Kapitel P

Auktionen und Äquivalenzsatz von Vickrey

Höre ich mehr?

Inhalt dieses Kapitels P

William Vickrey (1914–1996)

William Vickrey war ein US-amerikanischer Ökonom. Er nutzte als erster Methoden der Spieltheorie, um die Dynamik von Auktionen zu untersuchen. In seiner bahnbrechenden Arbeit *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders* bewies er 1961 Gleichgewichte für Auktionen und damit die grundlegende Erlösäquivalenz.

Dieses Prinzip und spätere Verallgemeinerungen sind bis heute der Grundstein der Auktionstheorie. Zu seinen Ehren heißt die Zweitpreisauktion auch Vickrey–Auktion.

Vickrey erhielt gemeinsam mit James Mirrlees den Wirtschaftsnobelpreis 1996 für seine Beiträge zur ökonomischen Theorie von Anreizen bei unterschiedlichen Graden von Information der Marktteilnehmer.
Er starb kurz nach der Bekanntgabe noch vor der Verleihung.

Motivation und Überblick

Auktionen werden seit der Antike als ökonomisches Instrument genutzt. In den letzten Jahrzehnten, speziell im Internet, gewinnen sie verstärkt an Bedeutung. Auktionstheorie ist eine erfolgreiche und prominente Anwendung der Spieltheorie, insbesondere des Mechanismendesigns.

Auktionen sind Marktinstrumente; die Verfahrensregeln bestimmen aus den Geboten der Teilnehmer die Zuteilung und den Preis der Ressource. Die Bieter / Käufer kennen die Regeln und verhalten sich strategisch. Der Auktionator / Verkäufer kann die Spielregeln wählen und dadurch das Verhalten der Spieler lenken. Insbesondere kann er versuchen, gewisse Ziele zu implementieren, etwa seinen Erlös zu maximieren.

Wir erkennen hierin viele Themen der vorangegangenen Kapitel wieder: Auktionen sind Spiele, meist dynamisch mit unvollständiger Information. Sie ähneln Verhandlungen oder kollektiven Entscheidungen in einem präzise umrissenen ökonomischen Rahmen. Sie sind zentrale Beispiele von Mechanismendesign und Implementierungstheorie. Last not least, Auktionen sind eine reiche Quelle empirischer Daten zu ökonomischen Verhalten und erlauben, spieltheoretische Vorhersagen zu testen.

Mechanismendesign: erste Beispiele

Mechanismendesign ist **umgekehrte Spieltheorie**: Wie können wir wünschenswertes Verhalten durch ein geeignetes Spiel implementieren? Jeder Spieler verfolgt dabei ausschließlich seine eigenen Interessen, dazu nutzt er seine Aktionen, sein Wissen, seine Ressourcen, etc.

- Verhandlungen: axiomatisch (Nash L1E)
  vs dynamische Verhandlung (Rubinstein L2C)
- Koalitionen: axiomatische Lösung (Shapley M2A)
  vs dynamische Verhandlung (Hart–Mas-Colell M3B)
- Wahlverfahren: axiomatischer Un/Möglichkeitssatz (Arrow N3E)
  vs strategische Manipulierbarkeit (Gibbard–Satterthwaite O2B)

Mechanismendesign ist allgegenwärtig:

- Erziehung, Regeln im Sport, Prüfungsordnung, Studienzulassung,
- Checks&Balances, Management, Entwicklungspolitik, Microfinance,
- Gesetzgebung, De/Regulierung, Umweltschutz, Emmissionsrechte,
- Zuweisung von Ressourcen, gerechtes Teilen, Auktionen, uvm.

Mechanismendesign: erste Beispiele

In der **Erziehung** versuchen Eltern ein wünschenswertes Verhalten ihrer Kinder zu ermutigen. Wahrscheinlich sind Sie irgendwann selbst in dieser Situation und müssen über Regeln des gemeinsamen Umgangs entscheiden. Dazu antizipieren Sie das dadurch erzeugte Verhalten.

Spielregeln im **Sport** sollen gewisses Verhalten fördern oder verhindern. Besonders deutlich sehen wir dies bei korrigierenden Anpassungen, im Handball etwa die *Schnelle Mitte* (2001): schnelleres Spiel, mehr Tore, oder Maßnahmen gegen passives Spiel / Zeitspiel: Fairness, Attraktivität.

Die Spielregeln Ihres Studiengangs heißen **Prüfungsordnung**. Damit möchte die Fakultät wünschenswertes Verhalten ermutigen / erzwingen, das zu Ihrem Erfolg im Studium und anschließend im Beruf beiträgt. Ebenso spielt die Uni mit ihren Fakultäten: **Rahmenprüfungsordnung**.

Zur **Zulassung** können wir eine Beschränkung beantragen oder nicht, ein Motivationsschreiben fordern oder nicht, eine Selbst/Evaluation vorschalten oder nicht, etc. Was ist hilfreich für den Studienerfolg? Die Wahl des Verfahrens ist eine Frage des Mechanismendesigns!

Mechanismendesign: erste Beispiele

Ein funktionierendes **Staatswesen** beruht auf einem Gleichgewicht von Checks & Balances. Die Menschheit braucht hierzu viele Jahrhunderte. Gutes **Management** beruht auf Anreizen und positiver Rückkopplung. Hierzu erproben wir Mechanismen: manche helfen, andere schaden.

In der **Entwicklungspolitik** wurden nahezu alle denkbaren Fehler auch ausprobiert, wirkliche Entwicklungs*hilfe* ist schwieriger als naiv vermutet. Hier hat sich die **Mikrofinanz** als ein erfolgreiches Instrument bewährt, die Konten, Kredite, Sparbücher, Versicherungen etc. zugänglich macht.

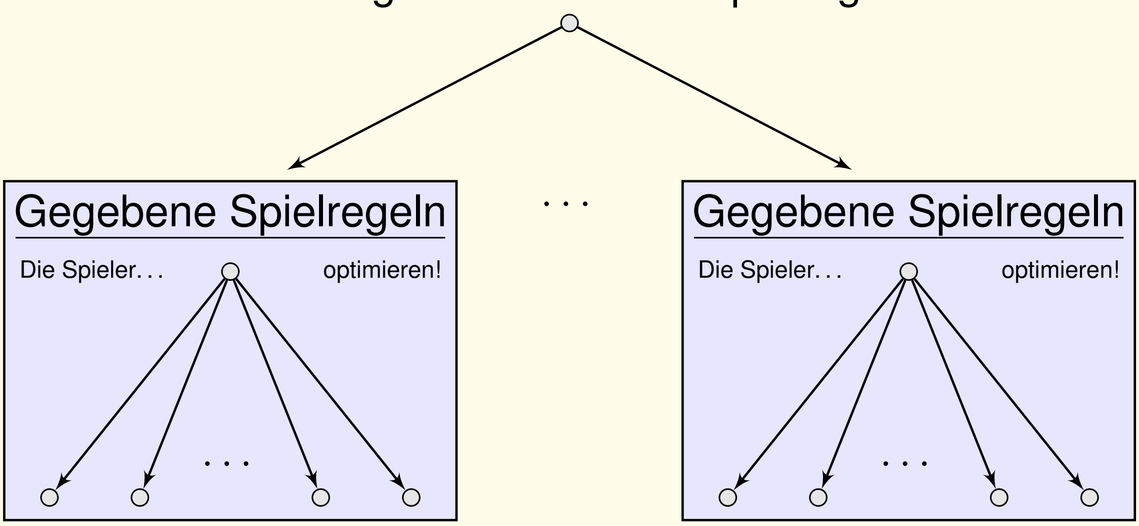
Allgemein will die **Gesetzgebung** nicht nur verbieten, sondern auch positive Anreize schaffen, zum Beispiel durch steuerliche Förderung. Das muss wohlüberlegt und gut konstruiert sein, sonst schadet es. Katastrophenbeispiel: **Cum-Ex-Betrug** durch mehrfache Erstattung.

Der **Emissionsrechtehandel** soll als Instrument der Umweltpolitik Schadstoffemissionen senken und zugleich Kosten gerecht verteilen. Die Hoffnung ruht auf dezentraler **Selbstorganisation** durch Handel, doch dazu müssen sinnvolle, zielführende Anreize vorgegeben werden.

Mechanismendesign: vorwärts und rückwärts

🙂 Mit großer Macht kommt große Verantwortung. Gutes Design kann zu wunderbaren Erfolgen führen, schlechtes Design zu Katastrophen.

Die Designer:in wählt die Spielregeln.



Wie immer gilt: Gespielt wird vorwärts, optimiert wird rückwärts!

🙂 Der Slogan „umgekehrte Spieltheorie“ ist griffig, doch bei genauem Hinsehen ist dies nur eine weitere Anwendung der Rückwärtsinduktion.

Auktionen: Was wird versteigert?

Auktionsnummer 2020-01-005, Bahnhof Nienhagen, Empfangsgebäude mit Nebengebäude, Güterschuppen und Ladestraße. Baujahr unbekannt. Der Wasserturm befindet sich auf einem separaten Teilgrundstück. Aufgrund fehlender Treppen ist eine Innenbesichtigung nicht möglich. Insgesamt sind alle Gebäude stark sanierungsbedürftig. Grundstück $12\,327\mathrm{m}^2$, Geschossfläche: ca. $800\mathrm{m}^2$, Mindestgebot: $3\,000$€. (Quelle: `www.bahnliegenschaften.de`)

Auktionen: Was wird versteigert?

Auktionen sind ein extrem flexibler und daher wichtiger Mechanismus. Sie lassen sich auf viele Situationen maßschneidern, mit allen Chancen und Risiken, es winken hohe Gewinne, aber ebenso drohen Verluste. Manche waren strahlende Erfolge, andere krachende Niederlagen.

Auktionen erfreuen sich in den letzten Jahrzehnten großer Beliebtheit, sowohl bei Wissenschaftlern als auch bei Anwendern, idealerweise bei Käufern und Verkäufern, etwa bei Händlern oder Regierungen, kurzum bei jedem, der etwas Wertvolles zu verkaufen hat. Was wird versteigert?

- Kunstobjekte, Antiquitäten, Trödel, … eBay vertickt alles.
- Rohstoffe, Lebensmittel, Förderlizenzen, Mobilfunklizenzen.
- Zentralbanken versteigern Staatsanleihen [*treasury auctions*].
- Immobilien, Grundstücke (von Bund, Ländern, Bahn, etc.)
- Privatisierung, öffentliche Ausschreibung, Exzellenzinitiative.
- Fundsachen, Konkursmasse, Zwangsversteigerung.
- Das Römische Reich an Didius Julianus, 193 n.Chr.

Auktionen: heutige Beispiele

Weit verbreitet und allgemein bekannt sind Internetauktionen; eBay nutzt eine Zweitpreisauktion / Englische Auktion, ähnlich einer Saalauktion. Öffentliche Aufträge werden oft durch Erstpreisauktion vergeben; die Rollen sind vertauscht, es gewinnt der Bieter mit dem niedrigsten Gebot.

Die Bundesnetzagentur versteigerte bislang dreimal (2000, 2010, 2019) UMTS-Lizenzen (Frequenzblöcke) an zugelassene Mobilfunkanbieter zur Nutzung durch das Universal Mobile Telecommunications System. Im Jahr 2000 versteigerte sie 12 Frequenzblöcke für einen Gesamterlös von 50 Mrd Euro. Vodafone, EPlus, O2, TMobile zahlten jeweils etwa 16.5 Mrd Euro, Mobilcom und Quam gaben später ihre Lizenzen zurück.

Durch die hohen Investitionskosten mussten die Firmen Fremdkapital aufnehmen und gerieten zwischenzeitlich stark unter Druck. Die Kosten werden bis heute an die Endkunden weitergegeben. Die Versteigerung weiterer Frequenzen im Jahre 2010 erbrachte weniger als 5 Mrd Euro, danach 4G (2015) etwa 5.1 Mrd Euro und 5G (2019) etwa 6.6 Mrd Euro.

🙂 Große Anwendungserfolge bestärkten die Rolle der Auktionstheorie.

Auktionen: historische Beispiele

Kunstobjekte und Antiquitäten werden seit jeher in Auktionen versteigert. Auch frische Handelsware wird traditionell so verkauft, etwa Tabak, Fisch oder Blumen, aber auch Rohstoffe bis hin zu Altmetall. Gleiches gilt für natürliche Ressourcen, etwa Forstrechte oder Ölbohrlizenzen.

Ihre vielleicht wichtigste Rolle spielten Auktionen bei der Privatisierung von Transportsystemen oder anderen ehemals staatlichen Betrieben.

Das römische Kaiserreich erlebte oft turbulente Zeiten. Im Jahre 193 wurden nacheinander vier Männer zum Kaiser ausgerufen: Pertinax (Januar bis März 193), Didius Julianus (März bis Juni 193), Septimius Severus (193-211) und als Gegenkaiser Pescennius Niger (193-194).

Die Prätorianergarde tötete am 28. März den Kaiser Pertinax (126–193) und versteigerte kurzerhand das Römische Imperium. Didius Julianus gab das Höchstgebot von 25000 Sesterzen pro Mann der Garde und wurde daraufhin Kaiser — und zwei Monate später enthauptet, da er seine Geldversprechen nicht einhalten konnte. Ihm folgte Septimius Severus, der sich auf die Mehrheit der römischen Legionen stützte.

Der Fluch des Gewinners / *winner’s curse*

Der **Fluch des Gewinners** ist ein Effekt bei Versteigerungen:

1. Der Gegenstand hat einen objektiven Wert, nicht nur subjektiv.
2. Die individuelle Schätzung dieses Wertes unterliegt Schwankungen.

Aus diesen beiden einfachen Annahmen folgt zunächst anschaulich: Der Gewinner hat typischerweise den Wert am meisten überschätzt. Schlimmstenfalls deckt sein Ertrag nicht die Kosten. Typische Beispiele:

- De/Regulierung: Auktionen von Ölbohrlizenzen, Mobilfunklizenzen
- Börsengang: Erstplatzierung von Aktien [*initial public offering*, IPO]

Die Börse vermittelt normalerweise zwischen Verkäufern und Käufern. Ein IPO jedoch hat nur einen Verkäufer und ähnelt somit einer Auktion. Für Investoren bedeuten IPOs große Chancen, aber auch große Risiken.

Der Fluch des Gewinners ist theoretisch erklärbar und empirisch prüfbar: Er erweist sich als robuste Abweichung zwischen Praxis und Theorie. Für den Auktionator ist dieser Fluch ein Segen, denn er verdient mehr. Für jeden Bieter ist der Fluch ein Risiko, das er gut bedenken muss.

Der Fluch des Gewinners / *winner’s curse*

Der Fluch des Gewinners wurde erstmals untersucht von E.C. Capen, R.V. Clapp, W.M. Campbell: *Competitive Bidding in High-Risk Situations.* Journal of Petroleum Technology 23 (1971) 641–653. Die drei Autoren, Ölbohringenieure bei Atlantic Richfield Co., stellten fest, dass Ölfirmen unerwartet niedrige Gewinne machten in den US-Ölfeldern im äußeren Kontinentalschelf; diese wurden damals durch Auktionen vergeben.

> *If it is true, as common sense tells us, that a lease winner tends to be the bidder who most overestimates reserves potential, it follows that the “successful” bidders may not have been so successful after all.*

Ein optimistischer Bieter gewinnt die Auktion mit höherer Wkt. Bayes: Der Gewinner der Auktion ist typischerweise übertrieben optimistisch und bietet deshalb mehr als das versteigerte Objekt wirklich wert ist.

Wir wollen unsere Argumente vereinfachen und werden idealisieren. Insbesondere geht es im Folgenden nur um den privaten Wert, den jeder Bieter treffsicher einschätzen kann. Die Schwankungen bestehen nur in der individuellen Wertschätzung, zum Beispiel für ein Kunstobjekt.

Auktionen: vereinfachende Idealisierungen

Wir betrachten eine **Auktion** mit folgenden Grunddaten:

1. Es wird genau ein **Objekt** verkauft, nicht mehrere zugleich.
2. Die Spieler $i \in I = \{1, \dots, n\}$ sind **Bieter** (potentielle Käufer).
3. Private Information: Spieler i schätzt den **Wert** des Objekts auf s_i gemäß einer **Zufallsvariablen** $S_i : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} : \omega \mapsto s_i = S_i(\omega)$.

Zur Vereinfachung nehmen wir zusätzlich an:

4. Die **Verteilung** von $(S_1, \dots, S_n) : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}^n$ ist öffentlich bekannt.
5. Die Variablen $S_1, \dots, S_n$ sind **unabhängig und identisch verteilt**.
6. Jeder Spieler ist **risikoneutral**, optimiert seinen Erwartungswert.

