

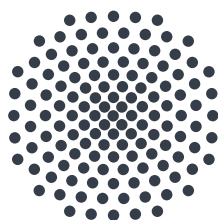
Spieltheorie und ökonomisches Verhalten

Die mathematische Analyse von
Konkurrenz und Kooperation

erkennen.
beweisen.
anwenden.



Prof. Dr. Michael Eisermann
zusammen mit Dr. Friederike Stoll
eiserm.de/lehre/Spieltheorie



Universität Stuttgart

Sommersemester 2025

Stand 19. Mai 2025

*Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art
sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!*



Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.



Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Was erwarten / erwartet Sie in der Spieltheorie? schöne Mathematik?
lehrreicher Spielspaß? perfekte Mischung? → answer.garden.ch/963641

Spielpraxis — AngST <i>All fun and games</i>	Fr 14:00 – 15:30 <i>Optional, da zockst du!</i>	V57-7.530 „Spielhölle“
Vorlesung — KnaST <i>Blood, sweat, and tears</i>	Mi 11:30 – 13:00 Fr 9:45 – 11:15	V57.05 V57.04
Übung — ÜbST <i>Learning by doing (the math)</i>	Di 11:30 – 13:00 <i>Da guckst du nicht nur, da übst du!</i>	V57-7.530
Klausur — HaST <i>All is well that ends well.</i>	Sep / Okt 2025 Feb / Mrz 2026	C@mpus C@mpus

Come for the show, stay for the math!

Experimente in unserem Casino



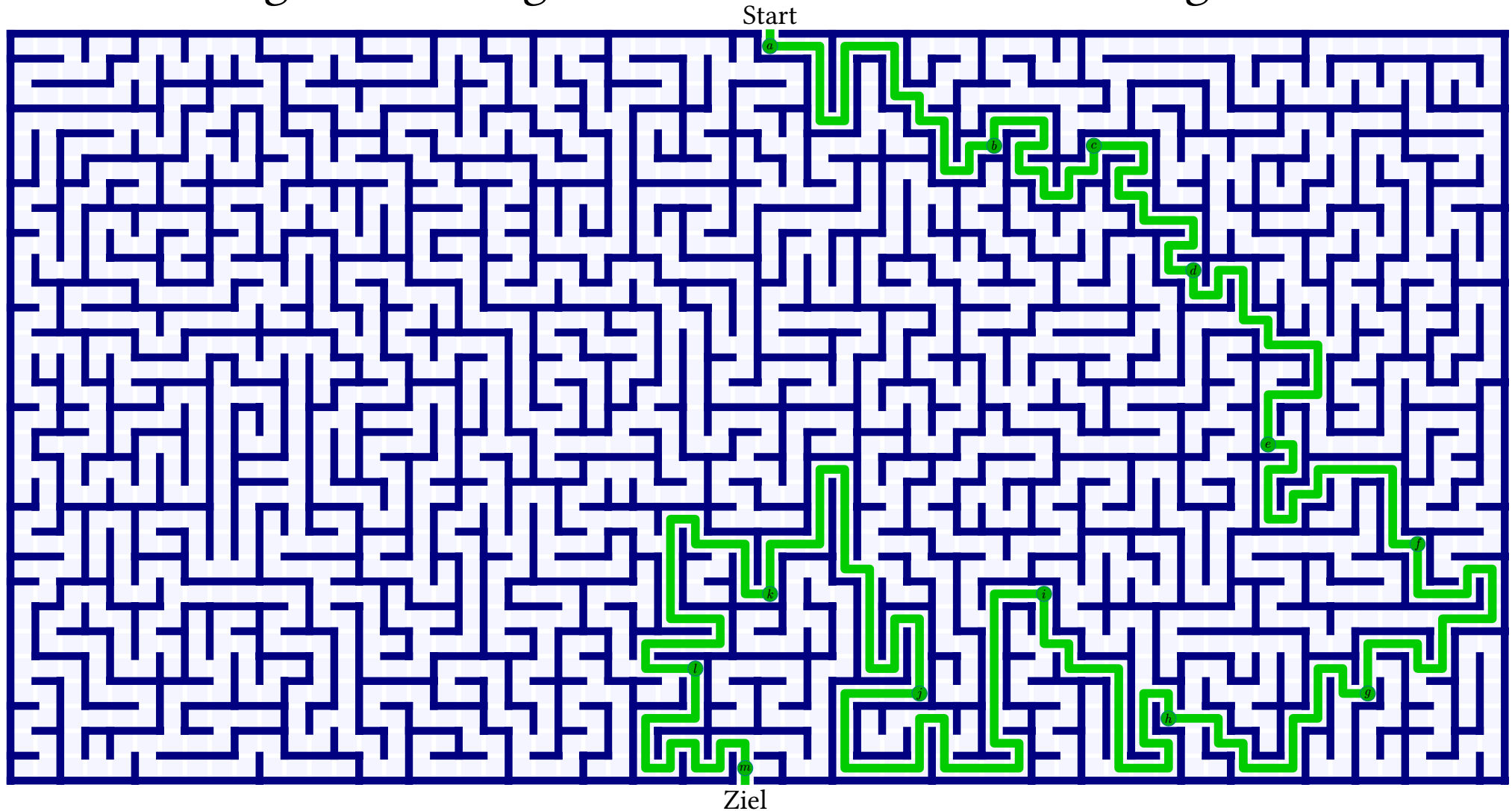
Spieltheorie in unserer Vorlesung



Optimal entscheiden	= B = Rückwärts- induktion Zermelo	= C = Kombinatorische Spieltheorie Sprague-Grundy	= D = Markov-Spiele & Optimierung Bellman
Statische Spiele	= E = Normalform & Gleichgewichte Nash	= F = Lineare Optimierung Dantzig	= G = Dilemmata & Evolution Smith
Dynamische Spiele	= H = Generationen- vertrag Schelling	= I = Unvollständige Information Harsanyi	= J = Dynamische Spiele Selten
Kooperative Spiele	= K = wiederholte Spiele & Kooperation Folk Theorem	= L = Verhandlungen: Axiome & Spiele Nash, Binmore	= M = Koalitionen: Axiome & Spiele Shapley, Hart-Mas-Collel
Mechanismen- design	= N = Kollektive Entscheidungen Arrow	= O = Implementierung & Un/Redlichkeit Gibbard-Satterthwaite	= P = Auktionen & In/Effizienz Vickrey

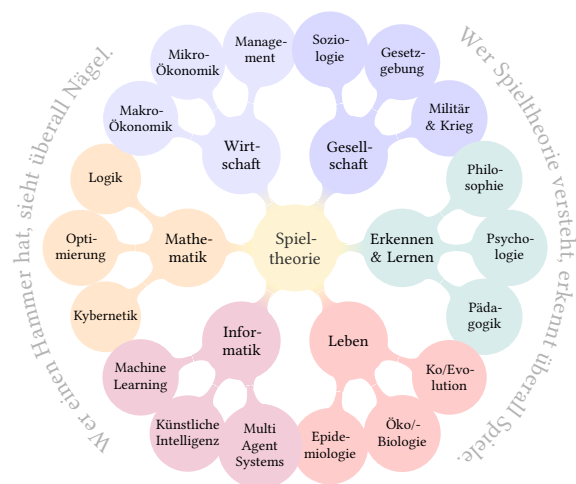
- „Mathematik ist schön und nützlich.“ — „Ich beherrsche die Grundlagen.“
- „Bestens! Mit Spieltheorie können Sie diese wunderbar anwenden.“
- „Wenn mir Vorwissen fehlt?“ — „Dann holen Sie es jetzt nach!“

Ich führe Argumente sorgsam vor. — Sie arbeiten alles gründlich nach.



Kapitel A

Einführung zur Spieltheorie



*Das ganze Leben ist ein Spiel,
und wir sind nur die Kandidaten.*
Hape Kerkeling (1964–)

- 1 Einführung: Was sind Spiele?
- 2 Denken hilft: Stufen der Rationalität
- 3 Methoden und Anwendungen der Spieltheorie
- 4 Was ist Gamification?

Worum geht es in der Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.

*To be literate in the modern age, you need to have
a general understanding of game theory.*

Paul Samuelson (1915–2009, Nobelpreis 1970)

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:

- Mehrere Akteure interagieren (Individuen, Firmen, Staaten, KI).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Nutzen, Auszahlung, etc).
- Jeder Spieler versucht, sein eigenes Ergebnis zu maximieren.

*If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.*

John von Neumann (1903–1957)

Eigenschaften von Spielen

Anzahl der Akteure?

- Ein Spieler: ... Geschicklichkeit, Steuerung, Optimierung
- Zwei Spieler: ... Tischtennis, Schach, Handel, Vertrag
- Drei und mehr Spieler: ... Wahlen, Koalitionen, Gesellschaft

Konkurrenz oder Kooperation?

- Nullsummen vs Win-Win: ... Marktaufteilung, Absprachen
- kompetitiv vs kooperativ: ... Verträge, Nebenzahlungen

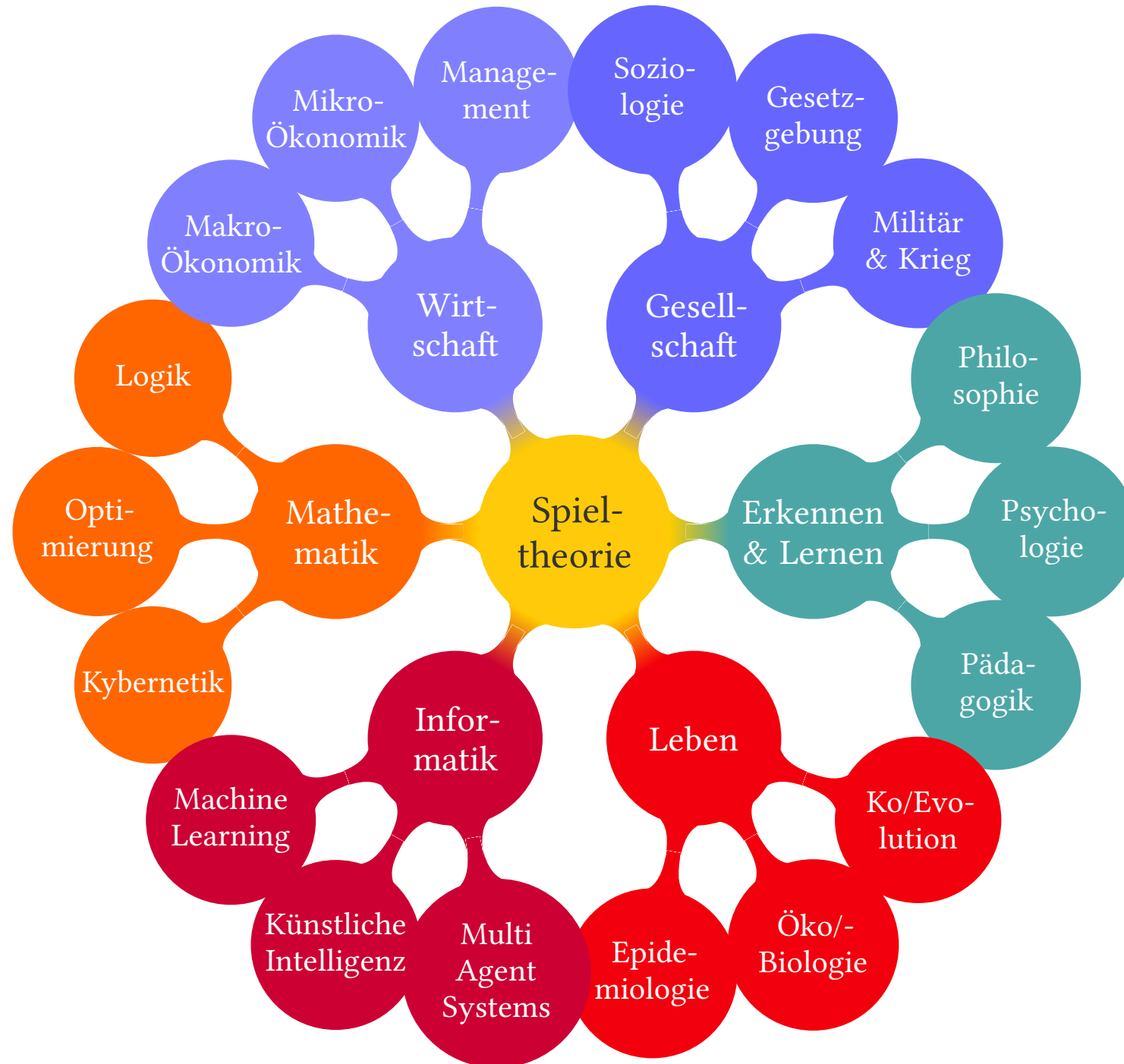
Zufall und Information?

- deterministisch vs stochastisch: ... Go, Backgammon, Monopoly
- un/vollständige Information: ... Kniffel, Lotto, Poker, Battleship

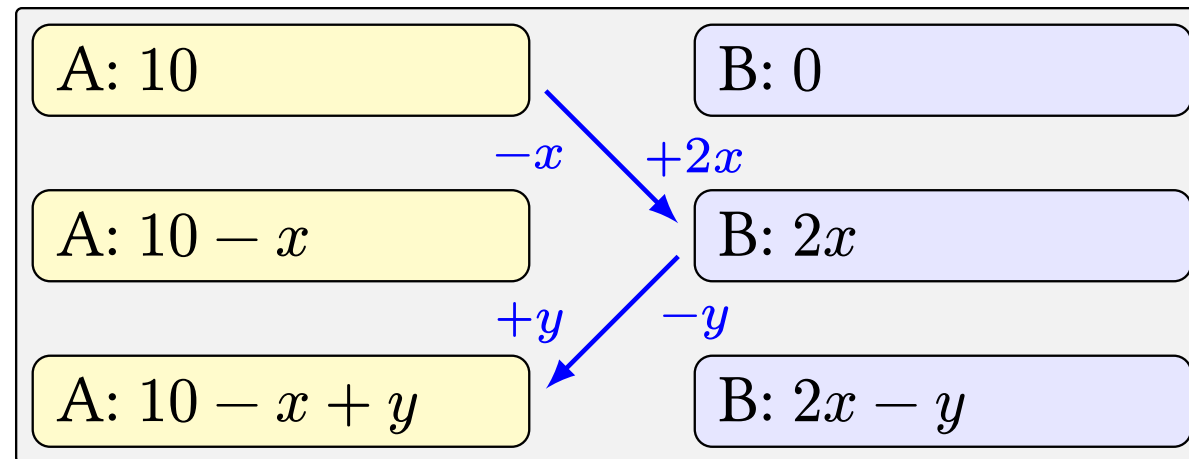
Zeitlicher Verlauf?

- parallel vs sequentiell: ... Schere-Stein-Papier, Quizz, Klausur
- diskret vs kontinuierlich: ... Brettspiele, Onlinespiele, Börse

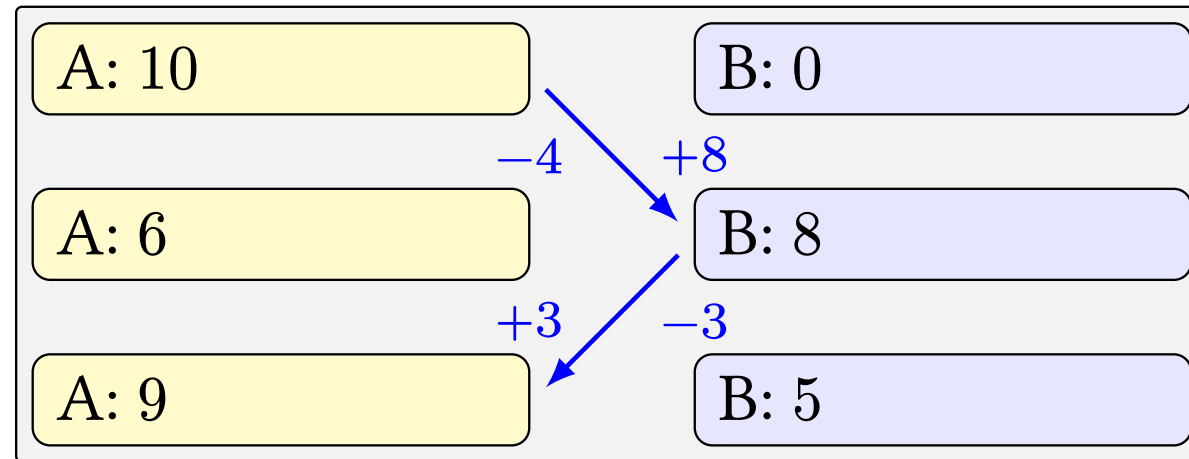
Weitere Beispiele: Straßenverkehr, Schwarzfahren, Fußball, Elfmeter, Auktion, Schule/Uni, Karriere, Kirche, Kochen, Kindererziehung, etc.



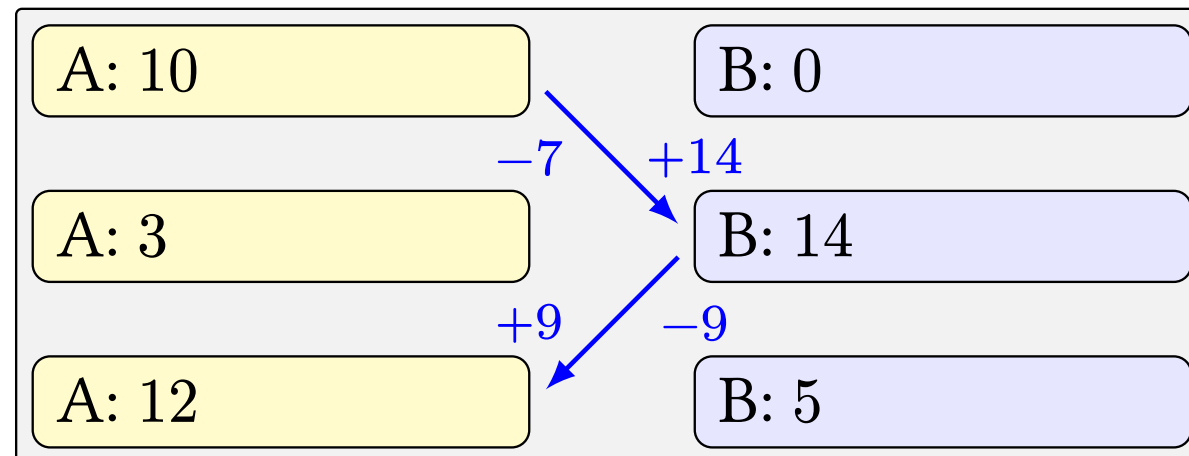
Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung.



Beispiel 1:



Beispiel 2:



Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“



Definition A2A: Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

$\mathcal{R}_0$: Jede Spieler:in will ihr Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.

$\mathcal{R}_1$: Jede Spieler:in versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathcal{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathcal{R}_1$, und jede Spieler:in weiß dies.

$\mathcal{R}_3$: Es gilt die vorige Aussage $\mathcal{R}_2$, und jede Spieler:in weiß dies.

etc... Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

$\mathcal{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathcal{R}_{n-1}$, und jede Spieler:in weiß dies.

$\mathcal{R}_\infty$: Es gilt die Aussage $\mathcal{R}_n$ für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathcal{R}_0$: Jedes Kind will möglichst viel Schokokuchen.

$\mathcal{R}_1$: Bob wird das größere Stück erkennen und sich nehmen.

$\mathcal{R}_2$: Alice weiß, dass sie das kleinere Stück bekommen wird. Daher schneidet Alice zwei möglichst gleich große Stücke.

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben 1 000 000€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob und $1\,000\,000 - x$ für Alice. Dies kann Bob nun annehmen... oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathcal{R}_0$: Jeder will seine Auszahlung maximieren.

$\mathcal{R}_1$: Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen.

$\mathcal{R}_2$: Alice weiß dies und schlägt $x = 1\text{€}$ vor.

Meuterei auf der Bounty (1935)

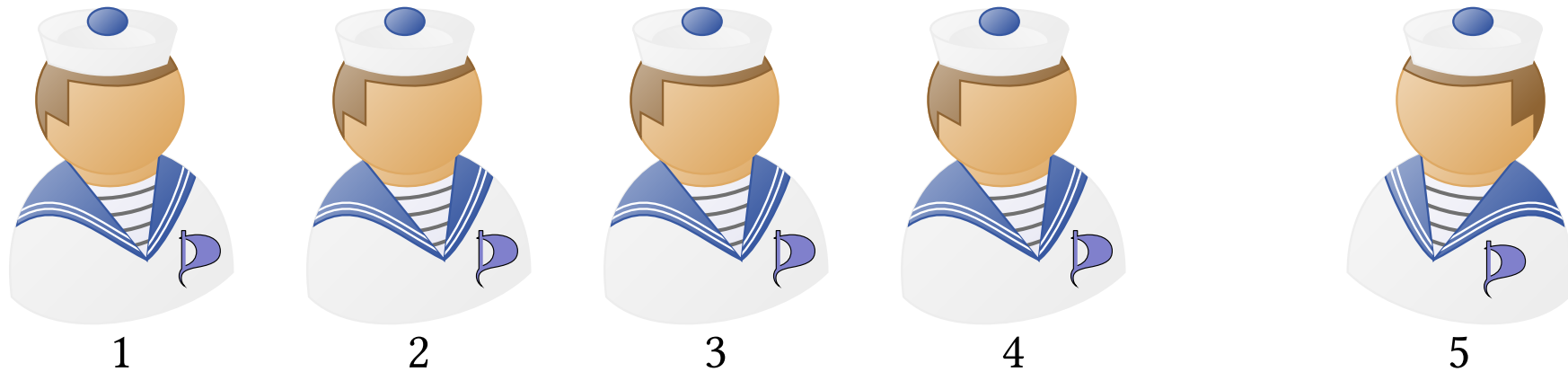
A217



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Fünf basisdemokratische Piraten 1, 2, 3, 4, 5 teilen sich 100 Dukaten.



Der ranghöchste Pirat 5 schlägt eine Zuteilung zur Abstimmung vor. Stimmt mindestens die Hälfte dafür, so wird diese Zuteilung ausgeführt. Bei Ablehnung wird der Vorschlagende über Bord ins Meer geworfen, und die verbleibenden Piraten beginnen das Spiel von vorn.

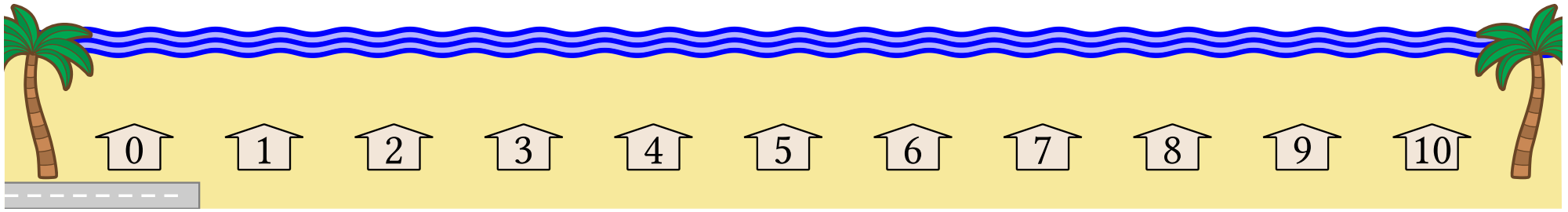
Fünf gierige Piraten / *the pirate game*

Aufgabe: Lösen Sie das Piratenrätsel für $n = 5$, sowie für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ und finden:

	1	2	3	4	5	...	197	198	199	200	201	202
	100					...						
$\mathcal{R}_1$	0	100				...						
$\mathcal{R}_2$	1	0	99			...						
$\mathcal{R}_3$	0	1	0	99		...						
$\mathcal{R}_4$	1	0	1	0	98	...						
$\vdots$												
$\mathcal{R}_{197}$	0	1	0	1	0	...	0	2				
$\mathcal{R}_{198}$	1	0	1	0	1	...	1	0	1			
$\mathcal{R}_{199}$	0	1	0	1	0	...	0	1	0	1		
$\mathcal{R}_{200}$	1	0	1	0	1	...	1	0	1	0	0	
$\mathcal{R}_{201}$	0	1	0	1	0	...	0	1	0	1	0	0

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand



- Aufgabe:** (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
 (2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
 (3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?

Antwort: Bei rationalem Verhalten finden wir folgende Anordnungen:

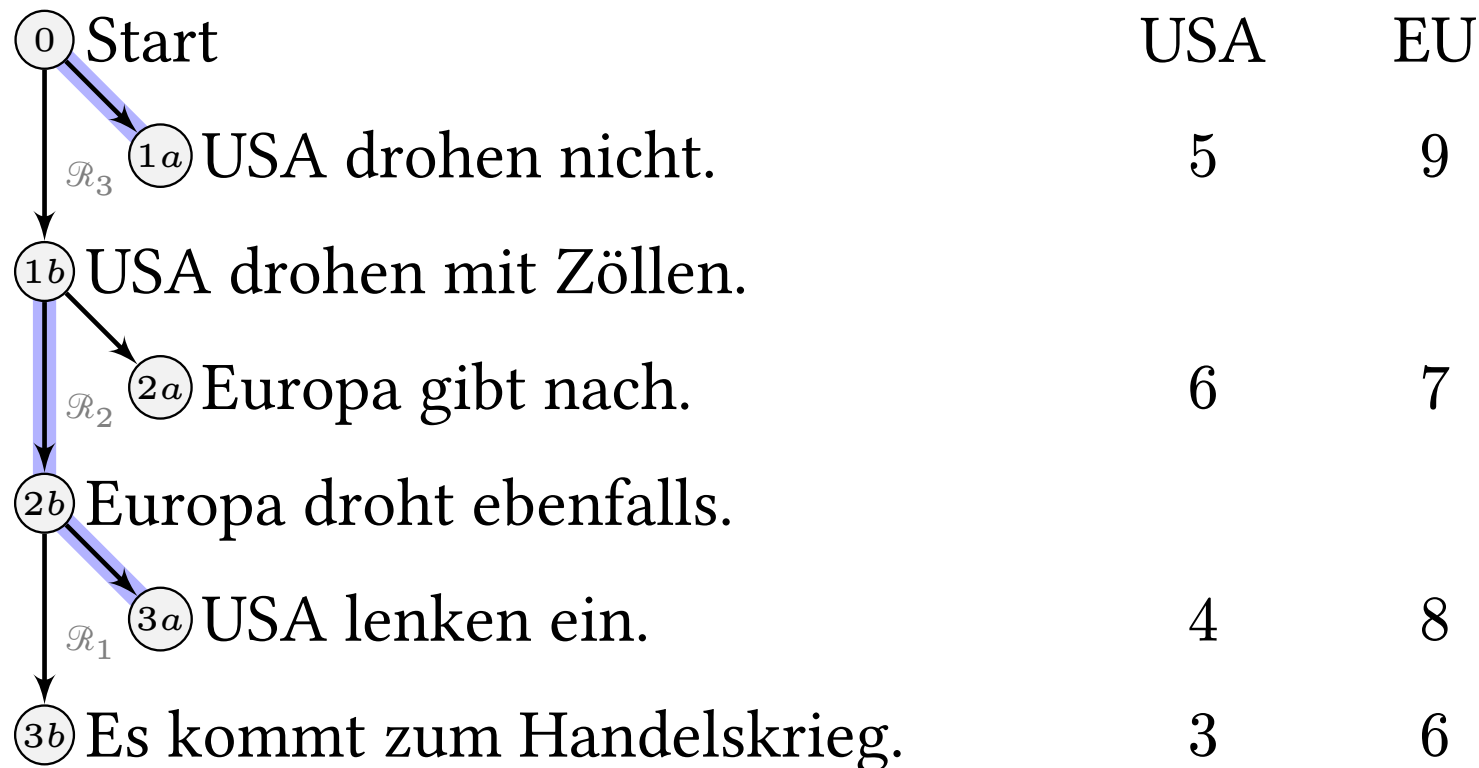
- | | | | | | | | | | | | |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| (1) | | | | | | | | | | | |
| (2) | | | | | | | | | | | |
| (3) | | | | | | | | | | | |

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Bei Frage (2) suchen wir zu jedem Zug von A die beste Antwort von B:

A	B										1 : 10
	A	B									2 : 9
		A	B								3 : 8
			A	B							4 : 7
				A	B						5 : 6
				B	A						6 : 5
					B	A					5 : 6
						B	A				4 : 7
							B	A			3 : 8
								B	A		2 : 9
									B	A	1 : 10

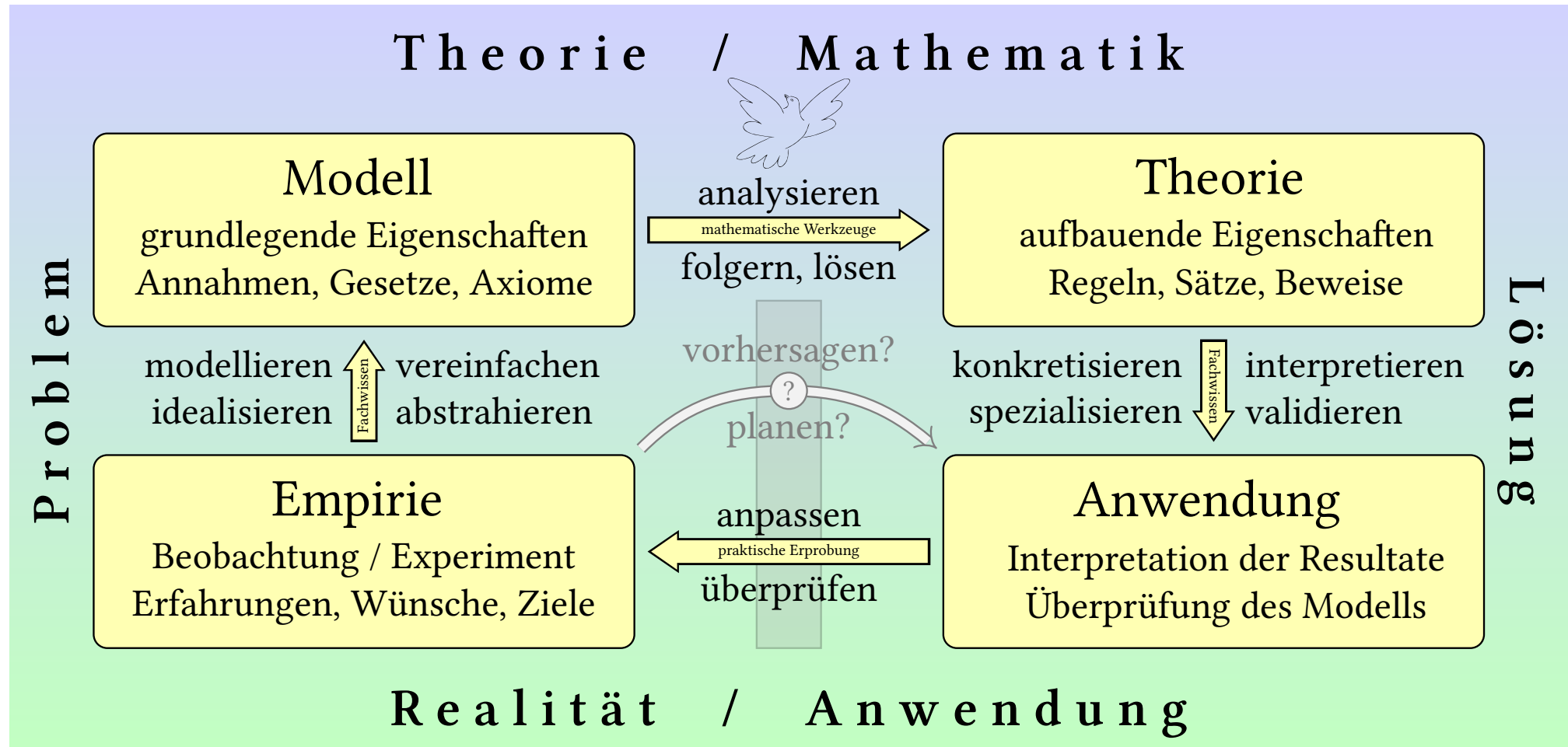
Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?



Aufgabe: Was wird passieren? rational? irrational? Wie erklären und bewerten Sie Trumps explizite Doktrin: „We have to be unpredictable.“

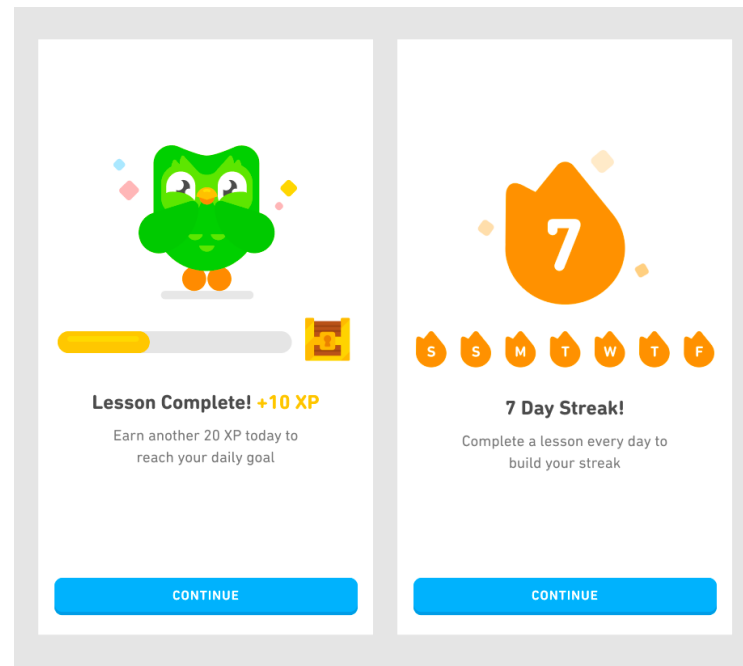
Lösung: $\mathcal{R}_0$: Jeder kennt und maximiert sein Ergebnis (wie gezeigt).
 $\mathcal{R}_1$: Vor einem Handelskrieg lenken die USA im 3. Zug ein (vorteilhaft).
 $\mathcal{R}_2$: Die EU weiß dies, daher wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).
 $\mathcal{R}_3$: Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper, 1902–1994)



Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)

Gamifizierung (engl. *gamification*, dt. auch Spielifizierung) ist die „Anwendung spieltypischer Elemente in einem spielfremden Kontext“.



Rufen Sie „Stopp!“, sobald Sie beweisen können, dass zwei der folgenden Zahlen an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen.

$$\begin{aligned}
 0 &= 0.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ \dots \\
 1/3 &= 0.33333\ 33333\ 33333\ 33333\ 33333\ 33333\ 33333\ 33333\ 33333\ 33333\ 33333\ \dots \\
 2/3 &= 0.66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ \dots \\
 1/7 &= 0.14285\ 71428\ 57142\ 85714\ 28571\ 42857\ 14285\ 71428\ 57142\ 85714\ \dots \\
 \sqrt{2} &= 1.41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ 69807\ 85696\ 71875\ 37694\ \dots \\
 \sqrt{3} &= 1.73205\ 08075\ 68877\ 29352\ 74463\ 41505\ 87236\ 69428\ 05253\ 81038\ \dots \\
 \sqrt{5} &= 2.23606\ 79774\ 99789\ 69640\ 91736\ 68731\ 27623\ 54406\ 18359\ 61152\ \dots \\
 \ln 2 &= 0.69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321\ 21458\ 17656\ 80755\ 00134\ 36025\ \dots \\
 e &= 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ \dots \\
 \pi &= 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ \dots \\
 \pi^2 &= 9.86960\ 44010\ 89358\ 61883\ 44909\ 99876\ 15113\ 53136\ 99407\ 24079\ \dots
 \end{aligned}$$

Stopp! **Beweis:** Wir haben $q = 10 < p = 11$ und $f_1, \dots, f_p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_q$.

Schubfachprinzip 1: An jeder Stelle $k \in \mathbb{N}$ haben wir $\{1, \dots, p\} \rightarrow \mathbb{Z}_q$ mit $i \mapsto f_i(k)$. Wegen $p > q$ existiert ein Paar $i < j$ mit $f_i(k) = f_j(k)$.

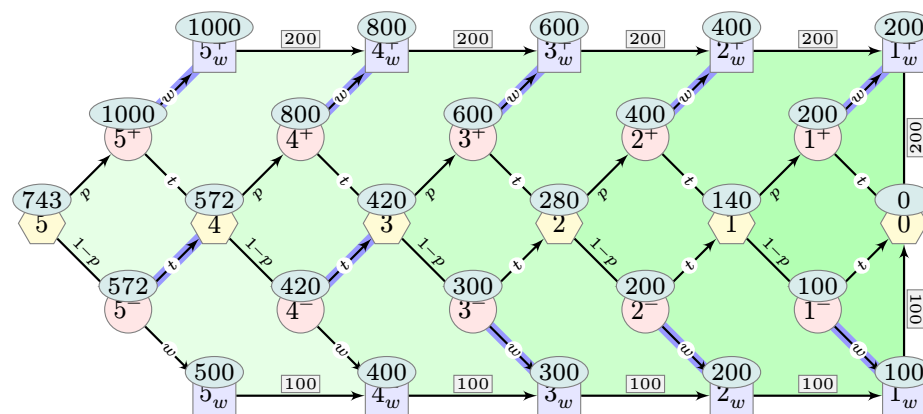
Die Mengen $E_{i,j} := \{k \in \mathbb{N} \mid f_i(k) = f_j(k)\}$ überdecken $\mathbb{N} = \bigcup_{i < j} E_{i,j}$.

Es gibt nur endlich viele Indexpaare $i < j$, genauer $\binom{p}{2} = p(p-1)/2 = 55$.

Schubfachprinzip 2: Also muss eine der Mengen $E_{i,j}$ unendlich sein. QED

Kapitel B

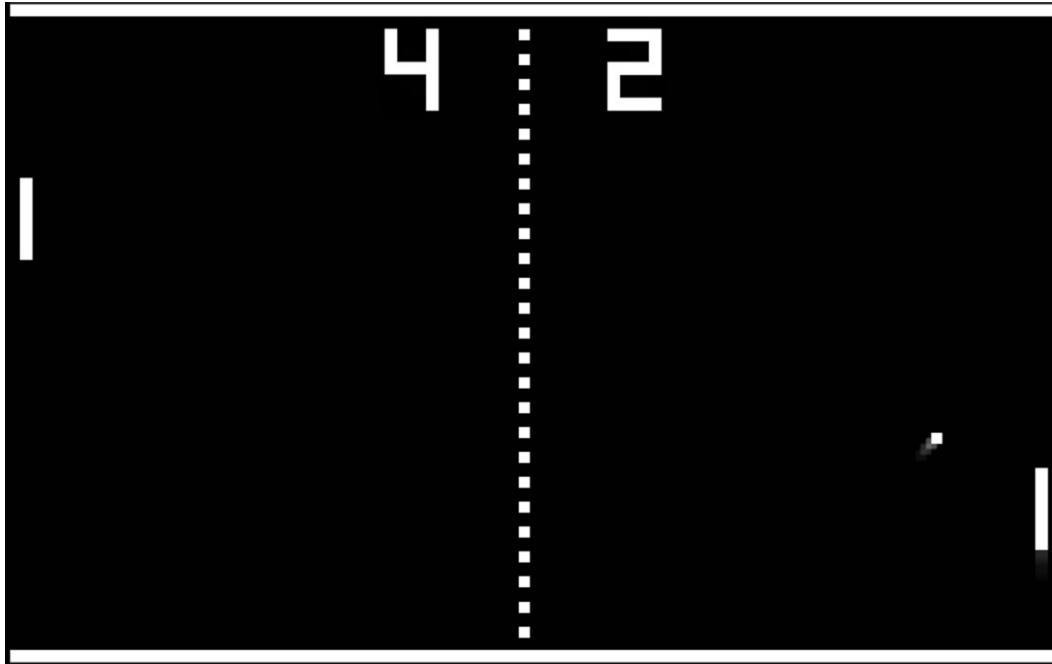
Rückwärtsinduktion nach Zermelo



*Verstehen kann man das Leben nur rückwärts;
leben muss man es aber vorwärts.*

Søren Kierkegaard (1813–1855)

- 1 Dynamische Spiele: Zustände und Aktionen
- 2 Nutzenmaximierung durch Rückwärtsinduktion
- 3 Gegenseitiges Wissen und Vorwärtsinduktion



Pong
(Atari 1972)

Breakout
(Atari 1976)

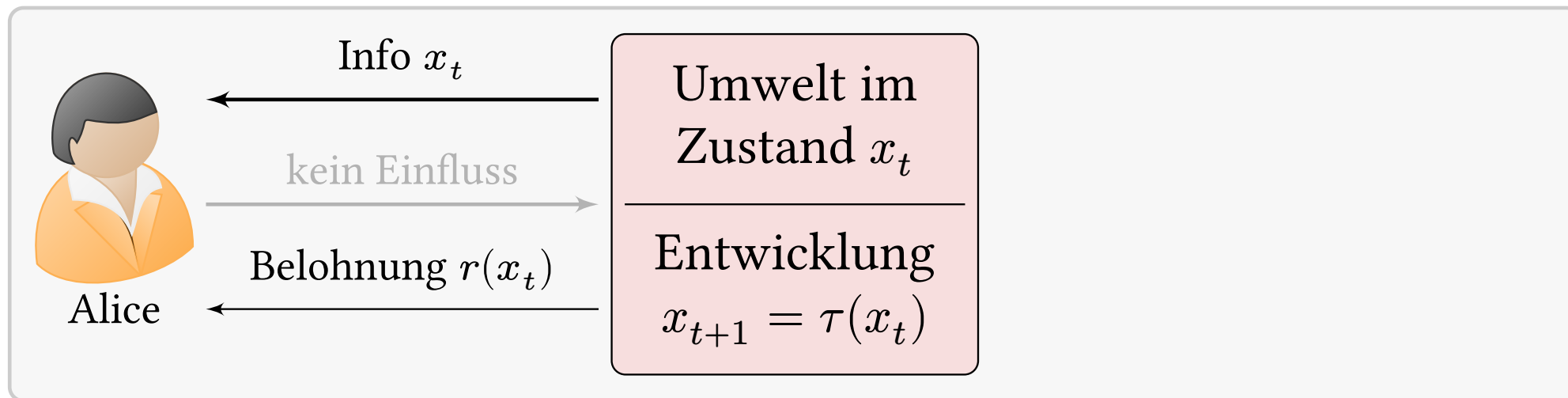
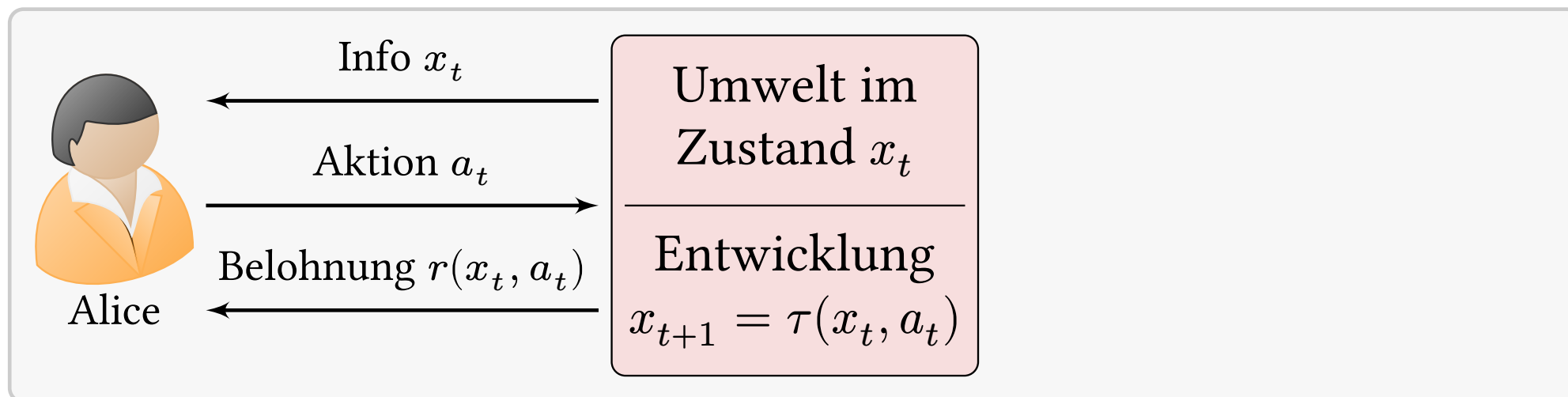




Pac-Man
(Namco / Midway 1980)

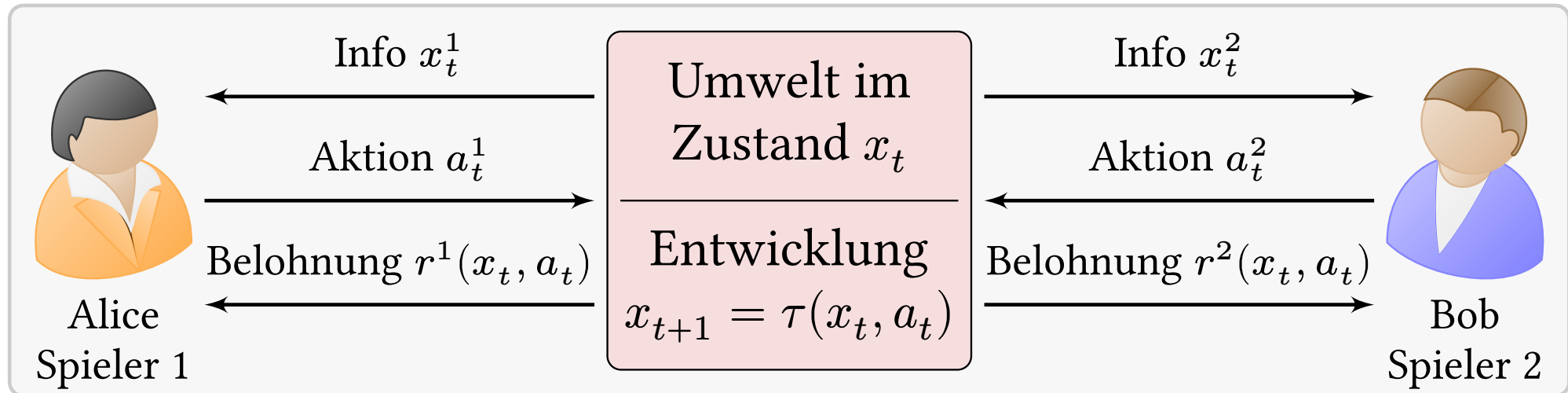
Supertux
(Bill Kendrick et al,
2000 bis heute)



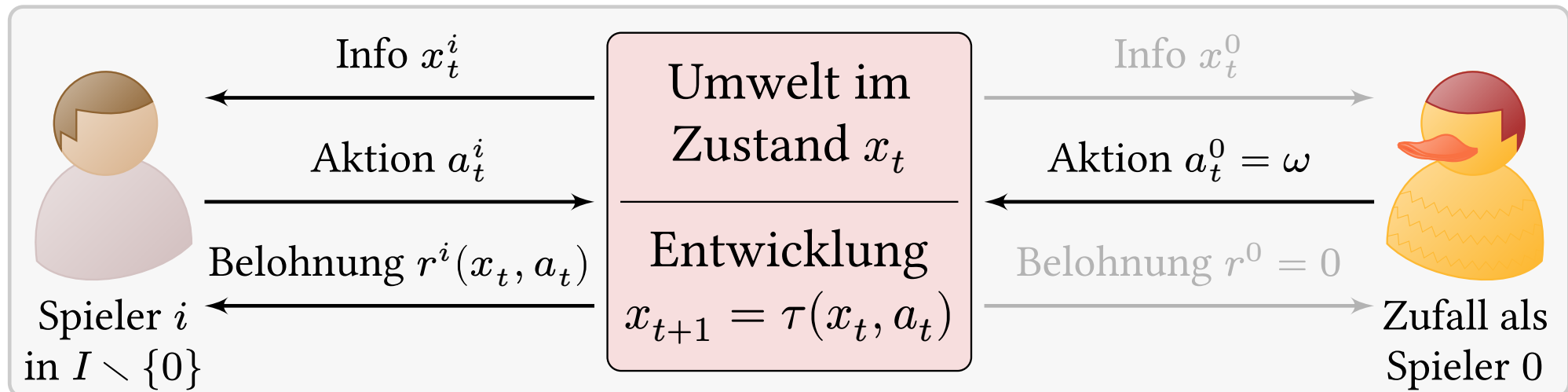
Dynamisches System ohne Steuerung: *Markov reward process* (MRP)Dynamisches System mit Steuerung: *Markov decision process* (MDP)

Alice will ihren Gesamtnutzen $u = (1 - \delta) \sum_t \delta^t r(x_t, a_t)$ maximieren!

Dynamisches System mit Steuerung durch zwei Spieler: Markov-Spiel

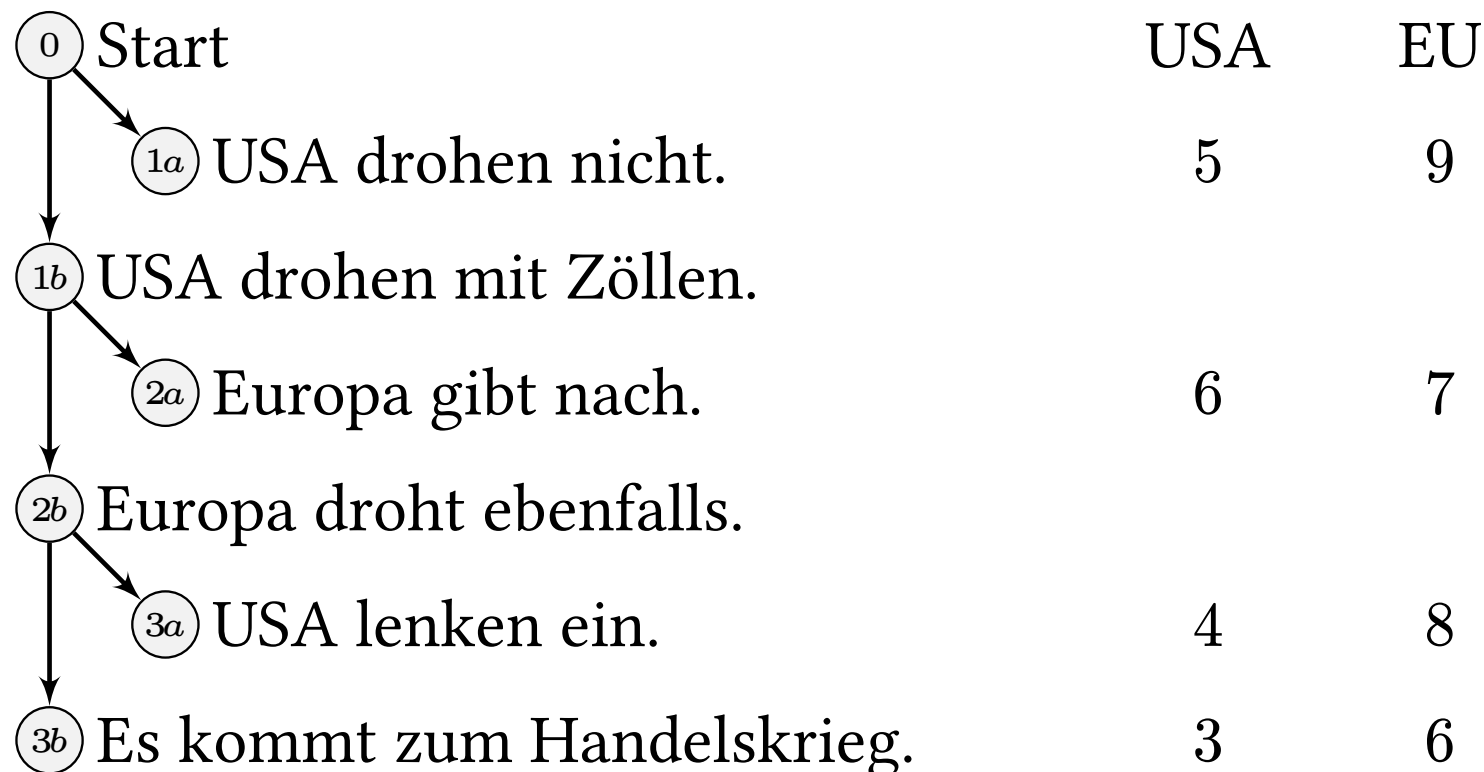


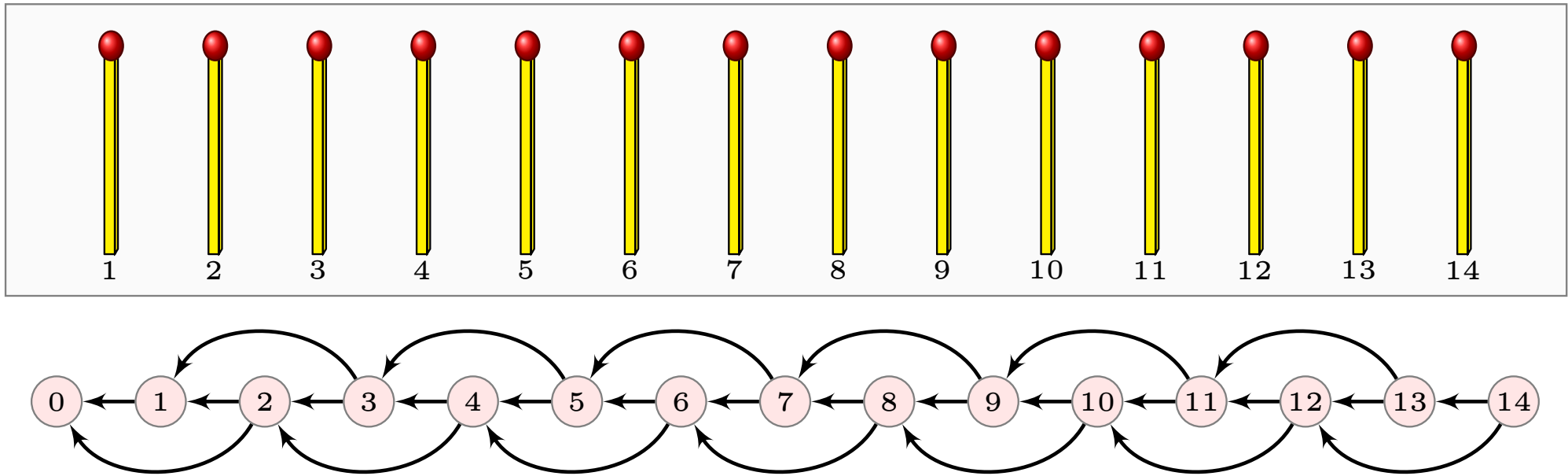
Steuerung durch mehrere Spieler und Zufall: Markov-Spiel (MMDP)



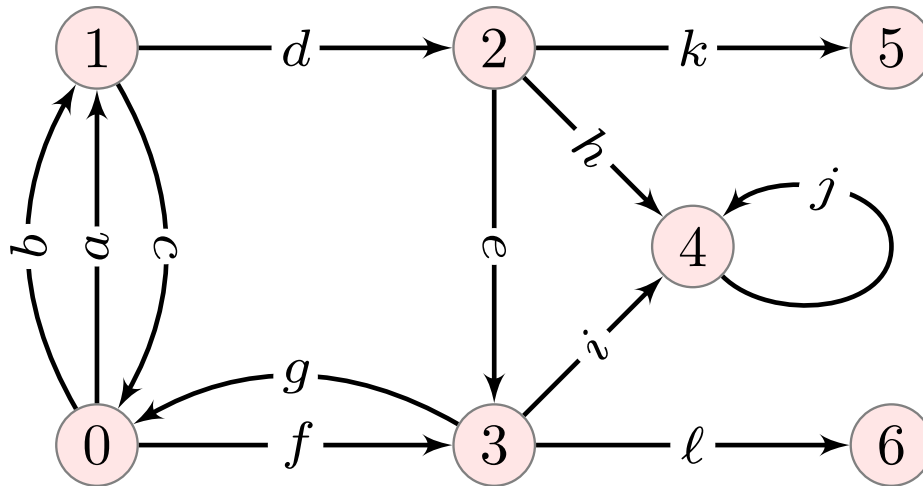
Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Ein dynamisches Spiel können wir als einen Graphen darstellen:





Was genau ist ein Graph?



$$X = \{0, 1, \dots, 6\}$$

$$A = \{a, b, \dots, \ell\}$$

$$(\sigma, \tau) : a \mapsto (0, 1)$$

$$b \mapsto (0, 1)$$

...

$$\ell \mapsto (3, 6)$$

Definition B1A: gerichteter Multigraph $\Gamma = (\Gamma_0 \rightrightarrows \Gamma_1)$, kurz Graph

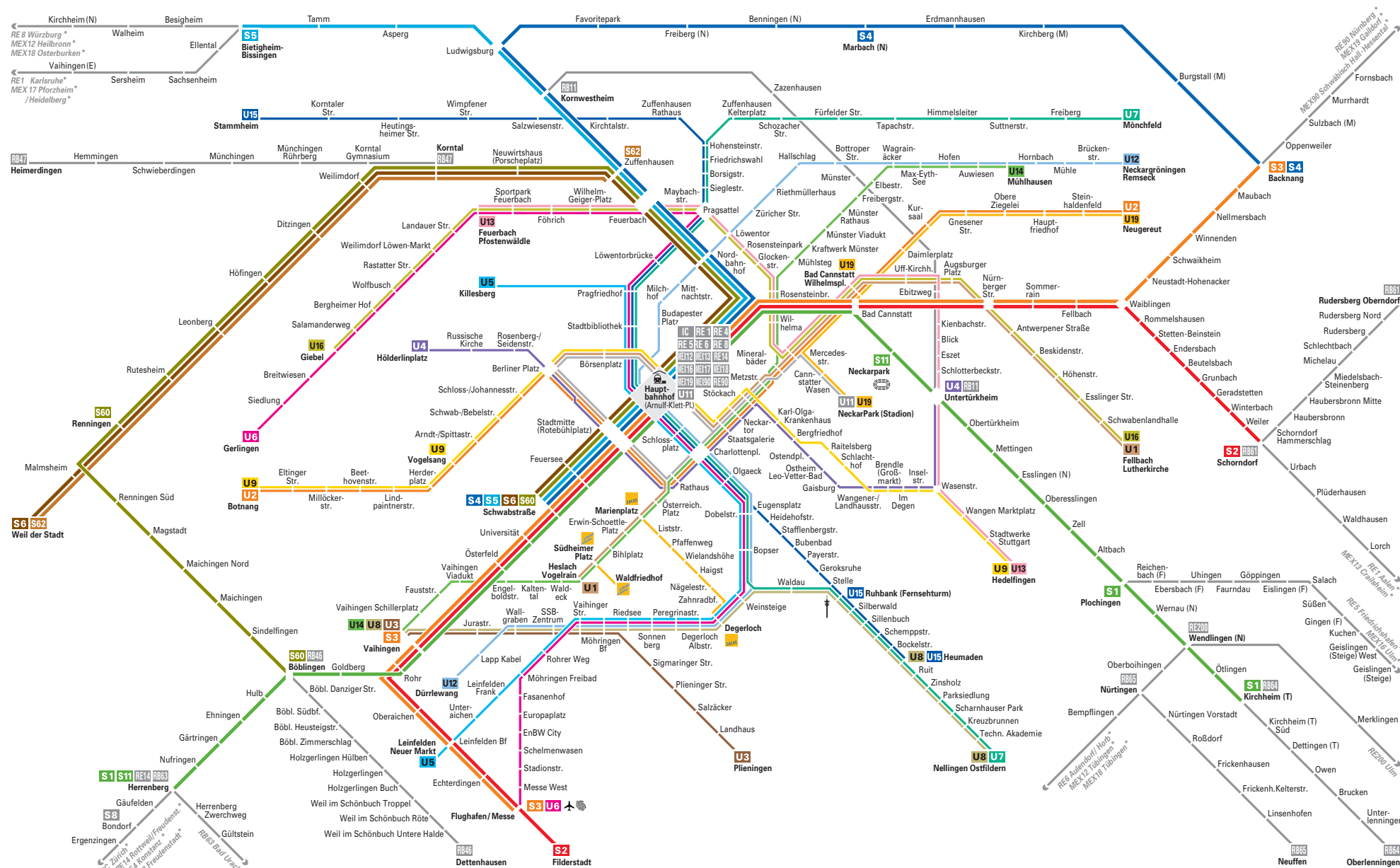
Ein **Graph** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ besteht aus einer Eckenmenge $\Gamma_0 = X$ [vertices], einer Kantenmenge $\Gamma_1 = A$ [edges], sowie Randabbildungen $\sigma, \tau : A \rightarrow X$ [boundary maps], die jeder Kante $a \in A$ ihren Start $\sigma(a) \in X$ [source] und ihr Ziel $\tau(a) \in X$ [target] zuordnen.

Eine Kante $a \in A$ von $\sigma a = x$ nach $\tau a = y$ schreiben wir kurz $a : x \rightarrow y$ oder $x \xrightarrow{a} y$ und ebenso Wege $w = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \rightarrow x_n) \in \Gamma_n \subseteq \Gamma_*$. Der Graph Γ heißt **artinsch**, wenn er keine unendlichen Wege enthält, und **lokal-endlich** in $x \in X$, wenn die Menge $\{a : x \rightarrow y\}$ endlich ist.

Alltägliche Beispiele für Graphen

B113

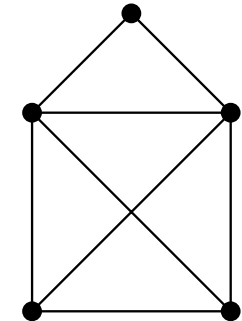
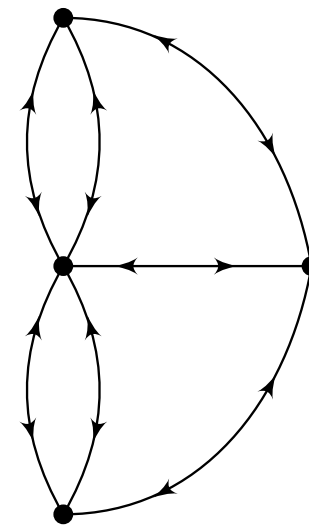
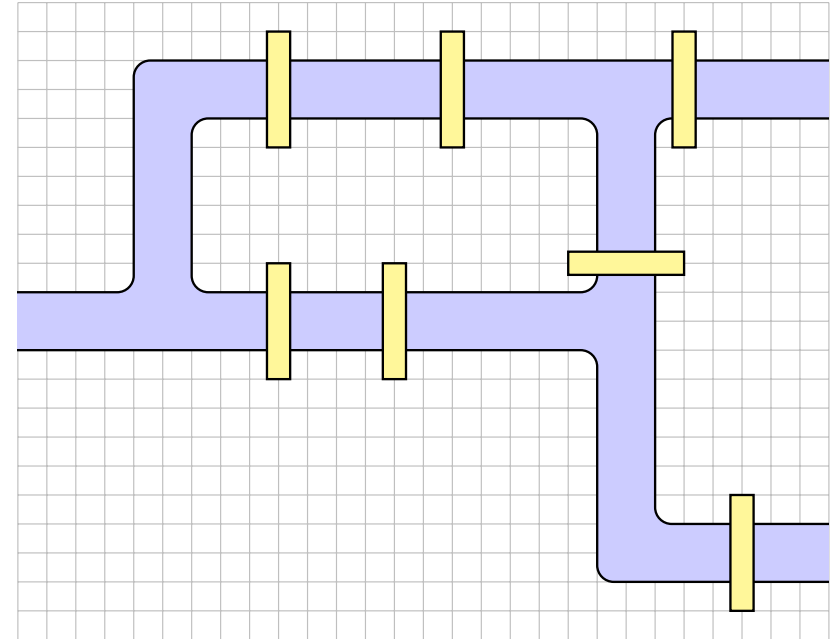
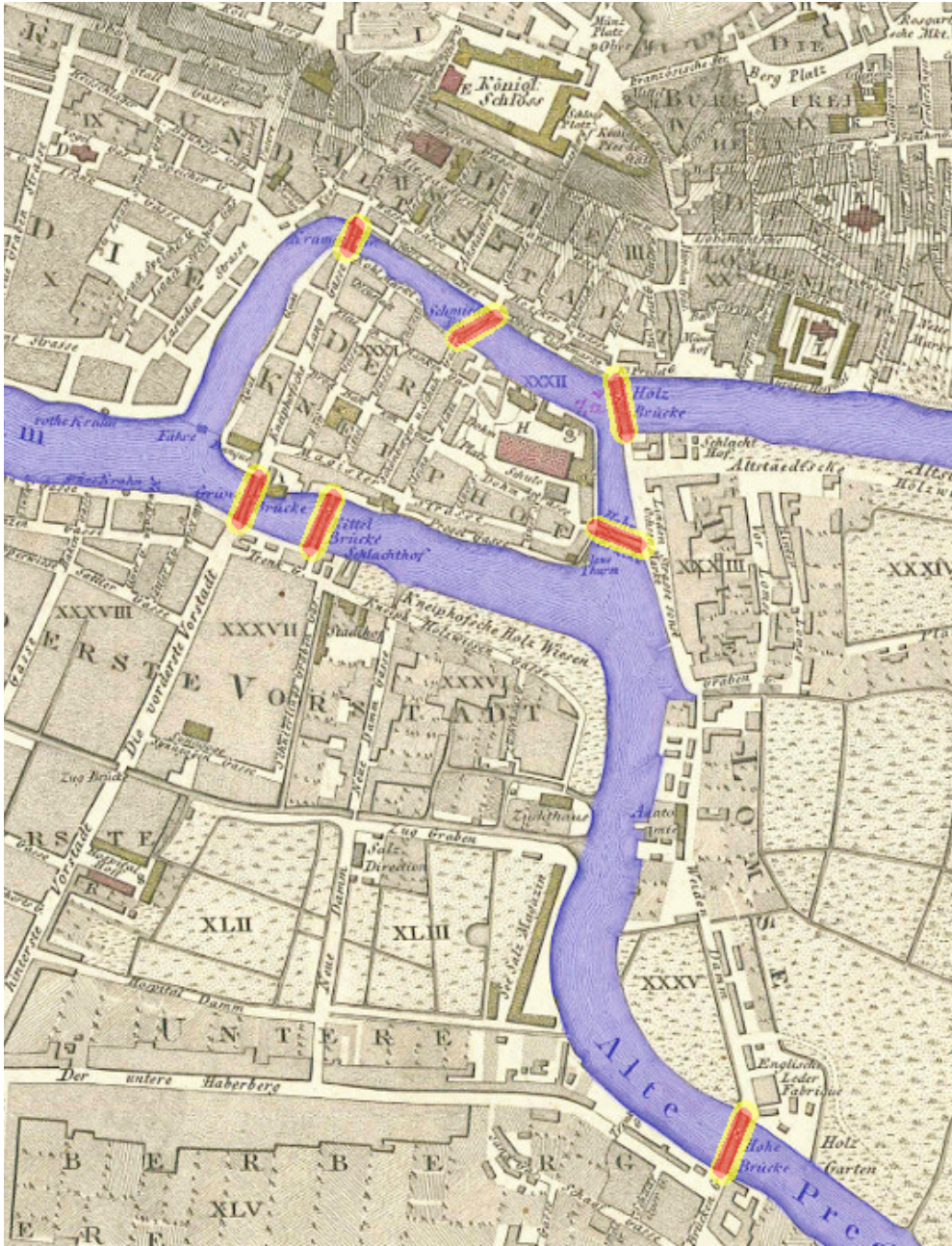
Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.



