Kapitel N

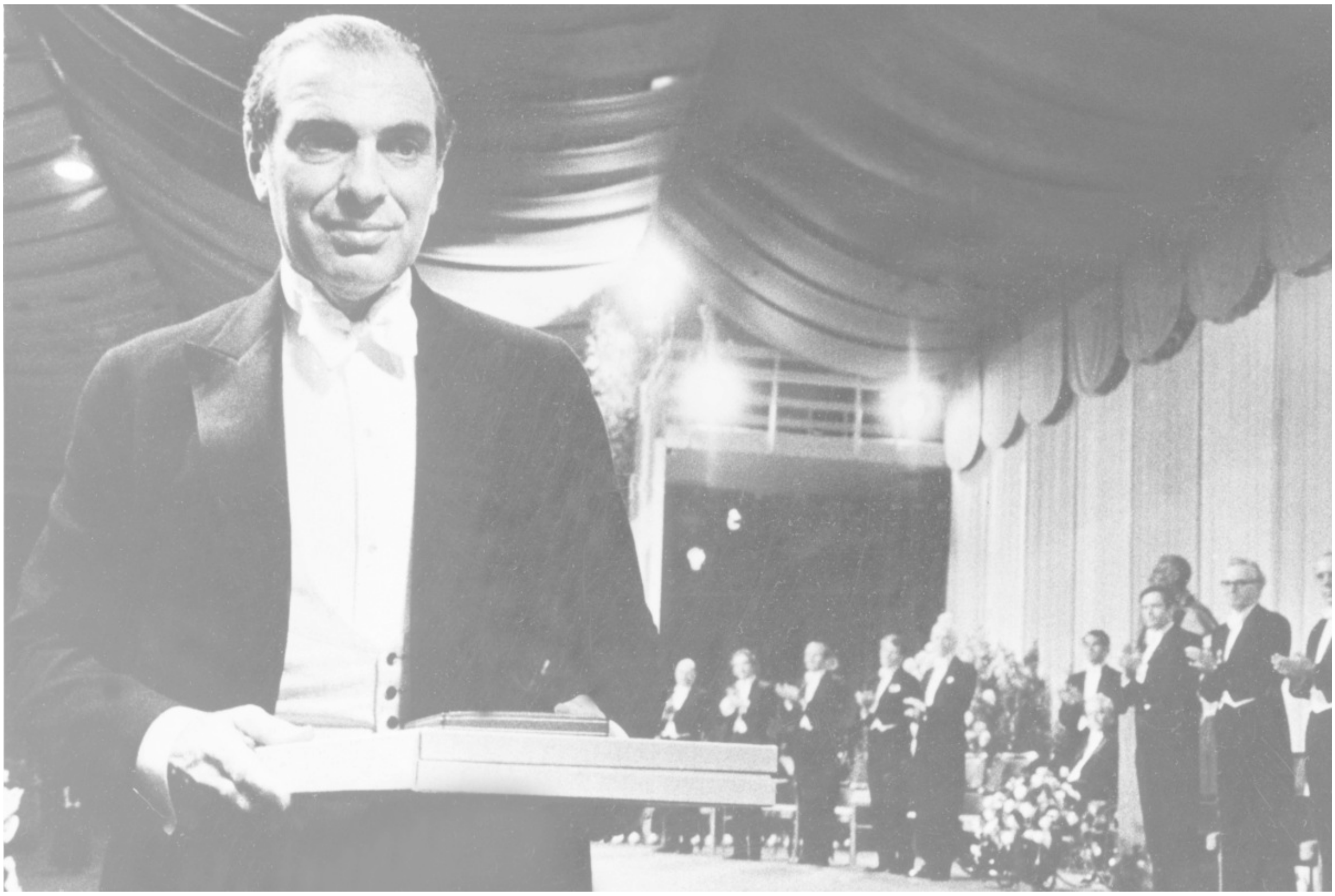
Kollektive Entscheidungen und Arrows Satz vom Diktator

„That was it! It took about five days to write in September 1948. When every attempt failed I thought of the impossibility theorem.“

Kenneth Arrow, zitiert nach Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind*

Inhalt dieses Kapitels N

Kenneth Arrow (1921–2017)



Kenneth Arrow bei der Nobelpreisverleihung, Stockholm 10.12.1972 (Associated Press)

Kenneth Arrow (1921–2017)

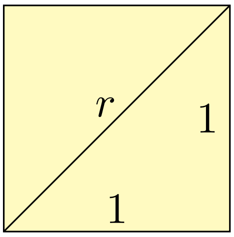
Kenneth Arrow ist berühmt für seinen Unmöglichkeitssatz, spektakulär auch „Satz vom Diktator“ genannt, und weitere Arbeiten zu kollektiven Entscheidungen. Er starb am 21. Februar 2017 im Alter von 95 Jahren. Er war Professor an den Universitäten Harvard und Stanford.

Dieses Kapitel handelt von seiner Doktorarbeit aus dem Jahre 1951. Für diese und weitere bahnbrechende Arbeiten zur Wohlfahrtstheorie und zur Theorie ökonomischer Gleichgewichte bekam Arrow 1972 den Wirtschaftsnobelpreis, mit 51 Jahren als bislang jüngster Preisträger.

Die Arbeiten von Nobelpreisträgern sind oft spannend und wegweisend. Für allgemein verständliche Vorträge eignen sie sich leider selten, oder nur mit großen Mühen. Es gibt ein paar bemerkenswerte Ausnahmen, hierzu zählen Nashs Gleichgewichtssatz und Arrows Satz vom Diktator.

Dieses Theorem ist ein schönes Lehrstück mathematischen Denkens. Der Beweis ist genial-einfach, die Aussage ist gesellschaftlich relevant. Aus der beliebten Reihe: „Wie schreibe ich meine Doktorarbeit in fünf Tagen und erhalte dafür den Wirtschaftsnobelpreis?“

Aperitif: ein klassischer Beweis durch Widerspruch



Sie erinnern sich an $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$.
Ist diese Zahl rational oder irrational?
Wir suchen einen Bruch $r = a/b \in \mathbb{Q}$,
der $r^2 = 1^2 + 1^2$ erfüllt, also $r \cdot r = 2$.

Satz N0C: Irrationalität von $\sqrt{2}$, Euklid ca. 300 v.Chr.
Es gibt keine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $r^2 = 2$.

Beweis: Angenommen, es gäbe $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.
Rational bedeutet $r = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b > 0$.
Zudem sei der Bruch a/b vollständig gekürzt.

Aus der Gleichung $(a/b)^2 = 2$ folgt $a^2 = 2b^2$.
Daher ist a^2 gerade, also $a = 2\overline{a}$ mit $\overline{a} \in \mathbb{Z}$.
Einsetzen ergibt $4\overline{a}^2 = 2b^2$, also $2\overline{a}^2 = b^2$.
Daher ist b^2 gerade, also $b = 2\overline{b}$ mit $\overline{b} \in \mathbb{Z}$.

Somit ließe sich $a/b = \overline{a}/\overline{b}$ weiter kürzen. Das ist ein Widerspruch!
Also gibt es keine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $r^2 = 2$. QED

Rational, irrational, scheißegal?

Der Beweis ist klar und einfach, allerdings trickreich: Es ist ein indirekter Beweis, durch Widerspruch. Das müssen Sie erst einmal verarbeiten.

Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.
Dann zeigen wir, dass diese Annahme zum Widerspruch führt.
Wir schließen daraus, dass unsere anfängliche Annahme falsch war.

Es ist sinnlos, einen Bruch für $\sqrt{2}$ zu suchen, denn es gibt keinen.
Wohl gibt es gute Approximationen, etwa $14142/10000$ wie angegeben, aber kein Bruch kann exakt $\sqrt{2}$ darstellen; das haben wir bewiesen.

Nutzen Sie Ihre wertvolle Lebenszeit lieber für lohnendere Dinge!
Zum Beispiel ist es durchaus interessant, lehrreich und lohnend, zu verstehen, *warum* $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Das ist ein gutes Ziel.

Übung: Welche der Zahlen $\sqrt[p]{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ sind ir/rational?

Manch Amateur sucht nach der Quadratur des Kreises, einem weiteren klassischen Konstruktionsproblem. Es ist leider ebenso unmöglich. Der Beweis ist allerdings komplizierter, viele suchen daher lieber nach einer Quadratur, die es nicht gibt. Einige werden darüber verrückt.

Rational, irrational, scheißegal?

Zur Irrationalität von $\sqrt{2}$ schreibt Platon (428–348 v.Chr.) in den *Nomoi*:

Ihr wackeren Helenen, das ist eins von den Dingen, von denen gesagt wird, es sei eine Schande, wenn man es nicht wisse, und wenn man das Notwendige weiß, ist's erst noch keine sonderliche Ehre.

Heutigen Schüler:innen wird dies vorenthalten, vorgeblich können sie's nicht begreifen; eine selbsterfüllende Prophezeiung, Fluch und Betrug.

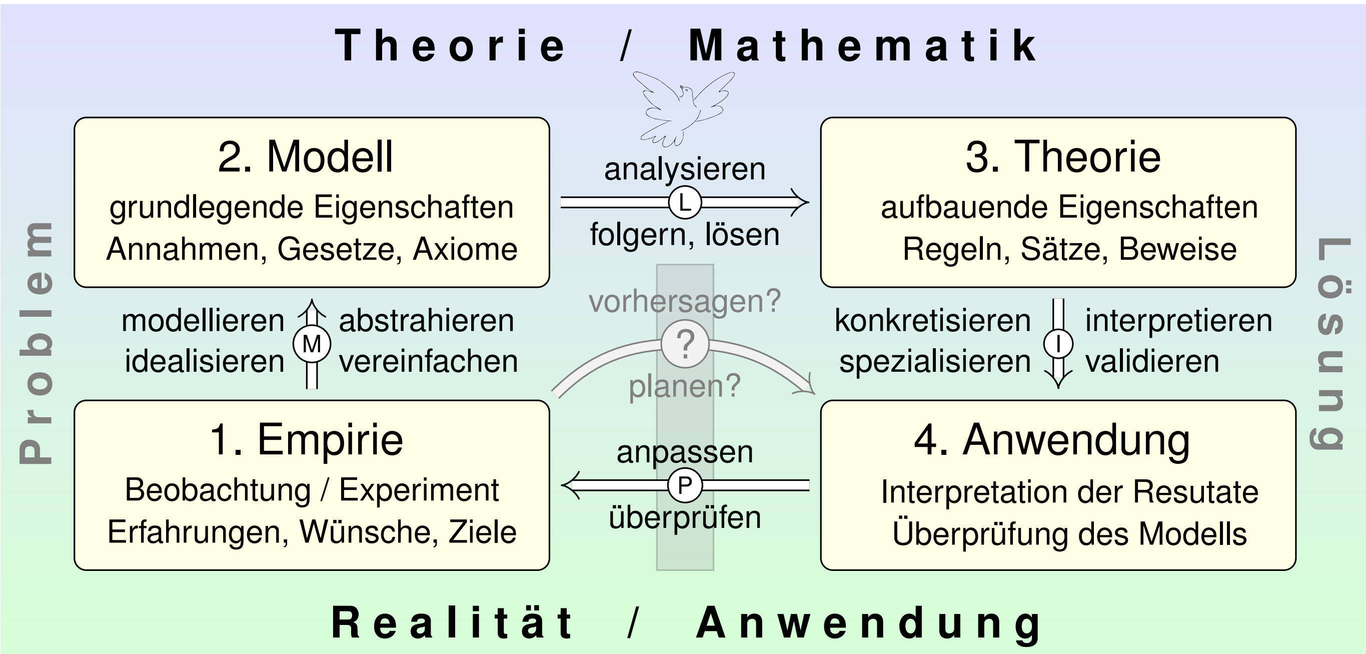
Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ war lange vor Euklid bekannt, etwa Hippasos von Metapont. Er lebte um 500 v.Chr. und gehörte der Bruderschaft des Pythagoras an, eine Art philosophisch-esoterische Sekte. Der Kernsatz ihrer Lehre lautete: „Alles ist Zahl.“ Damit meinten sie, alles in der Natur wird durch ganze Zahlen und ihre Verhältnisse (Brüche) beschrieben.

Der Legende nach war die Bruderschaft über die Irrationalität (von $\sqrt{5}$) derart schockiert und erbost, dass sie Hippasos auf einer Schiffsreise ermordeten, indem sie ihn über Bord warfen. Ignoranz schlägt Geist.

Ähnlich schockierend wirkt bis heute der Satz vom Diktator. Wir nehmen uns die nötige Zeit, um alle Ideen und Begriffe sorgfältig auszuführen.

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Wahlverfahren: informelle Problemstellung

Beispiel: Eine vierköpfige Familie $I = \{1, 2, 3, 4\}$ plant ihren Urlaub. Zur Wahl stehen $A = \{\ a =$ Venedig, $\ b =$ London, $\ c =$ Paris $\}$.

$$\begin{array}{llllll} 1: & b & \succ & c & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b & \approx & c \\ 3: & a & \succ & c & \succ & b \\ 4: & c & \succ & b & \succ & a \end{array}$$

Was ist ein sinnvoller Kompromiss? rational? nachvollziehbar? gerecht? Geht das überhaupt? Wenn ja, nach welchen Regeln?

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Geschäftsstrategien, jede Aktionär:in i hat ihre eigene Präferenz P_i. Wir suchen ein Abstimmungsergebnis P.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Universitäten, P_i ist das Ranking nach Kriterium i. Gesucht ist ein zusammenfassendes Ranking P aller Unis.

Beispiel: Berufung auf eine Professur, Kandidat:innen $A = \{a, b, c, \dots\}$. Die Kriterien sind Forschung, Lehre, Drittmittel, Administration.

Die Übungen erklären weitere Beispiele und zahlreiche Anwendungen. Solche Beispiele illustrieren. Abstraktion strukturiert und vereinfacht!

Wahlverfahren: gesellschaftliche Relevanz

Abstimmungen sind wohl jedem von uns aus Alltag und Politik vertraut. Zur Demokratie gehören Wahlen, Abstimmungen, Volksentscheide, etc.

Eine Gruppe von Personen $1, 2, \dots, n$ darf / soll / muss über mögliche Alternativen $a, b, c, \dots$ abstimmen. Doch nach welchem Verfahren soll abgestimmt werden? Welche Anforderungen soll das Verfahren erfüllen? Diese Frage tritt in zahlreichen Anwendungen auf, sie ist daher für die Praxis überaus wichtig… und auch theoretisch höchst interessant!

Offensichtlich braucht man gar nicht erst abzustimmen, wenn es nur eine Alternative gibt, $A = \{a\}$. Schlimmer noch: Man *kann* gar nicht abstimmen, wenn es gar keine Alternativen gibt, $A = \emptyset$. „Alternativlos“ war das Unwort des Jahres 2010 und wird immer wieder gerne genutzt.

Wenn es genau zwei Alternativen a, b gibt, dann kann man zum Beispiel die Stimmen zählen und es entscheidet die relative / einfache / absolute / qualifizierte Mehrheit. Hier gibt es bereits mehrere Möglichkeiten, ein Wahlverfahren festzulegen. Zudem gibt es manchmal Vetorechte zum Schutz von Minderheiten und ähnliche Verfeinerungen, siehe unten.

Wahlverfahren: mathematische Sorgfaltspflicht

Wie sieht ein Wahlverfahren allgemein aus, und was soll es leisten? Wir wollen nicht nur Einzelfälle behandeln, sondern eine allgemeine Regel finden, ein Wahlverfahren, das vernünftigen Ansprüchen genügt.

Jedes Individuum $i \in I$ hat seine individuelle Präferenz $P_i \in \mathbb{P}(A)$. Daraus soll nun eine gemeinsame Präferenz $P = V(P_1, \dots, P_n)$ als Ergebnis gebildet werden, also ein Gesamtclassement.

Das klingt zunächst recht einfach, aber es erweist sich als überraschend schwierig, mitunter gar unmöglich! Um dies im Detail zu verstehen und als Ergebnis zusammenzufassen, müssen wir sehr präzise formulieren und argumentieren. Dann jedoch wird alles wunderbar klar und leicht. Arrows Theorem ist ein schönes Lehrstück mathematischen Denkens.

