

## Kapitel M

## Koalitionen, Kern und Shapley–Wert

*It is better to be alone than to be in bad company.*

George Washington (1732–1799) über Etiquette

*Es ist besser, nicht zu regieren, als falsch zu regieren.*

Christian Lindner (1979–) über die Jamaika-Koalition 2017

*Two is company, three is a crowd.*

frei nach Andy Warhol (1928–1987)

## Inhalt dieses Kapitels M

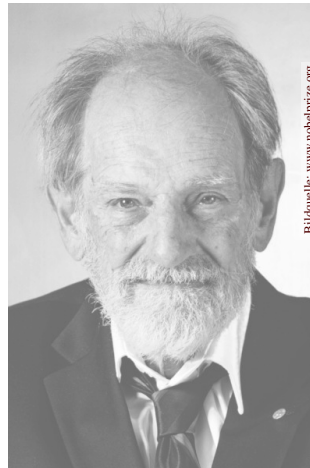
- 1 Koalitionsspiele und ihr Kern
  - Charakteristische Funktionen: Modularität und Synergie
  - Koalitionsspiele: mathematische Grundbegriffe
  - Allokationen und Kern eines Koalitionsspiels
- 2 Shapley–Wert als axiomatische Lösung
  - Was erwarten wir von einer gerechten Teilung?
  - Satz von Shapley: Existenz und Eindeutigkeit
  - Analogie zu Determinante und Integral
- 3 Shapley–Wert als Verhandlungsgleichgewicht
  - Koalitionsverhandlung nach Hart–Mas-Colell
  - Koalitionsverhandlung: Formalisierung und Beweis
  - Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?
- 4 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben

## Lloyd Shapley (1923–2016)

Lloyd Shapley (1923–2016) war ein US-amerikanischer Mathematiker und Ökonom. Er betrachtete Spieltheorie als „mathematische Analyse von Konflikt und Kooperation.“ Von 1948 bis 1981 arbeitete er für die RAND Corporation, danach war er Professor an der University of California in Los Angeles.

Seine Dissertation (Princeton 1953) führte Shapley–Wert und Kern ein, zeitgleich untersuchte er stochastische Spiele als Erweiterung von Markov–Entscheidungsprozessen. Viele weitere wichtige Beiträge folgten.

Zusammen mit Alvin E. Roth erhielt er 2012 den Wirtschaftsnobelpreis „for the theory of stable allocations and the practice of market design“. Robert Aumann in seiner Nobelpreisansprache im Dezember 2005 bewunderte Lloyd Shapley als „the greatest game theorist of all time“.



Bildquelle: www.nobelprize.org

## Motivation und Überblick

In der **kooperativen Spieltheorie** untersuchen wir mögliche Koalitionen und Aufteilungen des gemeinsam erzielten Gewinns. Gesucht ist dazu der **strategische Wert** jedes Spielers, also eine präzise quantitative und möglichst transparente Bewertung seiner strategischen Position. Hierzu wurden viele Lösungskonzepte vorgeschlagen und diskutiert. Der Shapley–Wert bietet uns eine universell anwendbare Methode. In vielen Anwendungen ist er der Richtwert und überraschend vielseitig:

- Gewinne oder Kosten teilen in einer ökonomischen Situation
- Machtindex jedes Akteurs in einer kollektiven Entscheidung
- Einfluss eines Merkmals in Data Science und Machine Learning

📖 Lloyd S. Shapley: *A value for  $n$ -person games*. Contributions to the Theory of Games 2 (1953), Annals of Mathematical Studies 28.

Alvin E. Roth (ed): *The Shapley value*. Cambridge Univ. Press 1988.

Die damals begründete axiomatische Vorgehensweise (zu Koalitionen, Verhandlungen, Wahlen, etc.) prägte einen revolutionär eleganten Stil und eröffnete neue Themen, Denkweisen und Forschungsmethoden.

## Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

M005  
Beispiel

Fünf Personen verhandeln über Zusammenarbeit und Gewinnaufteilung: ein Kapitalist 1, der das dringend benötigte Kapital zur Verfügung stellt, dazu zwei gelernte Arbeiter 2, 3 und zwei ungelernete Arbeiter 4, 5.

Für jede Teilmenge  $S \subseteq I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ist der gemeinsame Gewinn

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \notin S, \\ 400 \cdot \frac{\# \text{ Gelernte}}{|S \cap \{2, 3\}|} + 200 \cdot \frac{\# \text{ Ungelernte}}{|S \cap \{4, 5\}|} & \text{falls } 1 \in S. \end{cases}$$

**Aufgabe:** Wie können / sollen / werden die fünf den Gewinn aufteilen? Gibt es hierzu eine „faire“ und „gerechte“ Lösung, etwa als Schlichtung? Würden Sie z.B. die Aufteilung (600, 200, 200, 100, 100) vertreten?

Wir haben solche Verhandlungen im Casino experimentell durchgespielt: Sei  $S \subseteq I$  die Menge der aktiven Spieler, anfangs  $S = I$ . Zu Beginn jeder Runde wird einer der Spieler  $i \in S$  ausgelost. Er schlägt eine Aufteilung zur Abstimmung vor. Bei einstimmiger Annahme wird dies ausgeführt. Andernfalls geht das Spiel in eine neue Runde. Mit Wkt  $1 - \delta$  scheidet Spieler  $i$  aus, mit Wkt  $\delta$  nimmt er weiterhin an den Verhandlungen teil. Die Verhandlungen gestalten sich oft schwierig... oder scheitern gar!

## Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

M006  
Beispiel

Wir leben in einer arbeitsteiligen und hochdifferenzierten Gesellschaft. Wer leistet welchen Beitrag? mit welchem Wert? welcher Entlohnung?

In einem großen Konzern spottet die **Produktion** über das Marketing: „Nur wir produzieren, also beruht der Firmenerfolg auf unserem Beitrag.“

Das **Marketing** antwortet: „Ihr könnt gern produzieren soviel Ihr wollt. Solange wir keine Kunden gewinnen, nutzt euch das rein gar nichts.“

Die **Forschung und Entwicklung** wendet ein: „Ohne F&E hätten wir gar keine konkurrenzfähigen Produkte, um am Markt zu bestehen.“

Das **Management** behauptet selbstbewusst: „Wir treffen alle wichtigen Richtungsentscheidungen. Ohne uns läuft alles aus dem Ruder.“

Die **Eigentümer / Aktionäre** pochen auf ihre zentrale Rolle: „Ohne unser Kapital geht gar nichts.“

Wer hat Recht? Firmen funktionieren arbeitsteilig, das ist ihr Zweck. Wie bewerten wir gerecht, wer welchen Anteil am Gesamtertrag hat? Das ist nicht nur eine abstrakt philosophische Betrachtung, sondern ein konkret praktisches Problem, spätestens bei Fragen der Verteilung!

## Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

M007  
Erläuterung

Sei  $I$  eine endliche Spielermenge. Neben dem Verhalten einzelner Spieler  $i \in I$  betrachten wir nun Teilmengen  $S \subseteq I$ , also **Koalitionen**. Zu jeder Koalition  $S \subseteq I$  gibt ihr **charakteristischer Wert**  $v(S) \in \mathbb{R}$  an, welchen Nutzen die Koalition  $S$  für sich allein sichern kann, kurz:

$$v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto v(S)$$

Bei **nicht-kooperativen Spielen** untersuchen wir einzelne Spieler und ihre individuellen Aktionen; jeder maximiert seinen individuellen Nutzen. Nun untersuchen wir **kooperative Spiele**, genauer Koalitionsspiele  $v$ . Im Vordergrund stehen die Koalitionen, daraus erst folgen Aktionen.

- Welche Koalitionen können sich bilden? Welche sind in/stabil?
- Wie kann / soll / wird eine Koalition ihre Auszahlung aufteilen?

Anschließend untersuchen wir detailliertere und tiefergehende Fragen:

- Nach welchem Verfahren / Protokoll kommunizieren die Spieler?
- Wie verhandeln und entscheiden sie über mögliche Koalitionen?
- Wie sprechen sich Spieler innerhalb ihrer gewählten Koalition ab?

## Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

M008  
Erläuterung

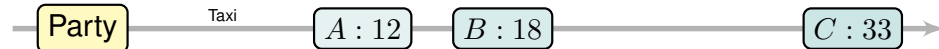
Die allgemeine Fragestellung führt zu einem **Verhandlungsproblem**. Eine einfache Zwei-Spieler-Version haben wir im letzten Kapitel gelöst. Vereinfachend setzen wir **transferierbaren Nutzen** voraus, meist Geld. Dann gibt der **Shapley-Wert** eine bewährte, recht einfache Antwort.

Koalitionsspiele  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  begegnen uns überall in der Ökonomie, wo Spieler versuchen, durch Bündnisse ihren Nutzen zu maximieren. Die Auszahlung  $v(S)$  können die Koalitionäre  $i \in S$  unter sich aufteilen. Die kooperative Spieltheorie untersucht die Bildung solcher Koalitionen. Ihre Formalisierung geht zurück auf von Neumann und Morgenstern (1944) mit ersten Anwendungen auf **Modelle der Marktwirtschaft**.

Oft wird der Nutzen maximal, wenn alle Spieler zusammenarbeiten. Welche Aufteilungen sind in/stabil? Im nicht-kooperativen Falle nutzen wir **Nash-Gleichgewichte**: Kein Spieler hat einen Anreiz von seiner Strategie abzuweichen. Im kooperativen Falle betrachten wir analog hierzu Allokationen und den **Kern [core]**: Kein Spieler  $i \in I$  und auch kein Bündnis  $S \subseteq I$  hat Anreiz, die große Koalition  $I$  zu verlassen.

## Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

M009  
Beispiel



Charakteristische Funktion  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} :$

$$\begin{cases} \emptyset & \mapsto 0, & \{A, B\} & \mapsto 18, \\ \{A\} & \mapsto 12, & \{A, C\} & \mapsto 33, \\ \{B\} & \mapsto 18, & \{B, C\} & \mapsto 33, \\ \{C\} & \mapsto 33, & \{A, B, C\} & \mapsto 33. \end{cases}$$

Marginale Mehrkosten  $\Delta_i^\rho(v)$  für Spieler  $i$  bei Reihenfolge  $\rho$ :

Reihenfolge $\rho$	Spieler $i =$	A	B	C
(A, B, C)	$\Delta_i^\rho(v) =$	12	6	15
(A, C, B)		12	0	21
(B, A, C)		0	18	15
(B, C, A)		0	18	15
(C, A, B)		0	0	33
(C, B, A)		0	0	33
Mittelwert	$\sigma_i(v) =$	4	7	22

## Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

M010  
Beispiel

Alice, Bob und Chuck fahren mit dem Taxi von einer Party nach Hause. Ihre Ziele liegen alle entlang einer Strecke, aber unterschiedlich weit: Alleine zahlt Alice 12€, Bob 18€ und Chuck 33€. Wenn sie sich ein Taxi teilen, dann zählt nur die weiteste Strecke. Wer sollte wie viel zahlen?

Das ist ein vollkommen realistisches Problem, sowohl konkret für das Taxiteilen, als auch übertragen auf viele ähnlich strukturierte Situationen. Eine gerechte Lösung ist wünschenswert, aber nicht sofort offensichtlich!

Naiv könnte Chuck alles zahlen, doch das ist offensichtlich ungerecht. Sie könnten teilen und jeder 11€ zahlen, auch das scheint ungerecht. Ebenso könnte jeder in der Reihenfolge (A, B, C) seinen marginalen Mehrpreis zahlen, also A : 12, B : 6, C : 15. Auch das ist ungerecht.

Der Shapley-Wert [engl. *Shapley value*] betrachtet den Mittelwert: Sei  $\rho : I \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$  eine Abzählung / Reihenfolge aller Spieler. Damit bauen wir schrittweise Koalitionen  $\rho^{-1}(\{1, 2, \dots, m\}) \subseteq I$  auf. Zur Koalition  $S_i^\rho = \{j \in I \mid \rho(j) \leq \rho(i)\}$  kam zuletzt der Spieler  $i$ . Er trägt den marginalen Mehrwert  $\Delta_i^\rho(v) = v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \setminus \{i\})$  bei.

## Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

M011  
Erläuterung

Der Shapley-Wert  $\bar{v}(i)$  ist der **durchschnittliche marginale Mehrwert**, den der Spieler  $i \in I$  zu allen Koalitionen  $S$  mit  $i \in S \subseteq I$  beiträgt:

$$\bar{v}(i) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho} \Delta_i^\rho(v) = \sum_{S: i \in S \subseteq I} \frac{|S \setminus \{i\}|! \cdot |I \setminus S|!}{|I|!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Das ist die allgemeine Formel, die wir im Folgenden erarbeiten werden: Sie fällt hier zunächst vom Himmel... Wir wollen sie verstehen lernen!

Die Formel ist zunächst nicht besonders intuitiv. Was bedeutet sie? Die Formel ist nicht besonders einfach. Geht das auch einfacher? Es gibt auch andere schöne Formeln... Warum gerade diese? Welche Argumente können diese spezielle Wahl begründen?

Wenn der Shapley-Wert uns bei der Schlichtung helfen soll, dann muss die verwendete Methode alle Beteiligten überzeugen. Es nützt herzlich wenig, eine Formel vom Himmel fallen zu lassen, wenn wir sie nicht mit stichhaltigen Argumenten stützen können!

## Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

M012  
Erläuterung

Wir werden dazu im Folgenden die Ideen und Techniken ausführen. Als Ausblick und Motivation will ich jedoch vor der detaillierten Theorie eine einfache, aber typische Anwendung durchrechnen und analysieren.

Zur Illustration untersuchen wir unsere konkrete Problemstellung. In unserem Beispiel haben wir einen besonders strukturierten Fall und können Shapleys Formel weiter vereinfachen und bestens interpretieren:

**Teilung:** Die erste Teilstrecke für 12€ wird durch drei geteilt. Die zweite Teilstrecke für 6€ wird durch zwei geteilt. Die dritte Teilstrecke für 15€ wird durch eins geteilt. Die Aufteilung ist demnach A : 4, B : 7, C : 22.

**Aufgabe:** (1) Formalisieren Sie ein solches Koalitionsspiel  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $v(S) = \max_{i \in S} u(i)$  durch ein Maximum gegeben ist. Formulieren und beweisen Sie für den Shapley-Wert  $\bar{v}$  die einfache Teilungsregel.

(2) Er/Finden Sie weitere Beispiele: In welchen gilt obige Teilungsregel? In welchen benötigen Sie Shapleys Formel in ihrer vollen Allgemeinheit?

## Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

M013  
Erläuterung

**Lösung:** (1) Aus dem motivierenden Taxi-Beispiel extrahieren wir die folgende Vermutung und beweisen sie anschließend als Satz.

### Satz M0A: Shapley–Wert zu monotoner Kostenfunktion

Gegeben sei die endliche Spielermenge  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  und hierzu eine monoton wachsende Funktion  $u: \{0\} \cup I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u(0) = 0$ .

Damit definieren wir das Koalitionsspiel

$$v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}: S \mapsto v(S) := \begin{cases} 0 & \text{falls } S = \emptyset, \\ u(\max S) & \text{falls } S \neq \emptyset. \end{cases}$$

Für solche Koalitionsspiele  $v$  gilt folgende einfache Beziehung zwischen dem Shapley–Wert  $\bar{v}$  und der monotonen Kostenfunktion  $u$ :

$$\bar{v}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u(i+1) - u(i)}{n-i}$$

## Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

M014  
Erläuterung

**Beweis:** Die monoton wachsende Funktion  $u: \{0\} \cup I \rightarrow \mathbb{R}: 0 \mapsto 0$  definiert das Koalitionsspiel  $v$  und damit den Shapley–Wert  $\bar{v}: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir zerlegen  $u = u_1 + \dots + u_n$  in die Sprungfunktionen  $u_1, \dots, u_n$  mit  $u_k(0) = \dots = u_k(k-1) := 0$  und  $u_k(k) = \dots = u_k(n) := u(k) - u(k-1)$ . Dies definiert die Zerlegungen  $v = v_1 + \dots + v_n$  und  $\bar{v} = \bar{v}_1 + \dots + \bar{v}_n$ . Für jeden dieser Summanden  $v_m$  gilt die ersehnte Gleichung:

$$\bar{v}_m(k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < m \\ \frac{u_m(m)}{n-m+1} & \text{falls } k \geq m \end{cases} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u_m(i+1) - u_m(i)}{n-i}$$

Hierzu müssen wir uns nur den Mittelwert über  $\rho$  genau anschauen: Im Spiel  $v_m$  zahlen nur die Spieler  $m, \dots, n$ , und zwar alle gleich.