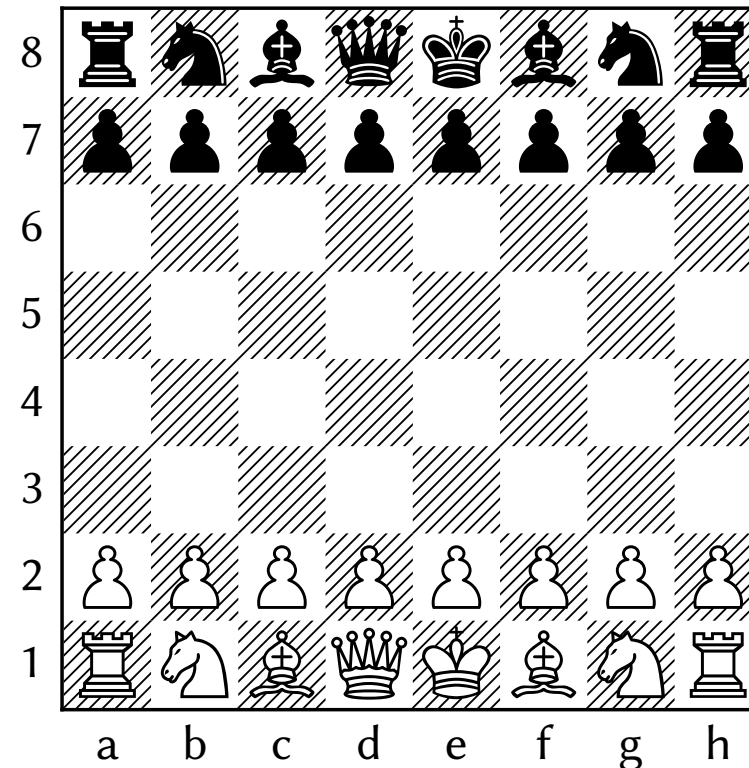
Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Historischer Ursprung der Graphentheorie

Graphentheorie entsteht 1736 aus dem Königsberger Brückenproblem:



Hat Schach eine Gewinnstrategie? (Zermelo 1912)



Die Relation $\rightarrow$ auf der Zustandsmenge X bezeichne legale Züge $s \rightarrow t$.
Sie erlaubt keine unendlichen Zugfolgen $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \dots$

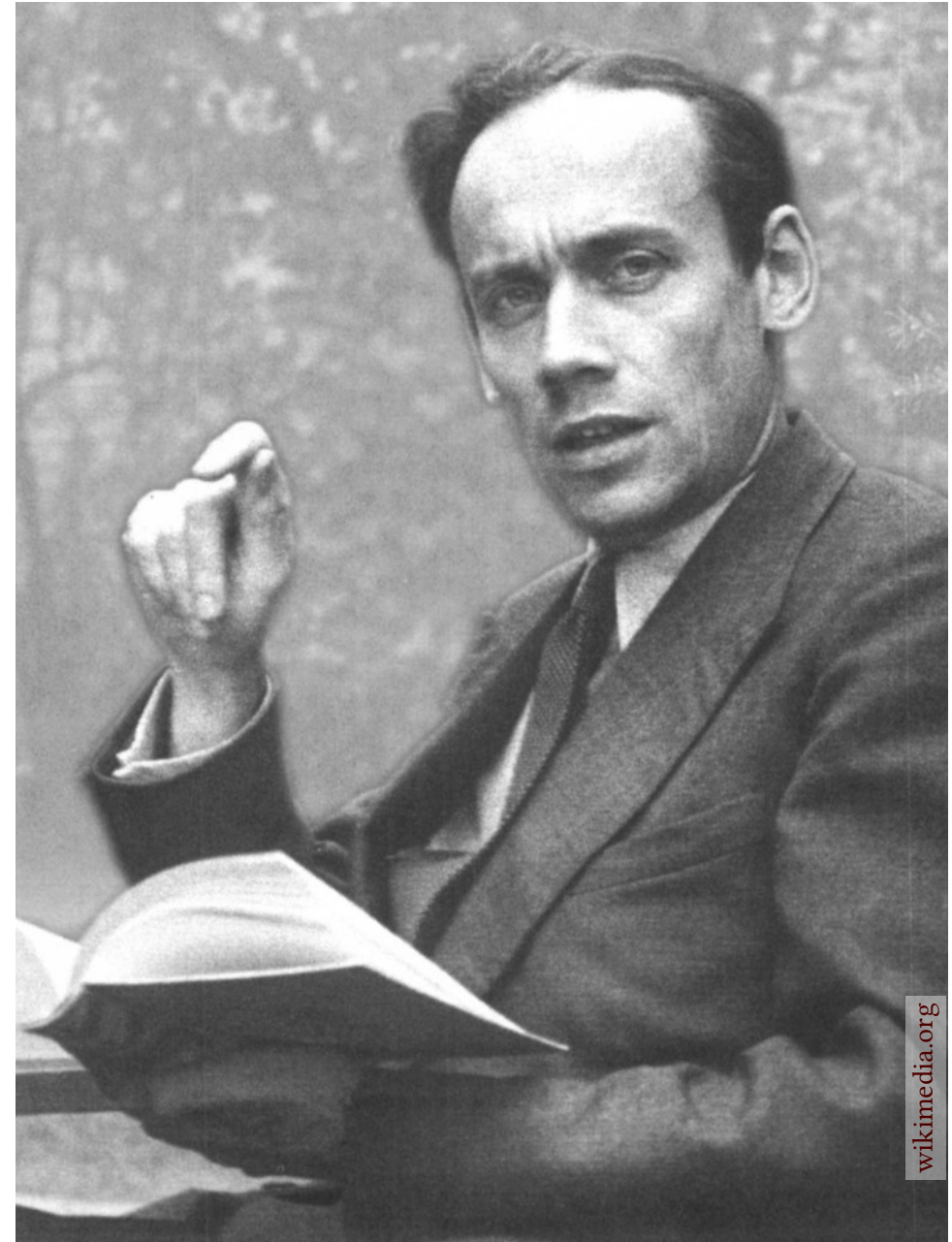
Jeder *Endzustand* t ist determiniert: Der Ziehende gewinnt, $u(t) := +1$,
oder verliert, $u(t) := -1$, oder es endet unentschieden, $u(t) := 0$.

Jeder *aktive Zustand* ist determiniert durch $u(s) := -\min\{u(t) \mid s \rightarrow t\}$.

😊 Insbesondere ist der Startzustand determiniert!



Emmy Noether (1882–1935)



Emil Artin (1898–1962)

Artinsche Graphen und noethersche Induktion

Sei (X, R) ein einfacher Graph, also eine Menge X mit Relation $R \subseteq X^2$. Statt $(s, t) \in R$ oder $s R t$ schreiben wir suggestiv $s \rightarrow t$ für „ s über t “.

Definition B1D: artinsch aka wohlfundiert

Ein **unendlicher Abstieg** ist eine Kette $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3 \rightarrow \dots$.

Wir nennen $(X, \rightarrow)$ **artinsch**, falls es keinen unendlichen Abstieg gibt.

Beispiel: $(\mathbb{N}, >)$ ist artinsch, nicht jedoch $(\mathbb{Z}, >)$, ebenso wenig $([0, 1], >)$.

Satz B1E: noethersche Induktion

Sei $(X, \rightarrow)$ artinsch. Um für jedes $s \in X$ die Aussage $A(s)$ zu beweisen, genügt der Induktionsschritt: Gilt $A(t)$ für alle $t \leftarrow s$, so folgt $A(s)$.

Beweis: Angenommen, es existiert ein Gegenbeispiel $s_0 \in X$ mit $\neg A(s_0)$. Per Induktionsschritt, contraponiert, existiert ein $s_1 \leftarrow s_0$ und $\neg A(s_1)$.

So fortfahrend erhalten wir $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$ Widerspruch!

QED



Dramatisch: Wir fürchten ein Gegenbeispiel $s_0 \in X$ mit $\neg A(s_0)$.

Gibt es ein kleineres $s_1 \leftarrow s_0$ mit $\neg A(s_1)$, so wählen wir dies.

So fortfahrend erreichen wir, da $(X, \rightarrow)$ artinsch ist, schließlich einen „kleinsten Verbrecher“ $s \in X$.

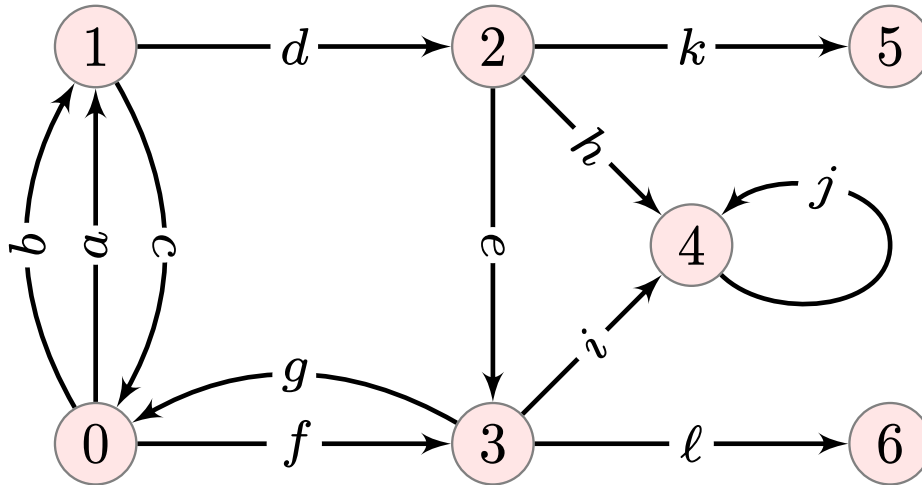
Für alle $t \leftarrow s$ gilt $A(t)$. Der Induktionsschritt garantiert $A(s)$. Es gibt gar keinen Verbrecher!

(I) Per *Induktion* B1E beweisen wir Aussagen $A(s)$ für alle $s \in X$.

(R) Per *Rekursion* B1F konstruieren wir Abbildungen $f : X \rightarrow Z$.

Beispiel: Es gibt $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(0) = 1$ und $f(n) = n \cdot f(n-1)$ für $n \geq 1$,
 $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $F(0) = F(1) = 1$ und $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 2$.

Spiele auf Graphen



$\tau : A \rightarrow X :$

$(0, a) \mapsto 1, \quad (2, h) \mapsto 4,$
 $(0, b) \mapsto 1, \quad (2, k) \mapsto 5,$
 $(0, f) \mapsto 3, \quad (3, g) \mapsto 0,$
 $(1, c) \mapsto 0, \quad (3, i) \mapsto 4,$
 $(1, d) \mapsto 2, \quad (3, \ell) \mapsto 6,$
 $(2, e) \mapsto 3, \quad (4, j) \mapsto 4.$

Definition B1: Graph als Spiel: Zustände, Aktionen, Strategien

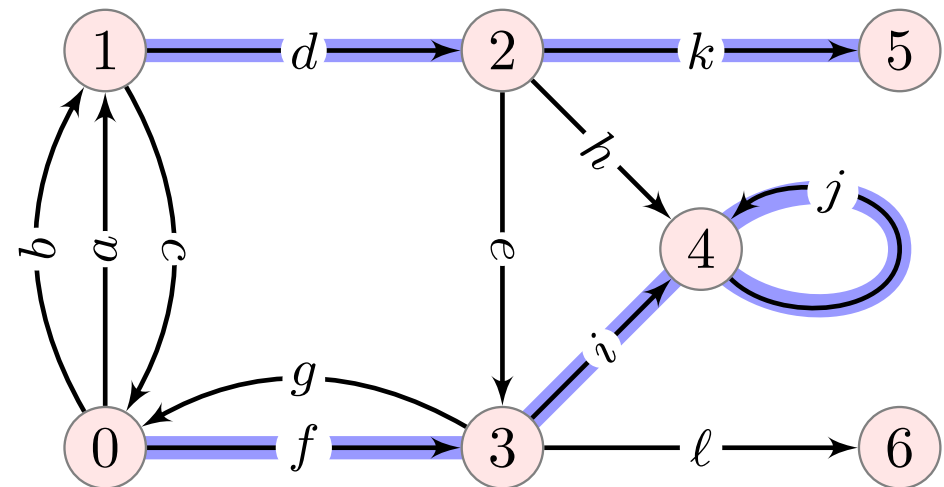
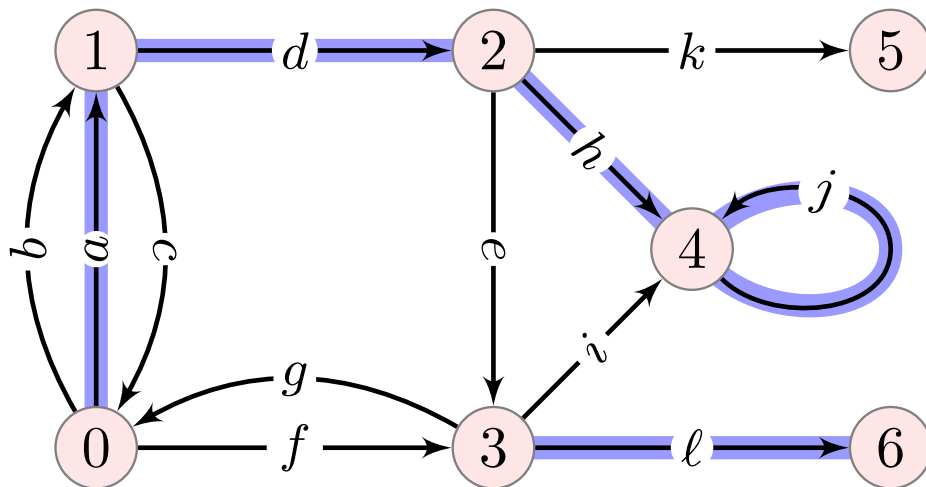
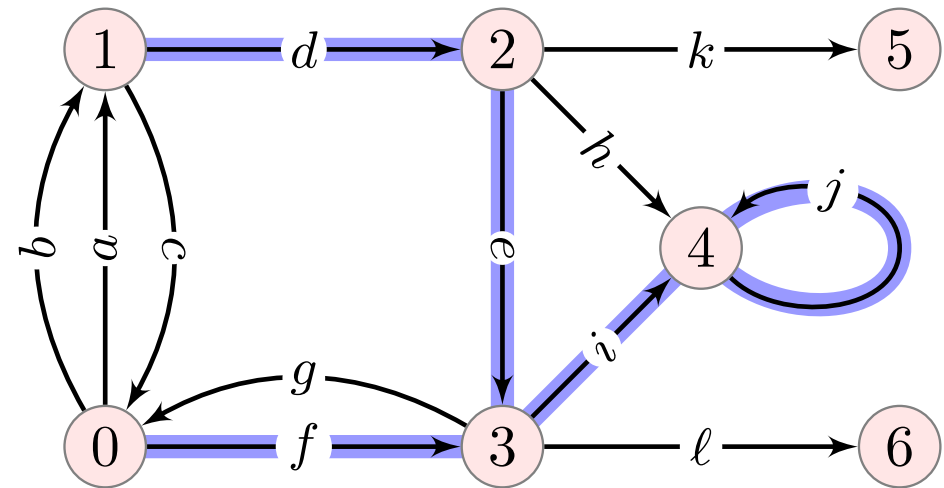
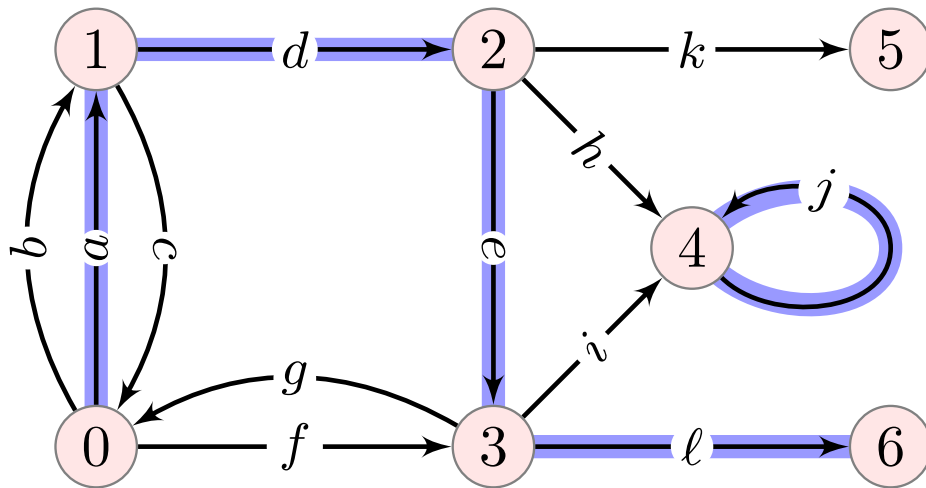
Im Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ interpretieren wir die Ecken $x \in X$ als **Zustände** und die Kanten $a \in A$ als **Aktionen**. Zur Vereinfachung gelte $A = \coprod_{x \in X} A_x = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ mit Start $\sigma = \text{pr}_1 : A \rightarrow X : (x, a) \mapsto x$ und der **Transition** $\tau : A \rightarrow X : (x, a) \mapsto y$, lokal $\tau_x : A_x \rightarrow X : a \mapsto y$.

Für Zustände $x \in X$ schreiben wir auch $x \in \Gamma$. Wir zerlegen diese in **innere Ecken / aktive Zustände** $X^\circ = \text{Im}(\sigma) = \{x \in X \mid A_x \neq \emptyset\}$ und **Blätter / terminale Zustände** $\partial X = X \setminus X^\circ = \{x \in X \mid A_x = \emptyset\}$.

Eine **Strategie** ist eine Abbildung $s : X^\circ \rightarrow A : x \mapsto a$ mit $\sigma \circ s = \text{id}_{X^\circ}$.

Die Strategiemenge ist $S(\Gamma) = \{s : X^\circ \rightarrow A \mid \sigma \circ s = \text{id}_{X^\circ}\} = \prod_{x \in X^\circ} A_x$.

Strategien auf Graphen



Aufgabe: Wie viele Strategien gibt es? **Lösung:** $|S| = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 54$.

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Ein Spiel bietet zudem Nutzen, Gewinn, Auszahlung, Belohnung, etc.

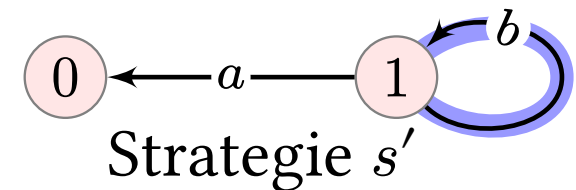
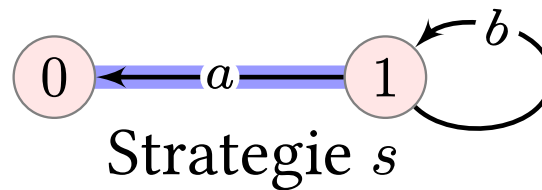
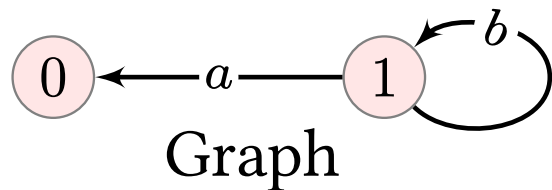
- 1 Auszahlung $v(x)$ beim Erreichen eines Endzustandes $x \in \partial X$.
- 2 Belohnung $r_x(a)$ beim Ausführen einer Aktion $a \in A_x$.

Im zweiten Fall müssen wir die Gesamtauszahlung festlegen, etwa

(konvergent) summiert:	$u = \sum_t r(a_t),$
mit $\delta \in [0, 1]$ diskontiert:	$u = \sum_t \delta^t r(a_t),$
diskontiert und normiert:	$u = (1 - \delta) \sum_t \delta^t r(a_t).$

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

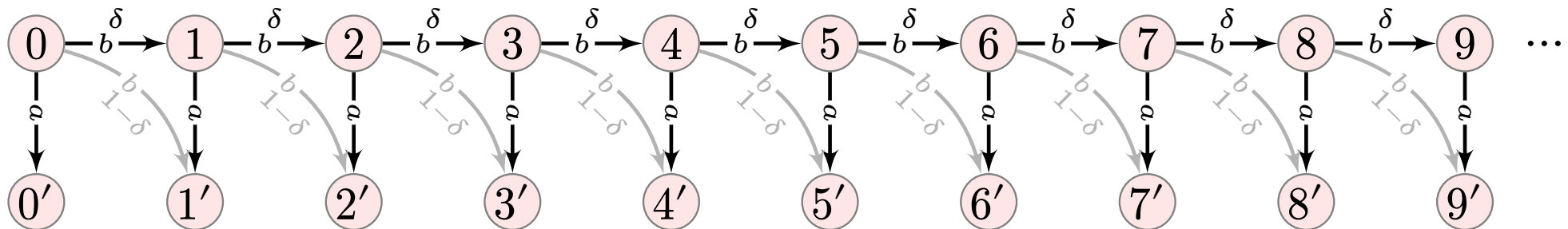
Aufgabe: Sie können Ihre Kuh entweder schlachten zum Marktpreis $M \in [2800, 3200]$ € oder melken für 60€. Sie stirbt friedlich mit Wkt 2%.



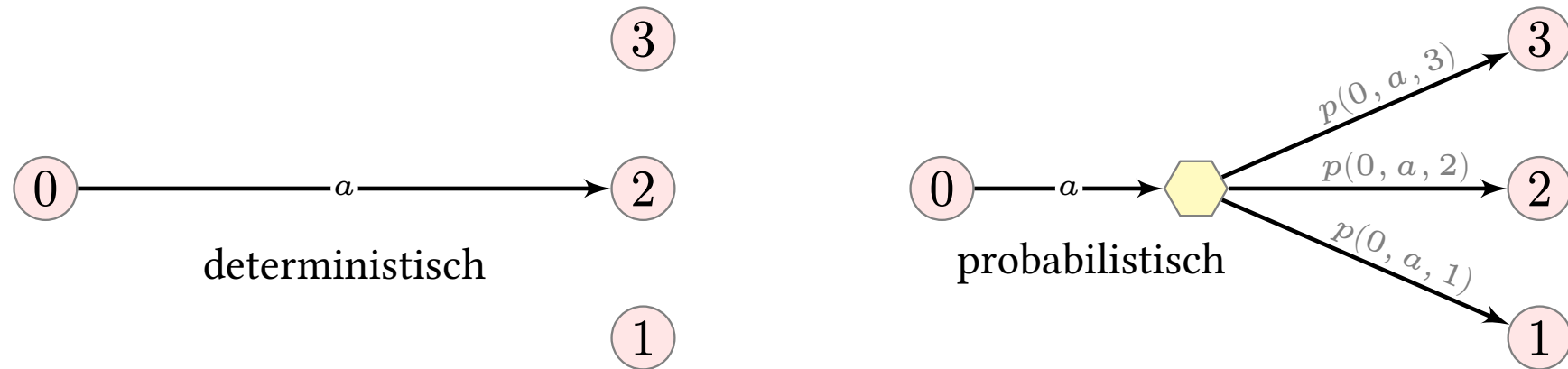
Lösung: (a) Der Gesamtnutzen ist $u_s(1) = r(a) = M$ gegenüber

$$u_{s'}(1) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r(b) = 60\text{€} \cdot (1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots) = \frac{60\text{€}}{1 - \delta} = 3000\text{€}.$$

(b) Es gibt mehrere Modelle zur gegebenen Fragestellung! Als Baum:



Von deterministischen zu probabilistischen Graphen



Definition B1j: Markov-Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$

Die Abbildung $\tau : A \rightarrow [X]$ ordnet jeder Aktion $a \in A_x$ eine WVerteilung der möglichen Zielzustände $y \in Y$ zu, also $\tau(x, a) = \sum_{y \in X} p(x, a, y) \cdot y$.

Rückwärtsinduktion zur erwarteten Auszahlung

Satz B1k: rekursive Berechnung der erwarteten Auszahlung

(A) Das Markov-Spiel (Γ, r, v) sei artinsch.

(B) Jeder Träger $\text{supp } \tau(x, a) = \{y \in X \mid p(x, a, y) > 0\}$ sei endlich.

Zu jeder Strategie $s \in S(\Gamma)$ ist die **erwartete Auszahlung** $u_s(x)$ endlich.
Wir erhalten $u = u_s : X \rightarrow \mathbb{R}$ rekursiv durch die **Erwartungsgleichung**

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für jeden Endzustand } x \in \partial X, \text{ sonst} \\ \underbrace{\sum_{y \in X} p(x, s(x), y) [r(x, s(x), y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton-Funktion } H(x, s(x), u)} \end{cases} .$$

Satz B1L: Bellman–Gleichung und optimale Strategien

(A) Das Markov–Spiel (Γ, r, v) sei artinsch und zudem lokal-endlich.

(B) Jeder Träger $\text{supp } \tau(x, a) = \{y \in X \mid p(x, a, y) > 0\}$ sei endlich.

(1) Die **optimale Auszahlung** $u_*(x) = \sup_{s \in S(\Gamma)} u_s(x)$ ist endlich.

Wir erhalten $u = u_* : X \rightarrow \mathbb{R}$ rekursiv durch die **Bellman–Gleichung**

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für jeden Endzustand } x \in \partial X, \text{ sonst} \\ \max_{a \in A_x} \underbrace{\sum_{y \in X} p(x, a, y) [r(x, a, y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton-Funktion } H(x, a, u)}. \end{cases}$$

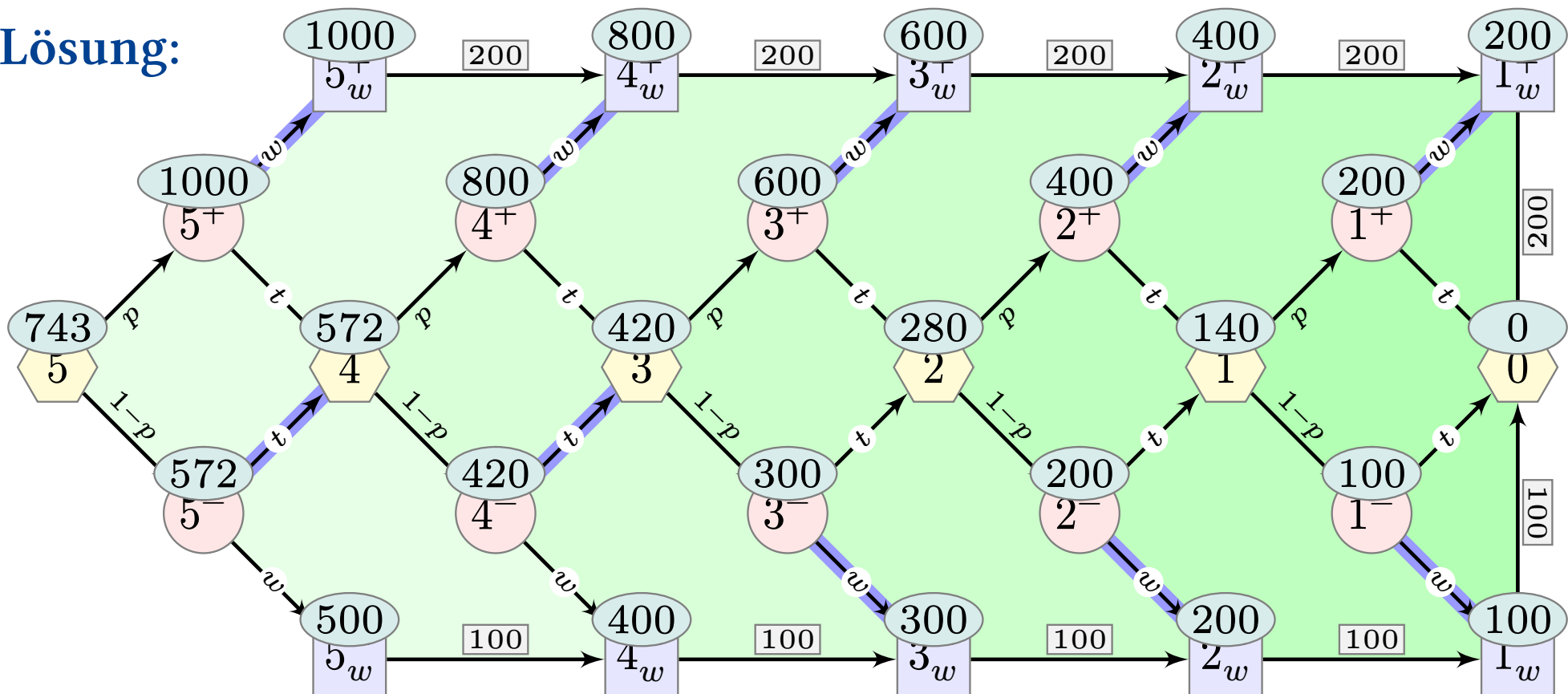
(2) Genau dann ist $s \in S(\Gamma)$ eine optimale Strategie, mit $u_s = u_*$, wenn $s(x) \in \text{Arg max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$ für jeden Zustand $x \in X^\circ$ gilt.

Optimal entscheiden: work or travel?

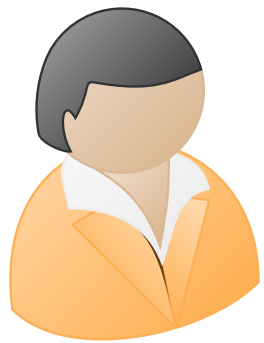
Aufgabe: Ihr Work & Travel endet in 5 Wochen. Zu Beginn jeder Woche erhalten Sie ein Jobangebot: mit Wkt $p = 0.4$ ist es gut, für 200€, mit Wkt $1 - p = 0.6$ schlecht, für 100€. Wenn Sie es annehmen, bleiben Sie für die restliche Zeit dabei. Andernfalls reisen Sie eine Woche umher.

Formulieren Sie dies als Graph. Wie viele Strategien gibt es? Welche davon sind optimal profitabel? Welches Einkommen erwarten Sie?

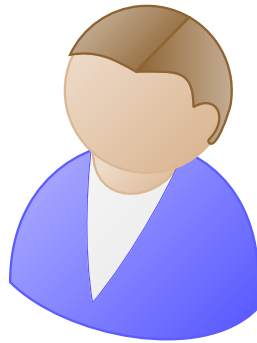
Lösung:



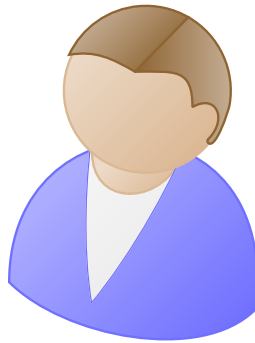
Marriage problem: When to stop dating and start getting married?



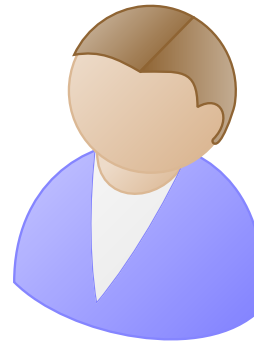
Alice



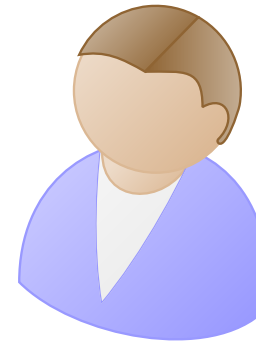
1



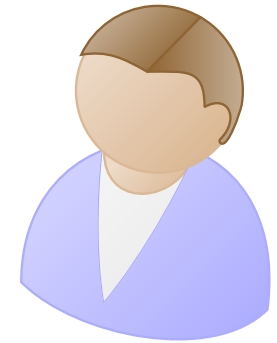
2



3



...



n

Alice begegnet im Laufe ihres Lebens n potentiellen Ehemännern.

Bei Kandidat $k = 1, 2, 3, \dots, n$ stellt sie die Eignung $X_k \in [0, 1]$ fest.

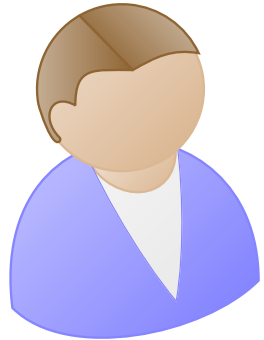
Er verliebt sich in die bezaubernde Alice, sie kann ihn nun heiraten oder zurückweisen. Diese Entscheidung ist in jedem Falle endgültig.

Aufgabe: Wie anspruchsvoll soll Alice sein? Was ist optimal?

Welche Eignung ihres Ehepartners kann Alice maximal erwarten?

Optimales Stoppen: das Sekretärinnen-Problem

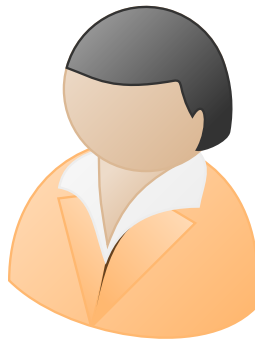
Secretary problem: When to stop interviewing and start hiring?



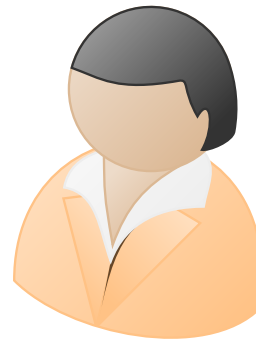
Bob



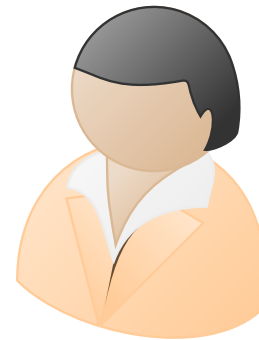
1



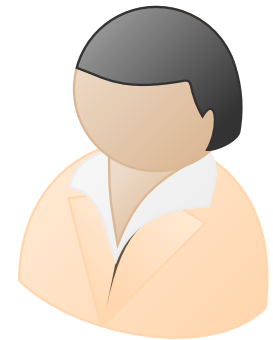
2



3



...



n

Bob stellt eine Sekretärin (w/m/d) ein. Dazu sind n Bewerber:innen eingeladen, in zufälliger Reihenfolge. Bob sucht die *beste* Kandidatin. Im Interview mit Kandidatin k kann er nur feststellen, ob sie besser ist als alle vorigen. Er kann sie sofort einstellen oder ihr definitiv absagen.

Aufgabe: Wie soll Bob vorgehen? Wie maximiert er seine Trefferwkt?

Die 37%-Regel: Interviewe zunächst $\lceil n/e \rceil$ Kandidatinnen mit Absage; dann wähle die nächste Kandidatin, die besser ist als alle vorigen.

Optimales Stoppen: das Sekretärinnen-Problem

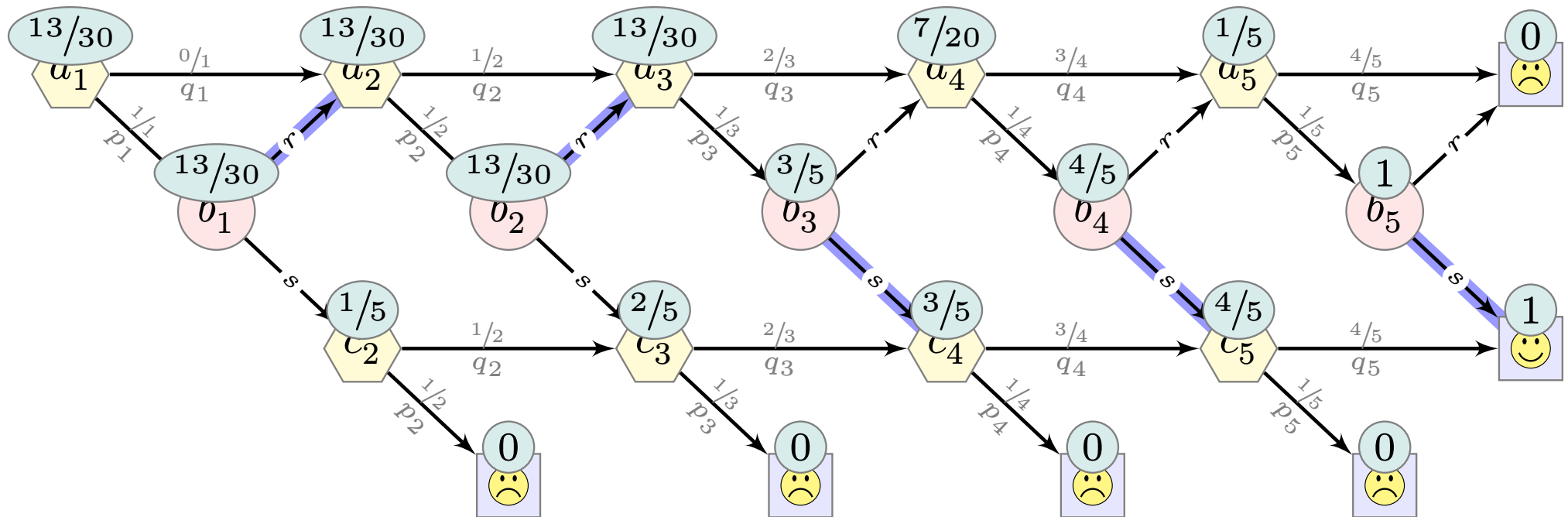
Problemstellung: Sie bekommen n Angebote zu Zeiten $t = 1, 2, \dots, n$. Setze $X_t = 1$, falls Angebot t besser ist als alle vorigen, sonst $X_t = 0$. Sie können solch ein Angebot entweder annehmen ($s = \text{select \& stop}$) oder dieses Angebot ein für alle Mal ablehnen ($r = \text{reject \& resume}$). Sie wollen unter allen Angeboten das *beste* auswählen, also das letzte Angebot t mit $X_t = 1$ annehmen.

- (a) Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ seien unabhängig mit den Wkten $\mathbf{P}(X_t=1) = p_t \in [0, 1]$ und $\mathbf{P}(X_t=0) = q_t = 1 - p_t$.
- (b) Speziell betrachten wir n unterschiedlich gute Angebote in zufälliger Reihenfolge, mit Gleichverteilung der $n!$ Anordnungen, also $p_t = 1/t$.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie dieses Spiel als einen Markov-Graphen. (2) Was ist die beste Strategie? (3) Was ist die optimale Erfolgswkt?

Optimales Stoppen: der Bruss-Algorithmus

Aufgabe: Untersuchen Sie den Fall $n = 5$ mit $p_k = 1/k$ und $q_k = 1 - p_k$.



Aufgabe: Wie gelingt dies allgemein? Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz B2B: Sum the odds to one and stop, Bruss 2000

Sei $s \in \{1, \dots, n\}$ der größte Index mit $R_s := \sum_{k=s}^n p_k/q_k \geq 1$. Dann ist folgende Strategie optimal: Wähle das erste Angebot $k \geq s$ mit $X_k = 1$. Die optimale Gewinnwkt ist dabei gleich $R_s Q_s$ mit $Q_s = q_s \cdots q_n$.

Die 37%-Regel: Für $p_k = 1/k$ gilt $s \gtrsim n/e$ und $R_s Q_s \gtrsim 1/e \gtrsim 0.367$.



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Alice gibt verdeckt ihre Zahl $a \in \mathbb{N}$ an die Spielleitung, ebenso Bob seine Zahl $b \in \mathbb{N}$. Die Spielleitung verkündet p und q mit $a + b \in \{p < q\} \subseteq \mathbb{N}$.

Die Spielleitung fragt Alice, ob sie den Wert b zweifelsfrei herleiten kann. Falls ja, so gewinnt Alice. Falls nicht, so fragt die Spielleitung Bob, ob er den Wert a zweifelsfrei herleiten kann. Falls ja, so gewinnt Bob.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Spiel nach endlich vielen Runden endet.

Gemeinsames Wissen ist zunächst $0 \leq a \leq q$ und $0 \leq b \leq q$.

Achtsamkeit: Alice kennt a , weiß also $b \in \{p - a, q - a\}$ sowie $u \leq b \leq v$.

(1a) Gilt $p - a < u$, so kann Alice $b = q - a$ herleiten und antwortet „Ja“.

(1b) Gilt $q - a > v$, so kann Alice $b = p - a$ herleiten und antwortet „Ja“.

Bei „Nein“ gilt somit $p - a \geq u$ und $q - a \leq v$, also $q - v \leq a \leq p - u$.

Zahlenbeispiel: Wir betrachten $a = 5$ und $b = 8$ sowie $p = 13$ und $q = 17$.

1. Alice weiß $a = 5$, also $b \in \{8, 12\}$, sowie $0 \leq b \leq 17$, antwortet „Nein“.
2. Bob weiß $b = 8$, also $a \in \{5, 9\}$, sowie $0 \leq a \leq 13$, antwortet „Nein“.
3. Alice weiß $a = 5$, also $b \in \{8, 12\}$, sowie $4 \leq b \leq 13$, antwortet „Nein“.
4. Bob weiß $b = 8$, also $a \in \{5, 9\}$, sowie $4 \leq a \leq 9$, antwortet „Nein“.
5. Alice weiß $a = 5$, also $b \in \{8, 12\}$, sowie $8 \leq b \leq 9$, antwortet „Ja“.

Kapitel C

Kombinatorische Spieltheorie und der Satz von Sprague–Grundy

Teach me how to lose a winning match.

Shakespeare, *Romeo and Juliet* 3.2.12

You got to lose to know how to win.

Aerosmith, *Dream On* (1973)

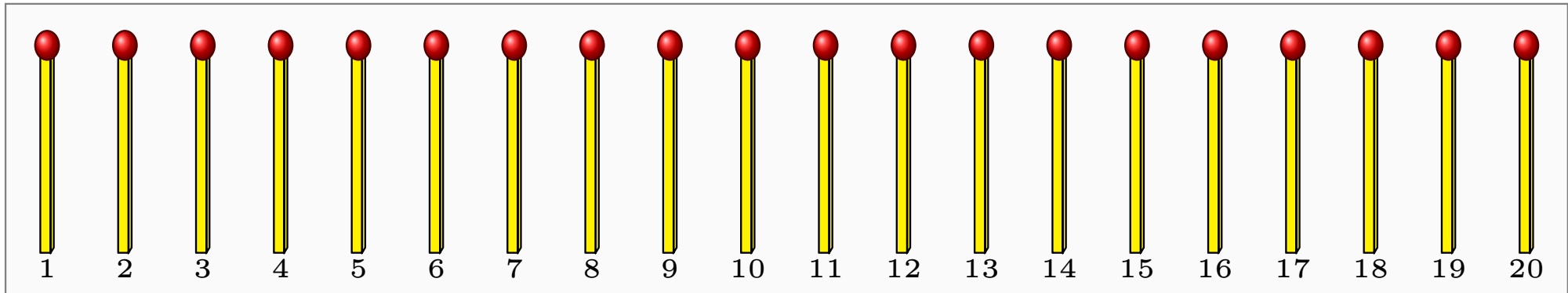
*Playing with Chevalley one never won a game. If one had a winning position,
Chevalley would sweep the pieces off and start a new game.*

If one had a losing position, Chevalley insisted that the game be played out.

Richard Bellman (1920–1984), *Eye of the Hurricane* (1984)

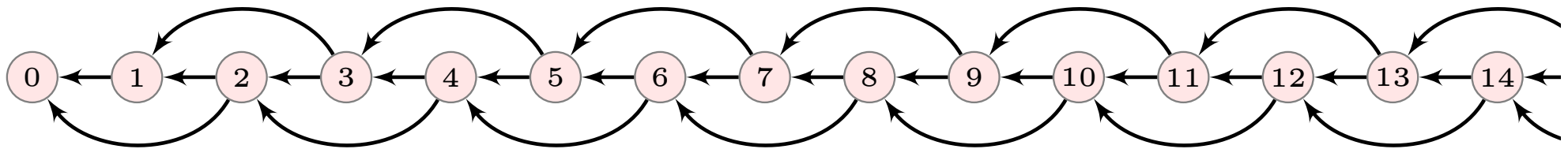
- 1 Neutrale kombinatorische Spiele
- 2 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
- 3 Mengen und Logik als Spiele

Nimm eins oder zwei!



Beide Spieler ziehen abwechselnd, jeder entfernt ein oder zwei Hölzer. Normalspiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Aufgabe: Übersetzen Sie die Spielregeln in einen Spielgraphen. **Lösung:**



Nimm eins oder zwei! – Wer gewinnt und wie?

Aufgabe: Berechnen Sie für jede Position $x \in X$ Gewinn 1 oder Verlust 0.

Normalspiel, $\nu : X \rightarrow \{0, 1\}$: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \partial X, \text{ sonst} \\ 1 - \min\{\nu(y) \mid x \rightarrow y\}. \end{cases}$$

Noch informativer als ν erweist sich die **Sprague–Grundy–Funktion**:

$$\begin{aligned} \gamma : X &\rightarrow \mathbb{N} : \gamma(x) = \text{mex}\{\gamma(y) \mid x \rightarrow y\}, \\ \text{mex} : \{S \subseteq \mathbb{N}\} &\rightarrow \mathbb{N} : S \mapsto \min(\mathbb{N} \setminus S). \end{aligned}$$

Beispiele: $\text{mex}\{0, 1, 3, 5\} = 2$, $\text{mex}\{0\} = 1$, $\text{mex}\{1, 2, 3\} = 0$, $\text{mex}\{\} = 0$.

Nimm eins oder zwei! – naiv implementiert

Lösung: (0) Wir berechnen $\nu : X \rightarrow \{0, 1\}$ rekursiv gemäß Definition:

```
1 def nu(x):  
2     if x == 0: return 0    # Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.  
3     return 1 - min( nu(y) for y in range(x-2, x) if y >= 0 )
```

Analyse: (a) Was ist gut / schlecht an dieser Implementierung?

(b) Bestimmen Sie die Anzahl $f(x)$ der Funktionsaufrufe!

Antwort: (b) Wir finden $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ sowie für alle $x \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ rekursiv $f(x) = f(x-1) + f(x-2)$. Dies ist die Fibonacci-Folge!

(a) Der Aufwand wächst exponentiell! Explizit gilt die Binet-Formel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^x \right] \approx 0.447 \cdot 1.618^x$$

Nimm eins oder zwei! – mathematisch optimiert

Lösung: (1) Wir rechnen rekursiv, geschickt sortiert *bottom-up*:

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\nu=$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$\gamma=$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

(2) Wie lautet die allgemeine Regel?

Satz C1A: einzeliges Nim mit Zugoptionen $S = \{1, 2, \dots, n-1\}$, $n \geq 2$

Normalspiel: Genau dann ist x eine Verlustposition, wenn $x \bmod n = 0$.
Die Sprague–Grundy–Funktion des Spiels ist $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x \bmod n$.

Wie teilen Bonnie und Clyde ihre Beute?

Auf dem Tisch liegt die Beute von $n \in \mathbb{N}$ Münzen, davon nimmt Bonnie $b \in \{1, 2, 4\}$ Münzen weg, dann nimmt Clyde $c \in \{1, 3, 4\}$ Münzen weg, und dann abwechselnd immer so weiter. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Aufgabe: Wer von den beiden kann durch fehlerfreies Spiel gewinnen?

Lösung: Wir berechnen den Gewinn rekursiv:

Ab $n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	2025
B beginnt	C	B	B	B	B	C	B	B	B	B	...	C
C beginnt	B	C	B	C	C	B	C	B	C	C	...	B



Bonnie and Clyde (1967), Warner Bros



*Dynamische Programmierung
= Rekursion + Memoisation*

*Allgemeines Muster + Induktion
= effiziente Lösungsformel*



Neutrale Spiele und Rückwärtsinduktion

Definition C1B: neutrales Spiel

Ein **neutrales Spiel** (G, v) mit konstanter Summe $c \in \mathbb{R}$ besteht aus einem artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit Auszahlung $v : \partial X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Beide Spieler ziehen abwechselnd gemäß den Kanten A des Graphen. In jedem terminalen Zustand $x \in \partial X$ erhält der Ziehende schließlich die Auszahlung $v(x)$ und der Wartende das Komplement $c - v(x)$.

Satz C1B: Gewinnfunktion durch Rückwärtsinduktion

Dazu existiert genau eine **Gewinnfunktion** $u : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $u|_{\partial X} = v$ und

$$u(x) \stackrel{!}{=} \sup_{x \rightarrow y} [c - u(y)] = c - \inf_{x \rightarrow y} u(y)$$

Eine **Lösung** oder **optimale Strategie** s ordnet jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $s(x) = a : x \rightarrow y$ mit $u(x) = c - u(y)$ zu.

Was ist eine effiziente Lösung?

Definition C1c: Lösung, allgemein und polynomiell

Unter einer **polynomiellen Lösung** verstehen wir einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, der eine optimale Aktion $x \mapsto a$ berechnet.

Beispiel: Die Eingabe einer natürlichen Zahl messen wir in Bitlänge:

$$\text{len} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid a < 2^\ell\}$$

Wir betrachten einzeliges Nim mit Aktionen $a \in S = \{1, 2, \dots, n-1\}$:
Zu jedem Zustand $x \in \mathbb{N}$ erfordert die memoisierte Rekursion x Schritte,
ist also *exponentiell* in $\text{len}(x)$. Satz C1A bietet eine *polynomielle* Lösung:
Es genügt $a = x \bmod n$ zu berechnen.

Normalspiel und Sprague–Grundy–Funktion

Wir vereinfachen weiter und erlauben nur zwei mögliche Auszahlungen: entweder 0 für null / falsch / Niederlage oder 1 für eins / wahr / Gewinn. Die konstante Summe sei $c = 1$, also $u \mapsto 1 - u$ die logische Negation. Wir nennen dann (G, v) ein **neutrales kombinatorisches Spiel**.

Satz C1D: Normalspiel und Sprague–Grundy–Funktion

Auf dem artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ betrachten wir:

- Das **Misèrespiel** $(G, 1)$: Wer nicht mehr ziehen kann, gewinnt.
- Das **Normalspiel** $(G, 0)$: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

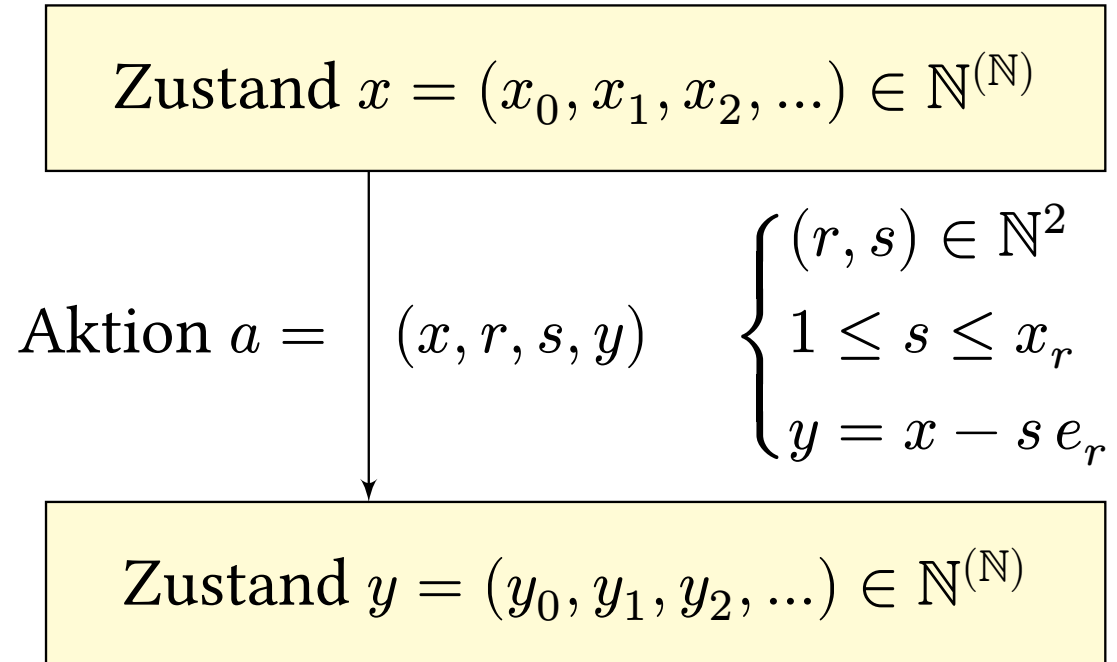
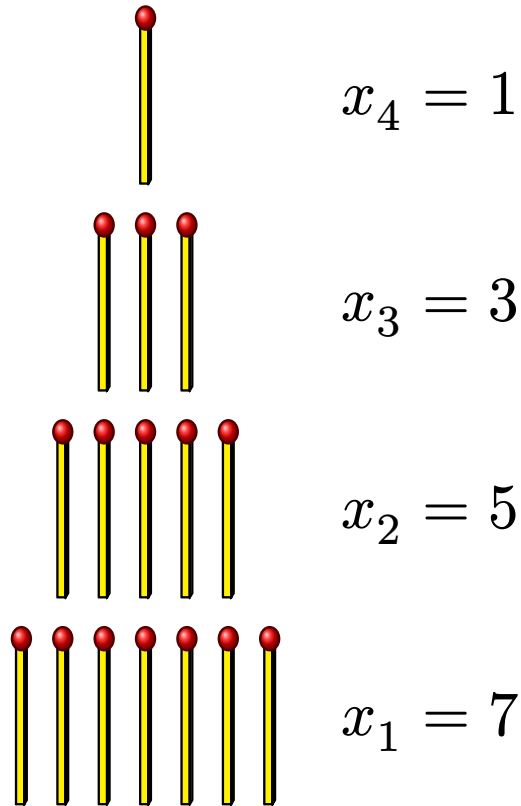
Hierzu existieren die eindeutigen Gewinnfunktionen $\mu, \nu : X \rightarrow \{0, 1\}$ mit den vorgegebenen Randwerten $\mu|_{\partial X} = 1$ und $\nu|_{\partial X} = 0$.

Ist G zudem lokal-endlich, so existiert die **Sprague–Grundy–Funktion**

$$\begin{aligned} \gamma : X &\rightarrow \mathbb{N} : \gamma(x) = \text{mex}\{\gamma(y) \mid x \rightarrow y\}, \\ \text{mex} : \{S \subseteq \mathbb{N}\} &\rightarrow \mathbb{N} : S \mapsto \min(\mathbb{N} \setminus S). \end{aligned}$$

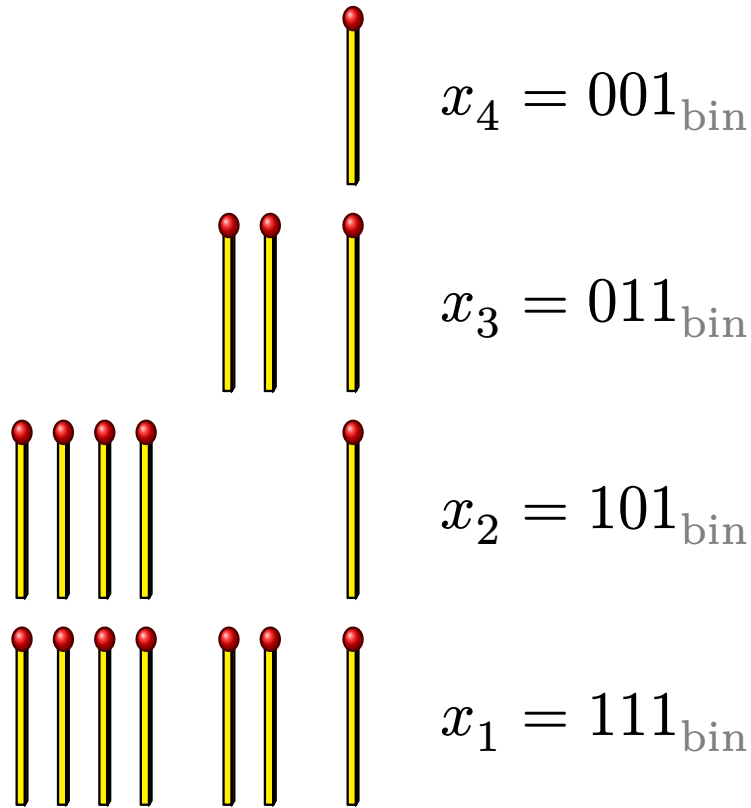
Es gilt $\nu = \gamma \wedge 1$, also $\nu(x) = 0$ gdw $\gamma(x) = 0$ und $\nu(x) = 1$ gdw $\gamma(x) \geq 1$.

Das Spiel Nim: Formalisierung als Graph



Aufgabe: Formulieren Sie dieses Spiel in Worten und als Graph.

Das Spiel Nim: effiziente Lösung nach Charles Bouton 1901



Wir entwickeln x_i im Binärsystem

$$x_i = \sum_{j=0}^m \langle x_i \rangle_j 2^j \quad \text{mit} \quad \langle x_i \rangle_j \in \{0, 1\}$$

und bilden die Spaltensumme

$$\langle s \rangle_j = \sum_{i=0}^n \langle x_i \rangle_j \text{ rem } 2.$$

Binäre Summe ohne Übertrag (XOR):

$$s = \sum_{j=0}^m \langle s \rangle_j 2^j =: x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n$$

Satz C1E: effiziente Lösung des Nim-Spiels, Bouton 1901

Im Normalspiel sind die Verlustpositionen x genau die Null-Positionen:

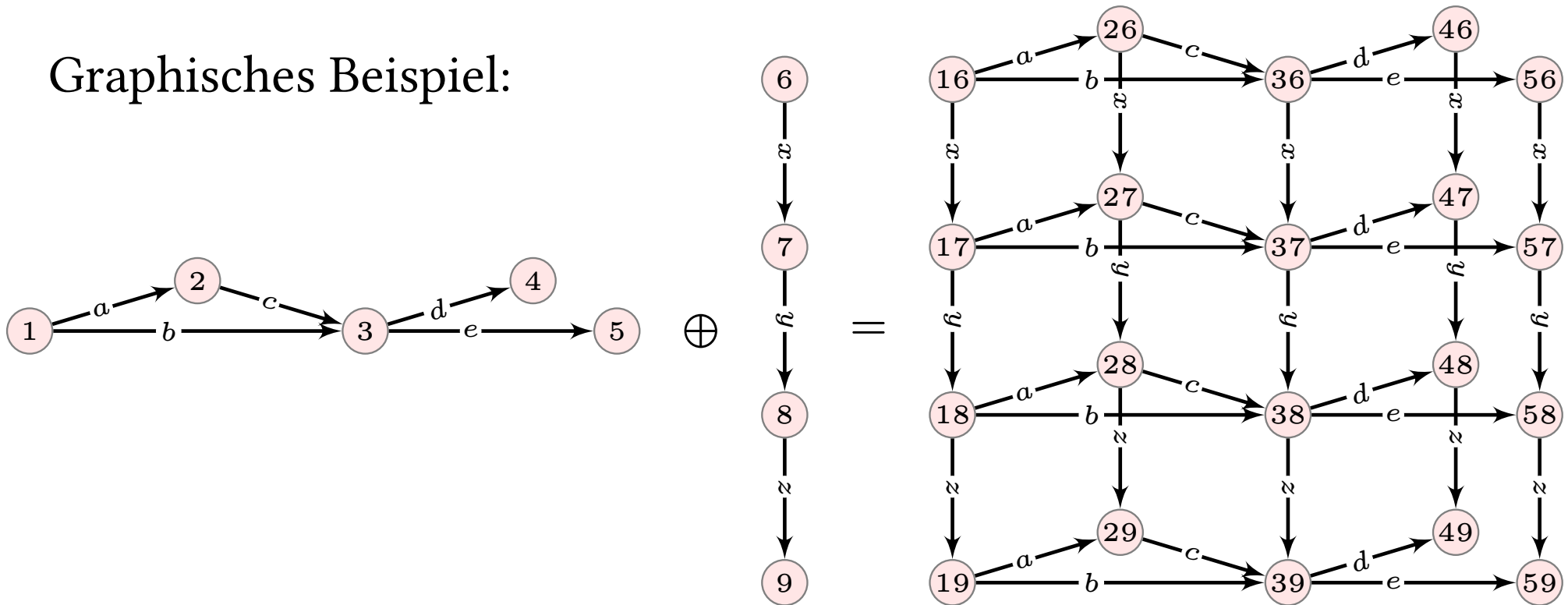
(0) Ist $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ eine Null-Position, also $x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n = 0$, so führt jeder Zug $x \rightarrow y$ in eine Nicht-Null-Position, $y_0 \oplus y_1 \oplus \dots \oplus y_n \neq 0$.

(1) Ist x eine Nicht-Null-Position, $x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n \neq 0$, so existiert ein Zug $x \rightarrow y$ in eine Null-Position, also $y_0 \oplus y_1 \oplus \dots \oplus y_n = 0$.

Summe von Spielen

Wir spielen mehrere Spiele G_i parallel, also gleichzeitig nebeneinander. Der ziehende Spieler darf sich aussuchen, in welchem Spiel G_i er zieht. Dies fassen wir zusammen zu einem gemeinsamen Spiel $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$.

Graphisches Beispiel:



Definition C1j: Produkt und Summe von Spielen

Gegeben sei eine Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen $G_i = (X_i, A_i, \sigma_i, \tau_i)$.
Ihr **Produkt** ist der Graph $P = \prod_{i \in I} G_i = (X, A, \sigma, \tau)$ mit

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : i \mapsto x_i \mid x_i \in X_i\},$$

$$A = \{(x, i, a_i, y) \mid x, y \in X, i \in I, a_i : x_i \rightarrow y_i, \forall j \neq i : x_j = y_j\}$$

sowie den Projektionen $\sigma(x, i, a_i, y) = x$ und $\tau(x, i, a_i, y) = y$.

Die **Summe** $S = \bigoplus_{i \in I} G_i = (X', A', \sigma', \tau')$ ist der volle Teilgraph $S \leq P$ der Zustände $x \in X$ mit endlichem Träger $\text{supp}(x) := \{i \in I \mid x_i \in X_i^\circ\}$.

Der Sprague–Grundy–Satz

Satz C1k: Sprague 1935, Grundy 1939

Gegeben seien lokal-endliche artinsche Graphen $G_i = (X_i, A_i, \sigma_i, \tau_i)$. Dann ist auch ihre Summe $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ lokal-endlich und artinsch, und für ihre Sprague–Grundy–Funktion gilt $\gamma(x) = \bigoplus_{i \in I} \gamma_i(x_i)$.

Genauer: (0) Für jede Aktion $(i, a_i) : x \rightarrow y$ in G gilt $a_i : x_i \rightarrow y_i$ in G_i . Für die Grundy–Zahlen folgt $\gamma_i(x_i) \neq \gamma_i(y_i)$ und somit $\gamma(x) \neq \gamma(y)$.

(1) Zu $0 \leq n < \gamma(x)$ existiert eine Aktion $(i, a_i) : x \rightarrow y$ mit $\gamma(y) = n$. Den Satz beweisen wir durch die Konstruktion solcher Züge:

Satz C1k: formale Konstruktion

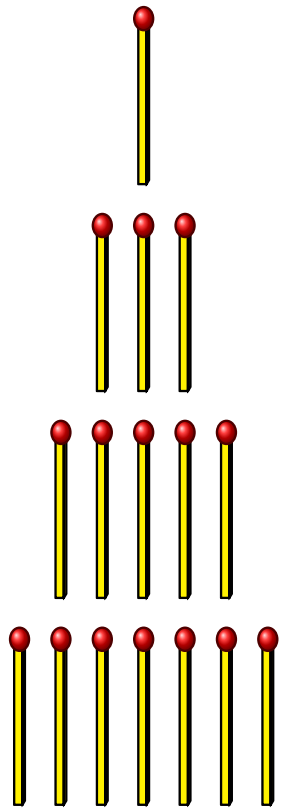
(1) Wir lösen $\gamma(x) \oplus z = n$ durch $z = \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$ und wählen $i \in I$ mit $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 1$. Somit gilt $\gamma_i(x_i) \oplus z < \gamma_i(x_i)$.

In G_i existiert eine Aktion $a_i : x_i \rightarrow y_i$ mit $\gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i) \oplus z$.

In G erhalten wir $(i, a_i) : x \rightarrow y$ mit $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z = n$.

Nimm eins oder zwei, nun mit mehreren Zeilen

Aufgabe: Nennen Sie für die gezeigte Position *alle* Gewinnzüge!



$$x_4 = 1 \Rightarrow \gamma_4(x_4) = 01_{\text{bin}} \xrightarrow{?} 11_{\text{bin}} = \gamma_4(y_4) \quad \text{unmöglich}$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow \gamma_3(x_3) = 00_{\text{bin}} \xrightarrow{?} 10_{\text{bin}} = \gamma_3(y_3) \Leftarrow y_3 = 2$$

zusätzlicher, erhöhender Gewinnzug!

$$x_2 = 5 \Rightarrow \gamma_2(x_2) = 10_{\text{bin}} \xrightarrow{?} 00_{\text{bin}} = \gamma_2(y_2) \Leftarrow y_2 = 3$$

garantierter, reduzierender Gewinnzug

$$x_1 = 7 \Rightarrow \gamma_1(x_1) = 01_{\text{bin}} \xrightarrow{?} 11_{\text{bin}} = \gamma_1(y_1) \quad \text{unmöglich}$$

Gewinnposition?

$$\gamma(x) = 10_{\text{bin}} \xrightarrow{!} 00_{\text{bin}} = \gamma(y)$$

Züge?

Lasker–Nim: Berechnung dank Sprague–Grundy

Eine interessante Variation entsteht, wenn man die Spielregel wie folgt festsetzt: Der am Zuge Befindliche darf irgendeinen der Haufen in zwei Haufen zerteilen oder aber, nach seinem freien Ermessen, verkleinern.

Emanuel Lasker: *Brettspiele der Völker*. Scherl Verlag, Berlin 1931.

Aufgabe: Lösen Sie dieses Spiel, **Lasker–Nim**, möglichst effizient.

Lösung: Das Spiel ist eine Summe, dank Sprague–Grundy gilt also

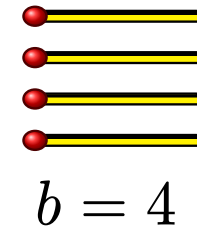
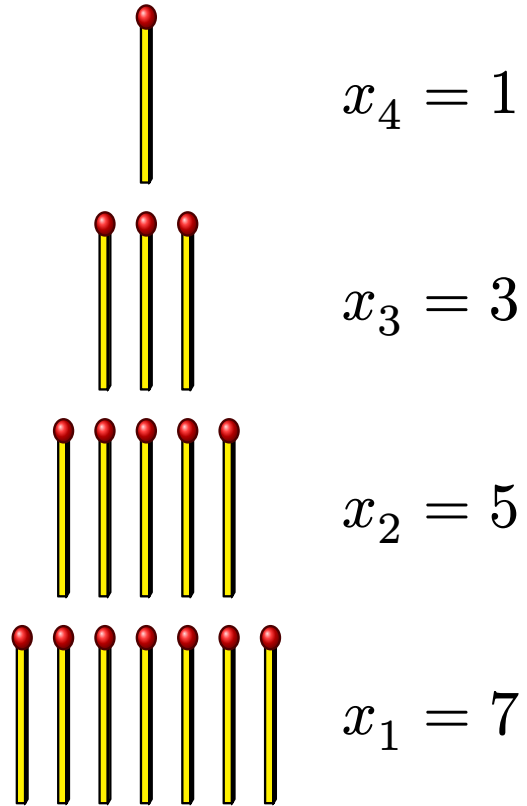
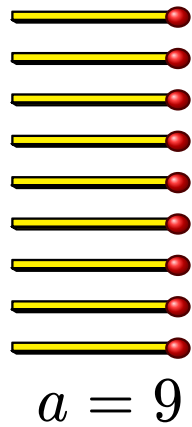
$$\gamma : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \gamma(x_1) \oplus \dots \oplus \gamma(x_n).$$

Wir benötigen demnach nur noch $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Laut Spielregel gilt:

$$\gamma(x) = \text{mex} \left[\{ \gamma(y) \mid 0 \leq y < x \} \cup \{ \gamma(y) \oplus \gamma(z) \mid x = y + z, 1 \leq y \leq z \} \right]$$

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\gamma =$	0	1	2	4	3	5	6	8	7	9	10	12	11

Poker-Nim: Geben ist seliger als Nehmen?



