

## Kapitel L

# Verhandlungstheorie und Nashs Verhandlungslösung

HARRY: *Haggle properly. This isn't worth nineteen.*

BRIAN: *Well, you just said it was worth twenty.*

HARRY: *Oh, dear. Oh, dear. Come on. Haggle!*

BRIAN: *Huh. All right. I'll give you ten.*

HARRY: *That's more like it.*

*Ten?! Are you trying to insult me?!*

*Me, with a poor dying grandmother?! Ten?!*

Monty Python, *Life of Brian* (1979)

## Inhalt dieses Kapitels L

- 1 Nashs axiomatische Verhandlungslösung
  - Verhandlungsprobleme und Verhandlungslösungen
  - Nashs Axiome und Nashs Verhandlungslösung
  - Unabhängigkeit und Variation der Axiome
  - Die monotone Verhandlungslösung
  
- 2 Rubinsteins Verhandlungsmodell durch alternierende Angebote
  - Alternierende Angebote bei schrumpfendem Kuchen
  - Verhandlungsgleichgewicht und die Nash-Lösung
  - Rubinsteins Verhandlungsmodell und sein Ergebnis
  - Eindeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlung
  
- 3 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
  - Anwendungsbeispiele zu Verhandlungslösungen

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemein Verhandlungssituationen, in denen zwei (oder mehr) Spieler über mögliche Ausgänge feilschen. Die Spieler wollen ein gemeinsames Ergebnis vereinbaren, etwa um darauf bauend das weitere gemeinsame Vorgehen zu koordinieren.

Jeder will sein Ergebnis maximieren. Je härter er verhandelt, umso mehr wird er vermutlich bekommen, es sei denn, die Verhandlungen scheitern, und er muss seine Drohungen ausführen, auch wenn sie nachteilig sind. Die Erfahrung zeigt, dass selbst rationale Spieler, die eine Einigung erzielen können und wollen, dies gelegentlich doch nicht erreichen. Dieses ganz praktische und alltägliche Problem wollen wir lösen.

Um ein drohendes Scheitern und allseitigen Schaden zu vermeiden, sind Spieler oft bereit, ihren Konflikt einem Schlichter zu übergeben, einem unabhängigen Schiedsgericht, das den Konflikt für sie lösen soll. Der Schlichter schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Alle Lösungen sollen „fair“ und „nachvollziehbar“ sein, und der Schlichter „konsistent“. Genau um diese grundlegenden Forderungen geht es hier.

Verhandlungstheorie (engl. *bargaining theory*) beginnt mit der Arbeit von John Nash: *The Bargaining Problem*, *Econometrica* 18 (1950) 155–162. In diesem Artikel formulierte er das Verhandlungsproblem, seine Axiome und zugehörige Verhandlungslösung; dies diskutieren wir im ersten Teil.

Dieser statisch-axiomatisch-kooperative Ansatz lässt sich dynamisch-strategisch-nicht-kooperativ implementieren. Dieser Ansatz geht zurück auf F. Zeuthen: *Problems of Monopoly and Economic Warfare* (1930), K.G. Binmore: *Nash Bargaining Theory* (1987) und vor allem auf die (nach Nash zweite bahnbrechende) Arbeit von A. Rubinstein: *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, *Econometrica* 50 (1982) 97–110.

Die prozedurale Implementierung ergänzt die axiomatische Sichtweise, sie beteiligt die Spieler aktiv und erweitert wesentlich die Möglichkeiten. Dieses Modell gilt als realistische Wiedergabe echter Verhandlungen. Inzwischen existiert eine reichhaltige Literatur zur Verhandlungstheorie, sowohl axiomatisch als auch implementativ. Anwendungen sind vielfältig. Ökonom:innen nutzen routiniert diese Begriffe und Werkzeuge.

Verhandlungen begegnen uns überall im menschlichen Miteinander:

- Ein Ehepaar verhandelt über gemeinsame Entscheidungen wie Aufgabenteilung, Finanzen, Erziehung, Urlaube, etc.
- Eine Regierung verhandelt ebenso (über ähnliche Fragen) zwischen Koalitionspartnern oder zwischen Ministerien.
- Im Parlament ist die Gesetzgebung ein Ergebnis von Verhandlungen zwischen den politischen Parteien.
- Regierungen stehen oft in internationalen Verhandlungen zu Handelsbeziehungen, Umweltschutz, Abrüstung, etc.
- Wirtschaftliche Interaktionen beruhen auf Verhandlungen zwischen den betroffenen Handelspartnern, etwa bei Preisen und Löhnen, beim Handel mit Gütern, bei Fusionen und Übernahmen, etc.

Die Vielfalt solcher Situationen ist beachtlich. Ein erster wichtiger Schritt zur theoretischen Untersuchung ist daher eine geeignete Beschreibung, die alle wesentlichen Gemeinsamkeiten solcher Verhandlungen präzise erfasst und dabei unwesentliche Besonderheiten möglichst ausblendet.

*„A two-person bargaining situation involves two individuals who have the opportunity to collaborate for mutual benefit in more than one way.“*  
Mit diesen Worten führte Nash 1950 das Verhandlungsproblem ein. Gegenstand ist die Wahl einer der möglichen Kooperationen.

Das Ziel der Spieler ist also, eine gemeinsame Auszahlung zu wählen. Dies ist eine extrem allgemeine Sichtweise. So gesehen ist tatsächlich nahezu jede menschliche Interaktion eine Art Verhandlungsproblem. Für unsere Untersuchung benötigen wir einschränkende Annahmen:

*„We idealize the bargaining problem by assuming that the two individuals are highly rational, that each can accurately compare his desires for various things, that they are equal in bargaining skill, and that each has full knowledge of the tastes and preferences of the other.“* [Nash 1950]

Nash brach mit der Tradition und fokussierte nicht zuerst die dynamische Verhandlungsprozedur, sondern die statische Verhandlungssituation. Seine bahnbrechend neue Idee war eine axiomatische Untersuchung, die das Wesen von Verhandlungen und möglichen Lösungen extrahiert.

Der axiomatischer Ansatz beschreibt vollkommen rationales Verhandeln bei vollständiger Information. Dies erklärt einige zentrale Phänomene, doch einige schwierige Fragen bleiben weitgehend offen: Wann ist eine Vereinbarung gerecht? Wie kann ein Konflikt friedlich beigelegt werden?

Die Annahme vollständiger Information und vollkommener Rationalität vereinfacht die Analyse, macht sie aber zugleich weniger realistisch. Praktische Fragen des Verhandeln und Feilschens bleiben unberührt, ebenso alle sozialen Konventionen und psychologischen Phänomene.

Nashs axiomatische Vorgehensweise ist statisch und kooperativ. Dieser Ansatz erklärt Ihnen nicht, wie Sie Ihr Verhandlungsgeschick optimieren: Dazu müssten wir die Komplexität menschlichen Verhaltens ergründen, unvollständige Information, beschränkte Rationalität, etc.

Die praktische Seite konkreter Verhandlungen ist extrem vielfältig. Eine allgemeine und übersichtliche Theorie ist hier nicht zu erwarten. Hingegen liegen umfangreiche empirische Untersuchungen vor; darauf werde ich in dieser Vorlesung nicht genauer eingehen.

Komplementär zur statischen Sicht untersuchen wir die dynamische. Dazu nehmen wir an, dass die Verhandlungsprozedur festgelegt ist. Wir können Sie somit als Spiel betrachten und mit den bewährten Instrumenten der nicht-kooperativen Spieltheorie untersuchen.

Unser Ziel ist dabei, Gleichgewichte zu finden als Prognose bzw. Erklärung für rationales Verhalten und mögliche Vereinbarungen. Paradebeispiel einer dynamisch-strategischen Implementierung ist Rubinsteins Verhandlungsmodell durch alternierende Angebote.

Die treibende Kraft in diesem Modell ist der Zeit- und Wertverlust: Der Kuchen schrumpft, und dies erzwingt eine rationale Einigung. Dieses Modell erklärt speziell Phänomene wie Macht und Geduld, die in Verhandlungen erfahrungsgemäß eine große Rolle spielen.

Die drei Sichtweisen von Verhandlungen ergänzen und stützen sich: statisch-axiomatisch, dynamisch-strategisch und praktisch-empirisch. Das Thema ist wichtig, seine allseitige Entwicklung bleibt spannend. Hierzu gibt dieses Kapitel eine Einführung und einen Überblick.

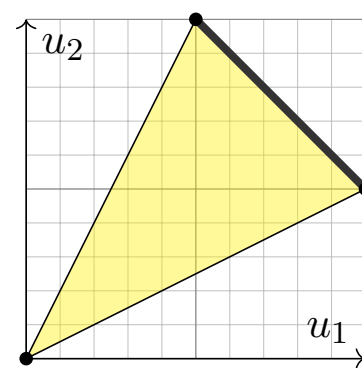
Allgemein entsteht ein **Verhandlungsproblem** in folgender Situation: Zwei (oder mehr) Spieler haben gemeinsames Interesse zu kooperieren, aber konkurrierende Interessen, wie genau sie kooperieren wollen.

**Handel:** Ein Objekt ver/kaufen und dazu einen Preis aushandeln. Bei unvollständiger Information ist dies schwierig, siehe Auktionen.

**Synergie:** Einzelkosten für Alice 30 und Bob 50, gemeinsam nur 60. Hier gilt vollständige Information. Wie sollen beide die Kosten teilen?

**Kooperation:** Gemeinsam agieren in einem vorgegebenen Spiel. Idealerweise liegen alle Informationen vor. Klassisches Beispiel:

	B		0	1
A			2	0
0			1	0
1	0	2	0	1



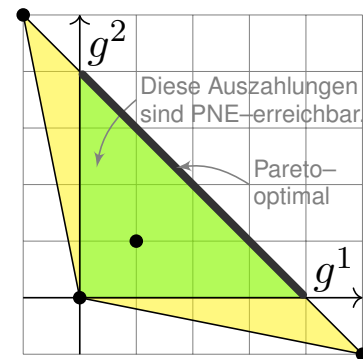
**Beispiel:** Alice möchte ihr Haus verkaufen für mindestens 300 000€. Bob möchte das Haus kaufen und kann höchstens 400 000€ zahlen. Die beiden können und wollen sich einigen, aber auf welchen Preis?

Eine Einigung ist prinzipiell möglich. Den tatsächlichen Preis müssen sie jedoch aushandeln. Beide haben starkes Interesse an einer Einigung, doch Alice will möglichst viel bekommen, Bob möglichst wenig bezahlen. Ein simpler Vorschlag wäre 350 000€. Die Schlichtung wird hier jedoch erschwert, da die Spieler ihre Information sicher nicht offenlegen wollen.

**Beispiel:** Verhandlungsprobleme sind uns bereits mehrfach begegnet, wenn ein Spiel mehrere Gleichgewichte hat, wie *Bach oder Strawinsky*, und sich die Spieler auf eines verständigen wollen. Wenn sie vor dem Spiel kommunizieren können, so haben beide starkes Interesse an einer Einigung, aber welche? Spiel und Auszahlungen sind hier symmetrisch. Durch Lotterien lassen sich alle Konvexkombinationen realisieren. Dies entspricht korrelierten Strategien, die wir überall gerne nutzen. Welche dieser Möglichkeiten sollte ein Schlichter vorschlagen?

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

	B		0	1
A	0	0	5	-1
	1	-1	1	1



**Beispiel:** Die beiden Spieler wollen sich auf eine Auszahlung einigen. Welche Auszahlungen  $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  sind teilspielperfekt realisierbar? Hierüber gibt Nashs Folk Theorem K2E konkret und detailliert Auskunft. Welche soll angesteuert werden? Das muss ausgehandelt werden! Das einzige Nash-Gleichgewicht  $(0, 0)$  ist möglich, aber wenig lukrativ. Es dient als Notlösung bei eventuellem Scheitern der Verhandlungen. Diesen Punkt nennen wir den **Ausgangspunkt** oder **Drohpunkt**, auf englisch *default value* oder *disagreement outcome*.

Wir fassen Mut und vollziehen nun den kühnen Schritt der Abstraktion: Wir konzentrieren uns fortan auf die Auszahlungen und abstrahieren von den dahinter liegenden Strategien, die zu diesen Auszahlungen führen. (Diese setzen wir nach erfolgreicher Verhandlung wieder ein.)

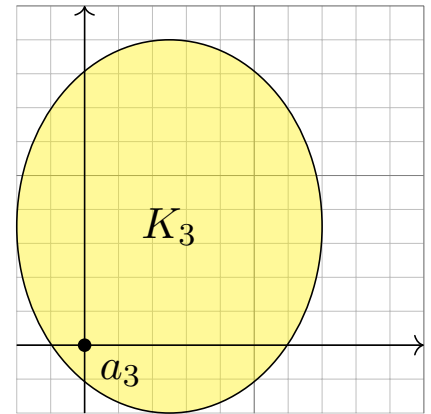
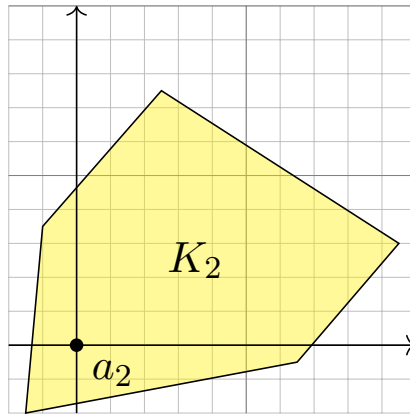
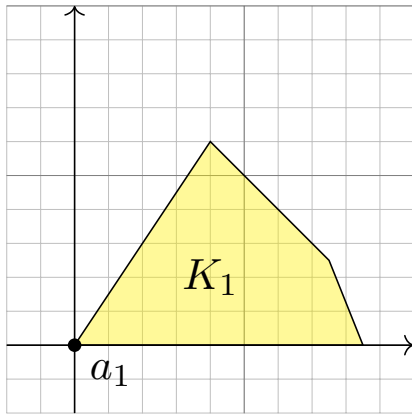
Abstraktion bedeutet Vereinfachung! Möglicherweise vernachlässigen wir dabei wesentliche Informationen. Die Nützlichkeit erweist sich dann in den Anwendungen auf praktische Beispiele. (Vorgriff: Ja, sie wird.)

Den Ausgangspunkt  $a$  oder Drohpunkt können die Spieler jederzeit ohne Koordinierung sichern, also auch ohne Einigung in den Verhandlungen, im Gefangenendilemma etwa das Nash-Gleichgewicht  $g(0, 0) = (0, 0)$ .

Verhandelt wird ab jetzt also nur noch über die Punkte  $(x_1, x_2) \in K_{\geq a}$ . Damit bringen wir das Problem in eine einfache doch präzise Form.

Sie ist zudem übersichtlich und geometrisch-algorithmisch zugänglich.

Wir erheben unsere Vorüberlegungen nun zu einer formalen Definition: Was muss ein Schlichter oder ein Schiedsgericht wissen (Eingabe), und wie werden diese Daten rational verarbeitet (Ausgabe)?



### Definition L1A: Verhandlungsproblem und -lösung

Ein **Verhandlungsproblem**  $(K, a)$  für zwei Personen besteht aus einer konvexen kompakten Menge  $K \in \mathbb{R}^2$  und einem Punkt  $a \in K$ .

Die Menge der **nicht-trivialen Verhandlungsprobleme** ist

$$V^2 := \{ (K, a) \mid a \in K \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } K \text{ konvex kompakt, } \exists v \in K : a < v \}.$$

Eine allgemeine **Verhandlungslösung** ist eine Abbildung

$$F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (K, a) \mapsto F(K, a) \in K.$$

### Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?

Wir suchen und analysieren im Folgenden solche Funktionen  $F$ .

Sie heißen auch **Schlichtungsverfahren**, engl. *arbitration scheme*.

Diese genial einfache Definition ist ein Musterbeispiel an Abstraktion.

Viele Erfahrungen und Annahmen werden knapp zusammengefasst:

- Der Nutzen lässt sich vollständig durch reelle Zahlen darstellen. Diese bequeme Annahme unterstellen wir auch sonst meistens.
- Die Spieler können den Drohpunkt  $a$  ohne Koordinierung sichern. Er dient daher als Notlösung beim Scheitern der Verhandlungen.
- Die Menge  $K \in \mathbb{R}^2$  möglicher Ausgänge ist vollständig bekannt. Dies schließt Verhandlungen mit unvollständiger Information aus.
- Die Menge  $K$  ist konvex, da die Spieler Lotterien bilden können: Ziehung aus einem Lostopf entspricht einer Konvexkombination.

Die Menge  $K$  ist kompakt: Im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  ist das äquivalent zu beschränkt und abgeschlossen. Beschränktheit leuchtet sofort ein: Der zu verteilende Kuchen ist endlich. Abgeschlossenheit nutzen wir zur Vereinfachung: Wir nehmen alle Grenzwerte als Idealisierung mit hinzu.

Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  definieren wir den **koordinatenweisen Vergleich**:

$$x = y \quad :\iff \quad x_i = y_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

$$x \leq y \quad :\iff \quad x_i \leq y_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

$$x < y \quad :\iff \quad x_i < y_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

$$x \not\leq y \quad :\iff \quad x \leq y \quad \text{doch zugleich } x \neq y.$$

Die Relation  $\leq$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist reflexiv ( $x \leq x$ ), antisymmetrisch (aus  $x \leq y$  und  $y \leq x$  folgt  $x = y$ ) und transitiv (aus  $x \leq y$  und  $y \leq z$  folgt  $x \leq z$ ). Dies nennen wir eine **Ordnungsrelation**. Für  $n \geq 2$  ist sie jedoch nicht total (linear), zum Beispiel gilt weder  $(1, 0) \leq (0, 1)$  noch  $(0, 1) \leq (1, 0)$ . Zur Bequemlichkeit definieren wir, wie für Ordnungsrelationen üblich, die transponierten Relationen  $x \geq y$  durch  $y \leq x$  und  $x > y$  durch  $y < x$ .

**Beispiel:** Sind  $x, y \in \mathbb{R}^I$  die Auszahlungen für die Spieler  $i \in I$ , dann bedeutet  $x \leq y$ : Beim Übergang von  $x$  nach  $y$  steht jeder Spieler gleich gut oder besser. Strikte Ungleichung  $x < y$  bedeutet, jeder Spieler  $i \in I$  verbessert sich strikt. Hingegen bedeutet  $x \not\leq y$  nur, jeder Spieler steht mindestens gleich gut, und mindestens ein Spieler verbessert sich strikt.

Eine **geordnete Menge**  $(M, \leq)$  ist ein Paar aus einer Menge  $M$  und einer Ordnungsrelation  $\leq$  auf  $M$  (reflexiv, antisymmetrisch, transitiv).

Ist  $(M, \leq)$  eine geordnete Menge, dann wird jede Teilmenge  $X \subseteq M$  geordnet durch die Einschränkung der Ordnungsrelation  $\leq$  auf  $X$ .

Für  $X \subseteq M$  und  $a \in M$  schreiben wir  $X \leq a$ , falls  $x \leq a$  für alle  $x \in X$ . Entsprechend definieren wir  $X < a$  und  $X \geq a$  und  $X > a$ .

Wir schreiben  $X_{\geq a} = \{x \in X \mid x \geq a\}$  und  $X_{> a} = \{x \in X \mid x > a\}$  sowie  $X_{\leq a} = \{x \in X \mid x \leq a\}$  und  $X_{< a} = \{x \in X \mid x < a\}$ .

Wir nennen  $m \in M$  ein **größtes Element** von  $(M, \leq)$ , wenn  $M \leq m$ : Für alle  $x \in M$  gilt  $x \leq m$ . Es gibt höchstens eines: Sind  $m, m' \in M$  größte Elemente, so haben wir  $m \leq m'$  und  $m' \leq m$ , also  $m = m'$ .