Dank Linearität gilt die behauptete Gleichung auch für  $v$ . □

😊 Diesen einfach-genialen Trick nutzen wir im Folgenden immer wieder: Wir nutzen Linearität und weisen die Behauptung auf einer geeigneten Basis nach, für die unsere Rechnungen besonders einfach ausfallen.

## Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

M015  
Beispiel

Diese einfache Problemstellung und der schöne Satz gehen zurück auf S.C. Littlechild, G. Owen: *A simple expression for the Shapley value in a special case*. Management Science 20 (1973) 370–372. Illustrationen:

**Flughafen:** Benachbarte Städte  $1, 2, \dots, n$  planen einen gemeinsamen Flughafen. Ihre individuellen Anforderungen an die Flugzeugtypen sind unterschiedlich, somit auch die Planungen für die Länge der Landebahn. Dies führt zu unterschiedlichen Kosten  $0 \leq u(1) \leq u(2) \leq \dots \leq u(n)$ .

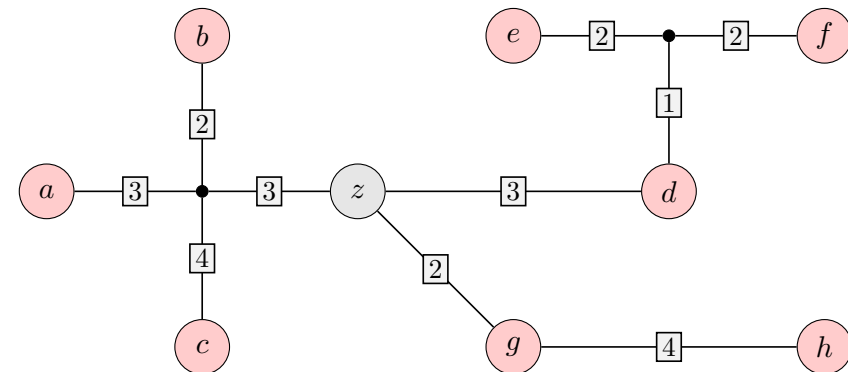
Hier entsteht **Synergie:** Beim Zusammenschluss zum gemeinsamen Vorhaben genügt es jeweils, die höchste Anforderung zu erfüllen.

**Rechenzentrum:** Die Universitäten  $1, 2, \dots, n$  benötigen jeweils ein Rechenzentrum, das eine gewünschte Spitzenleistung erbringen soll. Die Kosten hierfür sind jeweils  $0 \leq u(1) \leq u(2) \leq \dots \leq u(n)$ .

**Versorgung:** Die Leitungen (Internet, Strom, Wasser, Gas, o.ä.) bilden einen Baum. Die Wurzel ist der Versorger  $z$ , Knoten sind Verteiler oder Verbraucher  $a, b, \dots, h$ . Jede Verbindungskante  $\ell$  hat ihre Kosten  $c(\ell)$ .

## Wie teilt man die Kosten von Versorgungsleitungen?

M016  
Beispiel



**Übung:** Der Shapley–Wert führt auch hier zu einer gerechten Teilung: Die Kosten jeder Kante werden gleich aufgeteilt unter den Verbrauchern, die diese als Zuleitung nutzen. (Noch spannender ist die Frage, in einem gegebenen Graphen einen Spannbaum von Zuleitungen auszuhandeln. Wir erleben dies beim Ausbau des deutschen Höchstspannungsnetzes.)

Vorgelegt sei ein Paar  $(I, v)$  bestehend aus einer endlichen Menge  $I$  und einer Abbildung  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ . Äquivalent sind folgende Eigenschaften:

- 1 linear:  $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$  für jede Teilmenge  $S \subseteq I$
- 2 kumulativ:  $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$  für alle  $S \subset I$  und  $i \in I \setminus S$
- 3 additiv:  $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$  für alle  $S, T \subseteq I$  mit  $S \cap T = \emptyset$
- 4 modular:  $v(S \cup T) = v(S) + v(T) - v(S \cap T)$  und  $v(\emptyset) = 0$

In diesem Falle ist  $v$  ein **signiertes Maß** auf  $I$  (eine Ladungsverteilung). Gilt  $v \geq 0$ , so ist  $v$  ein **nicht-negatives Maß** auf  $I$  (kurz Maß genannt). Das impliziert insbesondere **Monotonie**: Aus  $S \subseteq T$  folgt  $v(S) \leq v(T)$ . Gilt zudem  $v(I) = 1$ , so ist  $v$  ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** (WMaß).

Gegeben sei  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(\emptyset) = 0$ . Wir nennen  $v$  **sub/super-linear/kumulativ/additiv/modular**, wenn statt „=“ nur „ $\leq$ “ bzw. „ $\geq$ “ gilt. Wir sagen strikt/echt, wenn immer/mindestens einmal „ $<$ “ bzw. „ $>$ “ gilt.

Für je zwei Mengen  $S, T \subseteq I$  definieren wir ihre **Synergie** durch

$$\text{Synergie}(S, T) := v(S \cup T) - v(S) - v(T) + v(S \cap T).$$

Modularität ist die erste Stufe der **Siebformel**, siehe Seite M401. Aus paarweiser Additivität folgt **endliche Additivität** per Induktion. Aus der Maßtheorie kennen Sie die überaus wichtige  **$\sigma$ -Additivität**: Wir betrachten dann Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, v)$  bestehend aus einer Menge  $\Omega$ , einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $\Omega$  und einem  $\sigma$ -additiven Maß  $v: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ .

- Beispiele:** (1) Das **Zählmaß**  $v(S) = \#S \in \mathbb{N}$  ist additiv, somit modular.  
 (2) Die **Dimension**  $\dim_K(X) \in \mathbb{N}$  von  $K$ -Vektorräumen  $X$  ist modular, ebenso die **Euler-Charakteristik**  $\chi(X) \in \mathbb{Z}$  zellulärer Räume  $X$ .  
 (3) Das **Lebesgue-Maß**  $\lambda$  auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$  ist  $\sigma$ -additiv, somit modular. Dies vollendet den Begriff des Volumens von Teilmengen  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .  
 (4) Signierte Maße treten in der Physik auf, z.B. als **Ladungsverteilung** in der Elektrostatik;  $\sigma$ -Additivität erfordert dazu absolute Konvergenz.

Ladung ist eine **Erhaltungsgröße**, daher ist  $\sigma$ -Additivität plausibel. Das physikalische Volumen hingegen ist nicht additiv: **Volumenkontraktion** kann beim Mischen von Flüssigkeiten auftreten: Die Mischung von 48ml Wasser und 52ml Ethanol hat als Gesamtvolumen nur 96ml statt 100ml. Ähnlicher **Schwund** entsteht bei Salz im Meerwasser. Anschaulich bei Erbsen und Senfkörnern. In manchen Situationen ist die Additivität / Modularität demnach verletzt: Es besteht **Synergie**.

Superadditivität  $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$  bedeutet sprichwörtlich: **Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.** (Aristoteles)

Supermodularität ist eine echte Verschärfung: Beispiele siehe unten. Sie heißt auch Konvexität nach ihrer geometrischen Entsprechung.

Die **Synergie** misst Zugewinn / Verlust im Vergleich zur Modularität:

- $v$  ist strikt supermodular  $\iff$  Synergie  $> 0$
- $v$  ist echt supermodular  $\iff$  Synergie  $\gtrsim 0$
- $v$  ist supermodular  $\iff$  Synergie  $\geq 0$
- $v$  ist modular  $\iff$  Synergie  $= 0$
- $v$  ist submodular  $\iff$  Synergie  $\leq 0$
- $v$  ist echt submodular  $\iff$  Synergie  $\lesssim 0$
- $v$  ist strikt submodular  $\iff$  Synergie  $< 0$

Für  $S \subseteq T$  oder  $T \subseteq S$  gilt per Definition immer  $\text{Synergie}(S, T) = 0$ . Die strikte Ungleichung fordern wir daher nur für  $S \not\subseteq T$  und  $T \not\subseteq S$ .

In der **Wirtschaft** entsteht Synergie durch Skalierung (Kostensparnis) oder Zusammenarbeit (Kooperation, Joint Venture, Fusion, Übernahme). Alle Akteure wollen weiterhin ihren individuellen Nutzen maximieren; sie profitieren von der Kooperation, eventuell manche mehr als andere.

**⚠** Vorsicht: Synergie kann sowohl positiv als auch negativ ausfallen!

**Beispiel:** Daimler und Chrysler fusionierten 1998 zu DaimlerChrysler. Die Macher bewarben dies als „Hochzeit im Himmel“, doch schon bald wurde der Ehealltag zur Hölle; 2007 wurde die Chrysler Group verkauft. Insgesamt wurde ein Wert von geschätzt über 70 Milliarden vernichtet.

*Die erwarteten Synergien stellten sich nicht ein: Die Daimler-Ingenieure trauten den Chrysler-Kollegen nicht zu, gute Autos zu bauen. Die Amerikaner belächelten die Behändigkeit der Teutonen, bemängelten, dass die Deutschen weniger profitabel waren als sie. Sollten Mercedes-Teile in die Chrysler-Modelle eingebaut werden? Das hätte die Autos der Amerikaner verteuert.*

*Chrysler-Teile in Mercedes-Karossern? Damit litte die Qualität.*

(Süddeutsche Zeitung, 7. Mai 2013)



**Aufgabe:** (0) Bei Gleichung „=“ sind alle vier Bedingungen äquivalent:

$$\text{modular} \iff \text{additiv} \iff \text{kumulativ} \iff \text{linear}$$

(1) Bei Ungleichung „ $\geq$ “ gelten nur die folgenden Implikationen:

$$\text{supermodular} \implies \text{superadditiv} \implies \text{superkumulativ} \implies \text{superlinear}$$

Dasselbe gilt bei Ungleichung „ $\leq$ “ für submodular  $\implies \dots \implies$  sublinear.

**Lösung:** (0) Zunächst gilt „modular  $\implies$  additiv  $\implies$  kumulativ  $\implies$  linear“:  
Die ersten beiden Implikationen sind trivial: formale Spezialisierung.  
Die letzte Implikation folgt per Induktion über die Elementzahl  $|S|$ .  
Schließlich gilt „linear  $\implies$  modular“ durch korrekte Summation:

$$\begin{aligned} v(S \cup T) &= \sum_{i \in S \cup T} v(\{i\}) \\ &= \sum_{i \in S} v(\{i\}) + \sum_{i \in T} v(\{i\}) - \sum_{i \in S \cap T} v(\{i\}) \\ &= v(S) + v(T) - v(S \cap T) \end{aligned}$$

(1) Im Folgenden sei  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Abbildung mit  $v(\emptyset) = 0$ .  
Es gilt supermodular  $\implies$  superadditiv  $\implies$  superkumulativ  $\implies$  superlinear:  
Die ersten beiden Implikationen sind trivial: formale Spezialisierung.  
Die letzte Implikation folgt per Induktion über die Elementzahl  $|S|$ .

Ausführlich: Wir setzen  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : \emptyset \mapsto 0$  als superkumulativ voraus.  
Für alle  $S \subseteq I$  zeigen wir damit die Superlinearität  $v(S) \geq \sum_{i \in S} v(\{i\})$ .  
Superlinearität gilt trivialerweise für  $S = \emptyset$ , da wir  $v(\emptyset) = 0$  voraussetzen.  
Angenommen die Superlinearität gilt für  $S$ . Für alle  $k \in I \setminus S$  folgt dann:

$$v(S \cup \{k\}) \geq v(S) + v(\{k\}) \geq \sum_{i \in S} v(\{i\}) + v(\{k\}) = \sum_{i \in S \cup \{k\}} v(\{i\})$$

(1a) Superkumulativ impliziert superlinear, aber nicht umgekehrt!

Als ein minimales Gegenbeispiel betrachten wir  $I = \{1, 2, 3\}$   
und  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(S) = 0$  für  $|S| \neq 2$  und  $v(S) = 1$  für  $|S| = 2$ .  
Diese Abbildung ist superlinear (warum?), aber nicht superkumulativ:

$$S = \{1, 2\}, i = 3 : v(S \cup \{i\}) = 0, v(S) + v(\{i\}) = 1 + 0 = 1$$

(1b) Superadditiv impliziert superkumulativ, aber nicht umgekehrt!

Als ein minimales Gegenbeispiel betrachten wir  $I = \{1, 2, 3, 4\}$   
und  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(S) = 0$  für  $|S| \leq 1$  und  $v(S) = 1$  für  $|S| \geq 2$ .  
Diese Abbildung ist superkumulativ (warum?), aber nicht superadditiv:

$$S = \{1, 2\}, T = \{3, 4\} : v(S \cup T) = 1, v(S) + v(T) = 1 + 1 = 2$$

(1c) Supermodular impliziert superadditiv, aber nicht umgekehrt!

Als ein minimales Gegenbeispiel betrachten wir  $I = \{1, 2, 3\}$   
und  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(S) = 0$  für  $|S| \leq 1$  und  $v(S) = 1$  für  $|S| \geq 2$ .  
Diese Abbildung ist superadditiv (warum?), aber nicht supermodular:

$$\begin{aligned} S = \{1, 2\}, T = \{2, 3\} : v(S \cup T) &= 1 \\ v(S) + v(T) - v(S \cap T) &= 1 + 1 - 0 = 2 \end{aligned}$$

☺ Damit sind alle gültigen Implikationen bewiesen und alle ungültigen Umkehrungen durch Gegenbeispiele widerlegt. Diese Überlegungen erklären, warum wir die vier Begriffe sorgsam trennen müssen.

**Definition M1A: Koalitionsspiele**

Ein **Koalitionsspiel** ist eine Abbildung  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(\emptyset) = 0$ .  
 Diese bilden den  $\mathbb{R}$ –Vektorraum  $C(I) := \{v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : \emptyset \mapsto 0\}$ .  
 Darin liegt der Untervektorraum  $C_0(I) := \{v \in C(I) \mid v \text{ ist additiv}\}$   
 und der Kegel  $C_+(I) := \{v \in C(I) \mid v \text{ ist supermodular / konvex}\}$ .

**Satz M1B: Shapley–Basis des Vektorraums  $C(I)$**

Jede Teilmenge  $\emptyset \neq K \subseteq I$  definiert das zugehörige Koalitionsspiel

$$e_K^{\subseteq} : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto e_K^{\subseteq}(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } K \subseteq S, \\ 0 & \text{falls } K \not\subseteq S. \end{cases}$$

- (1) Für jedes  $k \in I$  ist die Funktion  $e_{\{k\}}^{\subseteq}$  additiv (Dirac–Maß auf  $I$ ). Die Familie  $(e_{\{k\}}^{\subseteq})_{k \in I}$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}$ –Untervektorraums  $C_0(I)$ .
- (2) Für  $|K| \geq 2$  ist  $e_K^{\subseteq}$  nicht additiv, aber supermodular / konvex. Die Familie  $(e_K^{\subseteq})_{\emptyset \neq K \subseteq I}$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}$ –Vektorraums  $C(I)$ .

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

☺ Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen **Möbius–Inversion**.

- (1) Wie stellen Sie eine Funktion  $v \in C(I)$  in der Shapley–Basis dar als  $v = \sum_K \lambda_K e_K^{\subseteq}$ ? Wie berechnen Sie aus  $v$  die Koeffizienten  $\lambda_K$ ?
- (2) Vergleichen Sie die Shapley–Basis mit der **kanonischen Basis**

$$e_K^{\bar{\subseteq}} : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto e_K^{\bar{\subseteq}}(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } K = S, \\ 0 & \text{falls } K \neq S. \end{cases}$$

Schreiben Sie in den kleinsten Beispielen  $I = \{1, 2\}$  und  $I = \{1, 2, 3\}$  die beiden Basiswechsellmatrizen explizit aus. (Tipp: Sortieren Sie die Elemente  $K \in \mathfrak{P}(I)$  zunächst nach Länge und dann lexikographisch.)

**Bemerkung:** Das Koalitionsspiel  $e_K^{\subseteq}$  heißt auch Einhelligkeitsspiel / *unanimity game*. Die Basiseigenschaft geht zurück auf Shapley (1953). Der Koeffizient  $\lambda_K$  heißt auch Harsanyi–Dividende (Harsanyi 1959).

**Anschaulich:** Der Wert  $\lambda_K$  misst den Beitrag der Koalition  $K$ , der nicht bereits von Teilkoalitionen  $S \subsetneq K$  beigesteuert wird.

Zwei Koalitionsspiele  $u, v \in C(I)$  heißen **additiv äquivalent**, kurz  $u \approx v$ , falls  $u - v \in C_0(I)$  gilt. Allgemeiner heißen sie **positiv äquivalent**, kurz  $u \sim v$ , falls  $u = \lambda v + w$  gilt mit positivem Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $w \in C_0(I)$ .