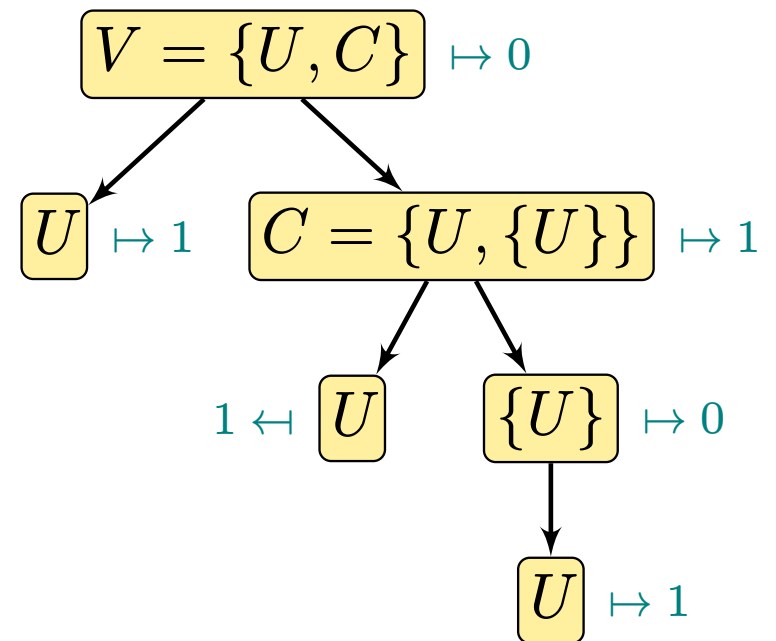
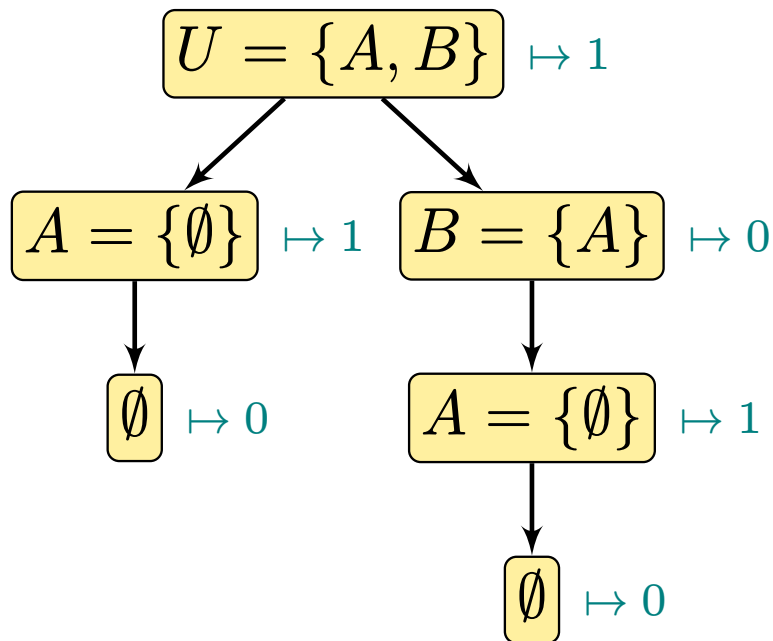
*Jede Menge X_0 ist
ein kombinatorisches Spiel!*

Aufgabe: Alice wählt ein Element $X_1 \in X_0$, dann wählt Bob $X_2 \in X_1$, usw. immer abwechselnd. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Bei der Startmenge $U = \{\{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}\}$ und fehlerfreiem Spiel gewinnt...?

Bei der Startmenge $V = \{U, \{U, \{U\}\}\}$ und fehlerfreiem Spiel gewinnt...?

Lösung:



Jede Aussage mit Existenz- und Allquantoren ist ein Spiel!

Eva spielt die Existenzquantoren und möchte die Behauptung erfüllen.
 $\forall$ dam spielt die Allquantoren und möchte die Behauptung anfechten.

Nulltes Beispiel: Zum Aufwärmen betrachten wir

$$(1) \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{>0} \quad \exists z \in \mathbb{Z} : 2^z \geq q$$

$$(2) \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{>0} \quad \exists z \in \mathbb{Z} : 2^{z-1} < q \leq 2^z$$

Sei $\mathbb{P} = \{p_0 < p_1 < p_2 < \dots\}$ die Menge der Primzahlen und $p_{-1} = 0$.

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{P} : p > n$$

$$(4) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} : p_{k-1} \leq n < p_k$$

Jede Aussage mit Existenz- und Allquantoren ist ein Spiel!

$\exists$ va spielt die Existenzquantoren und möchte die Behauptung erfüllen.
 $\forall$ dam spielt die Allquantoren und möchte die Behauptung anfechten.

Erstes Beispiel: Als Spieldaten betrachten wir die Folge

$$(1) \quad x_n := \sum_{k=0}^n 2^{-k}.$$

Zwei mögliche Spielregeln sind:

$$(K) \quad \exists a \in \mathbb{Q} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : |x_n - a| < \varepsilon$$

$$(C) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \quad \exists a \in \mathbb{Q} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : |x_n - a| < \varepsilon$$

Weitere Spieldaten, für noch mehr Spielspaß:

$$(2) \quad x_n := \sum_{k=0}^n (-2)^k$$

$$(3) \quad x_n := \sum_{k=0}^n 1/k!$$

*Jede Aussage mit Existenz-
und Allquantoren ist ein Spiel!*

Eva spielt die Existenzquantoren und möchte die Behauptung erfüllen.
 $\forall$ dam spielt die Allquantoren und möchte die Behauptung anfechten.

Zweites Beispiel: Als Spieldaten betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \mapsto \text{sign}(x^2 - 2) \quad \text{auf } X = \mathbb{Q}.$$

Zwei mögliche Spielregeln sind:

$$\forall a \in X \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \quad \exists \delta \in \mathbb{Q}_{>0} \quad \forall x \in X : |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \quad \exists \delta \in \mathbb{Q}_{>0} \quad \forall a \in X \quad \forall x \in X : |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

Weitere Spieldaten, für noch mehr Spielspaß:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \text{sign}(x^2 - 2) \quad \text{auf } X = \mathbb{R},$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \text{dist}(x, \frac{1}{k!}\mathbb{Z}) \quad \text{auf } X = \mathbb{R}.$$

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.



Samson und Dalila, Gemälde von Peter Paul Rubens um 1610, National Gallery London

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

$$X = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7\}$$

$$Y = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9\}$$

In Runde $n = 1, 2, 3, \dots$ ziehen die Spieler Elemente $(a_n, b_n) \in X \times Y$:

(0) Verfügbar sind $X_n = X \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ und $Y_n = Y \setminus \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$.

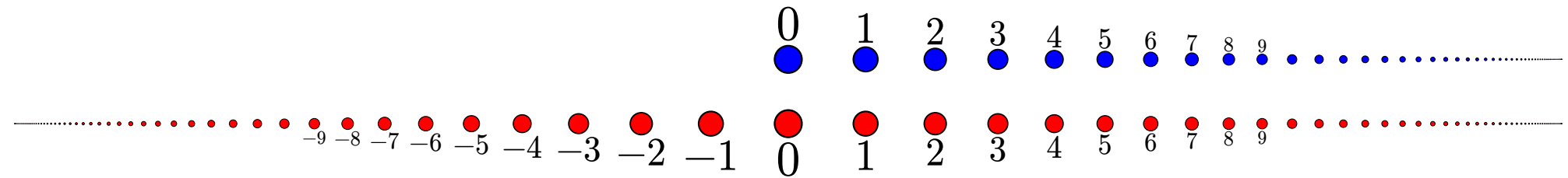
(1) Samson (*spoiler*) wählt ein Element, entweder $a_n \in X_n$ oder $b_n \in Y_n$.

(2) Delila (*duplicator*) wählt komplementär dazu $b_n \in Y_n$ oder $a_n \in X_n$.

Dabei muss stets Monotonie gelten, also $a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j$ für alle i, j .

Samson bekommt anfangs 5€ und zahlt 1€ an Delila für jede Antwort.

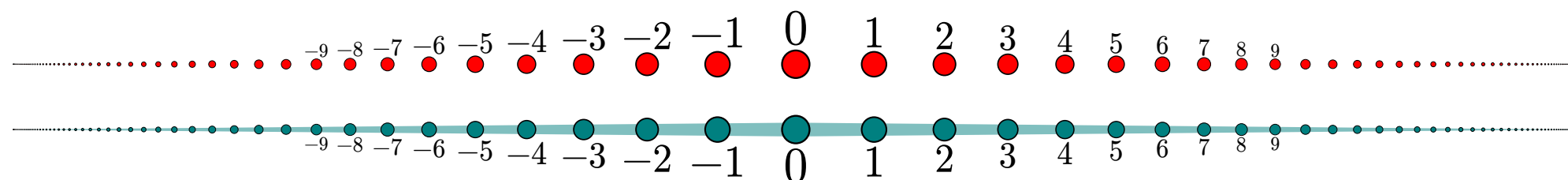
Isomorphiespiele: Samson gegen Delila



Wir spielen $(\mathbb{N}, \leq)$ gegen $(\mathbb{Z}, \leq)$. Samsons Gewinnstrategie als Formel:

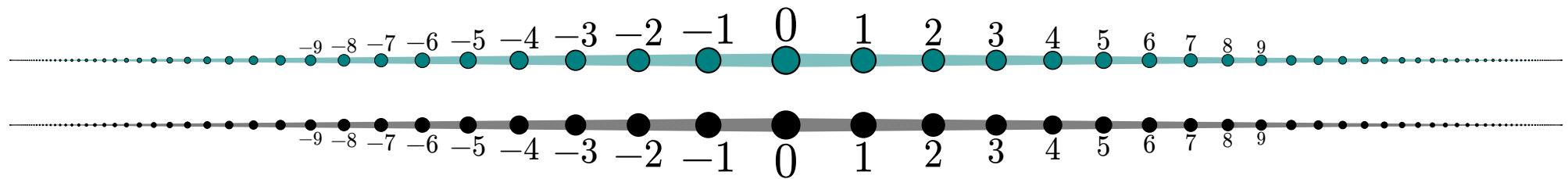
$$\exists a_1 \in \mathbb{N} \quad \forall a_2 \in \mathbb{N} : a_1 \leq a_2$$

$$\forall b_1 \in \mathbb{Z} \quad \exists b_2 \in \mathbb{Z} : b_1 > b_2$$



Wir spielen $(\mathbb{Z}, \leq)$ gegen $(\mathbb{Q}, \leq)$. Samsons Gewinnstrategie als Formel:

$$\begin{aligned} &\exists a_1 \in \mathbb{Z} \quad \exists a_2 \in \mathbb{Z} \quad \forall a_3 \in \mathbb{Z} : [a_1 < a_2 \wedge (a_1 \geq a_3 \vee a_3 \geq a_2)] \\ &\forall b_1 \in \mathbb{Q} \quad \forall b_2 \in \mathbb{Q} \quad \exists b_3 \in \mathbb{Q} : [b_1 \geq b_2 \vee (b_1 < b_3 \wedge b_3 < b_2)] \end{aligned}$$



Wir spielen $(\mathbb{Q}, \leq)$ gegen $(\mathbb{R}, \leq)$. Hier kommt das Spiel nie zum Ende!

Kapitel D

Markov-Spiele und Bellmans Optimalitätsprinzip

My first task in dynamic programming was to put it on a rigorous basis. I found that I was using the same technique over and over again to derive a functional equation. I decided to call it “The principle of optimality.” Oliver Gross said one day, ‘The principle is not rigorous.’ I replied, ‘Of course not. It’s not even precise.’ A good principle should guide the intuition.

Richard Bellman (1920–1984), *Eye of the Hurricane* (1984)

- 1 Markov–Spiele: erste Beispiele
- 2 Bellmans Optimalitätsprinzip
- 3 Anwendung im maschinellen Lernen

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7€								23€

- (0) Welche Gewinnerwartung $u(x)$ hat jedes Feld $x \in X = \{0, \dots, 8\}$?
- (1) Variante: Jeder Zug kostet $c(x) = -1\text{€}$. Ab wo würden Sie spielen?

Lösung: Für jedes innere Feld $x \in X^\circ = \{1, \dots, 7\}$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1) + c(x).$$

Mögliche Lösungen:

7	9	11	13	15	17	19	21	23
7	2	-1	-2	-1	2	7	14	23

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00

Aufgabe: (2) Zusätzlich zu (1) dürfen Sie nun jederzeit aufgeben.

Lösung: Wir suchen $u : X \rightarrow \mathbb{R}$. Am Rand gilt $u(0) = 7$ und $u(8) = 23$. In jedem aktiven Zustand $x \in \{1, \dots, 7\}$ sind zwei Aktionen möglich:

Weiterspielen: $u(x) = c(x) + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$

Aufgeben: $u(x) = 0$

Ein rationaler Spieler wählt jeweils den besten Zug, also das Maximum:

$$u(x) = \max\left\{ 0, c(x) + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1) \right\}$$

Zufällige Irrfahrt und optimale Entscheidung

Eine numerische Näherung gelingt einfach und effizient durch Iteration:

$$u_{t+1}(x) = \max\left\{ 0, c(x) + \frac{1}{2}u_t(x-1) + \frac{1}{2}u_t(x+1) \right\}$$

t	$u_t(0)$	$u_t(1)$	$u_t(2)$	$u_t(3)$	$u_t(4)$	$u_t(5)$	$u_t(6)$	$u_t(7)$	$u_t(8)$
0	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	23.00
1	7.00	2.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10.50	23.00
2	7.00	2.50	0.25	0.00	0.00	0.00	4.25	10.50	23.00
3	7.00	2.63	0.25	0.00	0.00	1.13	4.25	12.63	23.00
4	7.00	2.63	0.31	0.00	0.00	1.13	5.88	12.63	23.00
5	7.00	2.66	0.31	0.00	0.00	1.94	5.88	13.44	23.00
6	7.00	2.66	0.33	0.00	0.00	1.94	6.69	13.44	23.00
7	7.00	2.66	0.33	0.00	0.00	2.34	6.69	13.84	23.00
8	7.00	2.66	0.33	0.00	0.17	2.34	7.09	13.84	23.00
9	7.00	2.67	0.33	0.00	0.17	2.63	7.09	14.05	23.00
...									
39	7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00
40	7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
100€											...

- (0) Was ist die Gewinnerwartung $u(x)$ für jedes Startfeld $x \in \mathbb{N}$?
- (1) Jeder Zug kostet, $c = -1\text{€}$, und Sie müssen zu Ende spielen.
- (2) Jeder Zug kostet, $c = -1\text{€}$, und Sie dürfen jederzeit aufgeben.

100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	...
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

100	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	...
-----	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----

100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0	...
-----	----	----	----	----	----	----	---	---	---	---	-----

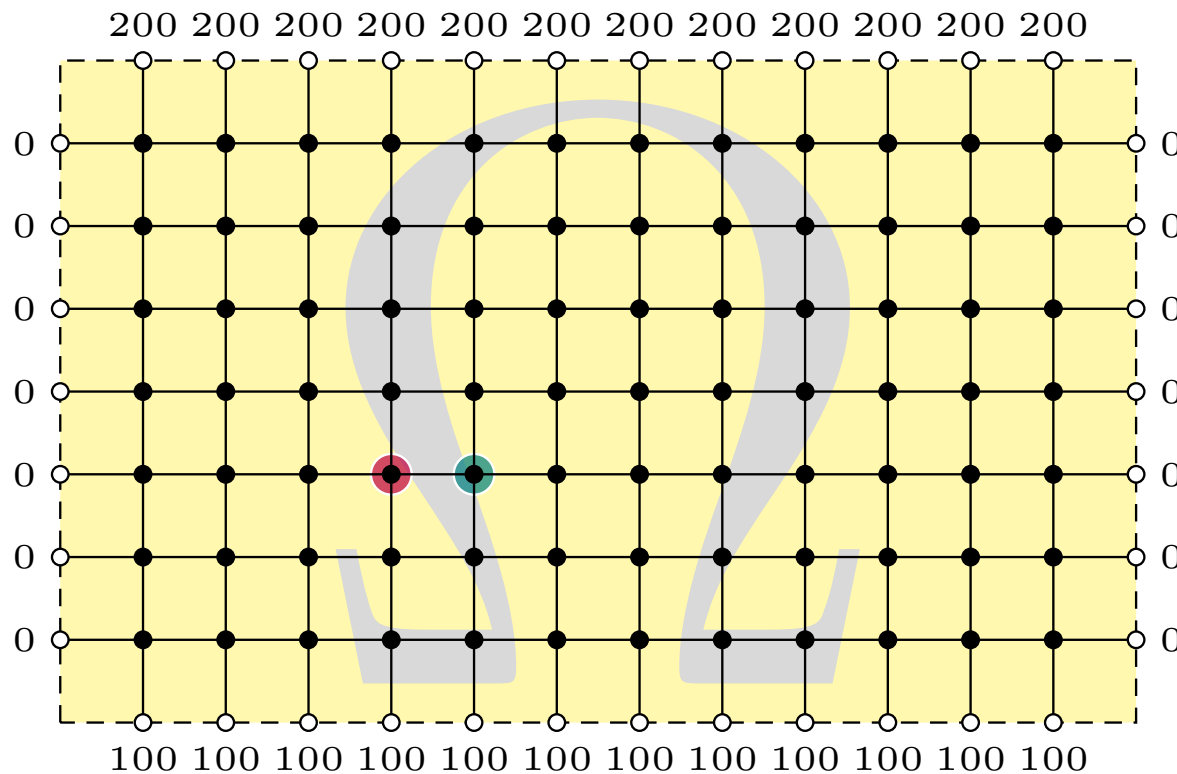
0	1	0								
0	2	2	0							
0	3	4	3	0						
0	4	6	6	4	0					
0	5	8	9	8	5	0				
0	6	10	12	12	10	6	0			
0	7	12	15	16	15	12	7	0		
0	8	14	18	20	20	18	14	8	0	
0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

Übung: Auf $X = \{0, \dots, n\}$ gilt $u(x) = x(n - x)$. Dann $n \rightarrow \infty$.

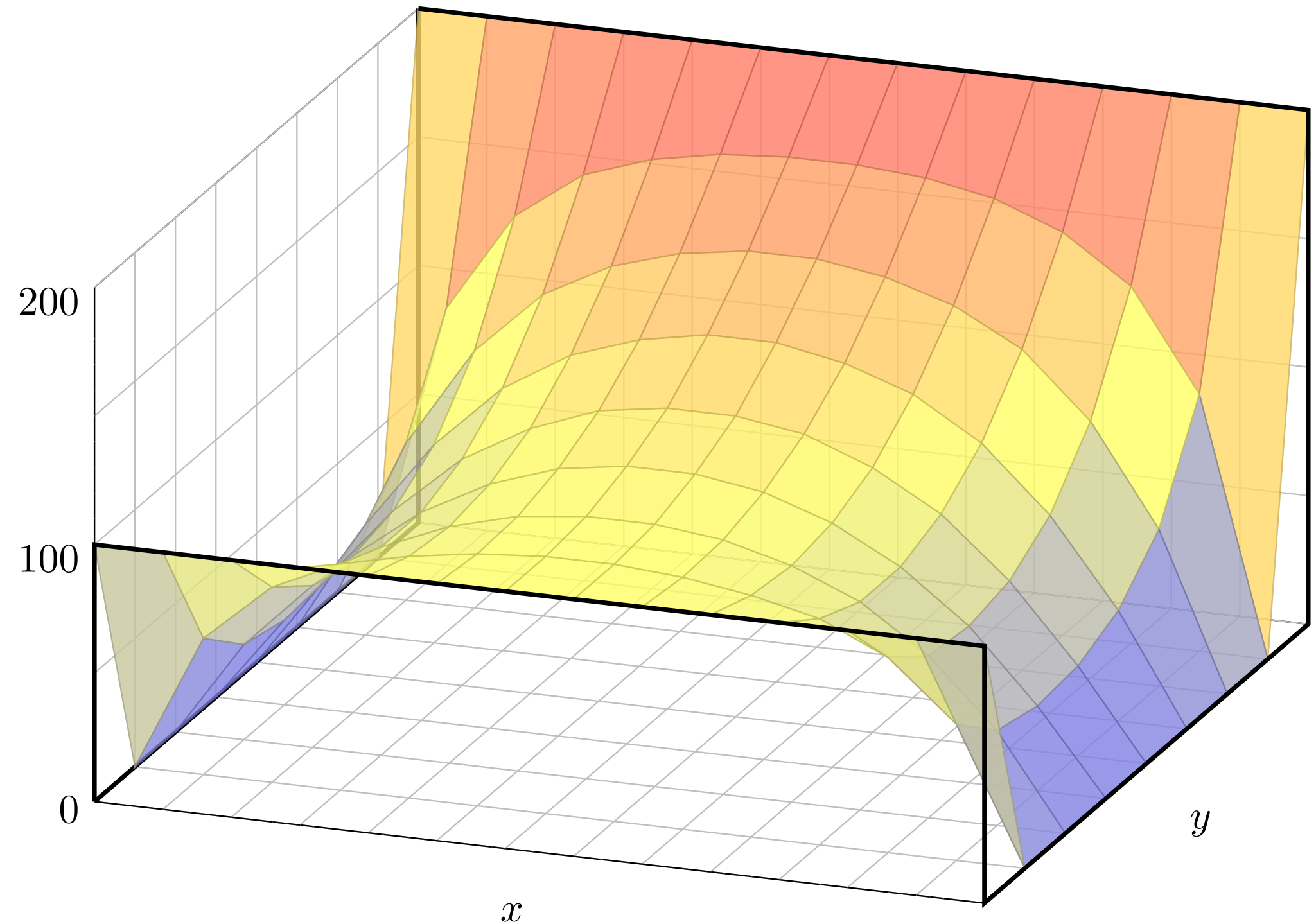
Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem



Sie ziehen mit Wkt $\frac{1}{4}$ nach links / rechts / oben / unten. Das Spiel endet am Rand mit dem gezeigten Gewinn. Für welche Startpunkte würden Sie 100 zahlen?



Aufgabe: (1) Wie groß ist die Gewinnerwartung $u(x, y)$ auf jedem Feld?



Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem

In jedem inneren Punkt $(x, y) \in \Omega^\circ$ gilt die **Mittelwerteigenschaft**:

$$u(x, y) = \frac{1}{4}u(x-1, y) + \frac{1}{4}u(x+1, y) + \frac{1}{4}u(x, y-1) + \frac{1}{4}u(x, y+1)$$

Übung: Lösen Sie diese Gleichungen, etwa mit einer Tabellenkalkulation!

	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	100	139	158	167	172	174	174	172	167	157	139	100	000
000	061	100	125	139	147	151	151	147	139	125	100	061	000
000	043	077	102	118	127	132	132	127	118	102	077	043	000
000	035	065	088	103	113	117	117	113	103	088	065	035	000
000	033	061	081	095	104	108	108	104	095	081	061	033	000
000	037	063	081	092	099	102	102	099	092	081	063	037	000
000	053	076	088	094	098	100	100	098	094	088	076	053	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

Illustration zu Banachs Fixpunktsatz

Diese Selbstabbildung
ist eine Kontraktion!

Diese Selbstabbildung
ist eine Kontraktion!

Diese Selbstabbildung
ist eine Kontraktion!

Diese Selbstabbildung
ist eine Kontraktion!

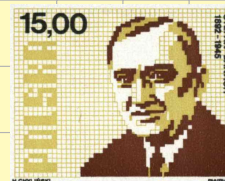
Diese Selbstabbildung
ist eine Kontraktion!



Hat jede Kontraktion
 $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$
einen Fixpunkt?

Nein, etwa $f(x) = x/2$
auf $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Der Raum (X, d) muss
dazu vollständig sein!



Banachs Fixpunktsatz

Satz D2A: Fixpunktsatz von Banach, 1922

Sei (X, d) ein metrischer Raum, nicht-leer und vollständig. Hierauf sei $f : X \rightarrow X$ eine k -Kontraktion: Wir haben eine Kontraktionskonstante $k \in [0, 1[$, und für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$. Dann folgt:

- (1) Zur Abbildung f existiert genau ein Fixpunkt $a \in X$, mit $f(a) = a$.
- (2) Dieser ist Grenzwert jeder Iteration mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$.
- (3) Diese Approximation $x_n \rightarrow a$ erfüllt die beiden Fehlerschranken

$$d(a, x_n) \leq \underbrace{\frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1})}_{\text{a posteriori, nach letztem Schritt}} \leq \underbrace{\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)}_{\text{a priori, nach erstem Schritt}} \searrow 0.$$

Blackwells hinreichendes Kriterium

Sei X eine Menge und sowie $E \subseteq B(X, \mathbb{R})$ mit Supremumsnorm $\|-\|$.
 Für $u, \tilde{u} \in E$ schreiben wir $u \leq \tilde{u}$, falls $u(x) \leq \tilde{u}(x)$ für alle $x \in X$ gilt.
 Ein Operator $\Phi : E \rightarrow E$ ist **isoton**, falls gilt: Aus $u \leq \tilde{u}$ folgt $\Phi(u) \leq \Phi(\tilde{u})$.
 Sei $\delta \in [0, 1]$. Wir nennen $\Phi : E \rightarrow E$ **isoton δ -diskontiert**, falls für alle $u, \tilde{u} \in E$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: Aus $u \leq \tilde{u} + c$ folgt $\Phi(u) \leq \Phi(\tilde{u}) + \delta c$.

Satz D2G: Blackwells hinreichendes Kriterium

Ist $\Phi : E \rightarrow E$ isoton δ -diskontiert, so auch δ -lipschitz-stetig.

Beweis: Für alle $u, \tilde{u} \in E$ gilt $u - \tilde{u} \leq \|u - \tilde{u}\|$, also $u \leq \tilde{u} + \|u - \tilde{u}\|$.
 Dank isotoner δ -Diskontierung folgt daraus $\Phi(u) \leq \Phi(\tilde{u}) + \delta\|u - \tilde{u}\|$.
 Wir erhalten $\Phi(u) - \Phi(\tilde{u}) \leq \delta\|u - \tilde{u}\|$, ebenso $\Phi(\tilde{u}) - \Phi(u) \leq \delta\|u - \tilde{u}\|$.
 Das bedeutet $\|\Phi(u) - \Phi(\tilde{u})\| \leq \delta\|u - \tilde{u}\|$, wie behauptet. QED

Definition D2j: Markov-Spiel und Bellman-Gleichung

Ein **Markov-Graph** $\Gamma = (X, A, \tau)$ besteht aus einer Zustandsmenge X und einer Aktionsmenge $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ zusammen mit Projektion $\sigma : (x, a) \mapsto x$ und Transition $\tau : A \rightarrow [X] : (x, a) \mapsto \sum_{y \in X} p(x, a, y) y$.

Die **Strategiemenge** ist $S(\Gamma) := \{s : X^\circ \rightarrow A \mid \sigma \circ s = \text{id}_{X^\circ}\} = \prod_{x \in X^\circ} A_x$.
Auszahlungen seien terminal $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto v(x)$ oder instantan $r : A \times X \rightarrow \mathbb{R} : (x, a, y) \mapsto r(x, a, y)$ mit Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$.

(0) Dieses **Markov-Spiel** (Γ, r, v) definiert die **Bellman-Gleichung**

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sup_{a \in A_x} \underbrace{\sum_{y \in X} p(x, a, y) [r(x, a, y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton-Funktion } H(x, a, u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Bellman–Operator und Erwartungsoperator

Definition D2j: Gewinnerwartung und Optimalität

(1) Sei $E = \{u \in B(X, \mathbb{R}) \mid u|_{\partial X} = v\}$. Auf diesem affinen Teilraum definieren wir den **Bellman–Operator** $\Phi : E \rightarrow E : u \mapsto \bar{u}$ durch

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sup_{a \in A_x} \underbrace{\sum_{y \in X} p(x, a, y) [r(x, a, y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton-Funktion } H(x, a, u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Die Fixpunkte von Φ sind genau die Lösungen der **Bellman–Gleichung**. Wir nennen Φ **eindeutig lösbar**, falls genau ein Fixpunkt $u \in E$ existiert, und **konvergent**, falls zudem $\Phi^n(\tilde{u}) \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$ gilt für alle $\tilde{u} \in E$.

(2) Zu $s \in S(\Gamma)$ definieren wir den **Erwartungsoperator** $\Phi_s : u \mapsto \bar{u}$ durch

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \underbrace{\sum_{y \in X} p(x, s(x), y) [r(x, s(x), y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton-Funktion } H(x, s(x), u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Fixpunkte $u_s \in E$ von Φ_s sind Lösungen der **Erwartungsgleichung**.

Iteration für Gewinnerwartung und Optimalität

Satz D2κ: Kontraktion, somit Existenz und Eindeutigkeit

Für jeden Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$ sind alle Erwartungsoperatoren Φ_s und der Bellman-Operator Φ isoton δ -diskontiert, somit δ -lipschitz. Speziell für $\delta \in [0, 1[$ können wir Banachs Fixpunktsatz D2A anwenden.

Beweis: Dies folgt aus den Definitionen durch geduldiges Nachrechnen.

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

Gegeben sei ein Markov-Spiel (Γ, r, v) und $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u = \Phi(u)$.

Wie kann die Auszahlung u realisiert werden? Gar noch höhere?

Wir vergleichen mit $u_* := \sup\{u_s \in E \mid s \in S(\Gamma), \Phi_s(u_s) = u_s\}$.

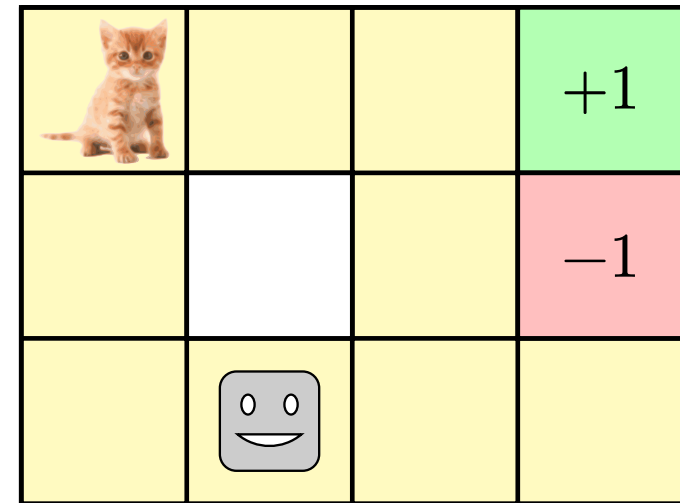
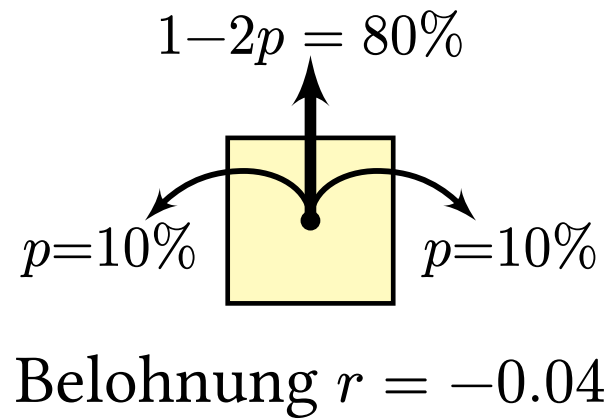
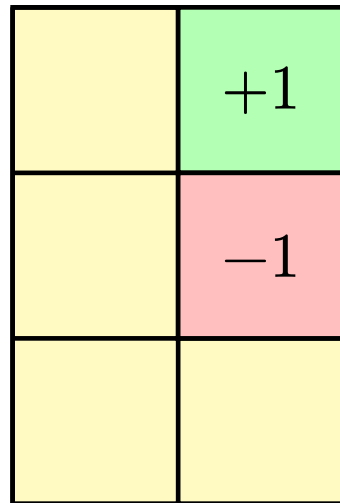
Satz D2m: Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

- (1) Wenn Φ für jeden Startwert gegen u konvergiert, so gilt $u_* \leq u$.
- (2) Wird in der Bellman-Gleichung überall das Supremum angenommen, etwa weil Γ lokal-endlich ist, so existieren optimale Strategien $s \in S(\Gamma)$ mit $s(x) \in \text{Arg max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$, also $\Phi_s(u) = u$, und es folgt $u_* \geq u$.

Beweis: (1) Für jede Strategie $s \in S$ und jeden Fixpunkt $u_s = \Phi_s(u_s)$ gilt in $x \in X^\circ$ stets $\Phi(u_s)(x) = \sup_{a \in A_x} H(x, a, u_s) \geq H(x, s(x), u_s) = u_s(x)$.

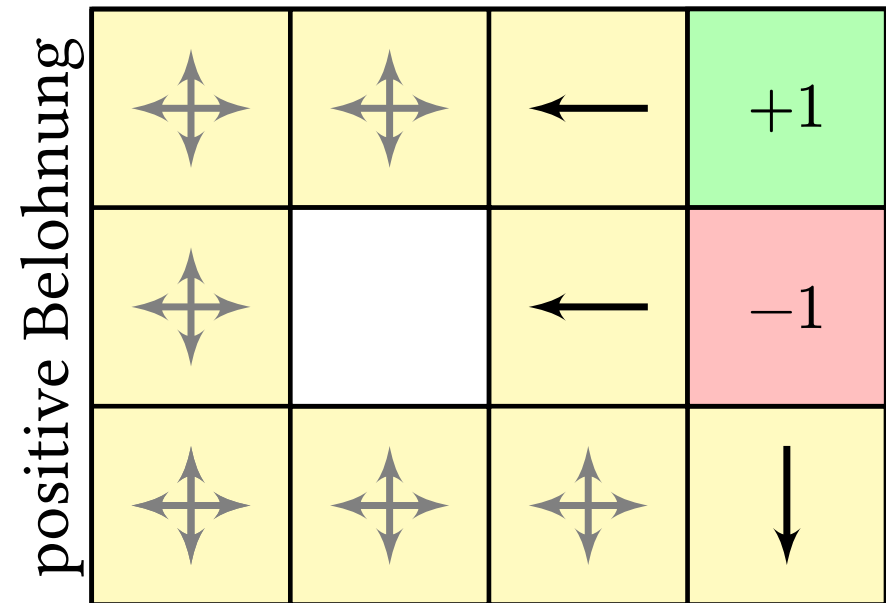
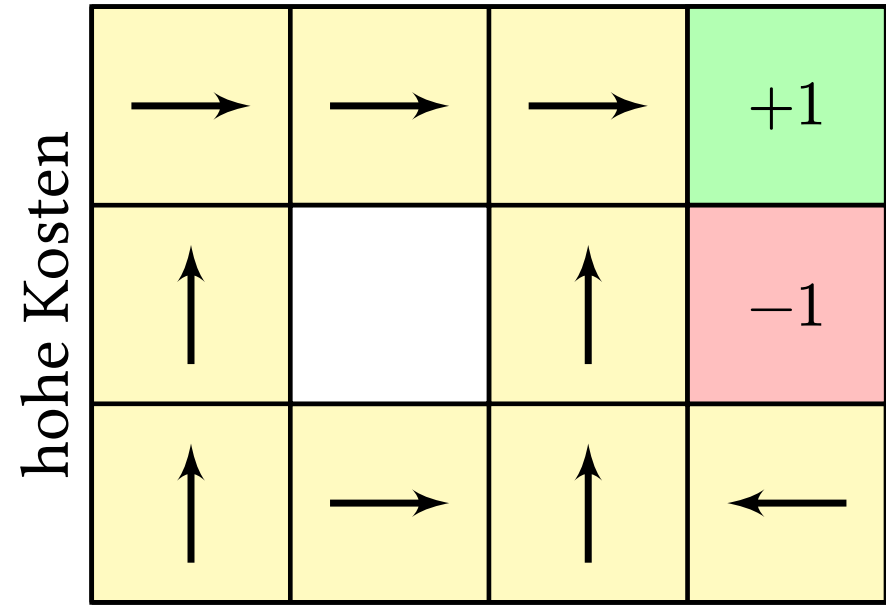
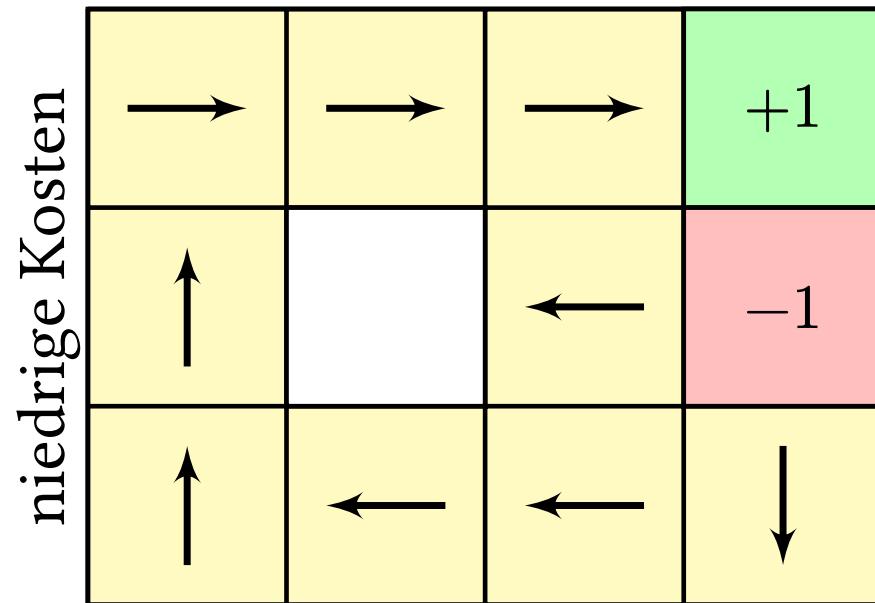
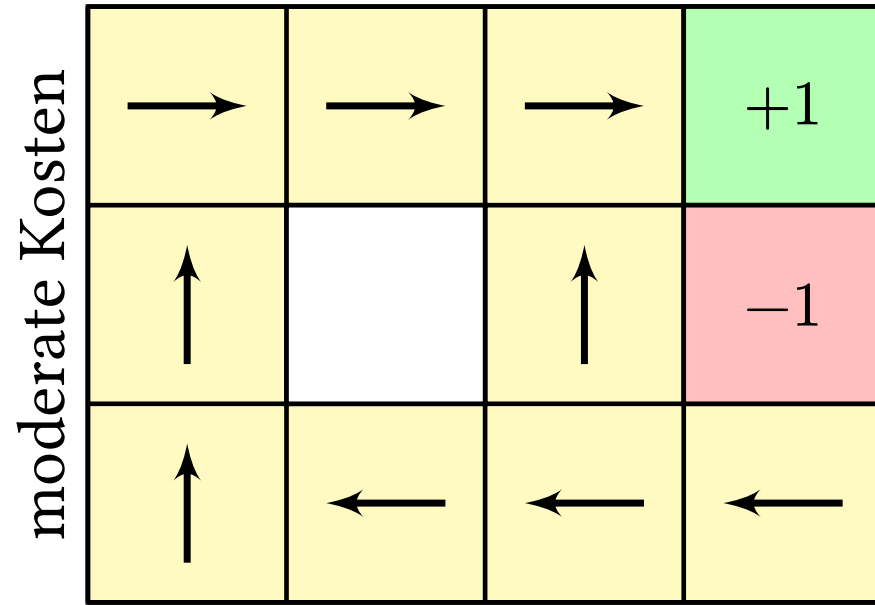
Zudem ist Φ isoton: $u_s \leq \Phi(u_s) \leq \Phi^2(u_s) \leq \dots \nearrow u$. Somit gilt $u_* \leq u$.

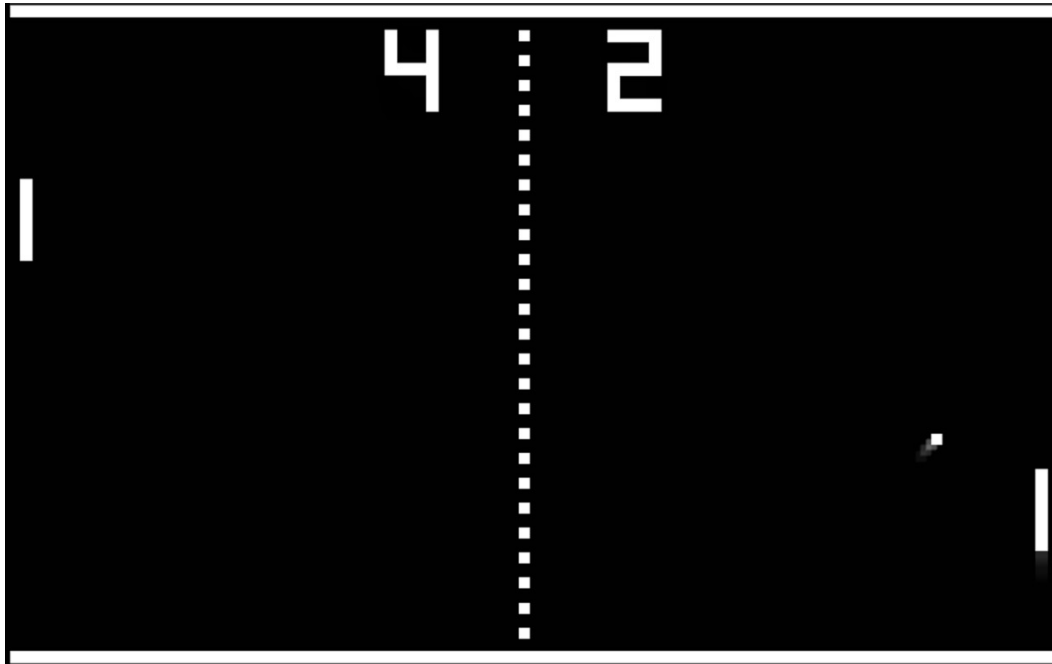
(2) Für s gilt $u(x) = H(x, s(x), u)$, also $u = \Phi_s(u)$, somit $u_* \geq u$. QED



Nutzen $\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t r_t + \delta^T v(x_T)$ mit $x_T \in \partial X$ und Diskont $\delta \in [0, 1]$.

Robis Verhalten ist erstaunlich komplex, abhängig von den Kosten r :





Pong
(Atari 1972)

Breakout
(Atari 1976)



Google DeepMind ist spezialisiert auf maschinelles Lernen:

2013: Deep Q-Learning meistert Arcade-Spiele wie Pong, Breakout, etc.

2015: AlphaGo schlägt den mehrfachen Europameister Fan Hui.

2016: AlphaGo schlägt den südkoreanischen Profi Lee Sedol.

2017: AlphaGo schlägt den Weltranglistenersten Ke Jie.

2017: AlphaGo Zero verbessert AlphaGo. Es lernt selbständig anhand der Spielregeln und benötigt sonst keinerlei Vorwissen über das Spiel.

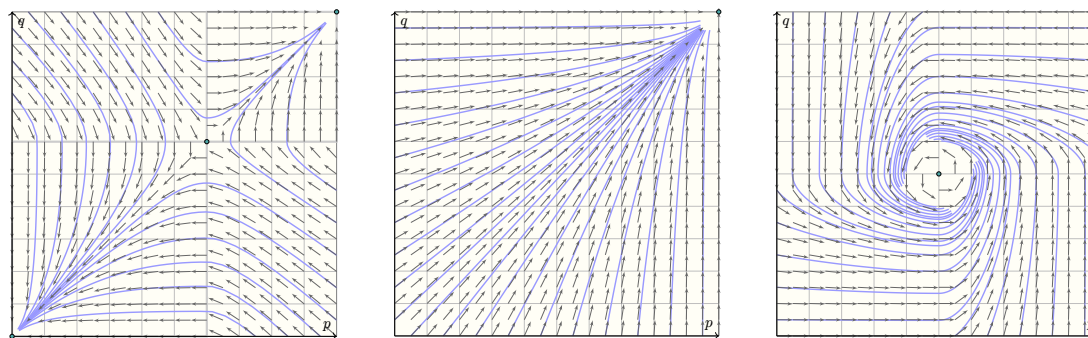
2018: AlphaFold sagt Proteinstrukturen vorher. Chemie-Nobelpreis 2024.

2022: AlphaTensor optimiert schnelle Matrixmultiplikation.

2024: AlphaProof erreicht Silbermedaille in der IMO.

Kapitel E

Strategische Spiele und Nash-Gleichgewichte



L'enfer, c'est les autres.

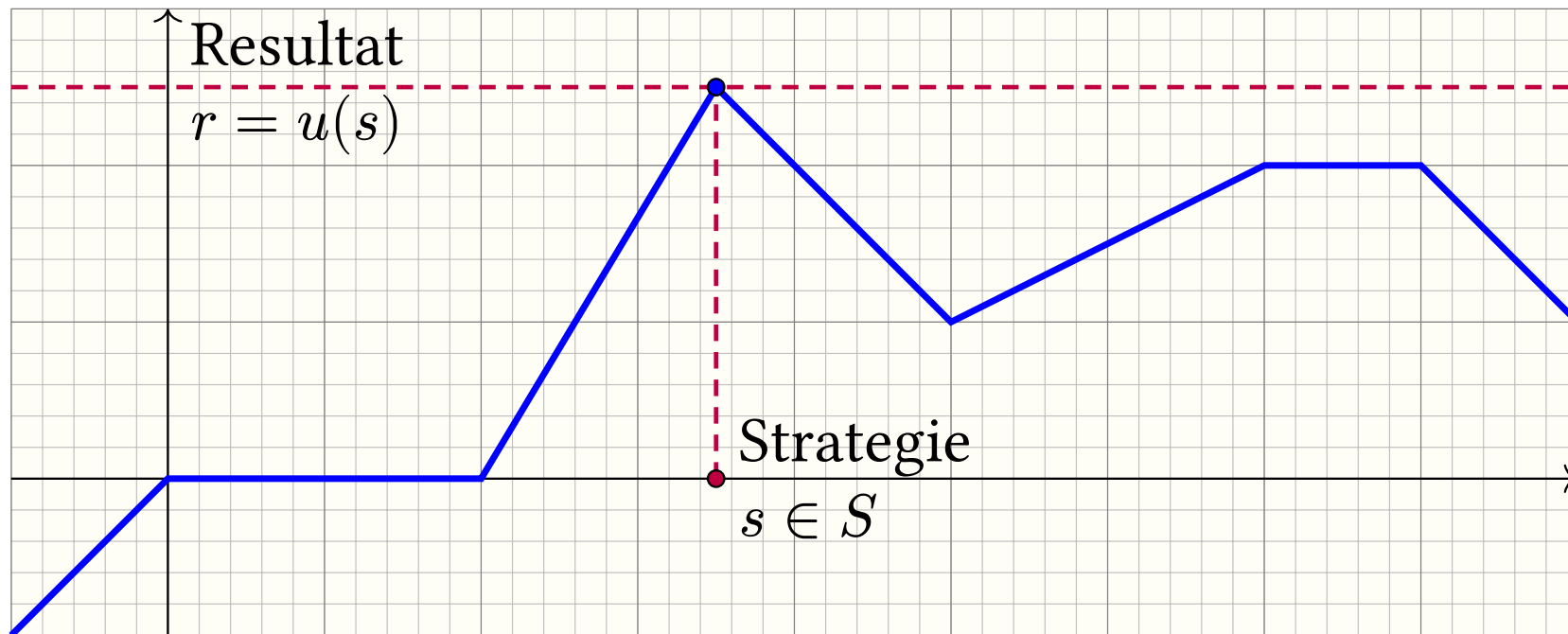
[Die Hölle, das sind die anderen.]

Jean-Paul Sartre (1905–1980), *Huis Clos*

Inhalt dieses Kapitels E

- 1 Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte
- 2 Sicherheit, Dominanz, Symmetrie
- 3 Nash–Gleichgewichte finden und zählen
- 4 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben

Ein **Spiel** mit nur einer Spieler:in ist eine Funktion $u : S \rightarrow R : s \mapsto u(s)$.



Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

		$s_2 \in S_2 =$			
		B	Schere	Stein	Papier
$s_1 \in S_1 =$	A				
	Schere	0	-1	+1	
	Stein	+1	0	-1	
	Papier	-1	+1	0	

$u_2(s_1, s_2)$
 $u_1(s_1, s_2)$

Definition E1A: strategisches Spiel (statisch, in Normalform)

Ein **strategisches Spiel** mit n Spieler:innen ist eine Funktion

$$u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R_1 \times \dots \times R_n$$

$$s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto (u_1(s), \dots, u_n(s)) = u(s).$$

Hierbei ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler:in i wählen kann, und R_i die Menge ihrer möglichen **Resultate**, linear geordnet durch $\leq_i$.

Das Spiel „Straßenverkehr“

		B	
		links	rechts
A	links	+1	-8
	rechts	-8	+1

Feiglingspiel / *chicken game*

		B	
		einlenken	gradaus
A	einlenken	2	1
	gradaus	5	-9

Definition E1B: Nash-Gleichgewichte (vorläufige Formulierung)

Wir nennen (s_1, s_2) **Nash-Gleichgewicht**, falls kein Spieler aus eigener Kraft sein Ergebnis verbessern kann, indem er seine Strategie ändert.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Vorgelegt sei ein Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R_1 \times \dots \times R_n$ in Normalform. Wir nennen $s = (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n := S$ einen **Strategievektor**. Spieler i kann sich aus eigener Kraft verbessern, falls für ein $a \in S_i$ gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Andernfalls ist $u_i(s)$ ein **Maximum** bezüglich aller Alternativen $a \in S_i$:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots, s_n) \leq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Somit ist s_i eine **beste Antwort** auf $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) =: s_{-i}$.

Definition E1B: Nash–Gleichgewichte eines Spiels

Der Strategievektor $s \in S$ ist im **Gleichgewicht für Spieler i** , wenn gilt:

$$u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{a \in S_i} u_i(a; s_{-i}), \quad \text{das heißt} \quad s_i \in \operatorname{Arg} \max_{a \in S_i} u_i(a; s_{-i}).$$

Hierfür schreiben wir $\operatorname{NE}_i(u) := \{s \in S \mid s_i \text{ ist beste Antwort auf } s_{-i}\}$.

Gilt dies für jeden Spieler i , so nennen wir s ein **Nash–Gleichgewicht**, kurz $\operatorname{NE}(u) := \bigcap_i \operatorname{NE}_i(u) = \{s \in S \mid s \text{ ist Nash–Gleichgewicht von } u\}$.

Beispiel: ein Erbe teilen (soft)

Aufgabe: Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich $x \in \{1, \dots, 9\}$, und Bob wünscht sich $y \in \{1, \dots, 9\}$, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt $x + y > 10$, so verfällt das Erbe. Gilt $x + y \leq 10$, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel u .
(2) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte dieses Spiels u .

Lösung: (1) Die Regeln definieren ein Spiel in Normalform:

$$u : \{1, \dots, 9\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{falls } x + y \leq 10, \\ (0, 0) & \text{falls } x + y > 10. \end{cases}$$

(2a) Kein Gleichgewicht ist (x, y) mit $x + y < 10$, ebenso wenig (x, y) mit $x + y > 10$. Somit bleiben nur noch neun mögliche Kandidaten:

$$\text{NE}(u) \subseteq \{ (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1) \}$$

(2b) Jedes dieser Paare ist ein Nash-Gleichgewicht, also gilt auch „ $\supseteq$ “.

Beispiel: ein Erbe teilen (hart)

Aufgabe: Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich $x \in \{0, \dots, 10\}$, Bob wünscht sich $y \in \{0, \dots, 10\}$, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt $x + y > 10$, so verfällt das Erbe. Gilt $x + y \leq 10$, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel u .
(2) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte dieses Spiels u .

Lösung: (1) Die Regeln definieren ein Spiel in Normalform:

$$u : \{0, \dots, 10\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{falls } x + y \leq 10, \\ (0, 0) & \text{falls } x + y > 10. \end{cases}$$

(2) Eine sorgfältige Analyse, wie in der vorigen Aufgabe, ergibt:

$$NE^!(u) = \{ (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1) \}$$

$$NE(u) = NE^!(u) \cup \{ (0, 10), (10, 0), (10, 10) \}$$

		Clyde	
		schweigen	gestehen
Bonnie	schweigen	-1	-5
	gestehen	0	-4

Als Funktion $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bedeutet das ausgeschrieben:

$$(\text{schweigen}, \text{schweigen}) \mapsto (-1, -1)$$

$$(\text{schweigen}, \text{gestehen}) \mapsto (-5, 0)$$

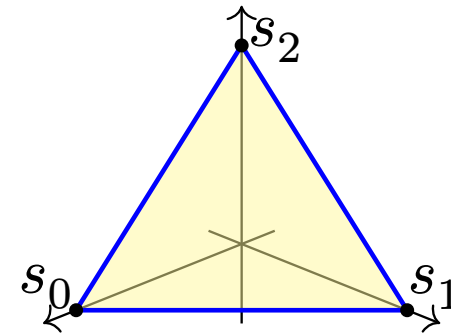
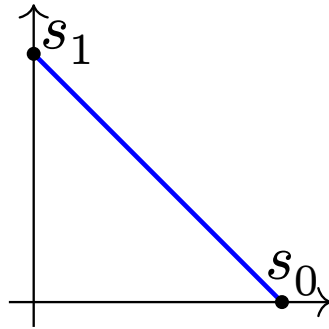
$$(\text{gestehen}, \text{schweigen}) \mapsto (0, -5)$$

$$(\text{gestehen}, \text{gestehen}) \mapsto (-4, -4)$$

Nash-Gleichgewicht ist einzig das Strategiepaar (gestehen, gestehen).



$$s = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$



Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Definition E1c: gemischte Strategie, Borel 1921

Sei $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}$ die (endliche) Strategiemenge der Spieler:in i .
Konvexkombination erzeugt die **Menge aller gemischten Strategien**

$$\left\{ s_i = \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_i^k \mid p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\ell} p_k = 1 \right\} =: [s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell] = [S_i] = \bar{S}_i$$

Die Nutzenfunktion $u : S = S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ setzen wir fort, von reinen auf gemischte Strategien, zu $\bar{u} : \bar{S} = \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\bar{u}|_S = u|_S$,
linear in jeder Koordinate, entsprechend dem **Erwartungswert**:

$$\bar{u}\left(\dots, \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_i^k, \dots\right) = \sum_{k=0}^{\ell} p_k \bar{u}(\dots, s_i^k, \dots)$$

Bimatrix-Schreibweise für Zwei-Personen-Spiele

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto (u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2))$$

mit Strategiemengen $S_1 = \{s_1^0, s_1^1, \dots, s_1^m\}$ und $S_2 = \{s_2^0, s_2^1, \dots, s_2^n\}$.

$$s_1 = \sum_{i=0}^m x_i s_1^i \in \bar{S}_1, \quad x \in \Delta^m = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=0}^m x_i = 1 \right\}$$

$$s_2 = \sum_{j=0}^n y_j s_2^j \in \bar{S}_2, \quad y \in \Delta^n = \left\{ \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_j \geq 0, \sum_{j=0}^n y_j = 1 \right\}$$

$$\bar{u}_1(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n x_i y_j \underbrace{u_1(s_1^i, s_2^j)}_{=: a_{ij}} = x^\top A y, \quad A \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$$

$$\bar{u}_2(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n x_i y_j \underbrace{u_2(s_1^i, s_2^j)}_{=: b_{ij}} = x^\top B y, \quad B \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$$

Kurzschreibweise $\tilde{u} : \Delta^m \times \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x^\top A y, x^\top B y)$.

Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

Sei $u : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Der Strategievektor $s \in \bar{S}$ ist im Gleichgewicht für Spieler i , wenn gilt:

$$\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) = \max_{a \in \bar{S}_i} \bar{u}_i(a; s_{-i})$$

Lemma E1D: Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

Dank Linearität von $\bar{u}$ wird das Maximum in den Ecken angenommen:

$$\max_{a \in \bar{S}_i} \bar{u}_i(a; s_{-i}) = \max_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i})$$

Genau dann ist s für Spieler i im Gleichgewicht, $s \in \text{NE}_i(\bar{u})$, wenn gilt:

$$\text{supp}(s_i) \subseteq \text{Arg max}_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i})$$

Wir erhalten somit ein einfaches Kriterium:

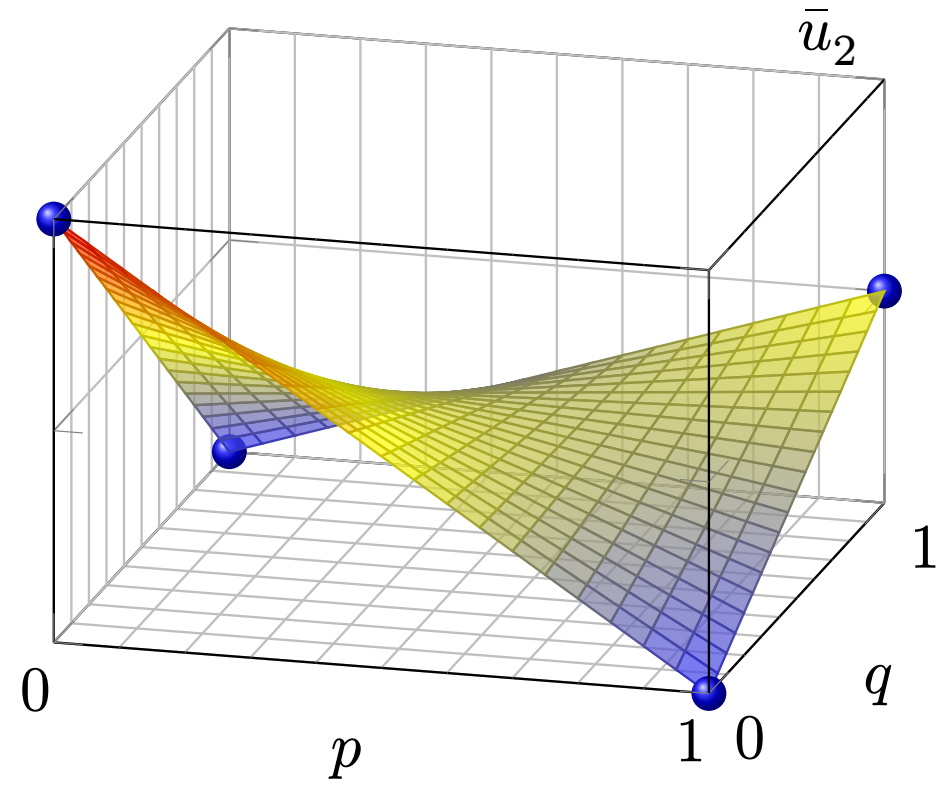
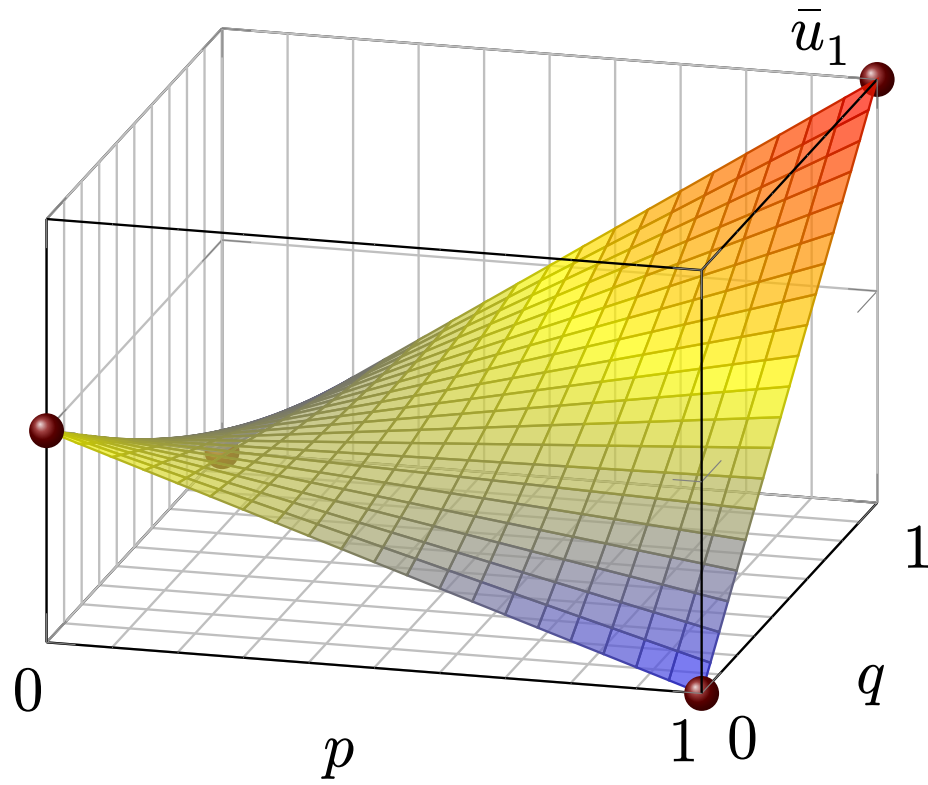
$$\text{NE}_i(\bar{u}) = \{ s \in \bar{S} \mid \text{supp}(s_i) \subseteq \text{Arg max}_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i}) \}$$

Gilt dies für alle i , so ist s ein Nash–Gleichgewicht: $\text{NE}(\bar{u}) := \bigcap_i \text{NE}_i(\bar{u})$.

Beispiel: Bach oder Strawinsky?

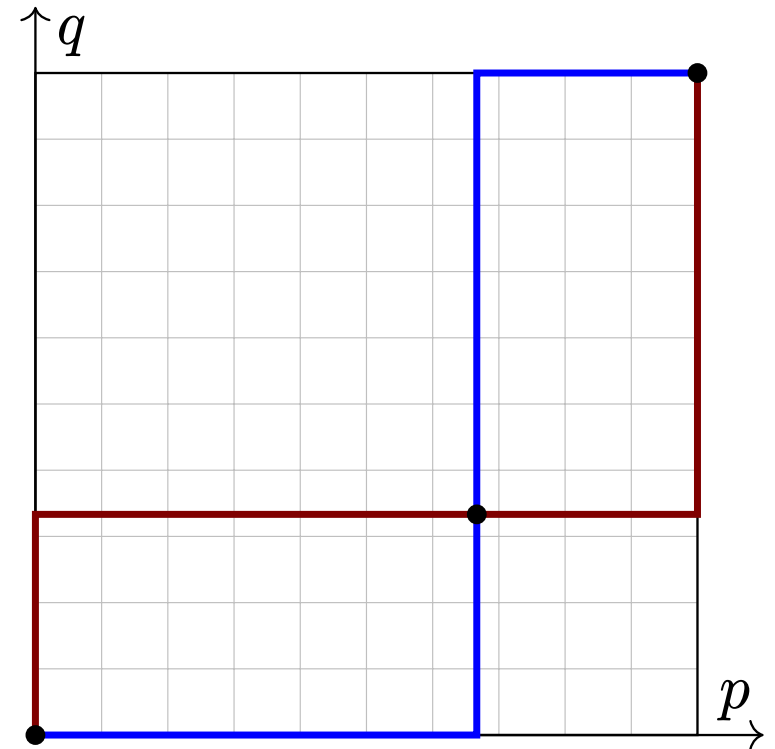
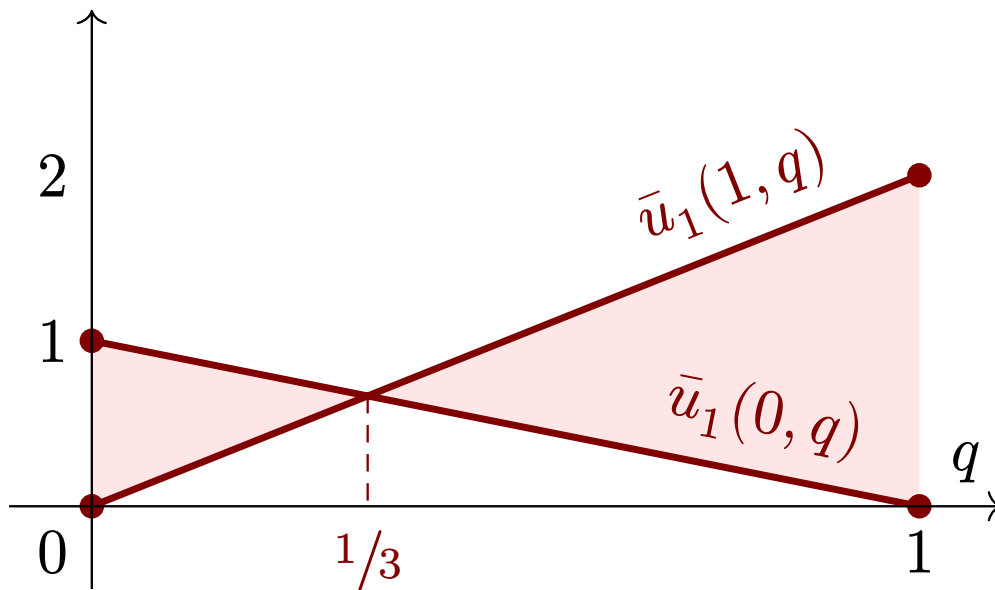
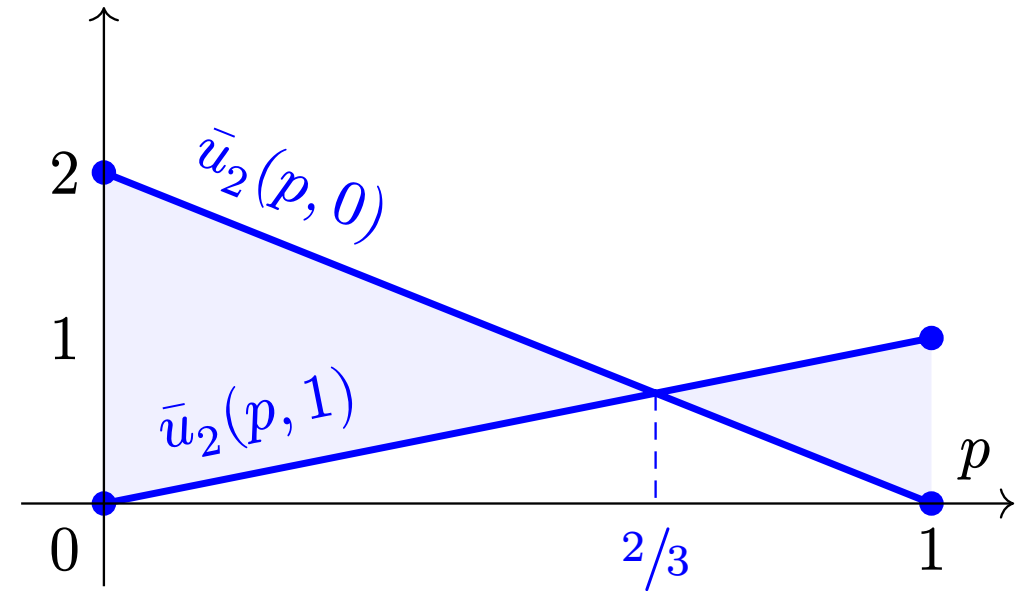
		B	
		Bach	Strawinsky
A	Bach	1, 2	0, 0
	Strawinsky	0, 0	2, 1

In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash-Gleichgewichte: Einerseits (Bach, Bach) und andererseits (Strawinsky, Strawinsky).



Beispiel: Bach oder Strawinsky?

