

## Kapitel J

# Dynamische Spiele und teilspielperfekte Gleichgewichte nach Reinhard Selten

*The great successes of game theory in economics have arisen in large measure because game theory gives us a language for modelling and techniques for analyzing specific dynamic competitive interactions.*

David M. Kreps, *Game Theory and Economic Modelling*

# Inhalt dieses Kapitels J

- 1 Dynamische Spiele in kybernetischer Form
  - Wie formalisieren wir dynamische Spiele?
  - Rückwärtsinduktion und Satz von Zermelo
  - Erste Anwendungsbeispiele
- 2 Dynamische Spiele in extensiver Form
  - Spielbäume und graphische Darstellung
  - Dynamische Spiele in extensiver Form
  - Das Prinzip der einmaligen Abweichung
- 3 Unvollständige Information und perfekte Erinnerung
  - Dynamische Spiele mit unvollständiger Information
  - Perfekte Bayes–Gleichgewichte
  - Im/perfekte Erinnerung
- 4 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
  - Schneeballduell und Hundertfüßlerspiel

# Motivation und Überblick

In den vorigen Kapiteln haben wir **statische Spiele** untersucht. Die strategische Normalform erlaubt eine konzise Beschreibung:

$$u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$$

Das entspricht Situationen, in denen die Akteure gleichzeitig handeln, oder zumindest in Unkenntnis des Handelns der anderen Akteure.

Für viele Spiele ist dieses spezielle Modell vollkommen angemessen, etwa Schere-Stein-Papier und viele der zuvor diskutierten Beispiele.

Für andere Spiele wiederum ist diese Beschreibung nicht realistisch: Spiele mit zeitlicher Struktur, in denen Spieler nacheinander ziehen und auf vorige Züge der Gegenspieler reagieren können / wollen / müssen.

Wir wenden uns nun dieser Erweiterung zu **dynamischen Spielen** zu. Ich beginne, wie immer, mit einführenden Beispielen. Diese sind sehr einfach, umreißen aber anschaulich Tragweite und Schwierigkeiten.

Anschließend werden wir diese Spiele formalisieren, dazu geeignete Lösungskonzepte präzisieren und mit ersten Anwendungen illustrieren.

Es ist keineswegs offensichtlich, wie wir die vielgestaltigen Einzelfälle in geeigneter **Beschreibung** zusammenfassen und formalisieren können.

Wir diskutieren dies anhand von zwei sehr ähnlichen Modellen:

- 1 Physikalische Vorbilder suggerieren ein dynamisches System unter dem Einfluss von Spieleraktionen und Zufallszügen.
- 2 Spielbäume führen zu dynamischen Spielen in extensiver Form. Diese Beschreibung ist in der Spieltheorie weit verbreitet.

Ein wichtiger Schritt ist die Verfeinerung von Nash–Gleichgewichten zu **teilspielperfekten Gleichgewichten**. Damit können wir viele Konfliktsituationen realistisch modellieren und wesentlich genauer analysieren.

In endlichen Spielen hilft **Rückwärtsinduktion** J1D nach Ernst Zermelo, für unendliche Spiele das **Prinzip der einmaligen Abweichung** J2D.

Häufig haben Spieler nur **unvollständige Information**, und dies ist ein wichtiger Aspekt des Spiels. Hierzu will ich die ersten Begriffe einführen, aber eine genauere Untersuchung auf später verschieben.

# Von statischen zu dynamischen Spielen

Info \ Zeit	vollständige Info, deterministisch	unvollständige Info, probabilistisch
statisch, Normalform	Nash, $NE \supseteq DNE$	Harsanyi, $BE \supseteq DBE$
dynamisch, Extensivform	Selten, $PNE \supseteq PDNE$	Selten, $PBE \supseteq PDBE$



Nash, Harsanyi und Selten erhielten 1994 den Wirtschafts-Nobelpreis für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen.

Das Kürzel NE steht für Nash-Gleichgewicht / *Nash equilibrium*, entsprechend BE für Bayes-Gleichgewicht / *Bayes equilibrium*. Das Präfix D steht für (schwach) dominant / *(weakly) dominant*, und P steht abkürzend für (teilspiel-)perfekt / *(subgame) perfect*.

# Von statischen zu dynamischen Spielen

Wir führen in diesem Kapitel bewährte Ideen und Techniken zusammen, die in der Einführung (Kapitel A) bereits an Beispielen illustriert wurden:

In einem kombinatorischen Spiel (Kapitel C) ziehen zwei Spieler immer streng abwechselnd, das vereinfacht die Beschreibung und die Analyse. Wir wollen nun erlauben, dass auch gleichzeitig gezogen werden kann.

In einem Markov-Spiel (Kapitel D) spielt auch der Zufall eine Rolle. Zur Vereinfachung hatten wir zunächst nur einen Spieler zugelassen. Wir wollen nun zu mehreren Spielern übergehen, weiterhin mit Zufall.

Bei statischen Spielen (Kapitel E) haben wir mehrere Spieler, und diese ziehen gleichzeitig, wie in der Normalform  $u: \prod_{i \in I} S^i \rightarrow \prod_{i \in I} R^i$  codiert. Damit können wir Nash-Gleichgewichte erklären und berechnen.

Lineare Ungleichungen löst das Simplexverfahren (Kapitel F).

Unsere Modelle und Methoden sind zwar noch recht eingeschränkt, nichtsdestotrotz können wir sie bereits vielfältig und erfolgreich nutzen, etwa zur Untersuchung sozialer Dilemmata und evolutionärer Prozesse (Kapitel G) oder in Modellen überlappender Generationen (Kapitel H).

## Von statischen zu dynamischen Spielen

Im vorigen Kapitel I haben wir unvollständige Information untersucht: In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Informationen von zentraler Bedeutung.

Bei vielen Spielen ist zudem der zeitliche Ablauf eine wichtige Struktur. Wir haben uns bislang auf statische / strategische Spiele konzentriert. In diesem und den nächsten Kapiteln entwickeln wir erste Werkzeuge für dynamische / sequentielle / wiederholte Spiele (in extensiver Form).

Es ist dabei ein großer Vorteil, bereits auf obige Erfahrungen zu bauen: Die bewährten Ideen und Techniken leisten uns weiterhin gute Dienste. In den folgenden Kapiteln wird diese Investition reiche Früchte tragen, denn wir können damit vielzählige Situationen beschreiben und lösen.

Dieser stufenweise Aufbau erfordert reichlich Geduld und Sorgfalt, um die nötigen Zutaten zu motivieren und die Techniken zu erklären. Sein großer didaktischer Vorteil ist ein natürliches Fortschreiten der Theorie und ein harmonisches Zusammenfügen ihrer Bausteine.

# Von statischen zu dynamischen Spielen

Um unseren spieltheoretischen Rahmen frühzeitig zu vervollständigen, erkläre ich zum Schluss dieses Kapitels bereits die Grundstruktur und Leitideen zu dynamischen Spielen mit unvollständiger Information.

Die systematische Untersuchung dieser allgemeinen Problemstellung ist sehr viel umfangreicher und wird notgedrungen auf später verschoben. Immerhin können wir solche Situationen jetzt erkennen und benennen!

*Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.*

Ludwig Wittgenstein (1889-1951), *Tractatus logico-philosophicus* (1921)

Damit erreichen wir eine einheitliche Darstellung gemäß obiger Tabelle von statischen / dynamischen Spiele mit un/vollständiger Information.

Das zugehörige Analysewerkzeug zur Problemstellung sind geeignete Lösungskonzepte: Nash-Gleichgewichte und ihre Verfeinerungen. Diese werden wir anschließend an Beispielen illustrieren und üben sowie in ersten Anwendungen erproben und weiterentwickeln.

## Beispiel: einen Kuchen teilen

**Aufgabe:** Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus.

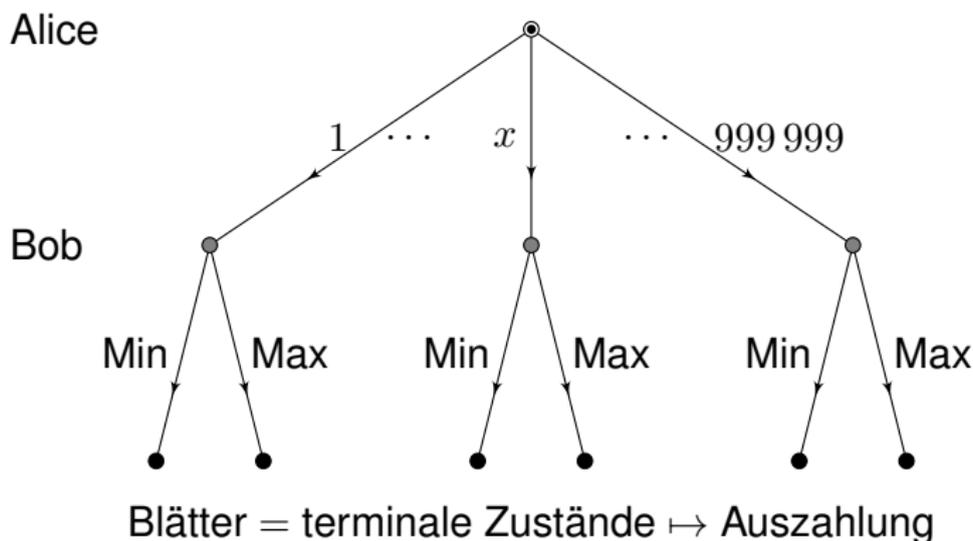
Formalisieren Sie dies als strategisches Spiel mit Strategiemengen  $S^1 = \{1, 2, \dots, 999\,999\}$  für die Aufteilung  $(1\,000\,000 - x, x)$  in mg und  $S^2 = \{\text{wähle Min, wähle Max}\}$ . Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte!

**Lösung:** (1) Wir schreiben die Auszahlungsmatrix explizit aus:

		Bob	
		wähle das Minimum	wähle das Maximum
Alice	$x < 500\,000$	$x$ $1\,000\,000 - x$	$1\,000\,000 - x$ $x$
	$x = 500\,000$	$500\,000$ $500\,000$	$500\,000$ $500\,000$
	$x > 500\,000$	$1\,000\,000 - x$ $x$	$x$ $1\,000\,000 - x$

## Beispiel: einen Kuchen teilen

(2) Wir können die zeitliche Struktur durch einen Spielbaum darstellen:



Ein Strategiepaar  $(s^1, s^2)$  legt für jede Ecke  $e$  den nächsten Zug fest. Jede Ecke  $e$  dieses Baumes definiert ein Teilspiel  $u_e : S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Teilspielperfekt: Das Paar  $(s^1, s^2)$  ist ein Gleichgewicht für jede Ecke  $e$ . Das ermöglicht eine feinere Beschreibung, hier mit selbem Ergebnis.

## Beispiel: ein Erbe teilen

**Aufgabe:** Alice und Bob erben 1 000 000€ und müssen teilen. Alice bietet  $x \in S^1 := \{1, 2, \dots, 999\,999\}$  für Bob, somit  $1\,000\,000 - x$  für sich. Bob fordert  $y \in S^2 := \{1, 2, \dots, 999\,999\}$  für sich. Bei Einigung ( $x \geq y$ ) tritt die Aufteilung  $(1\,000\,000 - x, x)$  in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.

(1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel in Normalform. Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte! Finden Sie alle Dominanzen. Was sind die Sicherheitsstrategien für Bob? für Alice?

Untersuchen Sie anschließend folgende dynamischen Varianten:

- (2) Alice bietet zuerst, notariell / öffentlich und unwiderruflich.
- (3) Bob fordert zuerst, notariell / öffentlich und unwiderruflich.

**Lösung:** (1) Die Auszahlung  $v: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$v(x, y) = \begin{cases} (1\,000\,000 - x, x) & \text{falls } x \geq y, \\ (0, 0) & \text{falls } x < y. \end{cases}$$

Jedes Paar  $(x, y) \in S^1 \times S^2$  mit  $x = y$  ist ein Nash–Gleichgewicht. Im Falle  $x > y$  kann Alice sich verbessern, im Falle  $x < y$  beide.

## Beispiel: ein Erbe teilen

(2) Das Modell aus (1) erlaubt weder zeitliche Struktur noch Festlegung. Angenommen, Alice hat sich auf ein Angebot  $(1\,000\,000 - x, x)$  festgelegt. Dann ist es für Bob rational, dieses zu akzeptieren, egal wie gering.

(3) Angenommen, Bob hat sich auf eine Forderung  $\geq y$  festgelegt. Dann ist es für Alice rational, genau diese zu erfüllen, egal wie hoch. Hier ist die Verhandlungsmacht von Bob größer als die von Alice!

Wir gehen hier davon aus, dass Alice und Bob streng rational sind.

Getreu dem Motto: „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert.“

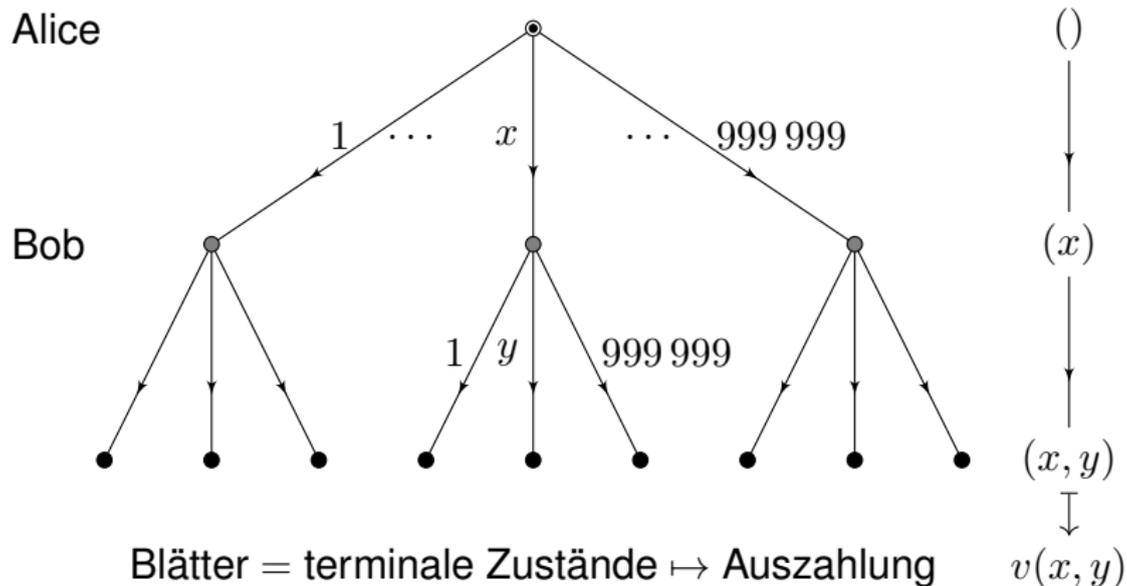
In realen Situationen werden beide verhandeln, appellieren und drohen. Liegen Angebot bzw. Forderung erst einmal fest, dann bleibt als einzige rationale Strategie nur noch, dieses zähneknirschend zu akzeptieren. Selbst ein kleiner Gewinn ist besser als gar kein Gewinn.

 Die Analyse ergibt drei gänzlich unterschiedliche Ergebnisse.

Die zeitliche Struktur ist hier wesentlich. Dies wollen wir nun ebenfalls in unseren Modellen codieren und den Begriff des Nash-Gleichgewichts entsprechend verfeinern zu teilspielperfekten Gleichgewichten.

# Beispiel: ein Erbe teilen

(2) Wir können die zeitliche Struktur durch einen Spielbaum darstellen:



Ein Strategiepaar  $(s^1, s^2)$  legt für jede Ecke  $e$  den nächsten Zug fest. Jede Ecke  $e$  dieses Baumes definiert ein Teilspiel  $u_e: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
 Teilspielperfekt: Das Paar  $(s^1, s^2)$  ist ein Gleichgewicht für jede Ecke  $e$ .

## Beispiel: ein Erbe teilen

Alice hat im ersten Zug die Aktionsmenge  $A^1_0 = A^1 = \{1, \dots, 999\,999\}$ .  
 Im zweiten Zug schaut sie nur zu, demnach gilt  $A^1_{(x)} = \{*\}$  für alle  $x$ .  
 Bob schaut im ersten Zug nur zu, also  $A^2_0 = \{*\}$ . Im zweiten Zug hat  
 Bob in jedem Zustand  $x$  die Aktionsmenge  $A^2_{(x)} = A^2 = \{1, \dots, 999\,999\}$ .

Alice wählt  $s^1_0 \in A^1_0$  und anschließend notgedrungen  $s^1_{(x)} = * \in A^1_{(x)}$ .  
 Bob wählt notgedrungen  $s^2_0 = * \in A^2_0$  und anschließend  $s^2_{(x)} \in A^2_{(x)}$ .

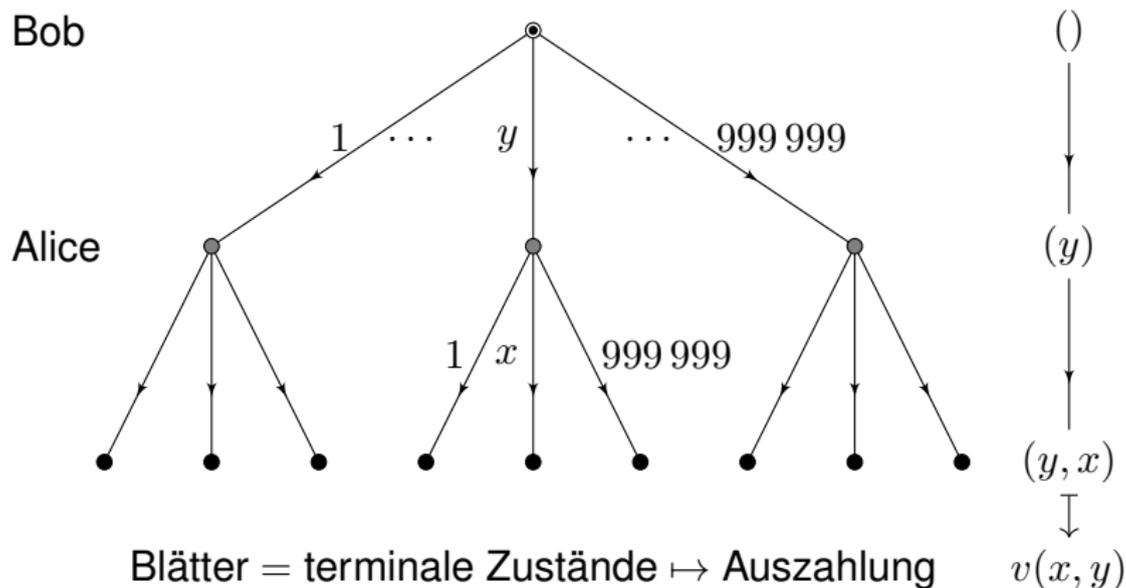
Bobs Strategie ist demnach eine Abbildung  $s^2 : A^1 \rightarrow A^2 : x \mapsto s^2_{(x)}$ .

Das Paar  $(s^1, s^2)$  bestimmt den Spielverlauf und die Auszahlung.

- 1 Was sind die Nash-Gleichgewichte  $(s^1, s^2)$  für das Spiel  $u_0$ ?  
 Alice bietet den kleinsten Betrag  $x$ , den Bob noch akzeptiert:  
 Für  $x = s^1_0$  gilt  $s^2_{(x)} \leq x$ , aber für alle  $y < x$  gilt  $s^2_{(y)} > y$ .
- 2 Was sind die Nash-Gleichgewichte  $(s^1, s^2)$  für das Teilspiel  $u_{(x)}$ ?  
 Für den vorgegebenen Startzustand  $(x)$  muss  $s^2_{(x)} \leq x$  gelten.
- 3 Was sind die teilspielperfekten Gleichgewichte  $(s^1, s^2)$ ?  
 Es gilt  $s^2_{(x)} \leq x$  für alle  $x$  und somit  $s^1_0 = 1$ .

# Beispiel: ein Erbe teilen

(3) Wir können die zeitliche Struktur durch einen Spielbaum darstellen:



Ein Strategiepaar  $(s^1, s^2)$  legt für jede Ecke  $e$  den nächsten Zug fest. Jede Ecke  $e$  dieses Baumes definiert ein Teilspiel  $u_e: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
 Teilspielperfekt: Das Paar  $(s^1, s^2)$  ist ein Gleichgewicht für jede Ecke  $e$ .

## Beispiel: ein Erbe teilen

**Aufgabe:** Untersuchen Sie die drei Varianten des Erbschaftsspiels mit  $S^1 = S^2 = \{0, 1, \dots, 1\,000\,000\}$ . Die Randfälle sind etwas kniffliger.

Im Beispiel der Erbschaft ist es vorteilhaft, als erster am Zug zu sein: Der erste Spieler kann / muss sich festlegen und dabei frei entscheiden, der zweite kann dann nur noch reagieren und das Ergebnis akzeptieren. Hier ist es vorteilhaft voranzugehen und sich unwiderruflich festzulegen. Man nennt dies Selbstbindung, engl. *commitment* oder *burning bridges*.

**Aufgabe:** Untersuchen Sie weitere Spiele mit zeitlicher Struktur. Ist es immer vorteilhaft, als erster zu ziehen und sich festzulegen?

**Lösung:** Keineswegs! Bei *Schere-Stein-Papier* ist es extrem ungünstig, geradezu lächerlich, seine Strategie festzulegen und bekanntzugeben. Hingegen wäre es unproblematisch, wenn der erste Spieler seine Wahl festlegt (auslost), diese aber dem zweiten Spieler nicht bekannt gibt.

**Aufgabe:** Analysieren Sie die beiden vorigen Spielbäume mit der Variante, dass der zweite Spieler die Aktion des ersten nicht kennt. Anschaulich: Der Brief an den Notar bleibt zunächst geheim.

## Beispiel: Investition und Rendite

Wir betrachten eine **Investition**, etwa ein Konto, Kredit, Fonds, o.ä.:

$$\text{Start } x_0, \quad \text{Dynamik } x_{t+1} = \begin{cases} x_t + r_t^+ x_t + a_t & \text{falls } x_t \geq 0, \\ x_t + r_t^- x_t + a_t & \text{falls } x_t \leq 0. \end{cases}$$

Zustand:  $x_t \in \mathbb{R}$  ist der Kontostand zu Beginn des Tages  $t \in \mathbb{N}$ .

Dynamik: Zinssatz  $r_t^\pm \in \mathbb{R}$  am Tag  $t$  für Guthaben / Schulden.

Aktion:  $a_t \in \mathbb{R}$  ist die Einzahlung / Abhebung am Tag  $t$ .

Allgemein **Differenzgleichung** mit Steuerung  $a$ :

$$x_{t+1} - x_t = f(t, x_t, a_t) \stackrel{\text{Bsp}}{=} r_t^\pm x_t + a_t$$

Zeitkontinuierlich **Differentialgleichung** mit Steuerung  $a$ :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), a(t)) \stackrel{\text{Bsp}}{=} r^\pm(t)x(t) + a(t)$$

**Allgemeiner:** Steuerung eines Finanzprodukts (Fonds, Aktien, etc.) oder eines Wirtschaftssystems (Firma, Holding, Volkswirtschaft).

Meist sind Erstellung und Kalibrierung eines Modells schwierig und die Erhebung ausreichend präziser Daten sehr aufwändig.

## Beispiel: Investition und Rendite

Ohne Spieler ist dies ein dynamisches System im klassischen Sinne. Bei nur einem Spieler handelt es sich um ein Optimierungsproblem. Bei mehreren Spielern ist dies die Grundidee der Differentialspiele. Dieses Modell ist zwar noch allzu einfach, aber durchaus illustrativ. Die Zinsrate  $r_t^\pm$  kann konstant sein, oder variabel aber deterministisch (vertraglich oder gesetzlich festgelegt) oder aber zufällig (stochastisch). Sie beeinflussen das System nur über ihren Steuerparameter  $a_t$ . Sie kennen nur die bisherige Trajektorie, nicht die Zukunft.

An der Börse begegnen Sie einer naheliegenden Verallgemeinerung: Sie verwalten Fonds  $x^1, \dots, x^N$ , also  $x \in \mathbb{R}^N$ . Die Dynamik ist wie zuvor. Der Faktor  $r_t$  entspricht den (meist zufälligen) Kursschwankungen. Die Ein- und Auszahlungen  $a_t$  entsprechen den An- und Verkäufen. Eine Handelsstrategie gibt zu jedem Zustand  $x$  die nächste Aktion vor. Für die Börse ist das Ein-Spieler-Modell sinnvoll, solange der Markt groß und jeder Spieler klein ist. Ein feineres Modell behandelt alle  $n$  Akteure. Diese beeinflussen sich gegenseitig, wie bei  $n$ -Personen-Spielen üblich.

# Kybernetik: Steuerung eines Systems

Neben finanzmathematischen Anwendungen gibt auch die Steuerung physikalischer Systeme wichtige Beispiele:

Für  $n = 1$  denke man (deterministisch oder stochastisch) an die zentrale **Steuerung** eines Autos, Schiffs, Flugzeugs, Raumschiffs, einer Drohne, oder einer Hausheizung, einer Industrieanlage, eines Kraftwerks, etc.

Der **Zustand**  $x_t \in \mathbb{R}^N$  beschreibt das System zur Zeit  $t \in \mathbb{N}$ . Darauf wirken zufällige Einflüsse  $\omega_t$  und die Steuerparameter  $a_t^i$  der Spieler:

$$x_{t+1} - x_t = f(t, x_t, \omega_t, a_t^1, \dots, a_t^n)$$

Bei kontinuierlicher Zeit  $t \in \mathbb{R}$  formulieren wir dies als **Differentialspiel**:

$$\dot{x}_t = f(t, x_t, \omega_t, a_t^1, \dots, a_t^n)$$

Sie wollen die Trajektorie in gewissen Grenzen halten oder möglichst schnell ein gewisses Ziel erreichen. Die Erreichung Ihrer Ziele wird gemessen durch kumulierte Belohnungen  $u : \{\text{Trajektorien}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  oder eine terminale Auszahlung  $u : \{\text{Endzustände}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

# Kybernetik: Steuerung eines Systems

Die **Kontrolltheorie** untersucht die Steuerung komplexer Systeme. Bei ökonomischen Systemen ist die Modellbildung meist schwer. Physikalische Systeme sind meist besser verstanden; wir verfügen über realitätsnahe, präzise Modelle und mathematische Werkzeuge.

Die Übersetzung aus dem englischen Begriff *control theory* zu deutsch *Kontrolltheorie* ist leider missverständlich und daher etwas unglücklich: Ziel ist nicht Kontrolle als Überwachung, sondern die Einflussnahme. Statt *Kontrolle* spricht man daher von *Steuerung* oder *Regelung*.

Bei mehreren Spielern ( $n \geq 2$ ) denke man an  $n$  **autonome Fahrzeuge**: Jedes wird von einem Spieler gesteuert, ihre Aktionen bestimmen den Gesamtzustand, und dieser wirkt auf die einzelnen Akteure zurück. Es entstehen typische Situationen von Konflikt und Kooperation.

Beim **autonomen Fahren** im engeren Sinne wird dies automatisiert, zum Beispiel durch mobile Roboter oder fahrerlose Transportsysteme, die sich weitgehend autonom verhalten und somit auch dezentral. Damit haben wir eine typische Situation der Spieltheorie!

# Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Wir suchen eine **einheitliche Beschreibung** (Schablone) für alle Fälle:

- Stochastische Prozesse, finanzmathematische Systeme, etc.
- Physikalische Prozesse, kybernetische Systeme, etc.
- Soziale Prozesse, ökonomisch-politische Systeme, etc.
- Kartenspiele, Brettspiele, Gesellschaftsspiele, etc.

Solch große Allgemeinheit erfordert das rechte Maß an **Abstraktion**.  
Wenn nicht *alle*, so wollen wir doch möglichst *viele* Probleme abbilden.

Zugleich wollen wir **Lösungskonzepte** präzise formulieren und dann kritisch erproben, hier insbesondere teilspielperfekte Gleichgewichte.

Ich spreche vorsichtig von *Schablone* oder *Vorlage* (engl. *template*).  
Sie soll zunächst ermöglichen, viele verschiedene Beispiele in einer gemeinsamen Sprech- und Sichtweise zu erfassen. Aufbauend wollen wir dann wiederkehrende Regeln als Sätze formulieren und beweisen.  
Zur effizienten Bearbeitung von Beispielen und Aufgaben benötigen wir zudem eine konzise Notation zur Rechnung und zur Kommunikation.

# Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Das ist das übliche **axiomatische Vorgehen** in der Mathematik:  
Wir wollen Beispiele und Einzelfälle möglichst effizient bündeln.  
Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.  
Sie sollen nicht nur **Beispiele** lernen, sondern zugleich **Methoden!**  
Zum Erfolg benötigen Sie meist beides: sowohl handfeste Beispiele  
als auch die zugrundeliegende Theorie, wie linke und rechte Hand!

Mathematik ist zugleich abstrakte **Theorie** und konkrete **Anwendung**.  
Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen!  
Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!  
Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen.  
Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft  
leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.  
Soviel zur Motivation und zum Überblick. Das Vorgehen ist damit klar:  
Wir investieren hier in die mathematisch-theoretischen Grundlagen.  
Das ist eine längere Durststrecke. Nur wer sät, kann auch ernten.

## Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Wir betrachten im Folgenden nur Spiele in diskreter Zeit, kurz  $t \in \mathbb{N}$ . Auch Spiele in kontinuierlicher Zeit  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  sind interessant und für viele Anwendungen relevant, stellen aber höhere technische Anforderungen. Wir halten alles zunächst so einfach wie möglich.

Die **Spielregeln** müssen folgende Fragen beantworten:

- Was sind die möglichen Spielzustände? der Startzustand?
- Wer spielt? Wer hat wann welche möglichen Aktionen?
- Konsequenzen: Wie geht das Spiel dann weiter?
- Terminal: Was wird schließlich ausgezahlt?
- Informationsstruktur: Wer weiß wann was?

Das sind die **Mindestanforderungen** an jede Spielbeschreibung: Sie muss vollständig sein, so dass wir das Spiel durchführen können, ohne jemals weitere Regeln erfragen oder ad hoc erfinden zu müssen. Sie muss vor Spielbeginn vorliegen, so dass jeder Spieler mögliche Ziele und Handlungsoptionen kennt und Strategien analysieren kann.

## Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

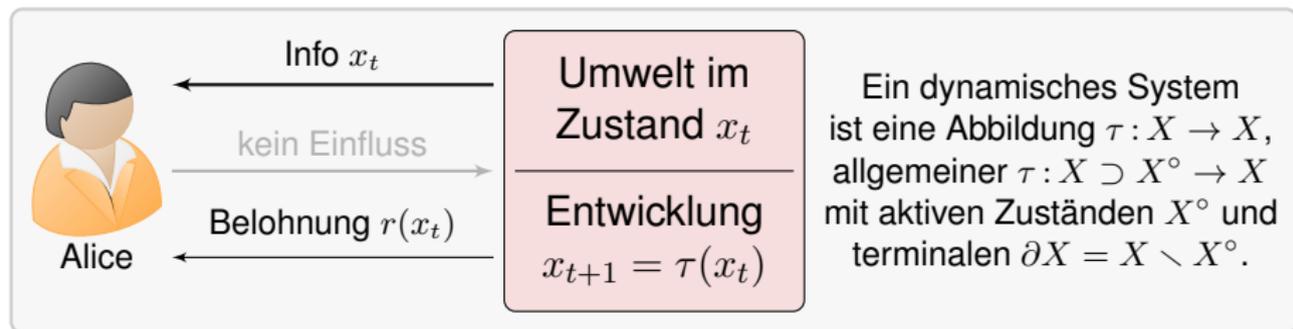
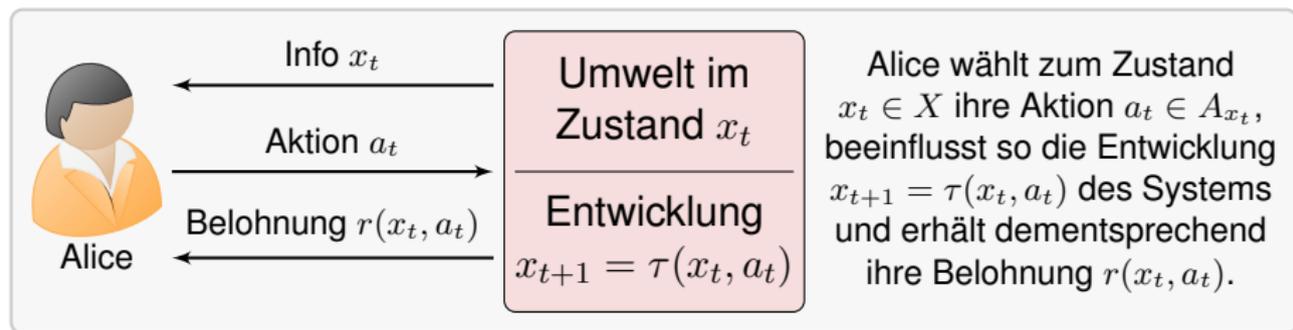
Die Regeln wünschen wir uns möglichst kurz und übersichtlich. Doch wie detailliert und formal müssen sie ausgeführt werden? Einfaches Kriterium: Sie sollten vollkommen klar und eindeutig sein, so dass wir das Spiel auf einem Computer **programmieren** können. Es bleiben uns dabei noch einige Freiheiten, wie wir das Spiel als Mechanismus **implementieren** und so die Anforderungen erfüllen. Jede Implementierung ist akzeptabel, solange sie das Pflichtenheft erfüllt und die dort erklärten Spielregeln treu umsetzt.

Ich werde die Formalisierung im Folgenden auf zwei Arten durchführen: zunächst mit einem beliebigen Zustandsraum (kybernetische Form J1A), dann besonders effizient mit einem Spielbaum (extensive Form J2A).

Die Sichtweise und Akzentsetzung ist in beiden Fällen etwas anders. Beide sind ähnlich und in gewissem Sinne äquivalent, wie wir sehen. Die Praxis wird Vor- und Nachteile beider Zugänge illustrieren.

Ich halte es daher für sinnvoll, beide Modelle zur Verfügung zu stellen, damit Sie je nach Bedarf ein geeignetes auswählen können.

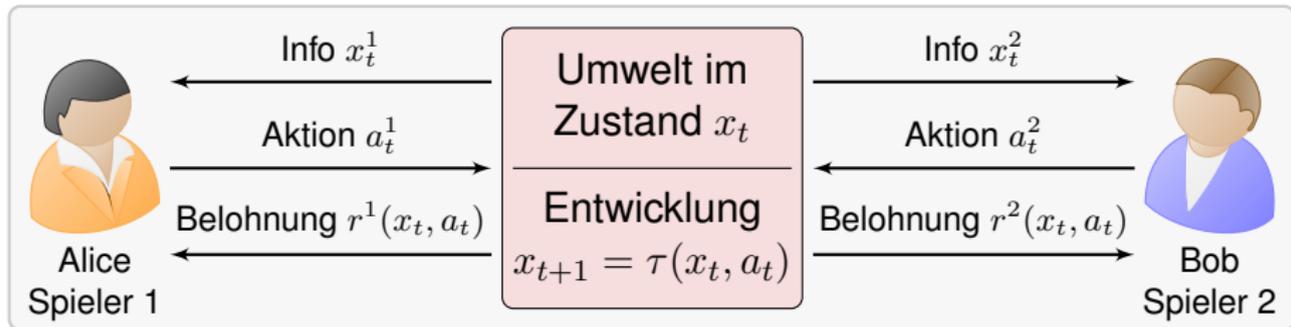
## Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Dynamisches System ohne Steuerung: *Markov reward process* (MRP)Dynamisches System mit Steuerung: *Markov decision process* (MDP)

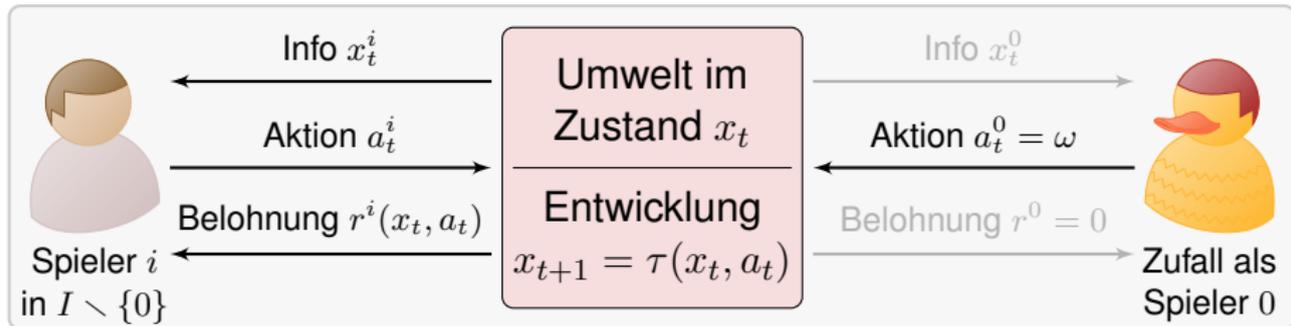
Alice will ihren Gesamtnutzen  $u = (1 - \delta) \sum_t \delta^t r(x_t, a_t)$  maximieren!

# Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Dynamisches System mit Steuerung durch zwei Spieler: Markov-Spiel



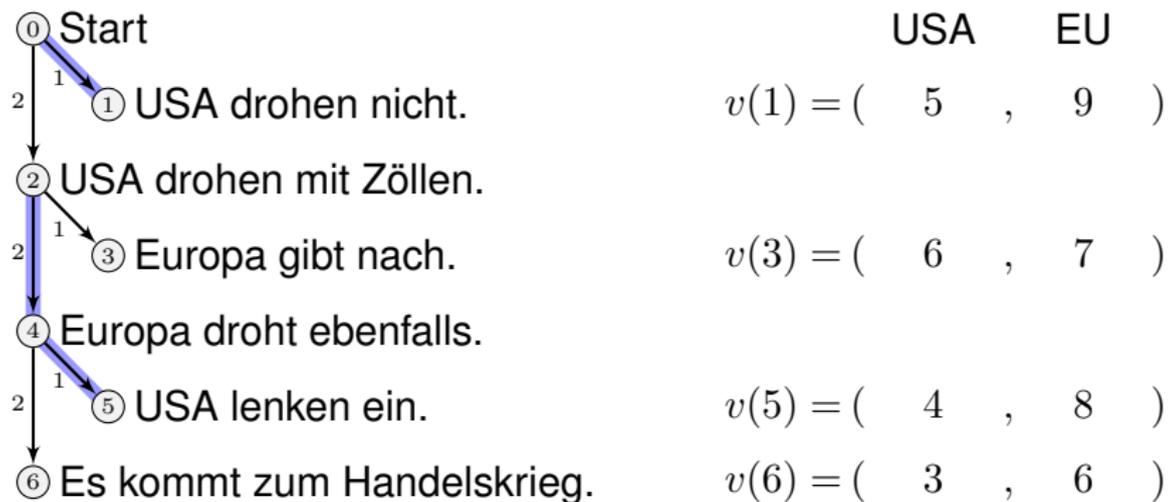
Steuerung durch mehrere Spieler und Zufall: Markov-Spiel (MMDP)



Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

## Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Dynamische Spiele können wir als Graphen darstellen:



**Aufgabe:** Welches Verhalten ist rational? Wie hilft Rückwärtsinduktion?

**Lösung:**  $\mathcal{R}_0$ : Jeder kennt und maximiert sein Ergebnis (wie gezeigt).

$\mathcal{R}_1$ : Vor einem Handelskrieg lenken die USA im 3. Zug ein (vorteilhaft).