**Satz M1C: Null-Eins-Normierung**

**Null-Normierung:** Jedes Koalitionsspiel  $v \in C(I)$  ist additiv äquivalent zu genau einem null-normierten  $u \in C(I)$  mit  $u(\{i\}) = 0$  für alle  $i \in I$ .

Explizit ist  $u = v - w$  mit  $w \in C_0(I)$  gegeben durch  $w(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ . Ist  $v$  superadditiv, so auch  $u$ , und zudem ist  $u$  dann sogar monoton.

**Null-Eins-Normierung:** Ist  $v$  echt superlinear, so erreichen wir  $u(I) = 1$  durch positive Äquivalenz  $u = \lambda^{-1}(v - w)$  mit  $\lambda = v(I) - w(I) > 0$ .

Zum Vergleich mit WMaßen stellen wir einige Eigenschaften gegenüber:

Charakteristische Funktion $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$	Wahrscheinlichkeitsmaß $p : \mathfrak{P}(I) \rightarrow [0, 1]$
$v(\emptyset) = 0, v(I) = 1$	$p(\emptyset) = 0, p(I) = 1$
$v(\{i\}) = 0$ für alle $i \in I$	—
superadditiv $v(S \sqcup T) \geq v(S) + v(T)$	additiv $p(S \sqcup T) = p(S) + p(T)$
konstante Summe $v(I \setminus S) = 1 - v(S)$	Komplemente $v(I \setminus S) = 1 - v(S)$

Jedes Koalitionsspiel  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : \emptyset \mapsto 0$  schreibt sich eindeutig  $v = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq I} \lambda_K e_K^{\subseteq}$  mit  $\lambda_K \in \mathbb{R}$ , zerfällt also in die Summe von

$$v_0 = \sum_{|K|=1} \lambda_K e_K^{\subseteq}, \quad v_- = \sum_{\substack{|K| \geq 2 \\ \lambda_K < 0}} \lambda_K e_K^{\subseteq}, \quad v_+ = \sum_{\substack{|K| \geq 2 \\ \lambda_K > 0}} \lambda_K e_K^{\subseteq}.$$

Hierbei ist  $v_0$  additiv,  $v_-$  konkav und  $v_+$  konvex, beide  $v_{\pm}$  null-normiert.

**Aufgabe:** Vorgelegt sei  $v = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq I} \lambda_K e_K^{\subseteq}$  mit  $\lambda_K \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_K \in \mathbb{R}$ . Genau dann ist  $v$  konvex, wenn  $\lambda_K \geq 0$  für alle  $K \subseteq I$  mit  $|K| \geq 2$  gilt.

**Lösung:** Die Implikation „ $\Leftarrow$ “ ist klar, denn die Funktion  $e_K^{\subseteq}$  ist konvex und Positivkombinationen erhalten die geforderten Ungleichungen.

Wir zeigen „ $\Rightarrow$ “: Sei  $K \subseteq I$  und  $i \neq j$  in  $K$ . Wir setzen  $S = K \setminus \{i\}$  und  $T = K \setminus \{j\}$  sowie  $U = S \cap T = K \setminus \{i, j\}$ . Auswertung von  $v$  ergibt:

$$v(S \cup T) - v(S) - v(T) + v(S \cap T) = \lambda_K$$

Für die marginalen Zuwächse bedeutet das  $\partial_i \partial_j v(K) = \lambda_K$ . Ist also  $v$  supermodular / konvex, so folgt  $\lambda_K \geq 0$ .

Eine Quelle von Koalitionsspielen  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  sind strategische Spiele und ihre Zwei-Koalitionen-Konfrontationen (siehe hierzu Seite M405). Dementsprechend sagen wir,  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  hat **konstante Summe**, falls  $v(S) + v(I \setminus S) = v(I)$  für alle  $S \subseteq I$  gilt. Daraus folgt  $v(\emptyset) = 0$ .

Andere Quellen sind möglich, wie eingangs in den Beispielen motiviert. Manche Autoren nennen das Koalitionsspiel  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(\emptyset) = 0$  auch die **charakteristische Funktion** oder die **Koalitionsbewertung**: Jede gegebene Koalition  $S \subseteq I$  kann sich den Ertrag  $v(S) \in \mathbb{R}$  sichern.

In konkreten Anwendungen ist die explizite Berechnung von  $v$  mühsam. So ist das Leben. Wir nutzen einen bewährten mathematischen Trick: Wir abstrahieren von der Herkunft der Funktion  $v$  und ihrer Berechnung, auch legen wir in Definition M1A noch keine weiteren Eigenschaften fest.

Zwecks Vereinfachung verlangen wir hier lediglich  $v(\emptyset) = 0$ . Selbst das ist nicht wirklich nötig, aber im Folgenden bequem: Jede konstante Funktion  $v$  ist modular, aber additiv nur für  $v = 0$ . Mit  $v(\emptyset) = 0$  ist Additivität gleichbedeutend zu Modularität (M101).

Super/submodulare Funktionen treten in der **Ökonomie** häufig auf: Bei **Kosten** hoffen wir auf Subadditivität: Zusammenarbeit spart Kosten. Bei **Profiten** hoffen wir auf Superadditivität: Kooperation zahlt sich aus. Das bedeutet jeweils negative bzw. positive **Synergie**. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} \text{Synergie} : \mathfrak{P}(I) \times \mathfrak{P}(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ &: (S, T) \mapsto v(S \cup T) - v(S) - v(T) + v(S \cap T). \end{aligned}$$

Für  $S \cap T = \emptyset$  gilt demnach  $\text{Synergie}(S, T) = v(S \cup T) - v(S) - v(T)$ . Dies misst, wie viel  $S$  und  $T$  von ihrer Zusammenarbeit profitieren, also wie viel sie gemeinsam mehr erwirtschaften als getrennt.

Speziell für  $i \in S \subseteq I$  betrachten wir den **marginalen Mehrwert** [*marginal contribution*] des Spielers  $i$  zum Wert der Koalition  $S$ :

$$\partial_i v(S) := v(S) - v(S \setminus \{i\}).$$

Im Falle  $\partial_i v(S) > v(i)$  lohnt sich der Beitritt von  $i$  zu der Koalition  $S$ . Im Falle  $\partial_i v(S) < v(i)$  lohnt sich der Austritt von  $i$  aus der Koalition  $S$ .

Mathematisch gesehen sind **additive Funktionen** die einfachsten. Ökonomisch gesehen sind sie jedoch langweilig, da ohne Synergie. Wir nennen sie daher **unwesentlich**, alle anderen sind **wesentlich**. Erstere bilden einen Untervektorraum, den wir vernachlässigen wollen.

Gilt  $\lambda u = v$  mit einem positiven Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ , dann unterscheiden sich  $u$  und  $v$  nur durch **Skalierung** (Währungswechsel, etwa Euro zu Cent). Auch dies vernachlässigen wir und gelangen so zur obigen Äquivalenz; diese ist naheliegend und natürlich und erweist sich als nützlich.

Wir untersuchen nun genauer die wesentlichen, nicht-additiven Spiele. Besonders interessant sind darunter die superadditiven Koalitionsspiele, zur ökonomischen Anwendung wie zur mathematischen Untersuchung. Am allerschönsten sind die supermodularen / konvexen Koalitionsspiele.

Satz M1c garantiert uns hierzu eine bequeme und schöne Darstellung: Wir können in jeder Äquivalenzklasse als kanonischen Repräsentanten die Null-Eins-Normierung auszeichnen, analog zu WMaßen (M101). Insbesondere dürfen wir fortan  $v \geq 0$  und Monotonie annehmen.

Wir sehen hier sehr schön, wie ökonomische Eigenschaften und Begriffe eine direkte mathematische Entsprechung finden. Die beiden vertraute gemeinsame Sprache ist die der Mengen, Relationen und Abbildungen, hier zudem die Grundlagen zu Vektorräumen und linearen Abbildungen.

Die **Übersetzung** dieser beiden Sichtweisen ist nicht immer einfach, aber meist sehr lohnend, sowohl theoretisch wie praktisch:

- Die ökonomische Sichtweise bietet eine starke Motivation und wunderbar anschauliche Beispiele. Allerdings lassen sich selbst einfache Fälle meist nicht leicht durchschauen oder gar lösen.
- Die mathematische Sichtweise ermöglicht präzise Formulierungen, nachvollziehbare Rechnungen und quantitative Ergebnisse. Diese wiederum nützen in der ökonomischen Fragestellung.

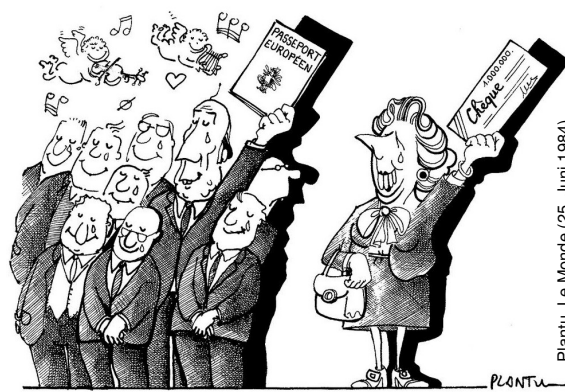
Diese Zusammenarbeit ist überaus bemerkenswert, oft sehr effizient. Natürlich gelingt dies nicht immer und wird dann auch kritisiert. Doch insgesamt gilt Eugene Wigners Weisheit zur **unverschämten Wirksamkeit** der Mathematik tatsächlich auch in der Ökonomik.



Die Europäische Union (EU) hat hehre Ziele und konkrete Aufgaben: Frieden und Verständigung, dazu auch wirtschaftliche Zusammenarbeit. Der Nutzen überwiegt die Kosten, das ist nahezu unbestritten, doch um die Aufteilung wird erbittert gekämpft. Daran droht die EU zu zerbrechen.



Margaret Hilda Thatcher, 1925–2013



Plantu, Le Monde (25. Juni 1984)

Margaret Thatcher: „I want my money back, and I want it now!“ (1979)  
Durch einseitige Forderungen erzwingt sie im Juni 1984 den Britenrabatt. Selbst dieser Sonderbonus konnte Quengeln und Brexit nicht verhindern.

Die große Koalition  $I$  ist stabil, wenn sie sich für jeden Koalitionär lohnt. Die Aufteilung des gemeinsamen Nutzens  $v(I)$  jedoch ist keineswegs klar vorgegeben, sondern muss mühsam ausgehandelt werden.

Auch in der EU sind Ausgleich und Justierung durchaus wünschenswert. Doch was ist „ausgewogen“ und „gerecht“? Das muss man verhandeln. Hierbei kann es sich lohnen, zu drohen, zu bluffen, zu lügen, etc.

Der Brexit, der uns dauerhaft beschäftigt, hat eine lange Vorgeschichte. Margaret Thatcher verlangte seit 1979, dass Großbritannien zwei Drittel seiner Zahlungen an die EU erlassen werden, da es weniger als andere Länder von Landwirtschafts-Subventionen profitiere und der Wohlstand in Großbritannien niedriger sei als in anderen europäischen Ländern.

Daran kann man zweifeln, zum Beispiel macht der Finanzplatz London astronomische Gewinne. Der Rabatt für die Insulaner blieb jedoch, ebenso ihr tief eingepflanztes Gefühl, ungerecht behandelt zu werden. Aus diesem *Gefühl* der Benachteiligung, und nicht aus den objektiven *Vorteilen*, speist sich für viele Bürger:innen ihre wachsende Euroskepsis.

Ähnliche Probleme und Nörgelrabatte sehen wir in vielen Koalitionen. Beim Feilschen gilt der Grundsatz: Jammern gehört zum Handwerk. Bereits die Datenerhebung vor der Verhandlung ist Teil des Spiels und kann daher für anschließende Verhandlungen instrumentalisiert werden. Das verkompliziert alles, ist aber aus spieltheoretischer Sicht vernünftig: Jeder Spieler will durch einseitige Forderungen seine Zuteilung erhöhen.

Die implizite oder explizite Drohung ist, die Koalition zu verlassen. Das ist allerdings nur dann glaubwürdig, wenn sich der Austritt lohnt. Im Beispiel EU könnte Deutschland über einen Austritt nachdenken, als Alternative durchrechnen und eventuell den anderen damit drohen. Ebenso könnte Frankreich seinen Austritt planen oder androhen. Auch könnten sich beide zusammenschließen, als Teilkoalition.

Damit kommen wir zur spieltheoretisch-mathematischen Formulierung. Die große Koalition ist stabil, wenn sie sich für jeden Koalitionär lohnt. Stärkere Forderung: Sie muss sich sogar für jede Teilkoalition lohnen. Die Aufteilung des gemeinsamen Nutzens ist Verhandlungssache.

Bei aller Begeisterung für die Spieltheorie müssen wir ehrlich bleiben: Die Mathematik benötigt präzise Grundlagen und verlässliche Daten. Die Theorie kann erst dann ihre Kraft ausspielen und ordnende Wirkung entfalten, wenn wir ausreichend wissen, was hier wirklich gespielt wird.

Realistische Daten sind meist schwer zu bekommen und oft umstritten. Das ist leider ein allgegenwärtiges Problem: Gute Daten sind teuer, sie kosten Zeit und Geld, manchmal sind sie ganz unzugänglich. Ich wiederhole daher die Einschränkung und Warnung:

In konkreten Anwendungen ist die explizite Berechnung von  $v$  mühsam. So ist das Leben. Wir nutzen einen bewährten mathematischen Trick: Wir abstrahieren von der Herkunft der Funktion  $v$  und ihrer Berechnung, auch legen wir in Definition M1A noch keine weiteren Eigenschaften fest.

Für unsere Anwendungsbeispiele bedeutet das natürlich ebenso, dass wir stark vereinfachte und idealisierte Daten annehmen (müssen). Das Problem ist daher nicht die Methode, die hier illustriert wird, sondern die speziellen / vereinfachten / erfundenen Daten.

## Definition M1D: Zuteilung, Allokation und Kern

Weiter sei  $I$  eine endliche Menge und  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  ein Koalitionsspiel. Zur Vereinfachung denken wir hier an Gewinne, also  $v \geq 0$ .

Jeder Vektor  $x \in \mathbb{R}^I$  ist eine **Zuteilung**  $x: I \rightarrow \mathbb{R}: i \mapsto x_i$  [imputation].

Für  $S \subseteq I$  definieren wir  $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$ . Den Vektor  $x$  nennen wir...

- **zulässig**, falls  $x(I) \leq v(I)$  gilt, und **pareto-effizient**, falls  $x(I) = v(I)$ ,
- **individuell rational**, falls  $x(i) \geq v(i)$  für alle  $i \in I$ , und eine **Allokation**, falls zudem pareto-effizient,
- **kollektiv rational**, falls  $x(S) \geq v(S)$  für alle  $S \subseteq I$ , und eine **Kernallokation**, falls zudem pareto-effizient.

Dies definiert die **Allokationsmenge** und den **Kern** von  $v$ :

$$\text{Alloc}(v) := \{ x \in \mathbb{R}^I \mid x(I) = v(I), \forall i \in I: x(i) \geq v(i) \}$$

$$\text{Core}(v) := \{ x \in \mathbb{R}^I \mid x(I) = v(I), \forall S \subseteq I: x(S) \geq v(S) \}$$

Dies sind die rational möglichen Zuteilungen in der großen Koalition  $I$ .

Angenommen, alle Spieler in  $I$  kooperieren mit Gesamtnutzen  $v(I)$ .

Wir suchen eine individuelle Zuteilung  $x_i$  für jeden Spieler  $i \in I$ .

Hier gelten Stabilitätskriterien, analog zu Nash-Gleichgewichten: Kein Spieler/Bündnis hat Anreiz, die große Koalition zu verlassen.

Zulässigkeit  $x(I) \leq v(I)$ : Es wird nur verteilt, was vorhanden ist.

Pareto-Effizienz  $x(I) = v(I)$ : Der gesamte Kuchen wird verteilt.

Individuelle Rationalität  $x(i) \geq v(i)$ : Jeder Spieler  $i \in I$  profitiert, zumindest schwach: Es besteht kein Anreiz, die Koalition zu verlassen.

Kollektive Rationalität  $x(S) \geq v(S)$ : Jedes Bündnis  $S \subseteq I$  profitiert, zumindest schwach: Es besteht kein Anreiz, die Koalition zu verlassen.

😊 Dank unserer mathematischen Sprache und Formalisierung lassen sich diese Bedingungen nun klar und einfach formulieren.

😊 Wir verfügen über starke Werkzeuge: reelle Vektorräume und lineare Abbildungen, affin-lineare Un/Gleichungen und Simplex-Verfahren, räumliche Anschauung und analytische Geometrie, etc.