Wir nennen  $m \in M$  ein **maximales Element** von  $(M, \leq)$ , wenn gilt: Für alle  $x \in M$  mit  $m \leq x$  gilt  $m = x$ . Wir schreiben  $\text{Max}(M, \leq)$  für die Menge aller maximalen Elemente. Eine geordnete Menge  $(M, \leq)$  kann kein, ein oder mehrere maximale Elemente haben. Als Beispiele betrachten Sie die obigen Mengen  $K \in \mathbb{R}^2$ .



## Beispiele für Verhandlungslösungen

Viele Abbildungen  $F: V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (K, a) \mapsto u \in K$  sind denkbar.  
Hierzu einige Beispiele, um Phantasie und Technik zu schulen:

**Triviale Lösung:** Wähle den Ausgangspunkt  $F(K, a) = a$ .

**Lexikographische Lösungen:** Vorgelegt sei  $(K, a) \in V^2$ .

(1) Wähle  $u_1 = \max_{\text{pr}_1} K_{\geq a}$  und hierzu  $(u_1, u_2) \in K$  mit  $u_2$  maximal.

(2) Wähle  $u_2 = \max_{\text{pr}_2} K_{\geq a}$  und hierzu  $(u_1, u_2) \in K$  mit  $u_1$  maximal.

**Produkt-Maximierer:** Sei  $u \in K_{\geq a}$  der Maximierer der Funktion  $h(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)^{p_1} (x_2 - a_2)^{p_2}$  mit  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $p_1 + p_2 = 2$ .  
Diese Lösung wird in Satz L1B und L1E axiomatisch charakterisiert.

**Halbierung:** Sei  $u = a + \lambda z \in K$  mit  $z = (1, 1)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  maximal.

**Monotone Lösung:** Ebenso mit  $z_i = \max_{\text{pr}_i} K_{\geq a}$ . (Satz L1G)

**Gewichtete Lösung:** Ebenso mit  $z_i = \int_{K_{\geq a}} (x_i - a_i)^{p_i} d(x_1, x_2)$ .

Hierzu sei  $\text{vol}_2(K_{\geq a}) > 0$ , also  $z > 0$ , andernfalls ist  $K$  eindimensional.

Für  $p = 0$  ist das die Halbierung, für  $p_1 = p_2 \nearrow \infty$  die monotone Lösung.

## Beispiele für Verhandlungslösungen

**Geizige Lösung:** Vorgelegt sei  $(K, a) \in V^2$ .

(1) Wähle  $u = (u_1, a_2) \in K$  mit  $u_1$  maximal. (Hier ist  $u_2 = a_2$ .)

(2) Wähle  $u = (a_1, u_2) \in K$  mit  $u_2$  maximal. (Hier ist  $u_1 = a_1$ .)

**Kreis-Lösung:** Es existiert genau ein Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass die Kreisscheibe  $D_r = \bar{B}((a_1 + r, a_2 + r), r)$  das konvexe Kompaktum  $K$  berührt. Sei  $u$  der eindeutige Berührungspunkt, also  $K \cap B_r = \{u\}$ .

**Stoll-Lösung:** Betrachte  $(m_1, a_2) \in K$  mit  $m_1$  maximal. Die Punkte  $(m_1, a_2)$  und  $(a_1, m_2)$  mit  $m_2 > a_2$  definieren eine Gerade; sei  $H(m_2)$  der Halbraum, der  $a$  enthält. Liegt  $(K, a)$  in einem Halbraum  $H(m_2)$ , für  $m_2$  hinreichend groß, so wähle die lexikographische (hier geizige) Lösung. Andernfalls wähle den Produkt-Maximierer zu Parametern  $(p_1, p_2)$ . (Machen Sie eine Skizze und lösen Sie damit einige Beispiele.)

Diese vielfältigen Lösungsverfahren sind mehr oder weniger attraktiv, aber alle noch recht einfach, und manche sogar sehr naheliegend. Sie dienen uns im Folgenden als Fundus an Gegen/Beispielen.

Diese Beispiele sollen zunächst einmal Ihre Phantasie anregen. Welche Verhandlungslösungen  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  fallen Ihnen noch ein? Welche dieser Möglichkeiten sollte ein Schlichter vorschlagen?

Denkbar wäre auch eine Auslosung bezüglich einer Dichte auf  $K$ ; solche stochastischen Lösungen schließen wir hier jedoch aus. Unsere Definition L1A verlangt eine Abbildung  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , also ein deterministisches Verfahren, kein probabilistisches.

Alles verläuft genauso für eine beliebige Anzahl  $n$  von Spielern. Zwecks Anschauung bleibe ich zunächst bei  $n = 2$  Spielern. Abschließend ist es eine schöne Übung, alles zu übertragen.

Zwischen diesen Lösungen bestehen interessante Beziehungen:

**Übung:** In welchem Sinne interpoliert die gewichtete Lösung zwischen der Halbierung und der monotonen Lösung?

**Übung:** In welchem Sinne interpoliert der Produkt-Maximierer zwischen den beiden lexikographischen Lösungen?

Wir kennen nun die Problemstellung und einige (willkürliche) Lösungen. Zum besseren Verständnis hilft es, die Aufgabe wie folgt zu formulieren: Wir suchen zur Schlichtung ein Verfahren / Mechanismus / Algorithmus, der zu jedem vorgelegten Verhandlungsproblem eine Lösung vorschlägt.

Dies wird in der Realität genutzt, wenn ein Schlichter angerufen wird. Der Schlichter soll sachkundig, auf Grundlage des Problems  $(K, a)$  und evtl. weiterer Informationen, einen Kompromiss  $u \in K$  vorschlagen.

Die Schlichtung gelingt jedoch nur, wenn sie alle Parteien überzeugt. Hierzu ist es hilfreich, wenn sie zur Begründung ihres Vorschlags auch nachvollziehbare Gründe und überzeugende Argumente anführt.

Der Schlichter schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Alle Lösungen sollen „fair“ sein, „nachvollziehbar“ und „konsistent“.

Nashs Axiome formulieren vier solcher nachvollziehbaren Gründe. Sie erklären, was wir von einer fairen Verhandlungslösung erwarten. Über die Auswahl und Festlegung dieser Axiome kann man streiten, ihre Konsequenzen jedoch folgen mit mathematischer Präzision.

## Nashs Axiome

Eine „faire“ Verhandlungslösung muss bestimmte Forderungen erfüllen.

**INV: Invarianz** unter positiv-affinen Transformationen  $T: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  mit  $(x_1, x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$  wobei  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ . Dies transformiert Verhandlungsprobleme gemäß

$$T: V^2 \xrightarrow{\sim} V^2: (K, a) \mapsto (T(K), T(a)).$$

Für Verhandlungslösungen  $F: V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  fordern wir  $F \circ T = T \circ F$ .

**SYM: Symmetrie.** Sei  $(K, a) = \tau(K, a)$  in  $V^2$  symmetrisch bezüglich der Transposition  $\tau: V^2 \xrightarrow{\sim} V^2$  gemäß  $\tau: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2: (x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ . Dann ist auch die Lösung  $u = F(K, a)$  symmetrisch, also  $u_1 = u_2$ .

**PAR: Pareto-Optimalität.** Es gilt  $F(K, a) \in \text{Max } K_{\geq a}$ .

Für jedes Problem  $(K, a) \in V^2$  und seine Lösung  $u = F(K, a)$  gilt  $a \leq u \in K$  und  $u$  ist maximal: Für jedes  $v \in K$  mit  $u \leq v$  gilt  $u = v$ .

**IIA: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.**

Vorgelegt seien Verhandlungsprobleme  $(K, a) \subseteq (L, a)$  in  $V^2$ .

Liegt die Lösung  $F(L, a)$  in  $K$ , so gilt  $F(K, a) = F(L, a)$ .

## Nashs Axiome

**INV** bedeutet Skaleninvarianz. Multiplikation mit positiven Konstanten ist recht plausibel: Es ist egal, ob Spieler in Euro oder in Dollar rechnen. Invarianz unter Verschiebung ist weniger klar: Ist es bei einem Streitwert von 100€ einerlei, ob der eine Millionär oder der andere Habenichts ist?

**SYM:** In jeder symmetrischen Problemstellung  $(K, a)$  soll die Lösung  $u = F(K, a)$  keinen der beiden Spieler bevorzugen. Das ist fraglich, wenn Spieler 1 allein ist aber Spieler 2 eine größere Gruppe. (L1E)

**PAR:** Zur Erinnerung (L107): Für Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^2$  definieren wir den Vergleich  $u \leq v$  koordinatenweise durch  $u_1 \leq v_1$  und  $u_2 \leq v_2$ .

**IIA:** Wenn neue Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine der neuen Alternativen oder bleibt unverändert die alte Lösung.

SYM und PAR schränken die Lösung einzelner Probleme ein,

INV und IIA fordern Konsistenz zwischen den Problemen.

Der Drohpunkt wird nur in PAR wirklich aktiv genutzt.

Über Axiome kann man streiten. Eine ausführliche kritische Diskussion finden Sie bei R.D. Luce, H. Raiffa: *Games and Decisions*, Dover 1989.

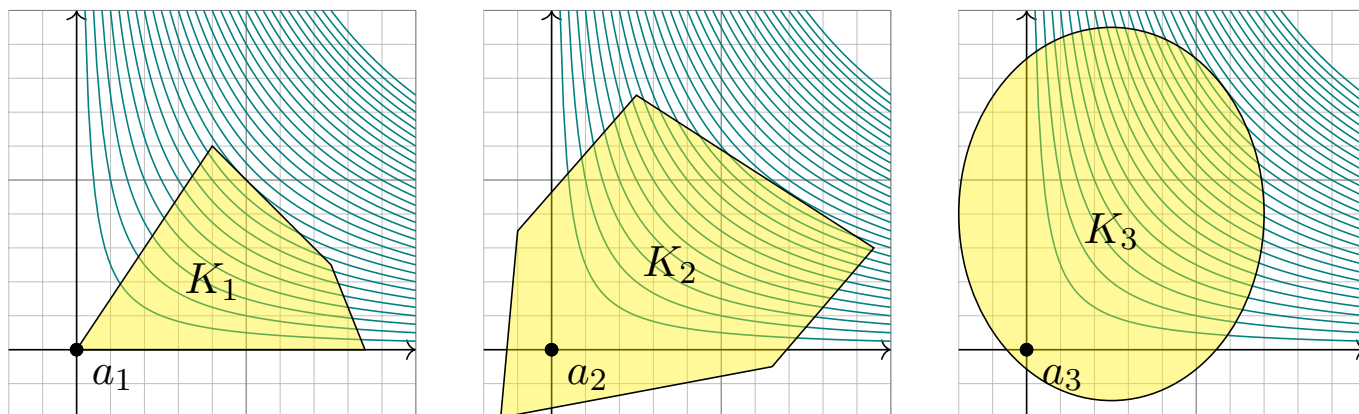
Es ist wie so oft in der Mathematik und allgemein im Leben: Axiome sind Annahmen, Forderungen, Wünsche, Sehnsüchte. Nicht immer lassen sie sich erfüllen. Selbst wenn sie erfüllbar sind, so nicht immer eindeutig. Nachdem Existenz und Eindeutigkeit geklärt sind, wollen wir die Lösung tatsächlich finden / berechnen / approximieren, dies möglichst effizient.

Denken Sie als leuchtende Beispiele aus dem ersten Studienjahr an die Determinante quadratischer Matrizen (M2B, axiomatische Definition, Leibniz–Formel, Gauß–Algorithmus, Numerik) oder an gewöhnliche Differentialgleichungen (Definition, Satz von Picard–Lindelöf, exakte Lösungen, Numerik). Existenz und Eindeutigkeit sind grundlegend, um überhaupt von „der“ gesuchten Lösung sprechen zu können, in beiden genannten Beispielen erhalten wir zugleich einen ersten Algorithmus, den wir anschließend noch effizienter gestalten (wollen und müssen).

Als Kontrast: Für das Tensorprodukt  $M \otimes_R N$  von  $R$ –Moduln zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit durch abstrakten Nonsense, knapp & elegant, ohne hilfreichen Algorithmus. Die konkrete Berechnung muss je nach Spezialfall gesondert betrieben werden, angefangen bei freien Moduln.

## Nashs Verhandlungslösung

L116



## Satz L1B: Nash-Verhandlungslösung / NBS, Nash 1950

**Existenz & Eindeutigkeit:** Es gibt genau eine Verhandlungslösung  $N : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die Nashs vier Axiome erfüllt: INV, SYM, PAR und IIA.

**Berechnung:** Zum Verhandlungsproblem  $(K, a) \in V^2$  ist die Lösung  $N(K, a) = \arg \max h_{(K,a)}$  gegeben durch den Maximierer des Produkts

$$h = h_{(K,a)} : K_{\geq a} \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)(x_2 - a_2).$$

Diese Abbildung  $N : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt **Nash–Verhandlungslösung**.

Dieser Satz wirkt erstaunlich, zuerst geradezu unglaublich. Ist er wahr? Alle Daten liegen explizit vor uns auf dem Tisch, also beweisen wie es! Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen.

**Aufgabe:** Was ist für den Satz zu beweisen? Beweisen Sie es!

**Lösung:** (0) Zu  $(K, a) \in V^2$  existiert genau ein Maximierer  $u \in K_{\geq a}$ , also  $(u_1 - a_1)(u_2 - a_2) \geq (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)$  für alle  $(x_1, x_2) \in K_{\geq a}$ .

Da  $K_{\geq a}$  kompakt ist und  $h$  stetig, existiert ein Maximierer  $u \in K_{\geq a}$ . Es gibt  $v \in K_{>a}$ , also gilt  $h(u) \geq h(v) > h(a) = 0$  und somit  $u > a$ .

Angenommen ein weiterer Punkt  $u' \in K \setminus \{u\}$  erfüllte  $h(u') = h(u)$ .

Da  $K$  konvex ist, gälte dann  $\bar{u} = \frac{1}{2}(u + u') \in K$  und  $h(\bar{u}) > h(u)$ .

(1) Dies definiert / konstruiert die Verhandlungslösung

$$N : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (K, a) \mapsto \arg \max h_{(K,a)}.$$

Sie erfüllt alle vier Nash-Axiome: INV, SYM, PAR, IIA. Nachrechnen!

Zur Vollständigkeit rechnen wir die ersehnten Eigenschaften gleich nach.

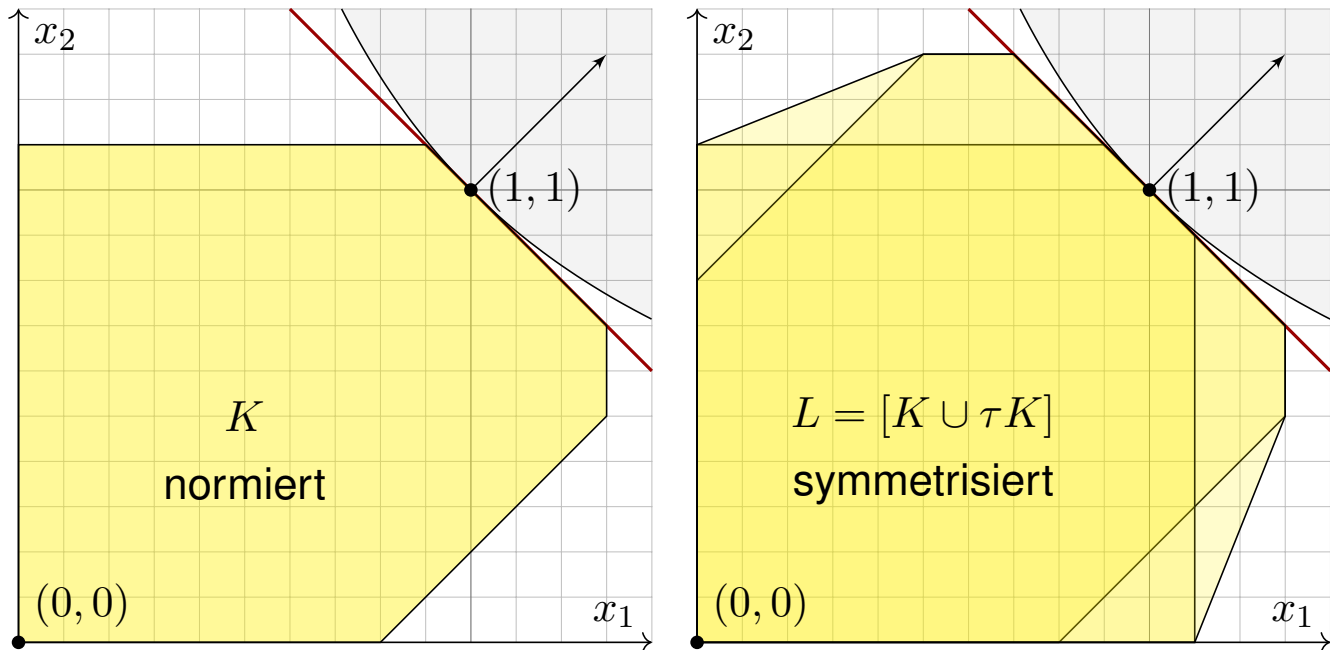
**INV:** Gegeben sei  $T : (x_1, x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ . Für  $T : (K, a) \xrightarrow{\sim} (K', a') : x \mapsto x' = Tx$  gilt  $h_{(K',a')}(x') = \alpha_1 \alpha_2 h_{(K,a)}(x)$ . Somit stiftet  $T$  eine Bijektion zwischen den Maximierern  $u$  von  $h_{(K,a)}$  und den Maximierern  $u'$  von  $h_{(K',a')}$ . Dank Eindeutigkeit gilt  $N \circ T = T \circ N$ .

**SYM:** Im symmetrischen Fall  $\tau(K, a) = (K, a)$  gilt  $h_{(K,a)} \circ \tau = h_{(K,a)}$ . Somit stiftet  $\tau$  eine Permutation auf der Menge aller Maximierer. Dank Eindeutigkeit des Maximierers  $u$  gilt  $\tau u = u$ , also  $u_1 = u_2$ .

**PAR:** Wir setzen das Problem als nicht-trivial voraus. Jeder Maximierer  $u$  von  $h_{(K,a)}$  erfüllt dann  $a < u$ , also  $a_1 < u_1$  und  $a_2 < u_2$ . Für  $u \leq v \in K$  gilt  $a_1 < u_1 \leq v_1$  und  $a_2 < u_2 \leq v_2$ . Gälte  $v \neq u$ , so wäre  $h(v) > h(u)$ .

**IIA:** Gegeben sei  $(K, a) \subseteq (L, a)$  in  $V^2$ . Die Lösung  $N(L, a) = u$  erfüllt  $(u_1 - a_1)(u_2 - a_2) = \max h_{(L,a)} \geq \max h_{(K,a)}$ . Gilt zudem  $u \in K$ , so gilt  $(u_1 - a_1)(u_2 - a_2) = \max h_{(K,a)}$ , also  $N(K, a) = u$  dank Eindeutigkeit.

Eindeutigkeit  $F(K, a) = N(K, a)$  als Beweis in Bildern:



Das vorgelegte Problem  $(K, a) \in V^2$  normieren wir zu  $a = (0, 0)$  und  $N(K, a) = (1, 1)$ . Anschließend symmetrisieren wir  $(K, 0)$  zu  $(L, 0)$ . Für  $(L, 0)$  ist die Lösung  $F(L, 0) = (1, 1)$ , also auch für  $(K, 0)$ .

## Nashs Verhandlungslösung

(2) Zur Eindeutigkeit sei neben  $N$  auch  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Lösung, die alle vier Nash-Axiome erfüllt. Wir wollen  $F = N$  beweisen.

Sei  $(K, a) \in V^2$  ein VProblem. Wir zeigen  $F(K, a) = N(K, a)$ .