Der Verkäufer / Auktionator legt das **Verfahren** der Auktion fest.

- Spieltheorie: Wie bieten die Spieler? Rationalität? Gleichgewichte?
- Effizienz: An wen geht das Objekt? den Bieter mit höchstem Wert?
- Erlös: Was erwartet der Auktionator insgesamt als Einnahme?

Mechanismendesign: Welches Verfahren wählt der Auktionator?

Auktionen: vereinfachende Idealisierungen

Ich präzisiere die Idealisierungen, damit wir bequem rechnen können. Manche dieser Annahmen scheinen plausibel und leicht zu akzeptieren, andere jedoch sind stark einschränkend und praktisch selten erfüllt: Die Anzahl der teilnehmenden Bieter kann zufällig und unbekannt sein, es können mehrere Objekte versteigert werden, evtl. in Paketen, etc.

Wesentlich für das Modell sind die Wertschätzungen $S_i : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zur Vereinfachung nehmen wir sie als unabhängig an. Das ist halbwegs realistisch bei Objekten von rein privatem Wert. Es ist unrealistisch bei Wirtschaftsobjekten wie natürlichen Ressourcen, etwa Schürfrechten, Forstlizenzen, etc: Die Schätzungen sind hier stark positiv korreliert.

Wir untersuchen hier zunächst nur das Grundmodell; Verfeinerungen ergeben realistischere Modelle und enthüllen weitere Phänomene.

📖 V. Krishna: *Auction Theory*, Academic Press 2009.
P. Klemperer: *Auctions Theory and Practice*, PUP Princeton 2004.
P. Milgrom: *Putting Auction Theory to Work*, CUP Cambridge 2004.
F.M. Menezes, P.K. Monteiro: *Auction Theory*, OUP Oxford 2008.

Auktionen: klassische Verfahren

Für Auktionen mit einem Objekt gibt es mehrere klassische Verfahren. Die einfachsten und häufigsten sind die beiden folgenden Typen:

Erstpreisauktion, *first price (sealed bid) auction*:
Jeder Bieter gibt verdeckt sein verbindliches Gebot ab.
Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt
und bezahlt das höchste Gebot (also sein eigenes).

Typisches Beispiel: Vergabe öffentlicher Aufträge.
Strategisch äquivalent zur **Holländischen Auktion**.

Zweitpreisauktion, *second price (sealed bid) auction*:
Jeder Bieter gibt verdeckt sein verbindliches Gebot ab.
Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt
und bezahlt das zweithöchste Gebot (nach seinem eigenen).

Typisches Beispiel: Internetauktion, etwa bei eBay.
Strategisch äquivalent zur **Englischen Auktion**.

Die Zweitpreisauktion heißt auch **Vickrey–Auktion**, nach dem Nobelpreisträger William Vickrey, der sie theoretisch untersucht hat.

Auktionen: klassische Verfahren

Um die theoretische Untersuchung von Auktionen zu vereinfachen, gehen wir zunächst von verdeckten und einmaligen Geboten aus. Das ist eine dramatische Vereinfachung, aber für den Anfang hilfreich: Diese Sichtweise ist vollkommen nüchtern und blendet die komplizierte Dynamik von wechselseitigem Bieten und Überbieten zunächst aus.

Warum ist das sinnvoll? Erstaunlicherweise beruht das auf unserer obigen Annahme der stochastisch unabhängigen Wertschätzung! Beim wechselseitigen Bieten fließen offensichtlich Informationen. Da wir die Wertschätzungen $(S_1, \dots, S_n)$ als unabhängig annehmen, kann jeder Bieter alle Informationen der anderen getrost ignorieren.

Anders gesagt: Je nach Auktionsform können die Spieler interagieren, aufgrund der Unabhängigkeit haben sie aber keinerlei Vorteil davon. Im hier vorgestellten Grundmodell rechnet jeder Spieler kühl und rational seine Bietstrategie *vor* der Auktion aus und lässt sich anschließend nicht von möglichem Brimborium *während* der Auktion beeindrucken.

Viele reale Auktionen verlaufen erfahrungsgemäß deutlich anders, deshalb betone ich hier diese einschneidenden Vereinfachungen.

Auktionen: klassische Verfahren

Die **Englische Auktion** verläuft vorwärts, mit steigenden Geboten: Die Bieter steigern ihre Gebote, etwa durch Zuruf oder Handzeichen, bis das Höchstgebot feststeht oder die vorgegebene Zeit abläuft.

Das ist strategisch äquivalent zur Zweitpreisauktion. Allerdings nur unter der Annahme, dass die Bieter trotz größerer Interaktionsmöglichkeiten stur dieselbe Bietstrategie verfolgen. Das ist eine sehr starke und oft unrealistische Rationalitätsforderung: Aufgrund der Unabhängigkeit lassen sich Spieler vom Auktionsverlauf überhaupt nicht beeinflussen, sondern ignorieren alle Signale der anderen Spieler als irrelevant.

Das Auktionsportal eBay nutzt eine Variante dieser Auktionsform. Im einfachsten Falle nennt der Spieler sein Höchstgebot einem Agenten, der stur gemäß dieser Anweisung in einer englischen Auktion bietet. Allerdings wird als Zwischenstand das aktuelle Höchstgebot angezeigt, was viele Spieler zur nachträglichen Erhöhung ihres Gebotes animiert. Dieses Verhalten ist von eBay durchaus beabsichtigt. Es ist vermutlich oft irrational, kann aber auch zur Neueinschätzung des Wertes dienen.

Auktionen: klassische Verfahren

Die **Holländische Auktion** [*Dutch auction*, *clock auction*] hingegen verläuft rückwärts, mit fallenden Preisen: Der Auktionator gibt einen (hohen) Startpreis vor und senkt diesen schrittweise bis zum Zuschlag.

Das ist strategisch äquivalent zur Erstpreisauktion, wie oben erklärt. In der Praxis jedoch kann eine andere Dynamik beobachtet werden.

Ein Vorteil der holländischen Auktion besteht in ihrer Geschwindigkeit. Im Gegensatz zu einer gewöhnlichen Saalauktion wird das Auktionsgut rasch verkauft, die Entscheidung fällt schon bei der ersten Zustimmung eines Interessenten. Die Bieter können nicht aufeinander reagieren, Bietergefechte sind ausgeschlossen. Somit können große Mengen von Auktionsgütern in kurzer Zeit verkauft werden. Die Bieter stehen dabei unter hohem Entscheidungsdruck: Wenn ein Interessent taktiert und auf einen günstigeren Preis wartet, besteht die Gefahr, dass das Auktionsgut an einen Konkurrenten verkauft wird, der schneller zugreift.

Zahlreiche Varianten sind möglich. Zum Beispiel kann der Verkäufer ein Mindestgebot fordern oder hat die Option, das Objekt nicht zu verkaufen.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Beispiel: Die Jeder-Bieter-zahlt-Auktion funktioniert wie folgt:

- Jeder Bieter gibt verdeckt sein verbindliches Gebot ab.
- Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt.
- Jeder (!) Bieter bezahlt sein eingereichtes Gebot.

Aufgabe: Was sagt die Theorie? Was geschieht im Experiment? Vickreys Erlös-Äquivalenz-Satz P2C klärt Gleichgewichtserlöse. Solche Auktionen werden wir anschließend selbst als Experiment durchführen und sowohl empirisch als auch theoretisch diskutieren.

Variante: Mit öffentlich ausgerufenen Geboten ist die Auktion lebhafter, allerdings ist die Dynamik komplizierter und schwieriger zu analysieren. Die Gebote sind Signale, dadurch fließt Information, die Bieter können aufeinander reagieren, anders als im statischen Fall verdeckter Gebote.

Solche Auktionen scheinen zunächst sonderbar. In manchen Situationen sind sie durchaus realistisch, etwa als Modell für politisches Lobbying. Ebenso könnte ein gieriger Auktionator dieses Verfahren vorschlagen, und hoffen, dadurch einen besonders hohen Erlös zu erzielen.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Ein typisches Beispiel hierzu sind **politische Kampagnen**, besonders eindrücklich ist die Finanzierung des US-Präsidentschaftswahlkampfs. Traditionell sammeln Lobbygruppen große Spendensummen für ihren Kandidaten, um Einfluss auf die zukünftige Politik der USA zu nehmen.

Zur Einschätzung der Größenordnung hier die bisherigen Rekorde: etwa 853 Mio Dollar im Jahr 2012, über 1 Mrd Dollar im Jahr 2016. Darunter machen nur zehn Personen über 20% der Spenden aus; es handelt sich also nicht um basisdemokratisches *crowd funding*.

Manche Großkonzerne oder (einfluss)reiche Personen spenden gezielt, um sich die Gunst der (vermeintlich) zukünftigen Regierung zu sichern. Clinton galt den meisten bis zum Wahltag als wahrscheinliche Siegerin, daher gingen 704 Mio Dollar an Clinton, aber nur 323 Mio an Trump.

Dieses Geld wird im Wahlkampf in Kampagnen investiert, also verbrannt, doch nur der Wahlsieger erhält schließlich als Preis die Präsidentschaft. Neben Inhalten entscheiden auch Spenden: Geld kauft mediale Präsenz und damit größere Gewinnchancen. Dies entspricht einer Auktion.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Bei einer **Pennyauktion** ist jedes Gebot kostenpflichtig, so dass alle Teilnehmer bezahlen, selbst wenn sie den Artikel gar nicht erwerben. Das Verfahren gilt als Glücksspiel und ist in manchen Ländern verboten.

Reales Beispiel: Ein iPhone steigert bis 220.95€. Hierzu wurden 22095 Gebote abgegeben; jedes kostet sofort 50 Cent, erhöht den Preis um einen Cent und die Laufzeit um 15 Sekunden. Insgesamt wurde also der Preis für mehr als 18 iPhones bezahlt, verkauft wurde aber nur eins.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Ebenso funktionieren **Wettbewerbe** mit aufwändigen Einsendungen wie Architekturwettbewerbe oder Exzellenzwettbewerbe von Universitäten. Solche Verfahren erfreuen sich bei den Veranstaltern großer Beliebtheit, auf Seiten der Bewerber vernichten sie Tausende von Arbeitsstunden.

Alle Teilnehmer müssen zunächst mit viel Arbeit in **Vorleistung** gehen, um das für den Wettbewerb geforderte aufwändige Material zu erstellen. Je mehr Arbeit investiert wird, desto besser werden die Erfolgschancen. Doch nur ein glücklicher Bewerber gewinnt, die anderen gehen leer aus.

Die Ausbeutung der **Generation Praktikum** funktioniert ähnlich: Aufwändige Vorleistungen werden schlecht oder gar nicht bezahlt; ideeller Lohn ist die Erfahrung und ein weiterer Punkt im Lebenslauf. Auch ein sinnleeres Pseudo-Studium kann ebenso interpretiert werden.

Wenn zudem mehrfach überboten werden kann, so droht eine Eskalation und **Bietspirale**, wie das nachfolgende Experiment eindrücklich belegt. Bei langen militärischen Konflikten spricht man von **Abnutzungskrieg**, engl. *war of attrition*. Die Verluste übersteigen die möglichen Gewinne.

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Aufgabe: Spieler i kennt nur seine eigene Schätzung $s_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(1) Was sind Strategien B_i für Spieler i? Was ist sein Erlös $u_i(B \mid s)$?
(2) Finden Sie ein Gleichgewicht in (halbstark) dominanten Strategien!
(3) Welchen Autionserlös erzielt der Verkäufer / Auktionator?

Lösung: (1) Spieler i bietet gemäß seiner (monotonen) Strategie

$$B_i \;:\; \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; s_i \mapsto b_i = B_i(s_i).$$

Sein Nutzen berechnet sich aus dem Wert s_i und allen Geboten $(b_j)_{j \in I}$:
Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ das Höchstgebot aller anderen Bieter. Dann gilt

$$u_i(B_1, \dots, B_n \mid s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} s_i - c_i & \text{falls } b_i > c_i, \\ 0 & \text{falls } b_i < c_i. \end{cases}$$

Bei Gleichstand $b_i = c_i$ wird unter den höchsten Geboten gelost.

Für $i \in I$ sind $C_i := \max_{j \neq i} B_j(S_j)$ und $T_i := \max_{j \neq i} S_j$ Zufallsvariablen.
Sind alle $B_1 = \dots = B_n = B$ gleich und monoton, so gilt $C_i = B(T_i)$.

Zu T_i berechnet sich die kumul. Verteilung $G_i(t) := \mathbf{P}[T_i \leq t]$ aus der Verteilung von $(S_1, \dots, S_n)$. Bei Unabhängigkeit gilt $G_i = \prod_{j \neq i} F_j$.

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der **Zweitpreisauktion**, denn sie ist spieltheoretisch besonders leicht zu analysieren.

Zudem erweist sie sich gleich als das zentrale Referenzmodell: Alle Auktionen, die gewissen Mindestanforderungen genügen, sind erlösäquivalent zur Zweitpreisauktion: Satz P2C von Vickrey. Zu seinen Ehren heißt die Zweitpreisauktion auch **Vickrey–Auktion**.

Ihre zentrale Rolle verdankt die Zweitpreisauktion der folgenden bemerkenswerten Eigenschaft: Die Spieler brauchen hier nicht zu taktieren, zu analysieren oder zu spekulieren, jeder Spieler erreicht seine optimale Gewinnerwartung durch wahrheitsgemäßes Bieten.

Diese Besonderheit nennen wir die **Offenbarungseigenschaft**, engl. *revelation principle*. Sie ist bemerkenswert und überaus nützlich.

Wir können dies nun explizit nachrechnen! Dazu müssen wir zunächst die Auktion explizit als Spiel ausschreiben (1), und dann sorgfältig alle Gleichgewichtserlöse bestimmen (2). Dies führt zu folgendem Satz.

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Satz P2A: Offenbarungseigenschaft und Erlös

In der Zweitpreisauktion ist die Strategie $B_i = \mathrm{id}$ schwach dominant: Spieler i bietet gemäß $B_i(s_i) = s_i$ den wahren Wert seiner Schätzung.

Sein Gebot s_i erhält somit den Zuschlag mit Wkt $\mathbf{P}\big[T_i \le s_i\big] =: G_i(s_i)$. Der Auktionserlös ist dann $\int_{t=0}^{s_i} t\, g_i(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T_i \mid T_i \le s_i\big]\,\mathbf{P}\big[T_i \le s_i\big]$.

Beweis: Angenommen, Spieler i bietet $b_i > s_i$ statt s_i. Drei Fälle:

$c_i > b_i > s_i$: Nutzen $u_i' = 0 = u_i$.

$b_i > s_i > c_i$: Nutzen $u_i' = s_i - c_i = u_i$.

$b_i > c_i > s_i$: Nutzen $u_i' = s_i - c_i < 0 = u_i$.

Angenommen, Spieler i bietet $b_i < s_i$ statt s_i. Drei Fälle:

$c_i > s_i > b_i$: Nutzen $u_i' = 0 = u_i$.

$s_i > b_i > c_i$: Nutzen $u_i' = s_i - c_i = u_i$.

$s_i > c_i > b_i$: Nutzen $u_i' = 0 < s_i - c_i = u_i$.

In jedem Falle erzielt $B_i = \mathrm{id} : s_i \mapsto s_i$ das beste Ergebnis. QED

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Übung: Wir untersuchen hier die Abweichungen $b_i > s_i$ bzw. $b_i < s_i$. Für den Wert c_i betrachten wir die drei möglichen Einordnungen. Es bleiben zwei Gleichheitsfälle: Warum passiert nichts neues?

Bei der Zweitpreisauktion (Vickrey–Auktion) sind die Regeln so gestaltet, dass es für jeden Bieter eine optimale Strategie ist, wahrheitsgetreu zu bieten, also genau so viel, wie ihm das Objekt tatsächlich wert ist.

Offenbarungseigenschaft: Spieler i offenbart seine Information s_i. Das ist allgemein ein wichtiges Prinzip für das Mechanismendesign, der Nachweis seiner Gültigkeit ist jeweils ein erster Schritt zur Lösung.

Wenn es einen Mechanismus gibt, der eine soziale Auswahlfunktion implementiert, dann gelingt dies ebenfalls mit einen wahrheitsgemäßen Mechanismus. Solche Mechanismen heißen auch **anreizkompatibel**.

