Kapitel L

Verhandlungen, Nash–Lösung und Rubinstein–Implementierung

Harry: *Haggle properly. This isn't worth nineteen.*
Brian: *Well, you just said it was worth twenty.*
Harry: *Oh, dear. Oh, dear. Come on. Haggle!*
Brian: *Huh. All right. I'll give you ten.*
Harry: *That's more like it.*
Ten?! Are you trying to insult me?!
Me, with a poor dying grandmother?! Ten?!
Monty Python, *Life of Brian* (1979)

Inhalt dieses Kapitels L

1 Nashs axiomatische Verhandlungslösung
- Verhandlungsprobleme und Verhandlungslösungen
- Nashs Axiome und Nashs Verhandlungslösung
- Unabhängigkeit und Variation der Axiome
- Die monotone Verhandlungslösung

2 Rubinsteins Verhandlungsmodell durch alternierende Angebote
- Alternierende Angebote bei schrumpfendem Kuchen
- Verhandlungsgleichgewichte und die Nash–Lösung
- Rubinsteins Verhandlungsmodell und sein Ergebnis
- Eindeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlung

Motivation und Überblick

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemein Verhandlungssituationen, in denen zwei (oder mehr) Spieler über mögliche Ausgänge feilschen. Die Spieler wollen ein gemeinsames Ergebnis vereinbaren, etwa um darauf bauend das weitere gemeinsame Vorgehen zu koordinieren.

Jeder will sein Ergebnis maximieren. Je härter er verhandelt, umso mehr wird er vermutlich bekommen, es sei denn, die Verhandlungen scheitern, und er muss seine Drohungen ausführen, auch wenn sie nachteilig sind. Die Erfahrung zeigt, dass selbst rationale Spieler, die eine Einigung erzielen können und wollen, dies gelegentlich doch nicht erreichen. Dieses ganz praktische und alltägliche Problem wollen wir lösen.

Um ein drohendes Scheitern und damit allseitigen Schaden zu vermeiden, sind Spieler oft bereit, ihren Konflikt einer Schlichter:in zu übergeben, einem unabhängigen Schiedsgericht, das den Konflikt für sie lösen soll. Die Schlichter:in schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Alle Lösungen sollen „fair“ und „nachvollziehbar“ sein, die Schlichtung „konsistent“. Genau um diese grundlegenden Forderungen geht es hier.

Motivation und Überblick

Verhandlungstheorie (engl. *bargaining theory*) beginnt mit der Arbeit von John Nash: *The Bargaining Problem*, Econometrica 18 (1950) 155–162. In diesem Artikel formulierte er das Verhandlungsproblem, seine Axiome und zugehörige Verhandlungslösung; dies diskutieren wir im ersten Teil.

Dieser statisch-axiomatisch-kooperative Ansatz lässt sich dynamisch-strategisch-kompetitiv implementieren. Dieser Ansatz geht zurück auf F. Zeuthen: *Problems of Monopoly and Economic Warfare* (1930), K.G. Binmore: *Nash Bargaining Theory* (1987) und vor allem auf die (nach Nash zweite bahnbrechende) Arbeit von A. Rubinstein: *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, Econometrica 50 (1982) 97–110.

Die prozedurale Implementierung ergänzt die axiomatische Sichtweise, sie beteiligt die Spieler aktiv und erweitert wesentlich die Möglichkeiten. Dieses Modell gilt als realistische Wiedergabe echter Verhandlungen. Inzwischen existiert eine reichhaltige Literatur zur Verhandlungstheorie, sowohl axiomatisch als auch implementativ. Mögliche Anwendungen sind vielfältig. Ökonom:innen nutzen routiniert diese Werkzeuge.

Einführung und Überblick

Verhandlungen begegnen uns überall im menschlichen Miteinander:

- Ehepaartner verhandeln über gemeinsame Entscheidungen wie Aufgabenteilung, Finanzen, Erziehung, Urlaube, etc.
- Eine Regierung verhandelt ebenso (über ähnliche Fragen) zwischen Koalitionspartnern oder zwischen Ministerien.
- Im Parlament ist die Gesetzgebung ein demokratischer Prozess und ein Ergebnis von Verhandlungen zwischen den politischen Parteien.
- Regierungen stehen oft in internationalen Verhandlungen zu Handelsbeziehungen, Rüstungskontrolle, Umweltschutz, uvm.
- Wirtschaftliche Interaktionen beruhen auf Verhandlungen zwischen den betroffenen Handelspartnern, etwa bei Preisen und Löhnen, beim Handel mit Gütern, bei Fusionen und Übernahmen, etc.

Die Vielfalt solcher Situationen ist beachtlich. Ein erster wichtiger Schritt zur theoretischen Untersuchung ist daher eine geeignete Beschreibung, die alle wesentlichen Gemeinsamkeiten solcher Verhandlungen präzise erfasst und dabei unwesentliche Besonderheiten möglichst ausblendet.

Einführung und Überblick

„A two-person bargaining situation involves two individuals who have the opportunity to collaborate for mutual benefit in more than one way.“ Mit diesen Worten führte Nash 1950 das Verhandlungsproblem ein. Gegenstand ist die Wahl einer der möglichen Kooperationen.

Das Ziel der Spieler ist also, eine gemeinsame Auszahlung zu wählen. Dies ist eine extrem allgemeine Sichtweise. So gesehen ist tatsächlich nahezu jede menschliche Interaktion eine Art Verhandlungsproblem. Für unsere Untersuchung benötigen wir einschränkende Annahmen:

„We idealize the bargaining problem by assuming that the two individuals are highly rational, that each can accurately compare his desires for various things, that they are equal in bargaining skill, and that each has full knowledge of the tastes and preferences of the other.“ [Nash 1950]

Nash brach mit der Tradition und fokussierte nicht zuerst die dynamische Verhandlungsprozedur, sondern die statische Verhandlungssituation. Seine bahnbrechend neue Idee war eine axiomatische Untersuchung, die das Wesen von Verhandlungen und möglichen Lösungen extrahiert.

Einführung und Überblick

Der axiomatischer Ansatz beschreibt vollkommen rationales Verhandeln bei vollständiger Information. Dies erklärt einige zentrale Phänomene, doch einige schwierige Fragen bleiben weitgehend offen: Wann ist eine Vereinbarung gerecht? Wie kann ein Konflikt friedlich beigelegt werden?

Die Annahme vollständiger Information und vollkommener Rationalität vereinfacht die Analyse, macht sie aber zugleich weniger realistisch. Praktische Fragen des Verhandelns und Feilschens bleiben unberührt, ebenso alle sozialen Konventionen und psychologischen Phänomene.

Nashs axiomatische Vorgehensweise ist statisch und kooperativ. Dieser Ansatz erklärt Ihnen nicht, wie Sie Ihr Verhandlungsgeschick optimieren: Dazu müssten wir die Komplexität menschlichen Verhaltens ergründen, unvollständige Information, beschränkte Rationalität, etc.

Die praktische Seite konkreter Verhandlungen ist extrem vielfältig. Eine allgemeine und übersichtliche Theorie ist hier nicht zu erwarten. Hingegen liegen umfangreiche empirische Untersuchungen vor; darauf werde ich in dieser Vorlesung nicht genauer eingehen.

Einführung und Überblick

Komplementär zur statischen Sicht untersuchen wir die dynamische. Dazu nehmen wir an, dass die Verhandlungsprozedur festgelegt ist. Wir können Sie somit als Spiel betrachten und mit den bewährten Instrumenten der nicht-kooperativen Spieltheorie untersuchen.

Unser Ziel ist dabei, Gleichgewichte zu finden als Prognose bzw. Erklärung für rationales Verhalten und mögliche Vereinbarungen. Paradebeispiel einer dynamisch-strategischen Implementierung ist Rubinsteins Verhandlungsmodell durch alternierende Angebote.

Die treibende Kraft in diesem Modell ist der Zeit- und Wertverlust: Der Kuchen schrumpft, und dies erzwingt eine rationale Einigung. Dieses Modell erklärt speziell Phänomene wie Macht und Geduld, die in Verhandlungen erfahrungsgemäß eine große Rolle spielen.

Die drei Sichtweisen von Verhandlungen ergänzen und stützen sich: statisch-axiomatisch, dynamisch-strategisch und praktisch-empirisch. Das Thema ist wichtig, seine allseitige Entwicklung bleibt spannend. Hierzu gibt dieses Kapitel eine Einführung und einen Überblick.

Worum geht es bei Verhandlungen?

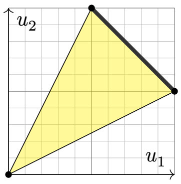
Allgemein entsteht ein **Verhandlungsproblem** in folgender Situation:
Zwei (oder mehr) Spieler haben gemeinsames Interesse zu kooperieren, aber konkurrierende Interessen, wie genau sie kooperieren wollen.

Handel: Ein Objekt ver/kaufen und dazu einen Preis aushandeln.
Bei unvollständiger Information ist dies schwierig, siehe Auktionen.

Synergie: Einzelkosten für Alice 30 und Bob 50, gemeinsam nur 60.
Hier gilt vollständige Information. Wie sollen beide die Kosten teilen?

Kooperation: Gemeinsam agieren in einem vorgegebenen Spiel.
Idealerweise liegen alle Informationen vor. Klassisches Beispiel:

A \ B	0	1
0	1, 2	0, 0
1	0, 0	2, 1



Worum geht es bei Verhandlungen?

Beispiel: Alice möchte ihr Haus verkaufen für mindestens 300 000€. Bob möchte das Haus kaufen und kann höchstens 400 000€ zahlen. Die beiden können und wollen sich einigen, aber auf welchen Preis?

Eine Einigung ist prinzipiell möglich. Den tatsächlichen Preis müssen sie jedoch aushandeln. Beide haben ein starkes Interesse an einer Einigung, doch Alice will möglichst viel bekommen, Bob möglichst wenig bezahlen. Ein simpler Vorschlag wäre 350 000€. Die Schlichtung wird hier jedoch erschwert, da die Spieler ihre Information sicher nicht offenlegen wollen.

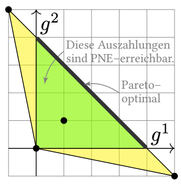
Beispiel: Verhandlungsprobleme sind uns bereits mehrfach begegnet, wenn ein Spiel mehrere Gleichgewichte hat, wie *Bach oder Strawinsky*, und sich die Spieler auf eines verständigen wollen. Wenn sie vor dem Spiel kommunizieren können, so haben beide starkes Interesse an einer Einigung, aber welche? Spiel und Auszahlungen sind hier symmetrisch.

Durch Lotterien lassen sich alle Konvexkombinationen realisieren. Dies entspricht korrelierten Strategien, die wir überall gerne nutzen. Welche dieser Möglichkeiten sollte eine Schlichter:in vorschlagen?

Worum geht es bei Verhandlungen?

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	0, 0	5, −1
1	−1, 5	1, 1



Beispiel: Die beiden Spieler wollen sich auf eine Auszahlung einigen. Welche Auszahlungen $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ sind teilspielperfekt realisierbar?
Hierüber gibt Nashs Folk Theorem K2E konkret und detailliert Auskunft. Doch welche soll angesteuert werden? Das muss ausgehandelt werden!

Das einzige Nash–Gleichgewicht $(0,0)$ ist möglich, aber wenig lukrativ. Es dient als Notlösung bei eventuellem Scheitern der Verhandlungen. Diesen Punkt nennen wir den **Ausgangspunkt** oder **Drohpunkt**, auf englisch *default value* oder *disagreement outcome*.

Worum geht es bei Verhandlungen?

Wir fassen Mut und vollziehen nun den kühnen Schritt der Abstraktion: Wir konzentrieren uns fortan auf die Auszahlungen und abstrahieren von den dahinter liegenden Strategien, die zu diesen Auszahlungen führen. (Diese setzen wir nach erfolgreicher Verhandlung wieder ein.)

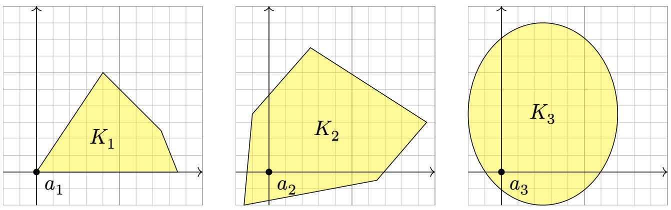
Abstraktion bedeutet Vereinfachung! Möglicherweise vernachlässigen wir dabei wesentliche Informationen. Die Nützlichkeit erweist sich dann in den Anwendungen auf praktische Beispiele. (Vorgriff: Ja, sie wird.)

Den Ausgangspunkt a oder Drohpunkt können die Spieler jederzeit ohne Koordinierung sichern, also auch ohne Einigung in den Verhandlungen, im Gefangenendilemma etwa das Nash–Gleichgewicht $g(0,0) = (0,0)$.

Verhandelt wird ab jetzt also nur noch über die Punkte $(x_1, x_2) \in K_{\ge a}$. Damit bringen wir das Problem in eine einfache doch präzise Form. Sie ist zudem übersichtlich und geometrisch-algorithmisch zugänglich.

Wir erheben unsere Vorüberlegungen nun zu einer formalen Definition: Was muss eine Schlichter:in oder ein Schiedsgericht wissen (Eingabe), und wie werden diese Daten rational verarbeitet (Ausgabe)?

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?



Definition L1A: Verhandlungsproblem und -lösung

Ein **Verhandlungsproblem** (K, a) für zwei Personen besteht aus einer konvexen kompakten Menge $K \Subset \mathbb{R}^2$ und einem Punkt $a \in K$.

Die Menge der **nicht-trivialen Verhandlungsprobleme** ist

$$V^2 := \{ (K,a) \mid a \in K \Subset \mathbb{R}^2 \text{ mit } K \text{ konvex kompakt}, \ \exists v \in K : a < v \}.$$

Eine allgemeine **Verhandlungslösung** ist eine Abbildung

$$F : V^2 \to \mathbb{R}^2 : (K,a) \mapsto F(K,a) \in K.$$

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?

Wir suchen und analysieren im Folgenden solche Funktionen F. Sie heißen auch **Schlichtungsverfahren**, engl. *arbitration scheme.*

Diese genial einfache Definition ist ein Musterbeispiel an Abstraktion. Viele Erfahrungen und Annahmen werden knapp zusammengefasst:

- Der Nutzen lässt sich vollständig durch reelle Zahlen darstellen. Diese bequeme Annahme unterstellen wir auch sonst meistens.
- Die Spieler können den Drohpunkt a ohne Koordinierung sichern. Er dient daher als Notlösung beim Scheitern der Verhandlungen.
- Die Menge $K \Subset \mathbb{R}^2$ möglicher Ausgänge ist vollständig bekannt. Dies schließt Verhandlungen mit unvollständiger Information aus.
- Die Menge K ist konvex, da die Spieler Lotterien bilden können: Ziehung aus einem Lostopf entspricht einer Konvexkombination.

Die Menge K ist kompakt: Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist das äquivalent zu beschränkt und abgeschlossen. Beschränktheit leuchtet sofort ein: Der zu verteilende Kuchen ist endlich. Abgeschlossenheit nutzen wir zur Vereinfachung: Wir nehmen alle Grenzwerte als Idealisierung mit hinzu.

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir den **koordinatenweisen Vergleich**:

$$\begin{array}{lcll} x = y & :\iff & x_i = y_i & \text{für alle } i = 1, \dots, n, \\ x \le y & :\iff & x_i \le y_i & \text{für alle } i = 1, \dots, n, \\ x < y & :\iff & x_i < y_i & \text{für alle } i = 1, \dots, n, \\ x \lneqq y & :\iff & x \le y & \text{doch zugleich } x \ne y. \end{array}$$

Die Relation $\le$ auf $\mathbb{R}^n$ ist reflexiv ($x \le x$), antisymmetrisch (aus $x \le y$ und $y \le x$ folgt $x = y$) und transitiv (aus $x \le y$ und $y \le z$ folgt $x \le z$). Dies nennen wir eine **Ordnungsrelation**. Für $n \ge 2$ ist sie jedoch nicht total (linear), zum Beispiel gilt weder $(1,0) \le (0,1)$ noch $(0,1) \le (1,0)$. Zur Bequemlichkeit definieren wir, wie für Ordnungsrelationen üblich, die transponierten Relationen $x \ge y$ durch $y \le x$ und $x > y$ durch $y < x$.

Beispiel: Sind $x, y \in \mathbb{R}^I$ die Auszahlungen für die Spieler $i \in I$, dann bedeutet $x \le y$: Beim Übergang von x nach y steht jeder Spieler gleich gut oder besser. Strikte Ungleichung $x < y$ bedeutet, jeder Spieler $i \in I$ verbessert sich strikt. Hingegen bedeutet $x \lneqq y$ nur, jeder Spieler steht mindestens gleich gut, und mindestens ein Spieler verbessert sich strikt.

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?

Eine **geordnete Menge** $(M, \le)$ ist ein Paar aus einer Menge M und einer Ordnungsrelation $\le$ auf M; diese ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv.

Ist $(M, \le)$ eine geordnete Menge, dann wird jede Teilmenge $X \subseteq M$ geordnet durch die Einschränkung der Ordnungsrelation $\le$ auf X.

Für $X \subseteq M$ und $a \in M$ schreiben wir $X \le a$, falls $x \le a$ für alle $x \in X$. Entsprechend definieren wir $X < a$ und $X \ge a$ und $X > a$.

Wir schreiben $X_{\ge a} = \{ x \in X \mid x \ge a \}$ und $X_{>a} = \{ x \in X \mid x > a \}$ sowie $X_{\le a} = \{ x \in X \mid x \le a \}$ und $X_{<a} = \{ x \in X \mid x < a \}$.

Wir nennen $m \in M$ ein **größtes Element** von $(M, \le)$, wenn $M \le m$: Für alle $x \in M$ gilt $x \le m$. Es gibt höchstens eines: Sind $m, m' \in M$ größte Elemente, so haben wir $m \le m'$ und $m' \le m$, also $m = m'$.

Wir nennen $m \in M$ ein **maximales Element** von $(M, \le)$, wenn gilt: Für alle $x \in M$ mit $m \le x$ gilt $m = x$. Wir schreiben $\operatorname{Max}(M, \le)$ für die Menge aller maximalen Elemente. Eine geordnete Menge $(M, \le)$ kann kein, ein oder mehrere maximale Elemente haben. Als Beispiele betrachten Sie die obigen Mengen $K \Subset \mathbb{R}^2$.