$\mathcal{R}_2$ : Die EU weiß dies, daher wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).

$\mathcal{R}_3$ : Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

# Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Die hier angegebene Lösung und Erklärung rollt das Spiel rückwärts auf. Grundlegend hierzu ist der Begriff der unbeschränkten Rationalität A2A.

Vorsicht: (Scheinbare) Irrationalität kann zum Bluffen genutzt werden. Das Piratenspiel A218 etwa verlockt zu irrationalen Verhalten A225.

Vorwärts betrachtet nutzen wir teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte. Rückwärtsinduktion J1D nach Zermelo beweist ihre Äquivalenz.

Dynamische Spiele können parallel oder sequentiell gespielt werden:

- Die Spieler ziehen gleichzeitig, parallel, asynchron wie bei Pong.
- Die Spieler ziehen abwechselnd, nacheinander, rundenbasiert.

Die Zeit kann kontinuierlich sein oder diskret wie hier. Zur Vereinfachung betrachten wir in dieser Vorlesung meist nur den zeitdiskreten Fall.

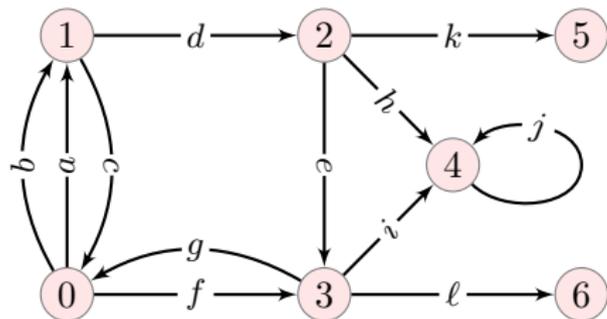
Einige Autoren betonen oder bevorzugen den sequentiellen Fall.

Ich möchte im Folgenden gleichzeitige Züge von Anfang an zulassen.

Wenn Sie diese Freiheit nicht benötigen, geht es auch sequentiell:

Ein momentan inaktiver Spieler hat nur die einzige Aktion „warten“.

## Dynamische Spiele in kybernetischer Form


 $\tau : A \rightarrow X :$ 
 $(0, a) \mapsto 1, \quad (2, h) \mapsto 4,$ 
 $(0, b) \mapsto 1, \quad (2, k) \mapsto 5,$ 
 $(0, f) \mapsto 3, \quad (3, g) \mapsto 0,$ 
 $(1, c) \mapsto 0, \quad (3, i) \mapsto 4,$ 
 $(1, d) \mapsto 2, \quad (3, \ell) \mapsto 6,$ 
 $(2, e) \mapsto 3, \quad (4, j) \mapsto 4.$ 

Wir betrachten einen Graphen  $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$  und interpretieren die Ecken  $x \in X$  als **Zustände** und die Kanten  $a \in A$  als **Aktionen**.

Vereinfachend gelte  $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$  mit  $\sigma = \text{pr}_1 : A \rightarrow X : (x, a) \mapsto x$  und der Transition  $\tau : A \rightarrow X : (x, a) \mapsto y$  bzw. lokal  $\tau_x : A_x \rightarrow X : a \mapsto y$ .

Innere Ecken / aktive Zustände  $X^\circ = \text{Bild}(\sigma) = \{x \in X \mid A_x \neq \emptyset\}$ ,  
Blätter / terminale Zustände  $\partial X = X \setminus X^\circ = \{x \in X \mid A_x = \emptyset\}$ .

Gegeben sei die Spielermenge  $I$ , typischerweise  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Wir fordern dann  $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i$  für jeden aktiven Zustand  $x \in X^\circ$ .

Individuelle Aktionen  $a^i \in A_x^i$  bestimmen gemeinsam  $a = (a^i)_{i \in I} \in A_x$ .

Flexibler genügt  $\alpha_x : \prod_{i \in I} A_x^i \twoheadrightarrow A_x$  und  $f_x = \tau \circ \alpha_x : \prod_{i \in I} A_x^i \rightarrow X$ .

# Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Wir sortieren alle **Aktionen**  $a: x \rightarrow y$  nach ihrem Startzustand  $x = \sigma(a)$ : Dies erlaubt die bequem-kompakte Codierung  $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$  mit Projektion  $\sigma: A \rightarrow X: (x, a) \mapsto x$  und Transition  $\tau: A \rightarrow X: (x, a) \mapsto y$ . Für jeden Zustand  $x$  benennt die Menge  $A_x$  die möglichen Aktionen.

Als Analogie zur **Differentialtopologie**: Wir interpretieren  $a: x \rightarrow y$  als einen Tangentialvektor, der im Fußpunkt  $x$  verankert ist und auf  $y$  zeigt. Die Projektion  $\sigma: A \rightarrow X: (x, a) \mapsto x$  ist das Tangentialbündel über  $X$ , und jede Strategie  $s: X^\circ \rightarrow A$  mit  $\sigma \circ s = \text{id}_{X^\circ}$  ist ein Vektorfeld auf  $X$ .

Zu jedem Startpunkt  $x_0 \in X$  können wir  $s$  **integrieren** zur Trajektorie  $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$  mit  $a_k = s(x_k)$  und  $x_{k+1} = \tau(x_k, a_k)$  für alle  $k$ . Diese endet entweder im Rand  $\partial X$  oder läuft unendlich in  $X^\circ$  weiter. Das entspricht recht genau der Situation bei Differentialgleichungen!

Bei mehreren Spielern nutzen wir die **Produktzerlegung**  $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i$ , denn jeder Spieler wählt seine Aktion unabhängig von den anderen. Statt  $\alpha_x = \text{id}$  genügt eine Zusammenfassung  $\alpha_x: \prod_{i \in I} A_x^i \twoheadrightarrow A_x$ , etwa bei geheimer Abstimmung nur das Ergebnis statt der einzelnen Voten.

# Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Graphen sind ideal für Spiele: Sie bieten eine universelle Beschreibung!  
Ein Spiel bietet zudem Nutzen, Gewinn, Auszahlung, Belohnung, etc.  
Diese entstehen auf zwei Arten (und Mischungen davon) :

- 1 Auszahlung  $v(x)$  beim Erreichen eines Endzustandes  $x \in \partial X$ .  
„Entscheidend ist, was hinten rauskommt.“ / Ende gut, alles gut.  
Dies codieren wir als **terminale Auszahlung**  $v: \partial X \rightarrow \mathbb{R}$ .
- 2 Belohnung  $r_x(a)$  beim Ausführen einer Aktion  $a = (a^i)_{i \in I} \in A_x$ .  
„Der Weg ist das Ziel.“ / *instant gratification* / zeitnah, verteilt  
Dies codieren wir als **sofortige Belohnung**  $r: A \rightarrow \mathbb{R}^I$ .

Für jeden Zustand  $x \in X^\circ$  ist  $r_x: \prod_{i \in I} A_x^i \rightarrow \mathbb{R}^I$  ein strategisches Spiel.  
Belohnungen fassen wir zu einer Gesamtauszahlung zusammen, etwa

$$\begin{aligned} \text{(konvergent) summiert:} & \quad u^i = \sum_t r^i(a_t), \\ \text{mit } \delta_i \in [0, 1] \text{ diskontiert:} & \quad u^i = \sum_t \delta_i^t r^i(a_t), \\ \text{diskontiert und normiert:} & \quad u^i = (1 - \delta_i) \sum_t \delta_i^t r^i(a_t). \end{aligned}$$

Teilweise können diese Zahlungsarten ineinander umgewandelt werden.

# Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Ein dynamisches Spiel erfordert den **Balanceakt** zwischen kurz- und langfristigem Nutzen, denn Aktionen beeinflussen den Spielverlauf. Kurzfristige Gewinnmitnahme (*greedy algorithm, steepest descent*) ist langfristig nicht immer optimal. Daher der Rat: *Bedenke das Ende!*

Im **alltäglichen Leben** verhalten sich Menschen sehr unterschiedlich: Manche suchen eher langfristige Strategien, andere kurzfristige Erfolge. **Aktien** verbinden kurzfristige Dividende (z.B. als jährliche Ausschüttung) mit langfristiger Wertsteigerung (allerdings erst realisiert beim Verkauf).

Bei **Monopoly** und vielen **Computerspielen** entstehen Belohnungen / Gewinne durch einzelne Aktionen und werden sofort gutgeschrieben. Beim Design von Videospiele ist das Gameplay eine zentrale Frage: Zu simples Jump & Run langweilt, zu komplizierte Rätsel frustrieren.

Wir werden im Folgenden meist terminale Auszahlungen betrachten, das ist technisch leichter. Sofortige Belohnungen sind oft konkreter. Letztere lassen sich kumulieren und beim Spielende auszahlen; meist setzen wir diese Umrechnung stillschweigend voraus.

# Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Zu jedem aktiven Zustand  $x \in X^\circ$  haben wir mögliche Spieleraktionen  $a \in A_x = \prod_{i \in I} A_x^i \neq \emptyset$  und die Fortsetzung  $f_x : A_x \rightarrow X$ , global:

$$f : A = \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \rightarrow X : (x, a) \mapsto f(x, a) = f_x(a)$$

Jeder Spieler  $i$  wählt seine Aktion  $a^i \in A_x^i$  unabhängig von den anderen. Bei einelementiger Menge  $A_x^i = \{*\}$  hat der Spieler  $i$  keinen Einfluss.

Eine **Strategie** für Spieler  $i$  ist ein Element  $s^i \in S^i := \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$ , also eine Abbildung  $s^i : X^\circ \rightarrow A^i := \bigcup_{x \in X^\circ} A_x^i$  mit  $x \mapsto s_x^i \in A_x^i$ .

Ein **Strategievektor** ist demnach  $s \in S := \prod_{i \in I} S^i \cong \prod_{x \in X^\circ} A_x$ . Jeder Spieler  $i$  wählt unabhängig seine Strategie  $s^i \in S^i$ .

**Trajektorien:** Aus Startzustand  $x_0 \in X$  und Strategievektor  $s \in S$  folgt der **Spielverlauf**  $x : \{0, 1, \dots, T\} \rightarrow X$  gemäß  $x_{t+1} = f(x_t, s_{x_t})$ .

Die Strategie  $s^i \in S^i = \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$  legt für jeden Spielstand  $x \in X^\circ$  fest, wie Spieler  $i$  sich verhalten wird, also welche Aktion  $s_x^i$  er spielen wird. Der Spieler entscheidet sich hierbei nicht spontan, sondern im Voraus. Vorteil: Aus  $s = (s^i)_{i \in I}$  lässt sich der gesamte Spielverlauf berechnen.

## Dynamische Spiele in kybernetischer Form

**Zufallszüge:** Wie spielt der Zufall / die Natur / das Schicksal?

Wir haben Wahrscheinlichkeitsräume  $(\Omega_x, \mathbf{P}_x)$  und die Dynamik

$$f : A = \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times \Omega_x \times A_x \rightarrow X : (x, \omega, a) \mapsto f(x, \omega, a) = f_x(\omega, a).$$

Bei einelementiger Menge  $\Omega_x = \{*\}$  hat der Zufall keinen Einfluss.

Wir betrachten den Zufall als zusätzlichen Spieler (Natur, Schicksal):

Er folgt keiner Gewinnmaximierung, sondern nur der WVerteilung  $\mathbf{P}_x$ .

In jedem Zustand  $x \in X^\circ$  erfolgt eine Ziehung  $\omega_x \in \Omega_x$ . Diese müssen

nicht unabhängig sein, wir betrachten ein WMaß  $\mathbf{P}$  auf  $\Omega = \prod_{x \in X^\circ} \Omega_x$ .

Hieraus entsteht die Randverteilung  $(\Omega_x, \mathbf{P}_x)$  durch die Projektion  $\text{pr}_x$ .

**Trajektorien:** Aus Startzustand  $x_0 \in X$ , Zufallselement  $\omega \in \Omega$  und

Strategievektor  $s \in S$  folgt der **Spielverlauf**  $x : \{0, 1, \dots, T\} \rightarrow X$

gemäß  $x_{t+1} = f(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t})$ . Er ist maximal, falls  $x_T \in \partial X$ .

Kein Spieler,  $I = \emptyset$ : dynamisches System, evtl. stochastisch / Markov.

Ein Spieler,  $I = \{1\}$ : Kybernetik, Kontrolltheorie, evtl. stochastisch.

Mehrere Spieler,  $|I| \geq 2$ : dynamisches Spiel, evtl. stochastisch.

# Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Die obigen Daten  $(X, f)$  definieren die (zeitdiskrete) **Dynamik**

$$F : X^\circ \times \Omega \times S \rightarrow X \times \Omega \times S : (x, \omega, s) \mapsto (f(x, \omega_x, s_x), \omega, s).$$

Der Spielgraph sei artinsch, also jede Trajektorie endlich. Jede terminale **Auszahlung**  $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R}^I$  können wir dann rekursiv fortsetzen zu

$$\tilde{u} : X \times \Omega \times S \rightarrow \mathbb{R}^I : (x, \omega, s) \mapsto \begin{cases} v(x) & \text{falls } x \in \partial X, \\ \tilde{u}(F(x, \omega, s)) & \text{falls } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Gemittelt über  $\mathbf{P} \in [\Omega]$  erhalten wir den **erwarteten Gewinn**:

$$u : X \times S \rightarrow \mathbb{R}^I : (x, s) \mapsto u(x, s) = \mathbf{E}[\omega \mapsto \tilde{u}(x, \omega, s)]$$

Hierzu fordern wir absolute Summierbarkeit, etwa  $v$  und  $\tilde{u}$  beschränkt. Wir können jedem Spieler  $i$  seine individuelle Wkt  $\mathbf{P}^i \in [\Omega]$  zugestehen. Jeder Startzustand  $x \in X$  definiert ein strategisches Spiel  $u_x : S \rightarrow \mathbb{R}^I$ :

$$u_x^i : S = \prod_{i \in I} S^i \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto u_x^i(s) = \mathbf{E}^i[\omega \mapsto \tilde{u}_x^i(\omega, s)]$$

## Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Wenn wir neben der terminalen Auszahlung  $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R}^I$  allgemein auch sofortige Belohnungen  $r : A \rightarrow \mathbb{R}^I$  kumulieren wollen, so betrachten wir

$$\tilde{u}^i(x, \omega, s) = \begin{cases} v^i(x) & \text{falls } x \in \partial X, \\ r^i(x, \omega_x, s_x) + \delta_i \tilde{u}^i(f(x, \omega_x, s_x), \omega, s) & \text{falls } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Für jeden Spieler  $i \in I$  ist hierbei  $\delta_i \in [0, 1]$  seine Zuversicht / Geduld. Im Spezialfall  $r = 0$  und  $\delta_i = 1$  erhalten wir die Formel der vorigen Seite. Im Falle  $\delta_i < 1$  werden Auszahlungen  $t$  Runden später mit  $\delta_i^t$  diskontiert.

Die obige Formel definiert  $\tilde{u}$  für jedes artinsche Spiel und alle  $(v, r, \delta)$ : Für jede Trajektorie von  $x_0$  über  $x_{t+1} = f(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t})$  nach  $x_T \in \partial X$  gilt

$$\tilde{u}^i(x_0, \omega, s) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta_i^t r^i(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t}) + \delta_i^T v^i(x_T).$$

Unendliche Trajektorien oder Zyklen müssen wir dazu ausschließen. Diese Einschränkung entfällt für  $\delta_i \in [0, 1[$ , solange  $v, r$  beschränkt sind: Unsere obige Gleichung für  $\tilde{u}^i : X \times \Omega \times S \rightarrow \mathbb{R}$  hat genau eine Lösung dank Banachs Fixpunktsatz D2A, und die Reihe konvergiert für  $T \rightarrow \infty$ .

# Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Gegeben sei die Spielermenge  $I$ , typischerweise  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .

## Definition J1A: dynamisches Spiel in kybernetischer Form

Ein **dynamisches Spiel**  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$  über  $I$  beinhaltet:

- 1 Eine Zustandsmenge  $X$ , zerlegt in  $X = X^\circ \sqcup \partial X$ , sowie eine Auszahlung  $v: \partial X \rightarrow \mathbb{R}^I$  auf den terminalen Zuständen.
- 2 Eine Übergangsfunktion  $f_x: \Omega_x \times A_x \rightarrow X$  für jedes  $x \in X^\circ$ . Hierbei sei  $\Omega_x \neq \emptyset$  und  $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i \neq \emptyset$  ein Produkt über  $I$ .
- 3 Ein WMaß  $\mathbf{P}$  auf dem Produktraum  $(\Omega, \mathcal{A}) = \prod_{x \in X^\circ} (\Omega_x, \mathcal{A}_x)$ .

Spieler  $i \in I$  hat die Strategiemenge  $S^i := \prod_{x \in X^\circ} A_x^i = \{s^i: x \mapsto s_x^i\}$ .

Wir setzen  $v$  fort zu  $\tilde{u}: X \times \Omega \times S \rightarrow \mathbb{R}^I$  und mitteln zu  $u: X \times S \rightarrow \mathbb{R}^I$ .

Ein Strategievektor  $s \in S = \prod_{i \in I} S^i$  heißt **Nash-Gleichgewicht** bei Start in  $x \in X$ , wenn dies für das strategische Spiel  $u_x: S \rightarrow \mathbb{R}^I$  gilt.

Gilt dies für jeden Start  $x \in X$ , so nennen wir  $s$  **teilspielperfekt**:

$$\text{PNE}(\Gamma) = \text{PNE}(\Gamma, S) := \bigcap_{x \in X^\circ} \text{NE}(u_x: S \rightarrow \mathbb{R}^I)$$

# Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Ich bemühe mich im Aufbau, alles möglichst natürlich darzustellen, die nötigen Zutaten zu motivieren und alle Forderungen zu erklären.

Das beantwortet, wie eingangs motiviert, die grundlegende Frage: Welche Daten und Eigenschaften benötigen wir genau zur Definition / vollständigen Beschreibung / Untersuchung eines dynamischen Spiels?

Schließlich passt alles Wesentliche in die recht knappe Definition J1A! Das ist der allgemeine Rahmen und die strukturierende Vorlage für jede konkrete Anwendung. Die konzise Zusammenfassung muss dazu jeweils entpackt werden, hierzu dienen illustrative Beispiele und Übungen.

Formal könnten wir unser Spiel definieren als ein 8-Tupel:

$$(I, \partial X, v, X^\circ, (\Omega_x)_{x \in X^\circ}, \mathbf{P}, (A_x^i)_{x \in X^\circ}^{i \in I}, f)$$

Das ist wunderbar explizit und ausführlich, scheint mir aber für den praktischen Gebrauch unnötig länglich und übertrieben pedantisch. Implizit enthält  $(X, v, f, \mathbf{P})$  all diese Daten: Je nach Bedarf können wir daraus alle relevanten Informationen erfragen bzw. rekonstruieren.

## Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Für die teilspielperfekten Nash–Gleichgewichte [engl. *subgame perfect Nash–equilibria*] nutze ich durchgängig die bequeme Abkürzung PNE. Die ausführliche Notation SPNE ist vielleicht klarer, leider auch länger. Gebräuchlich ist ebenso SPE. Es besteht kaum Verwechslungsgefahr.

Ich habe in Definition J1A für Spieler  $i \in I$  die **reinen Aktionen**  $a^i \in A_x^i$  genutzt und damit die **reinen Strategien**  $s^i \in S^i = \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$  formuliert. Das ist konzeptuell leichter, genügt aber meist nicht, wie Sie wissen.

Eine **gemischte Aktion**  $\bar{a}^i \in \bar{A}_x^i = [A_x^i]$  für Spieler  $i$  entsteht durch eine Konvexkombination, die wir wie üblich als WVerteilung interpretieren.

Eine **(lokal) gemischte Strategie** ist demnach  $\bar{s}^i \in \bar{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} \bar{A}_x^i$ , also eine Abbildung  $\bar{s}^i : X^\circ \rightarrow \bar{A}^i := \bigcup_{x \in X^\circ} \bar{A}_x^i$  mit  $x \mapsto \bar{s}_x^i \in \bar{A}_x^i$ .

Durch (lokal) affine Fortsetzung erhalten wir  $\tilde{u} : X \times \Omega \times \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^I$ .

Mittelung über  $(\Omega, \mathbf{P})$  ergibt  $\bar{u} : X \times \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^I$ . Daraus gewinnen wir die **teilspielperfekten (lokal) gemischten Nash–Gleichgewichte**:

$$\text{PNE}(\bar{\Gamma}) = \text{PNE}(\Gamma, \bar{S}) := \bigcap_{x \in X^\circ} \text{NE}(\bar{u}_x : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^I)$$

## Dynamische Spiele in kybernetischer Form

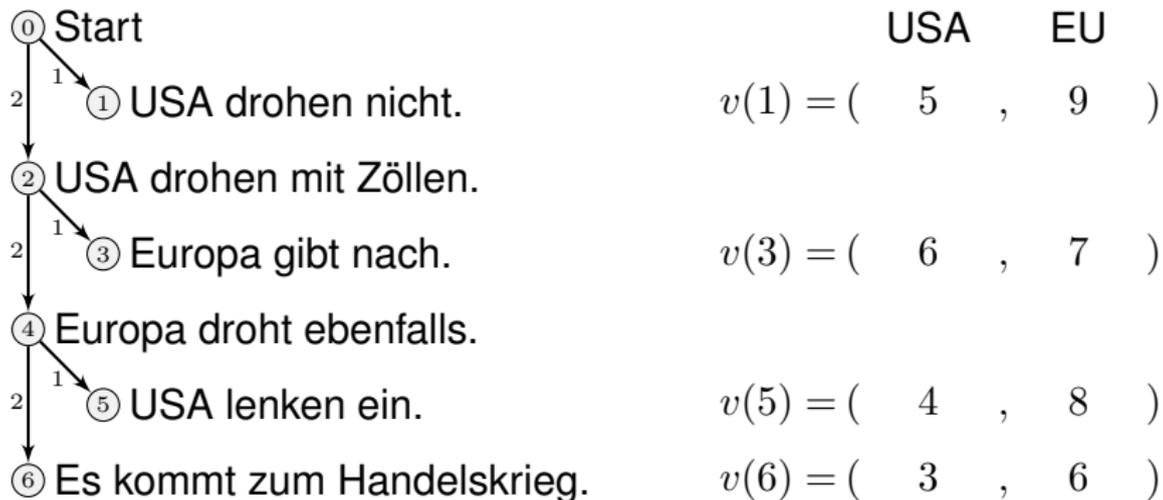
Ebenso definieren wir gemeinsam **korrelierte Aktionen**  $\tilde{a} \in [A_x]$ .  
 Eine **(lokal) korrelierte Strategie** ist demnach  $\tilde{s} \in \tilde{S} = \prod_{x \in X^\circ} [A_x]$ .  
 Die Vorgehensweise ist dann wie in vorigen Kapitel I, und wir gewinnen die **teilspielperfekten (lokal) korrelierten Nash-Gleichgewichte**:

$$\text{PCE}(\Gamma) = \text{PCE}(\Gamma, \tilde{S}) := \bigcap_{x \in X^\circ} \text{CE}(\tilde{u}_x : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^I)$$

Ebenso denk- und nutzbar sind **global gemischte Strategien**  $s^i \in [S^i]$  oder **global korrelierte Strategien**  $s \in [S]$ . Das spielt jedoch nur eine untergeordnete Rolle, denn für die meisten Spiele und Anwendungen genügt die lokale Mischung / Korrelation: Sie liegen besonders nahe.

Dieselbe Frage „lokal / global“ stellt sich für  $\text{pr}_x : (\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow (\Omega_x, \mathbf{P}_x)$ .  
 Wir erlauben Korrelation:  $\mathbf{P}$  muss kein Produktmaß  $\otimes_{x \in X^\circ} \mathbf{P}_x$  sein.  
 Bei Bedarf können wir **Glaubensfreiheit** einräumen: Jeder Spieler  $i \in I$  fixiert seine Annahmen über den Zufallszug  $\omega \in \Omega$  als WMaß  $\mathbf{P}^i \in [\Omega]$ .  
 Als **gemeinsame Überzeugung** / *common prior* bezeichnet man die Eigenschaft  $\mathbf{P}^i = \mathbf{P}^j$  für alle  $i, j \in I$ . Wir schreiben dann kurz  $\mathbf{P}^i = \mathbf{P}$ .

# Beispiel: drohen oder nachgeben?



Die Zahlen rechts bewerten jeden der möglichen Ausgänge für die USA und die EU auf einer (fiktiven) Werteskala. Wir denken an eine geeignete Gewichtung aus wirtschaftlichem Ertrag und politischem Ansehen.

**Aufgabe:** (1) Formalisieren Sie die Situation als ein dynamisches Spiel. Erklären Sie explizit und ausführlich alle benötigten Daten  $(X, v, f)$ .

(2) Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte für jedes Teilspiel.

(3) Welche Gleichgewichte sind teilspielperfekt?

## Beispiel: drohen oder nachgeben?

**Lösung:** (1) Gegeben ist die Spielermenge  $I = \{1 = \text{USA}, 2 = \text{EU}\}$ . Als Zustandsmenge wählen wir  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , terminal ist  $\partial X = \{1, 3, 5, 6\}$ , mit Auszahlung  $v: \partial X \rightarrow \mathbb{R}^2$  wie angegeben.

Die Aktionsmengen sind  $A_0^1 = A_2^2 = A_4^1 = \{1 = \text{einlenken}, 2 = \text{drohen}\}$  sowie und  $A_0^2 = A_2^1 = A_4^2 = \{0 = \text{abwarten}\}$ . Die Dynamik ist wie oben festgelegt  $f: \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \rightarrow X: (x; a^1, a^2) \mapsto x + a^1 + a^2$ .

Die Strategiemenge für Spieler  $i \in I$  ist  $S^i = A_0^i \times A_2^i \times A_4^i$ , kanonisch abkürzbar dank  $S^1 \cong A_0^1 \times A_4^1 = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$  und  $S^2 \cong A_2^2 = \{1, 2\}$ . Dies definiert ein Spiel  $u_x: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  zu jedem Start  $x \in X$ .

(2a) Start in 0 definiert das strategische Spiel  $u_0: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

	USA	(1, 0, 1)	(1, 0, 2)	(2, 0, 1)	(2, 0, 2)
EU					
(0, 1, 0)	9	5	5	6	6
(0, 2, 0)	9	5	5	4	3

## Beispiel: drohen oder nachgeben?

(2b) Start in 2 definiert das strategische Spiel  $u_2: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

USA \ EU	(1, 0, 1)	(1, 0, 2)	(2, 0, 1)	(2, 0, 2)
(0, 1, 0)	7	7	7	7
(0, 2, 0)	8	6	8	6

The table above shows the strategic form of the game  $u_2$ . The top row of the table lists the payoffs for the USA player for each combination of EU strategies. The left column lists the payoffs for the EU player for each combination of USA strategies. The bottom-left cell contains the strategy profile  $(s^1, s^2) = (1, 0, 1)$ . The table is annotated with red and blue lines indicating best responses for each player.

(2c) Start in 4 definiert das strategische Spiel  $u_4: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

USA \ EU	(1, 0, 1)	(1, 0, 2)	(2, 0, 1)	(2, 0, 2)
(0, 1, 0)	8	6	8	6
(0, 2, 0)	8	6	8	6

The table above shows the strategic form of the game  $u_4$ . The top row of the table lists the payoffs for the USA player for each combination of EU strategies. The left column lists the payoffs for the EU player for each combination of USA strategies. The bottom-left cell contains the strategy profile  $(s^1, s^2) = (1, 0, 1)$ . The table is annotated with red and blue lines indicating best responses for each player.

(3) Teilspielperfekt ist nur  $(s^1, s^2)$  mit  $s^1 = (1, 0, 1)$  und  $s^2 = (0, 2, 0)$ .

## Beispiel: drohen oder nachgeben?

(2) Für das strategische Spiel  $u_x$  nutzen wir Nash-Gleichgewichte.

☹ Das strategische Spiel  $u_0$  vergisst jegliche zeitliche Struktur:  
Wir vergleichen die Strategien nur noch bezüglich des Starts in 0.

😊 Als Verfeinerung haben wir die Teilspielperfektion eingeführt:  
Diese berücksichtigt die zeitliche Struktur auf entscheidende Weise.

(3) In unserem hier vorliegenden dynamischen Spiel  $(X, v, f)$   
gibt es nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht  $(s^1, s^2) \in S^1 \times S^2$ :  
Dieses besteht aus den Strategien  $s^1 = (1, 0, 1)$  und  $s^2 = (0, 2, 0)$ .

Wir finden es ebenso durch Rückwärtsinduktion:

- Im Zustand 4 ist  $s_4^1 = 1$  strikt dominant: Die USA lenken ein.
- Im Zustand 2 ist  $s_2^2 = 2$  strikt dominant: Die EU droht.
- Im Zustand 0 ist  $s_0^1 = 1$  strikt dominant: Die USA drohen nicht.

😊 Das entspricht rationalem Verhalten wie in der Einführung erklärt.  
Diese einfache Überlegung illustriert den allgemeinen Satz J1D von  
Zermelo zur Rückwärtsinduktion, den wir untenstehend beweisen.

## Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

Teilaufgabe (1) fragt nach einer expliziten **Ausformulierung** aller Daten. Das mag zunächst übertrieben pedantisch erscheinen, ist aber hilfreich. Es illustriert unsere Definition J1A eines dynamischen Spiels  $(X, v, f)$ .

Das sind die **Spielregeln** und definieren die Struktur des Spiels:

- Was sind die möglichen Spielzustände? Hier  $X = X^\circ \sqcup \partial X$ .
- Wer spielt? Hier  $I$ . Was sind die möglichen Aktionen? Hier  $A_x^i$ .
- Was sind ihre Konsequenzen? Hier  $f: \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \rightarrow X$ .
- Was wird schließlich ausgezahlt? Hier  $v: \partial X \rightarrow \mathbb{R}^I$ .

Erst damit können wir das Spiel untersuchen, Strategien betrachten und von (teilspielperfekten) Gleichgewichten überhaupt erst sprechen!

Wir alle haben als Kinder Spiele gespielt. Zu jedem neuen, uns noch unbekanntem Spiel mussten wir erst einmal die Anleitung durchlesen oder uns von einer bereits kundigen Person geduldig erklären lassen. Warum ist das meist länglich und mühsam? Weil alle Daten des Spiels erklärt werden müssen! Klarheit und Präzision haben ihren Preis.

## Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

Für menschliche Leser können wir die Spielstruktur graphisch darstellen, etwa als Spielbaum, und damit alles präzise und vollständig ausführen. Genau hierzu dient unsere formale Beschreibung J1A wie oben erklärt.

Bei der Formulierung fragen wir uns: Ist die Beschreibung eindeutig? Können Sie damit das Spiel sofort auf einem Computer programmieren? Manche vertreten die Überzeugung: Man versteht Mathematik erst dann wirklich, wenn man sie auch auf einem Computer implementieren kann. Das ist ein sehr strenger Maßstab, aber dieser Test hat seine Vorzüge.

Erst wenn das Spiel  $\Gamma$  festgelegt ist, fragen wir nach Strategien  $s^i \in S^i$ . Es ist wichtig, beide Begriffe fein säuberlich auseinanderzuhalten.

- Das **Spiel**  $\Gamma$  besteht aus der vorgegebenen, formalen Struktur.
- Eine **Strategie**  $s^i$  ist ein Handlungsplan für jeden Zustand  $x \in X^\circ$ .

Diese Definition von Strategie ist sehr umfassend und mag redundant erscheinen. Sie ist technisch notwendig und praktisch gerechtfertigt: Die **Durchführung** des Spiels  $\Gamma$  berechnet sich zu jedem Start  $x \in X$  aus dem Strategievektor  $s = (s^i)_{i \in I}$  und ggf. dem Zufallselement  $\omega \in \Omega$ .

## Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

Über die Definition einer Strategie als Element  $s^i \in \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$  wird häufig gestritten. Auch hierzu ist das obige Beispiel bereits hilfreich!

Warum sollte der Spieler  $i \in I$  irgendeine Aktion  $s_x^i \in A_x^i$  planen für einen Spielstand  $x \in X^\circ$ , der nie erreicht wird? Ist das nicht absurd?

Nein! Wir ahnen bereits, wozu dies gut ist. Ich versuche drei Antworten:

**Mentale Planung:** Manche Zustände werden nicht erreicht, gerade weil der Spieler diese Zweige mental durchgespielt hat – und dann verwirft.

**Technische Vereinfachung:** Wir wollen in jedem Zustand  $x \in X^\circ$  starten können. Hierzu benötigen wir die gewählte Aktion  $s_x^i \in A_x^i$ .

**Automatisierung:** Wir verfolgen den Anspruch der Programmierbarkeit. Das Spiel wird von einem Master geleitet. Er fragt jeweils: „Wir sind im Spielstand  $x \in X^\circ$ . Spieler  $i$ , welche Aktion  $s_x^i \in A_x^i$  wählst du hierzu?“

*Lazy Evaluation:* Die Frage wird erst beantwortet, wenn sie sich stellt. Hierbei sind Master und Spieler „online“. Alternativ gelingt es „offline“:

*Eager Evaluation:* Die Frage wird vorsorglich für alle  $x$  beantwortet. Der Spieler gibt dem Master seine Daten und wird nicht weiter gefragt.

## Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

😊 Mit diesen Daten konnten wir das vorgelegte Spiel analysieren. Das war mühsam aber lehrreich. Das Ergebnis ist überzeugend.

😊 Das teilspielperfekte Gleichgewicht entspricht rationalem Verhalten:

$\mathcal{R}_0$ : Jeder Spieler maximiert sein Ergebnis (wie angegeben).

$\mathcal{R}_1$ : Vor einem Handelskrieg im 3. Zug lenken die USA ein.

$\mathcal{R}_2$ : Die EU weiß dies, also wird sie im 2. Zug ebenfalls drohen.

$\mathcal{R}_3$ : Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

⚠️ Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

$\mathcal{R}_1$ : Sind die USA irrational, so könnten sie sich im 3. Zug für einen Handelskrieg entscheiden, obwohl dies zu ihrem Nachteil wäre. Das wäre irrational, etwa auf Grund einer falschen Einschätzung.

$\mathcal{R}_2$ : Im 2. Zug muss die EU daher die Rationalität der USA einschätzen. Gegen einen Wahnsinnigen wäre es tatsächlich besser einzulenken!

$\mathcal{R}_3$ : Im 1. Zug hätten die USA also Interesse daran, für wahnsinnig gehalten zu werden: Das entspricht einem Bluff. Nur dann wäre es rational, mit einer ersten Drohung die Eskalation einzuleiten.

# Was sind Teilspiele?

Bislang haben wir noch nicht erklärt, was **Teilspiele** von  $\Gamma$  sein sollen. Das ist für die obige Formulierung zunächst auch nicht notwendig. Für die weitere Untersuchung ist dieser Begriff jedoch nützlich, daher führe ich alles nötige nun aus. Die Idee ist denkbar einfach:

Ein dynamisches Spiel besteht aus Zuständen  $X$  und Aktionen  $A$ . Für ein Teilspiel schränken wir die Zustände oder die Aktionen ein, so dass erneut ein „kleineres“ dynamisches Spiel  $\Gamma'$  entsteht.

Ebenso können wir etwaige Zufallszüge auf  $\Omega' \subseteq \Omega$  einschränken. Wird  $(\Omega, \mathbf{P})$  durch einen Zufallsgenerator realisiert, so wiederholen wir die Ziehungen so lange, bis schließlich ein Ergebnis  $\omega \in \Omega'$  vorliegt.

Wir müssen bei dieser Einschränkung voraussetzen oder garantieren, dass mögliche Folgezustände des Teilspiels wieder im Teilspiel liegen. Diese Überlegungen führen uns zu folgender Definition.

# Was sind Teilspiele?

## Definition J1B: Teilspiele eines dynamischen Spiels

Gegeben sei ein dynamisches Spiel  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$  wie oben erklärt. Die folgenden Daten  $\Gamma' = (X', v', f', \mathbf{P}')$  definieren ein **Teilspiel** von  $\Gamma$ :

- 1 Eine Teilmenge  $X' \subseteq X$ . Wir setzen  $X'^{\circ} = X' \cap X^{\circ}$  als Inneres und  $\partial X' = X' \cap \partial X$  als Rand sowie  $v' = v|_{\partial X'}$  als Auszahlung.
- 2 Eine nicht-leere Teilmenge  $\Omega'_x \subseteq \Omega_x$  für jedes  $x \in X'^{\circ}$ . Für das Produkt  $\Omega' = \prod_{x \in X^{\circ}} \Omega'_x$  fordern wir  $\mathbf{P}(\Omega') > 0$  und definieren  $\mathbf{P}' \in [\Omega']$  als bedingte Wkt,  $\mathbf{P}'(A) := \mathbf{P}(A \cap \Omega') / \mathbf{P}(\Omega')$ .
- 3 Eine nicht-leere Teilmenge  $A'^i_x \subseteq A^i_x$  für jedes  $x \in X'^{\circ}$  und  $i \in I$ . Wir schränken  $f$  ein zu  $f' : A' = \bigcup_{x \in X'^{\circ}} \{x\} \times \Omega'_x \times A'_x \rightarrow X'$ ; hierzu fordern wir  $f(A') \subseteq X'$ .

Diese Einschränkung auf  $X' \subseteq X$  und  $A' \subseteq A$  und  $\Omega' \subseteq \Omega$  definiert erneut ein dynamisches Spiel  $\Gamma' =: \Gamma|_{(X', A', \Omega')}$ , geschrieben  $\Gamma' \leq \Gamma$ .

## Was sind Teilspiele?

Wir schränken das Spiel  $\Gamma$  genau so ein, dass  $\Gamma'$  selbst ein Spiel ist. Die Idee ist recht natürlich, ihre Ausformulierung naturgemäß lässlich.

Im Falle  $X' = X$  nennen wir das Teilspiel  $\Gamma' \leq \Gamma$  **weit**. Die Zustände des Teilspiels  $\Gamma'$  sind dieselben wie zuvor in  $\Gamma$ , eingeschränkt werden höchstens die Zufallszüge  $\Omega' \subseteq \Omega$  und die Spieleraktionen  $A'^i_x \subseteq A^i_x$ .

Im Falle  $A'^i_x = A^i_x$  für alle  $x \in X'$  nennen wir das Teilspiel  $\Gamma' \leq \Gamma$  **voll**. Dank  $A'^i_x = A^i_x$  kann jeder Spieler in  $\Gamma'$  genauso agieren wie zuvor in  $\Gamma$ .