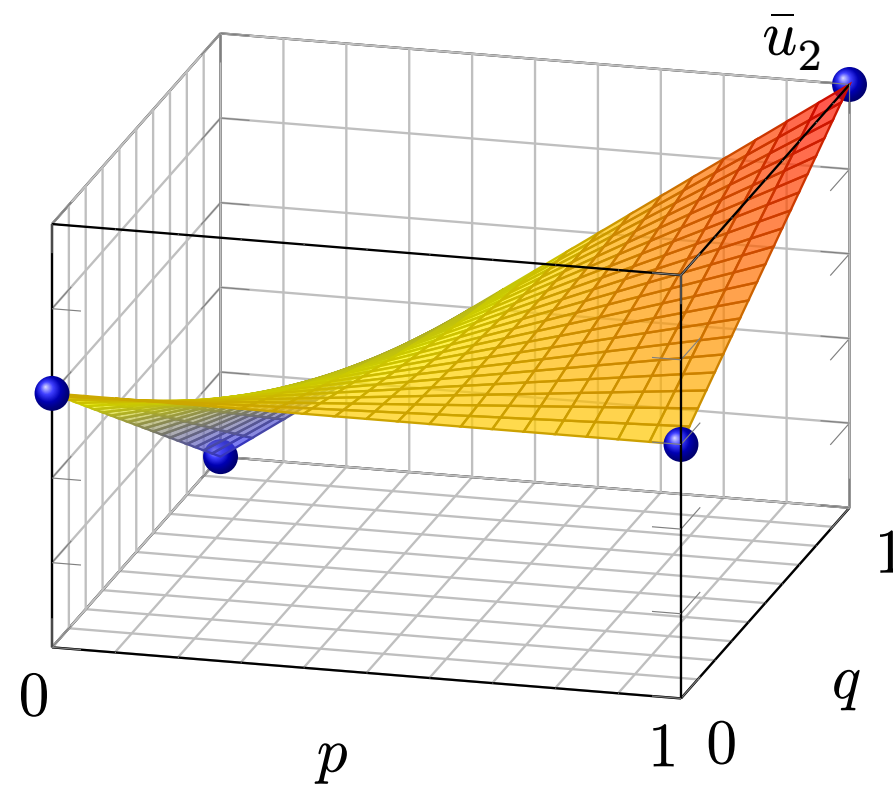
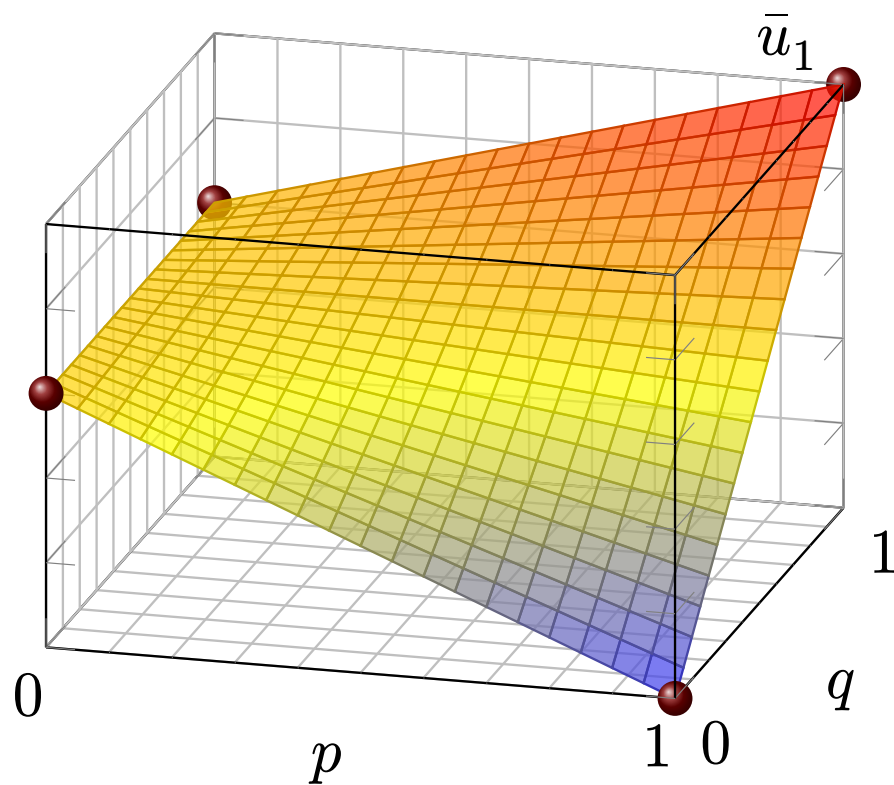
		B		0	1
				2	0
A	0	1	0	0	1
	1	0	2	0	1



Beispiel: bleiben oder gehen?

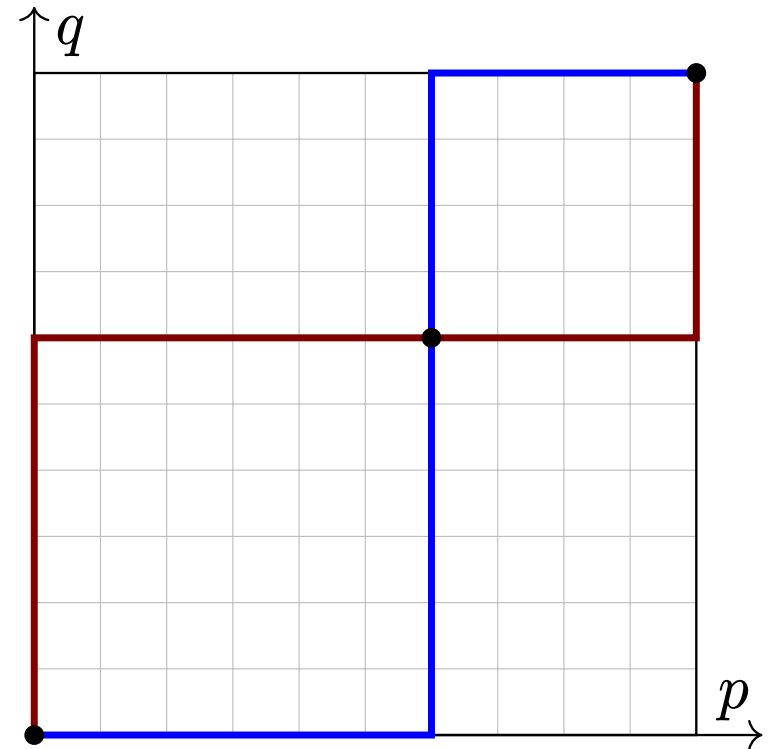
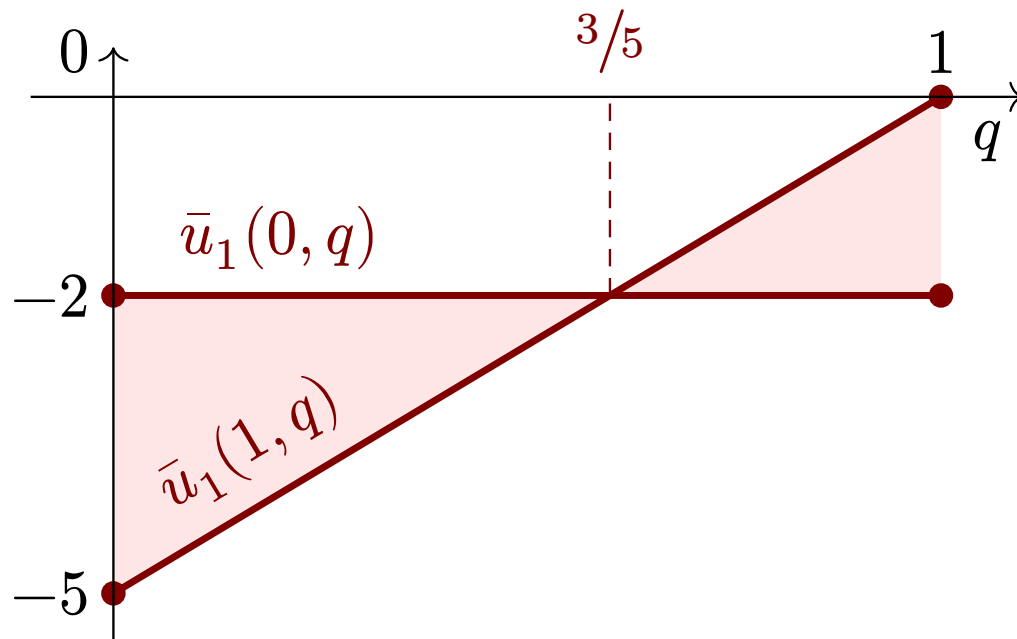
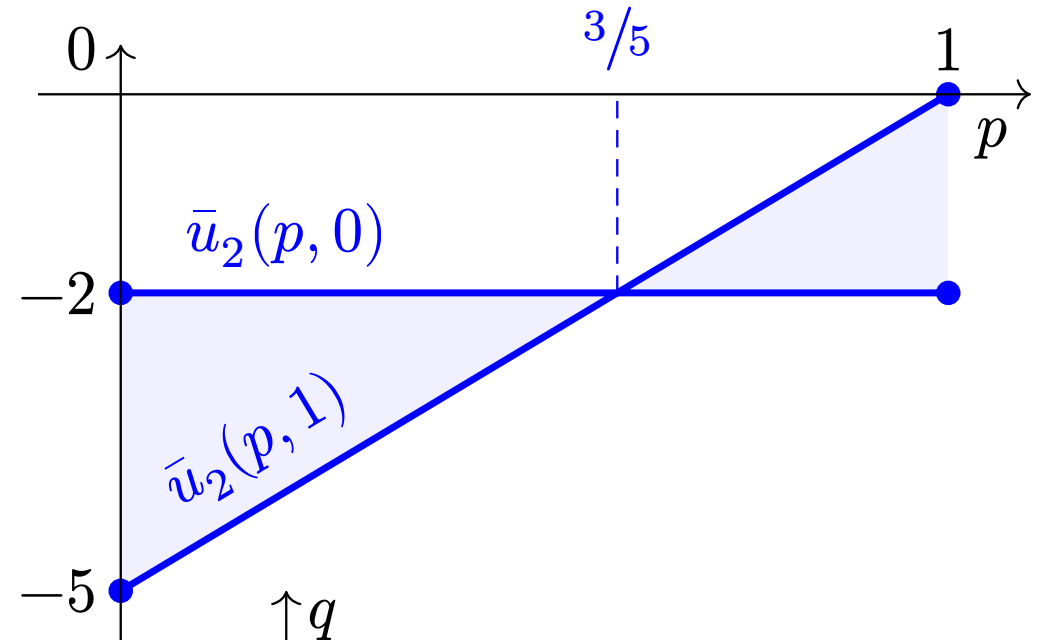
		B	
		bleiben	gehen
A	bleiben	-2	-5
	gehen	-5	0

In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash-Gleichgewichte: Einerseits (bleiben, bleiben) und andererseits (gehen, gehen).



Beispiel: bleiben oder gehen?

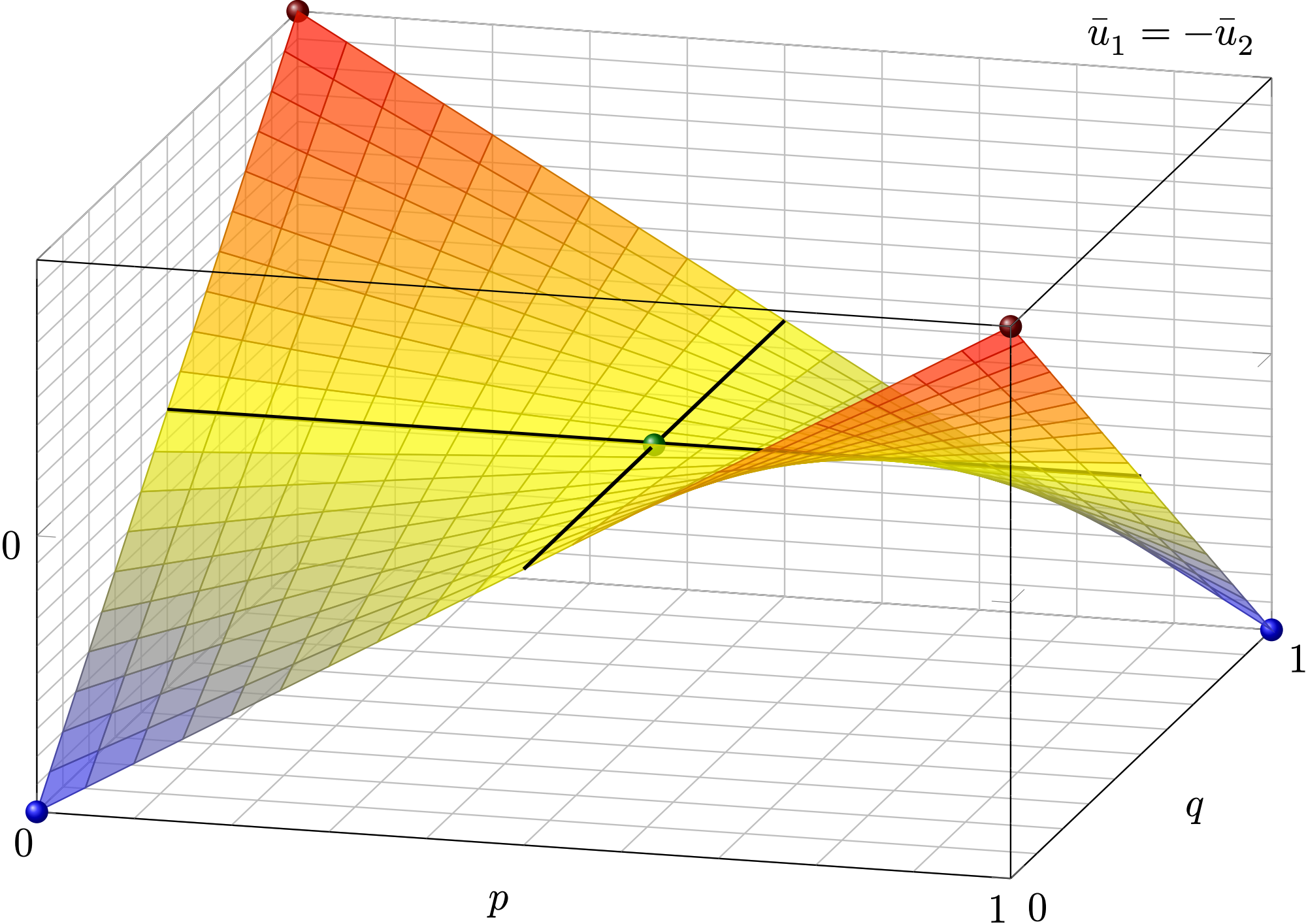
		B		0	1
A	0	-2	-2	-5	-2
	1	-5	-2	0	0



Beispiel: Matching Pennies

		B		Kopf	Zahl
		A			
Kopf				+1	-1
				-1	+1
Zahl				-1	+1
				+1	-1

In diesem Spiel gibt es kein reines Nash-Gleichgewicht!

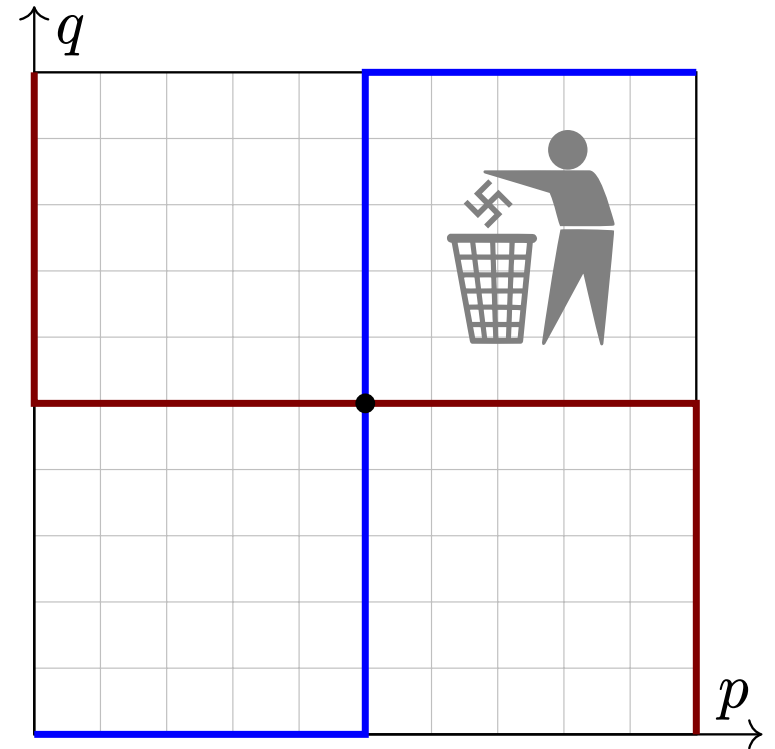
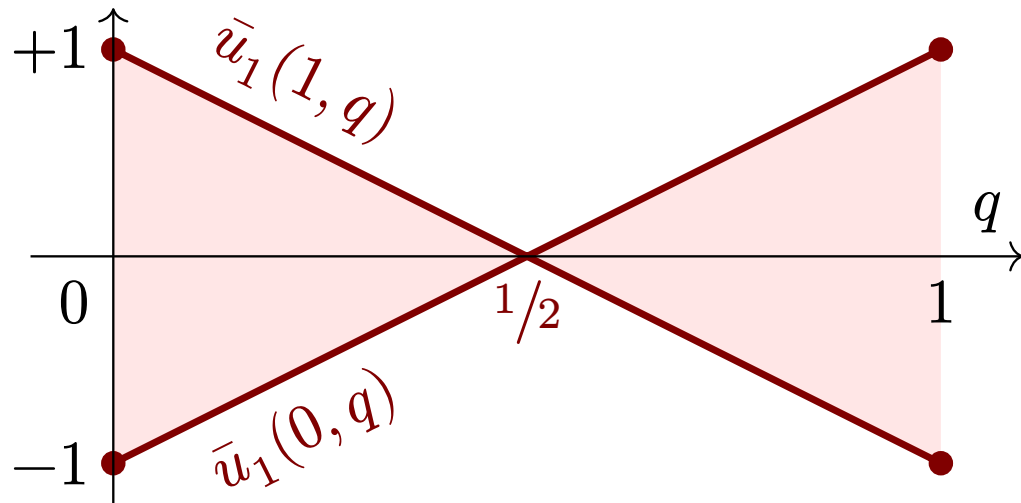
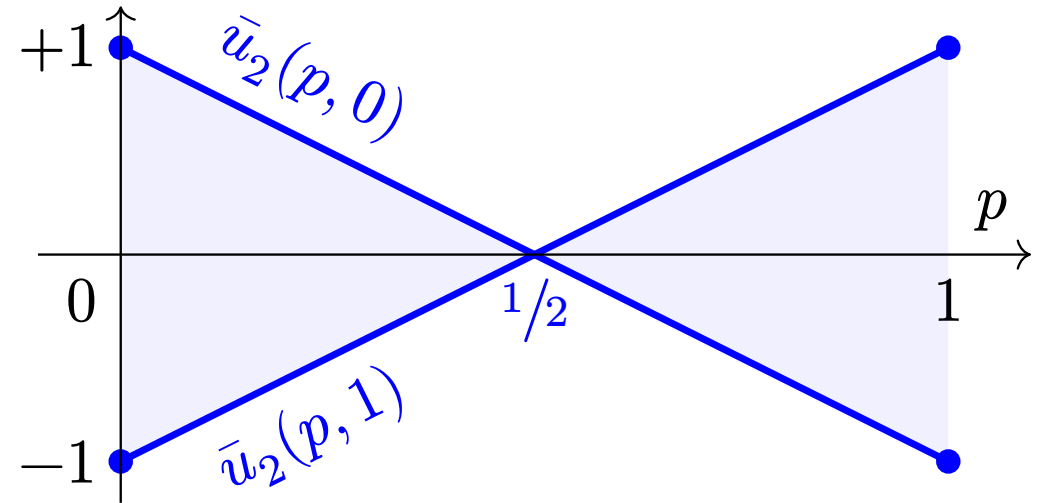


Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Beispiel: Matching Pennies

		B		0	1
				+1	-1
A	0	-1	+1	-1	+1
	1	+1	-1	+1	-1



**hawk**

@hawktherapper

if both basketball teams just worked together
they could score so many more points

13:59 - 20. Apr. 2014

In den letzten 20 Sekunden liegt das ballführende Team 2 Punkte hinten.
Riskant: 3 Punkte werfen und damit sofort gewinnen. Sicher: 2 Punkte werfen und die Verlängerung erzwingen, mit 50-50-Gewinnchance.

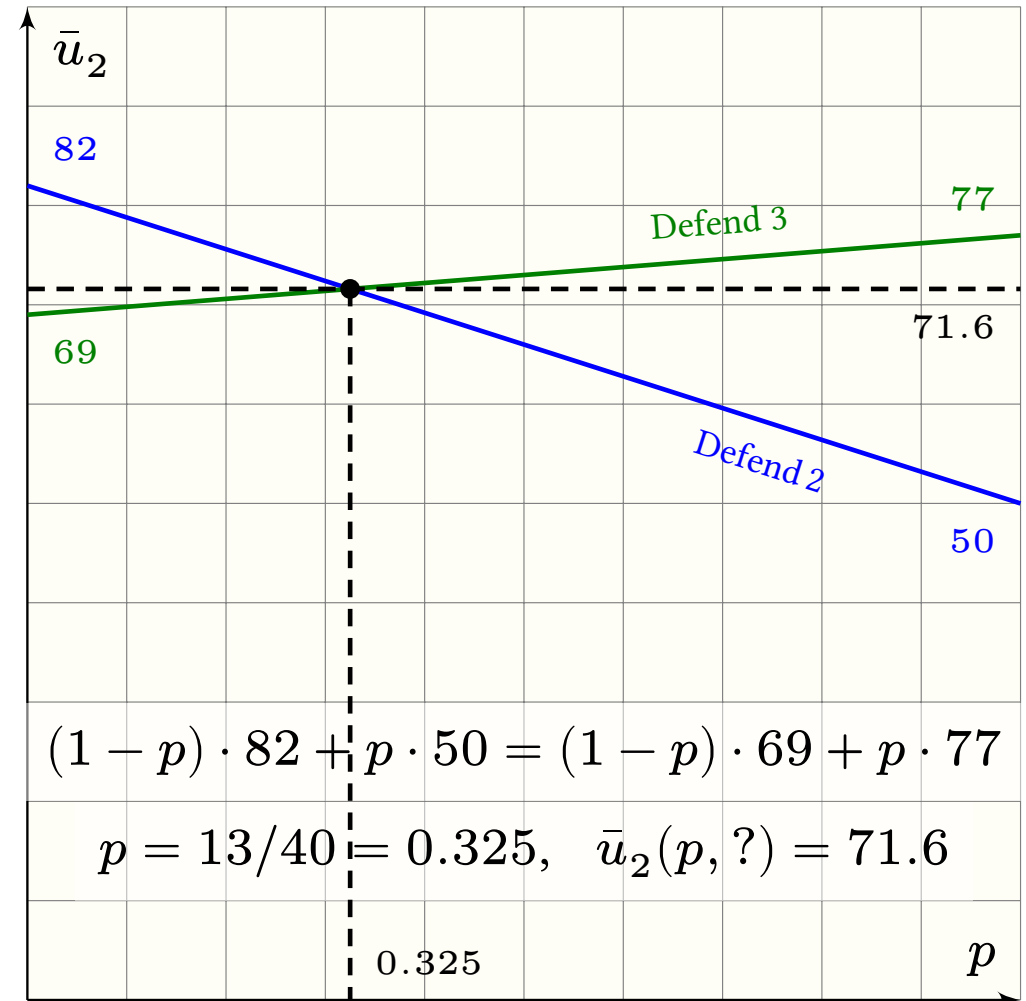
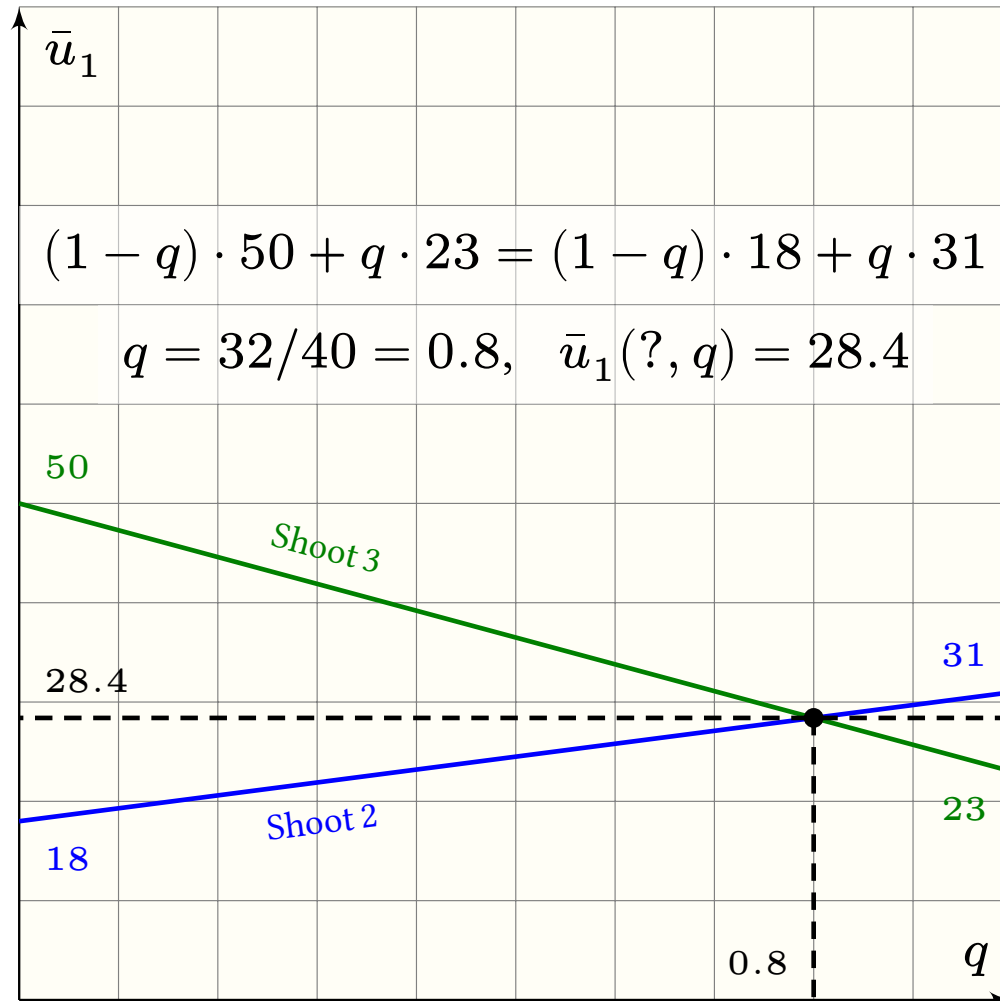
Erfolgstatistik (gerundet):

bedrängt 36%, offen 62%

offen 50%, bedrängt 23%

A \ B	B	Defend 2	Defend 3
	A		
Shoot 2	18	82	31
Shoot 3	50	50	77

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski



Defend 2

Defend 3

Shoot 2

Shoot 3

Verteidigt Team B mehr als 80% auf 3er, sollte Team A auf 2er spielen.
 Verteidigt B hingegen weniger als 80% auf 3er, sollte A auf 3er spielen.
 Spielt Team A mehr als 32.5% auf 3er, sollte Team B auf 3er verteidigen.
 Spielt A hingegen weniger als 32.5% auf 3er, sollte B auf 2er verteidigen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

- ☹️ *Schere-Stein-Papier* hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien.
- 😊 Hingegen gibt es ein Gleichgewicht (s_1, s_2) in gemischten Strategien:

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Satz E1E: Existenzsatz für Gleichgewichte, John Nash 1950

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Dann besitzt das Spiel $\bar{u}$ mindestens ein Nash-Gleichgewicht: $\text{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$.

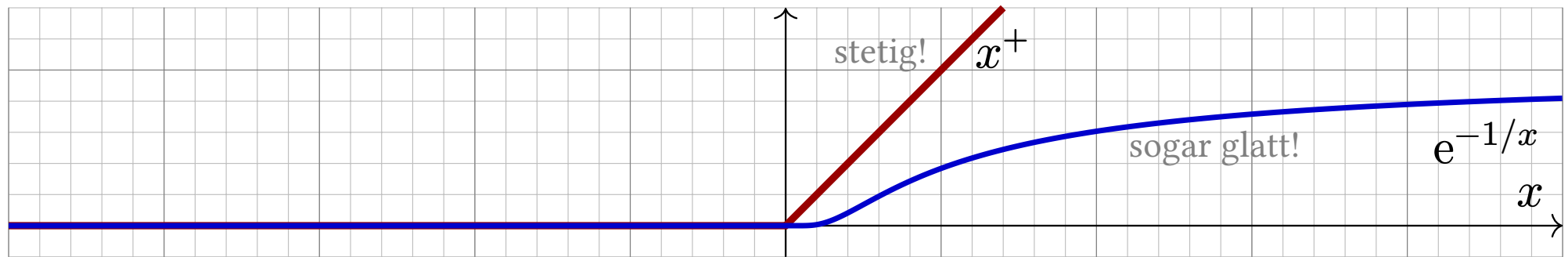
Proposition E1F: Homöomorphie der konvexen Körper

Jede kompakte konvexe Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren ist homöomorph zum Einheitsball $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$.

Satz E1G: Fixpunktsatz von Brouwer, 1909

Jede stetige Abbildung $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ hat mindestens einen Fixpunkt, das heißt, es existiert ein Punkt $a \in \mathbb{D}^n$ mit der Eigenschaft $f(a) = a$.

Für $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ genügt der Zwischenwertsatz. (Übung! Erstes Semester)
Allgemein $n \in \mathbb{N}$: Sperners Lemma (Kompaktheit, ab drittem Semester)
Abbildungsgrad (Algebraische Topologie, ab fünftem Semester)



Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $h(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $h(x) > 0$ für $x > 0$.

Konstruktion der Nash-Funktion

Zum Strategievektor $s = (s_1, \dots, s_n) \in \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ sei

$\bar{u}_i^s : \bar{S}_i \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \bar{u}_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n)$ und weiter

$S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}$, $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k$, $\delta_i^k := h[\bar{u}_i^s(s_i^k) - \bar{u}_i^s(s_i)] \geq 0$,

$\check{s}_i := \sum_k \check{p}_i^k s_i^k$, $\check{p}_i^k := (p_i^k + \delta_i^k) / (1 + \sum_j \delta_i^j) \geq 0$, $\sum_k \check{p}_i^k = 1$.

Lemma E1j: Gleichgewichte als Fixpunkte

Zum Spiel u bzw. $\bar{u}$ konstruieren wir so die stetige **Nash-Funktion**

$f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n : s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto \check{s} = (\check{s}_1, \dots, \check{s}_n)$.

Die Fixpunkte von f sind genau die Nash-Gleichgewichte von $\bar{u}$:

$$\text{fix}(f) = \text{NE}(\bar{u})$$

Beweis: „ $\supseteq$ “: Klar nach Konstruktion. „ $\subseteq$ “: Sei $s = f(s)$ ein Fixpunkt.

Für $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k$ gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \sum_k p_i^k \bar{u}_i^s(s_i^k)$ nach Definition von $\bar{u}$.

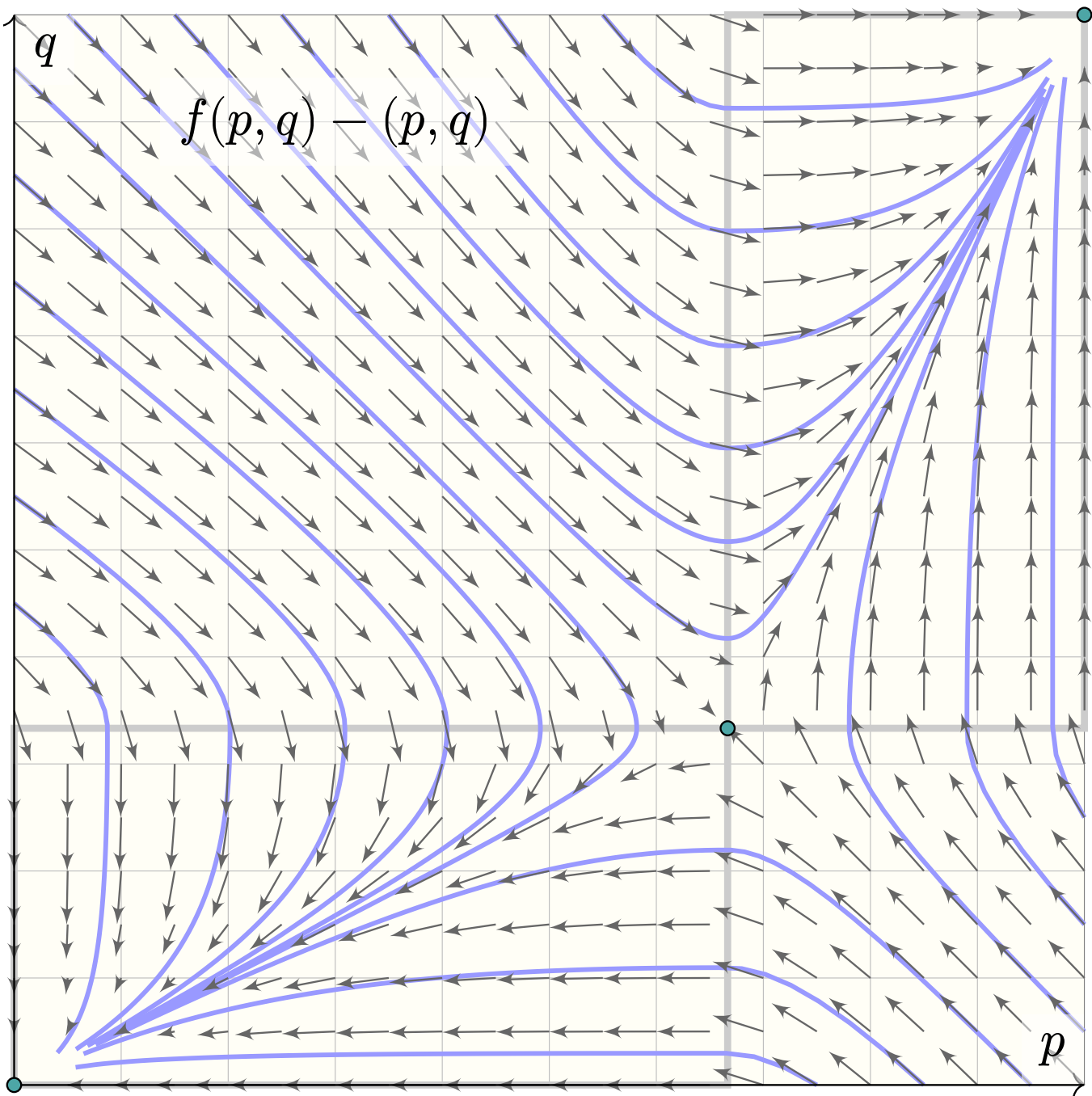
Es gibt einen Index k mit $p_i^k > 0$ und $\bar{u}_i^s(s_i^k) \leq \bar{u}_i^s(s_i)$, somit $\delta_i^k = 0$.

Aus $\check{p}_i^k = p_i^k$ folgt $\delta_i^j = 0$ für alle $j = 0, 1, \dots, \ell$, also $\bar{u}_i^s(s_i^j) \leq \bar{u}_i^s(s_i)$.

Demnach gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \max \bar{u}_i^s$; jede Strategie s_i ist beste Antwort.

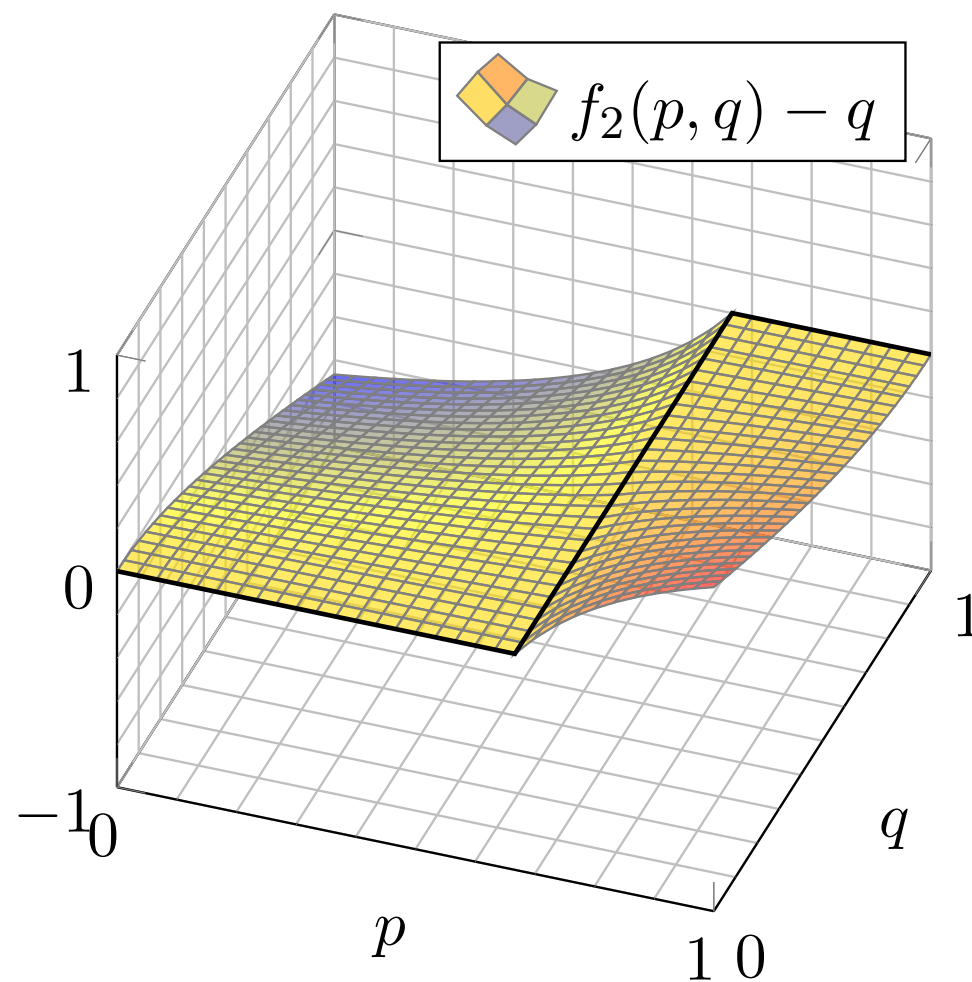
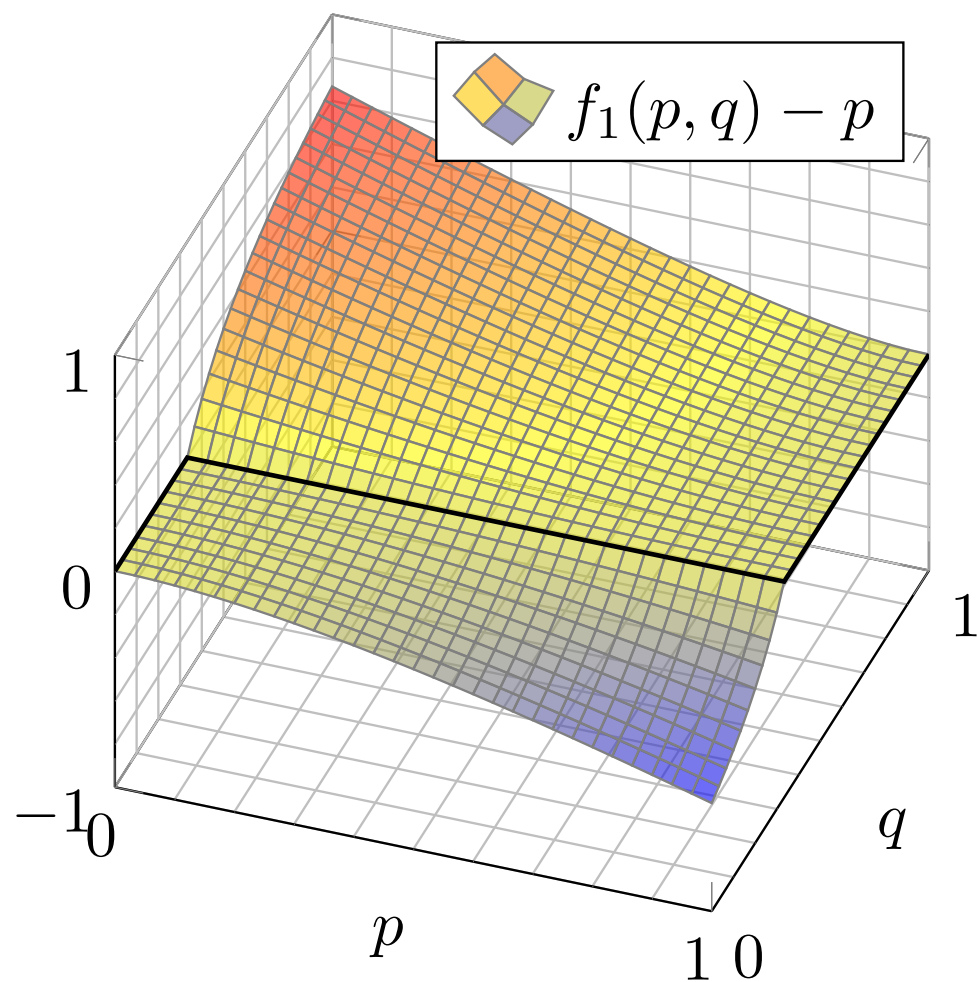
QED

Bach \ Strawinsky	Bach	Strawinsky
Bach	1, 2	0, 0
Strawinsky	0, 0	2, 1

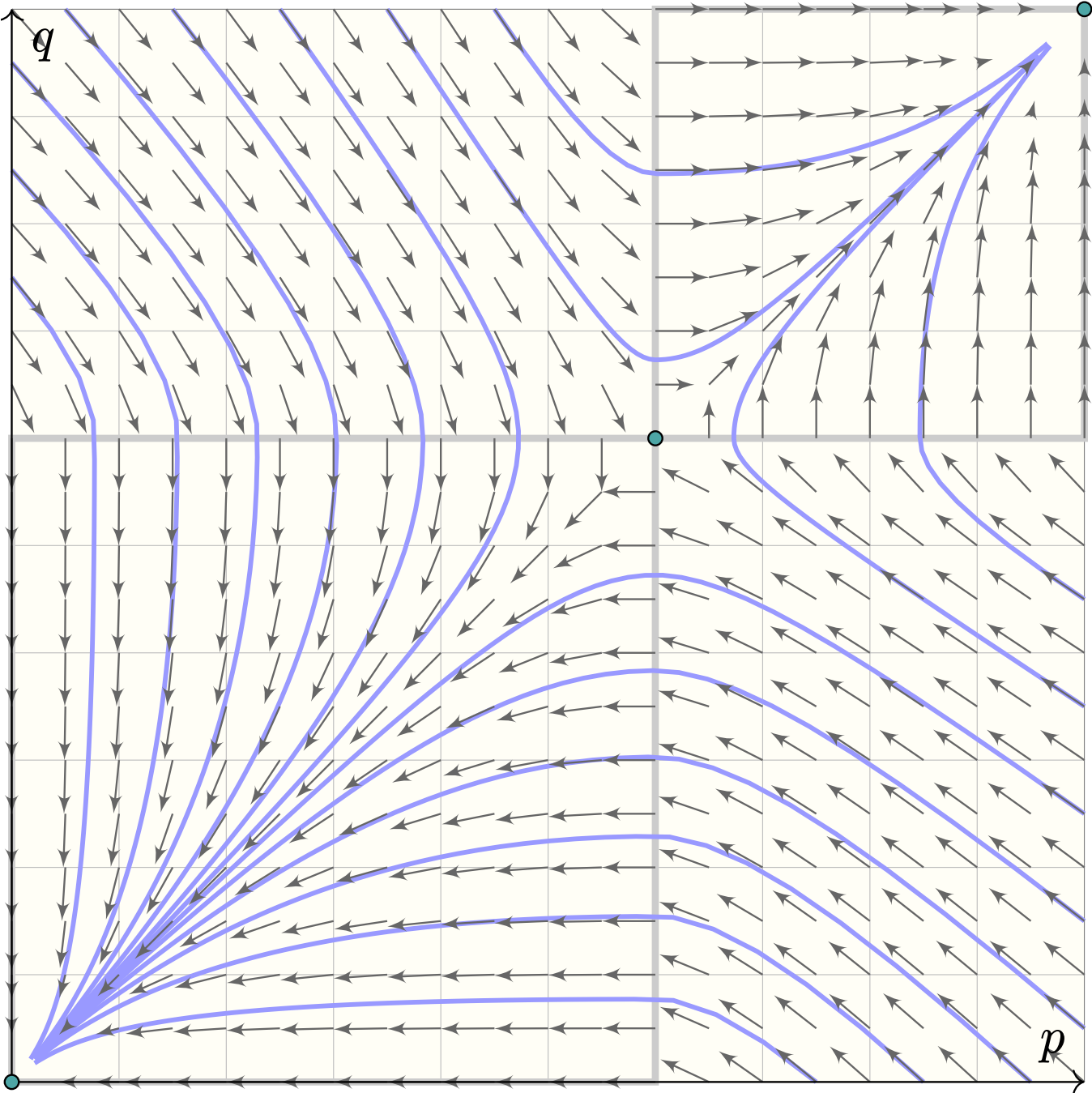


Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

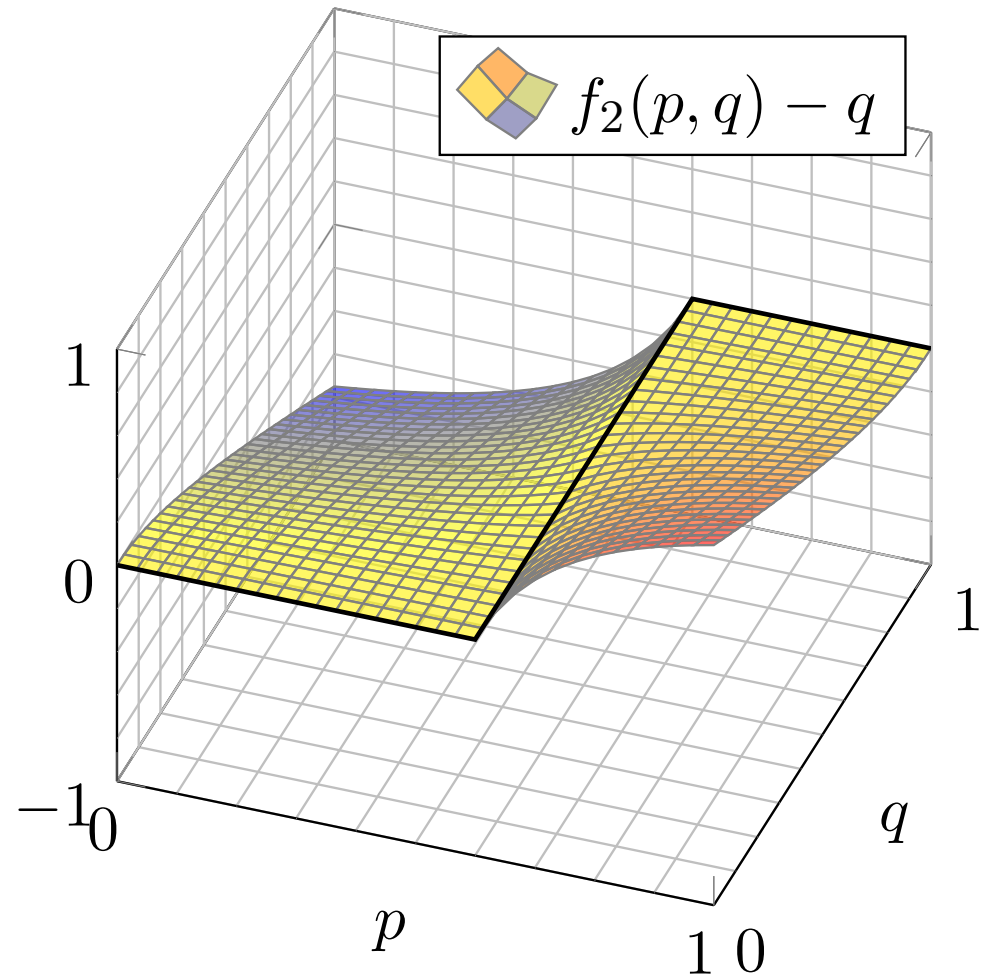
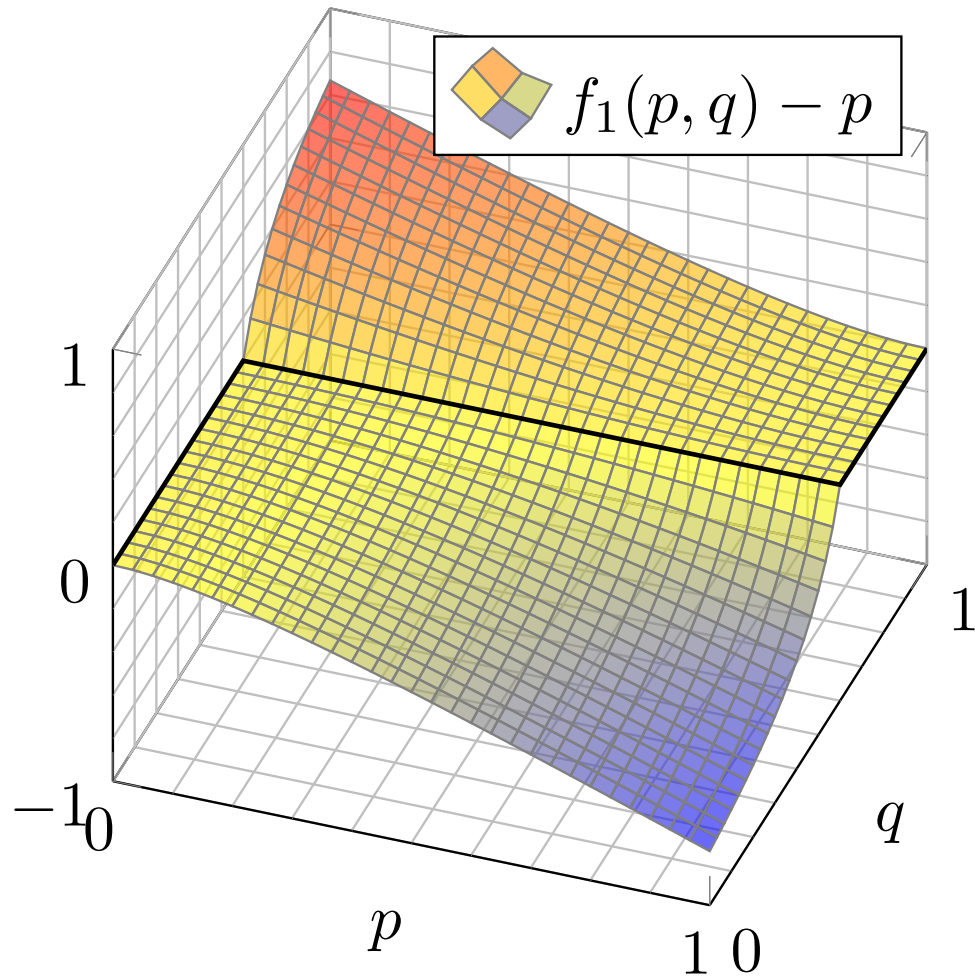


A \ B	B	
	bleiben	gehen
bleiben	-2	-5
gehen	-5	0

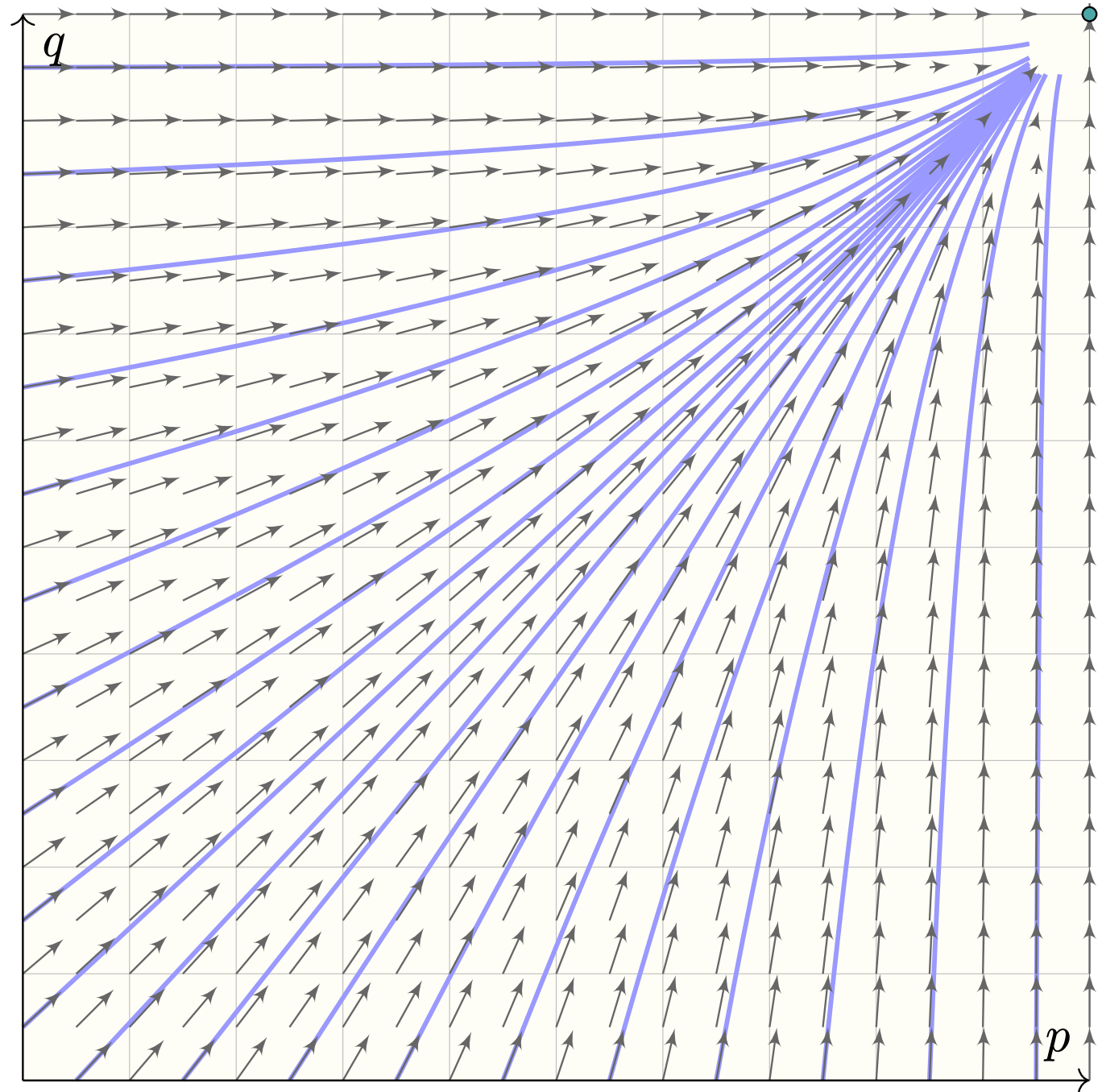


Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

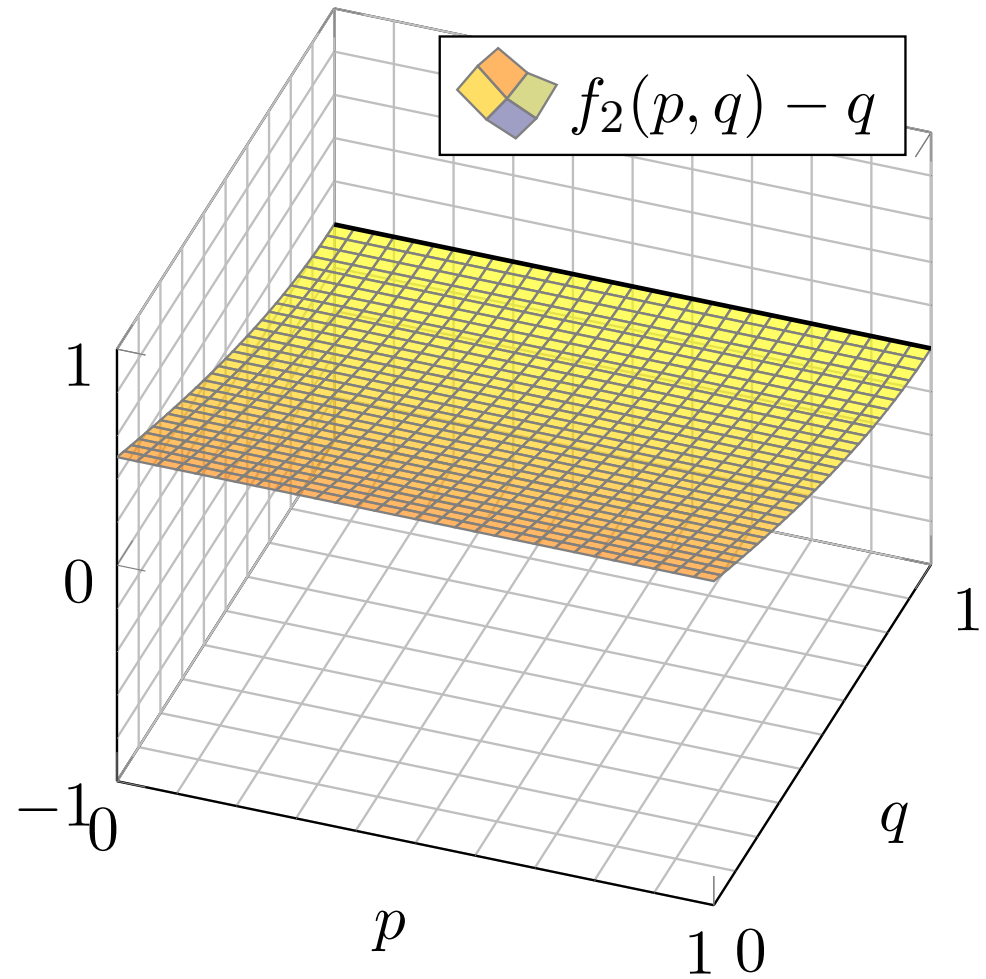
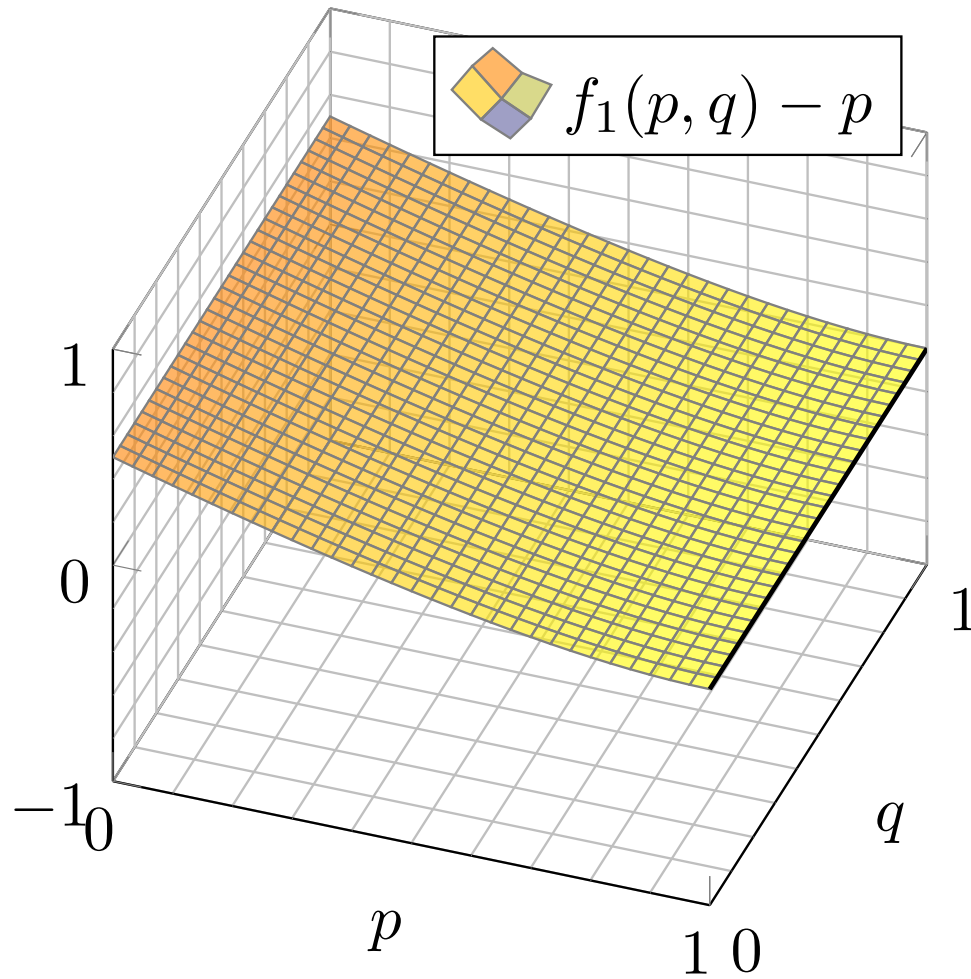
Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.



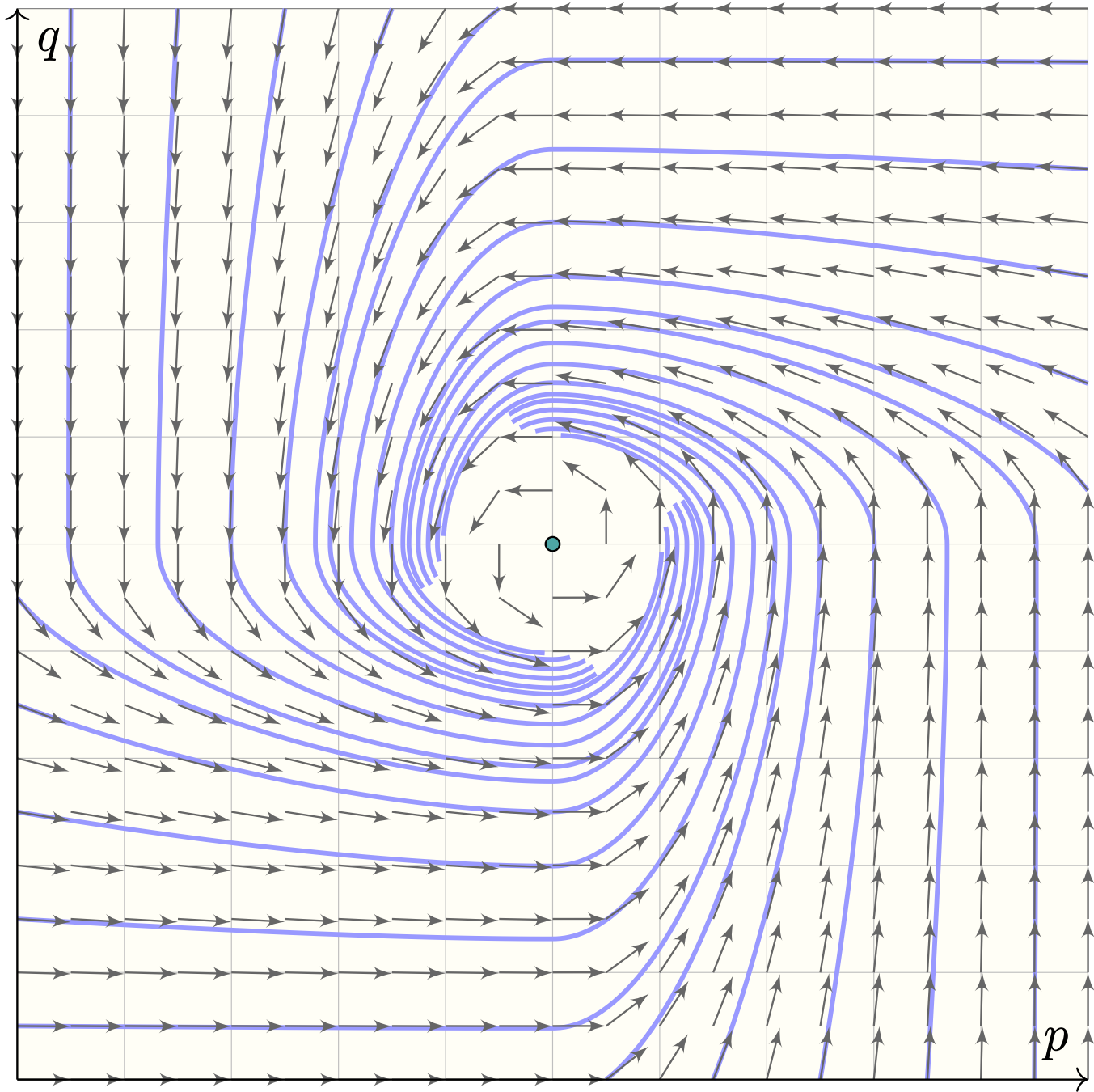
		B	
		schweigen	gestehen
A	schweigen	-1	-5
	gestehen	-5	-4

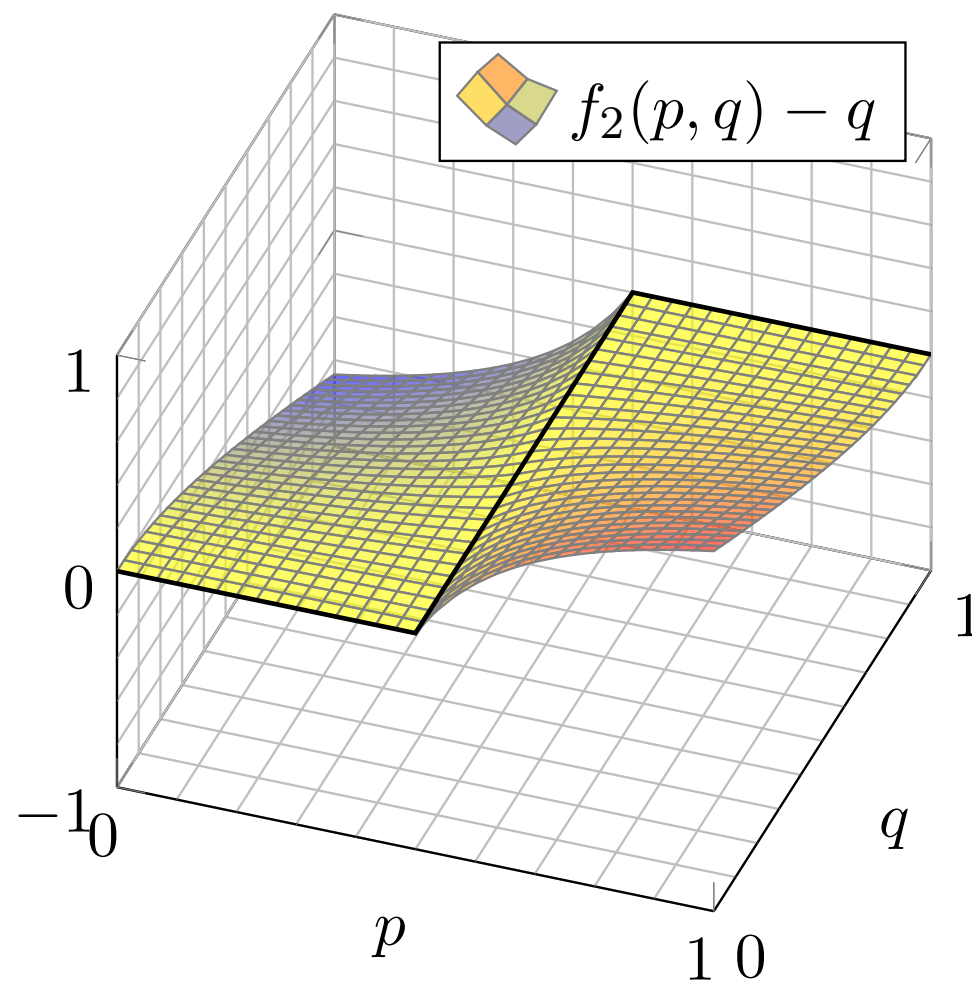
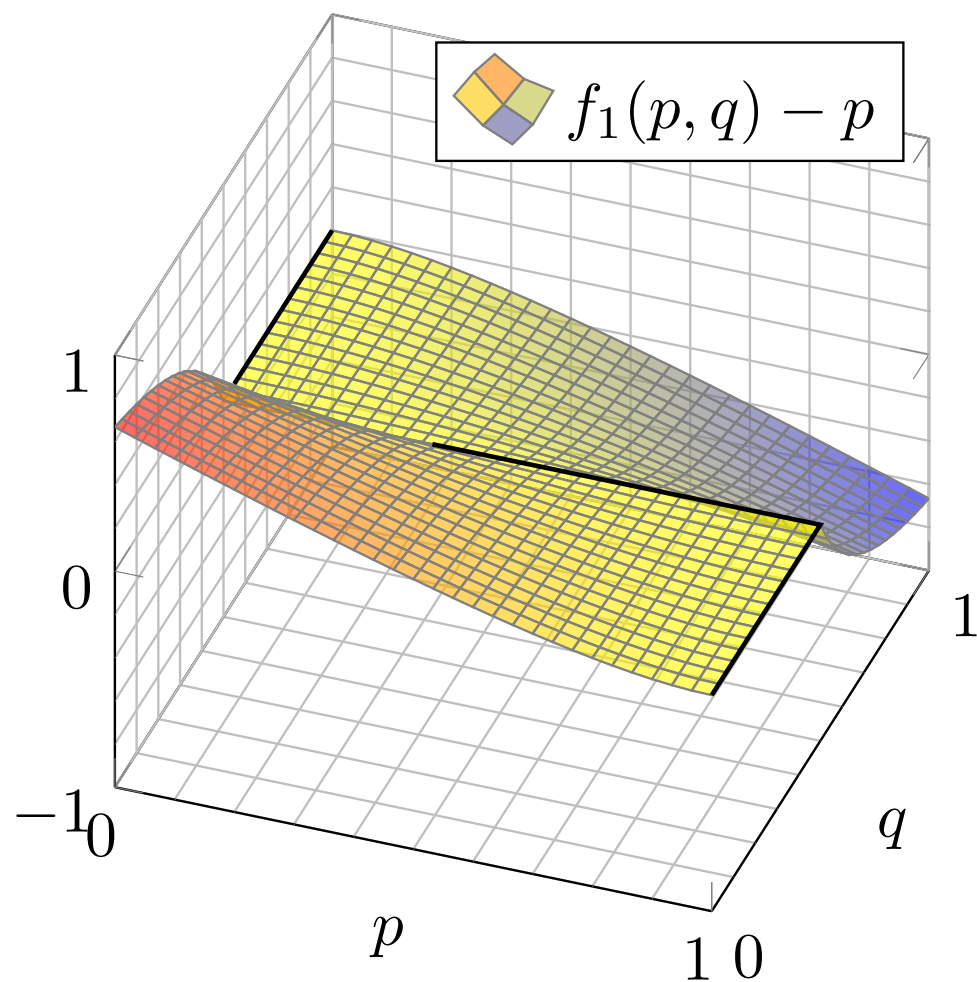


Nash-Funktion zum Gefangenendilemma



A \ B	B	
	Kopf	Zahl
Kopf	-1	+1
Zahl	+1	-1





*Actions have consequences, more intricately:
joint actions have individual consequences.*

Was ist ein strategisches Spiel in Normalform? Eine Abbildung

$$u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow (R_1, \leq_1) \times \dots \times (R_n, \leq_n).$$

Was ist ein Nash-Gleichgewicht? Ein Punkt $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ mit

$$s_i \in \operatorname{Arg} \max_{a \in S_i} u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Interpretation und Anwendung:

- Rationale Analyse des Spiels (*rational reasoning*)
- Kommunikation vor dem Spiel (*pre-play communication*)
- Evolution durch Versuch und Irrtum (*trial-and-error adjustment*)

Definition E1κ: strategisches Spiel in Normalform

Ein **strategisches Spiel in Normalform** über I ist eine Abbildung

$$u : S_I = \prod_{i \in I} S_i \rightarrow R_I = \prod_{i \in I} R_i : s = (s_i)_{i \in I} \mapsto r = (r_i)_{i \in I}.$$

Formal ist dieses Spiel (I, S, R, u) durch folgende Daten definiert:

- (1) eine **Spielmeng**e $I = \{1, \dots, n\}$ sowie für jeden Spieler $i \in I$
- (2) eine **Strategiemeng**e $S_i \neq \emptyset$ möglicher Strategien / Aktionen / Züge,
- (3) eine **Ergebnismeng**e $(R_i, \leq_i)$ möglicher Resultate, linear geordnet,
- (4) eine **Nutzenfunkt**ion $u : S \rightarrow R$, individuell $u_i : S \rightarrow R_i : s \mapsto r_i$.