Beispiele für Verhandlungslösungen

Viele Abbildungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2 : (K, a) \mapsto u \in K$ sind denkbar.
Hierzu einige Beispiele, um Phantasie und Technik zu schulen:

Triviale Lösung: Wähle den Ausgangspunkt $F(K, a) = a$.

Lexikographische Lösungen: Vorgelegt sei $(K, a) \in V^2$.
(1) Wähle $u_1 = \max \mathrm{pr}_1 K_{\ge a}$ und hierzu $(u_1, u_2) \in K$ mit u_2 maximal.
(2) Wähle $u_2 = \max \mathrm{pr}_2 K_{\ge a}$ und hierzu $(u_1, u_2) \in K$ mit u_1 maximal.

Produkt-Maximierer: Sei $u \in K_{\ge a}$ der Maximierer der Funktion $h(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)^{p_1} (x_2 - a_2)^{p_2}$ mit $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $p_1 + p_2 = 2$.
Diese Lösung wird in Satz L1B und L1E axiomatisch charakterisiert.

Halbierung: Sei $u = a + \lambda z \in K$ mit $z = (1, 1)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ maximal.

Monotone Lösung: Ebenso mit $z_i = \max \mathrm{pr}_i K_{\ge a}$. (Satz L1G)

Gewichtete Lösung: Ebenso mit $z_i = \int_{K_{\ge a}} (x_i - a_i)^{p_i} \,\mathrm{d}(x_1, x_2)$.
Hierzu sei $\mathrm{vol}_2(K_{\ge a}) > 0$, also $z > 0$, andernfalls ist K eindimensional.
Für $p = 0$ ist das die Halbierung, für $p_1 = p_2 \nearrow \infty$ die monotone Lösung.

Beispiele für Verhandlungslösungen

Geizige Lösung: Vorgelegt sei $(K, a) \in V^2$.
(1) Wähle $u = (u_1, a_2) \in K$ mit u_1 maximal. (Hier ist $u_2 = a_2$.)
(2) Wähle $u = (a_1, u_2) \in K$ mit u_2 maximal. (Hier ist $u_1 = a_1$.)

Kreis-Lösung: Es existiert genau ein Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass die Kreisscheibe $D_r = \bar{B}((a_1 + r, a_2 + r), r)$ das konvexe Kompaktum K berührt. Sei u der eindeutige Berührpunkt, also $K \cap B_r = \{u\}$.

Stoll–Lösung: Betrachte $(m_1, a_2) \in K$ mit m_1 maximal. Die Punkte (m_1, a_2) und (a_1, m_2) mit $m_2 > a_2$ definieren eine Gerade; sei $H(m_2)$ der Halbraum, der a enthält. Liegt (K, a) in einem Halbraum $H(m_2)$, für m_2 hinreichend groß, so wähle die lexikographische (hier geizige) Lösung. Andernfalls wähle den Produkt-Maximierer zu Parametern (p_1, p_2).
(Machen Sie eine Skizze und lösen Sie damit einige Beispiele.)

Diese vielfältigen Lösungsverfahren sind mehr oder weniger attraktiv, aber alle noch recht einfach, und manche sogar sehr naheliegend.
Sie dienen uns im Folgenden als Fundus an Gegen/Beispielen.

Beispiele für Verhandlungslösungen

Diese Beispiele sollen zunächst einmal Ihre Phantasie anregen.
Welche Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ fallen Ihnen noch ein?
Welche dieser Möglichkeiten sollte eine Schlichter:in vorschlagen?

Denkbar wäre auch eine Auslosung bezüglich einer Dichte auf K; solche stochastischen Lösungen schließen wir hier jedoch aus.
Unsere Definition L1A verlangt eine Abbildung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$, also ein deterministisches Verfahren, kein probabilistisches.

Alles verläuft genauso für eine beliebige Anzahl n von Spielern.
Zwecks Anschauung bleibe ich zunächst bei $n = 2$ Spielern.
Abschließend ist es eine schöne Übung, alles zu übertragen.

Zwischen diesen Lösungen bestehen interessante Beziehungen:

Übung: In welchem Sinne interpoliert die gewichtete Lösung zwischen der Halbierung und der monotonen Lösung?

Übung: In welchem Sinne interpoliert der Produkt-Maximierer zwischen den beiden lexikographischen Lösungen?

Beispiele für Verhandlungslösungen

Wir kennen nun die Problemstellung und einige (willkürliche) Lösungen.
Zum besseren Verständnis hilft es, die Aufgabe wie folgt zu formulieren:

Wir suchen zur Schlichtung ein Verfahren / Mechanismus / Algorithmus, der zu jedem vorgelegten Verhandlungsproblem eine Lösung vorschlägt.

Dies wird in der Realität genutzt, wenn eine Schlichter:in angerufen wird.
Die Schlichter:in soll sachkundig, auf Grundlage des Problems (K, a) und evtl. weiterer Informationen, einen Kompromiss $u \in K$ vorschlagen.

Die Schlichtung gelingt jedoch nur, wenn sie alle Parteien überzeugt.
Hierzu ist es hilfreich, wenn sie zur Begründung ihres Vorschlags auch nachvollziehbare Gründe und überzeugende Argumente anführt.

Der Schlichter:in schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor.
Alle Lösungen sollen „fair“ sein, „nachvollziehbar“ und „konsistent“.

Nashs Axiome formulieren vier solcher nachvollziehbaren Gründe.
Sie erklären, was wir von einer fairen Verhandlungslösung erwarten.
Über die Auswahl und Festlegung dieser Axiome kann man streiten, ihre Konsequenzen jedoch folgen mit mathematischer Präzision.

Nashs Axiome

Eine „faire“ Verhandlungslösung muss bestimmte Forderungen erfüllen.

INV: Invarianz unter positiv-affinen Transformationen $T : \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$ wobei $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.
Dies transformiert Verhandlungsprobleme gemäß

$$T : V^2 \rightsquigarrow V^2 : (K, a) \mapsto (T(K), T(a)).$$

Für Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ fordern wir $F \circ T = T \circ F$.

SYM: Symmetrie. Sei $(K, a) = \tau(K, a)$ in V^2 symmetrisch bezüglich der Transposition $\tau : V^2 \rightsquigarrow V^2$ gemäß $\tau : \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.
Dann ist auch die Lösung $u = F(K, a)$ symmetrisch, also $u_1 = u_2$.

PAR: Pareto–Optimalität. Es gilt $F(K, a) \in \mathrm{Max}\, K_{\ge a}$.
Für jedes Problem $(K, a) \in V^2$ und seine Lösung $u = F(K, a)$ gilt $a \le u \in K$ und u ist maximal: Für jedes $v \in K$ mit $u \le v$ gilt $u = v$.

IIA: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.
Vorgelegt seien Verhandlungsprobleme $(K, a) \subseteq (L, a)$ in V^2.
Liegt die Lösung $F(L, a)$ in K, so gilt $F(K, a) = F(L, a)$.

Nashs Axiome

INV bedeutet Skaleninvarianz. Multiplikation mit positiven Konstanten ist recht plausibel: Es ist egal, ob Spieler in Euro oder in Dollar rechnen.
Invarianz unter Verschiebung ist weniger klar: Ist es bei einem Streitwert von 100€ einerlei, ob der eine Millionär oder der andere Habenichts ist?

SYM: In jeder symmetrischen Problemstellung (K, a) soll die Lösung $u = F(K, a)$ keinen der beiden Spieler bevorzugen. Das ist fraglich, wenn Spieler 1 allein ist, aber Spieler 2 eine größere Gruppe. (L1E)

PAR: Zur Erinnerung (L107): Für Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ definieren wir den Vergleich $u \le v$ koordinatenweise durch $u_1 \le v_1$ und $u_2 \le v_2$.

IIA: Wenn neue Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine der neuen Alternativen oder bleibt unverändert die alte Lösung.

SYM und PAR schränken die Lösung einzelner Probleme ein,
INV und IIA fordern Konsistenz zwischen den Problemen.
Der Drohpunkt wird nur in PAR wirklich aktiv genutzt.

Über Axiome kann man streiten. Eine ausführliche kritische Diskussion finden Sie bei R.D. Luce, H. Raiffa: *Games and Decisions*, Dover 1989.

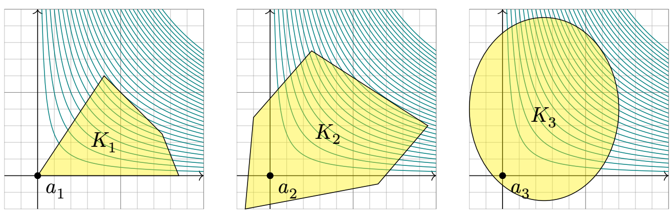
Nashs Verhandlungslösung

Es ist wie so oft in der Mathematik und allgemein im Leben: Axiome sind Annahmen, Forderungen, Wünsche, Sehnsüchte. Nicht immer lassen sie sich erfüllen. Selbst wenn sie erfüllbar sind, so nicht immer eindeutig.
Nachdem Existenz und Eindeutigkeit geklärt sind, wollen wir die Lösung tatsächlich finden / berechnen / approximieren, dies möglichst effizient.

Denken Sie als leuchtende Beispiele aus dem ersten Studienjahr an die Determinante quadratischer Matrizen (M2B, axiomatische Definition, Leibniz–Formel, Gauß–Algorithmus, Numerik) oder an gewöhnliche Differentialgleichungen (Definition, Satz von Picard–Lindelöf, exakte Lösungen, Numerik). Existenz und Eindeutigkeit sind grundlegend, um überhaupt von „der“ gesuchten Lösung sprechen zu können, in beiden genannten Beispielen erhalten wir zugleich einen ersten Algorithmus, den wir anschließend noch effizienter gestalten (wollen und müssen).

Als Kontrast: Für das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ von R–Moduln zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit durch abstrakten Nonsense, knapp & elegant, ohne hilfreichen Algorithmus. Die konkrete Berechnung muss je nach Spezialfall gesondert betrieben werden, angefangen bei freien Moduln.

Nashs Verhandlungslösung



Satz L1B: Nash-Verhandlungslösung / NBS, Nash 1950

Existenz & Eindeutigkeit: Es gibt genau eine Verhandlungslösung $N : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die Nashs vier Axiome erfüllt: INV, SYM, PAR und IIA.

Berechnung: Zum Verhandlungsproblem $(K, a) \in V^2$ ist die Lösung $N(K, a) = \arg\max h_{(K,a)}$ gegeben durch den Maximierer des Produkts

$$h = h_{(K,a)} : K_{\ge a} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)(x_2 - a_2).$$

Diese Abbildung $N : V^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt **Nash–Verhandlungslösung**.

Nashs Verhandlungslösung

Dieser Satz wirkt erstaunlich, zuerst geradezu unglaublich. Ist er wahr? Alle Daten liegen explizit vor uns auf dem Tisch, also beweisen wie es! Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen.

Aufgabe: Was ist für den Satz zu beweisen? Beweisen Sie es!

Lösung: (0) Zu $(K, a) \in V^2$ existiert genau ein Maximierer $u \in K_{\ge a}$, also $(u_1 - a_1)(u_2 - a_2) \ge (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in K_{\ge a}$.
Da $K_{\ge a}$ kompakt ist und h stetig, existiert ein Maximierer $u \in K_{\ge a}$.
Es gibt $v \in K_{>a}$, also gilt $h(u) \ge h(v) > h(a) = 0$ und somit $u > a$.
Angenommen ein weiterer Punkt $u' \in K \smallsetminus \{u\}$ erfüllte $h(u') = h(u)$.
Da K konvex ist, gälte dann $\bar{u} = \frac{1}{2}(u + u') \in K$ und $h(\bar{u}) > h(u)$.

(1) Dies definiert / expliziert / konstruiert die Verhandlungslösung

$$N : V^2 \to \mathbb{R}^2 : (K, a) \mapsto \arg\max h_{(K,a)}.$$

Sie erfüllt alle vier Nash–Axiome: INV, SYM, PAR, IIA. Nachrechnen!

Nashs Verhandlungslösung

Zur Vollständigkeit rechnen wir die ersehnten Eigenschaften gleich nach.

INV: Gegeben sei $T : (x_1, x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$ mit $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.
Für $T : (K, a) \rightsquigarrow (K', a') : x \mapsto x' = Tx$ gilt $h_{(K',a')}(x') = \alpha_1 \alpha_2 h_{(K,a)}(x)$.
Somit stiftet T eine Bijektion zwischen den Maximierern u von $h_{(K,a)}$ und den Maximierern u' von $h_{(K',a')}$. Dank Eindeutigkeit gilt $N \circ T = T \circ N$.

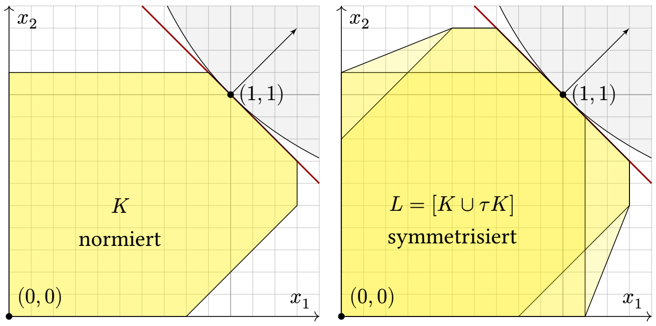
SYM: Im symmetrischen Fall $\tau(K, a) = (K, a)$ gilt $h_{(K,a)} \circ \tau = h_{(K,a)}$.
Somit stiftet τ eine Permutation auf der Menge aller Maximierer.
Dank Eindeutigkeit des Maximierers u gilt $\tau u = u$, also $u_1 = u_2$.

PAR: Wir setzen das Problem als nicht-trivial voraus. Jeder Maximierer u von $h_{(K,a)}$ erfüllt dann $a < u$, also $a_1 < u_1$ und $a_2 < u_2$. Für $u \le v \in K$ gilt $a_1 < u_1 \le v_1$ und $a_2 < u_2 \le v_2$. Gälte $v \ne u$, so wäre $h(v) > h(u)$.

IIA: Gegeben sei $(K, a) \subseteq (L, a)$ in V^2. Die Lösung $N(L, a) = u$ erfüllt $(u_1 - a_1)(u_2 - a_2) = \max h_{(L,a)} \ge \max h_{(K,a)}$. Gilt zudem $u \in K$, so gilt $(u_1 - a_1)(u_2 - a_2) = \max h_{(K,a)}$, also $N(K, a) = u$ dank Eindeutigkeit.

Nashs Verhandlungslösung

Eindeutigkeit $F(K, a) = N(K, a)$ als Beweis in Bildern:



Das vorgelegte Problem $(K, a) \in V^2$ normieren wir zu $a = (0, 0)$ und $N(K, a) = (1, 1)$. Anschließend symmetrisieren wir $(K, 0)$ zu $(L, 0)$.
Für $(L, 0)$ ist die Lösung $F(L, 0) = (1, 1)$, also auch für $(K, 0)$.

Nashs Verhandlungslösung

(2) Zur Eindeutigkeit sei neben N auch $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung, die alle vier Nash–Axiome erfüllt. Wir wollen $F = N$ beweisen.
Sei $(K, a) \in V^2$ ein VProblem. Wir zeigen $F(K, a) = N(K, a)$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K, a)$. Dank PAR und IIA dürfen wir „=" annehmen.
Dank INV dürfen wir $a = (0, 0)$ annehmen, zudem auch $N(K, a) = (1, 1)$.
Damit liegt $(K, 0) \subseteq (\Delta, 0)$ im Dreieck $\Delta := \{ x \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \}$
dank des Gradienten $\operatorname{grad} h(1, 1) = (1, 1)$ und der Konvexität von K.
Dank SYM und PAR gilt $F(\Delta, 0) = (1, 1)$, dank IIA also $F(K, 0) = (1, 1)$.

🙂 Allein mit Hilfe der Axiome INV, SYM, PAR und IIA können wir somit für jedes vorgelegte Problem $(K, a) \in V^2$ den Punkt $F(K, a)$ bestimmen. Wir finden jeweils $F(K, a) = N(K, a)$. Das beweist $F = N$.

Variante: Das Dreieck Δ ist die maximale Wahl, die Symmetrisierung $L := [K \cup \tau K] \subseteq \Delta$ ist minimal. Der Beweis verläuft wörtlich genauso: L ist konvex, kompakt, symmetrisch und erfüllt $(K, 0) \subseteq (L, 0) \subseteq (\Delta, 0)$. Diese Variante wurde oben als Beweis in Bildern dargestellt.

Ist eines der Nash–Axiome überflüssig?

Wir freuen uns über den eleganten Satz und dazu den schönen Beweis. Wie immer wollen wir zurückschauen und das Argument perfektionieren: Können wir noch Voraussetzungen weglassen? oder abschwächen? Können wir eines der Nash–Axiome im Satz L1B weglassen? Nein!

Satz L1C: Die vier Nash–Axiome sind unabhängig.

Zu jedem der vier Axiome INV, SYM, PAR, IIA existiert eine VLösung $F_i : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die dieses Axiom verletzt, aber die anderen drei erfüllt.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussage durch geeignete Beispiele.
Hier sind neben Geometrie vor allem Phantasie und Kreativität gefragt.

Hierzu hilft ein möglichst reichhaltiger Fundus an Gegen/Beispielen; anschließend müssen diese Gegen/Beispiele genau geprüft werden.

Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen.

Schwieriger ist die starke Unabhängigkeit: Sind tatsächlich alle $2^4 = 16$ Kombinationen durch geeignete Verhandlungslösungen realisierbar?

Ist eines der Nash–Axiome überflüssig?

Diese Aufgabe behandeln Sie in den Übungen! Wenn Sie alle bisherigen Beispiele systematisch durchgehen, erhalten Sie die folgende Übersicht:

Verhandlungslösung	INV	SYM	PAR	IIA
triviale Lösung				
lexikographisch L1F				
Produkt-Maximierer L1E				
Halbierung				
Monotone Lösung L1G				
Gewichtete Lösung				
Geizige Lösung				
Kreis-Lösung				
Stoll–Lösung				

Sie dürfen die Tabelle auch gerne noch erweitern um die Eigenschaften WIR, SIR und MON, die wir im Folgenden einführen und diskutieren.

Können wir Pareto–Optimalität abschwächen?