Im Falle  $\Omega' = \Omega$  nennen wir das Teilspiel  $\Gamma' \leq \Gamma$  **unbedingt**.

Das bedeutet, der Zufall spielt in  $\Gamma'$  genauso wie zuvor in  $\Gamma$ .

Andernfalls schränken wir auf eine echte Teilmenge  $\Omega' \subsetneq \Omega$  ein.

**Konvention:** Wenn allgemein von Teilspielen die Rede ist, ohne weitere Präzisierung, dann sind meist **volle unbedingte Teilspiele** gemeint, das heißt, nur die Zustände werden beim Teilspiel  $\Gamma' \leq \Gamma$  eingeschränkt. Wir schließen uns im Folgenden diesem üblichen Sprachgebrauch an.

# Was sind Teilspiele?

## Definition J1c: Teilmenge als volles unbedingtes Teilspiel

Gegeben sei ein dynamisches Spiel  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$  wie oben erklärt. Eine Teilmenge  $X' \subseteq X$  heißt **(volles unbedingtes) Teilspiel** von  $\Gamma$ , kurz  $X' \leq \Gamma$ , wenn  $f(\bigcup_{x \in X'} \{x\} \times \Omega_x \times A_x) \subseteq X'$  gilt. Das bedeutet, zu jedem  $x \in X'$  liegen alle gemäß  $\Gamma$  möglichen Folgezustände in  $X'$ .

Ist  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine Familie von Teilspielen  $X_\lambda \leq \Gamma$ , indiziert durch  $\Lambda \neq \emptyset$ , dann ist auch ihr Durchschnitt  $X' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  ein Teilspiel, also  $X' \leq \Gamma$ . Jeder Zustand  $x \in X$  **erzeugt** ein kleinstes Teilspiel  $\Gamma_x \leq \Gamma$ , nämlich:

$$\Gamma_x := \bigcap \{ X' \mid x \in X' \leq \Gamma \}$$

Konkret besteht dieses Teilspiel aus dem Startzustand  $x$ , all seinen Folgezuständen (Kindern), all deren Folgezuständen (Enkeln) usw. In einem Spielbaum  $\Gamma$  ist somit  $\Gamma_x$  der Teilbaum ab  $x$ . Das ist die Intuition hinter den oben erklärten teilspielperfekten Gleichgewichten.

# Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

Die obigen Daten  $(X, f)$  definieren die (zeitdiskrete) **Dynamik**

$$F : X^\circ \times \Omega \times S \rightarrow X \times \Omega \times S : (x, \omega, s) \mapsto (f(x, \omega_x, s_x), \omega, s).$$

Wir fordern vereinfachend, dass jede Trajektorie endliche Länge besitzt:

$$X \times \Omega \times S \stackrel{!}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(\partial X \times \Omega \times S)$$

😊 Das bedeutet Endlichkeit für jedes  $x \in X$  und  $(\omega, s) \in \Omega \times S$ :

Für eine **Filtrierung**  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(X, f)$  verlangen wir stärker

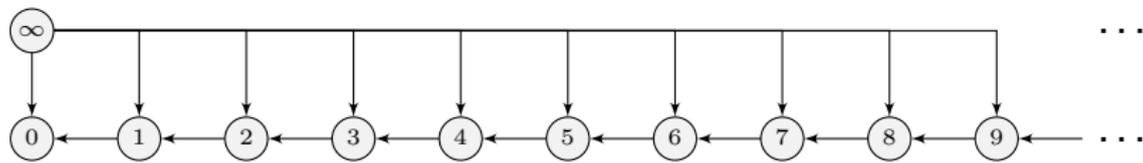
$$\begin{aligned} \partial X = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \\ \text{mit } F(X_n^\circ \times \Omega \times S) &\subseteq X_{n-1} \times \Omega \times S. \end{aligned}$$

😊 Insbesondere sind damit  $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq \Gamma$  Teilspele (J1c).

😊 Ausschöpfung  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  bedeutet Endlichkeit für jedes  $x \in X$ , und zwar uniform über  $\Omega \times S$ : Bei Start im Zustand  $x \in X_n$  landen wir in höchstens  $n$  Schritten im Rand  $\partial X$ , egal bei welchem Spielverlauf.

## Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

- Aufgabe:** (1) Gibt es dynamische Spiele ohne unendliche Trajektorien, aber mit beliebig langen Trajektorien? und ohne Filtrierung  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?
- (2) Angenommen, unser Spiel  $\Gamma$  erlaubt keine unendlichen Trajektorien, und für jeden Zustand  $x \in X^\circ$  ist die Menge  $\Omega_x \times A_x$  der Züge endlich. Dann erlaubt das Spiel  $\Gamma$  eine Filtrierung  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



- Lösung:** (1) Wie in der Skizze sei der Zustandsraum  $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Wir wählen  $\Omega = \mathbb{N}$  und  $I = \emptyset$ . Wir setzen  $f(\infty, \omega) = \omega$  für  $\omega \in \Omega$  sowie  $f(n, \omega) = n - 1$  für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Jede Trajektorie hat hier endliche Länge. Die Länge kann jedoch beliebig groß werden, ist also unbeschränkt. Jede Filtrierung  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllt  $X_n \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ , also  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \subsetneq X$ . Die Ausschöpfung gelingt erst im nächsten Schritt „unendlich plus eins“.
- ⚠ Allgemein benötigen wir transfinite Induktion über Ordinalzahlen.

## Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

(2) Wir konstruieren die **kanonische Filtrierung**  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch

$Y_0 := \partial X$  für  $n = 0$  und dann für  $n = 1, 2, 3, \dots$  rekursiv

$$Y_n := Y_{n-1} \cup \left\{ x \in X^\circ \mid \forall \omega_x \in \Omega_x \forall a_x \in A_x : f(x, \omega_x, a_x) \in Y_{n-1} \right\}.$$

Nach Konstruktion gilt  $\partial X = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots \subseteq X$  und

$$F(Y_n^\circ \times \Omega \times S) \subseteq Y_{n-1} \times \Omega \times S.$$

Wir setzen  $Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$  und beweisen die Ausschöpfung  $X = Y$ .

Indirekter Beweis: Angenommen, es gäbe einen Zustand  $x \in X \setminus Y$ .

Da wir  $\Omega_x \times A_x$  als endlich voraussetzen, hat der Zustand  $x$  nur endliche viele Folgezustände, das heißt  $f(\{x\} \times \Omega_x \times A_x) = \{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq X$ .

Gälte hierbei  $\{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq Y$ , also  $x_k \in Y_{n_k}$  für jedes  $k = 1, \dots, \ell$ , dann folgte  $\{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq Y_n$  für  $n = \max\{n_1, \dots, n_\ell\}$ , also  $x \in Y_{n+1}$ .

Da wir  $x \in X \setminus Y$  annehmen, gibt es einen Nachfolger  $x' \in X \setminus Y$ .

So finden wir eine unendliche Trajektorie  $x, x', x'', \dots$ . Widerspruch!



Ist  $\Omega_x \times A_x$  unendlich, so existieren Gegenbeispiele wie das obige.

## Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

😊 Die kanonische Filtrierung  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wächst am schnellsten:

**Aufgabe:** Für jede Filtrierung  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt  $X_n \subseteq Y_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Wir führen Induktion über  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n = 0$  gilt  $X_0 = Y_0 = \partial X$ . Wir zeigen nun den Induktionsschritt: Aus  $X_{n-1} \subseteq Y_{n-1}$  folgt  $X_n \subseteq Y_n$ .

Nach Voraussetzung gilt  $F(X_n^\circ \times \Omega \times S) \subseteq X_{n-1} \times \Omega \times S$ . Für jedes Element  $x \in X_n$  gilt demnach  $f(\{x\} \times \Omega_x \times A_x) \subseteq X_{n-1} \subseteq Y_{n-1}$ , also  $x \in Y_n$  nach Definition der Menge  $Y_n$ . Das beweist  $X_n \subseteq Y_n$ .

**Bemerkung:** Beim Schritt von  $Y_{n-1}$  nach  $Y_n$  werden im Allgemeinen mehrere Elemente dazugewonnen. Wir können die Filtrierung strecken, indem wir diese schrittweise hinzufügen, im Extremfall jedes einzeln.

**Bemerkung:** Es gibt auch Filtrierungen, die beliebig langsam wachsen, da wir Stagnation  $X_{n-1} = X_n$  nicht verbieten. Sei  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  wachsend und surjektiv, etwa  $\varphi(n) = \lfloor \ln(n+1) \rfloor$ . Dann ist  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $X_n = Y_{\varphi(n)}$  eine Filtrierung mit immer selteneren Zuwächsen. Noch viel langsamer wachsen  $\varphi \circ \varphi$  oder  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$  oder... Langsamer geht immer.

# Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

😊 Was immer du tust, handle klug und bedenke das Ende!  
Die langen Vorbereitungen führen endlich zu einem schönen Satz:

## Satz J1D: Rückwärtsinduktion nach Ernst Zermelo 1913

Sei  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$  ein dynamisches Spiel mit Filtrierung  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

(1) In jedem Zustand  $x \in X^\circ$  sei ein einziger Spieler  $j = j(x)$  am Zug, also  $\text{pr}^j : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^j$  bijektiv, und seine Aktionsmenge  $A_x^j$  sei endlich. Dann existiert ein teilspielperfektes reines Gleichgewicht  $s \in S$ .

(2) In jedem Zustand  $x \in X^\circ$  sei die Aktionsmenge  $A_x$  endlich. Dann existiert ein teilspielperfektes (lokal) gemischtes Gleichgewicht  $s \in \bar{S}$ . Ausführlich bedeutet das  $s \in \bar{S} = \prod_{x \in X^\circ} \bar{A}_x$  mit  $\bar{A}_x = \prod_{i \in I} [A_x^i]$ .

Genauer: Jedes teilspielperfekte Gleichgewicht  $s_n \in \prod_{x \in X_n^\circ} \bar{A}_x$  auf  $X_n$  erlaubt auf  $X_{n+1}$  eine teilspielperfekte Fortsetzung  $s_{n+1} \in \prod_{x \in X_{n+1}^\circ} \bar{A}_x$ .

Hierbei kann es mehrere Fortsetzungen geben. Durch die Rekursion können wir jedes teilspielperfekte Gleichgewicht von  $\Gamma$  konstruieren.

# Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

**Beweis:** Sei  $s_n$  ein teilspielperfektes Gleichgewicht auf  $X_n \subseteq X$ .

Wir betrachten  $x \in X_{n+1} \setminus X_n$ . Alle Folgezustände von  $x$  liegen in  $X_n$ . Dies verdanken wir unserer Forderung  $F(X_{n+1}^\circ \times \Omega \times S) \subseteq X_n \times \Omega \times S$ .

Wir untersuchen das Spiel  $v_x : A_x \rightarrow \mathbb{R}^I : a_x \mapsto u_x((x \mapsto a_x) \cup s_n)$ .

Zur Berechnung von  $u_x(s)$  genügen diese Daten  $(x \mapsto a_x) \cup s_n \subseteq s$ .

(1) Nach Voraussetzung ist  $A_x \cong A_x^j$  endlich.

Wir wählen eine Aktion  $a_x \in A_x$  so, dass  $v_x^j(a_x)$  maximal ist.

(2) Nach Voraussetzung ist  $A_x$  endlich. Wir wählen ein Nash-Gleichgewicht  $a_x \in \bar{A}_x = \prod_{i \in I} [A_x^i]$  für das Spiel  $\bar{v}_x$ .

Zu  $s_0 = \emptyset$  konstruieren wir rekursiv Fortsetzungen  $s_0 \subseteq s_1 \subseteq s_2 \subseteq \dots$  und erhalten das teilspielperfekte Gleichgewicht  $s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_n$  auf  $X$ .

Hierzu nutzen wir schließlich die Voraussetzung  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ .

Umgekehrt entsteht jedes teilspielperfekte Gleichgewicht  $s \in \text{PNE}(\Gamma, S)$  bzw.  $s \in \text{PNE}(\Gamma, \bar{S})$  auf diese Weise.

□

# Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

**Aufgabe:** Ist die Konstruktion in (1) bzw. in (2) ein Algorithmus?

**Lösung:** Schritt (1) ist konstruktiv. Manchmal existieren mehrere Maximierer, wir wählen dann willkürlich einen aus. Verfolgen wir systematisch alle Wahlen, so erhalten wir alle Gleichgewichte!

Schritt (2) ist leider (noch) nicht konstruktiv. Für endliche reelle Spiele  $u: \prod_{i \in I} S^i \rightarrow \mathbb{R}^I$  benötigen wir (vorläufig) ein Orakel  $u \mapsto s_u \in \text{NE}(\bar{u})$ . Ein Nash-Gleichgewicht zu prüfen ist leicht, eins zu finden ist schwer. Oft hilft iterierte Löschung von strikt / schwach dominierten Strategien.

😊 Die Rekursion wird in der dynamischen Programmierung verwendet.

Die Existenz einer Filtrierung  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  über der Indexmenge  $(\mathbb{N}, <)$  haben wir hier zur technischen Vereinfachung eingeführt. Es genügt, eine Filtrierung  $(X_n)_{n \in N}$  über einer wohlgeordneten Menge  $(N, <)$ . Dies kann notwendig werden, wenn  $\Omega_x$  unendlich ist, wie oben erklärt.

**Aufgabe:** (1) Warum existiert immer eine Filtrierung  $(X_n)_{n \in N}$  von  $X$ ?  
(2) Formulieren und beweisen Sie Satz J1D für diesen allgemeinen Fall.

# Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

**Aufgabe:** Für das Schachspiel gilt eine von drei Alternativen (Satz C3A): (a) Weiß kann einen Gewinn erzwingen. (b) Schwarz kann einen Gewinn erzwingen. (c) Jeder von beiden kann mindestens ein Remis erzwingen. Was bedeutet das genau? Genügen hierzu Nash–Gleichgewichte? Wie können Sie die richtige Alternative finden, zumindest im Prinzip?

Ernst Zermelo ist heutigen Studierenden der Mathematik bekannt durch seine Arbeiten zur Mengenlehre, speziell die Zermelo–Fraenkel–Axiome. Er war zudem ein begeisterter Schachspieler, und dies führte zu zwei mathematischen Arbeiten. Die erste davon *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* (1913) war sein Vortrag auf dem 5. Internationalen Mathematikerkongress 1912 in Cambridge. Die Mengenlehre war und ist hierzu ein bequemer formaler Rahmen! Zermelos Rekursion wurde für die Spieltheorie wiederentdeckt durch Harold Kuhn: *Extensive Games and the Problem of Information* (1953). Daher heißt der obige Satz J1D und das Konstruktionsverfahren in der Literatur nach Zermelo oder Zermelo–Kuhn oder auch nur Kuhn.

# Rekursion: Kompakt und stetig genügen nicht!

Der Satz von Zermelo zur rekursiven Konstruktion von Gleichgewichten ist einfach und elegant, zudem naheliegend und leicht zu beweisen. Daher liegt es auf der Hand, nach Verallgemeinerungen zu fragen. Können wir die Voraussetzungen noch weiter abschwächen?

Im einfachsten Fall ist in jedem Zustand  $x \in X$  nur ein Spieler  $j = j(x)$  am Zug, also  $\text{pr}^j : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^j$  bijektiv. Die entscheidende Voraussetzung ist dann die Endlichkeit der Aktionsmenge  $A_x^j$ . Das stellt sicher, dass im Zustand  $x$  ein Maximierer  $s_x^j \in A_x^j$  für die Auszahlung  $v_x^j$  existiert.

Auf den ersten Blick würde man daher vermuten, Zermelos rekursives Verfahren gelingt ebenso, wenn alle Aktionsmengen  $A_x$  kompakt sind, und die terminale Auszahlung  $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R}^I$  stetig in den Aktionen ist.

Das folgende Beispiel ist einfach, aber doch überraschend: Es zeigt eindrücklich, dass diese Vermutung falsch ist!

Die Rekursion führt nämlich dazu, dass  $v_x^j$  im Allgemeinen nicht stetig ist und auch kein Maximum annehmen muss.

# Rekursion: Kompakt und stetig genügen nicht!

Ein Beispiel: Alice wählt  $s^1 \in S^1 = [-1, 1]$ , Bob wählt  $s^2 \in S^2 = [-1, 1]$ , Auszahlungen sind  $v: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}: (s^1, s^2) \mapsto (s^1 - s^2, s^1 \cdot s^2)$ . Das sind kompakte Mengen und stetige Funktionen. Sogar bi/linear!

**Aufgabe:** (1) Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte  $(s^1, s^2)$  des Spiels  $v$ .  
 (2) Alice spielt zuerst, öffentlich, dann Bob. Finden Sie alle PNE!  
 (3) Lässt sich rekursiv jedes PNE fortsetzen?

**Lösung:** (1) Strikt dominant ist  $s^1 = 1$ , dann  $s^2 = 1$ , Auszahlung  $(0, 1)$ .  
 (2) Bob kennt Alice' Zug  $s^1$  und reagiert rational / optimiert seine Wahl

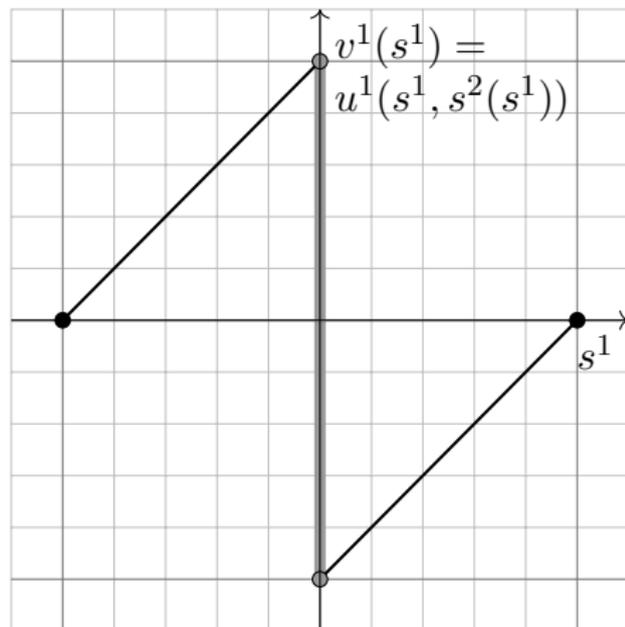
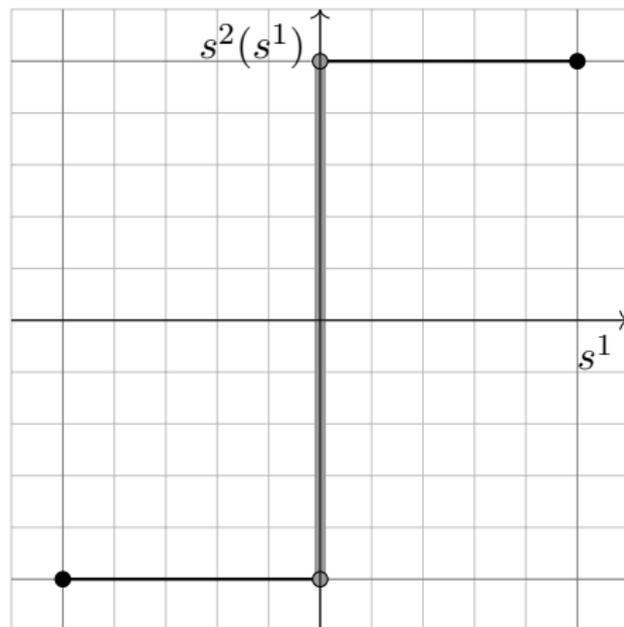
$$s^2 : S^1 \rightarrow S^2 : s^1 \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } s^1 < 0, \\ +1 & \text{für } s^1 > 0, \\ c & \text{für } s^1 = 0, \end{cases}$$

mit  $c \in [-1, 1]$ . Im Falle  $c \in ]-1, 1]$  hat Alice keine beste Strategie. Nur im Falle  $c = -1$  hat Alice eine beste Strategie, nämlich  $s^1 = 0$ .

(3) Nein, in diesem Spiel lässt sich nicht jedes teilspielperfekte Gleichgewicht per Rückwärtsinduktion fortsetzen, wie (2) zeigt.

# Rekursion: Kompakt und stetig genügen nicht!

Bobs beste Antwort  $s^2(s^1) \in [-1, 1]$  auf Alice' Zug  $s_1 \in [-1, 1]$ :



Die Aktionsmengen  $S^1 = S^2 = [-1, 1]$  sind hier kompakt und darauf sind die Auszahlungen  $v^1 : (s^1, s^2) \mapsto s^1 - s^2$  und  $v^2 : (s^1, s^2) \mapsto s^1 \cdot s^2$  stetig.

**⚠** Die Rückwärtsinduktion führt jedoch zu Unstetigkeiten!

# Rekursion: Kompakt und stetig genügen nicht!

Moment mal, alles hier ist bilinear in den Strategien  $s^1, s^2 \in [-1, 1]$ .  
Das kennen wir doch von Bimatrixspielen. Geht das hier ebenso?

**Aufgabe:** Schreiben Sie  $v : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (s^1, s^2) \mapsto (s^1 - s^2, s^1 \cdot s^2)$   
(geeignet affin umparametrisiert) als ein Bimatrix-Spiel!

**Lösung:** Wir setzen  $s^1 = 2p - 1$  und  $s^2 = 2q - 1$  mit  $p, q \in [0, 1]$ .

	B		0	1
A	0	1	-1	
	1	-1	2	0

$$\begin{aligned} v^1(p, q) &= 0(1-p)(1-q) + 2p(1-q) - 2(1-p)q + 0pq \\ &= 2p - 2q = s^1 - s^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^2(p, q) &= 1(1-p)(1-q) - 1p(1-q) - 1(1-p)q + 1pq \\ &= 4pq - 2p - 2q + 1 = s^1 \cdot s^2 \end{aligned}$$

## Kombinatorische Spiele dynamisch betrachtet

**Aufgabe:** (0) Wiederholen Sie aus dem Kapitel C über kombinatorische Spiele die Definition eines neutralen Spiels  $(G, v)$  mit Summe  $c \in \mathbb{R}$  auf einem Graphen  $G = (X, A, \sigma, \tau)$  mit terminaler Auszahlung  $v: \partial X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

(1) Formalisieren Sie dies als ein dynamisches Spiel  $\Gamma(G, v)$  über der Spielermenge  $I = \{1, 2\}$  (kybernetisch, im Sinne der Definition J1A).

(2) Umgekehrt: Sei  $\Gamma = (X, v, f)$  ein deterministisches dynamisches Spiel über  $I = \{1, 2\}$ . Unter welchen Bedingungen gilt  $\Gamma \cong \Gamma(G, v)$ ?

😊 Neutrale Spiele sind streng symmetrisch in den beiden Spielern. Diese besondere Struktur erleichtert uns die Beschreibung und Analyse. Insbesondere für neutrale kombinatorische Spiele haben wir starke Werkzeuge wie den Sprague–Grundy–Satz für Summen von Spielen.

Zur Einübung der Notation und der Begriffe wollen wir neutrale Spiele nun in den allgemeineren Rahmen der dynamischen Spiele einbetten.

### ◆ Definition C1H: neutrales Spiel und Rückwärtsinduktion

Ein **neutrales Spiel**  $(G, v)$  mit konstanter Summe  $c \in \mathbb{R}$  besteht aus einem artinschen Graphen  $G = (X, A, \sigma, \tau)$  mit Auszahlung  $v: \partial X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

Beide Spieler ziehen abwechselnd gemäß den Kanten  $A$  des Graphen. In jedem terminalen Zustand  $x \in \partial X$  erhält der Ziehende schließlich die Auszahlung  $v(x)$  und der Wartende das Komplement  $c - v(x)$ .

### ◆ Satz C1H: Gewinnfunktion durch Rückwärtsinduktion

Dazu existiert die eindeutige **Gewinnfunktion**  $u: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit  $u|_{\partial X} = v$ , die in jedem aktiven Zustand  $x \in X^\circ$  die Min-Max-Bedingung erfüllt:

$$u(x) \stackrel{!}{=} \sup_{x \rightarrow y} [c - u(y)] = c - \inf_{x \rightarrow y} [u(y)]$$

Eine **Lösung** oder **optimale Strategie**  $s$  ordnet jedem aktiven Zustand  $x \in X^\circ$  eine optimale Aktion  $s(x) = a: x \rightarrow y$  mit  $u(x) = c - u(y)$  zu.

## Kombinatorische Spiele dynamisch betrachtet

**Lösung:** (1) Sei  $(G, v)$  ein neutrales Spiel mit konstanter Summe  $c \in \mathbb{R}$  auf dem Graphen  $G = (X, A, \sigma, \tau)$  mit der Auszahlung  $v : \partial X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

Wir konstruieren das dynamische Spiel  $\Gamma(G, v) = (X', v', f)$  wie folgt:

**Zustände:** Zum Spielstand  $x \in X$  notieren wir, wer zieht und wer wartet. Hierzu setzen wir  $X' := X \times \{(1, 2), (2, 1)\}$  mit der simplen Konvention, dass  $x' = (x; i, j) \in X'$  bedeutet, Spieler  $i$  zieht und Spieler  $j$  wartet.

**Auszahlung:** Wir zerlegen den Zustandsraum  $X' = X'^{\circ} \sqcup \partial X'$  gemäß  $X'^{\circ} = X^{\circ} \times \{(1, 2), (2, 1)\}$  und  $\partial X' = \partial X \times \{(1, 2), (2, 1)\}$ . Hierauf ist  $v' : \partial X' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  gegeben durch  $v'^i(x; i, j) = v(x)$  und  $v'^j(x; i, j) = c - v(x)$ .

**Dynamik:** Für  $x' = (x; i, j) \in X'^{\circ}$  setzen wir  $A_{x'}^i = A_x$  und  $A_{x'}^j = \{*\}$  sowie  $f((x; i, j), (a, *)) = (\tau(x, a); j, i)$  für alle Aktionen  $a \in A_x$ .

😊 Diese ausführliche Beschreibung ist nicht schwierig, aber länglich. Im Kapitel C haben wir die knappe Beschreibung  $(G, v)$  vorgezogen.

## Kombinatorische Spiele dynamisch betrachtet

(2) Das so konstruierte dynamische Spiel  $\Gamma = \Gamma(G, v) = (X', v', f)$  hat eine besondere Symmetrie: In jedem Zustand  $x' \in X'^{\circ}$  zieht nur ein Spieler  $i = i(x')$ , während der andere Spieler  $j = j(x')$  wartet. Bei jedem Zug  $(a_1, a_2) : x' \rightarrow y'$  gilt  $i(y') = j(x')$  und  $j(y') = i(x')$ .

Zudem existiert ein involutiver Automorphismus  $\rho : \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma$ , also  $\rho^2 = \text{id}_{\Gamma}$ , der beide Spieler vertauscht:

- Spieler: Wir haben  $\rho : I \xrightarrow{\sim} I : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$ .
- Zustände: Wir haben  $\rho : X' \xrightarrow{\sim} X'$  mit  $\rho^2 = \text{id}_{X'}$  sowie  $\rho(X'^{\circ}) = X'^{\circ}$  und  $\rho(\partial X') = \partial X'$ .
- Auszahlungen: Wir haben  $\rho : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : x \mapsto c - x$  sowie  $v^1 \circ \rho = \rho \circ v^1 = v^2$  und  $v^2 \circ \rho = \rho \circ v^2 = v^1$ .
- Dynamik: Wir haben  $i \circ \rho = \rho \circ i$  und  $j \circ \rho = j \circ \rho$  sowie  $\rho((a_1, a_2) : x' \rightarrow y') = (a_2, a_1) : \rho(x') \rightarrow \rho(y')$ .

😊 Jedes dynamische Spiel  $\Gamma$  mit einer solchen Involution  $\rho$  können wir als neutrales Spiel  $\Gamma = \Gamma(G, v)$  mit konstanter Summe  $c$  betrachten.



## Einzeiliges Nim dynamisch betrachtet

**Lösung:** (1) Die Spielermenge ist hier  $I = \{1=Alice, 2=Bob\}$ .  
 Im Zustand  $(n, i)$  liegen noch  $n$  Hölzer, und Spieler  $i$  ist am Zug.  
 Als Zustandsraum wählen wir  $X = \mathbb{N} \times I$ , terminal ist  $\partial X = \{0\} \times I$   
 mit Auszahlung  $v: \partial X \rightarrow \mathbb{R}^I$  wie oben. Gemäß den Zugregeln gilt

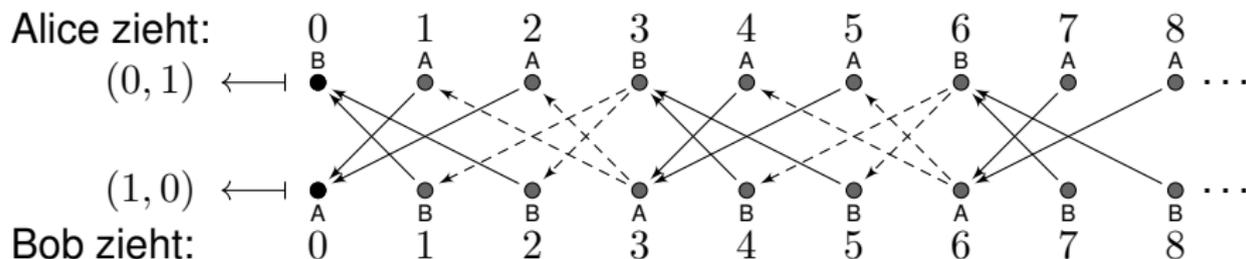
$$A_{(n,1)}^1 = A_{(n,2)}^2 = \{1, 2\} \quad \text{für } n \geq 2,$$

$$A_{(1,1)}^1 = A_{(1,2)}^2 = \{1\} \quad \text{für } n = 1,$$

$$A_{(n,2)}^1 = A_{(n,1)}^2 = \{0\} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Damit erhalten wir  $f(n, i; a^1, a^2) = (n - a^1 - a^2, i + 1 \bmod 2)$ .

(2) Die kanonische Filtrierung ist  $X_n = \{0, 1, \dots, n\} \times I$ . Rekursion:



# Einzeiliges Nim dynamisch betrachtet

😊 Das hier verwendete Modell ist klein aber fein, klar und einfach: In diesem Spiel  $\Gamma = (X, v, f)$  ist der Zustandsraum kein Baum! Es gibt noch nicht einmal einen ausgezeichneten Startzustand.

Dieses Beispiel betont die Sichtweise als dynamisches System: Alle Zustände  $x \in X$  des Spieles  $\Gamma$  sind zunächst gleichberechtigt. Stärker strukturierte Spielbäume sind erlaubt, aber nicht zwingend.

Die in (2) verwendete Filtrierung ist naheliegend, es gibt viele weitere. Mit jeder können wir wunderbar die Rückwärtsinduktion durchführen!

😊 Als Ergebnis finden wir eine einfache und schöne Paritätsregel: Gilt  $3 \nmid n$ , dann hat der ziehende Spieler eine Gewinnstrategie. Gilt  $3 \mid n$ , dann hat der Gegenspieler eine Gewinnstrategie.

Wenn Sie diese Regel erst einmal kennen, dann können Sie sie auch leicht unabhängig beweisen durch (Vorwärts-)Induktion. Gefunden haben wir sie durch Zermelos rekursiven Algorithmus.

😊 Diese Rekursion lässt sich auf alle Spiele anwenden, vorausgesetzt die Spieler ziehen jeweils einzeln und haben vollständige Information.

## Einzeiliges Nim dynamisch betrachtet

- Aufgabe:** (3) Erzeugen Sie das Teilspiel  $\Gamma_x$  zum Zustand  $x = (n, i)$ .  
(4) Finden Sie alle Teilspiele  $X' \leq \Gamma$  und (5) alle Filtrierungen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
(6) Formulieren Sie „Nim mit zufälligem Start“ als Oberspiel  $\Gamma' \geq \Gamma$ .  
(7) Warum erlaubt  $\Gamma'$  keine Filtrierung  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  indiziert mit  $\mathbb{N}$ ?

**Aufgabe:** Was genau bedeutet die Aussage „Alice / Bob hat eine Gewinnstrategie“? Was bedeutet dabei „optimale“ Spielweise? Was passiert, wenn ein Spieler gelegentlich „Fehler“ macht? Genügen für diese Untersuchung bereits Nash-Gleichgewichte?

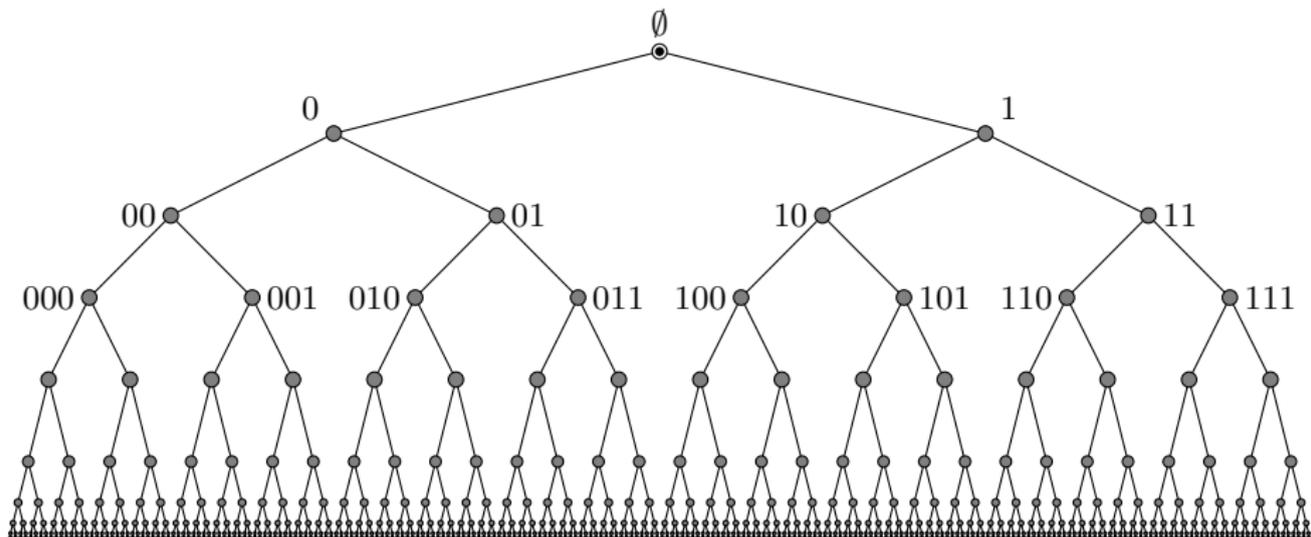
**Aufgabe:** Analysieren Sie das Kinderspiel *Tic-Tac-Toe*. Wie groß ist der Spielbaum? Was bedeutet hier „optimale“ Spielweise? Gewinnt Spieler 1 (Kreuze) oder Spieler 2 (Kreise) oder endet es unentschieden?

**Aufgabe:** Analysieren Sie das Spiel *Strandkiosk* aus der Einleitung. Wie groß ist der Spielbaum? Was bedeutet hier „optimale“ Spielweise? Welcher der drei Spieler A,B,C kann sich welchen Marktanteil sichern?

# Trajektorien und Spielbäume

*Those who cannot remember the past are condemned to repeat it.*

(George Santayana, 1863–1952)



Der **vollständige binäre Baum** besteht aus den Wörtern  $X = \{0, 1\}^{\leq \infty}$ . Das Alphabet ist  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ . Innere Knoten sind alle endlichen Wörter  $x \in X^\circ = \mathcal{A}^*$ . Die Kante  $x \rightarrow x * a$  entspricht der Fortsetzung um den Buchstaben  $a \in \mathcal{A}$ . Der Rand  $\partial X = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  sind alle unendlichen Pfade.

# Trajektorien und Spielbäume

Der **Zustandsraum** war bisher beliebig. Das war bequem und flexibel. Wir betrachten nun speziell **Spielbäume**. Das ist bequem und konkret.

😊 Idee: Wir notieren im aktuellen Zustand den bisherigen Spielverlauf. Vollständigkeit: Wir erlauben und bewerten auch unendliche Trajektorien.

😊 Diese Notation vereint algebraische und geometrische Darstellung. Vervollständigung ist die Kompaktifizierung mit idealen Randpunkten.

**Beispiel:** Beim Schach ist der Zustand genau genommen nicht nur die Stellung der Figuren auf dem Schachbrett, sondern auch das nebenher geführte Protokoll aller bisherigen Züge (z.B. in algebraischer Notation).

Nur so lassen sich manche Regeln überhaupt erst formulieren, etwa: Die Partie endet remis, wenn dreimal dieselbe Stellung erreicht wird, oder 50 Züge lang kein Stein geschlagen und kein Bauer bewegt wird.

Die simple Idee eines Protokolls lässt sich auf jedes Spiel übertragen: Wir codieren den Spielverlauf (bisherige Zustände, Historie, Trajektorie) als endliche Folge, also ein Wort über einem geeigneten Alphabet.

# Trajektorien und Spielbäume

Sei  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  eine Menge von Aktionen, wir betrachten dies als **Alphabet**. Ein **Wort** der Länge  $n$  ist ein  $n$ -Tupel  $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$  mit  $w_i \in \mathcal{A}$ .

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A} = \{ w : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \mathcal{A} \}$$

Wir lesen Buchstaben als Wörter vermöge  $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^1 : a \mapsto (\{0\} \mapsto a)$ .

Wir haben die Verknüpfung  $* : \mathcal{A}^k \times \mathcal{A}^\ell \rightarrow \mathcal{A}^{k+\ell} : (u, v) \mapsto w = uv$  durch Aneinanderhängen (Konkatenation) endlicher Wörter:

$$\underbrace{(u_0, \dots, u_{k-1})}_{= u \in \mathcal{A}^k} * \underbrace{(v_0, \dots, v_{\ell-1})}_{= v \in \mathcal{A}^\ell} = \underbrace{(u_0, \dots, u_{k-1}, v_0, \dots, v_{\ell-1})}_{= uv =: w \in \mathcal{A}^{k+\ell}}$$

Ausgeschrieben heißt das  $w_i = u_i$  für  $i < k$  und  $w_i = v_{i-k}$  für  $i \geq k$ .

Das leere Wort  $e \in \mathcal{A}^0 = \{\emptyset\}$  ist neutral, denn  $e * u = u * e = u$ .

Die Verknüpfung  $*$  ist assoziativ, denn  $(u * v) * w = u * (v * w)$ .

Somit erhalten wir das **freie Monoid**  $(\mathcal{A}^*, *, e)$  über  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{<\infty} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n, \quad * : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^* : (u, v) \mapsto w = uv$$

Ebenso definieren wir unendliche Wörter  $\mathcal{A}^\infty := \mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{ w : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A} \}$  und die Linksoperation  $* : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : (u, v) \mapsto w = uv$  wie oben.

# Trajektorien und Spielbäume

Wir betrachten die natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  in von Neumanns Modell:  
 $0 = \{ \}$ ,  $1 = \{0\}$ ,  $2 = \{0, 1\}$ ,  $3 = \{0, 1, 2\}$ ,  $\dots$ ,  $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $\dots$

Somit ist  $\mathcal{A}^n = \{ w : n \rightarrow A \}$  die Menge aller Abbildungen  $w : n \rightarrow A$ .