Wir benötigen hierzu „nur“ elementare Logik und Mengenlehre: Diese ermöglichen uns präzise Begriffe, zuerst um Beispiele zu analysieren, dann um allgemeine Aussage formulieren und beweisen zu können. Damit können wir erklären, was ein Wahlverfahren ist (in Form einer Definition) und welche Eigenschaften wir uns wünschen (als Axiome).

Wahlverfahren: mahnende Analogien

Es ist wie so oft in der Mathematik und allgemein im Leben: Axiome sind Annahmen, Forderungen, Wünsche, Sehnsüchte. Nicht immer lassen sie sich erfüllen. Selbst wenn sie erfüllbar sind, so nicht immer eindeutig. Denken Sie an leuchtende Beispiele aus dem ersten Studienjahr:

(1) Wir wünschen eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $r^2 = 2$. Ist dieser Wunsch erfüllbar? Nein! Die beiden Forderungen $r \in \mathbb{Q}$ und $r^2 = 2$ sind widersprüchlich, also unvereinbar und somit unerfüllbar.
☺ Das ist einer der vielen guten Gründe für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ ist $\sqrt{2} = 1.4142135623\dots$ eine Lösung, und $-\sqrt{2}$ ebenso!

(2) Wir wünschen eine Volumenmessung $\mathrm{vol}_n : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also normiert, linear in jeder Spalte, alternierend bei Vertauschung. Ist dieser Wunsch erfüllbar? Ja! Wir konstruieren die Determinante.
☺ Die Konstruktion gelingt sogar über jedem kommutativen Ring. Sie ist ein wunderbares Werkzeug der Linearen Algebra!

Nachdem Existenz und Eindeutigkeit geklärt sind, wollen wir die Lösung tatsächlich finden / berechnen / approximieren, dies möglichst effizient.

Präferenzen: Definition

Sei $A = \{a, b, c, \dots\}$ die Menge der betrachteten **Alternativen**, $\sharp A \ge 2$.
Wir vereinbaren die folgende Schreib- und Sprechweise.

Starke Präferenz: $x \succ y$ bedeutet Alternative x ist besser als y.
Indifferenz/Äquivalenz: $x \approx y$ bedeutet x und y sind gleich gut.
Schwache Präferenz: $x \succcurlyeq y$ bedeutet $x \succ y$ oder $x \approx y$.

Formal wird $\succcurlyeq$ festgelegt durch alle Paare $(x, y) \in A \times A$ mit $x \succcurlyeq y$:
Die Menge $P = \{\, (x, y) \in A \times A \mid x \succcurlyeq y \,\}$ codiert alle Information.

Aus $\succcurlyeq$ rekonstruieren wir: Indifferenz $x \approx y$ bedeutet $x \succcurlyeq y$ und $y \succcurlyeq x$.
Starke Präferenz $x \succ y$ bedeutet $x \succcurlyeq y$ und nicht $y \succcurlyeq x$. Also genügt $\succcurlyeq$.

Definition N1A: Präferenz

Die Relation $\succcurlyeq$ heißt **Präferenz**, wenn sie folgende Grundregeln erfüllt:
Transitivität: Gilt $x \succcurlyeq y$ und $y \succcurlyeq z$, so auch $x \succcurlyeq z$.
Linearität: Für jedes Paar $x, y \in A$ gilt $x \succcurlyeq y$ oder $y \succcurlyeq x$.
Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Antisymmetrie: Für alle $x \ne y$ gilt $x \succ y$ oder $y \succ x$, nie $x \approx y$.
Mit $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$ bezeichnen wir die Menge aller strikten Präferenzen auf A.

Präferenzen: Beispiele

Wir nutzen hier zwei Schreibweisen für dasselbe Objekt:
Die Schreibweise als Relation $\succcurlyeq$ ist bequem und suggestiv.
Die Darstellung als Menge $P \subseteq A \times A$ dient als präzise Grundlage.
Beide sind äquivalent: Genau dann gilt $x \succcurlyeq y$, wenn $(x, y) \in P$ gilt.

Wozu brauchen wir Definitionen? Damit wir wissen, wovon wir sprechen! Eine Definition ist eine Vereinbarung: Damit präzisieren wir die Objekte, die wir untersuchen wollen. Damit können Sie selbstständig überprüfen, ob ein vorgelegtes Objekt die geforderten Eigenschaften hat oder nicht.

Aufgabe: Sind die folgenden Teilmengen von $A \times A$ Präferenzen?
(1) $R = \{(a, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(2) $S = \{(a, a), (b, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(3) $T = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(4) $U = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(5) $V = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ auf $A = \{a, b, c\}$

Lösung: Wir nutzen obige Definition N1A und wenden sie sorgfältig an:
(1) Nein, es fehlen (a, a) und (b, b). (2) Nein, es fehlt (a, b) oder (b, a).
(3) Ja, kurz $a \succ b$. (4) Ja, kurz $a \approx b$. (5) Nein, es fehlt (a, c).

Präferenzen: Beispiele

Aufgabe: Wie viele Präferenzen gibt es auf der Menge $A = \{a, b\}$?

Lösung: Es gibt genau drei Präferenzen, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{lllll} \{(a,a),(a,b),(b,b)\} & \text{kurz:} & a & \succ & b \\ \{(a,a),(b,a),(b,b)\} & \text{kurz:} & b & \succ & a \\ \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\} & \text{kurz:} & a & \approx & b \end{array}\right\} = \mathbb{P}(A)$$

Aufgabe: Wie viele Präferenzen gibt es auf der Menge $A = \{a, b, c\}$?

Lösung: Es gibt genau 13 Präferenzen, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a & \succ & b & \succ & c & \qquad & a & \succ & b & \approx & c \\ a & \succ & c & \succ & b & & b & \succ & a & \approx & c \\ b & \succ & a & \succ & c & & c & \succ & a & \approx & b \\ b & \succ & c & \succ & a & & a & \approx & b & \succ & c \\ c & \succ & a & \succ & b & & a & \approx & c & \succ & b \\ c & \succ & b & \succ & a & & b & \approx & c & \succ & a \\ \multicolumn{5}{l}{\text{(strikte Präferenzen } \mathbb{S})} & & a & \approx & b & \approx & c \end{array}\right\} = \mathbb{P}(A)$$

Präferenzen: Anzahl

Aufgabe: Wie viele (strikte) Präferenzen gibt es bei n Alternativen?

Es ist oft lehrreich, neu definierte Objekte zu zählen. Dies zwingt dazu, die Definition genau zu verstehen und klärt so Missverständnisse auf.
Defendit numerus. [Die Zahl gibt Schutz.] Juvenal (58–138 n.Chr.), *Satiren*

Lösung: Wir zählen zunächst die strikten Präferenzen $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$:
Für den (eindeutigen) ersten Platz haben wir genau n Möglichkeiten, für den zweiten bleiben noch $n-1$, für den dritten nur $n-2$, usw.
Wir erhalten $\sharp\mathbb{S} = n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. (Fakultät)

Diese Zahlen wachsen schnell, wie folgende Tabelle erahnen lässt:

n	1	**2**	**3**	4	5	6	7	8	9	10
$\sharp\mathbb{S}$	1	**2**	**6**	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800
$\sharp\mathbb{P}$	1	**3**	**13**	75	541	4 683	47 293	545 835	7 087 261	102 247 563

Die Anzahl $\sharp\mathbb{P}(A)$ heißt auch $n$te *Fubini–Zahl* (`oeis.org/A000670`) oder *Bell–Zahl* (`en.wikipedia.org/wiki/Ordered_Bell_number`). Ihre Berechnung ist komplizierter, ich zitiere nur die ersten Werte.

Exkurs zu Ordnungsrelationen

Eine Relation $\geq$ auf der Menge A wird festgelegt durch alle Paare (x, y) mit $x \geq y$, also genau durch die Menge $R = \{\, (x, y) \in A \times A \mid x \geq y \,\}$.

Diese Einsicht erheben wir nun zur Definition: Eine (zweistellige) **Relation** auf A ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$ der Produktmenge.

Statt $(x, y) \in R$ schreibt man traditionell $x \, R \, y$. Das ist leichter lesbar, insbesondere für die üblichen Schreibweisen wie $\geq$, $\leq$, $>$, $<$, etc.

Definition N1B: Ordnungsrelationen

Für eine **lineare Ordnung** $\geq$ auf der Menge A verlangen wir:

Reflexivität: Für alle $x \in A$ gilt $x \geq x$.
Antisymmetrie: Für alle $x, y \in A$ mit $x \geq y$ und $y \geq x$ gilt $x = y$.
Transitivität: Für alle $x, y, z \in A$ mit $x \geq y$ und $y \geq z$ gilt $x \geq z$.
Linearität: Für jedes Paar $x, y \in A$ gilt $x \geq y$ oder $y \geq x$.

Eine linear geordnete Menge $(A, \leq)$ nennen wir auch eine **Kette**. Für eine **Ordnung** verlangen wir nur Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität, für eine **Präordnung** nur Reflexivität und Transitivität.

Exkurs zu Ordnungsrelationen

Aufgabe: Welche der Eigenschaften aus N1B gelten für die folgenden Beispiele $(A, \leq)$ einer Menge A mit einer zweistelligen Relation $\leq$?

(1) Sei $A = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen mit ihrer üblichen Ordnung $\leq$. (Selbe Frage für $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$… und für $\mathbb{C}$?)

(2) Sei $A = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, oder alternativ $A = \mathbb{Z}_{>0}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Diese Menge wird durch Teilbarkeit geordnet: Für $x, y \in A$ bedeutet $x \mid y$, es existiert $x' \in A$ mit $xx' = y$.

(3) Sei $M = \{1, 2, \dots\}$ eine beliebige Grundmenge und $A = \{X \subseteq M\}$ die Menge aller Teilmengen von M. Dann ist A durch Inklusion geordnet.

(4) Punkte $x, y \in A = \mathbb{R}^2$ ordnen wir nach ihrem Abstand zum Ursprung: Wir definieren also $x \leq y$ durch die Bedingung $x_1^2 + x_2^2 \leq y_1^2 + y_2^2$.

Lösung: (1) Für $(\mathbb{Z}, \leq)$ gelten alle vier Eigenschaften (R,A,T,L); dies ist eine lineare Ordnung. (2) Auf $\mathbb{Z}$ ist $\mid$ eine Präordnung (R,T), auf $\mathbb{Z}_{>0}$ ist $\mid$ sogar eine Ordnung (R,A,T). (3) Auf A ist die Inklusion $\subseteq$ eine Ordnung, aber für $\sharp M \geq 2$ nicht linear. (4) Dies ist eine lineare Präordnung (R,T,L).

Linearität wird alternativ auch Totalität oder Vollständigkeit genannt: Sie bedeutet, dass wir je zwei Elemente $x, y \in A$ vergleichen können.

Aus Linearität folgt Reflexivität. Für Präferenzen fordern wir Transitivität und Linearität, die Reflexivität bekommen wir daraus geschenkt.

Antisymmetrie verbietet Indifferenz; das ist für manche Anwendungen eine sinnvolle Forderung, für manche Zwecke ist es jedoch zu streng.

Bemerkung N1c: Präferenzen

Eine **Präferenz** gemäß N1a ist demnach eine lineare Präordnung, und eine **strikte Präferenz** (ohne Indifferenzen) ist eine lineare Ordnung.

Ordnungsrelationen sind allgegenwärtig, in der Mathematik und überall. Insbesondere in der Entscheidungstheorie werden Präferenzen genutzt.

In den Wirtschaftswissenschaften bewähren sie sich als Standardmodell zur Formulierung von Entscheidungen und Fragen der Optimierung.

Aufgabe: Sei $R \subseteq A \times A$ eine (Ordnungs)Relation auf der Menge A.

(1) Auf der Teilmenge $B \subseteq A$ betrachten wir $S := R|_B := R \cap (B \times B)$. Dies ist die Einschränkung der Relation R von A auf die Teilmenge B. Beispiel: So schränken wir die Ordnung $\le$ von $\mathbb{R}$ ein auf $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{N}$.

(2) Sei $f : B \to A$ eine Abbildung. Wir ziehen die Relation R auf A zurück zur Relation $S := f^*(R) := \{ (x, y) \in B \times B \mid (f(x), f(y)) \in R \}$ auf B. Beispiel: In (1) betrachten wir die Inklusion $f : B \hookrightarrow A$ und $R|_B = f^*(R)$.

Welche der vier Eigenschaften (R,A,T,L) übertragen sich von R auf S?

Lösung: (2) Ist die Relation R auf A reflexiv / transitiv / total, so auch S auf B: Nachrechnen! Angenommen die Relation R ist antisymmetrisch: Für $x, y \in B$ mit $x\,S\,y$ und $y\,S\,x$ gilt $f(x)\,R\,f(y)$ und $f(y)\,R\,f(x)$, also $f(x) = f(y)$. Daraus folgt allgemein nicht $x = y$, nur falls f injektiv ist.

(1) Dies ist der Spezialfall von (2) für die Inklusion $f : B \hookrightarrow A : x \mapsto x$. Wie in (2) gezeigt, übertragen sich die drei Eigenschaften R,T,L immer. Die Inklusion ist injektiv, also vererbt sich hier auch die Antisymmetrie.

Warum gilt Intransitivität als irrational?

Wir untersuchen **rationale Entscheidungen** [*rational choice theory*]. Mit Transitivität verbieten wir zyklische Anordnungen wie $x \succ y \succ z \succ x$ oder allgemeiner $x \succcurlyeq y \succcurlyeq z \succ x$. Eine solche Präferenz würden wir als irrational betrachten. Warum ist Intransitivität eine logische Katastrophe?

Beispiel: In den Wirtschaftswissenschaften begründet man Transitivität dadurch, dass man einem Individuum mit intransitiver Präferenz alles Geld abknöpfen kann durch eine ewige **Geldpumpe** [*money pump*]. Logische Inkonsistenz wird dabei wie folgt ausgenutzt und bestraft:

Wegen $x \succcurlyeq y \succcurlyeq z$ kann man z zuerst in y und dann in x eintauschen; wegen $z \succ x$ kann man x gegen z und einen Geldbetrag tauschen, usw. Dieser närrische Kreislauf endet erst, wenn alles Geld verbraucht ist, oder wenn schließlich die Vernunft einsetzt: Intransitiv ist irrational.

☺ Genau dieses Verhalten zeigt *Hans im Glück* der Brüder Grimm. Vordergründig illustriert dies Irrationalität, Planlosigkeit, Impulsivität, leichtfertiges Handeln ohne Erwägung naheliegender Konsequenzen, Unbeständigkeit durch Wechsel der Kriterien je nach Situation.

Warum gilt Intransitivität als paradox?

Häufig erwarten wir Transitivität und werden vom Gegenteil arg verblüfft. In solch Extremfällen sprechen wir von einem **Intransitivitäts-Paradox**.

Beispiel: Im Zeitalter digitaler Photographie kommt es vor, dass Sie von einem Motiv viele ähnliche Bilder / Schnappschüsse haben. Nun wollen Sie das schönste aussuchen und alle anderen löschen. Sie können je zwei vergleichen, aber nach dreien gefällt Ihnen doch das erste besser, sodass $x \prec y \prec z \prec x$. (Das liegt manchmal an wechselnden Kriterien.)

Beispiel: Lineare Ordnungen nutzen wir zum Suchen und Sortieren in Wörterbüchern, Datenbanken, Turnieren, etc. Zirkulär wäre katastrophal. Für lineare Ordnungen haben wir phantastisch effiziente Algorithmen, ohne Transitivität versagen sie jedoch kläglich: Suchen und Sortieren kommt nicht zum Ende oder liefert fehlerhafte, widersinnige Resultate.

Beispiel: Bei Wahlen möchten wir demokratisch einen Sieger küren. Das ist unmöglich, falls das Ergebnis eine intransitive Relation ist. Sie kennen das von *Schere-Stein-Papier*. Das Wahlergebnis ist in diesem (und ähnlichen) Fällen nicht transitiv und daher unbrauchbar.

Efrons intransitive Würfel: Welcher ist der beste?