Wir schwächen Pareto–Optimalität ab:

SIR: starke individuelle Rationalität. $F(K, a) \in K_{>a}$.

WIR: (schwache) individuelle Rationalität. $F(K, a) \in K_{\ge a}$.

Satz L1D: Individuelle Rationalität genügt. Roth 1977

(1) Es gibt genau eine Verhandlungslösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die vier Axiome INV, SYM, SIR und IIA erfüllt, nämlich die Nash–Lösung.
(2) Genau zwei Lösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllen INV, SYM, WIR und IIA: neben der Nash–Lösung N nur noch die triviale Lösung $T : (K, a) \mapsto a$.

In gewisser Weise ist Pareto–Optimalität ein übertrieben starkes Axiom, denn es eliminiert sofort die große Mehrheit der möglichen Ausgänge. Individuelle Rationalität ist hierbei wesentlich weniger einschneidend. Zusammen mit den anderen Axiomen genügt diese Abschwächung!

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz nach dem Vorbild von Satz L1B. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn.

Können wir Pareto–Optimalität abschwächen?

Lösung: Wir beweisen gleich die allgemeinere Aussage (2). Daraus folgt automatisch die erste Aussage (1) als Spezialfall.

(2a) Existenz: Neben N erfüllt auch $T : (K, a) \mapsto a$ diese Axiome.

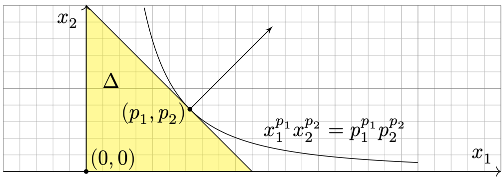
(2b) Eindeutigkeit: Angenommen irgendeine Verhandlungslösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt die hier geforderten Axiome INV, SYM, WIR, IIA. Wir zeigen, dass entweder $F = T$ oder $F = N$ gilt. Sei $(K, a) \in V^2$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K, a)$. Dank WIR und IIA dürfen wir „=" annehmen.
Dank INV dürfen wir $a = (0, 0)$ annehmen, zudem auch $N(K, a) = (1, 1)$.
Damit liegt $(K, 0) \subseteq (\Delta, 0)$ im Dreieck $\Delta = \{ x \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \}$.

Dank SYM gilt $F(\Delta, 0) = (x, x)$ mit $0 \le x \le 1$. Wir zeigen $x \in \{0, 1\}$:
Für $0 < x \le 1$ haben wir $(\Delta, 0) \subseteq (x^{-1}\Delta, 0)$. Dank INV gilt dann $F(x^{-1}\Delta, 0) = x^{-1}(x, x) = (1, 1) \in \Delta$. Dank IIA folgt $F(\Delta, 0) = (1, 1)$.

Wir schließen daraus $F(\Delta, 0) = u$ mit $u = (0, 0)$ oder $u = (1, 1)$.
Wegen $(0, 0), (1, 1) \in K$ und IIA folgt daraus auch $F(K, 0) = u$.
Aus $F(K, 0) = (0, 0)$ folgt $F = T$. Aus $F(K, 0) = (1, 1)$ folgt $F = N$.

Asymmetrische Verhandlungslösungen



Satz L1E: asymmetrische Verhandlungslösungen

Wir betrachten das Dreieck $\Delta := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \}$ mit $p \in \Delta$ im Inneren der Hypotenuse, also $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $p_1 + p_2 = 2$.

Existenz & Eindeutigkeit: Es gibt genau eine Verhandlungslösung $P : V^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die Axiome INV, WIR, IIA und $P(\Delta, 0) = p$ erfüllt.

Berechnung: $P(K, a)$ ist der eindeutige Maximierer der Funktion

$$h = h^p_{(K,a)} \,:\, K_{\ge a} \to \mathbb{R} \,:\, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)^{p_1} (x_2 - a_2)^{p_2}.$$

Symmetrisch $p_1 = p_2 = 1$ erhalten wir die Nash–Verhandlungslösung. In den Randfällen $p \in \{(2, 0), (0, 2)\}$ ist die Lösung nicht eindeutig.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

Das Symmetrie–Axiom normiert Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ auf symmetrischen Problemen (K, a) durch $F(K, a) = a + \lambda(1, 1)$, und mit Pareto–Optimalität ist $\lambda \in \mathbb{R}$ maximal. Wir fragen allgemein: Wie sehen Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ aus, die INV, WIR und IIA erfüllen?

Zur Unterscheidung der Möglichkeiten werten wir F auf einem speziellen Beispiel aus, nämlich dem Dreieck $\Delta = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \}$ mit Ausgangspunkt 0. Der Wert $F(\Delta, 0) = p$ dient uns zur Normierung. Ab hier folgen Satz und Beweis dem bewährten Muster von Satz L1B:

Aufgabe: Zeigen Sie Satz L1E nach dem Vorbild von Satz L1B, indem Sie (1) Existenz und (2) Eindeutigkeit der Lösung beweisen.

(3) Finden Sie mindestens zwei verschiedene Verhandlungslösungen $F \ne G : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die INV, WIR, IIA erfüllen sowie $(\Delta, 0) \mapsto (2, 0)$.

(4) Zeigen Sie hingegen, dass genau eine Lösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ die Axiome INV, PAR, IIA erfüllt sowie $(\Delta, 0) \mapsto (2, 0)$.

☺ Hier sind neben Geometrie auch Phantasie und Kreativität gefragt. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

Lösung: (1) Zunächst zur Existenz: Die angegebene Lösung

$$P \,:\, V^2 \to \mathbb{R}^2 \,:\, (K, a) \mapsto \arg\max h^p_{(K,a)}$$

ist wohldefiniert und erfüllt INV, WIR, SIR, PAR und IIA. Speziell für das Dreieck $(\Delta, 0)$ finden wir $P(\Delta, 0) = p$ dank der Orthogonalität

$$\operatorname{grad} h(p) = (p_1^{p_1} p_2^{p_2}, p_1^{p_1} p_2^{p_2}) \perp T_p \partial\Delta.$$

(2) Zur Eindeutigkeit sei neben P auch $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ eine solche Lösung. Sei $(K, a) \in V^2$ ein VProblem. Wir zeigen $F(K, a) = P(K, a)$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K, a)$; dank WIR und IIA dürfen wir „=“ annehmen. Dank INV dürfen wir $a = (0, 0)$ annehmen, zudem auch $P(K, a) = p$. Damit liegt $(K, 0) \subseteq (\Delta, 0)$ im Dreieck $\Delta = \{ x \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \}$ dank des Gradienten $\operatorname{grad} h(p) \perp T_p \partial\Delta$ und der Konvexität von K. Dank Voraussetzung gilt $F(\Delta, 0) = p$, dank IIA $F(K, 0) = p$.

Allein mit Hilfe der Axiome INV, WIR, IIA und $F(\Delta, 0) = p$ können wir für jedes vorgelegte Problem $(K, a) \in V^2$ den Punkt $F(K, a)$ bestimmen. Wir finden jeweils $F(K, a) = P(K, a)$. Dies beweist $F = P$.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

(3) Gegenbeispiele zu finden ist knifflig, auch amüsant und lehrreich.

Geizig: Wähle $G(K, a) = (u_1, u_2) \in K$ mit $u_2 = a_2$ und u_1 maximal.

Lexikographisch: Wähle zunächst das Maximum $u_1 = \max \mathrm{pr}_1 K_{\ge a}$ und hierzu anschließend $L(K, a) = (u_1, u_2) \in K$ mit u_2 maximal.

Diese Lösungen G und L erfüllen tatsächlich INV, WIR und IIA; diese Eigenschaften muss man wie immer gewissenhaft prüfen.

Die geizige Lösung erfüllt zwar WIR, aber weder SIR noch PAR. Die lexikographische Lösung erfüllt zwar PAR, aber nicht SIR. Dies illustriert die subtilen Unterschiede von WIR, SIR, PAR.

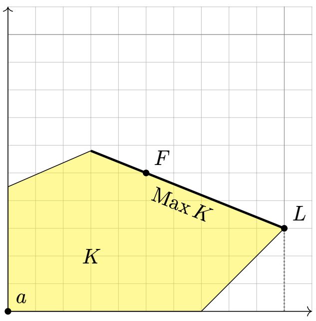
(4) Mit der Verschärfung von WIR zu PAR beweisen wir das folgende Ergebnis einiger Übungsgruppenteilnehmer:innen der Spieltheorie 2018:

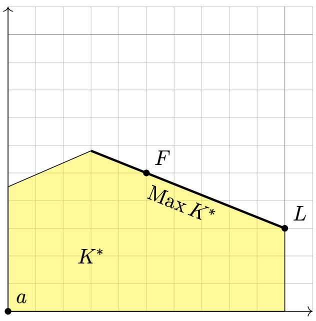
Satz L1F: lexikographische Lösung, Holzmüller et al. 2018

Die lexikographische Verhandlungslösung $L : V^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die einzige, welche die drei Axiome INV, PAR, IIA sowie $L(\Delta, 0) = (2, 0)$ erfüllt.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

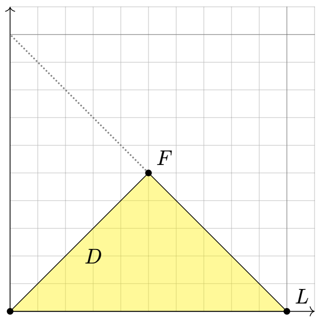
Eindeutigkeit der lexikographischen Lösung als Beweis in Bildern:

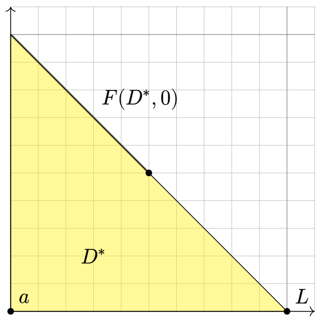




Asymmetrische Verhandlungslösungen

Eindeutigkeit der lexikographischen Lösung, Fortsetzung und Schluss:





Asymmetrische Verhandlungslösungen

(4) Zur Eindeutigkeit sei neben L auch $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung, welche die Axiome INV, PAR, IIA erfüllt. Wir nehmen $F(K, a) \ne L(K, a)$ für ein Verhandlungsproblem $(K, a) \in V^2$ an und zeigen damit $F(\Delta, 0) \ne (2, 0)$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K, a)$; dank PAR und IIA dürfen wir „=“ annehmen. Dank INV dürfen wir $a = (0, 0)$ annehmen, zudem $\max \mathrm{pr}_2 K = 1$.

Dank PAR liegen $u = F(K, a)$ und $L(K, a)$ in der Pareto–Front Max K. Es gilt $u_1 < 1$ dank Definition von L und der Voraussetzung $u \ne L(K, a)$

Wir erweitern K zum Verhandlungsproblem $K^* = [K \cup (1, 0)] \supseteq K$. Die Pareteo–Front Max K^* = Max K wird hierdurch nicht verändert. Dank PAR gilt $F(K^*, 0) \in \operatorname{Max} K^* \subseteq K$. Dank IIA folgt $F(K^*, 0) = u$.

Wir betrachten nun das Dreieck $D = [(0, 0), (1, 0), u] \subseteq K^*$. Es gilt $F(K^*, 0) = u \in D$. Dank IIA folgt $F(D, 0) = u$.

Schließlich wählen wir das Dreieck $D^* = [(0, 0), (1, 0), (0, y)]$ so, dass u auf der Hypotenuse $[(1, 0), (0, y)]$ liegt; dies ist möglich wegen $u_1 < 1$. Dank IIA kann $F(D^*, 0)$ nicht in $]u, (1, 0)]$ liegen, also $F(D^*, 0) \ne (1, 0)$.

Dank INV folgt schließlich $F(\Delta, 0) \ne (2, 0)$, was zu zeigen war.

Verhandlungstheorie für mehrere Spieler

Bislang haben wir nur Verhandlungen mit zwei Spielern untersucht. Dieselben Fragen und Antworten finden wir ebenso für mehrere Spieler.

Aufgabe: Definieren Sie für jede Spielerzahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ die Menge V^n der Verhandlungsprobleme und darauf Verhandlungslösungen $F : V^n \to \mathbb{R}^n$. Übertragen Sie soweit möglich Axiome, Beispiele, Sätze und Beweise.

In beliebiger Dimension haben wir keine Anschauung oder Intuition. Diese Übung ist daher eine gute Ergänzung zur Formalisierung! Hier können Sie wunderbar die Techniken der mehrdimensionalen Analysis einsetzen, insbesondere Lagrange–Multiplikatoren.

⚠ Wir diskutieren vorrangig den klassischen Zwei-Spieler-Fall $n = 2$. Die axiomatisch-geometrische Behandlung gelingt in jeder Dimension n.

Die spieltheorietisch-ökonomische Interpretation ist jedoch weniger klar: Welche konkrete Verhandlungssituation wird beschrieben und gelöst? Entweder *alle* kooperieren oder *jeder* steht für sich allein (Drohpunkt).

Das nächste Kapitel untersucht allgemeiner und genauer Koalitionen. Verhandlungen über mögliche Koalitionen sind notorisch kompliziert.

Axiome fordern ist nicht schwer...

Axiome zu formulieren, ist eine Kunst. Viele scheinen anfangs vernünftig, erweisen sich aber gemeinsam als widersprüchlich, also unerfüllbar! Ein drastisch-berühmtes Beispiel dieser Art ist Arrows Satz vom Diktator, den wir in Kapitel N dikutieren. Das Problem kann uns überall begegnen.

Ich möchte dies sofort mit einem drastischen Beispiel illustrieren. Wir setzen im Folgenden wieder Pareto–Optimalität (PAR) voraus.

Aufgabe: Übersetzen Sie folgende Forderungen in Formeln.

(1) „Wenn neue Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine der neuen Alternativen oder unverändert die alte Lösung.“

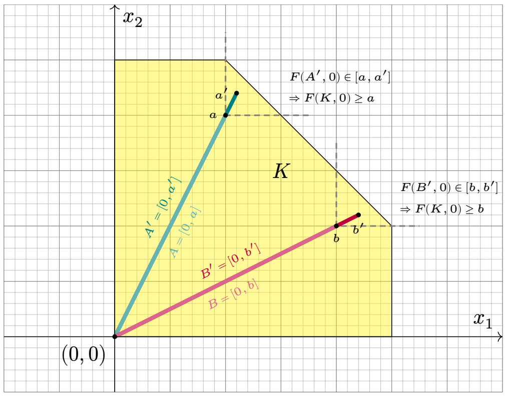
Sei $(K,a) \subseteq (L,a)$ in V^2. Aus $F(L,a) = u \in K$ folgt $F(K,a) = u$.
IIA: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.

(2) „Wenn zur alten Lösung strikt bessere Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine dieser strikt besseren Alternativen.“

Sei $(K,a) \subseteq (L,a)$. Aus $F(K,a) = u$ und $L_{>u} \neq \emptyset$ folgt $F(L,a) \in L_{>u}$.
ÜBA: Übertrumpfen durch strikt bessere Alternativen.

... Axiome erfüllen hingegen sehr.

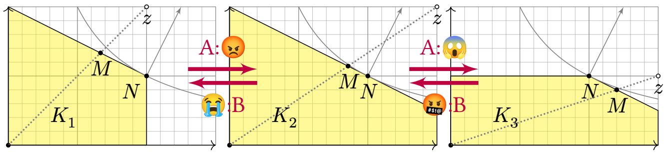
Aufgabe: Finden Sie alle VLösungen $F: V^2 \to \mathbb{R}^2$, die ÜBA erfüllen.



Lösung: Keine Verhandlungslösung $F: V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt ÜBA!

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Ist die Nash–Verhandlungslösung wirklich „fair“ und „gerecht“?



In Situation K_1 bekommt Alice ihr Maximum, Bob nur die Hälfte. Beim Übergang zu K_2 stärkt Alice ihre Position, aber ihr Ergebnis stagniert; umgekehrt schwächt Alice ihre Position, aber Bob profitiert nicht davon. Sinngemäß gilt dasselbe beim Übergang von K_2 zu K_3 und zurück.

In jedem Vergleich findet mindestens ein Spieler einen Grund zur Klage. Er hält die zusätzlichen Alternativen für relevant und bestreitet IIA.

Ist das Nash–Verfahren N deshalb unfair? Nein, das Verfahren ist fair, aber die vorgelegten Verhandlungssituationen (K_i, a) selbst sind unfair. Die zugeordneten Lösungen $N(K_i, a)$ können das nicht wunderheilen.

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Die vier Nash–Axiome scheinen zunächst natürlich und plausibel, zudem können wir daraus eine schöne Charakterisierung ableiten. In manch konkretem Beispiel keimen leise Zweifel... Daher nochmal:

Die Schlichter:in schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Alle Lösungen sollen „fair“ und „nachvollziehbar“ sein, die Schlichtung „konsistent“. Die vier Nash–Axiome geben hierauf präzise Antworten.

Die Schlichtung gelingt nur, wenn sie alle Parteien überzeugt. Hierzu ist es hilfreich, dass sie zur Begründung ihres Vorschlags nachvollziehbare Gründe und überzeugende Argumente anführt.

Nashs Axiome formulieren vier solche nachvollziehbaren Gründe. Sie erklären, was wir von einer fairen Verhandlungslösung erwarten. Über die Auswahl und Festlegung dieser Axiome kann man streiten, ihre Konsequenzen jedoch folgen mit mathematischer Präzision.

Einzelne Vorschläge mögen unfair erscheinen, doch das Verfahren ist fair im Sinne der Definition, denn es erfüllt all unsere Anforderungen. Aus unfairen Situationen kann es keine fairen Lösungen zaubern.

Die monotone Verhandlungslösung

Wir ersetzen Unabhängigkeit IIA durch eine alternative Forderung...

MON: Monotonie. Für $(K,a) \subseteq (L,a)$ in V^2 gilt $F(K,a) \leq F(L,a)$, vorausgesetzt $\max \mathrm{pr}_i K_{\geq a} = \max \mathrm{pr}_i L_{\geq a}$ bleibt erhalten für $i = 1, 2$.

Satz L1G: monotone Lösung, Kalai–Smorodinsky 1975

Existenz & Eindeutigkeit: Es gibt genau eine Verhandlungslösung $M: V^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die Axiome INV, PAR, SYM und MON erfüllt. Diese heißt daher auch die **monotone Verhandlungslösung**.

