

## Kapitel O

# Implementierungstheorie und der Satz von Gibbard–Satterthwaite

*Wähle deine Wünsche mit Bedacht,  
denn sie könnten in Erfüllung gehen!*

*Alas, the road to hell  
is paved with good intentions.*

## Inhalt dieses Kapitels O

0002

- 1 Erste Beispiele und typische Schwierigkeiten
  - Das Duellverfahren ist manipulierbar.
  - Strategisches Wählen und Gerrymandering
  - Experiment: Studieren geht vor Votieren!
  
- 2 Viele gute Absichten führen zur Diktatur.
  - Auswahlverfahren und Manipulierbarkeit
  - Satz von Gibbard–Satterthwaite
  - Satz von Muller–Satterthwaite
  
- 3 Mechanismen und Implementierung
  - Medianverfahren für gescheitete Präferenzen

Aus dem vorigen Kapitel kennen wir Arrows Satz vom Diktator (N3E). Wir untersuchen hierzu alle **Wahlverfahren** von der Form  $V : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}$ . Vereinfachend beschränken wir uns nun auf strikte Präferenzen  $\mathbb{S} \subset \mathbb{P}$ . Wenn wir zudem Indifferenzen im Ergebnis aufbrechen, so erhalten wir

$$V : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Zu Recht wenden Sie ein, dass viele Wahlverfahren nicht so verlaufen. Wir untersuchen daher noch einfacher **Auswahlverfahren** von der Form

$$W : \mathbb{S}^n \rightarrow A : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Jedes Wahlverfahren  $V$  definiert ein Auswahlverfahren  $W = \max V$ . Wenn wir also ein geeignetes  $V$  haben, dann automatisch auch  $W$ . Satz N3E besagt, dass es kein perfektes Wahlverfahren  $V$  gibt.

Unsere Hoffnung ist daher: Das Verfahren  $W$  hat es etwas leichter, es muss nur *einen* Gewinner ermitteln, nicht das *gesamte* Ranking.

Wir zeigen im Folgenden, dass selbst die leichtere Aufgabe unlösbar ist: Jedes Auswahlverfahren  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  ist manipulierbar oder diktatorisch.

Das Ziel der **Implementierungstheorie** ist, wünschenswertes Verhalten durch ein geeignetes Spiel zu erzwingen / ermutigen / ermöglichen.

Berühmtes Beispiel ist Nashs axiomatische Verhandlungslösung (L1E) und Rubinsteins strategische Implementierung als Verhandlung (L2C). Ähnlich gelagert ist der Shapley–Wert als axiomatische Lösung (M2A) und seine konkrete Implementierung als Koalitionsverhandlung (M3B).

Dort gelingen beide Ansätze, sie stützen und erklären sich gegenseitig. Ähnliches liegt auch diesmal vor uns: Arrows axiomatisch begründeter Satz vom Diktator (N3E) wird nun implementativ gestützt durch den strategisch motivierten Satz von Gibbard–Satterthwaite (O2B).

Gesucht ist ein geeignetes Spiel / Verfahren, das zu dem gewünschten Verhalten führt. Das ist allerdings nicht immer möglich, denn die Anreize müssen mit den Zielsetzungen der Spieler vereinbar / kompatibel sein.

Andernfalls droht **Manipulierbarkeit**. Wir beginnen mit einem einfachen aber typischen Beispiel, das Sie bereits aus Ihren Übungen kennen. Anschließend führen wir die formale Definition und Beweisführung aus.

**Aufgabe:** Alice, Bob und Chuck wollen gemeinsam ins Kino gehen. Zur Auswahl stehen die drei Filme  $X = X-Men$  oder  $Y = The Last Yeti$  oder  $Z = Zombie Apocalypse$ . Alice hätte am liebsten  $X$  vor  $Y$  vor  $Z$ , Bob favorisiert  $Y$  vor  $Z$  vor  $X$ , und Chuck sieht  $Z$  vor  $X$  vor  $Y$ .

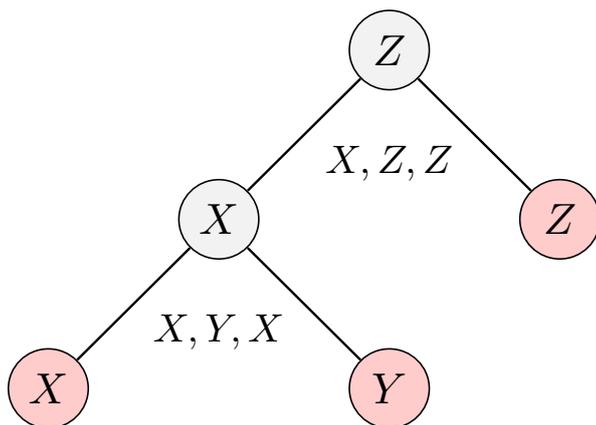
Chuck ist Wahlleiter und legt als Wahlmodus fest: Im ersten Wahlgang wird per Mehrheitswahl zwischen  $X$  und  $Y$  abgestimmt, der Gewinner tritt dann im zweiten Wahlgang per Mehrheitswahl gegen  $Z$  an.

- (1) Welche der Alternativen  $X, Y, Z$  wird gewählt, wenn jeder Spieler in jedem Wahlgang ehrlich nach seiner Präferenz abstimmt?
- (2) Ist dies ein Gleichgewicht? Lohnt es sich, strategisch zu wählen? Nennen Sie mindestens ein teilspielperfektes Gleichgewicht.
- (3) Hat Chuck für seine eigenen Ziele den Wahlmodus gut gewählt? Welchen Wahlmodus (in einem Duellverfahren) würden Sie ihm raten?
- (4) Sehen Sie hier ein Auswahlverfahren, das nicht manipulierbar ist, bei dem also ehrliche Abstimmung belohnt (bzw. nicht bestraft) wird?

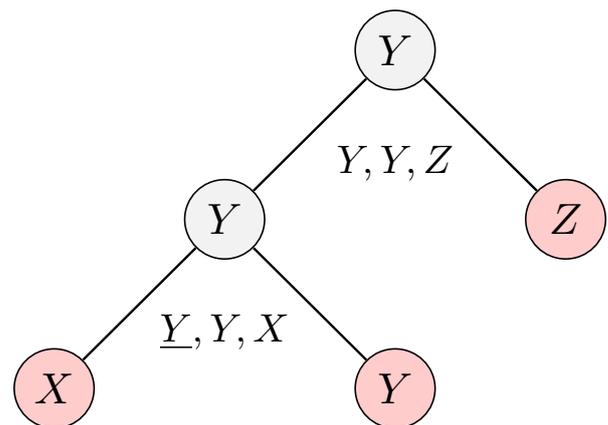
## Das Duellverfahren ist manipulierbar.

O102

Präferenzen: Alice  $X \succ Y \succ Z$ , Bob  $Y \succ Z \succ X$ , Chuck  $Z \succ X \succ Y$ .



ehrliche Abstimmung



strategische Abstimmung

☹️ Dieses Auswahlverfahren kann manipuliert werden! (hier von Alice)

😊 Wie optimiert Alice ihr Wahlverhalten? Durch Rückwärtsinduktion!

Wir beschreiben die Abstimmung als dynamisches Spiel in extensiver Form und lösen es durch Rückwärtsinduktion. Das fordert etwas mehr Raffinesse und Um-die-Ecke-Denken als man Wählern zumuten möchte.

(1) Der erste Wahlgang  $X : Y$  ergibt  $2 : 1$ . Der zweite Wahlgang  $X : Z$  ergibt  $1 : 2$ . Es gewinnt  $Z$ . Man könnte den Eindruck gewinnen, Chuck wählt sein Auswahlverfahren gerade so, dass sein Favorit gewinnt.

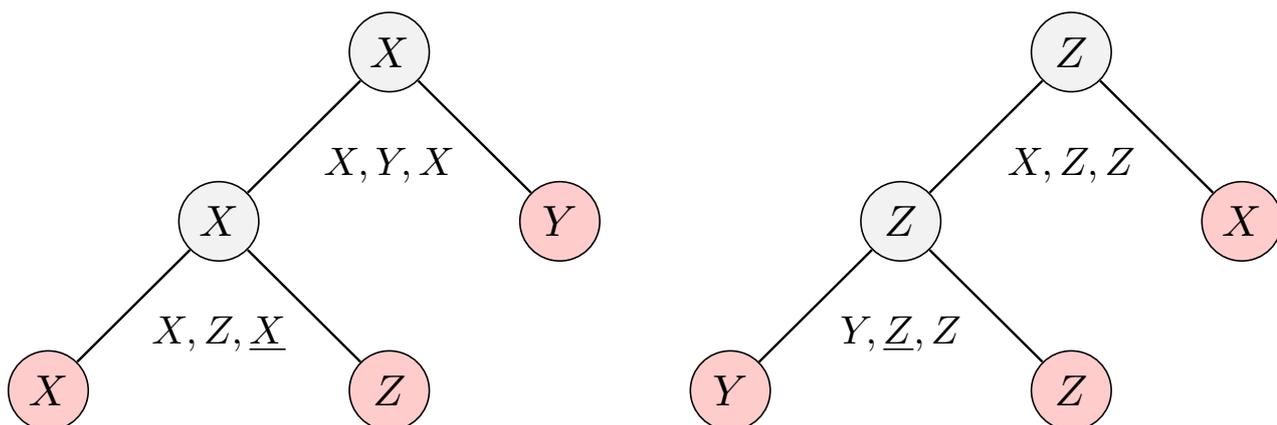
(2) Nein, die ehrliche Abstimmung ist kein Gleichgewicht! Alice könnte  $P'_1 : Y \succ X \succ Z$  vorgeben statt ihrer wahren Präferenz  $P_1 : X \succ Y \succ Z$ . Der erste Wahlgang  $X : Y$  ergibt dann  $1 : 2$ . Der zweite Wahlgang  $Y : Z$  ergibt  $2 : 1$  es also gewinnt  $Y$ . Das ist für Alice eine Verbesserung! Für Alice lohnt es sich, strategisch zu wählen, also zu lügen.

(3) Chucks erster Plan geht auf, wenn alle Spieler ehrlich abstimmen. Wenn sie strategisch denken, müssen sie unehrlich abstimmen, um das Ergebnis zu ihren Gunsten zu ändern. Darauf muss Chuck spekulieren, um das für ihn günstigste Verfahren vorausschauend auszuwählen.

😊 Als strategisch-dynamisches Spiel ist das lehrreich und amüsant. Vorausschauende Spieler müssen spekulieren und gegenspekulieren.

☹️ Für demokratische Wahlen ist dies jedoch keine gute Grundlage! Es fällt schwer, die Abstimmung als Willensbekundung zu deuten.

Präferenzen: Alice  $X \succ Y \succ Z$ , Bob  $Y \succ Z \succ X$ , Chuck  $Z \succ X \succ Y$ .



