

Kapitel I

Spiele mit unvollständiger Information und Bayes–Gleichgewichte nach John Harsanyi

*So that would be what you call bluffing?
— You know the term. Then you may have also heard that
in poker you don't play your hand,
you play the man across from you.*

Vesper Lynd und James Bond im Film *Casino Royale* (2006)

Inhalt dieses Kapitels I

- 1 Zufall und unvollständige Information
 - Vier Grundtypen von Spielen: Dynamik und Information
 - Ist Un/Wissen schädlich oder hilfreich?
 - Unwissen kann schaden. Wissen leider auch.
- 2 Bayesianische Spiele nach John Harsanyi
 - Bayes–Spiele und Gleichgewichte
 - Bedingte Wahrscheinlichkeitsräume
 - Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker
- 3 Korrelierte Gleichgewichte nach Robert Aumann
 - Erste Beispiele zu korrelierten Strategien
 - Spieler aller Länder, korreliert euch!
 - Universeller Signalgeber

Bei Spielen ist **Information** wesentlich: Wer weiß wann was?

- Perfekte Information [*perfect information*]:
Alle Züge der Spieler sind allgemein sichtbar.
- Imperfekte Information [*imperfect information*]:
Manche Züge sind verdeckt oder gleichzeitig.

Wir betrachten nun eine wichtige Erweiterung:

- Vollständige Information [*complete information*]:
Alle Strategien und alle Auszahlungen sind bekannt.
- Unvollständige Information [*incomplete information*]:
Manche dieser Daten sind nur private Informationen.

Meist haben die Spieler immerhin statistische Information übereinander:
Wir sprechen von einem **Bayesianischen Spiel** oder **Bayes–Spiel**.

 Tadelis: *Game Theory* (2013), Chapter 12: Bayesian Games.
Osborne: *Introduction to Game Theory* (2009), Chapter 9.

Bisher haben wir Spiele mit vollständiger Information betrachtet:

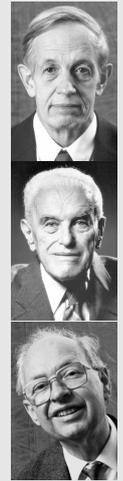
$u: \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$ ist allgemein bekannt [*common knowledge*].
Jeder Spieler kennt die Mitspieler $i \in I$, alle möglichen Aktionen $s_i \in S_i$
und die zugehörigen Auszahlungen $u_i(s)$. Alles ist allgemein bekannt.

Als Lösungskonzepte kennen wir vor allem Nash–Gleichgewichte,
stärker noch Gleichgewichte in dominanten Strategien, daneben
iterierte Eliminierung von strikt / schwach dominierten Strategien.
Hierzu gibt es zahlreiche verfeinerte Lösungskonzepte.

Bei manchen Spielen ist vollständige Information nicht realistisch.
Zum Beispiel beim Preiswettbewerb zweier Firmen kennt jede Firma
vermutlich ihre eigenen Daten, aber nicht die des Kontrahenten.
Sie kann und wird jedoch (Wahrscheinlichkeits-)Annahmen treffen.

In diesem Kapitel erklären wir die Harsanyi–Transformation:
Wir transformieren ein Spiel mit unvollständiger Informationen
in ein Spiel mit vollständiger (aber imperfekter) Informationen.
Darauf können wir die obigen Lösungskonzepte anwenden.

Info Zeit	vollständige Info, deterministisch	unvollständige Info, probabilistisch
statisch, Normalform	Nash, $NE \supseteq DNE$	Harsanyi, $BE \supseteq DBE$
dynamisch, Extensivform	Selten, $PNE \supseteq PDNE$	Selten, $PBE \supseteq PDBE$



Nash, Harsanyi und Selten erhielten 1994 den Wirtschafts-Nobelpreis für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen.

Das Kürzel NE steht für Nash–Gleichgewicht / *Nash equilibrium*, entsprechend BE für Bayes–Gleichgewicht / *Bayes equilibrium*. Das Präfix D steht für (schwach) dominant / (*weakly*) *dominant*, und P steht abkürzend für (teilspiel-)perfekt / (*subgame*) *perfect*.

In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Informationen von zentraler Bedeutung. Dazu liefert diese Tabelle einen ersten ordnenden Überblick

Bei vielen Spielen ist zudem der zeitliche Ablauf eine wichtige Struktur. Wir haben uns bislang auf statische / strategische Spiele konzentriert. In den folgenden Kapiteln entwickeln wir mathematische Werkzeuge für dynamische / sequentielle / wiederholte Spiele (in extensiver Form).

In diesem Kapitel verbinden wir statische Spiele mit Zufallszügen. Damit wird die mathematisch präzise Beschreibung unserer Spiele und möglicher Lösungen zwar etwas komplexer, dafür aber auch wesentlich flexibler, realistischer und allgemeiner anwendbar.

Jeder Spieler i nimmt hierzu eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i an und optimiert seine erwartete Auszahlung. Durch diese Harsanyi–Transformation überführen wir jedes statische Spiel mit unvollständiger Information in ein strategisches Spiel mit vollständiger Information.

Aufgabe: Geben Sie möglichst vielfältige Illustrationen für Spiele mit im/perfekter und un/vollständiger Information in allen Kombinationen.

Auszahlungen / \n Aktionen	vollständige Info	unvollständige Info
perfekte Info	(1) kombinatorische Spiele, z.B. Schach	(2) Schach mit verdeckten Zielen
imperfekte Info	(3) strategische Spiele in Normalform	(4) Simultan-Poker in Normalform

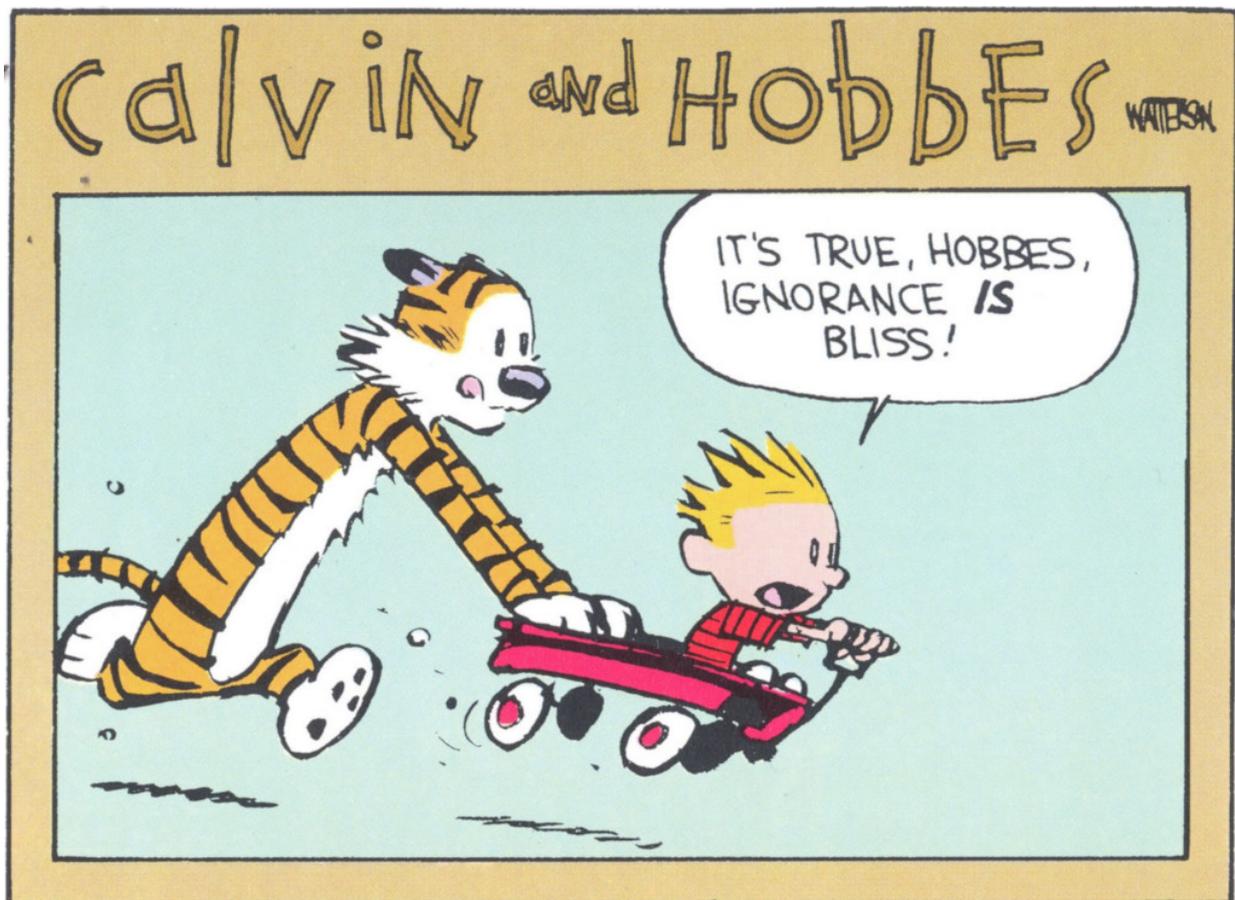
(1) Bei kombinatorischen Spielen wie Schach oder Go (Kapitel C) gibt es keine Zufallszüge und auch keine verdeckten Züge. Alle Strategien und alle Auszahlungen sind bekannt.

(2) Sie spielen Schach. Ihr Gegner bekommt vor dem Spiel (zufällig ausgewählt und verdeckt) folgenden Geheimauftrag: (a) Gegen Sie gewinnen oder (b) Ihre Königin erobern. Alle Züge sind sichtbar, aber seine Zielsetzung / Auszahlung ist Ihnen unbekannt.

(3) In strategischen Spielen in Normalform ziehen Spieler gleichzeitig. All ihre Strategien und Auszahlungen sind bekannt, die Züge nicht.

(4) Beim Poker sind die Karten verdeckt, es herrscht also unvollständige Information. Werden zudem Züge verdeckt oder gleichzeitig ausgeführt, so herrscht zudem imperfekte Information.

Wie ordnen Sie folgende Spiele ein? Nim, Tic-Tac-Toe, Backgammon, Schiffe versenken, Monopoly, Schere-Stein-Papier, ...