Berechnung: Zu jedem VProblem $(K,a) \in V^2$ ist die Lösung $M(K,a)$ der maximale Punkt auf der Strecke $K \cap [a,z]$ mit $z_i = \max \mathrm{pr}_i K_{\geq a}$.

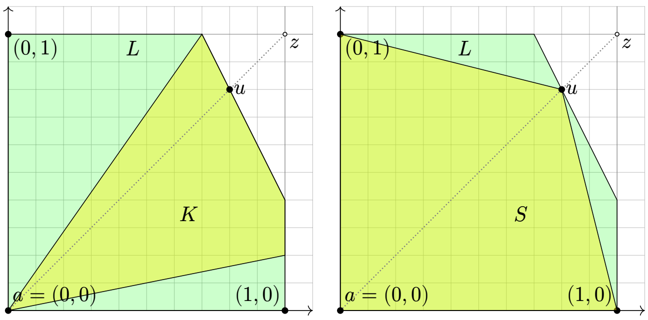
Aufgabe: Beweisen Sie diese Charakterisierung analog zu Satz L1B.

Die monotone Lösung M unterscheidet sich von der Nash–Lösung N, denn N erfüllt IIA aber nicht MON, und M erfüllt MON aber nicht IIA. Wer es konkret mag, findet deutliche Unterschiede in den Beispielen.

Dieser Satz geht zurück auf E. Kalai, M. Smorodinsky: *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, Econometrica 43 (1975) 513–518.

Die monotone Verhandlungslösung

Existenz: $M: V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt INV, PAR, SYM und MON. (Nachrechnen!)
Eindeutigkeit: Wenn auch F, so $F(K,a) = M(K,a)$. Beweis in Bildern:



Dank INV dürfen wir $a = (0,0)$ und jeweils $\max \mathrm{pr}_i K_{\geq a} = 1$ annehmen. Auf $(K,a) \subseteq (L,a)$ und $(S,a) \subseteq (L,a)$ wenden wir Monotonie an:

$$M(K,a) \overset{\text{Def}}{=} u \overset{\text{Sym}}{=} F(S,a) \overset{\text{Mon}}{=} F(L,a) \overset{\text{Mon}}{=} F(K,a)$$

Die monotone Verhandlungslösung

Lösung: (1) Existenz: Die angegebene Lösung

$$M: V^2 \to \mathbb{R}^2 : (K,a) \mapsto \max(K \cap [(a_1,a_2),(z_1,z_2)])$$

erfüllt die vier gewünschten Eigenschaften INV, PAR, SYM, MON. (Das muss man sorgsam nachprüfen. Übung: Versuchen Sie es!)

(2) Eindeutigkeit: Angenommen $F: V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt diese Axiome. Wir leiten daraus ab, dass $F = M$ gilt. Hierzu sei $(K,a) \in V^2$.

Es gilt $(K_{\geq a}, a) \subseteq (K,a)$. Dank MON folgt $F(K_{\geq a}, a) \leq F(K,a)$, dank PAR $F(K_{\geq a}, a) = F(K,a)$. Wir dürfen also $(K_{\geq a}, a) = (K,a)$ annehmen, dank INV zudem $a = (0,0)$ und schließlich $\max \mathrm{pr}_1 K = \max \mathrm{pr}_2 K = 1$.

Sei $u = M(K,a) = a + \lambda(1,1)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ maximal. Wir betrachten wie skizziert $L := [K \cup \{(1,0),(0,1)\}]$ und $S := [\{(0,0),\ (0,1)\,(1,0),u\}]$.

Es gilt $(K,0) \subseteq (L,0)$. Dank MON folgt $F(K,0) = F(L,0)$.
Es gilt $(S,0) \subseteq (L,0)$. Dank MON gilt $F(S,0) = F(L,0)$.
Dank SYM und PAR gilt $F(S,0) = u$, also $F(K,0) = M(K,0)$.

Die monotone Verhandlungslösung

Die monotone Lösung M und die Nash–Lösung N sind die beiden bekanntesten Verhandlungslösungen. Beide lassen sich axiomatisch charakterisieren, wie hier dargestellt, und geometrisch bestimmen.

Die Nash–Lösung wird durch die Axiome INV, SYM, PAR und IIA charakterisiert. Viel Kritik entzündet sich traditionell am letzten Axiom, der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen. Als Reaktion darauf entwickelten Kalai und Smorodinsky ihren monotonen Lösungsbegriff, der durch die Axiome INV, SYM, PAR und MON charakterisiert wird.

Die Nash–Lösung erfüllt das Axiom IIA, aber nicht MON, die monotone Lösung erfüllt umgekehrt MON, aber nicht IIA. Auf symmetrischen VProblemen stimmen beide Lösungen überein.

Beide Lösungen wurden experimentell in Laborexperimenten getestet: Welche kommt dem empirisch beobachteten Verhalten am nächsten?

Wir durchleuchten eine solche Implementierung in §L2 mathematisch: Die beiden Spieler machen sich abwechselnd Angebote bis zur Einigung. Welches Verhandlungsergebnis stellt sich bei rationalen Spielern ein?

Grundsatzfrage: Was bedeutet „fair“ und „gerecht“?

Zur Berufung einer Professur macht die Kommission einen Vorschlag,
(a) … einen Mann: „Das ist ungerecht! Frauen wurden benachteiligt!“
(b) … eine Frau: „Das ist ungerecht! Das war Quote statt Qualifikation!“
(c) … ein Eichhörnchen: „Tyrannei! Murmeltiere wurden diskriminiert!“
Die Problematik ist grundlegend und verdient systematische Beachtung:

Fairness und Gerechtigkeit sind Eigenschaften des Verfahrens — und nicht eines Einzelfalls!

Best practice: Wir präzisieren die Kriterien *vor* den Bewerbungen. Sonst besteht die Gefahr, sie un/bewusst anzupassen. Es genügt der Verdacht.

Argumentum ad hominem ist ein Scheinargument, das die Person angreift.

J. Rawls: *Veil of ignorance*, `de.wikipedia.org/wiki/Schleier_des_Nichtwissens`: Zur Fairness erklären wir neutral die Ziele, *bevor* wir uns in Einzelfällen verstricken. Sind die Rollen erst verteilt, so entwickelt jede:r un/bewusst eine egozentrische Sicht. K. Marx: *Das Sein bestimmt das Bewusstsein!*

Grundsatzfrage: Was bedeutet „fair“ und „gerecht“?

Wir Menschen sehen uns nach Gerechtigkeit, doch werden oft enttäuscht. Man kann es niemals allen recht machen! Paul Watzlawick (1921–2007), Philosoph und Kommunikationswissenschaftler, erzählte dazu folgendes:

Ein Vater ist mit seinem kleinen Sohn unterwegs. Der Vater reitet auf einem Esel, der Kleine geht nebenher. Da kommt ihnen eine Gruppe von Leuten entgegen: „Schaut euch das mal an. Der Vater, der reitet auf dem Esel, und der Kleine muss zu Fuß gehen an diesem heißen Tag. Hat denn der gar kein Mitleid mit seinem Sohn?“ Daraufhin steigt der Vater ab und setzt den Kleinen auf den Esel. Da kommt eine zweite Gruppe von Personen: „Schaut euch das mal an. Was soll denn aus diesem Kleinen mal werden, wenn er jetzt schon so verwöhnt wird?“ Darauf besteigt auch der Vater den Esel. Da kommt eine dritte Gruppe von Personen: „Schaut euch das mal an. Beide zusammen reiten den Esel. Dieses arme Tier. Ja, haben die denn kein Mitleid?“ Daraufhin steigt der Vater ab, nimmt den Kleinen vom Esel, und sie beginnen, zusammen den Esel zu tragen. Da kommt eine vierte Gruppe, und die sagen… Na, ich überlasse es Ihnen, sich vorzustellen, was die sagen!

Grundsatzfrage: Was bedeutet „fair“ und „gerecht“?

Nashs großer Verdienst besteht darin, die Frage der Fairness zu stellen. Ich komme nochmal auf die subjektive, doch wichtige Frage zurück: Ist die Nash–Verhandlungslösung wirklich „fair“ und „gerecht“? (L135)

Was bedeutet „Un/Gerechtigkeit“? oder „Un/Glück“? „Liebe“ und „Hass“? Die großen Fragen des Lebens sind schwer zu fassen, gar zu beantworten, doch sie lösen extrem starke Emotionen aus, wenn man sie selbst erfährt!

Die Mathematik ist dagegen klar und vergleichsweise einfach – entgegen dem allgemeinen pauschalen Vorwurf! Die großen Lebensfragen sind erstaunlich schwer bis unmöglich – entgegen dem naiven Irrglauben!

Sie lassen sich durch Anekdoten erläutern und im Einzelfall diskutieren, doch im Großen und Ganzen entziehen sie sich all unseren Versuchen einer Definition oder gar Lösung. Oft versucht, ebenso oft misslungen.

Vor diesem Hintergrund erscheinen uns Nashs Verhandlungsprobleme lächerlich speziell. Doch immerhin können wir alles vollständig klären: Existenz und Eindeutigkeit, sogar effektive und effiziente Berechnung!

Grundsatzfrage: Was bedeutet „fair“ und „gerecht“?

Beispiele: (1) Steuern, Verwaltung, Bürokratie: Mag keiner, braucht jeder! Das Römische Reich wäre nicht so mächtig geworden ohne Bürokratie. Staaten brauchen effiziente Verwaltung, Bürger:innen profitieren davon. „Ja, sicher, unser Staat braucht Steuereinnahmen, aber *ich* zahle zuviel.“

(2) Lernen in Schule, Ausbildung, Studium: anstrengend, aber lohnend! „Unsere Demokratie braucht Bildung, aber warum muss *mein Kind* so viel lernen? Unsere Wirtschaft und Wohlstand brauchen gut ausgebildeten Nachwuchs, aber *ich* fühle mich von Ausbildung / Studium gestresst.“

Wir erkennen darin ein vertrautes Muster: die Tragik der Allmende! Die meisten Superreichen vermeiden Steuern, doch es gibt Hoffnung: `proudtopaymore.org`. Allzu viele Studierende begnügen sich mit minimalem Aufwand, doch es gibt Ausnahmen: Vier gewinnt? *Proud to learn more!*

(3) Bei Kooperation in wiederholten Spielen geht es nicht nur um das *Was* der erreichbaren Auszahlung, sondern um das *Wie* der teilspielperfekten Realisierungen. Oft muss dazu einer der Spieler in Vorleistung gehen. Keiner will, einer muss. Doch wer? Randomisierung kann helfen!

Analogie: Was bedeutet „zufällig“ und „unabhängig“?

Was ist eine „zufällige Zahl“? in $\{0, \dots, 99\}$? Ist 37 zufällig? oder 42? Wie produzieren wir Zufallszahlen? Zum Beispiel, indem wir einen Lostopf mit gleichen Losen $0, \dots, 99$ befüllen, gut durchmischen, und dann „zufällig“ ein Los ziehen. Wenn 37 gezogen wird, ist das zufällig?

Zufällig und unabhängig sind Eigenschaften des Verfahrens — und nicht eines Einzelfalls!

Wir haben die Frage bereits auf Seite I401 diskutiert, als es um Wkt ging, subjektiv vs objektiv, und Glück im Spiel: Wie un/bestechlich ist Fortuna? Damit gelangen wir zu den Grundfesten der Wahrscheinlichkeitstheorie: Was tun wir eigentlich? Was bedeutet überhaupt Wahrscheinlichkeit?

Auch Zufall, etwa gleichverteilte Auslosung, ist eine Art von Fairness! Wir sprechen von einer „fairen“ Münze oder einem „fairen“ Würfel. Heißt das, bei sechsmaligem Würfeln kommt jede Zahl einmal dran, sonst wäre es irgendwie unfair? Sicher nicht, das ist zuviel verlangt!

Analogie: Was bedeutet „zufällig“ und „unabhängig“?

Zur Implementierung auf dem Computer ist es eine ganz eigene Kunst, (Pseudo-)Zufallszahlen zu generieren oder vorliegende Daten zu prüfen auf (Kriterien von) Zufälligkeit. Donald E. Knuth widmet dieser Frage ein halbes Buch, *Chapter 3: Random Numbers*, seines monumentalen Werks *The Art of Computer Programming*. Knuth ist gläubiger Christ, zudem klug und weise, *Things a Computer Scientist Rarely Talks About*, 2001.

Regiert der Zufall oder eine göttliche Bestimmung? Dies führt zur Frage der Theodizee (gr. θεοδικία [theodikía], von θεός [theós] ‚Gott‘ und δίκη [díkē] ‚Gerechtigkeit‘): Wie ist das Leid dieser Welt vereinbar mit der menschlichen Vorstellung einer Gottheit, die sowohl allmächtig und allwissend als auch gerecht ist? Folglich besonders ausgeprägt ist das Theodizeeproblem im Monotheismus, von der Geschichte des Hiob im Alten Testament bis zu den Schrecken der Schoa und darüber hinaus.

If God is wise, why is He still // When these false prophets call Him friend?
Why is He silent, is He blind? // Are we abandoned in the end?
Motörhead: *God Was Never On Your Side* (2006)

Warum gilt Nashs Verhandlungslösung als „fair“?

Gerechte Schlichtung könnte man von einem Orakel erhoffen. So war es historisch, so ist es erneut in Zeiten von KI, hier wunderbar karikiert:

“O Deep Thought computer,” he said, “the task we have designed you to perform is this. We want you to tell us….” he paused, “The Answer.” — “The Answer?” said Deep Thought. “The Answer to what?” — “Life!” urged Fook. “The Universe!” said Lunkwill. “Everything!” they said in chorus. Deep Thought paused for a moment’s reflection. “Tricky,” he said finally. “But can you do it?” Again, a significant pause. “Yes,” said Deep Thought, “I can do it.”

[Seven and a half million years later….] “All right,” said Deep Thought. “The Answer to the Great Question…” — “Yes..!” — “Of Life, the Universe and Everything…” said Deep Thought. “Yes…!” — “Is…” said Deep Thought, and paused. “Yes…!” — “Is…” — “Yes…!!!…?” — “Forty-two,” said Deep Thought, with infinite majesty and calm. […] “I think the problem, to be quite honest with you, is that you’ve never actually known what the question is.”

Douglas Adams (1952–2001): *The Hitchhiker’s Guide to the Galaxy* (1978)
Verfilmung der BBC (1981): `youtu.be/5ZLtcTZP2js`

Warum gilt Nashs Verhandlungslösung als „fair“?

Douglas Adams verdeutlicht humorvoll drei wichtige Punkte:

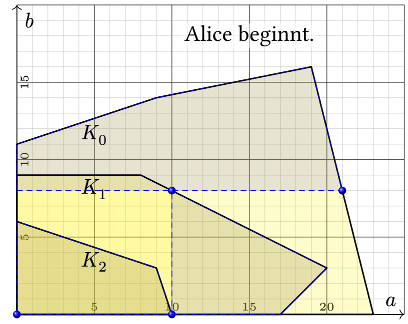
- Wir müssen zunächst unsere Frage klar und unmissverständlich formulieren — hier konkret: Was ist eine faire Verhandlungslösung?
- Wir hoffen auf eine eindeutige Antwort — Existenz und Eindeutigkeit! Sie soll zudem effektiv sein, gar effizient — nicht 7½ Millionen Jahre!
- Wir wollen nicht nur irgendeinen vermeintlich klugen Orakelspruch, sondern transparente nachvollziehbare Begründung – einen Beweis!

Zudem elaborieren wir im Folgenden eine duale Sichtweise: Nashs Verhandlungslösung entsteht als Gleichgewicht eines Spiels, nämlich Rubinsteins Verhandlungsmodell durch alternierende Angebote.

Let the sword of reason shine // Let us be free of prayer and shrine
God’s face is hidden, turned away // He never has a word to say
Motörhead: *God Was Never On Your Side* (2006)

Manuel Raabe: *„God Was Never On Your Side!“ Gottesbilder und Religionskritik in der Rock- und Metal-Musik*, Dissertation (in katholischer Theologie), Universität Kassel, 2019, `doi.org/10.17170/kobra-202204136031`.

Verhandeln durch alternierende Angebote



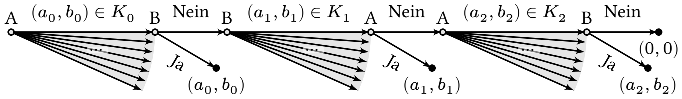
Rückwärtsinduktion über die Runden 2, 1, 0:

2b: Bob akzeptiert $b \ge 0$.
2a: Alice schlägt $(10, 0)$ vor.

1b: Alice akzeptiert $a \ge 10$.
1a: Bob schlägt $(10, 8)$ vor.

0b: Bob akzeptiert $b \ge 8$.
0a: Alice schlägt $(21, 8)$ vor.

Wie lauten die Spielregeln? Formal erklären wir hierzu den Spielbaum:



Verhandeln durch alternierende Angebote

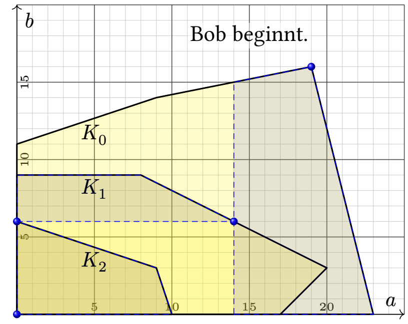
🙂 Wir formulieren ein recht allgemeines, doch übersichtliches Modell: Alice und Bob verhandeln durch alternierende Angebote $(a, b) \in K_n$ in Runde $n = 0, 1, 2$. Dabei ist a der Gewinn für Alice und b der Gewinn für Bob, und die Verhandlungsmenge $K_0 \supset K_1 \supset K_2$ schrumpft wie gezeigt.

Ist Alice in Runde n am Zug, so schlägt sie $(a, b) \in K_n$ vor; nimmt Bob dies an, so ist (a, b) die Auszahlung; andernfalls geht das Spiel in die nächste Runde $n + 1$ mit vertauschten Rollen. Nach dreimaliger Ablehnung scheitern die Verhandlungen mit der Auszahlung $(0, 0)$.

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie den Spielbaum im Fall, dass Alice beginnt.
(1) Finden Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte.
(2) Ebenso im Fall, dass Bob beginnt.