😊 Nach Chucks Präferenz ist das letzte Duellverfahren das beste. Aus Chucks Sicht ist das ein einfaches Beispiel von Mechanism-Design.

😊 Wie bestimmt Chuck sein Verfahren? Durch Rückwärtsinduktion! Aus der Menge aller möglichen Verfahren wählt er ein (für ihn) optimales.

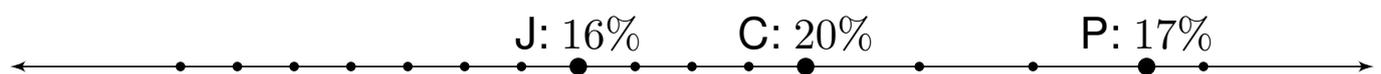
**Übung:** Schreiben Sie jedes dieser drei Spiele in extensiver Form aus. Finden Sie in dieser Form alle teilspielperfekten Gleichgewichte!

Sind Manipulation und strategisches Wählen nur ein Gedankenspiel?  
Nein. Es kommt häufiger vor, als man zunächst naiv erwarten würde!



Bei einer **Präsidentschaftswahl** treten die drei Kandidaten L, M, R an. Es gewinnt der Kandidat mit den meisten Stimmen / relative Mehrheit. Wenn alle ehrlich abstimmen, gewinnt R mit 45%. Die L-Wähler haben einen Anreiz strategisch zu wählen: Wenn sie alle M wählen, dann gewinnt M mit 55%. Für L-Wähler ist dies eine Verbesserung!

☹ Nach der Wahl wird das Ergebnis als „Wählerwillen“ interpretiert — meist natürlich so, dass die Interpretation zu den eigenen Zielen passt. Was war der Wählerwille wirklich? Kann man ihn überhaupt ablesen? Wenn im Vorfeld der Wahl spekuliert und gegenspekuliert werden muss, kann man nachher kaum noch die eigentlichen Beweggründe erkennen. Wie zuvor: Für demokratische Wahlen ist dies keine gute Grundlage!



Ein solches Phänomen manifestierte sich 2002 recht dramatisch bei der französischen Präsidentschaftswahl zwischen Jospin - Chirac - Le Pen.

Im ersten Wahlgang traten insgesamt 16 Kandidaten an, ein Rekord. (Die obige Darstellung im Links-Rechts-Spektrum ist grob vereinfacht.) Wenn im ersten Wahlgang kein Kandidat die absolute Mehrheit erringt, dann gehen die beiden Höchstplatzierten in die Stichwahl. Viele Wähler waren sicher, dass dies Jospin und Chirac sein würden. Die erste Runde galt als Formalität, viele wählten daher ehrlich nach ihrer Überzeugung.

Die Zersplitterung der französischen Linken schwächte entscheidend den sozialistischen Premierminister Lionel Jospin. In die Stichwahl kamen daher der konservative amtierende Präsident Jacques Chirac und überraschend der rechtsextreme Jean-Marie Le Pen. Die Stichwahl gewann daraufhin Chirac mit über 82% der Stimmen, damit der höchste Wahlsieg aller Zeiten bei einer französischen Präsidentschaftswahl.

Die Auswirkungen der *Présidentielle 2002* sind bis heute zu spüren. Viele Wähler des linken Spektrums waren verbittert und traumatisiert: Nicht nur ging eine durchaus aussichtsreiche Präsidentschaftswahl aus ihrer Sicht verloren, als besondere Schmach und Demütigung mussten sie im zweiten Wahlgang zudem einen ihnen ungeliebten konservativen Kandidaten wählen, um ein noch schlimmeres Ergebnis zu verhindern.

Damals wurde heftig debattiert und protestiert. Wer hatte Schuld? Jospins Campagne war schlecht, gestanden selbst seine Anhänger, das hat sicher zu seinem denkbar knappen Ausscheiden beigetragen. Auch er war sich seines Erfolges in der ersten Runde wohl allzu sicher. Seine Niederlage war vernichtend, er zog sich aus der Politik zurück.

Jaques Chirac hingegen hatte allen Grund zur Freude, er bekam seine zweite Amtszeit und war stolz auf sein überragendes Wahlergebnis. Er konnte seinen Gegner Le Pen leicht diabolisieren und sich selbst als Garant der Demokratie inszenieren, zum Teil durchaus zu Recht, aber eine inhaltliche politische Debatte fand überhaupt nicht mehr statt.

Hatten sich zu viele Wähler verspekuliert? „*Je pensais voter Jospin le second tour.*“, war ein typischer Seufzer. Doch diese Chance kam nicht.

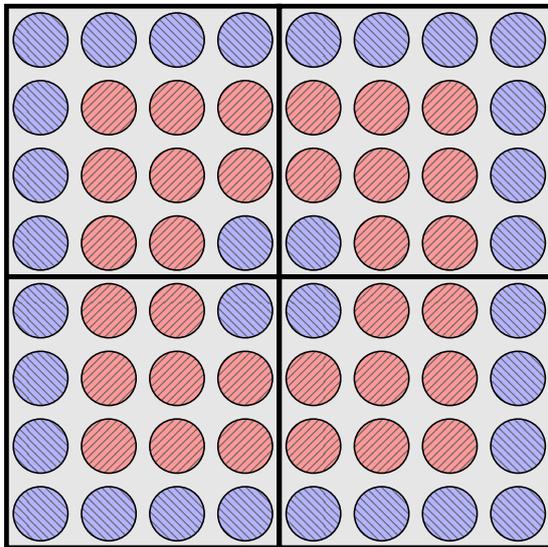
Wer trägt Schuld daran? Einerseits die Wähler, denn sie kennen ja ihr Wahlsystem und hätten strategisch denken müssen. Andererseits gibt der Wahlauf Ruf gemischte, verwirrende Signale: Soll man nun ehrlich nach seiner Überzeugung abstimmen oder strategisch, als „*vote utile*“?

Daher ist es durchaus berechtigt, das Wahlsystem selbst in Betracht zu ziehen und mathematisch-kritisch zu untersuchen. Zu wünschen wäre, aus bitteren Erfahrungen wie diesen, ein Wahlsystem ohne diese Fehler, das ehrliches Abstimmen belohnt — oder zumindest nicht bestraft.

Diese Frage bringt uns zurück zu unserem Thema in diesem Kapitel: Mechanism-Design. Können wir ein Wahlsystem konstruieren, das alle demokratisch wünschenswerten Eigenschaften hat, insbesondere nicht manipulierbar ist und somit strategisches Wählen unnötig macht?

Die ernüchternde Antwort lautet hier leider: *Nein!* Das ist nicht bloß eine empirische Erfahrungstatsache, sondern ein präzise formulierbarer Satz.

Eine weitere Manipulation von Wahlverfahren ist **Gerrymandering**, also das strategisch kalkulierte Zuschneiden von Wahlkreisgrenzen. Die unvermeidlichen Rundungsfehler werden hierbei instrumentalisiert, um den Einfluss gewisser Stimmanteile zu mindern oder zu steigern.

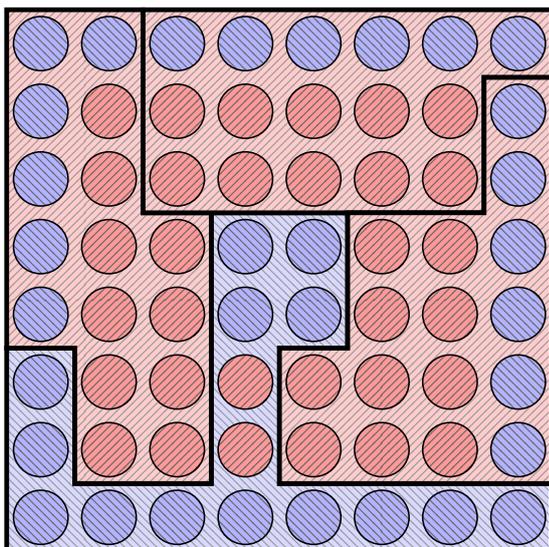


Bevölkerung:  
32 rot zu 32 blau,  
es herrscht Gleichstand.

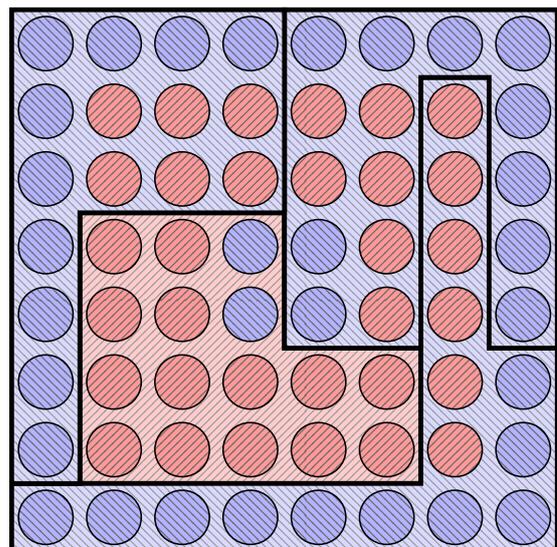
Wahlbezirke:  
4 mal unentschieden,  
jeweils 8 zu 8 Gleichstand.

**Aufgabe:** Gibt es im obigen Beispiel einen Zuschnitt in vier gleichgroße zusammenhängende Wahlbezirke, sodass rot bzw. blau „klar“ gewinnt?

**Lösung:** Hier sind zwei von vielen möglichen Zuschnitten:



dreimal 10 rot zu 6 blau  
einmal 2 rot zu 14 blau



dreimal 6 rot zu 10 blau  
einmal 14 rot zu 2 blau

Ein solcherart manipuliertes Wahlsystem [*rigged voting system*] ist die dunkle Seite des Mechanism-Design: Wie betrüge ich am effizientesten? Kurzfristig erscheint es den Machthabern opportun, langfristig zerstört es das Vertrauen der Wähler in ihre demokratischen Institutionen.

Die beiden wichtigsten Tricks / Techniken des Gerrymandering sind:  
**Verdünnung:** In diesem Wahlkreis ist die Opposition so weit verdünnt, dass sie keine Chance auf einen Sieg hat. Ihre Stimmen verfallen daher.  
**Hochburg:** In diesem Wahlkreis werden möglichst viele Stimmen der Opposition gebündelt. Er geht zwar verloren, aber mit vielen Stimmen.