Aufgabe: Der Statistiker Bradley Efron erfand folgende Würfel:

$$\begin{array}{rll} A: 5,5,5,1,1,1 & \Rightarrow & \mathbf{E}(A) = 9/3 \\ B: 6,6,2,2,2,2 & \Rightarrow & \mathbf{E}(B) = 10/3 \\ C: 3,3,3,3,3,3 & \Rightarrow & \mathbf{E}(C) = 9/3 \\ D: 4,4,4,4,0,0 & \Rightarrow & \mathbf{E}(D) = 8/3 \end{array}$$

Je zwei Würfel treten gegeneinander an, z.B. A gegen B. Wie groß sind die Gewinnwkten $\mathbf{P}(A > B)$ etc.? Welcher Würfel ist dabei der beste? Wie beschreiben Sie diese Situation präzise durch Zufallsvariablen?

Lösung: Unabhängigkeit! Abzählen aller Gewinnkombinationen ergibt:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(A > B) = 12/36 = 1/3, & \mathbf{P}(B > C) = 12/36 = 1/3, \\ \mathbf{P}(C > D) = 12/36 = 1/3, & \mathbf{P}(D > A) = 12/36 = 1/3, \\ \mathbf{P}(A > C) = 18/36 = 1/2, & \mathbf{P}(B > D) = 20/36 = 5/9. \end{array}$$

Es gibt keinen „besten“ Würfel: Jeder wird vom nächsten geschlagen!

Penney’s Game: Intransitivität entsteht auch in zufälligen 0-1-Folgen beim Wettrennen von je zwei der acht Tripel: Wer schlägt hier wen?

Intransitive Gewinnwahrscheinlichkeiten

Aufgabe: Spieler A und B wählen je ein Muster der Länge n. Es gewinnt, wes Muster als erstes auftritt. Ab $n \geq 3$ sind die Wkten nicht transitiv!

B\A	00	01	10	11
00		1/2	3/4	1/2
01	1/2		1/2	1/4
10	1/4	1/2		1/2
11	1/2	3/4	1/2	

Wkt, dass Muster A vor Muster B eintritt.

B\A	000	001	010	011	100	101	110	111
000		1/2	3/5	3/5	7/8	7/12	7/10	1/2
001	1/2		1/3	1/3	3/4	3/8	1/2	3/10
010	2/5	2/3		1/2	1/2	1/2	5/8	5/12
011	2/5	2/3	1/2		1/2	1/2	1/4	1/8
100	1/8	1/4	1/2	1/2		1/2	2/3	2/5
101	5/12	5/8	1/2	1/2	1/2		2/3	2/5
110	3/10	1/2	3/8	3/4	1/3	1/3		1/2
111	1/2	7/10	7/12	7/8	3/5	3/5	1/2	

Es kommt noch verrückter: Die Muster 1010 und 0100 haben mittlere Wartezeit 20 bzw. 18, doch 1010 kommt vor 0100 mit Wkt $9/14 > 1/2$. Das seltenere Muster gewinnt gegen das häufigere Muster! Das zeigt, wie trügerisch unsere Intuition zu Wartezeiten und Gewinnwkten ist. Martin Gardner: *The Colossal Book of Mathematics.* Norton & Co 2001

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Zählen Sie alle möglichen Abstimmungen (Voten) auf bei zwei Individuen, $I = \{1, 2\}$, und zwei Alternativen, $A = \{a, b\}$. Was ist jeweils das Ergebnis bei Mehrheitswahl M? **Lösung:**

$$\begin{array}{cccc} 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \approx & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $M : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Beschreiben Sie ebenso folgendes Wahlverfahren D_1: „Allein 1 entscheidet.“ (Das ist die lupenreine Diktatur.) **Lösung:**

$$\begin{array}{cccc} 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \approx & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $D_1 : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P = P_1$. Hier ist 1 der Diktator, und 2 hat keinerlei Einfluss auf das Ergebnis.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Beschreiben Sie ebenso die aufgeklärte Diktatur $D_{1,2}$: „Allein 1 entscheidet, nur bei Indifferenz entscheidet 2.“ **Lösung:**

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $D_{1,2} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$.
Historische Vorbilder: Ist’s dem Diktator egal, so entscheidet seine Frau.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Vor dem Wahlgang müssen die Spielregeln eindeutig erklärt werden, hier als Tabelle, besser als Algorithmus, allgemein als Abbildung!

Aufgabe: Wie viele Wahlverfahren $V : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ gibt es hier?

Lösung: Für $\sharp I = 2$ und $\sharp A = 2$ gibt es $3^{3\cdot 3} = 19\,683$ Wahlverfahren.

Ausführlich: Die Menge $\mathbb{P}$ aller Präferenzen auf $A = \{a, b\}$ hat genau 3 Elemente: $\sharp\mathbb{P} = 3$ wie oben erklärt. Jeder Wähler hat also 3 mögliche Präferenzen. Die Wähler sind unabhängig voneinander. Die Anzahl möglicher Paare (P_1, P_2) ist demnach $\sharp(\mathbb{P} \times \mathbb{P}) = \sharp\mathbb{P} \cdot \sharp\mathbb{P} = 3 \cdot 3 = 9$. Ein Wahlverfahren ist eine Funktion $V : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$. Hierzu gibt es genau $\sharp(\mathbb{P}^{\mathbb{P}\times\mathbb{P}}) = (\sharp\mathbb{P})^{\sharp\mathbb{P}\cdot\sharp\mathbb{P}} = 3^9 = 19\,683$ Möglichkeiten.

Zum Kontrast: $\sharp I = 2$ und $\sharp A = 3$ ergibt $13^{13\cdot 13} = 13^{169} \approx 10^{188}$.

Familienurlaub: $\sharp I = 4$ und $\sharp A = 3$ ergibt $13^{13^4} = 13^{28561} \approx 10^{31815}$.

Die allgemeine Formel ist $\sharp\mathbb{P}^{\sharp\mathbb{P}^{\sharp I}}$. Das wird sofort unübersichtlich groß. Die allermeisten davon sind wenig sinnvoll, aber es sind Wahlverfahren. Wir wollen *alle* Wahlverfahren beschreiben und die *sinnvollen* finden. Offensichtlich versagt hier jeder *brute force* Ansatz. Doch Denken hilft!

Wahlverfahren: Definition

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \ge 2$, und die Menge $A = \{a, b, c, \dots\}$ der Alternativen/Kandidaten, $\sharp A \ge 2$. Wie oben erklärt sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Definition N2A: Wahlverfahren

Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.

Statt *Funktion* sagt man auch *Abbildung* oder *Zuordnung*. Wir stellen uns dies als einen Algorithmus vor, eine Verfassung oder eine Konstitution.

Beispiel: (Diktatur) Zu $k \in I$ definieren wir $D_k(P_1, P_2, \dots, P_n) = P_k$. Das ist ein extrem simples Wahlverfahren, vermutlich auch das älteste; es ist leider immer noch weit verbreitet und bis heute überaus relevant.

Definition N2B: Diktator

Im Verfahren V heißt $k \in I$ **Diktator**, wenn aus $x \succ_k y$ stets $x \succ y$ folgt. In jedem Wahlverfahren V kann es höchstens einen Diktator geben.
DIC: Gibt es einen Diktator, so heißt das Verfahren V **diktatorisch**.
~~DIC~~: Gibt es keinen Diktator, so nennen wir V **nicht-diktatorisch**.

Wahlverfahren: Definition

Die unscheinbare Definition N2A codiert drei wichtige Forderungen:

RAT: Das Ergebnis P ist *rational*, also transitiv und linear gemäß N1A.

DOM: [*unrestricted domain*] Jeder Stimmabgabe $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ wird als Auswertung ein Ergebnis $P = V(P_1, P_2, \dots, P_n)$ zugeordnet

Die Individuen sind unabhängig, alle Konstellationen können auftreten. Das betrachtete Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ muss aus *jeder* Eingabe $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ eine gemeinsame Rangfolge $P \in \mathbb{P}$ bilden.

DET: Das Wahlverfahren V ist *deterministisch*, also nicht zufällig: Gleiche Eingabe $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ liefert immer die gleiche Ausgabe P. (Auch Losverfahren können durchaus nützlich sein, siehe Satz N2D.)

Beispiele: Für den einfachsten Fall $I = \{1, 2\}$ und $A = \{a, b\}$ haben wir oben drei Wahlverfahren beispielhaft ausgeschrieben: Die Verfahren D_1 und $D_{1,2}$ sind diktatorisch, M ist nicht-diktatorisch; Sie können viele weitere Verfahren wie D_2 oder $D_{2,1}$ etc. erfinden. Schon in diesem allereinfachsten Fall gibt es $19\,683$ Möglichkeiten. Die meisten sind sicher wenig nützlich, aber es sind Wahlverfahren.

Mehrheitswahl für n Individuen und 2 Alternativen: $A = \{a, b\}$

N203

Aufgabe: Formulieren Sie die Mehrheitswahl (1) durch Stimmzählung

$$M \;:\; \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P,$$

(2) M_μ gewichtet mit μ und (3) $M_\mu^{\alpha,\beta}$ qualifiziert mit $-1 < \beta \le \alpha < 1$.

Lösung: (1) Wir erhalten das Ergebnis $x \succcurlyeq y$ genau dann, wenn

$$\sharp\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} \ge \sharp\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\}.$$

(2) Gegeben sei eine Gewichtung $\mu : I \to [0,1]$ mit $\mu(1) + \dots + \mu(n) = 1$. Jede Teilmenge $J \subseteq I$ hat ihr Gewicht $\mu(J) := \sum_{i \in J} \mu(i)$. Wir setzen

$$\delta(x,y) := \mu\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} - \mu\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\}.$$

Wir erhalten das Ergebnis $x \succcurlyeq y$ genau dann, wenn $\delta(x,y) \ge 0$ gilt.

(3) Wir setzen $a \succcurlyeq b$, falls $\delta(a,b) \ge \beta$ gilt, und $b \succcurlyeq a$, falls $\delta(a,b) \le \alpha$ gilt.

Beispiele: Für $\mu = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ erhalten wir $M_\mu = M$ wie in (1). Die Diktatur $D_k = M_\mu$ entspricht $\mu(k) = 1$, es genügt $\mu(k) > 1/2$. Wir sehen: Verschiedene Formeln führen zur selben Funktion. Der Einfluss ist nicht proportional zum Stimmgewicht!

Mehrheitswahl für n Individuen und 2 Alternativen: $A = \{a, b\}$

N204 Erläuterung

Die Mehrheitswahl scheint selbstverständlich, aber es lohnt, sie einmal explizit auszuformulieren, wie die US-Präsidentschaftswahlen zeigen. Die Beschreibung des Wahlverfahrens muss klar und eindeutig sein. Im Idealfall, so wie hier, ein Algorithmus zur Stimmauszählung.

Aufgabe: Ist das wirklich ein Wahlverfahren? Was ist hier zu prüfen?

Lösung: Wir müssen prüfen, ob das Ergebnis P in allen Fällen eine Präferenz auf $A = \{a, b\}$ ist, also transitiv und linear. Hierzu vergleichen wir die Auszählungen gemäß $\delta = \mu\{\, i \mid (a,b) \in P_i \,\} - \mu\{\, i \mid (b,a) \in P_i \,\}$:

- Im Falle $\delta > 0$ gilt $P = \{(a,a), (a,b), (b,b)\}$, kurz $a \succ b$.
- Im Falle $\delta < 0$ gilt $P = \{(a,a), (b,a), (b,b)\}$, kurz $b \succ a$.
- Im Falle $\delta = 0$ gilt $P = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$, kurz $a \approx b$.

In jedem der drei Fälle ist P tatsächlich eine Präferenz auf $A = \{a, b\}$.

Bemerkung: Das ist wenig überraschend, muss aber überprüft werden. Ich betone es hier, weil es eine Besonderheit bei zwei Alternativen ist; für drei oder mehr Alternativen ist die Stimmenzählung *kein* Wahlverfahren! Diese Erkenntnis ist das Paradox von Condorcet, siehe Satz N3A.

Gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen

Die Mehrheitswahl erfreut sich folgender Eigenschaften:

UNA: Einhelligkeit. Gilt $x \succ_i y$ für alle $i \in I$, so folgt $x \succ y$. Als Tabelle:

$$\begin{array}{cccc} \hline I: & x & \succ & y \\ \hline & x & \succ & y \end{array}$$

MON: Monotonie. Angenommen, $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ ergibt $x \succcurlyeq y$, und bei einem Vergleichswahlgang $(P'_1, P'_2, \dots, P'_n) \mapsto P'$ wächst die Unterstützung für x und sinkt die Unterstützung für y. Dann gilt $x \succcurlyeq' y$.

$$\begin{array}{cccc} \hline x & \succ & y & : J \\ x & \approx & y & : U \\ y & \succ & x & : K \\ \hline x & \succcurlyeq & y & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \subseteq \\ \\ \supseteq \\ \Longrightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline J': & x & \succ' & y \\ U': & x & \approx' & y \\ K': & y & \succ' & x \\ \hline & x & \succcurlyeq' & y \end{array}$$

Ausgeschrieben: Angenommen, es gilt $\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} \subseteq \{\, i \mid x \succcurlyeq'_i y \,\}$ und $\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\} \supseteq \{\, i \mid y \succcurlyeq'_i x \,\}$. Dann gilt: Aus $x \succcurlyeq y$ folgt $x \succcurlyeq' y$.

Gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen

Einhelligkeit [*unanimity*] heißt auch *Einstimmigkeit* oder *Souveränität*: Die Gruppe I kann bei Einstimmigkeit das Ergebnis $x \succ y$ erzwingen.

Monotonie [*monotonicity*] garantiert für je zwei Alternativen die *positive Korrelation* zwischen individuellen Präferenzen und dem Wahlergebnis: Wenn in einer zweiten Wahl die Unterstützermenge für x wächst und die Unterstützermenge für y schrumpft, dann darf sich das Ergebnis nur zu Gunsten von x ändern, keinesfalls zu Ungunsten von x.

Das ist nicht bloß fromme Theorie, sondern ein praktisches Problem: Zur Vergabe von Parlamentssitzen muss sinnvoll gerundet werden. In Deutschland entstehen zudem durch Erst- und Zweitstimme Überhangmandate; das Wahlgesetz formuliert hierzu die Regeln. Eine gefürchtete Paradoxie ist dabei das *negative Stimmgewicht*:

Beispiel: Nach Tod einer Direktkandidatin kam es 2005 im Wahlkreis Dresden I zu einer Nachwahl, bei der die CDU durch eine *geringere* Zweitstimmenzahl ein *zusätzliches* Mandat im Bundestag errang. Nach Klagen erklärte das Bundesverfassungsgericht daher 2008 und erneut 2012 das Bundestagswahlrecht für verfassungswidrig.

Gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen

Aus Monotonie folgt **Unabhängigkeit von dritten Alternativen**, engl. *independence of irrelevant alternatives*:

IIA: Sind bei $(P_1,\dots,P_n)\mapsto P$ und $(P'_1,\dots,P'_n)\mapsto P'$ alle individuellen Präferenzen zwischen x und y gleich, so auch das Ergebnis.

$$\begin{array}{cccl c rccc}
x & \succ & y & :J & = & J': & x & \succ' & y \\
x & \approx & y & :U & = & U': & x & \approx' & y \\
y & \succ & x & :K & = & K': & y & \succ' & x \\
\hline
x & \succcurlyeq & y & & \iff & & x & \succcurlyeq' & y
\end{array}$$

Sei $\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} = \{\, i \mid x \succcurlyeq'_i y \,\}$ und $\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\} = \{\, i \mid y \succcurlyeq'_i x \,\}$. Dann gilt $x \succcurlyeq y$ genau dann, wenn $x \succcurlyeq' y$ gilt.

SYM: Symmetrie. Das Ergebnis ändert sich nicht bei Umordnung; $V(P_1,P_2,\dots,P_n) = V(P_{\tau 1},P_{\tau 2},\dots,P_{\tau n})$ für jede Umnummerierung τ.

Gilt dies, so nennen wir das Wahlverfahren V *symmetrisch*. Das extreme Gegenteil ist die Diktatur, wie in N2B erklärt.

Gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen

Bei nur zwei Alternativen ist IIA automatisch erfüllt. (Klar! Warum?) Für mehr Alternativen jedoch ist IIA eine starke Forderung, siehe N3D: Wenn sich der Vergleich des Paares (x,y) individuell nicht ändert, dann auch nicht sein Ergebnis. Die Vergleiche zu den anderen Alternativen dürfen sich beliebig ändern, für das Paar (x,y) spielt das keine Rolle.