Bewährte Notation:

Koalition $K \subseteq I$,

Zerlegung $I = K \sqcup J$,

Strategie $s_i \in S_i \neq \emptyset$,

Bündel $s_K \in S_K := \prod_{i \in K} S_i$,

Nutzen $u_i : S_i \times S_{-i} \simeq S \rightarrow R_i : (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$

Komplement $-K := I \setminus K$,

statt $\{i\}$, $-\{i\}$ kurz i , $-i$,

Ergebnis $r_i \in (R_i, \leq_i)$,

Zerlegung $s_I = (s_K; s_J)$,

Nash–Gleichgewichte

Definition E1L: Nash–Gleichgewicht

Sei $s \in S = \prod_{i \in I} S_i$ ein Strategievektor. Bezüglich Spieler $i \in I$ heißt s

- (1) **strikt stabil:** $\forall a \in S_i \setminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) > u_i(a; s_{-i}) \Leftrightarrow s \in \text{NE}_i^!(u)$
- (2) **stabil:** $\forall a \in S_i \setminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) \geq u_i(a; s_{-i}) \Leftrightarrow s \in \text{NE}_i(u)$

Gilt dies für alle $i \in I$ so heißt s ein **(striktes) Nash–Gleichgewicht**,
 geschrieben $s \in \text{NE}^!(u) := \bigcap_{i \in I} \text{NE}_i^!(u)$ und $s \in \text{NE}(u) := \bigcap_{i \in I} \text{NE}_i(u)$.

Koalitionen und starke Gleichgewichte

Wir betrachten weiterhin ein Spiel $u : A_I := \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i =: R_I$.

Definition E1N: starkes Gleichgewicht (Aumann 1959)

Ein Strategiebündel $a \in A_I$ ist **suboptimal** für die Koalition $K \subseteq I$, falls zu $a_K \in A_K$ eine strikt bessere Alternative $b_K \in A_K$ existiert:

$$u_K(a_K; a_{-K}) < u_K(b_K; a_{-K})$$

Das heißt, für jeden Spieler $i \in K$ gilt $u_i(a_K; a_{-K}) < u_i(b_K; a_{-K})$.

Wir nennen $a \in A_I$ ein **starkes Gleichgewicht** des Spiels u , falls a optimal ist für jede Koalition $K \subseteq I$.

Beispiel: (0) Für $K = \emptyset$ ist jedes Strategiebündel $a \in A_I$ optimal.

(1) Speziell für $K = \{i\}$ ist Optimalität die übliche Nash-Bedingung.

Starke Gleichgewichte sind meist zu stark.

		B		0	1
A	0	-2	-2	-5	-2
	1	-5	0	-2	0

Bleiben oder gehen

		B		0	1
A	0	-4	-4	-5	0
	1	-5	0	-1	-1

Gefangenendilemma

Koalitions-Stabilität ist wünschenswert.

Wir betrachten weiterhin ein Spiel $u : A_I := \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i =: R_I$.

Definition E1o: koalitions-stabiles Gleichgewicht

Ein Strategiebündel $a \in A_I$ ist **instabil** für die Koalition $K \subseteq I$, falls gilt:
Zu $a_K \in A_K$ existiert eine strikt bessere Alternative $b_K \in A_K$, das heißt

$$u_K(a_K; a_{-K}) < u_K(b_K; a_{-K}),$$

und $(b_K; a_{-K})$ wiederum ist stabil für jede echte Teilkoalition $J \subsetneq K$.
Andernfalls ist das Strategiebündel a **stabil** für die Koalition $K \subseteq I$.

- (0) Jedes Strategiebündel $a \in A_I$ ist stabil für die leere Koalition $K = \emptyset$.
- (1) Für $K = \{i\}$ ist Stabilität die Nash-Bedingung: Spieler i hat keine strikt bessere Alternative, für alle $b_i \in A_i$ gilt $u_i(a_i; a_{-i}) \geq u_i(b_i; a_{-i})$.
- (2) Für die Zwei-Spieler-Koalition $K = \{i, j\} \subseteq I$ bedeutet Instabilität:
 - (2a) Für die Koalition K existiert eine strikt bessere Alternative $b_K \in A_K$, das heißt $u_i(a_K; a_{-K}) < u_i(b_K; a_{-K})$ und $u_j(a_K; a_{-K}) < u_j(b_K; a_{-K})$,
 - (2b) und das neue Bündel $(b_K; a_{-K})$ ist stabil für i und stabil für j .

		B		0	1
A	0	-2		-2	-5
	1	-5		0	0

Bleiben oder gehen

		B		0	1
A	0	-4		-4	-5
	1	-5		0	-1

Gefangenendilemma

Definition E2A: Sicherheitswert und Sicherheitsstrategie

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R_1 \times \dots \times R_n$ ein endliches Spiel, oder allgemein ein reelles Spiel mit $S = S_1 \times \dots \times S_n$ kompakt und $u : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

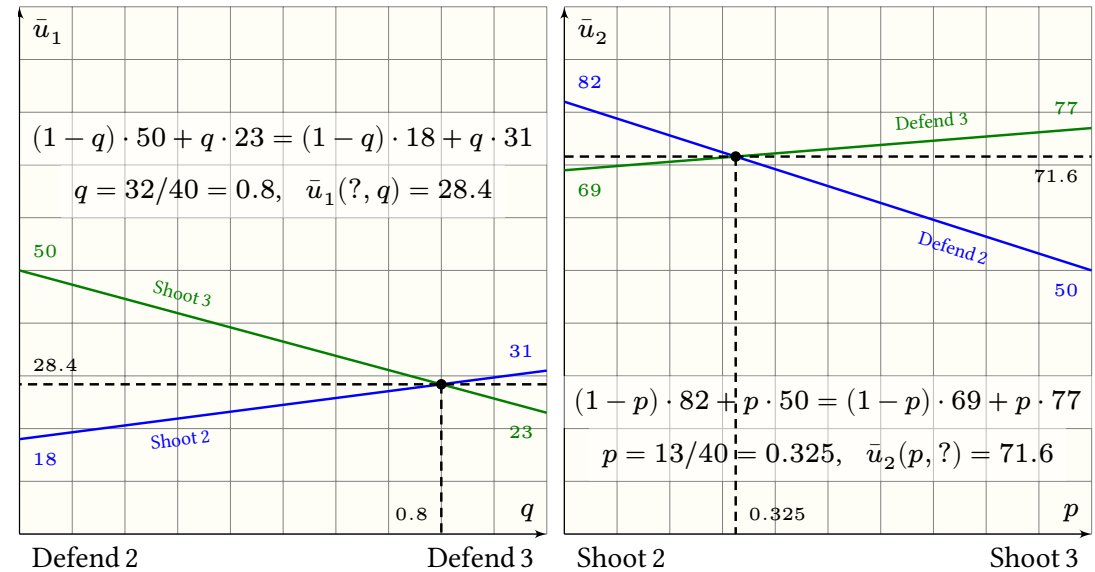
Spieler i kann mindestens folgende Auszahlung für sich garantieren:

$$\text{val}_i(u) := \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i})$$

Hierzu wählt er als **Sicherheitsstrategie** $s_i^* \in S_i$ einen Min-Maximierer. Wir nennen $\text{val}_i(u)$ den **Sicherheitswert** des Spiels u für Spieler i .

Basketball Endgame als Spiel mit konstanter Summe

		B		Defend 2	Defend 3
A				82	69
	Shoot 2	18	31		
	Shoot 3	50	23		



Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien.

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = 23 \quad \text{vs} \quad \max_{y \in S_2} \min_{x \in S_1} u_2(x, y) = 69$$

- ☹️ Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 100$, aber nur $23 + 69 = 92 < 100$.
- ☹️ Die Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i \in I}$ bilden kein Nash-Gleichgewicht.

$$\max_{x \in [S_1]} \min_{y \in [S_2]} \bar{u}_1(x, y) = 28.4 \quad \text{vs} \quad \max_{y \in [S_2]} \min_{x \in [S_1]} \bar{u}_2(x, y) = 71.6$$

- 😊 Dahinter stecken allgemeine Regeln und der Minimax-Satz E2D.
- 😊 Die Lücke verschwindet genau für Nash-Gleichgewichte!

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Lemma E2B: Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Sei $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$.

(0) Allgemein gilt „Maximin $\leq$ Minimax“, also ausgeschrieben:

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \leq \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(1) Ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash-Gleichgewicht, so gilt Gleichheit:

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(2) Angenommen, es gilt die ersehnte Gleichheit „Maximin = Minimax“. Wir wählen einen Min-Maximierer $s_1 \in S_1$ und Max-Minimierer $s_2 \in S_2$:

$$v = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y),$$

$$v = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2).$$

Dann ist das Paar $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis: (0) Für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$ gilt:

$$u_1(x, y) \stackrel{(a)}{\leq} u_1(x, y)$$

$$u_1(x, y) \stackrel{(b)}{\leq} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

$$\min_{y \in S_2} u_1(x, y) \stackrel{(c)}{\leq} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

$$\min_{y \in S_2} u_1(x, y) \stackrel{(d)}{\leq} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \stackrel{(e)}{\leq} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

(1) Für jedes Nash-Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) \geq \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\ u_1(s_1, s_2) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) \leq \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \leq u_1(s_1, s_2) \leq \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y)$$

Dank (0) gilt auch die umgekehrte Ungleichung, hieraus folgt Gleichheit.

(2) Dank der genannten Voraussetzungen gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(s_1, s_2) \leq \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) = v \\ u_1(s_1, s_2) \geq \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = v \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y)$$

Demnach ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash-Gleichgewicht.

QED

Satz E2c: Austauschregel für Nullsummenspiele

- (1) Dualität: Für unser Nullsummenspiel $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt genau dann „Minimax = Maximin“, wenn Nash-Gleichgewichte existieren.
- (2) Auszahlungsgleichheit: Je zwei Nash-Gleichgewichte (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) des Spiels u führen zum selben Ergebnis $u_1(s_1, s_2) = u_1(s_1^*, s_2^*)$.
- (3) Alle Nash-Gleichgewichte sind austauschbar: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash-Gleichgewichte des Spiels u , dann auch (s_1, s_2^*) und (s_1^*, s_2) .
- (4) Sind $S_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ und $S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und darauf u affin-linear, so ist $\text{NE}(u)$ das Produkt zweier konvexer Mengen $K_1 \subseteq S_1$ und $K_2 \subseteq S_2$.

Die Sätze von Nash und von Neumann

Satz E2D: Minimax-Satz, John von Neumann 1928

Sei $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein endliches Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dank E1E existiert ein Gleichgewicht $(s_1^*, s_2^*) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$, und somit gilt

$$\text{val}_1(\bar{u}) := \max_{x \in \bar{S}_1} \min_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_1(x, y) = \bar{u}_1(s_1^*, s_2^*) = \min_{y \in \bar{S}_2} \max_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_1(x, y),$$

$$\text{val}_2(\bar{u}) := \max_{y \in \bar{S}_2} \min_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_2(x, y) = \bar{u}_2(s_1^*, s_2^*) = \min_{x \in \bar{S}_1} \max_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_2(x, y).$$

Es gilt $\text{val}_1(\bar{u}) + \text{val}_2(\bar{u}) = 0$.

Beispiel: Schere-Stein-Papier mit Brunnen

		B			
		Schere	Stein	Papier	Brunnen
A	Schere	0	+1	-1	+1
	Stein	-1	0	+1	+1
	Papier	+1	-1	0	-1
	Brunnen	-1	+1	+1	0
	Brunnen	+1	+1	-1	0

Aufgabe: Ist dies ein Nullsummenspiel? Was ist sein Wert?
Sehen Sie ein Nash-Gleichgewicht dieses Spiels? gar alle?

Stark und schwach dominierte Strategien

Definition E2F: dominierte Strategien

Sei $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$ ein strategisches Spiel und $i \in I$ ein Spieler. Für je zwei seiner Strategien $x, y \in S_i$ vergleichen wir die Funktionen

$$u_i(x; -), u_i(y; -) : S_{-i} \rightarrow R_i.$$

Schwache Dominanz $x \leq_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) \leq u_i(y; s_{-i})$,

starke Dominanz $x <_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) < u_i(y; s_{-i})$

jeweils für alle möglichen Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$.

Für Teilmengen $X, Y \subseteq S_i$ bedeutet Dominanz $X \leq_i^u Y$ bzw. $X <_i^u Y$:

Zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $x \leq_i^u y$ bzw. $x <_i^u y$.

Wir nennen $x \in S_i$ **dominiert in u** , falls $x \leq_i^u y$ für ein $y \in S_i \setminus \{x\}$ gilt.

Wir nennen $y \in S_i$ **dominant in u** , falls $x \leq_i^u y$ für alle $x \in S_i \setminus \{y\}$ gilt.

Wir schreiben $D_i(u) := \{y \in S_i \mid S_i \leq_i^u y\}$ und $DNE(u) := \prod_{i \in I} D_i(u)$.

⚠ Es gilt $DNE(u) \subseteq NE(u)$, oft $DNE(u) = \emptyset$, selten $DNE(u) = NE(u)$.

Streichung dominierter Strategien

Satz E2c: Streichung dominierter Strategien, reiner Fall

Gegeben sei ein Spiel $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$ und $S_i = S'_i \sqcup D_i$ für $i \in I$.
 Löschung von D_i ergibt die Einschränkung $u' : \prod_{i \in I} S'_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$:

- (1) Aus starker Dominanz $S'_i \succ_i^u D_i$ folgt $\text{NE}(u') = \text{NE}(u)$.
- (2) Aus schwacher Dominanz $S'_i \succeq_i^u D_i$ folgt $\text{NE}(u') \subseteq \text{NE}(u)$.

Beweis: (2) Sei $s \in \text{NE}(u')$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x' \in S'_i} u_i(x'; s_{-i})$.
 Dies ist gleich $\max_{x \in S_i} u_i(x; s_{-i})$ dank $S'_i \succeq_i^u D'_i$, also $s \in \text{NE}(u)$.

(1) Sei $s \in \text{NE}(u)$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in S_i} u_i(x; s_{-i})$.

Aus $S'_i \succ_i^u D'_i$ folgt $s_i \in S'_i$. Also $s \in S'$ und $s \in \text{NE}(u')$. QED

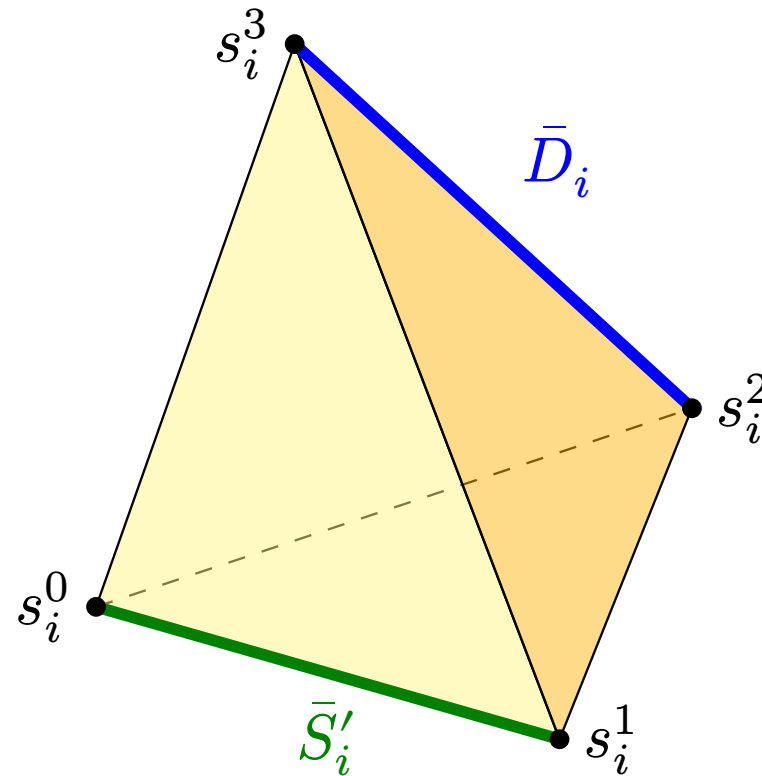
Fortsetzung: Zu $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$ betrachten wir $\bar{u} : \prod_{i \in I} \bar{S}_i \rightarrow \mathbb{R}^I$.

Gilt (starke bzw. schwache) Dominanz E2F bezüglich aller reinen Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$, so auch für alle gemischten $\bar{s}_{-i} \in \bar{S}_{-i}$.

Aus $x_0 \leq_i^u y_0, \dots, x_n \leq_i^u y_n$ folgt $\sum_k p_k x_k \leq_i^u \sum_k p_k y_k$ für alle $p \in \Delta^n$.

Gilt für ein k zudem $x_k <_i^u y_k$ und $p_k > 0$, so folgt $\sum_k p_k x_k <_i^u \sum_k p_k y_k$.

Geometrisch sieht die Löschung gemischter Strategien etwa so aus:



Streichung dominierter Strategien

Satz E2H: Streichung dominierter Strategien, gemischter Fall

Sei $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$ und $u' : \prod_{i \in I} S'_i \rightarrow \mathbb{R}^I$ mit $S_i = S'_i \sqcup D_i$. Dann gilt

$$\bar{S}_i = \bar{S}'_i * \bar{D}_i = \{ (1-t)x + ty \mid t \in [0, 1], x \in \bar{S}'_i, y \in \bar{D}_i \}.$$

Die Differenz der gemischten Strategiemengen ist demnach

$$\bar{S}_i \setminus \bar{S}'_i = \{ (1-t)x + ty \mid t \in]0, 1], x \in \bar{S}'_i, y \in \bar{D}_i \}.$$

(1) Aus $\bar{S}'_i >^u_i D_i$ folgt $\bar{S}'_i >^u_i \bar{S}_i \setminus \bar{S}'_i$.

Das bedeutet: Stark dominierte Strategien von u kommen in keinem Nash-Gleichgewicht von $\bar{u}$ vor. Bei ihrer Streichung gilt $\text{NE}(\bar{u}') = \text{NE}(\bar{u})$.

(2) Aus $\bar{S}'_i \geq^u_i D_i$ folgt $\bar{S}'_i \geq^u_i \bar{S}_i \setminus \bar{S}'_i$.

Bei Streichung schwach dominierter Strategien gilt $\text{NE}(\bar{u}') \subseteq \text{NE}(\bar{u})$.

Beispiel zu schwach dominierten Strategien

Aufgabe: Konstruieren Sie ein Spiel u , bei dem die Streichung einer schwach dominierten Strategie *alle* Nash-Gleichgewichte vernichtet.

Lösung: Wir beginnen mit einem Teilspiel u' , etwa *Matching Pennies*:

		B		
		b_0	b_1	b_2
A	a_0	-1	+1	0
	a_1	+1	-1	+2

Die Strategie b_1 dominiert schwach die neue Strategie b_2 von Spieler B. Die Auszahlungen für Spieler A sind beliebig, wir wählen sie geschickt. Die Strategie (a_1, b_2) ist ein Nash-Gleichgewicht des Spiels u . Beim Streichen der dominierten Strategie b_2 wird es vernichtet.

Beispiel zu stark dominierten Strategien

Aufgabe: Finden Sie alle reinen Gleichgewichte, dann alle gemischten.

B		b_0	b_1	b_2
A	a_0	4, 1	3, 3	1, 2
	a_1	3, 2	2, 1	3, 0

Lösung: Die reinen Gleichgewichte finden wir durch Hinsehen: Hier ist nur (a_0, b_1) ein Nash-Gleichgewicht, es ist sogar strikt. Die Strategie b_1 dominiert stark b_2 . Im Teilspiel u' dominiert a_0 stark a_1 . Im Teilspiel u'' dominiert b_1 stark b_0 . Schließlich bleibt nur das triviale Teilspiel u''' bestehend aus (a_0, b_1) . Das ist das einzige Gleichgewicht!

Rationalisierbare Strategien

Rationalität: Eine stark dominierte Strategie sollte nie gespielt werden. Ebenso wenig eine Strategie, die nie beste Antwort ist. Ist beides dasselbe?

Definition E2i: Rationalisierbarkeit

Die Strategie $s_i \in S_i$ heißt **rationalisierbar** oder **mindestens einmal beste Antwort**, wenn sie beste Antwort ist auf mind. eine (korrelierte) Gegenstrategie $s_{-i} \in [S_{-i}]$, also $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} \bar{u}_i(x; s_{-i})$ erfüllt.

Jedes Nash-Gleichgewicht $s \in S$ besteht aus rationalisierbaren $s_i \in S_i$.

Satz E2j: Rationalisierbar ist das Gegenteil von stark dominiert.

Genau dann ist s_i^* stark dominiert, wenn s_i^* nie beste Antwort ist.

Beweis: Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ ist klar: Dominiert $s_i \in \bar{S}_i$ stark $s_i^* \in S_i$, so gilt $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle Gegenstrategien $s_{-i} \in [S_{-i}]$.

Die Implikation „ $\Leftarrow$ “ ist bemerkenswert: Zu jedem $s_{-i} \in [S_{-i}]$ existiert ein geeignetes $s_i \in \bar{S}_i$, das die Ungleichung $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ erfüllt. Wir suchen stärker ein $s_i \in \bar{S}_i$ für alle $s_{-i} \in [S_{-i}]$.

Rationalisierbare Strategien

Wir konstruieren hierzu aus u ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel $v : S_1^* \times S_2^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Strategiemengen $S_1^* = S_i \setminus \{s_i^*\}$ und $S_2^* = S_{-i}$ und der Auszahlungsfunktion $v_1(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i; s_{-i}) - u_i(s_i^*; s_{-i})$.

Sei $\bar{v} : \bar{S}_1^* \times \bar{S}_2^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Im Spiel u ist s_i^* keine beste Antwort auf s_{-i} , wenn

$$\max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Im Spiel u ist s_i^* demnach nie beste Antwort, wenn

$$\min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Nach dem Hauptsatz E2D gilt Minimax = Maximin, also

$$\max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Es existiert demnach ein $s_i \in \bar{S}_1^*$ mit $\min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0$.

Das bedeutet $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle $s_{-i} \in \bar{S}_{-i}$.

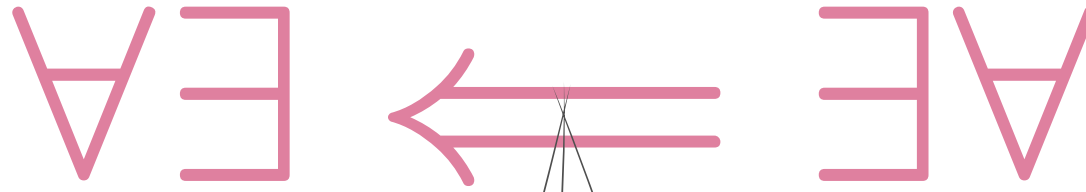
QED

Quantoren tauschen? Aber richtig!

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} p(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} p(x, y)$$

$$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x, y) \implies \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x, y)$$

Quantoren tauschen? Aber richtig!



Alle für einen
und
einer für alle?



Einer für alle
impliziert
für jeden einen!

Wann sind zwei Spiele äquivalent?

(o) Spiele $u : S_I \rightarrow R_I$ und $u' : S_I \rightarrow R'_I$ sind **ordnungsäquivalent**, falls

$$u_i(x_i; s_{-i}) \leq_i u_i(y_i; s_{-i}) \iff u'_i(x_i; s_{-i}) \leq'_i u'_i(y_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler $i \in I$ und alle Aktionen $x_i, y_i \in S_i$ bei festem $s_{-i} \in S_{-i}$.

(a) Zwei Spiele $u, u' : S_I \rightarrow \mathbb{R}_I$ sind **(schwach) affin äquivalent**, falls

$$u'_i(x_i; s_{-i}) = w_i u_i(x_i; s_{-i}) + c_i(s_{-i})$$

mit positiver Skalierung $w_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und additiver Konstante $c_i(s_{-i}) \in \mathbb{R}$.

Was ist ein Teilspiel?

Vorgelegt seien zwei Spiele $u : S_I \rightarrow R_I$ und $u' : S'_I \rightarrow R'_I$. **Teilspiel** $u \subseteq u'$ bedeutet Einschränkung $u = u'|_{S_I}^{R_I}$ auf $S_i \subseteq S'_i$ und $(R_i, \leq_i) \subseteq (R'_i, \leq'_i)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 I & \prod_{i \in I} S_i = S_I & \xrightarrow{u} & R_I = \prod_{i \in I} R_i & \\
 \parallel \text{id} & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 J & \prod_{j \in J} S'_j = S'_J & \xrightarrow{u'} & R'_J = \prod_{j \in J} R'_j &
 \end{array}$$

Was ist ein Spielmorphismus?

🔍 Wie vergleichen wir zwei Spiele $u : S_I \rightarrow R_I$ und $u' : S'_J \rightarrow R'_J$?

$$\begin{array}{ccccc}
 I & \prod_{i \in I} S_i = S_I & \xrightarrow{u} & R_I = \prod_{i \in I} R_i & \\
 \downarrow f & \downarrow g & & \downarrow h & \\
 J & \prod_{j \in J} S'_j = S'_J & \xrightarrow{u'} & R'_J = \prod_{j \in J} R'_j &
 \end{array}$$

Definition E2κ: Spielmorphismus $u \rightarrow u'$

Ein **Spielmorphismus** $(f, g, h) : u \rightarrow u'$ erfüllt $h \circ u = u' \circ g$.

- 1 Die Spielerabbildung $f : I \rightarrow J$ ist surjektiv (meist bijektiv):
Der Zielspieler $j \in J$ wird von der Koalition $f^{-1}(j) \subseteq I$ gesteuert.
- 2 Die Aktionsabbildung $g : S_I \rightarrow S'_J : s = (s_i)_{i \in I} \mapsto s' = (s'_j)_{j \in J}$ definiert den Steuermechanismus $s'_j = g_j(s_i)_{i \in f^{-1}(j)}$ für jeden Zielspieler $j \in J$.
- 3 Die Resultatsabbildung $h : R_I \rightarrow R'_J : r = (r_i)_{i \in I} \mapsto r' = (r'_j)_{j \in J}$ mit $r'_j = h_j(r_i)_{i \in f^{-1}(j)}$ ist strikt monoton für alle $i \in I$ und $j = f(i)$.

Isomorphismen von Spielen

Aufgabe: In welchem Sinne sind die folgenden Spiele isomorph?

		B		0	1
		u^1			
A	0	-1	-5	0	
	1	0	-4		

		B		0	1
		u^2			
A	0	4	-7	0	3
	1	5	1		

		B		0	1
		u^3			
A	0	2	0	3	
	1	3	1		

		B		0	1
		u^4			
A	0	0	0	1	2
	1	3	2		

Lösung: $u^1 \cong u^2$: Spieler & Strategien fix, Ergebnisse affin transformiert.
 $u^1 \cong u^3$: nicht affin, nur monoton. $u^1 \cong u^4$: nur schwach monoton.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Symmetriegruppen der folgenden Spiele!

		u^1	
		B	
u^1	A	bleiben	gehen
	bleiben	-2	-5
	gehen	-5	0

		u^2	
		B	S
u^2	A	2	0
	B	1	0
	S	0	1

		u^3	
		G	
u^3	U	0	1
	0	-1	+1
	1	+1	-1

		u^4	
		D	
u^4	C	K	L
	K	0	2
	L	2	0

Symmetrien unter Spielern

Jede Permutation $\tau \in \text{Sym}(I)$ operiert durch Umordnung $u \mapsto \tau \circ u \circ \tau^{-1}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 S := S_1 \times \cdots \times S_n & \xrightarrow{u} & R_1 \times \cdots \times R_n =: R \\
 \downarrow \sigma \cong & & & & \downarrow \rho \cong \\
 & (s_1, \dots, s_n) \mapsto (r_1, \dots, r_n) & & & \\
 & \downarrow s'_{\tau i} = s_i \quad s'_j = s_{\tau^{-1}j} & & & \downarrow r'_{\tau i} = r_i \quad r'_j = r_{\tau^{-1}j} \\
 & (s'_1, \dots, s'_n) \mapsto (r'_1, \dots, r'_n) & & & \\
 S' := S'_1 \times \cdots \times S'_n & \xrightarrow{u' = \rho \circ u \circ \sigma^{-1}} & R'_1 \times \cdots \times R'_n =: R'
 \end{array}$$

Definition E2L: Spieler-Symmetrie

Ein Spiel u ist **spieler-symmetrisch** unter $\tau : I \simeq I$, falls $u = \tau \circ u \circ \tau^{-1}$.
 Die Spieler-Symmetrien von u bilden die Gruppe $\text{Sym}(u) \leq \text{Sym}(I)$.
 Das Spiel u heißt **spieler-symmetrisch**, falls $\text{Sym}(u) = \text{Sym}(I)$ gilt.

Isomorphismen von Spielen

Definition E2M: Isomorphismus von Spielen

Vorgelegt seien zwei strategische Spiele in Normalform

$$u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i \quad \text{und} \quad u' : \prod_{j \in J} S'_j \rightarrow \prod_{j \in J} R'_j$$

sowie hierzu Bijektionen $\tau : I \xrightarrow{\sim} J$ und $\sigma_i : S_i \xrightarrow{\sim} S'_{\tau i}$ für jedes $i \in I$.

Das definiert die **Produktbijektion** $\sigma : S \xrightarrow{\sim} S' : (s_i)_{i \in I} \mapsto (\sigma_{\tau^{-j}} s_{\tau^{-j}})_{j \in J}$.

Wir nennen (τ, σ) oder kurz $\sigma : u \rightarrow u'$ einen **Isomorphismus**, wenn gilt:

Strikt: Für alle $i \in I$ und $s \in S$ gilt $R_i = R_{\tau i}$ und $u'_{\tau i}(\sigma s) = u_i(s)$.

Monoton: Für alle Spieler $i \in I$ und alle Strategievektoren $s, s^* \in S$ gilt die Äquivalenz $u_i(s) \leq u_i(s^*) \iff u'_{\tau i}(\sigma s) \leq u'_{\tau i}(\sigma s^*)$.

Schwach monoton: Wir verlangen Monotonie nur falls $s_{-i} = s^*_{-i}$.

Affin: Beide Spiele sind reell, also $R_i = R_j = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$ und $j \in J$, und es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i$ mit Konstanten $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i > 0$.

Schwach affin: Es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i(s_{-i})$ mit $b_i : S_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition E2N: Abstrakter Nonsense wirkt konkret.

Strategische Spiele und ihre Isomorphismen bilden eine **Kategorie**:

$$\text{Game} = \text{Game}_s, \quad \text{Game}_m, \quad \text{Game}_{wm}, \quad \text{Game}_a, \quad \text{Game}_{wa}.$$

Jeder Isomorphismus $\sigma : u \simeq u'$ bewahrt **Gleichgewichte**: Wir erhalten Bijektionen $\text{NE}(u) \simeq \text{NE}(u')$ und $\text{NE}^!(u) \simeq \text{NE}^!(u')$ vermöge $s \mapsto \sigma(s)$. Zum Spiel $u \in \text{Game}_*$ bilden die Automorphismen die **Gruppe** $\text{Aut}_*(u)$. Diese Gruppe **operiert** demnach auf den Mengen $\text{NE}(u)$ und $\text{NE}^!(u)$.

Existenz symmetrischer Gleichgewichte

Satz E2o: Existenzsatz für symmetrische Gleichgewichte, Nash 1950

Sei $u : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Sei $G \leq \text{Aut}_*(u)$ eine Symmetriegruppe mit $*$ $\in \{s, a, wa\}$ wie oben. Dann besitzt $\bar{u}$ mindestens ein G -invariantes Nash-Gleichgewicht.

Folgern Sie dies aus der natürlichen Äquivarianz der Nash-Funktion.

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto (u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2)).$$

Die Auszahlungen (u_1, u_2) entsprechen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$.

$$A_{I \times J^*} := \left[\begin{array}{c|c} A_{I \times J} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right]$$

Definition E3A: reguläre Spiele

Die Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$ nennen wir (affin) **regulär**, falls $\det(A_{I \times J^*}) \neq 0$ gilt für alle $I \subseteq S_1$ und $J \subseteq S_2$ mit $\#I = \#J + 1$.

Kleinstes Beispiel: Sei $I = \{i < i'\}$ und $J = \{j\}$.

$$A_{I \times J^*} := \begin{bmatrix} a_{i,j} & 1 \\ a_{i',j} & 1 \end{bmatrix}$$

Regularität bedeutet hier $\det A_{I \times J^*} = a_{i,j} - a_{i',j} \neq 0$.

Reguläre Bimatrix-Spiele

Satz E3B: reguläre $2 \times n$ -Bimatrix-Spiele

Jedes reguläre $2 \times n$ -Spiel hat höchstens $1 + n$ Nash-Gleichgewichte, und ihre Anzahl ist ungerade. Jede dieser Möglichkeiten wird realisiert.

Satz E3c: lokaler Struktursatz für Gleichgewichte regulärer Spiele

Sei $2 \leq m \leq n$ und $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein reguläres $m \times n$ -Spiel.

- (0) Dann folgt $\# \text{NE}(\bar{u}) < \binom{m+n}{m} < \infty$.
- (1) Jedes Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in \text{NE}(\bar{u})$ hat quadratischen Träger, das heißt $I = \text{supp}(s_1) \subseteq S_1$ und $J = \text{supp}(s_2) \subseteq S_2$ erfüllen $\#I = \#J$
- (2) Jedes Quadrat $I \times J \subseteq S_1 \times S_2$ trägt höchstens ein Gleichgewicht; dieses ist eine rationale Funktion à la Cramer der Matrixeinträge von u .

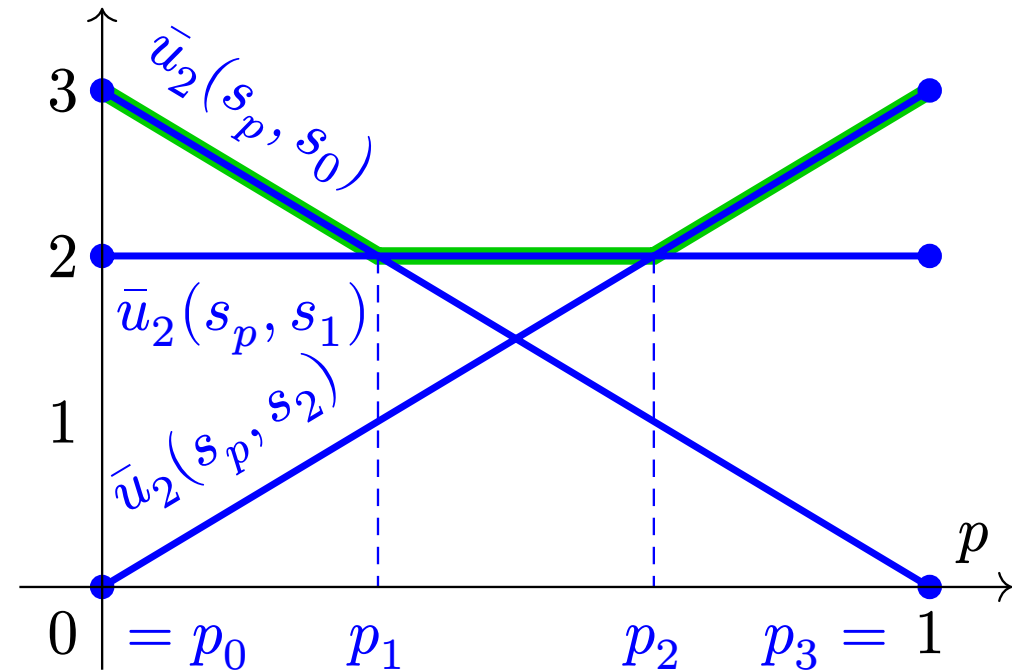
Satz E3D: Paritätstheorem von Wilson, 1971

Fast alle endlichen Spiele $u : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ haben nur endlich viele Nash-Gleichgewichte, und ihre Anzahl $\# \text{NE}(\bar{u})$ ist ungerade.

Lösung regulärer $2 \times n$ -Bimatrix-Spiele

B		s_0	s_1	s_2
A	s_0	3	1	5
	s_1	2	4	0

Diagramm zur Lösung eines regulären $2 \times n$ -Bimatrix-Spiels. Die Matrix zeigt die Auszahlungen für Spieler A (Zeilen) und Spieler B (Spalten). Die Strategien sind s_0, s_1, s_2 . Die Matrix ist in gelbe und blaue Felder unterteilt. Rote Pfeile zeigen die Dominanz von s_0 über s_1 und s_1 über s_2 an. Blaue Pfeile zeigen die Bestantworten von Spieler B für verschiedene Strategien von Spieler A an.



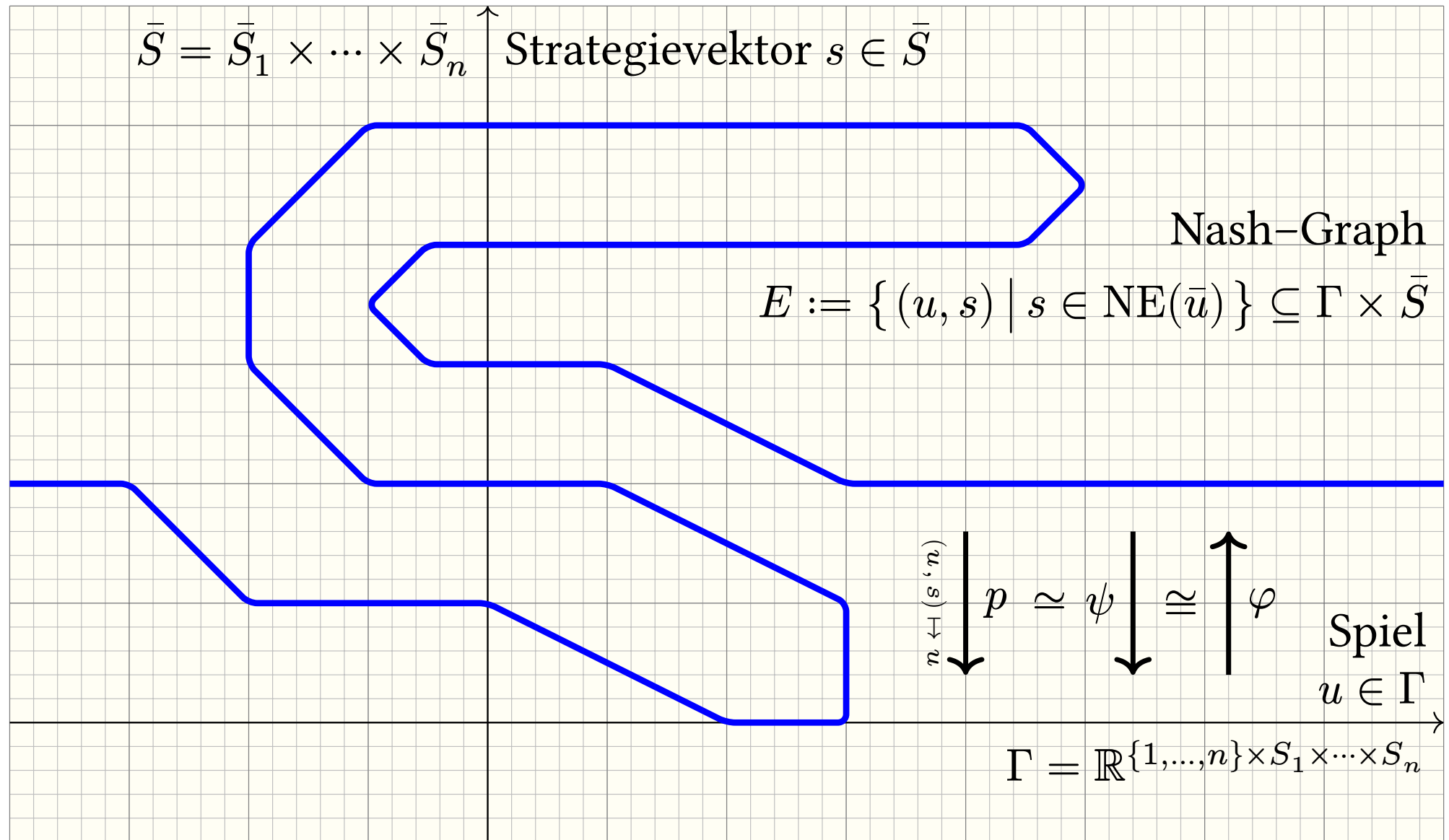
Durch Umsortieren der Menge S_2 erreichen wir $b_{00} \geq b_{01} \geq \dots \geq b_{0n}$. Regulär sind Gleichheiten ausgeschlossen, also $b_{00} > b_{01} > \dots > b_{0n}$.

In der zweiten Zeile können wir zudem $b_{10} < b_{11} < \dots < b_{1n}$ annehmen: Gilt $b_{0i} > b_{0j}$ und $b_{1i} > b_{1j}$, so dominiert s_i strikt s_j , und wir löschen s_j .

Wir finden $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_{n+1} = 1$, sodass gilt: Auf Alice' Strategie $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$ mit $p \in [p_j, p_{j+1}]$ ist Bobs Strategie s_j beste Antwort.

Für $p = p_j$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ mischen wir $s_q = (1-q)s_{j-1} + qs_j$ so, dass auch umgekehrt Alice' Strategie s_p zur besten Antwort wird.

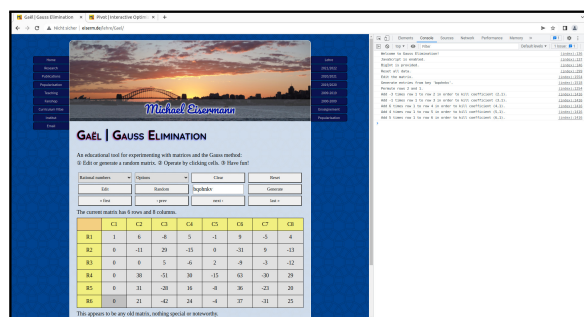
Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens



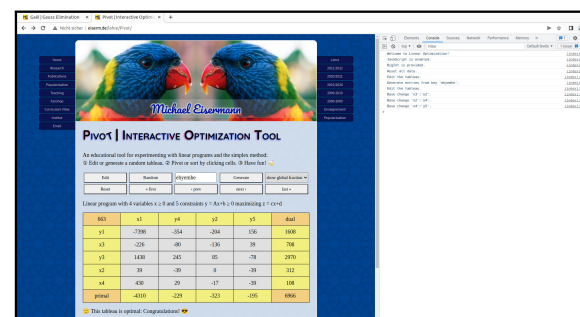
- (1) Wir haben einen Homöomorphismus $(\psi, \varphi) : E \cong \Gamma$
- (2) und zudem eine eigentliche Homotopie $H : p \simeq \psi$.

Kapitel F

Lineare Optimierung und Dantzig's Simplexverfahren



Gauß
↔
Dantzig



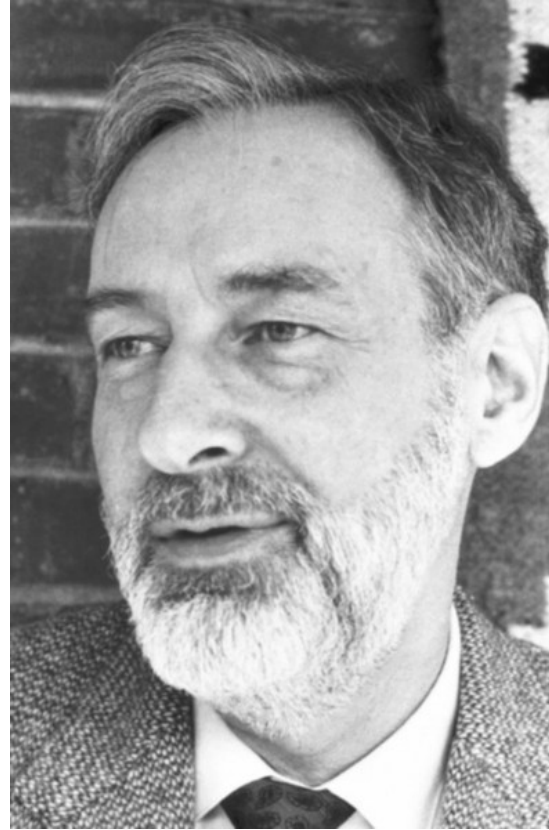
*We are all familiar with methods for solving linear equation systems [...]
On the other hand, the study of linear inequality systems excited virtually
no interest until the advent of game theory in 1944 and linear programming.*

George Bernard Dantzig (1914–2005)

- 1 Lineare Optimierung durch Basiswechsel und Simplexverfahren
- 2 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
- 3 Vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus



Leonid V. Kantorovich
(St. Petersburg 1912 –
Moskau 1986)

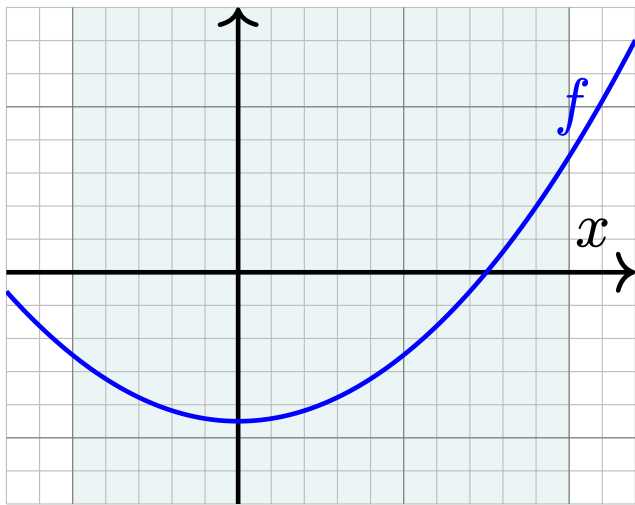


Tjalling C. Koopmans
(Wijdmeren 1910 –
New Haven/CT 1985)



George B. Dantzig
(Portland/OR 1914 –
Stanford/CA 2005)

Maximiere die Zielfunktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$
unter den Nebenbedingungen $g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0$.



Schule: Max/Minimiere $f(x) = ax^2 + bx + c$
unter den Nebenbedingungen $x_0 \leq x \leq x_1$.
Allgemeine Aufgabe der Kurvendiskussion:
Finde alle Extremstellen von $f : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$.

Lineare Optimierung (LP): Hier sind $f, g_1, \dots, g_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ affin-linear.

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x) = 3x + 5$ unter den Nebenbedingungen $x \geq 0$, $x + 2 \geq 0$, $-2x + 3 \geq 0$, $-3x + 4 \geq 0$.

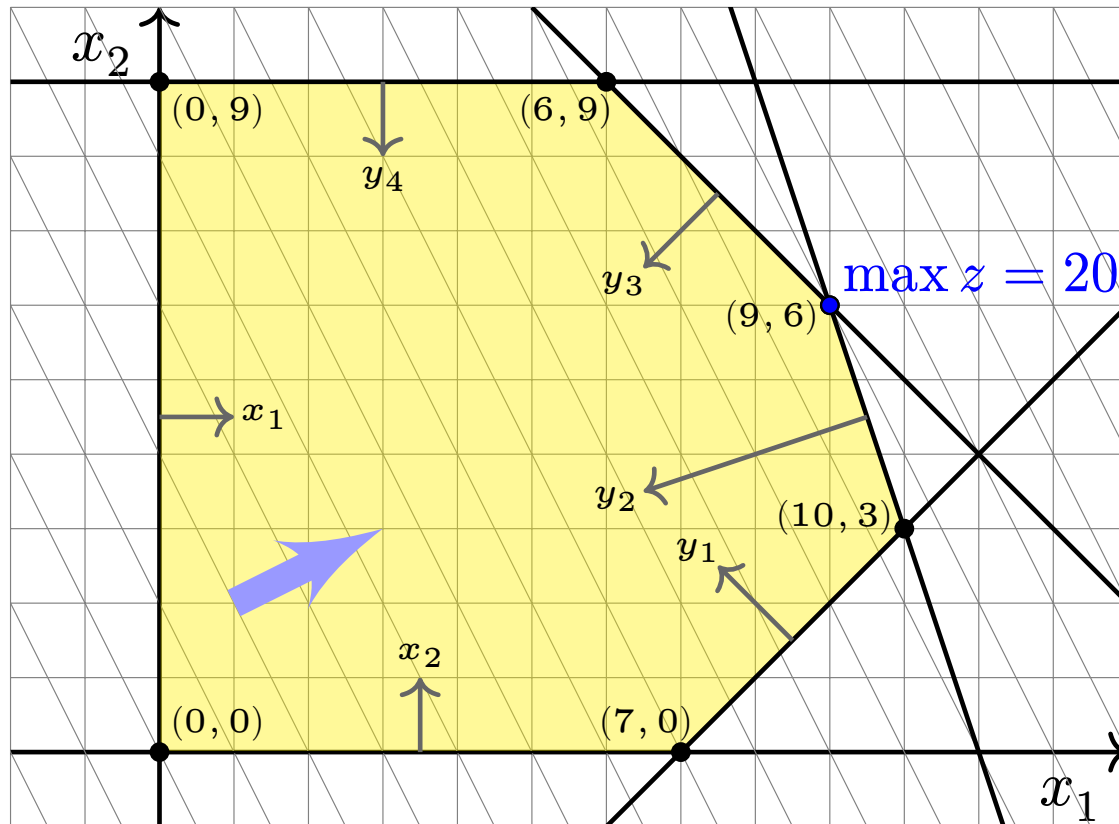
Lösung: Der Ursprung $x = 0$ ist zulässig. Also gilt $\max z \geq z(0) = 5$. Die Funktion $z(x) = 3x + 5$ wächst monoton mit x : Steigung $+3 > 0$. Ausgehend von $x = 0$ wollen wir daher x möglichst weit erhöhen.

$$\begin{array}{ll}
 x \geq 0 & \implies \text{keine Einschränkung} \\
 y_1 := x + 2 \geq 0 & \implies \text{keine Einschränkung} \\
 y_2 := -2x + 3 \geq 0 & \implies \text{Einschränkung } x \leq 3/2 \\
 y_3 := -3x + 4 \geq 0 & \implies \text{Einschränkung } x \leq 4/3
 \end{array}$$

Der Engpass entsteht demnach in der letzten Bedingung $y_3 \geq 0$. Somit maximiert $x = 4/3$, und wir erhalten $\max z = z(4/3) = 9$.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 4$.



Nichtnegativität: $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Nebenbedingungen:

$y_1 := 7 - x_1 + x_2 \geq 0$

$y_2 := 33 - 3x_1 - x_2 \geq 0$

$y_3 := 15 - x_1 - x_2 \geq 0$

$y_4 := 9 - x_2 \geq 0$

😊 Anwendung: Produkte x_1, x_2 ; Ressourcen y_1, y_2, y_3, y_4 ; Profit z .

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

	x_1	x_2	1
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
-3	-1	0	-1	0	0	33
-1	-1	0	0	-1	0	15
0	-1	0	0	0	-1	9
2	1	0	0	0	0	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig: $y_1 = 7$, $y_2 = 33$, $y_3 = 15$, $y_4 = 9$.
Wir maximieren $x_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_1 \geq 0$, Basiswechsel $x_1 \leftrightarrow y_1$:

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig, denn wir haben Engpässe beachtet. Wir maximieren $x_2 \geq 0$, bis zum Engpass $y_2 \geq 0$, Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_2$:

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig, denn wir haben Engpässe beachtet. Wir maximieren $y_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_3 \geq 0$, Basiswechsel $y_1 \leftrightarrow y_3$:

	y_3	y_2	1
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
z	$-1/2$	$-1/2$	20

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0	9
0	-1	0	$1/2$	$-3/2$	0	6
0	0	-1	1	-2	0	4
0	0	0	$-1/2$	$3/2$	-1	3
0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0	20

Diese LP sind äquivalent, das letzte ist optimal: Wir lesen $\max z = 20$ ab. Probe durch Einsetzen: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 = 2x_1 + x_2 - 4$.

Elementarer Basiswechsel zur Umformung

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

Basis-
wechsel

	y_1	x_2
x_1	$\frac{1}{a}$	$-\frac{b}{a}$
y_2	$\frac{c}{a}$	$d - \frac{bc}{a}$

$$y_1 = ax_1 + bx_2$$

$$y_2 = cx_1 + dx_2$$

$$x_1 = \frac{1}{a}y_1 - \frac{b}{a}x_2$$

$$y_2 = \frac{c}{a}y_1 + \left[d - \frac{bc}{a} \right] x_2$$

Elementarer Basiswechsel und Dualität

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

Basis-
wechsel

	y_1	x_2
x_1	$\frac{1}{a}$	$-\frac{b}{a}$
y_2	$\frac{c}{a}$	$d - \frac{bc}{a}$

trans-
negieren

	y_1^*	y_2^*
x_1^*	$-a$	$-c$
x_2^*	$-b$	$-d$

Basis-
wechsel

	x_1^*	y_2^*
y_1^*	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{c}{a}$
x_2^*	$\frac{b}{a}$	$-d + \frac{bc}{a}$

Definition F1A: lineare Optimierung / Programmierung

Ein **lineares Programm** (LP, lineare Optimierung) hat die Normalform

$$x \geq 0, \quad y(x) = Ax + b \geq 0, \quad z(x) = cx + d \rightarrow \max!, \quad \text{kurz } z : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit Daten $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $d \in \mathbb{R}$; gesucht ist $x \in \mathbb{R}^n$.
Das LP ist **optimal**, wenn $c \leq 0 \leq b$ gilt; dann löst $x = 0$ das Problem.

(NN) **Nichtnegativität** $x \geq 0$, ausgeschrieben: $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

(NB) **Nebenbedingungen** $y := Ax + b \geq 0$, ausgeschrieben:

$$\begin{array}{ccccccccccc} y_1 & := & a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 & \geq & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & := & a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & b_m & \geq & 0 \end{array}$$

Dies definiert das **Polytop** $P(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, Ax + b \geq 0\}$.

Punkte $x \in P(A, b)$ heißen **zulässig**, die NB heißen dann **erfüllbar**.

(Z) Die **Zielfunktion** ist $z : P(A, b) \rightarrow \mathbb{R} : z(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d$.

Ist $P(A, b) \neq \emptyset$ und z nach oben **beschränkt**, so heißt das LP **lösbar**.

Basiswechsel sind Äquivalenzumformungen.

Aufgabe: Schreiben Sie den elementaren Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ aus.

Lösung: Der Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ ist nur möglich, falls $a_{\ell k} \neq 0$:

$$y_\ell = a_{\ell k}x_k + \sum_{i \neq k} a_{\ell i}x_i + b_\ell \quad \Longleftrightarrow \quad x_k = \frac{1}{a_{\ell k}}y_\ell - \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_{\ell k}}a_{\ell i}x_i - \frac{1}{a_{\ell k}}b_\ell$$

Wir ersetzen überall die alte Variable x_k durch die neue Variable y_ℓ :

$$y_j = a_{jk}x_k + \sum_{i \neq k} a_{ji}x_i + b_j = \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}}y_\ell + \sum_{i \neq k} \left[a_{ji} - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}}a_{\ell i} \right] x_i + \left[b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}}b_\ell \right]$$

$$z = c_kx_k + \sum_{i \neq k} c_ix_i + d = \frac{c_k}{a_{\ell k}}y_\ell + \sum_{i \neq k} \left[c_i - \frac{c_k}{a_{\ell k}}a_{\ell i} \right] x_i + \left[d - \frac{c_k}{a_{\ell k}}b_\ell \right]$$

Der Tausch macht $y_\ell \geq 0$ zur Variablen und $x_k \geq 0$ zur Nebenbedingung.

Invarianz: Das alte LP $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und das neue LP $\begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sind äquivalent; sie stimmen überein in Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert.

Basiswechsel können optimieren.

Satz F1B: Jedes lösbare LP $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist optimierbar durch Basiswechsel.

Wir können $z : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ transformieren in ein optimales LP $z' : \begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ mit $c' \leq 0 \leq b'$, somit lösen durch $x' = 0$ und $\max z = \max z' = z'(0) = d'$.

Beweisidee: Das Maximum wird in einer Ecke $x^* \in P(A, b)$ realisiert. Zu dieser gelangen wir durch Basiswechsel (entlang von Kanten). QED

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Jedes lineare Programm kommt als **duales Paar**:

primales LP: $x \geq 0, \quad Ax + b \geq 0, \quad u(x) = cx + d \rightarrow \max!$

duales LP: $y \geq 0, \quad yA + c \leq 0, \quad v(y) = yb + d \rightarrow \min!$

Das entspricht der Transnegation von $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zu $-v : -\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}^\top$.

Für jedes optimale LP, also $c \leq 0 \leq b$, ist die Lösung offensichtlich:

$x = 0$ ist zulässig $\iff b \geq 0 \implies y = 0$ minimiert $v(y) = yb + d$

$y = 0$ ist zulässig $\iff c \leq 0 \implies x = 0$ maximiert $u(x) = cx + d$

Satz F1c: Dualität der linearen Optimierung

Schwache Dualität: Für jeden zulässigen Punkt $x \geq 0$ mit $Ax + b \geq 0$ und dual jeden zulässigen Punkt $y \geq 0$ mit $yA + c \leq 0$ gilt $u(x) \leq v(y)$.

Sind also simultan beide LP erfüllbar, so sind auch beide lösbar.

Starke Dualität: Ist das primale LP lösbar, so auch das duale LP, und es gilt die Gleichheit $\max u = \min v$, also keine Dualitätslücke.

Ist das primale LP erfüllbar, aber nicht das duale, so ist u unbeschränkt.

Ist das duale LP erfüllbar, aber nicht das primale, so ist v unbeschränkt.

Aufgabe: (1) Beweisen Sie die schwache Dualität durch Einsetzen.

(2) Folgern Sie die starke Dualität (F1c) aus der Optimierbarkeit (F1B).

Lösung: (1) Wir nutzen die Zulässigkeit $x \geq 0$ und $b \geq -Ax$ sowie dual $y \geq 0$ und $c \leq -yA$. Positivkombinationen erhalten alle Ungleichungen:

$$u(x) \stackrel{\text{Def}}{=} cx + d \stackrel{\text{Vor}}{\leq} (-yA)x + d \stackrel{\text{Ass}}{=} y(-Ax) + d \stackrel{\text{Vor}}{\leq} yb + d \stackrel{\text{Def}}{=} v(y)$$

(2) Starke Dualität ist klar für jedes optimale LP, mit $c \leq 0 \leq b$: Hier löst $x = 0$ das primale LP und $y = 0$ das duale LP, also $\max u = d = \min v$.

Dank Basiswechsel gilt Dualität dann auch für jedes optimierbare LP.

Dank Optimierbarkeit F1B gilt starke Dualität für jedes lösbare LP. QED

Dualität für lineare Programme: Zusammenfassung

Für jedes lineares Problem $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gibt es genau drei Möglichkeiten: lösbar, unerfüllbar (somit beschränkt), unbeschränkt (somit erfüllbar).

Aufgabe: Sei $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $-v : -\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}^\top$ ein duales Problempaar. Welche der neun Kombinationen sind hier tatsächlich möglich?

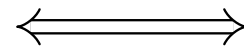
Lösung:

primal \ dual				
	unerfüllbar (somit beschränkt)	lösbar (erfüllbar und beschränkt)	unbeschränkt (somit erfüllbar)	
unerfüllbar (somit beschränkt)	✓ möglich	✗ starke Dualität	✓ möglich	
lösbar (erfüllbar und beschränkt)	✗ starke Dualität	✓ möglich	✗ schwache Dualität	
unbeschränkt (somit erfüllbar)	✓ möglich	✗ schwache Dualität	✗ schwache Dualität	

Dualität in unserem Zahlenbeispiel

Beispiel:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4



primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Der Punkt $x = (9, 6)^\top$ ist zulässig, dank $Ax + b = (4, 0, 0, 3)^\top \geq 0$.
 Demnach gilt $\max u \geq u(x) = 20$. Das zweite Tableau zeigt zudem
 $u = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 \leq 20$. Beide zusammen beweisen $\max u = 20$.

Aufgabe: Dualisieren Sie dieses Problem und und lösen Sie dies.

Dualität in unserem Zahlenbeispiel

Lösung: Dualisieren ist gleichbedeutend zur Transnegation:

dual	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	-1	-3	-1	0	2
x_2	1	-1	-1	-1	1
v	7	33	15	9	-4

Transposition:

NN: $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

NB: $x_1, x_2 \leq 0$ bzw. $-x_1, -x_2 \geq 0$

Ziel: $v \rightarrow \min!$ bzw. $-v \rightarrow \max!$

Das duale Problem bringen wir somit ebenfalls auf Normalform und lösen es durch eine geeignete Folge von Basiswechseln:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
$-x_1$	1	3	1	0	-2
$-x_2$	-1	1	1	1	-1
$-v$	-7	-33	-15	-9	4

$\Leftrightarrow$

	$-x_1$	$-x_2$	y_1	y_4	
y_3	$-1/2$	$3/2$	2	$-3/2$	$1/2$
y_2	$1/2$	$-1/2$	-1	$1/2$	$1/2$
$-v$	-9	-6	-4	-3	-20

Der Punkt $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ ist zulässig, also $\min v \leq v(y) = 20$.

Wir finden $v = 9(-x_1) + 6(-x_2) + 4y_1 + 3y_4 + 20$, also $\min v = 20$.

Aufgabe: Anwender Bob will $u(x) = cx + d$ maximieren, wobei $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ gelte. Mit $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ beauftragt er Spezialistin Alice.

- (1) In welcher Form sollte Alice ihre Lösung an Bob übergeben?
- (2) Wie kann Bob leicht prüfen, ob sie zulässig ist? zudem optimal?
- (3) Wie kann Alice Optimalität zertifizieren und Bob dies effizient prüfen?

Lösung: (1) Alice kann Bob einen Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ schicken.

(2) Bob kann $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ durch Einsetzen direkt prüfen.

😊 In diesem Falle ist der Punkt x zulässig und $\max u \geq u(x)$ garantiert.

😞 Die Gleichung $\max u = u(x)$ ist zunächst schwieriger zu beweisen!

😊 Glücklicherweise gibt es eine simple Lösung. Dualität wirkt Wunder:

(3) Zum Beweis der Optimalität von $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ schickt Alice ein $y \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ mit $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ sowie $u(x) = v(y)$. Das kann Bob leicht prüfen!

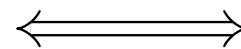
Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Definition F1F: zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Eine **zertifizierte Lösung** zum LP $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist ein duales Paar (x, y) mit $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sowie $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$, sodass $cx = yb$ gilt.

Beispiel: Vorgelegt sei das Ergebnis mehrerer Basiswechsel:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4



primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Aufgabe: Ist die Lösung korrekt? Finden Sie ein Zertifikat!

Lösung: Wir sehen das duale Paar $x = (9, 6)^\top$ und $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$. Es gilt $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sowie $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ mit $cx = yb$.

Aufgabe: Untersuchen Sie nochmals das Spiel *Schere-Stein-Papier*:

	Schere	Stein	Papier
Schere	0	-1	+1
Stein	+1	0	-1
Papier	-1	+1	0

$$A = -B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finden Sie ein Nash-Gleichgewicht und die Auszahlung für Spieler 1:

- (1) Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
- (2) Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

Lösung: Wir schreiben Schere-Stein-Papier als Bimatrixspiel

$$u : \Delta^2 \times \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x^\top A y, -x^\top A y).$$

Hierbei ist $\Delta^2 = [e_0, e_1, e_2] \subset \mathbb{R}^3$ und $e_0, e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasis.

Der Spielwert / die Gleichgewichtsauszahlung für Spieler 1 ist:

$$z = \max_{x \in [e_0, e_1, e_2]} \min_{y \in [e_0, e_1, e_2]} x^\top A y = \max_{x \in [e_0, e_1, e_2]} \min_{y \in \{e_0, e_1, e_2\}} x^\top A y$$

Wir erhalten ein endliches System linearer Un/Gleichungen:

$$\begin{aligned} z \rightarrow \max!, \quad & z \leq x^\top A e_0, & x_0 &\geq 0, \\ & z \leq x^\top A e_1, & x_1 &\geq 0, \\ & z \leq x^\top A e_2, & x_2 &\geq 0, \\ & 1 = x_0 + x_1 + x_2, & z &\geq 0. \end{aligned}$$

Trick: $A' = A + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ erfüllt $A' > 0$ und $z' = z + 2 > 0$.