Es gilt  $(K_{\geq a}, a) \subseteq (K, a)$ . Dank PAR und IIA dürfen wir „ $=$ “ annehmen. Dank INV dürfen wir  $a = (0, 0)$  annehmen, zudem auch  $N(K, a) = (1, 1)$ . Damit liegt  $(K, 0) \subseteq (\Delta, 0)$  im Dreieck  $\Delta := \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 2\}$  dank des Gradienten  $\text{grad } h(1, 1) = (1, 1)$  und der Konvexität von  $K$ . Dank SYM und PAR gilt  $F(\Delta, 0) = (1, 1)$ , dank IIA  $F(K, 0) = (1, 1)$ .

😊 Allein mit Hilfe der Axiome INV, SYM, PAR und IIA können wir somit für jedes vorgelegte Problem  $(K, a) \in V^2$  den Punkt  $F(K, a)$  bestimmen. Wir finden jeweils  $F(K, a) = N(K, a)$ . Das beweist  $F = N$ .

Variante: Das Dreieck  $\Delta$  ist die maximale Wahl, die Symmetrisierung  $L := [K \cup \tau K] \subseteq \Delta$  ist minimal. Der Beweis verläuft wörtlich genauso:  $L$  ist konvex, kompakt, symmetrisch und erfüllt  $(K, 0) \subseteq (L, 0) \subseteq (\Delta, 0)$ .

## Ist eines der Nash–Axiome überflüssig?

Wir freuen uns über den eleganten Satz und dazu den schönen Beweis. Wie immer wollen wir zurückschauen, und das Argument perfektionieren: Können wir noch Voraussetzungen weglassen? oder abschwächen? Können wir eines der Nash–Axiome im Satz L1B weglassen? Nein!

**Satz L1c:** Die vier Nash–Axiome sind unabhängig.

Zu jedem der vier Axiome INV, SYM, PAR, IIA existiert eine Lösung  $F_i : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die dieses Axiom verletzt, aber die anderen drei erfüllt.

**Aufgabe:** Beweisen Sie diese Aussage durch geeignete Beispiele. Hier sind neben Geometrie vor allem Phantasie und Kreativität gefragt. Hierzu hilft ein möglichst reichhaltiger Fundus an Gegen/Beispielen; anschließend müssen diese Gegen/Beispiele genau geprüft werden. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen. Schwieriger ist die starke Unabhängigkeit: Sind tatsächlich alle  $2^4 = 16$  Kombinationen durch geeignete Verhandlungslösungen realisierbar?

## Ist eines der Nash–Axiome überflüssig?

Diese Aufgabe behandeln Sie in den Übungen! Wenn Sie alle bisherigen Beispiele systematisch durchgehen, erhalten Sie die folgende Übersicht:

Verhandlungslösung	INV	SYM	PAR	IIA
triviale Lösung				
lexikographisch				
Produkt-Maximierer				
Halbierung				
Gewichtete Lösung				
Monotone Lösung				
Geizige Lösung				
Kreis-Lösung				
Stoll-Lösung				

Sie dürfen die Tabelle auch gerne noch erweitern um die Eigenschaften WIR, SIR und MON, die wir im Folgenden einführen und diskutieren.

Wir schwächen Pareto–Optimalität ab zu folgenden Forderungen:

**WIR: (schwache) individuelle Rationalität.**  $F(K, a) \in K_{\geq a}$ .

**SIR: starke individuelle Rationalität.**  $F(K, a) \in K_{>a}$ .

**Satz L1D: Individuelle Rationalität genügt. Roth 1977**

(1) Es gibt genau eine Verhandlungslösung  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , welche die vier Axiome INV, SYM, SIR und IIA erfüllt, nämlich die Nash–Lösung.

(2) Genau zwei Lösungen  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllen INV, SYM, WIR und IIA: neben der Nash–Lösung  $N$  nur noch die triviale Lösung  $T : (K, a) \mapsto a$ .

In gewisser Weise ist Pareto–Optimalität ein übertrieben starkes Axiom, denn es eliminiert sofort die große Mehrheit der möglichen Ausgänge. Individuelle Rationalität ist hierbei wesentlich weniger einschneidend. Zusammen mit den anderen Axiomen genügt diese Abschwächung!

**Aufgabe:** Beweisen Sie diesen Satz nach dem Vorbild von Satz L1B. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn.

**Lösung:** Wir beweisen gleich die allgemeinere Aussage (2). Daraus folgt automatisch die erste Aussage (1) als Spezialfall.

(2a) Existenz: Neben  $N$  erfüllt auch  $T : (K, a) \mapsto a$  diese Axiome.

(2b) Eindeutigkeit: Angenommen irgendeine Verhandlungslösung  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt die hier geforderten Axiome INV, SYM, WIR, IIA.

Wir zeigen, dass entweder  $F = T$  oder  $F = N$  gilt. Sei  $(K, a) \in V^2$ .

Es gilt  $(K_{\geq a}, a) \subseteq (K, a)$ . Dank WIR und IIA dürfen wir „ $=$ “ annehmen. Dank INV dürfen wir  $a = (0, 0)$  annehmen, zudem auch  $N(K, a) = (1, 1)$ . Damit liegt  $(K, 0) \subseteq (\Delta, 0)$  im Dreieck  $\Delta = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 2\}$ .

Dank SYM gilt  $F(\Delta, 0) = (x, x)$  mit  $0 \leq x \leq 1$ . Wir zeigen  $x \in \{0, 1\}$ :

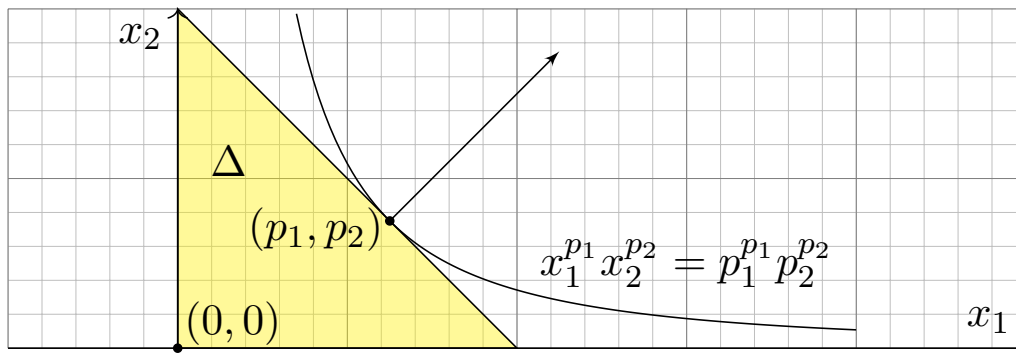
Für  $0 < x \leq 1$  haben wir  $(\Delta, 0) \subseteq (x^{-1}\Delta, 0)$ . Dank INV gilt dann  $F(x^{-1}\Delta, 0) = x^{-1}(x, x) = (1, 1) \in \Delta$ . Dank IIA folgt  $F(\Delta, 0) = (1, 1)$ .

Wir schließen daraus  $F(\Delta, 0) = u$  mit  $u = (0, 0)$  oder  $u = (1, 1)$ .

Wegen  $(0, 0), (1, 1) \in K$  und IIA folgt daraus auch  $F(K, 0) = u$ .

Aus  $F(K, 0) = (0, 0)$  folgt  $F = T$ . Aus  $F(K, 0) = (1, 1)$  folgt  $F = N$ .





## Satz L1E: asymmetrische Verhandlungslösungen

Wir betrachten das Dreieck  $\Delta := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 2 \}$  mit  $p \in \Delta$  im Inneren der Hypotenuse, also  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{> 0}$  mit  $p_1 + p_2 = 2$ .

**Existenz & Eindeutigkeit:** Es gibt genau eine Verhandlungslösung  $P: V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , welche die Axiome INV, WIR, IIA und  $P(\Delta, 0) = p$  erfüllt.

**Berechnung:**  $P(K, a)$  ist der eindeutige Maximierer der Funktion

$$h = h_{(K,a)}^p : K_{\geq a} \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)^{p_1} (x_2 - a_2)^{p_2}.$$

Symmetrisch  $p_1 = p_2 = 1$  erhalten wir die Nash-Verhandlungslösung. In den Randfällen  $p \in \{(2, 0), (0, 2)\}$  ist die Lösung nicht eindeutig.

## Asymmetrische Verhandlungslösungen

Das Symmetrie-Axiom normiert Verhandlungslösungen  $F: V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf symmetrischen Problemen  $(K, a)$  durch  $F(K, a) = a + \lambda(1, 1)$ , und mit Pareto-Optimalität ist  $\lambda \in \mathbb{R}$  maximal. Wir fragen allgemein: Wie sehen Verhandlungslösungen  $F: V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  aus, die INV, WIR und IIA erfüllen?

Zur Unterscheidung der Möglichkeiten werten wir  $F$  auf einem speziellen Beispiel aus, nämlich dem Dreieck  $\Delta = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 2 \}$  mit Ausgangspunkt  $0$ . Der Wert  $F(\Delta, 0) = p$  dient uns zur Normierung. Ab hier folgen Satz und Beweis dem bewährten Muster von Satz L1B:

**Aufgabe:** Zeigen Sie Satz L1E nach dem Vorbild von Satz L1B, indem Sie (1) Existenz und (2) Eindeutigkeit der Lösung beweisen.

(3) Finden Sie mindestens zwei verschiedene Verhandlungslösungen  $F \neq G: V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die INV, WIR, IIA erfüllen sowie  $(\Delta, 0) \mapsto (2, 0)$ .

(4) Zeigen Sie hingegen, dass genau eine Lösung  $F: V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Axiome INV, PAR, IIA erfüllt sowie  $(\Delta, 0) \mapsto (2, 0)$ .

😊 Hier sind neben Geometrie auch Phantasie und Kreativität gefragt. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn.

**Lösung:** (1) Zunächst zur Existenz: Die angegebene Lösung

$$P : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (K, a) \mapsto \arg \max h_{(K,a)}^p$$

ist wohldefiniert und erfüllt INV, WIR, SIR, PAR und IIA. Speziell für das Dreieck  $(\Delta, 0)$  finden wir  $P(\Delta, 0) = p$  dank der Orthogonalität

$$\text{grad } h(p) = (p_1^{p_1} p_2^{p_2}, p_1^{p_1} p_2^{p_2}) \perp T_p \partial \Delta.$$

(2) Zur Eindeutigkeit sei neben  $P$  auch  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine solche Lösung. Sei  $(K, a) \in V^2$  ein VProblem. Wir zeigen  $F(K, a) = P(K, a)$ .

Es gilt  $(K_{\geq a}, a) \subseteq (K, a)$ ; dank WIR und IIA dürfen wir „ $=$ “ annehmen.

Dank INV dürfen wir  $a = (0, 0)$  annehmen, zudem auch  $P(K, a) = p$ .

Damit liegt  $(K, 0) \subseteq (\Delta, 0)$  im Dreieck  $\Delta = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 2\}$

dank des Gradienten  $\text{grad } h(p) \perp T_p \partial \Delta$  und der Konvexität von  $K$ .

Dank Voraussetzung gilt  $F(\Delta, 0) = p$ , dank IIA  $F(K, 0) = p$ .

Allein mit Hilfe der Axiome INV, WIR, IIA und  $F(\Delta, 0) = p$  können wir für jedes vorgelegte Problem  $(K, a) \in V^2$  den Punkt  $F(K, a)$  bestimmen.

Wir finden jeweils  $F(K, a) = P(K, a)$ . Dies beweist  $F = P$ .

(3) Gegenbeispiele zu finden ist knifflig, auch amüsant und lehrreich.

**Geizig:** Wähle  $G(K, a) = (u_1, u_2) \in K$  mit  $u_2 = a_2$  und  $u_1$  maximal.

**Lexikographisch:** Wähle zunächst das Maximum  $u_1 = \max \text{pr}_1 K_{\geq a}$  und hierzu anschließend  $L(K, a) = (u_1, u_2) \in K$  mit  $u_2$  maximal.

Diese Lösungen  $G$  und  $L$  erfüllen tatsächlich INV, WIR und IIA; diese Eigenschaften muss man wie immer gewissenhaft prüfen.

Die geizige Lösung erfüllt zwar WIR, aber weder SIR noch PAR.

Die lexikographische Lösung erfüllt zwar PAR, aber nicht SIR.

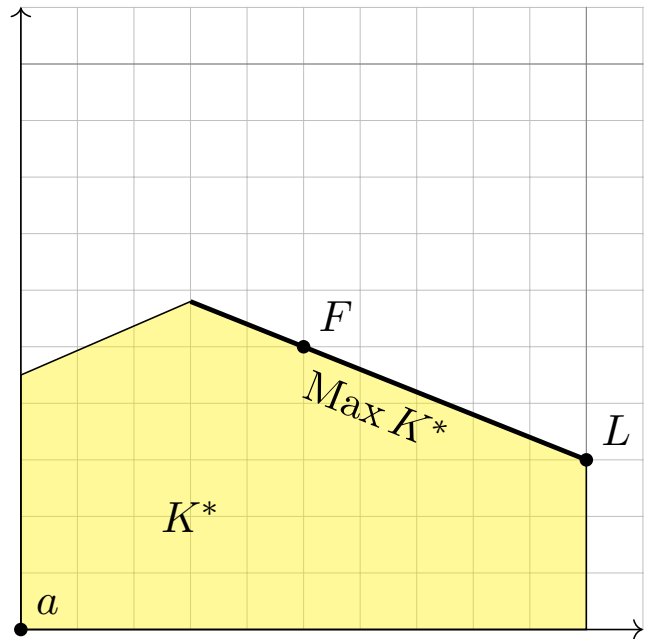
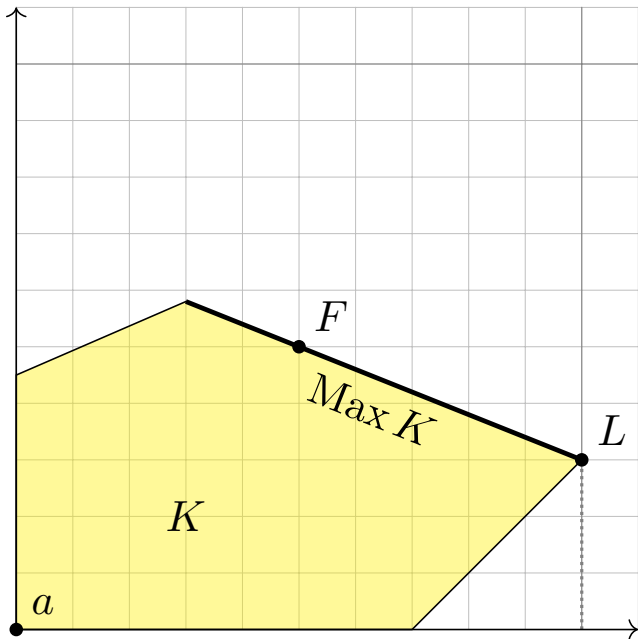
Dies illustriert die subtilen Unterschiede von WIR, SIR, PAR.

(4) Mit der Verschärfung von WIR zu PAR beweisen wir das folgende Ergebnis einiger Übungsgruppenteilnehmer:innen der Spieltheorie 2018:

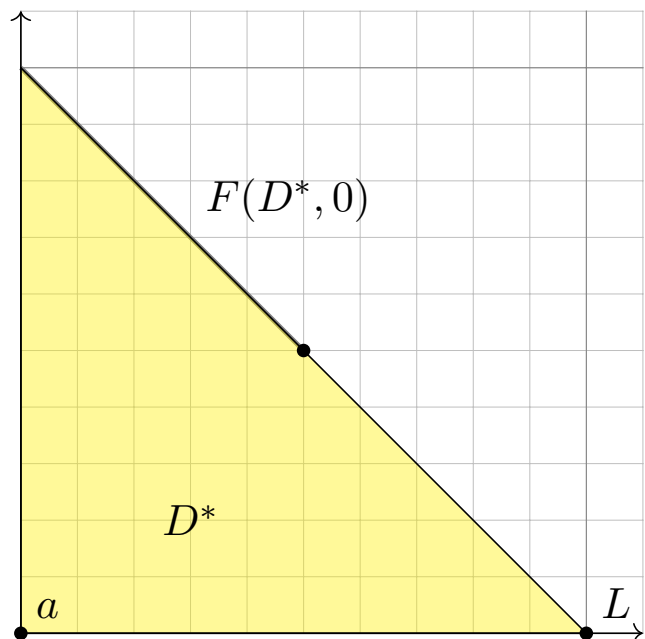
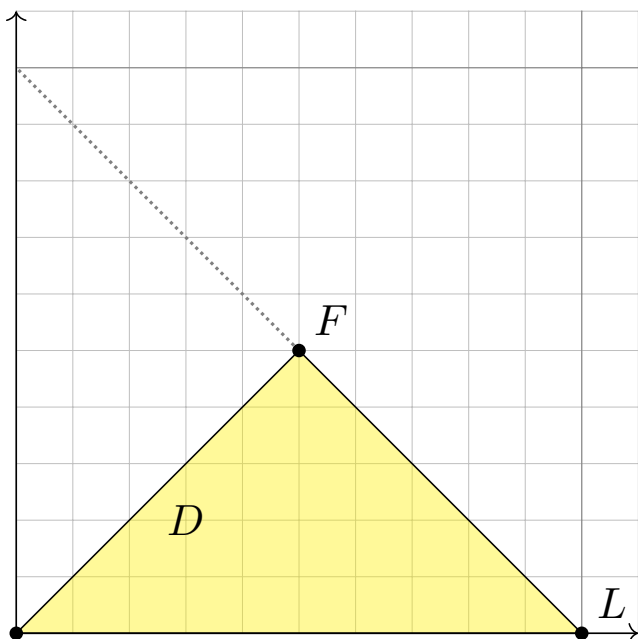
**Satz L1F:** lexikographische Lösung, Holzmüller et al. 2018

Die lexikographische Verhandlungslösung  $L : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist die einzige, welche die drei Axiome INV, PAR, IIA sowie  $L(\Delta, 0) = (2, 0)$  erfüllt.

Eindeutigkeit der lexikographischen Lösung als Beweis in Bildern:



Eindeutigkeit der lexikographischen Lösung, Fortsetzung und Schluss:



(4) Zur Eindeutigkeit sei neben  $L$  auch  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Lösung, welche die Axiome INV, PAR, IIA erfüllt. Wir nehmen  $F(K, a) \neq L(K, a)$  für ein Verhandlungsproblem  $(K, a) \in V^2$  an und zeigen damit  $F(\Delta, 0) \neq (2, 0)$ .

Es gilt  $(K_{\geq a}, a) \subseteq (K, a)$ ; dank PAR und IIA dürfen wir „ $=$ “ annehmen. Dank INV dürfen wir  $a = (0, 0)$  annehmen, zudem  $\max \text{pr}_2 K = 1$ .

Dank PAR liegen  $u = F(K, a)$  und  $L(K, a)$  in der Pareto-Front  $\text{Max } K$ . Es gilt  $u_1 < 1$  dank Definition von  $L$  und der Voraussetzung  $u \neq L(K, a)$ .

Wir erweitern  $K$  zum Verhandlungsproblem  $K^* = [K \cup (1, 0)] \supseteq K$ .

Die Pareto-Front  $\text{Max } K^* = \text{Max } K$  wird hierdurch nicht verändert.

Dank PAR gilt  $F(K^*, 0) \in \text{Max } K^* \subset K$ . Dank IIA folgt  $F(K^*, 0) = u$ .

Wir betrachten nun das Dreieck  $D = [(0, 0), (1, 0), u] \subseteq K^*$ .

Es gilt  $F(K^*, 0) = u \in D$ . Dank IIA folgt  $F(D, 0) = u$ .

Schließlich wählen wir das Dreieck  $D^* = [(0, 0), (1, 0), (0, y)]$  so, dass  $u$  auf der Hypotenuse  $[(1, 0), (0, y)]$  liegt; dies ist möglich wegen  $u_1 < 1$ .