Viele Demokratien übertragen daher den Zuschnitt der Wahlkreise einer politisch unabhängigen Kommission, etwa Verfassungsrichtern. In den USA hingegen geschieht dies häufig durch politische Organe, üblicherweise alle 10 Jahre nach der Volkszählung. Beispiel Texas:

Wahl 2002	Republikaner	59% Stimmen	15 Abgeordnete (47%)
	Demokraten	40% Stimmen	17 Abgeordnete (53%)

Die Republikaner errangen 2002 die Mehrheit in der *State Legislature* und ersetzten die für sie ungünstigen Wahlkreisgrenzen durch günstige:

Wahl 2004	Republikaner	58% Stimmen	21 Abgeordnete (66%)
	Demokraten	41% Stimmen	11 Abgeordnete (34%)

Gerrymandering wirkt! Ist es gerecht? „*Two wrongs don't make a right.*“

Zur Erläuterung: Die Legislative der USA besteht aus zwei Kammern, beide zusammen bilden den US-Kongress / *United States Congress*:

- Der Senat / *Senate* als Oberhaus mit insgesamt 100 Senatoren, je zwei aus jedem der 50 Bundesstaaten, Amtszeit jeweils 6 Jahre; rotierend wird alle zwei Jahre ein Drittel der Senatoren neu gewählt.
- Das Repräsentantenhaus / *House of Representatives* als Unterhaus mit 435 Abgeordneten, je einer aus seinem festen Wahlbezirk / *Congressional District*, Amtszeit zwei Jahre.

Um Letztere geht es in unserem historischen Beispiel von 2002/2004: Texas stellte damals 32 der 435 Abgeordneten im Repräsentantenhaus. Obwohl die Stimmenverteilung 59-58% zu 40-41% nahezu gleich blieb, änderte sich die Sitzverteilung dramatisch aufgrund des Neuzuschnitts der Wahlbezirke im Jahr 2003. Das Beispiel ist frappierend eindeutig: Im Jahr 2002 waren mit 15 zu 17 die Demokraten stark begünstigt. Im Jahr 2004 waren mit 21 zu 11 die Republikaner stark begünstigt. Wünschenswert wäre eine annähernd proportionale Sitzverteilung, die Fehler durch (böswillige) Rundungen soweit möglich minimiert.

In **Großbritannien** gilt die relative Mehrheitswahl. Jeder Wähler hat eine Stimme in seinem Wahlkreis, der Kandidat mit den meisten Stimmen (relative Mehrheit, engl. *first past the post*) zieht ins Parlament ein. Die Stimmen unterlegener Kandidaten gehen verloren: *The winner takes all*. Das so gewählte Parlament hat dadurch in der Regel klare Mehrheiten. Die regelmäßige Anpassung der Wahlkreise nach Einwohnerzahl obliegt der unabhängigen *Boundary Commission*; sie gilt als fair und effizient.

In **Frankreich** hingegen wird die Wahlkreiseinteilung politisch genutzt. De Gaulle instrumentalisierte sie zur Schwächung politischer Gegner, vor allem der Kommunisten, ebenso nutzte er die Wiedereinführung der absoluten Mehrheitswahl 1958. Die regierenden Sozialisten wiederum führten 1985 ein Verhältniswahlsystem ein, um den prognostizierten Wahlsieg der Rechten abzuschwächen. Die Regierung Chirac kehrte 1986 wohlkalkuliert zum traditionellen Mehrheitswahlrecht zurück.

Die Ausführung demokratischer Wahlen lässt Spielräume. Die Beispiele zeigen eindrücklich, dass dies permanent zu Einflussversuchen verlockt.

## Wahlkollegium / *United States Electoral College*

Ein Wahlmann bzw. eine Wahlfrau ist eine Person, der eine konkrete Wahl übertragen wird. Die wahlberechtigten **Urwähler** bestimmen in ihrem Wahlbezirk einen oder mehrere **Wahlpersonen**, diese wählen dann ihrerseits in einem zweiten Wahlgang die eigentlich zu Wählenden.

Im Gegensatz zu Abgeordneten werden die Wahlpersonen lediglich für diesen einen Wahlakt bestimmt. Die Versammlung der Wahlleute heißt **Wahlkollegium**. Ein Wahlsystem mit Wahlleuten heißt **indirekte Wahl**.

Prominentes Beispiel sind die Wahlpersonen zu Präsidentschaftswahlen der **USA**. Jeder US-Bundesstaat wählt seine Wahlpersonen / *electors* nach seinen eigenen Regeln. In 48 Staaten gilt „*the winner takes all*“, nur in Maine und Nebraska können die Wahlpersonen aufgeteilt werden.

Zum Sieg genügen 270 der 538 Wahlpersonen. (Die Zahl 100+435+3 entspricht Kongress plus DC.) Rechnerisch genügen dazu etwa 23% der Wählerstimmen. Diskrepanzen zwischen *Electoral College* und *Popular Vote* ergaben sich 1824 zu Gunsten der Demokratisch-Republikanischen Partei sowie 1876, 1888, 2000 und 2016 zu Gunsten der Republikaner.

Von fern wirkt das US-amerikanische System der Wahlmänner antiquiert, doch die **Bundesrepublik Deutschland** nutzt ähnliches, wobei jedoch das deutsche Staatsoberhaupt eher überparteilich-repräsentativ wirkt.

Die Bundespräsidentin\* (Männer sind wie immer mitgedacht) wird nicht direkt gewählt, sondern von den Wahlfrauen\* der Bundesversammlung. Wählbar ist jede\* deutsche Staatsangehörige, die\* das Wahlrecht zum Bundestag besitzt und mindestens 40 Jahre alt ist. Sie\* wird geheim und ohne Aussprache gewählt von der dazu berufenen Bundesversammlung.

Diese wird gebildet, gemäß dem föderativen System der Bundesrepublik Deutschland, aus den Mitgliedern des Bundestages und ebenso vielen von den 16 Landesparlamenten gewählten Wahlfrauen\*. Üblicherweise sind dies Mitglieder der Landesparlamente, der Landesregierungen, der Bundesregierung, sowie Persönlichkeiten des öffentlichen Lebens wie Schauspielerinnen\*, Sportlerinnen\*, Künstlerinnen\*. Die Wahlfrauen\* sind nicht an Aufträge und Weisungen gebunden, diese Freiheit führt manchmal zu überraschenden (zwischenzeitlichen) Wahlergebnissen.

## Mehrstufige Wahlen und Rätedemokratie

Bei indirekten Wahlen werden die Wahlpersonen eigens für diese Wahl bestimmt; es gibt dabei auch indirekte Wahlen mit mehr als zwei Stufen.

In der **Rätedemokratie** oder **Räterepublik** hingegen werden über ein Stufensystem (etwa Bezirk, Region, Republik) dauerhafte Räte gewählt. Diese Räte haben ein **imperatives Mandat**, sie sind an die Weisungen ihrer Wähler gebunden und können somit jederzeit abgewählt werden. Beim **freien Mandat** hingegen sind Mandatsträger nur ihrem Gewissen verantwortlich und bleiben gewählt für die gesamte Dauer ihrer Amtszeit.

Historisches Vorbild für die Rätedemokratie ist die **Pariser Kommune**, die sich während des deutsch-französischen Krieges spontan bildete und vom 18. März bis zum 28. Mai 1871 existierte. Das prominenteste Rätensystem herrschte in der Sowjetunion: Es entstand zuerst 1905 und dann 1917 in der Oktoberrevolution aus basisdemokratischen Arbeiter- und Soldatenräten. Diese wurden bald von den Bolschewiki dominiert, dann entmachtet. In der Stalinschen Verfassung von 1936 wurden sie durch ebenso machtlose Parlamente ersetzt, die weiter Räte hießen.

Stimmenverfall und Gerrymandering sind grundsätzliche Probleme des Mehrheitswahlrechts, insbesondere vom Typ „*the winner takes all*“. Bei der Wahl zum Deutschen Bundestag zählt die Erststimme für den Direktkandidaten im Wahlkreis, die Zweitstimme für die Sitzverteilung. Dieses Wahlverfahren ist etwas aufwändiger, hat dafür viele Vorzüge und reduziert die Gefahren von Stimmenverfall und Gerrymandering.

In der Weimarer Republik, ohne explizite Sperrklausel, waren bis zu 17 Parteien im Reichstag vertreten, was zu instabilen Regierungen führte. Die explizite Sperrklausel (Fünf-Prozent-Hürde) verhindert den Einzug kleiner Parteien in den Bundestag. Sie zwingt Wähler zu strategischer Abstimmung. Sie soll die Zersplitterung des Parlaments in viele kleine Parteien verhindern und so eine stabile Regierungsbildung ermöglichen.

Rundungen bei der Sitzvergabe und explizite Sperrklauseln verletzen die Gleichheit der Wahl, denn zwangsläufig verfallen manche Stimmen. Diese Nachteile müssen gegen praktische Vorteile abgewogen werden. Die Wahl eines „möglichst gerechten“ Wahlverfahrens ist schwierig!

Das Grundgesetz (GG Art. 38, 39, 41) fordert zunächst grundlegend: *Die Abgeordneten des Deutschen Bundestages werden in allgemeiner, unmittelbarer, freier, gleicher und geheimer Wahl gewählt.* (GG Art 38.1) Weitere Konkretisierungen formuliert das Bundeswahlgesetz (BWahlG).

**Allgemeine Wahl:** Alle Deutschen sind (bis auf wenige Ausnahmen) ab dem Mindestalter berechtigt zu wählen und gewählt zu werden. Das Mindestalter für das aktive wie passive Wahlrecht sind 18 Jahre. Dieser Kompromiss gilt noch als vereinbar mit der allgemeinen Wahl.

**Unmittelbare Wahl:** Die Stimmabgabe bestimmt die Parlamentssitze, es ist kein weiteres Gremium zwischengeschaltet (insbesondere keine Wahlmänner wie etwa in den USA oder ein mehrstufiges System wie etwa in Räterepubliken praktiziert). Zulässig ist jedoch die Listenwahl.

**Freie Wahl:** Jeder Wähler darf sich frei zwischen den Alternativen entscheiden, er ist nicht auf bestimmte Wahlentscheidungen festgelegt. Nach derzeitiger Praxis besteht keine Wahlpflicht (wie etwa in Belgien); somit hat jeder Wähler die legale Alternative, nicht zu wählen.

**Geheime Wahl:** Jeder Wähler ist berechtigt (aber nicht verpflichtet), seine Wahlentscheidung geheim zu halten. Dazu dienen Wahllokale, die alle nötigen Vorkehrungen bieten und öffentlich kontrollierbar sind. Bei der Briefwahl sind Geheimnis und Kontrolle zwar stärker gefährdet, dies wird jedoch aufgewogen durch erhöhte Allgemeinheit der Wahl. Die Briefwahl ist anfälliger für Betrug: keine Kontrolle der Einhaltung des Wahlgeheimnisses, daher mögliche Beeinflussung oder gar Verkauf der Stimme; Diebstahl oder Verlust von Wahlunterlagen auf dem Postweg; gefälschte Unterschriften ermöglichen Sendung an falsche Adressen.

