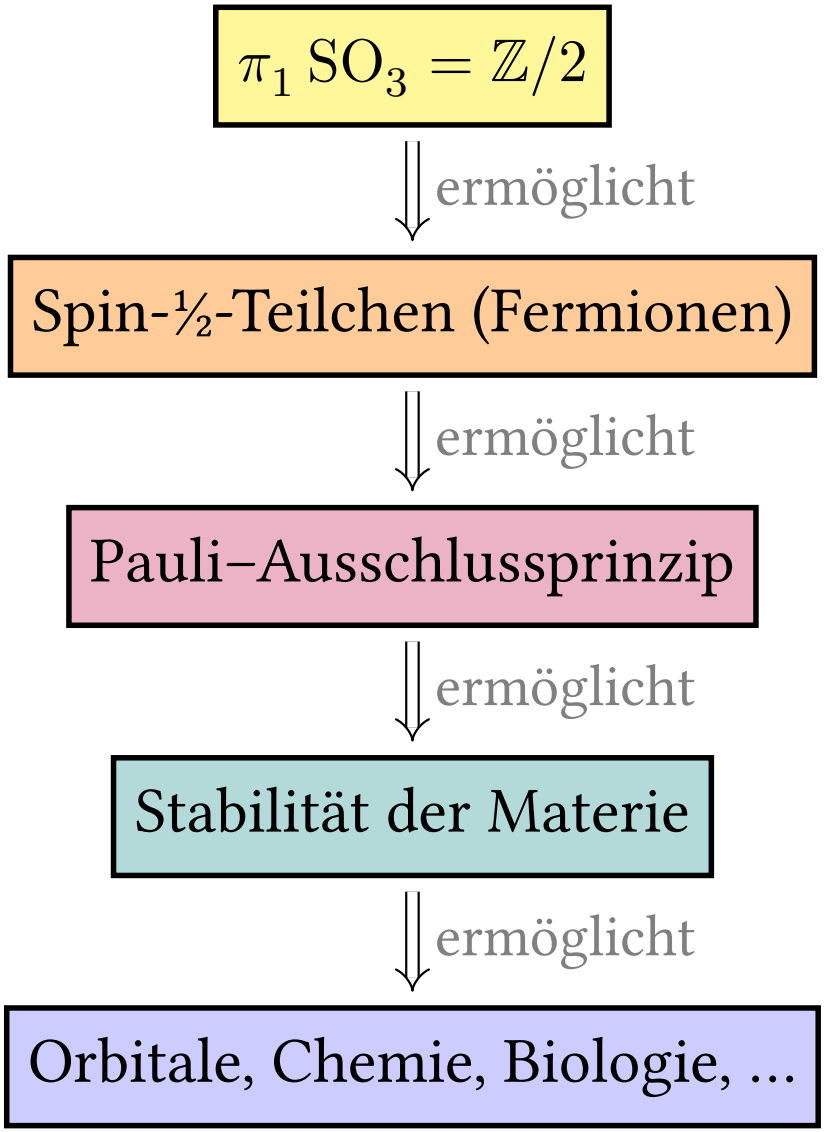
Wegen $\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{RP}^3$ wird $\pi_1\,\mathrm{SO}_3$ von $[\alpha_3]$ erzeugt, wobei $[\alpha_3]^2 = [1]$:

$$\pi_1(\mathrm{SO}_3, 1) = \langle [\alpha_3] \,|\, [\alpha_3]^2 = [1] \rangle \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z}/2 : n + 2\mathbb{Z} \mapsto [\alpha_3]^n = [t \mapsto \alpha_3(nt)]$$

☺ Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\alpha_3(t)$ die Rotation des Raumes $\mathbb{R}^3$ mit Winkel $2\pi t$ um die z–Achse. Somit ist α_3 eine Schleife in $(\mathrm{SO}_3, 1)$. Sie repräsentiert das nicht-triviale Element in $\pi_1\,\mathrm{SO}_3, 1 \cong \mathbb{Z}/2$. Der Weg α_3 ist auch hier nicht-trivial, also $[\alpha_3] \neq [1]$, doch die zweifache Drehung ist trivial, $[\alpha_3]^2 = [1]$. Wie kann man das verstehen, visualisieren oder gar spüren?

Was die Welt im Innersten zusammenhält!

☺ Mathematik erklärt, was die Welt im Innersten zusammenhält!



Was die Welt im Innersten zusammenhält!

Warum sollte uns $\pi_1\,\mathrm{SO}_3$ interessieren? Hat die Mathematik reale Bedeutung? Hat die Topologie spürbare Konsequenzen? Oh, ja!

Wir leben in drei Raumdimensionen, zumindest scheint dies ein gutes Modell, und die Tatsache $\pi_1\,\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{Z}/2$ hat physikalische Bedeutung: Jedes Elementarteilchen steht mit dem umgebenden Universum in Wechselwirkung. (In der folgenden Turnübung spielt die Tasse das Teilchen, Sie das Universum und Ihr Arm die Wechselwirkung.)

Nun eröffnet $\pi_1\,\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{Z}/2$ die Möglichkeit, dass einmalige Drehung nicht trivial ist, aber zweimalige Drehung schon. Je nachdem, ob das Teilchen auf diesen Unterschied reagiert oder nicht, spricht die Physik von halbzahligem oder ganzzahligem Spin, und die Teilchen heißen je nach ihrem Verhalten Fermionen oder Bosonen.

🙂 Das ist zunächst nur eine theoretische Möglichkeit, doch die Natur will es tatsächlich genau so: Das Elektron hat diese Spin–½–Eigenschaft, es spürt und merkt sich, wenn es um 360° gedreht wird.

Was die Welt im Innersten zusammenhält!

Ebenso zu den Fermionen gehören Protonen und Neutronen, aus denen Atomkerne aufgebaut sind, und alle massebehafteten Elementarteilchen. Zu den Bosonen gehören zum Beispiel die Photonen, die für das Licht und elektromagnetische Felder verantwortlich sind.

Der Spin hat in der Quantenmechanik weitreichende Konsequenzen:

Bei Vertauschung identischer Fermionen wechselt ihre Wellenfunktion Ψ das Vorzeichen; insbesondere können nicht beide im selben Zustand sein, denn sonst wäre $\Psi = -\Psi$, also $\Psi = 0$. Das sorgt unter anderem dafür, dass Elektronen im Atom verschiedene Energieniveaus besetzen müssen und trägt somit zur Stabilität der Materie bei.

Bei Vertauschung zweier Bosonen hingegen bleibt ihre Wellenfunktion Ψ unverändert. Im Gegensatz zu Fermionen können deshalb viele Bosonen im selben Zustand sein. Das nutzt man insbesondere beim Laser. Theoretische Erkenntnisse werden bemerkenswert rasant technologisch genutzt und sind schon lange in unserem Alltag angekommen.

Was die Welt im Innersten zusammenhält!

Der Physiker Paul Dirac (1902–1984) entdeckte das Phänomen des Spin *theoretisch*, als er 1928 die Schrödinger–Gleichung der Quantenmechanik relativistisch formulierte. Die resultierende Dirac–Gleichung ergibt sich dabei aus mathematischer Notwendigkeit. Sie impliziert unter anderem die Existenz von Anti-Materie. Dies war bis dato weder beobachtet noch vermutet worden, wurde aber im Anschluss an Diracs theoretische Erkenntnis tatsächlich *experimentell* bestätigt.

Diese Geschichte illustriert, wie sich Theorie und Praxis gegenseitig befruchten, und belegt insbesondere, dass manchmal die Theorie der Praxis vorauseilt: Mit Mathematik sieht man mehr. Diracs Theorie ist einer der großen Triumphe der Physik! Er erhielt für diese Leistung 1933 den Nobel–Preis, zusammen mit Erwin Schrödinger (1887–1961).

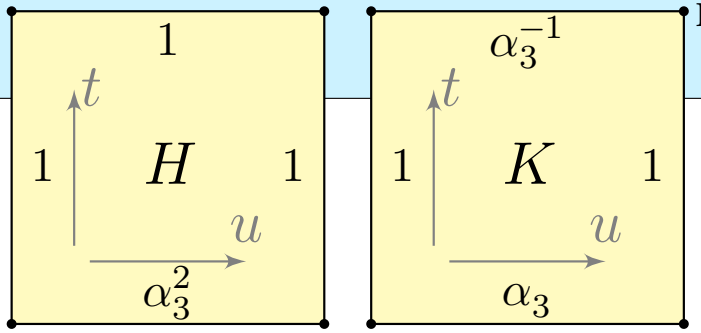
🙂 Nun will ich nicht den Eindruck erwecken, die Berechnung von $\pi_1 \mathrm{SO}_3 = \mathbb{Z}/2$ wäre hier das Wichtigste. Vielmehr ist diese Eigenschaft des Raumes die topologische Grundlage, auf der sich die mathematische und physikalische Theorie der Dirac–Operatoren entfaltet.

Wir tanzen $\pi_1 \mathrm{SO}_3$: der Tassentrick

Übung: (Folklore) Halten Sie eine gefüllte Tasse auf Ihrer Hand und drehen Sie diese behutsam vor sich um 360° um die vertikale Achse. Ihr Arm befindet sich nun in angespannter Haltung. Natürlich können Sie die Drehung genauso rückgängig machen und Ihren Arm so wieder entspannen. So verrückt es klingt, statt die Drehung rückgängig zu machen, können Sie auch *dieselbe* Drehung noch einmal durchführen, um Ihren Arm zu entspannen!

🙂 Bei Lerntypen unterscheidet man auditive, visuelle, kommunikative, motorische, uvm. Wenn Sie motorisch lernen, sollten Sie das unbedingt selbst ausprobieren. Wenn Sie visuell lernen, dann lassen Sie es sich hier feierlich vorführen. Wenn Sie auditiv lernen, dann lassen Sie es sich mitreißend erklären. Wenn Sie kommunikativ lernen, dann erzählen Sie auf den nächsten Parties neidisch-staunenden Kommiliton:innen von Ihrer phantastisch guten Topologie-Vorlesung und Ihren vielen schönen Aha-Erlebnissen. Nicht nur reden, auch gleich machen: Führen Sie publikumswirksam Diracs Spin-Trick vor! Gern geschehen.

Dirac–Spin-Trick: Rodrigues zeigt $\alpha_3^2 \sim 1$.



Aufgabe: Konstruieren Sie in SO_3 explizit Homotopien $H : \alpha_3^2 \sim 1$ und $K : \alpha_3 \sim \alpha_3^{-1}$.

Lösung: Die Drehung des $\mathbb{R}^3$ um die Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ ist leicht explizit anzugeben dank der eleganten Rodrigues–Formel (K2P):

$$\rho(s,\theta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta) \cdot s \times x + (1 - \cos(\theta)) \cdot s \times (s \times x).$$

Wir erhalten die stetige Surjektion $\rho : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3 \subseteq \mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}$.
Der Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^2 : t \mapsto (0, \sin(\pi t), \cos(\pi t))$ führt vom Nordpol $\gamma(0) = (0,0,1)$ zum Südpol $\gamma(1) = (0,0,-1)$. Wir erhalten

$$K : [0,1]^2 \to \mathrm{SO}_3 \; : (t,u) \mapsto \rho(\gamma(t), 2\pi u).$$

Nach Konstruktion ist K stetig. Für alle $t, u \in [0,1]$ finden wir:

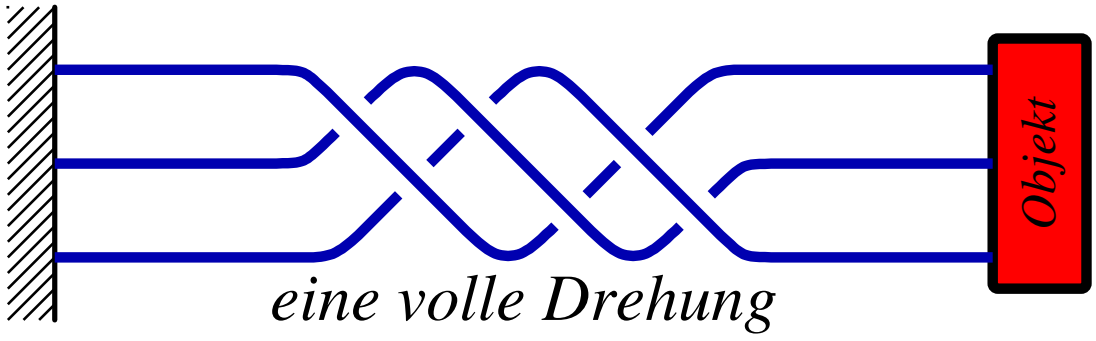
$$K(t,0) = \mathrm{id}, \quad K(t,1) = \mathrm{id}, \quad K(0,u) = \alpha_3(u), \quad K(1,u) = \alpha_3(u)^{-1},$$

Daraus erhalten wir die gesuchte Homotopie $H : \alpha_3^2 \sim 1$ vermöge

$$H : [0,1]^2 \to \mathrm{SO}_3 \; : (t,u) \mapsto \rho(\gamma(t), 2\pi u) \cdot \rho(\gamma(0), 2\pi u).$$

Dirac–Spin-Trick: Der Zopf zeigt $\alpha_3 \propto 1$.

Lässt sich der folgende Zopf z entwirren?



Lässt sich der „doppelt so komplizierte“ Zopf z^2 entwirren?

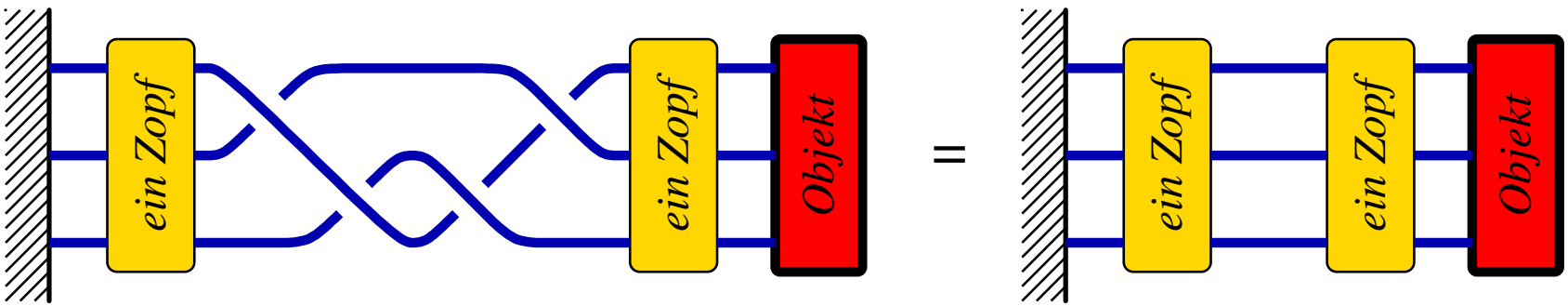
Hier wirken Drehungen ganz direkt, und so wird $\pi_1\,\mathrm{SO}_3$ leicht fasslich. Tatsächlich gilt $z \propto 1$, das beweist $\alpha_3 \propto 1$. Der Zopf ist unser Zeuge!

Dirac–Spin-Trick: Der Zopf zeigt $\alpha_3 \nsim 1$.

Auch dahinter steckt wunderschöne Mathematik! Emil Artin führte 1925 die Zopfgruppe B_n auf n Strängen ein und bewies die Präsentation

$$B_n \cong \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rl} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{für } |i-j| = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

Auch Dirac–Zöpfe auf n Strängen bilden eine Gruppe B'_n. Dies ist Artins Zopfgruppe B_n mit der zusätzlichen Relation $s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_{n-1} \cdots s_2 s_1 = 1$.



Die Abelschmachung $B_n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ bzw. $\alpha : B'_n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2(n-1)$ mit $s_i^{\pm} \mapsto \pm 1$ zählt Kreuzungen mit Vorzeichen. Die Invariante $\alpha(z) \equiv 2 \not\equiv 0$ zeigt $z \nsim 1$. Das Hindernis verschwindet für $\alpha(z^2) \equiv 0$. Tatsächlich lässt sich der Zopf z^2 entwirren (Rodrigues). Probieren Sie es, es wirkt wie Magie!

Kapitel M

Überlagerungen topologischer Räume

Non quia difficilia sunt non audemus,
sed quia non audemus difficilia sunt.
[Nicht weil es schwierig ist, wagen wir es nicht,
sondern weil wir es nicht wagen, ist es schwierig.]
Seneca, Moralische Briefe an Lucilius

Inhalt dieses Kapitels M

Bündel und Faserbündel

1 Überlagerungen topologischer Räume

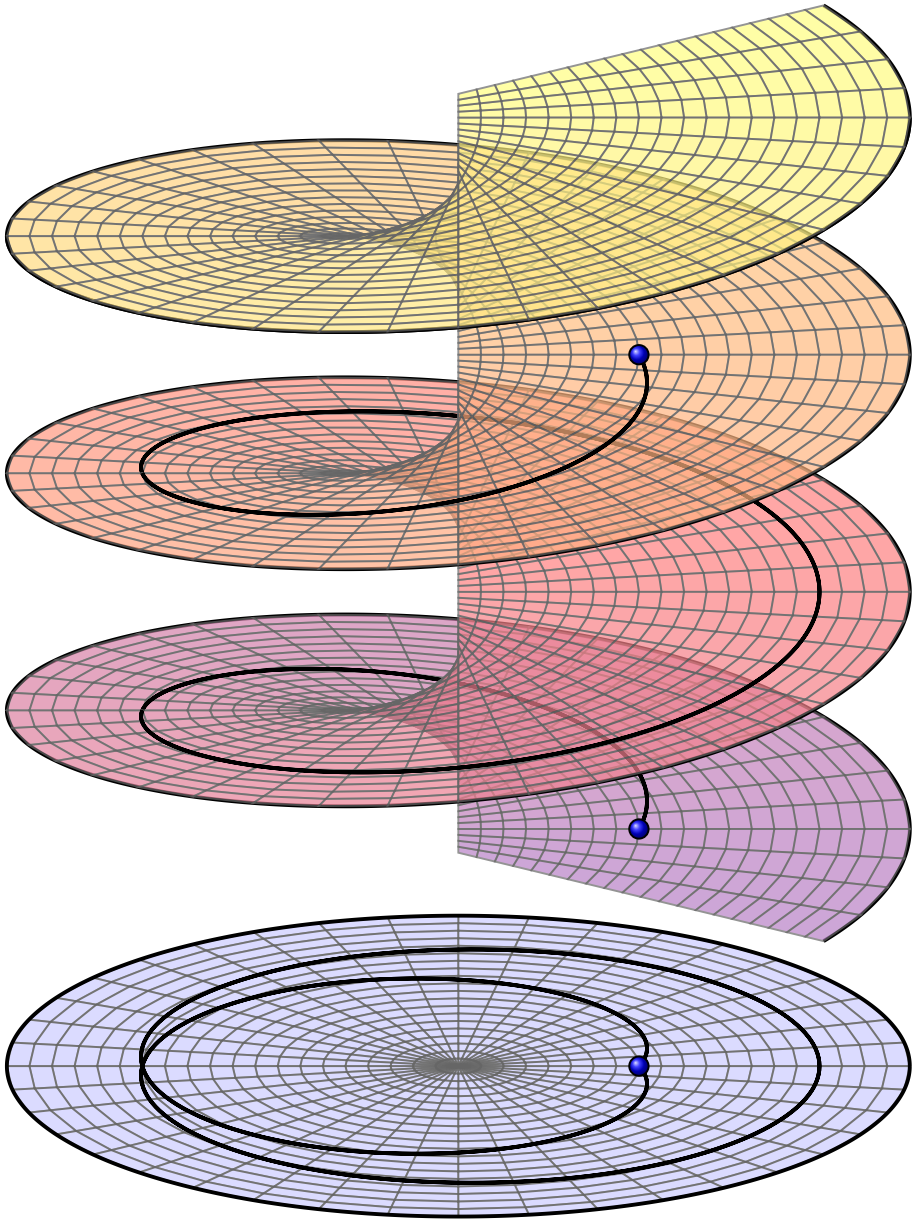
2 Hochhebung von Wegen und Homotopien

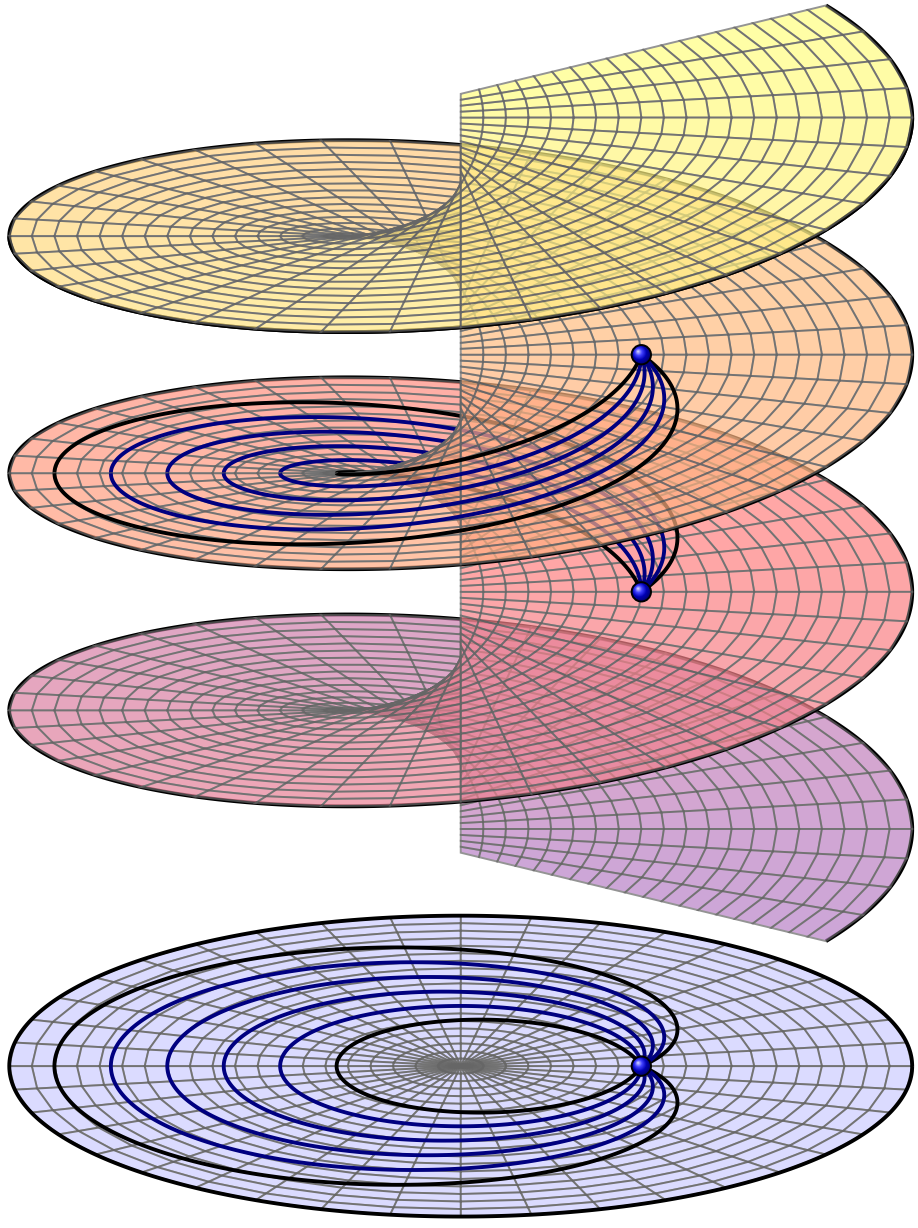
3 Gruppenoperationen und Galois–Überlagerungen

4 Kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

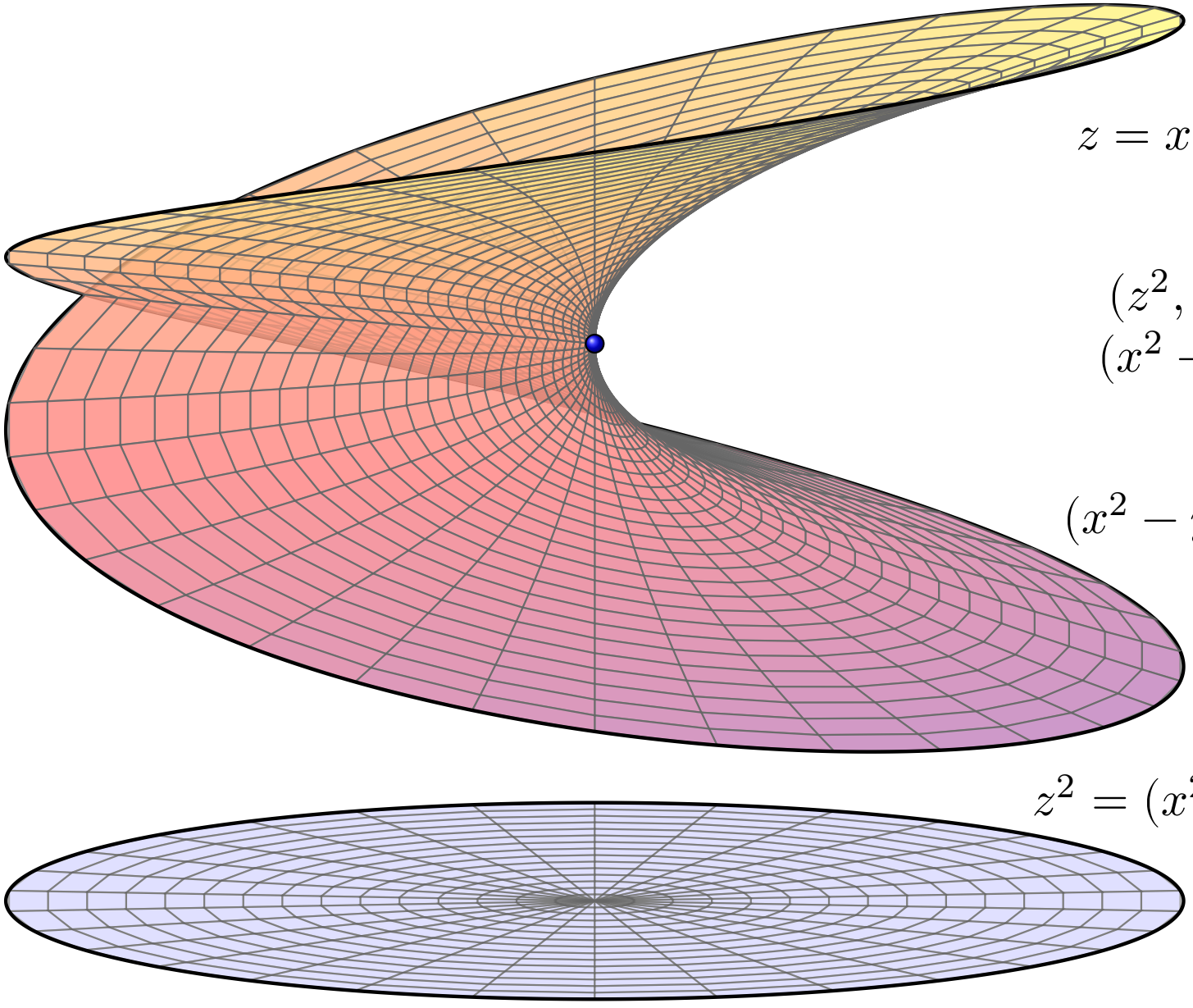
5 Galois–Korrespondenz: Untergruppe vs Überlagerung

Was sind und was sollen Überlagerungen?





Was sind und was sollen Überlagerungen?



$$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{C}$$

$$\downarrow$$

$$(z^2, z) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$$

$$(x^2 - y^2, 2xy, x, y)$$

$$\downarrow$$

$$(x^2 - y^2, 2xy, x) \in \mathbb{R}^3$$

$$\downarrow p$$

$$z^2 = (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{D}^2$$

Was sind und was sollen Überlagerungen?

Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist eine besonders schöne Abbildung.
Sie kennen und nutzen bereits typische Beispiele wie Polarkoordinaten

$$p : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : (r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t).$$

Jede *Überlagerung* $p : \tilde{X} \to X$ sieht lokal aus wie ein Pfannkuchenstapel:
Der Raum X wird überdeckt durch offene Mengen $U \subseteq X$, deren Urbild $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ disjunkte Vereinigung offener Mengen $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}$ ist, die jeweils durch p homöomorph auf U abgebildet werden (M1A).

Überlagerungen begegnen uns früh in der mathematischen Ausbildung, spätestens bei der Einführung komplexer Zahlen $\mathbb{C}$, und ab da überall:

(1) Die komplexe Potenzfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w \mapsto w^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist eine Überlagerung (verzweigt im Nullpunkt). Warum gibt es komplex (anders als reell!) keine stetige Wurzelfunktion „$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$“?

(2) Die Lösung quadratischer Gleichungen $z^2 + pz + q = 0$ durch die (komplexe) Mitternachtsformel $\{z_1, z_2\} = \{-p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}\}$.

Was sind und was sollen Überlagerungen?

(3) Ganz allgemein polynomielle Gleichungen: Jede Polynomfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ ist eine n–blättrige Überlagerung, verzweigt über den kritischen Werten von p (M1H).

(4) Ebene Polarkoordinaten: Die trigonometrische Parametrisierung der Kreislinie, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$, ist eine Überlagerung. Warum ist die Polardarstellung $z = r \cdot (\cos t + \mathrm{i} \sin t)$ für $z \in \mathbb{C}^\times$ nicht eindeutig?

(5) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist eine Überlagerung. Warum gibt es (anders als im Reellen!) keinen stetigen komplexen Logarithmus „$\ln : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$“?

Diese Konstruktionen und Fragestellungen reichen zurück bis zu den Anfängen der komplexen Zahlen: Die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ provoziert die Einführung von „$\sqrt{-1} = \pm\mathrm{i}$“ und führt zum Fundamentalsatz der Algebra (J1T). Diese überaus erfolgreichen Anwendungen sind bis heute ein guter Grund zur Nutzung komplexer Zahlen, in der Mathematik ebenso wie überall in Naturwissenschaften und im Ingenieurwesen.

Wozu nutzen wir Überlagerungen?

Allein dies würde eine ausführliche Behandlung von Überlagerungen rechtfertigen. Die allgemeine Betrachtung beschert uns zudem zahlreiche weitere Beispiele und nützliche Anwendungen, wie etwa Überlagerungen von Graphen, von Flächen und von Lie–Gruppen wie $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$.

Im vorangegangenen Kapitel L haben wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ konstruiert, berechnet und nutzen gelernt. Dieses Kapitel M untersucht das duale Konzept der Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$. Diese Dualität inkarniert ein extrem erfolgreiches Paradigma:

Gruppen wollen operieren!

Wir müssen einer Gruppe nur einen geeigneten Bereich zur Verfügung stellen, auf dem sie operieren kann, und schon entfaltet sie dort ihre Wirkung und enthüllt ihre Wesenszüge. Das wollen wir nutzen.

Dies gilt insbesondere für Fundamentalgruppen: Sie operieren auf Überlagerungen. Beide sind in einem präzisen Sinne dual zueinander. Dies ermöglicht Berechnungen und wirkungsvolle Anwendungen.

Galois–Überlagerungen

Zahlreiche und besonders schöne Überlagerungen entstehen nach folgendem Muster als Quotienten geeigneter Gruppenoperationen:

Satz M4G: kurze exakte Sequenz

Für jede freie diskontinuierliche Operation $G \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{q} X$ ist der Quotient q eine Überlagerung. Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so nennen wir dies eine *Galois–Überlagerung*, und erhalten die kurze exakte Sequenz (SES)

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} G \longrightarrow 1.$$

Exaktheit bedeutet „Bild = Kern“. Hier heißt das links: $q_\sharp$ ist injektiv, rechts: h ist surjektiv, und zwischen beiden gilt $\operatorname{Im}(q_\sharp) = \operatorname{Ker}(h)$.
Dies induziert den Isomorphismus $\bar{h} : \pi_1(X, x_0)/\operatorname{Im}(q_\sharp) \xrightarrow{\sim} G$.

Die Überlagerung heißt *universell*, wenn der überlagernde Raum $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ einfach zusammenhängend ist, also $\pi_0(\tilde{X}) = \{\tilde{X}\}$ und $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$.
Der Satz beschert uns dann den Isomorphismus $h : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} G$.

Universelle Überlagerungen

topologischer Raum	universelle Überlagerung
X einfach zshgd, etwa $X = \mathbb{R}^n$	$\{1\} \curvearrowright X \twoheadrightarrow X$
einfach gelochte Ebene $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times$
Kreislinie $\mathbb{S}^1$, projektive Gerade $\mathbb{RP}^1$	$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$
Sphäre $\mathbb{S}^n$ der Dimension $n \geq 2$	$\{1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n$
projektiver Raum $\mathbb{RP}^n$, $n \geq 2$	$\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$
orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$	$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$
orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$	$\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$
Linsenraum $L(p,q)$	$\mathbb{Z}/p \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow L(p,q)$
Fläche $F_0^\pm$, also $\mathbb{S}^2$ oder $\mathbb{RP}^2$	$G_0^\pm \curvearrowright \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow F_0^\pm$, sphärisch
Fläche $F_1^\pm$, Torus / Kleinsche Flasche	$G_1^\pm \curvearrowright \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow F_1^\pm$, euklidisch
Fläche $F_g^\pm$, Geschlecht $g \geq 2$	$G_g^\pm \curvearrowright \mathbb{H}^2 \twoheadrightarrow F_g^\pm$, hyperbolisch
Bouquet B von $\lvert S\rvert$ Kreislinien	$\langle S \,|\, - \rangle \curvearrowright \Gamma \twoheadrightarrow B$, Cayley
SKomplex K mit $\pi_1(K, x_0) = \langle S \,|\, R \rangle$	$\langle S \,|\, R \rangle \curvearrowright \tilde{K} \twoheadrightarrow K$

Hauptsatz: die Galois–Korrespondenz

Fundamentalgruppen und Überlagerungen sind faszinierende Objekte. Zwischen beiden gilt eine verblüffende Dualität: Zusammenhängende Überlagerungen von (X, x_0) entsprechen Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Satz M5A: Galois–Korrespondenz

Sei X zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend.

(1) Jede Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ und somit eine charakteristische Untergruppe $\mathrm{Im}(p_\sharp) \leq \pi_1(X, x_0)$.

(2) Zu jeder beliebigen Untergruppe $H \leq \pi_1(X, x_0)$ existiert genau eine zusammenhängende Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$. Diese ist eindeutig bis auf Isomorphie.

(3) Genau dann ist die Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ galoisch, wenn die charakteristische Untergruppe $\mathrm{Im}(p_\sharp) \leq \pi_1(X, x_0)$ normal ist. In diesem Fall operiert die Quotientengruppe $G = \mathrm{Im}(p_\sharp) \backslash \pi_1(X, x_0)$ auf Y und ergibt die Galois–Überlagerung $G \curvearrowright (Y, y_0) \to (X, x_0)$.

Analogie zur Integration

Zum Thema „Dualität“ kennen Sie bereits viele Beispiele. Aus der Linearen Algebra kennen Sie die Dualiät zwischen den Zeilen eines linearen Gleichungssystems und den Spaltenvektoren einer Basis des Lösungsraums. Aus der Analysis wissen Sie, dass Integrieren und Differenzieren zueinander invers sind (bis auf additive Konstanten).

Die Bestimmung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ durch Auffinden einer universellen Überlagerung $G \curvearrowright \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ ähnelt der Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch Auffinden einer Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Hat man das Glück oder das Geschick, eine Stammfunktion F explizit zu beschaffen, so ist der Nachweis $F' = f$ und die weitere Rechnung leicht.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung garantiert, dass es zu jeder stetigen Funktion f solch eine Stammfunktion F gibt. Konkrete Berechnungen können aber durchaus schwierig sein, wie jede:r weiß, die sich daran versucht hat. Schlimmer, zu Funktionen wie $f(x) = \exp(-x^2)$ oder $f(x) = \sin(x)/x$ lassen sich Stammfunktionen nachweislich nicht durch die üblichen Funktionen „in geschlossener Form“ ausdrücken.

Analogie zur Integration

Differenzieren ist Handwerk. Integrieren ist Kunst.

Dualität nutzen wir besonders gerne, je nach vorliegender Fragestellung, wenn eine der beiden Seiten einfacher zu berechnen ist als die andere. So können wir uns von zwei Wegen zum Ziel den leichteren aussuchen!

Mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ verhält es sich ähnlich: Haben wir eine universelle Überlagerung $G \curvearrowright \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ konkret vorliegen, so können wir hieraus die Gruppe $\pi_1(X, x_0) \cong G$ direkt ablesen. Die Schwierigkeit besteht nicht in der abstrakten Existenzaussage, sondern in der expliziten Konstruktion, möglichst konkret, informativ und einfach.

Der Hauptsatz der Überlagerungstheorie garantiert insbesondere, dass es zu jedem (hinreichend zusammenhängenden) Raum X eine universelle Überlagerung gibt. Aber auch hier kann die konkrete Bestimmung und die Untersuchung dieser Überlagerung beliebig schwierig sein. Manche Gruppen führen unmittelbar auf unlösbare algorithmische Probleme wie etwa das Wortproblem oder das Isomorphieproblem (§L3v).

Analogie zur Galois–Theorie

In vielen günstigen Fällen lassen sich diese Schwierigkeiten überwinden, wie die oben genannten Beispiele illustrieren. Die Überlagerungstheorie stiftet dann eine nützliche Übersetzung zwischen topologischen und algebraischen Daten. Sie ist eine grundlegende Technik der Topologie und ein willkommenes Hilfsmittel in Analysis, Geometrie und Algebra.

Es gibt eine bemerkenswert enge Analogie zwischen der topologischen Theorie der Überlagerungen $Y \twoheadrightarrow X$ über dem Basisraum X und der klassischen Galois–Theorie algebraischer Erweiterungen $E \geq K$ über dem Grundkörper K: Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(E|K)$ bzw. $\mathrm{Aut}(Y|X)$ erfüllt eine Galois–Korrespondenz von Untergruppen einerseits und Erweiterungen bzw. Überlagerungen andererseits.

📖 Tamás Szamuely: *Galois groups and fundamental groups.* CUP 2009
Adrien & Régine Douady: *Algèbre. Théories galoisiennes.* Dunod 1979

Anwendungen in Analysis und Geometrie

Überlagerungen treten auch in der Analysis natürlich auf, besonders in der Komplexen Analysis: Jede (nicht-konstante) holomorphe Funktion ist eine (verzweigte) Überlagerung. Bernhard Riemann hatte die geniale Idee, Funktionen von der Enge ihrer ebenen Definitionsgebiete zu befreien und auf Flächen auszudehnen, die berühmten *Riemannschen Flächen*.

So verbindet sich die Komplexe Analysis auf schönste und tiefgründige Weise mit Topologie, Differentialgeometrie und Algebraischer Geometrie! Nun will ich nicht behaupten, die Topologie wäre hier der zentrale Punkt, sie ist eher Grundlage und Wegbereiterin für noch reichere Strukturen. Überlagerungen und Gruppenoperationen sind der Ausgangspunkt und willkommene Techniken, die sich nahtlos in das Gesamtkunstwerk fügen.

📖 Klaus Lamotke: *Riemannsche Flächen.* Springer 2009
Otto Forster: *Lectures on Riemann surfaces.* Springer 1991

Anwendungen in Geometrie und Physik

Eine Lie–Gruppe G lässt sich lokal durch ihre Lie–Algebra $\mathfrak{g}$ beschreiben und untersuchen. Überlagerungen bieten eine radikale Vereinfachung: Wir können zur universellen Überlagerung $p : \tilde{G} \twoheadrightarrow G$ übergehen. Dann ist auch $\tilde{G}$ eine Lie–Gruppe, und p ist ein Homomorphismus. Für viele Zwecke konzentriert man sich daher zunächst auf einfach zusammenhängende Lie–Gruppen. Für die Drehgruppe $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ zum Beispiel finden wir die universelle Überlagerung $\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C} \cong \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H}$.

Auf dem Wege über Lie–Gruppen finden Überlagerungen auch Eingang in die Physik. Ebenso über Mannigfaltigkeiten in der Relativitätstheorie; wir diskutieren kurz die Orientierungsüberlagerung in Satz M4P.

📖 John Stillwell: *Naive Lie theory.* Undergraduate Texts, Springer 2008
Brian C. Hall: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations.* Springer 2015
Wolfgang Kühnel: *Matrizen und Lie–Gruppen.* Vieweg-Teubner 2011

Anwendungen in der Gruppentheorie

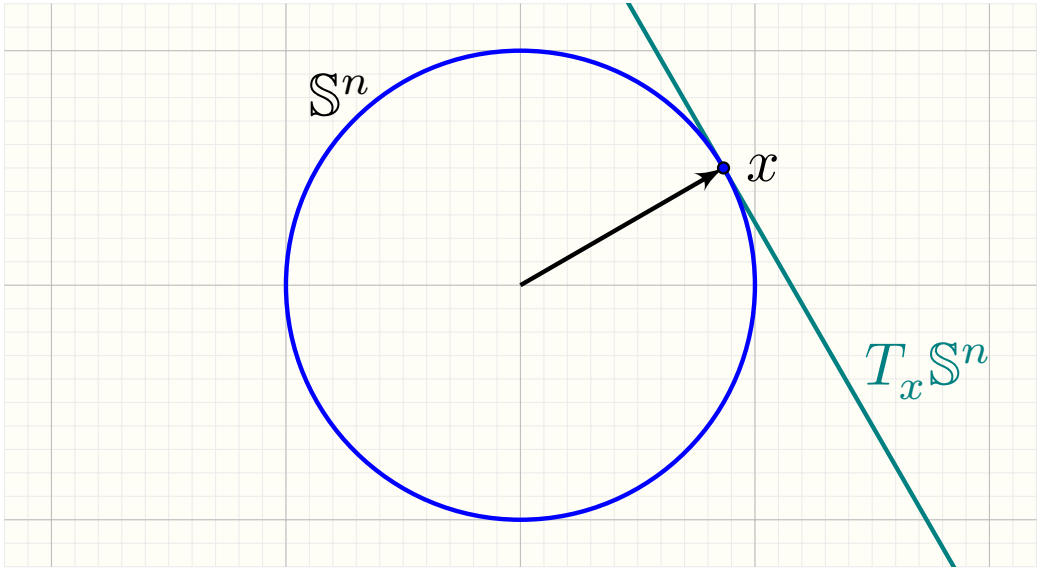
Der Satz von Nielsen–Schreier (M5D) besagt: In jeder freien Gruppe ist jede Untergruppe frei. Der Beweis gelingt leicht mit Überlagerungen!

Für manche Räume B ist in der universellen Überlagerung $G \curvearrowright E \twoheadrightarrow B$ der Raum E nicht nur einfach zshgd, sondern sogar zusammenziehbar, siehe obige Beispieltabelle. Das ist eine besonders wertvolle Information. Wir nennen den Basisraum $B := K(G,1)$ dann *klassifizierenden Raum*; er codiert geometrisch alle Eigenschaften unserer Gruppe!

Jede Gruppe G erlaubt einen klassifizierenden Raum, sogar simplizial oder zellulär, und dieser ist eindeutig bis auf Homotopie-Äquivalenz. Damit verbinden wir kombinatorische mit geometrischen Techniken und nutzen topologische Werkzeuge zur Untersuchung von Gruppen! Das hat sich als überaus effizient und erfolgreich erwiesen.

📖 Kenneth S. Brown: *Cohomology of groups.* GTM 87, Springer 1994

Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n$



Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ ist der **Tangentialraum** an $\mathbb{S}^n$ gegeben durch

$$T_x\mathbb{S}^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \langle x \,|\, v \rangle = 0 \}.$$

Diese fassen wir zum **Tangentialbündel** zusammen: Der **Totalraum** ist

$$T\mathbb{S}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{S}^n} \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n = \{ (x, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \langle x \,|\, v \rangle = 0 \}.$$

Die **Bündelprojektion** $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (x, v) \mapsto x$ ist stetig. Über jedem **Punkt** $x \in \mathbb{S}^n$ sitzt die **Faser** $p^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$. Ein **Vektorfeld** auf $\mathbb{S}^n$ ist ein Schnitt s von p, also $s : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n : x \mapsto (x, v(x))$ stetig.

Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n$

🙂 Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ ist $T_x\mathbb{S}^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid v \rangle = 0 \} \leq \mathbb{R}^{n+1}$ ein $\mathbb{R}$–Untervektorraum der Dimension n. Anschaulich stellen wir uns jeden Tangentialvektor $v \in T_x\mathbb{S}^n$ in seinem Fußpunkt x angeheftet vor. So wird jede Faser $F_x = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ zu einem $\mathbb{R}$–Vektorraum dank der Addition $(x,u) + (x,v) = (x, u+v)$ und Skalierung $(x,v)\lambda = (x, v\lambda)$.

⚠ Es hat hier gar keinen Sinn, Tangentialvektoren über verschiedenen Fußpunkten $x \neq \tilde{x}$ addieren zu wollen: Die Fasern $F_x = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ und $F_{\tilde{x}} = \{\tilde{x}\} \times T_{\tilde{x}}\mathbb{S}^n$ sind disjunkt und daher streng getrennt zu behandeln! Dennoch wollen wir sie zu einem Gesamtobjekt zusammenfassen, also „bündeln“. Genau dies leistet das **Tangentialbündel** $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.

🙂 Das ist Lineare Algebra, hier als **Familie** linearer Gleichungen und Lösungsräume, und zwar stetig parametrisiert durch den **Basisraum** $\mathbb{S}^n$. Der **Totalraum** $T\mathbb{S}^n$ ist die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume. Die Fasern $(T_x\mathbb{S}^n)_{x \in \mathbb{S}^n}$ werden dabei gebündelt und stetig verklebt: Der Menge $T\mathbb{S}^n$ geben wir die Teilraumtopologie im Produkt $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n$

⚠ Der Totalraum $T\mathbb{S}^n$ ist kein Vektorraum: Für sich allein betrachtet ist jede Faser $p^{-1}(x) = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ ein Vektorraum, aber Tangentialvektoren über verschiedenen Fußpunkten $x \neq \tilde{x}$ können nicht addiert werden. Das ist weder algebraisch möglich noch physikalisch sinnvoll.

🙂 Dank der präzisen Sprech- und Schreibweise besteht nun keinerlei Verwechslungsgefahr zwischen dem Tangential*raum* $T_x\mathbb{S}^n$ (dieser ist ein Vektorraum, vermöge $F_x = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ angeheftet am Fußpunkt $x \in \mathbb{S}^n$) und dem Tangential*bündel* $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ (dieses besteht aus dem topologischen Totalraum $T\mathbb{S}^n$ mit der Bündelprojektion p).

🙂 Nach Konstruktion ist $T\mathbb{S}^n$ einerseits ein topologischer Raum und zugleich die disjunkte Vereinigung der Vektorräume $T_x\mathbb{S}^n$ über $x \in \mathbb{S}^n$. Wir stellen uns dies als eine „kontinuierliche Familie“ von Vektorräumen $F_x = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ vor, „stetig parametrisiert“ durch den Fußpunkt $x \in \mathbb{S}^n$, und „stetig verklebt“ durch die Topologie des Totalraums $T\mathbb{S}^n$.
Diese Idee des Bündels $(F_x)_{x\in\mathbb{S}^n}$ wird durch p präzisiert.

Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n$

Tangentialvektoren sind ein grundlegendes Konzept in der Analysis, zunächst in der Differentialrechnung, dann in Geometrie und Physik. Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist das Tangentialbündel $TU = U \times \mathbb{R}^n$ trivial, daher ist hier anfangs noch nichts Besonderes zu erkennen.

Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist das erste und zentrale Beispiel einer wunderbaren Theorie. In der Differentialgeometrie konstruiert man zu jeder glatten Mannigfaltigkeit M das Tangentialbündel $p : TM \to M$. Hieraus ergeben sich weitere Bündel, etwa das Kotangentialbündel T^*M.

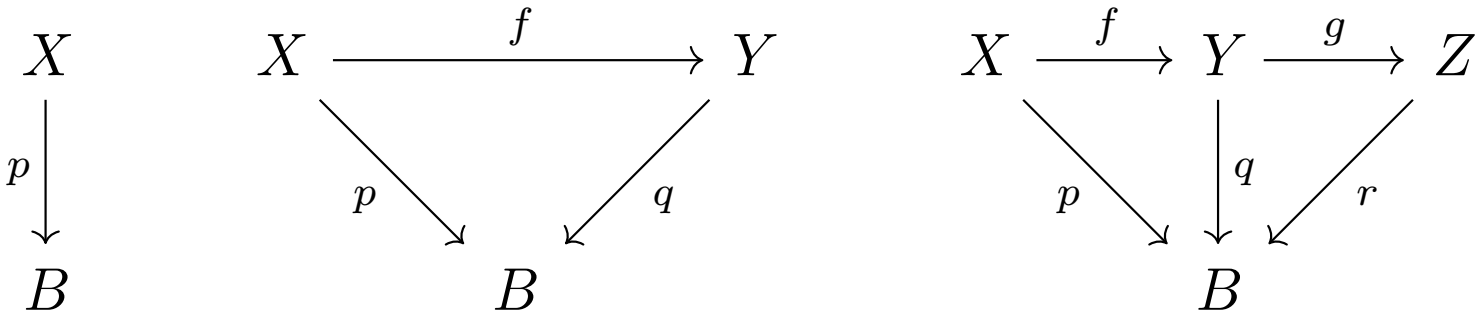
Auch aus topologischer Sicht ist das höchst interessant, etwa beim Satz vom Igel oder allgemein zur Parallelisierbarkeit. Ganz allgemein sind Bündel allgegenwärtig und werden vielfach genutzt. Daher will ich dieses Konzept erläutern, bevor wir dann speziell Überlagerungen untersuchen.

