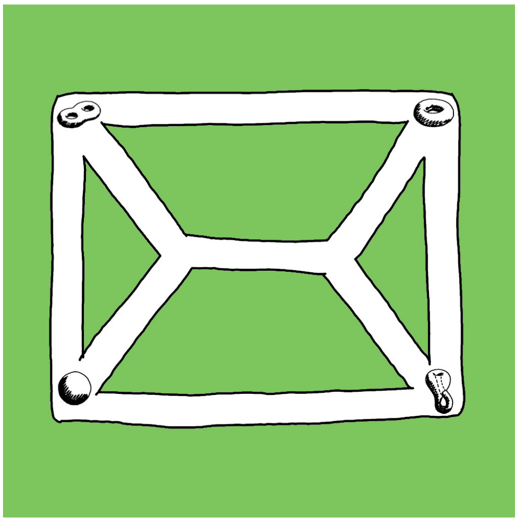
Universität Stuttgart

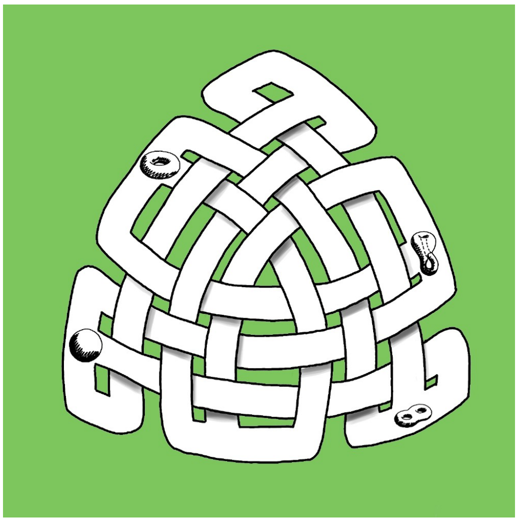
Beispielaufgabe zur Studienwahl

Mathematische Schatzsuche: Der Blick für das Wesentliche

© Michael Eisermann, Friederike Stoll



Labyrinth 1



Labyrinth 2

Sammeln Sie in beiden Labyrinthen alle vier mathematischen Schätze! Laufen Sie dazu einen geschlossenen Weg, das heißt hören Sie dort auf, wo Sie angefangen haben. An jeder Stelle dürfen Sie höchstens einmal vorbeikommen, außer natürlich am Anfangs- und Endpunkt.

Welche der folgenden Informationen benötigen Sie tatsächlich, um solch ein Rätsel lösen zu können?

	ja	nein
• die Menge der Weggabelungen, an denen drei oder mehr Wegstücke zusammentreffen	☐	☐
• die genaue Position der Gabelungen in Koordinaten	☐	☐
• die Menge der Über- und Unterkreuzungen	☐	☐
• welche Gabelungen durch direkte Wegstücke verbunden sind	☐	☐
• die Länge der einzelnen Wegstücke	☐	☐

Wie viele Lösungen gibt es? Zählen Sie alle Lösungswege! Dabei sollen zwei Wege nur einmal gezählt werden, wenn sie sich nur durch die Durchlaufungsrichtung unterscheiden; ebenso soll die Position des Anfangspunkts keine Rolle spielen.

	keine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	mind. 10	∞	
Für Labyrinth 1 gibt es	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	Lösungen.
Für Labyrinth 2 gibt es	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	Lösungen.

Weitere Aufgaben und Informationen unter:
Studienwahl-Kompass Mathematik
Universität Stuttgart

mathematik
fakultät 8

Stufe 0 / Kurzantwort: Für die Problemlösung spielt es tatsächlich keine Rolle, wo genau die Weggabelungen liegen, wo die Wege verlaufen oder wie lang sie sind. Genauso unwichtig ist es, ob sich Wege über- / unterkreuzen oder nicht. Um unser Problem zu lösen, müssen wir nur wissen, an welchen Gabelungen sich welche Wegstücke treffen, und natürlich an welchen Positionen die Schätze liegen. Eine solche Struktur bestehend aus Knoten (hier Gabelungen) und Kanten (Wegstücke zwischen zwei Gabelungen) nennt man in Mathematik und Informatik einen *Graphen*.

- **Labyrinth 1:** Hier gibt es genau sechs Lösungen. Diese finden Sie mit Geduld und Geschick; so sehen Sie, dass es *mindestens* sechs Lösungen gibt. Wie können Sie sicher sein, dass es keine weitere Lösung gibt? Nur durch Sorgfalt, damit Ihnen kein Fall entgeht.
- **Labyrinth 2:** Das zweite Labyrinth sieht auf den ersten Blick viel komplizierter aus als das erste. Aber das täuscht: Für die vorliegende Fragestellung sind beide gleich! Daher gibt es auch hier sechs Lösungen. Abstraktion strukturiert und vereinfacht!