**Gleiche Wahl:** Jede Stimme hat den gleichen Wert (näherungsweise). Dazu müssen Wahlkreise ähnlich groß sein (Gerrymandering) und das Sitzzuteilungsverfahren möglichst Rundungsfehler minimieren. Bis 1983 wurde das D'Hondt-Verfahren verwendet, das große Parteien bevorzugt. Danach wurde bis 2005 das Hare-Niemeyer-Verfahren verwendet, das das Ergebnis genauer abbildet, aber manchmal zu Paradoxien führt. Seither wird das Sainte-Laguë-Verfahren verwendet.

Für das Funktionieren einer Demokratie ist neben anderen Faktoren auch und vor allem ein funktionierendes Wahlsystem entscheidend. Das Wahlverfahren kann das Wahlergebnis gravierend beeinflussen, es erfordert daher sorgfältige Formulierung, Bedacht und Präzision.

Es geht um wichtige, richtungweisende Entscheidungen mit konkreten, langfristigen Konsequenzen. Daher sind Wahlen erfahrungsgemäß stets auch Versuchen der Einflussnahme und der Manipulation ausgesetzt. Diese Gefahren müssen bedacht und möglichst minimiert werden.

Das Bundeswahlgesetz (selbst in grober Zusammenfassung, wie hier) und unsere obigen Beispiele zu Wahlsystemen und -manipulationen lassen erahnen, wie anspruchsvoll die Durchführung fairer Wahlen ist. Dieses hehre Ziel erfordert großen Aufwand und hohe Genauigkeit!

**Fun fact:** Der Bundeswahlleiter wird vom Bundesinnenminister ernannt. Traditionell übernimmt dieses Amt der Präsident des Statistischen Bundesamtes in Wiesbaden. Auch dort arbeiten Mathematiker!

[www.deutschland.de/de/topic/politik/mathematik-in-der-wahlnacht](http://www.deutschland.de/de/topic/politik/mathematik-in-der-wahlnacht)

Im **Casino Royal** (31.01.2020) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die Schwierigkeiten von Wahlverfahren zu erleben und zu erproben.

Wir haben dazu versucht, auch dieses mathematisch-abstrakte Thema möglichst interaktiv spielbar zu gestalten. Die sieben Spieler  $1, 2, \dots, 7$  planen einen gemeinsamen Kinoabend. Abgestimmt wird über die drei Alternativen  $X, Y, Z$  wie oben. Alle müssen sich gemeinsam für einen Film entscheiden, um den lukrativen Gruppenpreis nutzen zu können.

Gespielt wird so: Jedem Spieler wird eine Karte mit seinen Präferenzen zufällig zugelost, hier  $X \succ Y \succ Z$  oder  $Y \succ Z \succ X$  oder  $Z \succ X \succ Y$ , mit möglichst gleichen Häufigkeiten, hier 3, 2, 2. Je nach Platzierung des gewählten Kandidaten erhält der Spieler 500, 300, 100 € Gewinn.

Wie wird abgestimmt? Ein Spieler wird als Wahlleiter ausgelost; er darf ein Auswahlverfahren  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  zur Diskussion vorschlagen und dann allein Kraft seines Amtes festlegen. Mit Macht kommt Verantwortung und Sorgfaltspflicht: Ist das vorgeschlagene Verfahren unklar formuliert, widersprüchlich oder unvollständig, so muss er 1000€ zahlen.

Vor Verteilung der Rollen sammelten wir Abstimmungsverfahren an der Tafel, um uns später auf diese „unparteiischen“ Verfahren zu berufen. Vorgeschlagen wurden folgende Verfahren, später ergänzt, verfeinert:

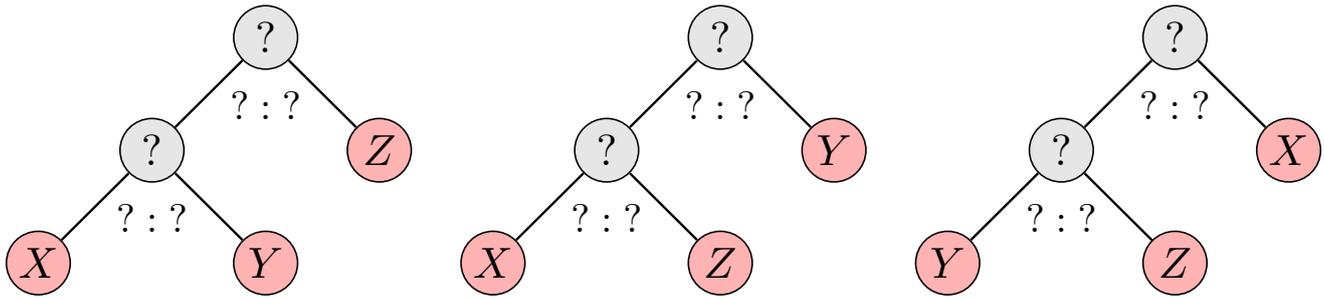
**Gotteswille:** Das Ergebnis ist  $X$  (oder  $Y$  oder  $Z$ , je nach Religion). Das entspricht der Abbildung  $\text{const}_{\mathbb{S}^n}^X : \mathbb{S}^n \rightarrow A : (P_1, \dots, P_n) \mapsto X$ .

**Diktatur:** Einer der Spieler  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  bestimmt das Ergebnis. Das entspricht der Abbildung  $D_k : \mathbb{S}^n \rightarrow A : (P_1, \dots, P_n) \mapsto \max P_k$ .

**Demarchie:** Es wird ein Spieler  $k$  zufällig ausgelost, der dann bestimmt. Als Abbildung bedeutet das  $D_* : \mathbb{S}^n \times \Omega \rightarrow A : (P_1, \dots, P_n; k) \mapsto \max P_k$ . Den Lostopf  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  versehen wir mit der Gleichverteilung. Allgemein schreiben wir ebenso  $D_\nu$  für die  $W$ Verteilung  $\nu$  auf  $\Omega$ .

**Zählung:** Es wird gefragt und gezählt „Wer stimmt für  $X$ ? für  $Y$ ? für  $Z$ ?“ Die höchste Zustimmung gewinnt. Gleichstand wird gebrochen entweder durch Stichwahl (eventuell ungenügend), durch alphabetische Ordnung  $X \succ Y \succ Z$  (voreingenommen), Lösen unter den höchsten Alternativen, oder Willkür durch zufälligen Schlichter (eingeschränkte Demarchie).

**Duell:** Für die drei Alternativen  $X, Y, Z$  wird ein Turnier ausgetragen:



**Zufälliges Duell:** Es wird unter diesen drei Duellverfahren gelost.

**Alle Duelle:** Es werden alle drei Duelle nacheinander durchgeführt. Bei Gleichheit entscheidet die Reihenfolge der Turniere, also das erste. Alternativ könnte Gleichstand wie zuvor diskutiert gebrochen werden.

😊 Bei diesen Vorbereitungen entspann sich die moralische Diskussion, ob man ehrlich abstimmen müsse oder strategisch abstimmen dürfe. Die Meinung festigte sich schnell, dass alle Strategien erlaubt seien und auch sein müssen, denn niemand schaut einem in Herz oder Hirn.

😊 Die hier entwickelten Verfahren sind recht kreativ und ausgefeilt. Der Anreiz (echtes Spielgeld!) führt zu beachtlicher Ernsthaftigkeit.

Natürlich gibt es zahlreiche weitere Auswahlverfahren. Wie viele?

**Random fun fact:** Bei drei Alternativen  $A = \{X, Y, Z\}$  hat die Menge  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(A)$  der strikten Präferenzen genau  $|\mathcal{S}| = |A|! = 3! = 6$  Elemente. Bei  $n = 7$  Wählern gibt es demnach insgesamt  $|\mathcal{S}^n| = 6^7 = 279\,936$  mögliche Konstellation  $(P_1, \dots, P_n)$  ihrer individuellen Präferenzen.

Ein Auswahlverfahren ist eine beliebige Abbildung  $W : \mathcal{S}^n \rightarrow A$ , somit gibt es  $|A^{\mathcal{S}^n}| = 3^{6^7} = 3^{279\,936} \approx 2.6 \cdot 10^{133\,563}$  Auswahlverfahren. Das lässt noch astronomisch viel Raum für weitere kreative Ideen! Tatsächlich sehen wir die Entwicklung immer raffinierterer Verfahren, sowohl hier in unserem Experiment als auch in realen Demokratien.

Jedes Auswahlverfahren zeigt Schwierigkeiten, Probleme, Paradoxien. Diese treten allerdings nicht immer auf, sind also nicht sofort ersichtlich. Um sie dennoch möglichst pointiert sichtbar und spürbar zu machen, nutzen wir eine kritische Verteilung der Präferenzen à la Condorcet. Diese Vorgabe ist zwar etwas willkürlich und künstlich, erhöht aber die Spannung und den Spielspaß und auch die Erkenntnismöglichkeiten.

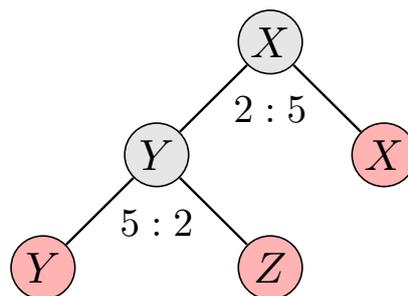
**Vorbereitung.** Zu Beginn wählt jeder Spieler ein Pseudonym für sich; das ist mathematisch ganz unerheblich, bereitet aber allen viel Freude. Hier wählen recht gewöhnliche Menschen: 1 = Warmduscher, 2 = Jedi, 3 = AgentOrange, 4 = KevinKurányi, 5 = Hexe, 6 = Kaiser, 7 = Papšt.

**Erstes Spiel.** Das Los beruft Spieler 6 = Kaiser zum Wahlleiter. Der Kaiser bestimmt, nach kurzer Debatte, das Wahlverfahren  $\text{const}_{S^n}^X$ . Die Wahl ist schnell durchgeführt und ergibt... Trommelwirbel... X! Das Volk murr, 4 von 7 sind unzufrieden, wagen aber keine Revolution.

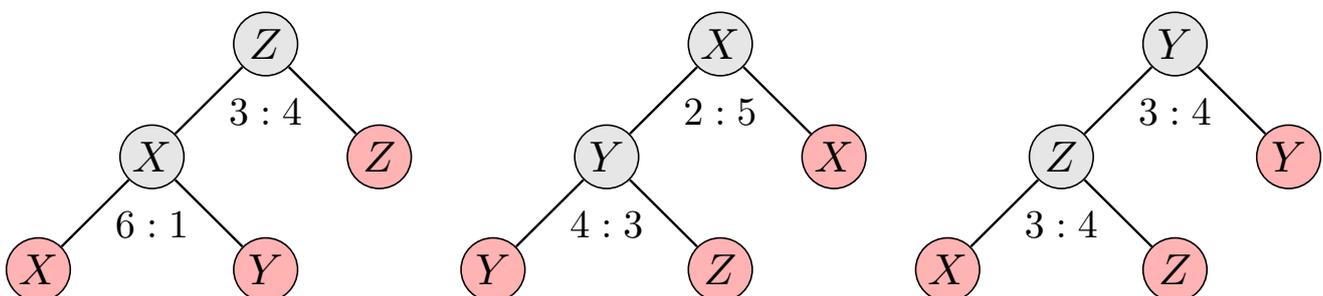
**Zweites Spiel.** Das Los beruft Spieler 7 = Papšt zum Wahlleiter. Der Papšt ruft, ohne Debatte, das heilige Wahlverfahren  $D_7$  aus. Die Wahl ergibt Y, das Volk murr, diesmal sind 5 von 7 unzufrieden.

