Universität Stuttgart

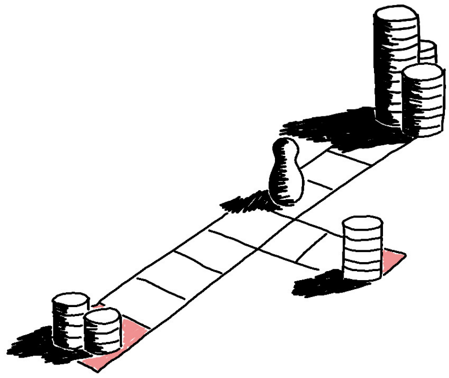
Beispielaufgabe zur Studienwahl

Mathematische Prognose: Welcher Gewinn erwartet Sie?

© Michael Eisermann, Friederike Stoll

Sie setzen Ihren Spielstein auf ein Feld eines Spielbretts, wie im Bild rechts. In jedem Zug würfeln Sie aus, auf welches Nachbarfeld Sie weiterziehen, auf jedes mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Das Spiel endet am Rand in einem roten Feld mit dem angegebenen Gewinn. Welchen Gewinn erwarten Sie jeweils bei Start in einem weißen Feld?

Hinweis: Sie können sich überlegen und dann nutzen, dass jeder Erwartungswert auf einem weißen Feld der Mittelwert seiner Nachbarn ist.



Zwei einfache Beispiele:

Zu | 2 | | 14 | sind die erwarteten Gewinne | 2 | 8 | 14 |.

Zu | 2 | | | 14 | sind die erwarteten Gewinne | 2 | 6 | 10 | 14 |.

Spiel 1: Welchen Gewinn erwarten Sie auf jedem weißen Feld?

7								23

Spiel 2: Dieselbe Frage für das folgende interessantere Spielbrett. Das zentrale Feld hat nun drei gleichwahrscheinliche Nachbarn.

7								23
				5				

Weitere Aufgaben und Informationen unter:
Studienwahl-Kompass Mathematik
Universität Stuttgart

mathematik fakultät 8

Stufe 0 / Kurzantwort: In jedem roten Feld z ist der Gewinn $u(z)$ vorgegeben. Sie suchen für jedes weiße Feld z seinen Erwartungswert $u(z)$. Dieser soll der Mittelwert seiner Nachbarn sein! Warum? Im nächsten Zug gehen Sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf eines der n Nachbarfelder $z_1, z_2, \dots, z_n$. Somit ist der erwartete Gewinn auf Ihrem aktuellen Feld $u(z) = \frac{1}{n}[u(z_1) + u(z_2) + \cdots + u(z_n)]$.

Um die Lösungen für die beiden Spielbretter zu finden, gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Durch (gezieltes) Ausprobieren und anschließendes Prüfen. Das funktioniert hier gerade noch, wird aber schwieriger, je komplizierter und größer das Spielbrett und die Auszahlungen werden.
- Durch Ausrechnen der exakten Lösung. Hierzu erstellen Sie ein lineares Gleichungssystem und lösen es mit dem Gauß–Algorithmus aus der Schule. Für kleine Systeme gelingt dies per Hand.
- Durch Näherungsverfahren. Raffinierte numerische Verfahren lohnen sich für große Systeme; die Näherungslösungen sind zwar nicht ganz exakt, dafür aber schnell zu berechnen.

Übrigens gibt es zu jedem der beiden Spiele genau eine Lösung. Anschaulich mag das aus der Aufgabenstellung plausibel erscheinen, dahinter verbirgt sich ein interessanter mathematischer Satz.