Das einzige Wort der Länge 0 ist demnach das leere Wort  $e : \emptyset \rightarrow A$

Die Menge  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{ w : \mathbb{N} \rightarrow A : k \mapsto w_k \}$  besteht entsprechend aus allen unendlichen Wörtern, üblicherweise heißen sie Folgen  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Hierauf operiert das freie Monoid  $(\mathcal{A}^*, *, e)$  durch Konkatenation von links.

Für  $u \in \mathcal{A}^m$  und  $w \in \mathcal{A}^{\leq \infty}$  bedeutet die Inklusion  $u \subseteq w$ : Es gilt  $w = uv$  mit Startsegment  $u = w|_m$  und eindeutiger Fortsetzung durch  $v \in \mathcal{A}^{\leq \infty}$ .

**Beispiele:** Der beliebte euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$  beruht auf der Menge aller  $n$ -Tupel  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  reeller Zahlen  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Die übliche Indizierung  $0, 1, \dots, n-1$  in der Informatik und  $1, 2, \dots, n$  in der Mathematik sind äquivalent durch die kanonische Umnummerierung. Den Folgenraum  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  bzw.  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  kennen Sie prominent aus der Analysis. Die Räume  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  bzw.  $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  bestehen aus beidseitig unendlichen Folgen, diese nutzen Sie dankend für Fourier-Reihen und Laurent-Reihen.

# Trajektorien und Spielbäume

Die Menge aller (endlichen oder unendlichen) Folgen über  $\mathcal{A}$  ist

$$\mathcal{A}^{\leq \infty} := \mathcal{A}^0 \sqcup \mathcal{A}^1 \sqcup \mathcal{A}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}^* \sqcup \mathcal{A}^{\mathbb{N}}.$$

Die **Spielverläufe** sind hierin eine Teilmenge  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$ , zerlegt in

$$X = X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_{\infty} \quad \text{mit} \quad X_n = X \cap \mathcal{A}^n.$$

Wir nennen  $X$  **baumförmig** (engl. *arborescent*), wenn gilt:

- 1 Als Start haben wir  $X_{\ell} = \{\alpha\}$  und zuvor  $X_0 = \dots = X_{\ell-1} = \emptyset$ .
- 2 Für jede endliche Folge  $x \in X_n$  und  $\ell \leq m \leq n$  gilt  $x|_m \in X_m$ .
- 3 Sei  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  eine unendliche Folge. Wir schreiben  $x = \lim(x|_m)$ .  
Genau dann gilt  $x \in X_{\infty}$ , wenn  $x|_m \in X_m$  für alle  $\ell \leq m < \infty$ .

Wir zerlegen  $X = X^{\circ} \sqcup \partial X$  mit  $\partial X = X_{\infty} \cup \{x \in X_{< \infty} \mid x\mathcal{A} \cap X = \emptyset\}$ .

Jedes  $x \in X$  heißt **Trajektorie**. Sie ist **terminal**, falls sie unendlich ist,  $x \in X_{\infty}$ , oder endlich aber nicht fortsetzbar,  $x \in X_{< \infty}$  und  $x\mathcal{A} \cap X = \emptyset$ .  
Andernfalls ist sie endlich und fortsetzbar,  $x \in X_{< \infty}$  und  $x\mathcal{A} \cap X \neq \emptyset$ .

# Trajektorien und Spielbäume

Diese Beschreibung fasst Spielzustände und Spielverläufe zusammen. Für dynamische Spiele in kybernetischer Form sind dies im Allgemeinen zwei verschiedene Dinge: Der Spielverlauf beinhaltet als letzten Eintrag den aktuellen Spielzustand. 😊 Für Bäume gilt auch die Umkehrung.

Für die Spieltheorie ist diese Eigenschaft wesentlich und nützlich: Jeder Spielzustand  $x \in X$  enthält seine gesamte Vorgeschichte! Die extensive Form beschert dem Spiel perfekte Erinnerung.

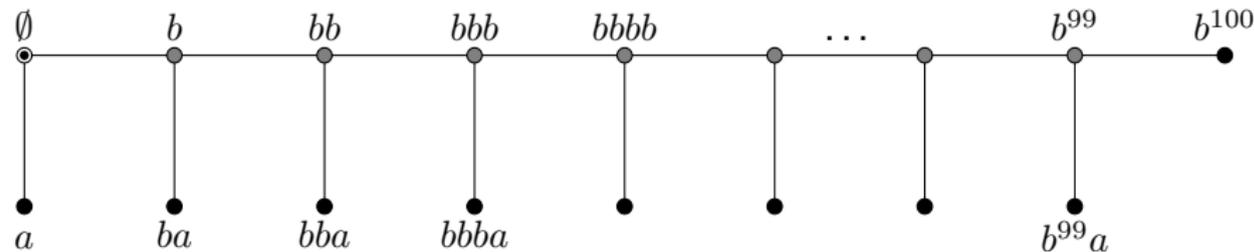
😞 Der Preis hierfür sind im Allgemeinen sehr große Spielbäume.

Zur Beschreibung benötigen wir nur die baumförmige Menge  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$  von Wörtern über  $\mathcal{A}$ . Die Mengen  $\mathcal{A}$  und  $X$  sind ansonsten beliebig. Diese formale Konstruktion ist extrem elegant, raffiniert und kompakt!

😊 Das topologische Wortspiel ist hier ganz bewusst und beabsichtigt.

Die aktiven Zustände  $x \in X^\circ$  sind die Wörter, die sich innerhalb von  $X$  noch fortsetzen lassen. Alle anderen Wörter sind terminale Zustände. Somit ist die Zerlegung  $X = X^\circ \sqcup \partial X$  bereits in der Menge  $X$  codiert, ebenso alle Aktionen  $x \rightarrow y$  als mögliche Fortsetzung  $y \in x\mathcal{A} \cap X$ .

# Der Hundertfüßler / centipede



**Aufgabe:** Sei speziell  $L = 100$  oder allgemein  $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .  
 Formalisieren Sie diesen Baum  $X \subset \{a, b\}^{\leq \infty}$  der Länge  $L$ .  
 Welche Zustände sind aktiv  $X^\circ$ , welche sind terminal  $\partial X$ ?

**Lösung:** Für  $L \in \mathbb{N}$  haben wir gemäß Skizze

$$X = \{ b^n \mid n \in \mathbb{N}_{\leq L} \} \cup \{ b^n a \mid n \in \mathbb{N}_{< L} \}.$$

Aktive Zustände / innere Knoten sind hier  $X^\circ = \{ b^n \mid n \in \mathbb{N}_{< L} \}$ .  
 Terminale Zustände / Blätter sind entsprechend  $\partial X = X \setminus X^\circ$ .

Im Fall  $L = \infty$  kommt die konstante Folge  $b^\infty = bbbbb \dots \in \partial X$  hinzu.  
 Dies ist kein endlicher Knoten des Baumes, dient aber als Endzustand.

Somit ist die Zerlegung  $X = X^\circ \sqcup \partial X$  bereits in der Menge  $X$  codiert,  
 ebenso alle Aktionen  $x \rightarrow y$  als mögliche Fortsetzung  $y \in x\mathcal{A} \cap X$ .

## Der Hundertfüßler / *centipede*

Der vollständige Binärbaum und der Hundertfüßler sind erste Beispiele, allein darauf lassen sich bereits einige interessante Spiele konstruieren.

Unsere Notation verfolgt zwei Ziele: (1) Wir benötigen einen allgemeinen Rahmen zur Entwicklung der Theorie (Definitionen, Sätze, Beweise).

(2) Wir benötigen eine geeinete Sprache zur bequemen Beschreibung und präzisen Untersuchung konkreter Beispiele und Anwendungen.

Deshalb haben wir ein starkes Interesse an einer guten Notation, die sowohl knapp und bequem als auch expressiv und vielseitig ist.

Die hier dargestellte Baumstruktur findet sich daher in jedem Lehrbuch der Spieltheorie. Ich wähle eine mathematisch elegante Formalisierung. Informatik und Graphentheorie nutzen ähnliche Definitionen zu Bäumen, meist jedoch mit etwas abweichender Zielsetzung und Formalisierung.

Die Formalisierung als Wörter  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$  nutzt insbesondere in der deskriptiven Mengenlehre und Topologie, siehe A. Kechris: *Classical Descriptive Set Theory*. Springer 1995. Dort wird der bemerkenswerte Zusammenhang zwischen Logik, Mengenlehre und Spielen erklärt.

## Definition J2A: dynamisches Spiel in extensiver Form

Ein **dynamisches Spiel**  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$  über der Spielermenge  $I$  in (allgemein / kanonisch) **extensiver Form** beinhaltet folgende Daten:

- 1 Eine Zustandsmenge  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$  in Baumform, somit  $X = X^\circ \sqcup \partial X$ , sowie eine Auszahlung  $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R}^I$  auf den terminalen Zuständen.
- 2 Eine Dynamik  $f_x : \Omega_x \times A_x \rightarrow x\mathcal{A} \cap X$  für aktive Zustände  $x \in X^\circ$ . Hierbei sei  $\Omega_x \neq \emptyset$  und  $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i \neq \emptyset$  ein Produkt über  $I$ .  
Kanonisch ist hier  $f_x : \Omega_x \times A_x \xrightarrow{\sim} x\mathcal{A} \cap X : (\omega, a) \mapsto x * (\omega, a)$  durch Aneinanderhängung, also vollständige Niederschrift aller Aktionen.
- 3 Ein WMaß  $\mathbf{P}$  auf dem Produktraum  $(\Omega, \mathcal{A}) = \prod_{x \in X^\circ} (\Omega_x, \mathcal{A}_x)$ .

Kanonisch genügen die Daten  $(X, v, \mathbf{P})$ , deterministisch nur  $(X, v, f)$ , oder  $(X, v)$  im Falle einer kanonischen, deterministischen Dynamik.

😊 Als Kollateralnutzen beschert uns die Formalisierung in extensiver Baumform eine konzise Beschreibung: Der Baum  $X$  ist groß, doch die Definition ist kurz. Das muss man erst einmal verarbeiten und einüben.

# Dynamische Spiele in extensiver Form

Im Produkt  $\Omega_x \times A_x$  codieren wir die Zufallszüge und Spieleraktionen:  
In jedem Zustand  $x \in X^\circ$  erfolgt eine Ziehung  $\omega_x \in \Omega_x$ . Diese müssen nicht unabhängig sein, daher betrachten wir  $\text{pr}_x : (\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow (\Omega_x, \mathbf{P}_x)$ .

Im Zustand  $x \in X^\circ$  hat der Spieler  $i \in X$  die Aktionsmenge  $A_x^i \neq \emptyset$ .  
Bei einelementiger Menge  $A_x^i = \{*\}$  hat der Spieler  $i$  keinen Einfluss.

Die Dynamik  $f_x : \Omega_x \times A_x \rightarrow x\mathcal{A} \cap X$  setzt den Spielverlauf fort, indem an die bisherige Trajektorie der nächste Schritt angehängt wird.

In der Literatur ist die Bijektion  $f_x : (\omega, a) \mapsto x * (\omega, a)$  üblich. Das heißt: Die gesamte Aktion  $(\omega, a)$  wird in der Trajektorie  $x \mapsto x * (\omega, a)$  vermerkt.

Eine Surjektion  $f_x : \Omega_x \times A_x \rightarrow x\mathcal{A} \cap X$  würde genügen. Anschaulich: Nur das als relevant betrachtete Ergebnis der Aktionen wird vermerkt, etwa bei geheimer Abstimmung nur das Ergebnis statt der Einzelvoten. Äquivalente Aktionen entsprechen dann derselben Kante im Spielbaum. Diese Zusammenfassung ist flexibler und erlaubt kleinere Bäume. Deshalb führen wir dies hier als allgemein extensive Spiele ein.

## Definition J2B: Strategien und Spielverlauf

Eine **Strategie** für Spieler  $i \in I$  ist ein Element  $s^i \in S^i := \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$ , also eine Aktion  $s_x^i \in A_x^i$  für jeden aktiven Zustand  $x \in X^\circ$  des Spiels. Dies ist eine Abbildung  $s^i : X^\circ \rightarrow A^i := \bigcup_{x \in X^\circ} A_x^i$  mit  $x \mapsto s_x^i \in A_x^i$ .

Ein **Strategievektor** ist demnach  $s \in S := \prod_{i \in I} S^i \cong \prod_{x \in X^\circ} A_x$ . Jeder Spieler  $i \in I$  wählt unabhängig seine Strategie  $s^i \in S^i$ .

Aus Startzustand  $x_m \in X_m$ , Zufallselement  $\omega \in \Omega$  und Strategievektor  $s \in S$  folgt der **Spielverlauf** rekursiv gemäß  $x_{t+1} = f(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t})$  und

$$\lim : X \times \Omega \times S \rightarrow \partial X : \lim(x_m, \omega, s) := \bigcup_{t \geq m} x_t.$$

Auch im Spezialfall einer endlichen Trajektorie  $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$  mit terminalem Zustand  $x_n \in \partial X$  haben wir  $\lim(x_m, \omega, s) = \bigcup_{t \geq m} x_t = x_n$ .

😊 Jede Strategie  $s^i \in S^i$  für Spieler  $i \in I$  ist ein Handlungsplan. Die Spieler entscheiden sich somit nicht spontan, sondern im Voraus. Vorteil: Damit lassen sich Spielverlauf und Auszahlung berechnen.

## Dynamische Spiele in extensiver Form

In extensiver Form ist es üblich, terminale Auszahlungen zu betrachten. Das ist keine wesentliche Einschränkung: Alle sofortigen Belohnungen werden entlang der Trajektorie kumuliert und erst am Ende ausgezahlt. Dies ist problemlos möglich, da wir die gesamte Trajektorie abbilden.

Die extensive Form ermöglicht zudem, auch unendliche Trajektorien im selben Rahmen zu behandeln: Diese sind immer terminal, liegen also im Rand  $\partial X$ , und werden durch die Auszahlung  $v: \partial X \rightarrow \mathbb{R}^I$  bewertet. Genau zu diesem Zweck haben wir *vollständige* Bäume erklärt.

Die kybernetische Form ist zunächst allgemeiner, da der Zustandsraum  $X$  und die Dynamik  $f$  nicht immer baumförmig strukturiert sein *müssen*, sondern bei der Wahl des *Spielgraphen* noch mehr Flexibilität lassen. In der extensiven Form legen wir uns auf *Spielbäume* fest.

Auch in kybernetischer Form sind unendliche Trajektorien durchaus möglich. Im Falle eines Diskontfaktors  $\delta \in [0, 1[$  ist hier ihre terminale Auszahlung implizit gleich 0. Es zählt dann allein die diskontierte Summe der sofortigen Belohnungen entlang der Trajektorie.

## Definition J2c: teilspielperfekte Gleichgewichte

Die Auszahlung  $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R}^I$  setzen wir fort und mitteln über  $(\Omega, \mathbf{P})$ :

$$\tilde{u} : X \times \Omega \times S \rightarrow \mathbb{R}^I : (x, \omega, s) \mapsto v(\lim(x, \omega, s))$$

$$u : X \times S \rightarrow \mathbb{R}^I : (x, s) \mapsto \mathbf{E}[\omega \mapsto \tilde{u}(x, \omega, s)]$$

Hierzu fordern wir absolute Summierbarkeit, etwa  $v$  und  $\tilde{u}$  beschränkt. Zu jedem Startzustand  $x \in X$  erhalten wir ein Spiel in Normalform:

$$u_x : S = \prod_{i \in I} S^i \rightarrow \mathbb{R}^I : s \mapsto u(x, s) = \mathbf{E}[\omega \mapsto \tilde{u}(x, \omega, s)]$$

Damit definieren wir die **teilspielperfekten Gleichgewichte** von  $\Gamma$ :

$$\text{PNE}(\Gamma) = \text{PNE}(\Gamma, S) := \bigcap_{x \in X^\circ} \text{NE}(u_x : S \rightarrow \mathbb{R}^I)$$

Ebenso für (lokal) gemischte Strategien  $s^i \in \bar{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} [A_x^i]$  und (lokal) gemischte teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte  $\text{PNE}(\bar{\Gamma}) = \text{PNE}(\Gamma, \bar{S})$ .

## Dynamische Spiele in extensiver Form

Wir betrachten hier Spiele in extensiver Form mit terminaler Auszahlung. Um diese auf einen aktiven Zustand  $x \in X^\circ$  zurückzuziehen, benötigen wir ab dem Start in  $x$  die vollständige Trajektorie  $\lim(x, \omega, s) \in \partial X$ . Diese erhalten wir aus dem Strategiebündel  $s$  und den Zufallszügen  $\omega$ . (Genauer genügt der Teil dieser Information, der von  $x$  erreichbar ist.)

Damit können wir  $\tilde{u}$  definieren, wie oben erklärt, und zu  $u$  mitteln. Für jeden Startzustand  $x \in X^\circ$  können wir so Strategien bewerten und somit insbesondere wie gewohnt Nash–Gleichgewichte erklären. Die Definition von teilspielperfekten Nash–Gleichgewichten, also den Mengen  $\text{PNE}(\Gamma, S)$  und  $\text{PNE}(\Gamma, \bar{S})$ , gelingt damit leicht und elegant.

⚠ Das erklärt, was wir *suchen*, aber noch nicht, wie wir es *finden*. Die Bestimmung von teilspielperfekten Gleichgewichten ist schwierig. Dazu dient das folgende *Prinzip der einmaligen Abweichung* J2D.

⚠ Bei unvollständiger Information müssen wir dies noch verfeinern, sowohl das Spiel J3A als auch das Lösungskonzept J3B.

# Dynamische Spiele in extensiver Form

Wir nutzen die extensive Form schon lange zur Darstellung von Spielen als Bäume, nun formalisieren und präzisieren wir dieses Vorgehen.

**Beispiel:** Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich  $x \in \{1, \dots, 9\}$  und Bob wünscht sich  $y \in \{1, \dots, 9\}$ , (0) zugleich, (1) erst Alice, (2) erst Bob. Gilt  $x + y > 10$ , so verfällt alles. Gilt  $x + y \leq 10$ , so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

**Aufgabe:** (a) Formalisieren Sie dies als ein dynamisches Spiel  $\Gamma$ .  
(b) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte.

**Lösung:** (0a) Dies ist im Wesentlichen ein statisches Spiel, siehe E109.

$$u : \{1, \dots, 9\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{falls } x + y \leq 10, \\ (0, 0) & \text{falls } x + y > 10. \end{cases}$$

(0b) Wir finden hier genau die folgenden neun Nash-Gleichgewichte:  
 $NE(u) \subseteq \{ (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1) \}$

😊 Die zeitliche Struktur in (1) und (2) codieren wir als Spielbaum, die Gleichgewichte finden wir hier leicht per Rückwärtsinduktion.

## Dynamische Spiele in extensiver Form

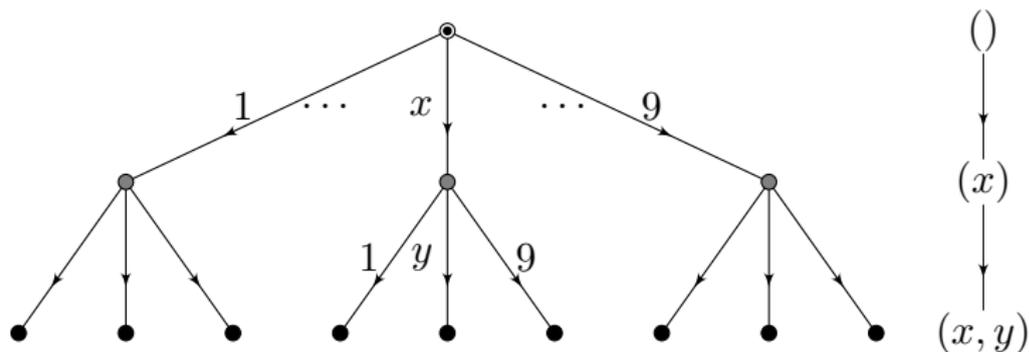
(1) Wir finden (a) den folgenden Spielbaum und (b)  $u \text{PNE}(\Gamma) = \{(9, 1)\}$ .

Alice

$$s^1(\emptyset) = 9$$

Bob

$$s^2(x) = 10 - x$$



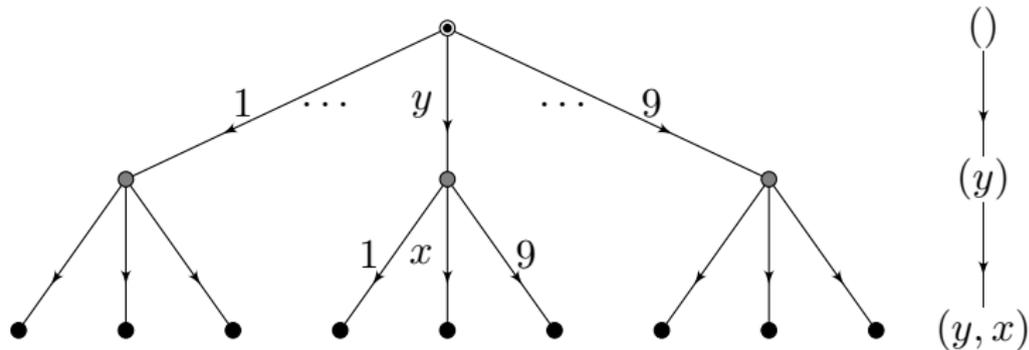
(2) Wir finden (a) den folgenden Spielbaum und (b)  $u \text{PNE}(\Gamma) = \{(1, 9)\}$ .

Bob

$$s^2(\emptyset) = 9$$

Alice

$$s^1(y) = 10 - y$$



# Das Prinzip der einmaligen Abweichung

😊 Das folgende Kriterium heißt *Prinzip der einmaligen Abweichung*, engl. *one-time-deviation principle*. Es erlaubt einen einfachen Test, ob mit  $s = (s^i)_{i \in I} \in S$  ein teilspielperfektes Gleichgewicht vorliegt.

**Satz J2D: Prinzip der einmaligen Abweichung, allgemein**

Sei  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$  ein dynamisches Spiel in extensiver Form.

Vorgelegt sei ein Strategievektor  $s \in \bar{S} = \prod_{i \in I} \bar{S}^i$  mit  $\bar{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} [A_x^i]$ . Wir wollen prüfen, ob  $s$  ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht ist.

Für den Spieler  $i \in I$  sei die terminale Auszahlung  $v^i: \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig bezüglich der Baumtopologie J2E. Dann sind äquivalent:

- 1 Der Vektor  $s$  ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht für Spieler  $i$ :  
Es gilt  $\bar{u}_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) \leq \bar{u}_x^i(s^i; s^{-i})$  für alle  $x \in X^\circ$  und  $\tilde{s}^i \in \bar{S}^i$ .
- 2 Der Vektor  $s$  erfüllt das Kriterium der einmaligen Abweichung:  
Es gilt  $\bar{u}_x^i(\hat{s}^i; s^{-i}) \leq \bar{u}_x^i(s^i; s^{-i})$  für jeden Zustand  $x \in X^\circ$  und jede Alternative  $\hat{s}^i \in \bar{S}^i$ , die von  $s^i$  nur in  $\hat{s}_x^i \in A_x^i$  abweicht.

Dieses Lokal-Global-Prinzip entspricht Bellmans Optimalität D2M!

# Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Abfolge von *future selves*, analog zu Schellings Economics (H303).



- (1) Spieler  $i$  optimiert global jede der Auszahlungen  $\bar{u}_x^i$  für  $x \in X^\circ$ .  
Zur Auswahl stehen alle alternativen Strategien  $\tilde{s}^i \in \tilde{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} [A_x^i]$ .
- (2) Spieler  $i \in I$  spaltet sich in unabhängige Klone  $(i, x) \in I \times X^\circ$ :  
Jeder optimiert lokal seine Auszahlung  $\bar{u}_x^i$  durch seine Aktion  $\hat{s}_x^i \in A_x^i$ .

# Das Prinzip der einmaligen Abweichung

😊 Das Prinzip J2D dient zur **Prüfung**, ob ein vorgelegter Strategievektor  $s = (s^i)_{i \in I} \in \bar{S}$  ein Gleichgewicht ist oder nicht. Wenn irgendein Spieler  $i \in I$  seine Strategie  $s^i$  verbessern kann, dann kann er dies bereits durch Änderung einer einzigen Aktion  $s_x^i$ .

Sprichwörtlich: Selbst die längste Reise beginnt mit dem ersten Schritt! Dieses einfache Kriterium strukturiert die Untersuchung von Strategien: Es beschert uns den effizient-einfachen Algorithmus, systematisch jede einzelne Abweichung durchzugehen und auf Verbesserung zu prüfen.

😊 Das Prinzip J2D ähnelt formal der Rückwärtsinduktion J1D. Diese dient zur **Konstruktion** aller Gleichgewichte; das ist stärker! Im endlichen Falle sind die beiden Sätze J1D und J2D äquivalent: Dann haben wir einen Anfang, nämlich die terminalen Zustände. Hier haben wir nichts dergleichen und müssen uns anders behelfen. Der Beweis nutzt eine Vorwärtsinduktion und Grenzwertbetrachtung. Wir klären zunächst die zugrundeliegende Topologie auf  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$  und illustrieren an Gegen/Beispielen, wie das Prinzip funktioniert.

# Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Die wesentliche und einzige Voraussetzung des Satzes ist die **Stetigkeit** der Auszahlung  $v^i : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$ . Das müssen wir klären.

Der Rand  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  hat eine natürliche Topologie: die Produkttopologie!  
Der Teilraum  $X_{\infty} = X \cap \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  erbt diese als Teilraumtopologie. (J2I)

**Definition J2E:** Baumtopologie auf einem Baum  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$

Sei  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$  baumförmig über dem Alphabet  $\mathcal{A}$ . Zu jedem endlichen Wort  $w \in \mathcal{A}^*$  sei  $U_w := \{x \in X \mid w \subseteq x\}$  die Menge der Fortsetzungen in  $X$ . Die Familie  $\{U_w \mid w \in \mathcal{A}^*\}$  bildet eine Basis der Topologie auf  $X$ .

Eine Abbildung  $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig / unterhalbstetig / oberhalbstetig im Punkt  $z \in \partial X$ , wenn zu jedem noch so kleinen  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  ein hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $x \in X$  mit  $x|_n = z|_n$  gilt:

$$v(z) - \varepsilon < v(x) < v(z) + \varepsilon \quad (v \text{ ist stetig in } z)$$

$$v(z) - \varepsilon < v(x) \quad (\text{unterhalbstetig})$$

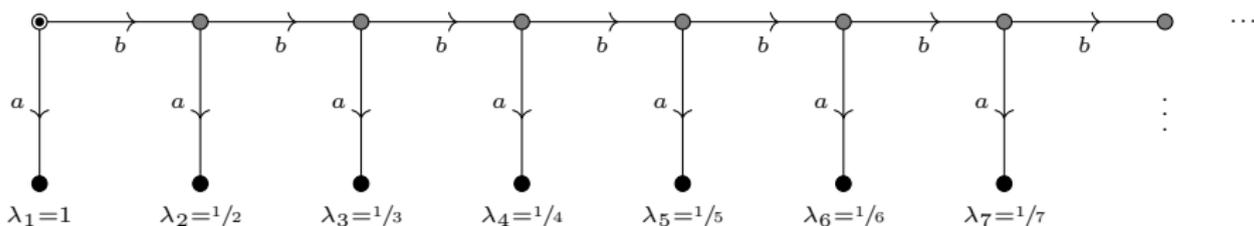
$$v(x) < v(z) + \varepsilon \quad (\text{oberhalbstetig})$$

# Drastisches Gegen/Beispiel zur einmaligen Abweichung

Für endliche Spiele entspricht das Prinzip der einmaligen Abweichung (J2D) genau der Rückwärtsinduktion aus dem Satz von Zermelo (J1D). Für unendliche Spiele ist die Stetigkeit der Auszahlung wesentlich!

**Aufgabe:** Zur Illustration betrachten wir ein Spiel mit nur einem Spieler. (Wir optimieren nur  $s^i$ , die Gegenstrategien  $s^{-i}$  werden festgehalten.)

Wir wählen einen besonders einfachen unendlichen Spielbaum:



Allgemein sei  $\lambda_n \searrow 0$  eine strikt fallende Nullfolge und  $\lambda \in \mathbb{R}$  beliebig.

- (0) Formalisieren Sie das Spiel  $\Gamma_\lambda$  mit  $v(b^\infty) = \lambda$  in extensiver Form.
- (1) Finden Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte  $s \in \text{PNE}(\Gamma_\lambda)$ .
- (2) Finden Sie alle  $s$ , die maximieren bezüglich einmaliger Abweichung.
- (3) Für welche Werte  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt das Prinzip der einmaligen Abweichung?

# Drastisches Gegen/Beispiel zur einmaligen Abweichung

**Lösung:** (0) Gemäß der Skizze haben wir den Spielbaum

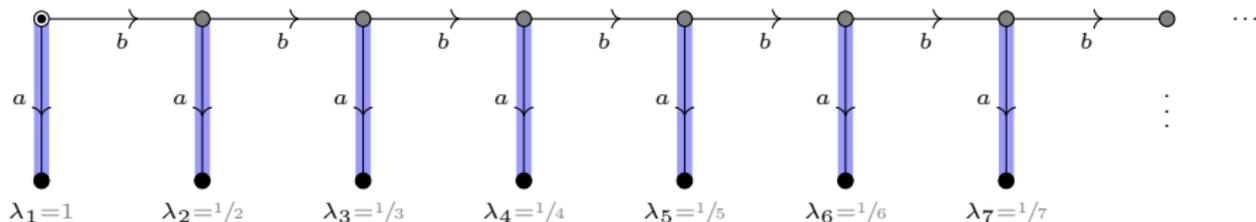
$$X = \{ b^n, b^n a \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ b^\infty = bbbbb \dots \},$$

aktiv  $X^\circ = \{ b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$  und terminal  $\partial X = \{ b^n a \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ b^\infty \}$ .

Terminale Auszahlungen sind  $v(b^{n-1}a) = \lambda_n \searrow 0$  und  $v(b^\infty) = \lambda$ .

(1) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  unterscheiden wir die beiden Fälle  $\lambda \leq 0$  und  $\lambda > 0$ :

(1a) Für  $\lambda \leq 0$  gilt  $\text{PNE}(\Gamma_\lambda) = \{s_\infty\}$  mit  $s_\infty(b^n) = a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

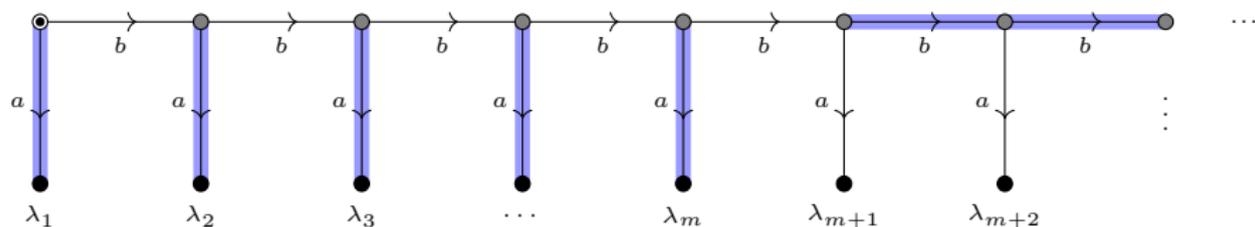


(1b) Für  $\lambda > 0$  ist die Strategie  $s_\infty$  offensichtlich nicht teilspielperfekt, erfüllt aber immer noch das Prinzip der einmaligen Abweichung!

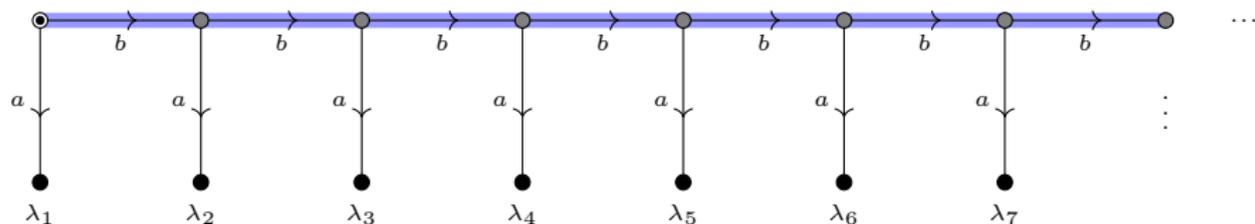
⚠ Das Kriterium ist immer notwendig, hier aber nicht hinreichend. Wesentlich ist die (Unterhalb)Stetigkeit der Auszahlung  $v$  wie in (1a).

# Drastisches Gegen/Beispiel zur einmaligen Abweichung

Für  $\lambda_m > \lambda > \lambda_{m+1}$  mit  $m \in \mathbb{N}$  finden wir das einzige teilspielperfekte Gleichgewicht  $s_m$  mit  $s_m(b^n) = a$  für  $n < m$  und  $s_m(b^n) = b$  für  $n \geq m$ .



Speziell für  $\lambda > \lambda_1$  haben wir  $m = 0$  und  $s_0(b^n) = b$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ :



😊 Damit ist die Lösungsmenge  $\text{PNE}(\Gamma_\lambda) = \{s_m\}$  ausgeschöpft.

Im Sonderfall  $\lambda = \lambda_{m+1}$  mit  $m \in \mathbb{N}$  gibt es genau zwei Gleichgewichte, denn  $s(b^m) \in \{a, b\}$  ist beliebig. Das bedeutet  $\text{PNE}(\Gamma_\lambda) = \{s_m, s_{m+1}\}$ .

## Drastisches Gegen/Beispiel zur einmaligen Abweichung

(2) Jedes  $s \in \text{PNE}(\Gamma_\lambda)$  ist maximal bezüglich beliebiger Abweichungen. Unabhängig vom Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist die Strategie  $s_\infty$  immer maximal bezüglich einmaliger Abweichung, sogar bzgl. endlicher Abweichung. Für  $\lambda \leq 0$  ist die Strategie  $s_\infty$  teilspielperfekt, für  $\lambda > 0$  hingegen nicht!

(3) Wir kennen für das Spiel  $\Gamma_\lambda$  alle Gleichgewichte: Das Prinzip der einmaligen Abweichung gilt hier nur für  $\lambda \leq 0$ . Es gilt nicht für  $\lambda > 0$ . Nochmal zur Betonung: Teilspielperfekt sind nur  $s_m$  und evtl.  $s_{m+1}$ , den Test der einmaligen Abweichung passiert zudem auch  $s_\infty$ .

😊 Statt einem einzigen Spieler  $i$  können wir uns unendlich viele Klone  $(i, x)$  vorstellen, je einen Klon für jeden inneren Knoten  $x = b^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ : Der Klon  $(i, x)$  trifft nur seine eigene lokale Entscheidung  $s(b^n) \in \{a, b\}$  und maximiert kurzfristig nur seine individuelle Nutzenfunktion  $u_x^i(s)$ .

Da jeder Klon nur einmal agiert, optimiert er nur diesen einen Zug. Teilspielperfekt impliziert maximal bezüglich einmaliger Abweichung. Für  $\lambda \leq 0$  ist das Klon-Modell äquivalent zum Ein-Spieler-Modell. Für  $\lambda > 0$  gibt es im Klon-Modell ein zusätzliches Gleichgewicht!

# Beweis des Prinzips der einmaligen Abweichung

Dieses drastische Beispiel belegt, dass wirklich etwas zu beweisen ist. Es illustriert zudem sehr anschaulich bereits die Kernidee des Beweises!

**Aufgabe:** Präzisieren Sie den Satz J2D für deterministische Spiele und reine Strategien; zum Beweis genügt bereits die Unterhalbstetigkeit.

**Satz J2F: Prinzip der einmaligen Abweichung, deterministisch**

Sei  $\Gamma = (X, v, f)$  ein deterministisches Spiel in extensiver Form.

Vorgelegt sei ein Strategievektor  $s \in S = \prod_{i \in I} S^i$  mit  $S^i = \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$ .

Für den Spieler  $i \in I$  sei die terminale Auszahlung  $v^i : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  unterhalbstetig bezüglich der Baumtopologie J2E. Dann sind äquivalent:

- 1 Der Vektor  $s$  ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht für Spieler  $i$ :  
Es gilt  $u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) \leq u_x^i(s^i; s^{-i})$  für alle  $x \in X^\circ$  und  $\tilde{s}^i \in S^i$ .
- 2 Der Vektor  $s$  erfüllt das Kriterium der einmaligen Abweichung:  
Es gilt  $u_x^i(\hat{s}^i; s^{-i}) \leq u_x^i(s^i; s^{-i})$  für jeden Zustand  $x \in X^\circ$  und jede Alternative  $\hat{s}^i \in S^i$ , die von  $s^i$  nur in  $\hat{s}_x^i \in A_x^i$  abweicht.

## Beweis des Prinzips der einmaligen Abweichung

**Beweis:** Die Implikation „(1)  $\Rightarrow$  (2)“ ist trivial. Wir zeigen „(2)  $\Rightarrow$  (1)“.

Vorgelegt sei der Strategievektor  $s \in S = \prod_{i \in I} S^i$  mit  $S^i = \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$ . Wir halten  $s^{-i}$  fest und schreiben abkürzend  $u_x^i(s^i)$  für  $u_x^i(s^i; s^{-i})$ .

Sei  $u_x^i(s^i) = a \leq b = u_x^i(\tilde{s}^i)$  für  $x \in X_m^\circ$  und eine Alternative  $\tilde{s}^i \in S^i$ .

Wir definieren  $\hat{s}^i$  durch  $\hat{s}_x^i = \tilde{s}_x^i$  und  $\hat{s}_y^i = s_y^i$  für alle  $y \in X^\circ \setminus \{x\}$ .

Dank (2) gilt  $u_x^i(\hat{s}^i) \leq u_x^i(s^i) \leq a$ . Sei  $x' = f(x, \hat{s}_x)$  der Folgezustand von  $x$  gemäß  $\hat{s}_x = \tilde{s}_x$ . Dann gilt erneut  $u_{x'}^i(s^i) \leq a \leq b = u_{x'}^i(\tilde{s}^i)$ .

Falls  $x' \in \partial X$  gilt, so folgt  $u_{x'}^i(s^i) = a = b = u_{x'}^i(\tilde{s}^i)$ . Sei also  $x' \in X^\circ$ .

So fortfahrend erhalten wir Zustände  $x_n \in X_n$  für alle  $n \geq m$  mit  $x_m = x$  und  $x_{n+1} = f(x_n, \tilde{s}_{x_n})$ , sodass  $u_{x_n}^i(s^i) \leq a \leq b = u_{x_n}^i(\tilde{s}^i)$ .