„So kann es nicht weitergehen!“, klagen viele Spieler und nutzen die Zwischenzeit für eine Diskussion *bevor* die Rollen zugeteilt werden. Die Spieler beschließen einstimmig, fortan konstante und diktatorische Wahlverfahren zu verbieten. Der Wahlleiter darf also nur noch aus den verbleibenden, demokratisch akzeptierten Wahlverfahren aussuchen.

**Drittes Spiel.** Das Los beruft Spieler 2 = Jedi zum Wahlleiter. In seiner Weisheit lässt er das folgende Turnier ausgetragen:



**Viertes Spiel.** Das Los beruft Spieler 1 = Warmduscher zum Wahlleiter. Er lässt alle drei Turniere nacheinander ausgetragen. Bei Gleichheit aller drei Alternativen entscheidet das erste, wie vom Wahlleiter festgelegt.



Bei aller Ernsthaftigkeit machte sich doch Wahlmüdigkeit bemerkbar: Jede einzelne dieser Turnierabstimmungen wurde in geheimer Wahl durchgeführt (durch Zungestrecken). Das ist zwar etwas aufwändig, doch die Demokratie verlangt von jedem Bürger einen Beitrag!

Richtig zufrieden ist das Volk mit seinen Wahlen immer noch nicht: Auch wenn die letzten beiden Verfahren demokratisch aussehen, sie fühlen sich doch immer an wie die Diktatur des Wahlleiters.

**Fünftes Spiel.** Als wesentliche demokratische Neuerung wird das Wahlverfahren nun festgelegt, *bevor* die Spielkarten zugelost werden. Die Spieler einigen sich auf die Auszählung „Wer will  $X$ ?  $Y$ ?  $Z$ ?“ Bei Gleichstand wird ein Schlichter aus  $1, 2, \dots, 7$  zufällig ausgelost, der zwischen den höchstplatzierten Alternativen entscheiden darf.

Befragung und Auszählung ergibt  $X : 4$  und  $Y : 4$  und  $Z : 4$ . Ja, wirklich! Das Los beruft Spieler  $3 = \text{AgentOrange}$  zum salomonischen Schlichter. Dieser entscheidet für  $Z$ , nachdem Bestechungsgelder geflossen sind. Das löchrige Wahlgesetz lässt dies zu, die Klage wird fallengelassen.

😊 Auch diese Sitzung unseres Casino Royal geht in die Geschichte ein. Sie ist wahrhaftig so geschehen, ich hätte sie nicht ausdenken können. *You can't make this stuff up!* Wer dabei war, wird für ewig die Erlebnisse im Herzen bewahren und die Erkenntnisse in Erinnerung behalten. Für alle anderen versuche ich hier dieses Gedächtnisprotokoll.

**Aufgabe:** Haben sich in den diversen Abstimmungen der letzten Wahlen alle Spieler strategisch optimal verhalten? Welche Ergebnisse wären bei optimalem Verhalten zu erwarten? Macht das hier einen Unterschied? Ist strategisches Wählen eine Herausforderung? gar Überforderung?

😊 Bereits unser kleines Labor-Experiment zeigt eine bemerkenswerte Entwicklung von Gotteswillen (immer  $X$ ) über Diktatur (immer ich) hin zu gut gemeinten Abstimmungen (Turniere, Stimmzählung, Schlichtung). Letztere wurden immer weiter verfeinert, manchmal auch übertrieben, schließlich wurde sogar die Wahl durch Versteigerung erfunden!

**Aufgabe:** Sehen Sie Parallelen zur Geschichte der Menschheit? Lernen Sie aus diesen Erfahrungen und machen Sie es besser!

Gegeben sei die Menge  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  der Individuen/Kriterien,  $n \geq 2$ , sowie die Alternativen/Kandidaten  $A = \{a, b, c, \dots\}$ , wobei  $2 \leq \#A < \infty$ . Wie zuvor sei  $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$  die Menge aller strikten Präferenzen  $P \subseteq A \times A$ . Wir schreiben  $x \succsim y$  für  $(x, y) \in P$ , sowie  $x \succ y$  falls zudem  $x \neq y$  gilt. Wir schreiben  $a = \max P := \max(A, \succsim)$ , falls  $a \succsim x$  für alle  $x \in A$  gilt.

### Definition O2A: Auswahlverfahren

Ein **Auswahlverfahren**  $W$  ist eine Funktion (= Zuordnung = Abbildung)

$$W : \mathbb{S}^n \rightarrow A : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Das Verfahren  $W$  ist durch Spieler  $i \in I$  **manipulierbar**, falls

$$W(P'_i; P_{-i}) \succ_i W(P_i; P_{-i})$$

für einen Präferenzvektor  $P \in \mathbb{S}^n$  und einseitige Abweichung  $P'_i \in \mathbb{S}$ .

Das Verfahren  $W$  ist **nicht-manipulierbar** (engl. *strategy-proof*), falls

$$W(P_i; P_{-i}) \succsim_i W(P'_i; P_{-i})$$

für alle Spieler  $i \in I$  sowie  $P \in \mathbb{S}^n$  und  $P'_i \in \mathbb{S}$  gilt. Nash-Gleichgewicht!

Wir haben für Probleme wie Verhandlungen, Koalitionen, Wahlen, usw. gewisse Axiome als logische (Mindest-)Anforderungen ausformuliert. Dies dient ganz konkret und sehr praktisch zur Qualitätssicherung: Wir wollen fehlerbehaftete Verfahren erkennen und vermeiden.

Bei Wahlen ist strategische Manipulierbarkeit ein ernstes Problem. Die Verletzung grundlegender Qualitätskriterien kann dazu führen, dass Wähler nicht ihre wahre Entscheidung zum Ausdruck bringen, sondern strategisch wählen, also wahltaktisch lügen. Das ist gefährlich.

Verletzte Qualitätskriterien ermöglichen zudem (ganz legale) Methoden zur gezielten Beeinflussung und Manipulation des Wahlergebnisses, etwa durch geschickte Reihenfolge bei paarweisen Abstimmungen, das Einbringen irrelevanter Alternativen, eine Aggregation durch beabsichtigte Rundungsfehler (Gerrymandering), usw.

Wir wünschen uns daher ein Auswahlverfahren  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$ , das nicht manipulierbar ist. Selbst diese Minimalforderung ist leider nicht erfüllbar, wie der folgende Satz zeigt.

## Satz O2B: Gibbard 1973, Satterthwaite 1975

Es gebe mindestens drei Alternativen,  $\#A \geq 3$ . Jedes surjektive Auswahlverfahren  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  ist entweder manipulierbar oder diktatorisch.

In  $W$  heißt  $k \in I$  **Diktator**, wenn stets  $W(P_1, \dots, P_n) = \max P_k$  gilt.

## Lemma O2C: Muller–Satterthwaite 1977

Ist ein surjektives Auswahlverfahren  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  nicht-manipulierbar, dann ist  $W$  einhellig und monoton.

**UNA: Einhelligkeit.**  $W(P_1, \dots, P_n) = a$  falls  $a = \max P_i$  für alle  $i \in I$ .

**MON: Monotonie.** Sei  $W(P_1, \dots, P_n) = a$ . Für alle Alternativen  $b \in A$  gelte  $\{i \mid a \succ_i b\} \subseteq \{i \mid a \succ'_i b\}$ . Dann folgt  $W(P'_1, \dots, P'_n) = a$ .

## Satz O2D: Muller–Satterthwaite 1977

Es gebe mindestens drei Alternativen,  $\#A \geq 3$ . Erfüllt ein Verfahren  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  Einhelligkeit und Monotonie, dann ist  $W$  diktatorisch.

Zur Existenz eines Diktators setzen wir unseren Sprachgebrauch fort:

**DIC:** Gibt es einen Diktator, so heißt das Verfahren  $W$  *diktatorisch*.

**~~DIC~~:** Gibt es keinen Diktator, so nennen wir  $W$  *nicht-diktatorisch*.

Die Axiome der Einhelligkeit, Monotonie und Nicht-Diktatur kennen wir aus Arrows axiomatischer Behandlung von Wahlverfahren  $V : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}$ .

Hier jedoch betrachten wir Auswahlverfahren  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$ , daher müssen wir die Begriffe übertragen und im neuen Kontext präzise formulieren.

Einhelligkeit ist klar, wie zuvor, Monotonie braucht etwas Gewöhnung. Wie zuvor ist es das stärkste und daher umstrittenste der Axiome.

**Beispiel:** Die Diktatur  $D_k : \mathbb{S}^n \rightarrow A : (P_1, \dots, P_n) \mapsto \max P_k$  ist nicht manipulierbar: Das ist ein starker Vorteil, und zugleich ihr einziger.

Der Diktator kann durch Abweichung sein Ergebnis nur verschlechtern. Alle anderen Spieler können das Ergebnis überhaupt nicht beeinflussen.

Wir zeigen nun umgekehrt: Wenn  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  nicht manipulierbar ist, dann ist es einhellig und monoton, und im Falle  $\#A \geq 3$  diktatorisch.

Wir untersuchen der Reihe nach folgende Präferenzvektoren:

$$P^0 = \left\{ \begin{array}{l} 1 : a \succ \dots \succ b \\ \vdots : a \succ \dots \succ b \\ n : a \succ \dots \succ b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{UNA}$$

$$P^1 = \left\{ \begin{array}{l} < k : b \succ a \succ \dots \\ k : a \succ b \succ \dots \\ > k : a \succ \dots \succ b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{bleibt}$$

$$P^2 = \left\{ \begin{array}{l} < k : b \succ a \succ \dots \\ k : b \succ a \succ \dots \\ > k : a \succ \dots \succ b \end{array} \right\} \mapsto b \quad \text{kippt}$$

$$P^3 = \left\{ \begin{array}{l} < k : b \succ \dots \succ a \\ k : b \succ a \succ \dots \\ > k : \dots \succ a \succ b \end{array} \right\} \mapsto b \quad \text{MON}$$

Wir untersuchen der Reihe nach folgende Präferenzvektoren:

$$P^4 = \left\{ \begin{array}{l} < k : b \succ \dots \succ a \\ k : a \succ b \succ \dots \\ > k : \dots \succ a \succ b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{nicht } b$$

$$P^5 = \left\{ \begin{array}{l} < k : \dots \succ b \succ a \\ k : a \succ b \succ \dots \\ > k : \dots \succ a \succ b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{MON}$$

$$P^6 = \left\{ \begin{array}{l} < k : \dots \succ c \succ b \succ a \\ k : a \succ c \succ b \succ \dots \\ > k : \dots \succ c \succ a \succ b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{MON}$$

$$P^7 = \left\{ \begin{array}{l} < k : \dots \succ c \succ b \succ a \\ k : a \succ c \succ b \succ \dots \\ > k : \dots \succ c \succ b \succ a \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{nicht } b$$

**Beweis des Satzes von Muller–Satterthwaite O2D:**

Vorgelegt sei ein Auswahlverfahren  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$ , einhellig und monoton. Wir untersuchen die gezeigten Präferenzvektoren  $P^\ell = (P_1^\ell, \dots, P_n^\ell)$  und berechnen allein mit Einhelligkeit und Monotonie die Auswahl  $W(P^\ell)$ :

(0) Dank Einhelligkeit gilt anfangs  $W(P^0) = a$ .