📖 Dale Husemoller: *Fibre Bundles.* Springer 1966, 1994.
Norman Steenrod: *The Topology of Fibre Bundles.* PUP 1951, 1999.

Was ist ein Bündel?

Ein **Bündel** (E, p, B) ist eine stetige Surjektion $p : E \to B$. Wir nennen E den **Totalraum**, B den **Basisraum** und $p : E \to B$ die **Bündelprojektion**. Zu jedem $x \in B$ ist $F_x := p^{-1}(x) \subseteq E$ die **Faser** über dem Basispunkt x.

Die Bündel über dem Basisraum B bilden die Kategorie $\mathtt{Bun}_B := \mathtt{Top}^{\downarrow}_B$:



(a) Objekte der Kategorie $\mathtt{Bun}_B$ sind die Bündel $p : X \to B$.

(b) Ein Morphismus $f : p \to q$ von $p : X \to B$ nach $q : Y \to B$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit der Eigenschaft $p = q \circ f$, d.h. f kommutiert mit den Bündelprojektionen, respektiert also die Fasern: f schickt $p^{-1}(x)$ nach $q^{-1}(x)$ über jedem Basispunkt $x \in B$.

(c) Die Verknüpfung in $\mathtt{Bun}_B$ ist die Verknüpfung in $\mathtt{Top}$.

Was ist ein Bündel?

Ein „Bündel“ $p : E \to B$ ist also zunächst also ein großspuriges Wort für stetige Surjektion. Ist das nur ein grandioser Etikettenschwindel?

Nun ja, tatsächlich recyclen wir dankbar die Begriffe der Topologie. Die Sichtweise ist jedoch umgekehrt, nicht vorrangig in Richtung $E \to B$ der Projektion, sondern vom Fußpunkt $x \in B$ zur Faser $F_x = p^{-1}(x) \subseteq E$. Genau diesen besonderen Blickwinkel betont die Wortwahl „Bündel“.

Die grundlegende Definition ist verblüffend einfach und elegant.
Die Sichtweise als „Räume über B“ codiert die grundlegende Struktur, diese können und werden wir im Folgenden erweitern und ausbauen.
Die Sprache der Kategorien ist wie immer erfreulich und hilfreich.

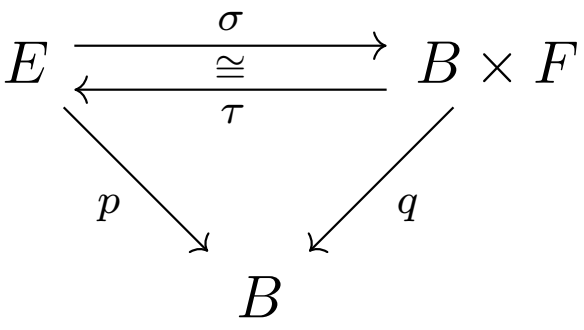
Manche Autor:innen nennen kurz E ein Bündel über B und lassen die Projektion $p : E \to B$ weg, wenn sie aus dem Zusammenhang hervorgeht. Das mag intuitiv erscheinen, verschweigt aber die Bündelprojektion! Dieser Missbrauch der Notation ist irreführend, denn p bestimmt die Räume E und B, nicht umgekehrt. Ich versuche ihn zu vermeiden.

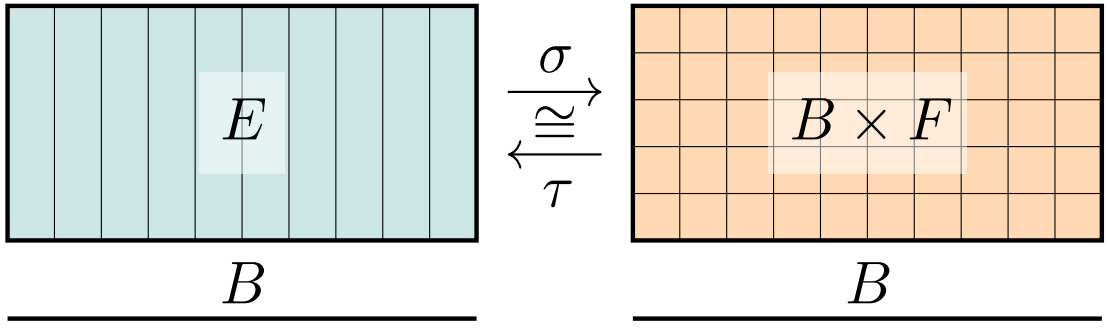
Was ist ein triviales Bündel?

Beispiel: Zur Basis B und Faser F haben wir das **Produktbündel**

$$q : B \times F \to B : (x, u) \mapsto x.$$

Eine **Trivialisierung** von p ist ein Bündelisomorphismus $(\sigma, \tau) : p \cong q$.





Wir nennen das Bündel $p : E \to B$ dann **trivialisierbar** oder kurz **trivial** mit Faser F. Anschaulich: Bis auf Homöomorphie sieht p genauso aus wie das Produktbündel $q : B \times F \to B : (x, u) \mapsto x$. Das Bündel p hat zunächst nur eine „horizontale“ Koordinate $x \in B$. Die Trivialisierung $(\sigma, \tau) : p \cong q$ stiftet zudem eine globale „vertikale“ Koordinate $u \in F$, wie gezeigt.

Was ist ein triviales Bündel?

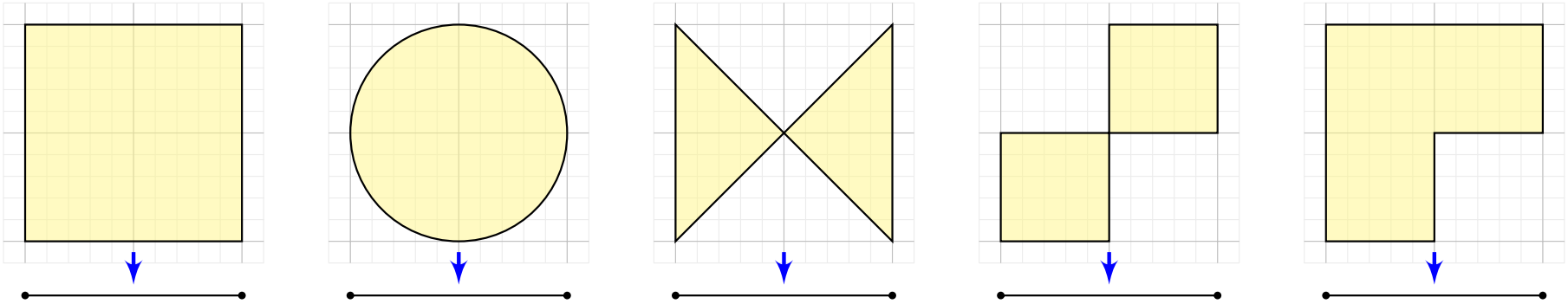
Genauer sagen wir, p ist **bündelisomorph** zum Produktbündel mit Faser F. Die hierzu geforderte **Bündeltrivialiserung** $(\sigma, \tau) : E \cong B \times F$ ist ein Homöomorphismus, der die beiden Projektionen p und q respektiert, also $q \circ \sigma = p$ erfüllt und (äquivalent dazu) $p \circ \tau = q$.

Die Homöomorphismen σ und τ sind zueinander invers. Manchmal ist die symmetrische Formulierung (σ, τ) bequem. Andermal brechen wir die Symmetrie und geben nur einen an, die **Bündelkarte** $\sigma : E \xrightarrow{\sim} B \times F$ oder die **Bündelkoordinaten** $\tau : B \times F \xrightarrow{\sim} E$, siehe folgende Beispiele.

Das Produktbündel q ist trivial, dank der trivialen Trivialisierung $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$. Die Frage, ob ein gegebenes Bündel $p : E \to B$ trivial ist oder nicht, ist oft schwierig und hochgradig nicht-trivial, siehe $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Das Bündel mag trivial sein, die Trivialisierungen sind es oft nicht!

Selbst das Produktbündel $q : B \times F \to B : (x, u) \mapsto x$ hat i.A. unendlich viele Trivialisierungen. Dies sind die Automorphismen $\tau : B \times F \xrightarrow{\sim} B \times F$ über B, das heißt $\tau(x, u) = (x, h_x(u))$ mit $h : B \to \mathrm{Homeo}(F) : x \mapsto h_x$. Die Sprechweise als Bündel ist sowohl intuitiv als auch präzise.

Welche Bündel sind trivial, welche nicht?



Die Graphik zeigt Bündel $p : E \to B$ über dem Intervall $B = [-1, 1]$, wobei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Teilraum ist und $p(x, y) = x$ die Bündelprojektion.

Aufgabe: Welche dieser Abbildungen $p : E \to B$ ist ein triviales Bündel?
(1) $E = [-1, 1]^2$ (2) $E = \mathbb{D}^2$ (3) $E = \{\, (x, y) \in [-1, 1]^2 : |y| \leq |x| \,\}$
(4) $E = [-1, 0]^2 \cup [0, 1]^2$ (5) $E = ([-1, 0] \times [-1, 1]) \cup [0, 1]^2$

🙂 Bündel sind wunderbar anschaulich. Idee und Definition sind dabei extrem allgemein und flexibel, daher treten Bündel nahezu überall auf. Die Sprache der Bündel hilft Ihnen, solche Situationen zu erkennen, Eigenschaften zu benennen, und passende Werkzeuge anzusetzen, hier vor allem der grundlegende Begriff der (lokalen) Trivialität.

Welche Bündel sind trivial, welche nicht?

Lösung: (1) Für $E = [-1,1]^2$ ist $p : E \to B$ ein Produktbündel, also trivial.

(2) Das Bündel $p : E \to B$ ist nicht trivial: Zwar ist $E = \mathbb{D}^2$ homöomorph zu einem Produkt $B \times [-1,+1]$, aber nicht als Bündelisomorphismus! Hindernis: Nicht alle Fasern von p sind untereinander homöomorph.

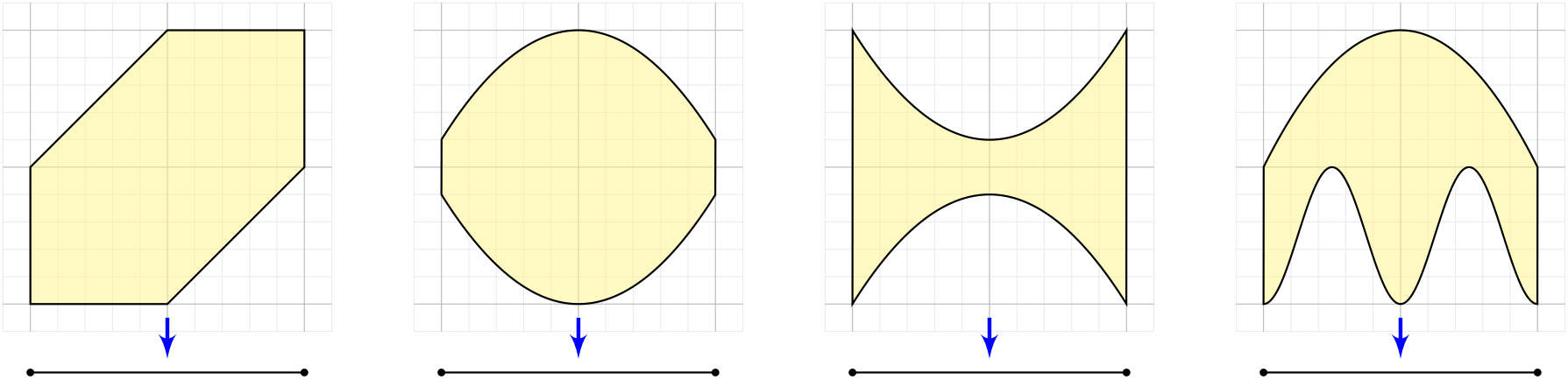
(3) Der Totalraum ist E ist nicht homöomorph zum Produkt $B \times [-1,1]$, denn der Punkt $(0,0)$ trennt E, doch kein Punkt trennt den Produktraum. Noch einfacheres Hindernis: Nicht alle Fasern von p sind homöomorph.

(4) Auch für $E = [-1,0]^2 \cup [0,1]^2$ ist p nicht trivial: Zwar sind alle Fasern Intervalle und untereinander homöomorph, aber E ist nicht homöomorph zum Produkt. Hindernis: Der Punkt $(0,0)$ trennt E. Alternativ siehe (5).

(5) Auch hier ist das Bündel $p : E \to B$ nicht trivial. Zwar ist der Totalraum E homöomorph zum Produkt $B \times [-1,+1]$, aber nicht als Bündelisomorphismus! Hindernis: Die Abbildung p ist nicht offen.

Übung: Jede Produktbündelprojektion $q : B \times F : (x,u) \mapsto x$ ist offen. Somit ist jedes lokal-triviale Bündel $p : E \to B$ eine offene Abbildung.

Kartesische Normalbereiche sind triviale Bündel.



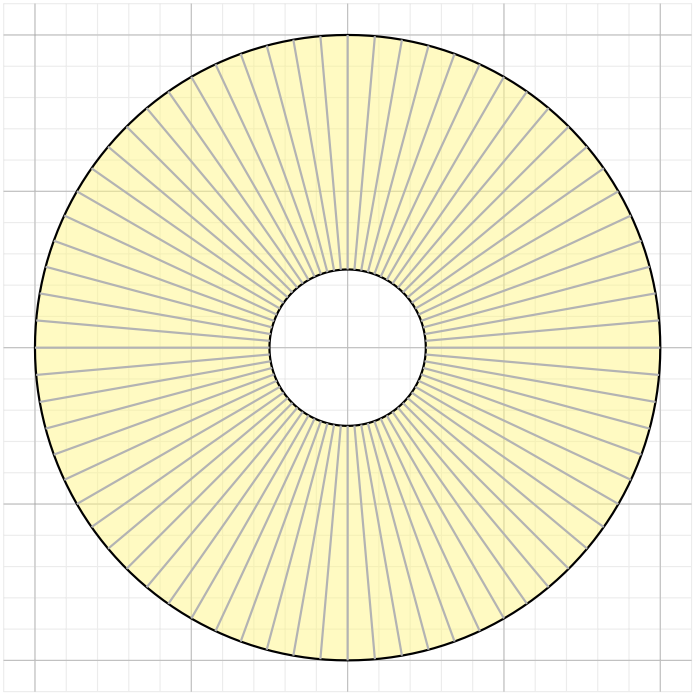
Sei $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und hierauf $g, h : B \to \mathbb{R}$ stetig mit $g < h$, also $g(x) < h(x)$ für alle $x \in B$. Dies definiert den **Normalbereich**

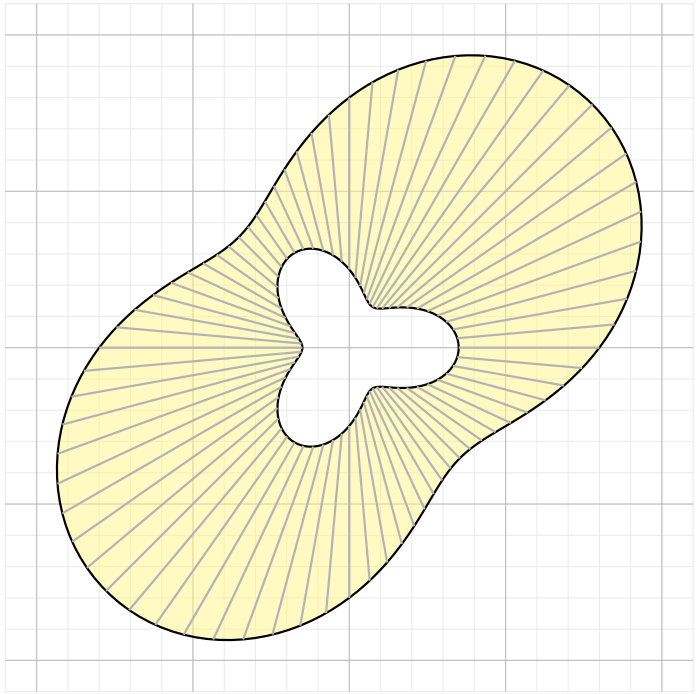
$$E = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B,\ g(x) \leq y \leq h(x) \,\}.$$

Aufgabe: Trivialisieren Sie das Bündel $p : E \to B : (x, y) \mapsto x$.

Lösung: Wir konstruieren den erforderlichen Bündelisomorphismus $(\tau, \sigma) : B \times [0, 1] \cong E$ durch $\tau(x, u) = (x, (1 - u)g(x) + uh(x))$ und $\sigma(x, y) = (x, (y - g(x))/(h(x) - g(x)))$, also faserweise affin-linear. Diese Abbildungen sind wohldefiniert, stetig da Komposition stetiger Abbildungen, zudem fasererhaltend gemäß $p \circ \tau = q$ und $q \circ h = p$, und schließlich zueinander invers, $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_E$ und $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{B \times [0,1]}$.

Sphärische Normalbereiche sind triviale Bündel.





☺ Dasselbe gelingt offen für $E = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B,\ g(x) < y < h(x)\,\}$ durch dieselbe faserweise affine Trivialisierung $(\tau, \sigma) : B \times]0,1[\cong E$.

☺ Ebenso für den Totalraum $E = \{\,rs \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{S}^1,\ g(s) \leq r \leq h(s)\,\}$ mit $g, h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ stetig und $0 < g < h$. Als Bündelprojektion betrachten wir hier $p : E \to \mathbb{S}^1 : x \mapsto x/|x|$. Übung: Dies ist ein triviales Bündel.

☺ Normalbereiche dienen in der Analysis zur Integration à la Fubini; man integriert erst über jede Faser, dann das Ergebnis über die Basis.

Die Nennung der Bündelprojektion ist wesentlich.

Aufgabe: Bestimmen Totalraum E und Basis B allein schon das gesamte Bündel $p : E \to B$? Oh, nein! Drastisches Gegenbeispiel: Nennen Sie unendlich viele, paarweise nicht-isomorphe Bündel $p_1, p_2, \ldots : E \to B$ mit gleichem Totalraum E und gleicher Basis B.

Lösung: Unter den vielen möglichen Beispielen hier ein einfaches: Zum Exponenten $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachten wir die komplexe Potenzabbildung $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$. Totalraum $E = \mathbb{S}^1$ und Basis $B = \mathbb{S}^1$ sind jeweils gleich, doch die Bündel $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sind paarweise verschieden. Warum? Die Faser $p_n^{-1}(x)$ hat genau n Elemente, daher gilt $p_k \ncong p_n$ für $k \neq n$.

☺ Dies sind Beispiele für Überlagerungen, also lokal-triviale Bündel mit diskreter Faser. Diese sind die Hauptdarsteller dieses Kapitels. Zur besseren Einordnung und zum umfassenderen Verständnis möchte ich zuerst den allgemeinen Kontext der Bündel diskutieren. Das schult unsere geometrische Anschauung und bietet ein reiches Repertoire an Beispielen, inklusiver vieler guter alter Bekannter.

Das Normalenbündel $N\mathbb{S}^n$ über der Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist trivial.

Aufgabe: Das Normalenbündel $N\mathbb{S}^n = \{\,(x,v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in x\mathbb{R}\,\}$ über der Sphäre $\mathbb{S}^n$ mit Projektion $p : N\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (x,v) = x$ ist trivial.

Lösung: Die kanonische Trivialisierung $(\sigma,\tau) : N\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ist hier gegeben durch $\tau(x,u) = (x, xu)$ und $\sigma(x,v) = (x, \langle x \mid v \rangle)$. Nachrechnen!

⚠ Ein triviales Bündel $p : E \to B$ bestimmt seine „typische“ Faser F nur bis auf Homöomorphie. Hierzu dient das folgende einfache Beispiel:

Aufgabe: Die radiale Retraktion $p : E = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n : x \mapsto |x|$ ist ein triviales Bündel. Trivialisieren Sie p mit $F_1 = \mathbb{R}_{>0}$ und mit $F_2 = \mathbb{R}$.

Lösung: (1) Wir haben die Trivialisierung $(\tau,\sigma) : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_{>0} \cong E$ mit Polarkoordinaten $\tau(s,r) = sr$ und Bündelkarte $\sigma(x) = (x/|x|, |x|)$.

(2) Alternativ haben wir die Trivialisierung $(\tau,\sigma) : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \cong E$ mit Polarkoordinaten $\tau(s,r) = s\,\mathrm{e}^r$ und Bündelkarte $\sigma(x) = (x/|x|, \ln|x|)$.

🙂 Der Quotient $q : E = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n : x \mapsto [x]$ hingegen ist ein nicht-triviales Bündel, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Der projektive Raum und sein tautologisches Geradenbündel

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, etwa $V = \mathbb{K}^{n+1}$, und $V^\sharp = V \setminus \{0\}$. Der projektive Raum $\mathbb{P}(V) = V^\sharp/\mathbb{K}^\times$ entsteht, indem wir Vektoren $u \sim v$ identifizieren, die dieselbe Gerade $u\mathbb{K} = v\mathbb{K}$ aufspannen. Der Quotient $q : V^\sharp \to \mathbb{P}(V)$ ist somit ein Bündel mit Basis $\mathbb{P}(V)$ und Totalraum $V^\sharp$. Die typische Faser ist die „Gerade“ $K^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jeweils ohne Null.

Vielleicht haben Sie sich anfangs gefragt, warum wir die Null immer ausschließen. Das ist für die Konstruktion wesentlich, damit die Geraden disjunkt werden, so wie dies für Äquivalenzklassen / Bahnen nötig ist. Können wir die Null zurückfügen und wirklich Geraden betrachten? Ja!

Beispiel: Über dem Basisraum $B = \mathbb{P}(V)$ betrachten wir den Totalraum $E = \{\, ([u], v) \in \mathbb{P}(V) \times V \,|\, v \in u\mathbb{K} \,\}$. Die Projektion $\gamma : E \to \mathbb{P}(V)$ mit $([u], v) \mapsto [u]$ ist das **tautologische Bündel** des projektiven Raums $\mathbb{P}(V)$: Die Faser über $[u] \in \mathbb{P}(V)$ ist der aufgespannte Vektorraum $u\mathbb{K} \leq V$.

Dieses Bündel codiert „tautologisch“ die intendierte Konstruktion des projektiven Raums $\mathbb{P}(V)$ als „Raum aller Geraden“ im Vektorraum V.

Das tautologische Geradenbündel ist nicht trivial.

Aufgabe: Das tautologische Geradenbündel $\gamma : E \to \mathbb{RP}^n$ ist nicht-trivial für $n \geq 1$, denn jeder Schnitt $s : \mathbb{RP}^n \to E$ von γ hat eine Nullstelle.

Lösung: Die Komposition $s \circ q : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n \to E$ ordnet jedem $x \in \mathbb{S}^n$ ein Paar $([x], v(x)) \in E$ mit $v(x) \in x\mathbb{R}$ zu, $v(x) = x \cdot t(x)$ mit $t(x) = \langle x \,|\, v(x) \rangle$. Die Funktion $t : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig und erfüllt $t(-x) = -t(x)$. Da $\mathbb{S}^n$ zshgd ist, existiert dank Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{S}^n$ mit $t(x) = 0$. QED

Aufgabe: Das Geradenbündel $\gamma : E \to \mathbb{RP}^1$ ist ein Möbius–Band.

Lösung: Jeden Punkt $([u], v) \in E$ des Totalraums können wir schreiben als $([(\cos\theta, \sin\theta)], t(\cos\theta, \sin\theta))$ mit den Koordinaten $\theta \in [0, \pi]$ und $t \in \mathbb{R}$. Diese Schreibweise ist fast eindeutig, bis auf die Identifizierung von $([(\cos 0, \sin 0)], +t(\cos 0, \sin 0))$ mit $([(\cos \pi, \sin \pi)], -t(\cos \pi, \sin \pi))$. Wir erhalten demnach E aus dem Produktraum $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ durch Identifikation von $(0, t)$ mit $(\pi, -t)$. Das ist ein Möbius–Band! QED

📖 John W. Milnor, James D. Stasheff: *Characteristic Classes.* Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press 1974, Theorem 2.1

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Aufgabe: Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ trivial?

Lösung: (0) Für $n = 0$ ist $p : T\mathbb{S}^0 = \mathbb{S}^0 \times \{0\} \to \mathbb{S}^0$ ein Produktbündel.

(1) Für $n = 1$ ist $p : T\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *kein* Produktbündel, aber trivialisierbar!

$$\tau : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} T\mathbb{S}^1 : (z, u) \mapsto (z, zi u)$$

Dies ist wohldefiniert dank $\langle z \,|\, zi u \rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{re}(\overline{z} \cdot zi \cdot u) = 0$. Anschaulich ist das vollkommen klar, zumindest im Nachhinein: Auf z steht zi senkrecht. Die Umkehrung von τ ist die Bündelkarte $\sigma(z, v) = (z, (zi)^{-1} v)$.

(2) Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ ist nicht trivial: Satz vom Igel!

Beweis: Angenommen es gäbe eine Trivialisierung $(\sigma, \tau) : T\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. Auf dem Produktbündel $q : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ ist $h : (x, u) \mapsto (x, u + e_1)$ stetig und erfüllt $q \circ h = q$. Auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ betrachten wir das Nullvektorfeld $r : \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2 : x \mapsto (x, 0)$. Dann ist $s := \tau \circ h \circ \sigma \circ r : \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$ stetig und erfüllt $p \circ s = \ldots = p \circ r = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^2}$. Dieses Vektorfeld s verschwindet nirgends, da $s(x) \neq r(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ gilt. Das widerspricht dem Satz vom Igel!

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Wörtlich genauso folgt, dass für jede gerad-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^4, \mathbb{S}^6, \dots$ das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^{2k} \to \mathbb{S}^{2k}$ nicht trivial ist: Gäbe es für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine Bündeltrivialisierung, so auch ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, und das widerspricht dem Satz vom Igel.

Ist $n = 2k - 1$ ungerade, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so existieren nirgends-verschwindende Vektorfelder $s : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n : x \mapsto (x, v(x))$, dank der Konstruktion

$$v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \mapsto (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Für $n = 1$ trivialisiert dies das Bündel $T\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, wie oben gesehen. Allgemein suchen wir möglichst viele Vektorfelder $s_1, \dots, s_\ell : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$, sodass über jedem Fußpunkt $x \in \mathbb{S}^n$ die Vektoren $v_1(x), \dots, v_\ell(x) \in T_x\mathbb{S}^n$ linear unabhängig sind. Im Idealfall $\ell = n$ erhalten wir in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ eine Basis $v_1(x), \dots, v_n(x)$ von $T_x\mathbb{S}^n$; dies trivialisiert $T\mathbb{S}^n$, und die Sphäre $\mathbb{S}^n$ heißt **parallelisierbar**. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{S}^n$ parallelisierbar?

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Beispiel: Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ wird parallelisiert durch

$$s(x) = (x, v(x)) \quad \text{mit} \quad v(x_1, x_2) = (-x_2, x_1).$$

Geometrisch betrachtet ist dies eine Rotation um eine Vierteldrehung; algebraisch entspricht dies der Multiplikation mit i in $\mathbb{C}$. Ebenso wird $\mathbb{S}^1$ parallelisiert durch jedes Vektorfeld $\tilde{s}(x) = (x, g(x)v(x))$ mit $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^*$.

Beispiel: $\mathbb{S}^3$ ist parallelisierbar durch

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3), \\ v_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_3, x_4, x_1, -x_2), \\ v_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1). \end{aligned}$$

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-$j
j	j	$-$k	$-e$	i
k	k	j	$-$i	$-e$

Diese Konstruktion entspringt den Quaternionen $\mathbb{H}$: Wir identifizieren $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$ vermöge $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 e + x_2 \mathrm{i} + x_3 \mathrm{j} + x_4 \mathrm{k}$. Obige Tabelle definiert die Multiplikation, assoziativ, nullteilerfrei. Die orthogonalen Vektorfelder v_1, v_2, v_3 entsprechen der Linksmultiplikation mit $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$.

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Beispiele: $\mathbb{S}^7$ ist parallelisierbar durch

$$\begin{aligned}
v_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_2,x_1,-x_4,x_3,-x_6,x_5,-x_8,x_7),\\
v_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_3,x_4,x_1,-x_2,-x_7,-x_8,x_5,x_6),\\
v_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_4,-x_3,x_2,x_1,-x_8,x_7,-x_6,x_5),\\
v_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_5,x_6,x_7,x_8,x_1,-x_2,-x_3,-x_4),\\
v_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_6,-x_5,x_8,-x_7,x_2,x_1,x_4,-x_3),\\
v_7(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_7,-x_8,-x_5,x_6,x_3,-x_4,x_1,x_2),\\
v_8(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_8,x_7,-x_6,-x_5,x_4,x_3,-x_2,x_1).
\end{aligned}$$

Diese Konstruktion entspringt den Oktaven $\mathbb{O}$ (B4н). Wir identifizieren dazu $\mathbb{R}^8 \xrightarrow{\sim} \mathbb{O}$ vermöge $(x_1,\dots,x_8) \mapsto x_1e_1 + \cdots + x_8e_8$. Die orthogonalen Vektorfelder $v_2,\dots,v_8$ entsprechen der Linksmultiplikation mit $e_2,\dots,e_8$.

Übung: Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ durch die angegebenen Vektorfelder parallelisiert werden. Nutzen Sie, dass $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ nullteilerfrei sind.

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Wir kennen nun die Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ und können diese für $n = 0, 1, 3, 7$ parallelisieren. Dies führt uns zu der Frage, welche Sphären parallelisierbar sind, über die klassischen Beispiele $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$ hinaus. Das sieht man, ich betone es gern, den Bündeln keinwegs direkt an.

Die gerade-dimensionalen Sphäre sind klar nach dem Satz vom Igel. Die ersten offenen Fälle sind demnach die Sphären $\mathbb{S}^5, \mathbb{S}^9, \mathbb{S}^{11}, \mathbb{S}^{13}, \dots$. Diese erweisen sich tatsächlich als nicht parallelisierbar, doch ein Hindernis ist zunächst keineswegs offensichtlich!

Heinz Hopf zeigte 1940 mit der Kohomologie der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$, dass die Parallelisierbarkeit von $\mathbb{S}^n$ höchstens für $n = 2^k - 1$ möglich ist. Dies war ein erster phänomenaler Erfolg, der die meisten Fälle negativ beantwortete. Eine explizite Konstruktion in den verbleibenden Fällen $n = 15, 31, 63, \dots$, analog zur obigen für $n = 0, 1, 3, 7$, gelang jedoch nicht.

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Die abschließende Antwort gaben 1958 Michel Kervaire und John Milnor dank dem kurz zuvor bewiesenen Periodizitätssatz von Raoul Bott. Damit kommt eine klassische Frage zu ihrem würdigen Abschluss:

Satz J5L: Bott–Milnor 1958, Kervaire 1958

Folgende Aussagen gelten nur in Dimension $n = 1, 2, 4, 8$:
(a) Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist eine reelle Divisionsalgebra.
(b) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist parallelisierbar.
(c) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist ein Hopf–Raum.

📖 Heinz-Dieter Ebbinghaus *et al*: *Zahlen.* Springer 1992. Das Kapitel „Divisionsalgebren und Topologie“ von Friedrich Hirzebruch stellt die mathematischen Grundideen und ihre historische Entwicklung dar.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektorfelder

Allgemeiner als die Parallelisierbarkeit stellt sich die Frage: Wie viele Vektorfelder $s_1, \dots, s_k : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ sind möglich, sodass $s_1(x), \dots, s_k(x)$ linear unabhängig sind in jedem Punkt $x \in n$? Da jeder Tangentialraum $T_x\mathbb{S}^n$ Dimension n hat, gilt $0 \leq k \leq n$. Im Falle $k = n$ erhalten wir in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ eine Basis $s_1(x), \dots, s_n(x)$ von $T_x\mathbb{S}^n$, damit wird $\mathbb{S}^n$ parallelisiert. Durch explizite Konstruktion konnten Johann Radon 1922 und Adolf Hurwitz 1923 die folgende untere Schranke zeigen:

Satz J5M: Radon 1922, Hurwitz 1923

Sei $n = u2^{4a+b}$ mit $u \in 2\mathbb{N} + 1$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann existieren mindestens $k = 8a + 2^b - 1$ linear unabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$.

Für ungerade n gilt $u = n$ und $a = b = 0$ und so ergibt sich hier die Zahl 0. Dies entspricht dem Satz vom Igel, denn auf $\mathbb{S}^{n-1}$ hat jedes Vektorfeld eine Nullstelle. Demnach ist hier $k = 0$ der *exakte* Wert. Darüber hinaus sind obere Schranken und damit Hindernisse notorisch schwierig.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektorfelder

Für gerade n haben wir dank Radon–Hurwitz die folgenden unteren Schranken, die die Parallelisierbarkeit der Sphären $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ beinhalten:

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
u	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	11	3	13	7	15	1
a	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
b	1	2	1	3	1	2	1	0	1	2	2	3	1	2	1	1
$8a + 2^b - 1$	1	3	1	7	1	3	1	8	1	3	1	7	1	3	1	9

Auch hier stellt sich die Frage, ob man diese Werte noch verbessern kann. Sie blieb lange unbeantwortet. Die obigen Werte sind tatsächlich optimal, wie Frank Adams 1962 schließlich beweisen konnte:

Satz J5N: Adams 1962

Sei $n = u2^{4a+b}$ mit $u \in 2\mathbb{N}+1$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \{0,1,2,3\}$. Dann existieren höchstens $k = 8a + 2^b - 1$ linear unabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$.

Was ist ein lokal-triviales Bündel?

Globale Trivialisierung ist meist zu viel verlangt, lokal genügt oft. Wir wollen also Bündel lokalisieren, und dies gelingt ganz einfach:

Sei $p : E \to B$ ein Bündel. Über $B' \subseteq B$ haben wir $E' := p^{-1}(B')$ und somit das **eingeschränkte Bündel** $p|B' := p^{B'}_{E'} : E' \to B'$.

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f=\mathrm{inc}^E_{E'}} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p'=p|U} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{g=\mathrm{inc}^B_{B'}} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Das ist ein Spezialfall der **Zurückziehung** (engl. *pull back*): Sei $g : B' \to B$ eine beliebige stetige Abbildung. Wir können jedes Bündel $p : E \to B$ zurückziehen zu einem Bündel $g^*p := p' : E' \to B'$. Dieses ist definiert durch den Totalraum $E' = \{\, (b', e) \in B' \times E \mid g(b') = p(e) \,\}$ mit der Bündelprojektion $p' : E' \to B' : (b', e) \mapsto b'$. Über $g : B' \to B$ erhalten wir den Bündelmorphismus $(f, g) : p' \to p$ mit $f : E' \to E : (b', e) \mapsto e$.
Übung: Im Falle $g = \mathrm{inc}^B_U$ sind g^*p und $p|U$ kanonisch isomorph.

Was ist ein lokal-triviales Bündel?

Aufgabe: Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist trivial über $U \subsetneq \mathbb{S}^n$.

☺ Das ist eine grundlegende Konstruktion der Differentialgeometrie: Für jede glatte Mfkt M ist das Tangentialbündel $TM \to M$ lokal-trivial.

Lösung: Nach Drehung gelte $U \ni (0, \dots, 0, 1) =: N$. Wir nutzen die vertraute und stets hilfreiche stereographische Projektion (A1L):

$$f : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)/(1 - x_{n+1}),$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\} : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (2y_1, \dots, 2y_n, |y|_2^2 - 1)/(|y|_2^2 + 1).$$

Zu $x \in U$ und $y = f(x)$ haben wir $g'(y) : T_y\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} T_x\mathbb{S}^n$: Die Ableitung $g'(y)$ ist ein linearer Isomorphismus. Wir erhalten die Trivialisierung

$$\tau : U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} TU : (x, u) \mapsto (x, g'(f(x))u).$$

Hier ist $TU = p^{-1}(U) = \{\, (x, v) \in U \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid v \rangle = 0 \,\}$ der Totalraum des eingeschränkten Tangentialbündels $p|U : TU \to U$. Das Bündel p lässt sich (für $n \neq 0, 1, 3, 7$) nicht global trivialisieren, doch lokal gelingt es!

Was ist ein lokal-triviales Bündel?

Sei $p : E \to B$ ein Bündel. Ein **Bündelatlas** $\mathcal{A} = (\tau_i)_{i \in I}$ mit Faser F besteht aus lokalen Trivialisierungen $\tau_i : U_i \times F \xrightarrow{\sim} p|U_i$ für $i \in I$ über einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ des Basisraums B.

Existiert solch ein Atlas, so nennen wir das Bündel $p : E \to B$ **lokal-trivial** oder ein **Faserbündel** über B mit Faser F.

Beispiel: Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist lokal-trivial mit $F = \mathbb{R}^n$. Wir haben oben lokale Trivialisierungen $\tau_i : U_i \times F \xrightarrow{\sim} p|U_i$ konstruiert. Daraus können wir einen Atlas bilden, schon zwei Karten genügen. Mit einer einzigen Karte gelingt es nur für $n = 0, 1, 3, 7$.

Über jedem Punkt $x \in B$ ist die Faser $F_x = p^{-1}(x)$ homöomorph zu F: Lokal, für $x \in U_i$, erhalten wir $\tau_{i,x} : F \cong \{x\} \times F \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x) = F_x$. Wir nennen F die **Standardfaser** und schreiben kurz $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$.

Bei einem **$\mathbb{R}$–Vektorraumbündel** $p : E \to B$ tragen F und jede Faser F_x die Struktur eines $\mathbb{R}$–Vektorraumes, und jede Trivialisierung τ_i ist faserweise ein $\mathbb{R}$–Vektorraumisomorphismus $\tau_{i,x} : F \xrightarrow{\sim} F_x$.

Was ist ein lokal-triviales Bündel?

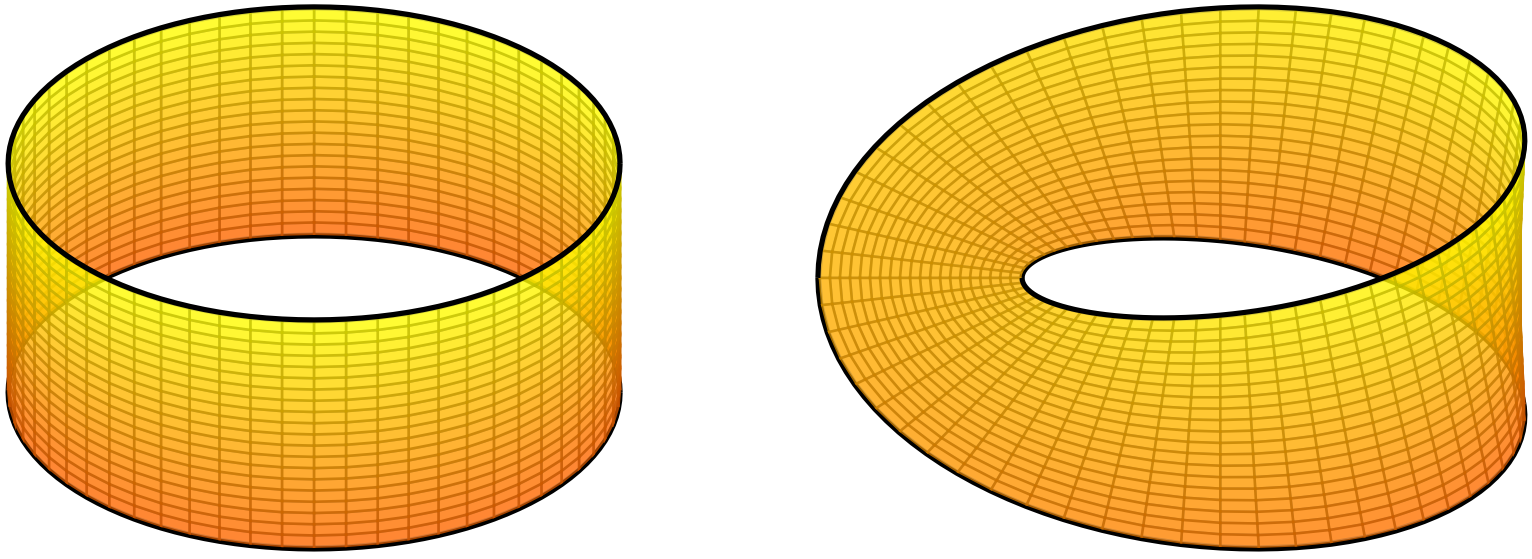
Für Indizes $i, j \in I$ setzen wir $U_{ij} = U_{ji} := U_i \cap U_j \subseteq B$ und erhalten hierüber den **Kartenwechsel** $t_{ij} := (\tau_j|_{U_{ji}})^{-1} \circ (\tau_i|_{U_{ij}}) : U_{ij} \times F \xrightarrow{\sim} U_{ji} \times F$. Punktweise über $x \in U_{ij}$ wird die Faser demnach transformiert durch den Homöomorphismus $t_{ij,x} : F \cong \{x\} \times F \xrightarrow{\sim} \{x\} \times F \cong F$.

Oft trägt die Standardfaser F zusätzliche Struktur, sie ist zum Beispiel ein $\mathbb{R}$–Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, evtl. orientiert oder mit Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ etc. Wir wollen, dass diese Struktur bei Kartenwechseln erhalten bleibt! Nur so können wir zusätzliche Struktur kartenunabhängig nutzen.

Dies codieren wir durch die **Strukturgruppe** $G \subseteq \mathrm{Homeo}(F)$ der erlaubten Koordinatenwechsel, etwa $G = \mathrm{GL}_n \mathbb{R}, \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}, \mathrm{SO}_n \mathbb{R}$ etc. Ein G–Bündelatlas $\mathscr{A} = (\tau_i)_{i \in I}$ respektiert die Strukturgruppe wie folgt: Zu je zwei Indizes $i, j \in I$ und für jeden Punkt $x \in U_{ij}$ gilt $\tau_{ij,x} \in G$.

Beispiel: Für $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ konstruieren wir oben den Atlas $\mathscr{A} = (\tau_0, \tau_1)$ mit Faser $\mathbb{R}^n$. Dies ist ein glatter $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$–Bündelatlas, orientiert sogar ein $\mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}$–Bündelatlas. Wir erkennen daran ein allgemeines Prinzip: Wir *reduzieren* die Strukturgruppe und *erhöhen* die erhaltene Struktur.

Beispiel: getwistete Produkte $\mathbb{S}^1 \ltimes F$



Sei (F, α) ein Raum F mit Homöomorphismus $\alpha : F \xrightarrow{\sim} F$. Im Raum $\mathbb{R} \times F$ identifizieren wir $(x, y) \sim (x + k, \alpha^k(y))$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times F$ und $k \in \mathbb{Z}$; der Quotient ist das **getwistete Produkt** $\mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} F := (\mathbb{R} \times F)/_\sim$ mit Twist α.

(1) Für $F = \mathbb{R}$ und $\alpha = +\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ erhalten wir den Zylindermatel: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$
(2) Für $F = \mathbb{R}$ und $\alpha = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ erhalten wir das Möbius–Band: $\mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} \mathbb{R}$
(3) Für $F = \mathbb{S}^1$ und $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ erhalten wir den Torus: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
(4) Für $F = \mathbb{S}^1$ und $\alpha = \mathrm{conj}$ erhalten wir die Kleinsche Flasche: $\mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} \mathbb{S}^1$

Beispiel: getwistete Produkte $\mathbb{S}^1 \ltimes F$

Aufgabe: Die Projektion $p : \mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} F \to \mathbb{S}^1 : [x, y] \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$ ist wohldefiniert, stetig, lokal-trivial, für $F = \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ ein Vektorraumbündel.

Beispiel: getwistete Produkte $\mathbb{S}^1 \ltimes F$

🙂 Zylinder und Möbius–Band sind dank dieser Konstruktion sogar Vektorraumbündel. Diese wertvolle Struktur ist aus der üblichen Graphik nicht sofort ersichtlich, jetzt schon. *Once you see it, you cannot unsee it!*

Der Zylinder $Z \to \mathbb{S}^1$ ist trivial über ganz $\mathbb{S}^1$. Das Möbius–Band $M \to \mathbb{S}^1$ hingegen ist nicht trivial, nur lokal-trivial. In beiden ist die Mittelachse $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow Z$ bzw. $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$ ein starker Deformationsretrakt. Wir sehen jetzt den tieferen Grund: Dies gilt ganz allgemein für Vektorraumbündel!

Aufgabe: Sei $q : E \to B$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraumbündel. Über jedem $x \in B$ sei $A_x \subseteq F_x$ sternförmig zu 0. Wir erhalten so das Teilbündel $p : A \to B$ mit dem Totalraum $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ und dem Nullschnitt $s : B \to A : x \mapsto (x, 0)$ Zeigen Sie, dass $(s, p) : B \rightleftarrows A$ ein starker Deformationsretrakt ist.

Lösung: Wir haben $p \circ s = \mathrm{id}_B$. Zudem haben wir $s \circ p \simeq \mathrm{id}_A$ dank der faserweise affinen Homotopie $H : [0,1] \times A \to A$ mit $H(t; (x, v)) = (x, tv)$. Dies ist zunächst nur lokal in Karten gegeben, doch global wohldefiniert, da die Vektorraumstruktur bei Kartenwechseln respektiert wird!

Bündel als getwistete Produkte

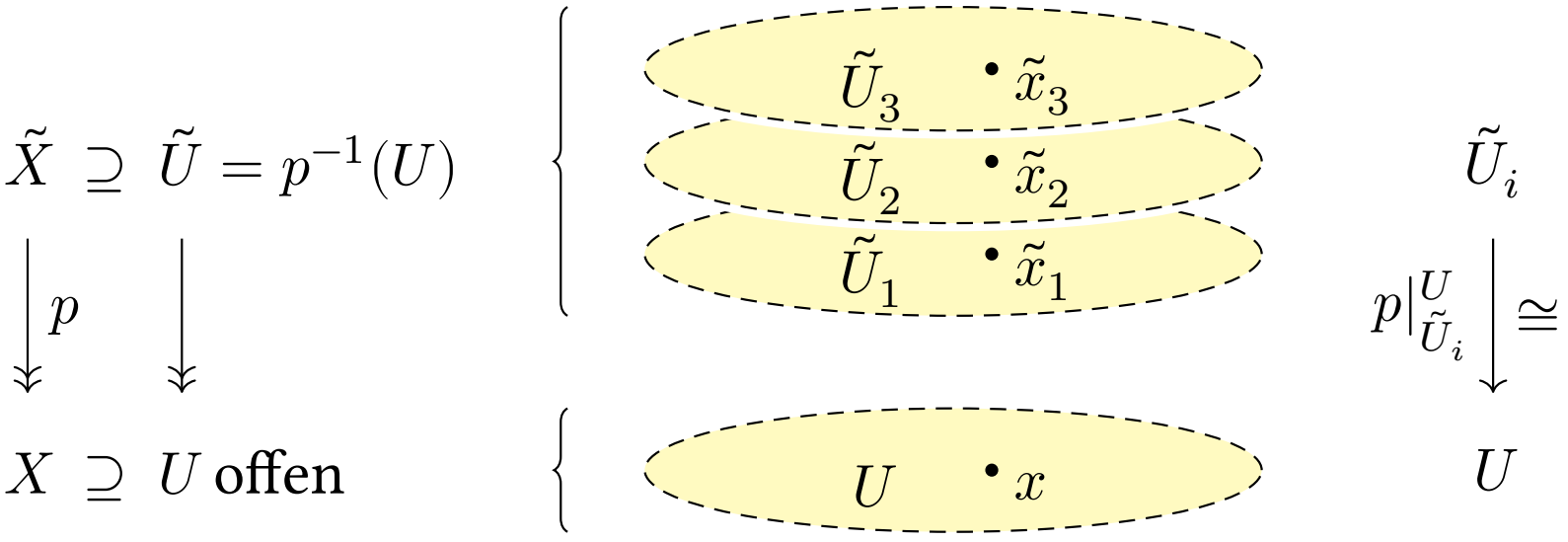
Auch allgemein wollen wir uns ein Faserbündel $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ als ein getwistetes Produkt $E = B \ltimes F$ vorstellen: Lokal ist das Bündel trivial, aber global werden diese Bausteine nicht-trivial miteinander verklebt. Der Twist kann hierbei noch sehr viel komplizierter ausfallen, als das einfachste Beispiel $B = \mathbb{S}^1$ vorerst erahnen lässt.

Bündel sind faszinierende Objekte und ein mächtiges Werkzeug: Man kann einen topologischen Raum B studieren durch die Bündel über B. Ein wichtiger Spezialfall sind Überlagerungen (Kapitel M). Dies sind gerade die lokal-trivialen Bündel $p : E \to B$ mit diskreter Faser F. Dieser Fall ist eng mit der Fundamentalgruppe verwoben (Kapitel L).