Lösung: (0) Der Spielbaum ist oben dargestellt. Leider ist es unmöglich, den gesamten Spielbaum zu zeichnen, da jeder Vorschlag $(a_n, b_n) \in K_n$ unendlich viele Möglichkeiten bietet. Wir stellen daher jeweils nur einen typischen Zug dar. An jeder der Alternativen hängt derselbe Teilbaum. Eine vollständige Formalisierung finden Sie anschließend auf Seite L205.

Verhandeln durch alternierende Angebote



Rückwärtsinduktion über die Runden 2, 1, 0:

2b: Alice akzeptiert $a \ge 0$.
2a: Bob schlägt $(0, 6)$ vor.

1b: Bob akzeptiert $b \ge 6$.
1a: Alice schlägt $(14, 6)$ vor.

0b: Alice akzeptiert $a \ge 14$.
0a: Bob schlägt $(19, 16)$ vor.

Der Spielbaum ist derselbe, doch Alice und Bob tauschen die Rollen.

Bemerkung: Zur Vereinfachung der nötigen Fallunterscheidungen machen wir eine zusätzliche Annahme über das Verhalten der Spieler: Sie präferieren zunächst wie immer (1) höhere eigene Auszahlung, dann (2) ein schnelleres Ende, und schließlich (3) höhere Gesamtauszahlung.

Verhandeln durch alternierende Angebote

🙂 Wie gut, dass wir unsere spieltheoretischen Werkzeuge parat haben! Per **Rückwärtsinduktion** finden wir die oben skizzierten Lösungen:

(1) Alice beginnt. Es gibt genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht:
0. Runde: Alice bietet $(21, 8)$. Bob akzeptiert gdw $b \ge 8$.
1. Runde: Bob bietet $(10, 8)$. Alice akzeptiert gdw $a \ge 10$.
2. Runde: Alice bietet $(10, 0)$. Bob akzeptiert gdw $b \ge 0$.

(2) Bob beginnt. Es gibt genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht:
0. Runde: Bob bietet $(19, 16)$. Alice akzeptiert gdw $a \ge 14$.
1. Runde: Alice bietet $(14, 6)$. Bob akzeptiert gdw $b \ge 6$.
2. Runde: Bob bietet $(0, 6)$. Alice akzeptiert gdw $a \ge 0$.

Bemerkung: Alle relevanten Daten liegen offen vor, die Spieler verhalten sich rational, daher verlaufen die Verhandlungen ohne langes Feilschen.

Hier hat das Gleichgewicht kein Gedächtnis. Die Spieler könnten ihre Aktionen abhängig machen von den vorigen Runden, rückblickend als Belohnung oder Bestrafung, vorausschauend als Drohung oder Lockung. Davon wird im Gleichgewicht jedoch kein Gebrauch gemacht.

Verhandlungsspiel alternierender Angebote

Vorgelegt seien konvexe Kompakta $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ in $\mathbb{R}^2_{\ge 0}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \{(0,0)\}$: Der Kuchen schrumpft auf den Drohpunkt. Typisches Beispiel ist $K_n := (\delta_1^n, \delta_2^n) \cdot K$ mit Faktoren $\delta_1, \delta_2 \in [0, 1[$. Im endlichen Fall von r Runden gilt $K_n = \{(0,0)\}$ für alle $n \ge r$.

Diese Daten definieren unser **Verhandlungsspiel** $\Gamma = \Gamma(K_n|_{n \in \mathbb{N}})$, genauer Γ^1, falls Alice beginnt, und Γ^2, falls Bob beginnt. Ausführlich: Als Alphabet wählen wir $\mathscr{A} = \mathbb{R}^2 \sqcup \{$ 👎 $=$ ablehnen, 👍 $=$ akzeptieren $\}$. Spielbaum $X = X^\circ \sqcup \partial X$ und Auszahlung u entstehen daraus wie folgt:

$$\begin{aligned}
X_0^\circ &= \{\emptyset\}, \\
X_{2n+1}^\circ &= X_{2n}^\circ * K_n &&= \{v = (x_0, 👎, \dots, 👎, x_n)\}, \\
X_{2n+2}^\circ &= X_{2n+1}^\circ * \{👎\} &&= \{v = (x_0, 👎, \dots, 👎, x_n, 👎)\}, \\
\partial X_{2n+2} &= X_{2n+1}^\circ * \{👍\} &&= \{v = (x_0, 👎, \dots, 👎, x_n, 👍)\}, \quad u^i(v) = x_n^i, \\
X_\infty &= \textstyle\prod_{n \in \mathbb{N}} (K_n * \{👎\}) &&= \{v = (x_0, 👎, x_1, 👎, x_2, \dots)\}, \quad u^i(v) = 0.
\end{aligned}$$

🙂 Dies ist eine recht realistische Wiedergabe echter Verhandlungen.

Verhandlungsspiel alternierender Angebote

In Runde n ist K_n die Verhandlungsmenge. Jedes Element $x \in K_n$ ist ein mögliches Verhandlungsergebnis und kann als Angebot genutzt werden. Die Verhandlung verläuft alternierend, wobei zunächst Alice beginnt: Zuerst macht Alice ein Angebot. Lehnt Bob ab, so macht er ein Angebot. Lehnt Alice dieses ab, so macht sie ein Angebot. Und immer so weiter.

Zu jeder Vorgeschichte $v = (x_0, 👎, \dots, x_{n-1}, 👎) \in X$ haben wir

- für n gerade: $A_v^1 = K_n$ und $A_v^2 = \{\text{warten}\}$. Setze $i_n = 1$.
- für n ungerade: $A_v^2 = K_n$ und $A_v^1 = \{\text{warten}\}$. Setze $i_n = 2$.

Zu jeder Vorgeschichte $v = (x_0, 👎, \dots, x_{n-1}, 👎, x_n) \in X$ haben wir

- für n gerade: $A_v^1 = \{\text{warten}\}$ und $A_v^2 = \{👍, 👎\}$. Setze $j_n = 2$.
- für n ungerade: $A_v^2 = \{\text{warten}\}$ und $A_v^1 = \{👍, 👎\}$. Setze $j_n = 1$.

Durch diese Aktionsmengen wird das Spiel Γ^1 eindeutig beschrieben, insbesondere werden alle Strategien $s^1 \in S^1$ und $s^2 \in S^2$ festgelegt. Das Spiel Γ^2 definieren wir ebenso, allerdings mit vertauschten Rollen. Das entspricht (fast) der Verkettung $\Gamma^1 = \Gamma_0^1 * \Gamma_1^2 * \Gamma_2^1 * \dots$ gemäß K1B.

Verhandlungsspiel alternierender Angebote

„*Of course, one cannot represent all possible bargaining devices as moves in the non-cooperative game. The negotiation process must be formalized and restricted, but in such a way that each participant is still able to utilize all the essential strengths of his position.*“ (Nash 1953)

Wir brauchen demnach Modelle, die einerseits umfassend genug sind, um realistisch zu sein, andererseits einfach genug, um praktikable Analysen und Lösungen zuzulassen. Der axiomatisch-kooperative Ansatz löst das zweite Problem sehr elegant und liefert Lösungen. Doch welche der verschiedenen Verhandlungslösungen ist realistisch, in welchem Kontext ist sie geeignet, und wie sollen wir sie anwenden?

Hier hilft die nicht-kooperative Theorie als Richtschnur, denn wir können diese Modelle gut der Realität anpassen. In diesem Sinne ergänzen sich axiomatisch-kooperative und die strategisch-nicht-kooperative Theorie. Das **Nash–Programm** hat zum Ziel, die erste in die zweite einzubetten. Beide lassen sich so zudem empirisch überprüfen und kalibrieren, etwa passiv in (Real-Life-)Beobachtungen oder aktiv in (Labor-)Experimenten.

Verhandlungsspiel alternierender Angebote

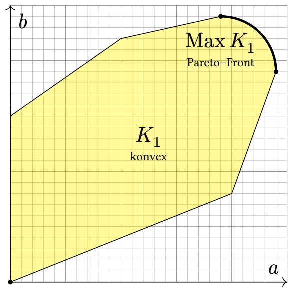
🙂 Rubinsteins Verhandlungsmodell $\Gamma(K_n|_{n \in \mathbb{N}})$ ist intuitiv und natürlich. Im endlichen Fall mit r Runden gilt $K_n = \{(0,0)\}$ für alle $n \ge r$ und wir lösen das Spiel durch Rückwärtsinduktion, siehe Satz J1D von Zermelo.

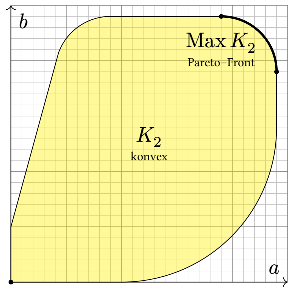
Die Strategiemenge $S = S^1 \times S^2$ ist riesig: Jede Entscheidung „👍 oder 👎?“ verzweigt nur in zwei, aber bei jedem Vorschlag $x \in K$ verzweigt der Spielbaum sogleich in überabzählbar viele Teilbäume. Zum Glück haben wir eine universelle, präzise und bequeme Notation für all solche Fälle!

Diese Verzweigungen wiederholen sich hier abzählbar unendlich oft. Nicht alle Trajektorien / Spielverläufe sind endlich; Rückwärtsinduktion nach Satz J1D von Zermelo–Kuhn steht uns leider nicht zur Verfügung.

🙂 Praktisch gesehen sind damit unfassbar viele Strategien denkbar, etwa das irre Feilschen von Harry und Brian aus dem Eingangszitat. Die Spieler können versuchen, sich gegenseitig zu beeindrucken: täuschen, drohen, einschüchtern, hinhalten, verwirren, ablenken, etc. Der Phantasie und Schauspielkunst sind hier kaum Grenzen gesetzt. Das Verhandlungsergebnis L2H hingegen ist ruhig und nüchtern.

Geometrische Vorbereitung: Max $K \subset \partial K$?





Die Pareto–Front ist im Allgemeinen nur ein kleiner Teil des Randes!
Weiterhin sei $K \Subset \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ konvex und kompakt mit Drohpunkt $0 \in K$.
Wir nutzen die lexikographischen Lösungen mit (x, y) als Drohpunkt:

$$\Phi_1^K : K \to \operatorname{Max} K : (x,y) \mapsto (a,b) \in K_{\geq(x,y)}, \quad \text{maximiere } a, \text{ dann } b,$$
$$\Phi_2^K : K \to \operatorname{Max} K : (x,y) \mapsto (a,b) \in K_{\geq(x,y)}, \quad \text{maximiere } b, \text{ dann } a.$$

Geometrische Vorbereitung: Max $K \subset \partial K$?

Wir setzen $m_1 := \max \mathrm{pr}_1 K$ und ebenso $m_2 := \max \mathrm{pr}_2 K$.
Damit gilt $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq m_1,\ \psi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_1(x_1) \}$
mit $\psi_1 \leq \varphi_1 : [0, m_1] \to [0, m_2]$ stetig, ψ_1 konvex wachsend, φ_1 konkav.
Ebenso gilt $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_2 \leq m_2,\ \psi_2(x_2) \leq x_1 \leq \varphi_2(x_2) \}$
mit $\psi_2 \leq \varphi_2 : [0, m_2] \to [0, m_1]$ stetig, ψ_2 konvex wachsend, φ_2 konkav.

Bemerkung: Wir nennen $B \subseteq \mathbb{R}^2$ **Normalbereich in y–Richtung**, wenn

$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x) \}$$

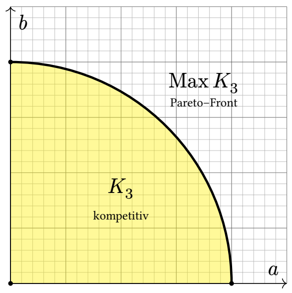
mit $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \leq h$. Dies nutzen wir z.B. zur Integration.
Entsprechend ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein **Normalbereich in x–Richtung**, wenn

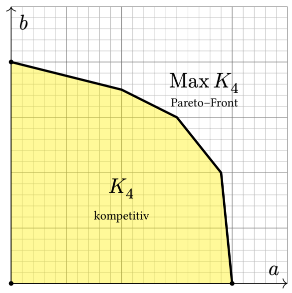
$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b,\ g(y) \leq x \leq h(y) \}.$$

Gilt beides, so nennen wir B einen **Binormalbereich**.

Aufgabe: Jedes konvexe Kompaktum $K \Subset \mathbb{R}^2$ ist ein Binormalbereich.
Wie konstruieren Sie jeweils die eingrenzenden Funktionen g und h?
Warum sind diese dann stetig, zudem g konvex und h konkav?

Geometrische Vorbereitung: Max $K = \partial K$!





Zur Vereinfachung gelte $(m_1, 0) \in \operatorname{Max} K$ und $(0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.
Dann verläuft die Pareto–Front vollständig von Achse zu Achse,
kurz $\operatorname{Max} K = \partial K$: Die Pareto–Front ist der topologische Rand in $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$.
☺ Eine solche Verhandlungsmenge K nennen wir kurz **kompetitiv**.
Insbesondere erfüllen unsere Projektionen dann $\Phi_1^K, \Phi_2^K : K \mapsto \operatorname{Max} K$.
Das vereinfacht unsere Analyse und erspart uns mühsame Sonderfälle.

Geometrische Vorbereitung: Max $K = \partial K$!

Jede kompetitive Verhandlungsmenge K hat die besonders einfache Form

$$\begin{aligned} K &= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq m_1,\ 0 \leq x_2 \leq \varphi_1(x_1) \} \\ &= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_2 \leq m_2,\ 0 \leq x_1 \leq \varphi_2(x_2) \} \end{aligned}$$

mit $(\varphi_1, \varphi_2) : [0, m_1] \cong [0, m_2]$ stetig, bijektiv, konkav fallend.
Für unsere Projektionen gelten dann die einfachen Formeln

$$\Phi_1^K : K \to \operatorname{Max} K : (a,b) \mapsto (\varphi_2(b), b) \in K,$$
$$\Phi_2^K : K \to \operatorname{Max} K : (a,b) \mapsto (a, \varphi_1(a)) \in K.$$

Aufgabe: Weisen Sie alle hier gemachten Aussagen sorgfältig nach!
Differenzieren im Sinne der Analysis 1 können Sie im Allgemeinen nicht,
aber Geometrie und Topologie sind Ihnen wie immer treue Helferinnen.

Wir werden später hauptsächlich den kompetitiven Fall untersuchen.
Alle Argumente lassen sich mit Geschick auf den allgemeinen Fall
übertragen, zum Preis etwas umständlicher Fallunterscheidungen.
Diese zusätzliche Mühe möchte ich mir und Ihnen hier ersparen.

Endliche Verhandlungsspiele

Definition L2A: stationäre Strategie, ohne Erinnerung

Vorgelegt sei das Verhandlungsspiel $\Gamma(K_n|_{n\geq 0})$. Jede Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
mit $x_n \in K_n$ definiert ein Strategiepaar s_x, wobei in jeder Runde n gilt:

- Der jeweils erstziehende Spieler $i = i_n$ schlägt $x_n \in K_n$ vor.
- Der Gegenspieler $j = j_n$ akzeptiert $x \in K_n$ gdw $x^j \geq x^j_{n+1}$.

Satz L2B: Rückwärtsinduktion durch Verhandlungszickzack

Vorgelegt sei ein endliches Verhandlungsspiel $\Gamma = \Gamma(K_n|_{n\geq 0})$ zu

$$\mathbb{R}^2 \ni K_0 \supseteq K_1 \supseteq \dots \supseteq K_r = \{0\}.$$

Dank Rückwärtsinduktion existiert dazu genau ein teilspielperfektes
Gleichgewicht, es gilt nämlich $\mathrm{PNE}(\Gamma) = \{s_x\}$ mit $x_n = 0$ für $n \geq r$
und schließlich $x_n = \Phi_{i_n}^{K_n}(x_{n+1})$ für $n = r-1, \dots, 0$.

Aufgabe: Führen Sie die nötigen Ungleichungen sorgsam aus.
Die eingangs erklärte Verhandlung zeigt dies auf Seite L204.

Endliche Verhandlungsspiele

Lösung: Wir zeigen, dass unser Strategiepaar teilspielperfekt ist.
Für alle Runden $n \geq r$ ist das klar. Sei also $n = r-1, \dots, 0$.

(1) Spieler $j = j_n$ akzeptiert x gdw $x^j \geq x^j_{n+1}$. Er prüft die Alternativen:

- Gilt $x^j < x^j_{n+1}$ und er nimmt an, so erhält er x^j statt x^j_{n+1}.
- Gilt $x^j > x^j_{n+1}$ und er lehnt ab, so erhält er x^j_{n+1} statt x^j.
- Gilt $x^j = x^j_{n+1}$ und er lehnt ab, so erhält er x^j_{n+1} eine Runde später.
  Verzögerung werten wir als schlechter, wie oben vereinbart.

(2) Spielerin $i = i_n$ schlägt $x_n = \Phi_{i_n}^{K_n}(x_{n+1})$ vor und bekommt dafür
sofortige Zustimmung dank (1). Sie prüft alle Alternativen $x \in K$.

- Im Falle $x^j < x^j_{n+1}$ lehnt j ab, und sie erhält x^i_{n+1} statt x^i_n.
  Das ist höchstens gleich gut, doch leider eine Runde später.
- Im Falle $x^j \geq x^j_{n+1}$ stimmt j zu, und sie erhält x^i. Nach Konstruktion
  von $x_n = \Phi_{i_n}^{K_n}(x_{n+1})$ ist dieser Vorschlag daher die strikt beste Wahl.

Somit ist die Strategie s_x in Runde n eindeutig die beste Wahl.
Per Rückwärtsinduktion folgt somit $\mathrm{PNE}(\Gamma) = \{s_x\}$.

Fast endliche Verhandlungsspiele

Genauso erhalten wir die folgende Verallgemeinerung:

Satz L2c: Rückwärtsinduktion durch Verhandlungszickzack

Angenommen, das Teilspiel $\Gamma(K_n|_{n\geq r})$ ab Runde r hat nur eine einzige
Gleichgewichtsauszahlung $x_r \in K_r$, etwa $K_r = \{0\}$ oder $\operatorname{Max} K_r = \{x_r\}$.
Dann gilt dies per Rückwärtsinduktion über $n = r, \dots, 0$ für jedes
Teilspiel $\Gamma(K_n|_{n\geq 0})$, wobei $x_n = \Phi_{i_n}^{K_n}(x_{n+1})$ für

Übung: Beweisen Sie dies nach Vorbild des vorigen Satzes L2B.