Stufe 1 / Ausführung: Zunächst zu **Spiel 1**. Die / eine Lösung ist gegeben durch:

7	9	11	13	15	17	19	21	23

Wenn Sie einen solchen Lösungskandidaten erst einmal (geraten / beschafft / berechnet) haben, dann ist die geforderte Mittelwerteigenschaft leicht nachzuprüfen. Hier gilt sie jedenfalls. Das erklärt noch nicht, wie Sie eine Lösung überhaupt erst finden, und warum es keine weiteren Lösungen gibt. Das erklären wir nun ausführlicher. Die gesuchten Erwartungswerte bezeichnen wir mit $u_1, u_2, \dots, u_7$:

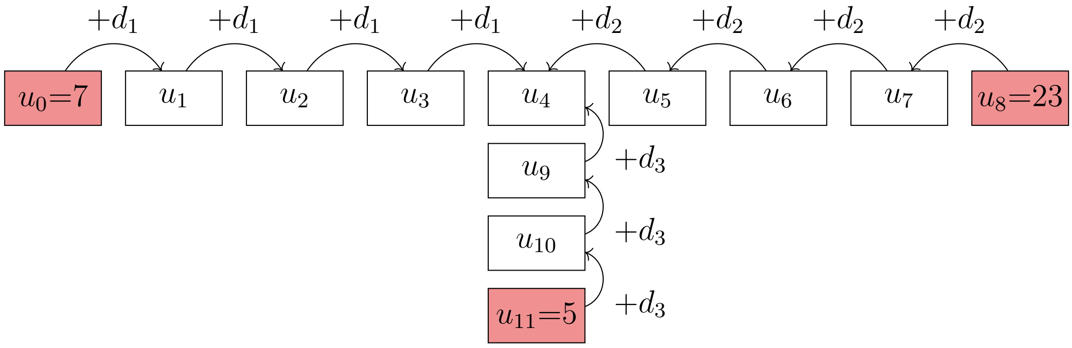
$$u_0{=}7 \xrightarrow{+d_0} u_1 \xrightarrow{+d_1} u_2 \xrightarrow{+d_2} u_3 \xrightarrow{+d_3} u_4 \xrightarrow{+d_4} u_5 \xrightarrow{+d_5} u_6 \xrightarrow{+d_6} u_7 \xrightarrow{+d_7} u_8{=}23$$

Das Feld 1 erfüllt die Mittelwerteigenschaft $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + u_2)$, also $2u_1 - u_2 = 7$. Genauso stellen wir die Gleichung zu jedem Feld $2, 3, \dots, 7$ auf und erhalten so das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrrcr}
2u_1 & -u_2 & & & & & & = & 7 \\
-u_1 & +2u_2 & -u_3 & & & & & = & 0 \\
 & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & & & & = & 0 \\
 & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & & & = & 0 \\
 & & & -u_4 & +2u_5 & -u_6 & & = & 0 \\
 & & & & -u_5 & +2u_6 & -u_7 & = & 0 \\
 & & & & & -u_6 & +2u_7 & = & 23
\end{array}$$

Dieses System lässt sich mit etwas Mühe von Hand lösen. Wesentlich einfacher gelingt dies, wenn wir nicht die Erwartungswerte u_i betrachten, sondern die Differenzen $d_0 = u_1 - u_0$, $d_1 = u_2 - u_1$, $\dots$, $d_7 = u_8 - u_7$. Diese erfüllen $d_0 + d_1 + \cdots + d_7 = 23 - 7 = 16$. Für jedes Feld $i = 1, 2, \dots, 7$ bedeutet die Mittelwerteigenschaft $u_i = \frac{1}{2}(u_{i-1} + u_{i+1})$ nun $u_i = \frac{1}{2}(u_i - d_{i-1} + u_i + d_i)$, also $d_i = d_{i-1}$. Alle d_i sind demnach gleich und in der Summe gilt $16 = d_0 + d_1 + \cdots + d_7 = 8d_0$. Folglich ist die eindeutige Lösung $d_0 = d_1 = \cdots = d_7 = 2$. So finden wir (durch Rechnung, nicht durch Raten) die oben vorgeschlagene Lösung und können außerdem garantieren, dass es keine weitere Lösung gibt. MathematikerInnen sprechen in diesem Fall von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