Bei *Symmetrie* sind alle Individuen gleichberechtigt. Solche Verfahren heißen auch *anonym*, denn die Identität der Wähler spielt keine Rolle. Dies ist eine starke Forderung. Stimmgewichtung bricht die Symmetrie:

Beispiel: Bei Aktien ist das Stimmgewicht proportional zum Nennwert.

Beispiel: Im preußischen Dreiklassenwahlrecht (1849–1918) besaßen die Wähler abgestufte Stimmengewichte je nach ihrer Steuerleistung.

Beispiel: In einer Föderation unterschiedlich großer Länder kann die Stimme jedes Vertreters proportional zur Bevölkerung gewichtet werden.

Beispiel: Der US-Präsident wird indirekt gewählt, durch Wahlmänner. Dabei führt die ungleiche Aufteilung zu ungleichen Stimmgewichten. J.F. Banzhaf: *One Man, 3.312 Votes.* Vill. Law Rev. 13 (1968) 304–332.

Wie wichtig sind diese Forderungen?

Die hier erklärten Forderungen Einhelligkeit (UNA), Symmetrie (SYM), Monotonie (MON) und Unabhängigkeit (IIA) sind ebenso plausibel wie grundlegend: Sie erklären unmissverständlich und präzise, was wir unter einem „vernünftigen", gar „fairen" Wahlverfahren verstehen wollen.

Wir wollen sie daher genau verstehen und möglichst präzise formulieren. Diese Genauigkeit ist für unsere weiteren Untersuchungen unerlässlich. Nur so können wir sorgsam Wahlverfahren entwickeln und beurteilen und Fragen beantworten wie „Hat das Verfahren X die Eigenschaft Y?"

Muss die Formulierung so pedantisch genau sein? Ja, das muss sie! Sie merken in jedem konkreten Beispiel, etwa bei Gruppenarbeit in den Übungen, dass Sie ohne genaue Formulierungen nicht voran kommen, keine gemeinsame Klärung erreichen, sondern nur im Nebel stochern.

Mathematische Präzision erweckt bei manchem leider das irrige Gefühl, dies wären rein theoretische Überlegungen ohne praktische Relevanz. Das Gegenteil ist der Fall! Dies sind allgegenwärtige Forderungen. Um dies zu illustrieren, nenne ich Gegenbeispiele, wo sie fehlen.

Gegenbeispiel: Abstimmung ohne bindende Wirkung

UNA: Was bedeutet das Fehlen der Einhelligkeits-Eigenschaft?

Beispiel: Eine Schulleitung befragt ihre Schülerschaft $I = \{1, 2, \dots, n\}$ zum Kauf von $a =$ Tischtennisplatten, $b =$ Tischkickern, $c =$ Torwänden.

Die Schüler:innen beschließen einhellig $a \succ b \succ c$. Gekauft werden aber zwei Tischkicker. Die Schülerschaft ist in dieser Frage nicht souverän. Hier entscheidet ein weiterer Akteur $a \notin I$, außerhalb unseres Modells.

Dieser Ausgang mag verwundern, kommt aber tatsächlich häufig vor. Oft genug wird eine Kommission berufen, um einen Beschluss gebeten und dieser dann ignoriert, insbesondere wenn er nicht genehm ausfällt.

Wenn du nicht mehr weiter weißt, bilde einen Arbeitskreis!

Die Einhelligkeit (UNA) ist eine sehr schwache Minimalforderung, um wenigstens solch himmelschreienden Widersinn zu vermeiden.

Wir gelangen so zu dieser kaum zu bestreitenden Grundforderung: Zumindest im Falle der Einhelligkeit ist die Wählerschaft I souverän. Daher heißt die Einhelligkeits-Eigenschaft UNA auch Souveränität.

Gegenbeispiel: das Dessert-Paradox

N211

IIA: Was bedeutet das Fehlen der Unabhängigkeits-Eigenschaft?

„Was bieten Sie zum Nachtisch?“ — „Crème Brûlée oder Tiramisù.“
„Dann nehme ich Crème Brûlée.“ — „Wir hätten auch Apfelstrudel.“
„Gut, dann nehme ich Tiramisù.“

Solches Verhalten würden wir als widersinnig und irrational werten: Die Anwesenheit einer dritten Alternative Apfelstrudel sollte nichts ändern an der Präferenz zwischen Crème Brûlée und Tiramisù.

Genau das fordert die Unabhängigkeit von dritten Alternativen, zur Betonung spricht man auch von irrelevanten Alternativen (IIA).

Ist das nicht selbstverständlich? Nein, im Gegenteil, es ist selten der Fall! Bei Wahlen können weitere kleine Parteien das Ergebnis beeinflussen, auch wenn sie selbst keinerlei Aussicht auf einen Wahlsieg haben.

Genau dies geschah 2000 in den USA zwischen Bush - Gore - Nader und ähnlich auch 2002 in Frankreich zwischen Chirac - Jospin - Le Pen, nochmals variiert zuletzt 2022 zwischen Macron - Le Pen - Mélenchon. Solche Spoiler sind häufig. (`en.wikipedia.org/wiki/Spoiler_effect`)

Gegenbeispiel: Abhängigkeit von dritten Alternativen

N212

Bei einer Präsidentschaftswahl treten die drei Kandidaten L, M, R an.

L: 15% M: 40% R: 45%

$\longleftrightarrow$

politisches Spektrum

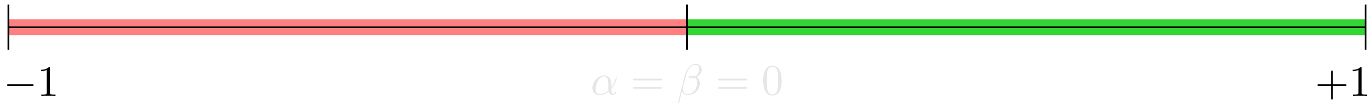
Aufgabe: Wer gewinnt die Präsidentschaftswahl? wenn L zuvor aufgibt?

Lösung: (1) Kandidat R gewinnt mit einer relativen Mehrheit von 45%.
(2) Gibt L zuvor auf, so gewinnt M mit einer absoluten Mehrheit von 55%.
Dabei nehmen wir vereinfachend an, alle Wähler von L wandern zu M.

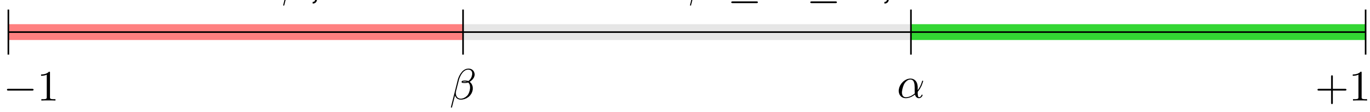
In den USA wird die Präsidentschaftswahl meist zwischen zwei großen Kandidaten entschieden. Manchmal tritt ein dritter kleiner Kandidat an. Dieser hat zwar keine realistischen Aussichten auf den Wahlsieg, kann aber als Spoiler das Ergebnis massiv beeinflussen, indem er einem der beiden großen Kandidaten mehr Stimmen abnimmt als dem anderen.

In diesem Sinne ist ein solches Wahlverfahren also manipulierbar durch das Aufstellen oder Zurückziehen weiterer Kandidaturen. Die Unabhängigkeit (IIA) soll genau dieses Problem verhindern.

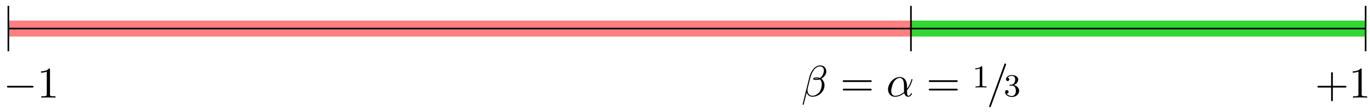
Qualifizierte Mehrheit: Quorum mit gegebenen Schranken



Wir bilden die Differenz $\delta = \mu\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\} - \mu\{\, i \mid b \succcurlyeq_i a \,\}$ und setzen $a \succcurlyeq b$, falls $\delta \ge \beta$ gilt, und $b \succcurlyeq a$, falls $\delta \le \alpha$ gilt. Das bedeutet ausführlich $b \succ a$ falls $\delta < \beta$, $\quad a \approx b$ falls $\beta \le \delta \le \alpha$, $\quad a \succ b$ falls $\delta > \alpha$.



Beispiel: Bei $\alpha = \beta = 1/3$ benötigt Alternative a eine Zweidrittelmehrheit.



Was kann eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit Stimmgewicht $\mu(J) = 1/2$ erreichen? Sie kann $b \succ a$ erzwingen, aber nicht $a \succcurlyeq b$, nur $a \succcurlyeq b$ verhindern. (Veto)

Satz N2C: Kenneth May 1952

Sei $A = \{a, b\}$ und $\mathbb{S} = \{\, a \succ b,\ b \succ a \,\}$ die Menge strikter Präferenzen. Erfüllt $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$ Einhelligkeit und Monotonie und Symmetrie, dann ist $V = M^{\alpha,\beta}$ die Mehrheitswahl mit gewissen Schranken $-1 < \beta \le \alpha < 1$.

Qualifizierte Mehrheit: Quorum mit gegebenen Schranken

Typische Anwendung: In vielen Demokratien, auch in Deutschland, ist für Verfassungsänderungen eine Zweidrittelmehrheit erforderlich. Dies dient dem Minderheitenschutz, da ein Drittel der Stimmen genügt, um eine Verfassungsänderung zu verhindern (Veto). Einfache Gesetze hingegen werden mit geringerer Zustimmungsquote beschlossen.

Den zu erreichenden Stimmenanteil nennt man auch das **Quorum**. Hierzu sei $-1 < \beta \le \alpha < 1$. Für $\alpha = \beta = 0$ erhalten wir M_μ wie zuvor. Für $\beta = -\alpha$ werden beide Alternativen a und b gleich behandelt; solche Verfahren heißen **neutral** oder **symmetrisch in den Alternativen**.

Der Satz von May beschließt unsere Beispielsammlung: Wir kennen damit alle Wahlverfahren, die symmetrisch, einhellig und monoton sind.

Bemerkung: Wir untersuchen später entscheidende Teilmengen $J \subseteq I$ (Definition N3C). Im obigen Beispiel $\alpha = \beta = 1/3$ der Zweidrittelmehrheit ist $J \subseteq I$ mit $\mu(J) = 1/2$ entscheidend für (b, a), aber nicht für (a, b).

Ich betone dies hier, weil es eine Besonderheit bei zwei Alternativen ist; bei drei und mehr Alternativen gilt genau das Gegenteil (Lemma N3D).

Zusammenfassung: Wahlverfahren für zwei Alternativen

	UNA einhellig	MON monoton	~~DIC~~ nicht-diktatorisch	SYM symmetrisch
Diktatur D_k	✓	✓	✗	✗
Mehrheitswahl M	✓	✓	✓	✓
mit Schranken $M^{\alpha,\beta}$	✓	✓	✓	✓
mit Gewichtung M_μ	✓	✓	(✓)	(✗)
mit Schranken $M_\mu^{\alpha,\beta}$	✓	✓	(✓)	(✗)

Eine **Präferenz** $P \subseteq A \times A$ ist eine transitive und lineare Relation auf A. Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Präferenzen auf der Menge A der Alternativen.

Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$. Das bedeutet, jeder möglichen Konstellation individueller Präferenzen $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}$ wird als Ergebnis eine Präferenz $P \in \mathbb{P}$ zugeordnet.

Es gibt sehr viele Wahlverfahren; wir wollen die guten hervorheben: Wir nennen ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ **perfekt**, wenn die Zuordnung $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ einhellig, monoton und nicht-diktatorisch ist.

Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

Ein Wahlverfahren ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$. Zur Erinnerung gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen:

UNA: Einhelligkeit. Gilt $a \succ_i b$ für alle $i \in I$, so folgt $a \succ b$.

MON: Monotonie. Angenommen, $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ ergibt $a \succcurlyeq b$ und bei einem Vergleichswahlgang $(P'_1, P'_2, \dots, P'_n) \mapsto P'$ wächst die Unterstützung für a und sinkt die Unterstützung für b. Dann gilt $a \succcurlyeq' b$.

IIA: Unabhängigkeit von dritten Alternativen.
Sind bei $(P_1, \dots, P_n) \mapsto P$ und $(P'_1, \dots, P'_n) \mapsto P'$ alle individuellen Präferenzen zwischen a und b gleich, so auch das Ergebnis.

SYM: Symmetrie. Das Ergebnis ändert sich nicht bei Umordnung; $V(P_1, P_2, \dots, P_n) = V(P_{\tau 1}, P_{\tau 2}, \dots, P_{\tau n})$ für jede Umordnung τ. In diesem Sinne sind alle Individuen/Kriterien gleichberechtigt.

Im Verfahren V heißt $k \in I$ **Diktator**, wenn aus $x \succ_k y$ stets $x \succ y$ folgt.
DIC: Gibt es einen Diktator, so heißt das Verfahren V *diktatorisch*.
~~DIC~~: Gibt es keinen Diktator, so nennen wir V *nicht-diktatorisch*.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Das antike Griechenland, speziell Athen, gilt als Wiege der Demokratie. Öffentliche Ämter wurden damals durch Los unter den zugelassenen Kandidaten vergeben; dies sollte Korruption mindern und gewalttätige Wahlkämpfe verhindern... und den Willen der Götter berücksichtigen.

Jahrhundertelang wurde der Doge von Venedig durch aufwändige Losverfahren bestimmt, die Wahlmanipulation und Machtkonzentration ausschließen sollten. (`de.wikipedia.org/wiki/Doge_von_Venedig`)

In modernen Demokratien geriet diese Praxis in Vergessenheit oder galt als unbefriedigend: Nicht blinder Zufall sollte entscheiden, sondern die Tüchtigkeit der Bewerber. Doch wer entscheidet über die Tüchtigkeit?

Angewendet wird das Losverfahren heute bei Gericht zur Einsetzung von Laienrichtern (Schöffen). In vielen Ländern, zum Beispiel den USA, wird bei Strafverfahren eine Geschworenenjury durch Los berufen, die unabhängig vom Richter über die Schuldfrage entscheidet.

In den letzten Jahren wird auch die Anwendung des Losverfahrens zur parlamentarischen Vertretung diskutiert, z.B. auf europäischer Ebene.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Das Losverfahren lässt sich auch auf unser Problem anwenden. Ein **deterministisches Wahlverfahren** ist, wie zuvor, eine Funktion

$$V \;:\; \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$$

Wir wollen dies nun randomisieren, also ein Zufallselement einführen. Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ als Lostopf. Die Wahrscheinlichkeiten der Ziehung seien gleichverteilt, also $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \dots = \mathbf{P}(n) = {}^1\!/n$.

Die **Wahl durch Losverfahren** beschreiben wir durch die Funktion

$$D_* \;:\; \mathbb{P}^n \times \Omega \to \mathbb{P} \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n; k) \mapsto P_k$$

Praktisch bedeutet das: Jeder Wähler $i \in I$ gibt sein Votum $P_i \in \mathbb{P}$ ab. Anschließend wird ein Element $k \in \Omega$ ausgelost, das Wahlergebnis ist dann das Votum P_k. Das ist nicht diktatorisch, denn $k \in I$ ist zufällig.

Ist eine andere Verteilung gewünscht, so geben wir $\mathbf{P}(i) = \nu(i)$ vor; wie zuvor sei $\nu : I \to [0,1]$ eine Gewichtung mit $\nu(1) + \dots + \nu(n) = 1$. Hierzu unterteilen wir das Intervall $[0,1]$ in n Intervalle $I_1, I_2, \dots, I_n$ der Länge $\operatorname{vol}_1(I_i) = \nu(i)$ und wählen ein Los $\omega \in [0,1]$ zufällig gleichverteilt.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Wahl durch Losverfahren wirkt zunächst überraschend, gar irrational. Warum sollten wir den Zufall entscheiden lassen, wenn wir das Problem genauso gut auch mit einem deterministischen Verfahren lösen können? Deterministisch können wir es eben nicht, wie wir noch sehen werden!

Aufgabe: Welche Eigenschaften hat die Wahl durch Losverfahren D_ν? Gilt Einhelligkeit? In welcher Form gelten Monotonie und Symmetrie?

