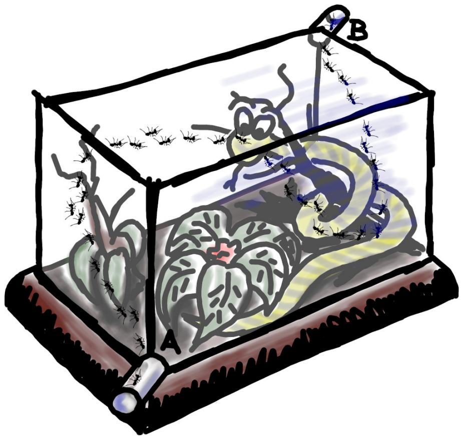
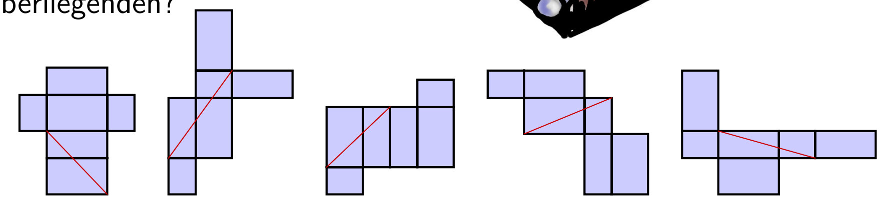
Beispielaufgabe zur Studienwahl

Mathe macht's kurz: die Ameisenstraße

© Michael Eisermann, Stefan Kohl, Friederike Stoll



Ameisen sind dafür bekannt, dass sie ihre Wege optimieren. In einem quaderförmigen Terrarium beobachten Sie eine Ameisenstraße, die auf den Wänden von einer Ecke A (Eingang) zur diagonal gegenüberliegenden Ecke B (Ausgang) verläuft. Wir interessieren uns für kürzeste Wege. Das Terrarium hat innen die Kantenlängen $p = 45$cm, $q = 60$cm, $r = 100$cm. Die Ameisen können auf allen sechs Seiten des Quaders umherlaufen. Welche der folgenden Graphiken sind korrekte Netze der Quaderfläche? Welche der eingezeichneten Wege führen von einer Ecke zur diagonal gegenüberliegenden?



alles korrekt	☐	☐	☐	☐	☐
korrektes Netz, falscher Weg	☐	☐	☐	☐	☐
falsches Netz	☐	☐	☐	☐	☐

Welche Länge L haben die kürzesten Ameisenstraßen von A nach B? cm

Wie lautet die allgemeine Formel für L mit beliebigen Kantenlängen $p \le q \le r$?

☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ ☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+pqr}$ ☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+pq}$

☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+2pq}$ ☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+2pq+2qr}$ ☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+2qr}$

Welche Länge K hat der kürzeste Weg von A nach B für eine fliegende Ameise? cm

Wir betrachten eine Quaderfläche Q mit Kantenlängen $0 < p < q < r$.
Wie viele kürzeste Wege gibt es von A nach B in Q?

Ameisen finden ihre Wege nicht durch globale vorausschauende Planung, sondern optimieren nur lokal. Sie finden kleine Abkürzungen durch Versuch und Irrtum. Es gibt auf der Quaderfläche mehrere Wege, die lokal minimal sind, sich also lokal durch kleine Veränderungen nicht abkürzen lassen.

Sie können das selbst ausprobieren, indem Sie eine Schnur um einen Karton straff von A nach B spannen. Wie viele lokal minimale Wege gibt es in Q von A nach B?