Zwischen der Gruppe $\pi_1(B, b_0)$ und Überlagerungen $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ besteht eine wunderschöne Dualität, die Galois–Korrespondenz. Dieses Zusammenspiel setzt sich für die höheren Homotopiegruppen π_n fort zur langen exakten Homotopiesequenz von Faserbündeln.

Was ist eine Überlagerung?

Jede **Überlagerung** $p : \tilde{X} \to X$ sieht lokal aus wie ein Pfannkuchenstapel:



Die Abbildung illustriert die Idee. Diese wollen wir nun formalisieren.

Eine **triviale Überlagerung** ist $q : X \times F \to X : (x, y) \mapsto x$ mit F diskret, wobei der überlagerte Raum X beliebig und die Faser $F \neq \emptyset$ diskret ist.

☺ Wesentlich flexibler und interessanter sind **lokal-triviale** Abbildungen $p : \tilde{X} \to X$; hier verlangen wir nur, dass p lokal homöomorph zu einer trivialen Überlagerung ist. Das präzisieren wir in folgender Definition.

Was ist eine Überlagerung?

Definition M1A: Überlagerung

Sei $p : \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ eine stetige Surjektion topologischer Räume.

(0) Eine offene Menge $U \subseteq X$ wird durch p **trivial überlagert**, falls gilt: $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ ist die disjunkte Vereinigung offener Mengen $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}$, und jede Einschränkung $p_i := p|^{U}_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to U$ ist ein Homöomorphismus.

Wir nennen p **trivial über** U; mit $U = X$ heißt p **trivial** (über ganz X).

(1) Wir nennen $p : \tilde{X} \to X$ eine **Überlagerung**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, die von p trivial überlagert wird.

Es gibt dann eine Überdeckung $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ durch offene Mengen $U \subseteq X$ mit p trivial über U. Wir sagen auch kurz, p ist **lokal-trivial über** $(X, \mathcal{U})$.

Wir nennen $\tilde{X}$ den **überlagernden Raum**, X den **überlagerten Raum**, p die **überlagernde Abbildung** und $p^{-1}(x) \subseteq \tilde{X}$ die **Faser** über $x \in X$.

Die **Blätterzahl** $\sharp p^{-1}(x) = \sharp I$ ist lokal konstant, sogar global falls X zshgd. Die Überlagerung p heißt n**–blättrig**, falls $\sharp p^{-1}(x) = n$ für alle $x \in X$ gilt.

Überlagerungen: erste Eigenschaften

Bemerkung: Für jede stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ sind äquivalent:
p ist (1) eine 1–blättrige Überlagerung und (2) ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Die Stetigkeit von $p : \tilde{X} \to X$ muss in M1A nicht gefordert werden: Dank lokaler Trivialität ist p ein lokaler Homöomorphismus. Somit ist p insbesondere stetig und offen und eine Identifizierung (E2L).

Bemerkung: Für jede stetige Abbildung $p : E \to B$ sind äquivalent:
(1) p ist ein Faserbündel mit diskreter Faser F.
(2) p ist eine Überlagerung mit Blätterzahl $\sharp F$

Bemerkung: Ein Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn *jede* Überlagerung $\tilde{X} \to X$ konstante Blätterzahl hat.

Bemerkung: Wird eine offene Menge $U \subseteq X$ durch p trivial überlagert, so ist für jedes $x \in U$ die Faser $p^{-1}(x) = \bigsqcup_{i \in I} \{\tilde{x}_i\}$ diskret.

Übung: Wenn Sie üben wollen, beweisen Sie diese Bemerkungen.

Überlagerungen: erste Eigenschaften

Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist eine besonders schöne und einfache Abbildung topologischer Räume. Sie kennen und nutzen schon lange typische Beispiele wie Polarkoordinaten, dazu gleich mehr.

Wir fordern hier von Anfang an, dass p surjektiv ist. Über einem zshgden Basisraum X ist die Blätterzahl konstant. Wäre p nicht surjektiv, so bleibt nur die leere Abbildung $p : \emptyset \to X$. Diese könnten wir zwar zulassen, doch das machte die Formulierung mancher Sätze schwerfälliger.

Warnung: Die Begriffe *Überlagerung* und *Überdeckung* treten hier nebeneinander auf, haben aber rein gar nichts gemeinsam. In englischen Texten heißt 'Überlagerung' *covering map* oder kurz *covering*, und 'Überdeckung' heißt *cover* oder leider auch *covering*. Verwechslungen lassen sich dann nur aus dem Kontext klären. Auf französisch sind *revêtement* und *recouvrement* unmissverständlich. Auf deutsch werden wir *Überlagerung* und *Überdeckung* fein säuberlich auseinanderhalten.

Überlagerungen: erste Beispiele

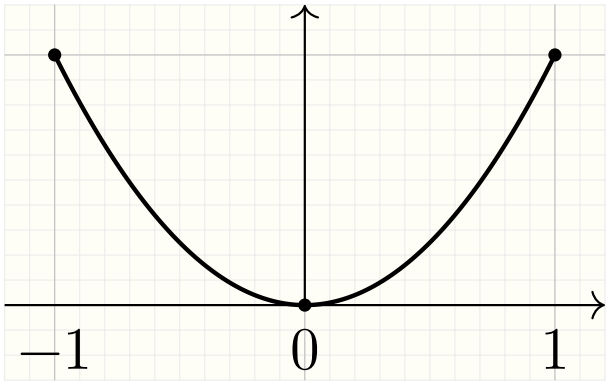
Aufgabe: Ist $p : [0,1] \times \{0,1\} \to [0,1] : (x,y) \mapsto x$ eine Überlagerung?

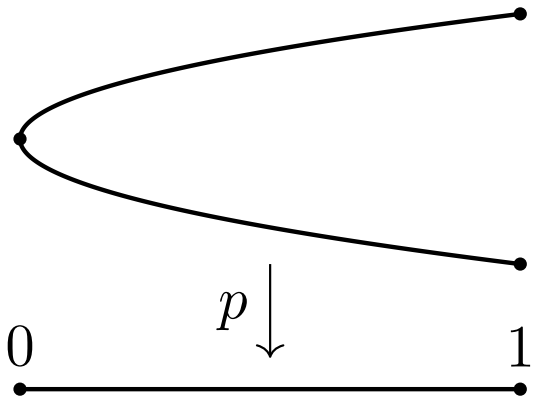
Lösung: Ja, sogar global trivial: Über $U = [0,1]$ liegt $p^{-1}(U) = \tilde{U}_0 \sqcup \tilde{U}_1$ mit $\tilde{U}_i = U \times \{i\}$, beide offen, und jede der beiden Einschränkungen von p zu $p_i : \tilde{U}_i \to U : (x,y) \mapsto x$ ist ein Homöomorphismus.

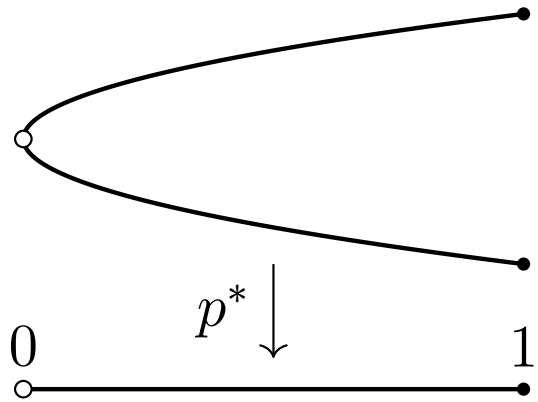
Aufgabe: Ist $p : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] : (x,y) \mapsto x$ eine Überlagerung?

Lösung: Nein, die Faser $p^{-1}(x) = \{x\} \times [0,1]$ ist nicht diskret.
Gemäß Definition liegt bei jeder Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ über jedem Punkt $x \in X$ jedes Urbild $\tilde{x}_i$ diskret in der Faser $p^{-1}(x)$, denn die offene Umgebung $\tilde{U}_i$ schneidet nicht $\tilde{U}_j$ für $j \neq i$, enthält also nicht $\tilde{x}_j$.

Die reelle Quadratabbildung







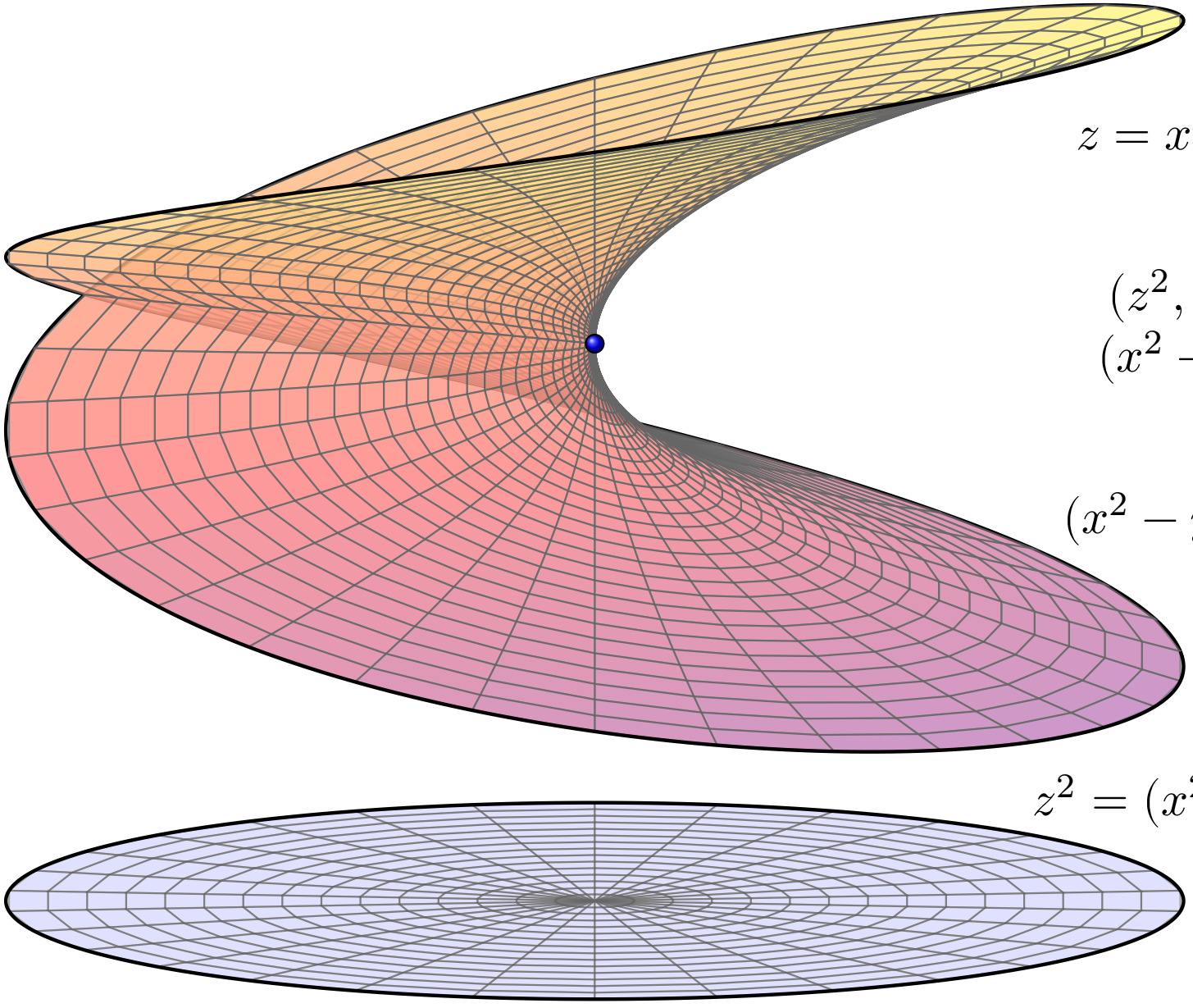
Aufgabe: Ist $p : Y = [-1,1] \to X = [0,1] : x \mapsto x^2$ eine Überlagerung? Über welchen (offenen) Teilmengen ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ trivial?

⚠ Für die offene Teilmenge $U = [0,1]$ in X ist das Urbild $V = [-1,1]$ offen in Y und homöomorph zu U. Doch Vorsicht, irgendein *beliebiger* Homöomorphismus $V \xrightarrow{\sim} U$ genügt nicht zur lokalen Trivialisierung, er muss durch die Einschränkung von p zu $p|_V^U$ gestiftet werden!

☹ Das ist hier unmöglich, denn $\sharp p^{-1}(0) = 1$, aber $\sharp p^{-1}(x) = 2$ für $x > 0$.

☺ Daher ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ *keine* Überlagerung. Immerhin ist p trivial über jeder Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}_{>0}$: Hier gilt $p^{-1}(U) = V_- \sqcup V_+$ mit $(p_\pm, r_\pm) : V_\pm \cong U$ mit $p_\pm(x) = x^2$ und den beiden Zweigen $r_\pm(x) = \pm\sqrt{x}$.

Die komplexe Quadratabbildung



$$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{C}$$

$$\downarrow$$

$$(z^2, z) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$$

$$(x^2 - y^2, 2xy, x, y)$$

$$\downarrow$$

$$(x^2 - y^2, 2xy, x) \in \mathbb{R}^3$$

$$\downarrow p$$

$$z^2 = (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{D}^2$$

Die komplexe Quadratabbildung

Aufgabe: Ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ eine Überlagerung? und $p^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$? Finden Sie maximale offene Teilmengen U, über denen p trivial ist.

Lösung: (1) Die Abbildung p ist stetig und surjektiv, aber nicht lokal-trivial um 0, denn $\sharp p^{-1}(0) = 1$ und $\sharp p^{-1}(z) = 2$ für $z \neq 0$.

(2) Die Abbildung p^* ist eine Überlagerung: Sie ist trivial über jeder geschlitzten Ebene $U_\Theta = \mathbb{C} \setminus \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\,\mathbb{R}_{\leq 0}$ mit $\Theta \in \mathbb{R}$: Jedes Element $z \in U_\Theta$ schreibt sich eindeutig $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \,]\Theta - \pi, \Theta + \pi[$. Dazu gehören die beiden Wurzelzweige $r_{\Theta,\pm}(z) = \pm\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}$.

Allgemein: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ keine Überlagerung, wohl aber $p_n^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* : z \mapsto z^n$, dank der n Wurzelzweige,

$$r_\Theta : U_\Theta \times \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} p_n^{-1}(U_\Theta) : (z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, k) \mapsto \rho^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/n}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}\,.$$

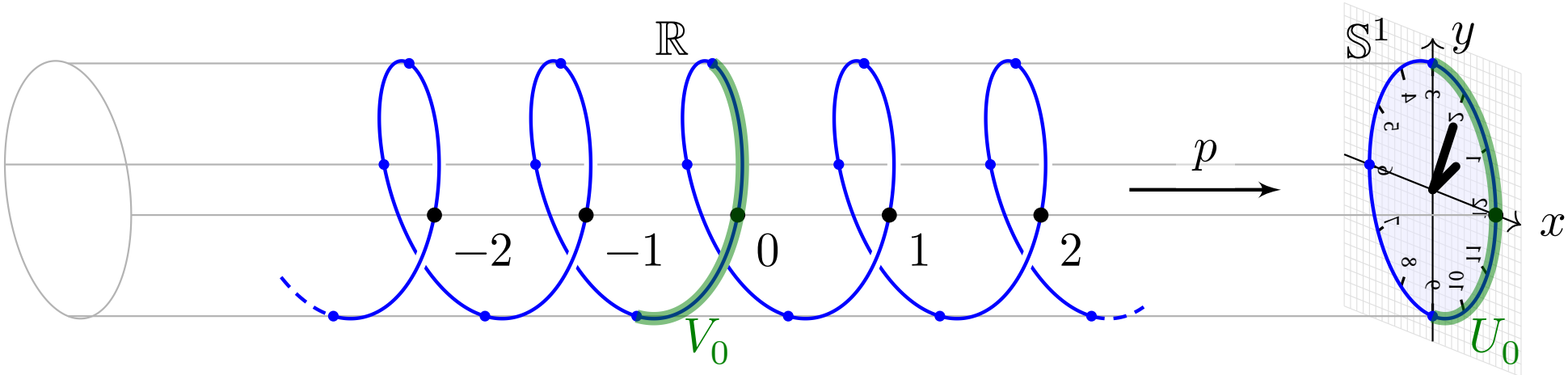
Hier ist $C^* = \bigcup_{\Theta\in\mathbb{R}} U_\Theta$ eine offene Überdeckung und p_n ist trivial über jeder dieser offenen Mengen U_Θ dank der obigen Trivialisierung.

🙂 Das drängt uns zu der Frage, wie Polarkoordinaten und die komplexe Exponentialfunktion hier als Überlagerungen genutzt werden…

Polarkoordinaten: die Mutter aller Überlagerungen

Aufgabe: Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ ist eine Überlagerung.

☺ Die folgende Skizze macht die Aussage anschaulich plausibel.
Wie immer lohnt es sich, alle nötigen Daten sorgsam zu explizieren.



Lösung: Global ist „$p^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \ln(z)$“ grober Unfug! Dies gelingt lokal:

$$V_0 := \,]-1/4, 1/4[, \qquad U_0 := \{\,(x,y) \in \mathbb{S}^1 \,|\, x > 0\,\},$$
$$p_0 : V_0 \xrightarrow{\sim} U_0 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \qquad s_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 : (x,y) \mapsto \tfrac{1}{2\pi} \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right).$$

Wir erhalten die lokale Trivialisierung $(\tau_0, \sigma_0) : U_0 \times \mathbb{Z} \cong p^{-1}(U_0)$
mit $\tau_0(z,k) = s_0(z) + k$ und $\sigma_0(t) = (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \lfloor t \rceil)$.

Polarkoordinaten: die Mutter aller Überlagerungen

🙂 Ausgehend von $\theta = 0$ gilt dies ebenso für jeden Winkel $\theta \in \mathbb{R}$:
Wir verschieben V_0 um $\theta \in \mathbb{R}$ zu $V_\theta := V_0 + \theta = \left]\theta - 1/4, \theta + 1/4\right[$ und drehen U_0 um $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{S}^1$ zu $U_\theta := U_0 \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta} = \{\, z \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{re}(z\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\theta}) > 0 \,\}$.
Hier gilt $(p_\theta, s_\theta) : V_\theta \cong U_\theta$ mit $p_\theta(t) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}$ und $s_\theta(z) = s_0(z \cdot \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\theta}) + \theta$.

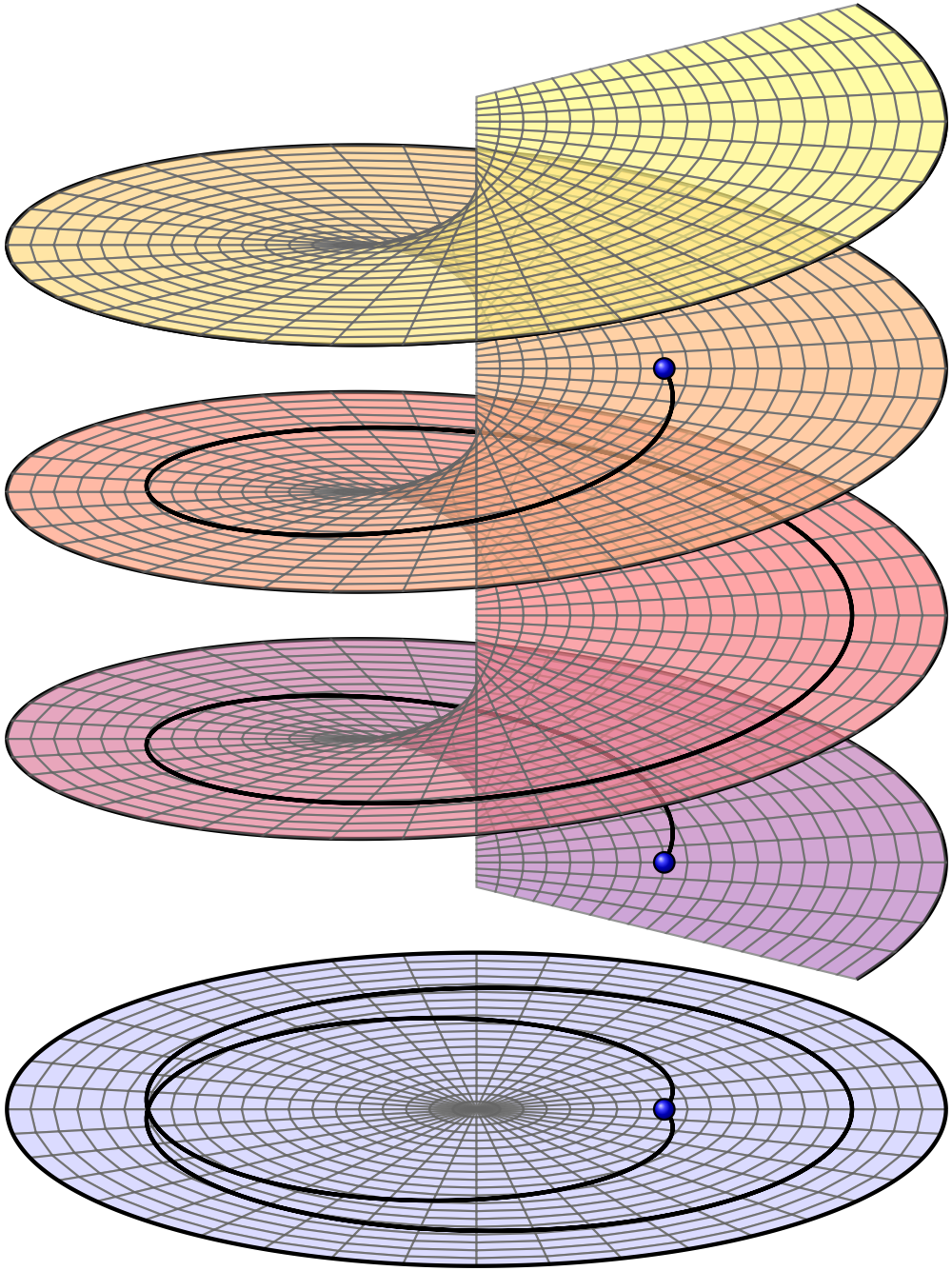
Zusammengefasst erhalten wir eine offene Überdeckung $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} U_\theta$, über der p lokal-trivial ist. Das Urbild $p^{-1}(U_\theta) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} V_\theta + k$ besteht aus V_θ und allen Kopien $V_\theta + k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Diese sind paarweise disjunkt.

$$(\tau_\theta, \sigma_\theta) : U_\theta \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U_\theta) = V_\theta + \mathbb{Z},$$
$$\tau_\theta(z, k) = s_\theta(z) + k, \quad \sigma_\theta(t) = (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}, \lfloor t - \theta \rceil).$$

Somit ist p lokal-trivial. Hingegen ist p nicht global trivial!
In der trivialen Überlagerung $q : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1 : (z, k) \mapsto z$ ist der Totalraum unzusammenhängend. Das gilt für $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ nicht.
Also sind p und q nur lokal isomorph, nicht jedoch global!

Wiederholung: Die kanonische Faktorisierung von p ergibt $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.

Polarkoordinaten als Wendelfläche



Die komplexe Exponentialfunktion

Beispiel M1B: die komplexe Exponentialfunktion

Das Paradebeispiel aus der Analysis ist die Exponentialfunktion

$$\exp : (\mathbb{C}, +, 0) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1) : z \mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!.$$

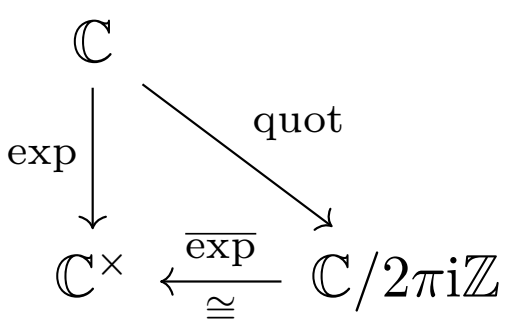
Dies ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern

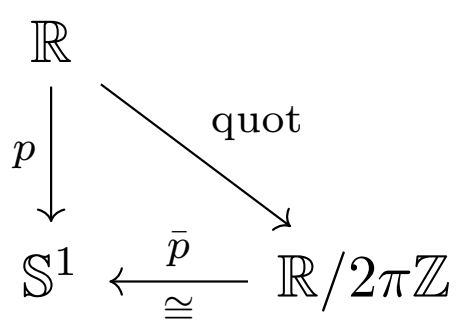
$$\mathrm{Ker}(\exp) = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \exp(z) = 1 \,\} = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}.$$

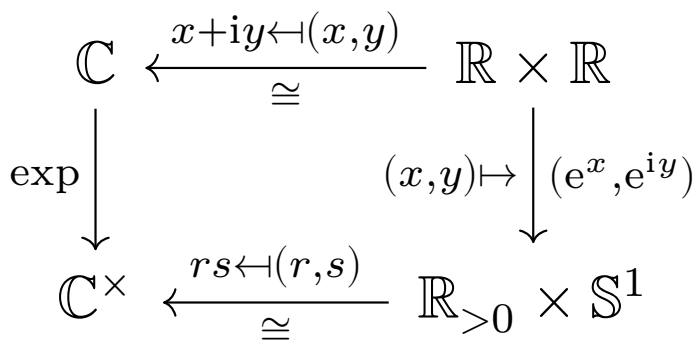
Dies ist eine Überlagerung, ebenso die Kreisparametrisierung

$$p : (\mathbb{R}, +, 0) \to (\mathbb{S}^1, \cdot, 1) : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t.$$

Reell ist $(\exp, \ln) : (\mathbb{R}, +, 0) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ ein Homöomorphismus.







Zweige des komplexen Logarithmus

Zur Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ erhalten wir (nur) lokal eine Umkehrfunktion durch $\ln : B(1,1) \to \mathbb{C} : 1+z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k/k$, siehe C5I und M2N. Geht noch mehr? Ja, bis zur topologischen Grenze!

Oben haben wir $(p_\theta, s_\theta) : \mathbb{R} \supseteq V_\theta \cong U_\theta \subseteq \mathbb{S}^1$ explizit konstruiert auf $V_\theta = \,]\theta - 1/4, \theta + 1/4[$ und $U_\theta = p(V_\theta) = \{\, \mathrm{e}^{2\pi i t} \mid t \in \,]\theta - 1/4, \theta + 1/4[\,\}$.

Wir können dies behutsam ausdehnen auf $V^*_\theta = \,]\theta - 1/2, \theta + 1/2[$ und $U^*_\theta = \mathbb{S}^1 \setminus \{-\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta}\}$ zu $(p^*_\theta, s^*_\theta) : \mathbb{R} \supseteq V^*_\theta \cong U^*_\theta \subseteq \mathbb{S}^1$ durch Verkleben (E1P) $p^*_\theta = p_\theta \cup p_{\theta \pm 1/4}$ und $s^*_\theta = s_\theta \cup s_{\theta \pm 1/4}$, dank Gleichheit auf dem Überlapp.

Für die komplexe Exponentialfunktion betrachten wir $\Theta = 2\pi\theta$ und setzen $W_\Theta = \{\, u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C} \mid v \in \,]\Theta - \pi, \Theta + \pi[\,\}$ sowie $Z_\Theta = \mathbb{C} \setminus \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\, \mathbb{R}_{\leq 0}$. Darauf erhalten wir $(\exp_\Theta, \ln_\Theta) : W_\Theta \cong Z_\Theta$ durch die Einschränkung $\exp_\Theta : w \mapsto z = \exp(w) = \mathrm{e}^u(\cos v + \mathrm{i} \sin v)$ für $w = u + \mathrm{i}v \in W_\Theta$ und umgekehrt $\ln_\Theta : z \mapsto w = \ln|z| + 2\pi \mathrm{i} s^*_\theta(z/|z|)$ für $z = x + \mathrm{i}y \in Z_\Theta$.

Wir nennen $\ln_\Theta$ mit $\Theta \in \mathbb{R}$ einen **Zweig des komplexen Logarithmus**. Wie angegeben gilt $\ln_\Theta \circ \exp_\Theta : w \mapsto z \mapsto w$ und $\exp_\Theta \circ \ln_\Theta : z \mapsto w \mapsto z$.

Geht es noch besser?

🙂 Diese Konstruktion zeigt, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ eine Überlagerung ist; sie formalisiert das obige Bild und rechtfertigt unsere Intuition.

Als Dreingabe erhalten wir den zugehörigen **Zweig der $n$ten Wurzel** $r_{n,\Theta} : Z_\Theta \to \mathbb{C} : z \mapsto \exp(\ln_\Theta(z)/n)$, wie oben erklärt und genutzt, als Schnitt zur $n$ten Potenz $p_n(z) = z^n$ gemäß $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_{Z_\Theta}$.

🙂 Geht es einfacher? Nein, wohl kaum! Größer? Nachweislich nicht!

Aufgabe: Erklären Sie, warum der hier gefundene Definitionsbereich $Z_\Theta = \mathbb{C} \setminus \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\,\mathbb{R}_{\leq 0}$ maximal ist, also nicht erweitert werden kann.

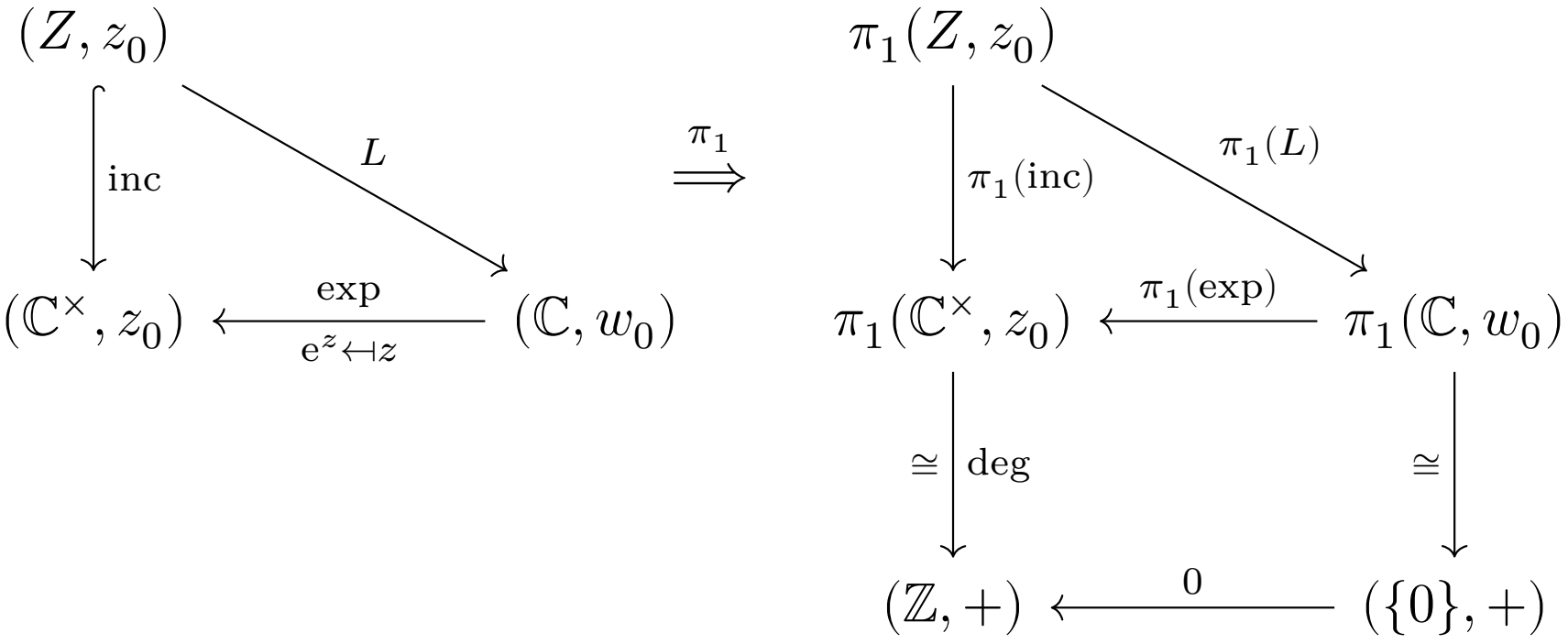
(1) Eine (wie immer stetige!) Logarithmusfunktion $L : \mathbb{C}^\times \supseteq Z \to \mathbb{C}$ mit $\exp \circ L = \mathrm{inc}_Z^{\mathbb{C}^\times}$ gibt es nur auf Gebieten Z ohne geschlossene Wege um 0.

(2) Eine (stetige!) Wurzelfunktion $r_n : \mathbb{C}^\times \supseteq Z \to \mathbb{C}^\times$ mit $p_n \circ r_n = \mathrm{inc}_Z^{\mathbb{C}^\times}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gibt es nur auf Gebieten Z ohne geschlossene Wege um 0.

Lösung: Wir setzen unser Beispiel von Seite L215 fort und nutzen die Fundamentalgruppe, ihre Funktorialität und die Umlaufzahl.

Die Fundamentalgruppe als Hindernis

(1) Wir wählen $z_0 \in Z \subseteq \mathbb{C}^\times$ und $w_0 = L(z_0)$, somit gilt $z_0 = \exp(w_0)$.
Wir finden und nutzen die folgenden kommutativen Diagramme:

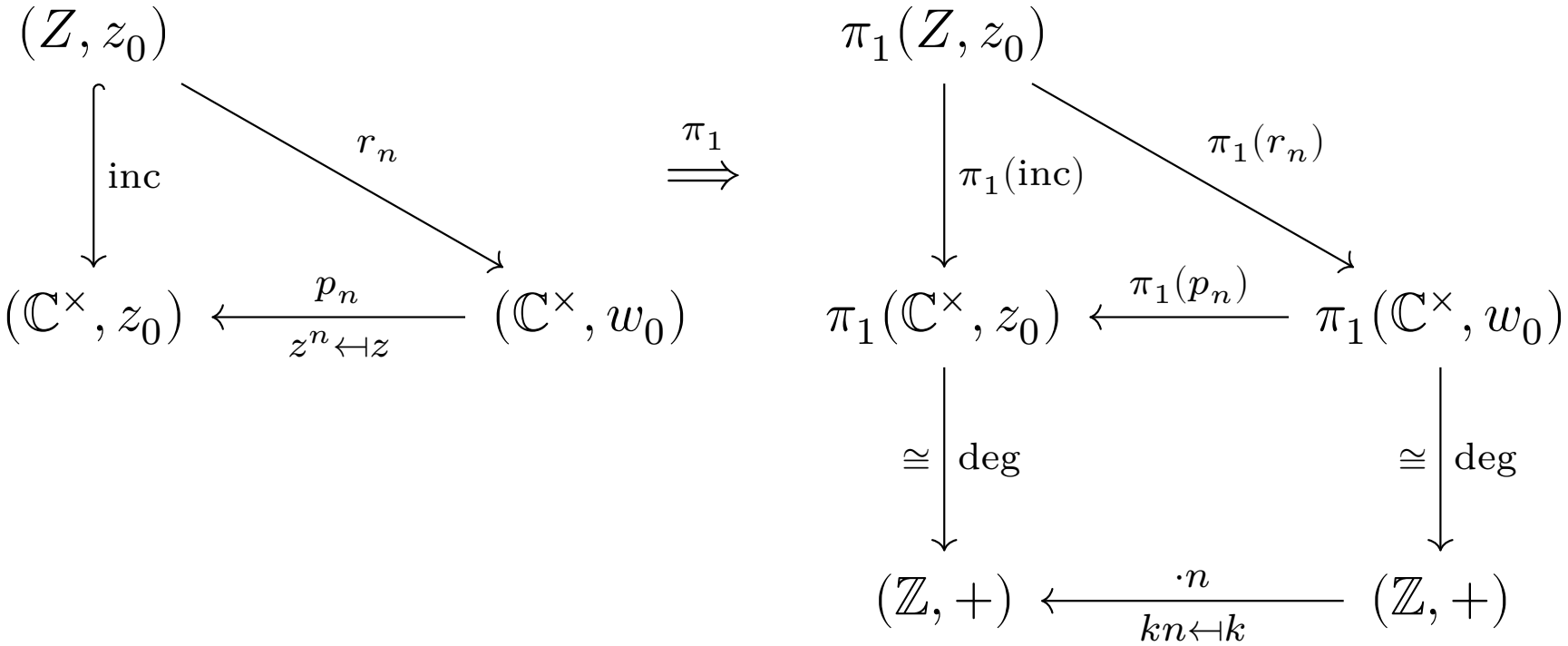


Aus $\exp \circ L = \mathrm{inc}_Z^{\mathbb{C}^\times}$ folgt: Für jede Schleife γ in (Z, z_0) gilt $\deg(\gamma) = 0$,
dank $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ und der Kommutativität des rechten Diagramms.

☺ Zu $Z_\Theta \subseteq \mathbb{C}^\times$ können wir keinen einzigen Punkt mehr hinzufügen!
Für $Z_\Theta \subsetneq Z \subseteq \mathbb{C}^\times$ existiert eine Schleife γ in (Z, z_0) mit $\deg(\gamma) = 1$.

Die Fundamentalgruppe als Hindernis

(2) Wir wählen $z_0 \in Z \subseteq \mathbb{C}^\times$ und $w_0 = r_n(z_0)$, somit gilt $z_0 = p_n(w_0)$.
Wir finden und nutzen die folgenden kommutativen Diagramme:



Aus $p_n \circ r_n = \text{inc}_Z^{\mathbb{C}^\times}$ folgt: Für jede Schleife γ in (Z, z_0) gilt $\deg(\gamma) \in n\mathbb{Z}$, dank $\pi_1 : \texttt{Top}_* \to \texttt{Grp}$ und der Kommutativität des rechten Diagramms.

☺ Zu $Z_\Theta \subseteq \mathbb{C}^\times$ können wir keinen einzigen Punkt mehr hinzufügen!
Für $Z_\Theta \subsetneq Z \subseteq \mathbb{C}^\times$ existiert eine Schleife γ in (Z, z_0) mit $\deg(\gamma) = 1$.

Die komplexe Potenzfunktion

Beispiel M1c: die komplexe Potenzfunktion

Das Paradebeispiel aus der Algebra ist die komplexe Potenzfunktion

$$p_n : (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1) : w \mapsto w^n$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Dies ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.
Die Abbildung p_0 ist konstant, der triviale Homomorphismus.
Ferner ist p_1 die Identität und somit eine triviale Überlagerung.
Auch $p_{-1}(w) = \overline{w}/|w|^2$, als Spiegelung am Einheitskreis und der reellen Achse, ist ein Homöomorphismus, also eine triviale Überlagerung.
Allgemein gilt $w^{-n} = (w^n)^{-1}$, daher betrachtet man of nur $n \geq 1$.
Für $n \neq 0$ ist p_n surjektiv, die $n$ten Einheitswurzeln bilden den Kern

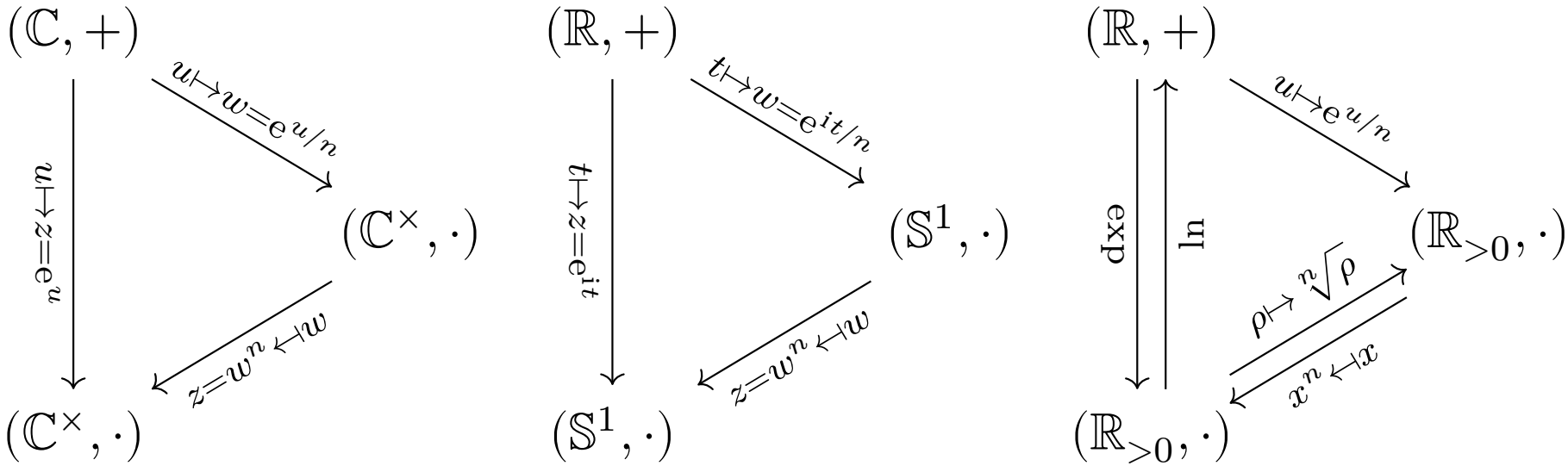
$$\mathrm{Ker}(p_n) = W_n := \{\xi \in \mathbb{C} \,|\, \xi^n = 1\} = \{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n} \,|\, k = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Somit ist p_n eine n–blättrige Überlagerung, ebenso die Einschränkung

$$p_n : (\mathbb{S}^1, \cdot, 1) \to (\mathbb{S}^1, \cdot, 1) : w \mapsto w^n.$$

Die komplexe Potenzfunktion

Komplexe Wurzeln sind extrem nützlich und keineswegs trivial!
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die n–te Wurzel von $z = 0$ ist $w = 0$ (mit Vielfachheit n).
Die $n$ten Wurzeln von $z = 1$ sind alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $\xi^n = 1$, also obige Menge.
Zu einer beliebigen komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ berechnen wir *eine* Wurzel $w \in \mathbb{C}^\times$ mit $w^n = z$ wie folgt: Wir wählen eine Polardarstellung $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \mathbb{R}$ und erhalten $w = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/n}$. Die Probe ist $w^n = z$.
Alle weiteren Lösungen sind dann ξw mit $\xi \in W_n$. Wir nutzen folgende kommutative Diagramme zur universellen Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$:



Verzweigte Überlagerungen

Die Potenzfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w \mapsto w^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist eine schöne und wichtige Abbildung. Leider ist sie keine Überlagerung im eng gesteckten Sinne unserer Definition M1A, denn keine Umgebung von 0 wird trivial überlagert: Es gilt $p^{-1}(0) = \{0\}$ aber $\sharp p^{-1}(z) = n$ für alle $z \neq 0$.

Die Abbildung p ist vielmehr das Modell einer *verzweigten Überlagerung* wie auf Seite M107 für $n = 2$ gezeigt. Da auch diese Abbildungen in der (mathematischen) Natur auftreten, will ich sie hier nicht verschweigen.

Definition M1D: verzweigte Überlagerung

Sei $p : \tilde{Y} \to Y$ stetig und $X \subseteq Y$ die Vereinigung aller trivial überlagerten offenen Mengen $U \subseteq Y$. Ist X dicht in Y, so nennen wir p eine **verzweigte Überlagerung** (engl. *branched covering* oder *ramified covering*). Dabei heißt $y \in Y \setminus X$ ein **Verzweigungspunkt** und $Y \setminus X$ der **Verzweigungsort**. Im Falle $X = Y$ ist p eine (unverzweigte) Überlagerung.

Verzweigte Überlagerungen

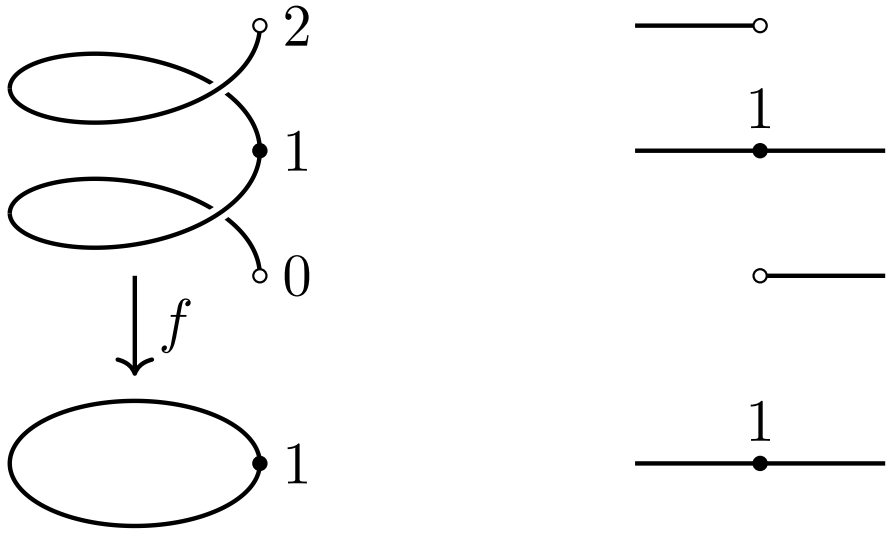
Beispiel: Sei $q : \mathbb{C} \times \{1, \dots, \ell\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $q(w, k) = w^{n_k}$ wobei $n_1, \dots, n_\ell \geq 1$ und $n = n_1 + \cdots + n_\ell$. Über $\mathbb{C}^\times$ ist dies eine n–blättrige Überlagerung. Über dem Verzweigungspunkt 0 hingegen liegen nur ℓ Urbilder, jeweis mit *Verzweigungsindex* $n_1, \dots, n_\ell$.

Diesen allgemeineren Überlagerungsbegriff verwendet man naturgemäß in der Funktionentheorie und in der Algebraischen Geometrie (Formel von Riemann–Hurwitz). Die Überlagerungen im Sinne unserer Definition M1A nennt man dann zur Betonung *unverzweigte* Überlagerungen.

Der Einfachheit halber wollen wir im Folgenden eigentlich nur solche unverzweigten Überlagerungen untersuchen. In realistischen Beispielen treten daneben auch auch verzweigte Überlagerungen auf. Daher ist es hilfreich, auch diese bennenen und dann behandeln zu können.

Lokaler Homöomorphismus ist noch keine Überlagerung.

Jede Überlagerung ist gemäß M1A ein lokaler Homöomorphismus.
Die Umkehrung gilt nicht, wie $]a, b[\hookrightarrow \mathbb{R}$ zeigt. Noch interessanter:



Beispiel M1E: lokaler Homöomorphismus, aber keine Überlagerung

Die Abbildung $f :]0, 2[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist stetig und surjektiv und sogar ein lokaler Homöomorphismus, aber keine Überlagerung.

Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ wird trivial (zweiblättrig) überlagert.
Aber keine offene Umgebung von 1 wird trivial überlagert!

Lokaler Homöomorphismus ist noch keine Überlagerung.

Jede Überlagerung ist gemäß M1A ein lokaler Homöomorphismus.
Die Umkehrung gilt nicht, wie uns obiges Gegenbeispiel M1E lehrt.
Simplizial sind solche Pathologien ausgeschlossen, siehe M1K.
Dies wollen wir auch für kompakte Räume retten, siehe M1F.

Was macht einen lokalen Homöomorphismus zur Überlagerung?

Sei $f : \tilde{Y} \to Y$ stetig/$\mathscr{C}^0$. Ein Punkt $\tilde{x} \in \tilde{Y}$ heißt (topologisch/$\mathscr{C}^0$) **regulär**, falls f um den Punkt $\tilde{x}$ ein lokaler Homöomorphismus ist (D3O); andernfalls heißt der Punkt $\tilde{x}$ **singulär** oder **kritisch**.

Wir nennen $x \in Y$ einen (topologisch/$\mathscr{C}^0$) **regulären Wert** von f, falls *jedes* Urbild $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$ ein regulärer Punkt ist. Andernfalls heißt x ein **kritischer Wert** von f, das heißt, *mindestens* ein Urbild ist kritisch.

Bemerkung: Für eine $\mathscr{C}^1$–Abbildung f vereinbaren wir $\mathscr{C}^1$–Regularität in $\tilde{x}$ durch die Invertierbarkeit der Ableitung $f'(\tilde{x})$, aka Jacobi–Matrix. Der lokale Umkehrsatz C5Q garantiert die (topologische/$\mathscr{C}^0$) Regularität. Dies ist oft leichter zu prüfen und daher bequemer anzuwenden.

Vom lokalen Homöomorphismus zur Überlagerung

☺ Jeder lokale Homöomorphismus $f : \tilde{Y} \twoheadrightarrow Y$ zwischen kompakten Hausdorff–Räumen ist eine Überlagerung. Genauer gilt folgendes:

Satz M1F: regulärer Wert

(1) Ist $f : \tilde{Y} \to Y$ eine stetige Abbildung kompakter Hausdorff–Räume, so ist f um jeden regulären Wert $x \in Y$ trivial: Jede hinreichend kleine offene Umgebung wird trivial überlagert, mit endlicher Blätterzahl.

(2) Dank Einpunktkompaktifizierung F4D gilt dies ebenso für jede eigentliche Abbildung lokal-kompakter Hausdorff–Räume.