Lösung: Wir nutzen wie üblich die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu $a, b \in A$ erhalten wir im Ergebnis $a \succcurlyeq b$ mit der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(a \succcurlyeq b) = \nu\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\}$. Entsprechend gilt $\mathbf{P}(a \succ b) = \nu\{\, i \mid a \succ_i b \,\}$.

Einhelligkeit: Aus $a \succ_i b$ für alle $i \in I$ folgt $\mathbf{P}(a \succ b) = 1$, das heißt: Mit Wahrscheinlichkeit 100% erhalten wir im Wahlergebnis $a \succ b$.

Monotonie: Aus $\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\} \subseteq \{\, i \mid a \succcurlyeq'_i b \,\}$ folgt $\mathbf{P}(a \succcurlyeq b) \le \mathbf{P}(a \succcurlyeq' b)$. Gilt zudem $\{\, i \mid b \succcurlyeq_i a \,\} \supseteq \{\, i \mid b \succcurlyeq'_i a \,\}$, so folgt $\mathbf{P}(a \succ b) \le \mathbf{P}(a \succ' b)$.

Symmetrie: Bei der Gleichverteilung $\nu = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ sind im Losverfahren D_ν alle Wahrscheinlichkeiten invariant unter Umordnung.

Die **Diktatur** D_k entspricht $\nu(k) = 1$ und $\nu(i) = 0$ für alle $i \neq k$.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Interpretation? Bei drei oder mehr Alternativen können die Präferenzen $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ extrem kompliziert sein, kontrovers und divergent. Das Wahlverfahren V soll hieraus eine einfache Antwort extrahieren. Durch Randomisierung können wir gezielt ein Zufallselement einführen. Das erscheint zunächst ungewöhnlich, erweist sich aber als vorteilhaft:

Satz N2D: nicht-deterministische Wahl durch Losverfahren

Die Wahl durch Losverfahren erfüllt (im Sinne der Wahrscheinlichkeit) all unsere Forderungen: Einhelligkeit, Monotonie und Symmetrie.

Es ist immer gut, die Beschränkungen und Möglichkeiten zu kennen! Im deterministischen Modell haben wir für jedes Paar $a, b \in A$ nur die 0–1–Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(a \succ b), \mathbf{P}(a \approx b), \mathbf{P}(b \succ a) \in \{0, 1\}$.

Randomisierung $\mathbf{P}(a \succ b), \mathbf{P}(a \approx b), \mathbf{P}(b \succ a) \in [0, 1]$ ist flexibler und liefert weitere Verfahren, eventuell bessere. Auch sie sind nicht perfekt, da nicht deterministisch, aber sie bieten praktisch brauchbare Lösungen.

Wir suchen daher im Folgenden nach deterministischen Wahlverfahren. Überraschung: Die Axiome UNA, IIA, SYM sind dann unvereinbar!

Nicolas de Condorcet (1743–1794)

Nicolas de Condorcet war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Politiker der Aufklärung. Er studierte Mathematik bei d'Alembert und promovierte bereits mit 16 Jahren. Sein berühmtes Paradox beschrieb er 1785 in einer Arbeit über Wahrscheinlichkeit und Abstimmungen. Es geriet in Vergessenheit, wurde mehrfach wiederentdeckt und wieder vergessen; dauerhafte Anerkennung verschaffte ihm erst Kenneth Arrow 1951, indem er seinen allgemeinen Unmöglichkeitssatz daraus ableitete.

Einige Werke: 1765: Du calcul intégral. 1767: Du problème des trois corps. 1768: Essai d'analyse. 1776: Fragments sur la liberté de la presse. 1778: Sur quelques séries infinies. 1780: Essai sur la théorie des comètes. 1781: Réflexions sur l'esclavage des nègres. 1784: Mémoire sur le calcul des probabilités. 1789: Vie de Voltaire. 1790: Sur l'admission des femmes au droit de cité.

Nicolas de Condorcet (1743–1794)

Condorcet schließt sich 1789 der Französischen Revolution an und vertritt die Sache der Liberalen. Im Jahr 1790 werden die Menschen- und Bürgerrechte verkündet; Condorcet tritt dafür ein, diese auch Frauen zu gewähren, er streitet für die Einführung des Frauenwahlrechts, die Gleichberechtigung der Schwarzen und die Abschaffung der Sklaverei.

Condorcet wurde 1791 als Pariser Abgeordneter in die Gesetzgebende Nationalversammlung gewählt, 1792 wurde er deren Präsident. In dieser Funktion entwarf er Pläne für das Bildungssystem (*l'instruction publique*). Bildungsunterschiede seien die Hauptursache der Tyrannei. Daher trat Condorcet schon früh für allgemein zugängliche Bildungseinrichtungen ein, die unabhängig von staatlichem Einfluss sein sollten.

Im *Comité de Constitution* arbeitet Condorcet mit an einer Verfassung. 1793 kommen die Jacobiner an die Macht und schlagen eine gänzlich andere Verfassung vor. Condorcet kritisiert diese und wird daraufhin wegen Verrats verurteilt. Er versteckt sich 8 Monate lang, im März 1794 wird er verhaftet und stirbt unter unklaren Umständen, vermutlich Suizid durch Gift. (`fr.wikipedia.org/wiki/Nicolas_de_Condorcet`)

Das Paradox von Condorcet

Können wir paarweise Stimmzählung auf drei Alternativen anwenden? Wir setzen $x \succcurlyeq y$ genau dann, wenn $\sharp\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} \ge \sharp\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\}$.

Aufgabe: Ist dies ein Wahlverfahren $C : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$? Analysieren Sie konkrete Beispiele, wie etwa folgende Abstimmung:

40% :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
35% :	b	$\succ$	c	$\succ$	a
25% :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Beispiel: 65% sagen $a \succ b$, 75% sagen $b \succ c$, 60% sagen $c \succ a$. Sie kennen das von *Schere-Stein-Papier*. Das Wahlergebnis ist in diesem (und ähnlichen) Fällen nicht transitiv und daher unbrauchbar.

Satz N3A: Nicolas de Condorcet 1785

Für $\sharp A \ge 3$ ist die paarweise Stimmzählung kein Wahlverfahren $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$. Dies ist ein Wahlverfahren $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ bei genau zwei Alternativen, $\sharp A = 2$.

Aufgabe: Entwickeln Sie Wahlverfahren für drei und mehr Alternativen! Welche guten Eigenschaften können Sie erreichen? Erreichen Sie alle?

Das Paradox von Condorcet

In vielen praktischen Anwendungen gibt jeder Wähler nur seinen Favoriten an, also den individuell Erstplatzierten. Daraus wird der Gesamterstplatzierte ermittelt. Dies entspricht einer Funktion

$$v \;:\; A^n \to A \;:\; (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x.$$

Beispiel: Wir wählen die Alternative mit den meisten Stimmen.

Aufgabe: Ist das besser? Wo liegt das Problem bei diesem Verfahren?

Lösung: Wenn jeder ehrlich abstimmt, dann gewinnt Kandidat a.

Die Präferenzen sind oft vor der Wahl bekannt, etwa durch Umfragen. Wähler der zweiten Gruppe erkennen: Wenn sie ehrlich für b stimmen, so gewinnt a. Wenn sie strategisch für c stimmen, so gewinnt c; aus ihrer Sicht eine Verbesserung. Das Wahlverfahren zwingt sie, zu spekulieren und unehrlich abzustimmen. Diese **Manipulierbarkeit** ist gefährlich.

Wähler der ersten Gruppe könnten dies vorausahnen, und schon bei den Umfragen unehrlich b als Favorit angeben. Diese denken, dass jene denken, … es entsteht ein heilloses Durcheinander. Unehrlichkeit und Misstrauen sind keine tragfähige Grundlage für demokratische Wahlen.

Die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Szenario: Schülervertreter aus J1 und J2 wählen ihre beliebtesten Lehrer aus Astronomie (A), Biologie (B) und Chemie (C). Dazu nennt jede Schüler:in ihre Lieblingsreihenfolge, hier von oben nach unten:

Votum J1

1	2	3	4	5	6	7
C	C	A	A	B	B	C
A	A	B	B	C	C	B
B	B	C	C	A	A	A

Ergebnis

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst

Votum J2

1	2	3	4	5	6	7
A	A	B	B	B	B	C
C	C	A	C	C	C	B
B	B	C	A	A	A	A

Ergebnis

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst

Alternatives Szenario: Die Arrow–Schule (A), die Borda–Schule (B) und die Cusanus–Schule (C) messen sich in sieben Sportarten $1, \dots, 7$.

Die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Borda–Verfahren (Bor): Jeder erste Platz zählt 3 Punkte, jeder zweite 2 Punkte, jeder dritte noch 1 Punkt. Die Punkte werden addiert und die Summen sortiert. Dieses Verfahren bezeichnen wir mit $B(3, 2, 1)$.

Mehrheitswahl (Maj): Es zählen nur die ersten Plätze, die Alternative mit den meisten ersten Plätzen ist die beste, die mit den zweitmeisten ersten Plätzen die nächstbeste, usw. Dies entspricht $B(1, 0, 0)$.

Medaillenspiegel (Med): Die Alternative mit den meisten ersten Plätzen ist die beste, haben zwei Alternativen gleich viele erste Plätze, dann zählen die zweiten Plätze, bei Gleichstand die dritten Plätze. Ebenso werden die anderen Plätze bestimmt. Dies entspricht hier $B(100, 10, 1)$.

Duell: Zuerst treten A und B im Duell an, es gilt die Mehrheitswahl. Der Gewinner tritt gegen C an. Gewinnt er hier wieder, dann gibt es noch ein Duell um Platz 2 und 3. (Man müsste zudem noch festlegen, was bei Gleichstand passieren soll; das kann uns hier aber nicht passieren).

Diktatur: Wir bestimmen Schüler 2 zum Diktator (Schülersprecher), bzw. die zweite Sportart (Handball). In obiger Notation ist dies D_2.

Konstanz: Das Gesamtergebnis ist konstant immer A vor B vor C.

Aufgabe: (1) Werten Sie jeweils die Ergebnisse von J1 bzw. J2 aus.

(2) Finden Sie für jedes Verfahren ein verletztes Axiom UNA, IIA, ~~DIC~~. Diese Eigenschaften dienen uns als theoretische Hilfsmittel; sie sind keine willkürlichen Idealisierungen, sondern dringende Notwendigkeiten! Ist Monotonie MON nicht erfüllt, so ist das Wahlverfahren manipulierbar:

(3) Der Schulleiter des Cusanus–Gymnasiums möchte die Wahl des beliebtesten Lehrers in J1 beeinflussen. Dazu wählt er das Duell-Verfahren. Wie muss er die Reihenfolge der Duelle wählen, damit der Astronomie-Lehrer als beliebtester Lehrer gewählt wird?

(4) Die beste Schule soll im zweiten Jahr J2 mit einem modifizierten Borda–Verfahren $B(p, q, r)$ ermittelt werden. Dabei bekommt jeder erste Platz p Punkte, jeder zweite q Punkte und jeder dritte Platz r Punkte. Wie setzt der Schulleiter $p > q > r$, damit seine Schule gewinnt?

(5) Zur Vereinfachung sind die individuellen Präferenzen strikt, aber die Ergebnispräferenz muss nicht strikt sein, da ein Gleichstand manchmal unvermeidbar ist. Wer möchte, kann sich überlegen, wie man diese Verfahren sinnvoll auf evtl. nicht-strikte Präferenzen erweitern kann.

	UNA	IIA	MON	~~DIC~~	SYM
Bor					
Maj					
Med					
Duell					
Dikt					
Konst					

Jedes dieser Verfahren wurde kritisiert, weil es gewisse Anforderungen verletzt. Dutzende weitere Wahlverfahren wurden vorgeschlagen, doch niemand fand ein perfektes Wahlverfahren. Arrows Forschungsauftrag war 1948, endlich ein solches Verfahren zu entwickeln; seine Lösung war vollkommen überraschend: Ein perfektes Verfahren existiert nicht!

That was it! It took about five days to write in September 1948. When every attempt failed I thought of the impossibility theorem.
Kenneth Arrow, zitiert nach Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind*

Arrows Satz vom Diktator

Bei nur zwei Alternativen, also $\sharp A = 2$, erfüllt die Stimmzählung alle drei wünschenswerten Eigenschaften: Einhelligkeit, Monotonie, Symmetrie.

Wir wünschen ein solches Wahlverfahren für drei und mehr Alternativen. Das Paradox von Condorcet zeigt, dass der naive Versuch fehlschlägt.

Auch die Verfahren der vorigen Übungsaufgabe lösen das Problem nicht: Mindestens eines unserer Axiome UNA, IIA, ~~DIC~~ wird immer verletzt.

Schlimmer noch: Es gibt nachweislich überhaupt kein solches Verfahren! Kenneth Arrow bewies 1948 folgenden Satz, veröffentlicht 1951:

Satz N3B: Satz vom Diktator, Kenneth Arrow 1951

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen. Erfüllt $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ die Forderungen der Einhelligkeit und Monotonie, so ist V diktatorisch.

Wir wünschen zwei harmlos anmutende Eigenschaften UNA und MON, doch bereits daraus folgt zwingend die unerwünschte Eigenschaft DIC. Anders gesagt, die drei Axiome UNA, IIA, ~~DIC~~ sind unvereinbar. Arrows Beweis ist genial-einfach und einfach-genial, elementar aber nicht trivial.

Arrows Satz vom Diktator

Statt Monotonie (MON) genügt es sogar, nur das deutlich schwächere Axiom der Unabhängigkeit von dritten Alternativen (IIA) zu fordern. Schwächere Voraussetzungen bedeuten einen stärkeren Satz! Wir formulieren und beweisen dies anschließend in Satz N3E.

Die Monotoniebedingung MON mag zuerst unnötig streng erscheinen. Wir verlangen mit UNA und IIA zwei noch harmlosere Eigenschaften, doch auch daraus folgt zwingend die unerwünschte Eigenschaft DIC. Unsere drei Wünsche UNA und IIA und ~~DIC~~ sind unvereinbar.

Dieses negative Ergebnis ist höchst überraschend, gar schockierend. In den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften schlägt es hohe Wellen. Arrow hat damit eine neue Methode und Forschungsrichtung begründet, dafür wurde er vielfach geehrt, sogar mit dem Wirtschaftsnobelpreis.

Zugegeben: Arrows Unmöglichkeitstheorem klingt zunächst unglaublich. Gute Nachricht: Wir müssen es nicht *glauben*, wir können es *beweisen*. Der Beweis ist nicht schwer; dank unserer gründlichen Vorbereitung haben wir bereits alle nötigen Begriffe und Werkzeuge zur Hand.

Entscheidende und souveräne Teilmengen

Definition N3C: entscheidende und souveräne Teilmengen

Vorgelegt sei ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.

Eine Teilmenge $J \subseteq I$ heißt **halbentscheidend** für das Paar (x, y), falls für jedes Votum gilt: Aus $x \succ_J y$ und $y \succ_{I \smallsetminus J} x$ folgt $x \succ y$.

$J:$	x	$\succ$	y
$I \smallsetminus J:$	y	$\succ$	x
	x	$\succ$	y

Stärker nennen wir J **(ganz) entscheidend** für das Paar (x, y), falls für jedes Votum gilt: Allein aus $x \succ_J y$ folgt $x \succ y$.

$J:$	x	$\succ$	y
$I \smallsetminus J:$	y	,	x
	x	$\succ$	y

Gilt dies für jedes Paar $(x, y) \in A \times A$, so heißt J **souverän** in V.

Entscheidende und souveräne Teilmengen

Halbentscheidend zu sein fragt nur nach der direkten Konfrontation; entscheidend heißt, das Votum der Restmenge $I \smallsetminus J$ ist unerheblich.

Mit Monotonie (MON) folgt: halbentscheidend impliziert entscheidend. Hierzu genügt bereits Unabhängigkeit (IIA), wie folgendes Lemma zeigt.

Beispiel: Die leere Menge $\emptyset \subseteq I$ ist niemals souverän in V, da $\sharp A \geq 2$. Genau dann ist I souverän in V, wenn Einhelligkeit (UNA) gilt.