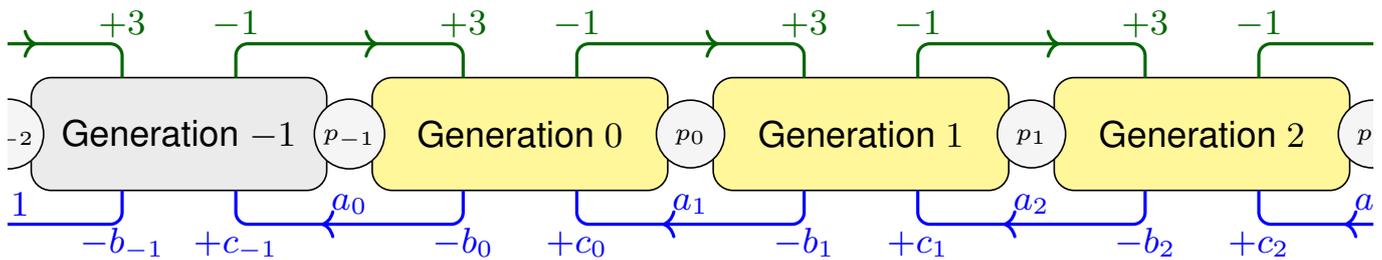


Im Folgenden untersuchen wir Spiele mit unvollständiger Information. Zuvor möchte ich kurz für Unwissen werben. Es ist nicht immer hilfreich, aber manchmal eben doch. In einer Klausur ist Wissen im Allgemeinen gut und nützlich, aber zuviel kann manchmal leider auch schaden, wenn man es zu kompliziert macht und nicht das Offensichtliche antwortet.

Calvin und Hobbes ist ein Comicstrip von Bill Watterson aus den Jahren 1985–1995. Calvin ist ein sechsjähriger Junge. In Calvins Phantasie ist sein Stofftiger Hobbes lebendig, kann sprechen und handelt selbständig. Gemeinsam unternehmen Calvin und Hobbes waghalsige Abenteuer und führen dabei philosophische Zwiegespräche, so wie hier über die Vorzüge der Unwissenheit. Darum geht es in diesem Kapitel.

Auch die Bibel setzt sich mit kindlicher Ehrfurcht, Respekt und Vertrauen auseinander, die Interpretationen sind allerdings recht weit dehnbar: „Wahrlich, ich sage euch: Wenn ihr nicht umkehrt und werdet wie die Kinder, so werdet ihr nicht ins Himmelreich kommen.“ (Mt 18:3)
Zum Thema *Spielen* passt das ganz wunderbar.

In vielen Anwendungen ist mehr Wissen besser als weniger Wissen.
In manchen Situationen kann Unwissenheit / Unsicherheit allen helfen!



Zu $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ betrachten wir folgenden Strategievektor $s^n \in S$:

$$\begin{aligned}
 i &= 0, 1, \dots, n, \dots \\
 s^n &= (E, E, \dots, E, E, A, N, N, N, \dots) \\
 a^n &= (0, 0, \dots, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)
 \end{aligned}$$

Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \geq n$, so ist s^n tatsächlich ein Nash-Gleichgewicht.

Beispiel $b_i = 1$ und $c_i = 2$ sowie $p_i = 2/3$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir erwarten nur drei Generationen. Dennoch lohnt immer noch der Generationenvertrag!

Jede Generation muss ausreichend sicher an den Fortbestand glauben; dann und nur dann sind nicht-triviale Gleichgewichte überhaupt möglich.

Der Fall von $n < \infty$ Generationen entspricht einem Ponzi-Betrug: Wenn alle die Zahl n kennen, kommt kein Gleichgewicht zustande, denn dies ist nicht rational vereinbar mit dem Wissen.

Dieses Beispiel und die genaueren Untersuchungen des letzten Kapitels sind mathematisch und gesellschaftlich relevant. Sie illustrieren einen einfachen aber zentralen Aspekt zum Thema Unsicherheit.

Übung: Wenn Sie Knobelaufgaben mögen:

- (1) Was passiert, wenn jede Generation weiß, dass es nur endlich viele Generationen gibt, aber keine kennt die genaue Zahl?
- (2) Was passiert, wenn jede Generation weiß, dass es nur endlich viele Generationen gibt, aber nur die letzte kennt die genaue Zahl?
- (3) Was passiert, wenn jede Generation weiß, dass es nur endlich viele Generationen gibt, aber nur die vorletzte kennt die genaue Zahl?

Das allgemeine Gefangenendilemma, affin normiert:

	B	0	1
A		0	β_2
0	0	α_1	1
1	β_1	1	1

mit Konstanten

$$\alpha_1 > 1 > 0 > \beta_1$$

$$\alpha_2 > 1 > 0 > \beta_2$$

etwa $\alpha_1 = \alpha_2 = 3/2$

und $\beta_1 = \beta_2 = -1/2$

Aufgabe: Vor dem Spiel vereinbaren Alice und Bob zu kooperieren und (1, 1) zu spielen, und im Betrugsfall dauerhaft auf (0, 0) zurückzufallen.

Ist das rational? (1) Bei einmaligem Spiel? (2) Bei zweimaligem Spiel?

Bei n -maligem Spiel, wobei die Anzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beiden bekannt ist?

Die Spielleiterin legt anfangs die Anzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ der Spielrunden fest, etwa geometrisch verteilt gemäß $P_i(n) = \delta_i^{n-1}(1 - \delta_i)$ mit $\delta_i \in [0, 1[$.

Sie verrät n an (3) niemanden, (4) Alice allein, (5) Bob allein, (6) beide.

Lösung: (1) Rational ist hier das (einzige) Nash-Gleichgewicht (0, 0). Alice und Bob mögen sich hoch und heilig Kooperation (1, 1) zusichern, doch die (profitablere!) Kooperation wird durch das Spiel nicht gestützt, im Gegenteil: Zur individuellen Nutzenmaximierung wird jeder 0 spielen.

⚠ Die folgende Diskussion ist vorläufig noch verbal und informell. In späteren Kapiteln entwickeln wir die mathematischen Werkzeuge für sequentielle / wiederholte Spiele wie dieses. Dies dient als Ausblick:

(2) Per Rückwärtsinduktion gilt: In der letzten Runde n werden beide 0 spielen, wie in (1) erklärt. Somit werden beide auch in der vorletzten Runde 0 spielen, usw. Kooperation ist hier somit rational unmöglich.

(3) Weder Alice noch Bob kennt n . Ihre (subjektive) Gewinnerwartung bei Kooperation ist die erwartete Rundenzahl, also jeweils $1/(1 - \delta_i)$. Betrug bringt kurzfristig den Gewinn α_i , danach aber nichts mehr. Im Falle $1/(1 - \delta_i) > \alpha_i$ hat Spieler i Interesse an der Kooperation.

😊 Gilt $1/(1 - \delta_i) > \alpha_i$ für beide Spieler, so untersuchen wir später Kooperation und Kontrolle als teilspielperfektes Gleichgewicht.

Wir diskutieren nur (4); mit vertauschten Rollen verläuft (5) genauso. Wir nehmen an, Alice kennt Bobs Überzeugung P_2 , also $\delta_2 \in [0, 1[$.

(4a) Angenommen, Alice kennt die Rundenzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, doch Bob weiß davon nichts, er weiß nicht einmal, dass Alice die Rundenzahl kennt.

Da Bob sich in Fall (3) wähnt, erwartet er $1/(1 - \delta_2)$ bei Kooperation. Im Falle $1/(1 - \delta_2) < \alpha_2$ wird Bob versuchen, Alice zu betrügen. Alice sieht das voraus, also spielen beide von Anfang an $(0, 0)$.

Im Falle $1/(1 - \delta_2) > \alpha_2$ wird Bob kooperieren. Alice weiß dies und spielt $1, 1, \dots, 1, 0$. Auszahlungen sind also $u = (n - 1 + \alpha_1, n - 1 + \beta_2)$.

(4b) Angenommen, Bob weiß, dass Alice die Rundenzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ kennt. Bei Kooperation erhält er $n - 1 + \beta_2$, erwartet also $1/(1 - \delta_2) - 1 + \beta_2$.

Im Falle $1/(1 - \delta_2) - 1 + \beta_2 < \alpha_2$ wird Bob versuchen, Alice zu betrügen. Alice sieht das voraus, also spielen beide von Anfang an $(0, 0)$.

Im Falle $1/(1 - \delta_2) - 1 + \beta_2 > \alpha_2$ wird Bob kooperieren. Alice weiß dies und spielt $1, 1, \dots, 1, 0$. Auszahlungen sind $u = (n - 1 + \alpha_1, n - 1 + \beta_2)$.

(6) Beide Spieler kennen n . Aber weiß Alice, dass Bob n kennt? Und weiß Bob, dass Alice n kennt? Wir unterscheiden mehrere Fälle:

(6a) Beide kennen n und wissen, dass der andere auch n kennt. Dieses Spiel unterscheidet sich nicht wesentlich von Fall (2): Kooperation ist hier somit rational unmöglich.

 Ob und wem die Spielleiterin die Zahl n verrät, sollte durch Los entschieden werden. Dann können die Spieler hierüber optimieren. Eventuell benötigen die Spieler nicht nur Annahmen P_i über n , sondern zudem Annahmen über die Annahmen des Gegners, etc.

Übung: Diskutieren Sie alle verbleibenden, kniffligen Fälle.

Hierzu müssen Sie evtl. die Daten noch weiter präzisieren.

Sie werden merken, dass Sie über die verbale Beschreibung hinaus eine präzise Formalisierung für eine detaillierte Analyse benötigen. In späteren Kapiteln entwickeln wir die mathematischen Werkzeuge.

Im **Casino Royal** (13.12.2019) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere rechnerische Lösung dieser Spielvarianten praktisch zu testen. Das kostet etwas Zeit, liefert aber eindruckliches Anschauungsmaterial. Genau zu diesem Zweck haben wir das Casino Royal eingerichtet.

		Bob	
		0	1
Alice	0	0	-1
	1	-1	2

Ich empfehle nachdrücklich praktische **Experimente zur Spieltheorie**, denn Theorie und Praxis können weit auseinanderklaffen, siehe A225. Wer das erlebt hat, sieht diesen Themenkomplex mit anderen Augen. Ich halte den konkreten Vergleich für lehrreich, ehrlich und heilsam.