Der Auktionator / Verkäufer kann zwar keinen Bieter / Käufer *zwingen*, seine privaten Informationen offenzulegen, hier seine Wertschätzung, aber er kann es durch ein geeignetes Auktionsverfahren *ermutigen*.

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Aufgabe: Spieler i kennt nur seine eigene Schätzung $s_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.
(1) Was sind Strategien B_i für Spieler i? Was ist sein Erlös $u_i(B \mid s)$?
(2) Finden Sie alle spielersymmetrischen Nash–Gleichgewichte!
(3) Welchen Auktionserlös erzielt der Verkäufer / Auktionator?

Lösung: (1) Spieler i bietet gemäß seiner (monotonen) Strategie

$$B_i \;:\; \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} \;:\; s_i \mapsto b_i = B_i(s_i).$$

Sein Nutzen berechnet sich aus dem Wert s_i und allen Geboten $(b_j)_{j \in I}$:
Sei $c_i := \max_{j \ne i} b_j$ das Höchstgebot aller anderen Bieter. Dann gilt

$$u_i(B_1, \dots, B_n \mid s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} s_i - b_i & \text{falls } b_i > c_i, \\ 0 & \text{falls } b_i < c_i. \end{cases}$$

Bei Gleichstand $b_i = c_i$ wird unter den höchsten Geboten gelost.

Für $i \in I$ sind $C_i := \max_{j \ne i} B_j(S_j)$ und $T_i := \max_{j \ne i} S_j$ Zufallsvariablen.
Sind alle $B_1 = \dots = B_n = B$ gleich und monoton, so gilt $C_i = B(T_i)$.

Zu T_i berechnet sich die kumul. Verteilung $G_i(t) := \mathbf{P}[T_i \le t]$ aus der Verteilung von $(S_1, \dots, S_n)$. Bei Unabhängigkeit gilt $G_i = \prod_{j \ne i} F_j$.

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

(2) Jede Zufallsvariable S_i sei stetig verteilt mit Dichte f_i, kumuliert F_i.
Die Zufallsvariablen $S_1, \dots, S_n$ seien unabhängig identisch verteilt.

Symmetrisches Gleichgewicht $B_1 = \dots = B_n = B \;:\; \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$.
Vereinfachende Annahmen: B sei stetig diff'bar, $B(0) = 0$ und $B' > 0$.

Zum Wert s_i und Gebot b_i ist dann der erwartete Gewinn:

$$\begin{aligned} u_i(b_i \mid s_i) &= (s_i - b_i)\, \mathbf{P}\big[\forall j \ne i : B_j(S_j) < b_i\big] \\ &= (s_i - b_i)\, \mathbf{P}\big[\forall j \ne i : S_j < B^{-1}(b_i)\big] \\ &= (s_i - b_i)\, \mathbf{P}\big[T_i < B^{-1}(b_i)\big] \\ &= (s_i - b_i)\, G_i(B^{-1}(b_i)) \quad \to \quad \max! \end{aligned}$$

Dank Unabhängigkeit gilt $G_i := \prod_{j \ne i} F_j$, dank Symmetrie $G := F^{n-1}$.
Wir lassen fortan alle Indizes weg. Wir maximieren die Erlösfunktion

$$b \mapsto h(b) = (s - b)\, G(B^{-1}(b)).$$

Ihre erste Ableitung ist nach Produkt- und Kettenregel

$$h'(b) = -G(B^{-1}(b)) + (s - b)\, \frac{g(B^{-1}(b))}{B'(B^{-1}(b))}.$$

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Für $h'(b) = 0$ und $b = B(s)$ finden wir die Differentialgleichung

$$G(s)B'(s) = (s - B(s))\, g(s).$$

☺ Dies ist eine inhomogene lineare DG. Wir schreiben sie um zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[G(s)B(s)\big] = s\, g(s).$$

Mit Anfangswert $B(0) = 0$ wird sie gelöst durch Integration:

$$B(s) = \frac{1}{G(s)} \int_{t=0}^{s} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T \mid T \le s\big]$$

☺ Das ist die optimale Bietstrategie. Anschaulich ist das plausibel: $B(s)$ ist der Erwartungswert des höchsten Gebotes T aller anderen Bieter, unter der Bedingung $T \le s$. Der erwartete Auktionserlös ist

$$G(s)B(s) = \int_{t=0}^{s} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T \mid T \le s\big]\, \mathbf{P}\big[T \le s\big].$$

☺ Die Erstpreisauktion bringt also keinen größeren Erlös als die Zweitpreisauktion: Beide Auktionsverfahren sind erlösäquivalent!

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Satz P2B: Erlösäquivalenz zwischen Erst- und Zweitpreisauktion

Unter den genannten Bedingungen gilt: In der Erstpreisauktion erwarten Bieter und Auktionator denselben Erlös wie in der Zweitpreisauktion.

Bemerkenswerterweise kann der Verkäufer mit der Erstpreisauktion nicht mehr einnehmen: Rationale Spieler passen ihr Verhalten dem Auktionsverfahren an und spekulieren auf das Verhalten der anderen. Es gibt ein eindeutiges symmetrisches Nash–Gleichgewicht, das wir hier berechnet haben, und der zugehörige Erlös ist exakt derselbe wie zuvor.

Die Differenz zwischen höchster und zweithöchster Wertschätzung geht dem Auktionator auch hier verloren: Dieser Verlust ist unvermeidlich! Dies ist der Preis für seine unvollständige Information: Der Verkäufer kennt keine der privaten Informationen $s_1, \dots, s_n$. Kennte er sie alle, so könnte er das Objekt tatsächlich für $\max\{s_1, \dots, s_n\}$ verkaufen, indem er es zum höchsten Preis anbietet (oder knapp darunter).

Versteigerungen sind eine praktikable Approximation an dieses Ideal. Können wir noch bessere Implementierungen finden? Theoretisch: nein!

Der Erlös-Äquivalenz-Satz

Wir machen weiterhin folgende Annahmen:

1. Jeder Spieler ist risikoneutral, optimiert also den Erwartungswert.
2. Die Zufallsvariablen $S_1, \dots, S_n : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ sind unabhängig.
3. Sie sind identisch verteilt mit stetiger Dichte f, kumuliert zu F.

Wir betrachten Auktionsverfahren mit folgenden Eigenschaften:

4. Es existiert ein symmetrisches Gleichgewicht $(B_1, \dots, B_n)$.
5. Zur Wertschätzung $s_i = 0$ ist der Erlös $u_i(B \mid s) = 0$.
6. Das höchste Gebot erhält den Zuschlag.

Satz P2C: Erlösäquivalenz, Vickrey 1961

In all solchen Auktionsverfahren erwarten Bieter und Auktionator denselben Erlös wie in der Zweitpreisauktion (Vickrey–Auktion).

☺ Der Verkäufer will seinen Erlös maximieren. Die Zweitpreisauktion scheint zunächst suboptimal, doch jede andere Auktion liefert dasselbe.

⚠ Dies gilt bei den genannten Bedingungen, also präzise eingegrenzt. Insbesondere Rationalität und Unabhängigkeit sind starke Forderungen.

Der Erlös-Äquivalenz-Satz

Beweis: Sei $B_1 = \dots = B_n = B : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} : 0 \mapsto 0$ die Bietstrategie. Zur Vereinfachung sei wie zuvor B stetig differenzierbar mit $B' > 0$.

Für jeden Bieter i sei $p_i(s_i) \in [0, 1]$ die Zuteilungswkt und $q_i(s_i) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ die erwartete Zahlung bei Wertschätzung s_i. Zunächst gilt $q_i(0) = 0$.

Sei $T_i = \max_{j \ne i} S_j$ mit kumulativer Verteilung $G_i = \prod_{j \ne i} F_j$. Dank Symmetrie gilt $G_i = G := F^{n-1}$. Dank Monotonie folgt $p_i(s_i) = G(s_i)$.

Angenommen, Spieler i bietet statt $b_i = B(s_i)$ abweichend $b = B(s)$, mit veränderter Wertschätzung s. Sein erwarteter Gewinn ist dann

$$\begin{aligned} u_i(s) &= s_i\, G(s) - q_i(s), \\ u_i'(s) &= s_i\, g(s) - q_i'(s). \end{aligned}$$

Im Gleichgewicht wird der erwartete Gewinn maximiert durch $s = s_i$, demnach gilt $u_i'(s_i) = 0$, also $q_i'(s_i) = s_i\, g(s_i)$. Wir integrieren dies zu

$$q_i(s_i) = q_i(0) + \int_{t=0}^{s_i} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T_i \mid T_i \le s_i\big]\, \mathbf{P}\big[T_i \le s_i\big].$$

☺ Das ist genau der Erlös der Vickrey–Auktion (Satz P2A). QED

Wie formalisieren wir Auktionsverfahren?

🙂 Vickreys Satz zu Auktionen ist nach Verhandlungen und Wahlen ein weiteres schönes Ergebnis und Grundlage des Mechanismendesigns: Statt Un/Möglichkeitssätzen sehen wir nun Sätze zur **In/Effizienz** und **Sub/Optimalität**: Welcher Erlös ist erreichbar? Warum nicht mehr?

Der gerade erklärte Satz lässt noch zu viel Interpretationsspielraum: Was bedeutet der Allquantor „In all solchen Auktionsverfahren. . . “? Um die berühmt-berüchtigte **mathematische Präzision** zu erreichen, müssen wir erklären, was wir unter einem Auktionsverfahren verstehen.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie das Verfahren als Funktion der Gebote: Wer bekommt das Objekt mit welcher Wkt und wie viel muss er zahlen?

(2) Führen Sie dies explizit aus für die Erst- und Zweitpreisauktion.

(3) Erklären Sie wünschenswerte Eigenschaften von Auktionsverfahren, speziell Symmetrie, Monotonie, Neutralität, Einhelligkeit, evtl. Stetigkeit.

(4) Was sind Bietstrategien? Wie folgt daraus der erwartete Gewinn?

(5) Untersuchen Sie symmetrische Bayes–Nash–Gleichgewichte. Führen Sie damit den obigen Beweis möglichst explizit aus!

Wie formalisieren wir Auktionsverfahren?

Lösung: (1) Die Spieler geben ihre **Gebote** $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ ab. Das Auktionsverfahren definiert die **Zuteilungswkt** und die **Kosten**:

$$\begin{aligned} P_i &: \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to [0,1] : (b_1,\dots,b_n) \mapsto P_i(b_1,\dots,b_n) \\ Q_i &: \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} : (b_1,\dots,b_n) \mapsto Q_i(b_1,\dots,b_n) \end{aligned}$$

Zu jedem Gebotsvektor $b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ ist $P_i(b)$ die Wkt, dass Spieler i das Objekt zugeteilt wird, und $Q_i(b)$ die von Spieler i erwartete Zahlung.

Wir könnten $\sum_{i=1}^n P_i(b_1,\dots,b_n) = 1$ erhoffen oder axiomatisch fordern, aber auch < 1 ist eventuell sinnvoll, wenn das Objekt nicht verkauft wird.

Umgekehrt wird das **Auktionsverfahren** (P,Q) festgelegt durch

$$P, Q : \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to \mathbb{R}^n_{\ge 0} \quad \text{mit} \quad \textstyle\sum_{i=1}^n P_i \le 1.$$

🙂 Das ist alles, was ein rationaler Bieter wissen will und wissen muss, Kosten und Nutzen: „Was muss ich zahlen? Was bekomme ich dafür?“ Alle weiteren Informationen sind dekorative Schnörkel und überflüssig.

⚠ Für nicht (vollständig) rationale Bieter spielen die Einkleidung und Dekoration oft eine große Rolle, wie zahlreiche Experimente belegen.

Formalisierung: Erst- und Zweitpreisauktion

(2) Gegeben sei der Gebotsvektor $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$.
Die Menge aller Höchstbietenden bezeichnen wir mit

$$M := \operatorname{Arg\,max}\{\, i \mapsto b_i \,\} = \{\, i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j \,\}.$$

(2a) Die Erstpreisaktion (P^1, Q^1) ist charakterisiert durch

$$\begin{aligned} i \in M \quad &\Longrightarrow \quad P^1_i(b) = 1/\sharp M, \quad Q^1_i(b) = b_i/\sharp M, \\ i \notin M \quad &\Longrightarrow \quad P^1_i(b) = 0, \qquad\quad Q^1_i(b) = 0. \end{aligned}$$

(2b) Sei $i \in I$ und $c_i := \max_{j \ne i} b_j$ das Höchstgebot aller anderen.
Die Zweitpreisauktion (P^2, Q^2) ist charakterisiert durch

$$\begin{aligned} i \in M \quad &\Longrightarrow \quad P^2_i(b) = 1/\sharp M, \quad Q^2_i(b) = c_i/\sharp M, \\ i \notin M \quad &\Longrightarrow \quad P^2_i(b) = 0, \qquad\quad Q^2_i(b) = 0. \end{aligned}$$

🙂 Das löst den Gleichstand auf, den wir oben vernachlässigt haben:
Gibt es nur einen Höchstbieter, $M = \{i\}$, so bekommt i den Zuschlag.
Gibt es hingegen $\sharp M \ge 2$ Höchstbietende, so wird gleichverteilt gelost.

Formalisierung: gute Eigenschaften

(3) Für Auktionsverfahren (P, Q) wünschen wir uns gute Eigenschaften:

SYM: Symmetrie. Für $b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ und jede Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ gilt

$$\begin{aligned} P_i(b_{\tau 1}, \dots, b_{\tau i}, \dots, b_{\tau n}) &= P_i(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n), \\ Q_i(b_{\tau 1}, \dots, b_{\tau i}, \dots, b_{\tau n}) &= Q_i(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n). \end{aligned}$$

MON: Monotonie. Für jeden Spieler $i \in I$ und je zwei Gebotsvektoren mit $b_i \le b'_i$ und $b_j \ge b'_j$ für $j \ne i$ gilt $P_i(b) \le P_i(b')$ und $Q_i(b) \le Q_i(b')$.

NTR: Neutralität. Für alle Gebote $b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ mit $b_i = 0$ gilt $Q_i(b) = 0$.
Wir erlauben jedoch $P_i(b) > 0$, d.h. das Objekt darf verschenkt werden.

UNA: Einhelligkeit. Aus $b_i > \max_{j \ne i} b_j$ folgt $P_i(b) = 1$.
Gibt es nur einen Höchstbieter, so erhält dieser den Zuschlag.

🙂 Die Erst- und Zweitpreisauktion haben diese guten Eigenschaften.
Hingegen ist Stetigkeit der Funktionen P und Q meist zu viel verlangt.
Für Messbarkeit und Integrierbarkeit genügt uns die obige Monotonie.
Neutralität und Einheilligkeit klären die Extreme. Symmetrie vereinfacht.
Wir setzen im Folgenden diese Eigenschaften als Axiome voraus.

Formalisierung: Wie wird geboten?

(4) Vorgelegt sei das **Auktionsverfahren** (P, Q) mit $P, Q : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Die Spieler haben die zufälligen **Wertschätzungen** $S : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Jeder Spieler $i \in I$ bietet gemäß seiner gewählten **Strategie**

$$B_i \;:\; \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; s_i \mapsto b_i = B_i(s_i).$$

Als Menge seiner Bietstrategien betrachten wir daher

$$\mathcal{B}_i := \left\{\, B : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;\middle|\; B \text{ monoton mit } B(0) = 0 \,\right\}.$$

Gegeben sei ein Strategievektor $B = (B_1, \dots, B_n) : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Zur Wertschätzung $s = S(\omega)$ erwartet Spieler i dann den Nutzen

$$u_i(B \mid s) = s_i P_i(B(s))) - Q_i(B(s)).$$

Das Auktionsverfahren definiert die **stochastische Nutzenfunktion**

$$\tilde{u} \;:\; \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_n \times \Omega \to \mathbb{R}^n_{\geq 0} \;:\; (B, \omega) \mapsto u(B \mid S(\omega)).$$

Als Erwartung erhalten wir die **Nutzenfunktion in Normalform**

$$u \;:\; \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}^n_{\geq 0} \;:\; B \mapsto \mathbf{E}\big[\omega \mapsto u(B \mid S(\omega))\big].$$

Formalisierung: Disintegration

(5) Hierzu wollen wir nun **Bayes–Nash–Gleichgewichte** untersuchen.

Jeder Spieler i kennt seine individuelle Wertschätzung $s_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, aber nicht die Wertschätzungen $S_j : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ der anderen Spieler $j \neq i$. Über diese kann er immerhin Mittelwerte bilden: Sei $p_i(s_i)$ die erwartete Wkt der Zuteilung und $q_i(s_i)$ die erwarteten Kosten für Spieler i.