Stufe 1 / Ausführung: *Hier erfahren Sie, wie Sie konkret vorgehen, um* alle *Lösungen zu finden.*

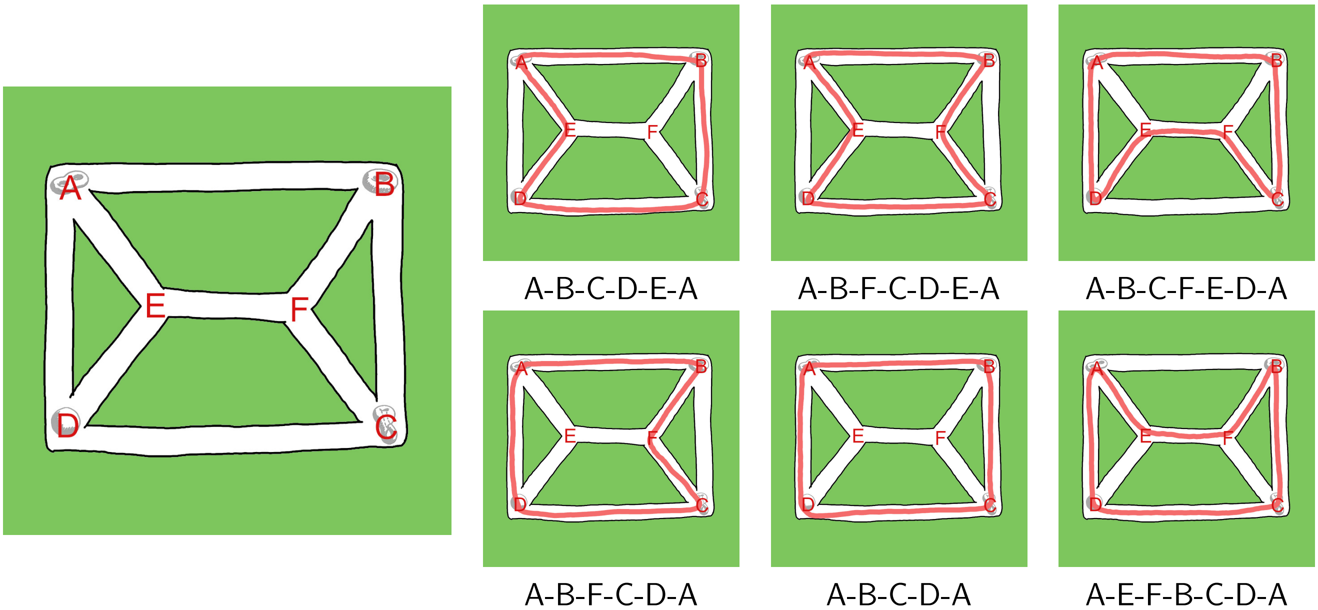


Abbildung 1: Labyrinth 1 und die sechs Lösungen

Bilder sind schön und nützlich, aber leider auch aufwändig. Um nicht immer Bilder zeichnen zu *müssen*, nutzen wir eine kurze und bequeme Notation. Hierzu beschriften wir die Gabelungen in **Labyrinth 1** mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F wie in Abbildung 1. Das Labyrinth lässt sich dann kurz und einfach beschreiben durch die folgenden Angaben:

- Die Gabelungen A, B, C, D, E, F.
- Die Wegstücke AB, AD, AE, BC, BF, CD, CF, DE, EF.
- Die Positionen der vier mathematischen Schätze A, B, C, D.

Die folgenden Überlegungen können Sie anhand der Bilder nachvollziehen, alternativ erlaubt unsere Kurznotation auch ohne Bild zu arbeiten. In dieser Form kann das Labyrinth insbesondere einem Computer übergeben werden, der – richtig programmiert – alle Möglichkeiten absucht. Das vorliegende Problem ist glücklicherweise klein genug, sodass wir es von Hand lösen können.

Behauptung: Labyrinth 1 besitzt genau die sechs Lösungen aus Abbildung 1.

Das beinhaltet drei Teilfragen: (1) Wie überprüfen wir vorgelegte Lösungen? Die Regeln sind hier leicht nachzuprüfen – auch anhand der abstrakten Daten. (2) Wie finden wir möglichst viele Lösungen? (3) Wie garantieren wir, dass wir alle Lösungen gefunden haben?