**Aufgabe:** (1) Was ist die Allokationsmenge bei Null-Eins-Normierung?  
(2) Wie verhalten sich Allokationsmenge und Kern bei Äquivalenz?

**Lösung:** (1) Für  $I = \{0, 1, \dots, n\}$  erhalten wir den Standardsimplex

$$\Delta^n = [I] = \{ x \in \mathbb{R}^I \mid x_0, x_1, \dots, x_n \geq 0, x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1 \}.$$

(2) Die Zuteilung  $x \in C_0(I)$  ist linear, also additiv und modular. Alle Ungleichungen bleiben erhalten, wenn wir  $x$  und  $v$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  skalieren, und ebenso, wenn wir eine Funktion  $w \in C_0(I)$  addieren.

- 😊 Die Allokationsmenge  $\text{Alloc}(v) \subset \mathbb{R}^I$  ist somit immer ein Simplex, im Allgemeinen allerdings positiv skaliert und additiv verschoben.
- 😊 Die Null-Eins-Normierung ist zwar sehr einfach und geradezu banal, dennoch ist sie ungemein praktisch und wird daher häufig eingesetzt.
- 😊 Wir nutzen sachgerechte und besonders einfache Koordinaten: Der Standardsimplex  $\Delta^n = [I]$  ist uns vertraut und sympathisch.

😊 Der Kern ist konvex und kompakt. 😞 Er ist eventuell leer. Der Kern kann also 0, 1 oder überabzählbar viele Punkte enthalten. Wir müssen also mit zwei entgegengesetzten Problemen umgehen: Zu vorgelegtem  $v$  kann zu wenige oder zu viele Lösungen geben.

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie den Kern eines additiven Spiels  $v$ .  
(2) Wie erklärt der Kern die Möglichkeit eines Britenrabatts?

**Lösung:** (1) Additivität bedeutet  $v(S) = \sum_{i \in S} v(i)$ . Jede Allokation  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt  $x(i) \geq v(i)$  für jeden Spieler  $i \in I$ , also  $x(S) \geq v(S)$ . Zulässigkeit erfordert  $x(I) \leq v(I)$ . Dies erzwingt die Gleichheit  $x(i) = v(i)$  für alle  $i \in I$ , wir schreiben abkürzend  $x = v$ .

😊 Für jedes additive Spiel  $v$  gilt  $\text{Alloc}(v) = \text{Core}(v) = \{v\}$ .

(2) Im günstigen Fällen erlaubt das Spiel  $v$  einen ausgedehnten Kern. Dies gilt zum Beispiel für echt konvexe Spiele, wie wir sehen werden.

😊 Für Auszahlungen  $x \in \text{Core}(v)$  besteht also Verhandlungsspielraum.



“The effects of greed on three penniless prospectors (Humphrey Bogart, Walter Huston, Tim Holt) when they strike it rich in the bandit infested mountains of the Sierra Madre.” ([www.virtual-history.com/movie/film/1112/](http://www.virtual-history.com/movie/film/1112/))



1=Howard



2=Curtin



3=Dobbs

Zu dritt erwirtschaften sie ein Vermögen 1, zu zweit nur  $\alpha \in [0, 1]$ , allein überlebt keiner. Als Koalitionsspiel über  $I = \{1, 2, 3\}$  gilt also:

$$v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto v(S) := \begin{cases} 0 & \text{falls } |S| \leq 1, \\ \alpha & \text{falls } |S| = 2, \\ 1 & \text{falls } |S| = 3. \end{cases}$$

**Aufgabe:** Welche Koalitionen sind stabil? Was ist der Kern? Ist die Funktion  $v$  superadditiv? oder gar supermodular?

**Lösung:** Für  $\alpha \leq 2/3$  ist die große Koalition stabil, etwa mit Zuteilung  $x = (1/3, 1/3, 1/3)$ . Für  $\alpha > 2/3$  sind nur noch Zweierkoalitionen stabil. Für  $\alpha \in [0, 1]$  ist  $v$  superadditiv, für  $\alpha \in [0, 1/2]$  auch supermodular.



Ein Filmklassiker mit Humphrey Bogart (als Dobbs, mitte), Tim Holt (als Curtin, links) und Walter Huston (als Howard, rechts) unter der Regie seines Sohnes John Huston. Perfektes Tomatometer: 100% ([www.rottentomatoes.com/m/treasure\\_of\\_the\\_sierra\\_madre](http://www.rottentomatoes.com/m/treasure_of_the_sierra_madre))

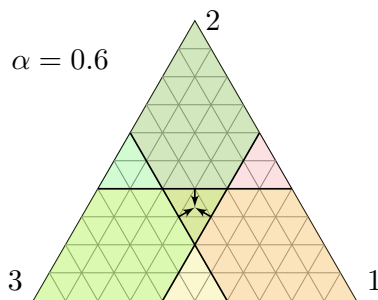
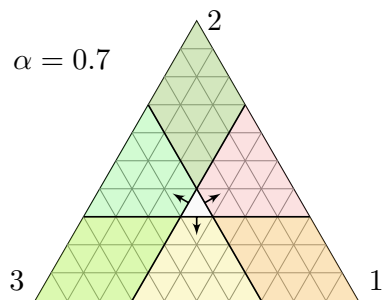
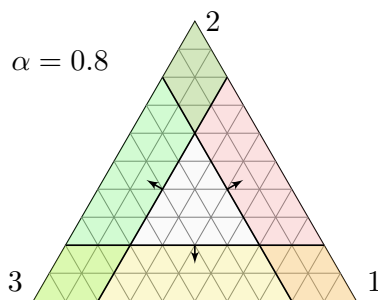
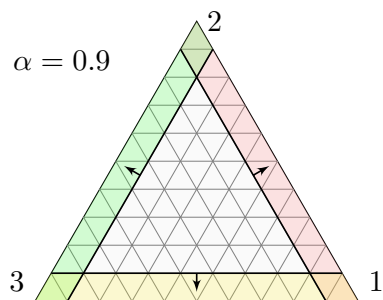
Jeder Spieler  $i \in I$  hat Interesse am Zusammenschluss mit  $v(I) = 1$ . Auf sich alleine gestellt schneidet er mit  $v(i) = 0$  definitiv schlechter ab. Im Falle  $\alpha < 2/3$  lohnt sich für jeden Spieler die große Koalition: Jedes kleinere Bündnis führt zu Verlusten bei mindestens einem Spieler.

😊 Stabilität bedeutet Gewissheit und Sicherheit für jeden Spieler. Misstrauen ist unnötig. Es ist gut zu wissen, dass man gebraucht wird.  
 😞 Die Aufteilung des Gewinns ist noch nicht festgelegt; jede Zuteilung  $x \in \mathbb{R}^3$  ist möglich, solange  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$  und  $x_1, x_2, x_3 > \alpha/2$  gilt.

Im Falle  $\alpha > 2/3$  hingegen ist die große Koalition  $I = \{1, 2, 3\}$  instabil: Je zwei Goldgräber können zusammen mehr unter sich aufteilen.

Jedes Zweierbündnis ist denkbar, die Situation ist symmetrisch. In dieser instabilen Situation ist eine Vorhersage schwierig.

😞 Je zwei können den dritten ausbooten. Das führt zu Instabilität, Ungewissheit, Misstrauen. Davon handelt der Film, Dobbs wird paranoid.  
 😞 Die Bündnisbildung ist willkürlich. Sie kennen dies vielleicht aus sozialen Situationen, wo manche zu Außenseitern (gemacht) werden.



Die Graphiken zeigen für  $I = \{1, 2, 3\}$  den Standardsimplex

$$[I] = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1 \}.$$

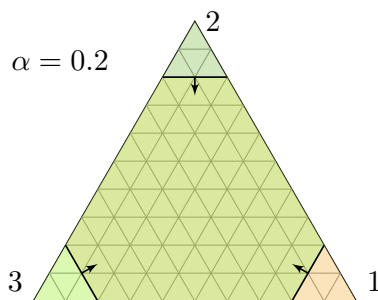
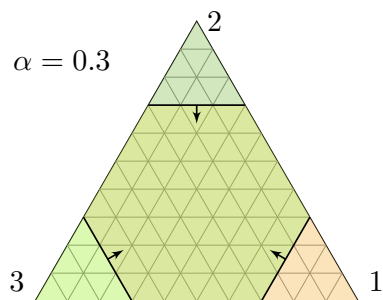
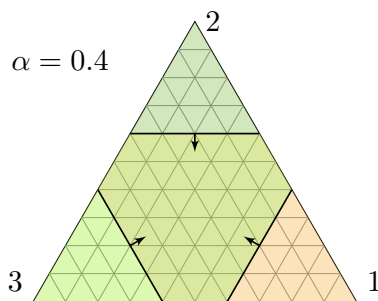
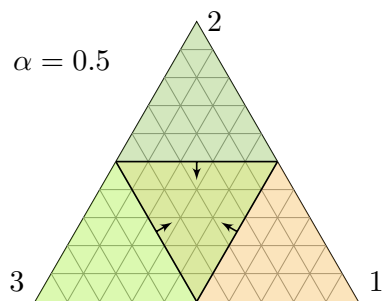
Die Blickrichtung ist von  $(1, 1, 1)$  auf den Ursprung  $(0, 0, 0)$ .

Wir sehen dann ein gleichseitiges Dreieck mit Ecken  $e_1, e_2, e_3$ .

Eingefärbt sind jeweils die drei Halbebenen, die durch die geforderten Ungleichungen  $x_1 + x_2 \geq \alpha$ ,  $x_1 + x_3 \geq \alpha$ ,  $x_2 + x_3 \geq \alpha$  gegeben sind. Der Pfeil zeigt von der Geraden zur Seite der erfüllten Ungleichung.

Wir beginnen mit dem klarsten Fall: Für  $\alpha > 2/3$  ist der Kern leer! Keine zulässige Zuteilung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist kollektiv rational.

**Aufgabe:** Zeigen Sie dies (1) geometrisch und (2) algebraisch: Formulieren Sie alle Ungleichungen, schreiben Sie diese explizit als Tucker-Tableau und lösen Sie es mit dem Simplex-Algorithmus.



Für  $\alpha \leq 2/3$  ist der Kern  $Core(v)$  nicht leer: zunächst ein Sechseck für  $0 < \alpha < 1/2$ , dann ein Dreieck für  $1/2 \leq \alpha < 2/3$ , und schließlich nur noch ein einziger Punkt für den kritischen Wert  $\alpha = 2/3$ .

Schönster Fall: Für  $0 < \alpha < 1/2$  ist  $v$  supermodular, Die marginalen Zuwächse sind von der Form  $(0, \alpha, 1 - \alpha)$ , davon  $3!$  Permutationen. Diese Punkte bilden genau die Ecken des Kern-Sechsecks!

Für  $\alpha = 1/2$  degeneriert dies zu  $(0, 1/2, 1/2)$  mit nur 3 verschiedenen Permutationen. Diese bilden genau die Ecken des Kern-Dreiecks.

Für  $1/2 < \alpha \leq 2/3$  ist  $v$  nicht mehr supermodular. Der Kern ist nicht-leer, doch die Zuwächse  $(0, \alpha, 1 - \alpha)$  liegen nicht mehr darin. Die Eckpunkte des Kerns müssen wir daher auf andere Weise bestimmen.

😊 Supermodulare / konvexe Koalitionsspiele  $v : \mathfrak{F}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  haben die besten Eigenschaften, sowohl aus Sicht der ökonomischen Anwendung als auch bezüglich ihrer mathematischen Eigenschaften, hier speziell in unserer algebraisch-geometrischen Untersuchung.

Zu  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $i \in I$  definieren wir die **diskrete Ableitung**

$$\partial_i v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}: S \mapsto (\partial_i v)(S) := v(S \cup \{i\}) - v(S \setminus \{i\}).$$

Allgemeiner definieren wir für  $R \subseteq I$  die diskrete Richtungsableitung

$$\partial_R v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}: S \mapsto (\partial_R v)(S) := v(S \cup R) - v(S \setminus R).$$

### Lemma M1E: Charakterisierungen konvexer Koalitionsspiele

Für  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Die Abbildung  $v$  ist supermodular / konvex.

(2) Für alle  $Q, R, S \subseteq I$  gilt  $\partial_Q \partial_R v(S) \geq 0$ , also ausgeschrieben

$$v(S \cup R \cup Q) - v((S \cup R) \setminus Q) - v((S \setminus R) \cup Q) + v((S \setminus R) \setminus Q) \geq 0.$$

(3) Für alle  $S \subseteq T \subseteq I$  und  $i \in I \setminus T$  gilt  $\partial_i v(S) \leq \partial_i v(T)$ , also

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

😊 Wir nennen  $\partial_i v(S)$  auch den **marginalen Mehrwert** von  $i$  bzgl.  $S$ .  
Ungleichung (3) besagt, dass der marginale Mehrwert monoton wächst.

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!  
Illustrieren Sie dies erneut mit dem Schatz der Sierra Madre.

**Lösung:** Die Aufgabe erfordert vor allem Sorgfalt und klare Schreibung.

„(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Für  $S' := (S \setminus R) \setminus Q$  und  $R' := R \setminus Q$  und  $Q' := Q$  gilt

$$\begin{aligned} S \cup R \cup Q &= S' \sqcup R' \sqcup Q', & (S \cup R) \setminus Q &= S' \sqcup R', \\ (S \setminus R) \cup Q &= S' \sqcup Q', & (S \setminus R) \setminus Q &= S'. \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die Ungleichung (2) zu

$$v(S' \sqcup R' \sqcup Q') - v(S' \sqcup R') - v(S' \sqcup Q') + v(S') \geq 0.$$

Diese Ungleichung gilt dank der vorausgesetzten Modularität (1).

„(2)  $\Rightarrow$  (3)“: Dies folgt durch die Spezialisierung  $R = T \setminus S$  und  $Q = \{i\}$ .

„(3)  $\Rightarrow$  (1)“: Zu  $A, B \subseteq I$  sei  $S = A \cap B$  und  $R = A \setminus S$  und  $Q = B \setminus S$ .  
Modularität  $v(A \cup B) \geq v(A) + v(B) - v(A \cap B)$  bedeutet dann

$$v(S \sqcup R \sqcup Q) - v(S \sqcup R) \geq v(S \sqcup Q) - v(S).$$

Dies folgt aus (3) als Teleskopsumme über die Elemente von  $Q$ .

Die Schreibweise „ $\partial$ “ verwenden wir hier für die Differenz

$$\partial_i v(S) := v(S \cup \{i\}) - v(S \setminus \{i\}),$$

also ein sehr einfaches kombinatorisch-algebraisches Konzept.

Ökonom:innen interpretieren dies als den **marginalen Mehrwert** / *marginal contribution* des Spielers  $i$  zum Wert der Koalition  $S$ .

Mathematiker:innen erinnert dies an den **Differentialquotienten** bzw. die partielle Ableitung, also ein grundlegendes Konzept der Analysis.

Das ist nicht nur eine zufällige Ähnlichkeit, die Analogien sind durchaus bemerkenswert und hilfreiche Gedächtnisstützen. Zur Illustration seien  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. (Meist genügt weniger, aber diese Generalvoraussetzung vereinfacht die Beispiele.)

Die Ableitungen schreiben wir dann  $\partial_1 f$  bzw.  $\partial_i g$ . Natürlich sind die folgenden analytischen Aussagen subtiler und tiefsinniger, und auch aufwändiger zu beweisen, als ihre kombinatorischen Gegenstücke, aber die anschauliche Bedeutung ist doch frappierend ähnlich.

Zur Monotonie gilt:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ isoton} &\Leftrightarrow \partial_1 f \geq 0 \\ v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} \text{ isoton} &\Leftrightarrow \partial_i v \geq 0 \text{ für alle } i \in I \end{aligned}$$

Zur Konvexität gilt (dank Lemma M1E):

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ konvex} &\Leftrightarrow \partial_1 f \text{ isoton} \\ v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} \text{ konvex} &\Leftrightarrow \partial_i v \text{ isoton für alle } i \in I \end{aligned}$$

Zur Konvexität gilt allgemein (M1E):

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ konvex} &\Leftrightarrow (\partial_i \partial_j g) \geq 0 \\ v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} \text{ konvex} &\Leftrightarrow \partial_i \partial_j v \geq 0 \text{ für alle } i \in I \end{aligned}$$

Ausführlich: Genau dann ist die Funktion  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konvex, wenn die Hesse-Matrix  $(\partial_i \partial_j g)$  positiv semidefinit ist, geschrieben  $(\partial_i \partial_j g) \geq 0$ .

Ebenso besteht eine schöne Analogie zur diskreten Ableitung von Funktionen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(I) \cong 2^I$  entspricht dabei dem diskreten Hamming-Würfel  $\{0, 1\}^n \subset \mathbb{Z}^n$ .

