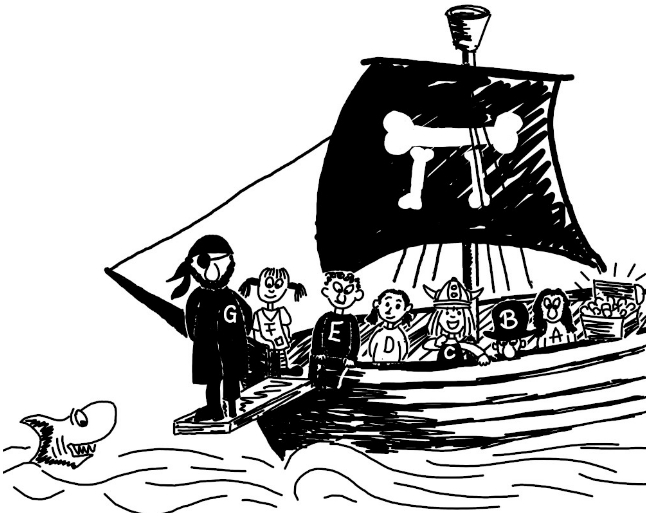
Universität Stuttgart

Beispielaufgabe zur Studienwahl

Mathematik auf der Bounty: das Piratenspiel



Die sieben gefürchteten PiratInnen Anne, Bert, Charlie, Daniela, Eugen, Fabienne und Gustav teilen ihre Beute von 50 Dukaten. Der ranghöchste Pirat Gustav schlägt eine Aufteilung zur Abstimmung vor. Stimmt mindestens die Hälfte dafür, dann wird die Beute so aufgeteilt. Bei Ablehnung wird Gustav über Bord ins Meer geworfen, und die verbleibenden PiratInnen beginnen das Spiel von vorn. Dabei gilt die Rangordnung Gustav, Fabienne, Eugen, Daniela, Charlie, Bert, Anne.

Ein Dukat ist eine unteilbare Goldmünze. Jede PiratIn möchte überleben und möglichst viele davon haben, handelt dazu sehr schlau und vollkommen rational. Bei zwei gleichen Auszahlungen ist jede PiratIn schadenfroh, schickt also lieber eine KameradIn über Bord und bevorzugt die spätere Auszahlung. Jeder weiß daher, wie die anderen handeln werden. Gleichzeitig ist jede PiratIn sehr misstrauisch, daher sind keine Absprachen möglich. Das PiratInnenleben ist eben hart.

Wie viele Dukaten erhält jede PiratIn? Zur Beantwortung dieser Frage lösen Sie das Problem nicht nur für sieben PiratInnen, sondern auch für alle kleineren Fälle.

		Auszahlung an						
		Anne	Bert	Charlie	Daniela	Eugen	Fabienne	Gustav
Anzahl PiratInnen	7							
	6							☠
	5						☠	☠
	4					☠	☠	☠
	3				☠	☠	☠	☠
	2	0	50	☠	☠	☠	☠	☠
	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠

Weitere Aufgaben und Informationen unter:
Studienwahl-Kompass Mathematik
Universität Stuttgart

mathematik
fakultät8

Stufe 0 / Kurzantwort: Die oben erklärten Regeln führen zu folgenden Aufteilungen:

		Auszahlung an						
		Anne	Bert	Charlie	Daniela	Eugen	Fabienne	Gustav
Anzahl PiratInnen	7	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**47**
	6	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**48**	☠
	5	**1**	**0**	**1**	**0**	**48**	☠	☠
	4	**0**	**1**	**0**	**49**	☠	☠	☠
	3	**1**	**0**	**49**	☠	☠	☠	☠
	2	0	50	☠	☠	☠	☠	☠
	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠

Das Ergebnis ist überraschend: Gustav kann tatsächlich stolze 47 Dukaten bekommen, ohne um sein Leben fürchten zu müssen. Jede PiratIn geht planvoll vor und überlegt sich: Wie wird das enden? Daher starten wir unten in der Tabelle mit einer Piratin. Damit lösen wir das Problem für zwei PiratInnen. Damit wiederum finden wir die Lösung für drei PiratInnen usw. Diese geniale Methode heißt **Rekursion** oder **Rückwärtsinduktion**: Verhandelt wird vorwärts, gedacht wird rückwärts!

Stufe 1 / Ausführung: Wir betrachten die einzelnen Fälle aufsteigend in der Anzahl der PiratInnen.

1 Piratin: Anne nimmt sich die 50 Dukaten, denn es ist niemand mehr da, mit dem sie teilen müsste oder könnte. Formal wird sie dies sich selbst vorschlagen – und natürlich dafür stimmen.