Wir können dies aus direkt dem Auktionsverfahren (P, Q) berechnen. Zur Erleichterung der Notation schreibe ich dies nur für $i = 1$ aus:

$$p_1(s_1) := \mathbf{E}\big[\, \omega \mapsto P_1\big(\, B_1(s_1),\; B_2(S_2(\omega)), \dots, B_n(S_n(\omega)) \,\big) \,\big]$$
$$= \int_{s_n=0}^{\infty} \cdots \int_{s_2=0}^{\infty} P_1(B_1(s_1), B_2(s_2), \dots, B_n(s_n))\, f_2(s_2)\mathrm{d}s_2 \cdots f_n(s_n)\mathrm{d}s_n$$

$$q_1(s_1) := \mathbf{E}\big[\, \omega \mapsto Q_1\big(\, B_1(s_1),\; B_2(S_2(\omega)), \dots, B_n(S_n(\omega)) \,\big) \,\big]$$
$$= \int_{s_n=0}^{\infty} \cdots \int_{s_2=0}^{\infty} Q_1(B_1(s_1), B_2(s_2), \dots, B_n(s_n))\, f_2(s_2)\mathrm{d}s_2 \cdots f_n(s_n)\mathrm{d}s_n$$

Dies entspricht einer **Disintegration** (I209), hier des Produktmaßes.

Formalisierung: Die Zuteilungswkt p bestimmt die Kosten q.

Angenommen, der Spieler $i \in I$ schätzt den Wert auf $s_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, bietet aber abweichend als wäre der Wert $s \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Sein erwarteter Gewinn ist

$$u_i(s) = s_i\, p_i(s) - q_i(s).$$

Im Gleichgewicht wird der erwartete Gewinn maximiert durch $s = s_i$, Zur Vereinfachung nehmen wir p_i und q_i als stetig differenzierbar an:

$$u_i'(s) = s_i\, p_i'(s) - q_i'(s).$$

Für das Maximum in $s = s_i$ folgt somit $u_i'(s_i) = 0$, also $q_i'(s_i) = s_i\, p_i'(s_i)$. Dies gilt für alle $s_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Wir integrieren dies zu der Kostenfunktion

$$q_i(s_i) = q_i(0) + \int_{t=0}^{s_i} t\, p_i'(t)\,\mathrm{d}t$$

Nach partieller Integration finden wir die Formel

$$\boxed{q_i(s) = s\, p_i(s) - \int_{t=0}^{s} p_i(t)\,\mathrm{d}t.}$$

☺ Diese Formel können wir auch ohne Differenzierbarkeit beweisen.

Formalisierung: Die Zuteilungswkt p bestimmt die Kosten q.

Lemma P2D: Die Zuteilungswkt p bestimmt die Kosten q.

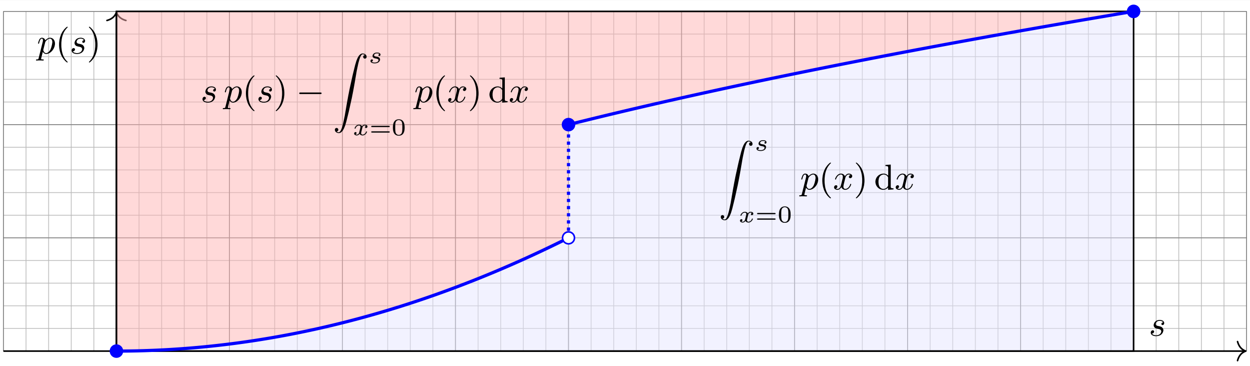
Gegeben seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$. Die folgenden beiden Bedingungen sind äquivalent:

(1) Für alle $s, t \in I$ gilt die Nash–Gleichgewichtsbedingung

$$s\, p(t) - q(t) \le s\, p(s) - q(s).$$

(2) Die Funktion p ist monoton wachsend, und q erfüllt

$$q(s) - q(0) = s\, p(s) - \int_{x=0}^{s} p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } s \in I.$$



Beweis: „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Da p monoton wächst, ist p über jedem kompakten Intervall integrierbar. Auch $q(s) = s\,p(s) - \int_{t=0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}t$ ist dann wachsend. Dies folgt graphisch wie oben oder durch Nachrechnen für $s \le t$ in I:

$$\begin{aligned} q(t) - q(s) &= t\,p(t) - s\,p(s) - \int_{x=s}^{t} p(x)\,\mathrm{d}x \\ &\ge t\,p(t) - s\,p(t) - \int_{x=s}^{t} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=s}^{t} \underbrace{p(t) - p(x)}_{\ge 0}\,\mathrm{d}x \ge 0 \end{aligned}$$

Für alle $s, t \in I$ rechnen wir die Gleichgewichtsbedingung (1) nach:

$$\begin{aligned} \big[s\,p(s) - q(s)\big] - \big[s\,p(t) - q(t)\big] &= \int_{x=t}^{s} p(x)\,\mathrm{d}x - (s-t)p(t) \\ &= \int_{x=t}^{s} p(x) - p(t)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Für $t \le s$ ist der Integrand ≥ 0, somit über $[t,s]$ auch das Integral ≥ 0. Für $t \ge s$ ist der Integrand ≤ 0, somit dennoch das Integral ≥ 0.

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Wir zeigen zunächst die Monotonie von p. Für $s < t$ in I gilt

$$\begin{aligned} s\,p(t) - q(t) &\le s\,p(s) - q(s), \\ t\,p(t) - q(t) &\ge t\,p(s) - q(s). \end{aligned}$$

Die Differenz ergibt $(t-s)p(t) \ge (t-s)p(s)$, somit folgt $p(t) \ge p(s)$.

Wir differenzieren die Hilfsfunktion $h : I \to \mathbb{R} : s \mapsto h(s) = s\,p(s) - q(s)$. Die obigen beiden Ungleichungen ergeben die Abschätzungen

$$(t-s)p(s) \le h(t) - h(s) \le (t-s)p(t).$$

Daraus erhalten wir für alle $s < t$ in I den Differenzenquotienten

$$p(s) \le \frac{h(t) - h(s)}{t - s} \le p(t).$$

Die Funktion p ist monoton und somit stetig in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \smallsetminus A$ bis auf eine abzählbare Ausnahmemenge $A \subset \mathbb{R}$. (Übung: Warum?) In jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \smallsetminus A$ ist somit h differenzierbar mit $h'(x) = p(x)$. Daraus folgt $h(s) = h(0) + \int_{x=0}^{s} p(x)\,\mathrm{d}x$. (Übung: Warum?) $\boxed{\text{QED}}$

Formalisierung: Vereinfachung durch Symmetrie

Beweis der Erlösäquivalenz P2C: Vorgelegt sei ein Gleichgewicht als symmetrische Bietstrategie $B_1 = \dots = B_n = B : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} : 0 \mapsto 0$.

Für jeden Bieter i sei $p_i(s_i) \in [0,1]$ die Zuteilungswkt und $q_i(s_i) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ die erwartete Zahlung bei Wertschätzung s_i. Zunächst gilt $q_i(0) = 0$.

Sei $T_i = \max_{j \ne i} S_j$ mit kumulativer Verteilung $G_i = \prod_{j \ne i} F_j$. Dank Symmetrie gilt $G_i = G := F^{n-1}$. Dank Monotonie folgt $p_i(s_i) = G(s_i)$.

Im Gleichgewicht wird der erwartete Gewinn maximal in $s = s_i$:

$$s_i\, p_i(s) - q_i(s) \le s_i\, p_i(s_i) - q_i(s_i)$$

Dank Lemma P2D gilt demnach:

$$q_i(s_i) = s_i G(s_i) - \int_{t=0}^{s_i} G(t)\,\mathrm{d}t$$

☺ Die rechte Seite hängt nicht mehr vom Auktionsverfahren (P, Q) ab, sondern nur von der (symmetrischen) Verteilung der Wertschätzungen.

☺ Sie gleicht somit dem Erlös der Vickrey–Auktion (Satz P2A). $\boxed{\text{QED}}$

Anwendung auf die Erstpreisauktion

Im prominenten Spezialfall der **Erstpreisauktion** wissen wir zudem, dass der Gewinner der Auktion sein eigenes Gebot zahlt, das heißt:

$$q_i(s_i) = p_i(s_i) B_i(s_i) = G(s_i) B(s_i)$$

Damit können wir die Bietstrategie $B : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ explizit ausrechnen:

$$B(s) = s - \frac{1}{G(s)} \int_{t=0}^{s} G(t)\,\mathrm{d}t$$

Im Vergleich zum wahrheitsgetreuen Bieten $s \mapsto s$ wird hier also ein Spekulationsterm abgezogen: Jeder rational vorausschauende Bieter versucht, sein Gebot zu optimieren, indem er den Preis etwas drückt und so die erwartete Lücke zum zweithöchsten Gebot ausnutzt.

Aufgabe: Jede Wertschätzung sei gleichverteilt auf dem Intervall $[0, M]$.

(1) Berechnen Sie in einer Erstpreisauktion mit genau $n \ge 1$ Bietern die optimale Bietstrategie $B : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ als symmetrisches Gleichgewicht.

(2) Was beobachten Sie für $n \to \infty$, anschaulich also sehr viele Bieter?

Anwendung auf die Erstpreisauktion

Lösung: (1) Wir rechnen alle Zutaten geduldig aus. Für $s \in [0, M]$ gilt:

$$f(s) = \frac{1}{M}$$

$$F(s) = \int_{t=0}^{s} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{s}{M}$$

$$G(s) = F(s)^{n-1} = \frac{s^{n-1}}{M^{n-1}}$$

$$\int_{t=0}^{s} G(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^n}{nM^{n-1}}\right]_{t=0}^{s} = \frac{s^n}{nM^{n-1}}$$

$$B(s) = s - \frac{1}{G(s)}\int_{t=0}^{s} G(t)\,\mathrm{d}t = s - \frac{s}{n} = \frac{n-1}{n}s$$

🙂 Jeder Spieler i bietet in dieser Erstpreisauktion nicht wahrheitsgetreu seine Wertschätzung s_i, sondern nur den Bruchteil $B_i(s_i) = \frac{n-1}{n}s_i < s_i$. Bei $n = 1$ ist er allein und bietet 0. Bei $n = 2$ bietet er die Hälfte von s_i. Bei $n = 3$ Spielern bietet er nur zwei Drittel von s_i, usw.

Anwendung auf die Erstpreisauktion

(2) Für $n \to \infty$ gilt die Konvergenz $B_i(s_i) = \frac{n-1}{n}s_i \nearrow s_i$:
Die optimale Bietstrategie nähert sich der Offenbarung an.

🙂 Das ist anschaulich plausibel: Bei vielen Bietern lohnt es sich kaum, den Preis zu drücken, da schnell die Gefahr droht, überboten zu werden.

🙂 Diese Rechnung illustriert quantitativ mit ganz konkreten Zahlen ein Prinzip, das wir zuvor bereits qualitativ anschaulich erahnt haben: In der Zweitpreisauktion ist es ganz einfach eine dominante Strategie, ehrlich zu bieten. In der Erstpreisauktion hingegen muss jeder Bieter notwendig spekulieren. Er sucht dabei ein Gleichgewicht zwischen zwei widerstrebenden Tendenzen: Einerseits will er seine Wkt maximieren, das Objekt zu erwerben, andererseits will er seine Zahlung minimieren.

☹ Dazu benötigt jeder Spieler genaue Daten, zum Beispiel die Anzahl der konkurrierenden Mitbieter, die Verteilung ihrer Wertschätzung, usw.

☹ Anschließend muss er diese Daten rational verarbeiten, dabei muss er voraussetzen, dass auch seine Konkurrenten dies tun, usw. Das sind, wie wir wissen, sehr starke Annahmen, und sie sind leider selten erfüllt.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Beispiel: Versteigert wird ein Euro. Das höchste Gebot gewinnt. Achtung: Gezahlt werden das höchste *und* das zweithöchste Gebot. Geboten wird in ganzen Cent, überboten um mind. 1¢, höchstens 10¢.

Zugegeben, dieses Auktionsverfahren ist etwas sonderbar, aber es ist ein mögliches Verfahren, und der Auktionator hat es nun mal gewählt. Mit öffentlich ausgerufenen Geboten ist die Auktion mitunter sehr lebhaft, es eignet sich bestens als mathematisches Partyspiel… je nach Party. Dieses berühmt-berüchtigte Spiel stammt von Martin Shubik: *The Dollar Auction Game*, Journal of Conflict Resolution 15 (1971) 109–111.

Aufgabe: Sammeln Sie praktische Erfahrung, spielen Sie dieses Spiel! Was beobachten Sie empirisch im Experiment? Was sagt die Theorie?

Lässt sich Vickreys Erlösäquivalenz auf diese Auktion anwenden? Welche der Voraussetzungen sind (vermutlich) erfüllt, welche nicht?

⚠ Bei diesem sozialen Experiment können Sie Geld gewinnen, wenn Sie geschickt sind, aber auch Geld verlieren, wenn Sie ungeschickt sind.

☺ **Einverständnis:** Mit Ihrer Teilnahme akzeptieren Sie die Spielregeln.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Wir haben dieses Spiel zum Ende der Vorlesung am 18.07.2018 gespielt, ohne vorherige Erklärung, zum Staunen und Lernen aller Beteiligten! Wer dabei war, spricht vermutlich noch länger verwundert davon; alle anderen verweise ich auf weniger lebhafte Quellen. Shubik schreibt:

In playing this game, a large crowd is desirable. Furthermore, experience has indicated that the best time is during a party when the spirits are high and the propensity to calculate does not settle in until at least two bids have been made.

Es gelingt auch in einer Mathematikvorlesung mit etwa 30 Teilnehmern. Einmal in Fahrt wird es lustig, lebhaft, emotional, mitunter verbissen. Zwei zusätzliche Einschränkungen sind erfahrungsgemäß sinnvoll:

- Jedes Überbieten wird auf maximal zehn Cent beschränkt, um die Dynamik der Interaktion möglichst lange zu erhalten.
- Man fixiert ein Höchstgebot, hier zehn Euro in der Gesamtsumme, um allzu große Eskalation und finanziellen Schaden zu vermeiden.

Eine ausführliche Diskussion bietet László Mérö: *Moral Calculations*, Springer New York 1998. *Optimal entschieden?*, Springer Basel 1998.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Shubiks *Versteigerung eines Euro* ist experimentell gut untersucht. Die empirischen Befunde konsolidieren unser Miniaturexperiment:

- Bei 10 oder mehr Spielern kommt das Spiel recht sicher in Gang. Einmal in Fahrt, endet es meist oberhalb des Objektwerts 1€.
- In mehr als der Hälfte aller Fälle liegt der Erlös deutlich darüber. Manche Spieler setzen alles Geld, das sie gerade bei sich haben.
- Im Durchschnitt bieten Männer etwas mehr als Frauen, weil bei Männern die Eskalation leichter auszulösen ist.

Dieses Spiel gilt daher als ein Musterbeispiel für irrationales Verhalten. Dies wird noch gesteigert, wenn das Objekt ein konkreter Gegenstand mit geringem, aber bekanntem Wert ist. Die Bietspirale überschreitet schnell den objektiven Wert, der bald völlig aus dem Blick gerät.

This simple game is a paradigm for escalation. Once the contest has been joined, the odds are that the end will be a disaster to both. When this is played as a parlor game, this usually happens. [. . .] A total of payments between three and five dollars is not uncommon.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Auch die psychologischen Aspekte wurden eingehend untersucht. Typische Phänomene zeigten sich bereits in unserem Experiment:

- Zu Beginn überwiegt der Anreiz, leicht Geld zu verdienen. Im weiteren Verlauf nimmt die Bedeutung des Geldes schnell ab.
- Die Schuld der Eskalation wird meist dem Gegner zugeschrieben; der habe irrational agiert, man selbst habe darauf rational reagiert. Es kommt zu Wortgefechten, wenn die Möglichkeit hierzu besteht.
- Am Ende wollen Teilnehmer vor allem den Schaden begrenzen, aber nicht für dumm oder schwach gehalten werden (Selbstwert), das Gesicht wahren oder Zuschauern imponieren (Image, Prestige), Überlegenheit beweisen oder dem Gegner schaden (Bestrafung).