(1) Wir rücken  $b$  schrittweise nach oben solange  $W(P^1) = a, \dots$

(2) bis schließlich  $W(P^2) = b$ . Dank Einhelligkeit geschieht dies irgendwann. Dank Monotonie geschieht es beim Tausch  $a \leftrightarrow b$ .

(3) In allen Präferenzen  $P_i^2$  mit  $i \neq k$  rücken wir  $a$  nach unten. Dank Monotonie bleibt das Ergebnis  $W(P^3) = b$  erhalten.

(4) In Präferenz  $P_k^3$  tauschen wir die Alternativen  $a \leftrightarrow b$ .

Dank Monotonie ist das Ergebnis hier  $W(P^4) \in \{a, b\}$ .

Wäre  $W(P^4) = b$ , dann auch  $W(P^1) = b$  dank Monotonie.

Dies ist ein Widerspruch zu (1), also gilt  $W(P^4) = a$ .

(5) In allen Präferenzen  $P_i^4$  mit  $i < k$  rücken wir  $b$  nach unten.

Dank Monotonie bleibt das Ergebnis  $W(P^5) = a$  erhalten.

**Satz von Muller–Satterthwaite**

(6) In  $P^6$  rücken wir  $c \in A \setminus \{a, b\}$  in die angegebene Position vor  $b$ .

Dank Monotonie bleibt dabei das Ergebnis  $W(P^6) = a$  erhalten.

(7) In allen Präferenzen  $P_i^7$  mit  $i > k$  tauschen wir  $a \leftrightarrow b$ .

Dank Monotonie ist das Ergebnis  $W(P^7) \in \{a, b\}$ .

Es kann nicht  $b$  sein, denn überall gilt  $c \succ b$ .

(Andernfalls rücke das Paar  $c \succ b$  überall ganz nach oben; dank Monotonie und Einhelligkeit gälte dann  $W(P) = c$ , Widerspruch.)

In der speziellen Konstellation  $P^7$  setzen alle Wähler die Alternative  $a$  ans Ende, nur  $k$  nach vorne, dennoch gilt  $W(P_1^7, \dots, P_n^7) = \max P_k^7$ .

Dank Monotonie gilt dies für alle Präferenzvektoren  $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{S}^n$ .

Das zeigt: Im Verfahren  $W$  ist  $k$  souverän bezüglich der Alternative  $a$ .

Anders gesagt: Zu jeder Alternative  $a \in A$  existiert ein Spieler  $k_a \in I$ , der diese Alternative  $a$  gegen alle anderen Spieler durchsetzen kann.

Für je zwei Alternativen  $a \neq b$  in  $A$  gilt  $k_a \neq k_b$ : Es kann nur einen geben!

Wir erhalten also schließlich den ersehnten Quantorentausch: Es gibt

einen Spieler  $k \in I$ , der jede Alternative  $a \in A$  durchsetzen kann. QED

## Lemma von Muller–Satterthwaite

**Beweis des Lemmas O2c:** Sei  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  nicht-manipulierbar. Wir folgern daraus die Eigenschaften Einhelligkeit und Monotonie.

(0) Monotonie für einen Spieler  $i \in I$ :

Sei  $W(P_i; P_{-i}) = a$  und  $P'_i \in \mathbb{S}$ . Für alle  $b \in A$  gelte  $a \succ_i b \Rightarrow a \succ'_i b$ . Wir behaupten  $W(P'_i; P_{-i}) = a$ . Angenommen  $W(P'_i; P_{-i}) = b \neq a$ . Dank Nicht-Manipulierbarkeit gilt dann  $a \succ_i b$ , also auch  $a \succ'_i b$ . Damit wäre  $W$  manipulierbar wegen  $W(P_i; P_{-i}) \succ'_i W(P'_i; P_{-i})$ .

(1) Monotonie für alle Spieler  $i \in I$ :

Sei  $W(P_1, \dots, P_n) = a$ . Für alle Alternativen  $b \in A$  und alle  $i \in I$  gelte  $a \succ_i b \Rightarrow a \succ'_i b$ . Dank (0) können wir  $P_i$  durch  $P'_i$  ersetzen, ohne das Ergebnis zu ändern. Damit folgt  $W(P'_1, \dots, P'_n) = a$ , also Monotonie.

(2) Einhelligkeit / Souveränität:

Sei  $a \in A$ . Da  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  surjektiv ist, existiert  $P \in \mathbb{S}^n$  mit  $W(P) = a$ . Wir rücken  $a$  in jeder Präferenz  $P_i$  nach oben, sodass  $a = \max P_i$ . Dank Monotonie (1) gilt weiterhin  $W(P) = a$ , also Einhelligkeit. □

## Lemma von Muller–Satterthwaite

😊 Das Lemma O2c verbindet zwei grundlegende Sichtweisen: Strategisch gesehen steht Nicht-Manipulierbarkeit im Vordergrund. Axiomatisch gesehen sind Einhelligkeit und Monotonie zentral.

**Aufgabe:** Gilt in Lemma O2c auch die Umkehrung? Das heißt: Aus einhellig und monoton folgt surjektiv und nicht-manipulierbar.

**Lösung:** Im Falle  $\#A \geq 3$  greift der Satz O2D von Muller–Satterthwaite: Das Auswahlverfahren  $W$  ist diktatorisch und somit nicht-manipulierbar.

Im Falle  $\#A = 2$  prüfen wir die vermutete Implikation direkt nach: Einhelligkeit von  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  garantiert, dass  $W$  surjektiv ist.

Monotonie impliziert Nicht-Manipulierbarkeit: Gilt  $W(P_i; P_{-i}) = b$ , aber  $a \succ_i b$ , dann kann Spieler  $i$  das Ergebnis nicht verbessern, also nicht das für ihn bessere Ergebnis  $W(P'_i; P_{-i}) = a$  erreichen.

Dasselbe Argument gilt allgemein für  $\#A \geq 2$ , auch ohne Satz O2D. Hierzu rücken wir das Paar  $a, b$  in jeder Präferenz ganz nach oben und argumentieren dann wie zuvor für  $\#A = 2$ . (Lemma O2E)

😊 Die obigen Beweise sind genial einfach und einfach genial, sie sind vollkommen elementar und zugleich extrem raffiniert. Ich wiederhole daher das Mantra:

*“Elementary” does not mean easy to understand.  
“Elementary” means that very little is required  
to know ahead of time in order to understand it,  
except to have an infinite amount of intelligence.  
(Richard P. Feynman, 1918–1988, Nobelpreis 1965)*

Bitte nehmen Sie sich Stift und Papier zur Hand und gehen Sie alle Schritte durch, erst mit dann ohne Vorlage. Erklären Sie die Ergebnisse (Definitionen, Beispiele, Sätze, Beweise) erst sich und dann anderen. Nur so lernen, begreifen und verstehen Sie Mathematik, ... oder jedes andere Thema, das Ihnen am Herzen liegt.

*Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!*  
(Immanuel Kant, *Was ist Aufklärung?*, 1784)

Unsere Ergebnisse zu Verhandlungen (Kapitel L) und Koalitionen (Kapitel M) waren recht überraschend und zudem überaus erfreulich: Zu konkreten Problemen finden wir konkrete, praktische Lösungen. Der Weg dorthin führte uns über eine beachtliche Wegstrecke durch wunderbare Theorielandschaften, doch jeder Schritt hat sich gelohnt: Wir kehren mit reicher Ernte zurück, mathematisch erhellt und erheitert.

Anders sieht es bei kollektiven Entscheidungen aus mit den stacheligen Themen Wahlverfahren (Kapitel N) und Auswahlverfahren (Kapitel O). Hier ist das Ergebnis ebenso überraschend, doch leider unerfreulich: Grundlegende Minimalforderungen nach Fairness und Gerechtigkeit sind unerfüllbar, nicht nur historisch-empirisch, sondern nachweislich!

Es ist gut zu wissen, was möglich ist, und ebenso, was unmöglich ist. Die Sehnsucht nach einfachen Antworten und klaren Autoritäten ist zwar weit verbreitet, aber einer komplexen Sachlage meist nicht angemessen. Konsens oder Kompromiss muss die Gesellschaft selbst herstellen, diese mühsame Arbeit kann ihr keine „magische Formel“ abnehmen.

Aus dem vorigen Kapitel kennen wir Arrows Satz vom Diktator (N3E). Wir untersuchen hierzu alle **Wahlverfahren** von der Form  $V : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}$ .

Vereinfachend beschränken wir uns nun auf strikte Präferenzen  $\mathbb{S} \subset \mathbb{P}$ . Wenn wir zudem Indifferenzen im Ergebnis aufbrechen, so erhalten wir

$$V : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Zu Recht wenden Sie ein, dass viele Wahlverfahren nicht so verlaufen. Wir untersuchen daher noch einfacher **Auswahlverfahren** von der Form

$$W : \mathbb{S}^n \rightarrow A : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Jedes Wahlverfahren  $V$  definiert ein Auswahlverfahren  $W = \max V$ . Wenn wir also ein geeignetes  $V$  haben, dann automatisch auch  $W$ .

Wir zeigen nun umgekehrt, wir wir aus jedem nicht-manipulierbaren Auswahlverfahren  $W$  ein Wahlverfahren  $V$  rekonstruieren können.

Arrows Satz N3E impliziert dann Satz O2D von Muller–Satterthwaite und somit auch Satz O2B von Gibbard–Satterthwaite.