**Satz M1F:** Konvexe Koalitionsspiele haben nicht-leeren Kern.

- (1) Ist  $v$  superlinear, so ist die Allokationsmenge  $\text{Alloc}(v)$  nicht leer.
- (2) Ist  $v$  supermodular / konvex, so ist der Kern  $\text{Core}(v)$  nicht leer.

**Konstruktion:** Sei  $\rho: I \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  eine Abzählung aller Spieler. Damit bauen wir schrittweise Koalitionen  $\rho^{-1}(\{1, 2, \dots, m\}) \subseteq I$  auf.

Zur Koalition  $S_i^\rho = \{j \in I \mid \rho(j) \leq \rho(i)\}$  kam zuletzt der Spieler  $i$ . Er trägt den marginalen Mehrwert  $\Delta_i^\rho(v) = v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \setminus \{i\})$  bei.

Diese Konstruktion  $v \mapsto \Delta_i^\rho(v)$  nützt und hilft uns im Folgenden öfters. Wir können nun ihre erfreulichen Eigenschaften nachrechnen:

**Lemma M1G:** Eigenschaften des marginalen Mehrwerts  $\Delta^\rho$

- (0) Für jede Abzählung  $\rho$  ist die Zuteilung  $\Delta^\rho(v) \in \mathbb{R}^I$  pareto-effizient.
- (1) Ist das Koalitionsspiel  $v$  superkumulativ, so gilt  $\Delta^\rho(v) \in \text{Alloc}(v)$ .
- (2) Ist das Koalitionsspiel  $v$  supermodular, so gilt  $\Delta^\rho(v) \in \text{Core}(v)$ .

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

**Lösung:** (0) Dies folgt aus der Teleskopsumme

$$\sum_{i \in I} v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \setminus \{i\}) = v(I) - v(\emptyset) = v(I).$$

(1) Ist  $v$  superkumulativ, so gilt

$$\Delta_i^\rho(v) = v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \setminus \{i\}) \geq v(i).$$

(2) Zum Vergleich nutzen wir  $\tau: I \rightarrow \{1, \dots, n\}$  mit  $\tau(S) = \{1, \dots, m\}$ , indem wir alle Elemente von  $S$  nach vorne sortieren, dabei aber ihre interne Reihenfolge in  $S$  beibehalten (*shuffle*). Dank Lemma M1E gilt

$$\sum_{i \in S} \Delta_i^\rho(v) \geq \sum_{i \in S} \Delta_i^\tau(v) = v(S) - v(\emptyset) = v(S).$$

Das beweist Lemma M1G und damit zugleich Satz M1F. □

Die Geometrie des Kerns wurde untersucht von Lloyd S. Shapley: *Cores of convex games*. Int. Journal of Game Theory 1 (1971) 11–26.

Characteristic function:

$$v(S) = \left( \sum_{i \in S} i \right)^2$$

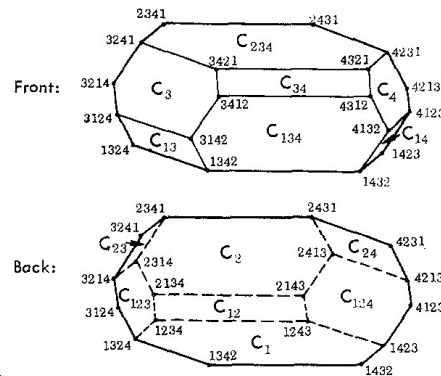
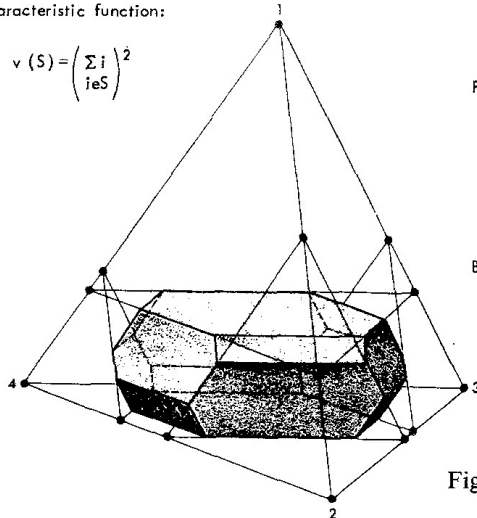


Fig. 2: Core of a four-person convex game

Der Kern  $\text{Core}(v)$  ist konvex und kompakt, von Dimension  $\leq |I| - 1$ , eventuell leer. Für reguläres  $v$  sind seine Ecken die Punkte  $\Delta^\rho(v)$ . Für nicht-reguläres  $v$  fallen einige dieser Eckpunkte zusammen:

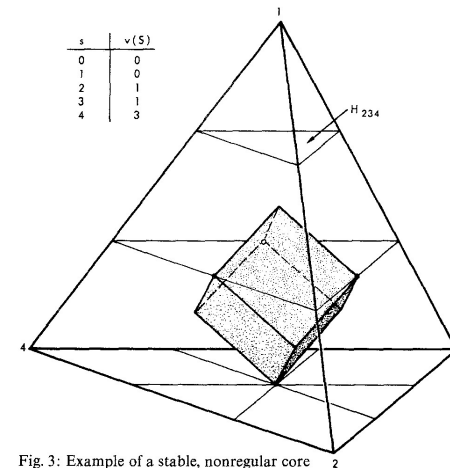


Fig. 3: Example of a stable, nonregular core

Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer 1995.

Weiter sei  $I$  eine endliche Menge und  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  ein Koalitionsspiel. Wir suchen für solche  $v$  eine allgemeine **Zuteilungsregel**

$$\psi: C(I) \rightarrow \mathbb{R}^I: v \mapsto \psi(v) = (\psi_i(v))_{i \in I}.$$

Ausgehend von  $v$  bekommt jeder Spieler  $i \in I$  eine Zuweisung  $\psi_i(v)$ . Welche Zuteilungen sind „fair“ und „gerecht“? Wir lassen uns leiten von wünschenswerten Eigenschaften und formulieren diese als Axiome.

Der Gesamtwert  $v(I)$  der großen Koalition wird an die Spieler verteilt.

**PAR: Pareto-Effizienz.** Die Gesamtsumme ist  $\sum_{i \in I} \psi_i(v) = v(I)$ .

Ein Spieler  $i \in I$  heißt *neutral*, falls  $v(S \cup \{i\}) = v(S)$  für alle  $S \subseteq I$  gilt.

**NTR: Neutralität.** Für jeden neutralen Spieler  $i \in I$  gilt  $\psi_i(v) = 0$ .

Die Zuteilung ist *anonym*, also unabhängig von Namen und Reihenfolge.

**SYM: Symmetrie.** Für jede Permutation  $\pi: I \xrightarrow{\sim} I$  gilt  $\psi_{\pi i}(v\pi) = \psi_i(v)$ .

Wir addieren gleichzeitige Koalitionsspiele und ebenso ihre Zuteilungen:

**ADD: Additivität.** Für  $v_1, v_2 \in C(I)$  gilt  $\psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2)$ .

Zur Motivation und Vereinfachung denken wir uns  $v$  supermodular. Dann lohnt Zusammenarbeit, am meisten die große Koalition.

**Pareto-Effizienz** fordert: Der gesamte Kuchen  $v(I)$  wird verteilt. Bei positivem Rest könnte man alle Spieler strikt besser stellen.

**Neutralität:** Ein Spieler, der nichts beiträgt, erhält auch keine Zuteilung. Nach Paulus: „Wer nicht arbeitet, soll auch nicht essen.“ (2 Thess 3,10).

**Symmetrie:** Jede Permutation  $\pi: I \xrightarrow{\sim} I: i \mapsto \pi i$  induziert auf den Teilmengen die Linksoperation  $\mathfrak{P}(I) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{P}(I): S \mapsto \pi(S)$  und auf den Koalitionsspielen somit die Rechtsoperation  $C(I) \rightarrow C(I): v \mapsto v \circ \pi$ . Wir fordern die Invarianz  $\psi_{\pi i}(v\pi) = \psi_i(v)$  unter allen Permutationen  $\pi$ . Das dient der Gerechtigkeit und verhindert z.B. einen *Gender Pay Gap*.

Die Forderung nach **Additivität** ist wenig intuitiv und wird oft kritisiert. Die Summe  $v = v_1 + v_2$  stellen wir uns als gleichzeitige und gekoppelte Koalitionsspiele  $v_1$  und  $v_2$  vor. Hierbei sind Wechselwirkungen denkbar, zum Beispiel in beiden wechselnde Koalitionen. Diese Möglichkeiten ignorieren wir zur Vereinfachung und fordern schlicht Additivität.

### Satz M2A: Shapley-Wert, Shapley 1953

(1) Es gibt genau eine Zuteilungsregel  $\sigma: C(I) \rightarrow \mathbb{R}^I: v \mapsto \sigma(v) = \bar{v}$ , die sowohl pareto-effizient, neutral, symmetrisch als auch additiv ist.

Wir nennen  $\bar{v}(i)$  den **Shapley-Wert** des Spielers  $i$  im Koalitionsspiel  $v$ .

(2) Dies ist der durchschnittliche Mehrwert, den Spieler  $i$  beiträgt:

$$\bar{v}(i) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho} \Delta_{\rho}^i(v) = \sum_{S: i \in S \subseteq I} \frac{|S \setminus \{i\}|! \cdot |I \setminus S|!}{|I|!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

(3a) Individuelle Rationalität: Ist  $v$  superkumulativ, so gilt  $\bar{v}(i) \geq v(i)$ . Jeder Spieler  $i \in I$  gewinnt (schwach) durch diese Zuteilung  $\bar{v}$ .

(3b) Kollektiv: Ist  $v$  supermodular, so gilt  $\bar{v}(S) \geq v(S)$  für alle  $S \subseteq I$ . Jedes Bündnis  $S \subseteq I$  gewinnt (schwach) durch diese Zuteilung  $\bar{v}$ .

Insbesondere liegt  $\bar{v}$  im Kern  $\text{Core}(v) \subset \mathbb{R}^I$  des Koalitionsspiels  $v$ . Genauer ist  $\bar{v}$  der Schwerpunkt aller Eckpunkte  $\Delta^{\rho}(v) \in \text{Core}(v)$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie Eindeutigkeit, Existenz, Eigenschaften! Wie gehen Sie geschickt vor? Wie nutzen Sie unsere Vorbereitung?

**Eindeutigkeit:** (1) Wir nutzen die Shapley-Basis  $(e_K^{\subseteq})_{\emptyset \neq K \subseteq I}$  von  $C(I)$ . Sei  $\psi: C(I) \rightarrow \mathbb{R}^I$  pareto-effizient, neutral und symmetrisch. Dann gilt

$$\psi_i(\lambda_K e_K^{\subseteq}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin K, \text{ dank NTR,} \\ \lambda_K / |K| & \text{falls } i \in K, \text{ dank PAR, SYM.} \end{cases}$$

Ist  $\psi$  zudem additiv, so ist  $\psi$  auf ganz  $C(I)$  eindeutig festgelegt.

**Existenz:** (2)  $\Delta_i^{\rho}$  erfüllt Pareto-Effizienz, Neutralität und Additivität. Die Symmetrisierung  $\sigma_i$  erfüllt das ebenso und zudem Symmetrie.

**Eigenschaften:** (3) Die Ungleichungen gelten für  $\Delta_i^{\rho}$  dank M1g. Somit gelten diese Ungleichungen auch für ihren Mittelwert  $\sigma_i$ .

😊 Das beweist Satz M2A sehr elegant durch sorgfältiges Nachrechnen. Wieder ist es sehr erstaunlich, wie wir aus wenigen Minimalforderungen (PAR, NTR, SYM, ADD) die Eindeutigkeit der Lösung und eine elegante Formel gewinnen können. Ein Lob der axiomatischen Methode!

😊 Ich betone eine schöne Analogie zur Definition der Determinante.

Vorgelegt seien uns die Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ . Diese spannen das Parallelepiped  $P = \{ \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1] \} \subset \mathbb{R}^n$  auf. Wie können wir das Volumen  $\text{vol}_n(P) = \det(v_1, \dots, v_n)$  berechnen, ja überhaupt erst definieren? Wir besinnen uns auf das Wesentliche!

**Normierung:** Für die Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  ist  $P = [0, 1]^n$  der Einheitswürfel. In diesem einfachsten Fall verlangen wir  $\text{vol}_n(P) = 1$ .

**Alternierend:** Gilt  $v_i = v_j$  für zwei Indizes  $1 \leq i < j \leq n$ , so degeneriert / kollabiert das Parallelepiped  $P$ . Wir verlangen daher  $\text{vol}_n(P) = 0$ .

**Homogenität:** Gilt  $v'_i = \lambda v_i$  in einem Index  $i$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so ist  $P'$  eine  $\lambda$ -Streckung von  $P$ . Wir verlangen daher  $\text{vol}_n(P') = \lambda \text{vol}_n(P)$ .

**Additivität:** Gilt  $v_i = v'_i + v''_i$  in einem Index  $i$ , ist  $P \sim P' \cup P''$  äquivalent durch Scherung. Wir verlangen daher  $\text{vol}_n(P) = \text{vol}_n(P') + \text{vol}_n(P'')$ .

Diese beiden Forderungen fassen wir zur **Multilinearität** zusammen:  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$  ist  $\mathbb{R}$ -linear in jedem Argument  $v_i$ .

Lassen sich diese Wünsche erfüllen? eindeutig? und berechnen?

### Satz M2B: Definition und Eigenschaften der Determinante

In jeder Dimension  $n \in \mathbb{N}$  existiert genau eine multilineare, alternierende, normierte Abbildung  $\det = \det_{\mathbb{K}}^n : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ . Diese Abbildung nennen wir die **Determinante**. Sie erfreut sich folgender Eigenschaften:

- 1 Es gilt  $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$ . (Leibniz)
- 2 Die Determinante ist transpositionsinvariant:  $\det(A^T) = \det(A)$ .
- 3 Die Determinante ist multiplikativ:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- 4 Genau dann ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$  gilt.
- 5 Es gilt  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E$ , also  $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$ . (Cramer)

Zu  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$  definieren wir hierbei die adjunkte Matrix  $\tilde{A}$  durch ihre Koeffizienten  $\tilde{a}_{ij} := \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$ .

- 😊 Konzise Charakterisierung durch die wesentlichen Eigenschaften.
- 😊 Allgemeine und explizite Formeln. 😊 Sehr praktisch für kleine  $n$ .
- 😞 Die naive Anwendung der Formeln ist für große  $n$  aufwändig ( $n!$ ).
- 😊 Die effiziente Berechnung gelingt mit dem Gauß-Algorithmus ( $n^3$ ).

Gegeben sei ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Für jede stückweise stetige Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  und alle  $a < b$  in  $I$  wollen wir einen Wert  $\int_a^b f \in \mathbb{R}$  definieren.

Diese Zuordnung  $(f, a, b) \mapsto \int_a^b f$  soll folgende Eigenschaften haben:

- 1 Konstanten:  $\int_a^b \lambda = (b-a)\lambda$  für jede Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}$
- 2 Unterteilung:  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$  für jede Unterteilung  $a < c < b$
- 3 Monotonie:  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$  falls  $f(x) \leq g(x)$  für  $a < x < b$

Diese Forderungen scheinen recht „natürlich“, „fair“ und „gerecht“. Das ist Ansichtssache. Die mathematische Frage ist dabei folgende:

**Aufgabe:** Existenz: Lassen sich diese Forderungen überhaupt erfüllen?  
Eindeutigkeit: Ist hierdurch der Wert  $\int_a^b f$  bereits eindeutig festgelegt?  
Berechnung: Wie können wir  $\int_a^b f$  möglichst effizient berechnen?

😊 Dies ist eine wunderschöne Wiederholung zur Analysis 1! Vermutlich haben Sie das Integral noch nie so betrachtet. Die abstrakt axiomatische Sichtweise zeigt, wie wenig nötig ist, um das ersehnte Objekt eindeutig festzulegen, also zu definieren. Daraus folgen alle Rechnungen!

### Satz M2c: Definition und Eigenschaften des Integrals

Es existiert genau eine Zuordnung  $(f, a, b) \mapsto \int_a^b f$ , die die obigen drei Axiome (1–3) erfüllt. Diese Abbildung nennen wir **(Riemann-)Integral**.

Sie ist  $\mathbb{R}$ -linear in  $f$  und erfreut sich zahlreicher guter Eigenschaften, allen voran der Hauptsatz / HDI, partielle Integration, Substitution, etc.