Manche Versuchspersonen zeigen im Spielverlauf Stressreaktionen (Adrenalinschub), die Bietspirale setzt sie emotional unter Druck.

Die starken Emotionen der Eskalation schränken die Rationalität ein, Einsicht in die Konsequenzen des eigenen Handelns ist erschwert. Selbst erfahrene Spieler entgehen oft nicht der Eskalationsfalle.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomik

Viele Spieler verkennen ihre Mitschuld und die Symmetrie des Spiels. Hilfreich wäre ein Perspektivwechsel: Wie sieht das eigene Verhalten aus Sicht des Gegenübers aus? Natürlich genauso! Erst diese ehrliche und selbstkritische Antwort eröffnet die Einsicht, dass man selbst dem Gegner in der Eskalation kaum andere Handlungsoptionen lässt.

Wie könnte eine gemeinsame / kooperative / konstruktive Lösung aussehen? Wie können Spieler die Bietspirale durchbrechen?

Beide könnten sich eine gemeinsame Höchstgrenze setzen, etwa 50 Cent, und bei eventuellem Gleichstand das Objekt verlosen oder teilen. (Gleichstand haben die obigen Regeln perfiderweise ausgeschlossen.)

Die Spieler könnten vereinbaren, den gesamten Gewinn bzw. Verlust zu teilen, also eine Koalition gegen den Verkäufer bilden. (Bieterkartelle sind andernorts illegal, hier jedoch scheinen sie moralisch geboten.)

Kooperation erfordert Absprache und gegenseitiges Vertrauen; gerade bei größerer Teilnehmerzahl ist das riskant (Streikbrecher). Insbesondere erfordert eine Koalition die schnelle und präzise Analyse, und zudem effiziente Kommunikation, bevor die Eskalation losbricht.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomik

Wer es noch nicht erlebt hat und zum ersten Mal hört, wird behaupten: „Das gibt es nur hypothetisch, in der Spieltheorie, nicht in Wirklichkeit!“ Erstaunlich viele Alltagssituationen folgen ganz ähnlichen Mechanismen; ihre empirische Untersuchung ist Grundlage der Verhaltensökonomik.

Streik: Eine Verhandlungslösung ermöglicht Ausgleich und Stabilität, Eskalation und Kampf hingegen vernichten Werte: Der Verdienstausfall für die Arbeitnehmer übersteigt rasch den geforderten Zugewinn, ebenso ist der Schaden für den Arbeitgeber schnell größer als die Forderungen.

Dennoch versucht jede Seite, die Eskalation etwas länger durchzuhalten, weil der Verlierer sonst für seinen Verlust gar keinen Ersatz bekäme. Die Debatte verlagert sich von Geld- zu Grundsatzfragen. Am Ende geht es nur noch um Prestige: Wer zeigt Schwäche und muss nachgeben?

In diesem verfahrenen Dilemma kann ein geschickter Vermittler helfen. Eine bewährte Strategie ist, die Debatte auf eine neue, unverbrauchte Grundsatzfrage zu lenken. Hierüber können sich beide Parteien leicht einigen, und beide können den Streik ohne Gesichtsverlust beilegen.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomik

Rüstungsspirale während des kalten Krieges und ähnlicher Konflikte, etwa Nahost-Konflikt, allgemein „Erbfeindschaft“ zwischen Nachbarn. Auch das deutsch-französische Verhältnis bis zum zweiten Weltkrieg wurde so bezeichnet, das Ende markierte 1963 der Élysée–Vertrag.

Vietnamkrieg: Die Reden des US-Präsidenten Lyndon B. Johnson von 1964-68 verschieben sich ebenso von positiven Zielen wie „Demokratie, Freiheit, Gerechtigkeit“ hin zu „Kommunismus bekämpfen“ (Feindbild) bis schließlich „Ehre und Stärke des Vaterlandes beweisen“ (Selbstbild).

Schlägerei: Keiner will weitere Schläge kassieren, aber jeder will dem Gegner noch einen letzten verpassen; der reagiert umgekehrt genauso.

Rosenkrieg: Verbitterte Partner machen einander das Leben zur Hölle; verfilmt als *The War of the Roses* (1989) und *Mr. & Mrs. Smith* (2005).

Kunstmarkt: Mitunter entbrennen Bietergefechte bei Kunstauktionen. Ist das rational? Vielleicht, doch höchstens bis die Kunstblase platzt.

Tulpenwahn: Durch Knappheit und Spekulation wurden 1637 teuerste Tulpensorten für $10\,000$ Gulden pro Zwiebel verkauft (etwa Hauspreis).

Abonnementfalle: Der Drucker ist billiger als das Tintenpack.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomik

Concorde-Falle: Die britisch-französische *Concorde* war das erste Überschallflugzeug für Passagiere im Linienflugdienst, betrieben von 1976 bis 2003. Früh war abzusehen, dass das Unternehmen niemals Gewinn machen würde, dennoch wurde das hochpolitische Projekt aus Gründen des nationalen Prestiges fortgesetzt. Slogan: „Too late to stop.“ Die gegenteilige Warnung: „Don’t throw good money after bad [money]!“

Großprojekte: Bei Großprojekten wie dem Bahnhof Stuttgart 21 wird oft argumentiert, bisherige Ausgaben verbieten Aufgabe oder Alternativen. Üblicherweise explodieren die Kosten und die Rentabilität schwindet, doch bisherige Investitionen müssen mit weiteren „gerettet“ werden. Am Ende geht es nur noch um Prestige, durchhalten und Stärke zeigen.

Reformen: Auch Bildungsreformen (G8, Bachelor-Master) werden als unumkehrbar dargestellt. Die Mechanismen ähneln der Concorde-Falle: Selbst wenn das Scheitern absehbar ist und schließlich manifest wird, das Projekt wird aus Gründen des politischen Prestiges durchgezogen. Nicht die Einsicht, nur ein Generationenwechsel erlaubt die Umkehr.

Diese Themen sind zugegeben kontrovers, die Mechanismen bleiben.

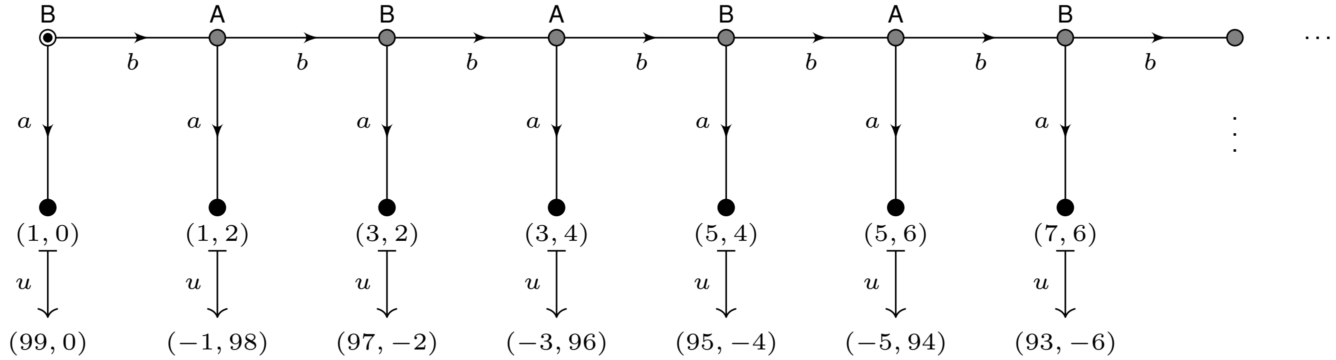
Analyse: Versteigerung eines Euro

Was sagt die Spieltheorie dazu? Nach den empirisch-psychologischen Erläuterungen wollen wir diese Auktion als Spiel genauer untersuchen.

Aufgabe: (1a) Formalisieren Sie diese Auktion als extensives Spiel! Vereinfachungen: Es gibt nur zwei Bieter. Das Startgebot ist $(1, 0)$ Cent. Überboten wird abwechselnd, jeweils minimal um genau einen Cent. (1b) Finden Sie zwei teilspielperfekte Gleichgewichte! (1c) Sind das alle?

(2) Variante: Die Auktion endet bei $(1000, 1000)$ mit Halbierung. Das garantiert Endlichkeit und wahrt halbwegs die guten Sitten.

Lösung: (1a) Die Auktionsregeln definieren folgenden Spielbaum:



Analyse: Versteigerung eines Euro

Das erinnert an das Hundertfüßler-Spiel, siehe Seite J207. Glücklicherweise verfügen wir über eine effiziente Formalisierung.

Die Spielermenge ist hier vereinfacht $I = \{\, 1 = \text{Alice},\ 2 = \text{Bob} \,\}$. Wir formalisieren den Spielbaum durch $X = \{\, b^n, b^n a, b^\infty \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

Wurzel ist das Wort $b^0 = \emptyset$, und $b^\infty = bbb\ldots$ ist die konstante Folge. Aktive Zustände $X^\circ = \{\, b^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, terminal $\partial X = \{\, b^n a, b^\infty \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

Die Auszahlung $u : \partial X \to \bar{\mathbb{R}}^2$ ist wie erklärt $u(b^\infty) = (-\infty, -\infty)$ sowie

$$u(b^n a) = \begin{cases} (99 - n, -n) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (-n, 99 - n) & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Aktionsmenge für Spieler $i \in I$ im aktiven Zustand $x = b^n$ ist

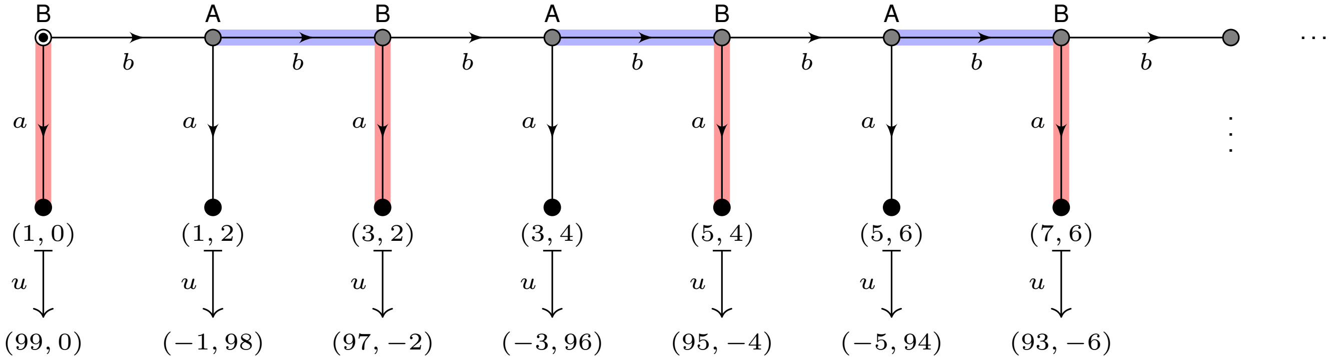
$$A_x^i = \begin{cases} \{a = \text{aussteigen}, b = \text{überbieten}\} & \text{falls } i \equiv n \bmod 2, \\ \{\text{warten}\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fortsetzung $f : \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \to X$ ist kanonisch $f(x, w) = x * w$. Damit ist das dynamische Spiel $\Gamma = (X, u, f)$ vollständig beschrieben.

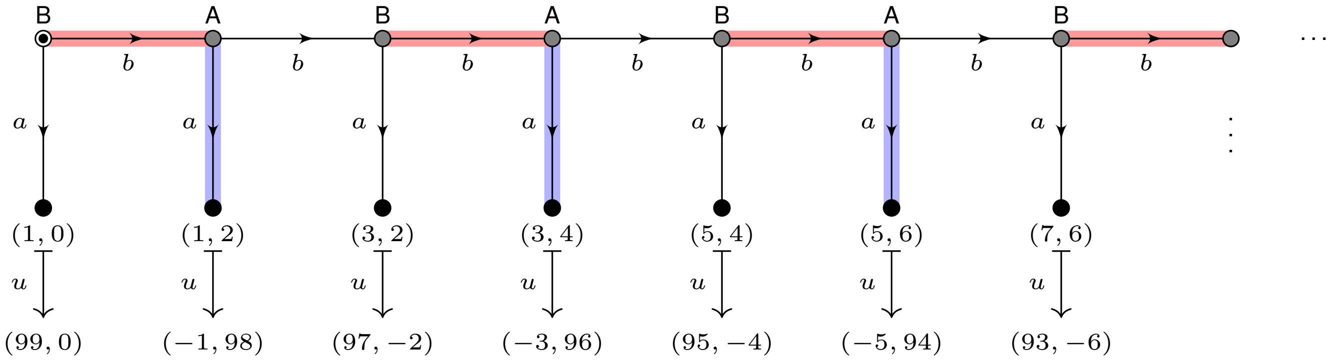
Analyse: Versteigerung eines Euro

(1b) Wir vermuten leicht zwei teilspielperfekte Gleichgewichte.

Erste Lösung: Alice überbietet immer, Bob gibt immer nach.



Zweite Lösung: Bob überbietet immer, Alice gibt immer nach.



Analyse: Versteigerung eines Euro

(1b) Sind dies tatsächlich teilspielperfekte Gleichgewichte? Ja!

Beweis: Wir prüfen zunächst den ersten Vorschlag, dieselbe Analyse gelingt anschließend für den zweiten Vorschlag mit vertauschten Rollen.

Zunächst kann Alice sich nicht verbessern, nur strikt verschlechtern. Aber auch Bob kann sich nicht verbessern, nur strikt verschlechtern.

⚠ Hierzu muss man alle Alternativen auflisten und vergleichen: Versuchen Sie es als Übung in Geduld und Sorgfalt!

☹ Das Prinzip der einmaligen Abweichung J2D ist hier zunächst nicht direkt anwendbar, da mit $-\infty$ nicht alle Auszahlungen in $\mathbb{R}$ liegen.

☺ Für Auszahlungen in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty] \cong [-1, 1]$ kompaktifizieren wir die Zahlengerade $\mathbb{R}$, die Auszahlungen sind stetig, und das Prinzip der einmaligen Abweichung ist formal wieder in Kraft.

☺ Das Prinzip der einmaligen Abweichung vereinfacht die Analyse wie immer enorm! Damit wird die Diskussion aller Fälle ein Kinderspiel.

⚠ Bei fehlender Absprache ist nicht festgelegt und keineswegs klar, welche der beiden Gleichgewichtsstrategien gespielt wird / werden soll.

Analyse: Versteigerung eines Euro

(1c) Haben wir mit diesen beiden alle Gleichgewichte gefunden? Ja!

Beweis: Ewiges Überbieten $b^\infty = bbb\dots$ ist sicher kein Gleichgewicht: Jeder Spieler kann sich, sobald er zieht, durch Aussteigen verbessern! In jedem Gleichgewicht muss mindestens ein Spieler einmal aussteigen.

- Angenommen, Bob steigt beim Gebot $(z+1, z)$ aus.
  Per Rückwärtsinduktion finden wir dann *davor* die erste Lösung, und zwar eindeutig: Alice überbietet immer, Bob gibt immer nach.
- Angenommen, Alice steigt beim Gebot $(z, z+1)$ aus.
  Per Rückwärtsinduktion finden wir dann *davor* die zweite Lösung, und zwar eindeutig: Bob überbietet immer, Alice gibt immer nach.

Jetzt kommt der Clou: Dieses Argument gilt genauso für *jedes* Teilspiel! Daher ist jedes teilspielperfekte Gleichgewicht entweder die erste oder die zweite Lösung, weitere Gleichgewichte gibt es nicht!

☺ Damit kennen wir alle teilspielperfekten Gleichgewichte des Spiels; diese beiden beschreiben / erklären das mögliche rationale Verhalten.

Analyse: Versteigerung eines Euro

☺ Damit haben wir diese Versteigerung spieltheoretisch formalisiert und analysiert — und verstehen so das mögliche rationale Verhalten. Zunächst sind die Gleichgewichte nicht offensichtlich, doch unsere vage Ahnung können wir nun beweisen, auf Grundlage der Formalisierung.