Dank IIA kann  $F(D^*, 0)$  nicht in  $]u, (1, 0)[$  liegen, also  $F(D^*, 0) \neq (1, 0)$ .

Dank INV folgt schließlich  $F(\Delta, 0) \neq (2, 0)$ , was zu zeigen war.

## Verhandlungstheorie für mehrere Spieler


Bislang haben wir nur Verhandlungen mit zwei Spielern untersucht. Dieselben Fragen und Antworten finden wir ebenso für mehrere Spieler.

**Aufgabe:** Definieren Sie für jede Spielerzahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  die Menge  $V^n$  der Verhandlungsprobleme und darauf Verhandlungslösungen  $F : V^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Übertragen Sie soweit möglich Axiome, Beispiele, Sätze und Beweise.

In beliebiger Dimension haben wir keine Anschauung oder Intuition.

Diese Übung ist daher eine gute Ergänzung zur Formalisierung!

Hier können Sie wunderbar die Techniken der mehrdimensionalen Analysis einsetzen, insbesondere Lagrange-Multiplikatoren.

 Wir diskutieren vorrangig den klassischen Zwei-Spieler-Fall  $n = 2$ . Die axiomatisch-geometrische Behandlung gelingt in jeder Dimension  $n$ . Die spieltheoretisch-ökonomische Interpretation ist jedoch weniger klar. Welche konkrete Verhandlungssituation wird beschrieben und gelöst? Entweder *alle* kooperieren oder *jeder* steht für sich allein (Drohpunkt). Das nächste Kapitel untersucht allgemeiner und genauer Koalitionen.

## Axiome fordern ist nicht schwer. . .

Axiome zu formulieren, ist eine Kunst. Viele scheinen anfangs vernünftig, erweisen sich aber gemeinsam als widersprüchlich, also unerfüllbar! Ich möchte dies sofort mit einem drastischen Beispiel illustrieren. Wir setzen im Folgenden wieder Pareto-Optimalität (PAR) voraus.

**Aufgabe:** Übersetzen Sie folgende Forderungen in Formeln.

(1) „Wenn neue Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine der neuen Alternativen oder unverändert die alte Lösung.“

Sei  $(K, a) \subseteq (L, a)$  in  $V^2$ . Aus  $F(L, a) = u \in K$  folgt  $F(K, a) = u$ .

**IIA: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.**

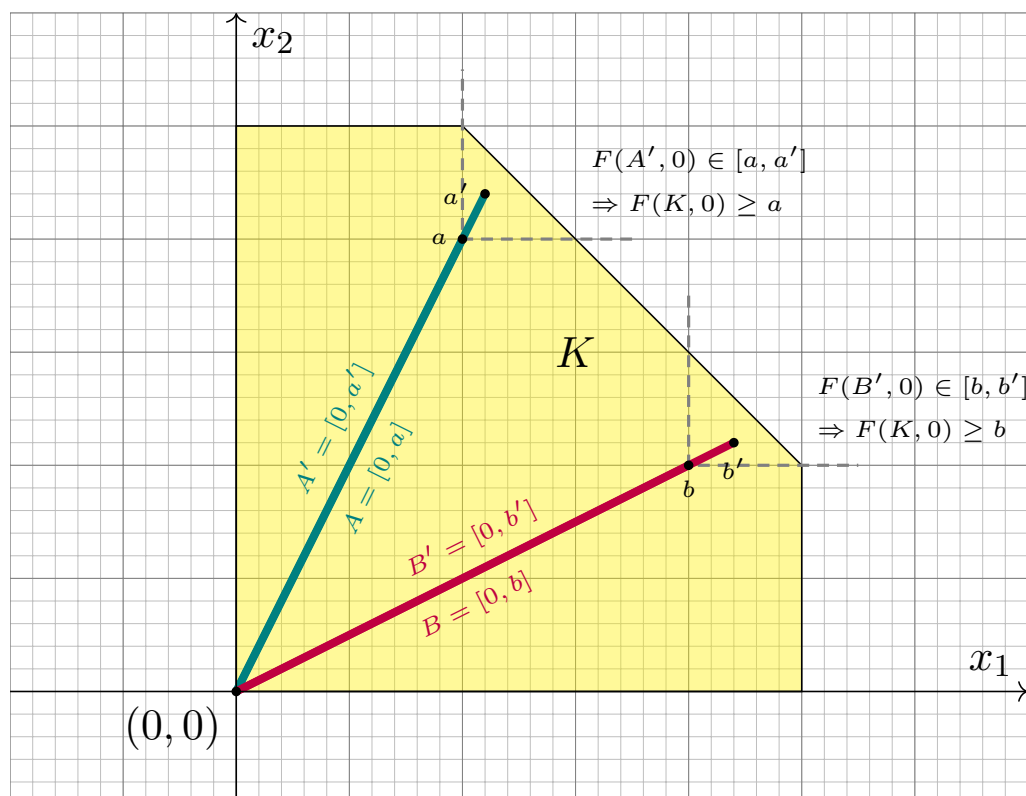
(2) „Wenn zur alten Lösung strikt bessere Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine dieser strikt besseren Alternativen.“

Sei  $(K, a) \subseteq (L, a)$ . Aus  $F(K, a) = u$  und  $L_{>u} \neq \emptyset$  folgt  $F(L, a) \in L_{>u}$ .

**ÜBA: Übertrumpfen durch strikt bessere Alternativen.**

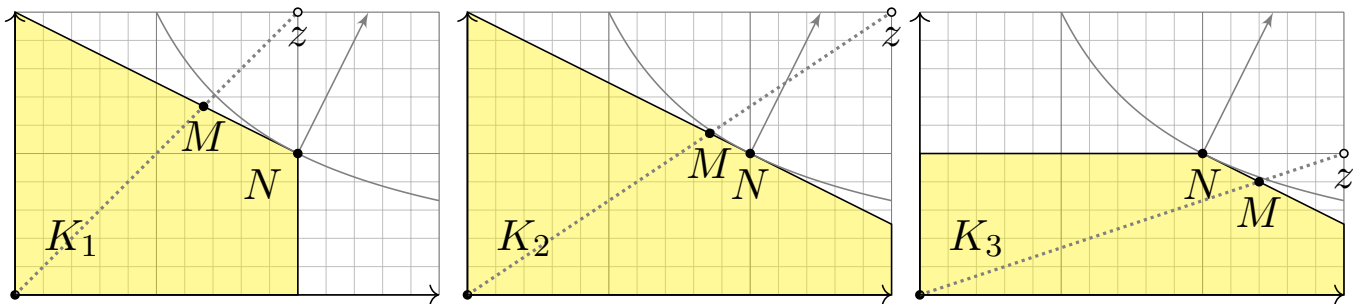
## . . . Axiome erfüllen hingegen sehr.

**Aufgabe:** Finden Sie alle VLösungen  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die ÜBA erfüllen.



**Lösung:** Keine Verhandlungslösung  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt ÜBA!

Ist die Nash–Verhandlungslösung wirklich „fair“ und „gerecht“?



In Situation  $K_1$  bekommt Alice ihr Maximum, Bob nur die Hälfte. Beim Übergang zu  $K_2$  stärkt Alice ihre Position, aber ihr Ergebnis stagniert; umgekehrt schwächt Alice ihre Position, aber Bob profitiert nicht davon. Sinngemäß gilt dasselbe beim Übergang von  $K_2$  zu  $K_3$  und zurück.

In jedem Vergleich findet mindestens ein Spieler einen Grund zur Klage. Er hält die zusätzlichen Alternativen für relevant und bestreitet IIA.

Ist das Nash–Verfahren  $N$  deshalb unfair? Nein, das Verfahren ist fair, aber die vorgelegten Verhandlungssituationen  $(K_i, a)$  selbst sind unfair. Die zugeordneten Lösungen  $N(K_i, a)$  können das nicht wunderheilen.

## Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Die vier Nash–Axiome scheinen zunächst natürlich und plausibel, zudem können wir daraus eine schöne Charakterisierung ableiten. In manch konkretem Beispiel keimen leise Zweifel. . . Daher nochmal:

Der Schlichter schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Alle Lösungen sollen „fair“ und „nachvollziehbar“ sein, und der Schlichter „konsistent“. Die vier Nash–Axiome geben hierauf präzise Antworten.

Die Schlichtung gelingt nur, wenn sie alle Parteien überzeugt. Hierzu ist es hilfreich, dass sie zur Begründung ihres Vorschlags nachvollziehbare Gründe und überzeugende Argumente anführt.

Nashs Axiome formulieren vier solche nachvollziehbaren Gründe. Sie erklären, was wir von einer fairen Verhandlungslösung erwarten. Über die Auswahl und Festlegung dieser Axiome kann man streiten, ihre Konsequenzen jedoch folgen mit mathematischer Präzision.

Einzelne Vorschläge mögen unfair erscheinen, doch das Verfahren ist fair im Sinne der Definition, denn es erfüllt all unsere Anforderungen. Aus unfairen Situationen kann es keine fairen Lösungen zaubern.

## Die monotone Verhandlungslösung

Wir ersetzen Unabhängigkeit IIA durch eine alternative Forderung...

**MON: Monotonie.** Für  $(K, a) \subseteq (L, a)$  in  $V^2$  gilt  $F(K, a) \leq F(L, a)$ , vorausgesetzt  $\max \text{pr}_i K_{\geq a} = \max \text{pr}_i L_{\geq a}$  bleibt erhalten für  $i = 1, 2$ .

### Satz L1G: monotone Lösung, Kalai–Smorodinsky 1975

**Existenz & Eindeutigkeit:** Es gibt genau eine Verhandlungslösung  $M : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , welche die Axiome INV, PAR, SYM und MON erfüllt. Diese heißt daher auch die **monotone Verhandlungslösung**.

**Berechnung:** Zu  $(K, a) \in V^2$  ist die Lösung  $M(K, a)$  der maximale Punkt auf der Strecke  $K \cap [(a_1, a_2), (z_1, z_2)]$  mit  $z_i = \max \text{pr}_i K_{\geq a}$ .

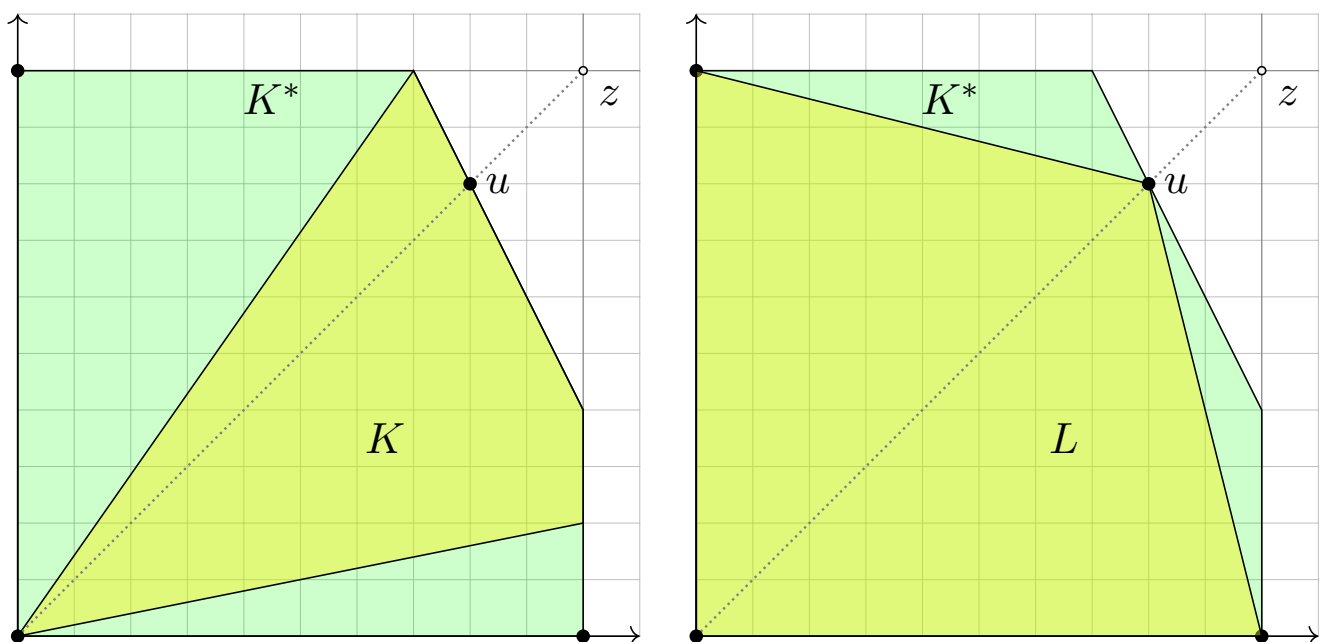
**Aufgabe:** Beweisen Sie diese Charakterisierung analog zu Satz L1B.

Die monotone Lösung  $M$  unterscheidet sich von der Nash–Lösung  $N$ , denn  $N$  erfüllt IIA aber nicht MON, und  $M$  erfüllt MON aber nicht IIA. Wer es konkret mag, findet deutliche Unterschiede in den Beispielen.

Dieser Satz geht zurück auf E. Kalai, M. Smorodinsky: *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, *Econometrica* 43 (1975) 513–518.

## Die monotone Verhandlungslösung

Eindeutigkeit  $F(K, a) = M(K, a)$  als Beweis in Bildern:



Dank INV dürfen wir  $a = (0, 0)$  und  $\max \text{pr}_i K_{\geq a} = 1$  annehmen.

Auf  $(K, a) \subseteq (K^*, a)$  und  $(L, a) \subseteq (K^*, a)$  können wir MON anwenden.

Das zeigt  $F(K, a) = F(K^*, a) = F(L, a) = u = M(K, a)$ , also  $F = M$ .

**Lösung:** (1) Existenz: Die angegebene Lösung

$$M : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (K, a) \mapsto \max(K \cap [(a_1, a_2), (z_1, z_2)])$$

erfüllt die vier gewünschten Eigenschaften INV, PAR, SYM, MON.  
(Das muss man sorgsam nachprüfen. Übung: Versuchen Sie es!)

(2) Eindeutigkeit: Angenommen  $F : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt diese Axiome.  
Wir leiten daraus ab, dass  $F = M$  gilt. Hierzu sei  $(K, a) \in V^2$ .

Es gilt  $(K_{\geq a}, a) \subseteq (K, a)$ . Dank MON folgt  $F(K_{\geq a}, a) \leq F(K, a)$ , dank PAR  $F(K_{\geq a}, a) = F(K, a)$ . Wir dürfen also  $(K_{\geq a}, a) = (K, a)$  annehmen, dank INV zudem  $a = (0, 0)$  und schließlich  $\max \text{pr}_1 K = \max \text{pr}_2 K = 1$ .

Sei  $u = M(K, a) = a + \lambda(1, 1)$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  maximal. Wir betrachten wie skizziert  $K^* := [K \cup \{(1, 0), (0, 1)\}]$  und  $L := [\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), u\}]$ .

Es gilt  $(K, 0) \subseteq (K^*, 0)$ . Dank MON folgt  $F(K, 0) = F(K^*, 0)$ .

Es gilt  $(L, 0) \subseteq (K^*, 0)$ . Dank MON gilt  $F(L, 0) = F(K^*, 0)$ .

Dank SYM und PAR gilt  $F(L, 0) = u$ , also  $F(K, 0) = M(K, 0)$ .

Die monotone Lösung  $M$  und die Nash–Lösung  $N$  sind die beiden bekanntesten Verhandlungslösungen. Beide lassen sich axiomatisch charakterisieren, wie hier dargestellt, und geometrisch bestimmen.

Die Nash–Lösung wird durch die Axiome INV, SYM, PAR und IIA charakterisiert. Viel Kritik entzündet sich traditionell am letzten Axiom, der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen. Als Reaktion darauf entwickelten Kalai und Smorodinsky ihren monotonen Lösungsbegriff, der durch die Axiome INV, SYM, PAR und MON charakterisiert wird.

Die Nash–Lösung erfüllt das Axiome IIA, aber nicht MON,  
die monotone Lösung erfüllt umgekehrt MON, aber nicht IIA.

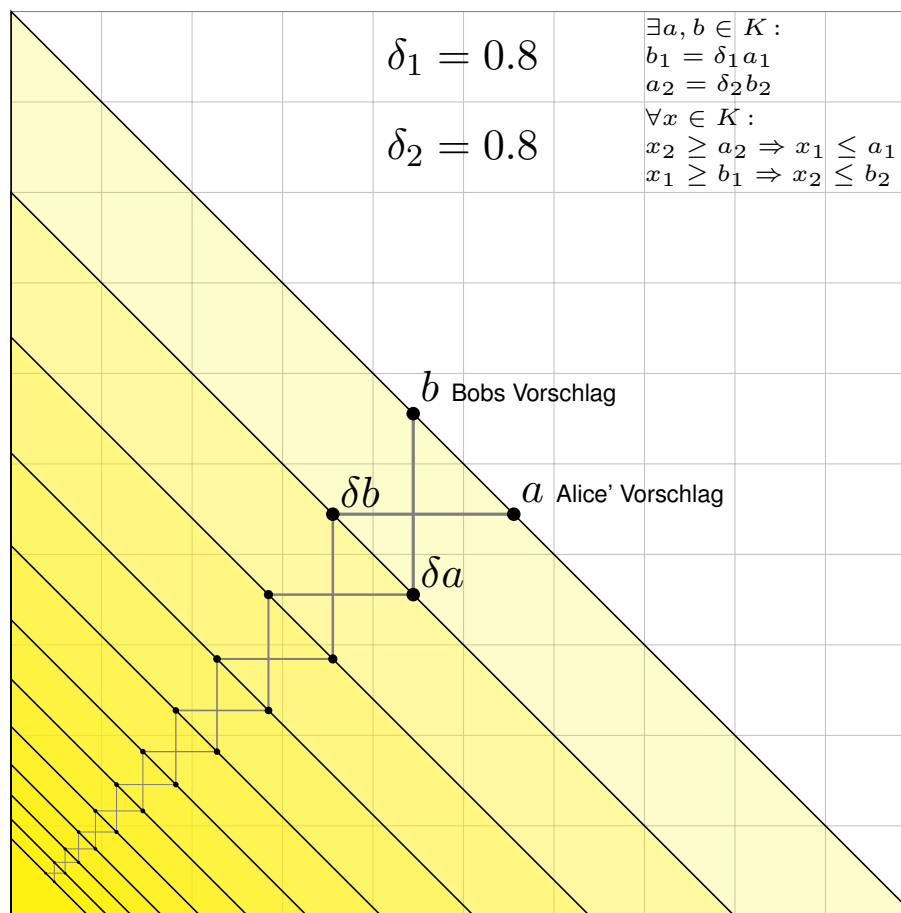
Auf symmetrischen VProblemen stimmen beide Lösungen überein.

Beide Lösungen wurden experimentell in Laborexperimenten getestet:  
Welche kommt dem empirisch beobachteten Verhalten am nächsten?

Wir durchleuchten eine solche Implementierung hier mathematisch:  
Die beiden Spieler machen abwechselnd Angebote bis zur Einigung.  
Welches Verhandlungsergebnis stellt sich bei rationalen Spielern ein?