2 PiratInnen: Der ranghöhere Bert schlägt vor: 50 Dukaten für sich, keinen für Anne. Bert stimmt dafür, Anne dagegen, weil sie bei Ablehnung mehr bekäme. Damit wird Berts Vorschlag angenommen. Das ist für ihn eindeutig das beste Vorgehen: Mit jedem anderen Vorschlag bekäme er weniger Dukaten. Wenn er gar gegen seinen eigenen Vorschlag stimmt, geht er über Bord!

3 PiratInnen: Der ranghöchste Charlie schlägt vor: 49 Dukaten für sich, keinen für Bert, einen für Anne. Bert stimmt sowieso gegen jeden Vorschlag, weil er bei Ablehnung 50 Dukaten bekäme und zudem jemand über Bord ginge. Charlie stimmt natürlich dafür, Anne ebenso, weil sie bei Ablehnung nichts bekäme, und ein Dukat ist besser als keiner. Also wird Charlies Vorschlag mit zwei von drei Stimmen angenommen. Für Charlie ist dieser Vorschlag optimal. Berts Zustimmung bekommt Charlie ohnehin nie. Annes Zustimmung bekommt Charlie nur, wenn sie mindestens einen Dukaten erhält. Also sind 49 Dukaten für Charlie das beste Ergebnis.

4 PiratInnen: Die ranghöchste Daniela schlägt vor: 49 für sich, 1 für Bert. Charlie und Anne stimmen dagegen, denn bei Ablehnung bekämen beide mehr. Daniela und Bert stimmen dafür, denn bei Ablehnung bekämen beide weniger. Also wird Danielas Vorschlag mit zwei von vier Stimmen angenommen. Für Daniela ist dieser Vorschlag optimal. Sie muss eine weitere Stimme gewinnen. Am günstigsten ist Bert für 1 Dukaten, Anne bräuchte 2, Charlie sogar 50.

5 PiratInnen: Der ranghöchste Eugen benötigt neben seiner eigenen noch zwei weitere Stimmen. Die günstigsten sind Charlie und Anne für je einen Dukaten. Bert bräuchte 2, Daniela sogar 50. Also schlägt Eugen die Aufteilung 1,0,1,0,48 vor, und dieser Vorschlag wird mit drei von fünf Stimmen angenommen.

Mehr PiratInnen: Erkennen Sie nun das Muster für n PiratInnen? Ist n gerade, so muss der Vorschlagende $\frac{n}{2} - 1$ weitere Stimmen gewinnen. Ist n ungerade, so benötigt er weitere $\frac{n-1}{2}$ Stimmen für seinen Vorschlag. Genau so viele PiratInnen würden in der nächsten Runde bei $n - 1$ PiratInnen leer ausgehen. Diese lassen sich also mit einem Dukaten überzeugen, für die anderen müsste er mindestens zwei Dukaten locker machen. Also bietet der Vorschlagende einen Dukaten für jeden, der im nächsten Durchgang nichts erhalten würde.

Mit diesem rekursiven Vorgehen können wir alle Fälle bis 102 PiratInnen lösen. Mathematik wirkt!

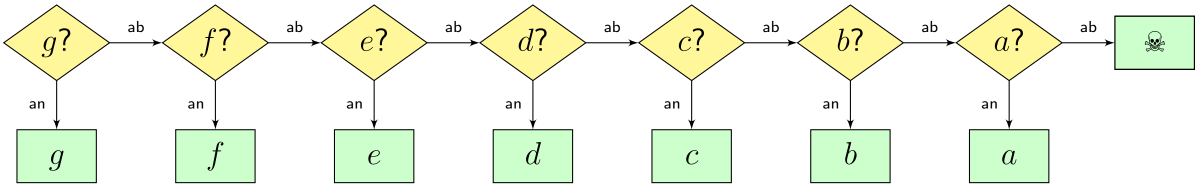
Stufe 2 / Was will und soll diese Aufgabe?

Nach der Lösung dieser Aufgabe erläutern wir als Rück- und Ausblick, warum wir diese Problemstellung mathematisch interessant finden und inwiefern sie repräsentativ ist für das Mathematikstudium.

Als vernunftbegabte Wesen wollen wir möglichst vorausschauend und planvoll handeln. Zwei hervorragende Werkzeuge hierzu sind fundierter Sachverstand und mathematische Sorgfalt.

1. Wir benötigen (a) präzise Daten und Spielregeln und (b) genaues Verständnis des Verhaltens, um das Wesentliche zu erfassen und daraus ein mathematisches Modell zu bilden.
2. Wir benötigen geeignete mathematische Werkzeuge zur Lösung des Modells.