Interessanterweise gibt es genau zwei Gleichgewichte, das war auf den ersten Blick nicht sofort ersichtlich. Beide Gleichgewichte zeigen strikt entgegengesetzte Rollenverteilungen beim Überbieten bzw. Nachgeben.

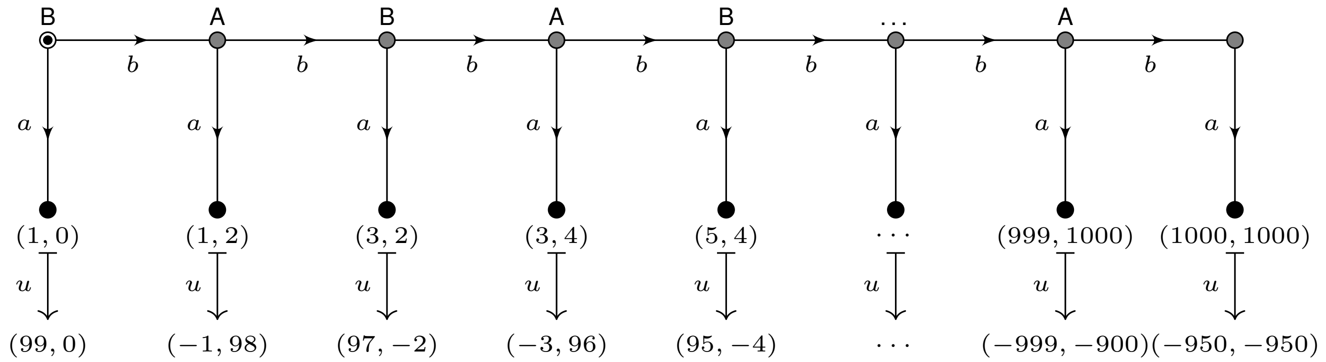
☺ Das erklärt auch das beobachtete (irrationale) Verhalten der Spieler, zumindest teilweise: Jeder Spieler wählt / wünscht / erhofft egozentrisch das ihm vorteilhafte Gleichgewicht. Leider sind beide Gleichgewichte vollkommen inkompatibel und führen zur beobachteten Bietspirale.

Auch im Rückblick hält jeder Spieler sein eigenes Verhalten für rational, das des Gegenübers jedoch für irrational. Das ist nachvollziehbar vom eigenen voreingenommenen Standpunkt „des“ rationalen Verhaltens, doch leider sieht der Kontrahent das symmetrisch entgegengesetzt.

☺ Die logische Falle liegt (vor allem) in der mangelnden Eindeutigkeit! Sozio-psychologische Phänomene kommen noch verstärkend hinzu.

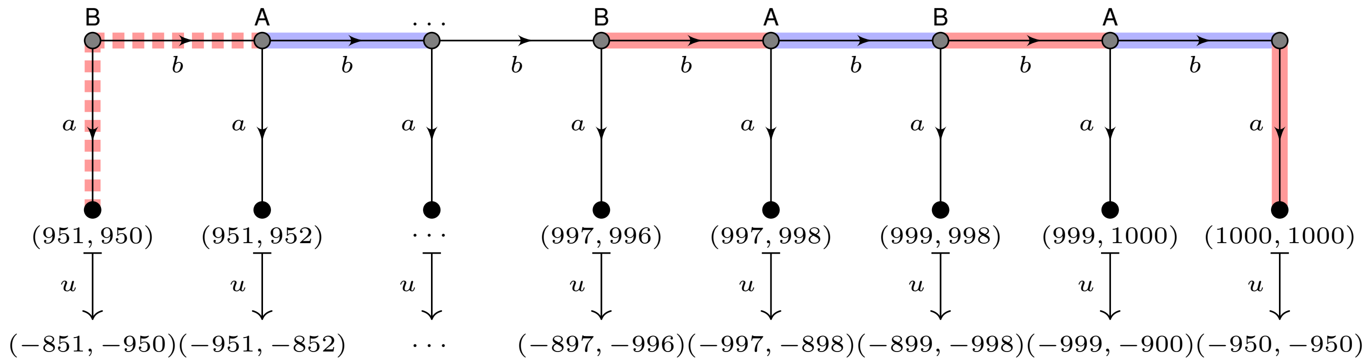
Analyse: Versteigerung eines Euro

(2a) Wir erhalten nun wirklich ein Tausendfüßler-Spiel (vergleiche J207):



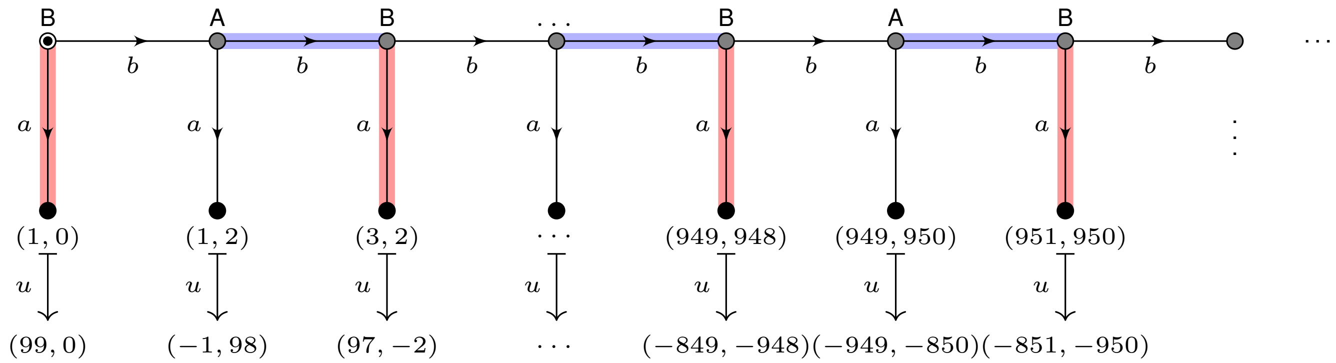
🙂 Mit dem Auktionator ist dies ein Drei-Personen-Nullsummenspiel.

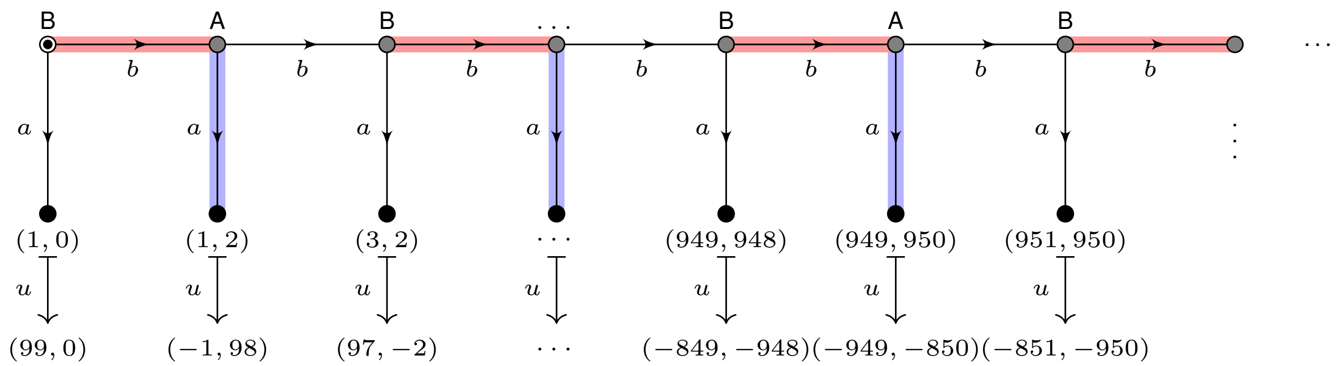
(2b/c) Dieses Spiel ist endlich, wir nutzen Rückwärtsinduktion J1D:



Beispiel: Versteigerung eines Euro

Beim Stand $x = (951, 950 \mid 2)$ ist Bob indifferent zwischen a und b.
Bobs Wahl bestimmt eindeutig alle Aktionen *vor* diesem Zustand:





🙂 Auch das endliche Spiel hat zwei entgegengesetzte Gleichgewichte.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen eine eng begrenzte, sehr kurze Auktion:
Versteigert werden 4 Euro. Alice und Bob bieten abwechselnd in Euro: Alice beginnt mit dem Startgebot $(1, 0)$, Bob kann auf $(1, 2)$ erhöhen, Alice auf $(3, 2)$ usw. bis $(7, 8)$ und zuletzt schließlich $(8, 8)$ Gleichstand. Wird nicht weiter erhöht, zahlen *beide* ihr zuletzt abgegebenes Gebot. Das Objekt der Auktion, die 4 Euro, gehen an den Höchstbietenden. Beim Gleichstand $(8, 8)$ wird geteilt, und beide bekommen 2 Euro.

(1) Zeichnen Sie den Spielbaum Γ mit allen relevanten Informationen.

(2) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$.

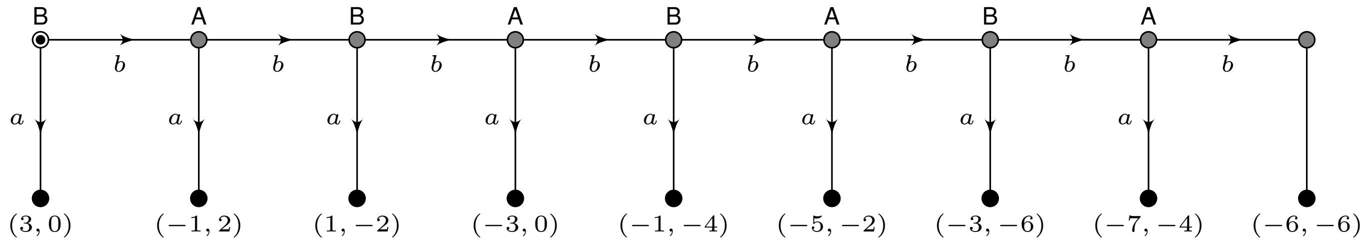
(3) Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt erreichbar?

(4) Untersuchen Sie zusätzlich auch gemischte Strategien.

Das ist eng angelehnt an unsere vorherige Untersuchung. Der Spielbaum ist nochmal wesentlich kleiner und übersichtlicher. Dieses Beispiel dient uns hier als einfache und schöne Illustration.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

Lösung: (1) Die Aufgabenstellung codiert folgenden Spielbaum:

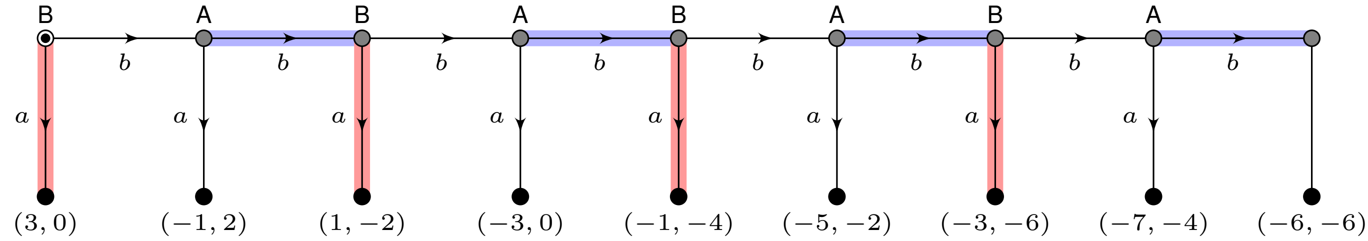


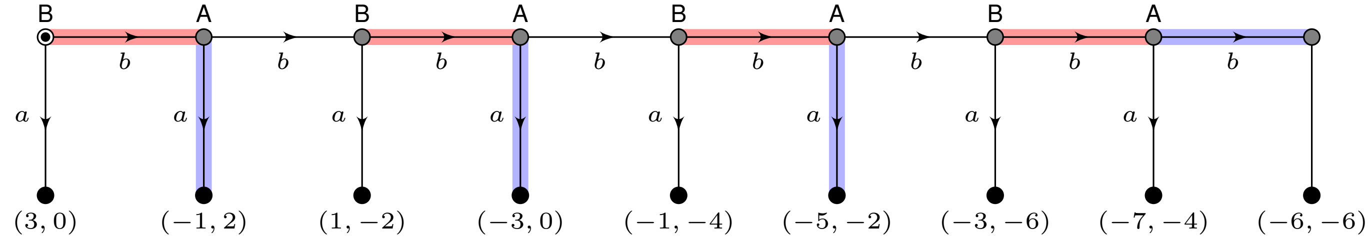
Formal ist dies der Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, \dots b^7a, b^8\}$.
Auf den terminalen Zuständen $\partial X = \{a, ba, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$ gelten die angegebenen Auszahlungen gemäß Aufgabenstellung.
In den aktiven Zuständen $X^\circ = \{\emptyset, b, b^2, \dots, b^7\}$ sind abwechselnd Bob und Alice am Zug, jeweils mit Aktionsmenge $A^i_x = \{a, b\}$.

Diese Fragestellung übt die Übersetzung vom Text zum Baum und dann zu den Gleichgewichten. Das ist der kritische Übergang von der verbal-prosaischen Beschreibung zur formal-algebraischen Darstellung. Erst die sorgfältige Formalisierung ermöglicht die Analyse. Sie enthüllt auch eventuelle Lücken oder Widersprüche in der Spielbeschreibung.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

(2) Wir finden genau zwei teilspielperfekte Gleichgewichte:





🙂 Dies ist eine vereinfachte Variante der Versteigerung eines Euro. Wir konstruieren alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion J1D:

Im letzten Zug entscheidet Alice immer für b. Im vorletzten Zug ist Bob indifferent zwischen a und b. Jede dieser beiden Wahlen führt dann eindeutig per Rückwärtsinduktion zu dem angegebenen Gleichgewicht.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

(3) Die einzigen Gleichgewichtsauszahlung sind $(3, 0)$ und $(-1, 2)$.

Es gibt genau zwei Gleichgewichte, tragischerweise sind beide von Anfang an entgegengesetzt. Alice wünscht die Auszahlung $(3, 0)$ und Bob die Auszahlung $(-1, 2)$. Das erklärt das empirisch beobachtete (irrationale) Verhalten der Spieler, zumindest teilweise: Jeder Spieler wählt / wünscht / erhofft egozentrisch das ihm vorteilhafte Gleichgewicht.

(4) Im letzten Zug muss Alice b spielen, denn dies dominiert a strikt. Im vorletzten Zug kann Bob eine gemischte Strategie $s_t = (1-t)a + tb$ mit $t \in [0, 1]$ spielen. Für $t < 2/3$ finden wir das erste Gleichgewicht, für $t > 2/3$ das zweite, wie zuvor per Rückwärtsinduktion.

Bei $t = 2/3$ ist Alice indifferent im vorvorletzten Zug. Auch sie kann dann eine gemischte Strategie spielen, usw. Die Erweiterung zu gemischten Strategien beschert uns unendlich viele weitere Gleichgewichte.

Wenn Sie möchten, führen Sie dies als Übung genauer aus!

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

Aufgabe: Alice und Bob erben bis zu 10 Mio Euro. Das Testament bestimmt folgendes Verfahren: Der Notar schlägt Alice die Auszahlung $(1, 1)$ vor, in Mio Euro, der Rest geht als Spende an wohltätige Zwecke. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(0, 3)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Alice $(2, 2)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(1, 4)$ vor, usw. Zustimmung entscheidet jeweils endgültig. Bei Ablehnung wird dem Ablehnenden eine Mio subtrahiert und dem anderen zwei Mio addiert. Das geht so weiter bis zum letzten Vorschlag $(5, 5)$, der ungefragt entschieden wird.

(1) Zeichnen Sie den Spielbaum Γ mit allen relevanten Informationen.

(2) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$.

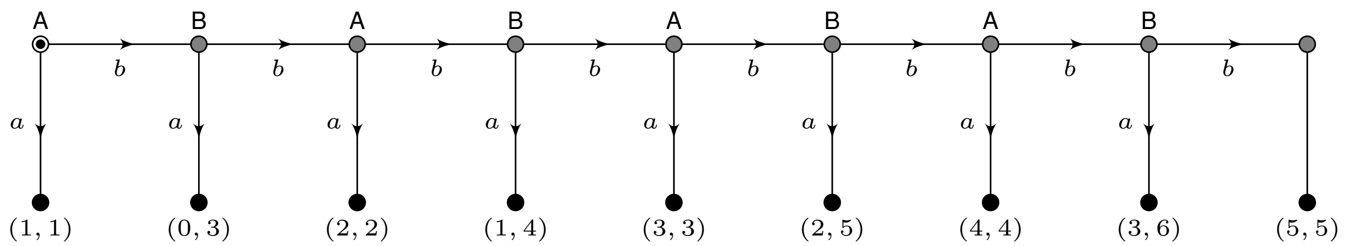
(3) Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt erreichbar?