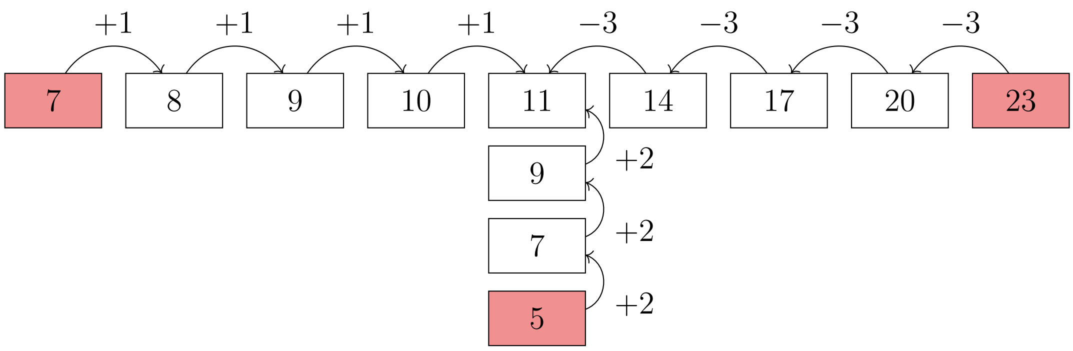
Nun zu **Spiel 2**. Mit demselben Trick lässt sich auch das zweite Spielbrett effizient lösen! Wir überlegen uns zuerst wie in Spiel 1, dass in jedem der drei Arme die Differenzen gleich bleiben:



Es gilt dann $7+4d_1 = 23+4d_2 = 5+3d_3$, denn dies ist der Erwartungswert im mittleren Feld 4. Die Mittelwerteigenschaft für dieses Feld besagt außerdem $d_1 + d_2 + d_3 = 0$. Dies führt zu folgendem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen in drei Unbekannten:

$$\begin{array}{rrrcr} 4d_1 & -4d_2 & & = & 16 \\ 4d_1 & & -3d_3 & = & -2 \\ d_1 & +d_2 & +d_3 & = & 0 \end{array}$$

Sie finden die eindeutige Lösung $d_1 = 1$, $d_2 = -3$, $d_3 = 2$. (Probe!) Die Lösung ist somit:



Als dritte Lösungsidee raten Sie eine beliebige Näherungslösung; diese wird noch nicht exakt richtig sein, aber Sie können den Fehler schrittweise korrigieren. Am einfachsten gelingt dies mit einer Tabellenkalkuklation, die Sie in der Rückmeldung zur Aufgabe im Studienwahl-Kompass herunterladen können. Sie können diese mit *LibreOffice* öffnen und selbst experimentieren: Für $t = 0$ geben Sie beliebige Startwerte vor und der Computer berechnet schrittweise die Mittelwerte, zum Beispiel:

Zeit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	23.00	0.00	0.00	5.00
1	7.00	3.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	11.50	23.00	0.00	2.50	5.00
2	7.00	3.50	1.75	0.00	0.00	0.00	5.75	11.50	23.00	1.25	2.50	5.00
3	7.00	4.38	1.75	0.88	0.42	2.88	5.75	14.38	23.00	1.25	3.13	5.00
4	7.00	4.38	2.63	1.08	1.67	3.08	8.63	14.38	23.00	1.77	3.13	5.00
10	7.00	5.71	5.04	4.58	5.67	8.33	12.79	17.46	23.00	4.53	4.70	5.00
11	7.00	6.02	5.15	5.35	5.82	9.23	12.90	17.89	23.00	5.18	4.77	5.00
12	7.00	6.07	5.69	5.48	6.59	9.36	13.56	17.95	23.00	5.29	5.09	5.00
13	7.00	6.34	5.78	6.14	6.71	10.07	13.65	18.28	23.00	5.84	5.15	5.00
83	7.00	8.00	9.00	9.99	10.99	13.99	17.00	20.00	23.00	9.00	7.00	5.00
84	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	14.00	17.00	20.00	23.00	9.00	7.00	5.00

Sie sehen ein erstaunliches Phänomen: Die Werte stabilisieren sich für große t. MathematikerInnen sprechen von *Konvergenz* gegen einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist die gesuchte (exakte) Lösung!

Stufe 2 / Was will und soll diese Aufgabe?