Vorgelegt sei ein **Auswahlverfahren** / *social choice function*

$$W : \mathbb{S}^n \rightarrow A : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Konstruieren wollen wir ein **Wahlverfahren** / *social welfare function*

$$V : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Sei  $P \subseteq A \times A$  eine Präferenz auf der Menge  $A$ , also transitiv und linear, geschrieben  $x \succcurlyeq y$  für  $(x, y) \in P$ . Jede Zerlegung  $A = B \sqcup B'$  definiert

$$P^B := [P \cap (B \times B)] \cup [P \cap (B' \times B')] \cup [B \times B'].$$

Dies ist eine Präferenz, identisch mit  $P$  für  $x, y \in B$  und für  $x, y \in B'$ , aber für  $x \in B$  und  $y \in B'$  gilt  $x \succ y$ . Anschaulich entsteht  $P^B$  aus  $P$ , indem wir  $B$  nach vorne sortieren. Ist  $P$  strikt, so auch  $P^B$ . Beispiele:

$$\begin{array}{ll} P & : a \succ b \succ c \approx d \succ e, & P^{\{b,e\}} & : b \succ e \succ a \succ c \approx d, \\ P^{\{c\}} & : c \succ a \succ b \succ d \succ e, & P^{\{b,c,d\}} & : b \succ c \approx d \succ a \succ e. \end{array}$$

Abkürzend schreiben wir  $P^x = P^{\{x\}}$ ,  $P^{xy} = P^{\{x,y\}}$  und  $P^{xyz} = P^{\{x,y,z\}}$ .

## Lemma O2E: kanonische Fortsetzung von Auswahlverfahren

Vorgelegt sei ein einhelliges, monotones Auswahlverfahren

$$W : \mathbb{S}^n \rightarrow A : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

(0) Für alle  $\emptyset \neq B \subseteq A$  gilt  $W(P_1^B, \dots, P_n^B) \in B$ . Für alle  $\emptyset \neq C \subseteq B \subseteq A$  gilt  $W(P_1^B, \dots, P_n^B) = W(P_1^C, \dots, P_n^C)$  oder  $W(P_1^B, \dots, P_n^B) \in B \setminus C$ .

(1) Somit lässt sich  $W$  kanonisch fortsetzen zu dem Wahlverfahren

$$V : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P \quad \text{mit} \\ P := \{ (x, y) \mid W(P_1^{xy}, P_2^{xy}, \dots, P_n^{xy}) = x \}.$$

(2) Hierbei gilt  $W = \max V$ , und auch  $V$  ist einhellig und monoton.

Nach Satz N3B von Arrow gilt für  $\#A \geq 3$ : Jedes Wahlverfahren  $V$  ist diktatorisch, somit auch das zugehörige Auswahlverfahren  $W = \max V$ .

**Aufgabe:** Weisen Sie alle Aussagen des Lemmas sorgfältig nach.

**Lösung:** (0a) Angenommen  $W(P_1^B, \dots, P_n^B) = a$  mit  $a \in A \setminus B$ . Wir wählen  $b \in B$ . Wegen MON müsste  $W((P_1^B)^b, \dots, (P_n^B)^b) = a$  gelten, doch dank UNA gilt  $W((P_1^B)^b, \dots, (P_n^B)^b) = b$ . Widerspruch!

(0b) Angenommen  $W(P_1^B, \dots, P_n^B) = c \in C$ . Dank MON folgt dann  $c = W(P_1^B, \dots, P_n^B) = W((P_1^B)^C, \dots, (P_n^B)^C) = W(P_1^C, \dots, P_n^C)$ .

(1) Wir müssen  $P \in \mathbb{S}$  zeigen, d.h.  $V : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}$  ist wohldefiniert.

**Reflexivität:** Für  $x = y$  in  $A$  gilt  $W(P_1^x, \dots, P_n^x) = x$  dank UNA.

**Antisymmetrie:** Für  $x \neq y$  in  $A$  gilt  $W(P_1^{xy}, \dots, P_n^{xy}) \in \{x, y\}$ , also entweder  $(x, y) \in P$  oder  $(y, x) \in P$ , aber niemals beides.

**Transitivität:** Gegeben seien  $x, y, z \in A$  mit  $W(P_1^{xy}, \dots, P_n^{xy}) = x$   $W(P_1^{yz}, \dots, P_n^{yz}) = y$ . Wir müssen  $W(P_1^{xz}, \dots, P_n^{xz}) = x$  zeigen.

Aus  $W(P_1^{xy}, \dots, P_n^{xy}) = x$  folgt  $W(P_1^{xyz}, \dots, P_n^{xyz}) \in \{x, z\}$  dank (0).

Aus  $W(P_1^{yz}, \dots, P_n^{yz}) = y$  folgt  $W(P_1^{xyz}, \dots, P_n^{xyz}) \in \{x, y\}$  dank (0).

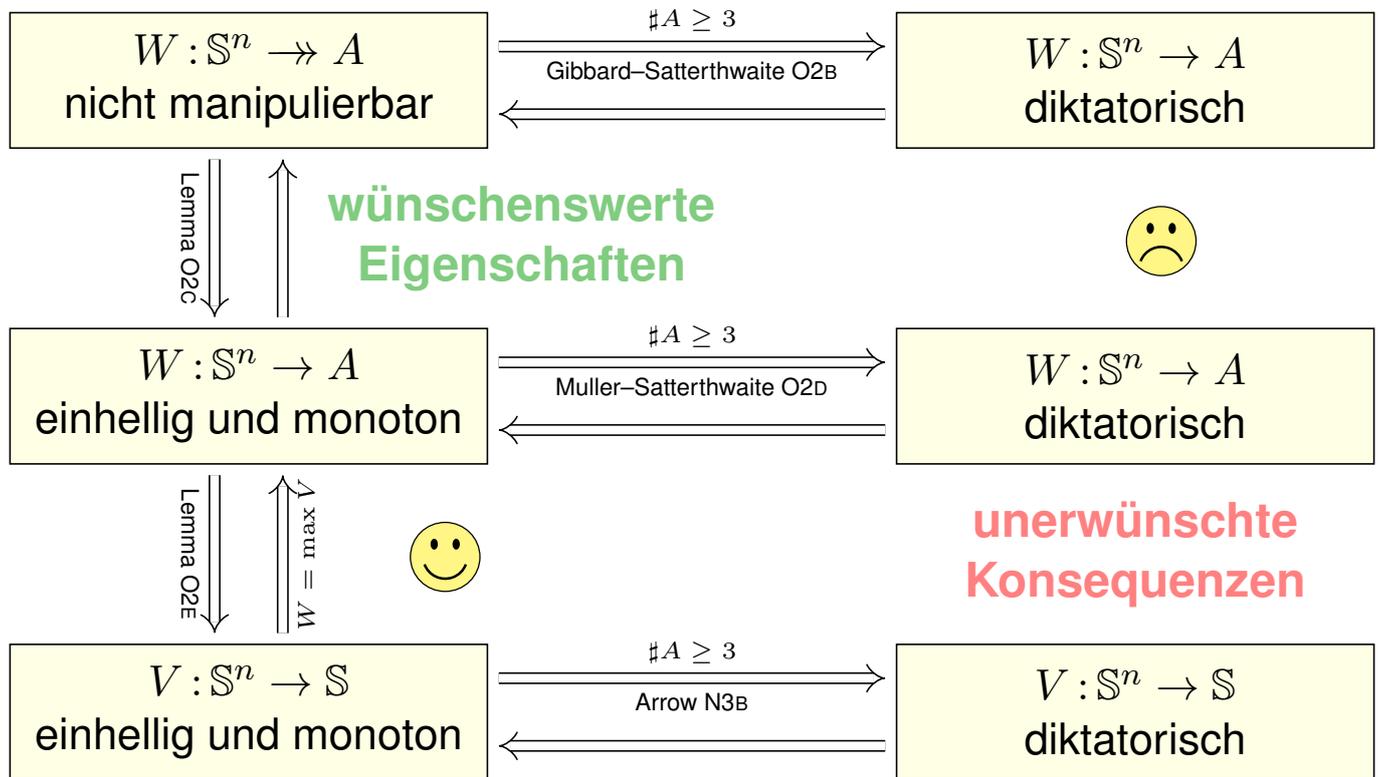
Daraus folgt  $W(P_1^{xyz}, \dots, P_n^{xyz}) = x$  und somit  $W(P_1^{xz}, \dots, P_n^{xz}) = x$ :

Wäre  $W(P_1^{xz}, \dots, P_n^{xz}) = z$ , so  $W(P_1^{xyz}, \dots, P_n^{xyz}) \in \{y, z\}$  dank (0).

(2) Die weiteren Aussagen sind klar.

**QED**

Abgestimmt wird über eine Menge  $A$  von Alternativen, wobei  $\#A \geq 2$ .  
Wie zuvor sei  $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$  die Menge der strikten Präferenzen auf  $A$ .