(4) Untersuchen Sie zusätzlich auch gemischte Strategien.

☺ Das ähnelt auf den ersten Blick der vorigen Auktion, doch die genauere Analyse zeigt ein anderes, überraschendes Verhalten.

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

Lösung: (1) Die Aufgabenstellung codiert folgenden Spielbaum:

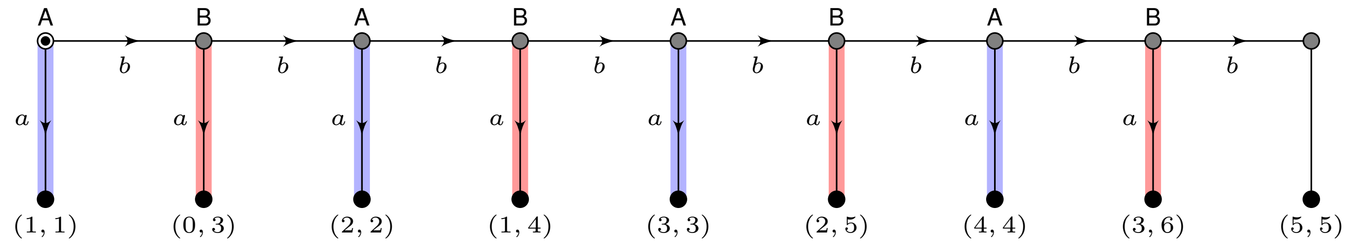


Formal ist dies der Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, \dots b^7a, b^8\}$. Auf den terminalen Zuständen $\partial X = \{a, ba, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$ gelten die angegebenen Auszahlungen gemäß Aufgabenstellung. In den aktiven Zuständen $X^\circ = \{\emptyset, b, b^2, \dots, b^7\}$ sind abwechselnd Alice und Bob am Zug, jeweils mit Aktionsmenge $A_x^i = \{a, b\}$.

☺ Diese Fragestellung übt die Übersetzung vom Text zum Baum und dann zu den Gleichgewichten. Das ist der kritische Übergang von der verbal-prosaischen Beschreibung zur formal-algebraischen Darstellung. Erst die sorgfältige Formalisierung ermöglicht die Analyse. Sie enthüllt auch eventuelle Lücken oder Widersprüche in der Spielbeschreibung.

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

(2) Wir finden genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht:



Wir konstruieren alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion (J1D):

- Im letzten Zug muss Bob akzeptieren (a).
- Im vorletzten Zug muss demnach Alice akzeptieren (a).
- Im vorvorletzten Zug muss demnach Bob akzeptieren (a), usw.

Egal wer am Zug ist, jeder stimmt dem aktuellen Angebot zu.

☺ Diese Konstruktion ist leicht. Der Satz von Zermelo J1D garantiert: Dies ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, und zudem das einzige.

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

(3) Die einzige Gleichgewichtsauszahlung ist demnach $(1, 1)$:
Jeder bekommt nur eine Million, acht Millionen werden gespendet.

(4) Wenn wir gemischte Strategien zulassen, erhalten wir dasselbe Ergebnis: Die oben genannten Aktionen sind jeweils strikt dominant.

☺ Sie kennen analoge Fälle aus zahlreichen Beispielen und Übungen, vom Gefangenendilemma über diverse ähnliche soziale Dilemmata bis hin zu dynamischen Spielen wie diesem oder weiteren Varianten des Hundertfüßlerspiels. Wenn man es recht bedenkt, ist das Ergebnis doch immer etwas überraschend, beim ersten Kontakt wirkt es sogar paradox:

Mit Kooperation könnten beide Spieler wesentlich besser abschneiden. Doch hier ist Zusammenarbeit kein Gleichgewicht: Die Spieler können innerhalb dieses Spiels nicht kommunizieren und bindende Absprache treffen. Daher greift allein die individuelle Gewinnmaximierung, kurz Gier: Rückwärtsinduktion ergibt das obige Gleichgewicht als einzige Lösung.

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

Wir diskutieren in diesem Kapitel die Grundlagen der Auktionstheorie. Unsere praktischen Beispiele und theoretischen Modelle sind einfach, wir können sie noch mit vertretbaren Mitteln untersuchen und verstehen. Zum Kontrast möchte ich realistische Auktionen zumindest skizzieren, um finanzielle Größenordnung und juristische Sorgfalt zu illustrieren.

Eine zentrale Anwendung von Auktionen sind die staatliche Vergabe von Aufträgen und Lizenzen. Wir betrachten insbesondere Mobilfunklizenzen, denn diese sind sowohl finanziell als auch politisch höchst relevant. Die damit betraute Bundesnetzagentur schreibt hierzu 2019:

Deutschland soll Weltspitze bei der digitalen Infrastruktur und Leitmarkt für 5G werden. Die neue Mobilfunkgeneration 5G soll die Entwicklung innovativer Dienste und Anwendungen (Industrie 4.0, automatisiertes Fahren, Internet der Dinge) fördern. Dafür werden Frequenzen frühzeitig und bedarfsgerecht bereitgestellt, damit Deutschland bei diesem Technologiesprung voranschreitet.

Regeln für die Durchführung des Verfahrens (Auktionsregeln) zur Vergabe von Frequenzen in den Bereichen 2 GHz und 3,6 GHz
`www.bundesnetzagentur.de/SharedDocs/Downloads/DE/Sachgebiete/Telekommunikation/Unternehmen_Institutionen/Frequenzen/OffentlicheNetze/Mobilfunk/DrahtloserNetzzugang/Mobilfunk2020/20181126_Entscheidungen_III_IV.pdf`

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

Interessant ist hierbei bereits die doppelte Zielsetzung: Einerseits sollen gewisse technische Entwicklungen gefördert werden, andererseits hofft der Finanzminister auf Einnahmen in Milliardenhöhe. Die Abwägung ist schwierig, denn vermutlich ist nicht beides ganz und zugleich möglich.

Die 5G Auktion 2019: Versteigert wurden 41 Frequenzblöcke in den Bereichen 2 GHz und 3.6 GHz. Das mehrstufige Auktionsverfahren lief vom 19.03. bis 12.06.2019 in Mainz. Das Bieten erstreckte sich über 497 Runden und brachte einen Gesamterlös von knapp 6.6 Milliarden Euro.

Zugelassen waren neben den bisherigen Anbietern Deutsche Telekom, Vodafone, Telefónica auch als Neueinsteiger die Drillisch Netz AG (1&1). Alle vier Bieter haben erfolgreich geboten und erhalten Frequenzen. Dafür zahlen sie jeweils 2.17, 1.88, 1.42 bzw. 1.07 Milliarden Euro.

Der Erlös liegt deutlich höher als die erwarteten drei bis fünf Milliarden. Die 4G-Auktion 2015 brachte knapp 5.1 Milliarden. Ein möglicher Grund für die Steigerung: Statt drei nahmen diesmal mit Drillisch vier Bieter teil. Das erhöhte den Druck auf die Bieter. Konkurrenz belebt das Geschäft.

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

„Die Telekom hat das Spektrum erhalten, das sie wollte“, sagt ein Sprecher des Konzerns. Trotzdem hinterlasse die Auktion einen bitteren Nachgeschmack. „Das Ergebnis ist ein Dämpfer für den Netzausbau“, so der Sprecher weiter. „Auch diesmal ist das Spektrum in Deutschland viel teurer als in anderen Ländern. Das Geld für die Auktion fehlt den Netzbetreibern in Deutschland.“ (Süddeutsche Zeitung, 12.06.2019)

Der letzte Satz ergibt ökonomisch wenig Sinn: Natürlich fehlt das Geld, das man ausgibt. Deshalb sollte jeder seine Ausgaben gut bedenken. Diese Aussage ist politisch gemünzt und spielt auf die obige doppelte Zielsetzung an: Die Netzbetreiber sollen die Frequenzen ersteigern und anschließend beim Ausbau zusätzliche vertragliche Auflagen erfüllen.

Die ambitionierte politische Zielsetzung, die technischen Entwicklungen der nächsten Jahre, zudem alle ökonomischen Chancen und Risiken ergeben eine hochkomplexe Entscheidungslage – für alle Beteiligten! Die optimistische Hoffnung und auch die bisherige Erfahrung ist, dass eine gut konstruierte Auktion hierzu einen „fairen“ Preis ermitteln kann.

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

Die Debatte über den „fairen“ Preis wird wohl noch länger anhalten. Natürlich erhofft der Staat als Auktionator möglichst hohe Einnahmen, genau dazu hat er ja das aufwändige Auktionsverfahren konstruiert. Zudem kommen noch politische Erwartungen und Forderungen.

Natürlich beklagen die Unternehmen als Bieter die hohen Preise, doch alle sind vermutlich hochgradig rational und professionell und haben sich daher ihre Gebote sehr genau überlegt. Aus Erfahrung wissen wir: Sie verstehen ihr Geschäft.

Ein salomonisches Urteil oder eine perfekte Gerechtigkeit wird es in Anbetracht der gegensätzlichen Ziele kaum geben. Niemand kennt alle Daten, Informationen und Überlegungen, die zu einer solchen zentralen Entscheidung nötig wären.

Umso erstaunlicher ist es, dass Auktionen hierzu praktikable Lösungen anbieten und gangbare Kompromisse erschaffen. Aus der Sicht der angewandten Spieltheorie sind Auktionen daher zu einem weitverbreiteten Erfolgsmodell aufgestiegen.

Bemerkenswert ist, dass das Verfahren so extrem ausgefeilt ist.
Es geht über 497 Bietrunden und dauert insgesamt 12 Wochen.

Die Auktionsregeln legen genau fest, wie versteigert wird.
Es ist daher wichtig, diese vor der Durchführung zu kennen,
so dass alle Bieter sich gründlich darauf vorbereiten können.
Eine rationale Bietstrategie erfordert viel Zeit und große Sorgfalt.

Entsprechend der großen Bedeutung waren die Regeln sehr detailliert und recht kompliziert. Die Unterlagen umfassen 174 Seiten, ich habe sie oben verlinkt. Davon widmen sich über 100 Seiten der ausführlichen Begründung, warum die Vergaberegeln gerade so gewählt wurden.

Alle Bieter (als Vertreter der Unternehmen) mussten im Vorfeld an einer Bieterschulung teilnehmen und danach verbindlich erklären, dass sie die Regeln verstanden haben. Das eigentliche Auktionsverfahren fand statt im Gebäude der Bundesnetzagentur, Canisiusstraße 21, 55122 Mainz.

Die Erfahrung zeigt, dass Bieter nicht nur erbitterte Konkurrenten sind, sondern als mögliche Option auch Absprachen in Erwägung ziehen. Die möglichst vollständige Unterbindung von Absprachen zwischen den Bietern war daher ein zentraler Aspekt dieses Auktionsverfahrens.

Die Auktion wird in Anwesenheit der Bieter durchgeführt (Präsenzauktion). Wirken Bieter vor oder während der Auktion zusammen, um den Verlauf oder das Ergebnis der Auktion zu beeinflussen (kollusives Verhalten), können sie vom gesamten Versteigerungsverfahren ausgeschlossen werden.

Jedem Bieter wurde ein separater Raum (Bieterraum) zur Verfügung gestellt. In diesem befanden sich ein Auktionscomputer zur Abgabe der Gebote und ein Telefon, das Verbindungen ausschließlich zum Auktionator ermöglicht sowie ein weiteres Telefon und ein Faxgerät und ein Internetanschluss, welche Verbindungen ausschließlich zu den Entscheidungsträgern des zugelassenen Unternehmens ermöglichen.

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

Das gesamte Auktionsverfahren dauerte 12 Wochen, jeweils montags bis freitags, von 8 bis 18 Uhr, durchschnittlich 8 Bietrunden pro Tag. Natürlich kann in einer solch langen Zeit die Kommunikation zwischen den Unternehmen nicht gänzlich unterbunden werden. Für den Erfolg der Auktion wurden alle erdenklichen Anstrengungen unternommen und Absprachen während der Bietrunden soweit wie möglich erschwert.

Die Auktionsregeln legten genau fest, welche Informationen die Bieter zu Beginn jeder Auktionsrunde erhalten. Die Bieter durften ihre Gebote nicht frei wählen, sondern nur aus einer festen Liste von 14 Geboten: jeweils das minimale valide Gebot zuzüglich einer Steigerung von 0, $10\,000$, $20\,000$, $50\,000$, $100\,000$, $200\,000$, $500\,000$, $1\,000\,000$, $2\,000\,000$, $5\,000\,000$, $10\,000\,000$, $20\,000\,000$, $50\,000\,000$ oder $100\,000\,000$ Euro.

🙂 Selbst in unserer sehr einfachen und informellen Auktion zum Semesterschlussverkauf lohnt es sich solche Details zu bedenken.

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

Das sorgfältige Design des Auktionsverfahrens ist extrem wichtig! Selbst kleinste Fehlkonstruktionen können fatal ausgenutzt werden.

Berühmtes Beispiel: Eine Auktion amerikanischer Sendelizenzen im Jahr 1997 brachte dem Staat statt der erhofften 2 Milliarden Dollar nur 14 Millionen. Kollusive Absprachen unter den Bietern waren auch hier strengstens verboten. Was war passiert? Die Bieter durften die Höhe ihrer Gebote frei wählen und kommunizierten durch die letzten Ziffern! Das sind Geschichten wie aus einem phantasievollen Spionage-Krimi.

Sie können daran vielleicht erahnen, wie wichtig, aber auch wie delikat, Versteigerungen dieser Größenordnung sind. Für den Erfolg der Auktion müssen Juristen, Ökonomen und Mathematiker eng zusammenarbeiten.

🙂 Mit großer Macht kommt große Verantwortung. Gutes Design kann zu wunderbaren Erfolgen führen, schlechtes Design zur Katastrophe.

Semesterschlussverkauf: Alles muss raus!

Das große Finale dieses Winnersemesters 2019/20:
Ihr Spieltheorieteam versteigert wertvolle Dinge.
Seien Sie dabei! Machen Sie mit!

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Im **Casino Royal** (07.02.2020) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die Chancen und Risiken von Auktionen zu erleben und zu erproben. Das war zugleich unsere Abschlussveranstaltung für dieses Semester. Dank engagierter Werbung kamen über 30 Teilnehmer aus 3 Fakultäten.

Erste Auktion. Versteigert wurde unser aktuelles Spieltheorieposter, live von den Autoren signiert, also ein weltweit einzigartiges Unikat.

Als Verfahren wählten wir hierzu eine Englische Auktion, die Gebote wurden vom Auktionator aufsteigend aufgerufen in Schritten von $10¢$. Dazu standen anfangs alle Teilnehmer auf. Wer nicht mehr mitbieten wollte, setzte sich. Das Plakat ging für $4€$ an den glücklichen Gewinner.

☺ Regulärer Preis im Fanshop: $2€$, dort allerdings unsigniert.

Zweite Auktion. Versteigert wurde ein Vintage-Super-Sammler-Paket: komlettes Quartett aller Vorlesungsposter und ein Dynamik-Lernposter.

Das Verfahren war eine Holländische Auktion, absteigend aufgerufen. Angefangen bei $12€$ in Schritten von $10¢$. Das Paket ging für $8€50$ an den glücklichen Gewinner. ☺ Regulärer Preis im Fanshop: $11€$.

Nach den ersten beiden erfolgreichen Versteigerungen waren alle Bieter im Ersteigern geübt und sichtlich gespannt auf weitere Schnäppchen.

Dritte Auktion. Versteigert wurde unser beliebtes Dynamik-Lernposter sowie ein unzensiertes Klopapier (Fachschaftsmitteilung Januar 2020) und dazu noch zwei pornographische Kalender: einmal Foodporn mit Rezepten und Bildern von Speisen (Rapp 2020) und einmal Mathporn „Complex Beauties 2019“ mit Phasenportraits komplexer Funktionen.

Das Auktionsverfahren war etwas trickreich: Jeder bietet geheim ein positives Vielfaches von $20¢$, also $20¢$, $40¢$, $60¢$, usw. Es gewinnt das *kleinste einzige Gebot*. Sollte es kein einzelnes Gebot geben, so wird unter gleichen Geboten gelost. Geboten wurde $20¢$: 8mal, $40¢$: 3mal, $60¢$: 4mal, $80¢$: 4mal, dazu je einmal $1€60$, $1€80$, $2€$, $2€20$, $3€80$.