Beweis der Behauptung: Ein Lösungsweg muss an Position A vorbeikommen, daher muss er genau zwei der drei Wegstücke AB, AE und AD nutzen. Wir unterscheiden drei Fälle:

- Die Lösung durchläuft AB und AE, aber nicht AD: Da der Weg auch an Position D vorbeiführen muss, sind die Wegstücke DE und CD Teil des Weges. Dann kann aber EF nicht Teil des Weges sein. Es gibt daher zwei solche Lösungen: **A**-**B**-**C**-**D**-**E**-**A** und **A**-**B**-**F**-**C**-**D**-**E**-**A**.
  Wir haben hier die Gabelungen der Reihe nach aufgelistet, in der sie durchlaufen werden. Doch Achtung! Diese Darstellung ist nicht eindeutig: Zum Beispiel bezeichnen A-B-C-D-E-A, A-E-D-C-B-A (rückwärts durchlaufen) und B-C-D-E-A-B (anderer Startpunkt) dieselbe Lösung.
- Die Lösung durchläuft AB und AD, aber nicht AE: Führt der Weg über E, dann auch über F, wir erhalten die Lösung **A**-**B**-**C**-**F**-**E**-**D**-**A**. Führt der Weg nicht über E, dann gibt es die zwei Lösungen **A**-**B**-**F**-**C**-**D**-**A** und **A**-**B**-**C**-**D**-**A**.
- Die Lösung durchläuft AD und AE, aber nicht AB: Dann kann DE nicht Teil des Weges sein, denn sonst wäre der Weg schon geschlossen. Daher ist EF Teil des Weges, ebenso BF und BC. Hier finden wir also eine Lösung **A**-**E**-**F**-**B**-**C**-**D**-**A**.

Sie können die abstrakte Notation als Wegbeschreibung nutzen und so in das Bild zurückübersetzen.

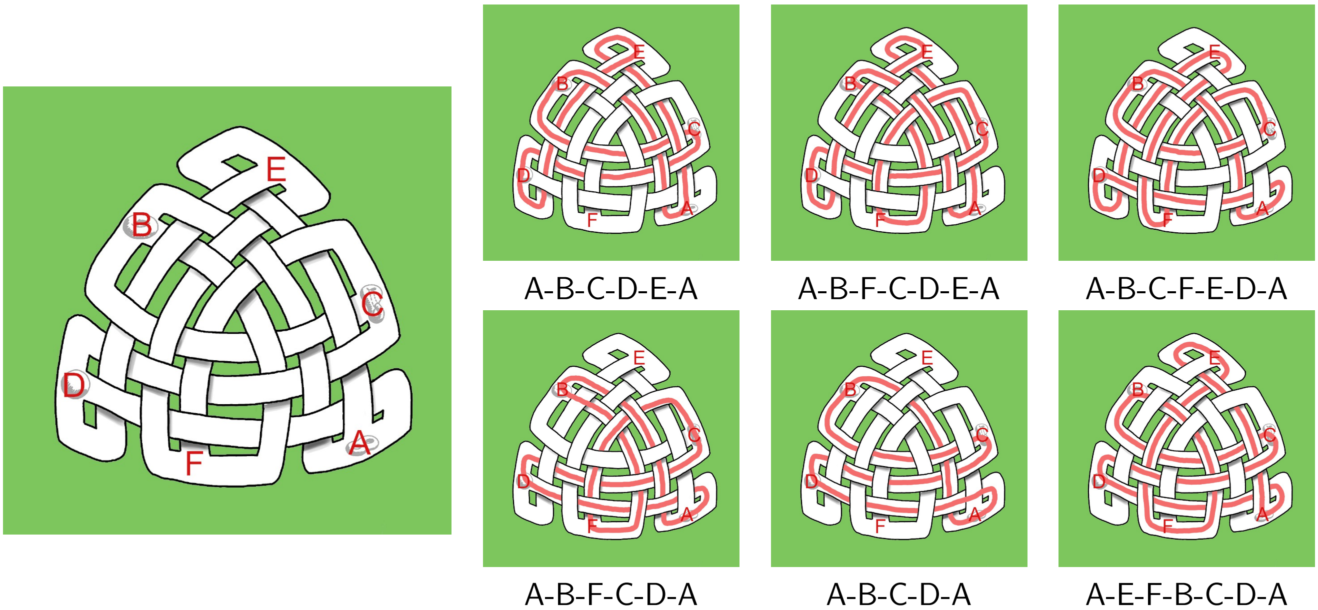


Abbildung 2: Labyrinth 2 und die sechs Lösungen

Auch das **Labyrinth 2** können wir kurz und präzise wie folgt beschreiben:

- Die Gabelungen A, B, C, D, E, F.
- Die Wegstücke AB, AD, AE, BC, BF, CD, CF, DE, EF.
- Die Positionen der vier mathematischen Schätze A, B, C, D.