## Verhandeln durch alternierende Angebote



## Verhandeln durch alternierende Angebote

**Beispiel:** Wir betrachten  $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1 \}$  mit der Pareto-Front  $\text{Max } K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \mid x_1 + x_2 = 1 \}$ . Für  $a, b \in \text{Max } K$  lösen wir  $\delta_1 a_1 = b_1$  und  $\delta_2 b_2 = a_2$  auf zu

$$a_1 = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2} \in ]0, 1[ \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1 \delta_2} \in ]0, 1[.$$

😊 Probe durch Einsetzen in die geforderten Gleichungen:

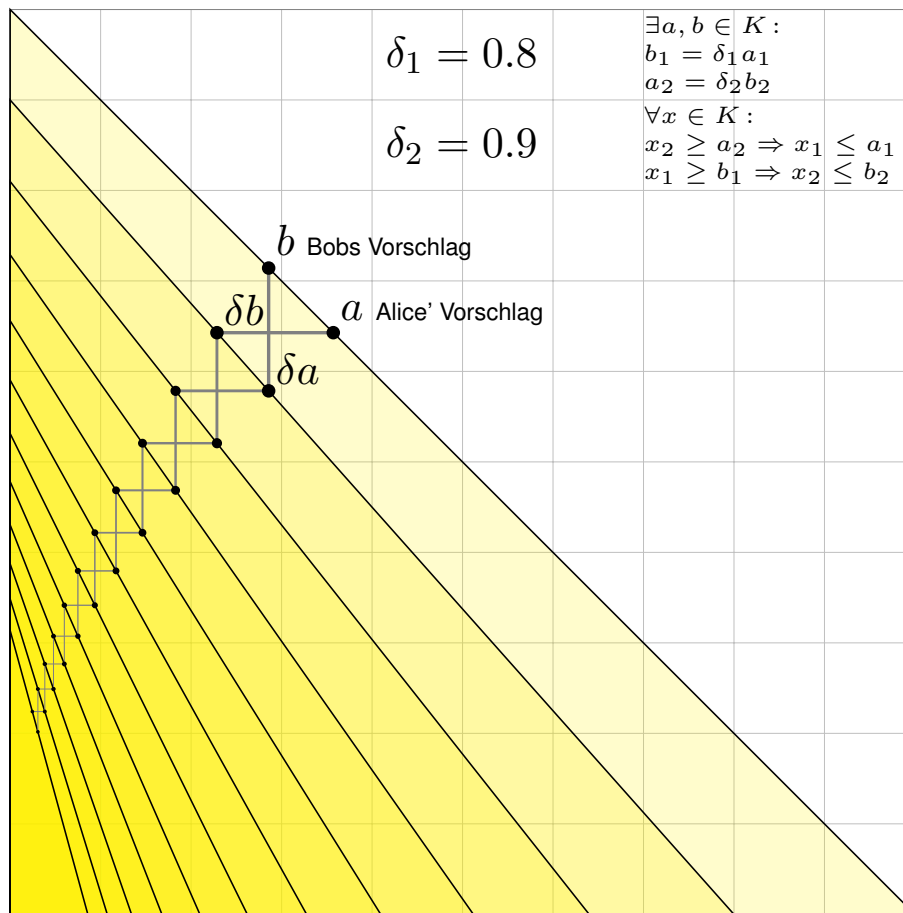
$$a_2 = 1 - a_1 = \frac{\delta_2 - \delta_1 \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2} = \delta_2 b_2 \quad \text{und} \quad b_1 = 1 - b_2 = \frac{\delta_1 - \delta_1 \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2} = \delta_1 a_1$$

**Spezialfall:** gleiche Diskontfaktoren  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ . Für  $\delta \nearrow 1$  finden wir:

$$a_1 = \frac{1 - \delta}{1 - \delta^2} = \frac{1}{1 + \delta} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{also} \quad a, b \rightarrow \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

😊 Das entspricht der symmetrischen Nash-Verhandlungslösung!

Für  $\delta < 1$  bekommt Alice etwas mehr vom Kuchen. Das ist ihr Privileg des ersten Zugs. Im Grenzwert  $\delta \nearrow 1$  verschwindet dieser Vorteil.



# Verhandeln durch alternierende Angebote

Wir betrachten die Diskontfaktoren  $\delta_i = e^{-t/p_i}$  mit  $p_i \in \mathbb{R}_{>0}$ .

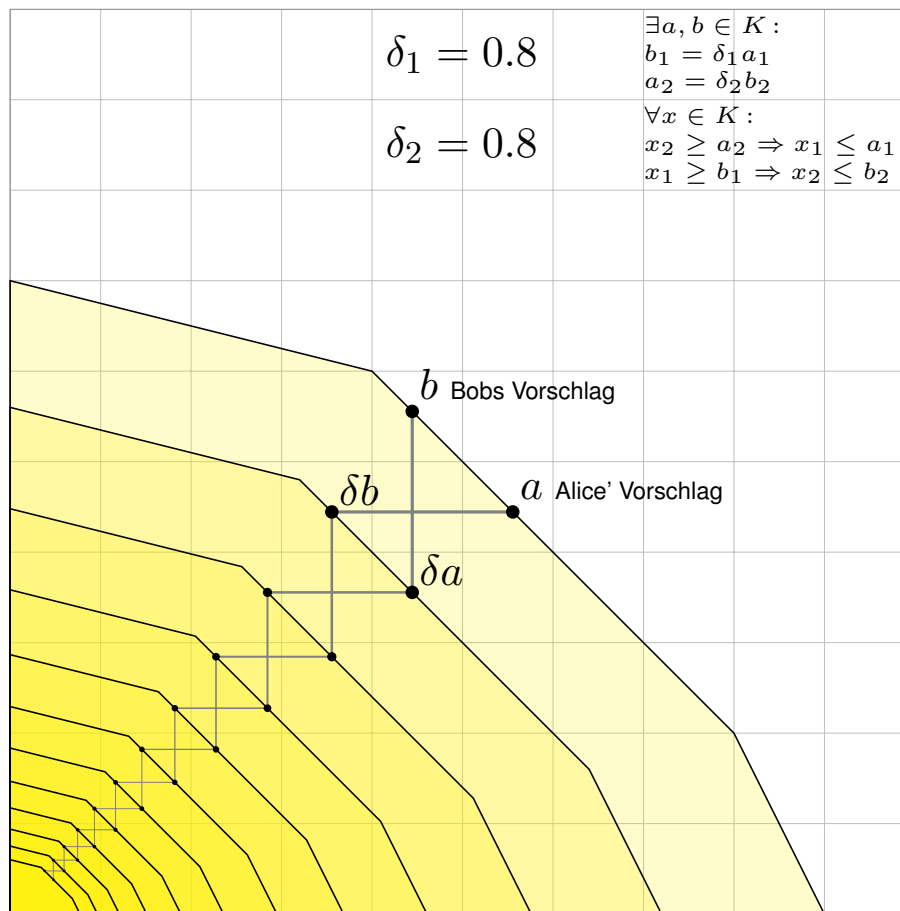
😊 Anschaulich ist  $t > 0$  der feste Zeittakt für jede Verhandlungsrunde. Der Geduldsparemeter  $p_i / \ln 2$  ist hier die Halbwertszeit für Spieler  $i$ . Der Kuchen  $K_n = (\delta_1^n, \delta_2^n) \cdot K$  schrumpft mit der Zeit, exponentiell in  $nt$ . Als Startwert vereinbaren wir  $t = 1$ . Für  $t \searrow 0$  finden wir:

$$a_1 = \frac{1 - e^{-t/p_2}}{1 - e^{-t/p_1} e^{-t/p_2}} \rightarrow \frac{p_1}{p_1 + p_2} \quad \text{also} \quad a, b \rightarrow \left( \frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2} \right)$$

😊 Das entspricht der asymmetrischen Nash-Verhandlungslösung!

Ist Alice geduldiger,  $p_1 > p_2$ , dann bekommt sie mehr vom Kuchen. Im symmetrischen Fall  $p_1 = p_2$  gilt  $a, b \rightarrow (1/2, 1/2)$  wie zuvor berechnet. Weiterhin gilt das Privileg des ersten Zugs, hier als Zeitvorteil  $t > 0$ . Im Grenzwert  $t \searrow 0$  verschwindet dieser Vorteil.

😊 Geduld erhöht die Verhandlungsmacht! Das ist intuitiv plausibel. Rubinsteins Verhandlungsmodell mit alternierenden Angeboten erklärt hierzu eine detaillierte Spielmechanik und liefert quantitative Ergebnisse.

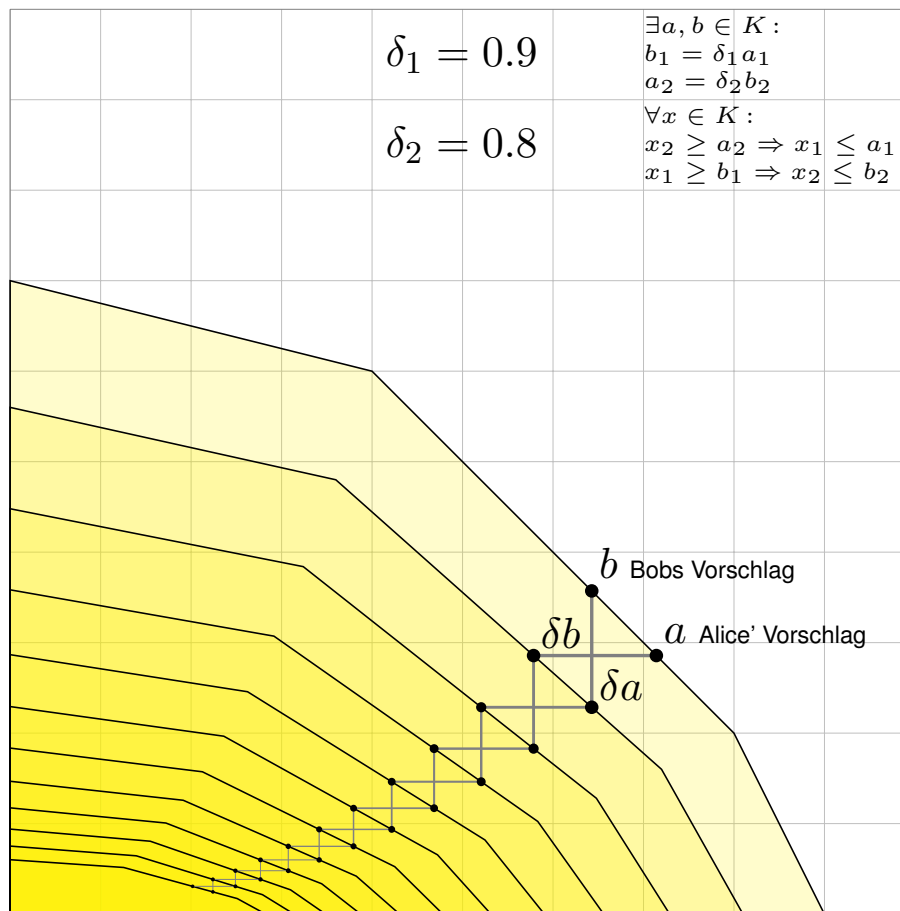


Ein wesentlicher Aspekt des Rubinstein–Modells ist das Schrumpfen der Verhandlungsmenge: Der zu verteilende Kuchen nimmt mit der Zeit exponentiell / geometrisch ab. Nur durch diesen Zeitdruck entsteht hier die innere Dynamik der Verhandlung und der Anreiz zur Einigung.

Die Diskontierung mit  $\delta_i$  können wir auf drei Arten interpretieren:

- 1 Intersubjektive Inflation:** Geld morgen ist weniger wert als heute. Wertverlust in Form des Faktors  $\delta \in ]0, 1[$  ist intersubjektiv, für alle Spieler gleich. Der vermutete Wert  $\delta_i$  kann jedoch individuell sein.
- 2 Individuelle Geduld:** Warten verringert den Nutzen, auch hier ist Geld morgen weniger wert als Geld heute, diesmal aber für jeden Spieler  $i \in I$  individuell diskontiert durch den Faktor  $\delta_i \in ]0, 1[$ .
- 3 Abbruchwahrscheinlichkeit:** Zu Recht wenden Sie ein, dass unendliche Wiederholung unrealistisch ist. Viel realistischer sind dagegen wiederholte Spiele mit einer gewissen Abbruchwkt  $\varepsilon > 0$ . Das führt zu derselben geometrischen Summe mit Fortsetzungswkt  $\delta = 1 - \varepsilon$ . Auch hier kann der vermutete Wert  $\delta_i$  individuell sein.

## Verhandeln durch alternierende Angebote



## Verhandeln durch alternierende Angebote

Wir behandeln dieses Spiel zunächst geometrisch, anschließend formal.

Gegeben seien zwei Punkte  $a, b \in K$  mit  $\delta_1 a_1 = b_1$  und  $\delta_2 b_2 = a_2$ .

Für alle  $x \in K$  gelte zudem  $x_1 \geq b_1 \Rightarrow x_2 \leq b_2$  und  $x_2 \geq a_2 \Rightarrow x_1 \leq a_1$ .

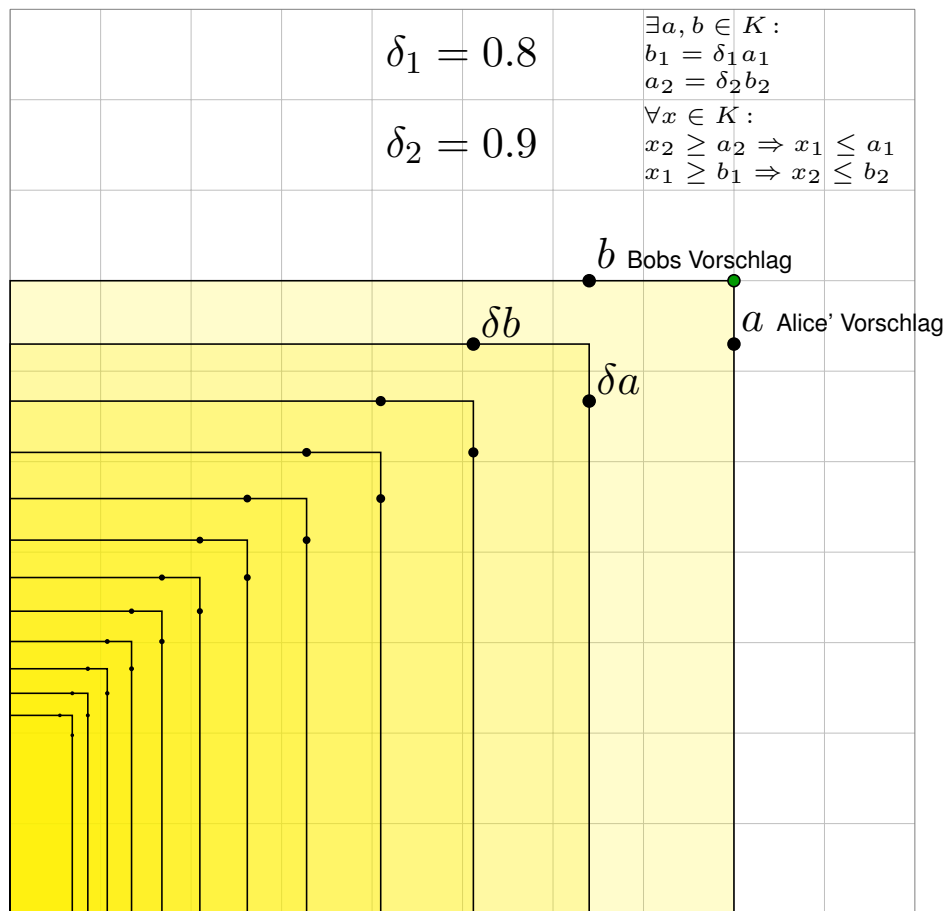
Wir betrachten folgendes Strategiepaar (stationär, ohne Erinnerung):

- Alice schlägt  $a \in K$  vor und akzeptiert  $x \in K$  gdw  $x_1 \geq \delta_1 a_1 = b_1$ .
- Bob schlägt  $b \in K$  vor und akzeptiert  $x \in K$  gdw  $x_2 \geq \delta_2 b_2 = a_2$ .

Ist das ein Gleichgewicht? Wir untersuchen einmalige Abweichungen:

- Alice will  $a$  vorschlagen, doch sie erwägt alle Alternativen  $x \in K$ .  
Im Falle  $x_2 < a_2$  lehnt Bob ab; Alice erhält dann nur  $b_1 = \delta_1 a_1 < a_1$ .  
Für  $x_2 \geq a_2$  stimmt Bob zu; wegen  $x_1 \leq a_1$  hat Alice keinen Vorteil.
- Bob will das Angebot  $a$  annehmen, doch er erwägt Ablehnung.  
Dann bekommt er ebenfalls  $\delta_2 b_2 = a_2$ , also keine Verbesserung.

Dieselben Argumente gelten mit vertauschten Rollen für Bob und Alice. Das Prinzip der einmaligen Abweichung fordert Stetigkeit. Das ist erfüllt. Das obige Strategiepaar ist somit ein teilspielperfektes Gleichgewicht. (Gibt es weitere? Das ist schwieriger. Lemma L2D zeigt Eindeutigkeit.)

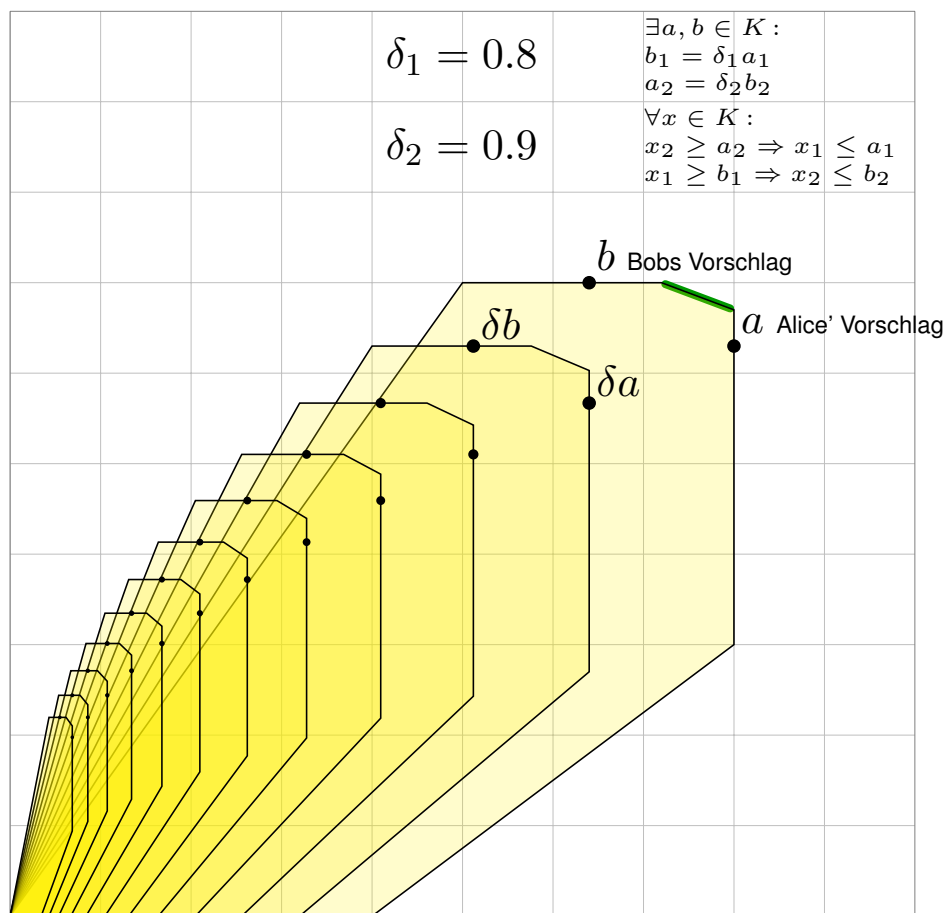


Die vorigen Beispiele waren geometrisch einfach und eindeutig. Als Mahnung zur Vorsicht diskutieren wir Rechtecke, wie gezeigt. Die Pareto-Front  $\text{Max } K$  degeneriert hier zu einem einzigen Punkt. Auf den ersten Blick ist nur dieser Punkt ein vernünftiges Ergebnis.