In der Diktatur $D_k : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ ist eine Menge $J \subseteq I$ souverän gdw $k \in J$. Hier ist also die Menge $J = \{k\}$ die kleinste souveräne Teilmenge.

Bei nur zwei Alternativen haben wir zudem die Wahlverfahren $M_\mu^{\alpha,\beta}$. In der Mehrheitswahl $M_\mu : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ ist $J \subseteq I$ souverän gdw $\mu(J) > \frac{1}{2}$. Im Quorum $M_\mu^{\alpha,\beta}$ setzen wir $\delta := \mu(J) - \mu(I \smallsetminus J) = 2\mu(J) - 1 \in [-1, 1]$: Dann ist J entscheidend für (a, b) gdw $\delta > \alpha$, und für (b, a) gdw $-\delta < \beta$.

Im Allgemeinen gibt es mehrere (minimale) souveräne Teilmengen. Denken Sie zum Beispiel an mögliche Koalitionen in einem Parlament.

Halbentscheidend impliziert souverän.

Lemma N3D: Halbentscheidend impliziert souverän.

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen, und das Wahlverfahren V erfülle Einhelligkeit (UNA) und Unabhängigkeit (IIA). Ist $J \subseteq I$ halbentscheidend für ein Paar (x, y), so ist J souverän in V.

(1) Die Teilmenge J ist entscheidend für (x, z) mit $z \in A \setminus \{x, y\}$:

$$
\begin{array}{rccc}
\hline
J: & x & \succ & z \\
I \setminus J: & z & , & x \\
\hline
 & x & \succ & z
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\\ \Longleftarrow \\ \Longleftarrow \\ \\ \underset{\text{IIA}}{\Longleftarrow}
\end{array}
\quad
\begin{array}{rccccc}
\hline
J: & x & \succ & y & \succ & z \\
I \setminus J: & y & \succ & z & , & x \\
\hline
 & x & \underset{\text{HE}}{\succ} & y & \underset{\text{UNA}}{\succ} & z
\end{array}
$$

(2) Ebenso ist J ist entscheidend für (z, y):

$$
\begin{array}{rccc}
\hline
J: & z & \succ & y \\
I \setminus J: & y & , & z \\
\hline
 & z & \succ & y
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\\ \Longleftarrow \\ \Longleftarrow \\ \\ \underset{\text{IIA}}{\Longleftarrow}
\end{array}
\quad
\begin{array}{rccccc}
\hline
J: & z & \succ & x & \succ & y \\
I \setminus J: & y & , & z & \succ & x \\
\hline
 & z & \underset{\text{UNA}}{\succ} & x & \underset{\text{HE}}{\succ} & y
\end{array}
$$

So können wir das Paar (x, y) in jedes beliebige Paar tauschen. $\boxed{\text{QED}}$

Halbentscheidend impliziert souverän.

Wir rechnen mit Präferenzen gemäß der vereinbarten Rechenregeln!

Ausführlich: (1) Wir untersuchen die linke Konstellation zwischen x, z. Hierzu fügen wir y geschickt ein wie rechts gezeigt. (1a) Es folgt $x \succ y$, denn J ist halbentscheidend für (x, y). (1b) Zudem gilt $y \succ z$ dank UNA. (1c) Rechts folgt $x \succ z$ dank Transitivität, also auch links dank IIA.

Ebenso: (2) Wir untersuchen die linke Konstellation zwischen z, y. Hierzu fügen wir x geschickt ein wie rechts gezeigt. (2a) Es folgt $x \succ y$, denn J ist halbentscheidend für (x, y). (2b) Zudem gilt $z \succ x$ dank UNA. (2c) Rechts folgt $z \succ y$ dank Transitivität, also auch links dank IIA.

Für das Lemma ist die Menge I beliebig, endlich oder unendlich. Den unendlichen Fall können wir später noch genauer untersuchen. Das führt zum Begriff des Ultrafilters und des „unsichtbaren Diktators“.

Für den folgenden Beweis setzen wir die Menge I als endlich voraus. Sei $J \subseteq I$ souverän, also entscheidend für jedes Paar $(x, y) \in A \times A$. Ist auch $J \setminus \{j\}$ souverän, so können wir J verkleinern. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir schließlich eine minimale souveräne Menge.

Beweis des Satzes vom Diktator

Satz N3E: Satz vom Diktator, Kenneth Arrow 1951

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen. Erfüllt irgendein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ die Forderungen der Einhelligkeit (UNA) und der Unabhängigkeit von dritten Alternativen (IIA), so ist V diktatorisch.

Sei $J \subseteq I$ souverän und minimal. Wir wissen $J \neq \emptyset$. Sei also $k \in J$.
Wir untersuchen folgende Abstimmung (à la Condorcet):

$$\begin{array}{r ccccc}
\hline
k: & a & \succ & x & \succ & b \\
J \smallsetminus k: & b & \succ & a & \succ & x \\
I \smallsetminus J: & x & \succ & b & \succ & a \\
\hline
 & a & \succ & x & \succcurlyeq & b
\end{array}$$

Zunächst folgt $a \succ x$, denn J ist souverän. Kann zudem $b \succ x$ gelten? Nein, dann wäre $J \smallsetminus k$ souverän (Lemma N3D) und J nicht minimal. Dank Linearität folgt somit $x \succcurlyeq b$. Dank Transitivität folgt $a \succ b$.

Nur das Individuum k wertet $a \succ b$, alle anderen werten $b \succ a$. Somit ist k souverän (erneut dank Lemma N3D). $\boxed{\text{QED}}$

Beweis des Satzes vom Diktator

Benutzt haben wir tatsächlich nur die Voraussetzungen von Satz N3E:

- Präferenzen $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ sind Relationen auf A, transitiv und linear. Beides sind grundlegende Forderungen und werden hier benötigt.
- Das Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ erfüllt die Forderungen UNA und IIA, also Einhelligkeit und Unabhängigkeit von dritten Alternativen.
- Es gibt mindestens drei Alternativen, also $\sharp A \geq 3$. Daraus folgt Lemma N3D: Halbentscheidend impliziert souverän.
- Die Menge I der Individuen ist endlich, also $n := \sharp I < \infty$. Demnach gibt es unter den souveränen Teilmengen eine minimale.

Allein aus diesen geringen Forderungen folgt Arrows Schlussfolgerung: Das Wahlverfahren V ist diktatorisch, d.h. es existiert ein Diktator $k \in I$.

Nochmal: Dieses negative Ergebnis ist überraschend, gar schockierend. Gute Nachricht: Wir müssen es nicht *glauben*, wir haben es *bewiesen*. Der Beweis ist nicht schwer; dank unserer gründlichen Vorbereitung haben wir alle nötigen Begriffe und präzise Werkzeuge zur Hand.

Zusammenfassung

Charlie Chaplin (1889–1977), *The Great Dictator* (1940), `youtu.be/isLNLpxpndA&t=133`

Zusammenfassung

Zum krönenden Abschluss möchte ich Arrows Satz zusammenfassen und dabei umformulieren, logisch äquivalent aber sprachlich griffiger.

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \ge 2$, und die Menge $A = \{a, b, c, \dots\}$ der Alternativen/Kandidaten, $\sharp A \ge 2$.

Eine **Präferenz** P ist eine transitive und lineare Relation auf A.
Sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.
Das bedeutet, jeder möglichen Konstellation individueller Präferenzen $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}$ wird als Ergebnis eine Präferenz $P \in \mathbb{P}$ zugeordnet.

Es gibt sehr viele Wahlverfahren; wir wollen die guten hervorheben: Wir nennen V **perfekt**, wenn die Zuordnung $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ einhellig und monoton und nicht-diktatorisch ist.

Korollar N3F: Arrows Un/Möglichkeitssatz

Für $\sharp A = 2$ gibt es (viele) perfekte Wahlverfahren.
Für $\sharp A \ge 3$ gibt es kein perfektes Wahlverfahren.

Interpretation

Interpretation? Bei drei oder mehr Alternativen können die Präferenzen $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ extrem kompliziert sein, kontrovers und divergent. Das Wahlverfahren V soll hieraus eine einfache Antwort extrahieren; das ist im Allgemeinen unmöglich, oder eben nur zum Preis einer Diktatur.

Manche möchten das vielleicht einfach nicht wahr haben,
aber es ist besser die Grenzen von Wahlverfahren zu kennen.
Nur in einfachen, klaren Fällen können wir ein Ergebnis ablesen,
so zum Beispiel im (extrem seltenen) Fall vollständiger Einhelligkeit.

Das Wahlverfahren soll allgemein gelten, also auch aus extremen, heterogenen, widersprüchlichen Voten eine gemeinsame Präferenz extrahieren. Die Gesellschaft kann extrem uneinig sein, gar zerstritten, und das Wahlverfahren soll es irgendwie richten. Das ist zu viel verlangt!

Die Sehnsucht nach einfachen Antworten und klaren Autoritäten ist zwar weit verbreitet, aber einer komplexen Sachlage meist nicht angemessen. Konsens oder Kompromiss muss die Gesellschaft selbst herstellen; diese mühsame Arbeit kann ihr keine „magische Formel“ abnehmen.

Literatur

Arrows bahnbrechende Arbeit hat ein Forschungsgebiet begründet. Hierzu existiert eine umfangreiche Literatur. Eine winzige Auswahl:

- K.J. Arrow: *Social choice and individual values*, John Wiley & Sons, New York 1951. (Ausarbeitung seiner Dissertation in Buchform)
- R.D. Luce, H. Raiffa: *Games and decisions*, John Wiley & Sons, New York 1957; Dover Publications, New York 1989. (Kapitel 14)
- D. Black: *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, 1958. (mit Ausführungen zur Geschichte)
- E. Maskin, A. Sen: *The Arrow Impossibility Theorem*, Columbia University Press, New York 2014. (Vorlesungen zu Arrows Ehren)
- J. Lützen: *History of Arrow's impossibility theorem*, Hist. Math. 46 (2019), 56–87. `doi.org/10.1016/j.hm.2018.11.001`
- Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften `www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1972`
- S. Nasar: *A beautiful mind*, Faber & Faber, London 1998. (Kapitel 12 handelt von der RAND Corporation und Arrows Arbeit.)

Was ist und wozu nützt die axiomatische Methode?

Arrows grundlegende Arbeiten zu Wahlverfahren, insbesondere sein Unmöglichkeitssatz, sind eine bemerkenswert erfolgreiche Anwendung mathematischen Denkens in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften.

Die allgemeine Vorgehensweise ist genial-einfach und kunstvoll-elegant: Wir trennen sorgsam die Formulierung der Ziele (Forderungen, Axiome) von der Beschreibung möglicher Lösungen (Konstruktionen, Beispiele).

Diese Trennung hat viele Vorzüge: Sie betont, was wir eigentlich *wollen*, gegenüber den vielen denkbaren Verfahren, es praktisch *auszuführen*. Manchmal gibt es mehrere Verfahren, dann lohnt es, sie zu vergleichen. Manchmal gibt es gar kein Verfahren, dann lohnt es, dies zu erkennen.

Die **axiomatische Methode** bewährt sich in vielen Gebieten! Speziell Mathematik und Informatik nutzen diese Trennung von **Zielsetzung** – Was soll erreicht werden? und **Verfahren** – Wie wird es implementiert?

Der Weg ist das Ziel? So hört man es oft von planlosen Irrwanderern. Häufig ist das Ziel das Ziel, und der Weg will sorgsam gewählt werden. In Arrows Satz ist das ersehnte Ziel klar, aber es gibt gar keinen Weg!

Was ist und wozu nützt die axiomatische Methode?

Wie kam Arrow auf seine geniale Lösung? Als Student interessierte er sich für mathematische Logik. Durch einen glücklichen Zufall hörte er Vorlesungen des Mathematikers und Logikers Alfred Tarski (1901-1983). Der Statistiker und Ökonom Harold Hotelling (1895–1973) ermutigte Arrow zur Promotion in den noch jungen Wirtschaftswissenschaften.

So kamen zwei wesentliche Zutaten zusammen: eine solide Ausbildung in den (mathematischen) Grundlagen und eine vielversprechende Frage in einem (ökonomischen) Anwendungsgebiet. Der Rest ist Geschichte.

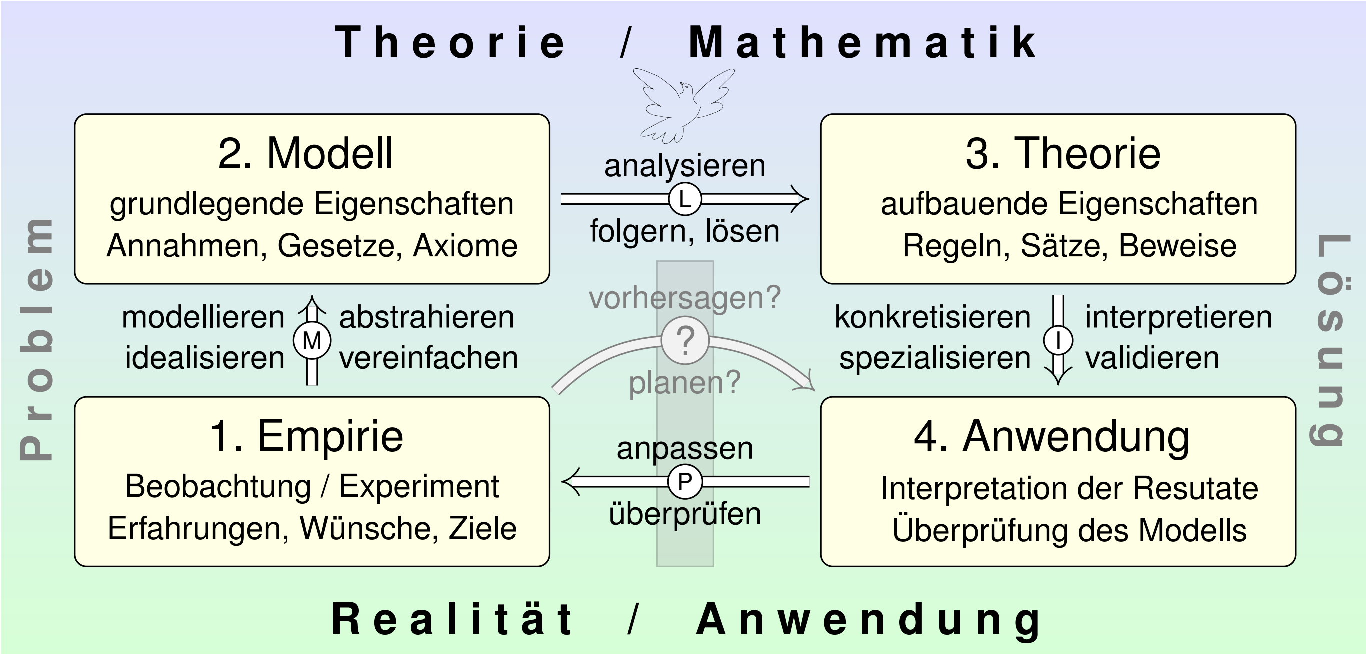
Es ist und bleibt erstaunlich: Mathematik ist wunderbar anwendbar! Das gilt in der Ökonomie ebenso wie in allen Wissenschaften.

The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it. [...] The miracle of the appropriateness of the language of mathematics [...] is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research.

(Eugene Wigner, 1902–1995)

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Varianten zur Wiederholung und Vertiefung

Untersuchen Sie folgende Variante zur Wiederholung und Vertiefung:

Aufgabe: Das Ergebnis darf weiter in $\mathbb{P}$ liegen, da ein Unentschieden manchmal unvermeidbar ist. Aber bei der Stimmabgabe erlauben wir nur strikte Präferenzen $\mathbb{S} \subsetneq \mathbb{P}$. Das Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$ muss also nur auf einer kleineren Menge definiert werden, das ist etwas einfacher.

Vermeiden wir so Arrows Unmöglichkeitssatz? Gibt es Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$, die einhellig und monoton sind, aber nicht diktatorisch? Gehen Sie alle Argumente sorgfältig durch und übertragen Sie sie.

Lösung: Bitte versuchen Sie es selbst, Sie können dabei viel lernen!

Die Definition eines Diktators gilt weiterhin, ebenso Einhelligkeit, Monotonie und IIA. Für entscheidende Teilmengen und den Beweis des Satzes haben wir nur strikte Präferenzen genutzt, alle Argumente gelten also wörtlich genauso, und der Satz bleibt gültig für eingeschränkte Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$. Das gleiche gilt dann natürlich auch für $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$.