**Beweisidee:** Die Axiome (1–3) legen die Zuordnung  $(f, a, b) \mapsto \int_a^b f$  für jede Treppenfunktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fest; zudem ist sie hier linear. Approximation und Monotonie setzen dies fort auf alle stückweise stetigen Funktionen, allgemeiner auf alle Riemann-integrierbaren. Näherung und Einschachtelung dienen umgekehrt zur Konstruktion. Daraus folgen alle üblichen Integrationsregeln und Anwendungen.

- 😊 Konzise Charakterisierung durch die wesentlichen Eigenschaften.
- 😊 Explizite Formeln dank HDI. 😊 Weitere durch Integrationsregeln.
- 😞 Nicht jede elementare Funktion lässt sich elementar integrieren.
- 😊 Hier helfen numerische Methoden: Einschachtelung dank Monotonie!



Die **nicht-kooperative Spieltheorie** untersucht Spiele in strategischer Form  $u: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$  oder in extensiver Form als Spielbaum. Dieser Ansatz nutzt meist (Nash-)Gleichgewichte als Lösungskonzepte. Grob umschrieben ist er dynamisch-strategisch-kompetitiv-dezentral.

Die **kooperative Spieltheorie** untersucht Koalitionsspiele  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ . Im Vordergrund stehen die möglichen Koalitionen, nicht die Aktionen. Auch dieser Ansatz nutzt Gleichgewichte als Lösungskonzepte. Er ist jedoch eher statisch-axiomatisch-kooperativ-zentral.

Das **Nash-Programm** wurde von John Nash 1953 initiiert mit dem Ziel, die Kluft zwischen diesen beiden disjunkten Ansätzen zu überbrücken. Die Kernidee des Nash-Programms ist ebenso einfach wie wirkungsvoll: Wir wollen kooperative Lösungen nicht-kooperativ implementieren.

Wir kennen bereits ein berühmtes Beispiel: Nashs Verhandlungslösung (statisch-axiomatisch) wird implementiert durch Rubinsteins Modell als Verhandlungsspiel alternierender Angebote (dynamisch-strategisch). Diese beiden Sichtweisen stützen und erklären sich gegenseitig.

Dasselbe gelingt uns nun mit dem Shapley-Wert (statisch-axiomatisch) mit einer raffinierten Implementierung als Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote (dynamisch-strategisch). Wir folgen S. Hart, A. Mas-Colell: *Bargaining and Value*. *Econometrica* 64 (1996) 357–380.

### Definition M3A: Koalitionsverhandlung nach Hart–Mas-Colell

Gegeben sei eine endliche Menge  $I \neq \emptyset$  von Spielern und  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  als Koalitionsbewertung sowie ein Geduldparameter  $\delta \in [0, 1[$ .

Zu diesen Daten definieren wir das Spiel  $\Gamma = \Gamma(v, \delta)$  wie folgt:

Jede Runde beginnt mit der Menge  $S \subseteq I$  aktiver Spieler, anfangs  $S = I$ . Ein Spieler  $j \in S$  wird zufällig ausgewählt (gleichverteilt, unabhängig). Dieser schlägt eine zulässige Zuteilung  $a \in \mathbb{R}^S$  vor, also  $a(S) \leq v(S)$ .

Stimmen alle Spieler zu, so ist  $a$  akzeptiert. Lehnt mindestens einer ab, so wird der Vorschlag verworfen, das Spiel geht in die nächste Runde.

Mit Wkt  $\delta$  bleibt Spieler  $j$  im Spiel; mit Wkt  $1 - \delta$  wird er vom weiteren Spiel ausgeschlossen, die aktiven Spieler sind dann  $S' = S \setminus \{j\}$ .

Ein Abbruch der Verhandlungen ist hier keinesfalls „alles-oder-nichts“. Verlässt Spieler  $j$  die Verhandlungen, so verhandeln die verbleibenden  $S' = S \setminus \{j\}$  weiter, allerdings über einen kleineren Kuchen  $v(S')$ . Zwecks Motivation und Vereinfachung nehmen wir Monotonie an.

Wir interpretieren die Konstante  $\delta \in [0, 1[$  als Geduld von Spieler  $j$ . Hohe Werte nahe 1 bedeuten: Spieler  $j$  gibt nicht so schnell auf. Kleine Werte nahe 0 bedeuten: Spieler  $j$  schmeißt schnell hin. Idealisiert stellen wir uns den Grenzübergang  $\delta \nearrow 1$  vor.

Die Abbruchwkt  $1 - \delta \searrow 0$  wirkt als allgegenwärtiger Wertverlust. Allein sie übt Druck auf die Spieler aus und erzwingt Fortschritt. Theoretisch könnten die Verhandlungen unendlich lange dauern, doch mit Wkt 1 sind sie endlich, die Auszahlungen also wohldefiniert.

Damit ist das Verhandlungsspiel  $\Gamma = \Gamma(v, \delta)$  festgelegt. Wir suchen nun alle teilspielperfekten Gleichgewichte. Zur Vereinfachung betrachten wir nur stationäre Strategien, also ohne Erinnerung an vorige Runden. Zudem lösen wir Indifferenz zugunsten des schnellsten Spielendes.

Wir betrachten stationäre Strategien ohne Erinnerung an vorige Runden. Zudem lösen wir Indifferenz zugunsten des schnellsten Spielendes.

### Satz M3B: Hart–Mas-Colell 1996

Seien  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\delta \in [0, 1[$ . Das Koalitions-Verhandlungs-Spiel  $\Gamma = \Gamma(v, \delta)$  hat genau ein stationäres teilspielperfektes Gleichgewicht.

(0) Das Angebot  $a_S^j \in \mathbb{R}^S$  jedes Spielers  $j \in S \subseteq I$  ist pareto-effizient:

$$a_S^j(S) := \sum_{i \in S} a_S^j(i) = v(S)$$

(1) Der Erwartungswert über alle  $j \in S$  ist gleich dem Shapley-Wert:

$$a_S^* := \frac{1}{|S|} \sum_{j \in S} a_S^j = \sigma(v|_{\mathfrak{P}(S)})$$

(2) Jedes Angebot  $a_S^j$  wird angenommen und ist gegeben durch

$$a_S^j(i) = \delta a_S^*(i) + (1 - \delta) a_{S \setminus \{j\}}^*(i) \quad \text{für alle } i \in S \setminus \{j\}.$$

Für  $\delta \nearrow 1$  konvergiert  $a_S^j \rightarrow a_S^*$  also gegen den Shapley-Wert.

**Aufgabe:** Formalisieren Sie dieses Spiel in extensiver Form  $(X, u)$  als einen Spielbaum  $X = X^\circ \sqcup X^\bullet$  mit den aktiven Zuständen  $X^\circ$  und den terminalen Zuständen  $X^\bullet$  sowie den Auszahlungen  $u: X^\bullet \rightarrow \mathbb{R}^I$ .

**Lösung:** Wir übersetzen die verbal gegebene Definition M3A in das folgende formale Protokoll, wie es die extensive Form verlangt:

$X_0^\circ$	$= \{v = (I)\}$	Start mit $S = I$
$X_{4n}^\bullet$	$= \{v = (I, \dots, \emptyset)\}$	mit Auszahlung $u(v) = 0$
$X_{4n}^\circ$	$= \{v = (I, \dots, S)\}$	mit $\emptyset \neq S \subseteq I$ , aktive Spieler
$X_{4n+1}^\circ$	$= \{v = (I, \dots, S, j)\}$	mit $j \in S$ , ausgeloster Spieler
$X_{4n+2}^\circ$	$= \{v = (I, \dots, S, j, a)\}$	mit $a \in \mathbb{R}^S$ , $a(S) \leq v(S)$
$X_{4n+3}^\bullet$	$= \{v = (I, \dots, S, j, a, \clubsuit)\}$	mit Auszahlung $u(v) = a$
$X_{4n+3}^\circ$	$= \{v = (I, \dots, S, j, a, \heartsuit)\}$	Ablehnung, nächste Runde
$X_{4n+4}^\circ$	$= \{v = (I, \dots, S, j, a, \heartsuit, S')\}$	mit $S' = S$ oder $S' = S \setminus \{j\}$

Hierbei identifizieren wir  $a \in \mathbb{R}^S$  abkürzend mit  $a \in \mathbb{R}^I$ ,  $\text{supp}(a) \subseteq S$ .

Gegeben sei  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(\emptyset) = 0$  sowie der Parameter  $\delta \in [0, 1[$ . Wir betrachten eine Familie  $(\alpha_S^j)_{j \in S \subseteq I}$  von Zuweisungen  $\alpha_S^j \in \mathbb{R}^I$  mit  $\text{supp}(\alpha_S^j) \subseteq S$  und  $\alpha_S^j(S) = v(S)$ . Wir definieren ihren Erwartungswert

$$\alpha_S^* := \frac{1}{|S|} \sum_{j \in S} \alpha_S^j$$

und verlangen die Rekursionsgleichungen

$$\alpha_S^j(i) = \delta \alpha_S^*(i) + (1 - \delta) \alpha_{S \setminus \{j\}}^*(i) \quad \text{für alle } i \in S \setminus \{j\}.$$

Jede solche Familie  $(\alpha_S^j)_{j \in S \subseteq I}$  nennen wir ein Angebotsgleichgewicht.

**Lemma M3C: Existenz und Eindeutigkeit des Gleichgewichts**

- (1) Es existiert genau eine Lösung  $(\alpha_S^j)_{j \in S \subseteq I}$  dieser Gleichungen.
- (2) Für jede Teilmenge  $S \subseteq I$  ist  $\alpha_S^* = \sigma(v|_{\mathfrak{P}(S)})$  der Shapley-Wert.

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

**Lösung:** Aus  $\alpha_S^j(S) = v(S)$  und den Rekursionsgleichungen folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_S^j(j) &= v(S) - \sum_{i \neq j} \alpha_S^j(i) \\ &= v(S) - \sum_{i \neq j} \delta \alpha_S^*(i) + (1 - \delta) \alpha_{S \setminus \{j\}}^*(i) \\ &= v(S) - \delta [v(S) - \alpha_S^*(j)] - (1 - \delta) v(S \setminus \{j\}) \\ &= \delta \alpha_S^*(j) + (1 - \delta) [v(S) - v(S \setminus \{j\})] \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert  $\alpha_S^*(i)$  über alle  $j \in S$  erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \alpha_S^*(i) &= \frac{1}{|S|} \sum_{j \in S} \alpha_S^j(i) \\ &= \delta \alpha_S^*(i) + \frac{1 - \delta}{|S|} \left[ v(S) - v(S \setminus \{i\}) + \sum_{j \neq i} \alpha_{S \setminus \{j\}}^*(i) \right]. \end{aligned}$$

Dank  $\delta \in [0, 1[$  erfüllen die Mittelwerte also die Rekursionsgleichung

$$\alpha_S^*(i) = \frac{1}{|S|} \left[ v(S) - v(S \setminus \{i\}) + \sum_{j \neq i} \alpha_{S \setminus \{j\}}^*(i) \right].$$

**Behauptung 1:** Dadurch sind alle Werte  $\alpha_S^*(i)$  eindeutig festgelegt.

**Induktion** über die Elementzahl  $|S|$ : Für  $S = \{i\}$  gilt  $\alpha_S^*(i) = v(S)$ . Die Rekursionsgleichung bestimmt dann  $\alpha_S^*(i)$  für  $|S| = 2, 3, \dots, |I|$ .

**Folgerung 1:** Das zeigt Existenz und Eindeutigkeit von  $(\alpha_S^j)_{j \in S \subseteq I}$ .

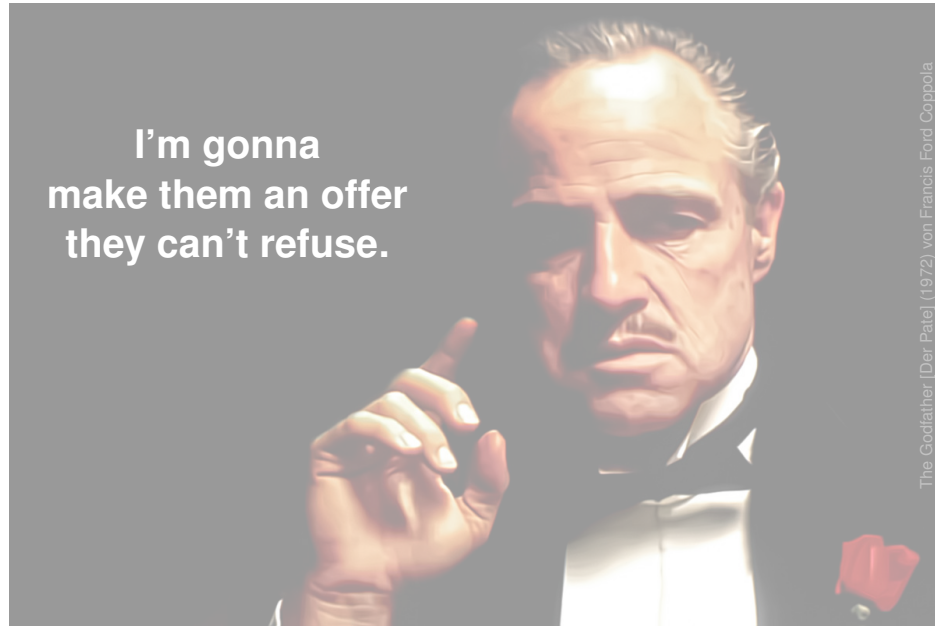
**Behauptung 2:** Für jede Teilmenge  $S \subseteq I$  gilt  $\alpha_S^* = \sigma(v|_{\mathfrak{P}(S)})$ .

**Beweis:** Die Berechnung  $(v, S) \mapsto \alpha_S^* \in \mathbb{R}^S \subseteq \mathbb{R}^I$  ist unabhängig von  $\delta$ . Sie erfüllt alle vier Shapley-Axiome, nämlich: Pareto-Effizienz (PAR), Neutralität (NTR), Symmetrie (SYM) und schließlich Additivität (ADD). Dank der Eindeutigkeit im Satz M2A von Shapley folgt  $\alpha_S^* = \sigma(v|_{\mathfrak{P}(S)})$ .

**Alternativer Beweis:** Ebenso gut könnten wir nachrechnen, dass der Shapley-Wert dieselben Rekursionsgleichungen erfüllt. Das erfordert weitere Rechnung; wir appellieren lieber an Satz M2A.

**Folgerung 2:** Das Angebot ist im Mittel der Shapley-Wert.

Das beweist Lemma M3C zur Existenz und Eindeutigkeit des Angebotsgleichgewichts und erklärt die Verbindung zum Shapley-Wert. QED



Gegeben sei  $v: \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(\emptyset) = 0$ . Wir setzen im Folgenden  $v$  als superkumulativ voraus und verschieben zu  $v(i) = 0$  für alle  $i \in I$ .

- (1) Für das Angebotsgleichgewicht gilt dann  $\alpha_S^* \geq 0$  für alle  $S \subseteq I$ .  
 (2) Gegeben sei eine Familie  $(a_S^j, b_S^j)_{j \in S \subseteq I}$  von Zuweisungsvektoren  $a_S^j, b_S^j \in \mathbb{R}^S$ ; dabei gelte die Zulässigkeitsbedingung  $a_S^j(S) \leq v(S)$ .

Diese definieren den folgenden Strategievektor von  $\Gamma(v, \delta)$ :

- Spieler  $j \in S$  schlägt immer das Angebot  $a_S^j \in \mathbb{R}^S$  vor.
- Einen Vorschlag  $x \in \mathbb{R}^S$  von Spieler  $j \in S$  akzeptiert Spieler  $i \in S$  gdw  $x(i) \geq b_S^j(i)$ .

Diese Strategien sind stationär, also ohne Erinnerung an vorige Runden.

#### Lemma M3D: Charakterisierung stationärer Gleichgewichte

Dies ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, kurz  $s \in \text{PNE}(\Gamma(v, \delta))$ , genau dann, wenn  $a_S^j = b_S^j = \alpha_S^j$  für alle  $j \in S \subseteq I$  gilt.

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

## Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

M313  
Beispiel

Wir kommen schließlich auf unser Eingangsbeispiel zurück.

Fünf Personen verhandeln über Zusammenarbeit und Gewinnaufteilung: ein Kapitalist 1, der das dringend benötigte Kapital zur Verfügung stellt, dazu zwei gelernte Arbeiter 2, 3 und zwei ungelernte Arbeiter 4, 5.