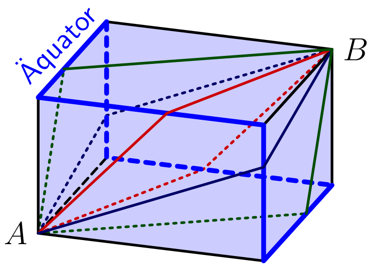
Weitere Aufgaben und Informationen unter:
Studienwahl-Kompass Mathematik
Universität Stuttgart

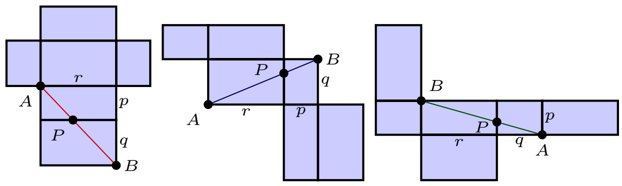
Stufe 0 / Kurzantwort: Die dritte Grafik zeigt kein korrektes Netz eines Quaders. Die zweite Grafik zeigt zwar ein korrektes Netz, aber der Weg verbindet zwei Ecken derselben Seite. Die drei restlichen Grafiken zeigen korrekte Netze und der Weg verbindet diagonal gegenüberliegende Ecken.

Eine kürzeste Ameisenstraße hat die Länge $L = \sqrt{p^2+q^2+r^2+2pq} = 145\mathrm{cm}$. Fliegende Ameisen nehmen die diagonale Luftlinie mit Länge $K = \sqrt{p^2+q^2+r^2} = 125\mathrm{cm}$. Ein Hoch auf Pythagoras!

Auf einem beliebigen Quader mit drei verschiedenen Seitenlängen $p < q < r$ gibt es genau zwei kürzeste Wege. Hingegen gibt es unendlich viele lokal minimale Wege: Für jede natürliche Zahl $n = 0, 1, 2, \dots$ gibt es einen solchen Weg, der sich $n + {}^1\!/\!_2$ mal gleichmäßig um den Quader wickelt.

Stufe 1 / Ausführung: Wir suchen einen möglichst kurzen Weg von A nach B. Anschaulich ist klar, dass dieser Weg über einen Punkt P auf dem „Äquator“ läuft. Dieser besteht aus den sechs Kanten, die nicht an A oder B grenzen. Wir laufen auf geradem Weg von A nach P und dann auf geradem Weg von P nach B. Warum dies tatsächlich so sein muss, klären wir in Stufe 3. Die Äquatorkante, auf der P liegt, grenzt an zwei Flächen an. Auf diesen beiden Flächen verläuft der gesamte Weg von A über P nach B. Wir können den Quader so abwickeln, dass diese beiden Flächen nicht getrennt werden.





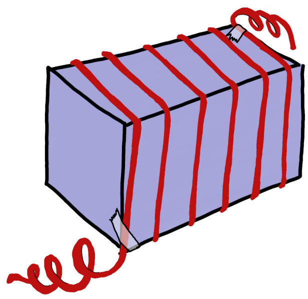
Diese ebenen Netze zeigen: Der Weg kann abgekürzt werden, wenn P nicht auf der geraden Strecke von A nach B liegt. Für jede der sechs Kanten auf dem Äquator finden wir so genau einen Punkt P, über den unser kürzester Weg führen könnte. In der Grafik oben rechts sind diese sechs möglichen Wege abgebildet. Dank Punktsymmetrie sind jeweils zwei davon gleich lang. Jetzt müssen wir also nur noch herausfinden, welche dieser drei Weglängen tatsächlich die kleinste ist.

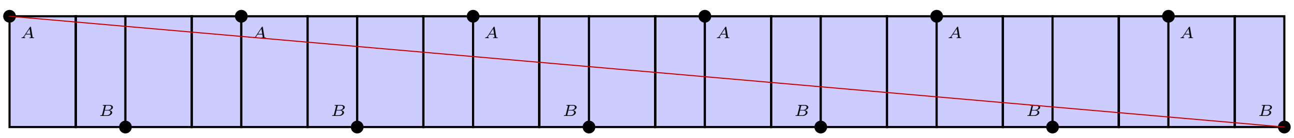
Die drei Längen sind $\sqrt{(p+q)^2+r^2}$, $\sqrt{(p+r)^2+q^2}$ und $\sqrt{(q+r)^2+p^2}$ dank Skizze und Satz von Pythagoras. Welche dieser drei Zahlen ist die kleinste? Bei den konkreten Kantenlängen $45\mathrm{cm}$, $60\mathrm{cm}$, $100\mathrm{cm}$ können Sie dies direkt ausrechnen und erhalten $L = 145\mathrm{cm}$.