Beweis: (1) Die Menge $\{x\}$ ist abgeschlossen in Y, also ist die Faser $f^{-1}(x) = \{\tilde{x}_i \,|\, i \in I\}$ abgeschlossen in $\tilde{Y}$, somit kompakt (F1F). Zu jedem Urbild $\tilde{x}_i$ existiert eine offene Umgebung $\tilde{W}_i$ in $\tilde{Y}$ mit $W_i = f(\tilde{W}_i)$ offen in Y, sodass die Einschränkung von f einen Homöomorphismus $f_i : \tilde{W}_i \xrightarrow{\sim} W_i$ stiftet. Insbesondere gilt $f^{-1}(x) \cap \tilde{W}_i = \{\tilde{x}_i\}$, somit ist $\tilde{x}_i$ ein isolierter Punkt in $f^{-1}(x)$.

Vom lokalen Homöomorphismus zur Überlagerung

Kompakt und diskret bedeutet endlich. Sei also $f^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}^!$.
Da $\tilde{Y}$ hausdorffsch ist, können wir $\tilde{W}_i \cap \tilde{W}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ annehmen.

Wir hätten gerne, dass die offene Menge $W := W_1 \cap \dots \cap W_n$ trivial überlagert wird. Leider ist das Urbild $f^{-1}(W)$ manchmal nicht ganz in $\tilde{W} := \tilde{W}_1 \cup \dots \cup \tilde{W}_n$ enthalten: Im obigen Beispiel M1E ist genau dies das tückische Problem! Wir korrigieren dies nun wie folgt:

Die Menge $V = W \setminus f(\tilde{Y} \setminus \tilde{W})$ ist offen in Y und wird trivial überlagert.

Die Menge $\tilde{A} = \tilde{Y} \setminus \tilde{W}$ ist abgeschlossen in $\tilde{Y}$, also kompakt.
Demnach ist ihr Bild $A = f(\tilde{A})$ in Y kompakt, also abgeschlossen.
Somit ist $Y \setminus A$ offen, ebenso $V = W \setminus A$. Nach Konstruktion gilt $x \in V$ sowie $f^{-1}(V) \subseteq \tilde{W}$, also schließlich $f^{-1}(V) = \tilde{V}_1 \cup \dots \cup \tilde{V}_n$ mit $\tilde{V}_i := f_i^{-1}(V) \subseteq \tilde{W}_i$ und $f_i : \tilde{V}_i \xrightarrow{\sim} V$, wie gewünscht. QED

Vom lokalen Homöomorphismus zur Überlagerung

Beispiel: Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ist kompakt hausdorffsch. Die Abbildung $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$ ist ein lokaler Homöomorphismus, sogar lokaler Diffeomorphismus um jeden Punkt $z \in \mathbb{S}^1$, denn $p_n'(z)$ ist invertierbar. Dank Satz M1F(1) ist p_n eine Überlagerung mit endlicher Blätterzahl.

Beispiel: Der Raum $\mathbb{C}^\times$ ist lokal-kompakt hausdorffsch. Die Abbildung $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto z^n$ ist eigentlich und ein lokaler Homöomorphismus, sogar lokaler Diffeomorphismus um jeden Punkt $z \in \mathbb{C}^\times$, denn $p_n'(z)$ ist invertierbar. Dank Satz M1F(2) ist p_n eine endliche Überlagerung.

🙂 Dies haben wir oben bewiesen durch explizite Konstruktion von lokalen Umkehrungen. Satz M1F kann uns diese Arbeit vereinfachen, insbesondere wenn uns die implizite Existenzaussage genügt.

Gegenbeispiel: Auf $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ und $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$ lässt sich Satz M1F leider nicht anwenden, da die Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Beides sind Überlagerungen, doch dies müssen wir auf anderen Wegen zeigen, zum Beispiel durch explizite Konstruktion wie oben.

Ausschneiden kritischer Werte

Korollar M1G: Ausschneiden kritischer Werte

Sei $f : \tilde{Y} \to Y$ eigentlich zwischen lokal-kompakten Hausdorff–Räumen.

Dazu sei $\tilde{C} \subseteq \tilde{Y}$ die Menge der kritischen Punkte, in denen f kein lokaler Homöomorphismus ist, und $C = f(\tilde{C})$ die Menge der kritischen Werte.
Wir setzen $X := Y \setminus C$ und $\tilde{X} := f^{-1}(X) = \tilde{Y} \setminus f^{-1}(f(\tilde{C}))$.

Dann ist $p = f|^{X}_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung mit endlicher Blätterzahl.

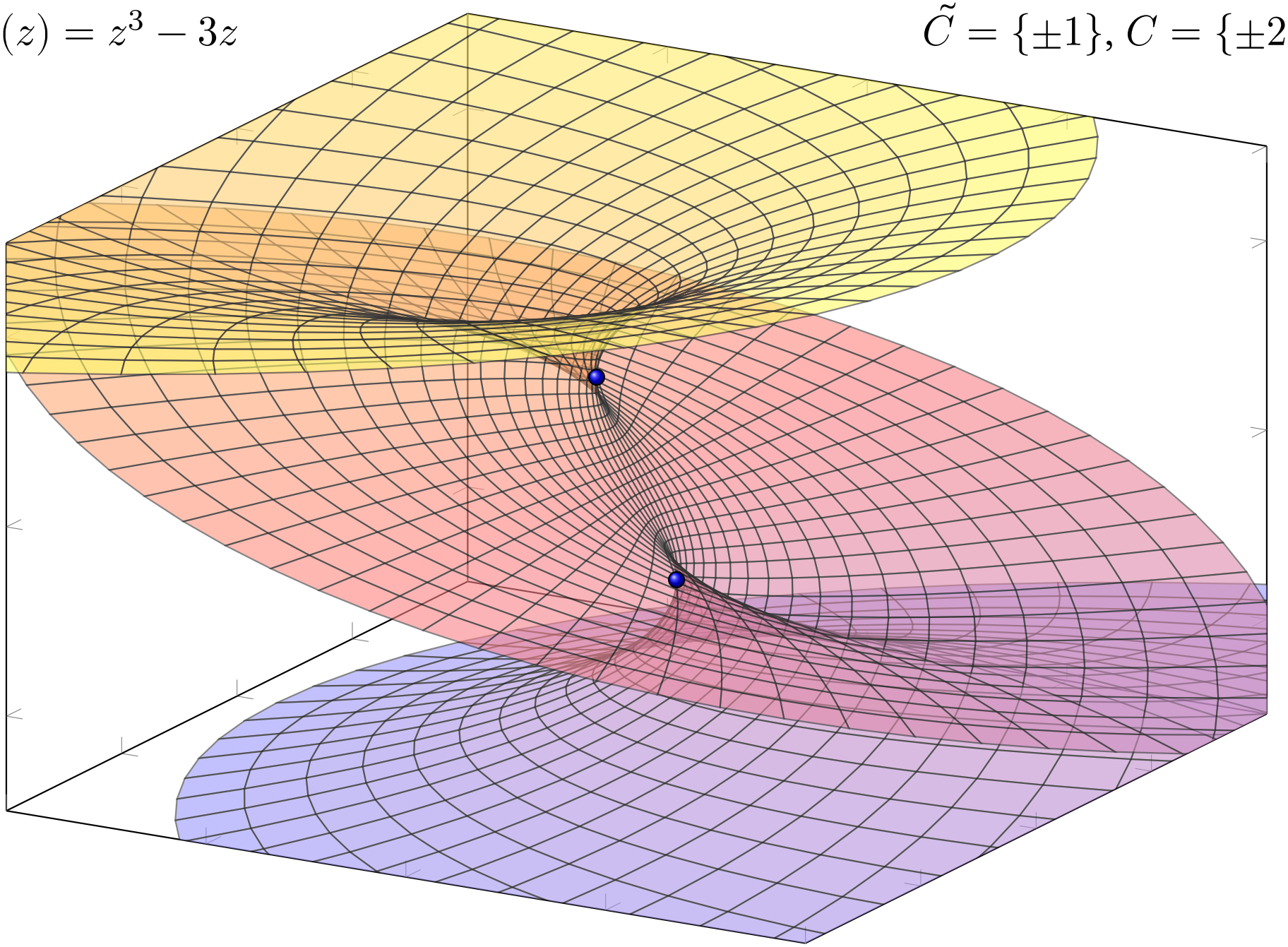
Beweis: Die Menge $\tilde{C}$ ist abgeschlossen in $\tilde{Y}$. Da f eine abgeschlossene Abbildung ist (F5B), ist auch $f(\tilde{C})$ abgeschlossen. Somit ist $X \subseteq Y$ offen und ebenso $\tilde{X} \subseteq \tilde{Y}$. Dies sind demnach lokal-kompakte Hausdorff–Räume (F3E) und $p : \tilde{X} \to X$ ist eigentlich. Nach Konstruktion ist p ein lokaler Homöomorphismus, also eine Überlagerung (M1F). QED

Beispiel: Die Potenzabbildung $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist stetig, für $n \geq 1$ eigentlich, für $n \geq 2$ in 0 kein lokaler Homöomorphismus. Nach Entfernung von 0 erhalten wir die Überlagerung $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto z^n$.

Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

$f(z) = z^3 - 3z$

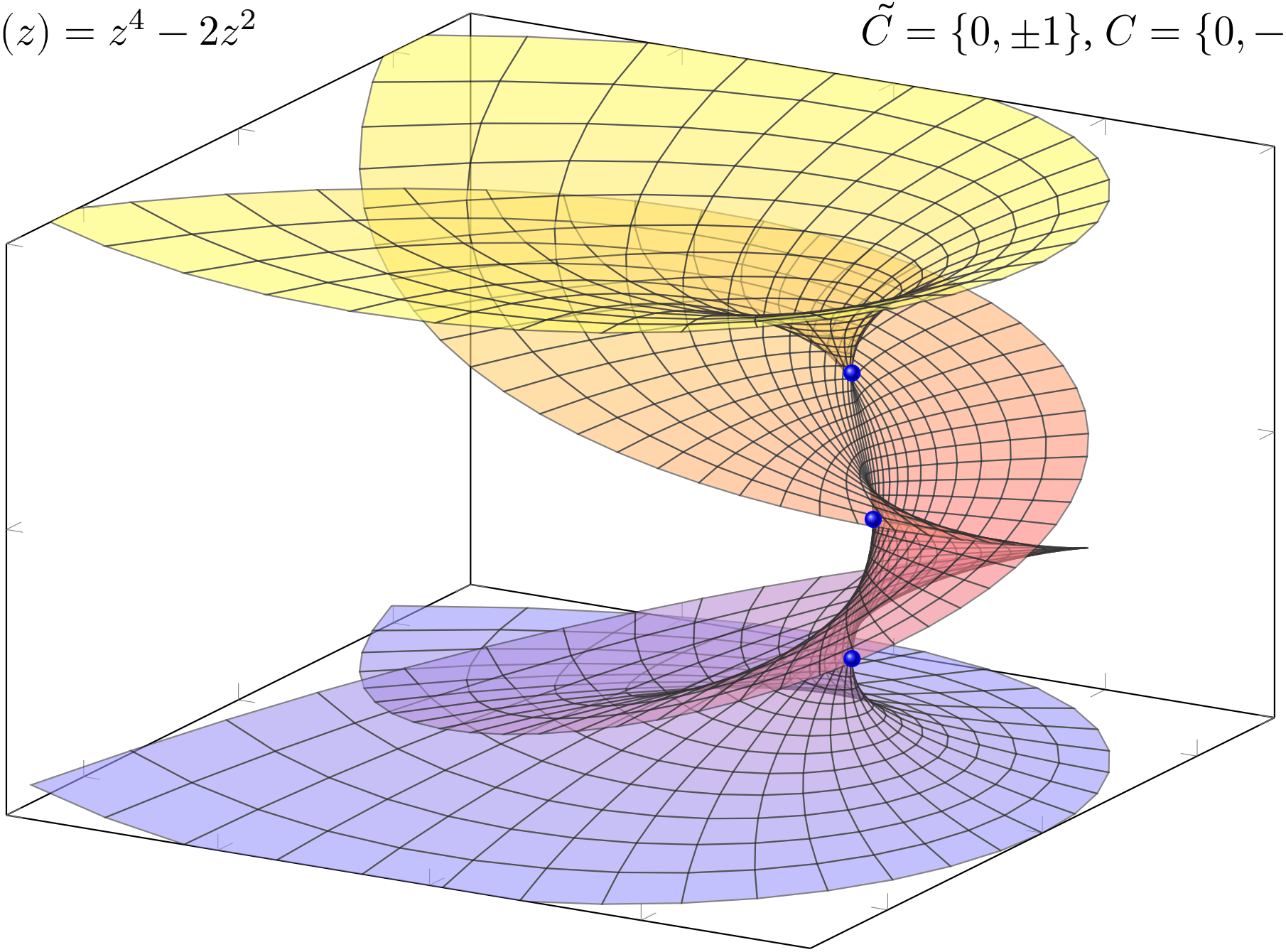
$\tilde{C} = \{\pm 1\}, C = \{\pm 2\}.$



Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

$f(z) = z^4 - 2z^2$

$\tilde{C} = \{0, \pm 1\}, C = \{0, -1\}$



Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

Die obigen Graphiken zeigen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w = u + \mathrm{i}v \mapsto z = x + \mathrm{i}y$ wie üblich als Projektion $(x, y, u) \mapsfrom (u, v, x, y)$ des Funktionsgraphen in $\mathbb{C}^2$.

Satz M1H: Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

Jede komplexe Polynomfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ von Grad $n \geq 1$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ist eine verzweigte Überlagerung.

Die Verzweigungspunkte sind die kritischen Werte $f(z)$ mit $f'(z) = 0$. Hier ist also $\tilde{C} := \{ z \in \mathbb{C} \mid f'(z) = 0 \}$ endlich mit Bildmenge $C := f(\tilde{C})$.

Außerhalb dieser endlichen Menge ist f eine n–blättrige (unverzweigte) Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ nach $X = \mathbb{C} \setminus C$ von $\tilde{X} = p^{-1}(X) = \mathbb{C} \setminus p^{-1}(C)$.

Insbesondere beweist dies den Fundamentalsatz der Algebra.

Beweis: (1) Die Funktion f ist eigentlich (F5E), denn für $z \to \infty$ gilt $f(z) \to \infty$. In jedem $\mathscr{C}^1$–regulären Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \tilde{C}$, mit $f'(z) \neq 0$, ist f ein lokaler Homöomorphismus dank lokalem Umkehrsatz (C5Q).

Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

(2) Andernfalls, für $z \in \tilde{C}$ ist $w \mapsto f(z+w) = b_0 + b_k w^k + \cdots + b_n w^n$ topologisch äquivalent zur Potenzfunktion $w \mapsto w^k$ mit Exponent $k \geq 2$ und somit eine verzweigte Überlagerung (M1D). Diese kritischen Werte können wir ausschneiden und erhalten die Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$.

Ausführlich: (3) Die Einschränkung $p = f^X_{\tilde{X}} : \mathbb{C} \supseteq \tilde{X} \to X \subseteq \mathbb{C}$ ist ein lokaler Homöomorphismus. Dank Satz M1F ist p lokal trivial.

(4) Die Blätterzahl von p ist konstant, denn X ist wegzusammenhängend. Sie ist ≥ 1. Hieraus folgt Surjektivität, also $p(\tilde{X}) = X$, somit $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

(5) Demnach existiert eine Nullstelle $z_n \in \mathbb{C}$ mit $f(z_n) = 0$.
Durch wiederholte Polynomdivision folgt $f(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$.
Für jeden Wert $a \in \mathbb{C}$ gilt entsprechend $f(z) - a = (z - z_1^*) \cdots (z - z_n^*)$.
Somit hat die Faser $f^{-1}(a) = \{z_1^*, \ldots, z_n^*\}$ genau dann n Elemente, wenn $f'(z_k^*) \neq 0$ für alle k gilt, also a kein kritischer Wert ist.
Somit ist $p : \tilde{X} \to X$ eine n–blättige Überlagerung. QED

Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

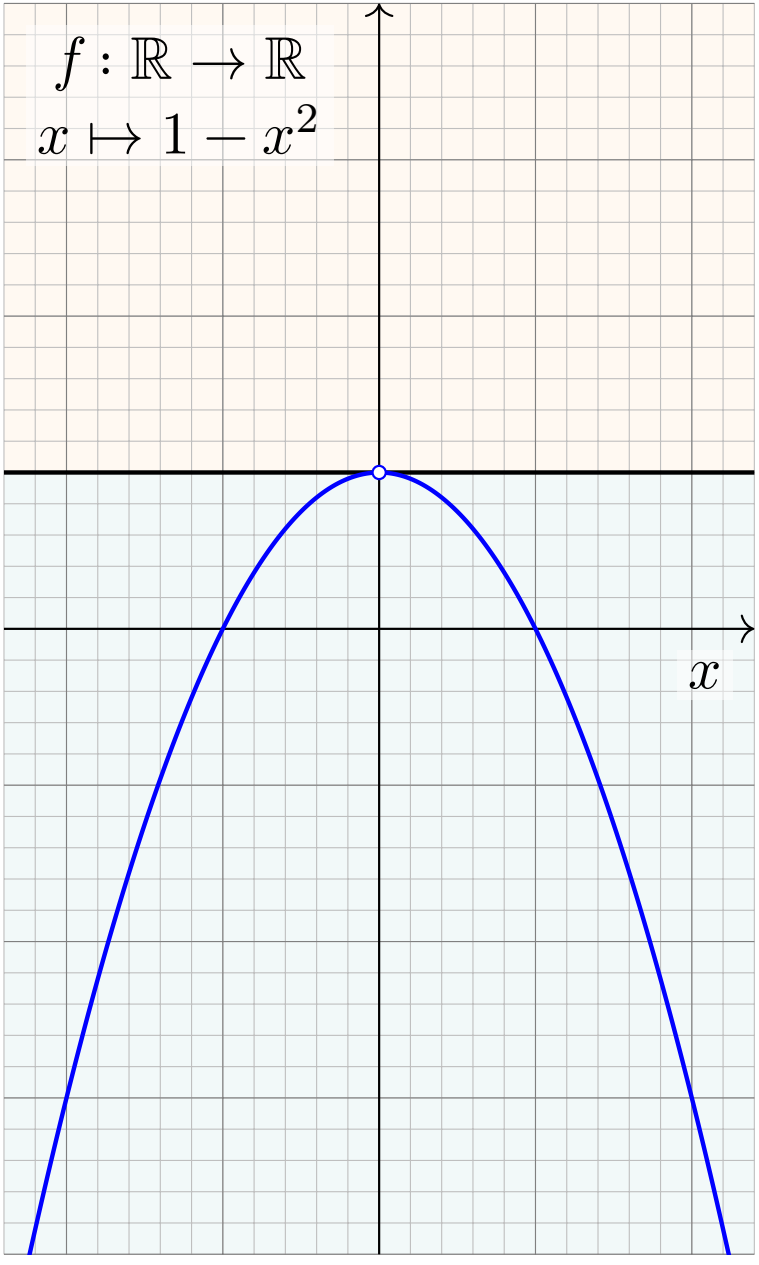
Aufgabe: Welche der obigen Argumente gelten noch über $\mathbb{R}$?

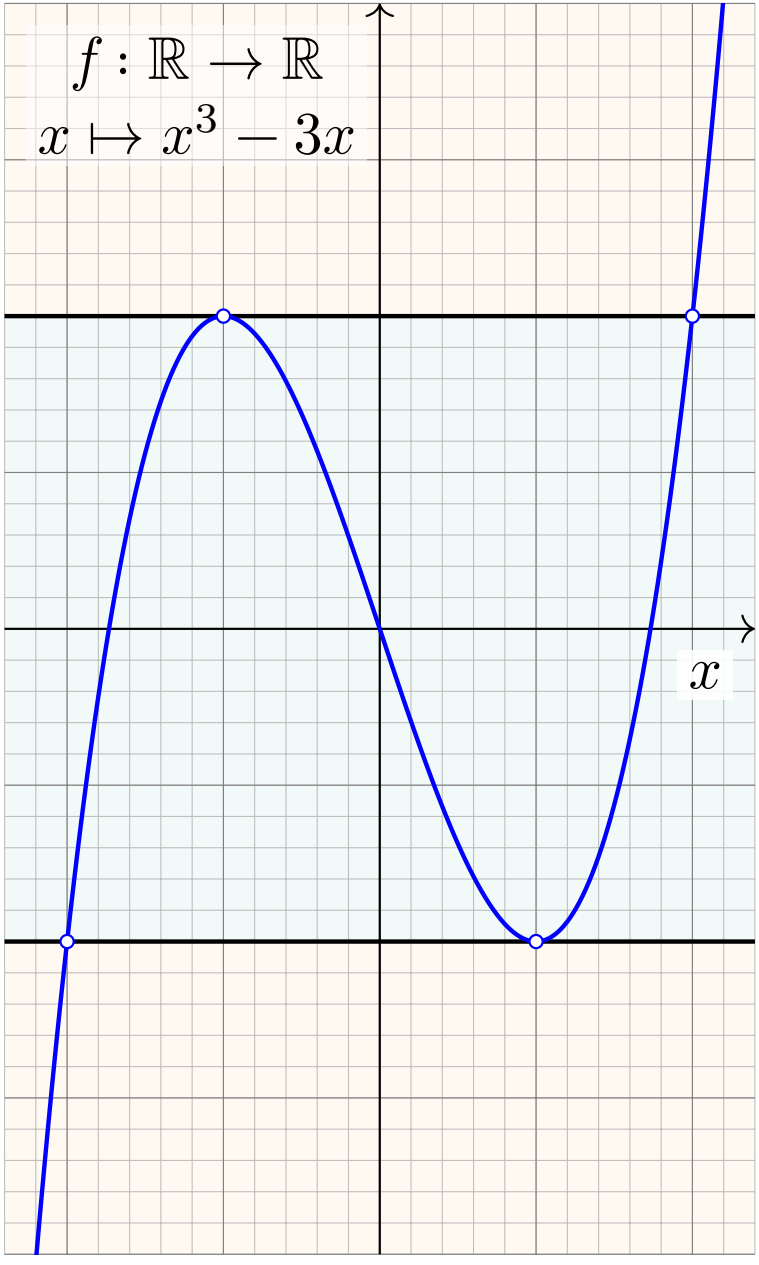
Lösung: Die Aussagen (1–3) gelten auch über $\mathbb{R}$: Für jedes reelle Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhalten wir eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$. Allerdings gilt die Aussage (4) nicht mehr, denn $X = \mathbb{R} \setminus C$ ist i.A. nicht zusammenhängend. Tatsächlich ist die Blätterzahl von p im Allgemeinen nicht konstant.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - x^2$ gilt $f'(x) = -2x$, somit $\tilde{C} = \{0\}$ und $C = f(\tilde{C}) = \{1\}$ und $f^{-1}(C) = \{0\}$. Wir erhalten also die Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ von $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ durch $\tilde{X} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Blätterzahl über $\mathbb{R}_{<1}$ ist 2, über $\mathbb{R}_{>1}$ hingegen 0. Insbesondere ist f nicht surjektiv.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x$ gilt $f'(x) = 3x^2 - 3$, somit $\tilde{C} = \{\pm 1\}$ und $C = f(\tilde{C}) = \{\pm 2\}$ und $f^{-1}(C)) = \{\pm 1, \pm 2\}$. Wir erhalten also die Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ von $X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ durch $\tilde{X} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 2\}$. Die Blätterzahl über $]-2, 2[$ ist 3, aber nur 1 über $]-\infty, -2[$ und $]2, \infty[$.

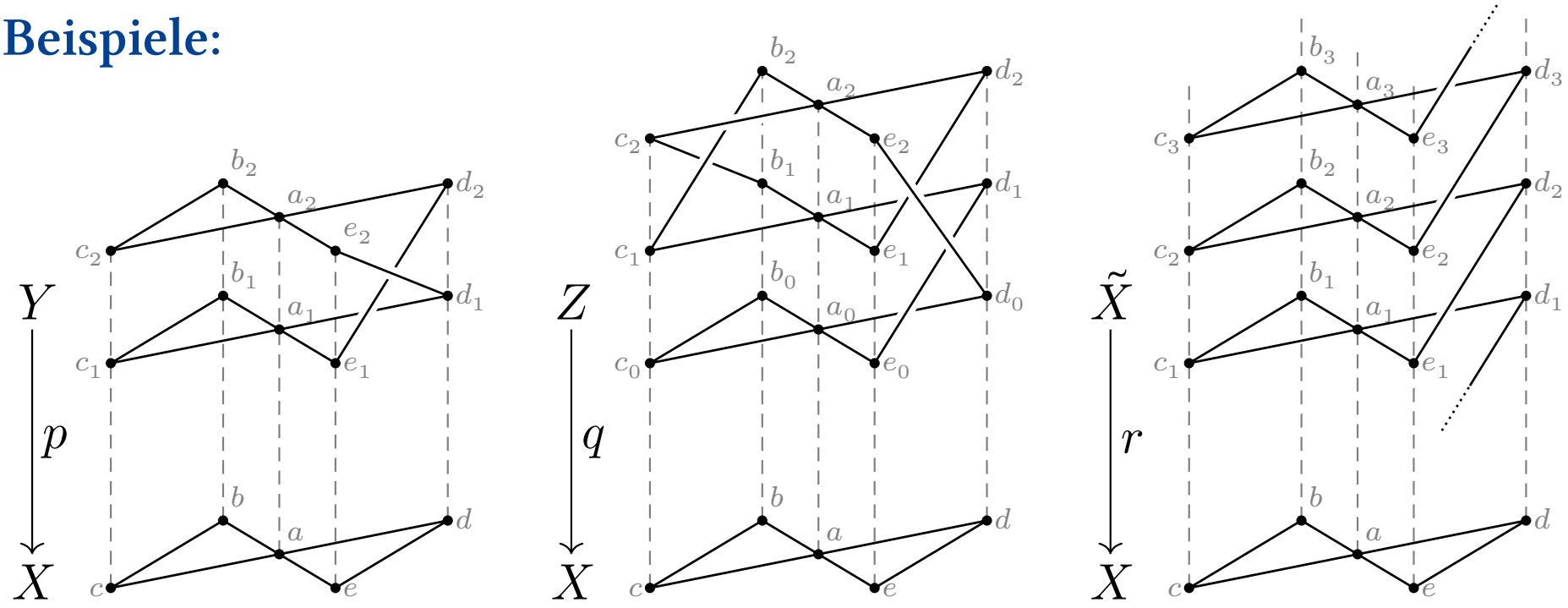
Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung





Überlagerungen von Graphen

Beispiele:



Die Skizze zeigt drei Graphen X, Y, Z mit simplizialen Abbildungen $p : Y \to X$ und $q : Z \to X$. Dies sind Überlagerungen, mit 2 bzw. 3 Blättern, denn jeder Eckenstern wird trivial überlagert (M1κ).

🙂 Bei n–facher Überlagerung ver-n-facht sich die Euler–Charakteristik: Wir sehen hier $\chi(X) = -1$ und $\chi(Y) = 2\chi(X)$ und $\chi(Z) = 3\chi(X)$. Das dritte Beispiel $r : \tilde{X} \to X$ zeigt eine unendliche Überlagerung.

Überlagerungen von Graphen

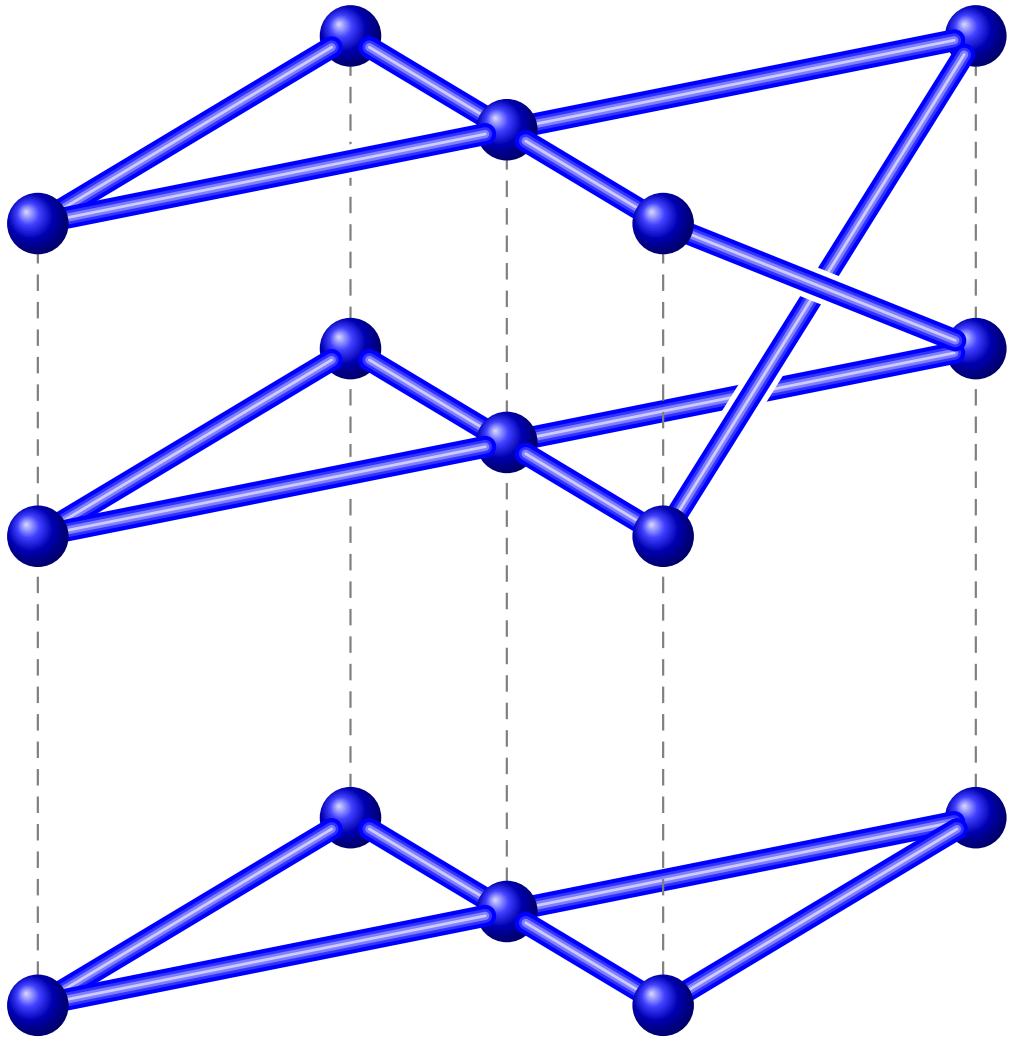
🙂 Diese einfachen Beispiele enthalten bereits viele Beobachtungen, die sich im Folgenden entfalten und als wichtig erweisen werden. Es lohnt sich daher, diese Beispiele genau anzuschauen, in unser Repertoire aufzunehmen und immer wieder helfend heranzuziehen.

Zum Beispiel erweist sich $p : Y \to X$ als eine Galois–Überlagerung: Auf dem überlagernden Raum Y operiert die zweielementige Gruppe $\mathbb{Z}/2$ fasertreu durch Vertauschen der Indizes $1 \leftrightarrows 2$. Dies ist eine simpliziale Operation, und der Quotient ist äquivalent zu $p : Y \to X$.

Für die zweite Überlagerung $q : Z \to X$ hingegen gilt dies nicht. Auf Z können wir $\mathbb{Z}/3$ nicht fasertreu simplizial operieren lassen. Somit ist q ein kleinstes Beispiel einer „nicht normalen“ Überlagerung.

Bemerkung: Die Überlagerung ist hier die Einschränkung der Projektion $p : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$, wirklich überschneidungsfrei gelingt es erst mit $\mathbb{R}^4 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2$. Sie können nun leicht explizite Koordinaten angeben. Abstrakte SKomplexe sind wie immer besonders bequem und effizient.

Überlagerungen geschlossener Flächen



F_3^+

p

F_2^+

Überlagerungen geschlossener Flächen

🙂 Wir können jeden Graphen X etwas aufdicken, etwa eingebettet im $\mathbb{R}^3$ zu einer kleinen ε–Umgebung: Ecken werden zu Vollkugeln ($\cong \mathbb{D}^3$) und Kanten zu Vollzylindern ($\cong \mathbb{D}^2 \times [0,1]$). So erhalten wir zum Graphen X den Henkelkörper $N(X)$, wohldefiniert bis auf Homöomorphie.

Die obige Graphik zeigt genau dies, wenn wir im Graphen die Ecken und Kanten nicht als ideal dünn betrachten, sondern als realistisch dick.

Darin liegt $X \overset{\sim}{\rightleftarrows} N(X)$ als starker Deformationsretrakt, insbesondere haben beide dieselbe Euler–Charakteristik. Der Rand $A = \partial N(X)$ des Henkelkörpers ist eine geschlossene Fläche, $A \cong F_g^+$, mit doppelter Euler–Charakteristik, $\chi(A) = 2\chi(X)$. Die obige Skizze zu Graphen zeigt also zugleich interessante Überlagerungen geschlossener Flächen.

🙂 Wichtige Überlagerungen von Flächen entstehen auf eine zweite Art. Wir erinnern uns an die Konstruktion der nicht-orientierbaren Flächen: Auch der Quotient $\{\pm 1\} \curvearrowright F_g^+ \twoheadrightarrow F_g^-$ ist eine simpliziale Überlagerung.

Simpliziale Überlagerungen

Die obigen Beispiele zu Graphen und Flächen motivieren die folgende allgemeine Begriffsbildung zu simplizialen Überlagerungen:

Satz M1κ: simpliziale Überlagerung

Sei $p : L \to K$ eine simpliziale Abbildung. Zu jeder Ecke $y \in \Omega(L)$ über $x = p(y)$ haben wir den Eckenstern

$$\mathrm{St}(y, L) := \{ T \in L \mid \{y\} \cup T \in L \}$$

und erhalten die Einschränkung $p_y : \mathrm{St}(y, L) \to \mathrm{St}(x, K)$. Wir nennen p eine **simpliziale Überlagerung**, fall p_y bijektiv ist für alle $y \in \Omega(L)$.

Dann ist die topologische Realisierung $|p| : |L| \to |K|$ eine Überlagerung. Hat p Blätterzahl n und ist K endlich, so auch L, und $\chi(L) = n \cdot \chi(K)$.

Im Allgemeinen genügt lokale Homöomorphie nicht, wie Beispiel M1ε lehrt. Im simplizialen Falle sind solche Pathologien ausgeschlossen. Diese Beobachtung wird im Folgenden zu einem nützlichen Werkzeug.

Simpliziale Überlagerungen

Beweis: (1) Zur Ecke $x \in \Omega(K)$ besteht $F_x = \{\, y \in \Omega(L) \,|\, p(y) = x \,\}$ aus allen Ecken über x. Für $y \neq y'$ in F_x gilt $\mathrm{St}(y, L) \cap \mathrm{St}(y', L) = \emptyset$. Andernfalls läge eine Ecke z im Schnitt, also $y, y' \in \mathrm{St}(z, K)$, und wegen $p(y) = p(y') = x$ wäre p auf diesem Stern nicht injektiv.

Somit wird der offene Eckenstern $\mathring{\mathrm{st}}(x, K) \subseteq |K|$ trivial überlagert durch die offenen Eckensterne $\bigsqcup_{y \in F_x} \mathring{\mathrm{st}}(y, L)$. Da dies für jede Ecke $x \in \Omega(K)$ gilt, ist $|p| : |L| \to |K|$ eine Überlagerung, da lokal-trivial über der offenen Überdeckung $|K| = \bigcup_{x \in \Omega(K)} \mathring{\mathrm{st}}(x, K)$.

(2) Über jedem Simplex $S \in K$ liegen genau n Simplizes $T \in L$, derselben Dimension: Über jeder Ecke $x \in S$ und zu jedem ihrer Urbilder $y \in p^{-1}(x)$ existiert dank Bijektivität von $p_y : \mathrm{St}(y, L) \to \mathrm{St}(x, K)$ genau ein Simplex $T \in L$ mit $y \in T$ und $p(T) = S$. Daraus folgt $\chi(L) = n \cdot \chi(K)$. QED

🙂 Simplizial ist wie immer alles besonders schön und einfach.
Im endlichen Falle haben wir zudem die Euler–Charakteristik.

Simpliziale Immersionen und Submersionen

Übung: Sei K ein zusammenhängender Graph.
(1) Ist K ein Baum, also zykelfrei, so ist jede Überlagerung trivial. (M2M)
(2) Hat K mindestens einen Zykel, so existieren zusammenhängende Überlagerungen $p : L \to K$ mit beliebiger Blätterzahl $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$.
(Erstellen Sie geeignete Skizzen, die Formalisierung ist dann leicht.)

Simpliziale Überlagerungen sind so einfach und so wirkungsgvoll, dass wir gerne noch genauer hinschauen und tiefer bohren wollen:
Wir nennen $p : L \to K$ eine **simpliziale Immersion / Submersion**, falls zu jeder Ecke $y \in \Omega(L)$ die Abbildung $p_y : \mathrm{St}(y, L) \to \mathrm{St}(x, K)$ injektiv / surjektiv ist. (Gilt beides, so ist p eine Überlagerung.)

Übung: Sei $p : L \to K$ eine simpliziale Immersion / Submersion / Überlagerung. Jeder Kantenzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in K erlaubt zu gegebenem Startwert $\tilde{v}_0 \in p^{-1}(v_0)$ höchstens / mindestens / genau eine Hochhebung $\tilde{w} = \tilde{v}_0 \tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_n$ in L mit $p(\tilde{v}_k) = v_k$ für alle k.
(Hierzu ist Satz M4A das topologische Gegenstück.)

Simpliziale Immersionen und Submersionen

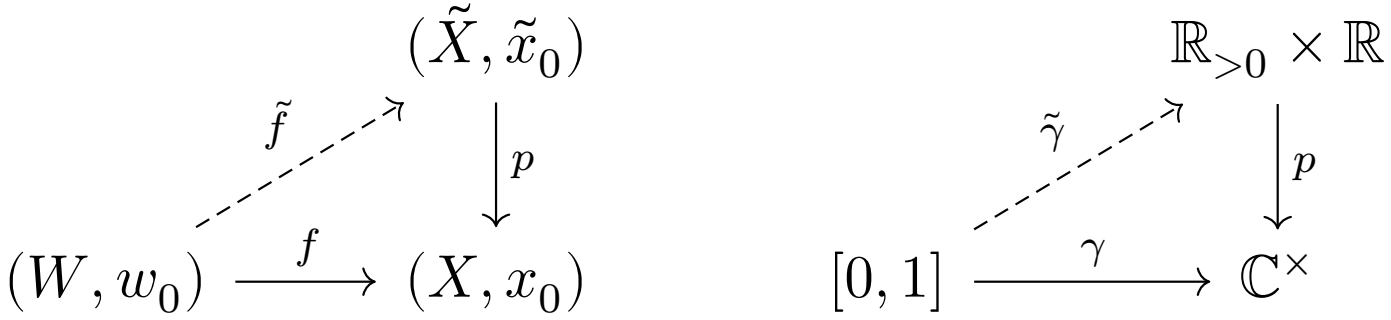
Übung: Ist $f : (L, y_0) \to (K, x_0)$ eine simpliziale Immersion von Graphen, so ist der induzierte Homomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(L, y_0) \to \pi_1(K, x_0)$ injektiv. (Hierzu ist Korollar M4B das topologische Gegenstück.)

📖 J.R. Stallings: *Topology of finite graphs.* Invent. Math. 71 (1983) 551–565

Zur Untersuchung freier Gruppen als Fundamentalgruppen von Graphen erweisen sich Immersionen als nützlich, wie John R. Stallings entdeckte und zu einer schönen Theorie ausbaute. Auf wundersam elegante Weise verbindet sie Graphen, Gruppen und Algorithmen. In seinen Worten:

I wanted to prove the standard theorems on free groups, and discovered that, after a few preliminaries, the notion of "locally injective map" (or "immersion") of graphs was very useful. This enables one to see, in an effective, easy, algorithmic way just what happens with finitely generated free groups. One can understand in this way Howson's theorem that if A and B are finitely generated subgroups of a free group, then $A \cap B$ is finitely generated.

Was ist eine Hochhebung?



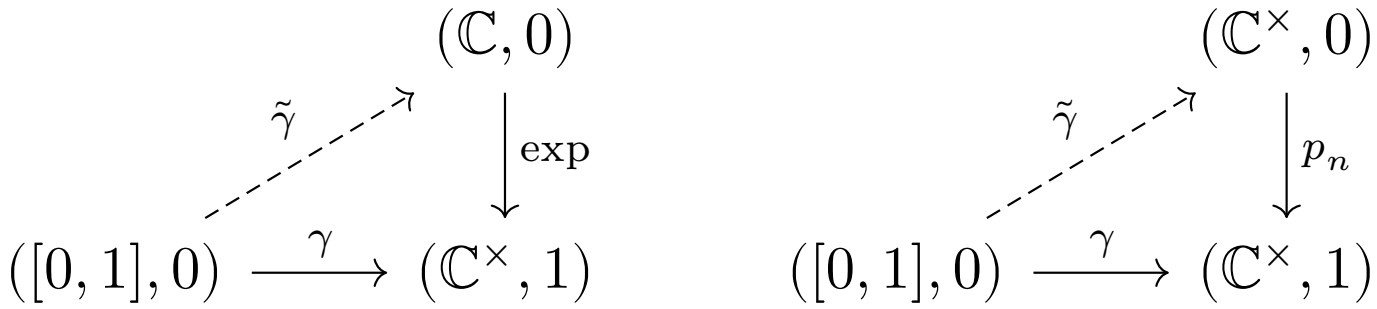
Seien $p : \tilde{X} \to X$ und $f : W \to X$ stetig. Eine **Hochhebung** $\tilde{f}$ von f bezüglich p ist eine stetige Abbildung $\tilde{f} : W \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

Entsprechend mit Fußpunkten, wie im obigen Diagramm: Gegeben sind $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ stetig. Eine **Hochhebung** $\tilde{f}$ von f ist eine stetige Abbildung $\tilde{f} : (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

Beispiel M2A: Polarkoordinaten $p : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ mit $p(r, \varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Jeden Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^\times$ wollen wir schreiben als $\gamma(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$.

Gesucht ist also eine Hochhebung $(r, \varphi) : [0, 1] \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$. Hierzu ist der Startpunkt $\gamma(0) = r_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$ vorgegeben. Existieren Lösungen? genau eine? Für den Radius $r(t) = |\gamma(t)|$ ist das klar, für das Argument $\varphi(t)$ nicht!

Was ist eine Hochhebung?



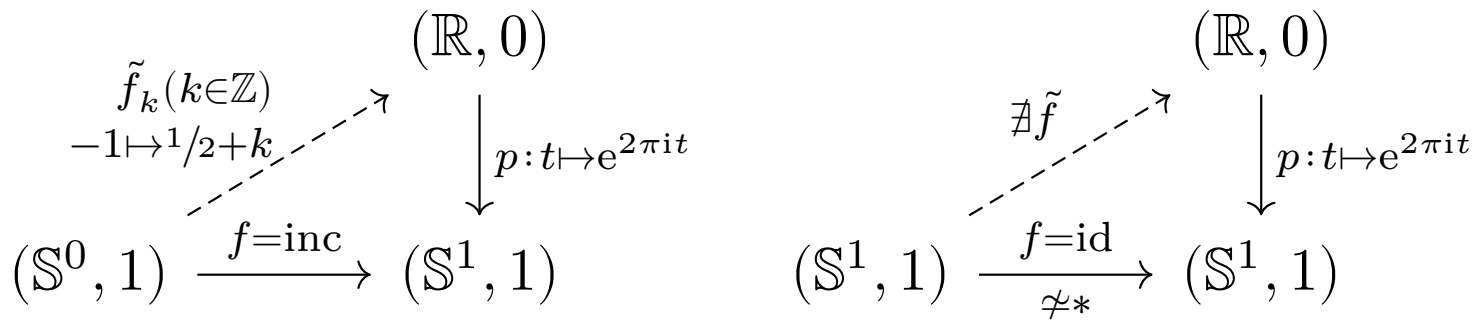
Beispiel M2B: Exponentialfuntion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ mit $z \mapsto \exp(z) = \mathrm{e}^z$.
Jeden Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ wollen wir hochheben zu $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t)}$; dies löst „$\tilde{\gamma} = \ln \gamma$“, obwohl keine stetige komplexe Logarithmusfunktion existiert.

Beispiel M2C: Potenzfunktion $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : w \mapsto w^n$ mit $n \geq 2$.
Jeden Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ möchten wir darstellen als $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)^n$; dies löst „$\tilde{\gamma} = \sqrt[n]{\gamma}$“, obwohl keine stetige komplexe Wurzelfunktion existiert.

☺ Das erinnert uns stark an gewöhnliche Differentialgleichungen.
Gegeben ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir wollen $y'(t) = f(y(t))$ lösen:
Zu jedem Anfangswert $y(0) = x_0$ suchen wir Lösungen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n$.

⁇ Das führt uns zur zentralen Frage nach Existenz und Eindeutigkeit!

Hochhebung: Existenz und Eindeutigkeit



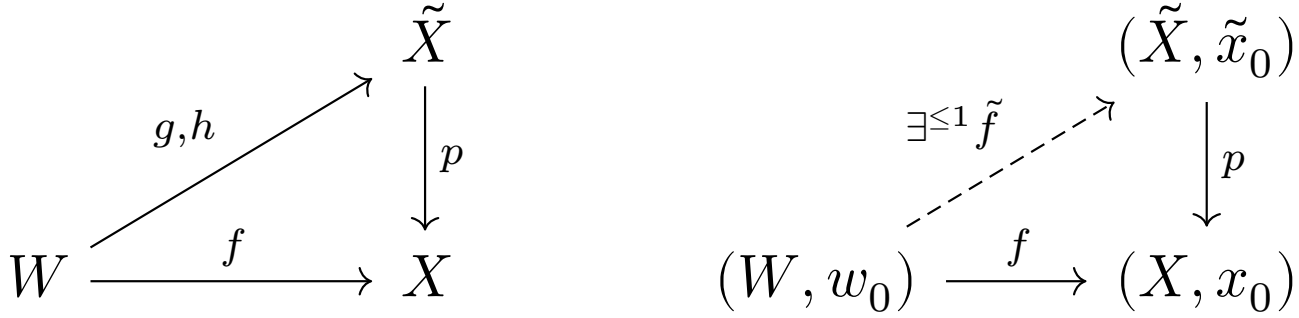
Beispiel M2D: Weder Eindeutigkeit noch Existenz sind automatisch!

Die Inklusion $f : (\mathbb{S}^0, 1) \hookrightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ erlaubt mehrere Hochhebungen: Zwar ist $\tilde{f}(1) = 0$ festgelegt, aber $\tilde{f}(-1) \in {}^1\!/_2 + \mathbb{Z}$ ist frei wählbar.

Die Identität $\mathrm{id} : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{S}^1, 1)$ ist nicht nullhomotop (J4A) und erlaubt daher keine Hochhebung bezüglich $p : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{S}^1, 1) : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$.

Jede stetige Abbildung $\tilde{f} : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{R}, 0)$ ist zusammenziehbar relativ 1 vermöge der affinen Homotopie $\tilde{H} : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{H}(t, x) = t\tilde{f}(x)$. Gälte $p \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so wäre auch $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ zusammenziehbar vermöge $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $H = p \circ \tilde{H}$. Das widerspricht J4A.

Eindeutigkeit der Hochhebung



Proposition M2E: Eindeutigkeit der Hochhebung

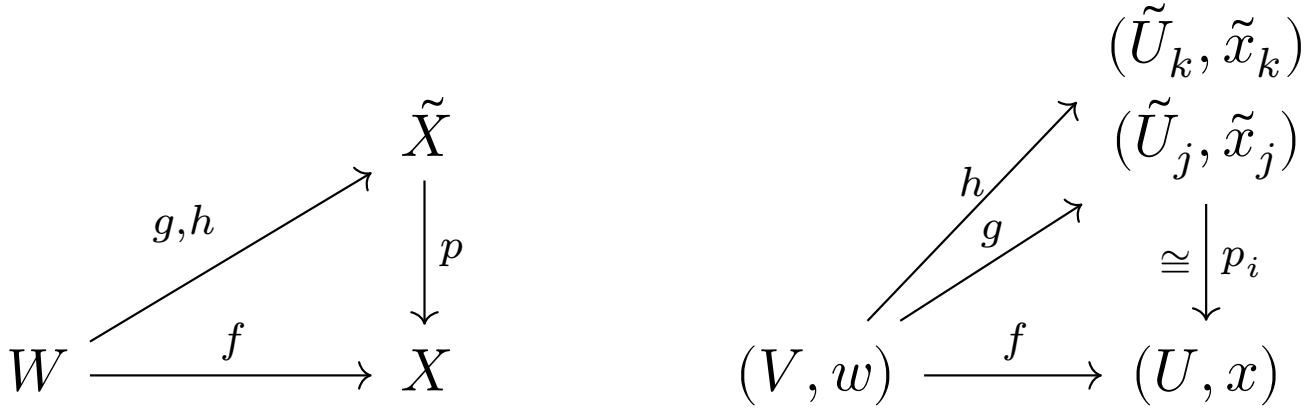
Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $f : W \to X$ und $g, h : W \to \tilde{X}$ stetig mit $f = p \circ g = p \circ h$. Wir zerlegen $W = A \sqcup B$ in die beiden Mengen

$$A := \{\, w \in W \,|\, g(w) = h(w) \,\},$$
$$B := \{\, w \in W \,|\, g(w) \neq h(w) \,\}.$$

Beide sind offen! Ist W zusammenhängend, so gilt $A = W$ oder $B = W$:

- Gilt $g(w) = h(w)$ für ein $w \in W$, so folgt $g(w) = h(w)$ für alle $w \in W$.
- Gilt $g(w) \neq h(w)$ für ein $w \in W$, so folgt $g(w) \neq h(w)$ für alle $w \in W$.