Nach der Lösung dieser Aufgabe erläutern wir als Rück- und Ausblick, warum wir diese Problemstellung mathematisch interessant finden und inwiefern sie repräsentativ ist für das Mathematikstudium.

Prüfen vs Finden. An unseren beiden Beispielen erkennen Sie zunächst folgendes Grundprinzip:

- Es ist oft leicht, für eine vorgelegte Lösung die *Probe* zu machen.
- Es ist meist schwerer, selbst (eine oder alle) Lösungen zu *finden*.

Das ist eine grundsätzliche Asymmetrie: Nach mühsamer Rechnung lohnt sich die leichte Probe; das geht rasch und enttarnt Rechenfehler. Wenn Sie diesen Trick nutzen, arbeiten Sie treffsicherer und effizienter. Auch in der Programmierung sind Proben durch *test cases* nützlich. Ähnlich ist es bei einem mathematischen Satz leichter, einen Beweis nachzuvollziehen, als selbst einen zu entwickeln. Im Mathematikstudium lernen Sie beide Seiten: sorgfältiges Prüfen und kreatives Entwickeln.

Viele Anwendungen, gemeinsame Struktur. Unsere Beispielaufgaben und ihre Lösungsmethoden sind nicht nur für Spiele interessant, sondern treten in überraschend vielfältigen Anwendungen auf:

- Hooke: Ein I oder Y-förmiges Netz aus ideal leichten Federn wird am Rand auf verschiedenen Höhen fixiert. Auf welche Ruhelage pendelt es sich ein? Wir finden dieselben Gleichungen!
- Kirchhoff: An eine I oder Y-förmige Schaltung aus gleichen Widerständen werden am Rand feste elektrische Spannungen angelegt. Welche Spannungen messen Sie im Inneren?
- Wärmeleitung: Ein I- oder Y-förmiges Werkstück wird an den Rändern auf konstante Temperatur beheizt. Wie verteilt sich die Wärme im Inneren? Zur Vereinfachung unterteilen wir das Werkstück in kleine Elemente. Wieder finden wir dieselben Gleichungen!

All diese Beispiele führen auf ein und dasselbe mathematische Problem, daher sind auch die Methoden und Lösungen dieselben. Abstraktion strukturiert und vereinfacht! Die Techniken funktionieren allgemeiner für endliche Graphen, bestehend aus Knoten (den Spielfeldern) und Kanten (als Verbindung zwischen Nachbarn). Google nutzt dieses Spielmodell eines zufälligen Surfers im Internet, bestehend aus Webseiten und Links, und berechnet so den *PageRank* zur Bewertung von Webseiten.

Einordnung in das Mathematikstudium. Schon an unseren Miniaturbeispielen spüren Sie, dass Ausprobieren nur in einfachen Fällen zum Erfolg führt. Vielleicht spielen Sie größer, etwa auf einem Schachbrett: Gegeben sind die 28 Randwerte, gesucht sind die Erwartungen auf den 36 inneren Feldern. Auch hier führt die Mittelwerteigenschaft zu einem linearen Gleichungssystem, allerdings größer! In physikalisch-technischen Anwendungen kommen noch größere Probleme vor, etwa 1000×2000. Spätestens jetzt benötigen wir grundlegende Theorie und praktische Algorithmen!

(1) In der **Linearen Algebra** lernen Sie im ersten Semester des Mathematikstudiums zunächst, wie Sie *lineare Gleichungssysteme* exakt lösen; die Anfänge kennen Sie schon aus der Schule. Zudem lernen Sie auch die nötige Theorie, Strukturen und Sätze, zum Beispiel handfeste Kriterien um zu erkennen, wie viele Lösungen es gibt (keine / viele / genau eine).

(2) Die **Analysis** erklärt im ersten Semester den zentralen Begriff der *Konvergenz*. Darauf bauen eine wunderbare Theorie (Grenzwertrechnung, Differenzieren, Integrieren, etc) und effiziente Methoden, zum Beispiel das Lösen von Gleichungen durch Fixpunktsätze.

