

## Kapitel K

# Wiederholte Spiele und Nashs Folk Theorem

*Mögen die Spiele beginnen —  
und sich unendlich wiederholen!*

## Inhalt dieses Kapitels K

- 1 Un/endlich wiederholte Spiele
  - Iteriertes Gefangenendilemma und *Grim Trigger*
  - Un/endliche Hintereinanderausführung von Spielen
  - Zuckerbrot und Peitsche / *carrot and stick*
  - Eine Hand wäscht die andere. / *Manus manum lavat.*
- 2 Glaubwürdige Absprachen / *self-enforcing agreements*
  - Das Prinzip der Abschreckung / *deterrence*
  - Schuld und Sühne / *crime and punishment*
  - Nash Folk Theorem: quantitative Grundversion
  - Rationale Approximation: wunderschön explizit
- 3 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
  - Un/endliche Hintereinanderausführung

## Motivation und Überblick

Wiederholte Spiele dienen zur Untersuchung langfristiger Interaktion: Spieler beurteilen ihre Aktionen nicht nur nach dem sofortigen Gewinn, sondern auch ihre Auswirkung auf zukünftiges Verhalten der Mitspieler. Dazu müssen sie kurz- gegen langfristige Konsequenzen abwägen.

Das Ziel unserer Untersuchung ist nun, mögliche Verhaltensweisen mathematisch präzise zu beschreiben und spieltheoretisch zu erklären:

- Lohnt sich kurzfristiger Egoismus oder langfristige Kooperation?
- Welche Vereinbarungen sind lukrativ und selbststabilisierend?
- Wie müssen Zurechtweisungen auf Abweichungen reagieren?
- Wann / wie funktioniert Abschreckung durch Strafandrohung?

Viele Strategien sind uns aus dem Alltag intuitiv vertraut und werden hier mathematisch erklärt und quantifiziert. Eine Vereinbarung ist nur dann rational glaubwürdig, wenn sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist.

 G.J. Mailath, L. Samuelson: *Repeated games and reputations – long-run relationships*. Oxford University Press 2006.

## Motivation und Überblick

Wir beginnen mit dem Gefangendilemma als wiederholtes Spiel. Dieses einfache Modell analysieren wir ausführlich und detailliert. Die dabei gemachten Beobachtungen sind recht allgemein gültig und führen uns zu Nashs Folk Theorem: Wir erarbeiten eine vereinfachte, aber quantitativ präzisierte Version aus dieser berühmten Satzfamilie.

Mögliche Anwendungen und Analogien sind überaus vielfältig:

- Langfristige Verträge, etwa Arbeits- oder Kooperationsverträge.
- Teamarbeit, soziale Bindungen, Konventionen und Sanktionen.
- Familiäre Bindungen, etwa Ehe und Kindererziehung.

Der letzte Punkt löst oft Verwunderung und manchmal Ablehnung aus: „Hier geht es um Gefühl, nicht um Kalkül!“ Sind hier Rationalität und mathematische Analyse nicht fehl am Platze? Geht es nicht vielmehr um wahre Liebe, Zuneigung, Verantwortung, Verlässlichkeit, usw.? Ja, auch, und gerade diese Emotionen und Normen sind interessant! Sie sind nicht zufällig, sondern Ergebnis unserer Evolution: biologisch, sozial und individuell. Die Spieltheorie bietet mögliche Erklärungen.

## Wiederholte Spiele

K101

Sprichwörter bündeln Erfahrungen, besonders auch spieltheoretische. Die folgenden wollen wir mathematisch erklären und nachrechnen.

*Fool me once, shame on you!*

*Fool me twice, shame on me!*

[Betrügst du mich einmal, Schande über dich!

Betrügst du mich zweimal, Schande über mich!]

*On peut tromper une fois mille personnes,  
mais on ne peut pas tromper mille fois une personne.*

[Du kannst tausend Personen einmal betrügen,  
aber nicht tausendmal dieselbe Person.]

Bei wiederholter Interaktion besteht die Möglichkeit der Kooperation, aber auch des Betrugs. Zusammenarbeit ist nur dann langfristig stabil, wenn Kooperation ausreichend belohnt, Betrug dagegen bestraft wird. Diese qualitative Erkenntnis wollen wir nun quantitativ ausarbeiten.

## Wiederholte Spiele

K102  
Erläuterung

Diese Weisheit wurde in vielen Varianten formuliert und wiederentdeckt. Bei der gegenwärtigen politischen Entwicklung möchte ich hinzufügen:

*You can fool all the people some of the time  
and some of the people all the time,  
but you cannot fool all the people all the time.*

Diese englische Version wird Abraham Lincoln zugeschrieben, wohl zu Unrecht, siehe [quoteinvestigator.com/2013/12/11/cannot-fool/](http://quoteinvestigator.com/2013/12/11/cannot-fool/). Aus dem Artikel „Dieu“ der *Encyclopédie* von Diderot und d’Alembert, [enccre.academie-sciences.fr/encyclopedia/article/v4-2500-0/](http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedia/article/v4-2500-0/):

*On peut tromper quelques hommes,  
ou les tromper tous dans certains lieux et en certains temps,  
mais non pas tous les hommes dans tous les lieux et dans tous les siècles.*

Diesen Erfahrungen wollen wir nun mathematisch auf den Grund gehen.

## Wiederholte Spiele

K103  
Erläuterung

In vielen Spielen setzt sich der **Egoismus** der Spieler durch. Das ist rational erklärbar durch individuelle Gewinnmaximierung; genau auf dieser Grundannahme beruht die klassische Spieltheorie. Hierzu kennen und nutzen wir Gleichgewichte als Lösungskonzept.

In vielen Situationen spielen die Spieler jedoch nicht nur einmal, sondern wiederholt gegeneinander, idealisiert gar unendlich oft. In solchen Fällen kann sich das Verhalten grundsätzlich ändern: Kooperation wird lukrativ, da jeder auf den anderen angewiesen ist.

Wir können und wollen fragen, wie **Kooperation** überhaupt entsteht. Hierzu dienen die folgenden Beispiele und Übungen: Wir untersuchen hier Kooperation und Betrug, Treue und Verrat unter dem Mikroskop. Das gipfelt in Nashs Folk Theorem als erstem allgemeinen Ergebnis.

Diese Satzfamilie benennt explizit archetypische Strategien, die ein vorgegebenes Verhalten erzeugen, meist ein gewünschtes Verhalten zum allseitigen Vorteil. Dies interpretieren wir oft als „soziale Norm“. Die Struktur und Funktionsweise dieser Normen ist faszinierend.

## Wiederholte Spiele

K104  
Erläuterung

Wichtig für die Zusammenarbeit sind **Hoffnung** und **Gedächtnis**: Alle Spieler benötigen ausreichend Hoffnung, noch lange zu spielen, und genug Gedächtnis, um sich an vergangenes Verhalten zu erinnern, um gegenseitig Kooperation belohnen und Betrug bestrafen zu können.

Diese Möglichkeit besteht zum Beispiel nicht, wenn die Gegenspieler jedesmal neu zugelost werden und ihre Identität nicht erkennbar ist. Dann ist eine zukünftige Kooperation oder Bestrafung unmöglich, und es geht nur noch um den einmaligen sofortigen Vorteil.

Wir untersuchen daher Situationen, in denen eine feste Spielermenge  $I$  mehrere Spiele hintereinander spielt. Die Aktionen der vorherigen Züge sind bekannt, daraufhin wählt jeder Spieler seinen aktuell nächsten Zug. So können die Spieler drohen oder locken, belohnen oder bestrafen.

Die Menge  $PNE(\Gamma)$  aller teilspielperfekten Gleichgewichte ist oft riesig, daher bestehen hier phantastisch viele Möglichkeiten. Das bedeutet andererseits, dass meist keine eindeutige Vorhersage ableitbar ist. Es geht uns vorrangig darum, zu konstruieren, was möglich ist.

Wir iterieren das Spiel  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit diskontierter Auszahlung:

	B	0	1
A			
0	0	0	-1
1	-1	2	1

Zu  $N \in \mathbb{N}$  und  $\delta_1, \delta_2 \in ]0, 1[$  sei die Auszahlung gegeben durch

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^N \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = \frac{1 - \delta_i}{1 - \delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n)$$

- Aufgabe:** (0) Formalisieren Sie dies als Spiel  $\Gamma$  in extensiver Form. Wie würden Sie  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $NE(g) = \{00\}$  parametrisieren? Was erhalten Sie im Grenzfall  $\delta_i \nearrow 1$ ? Was erhalten Sie für  $N \nearrow \infty$ ?
- (1) Für  $N \in \mathbb{N}$ : Finden Sie alle  $s \in PNE(\Gamma)$  und Auszahlungen  $u(s)$ .
- (2) Für  $N = \infty$ : Gibt es ein  $s \in PNE(\Gamma)$  mit Auszahlung  $u(s) = (1, 1)$ ? Genügt es, dass jeder Spieler sich nur an den letzten Zug erinnert? Was passiert, wenn beide Spieler keinerlei Gedächtnis haben? Was passiert, wenn nur ein Spieler sich erinnert?

**Lösung:** (0) Allgemeines Gefangenendilemma, affin normiert:

	B	0	1
A			
0	0	0	$\beta_2$
1	$\beta_1$	$\alpha_2$	1

mit Konstanten  $\alpha_1 > 1 > 0 > \beta_1$   
 $\alpha_2 > 1 > 0 > \beta_2$

im Beispiel  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$   
 $\beta_1 = \beta_2 = -1$

Wir definieren das iterierte Spiel  $\Gamma = (X, u, f)$  extensiv wie folgt: Spielermenge  $I = \{1=Alice, 2=Bob\}$ , Alphabet  $\mathcal{A} = \{00, 01, 10, 11\}$ , Zustände  $X = \mathcal{A}^{\leq N}$ , aktiv  $X^\circ = \mathcal{A}^{< N}$ , Aktionen  $A = A^1 \times A^2 = \{0, 1\}^2$ . Die Fortsetzung ist kanonisch, also  $f: X^\circ \times A \rightarrow X: (x, a) \mapsto x * a$ . Strategiemengen sind demnach  $S^i = \{s^i: X^\circ \rightarrow A^i\}$  für  $i \in I$ . Auszahlung  $u^i: \partial X \rightarrow \mathbb{R}: u^i(x) = \frac{1 - \delta_i}{1 - \delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n)$ . Grenzwerte: Für  $\delta_i \nearrow 1$  wird  $u^i(x)$  zum arithmetischen Mittel  $u^i(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g^i(x_n)$ , für  $N \nearrow \infty$  zur geometrischen Reihe  $u^i(x) = (1 - \delta_i) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_i^n g^i(x_n)$ .

- (1) Wir untersuchen zuerst endliche Wiederholungen, also  $N \in \mathbb{N}$ . Wir suchen alle teilspielperfekten Gleichgewichte  $(s^1, s^2) \in S^1 \times S^2$ . Diese konstruieren wir durch Rückwärtsinduktion (Zermelo J1D): Für  $x \in X_{N-1}$  ist  $(s_x^1, s_x^2) = (0, 0)$  das einzige Gleichgewicht: Für jeden Spieler  $i \in I$  ist die Strategie  $s_x^i = 0$  strikt dominant. Das gilt induktiv für alle  $x \in \mathcal{A}^n$  und  $n = N - 1, N - 2, \dots, 2, 1, 0$ . Das einzige teilspielperfekte Gleichgewicht  $(s^1, s^2) \in S^1 \times S^2$  besteht aus den konstanten Abbildungen  $s^i: X^\circ \rightarrow A^i: x \mapsto 0$ .

😊 Satz K1C erklärt dieses Ergebnis allgemein per Rückwärtsinduktion: Haben die extensiven Spiele  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  keine unendlichen Trajektorien und jeweils nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht,  $PNE(\Gamma_n) = \{s_n\}$ , so auch ihre Verkettung, denn  $PNE(\Gamma_1 * \dots * \Gamma_N) = \{s_1 * \dots * s_N\}$ .

⚠️ Für unendliche Wiederholungen gilt dieses Argument nicht! Tatsächlich finden wir hier eine Vielzahl neuer Gleichgewichte. Hierzu ist die folgende Konstruktion (2) ein erster Schritt. Wir nutzen das Prinzip J2D der einmaligen Abweichung.

- (2) Wir betrachten die **Grim-Trigger-Strategie**  $s^i: X^\circ \rightarrow A^i$  für  $i \in I$ : Beide Spieler kooperieren solange keiner abweicht, danach nie mehr.

$$s^i: \begin{cases} \emptyset \mapsto 1 \\ v * 00 \mapsto 0 \\ v * 01 \mapsto 0 \\ v * 10 \mapsto 0 \\ v * 11 \mapsto 1 \end{cases} = \begin{cases} x \mapsto 1 & \text{für } x \in X_0 = \{\emptyset\}, \\ x \mapsto x_{n-1}^1 \cdot x_{n-1}^2 & \text{für } x \in X_n, n > 0. \end{cases}$$

- (2a) Ab Zustand  $x \in v * \{00, 01, 10\}$  ist der Verlauf  $00 00 00 \dots$ . Keiner der beiden Spieler kann sich aus eigener Kraft verbessern.
- (2b) Ab  $x = v * 11$  ist der Verlauf  $11 11 11 \dots$ . Weicht Spieler  $i$  ab, so erhöht er seine Auszahlung auf  $\alpha_i > 1$ , danach sinkt sie auf  $0 < 1$ . Ausführlich: Sei  $\tilde{s}^i \in S^i$  eine Strategie mit  $\tilde{s}_x^i = 0$  statt  $s_x^i = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) - u_x^i(s^i; s^{-i}) &\leq (1 - \delta_i) [\delta_i^n \alpha_i - \sum_{k=n}^{\infty} \delta_i^k 1] \\ &= \delta_i^n [(1 - \delta_i) \alpha_i - 1]. \end{aligned}$$

Das ist negativ für  $\delta_i > 1 - 1/\alpha_i$ . Hier lohnt sich Kooperation!

Satz K1A: iteriertes Gefangenendilemma und Grim Trigger

Wir iterieren das Gefangenendilemma  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , gegeben durch

	B	0	1
A			
0	0	0	$\beta_2$
1	$\beta_1$	$\alpha_2$	1

mit Konstanten  $\alpha_i > 1 > 0 > \beta_i$ ,  
und diskontierten Auszahlungen

$$u: \{00, 01, 10, 11\}^N \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = \frac{1 - \delta_i}{1 - \delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n).$$

(1) Im endlichen Fall  $N < \infty$  gibt es nur ein einziges Gleichgewicht  $(s^1, s^2) \in \text{PNE}(\Gamma)$ , und dieses führt zur Auszahlung  $u(s^1, s^2) = (0, 0)$ .

(2) Für  $N = \infty$  und  $\delta_i \geq 1 - 1/\alpha_i$  ist zudem die Grim-Trigger-Strategie ein Gleichgewicht  $(s^1, s^2) \in \text{PNE}(\Gamma)$  mit Auszahlung  $u(s^1, s^2) = (1, 1)$ .

Die Spieler kooperieren in (1) nie, aber in (2) im gesamten Spielverlauf.

Zusatz: Fall (2) bleibt gültig, solange sich beide Spieler mindestens an die jeweils letzte Runde erinnern können, andernfalls gilt Fall (1).

In (2) wiederholen wir unendlich oft; sehr lange wie in (1) genügt nicht! Unser Modell ist wie immer beschämend simpel, aber es illustriert wohl das Prinzip. Es zeigt insbesondere ein Phänomen, das Sie aus Ihrer Alltagserfahrung vermutlich kennen: Kooperation braucht Geduld!

Die Diskontierung mit  $\delta_i$  können wir auf drei Arten interpretieren:

- 1 Intersubjektive Inflation:** Geld morgen ist weniger wert als heute. Wertverlust in Form des Faktors  $\delta \in ]0, 1[$  ist intersubjektiv, für alle Spieler gleich. Der vermutete Wert  $\delta_i$  kann jedoch individuell sein.
- 2 Individuelle Un/Geduld:** Warten verringert den Nutzen, auch hier ist Geld morgen weniger wert als Geld heute, diesmal aber für jeden Spieler  $i \in I$  individuell diskontiert durch den Faktor  $\delta_i \in ]0, 1[$ .
- 3 Abbruchwahrscheinlichkeit:** Zu Recht wenden Sie ein, dass unendliche Wiederholung unrealistisch ist. Viel realistischer sind dagegen wiederholte Spiele mit einer gewissen Abbruchwkt  $\varepsilon > 0$ . Das führt zu derselben geometrischen Summe mit Fortsetzungswkt  $\delta = 1 - \varepsilon$ . Auch hier kann der vermutete Wert  $\delta_i$  individuell sein.

Anschaulich besagt (2): Kooperation lohnt sich! Zwar kann jeder Spieler seinen Gegenspieler jederzeit betrügen, aber das gelingt ihm nur einmal. *Fool me once, shame on you! Fool me twice, shame on me!*

Der kurzfristige Gewinn, den der Betrüger davon trägt, wird sofort und dauerhaft bestraft. Insgesamt lohnt sich der Betrug nicht; hierzu muss nur die Geduld  $\delta_i$  groß genug sein, nämlich  $\delta_i \leq 1 - 1/\alpha_i$ . Andernfalls, für  $\delta_i < 1 - 1/\alpha_i$ , obsiegt der kurzfristige Vorteil, kurz gesagt: die Gier.