Fällt Ihnen etwas auf? Ja, richtig! Die hier extrahierten wesentlichen Daten sind genau dieselben wie bei Labyrinth 1! Daher sind auch die (abstrakten) Lösungen dieselben. Die Buchstaben haben wir dabei nicht zufällig gewählt, sondern geschickt so, dass Sie die Analogie sofort sehen.

Stufe 2 / Was will und soll diese Aufgabe?

Nach der Lösung dieser Aufgabe erläutern wir als Rück- und Ausblick, warum wir diese Problemstellung mathematisch interessant finden und inwiefern sie repräsentativ ist für das Mathematikstudium.

Bei unserer Untersuchung nutzen wir verschiedene mathematische Methoden. Um Labyrinth 1 zu lösen, gehen wir systematisch alle Fälle durch; in der Mathematik nennt man das *Fallunterscheidung*. Hierzu sind vor allem Sorgfalt, Konzentration und Buchführung gefragt, damit wir keinen Fall übersehen oder vergessen. Dabei hilft uns insbesondere eine effiziente, sachgerechte *Notation*. Sie dient zur Dokumentation für den Autor und zur Kommunikation mit anderen.

By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation
sets it free to concentrate on more advanced problems.
(Alfred North Whitehead, 1861–1947, *An Introduction to Mathematics*, 1911)

Das Sorgfaltsprinzip gilt allgemein, insbesondere in der Mathematik: Ein Beweis kann in noch so vielen Schritten richtig sein; wenn uns an einer einzigen Stelle ein Fehler unterläuft, dann ist der Beweis nicht vollständig, und die Behauptung weiterhin unbewiesen, vielleicht sogar falsch.

Die Lösungen zu Labyrinth 2 haben wir ohne jede Mühe geschenkt bekommen. *Solve one, get one free!* Warum ist das so leicht? Wir nutzen eine typisch mathematische Vorgehensweise: Anstatt das Rad immer wieder neu zu erfinden, führen wir ein neues Problem auf ein altes, bereits gelöstes zurück. Das Zauberwort heißt *Abstraktion*: Wenn Sie den Kern eines Problems oder einer Methode erst einmal erkannt haben, dann können Sie dies immer wieder anwenden – auch auf neue Probleme, die zunächst sehr verschieden aussehen. Effiziente mathematische Arbeit beruht auf genau dieser Fähigkeit: Sie sollen treffsicher erkennen, dass das Problem eigentlich schon gelöst wurde.

Sie können Labyrinth 2 sicherlich auch durch Ausprobieren lösen, aber vermutlich werden Sie schnell durcheinander kommen, da die verschlungenen Wege nicht so einfach zu erfassen sind. Abstraktion ist die Kunst, das Wesentliche vom Unwesentlichen zu trennen!

Allgemein stehen MathematikerInnen sowohl im Studium als auch im Beruf oft vor einem gegebenen Problem, zu dem sie alle Lösungen finden wollen oder müssen. Das Vorgehen ähnelt meist unserem Beispiel. Abstraktion hilft, sie strukturiert und vereinfacht: Was sind die relevanten Daten? Wie prüft man eine Lösung? Wie findet man möglichst viele Lösungen? Wie kann man garantieren, alle Lösungen gefunden zu haben?

Einordnung in das Mathematikstudium. Die **Graphentheorie** ist ein eigenes Gebiet der Mathematik, das sowohl praktisch wichtig als auch theoretisch interessant ist. Es wird auch in der Informatik intensiv genutzt, als universeller Datentyp zum Beispiel bei der Routenplanung. Das berühmteste Beispiel ist das *Problem des Handlungsreisenden*.

Wir können uns dazu Varianten unseres Labyrinths vorstellen, beispielsweise zu besuchende Orte und mögliche Verbindungen. Wenn wir den kürzesten bzw. günstigsten Lösungsweg suchen, dann benötigen wir für die Problemlösung zusätzliche Daten, etwa die Längen der einzelnen Wegstücke oder die Kosten jeder Strecke. Das sind überaus praxisnahe Probleme, deren Lösung Sie täglich dankend nutzen, zum Beispiel, wenn Sie ein Navigationsgerät verwenden oder ein Bahnticket kaufen.

Als MathematikerIn sind Sie nicht nur Konsument, sondern auch Produzent solcher optimierten Lösungen und sorgfältigen Begründungen, Sie nutzen und erschaffen Sätze und Beweise, Algorithmen und Programme. Die hierzu nötigen Techniken erlernen Sie im Mathematikstudium, angefangen bei den theoretischen Grundlagen über typische Anwendungen bis hin zur Programmierung.