(3) Was tun, wenn das Spielbrett sehr groß ist? Die Theorie garantiert eine eindeutige Lösung und liefert zudem exakte Verfahren; diese sind jedoch oft zu aufwändig. Besser nutzen Sie ein Näherungsverfahren: So berechnen Sie eine ungefähre Lösung, die zwar nicht exakt ist, aber der exakten Lösung schrittweise immer näher kommt. Die **Numerische Mathematik** entwickelt solche Algorithmen und untersucht, wie man Fehler und Aufwand klein bekommt.

(4) Unsere ursprüngliche Frage kam aus der **Wahrscheinlichkeitstheorie**. Zufällige Irrfahrten, wie in unserem Beispiel, werden als Modell für Börsenkurse genutzt (stochastische Prozesse) und ebenso in der Physik: Albert Einstein erklärte 1905 so die ungeordnete Bewegung kleiner Teilchen im Wasser durch die thermische Molekülbewegung (Brownsche Bewegung).

Stufe 3 / Mathematische Grundlage: Warum gibt es hier genau eine Lösung?

Wenn Sie bis hierher gelesen haben, dann möchten Sie vielleicht einen Vorgeschmack bekommen, was Sie im Mathematikstudium erwartet. Für alle Hartgesottenen, die es genau wissen wollen, zeigen wir hier exemplarisch einen Existenz-und-Eindeutigkeits-Satz mit Beweis. Für das Studium ist das repräsentativ. Wenn Sie die Argumente mit Geduld und Neugier sowie Stift und Papier durchgehen, können Sie ungefähr einschätzen, ob diese Art mathematischer Arbeit Ihnen Freude bereitet.

Welche Spielbretter betrachten wir? Wie zuvor sei Ω ein endliches Spielbrett, zerlegt in rote Felder R und weiße Felder W. In jedem Schritt geht man von einem weißen Feld zu einem seiner Nachbarn. Wir setzen lediglich voraus, dass von jedem weißen Feld irgendein Weg zu einem roten Feld führt.

Welche Daten sind gegeben, welche sind gesucht? In jedem roten Feld $r \in R$ ist ein Gewinn $v(r)$ vorgegeben. Gesucht ist eine Fortsetzung u auf das ganze Spielbrett Ω. Das heißt, für jedes rote Feld $r \in R$ setzen wir $u(r) = v(r)$, und für jedes weiße Feld $z \in W$ suchen wir seinen Wert $u(z)$. Dabei soll die gesuchte Fortsetzung u die Mittelwerteigenschaft in jedem weißen Feld erfüllen.

Sie kennen Minima und Maxima aus der Kurvendiskussion. Diese Begriffe sind auch hier für unser endliches Problem hilfreich: Da Ω endlich ist, nimmt u auf Ω ein Minimum an; dieses Minimum schreiben wir $\min_\Omega(u)$. Für das Minimum von u auf den roten Feldern schreiben wir $\min_R(u)$. Entsprechend schreiben wir für die Maxima $\max_\Omega(u)$ und $\max_R(u)$. Wegen $R \subset \Omega$ gilt:

$$\min_\Omega(u) \le \min_R(u) \quad \text{und} \quad \max_\Omega(u) \ge \max_R(u)$$

Beispiel 1: Für die Lösung in Spiel 1 gilt $\min_\Omega(u) = \min_R(u) = 7$ und $\max_\Omega(u) = \max_R(u) = 23$. Alle Werte der Lösung u liegen hier also zwischen den Randwerten 7 und 23.

Beispiel 2: Für die Lösung in Spiel 2 gilt $\min_\Omega(u) = \min_R(u) = 5$ und $\max_\Omega(u) = \max_R(u) = 23$. Alle Werte der Lösung u liegen hier also zwischen den Randwerten 5 und 23.