Für jede Teilmenge  $S \subseteq I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ist der gemeinsame Gewinn

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \notin S, \\ 400 \cdot \frac{\# \text{ Gelernte}}{|S \cap \{2, 3\}|} + 200 \cdot \frac{\# \text{ Ungelernte}}{|S \cap \{4, 5\}|} & \text{falls } 1 \in S. \end{cases}$$

**Aufgabe:** Wie können / sollen / werden die fünf den Gewinn aufteilen? Gibt es hierzu eine „faire“ und „gerechte“ Lösung, etwa als Schlichtung? Würden Sie z.B. die Aufteilung (600, 200, 200, 100, 100) vertreten? Was sagt in diesem Fall der Shapley–Wert? Ist das gerecht?

$$\bar{v}(i) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho} \Delta_i^{\rho}(v) = \sum_{S: i \in S \subseteq I} \frac{|S \setminus \{i\}|! \cdot |I \setminus S|!}{|I|!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

## Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

M314  
Beispiel

Der Shapley–Wert  $\bar{v}(i)$  gibt an, welche Auszahlung der Spieler  $i \in I$  erwarten kann (deskriptiv) oder erhalten soll (normativ). Der schöne Satz M2A löst eine abstrakt-axiomatische Frage und bewährt sich in zahlreichen Anwendungen in der Ökonomie, Politik, Informatik, etc.

Die allgemeine Problemstellung lässt sich wie folgt umschreiben: Eine Koalition  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  von Individuen kooperiert und kann so einen Gesamtgewinn  $v(I)$  sichern. Wie soll dieser aufgeteilt werden? Gibt es hierauf eine überzeugende und universelle Antwort?

Die Spieler tragen i.A. unterschiedlich viel zum Gesamtertrag bei. Dies wird für jede Teilkoalition  $S \subseteq I$  durch den Wert  $v(S)$  gemessen. Das bestimmt die Verhandlungsmacht, etwa durch Locken und Drohen. Welche Verteilung entsteht daraus? Wie wichtig ist jeder Spieler?

😊 Der Shapley–Wert gibt hierauf eine präzise und plausible Antwort. Er gehört zum Fundament und den ersten Erfolgen der Spieltheorie. Er ist ein Werkzeug, und Sie sollen lernen, es sachgerecht zu nutzen. Dazu gehört neben der korrekten Rechnung auch die Interpretation.

## Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

M315  
Beispiel

Das ist ein guter Moment zur kritischen Rückschau. Der mathematische Sachverhalt ist geklärt, weitere Übungen helfen Ihnen zum Verständnis. Spannend bleibt weiterhin die sozio-ökonomische Interpretation!

Der Shapley–Wert  $\sigma_i(v)$  misst den strategischen Wert des Spielers  $i \in I$ : Er gibt eine präzise quantitative Bewertung seiner strategischen Position in dem Koalitionsspiel  $v$ , zudem ist er transparent und nachvollziehbar. Zur Anschauung und Motivation habe ich häufig Begriffe wie „fair“ oder „gerecht“ verwendet — und anschließend auch mathematisch präzisiert. Löst das Ergebnis das implizite Versprechen auf Gerechtigkeit ein?

Hierzu muss ich einschränken und wie immer betonen, dass Lösungen nur „fair“ oder „gerecht“ bezüglich des betrachteten Spiels sein können. Das ist ein wichtiger Aspekt der Transparenz: Die Schlichtung beruht nur auf den vorgelegten Daten, externe Überlegungen fließen nicht ein. Andernfalls müssen wir das Spiel umfassender formulieren!

☹️ Ist das Spiel selbst unfair oder ungerecht, so kann der Shapley–Wert oder sonst irgendeine Lösung / Schlichtung das nicht wunderheilen.

## Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

M316  
Beispiel

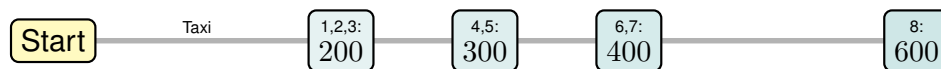


Der Mensch ist ein soziales Wesen. Erst die neolithische Revolution zu Ackerbau und Viehzucht ermöglichte große Zivilisationen. Wie gehen wir mit diesen Möglichkeiten um?

Jede entwickelte Gesellschaft nutzt Arbeitsteilung und Spezialisierung, um die Produktivität zu steigern. Industrialisierung und Globalisierung beschleunigen diesen Prozess.

Gleichzeitig drängt das Problem der Verteilung: Wer trägt die Kosten? Wer profitiert von den gemeinsamen Erträgen? Diese Fragen sind ewig aktuell und stellen sich immer neu. Sie entscheiden unsere Zukunft.

Im **Casino Royal** (08.07.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die Teilung von Kosten und Erträgen als Verhandlungsspiel zu erproben. Zum Casino kamen acht Teilnehmer:innen, davon waren die meisten, aber nicht alle, aus der Vorlesung mit dem Shapley-Wert frisch vertraut.



Die Spieler 1, . . . , 8 teilen sich ein Sammeltaxi mit den obigen Kosten. Jede Teilnehmer:in bekommt zufällig eine der Rollen 1, . . . , 8 zugewiesen. Ziel des Spiels ist, eine gemeinsame Kostenverteilung auszuhandeln, die einstimmig angenommen wird. Auszahlung ist jeweils die Ersparnis.

Zum Ablauf der Verhandlungen geben wir zunächst keine Struktur vor. Daher werden spontan Vorschläge formuliert und vorläufig gesammelt. Hier kennt jeder Spieler seine Rolle, aber a priori nicht die anderen. Manche Vorschläge zeigen eine gewisse Voreingenommenheit.

H: „Jeder zahlt sein zusätzliches Stück, entsprechend geteilt.“

1	2	3	4	5	6	7	8
67	67	67	50	50	50	50	200

J: „Wir sollten 600 auf alle gleich aufteilen, das ist gerecht.“

1	2	3	4	5	6	7	8
75	75	75	75	75	75	75	75

P: „Spieler 8 sollte 600 zahlen, alle anderen fahren gratis mit.“

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	600

T: „Ich schlage den Shapley-Wert vor, nur der ist wirklich gerecht.“

1	2	3	4	5	6	7	8
25	25	25	45	45	78	78	179

S: „Man könnte allen die gleiche Ersparnis von 250 garantieren.“

1	2	3	4	5	6	7	8
-50	-50	-50	50	50	150	150	350

W: „Bei S sparen ja manche mehr, als sie bezahlen. Das ist unlogisch. Bei J zahlen die ersten mehr, als sie alleine bezahlen. Das ist absurd!“

P: „Ich habe in der Vorlesung heute Morgen genau aufgepasst. Es existiert genau eine gerechte Lösung, und das ist Vorschlag T.“

J: „Ich kenne die Vorlesung nicht. Was soll daran gerecht sein?“

H: „Das ist anschaulich: Jeder zahlt die Kosten, die er verursacht.“

W: „Das ist ein zentraler Satz aus der Vorlesung: Der Shapley-Wert ist die eindeutige Lösung, die ein paar willkürliche Axiome erfüllt.“

(In meinen Vorlesungen frage ich mich oft, was bei den Studierenden überhaupt ankommt und dauerhaft hängen bleibt. Jetzt höre ich es.)

J: „Das überzeugt mich nicht. Da könnte ich ja ebenso willkürlich J<sup>+</sup> fordern: Alle erhalten die gleiche Ersparnis, nur ich 10% mehr.“

T: „Ja, das stimmt schon. Eine weitere willkürliche Alternative wäre J<sup>-</sup>: Alle erhalten die gleiche Ersparnis, nur J. bekommt 10% weniger.“

Die Diskussion dreht sich munter im Kreis, fast jeder plädiert für seinen eigenen Vorschlag, vermutlich weil gerade dieser für ihn vorteilhaft ist.

Die Teilnehmer:innen haben viele gute Vorschläge, aber keine Einigung. Um 14:24 verschärfen wir daher die Regeln: „Um 14:30 hält das Taxi am ersten Stopp. Wenn bis dahin keine Einigung erzielt ist, kostet das 50 für jeden wegen der zusätzlichen Wartezeit.“ Diese Drohung wirkt Wunder: Nach kurzer Aussprache wird Vorschlag T einstimmig angenommen. Der Shapley-Wert setzt sich durch, wenn auch auf dubiose Weise.

**Veil of ignorance?** Erfahrungsgemäß werden Verhandlungsargumente durch die Rolle im Spiel geprägt, dadurch leidet die Glaubwürdigkeit.

Wir spielen erneut. Frau H. schlägt vor, eine Einigung vor der Zulassung der Rollen vorzubereiten, selbst wenn dies im Spiel nicht bindend ist.

W: „Spieler 8 zahlt fast alles, ein kleiner Anreiz sollte genügen.“

1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	599

Jetzt werden die Rollen 1, . . . , 8 zugewiesen. Weitere Aussprache wird nicht gewünscht, Vorschlag W wird einstimmig angenommen. Erstaunlich! In vielen realen Konflikten ist dieser Trick nicht möglich. Leider!

## Arbeitskampf: Spieler:innen aller Länder, einigt euch!

M321  
Casino

Ein Unternehmen ringt um die Aufteilung der gemeinsamen Gewinne. Ohne die Chefin (1) geht gar nichts. Ihr Sohn (2) trägt zwar nichts bei, aber er stört auch nicht. Die ungelerten Arbeiter:innen (3, 4, 5, 6) erwirtschaften 300, die gelernten Arbeiter:innen (7, 8) sogar 500.

Für jede Teilmenge  $S \subseteq I = \{1, \dots, 8\}$  ist der Gewinn demnach

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \notin S, \\ 300 \cdot \frac{\# \text{Ungelernte}}{|S \cap \{3, 4, 5, 6\}|} + 500 \cdot \frac{\# \text{Gelernte}}{|S \cap \{7, 8\}|} & \text{falls } 1 \in S. \end{cases}$$

Wir spielen die Verhandlung M3A nach Hart–Mas-Colell mit  $\delta = 3/4$ . Jede Teilnehmer:in bekommt zufällig eine der Rollen 1, ..., 8 zugewiesen; diese kann in den Verhandlungen offengelegt werden, muss aber nicht. Die Abstimmungen sind geheim, kein sozialer Druck oder Kontrolle.

Nach Losentscheid vorschlagen zu dürfen, ist ein wertvolles Privileg und zugleich eine riskante Bürde, denn bei Ablehnung droht der Rauswurf. Diese raffinierten Spielregeln sorgen für ein Gleichgewicht der Kräfte und führen so zum Shapley–Wert (Satz M3B). Soweit die Theorie!

## Arbeitskampf: Spieler:innen aller Länder, einigt euch!

M322  
Casino

1. Zu verteilen sind 2200. P: „Jeder ist wichtig und leistet seinen Beitrag. Daher schlage ich vor, jeder bekommt 300, der Sohn allerdings nur 100.“

1	2	3	4	5	6	7	8	abgelehnt,
300	100	300	300	300	300	300	300	scheidet aus

2. Zu verteilen sind 1900. Ö: „Also gut, wir sollten etwas nachbessern. Die Gelernten verdienen mehr Gehalt, die Ungelernten etwas weniger.“

1	2	<del>3</del>	4	5	6	7	8	abgelehnt,
300	50		250	250	250	400	400	scheidet aus

3. Zu verteilen sind 1600. C: „Arbeit ist Arbeit, wir sind alle solidarisch. Die Ungelernten sollten nur etwas weniger verdienen als die Gelernten.“

1	2	<del>3</del>	<del>4</del>	5	6	7	8	abgelehnt,
299	1			300	300	350	350	bleibt im Spiel

4. Zu verteilen sind 1600. H: „Schön und gut, doch das genügt nicht. Wir müssen die Chefin überzeugen und ihr dazu etwas mehr bieten.“

1	2	<del>3</del>	<del>4</del>	5	6	7	8	abgelehnt,
450	50			200	200	350	350	bleibt im Spiel

## Arbeitskampf: Spieler:innen aller Länder, einigt euch!

M323  
Casino

5. Zu verteilen sind 1600. Ö: „Auch ich fürchte, so können wir die Chefin noch nicht überzeugen. Sie sollte noch deutlich mehr bekommen.“

1	2	<del>3</del>	<del>4</del>	5	6	7	8	abgelehnt,
580	20			200	200	300	300	bleibt im Spiel

6. Zu verteilen sind 1600. H: „Wer ist unzufrieden? Was wollt ihr?“ Ein geschickter Verhandlungszug, die direkte Aussprache ergibt:

1	2	<del>3</del>	<del>4</del>	5	6	7	8	abgelehnt,
450	30			230	230	330	330	bleibt im Spiel

7. Zu verteilen sind 1600. Ö: „Ich fürchte weiterhin, es scheitert an der Chefin. Als Kompromiss sollte sie wieder etwas mehr bekommen.“

1	2	<del>3</del>	<del>4</del>	5	6	7	8	abgelehnt,
525	25			225	225	300	300	bleibt im Spiel

8. Zu verteilen sind 1600. T: „Ich bin die Chefin, ohne mich läuft nichts. Der letzte Vorschlag war schon recht vernünftig, ich bleibe dabei.“

1	2	<del>3</del>	<del>4</del>	5	6	7	8	abgelehnt,
525	25			225	225	300	300	scheidet aus

## Arbeitskampf: Spieler:innen aller Länder, einigt euch!

M324  
Casino

Der Verlauf der Verhandlungen ist eindrücklich und überaus lehrreich. Die Vorschläge sind ernsthaft bemüht, denn viel steht auf dem Spiel! Der mühsame Fortschritt ist spürbar, leider lockt die leichte Ablehnung. Die Verhandlungen sind daher eher zäh und es kommt zu Verlusten.

In der achten Runde ergreift erstmals die Chefin das Wort und gibt sich zu erkennen. Alle wissen um das Risiko, sie nun zu verlieren, dennoch stimmen einige gegen ihren Vorschlag. Sie scheidet zufällig sogar aus! Das Schicksal schreibt die besten Geschichten, zumindest im Casino. Die Theorie weist den Weg, das Experiment ist der kritische Prüfstein. Wer das selbst live erlebt hat, sieht die Spieltheorie mit anderen Augen!

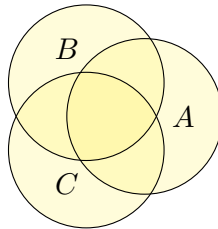
**Übung:** Wo sehen Sie Schwächen dieses Verhandlungsmechanismus? Nach Existenz und Eindeutigkeit des Gleichgewichts interessiert uns für praktische Anwendungen die „Konvergenz“ und die „Geschwindigkeit“. Hilft hier der *veil of ignorance* oder schadet er als *curse of anonymity*? Wie erzielen wir möglichst schnell Einigung ohne große Verluste? Das sind zentrale Fragen des Mechanismendesign!

**Aufgabe:** Sei  $(\Omega, \mathbf{P})$  ein WRaum (allgemein ein Maßraum, evtl. signiert).  
 (1) Erklären Sie graphisch und rechnerisch die folgende Siebformel:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cup B \cup C) &= +\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) \\ &\quad - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbf{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

- (2) Was erhalten Sie im Spezialfall, wenn  $A, B, C$  unabhängig sind?  
 (3) Formulieren und erklären Sie die Formel für  $\mathbf{P}(A \cup B \cup C \cup D)$ .  
 (4) Formulieren Sie die allgemeine Siebformel: Aus  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  folgt  $\prod_{i=1}^n (\mathbf{I}_A - \mathbf{I}_{A_i}) = 0$  und somit  $\mathbf{I}_A = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{I}_{A_J}$ .

**Lösung:** (1a) Die Summe  $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$  zählt manche Elemente doppelt oder gar dreifach. Nach Korrektur  $-\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C)$  zählen die Elemente in  $A \cap B \cap C$  gar nicht mehr. Nach Korrektur  $+\mathbf{P}(A \cap B \cap C)$  stimmt alles.



(1b) Wir nutzen  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$  und finden:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}((A \cup B) \cap C) \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbf{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

(2) Sind  $A, B, C$  unabhängig, so finden wir die vertraute Produktformel:

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - [1 - \mathbf{P}(A)][1 - \mathbf{P}(B)][1 - \mathbf{P}(C)]$$

(4) Für  $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$  und  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  gilt  $\prod_{i=1}^n (\mathbf{I}_A - \mathbf{I}_{A_i}) = 0$ , denn für jedes  $x \in A$  ist mindestens ein Faktor Null. Für jede Indexmenge  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  sei  $A_J := \bigcap_{i \in J} A_i$  die Schnittmenge, speziell  $A_\emptyset = A$ . Wir erhalten die **Siebformel**, auch **Inklusions-Exklusions-Prinzip**:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_A &= \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{I}_{A_J}, \\ \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{P}(A_J). \end{aligned}$$

**Aufgabe:** (nach Lewis Carroll) Projekte im Research & Development leiden erfahrungsgemäß zu 70% an irrealen Zielen, 75% an schlechter Kommunikation, 80% an Missmanagement, 85% an Zeitmangel.