Eindeutigkeit der Hochhebung



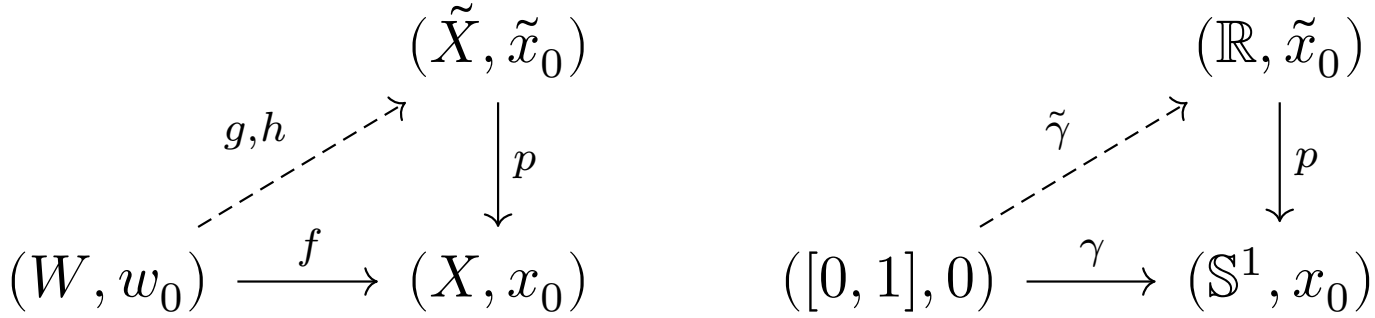
Beweis: Sei $w \in W$. Zum Bild $x := f(w)$ existiert eine trivial überlagerte offene Umgebung $U \subseteq X$; es existiert eine Zerlegung $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ in offene Mengen $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}_i$, und p stiftet Homöomorphismen $p_i : \tilde{U}_i \xrightarrow{\sim} U$.

Wegen $f(w) = p \circ g(w) = p \circ h(w)$ existieren $j, k \in I$ mit $g(w) =: \tilde{x}_j \in \tilde{U}_j$ und $h(w) := \tilde{x}_k \in \tilde{U}_k$. Dazu ist $V = g^{-1}(\tilde{U}_j) \cap h^{-1}(\tilde{U}_k) \ni w$ eine offene Umgebung. Nach Konstruktion gilt $g|_V = p_j^{-1} \circ f|_V$ und $h|_V = p_k^{-1} \circ f|_V$.

Aus $w \in A$ folgt $j = k$ und somit $g|_V = h|_V$, also $V \subseteq A$. Aus $w \in B$ folgt $j \neq k$ und somit sind $g(V) \subseteq \tilde{U}_j$ und $h(V) \subseteq \tilde{U}_k$ disjunkt, also gilt $V \subseteq B$. Somit sind A und B offen in W. QED

Eindeutigkeit der Hochhebung

Durch Angabe eines Basispunktes erhalten wir Eindeutigkeit:



Korollar M2F: Eindeutigkeit möglicher Hochhebungen

Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung. Ist der Raum W zusammenhängend, so existiert zu f höchstens eine Hochhebung: Sind $g, h : (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ stetig und erfüllen beide $p \circ g = p \circ h = f$, so gilt $g = h$ dank M2E. QED

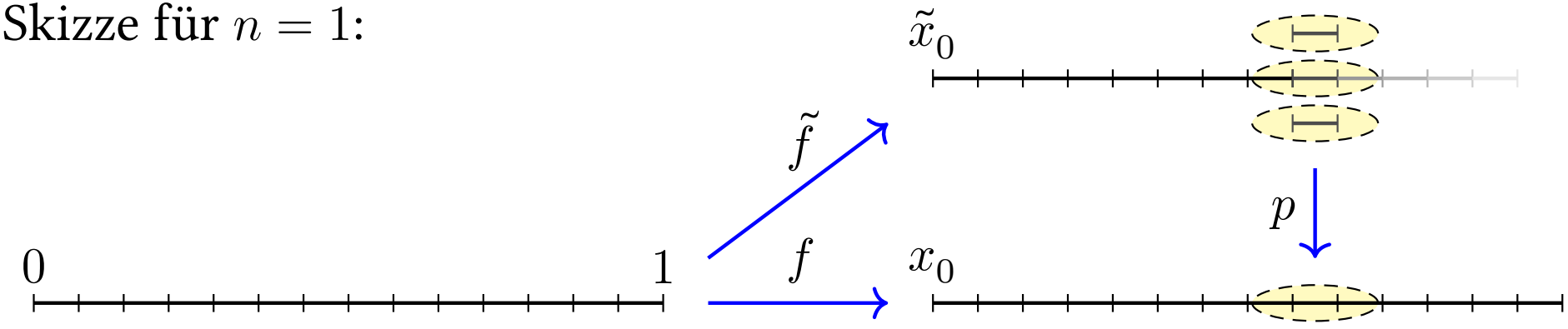
Beispiel: Wir betrachten die Überlagerung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto \mathrm{e}^z$. Jeder Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times : t \mapsto \mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t)}$ erlaubt genau die Hochhebungen $\tilde{\gamma}_k : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto \tilde{\gamma}(t) + 2\pi\mathrm{i}k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Ist $\hat{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine beliebige Hochhebung, so gilt $\hat{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}_k(0)$ für genau ein $k \in \mathbb{Z}$, und somit $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}_k$.

Hochhebung von Wegen und Homotopien

Satz M2G: Hochhebung von Wegen und Homotopien

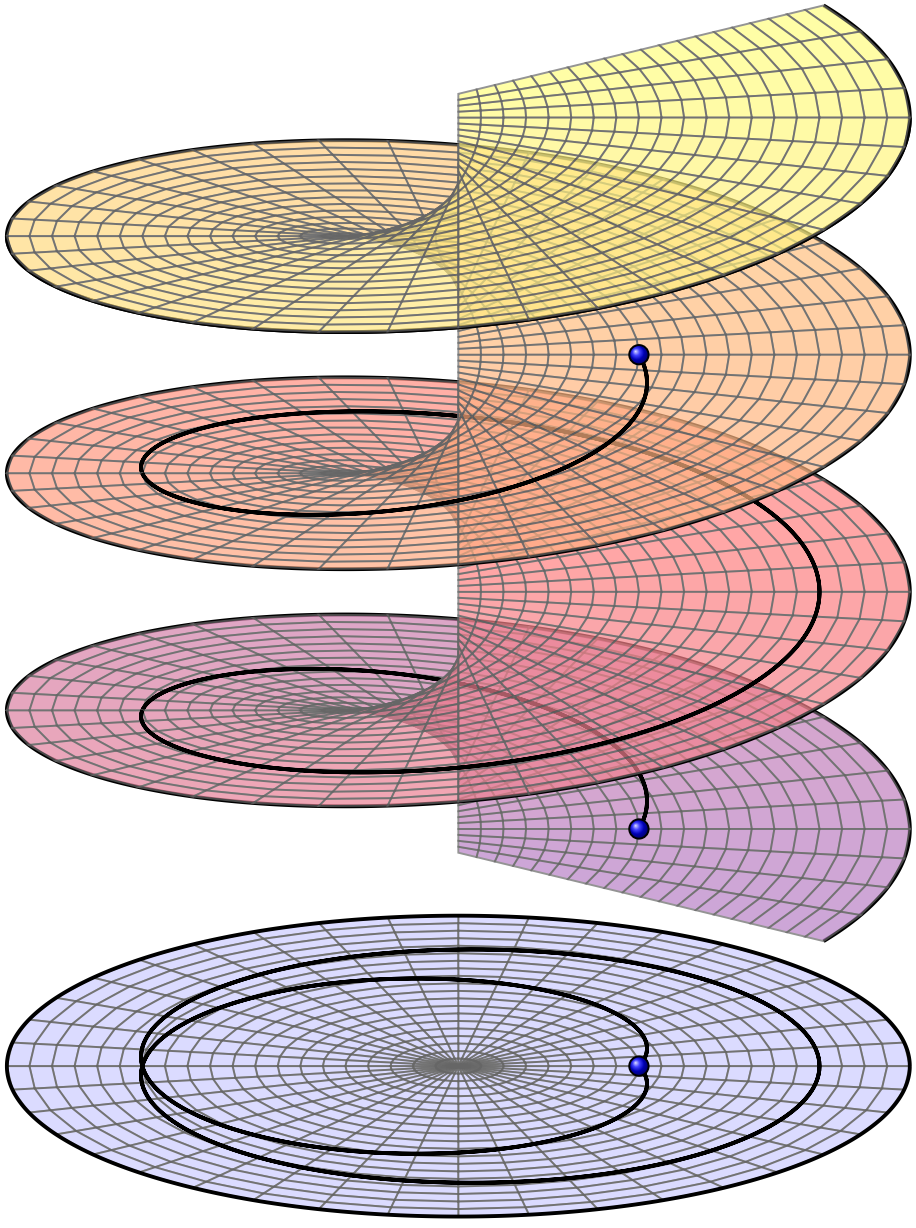
Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Zu jeder stetigen Abbildung $f : ([0,1]^n, 0) \to (X, x_0)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{f}$ bezüglich p, also eine stetige Abbildung $\tilde{f} : ([0,1]^n, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

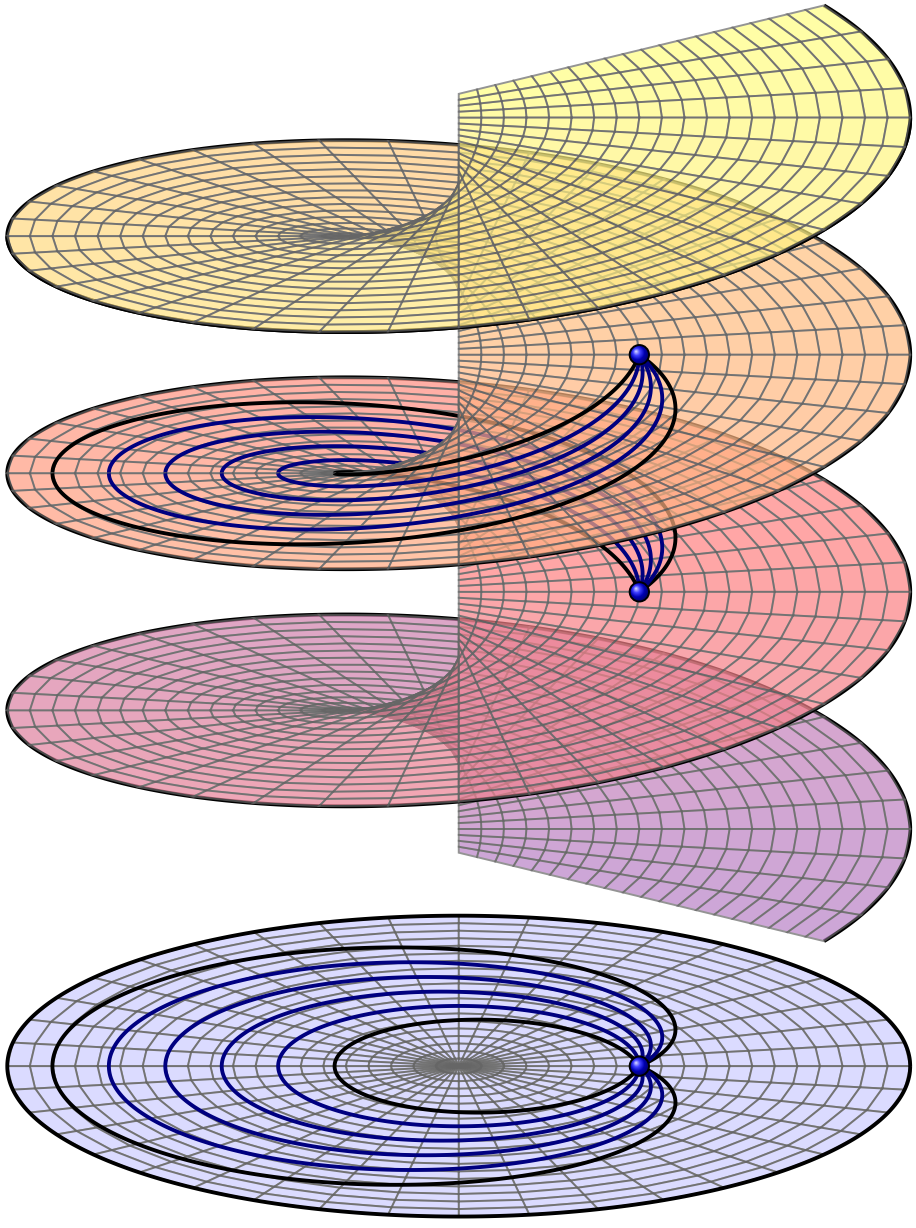
Skizze für $n = 1$:



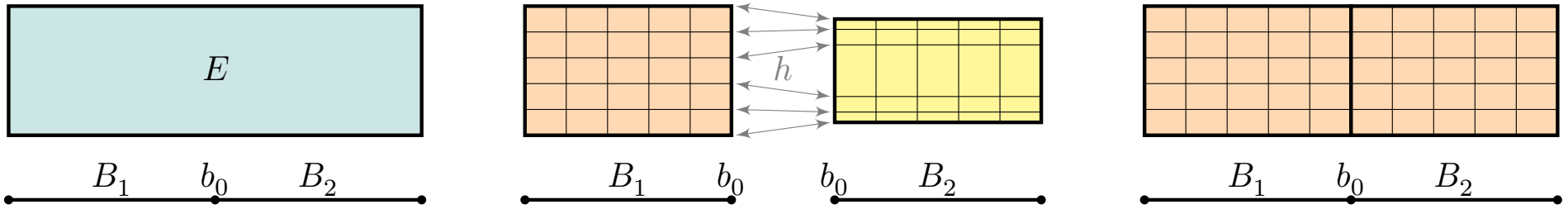
Hochhebung von Wegen ist plausibel, simplizial ist sie klar (M139).
Doch schon für Homotopien ($n = 2$) verlässt uns die Anschauung…
Wir brauchen einen Beweis! Ich führe die Konstruktion für Bündel aus;
das ist abstrakter, also allgemeiner und damit vielseitiger anwendbar.
Überlagerungen sind die lokal-trivialen Bündel mit diskreter Faser.

Hochhebung von Wegen und Homotopien





Verkleben von Trivialisierungen



Satz M2J:

(1) Sei $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \{b_0\}$ und $B_1, B_2 \subseteq B$ abgeschlossen.
Ist $p : E \to B$ trivialisierbar über B_1 und über B_2, so auch über B.

Beweis: Zu $p_i = p|B_i : E_i \to B_i$ sei $\tau_i : B_i \times F_i \xrightarrow{\sim} E_i$ eine Trivialisierung.

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow[u\mapsto\tau_1(b_0,u)]{\cong} & p^{-1}(b_0) \\ \cong\,\Big\downarrow{\scriptstyle h:=\tau_2(b_0,\text{-})^{-1}\circ\tau_1(b_0,\text{-})} & & \Big\| \\ F_2 & \xrightarrow[u\mapsto\tau_2(b_0,u)]{\cong} & p^{-1}(b_0) \end{array}$$

Wir erhalten $\tau_2' = \tau_2 \circ (\mathrm{id}_B \times h) : B_2 \times F_1 \xrightarrow{\sim} E_2$ mit $\tau_2' = \tau_1$ auf $\{b_0\} \times F_1$.
Ihre Verklebung $\tau = \tau_1 \cup \tau_2' : B \times F_1 \xrightarrow{\sim} E$ trivialisiert p. QED

Lokal-trivial über $[0,1]$ ist trivial.

Genauer sei $(\tau_i, \sigma_i) : B_i \times F_i \cong E_i$ eine Trivialisierung von p_i für $i = 1, 2$. Durch die obige Umparametrisierung $(h, k) : F_1 \cong F_2$ erhalten wir daraus $\tau_2' = \tau_2 \circ (\mathrm{id}_B \times h) : B_2 \times F_1 \to E_2$ und $\sigma_2' = (\mathrm{id}_B \times k) \circ \sigma_2 : E_2 \to B_2 \times F_1$ mit $(\tau_2', \sigma_2') : B_2 \times F_1 \cong E_2$ und zudem $(\tau_2', \sigma_2') = (\tau_1, \sigma_1)$ auf $\{b_0\} \times F_1$. Ihre Verklebung $(\tau, \sigma) : B \times F_1 \xrightarrow{\sim} E$ trivialisiert p.

Satz M2J:

(2) Jedes lokal-trivialisierbare Bündel $p : E \to [0,1]$ ist trivial.

Beweis: Zu p existiert eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von $B = [0,1]$, sodass $p|U_i$ trivial ist über jedem $U_i \subseteq B$. Wir unterteilen B in $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gleichlange Teile $B_i = [(i-1)/\ell, i/\ell]$ für $i = 1, \ldots, \ell$. Ist ℓ groß genug, so ist $p|B_i$ trivial über jedem B_i. Warum? Dank Lebesgue–Zahl! (F2B)

Dank (1) ist p trivial über $B_1 \cup \ldots \cup B_i$ für $i = 1, \ldots, \ell$, also über B. QED

Verkleben von Trivialisierungen

Satz M2J:

(3) Sei $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \{b_0\}$ und $B_1, B_2 \subseteq B$ abgeschlossen. Ist $p : E \to B \times C$ trivial über $B_1 \times C$ und $B_2 \times C$, so auch über $B \times C$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Konstruktion (1).

Beweis: Zu $B_i^* = B_i \times C$ und $p_i = p|B_i^*$ sei $(\tau_i, \sigma_i) : B_i^* \times F_i \cong E_i$ eine Trivialisierung. Über $B_0^* = \{b_0\} \times C$ wird auf zwei Arten trivialisiert:

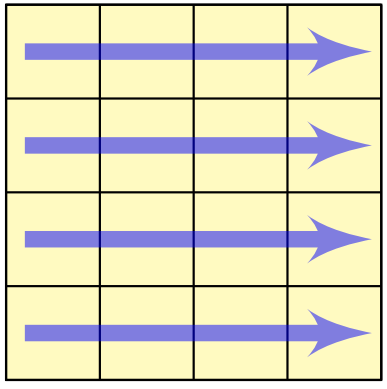
$$\begin{array}{ccc} C \times F_1 & \xrightarrow[(c,u)\mapsto\tau_1(b_0,c,u)]{\cong} & p^{-1}(\{b_0\} \times C) \\ \cong \big\downarrow h:=\tau_2(b_0,\text{-})^{-1}\circ\tau_1(b_0,\text{-}) & & \| \\ C \times F_2 & \xrightarrow[(c,u)\mapsto\tau_2(b_0,c,u)]{\cong} & p^{-1}(\{b_0\} \times C) \end{array}$$

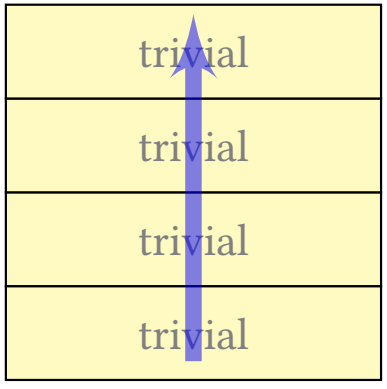
Durch die obige Umparametrisierung $(h, k) : F_1 \cong F_2$ erhalten wir daraus $\tau_2' = \tau_2 \circ (\mathrm{id}_B \times h) : B_2^* \times F_1 \to E_2$ und $\sigma_2' = (\mathrm{id}_B \times k) \circ \sigma_2 : E_2 \to B_2^* \times F_1$ mit $(\tau_2', \sigma_2') : B_2^* \times F_1 \cong E_2$ und zudem $(\tau_2', \sigma_2') = (\tau_1, \sigma_1)$ auf $B_0^* \times F_1$. Ihre Verklebung $(\tau, \sigma) : B^* \times F_1 \rightsquigarrow E$ trivialisiert p. QED

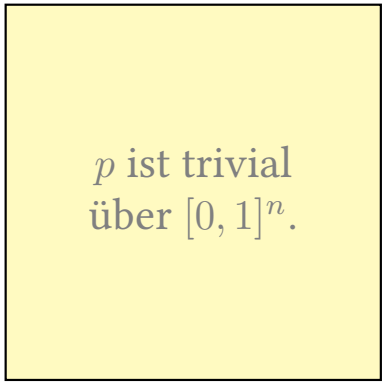
Lokal-trivial über $[0,1]^n$ ist trivial.

Satz M2J:

(4) Jedes lokal-trivialisierbare Bündel $p : E \to [0,1]^n$ ist trivial.





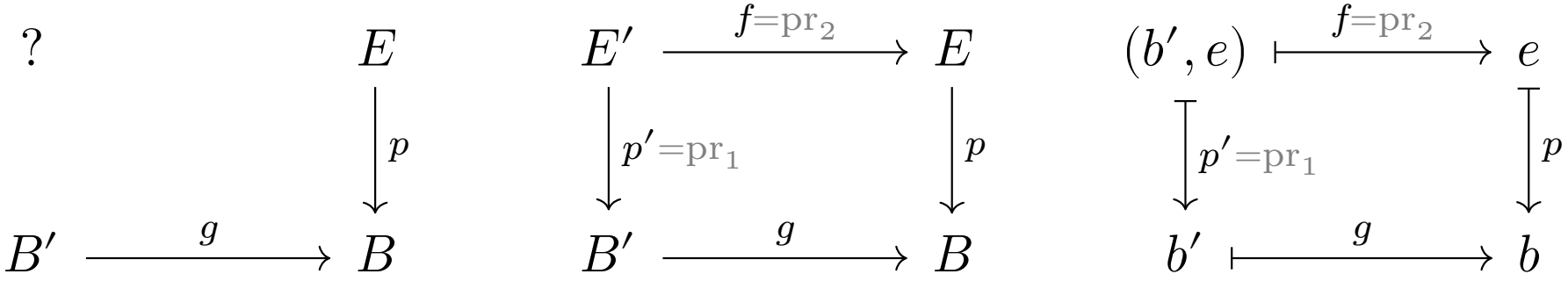


Aufgabe: Beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Konstruktion (2).

Beweis: Zu p existiert eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $B = [0,1]^n$, sodass $p|U_i$ trivial ist über jedem $U_i \subseteq B$. Wir unterteilen B in $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ Würfel $B_i = \prod_{k=1}^n [(i_k - 1)/\ell, i_k/\ell]$ für $i \in \{1, \dots, \ell\}^n$. Ist ℓ groß genug, so ist $p|B_i$ trivial über jedem B_i. Warum? Dank Lebesgue–Zahl! (F2B) Dank (3) ist p trivial über B, nach obigen Verklebeschema. QED

Übung: Die Skizze zeigt $n = 2$. Führen Sie die Induktion über n aus.

Zurückziehen eines Bündels



Sei $p : E \to B$ ein Bündel $g : B' \to B$ eine beliebige stetige Abbildung. Ihr **Faserprodukt** $E' = B' \,{}_g\!\times_p E := \{\, (b', e) \in B' \times E \,|\, g(b') = p(e) \,\}$ definiert das **zurückgezogene Bündel** $g^*p := p' : E' \to B' : (b', e) \mapsto b'$ und den Bündelmorphismus $(f, g) : p' \to p$ mit $f : E' \to E : (b', e) \mapsto e$.

Satz M2κ:

Ist $p : E \to B$ lokal-/trivial, so auch jede Zurückziehung $g^*p : E' \to B'$.

Beweis: (1) Sei $(\tau, \sigma) : B \times F \cong E : (b, u) \leftrightarrows e$ eine Trivialisierung von p. Wir erhalten die Trivialisierung $(\tau', \sigma') : B' \times F \cong E' : (b', u) \leftrightarrows (b', e)$ von p' durch $\tau'(b', u) = (b', \tau(g(b'), u))$ und $\sigma'(b', e) = (b', \mathrm{pr}_2\sigma(e))$.

(2) Ist p trivial über $U \subseteq B$, so ist p' trivial über $U' = g^{-1}(U) \subseteq B'$. QED

Zurückziehen eines Bündels

🙂 Aus den gegebenen Daten lässt sich nur eine sinnvolle Trivialisierung bauen. Unser erster und einziger Versuch gelingt tatsächlich!

Aufgabe: Prüfen Sie die behaupteten Eigenschaften nach!

Lösung: (1) Zunächst die globale Trivialisierung $(\tau', \sigma') : B' \times F \cong E'$: Ist $\tau' : B' \times F \to E'$ wohldefiniert? Ja, denn $p(e) = p(\tau(g(b'), u)) = g(b')$. Die Stetigkeit von τ', σ' ist klar, ebenso $p' \circ \tau' = \mathrm{pr}_1$ und $\mathrm{pr}_1 \circ \sigma' = p'$.

$$\sigma' \circ \tau' : (b', u) \mapsto (b', e = \tau(g(b'), u)) \mapsto (b', \mathrm{pr}_2 \sigma(e)) = (b', u),$$

$$\begin{aligned} \tau' \circ \sigma' : (b', e) &\mapsto (b', u = \mathrm{pr}_2 \sigma(e)) \mapsto (b', \tau(g(b'), u)) \\ &= (b', \tau(p(e), \mathrm{pr}_2 \sigma(e))) = (b', \tau(\sigma(e))) = (b', e). \end{aligned}$$

Somit ist (τ', σ') ein Bündelisomorphismus $B' \times F \cong E'$, wie behauptet.

(2) Über $U \subseteq B$ haben wir das eingeschränkte Bündel $p|U : E_U \to U$ mit $E_U := p^{-1}(U) \subseteq E$. Über $U' = g^{-1}(U) \subseteq B'$ haben wir $p'|U' : E'_{U'} \to U'$ mit Totalraum $E'_{U'} = p'^{-1}(U') = \{ (b', e) \in U' \times E \mid g(b') = p(e) \} \subseteq E'$. Ist $p|U$ trivial, so auch $p'|U'$ dank (1). QED

Anwendung: Hochhebung von Wegen und Homotopien

Satz M2L: Hochhebung von Wegen und Homotopien

Sei $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine lokal-triviales Bündel. Zu jeder stetigen Abbildung $g : ([0,1]^n, 0) \to (B, b_0)$ existiert eine Hochhebung $\tilde{g}$ über p, also eine stetige Abbildung $\tilde{g} : ([0,1]^n, 0) \to (E, e_0)$ mit $p \circ \tilde{g} = g$.

☺ Dank unserer Vorbereitungen ist dies nun trivialilisert:

$$\begin{array}{ccccc} [0,1]^n \times F & \xrightarrow{\tau} & E' & \xrightarrow{f=\mathrm{pr}_2} & E \\ \uparrow\downarrow \mathrm{pr}_1 & & \downarrow p'=\mathrm{pr}_1 & & \downarrow p \\ [0,1]^n & = & [0,1]^n & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Beweis: Das zurückgezogene Bündel $p' = g^*p : E' \to [0,1]^n$ ist lokal-trivial dank M2K, somit trivial dank M2J: Es existiert eine Trivialisierung $\tau : [0,1]^n \times F \xrightarrow{\sim} E'$ mit $(0, u_0) \mapsto (0, e_0)$. Die Abbildung $\tilde{g} : [0,1]^n \to E$ mit $\tilde{g}(x) = \mathrm{pr}_2 \tau(x, u_0)$ ist stetig, erfüllt $\tilde{g}(0) = e_0$ und $p \circ \tilde{g}(x) = p \circ \mathrm{pr}_2 \tau(x, u_0) = g(x)$. QED

Anwendung: Hochhebung von Wegen und Homotopien

Daraus folgt insbesondere der obige Satz M2G als schöner Spezialfall:
Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Zu jeder stetigen Abbildung $f : ([0,1]^n, 0) \to (X, x_0)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{f}$ bezüglich p, also eine stetige Abbildung $\tilde{f} : ([0,1]^n, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

Wie bei vielen Problemen lohnt es sich auch hier,
Existenz und Eindeutigkeit separat zu behandeln.

🙂 Die Existenz gilt für jedes lokal-triviale Bündel, dank Satz M2L.
Dieser allgemeine Fall ist lehrreich, kostet uns keine zusätzliche Mühe und liefert eine nützliche Eigenschaft, die wir weiter nutzen können.

🙂 Die Eindeutigkeit ist eine besondere Eigenschaft von Überlagerungen, gemäß M2E: Da die Faser diskret ist, hat eine weitere Hochhebung keine Möglichkeit abzuweichen. Genau dies zeigt unser obiger Beweis.

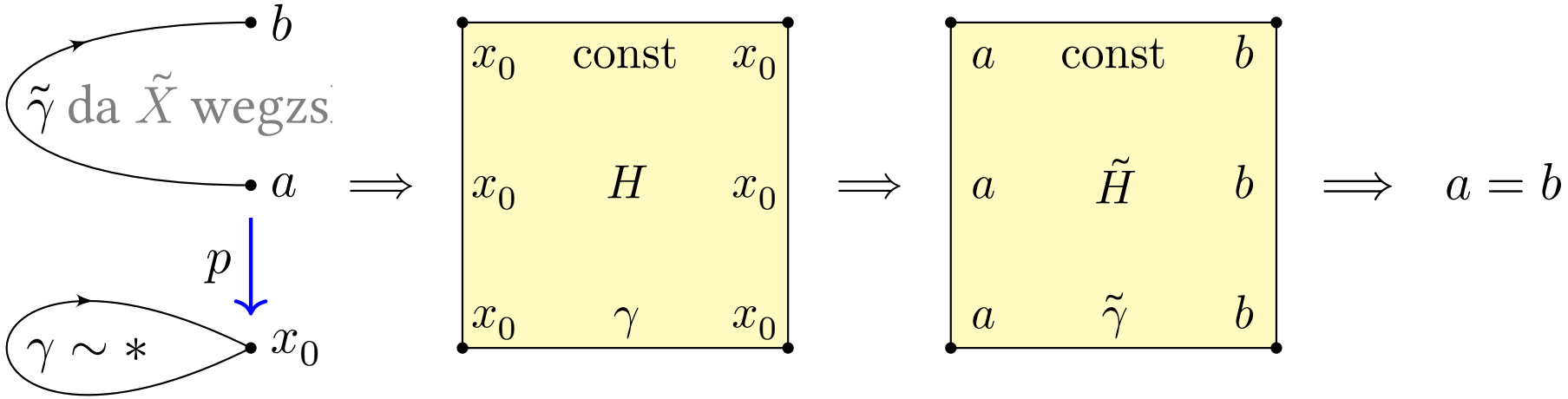
Anwendung: triviale Überlagerung

Korollar M2M: triviale Überlagerung

(1) Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend und X einfach zusammenhängend, so ist p ein Homöomorphismus.

(2) Ist X lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend, so ist jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ trivial.

Beweis: (1) Nach Definition M1A ist p surjektiv und ein lokaler Homöomorphismus. Es genügt zu zeigen, dass p injektiv ist.



(2) Dank (1) ist $p : \tilde{X} = \bigsqcup \pi_0(\tilde{X}) \to X$ eine triviale Überlagerung. QED

Anwendung: triviale Überlagerung

Aufgabe: Führen Sie die obige Beweisskizze sorgsam aus.

Lösung: (1) Seien $a, b \in \tilde{X}$ zwei Punkte mit gleichem Bild $x_0 \in X$. Da $\tilde{X}$ wegzshgd ist, existiert ein Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ von $\tilde{\gamma}(0) = a$ nach $\tilde{\gamma}(1) = b$. Sein Bild $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ ist somit eine Schleife in (X, x_0).

Da X einfach zshgd ist, existiert eine Homotopie $H : \gamma \simeq \text{const rel } \{0,1\}$, also eine stetige Abbildung $H : [0,1]^2 \to X$ mit den Randbedingungen $H(0,t) = \gamma(t)$ und $H(0,t) = H(s,0) = H(s,1) = x_0$ für alle $s, t \in [0,1]$.

Dank M2G existiert eine Hochhebung zu einer stetigen Abbildung $\tilde{H} : [0,1]^2 \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und dem Startpunkt $\tilde{H}(0,0) = a$.
Dank Eindeutigkeit der Hochhebung (M2F) erhalten wir für die vier Randwege das obige Bild: Hieraus folgt $a = b$. Somit ist p injektiv.

(2) Mit X ist auch $\tilde{X}$ lokal wegzusammenhängend (M1N). Daher zerfällt $\tilde{X} = \bigsqcup \pi_0(\tilde{X})$ in die topologische Summe seiner Wegkomponenten (G3C).

Für $\tilde{X}_i \in \pi_0(X)$ erhalten wir durch Einschränkung $p_i : \tilde{X}_i \to X$ eine Überlagerung (M1L). Dank (1) ist p_i ein Homöomorphismus. QED

Anwendung: triviale Überlagerung

Beispiel: Jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to [0,1]^n$ ist trivial. Diese Aussage benötigen wir im Beweis, und sie ist als Spezialfall im Satz enthalten.

Die Hochhebung von Wegen und Homotopien stiftet den grundlegenden Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ und allen Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$. Bevor wir dies zur allgemeinen Theorie und schließlich zur Galois–Korrespondenz ausbauen, möchte ich schon jetzt Korollar M2M als erste direkte Folgerung betonen.

Beispiel: Für $n \geq 2$ ist jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to \mathbb{S}^n$ trivial.
Ebenso ist jede Überlagrung $p : \tilde{X} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ trivial.

Für $n = 1$ hingegen gibt es nicht-triviale Überlagerungen $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ und $p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, zum Beispiel $p(z) = z^k$ mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Diese einfache Beobachtung hat erstaunliche algebraische Konsequenzen, wie der Satz von Gelfand–Mazur (M2O) und der Satz von Hopf (M2Q).

Anwendung: triviale Überlagerung

🙂 Jeder Raum X erlaubt selbstverständlich triviale Überlagerungen $p : X \times F \to F : (x, u) \mapsto x$ mit jeder beliebigen diskreten Faser $F \neq \emptyset$.
Manche Räume erlauben *ausschließlich* triviale Überlagerungen, etwa alle Würfel $[0, 1]^n$ oder die Sphären $\mathbb{S}^n$ für $n \geq 2$ oder allgemein jeder Raum, der lokal wegzshgd und einfach zshgd ist

⚠ Der lokale Wegzusammenhang ist in (2) wirklich notwendig!
Der Pseudokreis $W \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, erlaubt aber dennoch nicht-triviale Überlagerungen.

Der Satz von Gelfand–Mazur

Erinnerung: Die Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{R}, +, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ ist ein Gruppenisomorphismus und ein Diffeomorphismus. Hingegen ist $\exp : (\mathbb{C}, +, 0) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$ ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$, lokaler Diffeomorphismus und einfach zshgde Überlagerung.

Allgemein: Sei $(A, \cdot, 1)$ eine $\mathbb{R}$–Banach–Algebra mit Eins und

$$\exp : A \to A : \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!.$$

Für $x, y \in A$ mit $xy = yx$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, insbesondere $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$. Somit ist $\exp(x)$ in A invertierbar und $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$. Damit ist $\exp : (A, 0) \to (A^\times, 1)$ ein lokaler Diffeomorphismus um 0. Als lokale Umkehrung haben wir

$$\ln : B(1,1) \to A : \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k/k$$

Es gilt $\exp'(x) = \exp(x)$ und $\ln'(a) = a^{-1}$. Für alle $x \in B(0,1)$ folgt daraus $f(x) := \exp(\ln(1+x)) = 1 + x$, denn wir finden $f(0) = 1$ und $f'(x) = \exp(\ln(1+x))(1+x)^{-1}$, also $f'(0) = 1$ und $f''(x) = 0$.

Der Satz von Gelfand–Mazur

Für jede *kommutative* Banach–Algebra ist die Situation besonders schön, so wie $\exp : (\mathbb{R}, +, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ und $\exp : (\mathbb{C}, +, 0) \twoheadrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$:

Satz M2N:

Für jede kommutative Banach–Algebra $(A, +, 0, \cdot, 1)$ gilt:

1. Die Exponentialfunktion $\exp : (A, +, 0) \to (A^\times, \cdot, 1)$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit diskretem Kern.
2. Die Bildmenge ist $\exp(A) = A_1^\times := [1]_{A^\times}$, die Komponente der Eins, und hierüber ist $\exp : (A, 0) \to (A_1^\times, 1)$ eine Überlagerung.

Beweis: (1) Dies haben wir eben nachgerechnet dank $\ln$. (2) Der Raum A ist zusammenhängend, also auch das stetige Bild $\exp(A)$ in $A^\times$. In $A_1^\times$ ist $\exp(A)$ eine offene Untergruppe von $A_1^\times$, somit auch abgeschlossen, also $\exp(A) = A_1^\times$. (3) Wir haben $\exp_a(x) := \exp(a + x) = \exp(a)\exp(x)$ mit Umkehrung $\ln_a(x) := a + \ln(\exp(-a) \cdot x)$ für $x \in B(\exp(a), |\exp(a)|)$. QED

☺ Aus diesen analytischen Eigenschaften der Exponentialfunktion gewinnen wir nun eine bemerkenswerte algebraische Folgerung…

Der Satz von Gelfand–Mazur

Wir kennen die Banach–Algebren $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sowie $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbb{C}^{n\times n}$.
Erstere sind sogar Körper, Letztere offensichtlich nicht. Klassifikation:

Satz M2o: Gelfand–Mazur

Ist eine Banach–Algebra A ein Körper, so ist $\dim_{\mathbb{R}}(A) \geq 3$ unmöglich.
Es bleibt nur $\dim_{\mathbb{R}}(A) \in \{1, 2\}$, folglich ist A isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Beweis: Angenommen, es gälte $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 3$. Die Gruppe $A^\times = A \setminus \{0\}$ ist dann einfach zusammenhängend (L2U). Die Exponentialabbildung $\exp : (A, +, 0) \to (A^\times, \cdot, 1)$ ist eine Überlagerung (M2N), daher trivial (M2M), also ein Homöomorphismus und ein Gruppenisomorphismus.

In der Gruppe $(A^\times, \cdot, 1)$ hat das Element -1 die Ordnung 2. Hingegen hat $(A, +, 0)$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum außer 0 keine Elemente endlicher Ordnung.
An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 3$. QED

Bemerkung: Über $\mathbb{R}$ liegt -1 gar nicht erst im Bild von $\exp : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$.
Über $\mathbb{C}$ gilt $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $\exp(\pi\mathrm{i}) = -1$ und $\pi\mathrm{i} + \pi\mathrm{i} \in \operatorname{Ker}(\exp)$.
Ein Widerspruch entsteht erst für $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 3$, wie gezeigt.

Der Satz von Gelfand–Mazur

Aufgabe: Das beweist erneut den Fundamentalsatz der Algebra (FTA); der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen!

Lösung: Angenommen, es gäbe ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad $\deg P \geq 2$ ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$. Nach Primzerlegung können wir P zudem als irreduzibel annehmen. Dann wäre der Quotientenring $A = \mathbb{C}[X]/(P)$ ein Körper mit $\dim_{\mathbb{C}} A = \deg P \geq 2$, also $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 4$. Dank endlicher Dimension ist A automatisch eine Banach–Algebra. Das widerspricht dem Satz M20 von Gelfand–Mazur.

🙂 Die Voraussetzung ist analytisch, die Schlussfolgerung algebraisch, der Beweis topologisch. Verschiedene Aspekte der Mathematik arbeiten hier wunderbar harmonisch zusammen zu einem erfolgreichen Ganzen.

Als Dreingabe erhalten wir erneut einen verblüffenden Beweis des FTA. Das war zwar anfangs gar nicht unser Ziel, ist aber immer wieder schön.

Es ist schon kurios: Wir nutzen den FTA seit Anbeginn des Studiums, doch leider ist ein Beweis anfangs noch außer Reichweite. Später scheint jeder Satz, der etwas auf sich hält, den FTA als Korollar mitzubringen.

Gruppenoperation und Quotient

Beispiel: Die Gruppe $\{\pm 1\}$ operiert auf der Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ durch Punktspiegelung. Der Quotient $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ ist eine Überlagerung.

Beispiel: Die Gruppe $\{\pm 1\}$ operiert auf der Modellfläche $F_g^+ \subseteq \mathbb{R}^3$ durch Punktspiegelung. Der Quotient $\{\pm 1\} \curvearrowright F_g^+ \to F_g^-$ ist eine Überlagerung.

Definition M3A: Gruppenoperation

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe und X eine Menge. Eine **Linksoperation** $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$ von G auf X ist eine Abbildung $\varphi : G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \bullet x$, sodass gilt:

$$1 \bullet x = x \quad \text{und} \quad g' \bullet (g \bullet x) = (g' \cdot g) \bullet x \quad \text{für alle } g, g' \in G \text{ und } x \in X.$$

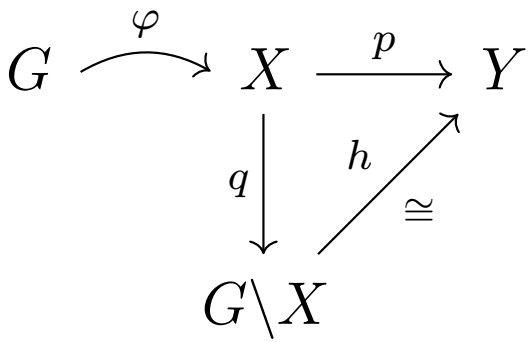
Wir schreiben kurz $gx = g \bullet x = \varphi(g, x)$. Wir definieren $x \sim y$ falls $y = gx$ für ein $g \in G$. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Reflexivität: $x = 1x$.
Symmetrie: Aus $y = gx$ folgt $g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = 1x = x$.
Transitivität: Aus $y = gx$ und $z = g'y$ folgt $z = g'(gx) = (g'g)x$.

Gruppenoperation und Quotient

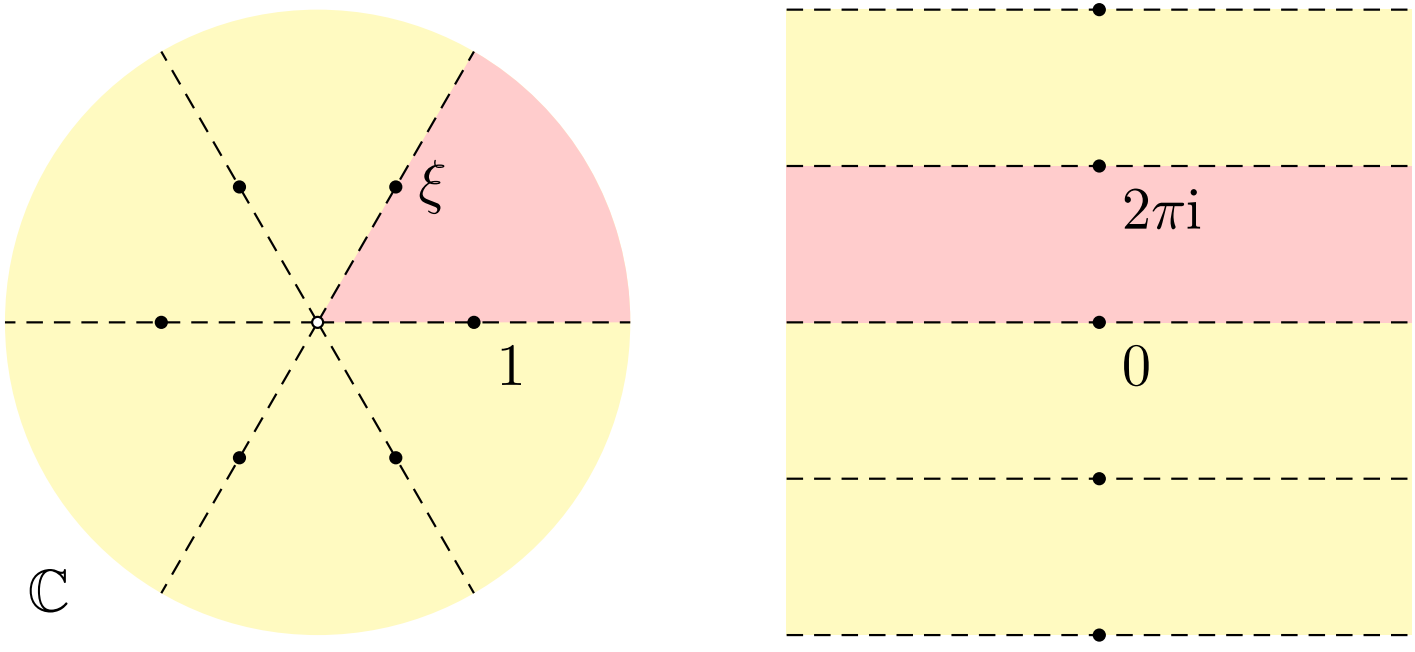
Die Äquivalenzklasse $Gx := \{\, gx \mid g \in G \,\}$ nennen wir die **Bahn** oder den **Orbit** des Punktes $x \in X$ unter der Operation von G. Der **Bahnenraum** ist die Quotientenmenge $G\backslash X := \{\, Gx \mid x \in X \,\}$. Die Quotientenabbildung ist $q : X \to G\backslash X : x \mapsto Gx$. Trägt X eine Topologie, so versehen wir $G\backslash X$ mit der Quotiententopologie. Zusammenfassend schreiben wir:

$$G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X \xrightarrow{q} G\backslash X$$

Etwas allgemeiner und flexibler schreiben wir $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X \xrightarrow{p} Y$, wenn $\varphi : G \times X \to X$ eine Operation der Gruppe G auf dem Raum X und $p : X \to Y$ äquivalent zum Quotienten q ist, also ein Homöomorphismus $h : G\backslash X \xrightarrow{\sim} Y$ mit $p = h \circ q$ existiert. Zusammengefasst als Diagramm:



Gruppenoperation und Quotient

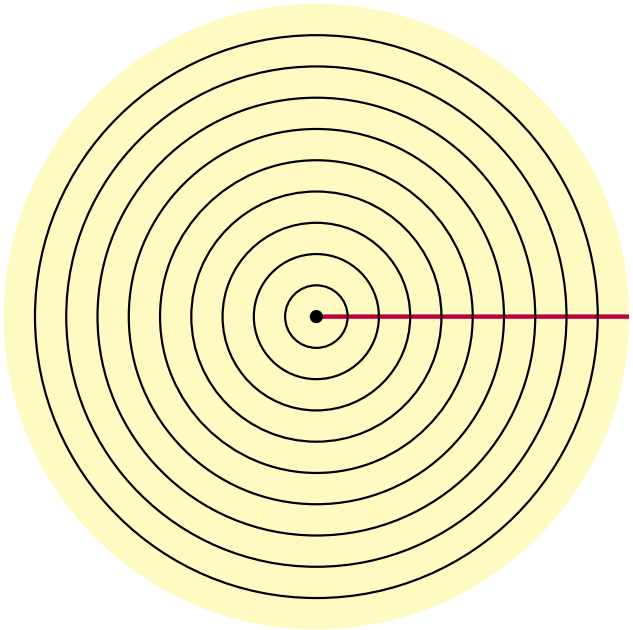


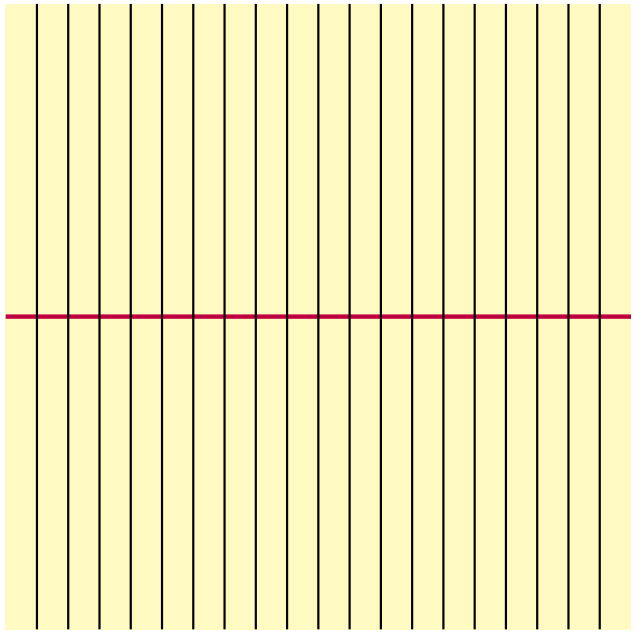
Beispiel M3c: Wir kennen bereits die folgenden Gruppenoperationen:

$$2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times, \qquad 2\pi\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1 \quad \text{mit } p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$
$$W_n \overset{\cdot}{\curvearrowright} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{p_n} \mathbb{C}^\times, \qquad W_n \overset{\cdot}{\curvearrowright} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{p_n} \mathbb{S}^1 \quad \text{mit } p_n(z) = z^n.$$

Hier ist $W_n = \{1, \xi_n, \xi_n^2, \dots, \xi_n^{n-1}\} \leq \mathbb{S}^1 \leq \mathbb{C}^\times$ die Untergruppe der $n$ten Einheitswurzeln, erzeugt von $\xi_n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$. Die angegebene Abbildung ist äquivalent zum Quotienten. Wiederholung: Wie gelingt das?