Bemerkung: Wir verlangen und garantieren hier nur die Eindeutigkeit
der Gleichgewichtsauszahlungen, nicht die der dahinterliegenden
Strategien. Es kann durchaus mehrere Gleichgewichtsstrategien geben.
Für die Auszahlungen können wir Rückwärtsinduktion anwenden!

Anders gesagt: Die eindeutige Auszahlung x_r ist der neue Drohpunkt.
Damit wird das unendliche Verhandlungsspiel so gut wie endlich.
Das beinhaltet insbesondere die Auszahlung im vorigen Satz L2B.

Unendliche Verhandlungsspiele

Für unendliche Verhandlungen erhalten wir ebenso Gleichgewichte:

Satz L2D: Existenz von Gleichgewichten durch Verhandlungszickzack

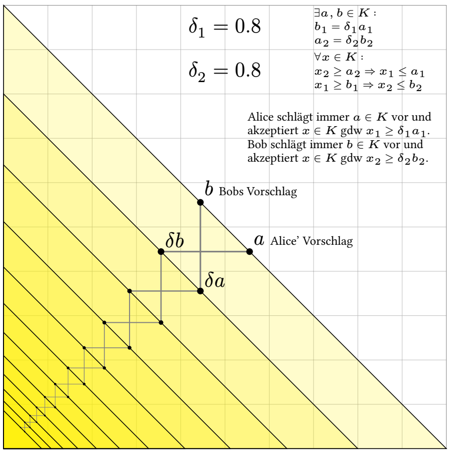
Vorgelegt sei das unendliche Verhandlungsspiel $\Gamma(K_n|_{n\geq 0})$ und
$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in K_n$ und $x_n = \Phi_{i_n}^{K_n}(x_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $s_x \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies mit dem Prinzip J2D einmaliger Abweichung.

Lösung: Der obige Beweis von Satz L2B zeigt für jede Runde n,
dass einmalige Abweichung nicht lohnt, im Gegenteil sogar schadet.
Das Prinzip J2D einmaliger Abweichung fordert Stetigkeit. Das ist erfüllt.
Unser Strategiepaar s_x ist somit ein teilspielperfektes Gleichgewicht.

Bemerkung: Im Falle eines unendlichen Verhandlungspiels behaupten
wir hier nur die Existenz eines Gleichgewichts, nicht die Eindeutigkeit.
Im endlichen Fall liefert Rückwärtsinduktion die Eindeutigkeit dazu, im
unendlichen Fall kann $\mathrm{PNE}(\Gamma)$ durchaus mehrere Elemente haben.

Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten



Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten

Beispiel: Wir betrachten $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid x_1 + x_2 \leq 1 \}$ mit der Pareto–Front $\operatorname{Max} K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid x_1 + x_2 = 1 \}$. Für $a, b \in \operatorname{Max} K$ lösen wir $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$ auf zu

$$a_1 = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} \in \,]0,1] \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2} \in \,]0,1].$$

☺ Probe durch Einsetzen in die geforderten Gleichungen:

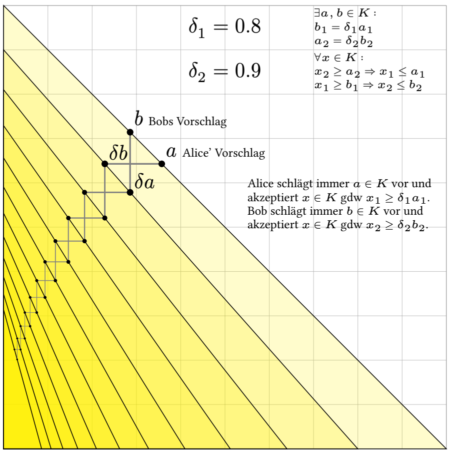
$$a_2 = 1 - a_1 = \frac{\delta_2 - \delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} = \delta_2 b_2 \quad \text{und} \quad b_1 = 1 - b_2 = \frac{\delta_1 - \delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} = \delta_1 a_1$$

Spezialfall: gleiche Diskontfaktoren $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Für $\delta \nearrow 1$ finden wir:

$$a_1 = \frac{1-\delta}{1-\delta^2} = \frac{1}{1+\delta} \to \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad a, b \to \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

☺ Das entspricht der symmetrischen Nash–Verhandlungslösung!
Für $\delta < 1$ bekommt Alice etwas mehr vom Kuchen. Das ist ihr Privileg des ersten Zugs. Im Grenzwert $\delta \nearrow 1$ verschwindet dieser Vorteil.

Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten



Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten

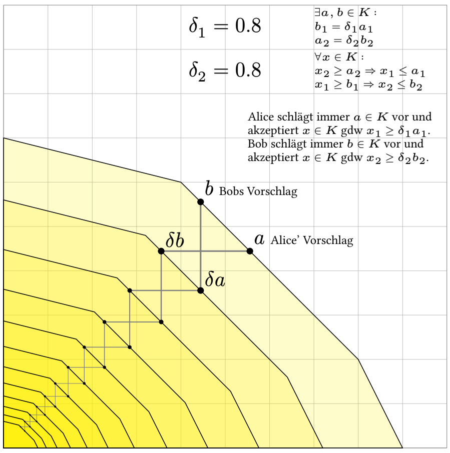
Wir betrachten $\delta_i = \mathrm{e}^{-t/p_i}$ mit Zeitschritt $t > 0$ und Halbwertszeit $p_i \ln 2$.
☺ Anschaulich ist $t > 0$ der Zeitschritt für jede Verhandlungsrunde. Der Geduldsparameter $T_i = p_i \ln 2$ ist hier die Halbwertszeit für Spieler i. Der Kuchen $K_n = (\delta_1^n, \delta_2^n) \cdot K$ schrumpft mit der Zeit, exponentiell in nt.
Für immer kürzere Zeitschritte $t \searrow 0$ finden wir:

$$a_1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-t/p_2}}{1-\mathrm{e}^{-t/p_1}\,\mathrm{e}^{-t/p_2}} \to \frac{p_1}{p_1+p_2} \qquad \text{also} \qquad a, b \to \left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right)$$

☺ Das entspricht der asymmetrischen Nash–Verhandlungslösung!
Ist Alice geduldiger, $p_1 > p_2$, dann bekommt sie mehr vom Kuchen. Im symmetrischen Fall $p_1 = p_2$ gilt $a, b \to (1/2, 1/2)$ wie zuvor berechnet. Weiterhin gilt das Privileg des ersten Zugs, hier als Zeitvorteil $t > 0$. Im Grenzwert $t \searrow 0$ verschwindet dieser Vorteil, das ist anschaulich klar.

☺ Geduld erhöht die Verhandlungsmacht! Das ist intuitiv plausibel.
Rubinsteins Verhandlungsmodell mit alternierenden Angeboten erklärt hierzu eine detaillierte Spielmechanik und liefert quantitative Ergebnisse.

Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten



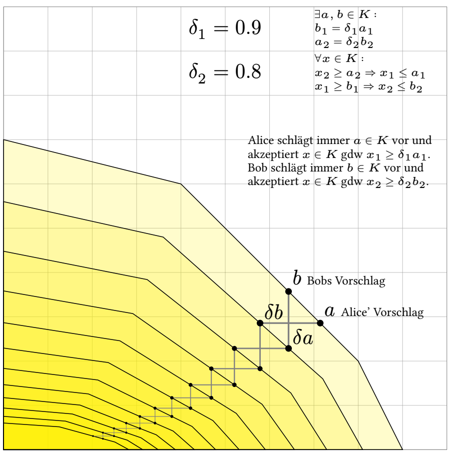
Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten

Ein wesentlicher Aspekt des Rubinstein–Modells ist das Schrumpfen der Verhandlungsmenge: Der zu verteilende Kuchen nimmt mit der Zeit exponentiell / geometrisch ab. Nur durch diesen Zeitdruck entsteht hier die innere Dynamik der Verhandlung und der Anreiz zur Einigung.

Die Diskontierung mit δ_i können wir auf drei Arten interpretieren:

1. **Intersubjektive Inflation:** Geld morgen ist weniger wert als heute. Wertverlust in Form des Faktors $\delta \in [0,1[$ ist intersubjektiv, für alle Spieler gleich. Der vermutete Wert δ_i kann jedoch individuell sein.
2. **Individuelle Geduld:** Warten verringert den Nutzen, auch hier ist Geld morgen weniger wert als Geld heute, diesmal aber für jeden Spieler $i \in I$ individuell diskontiert durch den Faktor $\delta_i \in [0,1[$.
3. **Abbruchwahrscheinlichkeit:** Zu Recht wenden Sie ein, dass unendliche Wiederholung unrealistisch ist. Viel realistischer sind dagegen wiederholte Spiele mit einer gewissen Abbruchwkt $\varepsilon > 0$. Das führt zu derselben geometrischen Summe mit Fortsetzungswkt $\delta = 1 - \varepsilon$. Auch hier kann der vermutete Wert δ_i individuell sein.

Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten



Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten

Satz L2E: Gleichgewichte bei geometrischem Schrumpfen

Vorgelegt sei $K \Subset \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ konvex und kompakt mit Drohpunkt $(0,0)$. Zu gegebenen Faktoren $\delta_1, \delta_2 \in [0,1[$ sei $K_n := (\delta_1^n, \delta_2^n) \cdot K$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das zugehörige Verhandlungsspiel $\Gamma = \Gamma^1(K_n|_{n \geq 0})$.
Gegeben seien zwei Punkte $a, b \in \operatorname{Max} K$ mit $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$. Wir erhalten daraus das Strategiepaar s_x zur Folge $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei

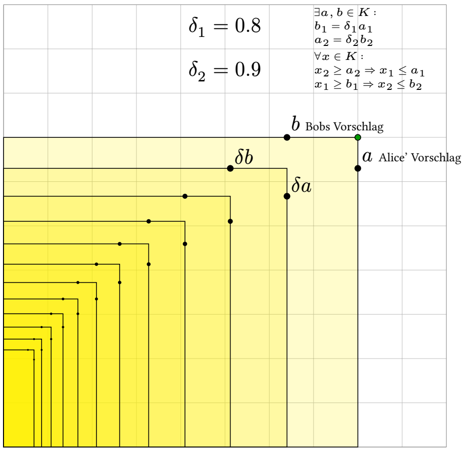
$$x_n = \begin{cases} (\delta_1^n a_1, \delta_2^n a_2) & \text{falls } n \text{ gerade (Alice schlägt vor),} \\ (\delta_1^n b_1, \delta_2^n b_2) & \text{falls } n \text{ ungerade (Bob schlägt vor).} \end{cases}$$

Dann ist s_x ein teilspielperfektes Gleichgewicht, kurz $s_x \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$. Dasselbe gilt rollenvertauscht für $\Gamma^2(K_n|_{n \geq 0})$, wobei Bob beginnt.

Beweis: Das Strategiepaar s_x haben wir oben in Definition L2A erklärt. Die geometrische Konstruktion sichert $x_n = \Phi^{K_n}_{i_n}(x_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können also Satz L2D anwenden und folgern $s_x \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$. QED

Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten

L225 Erläuterung



Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten

L226 Erläuterung

Die vorigen Beispiele waren geometrisch einfach und eindeutig. Als Mahnung zur Vorsicht diskutieren wir Rechtecke, wie gezeigt. Die Pareto–Front Max K degeneriert hier zu einem einzigen Punkt. Auf den ersten Blick ist nur dieser Punkt ein vernünftiges Ergebnis.

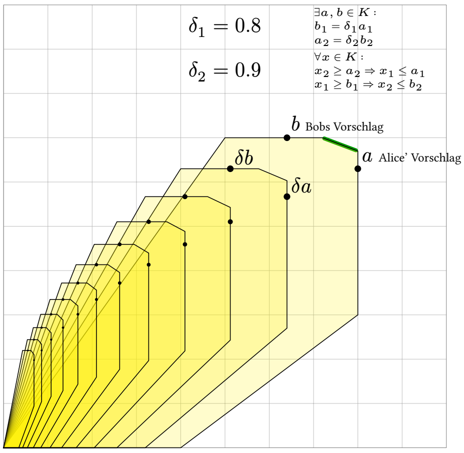
Wie zuvor sind die alternierenden Angebote a und b ein Gleichgewicht. Daneben gibt es noch überabzählbar viele weitere Gleichgewichte und dazu gehören sogar überabzählbar viele Gleichgewichtsauszahlungen! Anschaulich ist die Verhandlungslage hier nicht strikt kompetitiv:

Alice kann ihren Vorschlag a zwar nicht für sich selbst verbessern, denn $a_1 = m_1 = \max \mathrm{pr}_1 K$, doch sie könnte Bob eine Verbesserung bieten. Bob kann seinen Vorschlag b zwar nicht für sich selbst verbessern, denn $b_2 = m_2 = \max \mathrm{pr}_2 K$, doch er könnte Alice eine Verbesserung bieten.

Diese Ambivalenz verkompliziert unsere spieltheoretische Analyse. Zur Vereinfachung wollen wir Degenerierung kurzerhand ausschließen. Wir fordern dazu, dass die Pareto–Front Max K maximal ausgedehnt ist, also komplett von Achse zu Achse läuft, kurz $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.

Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten

L227 Erläuterung



Verhandlungsgleichgewichte bei alternierenden Angeboten

L228 Erläuterung

Dieses modifizierte Beispiel ähnelt dem vorigen Problem des Rechtecks, hier jedoch ist die Pareto–Front Max K nicht nur ein einzelner Punkt, sondern ein Geradensegment, allzu kurz, aber immerhin ausgedehnt. Auch hier liegen außerhalb der Pareto–Front weitere Gleichgewichte!

Wie zuvor sind die alternierenden Angebote a und b ein Gleichgewicht. Daneben gibt es noch überabzählbar viele weitere Gleichgewichte und dazu gehören sogar überabzählbar viele Gleichgewichtsauszahlungen! Anschaulich: Die Verhandlungslage ist wieder nicht strikt kompetitiv.

Was wäre die schönste Aussage, die bisher noch nicht widerlegt ist? Wir würden vermuten, unter der nötigen geometrischen Vereinfachung, dass a bzw. b tatsächlich die einzige Gleichgewichtsauszahlung ist. Genau dies ist der Satz L2H von Rubinstein, auf den wir zusteuern.

Nach diesen Beispielen und Mahnungen ist die Vorgehensweise klar:

- Wir präzisieren die geometrischen Voraussetzungen an K.
- Wir formalisieren die Verhandlung $\Gamma = \Gamma(K, \delta)$ in extensiver Form.
- Wir finden alle Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$ bzw. ihre Auszahlungen.

Verhandlungsgleichgewichte und die Nash–Lösung

L229 Erläuterung

Für die Analyse verschaffen wir uns zunächst das Punktepaar (a, b):

Lemma L2F: Verhandlungsgleichgewicht und Nash–Lösung

Sei $0 \in K \Subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt sowie $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$; demnach verläuft die Pareto–Front vollständig von Achse zu Achse.

Zu jedem Parameterpaar $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\delta_1 = \mathrm{e}^{-t/p_1}$, $\delta_2 = \mathrm{e}^{-t/p_2}$ existiert auf der Pareto–Front genau ein Punktepaar $a, b \in \operatorname{Max} K$ mit

$$\delta_1 a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad \delta_2 b_2 = a_2.$$

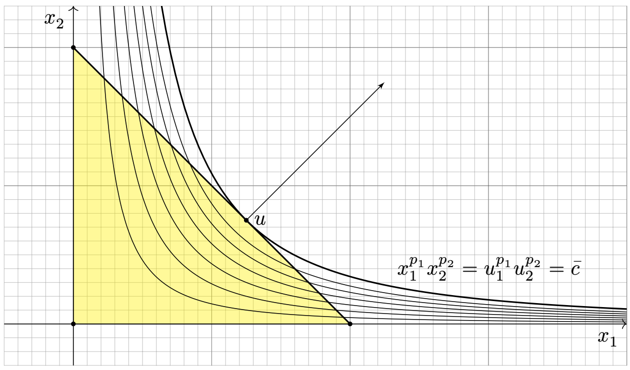
Für $t \searrow 0$ konvergieren $a(t)$ und $b(t)$ gegen die asymmetrische Nash–Verhandlungslösung $P(K, 0) = u$, also den eindeutigen Maximierer $u \in K$ der Funktion $h : K \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1^{p_1} x_2^{p_2}$.

Beispiel: Wir betonen den symmetrischen Fall $p_1 = p_2$, also $\delta_1 = \delta_2$: Für $t \searrow 0$ konvergieren hierbei $a(t)$ und $b(t)$ gegen die symmetrische Nash–Verhandlungslösung $N(K, 0) = u$, also den eindeutigen Maximierer $u \in K$ der Funktion $h : K \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$.

Verhandlungsgleichgewichte und die Nash–Lösung

L230 Erläuterung

Existenz und Eindeutigkeit und Konvergenz als Beweis in Bildern:



🙂 Hier sind Geometrie und Topologie gefragt, allerdings noch einfach.

Verhandlungsgleichgewichte und die Nash–Lösung

L231 Erläuterung

Beweis: (1) Aus $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$ folgt $h(a) = h(b)$, denn

$$h(a) = (a_1)^{p_1} (a_2)^{p_2} = (\mathrm{e}^{t/p_1} b_1)^{p_1} (\mathrm{e}^{-t/p_2} b_2)^{p_2} = (b_1)^{p_1} (b_2)^{p_2} = h(b)$$

(2) Umgekehrt: Je zwei dieser drei Gleichungen implizieren die dritte.

(3) Sei $\bar{c} := \max_K h = h(u)$. Der Maximierer $u \in K$ ist eindeutig. Für jedes Niveau $c \in \,]0, \bar{c}[$ schneidet die zugehörige Niveaulinie $h^{-1}(c) = \{ x \in \mathbb{R}^2_{>0} \mid x_1^{p_1} x_2^{p_2} = c \}$ die Pareto–Front genau zweimal: Es gilt $h^{-1}(c) \cap \operatorname{Max} K = \{a, b\}$ mit $b_1 < u_1 < a_1$ und $a_2 < u_2 < b_2$.

Die Zuordnung $c \mapsto a_1$ ist antiton. Die Zuordnung $c \mapsto b_1$ ist isoton. Für $c \searrow 0$ gilt $b_1 \searrow 0$ und $a_1 \nearrow m_1$, also insbesondere $\delta_1 = b_1/a_1 \searrow 0$. Für $c \nearrow \bar{c}$ gilt $b_1 \nearrow u_1$ und $a_1 \searrow u_1$, also insbesondere $\delta_1 = b_1/a_1 \nearrow 1$.