Das ist ein allgemeines Prinzip für erfolgreiche Anwendungen der Mathematik. Wir illustrieren dies mit unserem Piratenspiel. Zur Lösung gehört als erstes der genaue Ablauf der Verhandlungen:



(1a) Rahmenvorgaben / Spielregeln: Zunächst schlägt Gustav eine Aufteilung $g = (g_1, \dots, g_7) \in \mathbb{N}^7$ mit $g_1 + \dots + g_7 = 50$ zur Abstimmung vor. Bei Annahme bekommt Pirat $i \in \{1, \dots, 7\}$ genau g_i Dukaten ausbezahlt. Bei Ablehnung geht Gustav über die Planke und die Verhandlung in die nächste Runde. Nun schlägt Fabienne eine Aufteilung $f = (f_1, \dots, f_6, \text{☠})$ mit $f_1 + \dots + f_6 = 50$ vor. Bei Annahme bekommt Pirat $i \in \{1, \dots, 6\}$ genau f_i Dukaten ausbezahlt. Bei Ablehnung geht auch Fabienne über die Planke und die Verhandlung in die nächste Runde. Nun schlägt Eugen eine Aufteilung $e = (e_1, \dots, e_5, \text{☠}, \text{☠})$ mit $e_1 + \dots + e_5 = 50$ vor, usw.

(1b) Individuelle Zielsetzung und Verhalten: Jeder Pirat (m/w/d) entscheidet nach klaren Regeln. Er bewertet sein Ergebnis gemäß $\text{☠} < 0 < 1 < \dots < 50$. Bei Gleichstand zwischen zwei Angeboten wird das spätere Angebot bevorzugt. Diese Informationen entnehmen wir aus der Aufgabenstellung; sie sind entscheidend, um das Verhalten der Piraten vorhersehen und somit berechnen zu können. Kurzum: Die Piraten sind vollkommen berechnend und damit selbst vollkommen berechenbar!

(2) Damit haben wir unser Modell festgelegt und können es nun mit mathematischer Sorgfalt lösen. In unserem Beispiel gelingt dies durch Rekursion bzw. (Rückwärts-)Induktion, wie in Stufe 1 erklärt. Die Wahl dieser Vorgehensweise, rückwärts zu denken, ist schon eine erste wichtige Erkenntnis. Die Diskussion jeder einzelnen Runde erfordert ebenfalls einen gewissen Aufwand, denn in jedem Schritt müssen alle Alternativen erwogen und verglichen werden. Wenn wir dabei Alternativen übersehen, müssen wir fürchten, dass es noch bessere Lösungen gibt, die uns entgehen. Sorgfalt zahlt sich aus!

Wie nützlich ist unser Modell? Unsere Beispielaufgabe klingt zunächst rein fiktiv und vollkommen praxisfern. Bei genauerer Überlegung stellt sich das Gegenteil heraus! Viele Verhandlungssituationen im Alltag, Politik, Wirtschaft, etc. sind von ähnlicher Art: Mehrere Akteure interagieren über mehrere Runden und müssen ein gemeinsames Ergebnis erzielen, zum Beispiel eine Aufteilung von Gütern und Geld, Rechten und Pflichten, etc. Unser Piratenspiel ist dazu ein gutes **Lehrbeispiel**.

Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Die hier illustrierte rekursive Vorgehensweise ist universell nutzbar: Wir lösen zunächst kleine Fälle und bauen daraus schrittweise größere Lösungen zusammen. Dieses Vorgehen ist bereits bei vielen Alltagsproblemen natürlich und nützlich, systematisch genutzt und zu einer Theorie ausgebaut wird es in der Mathematik und in der Informatik.

Zur strategischen Analyse kommt es auf die genauen Spielregeln (1a) und individuellen Zielsetzungen (1b) an. Aus solchen Fragestellungen hat sich die **Spieltheorie** entwickelt; sie untersucht ganz allgemein menschliche Interaktionen, Konflikt und Kooperation. Das Ergebnis jedes Spielers hängt dabei nicht nur von seinem eigenen Handeln ab, sondern auch von den Aktionen aller anderen.

Dafür interessieren sich nicht nur Spielbegeisterte, sondern ganz besonders Anwender in den Wirtschaftswissenschaften, in den letzten Jahrzehnten auch in vielen weiteren Gebieten, von Sozialwissenschaften bis zu Informatik. Die Lösungsmethoden (2) umfassen ein großes Spektrum mathematischer Werkzeuge. Wer Mathematik beherrscht, ist dafür bestens vorbereitet.