Das ist eine bemerkenswerte Eigenschaft: In diesen Beispielen nimmt die Lösung u ihr Minimum und ihr Maximum auf dem Rand an! Wenn Sie an die Interpretation von u als Gewinnerwartung denken, dann ist das auch vollkommen plausibel. Diese Eigenschaft gilt ganz allgemein und ist eine Konsequenz der Mittelwerteigenschaft. Wir formulieren diese Aussage präzise als Satz:

Satz A: (Minimum-Maximum-Prinzip) Erfüllt die Funktion u auf dem Spielbrett Ω die Mittelwerteigenschaft, dann nimmt sie ihr Minimum und ihr Maximum auf den roten Feldern an:

$$\min_\Omega(u) = \min_R(u) \quad \text{und} \quad \max_\Omega(u) = \max_R(u).$$

Beweis: Wir betrachten zunächst das Minimum. Sei $z \in \Omega$ ein Spielfeld, in dem u sein Minimum annimmt, es gilt also $u(z) \le u(z')$ für alle Spielfelder $z' \in \Omega$. Ist z ein rotes Feld, so sind wir fertig.

(1) Ist z ein weißes Feld, dann gilt $u(z') = u(z)$ für jedes Nachbarfeld z' von z: Dank $u(z) = \min_\Omega(u)$ gilt $u(z') \ge u(z)$. Aber $u(z') > u(z)$ ist nicht möglich, da sonst $u(z'') < u(z)$ für einen anderen Nachbarn von z nötig wäre, um die Mittelwerteigenschaft in z zu erfüllen.

(2) Wir wählen einen Weg $z, z_1, z_2, \ldots, z_n, r$ über lauter weiße Felder $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ bis zu einem roten Feld $r \in R$. Dank (1) gilt $u(z) = u(z_1) = u(z_2) = \cdots = u(z_n) = u(r)$ durch wiederholte Anwendung der Mittelwerteigenschaft in $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$. Somit wird das Minimum (auch) in einem roten Feld angenommen, nämlich r. Das war zu beweisen.

Für das Maximum verläuft der Beweis genauso mit umgekehrten Ungleichungen. $\square$

Beispiel 3: Welche Lösungen gibt es, wenn Sie $v(r) = 0$ auf jedem roten Feld $r \in R$ vorgeben? Eine mögliche Fortsetzung ist die Nullfunktion u mit $u(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$; diese erfüllt offensichtlich die geforderte Mittelwerteigenschaft. Ist dies die einzig mögliche Lösung? Ja, dank Minimum-Maximum-Prinzip: Erfüllt irgendeine Lösung u die Mittelwerteigenschaft und $u(r) = 0$ für jedes rote Feld $r \in R$, so gilt $\min_\Omega(u) = \min_R(u) = 0$ und $\max_\Omega(u) = \max_R(u) = 0$. Somit ist u konstant Null!

Wir folgern für jede Problemstellung, dass es niemals zwei verschiedene Lösungen geben kann:

Satz B: (Eindeutigkeit) Wir geben jedem roten Feld $r \in R$ einen beliebigen Wert $v(r)$. Seien u_1 und u_2 zwei Fortsetzungen auf Ω, die beide die Mittelwerteigenschaft erfüllen. Dann gilt $u_1 = u_2$.

Beweis: Wir betrachten die Differenz $u = u_1 - u_2$. Diese erfüllt ebenfalls die Mittelwerteigenschaft. Für jedes rote Feld $r \in R$ gilt $u(r) = u_1(r) - u_2(r) = v(r) - v(r) = 0$. Wie in Beispiel 3 folgt daher $u = 0$. Das bedeutet $u_1 = u_2$. □

Es bleibt schließlich noch, die Existenz einer Lösung zu klären. Es gibt, wie Sie wissen, (inhomogene) lineare Gleichungssysteme, die keine Lösung besitzen, zum Beispiel $2x + 3y = 1$ und $4x + 6y = 3$. Wir wollen daher sicher stellen: Egal wie groß oder kompliziert das Spielbrett auch sein mag, solche Schwierigkeiten werden uns hier niemals begegnen. Das ist überaus erstaunlich und sehr erfreulich.

Satz C: (Existenz) Zu jedem Spielbrett Ω und beliebig vorgegebenen Werten $v(r)$ für jedes rote Feld $r \in R$ existiert (genau) eine Fortsetzung u auf ganz Ω, die die Mittelwerteigenschaft erfüllt.