Der Vorteil eines präzisen Modells ist: Wir können jetzt alles ausrechnen! Insbesondere können wir die Parameter  $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$  untersuchen und so den kritischen Wert  $\delta_i = 1 - 1/\alpha_i$  finden. Das ist anschaulich plausibel:

Für  $\delta_i \nearrow 1$  sind jetzige und zukünftige Spiele nahezu gleichgewichtet. Der Spieler ist geduldig, daher lohnt sich die langfristige Kooperation.

Für  $\delta_i \searrow 0$  sind zukünftige Spiele nahezu wertlos. Der Spieler ist ungeduldig, daher lohnt sich die kurzfristige Gewinnmitnahme.

Was passiert, wenn ein Spieler geduldig ist und der andere ungeduldig? Die Rechnung gibt Auskunft: Das Gleichgewicht kommt nicht zustande.

**Aufgabe:** Formalisieren Sie das Modell eines wiederholten Spiels mit einer (konstanten) Abbruchwkt  $\varepsilon > 0$  nach jeder Runde. Erklären Sie die Formel  $u(x) = (1 - \delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$  für die erwartete Auszahlung.

**Skizze:** Spielbäume explizit auszuschreiben ist länglich, aber lehrreich. Versuchen Sie es! Die Wkt, in die  $n$ -te Runde zu gelangen, ist  $(1 - \delta)\delta^n$ . Die erwartete Auszahlung ist daher genau die obige Diskontierung.

Eine ausführliche Diskussion wiederholter Spiele finden Sie in M.J. Osborne, A. Rubinstein: *A Course in Game Theory*, Kapitel 8 „Repeated Games“. Dort werden neben der diskontierten Auszahlung weitere Bewertungen der Spielverläufe  $x, y \in \partial X = \mathcal{A}^\infty$  diskutiert, etwa

$$\text{Summen: } x \succ y \iff \liminf \sum_{n=0}^{N-1} [g(x_n) - g(y_n)] > 0,$$

$$\text{Mittelwerte: } x \succ y \iff \liminf \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [g(x_n) - g(y_n)] > 0.$$

Diese Kriterien sind ebenso natürlich, manchmal sogar einfacher. Die Verwendung von  $\liminf$  bzw.  $\limsup$  statt des Grenzwertes  $\lim$  ist nötig, da der erhoffte Grenzwert  $\lim$  im Allgemeinen nicht existiert.

**Definition K1B: Verkettung von Spielen und Strategien**

(0) Sei  $\Gamma = (X, u, f, \mathbf{P})$  ein extensives Spiel. Für jeden Spieler  $i \in I$  definieren wir die **Norm** als Supremum  $|\Gamma|^i := \sup_{x \in \partial X} |u^i(x)| \in [0, \infty]$ . Zu  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^I$  definieren wir die **Skalierung**  $\alpha\Gamma + \beta := (X, \alpha u + \beta, f, \mathbf{P})$ .

(1) Zu extensiven Spielen  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  sei  $\Gamma = \prod_{n=1}^N \Gamma_n = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_N$  ihre **Hintereinanderausführung** mit Auszahlung  $u = u_1 + \dots + u_N$ .

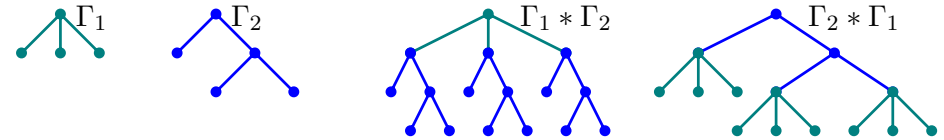
(2) Zu jeder Folge  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  extensiver Spiele mit  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Gamma_n|^i < \infty$  für jeden Spieler  $i \in I$  definieren wir ebenso ihre Hintereinanderausführung

$$\Gamma = \prod_{n=0}^{\infty} \Gamma_n = \Gamma_0 * \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots$$

Diskontiert erhalten wir  $\Gamma_\delta = (1 - \delta) \prod_{n=0}^{\infty} \delta^n \Gamma_n$  falls  $\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n |\Gamma_n|^i < \infty$ .

(3) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $S_n$  die Strategiemenge zu  $\Gamma_n$ , ebenso  $S$  zu  $\Gamma$ . Die Verkettung  $\prod_{n=0}^{\infty} S_n \rightarrow S : (s_0, s_1, s_2, \dots) \mapsto s_0 * s_1 * s_2 * \dots$  von Strategien betrachtet jeweils ohne Erinnerung nur das aktuelle Spiel.

**Aufgabe:** Schreiben Sie alle Daten von  $\Gamma$  und  $S$  möglichst explizit aus.



**Skizze:** Wir setzen alle Spiele über derselben Spielermenge  $I$  voraus. Es genügt, gleich Folgen  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  extensiver Spiele zu diskutieren. Jedes Spiel  $\Gamma_n$  starte mit dem leeren Wort  $\emptyset$  als Wurzel. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[ \prod_{m < n} \partial X_{m, < \infty} \right] * X_n \\ &= X_0 \cup \partial X_{0, < \infty} * X_1 \cup \partial X_{0, < \infty} * \partial X_{1, < \infty} * X_2 \cup \dots \end{aligned}$$

Hierbei besteht  $\partial X_{m, < \infty}$  aus den endlichen maximalen Trajektorien. An unendliche Trajektorien können / wollen wir nichts weiter anfügen. Anders gesagt, an jedes Blatt von  $X_0$  heften wir eine Kopie von  $X_1$ . An jedes Blatt dieses neuen Baumes heften wir eine Kopie von  $X_2$  usw. Es ist dann klar, wie wir die Daten der einzelnen Spiele  $\Gamma_n$  lokal auf diesen neuen Baum  $X$  übertragen. Dies definiert das Spiel  $\Gamma$ .

**Satz K1C: Gleichgewichte bei Hintereinanderausführung**

(1) Für extensive Spiele  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  ohne unendliche Trajektorien gilt

$$\text{PNE}(\Gamma_0 * \Gamma_1 * \dots * \Gamma_N) \supseteq \text{PNE}(\Gamma_0) * \text{PNE}(\Gamma_1) * \dots * \text{PNE}(\Gamma_N).$$

(a) Haben  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  jeweils nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht, so gilt Gleichheit. (b) Andernfalls kann die Inklusion „ $\supseteq$ “ strikt sein.

(2) Für extensive Spiele  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots$  ohne unendliche Trajektorien gilt

$$\text{PNE}(\Gamma_0 * \Gamma_1 * \dots) \supseteq \text{PNE}(\Gamma_0) * \text{PNE}(\Gamma_1) * \dots$$

(a) Selbst wenn jedes Spiel  $\Gamma_n$  nur ein einziges teilspielperfektes Gleichgewicht hat, so kann dennoch die Inklusion „ $\supseteq$ “ strikt sein (K1A).

⚠ Dieser Satz ist nur ein erster Schritt und noch nicht ausschöpfend. Die Menge  $\text{PNE}(\Gamma)$  aller teilspielperfekten Gleichgewichte ist oft riesig!

**Aufgabe:** Beweisen Sie diesen Satz (1) durch Rückwärtsinduktion J1D und entsprechend (2) mit dem Prinzip J2D der einmaligen Abweichung.

**Skizze:** (1) Für  $s_1 \in \text{PNE}(\Gamma_1), s_2 \in \text{PNE}(\Gamma_2)$  gilt  $s_1 * s_2 \in \text{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2)$ : Auf jeder Kopie  $x * \Gamma_2$  von  $\Gamma_2$  nutzen wir denselben Strategievektor  $s_2$ . Jeder Randpunkt  $x \in \partial X_1$  ist ein Blatt, die Auszahlung ist  $u_1(x) + u_2(s_2)$ . Auf ganz  $\Gamma_1$  erhalten wir die additive Konstante  $\beta = u_2(s_2)$ . Somit führt der Strategievektor  $s_1$  auf  $\Gamma_1$  zu einem Gleichgewicht des Spiels  $\Gamma$ .

(1a) Sei  $s \in \text{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2)$ . Auf jeder Kopie  $x * \Gamma_2$  von  $\Gamma_2$  ist  $s$  ein Gleichgewicht, dank der Eindeutigkeit  $\text{PNE}(\Gamma_2) = \{s_2\}$  ist dies  $s_2$ . Jeder Randpunkt  $x \in \partial X_1$  ist ein Blatt, die Auszahlung ist  $u_1(x) + u_2(s_2)$ . Somit ist  $s$  auf  $\Gamma_1$  ein Gleichgewicht des Spiels  $\Gamma_1 + \text{const} \cong \Gamma_1$ . Demnach gilt  $s = s_1 * s_2$  für ein  $s_1 \in \text{PNE}(\Gamma_1)$ . Damit erhalten wir  $\text{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \{s_1 * s_2 \mid s_1 \in \text{PNE}(\Gamma_1)\} = \text{PNE}(\Gamma_1) * \text{PNE}(\Gamma_2)$ .

(1b) Gegenbeispiele hierzu finden Sie in den Übungen. [K306](#)

(2) Der allgemeine Fall folgt demselben Argument wie Teil (1), diesmal allerdings mit dem Prinzip J2D der einmaligen Abweichung.

(2a) Das Gefangenendilemma K1A ist ein frappierendes Gegenbeispiel. Weitere Gegenbeispiele hierzu finden Sie in den Übungen. [K313](#)

Wir iterieren das folgende Spiel  $g : \{0, 1, 2\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

	B	0	1	2
A				
0	2	2	1	0
1	1	1	1	-1
2	0	0	-1	-1

mit diskontierter Auszahlung

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$u(x) = (1 - \delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n).$$

**Aufgabe:** (0) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte des Spiels  $g$ . Welche teilspielperfekten Gleichgewichte gewinnen Sie daraus für  $\Gamma$ ?

(1) Konstruieren und beweisen Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht, bei dem dauerhaft nur (1, 1) gespielt wird. Warum ist das erstaunlich?

Die folgende Strategie dürfte Ihnen aus Alltagssituationen bekannt sein: Auf Englisch heißt sie *carrot and stick*, Französisch *carotte et bâton*, Luther schrieb *Apfel und Rute*, heutzutage *Zuckerbrot und Peitsche*.

**Lösung:** (0) Das Paar (0, 0) ist das einzige Nash-Gleichgewicht von  $g$ , denn sowohl für Alice als auch für Bob ist die Aktion 0 strikt dominant. Dies liefert das offensichtliche teilspielperfekte Gleichgewicht in PNE( $\Gamma$ ).

(1) Wir betrachten das Strategiepaar  $s = (s^1, s^2)$  gegeben durch

$$s : X^\circ \rightarrow \{0, 1, 2\}^2 : \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \mapsto 11 \\ v * 11 \mapsto 11 \\ v * 22 \mapsto 11 \\ \text{sonstige} \mapsto 22 \end{array} \right\}.$$

(1a) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k (1, 1) = (1, 1)$$

$$\underline{a}1 \ 22 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \dots \mapsto (1 - \delta)[g(a, 1) + \delta g(2, 2) + \delta^2 / (1 - \delta)]$$

$$1\underline{a} \ 22 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \dots \mapsto (1 - \delta)[g(1, a) + \delta g(2, 2) + \delta^2 / (1 - \delta)]$$

Ein Abweichler erhält bestenfalls  $2 - 3\delta + 2\delta^2$ . Dies muss  $\leq 1$  bleiben. Für  $\delta \in [\frac{1}{2}, 1[$  ist dies gewährleistet: Abweichung lohnt sich somit nicht.

(1b) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$22 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \dots \mapsto (1 - \delta)[(-1, -1) + \delta / (1 - \delta)]$$

$$\underline{a}2 \ 22 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \dots \mapsto (1 - \delta)[g(a, 2) + \delta g(2, 2) + \delta^2 / (1 - \delta)]$$

$$2\underline{a} \ 22 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \dots \mapsto (1 - \delta)[g(2, a) + \delta g(2, 2) + \delta^2 / (1 - \delta)]$$

Der Konformist erhält  $2\delta - 1$ , ein Abweichler bestenfalls  $2\delta^2 - \delta$ . Für alle  $\delta \in [\frac{1}{2}, 1[$  gilt somit: Abweichung lohnt sich hier nicht.

😊 Beachten Sie, wie wunderbar einfach uns die Rechnung gelingt dank des Prinzips der einmaligen Abweichung: Es reduziert und strukturiert! Es genügt, für jede einzelne Abweichung die Ungleichung aufzustellen. Die Lösung ist dann nur noch eine Frage der sorgfältigen Buchführung.

😊 Zusammenfassung gemeinsamer Verläufe ist bequem und effizient: Wir betrachten jeweils, was aktuell gespielt werden müsste: 11 oder 22. Nach dem Prinzip der einmaligen Abweichung J2D müssen wir nur eine einzige Abweichung berechnen und vergleichen. Das ist erfreulich leicht!

😊 Das Nash-Gleichgewicht ergibt die Auszahlung  $g(0, 0) = (2, 2)$ . Das etwas raffiniertere Gleichgewicht  $s$  liefert hingegen nur (1, 1). Wir haben damit insbesondere ein schönes Beispiel, wo das neue Gleichgewicht im wiederholten Spiel eine Verschlechterung bedeutet.

Das ist bemerkenswert: Im Stufenspiel  $g$  ist die Aktion 0 strikt dominant, nichtsdestotrotz wird diese Aktion im unendlich iterierten Spiel  $\Gamma$  durch das auszahlungsniedrigere Gleichgewicht  $s$  verhindert. Erstaunlich... aber wahr: Wir können die Gleichgewichtsbedingungen nachrechnen!

Das Strategiepaar  $s$  nutzt **Zuckerbrot und Peitsche** / carrot and stick: Es droht mit der Peitsche 2 zur Bestrafung, falls ein Spieler abweicht, aber verspricht zugleich das Zuckerbrot 1 als anschließende Belohnung, falls alle die Bestrafung wie gefordert ausführen. Das ist recht trickreich.

😊 In Nashs Folk Theorem K2E nutzen wir ein Gleichgewicht  $z \in \text{NE}(\bar{g})$  und seine Auszahlung  $g(z) \in \mathbb{R}^I$  als Drohpunkt. Das hier vorliegende Beispiel zeigt, dass wir den Drohpunkt weiter absenken können. Dieser Trick wird allgemein in Satz K2F verwendet.

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel  $g : \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

	B	0	1
A			
0	0	$\alpha_1$	$\beta_2$
1	$\beta_1$	$\alpha_2$	1

mit Konstanten  $\alpha_i > 1 > \delta_i > 0 > \beta_i$  und der diskontierten Auszahlung

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = (1 - \delta_i) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_i^n g^i(x_n)$$

**Aufgabe:** Es gelte  $\alpha_i + \beta_i > 2$ , zum Beispiel  $\alpha_i = 5$  und  $\beta_i = -1$ .

Die Strategie, niemals zu kooperieren, erreicht die Auszahlung (0, 0).

Die raffiniertere Grim-Trigger-Strategie erreicht die Auszahlung (1, 1).

Gibt es Gleichgewichte  $(s^1, s^2) \in \text{PNE}(\Gamma)$  mit höherer Auszahlung?

Sie spüren hier ganz konkret die beiden Schwierigkeiten: Wie erfinden wir aussichtsreiche Kandidaten? Wie prüfen wir danach, ob ein Kandidat ein Gleichgewicht ist? Im endlichen Fall hilft Rückwärtsinduktion (J1D), hier jedoch nicht! Das macht die Konstruktion knifflig... und spannend. Die Prüfung gelingt mit dem Prinzip J2D der einmaligen Abweichung.

Auch diese spieltheoretische Situation gibt es als Gleichnis bzw. als Märchen in vielen Variationen. Hier ist meine Fassung, universell / interreligiös zumindest für monotheistische Religionen:

*Ein Suchender wünschte sich, Himmel und Hölle kennen zu lernen. Gott gewährte ihm diesen Wunsch und zeigte ihm zunächst die Hölle.*

*Die Menschen saßen an einem langen Tisch, vor sich dampfende Suppenschüsseln, doch jeder hatte einen meterlangen Löffel an sein Handgelenk gekettet, so dass es ihm unmöglich war, sich den Löffel zum Munde zu führen. So verschütteten sie die Suppe, stießen die Schüsseln um, es herrschte entsetzliches Chaos, und sie mussten schließlich sogar hungern.*

*Anschließend zeigte Gott dem Suchenden den Himmel.*

*Auch dort saßen die Menschen an einem langen Tisch, ebenso mit dampfenden Suppenschüsseln und den gleichen meterlangen Löffeln.*

*Doch statt das Unmögliche zu versuchen, speisten sie sich gegenseitig.*

*So wurden sie alle satt, und es herrschte Harmonie und Frieden.*

*Das also war der Unterschied zwischen Himmel und Hölle.*

Stellen wir uns vor, beide Spieler verabreden ein Strategiepaar  $(s^1, s^2)$ . Damit diese Verabredung stabil ist, sollte sie ein Gleichgewicht sein! Wie können die Spieler die ersehnte himmlische Harmonie erreichen?

*L'enfer, c'est les autres.*

[Die Hölle, das sind die anderen.]