☺ Schnäppchen! ☹ Als Auktionator bin ich recht enttäuscht, denn ich hätte $3€80$ erhalten können… oder nicht? War dies ein ehrliches Gebot oder nur taktisch, um den Zuschlag zu vermeiden? Die wahre Strategie ist kaum rekonstruierbar, eine Interpretation daher nahezu unmöglich.

Vierte Auktion. Versteigert wurde – diesmal einzeln – der aktuelle Mathekalender „Complex Beauties 2020“ zum zehnjährigen Jubiläum mit zwölf wunderschönen Phasenportraits komplexer Funktionen und faszinierenden Geschichten über ihre mathematischen Hintergründe.
`www.mathe.tu-freiberg.de/fakultaet/information/mathekalender-2020`

Als Verfahren wählten wir die Vickrey–Auktion, *sealed bid second price*: Alle bieten geheim auf Papier, das höchste Gebot erhält den Zuschlag, zahlt aber nur den zweithöchsten Preis. Dieses berühmte Verfahren ermutigt ehrliches Bieten; strategisches Bieten bringt keine Vorteile.

Geboten wurden $10¢$, $10¢$, $18¢$, $23¢$, $40¢$, $46¢$, $50¢$ fünfmal, $51¢$, $74¢$, $75¢$, $80¢$, $1€$, $1€30$, $1€41$, $1€60$, $2€$, $2€20$, $2€50$, $3€10$, $4€$, $5€$.

☺ Das war ein sagenhaftes Schnäppchen! Der Internetpreis ist 10€. Als Auktionator bin ich doch recht enttäuscht, ich hatte mir mehr erhofft.

☺ Leichtsinnig haben wir den Fehler gemacht, alle Beträge zu erlauben. Das provozierte Gebote wie „$\sqrt{2}$“ oder „$\pi/17$“. Oh, diese Mathematiker! Zukünftig Gebote nur in ganzen Cent, geschrieben im Dezimalsystem.

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Fünfte Auktion. Versteigert wurde ein faustgroßes Marmeladenglas randvoll mit Ein- und Zwei-Cent-Münzen von „unschätzbarem Wert“: Der Wert des Münzinhalts war tatsächlich sehr schwer zu schätzen.

Als Verfahren wählten wir eine Englische Saalauktion: Bieter rufen ihre Gebote selbst auf. Der Auktionator bestätigt dies durch Wiederholung und beendet die Auktion, sobald keine weiteren Gebote mehr kommen.

Das Glas ging für den Spottpreis von $2€20$ an den glücklichen Gewinner. Tatsächlich enthielt es mehr als doppelt soviel, nämlich genau $4€50$.

🙂 Auktionen mit verdeckten Geboten (*sealed bid*, wie oben) verlaufen typischerweise sehr ruhig und unterstützen rationale Entscheidungen. Ich hatte gehofft, im Format der Englischen Saalauktion würden sich die Bieter gegenseitig beeinflussen und zu höheren Geboten anstacheln.

🙁 Der erhoffte Effekt blieb aus, sein Gegenteil trat ein: Die Bieter waren sehr konservativ und zurückhaltend, der Auktionsverlauf verstärkte dies. Sie ließen sich hier nicht zu einem irrationalen Bietgefecht verlocken. . . in den nächsten vier Auktionen allerdings durchaus. Woran liegt das?

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Das Münzglas ist ein konkrete, wunderbar anschauliche Illustration:

1. Der Gegenstand hat einen objektiven Wert, nicht nur subjektiv.
2. Die individuelle Schätzung dieses Wertes unterliegt Schwankungen.

In solchen Situationen droht der **Fluch des Gewinners** / *winner’s curse*: Der Gewinner der Auktion hat den wahren Wert am meisten überschätzt. Schlimmstenfalls deckt sein Ertrag nicht die Kosten der Ersteigerung. Diesen Effekt wollte ich plastisch illustrieren und didaktisch nutzen.

🙁 Der Effekt trat leider nicht ein, alle Bieter waren dafür zu vorsichtig. Ich vermute, zu den zufälligen Schwankungen der Schätzung kam eine systematische Unterschätzung, wie viele Münzen in das Glas passen. Hier wäre ein Refenrenzbeispiel hilfreich, etwa ein ähnliches Glas.

🙂 Die zuvor genutzte Vickrey–Auktion, *sealed bid second price*, hat die **Offenbarungseigenschaft**. Das ist nicht bloß ein theoretischer Vorteil, sondern hat einen praktisch wertvollen Zusatznutzen: Als Auktionator erhalte ich tonnenweise **personalisierte Daten**. Das ist Datengold für zukünftige Versteigerungen oder ganz allgemein zur Marktforschung.

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Diese ersten fünf Auktionen waren bereits lehrreich und unterhaltsam. Der krönende Abschluss ist traditionell die Versteigerung eines Euro. Viele Teilnehmer hatten bereits legendäre Erzählungen davon gehört, zudem waren Helden der vorigen Spieltheorievorlesung anwesend.

Sechste Auktion. Versteigert wird eine Ein-Euro-Münze (gebraucht). Geboten / überboten wird in ganzen Cent, das höchste Gebot gewinnt. Achtung: Gezahlt werden das höchste *und* das zweithöchste Gebot. Hierzu stehen immer die beiden letzten Bieter, die vorigen setzen sich.

In einem kurzen aber lebhaften Gefecht wurden geboten: 1¢, 2¢, 3¢, 4¢, 50¢, 1€01, 1€02, 1€03, 1€04, 1€06, 1€07, 1€08, 1€10, 1€12, 1€30.

🙂 Der stolze Gewinner erhält den Euro für sagenhaft günstige 1€30. Der Auktionator freut sich über 2€42 Gesamterlös und die Gewissheit, dass alle Teilnehmer viel über ir/rationales Verhalten gelernt haben.

Siebte Auktion. Versteigert wird ein weiterer Euro, genau wie zuvor. Das erste und zugleich letzte Gebot ist diesmal 1€. Das ist erlaubt.

🙂 Förderlich für lebhafte Auktionen ist Überbieten um höchstens 10¢.

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Alle Teilnehmer, so scheint es, durchschauen nun das Auktionsverfahren. Sie handeln rational und vorausschauend. Zur Sicherheit eine Probe:

Achte Auktion. Versteigert wird ein weiterer Euro, genau wie zuvor. Geboten werden 10¢, 11¢, 40¢, 50¢, 51¢, 52¢, 55¢, 56¢, 70¢, 71¢, 1€, 1€01, 1€10, 1€20, 1€30, 1€40, 1€50, 1€60, 1€70, 1€75, 2€. Wow!

🙂 Der Auktionator freut sich über 3€75 Erlös für einen guten Zweck. Alle wundern sich, wie ir/rational menschliches Verhalten sein kann.

Neunte Auktion. Versteigert wird ein weiterer Euro, genau wie zuvor. Das erste und letzte Gebot ist 21¢. Niemand wagt mehr einzusteigen.

🙂 Der Auktionator verkauft seinen Euro für sagenhaft günstige 21¢. So ist das Leben: Mal verlierst du, mal gewinnen die anderen.

🙂 Nach diesen Auktionen entflammte (erneut!) die Debatte, welches Verhalten hier am erfolgreichsten wäre. Tauben: bloß nicht einsteigen! Falken: systematisch Dominanz beweisen! Spieltheorie liefert Methoden und Erklärungen, doch Praxis und Empirie zeigen komplexes Verhalten.

🙂 Wir haben viel gelernt, noch mehr liegt vor uns. Es bleibt spannend!

Das große Finale dieses Summer of Math 2022:
Ihr Spieltheorieteam versteigert wertvolle Dinge.

Casino Royal am 15.07.2022 ab 14 Uhr im Hörsaal V57.04

Alle sind herzlich willkommen, egal ob mit oder ohne Vorkenntnisse.
Enthüllung des Posters! Viel Aha und Oho! Machen Sie mit!

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Im **Casino Royal** (15.07.2022) konnten wir unsere Kenntnisse zu Auktionen praktisch anwenden. Die Ergebnisse waren spektakulär! Das war unsere feierliche Abschlussveranstaltung für dieses Semester. Dank unserer freundlichen Werbung kamen um die 30 Teilnehmer:innen.

Bei der vorigen Auktion 2020 (Seite P333ff) war unser Ziel der maximale Spaß mit verrückten Auktionsformaten bis zur Versteigerung eines Euro. Diesmal wollen wir unter Beweis stellen, dass wir dazugelernt haben: Wie gestalten wir möglichst lehrreiche *und* erfolgreiche Auktionen?

Feierlich enthüllt und versteigert wird unser aktuelles Doppel-Vorlesungs-Poster „Summer of Math 2022“ zur Topologie und Spieltheorie, vom gesamten Team signiert, limitierte Serie von drei, also weltweit einzigartige Unikate.

Wir klären Fragen der interessierten Teilnehmer:innen: Privilegierte Gelegenheit am Ausgabetag, dynamischer Kunstmarkt, enorme Wertsteigerung gar Hype ist möglich.

Unsignierte Poster sind für 2€ im Fanshop erhältlich. „Greifen Sie zu!“

Erste Auktion. Wir versteigern das Poster „1/3" in einer Englischen Saalauktion, Gebote werden vom Auktionator aufsteigend aufgerufen in Schritten von 10¢. Zunächst stehen alle auf, Hinsetzen heißt aussteigen. (Nebenbei aktiviert dies alle Teilnehmer:innen und macht vielen Spaß.) Der ansehnliche Erlös bestätigt die oben angekündigte Wertsteigerung. „Sie sehen, der Hypetrain rollt. Steigen Sie ein, noch ist es möglich!"

Zweite Auktion. Wir versteigern das Poster „2/3" in einer Holländischen Auktion, absteigend aufgerufen, angefangen bei utopischen 100€ zur Erheiterung (Framing), in Schritten von 10€, dann 1€, schließlich 10¢. Dank der ersten Auktion kennen wir nun alle die ungefähre Marktlage. Dieses Auktionsformat erfordert etwas Spekulation und starke Nerven.

Dritte Auktion. Wir versteigern das Poster „3/3" als Vickrey–Auktion, *sealed bid second price*: Alle bieten geheim auf Papier, das höchste Gebot erhält den Zuschlag, zahlt aber nur den zweithöchsten Preis. Dieses berühmte Verfahren ermöglicht bzw. ermutigt ehrliches Bieten; strategisches Bieten und Spekulieren bringen hier keine Vorteile (P2A).

Alle drei Auktionen ergeben in etwa denselben Erlös ($\pm 10\%$). Vickreys Äquivalenzsatz P2C sagt genau dies: Bei rationalen Bieter:innen bringen alle Auktionsformate denselben Erlös. Wir können die relative Nähe der drei Ergebnisse als empirische Bestätigung werten, insbesondere für die Rationalität unserer Teilnehmer:innen… am Anfang des Nachmittags!

Schwankungen sind zu erwarten: Die drei Poster sind nicht identisch, sondern numeriert mit „1/3", „2/3", „3/3"; dazu gibt es gewisse Vorlieben. Auch die Bieter:innen bleiben nicht dieselben, in jeder Auktion machen sie Erfahrungen und sammeln Informationen über ihre Konkurrenz, sie explorieren die Marktlage und justieren ihre Bietstrategie.

Die Erlöse sind für uns, als Künstler und Versteigerer, erfreulich hoch. Zuletzt 2020 hatten wir uns weniger vorbereitet, und die Erlöse blieben dementsprechend enttäuschend. Entscheidend ist die Vermittlung von positiven Emotionen mit dem Gefühl von Werthaltigkeit, hier suggeriert durch unsere Signaturen und die Numerierung. Meist genügt schon der spekulative Wert, `de.wikipedia.org/wiki/Greater_fool_theory`.

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Vierte Auktion. Wir versteigern ein Vintage-Poster-Package: alle vier Poster der Linearen Algebra 2020/21 und (wir müssen verrückt sein!) das Lernposter zur zweidimensionalen Dynamik um einen Fixpunkt.

Die Auktionen 4 bis 7 erfolgen durch freien Aufruf aufsteigender Gebote, der Auktionator bestätigt jedes Gebot durch Wiederholung und zählt aus: „$4€20$ zum Ersten, $4€20$ zum Zweiten, $4€20$ zum Dritten. Gratuliere!“

Die kleinen Ziffern können zum knappen Überbieten genutzt werden, aber auch kreativ: „Es ist jetzt 2 Uhr 37, ich biete 2€37.“ In wichtigen Auktionen diente dies sogar zur heimlichen Kommunikation (P332).

Fünfte Auktion. Studimenü zur gesunden Ernährung bestehend aus Getränk (Spezi), Hauptgericht (Chips) und Nachtisch (Schokoriegel).

Ein erfreulicher Beleg für Rationalität: Trotz des von mir versuchten Spins sind dies standardisierte Produkte und lösen keinen Hype aus. Anders als in den vorigen Auktionen sind die üblichen Marktpreise allen Teilnehmer:innen präsent, daher wird auch das hier beworbene Paket in etwa für den Marktpreis verkauft. . . und sogleich genüsslich verzehrt.

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Sechste Auktion. Wir versteigern Kleingeld in der Dose (Photo links). Wir hatten 2020 ein bauchiges Glas gefüllt, durch diese Form wurde der Inhalt stark unterschätzt. Diesmal optimieren wir unsere Präsentation.

„Verraten Sie anschließend, wieviel Geld wirklich drin ist?“ Gute Frage! Wir beschließen: Diese wertvolle Information gehört der Gewinner:in. Einige Teilnehmer:innen beschließen spontan, Kleingeld zu spenden. „Der Jackpot wächst weiter an, inzwischen auf unschätzbaren Wert.“

Hat es sich gelohnt? Segen oder Fluch? Das weiß nur der Gewinner!

Siebte Auktion. Unser Spieleset „Sprague–Grundy“, das Original vom Tag der Wissenschaft am 25.06.2022. Handarbeit. Mit farbiger Anleitung.

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Achte Auktion. Der traditionelle Höhepunkt: Wir versteigern einen Euro. „Sie bieten in Cent, überbieten zur Fairness um höchstens zehn Cent. Das höchste Gebot gewinnt, zahlen müssen jedoch das höchste *und* das zweithöchste Gebot. Das ist kein Problem, bieten Sie am höchsten!“ Hierzu stehen immer die beiden letzten Bieter, die vorigen setzen sich.

Die Gebote kommen erst schleppend, dann flüssiger, unter Erstaunen und Gelächter! Der erste Euro geht glücklich weg für 61¢ plus 57¢. Es verbreitet sich Verwunderung, aber auch Experimentierfreude. . .

Neunte Auktion. „Viele von Ihnen beneiden den glücklichen Gewinner und möchten auch gerne so ein Schnäppchen machen. Sie dürfen sich freuen: Wir versteigern nochmal einen Euro auf genau dieselbe Weise.“ Der zweite Euro geht weg für 2€02 plus 2€00. Alle staunen ungläubig.

Zehnte Auktion. Zwei Höchstbietende stehen zufällig nebeneinander und wollen kolludieren. Das wird sofort durchkreuzt durch einen Dritten, der beide überbietet. Der Euro geht schließlich weg für 70¢ plus 69¢. Auch heute wird viel gelacht. . . und noch lange nachgedacht.

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Auch dieses letzte Casino Royal hat erneut das Zeug zur Legende. Lohnt sich die Mühe? Ist unsere Lehre ein Erfolg? Urteilen Sie selbst:

1. Wir präsentieren Spieltheorie möglichst lehrreich und unterhaltsam. Im Casino verbinden wir praktische Experimente mit Infotainment.
2. Wir illustrieren hier typische Phänomene der Verhaltensökonomik: ir/rationales Verhalten, Bietergefechte, Fluch des Gewinners, uvm.
3. Wichtig sind unter anderem die Präsentation, die Reihenfolge und das Framing der Versteigerungen und die Wahl der Auktionsformate.
4. Unsere Veranstaltung fördert natürlich die Chancengerechtigkeit, alle Interessierten zocken und erproben, *learning by gambling*.
5. Schließlich wollen wir unsere Ware verkaufen. Spieltheorie haben wir jetzt dreimal erfolgreich durchgeführt, können wir auch Auktionen?

Was soll ich sagen, der Erfolg hat all unsere Erwartungen übertroffen. Vielen Dank an alle Teilnehmer:innen, die sich Zeit für unser Casino genommen haben, egal ob zum Zuschauen oder zum Mitsteigern. Wir alle haben viel gelernt. Bleiben Sie kritisch und neugierig!