Ich schreibe hier mein Gedächtnisprotokoll der erhellenden Ereignisse. Acht Teilnehmer spielten in Vierergruppen: Team Alice und Team Bob. Ich habe Fragen geklärt, die Verhandlungen moderiert und kommentiert, von zurückhaltend beobachtend bis provokativ als Stimme der Vernunft.

Jede Vierergruppe stimmte sich vertraulich innerhalb ihres Teams ab. Ebenso konnten die beiden Teams in Verhandlungen treten, um vor dem Spiel ein gemeinsames Vorgehen auszuhandeln. Das war jedoch nicht bindend: Im eigentlichen Spiel handelt jeder, wie sie/er es für richtig hält.

Anfangs bat ich alle Teilnehmer: „Versuchen Sie, rationale Lösungen zu finden, überzeugend zu erklären und als Plan auszuhandeln. Appellieren Sie lieber an den Verstand als die Moral. Seien Sie nicht nachtragend: Neues Spiel, neues Glück. *What happens in Vegas, stays in Vegas.*“

Zudem wollte ich die Spiele separieren und nachtragenden Groll mildern durch „Blitzdingsen“ (frei nach *Men in Black*): Die Teams wurden bei Bedarf neu gemischt, also eine neue Alice und ein neuer Bob erschaffen, so dass Erinnerungen an vergangene Spiele weniger Gewicht hatten.

(1) Beim Spiel mit **einer Runde** geschah, was geschehen musste: Beide versprachen sich Kooperation, hielten sich aber nicht daran.

(2) Beim Spiel mit genau **zwei Runden** geschah exakt dasselbe. Alle Spieler waren erstaunlich gelassen und wenig nachtragend. Allein die Auszahlungen blieben traurig: Nullkommanichts für jeden. Die Erweiterung auf drei Runden wurde dankend abgelehnt.

Im Vergleich zu vorigen Spielexperimenten ging es recht rational und abgeklärt zu. Das lag vielleicht an meiner Vorrede, sicher auch an der Gruppenstruktur: Die Abstimmung in jedem Team fördert vermutlich sachliche, vorausschauende Argumente: Rationalität erster Stufe! (Existiert doch Schwarmintelligenz? Zumindest in kleinen Teams?)

Förderlich ist auch, dass man das gegnerische Team für rational hält, und so seine eigenen Aktionen gut darauf abstimmen muss und kann: Rationalität zweiter Stufe! Genaue Gründe sind schwer nachzuweisen, doch es lohnt, darüber nachzudenken und Erfahrungen zu sammeln. (Oft genug passiert auch unvorhersehbares und schwer erklärliches.)

Bindende Vereinbarungen / *commitment*: Jedes Team zeigt seine Aktion 0/1 durch eine Karte, die nur die Spielleitung sehen kann. Um sich aus dem frustrierenden Gefangenendilemma zu befreien, schlug ein Teilnehmer vor Spielbeginn vor: „Jedes Team legt seine 0-Karte auf den Tisch in der Mitte, dann weiß jeder, dass der andere die 1-Karte spielen muss.“ Geniale Idee! Das wäre eine bindende Vereinbarung. Dies heißt auch „Brücken verbrennen“, um sich selbst Handlungsoptionen zu nehmen, als Drohung oder als Garantie.

Ich wies darauf hin, dass sich jedes Team bei Bedarf neue Karten basteln kann. Der clevere Vorschlag wurde daraufhin aufgegeben. Das Problem von *cheap talk* und *commitment* war inzwischen klar.

Nebenzahlungen: Ein weiterer Teilnehmer schlug vor: Wird (0, 1) oder (1, 0) gespielt, dann ersetzt der Gewinner dem Verlierer den Schaden. Das fordert eine bindende Vereinbarung mit Nebenzahlungen. Manche Spiele erlauben das, in anderen ist es illegal (Kartell, Preisabsprachen, Bestechung, etc.) Als Erweiterung unseres Spiels wäre es interessant.

(3) Zufällige Rundenzahl: Nach jeder Runde entscheidet ein Münzwurf mit Wkt $\delta = 1/2$, ob eine weitere Runde stattfindet oder das Spiel endet.

Team Alice schlug wohlüberlegt und eloquent vor: „Also, Bob, pass auf: Lass uns immer kooperieren, dann erwartet jeder von uns $2/(1 - \delta) = 4$. Sobald einer betrügt, fallen wir dauerhaft auf Null zurück, das heißt: Betrug bringt nur 3, lohnt sich also nicht. Bist du einverstanden?“

Bob schien dieses kluge Argument nachzuvollziehen und stimmte zu. Im Spiel wurde dies dann auch genauso umgesetzt: Das Spiel endete (zufällig) nach der zweiten Runde, beide kooperierten und waren mit ihrer stattlichen Auszahlung $(2, 2) + (2, 2) = (4, 4)$ sehr zufrieden!

Alice benötigt **Rationalität zweiter Stufe**: Sie muss darauf vertrauen, dass Bob ihr gutes Argument versteht und zu seinem eigenen Vorteil umsetzt (Rationalität erster Stufe). Daher ihr Bemühen, verständlich zu erklären und sich über die gemeinsame Abmachung zu vergewissern.

Das gilt allgemein bei **Verhandlungen**: Es genügt nicht, einen guten Plan zu (er)finden, man muss zudem auch die anderen überzeugen!

(4) Einseitig bekannte Rundenzahl: Wir spielten zwei getrennte Spiele. Die zufällige Rundenzahl ist jeweils geometrisch verteilt. Im ersten bekam nur Alice die Rundenzahl schriftlich mitgeteilt, anschließend in einem zweiten unabhängigen Spiel nur Bob. Das schien allen gerecht.

Team Alice erklärte: "Lass uns immer kooperieren, dann erwartet jeder $2/(1 - \delta) = 4$ wie zuvor." – „Einverstanden.“ Das Argument ist noch nicht schlüssig; ich wollte zuerst spontan nachfragen, hielt mich aber zurück.

Vielleicht war beiden Teams heimlich sofort klar, dass das Argument fadenscheinig war, und beide wollten zu ihrem Vorteil schauspielern?

Eine **nachhaltig tragfähige Abmachung** sieht sicher anders aus. . .

Das erste Spiel hatte zufällig Rundenzahl $n = 2$. Gespielt wurde $(1, 1)$ und $(0, 0)$. Das ist nicht schlüssig, dennoch waren alle recht zufrieden. Vielleicht hätten beide Teams vor dem Spiel die Vorschläge gründlicher ausdiskutieren müssen, ich hätte als Moderator darauf drängen können.

Das zweite Spiel hatte zufällig Rundenzahl $n = 1$. Gespielt wurde $(1, 0)$. Alice war nicht unglücklich, diese mögliche Panne war zuvor mitbedacht.

Zitternde Hand: Auf Vorschlag der Teilnehmer wurde das Konzept der „zitternden Hand“ in das Spiel eingebaut, zur Vereinfachung wie folgt:

Jedes Team übermittelt seine Aktion 0/1 wie zuvor an die Spielleitung. Durch Würfeln mit Wkt $1/6$ wird dann jede Aktion $0 \leftrightarrow 1$ umgedreht. Die Spieler sehen nur das Endergebnis, nicht die Zwischenschritte! Somit ist während des Spielverlaufs für niemanden sicher erkennbar, ob ein absichtlicher Betrug oder zufälliger Übertragungsfehler vorliegt. (Nach dem Spiel wollten die Teilnehmer den wahren Verlauf wissen.)

Team Alice schlug vor: „Bob, lass uns wie zuvor immer kooperieren. Wir verzeihen auch Fehler/Betrug, solange es nicht zu oft vorkommt.“ Bob stimmte zu. Auf meine Nachfrage wollte niemand präzisieren, was „nicht zu oft“ genau bedeutet; beiden Teams genügte eine vage Formulierung. Zu recht? Naiv? Bluff? Das ist schwer einzuschätzen.

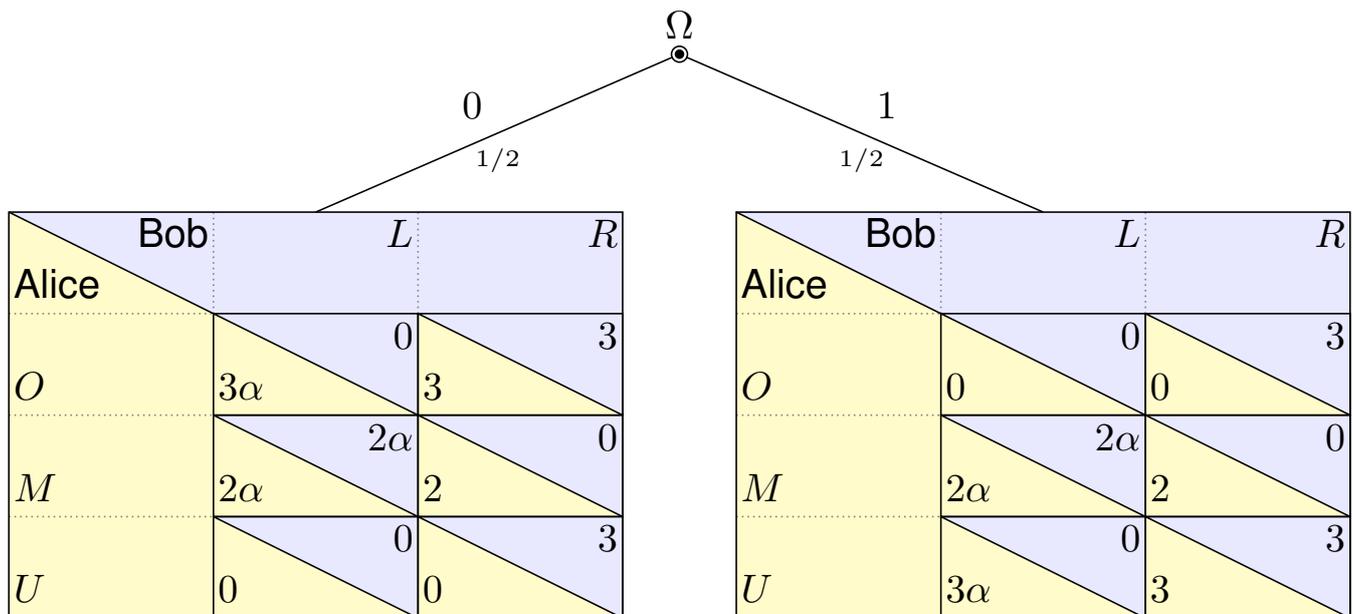
Das Spiel dauerte zufällig $n = 5$ Runden, also ungewöhnlich lang. Es wurde sowohl zufällig als auch absichtlich betrogen, insgesamt aber auch viel verziehen und überwiegend kooperiert. Faszinierend!