Bonus: Statt $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ genügt die Ungleichung $x_0 + x_1 + x_2 \leq 1$.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

(1) Durch diese Umformulierung erhalten wir unser lineares Programm:

$$\begin{array}{llll}
 z \rightarrow \max!, & x_0 \geq 0, & s_0 = x^\top A e_0 - z & \geq 0, \\
 & x_1 \geq 0, & s_1 = x^\top A e_1 - z & \geq 0, \\
 & x_2 \geq 0, & s_2 = x^\top A e_2 - z & \geq 0, \\
 & z \geq 0, & s_3 = 1 - x_0 - x_1 - x_2 & \geq 0.
 \end{array}$$

(2) Wir schreiben dies als Tableau und lösen das LP:

	x_0	x_1	x_2	z	
s_0	2	3	1	-1	0
s_1	1	2	3	-1	0
s_2	3	1	2	-1	0
s_3	-1	-1	-1	0	1
z	0	0	0	1	0

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

	x_0	x_1	x_2	s_0	
z	2	3	1	-1	0
s_1	-1	-1	2	1	0
s_2	1	-2	1	1	0
s_3	-1	-1	-1	0	1
z	2	3	1	-1	0

	x_0	s_1	x_2	s_0	
z	-1	-3	7	2	0
x_1	-1	-1	2	1	0
s_2	3	2	-3	-1	0
s_3	0	1	-3	-1	1
z	-1	-3	7	2	0

	x_0	s_1	s_2	s_0	
z	6	$5/3$	$-7/3$	$-1/3$	0
x_1	1	$1/3$	$-2/3$	$1/3$	0
x_2	1	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$	0
s_3	-3	-1	1	0	1
z	6	$5/3$	$-7/3$	$-1/3$	0

	s_3	s_1	s_2	s_0	
z	-2	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	2
x_1	$-1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	$1/3$
x_2	$-1/3$	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$
x_0	$-1/3$	$-1/3$	$1/3$	0	$1/3$
z	-2	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	2

Eine Lösung ist $x^\top = (x_0, x_1, x_2, z) = (1/3, 1/3, 1/3, 2)$. Sie ist eindeutig.

Wurde richtig gerechnet? Zertifikat $y = (s_0, s_1, s_2, s_3) = (1/3, 1/3, 1/3, 2)$.

Es gilt $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sowie $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ mit $cx = yb$.

Kapitel G

Soziale Normen und Dilemmata, Koordination und Evolution

Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen.

Max Planck (1858–1947)

Evolutionary game theory deploys the Darwinian notion that good strategies diffuse across populations of players rather than being learned by rational agents.

Herbert Gintis, *Game Theory Evolving* (2009)

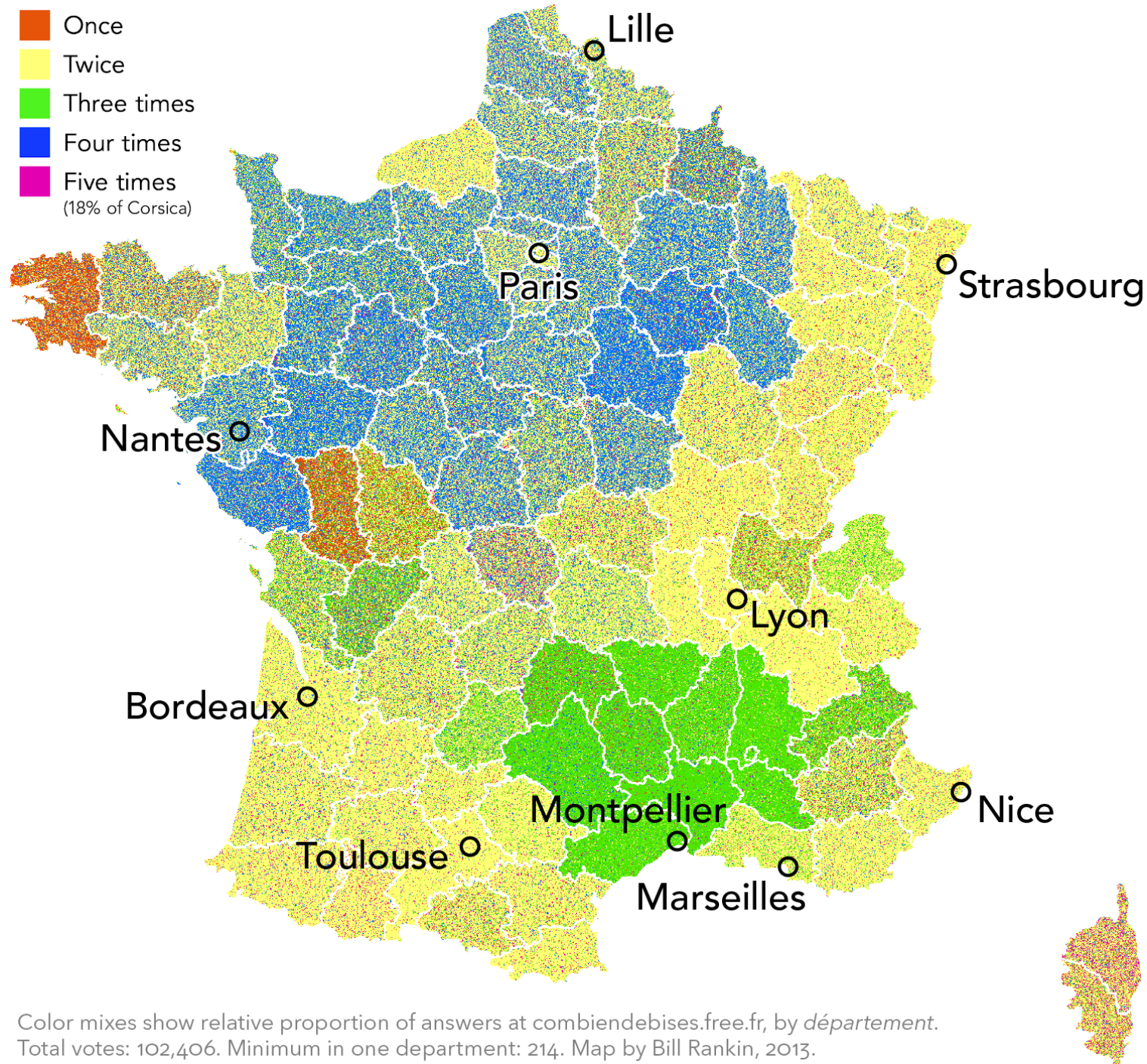
- 1 Soziale Konventionen
- 2 Soziale Dilemmata
- 3 Evolutionäre Spiele

Das Spiel „Straßenverkehr“

		B		links	rechts
		A	links	rechts	
A	links	1	1	0	0
	rechts	0	0	1	1

Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

G105

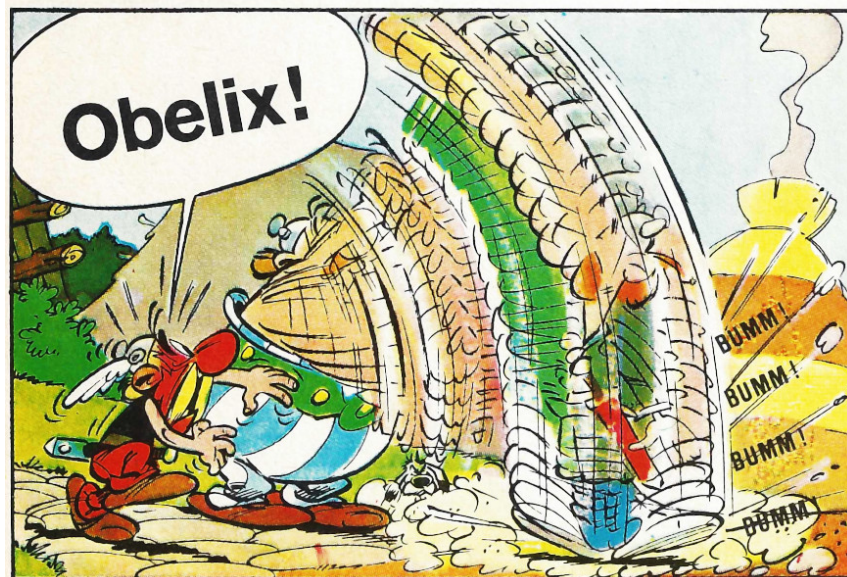


Daten der Erhebung von combiendebises.free.fr
www.economist.com/gulliver/2014/10/24/x-xxx-or-xxxxx

Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

G107

A \ B	B	1	2	3	4	5
	1	1	0	0	0	0
	2	0	1	0	0	0
	3	0	0	1	0	0
	4	0	0	0	1	0
	5	0	0	0	0	1



Eine Population von Pfauen-Männchen könnte etwa so aussehen:

Pfauen	fit	unfit
kurze Federn	40%	20%
lange Federn	30%	10%

Das Pfauen-Weibchen sieht nicht die Fitness, sondern nur die Federn!

Aufgabe: Welche Strategie der Partnerwahl ist für sie vorteilhaft?

- Federlänge ignorieren: Trefferquote 70 : 30
- Kurze Federn bevorzugen: Trefferquote 40 : 20
- Lange Federn bevorzugen: Trefferquote 30 : 10

Kann ein unnützer Dokortitel doch nützlich sein?

Eine Personalchefin sucht für eine Stelle einen Ingenieur (m/w/d). Aus Erfahrung schätzt sie die allgemeine Bewerberlage wie folgt:

Bewerber	geeignet	ungeeignet
Diplom/Master	50%	25%
Promotion	20%	5%

Aufgabe: Welche Strategie ist bei ihrer Auswahl vorteilhaft?

- Abschluss ignorieren: Trefferquote 70 : 30
- Master einstellen: Trefferquote 50 : 25
- Doktor einstellen: Trefferquote 20 : 5

Das Restaurant-Paradox

Aufgabe: (0) Ein Ensemble von 20 Personen besucht ein Restaurant. Jede darf wählen: ein gutes Menu für 40€ oder ein exzellentes für 60€. Jede zahlt ihre eigene Rechnung und denkt: „10€ mehr wäre es mir wert, aber nicht 20€.“ Daher entscheidet sie sich für das Menu zu 40€.

(1) Das Ensemble beschließt *vor* dem Restaurant, eine gemeinsame Rechnung zu verlangen und alles durch 20 zu teilen. Was passiert?

Lösung: (1) Jede einzelne Person kostet ihr Upgrade nur noch 1€. Sie wählt also für sich das teurere Menu. Am Ende zahlt jede 60€.

Bistromathics: Numbers written on restaurant checks within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.

Douglas Adams (1952–2001), *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

Das Restaurant-Paradox

Aufgabe: Formulieren Sie explizit beide Spiele $u, u' : S \rightarrow \mathbb{R}^{20}$. Finden Sie alle Gleichgewichte, Dominanzen und Symmetrien.

Lösung: (0) Die Spielermenge ist $I = \{1, 2, \dots, 20\}$. Jeder Spieler $i \in I$ hat die Strategiemenge $S_i = \{0=\text{gut}, 1=\text{exzellent}\}$, gemeinsam also $S = \prod_{i \in I} S_i = \{0, 1\}^I$. Die Nutzenfunktion ist laut Aufgabenstellung

$$u_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto 10s_i - 20s_i = -10s_i.$$

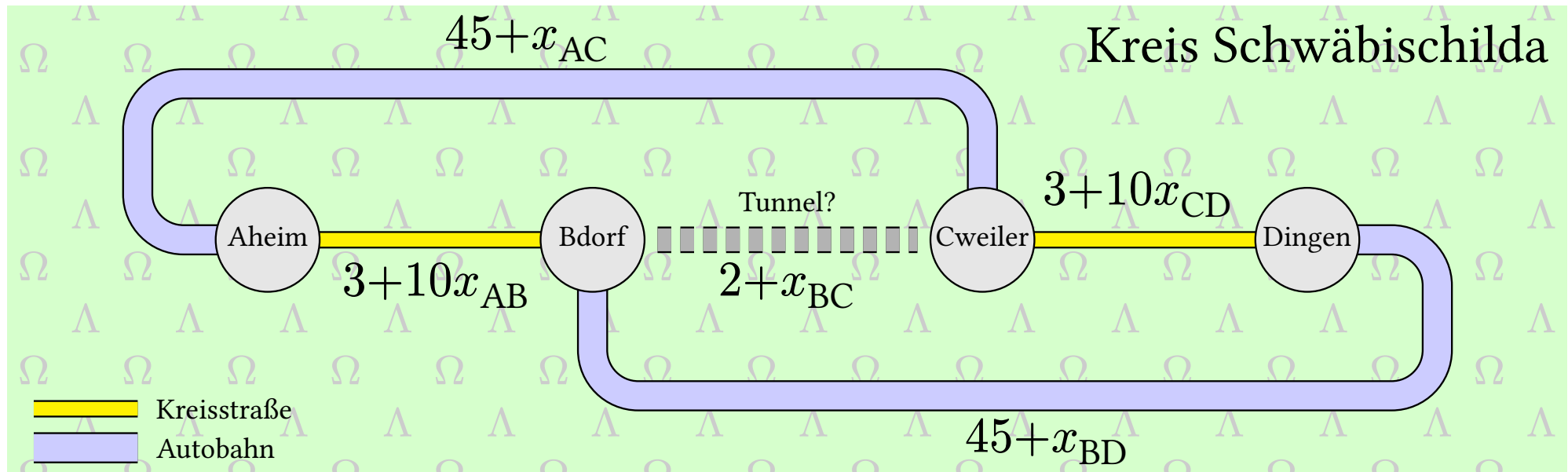
Für jeden Spieler ist die Strategie 0 strikt dominant. Somit ist $s = (0, 0, \dots, 0)$ das einzige Nash-Gleichgewicht (und zudem strikt).

(1) Im zweiten Fall kommt es zur Kopplung durch die Nutzenfunktion

$$u'_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto 10s_i - \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} 20s_j = 10s_i - \sum_{j=1}^{20} s_j.$$

Für jeden Spieler ist die Strategie 1 strikt dominant. Somit ist $s = (1, 1, \dots, 1)$ das einzige Nash-Gleichgewicht (und zudem strikt).

Paradoxe Verkehrsfluss nach Braess



Täglich pendeln 6000 Autofahrer von Aheim nach Dingen, entweder über Bdorf (ABD) oder über Cweiler (ACD). Angegeben sind die Fahrzeiten in Minuten, wobei $x_{ij} \in [0, 6]$ jeweils die Autozahl in Tausend ist. **Aufgabe:**

(1) Finden Sie alle Gleichgewichte: Welcher Verkehrsfluss stellt sich ein?

Lösung: Aufteilung 3000 : 3000, Fahrzeit jeweils 81 Minuten.

(2) Zur Verkürzung der Fahrzeit plant der Landkreis einen Autobahntunnel von Bdorf nach Cweiler. Hilft das oder nicht? Rechnen Sie es aus!

Lösung: Aufteilung 2000 : 2000 : 2000, Fahrzeit jeweils 90 Minuten!



Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung

Von D. BRAESS, Münster ¹⁾

Eingegangen am 28. März 1968

Zusammenfassung: Für die Straßenverkehrsplanung möchte man den Verkehrsfluß auf den einzelnen Straßen des Netzes abschätzen, wenn die Zahl der Fahrzeuge bekannt ist, die zwischen den einzelnen Punkten des Straßennetzes verkehren. Welche Wege am günstigsten sind, hängt nun nicht nur von der Beschaffenheit der Straße ab, sondern auch von der Verkehrsdichte. Es ergeben sich nicht immer optimale Fahrzeiten, wenn jeder Fahrer nur für sich den günstigsten Weg herausucht. In einigen Fällen kann sich durch Erweiterung des Netzes der Verkehrsfluß sogar so umlagern, daß größere Fahrzeiten erforderlich werden.

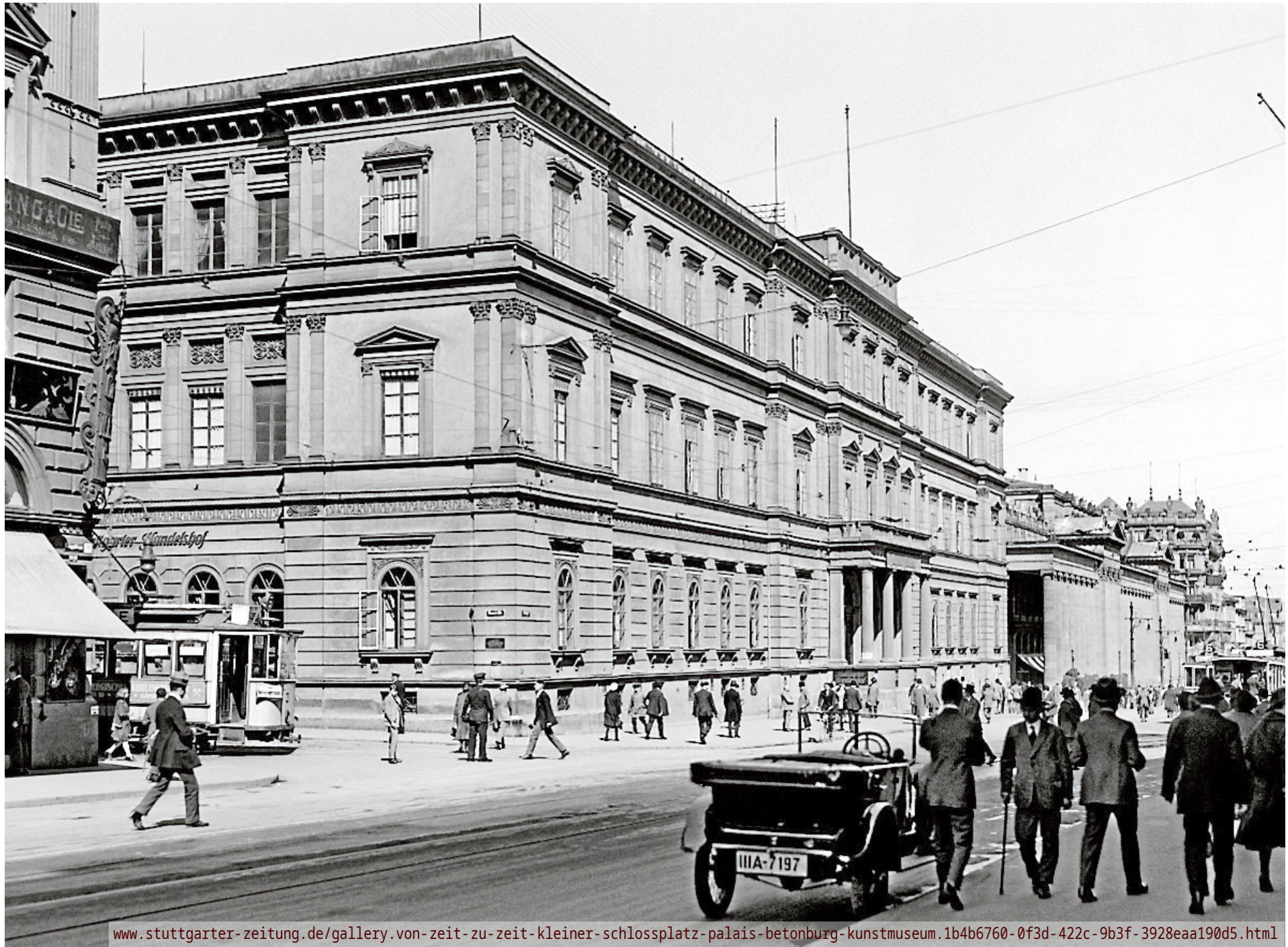
Das Braess-Paradox... mitten im Herzen von Stuttgart!



Das Beispiel von Braess stammt aus dem Frühjahr 1968 und mag konstruiert scheinen, läßt sich aber durch die Erfahrung untermauern. Ende 1968 wurde in Stuttgart das Straßensystem, das am Schloßplatz entstanden war, eröffnet und von den Benützern nicht in der geplanten Weise angenommen. Ein Verkehrschaos zu den Spitzenzeiten war die Folge. Es wurde durch Sperrung der unteren Königstraße, also genau den im Beispiel betrachteten Fall, behoben.

Das Braess-Paradox... mitten im Herzen von Stuttgart!

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.



Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Das Braess-Paradox... mitten im Herzen von Stuttgart!

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

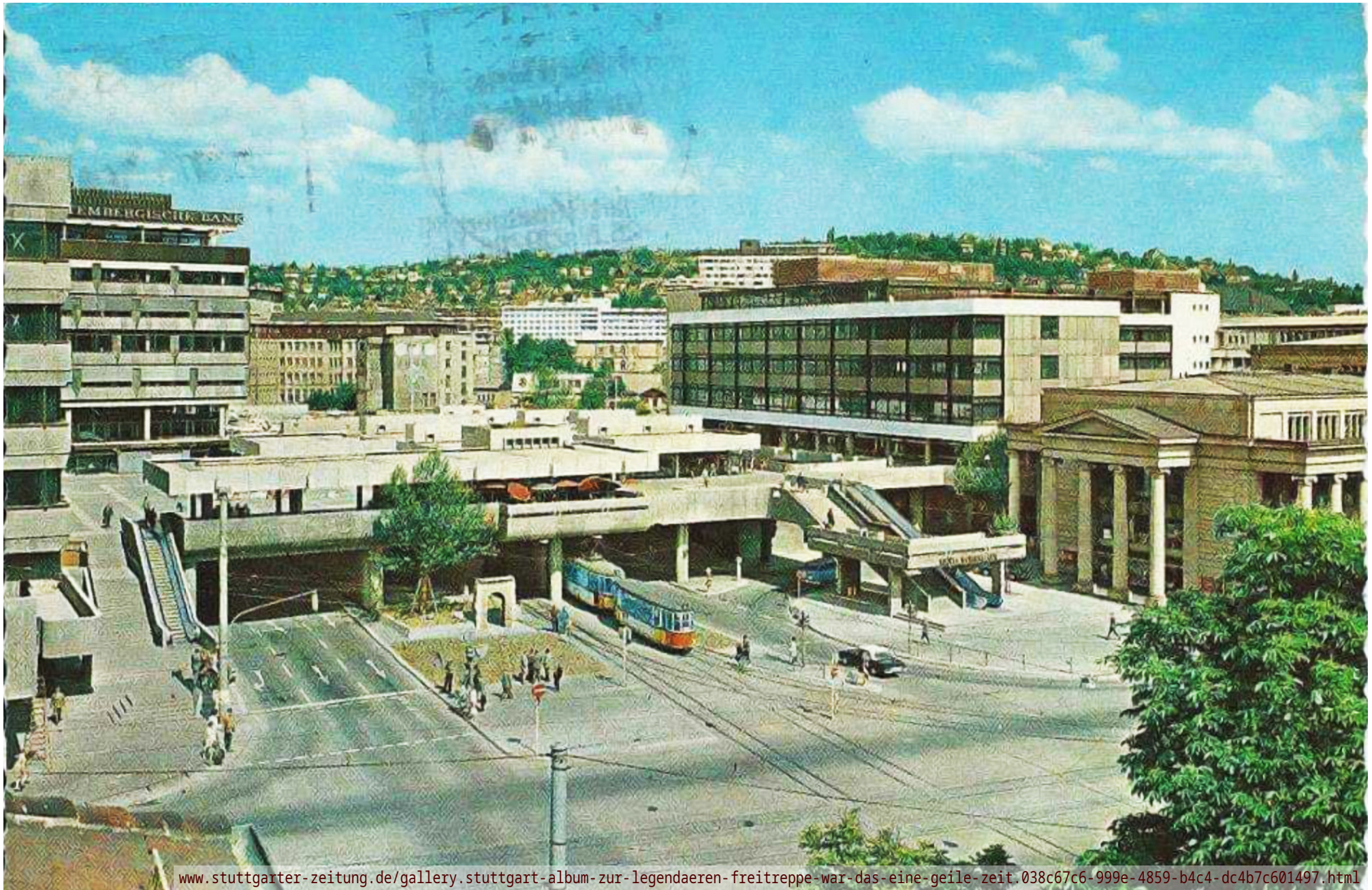


Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

1968 Bauarbeiten für den Kleinen Schlossplatz, Blick auf die Planie

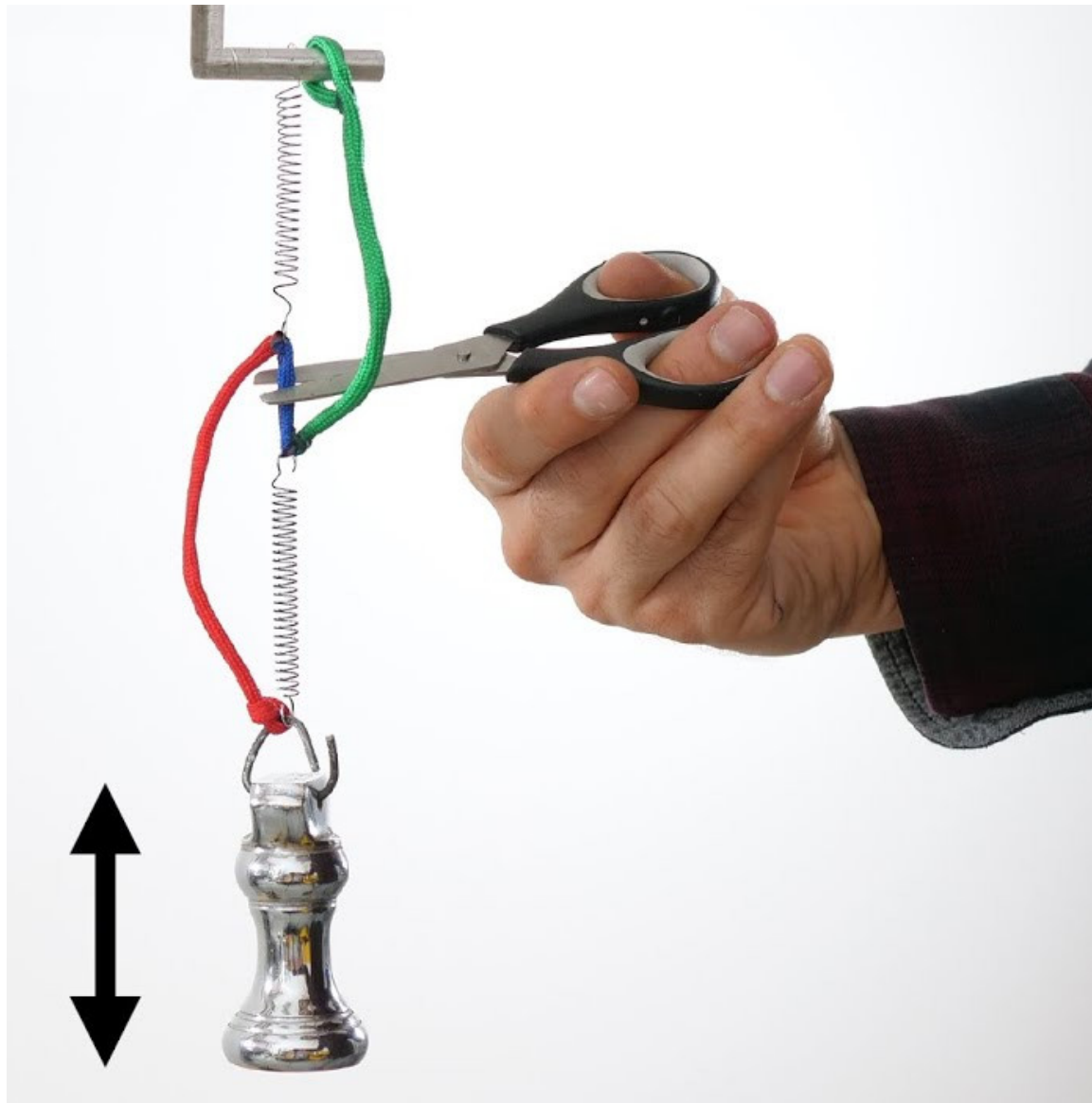
Das Braess-Paradox... mitten im Herzen von Stuttgart!

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.



Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

1968 Postkarte der „Betonburg“ auf dem Kleinen Schlossplatz



Paradoxe Systeme in der Physik

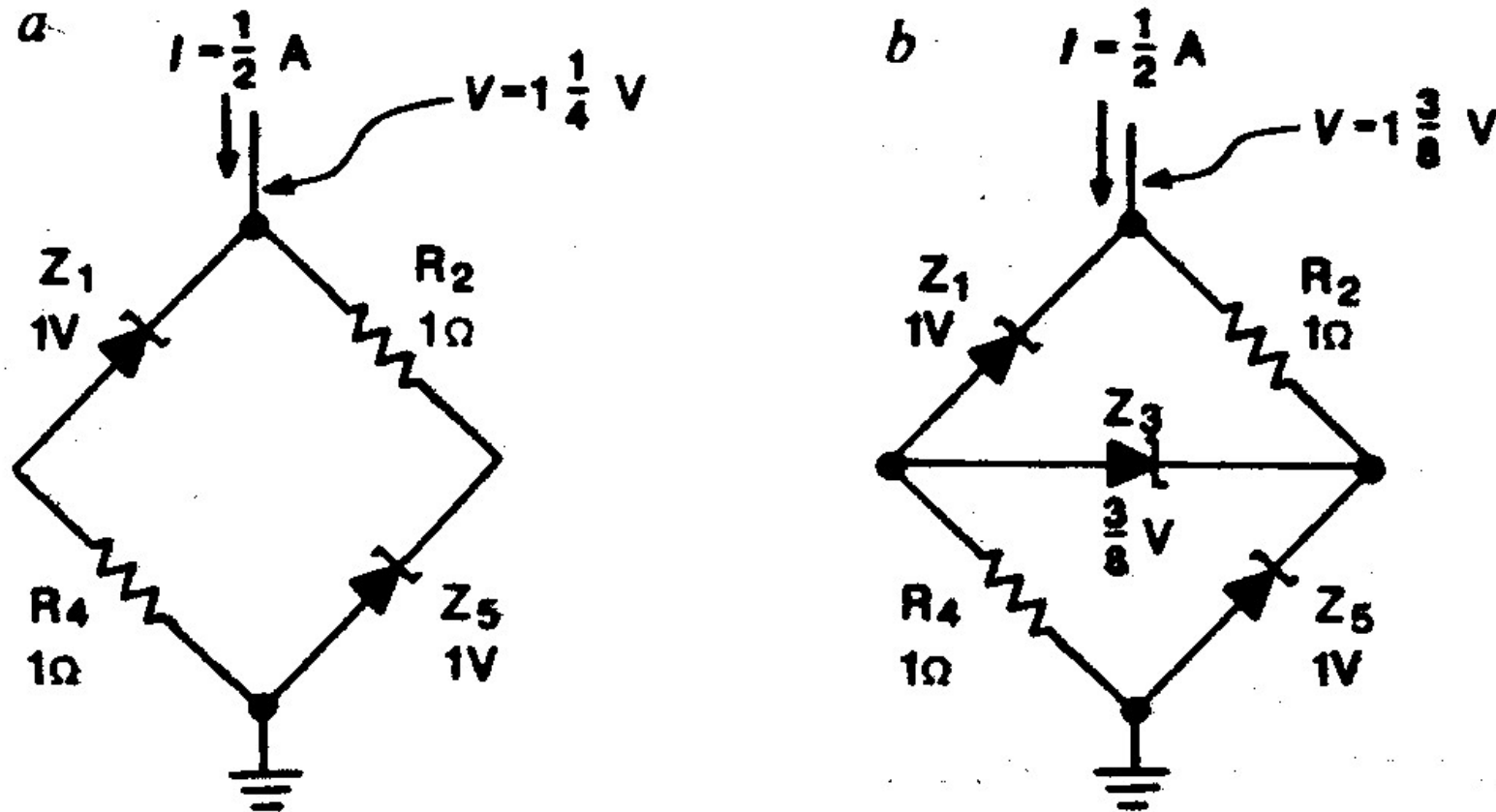


FIG. 3 Electrical network of ideal components. **a**, Initially, current flows symmetrically through left and right branches, and the voltage drop from source to ground is $1\frac{1}{4}$ V. **b**, When a $\frac{3}{8}$ -V Zener diode is introduced across the network, the current through the 1-V Zener diodes drops to zero and all current flows through the 1- Ω resistors and the $\frac{3}{8}$ -V Zener diode, producing a larger voltage drop from source to ground of $1\frac{3}{8}$ V.

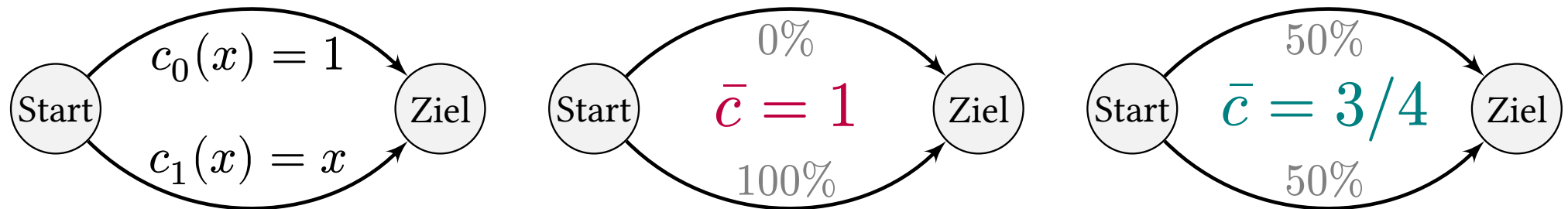
Nature 352 (1991), 699–701, www.nature.com/articles/352699a0

Pigous Beispiel: schockierend einfach

🔍 „[The individual is] led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention.“ (Adam Smith, *The Wealth of Nations*, 1776)

🔍 „Selfish behavior need not produce a socially optimal outcome.“

Extremes Beispiel von A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, 1920:



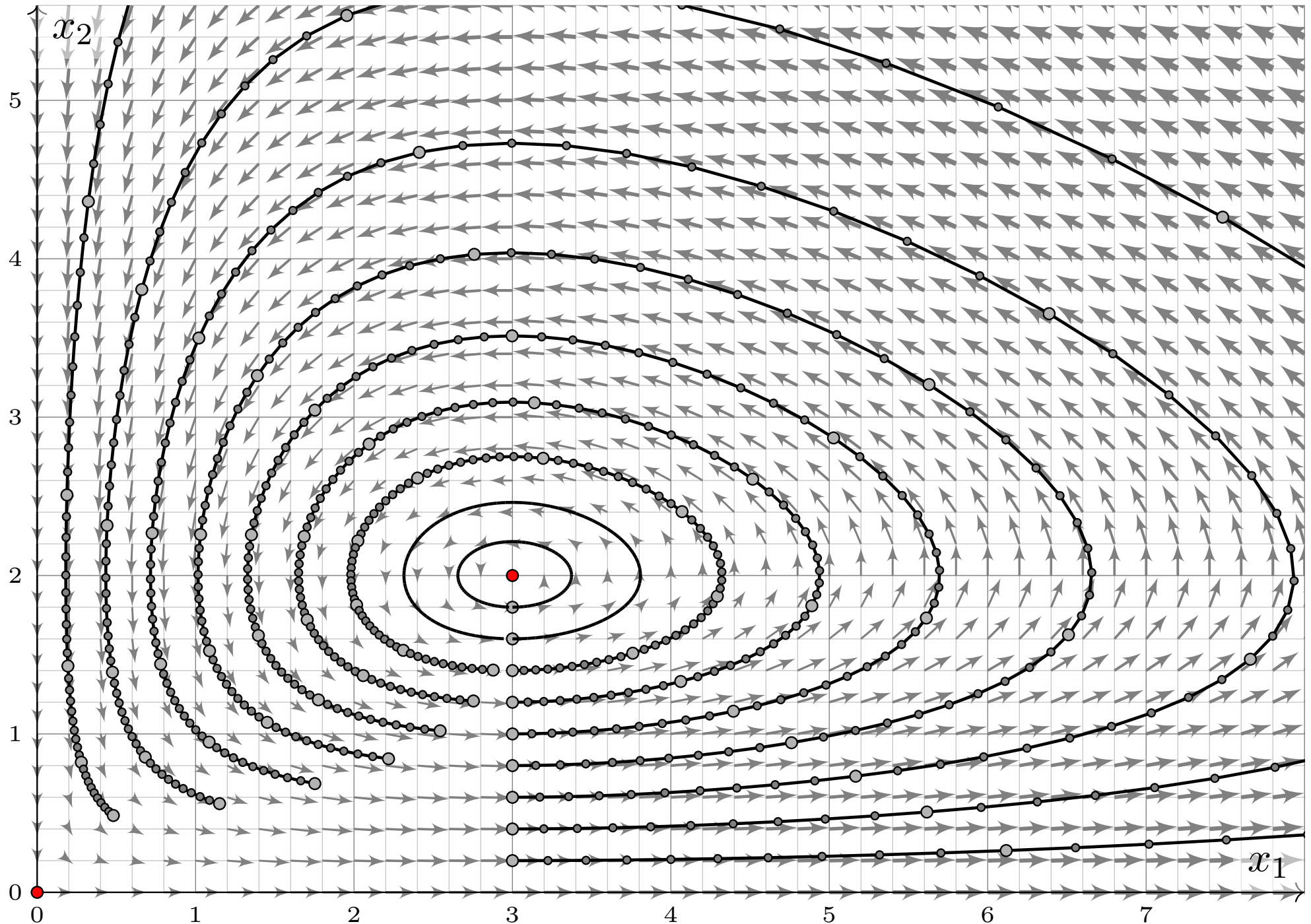
Satz G2A: Preis der Anarchie, Roughgarden–Tardos 2002

Gegeben sei ein Straßennetz. Die Fahrzeit für jede einzelne Strecke e sei affin-linear, also von der Form $c_e(x) = a_e + b_e x_e$ bei Auslastung x_e . Sei C die Fahrzeit bei kollektiver Optimierung und I die Fahrzeit bei individueller Optimierung. Dann gilt die Schranke $I/C \leq 4/3$.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

Räuber-Beute-Modell:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Größe	Bedeutung	Beispiel
$t \geq 0$	Zeit	Jahre
$x_1(t) \geq 0$	Anzahl der Beutetiere	Hasen/Mio
$x_2(t) \geq 0$	Anzahl der Raubtiere	Luchse/Tsd
$\alpha_1 > 0$	Reproduktionsrate der Beute (ohne Räuber)	0.8/Jahr
$\beta_1 > 0$	Sterberate der Beute pro Räuber	0.4/Jahr
$\alpha_2 > 0$	Sterberate der Räuber (ohne Beute)	0.6/Jahr
$\beta_2 > 0$	Reproduktionsrate der Räuber pro Beute	0.2/Jahr

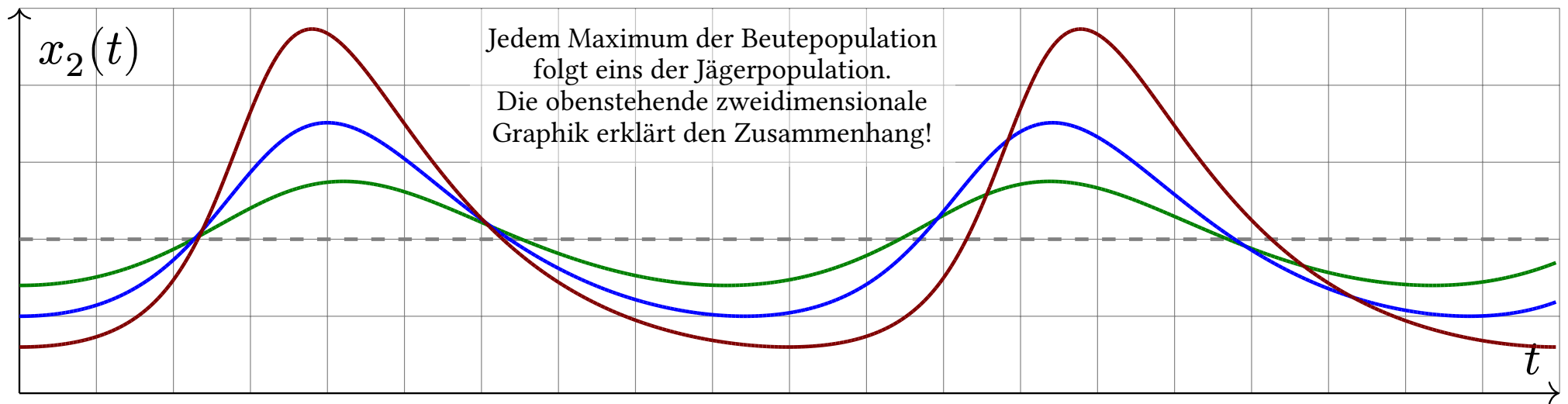
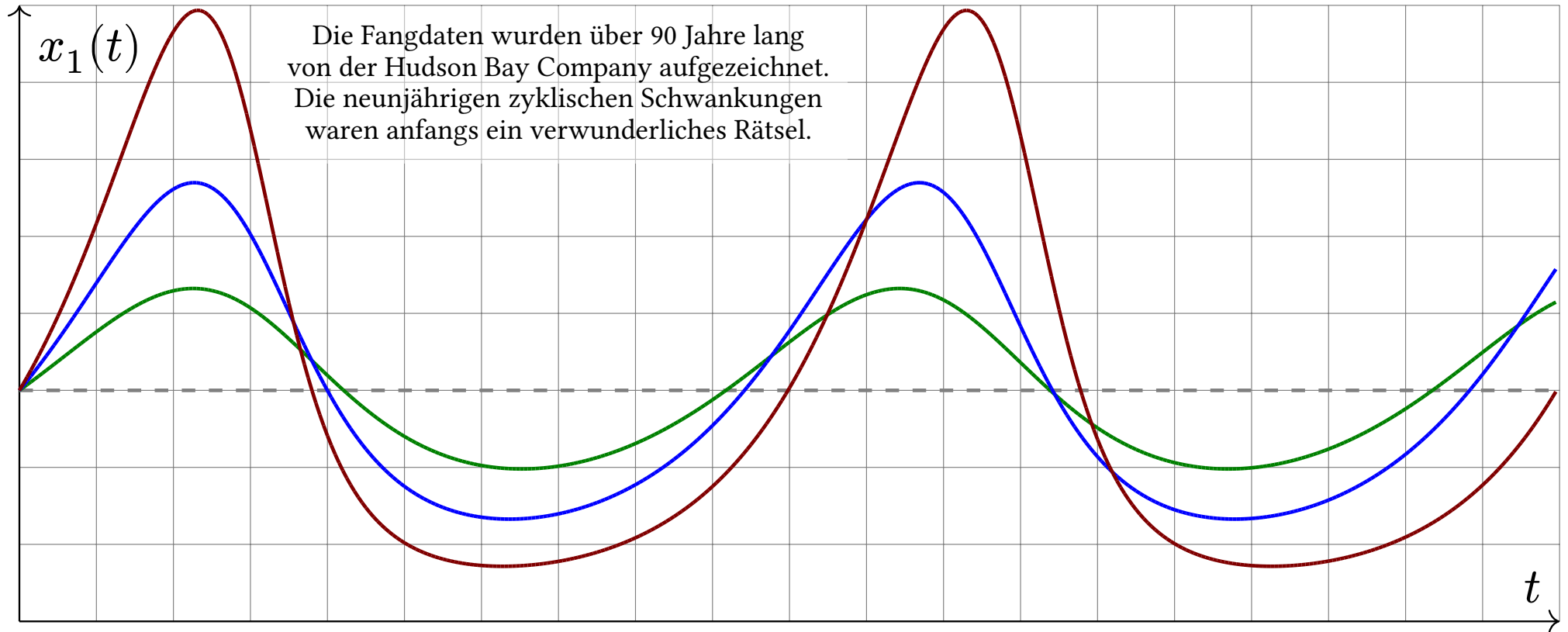


Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

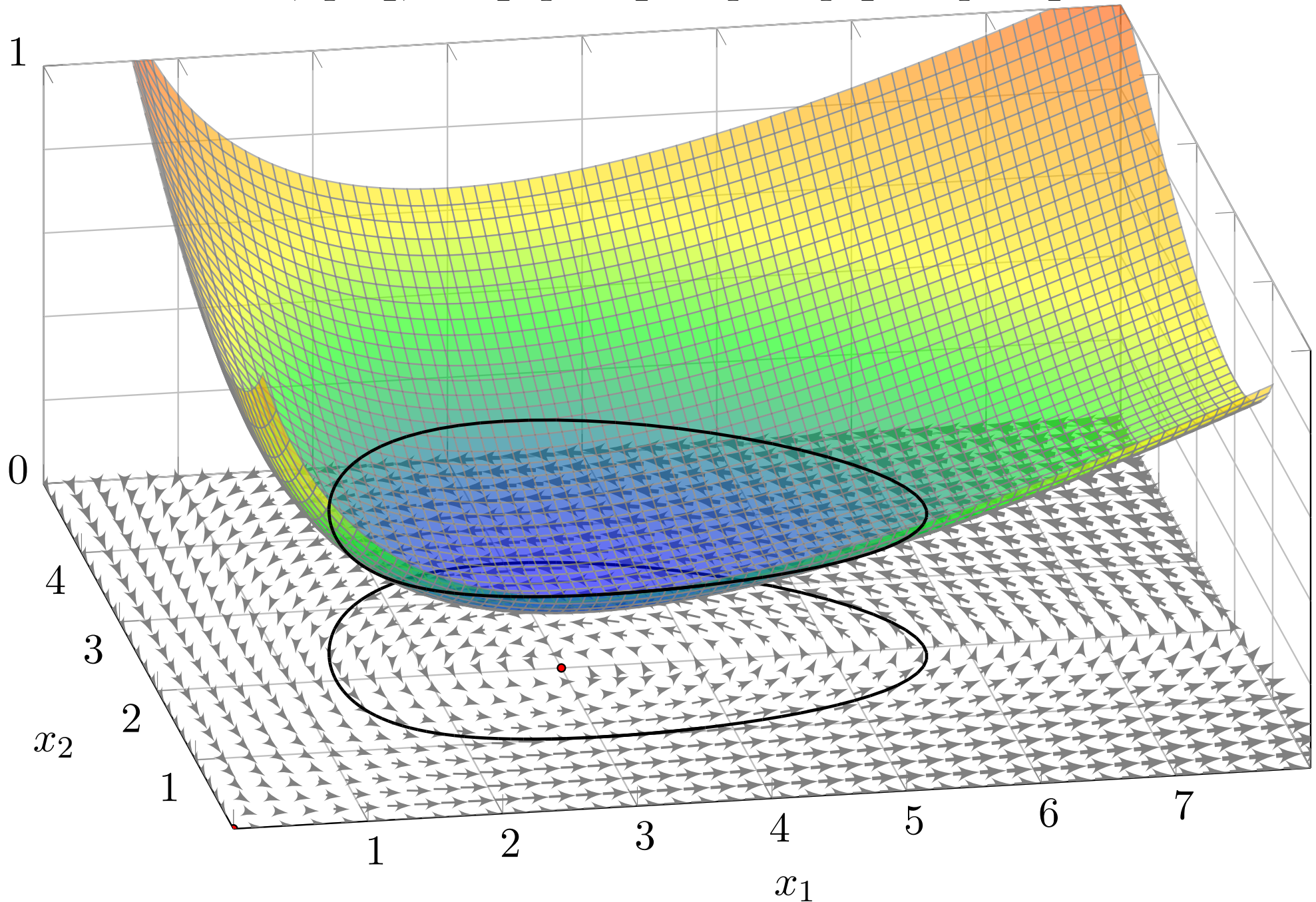
Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.



Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Räuber-Beute-Modell: Potentialfläche

Das Potential $\Phi(x_1, x_2) = \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.



Die Replikatorgleichung

Die Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda x$ beschreibt exponentielles Wachstum:
 Zum Startwert $x(0)$ ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto x(0) e^{\lambda t}$ die eindeutige Lösung.
 Für gemischte Strategien nutzen wir baryzentrische Koordinaten:

$$s_i \in \bar{S}_i \quad : \quad s_i = \sum_k x_i^k s_i^k, \quad x_i^k \geq 0, \quad \sum_k x_i^k = 1$$

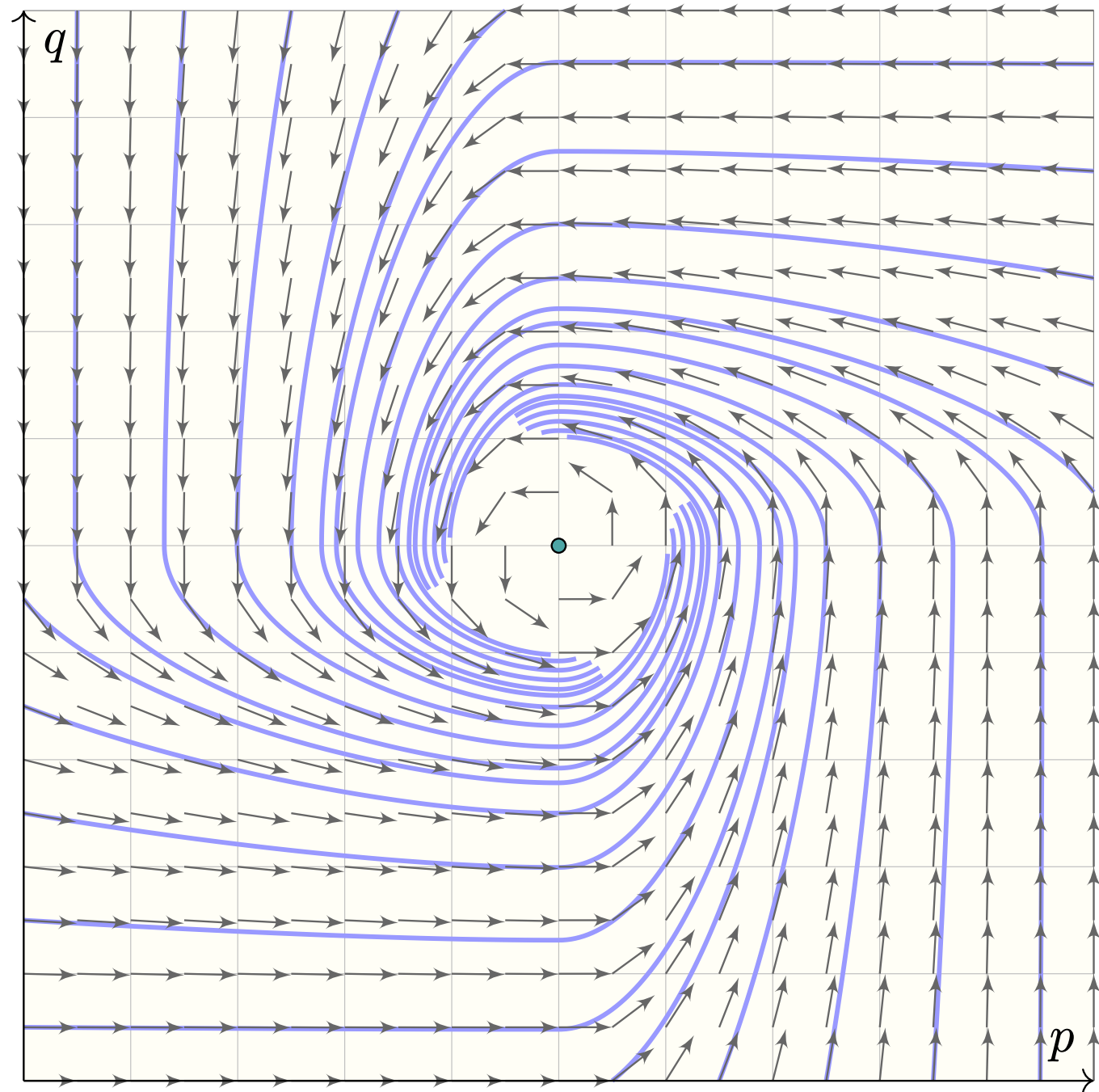
Unsere vorigen Beispiele motivieren folgende Differentialgleichung:

$$\dot{x}_i^k = x_i^k [\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})]$$

Gilt $[\dots] \geq 0$, so hat s_i^k gegenüber s_i einen Fitnessvorteil/nachteil, also wächst/sinkt der Anteil x_i^k dieser Strategie an der Gesamtpopulation.

Nash-Dynamik zu Matching Pennies

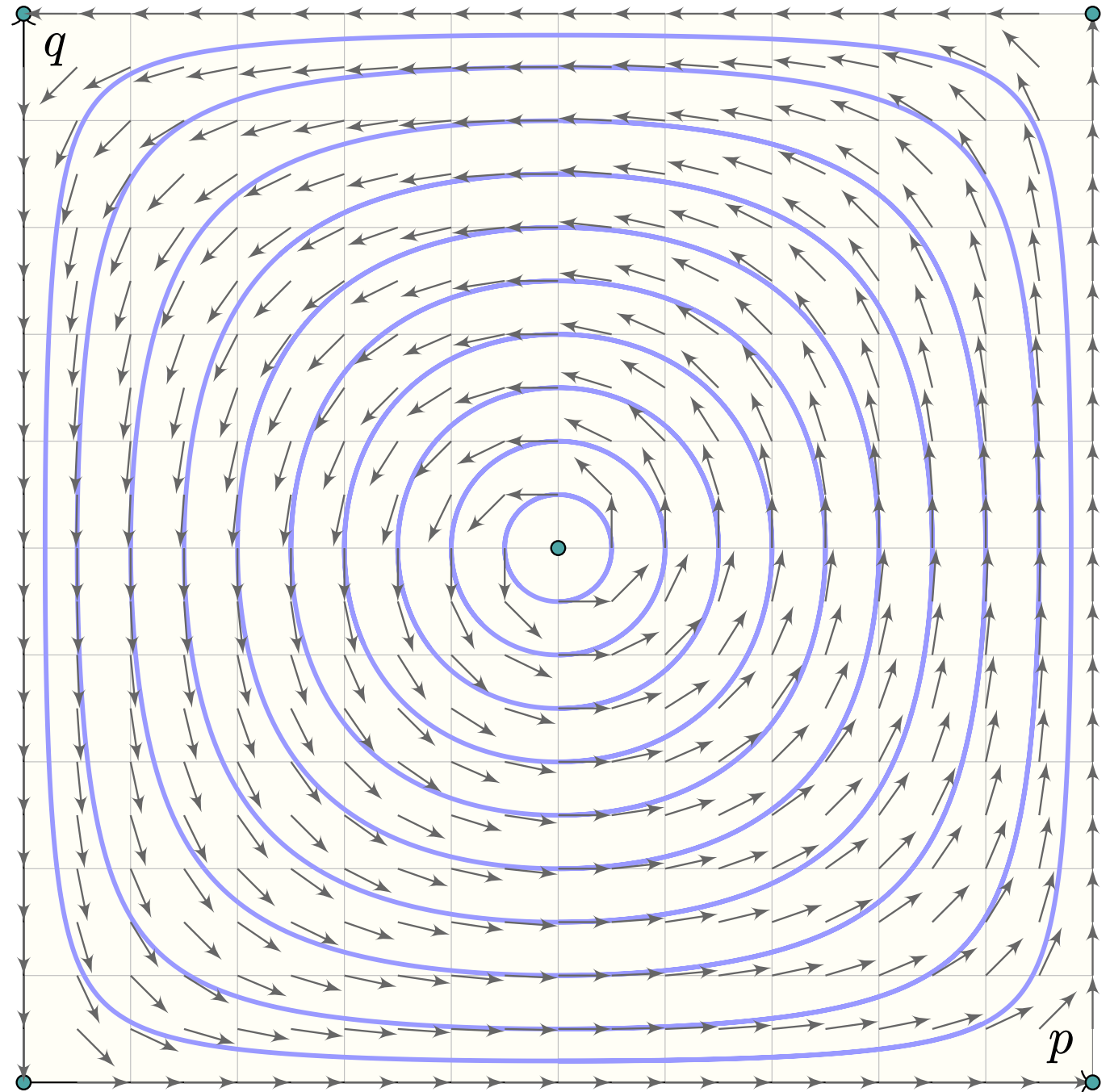
		B		Kopf		Zahl	
A							
Kopf							
Zahl							



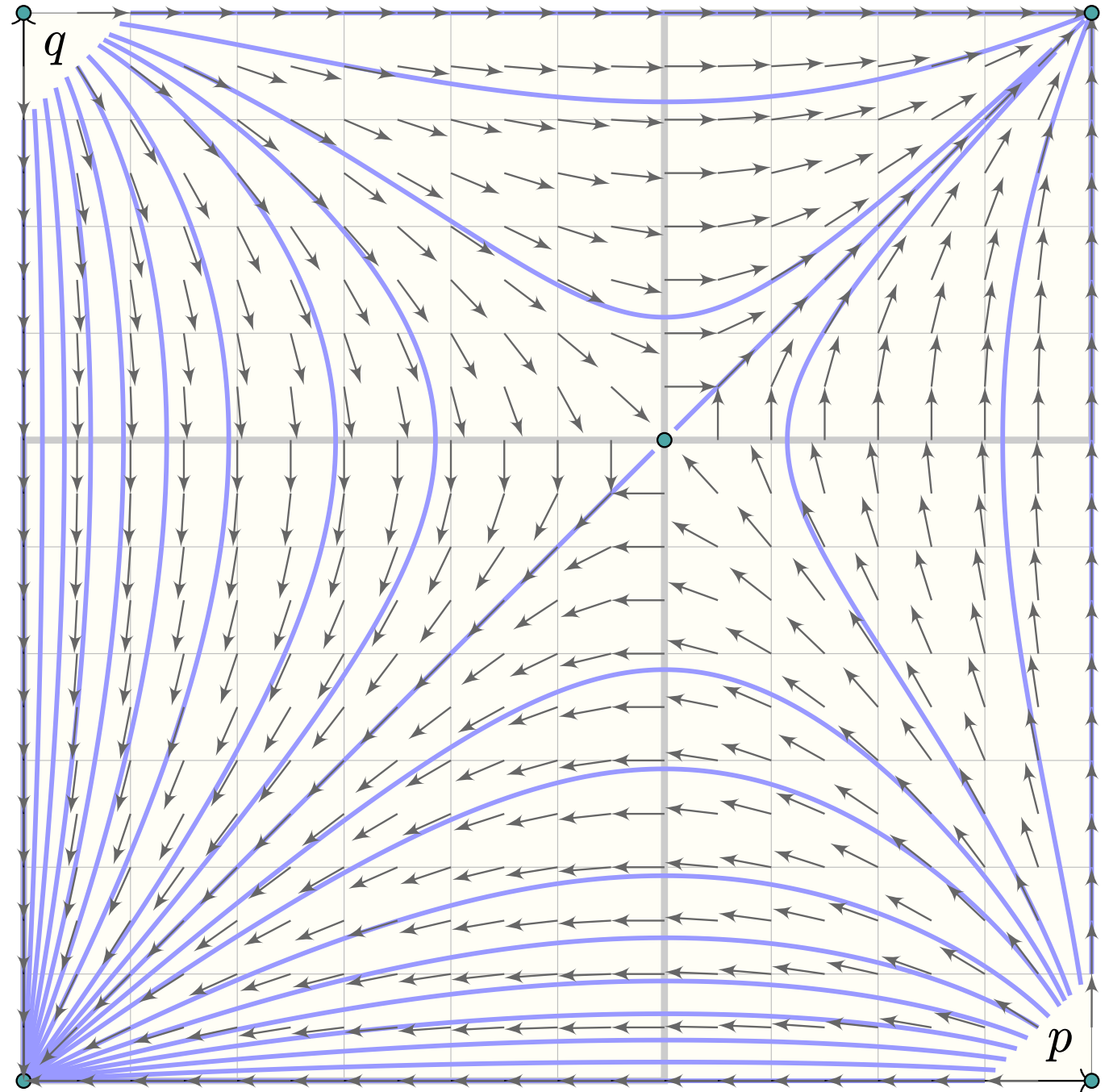
Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

A \ B	B	
	Kopf	Zahl
Kopf	-1	+1
Zahl	+1	-1



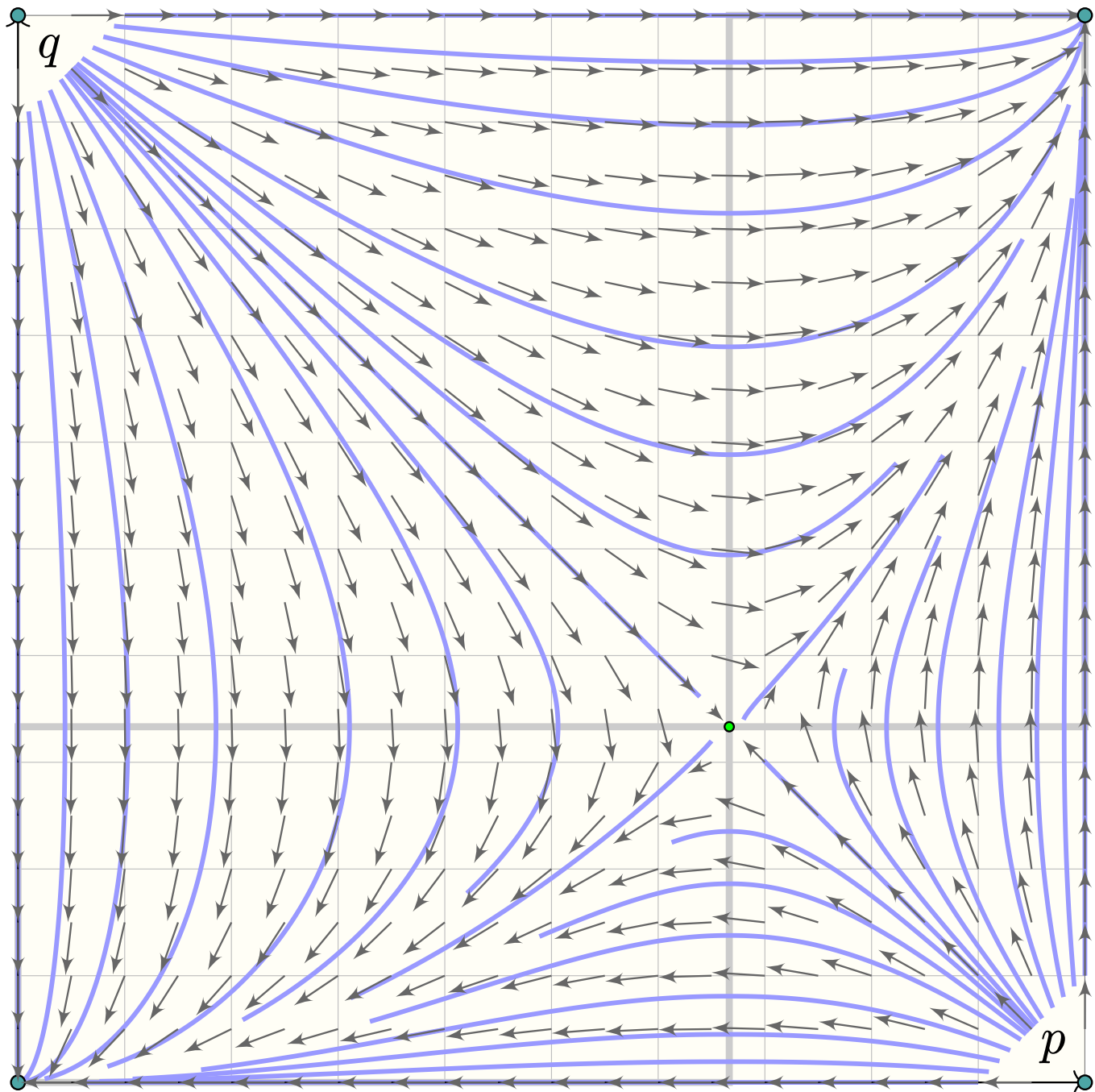
		B	
		bleiben	gehen
A	bleiben	-2	-5
	gehen	-5	0



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

		B		Bach	Strawinsky
		A			
Bach		1	2	0	
					0
Strawinsky		0	0	2	1

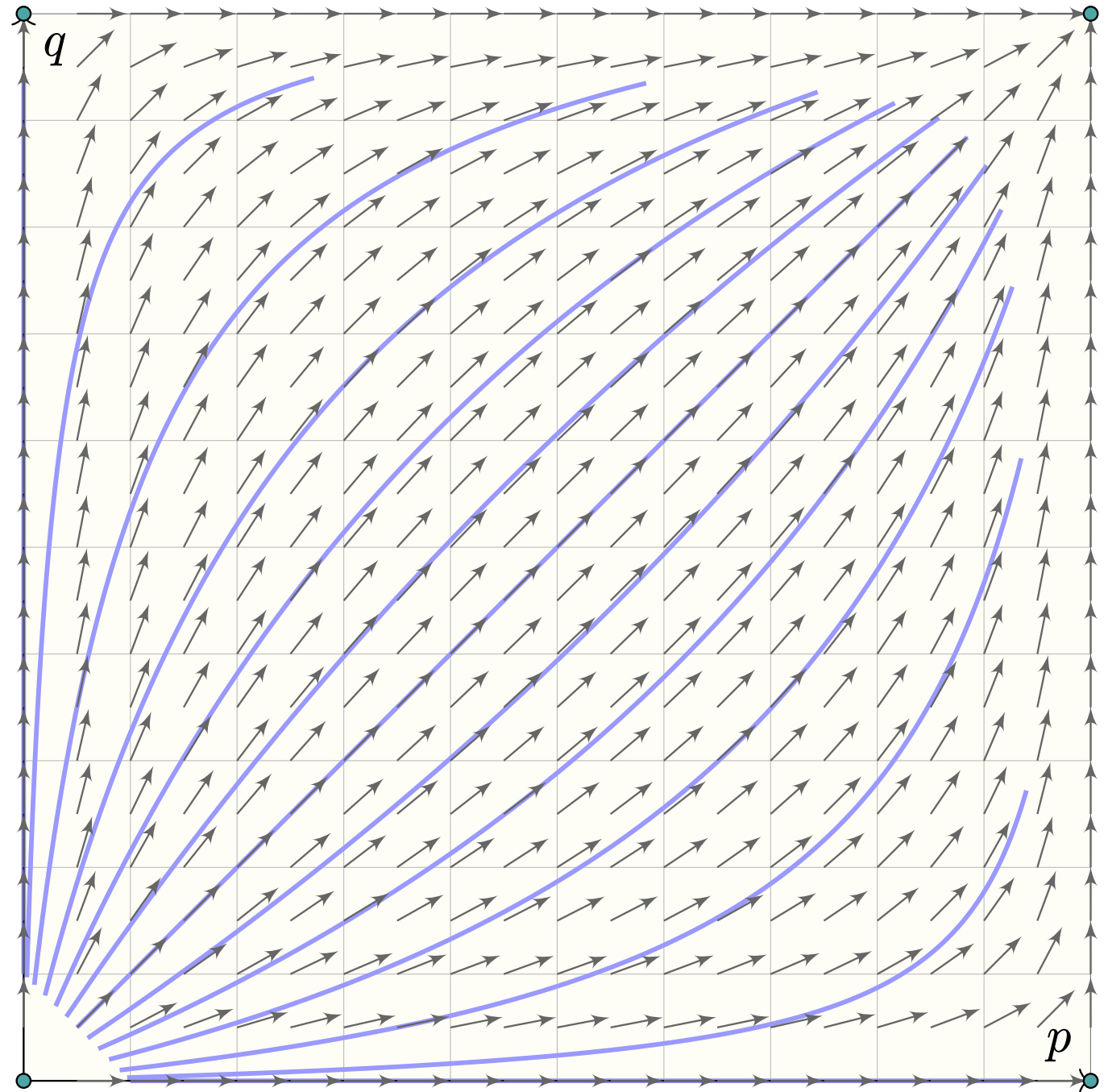


Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

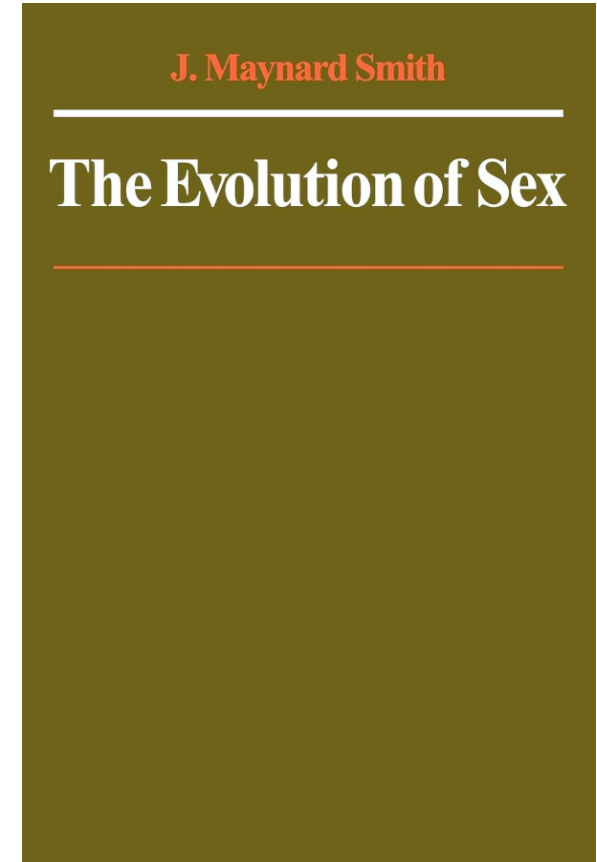
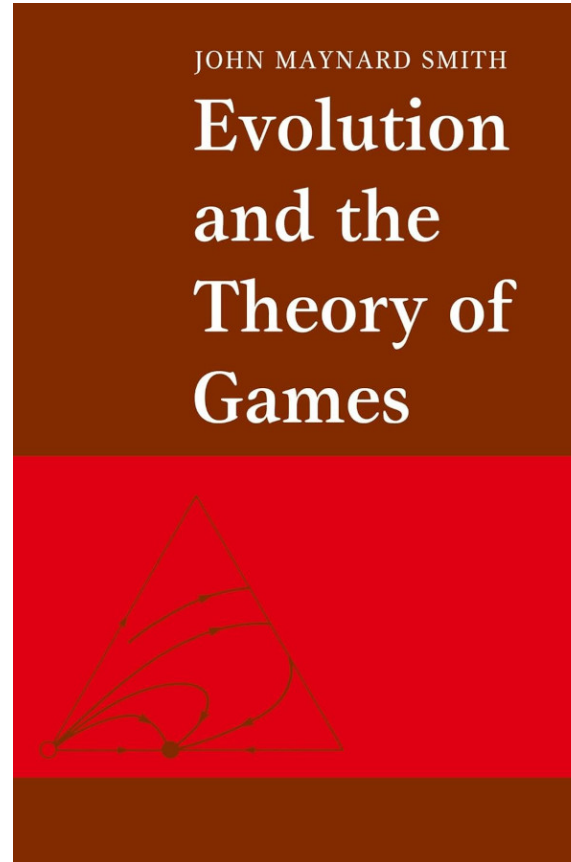
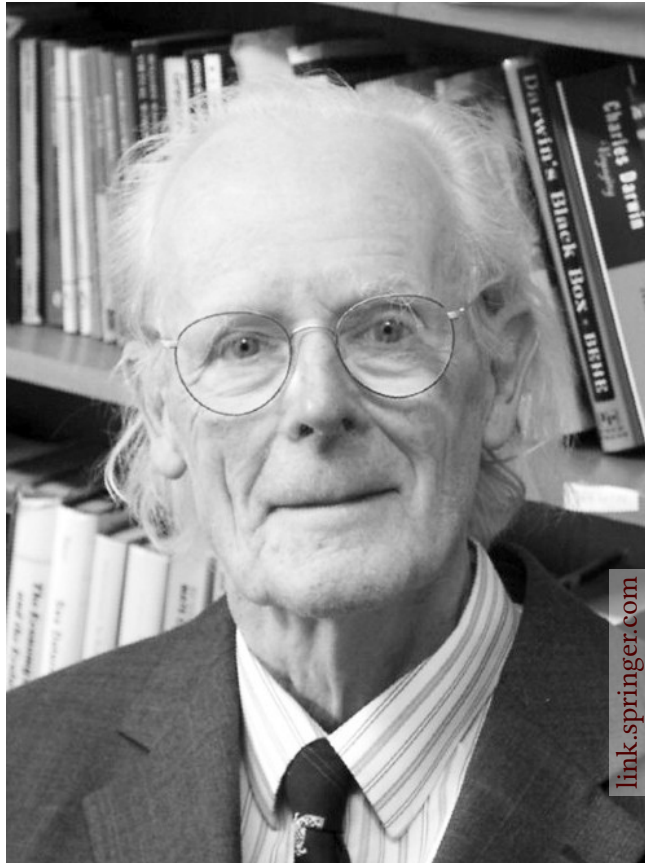
Replikatordynamik zu Gefangenendilemma

		B	
		schweigen	gestehen
A	schweigen	-1	-5
	gestehen	-5	-4



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.