Beweis: Je nach Vorkenntnissen wird dieser Beweis unterschiedlich lang:

(1) *Wenn Sie sich schon in der Vorlesung Lineare Algebra auskennen:*

Das vorgelegte Problem führt auf ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$. Die Matrix A ist quadratisch und kodiert das Spielbrett Ω. Der Vektor b hängt von den vorgegebenen Werten auf den roten Feldern ab. Geben Sie überall auf den roten Feldern den Wert 0 vor, so erhalten Sie das homogene System $Ax = 0$. Nach Beispiel 3 besitzt dieses System genau eine Lösung, nämlich $x = 0$. Da die Matrix A quadratisch ist, ist sie demnach invertierbar. So besitzt jede Gleichung der Form $Ax = b$ eine eindeutige Lösung, nämlich $x = A^{-1}b$. □

(2) *Wenn Sie aus der Schule den Gauß-Algorithmus beherrschen, also jedes Gleichungssystem mit Zeilenumformungen lösen können, und wissen, was in- / homogen bedeutet:*

Wir bezeichnen die weißen Felder mit $z_1, \dots, z_n$. Die Mittelwerteigenschaft für z_i führt zu einer linearen Gleichung $a_{i1}u(z_1) + a_{i2}u(z_2) + \dots + a_{in}u(z_n) = c_i$. So erhält man ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in den n Unbestimmten $u(z_1), u(z_2), \dots, u(z_n)$. Ändert man die vorgegebenen Werte auf den roten Feldern, dann ändern sich lediglich die Zahlen c_i auf der rechten Seite.

(2a) Wenn Sie auf den roten Feldern überall 0 vorgeben, wie in Beispiel 3, dann sind alle $c_i = 0$. Es handelt sich um ein homogenes lineares Gleichungssystem. Aus Beispiel 3 wissen wir bereits, dass es in diesem Spezialfall genau eine Lösung gibt. Bringen Sie in diesem Fall das Gleichungssystem mit Zeilenumformungen in Zeilenstufenform, dann erhalten Sie am Ende n nichttriviale Gleichungen, denn andernfalls gäbe es mehrere Lösungen. Das heißt, die Gleichungen in (reduzierter) Zeilenstufenform sind $u(z_1) = 0$, $u(z_2) = 0$, $\dots$, $u(z_n) = 0$.

(2b) Was ändert sich nun, wenn auf den roten Feldern nicht unbedingt 0 steht, sondern beliebige Werte? Die rechte Seite c_i ist dann nicht mehr unbedingt 0, es handelt sich also um ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Um dieses System zu lösen, wenden Sie *dieselben* Zeilenumformungen wie in (2a) an, nur die rechte Seite ist anders. Schließlich erhalten Sie die Gleichungen $u(z_1) = c'_1$, $u(z_2) = c'_2$, $\dots$, $u(z_n) = c'_n$ und damit eine eindeutige Lösung Ihres Gleichungssystems. □

Bemerkung: Die Lösung in (2) ist lang und wortreich. Sie tut genau dasselbe wie (1). Jedoch ist (1) deutlich kürzer und klarer, denn sie nutzt die richtige Struktur: Matrizen und ihre Multiplikation. Freuen Sie sich auf die Vorlesung Lineare Algebra, in der Sie lernen, Probleme strukturiert zu lösen!

(3) *Wenn Sie lineare Gleichungssysteme per Einsetzungsverfahren, Raten oder Rumgewurschtel lösen können – zumindest manchmal:*

Dann wird es sicherlich schwer, diese Zusammenhänge oder überhaupt irgendetwas zu erkennen. Lineare Gleichungssysteme auf diese Art zu lösen, ist meist unstrukturiert, unnötig kompliziert und fehleranfällig. Versuchen Sie lieber, sich die Grundlagen für Methode (2) und (1) zu erarbeiten. Freuen Sie sich auf die Vorlesung Lineare Algebra, in der Sie lernen, Probleme strukturiert zu lösen!