Die Zuordnung $c \mapsto b_1/a_1$ ist stetig. Also wird jeder Wert in $]0, 1[$ genau einmal angenommen. Aus $b_1/a_1 = \mathrm{e}^{-t/p_1}$ folgt dann $a_2/b_2 = \mathrm{e}^{-t/p_2}$. $\boxed{\text{QED}}$

Übung: Prüfen Sie alle Teilaussagen dieses Beweises sorgfältig nach. Die Skizzen helfen zur Intuition, die Rechnung beweist es allgemein.

Verhandlungsgleichgewichte und die Nash–Lösung

L232 Erläuterung

Rückblick auf unsere einführenden Beispiele und didaktisches Vorgehen: Warum zeige ich zunächst nur viele Beispiele und zahlreiche Graphiken? Ist das Phänomen nicht insgesamt einfach und knapp zusammenfassbar? Ja, schon, wie so oft allerdings erst *nachdem* man es verstanden hat!

Wir beginnen einen Zusammenhang zu erkennen und zu beweisen: Nashs Verhandlungslösung war bisher nur axiomatisch begründet. Nun entsteht sie (im Grenzwert) als Gleichgewicht der Verhandlung. Das ist ein starkes Argument für Nashs Lösung!

In der Vorlesung erlaube ich mir, reiflich überlegt und erprobt, dies zunächst anschaulich anhand der Beispiele vorzuführen. Das illustriert und motiviert und weckt Ihr Interesse an einer genaueren Begründung. Die finden Sie hier, geduldig ausgeführt in den Hintergrundfolien.

Gerüstet mit diesen Vorbereitungen können wir schließlich Rubinsteins elegantes Verhandlungsmodell formal einführen und vollständig lösen. (Alternativ könnte man direkt das Modell und seine Lösung angeben, das scheint mathematisch effizienter, finde ich aber didaktisch fatal.)

Rubinsteins Verhandlungsmodell

L233

Annahmen: Sei $K \Subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt mit Drohpunkt $0 \in K$. Mit jedem Zeitschritt $n = 0, 1, 2, \dots$ schrumpft der zu verteilende Kuchen auf die Menge $K_n := (\delta_1^n, \delta_2^n) \cdot K$ mit konstanten Faktoren $\delta_1, \delta_2 \in [0, 1[$.

Diese Daten definieren das **Rubinstein–Modell** einer Verhandlung durch alternierende Angebote als dynamisches Spiel $\Gamma = \Gamma(K, \delta)$, genauer Γ_1, falls Alice beginnt, und Γ_2, falls Bob beginnt.

Als Alphabet wählen wir $\mathscr{A} = K \sqcup \{ 👎 = \text{ablehnen},\ 👍 = \text{akzeptieren} \}$. Spielbaum $X = X^\circ \sqcup \partial X$ und Auszahlung u entstehen daraus wie folgt:

$$
\begin{aligned}
X^\circ_0 &= \{\emptyset\}, \\
X^\circ_{2n+1} &= X^\circ_{2n} * K &&= \{ v = (x_0, 👎, \dots, 👎, x_n) \}, \\
X^\circ_{2n+2} &= X^\circ_{2n+1} * \{👎\} &&= \{ v = (x_0, 👎, \dots, 👎, x_n, 👎) \}, \\
\partial X_{2n+2} &= X^\circ_{2n+1} * \{👍\} &&= \{ v = (x_0, 👎, \dots, 👎, x_n, 👍) \}, \quad u^i(v) = \delta_i^n x_n^i, \\
X_\infty &= (K * \{👎\})^\infty &&= \{ v = (x_0, 👎, x_1, 👎, x_2, \dots) \}, \quad u^i(v) = 0.
\end{aligned}
$$

🙂 Dieses Verhandlungsmodell ist sehr intuitiv und recht natürlich. Es gilt daher als realistische Wiedergabe echter Verhandlungen.

Rubinsteins Verhandlungsmodell

L234 Erläuterung

Hier ist K die Verhandlungsmenge. Jedes ihrer Elemente $x \in K$ ist ein mögliches Verhandlungsergebnis und kann als Angebot genutzt werden. Die Verhandlung verläuft alternierend, wobei zunächst Alice beginnt: Zuerst macht Alice ein Angebot. Lehnt Bob ab, so macht er ein Angebot. Lehnt Alice dieses ab, so macht sie ein Angebot. Und immer so weiter.

Zu jeder Vorgeschichte $v = (x_0, 👎, \dots, x_{n-1}, 👎) \in X$ haben wir
- für n gerade: $A_v^1 = K$ und $A_v^2 = \{\text{warten}\}$.
- für n ungerade: $A_v^2 = K$ und $A_v^1 = \{\text{warten}\}$.

Zu jeder Vorgeschichte $v = (x_0, 👎, \dots, x_{n-1}, 👎, x_n) \in X$ haben wir
- für n gerade: $A_v^1 = \{\text{warten}\}$ und $A_v^2 = \{👍, 👎\}$.
- für n ungerade: $A_v^2 = \{\text{warten}\}$ und $A_v^1 = \{👍, 👎\}$.

Durch diese Aktionsmengen wird das Spiel Γ_1 eindeutig beschrieben, insbesondere werden alle Strategien $s^1 \in S^1$ und $s^2 \in S^2$ festgelegt.

Das Spiel Γ_2 definieren wir genauso, allerdings mit vertauschten Rollen, das bedeutet, wir vertauschen lediglich die Aktionsmengen A_v^1 und A_v^2.

Rubinsteins Verhandlungsmodell

L235 Erläuterung

„*Of course, one cannot represent all possible bargaining devices as moves in the non-cooperative game. The negotiation process must be formalized and restricted, but in such a way that each participant is still able to utilize all the essential strengths of his position.*“ (Nash 1953)

Wir brauchen demnach Modelle, die einerseits umfassend genug sind, um realistisch zu sein, andererseits einfach genug, um praktikable Analysen und Lösungen zuzulassen. Der axiomatisch-kooperative Ansatz löst das zweite Problem sehr elegant und liefert Lösungen. Doch welche der verschiedenen Verhandlungslösungen ist realistisch, in welchem Kontext ist sie geeignet, und wie sollen wir sie anwenden?

Hier hilft die nicht-kooperative Theorie als Richtschnur, denn wir können diese Modelle gut der Realität anpassen. In diesem Sinne ergänzen sich axiomatisch-kooperative und die strategisch-nicht-kooperative Theorie. Das **Nash–Programm** hat zum Ziel, die erste in die zweite einzubetten. Beide lassen sich so zudem empirisch überprüfen und kalibrieren, etwa passiv in (Real-Life-)Beobachtungen oder aktiv in (Labor-)Experimenten.

Rubinsteins Verhandlungsmodell

L236 Erläuterung

🙂 Rubinsteins Verhandlungsmodell $\Gamma(K, \delta)$ ist intuitiv und natürlich.

Es ist recht einfach und übersichtlich aufgebaut, doch die Menge der möglichen Strategien $S = S^1 \times S^2$ ist riesig: Jede Entscheidung 👍👎 verzweigt nur in zwei, aber bei jedem Vorschlag $x \in K$ verzweigt der Spielbaum sogleich in überabzählbar viele Teilbäume. Zum Glück haben wir eine universelle, präzise und bequeme Notation für all solche Fälle!

Diese Verzweigungen wiederholen sich abzählbar unendlich oft. Nicht alle Trajektorien / Spielverläufe sind endlich; Rückwärtsinduktion nach Satz J1D von Zermelo–Kuhn steht uns leider nicht zur Verfügung. Zum Glück rettet uns erneut das Prinzip einmaliger Abweichung J2D.

🙂 Praktisch gesehen sind damit unfassbar viele Strategien denkbar, etwa das irre Feilschen von Harry und Brian aus dem Eingangszitat. Die Spieler können versuchen, sich gegenseitig zu beeindrucken: täuschen, drohen, einschüchtern, hinhalten, verwirren, ablenken, etc. Der Phantasie und Schauspielkunst sind hier kaum Grenzen gesetzt. Das Verhandlungsergebnis L2H hingegen ist ruhig und nüchtern.

Konstruktion des kanonischen Verhandlungsgleichgewichts

L237

Wir zeigen zunächst $\mathrm{PNE}(\Gamma(K, \delta)) \ne \emptyset$ durch explizite Konstruktion:

Lemma L2G: kanonisches Verhandlungsgleichgewicht

Sei $0 \in K \Subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt sowie $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$. Gegeben seien $a, b \in K$. Hierzu betrachten wir folgendes Strategiepaar:
- Alice schlägt immer $a \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_1 \ge \delta_1 a_1$.
- Bob schlägt immer $b \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_2 \ge \delta_2 b_2$.

Dies ist teilspielperfekt gdw $a, b \in \operatorname{Max} K$ sowie $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$. Dank Lemma L2F existiert genau ein solches Punktepaar $a, b \in \operatorname{Max} K$.

Beweis: „⇒“ Angenommen unser Strategiepaar ist teilspielperfekt.

(1a) Gilt $a_2 < \delta_2 b_2$ und $b_1 < \delta_1 a_1$, so wird nie zugestimmt. Jeder der beiden könnte sich durch Zustimmung verbessern.

(1b) Gilt $a_2 < \delta_2 b_2$ und $b_1 \ge \delta_1 a_1$, so wird δb ausgezahlt. Alice könnte sich auf $\varphi_2(\delta_2 b_2) > \delta_1 b_1$ verbessern.

(1c) Ebenso ist $a_2 \ge \delta_2 b_2$ und $b_1 < \delta_1 a_1$ unmöglich, denn dann wäre das Teilspiel von Bobs Angebot nicht im Gleichgewicht.

Konstruktion des kanonischen Verhandlungsgleichgewichts

L238 Erläuterung

(1d) Also gilt $a_2 \ge \delta_2 b_2$ und $b_1 \ge \delta_1 a_1$. Es gilt sogar Gleichheit: Bei $a_2 > \delta_2 b_2$ könnte Alice sich verbessern auf $\varphi_2(\delta_2 b_2) > \varphi_2(a_2) \ge a_1$. Bei $b_1 > \delta_1 a_1$ könnte Bob sich verbessern auf $\varphi_1(\delta_1 a_1) > \varphi_1(b_1) \ge b_2$.

(1e) Schließlich gilt $a, b \in \operatorname{Max} K$, denn $\operatorname{Max} K$ ist der gesamte Rand: Bei $a \in K \smallsetminus \operatorname{Max} K$ könnte Alice sich verbessern. Bei $b \in K \smallsetminus \operatorname{Max} K$ könnte Bob sich verbessern.

„⇐“: Wir zeigen, dass unser Strategiepaar teilspielperfekt ist.

(2a) Alice könnte a vorschlagen, doch sie erwägt alle Alternativen $x \in K$. Im Falle $x_2 < \delta_2 b_2$ wird Bob ablehnen; Alice erhält dann nur $b_1 \le a_1$. Für $x_2 \ge a_2$ stimmt Bob zu; wegen $x_1 \le a_1$ hat Alice keinen Vorteil.

(2b) Bob könnte das Angebot a annehmen, doch er erwägt Ablehnung. Dann bekommt er ebenfalls $\delta_2 b_2 = a_2$, also keine Verbesserung. Dasselbe gilt für Bob und Alice mit vertauschten Rollen.

Das Prinzip J2D einmaliger Abweichung fordert Stetigkeit. Das ist erfüllt. Das obige Strategiepaar ist somit ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Das beweist insbesondere $\mathrm{PNE}(\Gamma(K, \delta)) \ne \emptyset$. $\boxed{\text{QED}}$

Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

L239

Satz L2H: Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

Wir untersuchen Rubinsteins Modell $\Gamma(K, \delta)$ alternierender Angebote: Sei $0 \in K \Subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt sowie $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.

Zu jedem Parameterpaar $\delta_1, \delta_2 \in [0, 1[$ existiert genau ein Punktepaar $a, b \in \operatorname{Max} K$ mit der Gleichgewichtseigenschaft $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$.

(1) Für jedes teilspielperfekte Gleichgewicht $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma(K, \delta))$ gilt dann:
- Alice schlägt zu jedem Zeitpunkt a vor und akzeptiert b oder besser. Sie bejaht $x \in K$, falls $x = b$ oder $x_1 > b_1$, und verneint falls $x_1 < b_1$.
- Bob schlägt zu jedem Zeitpunkt b vor und akzeptiert a oder besser. Er bejaht $x \in K$, falls $x = a$ oder $x_2 > a_2$, und verneint falls $x_2 < a_2$.

Bei Indifferenz $x_1 = b_1$ bzw. $x_2 = a_2$ ist die Antwort leider unbestimmt.

(2) Angenommen, indifferente Spieler bevorzugen ein schnelles Ende. Genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht erfüllt diese Verfeinerung:
- Alice schlägt $a \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_1 \ge \delta_1 a_1 = b_1$.
- Bob schlägt $b \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_2 \ge \delta_2 b_2 = a_2$.

Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

L240 Erläuterung

🙂 Es ist überaus erstaunlich, dass der Satz so klar und einfach ausfällt. Das Ergebnis ist unglaublich, aber wahr – und überraschend nüchtern:

Bei rationaler Spielweise zahlt sich all das Täuschen, Drohen, Ablenken, etc. nicht aus. Beide Spieler bleiben bei ihrer klaren einfachen Linie.

Eine vollkommen rationale Verhandlung verläuft daher wie ein Uhrwerk, ohne jegliche Überraschungen oder Verhandlungstricks, geräuschlos.

🙂 Warum beobachten wir bei realen Verhandlungen so viel Wirbel?

Das liegt einerseits an der unvollständigen Information der Spieler: Das Verhandeln übermittelt nun Information, es ist ein Signalspiel. Diese zusätzliche Problematik bildet unser Modell einfach nicht ab.

Andererseits liegt es an der mangelnden Rationalität der Spieler; sie lassen sich durch Finten beeindrucken und vom Plan ablenken. Vollkommen rational und informiert verhandelt jeder kühl und nüchtern.

🙂 Die Verhandlung kommt sofort zu einem optimalen Ergebnis. Dank vollständiger Information ist diese Lösung effizient.

Eindeutigkeit der PNE-Auszahlung

Wir nutzen die Projektion Φ_1^K nach rechts und Φ_2^K nach oben:

$$\Phi_1 = \Phi_1^K \,:\, K \to \operatorname{Max} K \,:\, (x_1, x_2) \mapsto (\varphi_2(x_2), x_2),$$
$$\Phi_2 = \Phi_1^K \,:\, K \to \operatorname{Max} K \,:\, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, \varphi_1(x_1)).$$

Sei $A^*, B^* \subseteq \operatorname{Max} K$ die Menge aller PNE-Auszahlungen von Γ_1, Γ_2. Wir setzen $\underline{A} = \inf \operatorname{pr}_1 A^*$ und $\overline{A} = \sup \operatorname{pr}_1 A^*$ sowie $\underline{B} = \inf \operatorname{pr}_2 B^*$ und $\overline{B} = \sup \operatorname{pr}_2 B^*$. Wir erhalten so die zusammenhängenden Kompakta

$$A = \Phi_2([\underline{A}, \overline{A}] \times \{0\}) \quad \subseteq \operatorname{Max} K,$$
$$B = \Phi_1(\{0\} \times [\underline{B}, \overline{B}]) \quad \subseteq \operatorname{Max} K.$$

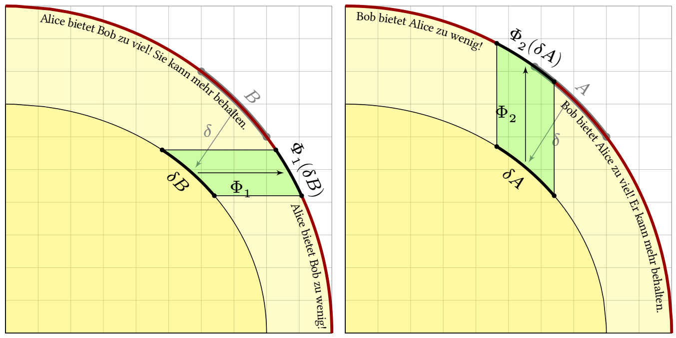
Kurz gesagt, $A, B \subseteq \operatorname{Max} K$ umfassen alle PNE-Auszahlungen von Γ_i, sind zusammenhängend und kompakt und dabei so klein wie möglich.

Im Spiel $\Gamma_1(K, \delta)$ ist die zweite Runde immer ein Teilspiel $\delta\Gamma_2(K, \delta)$. Alle PNE-Auszahlungen dieses Teilspiels sind also enthalten in δB.

Im Spiel $\Gamma_2(K, \delta)$ ist die zweite Runde immer ein Teilspiel $\delta\Gamma_1(K, \delta)$. Alle PNE-Auszahlungen dieses Teilspiels sind also enthalten in δA.

Damit können wir nun A und B geometrisch in Beziehung setzen!

Eindeutigkeit der PNE-Auszahlung



Lemma L2I: Kontraktion garantiert Eindeutigkeit.

(1) Mit diesen Bezeichnungen gilt $A \subseteq \Phi_1(\delta B)$ und $B \subseteq \Phi_2(\delta A)$.

(2) Die Abbildung $\operatorname{Max} K \to \operatorname{Max} K : x \mapsto \Phi_i(\delta x)$ ist δ_i–kontraktiv.

(3) Demnach sind A und B einpunktig, also $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$.

Eindeutigkeit der PNE-Auszahlung

Beweis: (1) Wir betrachten ein beliebiges teilspielperfektes Gleichgewicht $s \in \operatorname{PNE}(\Gamma_1)$ mit Auszahlung $(x_1, x_2) \in A$:

Wäre $x_2 < \delta_2 \underline{B}$, dann lehnt Bob ab: Alice bietet ihm zu wenig. Wäre $x_1 > \delta_2 \overline{B}$, dann bietet Alice zuviel: Sie kann mehr behalten.

Für ein Gleichgewicht s ist eine solche Auszahlung unmöglich. Also gilt $(x_1, x_2) \in \Phi_1(\delta B)$. Wir schließen daraus $A \subseteq \Phi_1(\delta B)$.