Abschließende Gedanken: Was ist und was soll unser **Casino Royal**? Es gibt **Laborexperimente** (streng kontrolliert, dadurch reproduzierbar) und **Feldversuche** (sehr realitätsnah, aber leider kaum reproduzierbar). Unser Casino Royal ist etwas drittes: **moderiertes Experimentieren**.

Es ist weder durch strenge Protokolle kontrolliert noch ein realistischer Feldversuch, sondern eher eine spielerisch-didaktische Inszenierung: Lernen durch Spielen / *learning by playing*. Wir sammeln eindrückliche Erfahrungen durch Spielen, Verhandeln, Diskutieren, Reflektieren.

Die Rolle des Moderators ist noch frei improvisiert, aber ausbaufähig. Als (Sport-)Kommentator kann er Situationen sachkundig einordnen, belustigen oder versachlichen. Als Stimme der Vernunft kann er auf sorgfältiges Formulieren hinwirken und zu mehr Verlässlichkeit führen.

Das alles ist teilweise wohlüberlegt und kontrolliert, teilweise improvisiert und dadurch immer wieder überraschend. Im Rückblick ist das gut so: Es entstehen immer wieder neue Ideen, ausgeklügelte Strategien und verrückte Versuche, die sich zuvor wohl kaum jemand ausgedacht hätte.



Aufgabe: Bestimmen Sie alle Gleichgewichte! Hierbei sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Der Münzwurf $\omega \in \Omega$ wird (1) beiden Spielern mitgeteilt, (2) nur Alice, (3) nur Bob, (4) keinem Spieler. Beide Spieler kennen diese Spielregeln.

Lösung: (1,2) NE = $\{(O/U, R)\}$ mit Auszahlung $u(O/U, R) = (3, 3)$.
 (3,4) BE = $\{(M, L)\}$ mit $u(M, L) = (2\alpha, 2\alpha)$. Interpretation?

Bitte rechnen Sie dies sorgfältig nach! Hier die anschauliche Erklärung: Der Wurf $\omega \in \Omega = \{0, 1\}$ einer fairen Münze mit $\mathbf{P}(\{0\}) = \mathbf{P}(\{1\}) = 1/2$ entscheidet zwischen den beiden Auszahlungsmatrizen links & rechts.

(1,2) Alice kennt den Zustand ω . Sie kann / muss / wird dies nutzen. Zustand $\omega = 0$: Für Alice ist O strikt dominant. Daraufhin spielt Bob R . Zustand $\omega = 1$: Für Alice ist U strikt dominant. Daraufhin spielt Bob R . Sobald Bob weiß, dass Alice O/U spielt, ist R für ihn strikt dominant. Dazu muss Bob nicht ω kennen! Ihm genügt, dass Alice ω kennt.

Das einzige Nash–Gleichgewicht ist demnach (O, R) bzw. (U, R) . Die Auszahlung ist in beiden Fällen $u(O/U, R) = (3, 3)$.

(3,4) Alice kennt den Zustand ω nicht. Als Auszahlung nimmt sie daher den Mittelwert aus linker und rechter Tabelle. Für Alice ist die Strategie M strikt dominant über O und U . Bob weiß das und spielt deshalb L .

Das einzige Bayes–Nash–Gleichgewicht ist demnach (M, L) . Die zugehörige Auszahlung ist $u(M, L) = (2\alpha, 2\alpha)$.

⚠ Wir nehmen stillschweigend an, dass Alice sich risikoneutral verhält und daher am Mittelwert orientiert. Sehr risikoaffin würde Sie vielleicht immer O oder immer U spielen: Lotterie, Nervenkitzel, Höchstgewinne.

Dieses Spiel ist raffiniert konstruiert, aber seine Analyse ist noch leicht. Die erstaunliche Interpretation muss man jedoch erst einmal verarbeiten! Unsere Analyse gilt für alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$! Das hat Konsequenzen:

⚠ Bei $\alpha = 1$ ist es für beide Spieler besser, den Zustand zu kennen. Das gilt allgemein für $2\alpha < 3$, also für kleine Parameter $0 < \alpha < 3/2$.

Das ist die Situation, die Sie vermutlich aus vielen Spielen kennen: Meist ist es vorteilhaft, möglichst viel Informationen zu bekommen, um daraus den besten Zug ableiten zu können. So weit, so klar.

Solche Erfahrungen verleiten uns, fahrlässig zu verallgemeinern, so im Slogan: „Mehr Wissen ist *immer* besser als weniger Wissen.“

Dies gilt tatsächlich in Entscheidungsproblemen für eine Person. Bei mehreren Spielern ist dies jedoch keineswegs immer der Fall!

⚠ Bei $\alpha = 2$ ist es für beide besser, den Zustand nicht zu kennen. Das gilt allgemein für $2\alpha > 3$, also für große Parameter $\alpha > 3/2$.

Könnte Alice nicht einfach ihre Information vergessen? Nein! Alice kann natürlich M spielen, doch sie verbessert ihr Ergebnis, indem sie ihre Kenntnis des Münzwurfs ausnutzt und O bzw. U spielt. Bob weiß, dass Alice den Münzwurf kennt, und muss daher rational annehmen, dass sie ihr Wissen nutzt. Also wird Bob R spielen.

⚠ Wenn Alice ihre Information vergessen wollte, müsste sie auch Bob überzeugen, dass sie wirklich alles vergessen hat. Wie soll das gehen? Das scheint paradox. Vielleicht finden Sie dazu eine kluge Anwendung, etwa mit Hilfe ähnlich paradoxer quantenmechanischer Systeme.

Das ist überaus erstaunlich und erinnert an paradoxe Sinnsprüche wie „Selig sind die Unwissenden, denn sie wissen nicht, was sie tun.“ oder „Selig sind Armen im Geiste, denn ihrer ist das Himmelreich.“ (Mt 5:3)

Auf Englisch: *Ignorance is bliss*. „Unwissenheit ist Glückseligkeit.“

Als Sponti-Spruch: „Wissen ist Macht. Wir wissen nichts. Macht nichts.“

Wie können wir Spiele wie das vorige mathematisch präzise fassen?
 Die Strategiemengen sind $S_1 = \{O, M, U\}$ und $S_2 = \{L, R\}$ im Spiel
 $u : \Omega \times S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (\omega, s_1, s_2) \mapsto (u_1(\omega, s_1, s_2), u_2(\omega, s_1, s_2))$.
 Hierzu wird $\omega \in \Omega := \{0, 1\}$ ausgelost gemäß einem WMaß $\mathbf{P}_0 \in [\Omega]$.

Jeder Spieler i erhält zu ω sein Signal ω_i gemäß $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$.
 Im Beispiel ist $T_1 : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} : \omega \mapsto \omega$ und $T_2 : \{0, 1\} \rightarrow \{*\} : \omega \mapsto *$.
 Jeder Spieler i wählt seine Aktion $s_i = \hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$ nach diesem Signal.
 Seine erweiterte Strategiemenge ist somit $\hat{S}_i := S_i^{\Omega_i} = \{\hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i\}$.

Spieler i glaubt an die Verteilung $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$, zum Beispiel $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_0$.
 Spieler i erwartet demnach die Auszahlung $\hat{u}_i : \hat{S}_1 \times \hat{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\hat{s}_1, \hat{s}_2) &:= \mathbf{E}_i[\omega \mapsto u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \hat{s}_2(\omega_2))] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \hat{s}_2(\omega_2)) \cdot \mathbf{P}_i(\omega) \end{aligned}$$

Im Beispiel betrachten wir $\hat{s}_1 : (0 \mapsto O, 1 \mapsto U)$ und $\hat{s}_2 : (* \mapsto R)$.
 Dieses Paar (\hat{s}_1, \hat{s}_2) ist ein Nash–Gleichgewicht für das Spiel \hat{u} .

Wir betrachten hier ein statisches Spiel mit einem Zufallszug $\omega \in \Omega$.
 Jeder Spieler i nimmt hierzu eine Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P}_i an
 und optimiert seine erwartete Auszahlung \hat{u}_i , subjektiv bezüglich \mathbf{P}_i .

Allgemein sei Ω eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ –Algebra auf Ω .
 Oft ist die Menge Ω endlich oder höchstens abzählbar und $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.
 Zur Vereinfachung nehme ich im Folgenden meist Ω als endlich an.

Wir schreiben $[\Omega]$ bzw. $[\Omega, \mathcal{A}]$ für die Menge aller WMaße auf (Ω, \mathcal{A}) .
 Das entspricht den gemischten Strategien für den Zufall als Spieler 0.
 Der Zufall agiert hier als Spieler 0, erhält aber keine Auszahlung.

Das Nash–Gleichgewicht $(\hat{s}_1, \hat{s}_2) \in \hat{S}_1 \times \hat{S}_2$ für das Spiel \hat{u} bedeutet:
 Jeder Spieler i nutzt seine Information / sein Signal $\omega_i \in \Omega_i$ optimal.
 Er hat keinen Anlass, seine Reaktion $\hat{s}_i \in \hat{S}_i$ zu ändern.

Das ist der entscheidende Trick dieser **Harsanyi–Transformation**:
 Wir transformieren ein Spiel (u, \mathbf{P}) mit unvollständiger Informationen
 in ein Spiel \hat{u} mit vollständiger (weiterhin imperfekter) Informationen.
 Darauf können wir unsere bewährten Lösungskonzepte anwenden!

Die Auszahlung $u : \Omega \times S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hängt meist vom Zufall Ω ab; andernfalls untersuchen wir anschließend korrelierte Gleichgewichte.

Das Tripel $(\Omega, \mathbf{P}_\bullet, T_\bullet : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_\bullet)$ ist für jeden Spieler $i \in I$ ein (endlicher) WRaum (Ω, \mathbf{P}_i) mit der Zufallsvariablen $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i = T_i(\omega)$, also einer messbaren Surjektion $T_i : (\Omega, \mathcal{A}) \twoheadrightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$.