Wir vergleichen  $z = \lim(x_n, \tilde{s}) = \bigcup_n x_n$  und  $z_n = \lim(x_n, s)$  in  $\partial X$ . Nach Konstruktion gilt  $v^i(z) = u_{x_n}^i(\tilde{s}^i) = b$ . In jeder Umgebung von  $z \in \partial X$  liegt ein Punkt  $z_n \in \partial X$  mit  $v^i(z_n) = u_{x_n}^i(s) \leq a$ . Dank der Unterhalbstetigkeit von  $v^i : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  ist dies nur für  $a = b$  möglich. QED

😊 Wir können  $\mathbb{R}$  durch jede linear geordnete Menge  $(R^i, \leq^i)$  ersetzen. Da keine Mittelung nötig ist, übertragen sich alle Argumente wörtlich.

# Beweis des Prinzips der einmaligen Abweichung

😊 Der hier diskutierte deterministische Fall J2F ist besonders einfach. Sie können jeden Beweisschritt am vorigen Beispiel nachvollziehen! Im deterministischen Fall J2F genügt  $v^i: \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  unterhalbstetig. Im allgemeinen Fall J2D setzen wir stärker die Stetigkeit voraus.

Der allgemeine Fall des Prinzips ist probabilistisch: Im Allgemeinen hat unser Spiel  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$  Zufallselemente. Selbst wenn das Spiel  $\Gamma = (X, v, f)$  deterministisch ist, so nutzen die Spieler im Allgemeinen (lokal) gemischte Strategien und führen so ein Zufallselement ein.

Vorgelegt sei der Strategievektor  $s \in \bar{S} = \prod_{i \in I} \bar{S}^i$  mit  $\bar{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} [A_x^i]$ . Jeder Spieler  $i \in I$  optimiert über seine Strategie  $s^i \in \bar{S}^i$ . Wir halten hier die gegnerischen Strategien  $s^{-i} \in \bar{S}^{-i}$  fest. Wir sind also im Rahmen eines Markov-Spiels und suchen nach einem Optimalitätsprinzip.

Die probabilistische Struktur bringt eine kleine technische Schwierigkeit mit sich: Es gibt keinen eindeutigen Folgezustand. Das beste, was wir stattdessen hoffen dürfen, ist die Existenz eines Folgezustandes, der die gewünschte Ungleichung erfüllt. Dies führt uns zu folgendem Beweis.

## Beweis des Prinzips der einmaligen Abweichung

## Lemma J2G: Grenzwertformulierung der Stetigkeit

Sei  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$  ein dynamisches Spiel in extensiver Form (J2A).

(1) Für jeden Startzustand  $x \in X$  und jeden Strategievektor  $s \in \bar{S}$  gilt

$$\begin{aligned} a(x) &\leq \bar{u}_x^i(s) \leq b(x) \quad \text{mit} \\ a(x) &:= \inf\{v^i(z) \mid z \in \partial X, x \subseteq z\}, \\ b(x) &:= \sup\{v^i(z) \mid z \in \partial X, x \subseteq z\}. \end{aligned}$$

(2) Genau dann ist  $v^i : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig bezüglich der Baumtopologie J2E, wenn  $a(z|_n) \nearrow v^i(z) \searrow b(z|_n)$  für jeden Randpunkt  $z \in \partial X$  und  $n \rightarrow \infty$ .

**Beweis:** Aussage (1) folgt durch Mittelung über die Auszahlungen.

Aussage (2) folgt unmittelbar aus der Stetigkeit von  $v^i : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$ . QED

😊 Das entspricht den beliebten  $\liminf$  und  $\limsup$  aus der Analysis:  
 $a(z|_n) \nearrow v^i(z)$  für unterhalbstetig und  $b(z|_n) \searrow v^i(z)$  für oberhalbstetig.

😊 Anschaulich: Für Zustände  $x_n \in X_n$  in ferner Zukunft  $n$  hängt die erwartete Auszahlung  $\bar{u}_{x_n}^i(s)$  beliebig wenig von den Strategien  $s \in \bar{S}$  ab.

# Beweis des Prinzips der einmaligen Abweichung

## ◆ Satz J2D: Prinzip der einmaligen Abweichung

Für Spieler  $i \in I$  sei  $v^i : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Für  $s \in \bar{S}$  sind äquivalent:

- 1 Es gilt  $\bar{u}_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) \leq \bar{u}_x^i(s^i; s^{-i})$  für alle  $x \in X^\circ$  und  $\tilde{s}^i \in \bar{S}^i$ .
- 2 Es gilt  $\bar{u}_x^i(\hat{s}^i; s^{-i}) \leq \bar{u}_x^i(s^i; s^{-i})$  für jeden Zustand  $x \in X^\circ$  und jede Alternative  $\hat{s}^i \in \bar{S}^i$ , die von  $s^i$  nur in  $\hat{s}_x^i \in A_x^i$  abweicht.

**Beweis:** Die Implikation „(1)  $\Rightarrow$  (2)“ ist trivial. Wir zeigen „(2)  $\Rightarrow$  (1)“.

Wir halten  $s^{-i}$  fest und schreiben abkürzend  $\bar{u}_x^i(s^i)$  für  $\bar{u}_x^i(s^i; s^{-i})$ .

Angenommen, es gäbe eine Verbesserung  $\bar{u}_x^i(\tilde{s}^i) - \bar{u}_x^i(s^i) \geq \varepsilon > 0$  für eine alternative Strategie  $\tilde{s}^i \in \bar{S}^i$  und einen Zustand  $x \in X_m^\circ$ .

Wir definieren  $\hat{s}^i$  durch  $\hat{s}_x^i = \tilde{s}_x^i$  und  $\hat{s}_y^i = s_y^i$  für alle  $y \in X^\circ \setminus \{x\}$ .

Dank (2) gilt  $\bar{u}_x^i(\hat{s}^i) \leq \bar{u}_x^i(s^i) \leq \bar{u}_x^i(\tilde{s}^i) - \varepsilon$ . Demnach existiert ein Folgezustand  $x' \in x\mathcal{A} \cap X_{m+1}$  mit  $\bar{u}_{x'}^i(\tilde{s}^i) - \bar{u}_{x'}^i(s^i) \geq \varepsilon > 0$ .

So fortfahrend erhalten wir Zustände  $x_m \subset x_{m+1} \subset x_{m+2} \subset \dots$

mit  $x_n \in X_n$  und  $\bar{u}_{x_n}^i(\tilde{s}^i) - \bar{u}_{x_n}^i(s^i) \geq \varepsilon > 0$ . Im Randpunkt

$x = \lim x_n$  ist die Auszahlung  $v^i : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  somit unstetig.

□ QED

# Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Beim ersten Kontakt mit teilspielperfekten Nash–Gleichgewichten wird das Prinzip der einmaligen Abweichung leicht unterschätzt:

- Erstens scheint es mathematisch eher banal, gar offensichtlich. Unser voriges Beispiel zeigt eindrücklich, dass dem nicht so ist. Ein sorgfältiger Beweis erfordert gute Notation und Buchführung.
- Zweitens ist die praktische Tragweite nicht gleich absehbar. Die folgenden Kapitel zeigen mannigfaltige Anwendungen. Erst dadurch wird die grundlegende Bedeutung deutlich.

**Beispiel:** Eine typische Form terminaler Auszahlungen  $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  ist die diskontierte Summe  $v(x) = \sum_n \delta^n r(x_n)$  mit  $\delta \in [0, 1[$  und  $r : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ . Allgemein gilt hierzu folgende beruhigende Zusicherung:

## Lemma J2H: Stetigkeit diskontierter Summen

Gegeben sei  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$  und  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n < \infty$ . Ist  $r : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, so ist  $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto \sum_n \delta_n r(z_n)$  stetig.

**Aufgabe:** Führen Sie den Beweis dieses Lemmas sorgfältig aus!

## Das Prinzip der einmaligen Abweichung

**Lösung:** Topologisch liegt jedes endliche terminale Wort  $z$  in  $\partial X$  isoliert, denn  $U_z = \{z\}$ . Somit ist die Stetigkeit in  $z$  trivialerweise immer erfüllt.

Wir untersuchen nun den eigentlich interessanten Fall  $z \in X \cap \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ .

Dank  $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty$  erfüllen die Reste  $\rho_n := \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k \searrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Sei  $r: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, also  $|r| \leq M$  für ein  $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Wir definieren

$$v: \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : x \mapsto v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n r(x_n).$$

Die Reihe konvergiert absolut dank der Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n r(x_n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n |r(x_n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n M \leq \rho_0 M < \infty.$$

Zu jedem noch so kleinen  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert ein hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\rho_n M < \varepsilon/2$  gilt. Für jedes  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  mit  $x|_n = z|_n$  folgt

$$\begin{aligned} v(x) - v(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k [r(x_k) - r(z_k)], \quad \text{also} \\ |v(x) - v(z)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k |r(x_k) - r(z_k)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k \cdot 2M = 2\rho_n M \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist  $v: \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  in jedem Punkt  $z \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  stetig, wie behauptet. QED

# Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Die hier betrachtete Topologie ist auch theoretisch überaus interessant:

**Satz J2I:** Baumtopologie auf einem Baum  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$

Die Baumtopologie auf  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$  ist vollständig metrisierbar vermöge

$$d : \mathcal{A}^{\leq \infty} \times \mathcal{A}^{\leq \infty} \rightarrow [0, 1] : (x, y) \mapsto d(x, y) = 2^{-\ell(x, y)}$$

mit  $\ell(x, y) := \sup\{ n \in \mathbb{N} : x|_n = y|_n \} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

Hierin trägt der Teilraum  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  die Produkttopologie und ist somit kompakt.

Beispiele: Für  $\mathcal{A} = \emptyset$  gilt  $\mathcal{A}^{\leq \infty} = \{e\}$ . Für  $\mathcal{A} = \{a\}$  gilt  $\mathcal{A}^{\leq \infty} \cong \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

Für  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$  ist  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$  homöomorph zur Cantor-Menge  $C \subset [0, 1]$ .

**Übung:** Wiederholen Sie die nötigen Begriffe aus der Topologie und beweisen Sie sorgfältig die hier behaupteten Eigenschaften!

Warum / wo / wie spielt die (metrische) Vollständigkeit von  $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq \infty}$  die tragende Rolle im Prinzip der einmaligen Abweichung J2D / J2F?

**Lösung:** In beiden Fällen benötigen wir den kritischen Limespunkt  $\infty \in \partial X$ , um die Stetigkeit von  $v$  in diesem Punkt nutzen zu können.

# Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

## Definition J3A: dynamisches Spiel mit unvollständiger Information

Ein **dynamisches Spiel**  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P}, q)$  über der Spielermenge  $I$  in extensiver Form mit **unvollständiger Information** (EFII) beinhaltet:

- Ein dynamisches Spiel  $(X, v, f, \mathbf{P})$  über  $I$ , wie in J2A erklärt,
- ein Signal  $q^i : X^\circ \twoheadrightarrow X^i : x \mapsto x^i$  für jeden Spieler  $i \in I$ ;  
für  $q^i(x) = q^i(y)$  schreiben wir  $x \overset{i}{\sim} y$  und fordern  $A_x^i = A_y^i$ .

Die **Informationsmenge** ist die Äquivalenzklasse  $[x]_i = q_i^{-1}(q_i(\{x\}))$ .

Wir definieren  $S^i = S^i(X, q^i) := \{s^i \in \prod_{x \in X^\circ} A_x^i \mid s_x^i = s_y^i \text{ falls } x \overset{i}{\sim} y\}$ .

Wir setzen  $v$  fort zu  $\tilde{u} : X \times \Omega \times S \rightarrow \mathbb{R}^I$  und mitteln zu  $u : X \times S \rightarrow \mathbb{R}^I$ .

Bei vollständiger Information heißt  $s \in S = \prod_{i \in I} S^i$  Nash-Gleichgewicht bei Start in  $x \in X$ , wenn dies für das Spiel  $u_x = u(x, -) : S \rightarrow \mathbb{R}^I$  gilt, und teilspielperfekt, wenn dies für alle  $x \in X$  gilt, siehe J1A und J2C.

 Bei unvollständiger Information müssen wir dies noch verfeinern! Spieler  $i$  kann die Zustände  $y \in [x]_i$  in seiner Informationsmenge nicht unterscheiden und so die Aktionen  $s_y^i \in A_y^i$  nicht unabhängig wählen.

## Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

**Informationsstruktur:** Wer weiß wann was? Im Allgemeinen kennt jeder Spieler  $i \in I$  nur einen (kleinen) Teil des Spielzustands  $x \in X^\circ$ . Den individuellen Kenntnisstand von Spieler  $i \in I$  beschreiben wir wie zuvor als ein Signal  $q^i : X^\circ \twoheadrightarrow X^i : x \mapsto x^i$ , genannt Auskunft / *query*. Zum Spielstand  $x \in X^\circ$  ist  $q^i(x) = x^i \in X^i$  das Wissen von Spieler  $i$ : Zustände  $x, y \in X^\circ$  mit  $q^i(x) = q^i(y)$  sind für ihn ununterscheidbar. Dies definiert auf  $X^\circ$  eine Äquivalenzrelation  $x \overset{i}{\sim} y$  durch  $q^i(x) = q^i(y)$ . Umgekehrt definiert jede Äquivalenzrelation  $\overset{i}{\sim}$  auf  $X^\circ$  den Quotienten  $q^i : X^\circ \twoheadrightarrow X^i := X^\circ / \overset{i}{\sim}$ . Beide Sichtweisen sind hier also gleichwertig.

Spieler  $i$  entscheidet seine Aktion  $s_x^i \in A_x^i$  nur aus seiner Kenntnis  $x^i$ : Wir fordern daher  $A_x^i = A_y^i$  für alle Zustände  $x \overset{i}{\sim} y$  in  $X^\circ$ , und setzen

$$S^i = S^i(X, q^i) := \{ s^i \in \prod_{x \in X^\circ} A_x^i \mid s_x^i = s_y^i \text{ falls } x \overset{i}{\sim} y \}.$$

Im Falle  $q^i = \text{id}_{X^\circ} : X^\circ \rightarrow X^\circ$  ist  $\overset{i}{\sim}$  trivial, Spieler  $i$  hat vollständige Information, und seine Strategien unterliegen keiner Einschränkung.

# Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

Kennt jeder Spieler  $i$  jederzeit den Gesamtzustand  $x \in X$  des Spiels, so sprechen wir von **vollständiger Information** [*complete information*]. Im Allgemeinen kennt Spieler  $i$  nur einen kleinen Auszug des gesamten Spielzustands; wir sprechen dann von **unvollständiger Information**.

Bei vielen Spielen macht gerade dieser Umstand den besonderen Reiz: Bei vielen Kartenspielen (Skat, Doppelkopf, Poker, etc.) kennt jeder nur seine eigene Hand, nicht aber die der anderen (Mit-/Gegen-)Spieler. Ebenso verhält es sich bei vielen Gesellschaftsspielen.

Auch für Anwendungen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist die unvollständige Information häufig ein entscheidender Faktor. Jeder Spieler kennt nur einen Teil der Welt, möchte diese Information aber nicht teilen, sondern nach Möglichkeit zu seinem Vorteil nutzen.

Wegen der Wichtigkeit dieses Phänomens führe ich eine Beschreibung hier schon ein. Die genauere Untersuchung wird dadurch aber deutlich schwerer und erst in späteren Kapiteln ernsthaft in Angriff genommen.

## Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

Zu **dynamischen Spielen** verfügen wir über zwei Formalisierungen: zunächst mit einem beliebigen Zustandsraum (kybernetische Form J1A), dann besonders effizient mit einem Spielbaum (extensive Form J2A).

Die abschließende Definition J3A erklärt **unvollständige Information**: Das Spiel  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P}, q)$  über  $I$  definiert  $S = \prod_{i \in I} S^i$ , nun jedoch für jeden Spieler  $i \in I$  mit der **eingeschränkten Strategiemenge**

$$S^i = S^i(X, q^i) := \left\{ s^i \in \prod_{x \in X^\circ} A_x^i \mid s_x^i = s_y^i \text{ falls } q^i(x) = q^i(y) \right\}.$$

Damit können damit teilspielperfekte Gleichgewichte formulieren:

$$\text{PNE}(\Gamma) = \text{PNE}(\Gamma, S) := \bigcap_{x \in X^\circ} \text{NE}(u_x : S \rightarrow \mathbb{R}^I)$$

Das ist die ideale Gleichgewichtseigenschaft eines Strategiebündels: Im Spielverlauf hat kein Spieler Anlass, seine Strategie zu wechseln.

⚠ Bei unvollständiger Information ist diese Bedingung oft zu streng, da Spieler  $i$  nicht alle Aktionen  $s_x^i \in A_x^i$  unabhängig wählen kann.

Wir werden das Lösungskonzept daher anschließend noch verfeinern.

# Graphische Darstellung von Spielbäumen

*Man muss ein Spiel auch lesen können!*

- $\Omega$  Startzustand / Wurzel, Zufallszug; Spieler  $\Omega$ ,  $N$ ,  $Z$  oder leer.
- |  $[p]$  die Wahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  für diesen Zufallszug.
- $i$  aktiver Zustand / innerer Knoten  $x \in X^\circ$ ; Spieler  $i \in I$  zieht.
- |  $a$  mögliche Aktion / Zug  $a \in A_x^i$  für den hier aktiven Spieler  $i$ .
- $(i, j)$  aktiver Zustand  $x \in X^\circ$ ; die Spieler  $i$  und  $j$  ziehen gleichzeitig.
- |  $(a_i, a_j)$  mögliche Aktionen  $a_i \in A_x^i$  und  $a_j \in A_x^j$  der aktiven Spieler  $i, j$ .
- $v$  terminaler Zustand  $x \in \partial X$  mit Auszahlung  $v = v(x) \in \mathbb{R}^I$ .
- $\overset{i}{\text{---}}$  ununterscheidbare Zustände für den ziehenden Spieler  $i$ .
- $\boxed{i}$  alternative Schreibweise für diese Äquivalenzklasse.

Der Startzustand  $\alpha \in X$  des Spiels (falls definiert) heißt **Wurzel**.

Aktive Zustände  $x \in X^\circ$  nennt man abkürzend auch **Knoten**.

Endliche terminale Zustände  $x \in X_{<\infty} \cap \partial X$  heißen **Blätter**.

Unendliche terminale Zustände  $x \in X_\infty$  heißen auch **Enden**.

# Graphische Darstellung von Spielbäumen

Angenommen, im Zustand  $x \in X^\circ$  ist Spieler  $i \in I$  allein am Zug, also  $\text{pr}^i : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^i$ . In der Graphik notieren wir dann  $i$  am Knoten  $x$  und die möglichen Aktionen  $a \in A_x^i$  an den zugehörigen ausgehenden Kanten.

Ist eine Spielermenge  $J \subseteq I$  am Zug, also  $\text{pr}^J : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^J = \prod_{j \in J} A_x^j$ , so notieren wir entsprechend  $J$  am Knoten und  $A_x^J$  an den Kanten.

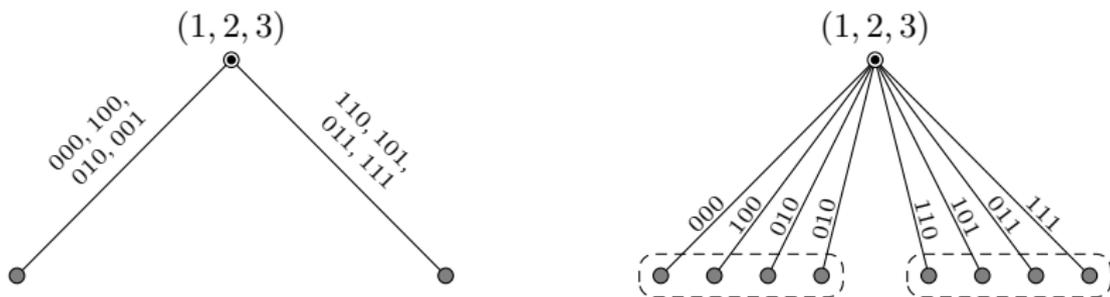
Diese Beschriftung entspricht einer Bijektion  $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x\mathcal{A} \cap X$ .

In der Literatur ist die Bijektion  $A_x \xrightarrow{\sim} xA_x : a \mapsto x * a$  üblich. Das heißt: Die gesamte Aktion  $a \in A_x$  wird in der Trajektorie  $x \mapsto x * a$  vermerkt. Eine Surjektion  $f_x : A_x \twoheadrightarrow x\mathcal{A} \cap X$  würde genügen. Anschaulich gesagt: Nur das als relevant betrachtete Ergebnis der Aktionen wird vermerkt. Äquivalente Aktionen entsprechen dann derselben Kante im Spielbaum.

Beispiel: Bei einer Abstimmung bedeutet die Bijektion  $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x * A_x$ , dass die Stimme jedes Spielers protokolliert wird. Hingegen protokolliert die Surjektion  $A_x \twoheadrightarrow x * \{\text{Ja}, \text{Nein}\}$  nur das Ergebnis. Die Möglichkeit solcher Zusammenfassungen ist flexibler und erlaubt kleinere Bäume. Daher wollen wir uns diese bequeme Abkürzung nicht verbieten.

# Graphische Darstellung von Spielbäumen

**Beispiel:** Geheime Abstimmung (0 = Nein, 1 = Ja) von drei Spielern:



Im ersten Fall wird gleichzeitig abgestimmt und nur das Endergebnis gespeichert. Im zweiten Fall werden die individuellen Stimmabgaben gespeichert, aber nicht preisgegeben. Alternativ wird nacheinander abgestimmt, aber ohne Information über die vorigen Stimmabgaben.

😊 Es ist wie beim Datenschutz: Welche Daten werden gespeichert? Welche werden an die Spieler weitergegeben? Es gibt viele Varianten.

😊 Die Datenschutz-Grundverordnung (DSGVO) bestimmt in Kapitel 3 (Artikel 12 bis 23) persönliche Rechte auf Auskunft, auf Berichtigung und auf Löschung, das sogenannte „Recht auf Vergessenwerden“.

## Graphische Darstellung von Spielbäumen

Ein Spiel  $\Gamma$  in extensiver Form ist eine vollständige Beschreibung: Unsere Definition J3A erklärt, welche Daten hierzu benötigt werden. Das ist mühsam, dient aber dazu, alle Unklarheiten zu beseitigen.

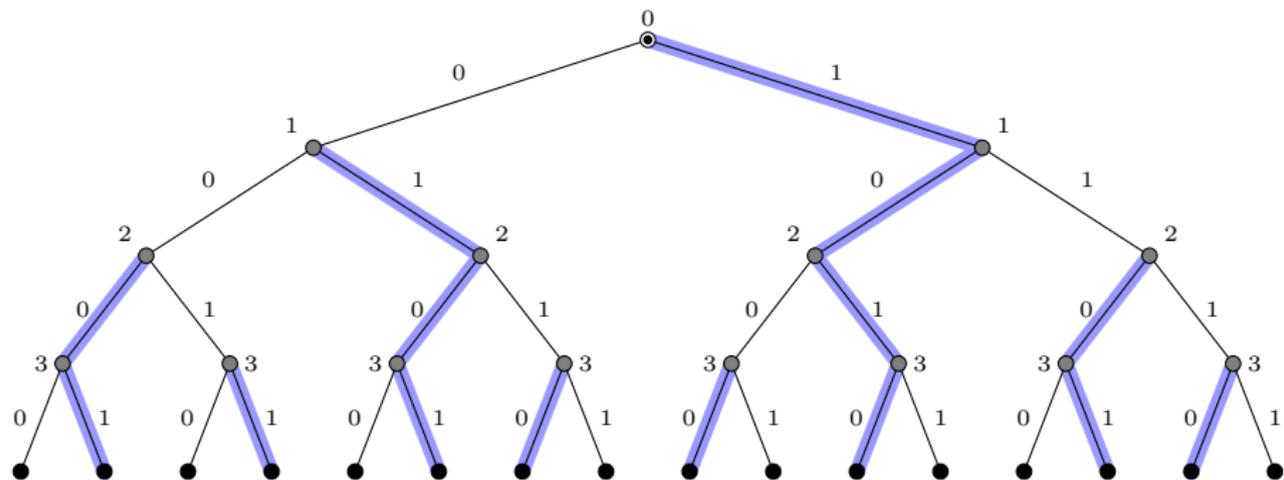
In den allermeisten praktischen Anwendungen wird die Beschreibung nicht formal und vollständig ausgeführt. Selbst graphische Darstellung durch Spielbäume wird naturgemäß nur für kleine Illustrationen genutzt. Meist wird eine informelle Beschreibung in zusammenfassenden Worten gegeben. Wann ist eine solche Beschreibung brauchbar? Das Kriterium ist einfach: Die informelle Beschreibung muss genug Information liefern, um die zugehörige extensive Form daraus zu konstruieren.

Um es ganz konkret zu machen, fragen Sie sich ganz einfach: Können Sie das Spiel aufgrund der gegebenen Daten zweifelsfrei implementieren, etwa auf einem Computer programmieren?

Ist die extensive Form aus den gegebenen Informationen noch nicht klar, so ist die Beschreibung unvollständig und das Modell ist nicht definiert. Genau das ist der Nutzen mathematischer Definitionen: Klarheit!

# Strategievektoren und Spielverlauf

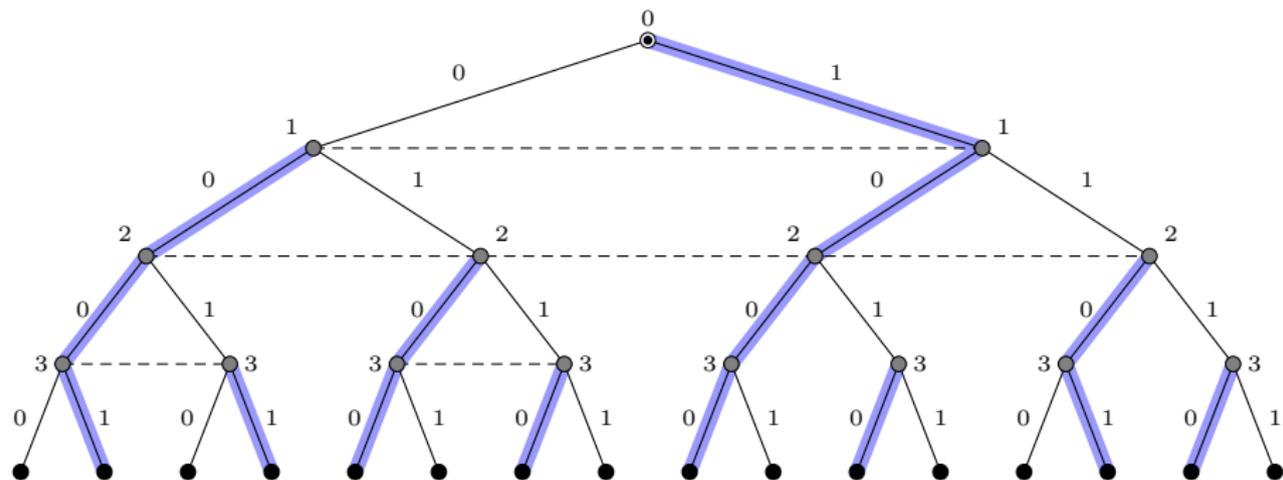
Der Strategievektor  $s \in S$  und ggf.  $\omega \in \Omega$  bestimmen den Spielverlauf:



Dies gilt nicht nur bei Beginn im Startzustand / der Wurzel  $x = \alpha$ , sondern bei Beginn in jedem beliebigen Zustand  $x \in X$  des Baumes! Hier spielen nacheinander 0 = Zufall, 1 = Alice, 2 = Bob, 3 = Chuck. Erinnerung: Eine Strategie  $s^i \in S^i$  für Spieler  $i$  ist ein Handlungsplan, also eine Aktion  $s^i_x \in A^i_x$  für jeden aktiven Zustand  $x \in X^\circ$  des Spiels.

# Strategievektoren und Spielverlauf

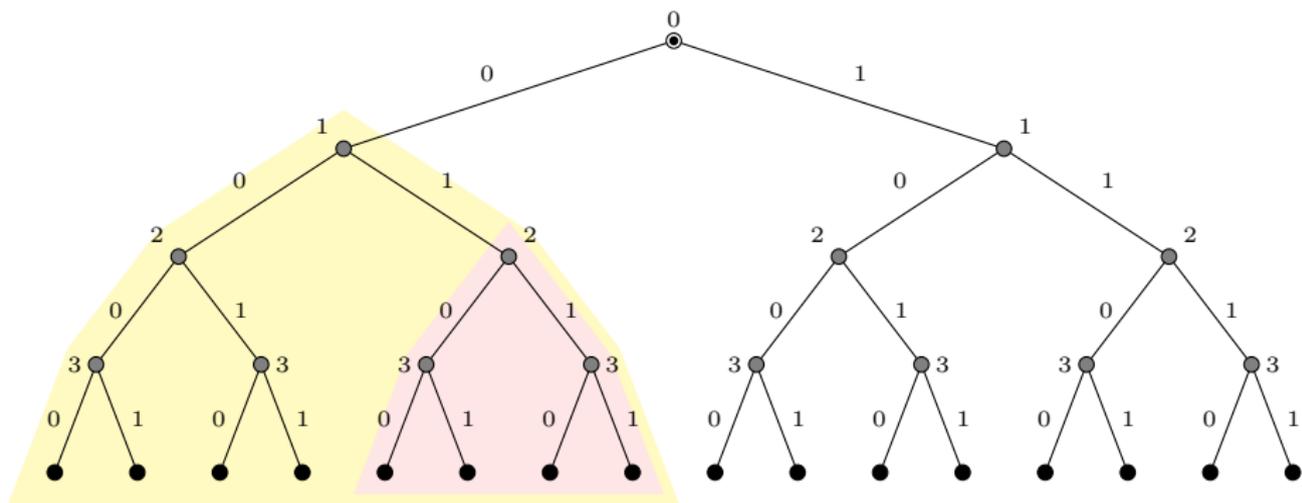
Für ununterscheidbare Zustände sind die Aktionen strikt gekoppelt:



Spieler  $i$  kann seine Aktion  $s_x^i \in A_x^i$  nur aus seiner Kenntnis  $x^i$  ableiten. Sind also  $x \sim^i y$  in  $X^i$  für  $i$  ununterscheidbar, so muss  $s_x^i = s_y^i$  gelten. Genau dies ist der Sinn der Informationsstruktur und der Auskunft  $q^i$ : Strategien von Spieler  $i$  beruhen auf seiner beschränkten Kenntnis. Die Informationsmengen sind durch gestrichelte Linien gezeigt.

## Illustration zu Teilspielen und Informationsmengen

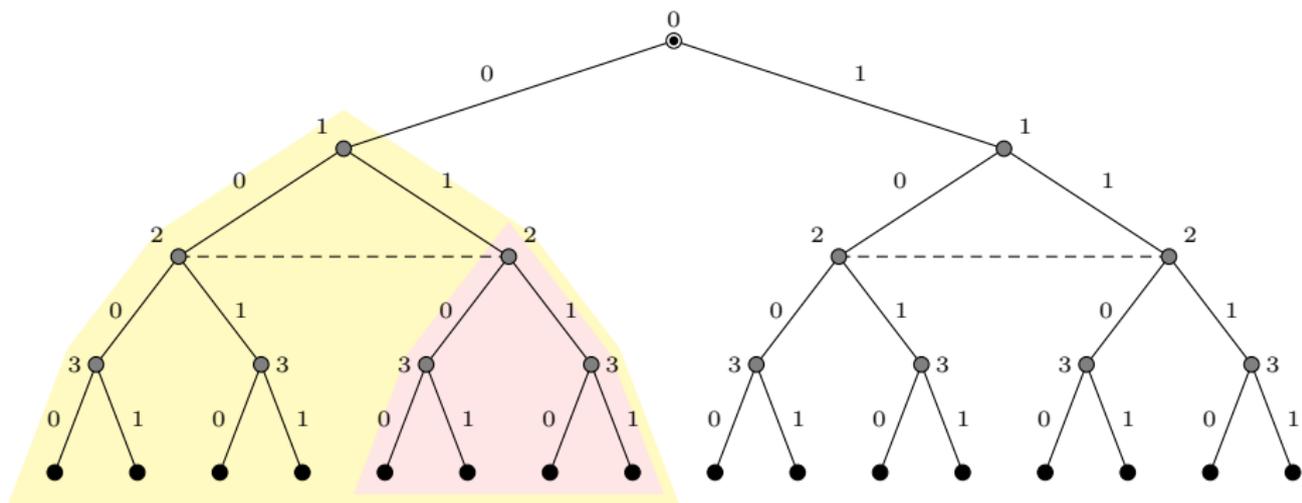
Das Teilspiel  $\Gamma_x$  besteht aus  $x \in X$  und all seinen Folgezuständen (J1B):



Zustände von  $\Gamma_x$  sind demnach alle Wörter  $x' \in X$ , die mit  $x$  beginnen. Diese Teilmenge von  $\mathcal{A}^{\leq \infty}$  ist selbst baumförmig, wie man nachprüft. Aus den ursprünglichen Daten  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$  erhalten wir somit durch Einschränkung aller Daten des Teilspiels  $\Gamma_x = (X', v', f', \mathbf{P}')$ . Wie überträgt sich diese Idee bei unvollständiger Information?

## Illustration zu Teilspielen

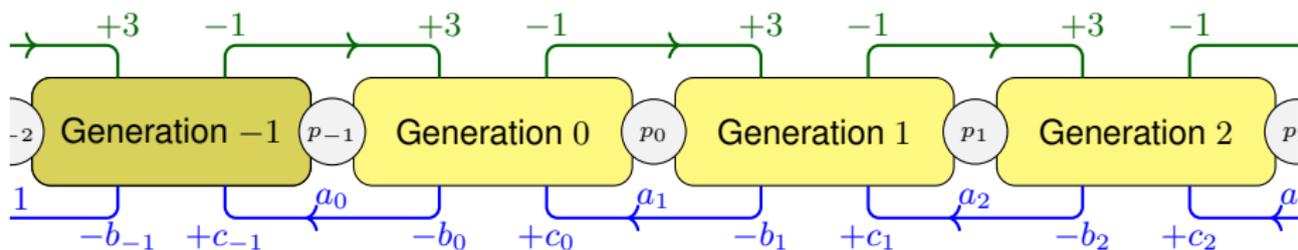
Teilspiele sollten saturiert sein, also keine Informationsmengen zerlegen:



Das Teilspiel  $X' \leq \Gamma$  nennen wir **saturiert**, wenn für jeden Spieler  $i \in I$  und alle Paare  $x, y \in X^\circ$  mit  $q^i(x) = q^i(y)$  gilt: Aus  $x \in X'$  folgt  $y \in X'$ . Das heißt, kein Spieler  $i \in I$  weiß im Teilspiel  $\Gamma_x$  mehr als zuvor in  $\Gamma$ . Bei vollständiger Information ist dies überhaupt keine Einschränkung; bei unvollständiger Information ist die Einschränkung meist zu streng.

## Generationenmodell zur Altersversorgung

Wir untersuchen erneut und genauer unser Generationenmodell:

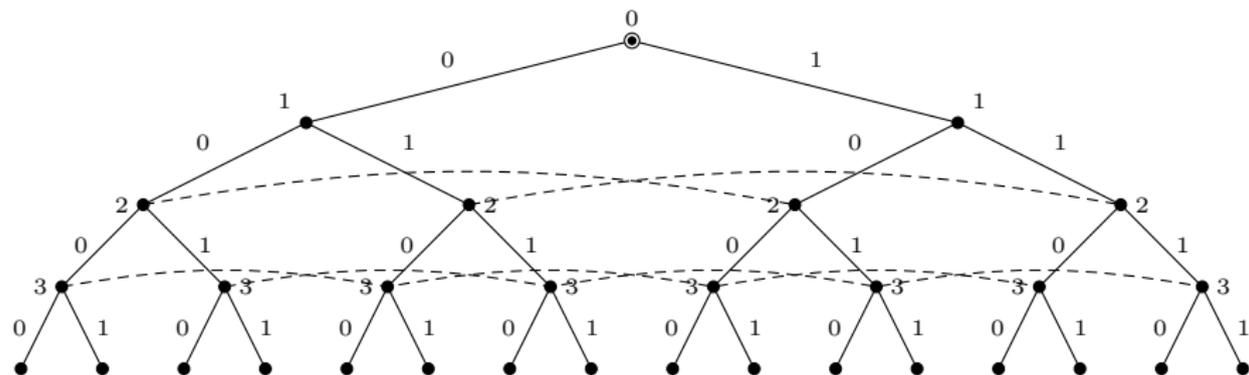


- Aufgabe:** (1) Formalisieren Sie dies als deterministisches Spiel  $\Gamma$ .
- (a) Jede Generation kennt die Geschichte oder (b) nur die Elternaktion.
- (2) Formalisieren Sie dies ebenso als probabilistisches Spiel  $\Gamma$ .
- (3) Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte. Welche sind teilspielperfekt?

Dies ist ein erstes, relativ simples Generationenmodell, aber durchaus repräsentativ. Es hat uns bereits gute Dienste geleistet. Daran können wir nun den Formalismus dynamischer Spiele in extensiver Form üben. Nur so erkennen wir Schwierigkeiten und können Feinheiten klären.

## Generationenmodell zur Altersversorgung

**Lösung:** (1) Zunächst deterministisch mit Diskontierungen  $p_i \in [0, 1]$ :



Die Spielermenge ist  $I = \mathbb{N}$ . Der Zustandsraum ist  $X = \{0, 1\}^{\leq \infty}$ .

Für  $i \in \mathbb{N}$  und  $x \in X_i$  gilt  $A_x \cong A_x^i = \{0, 1\}$ , also  $A_x^j = \{*\}$  für  $j \neq i$ .

Die Fortsetzung ist kanonisch, also  $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x * \{0, 1\} : a \mapsto x * a$ .

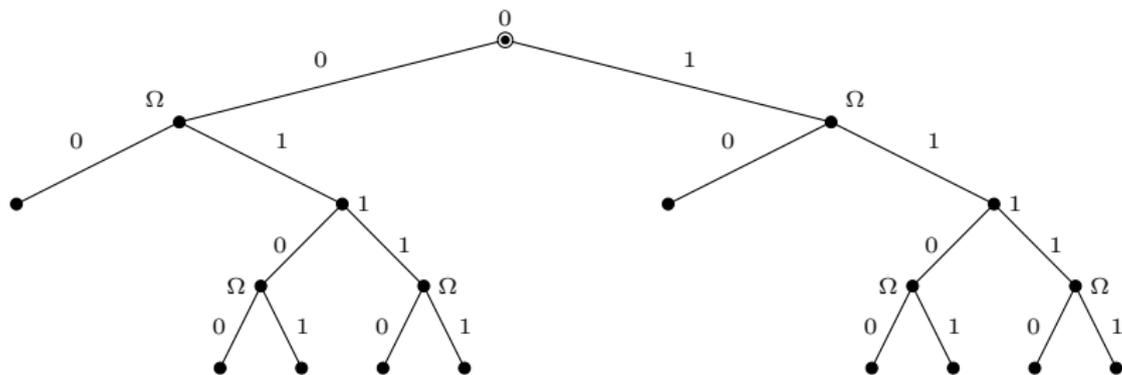
Auszahlung  $u^i : \partial X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto p_0 p_1 \cdots p_{i-1} (-b_i x_i + p_i c_i x_{i+1})$ .