Wie finden wir die kürzeste der drei Längen allgemein, für beliebige Seitenlängen $p \le q \le r$? Die Längen quadriert sind $(p+q)^2+r^2 = p^2+2pq+q^2+r^2$, $(p+r)^2+q^2 = p^2+2pr+r^2+q^2$ und $(q+r)^2+p^2 = q^2+2qr+r^2+p^2$. Sie unterscheiden sich nur in dem gemischten Summanden $2pq$, $2pr$ bzw. $2qr$, der kleinste davon ist $2pq$, also gilt $L = \sqrt{p^2+q^2+r^2+2pq}$.

Sind alle Seitenlängen verschieden, also $p < q < r$, dann gibt es genau zwei kürzeste Wege. Das gilt auch für $p = q < r$, denn dann ist $pq < pr = qr$. Für $p < q = r$ hingegen gilt $pq = pr < qr$, demnach gibt es vier kürzeste Wege. Auf jedem Würfel, also $p = q = r$, gibt es genau sechs.

Es bleibt die Frage: Wie viele lokal minimale Wege gibt es? Wir finden unendlich viele! Wir geben nicht alle an. Es genügt, unendlich viele Beispiele anzugeben. Zu jeder natürlichen Zahl $n = 0, 1, 2, \dots$ betrachten wir den Weg, der sich $n + {}^1\!/\!_2$ mal gleichmäßig um den Quader wickelt, ähnlich einer Schraubenlinie wie in der Zeichnung rechts angedeutet. Den genauen Verlauf des Weges erhalten wir, indem wir vier Seiten des Quaders wie unten mehrfach abrollen und dann eine Strecke von A nach B einzeichnen. Daran sehen wir auch, dass dieser Weg lokal nicht abgekürzt werden kann.





Stufe 2 / Was will und soll diese Aufgabe?

Nach der Lösung dieser Aufgabe erläutern wir als Rück- und Ausblick, warum wir diese Problemstellung mathematisch interessant finden und inwiefern sie repräsentativ ist für das Mathematikstudium.

Zunächst handelt diese Aufgabe von einer anschaulich-intuitiven Frage: Sie ist mit Schulmathematik leicht zu lösen und erfordert sowohl konkrete Rechnung als auch sorgfältige Überlegung. Dabei nutzen wir allerdings Begriffe und Argumente, die zunächst nur anschaulich begründet sind: Was soll ein Weg sein? Was ist seine Länge? Wie zählen wir Wege? Wie viele kürzeste Wege gibt es?

Anschaulich scheint klar: Wir haben in Stufe 1 alle kürzesten Wege von A nach B gefunden. Aber können wir wirklich sicher sein, dass es mit einem raffinierten Trick nicht noch kürzer geht? Es passiert leider all zu oft, dass sich eine vermeintlich offensichtliche Aussage als falsch entpuppt.

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen,
erwiesen sich viele von ihnen als falsch. (Bertrand Russell)

Bevor wir unser Problem kürzester Wege lösen können, müssen wir es erst sauber formulieren und die Begriffe klären! Diese Grundlagen und sorgsamen Ausführungen behandeln wir in Stufe 3.

Das Problem der kürzesten Wege ist keine exotische Fragestellung, die nur Myrmekologen interessiert, sondern spielt in vielen Bereichen der Mathematik und ihren Anwendungen eine große Rolle.

In der **Analysis** und später in der **Topologie** lernen Sie die nötigen Grundbegriffe wie Abstand und Stetigkeit und beweisen Sätze wie die Dreiecksungleichung oder den Zwischenwertsatz, die wir in Stufe 3 gut gebrauchen können. In der **Geometrie** beschäftigen Sie sich mit Räumen, in denen Sie Längen und Winkel messen können. Damit können Sie insbesondere die Länge eines Weges allgemein definieren und konkret berechnen. Die **Differentialgeometrie** behandelt die zentrale Frage, wie kürzeste Wege aussehen, sogenannte **Geodäten**, die lokal oder gar global die Weglänge minimieren.