Das universelle Modell hierfür ist das Paar (Ω, \mathbf{P}) aus der Produktmenge $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$ und einem WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ für jedes $i \in I$. Die kanonischen Zufallsvariablen sind hier die Projektionen $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$.

Als Signalgeber dient oft $(\Omega, \mathbf{P}_0, T_\bullet : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_\bullet)$ mit einem objektiven / intersubjektiven WMaß $\mathbf{P}_0 \in [\Omega]$. Bei verschiedenen Überzeugungen hat jeder Spieler $i \in I$ sein individuelles, subjektives WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$: Jeder Spieler $i \in I$ hat seine eigene Erfahrung, seine Überzeugung, seine Annahme, seinen Glauben, etc. In günstigen Fällen haben alle Spieler i eine gemeinsame Überzeugung $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_0$ [*common prior*]. Dies gilt zum Beispiel, wenn der Signalgeber ein allgemein gleich verstandenes physikalisches Gerät ist [*signalling device*].

Wie kann es sein, dass mehrere rationale Spieler unterschiedliche Überzeugungen, Annahmen, Glauben haben? Ist das nicht irrational?

Beispiel 1: Eine Illustration zum Münzwurf aus unserem obigen Spiel. Geworfen wird eine Münze, und diese ist eventuell unfair. Alice und Bob bekommen diese Münze jeweils für 20 Probewürfe zum Test. Diese führt jeder separat aus und bildet sich daraufhin seine Meinung über die für ihn plausible Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse. Obwohl beide rational vorgehen, wird sich bei geringer Testgröße eine Diskrepanz einstellen.

Beispiel 2: Alice verkauft Bob einen gebrauchten Gegenstand (Auto). Beide haben dazu verschiedene Einschätzungen, evtl. Erfahrungen.

Beispiel 3: Alice und Bob ersteigern Schürfrechte für ein Stück Land. Zuvor entnehmen und untersuchen sie Proben. Jeder bildet sich seine (private) Meinung zu den (geschätzten) Ertragsaussichten des Landes. Beide sind rational, kommen aber zu verschiedenen Überzeugungen.

Dasselbe gilt sinngemäß für alle fehlerbehafteten Messungen oder unterschiedlichen Erfahrungen oder divergenten Überzeugungen.

Gegeben sei die Spielermenge I , typischerweise $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definition I2A: Bayes–Spiel und Bayes–Gleichgewichte

Ein **Bayes–Spiel** $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ über I besteht aus einem Spiel

$$u : \Omega \times \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$$

mit Signal $T_i : \Omega \rightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$ und WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ für jeden Spieler i .

Wir schreiben (u, \mathbf{P}) im universellen Falle $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$ und $T_i = \text{pr}_i$.

Gemeinsame Überzeugung liegen vor, falls $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_k$ für alle $i, k \in I$.

Die **Harsanyi–Transformierte** von Γ ist das strategische Spiel

$$\hat{u} : \prod_{i \in I} \hat{S}_i \rightarrow \mathbb{R}^I$$

mit den Strategiemengen $\hat{S}_i := \{ \hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i \}$ und den Auszahlungen

$\hat{u}_i((\hat{s}_k)_{k \in I}) := \mathbf{E}_i[\omega \mapsto u_i(\omega, (\hat{s}_k(\omega_k))_{k \in I})]$ als Erwartung bezüglich \mathbf{P}_i .

Bayes–Gleichgewichte von Γ sind Nash–Gleichgewichte von \hat{u} :

$$\text{BE}(u, T, \mathbf{P}) := \text{NE}(\hat{u})$$

Erinnerung: Ein reelles Spiel über $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ist eine Funktion

$$u : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Wir betrachten hier zusätzlich ein Zufallselement $\omega \in \Omega$:

$$u : \Omega \times S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Die raffinierte Definition I2A destillieren wir aus den vorigen Beispielen. Ein Bayes–Spiel $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ über I codiert folgende **Interaktion**:

Die Aktion $\omega \in \Omega$ ist der **Zufallszug**. Wir betrachten hier die Natur als weiteren Akteur (Spieler 0, ohne Auszahlung, daher unbeeinflussbar).

Spieler $i \in I$ kennt von ω nur $\omega_i = T_i(\omega)$ als **Signal** / Information / Typ.

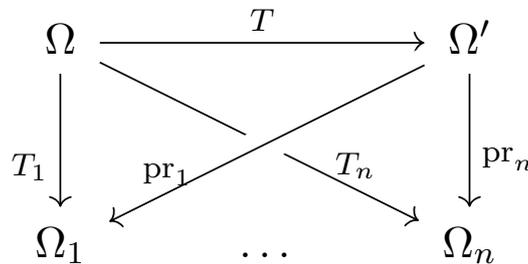
Darauf wählt er seine Aktion $s_i \in S_i$. Seine Auszahlung $u_i(\omega, (s_k)_{k \in I})$ ist abhängig vom Zufallszug ω und den Aktionen $(s_k)_{k \in I}$ aller Spieler.

Wir nutzen daher die **erweiterte Strategiemenge** $\hat{S}_i := \{ \hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i \}$.

Jede solche Abbildung $\hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i$ legt fest, wie der Spieler i das von ihm empfangene Signal $\omega_i \in \Omega_i$ in eine Strategie $\hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$ übersetzt. Für jeden Zufallszug $\omega \in \Omega$ ist damit der Verlauf des Spiels festgelegt.

Allgemeine Signalgeber sind Zufallsvariablen $(T_i : \Omega \rightarrow \Omega_i)_{i \in I}$. Jeder Spieler $i \in I$ empfängt sein Signal $T_i : \Omega \rightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i = T_i(\omega)$.

Universeller Signalgeber ist das Produkt $\Omega' = \prod_{i \in I} \Omega_i$ mit $T'_i = \text{pr}_i$. Übersetzung des allgemeinen Falls durch $T : \Omega \rightarrow \Omega' : \omega \mapsto (T_i(\omega))_{i \in I}$.



Das WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ transportieren wir auf das WMaß $\mathbf{P}'_i \in [\Omega']$ durch Verschieben mittels T gemäß $\mathbf{P}'_i := T_*\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \circ T^{-1}$.

Trimmen: Angenommen, alle Spieler $i \in I$ haben eine gemeinsame Überzeugung $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}$ und der WRaum (Ω, \mathbf{P}) ist diskret. Dann können wir Ω trimmen zu $\Omega^* = \{ \omega \in \Omega \mid \mathbf{P}(\{\omega\}) > 0 \}$ und die Signalmengen Ω_i zu $\Omega^*_i = T_i(\Omega^*)$. Damit haben alle Signale positive Wkt $\mathbf{P}(T_i = \omega_i) > 0$.

Zur Berechnung der **erwarteten Auszahlung** fixiert jeder Spieler $i \in I$ seine Annahmen über den Zufallszug $\omega \in \Omega$ als ein WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$. Dies nennen wir seine **Überzeugung** oder seinen **Glauben** / *belief*.

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_i(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n) &:= \mathbf{E}_i[\omega \mapsto u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \dots, \hat{s}_n(\omega_n))] \\
 &= \sum_{\omega \in \Omega} u_i(\omega, \hat{s}_1(T_1(\omega)), \dots, \hat{s}_n(T_n(\omega))) \cdot \mathbf{P}_i(\omega)
 \end{aligned}$$

Hierbei herrscht **Glaubensfreiheit**: Jeder darf glauben, was er will. Insbesondere dürfen die WMaße $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ auch verschieden sein. Im Allgemeinen kennt kein Spieler das „wahre“ WMaß \mathbf{P}_0 auf Ω .

Als **gemeinsame Überzeugung** / *common prior* bezeichnet man die Eigenschaft $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_k$ für alle $i, k \in I$. Wir schreiben dann kurz $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_0$. In diesem Fall haben alle Spieler denselben Glauben zu den Wkten.

Aus dem gegebenen Bayes–Spiel $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ gewinnen wir so das transformierte Spiel \hat{u} . Der Übergang heißt **Harsanyi–Transformation**.

Die Abkürzung NE steht für Nash–Gleichgewicht / *Nash equilibrium* und BE für Bayes–(Nash–)Gleichgewicht / *bayesian (Nash) equilibrium*.

Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

Gegeben sei ein **Bayes–Spiel** $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ mit $u : \Omega \times \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$ sowie den individuellen Signalen $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i$ und WMaßen $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$.

Wir setzen $J := \bigcup_{i \in I} \{i\} \times \Omega_i$: Ein Spielertyp $j = (i, \theta) \in J$ ist ein Spieler $i \in I$ zusammen mit seinem zugewiesenen Signal / Info $\theta = T_i(\omega) \in \Omega_i$.

Sei $\mathbf{P}_j \in [\Omega]$ mit $\mathbf{P}_j(T_i=\theta) = 1$ und $\mathbf{P}_j(A) \cdot \mathbf{P}_i(T_i=\theta) = \mathbf{P}_i(A \cap \{T_i=\theta\})$.

Im Falle $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) > 0$ ist dies die bedingte Wkt $\mathbf{P}_j(A) = \mathbf{P}_i(A \mid T_i=\theta)$.

Allgemein sei $(\mathbf{P}_{(i,\theta)})_{\theta \in \Omega_i}$ eine **Disintegration** von \mathbf{P}_i über $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i$.

Die Strategiemenge des Spielertyps $j = (i, \theta)$ ist $S_j := S_i$ wie zuvor.

Wir identifizieren $\prod_{j \in J} S_j \cong \prod_{i \in I} \hat{S}_i : \check{s} \leftrightarrow \hat{s}$ vermöge $\check{s}_{i,\theta} = \hat{s}_i(\theta)$.

Bezüglich \mathbf{P}_j ist seine **Gewinnerwartung** $\check{u}_j : \prod_{k \in J} S_k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \check{s} \mapsto \check{u}_j(\check{s}) &= \mathbf{E}_j[\omega \mapsto u_i(\omega, (\check{s}_{(k,\omega_k)})_{k \in I})] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} u_i(\omega, (\check{s}_{(k,\omega_k)})_{k \in I}) \cdot \mathbf{P}_j(\omega) \end{aligned}$$

Satz I2B: Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

Es gilt $\text{NE}(\check{u}) \subseteq \text{NE}(\hat{u})$. Die umgekehrte Inklusion „ \supseteq “ gilt unter der Positivitätsbedingung $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) > 0$ für alle $i \in I$ und $\theta \in \Omega_i$.

Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

Die Harsanyi–Transformation belässt die Spielermenge I , aber erweitert jede Strategiemenge S_i zu $\hat{S}_i = S_i^{\Omega_i}$. Das Typenmodell dagegen belässt S_i , aber erweitert die Spielermenge I zu Spielertypen $J := \bigcup_{i \in I} \{i\} \times \Omega_i$: Jeder Spieler $i \in I$ vervielfältigt sich in Clone $j = (i, \theta)$ mit Info $\theta \in \Omega_i$. Diese Geschwister maximieren unabhängig jedes seine Auszahlung.

Die Bedingungen $\mathbf{P}_j(T_i=\theta) = 1$ und $\mathbf{P}_j(A) \cdot \mathbf{P}_i(T_i=\theta) = \mathbf{P}_i(A \cap \{T_i=\theta\})$ sind naheliegende Minimalforderungen der **Kohärenz**. Im einfachsten Falle gilt $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) > 0$ für jeden Spieler $i \in I$ und jede Info $\theta \in \Omega_i$.

Dann erhalten wir für jeden Spielertyp $j = (i, \theta)$ die bedingte Wkt

$$\mathbf{P}_j(A) = \mathbf{P}_i(A \mid T_i=\theta) = \frac{\mathbf{P}_i(A \cap \{T_i=\theta\})}{\mathbf{P}_i(T_i=\theta)}.$$

Im Falle $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) = 0$ ist \mathbf{P}_j beliebig, getragen von $\{T_i=\theta\} = T_i^{-1}(\{\theta\})$. Für die Bayes–Gleichgewichte spielt dieser Fall keine weitere Rolle, wohl aber im Typenmodell, da *jeder* Spielertyp $j = (i, \theta) \in J$ seine erwartete Auszahlung \check{u}_j optimieren will/muss, auch Typen mit Wkt $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) = 0$.

Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

Aufgabe: Rechnen Sie den Satz im diskreten Fall explizit nach!

Lösung: Wir vergleichen Harsanyi $\hat{u}_i(\hat{s})$ und Typenmodell $\check{u}_{(i,\theta)}(\check{s})$. Dank $\mathbf{P}_i(A \cap \{T_i=\theta\}) = \mathbf{P}_j(A) \cdot \mathbf{P}_i(T_i=\theta)$ und $\mathbf{P}_j(T_i=\theta) = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\hat{s}) &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{\omega \in \Omega} u_i(\omega, (\hat{s}_k(\omega_k))_{k \in I}) \mathbf{P}_i(\omega) \quad \text{mit } \Omega = \bigsqcup_{\theta \in \Omega_i} T_i^{-1}(\theta) \\ &\stackrel{\text{Dis}}{=} \sum_{\theta \in \Omega_i} \left[\sum_{\omega \in T_i^{-1}(\theta)} u_i(\omega, (\hat{s}_k(\omega_k))_{k \in I}) \mathbf{P}_i(\omega) \right] \\ &\stackrel{\text{Dis}}{=} \sum_{\theta \in \Omega_i} \left[\sum_{\omega \in T_i^{-1}(\theta)} u_i(\omega, (\check{s}_{(k,\omega_k)})_{k \in I}) \mathbf{P}_{(i,\theta)}(\omega) \right] \mathbf{P}_i(T_i=\theta) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{\theta \in \Omega_i} \left[\sum_{\omega \in \Omega} u_i(\omega, (\check{s}_{(k,\omega_k)})_{k \in I}) \mathbf{P}_{(i,\theta)}(\omega) \right] \mathbf{P}_i(T_i=\theta) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{\theta \in \Omega_i} \check{u}_{(i,\theta)}(\check{s}) \mathbf{P}_i(T_i=\theta) \end{aligned}$$

„ \subseteq “: Angenommen, $\hat{u}_i(\hat{s}_i; \hat{s}_{-i}) < \hat{u}_i(\hat{s}'_i; \hat{s}_{-i})$ für eine Alternative $\hat{s}'_i \in \hat{S}_i$. Dann existiert (mindestens) ein Spielertyp $j = (i, \theta)$ mit $\theta \in \Omega_i$ und $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) > 0$, sodass $\check{u}_j(\check{s}_j; \check{s}_{-j}) < \check{u}_j(\check{s}'_j; \check{s}_{-j})$ gilt.

„ \supseteq “: Angenommen, $\check{u}_j(\check{s}_j; \check{s}_{-j}) < \check{u}_j(\check{s}'_j; \check{s}_{-j})$ für eine Alternative $\check{s}'_j \in S_j$. Zusammen mit $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) > 0$ folgt $u_i(\hat{s}_i; \hat{s}_{-i}) < u_i(\hat{s}'_i; \hat{s}_{-i})$, wobei wir \hat{s}_i zu \hat{s}'_i abändern durch den neuen Wert $\hat{s}'_i(\theta) = \check{s}'_{(i,\theta)}$. QED

Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

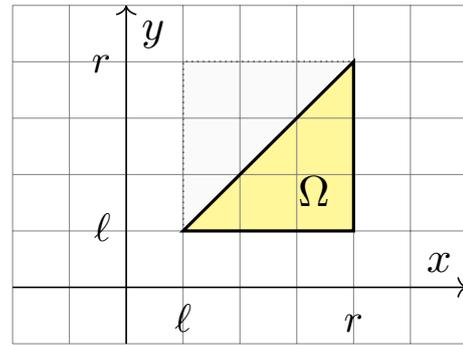
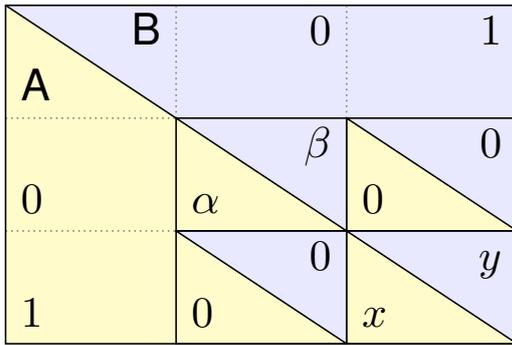
Im **Bayes–Gleichgewicht** optimieren genau die Spielertypen (i, θ) mit positiver Wkt $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) > 0$, die anderen zählen nicht. Im Typenmodell hingegen optimiert jeder Spielertyp (i, θ) , auch solche mit $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) = 0$. Das Typenmodell stellt also weitere, genauere, feinere Bedingungen. Slogan: Das Typenmodell verfeinert die Harsanyi–Transformierte.

In jeder Grundvorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie lernen Sie bedingte Wkten durch die Definition $\mathbf{P}(A|B) := \mathbf{P}(A \cap B) / \mathbf{P}(B)$. Der Sonderfall $\mathbf{P}(B) = 0$ wird verboten oder ad hoc repariert.

Dramatisch wird dies für kontinuierliche Wkten, siehe Übungen: Hier hat jedes Signal / jeder Typ die punktuelle Wkt $\mathbf{P}_i(T_i=\theta) = 0$. Auch diese Situation kommt natürlich vor, und wir wollen sie lösen!

Die Umformung der Erwartung als Summe $\sum_{\omega \in \Omega}$ in die Doppelsumme $\sum_{\theta \in \Omega_i} \sum_{\omega \in T_i^{-1}(\theta)}$ erinnert an Fubini. Dies nutzen wir nun zur Definition.

Die bedingten Wkten $\mathbf{P}_{(i,\theta)}$ werden daher als **Disintegration** definiert, wie nachfolgend skizziert. Das beantwortet unsere Grundlagenfrage.



Als konkrete Daten betrachten wir $\alpha = \beta = 2$ sowie $l = 1$ und $r = 4$. Sei \mathbf{P} die Gleichverteilung auf $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l \leq y \leq x \leq r \}$. Das heißt $\mathbf{P}(A) = \text{vol}_2(A \cap \Omega) / \text{vol}_2(\Omega)$ dank Lebesgue–Maß vol_2 . Die Signale $T_i : \Omega \rightarrow \Omega_i = [l, r]$ sind $T_1(x, y) = y$ und $T_2(x, y) = x$.

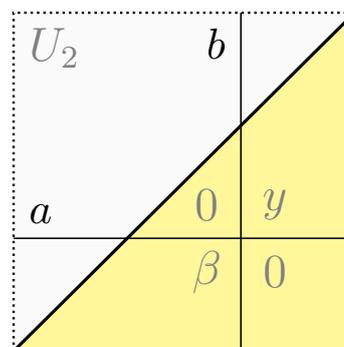
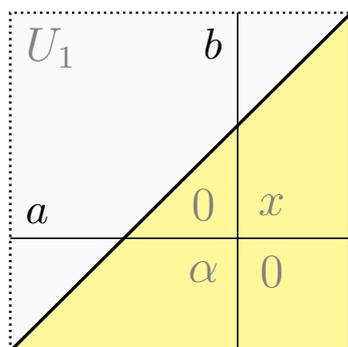
Aufgabe: (0) Können Sie anschaulich rationale Strategien erkennen?
 (1) Finden Sie die Bayes–Gleichgewichte, zur Vereinfachung nur auf

$$\hat{S}_1^* = \{ s_a = \mathbf{I}_{[a,r]} \mid a \in [l, r] \} \quad \text{und} \quad \hat{S}_2^* = \{ s_b = \mathbf{I}_{[b,r]} \mid b \in [l, r] \}.$$

Wir schränken also die erweiterte Strategiemenge $\hat{S}_i = \{ \hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i \}$ ein zu der viel übersichtlicheren Menge $\hat{S}_i^* \subseteq \hat{S}_i$ monotoner Strategien.

Alice und Bob wählen ihre Strategien $(s_a, s_b) \in \hat{S}_1^* \times \hat{S}_2^* \subseteq \hat{S}_1 \times \hat{S}_2$. Die Auszahlung ist demnach die Zufallsvariable $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\omega = (x, y) \mapsto u(\omega, s_a(y), s_b(x)) = \begin{cases} (\alpha, \beta) & \text{falls } y < a \text{ und } x < b, \\ (x, y) & \text{falls } y \geq a \text{ und } x \geq b, \\ (0, 0) & \text{sonst.} \end{cases}$$



Bezüglich \mathbf{P} ist die Erwartung $\mathbf{E}(U) = v(a, b) / \text{vol}_2(\Omega)$ gegeben durch

$$v(a, b) = \int_{(x,y) \in \Omega} u((x, y), s_a(y), s_b(x)) \, d(x, y).$$

Zu Bobs fixierter Wahl b maximiert Alice $a \mapsto v_1(a, b)$.