Evolutionär stabile Strategien

Gegeben sei ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Seine affine Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ interpretieren wir als Populationsmodell.

Zudem sei u symmetrisch, also $S_1 = S_2 = S$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und somit $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 =: \bar{S}$ und $\bar{u}_1(s_1, s_2) = \bar{u}_2(s_2, s_1) =: v(s_1, s_2)$.

Dank E1E existieren symmetrische Nash-Gleichgewichte $(s, s) \in \text{NE}(\bar{u})$. Das bedeutet, die Strategie $s \in \bar{S}$ erfüllt $v(s, s) \geq v(\tilde{s}, s)$ für alle $\tilde{s} \in \bar{S}$.

Zur Strategie $s \in \bar{S}$ tritt nun eine Mutation $\tilde{s} \in \bar{S}$ mit kleiner Wkt $\varepsilon > 0$. Die Gesamtpopulation verschiebt sich somit von s zu $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Vor diesem Hintergrund s' vergleichen wir die Fitness von s bzw. $\tilde{s}$:

$$f(s) = v(s, s') = (1 - \varepsilon) v(s, s) + \varepsilon v(s, \tilde{s})$$

$$f(\tilde{s}) = v(\tilde{s}, s') = \underbrace{(1 - \varepsilon) v(\tilde{s}, s)}_{\text{nullte Ordnung}} + \underbrace{\varepsilon v(\tilde{s}, \tilde{s})}_{\text{erste Ordnung}}$$

Definition G3A: evolutionär stabile Strategien

Die Strategie $s \in \bar{S}$ heißt **evolutionär stabil** gegen $\tilde{s} \in \bar{S}$, wenn gilt:

- 0 entweder strikt $v(s, s) > v(\tilde{s}, s)$
- 1 oder schwach $v(s, s) = v(\tilde{s}, s)$, aber $v(s, \tilde{s}) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$.

Gilt dies für alle $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$, so heißt s **evolutionär stabil**, kurz:

$$\text{ESS}(\bar{u}) := \{s \in \bar{S} \mid s \text{ ist evolutionär stabil}\}$$

Übung: Für jedes reelle symmetrische Spiel u gilt:

$$(s, s) \in \text{NE}^!(\bar{u}) \quad \implies \quad s \in \text{ESS}(\bar{u}) \quad \implies \quad (s, s) \in \text{NE}(\bar{u})$$

❓ Warum ist das beobachtete Geschlechterverhältnis recht stabil 1 : 1?

Fisher's principle – the most celebrated argument in evolutionary biology

- (1) Angenommen, Männchen würden seltener geboren als Weibchen.
 - (2) Dann hat statistisch ein neugeborenes Männchen mehr Nachkommen als ein neugeborenes Weibchen.
 - (3) Eltern mit Disposition zu männlichem Nachwuchs haben daher mehr Enkel.
 - (4) Die Gene hierfür verbreiten sich daher etwas schneller und korrigieren so das Geschlechterverhältnis in Richtung 1 : 1.
 - (5) Dadurch verschwindet der genannte Vorteil langsam.
 - (6) Dasselbe gilt, wenn mehr Weibchen als Männchen geboren werden.
- 😊 Mit anderen Worten: Das 1 : 1 Verhältnis ist evolutionär stabil (ESS).

NATURE VOL. 246 NOVEMBER 2 1973

The Logic of Animal Conflict

J. MAYNARD SMITH

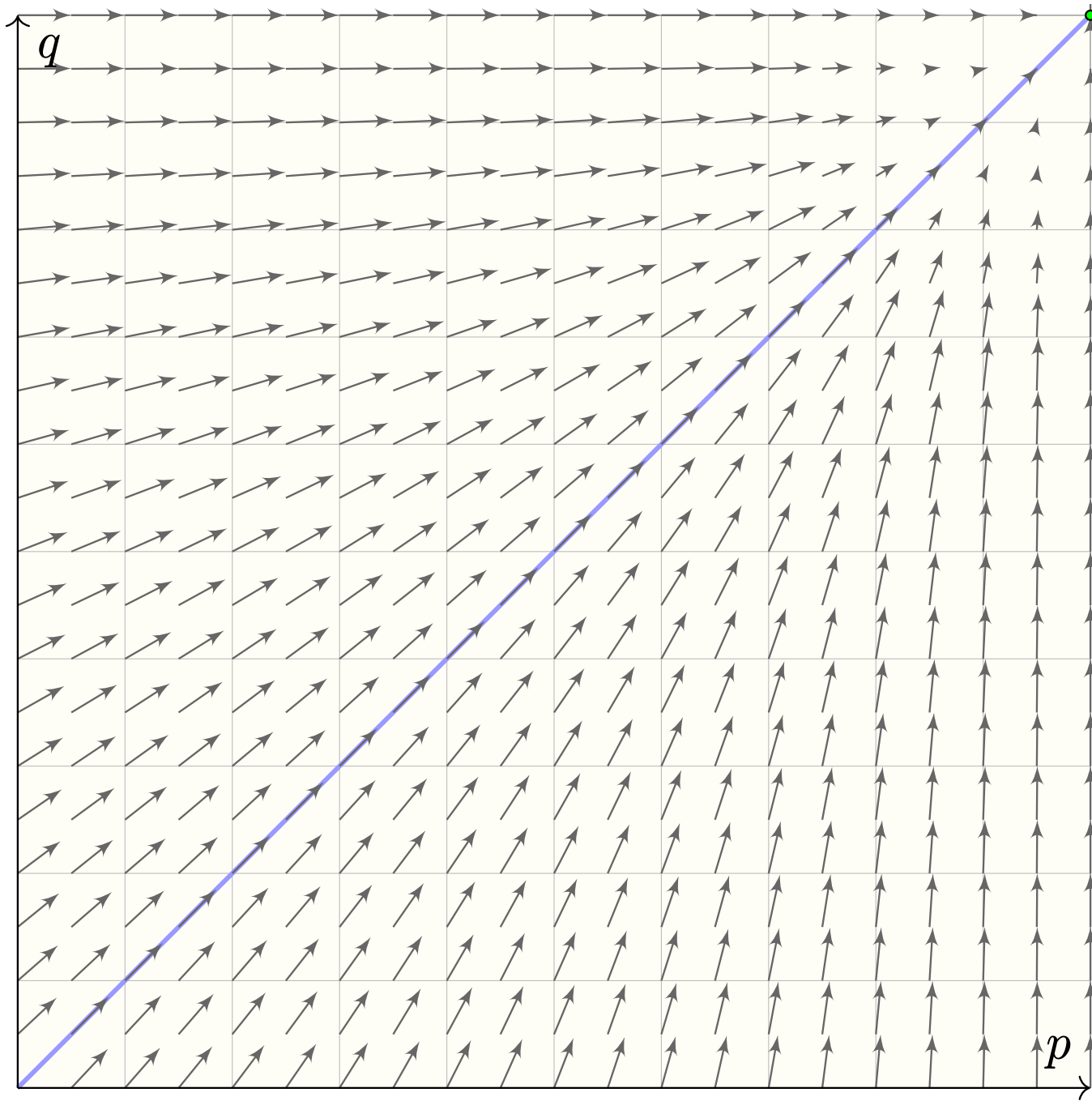
G. R. PRICE

Conflicts between animals of the same species usually are of “limited war” type, not causing serious injury. This is often explained as due to group or species selection for behaviour benefiting the species rather than individuals. Game theory and computer simulation analyses show, however, that a “limited war” strategy benefits individual animals as well as the species.

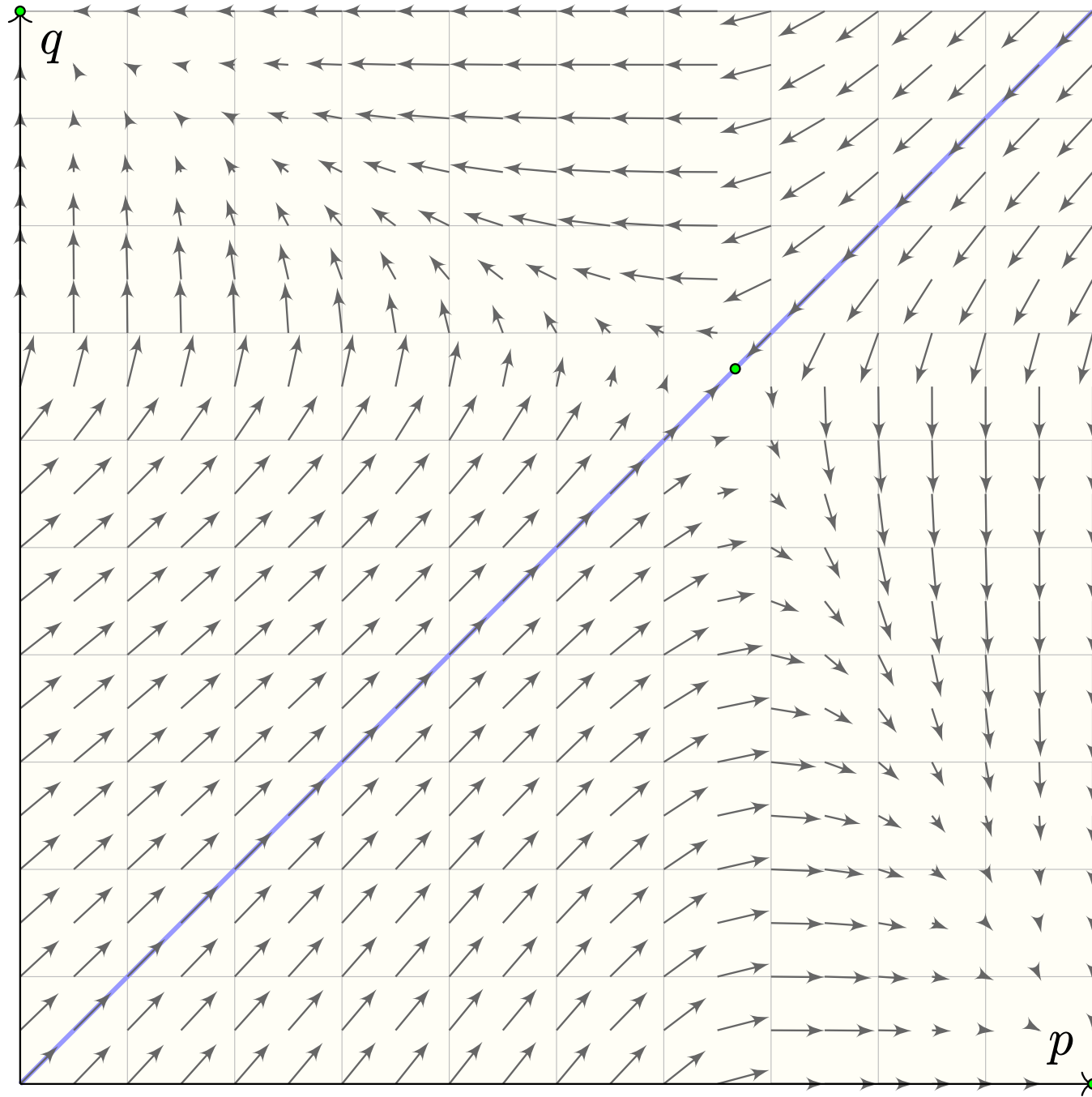
		B		Taube	Falke
		A			
A	Taube	1	1	0	
	Falke	2	0	$1 - a$	

Aufgabe: Finden Sie zu $a \in \mathbb{R}$ alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

$$a = 1/2$$



$$a = 3/2$$



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

	s_1	s_2	s_3
s_1	a	-1	$+1$
s_2	$+1$	a	-1
s_3	-1	$+1$	a

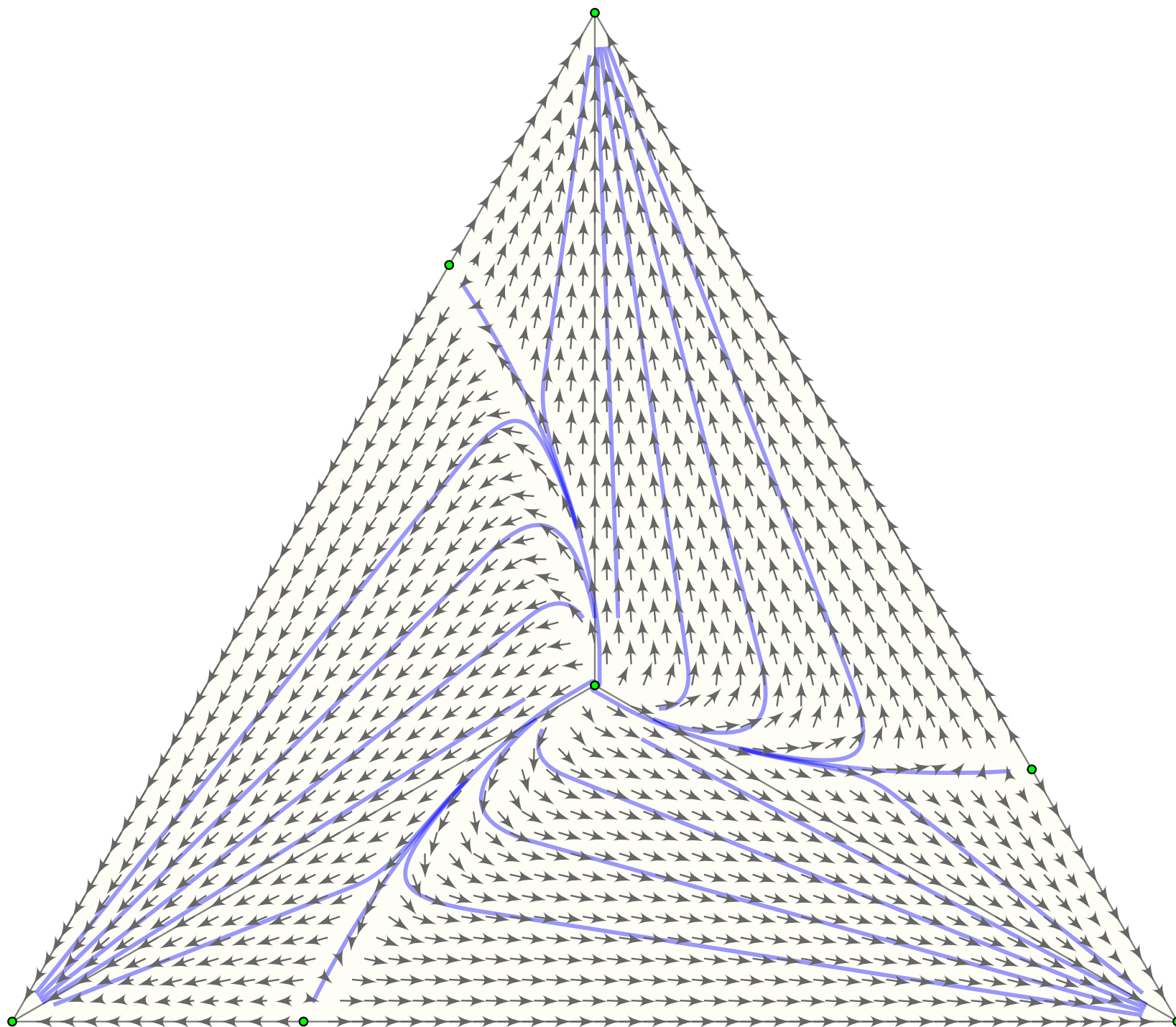
$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & +1 \\ +1 & a & -1 \\ -1 & +1 & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe: (1) Finden Sie hier alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

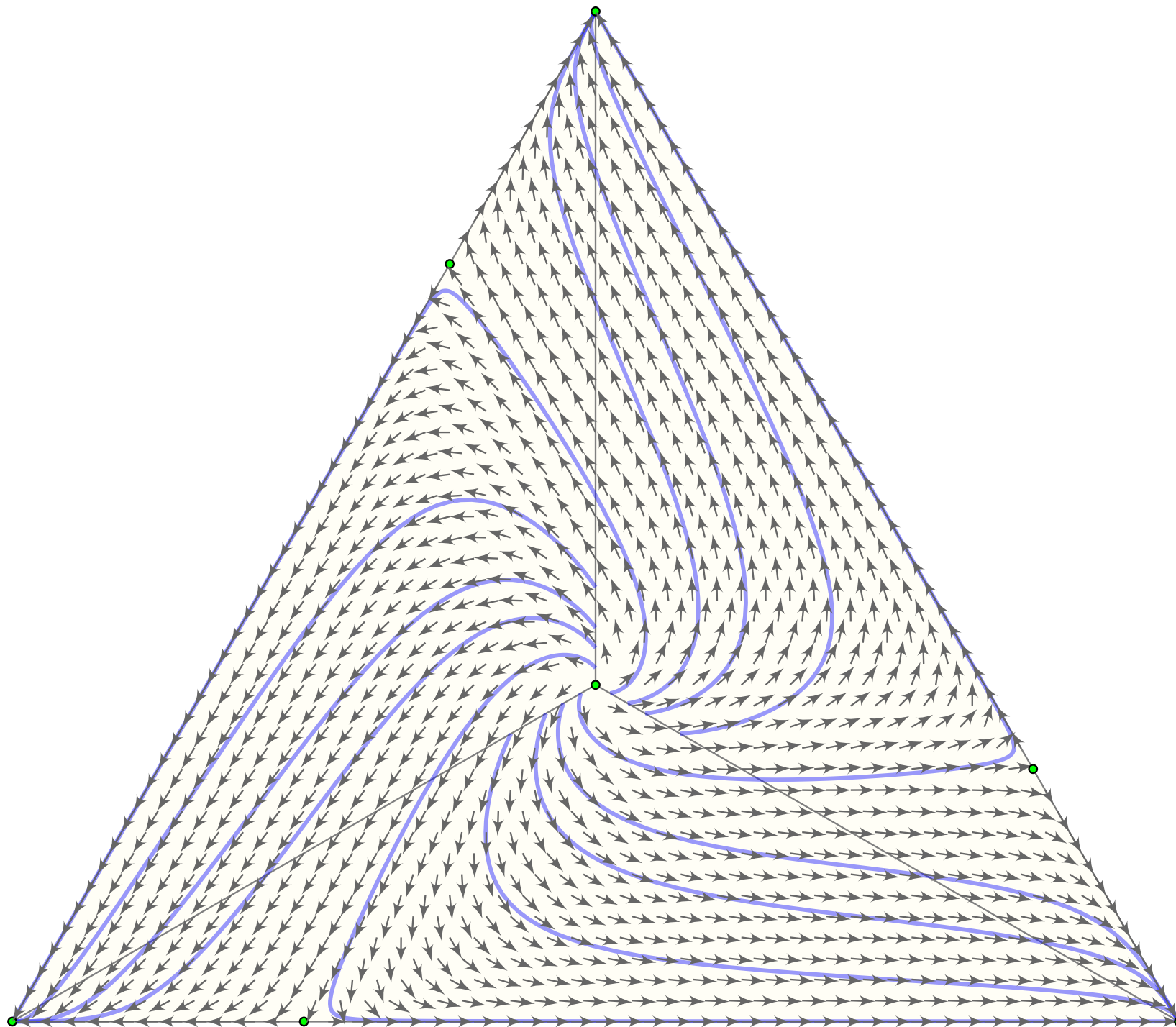
(2) Formulieren Sie die Populationsdynamik $\dot{x} = f(x)$ auf $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$

(a) gemäß dem Nash-Feld und (b) gemäß der Replikatorgleichung.

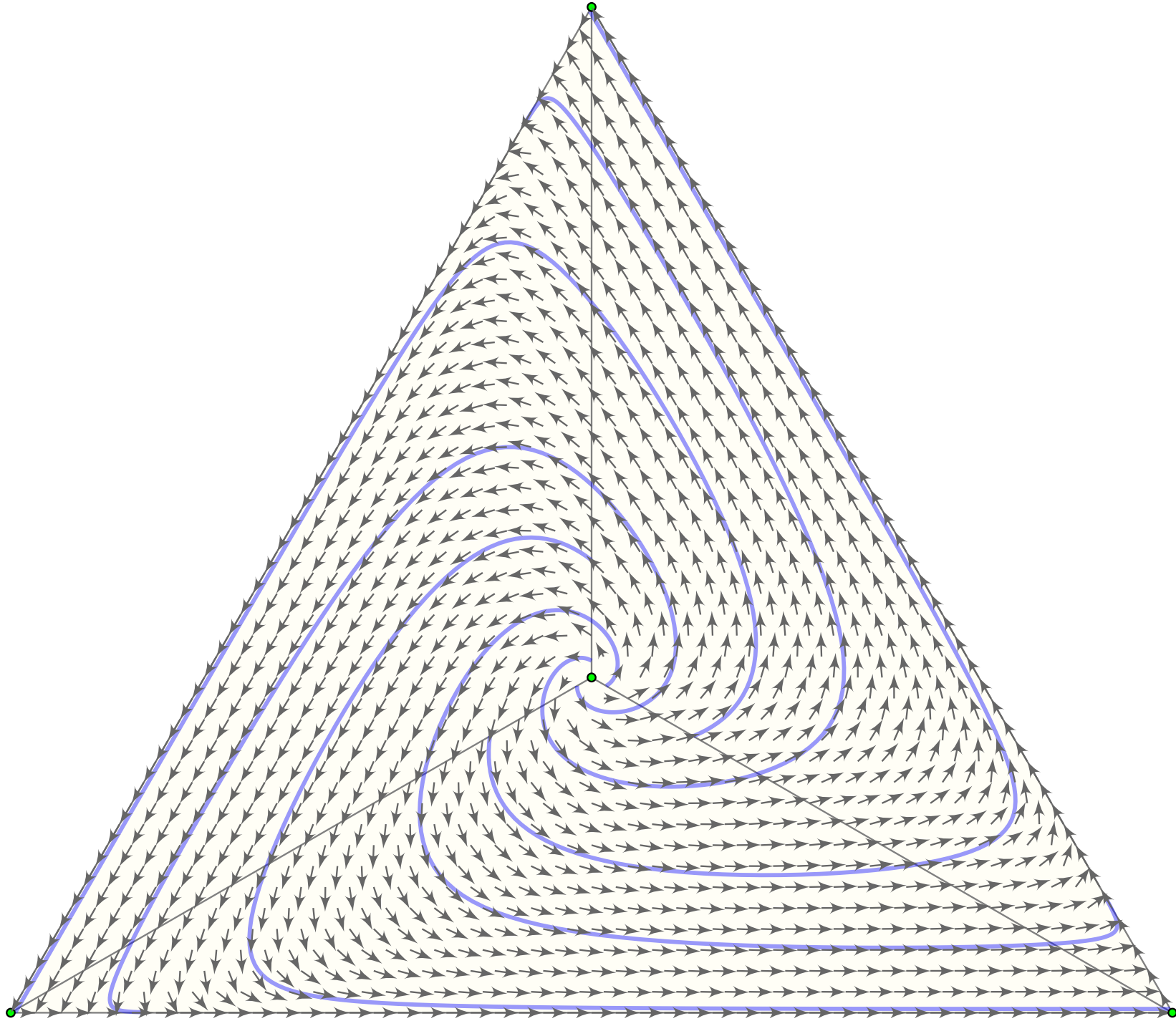
$$a = 2$$



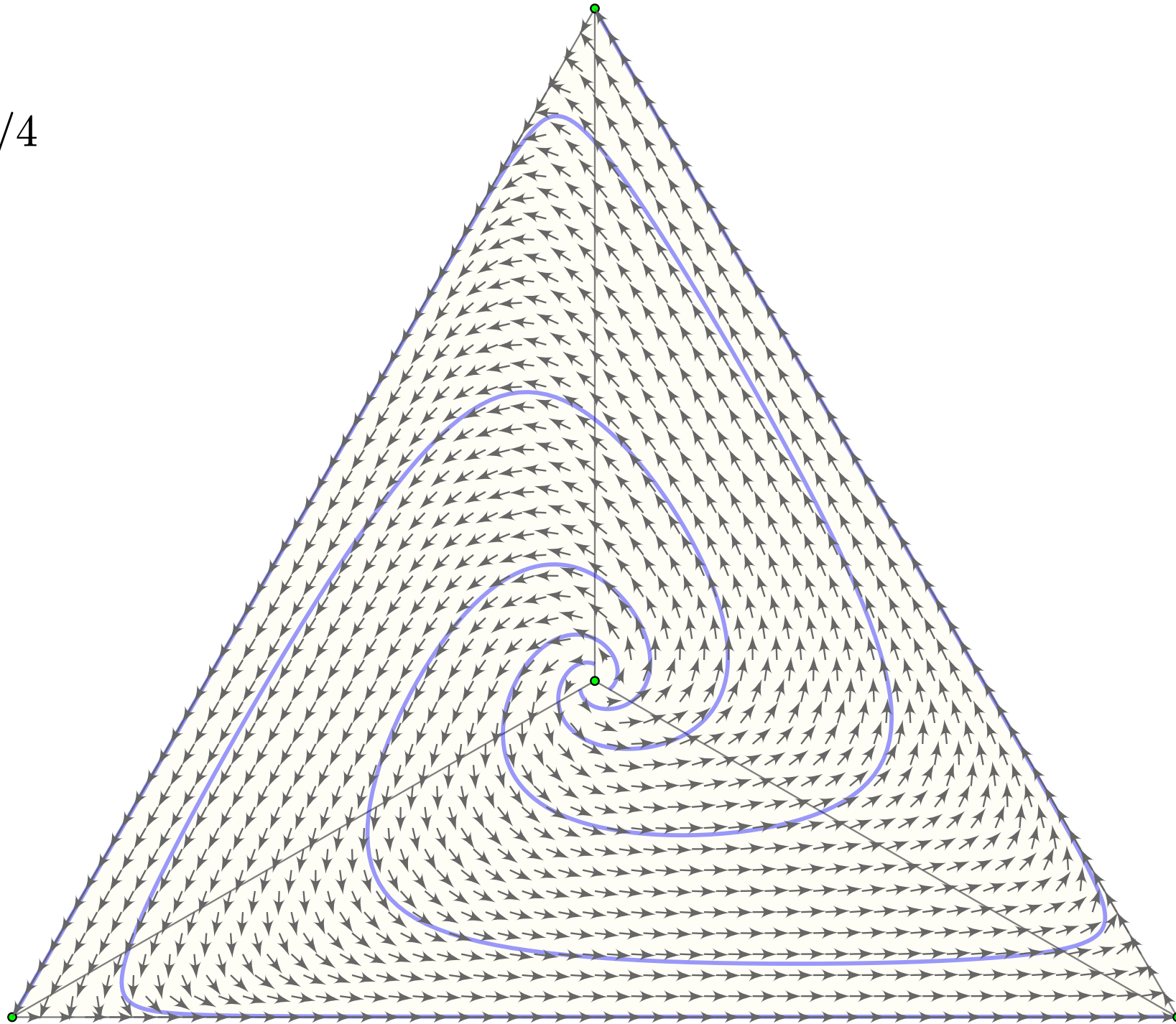
$$a = 2$$



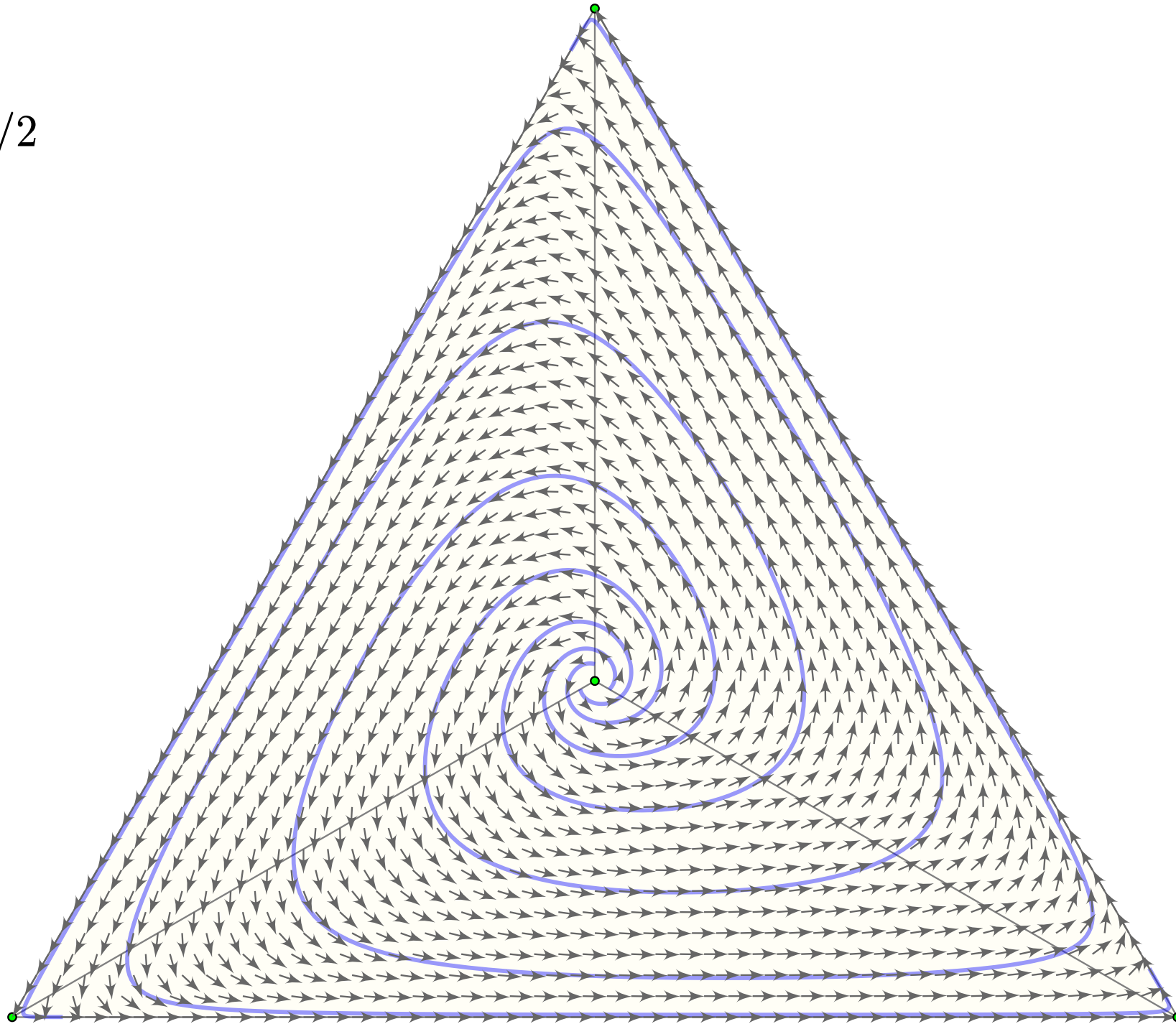
$$a = 1$$



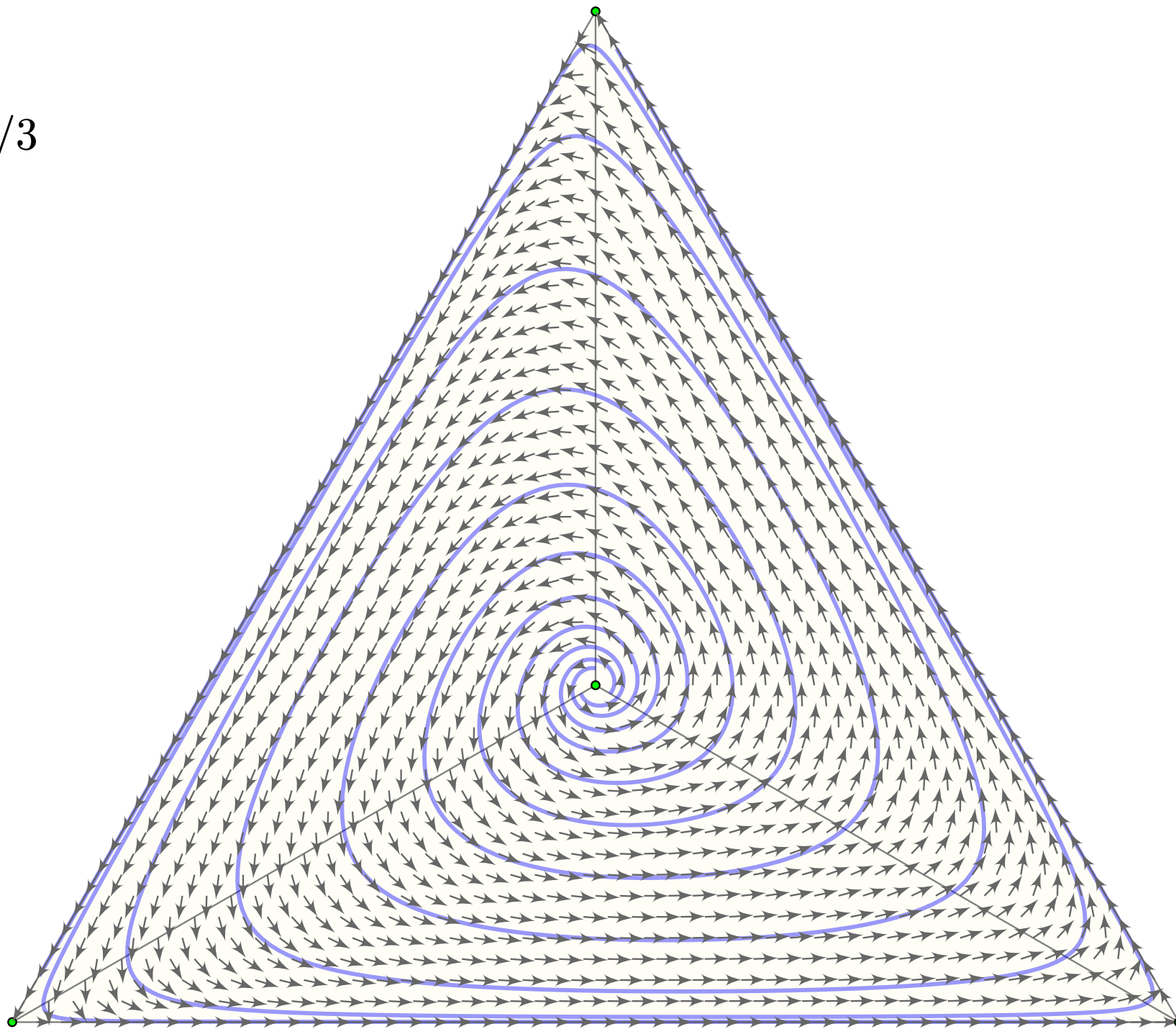
$$a = 3/4$$



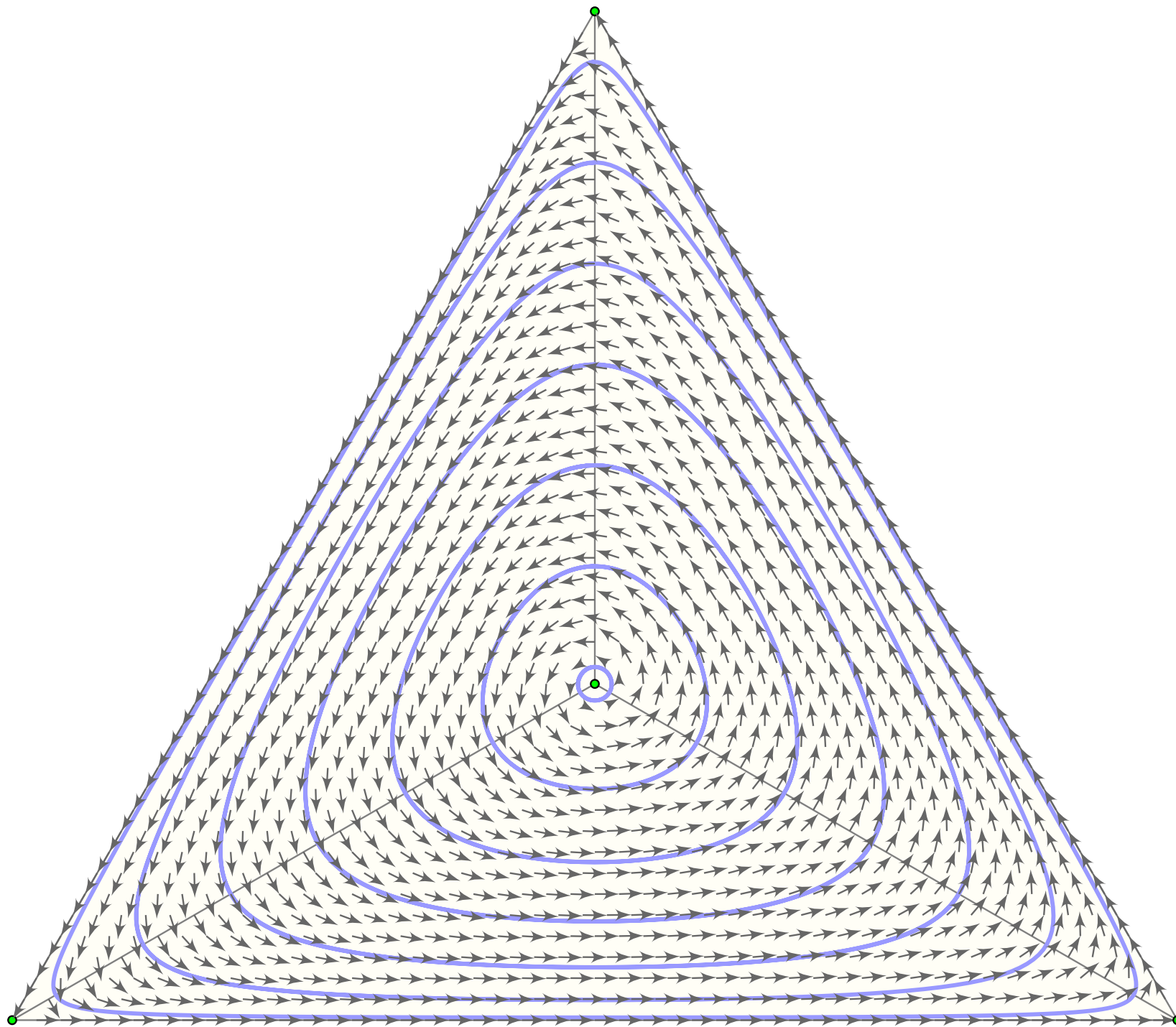
$$a = 1/2$$



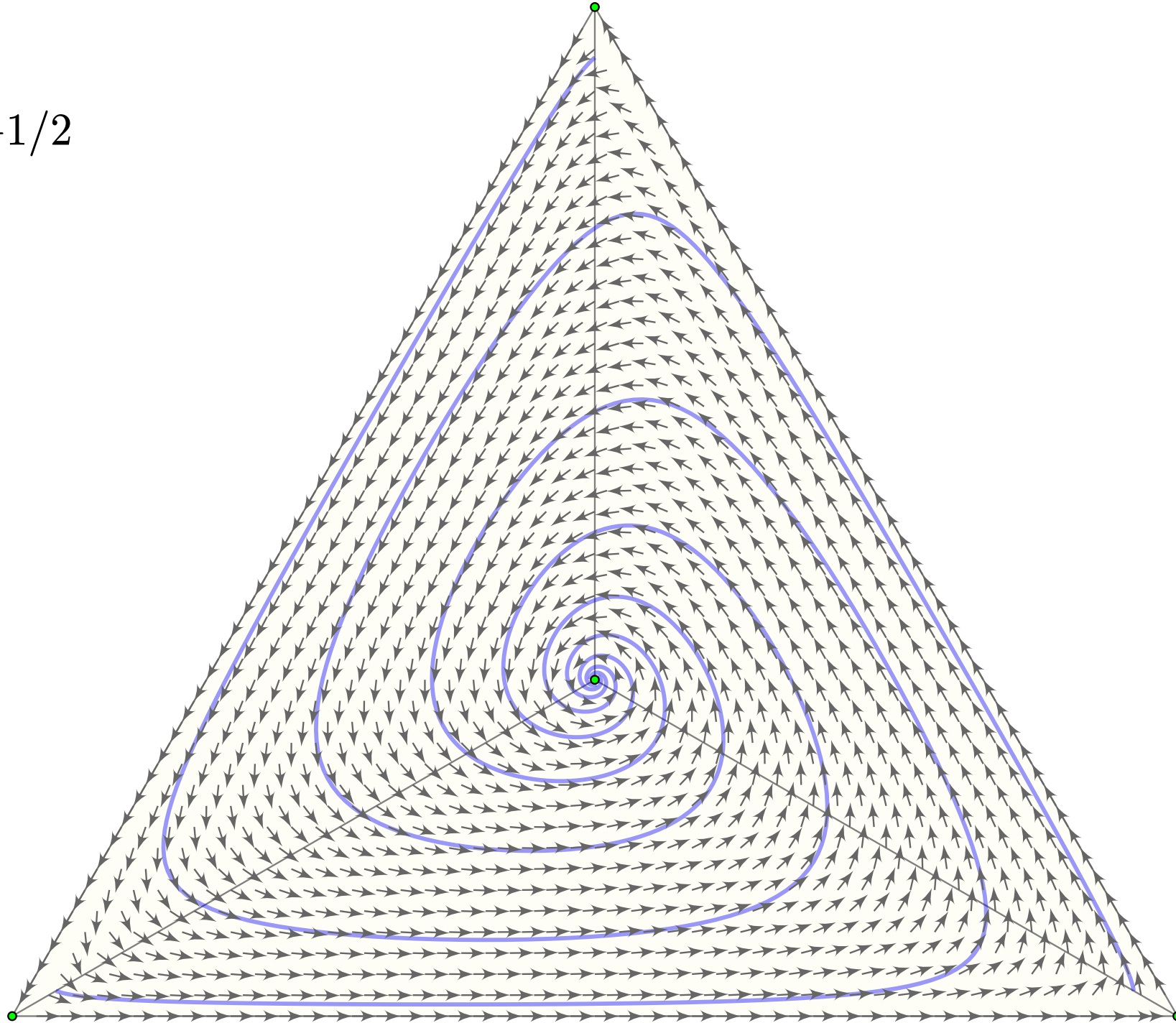
$$a = 1/3$$



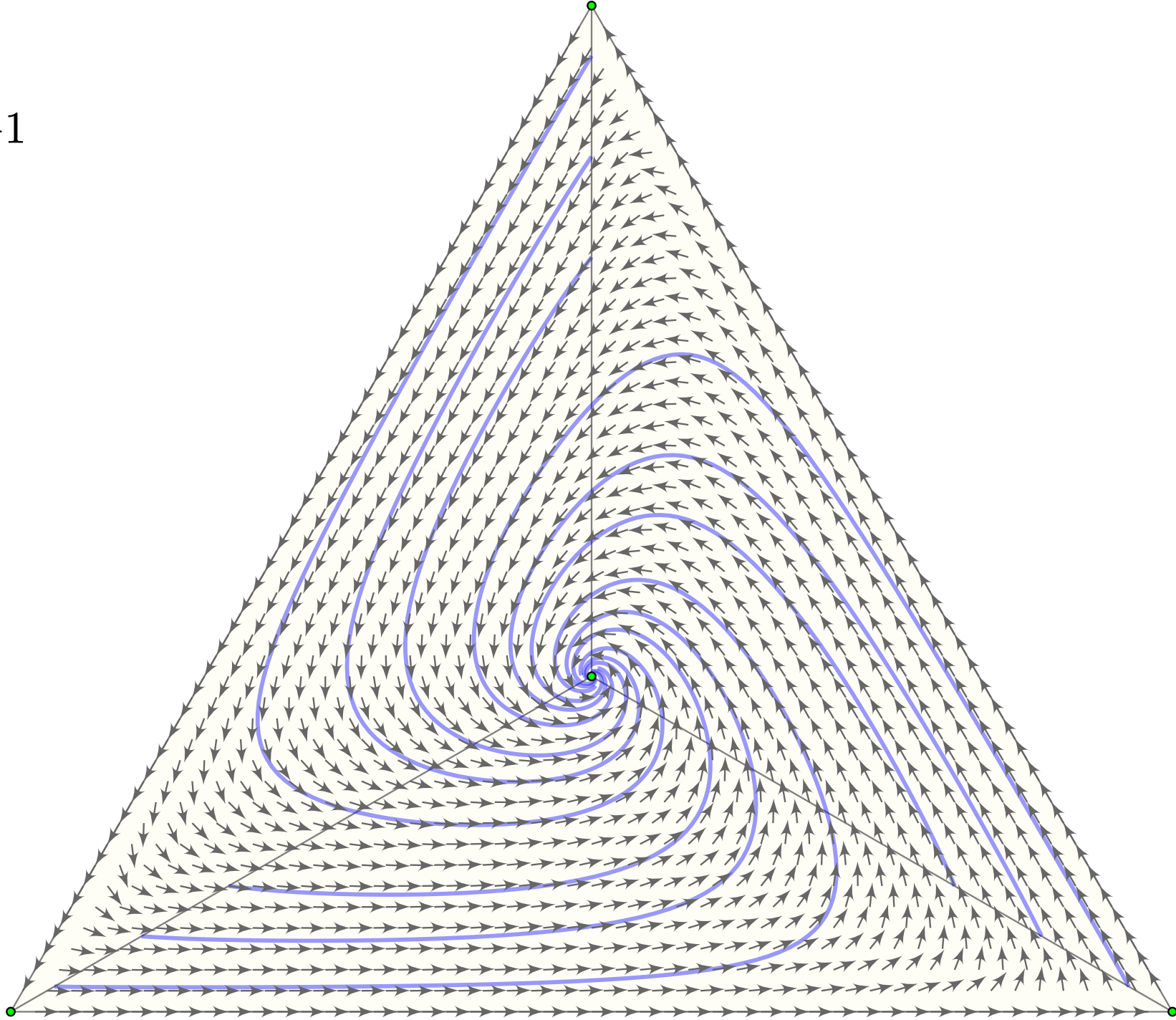
$$a = 0$$



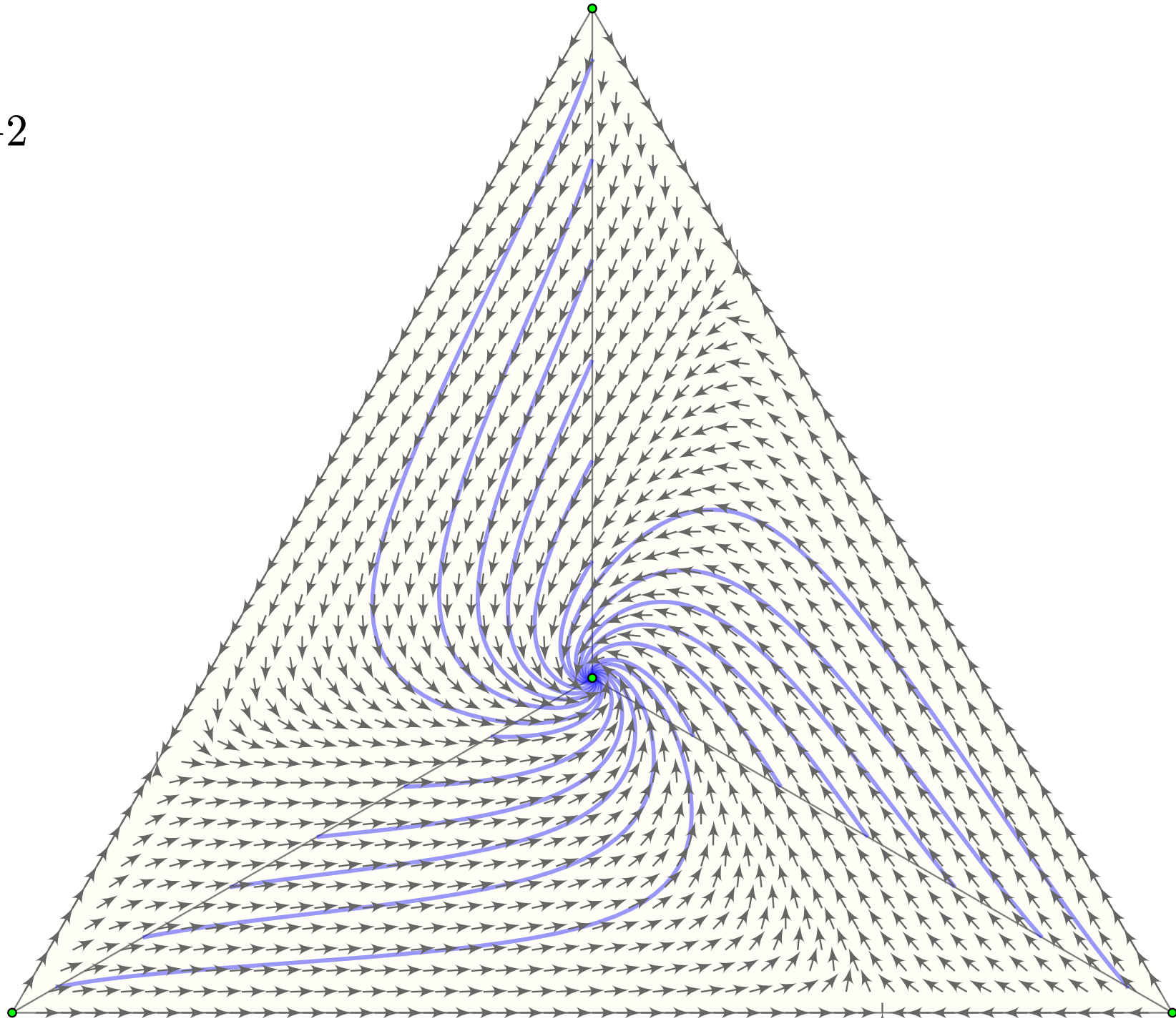
$$a = -1/2$$



$$a = -1$$



$$a = -2$$



Jeder Spieler:in $i \in I := \{1, \dots, n\}$ wählt eine Zahl $x_i \in X \subseteq \mathbb{N}$.

Die kleinste Einzelnennung gewinnt: *least unique positive integer*.

Wir spielen Sie optimal? für $n = 3, 4, 5, \dots$ oder zufällige Spielerzahl?



Aufgabe: Formulieren Sie für $n = 3$ die Gewinnfunktion $\bar{u} : \bar{X}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle symmetrischen Gleichgewichte $(p, p, p) \in \text{NE}(\bar{u})$.

Lösung: (a) Wir nutzen den Raum der gemischten Strategien

$$\bar{X} = \left\{ p : X \rightarrow [0, 1] : x \mapsto p_x \mid \sum_{x \in X} p_x = 1 \right\}.$$

Hierauf ist die Gewinnfunktion $\bar{u}_1 : \bar{X}^3 \rightarrow [0, 1]$ gegeben durch

$$\bar{u}_1(p, q, r) = \sum_{x \in X} p_x \left[\sum_{v < x} q_v r_v + \sum_{y > x} q_y \sum_{z > x} r_z \right].$$

(b) Wir suchen $(p, p, p) \in \text{NE}(\bar{u})$. Für jede Alternative $q \in \bar{X}$ gilt also

$$\bar{u}_1(q, p, p) = \sum_{x \in X} q_x \hat{p}_x \quad \text{mit} \quad \hat{p}_x := \sum_{v < x} p_v^2 + \left(\sum_{y > x} p_y \right)^2.$$

Nash-Gleichgewicht bedeutet hier $\bar{u}_1(q, p, p) \leq \bar{u}_1(p, p, p)$ für alle $q \in \bar{X}$. Das gilt gdw $\hat{p}$ konstant ist. Daraus folgt Eindeutigkeit & Existenz von p .

Aufgabe: Nähern Sie das eindeutige symmetrische Nash-Gleichgewicht für $n = 3$ als Grenzwert der Replikatorodynamik $\dot{p}_x = p_x (1 \cdot \hat{p}_x - \sum_y p_y \hat{p}_y)$.

Numerische Lösung: Wir berechnen die Gewinnwkt $\hat{p} : X \rightarrow [0, 1]$:

```

1 xmax = 13                                # choose x from X = {0,...,xmax-1}
2 p = [ 1/xmax for x in range(0, xmax) ]    # our initial strategy p is uniform
3 def win(p):                               # winning probabilities with 3 players
4     return [ sum( p[v]**2 for v in range(0, x) ) +
5               sum( p[y] for y in range(x+1, xmax) )**2 for x in range(0, xmax) ]

```

Dann folgen wir der Replikatorodynamik:

```

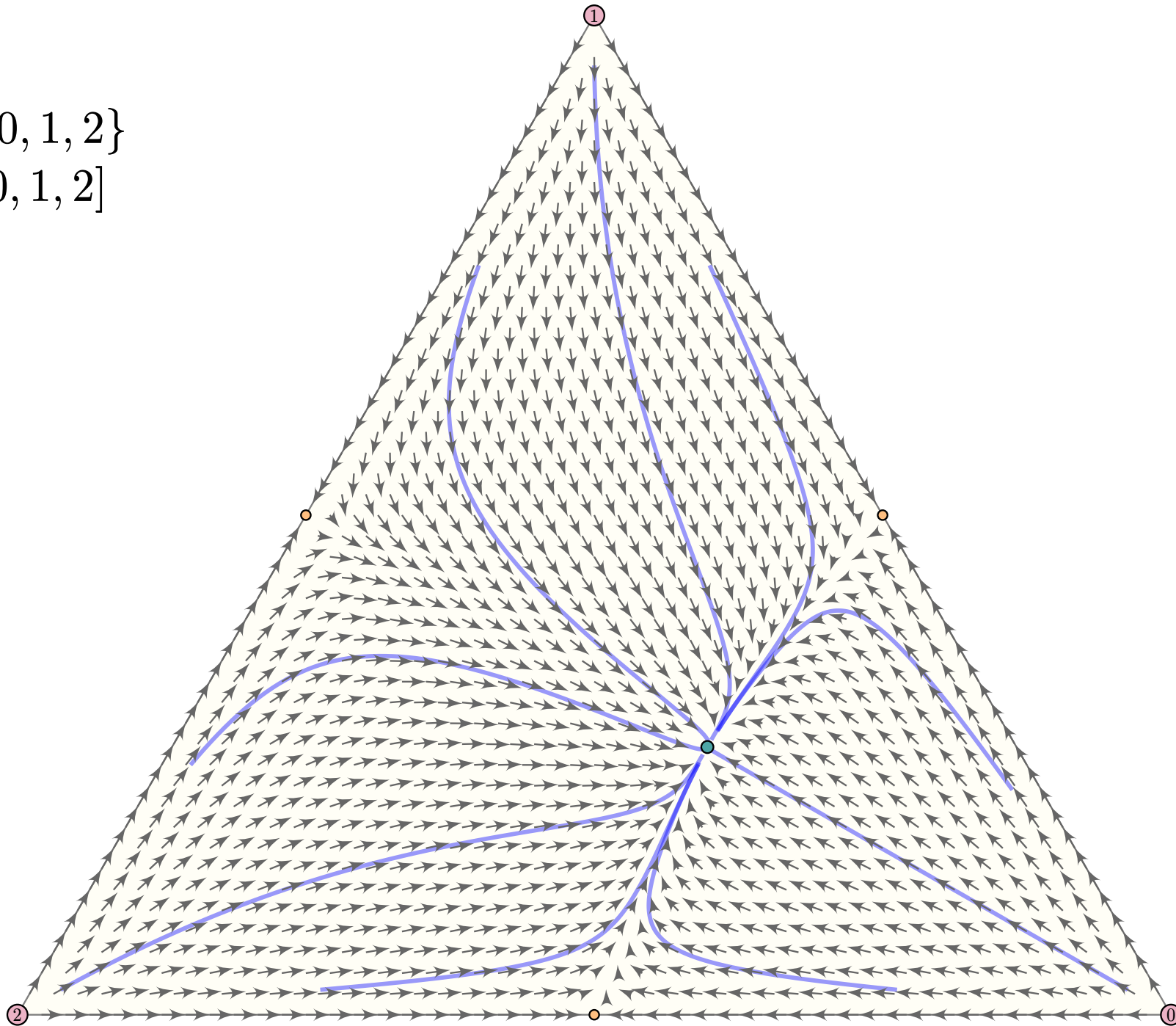
1 step = 1.0; eps = 1e-5                    # time step and tolerated error
2 def replicator_limit(p):                   # apply the replicator dynamics to p
3     while True:                            # repeat until within tolerance
4         w = win(p)
5         if max( abs( w[0] - w[x] ) for x in range(0, xmax) ) < eps: return p
6         average = sum( p[x] * w[x] for x in range(0, xmax) )
7         for x in range(0, xmax): p[x] += p[x] * (w[x] - average) * step

```

$$X = \{0, 1, 2\}$$

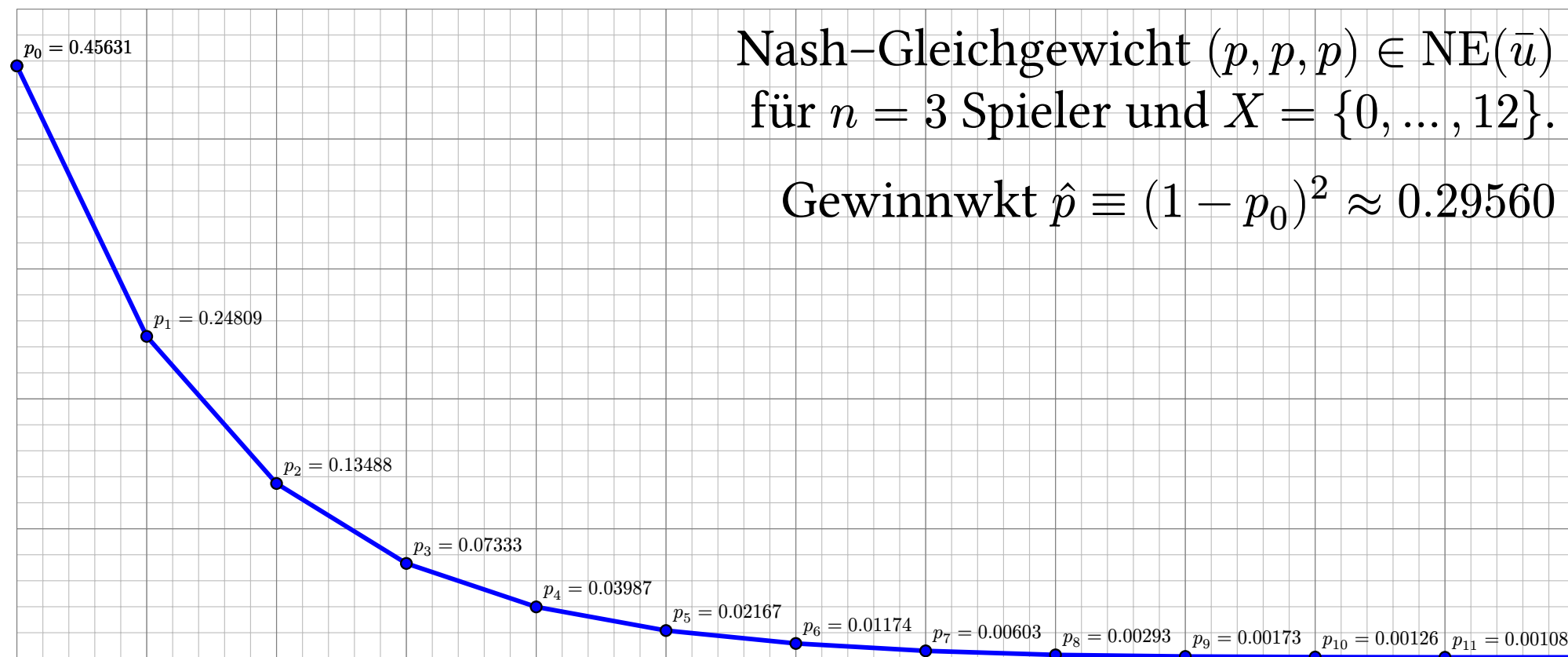
$$\bar{X} = [0, 1, 2]$$

$$n = 3$$



Nash-Gleichgewicht $(p, p, p) \in \text{NE}(\bar{u})$
für $n = 3$ Spieler und $X = \{0, \dots, 12\}$.

Gewinnwkt $\hat{p} \equiv (1 - p_0)^2 \approx 0.29560$



Aufgabe: Nähern Sie das eindeutige symmetrische Nash-Gleichgewicht für $n = 4$ als Grenzwert der Replikatorodynamik $\dot{p}_x = p_x(1 \cdot \hat{p}_x - \sum_y p_y \hat{p}_y)$.