Auskunft ist (a)  $q^i = \text{id}_{X_i}$  bzw. (b)  $q^i : X_i \rightarrow \{0, 1\} : x \mapsto x_{i-1}$ .

Daraus folgt die Strategiemenge  $S^i = \{ s^i : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} \}$ .

## Generationenmodell zur Altersversorgung

(2) Zum Vergleich die Formalisierung als probabilistisches Spiel:



Der Baum ist  $X = \{01, 11\}^\infty \sqcup (\{01, 11\}^{<\infty} * \{00, 10\}) \subset \{0, 1\}^{\leq\infty}$ .

Für  $i \in \mathbb{N}$  und  $x \in X_{2i}$  gilt  $A_x \cong A_x^i = \{0, 1\}$ , also  $A_x^j = \{*\}$  für  $j \neq i$ .

Für  $x \in X_{2i+1}$  wird unabhängig gezogen aus  $\Omega_x = \{0, 1\}$  mit  $\mathbf{P}_x(1) = p_i$ .

Auf terminalen Zuständen haben wir die Auszahlung  $u^i: \partial X \rightarrow \mathbb{R}$

$$u^i(x) = \begin{cases} -b_i x_{2i} & \text{falls } x_1 = x_3 = \dots = x_{2i-1} = 1 \text{ und } x_{2i+1} = 0, \\ -b_i x_{2i} + c_i x_{2i+2} & \text{falls } x_1 = x_3 = \dots = x_{2i-1} = 1 \text{ und } x_{2i+1} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

# Generationenmodell zur Altersversorgung

Auskunft ist (a)  $q^i = \text{id}_{X_i}$  bzw. (b)  $q^i : X_i \rightarrow \{0, 1\} : x \mapsto x_{i-1}$ .

Daraus folgt die Strategiemenge  $S^i = \{ s^i : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} \}$ .

Der Strategievektor  $s \in S$  definiert die Aktionen  $a_i = s^i(a_{i-1})$ .

Zusammen mit  $\omega \in \Omega$  folgt der gesamte Spielverlauf  $x \in \partial X$ .

Die erwartete Auszahlung ist  $u^i(s) = p_0 p_1 \cdots p_{i-1} (-b_i a_i + p_i c_i a_{i+1})$ .

## ◆ Satz H2A: Nash-Gleichgewichte im Generationenmodell

Die Generationen  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  interagieren wie gezeigt, mit Kosten  $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$  und Nutzen  $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$  sowie den Fortsetzungswkten  $p_i \in [0, 1]$  für  $i \in \mathbb{N}$ .

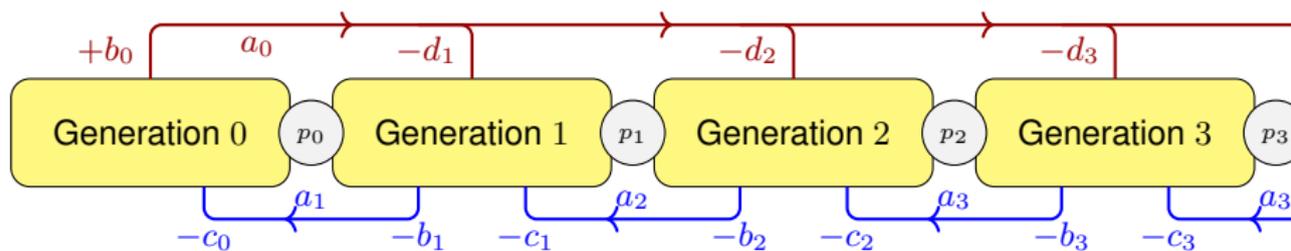
(1) Ist  $s \in \prod_{i \in \mathbb{N}} S_i$  ein Nash-Gleichgewicht, so ist der Aktionsvektor  $a = a(s) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  wachsend, also  $a = a^n := \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{\geq n}}$  für ein  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

(2) Gilt  $p_m c_m < b_m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , so ist  $a_m = 0$  strikt dominant für  $G_m$ , per Rückwärtsinduktion folgt  $a_i = 0$  für alle  $i = 0, 1, \dots, m$ , also  $n > m$ .

(3) Gilt  $p_i c_i > b_i$  für alle  $i \geq m$ , so lässt sich jeder Aktionsvektor  $a = a^n$  mit  $n \geq m$  durch ein Nash-Gleichgewicht  $s \in \prod_{i \in \mathbb{N}} S_i$  realisieren.

# Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

Wir betrachten erneut und genauer unser Nachhaltigkeitsmodell:

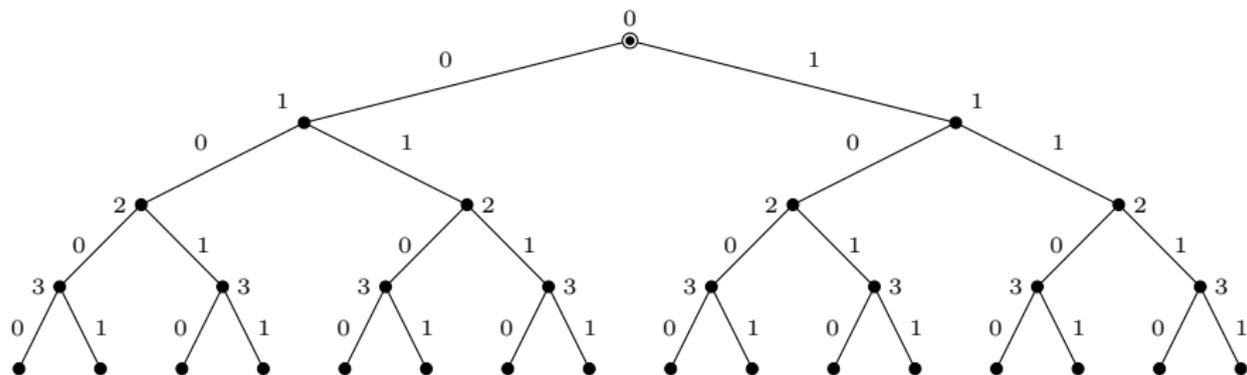


- Aufgabe:** (1) Formalisieren Sie dies als deterministisches Spiel  $\Gamma$ .  
 (2) Formalisieren Sie dies ebenso als probabilistisches Spiel  $\Gamma$ .  
 (3) Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte. Welche sind teilspielperfekt?

Akteure sind die Generationen  $G_i$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Die Generation  $G_0$  wählt ihre Aktion / Strategie  $a_0 \in A_0 = \{0 = \text{Nachhaltigkeit}, 1 = \text{Raubbau}\}$ . Jede Generation  $G_i$  mit  $i \geq 1$  kennt die gesamte Vorgeschichte und folgert daraus ihre Aktion  $a_i \in A_i = \{0 = \text{schweigen}, 1 = \text{anklagen}\}$ . Auszahlungen sind  $u^0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$  und  $u^i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$ .

## Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

**Lösung:** (1) Zunächst deterministisch mit Diskontierung  $p_i \in [0, 1]$ :



Die Spielermenge ist  $I = \mathbb{N}$ . Der Zustandsraum ist  $X = \{0, 1\}^{\leq \infty}$ .

Für  $i \in \mathbb{N}$  und  $x \in X_i$  gilt  $A_x \cong A_x^i = \{0, 1\}$ , also  $A_x^j = \{*\}$  für  $j \neq i$ .

Die Fortsetzung ist kanonisch, also  $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x * \{0, 1\} : a \mapsto x * a$ .

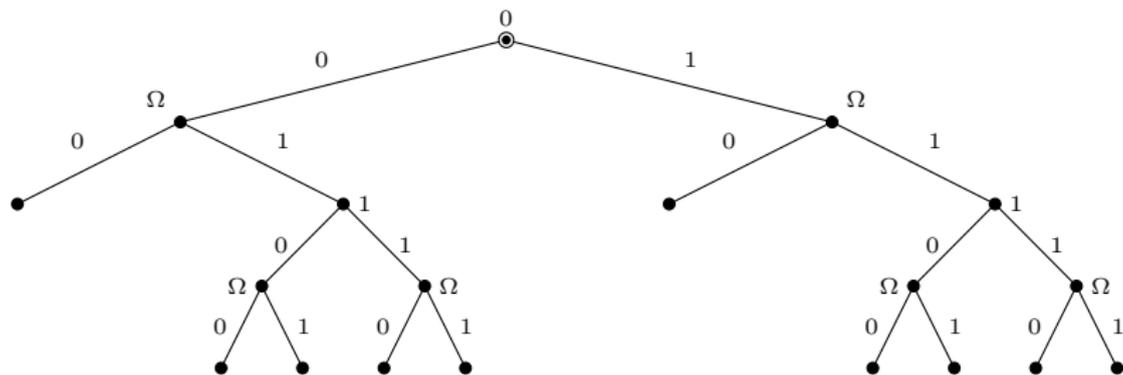
Auszahlungen sind  $u^0 = b_0 x_0 - p_0 c_0 x_1$  und  $u^i = -b_i x_i - p_i c_i x_{i+1} - d_i x_0$ .

Jeder Spieler hat vollständige Information, also  $q^i = \text{id}_{X_i} : X_i \rightarrow X_i$ .

Daraus folgt die Strategiemenge  $S^i = \{ s^i : \{0, 1\}^i \rightarrow \{0, 1\} \}$ .

## Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

(2) Zum Vergleich die Formalisierung als probabilistisches Spiel:



Der Baum ist  $X = \{01, 11\}^\infty \sqcup (\{01, 11\}^{<\infty} * \{00, 10\}) \subset \{0, 1\}^{\leq \infty}$ .

Für  $i \in \mathbb{N}$  und  $x \in X_{2i}$  gilt  $A_x \cong A_x^i = \{0, 1\}$ , also  $A_x^j = \{*\}$  für  $j \neq i$ .

Für  $x \in X_{2i+1}$  wird unabhängig gezogen aus  $\Omega_x = \{0, 1\}$  mit  $\mathbf{P}_x(1) = p_i$ .

Auf terminalen Zuständen haben wir die obige Auszahlung  $u^i: \partial X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Jeder Spieler hat vollständige Information, also  $q^i = \text{id}_{X_i}: X_i \rightarrow X_i$ .

Daraus folgt die Strategiemenge  $S^i \cong \{s^i: \{0, 1\}^i \rightarrow \{0, 1\}\}$ .

## Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

Der Strategievektor  $s \in S$  definiert die Aktionen  $a_i = s^i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1})$ .

Zusammen mit  $\omega \in \Omega$  folgt der gesamte Spielverlauf  $x \in \partial X$ .

Die erwartete Auszahlung ist  $u : S \rightarrow \mathbb{R}^I$  ist wie zuvor

$$u^0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1 \quad \text{und} \quad u^i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0.$$

### ◆ Satz H2B: Nash–Gleichgewichte im Nachhaltigkeitsmodell

Die Generationen  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  interagieren wie oben erklärt.

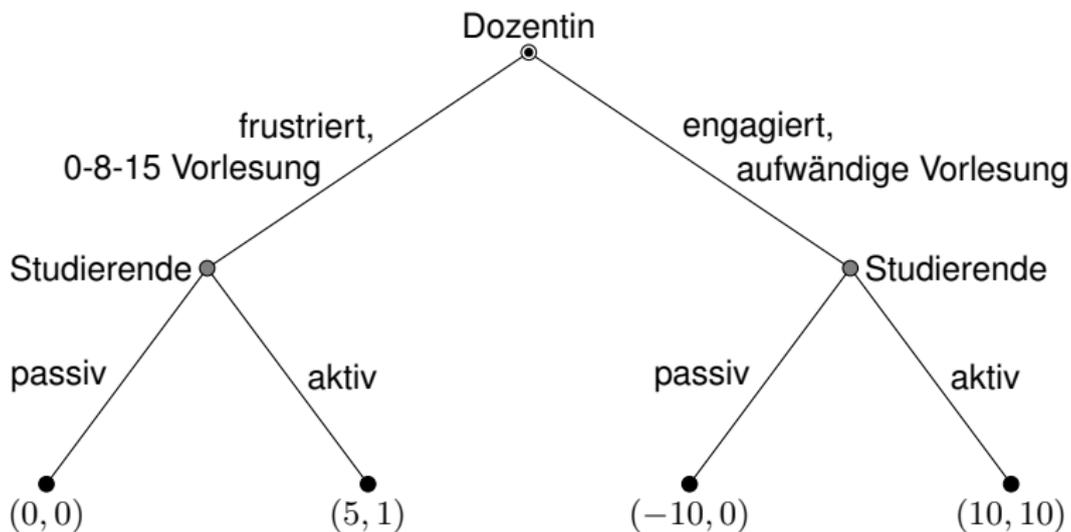
(0) Raubbau  $s_0 = 1$  und Schweigen  $s_i = 0$  für alle  $i \geq 1$  bilden ein teilspielperfektes Gleichgewicht dieses Spiels.

(1) Gilt  $p_n c_n < b_n$  für ein  $n \geq 1$ , so ist  $a_n = 0$  strikt dominant für  $G_n$ , und per Rückwärtsinduktion folgt  $a_i = 0$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $a_0 = 1$ .

(2) Gilt  $p_n c_n > b_n$  für alle  $n \geq 1$ , dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein teilspielperfektes Gleichgewicht, ausgeschrieben:

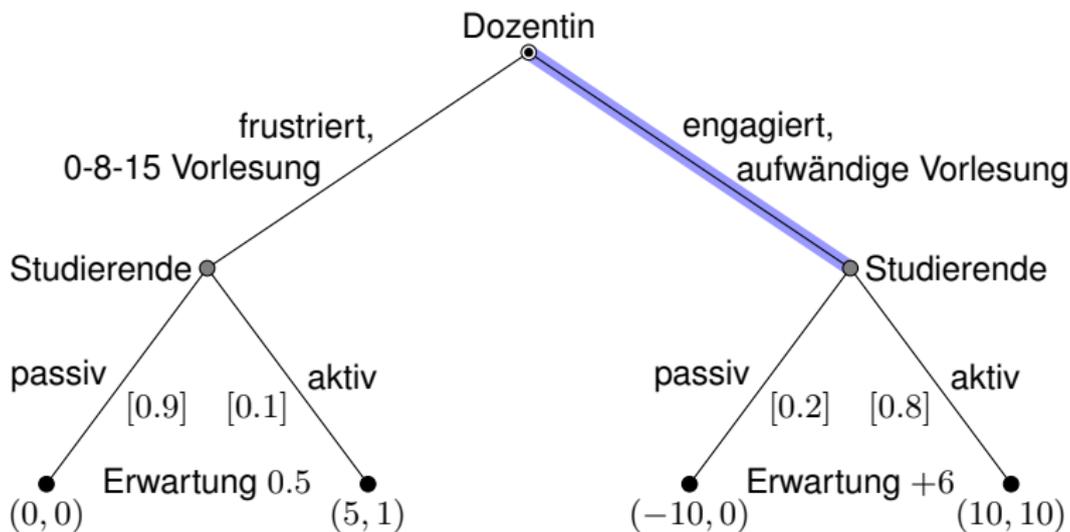
$$s^i : \{0, 1\}^i \rightarrow \{0, 1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \pmod{2}$$

## Die universitäre Lehre ist ein Spiel. . . ein Trauerspiel?



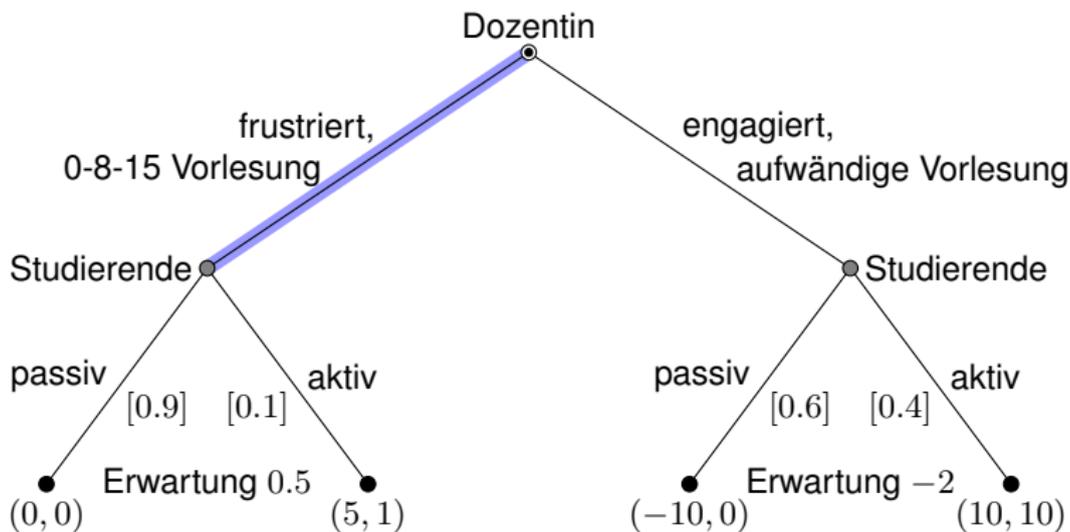
Vor dem Semester muss die Dozentin sich entscheiden und vorbereiten, sagen wir vereinfachend entweder eine langweilige 0-8-15-Vorlesung oder eine engagierte aufwändige Vorlesung. Die Studierenden müssen sich entscheiden, entweder nur passiv mittraben oder aktiv mitarbeiten. Die Zufriedenheit  $u_1$  und der Lernerfolg  $u_2$  sind dann entsprechend. (Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig.)

## Das Dilemma der Lehre: optimistisch



Die Dozentin geht in Vorleistung und muss ihre Vorlesung vorbereiten. Leider kennt Sie dabei die Reaktionen der Studierenden noch nicht. Eine junge naive Dozentin glaubt an die gezeigten Wahrscheinlichkeiten. (Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig.) Sie entscheidet sich daraufhin für eine engagierte und aufwändige Vorlesung. Die Wirklichkeit sieht dann allzu oft ganz anders aus...

## Das Dilemma der Lehre: pessimistisch



Eine erfahrene Dozentin kennt die obigen realen Wahrscheinlichkeiten: Die Enttäuschungen der Vorjahre hinterlassen eine gewisse Bitternis, ihre Mühe und Engagement wurden von Studierenden nicht erwidert. (Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig.) Sie entscheidet sich folgerichtig für eine langweilige 0-8-15-Vorlesung. Ist sie frustriert und gelangweilt? Ja. Wer ist schuld? Urteilen Sie selbst!

*Quid rides? Mutato nomine de te fabula narratur.*

[Was lachst du? Mit anderem Namen handelt die Geschichte von dir.]

Horaz, Sermones I. 1. 69.

Das ist eine Anwendung der Spieltheorie auf eine relevante Situation: nämlich unsere! Die Bilanz des Durchgangs 2018 war eher ernüchternd:

„Wir, das Spieltheorie-Team, investieren jede Woche viel Zeit, Energie und Mühe in die Vorlesungen und Übungen. Einige Studierende nutzen dies und gehen mit und arbeiten fleißig. Über dieses Engagement und den sichtbaren Lernerfolg freuen wir uns. Das war unsere Hoffnung.

Aber eine zu große Zahl der physisch Anwesenden schaut nur passiv zu. Das ist für uns Lehrende persönlich enttäuschend und sehr frustrierend. Wenn Sie diese Klage verstehen können, dann sind Sie vermutlich nicht betroffen, also nichts für ungut. Wenn Sie dies nicht verstehen können, dann sind Sie vermutlich gemeint, aber ignorieren all meine Appelle.“

Beim zweiten Durchgang haben wir die Anforderungen strenger gefasst. Das bedeutet weniger Teilnehmer, diese sind jedoch ernsthaft.

# Was nützen dem Pfau seine Federn?

Pfauen-Männchen haben ein prachtvolles Gefieder. Für das Überleben ist es leider hinderlich: Tarnung, Flucht, Energie, ... Warum lohnen sich dennoch lange Federn? Wozu dienen sie? Angenommen, es gebe „fitte“ und „unfitte“ Pfauen-Männchen. Letztere werden öfter von Raubtieren gefressen etc. Sowohl fitte als auch unfitte können kurze oder lange Federn haben. Die mit langen Federn werden aufgrund der genannten Nachteile jedenfalls öfter gefressen.

Eine Population von Pfauen-Männchen könnte etwa so aussehen:

Pfauen	fit	unfit
kurze Federn	40%	20%
lange Federn	30%	10%

Das Pfauen-Weibchen sieht nicht die Fitness, sondern nur die Federn!

**Aufgabe:** Welche Strategie der Partnerwahl ist für sie vorteilhaft?

- Federlänge ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
- Kurze Federn bevorzugen: Trefferquote 40 : 20 (schlechter)
- Lange Federn bevorzugen: Trefferquote 30 : 10 (besser!)

😊 Trotz aller Nachteile zahlen sich lange Federn doch aus!

# Visuelles Ornament und sexuelle Selektion

Das auffällige Gefieder der Pfauen-Männchen wird als *visuelles Ornament* bezeichnet. Die lange Schleppe ist zwar hinderlich und vermindert das Flugvermögen, paradoxerweise kann es dennoch ein Indikator für genetische Fitness sein und Pfauen-Weibchen als Indiz für gesunden Nachwuchs dienen. (Siehe unser Zahlenbeispiel.) Wäre es nicht effizienter, Pfauen würden diesen Aufwand sparen und die Energie in bessere Überlebensstrategien stecken? Auf den ersten Blick besehen ja. Aber für ein Weibchen gibt es keine bessere Wahl: Es sieht nicht die tatsächliche Fitness, sondern nur das *Signal* der Federn. Auf Grundlage dieser unvollständigen Information muss es sich für die langen Federn entscheiden, selbst wenn das Überlebensnachteile mit sich bringt, auch für seinen eigenen Nachwuchs! Damit bleibt auch den Männchen keine Wahl, lange Federn werden zum Must-Have. Diese *sexuelle Selektion* ist der Schlusstein in Darwins Evolutionstheorie.

Auch Menschen ist dieses Phänomen vertraut: Manche Männer beeindrucken Frauen, indem sie Geld verschwenden oder andere verrückte Dinge tun. Wäre dieses Verhalten insgesamt nachteilig, so würde man vermuten, dass es auf lange Sicht ausstirbt. Das ist jedoch nicht der Fall, da Frauen dieses Verhalten als Indikator für (gesellschaftlichen) Erfolg interpretieren können und eventuell bei der Partnerwahl belohnen. (All das funktioniert selbstverständlich auch umgekehrt. . .)

Dieses Phänomen wird *Handicap-Prinzip* genannt. Beispiele gibt es viele: Produktwerbung verschwendet Geld, wird aber vom Käufer belohnt. Manch akademischer Titel ist scheinbar Zeitverschwendung, wird aber vom Arbeitgeber honoriert. Auch Ihr Studium ist nur teilweise für Ihren späteren Beruf relevant, und dennoch wird diese Anstrengung meist belohnt. Zum Beispiel gelten Leistungen in Mathematik als zuverlässiger Indikator für intellektuelle Leistungsfähigkeit. Dazu diskutieren wir den Arbeitsmarkt, extrem vereinfacht, in folgendem Gedankenexperiment.

## Kann ein unnützer Dokortitel doch nützlich sein?

Eine Personalchefin sucht für eine Stelle einen Ingenieur (m/w/d). Aus Erfahrung schätzt sie die allgemeine Bewerberlage wie folgt:

Bewerber	geeignet	ungeeignet
Diplom/Master	50%	25%
Promotion	20%	5%

Als individuelle Information hat sie zunächst nur den *Abschluss* laut Bewerbungsunterlagen. Die eigentlich interessante Zielgröße der *tatsächlichen Eignung* kennt sie hingegen nicht. Eine Promotion kostet Zeit und Mühe, bringt aber für *diese* Stelle keinen direkten Nutzen.

**Aufgabe:** Welche Strategie ist bei ihrer Auswahl vorteilhaft?

- Abschluss ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
- Master einstellen: Trefferquote 50 : 25 (schlechter)
- Doktor einstellen: Trefferquote 20 : 5 (besser!)

😊 Trotz aller Nachteile kann sich eine Promotion also auszahlen ... selbst wenn sie für die eigentliche Tätigkeit nicht relevant ist!

⚠ Ineffizienz ist der Preis für unvollständige Information.

# Bedingte Wkt: Vorurteil oder Gerechtigkeit?

Wir untersuchen hier zwei simple, aber frappierende Beispiele: Federn und Dokortitel. Beide sind durchaus realistisch und handfeste Illustrationen für das Konzept der *bedingten Wahrscheinlichkeit*: Diese ist nicht nur eine schöne Theorie, sondern überall tägliche Praxis.

Die Argumente in unserer fiktiven Bewerbungssituation mögen manche für ungerecht halten. In der Tat basieren Sie auf *Vorurteilen* der Arbeitgeberin – ein eher negativ besetzter Ausdruck, aber inhaltlich bedeutet es dasselbe wie bedingte Wahrscheinlichkeit: Sie nutzt ihre Erfahrung. Unter den gegebenen spärlichen Informationen ist das Vorurteil nützlicher als gar kein Urteil.

Das Grundproblem: Die primäre Zielgröße „Eignung“ ist nicht direkt zugänglich. Der sekundäre Faktor „Ornament“ ist eigentlich unwichtig, dafür aber leicht sichtbar. In Ermangelung primärer Information muss man sich mit sekundärer Information begnügen. Diese erhält dadurch eine größere Bedeutung als sie eigentlich haben sollte, und das wird als ineffizient oder ungerecht empfunden. Das ist der Preis für unvollständige Information!

Zur Beruhigung der Gemüter: Nichts hält die Arbeitgeberseite davon ab, über die erste grobe Vorinformation hinaus genauere Information zu gewinnen, zum Beispiel durch Gespräche, Tests, Assessment oder eine Probezeit. Genau das wird in der Praxis auch erfolgreich genutzt. Das ist der Vorteil, wenn man Information nicht nur *passiv* beobachtet, sondern *aktiv* herstellen kann.

Schließlich zur Ehrenrettung der Promotion, auch aus persönlicher Erfahrung: Viele Studierende empfinden große Begeisterung für ihr Fach. Dies kann sogar dazu führen, dass sie aus ehrlichem intrinsischem Interesse einer Frage auf den Grund gehen wollen und darüber sogar promovieren. Das wird durch die obigen, allzu kühl berechnenden Argumente nicht in Zweifel gezogen!

## Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

Das vorige Beispiel war noch wenig formal, daher umso wortreicher. Wir können das Problem nun präzisieren als ein dynamisches Spiel mit unvollständiger Information. Die Spieltheorie stellt uns hierzu eine geeignete Sprache zur Verfügung und zudem Werkzeuge zur Analyse.

**Beispiel:** Personalchefin Alice sucht für ein wichtiges Projekt einen hochtalentierten Mathematiker (m/w/d); nur normaltalentierte Bewerber würde Sie freundlich ablehnen. Der Abschluss (BSc/MSc/PhD) ist eine zusätzliche Qualifikation, aber für dieses Projekt inhaltlich unerheblich.

Für hochtalentierte Studenten ist ein MSc oder PhD eine Freude und Bereicherung, für normaltalentierte eine Pein und Zeitverschwendung. Bob kennt sein Talent und würde daraufhin seinen Abschluss wählen. Er weiß jedoch auch um die Signalwirkung seiner Entscheidung.

Die folgenden Spiele präzisieren die Struktur und fixieren explizite Daten. Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig, doch sie sind ein Anfang und erlauben uns konkrete Rechnungen. Farblich eingezeichnet ist zudem jeweils ein mögliches Gleichgewicht.

## Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

Solche Situationen mit asymmetrischer Information sind allgegenwärtig: Nicht nur, wenn Sie Ihre eigene Arbeitskraft zu Markte tragen, sondern immer, wenn der Verkäufer das Objekt besser kennt als der Käufer. Ein typisches Beispiel ist der Ver/Kauf eines Gebrauchtwagens.

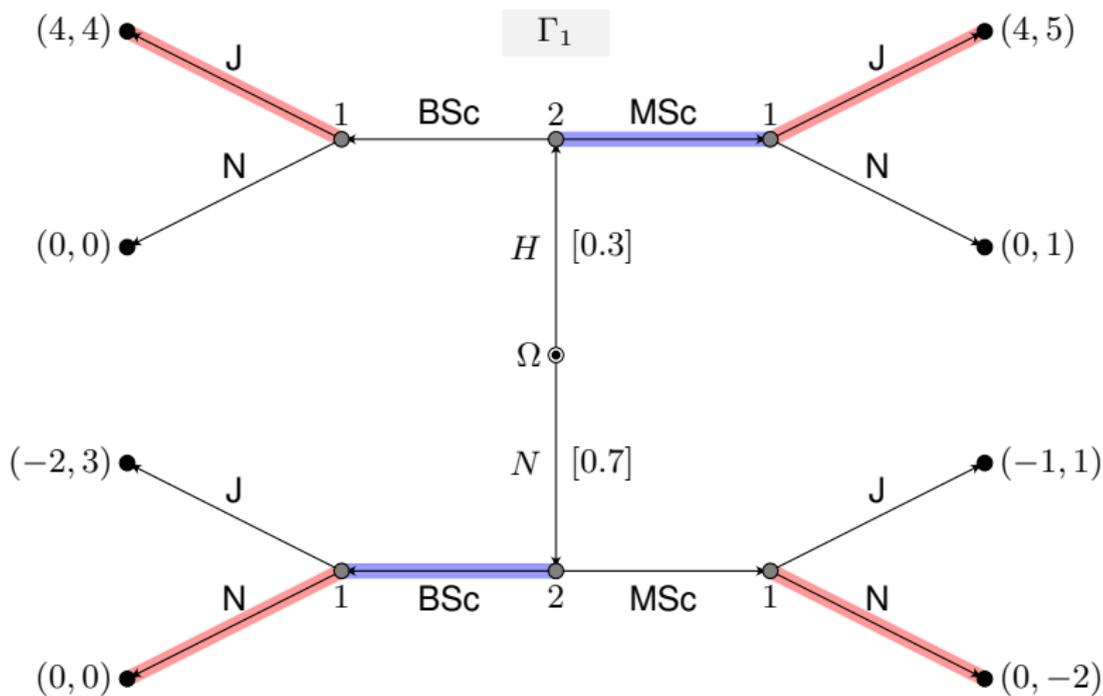
Unsere Beispiele illustrieren zunächst die Ideen und Schreibweisen. Ich hoffe, die Wahl des Universitätsabschlusses ist ausreichend plastisch und motivierend; zahlreiche Konflikte sehen genauso aus, daher stehen unsere simplen Modelle stellvertretend für viele ähnliche.

Allgemein spricht man hier von einem **Signalspiel** / *signaling game*. Auch für solche Situationen wollen wir Lösungskonzepte formulieren. Die unternehmen wir anschließend mit der Definition J3B von perfekten Bayes–Gleichgewichten, nachdem wir etwas Beispielmateriale haben.

Die folgenden drei Spiele  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  sind untereinander eng verwandt. Sie sind einfach genug, um direkt verstanden und gelöst zu werden. Die anschließende Definition codiert das Lösungskonzept allgemein, sie erklärt im größeren Rahmen, was wir als Lösungen suchen.

## Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

1 = Alice / Personalchefin, 2 = Bob / Mathematikstudent



Alice erkennt Bobs Talent. Der Abschluss BSc / MSc ist Ihr unwichtig.  
 Offenbarung: Bob wählt den Abschluss, der seinem Talent entspricht.

## Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

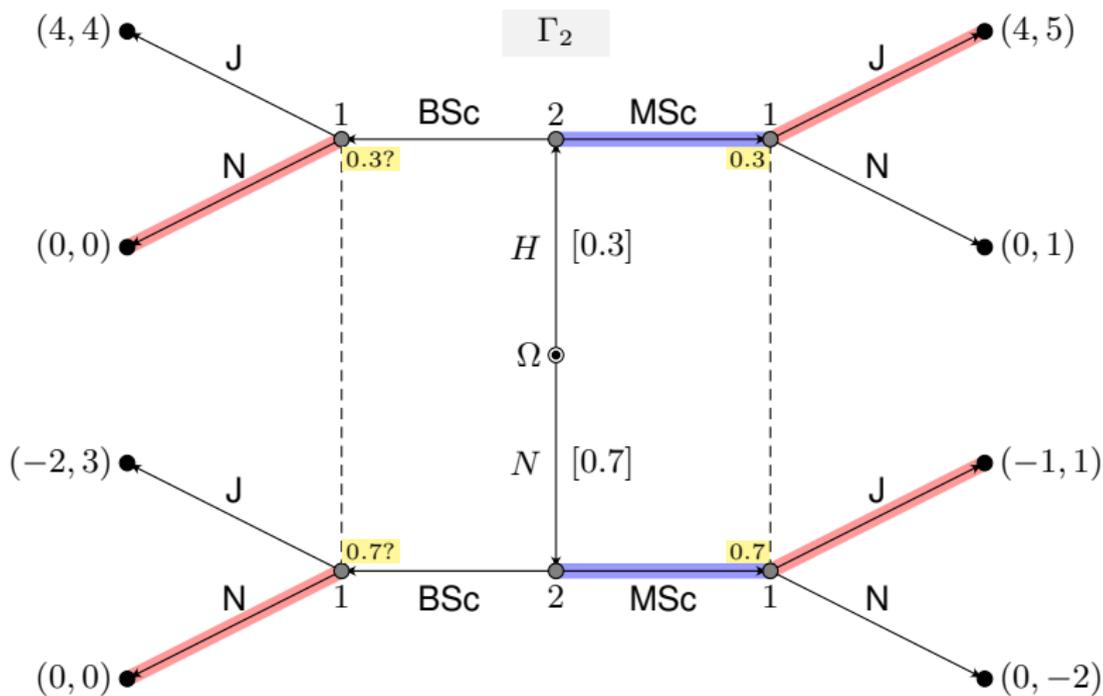
$\Gamma_1$ : Alice erkennt das Talent von Bob und entscheidet entsprechend. Hierzu helfen Bewerbungsgespräche, Assessment Center, Probezeit. Bob weiß, dass Alice' Entscheidung nicht vom Abschluss abhängt. Bob wählt daraufhin frei den Abschluss, der seinem Talent entspricht. Wir haben hier ein (sehr simples) Spiel mit vollständiger Information.

😊 In diesem extensiven Spiel mit vollständiger Information können wir Rückwärtsinduktion anwenden (Satz J1D von Zermelo). Das vereinfacht! Insbesondere zeigt dies: Wir haben hier nur dieses Gleichgewicht! Bei vollständiger Information sind unsere Methoden brauchbar.

So weit, so gut, so naiv. Erfahrungsgemäß ist die Wirklichkeit jedoch wesentlich komplizierter: Für Arbeitgeber ist es recht schwierig, die Eignung / die Befähigung / das Talent von Bewerbern einzuschätzen. Wir betrachten daher ein zweites Modell  $\Gamma_2$ , in dem nur der (eigentlich irrelevante) Abschluss zählt. Welches Verhalten ist dann rational? Die möglichen Antworten hängend von der genauen Datenlage ab!

# Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

1 = Alice / Personalchefin, 2 = Bob / Mathematikstudent



Alice sieht nicht Bobs Talent, sondern nur sein Signal „BSc“ oder „MSc“. Das sekundäre Merkmal wird nun zur primären Entscheidungsgrundlage.

## Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

$\Gamma_2$ : Alice muss allein aufgrund der Bewerbungsunterlagen entscheiden. Sie sieht nicht Bobs Talent, sondern nur Bobs Signal „BSc“ oder „MSc“. (Die Erhebung genauerer Informationen durch Bewerbungsgespräche, Assessment Center, Probezeit, etc. lassen wir hier außer Acht.)

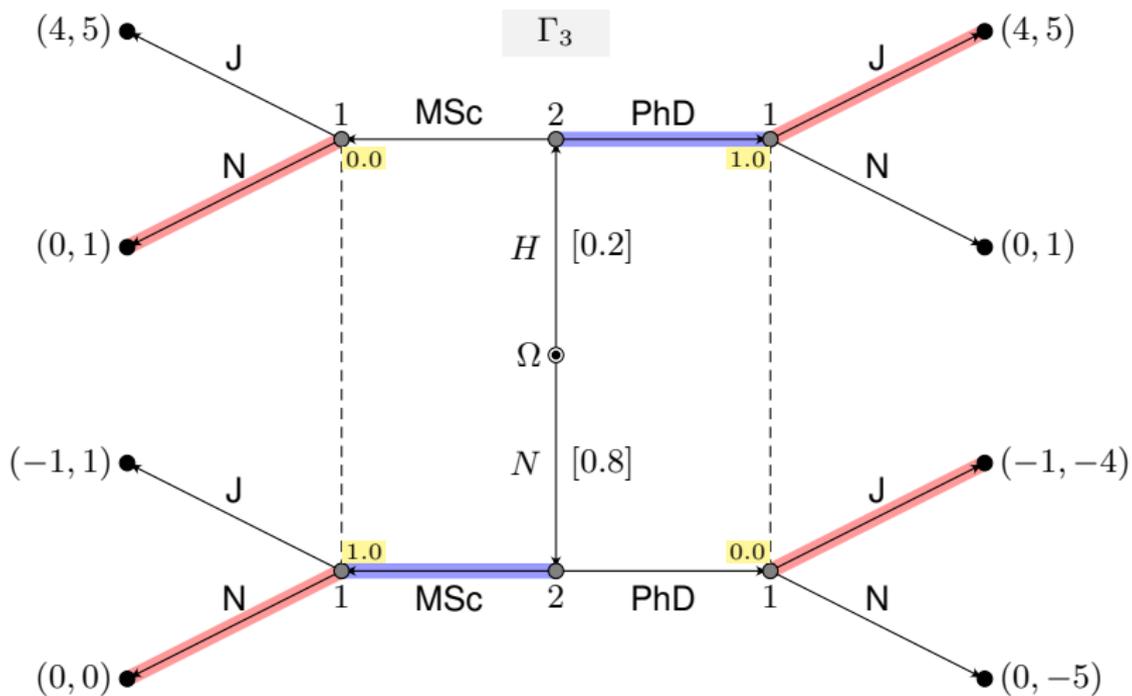
Farbig eingezeichnet ist ein mögliches Gleichgewicht: Hier sind alle Studenten gezwungen, nach dem Bachelor einen Master zu machen. Anschaulich: Nur mit BSc bekommt man keinen (interessanten) Job. Dies ist ein **verschmelzendes Gleichgewicht** / *pooling equilibrium*.

Genauer: Alice hat hier nur vier Strategien  $s_1 : \{\text{BSc}, \text{MSc}\} \rightarrow \{\text{J}, \text{N}\}$ . Auch Bob hat wie zuvor genau vier Strategien  $s_2 : \{0, 1\} \rightarrow \{\text{BSc}, \text{MSc}\}$ . Gezeigt ist ein mögliches Gleichgewicht: Die Zahlen sind so gewählt, dass weder Alice noch Bob sich aus eigener Kraft verbessern kann.

 In diesem extensiven Spiel mit unvollständiger Information können wir Rückwärtsinduktion *nicht* anwenden! Insbesondere wissen wir nicht, wie wir *alle* Gleichgewichte finden. Welche Gleichgewichte suchen wir? Bei unvollständiger Information müssen wir unsere Methoden verfeinern!

# Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

1 = Alice / Personalchefin, 2 = Bob / Mathematikstudent



Das Signal „PhD“ ist gerade so teuer, dass es zur Differenzierung taugt.  
 Offenbarung: Bob wählt den Abschluss, der seinem Talent entspricht.

## Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

$\Gamma_3$ : Wir unterscheiden wieder zwei Abschlüsse, diesmal MSc und PhD. Alice geht es nur um Bobs Talent, der Abschluss ist für sie unwichtig. Ein PhD ist vielleicht produktiver, bekommt aber ein höheres Gehalt.

Für hochtalentierete Studenten ist ein PhD eine positive Erfahrung, der hohe Zeitaufwand wird langfristig durch das Gehalt aufgewogen. Auch sie sind also neutral gegenüber der Wahl MSc oder PhD.

For normaltalentierete Studenten ist ein PhD ein erheblicher Nachteil: Der Aufwand an Zeit und Mühe ist groß, und Freude bereitet es nicht. Für Alice macht dies keinen Unterschied, doch für Bob hingegen sehr!

Gegenüber dem Signal „MSc“ ist daher „PhD“ hier so teuer, dass ein **separierendes Gleichgewicht** / *separating equilibrium* entsteht. Die genaue Rechnung hängt von der gegebenen Datenlage ab!

Die Kosten des Signals sind so justiert, dass sich Bluffen nicht lohnt. Hier gilt das Offenbarungsprinzip, doch das gilt keineswegs immer! Die Glaubwürdigkeit von Signalen hängt stark von ihren Kosten ab.

## Definition J3B: perfektes Bayes–Gleichgewicht / PBE

Sei  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P}, q)$  ein dynamisches Spiel mit unvollst. Information. Wir betrachten ein Paar  $(s, b)$  aus Strategien  $s$  und Überzeugungen  $b$ :

- 1 Für jeden Spieler  $i$  ist  $s^i \in S^i = S^i(X, q^i)$  bzw.  $s \in \bar{S}^i$  eine Strategie.
- 2 Auf jeder seiner Informationsmengen  $[x] = [x]_i$  ist  $b_{[x]}^i$  ein WMaß.

Damit kann Spieler  $i$  über jede Informationsmenge  $[x]$  mitteln:

$$u_{[x]}^i(s) = \sum_{y \in [x]} u_y^i(s) b_{[x]}^i(\{y\})$$

Wir nennen  $(s, b)$  ein **perfektes Bayes–Gleichgewicht**, und schreiben dafür kurz  $(s, b) \in \text{PBE}(\Gamma, S)$  bzw.  $(s, b) \in \text{PBE}(\Gamma, \bar{S})$ , wenn gilt:

- 3 **Rationalität:** Die Strategie  $s^i$  maximiert  $u_{[x]}^i(s)$  für jedes  $x \in X$ .
- 4 **Konsistenz:** Die WMaße  $b_{[x]}^i$  erfüllen die Bayes–Gleichung

$$\mathbf{P}_s([x]) b_{[x]}^i(\{y\}) = \mathbf{P}_s(\{y\}) \quad \text{für alle } y \in [x].$$

Für  $\mathbf{P}_s([x]) > 0$  ausgeschrieben:  $b_{[x]}^i(\{y\}) = \mathbf{P}_s(\{y\}) / \sum_{z \in [x]} \mathbf{P}_s(\{z\})$

## Perfektes Bayes–Gleichgewicht / PBE

Für ein perfektes Bayes–Gleichgewicht benötigen wir zwei Daten, für jeden Spieler (1) eine **Strategie**  $s^i$  und (2) eine **Überzeugung**  $b^i$ .

Jeder Spieler  $i$  benötigt für jede seiner Informationsmengen  $[x] = [x]_i$  ein WMaß  $b^i_{[x]}$ . Diese Wkten sind seine Einschätzung, in welchem Zustand sich das Spiel tatsächlich befindet. Auf Englisch heißt das *belief*, auf Deutsch sagen wir *Einschätzung* oder *Überzeugung* oder auch *Glauben*, selbst trotz religiöser Anklänge.

Damit kann Spieler  $i$  über jede Informationsmenge  $[x]$  mitteln und so seine erwartete Auszahlung  $u^i_{[x]}(s) = \sum_{y \in [x]} u^i_y(s) b^i_{[x]}(\{y\})$  bestimmen.

Die **sequentielle Rationalität** (3) entspricht der Teilspielperfektion in Spielen mit vollständiger Information. Das ist soweit plausibel.

**Beispiel:** In den obigen Beispielen  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_3$  sind die Überzeugungen gelb hinterlegt; erst damit rechtfertigen wir die sequentielle Rationalität. Bei vollständiger Information wie in  $\Gamma_1$  gilt  $[x] = \{x\}$  und  $b^i_{[x]}(\{x\}) = 1$ . Diese Dirac–Maße werden im Folgenden nicht weiter betont.

## Perfektes Bayes–Gleichgewicht / PBE

Die Überzeugungen  $b^i$  benötigen wir zur Rationalität der Strategien (3). Entscheidend ist nun die Frage: *Welche Überzeugungen sind rational?* Das führt zur obigen Bedingung (4) der **bayesianischen Konsistenz**: Überzeugungen müssen der Regel von Bayes genügen.

Vorgelegt sei das Strategiebündel  $s \in \bar{S}$ . Zum fixen Startzustand  $x_0 \in X$  sei  $\mathbf{P}_s(\{z\})$  die Wkt, dass der Zustand  $z \in X$  erreicht / durchlaufen wird. Zur Vereinfachung gehen wir meist davon aus, dass jede Trajektorie jede Informationsmenge  $[x]$  höchstens einmal trifft. Dann gilt nämlich:

$$\mathbf{P}_s([x]) = \sum_{z \in [x]} \mathbf{P}_s(\{z\})$$

**Bayesianische Konsistenz** bedeutet für  $\mathbf{P}_s([x]) > 0$  ausgeschrieben:

$$b_{[x]}^i(\{y\}) = \frac{\mathbf{P}_s(\{y\})}{\sum_{z \in [x]} \mathbf{P}_s(\{z\})} \quad \text{für alle } y \in [x]$$

Hierbei ist  $\mathbf{P}_s(\{z\})$  die Wkt, im Spielverlauf mit den Strategien  $s$  den Zustand  $z \in X$  zu erreichen. Das folgende Beispiel illustriert dies.

# Perfektes Bayes–Gleichgewicht / PBE

Diese Definition ist plausibel für **vollständig gemischte** Strategien: Jede Aktion wird mit einer (kleinen, aber strikt) positiven Wkt gespielt, jede endliche Trajektorie hat somit eine (kleine, aber strikt) positive Wkt.

Allgemein können wir uns vorstellen, dass jeder Spieler in jedem Zug (infinitesimal) kleine Fehler machen kann. Die Ausführung dieser Idee verfeinert das Lösungskonzept zum **sequentiellen Gleichgewicht** / *sequential equilibrium* und **Zitternde-Hand-Gleichgewicht** / *trembling hand equilibrium*. Das ersehnte Ziel ist dabei immer die Klärung der zentralen, kniffligen Frage: *Welche Überzeugungen sind rational?*

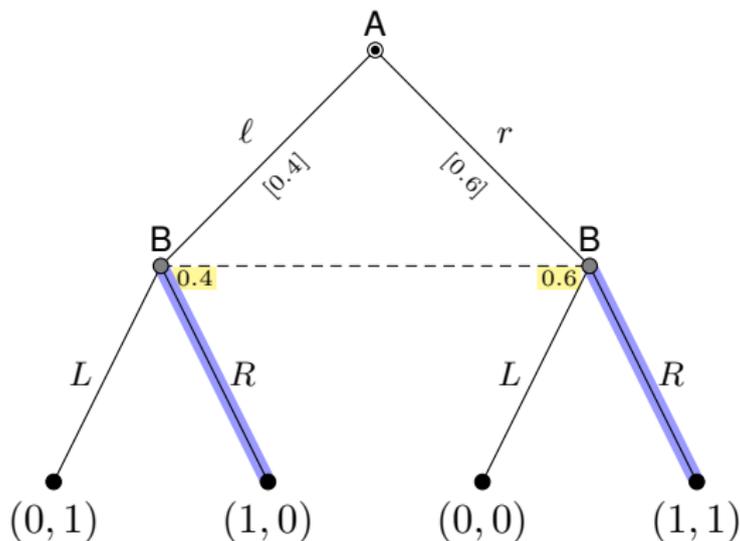
*Rather a lot of bodies are buried in the definition of consistency.*

David M. Kreps, *A Course in Microeconomic Theory* (1990)

Wir werden diese Problematik mit zahlreichen Beispielen illustrieren, sodass Sie damit arbeiten können, dann aber nicht weiter vertiefen. Mit ausreichend Gewöhnung werden Sie feststellen, dass es nicht obskur oder kompliziert ist, sondern sehr naheliegend und natürlich.

# Unvollständige Information und PBE

**Beispiel:** Bob sieht nicht den Zug von Alice:



Im Allgemeinen kennt Spieler  $i$  nur einen kleinen Auszug des gesamten Spielzustands; wir sprechen dann von **unvollständiger Information**.

Das geschieht etwa, wenn Spieler verdeckt oder gleichzeitig ziehen. Die anderen Spieler sind dann über seinen Zug im Ungewissen.

## Unvollständige Information und PBE

Dieses dynamische Spiel entspricht dem folgenden Spiel in Normalform:

		Bob	
		$L$	$R$
Alice	$\ell$	0, 1	0, 1
	$r$	0, 0	1, 1

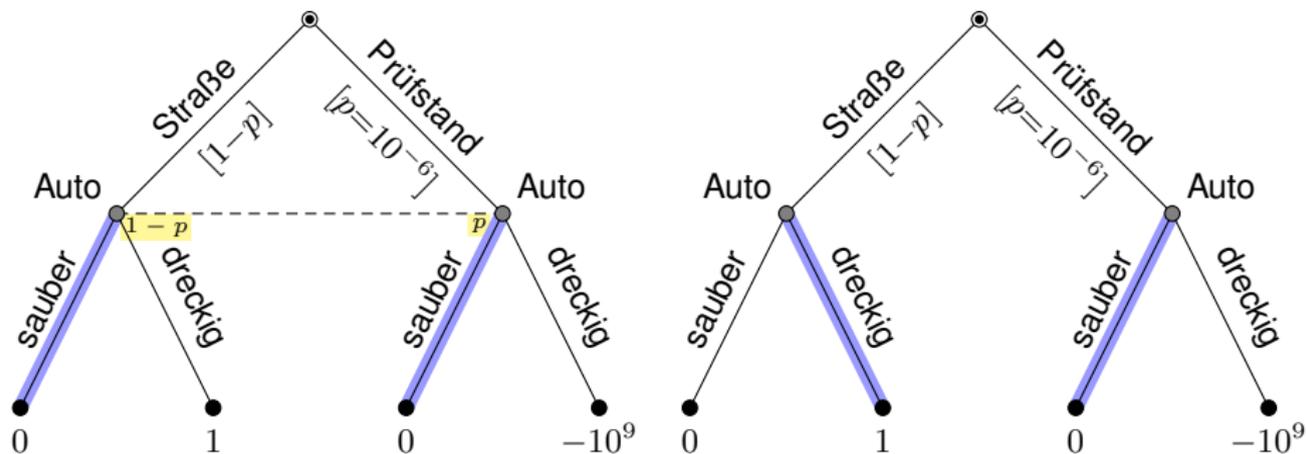
Im Beispiel nehmen wir an, dass Alice sich auf die gemischte Strategie  $s = 0.4 \cdot \ell + 0.6 \cdot r$  festlegt; sie spielt  $\ell$  mit Wkt 40% und  $r$  mit Wkt 60%.

Bob kennt diese Strategie  $s$ , sieht jedoch nicht die gespielte Aktion. Das Spiel sagt ihm nur, dass er am Zug ist, nicht in welchem Zustand. Wenn Bob am Zug ist, benötigt er jedoch eine geeignete Bewertung! Das ist die Rolle der Überzeugung  $b$  zu seiner Informationsmenge.

😊 Hier ist die Regel von Bayes besonders einfach anzuwenden. Jedes PBE entspricht hier einem NE in Normalform und umgekehrt!

# Unvollständige Information und PBE

**Beispiel:** Schadstoffmessung und Abgasskandal / *Dieseldgate*:



Kennt jeder Spieler  $i \in I$  jederzeit den Zustand  $x \in X$  des Spiels, so sprechen wir von **vollständiger Information** / *complete information*.

Diese Maximalforderung ist in vielen Anwendungen zuviel verlangt: Häufig ist **unvollständige Information** wesentlich für das Spiel.

Beim aktuellen Abgasskandal war die Autoelektronik allzu intelligent, so dass sie die Spielregeln leicht umgehen und manipulieren konnte.

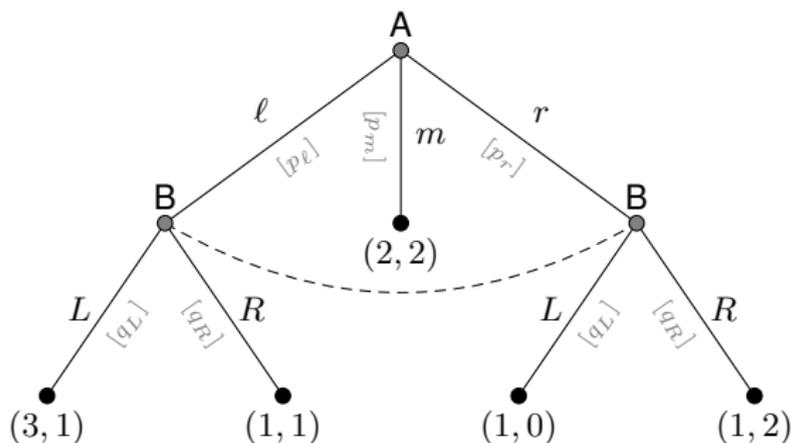
## Unvollständige Information und PBE

Die Formulierung als dynamisches Spiel erlaubt uns insbesondere, Information zu modellieren und zu analysieren: Wer weiß wann was? Das vorige Spiel in Normalform kann dies nicht! In extensiver Form hingegen können wir dies durch Informationsmengen formalisieren. Ich illustriere dies mit einem einfachen, aber frappierenden Beispiel:

Als **Abgasskandal** / *Dieseldgate* bezeichnet man eine Reihe illegaler Manipulationen verschiedener Autohersteller zur Umgehung gesetzlich vorgegebener Abgasgrenzwerte. VW hatte seine Diesel-Pkw in den USA als besonders saubere „Clean-Diesel“ beworben. Am 18.09.2015 wurde öffentlich, dass die Volkswagen AG illegale Abschaltungen verwendete: Die US-Abgasnormen wurden nur im Prüfstandsmodus eingehalten; im Normalbetrieb dagegen wurde die Abgasreinigung abgeschaltet.

Die ursprüngliche VW-Abgasaffäre löste eine weitreichende Krise der Automobilindustrie aus. Viele Studien stellten Abweichungen zwischen realen und Prüfstandemissionen bei den Modellen deutscher und anderer Hersteller fest. ([de.wikipedia.org/wiki/Abgasskandal](http://de.wikipedia.org/wiki/Abgasskandal))

# Perfekte Bayes–Gleichgewichte vs Nash–Gleichgewichte



		B		
		$L$	$R$	$\ell$
A	$\ell$	3	1	1
	$m$	2	2	2
	$r$	1	1	0

**Aufgabe:** (0) Bestimmen Sie Normalform und Nash–Gleichgewichte (1) sowie zur extensiven Form alle perfekten Bayes–Gleichgewichte ( $s_A \in [\ell, m, r]$ ,  $s_B \in [L, R]$ ,  $b \in [\ell, r]$ ) in  $\text{PBE}(\Gamma, \bar{S})$  und in  $\text{PBE}(\Gamma, S)$ .

**Lösung:** (1a) Gilt  $b(r) > 0$ , so folgt  $q_R = 1$  und  $p_m = 1$ .

(1b) Gilt  $b(r) = 0$ , also  $b(\ell) = 1$ , so unterscheiden wir drei Fälle:

$q_L > q_R \Rightarrow p_\ell = 1$ ,  $q_L = q_R \Rightarrow p_\ell, p_m$  beliebig,  $q_L < q_R \Rightarrow p_m = 1$ .

Die reinen PBE sind demnach (2a)  $(\ell, L, \delta_\ell)$  und (2b)  $(m, R, b)$ .

## Perfekte Bayes–Gleichgewichte vs Nash–Gleichgewichte

Alice hat vollständige Information: Sie ist hier genau einmal am Zug, und ihre Informationsmenge ist einelementig. Ihre Überzeugung  $b^1$  ist somit das Dirac–Maß und wird im Folgenden nicht weiter beachtet.

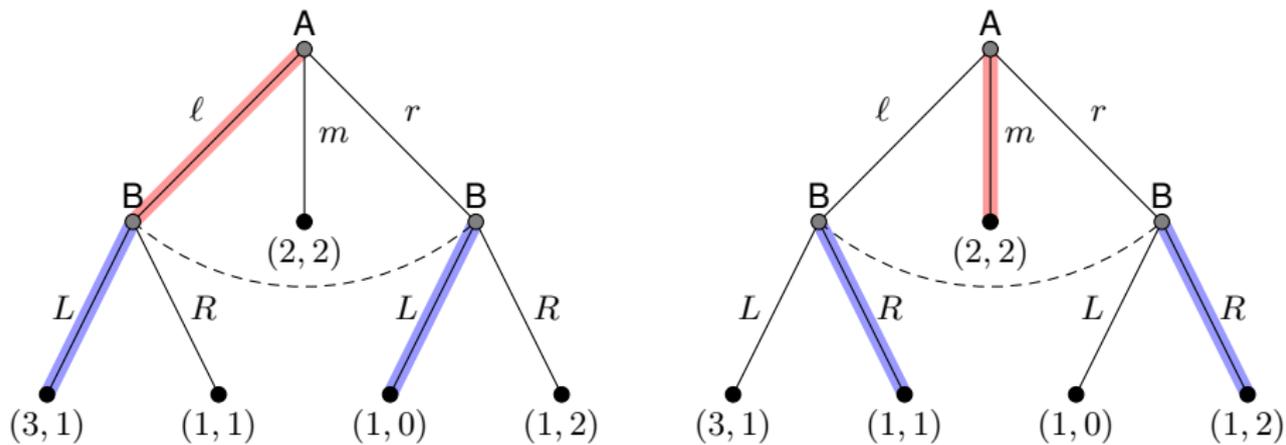
Bob ist höchstens einmal am Zug, und seine Informationsmenge ist zweielementig: Wenn Bob am Zug ist, hat Alice  $\ell$  oder  $r$  gespielt, aber nicht  $m$ . Seine Überzeugung  $b = b^2 \in [\ell, r]$  ist ein WMaß auf  $\{\ell, r\}$ .

😊 Wenn Bob am Zug ist, dann weiß er, dass Alice links oder rechts gespielt hat, aber er weiß nicht, ob Alice links oder rechts gespielt hat.

Wir können die perfekten Bayes–Gleichgewichte auf verschiedene Weisen durch Fallunterscheidung finden. Ich beginne hier mit Bobs Überzeugung  $b$ . (1a) Im Falle  $b(r) > 0$  muss Bob  $R$  spielen, denn dies ist strikt dominant. Dann wiederum ist für Alice  $m$  strikt dominant.

(1b) Im Falle  $b(r) = 0$  gilt  $b(\ell) = 1$ , und Bob ist indifferent ob  $L$  oder  $R$ . Je nach  $q_L > q_r$  oder  $q_L < q_R$  ist für Alice  $\ell$  oder  $m$  strikt dominant. Die beiden folgenden Graphiken illustrieren die beiden reinen PBE. Im ersten greift die Bayes–Formel, im zweiten hingegen nicht.

# Perfekte Bayes–Gleichgewichte vs Nash–Gleichgewichte



(a) Das reine PBE  $(\ell, L, \delta_\ell)$ ; Bobs Überzeugung  $\delta_\ell$  ist dadurch festgelegt. Bei diesem Strategiebündel wird Bobs Informationsmenge nur links erreicht. Die Regel von Bayes ergibt somit  $b(\ell) = 1$  und  $b(r) = 0$ .

(b) Das reine PBE  $(m, R, b)$ ; Bobs Überzeugung  $b$  ist hier völlig beliebig! Bei diesem Strategiebündel wird Bobs Informationsmenge nie erreicht. Die Regel von Bayes ist hier wirkungslos, daher ist  $b$  willkürlich.

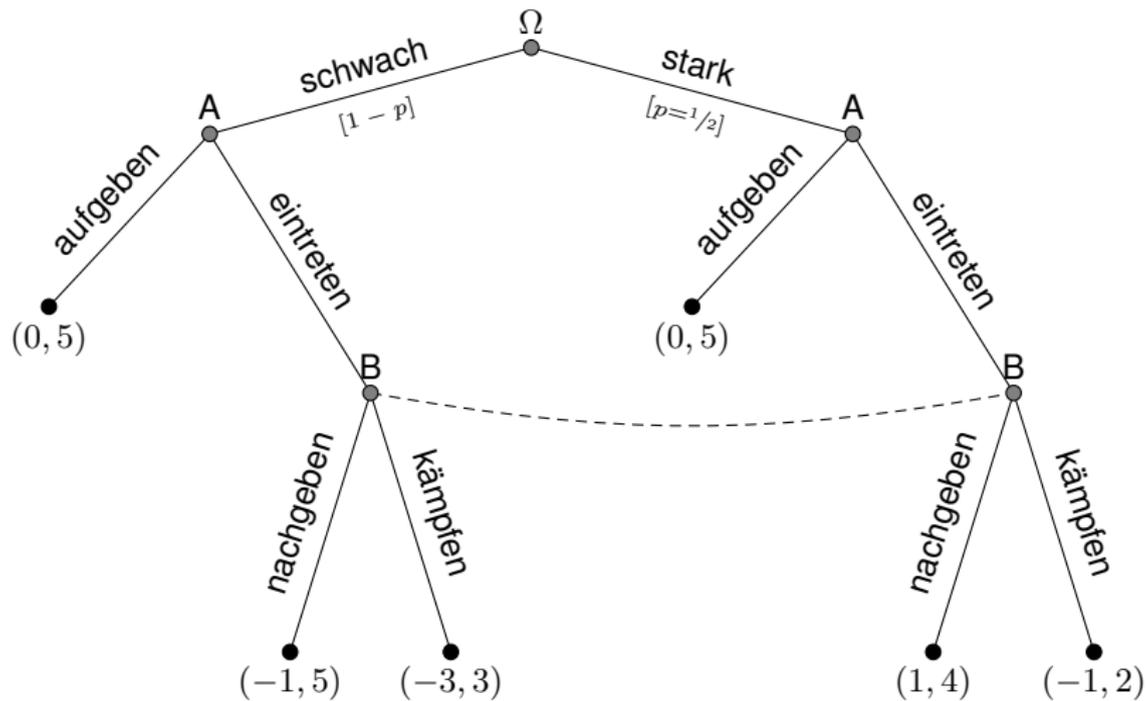
# Perfekte Bayes–Gleichgewichte vs Nash–Gleichgewichte

Dieses Spiel hat eine sehr einfache Dynamik und ist nahezu statisch. Die strategische Normalform bildet daher fast die gesamte Information ab, und es ist beruhigend zu erkennen, dass der Begriff des perfekten Bayes–Gleichgewichts hier dem des Nash–Gleichgewichts entspricht.

Unsere Definition J3B ist allgemein gehalten, um auf möglichst viele spieltheoretische Situationen anwendbar zu sein. Einfache Beispiele illustrieren, dass sie vernünftige Ergebnisse liefert, zudem im Einklang mit dem vertrauten Lösungskonzept der Nash–Gleichgewichte.

Das folgende Beispiel ist spürbar realistischer und interessanter. Es zeigt insbesondere, dass die perfekten Bayes–Gleichgewichte eine echte Verfeinerung sind. Für komplexere Anwendungen, wie die folgende, genügen die einfachen Nash–Gleichgewichte nicht mehr.

## Markteintritt: kämpfen oder nachgeben?



## Markteintritt: kämpfen oder nachgeben?

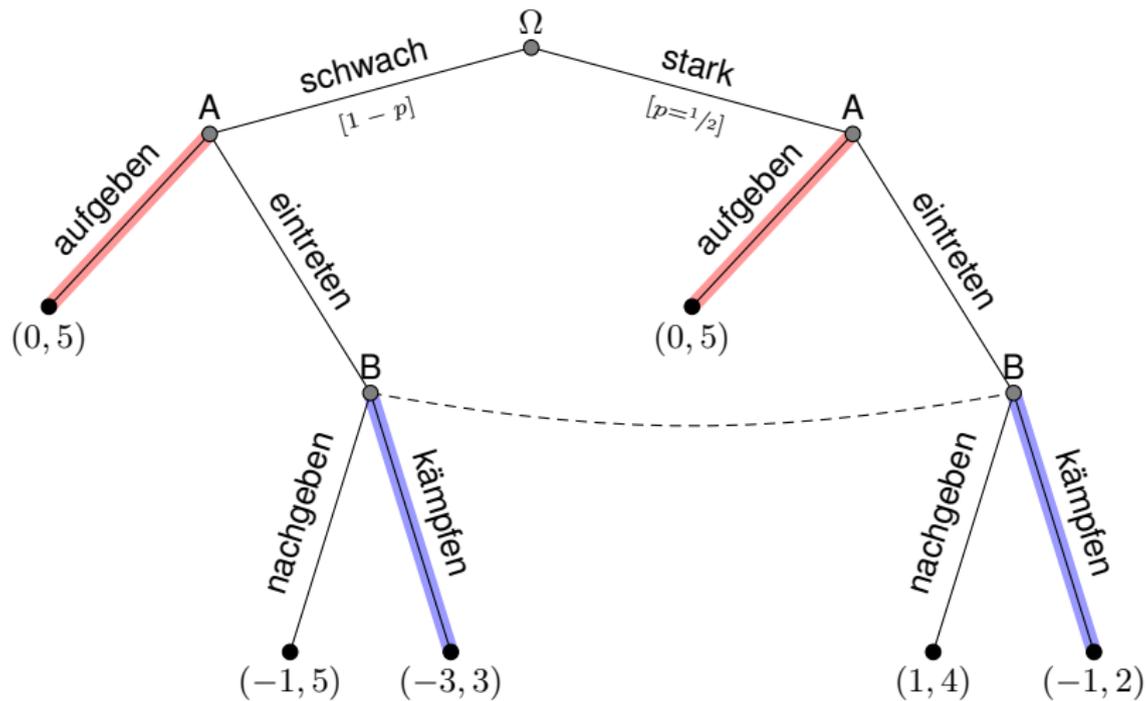
Bei diesem Spiel geht es um den Eintritt in den umkämpften Markt der Coffee-Shops. Spielerin 1, Alice, ist Chefin der Grünschnabel GmbH. Spieler 2, Bob, ist Chefstrategie der marktführenden Platzhirsch AG. Das Spiel mit den Auszahlungen ist im obigen Graphen dargestellt.

Zunächst entscheidet der Zufall, wie stark die Herausforderin ist. Alice kennt ihre eigene Stärke, aber Bob ist darüber im Unklaren. Alice muss nun entscheiden, ob sie in den Markt eintritt oder aufgibt. Falls Alice eintritt, muss Bob entscheiden, ob er kämpft oder nachgibt.

☹️ Teilspiele helfen uns hier nicht, denn das gesamte Spiel  $\Gamma$  erlaubt keine echten Teilspiele! Unsere bewährten Werkzeuge greifen daher hier nicht: Teilspielperfektion, Rückwärtsinduktion und Prinzip der einmaligen Abweichung lassen sich nicht anwenden.

😊 Dennoch können wir dieses Spiel erfolgreich untersuchen. Wir betrachten zunächst ganz klassisch Nash-Gleichgewichte und verfeinern diese dann zu perfekten Bayes-Gleichgewichten.

## Markteintritt: unglaubliches Nash-Gleichgewicht



## Markteintritt: unglaubwürdiges Nash–Gleichgewicht

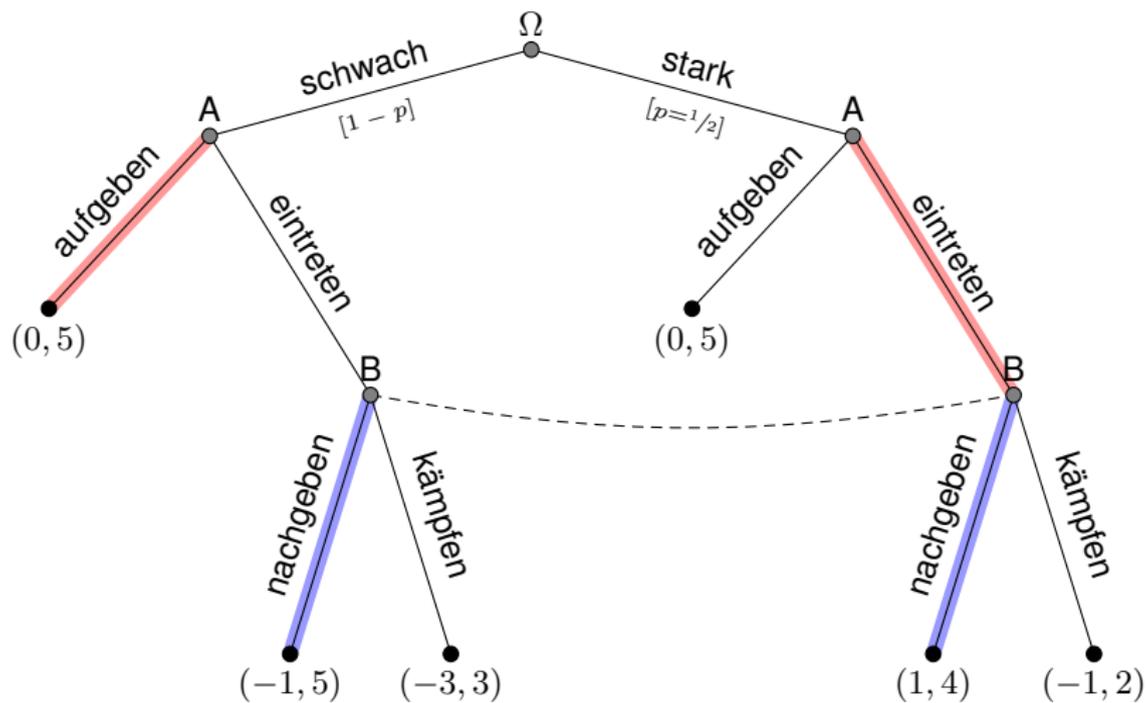
Angenommen, Bob beschließt, jeden Herausforderer zu bekämpfen. Derart eingeschüchtert wird Alice aufgeben, denn ihr Markteintritt führt unweigerlich zu einem für sie verlustreichen Unterbietungswettbewerb. Das ist anschaulich plausibel und auch formal begründbar:

Wir haben also A: schwach  $\mapsto$  aufgeben, stark  $\mapsto$  aufgeben, B: kämpfen. Dieses Strategiebündel ist hier tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht! Weder Alice noch Bob kann sich aus eigener Kraft verbessern. (Übung zur Kontrolle: Schreiben Sie die Spielmatrix aus.)

☹️ Dieses Gleichgewicht ist nicht überzeugend. Bobs Drohung ist unglaubwürdig, denn Kämpfen wird strikt dominiert von Nachgeben! Das Konzept des Nash–Gleichgewichts ist dafür jedoch zu grob und kann dieses Argument in diesem Spiel nicht abbilden.

**Übung:** Es gibt unendliche viele weitere Nash–Gleichgewichte. Finden Sie alle! Welche davon sind glaubwürdig? (J355)

## Markteintritt: glaubwürdiges Nash-Gleichgewicht



## Markteintritt: glaubwürdiges Nash–Gleichgewicht

Angenommen, Bob sieht ein, dass Nachgeben besser ist als Kämpfen. Das ist hier die einzig vernünftige Strategie, und das weiß auch Alice. Derart ermutigt wird eine starke Alice frohgemut in den Markt eintreten, während sich dies für eine schwache Alice weiterhin nicht lohnt.

Wir haben  $A$ : schwach  $\mapsto$  aufgeben, stark  $\mapsto$  eintreten,  $B$ : nachgeben. Auch dieses Strategiebündel ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht! Weder Alice noch Bob kann sich aus eigener Kraft verbessern. (Übung zur Kontrolle: Schreiben Sie die Spielmatrix aus.)

**Aufgabe:** Dieses Gleichgewicht ist überzeugend! Es ist ein perfektes Bayes–Gleichgewicht, und zwar das einzige in diesem Spiel.

**Lösung:** Bob nimmt ein WMaß  $b$  auf seiner Informationsmenge an. Da Nachgeben strikt dominant ist, ist dies immer die beste Antwort. Daraufhin beschließt eine starke Alice einzutreten, eine schwache Alice aufzugeben. Nach der Regel von Bayes hat Bob schließlich nur eine konsistente Überzeugung, nämlich  $b(\text{schwach}) = 0$  und  $b(\text{stark}) = 1$ .

# Markteintritt: kämpfen oder nachgeben?

😊 In diesem einfachen Beispiel sehen wir bereits, wie das Konzept des perfekten Bayes–Gleichgewichts die Rationalität wiederherstellt. Zwar spielt Bobs konkrete Überzeugung  $b$  hier keine größere Rolle, doch sorgt immerhin dafür, dass sich die Dominanz auch auswirkt.

Das ist das allgemeine Prinzip hinter verfeinerten Lösungskonzepten: Wir wollen mögliche *vernünftige* Lösungen möglichst weit eingrenzen. In manchen Fällen, so wie hier, sind Nash–Gleichgewichte zu grob, und geeignete Verfeinerungen erlauben eine genauere Analyse.

**Aufgabe:** Zum lehrreichen Kontrast, bestimmen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte dieses Spiels. Welche davon sind glaubwürdig? Angenommen, Bob spielt zu einem  $p \in [0, 1]$  die gemischte Strategie  $s = (1 - p) \cdot \text{nachgeben} + p \cdot \text{kämpfen}$ . Was ist Alice' beste Antwort?

## Markteintritt: kämpfen oder nachgeben?

**Lösung:** (1) Im Falle  $p < 1/2$  lohnt sich der Eintritt für eine starke Alice. Bob muss daraufhin feststellen, dass Kämpfen strikt dominiert wird von Nachgeben, also muss  $p = 0$  gelten. Wir finden so das Gleichgewicht A: schwach  $\mapsto$  aufgeben, stark  $\mapsto$  eintreten, B: nachgeben.

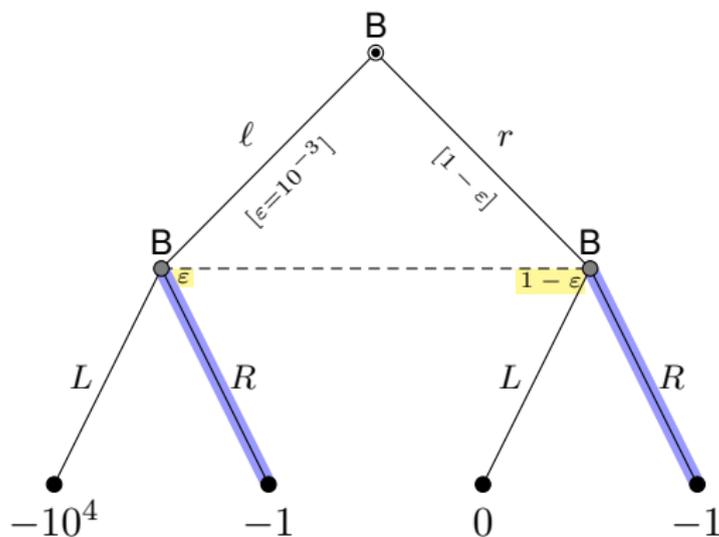
(2) Im Falle  $p \geq 1/2$  lohnt sich der Markteintritt selbst für eine starke Alice nicht. Wir haben also A: schwach  $\mapsto$  aufgeben, stark  $\mapsto$  aufgeben, B:  $s$ .

Das ist ein Nash-Gleichgewicht, wenn auch extrem unglaubwürdig. Bob kann leicht und schadlos behaupten, er würde immer kämpfen, denn dieser Fall tritt nie ein und seine Drohung wird nie aktiv.

Sollte Alice jemals, zum Beispiel durch einen kleinen zufälligen Fehler, in den Markt eintreten, so wird sich Bobs Drohung als hohl erweisen. Diese Illusion fliegt hier auf durch perfekte Bayes-Gleichgewichte.

# Im/perfekte Erinnerung

**Beispiel:** Bob vergisst seinen eigenen Zug:



Das scheint auf den ersten Blick verrückt, kommt aber tatsächlich vor, nicht nur aber auch bei Ihren sprichwörtlich zerstreuten Professor:innen.

Alltagsbeispiele: „Habe ich vorhin das Bügeleisen ausgeschaltet?“  
Oder: „Eben hatte ich noch mein Handy, habe ich es eingesteckt?“

## Im/perfekte Erinnerung

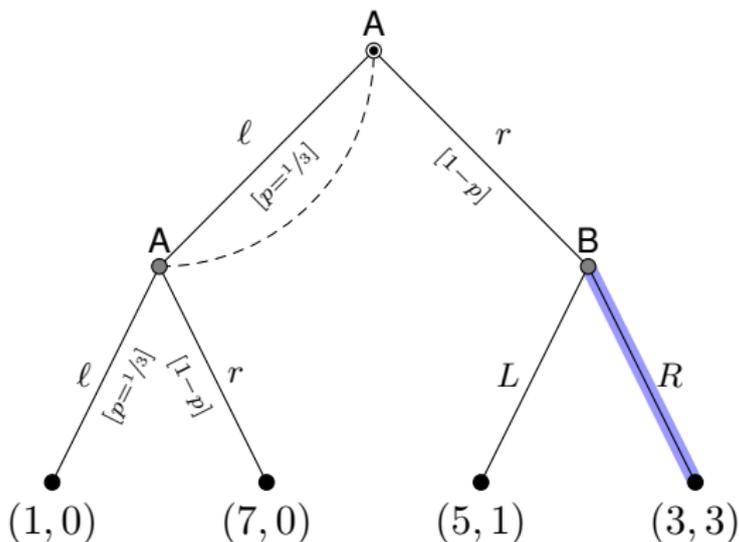
- (1) Hier drängt es sich auf, Bob nicht nur als *einen* Spieler zu betrachten, sondern als zeitliche Abfolge unabhängiger Clone seines Ichs. All seine Clone arbeiten zusammen, sie teilen dieselbe Nutzenfunktion, doch sie sind nicht identisch, insbesondere haben sie nicht dieselbe Information.
- (2) Ebenso realistisch ist die Interpretation als Team: Bob ist nicht eine einzige Person, sondern ein Team von Spieler:innen. Diese teilen sich die Rollen im Spiel und haben daher nicht immer dieselbe Information. Das ist dieselbe Interpretation wie in (1), nur ohne das Wort „Clone“.