Gruppenoperation und Quotient

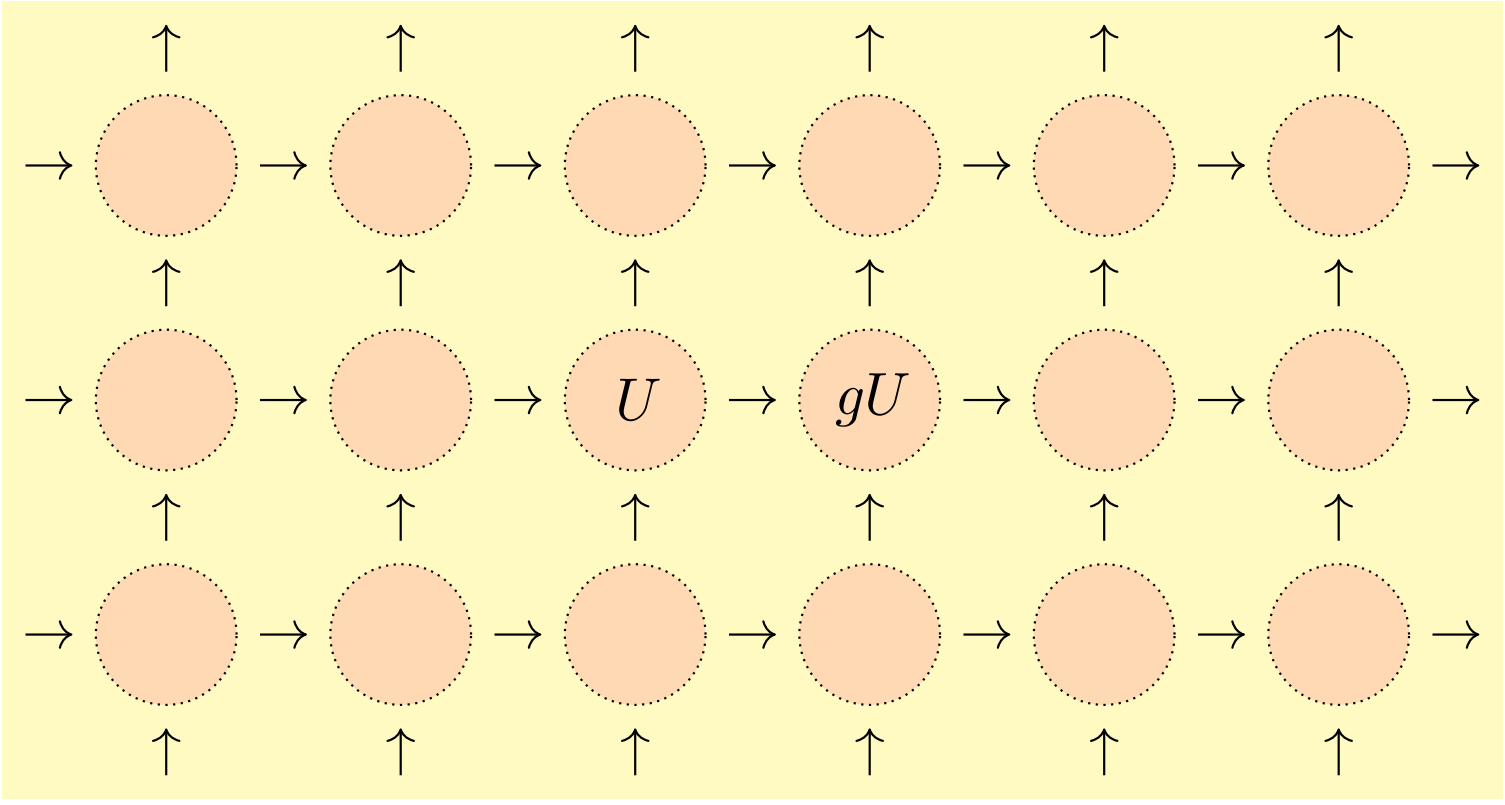




Beispiel M3D: $(\mathbb{R},+) \overset{\varphi}{\curvearrowright} \mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\varphi(t,z) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}\, z$ und $p(z) = |z|$.
Die Abbildung p ist invariant, induziert also $\overline{p} : Q \to \mathbb{R}_{\geq 0} : \overline{p}([z]) = |z|$.
Der Schnitt $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x,0)$ liefert die stetige Abbildung
$\overline{s} = q \circ s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to Q : x \mapsto [(x,0)]$. Es gilt $\overline{p} \circ \overline{s} = \mathrm{id}$ und $\overline{s} \circ \overline{p} = \mathrm{id}$.

Beispiel M3E: $(\mathbb{R},+) \overset{\psi}{\curvearrowright} \mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\psi(t,z) = \mathrm{i}t + z$ und $p(z) = \mathrm{re}(z)$.
Die Abbildung p ist invariant, induziert also $\overline{p} : Q \to \mathbb{R} : \overline{p}([z]) = \mathrm{re}(z)$.
Der Schnitt $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto x + 0\mathrm{i}$ liefert die stetige Abbildung
$\overline{s} = q \circ s : \mathbb{R} \to Q : x \mapsto [x + 0\mathrm{i}]$. Es gilt $\overline{p} \circ \overline{s} = \mathrm{id}$ und $\overline{s} \circ \overline{p} = \mathrm{id}$.

Gruppenoperation und Quotient



Beispiel M3F: Wir haben $\mathbb{Z}^2 \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} (\mathbb{S}^1)^2$, wie hier skizziert.
Die diskrete Untergruppe $\mathbb{Z}^2$ von $(\mathbb{R}^2, +)$ operiert durch Translation.
Der Quotient ist äquivalent zu $p : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{S}^1)^2 : (t_1, t_2) \mapsto (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t_1}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t_2})$.

Wiederholung: Warum ist dies äquivalent zum Quotienten?
Ebenso für $\mathbb{Z}^n \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} (\mathbb{S}^1)^n$.

Gruppenoperation durch Homöomorphismen

Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum und $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$ eine Gruppenoperation. Wir sagen, G **operiert durch Homöomorphismen**, wenn für jedes $g \in G$ die Linkstranslation $\varphi_g : X \to X : x \mapsto gx$ stetig ist. Dann ist $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ ebenfalls stetig. Damit entspricht φ dem Gruppenhomomorphismus

$$G \to \mathrm{Homeo}(X) : g \mapsto \varphi_g.$$

Insbesondere operiert G auf der Topologie $\mathcal{T}$ vermöge

$$G \overset{\varphi}{\curvearrowright} \mathcal{T} : (g, U) \mapsto gU.$$

Die Operation φ heißt **frei** (fixpunktfrei, ohne Fixpunkte), wenn $gx \neq x$ für alle $x \in X$ und $g \in G \setminus \{1\}$ gilt. Das heißt, für jeden Punkt $x \in X$ ist die Abbildung $G \to Gx : g \mapsto gx$ bijektiv.

Insbesondere ist φ dann **treu** (effektiv): Zu $g \neq g'$ in G existiert $x \in X$ mit $gx \neq g'x$. Das heißt, der Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{S}\, X$ ist injektiv. Wir können dann $G \leq \mathrm{Homeo}(X)$ als Untergruppe auffassen.

Topologisch freie Gruppenoperationen

Satz M3G: topologisch freie Gruppenoperation

Sei $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X \xrightarrow{q} Y$ eine Operation durch Homöomorphismen.

(1) Genau dann ist φ frei und q eine Überlagerung, wenn gilt:
Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine (offene) Umgebung $U \subseteq X$ mit

$$U \cap gU = \emptyset \quad \text{für alle } g \in G \setminus \{1\}.$$

Wir nennen die Operation $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$ dann **überlagernd**
(traditionell auch **frei diskontinuierlich**, oder **topologisch frei**).

(2) Genau dann ist Y hausdorffsch, wenn gilt: Zu je zwei Punkten $x, x' \in X$ mit $Gx \neq Gx'$ existieren Umgebungen $U, U' \subseteq X$ mit

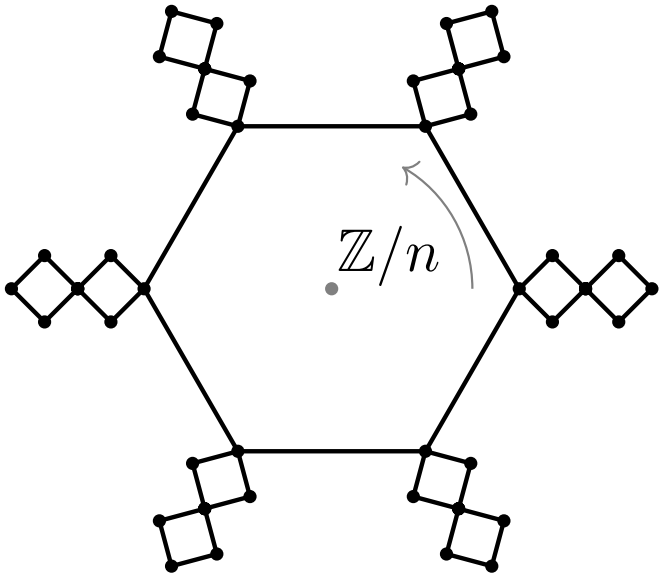
$$U \cap gU' = \emptyset \quad \text{für alle } g \in G.$$

Wir nennen die Operation $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$ dann **hausdorffsch**.

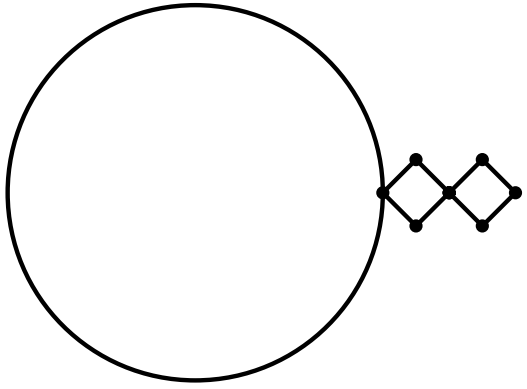
Übung: Dies folgt direkt aus den Definitionen. Prüfen Sie es nach!

Topologisch freie Gruppenoperationen

Galois–Überlagerungen



$\mathbb{Z}/n \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{p} X$



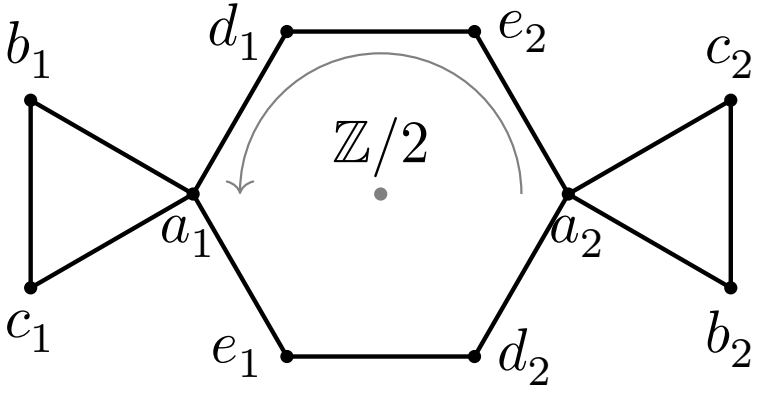
Definition M3J: Galois–Überlagerung

Wir nennen $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} \tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine **Galois–Überlagerung**, wenn die Operation φ überlagernd und der Raum $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist.

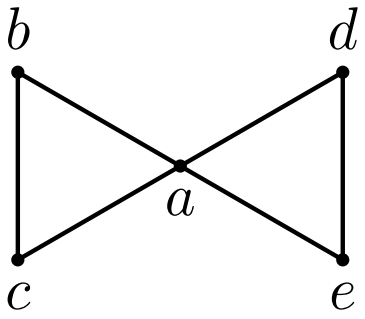
Ist $\tilde{X}$ sogar einfach zusammenhängend, so nennen wir $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} \tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine **universelle Überlagerung** von X oder ganz nüchtern und sachlich eine **einfach zusammenhängede Überlagerung**.

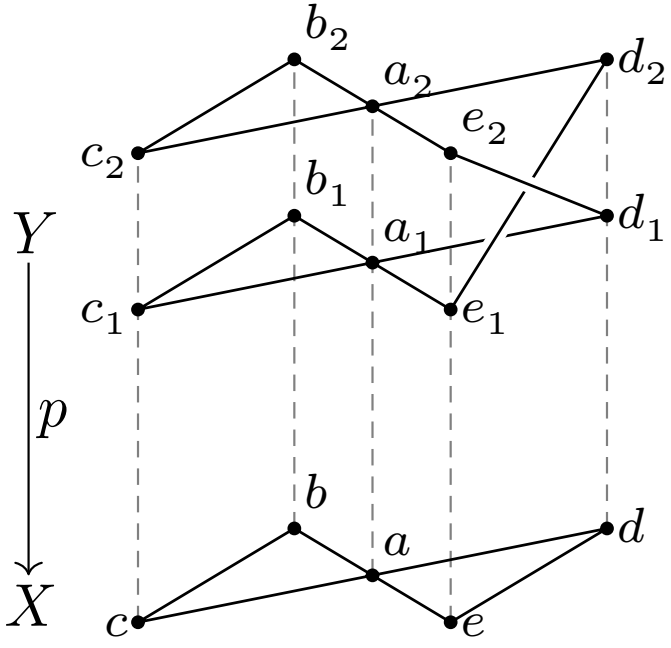
Galois–Überlagerungen

☺ Nahezu alle unsere bisher betrachteten Überlagerungen entstehen auf diese besonders schöne und elegante Weise. als Galois–Überlagerungen



$$\mathbb{Z}/2 \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{q} X$$





Diskrete Untergruppen

☺ Folgende Konstruktion für Galois-Überlagerungen ist besonders schön und typisch für viele topologisch-algebraische Anwendungen:

Satz M3м: diskrete Untergruppe

Sei $(G,\cdot,e)$ eine topologische Gruppe und $K \leq G$ eine diskrete Untergruppe. Dann operiert K überlagernd durch Linkstranslation $K \times G \to G : (k,g) \mapsto k \cdot g$. Ist G zudem wegzusammenhängend, so ist $K \curvearrowright G \twoheadrightarrow Q = K\backslash G$ eine Galois–Überlagerung.

Beweis: Da $K \leq G$ diskret ist, existiert $W \subseteq G$ offen mit $K \cap W = \{e\}$. Da die Abbildung $G \times G \to G : (a,b) \mapsto ab^{-1}$ stetig ist, existieren offene Umgebungen V_1, V_2 von e in G mit $V_1 \cdot V_2^{-1} \subseteq W$. Mit $U = V_1 \cap V_2$ erhalten wir eine offene Umgebung von e in G mit $U \cdot U^{-1} \subseteq W$.
Für jedes $g \in G$ ist Ug eine offene Umgebung. Aus $kUg \cap Ug \neq \emptyset$ mit $k \in K$ folgt $ku_1g = u_2g$ also $k = u_2u_1^{-1} \in U \times U^{-1} \subseteq W$, also $k = e$. QED

Diskrete Untergruppen

Unsere obigen Paradebeispiele entstehen aus diskreten Untergruppen:

$$W_n \curvearrowright \mathbb{C}^\times \xrightarrow{p_n} \mathbb{C}^\times, \quad 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times, \quad \mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,$$
$$W_n \curvearrowright \mathbb{S}^1 \xrightarrow{p_n} \mathbb{S}^1, \quad 2\pi\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n \to (\mathbb{S}^1)^n.$$

Weitere Beispiele: Diskrete Untergruppen in $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ erhalten wir aus Isometriegruppen von Polyedern im $\mathbb{R}^3$: Der Kegel über einem regulären n–Eck liefert C_n für $n = 3, 4, 5, \ldots$, der Doppelkegel liefert D_n. Neben diesen beiden unendlichen Familien haben wir drei sporadische Beispiele: Das Tetraeder liefert A_4, Oktaeder / Hexaeder S_4, Dodekaeder / Ikosaeder A_5. Jede diskrete Untergruppe von $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ ist eine dieser Gruppen (bis auf Konjugation). Erlaubt man zudem Spiegelungen, so gilt eine analoge Klassifikation für diskrete Gruppen in $\mathrm{GO}_3\,\mathbb{R} = \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \times \{\pm\mathrm{id}\}$.

Hochhebung von Wegen und Wegeklassen

Zu jeden Raum X mit Fußpunkt x_0 bezeichnen wir mit $P(X, x_0)$ bzw. $\Pi(X, x_0) = P(X, x_0)/_\sim$ die Menge aller Wege/klassen, die in x_0 beginnen.

Satz M4A: Hochhebung von Wegen und Wegeklassen

Jede Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ erlaubt eindeutige Hochhebung von Wegen und Homotopien (M2G) und induziert folgende Bijektionen:

$$p_\sharp(\tilde{\alpha}) := p \circ \tilde{\alpha}$$
$$p_\flat(\alpha) := \tilde{\alpha}$$

dank eindeutiger Weghochhebung

$$\begin{array}{ccc} P(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{\text{quot}} & \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ {\scriptstyle p_\sharp}\downarrow \cong \uparrow{\scriptstyle p_\flat} & & {\scriptstyle p_\sharp}\downarrow \cong \uparrow{\scriptstyle p_\flat} \\ P(X, x_0) & \xrightarrow{\text{quot}} & \Pi(X, x_0) \end{array}$$

$$p_\sharp([\tilde{\alpha}]) := [p \circ \tilde{\alpha}]$$
$$p_\flat([\alpha]) := [\tilde{\alpha}]$$

dank Hochhebung von Homotopien

Aufgabe: Wiederholen Sie die Konstruktion von $p_\sharp$ und $p_\flat$: Warum sind beide wohldefiniert und invers zueinander?

Die musikalischen Vorzeichen $\sharp$ (Kreuz, Dur, Erhöhen) und $\flat$ (Be, Moll, Senken) bezeichnen jeweils den Startraum, oben $\tilde{X}$ und unten X.

Hochhebung von Wegen und Wegeklassen

Beweis: Jeder Weg $\alpha : ([0,1],0) \to (X,x_0)$ erlaubt dank M2G eine eindeutige Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1],0) \to (\tilde{X},\tilde{x}_0)$. Wir setzen $p_\flat(\alpha) := \tilde{\alpha}$. Aus $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ folgt $p_\sharp \circ p_\flat = \mathrm{id}$. Dank Eindeutigkeit folgt $p_\flat \circ p_\sharp = \mathrm{id}$.

Die Abbildung $p_\sharp$ geht von der Menge P auf den Quotienten Π über: Jede Homotopie $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}'$ induziert eine Homotopie $p\tilde{H} : p\tilde{\alpha} \sim p\tilde{\alpha}'$. Somit ist $p_\sharp([\tilde{\alpha}]) := [p \circ \tilde{\alpha}]$ wohldefiniert.

Auch $p_\flat$ geht von P auf den Quotienten Π über: Jede Homotopie $H : \alpha \sim \alpha'$ hebt sich dank M2G zu einer Homotopie $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}'$. Somit ist $p_\flat([\alpha]) := [\tilde{\alpha}]$ wohldefiniert.

(Für die Homotopie H verlangen wir feste Endpunkte, $H(s,0) = x_0$ und $H(s,1) = x_1$ für alle $s \in [0,1]$. Dies erfüllt auch die Hochhebung: $\tilde{H}(s,0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{H}(s,1) = \tilde{x}_1$ für alle $s \in [0,1]$; dank Eindeutigkeit ist jede Hochhebung eines konstanten Weges selbst konstant.)

Demnach gilt auch auf den Quotienten $p_\sharp \circ p_\flat = \mathrm{id}$ und $p_\flat \circ p_\sharp = \mathrm{id}$. QED

Charakteristische Untergruppe

Jede stetige Abbildung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(p) = p_\sharp : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0) : [\alpha] \mapsto [p \circ \alpha]$

Hierbei ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subseteq \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ die Teilmenge aller Wegeklassen, die in $\tilde{x}_0$ beginnen und auch enden. Daraus folgt:

Korollar M4B: charakteristische Untergruppe

Ist $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, so ist $\pi_1(p)$ injektiv.

Dank der Injektion $\pi_1(p) : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0) : [\alpha] \mapsto [p \circ \alpha]$ können wir $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ als Untergruppe betrachten. Sie heißt auch die **charakteristische Untergruppe** der Überlagerung p.

Für eine beliebige stetige Abbildung $f : (X, x) \to (Y, y)$ ist $f_\sharp$ keineswegs injektiv (L4H). Also nochmal zur Betonung, weil es so wichtig ist:

Beweis: Sei $p_\sharp([\alpha]) = p_\sharp([\beta])$. Es existiert also eine Homotopie $H : p\alpha \sim p\beta$. Ihre Hochhebung ist eine Homotopie $\tilde{H} : \alpha \sim \beta$. Also gilt $[\alpha] = [\beta]$. QED

Diese besondere Eigenschaft hat sofort erstaunliche Konsequenzen…

Erinnerung: Dimension und Rang

- Enthält ein K–Vektorraum $V \cong K^p$ der Dimension p möglicherweise einen Untervektorraum $U \leq V$ der Dimension $q > p$? Nein, niemals!

  Beweis? Basisergänzungssatz! Gauß–Algorithmus: Jede Matrix $A \in K^{p \times q}$ bzw. K–lineare Abbildung $f : K^q \to K^p$ hat nicht-trivialen Kern.

- Enthält eine freie abelsche Gruppe $A \cong \mathbb{Z}^p$ vom Rang p vielleicht eine freie abelsche Untergruppe $U \leq A$ vom Rang $q > p$? Nein, niemals!

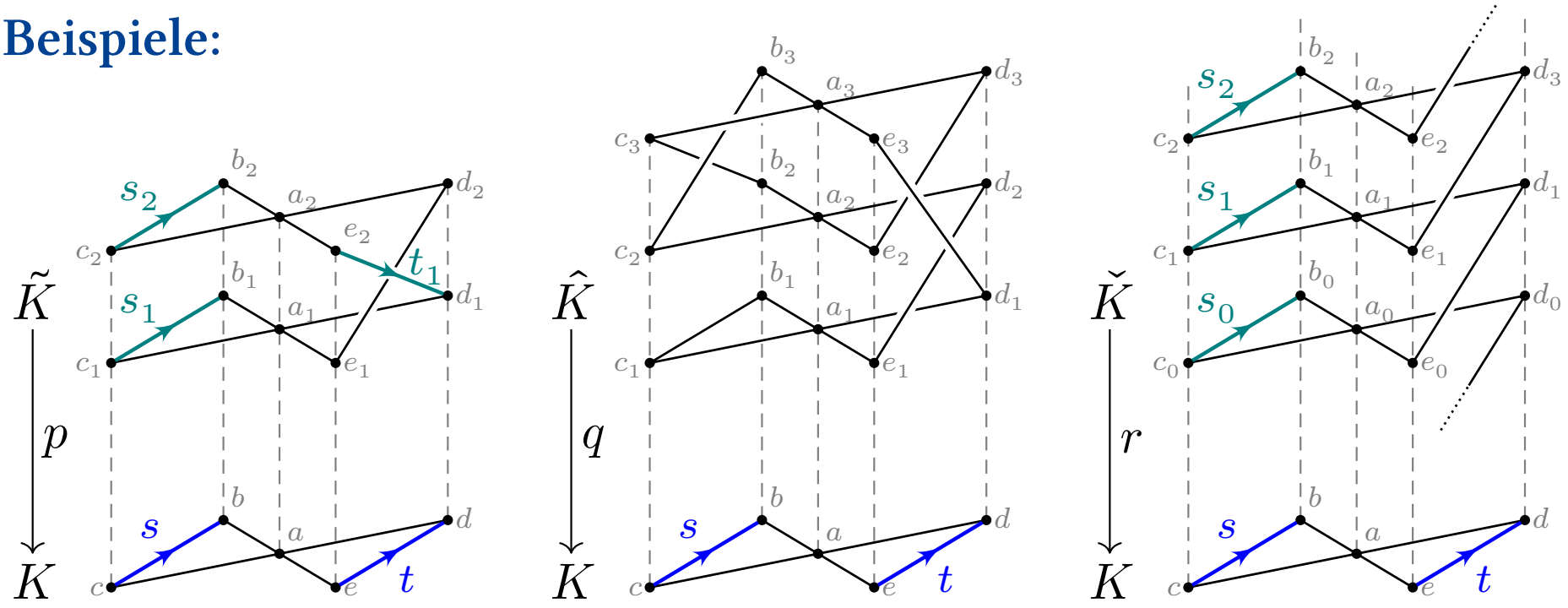
  Beweis? Auch dies gelingt uns mit Gauß–Euklid: Jede Matrix $A \in \mathbb{Z}^{p \times q}$ bzw. $\mathbb{Z}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}^q \to \mathbb{Z}^p$ hat nicht-trivialen Kern.

- Enthält eine freie Gruppe $F = \langle s_1, \ldots, s_p \mid - \rangle$ vom Rang $p \geq 2$ eine freie Untergruppe $U \leq F$ vom Rang $q > p$? Unglaublich, aber wahr!

  Die effizienten Werkzeuge der Linearen Algebra greifen hier nicht mehr. Naiv würde man vielleicht dennoch vermuten, per Extrapolation oder schlicht aus Mangel an Phantasie, dass jede Untergruppe $U \leq F$ Rang $q \in \{0, \ldots, p\}$ hat. Überraschung: Diese naive Vermutung ist falsch!

Überraschend große Untergruppen

Beispiele:



Wir finden $\pi_1(K, a) = \langle s, t \,|\, - \rangle$ und $\pi_1(\tilde{K}, a_1) = \langle s_1, s_2, t_1 \,|\, - \rangle$
sowie $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, a_1) \hookrightarrow \pi_1(K, a)$ mit $s_1, s_2, t_1 \mapsto s,\ tst^{-1},\ t^2$.

☺ Somit enthält die freie Gruppe $F = \langle s, t \,|\, - \rangle$ vom Rang 2
tatsächlich eine freie Untergruppe $U = \langle s, tst^{-1}, t^2 \rangle$ vom Rang 3.

Punktprobe: Liegt $v = t^3$ bzw. $w = sts^{-1}t^{-1}$ in $U = \langle s, tst^{-1}, t^2 \rangle$?
Wie können Sie dies prüfen und als Wort in s, tst^{-1}, t^2 darstellen?

Überraschend große Untergruppen

Ausführlich: Die obige Abbildung zeigt links die zweiblättrige simpliziale Überlagerung $p : \tilde{K} \to K$. Wir wählen hierzu einen Spannbaum $T \subseteq K$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(K, a)$ wird frei erzeugt von $K \setminus T = \{s, t\}$:

$$\pi_1(K, a) = \langle s, t \,|\, - \rangle$$

Ebenso wählen wir einen Spannbaum $\tilde{T} \subseteq \tilde{K}$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K}, \tilde{a})$ mit $\tilde{a} = a_1$ wird dann frei erzeugt von $\tilde{K} \setminus \tilde{T} = \{s_1, s_2, t_1\}$:

$$\pi_1(\tilde{K}, \tilde{a}) = \langle s_1, s_2, t_1 \,|\, - \rangle$$

Der Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{a}) \to \pi_1(K, a)$ ist injektiv (M4B) und auf den von uns gewählten Erzeugern explizit gegeben durch:

$$p_\sharp(s_1) = s, \quad p_\sharp(s_2) = tst^{-1}, \quad p_\sharp(t_1) = t^2$$

Dies folgt aus der Definition durch Ablaufen der zugehörigen Wege: Hier gelingt Hochhebung von Wegen und Homotopien rein kombinatorisch!
Übung: Erklären Sie dies als simpliziale Alternative zu M4A/M4B.

Schreier Ersetzungverfahren / *rewriting*

Rewriting: Liegen die Gruppenelemente $v = t^3$ bzw. $w = sts^{-1}t^{-1}$ in U?

Allgemein: Wie können Sie für ein beliebiges Element $w \in F$ prüfen, ob $w \in U$ gilt, und falls möglich w als ein Wort in s, tst^{-1}, t^2 darstellen?

Algorithmus: (1) Wir schreiben $w \in \pi_1(K, a)$ als Kantenzug im Graphen (K, a) und heben diesen bezüglich p hoch zu $\tilde{w}$ im Graphen $(\tilde{K}, \tilde{a})$.

(2) Genau dann gilt $w \in U$, wenn sich $\tilde{w}$ in $(\tilde{K}, \tilde{a})$ schließt.

(3) In diesem Falle schreiben wir $\tilde{w} \in \pi_1(\tilde{K}, \tilde{a})$ als Wort in den freien Erzeugern, und erhalten so das gesuchte Wort $w = p_\sharp(w)$ in U.

Beispiel: Für $v = t^3$ in (K, a) schließt sich $\tilde{v}$ in $(\tilde{K}, \tilde{a})$ nicht, also gilt $v \notin U$. Für $w = sts^{-1}t^{-1}$ in (K, a) schließt sich $\tilde{w}$ in $(\tilde{K}, \tilde{a})$. So finden wir die gesuchten Wörter $\tilde{w} = s_1 s_2^{-1} \mapsto w = s \cdot (tst^{-1})^{-1}$ in den Erzeugern.

Dank Freiheit der Gruppe ist diese frei reduzierte Darstellung eindeutig. *Die* gesuchte Lösung ist eindeutig, und der Algorithmus berechnet sie.

Schreier Ersetzungverfahren / *rewriting*

Aufgabe: Finden Sie in $F = \langle s, t \,|\, - \rangle$ eine freie Untergruppe vom Rang 4.

Lösung: Das gelingt mit der obigen Überlagerung $q : \hat{K} \to K$.
Übung: Schreiben Sie dies explizit in freien Erzeugern aus.

Aufgabe: Finden Sie in der freien Gruppe $F = \langle s, t \,|\, - \rangle$ vom Rang 2 eine freie Untergruppe $U \leq F$ von *unendlichem* Rang!

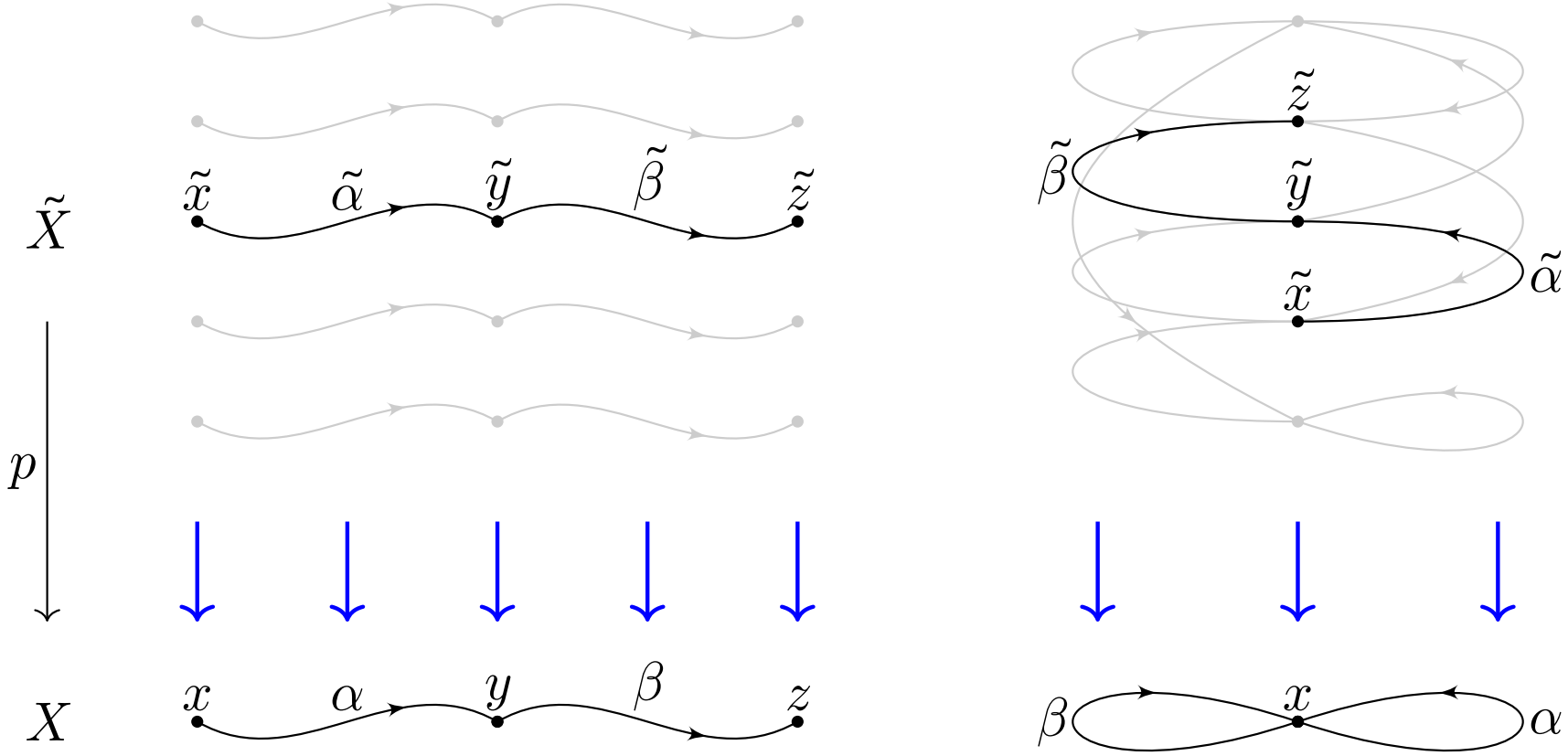
Lösung: Das gelingt mit der obigen Überlagerung $r : \check{K} \to K$.
Explizit finden wir die Untergruppe $U = \langle t^k s t^{-k} : k \in \mathbb{Z} \rangle$.
Diese wird frei erzeugt von $(s_k = t^k s t^{-k})_{k \in \mathbb{Z}}$.

🙂 Die Darstellung als Überlagerung macht alles offensichtlich: $U \leq F$ ist frei und wir können jedes Wort $w \in U$ in s, t umschreiben in $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Alles gelingt auch direkt algebraisch und rein rechnerisch, ohne Überlagerung und ohne jede geometrische Anschauung.

🙂 Menschen sind Augenwesen. Daher gefällt mir das Zusammenspiel von Algebra und Topologie immer gut, und hier ganz besonders.

Fasertransport



Satz M4E: Fasertransport durch Hochhebung

Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Zu jedem Weg $\alpha : ([0,1],0) \to (X,x)$ und Startwert $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existiert bezüglich p genau eine Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1],0) \to (\tilde{X},\tilde{x})$. Wir setzen $\tilde{x} \cdot [\alpha] := \tilde{\alpha}(1)$. Dies ist wohldefiniert und erfüllt $\tilde{x} \cdot [1_x] = \tilde{x}$ und $\tilde{x} \cdot ([\alpha] \cdot [\beta]) = (\tilde{x} \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$.

Aufgabe: Übersetzen Sie das obige Bild in einen Beweis.

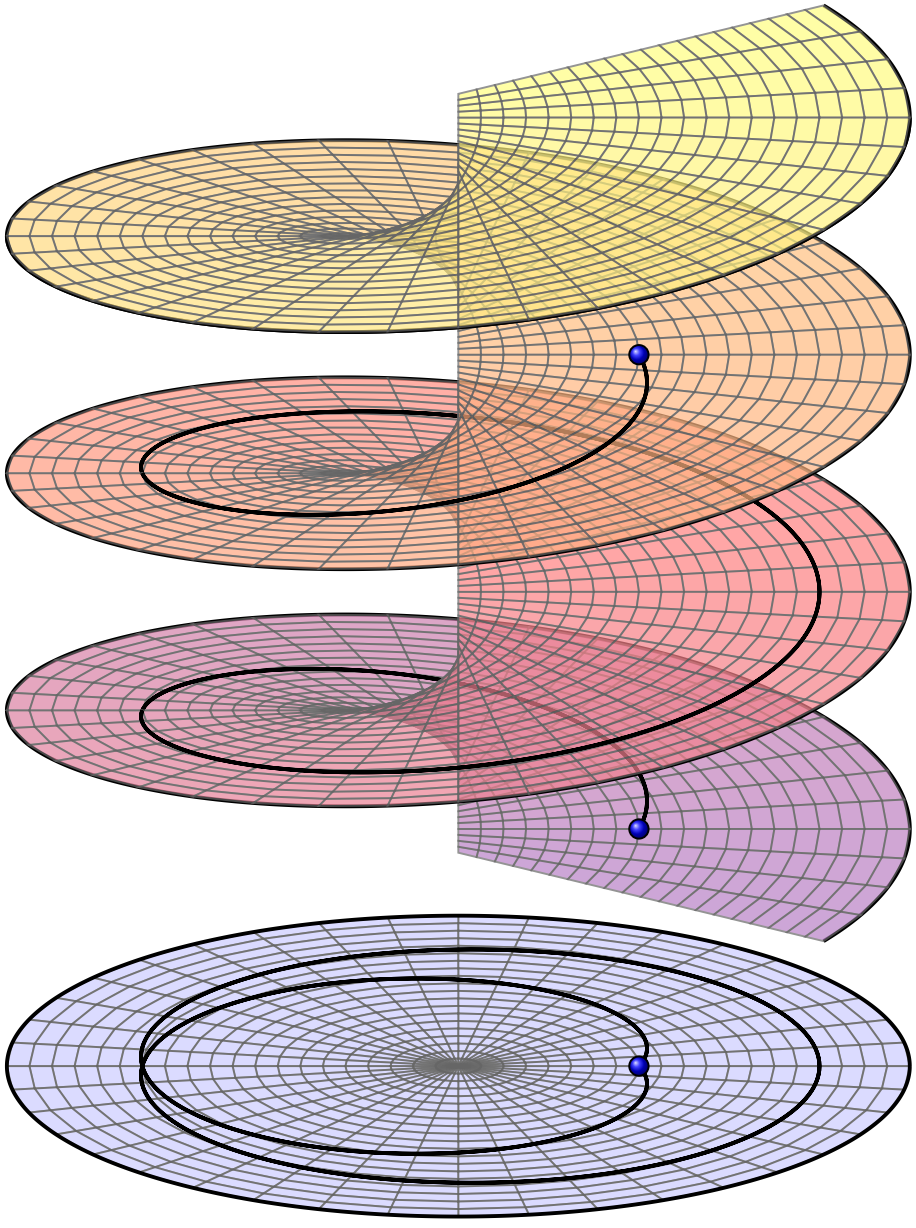
Beweis: Zur Wohldefiniertheit seien $\alpha, \alpha' \in P(X, x, y)$ und dazu $H : \alpha \sim \alpha'$ eine Homotopie bei festen Endpunkten. Diese hebt sich zu einer Homotopie $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}'$, ebenfalls mit festen Endpunkten. Insbesondere gilt $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$, also ist $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x} \cdot [\alpha']$ wohldefiniert.

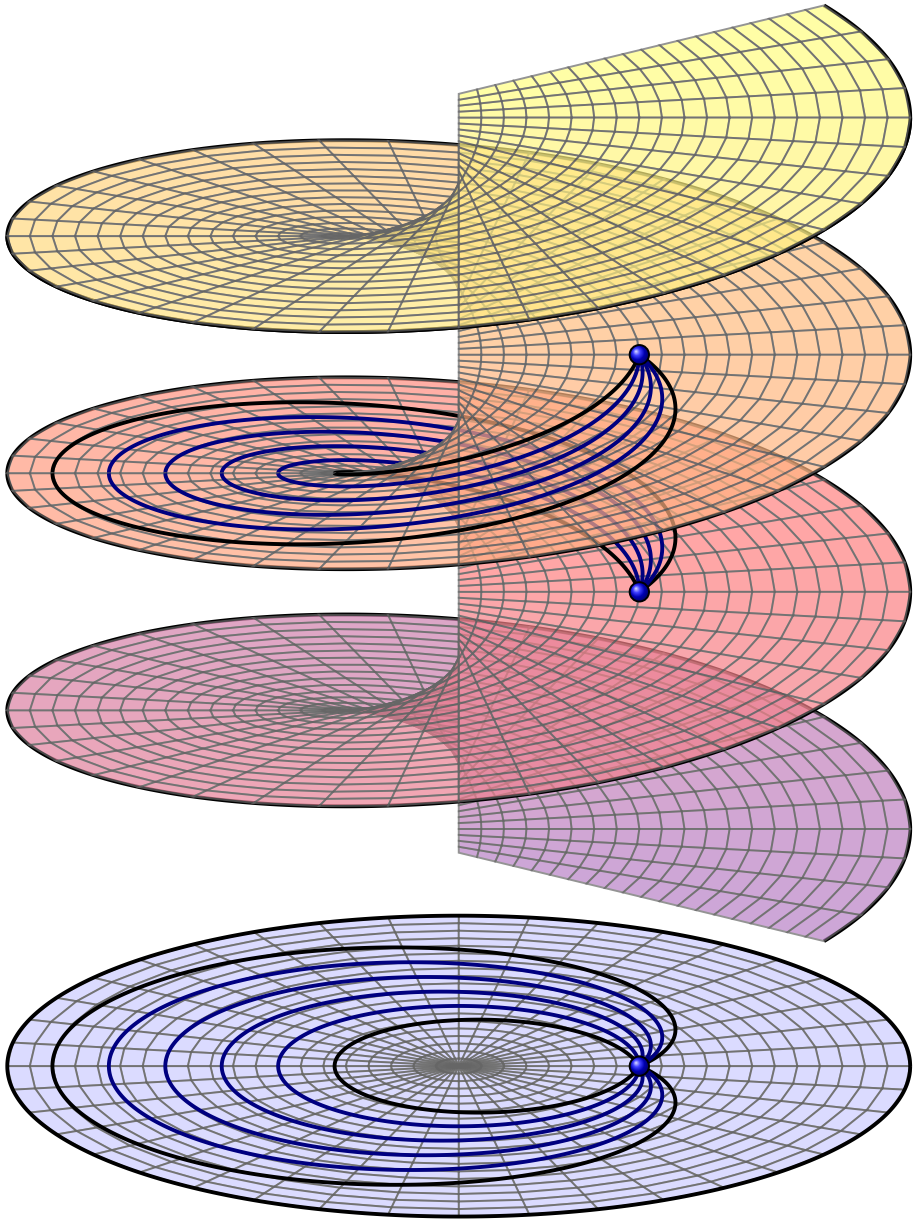
Ist $\alpha = 1_x$ konstant, so auch $\tilde{\alpha} = 1_{\tilde{x}}$, also gilt $\tilde{x} \cdot [1_x] = 1_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$.

Wir verknüpfen den Weg $\alpha : [0, 1] \to X$ von $\alpha(0) = x$ nach $\alpha(1) = y$ mit $\beta : [0, 1] \to X$ von $\beta(0) = y$ nach $\beta(1) = z$ zu $\gamma = \alpha * \beta$ von x nach z. Die Hochhebung $\tilde{\alpha}$ läuft dann von $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ zu einem Punkt $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$. Die anschließende Hochhebung $\tilde{\beta}$ läuft von $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$ zu einem Punkt $\tilde{z} \in p^{-1}(z)$. Ihre Verknüpfung $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ erfüllt $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, ist also die Hochhebung von $\gamma = \alpha * \beta$. Sie läuft von $\tilde{x}$ über $\tilde{y}$ nach $\tilde{z}$. Hieraus folgt:

$$(\tilde{x} \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] = \tilde{y} \cdot [\beta] = \tilde{z},$$
$$\tilde{x} \cdot ([\alpha] \cdot [\beta]) = \tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{z}.$$

Fasertransport





Fasertransport

Vornehm formuliert haben wir damit folgendes bewiesen:

Satz M4E: Fasertransport als Funktor

Jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ definiert einen Funktor $F : \Pi(X) \to \mathtt{Set}$: Jedem Punkt $x \in X$ wird seine Faser $F_x = p^{-1}(x) = \{\, \tilde{x} \in \tilde{X} \mid p(\tilde{x}) = x \,\}$ zugeordnet. Jeder Wegeklasse $[\alpha] : x \to y$ in $\Pi(X)$ wird die Abbildung $F_{[\alpha]} : F_x \to F_y : \tilde{x} \mapsto \tilde{x} \cdot [\alpha]$ in $\mathtt{Set}$ zugeordnet, als Rechtskategorien.

In der Kategorie $\Pi(X)$ ist jeder Morphismus $[\alpha] : x \to y$ invertierbar, dank der Wegumkehr $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ in $P(X)$ mit $\alpha * \bar{\alpha} \sim 1_x$ und $\bar{\alpha} * \alpha \sim 1_y$.

🙂 Demnach ist die zugehörige Abbildung $F_{[\alpha]} : F_x \xrightarrow{\sim} F_y$ eine Bijektion, denn $F_{[\alpha]} \circ F_{[\bar{\alpha}]} = \mathrm{id}_{F_x}$ und $F_{[\bar{\alpha}]} \circ F_{[\alpha]} = \mathrm{id}_{F_y}$. Über jeder Wegkomponente von X haben je zwei Fasern F_x und F_y insbesondere dieselbe Mächtigkeit.

Letzteres gilt allgemein sogar für Komponenten statt Wegkomponenten. Wenn wir X als lokal wegzusammenhängend annehmen, so wie wir dies ohnehin tun wollen, dann fallen beide Begriffe glücklich zusammen.

Monodromie

Definition M4F: Monodromie

Die **Monodromie** der Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist die Rechtsoperation $F_x \times \pi_1(X, x) \to F_x$ der Fundamentalgruppe in x auf der Faser über x.

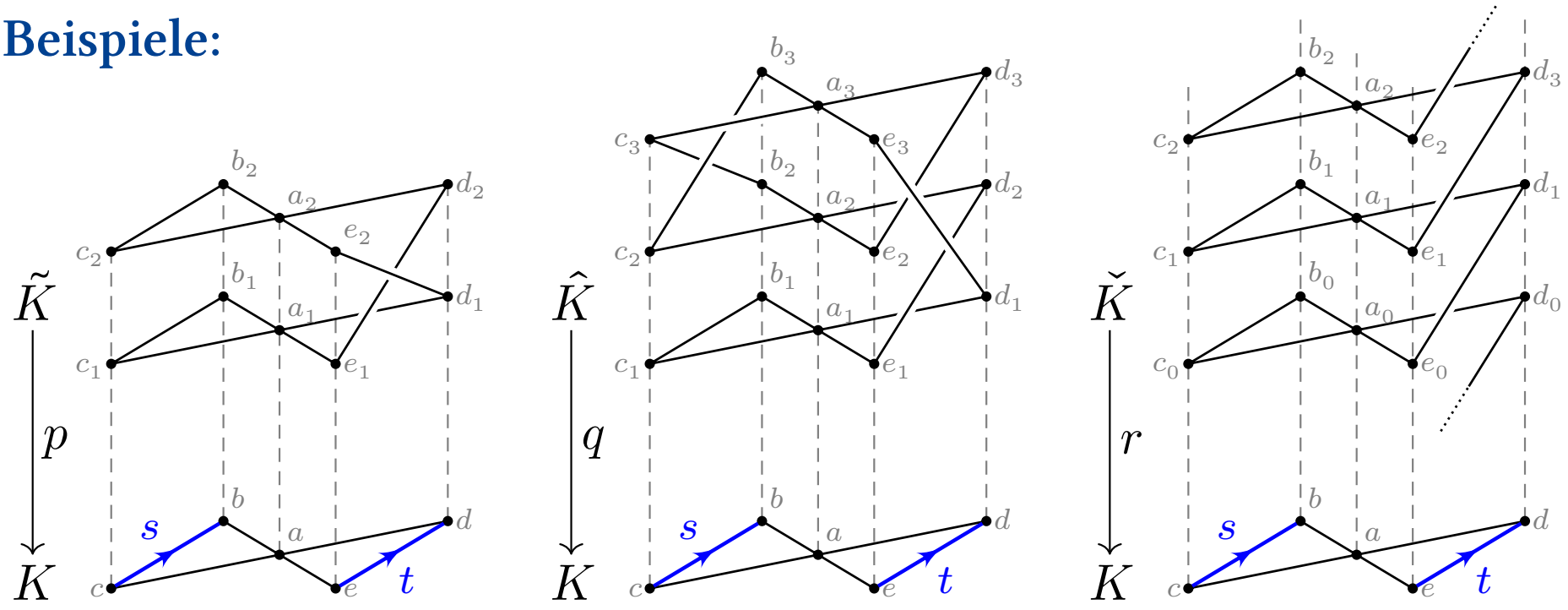
Beispiel: Zu $\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1$ mit $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ gilt $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x} + \deg(\alpha)$.

Zu jedem Weg $\alpha : ([0,1], 0) \to (\mathbb{S}^1, x)$ und Startwert $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1], 0) \to (\mathbb{R}, \tilde{x})$. Die Bedingung $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ bedeutet $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tilde{\alpha}(t)} = \alpha(t)$. Somit misst $\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(0)$ die Winkeländerung. Die Monodromie $\mathbb{Z} \times \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z} : k \cdot [\alpha] = k + \deg(\alpha)$ zählt Umläufe.