Nach Ebene $\mathbb{R}^2$ und Raum $\mathbb{R}^3$ ist die klassische Illustration die Kugeloberfläche, also die Sphäre $\mathbb{S}^2$: Kürzeste Wege sind hier Teile von Großkreisen. SchiffskapitänInnen und FlugzeugpilotInnen nutzen diese, solange keine Hindernisse im Weg liegen. Mit Hindernissen ist lediglich der Raum komplizierter. In der **Geodäsie und Geoinformatik** gehört daher Differentialgeometrie zum Handwerkszeug.

Wir sehen an diesen einfachen Beispielen ein erstaunliches und wichtiges Phänomen: Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist flach, die Winkelsumme in jedem Dreieck ist 180°. Die Sphäre $\mathbb{S}^2$ hingegen ist gekrümmt: Die Winkelsumme in jedem geodätischen Dreieck ist größer als 180°. Machen Sie sich eine Skizze! Unsere Quaderfläche Q ist ebenso gekrümmt, die Krümmung sitzt hier jedoch konzentriert in den Ecken. Entlang der Kanten ist Q flach, wie unsere Abwicklungen zeigen. Sie spüren die Krümmung sehr deutlich, wenn Sie versuchen, eine Apfelsinenschale oder eine Pappschachtel flach zu drücken.

Auch die **Physik** nutzt kürzeste Wege, insbesondere in Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie. Die Raumzeit besteht aus drei Raumkoordinaten und einer Zeitkoordinate. Sie ist allerdings nicht flach, sondern wird durch Masse gekrümmt. Im flachen Raum bewegt sich eine Raumsonde auf einer Geraden, allgemein im gekrümmten Raum auf einer Geodäten: Das erklärt die beobachteten, nicht geradlinigen Bahnkurven, und zwar genauer als Newtons klassische Gravitationstheorie!

Ziel der **Optimierung** ist es, die Parameter eines komplexen Systems so zu steuern, dass der Nutzen maximal wird bzw. die Kosten minimal werden. Die Weglänge ist hier ein erstes schönes Beispiel.

Auch in der **Informatik** spielen kürzeste Wege eine Rolle, hier ist das Problem meist diskret oder gar endlich: Gegeben sind endlich viele Punkte und ihre paarweisen Abstände. Gesucht ist ein Algorithmus, der den kürzesten Weg von A nach B bestimmt. Idealerweise soll der Algorithmus nicht nur möglichst exakt, sondern auch schnell sein. Oder würden Sie ein Navigationsgerät kaufen, das erst eine Stunde rechnet, bis es Ihnen einen kurzen Weg vorschlägt?

Stufe 3 / Mathematische Grundlage: Was sind kürzeste Wege und wie finden wir sie?

Wir werden hier einige Definitionen und Sätze aus dem Mathematikstudium kennenlernen und einfache Beweise selbst durchführen. Andere Beweise, die zu aufwändig oder technisch sind, werden wir nur zitieren. Wenn Sie es ganz genau wissen wollen, dann studieren Sie Mathematik!

Wie messen wir euklidische Abstände? Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet $\mathbb{R}^n$ die Menge aller n–Tupel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit Koordinaten $x_i \in \mathbb{R}$. Für $n = 1$ erhalten wir so die reelle Zahlengerade $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, für $n = 2$ die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ und für $n = 3$ den reellen Raum $\mathbb{R}^3$. Den Abstand zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras zu $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. Für $n = 1$ ist dies $d(x_1, y_1) = |x_1 - y_1|$, also der Abstand von x_1 und y_1 auf der reellen Zahlengeraden, für $n = 2$ und $n = 3$ erhalten wir den Abstand zwischen Punkten in der Ebene bzw. im Raum. Dasselbe gelingt auch in höherer Dimension. Ein bemerkenswerter und grundlegender Satz über die Abstände im $\mathbb{R}^n$ ist der folgende:

Satz A (Dreiecksungleichung): Für je drei Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Gleichheit $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ gilt genau dann, wenn y auf der Strecke von x nach z liegt.