Im Beispiel spielt Bob die gemischte Strategie  $s = \varepsilon \cdot \ell + (1 - \varepsilon) \cdot r$ : Mit einer kleinen aber positiven Wkt  $\varepsilon > 0$  verbummelt er sein Handy. Bob in Runde 2 kennt die Wkt  $\varepsilon$ , nicht jedoch die gespielte Aktion  $\ell, r$ . Das Risiko für  $L$  ist zu groß, also spielt Bob  $R$ . *Better safe than sorry*.

😊 Hier ist die Regel von Bayes besonders einfach anzuwenden. Für solch simple Fälle hätten wir vermutlich noch nichts weiter vereinbaren müssen, aber sie illustrieren immerhin das Prinzip und stärken unser Vertrauen in perfekte Bayes–Gleichgewichte.

# Im/perfekte Erinnerung

**Beispiel:** Alice vergisst, ob sie bereits gezogen hat:



Das scheint auf den ersten Blick verrückt, kommt aber tatsächlich vor, nicht nur aber auch bei Ihren sprichwörtlich zerstreuten Professor:innen.

Alltagsbeispiele: „Habe ich Ihnen schon perfekte Erinnerung erklärt?“ oder extremer: „War ich heute schon in der Mensa oder noch nicht?“

## Im/perfekte Erinnerung

⚠ Hier versagt das Konzept der perfekten Bayes–Gleichgewichte! Manche Trajektorien treffen Alice' Informationsmenge mehr als einmal. Unsere vereinfachende Annahme ist demnach hier nicht erfüllt.

Bob muss  $R$  spielen, denn diese Strategie ist für ihn strikt dominant. Spielt Alice  $\ell$ , so erhält sie 1. Spielt Alice hingegen  $r$ , so erhält sie 3. Die höhere Auszahlung 7 kann sie mit *reinen* Strategien nie erreichen! Sie ist daher gezwungen, *gegen sich selbst* gemischt zu spielen.

Alice wählt die gemischte Strategie  $s = p \cdot \ell + (1 - p) \cdot r$  mit  $p \in [0, 1]$ . Wichtig ist, dass dies in jedem Zug unabhängig angewendet wird, genannt *behavioural strategy*. Ihre erwartete Auszahlung ist dann

$$u_1(p) = 1 \cdot p^2 + 7 \cdot p(1 - p) + 3 \cdot (1 - p) = -6p^2 + 4p + 3.$$

Die Nutzenfunktion ist hier nicht affin-linear in  $p$ , sondern quadratisch. Das Maximum wird diesmal nicht im Rand angenommen: Die Ableitung ist  $u'_1(p) = -12p + 4 \stackrel{!}{=} 0$ , das Maximum wird also für  $p = 1/3$  erreicht. Alice' so maximierte Auszahlung ist demnach  $u(1/3) = (32/3, 2)$ .

# Perfekte Erinnerung

Minimalforderung ist meist **perfekte Erinnerung** (*perfect recall*):  
Der Spieler  $i \in I$  erinnert sich jederzeit an seine bisherigen Aktionen.

*Random fun fact:* Der Film *Total Recall* von 1990 mit Arnold Schwarzenegger, Rachel Ticotin und Sharon Stone beruht auf der SciFi-Kurzgeschichte *We Can Remember It for You Wholesale* von Philip K. Dick (1928–1982) und handelt von wahren und falschen Erinnerungen. Er gilt als einer von Schwarzeneggers besten Filmen. Auf *Rotten Tomatoes* erreicht das Original stolze 82%, das Remake von 2012 Colin Farrell, Kate Beckinsale und Jessica Biel dümpelt bei 31%.

Formal: Ein **Spielverlauf** oder eine **Historie**  $h : \alpha \rightarrow x$  ist eine Folge

$$h = ( x_0, \omega_0, a_0; x_1, \omega_1, a_1; \dots; x_{n-1}, \omega_{n-1}, a_{n-1}; x_n )$$

von Zuständen  $x_t \in X$  von  $x_0 = \alpha$  nach  $x_n = x$  sowie Zufallselementen  $\omega_t \in \Omega_{x_t}$  und Aktionen  $a_t \in A_{x_t}$ , wobei  $x_{t+1} = f(x_t, \omega_t, a_t)$  für  $0 \leq t < n$ .

Für Spieler  $i \in I$  ist die **persönliche Historie**  $h^i : \alpha^i \rightarrow x^i$  die Folge

$$h^i = ( x_0^i, a_0^i; x_1^i, a_1^i; \dots; x_{n-1}^i, a_{n-1}^i; x_n^i ).$$

Hierbei ist  $x_t^i = q^i(x_t)$  seine Auskunft / Kenntnis zum Spielstand  $x_t$  und  $a_t^i \in A_{x_t}^i$  seine Aktion. Paare  $(x_t^i, a_t^i)$  mit  $A_{x_t}^i = \{a_t^i\}$  werden gelöscht.

## Perfekte Erinnerung

Diese Formulierung ist wohlüberlegt: Knoten, an denen Spieler  $i$  nichts zu entscheiden hat, treten in seiner persönlichen Historie  $h^i$  nicht auf.

Die Länge  $n$  der Historie  $h: \alpha \rightarrow x$  von  $\alpha \in X_\ell$  in  $x \in X_m$  ist die Anzahl der durchlaufenen Knoten, also die Höhendifferenz  $n = m - \ell$  im Baum.

Aufgrund der Löschung der für ihn inaktiven Knoten kann Spieler  $i$  allein aus  $h^i: \alpha^i \rightarrow x^i$  nicht die Zahl der durchlaufenen Knoten rekonstruieren. Insbesondere hat er somit keinen Zugriff auf die Systemzeit  $m$ .

**Beispiel:** In Anwendungen kann es vorkommen, dass Spieler  $i$  an einer Phase des Spiels nicht beteiligt ist, etwa separaten Verhandlungen der anderen Spieler. Dann sollte  $h^i$  aus dieser Phase keine Information an Spieler  $i$  übertragen, selbst nicht die Länge der Verhandlungen.

Das Grundprinzip ist immer dasselbe und ganz einfach: Die Spielleitung verfügt über vollständige Information. Die Abbildung  $q^i: X^\circ \twoheadrightarrow X^i$  codiert genau die Teilinformation, die sie Spieler  $i$  zur Verfügung stellt. Dies sollte kompatibel sein mit der persönlichen Spielerhistorie  $h^i$ . Genau diese Forderung führt uns nun zur perfekten Erinnerung.

## Definition J3C: perfekte Erinnerung

Sei  $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P}, q)$  ein dynamisches Spiel.

(1) Spieler  $i \in I$  hat **vollständige Information**, wenn seine Auskunft  $q^i : X^\circ \twoheadrightarrow X^i$  injektiv ist. Jede Äquivalenzklasse  $[x]_i$  ist dann einpunktig.

Kanonisch gelingt dies vermöge der identischen Abbildung  $q^i = \text{id}_{X^\circ}$ . In diesem Falle kann die explizite Angabe von  $q^i$  weggelassen werden.

(2) Spieler  $i$  hat **perfekte Erinnerung**, wenn für je zwei  $x, \tilde{x} \in X^\circ$  und Historien  $h : \alpha \rightarrow x$  und  $\tilde{h} : \alpha \rightarrow \tilde{x}$  gilt: Aus  $h^i \neq \tilde{h}^i$  folgt  $q^i(x) \neq q^i(\tilde{x})$ .

Gilt dies für alle  $i \in I$ , so ist  $\Gamma$  ein Spiel mit **perfekter Erinnerung**.

Das ist eine naheliegende Minimalforderung der logischen Konsistenz: Sind die persönlichen Historien  $h^i$  und  $\tilde{h}^i$  verschieden, so kann Spieler  $i$  die Zustände  $x$  und  $\tilde{x}$  unterscheiden bereits anhand der Auskunft  $q^i$ . Bei imperfekter Erinnerung hätten wir die paradoxe Situation, dass Spieler  $i$  seine Kenntnis  $q^i(x)$  über den aktuellen Zustand  $x$  verfeinert, wenn er zusätzlich sein Protokoll  $h^i$  seiner bisherigen Aktionen nutzt.

# Perfekte Erinnerung

Information ist ein wertvolles Gut, und dies gilt auch in der Spieltheorie. Im Sinne einer Koalition liegt es nahe, Teilmengen  $J \subseteq I$  zu betrachten.

**Beispiel:** Beim Skatspiel gilt: Selbst wenn sich die beiden Gegenspieler illegalerweise absprechen, haben sie nicht vollständige Information über den Spielzustand: Aus ihren  $10 + 10$  Karten leiten sie die verbleibenden 12 der insgesamt 32 Karten ab, kennen aber noch nicht zweifelsfrei die Aufteilung dieser Karten: 2 im Skat und 10 auf der Hand des Spielers. Dasselbe gilt, wenn ein Gegenspieler dem Spieler in die Karten schaut.

Analog formulieren wir für  $J \subseteq I$  gemeinsam perfekte Erinnerung. Wir definieren die gemeinsame Historie  $h^J$  für  $J \subseteq I$  genauso wie die persönliche Historie  $h^i$  für einen einzelnen Spieler  $i \in I$ . Die Koalition  $J$  hat gemeinsam perfekte Erinnerung, wenn für je zwei Historien  $h: \alpha \rightarrow x$  und  $\tilde{h}: \alpha \rightarrow \tilde{x}$  gilt: Aus  $h^J \neq \tilde{h}^J$  folgt  $q^J(x) \neq q^J(\tilde{x})$ .

Wir werden meist für jeden Spieler  $i \in I$  perfekte Erinnerung fordern. Hieraus folgt gemeinsam perfekte Erinnerung für alle  $J \subseteq I$ ,  $J \neq \emptyset$ .

## Schneeballduell (Klausur 2020)

**Aufgabe:** Alice und Bob haben je einen Schneeball und stehen anfangs 10 Schritte auseinander. Ihre Trefferwkten sind je nach Entfernung:

Schritte	$s =$	3	4	5	6	7	8	9	10
Alice	$0.90^{s-1} =$	81%	73%	66%	59%	53%	48%	43%	39%
Bob	$0.85^{s-1} =$	72%	61%	52%	44%	38%	32%	27%	23%

Das Duell verläuft wie folgt: Zuerst darf Alice auf Bob werfen: Wenn sie trifft, hat sie gewonnen; wenn sie verfehlt, hat Bob gewonnen. Alternativ kann sie auch nicht werfen, sondern einen Schritt auf Bob zugehen, dann ist Bob an der Reihe. Nun darf Bob auf Alice werfen: Wenn er trifft, hat er gewonnen; wenn er verfehlt, hat Alice gewonnen. Alternativ kann er auch nicht werfen, sondern einen Schritt auf Alice zugehen. So geht es abwechselnd weiter. Bei Abstand 2 endet das Duell unentschieden. Jede Trefferwkt sei unabhängig von allen anderen Ereignissen.

## Schneeballduell (Klausur 2020)

Jeder Spieler will seine Gewinnwahrscheinlichkeit maximieren.

(1) Zeichnen Sie einen Spielbaum  $\Gamma_1$  mit allen relevanten Informationen. Die beiden Aktionen bezeichnen wir mit  $w = \text{werfen}$  und  $g = \text{gehen}$ .

(2) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte  $s \in \text{PNE}(\Gamma_1)$ . Bei optimaler Spielweise, wer gewinnt mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Der Fairness halber bekommt Bob nun zwei Schneebälle zugestanden. Wie zuvor agiert Alice bei geraden Schrittzahlen, Bob bei ungeraden. Verfehlt Bob seinen ersten Wurf, dann bleibt er mit einem Ball am Zug, und das Duell geht weiter wie oben erklärt: Bob darf werfen oder gehen.

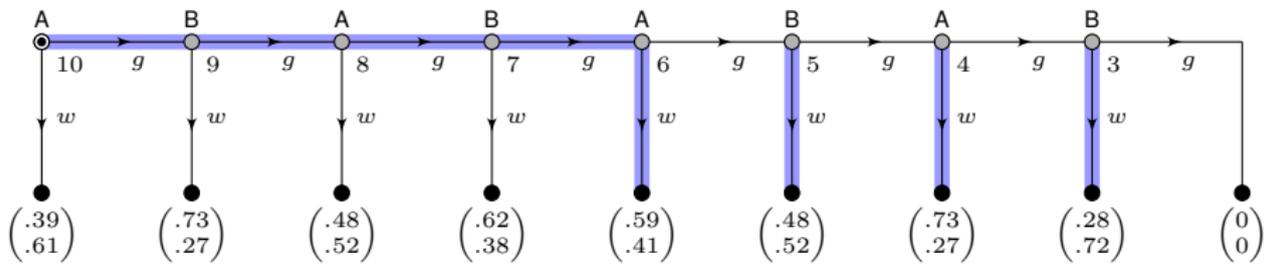
(3) Zeichnen Sie einen Spielbaum  $\Gamma_2$  mit allen relevanten Informationen.

(4) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte  $s \in \text{PNE}(\Gamma_2)$ . Bei optimaler Spielweise, wer gewinnt mit welcher Wahrscheinlichkeit?

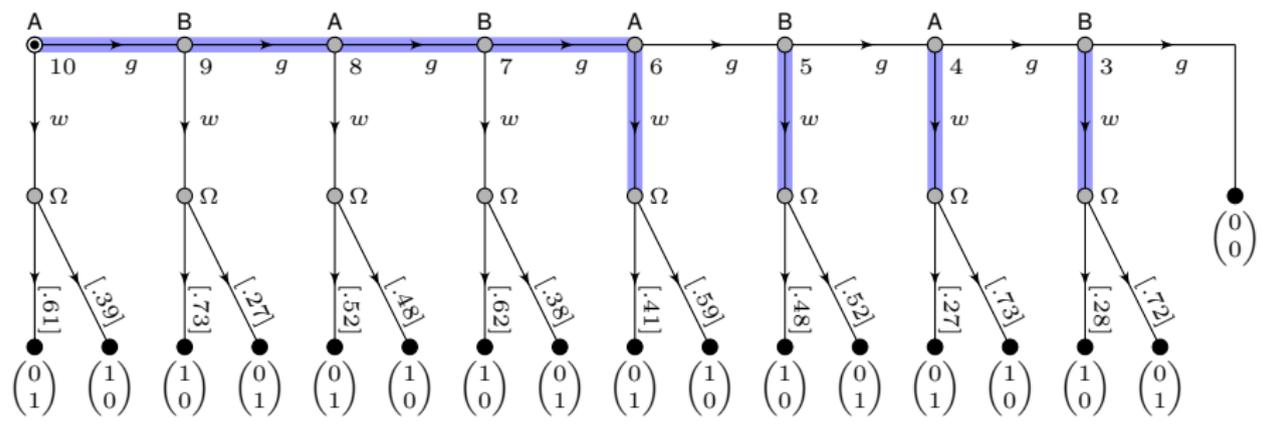
😊 Zur Darstellung (1,3) gibt es mehrere Möglichkeiten: Probieren Sie es aus! Die Lösung (2,4) ist davon unabhängig und hier sogar eindeutig.

# Schneeballduell (Klausur 2020)

## Lösung: (1a) Vereinfachter Spielbaum mit Gewinnwkten:



## (1b) Ausführlicher Spielbaum mit Zufallszügen:



## Schneeballduell (Klausur 2020)

😊 Die Darstellung durch einen Spielbaum lässt noch viele Freiheiten! Das hängt etwas vom persönlichen Geschmack ab, vor allem aber von der Detailtreue und was man als „relevante Informationen“ erachtet.

Variante (1a) zeigt den vereinfachten Spielbaum mit den Gewinnwkten für Alice und Bob, zur Information zudem den Abstand  $s = 10, \dots, 3$ . Dieser Spielbaum erinnert uns an die bekannten Hundertfüßlerspiele.

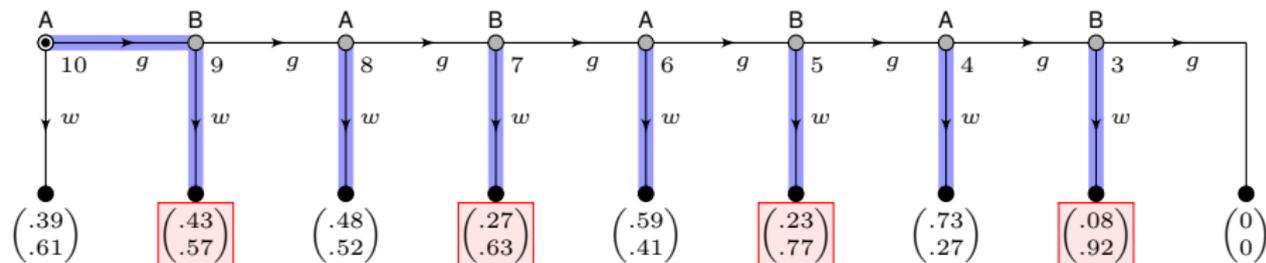
Variante (1b) ist noch ausführlicher: Wir setzen an jedes Bein noch zwei Füße; eine Zufallsverzweigung entscheidet zwischen Alice' Sieg  $\binom{1}{0}$  Bobs Sieg  $\binom{0}{1}$  mit den angegebenen Wkten. Dies haben wir in (1a) gleich durch die Gewinnerwartung zusammengefasst, das ist kürzer.

Wichtig ist: Beide Spielbäume enthalten genug Information, um mögliche Züge und Auszahlungen festzulegen und somit alle teilspielperfekten Gleichgewichte zu bestimmen. Nur darauf kommt es letztlich an.

(2) Wir nutzen den obigen Spielbaum; per Rückwärtsinduktion finden wir genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht, oben blau eingezeichnet. Schlussfolgerung: Alice gewinnt mit Wkt 59%, Bob mit Wkt 41%.

## Schneeballduell (Klausur 2020)

(3a) Bob hat nun zwei Schneebälle. Vereinfachter Spielbaum:



Wir betrachten hier den vereinfachten Spielbaum für Alice' und Bobs *ersten* Wurf. Dieser Baum sieht aus wie zuvor, nur die Auszahlungen / Gewinnwkten ändern sich: Wenn Bob seinen ersten Wurf verfehlt hat, dann kennen wir die Gewinnwkten bereits aus der vorigen Frage (2).

$$0.27 + 0.73 \cdot 0.41 \approx 0.57,$$

$$0.38 + 0.62 \cdot 0.41 \approx 0.63,$$

$$0.52 + 0.48 \cdot 0.52 \approx 0.77,$$

$$0.72 + 0.28 \cdot 0.72 \approx 0.92.$$

(4) Wir nutzen den obigen Spielbaum; per Rückwärtsinduktion finden wir genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht, oben blau eingezeichnet. Diesmal gewinnt Bob mit Wkt 57%, Alice entsprechend mit Wkt 43%.

# Schneeballduell (Klausur 2020)

😊 Die Darstellung durch einen Spielbaum lässt noch viele Freiheiten!  
Wir konstruieren und nutzen zunächst eine vereinfachte Variante.

Der vollständige Spielbaum hat an Stelle der vier roten Boxen jeweils eine Zufallsverzweigung, „verfehlt“ oder „getroffen“, und an ersterem hängt der entsprechende Teilbaum aus der vorigen Frage (1).

Das ist möglich, aber unnötig länglich, insbesondere in einer Klausur!  
Daher arbeiten wir erst mit obiger Vereinfachung, sie bietet sich an.

Ein guter Kompromiss ist der folgende Spielgraph (kein Baum), der die beiden Bäume zu erstem und zweitem Wurf leiterförmig verbindet.  
Dieses Recycling hält den Graphen klein, bequem und handlich.

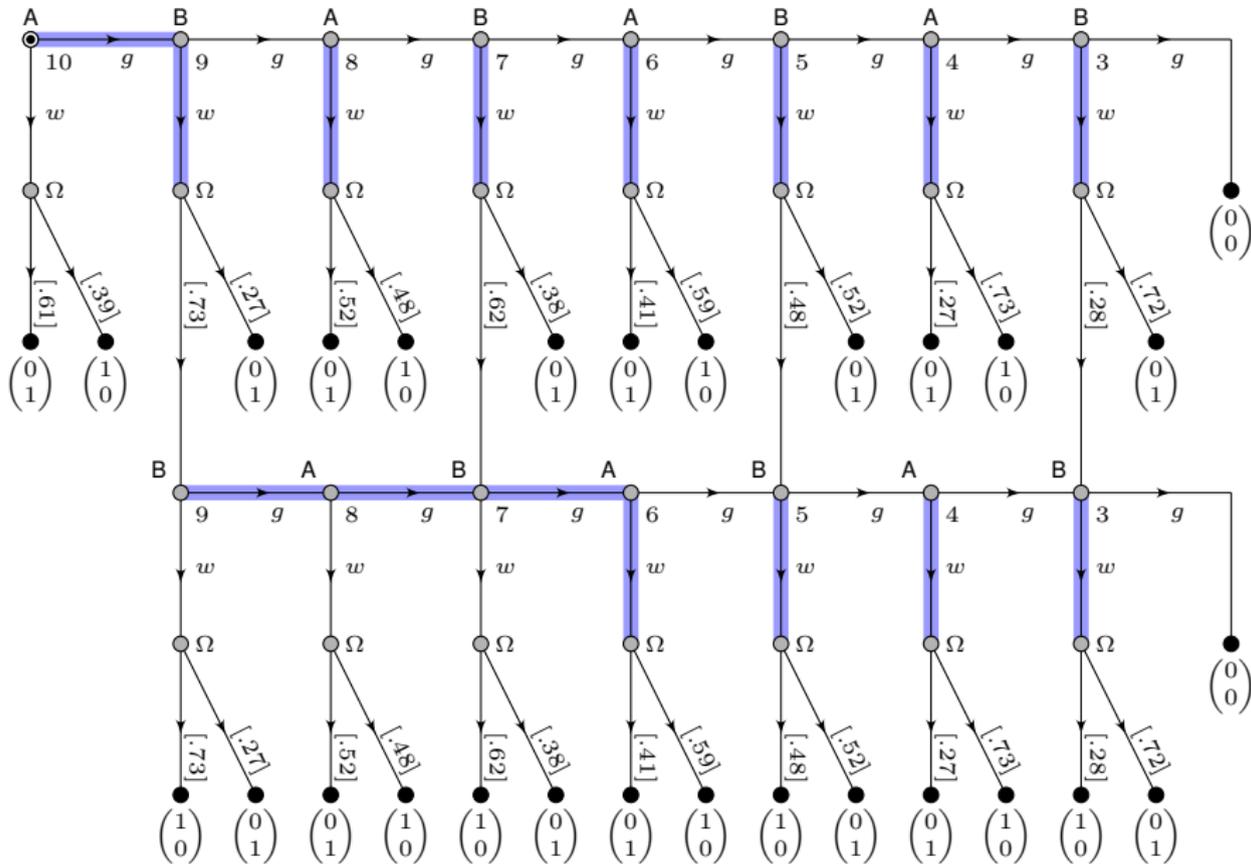
😊 Die Darstellung als Graph codiert alle relevanten Informationen.  
Damit wird die Lösung recht einfach, übersichtlich und strukturiert.

😊 Per Rückwärtsinduktion finden wir das zuvor erklärte teilspielperfekte Gleichgewicht; dieses habe ich hier nochmal vollständig eingezeichnet.

😊 Der Verlauf des Duells ist erstaunlich und keineswegs intuitiv.

## Schneeballduell (Klausur 2020)

(3b) Ausführlicher Spielgraph mit Zufallszügen:



## Schneeballduell (Klausur 2020)

Rückwärtsinduktion ist in vielen strategischen Situationen erfolgreich. Sie ist ein sehr einfaches und natürliches Konzept, die systematische Lösung wird effizient strukturiert und im Idealfall sogar trivialisiert.

Ich erinnere daher nochmals an das Eingangszitat:

*Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!*

[Was immer du tust, handle klug und bedenke das Ende!]

Der Satz J1D von Zermelo formalisiert dies für dynamische Spiele in Form eines Spielbaums oder allgemeiner eines Spielgraphen.

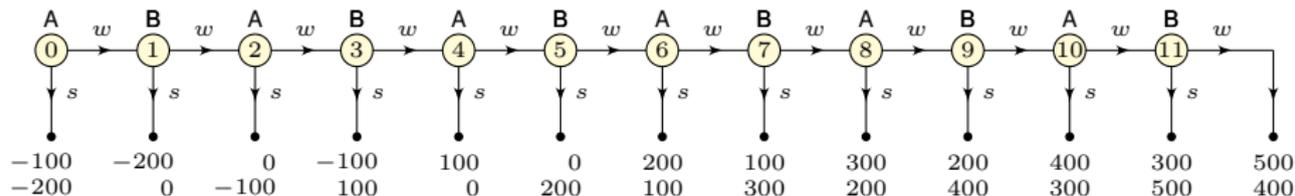
Spielbäume sind manchmal bequem, leider oft umfangreich: Selbst in einem einfachen Spiel wie unserem Schneeballduell wird der vollständige Baum schnell zu groß und unübersichtlich.

Wie wir gesehen haben, lohnen sich daher rekursive Platzhalter und insbesondere auch Graphen zur konzisen Beschreibung.

😊 Abstraktion hilft, sie strukturiert und vereinfacht. Mathe macht Ah!

Das berühmte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Alice und Bob spielen folgendes Hundertfüßlerspiel / *centipede game*.



Beide Spieler ziehen abwechselnd entweder  $s = \text{stop}$  oder  $w = \text{weiter}$ . Die Auszahlungen sind wie angegeben, sie gehen für Alice abwechselnd 100 runter und 200 rauf, für Bob abwechselnd 200 rauf und 100 runter. Langfristig steigen die Auszahlungen somit für beide Spieler linear an, beide haben also Interesse daran, möglichst lange *weiter* zu spielen.

Die Rückwärtsinduktion enthüllt jedoch eine entgegengesetzte Lösung: In jedem Zustand 11, 10, ..., 0 ist es strikt dominant, *stop* zu spielen. Die theoretische Lösung ist simpel, setzt jedoch Rationalität der Stufe 1, 2, ..., 12 voraus (A2A). Diese starke Annahme ist in realen Situationen aber nur selten erfüllt. Experimente belegen eine deutliche Diskrepanz zwischen theoretischer Vorhersage und beobachtetem Verhalten.

## Das berühmte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Das Spiel provoziert den Konflikt zwischen kurzfristigem Egoismus und langfristiger Kooperation, zwischen Gewinnmitnahme und Investition. Das Hundertfüßlerspiel ist ein berühmtes Paradoxon der Spieltheorie. Es ähnelt dem Gefangenendilemma, ebenso endlich wiederholt.

Eingeführt wurde dieses Spiel 1981 von Robert W. Rosenthal. Die ursprüngliche Version bestand aus 100 Zügen, daher der Name. Es wurde vielfach experimentell untersucht und belegt das Paradox der Ir/Rationalität: irrationale Spieler können erfolgreicher sein als rationale.

Die meisten Versuchsteilnehmer spielen *stop* nicht gleich am Anfang, wie es streng rational wäre, sondern „gefühlte irgendwo in der Mitte“. Eine mögliche Erklärung ist die mangelnde Kapazität oder der Unwille, die nötige Rückwärtsinduktion vollständig und fehlerfrei auszuführen.

Eine andere Erklärung ist die altruistisch-gemeinschaftliche Sichtweise: Diese setzt das Ziel im Spielbaum ganz rechts, Rationalität hingegen ganz links, eine geeignete Mischung führt zu „einer goldenen Mitte“. Leider ist das allzu vage, schwer quantifizierbar und kaum vorhersagbar.

## Das berühmte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Im **Casino Royal** (17.06.2022) konnten wir dieses berühmt-berüchtigte Experiment selbst erleben. Am Brückentag nach Fronleichnam kamen diesmal nur sechs Teilnehmer:innen, alles erfahrene Spieler:innen. Die Anzahl erwies sich als günstig für zwei Teams à drei Personen.

**Vorgespräch.** Vor der Aufteilung in Teams drängen Teilnehmer:innen auf eine Aussprache. Sie wissen aus ihrer bisherigen Casino-Erfahrung, dass dieser Zeitpunkt wichtig sein kann und daher genutzt werden sollte.

Ohne Mühe analysieren die Anwesenden das Hundertfüßlerspiel und der Konflikt wird klar: Alice und Bob wollen möglichst lange kooperieren, doch Rückwärtsinduktion legt einen möglichst frühen Abbruch nahe.

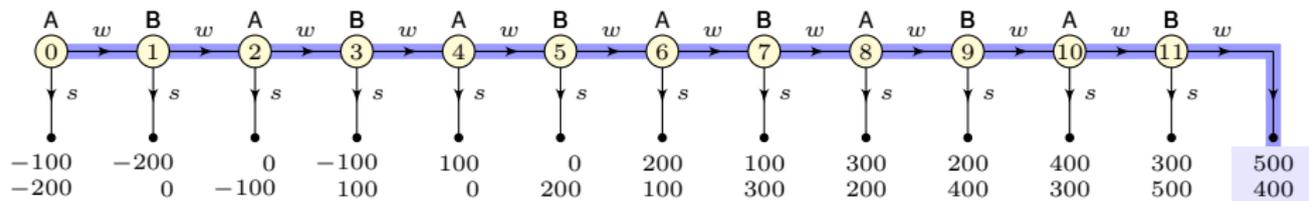
Sofort entsteht der Vorschlag, beide Auszahlungen am Ende zu teilen, um Kooperation zu fördern (Kartell, Nebenzahlungen, Bestechung). Mangels bindender Absprachen wird dieser Vorschlag aufgegeben.

Externalitäten werden benannt, die Spielbank ist der dritte Spieler. Die Verluste am Anfang werden als besonders unangenehm empfunden, alle Teilnehmer:innen möchten mindestens der Verlustzone entkommen.

# Das berühmte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

**Erstes Spiel.** Team Alice und Team Bob werden zufällig ausgelost. Beide versichern sich gegenseitig Kooperation. Zwar wissen alle, dass das Ende wohl nicht ganz erreicht wird, aber alle wollen dem negativen Anfang entkommen und hoffen auf ein Wunder „irgendwo in der Mitte“.

Die Teams werden abwechselnd nach ihrem nächsten Zug gefragt. Die interne Absprache wird diesmal kaum genutzt, meist fungiert ein Teammitglied als Sprecher:in und antwortet beherzt „Wir spielen weiter!“ Das Ergebnis ist für alle Beteiligten überraschend:

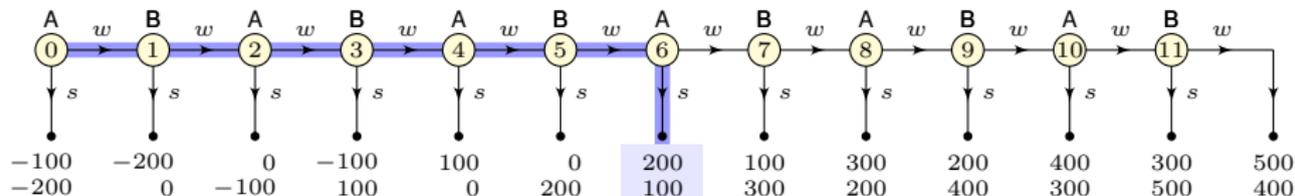


😊 Ein sensationeller Erfolg: Gemeinsam erreichen beide Teams die maximale Auszahlung, wider ihres besseren Wissens und entgegen jeder Rationalität. Ein Hoch auf das Paradox der Ir/Rationalität! Die Bank zahlt. . . und schmiedet Pläne für die nächsten Spiele.

Das berühmte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

**Zweites Spiel.** Team Alice und Team Bob werden zufällig ausgelost.

Die Teams werden abwechselnd nach ihrem nächsten Zug gefragt, doch diesmal wird unter den drei Teamer:innen geheim abgestimmt: Zunge rausstrecken heißt Stopp, die Hände dienen als Sichtschutz. Nur die Spielleitung sieht die Abstimmung und nennt das Ergebnis.

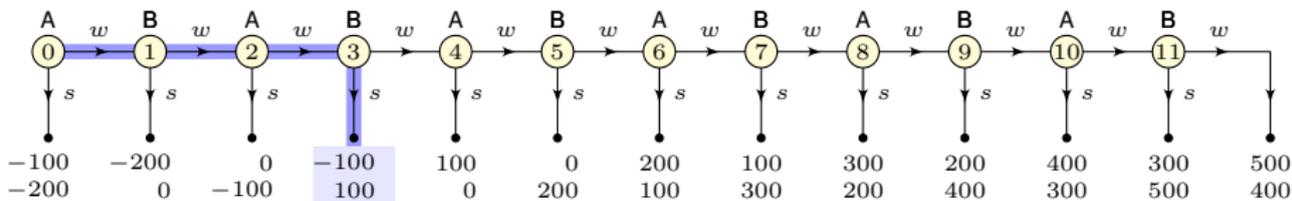


😊 Mit wachsender Erfahrung und frei von sozialem Druck verschiebt sich der Spielverlauf deutlich. Die anonyme Abstimmung unterbindet moralische Einflussnahme des Gegners oder der Teamkolleg:innen.

Die Zahl drei erweist sich hier als günstig. Jede:r kann behaupten, weiterhin für Kooperation gestimmt zu haben und hat so eine plausible Erklärung bzw. Ausrede für das beobachtete egoistische Verhalten.

Das berühmte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

**Drittes Spiel.** Die beiden Teams werden diesmal nur vertauscht.  
Die Teams stimmen wieder geheim ab, wie zuvor im zweiten Spiel.



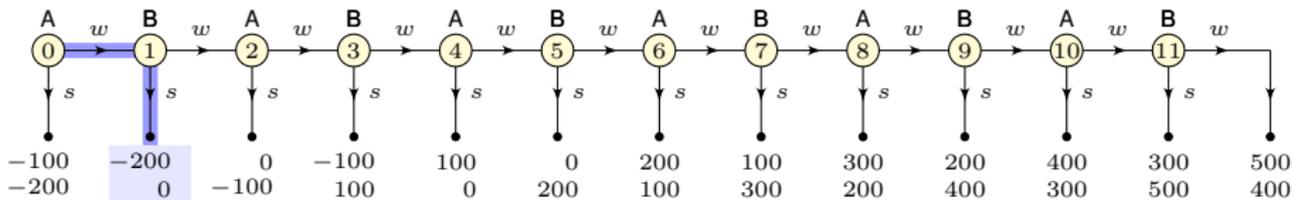
😊 Der vorige Spielverlauf bietet wichtige Erfahrung und zeigt Wirkung. Die Teilnehmer:innen sind weniger naiv-gutgläubig und vermuten dies auch von ihren Mitspieler:innen. Die Rationalität wächst, das Vertrauen bröckelt, die blauäugige Hoffnung auf ein „Wunder“ schwindet schnell.

Bemerkenswert ist, dass wir im ersten Spiel mit maximaler Irrationalität begonnen haben, doch wenige Iterationen genügen, um eindrucksvolle Erfahrungen bereitzustellen und das Verhalten grundlegend zu ändern.

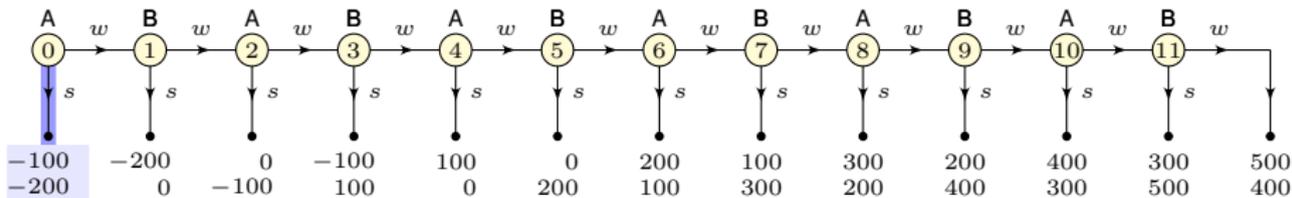
In den nächsten drei Spielen wird jeweils geheim per Zettel abgestimmt, dabei zählt Median / Minimum / Maximum. Dies ist vor der Spiel bekannt.

Das berühmte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

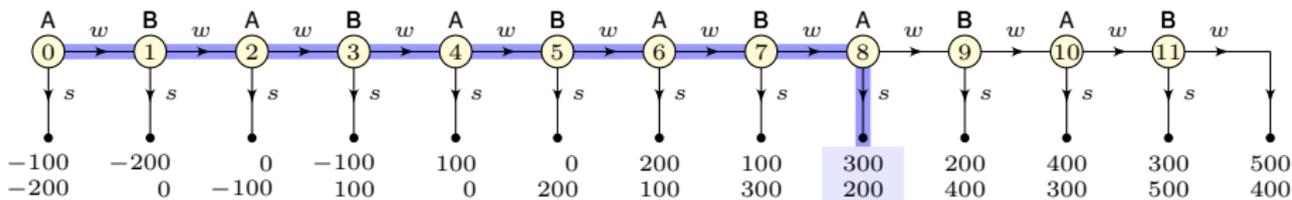
**Viertes Spiel.** Median von Alice (2, 6, 10) versus Bob (1, 1, 3).



**Fünftes Spiel.** Minimum von Alice (0, 0, 10) versus Bob (1, 1, 3).

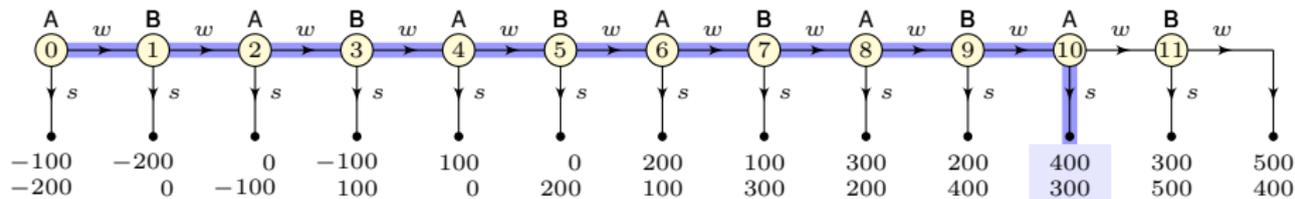


**Sechstes Spiel.** Maximum von Alice (0, 0, 8) versus Bob (1, 11, 13).



Das berühmte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

**Siebtes Spiel.** In jeder Runde wird zufällig ausgelost, wer Alice/Bob spielt, alle anderen warten passiv als Bob/Alice. Wahl und Entscheidung sind öffentlich, dadurch entsteht erneut ein gewisser sozialer Druck.



😊 Die Versuchsanordnung hat erheblichen Einfluss auf das Ergebnis. Der individuelle Kompromiss zwischen Egoismus und Kooperation hängt von vielen Einflüssen ab, insbesondere von Öffentlichkeit und sozialem Druck, von moralischen Konventionen versus garantierter Anonymität.

**Datengold.** Insbesondere geheime Abstimmungen per Zettel liefern alle relevanten Daten, hier auf einer „Vertrauensskala“ von 0 bis  $n = 12$ . Der Verlauf des Spiels kann daraus zufällig ausgelost werden. Auf einem Computer kann jeder gegen jeden spielen.