Zu Alice' fixierter Wahl a maximiert Bob $b \mapsto v_2(a, b)$.

Im Fall $\ell \leq a < b \leq r$ berechnen wir die Ableitungen:

$$\partial_a v_1(a, b) = \alpha(b - a) - (r^2 - b^2)/2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\partial_b v_2(a, b) = \beta(a - \ell) - (b^2 - a^2)/2 \stackrel{!}{=} 0$$

Auf Bobs Strategie s_b ist Alice' beste Antwort s_a gegeben durch

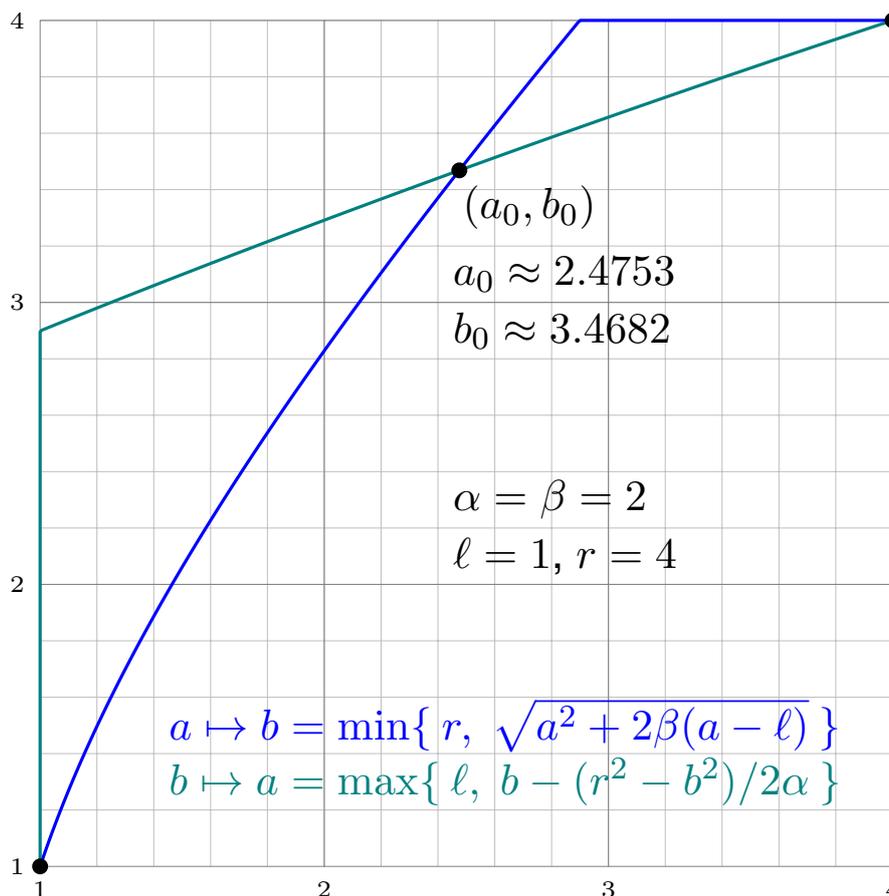
$$b \mapsto a = \max\{ \ell, b - (r^2 - b^2)/2\alpha \}.$$

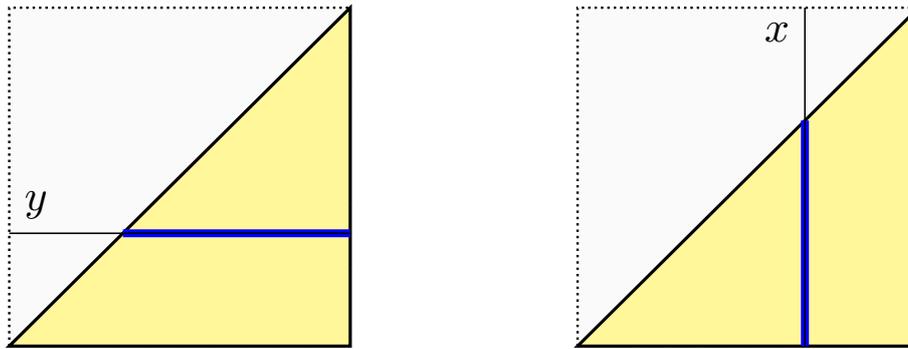
Auf Alice' Strategie s_a ist Bobs beste Antwort s_b gegeben durch

$$a \mapsto b = \min\{ r, \sqrt{a^2 + 2\beta(a - \ell)} \}.$$

Übung: Führen Sie die Rechnung für alle Fälle sorgsam aus!
Die Diskussion ist elementar, wenn auch leider etwas länglich.

Die Nash–Gleichgewichte (a, b) finden wir am besten numerisch:





Angenommen, Alice erhält das Signal $T_1(\omega) = y$. Ihre „bedingte Wkt“ $\mathbf{P}_{(1,y)}$ ist dann / sollte sein die eindimensionale Gleichverteilung auf

$$T_1^{-1}(y) = \{ (x, y) \mid y \leq x \leq r \} \cong [y, r].$$

Angenommen, Bob erhält das Signal $T_2(\omega) = x$. Seine „bedingte Wkt“ $\mathbf{P}_{(2,x)}$ ist dann / sollte sein die eindimensionale Gleichverteilung auf

$$T_2^{-1}(x) = \{ (x, y) \mid \ell \leq y \leq x \} \cong [\ell, x].$$

⚠ Im traditionellen Sinne sind diese „bedingten Wkten“ nicht definiert! Der Spielertyp (i, θ) benötigt diese Wkt dennoch für seine Entscheidung.

Angenommen, Bob spielt s_b und Alice erhält das Signal $T_1(\omega) = y < b$. Was ist Alice' beste Antwort? Als Typ $(1, y)$ vergleicht sie Erwartungen:

$$w_0(b) := \int_{(x,y) \in \Omega} u_1((x, y), 0, s_b(x)) dx = \int_{x=y}^b \alpha dx = \alpha(b - y)$$

$$w_1(b) := \int_{(x,y) \in \Omega} u_1((x, y), 1, s_b(x)) dx = \int_{x=b}^r x dx = (r^2 - b^2)/2$$

Im Falle $w_0(b) > w_1(b)$ spielt sie 0, im Falle $w_0(b) < w_1(b)$ spielt sie 1. Das entspricht $y < a$ und $y > a$ mit der Grenze $a = b - (r^2 - b^2)/(2\alpha)$.

Angenommen, Alice spielt s_a und Bob erhält das Signal $T_2(\omega) = x > a$. Was ist Bobs beste Antwort? Als Typ $(2, x)$ vergleicht er Erwartungen:

$$w_0(a) := \int_{(x,y) \in \Omega} u_2((x, y), s_a(y), 0) dy = \int_{y=\ell}^a \beta dy = \beta(a - \ell)$$

$$w_1(a) := \int_{(x,y) \in \Omega} u_2((x, y), s_a(y), 1) dy = \int_{y=a}^x y dy = (x^2 - a^2)/2$$

Im Falle $w_0(a) > w_1(a)$ spielt er 0, im Falle $w_0(a) < w_1(a)$ spielt er 1. Das entspricht $x < b$ und $x > b$ mit der Grenze $b = \sqrt{a^2 + 2\beta(a - \ell)}$.

😊 Das entspricht unserem vorigen Ergebnis im Harsanyi-Modell.

Unsere spieltheoretische Anwendung erfordert, dass wir bedingte Wkten präzise erklären. Über diese Subtilität möchte man in der Stochastik meist stillschweigend hinweggehen. Hier müssen wir genau hinschauen!

Wie zuvor betrachten wir das Dreieck $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ell \leq y \leq x \leq r \}$ mit der Borel–Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Als Bedingungen erlauben wir nun das Mengensystem $\mathcal{B} = \{ \Omega, T_1^{-1}(y), T_2^{-1}(x) \mid x, y \in [\ell, r] \} \subseteq \mathcal{A}$.

Das WMaß $\mathbf{P}(-|\Omega)$ ist die zweidimensionale Gleichverteilung auf Ω . Das heißt $\mathbf{P}(A|\Omega) = \text{vol}_2(A \cap \Omega) / \text{vol}_2(\Omega)$ dank Lebesgue–Maß vol_2 .

Für $B \in \{ T_1^{-1}(y), T_2^{-1}(x) \}$ hingegen fixieren wir als WMaß $\mathbf{P}(-|B)$ die eindimensionale Gleichverteilung auf B , wie oben motiviert.

☹ Im traditionellen Sinne sind diese **bedingten Wkten** nicht definiert! Nach Kolmogorov I2F ist die Frage verboten und alle Antworten illegal.

😊 Als Erweiterung betrachten wir daher einen **bedingten WRaum**. Rényis Definition I2G legalisiert die Frage und ermöglicht Antworten.

😊 Damit werden alle nötigen Daten übersichtlich und kohärent codiert.

Projekt: Was gilt, wenn Alice und Bob allgemeine Strategien spielen, also beliebige messbare Funktionen $s_i : \Omega_i \rightarrow \{0, 1\}$?

Angenommen, Bob spielt s und Alice erhält das Signal $T_1(\omega) = y$.

$$w_0(s) := \int_{(x,y) \in \Omega} u_1((x, y), 0, s(x)) \, dx = \int_{x=y}^r \alpha [1 - s(x)] \, dx$$

$$w_1(s) := \int_{(x,y) \in \Omega} u_1((x, y), 1, s(x)) \, dx = \int_{x=y}^r x s(x) \, dx$$

Im Falle $w_0(s) > w_1(s)$ spielt sie 0, im Falle $w_0(s) < w_1(s)$ spielt sie 1.