Jean-Paul Sartre (1905-1980), *Huis Clos*

Kurzes Nachdenken macht anschaulich klar, was sie versuchen können: Die Spieler können sich abwechseln, um im Mittel davon zu profitieren.

Mit dieser Idee beginnt die interessante mathematische Ausarbeitung:

Wir benötigen zuerst eine explizite Beschreibung des Strategiepaars.

Es genügt nicht, grob zu verabreden „Die Spieler wechseln sich ab“;

eine Strategie muss definieren, wie in jedem Zustand zu handeln ist!

Auch die Sanktionen bei Abweichungen müssen festgelegt werden.

Die Verabredung muss also vollständig, präzise, narrensicher sein.

Anschließend können wir prüfen, ob ein Gleichgewicht vorliegt.

Das bedeutet wie immer, kein Spieler hat einen Vorteil davon,

von seiner Strategie abzuweichen, egal in welchem Zustand.

**Aufgabe:** Untersuchen Sie folgende Strategiepaare  $s^1, s^2 : X^\circ \rightarrow \{0, 1\}$ . Für welche Parameter  $\alpha_i > 1 > \delta_i > 0 > \beta_i$  sind dies Gleichgewichte?

$$\begin{array}{l}
 (0) \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \mapsto 01 \\ v * 00 \mapsto 00 \\ v * 01 \mapsto 10 \\ v * 10 \mapsto 01 \\ v * 11 \mapsto 11 \end{array} \right\} \quad
 (2) \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \mapsto 01 \\ v * 01 \mapsto 01 \\ v * 10 \mapsto 10 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array} \right\} \quad
 (3) \left\{ \begin{array}{l} (01 10)^n \mapsto 01 \\ (01 10)^n 01 \mapsto 10 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array} \right\} \\
 (1) \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \mapsto 01 \\ v * 00 \mapsto 00 \\ v * 01 \mapsto 10 \\ v * 10 \mapsto 01 \\ v * 11 \mapsto 00 \end{array} \right\} \quad
 (2') \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \mapsto 10 \\ v * 10 \mapsto 10 \\ v * 01 \mapsto 01 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array} \right\} \quad
 (3') \left\{ \begin{array}{l} (10 01)^n \mapsto 10 \\ (10 01)^n 10 \mapsto 01 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Das Strategiepaar (3) bzw. (3') nennen wir *Eine Hand wäscht die andere*, *Manus manum lavat* oder *If you scratch my back, then I'll scratch yours*. Die Symmetrie zwischen den Spielern muss hierzu gebrochen werden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie!

**Lösung:** Wir nutzen hier das Prinzip J2D der einmaligen Abweichung!  
Die Voraussetzung ist erfüllt, beide Auszahlungen  $u^i$  sind stetig (J2H).

(0) Diese Strategie heißt traditionell *Tit for tat*, also *Wie du mir so ich dir*.  
Nur für den Start wird die Symmetrie gebrochen, etwa durch Münzwurf.

(0a) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{2k} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha) \\ = \frac{1}{1 + \delta} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha)$$

$$\underline{1}1\ 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (1, 1) = (1, 1)$$

$$0\underline{0}\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (0, 0) = (0, 0)$$

Hieraus folgen die Bedingungen  $\alpha + \delta\beta \geq 1 + \delta$  und  $\beta + \delta\alpha \geq 0$ .

(0b) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab  $x = v * 00$ :

$$\dots 00\ | 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \dots \mapsto (0, 0)$$

$$\dots 00\ | \underline{1}0\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ \dots \mapsto \frac{\delta^n}{1 + \delta} (\beta + \delta\alpha, \alpha + \delta\beta)$$

$$\dots 00\ | 0\underline{1}\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ \dots \mapsto \frac{\delta^n}{1 + \delta} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha)$$

Hieraus folgt zweimal die Bedingung  $0 \geq \beta + \delta\alpha$ , mit (0a) Gleichheit.

(0c) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab  $x = v * 11$ :

$$\dots 11\ | 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ \dots \mapsto \delta^n (1, 1)$$

$$\dots 11\ | \underline{0}1\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ \dots \mapsto \frac{\delta^n}{1 + \delta} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha)$$

$$\dots 11\ | 1\underline{0}\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ \dots \mapsto \frac{\delta^n}{1 + \delta} (\beta + \delta\alpha, \alpha + \delta\beta)$$

Hieraus folgt zweimal die Bedingung  $1 + \delta \geq \alpha + \delta\beta$ , mit (0a) Gleichheit.

(0d) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab  $x = v * 01$ :

$$\dots 01\ | 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ \dots \mapsto \frac{\delta^n}{1 + \delta} (\beta + \delta\alpha, \alpha + \delta\beta)$$

$$\dots 01\ | \underline{0}0\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \dots \mapsto (0, 0)$$

$$\dots 01\ | 1\underline{1}\ 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ 11\ \dots \mapsto \delta^n (1, 1)$$

Hieraus folgen die Bedingungen  $\beta + \delta\alpha \geq 0$  und  $\alpha + \delta\beta \geq 1 + \delta$ , wie (0a).

(0e) Für jedes Teilspiel ab  $x = v * 10$  finden wir dasselbe, siehe (0a).

Aus  $\beta + \delta\alpha = 0$  und  $\alpha + \delta\beta = 1 + \delta$  folgt  $\delta = -\beta/\alpha$  und  $\alpha + \beta = 1$ .

Dies ist auch hinreichend: Wir kehren alles um und nutzen Satz J2D.

☹ Diese Bedingung ist leider eine extrem starke Einschränkung.

(1) Wir modifizieren die Strategie (0) von  $11 \mapsto 11$  zu  $11 \mapsto 00$ .

(1a) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{2k} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha) \\ = \frac{1}{1 + \delta} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha)$$

$$\underline{1}1\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \dots \mapsto (1 - \delta)(1, 1)$$

$$0\underline{0}\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \dots \mapsto (1 - \delta)(0, 0)$$

Hieraus folgen die Bedingungen  $\alpha + \delta\beta \geq 1 - \delta^2$  und  $\beta + \delta\alpha \geq 0$ .

(1b) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab  $x = v * aa$ :

$$\dots aa\ | 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \dots \mapsto (0, 0)$$

$$\dots aa\ | \underline{1}0\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ \dots \mapsto \frac{\delta^n}{1 + \delta} (\beta + \delta\alpha, \alpha + \delta\beta)$$

$$\dots aa\ | 0\underline{1}\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ \dots \mapsto \frac{\delta^n}{1 + \delta} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha)$$

Hieraus folgt zweimal die Bedingung  $0 \geq \beta + \delta\alpha$ , somit Gleichheit.

☺ Zusammenfassung gemeinsamer Verläufe ist bequem und effizient.

(1c) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab  $x = v * 01$ :

$$\dots 01\ | 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ \dots \mapsto \frac{\delta^n}{1 + \delta} (\beta + \delta\alpha, \alpha + \delta\beta)$$

$$\dots 01\ | \underline{0}0\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n (0, 0)$$

$$\dots 01\ | 1\underline{1}\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n (1, 1)$$

Hieraus folgen die Bedingungen  $\beta + \delta\alpha \geq 0$  und  $\alpha + \delta\beta \geq 1 - \delta^2$ .

(1d) Für jedes Teilspiel ab  $x = v * 10$  finden wir dasselbe, siehe (1a).

☺ Zusammenfassung gemeinsamer Verläufe ist bequem und effizient.

Wir setzen  $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$  voraus, wie in der Aufgabe angegeben.

Ist das Strategiepaar  $s$  teilspielperfekt, dann sind die Bedingungen  $\beta + \delta\alpha = 0$  und  $\alpha + \delta\beta \geq 1 - \delta^2$  notwendig, wie oben ausgerechnet.

Demnach muss  $\delta = -\beta/\alpha$  und  $\alpha + \beta > 0$  gelten. Diese Bedingungen sind auch hinreichend: Wir kehren alles um und nutzen Satz J2D.

☺ Die Parameter  $\alpha > 1$  und  $\beta < 0$  mit  $\alpha + \beta > 0$  sind frei wählbar.

☹ Der Diskontfaktor  $\delta$  muss leider penibel genau justiert werden!



(2) Verlauf ab  $x \in X^\circ$  ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\dots 01 10 | 01 10 01 10 01 10 \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha)$$

$$\dots 01 10 | \underline{1}1 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^{2n} \quad (1, 1)$$

$$\dots 01 10 | \underline{0}0 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^{2n} \quad (0, 0)$$

$$\dots 10 01 | 10 01 10 01 10 01 \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k+1} (\beta + \delta\alpha, \alpha + \delta\beta)$$

$$\dots 10 01 | \underline{0}0 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^{2n+1} \quad (0, 0)$$

$$\dots 10 01 | \underline{1}1 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^{2n+1} \quad (1, 1)$$

$$\text{sonstige} | 00 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n \quad (0, 0)$$

$$\text{sonstige} | \underline{1}0 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n \quad (\beta, \alpha)$$

$$\text{sonstige} | \underline{0}1 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n \quad (\alpha, \beta)$$

Wir setzen  $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$  voraus. Die obigen sechs Abweichungen führen auf die beiden Ungleichungen  $\beta + \delta\alpha \geq 0$  und  $\alpha + \delta\beta \geq 1 - \delta^2$ . Diese sind äquivalent zur Bedingung  $1 > \delta \geq -\beta/\alpha$ . Ist damit alles klar?

⚠ Man kann hier leicht Fälle übersehen, so ist es auch mir ergangen. Dankenswerterweise wurde ich in der Vorlesung darauf hingewiesen:

$$\text{Abweichung } 10 | 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n \quad (0, 0)$$

$$\text{Abweichung } 10 | \underline{0}1 10 01 10 \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha)$$

$$\text{Abweichung } 01 | 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n \quad (0, 0)$$

$$\text{Abweichung } 01 | \underline{1}0 01 10 01 \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k+1} (\beta + \delta\alpha, \alpha + \delta\beta)$$

Das führt zur weiteren Ungleichung  $\beta + \delta\alpha \leq 0$ , demnach  $\delta = -\beta/\alpha$ .

☹ Der Diskontfaktor  $\delta$  muss leider penibel genau justiert werden!

Die Grim-Trigger-Strategie aus Satz K1A ist extrem einfach aufgebaut. Um eine Choreographie der Periode 2 aufzubauen, versuchen es die Strategiepaare (0,1) ebenso mit nur einem Zug Erinnerung, doch damit haben sie zu wenig Kontrolle und erreichen nicht Teilspielperfektion.

Das Strategiepaar (2) ist raffinierter und benötigt zwei Züge Erinnerung. Das sieht anfangs besser aus, genügt aber leider immer noch nicht.

⚠ Nicht alles, was wie ein Gleichgewicht erscheint, ist auch eines!

(3) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$(01 10)^n | 01 10 01 10 01 10 \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k} (\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha)$$

$$(01 10)^n | \underline{1}1 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^{2n} \quad (1, 1)$$

$$(01 10)^n | \underline{0}0 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^{2n} \quad (0, 0)$$

$$(01 10)^n 01 | 10 01 10 01 10 01 \dots \mapsto (1 - \delta) \sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k+1} (\beta + \delta\alpha, \alpha + \delta\beta)$$

$$(01 10)^n 01 | \underline{0}0 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^{2n+1} \quad (0, 0)$$

$$(01 10)^n 01 | \underline{1}1 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^{2n+1} \quad (1, 1)$$

$$\text{sonstige} | 00 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n \quad (0, 0)$$

$$\text{sonstige} | \underline{1}0 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n \quad (\beta, \alpha)$$

$$\text{sonstige} | \underline{0}1 00 00 00 00 00 \dots \mapsto (1 - \delta)\delta^n \quad (\alpha, \beta)$$

Wir setzen  $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$  voraus und nutzen das Prinzip J2D: Genau dann ist  $s$  teilspielperfekt, wenn  $\beta + \delta\alpha \geq 0$  und  $\alpha + \delta\beta \geq 1 - \delta^2$ . Dies ist äquivalent zur Bedingung  $1 > \delta \geq -\beta/\alpha$ . Daraus folgt  $\alpha + \beta > 0$ .

Das Strategiepaar (3) nutzt die Erinnerung des gesamten Spielverlaufs. Das klingt erst einmal kompliziert, doch die Strategien sind noch einfach.

😊 Die Bedingung  $\alpha + \beta > 0$  ist anschaulich klar: Die Belohnung durch die mittlere Auszahlung muss für jeden Spieler strikt größer sein als die drohende Strafe  $g(0, 0) = (0, 0)$  durch die Grundstrategie  $(0, 0) \in A$ . Im Beispiel  $(\alpha, \beta) = (5, -1)$  muss demnach nur  $1/5 \leq \delta < 1$  gelten.

😊 Auch die Bedingung  $\delta \geq -\beta/\alpha$  ist anschaulich klar: Geht ein Spieler mit  $\beta$  in Vorleistung, so erwartet er anschließend die Kompensation  $\delta\alpha$ . Beide Spieler müssen ausreichend geduldig sein, um die Kooperation höher zu bewerten als alle möglichen kurzfristigen Gewinnmitnahmen.

😊 Die Ungleichungen sind plausibel, das heißt zunächst: notwendig. Dank des Prinzips J2D sind sie tatsächlich auch hinreichend.

Das Strategiepaar (3') ist symmetrisch zu (3), das Ergebnis identisch. Die Symmetrie zwischen den Spielern muss hier gebrochen werden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie! Dann steht einer harmonischen Kooperation nichts mehr im Wege.

## Satz K1D: iteriertes Gefangenendilemma

Wir iterieren das Gefangenendilemma  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , gegeben durch

	B	0	1
A			
0	0	$\alpha_1$	$\beta_2$
1	$\beta_1$	$\alpha_2$	1

mit Konstanten  $\alpha_i > 1 > \delta_i > 0 > \beta_i$  und diskontierten Auszahlungen

$$u: \{00, 01, 10, 11\}^N \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = \frac{1 - \delta_i}{1 - \delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n).$$

(1) Im endlichen Fall  $N < \infty$  gibt es nur ein einziges Gleichgewicht  $(s^1, s^2) \in \text{PNE}(\Gamma)$ , und dieses führt zur Auszahlung  $u(s^1, s^2) = (0, 0)$ .

(2) Für  $N = \infty$  und  $\delta_i \geq 1 - 1/\alpha_i$  ist zudem die Grim-Trigger-Strategie ein Gleichgewicht  $(s^1, s^2) \in \text{PNE}(\Gamma)$  mit Auszahlung  $u(s^1, s^2) = (1, 1)$ .

(3) Für  $N = \infty$  und  $\delta_i \geq -\beta_i/\alpha_i$  haben wir zudem das Gleichgewicht „Eine Hand wäscht die andere“  $(s^1, s^2) \in \text{PNE}(\Gamma)$  mit Auszahlung

$$u(s^1, s^2) = \left( \frac{\alpha_1 + \delta_1 \beta_1}{1 + \delta_1}, \frac{\beta_2 + \delta_2 \alpha_2}{1 + \delta_2} \right) \rightarrow \left( \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} \right).$$

Wir haben uns für dieses grundlegende Beispiel viel Zeit genommen und uns mit den ausführlichen Rechnungen redlich Mühe gegeben. Ich glaube, dass unser Erkenntnisgewinn die Investition belohnt: Wir erhalten explizite Strategien und quantitative Garantien.

Oft wird dies lieblos zusammengefasst zur qualitativen Aussage „Für  $\delta \nearrow 1$  existiert ein Strategiepaar  $s \in \text{PNE}(\Gamma)$  mit  $u(s) \rightarrow g(a)$ .“ Das ist schön knapp und bequem, aber wenig konkret und hilfreich. Hier sind unsere Rechnungen zwar mühsamer, aber auch genauer:

- explizite Angabe der betrachteten Strategien  $(s_1, s_2) \in \text{PNE}(\Gamma)$ .
- explizite Angabe der jeweils benötigten Geduldsschwelle  $\delta_i \geq \underline{\delta}_i$ .

Soviel konkrete Mühe ist nicht immer nötig oder wünschenswert, in diesen Fällen genügt meist eine vereinfachte qualitative Aussage. Doch wenn Sie tatsächlich eine vorgelegte Spielsituation lösen wollen, etwa unter Spielern einen Plan vereinbaren, dann geht es nur konkret. Allgemeine Regel: *Explicit is better than implicit.* (*The Zen of Python*) Auch zum Erlernen beim ersten Kontakt scheint mir das unerlässlich.