Mit vertauschten Rollen folgt ebenso die Inklusion $B \subseteq \Phi_2(\delta A)$.

(2) Die Abbildung $\operatorname{Max} K \to \operatorname{Max} K : (x_1, x_2) \mapsto (\delta_1 x_1, \varphi_1(\delta_1 x_1))$ ist δ_1–kontraktiv in der ersten Koordinate. Dasselbe gilt in der zweiten:

Seien $x, y \in \operatorname{Max} K$, also $x = (x_1, \varphi_1(x_1))$ und $y = (y_1, \varphi_1(y_1))$. Wir nutzen im Folgenden, dass $\varphi_1 : [0, m_1] \twoheadrightarrow [0, m_2]$ konkav fällt. Ohne Einschränkung gelte $0 \le x_1 < y_1 \le m_1$. Damit finden wir:

$$0 \ge \frac{\varphi_1(\delta_1 y_1) - \varphi_1(\delta_1 x_1)}{\delta_1 y_1 - \delta_1 x_1} \ge \frac{\varphi_1(y_1) - \varphi_1(\delta_1 x_1)}{y_1 - \delta_1 x_1} \ge \frac{\varphi_1(y_1) - \varphi_1(x_1)}{y_1 - x_1}$$

Daraus folgt $|\varphi_1(\delta_1 y_1) - \varphi_1(\delta_1 x_1)| \le \delta_1 |\varphi_1(y_1) - \varphi_1(x_1)|$, wie behauptet.

Eindeutigkeit der PNE-Auszahlung

(3) Dank (1) gilt $A \subseteq \Phi_1(\delta B)$ und $B \subseteq \Phi_2(\delta A)$, also $A \subseteq \Phi_1(\delta \Phi_2(\delta A))$ und $B \subseteq \Phi_2(\delta \Phi_1(\delta B))$. Dank Kontraktion (2) sind A, B höchstens einpunktig. (Banachs Fixpunktsatz ?? garantiert Eindeutigkeit und sogar Existenz!)

Dank L2F und L2G kennen wir die PNE-Auszahlungen $a \in A$ und $b \in B$. Somit ist a bzw. b die einzige PNE-Auszahlung von Γ_1 bzw. Γ_2. QED

Aufgabe: Beweisen Sie Rubinsteins Satz L2H mit Lemma L2I. *Zusatz:* Zeigen Sie durch geeignete Variation dieser Konstruktion, dass $\operatorname{PNE}(\Gamma(K, \delta))$ tatsächlich überabzählbar viele Elemente enthält.

Hinweis: Im Indifferenzfall $x_1 = \delta_1 a_1$ bzw. $x_2 = \delta_2 b_2$ können wir die Annahmeregel modifizieren, ohne die Teilspielperfektion zu gefährden. Das ändert lediglich die Mikrostruktur, nicht aber die Auszahlungen.

🙂 Sie ahnen jetzt, warum das Rubinstein–Modell berühmt wurde, es bietet das volle Programm: ein realistisches allgemeines Modell, einen bemerkenswerten Satz, zudem eine erfolgreiche vollständige Klärung dank raffinierter Mathematik. Herz, was willst du mehr? Wie zu erwarten, hat das Modell zahlreiche Arbeiten inspiriert.

Rückblick und Ausblick: das Nash–Programm

In §L1 haben wir Nashs **Verhandlungslösung** erklärt: Die beiden Spieler wollen kooperieren und einigen sich auf eine axiomatisch „faire“ Lösung. Das ist mathematisch elegant und auch für die Durchführung effizient, lässt aber die Streitfrage offen, ob diese Lösung tatsächlich „fair“ ist.

In §L2 haben wir ein recht realistisches **Verhandlungsmodell** aufgebaut. Die Dynamik entsteht durch den für beide schrumpfenden Kuchen und führt letztlich zum genial-einfachen Gleichgewicht. Zur Lösung nutzen wir Rückwärtsinduktion bzw. das Prinzip einmaliger Abweichung.

Der axiomatische Zugang §L1 gehört zur **kooperativen Spieltheorie**, die Implementierung §L2 nutzt die **nicht-kooperative Spieltheorie**. Letztere ist uns vertraut, dafür haben wir Techniken, ausgefeilte Begriffe und starke Werkzeuge entwickelt, und davon profitieren wir nun erneut!

Das **Nash–Programm** will die erste in die zweite einbetten, also die kooperative Spieltheorie durch nicht-kooperative Spiele stützen. Nash hat dieses Programm 1953 initiiert, und es trägt bis heute reiche Früchte, von denen wir hier die ersten ernten dürfen.

Rückblick und Ausblick: das Nash–Programm

Ist Spieltheorie normativ oder deskriptiv? Beides ist möglich! Sie kann Verhalten planen und vorschreiben, oder aber beobachten und erklären.

Modelle können **deskriptiv** (beschreibend, erklärend, vorhersagend), aber auch **normativ** (vorschreibend, planend, gesetzgebend) genutzt werden. Das gilt allgemein, wenn wir Mathematik auf reale Probleme anwenden, in Naturwissenschaft, Technik, Gesellschaft, hier in der Spieltheorie.

Nashs Verhandlungslösung kann als faire Schlichtung normativ genutzt werden: „Gebt mir euer Verhandlungsproblem und ich empfehle euch die / eine faire Lösung.“ Sie kann aber auch deskriptiv genutzt werden: „Rationale Spieler:innen würden sich wie folgt verhalten.“ Geschickte Kombination: „Ihr könnt gerne verhandeln. Wenn ihr rational spielt, dann ist die Lösung eindeutig. Ich empfehle euch daher folgendes.“

Dies zeigt, wie nützlich und natürlich das Nash–Programm ist: Es schlägt eine Brücke zwischen kooperativer und nicht-kooperativer Spieltheorie, es verbindet den normativen Ansatz (axiomatisch, statisch, kooperativ) mit der deskriptiven Sichtweise (strategisch, dynamisch, kompetitiv).

Rückblick und Ausblick: das Nash–Programm

In der Spieltheorie ist die Analyse von Verhandlungen eine spektakuläre Anwendung. *There's more to come!* Dabei zahlt sich immer wieder unsere gute Vorbereitung aus, tragfähige Grundlagen und effiziente Werkzeuge: dynamische Spiele (Kapitel J) und teilspielperfekte Gleichgewichte (J1A).

📖 Ken Binmore, Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein: *Noncooperative Models of Bargaining*, Chapter 7 in Handbook of Game Theory 1 (1992).

A player may make threats about his last offer being final, but the opponent can dismiss such threats as mere bombast unless it would actually be in the interests of the threatening player to carry out his threat if his implicit ultimatum were disregarded. In such situations, where threats need to be credible to be effective, we replace Nash equilibrium by Selten's notion of subgame-perfect equilibrium.

Diese präzise Formulierung ist wieder einmal entscheidend! Zur Analyse teilspielperfekter Gleichgewichte helfen uns dann effiziente Werkzeuge: In endlichen Spielen hilft **Rückwärtsinduktion** J1D nach Zermelo–Kuhn, für unendliche Spiele rettet uns das **Prinzip einmaliger Abweichung** J2D.

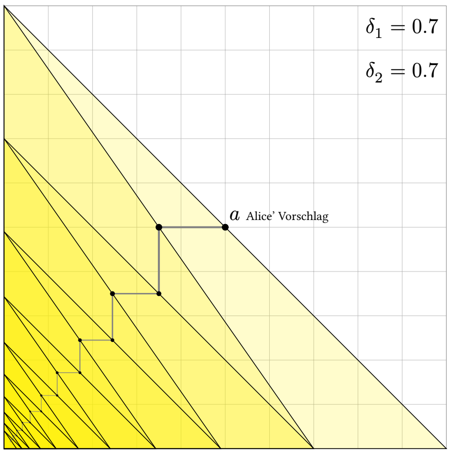
Rückblick und Ausblick: das Nash–Programm

Die drei Säulen der Spieltheorie ergänzen und stützen sich gegenseitig: statisch-axiomatisch, dynamisch-strategisch und praktisch-empirisch. Den letzten Aspekt erproben wir spielerisch im wöchentlichen Casino. Probieren geht über Studieren? **Studieren erweitert Probieren!**

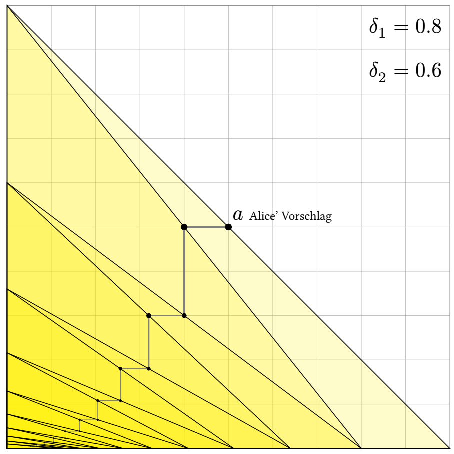
Eine kenntnisreiche Darstellung finden Sie in dem Lehrbuch von 📖 Ken Binmore: *Does Game Theory Work? The Bargaining Challenge*, MIT Press 2007. Er diskutiert insbesondere Probleme der Ir/Rationalität, das Design von Experimenten und die gefundenen empirische Daten:

The Rubinstein outcome remains efficient even when the costs of delay in his model are large. Layfolk are often disappointed that all the action in the alternating-offers game reduces to an immediate acceptance of the first offer made. But why would perfectly rational people fool around when everybody's cards are on the table right from the start? However, any perfectly rational subjects who find themselves in real laboratories would be stupid to assume that their fellow subjects are also perfectly rational. […] Sometimes there are many refusals before an agreement is reached.

Mehrdeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlungen



Mehrdeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlungen



Mehrdeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlungen

Sei $0 \in K \Subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt sowie $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.
Für $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in [0, 1[$ setzen wir $\delta^n K = \{ (\delta_1^n x_1, \delta_2^n x_2) \mid (x_1, x_2) \in K \}$.
Das definiert die schrumpfenden Kuchen $K \supset \delta K \supset \delta^2 K \supset \dots \supset \{0\}$.
Satz L2H garantiert uns ein eindeutiges Verhandlungsergebnis!

Allgemein sei $(K^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\mathbb{R}^2_{\ge 0} \supset K^0 \supset K^1 \supset K^2 \supset K^3 \supset \dots \supset \{0\}$.
Dabei verlangen wir $\bigcap_{n=0}^{\infty} K^n = \{0\}$: Der Kuchen schrumpft auf Null, etwa $K^n = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)})K$ mit $1 = \alpha_i^{(0)} \ge \alpha_i^{(1)} \ge \alpha_i^{(2)} \ge \dots \searrow 0$ in $]0, 1]$.
Lässt sich der Satz und unser obiger Beweis hierauf übertragen? Nein!

Aufgabe: Wir betrachten $K^{2n} = (\delta_1^n, \delta_2^n)K$ und $K^{2n+1} = (\delta_1^{n+1}, \delta_2^n)K$.
Zuerst bietet Alice, bei Ablehnung bietet Bob, dann wieder Alice, usw.
Dieses modifizierte Verhandlungsmodell verhält sich radikal anders:
Jede Auszahlung $a \in \operatorname{Max} K$ lässt sich teilspielperfekt realisieren!

(1) Konstruieren Sie hierzu explizit eine Realisierung $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$.
(2) Weisen Sie Teilspielperfektion nach. Wie gelingt das am besten?
(3) Woran scheitert der Eindeutigkeitsbeweis von Lemma L2I?
Dieses subtile Gegenbeispiel illustriert den raffinierten Beweis.

Mehrdeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlungen

Beweis: (1) wir setzen $a^{2n} = (\delta_1^n, \delta_2^n)a$ und $b^{2n+1} = (\delta_1^{n+1}, \delta_2^n)a$.
Diese Konstruktion ist in den obigen beiden Graphiken illustriert.

- In Runde $2n$ schlägt Alice $a^{2n} \in K^{2n}$ vor.
  Bob akzeptiert $x \in K^{2n}$ gdw $x_2 \ge b_2^{2n+1}$.
- In Runde $2n+1$ schlägt Bob $b^{2n+1} \in K^{2n+1}$ vor.
  Alice akzeptiert $x \in K^{2n+1}$ gdw $x_1 \ge a_1^{2n+2}$.

(2) Dank Stetigkeit nutzen wir das Prinzip J2D einmaliger Abweichung:

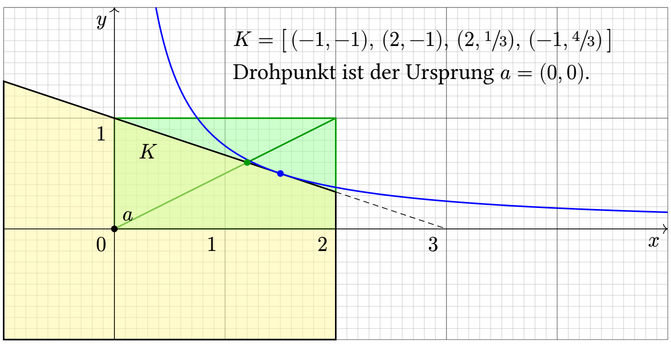
- Alice will a^{2n} vorschlagen, doch sie erwägt Alternativen $x \in K^{2n}$.
  Im Falle $x_2 < b_2^{2n+1}$ lehnt Bob ab; Alice erhält dann $b_1^{2n+1} < a_1^{2n}$.
  Für $x_2 \ge a_2^{2n}$ akzeptiert Bob; wegen $x_1 \le a_1^{2n}$ gewinnt Alice nichts.
- Bob will das Angebot a^{2n} annehmen, doch er erwägt Ablehnung.
  Dann bekommt er ebenfalls $b_2^{2n+1} = a_2^{2n}$, also keine Verbesserung.

Dieselben Argumente gelten mit vertauschten Rollen für Bob und Alice.

(3) Die Abbildung $\operatorname{Max} K \to \operatorname{Max} K : x \mapsto \Phi_i(\alpha x)$ ist α_i–kontraktiv.
Hier jedoch gilt $\alpha_i = 1$, und schwache Kontraktion genügt nicht!

Haggle properly! (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir betrachten das folgende Verhandlungsproblem (K, a):



(1) Berechnen Sie die monotone Verhandlungslösung $M(K, a)$ und
(2) die Nash–Verhandlungslösung $N(K, a)$. (3) Gibt es ein VProblem $(L, a) \supset (K, a)$ mit der Eigenschaft $M(L, a) = N(L, a) = N(K, a)$?

Haggle properly! (Klausur 2018)

(1) Für $z_i = \max \operatorname{pr}_i K_{\ge a}$ finden wir $(z_1, z_2) = (2, 1)$, wie in der Skizze.
Der Schnittpunkt $[a, z] \cap \operatorname{Max} K$, also von den Geraden $y = x/2$ und $y = 1 - x/3$, ist demnach $M(K, a) = (6/5, 3/5)$.

In diesem Falle ist die Skizze besonders leicht und übersichtlich, und eine ausreichend genaue Zeichnung ergänzt oder ersetzt die Rechnung.
Ich gebe hier deshalb beide Wege an, graphisch und algebraisch.

(2) Wir maximieren $(x, y) \mapsto xy$ entlang der Geraden $y = 1 - x/3$.
Die Funktion $h(x) = x(1 - x/3) = x - x^2/3$ hat ihr Maximum in $x = 3/2$.
Dies ist somit das Maximum von h auf K, also $N(K, a) = (3/2, 1/2)$.

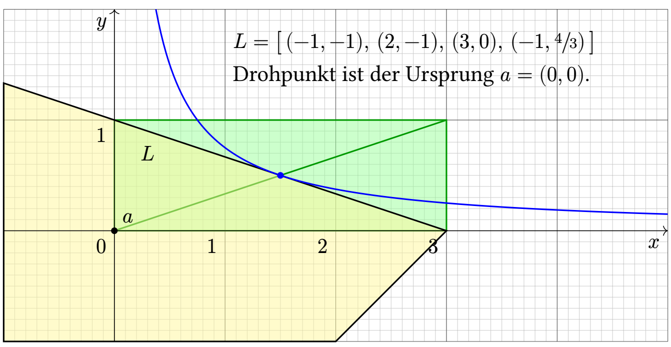
(3) Ja! Das minimale Beispiel ist $L = [K, (3, 0)]$.

☺ Die Nash–Lösung ist invariant unter irrelevanten Alternativen (IIA).
Die monotone Lösung $M(K, a)$ hingegen verschiebt sich zu $M(L, a)$.
Dies können wir so einrichten, dass $M(L, a) = N(L, a) = N(K, a)$ gilt.

☺ Der für die Lösungen relevante Teil $L_{\ge a} = [K_{\ge a}, (3, 0)]$ ist hierbei sogar eindeutig, was für eine Klausur durchaus willkommen ist.

Haggle properly! (Klausur 2018)

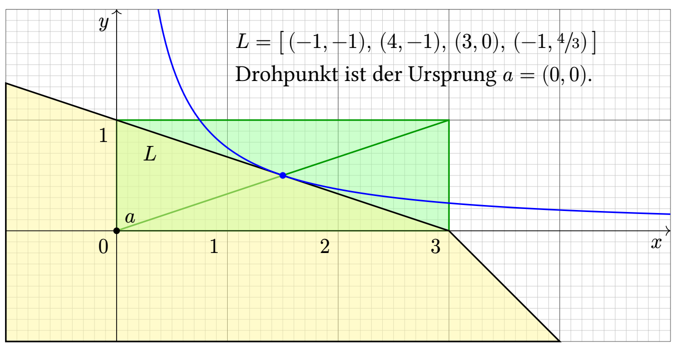
(3a) Erstes Beispiel eines Verhandlungsproblems $(L, a) \supset (K, a)$:



Die Nash–Verhandlungslösung $N(K, a) = N(L, a)$ bleibt unverändert.
Die monotone Lösung $M(K, a)$ verschiebt sich zu $M(L, a) = N(L, a)$.
Wir sehen hier das minimale Beispiel (L, a) mit diesen Eigenschaften.

Haggle properly! (Klausur 2018)

(3b) Zweites Beispiel eines Verhandlungsproblems $(L, a) \supset (K, a)$:



Die Nash–Verhandlungslösung $N(K, a) = N(L, a)$ bleibt unverändert.
Die monotone Lösung $M(K, a)$ verschiebt sich zu $M(L, a) = N(L, a)$.
Das maximale Beispiel (L, a) ersetzt $(4, -1)$ durch den Punkt $(6, -1)$.