Wie zuvor sind die alternierenden Angebote  $a$  und  $b$  ein Gleichgewicht. Daneben gibt es noch überabzählbar viele weitere Gleichgewichte und dazu gehören sogar überabzählbar viele Gleichgewichtsauszahlungen! Anschaulich ist die Verhandlungslage hier nicht strikt kompetitiv:

Alice kann ihren Vorschlag  $a$  zwar nicht für sich selbst verbessern, denn  $a_1 = m_1 = \max_{\text{pr}_1} K$ , doch sie könnte Bob eine Verbesserung bieten. Bob kann seinen Vorschlag  $b$  zwar nicht für sich selbst verbessern, denn  $b_2 = m_2 = \max_{\text{pr}_2} K$ , doch er könnte Alice eine Verbesserung bieten.

Diese Ambivalenz verkompliziert unsere spieltheoretische Analyse. Zur Vereinfachung wollen wir Degenerierung kurzerhand ausschließen. Wir fordern dazu, dass die Pareto-Front  $\text{Max } K$  maximal ausgedehnt ist, also komplett von Achse zu Achse läuft, kurz  $(m_1, 0), (0, m_2) \in \text{Max } K$ .



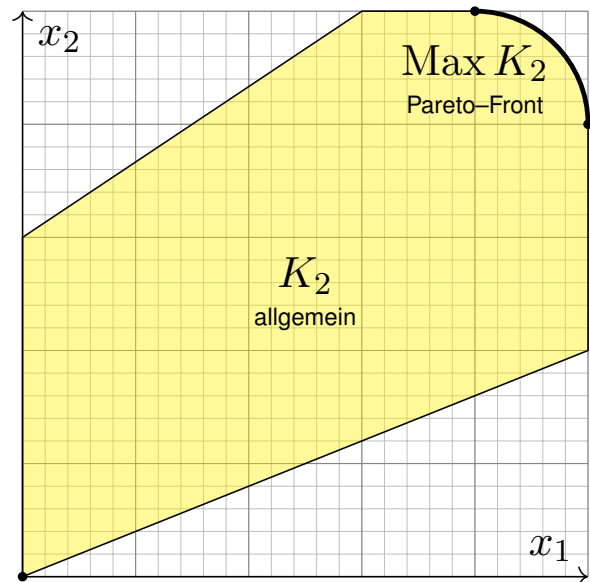
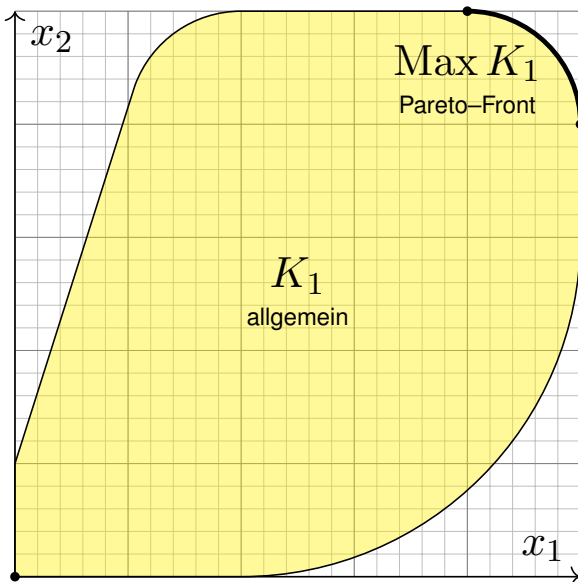
Dieses modifizierte Beispiel ähnelt dem vorigen Problem des Rechtecks, hier jedoch ist die Pareto-Front  $\text{Max } K$  nicht nur ein einzelner Punkt, sondern ein Geradensegment, allzu kurz, aber immerhin ausgedehnt. Auch hier liegen außerhalb der Pareto-Front weitere Gleichgewichte!

Wie zuvor sind die alternierenden Angebote  $a$  und  $b$  ein Gleichgewicht. Daneben gibt es noch überabzählbar viele weitere Gleichgewichte und dazu gehören sogar überabzählbar viele Gleichgewichtsauszahlungen! Anschaulich: Die Verhandlungslage ist wieder nicht strikt kompetitiv.

Was wäre die schönste Aussage, die bisher noch nicht widerlegt ist? Wir würden vermuten, unter der nötigen geometrischen Vereinfachung, dass  $a$  bzw.  $b$  tatsächlich die einzige Gleichgewichtsauszahlung ist. Genau dies ist der Satz L2C von Rubinstein, auf den wir zusteuern.

Nach diesen Beispielen und Mahnungen ist die Vorgehensweise klar:

- Wir präzisieren die geometrischen Voraussetzungen an  $K$ .
- Wir formalisieren die Verhandlung  $\Gamma = \Gamma(K, \delta)$  in extensiver Form.
- Wir finden alle Gleichgewichte  $s \in \text{PNE}(\Gamma)$  bzw. ihre Auszahlungen.



Sei  $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  konvex und kompakt mit Drohpunkt  $0 \in K$ .

Wir setzen  $m_1 := \max \text{pr}_1 K$  und ebenso  $m_2 := \max \text{pr}_2 K$ .

$K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq m_1, \psi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_1(x_1) \}$  mit  $\psi_1, \varphi_1 : [0, m_1] \rightarrow [0, m_2]$  stetig,  $\psi_1$  konvex wachsend,  $\varphi_1$  konkav.

$K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_2 \leq m_2, \psi_2(x_2) \leq x_1 \leq \varphi_2(x_2) \}$  mit  $\psi_2, \varphi_2 : [0, m_2] \rightarrow [0, m_1]$  stetig,  $\psi_2$  konvex wachsend,  $\varphi_2$  konkav.

Eine Menge  $B \subset \mathbb{R}^2$  heißt **Normalbereich in  $y$ -Richtung**, wenn

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \}$$

mit  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g \leq h$ . Dies nutzen wir z.B. zur Integration:  $B$  ist kompakt, somit messbar und  $\text{vol}_2(B) < \infty$ . Sei  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  absolut integrierbar, z.B. beschränkt oder gar stetig. Dann gilt dank Fubini:

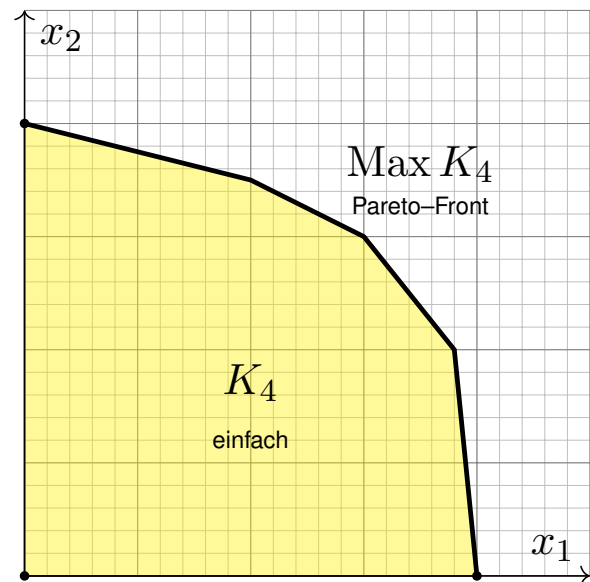
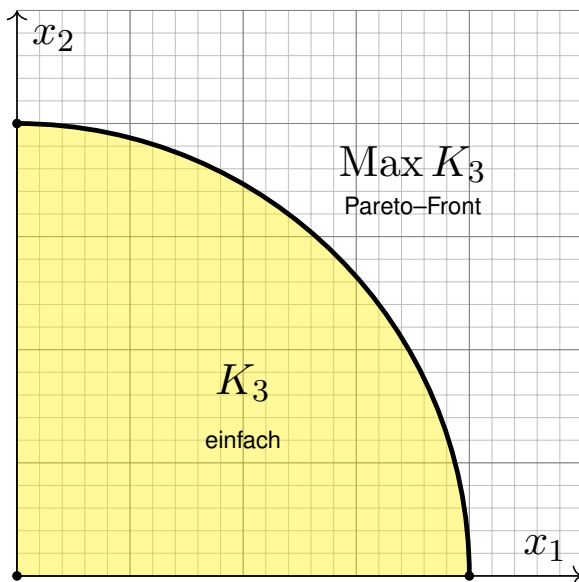
$$\int_B f(x, y) \, d(x, y) = \int_{x=a}^b \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

Entsprechend ist  $B \subset \mathbb{R}^2$  ein **Normalbereich in  $x$ -Richtung**, wenn

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y) \}.$$

Gilt beides, so nennen wir  $B$  einen **Binormalbereich**.

**Aufgabe:** Jedes konvexe Kompaktum  $K \in \mathbb{R}^2$  ist ein Binormalbereich. Wie konstruieren Sie jeweils die eingrenzenden Funktionen  $g$  und  $h$ ? Warum sind diese dann stetig, zudem  $g$  konvex und  $h$  konkav?



Zur Vereinfachung gelte  $(m_1, 0) \in \text{Max } K$  und  $(0, m_2) \in \text{Max } K$ .  
Dann verläuft die Pareto-Front von der  $x_1$ -Achse zur  $x_2$ -Achse.

Somit gilt  $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq m_1, 0 \leq x_2 \leq \varphi_1(x_1) \}$   
umgekehrt  $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_2 \leq m_2, 0 \leq x_1 \leq \varphi_2(x_2) \}$   
mit  $(\varphi_1, \varphi_2) : [0, m_1] \cong [0, m_2]$  stetig, bijektiv, konkav fallend.

**Aufgabe:** Weisen Sie alle hier gemachten Aussagen sorgfältig nach!  
Differenzieren im Sinne der Analysis 1 können Sie im Allgemeinen nicht,  
aber Geometrie und Topologie sind Ihnen hier wie immer treue Helfer.



Für die Analyse beschaffen wir uns zunächst das Punktepaar  $(a, b)$ :

## Lemma L2A: Verhandlungsgleichgewicht und Nash-Lösung

Sei  $0 \in K \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  konvex und kompakt sowie  $(m_1, 0), (0, m_2) \in \text{Max } K$ .

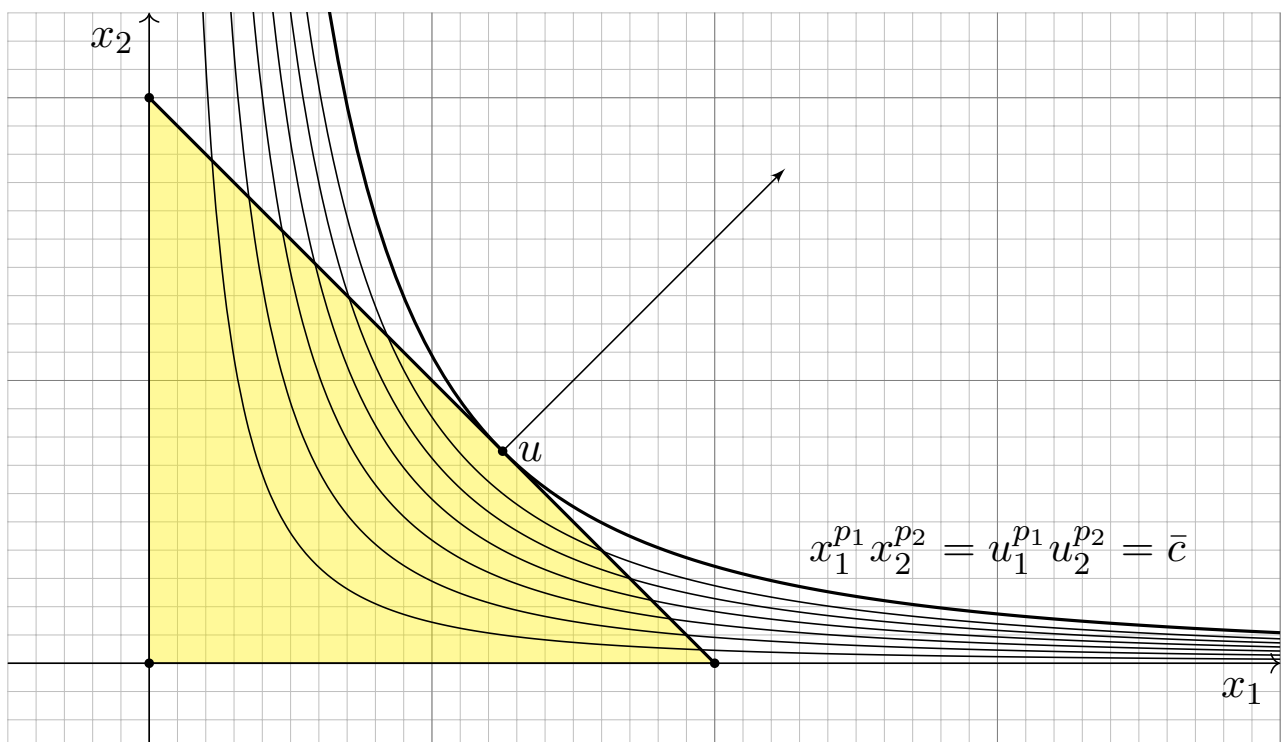
Zu jedem Parameterpaar  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{> 0}$  und  $\delta_1 = e^{-t/p_1}, \delta_2 = e^{-t/p_2}$  existiert auf der Pareto-Front genau ein Punktepaar  $a, b \in \text{Max } K$  mit

$$\delta_1 a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad \delta_2 b_2 = a_2.$$

Für  $t \searrow 0$  konvergieren  $a(t)$  und  $b(t)$  gegen die asymmetrische Nash-Verhandlungslösung  $P(K, 0) = u$ , also den eindeutigen Maximierer  $u \in K$  der Funktion  $h: K \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, x_2) \mapsto x_1^{p_1} x_2^{p_2}$ .

**Beispiel:** Wir betonen den symmetrischen Fall  $p_1 = p_2$ , also  $\delta_1 = \delta_2$ : Für  $t \searrow 0$  konvergieren hierbei  $a(t)$  und  $b(t)$  gegen die symmetrische Nash-Verhandlungslösung  $N(K, 0) = u$ , also den eindeutigen Maximierer  $u \in K$  der Funktion  $h: K \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ .

Existenz und Eindeutigkeit und Konvergenz als Beweis in Bildern:



😊 Hier sind Geometrie und Topologie gefragt, allerdings noch einfach.

**Beweis:** Aus  $\delta_1 a_1 = b_1$  und  $\delta_2 b_2 = a_2$  folgt  $h(a) = h(b)$ , denn

$$h(a) = (a_1)^{p_1} (a_2)^{p_2} = (e^{t/p_1} b_1)^{p_1} (e^{-t/p_2} b_2)^{p_2} = (b_1)^{p_1} (b_2)^{p_2} = h(b)$$

Umgekehrt: Je zwei dieser drei Gleichungen implizieren die dritte.

Sei  $\bar{c} := \max_K h = h(u)$ . Der Maximierer  $u \in K$  ist eindeutig.

Für jedes Niveau  $c \in ]0, \bar{c}[$  schneidet die zugehörige Niveaulinie  $h^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}_{>0}^2 \mid x_1^{p_1} x_2^{p_2} = c\}$  die Pareto-Front genau zweimal:

Es gilt  $h^{-1}(c) \cap \text{Max } K = \{a, b\}$  mit  $b_1 < u_1 < a_1$  und  $a_2 < u_2 < b_2$ .

Die Zuordnung  $c \mapsto a_1$  ist antiton. Die Zuordnung  $c \mapsto b_1$  ist isoton.

Für  $c \searrow 0$  gilt  $b_1 \searrow 0$  und  $a_1 \nearrow m_1$ , also  $\delta_1 = b_1/a_1 \searrow 0$ .

Für  $c \nearrow \bar{c}$  gilt  $b_1 \nearrow u_1$  und  $a_1 \searrow u_1$ , also  $\delta_1 = b_1/a_1 \nearrow 1$ .

Die Zuordnung  $c \mapsto b_1/a_1$  ist stetig. Also wird jeder Wert in  $]0, 1[$  genau einmal angenommen. Aus  $b_1/a_1 = e^{-t/p_1}$  folgt dann  $a_2/b_2 = e^{-t/p_2}$ . QED

**Aufgabe:** Prüfen Sie alle Teilaussagen dieses Beweises sorgfältig nach.

## Rubinsteins Verhandlungsmodell

**Annahmen:** Sei  $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  konvex und kompakt mit Drohpunkt  $0 \in K$ . Mit jedem Zeitschritt  $n = 0, 1, 2, \dots$  schrumpft der zu verteilende Kuchen auf die Menge  $K_n := (\delta_1^n, \delta_2^n) \cdot K$  mit konstanten Faktoren  $\delta_1, \delta_2 \in ]0, 1[$ .

Diese Daten definieren das **Rubinstein-Modell** einer Verhandlung durch alternierende Angebote als dynamisches Spiel  $\Gamma = \Gamma(K, \delta)$ , genauer  $\Gamma_1$ , falls Alice beginnt, und  $\Gamma_2$ , falls Bob beginnt.

Als Alphabet wählen wir  $\mathcal{A} = K \sqcup \{ \heartsuit = \text{ablehnen}, \clubsuit = \text{akzeptieren} \}$ . Spielbaum  $X = X^\circ \sqcup \partial X$  und Auszahlung  $u$  entstehen daraus wie folgt:

$$\begin{aligned} X_0^\circ &= \{\emptyset\}, \\ X_{2n+1}^\circ &= X_{2n}^\circ * K = \{v = (x_0, \heartsuit, \dots, x_n)\}, \\ X_{2n+2}^\circ &= X_{2n+1}^\circ * \{\heartsuit\} = \{v = (x_0, \heartsuit, \dots, x_n, \heartsuit)\}, \\ \partial X_{2n+2} &= X_{2n+1}^\circ * \{\clubsuit\} = \{v = (x_0, \heartsuit, \dots, x_n, \clubsuit)\}, \quad u^i(v) = \delta_i^n x_n^i, \\ X_\infty &= (K * \{\heartsuit\})^\infty = \{v = (x_0, \heartsuit, x_1, \heartsuit, \dots)\}, \quad u^i(v) = 0. \end{aligned}$$

😊 Dieses Verhandlungsmodell ist sehr intuitiv und recht natürlich. Es gilt daher als realistische Wiedergabe echter Verhandlungen.

## Rubinsteins Verhandlungsmodell

Hier ist  $K$  die Verhandlungsmenge. Jedes ihrer Elemente  $x \in K$  ist ein mögliches Verhandlungsergebnis und kann als Angebot genutzt werden. Die Verhandlung verläuft alternierend, wobei zunächst Alice beginnt: Zuerst macht Alice ein Angebot. Lehnt Bob ab, so macht er ein Angebot. Lehnt Alice dieses ab, so macht sie ein Angebot. Und immer so weiter.

Zu jeder Vorgeschichte  $v = (x_0, \heartsuit, \dots, x_{n-1}, \heartsuit) \in X$  haben wir

- für  $n$  gerade:  $A_v^1 = K$  und  $A_v^2 = \{\text{warten}\}$ .
- für  $n$  ungerade:  $A_v^2 = K$  und  $A_v^1 = \{\text{warten}\}$ .

Zu jeder Vorgeschichte  $v = (x_0, \heartsuit, \dots, x_n) \in X$  haben wir

- für  $n$  gerade:  $A_v^1 = \{\text{warten}\}$  und  $A_v^2 = \{\clubsuit, \heartsuit\}$ .
- für  $n$  ungerade:  $A_v^2 = \{\text{warten}\}$  und  $A_v^1 = \{\clubsuit, \heartsuit\}$ .


Durch diese Aktionsmengen wird das Spiel  $\Gamma_1$  eindeutig beschrieben, insbesondere werden alle Strategien  $s^1 \in S^1$  und  $s^2 \in S^2$  festgelegt.

Das Spiel  $\Gamma_2$  definieren wir genauso, allerdings mit vertauschten Rollen, das bedeutet, wir vertauschen lediglich die Aktionsmengen  $A_v^1$  und  $A_v^2$ .