Aufgabe: Arrows Satz wird oft ungenau, gar falsch dargestellt. Prüfen Sie den Blog `blog.zeit.de/mathe/allgemein/mathe-wahl-diktator`.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Abstraktion strukturiert und vereinfacht! Beispiele illustrieren.

Beispiel: Eine vierköpfige Familie $I = \{1, 2, 3, 4\}$ plant ihren Urlaub. Zur Wahl stehen $A = \{\ a =$ Venedig, $b =$ London, $c =$ Paris $\}$.

$1:$	b	$\succ$	c	$\succ$	a
$2:$	a	$\succ$	b	$\approx$	c
$3:$	a	$\succ$	c	$\succ$	b
$4:$	c	$\succ$	b	$\succ$	a

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Geschäftsstrategien, jede Aktionär:in i hat ihre eigene Präferenz P_i. Wir suchen ein Abstimmungsergebnis P.

Beispiel: Berufung auf eine Professur, Kandidat:innen $A = \{a, b, c, \dots\}$. Die Kriterien sind Forschung, Lehre, Drittmittel, Administration.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Universitäten, P_i ist das Ranking nach Kriterium i. Gesucht ist ein zusammenfassendes Ranking P aller Unis.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind die Piloten der Formel Eins, P_i ist die Zielreihenfolge beim Rennen i. Gesucht ist ein Gesamtclassement P.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Jetzt verstehen Sie besser, warum Abstimmungen kompliziert sind. Schon für das Votum über den skizzierten Familienurlaub gibt es die astronomisch große Zahl von $13^{13^4} = 13^{28561} \approx 10^{31815}$ Wahlverfahren. Die meisten davon sind kaum brauchbar, aber es sind Wahlverfahren.

Die Zeit drängt, der Urlaub naht, welche Entscheidung ist „die richtige“? Wir brauchen mindestens Platz 1, und für den Fall, dass das Wunschziel ausgebucht ist, müssen wir auch Platz 2 und 3 bestimmen. Wir suchen also „die gerecht ausgewählte“ Präferenz $P \in \mathbb{P}$, eine unter dreizehn.

Wir könnten die Alternative(n) wählen, die am häufigsten Platz 1 belegt, das wäre hier $a =$ Venedig. Im direkten Vergleich gewinnt dann c vor b.

Wir könnten ebenso gut die Alternative(n) streichen, die am häufigsten den letzten Platz belegt, hier a und b; dann gilt $c \succ b \approx a$ im Vergleich.

Oder wir machen kurzerhand Spieler 1 zum Diktator, oder er sich selbst, dann gewinnt b vor c vor a. Oder... oder... Es gibt viele Möglichkeiten!

Das darf doch nicht wahr sein! Ist das wirklich so kompliziert? Ja, ist es. Die Präferenzen können insgesamt sehr kompliziert und divergent sein. Ein perfektes Verfahren im Sinne von Arrows Axiomen existiert nicht.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Zur Berufung auf eine Professur erstellt die Kommission (mindestens) eine Dreierliste. Solche Verfahren dauern meist sehr lange, bei Absage des Erstplatzierten ermöglicht die Liste die Berufung des Zweit- und dann Drittplatzierten. Zur Vereinfachung dieses Beispiels nehmen wir (etwas unrealistisch) eine vollständige Reihung *aller* Kandidaten an.

Zur Illustration nehmen wir einen typischen Fall von $\sharp A = 10$ Kandidaten und $\sharp I = 15$ Kommissionsmitgliedern an. Dann gibt es $\sharp\mathbb{P} = 102\,247\,563$ Präferenzen und somit $\sharp\mathbb{P}^{\sharp\mathbb{P}^{\sharp I}} \approx 10^{10^{121}}$ Wahlverfahren. Diese Zahl hat 10^{121} Dezimalstellen, also weit mehr Ziffern als die geschätzten 10^{80} Elementarteilchen im Universum. Das ist mehr als ein Googolplex ($10^{10^{100}}$) mit nur einem Googol (10^{100}) Ziffern. Soviel zur Zahlenmystik.

Kein Wunder, dass Berufungsverfahren kompliziert und langwierig sind. Zur Vereinfachung legt sich die Kommission auf genau drei Kriterien fest: Forschung, Lehre, Drittmittel. Das reduziert das Problem auf $\sharp I = 3$. Aber selbst $\sharp I = 2$ wäre noch zu kompliziert. Schließlich wird allein die Forschung (Anzahl der Artikel) oder die Drittmittel (Summe in Euro) zum entscheidenden Kriterium bestimmt. Die Diktatur ist am einfachsten.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Arrows Satz ist ein fundamentales Hindernis: Für ein funktionierendes Wahlverfahren müssen wir eine der Forderungen opfern. Meist ist dies Monotonie (MON) oder die Unabhängigkeit von dritten Alternativen (IIA).

Das erklärt, warum „dritte Parteien“ das Ergebnis massiv beeinflussen können, auch wenn sie selbst keinerlei Aussicht haben zu gewinnen.

Natürlich werden dennoch Wahlverfahren verwendet, etwa für das Gesamtclassement der Formel Eins oder das Ranking von Universitäten. Dabei kann es nie ganz gerecht zugehen im Sinne von Arrows Axiomen.

Fun fact: Könnte man zu Beginn über das Wahlverfahren abstimmen? Nun ja, es gibt mehr als drei Wahlverfahren, also… wieder unmöglich! Wie wir es auch drehen und wenden, der Unmöglichkeitssatz besteht.

Ein überraschender Lösungsvorschlag ist die Zufallsdiktatur (Satz N2D): Ein Wähler wird ausgelost und entscheidet in dieser Frage als Diktator. Das ist eines der fairsten Wahlverfahren, leider nicht deterministisch. Es scheint daher schwer zu akzeptieren. Zudem stellt die Durchführung enorme Anforderungen zum Schutz vor Manipulation und Korruption.

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Die ernsthafte und redliche Auseinandersetzung mit einem Thema ist immer eine intellektuelle Herausforderung. Wie eingangs erklärt:

Mathematik ist nicht (nur) die sture *Anwendung* vorgefertigter Formeln, sondern (auch und vor allem) die *Entwicklung* neuer (Denk-)Werkzeuge.

Mathematik (gr. μαθηματική τέχνη) ist die *Kunst des Erkennens/Lernens*. Sie ist ein schöpferisch-kreativer Prozess zum Lösen von Problemen.

Sorgfalt und Ehrlichkeit sind mühsam, aber es lohnt sich! Was Sie einmal als richtig erkannt und nachgewiesen haben, behält seine Gültigkeit, auch nach Jahrhunderten, für immer!

Im März 2017 habe ich diesen Vortrag zur Arrows Unmöglichkeitssatz erstmalig vor Schüler:innen, geeignet angepasst an die Zielgruppe. Das war für alle anstrengend, doch sehr lohnend und mitreißend.

Anschließend gab es diverse Ideen und Fragen, die ich hier aufgreife, auch mehrere optimistische Vorschläge zur Lösung des Wahlproblems, z.B. Auswahl der besten Alternative durch Stimmzählung, siehe N304.

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Am Ende der Vortrags waren die Schüler:innen ungläubig, ich versprach mutig 1000 Euro für ein perfektes Wahlverfahren bei drei Alternativen. Inzwischen habe ich mein Angebot gründlich überdacht – und erneuert. Ich bin weiterhin zuversichtlich, diesen Preis nie zahlen zu müssen.

Warum bin ich so sicher? Nicht nur, weil ein Nobelpreisträger behauptet, ein solches Verfahren könne es nicht geben. – Das wäre ein reines Autoritätsargument und als solches eher schwach. So beeindruckend oder einschüchternd dies auch sein mag, es ersetzt keinen Beweis.

Starke Antwort: Wir haben einen Beweis! Wir haben alle Argumente *sorgfältig* ausgeführt, jede:r von uns kann sie *selbstständig* prüfen. Es geht nicht um Autorität, sondern um nachvollziehbare Argumente. Das ist wissenschaftliche Ehrlichkeit und Transparenz, so soll es sein.

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!
Immanuel Kant, *Was ist Aufklärung?*, 1784

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Ein pfiffiger Vorschlag der Schüler:innen für ein Wahlverfahren: Sind sich alle Wähler einig, also $P_1 = P_2 = \dots = P_n$, dann ist dies das Ergebnis. Andernfalls wird ein festes Ergebnis P_0 vereinbart, etwa $a \succ b \succ c$.

Aufgabe: Ist dies ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$? Ist es perfekt?
(a) für zwei Alternativen? Ist es eines unserer obigen Wahlverfahren?
(b) für drei und mehr Alternativen? Welche Forderung schlägt fehl?

Gelten Einhelligkeit, Monotonie, Nicht-Diktatur? Ich war zuversichtlich, dass mindestens eine fehlschlägt. Oder muss ich 1000 Euro zahlen?

Lösung: (a) Ja, für zwei Alternativen ist dieses Verfahren einhellig und monoton und nicht-diktatorisch. Es ist also ein perfektes Wahlverfahren. Es entspricht $M_\mu^{\alpha,\beta}$ für geeignete Schranken $-1 < \beta \le \alpha < 1$. (Warum?)
(b) Weiter gilt Nicht-Diktatur und Monotonie, nicht jedoch Einhelligkeit:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1: & a & \succ & c & \succ & b \\ 2: & c & \succ & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b & \succ & c \end{array}$$

In diesem Fall werten alle $c \succ b$, doch das Ergebnis besagt $b \succ c$.

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Wir variieren das vorige Verfahren, wenden es aber nun paarweise an: Wir fixieren ein vorgegebenes Ergebnis P_0, etwa $a \succ b \succ c$. Sind sich zu zwei Alternativen alle einig, so wird P_0 entsprechend geändert.

Aufgabe: Ist dies ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$? Ist es perfekt?
(a) für zwei Alternativen? (b) für drei und mehr Alternativen?

Lösung: (a) Ja, für zwei Alternativen ist dieses Verfahren dasselbe wie in der vorigen Aufgabe. Es ist daher sogar ein perfektes Wahlverfahren.

(b) Ab drei Alternativen ist dies leider kein Wahlverfahren:

$$\begin{array}{cccccc} 1: & c & \succ & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & c & \succ & a \end{array}$$

Zu a, b herrscht Uneinigkeit, es gilt das vorgegebene Ergebnis $a \succ b$.
Zu b, c herrscht Uneinigkeit, es gilt das vorgegebene Ergebnis $b \succ c$.
Nur zu c, a herrscht Einigkeit, als Ergebnis setzen wir daher $c \succ a$.
Das Gesamtergebnis ist demnach nicht transitiv, sondern zirkulär!

Aufgabe: Untersuchen Sie weitere Wahlverfahren, wenn Sie möchten. Sie kennen die nötigen Begriffe, Sie halten alle Werkzeuge in Händen.

Wie un/wahrscheinlich sind paradoxe Wahlergebnisse?

Wir untersuchen nochmal genauer das Paradox von Condorcet (N303).

Dazu betrachten wir drei Alternativen, $A = \{a, b, c\}$, strikte Präferenzen, $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$, und eine ungerade Anzahl n von Wählern, $I = \{1, \dots, n\}$,

Wir nehmen an, dass jeder Wähler seine Präferenz zufällig wählt, gleichverteilt auf $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$ und unabhängig von den anderen.

Wenn wir paarweise Abstimmungen auswerten, kann es zu intransitiven Ergebnissen kommen, hier entweder $a > b > c > a$ oder $a < b < c < a$.

Aufgabe: Welche Wkt $f(3, n)$ haben diese intransitive Ergebnisse? Schreiben Sie zur Berechnung ein Programm, etwa in Python, und bestimmen Sie die Werte für $n = 1, 3, 5, \dots, 99$. Was fällt Ihnen auf?

Naiv lassen wir jeden Wähler alle 6 Präferenzen durchlaufen, dabei ist der Aufwand 6^n, also exponentiell. Die Zusammenfassung zu 6 Klassen hat nur polynomiellen Aufwand $O(n^5)$, wie in der folgenden Lösung.

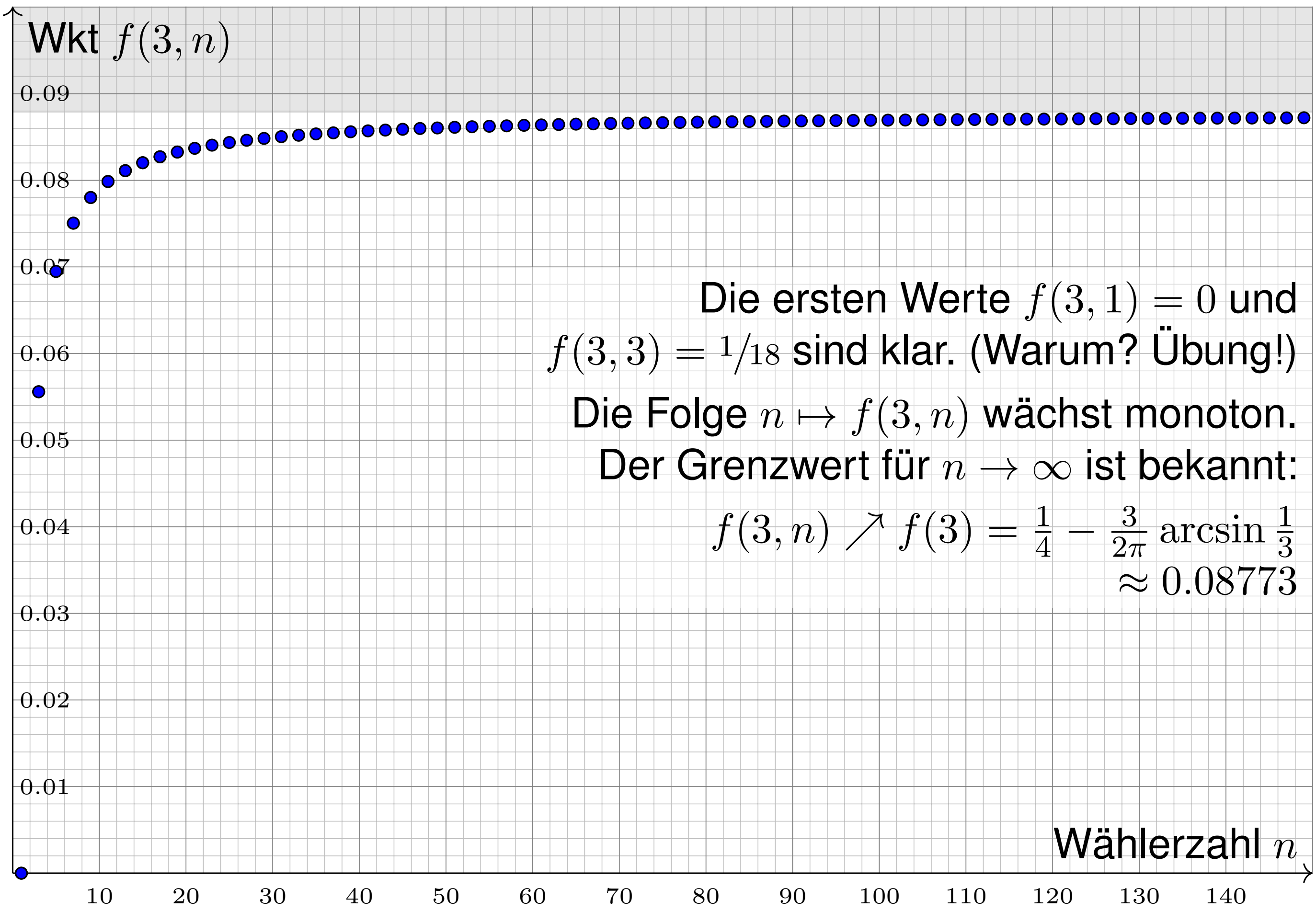
Übung: Können Sie dies mit Aufwand $O(n^4)$ berechnen? sogar $O(n^3)$? Dadurch könnten Sie spürbar schneller und somit weiter rechnen!

Wie un/wahrscheinlich sind paradoxe Wahlergebnisse?