🙂 Anschaulich können wir uns $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{R}$ aus Draht vorstellen und darauf die Punkte $x \in \mathbb{S}^1$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ als bewegliche Perlen auffädeln, ähnlich einem Abakus. Jeder Weg $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ verschiebt diese Perle auf $\mathbb{S}^1$ von x nach y und gleichzeitig die hieran gekoppelte Perle auf $\mathbb{R}$ von $\tilde{x}$ nach $\tilde{y}$. Selbst wenn α geschlossen ist, also $x = y$ gilt, kann dabei durchaus $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ gelten. Die Höhendifferenz $\tilde{y} - \tilde{x}$ zählt die Umläufe.

Monodromie

Beispiele:



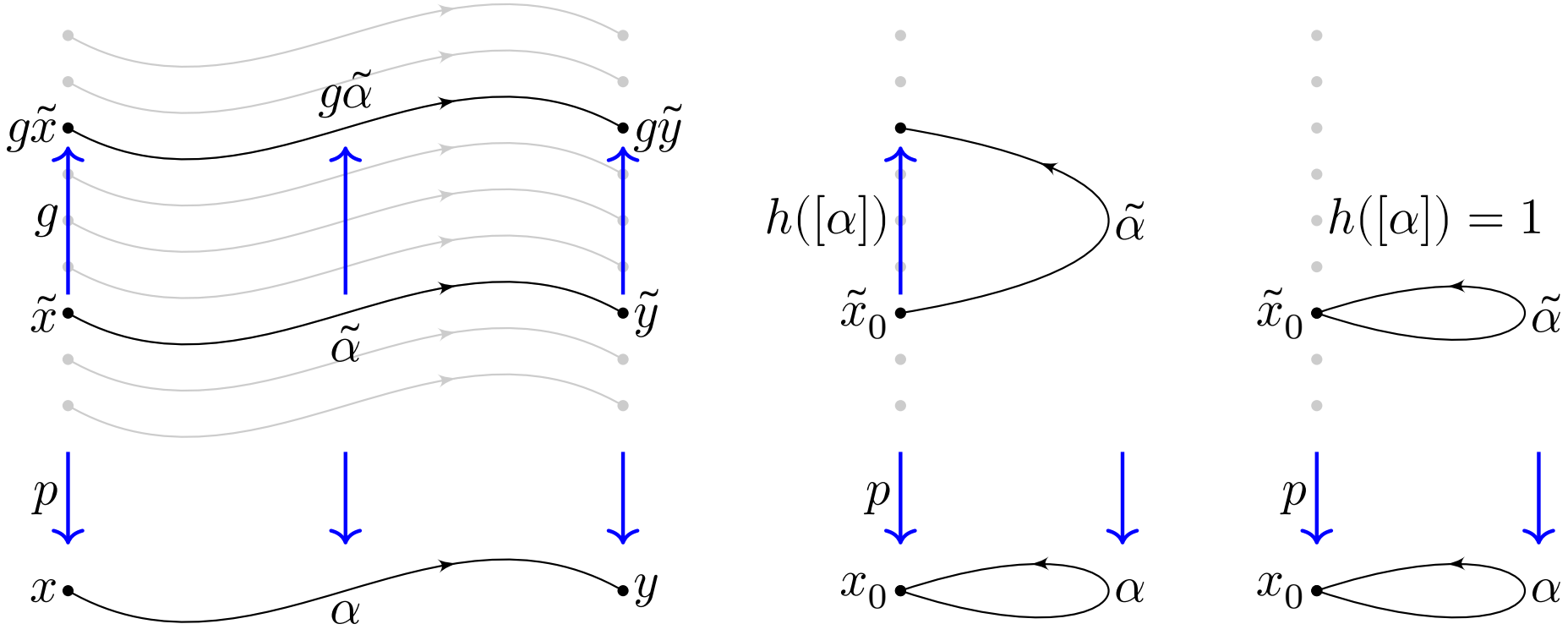
Beispiel: Wir betrachten erneut die obige Überlagerung $p : \tilde{K} \to K$.
Die Monodromie ist $a_1 \cdot s = a_1$, $a_2 \cdot s = a_2$ und $a_1 \cdot t = a_2$, $a_2 \cdot t = a_1$,
kurz $F_s = \mathrm{id}$ und $F_t = (a_1, a_2)$ als Permutation durch Fasertransport.

☺ Die Monodromie beschreibt den Wechsel der Etagen über die Treppe.

Für $q : \hat{K} \to K$ finden wir $F_s = (a_2, a_3)$ und $F_t = (a_1, a_2, a_3)$.
Für $r : \check{K} \to K$ finden wir $a_k \cdot s = a_k$ und $a_k \cdot t = a_{k+1}$.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Für jede Überlagerung $G \curvearrowright (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q} (X, x_0)$ finden wir:



Diese Graphik zeigt die Konstruktion des Gruppenhomomorphismus $h : \pi_1(X, x_0) \to G$ durch die Transportbedingung $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = h([\alpha]) \cdot \tilde{x}_0$. Daraus folgt die kurze exakte Sequenz $(q_\sharp, h)$. Das ist folgender Satz.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Satz M4G: kurze exakte Sequenz

Für jede Überlagerung $G \curvearrowright (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q} (X, x_0)$ gilt:

(1) Die Operation $G \curvearrowright \tilde{X}$ kommutiert mit dem Fasertransport $\tilde{X} \curvearrowleft \Pi(X)$:
$(g \cdot \tilde{x}) \cdot [\alpha] = g \cdot (\tilde{x} \cdot [\alpha])$ für alle $g \in G$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ sowie $[\alpha] \in \Pi(X, q\tilde{x})$.

(2) Wir erhalten daraus den Gruppenhomomorphismus
$h : \pi_1(X, x_0) \to G$ definiert durch $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = h([\alpha]) \cdot \tilde{x}_0$ mit
$\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(q_\sharp)$ und $\mathrm{Im}(h) = G_0 := \{ g \in G \,|\, [g \cdot \tilde{x}_0] = [\tilde{x}_0] \}$.

Elegant zusammengefasst: Wir erhalten die kurze exakte Sequenz (SES)

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} G_0 \longrightarrow 1.$$

Dies induziert den Isomorphismus $\bar{h} : \pi_1(X, x_0)/q_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} G_0$.
Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, also q galoisch, so gilt hier $G_0 = G$.
Ist $\tilde{X}$ einfach zshgd, also q universell, so folgt $h : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} G$.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Dies fasst die geometrische Situation konzis algebraisch zusammen. Exaktheit bedeutet „Bild = Kern“. Hier heißt das links: $q_\sharp$ ist injektiv, rechts: h ist surjektiv, und zwischen beiden gilt $\mathrm{Im}(q_\sharp) = \mathrm{Ker}(h)$.

☺ Anders gesagt, wir erhalten den Gruppenisomorphismus

$$\bar{h} : \pi_1(X, x_0)/q_\sharp\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} G_0.$$

Zur Erinnerung (M3J): Ist $G \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{q} X$ eine frei diskontinuierliche Operation und $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so nennen wir q eine *Galois–Überlagerung*. Ist $\tilde{X}$ sogar einfach zusammenhängend, so nennen wir $q : \tilde{X} \to X$ eine *universelle Überlagerung* von X.

☺ Aus Satz M4G erhalten wir in diesem Falle den Isomorphismus

$$h : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} G.$$

Allgemein können wir so die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ aus der Decktransformationsgruppe G berechnen und umgekehrt.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Der Satz ist vollkommen explizit, zu seinem Beweis genügt geduldiges Nachrechnen. Alle hierzu benötigten Hilfsmittel haben wir vorbereitet. Wir wissen bereits aus Satz M3G, dass $q : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist. Die Aussagen des Satzes folgen nun dank der eindeutigen Hochhebung von Wegen und Homotopien, siehe Satz M2G. Damit übersetzen wir die obige Graphik sorgsam in linearen Text und logische Argumente:

Beweis: (1) Zu jedem Weg $\alpha : ([0,1],0) \to (X,x)$ und Anfangspunkt $\tilde{x} \in q^{-1}(x)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1],0) \to (\tilde{X},\tilde{x})$, mit $q \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Für $g \in G$ erfüllt $g\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ dann $q \circ (g\tilde{\alpha}) = q\tilde{\alpha} = \alpha$, ist also die Hochhebung von α mit Startpunkt $g\tilde{x}$. Somit gilt

$$(g \cdot \tilde{x}) \cdot [\alpha] \quad = \quad g\tilde{\alpha}(1) \quad = \quad g \cdot (\tilde{x} \cdot [\alpha]).$$

☺ Die obige Skizze fasst dies wunderschön bildlich zusammen, die algebraische Rechnung formalisiert elegant unsere Anschauung. Wir üben und nutzen immer gerne die topologische Zweisprachigkeit: Die Graphik bietet Intuition, die Formel sichert die nötige Präzision.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

(2) Jede Schleife $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ hebt sich zu $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Wegen $q \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ gilt $q(\tilde{\alpha}(1)) = x_0$, also $\tilde{\alpha}(1) = g\tilde{x}_0$ für genau ein Gruppenelement $g \in G$. Dies definiert $h : \pi_1(X, x_0) \to G$ durch $h([\alpha]) = g$, zusammengefasst $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = h([\alpha]) \cdot \tilde{x}_0$.

Dies ist ein Gruppenhomomorphismus: Für alle $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt

$$h([\alpha]\cdot[\beta])\cdot\tilde{x}_0 \overset{\text{Def}}{=} \tilde{x}_0\cdot([\alpha]\cdot[\beta]) \underset{\text{M4E}}{\overset{\text{Ass}}{=}} (\tilde{x}_0\cdot[\alpha])\cdot[\beta] \overset{\text{Def}}{=} (h([\alpha])\cdot\tilde{x}_0)\cdot[\beta]$$

$$\underset{(1)}{\overset{\text{Com}}{=}} h([\alpha])\cdot(\tilde{x}_0\cdot[\beta]) \overset{\text{Def}}{=} h([\alpha])\cdot(h([\beta])\cdot\tilde{x}_0) \underset{\text{M3A}}{\overset{\text{Ass}}{=}} (h([\alpha])\cdot h([\beta]))\cdot\tilde{x}_0$$

Daraus folgt $h([\alpha]\cdot[\beta]) = h([\alpha])\cdot h([\beta])$, da die Operation $G \curvearrowright \tilde{X}$ frei ist.

☺ Der reibungslose Wechsel von rechts nach links ist bemerkenswert, daher habe ich diese kurze Rechnung fein säuberlich ausgeschrieben.

Wir erleben das perfekte Zusammenspiel der Linksoperation $G \curvearrowright \tilde{X}$ durch Decktransformation, speziell $G \curvearrowright F_{x_0}$, und der Rechtsoperation $F_{x_0} \curvearrowleft \pi_1(X, x_0)$ durch Fasertransport. Das ist die entscheidende Idee dieser Konstruktion. Der Rest ist sorgfältiges Rechnen.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Die Sequenz $1 \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} G_0 \to 1$ ist exakt.

(2a) Der Gruppenhomomorphismus $q_\sharp$ ist injektiv (M4B).

(2b) Für $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ gilt $h(q_\sharp([\tilde{\alpha}])) = 1$, also $\mathrm{Im}(q_\sharp) \subseteq \mathrm{Ker}(h)$.

(2c) Für $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $h([\alpha]) = 1$ gdw $\tilde{\alpha}$ sich schließt,
also $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ gilt. Das zeigt $\mathrm{Im}(q_\sharp) \supseteq \mathrm{Ker}(h)$.

(2d) Für $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ und $g = h([\alpha])$ gilt $g \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$,
also sind $g \cdot \tilde{x}_0$ und $\tilde{x}_0$ wegverbindbar. Das zeigt $\mathrm{Im}(h) \subseteq G_0$.

(2e) Sind $g \cdot \tilde{x}_0$ und $\tilde{x}_0$ verbindbar durch einen Weg $\tilde{\alpha}$, so haben wir
$[\alpha] = q_\sharp([\tilde{\alpha}]) \in \pi_1(X, x_0)$ und $g = h([\alpha])$. Das zeigt $\mathrm{Im}(h) \supseteq G_0$. QED

☺ Ist zudem $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, also $G \curvearrowright (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q} (X, x_0)$
eine Galois–Überlagerung, so gilt $G_0 = G$ und somit $h : \pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow G$.
Ist $\tilde{X}$ sogar einfach zshgd, also q universell, so folgt $h : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} G$.
All diese Daten und Eigenschaften fassen wir prägnant zusammen:
Die Sequenz $1 \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} G \to 1$ ist exakt.

Die kurze exakte Sequenz: Beispiele

Beispiel: Polarkoordinaten

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} & \xrightarrow[(k,x)\mapsto k+x]{+} & (\mathbb{R},0) & \xrightarrow[t\mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}]{p} & (\mathbb{S}^1,1) \\
\pi_1(\mathbb{R},0) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \mathbb{Z} \\
\downarrow \cong & & \downarrow \deg \cong & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Beispiel: Exponentialfunktion

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} & \xrightarrow[(k,z)\mapsto 2\pi \mathrm{i} k+z]{\varphi} & (\mathbb{C},0) & \xrightarrow[z\mapsto \mathrm{e}^z]{\exp} & (\mathbb{C}^\times,1) \\
\pi_1(\mathbb{C},0) & \xrightarrow{\exp_\sharp} & \pi_1(\mathbb{C}^\times,1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \mathbb{Z} \\
\downarrow \cong & & \downarrow \deg \cong & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Die kurze exakte Sequenz: Beispiele

Beispiel: Potenz auf $\mathbb{S}^1$

$$\begin{array}{ccccc}
W_n & \xrightarrow[(\xi,z)\mapsto \xi z]{\cdot} & (\mathbb{S}^1,1) & \xrightarrow[z\mapsto z^n]{p} & (\mathbb{S}^1,1) \\
\pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \xrightarrow{h} & W_n \\
\deg\downarrow\cong & & \deg\downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{quot}} & \mathbb{Z}/n
\end{array}$$

Beispiel: Potenz auf $\mathbb{C}^\times$

$$\begin{array}{ccccc}
W_n & \xrightarrow[(\xi,z)\mapsto \xi z]{\cdot} & (\mathbb{C}^\times,1) & \xrightarrow[z\mapsto z^n]{p} & (\mathbb{C}^\times,1) \\
\pi_1(\mathbb{C}^\times,1) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(\mathbb{C}^\times,1) & \xrightarrow{h} & W_n \\
\deg\downarrow\cong & & \deg\downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{quot}} & \mathbb{Z}/n
\end{array}$$

Die kurze exakte Sequenz: Beispiele

Beispiel: reell projektiver Raum ($n \geq 2$)

$$\begin{array}{ccccc}
\{\pm 1\} & \xrightarrow[(s,x)\mapsto sx]{\cdot} & (\mathbb{S}^n, e_1) & \xrightarrow[x\mapsto[x]]{q} & (\mathbb{RP}^n, \bar{e}_1) \\
\pi_1(\mathbb{S}^n, e_1) & \xrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(\mathbb{RP}^n, \bar{e}_1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \{\pm 1\} \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z}/2
\end{array}$$

Beispiel: reell projektive Gerade

$$\begin{array}{ccccc}
\{\pm 1\} & \xrightarrow[(s,x)\mapsto sx]{\cdot} & (\mathbb{S}^1, e_1) & \xrightarrow[x\mapsto[x]]{q} & (\mathbb{RP}^1, \bar{e}_1) \\
\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) & \xrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(\mathbb{RP}^1, \bar{e}_1) & \xrightarrow{h} & \{\pm 1\} \\
\deg \downarrow \cong & & \deg \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{quot}} & \mathbb{Z}/2
\end{array}$$

Die kurze exakte Sequenz: Beispiele

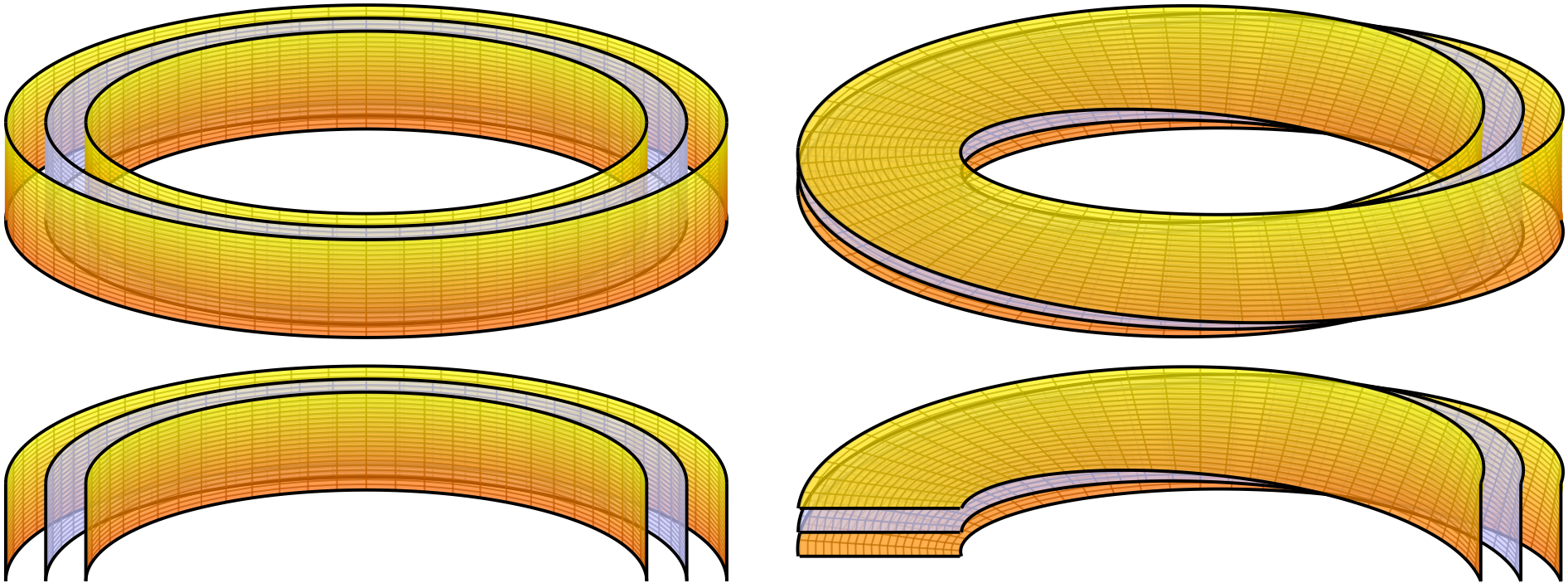
Beispiel: die Drehgruppe $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$, parametrisiert durch $\rho(t) = \left[\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right]$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} & \xrightarrow[(k,t)\mapsto k+t]{+} & (\mathbb{R},0) & \xrightarrow{\rho} & (\mathrm{SO}_2,1) \\
\pi_1(\mathbb{R},0) & \xrightarrow{\rho_\sharp} & \pi_1(\mathrm{SO}_2,1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \mathbb{Z} \\
\downarrow\cong & & \downarrow\deg\cong & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Beispiel: die Drehgruppe $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$, parametrisiert durch $\rho : \mathbb{H} \supseteq \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}_3$

$$\begin{array}{ccccc}
\{\pm 1\} & \xrightarrow[(s,x)\mapsto sx]{\cdot} & (\mathbb{S}^3,1) & \xrightarrow{\rho} & (\mathrm{SO}_3,1) \\
\pi_1(\mathbb{S}^3,1) & \xrightarrow{q_\sharp} & \pi_1(\mathrm{SO}_3,1) & \xrightarrow[\cong]{h} & \{\pm 1\} \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z}/2
\end{array}$$

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit



Sei M eine zshgde Mannigfaltigkeit und $\mathscr{A} = \{k : M \supseteq U_k \xrightarrow{\sim} V_k \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}\}$ ein Atlas. Zwei Karten h, k um $a \in M$ sind *gleich orientiert*, $h \approx_a k$, wenn der Kartenwechsel $(V_{hk}, h(a)) \xrightarrow{\sim} (V_{kh}, k(a))$ Orientierung erhält (J7P). Dies ist eine Äquivalenzrelation. Sei $[k]_a$ die Äquivalenzklasse aller Karten $h \in \mathscr{A}$ mit $h \approx_a k$. Wir nehmen an, dass unser Atlas $\mathscr{A}$ um jeden Punkt $a \in M$ Karten beider Orientierungen enthält, und definieren $\tilde{M} := \left\{ (a, [k]_a) \,\middle|\, k \in \mathscr{A},\ a \in U_k \right\}$ und $p : \tilde{M} \to M : (a, [k]_a) \mapsto a$.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Satz M4P: Orientierungsüberlagerung

So erhalten wir die zweiblättrige Orientierungsüberlagerung:

$$\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M} \xrightarrow{p} M \quad \Longrightarrow \quad \pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_\sharp} \pi_1(M, x_0) \xrightarrow{\text{sign}} \{\pm 1\}$$

Dabei misst der Fakor $\text{sign}([\alpha]) \in \{\pm 1\}$ ob die Schleife α in (M, x_0) die lokale Orientierung in x_0 beim Transport erhält oder umkehrt.
Genau dann ist die Mannigfaltigkeit M orientierbar, wenn sign trivial ist.

(1) Ist M nicht-orientierbar, so ist der Homomorphismus sign surjektiv, und die zweiblättrige Überlagerung $p : \tilde{M} \to M$ ist zshgd / nicht-trivial.

(2) Ist M orientierbar, so ist sign trivial, und p ist trivial / unzshgd.
Jeder der beiden Schnitte $s : M \to \tilde{M}$ ist dann eine Orientierung:
In jedem Punkt $a \in M$ wählt $s(a) = [k]_a$ eine lokale Orientierung.

Aufgabe: Vervollständigen Sie die Konstruktion von $\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M} \xrightarrow{p} M$ und beweisen Sie die hier gemachten Aussagen. Illustrieren Sie dies mit Zylindermantel und Möbius–Band, wie oben eindrücklich skizziert.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Beweis: Jedes Kartengebiet U_k sei zusammenhängend; notfalls zerlegen wir jedes Kartengebiet in seine (offenen!) Komponenten. Zur Karte $k \in \mathscr{A}$ setzen wir $\tilde{U}_k := \{\, (a, [k]_a) \mid a \in U_k \,\} \subseteq \tilde{M}$ und definieren hierauf die Karte $\tilde{k} : \tilde{U}_k \xrightarrow{\sim} V_k : (a, [k]_a) \mapsto k(a)$. Die Mengen $\tilde{k}^{-1}(V)$ mit $k \in \mathscr{A}$ und $V \subseteq V_k$ offen erfüllen (UB1–3) aus D3v, definieren also eine Topologie auf $\tilde{M}$.

Damit ist $\tilde{M}$ eine Mannigfaltigkeit, der Atlas $\tilde{\mathscr{A}} = \{\, \tilde{k} \mid k \in \mathscr{A} \,\}$ ist orientiert, und die Projektion $p : \tilde{M} \to M : (a, [k]_a) \mapsto a$ ist eine zweiblättrige Überlagerung mit $\tilde{k} = k \circ p$ für jede Karte $k \in \mathscr{A}$.
Hierauf operiert die Gruppe $\{\pm 1\}$ durch Orientierungswechsel (M3o):

$$\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M} \xrightarrow{p} M \quad \Longrightarrow \quad \pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_\sharp} \pi_1(M, x_0) \xrightarrow{\text{sign}} \{\pm 1\}$$

Jeder Weg $\alpha : [0,1] \to M$ transportiert lokale Orientierungen. Für einen geschlossenen Weg mit Start und Ziel in x_0 erhalten wir $\text{sign}([\alpha]) = \pm 1$, je nachdem, ob die Schleife α die Orientierung erhält oder umkehrt. Dies definiert den Gruppenhomomorphismus $\text{sign} : \pi_1(M, x_0) \to \{\pm 1\}$.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Genau dann ist die Mannigfaltigkeit M orientierbar, wenn sign trivial ist, also $\operatorname{sign}([\alpha]) = +1$ für alle Schleifen α in (M, x_0) gilt. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit M orientierbar. Dazu genügt, dass die Gruppe $\pi_1(M, x_0)$ oder ihre Abelschmachung $H_1(M) = \pi_1(M, x_0)_{\mathrm{ab}}$ endlich und von ungerader Ordnung ist.

Beispiel: Die obige Abbildung zeigt links den Zylindermantel $M \cong \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ und seine Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \to M$. Dank Orientierbarkeit von M zerfällt $\tilde{M}$ in zwei Komponenten, jede entspricht der Wahl einer Orientierung, als Schnitt $s : M \to \tilde{M}$.

Rechts sehen wir das Möbius–Band $M \cong \mathbb{S}^1 \ltimes [-1, 1]$ und seine Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \to M$: Das mittlere Band ist die Mannigfaltigkeit M, die beiden äußeren bilden $\tilde{M}$; die untere Graphik zeigt einen Querschnitt. Dank Nicht-Orientierbarkeit von M ist $\tilde{M}$ zusammenhängend; es gilt $\tilde{M} \cong \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$. (Sie können es basteln!) Die Operation $\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M}$ vertauscht die beiden lokalen Orientierungen.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Beispiele: Die Orientierungsüberlagerung der projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist die vertraute zweiblättrige Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^2$.

Die Orientierungsüberlagerung der Kleinschen Flasche F_1^- ist der Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, genauer der Quotient $\{\pm 1\} \curvearrowright F_1^+ \twoheadrightarrow F_1^-$, siehe M4N.

Die Orientierungsüberlagerung der nicht-orientierbaren Fläche F_g^- ist die vertraute zweiblättrige Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright F_g^+ \twoheadrightarrow F_g^-$.

Was ist die Orientierungsüberlagerung des projektiven Raumes $\mathbb{RP}^n$? Die naheliegende Vermutung ist die vertraute zweifache Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$. Das gilt allerdings nur in gerader Dimension $n = 2m$. In ungerader Dimension $n = 2m+1$ hingegen ist $\mathbb{RP}^n$ orientierbar, und die Orientierungsüberlagerung ist trivial, $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{RP}^n \times \{\pm 1\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$.

Der erste Fall $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ ergibt die Orientierungsüberlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{RP}^1 \times \{\pm 1\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^1$ und nicht $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^1$.

Ebenso interessant ist $\mathbb{RP}^3 \cong \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$: Diese Mannigfaltigkeit ist orientierbar (L6Z), wie jede Lie–Gruppe sogar parallelisierbar.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Science Fiction: Die Welt, in der wir leben, ist dreidimensional, zumindest lokal in unserer unmittelbaren Umgebung scheint diese Idealisierung eine gute Näherung an unsere alltägliche Erfahrung zu sein. Es ist denkbar, dass diese 3–Mannigfaltigkeit M nicht-orientierbar sein könnte. Als Gedankenexperiment schicken wir eine Probe (Teilchen, Raumsonde, Person) auf eine weite Rundreise durch das Universum: Bei einem orientierungsumkehrenden Weg kehrt sie gespiegelt zurück!

Mathematisch denkbar sind neben der Orientierungsumkehr des Raumes (P = *parity reversal*) noch verrücktere, nämlich die der Zeit (T = *time reversal*) und der Ladung (C = *charge reversal*). Lokal sind dies wichtige physikalische Symmetrien, ihr Nicht-Bestehen erlaubt Links und Rechts zu unterscheiden, Zukunft und Vergangenheit, Materie und Antimaterie.

Ob diese lokal definierten Eigenschaften auch global eine Bedeutung haben, hängt von der jeweiligen Orientierbarkeit des physikalischen Universums ab. Die Mathematik zeigt die Möglichkeiten, die Physik untersucht anschließend, welche davon tatsächlich realisiert ist.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Unsere Konstruktion zu Satz M4P beginnt mit einer Mannigfaltigkeit M und nutzt einen Atlas $\mathscr{A}$ als zusätzliches Datum. Wir konstruieren so aus $(M, \mathscr{A})$ eine orientierte Mannigfaltigkeit $(\tilde{M}, \tilde{\mathscr{A}})$ zusammen mit der zweiblättrigen Überlagerung $p : (\tilde{M}, \tilde{\mathscr{A}}) \to (M, \mathscr{A})$.

Aufgabe: Angenommen, die Mannigfaltigkeit $(M, \mathscr{A})$ ist $\mathscr{C}^k$–glatt. Gilt dies dann auch für die überlagernde Mannigfaltigkeit $(\tilde{M}, \tilde{\mathscr{A}})$? und die Abbildung $p : (\tilde{M}, \tilde{\mathscr{A}}) \to (M, \mathscr{A})$?

Lösung: Glattheit eines Atlas $\tilde{\mathscr{A}}$ ist eine Eigenschaft der Kartenwechsel. In unserem Fall sind die Karten in $\tilde{\mathscr{A}}$ lokal „dieselben“ wie in $\mathscr{A}$, wobei je nach Orientierungsverhalten jedes Kartengebiet verdoppelt wird. Die Kartenwechsel in $\tilde{\mathscr{A}}$ sind ebenfalls „dieselben“ wie in $\mathscr{A}$, eventuell auf kleineren Überlappungen. Alle Eigenschaften der Kartenwechsel in $\mathscr{A}$ übertragen sich somit unmittelbar auf die Kartenwechsel in $\tilde{\mathscr{A}}$.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Ist das Produkt $M \times N$ zweier nicht-orientierbarer Mannigfaltigkeiten auf wundersame Weise orientierbar? Nein, niemals! Genauer gilt:

Korollar M4s: Orientierbarkeit eines Produts

Für das Produkt zusammenhängender Mannigfaltigkeiten M und N gilt

$$\pi_1(M \times N, (a,b)) \cong \pi_1(M,a) \times \pi_1(N,b) \quad \text{wie in L2o und}$$
$$\operatorname{sign}_{M\times N}([\gamma]) = \operatorname{sign}_M([\mathrm{pr}_M \circ \gamma]) \cdot \operatorname{sign}_N([\mathrm{pr}_N \circ \gamma]).$$

Genau dann ist $M \times N$ orientierbar, wenn M und N orientierbar sind.

Beweis: Rechnen Sie dies sorgsam nach als Übung / Wiederholung (K1w).

Was sagt die Galois–Korrespondenz?

Wir erinnern zunächst an unser zentrales Beispiel und bewundern die verblüffende Dualität von Fundamentalgruppe und Überlagerungen:

Beispiel: Für die Kreislinie haben wir den Isomorphismus

$$\deg : (\pi_1(\mathbb{S}^1, 1), \cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, +).$$

Ich schreibe kurz $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $U \leq \mathbb{Z}$ ist von der Form $U = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $n \geq 1$ haben wir die Überlagerung

$$p_n : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{S}^1, 1) : z \mapsto z^n \quad \text{mit} \quad \operatorname{Im}(p_n)_\sharp = n\mathbb{Z}.$$

Im Sonderfall $n = 0$ haben wir die universelle Überlagerung

$$p_0 : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{S}^1, 1) : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Im}(p_0)_\sharp = 0\mathbb{Z}.$$

🙂 Das gilt für jeden (vernünftigen) Raum: Zusammenhängende Überlagerungen von (X, x_0) entsprechen Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Was sagt die Galois–Korrespondenz?

Satz M5A: Galois–Korrespondenz

Sei X zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend.

(1) Jede Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ und somit eine charakteristische Untergruppe $\mathrm{Im}(p_\sharp) \leq \pi_1(X, x_0)$.

(2) Zu jeder beliebigen Untergruppe $H \leq \pi_1(X, x_0)$ existiert genau eine zusammenhängende Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$. Diese ist eindeutig bis auf Isomorphie.

Die topologische Voraussetzung, dass X lokal einfach zusammenhängend sei, ist recht milde: Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexe erfüllen sie automatisch. Lokale Vorsichtsmaßnahmen sind leider tatsächlich notwendig, wir werden sie später noch wesentlich abschwächen (M5Q).

Ich wähle hier zunächst eine möglichst bequeme Formulierung.
Wir werden dies zunächst an Simplizialkomplexe explizieren.

Galois–Korrespondenz als Klassifikation

☺ Die Galois–Korrespondenz bietet eine elegante *Klassifikation* aller zusammenhängender Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$:
Wir haben genau eine für jede Untergruppe $H \leq \pi_1(X, x_0)$.
Die Galois–Überlagerungen sind darunter leicht zu erkennen:

Satz M5A: Galois–Korrespondenz

(3) Genau dann ist die Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ galoisch, wenn die charakteristische Untergruppe $\mathrm{Im}(p_\sharp) \leq \pi_1(X, x_0)$ normal ist.

In diesem Fall operiert die Quotientengruppe $G = \mathrm{Im}(p_\sharp) \backslash \pi_1(X, x_0)$ auf Y und ergibt die Galois–Überlagerung $G \curvearrowright (Y, y_0) \to (X, x_0)$.

Beispiel: Mit unsere obigen Liste $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kennen wir (bis auf Isomorphie) bereits alle zusammenhängenden Überlagerungen $(\tilde{X}, x_0) \to (\mathbb{S}^1, 1)$ der Kreislinie. Das ist anschaulich plausibel, bedarf jedoch eines Beweises, denn unsere Intuition beruht oft nur auf Mangel an Phantasie.

Galois–Korrespondenz als Übersetzung

🙂 Die Galois–Korrespondenz bietet eine verlustfreie *Übersetzung*: Wer Überlagerungen versteht, versteht Untergruppen, und umgekehrt. Das macht die Galois–Korrespondenz zu einem starken Werkzeug.

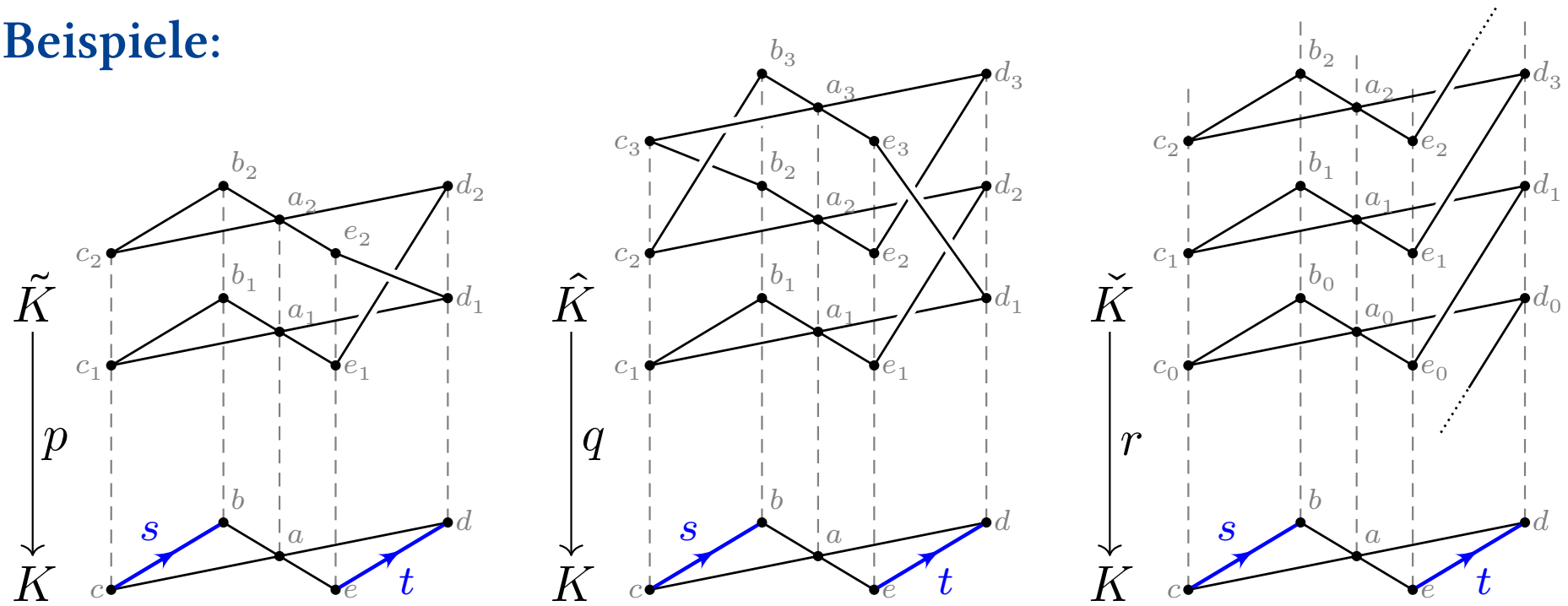
Zunächst sind Gruppen und Überlagerungen zwei sehr verschiedene Konzepte. Ihre Korrespondenz ist überaus bemerkenswert. So können wir zwischen beiden Sichtweisen wechseln, unsere Frage jeweils übersetzen und so einen möglichst leichten Weg zur Antwort finden.

Beispiel: Jeder Graph K hat eine freie Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0)$. Umgekehrt ist jede freie Gruppe F isomorph zur Fundamentalgruppe eines geeigneten Graphen. Wie sehen also Untergruppen $G \leq F$ aus? Der Satz von Nielsen–Schreier (M5D) besagt, dass auch G frei ist. Wie sieht man das? Am besten mit der Galois–Korrespondenz!

Dazu benötigen wir zunächst nur die Galois–Korrespondenz für Graphen, und diese konstruiere ich als erstes. Simplizialkomplexe gelingen dann ebenso. Anschließend lösen wir den allgemeinen Fall.

Galois–Korrespondenz für Graphen

Beispiele:



Daten: Sei K ein zusammenhängender Graph, $T \subseteq K$ ein Spannbaum und $x_0 \in \Omega$ eine Ecke. Gemäß L6D ist die Fundamentalgruppe frei:

$$\pi_1(K, x_0) \xrightarrow{\sim} G = \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \setminus T \,\big|\, s_{ab}s_{ba} = 1 : \{a,b\} \in K \setminus T \big].$$
$$\cong \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \,\big|\, s_{ab} = 1 : \{a,b\} \in T,\ s_{ab}s_{ba} = 1 : \{a,b\} \in K \big].$$

Sei $F \neq \emptyset$ eine Menge und $F \curvearrowleft \pi_1(K, x_0) : (u, g) \mapsto u \cdot g$ eine Operation; für jede Kante $\{a,b\} \in K$ ist $u \mapsto u \cdot s_{ab}$ eine Permutation der Menge F.

Galois–Korrespondenz für Graphen

Satz M5B: Überlagerung aus Monodromie

Die Daten (K, F, φ) definieren die Eckenmenge $\tilde{\Omega} = F \times \Omega$ und darauf

$$\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K := \big\{ \{(u,a),(u',b)\} \subseteq \tilde{\Omega} \,\big|\, \{a,b\} \in K,\ u' = u \cdot s_{ab} \big\}.$$

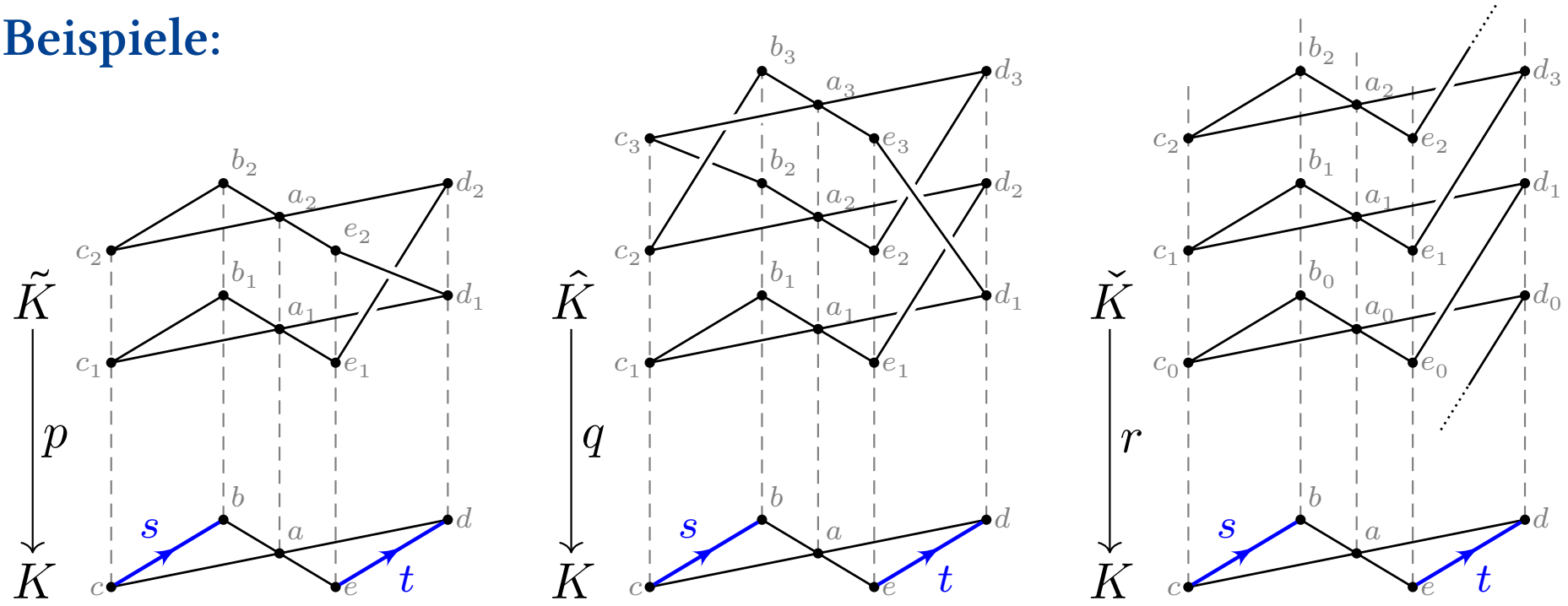
Dies ist ein Graph, und die Projektion $p : \tilde{K} \to K : (u,a) \mapsto a$
ist eine simpliziale Überlagerung (M1K) mit Faser F und Monodromie φ.

Beweis: Zu jeder Ecke $a \in \Omega$ wird der Stern $\mathrm{St}(a,K) := \langle \{a,b\} \in K \rangle$ trivial überlagert durch $\mathrm{St}((u,a),\tilde{K}) = \langle \{(u,a),(u',b)\} \in \tilde{K} \rangle$ mit $u \in F$. Für $u \neq v$ in F gilt $\mathrm{St}((u,a),\tilde{K}) \cap \mathrm{St}((v,a),\tilde{K}) = \emptyset$: Läge $(u',b) = (v',b)$ im Schnitt, so wäre $u \cdot s_{ab} = u' = v' = v \cdot s_{ab}$, also $u = v$. QED

☺ In dem Graphen $\tilde{K}$ betrachten wir $F \times T$ anschaulich als die Etagen. Die Monodromie codiert die Etagenwechsel effizient als Permutationen. Allgemeiner als das kartesische Produkt $F \times K$ konstruieren wir damit $F \overset{\varphi}{\bowtie} K$ getwistet durch die gewünschte Monodromie, vergleiche M029.

Galois–Korrespondenz für Graphen

Beispiele:



Faser $F = \{1, 2\}$ mit Monodromie $F_s = \mathrm{id}$ und $F_t = (1, 2) \longleftrightarrow p : \tilde{K} \to K$.

Faser $F = \{1, 2, 3\}$, Monodromie $F_s = (2, 3)$, $F_t = (1, 2, 3) \longleftrightarrow q : \hat{K} \to K$.

Faser $F = \mathbb{Z}$, Monodromie $F_s = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ und $F_t : k \mapsto k + 1 \quad \longleftrightarrow \quad r : \check{K} \to K$.

Jede Überlagerung bestimmt ihre Monodromie. Neu ist die Umkehrung:
Aus der Monodromie (K, F, φ) erhalten wir nun $p : \tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K \to K$.
Die obige Graphik illustriert dies; Indizes in F entsprechen Etagen.

Galois–Korrespondenz für Graphen

☺ Damit erhalten wir die Galois–Korrespondenz M5A für Graphen:

Korollar M5c: Überlagerung aus Untergruppe

Sei K ein zshgder Graph und $H \leq G = \pi_1(K, x_0)$ eine Untergruppe. Auf der Quotientenmenge $F = H\backslash G$ operiert G durch Multiplikation

$$\varphi : F \times G \to F : (Ha, g) \mapsto Hag.$$

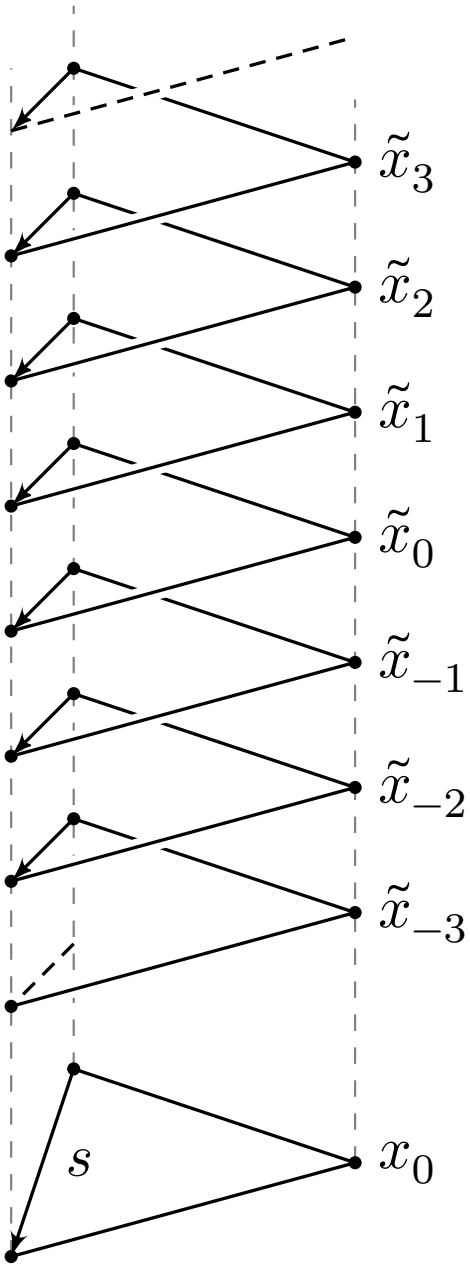
Der Graph $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K$ ist zusammenhängend, da G transitiv operiert. Die Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 = (H1, x_0)$ induziert $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(K, x_0)$ mit $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$. Ist $H \trianglelefteq G$ normal, so ist $F = H\backslash G$ eine Gruppe, und wir erhalten die Galois–Überlagerung

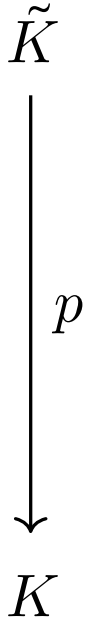
$$H\backslash G \curvearrowright (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (K, x_0).$$

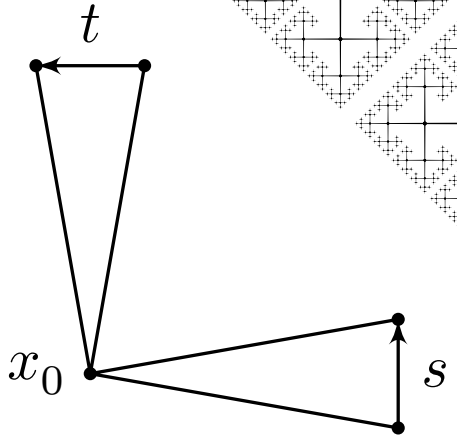
Speziell für $H = \{1\}$ erhalten wir eine universelle Überlagerung.