Beweis: Der Beweis ist etwas knifflig. Sie lernen ihn in der Analysis kennen. In der Regel zeigen Sie zuerst die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und leiten daraus die Dreiecksungleichung ab. □

Was ist ein Quader? Unsere Ecken A und B im Quader können wir als Punkte im $\mathbb{R}^3$ darstellen durch $A = (A_1, A_2, A_3) = (0, 0, 0)$ und $B = (B_1, B_2, B_3) = (100, 45, 60)$. Der ausgefüllte Quader ist dann die Menge $V = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid A_i \leq x_i \leq B_i \text{ für } i = 1, 2, 3 \,\}$. Die Quaderfläche $Q = \{\, x \in V \mid x_i \in \{A_i, B_i\} \text{ für mind. ein } i = 1, 2, 3 \,\}$ setzt sich aus den sechs Seiten zusammen.

Was ist ein Weg? Wir beobachten eine Ameise, die auf der Quaderfläche Q von A nach B läuft. Zu jeder Zeit $t \in [a, b]$ bezeichnen wir ihre Position mit $\gamma(t) \in Q \subset \mathbb{R}^3$. Wir erhalten so die Abbildung $\gamma\colon [a, b] \to Q\colon t \mapsto \gamma(t)$. Jede Ameise bewegt sich „stetig", sie kann sich nicht „teleportieren". Zur Präzisierung benötigen wir daher den Begriff der **stetigen Abbildung**. Die folgende Definition der Stetigkeit kennen Sie vielleicht aus der Schule. Anschaulich stellt man sich gerne vor, dass eine stetige Abbildung „keine Sprünge" macht und sich „durchgehend zeichnen" lässt. Das ist eine hilfreiche Umschreibung, aber allzu vage: Wie sollten wir das konkret nachprüfen? Hängt die Stetigkeit von γ etwa vom Betrachter ab, wie genau er Sprünge erkennt oder wie gut er zeichnen kann? Etwas genauer bedeutet Stetigkeit, dass Punkte, die nahe beieinander liegen, auf Punkte abgebildet werden, die ebenfalls nahe beieinander liegen. Auch das ist noch zu vage: Damit kann man nicht rechnen! Um alle Unklarheiten zu beseitigen, werden stetige Abbildungen folgendermassen definiert. Erkennen Sie darin die anschauliche Beschreibung wieder?

Definition 1: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nach $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *stetig*, falls in jedem Punkt $x \in X$ gilt: Für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ existiert ein geeignetes $\delta > 0$, sodass für jeden Punkt $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$ der Bildpunkt $f(x')$ einen Abstand $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ hat.

Definition 2: Gegeben sei eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und zwei Punkte $A, B \in X$. Ein *Weg* von A nach B in X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a, b] \to X$ mit $a < b$ sowie $\gamma(a) = A$ und $\gamma(b) = B$.

Die Abbildung γ gibt zu jedem Zeitpunkt $t \in [a, b]$ die Position $\gamma(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ an.

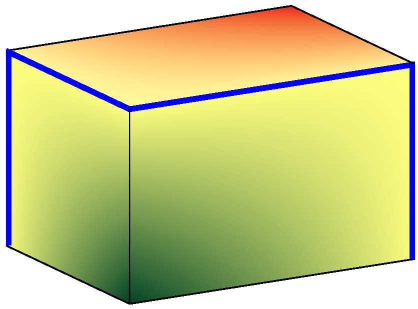
Gerade Wege: Die Abbildung $\sigma\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n\colon t \mapsto A + t \cdot (B - A)/T$ ist stetig. Dieser Weg verläuft von $\sigma(0) = A$ nach $\sigma(T) = B$ mit konstantem Geschwindigkeitsvektor $v = (B - A)/T$.