Wie praxistauglich ist unser Modell? Als Lehrbeispiel ist unsere Aufgabe sicher nützlich, denn wir können daran die sorgfältige Analyse (2) illustrieren. Hilft es auch in der Praxis? Ist es eine brauchbare *Vorhersage* für den Spielverlauf oder gar eine hilfreiche *Anleitung* für erfolgreiches Verhandeln?

Wir können unsere Theorie mit Experimenten vergleichen! Wenn Sie möchten, können Sie mit ein paar Versuchspersonen die obigen Verhandlungen als Rollenspiel oder Partyvergnügen durchführen – natürlich abgemildert, ohne Haie! Die empirischen Ergebnisse sind erstaunlich vielfältig und hängen von vielen Faktoren ab: Temperament, Bedenkzeit, moralischen Überzeugungen, mathematischen Kenntnissen, und vielem mehr. Manchmal ähnelt das beobachtete Verhalten der theoretischen Vorhersage, aber häufig weicht es überraschend stark davon ab.

Ist unsere Analyse also falsch? Sicher nicht! Die sorgfältige mathematische Argumentation (2) ist nachweislich richtig. Das Problem liegt in der Wahl des Modells und seiner vereinfachenden Annahmen. Die Spielregeln (1a) sind hier klar, aber die individuellen Zielsetzungen (1b) im Modell entsprechen oft nicht dem Verhalten realer Personen. Unser Modell geht davon aus, dass jeder Spieler vollkommen rational handelt, nur seinen Profit in Dukaten maximieren will, und alle Auswirkungen seines Handelns präzise erkennt. Das sind einschränkende Annahmen und Vereinfachungen!

Welche Abweichungen von dieser Idealisierung sind denkbar? Manchen Mitspielern ist nicht nur die eigene Auszahlung in Dukaten wichtig, sondern auch das Team, die Gerechtigkeit, die Moral, etc. Andere Mitspieler können die Auswirkungen ihres Handelns nur wenige Schritte voraussehen und deshalb ihre Aktionen nur eingeschränkt optimieren. Alle sind voneinander abhängig und müssen ihr Verhalten gegenseitig einschätzen. Das macht die Lage sehr kompliziert, zum Beispiel könnte ein Spieler bluffen, sich dumm stellen oder irrational handeln, um einen höheren Profit zu erpressen. Das alles bildet unser Modell (1b) noch nicht ab, und ist daher nur eingeschränkt anwendbar.

Reales menschliches Verhalten beruht nicht nur auf Vernunft und Planung, sondern häufig auf Bauchgefühl und Erfahrung, auf Versuch und Irrtum. Es ist schwierig, dafür geeignete Modelle und Vorhersagen zu finden; mit dieser Problematik beschäftigt sich die Verhaltensökonomik.

In extremen Fällen muss der erste und einzige Versuch gelingen! Große Firmen investieren daher enormen Aufwand in vorausschauende Planung, im Idealfall kommt dies der Rationalität (1b) schon recht nahe. Das erklärt auch, warum Mathematik dort eine besonders wichtige Rolle spielt.

Stufe 3 / Ausblick: Meuterei auf der Bounty – der Kampf ums Überleben

Was passiert bei einer großen Anzahl n von Piraten? Unsere Lösung aus Stufe 1 gilt bis $n = 102$: **Pirat 100** gibt den Piraten $2, 4, 6, \dots, 100$ je einen Dukat, den anderen nichts. **Pirat 101** gibt den Piraten $1, 3, 5, \dots, 99$ je einen Dukat, den anderen nichts. **Pirat 102** gibt den Piraten $2, 4, 6, \dots, 100$ je einen Dukat, den anderen nichts. **Pirat 103** hat ein Problem: Jeder seiner Vorschläge wird abgelehnt, und er muss über die Planke. **Pirat 104** gibt 50 Habenichtsen aus Runde 102 je einen Dukat, den anderen nichts. So bekommt er deren 50 Stimmen, dazu die von Pirat 103 und seine eigene. Hierzu präzisieren wir eine weitere Verhaltensregel: Jeder Pirat besticht lieber rangniedrige Mitpiraten als ranghohe, also besticht Pirat 104 die Mitpiraten $1, 3, 5, \dots, 99$. **Pirat 105** hat keine Chance, ebenso wenig 106 und 107. **Pirat 108** gibt den Piraten $2, 4, 6, \dots, 100$ je einen Dukat, den anderen nichts. So bekommt er deren 50 Stimmen, dazu die der hoffnungslosen Piraten 105 bis 107.

Daran erkennen wir die allgemeine Regel: Bei mehr als 100 Piraten geht es nur noch ums Überleben. Vorschlagen und dabei überleben können nur die Piraten $n = 100 + 2^k$ für $k = 0, 1, 2, \dots$. Übung!