Auch die Mikrostruktur der hier konstruierten Strategien ist interessant. Es geht oft nicht nur grob um das *Was* der erreichbaren Auszahlung, sondern auch genau um das *Wie* der verschiedenen Realisierungen. Sie spüren feine Unterschiede, sobald Sie selbst als Spieler agieren: Bei Strategien der Form *Eine Hand wäscht die andere* muss einer der beiden Spieler in Vorleistung gehen. Keiner will, einer muss. Doch wer? Beide Reihenfolgen konvergieren für  $\delta_1, \delta_2 \nearrow 1$  gegen den Mittelwert:

$$u(s^1, s^2) = \left( \frac{\alpha_1 + \delta_1 \beta_1}{1 + \delta_1}, \frac{\beta_2 + \delta_2 \alpha_2}{1 + \delta_2} \right) \rightarrow \left( \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} \right).$$

$$u(s^2, s^1) = \left( \frac{\beta_1 + \delta_1 \alpha_1}{1 + \delta_1}, \frac{\alpha_2 + \delta_2 \beta_2}{1 + \delta_2} \right) \rightarrow \left( \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} \right).$$

Für vorgegebene Werte  $\delta_1, \delta_2 < 1$  sind die Auszahlungen verschieden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie! Solche und weitere Fragen sehen Sie erst, wenn Sie konkret werden.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

*Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.*

(Immanuel Kant, 1724–1804)

Jetzt können Sie zu Recht einwenden, dass unser Modell doch nur ein Spielzeug-Beispiel ist. Ja, natürlich, es ist nur ein Beispiel unter vielen, es ist extrem vereinfacht, all unsere Modelle sind beschämend simpel, aber sie illustrieren doch überzeugend das grundlegende **Phänomen**. Wichtiger noch, selbst einfache Modelle zeigen Ihnen die **Methoden**.

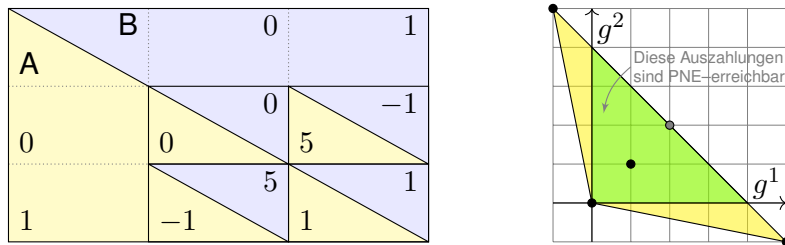
Die Spieltheorie, wie jede gute Theorie, liefert Ihnen nicht nur Beispiele, sondern Methoden. Es ist unwahrscheinlich, dass Sie genau dieses oder jenes *Beispiel* wörtlich anwenden. Das gilt ganz allgemein, selbst für die bestmögliche Auswahl von Beispielen. Wahrscheinlich aber ist, dass Sie diese oder ähnliche bewährte *Methoden* nutzen. Sie sollen daher nicht nur *Beispiele* lernen, sondern zugleich möglichst vielseitige *Methoden*!

😊 Was Sie hier lernen, können Sie überall nutzbringend anwenden. Mit diesen Werkzeugen können Sie auch dicke Bretter bohren. Ihre Investition und unsere gemeinsame Mühe lohnen sich.

## Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt realisierbar?

K201

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :



Welche Auszahlungen  $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$  sind teilspielperfekt realisierbar? Das Nash-Gleichgewicht  $z = (0, 0)$  ist möglich; es dient als Drohpunkt. Besser ist  $g(1, 1) = (1, 1)$ , realisierbar für  $\delta \geq 4/5$  mit Grim Trigger (K1A). Noch besser wäre  $(2, 2)$ . Für  $\delta \geq 1/5$  erreichen wir dies wie oben (K1D). Geht noch mehr? Welche Auszahlungen sind realisierbar? Nashs Folk Theorem benennt mögliche Gleichgewichtsauszahlungen: Sie liegen (1) in der konvexen Hülle der Auszahlungen und (2) über dem Drohpunkt. Insbesondere ist  $u \text{ PNE}(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}^2$  überabzählbar, also auch  $\text{PNE}(\Gamma)$ .

## Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt realisierbar?

K202  
Erläuterung

Das Strategiepaar  $(0, 0)$  ist ein Nash-Gleichgewicht. Wiederholung dieser Strategie ist teilspielperfekt (Satz K1C), aber wenig lukrativ. Es dient als Notlösung und glaubwürdige Drohung bei Abweichung. Das Strategiepaar  $(1, 1)$  ist für beide Spieler strikt besser als  $(0, 0)$ , aber im Einzelspiel kein Nash-Gleichgewicht. Im iterierten Spiel lässt es sich teilspielperfekt realisieren, etwa durch obige Grim-Trigger-Strategie K1A. Die oben untersuchte Strategie *Eine Hand wäscht die andere* aus K1D realisiert die für beide Spieler strikt bessere Auszahlung  $(2, 2)$ , für  $\delta < 1$  etwas asymmetrisch, doch im Grenzwert für  $\delta \nearrow 1$  beliebig genau. Nach kurzem Nachdenken und Probieren sehen Sie vermutlich ebenso, wie etwa die Auszahlung  $2/5(5, -1) + 3/5(-1, 5)$  realisiert werden kann, zumindest näherungsweise, durch ein teilspielperfektes Gleichgewicht: Es genügt eine periodische Absprache der Form ABABB oder AABBB. Wenn Ihnen dieser nächste Schritt jetzt klar und einfach einleuchtet, dann hat sich die lange rechenintensive Vorbereitung mehr als gelohnt. Das Folk Theorem ist die natürliche Fortsetzung unserer Rechnungen.

## Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt realisierbar?

K203  
Erläuterung

Welche allgemeinen Regeln erkennen wir in diesen Beispielen? Welche Konstruktionen und Aussagen extrahieren wir daraus? Nashs Folk Theorem gibt Auskunft darüber, welche Auszahlungen teilspielperfekt realisierbar sind. Unser Beispiel legt folgendes nahe: In Frage kommen höchstens alle Konvexkombinationen  $g(a)$  der reinen Auszahlungen, also die Auszahlungen korrelierter Strategien  $a \in [A]$ . Zur Abschreckung benötigen wir eine glaubwürdige Drohung / Strafe. Hierzu nutzen wir ein Nash-Gleichgewicht  $z \in \text{NE}(g)$  oder  $z \in \text{NE}(\bar{g})$ . Realisierbar ist dann tatsächlich jede Konvexkombination  $g(a) \in \mathbb{R}^I$ , die für jeden Spieler besser ist als das Grundniveau, kurz  $g(a) > g(z)$ . Nashs Folk Theorem K2E präzisiert diese Aussage quantitativ. Unsere Intuition wird sich nachfolgend als richtig erweisen. Wir wollen die anschauliche Aussage nun präzise formulieren und dann beweisen. Die Überraschung liegt schließlich nicht in der naiven Umschreibung, sondern in der mathematischen Ausführung: Explizite Formulierung und sorgfältiges Nachrechnen sind ehrbares mathematisches Handwerk.

## Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt realisierbar?

K204  
Erläuterung

Die folgenden Überlegungen bereiten Nashs Folk Theorem vor. Für wiederholte Spiele  $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$  sind dies grundlegende Hilfsmittel und daher auch von ganz allgemeinem, eigenständigem Interesse. Der einfachste Fall ist die un/endliche Wiederholung desselben Spiels

$$g : A = \prod_{i \in I} A^i \rightarrow \mathbb{R}^I.$$

Kaum Mehraufwand bereitet eine Familie  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Spielen

$$g_k : A_k = \prod_{i \in I} A_k^i \rightarrow \mathbb{R}^I.$$

Dazu müssen wir zwar einen weiteren Index  $k \in \mathbb{N}$  mitführen, doch die Argumente werden dadurch eher einfacher und klarer. Zu jeder Runde / Stufe  $k \in \mathbb{N}$  ist  $g_k$  das zugehörige Stufenspiel. Jede Strategie  $a^i \in A_k^i$  des Stufenspiels nennen wir nun eine Aktion. Ich betone nochmal die grundlegende Annahme: Alle vorigen Aktionen sind für alle Spieler sichtbar. Das dient zur Kontrolle der Vereinbarung. Andernfalls sind glaubwürdige Absprachen erschwert oder unmöglich.

**Definition K2A: Verkettung von Spielen in Normalform**

Gegeben sei eine Familie  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von strategischen Spielen

$$g_k : A_k = \prod_{i \in I} A_k^i \rightarrow \mathbb{R}^I.$$

Wir nennen  $g_k$  das **Stufenspiel** / *stage game* der Stufe  $k$ .

Für jeden Spieler  $i \in I$  gelte  $\sum_{k=0}^{\infty} \sup |g_k^i| < \infty$ . Typische Beispiele sind  $g_k = (1 - \delta)^k g$  für ein endliches Spiel  $g : A = \prod_{i \in I} A^i \rightarrow \mathbb{R}^I$ .

Hieraus konstruieren wir das extensive Spiel

$$\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$$

als **Verkettung** dieser Stufenspiele durch Hintereinanderausführung.

Die Zustandsmenge  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$  besteht aus allen Spielverläufen mit  $X_n = \prod_{k=0}^{n-1} A_k = A_0 * \dots * A_{n-1}$  und  $\partial X = X_{\infty} = A = \prod_{k=0}^{\infty} A_k$ .

Die Auszahlungen werden summiert zu

$$u^i : \partial X \rightarrow \mathbb{R} : u^i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^i(x_k).$$

Diese Konstruktion ist ein Spezialfall der Verkettung  $\Gamma = \prod_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k$  beliebiger extensiver Spiele  $\Gamma_k$ , wie zuvor in Definition K1B erklärt. Im vorliegenden Fall ist jedes Stufenspiel  $\Gamma_k = g_k$  besonders einfach, daher können wir alle Daten von  $\Gamma$  bequem explizit ausschreiben.

Das nutzen wir dankend in den folgenden Sätzen und Rechnungen. Ohne geeignete Notation wäre dies ein hoffnungsloses Unterfangen. Glücklicherweise ist unsere Notation sowohl präzise als auch bequem. Die folgenden Feststellungen werden damit beinahe zur Trivialität.

Dass schließlich alles übersichtlich, offen und klar vor uns liegt, verdanken wir unserer Vorbereitung der grundlegenden Begriffe: Spiele in statischer und extensiver Form, Nash-Gleichgewichte und teilspielperfekte Gleichgewichte, und für letztere Zermelos Rückwärtsinduktion und das Prinzip der einmaligen Abweichung.

😊 Mit diesen Werkzeugen können wir präzise und effizient arbeiten: Wir können quantitative Modelle untersuchen und Aussagen beweisen, zudem qualitative Prinzipien und intuitive Interpretationen ableiten.

Gegeben sei eine Familie  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Spielen  $g_k : A_k = \prod_{i \in I} A_k^i \rightarrow \mathbb{R}^I$  und ihre Verkettung  $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$  wie zuvor in Definition K2A erklärt.

Gegeben seien Aktionsvektoren  $a, z \in A = \prod_{k=0}^{\infty} A_k$  mit  $z_k \in \text{NE}(g_k)$ . Allgemein genügt  $z_k \in \text{NE}(\bar{g}_k)$  oder gar  $z_k \in \text{CE}(g_k)$ , das ist flexibler. Satz E1F von Nash garantiert die Existenz solcher Gleichgewichte.

**Lemma K2B: Prinzip der Abschreckung**

Wir definieren die Grim-Trigger-Strategie  $s = \text{Grim}(a, z)$  in jeder Stufe  $n \in \mathbb{N}$  durch  $s : X_n \rightarrow A_n$  mit  $s(a_0 a_1 \dots a_{n-1}) = a_n$  und  $s(x) = z_n$  sonst.

Genau dann gilt  $s \in \text{PNE}(\Gamma)$ , wenn für jeden Spieler  $i \in I$  und jede Abweichung  $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$  die **Abschreckung** ausreichend wirkt gemäß

$$\underbrace{[g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n^i; a_n^{-i})]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \leq \underbrace{\sum_{k>n} [g_k^i(a_k) - g_k^i(z_k)]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}.$$

😊 Drum prüfe, wer sich ewig bindet, ob sich nicht was Bess'eres findet! Auf der rechten Seite genügt eine Summe endlicher Länge, siehe K2D

**Aufgabe:** Was ist für das Lemma zu beweisen? Beweisen Sie es!

**Lösung:** Für Spieler  $i$  lohnt sich eine Abweichung von  $a_n^i$  zu  $\tilde{a}_n^i$ , wenn

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} > \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}.$$

Für jeden Spieler  $i \in I$  und jede Abweichung  $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$  fordern wir daher

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \leq \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}.$$

Abweichung aus den Nash-Gleichgewichten  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist nie profitabel:

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; z_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \leq \underbrace{g_n^i(z_n^i; z_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}$$

😊 Diese Ungleichungen sind plausibel und offensichtlich notwendig für jedes teilspielperfekte Gleichgewicht  $s \in \text{PNE}(\Gamma)$ . Dank dem Prinzip J2D der einmaligen Abweichung sind diese Bedingungen auch hinreichend. Damit ist das Lemma bewiesen. So schön, so einfach, so elegant!

Menschen machen Fehler. Die Grim-Trigger-Strategie ahndet dies sofort mit ewiger Verdammnis. In manchen Anwendungen ist dies realistisch. In vielen Anwendungen ist dies jedoch zu streng, insbesondere dann, wenn die beteiligten Spieler dauerhaft aufeinander angewiesen sind.

In Partnerschaften können Verstöße mit Schmollen geahndet werden, kleine Vergehen mit kurzem Schmollen, größere mit längerem, manche gar mit Beziehungsabbruch. Oft beobachtet man jedoch Versöhnung nach verbüßter Zurechtweisung: „Jetzt hast du deine Lektion gelernt.“

Auch in der Rechtsprechung gilt das Prinzip der Angemessenheit: Die Strafzumessung gründet (1) auf der Feststellung einer Straftat und erfolgt (2) nach der Schwere der Schuld. Dasselbe gilt genauso im Sport bei einem progressiven Strafsystem, etwa beim Handball.

Zur Vereinfachung sind unsere bisherigen Strategien unerbittlich und simple Variationen der Grim-Trigger-Strategie. Das ist für die meisten Anwendungen unnötig streng. Zur Teilspielperfektion / Abschreckung genügt es, genau so lange zu bestrafen, bis die Schuld getilgt ist.

**Aufgabe:** Konstruieren Sie explizit und präzise eine solche Strategie „Schuld und Sühne“ und beweisen Sie ihre Teilspielperfektion.

**Lösung:** Die Strategie „Schuld und Sühne“ (Definition K2c) ist intuitiv klar, und der Nachweis ihrer Teilspielperfektion (Satz K2d) ist plausibel. Dennoch sind explizite Formulierung und sorgfältiges Nachrechnen eine schöne mathematische Fingerübung bzw. artistische Herausforderung. Insbesondere müssen wir alle Fälle klären. Soviel Sorgfalt muss sein!

Gegeben sei eine Familie  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Spielen  $g_k : A_k = \prod_{i \in I} A_k^i \rightarrow \mathbb{R}^I$  und ihre Verkettung  $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$  wie zuvor in Definition K2A erklärt.

Vorgegeben sei  $a \in A = \prod_{k=0}^{\infty} A_k$  als der „rechte Pfad“. Idealerweise ist der Spielverlauf  $a_0 a_1 a_2 \dots$ . Jede Abweichung  $\tilde{a}_n \neq a_n$  wird sanktioniert, indem die vorgesehenen Nash-Gleichgewichte  $z_n z_{n+1} \dots z_{n+\ell}$  gespielt werden für die nächsten  $\ell = \ell_n(\tilde{a}_n)$  Runden. Danach wird vergeben.

Wir benötigen für jede Runde  $n \in \mathbb{N}$  eine Bußregel  $\ell_n : A_n \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ : Sie gibt für jede Abweichung an, wie viele Runden gebüßt werden muss. Diese Abmachungen müssen vor dem Spiel präzise festgelegt werden!

### Definition K2c: Schuld und Sühne

Gegeben sei eine Familie  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Spielen  $g_k : A_k = \prod_{i \in I} A_k^i \rightarrow \mathbb{R}^I$  und ihre Verkettung  $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$  wie zuvor in Definition K2A erklärt.

Gegeben seien Aktionsvektoren  $a, z \in A = \prod_{k \in \mathbb{N}} A_k$  mit  $z_k \in \text{NE}(g_k)$  und eine Bußregel  $\ell_k : A_k \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  mit  $\ell_k(a_k) = 0$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

Wir definieren die **Schuld-und-Sühne-Strategie**  $s = \text{CAP}(a, z, \ell)$ , engl. *Crime and Punishment*, in jeder Stufe  $n \in \mathbb{N}$  wie folgt:

$$s_n : X_n \rightarrow A_n : x \mapsto \begin{cases} a_n & \text{falls } \ell(x) = 0, \\ z_n & \text{falls } \ell(x) > 0. \end{cases}$$

Für jede Vorgeschichte  $x \in X_n$  definieren wir  $\ell(x)$  als die Rundenzahl, die noch gesühnt werden muss. Ohne Erbsühne haben wir  $\ell(\emptyset) := 0$ .

Für  $x = v * \tilde{a}_n$  mit  $v \in X_n$  und  $\tilde{a}_n \in A_n$  gilt dann rekursiv:

$$\ell(v * \tilde{a}_n) = \begin{cases} \ell_n(\tilde{a}_n) & \text{falls } \ell(v) = 0, \\ \ell(v) - 1 & \text{falls } \ell(v) > 0. \end{cases}$$

😊 Es genügt  $z_k \in \text{NE}(g_k) \subseteq \text{NE}(\bar{g}_k) \subseteq \text{CE}(g_k)$ , das ist flexibler (E1F). Teilspielperfektion ist nun ein einfaches System von Ungleichungen:

### Satz K2d: Schuld und Sühne

Wie in K2c sei  $s = \text{CAP}(a, z, \ell)$  die Schuld-und-Sühne-Strategie.