Um unsere erste Behauptung zu zeigen, verwenden wir den folgenden grundlegenden Satz:

Satz B (Zwischenwertsatz): Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f jeden Wert z zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, das heißt es existiert (mindestens) ein $t \in [a, b]$ mit $f(t) = z$. Insbesondere hat jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ eine Nullstelle.

Beweis: Dies beweisen Sie im Mathematikstudium in Ihrer Vorlesung **Analysis 1**. □

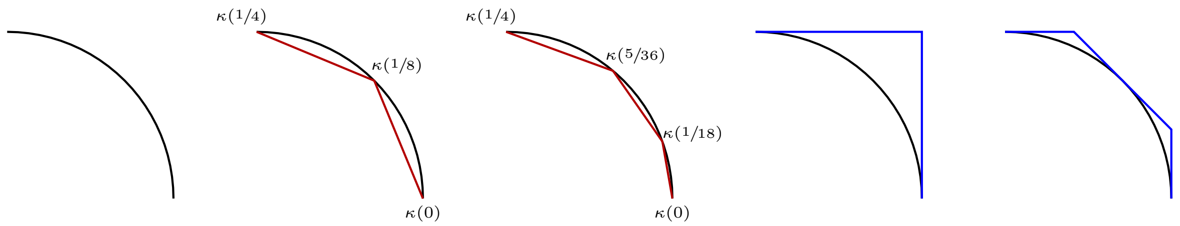
Behauptung 1: Jeder Weg $\gamma\colon [a,b] \to Q$ von A nach B führt über den Äquator, das heißt: Es existiert ein Zeitpunkt $t_0 \in [a,b]$, sodass der Wegpunkt $P = \gamma(t_0)$ auf dem Äquator liegt.



Beweis: Wir wählen eine „Breitengrad-Funktion“ $h\colon Q \to \mathbb{R}$, die stetig ist mit $h(A) < 0$ und $h(B) > 0$, sodass $h(P) = 0$ genau dann gilt, wenn P auf dem Äquator liegt. Solche Abbildungen gibt es, sogar sehr viele. Ein besonders einfaches Beispiel ist gegeben durch $h(x) = (x_1 - B_1)(x_2 - B_2)(x_3 - B_3) + (x_1 - A_1)(x_2 - A_2)(x_3 - A_3)$. Als polynomielle Abbildung ist diese Funktion stetig. Alle geforderten Eigenschaften lassen sich sorgfältig nachprüfen. Die Abbildung rechts illustriert diese Funktion: Grün steht für negative Werte, Rot für positive Werte, reines Gelb für den Wert 0 wird genau auf dem Äquator angenommen. Die Abbildung $f = h \circ \gamma\colon [a,b] \to Q\colon t \mapsto h(\gamma(t))$ ist stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Sie gibt an, auf welchem „Breitengrad“ sich der Weg zum Zeitpunkt t befindet. Es gilt $f(a) = h(A) < 0$ und $f(b) = h(B) > 0$. Dank Zwischenwertsatz (Satz B) besitzt f eine Nullstelle $t_0 \in [a,b]$. Der Wegpunkt $P = \gamma(t_0)$ erfüllt $h(P) = f(t_0) = 0$, liegt also auf dem Äquator. $\square$

Bemerkung: Der Beweis per Zwischenwertsatz ist raffiniert und elegant. Müssen MathematikerInnen es immer so genau nehmen? Ja, das müssen sie! Als mahnendes Beispiel betrachten wir über den rationalen bzw. reellen Zahlen $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ die Kreislinie $S = \{\, (x,y) \in K^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ als Löwenkäfig. Der Löwe sitzt im Ursprung $(0,0)$ und will nach $(1,1)$ ausbrechen. Gibt es eine stetige Abbildung $\gamma\colon \{\, t \in K \mid 0 \le t \le 1 \,\} \to K^2$ von $\gamma(0) = (0,0)$ nach $\gamma(1) = (1,1)$, die S nicht trifft? Für $K = \mathbb{R}$ ist der reelle Löwe gefangen: Dies garantiert der Zwischenwertsatz! Für $K = \mathbb{Q}$ kann der rationale Löwe geradewegs ausbrechen entlang $\gamma(t) = (t,t)$. Wer hätte das gedacht?