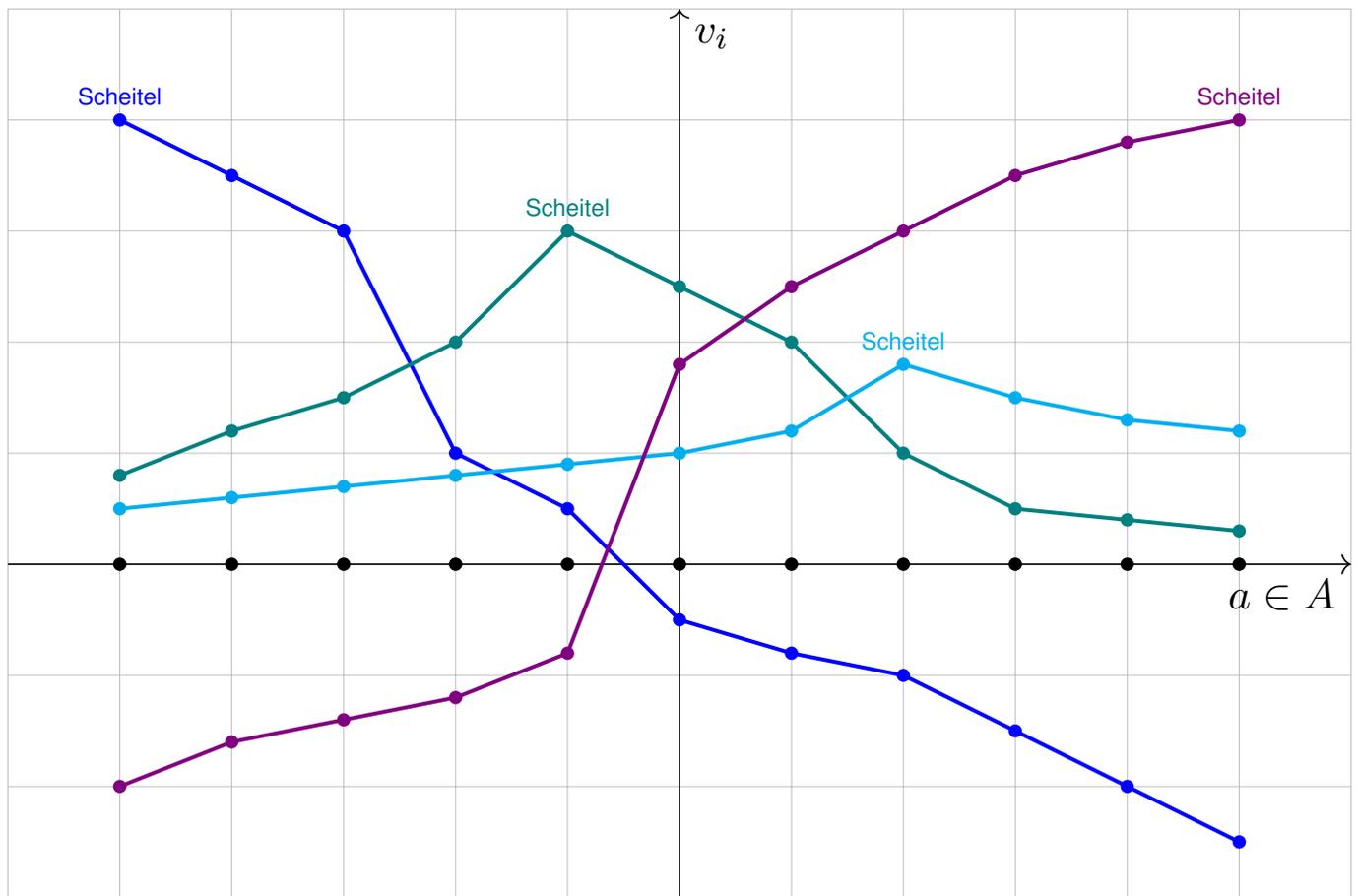


Wir haben das Thema Aus/Wahlverfahren nun verschieden betrachtet und mehrfach umformuliert, das Ergebnis ist robust und immer gleich: Bei drei oder mehr Alternativen gibt es kein perfektes Verfahren. Die obige Graphik fasst die logischen Implikationen zusammen.

Wir haben ein konkretes Anwendungsproblem, demokratische Wahlen, und nehmen hierzu eine ganz pragmatische Ingenieurperspektive ein: Wie können wir geeignete Aus/Wahlverfahren explizit konstruieren? Welche Mindestanforderungen / Axiome müssen erfüllt werden?

Bei Wahlen ist strategische Manipulierbarkeit ein ernstes Problem. Die Verletzung grundlegender Qualitätskriterien kann dazu führen, dass Wähler nicht ihre wahre Entscheidung zum Ausdruck bringen, sondern strategisch wählen, also wahltaktisch lügen. Das ist gefährlich.

Wir beleuchten abschließend eine partielle Lösung, die zwar speziell ist, doch manchmal durchaus anwendbar. Wenn wir die Heterogenität der Gesellschaft hinreichend einschränken können, etwa auf gescheiterte Präferenzen, dann sind perfekte Aus/Wahlverfahren tatsächlich möglich.



Wie zuvor sei  $A$  die Menge der Alternativen, über die abgestimmt wird. Als zusätzliche Struktur geben wir der Menge  $A$  nun eine feste lineare Ordnung  $\leq$ , etwa links nach rechts auf einem politischen Spektrum.

Eine Bewertung  $v : (A, \leq) \rightarrow (\mathbb{R}, \leq)$  heißt **gescheitelt** / *single-peaked*, wenn ein Maximum  $a \in A$  existiert, sodass für alle  $x, y \in A$  gilt:

$$x < y \leq a \implies v(x) < v(y)$$

$$a \leq x < y \implies v(x) > v(y)$$

Gleiches gilt für die zugehörige Präferenz, mit  $x \preccurlyeq y$  gdw  $v(x) \leq v(y)$ :

$$x < y \leq a \implies x \prec y$$

$$a \leq x < y \implies x \succ y$$

**Beispiel:** Diese Annahme ist oft plausibel für ein politisches Spektrum oder die Abstimmung einer Zahl (Volljährigkeit, Rentenalter, etc.).

Mit  $\mathbb{P}_{\leq} = \mathbb{P}(A, \leq)$  bzw.  $\mathbb{S}_{\leq} = \mathbb{S}(A, \leq)$  bezeichnen wir die Menge aller gescheitelten (strikten) Präferenzen auf  $A$  bezüglich der Ordnung  $\leq$ .

Weiterhin sei  $(A, \leq)$  die linear geordnete Menge der Alternativen. Hierin sei  $a_1, \dots, a_n \in A$  eine Liste mit ungerader Länge  $n = 2m - 1$ . Nach Sortierung können wir  $a_1 \leq \dots \leq a_m \leq \dots \leq a_n$  annehmen; der **Median** oder **Zentralwert** ist dann  $\text{med}(a_1, \dots, a_n) = a_m$ .

**Satz O3A: Gescheiterte Präferenzen erlauben perfekte Verfahren.**

(1) Sei  $n \geq 3$  ungerade. Wir definieren das **Median-Auswahlverfahren**

$$M : \mathbb{P}_{\leq}^n \rightarrow A : (P_1, \dots, P_n) \mapsto a = \text{med}(\max P_1, \dots, \max P_n).$$

Dieses Verfahren hat alle guten Eigenschaften: Es ist nicht-diktatorisch, surjektiv und nicht-manipulierbar, somit auch einhellig und monoton.

(2) Sei  $n \geq 3$  ungerade. Wir definieren das **Condorcet-Wahlverfahren**

$$C : \mathbb{S}_{\leq}^n \rightarrow \mathbb{S}_{\leq} : (P_1, \dots, P_n) \mapsto P \text{ durch} \\ P = \{ (x, y) \in A^2 \mid \#\{ i \mid (x, y) \in P_i \} \geq \#\{ i \mid (y, x) \in P_i \} \}.$$

Dieses Verfahren hat alle guten Eigenschaften: Es ist nicht-diktatorisch, einhellig und monoton, somit auch unabhängig von dritten Alternativen.

Im Falle  $\#A \geq 3$  von drei oder mehr Alternativen wissen wir bereits, dass allgemeine Auswahlverfahren  $W : \mathbb{S}^n \rightarrow A$  (O2B, O2D) oder gar allgemeine Wahlverfahren  $V : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}$  bzw.  $V : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}$  (N3B, N3E) mit all diesen wünschenswerten Eigenschaften nicht existieren.

Das Wahlverfahren soll allgemein gelten, also auch aus extremen, heterogenen, widersprüchlichen Voten eine gemeinsame Präferenz extrahieren. Die Gesellschaft kann extrem uneinig sein, gar zerstritten, und das Wahlverfahren soll es irgendwie richten. Das ist zu viel verlangt!

Hier betrachten wir speziell auf  $\mathbb{P}_{\leq} \subset \mathbb{P}$  beschränkte Auswahlverfahren  $W : \mathbb{P}_{\leq}^n \rightarrow A$  bzw. auf  $\mathbb{S}_{\leq} \subset \mathbb{S}$  beschränkte Wahlverfahren  $V : \mathbb{S}_{\leq}^n \rightarrow \mathbb{S}_{\leq}$ . Die hierdurch modellierte Gesellschaft ist deutlich weniger heterogen. In dieser günstigen Situation sind perfekte Aus/Wahlverfahren möglich!

Es ist gut zu wissen, was möglich ist, und ebenso, was unmöglich ist: Die uneingeschränkte Problemstellung ist nachweislich unlösbar, die eingeschränkte Problemstellung hingegen erlaubt Lösungen! Auch über diese bescheidenen Erfolge dürfen wir uns freuen.

**Aufgabe:** Weisen Sie alle Aussagen des Satzes sorgfältig nach.

**Lösung:** (1a) Surjektivität ist klar: Zu jedem Element  $a \in A$  existiert eine gescheitelte Präferenz  $P \in \mathbb{P}_{\leq}$  mit  $\max P = a$ , somit  $M(P, \dots, P) = a$ .

(1b) Anreiz-Kompatibilität: Sei  $M(P_1, \dots, P_n) = a$ . Kann ein Spieler  $i \in I$  mit Scheitel  $\max P_i = b$  das Ergebnis zu seinen Gunsten manipulieren? Im Falle  $a = b$  sicher nicht. Im Falle  $a < b$  kann er durch strategische Wahl  $b'$  den Median nur nach links verrücken zu  $a' < a$ , aus seiner Sicht also eine Verschlechterung. Im Falle  $b < a$  gilt symmetrisch dasselbe.

Daraus folgen Einhelligkeit und Monotonie dank Lemma O2c. Sie sind auch leicht direkt nachzuweisen, versuchen Sie es!

(1c) Nicht-Diktatur: Jeder Spieler  $i \in I$  kann von den anderen Spielern überstimmt werden, da wir hier insgesamt  $n \geq 3$  Spieler voraussetzen. Ausführlich: Sei  $P_i \in \mathbb{P}_{\leq}$  mit  $\max P_i = b$ . Es existiert  $a \in A$  mit  $a \neq b$  und für alle  $j \neq i$  existiert eine Präferenz  $P_j \in \mathbb{P}_{\leq}$  mit  $\max P_j = a$ . Dann gilt  $M(P_1, \dots, P_n) = a$ , und somit ist Spieler  $i$  kein Diktator.

(2) Für die so definierte Relation  $P$  müssen wir  $P \in \mathbb{S}_{\leq}$  zeigen.

(2a) Trichotomie ist klar: Für je zwei Alternativen  $x, y \in A$  gilt entweder  $x = y$  oder  $x \succ y$  oder  $y \succ x$ , da die Anzahl  $n$  der Spieler ungerade ist.

(2b) Der Median  $a = M(P_1, \dots, P_n)$  gewinnt mit absoluter Mehrheit im direkten Vergleich gegen jede Alternative  $x \in A \setminus \{a\}$ . Nach Umordnung gilt  $\max P_1 \leq \dots \leq \max P_m \leq \dots \leq \max P_n$  und  $a = \max P_m$ . Somit: Für alle  $x < y \leq a$  gilt  $x \prec y$  aufgrund der abs. Mehrheit  $P_m, \dots, P_n$ . Für alle  $a \geq y > x$  gilt  $y \succ x$  aufgrund der abs. Mehrheit  $P_1, \dots, P_m$ .

Transitivität: Vorgelegt seien drei Elemente  $x < y < z$  in  $A$ . Wir müssen die Zyklen  $x \prec y \prec z \prec x$  und  $x \prec z \prec y \prec x$  ausschließen. Eingeschränkt auf  $A' = \{x < y < z\}$  ist jede Präferenz  $P'_i = P_i \cap (A' \times A')$  gescheitelt. Der Median  $a' = M(P'_1, \dots, P'_n) \in A'$  gewinnt demnach gegen jede der beiden anderen Alternativen in  $A' \setminus \{a'\}$ , daher ist ein Zyklus unmöglich.

Somit ist  $C : \mathbb{S}_{\leq}^n \rightarrow \mathbb{S}_{\leq} : (P_1, \dots, P_n) \mapsto P$  tatsächlich wohldefiniert.

Die weiteren Eigenschaften von  $C$  sind klar nach Konstruktion. □