Genau dann gilt  $s \in \text{PNE}(\Gamma)$ , wenn für jeden Spieler  $i \in I$  und jede Abweichung  $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$  die **Abschreckung** ausreichend wirkt gemäß

$$\underbrace{[g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n^i; a_n^{-i})]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} [g_k^i(a_k) - g_k^i(z_k)]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}.$$

Bußzeiten  $\ell_n(\tilde{a}_n) = \ell_n(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) = \ell_n^i(\tilde{a}_n^i)$  mit  $\ell_n^i : A_k^i \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  werden hierbei nur für die Abweichung eines einzigen Spielers  $i \in I$  benötigt.

Bußzeiten bei Abweichung von zwei oder mehr Spielern sind beliebig.

Sie spielen für Gleichgewichte und obige Ungleichungen keine Rolle.

Bei drei oder mehr Spielern sollten wir genauer die Stabilität bezüglich Koalitionen / Kartellen / Komplizen / Verschwörungen untersuchen.

**Aufgabe:** Beweisen Sie Satz K2D nach dem Vorbild von Lemma K2B. Analysieren Sie hierzu genau die Schuld-und-Sühne-Strategie K2c und nutzen Sie das Prinzip J2D der einmaligen Abweichung.

**Beweis:** Die genannten Ungleichungen sind offensichtlich notwendig: Für Spieler  $i \in I$  lohnt sich eine Abweichung von  $a_n^i$  zu  $\tilde{a}_n^i$ , wenn

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung, danach normal weiter}} > \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung, danach normal weiter}}$$

Für jeden Spieler  $i \in I$  und jede Abweichung  $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$  fordern wir daher

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung, danach normal weiter}} \leq \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung, danach normal weiter}}$$

Abweichung aus den Nash-Gleichgewichten  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist nie profitabel, denn  $g_n^i(\tilde{a}_n^i; z_n^{-i}) \leq g_n^i(z_n^i; z_n^{-i})$ . Solche Abweichungen werden daher nicht zusätzlich bestraft, die Bußzeit wird nicht zusätzlich verlängert.

😊 Diese Bedingungen sind auch hinreichend nach dem Prinzip J2D der einmaligen Abweichung. Somit ist  $s$  ein teilspielperfektes Gleichgewicht!

**Beispiel:** Der Extremfall  $\ell = 0$  bedeutet keinerlei Sanktionen:

$$\text{Stoic}(a) = \text{CAP}(a, z, 0)$$

Was auch immer in der Vergangenheit  $x \in X_n$  vorgefallen sein mag, es wird immer wie vereinbart fortgefahren und stoisch  $s_x = a_n$  gespielt. Die Spieler nutzen überhaupt nicht ihre Erinnerung an den Spielverlauf.

Genau dann ist  $s$  teilspielperfekt, falls  $a_n \in \text{NE}(g_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

😊 Das ist ein allzu einfacher, aber illustrativer Spezialfall von Satz K2D.

**Beispiel:** Das andere Extrem  $\ell = \infty$  ist die Grim-Trigger-Strategie:

$$\text{Grim}(a, z) = \text{CAP}(a, z, \infty)$$

Hierzu definieren wir „ $\ell = \infty$ “ für  $n \in \mathbb{N}$  durch die Funktion  $\ell_n : A_n \rightarrow \{0, \infty\}$  mit  $\ell_n(a_n) = 0$  und  $\ell_n(\tilde{a}_n) = \infty$  für alle  $\tilde{a}_n \neq a_n$ . Das bedeutet: Jede Abweichung führt zur ewigen Verdammnis.

Genau dann ist  $s$  teilspielperfekt, wenn die Abschreckung wirkt (K2B).

😊 Satz K2D formuliert dieses nützliche Kriterium allgemein und flexibel.

„Strafe muss sein.“, behauptet das Sprichwort. Das sagt der Satz nicht! Er erklärt, unter welchen Bedingungen  $s \in \text{PNE}(\Gamma)$  gilt, aber behauptet nicht, dass die Schuld-und-Sühne-Strategie  $s$  die *einzig*e Lösung ist.

😊 Der Satz besteht, nüchtern betrachtet, lediglich aus Ungleichungen, über die hier effizient und geschickt buchgeführt wird. Etwas epischer: Für jeden Spieler  $i \in I$  und jeden Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir

$$\begin{aligned} \text{den Treuebonus} \quad \tau_n^i &:= \sum_{k>n} [g_k^i(a_k) - g_k^i(z_k)] \quad \text{und} \\ \text{die Versuchung} \quad \sigma_n^i &:= \sup \{ g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n) \mid \tilde{a}_n^i \in A_n^i \}. \end{aligned}$$

Die Schuld-und-Sühne-Strategie gelingt, mit endlichen Bußzeiten, falls die Treue überwiegt, also  $\sigma_n^i < \tau_n^i$  für alle  $i \in I$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

😊 Manche Abweichung  $\tilde{a}_n^i$  muss gar nicht bestraft werden, nämlich falls

$$g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) \leq 0.$$

Spieler  $i$  schadet sich damit selbst, sein selbstverschuldeter Verlust ist Strafe genug. Spezialfall: Ist  $a_n \in \text{NE}(g_n)$  ein Nash-Gleichgewicht, so gilt dies für jeden Spieler  $i \in I$  und jede Abweichung  $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$ .

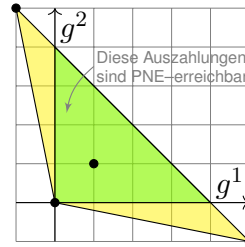
😊 Die praktische Bedeutung dieser einfachen Rechnung ist immens. Die Schuld-und-Sühne-Strategie steckt in vielen alltäglichen Situationen, von Teamarbeit bis Sport, von Verträgen bis Strafrecht. Sie prägt soziale Normen und Konventionen, viele davon sind unbewusst Gleichgewichte.

Natürlich ist die Wirklichkeit viel komplizierter als unser simples Modell, doch die mathematische Beschreibung trifft einen wichtigen Kernaspekt: Übereinkünfte und Zusammenarbeit sind nur dann langfristig stabil, wenn Kooperation ausreichend belohnt, Betrug dagegen bestraft wird.

Die Schuld-und-Sühne-Strategie benötigt angemessene Sanktionen: Die Strafe muss streng genug sein, damit Betrug nicht lukrativ wird. Die Strafe darf nachsichtig sein: Zur Teilspielperfektion / Abschreckung genügt es, genau so lange zu bestrafen, bis die Schuld getilgt ist.

Die Schuld ist hier der eigene Vorteil, den der Abweichler erschleicht; es geht nicht um den Schaden, den er damit eventuell anderen zufügt. Die angemessene Strafe garantiert nur Abschreckung, nicht Rache. Zumindest bei rationalen Spielern wird das wirken, und nur das.

	B	0	1
A	0	0	-1
0	0	5	1
1	-1	1	1



### Nash Folk Theorem, qualitative Grundversion

Wir iterieren unendlich oft ein endliches Spiel  $g : A = \prod_{i \in I} A^i \rightarrow \mathbb{R}^I$ , diskontiert mit Faktoren  $\delta_i \in [0, 1[$  nahe 1. Gegeben seien hierzu:

**Kollektive Erreichbarkeit:** Sei  $a \in [A]$  eine korrelierte Strategie, also eine Konvexkombination  $a = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_{\lambda} a_{\lambda}$  gemeinsamer Aktionen  $a_{\lambda} \in A$ .

**Starke individuelle Rationalität:** Sei  $z \in \text{NE}(g) \subseteq \text{NE}(\bar{g}) \subseteq \text{CE}(g)$  ein Gleichgewicht mit  $g(a) > g(z)$ , also  $g^i(a) > g^i(z)$  für jeden Spieler  $i \in I$ . Dann ist die Auszahlung  $g(a) \in \mathbb{R}^I$  teilspielperfekt realisierbar.

Folk Theoreme und ganz allgemein Gleichgewichte sagen uns nicht, wie das Spiel verlaufen *muss*, sondern zeigen, wie es verlaufen *kann*. Sie machen Existenzaussagen: Unter den genannten Bedingungen existiert eine Strategie  $s$ , mit der sich alle Spieler besser stellen können als permanente Wiederholung von Nash-Lösungen des Stufenspiels.

Der Name „Folk“ rührt daher, dass sie seit Nash unter Spieltheoretikern bekannt waren, aber lange nur als „Folklore“ mündlich tradiert wurden.

Ihre Anwendung liegt in der Modellierung langfristiger Interaktionen: Verträge, Teamarbeit, soziale Bindungen, Ehe, Kindererziehung, ... Eine Vereinbarung ist nur dann rational und glaubwürdig, wenn sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. Viele Strategien sind uns aus dem Alltag vertraut und werden hier mathematisch erklärt und quantifiziert.

Der vorige Satz ist nur eine qualitative Vorschau als erster Überblick, noch nicht präzise zu  $\delta_i \nearrow 1$  und keinesfalls explizit zu den Strategien. Die folgende quantitative Version ist genauer und liefert alle Details. Beide stützen sich zur Vereinfachung auf einen Grundzustand  $z$ .

### Satz K2E: Nash Folk Theorem, quantitative Grundversion

Sei  $g : A = \prod_{i \in I} A^i \rightarrow \mathbb{R}^I$  ein endliches Spiel,  $a = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_{\lambda} a_{\lambda} \in [A]$  eine korrelierte Strategie und  $z \in \text{NE}(g) \subseteq \text{NE}(\bar{g}) \subseteq \text{CE}(g)$  ein Gleichgewicht.

Jeden Spieler  $i \in I$  lockt der Treuebonus  $\tau_i := g^i(a) - g^i(z) > 0$  und die Versuchung  $\sigma_i := \max\{g^i(\tilde{a}^i; a_{\lambda}^{-i}) - g^i(a_{\lambda}^i; a_{\lambda}^{-i}) \mid \tilde{a}^i \in A^i, \lambda \in \Lambda\} \geq 0$ .

Wir wiederholen das Spiel  $g$  unendlich oft mit diskontierter Auszahlung  $u : A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^I : u^i(x) = (1 - \delta_i) \sum_{k=0}^{\infty} \delta_i^k g^i(x_k)$ . Dann ist die Auszahlung  $g(a) \in \mathbb{R}^I$  durch eine teilspielperfekte Strategie  $s \in S$  realisierbar:

(1) Probabilistisch mit einem öffentlich sichtbaren **Zufallsgenerator**: Für jeden Spieler  $i \in I$  muss Treue überwiegen gemäß  $\delta_i \geq \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \tau_i} =: \underline{\delta}_i$ .

(2) Ohne öffentlichen Zufallsgenerator durch **rationale Approximation**: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein Strategievektor  $s \in S$  und für jeden Spieler  $i \in I$  eine Geduldsschwelle  $\underline{\delta}_i \in [0, 1[$ , sodass für alle  $\delta_i \in [\underline{\delta}_i, 1[$  gilt: Der Strategievektor  $s$  ist teilspielperfekt und erfüllt  $|u_{\emptyset}^i(s) - g^i(a)| < \varepsilon$ .

Die qualitative Version gibt einen ersten Überblick, die quantitative Version präzisiert die Daten, Voraussetzungen und Folgerungen. Die Konstruktion der geforderten Gleichgewichte erfolgt im Beweis, den Sie hier ausdrücklich als Teil des Satzes verstehen sollten.

Das Stufenspiel  $g : A = \prod_{i \in I} A^i \rightarrow \mathbb{R}^I$  ist einfach gebaut, das unendlich wiederholte Spiel  $\Gamma = (1 - \delta) \prod_{k \in \mathbb{N}} \delta^k g$  hingegen ist erstaunlich komplex: Schon der Strategieraum  $S(\Gamma) = \{s : X^{\infty} \rightarrow A\}$  ist phantastisch groß. Darin ist meist auch  $\text{PNE}(\Gamma)$  überabzählbar, somit unübersichtlich.

Nashs Folk Theorem verschafft uns hierzu einen praktikablen Überblick, indem wir nicht die Menge  $\text{PNE}(\Gamma)$  aller Gleichgewichte betrachten, sondern vereinfachend nur ihr Bild unter der Auszahlungsabbildung  $u_{\emptyset} : S \rightarrow \mathbb{R}^I$ , also die möglichen Gleichgewichtsauszahlungen in  $\mathbb{R}^I$ .

Diese geschickte Sichtweise trennt die beiden grundlegenden Fragen: 1. Was können die Spieler erreichen? 2. Wie können sie es erreichen? Praktisch: Die Spieler einigen sich zuerst auf ein gemeinsames Ziel. Anschließend vereinbaren sie sorgsam eine gemeinsame Realisierung.

**Aufgabe:** Lernen, verstehen und beweisen Sie den Satz, indem Sie  
 (a) explizit geeignete teilspielperfekte Gleichgewichte konstruieren und  
 (b) die erforderlichen Gleichgewichts-Ungleichungen nachrechnen.

**Beweis:** (1a) Zu Beginn jeder Runde  $n$  wird öffentlich ein Los  $\lambda_n$  aus dem WRaum  $(\Lambda, \mathbf{P})$  gezogen mit den gegebenen Wkten  $\mathbf{P}(\{\lambda\}) = p_\lambda$ . Damit liegt die gesamte Historie  $(\lambda_0, x_0, \lambda_1, x_1, \dots, \lambda_{n-1}, x_{n-1}, \lambda_n)$  vor. Vereinbarung: Gilt  $x_k = a_{\lambda_k}$  für alle  $k < n$ , dann spiele  $a_{\lambda_n}$ , sonst  $z$ .

(1b) Lohnt sich eine Abweichung von dieser Vereinbarung?

$$\underbrace{(1 - \delta_i) [\delta_i^n g^i(\tilde{a}^i; a_{\lambda_n}^-) + \sum_{k>n} \delta_i^k g^i(z)]}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \leq \underbrace{(1 - \delta_i) \sum_{k \geq n} \delta_i^k g^i(a)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}$$

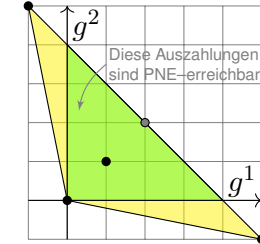
Umgestellt können wir dies leicht interpretieren:

$$\underbrace{(1 - \delta_i) \delta_i^n [g^i(\tilde{a}^i; a_{\lambda_n}^-) - g^i(a_{\lambda_n}^i; a_{\lambda_n}^-)]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \leq \underbrace{(1 - \delta_i) \sum_{k>n} \delta_i^k [g^i(a) - g^i(z)]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}$$

Dies ist äquivalent zu  $(1 - \delta_i)\sigma_i \leq \delta_i\tau_i$ , also  $\delta_i \geq \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \tau_i} =: \underline{\delta}_i \in [0, 1]$ .

**Beispiel:** Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel  $g : \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

	B	0	1
A		0	-1
0	0	5	-1
1	-1	5	1



**Aufgabe:** Wie können die Spieler die Auszahlung (2, 2) erreichen?

**Erste Lösung:** Stochastisch mit einem öffentlichen Zufallsgenerator. Die Spieler vereinbaren die korrelierte Strategie  $a = \frac{1}{2} \cdot (0, 1) + \frac{1}{2} \cdot (1, 0)$  mit  $g(a) = (2, 2)$  und den Grundzustand  $z = (0, 0)$  mit  $g(z) = (0, 0)$ . Treuebonus  $\tau_i = 2$ , Versuchung  $\sigma_i = 1$ , also  $\underline{\delta}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \tau_i} = 1/3$ .

**Zweite Lösung:** Eine Hand wäscht die andere für  $\underline{\delta}_i := 1/5 \leq \delta_i \nearrow 1$ . Anschaulich plausibel: Die Vorleistung  $-1$  wird sofort belohnt mit  $5\delta \geq 1$ . Zufall erfordert etwas mehr Geduld: Die Vorleistung  $-1$  wird belohnt durch die Erwartung  $2(\delta + \delta^2 + \dots) = 2\delta/(1 - \delta) \geq 1$ , also  $\delta \geq 1/3$ .

**Beweis:** (2) Wir beweisen eine genauere Aussage für rationale Wkten, also  $p_\lambda = q_\lambda/N$  mit Zählern  $q_\lambda \in \mathbb{N}$  und gemeinsamem Nenner  $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Hierzu wählen wir eine Folge  $f : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$  mit einer Periode der Länge  $N$  und den richtigen Häufigkeiten  $q_\lambda = \#\{k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \mid f(k) = \lambda\}$ . Wir definieren damit  $\alpha_k = a_{f(k)}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  als den „rechten Pfad“.