Wie messen wir die Länge eines Weges? Wir betrachten zuerst ein Beispiel, nämlich den Weg $\kappa\colon [0, 1/4] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ entlang eines Viertelkreises. Um die Länge zu messen, unterteilen wir das Intervall $[0, 1/4]$ an beliebigen Stellen $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1/4$.



Die Punkte $\kappa(t_0), \kappa(t_1), \kappa(t_2), \ldots, \kappa(t_{n-1}), \kappa(t_n)$ definieren einen Polygonzug der Länge

$$\ell(\kappa; t_0, t_1, \ldots, t_n) = d(\kappa(t_0), \kappa(t_1)) + d(\kappa(t_1), \kappa(t_2)) + \cdots + d(\kappa(t_{n-1}), \kappa(t_n))$$

kurz $\sum_{i=1}^{n} d(\kappa(t_{i-1}), \kappa(t_i))$. Die roten Linien in der zweiten und dritten Graphik sind solche Polygonzüge, der erste hat die Länge $2\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 1.5307$, der zweite ist etwas länger. Egal welche Unterteilung wir wählen, der blaue Polygonzug in der vierten Grafik ist länger: Dies sieht man durch geschickte mehrfache Anwendung der Dreiecksungleichung (Übung). Die Länge 2 des blauen Polygonzugs ist also eine obere Schranke für alle $\ell(\kappa; t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Auch die Länge des blauen Polygonzugs $2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + 2 \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \approx 1.6569$ in der fünften Grafik ist eine obere Schranke. Es gibt noch kleinere obere Schranken. Die Länge des Weges κ ist die kleinste all dieser oberen Schranken, genannt das *Supremum*, geschrieben $\sup$. Dies machen wir zur allgemeinen Definition:

Definition 3: Sei $\gamma\colon [a,b] \to X \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Weg. Die *Länge* von γ definieren wir durch

$$\ell(\gamma) = \sup\bigl\{\, \ell(\gamma; t_0, t_1, \ldots, t_n) \bigm| a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \,\bigr\}.$$

Wir nutzen hier eine besondere Eigenschaft: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig! Jede Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, die nicht-leer und nach oben beschränkt ist, besitzt in $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke, geschrieben $\sup M$. (In $\mathbb{Q}$ gilt das nicht!) Ist M nach oben unbeschränkt, so setzen wir $\sup M = \infty$.

Beispiel: Für $\kappa\colon [0, 1/4] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ ist die Länge $\ell(\kappa)$ größer als 1.53, denn jede obere Schranke ist mindestens so groß wie die Länge des roten Polygonzugs in der zweiten Graphik. Andererseits ist die Länge $\ell(\kappa)$ höchstens 1.657, denn diese obere Schranke entnehmen wir der fünften Graphik. Diese Eingrenzungen lassen sich durch feinere Polygonzüge beliebig verbessern. Als kleinste obere Schranke findet man schließlich $\ell(\kappa) = \pi/2 \approx 1.5708$.

Beispiel: Die Länge des Weges $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto A + t \cdot (B - A)$ ist $\ell(\sigma) = d(A, B)$. Dies folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung (Satz A). Das ist nicht überraschend, sondern beruhigend.

Behauptung 2: Jeder kürzeste Weg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ von A nach B hat die Länge $d(A, B)$ und verläuft entlang der Verbindungsstrecke. (Genauer ist γ eine monotone Umparametrisierung von σ.)