Lösung: Hier eine halbwegs effiziente Implementierung in Python. Damit gelingt die Berechnung bis $n = 99$ in unter zehn Minuten.

```python
# Preferences 1:a>b>c 2:a>c>b 3:b>a>c 4:b>c>a 5:c>a>b 6:c>b>a
for n in range(1,101,2): # n=1,3,...,99 is an odd number of voters
    s = 0  # s counts the number of intransitive results a>b>c>a
    for k1 in range(0,n+1):
        for k2 in range(0,n+1-k1):
            for k3 in range(0,n+1-k1-k2):
                for k4 in range(0,n+1-k1-k2-k3):
                    for k5 in range(0,n+1-k1-k2-k3-k4):
                        k6 = n-k1-k2-k3-k4-k5
                        if( k1+k2+k5 > k3+k4+k6 and
                            k1+k3+k4 > k2+k5+k6 and
                            k4+k5+k6 > k1+k2+k3 ):
                            s += multinomial([k1,k2,k3,k4,k5,k6])
    intrans = 2*s/6**n # The factor 2 includes the twin case a<b<c<a.
    print("voters: {:3d}, transitive: {:10.8f}, intransitive: {:10.8f}".
          format( n, 1-intrans, intrans ) )
```

Wie un/wahrscheinlich sind paradoxe Wahlergebnisse?



Wie un/wahrscheinlich sind paradoxe Wahlergebnisse?

Die Frage ist recht naheliegend und die Antwort dennoch überraschend: Wenn sich Condorcets Paradox schon nicht verhindern lässt, können wir trotzdem damit leben? Wie wahrscheinlich sind intransitive Ergebnisse?

$$f(3) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi}\arcsin\frac{1}{3} \approx 0.08773\ldots$$

Bei drei Alternativen liegt die Wkt immer unter 9%. Der obige Grenzwert scheint zunächst recht mirakulös. Schließlich folgt er natürlich aus dem Grenzübergang von diskreten Summen zu kontinuierlichen Integralen. Die Rechnung scheint mir allerdings eher länglich. Wenn Sie gerne Integrale und Wahrscheinlichkeiten berechnen, probieren Sie es!

Es gibt umfangreiche Literatur zur Wahrscheinlichkeit von intransitiven Wahlergebnissen, siehe W.V. Gehrlein: *Condorcet's paradox and the Condorcet efficiency of voting rules,* Math. Japon. 45 (1997) 173–199.

Eine raffinierte Analysemethode fand G. Kalai: *A Fourier-theoretic perspective on the Condorcet paradox and Arrow's theorem,* Advances in Applied Mathematics 29 (2002) 412–426.

Parlamentssitze und negatives Stimmgewicht

Die Frage der **Fehlerwahrscheinlichkeit** von Wahlsystemen ist nicht nur von theoretischem, sondern auch von großem praktischen Interesse. Ähnliche Inkonsistenzen traten auch bei Bundestagswahlen auf, daher musste das Wahlrecht 2008 und erneut 2012 nachgebessert werden.

Arrows Unmöglichkeitssatz lässt sich hier nicht unmittelbar anwenden, denn es geht bei Parlamentswahlen um die Zuteilung von Sitzen. Das mag zunächst leicht erscheinen, doch bei genauerer Analyse zeigen sich nahezu genau dieselben Probleme wie in Arrows Satz.

M. Balinski und P. Young bewiesen 1982 folgenden Unmöglichkeitssatz: Bei fester Gesamtzahl der Sitze existiert kein Zuteilungsverfahren, das sowohl die Quotenbedingung als auch die Monotoniebedingung erfüllt. `de.wikipedia.org/wiki/Unmöglichkeitssatz_von_Balinski_und_Young`

Die erstaunliche Ursache ist, das Rundungen immer ungerecht sind. In zahlreichen US-Wahlen hat dies zu dramatischen Inkonsistenzen geführt, hinreißend erklärt von Matt Parker / Stand-up Maths: *Why it's mathematically impossible to share fair.* `youtu.be/GVhFBujPlVo`

Parlamentssitze und negatives Stimmgewicht

Hierzu ist das Fachgutachten unseres Stuttgarter Kollegen Prof. Dr. Christian Hesse überaus lehrreich, öffentlich zugänglich unter `www.isa.uni-stuttgart.de/dokumente/Bundeswahlgesetz_Endversion.pdf`. Ich zitiere aus den mathematischen Daten ab Seite 22:

Entscheidend ist zudem nicht nur, ob diese Situationen – wie oben geschehen – theoretisch konstruierbar sind, sondern mit welcher Wahrscheinlichkeit sie bei realistischen Wahlergebnissen auftreten. Diese Wahrscheinlichkeiten können mit Simulationen ermittelt werden. Das Bundesamt für Sicherheit in der Informationstechnik (BSI) hat mit einer Monte-Carlo-Methode hypothetische Wahlergebnisse simuliert, die im Umfeld der tatsächlichen Wahlausgänge der Bundestagswahlen 2005 und 2009 liegen. Es wurde ein Simulationskorridor von 20 Prozent um die tatsächlichen Wahlergebnisse gewählt. In diesem Korridor wurden zunächst je 1000 realistische Wahlergebnisse generiert, die somit jeweils in der Nähe der beiden letzten Bundestagswahlergebnisse angesiedelt sind. [...] Bei konstant gehaltenen Wählerzahlen kann die NSG-Problematik durch das BWahlG 2011 als hinreichend behoben angesehen werden.

Parlamentssitze und negatives Stimmgewicht

Parlamentssitze und negatives Stimmgewicht

Weiterhin sei $\sharp A \geq 3$ und $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$. Die Menge I sei nun beliebig. Anders als zuvor setzen wir also I nicht mehr als endlich voraus. Definition N3C und Lemma N3D gelten weiterhin, wörtlich wie zuvor.

Aufgabe: Sei $V : \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ ein Wahlverfahren, einhellig und monoton. Welche Eigenschaften hat $\mathscr{F} = \mathscr{F}_V := \{ J \subseteq I \mid J \text{ souverän in } V \}$?

(F1) Es gilt $\emptyset \notin \mathscr{F}$ und $I \in \mathscr{F}$.
(F2) Für alle $J, K \in \mathscr{F}$ gilt $J \cap K \in \mathscr{F}$.
(F3) Aus $J \in \mathscr{F}$ und $J \subseteq K \subseteq I$ folgt $K \in \mathscr{F}$.
(F4) Für $I = J \sqcup K$ gilt entweder $J \in \mathscr{F}$ oder $K \in \mathscr{F}$.

🙂 Die Rechenregeln (F1–4) sind einfach, elegant und fundamental. Wir interpretieren $J \in \mathscr{F}$ als: J enthält „fast alle" Elemente von I, die verbleibenden Elemente $I \setminus J$ sind vernachlässigbar.

Lösung: (F1) Dank Einhelligkeit ist I souverän, $\emptyset$ hingegen nicht.
(F3) Ist J souverän, so auch jede Obermenge K mit $J \subseteq K \subseteq I$.

(F2) Wir untersuchen folgende Abstimmung (à la Condorcet):

$$\begin{array}{rccccc} J \cap K: & a & \succ & x & \succ & b \\ J \setminus K: & b & \succ & a & \succ & x \\ K \setminus J: & x & \succ & b & \succ & a \end{array}$$

Es folgt $a \succ x$, denn J ist souverän. Es folgt $x \succ b$, denn K ist souverän. Transitivität erzwingt daher $a \succ b$. Doch nur $J \cap K$ wertet $a \succ b$. Also ist $J \cap K$ entscheidend für das Paar (a, b), somit für alle (N3D).

(F4) Sei $I = J \sqcup K$. Angenommen, K ist nicht entscheidend für (b, x):

$$\begin{array}{rccccc} J: & a & \succ & x & \succ & b \\ K: & b & \succ & a & \succ & x \end{array}$$

Es folgt $x \succcurlyeq b$. Zudem gilt $a \succ x$, denn I ist souverän. Transitivität erzwingt $a \succ b$. Also ist J entscheidend für (a, b), somit für alle (N3D).

Definition N4A: Filter und Ultrafilter

Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge. Ein Mengensystem $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ mit Eigenschaften (F1–3) heißt **Filter** auf I. Gilt (F1–4), so heißt $\mathscr{F}$ ein **Ultrafilter** auf I.

Satz N4B: Jeder Ultrafilter definiert ein Wahlverfahren.

Jeder Ultrafilter $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ auf der Menge I definiert ein Wahlverfahren $V_{\mathscr{F}} : \mathbb{P}^I \to \mathbb{P} : (P_i)_{i\in I} \mapsto P$ durch die Einigkeit „fast aller“ Individuen:

$$(P_i)_{i\in I} \mapsto P := \left\{ (x,y) \in A \times A \;\middle|\; \{ i \in I \mid (x,y) \in P_i \} \in \mathscr{F} \right\}$$

Dieses Wahlverfahren erfüllt Einhelligkeit und Monotonie.

Beispiel N4C: der unsichtbare Diktator

Sei $A \neq \emptyset$ beliebig. Die Menge I der Individuen sei unendlich.
Wir betrachten den **koendlichen Filter** $\mathscr{E} = \{ J \subseteq I \mid I \smallsetminus J \text{ endlich} \}$.
Dieser liegt in einem maximalen Filter / Ultrafilter $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$.
Das Verfahren $V_{\mathscr{F}}$ ist einhellig und monoton und nicht diktatorisch.

Aufgabe: Prüfen sie Konstruktion und Eigenschaften sorgfältig nach!

Lösung: Die Relation P ist transitiv: $x \succcurlyeq y$ und $y \succcurlyeq z$ bedeutet nach Definition $J = \{ i \in I \mid x \succcurlyeq_i y \} \in \mathscr{F}$ und $K = \{ i \in I \mid y \succcurlyeq_i z \} \in \mathscr{F}$.
Es folgt $J \cap K \subseteq \{ i \in I \mid x \succcurlyeq_i z \}$, dank (F2) und (F3) also $x \succcurlyeq z$.

Die Relation P ist linear: Wir zerlegen $I = J \sqcup K \sqcup L$ gemäß $J = \{ i \mid x \succ_i y \}$ und $K = \{ i \mid x \approx_i y \}$ und $L = \{ i \mid y \succ_i x \}$.
Dank (F4) gilt entweder $J \in \mathscr{F}$ oder $K \in \mathscr{F}$ oder $L \in \mathscr{F}$,
also die Trichotomie entweder $x \succ y$ oder $x \approx y$ oder $y \succ x$.

Dank (F1) gilt $I \in \mathscr{F}$, also Einhelligkeit. Dank (F3) gilt Monotonie.

Beispiel: Der koendliche Filter $\mathscr{E}$ besteht aus allen Mengen $J \subseteq I$, die „fast alle“ Individuen enthalten, also alle bis auf endlich viele. Aus $J \in \mathscr{E}$ können wir endliche viele Elemente entfernen und behalten immer noch $K = J \smallsetminus \{i_1, \dots, i_n\} \in \mathscr{F}$. Diese Eigenschaft bleibt auch für $\mathscr{F}$ erhalten: Das zugehörige Wahlverfahren V ist nicht diktatorisch. Der Ultrafilter $\mathscr{F}$ möchte gegen ein Element $k \in I$ konvergieren, dies wäre der Diktator, liegt aber nicht in I. Stattdessen entscheiden seine Umgebungen $J \in \mathscr{F}$.

Filter und Ultrafilter

Das Semester neigt sich dem Ende, wir räumen unser Scherzlager, alle Witze müssen raus, egal ob gut oder schlecht: Alles muss gehen!

Wie nennen Mathematiker:innen die Kontrolle vor dem Stadion? Ultrafilter!

Filter und Ultrafilter

Satz N4D: Charakterisierung von Ultrafiltern

Sei I eine Menge und $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(I)$. Dann sind äquivalent:

1. $\mathscr{F}$ ist ein Ultrafilter auf I, erfüllt also (F1–4).
2. $\mathscr{F}$ ist ein Filter auf I und maximal. Ausführlich bedeutet das: Für jeden Filter $\mathscr{F}'$ mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}' \subset \mathfrak{P}(I)$ gilt $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.
3. Es gibt einen surjektiven Halbring-Homomorphismus $h : (\mathfrak{P}(I), \cap, \cup) \to (\{0, 1\}, \wedge, \vee)$ mit $\mathscr{F} = \{ A \subseteq X \mid h(A) = 1 \}$.
4. Für $I = J \sqcup K \sqcup L$ gilt entweder $J \in \mathscr{F}$ oder $K \in \mathscr{F}$ oder $L \in \mathscr{F}$.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Äquivalenzen.

Ein Filter $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ auf I ist nichts weiter als ein echtes Ideal in der Mengenalgebra $(\mathfrak{P}(I), \cap, \cup)$, hier als Halbring betrachtet. Ultrafilter sind demnach maximale Ideale. Wenn Sie Ideale aus der Algebra kennen und lieben, dann werden Ihnen auch Filter gefallen. Auch in der Mathematik gilt: Man muss auch Ideale haben.

Filter und Ultrafilter

Ein **Hauptfilter** ist von der Form $\mathscr{F} = \langle K \rangle := \{ J \subseteq I \mid K \subseteq J \}$ für eine nicht-leere Teilmenge $K \subseteq I$. Dies ist ein Ultrafilter gdw $K = \{k\}$.

Ein **fixierter Ultrafilter** ist von der Form $\mathscr{F} = \langle k \rangle := \{ J \subseteq I \mid k \in J \}$ für ein festes Element $k \in I$. Jeder weitere Ultrafilter heißt **frei**.

Aufgabe: (1) Auf jeder endlichen Menge I gilt:
(1a) Jeder Filter ist Hauptfilter. (1b) Jeder Ultrafilter ist fixiert.
(1c) Folgern Sie daraus erneut Arrows Satz vom Diktator N3B

(2) Auf jeder unendlichen Menge I existieren freie Ultrafilter.
(3) Allgemeiner: Jeder Filter $\mathscr{F}$ liegt in einem Ultrafilter $\mathscr{F}'$.

Lösung: (1a) Ist I endlich, so auch $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(I)$. Betrachte $K := \bigcap \mathscr{F}$.
Dank (F2) gilt $K \in \mathscr{F}$. Dies ist also das kleinste Element von $\mathscr{F}$.
Dank (F1) gilt $K \neq \emptyset$. Dank (F3) folgt $\mathscr{F} = \{ J \subseteq I \mid K \subseteq J \}$.

(1b) Wir wissen $\mathscr{F} = \langle K \rangle$ dank (1a). Gilt zudem (F4), so folgt $K = \{k\}$.

(1c) Die Familie $\mathscr{F}$ aller entscheidenden Mengen ist ein Ultrafilter.
Ist zudem I endlich, so gilt $\mathscr{F} = \langle k \rangle$, und somit ist k der Diktator.

Filter und Ultrafilter

(2) Wir betrachten $\mathscr{F} = \{ J \subseteq I \mid I \smallsetminus J \text{ endlich} \}$. Dies ist ein Filter.
Dank (3) existiert hierzu ein Ultrafilter $\mathscr{F}'$ mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}' \subset \mathfrak{P}(I)$.
Dieser ist nicht fixiert: Wäre $\mathscr{F} = \langle k \rangle$, dann wäre $K = \{k\} \in \mathscr{F}$ und $J = I \smallsetminus K \in \mathscr{F}$, also $\emptyset = K \cap J \in \mathscr{F}$, im Widerspruch zu (F1).

(3) Wir nutzen die Charakterisierung N4D als maximaler Filter.
Jede Kette von Filtern hat eine obere Schranke: ihre Vereinigung.
Nach dem Lemma von Zorn existieren maximale Elemente.

Anwendung: Die Nicht-Standard-Analysis nutzt infinitesimale Zahlen. Hierzu führte Abraham Robinson um 1960 die **hyperreellen Zahlen** ein (`en.wikipedia.org/wiki/Hyperreal_number`): Der Körper ${}^*\mathbb{R}$ entsteht aus dem Ring $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch Abstimmung dank unsichtbarem Diktator N4B:

Sei $\mathscr{F}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ erklären wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \le y_n \} \in \mathscr{F}$. Damit ist $\approx$ eine Äquivalenzrelation und verträglich mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation. Der Quotientenring ${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\approx}$ ist ein geordneter Körper. Er enthält $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ und zudem unendliche große und infinitesimal kleine Elemente.