Lösung: Wir suchen $(p, p, p, p) \in \text{NE}(\bar{u})$. Für jede Alternative $q \in \bar{X}$ gilt

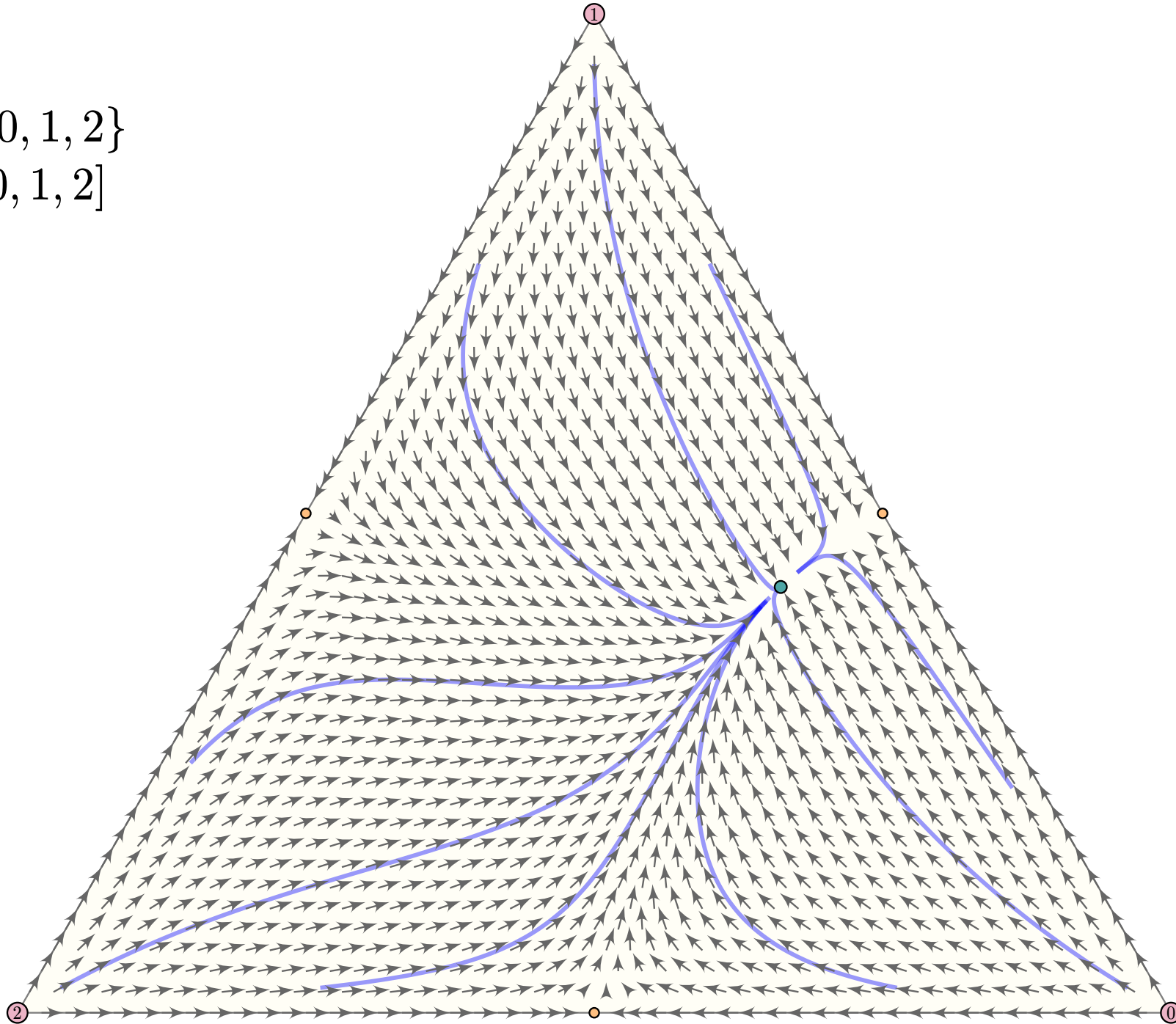
$$\bar{u}_1(q, p, p, p) = \sum_{x \in X} q_x \hat{p}_x \quad \text{mit} \quad \hat{p}_x := \sum_{v < x} \left(p_v^3 + 3p_v^2 \sum_{y > x} p_y \right) + \left(\sum_{y > x} p_y \right)^3.$$

Nash-Gleichgewicht bedeutet $\bar{u}_1(q, p, p, p) \leq \bar{u}_1(p, p, p, p)$ für alle $q \in \bar{X}$. Das gilt gdw $\hat{p}$ konstant ist. Daraus folgt Eindeutigkeit & Existenz von p .

$$X = \{0, 1, 2\}$$

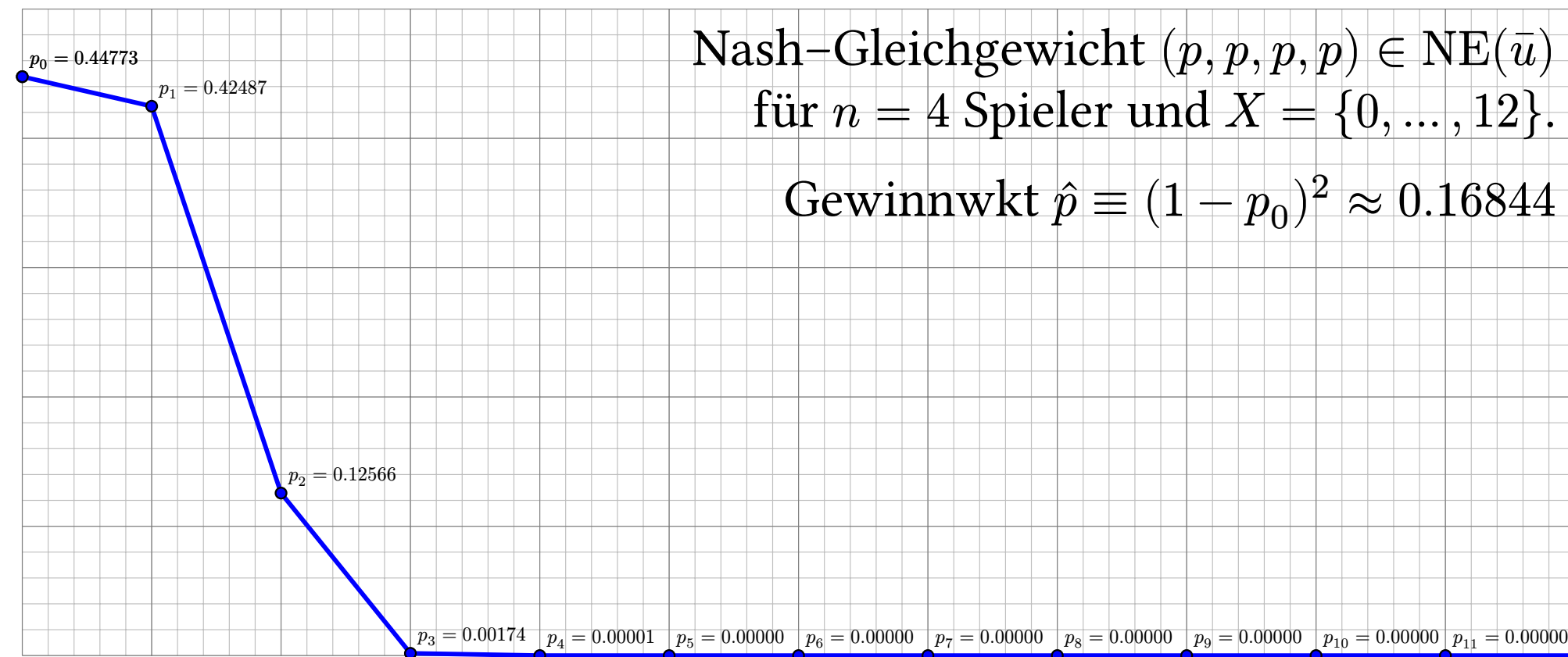
$$\bar{X} = [0, 1, 2]$$

$$n = 4$$



Nash-Gleichgewicht $(p, p, p, p) \in \text{NE}(\bar{u})$
für $n = 4$ Spieler und $X = \{0, \dots, 12\}$.

Gewinnwkt $\hat{p} \equiv (1 - p_0)^2 \approx 0.16844$



Kapitel H

Ponzi-Betrug vs Rentenmodell: Wie gelingt ein Generationenvertrag?

*A man only begins to grasp the true meaning of life when
he plants a tree under whose shade he knows he will never sit.*

Elton Trueblood (1900–1994)

Das Geld ist nicht da. Wir leihen es uns aus der Zukunft.

Christian Lindner (1979–) zu Schulden 2022

- 1 Fiat Money – Es werde Geld!
- 2 Sustainability – Unsere Zukunft steht auf dem Spiel!
- 3 Self-Management – Wer bin ich und wie viele?

Können wir aus nichts Geld machen dank kreativer Tabellenkalkulation?
Ist es in Tabellen egal, ob Sie erst Zeilen oder erst Spalten summieren?

$\vdots$	j	0	0	0	0	$\ddots$
0	0	0	0	0	+1	$\ddots$
0	0	0	0	+1	-1	0
0	0	0	+1	-1	0	0
0	0	+1	-1	0	0	0
0	+1	-1	0	0	0	0
		+1	0	0	0	i
		+1	0	0	0	$\dots$

Zeilen zuerst:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a(i, j) = 0$$

Spalten zuerst:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a(i, j) = 1$$

⚠ Umordnung verlangt absolute Summierbarkeit!

Kreative Summation nach Guido Grandi (1703)

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.

Ziel: Ich will aus nichts Geld machen. Hier mein genialer Businessplan:

0

$$\underline{\underline{(a)}} \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad \dots$$

$$\underline{\underline{(b)}} \quad (1 - 1) \quad + \quad (1 - 1) \quad + \quad (1 - 1) \quad + \quad (1 - 1) \quad + \quad \dots$$

$$\underline{\underline{(c)}} \quad 1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad \mp \quad \dots$$

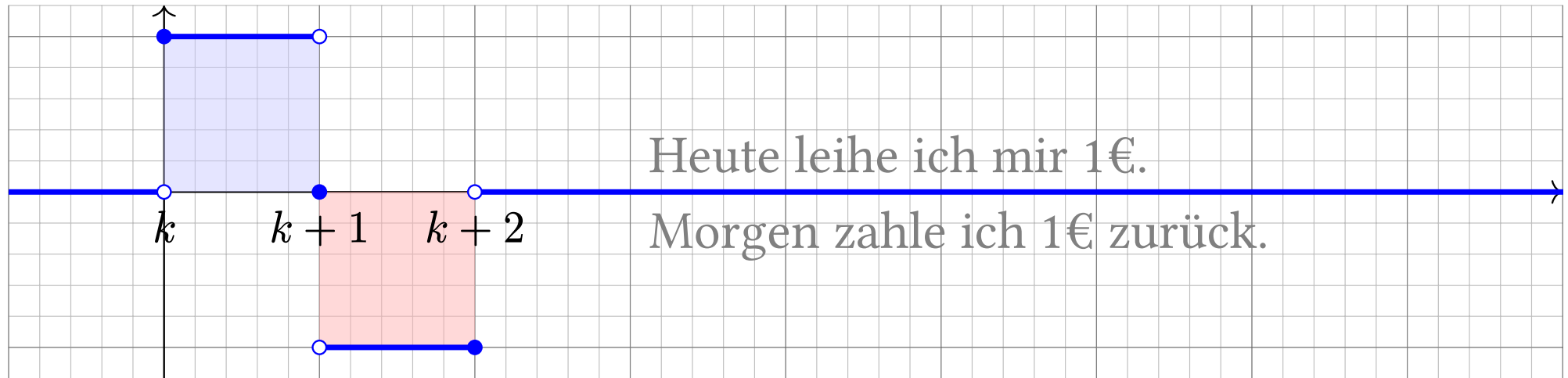
$$\underline{\underline{(d)}} \quad 1 \quad + \quad (-1 + 1) \quad + \quad (-1 + 1) \quad + \quad (-1 + 1) \quad + \quad \dots$$

$$\underline{\underline{(e)}} \quad 1 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad \dots$$

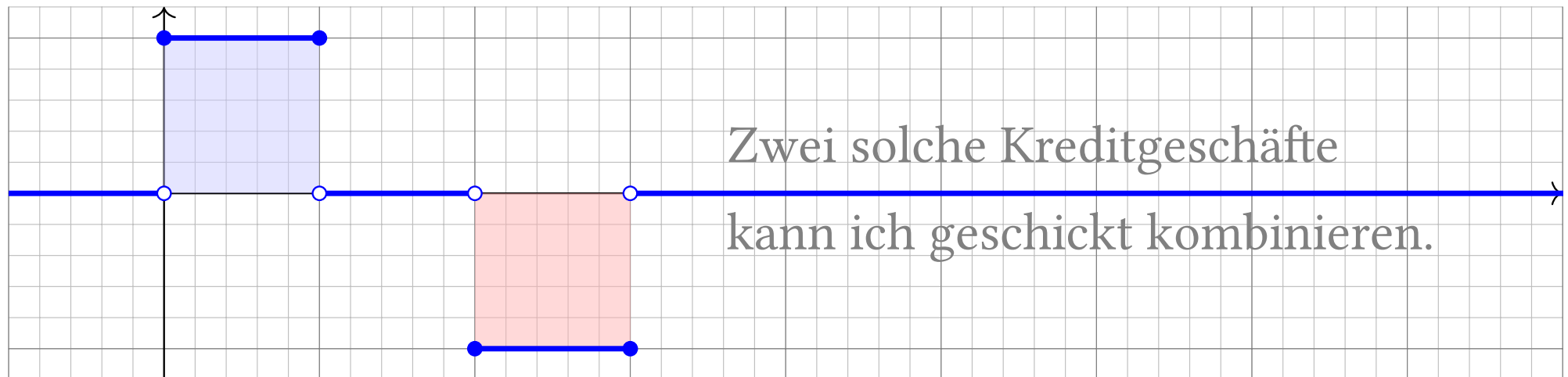
$$\underline{\underline{(f)}} \quad 1$$

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Kredit und Tilgung: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k = \mathbf{1}_{[k, k+1]} - \mathbf{1}_{[k+1, k+2]}$.

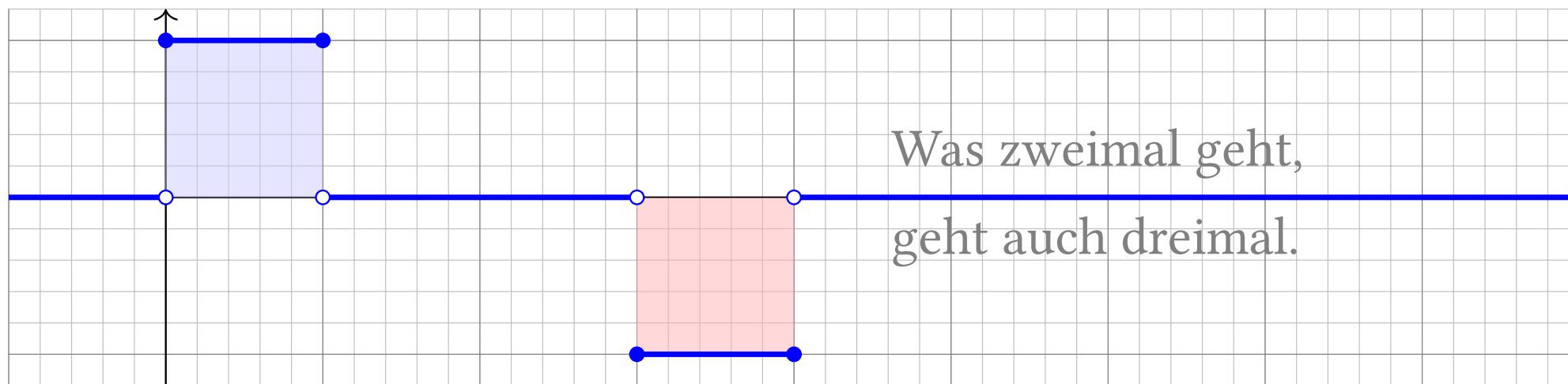


Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 0$.

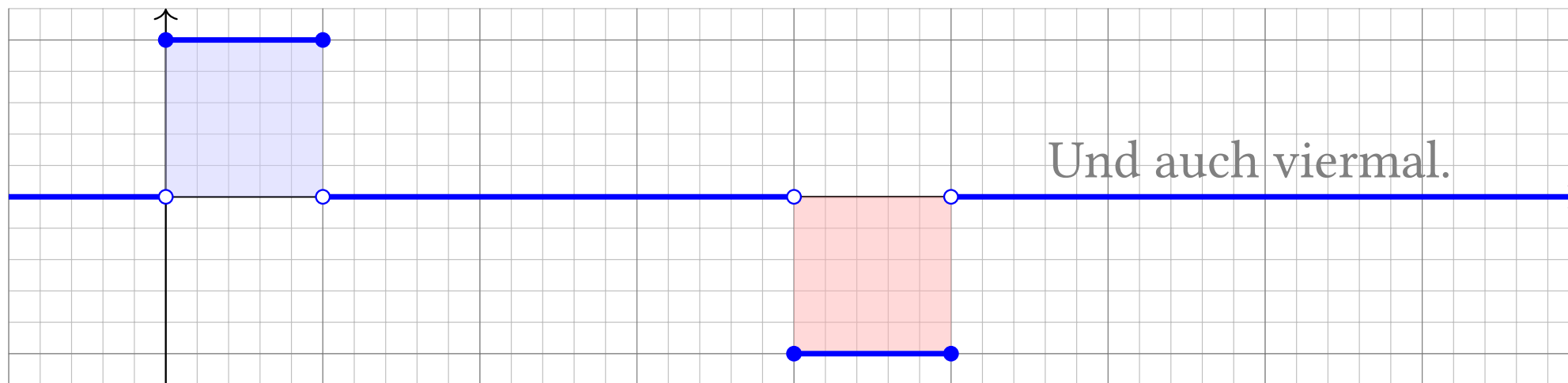


Auch für $g_1 = f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

Graph zu $g_2 = f_0 + f_1 + f_2$:

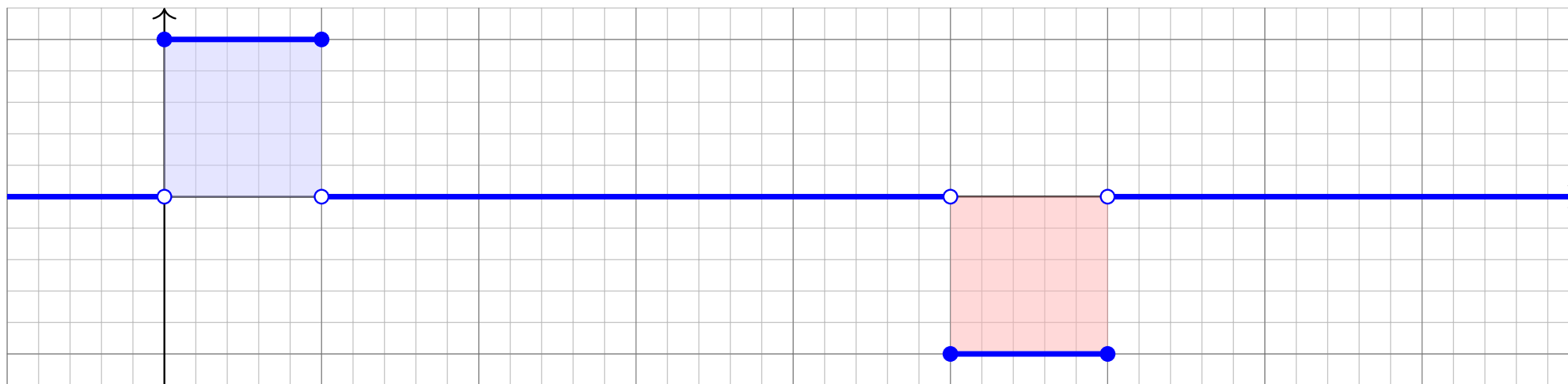


Graph zu $g_3 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$:

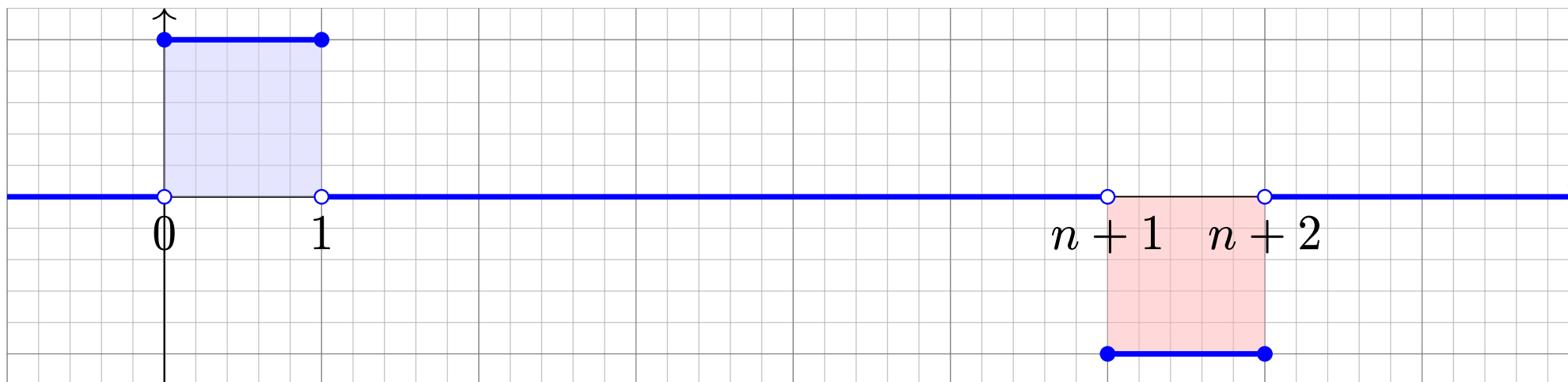


Das Integral ist jeweils Null.

Graph zu $g_4 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$:



Graph zur Teleskopsumme $g_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$:



Das Integral $\int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx$ ist jeweils Null. Was passiert für $n \rightarrow \infty$?

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Aufgabe: Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x) \, dx \right) \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) \, dx$$

Lösung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sehen wir:

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x) \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x) \, dx \right) = 0$$

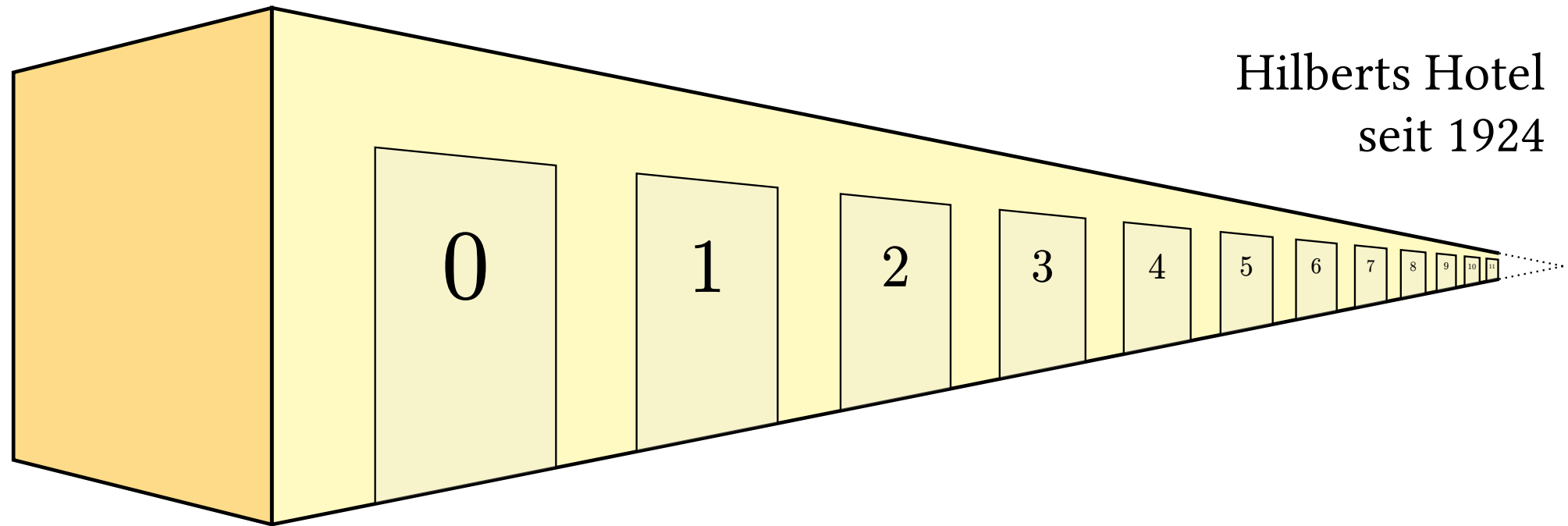
Andererseits kennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teleskopsumme

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) - \mathbf{1}_{[n+1,n+2]}(x) \quad \rightarrow \quad \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \rightarrow \infty$ gilt daher punktweise Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) \, dx = 1.$$

 Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.



*Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können.*

David Hilbert (1862–1943)

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

HOTEL INFINITY, lyrics © 2000 by Lawrence Mark Lesser

*On a dark desert highway — not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.
The clerk said, "No problem. Here's what can be done —
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:*

*[CHORUS] "Welcome to the Hotel called Infinity —
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the Hotel called Infinity —
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."*

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

*I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!*

*My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
“Relax,” said the nightman. “Here’s what we’ll do:
Move to the double of your room number:
that frees the odd-numbered rooms.” [CHORUS]*

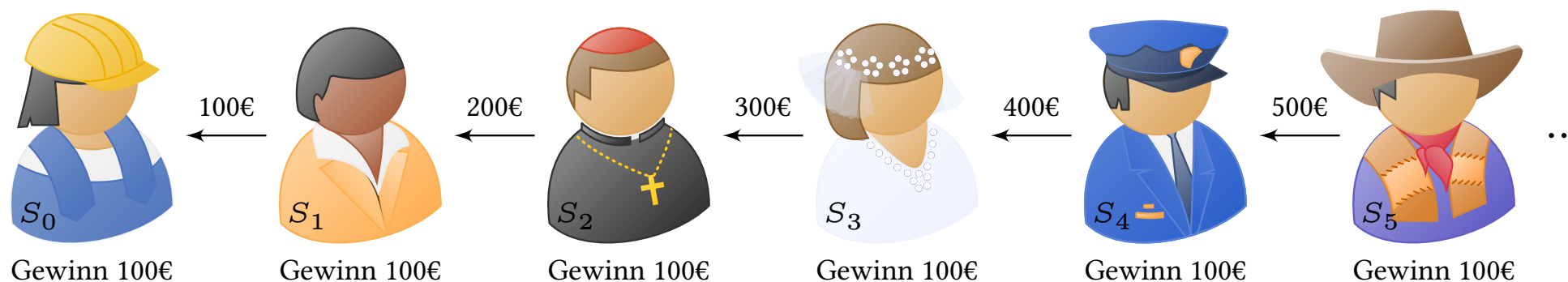
*Last thing I remember at the end of my stay —
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, “Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!”*

Charles Ponzi: „Investieren Sie jetzt, alle werden gewinnen!“

Absolut verlässliche Garantie

*Ich bin ein grundehrlicher Garantieschein und immer verlässlich.
Wer mich für n Euro kauft, darf mich für $n + 100$ Euro verkaufen.
Dank dieser Eigenschaft bringe ich allen Wohlstand und Glück.*

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersame Vermehrung des Geldes: *Everyone's a winner?*

Wie und warum funktioniert Geld?

Jedes Tauschmittel muss gewisse Bedingungen erfüllen: (0) Es muss praktikabel und haltbar sein, aber nur schwer vermehrbar oder fälschbar. (1) Ausreichend viele Akteure akzeptieren es als Zahlungsmittel: Sie vertrauen darauf, dass ausreichend viele es akzeptieren, usw.

Aufgabe: Wir untersuchen eine einfache Gesellschaft $I = \{1, 2, \dots, N\}$. Spieler handeln mit gewisser Wkt miteinander, etwa gleichverteilt.

	B	M	V
A			
M	0	0	0
V	-a	0	b

Geldnutzen zwischen Tauschpartnern:
Verlust a , Nutzen b , etwa $a = b = 1$.

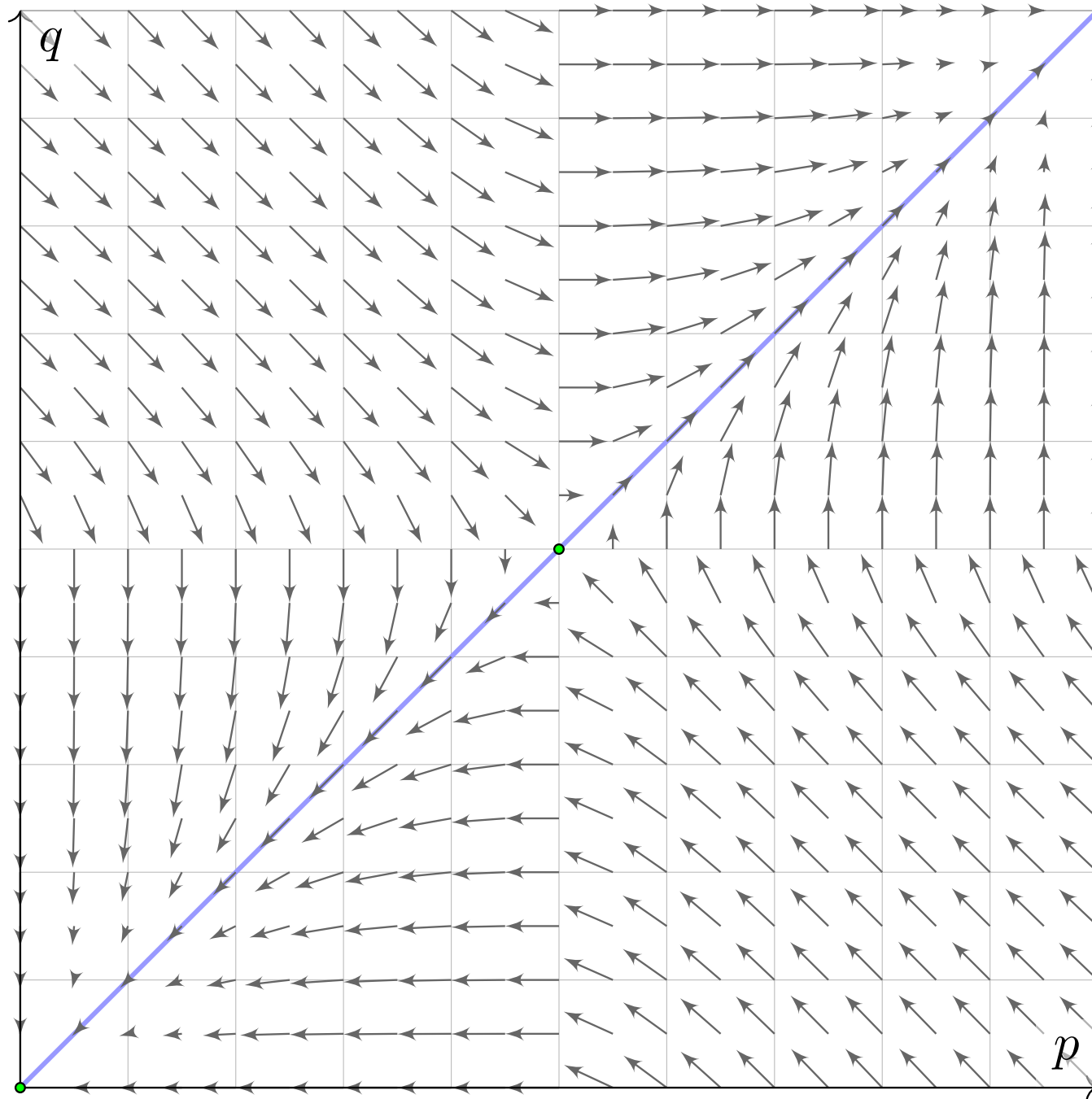
M: misstraut dem Tauschmittel / Geld und lehnt jeden Handel damit ab.

V: vertraut dem Tauschmittel / Geld und akzeptiert jeden Handel damit.

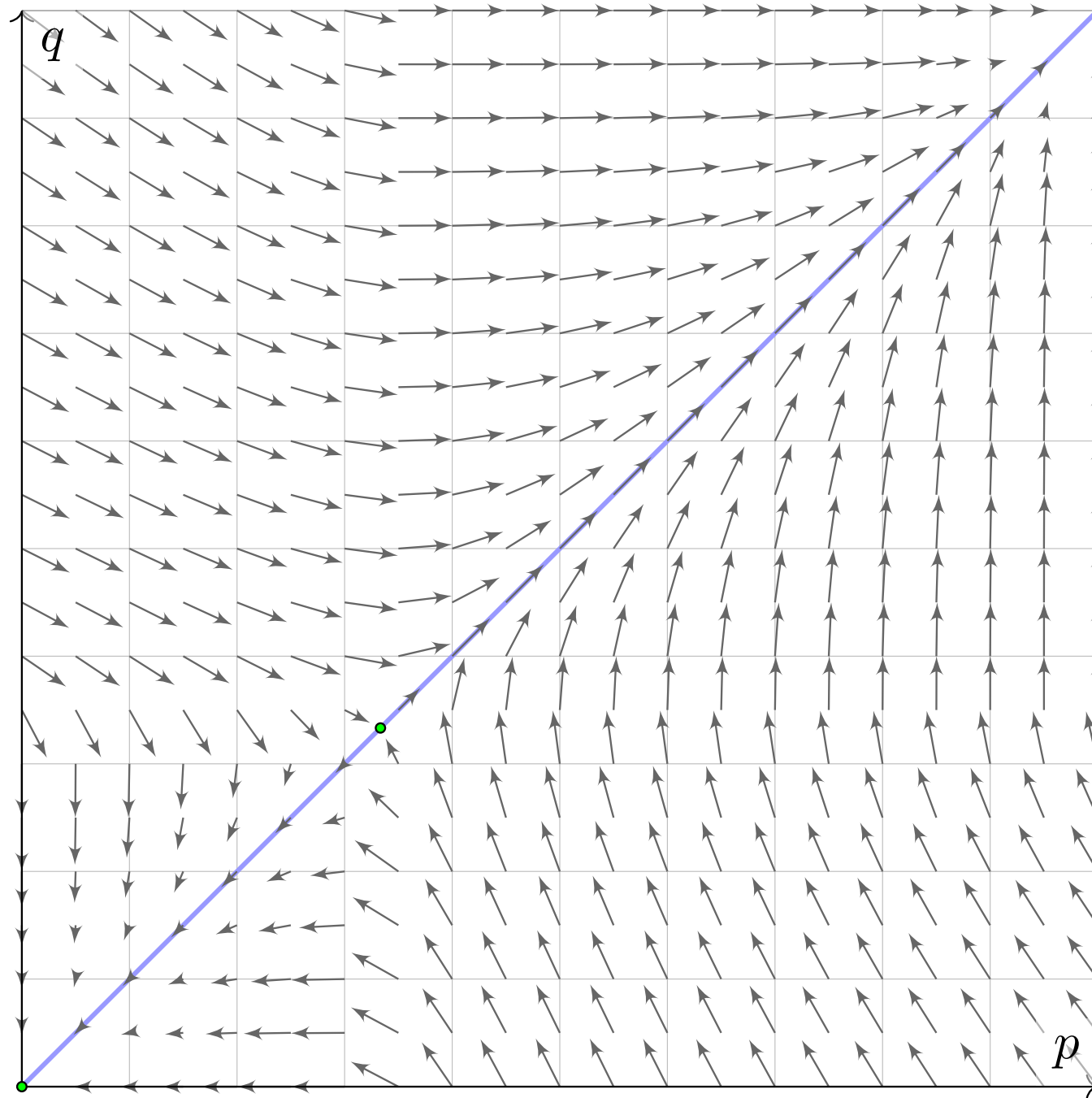
Ab welcher Akzeptanzrate $q \in [0, 1]$ setzt sich das Tauschmittel durch?

Lösung: Der erwartete Nutzen für M-Spieler ist Null. Der erwartete Nutzen für V-Spieler ist $qb - (1 - q)a$, also positiv für $q > a/(a + b)$.

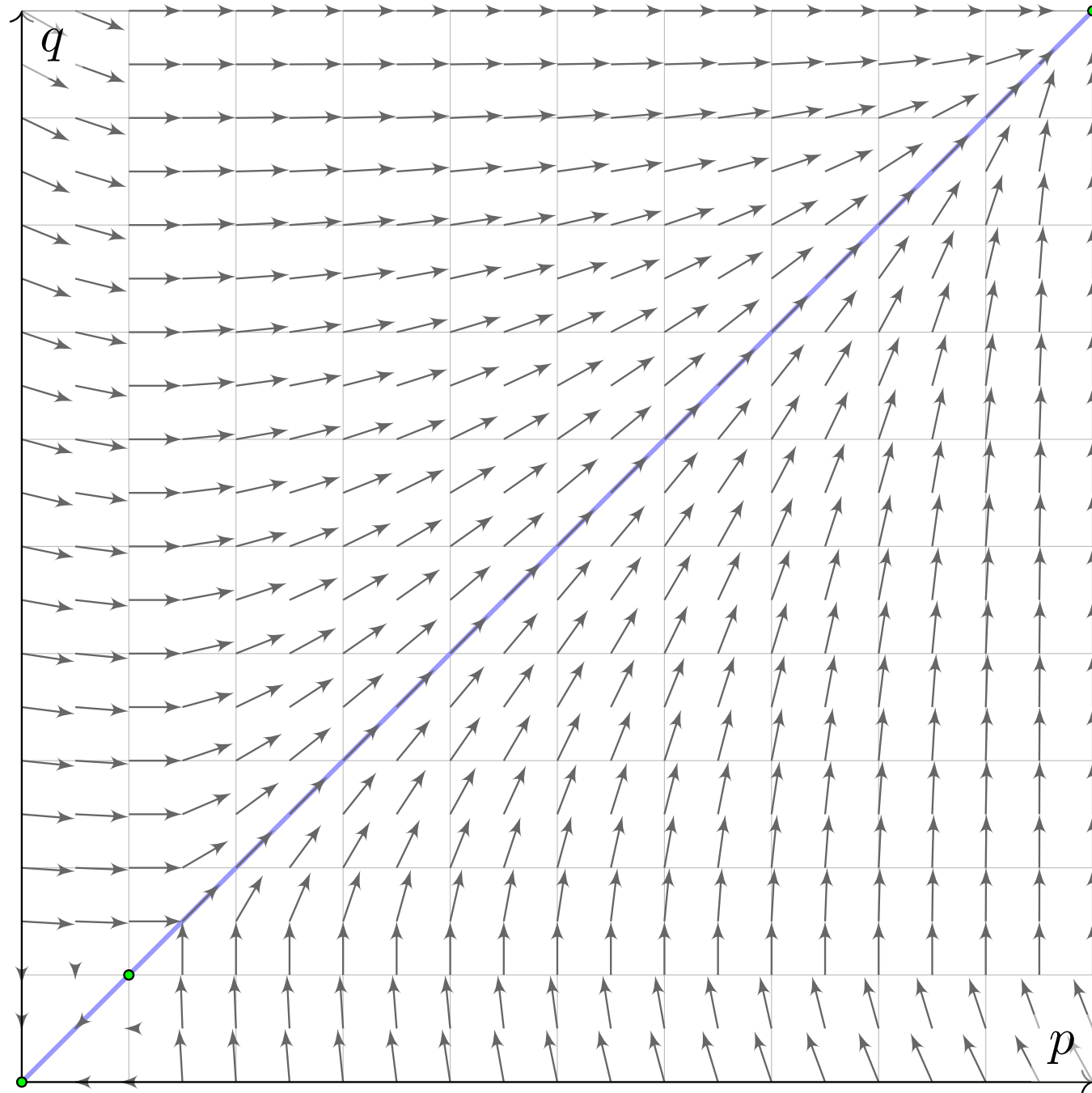
$$a = 1$$
$$b = 1$$



$$a = 1$$
$$b = 2$$



$$a = 1$$
$$b = 9$$

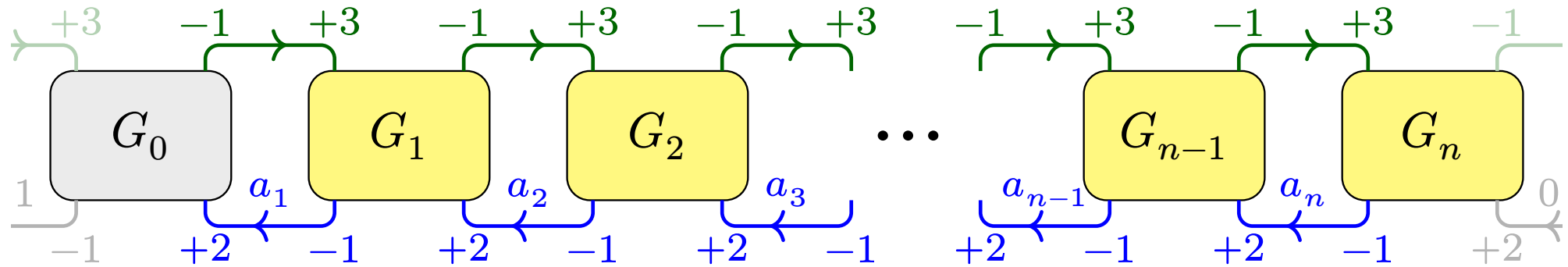


Good modeling requires a judicious balance between detail and abstraction, between realism and relevance, between simplification and tractability.

Models should not only be sufficiently well defined to be mathematically analyzable but they should be playable as games (and possibly used as experimental games).

Martin Shubik (1926–2018), *Theory of Money and Institutions*

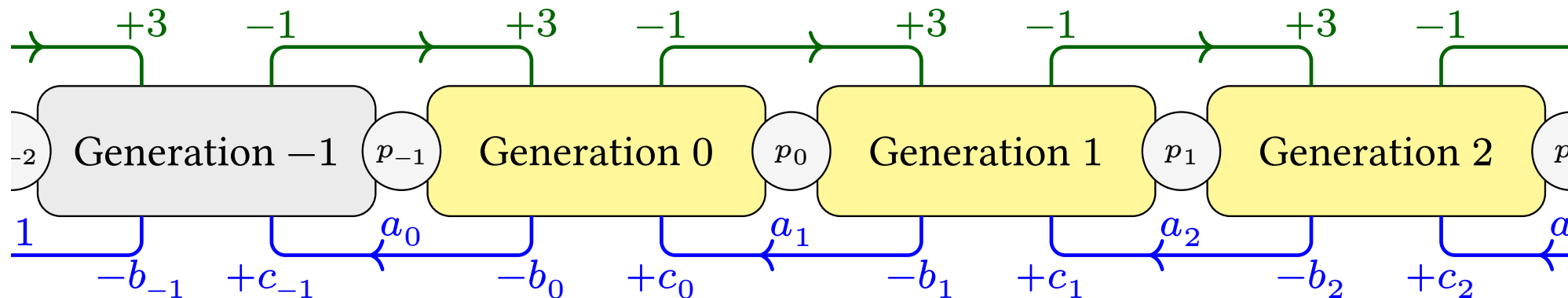
Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge



Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0, 1\}$ ihrer Eltern G_{i-1} . Sie entscheidet sich daraufhin entweder für Egoismus ($a_i = 0$) oder Altersversorgung ($a_i = 1$). Ihre Auszahlung ist $u_i = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Jede Generation G_i hat demnach vier mögliche Strategien:

Egoist	$E = \begin{bmatrix} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0 \end{bmatrix},$	Altruist	$A = \begin{bmatrix} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 1 \end{bmatrix},$
Kontra	$K = \begin{bmatrix} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{bmatrix},$	Nachmacher	$N = \begin{bmatrix} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{bmatrix}.$

Aufgabe: Untersuchen Sie den endlichen Fall $n < \infty$, dann $n = \infty$. Was sind hier Gleichgewichte? Kann Altersversorgung rational sein?



Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0, 1\}$ ihrer Eltern G_{i-1} . Sie entscheidet sich daraufhin entweder für Egoismus ($a_i = 0$) oder Altersversorgung ($a_i = 1$). Ihre Auszahlung ist $u_i = 2 - b_i a_i + p_i c_i a_{i+1}$.

Aufgabe: Was sind hier Gleichgewichte? Ist Altersversorgung rational?

Lösung: Notwendig ist, dass sich Altersversorgung individuell lohnt:

(0) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m . Per Rückwärtsinduktion folgt dann $a_i = 0$ für alle vorigen $i = 0, 1, \dots, m$.

(1) Sei $p_i c_i > b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, etwa $b_i = 1$ sowie $c_i = 2$ und $p_i = 1$.
Zu $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ betrachten wir folgenden Strategievektor $s^n \in S$:

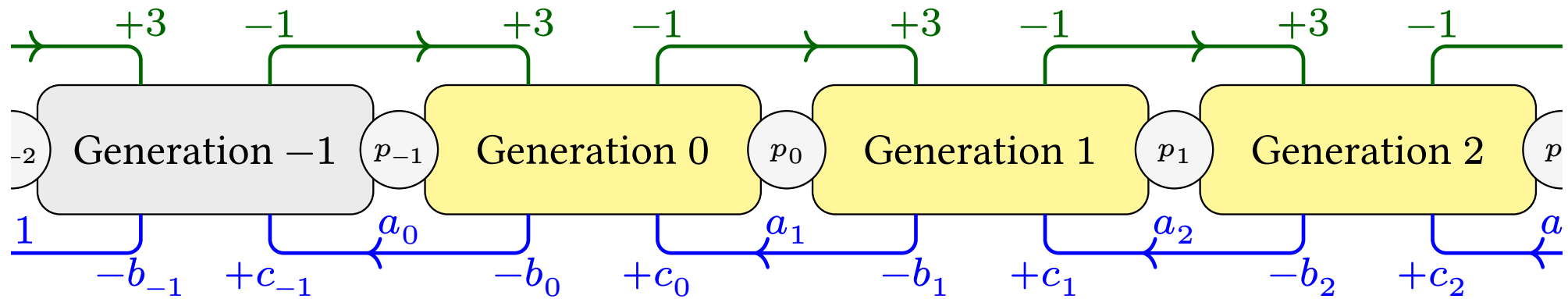
$$\begin{aligned} i &= 0, 1, \dots, n, \dots \\ s^n &= (E, E, \dots, E, E, A, N, N, N, \dots) \\ a^n &= (0, 0, \dots, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots) \\ u(s^n) &= (2, 2, \dots, 2, 4, 3, 3, 3, 3, \dots) \end{aligned}$$

Kann sich irgendein Akteur $i \in \mathbb{N}$ aus eigener Kraft verbessern? Nein!

😊 Also ist der Strategievektor s^n tatsächlich ein Nash-Gleichgewicht!

Sei $s \in S$ ein beliebiges Nash-Gleichgewicht mit Aktionen $a \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und Auszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Gälte $a_i = 1$ und $a_{i+1} = 0$, so könnte i sich aus eigener Kraft verbessern. Also gilt $a = a^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

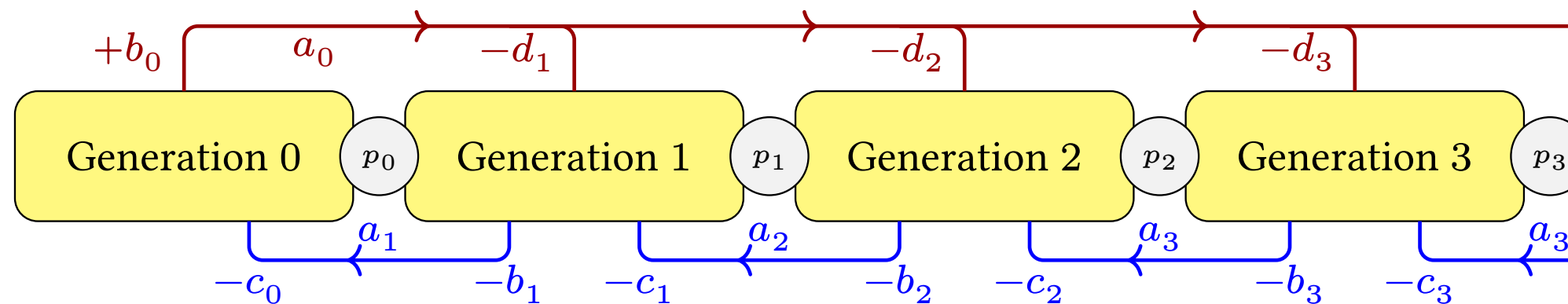


Satz H2A: Gleichgewichte im Rentenmodell

Die Generationen $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0, 1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

- (1) Ist $s \in \prod_{i \in \mathbb{N}} S_i$ ein Nash-Gleichgewicht, so ist der Aktionsvektor $a = a(s) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ wachsend, also $a = a^n := \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{\geq n}}$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- (2) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m , per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für alle $i = 0, 1, \dots, m$, also $n > m$.
- (3) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \geq m$, so lässt sich jeder Aktionsvektor $a = a^n$ mit $n \geq m$ durch ein Nash-Gleichgewicht $s = s^n \in \prod_{i \in \mathbb{N}} S_i$ realisieren.

Können zukünftige Generationen ihre Rechte schon heute einklagen?



Nach uns die Sintflut! *Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt,*
Wo kein Kläger, da kein Richter! *sondern von unseren Kindern nur geliehen.*

Akteure sind die Generationen G_i für $i \in \mathbb{N}$. Die Generation G_0 wählt ihre Aktion / Strategie $a_0 \in A_0 = \{0 = \text{Nachhaltigkeit}, 1 = \text{Raubbau}\}$.

Jede Generation G_i mit $i \geq 1$ kennt die gesamte Vorgeschichte und folgert daraus ihre Aktion $a_i \in A_i = \{0 = \text{schweigen}, 1 = \text{anklagen}\}$.

Mit Wkt $p_i \in [0, 1]$ setzt sich das System von Generation G_i zu G_{i+1} fort. Auszahlungen sind $u_0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u_i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Aufgabe: Was sind hier Gleichgewichte? Ist Nachhaltigkeit rational? Können Sie ein System von **Checks and Balances** implementieren?

We will have to repent in this generation not merely for the vitriolic words and the violent actions of the bad people, but for the appalling silence and indifference of the good people.

Martin Luther King (1929–1968)

Gesetz zur Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen (GzG):

§0: Jede Generation muss nach ihrem bestem Wissen und Gewissen die berechtigten Interessen aller zukünftigen Generationen wahren.

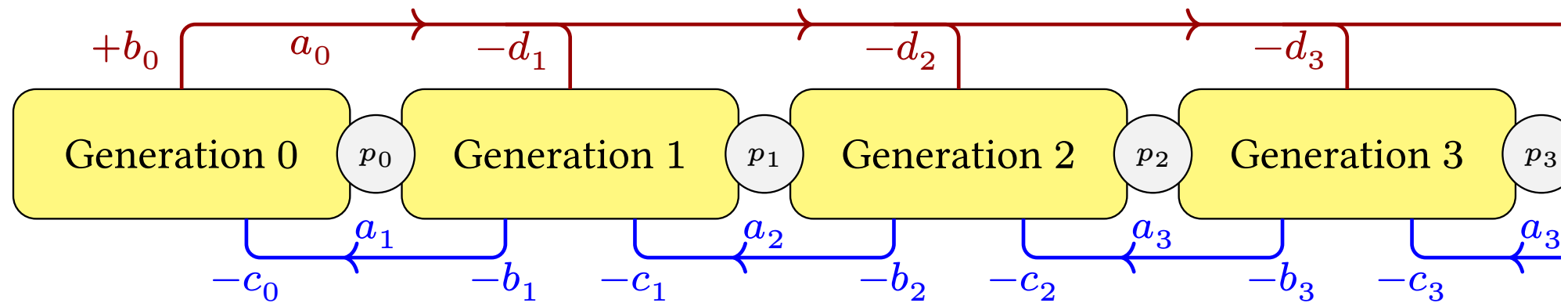
§1: Jede Generation muss §0 von ihren Eltern einfordern.

§2: Jede Generation muss §1 von ihren Eltern einfordern.

§3: Jede Generation muss §2 von ihren Eltern einfordern.

usw... Jede Generation muss diese Prinzipien strengstens einhalten, Forderungen unverzüglich einklagen und jede Säumnis bestrafen.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell



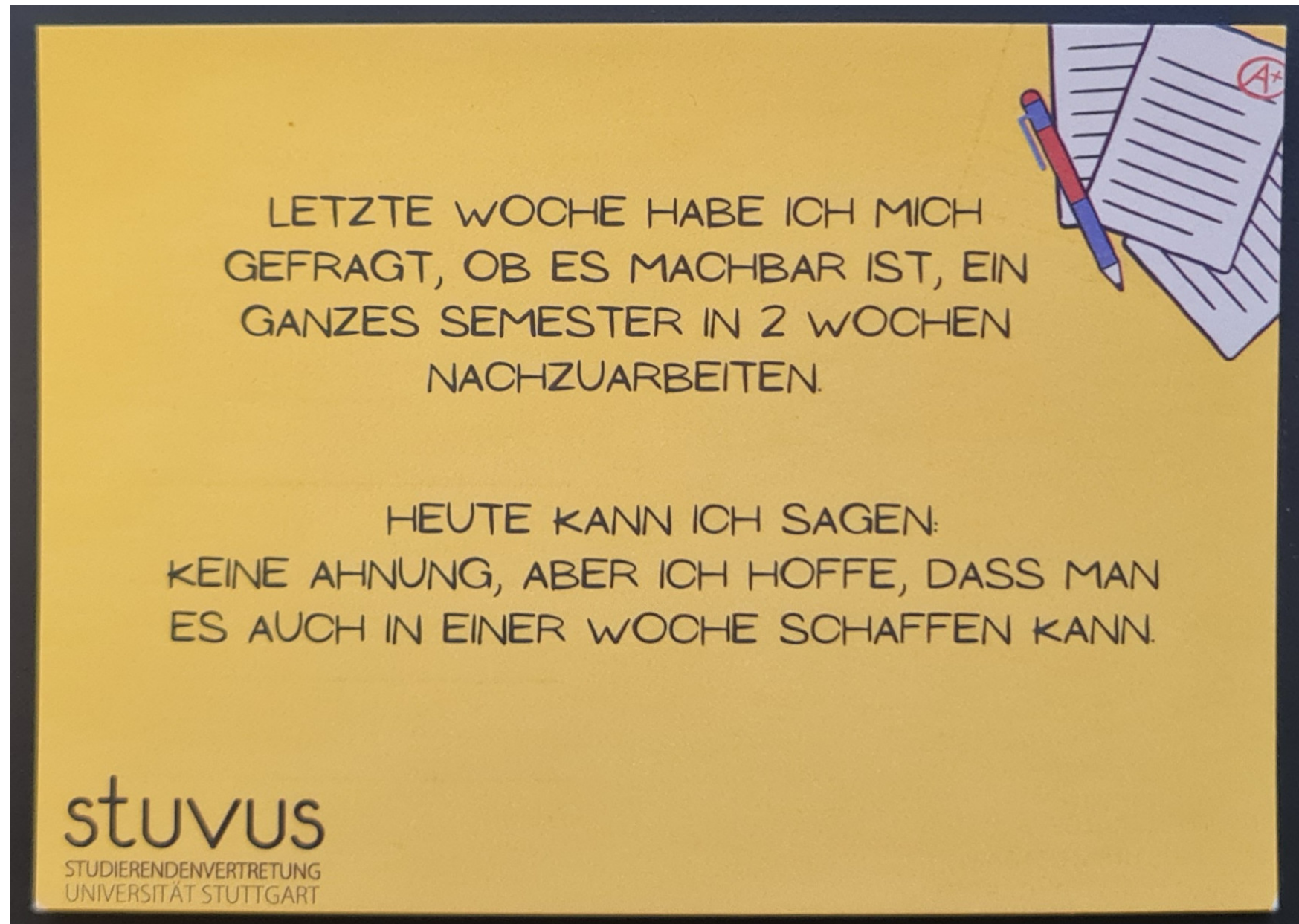
Satz H2B: Gleichgewichte im Nachhaltigkeitsmodell

Die Generationen $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ interagieren wie oben erklärt.

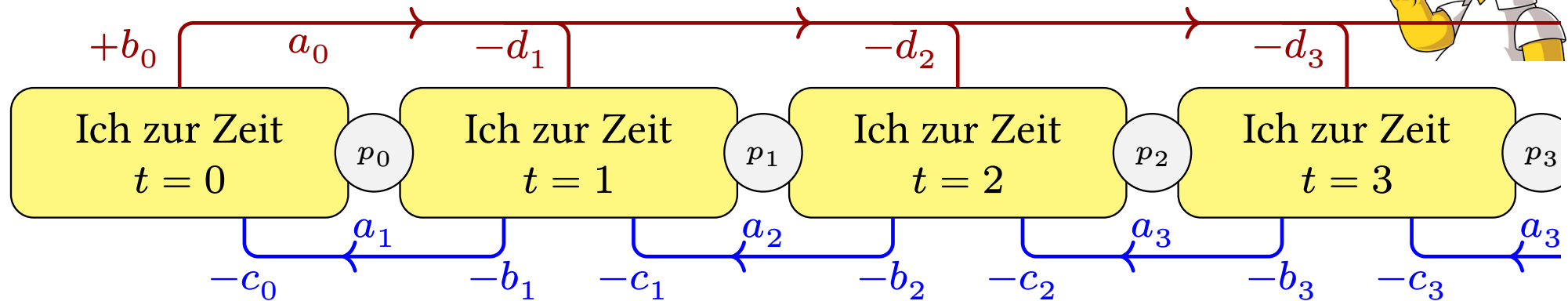
- (0) Raubbau $s_0 = 1$ und Schweigen $s_i = 0$ für alle $i \geq 1$ bilden ein Gleichgewicht dieses Spiels. (Das ist zwar traurig, aber wahr.)
- (1) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \geq 1$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n , und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $a_0 = 1$.
- (2) Gilt $p_n c_n > b_n$ für alle $n \geq 1$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein Gleichgewicht. Explizit als Formel ausgeschrieben:

$$s_i : \{0, 1\}^i \rightarrow \{0, 1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$$





Manche:r kämpft bei Entscheidungen mit dem inneren Schweinehund:
„Soll ich die Gegenwart genießen oder für die Zukunft vorsorgen?“
Für diesen Balanceakt kennen wir bereits ein einfaches Modell:



Odysseus widersteht den Sirenenklängen.

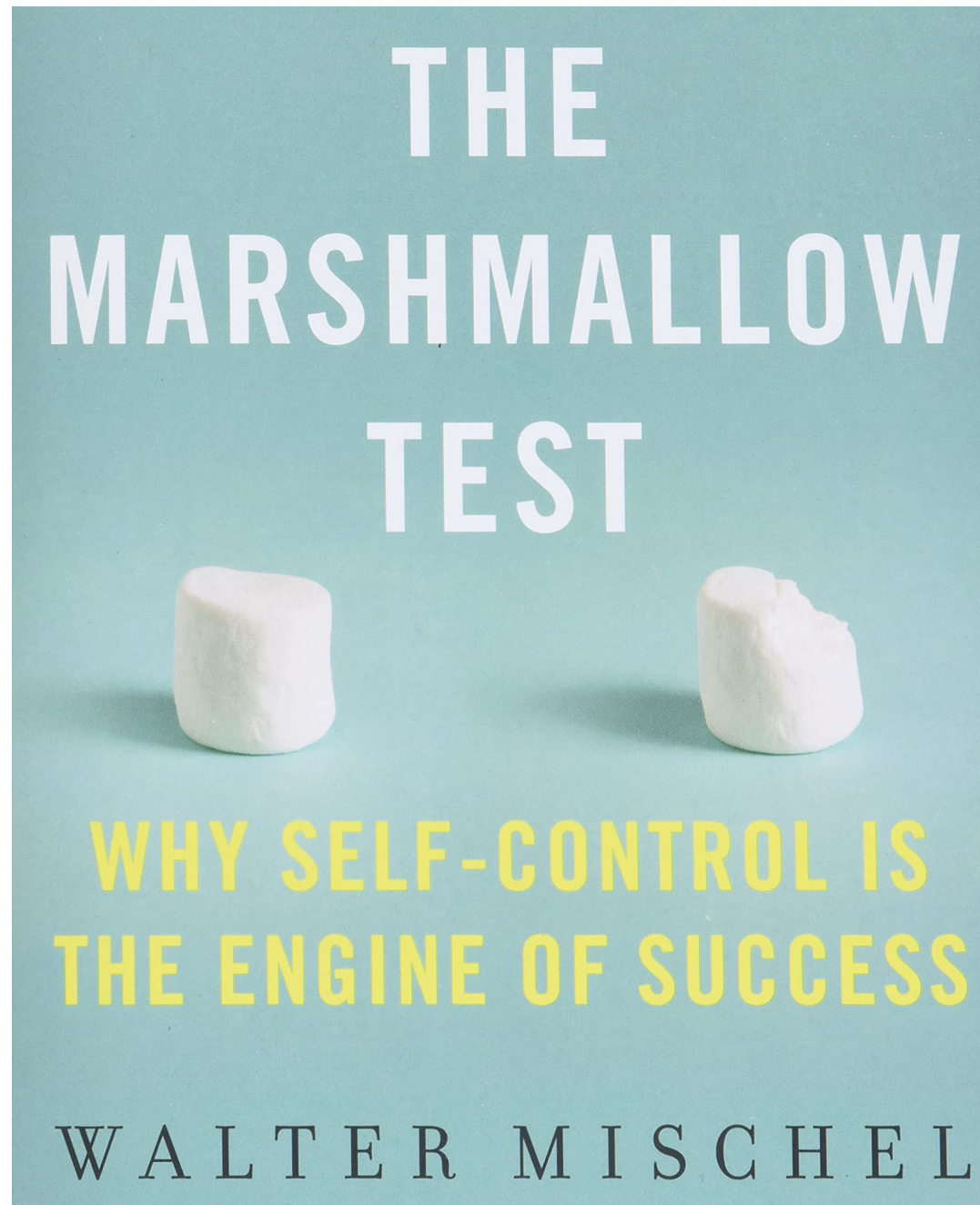
H307



wikimedia:87708594

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

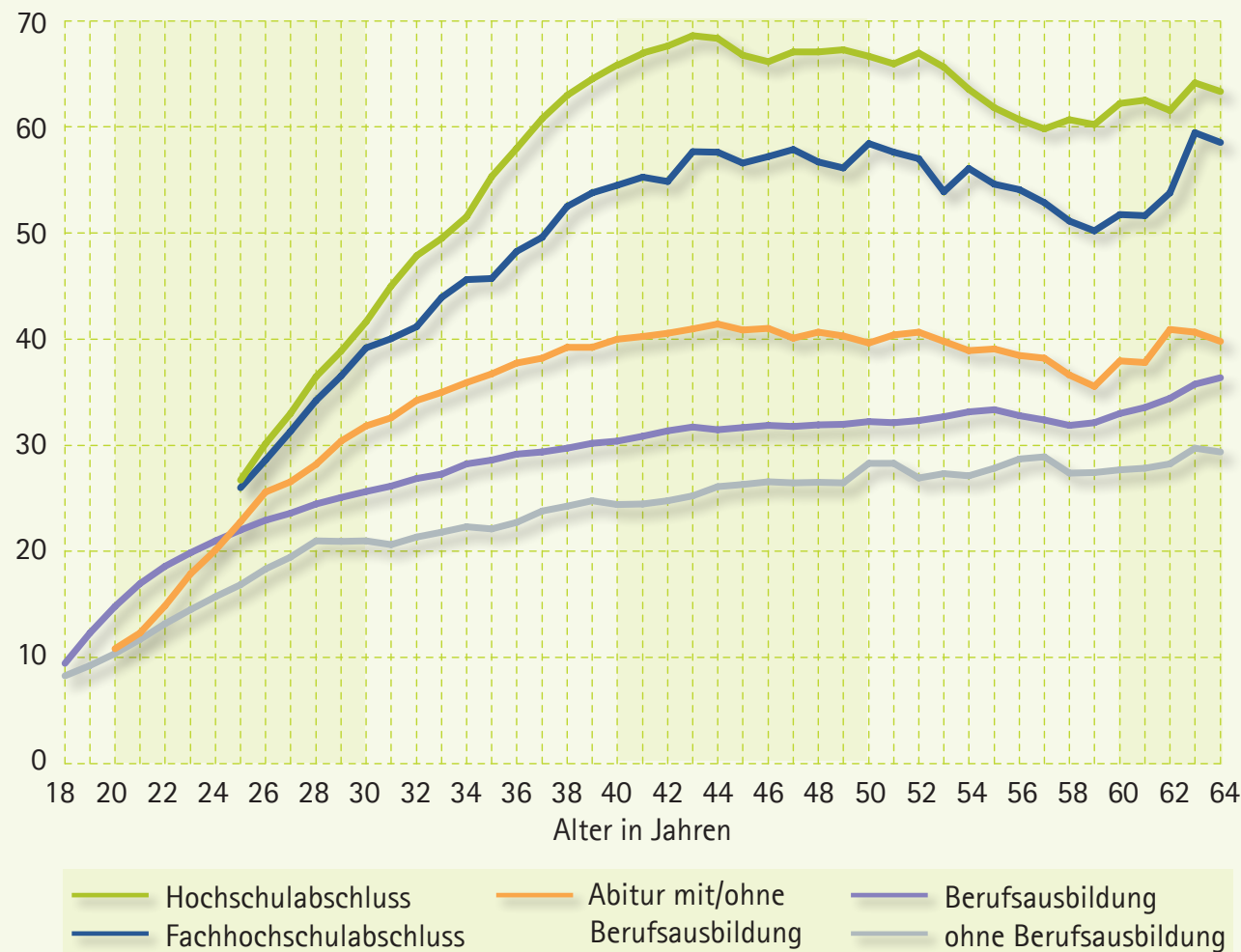


Lohnt sich die Büffelei? (FAZ, Studenten-Spezial, 20.05.2015)



Durchschnittliche Brutto-Jahresentgelte nach Lebensalter und höchstem Bildungsabschluss

in 1.000 Euro

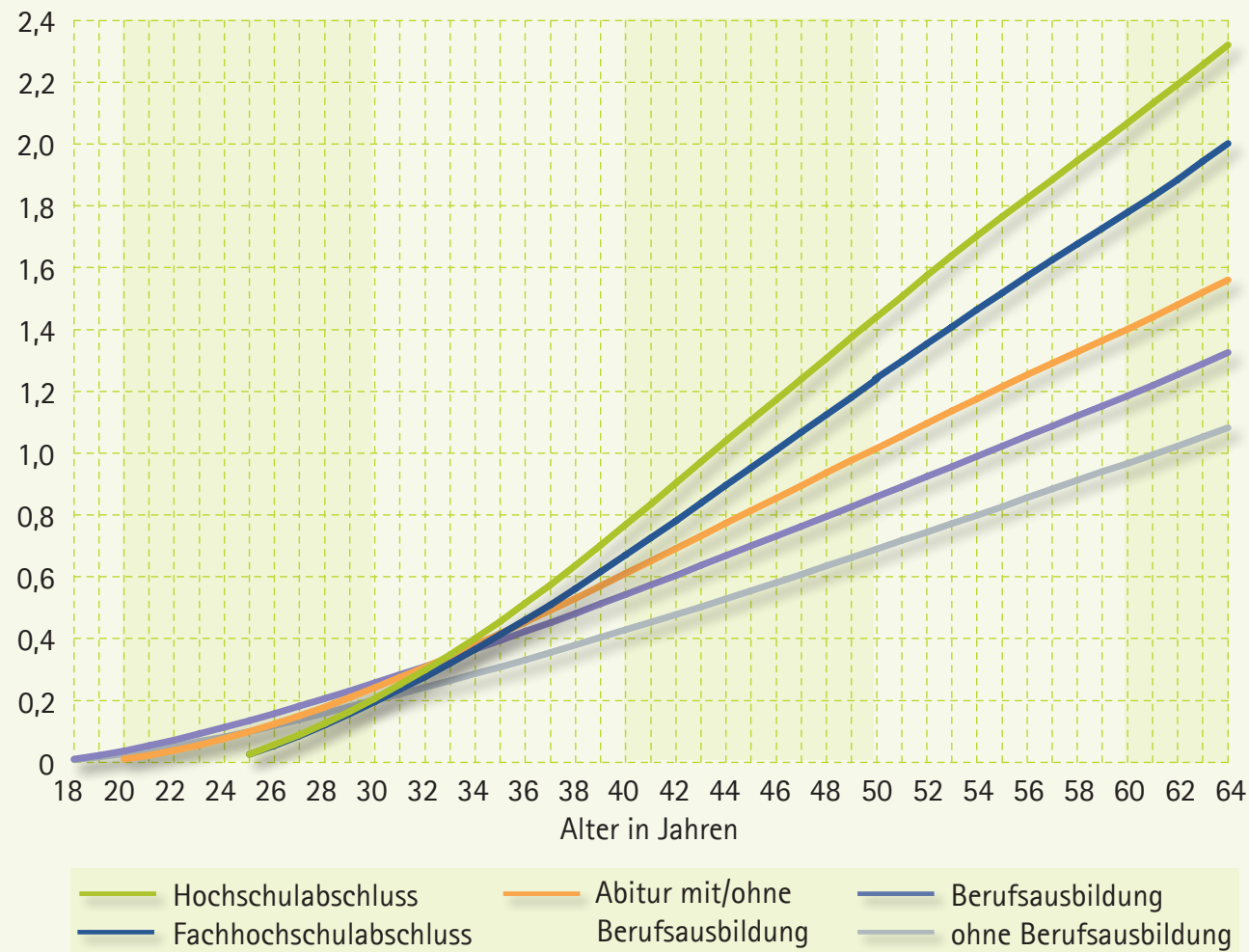


doku.iab.de/kurzber/2014/kb0114.pdf

Quelle: IAB-Berechnungen auf Basis der Stichprobe der Integrierten Arbeitsmarktbiografien (SIAB). © IAB

Kumulierte durchschnittliche Brutto-Jahresentgelte im Verlauf des Erwerbslebens nach dem höchsten Bildungsabschluss

in Mio. Euro



doku.iab.de/kurzber/2014/kb0114.pdf

Quelle: IAB-Berechnungen auf Basis der Stichprobe der Integrierten Arbeitsmarktbiografien (SIAB). © IAB

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.



Olli Kilpi, unsplash.com/@olli_kilpi

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.