Zu Beginn der Runde  $n$  kennen die Spieler die Historie  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ . Vereinbarung: Gilt  $x_k = \alpha_k$  für alle  $k < n$ , dann spiele  $\alpha_n$ , sonst spiele  $z$ .

$$\underbrace{(1 - \delta_i) [\delta_i^n g^i(\tilde{a}^i; \alpha_n^-) + \sum_{k>n} \delta_i^k g^i(z)]}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \leq \underbrace{(1 - \delta_i) \sum_{k \geq n} \delta_i^k g^i(\alpha_n)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}$$

Umgestellt können wir dies leicht interpretieren:

$$\underbrace{(1 - \delta_i) \delta_i^n [g^i(\tilde{a}^i; \alpha_n^-) - g^i(\alpha_n^i; \alpha_n^-)]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \leq \underbrace{(1 - \delta_i) \sum_{k>n} \delta_i^k [g^i(\alpha_n) - g^i(z)]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}$$

Mittelung: Für  $\delta_i \nearrow 1$  geht die rechte Seite gegen  $g^i(a) - g^i(z) = \tau_i$ . Die Bedingung ist äquivalent zu  $(1 - \delta_i)\sigma_i \leq \delta_i\tau_i$ , also  $\delta_i \geq \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \tau_i}$ . Für  $\delta_i \nearrow 1$  gilt die Approximation  $u_{\theta}^i(s) \rightarrow g^i(a)$ , wie gewünscht. QED

Zur Vereinfachung des Beweises belasse ich es in der Konstruktion (2) bei der vagen, aber bequemen Formulierung als Grenzwert „ $\delta_i \nearrow 1$ “: Für jedes  $\delta_i$  hinreichend nahe an 1 sind alle Ungleichungen erfüllt. Ab welcher Geduldsschwelle  $\delta_i \geq \underline{\delta}_i$  dies eintritt, muss im Einzelfall nachgerechnet werden. Es hängt von der gewählten Folge  $f$  ab!

Das ist ganz allgemein der geniale Trick der Grenzwertrechnung: Explizite Fehlerschranken sind informativ, aber leider auch mühsam. Wenn sie nicht gefordert sind, verwalten wir Fehlerschranken implizit und verstecken sie geschickt in der Epsilontik. Die so erarbeiteten Aussagen sind einfacher, nach wie vor korrekt, aber weniger informativ.

Wie genau benötigen wir es hier? Stellen Sie sich vor, Alice und Bob suchen eine präzise Abmachung, und diese soll nachweislich stabil sein. Die Fortsetzungswkt betrage  $\delta = 1/2$  von Runde zu Runde. Beide Spieler prüfen sorgsam, ob ihre Abmachung diesen Anforderungen standhält. Die Beschreibung „ $1/2$  gehe gegen 1“ ist natürlich unsinnig, wir müssen konkrete Ungleichungen nachweisen, siehe nachfolgende Übungen.



Wir iterieren unendlich oft das Spiel  $g: A = \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

	B	0	1
A			
0	0	$\alpha$	$\beta$
1	$\beta$	1	1

mit Konstanten  $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$   
 hier  $\alpha = 5$  und  $\beta = -1$  und  $\delta \nearrow 1$ .  
 Die diskontierte Auszahlung ist  
 $u(x) = (1 - \delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$ .

Alice und Bob suchen eine gemeinsame Strategie, die die Auszahlung  $w = 3/5(\alpha, \beta) + 2/5(\beta, \alpha) = (13/5, 7/5)$  teilspielperfekt gut approximiert.

**Aufgabe:** (1) Wir identifizieren jeden Vektor  $a = (a_0, \dots, a_4) \in A^5$  mit seiner 5-periodischen Fortsetzung  $a \in A^{\mathbb{N}}$ . Welche (zehn!) Elemente aus  $A^5$  führen zu den gewünschten Auszahlungen, also  $u(a) \rightarrow w$  für  $\delta \nearrow 1$ ?

(2) Sei  $z = 00$ . Bestimmen Sie für  $s = \text{Grim}(a, z)$  das optimale  $\underline{\delta}$ , sodass  $s$  für alle  $\delta \geq \underline{\delta}$  teilspielperfekt ist (numerisch, auf  $10^{-2}$  aufgerundet).

(3) Für  $8/10 \leq \delta < 1$  sind alle zehn Strategiepaare  $s$  teilspielperfekt. Welche davon approximieren das gewünschte Ziel  $w$  am besten?

(1) Die Auszahlungen der vereinbarten Aktionsfolge  $a \in A^{\mathbb{N}}$  sind

$$u(a) = (1 - \delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(a_n)$$

$$= \frac{1-\delta}{1-\delta^5} [g(a_0) + \delta g(a_1) + \delta^2 g(a_2) + \delta^3 g(a_3) + \delta^4 g(a_4)]$$

$$\rightarrow \frac{1}{5} [g(a_0) + g(a_1) + g(a_2) + g(a_3) + g(a_4)] \quad \text{für } \delta \nearrow 1.$$

Unter den  $4^5 = 1024$  Möglichkeiten sehen wir sofort 10 Lösungen:

- $s_0: AAABB = 01\ 01\ 01\ 10\ 10,$
- $s_1: AABBA = 01\ 01\ 10\ 10\ 01,$
- $s_2: ABBAA = 01\ 10\ 10\ 01\ 01,$
- $s_3: BBAAA = 10\ 10\ 01\ 01\ 01,$
- $s_4: BAAAB = 10\ 01\ 01\ 01\ 10,$
- $s_5: AABAB = 01\ 01\ 10\ 01\ 10,$
- $s_6: ABABA = 01\ 10\ 01\ 10\ 01,$
- $s_7: BABAA = 10\ 01\ 10\ 01\ 01,$
- $s_8: ABAAB = 01\ 10\ 01\ 01\ 10,$
- $s_9: BAABA = 10\ 01\ 01\ 10\ 01.$

Wir notieren mit  $A = 01$  und  $B = 10$ , ob Alice oder Bob im Vorteil ist. Weitere Lösungen gibt es nicht! Für  $\sum_{n=0}^4 g^1(a_n) + g^2(a_n) = 20$  muss  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{01, 10\}$  gelten. Um das Ziel  $u(a) \rightarrow w$  für  $\delta \nearrow 1$  zu erreichen, muss genau dreimal 01 und zweimal 10 vorkommen.

(2) Wir betrachten  $s_0: AAABB$  als erste der zehn Vereinbarungen. Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$01\ 01\ 01\ 10\ 10 \dots \mapsto \frac{1-\delta}{1-\delta^5} [(\delta^0 + \delta^1 + \delta^2)(\alpha, \beta) + (\delta^3 + \delta^4)(\beta, \alpha)]$$

$$\underline{1}1\ 00\ 00\ 00\ 00 \dots \mapsto (1 - \delta)(1, 1)$$

$$0\underline{0}\ 00\ 00\ 00\ 00 \dots \mapsto (0, 0)$$

Wir erhalten daraus die beiden notwendigen Ungleichungen

$$(1 + \delta + \delta^2)\alpha + (\delta^3 + \delta^4)\beta \geq 1 - \delta^5,$$

$$(1 + \delta + \delta^2)\beta + (\delta^3 + \delta^4)\alpha \geq 0.$$

Die erste Ungleichung ist für  $\alpha = 5$  und  $\beta = -1$  immer erfüllt, denn

$$(1 + \delta + \delta^2)\alpha + (\delta^3 + \delta^4)\beta \geq \alpha + 2\beta = 3 \geq 1 - \delta^5.$$

Das ist anschaulich plausibel, denn hier ist Alice offensichtlich im Vorteil. Wir müssen uns also nur noch um die zweite Ungleichung kümmern: Bob geht (dreifach!) in Vorleistung und muss dafür belohnt werden.

Wir betrachten nun die Grim-Trigger-Strategie zu allen fünf zyklischen Umordnungen  $AAABB, AABBA, ABBAA, BBAAA, BAAAB$ , denn diese treten gegenseitig als Strategien in Teilspielen auf. Wir erhalten zehn Ungleichungen, von denen jede zweite automatisch erfüllt ist.

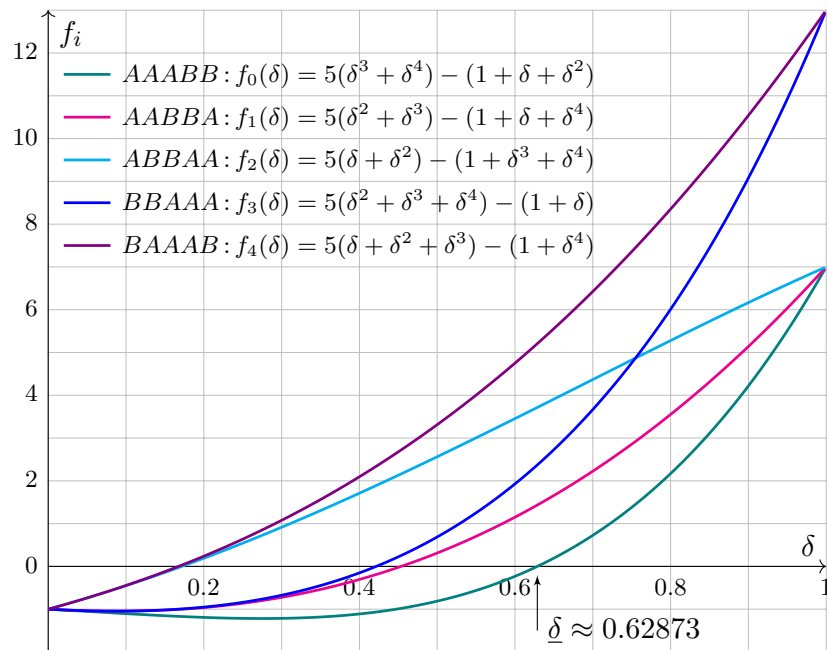
Die fünf relevanten Ungleichungen  $f_i(\delta) \geq 0$  schreiben wir explizit aus. Die folgende Abbildung zeigt die Graphen von  $f_i(\delta)$  für  $0 \leq \delta \leq 1$ . Graphisch oder numerisch finden wir den kritischen Wert  $\underline{\delta} \approx 0.62873$ . Für  $0.63 \leq \delta \leq 1$  sind alle Ungleichungen erfüllt und  $s$  teilspielperfekt.

Genauso verfahren wir im zweiten Fall mit den fünf zyklischen Umordnungen  $AABAB, ABABA, BABAA, ABAAB, BAABA$ . Graphisch oder numerisch erhalten wir den kritischen Wert  $\underline{\delta} \approx 0.51065$ . Für  $0.52 \leq \delta \leq 1$  sind alle Ungleichungen erfüllt und  $s$  teilspielperfekt.

(3) Zur Genauigkeit vergleichen wir nur Alice' Auszahlungen  $v_i(\delta)$ . Für  $0.8 \leq \delta \nearrow 1$  gilt  $v_i(\delta) \rightarrow 13/5$ . Graphisch konvergiert  $v_6 \searrow 13/5$  am schnellsten, gefolgt von  $v_4 \nearrow 13/5$ ; diese dominieren alle anderen. Die Asymptotik kann man nun geduldig nachrechnen. (Übung!)

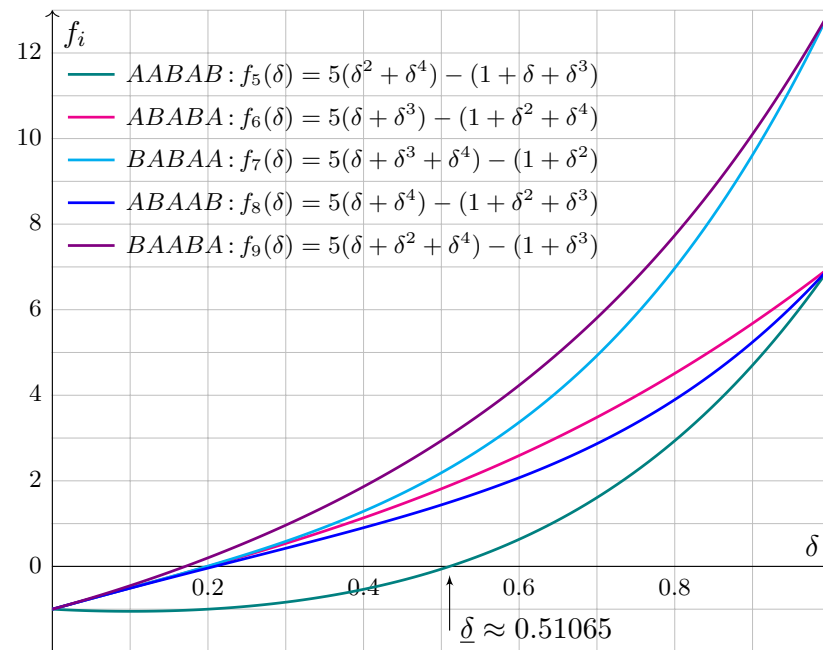
### Rationale Approximation: explicit is beautiful.

K229  
Erläuterung



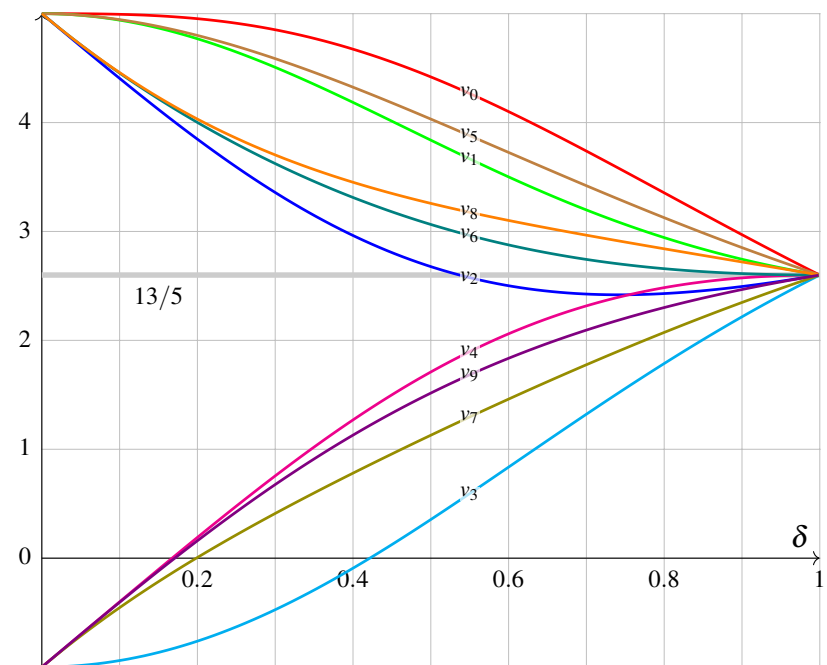
### Rationale Approximation: explicit is beautiful.

K230  
Erläuterung



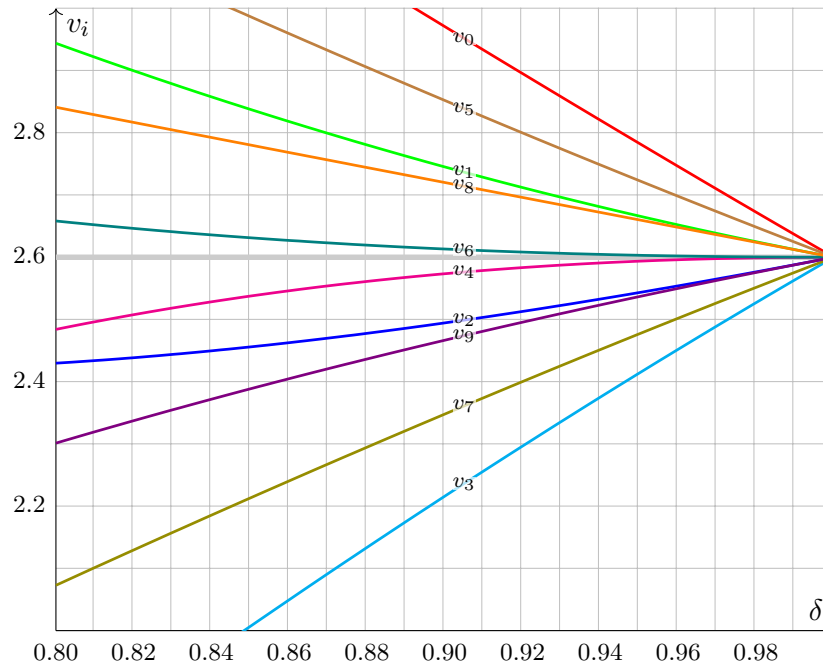
### Rationale Approximation: explicit is beautiful.

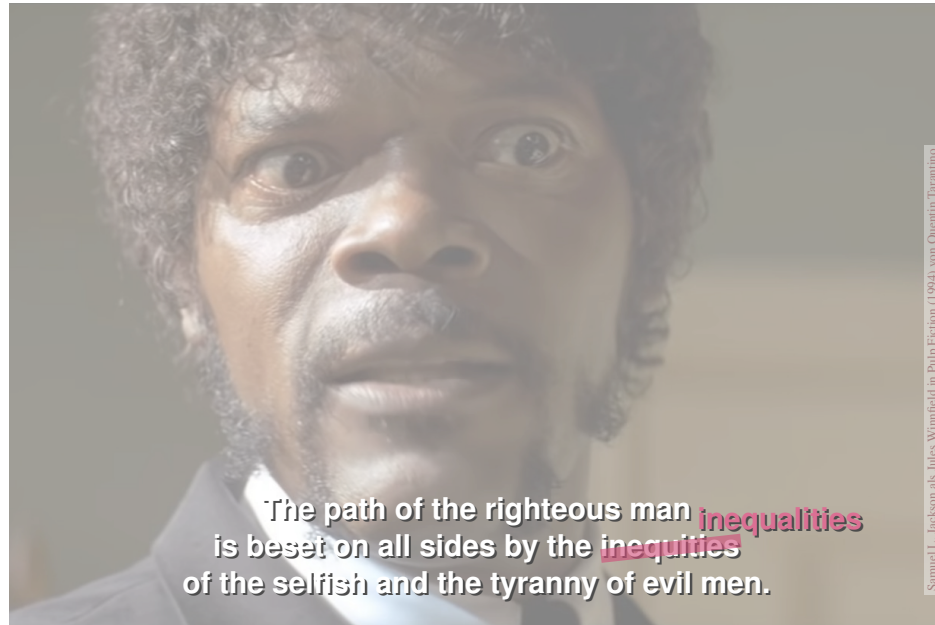
K231  
Erläuterung



### Rationale Approximation: explicit is beautiful.

K232  
Erläuterung





Durch dieses Kapitel zieht sich eine simple Grundidee als roter Faden: Die Spieler vereinbaren ein gewünschtes Verhalten zum allseitigen Vorteil und interpretieren diesen „rechten Pfad“ als soziale Norm. Zugleich vereinbaren sie Sanktionen im Falle von Abweichungen. Die Vereinbarung ist genau dann stabil, wenn sie teilspielperfekt ist, also kein Spieler zu keinem Zeitpunkt eine Abweichung lukrativ findet.