Beweis: Der Weg σ hat die Länge $d(A, B)$. Für γ betrachten wir die Unterteilung $a = t_0 < t_1 = b$ und finden $d(A, B) = \ell(\gamma; t_0, t_1) \leq \ell(\gamma)$. Somit ist $d(A, B)$ die kürzest mögliche Länge für einen Weg von A nach B. Angenommen, es gibt einen Zeitpunkt $t_1 \in [a, b]$, für den $\gamma(t_1)$ außerhalb der Strecke von A nach B liegt. Dann ist $d(A, B) < d(A, \gamma(t_1)) + d(\gamma(t_1), B) = \ell(\gamma; a, t_1, b) \leq \ell(\gamma)$. Die erste Ungleichung gilt wegen der Dreiecksungleichung und ist strikt (Satz A). Somit ist γ echt länger als die direkte Verbindung σ. (Mit ähnlichen Argumenten konstruiert man die Umparametrisierung von σ zu $\gamma = \sigma \circ u$ mit $u\colon [a, b] \to [0, 1]$ monoton und stetig.) $\square$

Demnach verläuft jeder kürzeste Weg γ von A nach B für eine fliegende Ameise entlang der Strecke zwischen A und B und hat die Länge $\ell(\gamma) = d(A, B) = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$.

Behauptung 3: Für jeden kürzesten Weg $\gamma\colon [a, b] \to Q$ von A nach B auf der Quaderfläche gilt: Es gibt einen Punkt $P = \gamma(t_0)$ auf dem Äquator, sodass der Teilweg $\gamma_1\colon [a, t_0] \to Q$ auf der Strecke von A nach P verläuft und der Teilweg $\gamma_2\colon [t_0, b] \to Q$ auf der Strecke von P nach B.

Beweis: Nach Behauptung 1 finden wir ein $t_0 \in [a, b]$, sodass $P = \gamma(t_0)$ auf dem Äquator liegt. Der Teilweg $\gamma_1\colon [a, t_0] \to Q$ muss ein kürzester Weg von A nach P in Q sein, ansonsten ließe sich auch γ abkürzen. Jeder kürzeste Weg von A nach P in $\mathbb{R}^3$ verläuft entlang der Strecke zwischen A und P. Da diese Strecke in der Quaderfläche Q enthalten ist, ist dieser auch ein kürzester Weg von A nach P in Q. Somit verläuft γ_1 entlang der Strecke zwischen A und P. Dasselbe gilt für den zweiten Teilweg γ_2 von P nach B. $\square$

Demnach gilt $\ell(\gamma) = d(A, P) + d(P, B)$, wir müssen also nur noch P auf dem Äquator variieren. Das ist ein relativ einfaches, eindimensionales Optimierungsproblem und wurde in Stufe 1 bereits gelöst: Wir haben sechs mögliche Übergangspunkte P auf dem Äquator identifiziert, und jeder kürzeste Weg verläuft über einen dieser Punkte. So finden wir schießlich *alle* kürzesten Wege.

Wie zählen wir Wege? Wir wollen schließlich zählen, wie viele kürzeste Wege es von A nach B in Q gibt. Dabei stoßen wir auf ein Problem: Nach obiger Definition gibt es unendlich viele! Wir können jeden Weg in verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen, also monoton umparametrisieren, ohne seine Weglänge zu verändern. Wir wollen daher Wege zusammenfassen, die sich nur in der Geschwindigkeit unterscheiden. Die eleganteste Möglichkeit ist, dass wir nur Wege $\gamma\colon [0, 1] \to Q$ mit einer konstanten Geschwindigkeit c betrachten: Für jeden Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ hat der Teilweg $\gamma|_{[0,t]}\colon [0, t] \to Q$ bis zur Zeit t die Länge $\ell(\gamma|_{[0,t]}) = ct$. In diesem Sinne gilt: Auf der Quaderfläche Q gibt es von A nach B genau zwei kürzeste Wege mit konstanter Geschwindigkeit.

Ein Weg $\gamma\colon [0, 1] \to X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit konstanter Geschwindigkeit heißt **Geodäte**, falls er lokal ein kürzester Weg ist. Das bedeutet: Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ existiert $\varepsilon > 0$ sodass $\gamma|_I$ auf dem Intervall $I = [t_0, t_1] = [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \cap [0, 1]$ ein kürzester Weg von $\gamma(t_0)$ nach $\gamma(t_1)$ in X ist. Alle Beispielwege aus Stufe 1, die sich $n + 1/2$ mal um den Quader wickeln, erfüllen dies!