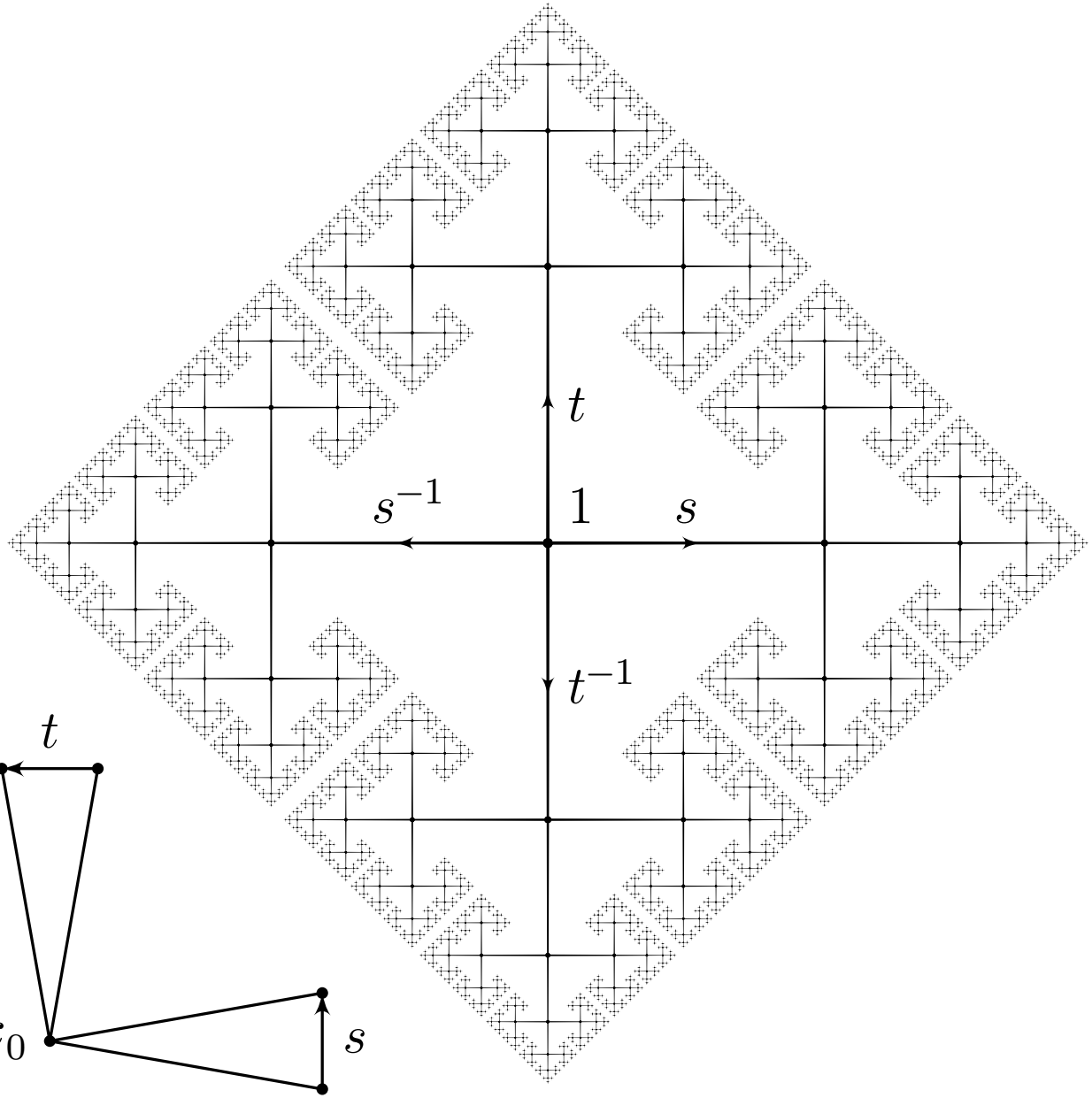
Aufgabe: Diese Aussagen sind klar nach Konstruktion. Falls (noch) nicht, rechnen Sie es nach! Falls Sie Hilfe brauchen, siehe M5G.

Beispiele für universelle Überlagerungen









Beispiele für universelle Überlagerungen

Die linke Graphik zeigt ein Dreieck K mit $\pi_1(K, x_0) = \langle s \,|\, - \rangle \cong \mathbb{Z}$ und darüber seine universelle Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$. In dem Graphen $\tilde{K}$ betrachten wir $\mathbb{Z} \times T$ anschaulich als Etagen, die Monodromie $F_s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : k \mapsto k + 1$ codiert die Etagenwechsel.

Die rechte Graphik zeigt einen Graphen K mit $\pi_1(K, x_0) = \langle s, t \,|\, - \rangle$ und darüber seine universelle Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$. Hier ist eine Darstellung in Etagen nicht so übersichtlich möglich.

Jede Ecke von $\tilde{K}$ ist ein Gruppenelement $g \in \langle s, t \,|\, - \rangle$. Jede Kante nach rechts/links entspricht einer Rechtsmultiplikation mit $s^{\pm 1}$, und jede Kante nach oben/unten entspricht einer Rechtsmultiplikation mit $t^{\pm 1}$. (Damit dies alles simplizial möglich ist, müssen wir jede Kante dreiteilen.)

Zur graphischen Darstellung habe ich zudem die Kanten um den Faktor $(0.49)^k$ verkürzt, wobei k den Abstand zur Wurzel zählt. So entsteht ein ästhetisch ansprechendes, fraktales Bild des Graphen $\tilde{K}$. Die Abbildung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ ist dann klar, aber hier nicht gezeichnet.

Nielsen–Schreier: Freiheit für alle Untergruppen!

Als erste schöne Anwendung erhalten wir:

Eine Gruppe ist genau dann frei,
wenn jede ihrer Untergruppen frei ist.

Das ist hier keine politische, sondern eine mathematische Aussage:

Satz M5D: Nielsen 1921, Schreier 1927

(1) In einer freien Gruppe F ist jede Untergruppe $G \leq F$ frei.

(2) Bei endlichem Index $[F : G] < \infty$ gilt zudem die Rang–Index–Formel:

$$[\operatorname{rang}(G) - 1] = [\operatorname{rang}(F) - 1] \cdot [F : G]$$

Beispiel: Im Falle $\operatorname{rang}(F) = 1$ haben wir $F \cong \mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $G \leq \mathbb{Z}$ ist von der Form $G = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und somit frei: entweder vom Rang 1 bei endlichem Index $n \geq 1$, oder vom Rang 0 bei unendlichem Index. (Die Formel „$-1 = 0 \cdot \infty$“ wird dann offensichtlich unsinnig.)

Aufgabe: Fügen Sie die vorbereiteten Konstruktionen zu einem Beweis. Bewundern Sie Eleganz und Effizienz der Galois–Korrespondenz!

Nielsen–Schreier: Freiheit für alle Untergruppen!

Beweis: (1) Zu $F = \langle S \,|\, - \rangle$ konstruieren wir einen zshgden Graphen K mit $\pi_1(K, x_0) = F$ (L6D). Zur Untergruppe $G \leq F$ existiert eine zshgde Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \rightarrowtail G \leq F$ (M5C). Auch $\tilde{K}$ ist ein Graph. Daher ist $\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0)$ frei (L6D) und somit auch G.

(2) Ist $\operatorname{rang}(F) = |S|$ endlich, so wählen wir den Graphen K endlich. Dank L6D gilt $\chi(K) = 1 - \operatorname{rang}(F)$. Die Blätterzahl der Überlagerung p ist der Index $n = [F : G]$ dank M5C. Sind der Graph K und die Blätterzahl n endlich, so auch der überlagernde Graph $\tilde{K}$, und $\chi(\tilde{K}) = n\,\chi(K)$. QED

📖 Otto Schreier (1901–1929) habilitierte sich 1926 bei Emil Artin: *Die Untergruppen der freien Gruppe.* Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927) 161–183. Schon die allgemeine Garantie der Freiheit (1) ist beachtlich. Dank (2) gewinnen wir die quantitative Präzisierung des Rangs.

Den Beweis kann man rein algebraisch führen, er endet dann aber leicht in heilloser Rechnerei. Wir können den Beweis hier topologisch führen, indem wir freie Gruppen darstellen als Fundamentalgruppen von Graphen – und alles löst sich in Wohlgefallen auf. Zweisprachigkeit!

Galois–Korrespondenz für Simplizialkomplexe

Daten: Sei K ein zusammenhängender Simplizialkomplex, $T \subseteq K$ ein Spannbaum und $x_0 \in \Omega$ eine Ecke. Gemäß L61 gilt $\pi_1(K, x_0) = [\, S \,|\, R \,]$,

$$S = \{\, s_{ab} \,|\, \{a,b\} \in K \,\} \qquad \text{als Erzeuger mit den Relationen}$$
$$R = \{\, s_{ab} \,|\, \{a,b\} \in T \,\} \cup \{\, s_{ab} s_{ba} \,|\, \{a,b\} \in K \,\} \cup \{\, s_{ab} s_{bc} s_{ca} \,|\, \{a,b,c\} \in K \,\}.$$

Im Falle $\dim K = 1$ ist K ein Graph, und wir erhalten die obige Situation. Auch die folgende Konstruktion übertragen wir nahezu wörtlich aus der Diskussion von Graphen, alles bleibt wunderbar einfach und elegant.

Sei $F \neq \emptyset$ eine Menge und $F \overset{\varphi}{\curvearrowleft} \pi_1(K, x_0) : (u, g) \mapsto u \cdot g$ eine Operation; für jede Kante $\{a,b\} \in K$ ist $u \mapsto u \cdot s_{ab}$ eine Permutation der Menge F, mit inverser Permutation $u \mapsto u \cdot s_{ba}$. Jede Spannbaumkante $\{a,b\} \in T$ operiert trivial. Für jedes Dreieck $\{a,b,c\} \in K$ gilt $u \cdot s_{ab} \cdot s_{bc} \cdot s_{ca} = u$.

☺ Hier zahlt sich aus, dass wir alles explizit und präzise formulieren: Von der Präsentation der Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0) = [\, S \,|\, R \,]$ bis zur Konstruktion der Überlagerung $p : \tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K \to K$. *Explicit is beautiful!*

Galois–Korrespondenz für Simplizialkomplexe

Satz M5F: Überlagerung aus Monodromie

Die Daten (K, F, φ) definieren die Eckenmenge $\tilde{\Omega} = F \times \Omega$ und darauf

$$\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K := \big\{ \{(u_0, a_0), \dots, (u_n, a_n)\} \,\big|\, \{a_0, \dots, a_n\} \in K,\ u_j = u_i \cdot s_{a_i a_j} \big\}.$$

Dies ist ein Simplizialkomplex, und die Projektion $p : \tilde{K} \to K : (u, a) \mapsto a$ ist eine simpliziale Überlagerung mit Faser F und Monodromie φ.

Beweis: Mit K ist auch $\tilde{K}$ ein Simplizialkomplex (I2A): $\tilde{K}$ ist ein System endlicher Mengen und abgeschlossen unter Bildung von Teilmengen.

Die Projektion p ist eine simpliziale Überlagerung (M1K): Zu jeder Ecke $a \in \Omega$ wird der Stern $\mathrm{St}(a, K)$ trivial überlagert durch die Eckensterne $\mathrm{St}((u, a), \tilde{K})$, siehe M5B. Die Faser über x_0 ist $p^{-1}(x_0) = F \times \{x_0\} \cong F$. Nach Konstruktion operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0) = [\, S \,|\, R \,]$ hierauf durch die vorgegebene Monodromie φ. QED

Galois–Korrespondenz für Simplizialkomplexe

☺ Damit erhalten wir die Galois–Korrespondenz M5A für SKomplexe:

Korollar M5G: Überlagerung aus Untergruppe

Sei K ein zshgder SKomplex und $H \leq G = \pi_1(K, x_0)$ eine Untergruppe. Auf der Quotientenmenge $F = H\backslash G$ operiert G durch Multiplikation

$$\varphi : F \times G \to F : (Ha, g) \mapsto Hag.$$

Der SKomplex $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K$ ist zusammenhängend, da G transitiv operiert. Die Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 = (H1, x_0)$ induziert $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(K, x_0)$ mit $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$. Ist $H \trianglelefteq G$ normal, so ist $F = H\backslash G$ eine Gruppe, und wir erhalten die Galois–Überlagerung

$$H\backslash G \curvearrowright (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (K, x_0).$$

Speziell für $H = \{1\}$ erhalten wir eine universelle Überlagerung.

Aufgabe: Diese Aussagen sind klar nach Konstruktion. Falls (noch) nicht, rechnen Sie es nach! Falls Sie Hilfe brauchen, führe ich es für Sie aus.

Galois–Korrespondenz für Simplizialkomplexe

Beweis: Wir setzen den zugrundeliegenden Simplizialkomplex K als zusammenhängend voraus, um die Existenz eines Spannbaumes $T \subseteq K$ zu sichern (Satz I3J). Jede Etage von $F \times T$ ist somit zusammenhängend. Da die Gruppe G zudem transitiv auf F operiert, erreichen wir jede Etage durch die Operation der verbleibenden Kanten $\{a, b\} \in K \setminus T$.

Sei $w = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein geschlossener Kantenpfad in (K, x_0). Das zugehörige Gruppenelement ist $[w] = s_{a_0 a_1} s_{a_1 a_2} \cdots s_{a_{n-1} a_n} \in G$. Der nach $(\tilde{K}, \tilde{x}_0)$ hochgehobene Kantenpfad $\tilde{w} = \tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_{n-1} \tilde{a}_n$ läuft vom Start $\tilde{a}_0 = \tilde{x}_0$ zum Ziel $\tilde{a}_n = \tilde{x}_0 \cdot [w]$. Dieser ist genau dann geschlossen, wenn $[w] \in H$ gilt. Hieraus folgt $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$.

Für $H \trianglelefteq G$ ist $F = H \backslash G$ eine Gruppe. Die Linksmultiplikation $F \curvearrowright F$ stiftet die simpliziale Galois–Überlagerung $F \curvearrowright (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (K, x_0)$.

Speziell für $H = \{1\}$ ist der so konstruierte Komplex $\tilde{K} = F \tilde{\times} K$ einfach zusammenhängend, dank $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \rightarrowtail H \leq \pi_1(K, x_0)$. Somit ist p eine universelle Überlagerung (im Sinne von M3J). QED

Anwendung auf Flächengruppen

Zu Graphen K gehören die freien Gruppen $\pi_1(K, x_0) \cong \langle S \,|\, - \rangle$.
Zu geschlossenen Flächen $F_g^\pm$ gehören die Flächengruppen

$$\begin{aligned} \pi_1(F_g^+, x_0) &\cong G_g^+ := \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \,|\, a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle, \\ \pi_1(F_g^-, x_0) &\cong G_g^- := \langle c_0, c_1, \dots, c_g \,|\, c_0 c_0 c_1 c_1 \cdots c_g c_g = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Analog zum Satz M5D von Nielsen–Schreier für freie Gruppen gilt hier:

Satz M5K: Flächengruppen

Jede Untergruppe $U \leq G_g^+$ von endlichem Index n ist selbst isomorph zu einer Flächengruppe, $U \cong G_h^+$. Genauer gilt dabei $1 - h = n(1 - g)$.

Beispiel: Für den Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ gilt $G_1^+ \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $U \leq G_1^+$ von Index $n \in \mathbb{N}$ ist von der Form $U = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$ mit $u, v \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\det(u, v) = n$, also $U \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong G_1^+$, wie vom Satz vorhergesagt.

Für $g \geq 2$ versagen die kommutativen Werkzeuge der Linearen Algebra, doch Fundamentalgruppen und Überlagerungen helfen uns wunderbar!

Anwendung auf Flächengruppen

Die Gruppe $G_g^{\pm}$ ist explizit präsentiert, zudem sehr übersichtlich mit nur einer Relation. Damit ist die Gruppe zwar eindeutig festgelegt, doch viele Fragen bleiben noch offen, etwa mögliche Untergruppen.

🙂 Der Beweis ist erfreulich leicht und folgt erneut dem obigen Credo: Wer Überlagerungen versteht, versteht Untergruppen, und umgekehrt. Das macht die Galois–Korrespondenz zu einem starken Werkzeug. Wir adaptieren unseren Beweis des Satzes von Nielsen–Schreier:

Beweis: Zur Gruppe G_g^+ haben wir eine simpliziale Fläche K, $|K| \cong F_g^+$, mit $\pi_1(K, x_0) = G_g^+$. Zur Untergruppe U existiert dank M5G eine zshgde Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \rightarrowtail U \leq G_g^+$.

Auch $\tilde{K}$ ist eine zusammenhängende orientierbare geschlossene simpliziale Fläche. Dank Flächenklassikation (K3G) gilt $|\tilde{K}| \cong F_h^+$ für ein $h \in \mathbb{N}$ und somit $U \cong G_h^+$. Für die Euler–Charakteristik gilt $2 - 2h = \chi(\tilde{K}) = n\chi(K) = n(2 - 2g)$, also $1 - h = n(1 - g)$. QED

Anwendung auf Flächengruppen

🙂 Als Dreingabe erhalten wir erneut die quantitative Präzisierung. Diese nutzen wir sogleich im folgenden beruhigenden Korollar.

Korollar M5L: Flächengruppen

Von allen Flächengruppen $G_g^\pm$ mit $g \in \mathbb{N}$ ist nur $G_0^+ = \{1\}$ frei.

Für $r \geq 1$ Randkomponenten ist jede der Gruppen $\pi_1(F_{g,r}^\pm, x_0)$ frei (L6H).

Unsere Präsentation von $G_g^\pm$ folgt bequem aus der Flächenklassifikation und hat nur eine Relation. Das schließt keineswegs aus, dass $G_g^\pm$ frei ist, denn eventuell ist eine weitere Präsentation ohne Relationen möglich. Als warnende Illustration betrachte man $\langle a, b \,|\, a = b \rangle \cong \langle a \,|\, - \rangle$:

Um zu zeigen, dass eine Gruppe frei ist, genügt es, eine Basis anzugeben. Um zu zeigen, dass sie nicht frei ist, müssen wir eine Hindernis angeben, also eine Eigenschaft der Gruppe, die ihrer Freiheit im Wege steht.

Beweis: Die Abelschmachung zeigt, dass die Flächengruppe G_g^- mit $g \in \mathbb{N}$ nicht frei ist, denn $(G_g^-)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g$ hat Torsion.

Anwendung auf Flächengruppen

Angenommen, eine der Flächengruppen $G = G_g^+$ mit $g \geq 1$ wäre frei. Wegen $G_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ hat G dann den Rang $2g \geq 2$. Demnach existieren Untergruppen $U \leq G$ zu jedem Index $n \geq 2$ (M5E). Nach Nielsen–Schreier M5D ist U frei vom Rang $r = 1 - n(1-2g)$, also $U_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^r$. Nach M5K gilt jedoch ebenso $U \cong G_h^+$ mit $h = 1 - n(1-g)$ und somit $U_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2h}$. Die Gleichung $1 - n(1-2g) = 2 - 2n(1-g)$ gilt nur für $n = 1$. QED

🙂 Unser topologischer Beweis ist trickreich. Warum ist er so leicht? Weil wir für Graphen und Flächen starke topologische Techniken haben! In seiner Gesamtheit ist dieser Beweis keineswegs kurz: Wie benötigen die Flächenklassifikation, Fundamentalgruppen und Überlagerungen. Wieder einmal jauchzen wir: Der Weg ist lang, doch lohnend!

Aufgabe: Zeigen Sie das Korollar mit $\sharp\,\mathrm{Hom}(G_g^+, \mathrm{S}_3) < 6^{2g}$. **Lösung:** Wäre G_g^+ frei, so vom Rang $2g$, also $\sharp\,\mathrm{Hom}(G_g^+, \mathrm{S}_3) = 6^{2g}$ dank UAE. Für einige der Zuordnungen $\{a_1, \dots, b_g\} \to \mathrm{S}_3$ ist jedoch die Relation $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1$ nicht erfüllt. Also gilt $\sharp\,\mathrm{Hom}(G_g^+, \mathrm{S}_3) < 6^{2g}$.

Der Reidemeister–Schreier–Algorithmus

Gruppenpräsentationen $G = \langle S \,|\, R \rangle$ durch Erzeuger S und Relationen R sind der zentrale Gegenstand der kombinatorischen Gruppentheorie. Zu einer Untergruppe $H \leq G$ möchte man dann eine Präsentation $H = \langle S' \,|\, R' \rangle$ ableiten. Das folgende Verfahren löst dies sehr elegant:

Satz M5H: Reidemeister 1926, Schreier 1927

Sei $H \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index $n = |G : H| < \infty$.
Ist G endlich erzeugt bzw. endlich präsentiert, so auch H. Quantitativ:
(a) Zu $G = \langle S \rangle$ existiert $S' \subseteq G$ mit $H = \langle S' \rangle$ und $|S'| - 1 = n(|S| - 1)$.
(b) Zu $G = \langle S \,|\, R \rangle$ existiert $H = \langle S' \,|\, R' \rangle$ zudem mit $|R'| = n|R|$.

Bemerkung: Der Satz M5D von Nielsen–Schreier impliziert (a). Umgekehrt impliziert (b) Nielsen–Schreier: Aus $R = \emptyset$ folgt $R' = \emptyset$.

📖 B. Chandler, W. Magnus: *The History of Combinatorial Group Theory: A Case Study in the History of Ideas.* Springer 1982 (Chapter II.3)

Der Reidemeister–Schreier–Algorithmus

Beweis: Gegeben sei die Präsentation $G = \langle S \,|\, R \rangle$. Die freie Gruppe $\langle S \,|\, - \rangle \cong \pi_1(K_1, x_0)$ ist Fundamentalgruppe eines Graphen K_1 (L6D). Wir erhalten $\langle S \,|\, R \rangle \cong \pi_1(K, x_0)$ durch Anheften einer 2–Zelle für jede Relation (L6S). Dank Galois–Korrespondenz M5G entspricht $H \leq G$ einer Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$ und Faser $H\backslash G$.

Der SKomplex $\tilde{K}$ entsteht aus der Überlagerung $p : (\tilde{K}_1, \tilde{x}_0) \to (K_1, x_0)$ durch Anheften derselben 2–Zellen, jeweils hochgehoben auf jede Etage. Die Gruppe $\pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_0) = \langle S' \,|\, - \rangle$ ist frei und liefert die gewünschten Erzeuger dank $\pi_1(\mathrm{inc}) : \pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_0) = \langle S' \,|\, - \rangle \twoheadrightarrow \langle S' \,|\, R' \rangle = \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0)$.

(a) Im endlichen Fall gilt $\chi(K_1) = 1 - |S|$ und $1 - |S'| = \chi(\tilde{K}_1) = n\chi(K_1)$.

(b) Die hochgehobenen 2–Zellen von $\tilde{K}$ entsprechen den Relationen R' einer Gruppenpräsentation $H = \langle S' \,|\, R' \rangle$. Dabei gilt $R' \cong (H\backslash G) \times R$; speziell im endlichen Fall erhalten wir also $|R'| = n|R|$. QED

Der Reidemeister–Schreier–Algorithmus

Bemerkung: Bei unendlichem Index gilt die Endlichkeitsaussage (a) i.A. nicht mehr: Die freie Gruppe $F = \langle s, t \,|\, - \rangle$ vom Rang 2 enthält die freie Untergruppe $G = \langle t^k s t^{-k} : k \in \mathbb{Z} \,|\, - \rangle$ von unendlichem Rang und Index.

Aussage (2) jedoch in der Form $R' \cong (H\backslash G) \times R$ gilt allgemein weiterhin. Insbesondere folgt aus $R = \emptyset$ immer $R' = \emptyset$. Das ist erneut der Satz von Nielsen–Schreier mit obigem Beweis durch Überlagerung von Graphen!

Bemerkung: Diese topologisch-simpliziale Konstruktion können wir nun algebraisch-kombinatorisch formalisieren: Wir erhalten hieraus den *Reidemeister–Schreier–Algorithmus*. Seine händische Ausführung ist in jedem Einzelfall klar, doch seine allgemeine Formulierung ist mühsam. Ich empfehle daher nachdrücklich die geometrische Veranschaulichung!

Die algebraische Formalisierung als Algorithmus, *ready to code*, ist dann eine interessante Übung in Geduld und Sorgfalt.

Der Reidemeister–Schreier–Algorithmus

Algorithmisch interessant ist das Reidemeister–Schreier–Verfahren vor allem für endliche Präsentationen $G = \langle S \mid R \rangle$ und Untergruppen $H \leq G$ von endlichem Index. Es liefert zwar endliche Präsentationen, doch diese sind im Allgemeinen groß und unhandlich. Für praktische Zwecke wird man versuchen, sie anschließend möglichst weit zu vereinfachen, durch geeignete Tietze–Transformationen (L3s). Computer-Algebra-Systeme zur kombinatorischen Gruppentheorie implementieren genau dies.

Bequem nutzbar, effizient implementiert und gründlich getestet finden Sie dies zum Beispiel in GAP, `https://docs.gap-system.org/doc/ref/chap48`. Dort finden Sie auch praktische Beispiele. Wenn Sie möchten, können Sie damit experimentieren und einige kleine Beispiele per Hand prüfen.

Beispiel: Wiederholen Sie die Coxeter–Präsentation der symmetrischen Gruppe S_n. Folgern Sie eine Präsentation der alternierenden Gruppe A_n. Die folgende Ausführung gibt hierzu eine detaillierte Anleitung.

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$

Das leuchtende Beispiel $\mathrm{A}_n \leq \mathrm{S}_n$ führt zu folgender Sichtweise:

Beispiel: Vorgelegt sei die Präsentation $G = \langle S \,|\, R \rangle$. Zu jeder Relation $r = s_1^{e_1} \cdots s_\ell^{e_\ell} \in R$ sei $\varepsilon(r) := e_1 + \cdots + e_\ell \in \mathbb{Z}$ die Exponentensumme. Daraus berechnen wir den größten gemeinsamen Teiler

$$n := \mathrm{ggT}\{\, \varepsilon(r) \,|\, r \in R \,\} \in \mathbb{N}.$$

Wir erhalten den Gruppenhomomorphismus $\alpha : G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $\alpha(s) = 1$ für alle $s \in S$. Sein Kern $H := \mathrm{Ker}(\alpha) \trianglelefteq G$ hat demnach Index n. (Im Falle $n = 0$ haben wir $\alpha : G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ und der Index von H in G ist ∞.)

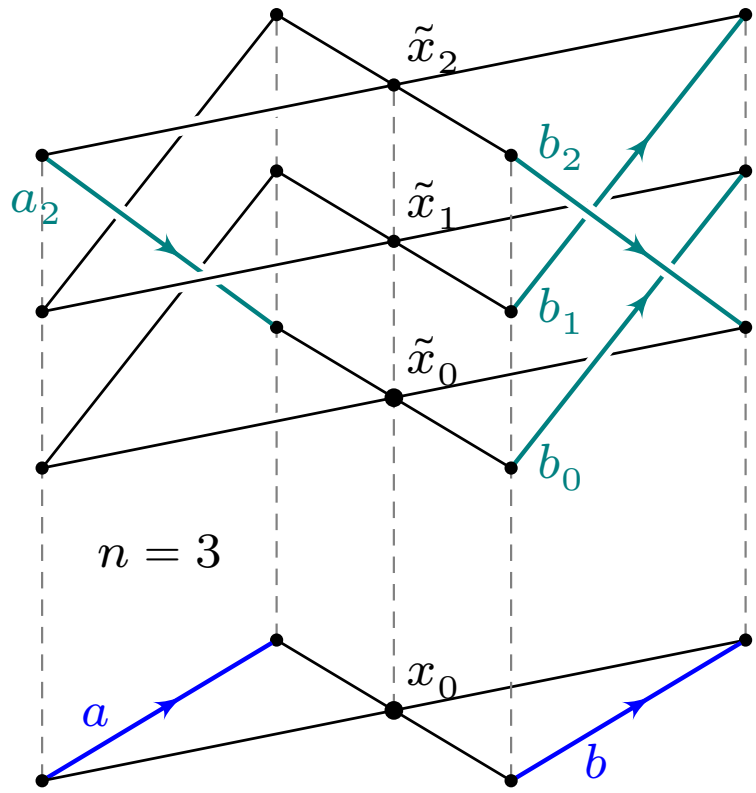
Beispiel: Für die Coxeter–Präsentation L3w der symmetrischen S_n erhalten wir die Abelschmachung $\alpha = \mathrm{sign}$ und $H = \mathrm{A}_n$, siehe L373.

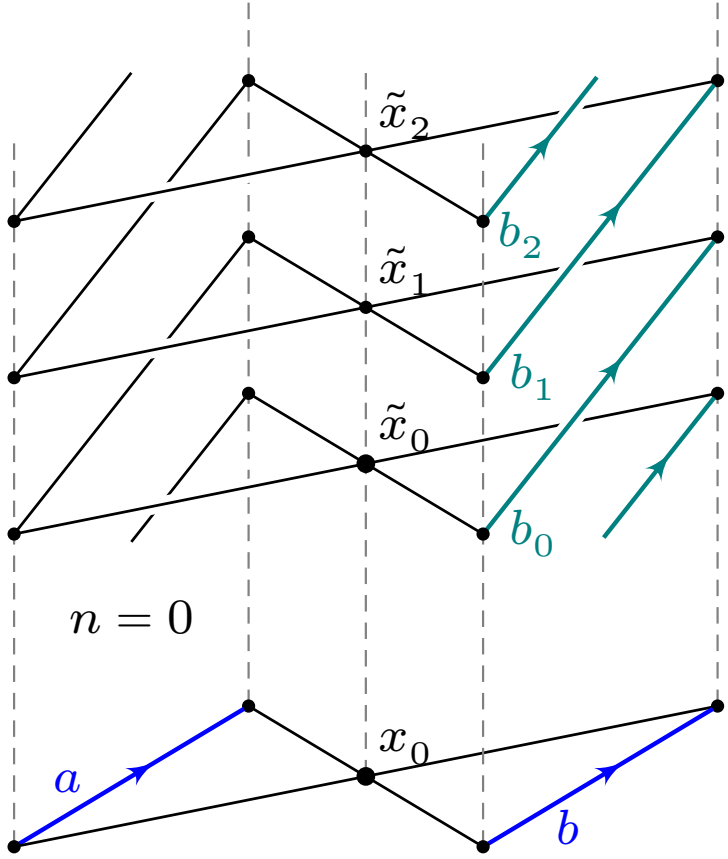
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_n & \cong & P_n := \left\langle t_1, \ldots, t_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{ll} t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \\ \tau_i & \mapsto & t_i \end{array}$$

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$

Aufgabe: Bestimmen Sie aus $G = \langle S \,|\, R \rangle$ eine Präsentation $H = \langle S' \,|\, R' \rangle$.
Hinweis: Das Reidemeister–Schreier–Verfahren liefert das Gewünschte!

Lösung: Hier ist ein typischer Graph $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K$ zu $H = \mathrm{Ker}(\alpha) \trianglelefteq G$.





Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$

(1) Aus den Erzeugern $S = \{\, a, b, c, \dots \}$ für G erhalten wir Erzeuger für H dank Reidemeister–Schreier M5H. Für $n = 0$ finden wir die Erzeuger

$$b_k \mapsto a^k b a^{-k-1},\ c_k \mapsto a^k c a^{-k-1},\ \dots \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Im endlichen Falle $n \geq 1$ finden wir die Erzeuger $a_{n-1} \mapsto a^n$ und

$$b_0 \mapsto b a^{-1},\ b_1 \mapsto a b a^{-2},\ \dots,\ b_{n-2} \mapsto a^{n-2} b a^{-n+1},\ b_{n-1} \mapsto a^{n-1} b,$$
$$c_0 \mapsto c a^{-1},\ c_1 \mapsto a c a^{-2},\ \dots,\ c_{n-2} \mapsto a^{n-2} c a^{-n+1},\ c_{n-1} \mapsto a^{n-1} c,\ \dots.$$

Alternativ $a_{n-1} \mapsto a^n,\ b_k \mapsto a^k b a^{-k-1},\ c_k \mapsto a^k c a^{-k-1},\ \dots$ mit $k \in \mathbb{Z}_n$.
Hier ist zusammenfassend $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ für $n \geq 1$ und $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$.
Im Falle $n = 0$ gilt $a_{n-1} \mapsto a^n = 1$, und diesen Erzeuger löschen wir.

(2) Jede Relation $r \in R$ heben wir zu einem Wort $\tilde{r}$ in $a_{n-1}, b_k, c_k, \dots$. gemäß M407. Seine Hochhebungen sind $\tilde{r}_k = a^k \tilde{r} a^{-k}$ für $k \in \mathbb{Z}_n$.

Aus der Präsentation $G = \langle\, S \,|\, R \,\rangle$ erhalten wir so $H = \langle\, S' \,|\, R' \,\rangle$
mit $S' = \{\, a_{n-1},\ b_k,\ c_k,\ \dots \,|\, k \in \mathbb{Z}_n \,\}$ und $R' = \{\, \tilde{r}_k \,|\, r \in R,\ k \in \mathbb{Z}_n \,\}$.

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $\mathrm{A}_n \leq \mathrm{S}_n$

Beispiel: Wir betrachten die obige Coxeter–Präsentation $\mathrm{S}_n \cong P_n$. Hier erhalten wir $\alpha = \mathrm{sign}$ und $H = \mathrm{A}_n$. (1) Als Erzeuger finden wir

$$v_1 \mapsto t_1^2,\ u_i \mapsto t_i t_1^{-1},\ v_i \mapsto t_1 t_i \quad \text{für } 2 \leq i < n.$$

Das entspricht im Graphen $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\bowtie} K$ dem oben gewählten Spannbaum; dieser enthält u_1. (Ein anderer Spannbaum liefert etwas andere Erzeuger.)

Wir heben alle Relationen hoch: (2a) Die Relation t_1^2 hebt sich zu $v_1 \mapsto t_1^2$. Die Relation t_i^2 hebt sich zu $u_i v_i \mapsto t_i^2$ und zu $v_i u_i \mapsto t_1 t_i^2 t_1^{-1}$ für $2 \leq i < n$. (2b) Die Relation $(t_1 t_2)^3$ hebt zu $v_2^3 \mapsto (t_1 t_2)^3$ und $(v_1 u_2)^3 \mapsto t_1 (t_1 t_2)^3 t_1^{-1}$. Für $2 \leq i < n-1$ hebt sich die Relation $(t_i t_{i+1})^3$ zu $(u_i v_{i+1})^3 \mapsto (t_i t_{i+1})^3$ und $(v_i u_{i+1})^3 \mapsto t_1 (t_i t_{i+1})^3 t_1^{-1}$. (2c) Für $j \geq 3$ hebt sich die Relation $(t_1 t_j)^2$ zu $v_j^2 \mapsto (t_1 t_j)^2$ und $(v_1 u_j)^2 \mapsto t_1 (t_1 t_j)^2 t_1^{-1}$. Für $2 \leq i < j < k < n$ hebt sich die Relation $(t_i t_k)^2$ zu $(u_i v_k)^2 \mapsto (t_i t_k)^2$ und $(v_i u_k)^2 \mapsto t_1 (t_i t_k)^2 t_1^{-1}$.

🙂 Damit haben wir alle Relationen von S_n zu Relationen von A_n hochgehoben, und wir erhalten eine Präsentation $\mathrm{A}_n \cong \langle S' \mid R' \rangle$.

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $\mathrm{A}_n \leq \mathrm{S}_n$

Nach Vereinfachung durch Tietze–Transformationen (L3s) erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A}_n & \cong & P'_n := \left\langle v_2, \dots, v_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{l} v_2^3 = (v_i v_{i+1})^3 = 1 \ \text{ für } 2 \leq i < n-1 \\ v_j^2 = (v_i v_k)^2 = 1 \ \text{ für } 2 \leq i < j < k < n \end{array} \right\rangle \\ \tau_1\tau_i & \hookleftarrow & v_i \end{array}$$

Zur Erinnerung: Eine Präsentation beinhaltet immer zwei Aussagen.

(1) Erzeugung: Jede gerade Permutation $\sigma \in \mathrm{A}_n$ ist ein Produkt der hier angegebenen Erzeuger $\tau_1\tau_i \hookleftarrow v_i$ mit $2 \leq i < n$. (Übung / Wiederholung: Zeigen Sie dies direkt! Es gelingt zum Beispiel per Induktion über n.)

(2) Äquivalenz: Die Relationen klären jede Mehrdeutigkeit. Genau dann ergeben zwei solche Produkte dieselbe Permutation $\sigma \in \mathrm{A}_n$, wenn sie durch eine Folge der angegebenen Relationen ineinander übergehen.

(2a) Machen Sie die Probe: Dass die angegebenen Relationen in A_n *gelten*, rechnen Sie leicht nach durch Einsetzen und Ausmultiplizieren in A_n.

(2b) Dass die von uns angegebenen Relationen für A_n wirklich *ausreichen*, also alle weiteren Relationen in A_n erzeugen, folgt aus obiger Rechnung.

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $\mathrm{A}_n \leq \mathrm{S}_n$

☺ Zur Sicherheit mache ich zwei einfache Stichproben mit GAP:

```
gap> F := FreeGroup( "v2", "v3" );;
gap> v2 := F.1;; v3 := F.2;;
gap> G := F / [ v2^3, (v2*v3)^3, v3^2 ];
<fp group on the generators [ v2, v3 ]>
gap> [ Size(G), StructureDescription(G) ];
[ 12, "A4" ]

gap> F := FreeGroup( "v2", "v3", "v4" );;
gap> v2 := F.1;; v3 := F.2;; v4 := F.3;;
gap> G := F / [ v2^3, (v2*v3)^3, (v3*v4)^3, v3^2, v4^2, (v2*v4)^2 ];
<fp group on the generators [ v2, v3, v4 ]>
gap> [ Size(G), StructureDescription(G) ];
[ 60, "A5" ]
```

Diese Abzählung zeigt erneut, dass unsere Relationen vollständig sind: Der Gruppenhomomorphismus $h : P'_n \to \mathrm{A}_n : v_i \mapsto \tau_1\tau_i$ ist wohldefiniert, da die Relationen in A_n gelten, und surjektiv, da $\mathrm{A}_n = \langle \tau_1\tau_2, \dots, \tau_1\tau_{n-1} \rangle$. Mit $\sharp P'_n \leq \sharp\, \mathrm{A}_n < \infty$ folgt, dass h bijektiv ist, also ein Isomorphismus.

Reidemeister–Schreier: erste Schritte zur CGT

Das Reidemeister–Schreier–Verfahren ist händisch nur für kleine oder stark strukturierte Präsentationen bequem. Es liefert zwar immer eine endliche Präsentation, doch diese gerät im Allgemeinen unhandlich groß. Die Rechnung wird dann eine Herausforderung zu guter Buchführung.

Für praktische Zwecke versucht man immer, Präsentationen möglichst weit zu vereinfachen, durch geeignete Tietze–Transformationen (L3s). Schon in unserem obigen Beispiel A_n entstehen reichlich redundante Erzeuger und Relationen, die ich anschließend fröhlich bereinigt habe.

Permutationsgruppen $G \leq \mathrm{S}_n$ und Matrixgruppen $G \leq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ sind Ihnen schon seit Anfang Ihres Studiums vertraut. Endlich präsentierte Gruppen $G = \langle S \,|\, R \rangle$ bilden eine dritte Säule und sind der zentrale Gegenstand der kombinatorischen Gruppentheorie (CGT). Zu allen dreien gibt es sowohl strukturell-theoretisch als auch algorithmisch-praktisch sehr umfassende Werkzeuge, die erfreulich effizient ineinander greifen, und deren Anfänge Sie bereits in Ihren Grundvorlesungen bewundern können.

Reidemeister–Schreier: erste Schritte zur CGT

☺ Erfreulicherweise findet GAP sogar Präsentationen zu Erzeugern.
(Die Ausgabe variiert, ich habe sie nachträglich von Hand sortiert.)

```
gap> S := [ (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) ];; Size(Group(S));
120
gap> iso := IsomorphismFpGroupByGenerators( Group(S), S );
[ (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) ] -> [ F1, F2, F3, F4 ]
gap> fp := Image( iso );
<fp group of size 120 on the generators [ F1, F2, F3, F4 ]>
gap> RelatorsOfFpGroup( fp );
[ F1^2, F2^2, F3^2, F4^2, (F1*F2)^3, (F1*F3)^2, (F1*F4)^2, (F2*F3)^3,
    (F2*F4)^2, (F3*F4)^3 ]

gap> S := [ (1,2,3), (1,2)(3,4), (1,2)(4,5) ];; Size(Group(S));
60
gap> iso := IsomorphismFpGroupByGenerators( Group(S), S );
[ (1,2,3), (1,2)(3,4), (1,2)(4,5) ] -> [ F1, F2, F3 ]
gap> fp := Image( iso );
<fp group of size 60 on the generators [ F1, F2, F3 ]>
gap> RelatorsOfFpGroup( fp );
[ F1^3, (F1*F2)^3, (F2*F3)^3, F2^2, F3^2, (F1*F3)^2 ]
```

Rückblick auf dieses Semester

Meine Ziele und Wünsche für diese Veranstaltung:

1. Freude an Mathematik! Wir wollen unseren Spaß haben.
2. Sie engagieren sich kontinuierlich, wir betreuen Sie bestens.
3. Sie lernen wunderschöne und nützliche Mathematik.

Freuen Sie sich über schöne und nützliche Mathematik!

Einführung: Was ist und was soll die Topologie?

Analytische Topologie	**Universelle Werkzeuge**	**Geometrische Topologie**	**Algebraische Topologie**
Distanzlehre: Metrik	Kompaktheit und Kompaktifizierung	Simpliziale Komplexe	Fundamental-gruppen
Stetigkeitslehre: Topologie	Zusammenhang und Homotopie	Abbildungsgrad & Topologie des $\mathbb{R}^n$	Überlagerungen
Topologische Konstruktionen	Die Sprache der Kategorien	Klassifikation der Flächen	*Into the great wide open …*

Freuen Sie sich über schöne und nützliche Mathematik!

Herr: es ist Zeit. Das Semester war lang.
Befiehl den letzten Sätzen wahr zu sein.

frei nach Rainer Maria Rilke (1875–1926), *Herbsttag*

Auch diese Vorlesung kommt zu ihrem guten Ende. Sie war so angelegt, dass wir ehrliche Beispiele und die schöne Theorie zugleich aufbauen. Das ist anstrengend, doch lohnend. Zahlreiche Illustrationen aus der Vorlesung und Übungsaufgaben zeigen Ihnen konkrete Anwendungen. Mit Hilfe topologischer Konstruktionen und Obstruktionen können Sie Probleme präzise erfassen und elegant lösen. Darauf dürfen Sie stolz sein.

Echte Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung. Sie sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein. Mathematik klärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Freuen Sie sich über schöne und nützliche Mathematik!

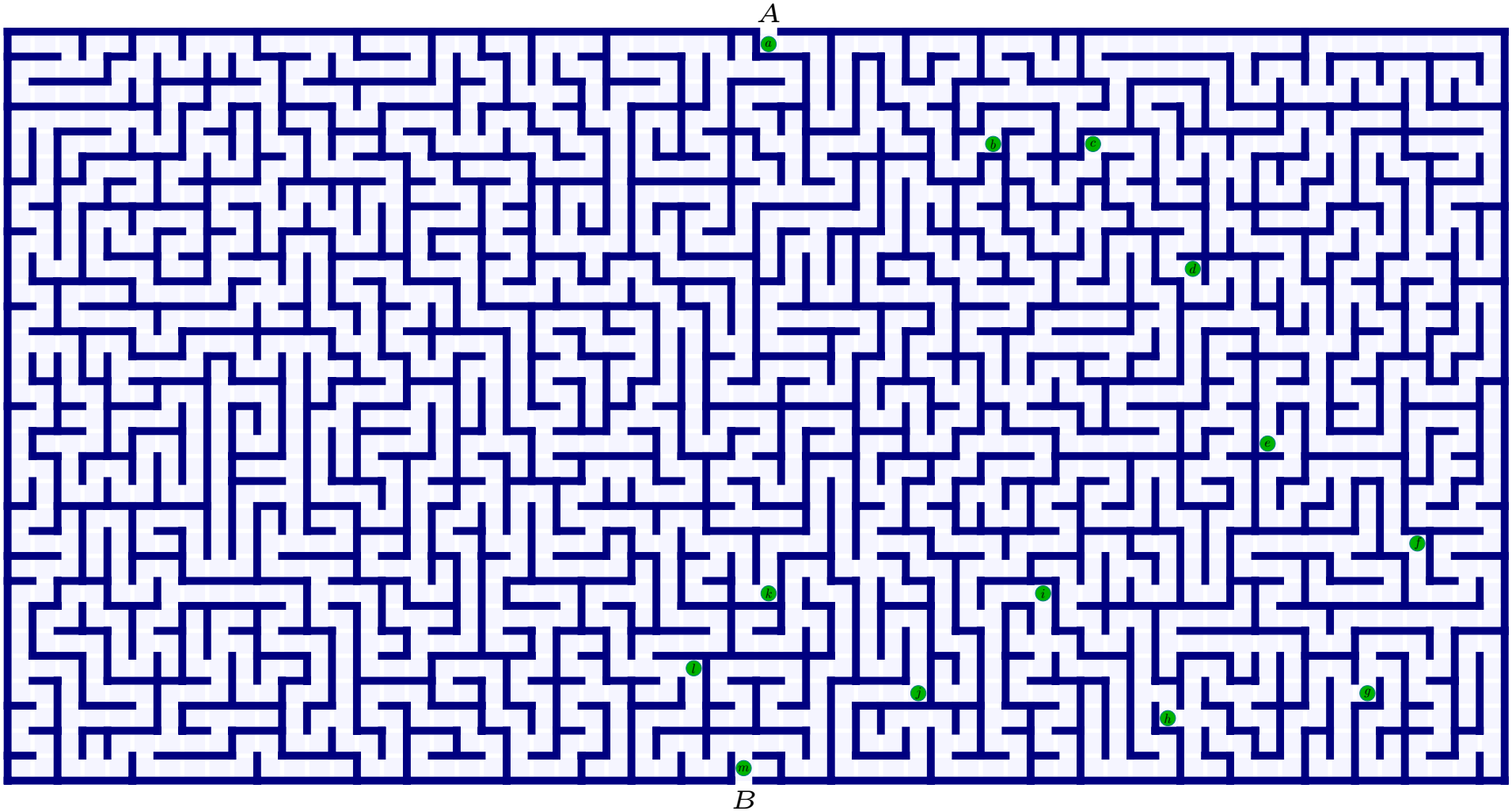
Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut. Gute Abstraktion strukturiert und vereinfacht; eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre verwunderlichen Spezialfälle. Die sollen Sie natürlich nicht ignorieren, sondern richtig verstehen; hierzu brauchen Sie Überblicks- und Detailwissen zugleich.

Gerade zur Fundamentalgruppe ist die abstrakte Definition erfreulich leicht, doch jede ernsthafte Anwendungen erfordert redliche Mühe. Das spüren Sie deutlich; abstrakt ist leicht, konkret ist schwer. Freuen Sie sich also über jedes abstrakte Werkzeug, das ihre konkrete Arbeit erleichtert.

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Sie dient der Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bestehen. Theorie und Anwendung arbeiten nur gemeinsam effizient zusammen, wie linke und rechte Hand. Geben Sie sich auch in Zukunft nicht mit weniger zufrieden! Bleiben Sie ehrlich, neugierig, engagiert!

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

Ich führe Argumente sorgsam vor. Sie arbeiten alles gründlich nach.



Ich zeige Ihnen den Weg von A nach B. Dazu teilen wir uns die Arbeit:
Ich erkläre die wesentlichen Etappen. Sie ergänzen und klären Details.

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

Studieren fordert und fördert Ihr eigenständiges Arbeiten. Ich stecke den Weg für Sie ab, weder zu weit noch zu eng, gehen müssen Sie ihn selbst. Das rechte Maß für Sie zu finden ist schwierig, aber möglich… im Dialog, als Gemeinschaft der Lehrenden und Lernenden. Das ist Universität!

Es geht nicht darum, dass Dozierende ihren Studis Wissen „eintrichtern“ oder sich Studierende rein passiv „aufschlauen“ lassen. Viele Studierende beklagen zurecht das „Bulimie-Lernen“, doch praktizieren genau das. Auch wenn manche sich „Studium“ so vorstellen: Das ist verkehrt!

Studieren bedeutet sich zu bemühen, seine Neugier zu pflegen, sich aktiv Wissen und Können anzueignen und wissenschaftlich zu betätigen. Wir schaffen für Sie einen förderlichen Rahmen, in dem dies gelingt. Oft wird diese Mühe verachtet. Manchmal fruchtet sie tatsächlich.

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.
Konfuzius (551–497 v.u.Z.)

Was macht die Topologie so einzigartig?

Viele halten die Topologie für abstrakt und schwierig,
doch nur Wenige haben Recht!

Sie wissen aus Erfahrung: Analysis ist konkret… und dadurch beliebig kompliziert. Lineare Algebra ist abstrakt… und dadurch meist einfach. Die Topologie ist beides: wunderbar abstrakt und vollkommen konkret! Mathematik zu studieren ist harte, ehrliche Arbeit… und es lohnt sich.

Erfahrungsgemäß bereitet die Topologie Teilnehmer:innen nachhaltig Freude, vielleicht gelingt dieses Wunder erneut, zumindest im Rückblick, wenn Sie merken wie Sie mit dieser Herausforderung gewachsen sind. Sie lernen schrittweise eine umfassendere Sicht auf die Mathematik.

We choose to study Topology this very semester,
not because it is easy, but because it is hard,
because that goal will serve to organize and
measure the best of our energies and skills.
frei nach John F. Kennedy (1917–1963)

Zum guten Schluss

Nun habe ich [ein Semester] lang zu Ihnen gesprochen und werde jetzt damit aufhören. Einerseits möchte ich mich entschuldigen und andererseits wieder nicht. Ich hoffe – ja, ich weiß –, dass [einige] von Ihnen allem mit großer Spannung folgen konnten und eine angenehme Zeit damit verbracht haben. Aber ich weiß auch, dass die Kräfte der Lehre von sehr geringer Wirkung sind, außer unter jenen glücklichen Umständen, in denen sie praktisch überflüssig sind. Daher darf ich im Hinblick auf die[jenigen], die alles verstanden haben, sagen, dass ich nichts anderes getan habe, als Ihnen die Dinge zu zeigen. Was die anderen betrifft, tut es mir leid, wenn ich Ihren Widerwillen gegen dieses Fachgebiet erregt habe. […] Ich hoffe nur, dass ich Sie nicht ernsthaft verwirrt habe, und dass Sie dieses interessante Geschäft nicht aufgeben. Ich hoffe, dass jemand anderes es Ihnen so beibringen kann, dass es Ihnen nicht im Magen liegt, und dass sie trotz allem eines Tages feststellen, dass es nicht so schrecklich ist, wie es aussieht.

nach R. P. Feynman (1918–1988), Epilog seiner *Vorlesungen über Physik*