Hierzu betone ich nochmals die Voraussetzungen unseres Modells:

- Vollständige Information über Aktionen und Auszahlungen.
- Alle bisherigen Aktionen sind offen und für alle Spieler sichtbar.

In realen Anwendungen ist dies meist nicht erfüllt: Die Spieler kennen nicht die gegenseitigen Nutzenfunktionen (individuelle Bewertungen), und ihre Aktionen können verdeckt sein und somit kaum nachprüfbar.

In einigen wichtigen Anwendungen sind diese Voraussetzungen jedoch weitgehend erfüllt, etwa bei langfristigen Verträgen zwischen Lieferant und Käufer: Der Vertrag regelt hinreichend genau die gegenseitigen Forderungen und Verpflichtungen sowie Konventionalstrafen.

Welche Auszahlungen  $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$  sind teilspielperfekt realisierbar? Nashs Folk Theorem nennt zwei Kriterien, zusammen hinreichend.

Die **kollektive Erreichbarkeit** ist offensichtlich auch notwendig. An dieser Bedingung können wir also nichts weiter optimieren.

Die **individuelle Rationalität** hingegen können wir verbessern, indem wir den Grundwert  $g^i(z)$  mit  $z \in \text{NE}(g) \subseteq \text{NE}(\bar{g}) \subseteq \text{CE}(g)$  reduzieren.

Jeder Spieler  $i$  kann für sich folgenden **Sicherheitswert** garantieren:

$$\text{val}^i(g) := \max_{a^i \in A^i} \min_{a^{-i} \in A^{-i}} g^i(a^i; a^{-i})$$

Seine Gegenspieler können ihm schlimmstenfalls folgendes androhen:

$$\Theta^i(g) := \min_{a^{-i} \in A^{-i}} \max_{a^i \in A^i} g^i(a^i; a^{-i})$$

Allgemein gilt „Maximin  $\leq$  Minimax“ (Lemma E2B), also  $\text{val}^i(g) \leq \Theta^i(g)$ . Diese Drohung lässt sich tatsächlich glaubwürdig implementieren, das ist die Aussage des folgenden, allgemeinen Satzes.

### Satz K2F: Nash Folk Theorem, allgemeine Formulierung

Wir iterieren unendlich oft ein endliches Spiel  $g: A = \prod_{i \in I} A^i \rightarrow \mathbb{R}^I$ , diskontiert mit Faktoren  $\delta_i \in [0, 1[$  nahe 1. Gegeben seien hierzu:

**Kollektive Erreichbarkeit:** Sei  $a \in [A]$  eine korrelierte Strategie, also eine Konvexkombination  $a = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda a_\lambda$  reiner Aktionsvektoren  $a_\lambda \in A$ .

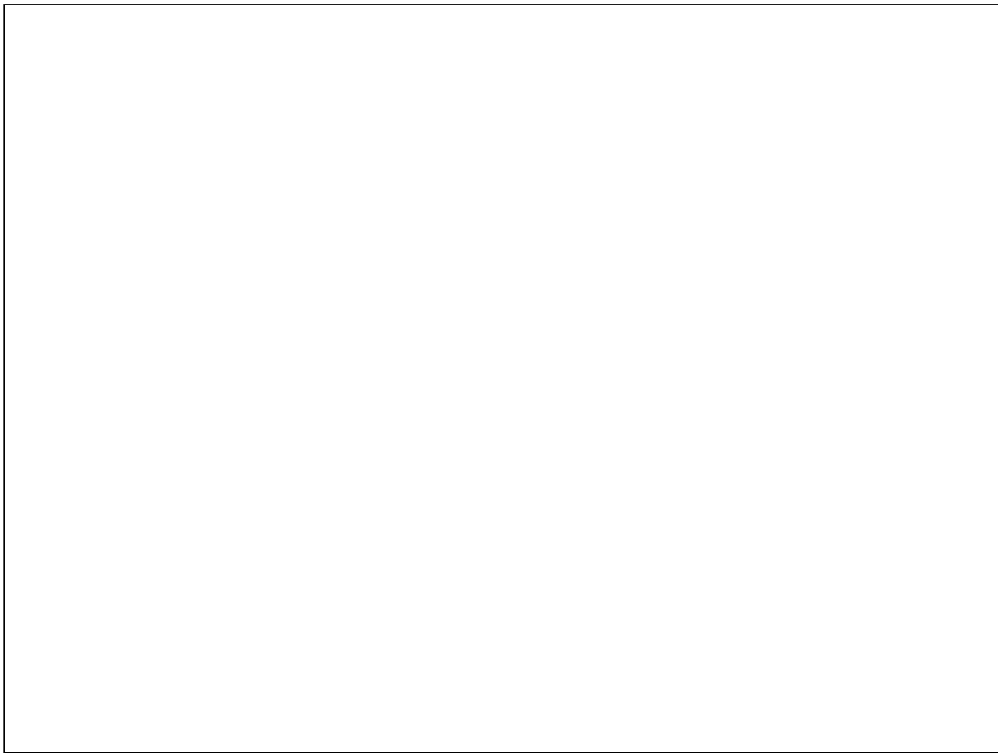
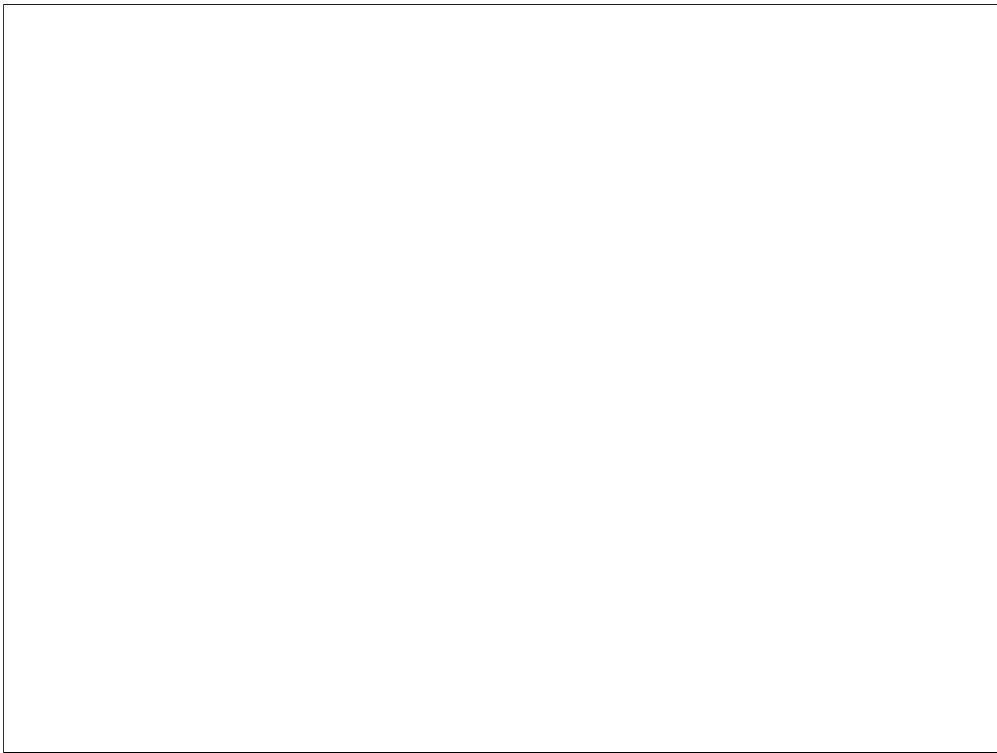
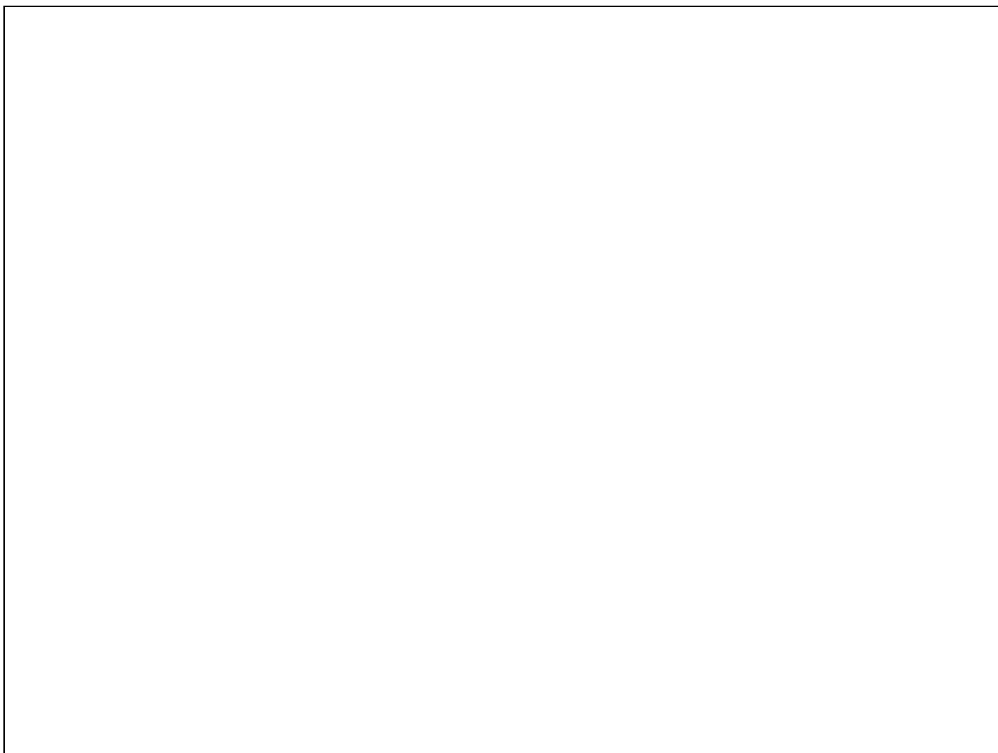
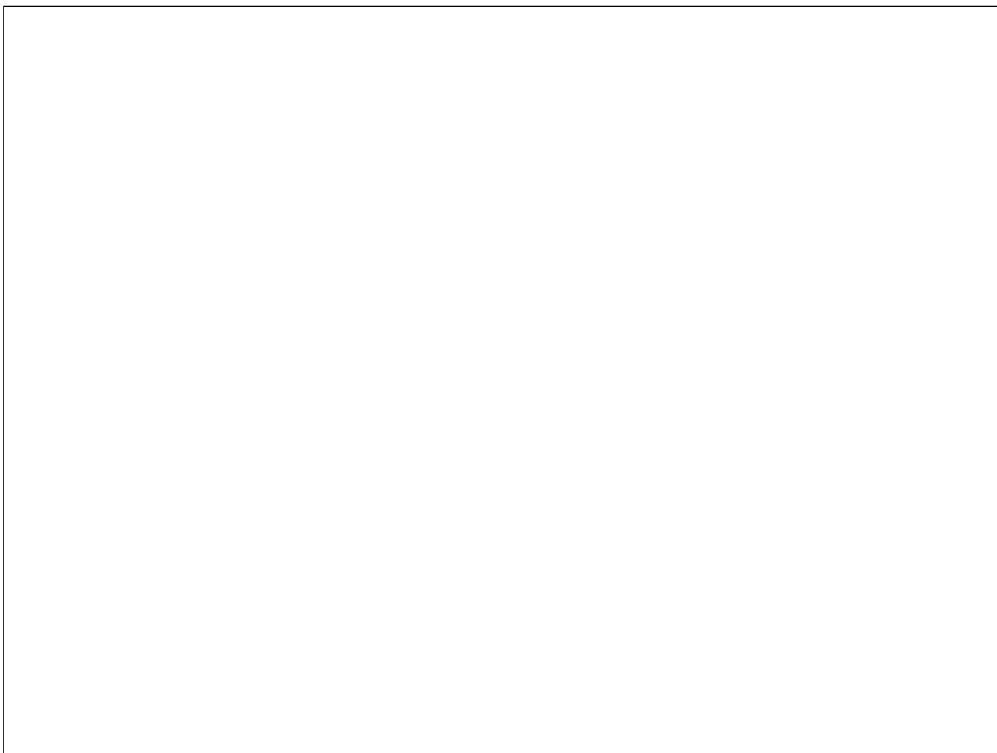
**Starke individuelle Rationalität:** Für jeden Spieler  $i \in I$  liegt  $g^i(a)$  über dem Drohpunkt  $\Theta^i(g) := \min_{a^{-i} \in A^{-i}} \max_{a^i \in A^i} g^i(a^i; a^{-i})$ .

Dann ist die Auszahlung  $g(a) \in \mathbb{R}^I$  teilspielperfekt realisierbar.

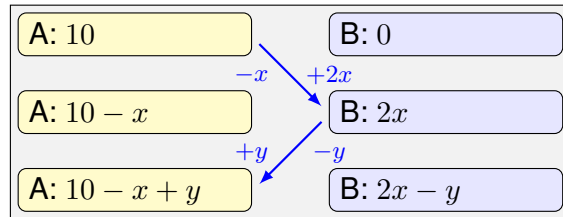
Für jedes Nash-Gleichgewicht  $z \in \text{NE}(\bar{g})$  gilt  $g^i(z) \geq \Theta^i(g)$ . (Warum?) Unsere Grundversion wird hier also verallgemeinert (und meist strikt).

Teilspielperfekte Realisierungen werden dadurch deutlich komplizierter: Abweichungen müssen bestraft werden, wie zuvor, doch die Bestrafung ermöglicht Abweichungen, und auch diese müssen bestraft werden. . .

Zur Ausführung siehe D. Fudenberg, J. Tirole: *Game Theory*, Kapitel 5 und M.J. Osborne, A. Rubinstein: *A Course in Game Theory*, Kapitel 8.

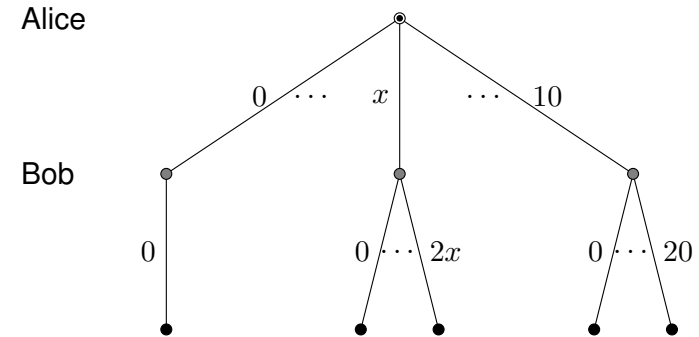


Wir erinnern an unser Experiment aus der Einführung (Kapitel A): Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung. Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.

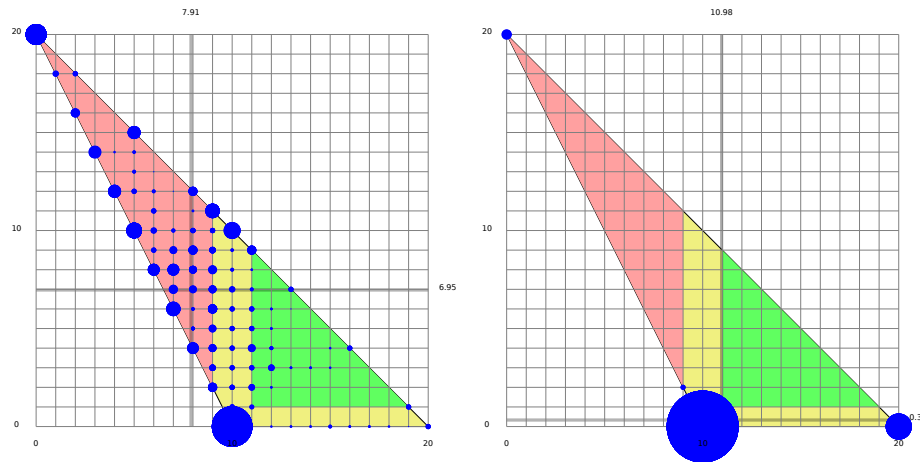


Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€. Erster Zug: A schickt an B einen frei wählbaren Betrag  $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$ . Dieser Betrag  $x$  wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben. Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag  $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$ . Dieser Betrag  $y$  wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben. Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.