*„Of course, one cannot represent all possible bargaining devices as moves in the non-cooperative game. The negotiation process must be formalized and restricted, but in such a way that each participant is still able to utilize all the essential strengths of his position.“ (Nash 1953)*

Wir brauchen demnach Modelle, die einerseits umfassend genug sind, um realistisch zu sein, andererseits einfach genug, um praktikable Analysen und Lösungen zuzulassen. Der axiomatisch-kooperative Ansatz löst das zweite Problem sehr elegant und liefert Lösungen. Doch welche der verschiedenen Verhandlungslösungen ist realistisch, in welchem Kontext ist sie geeignet, und wie sollen wir sie anwenden?

Hier hilft die nicht-kooperative Theorie als Richtschnur, denn wir können diese Modelle gut der Realität anpassen. In diesem Sinne ergänzen sich axiomatisch-kooperative und die strategisch-nicht-kooperative Theorie. Das **Nash-Programm** hat zum Ziel, die erste in die zweite einzubetten. Beide lassen sich so zudem empirisch überprüfen und kalibrieren, etwa passiv in (Real-Life-)Beobachtungen oder aktiv in (Labor-)Experimenten.

😊 Rubinsteins Verhandlungsmodell  $\Gamma(K, \delta)$  ist intuitiv und natürlich. Es ist recht einfach und übersichtlich aufgebaut, doch die Menge der möglichen Strategien  $S = S^1 \times S^2$  ist riesig: Jede Entscheidung  verzweigt nur in zwei, aber bei jedem Vorschlag  $x \in K$  verzweigt der Spielbaum sogleich in überabzählbar viele Teilbäume. Zum Glück haben wir eine universelle, präzise und bequeme Notation für all solche Fälle! Diese Verzweigungen wiederholen sich abzählbar unendlich oft. Nicht alle Trajektorien / Spielverläufe sind endlich; Rückwärtsinduktion gemäß Satz J1D von Zermelo steht uns demnach nicht zur Verfügung.

😊 Praktisch gesehen sind damit unfassbar viele Strategien denkbar, etwa das Feilschen von Harry und Brian aus dem Eingangszitat. Die Spieler können versuchen, sich gegenseitig zu beeindrucken: täuschen, drohen, einschüchtern, hinhalten, verwirren, ablenken, etc. Der Phantasie und Schauspielkunst sind hier kaum Grenzen gesetzt. Das Verhandlungsergebnis L2c hingegen ist ruhig und nüchtern.

## Konstruktion des kanonischen Verhandlungsgleichgewichts

Wir zeigen zunächst  $\text{PNE}(\Gamma(K, \delta)) \neq \emptyset$  durch explizite Konstruktion:

### Lemma L2B: kanonisches Verhandlungsgleichgewicht

Sei  $0 \in K \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  konvex und kompakt sowie  $(m_1, 0), (0, m_2) \in \text{Max } K$ . Gegeben seien  $a, b \in K$ . Hierzu betrachten wir folgendes Strategiepaar:

- Alice schlägt immer  $a \in K$  vor und akzeptiert  $x \in K$  gdw  $x_1 \geq \delta_1 a_1$ .
- Bob schlägt immer  $b \in K$  vor und akzeptiert  $x \in K$  gdw  $x_2 \geq \delta_2 b_2$ .

Dies ist teilspielperfekt gdw  $a, b \in \text{Max } K$  sowie  $\delta_1 a_1 = b_1$  und  $\delta_2 b_2 = a_2$ . Dank Lemma L2A existiert genau ein solches Punktepaar  $a, b \in \text{Max } K$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “ Angenommen unser Strategiepaar ist teilspielperfekt.

(1a) Gilt  $a_2 < \delta_2 b_2$  und  $b_1 < \delta_1 a_1$ , so wird nie zugestimmt.

Jeder der beiden könnte sich durch Zustimmung verbessern.

(1b) Gilt  $a_2 < \delta_2 b_2$  und  $b_1 \geq \delta_1 a_1$ , so wird  $\delta b$  ausgezahlt.

Alice könnte sich auf  $\varphi_2(\delta_2 b_2) > \delta_1 b_1$  verbessern.

(1c) Ebenso ist  $a_2 \geq \delta_2 b_2$  und  $b_1 < \delta_1 a_1$  unmöglich, denn dann wäre das Teilspiel von Bobs Angebot nicht im Gleichgewicht.

## Konstruktion des kanonischen Verhandlungsgleichgewichts

(1d) Also gilt  $a_2 \geq \delta_2 b_2$  und  $b_1 \geq \delta_1 a_1$ . Es gilt sogar Gleichheit:

Bei  $a_2 > \delta_2 b_2$  könnte Alice sich verbessern auf  $\varphi_2(\delta_2 b_2) > \varphi_2(a_2) \geq a_1$ .

Bei  $b_1 > \delta_1 a_1$  könnte Bob sich verbessern auf  $\varphi_1(\delta_1 a_1) > \varphi_1(b_1) \geq b_2$ .

(1e) Schließlich gilt  $a, b \in \text{Max } K$ :

Bei  $a \in K \setminus \text{Max } K$  könnte Alice sich verbessern.

Bei  $b \in K \setminus \text{Max } K$  könnte Bob sich verbessern.

„ $\Leftarrow$ “: Wir zeigen, dass unser Strategiepaar teilspielperfekt ist.

(2a) Alice könnte  $a$  vorschlagen, doch sie erwägt alle Alternativen  $x \in K$ .

Im Falle  $x_2 < \delta_2 b_2$  wird Bob ablehnen; Alice erhält dann nur  $b_1 \leq a_1$ .

Für  $x_2 \geq a_2$  stimmt Bob zu; wegen  $x_1 \leq a_1$  hat Alice keinen Vorteil.

(2b) Bob könnte das Angebot  $a$  annehmen, doch er erwägt Ablehnung.

Dann bekommt er ebenfalls  $\delta_2 b_2 = a_2$ , also keine Verbesserung.

Dasselbe gilt für Bob und Alice mit vertauschten Rollen.

Das Prinzip der einmaligen Abweichung fordert Stetigkeit. Das ist erfüllt.

Das obige Strategiepaar ist somit ein teilspielperfektes Gleichgewicht.

Das beweist insbesondere  $\text{PNE}(\Gamma(K, \delta)) \neq \emptyset$ .

□ QED

## Satz L2c: Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

Wir untersuchen Rubinsteins Modell  $\Gamma(K, \delta)$  alternierender Angebote:  
Sei  $0 \in K \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  konvex und kompakt sowie  $(m_1, 0), (0, m_2) \in \text{Max } K$ .  
Zu jedem Parameterpaar  $\delta_1, \delta_2 \in ]0, 1[$  existiert genau ein Punktepaar  $a, b \in \text{Max } K$  mit der Gleichgewichtseigenschaft  $\delta_1 a_1 = b_1$  und  $\delta_2 b_2 = a_2$ .

(1) Für jedes teilspielperfekte Gleichgewicht  $s \in \text{PNE}(\Gamma(K, \delta))$  gilt dann:

- Alice schlägt zu jedem Zeitpunkt  $a$  vor und akzeptiert  $b$  oder besser. Sie bejaht  $x \in K$ , falls  $x = b$  oder  $x_1 > b_1$ , und verneint falls  $x_1 < b_1$ .
- Bob schlägt zu jedem Zeitpunkt  $b$  vor und akzeptiert  $a$  oder besser. Er bejaht  $x \in K$ , falls  $x = a$  oder  $x_2 > a_2$ , und verneint falls  $x_2 < a_2$ .

Bei Indifferenz  $x_1 = b_1$  bzw.  $x_2 = a_2$  ist die Antwort leider unbestimmt.

(2) Angenommen, indifferente Spieler bevorzugen ein schnelles Ende. Genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht erfüllt diese Verfeinerung:

- Alice schlägt  $a \in K$  vor und akzeptiert  $x \in K$  gdw  $x_1 \geq \delta_1 a_1 = b_1$ .
- Bob schlägt  $b \in K$  vor und akzeptiert  $x \in K$  gdw  $x_2 \geq \delta_2 b_2 = a_2$ .

## Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

😊 Es ist überaus erstaunlich, dass der Satz so klar und einfach ausfällt. Das Ergebnis ist unglaublich aber wahr – und überraschend nüchtern: Bei rationaler Spielweise zahlt sich all das Täuschen, Drohen, Ablenken, etc. nicht aus. Beide Spieler bleiben bei ihrer klaren einfachen Linie. Eine vollkommen rationale Verhandlung verläuft daher wie ein Uhrwerk, ohne jegliche Überraschungen oder Verhandlungstricks, geräuschlos.

😊 Warum beobachten wir bei realen Verhandlungen so viel Wirbel?

Das liegt einerseits an der unvollständigen Information der Spieler: Das Verhandeln übermittelt nun Information, es ist ein Signalspiel. Diese zusätzliche Problematik bildet unser Modell einfach nicht ab.

Andererseits liegt es an der mangelnden Rationalität der Spieler; sie lassen sich durch Finten beeindrucken und vom Plan ablenken. Vollkommen rational und informiert verhandelt jeder kühl und nüchtern.

😊 Die Verhandlung kommt sofort zu einem optimalen Ergebnis. Dank vollständiger Information ist diese Lösung effizient.

Wir nutzen die Projektion  $\Phi_1$  nach oben und  $\Phi_2$  nach rechts:

$$\Phi_1 : K \rightarrow \text{Max } K : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, \varphi_1(x_1)),$$

$$\Phi_2 : K \rightarrow \text{Max } K : (x_1, x_2) \mapsto (\varphi_2(x_2), x_2).$$

Sei  $A^* \subseteq \text{Max } K$  die Menge aller PNE-Auszahlungen von  $\Gamma_1$ .

Sei  $B^* \subseteq \text{Max } K$  die Menge aller PNE-Auszahlungen von  $\Gamma_2$ .

Wir setzen  $\underline{A} = \inf \text{pr}_1 A^*$  und  $\bar{A} = \sup \text{pr}_1 A^*$  sowie  $\underline{B} = \inf \text{pr}_2 B^*$  und  $\bar{B} = \sup \text{pr}_2 B^*$ . Wir erhalten so die zusammenhängenden Kompakta

$$A = \Phi_1([\underline{A}, \bar{A}] \times \{0\}) \subseteq \text{Max } K,$$

$$B = \Phi_2(\{0\} \times [\underline{B}, \bar{B}]) \subseteq \text{Max } K.$$

In  $\Gamma_1(K, \delta)$  ist die zweite Runde immer ein Teilspiel  $\delta\Gamma_2(K, \delta)$ .

Alle PNE-Auszahlungen des Teilspiels sind also enthalten in  $\delta B$ .

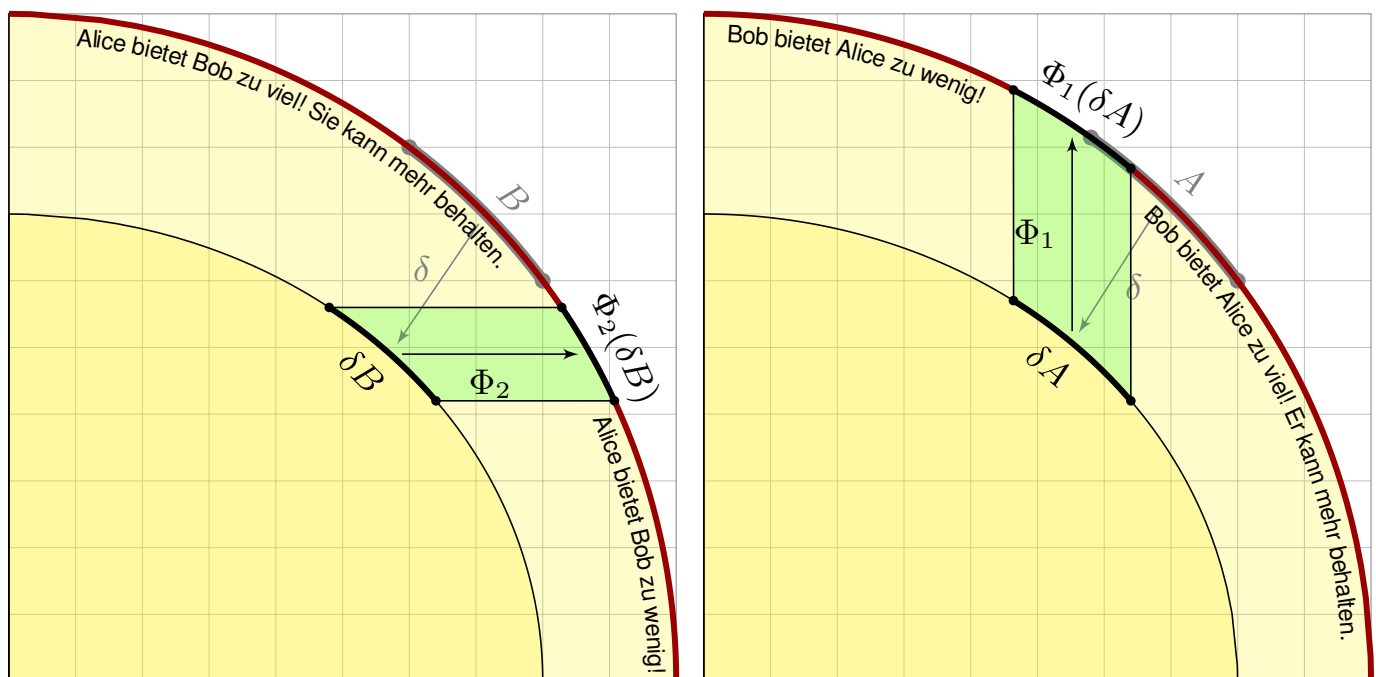
In  $\Gamma_2(K, \delta)$  ist die zweite Runde immer ein Teilspiel  $\delta\Gamma_1(K, \delta)$ .

Alle PNE-Auszahlungen des Teilspiels sind also enthalten in  $\delta A$ .

Damit können wir nun  $A$  und  $B$  geometrisch in Beziehung setzen!

## Eindeutigkeit der PNE-Auszahlung

L230



**Lemma L2D: Kontraktion garantiert Eindeutigkeit.**

- (1) Mit diesen Bezeichnungen gilt  $\Phi_2(\delta B) \supseteq A$  und  $\Phi_1(\delta A) \supseteq B$ .
- (2) Die Abbildung  $\text{Max } K \rightarrow \text{Max } K : x \mapsto \Phi_i(\delta x)$  ist  $\delta_i$ -kontraktiv.
- (3) Demnach sind die Mengen  $A = \{a\}$  und  $B = \{b\}$  einpunktig.

**Beweis:** (1) Wir betrachten ein beliebiges teilspielperfektes Gleichgewicht  $s \in \text{PNE}(\Gamma_1)$  mit Auszahlung  $(x_1, x_2) \in A$ :

Wäre  $x_2 < \delta_2 \underline{B}$ , dann lehnt Bob ab: Alice bietet ihm zu wenig.

Wäre  $x_1 > \delta_2 \overline{B}$ , dann bietet Alice zuviel: Sie kann mehr behalten.

Für ein Gleichgewicht  $s$  ist eine solche Auszahlung unmöglich.

Also gilt  $(x_1, x_2) \in \Phi_2(\delta B)$ . Wir schließen daraus  $A \subseteq \Phi_2(\delta B)$ .

Mit vertauschten Rollen folgt ebenso  $B \subseteq \Phi_1(\delta A)$ .

(2) Die Abbildung  $\text{Max } K \rightarrow \text{Max } K : (x_1, x_2) \mapsto (\delta_1 x_1, \varphi_1(\delta_1 x_1))$  ist  $\delta_1$ -kontraktiv in der ersten Koordinate. Dasselbe gilt in der zweiten:

Seien  $x, y \in \text{Max } K$ , also  $x = (x_1, \varphi_1(x_1))$  und  $y = (y_1, \varphi_1(y_1))$ .

Ohne Einschränkung gelte  $0 \leq x_1 < y_1 \leq m_1$ . Damit finden wir:

$$\frac{|\varphi_1(\delta_1 y_1) - \varphi_1(\delta_1 x_1)|}{\delta_1 y_1 - \delta_1 x_1} \leq \frac{|\varphi_1(y_1) - \varphi_1(\delta_1 x_1)|}{y_1 - \delta_1 x_1} \leq \frac{|\varphi_1(y_1) - \varphi_1(x_1)|}{y_1 - x_1}$$

Hierbei nutzen wir, dass  $\varphi_1 : [0, m_1] \xrightarrow{\sim} [0, m_2]$  konkav fällt.

Daraus folgt  $|\varphi_1(\delta_1 y_1) - \varphi_1(\delta_1 x_1)| \leq \delta_1 |\varphi_1(y_1) - \varphi_1(x_1)|$ .

(3) Dank (1) haben wir die Inklusionen  $A \subseteq \Phi_2(\delta B)$  und  $B \subseteq \Phi_1(\delta A)$ . Daraus folgt durch Einsetzen  $A \subseteq \Phi_2(\delta \Phi_1(\delta A))$  und  $B \subseteq \Phi_1(\delta \Phi_2(\delta B))$ .

Dank (2) sind dies Kontraktionen, also  $A$  und  $B$  höchstens einpunktig.

Dank L2A und L2B kennen wir PNE-Auszahlungen  $a \in A$  und  $b \in B$ .