Wie viele Projekte leiden sowohl an irrealen Zielen, an schlechter Kommunikation, an Missmanagement als auch an Zeitmangel?  
 (1) höchstens? (2) mindestens? (3) wenn diese unabhängig sind?

Zeichnen Sie Mengen  $I, K, M, Z \subset \Omega$ , die diese Werte realisieren!

$MZ$	$Z$			
$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$ $K$
$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$
$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$

$MZ$ $K$	$MZ$ $K$	$MZ$ $K$	$MZ$ $K$	$MZ$ $K$
$MZ$ $I$	$MZ$ $I$	$MZ$ $I$	$MZ$ $I$	$MZ$ $I$ $K$
$Z$ $IK$	$Z$ $IK$	$Z$ $IK$	$Z$ $IK$	$MZ$ $I$
$MZ$ $IK$	$MZ$ $IK$	$M$ $IK$	$M$ $IK$	$M$ $IK$

**Lösung:** (1) Höchstens 70% leiden an allen vier; das ist offensichtlich.  
 (2) Mindestens 10% leiden an allen vier; das rechnen wir geduldig aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(I) &= 0.7 \\ \mathbf{P}(I \cap K) &= \mathbf{P}(I) + \mathbf{P}(K) - \mathbf{P}(I \cup K) \\ &\geq 0.7 + 0.75 - 1 = 0.45 \\ \mathbf{P}(I \cap K \cap M) &= \mathbf{P}(I \cap K) + \mathbf{P}(M) - \mathbf{P}((I \cap K) \cup M) \\ &\geq 0.45 + 0.8 - 1 = 0.25 \\ \mathbf{P}(I \cap K \cap M \cap Z) &= \mathbf{P}(I \cap K \cap M) + \mathbf{P}(Z) - \mathbf{P}((I \cap K \cap M) \cup Z) \\ &\geq 0.25 + 0.85 - 1 = 0.1 \end{aligned}$$

Die oben skizzierten Graphiken zeigen, dass diese Werte tatsächlich angenommen werden können. Unsere Schranken sind also optimal.

(3) Bei Unabhängigkeit von  $I, K, M, Z$  gilt die einfache Produktformel:

$$\mathbf{P}(I \cap K \cap M \cap Z) = \mathbf{P}(I) \cdot \mathbf{P}(K) \cdot \mathbf{P}(M) \cdot \mathbf{P}(Z) = 0.357$$

☺ Die untere Schranke 10% und die obere Schranke 70% gelten immer, die Produktformel gilt nur im Spezialfall stochastischer Unabhängigkeit.

Gegeben sei eine endliche Spielermenge  $I$  und hierüber ein Spiel

$$u : A^I := \prod_{i \in I} A^i \rightarrow \mathbb{R}^I : a \mapsto u(a).$$

Angenommen, eine Teilmenge  $S \subseteq I$  der Spieler bildet eine Koalition; als Reaktion vereinen sich alle anderen zur Gegenkoalition  $T = I \setminus S$ . Die beiden Koalitionen konfrontieren sich nun im Zwei-Personen-Spiel

$$\tilde{u} : A^S \times A^T \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \tilde{u}^S(a, b) := \sum_{i \in S} u^i(a \cup b) \\ \tilde{u}^T(a, b) := \sum_{j \in T} u^j(a \cup b) \end{bmatrix}.$$

Hat  $u$  konstante Summe  $c$ , so auch  $\tilde{u}$ , denn  $\tilde{u}^S + \tilde{u}^T = \sum_{i \in I} u^i = c$ . In diesem Falle hat das Spiel  $\tilde{u}$  den eindeutigen Wert

$$v(S) := \max_{a \in [A^S]} \min_{b \in [A^T]} \tilde{u}^S(a, b) = \min_{b \in [A^T]} \max_{a \in [A^S]} \tilde{u}^S(a, b).$$

**Aufgabe:** Dies definiert  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(\emptyset) = 0$  und  $v(I) = c$ . Ist die Abbildung  $v$  super/sub/additiv? super/sub/modular?

Auszahlungen werden summiert, alles kommt zunächst in einen Topf; wie dieser aufgeteilt wird, werden wir später noch genauer untersuchen. Wir nennen dies ein **(Koalitions-)Spiel mit transferierbarem Nutzen**: er ist nicht bloß subjektiv individuell, sondern objektiv und übertragbar! Am einfachsten stellen wir uns hierzu alle Auszahlungen in **Geld** vor. Anschaulich erwarten wir Monotonie: Gemeinsamkeit macht stark! Wir erwarten auch Superadditivität, vielleicht sogar Supermodularität. Ob diese guten Eigenschaften tatsächlich gelten, ist Ziel dieser Aufgabe.

Zuvörderst kommt es bei einem Spiel  $u : A^I \rightarrow \mathbb{R}^I$  auf die geordneten Ergebnismengen  $(\mathbb{R}^i, <^i)$  an: Jeder Spieler  $i \in I$  muss vor allem seine möglichen Ergebnisse  $u^i(a)$  vergleichen können, also linear anordnen. Wir können sie beliebig abändern, solange die Monotonie gewahrt bleibt. Nun jedoch werden die Ergebnisse summiert, wir brauchen daher eine gemeinsame Ergebnismenge  $(\mathbb{R}, <)$  und darauf zudem die Struktur einer abelschen Gruppe. Die naheliegende und bewährte Wahl ist... Trommelwirbel... der geordnete Körper der reellen Zahlen  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ .

Wir wollen die Rechnung auch für allgemeine Spiele durchführen. Gegeben sei eine endliche Spielermenge  $I$  und hierüber ein Spiel

$$u : A^I := \prod_{i \in I} A^i \rightarrow \mathbb{R}^I : a \mapsto u(a).$$

Hierzu definieren wir die Abbildungen  $\hat{v}, \check{v} : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\hat{v}(S) := \max_{a \in [A^S]} \min_{b \in [A^T]} \tilde{u}^S(a, b),$$

$$\check{v}(S) := \min_{b \in [A^T]} \max_{a \in [A^S]} \tilde{u}^S(a, b),$$

wobei jeweils  $T = I \setminus S$  die Gegenkoalition zu  $S$  ist.

**Aufgabe:** Ist  $\hat{v}, \check{v}$  monoton? super/sub/additiv? super/sub/modular?



**Proposition M4A: Koalitionsspiele mit konstanter Summe**

Sei  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  ein Koalitionsspiel mit konstanter Summe, das heißt, es gilt  $v(S) + v(I \setminus S) = v(I)$  für jede Koalition  $S \subseteq I$ .

(1) Ist  $v$  additiv, so ist der Kern einpunktig,  $\text{Core}(v) = \{\sigma\}$ .

(2) Ist  $v$  nicht additiv, so ist der Kern leer,  $\text{Core}(v) \neq \emptyset$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie diese Aussagen.

**Lösung:** (1) Für jede Allokation  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $x(I) = v(I) = \sum_{i \in I} v(i)$ . Individuelle Rationalität verlangt  $x(i) \geq v(i)$  für alle  $i \in I$ . Daraus folgt  $0 = x(I) - v(I) = \sum_{i \in I} x(i) - v(i)$ , und somit  $x(i) = v(i)$  für alle  $i \in I$ . Damit gilt  $x \in \text{Core}(v)$ , denn für jede Koalition  $S \subseteq I$  gilt  $x(S) = v(S)$ . Zusatz: In diesem Falle ist  $x = \sigma$  der Shapley-Wert.

(2) Wir zeigen die Kontraposition: Gilt  $\text{Core}(v) \neq \emptyset$ , so ist  $v$  additiv. Sei  $x \in \text{Core}(v)$ , also  $x(I) = v(I)$  und  $x(S) \geq v(S)$  für alle  $S \subseteq I$ . Für  $S = I \setminus T$  gilt dann  $v(S) = v(I) - v(T) \geq x(I) - x(T) = x(S)$ . Somit gilt  $v(S) = x(S)$  für alle  $S \subseteq I$ , und ist  $v = x$  additiv. QED

Zwei benachbarte Städte 1, 2 wollen ein Klärwerk bauen, entweder gemeinsam oder notfalls einzeln. Die **Kosten** der drei Varianten sind:

$$c : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto c(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } S = \emptyset, \\ 7 & \text{falls } S = \{1\}, \\ 11 & \text{falls } S = \{2\}, \\ 15 & \text{falls } S = \{1, 2\}. \end{cases}$$

Die **Kostenersparnis** ist demnach gegeben durch

$$v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto v(S) = \left[ \sum_{i \in S} c(i) \right] - c(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |S| < 2, \\ 3 & \text{falls } |S| = 2. \end{cases}$$

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie die Shapley-Werte  $\bar{c}$  und  $\bar{v}$  und den Kern. Welchen allgemeinen Zusammenhang können Sie hier erkennen? (2) Wie / Können Sie hier die Nash-Verhandlungslösung nutzen?

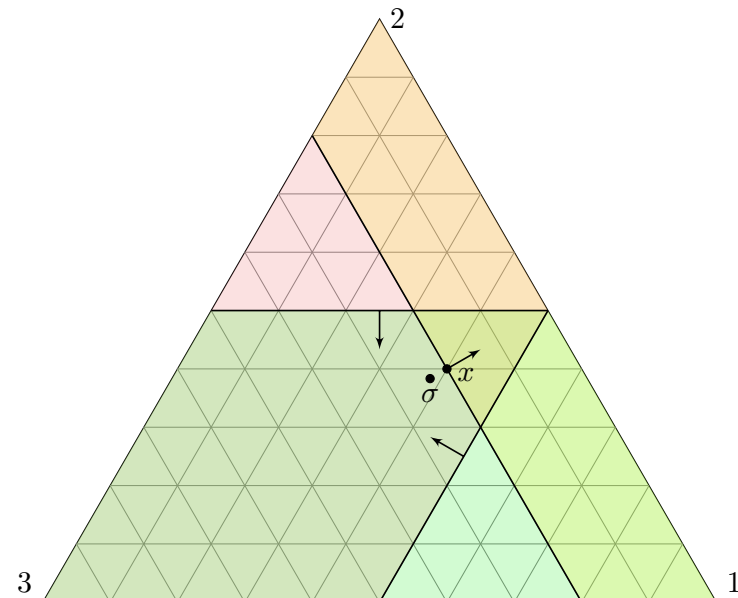
**Aufgabe:** Auf der Menge  $I = \{1, 2, 3\}$  betrachten wir das Koalitionsspiel

$$v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |S| \leq 1, \\ 4/5 & \text{falls } S = \{1, 2\}, \\ 1/2 & \text{falls } S = \{1, 3\}, \\ 1/2 & \text{falls } S = \{2, 3\}, \\ 1 & \text{falls } S = \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

(1) Berechnen Sie den Shapley-Wert  $\sigma(v) \in \mathbb{R}^I$ . Prüfen Sie nach, ob  $\sigma(v)$  im Kern  $\text{Core}(v)$  liegt. Widerspricht das nicht Satz M2A?

(2) Zeigen Sie  $\text{Core}(v) \neq \emptyset$  (a) geometrisch und (b) algebraisch: Formulieren Sie alle Ungleichungen, schreiben Sie diese explizit als Tucker-Tableau und lösen Sie es mit dem Simplex-Algorithmus.

(c) Falls Ihnen das zu viel Arbeit ist, hier die Minimalvariante: Prüfen Sie nach, dass der Punkt  $x = (2/5, 2/5, 1/5)$  im Kern liegt.



Ein **einfaches Koalitionsspiel** ist eine Abbildung  $v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \{0, 1\}$ , die also nur die Werte 0 und 1 annimmt, wobei  $v(\emptyset) = 0$  und  $v(I) = 1$ . Wir stellen uns  $v$  als eine Ja-Nein-Abstimmung vor und nennen  $S \subseteq I$  eine **gewinnende Koalition**, falls  $v(S) = 1$  gilt. Ein Spieler  $k \in I$  heißt **Vetospieler**, falls  $k$  zu allen gewinnenden Koalitionen gehört.

#### Proposition M4B: Kern eines einfachen Koalitionsspiels

Der Kern besteht aus allen Allokationen getragen von Vetospielern.

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussage nach!

**Lösung:** Für jede Allokation  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $x(I) = v(I) = 1$ , und individuelle Rationalität verlangt  $x(i) \geq v(i) \geq 0$  für alle  $i \in I$ .

Sei  $x \in \text{Core}(v)$  eine Kernallokation. Gilt  $v(S) = 1$  für ein  $S \subseteq I$ , so fordert kollektive Rationalität  $x(S) \geq v(S) = 1$ , also  $\text{supp}(x) \subseteq S$ . Somit liegt der Träger  $\text{supp}(x)$  im Durchschnitt aller Gewinnkoalitionen. Anders gesagt: Für  $x \in \text{Core}(v)$  und  $x(i) > 0$  ist  $i$  ein Vetospieler.

Umgekehrt: Jede Allokation  $x : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  getragen von Vetospielern liegt im Kern, denn jede Koalition  $S \subseteq I$  mit  $v(S) = 1$  enthält alle Vetospieler.

Gegeben sei die Spielermenge  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  sowie Stimmgewichte  $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und ein Quorum  $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Diese Daten definieren das Abstimmungsverfahren  $[q; g_1, g_2, \dots, g_n]$  durch die Funktion

$$v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sum_{i \in S} g_i < q, \\ 1 & \text{falls } \sum_{i \in S} g_i \geq q. \end{cases}$$

Diese Abbildung  $v$  ist monoton, denn aus  $S \subseteq T$  folgt  $v(S) \leq v(T)$ . Negatives Stimmgewicht  $g_i < 0$  ist denkbar, bricht aber die Monotonie.

Wie groß ist der Einfluss jedes Spielers  $i \in I$  in dieser Abstimmung? Eine erste Beobachtung ist klar, wenn auch in der Praxis oft missachtet: Der Einfluss ist nicht proportional zur Stimmenzahl / zum Stimmgewicht! Wir suchen daher einen **Machtindex** als verlässliche Quantifizierung. Hier findet der **Shapley–Wert** eine erstaunliche politische Anwendung.

Alternativ wird hierzu auch der **Banzhaf–Wert** herangezogen:

$$\beta_i(v) := \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq I \setminus \{i\}} v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

Der UN-Sicherheitsrat hat insgesamt 15 Mitglieder, davon 5 permanente (Frankreich, England, USA, Russland, China) und 10 nicht-permanente. Das Abstimmungsverfahren entspricht den Stimmgewichten

$$[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

Eine Abstimmung wird nur dann gewonnen, wenn alle fünf permanenten Mitglieder dafür stimmen und zudem mindestens vier nicht-permanente.

**Aufgabe:** Berechnen Sie (0) den Kern und für jeden Spieler  $i \in I$  (1) den Shapley–Wert  $\sigma_i$  und zum Vergleich (2) den Banzhaf–Wert  $\beta_i$ .

Ist der Shapley–Wert oder der Banzhaf–Wert hier angemessen? Können Sie eine Interpretation oder Intuition hierzu entwickeln?

**Lösung:** (0) Kern ist der Simplex der permanenten Mitglieder (M4B). (1,2) Für  $i$  permanent und  $j$  nicht-permanent finden wir die Werte

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{421}{2145} \approx 0.19627, & \beta_i &= \frac{848}{214} \approx 0.05176, \\ \sigma_j &= \frac{4}{2145} \approx 0.00186, & \beta_j &= \frac{84}{214} \approx 0.00513. \end{aligned}$$

Ich nenne ein praktisches Beispiel aus dem Bereich **Data Science**. Vorgelegt sei eine große Datenbank zu Immobilienpreisen in Stuttgart. Gelistet sind Häuser und Wohnungen mit ihrem erzielten Verkaufspreis, zudem alle relevanten Eigenschaften wie Typ, Größe, Lage, Alter, etc.

Nehmen wir zur Vereinfachung an, jedes Kriterium  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  sei nur **binär**, also jeweils entweder zutreffend oder nicht zutreffend. Zu jeder Teilmenge  $S \subseteq I$  dieser Kriterien können wir aus der Datenbank dann den durchschnittlichen Preis  $v(S) \in \mathbb{R}$  dieser Kategorie berechnen. Wie groß ist der Einfluss der Größe / der Lage / der Alters auf den Preis? Zur Interpretation der Daten ist dies eine überaus hilfreiche Größe!

Dieselbe Idee nutzt man zur Faktoranalyse im **Machine Learning**. Die Bilderkennung soll z.B. Photos von Katzen und Hunden trennen. Der Algorithmus lernt selbständig, aus den vorgelegten Daten seine Prognosen anzunähern. Auf Nachfrage kann er jedoch nicht erklären, welcher Teil des Bildes welchen Einfluss auf seine Entscheidung hat. Diese Interpretation kann wie oben durch Faktoranalyse entstehen.