Wir können dieses Spiel nun übersichtlich als Spielbaum darstellen:



$X = \emptyset \sqcup \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 10\} \sqcup \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 2x\}$   
Auszahlung  $u(x, y) = (10 - x + y, 2x - y)$  auf terminalen Zuständen.  
Aktionen / Strategien für Alice sind  $s^1 \in S^1 = A^1 = \{0, 1, \dots, 10\}$ .  
Im Zustand  $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$  hat Bob die Aktionen  $A_x^2 = \{0, 1, \dots, 2x\}$ .  
Strategien für Bob sind demnach Tupel der Form  $s^2 \in S^2 = \prod_{x \in A^1} A_x^2$ , also Abbildungen  $s^2: \{0, 1, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $0 \leq s^2(x) \leq 2x$ .  
Auszahlung  $u: S^1 \times S^2: u(s^1, s^2) = (10 - s^1 + s^2(s^1), 2s^1 - s^2(s^1))$ .



Sie sehen hier zwei Momentaufnahmen der Studentpopulation vom April 2018, und zwar die erste und fünfte Durchführung dieses Spiels. Welches Spielverhalten erwarten Sie bei un/endlicher Wiederholung? Varianten: (a) ohne Rollenwechsel und (b) mit alternierenden Rollen.

Das ist ein einfaches aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns. Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen? Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen. Interessanterweise fehlen hier alle üblichen Kontrollmechanismen. Bei wiederholtem Spiel entsteht eine **soziale Kontrolle** von selbst. Bekannte soziale Normen wie „Ehrlichkeit“ und „Vertrauen“ sind im iterierten Spiel stabil und führen tatsächlich zu beiderseitigem Vorteil. Im einfachen oder endlich wiederholten Spiel hingegen gilt dies nicht! Nashs Folk Theorem zeigt uns **Möglichkeiten**. Spieler A muss am Ende mindestens 10€ erhalten, eventuell plus Zinsen. Wie hoch ein „fairer“ Zins sein sollte, sagt uns der Satz nicht. Nullzins oder Wucher sind gleichermaßen möglich. Der Zins ist Teil der sozialen Konvention.

**Aufgabe:** Seien  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  (normale oder extensive) endliche Spiele mit vollständiger Information und  $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$  ihre Hintereinanderhängung.

- (1) Folgt aus  $\#PNE(\Gamma_1) = n$  und  $\#PNE(\Gamma_2) = 1$  immer  $\#PNE(\Gamma) = n$ ?
- (2) Folgt aus  $\#PNE(\Gamma_1) = 1$  und  $\#PNE(\Gamma_2) = n$  immer  $\#PNE(\Gamma) = n$ ?
- (3) Wie hängen  $PNE(\Gamma_1 * \Gamma_2)$  und  $PNE(\Gamma_1) * PNE(\Gamma_2)$  zusammen?

**Lösung:** (1) Ja. Das folgt sofort aus dem Satz von Zermelo (J1D): Rückwärtsinduktion findet alle Gleichgewichte, die  $n$  offensichtlich.

(2) Nein. Sie kennen bereits einige konkrete Gegenbeispiele. Die nächste Aufgabe fragt nach einer minimalen Konstruktion.

(3) Wir erinnern an Satz K1c: Allgemein gilt

$$PNE(\Gamma_0 * \Gamma_1 * \dots * \Gamma_N) \supseteq PNE(\Gamma_0) * PNE(\Gamma_1) * \dots * PNE(\Gamma_N).$$

Haben  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  jeweils nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht, so gilt Gleichheit. Andernfalls kann die Inklusion „ $\supseteq$ “ strikt sein.

- Aufgabe:** (1) Konstruieren Sie Spiele  $g_1, g_2 : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}^2$  mit  $NE(g_1) = \{00\}$  und  $NE(g_2) = \{00, 11\}$ , aber  $\#PNE(g_1 * g_2) \geq 3$ .
- (2) Zeichnen Sie den Spielbaum  $\Gamma = g_1 * g_2$  mit allen Informationen.
  - (3) Bestimmen Sie explizit die Menge  $PNE(\Gamma)$  aller Gleichgewichte. Welche Auszahlungen können teilspielperfekt erreicht werden?
  - (4) Welchen Auszahlungszuwachs können Sie maximal erzielen im Vergleich von  $PNE(g_1 * g_2)$  und  $NE(g_1) * NE(g_2)$ ?

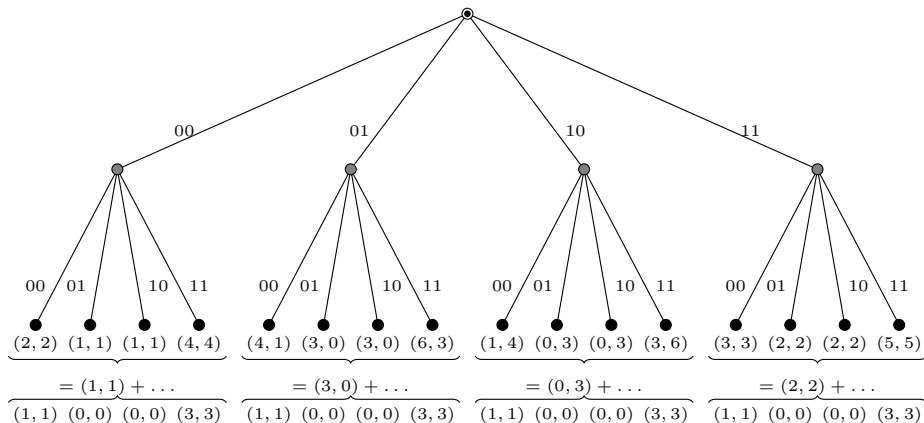
**Lösung:** (1) Hier ist ein einfach gebautes Beispiel:

$g_1 =$	=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: none;"></td><td style="border: none;">B</td><td style="border: none;">0</td><td style="border: none;">1</td></tr> <tr><td style="border: none;">A</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;">1</td><td style="border: none;">0</td></tr> <tr><td style="border: none;">0</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;">1</td><td style="border: none;">3</td></tr> <tr><td style="border: none;">1</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;">0</td><td style="border: none;">2</td></tr> </table>		B	0	1	A		1	0	0		1	3	1		0	2
	B	0	1															
A		1	0															
0		1	3															
1		0	2															

	B	0	1
A		1	0
0		1	0
1		0	3

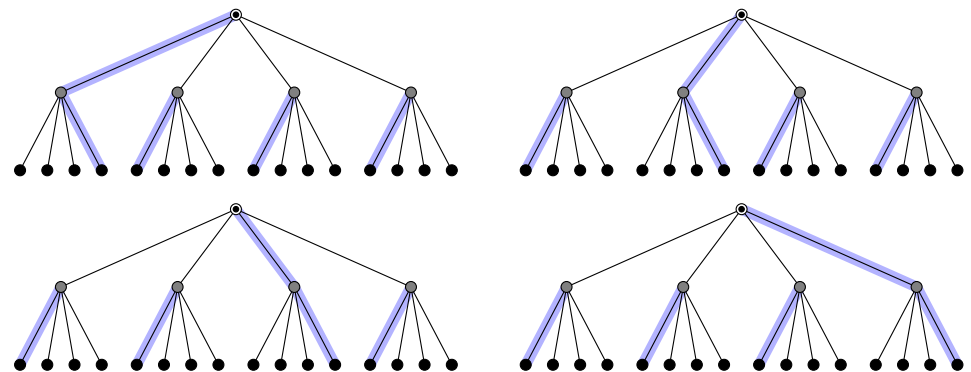
Hier hat  $g_1$  nur das Gleichgewicht 00 wie das Gefangenendilemma,  $g_2$  hat 00 und 11 (und ein gemischtes) wie Bach-oder-Strawinsky.

(2) Der Spielbaum  $\Gamma = g_1 * g_2$  sieht wie folgt aus:



Dank  $NE(g_1) * NE(g_2) \subset PNE(\Gamma)$  hat der Spielbaum zwei offensichtliche Gleichgewichte: 00 in der ersten Stufe gefolgt von immer 00 oder immer 11 in der zweiten Stufe. Die zugehörige Auszahlung ist (2, 2) bzw. (4, 4).

- (3) Wir konstruieren alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion J1D: In der zweiten Stufe gibt es  $2^4 = 16$  Gleichgewichte. In der ersten Stufe wählen Alice und Bob hieraus aus: Gleichgewichtsauszahlungen sind neben (2, 2) und (4, 4) nun zusätzlich (6, 3) und (3, 6) sowie (5, 5). Hierzu nutzen wir die folgenden teilspielperfekten Gleichgewichte:



Gibt es weitere Gleichgewichte? weitere Gleichgewichtsauszahlungen? mit gemischten Gleichgewichten? Führen Sie dies zur Übung aus!

Wir spielen zweimal nacheinander das folgende Spiel  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

	B	0	1
A			
0	1	1	0
1	0	0	3

**Aufgabe:** (0) Bestimmen Sie  $NE(g)$ . (1) Bestimmen Sie  $PNE(g * g)$ .  
 (1a) Wie viele reine, teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte gibt es?  
 (1b) Welche Auszahlungen in  $\mathbb{R}^2$  sind teilspielperfekt realisierbar?

☺ Wie der Titel andeutet, ist die Antwort überraschend komplex. Wenn Sie gerne programmieren, dann können Sie ein Skript schreiben, das die reinen Nash-Gleichgewichte von  $g_1, \dots, g_n$  bestimmt und damit alle teilspielperfekten Gleichgewichte von  $g_1 * \dots * g_n$  auflistet, oder etwas übersichtlicher zumindest die Gleichgewichtsauszahlungen.

**Lösung:** (0) Wir finden  $NE(g) = \{00, 11\}$  mit den obigen Gleichgewichtsauszahlungen  $g(0, 0) = (1, 1)$  und  $g(1, 1) = (3, 3)$ .

(1) Wir finden alle teilspielperfekten Gleichgewichte  $(s^1, s^2) \in PNE(g * g)$  durch Rückwärtsinduktion (Zermelo J1D): An jedes der vier Blätter 00, 01, 10, 11 der ersten Runde können wir jeweils eines der beiden Gleichgewichte 00, 11 der zweiten Runde hängen. Wir erhalten so die folgenden 16 Auszahlungsmatrizen, jeweils dieselbe für Alice und Bob:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

(1a) So finden wir insgesamt 26 teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte.  
 (1b) Die teilspielperfekt realisierbaren Auszahlungen des Spiels  $g * g$  sind (2, 2) zweimal und (4, 4) sechzehnmal sowie (6, 6) achtmal.

Im ursprünglichen Gefangenendilemma stehen Bonnie und Clyde vor der Wahl zusammenzuhalten (*cooperate*) oder zu verpfeifen (*defect*). Die Konsequenz sind folgende Gefängnisstrafen:

	Clyde	cooperate	defect
Bonnie			
cooperate	-1	-1	0
defect	0	-9	-6

Die beiden sind überzeugt, dass sie ihr Leben lang ein kriminelles Paar bleiben, sie sind schließlich Bonnie und Clyde, das ist ihr Markenkern! Daher gehen sie davon aus, mit gewisser Wkt  $\delta \in [0, 1]$  immer wieder in diese missliche Situation zu geraten, als Berufsrisiko! Sie betrachten das Dilemma daher als wiederholtes Spiel und vereinbaren immer zusammenzuhalten, gemeint ist *ewige Verdammnis / Grim Trigger*.

**Aufgabe:** Für welche Wkt  $\delta$  ist diese Vereinbarung glaubwürdig?

**Lösung:** Sie können die Strategie erneut durchrechnen (Übung!) oder unsere Zusammenfassung aus Satz K1A nutzen. Dazu bringen wir das Spiel in die dort genutzte, besonders einfache Form. Wir normieren die Auszahlungen auf 0 und 1 durch einen affinen Isomorphismus:

	Clyde	0	1
Bonnie			
0	0	0	-3/5
1	-3/5	6/5	1

Bereits für  $\delta \geq \underline{\delta} := 1 - 1/\alpha = 1/6$  ist Grim Trigger teilspielperfekt! Diese Geduldsschwelle ist erstaunlich gering, das heißt, sie ist oft erfüllt. Anschaulich liegt das daran, dass der Anreiz zu verpfeifen gering ist.

Sei  $\Gamma$  die unendliche Wiederholung des Stufenspiels  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

		B	
		0	1
A	0	0	$\beta$
	1	$\alpha$	1

mit Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \delta < 1$  und der diskontierten Auszahlung

$$u: \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$$

Wir untersuchen, ob das folgende Strategiepaar  $s = (s_A, s_B)$  ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, kurz  $s \in \text{PNE}(\Gamma)$ .

Die Strategien  $s_A, s_B$  sind wie folgt definiert: Im ersten Zug spiele 1. Haben im letzten Zug beide dasselbe gespielt, spiele 1; andernfalls 0.

- Aufgabe:** (1) Gilt für  $\Gamma$  das Prinzip der einmaligen Abweichung?  
 (2) Formulieren Sie  $s_A$  und  $s_B$  explizit als Funktion des Zustands  $x$ .  
 (3) Unter welchen Bedingungen ist  $s = (s_A, s_B)$  teilspielperfekt?  
 (4) Wir betrachten die Parameter  $(\alpha, \beta) = (3/2, -1)$  und  $\delta = 0.99$ .  
 (a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte  $\text{NE}(\bar{g})$  des Spiels  $\bar{g}$ .  
 (b) Welche Gesamtauszahlung  $u^1 + u^2$  ist maximal erreichbar mit einem teilspielperfekten Gleichgewicht  $s \in \text{PNE}(\Gamma)$ ? Nennen Sie explizit ein maximierendes Gleichgewicht.  
 (5) Dieselben Fragen (a,b) für  $(\alpha, \beta) = (4, -1)$  und  $\delta = 0.99$ .

- Lösung:** (1) Das Prinzip der einmaligen Abweichung ist anwendbar, denn die Auszahlungen  $u(x) \in \mathbb{R}^2$  sind stetig in  $x \in \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}}$ .  
 (2) Wir definieren  $s_A = s_B: \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$  durch  $\emptyset \mapsto 1$  sowie  $\dots 00 \mapsto 1$  und  $\dots 11 \mapsto 1$  sowie  $\dots 01 \mapsto 0$  und  $\dots 10 \mapsto 0$ .

(3) Wir nutzen das Prinzip der einmaligen Abweichung.

(3a) Für die Vorgeschichte  $\emptyset$  oder  $\dots 00$  oder  $\dots 11$  gilt für Alice / Bob:

Fortsetzung 11 11 11 11 ...  $u^1 = \text{const} + \delta^n(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$

Abweichung 01 00 11 11 ...  $u^1 = \text{const} + \delta^n(\alpha + 0 + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$

Wir finden so die notwendige Bedingung  $1 + \delta \geq \alpha$ .

(3b) Für die Vorgeschichte  $\dots 01$  oder  $\dots 10$  gilt für Alice / Bob:

Fortsetzung 00 11 11 11 ...  $u^1 = \text{const} + \delta^n(0 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$

Abweichung 10 00 11 11 ...  $u^1 = \text{const} + \delta^n(\beta + 0 + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$

Wir finden so die notwendige Bedingung  $\delta \geq \beta$ .

Jede dieser Ungleichungen  $1 + \delta \geq \alpha$  und  $\delta \geq \beta$  ist notwendig, damit Abweichungen nicht belohnt, sondern bestraft werden.

Gemeinsam sind beide Ungleichungen hinreichend für  $s \in \text{PNE}$ .

😊 Glücklicherweise haben wir präzise Notation und effiziente Technik: Das Prinzip der einmaligen Abweichung vereinfacht die Analyse wie immer enorm! Damit wird die Diskussion aller Fälle ein Kinderspiel.

- (4a) Die Strategie 0 dominiert 1 strikt. Dies gilt sowohl für Alice als auch für Bob sobald  $\alpha > 1$  und  $\beta < 0$ . Damnach gilt  $\text{NE}(\bar{g}) = \{00\}$ .  
 (4b) Das obige Strategiepaar  $(s_A, s_B)$  ist teilspielperfekt und erreicht die Gesamtauszahlung  $2/(1 - \delta) = 200$ . Wegen  $1 + 1 > \alpha + \beta > 0 + 0$  ist dies maximal in jeder Runde, somit auch insgesamt.

(5a) Die Strategie 0 dominiert 1 strikt, wie zuvor, also  $\text{NE}(\bar{g}) = \{00\}$ .

☹️ Unser oben untersuchtes Strategiepaar *Ewige Harmonie*  $(s_A, s_B)$  ist nun nicht mehr teilspielperfekt, denn kurzfristige Gewinnmitnahme wird nur eine Runde lang bestraft und ist somit insgesamt lukrativ.

(5b) Es wird abwechselnd 01 und 10 gespielt mit Gesamtauszahlung  $(\alpha + \beta)/(1 - \delta) = 300$ . Wegen  $\alpha + \beta > 1 + 1 > 0 + 0$  ist dies maximal. Als teilspielperfektes Gleichgewicht wird dies realisiert, indem jede Abweichung durch ewige Verdammnis 00 00 00 ... bestraft wird, also durch Rückfall auf das Nash-Gleichgewicht  $00 \in \text{NE}(\bar{g})$ .

😊 Das ist die vertraute Grim-Trigger-Strategie

$$(s'_A, s'_B) = \text{Grim}(01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 10\ \dots, 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \dots)$$