Somit ist  $a$  bzw.  $b$  die einzige PNE-Auszahlung von  $\Gamma_i$ . ◻

**Aufgabe:** Beweisen Sie Rubinsteins Satz L2C mit Lemma L2D.

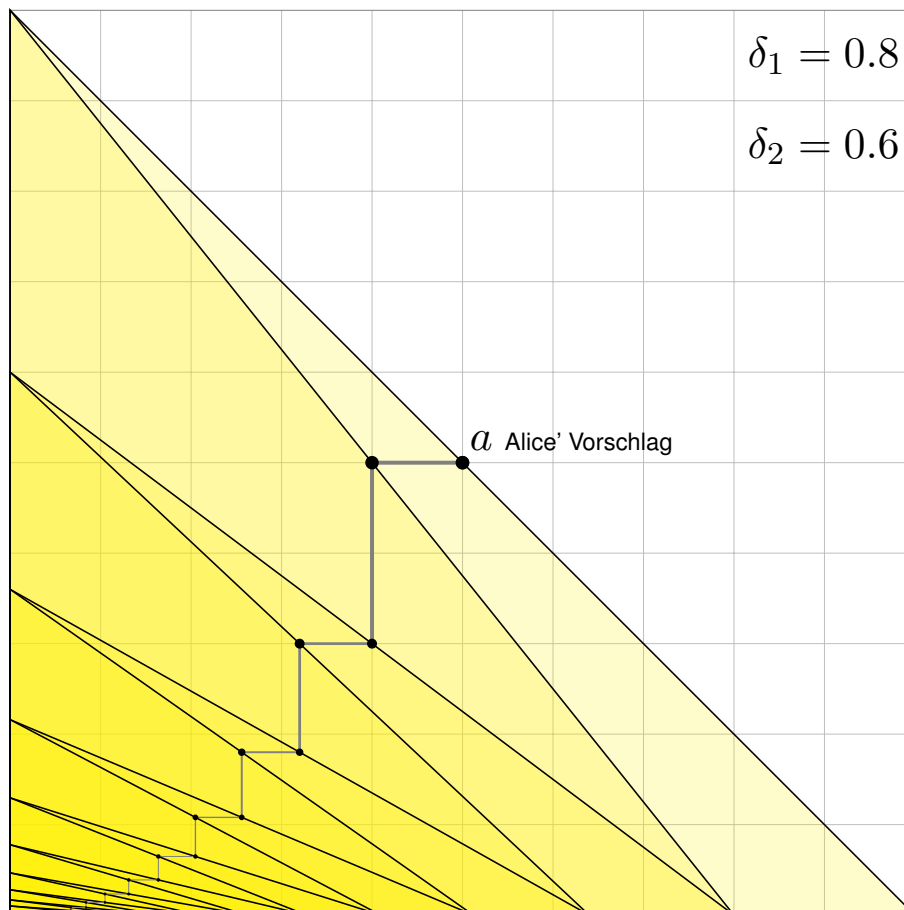
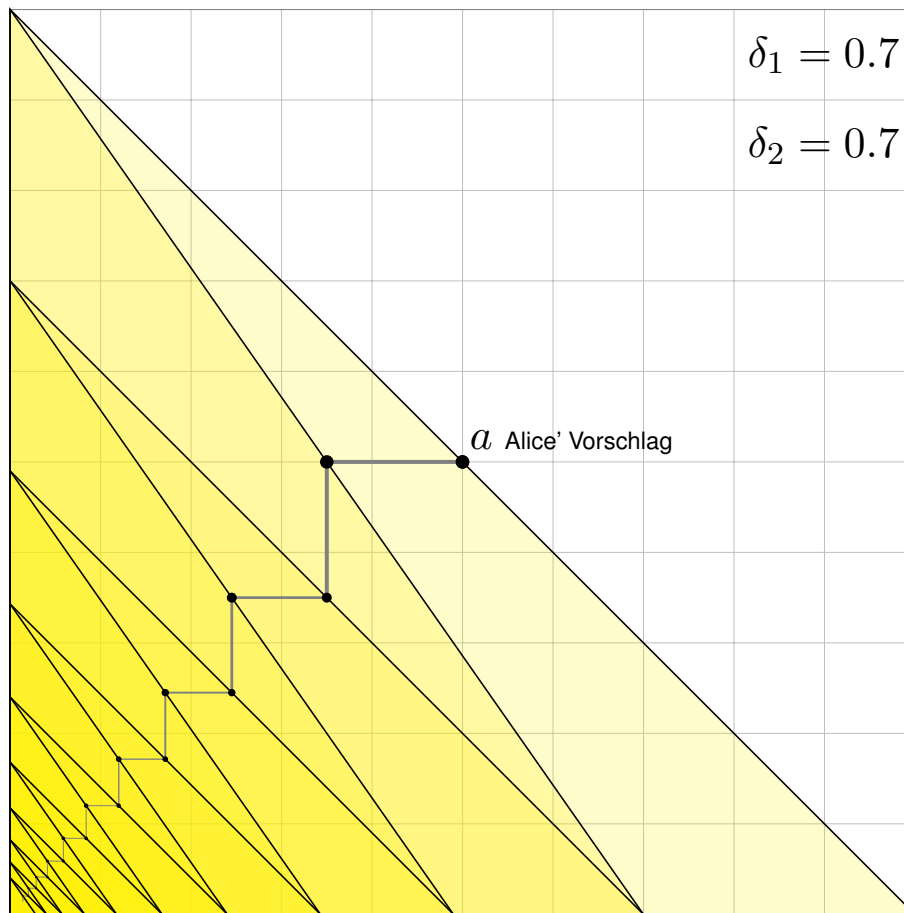
*Zusatz:* Zeigen Sie durch geeignete Variation dieser Konstruktion, dass  $\text{PNE}(\Gamma(K, \delta))$  tatsächlich überabzählbar viele Elemente enthält.

*Hinweis:* Im Indifferenzfall  $x_1 = \delta_1 a_1$  bzw.  $x_2 = \delta_2 b_2$  können wir die Annahmeregeln modifizieren, ohne die Teilspielperfektion zu gefährden. Das ändert lediglich die Mikrostruktur, nicht aber die Auszahlungen.

😊 Sie ahnen jetzt, warum das Rubinstein-Modell berühmt wurde, denn es bietet das volle Programm: ein realistisches allgemeines Modell, einen bemerkenswerten Satz, zudem eine erfolgreiche vollständige Klärung dank raffinierter Mathematik. Herz, was willst du mehr?

Wie zu erwarten, hat das Modell zahlreiche weitere Arbeiten inspiriert.





Sei  $0 \in K \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  konvex und kompakt sowie  $(m_1, 0), (0, m_2) \in \text{Max } K$ .  
 Für  $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in ]0, 1[$  setzen wir  $\delta^n K = \{ (\delta_1^n x_1, \delta_2^n x_2) \mid (x_1, x_2) \in K \}$ .  
 Das definiert die schrumpfenden Kuchen  $K \supset \delta K \supset \delta^2 K \supset \dots \supset \{0\}$ .  
 Satz L2C garantiert uns ein eindeutiges Verhandlungsergebnis!

Allgemein sei  $(K^n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 \supset K^0 \supset K^1 \supset K^2 \supset K^3 \supset \dots \supset \{0\}$ .  
 Dabei verlangen wir  $\bigcap_{n=0}^{\infty} K^n = \{0\}$ : Der Kuchen schrumpft auf Null,  
 etwa  $K^n = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)})K$  mit  $1 = \alpha_i^{(0)} \geq \alpha_i^{(1)} \geq \alpha_i^{(2)} \geq \dots \searrow 0$  in  $]0, 1[$ .  
 Lässt sich der Satz und unser obiger Beweis hierauf übertragen? Nein!

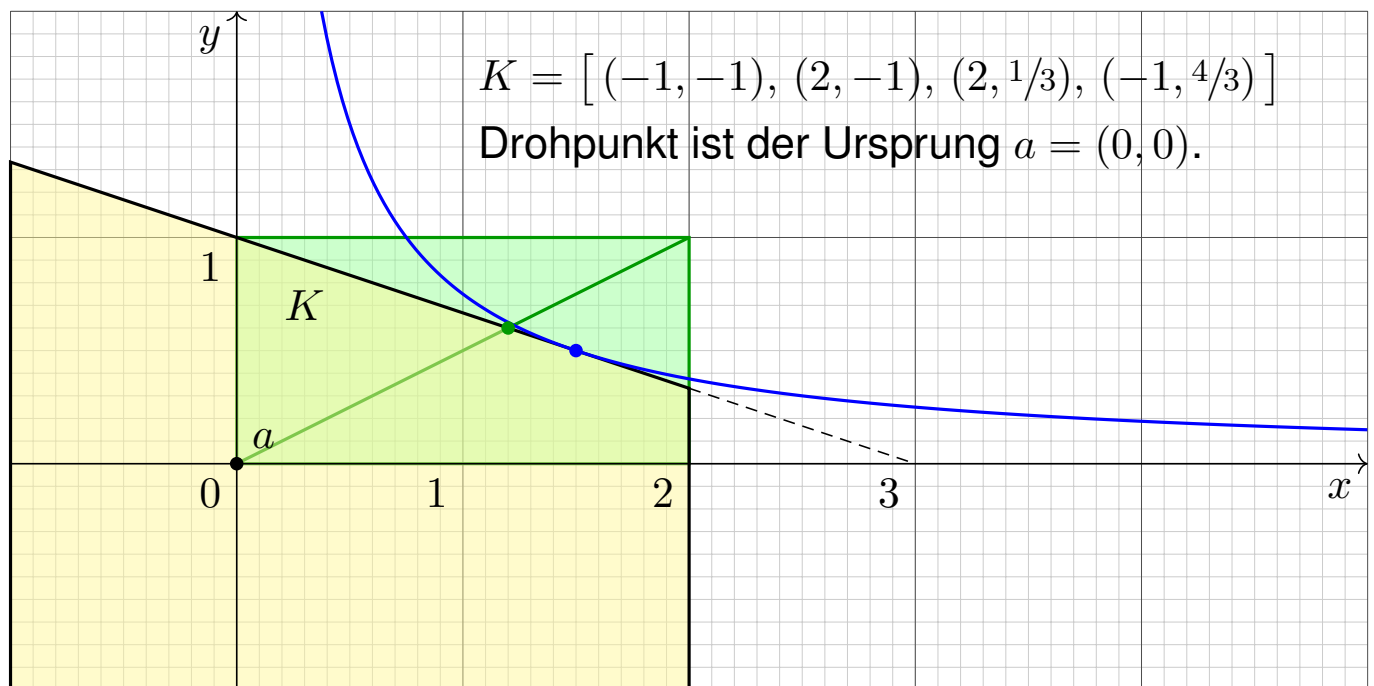
**Aufgabe:** Wir betrachten  $K^{2n} = (\delta_1^n, \delta_2^n)K$  und  $K^{2n+1} = (\delta_1^{n+1}, \delta_2^n)K$ .  
 Zuerst bietet Alice, bei Ablehnung bietet Bob, dann wieder Alice, usw.  
 Dieses modifizierte Verhandlungsmodell verhält sich radikal anders:  
*Jede* Auszahlung  $a \in \text{Max } K$  lässt sich teilspielperfekt realisieren!

- (1) Konstruieren Sie hierzu explizit eine Realisierung  $s \in \text{PNE}(\Gamma)$ .
- (2) Weisen Sie Teilspielperfektion nach. Wie gelingt das am besten?
- (3) Woran scheitert der Eindeutigkeitsbeweis von Lemma L2D?  
 Dieses subtile Gegenbeispiel illustriert den raffinierten Beweis.

**Beweis:** (1) wir setzen  $a^{2n} = (\delta_1^n, \delta_2^n)a$  und  $b^{2n+1} = (\delta_1^{n+1}, \delta_2^n)a$ .  
 Diese Konstruktion ist in den obigen beiden Graphiken illustriert.

- In Runde  $2n$  schlägt Alice  $a^{2n} \in K^{2n}$  vor.  
 Bob akzeptiert  $x \in K^{2n}$  gdw  $x_2 \geq b_2^{2n+1}$ .
  - In Runde  $2n + 1$  schlägt Bob  $b^{2n+1} \in K^{2n+1}$  vor.  
 Alice akzeptiert  $x \in K^{2n+1}$  gdw  $x_1 \geq a_1^{2n+2}$ .
- (2) Dank Stetigkeit nutzen wir das Prinzip der einmaligen Abweichung:
- Alice will  $a^{2n}$  vorschlagen, doch sie erwägt Alternativen  $x \in K^{2n}$ .  
 Im Falle  $x_2 < b_2^{2n+1}$  lehnt Bob ab; Alice erhält dann  $b_1^{2n+1} < a_1^{2n}$ .  
 Für  $x_2 \geq a_2^{2n}$  akzeptiert Bob; wegen  $x_1 \leq a_1^{2n}$  gewinnt Alice nichts.
  - Bob will das Angebot  $a^{2n}$  annehmen, doch er erwägt Ablehnung.  
 Dann bekommt er ebenfalls  $b_2^{2n+1} = a_2^{2n}$ , also keine Verbesserung.
- Dieselben Argumente gelten mit vertauschten Rollen für Bob und Alice.
- (3) Die Abbildung  $\text{Max } K \rightarrow \text{Max } K : x \mapsto \Phi_i(\alpha x)$  ist  $\alpha_i$ -kontraktiv.  
 Hier jedoch gilt  $\alpha_i = 1$ , und schwache Kontraktion genügt nicht!

**Aufgabe:** Wir betrachten das folgende Verhandlungsproblem  $(K, a)$ :



- (1) Berechnen Sie die monotone Verhandlungslösung  $M(K, a)$  und
- (2) die Nash-Verhandlungslösung  $N(K, a)$ . (3) Gibt es ein VProblem  $(L, a) \supset (K, a)$  mit der Eigenschaft  $M(L, a) = N(L, a) = N(K, a)$ ?

(1) Für  $z_i = \max_{pr_i} K_{\geq a}$  finden wir  $(z_1, z_2) = (2, 1)$ , wie in der Skizze. Der Schnittpunkt  $[a, z] \cap \text{Max } K$ , also von den Geraden  $y = x/2$  und  $y = 1 - x/3$ , ist demnach  $M(K, a) = (6/5, 3/5)$ .

In diesem Falle ist die Skizze besonders leicht und übersichtlich, und eine ausreichend genaue Zeichnung ergänzt oder ersetzt die Rechnung. Ich gebe hier deshalb beide Wege an, graphisch und algebraisch.

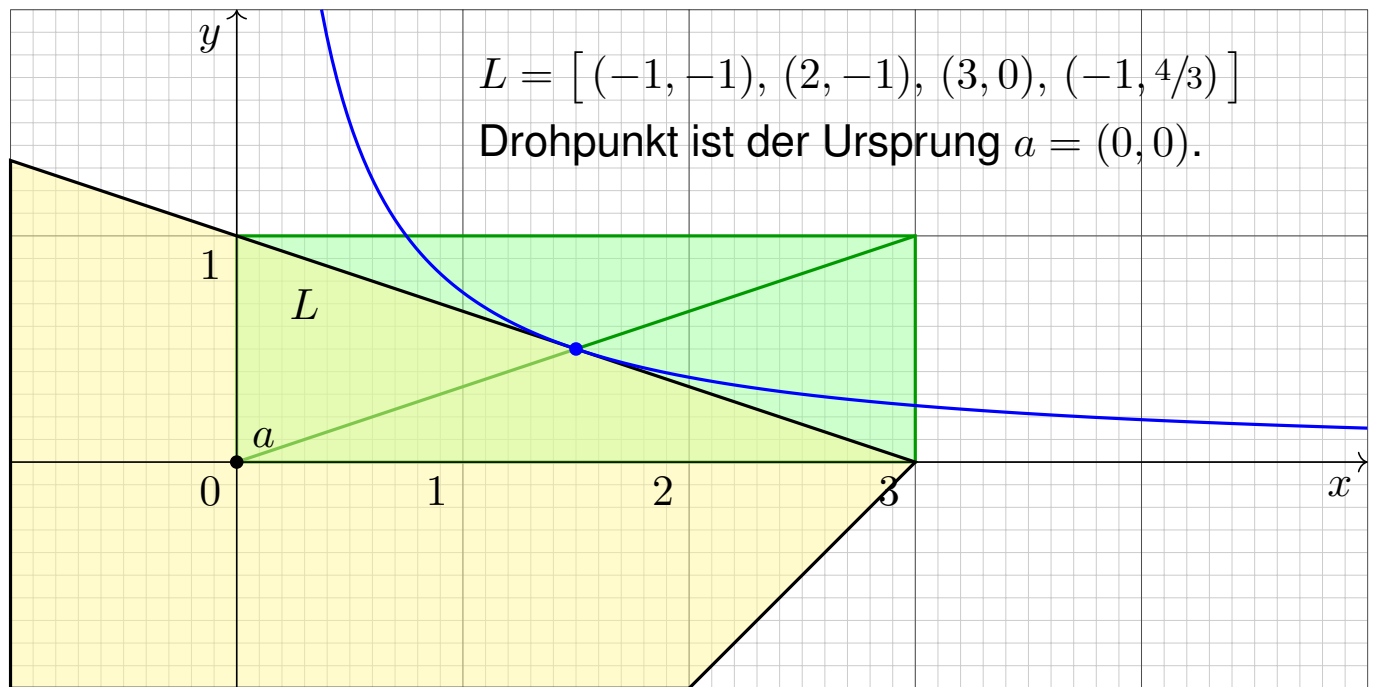
(2) Wir maximieren  $(x, y) \mapsto xy$  entlang der Geraden  $y = 1 - x/3$ . Die Funktion  $h(x) = x(1 - x/3) = x - x^2/3$  hat ihr Maximum in  $x = 3/2$ . Dies ist somit das Maximum von  $h$  auf  $K$ , also  $N(K, a) = (3/2, 1/2)$ .

(3) Ja! Das minimale Beispiel ist  $L = [K, (3, 0)]$ .

😊 Die Nash-Lösung ist invariant unter irrelevanten Alternativen (IIA). Die monotone Lösung  $M(K, a)$  hingegen verschiebt sich zu  $M(L, a)$ . Dies können wir so einrichten, dass  $M(L, a) = N(L, a) = N(K, a)$  gilt.

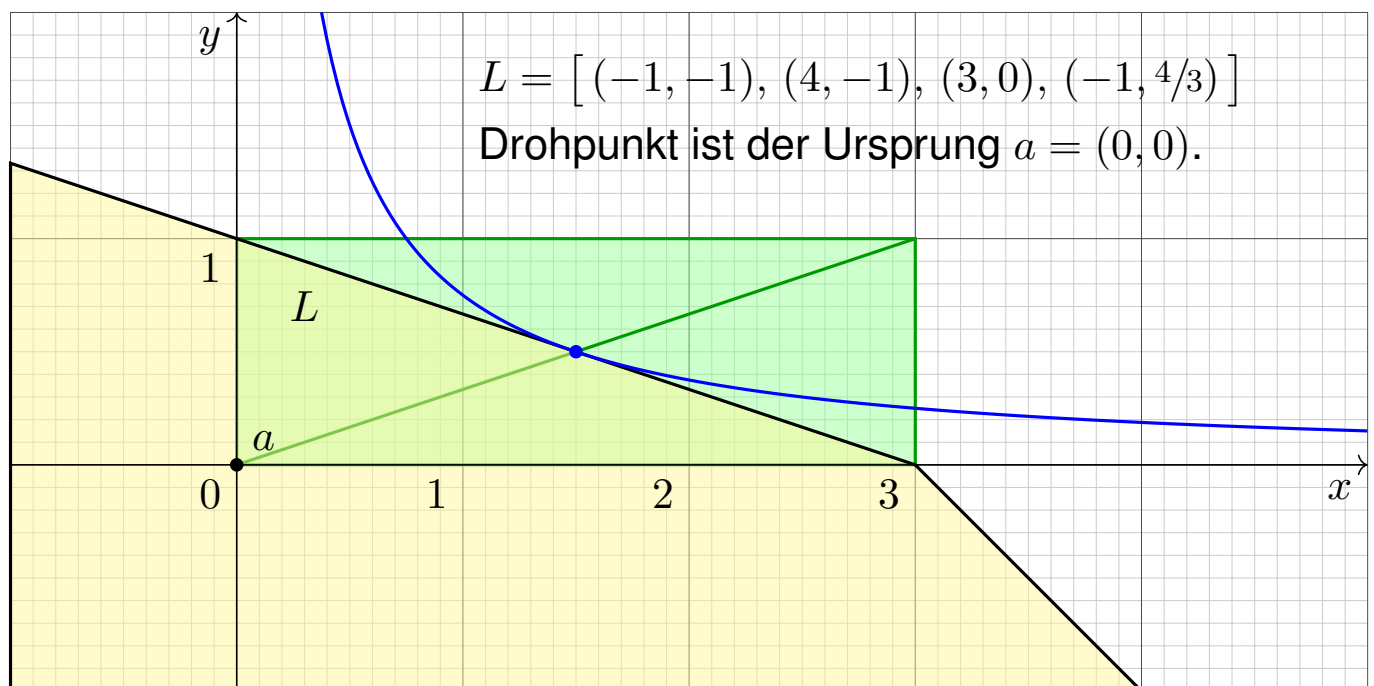
😊 Der für die Lösungen relevante Teil  $L_{\geq a} = [K_{\geq a}, (3, 0)]$  ist hierbei sogar eindeutig, was für eine Klausur durchaus willkommen ist.

Erstes Beispiel eines Verhandlungsproblems  $(L, a) \supset (K, a)$ :



Die Nash–Verhandlungslösung  $N(K, a) = N(L, a)$  bleibt unverändert.  
Die monotone Lösung  $M(K, a)$  verschiebt sich zu  $M(L, a) = N(L, a)$ .  
Wir sehen hier das minimale Beispiel  $(L, a)$  mit diesen Eigenschaften.

Zweites Beispiel eines Verhandlungsproblems  $(L, a) \supset (K, a)$ :



Die Nash–Verhandlungslösung  $N(K, a) = N(L, a)$  bleibt unverändert.  
Die monotone Lösung  $M(K, a)$  verschiebt sich zu  $M(L, a) = N(L, a)$ .  
Das maximale Beispiel  $(L, a)$  ersetzt  $(4, -1)$  durch den Punkt  $(6, -1)$ .