Angenommen, Alice spielt s und Bob erhält das Signal $T_2(\omega) = x > a$.

$$w_0(s) := \int_{(x,y) \in \Omega} u_2((x, y), s(y), 0) \, dy = \int_{y=\ell}^x \beta [1 - s(y)] \, dy$$

$$w_1(s) := \int_{(x,y) \in \Omega} u_2((x, y), s(y), 1) \, dy = \int_{y=\ell}^x y s(y) \, dy$$

Im Falle $w_0(s) > w_1(s)$ spielt er 0, im Falle $w_0(s) < w_1(s)$ spielt er 1.

Das definiert jeweils eine beste Antwort. Was sind Gleichgewichte? Die obigen Gleichgewichte bleiben bestehen. (Warum?) Gibt es neue?

David Hilbert (1862–1943) war einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit und hat die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert maßgeblich geprägt. Am 8. August 1900 sprach er auf dem zweiten Internationalen Mathematikerkongress in Paris und trug die später so genannten **23 Hilbertschen Probleme** vor. Das sechste davon lautet:

6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik

Durch die Untersuchung über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.

Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung angeht, so scheint es mir wünschenswert, dass mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwicklung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speziell der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe.

David Hilbert (1862–1943), *Mathematische Probleme* (1900)

Hilbert war zu einem Vortrag auf dem zweiten ICM eingeladen worden und beschloss, einen programmatischen Ausblick auf die Mathematik des 20. Jahrhunderts zu wagen: *Wer von uns würde nicht gerne den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte!*

Die Mathematik war um 1900 noch wenig formalisiert, die axiomatische Vorgehensweise noch nicht etabliert. Hilbert konnte noch nicht auf die Mengenlehre zurückgreifen, ebensowenig auf Topologie, Maßtheorie oder Funktionalanalysis. Daher sind seine Formulierungen wortreich und bisweilen vage. Dennoch oder gerade deshalb beeinflusste Hilberts Problemliste die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert enorm.

Die unmittelbaren Reaktionen auf dem Kongress waren enttäuschend. Der Konferenzband würdigte 1902 hingegen die Wichtigkeit von Hilberts Vortrag und platzierte ihn an den Anfang, gefolgt von Poincarés Vortrag. Seither haben Hilberts Probleme zahlreiche Forscher:innen inspiriert.

Andrei Kolmogorov (1902–1987) war einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, mit Beiträgen zur Topologie, Fourier–Reihen, Logik und Komplexitätstheorie. Sein bekanntestes Werk war 1933 die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Zweck des vorliegenden Heftes ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der leitende Gedanke des Verfassers war dabei, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die Reihe der allgemeinen Begriffsbildungen der modernen Mathematik einzuordnen.

Vor Entstehung der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie war diese Aufgabe ziemlich hoffnungslos. Nach den Lebesgueschen Untersuchungen lag die Analogie zwischen dem Maße einer Menge und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sowie zwischen dem Integral einer Funktion und der mathematischen Erwartung einer zufälligen Größe auf der Hand.

Andrei Kolmogorov (1902–1987),
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1933)

Kolmogorovs Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie durch drei einfache Axiome (Definition I2E) gehört heute zur Allgemeinbildung, nicht nur für Mathematiker:innen, sondern weit darüber hinaus für alle Anwender:innen der Stochastik und allgemein der Maßtheorie.

Kolmogorov antwortete damit auf Hilberts oben genanntes sechstes Problem der „Axiomatisierung der Physik“. Da Hilbert hierbei explizit die Wahrscheinlichkeitstheorie mit einbezog, können Kolmogorovs Axiome als ein Beitrag zu Hilberts Programm angesehen werden.

Hilberts Einordnung der Wahrscheinlichkeit als ein Problem der Physik mag uns Heutige verwundern, da wir alle damit aufgewachsen sind, die Wahrscheinlichkeitstheorie als ein mathematisches Gebiet zu verstehen. Das bezeugt, wie erfolgreich Kolmogorovs Axiomatisierung bis heute ist!

Kolmogorov stützte sich dabei auf die von Henri Lebesgue (1875–1941) seit 1901 entwickelte allgemeine Maß- und Integrationstheorie, wie er in der oben zitierten Einleitung klar zum Ausdruck bringt. Die Zeit war reif, Hilbert hatte das Problem formuliert, Kolmogorov nun seine Lösung.

Wir betrachten die **Ergebnismenge** Ω eines Zufallsexperiments. Die beobachtbaren **Ereignisse** $A \subseteq \Omega$ bilden eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Das **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist hierauf eine Abbildung $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$.

Um damit vernünftig rechnen zu können, benötigen wir folgendes:

- 0 Unmögliches Ereignis: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$ und

$$\mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

- 1 Sicheres Ereignis: Es gilt $\Omega \in \mathcal{A}$ und

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

- 2 Komplement: Aus $A \in \mathcal{A}$ folgt $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$ und

$$\mathbf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

- 3 Monotonie: Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$A \subseteq B \implies \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B).$$

Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- 4 Vereinigung: Aus $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $(A \cup B), (A \cap B) \in \mathcal{A}$ und

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

- 5 Paarweise Additivität: Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

- 6 Endliche Additivität: Aus $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ folgt $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$, und bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten:

$$\mathbf{P}(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

- 7 Abzählbare Additivität: Aus $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, und bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten:

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Diese Wunschliste ist noch redundant: (1,2,7) implizieren alle anderen. Übung! Wir extrahieren daher nur diese grundlegenden Eigenschaften.

Definition I2c: Algebren und endlich additive Maße

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt **Algebra** auf Ω , falls gilt:

- 1 **Leere Menge:** Es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- 2 **Komplemente:** Aus $A \in \mathcal{A}$ folgt $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$.
- 3 **Endliche Vereinigungen:** Aus $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **endlich-additives Maß**, falls gilt: Sind $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt, so folgt $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Für den Aufbau der Maßtheorie benötigen wir abzählbare Additivität:

Definition I2D: σ -Algebren und σ -additive Maße

Wir nennen $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine **σ -Algebra**, wenn neben (1–2) zudem gilt:

- 4 **Abzählbare Vereinigungen:** Aus $A_k \in \mathcal{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt (**σ -additives**) **Maß**, falls gilt: Ist eine abzählbare Familie $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ messbarer Mengen paarweise disjunkt, so folgt $\mu(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$.

Definition I2E: Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov 1933

(1) Ein **Maßraum** $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ besteht aus einer Grundmenge Ω , einer σ -Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und einem σ -additiven Maß $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$.

(2) Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, kurz **WRaum**, ist ein Maßraum mit normierter Gesamtmasse $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Aussage (1) fasst folgende drei Axiome / Rechenregeln zusammen:

- (1a) **Leere Menge:** Es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\mu(\emptyset) = 0$.
- (1b) **Komplemente:** Aus $A \in \mathcal{A}$ folgt $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$.
- (1c) **σ -Additivität:** Aus $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, sowie

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Wir nennen (Ω, \mathcal{A}) einen **Messraum** und μ hierauf ein **Maß**.

Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ nennen wir **messbar**, falls $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Das Maß μ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$ gilt, und **σ -endlich**, falls in \mathcal{A} eine Ausschöpfung $A_k \nearrow \Omega$ existiert mit $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei Ω eine beliebige Menge. Das **Zählmaß** $\sharp: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ordnet jeder Teilmenge $A \subseteq \Omega$ die Anzahl $\sharp A$ ihrer Elemente zu.

Allgemein sei $m: \Omega \rightarrow [0, \infty]: \omega \mapsto m(\omega)$ eine beliebige Funktion, die wir als Massenverteilung interpretieren. Diese definiert das **diskrete Maß**

$$\mu: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]: \mu(A) = \sum_{\omega \in A} m(\omega).$$

Für $m = 1$ ist dies das Zählmaß. Für $\mu(\Omega) = 1$ ist dies ein WMaß.

Beispiel: (Laplace) Im Falle $0 < \sharp\Omega < \infty$ können wir $m = 1/\sharp\Omega$ setzen und erhalten die **Gleichverteilung** $\mu: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ mit $\mu(A) = \sharp A/\sharp\Omega$.

Beispiel: Auf der Menge $\Omega = \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen haben wir die **Binomialverteilung** $B(n, t): k \mapsto \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$, die **Poisson-Verteilung** $P(\lambda): k \mapsto e^{-\lambda} \cdot \lambda^k/k!$ für $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sowie die **geometrische Verteilung** $G(q): k \mapsto (1-q)q^k$ für $q \in [0, 1[$.

Bemerkung: Mit $[\Omega]$ bezeichnen wir die Menge aller diskreten WMaße auf Ω . Ist Ω eine $(n+1)$ -elementige Menge, so ist $[\Omega]$ ein n -Simplex.

Die Borel-Algebra und das Lebesgue-Maß

Zum euklidischen Raum \mathbb{R}^n haben wir die **Borel-Algebra** $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ als kleinste σ -Algebra, die alle Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ enthält.

Hierauf existiert genau ein Maß $\text{vol}_n: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, das auf Quadern normiert ist durch $\text{vol}_n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ für alle $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ in \mathbb{R} . Wir nennen dies das **Lebesgue-Maß**.

Dieser Borel-Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \text{vol}_n)$ ist nicht endlich, aber σ -endlich, denn $\mathbb{R}^n = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} [-r, r]^n$ mit $\text{vol}_n([-r, r]^n) < \infty$.

Beispiel: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und hierauf $\mathcal{B}(\Omega) = \{A \in \mathcal{B}_n \mid A \subseteq \Omega\}$. Für $0 < \text{vol}_n(\Omega) < \infty$ haben wir die **kontinuierliche Gleichverteilung**

$$\mathbf{P}: \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1]: A \mapsto \mathbf{P}(A) = \frac{\text{vol}_n(A)}{\text{vol}_n(\Omega)}.$$

Jedes endliche Maß μ auf (Ω, \mathcal{A}) mit der Eigenschaft $0 < \mu(\Omega) < \infty$ können wir zu einem WMaß \mathbf{P} **normieren** durch $\mathbf{P}(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$ und erhalten so den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Mit $[\Omega, \mathcal{A}]$ bezeichnen wir die Menge aller WMaße \mathbf{P} auf (Ω, \mathcal{A}) .

Auf der obigen Maßdefinition baut man die Maß- und Integrationstheorie auf; darauf will ich in diesem kurzen Überblick nicht weiter eingehen. Wir werden Integrale im Folgenden selbstverständlich nutzen.

Eine **kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **WDichte** auf der Ergebnismenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine messbare Funktion

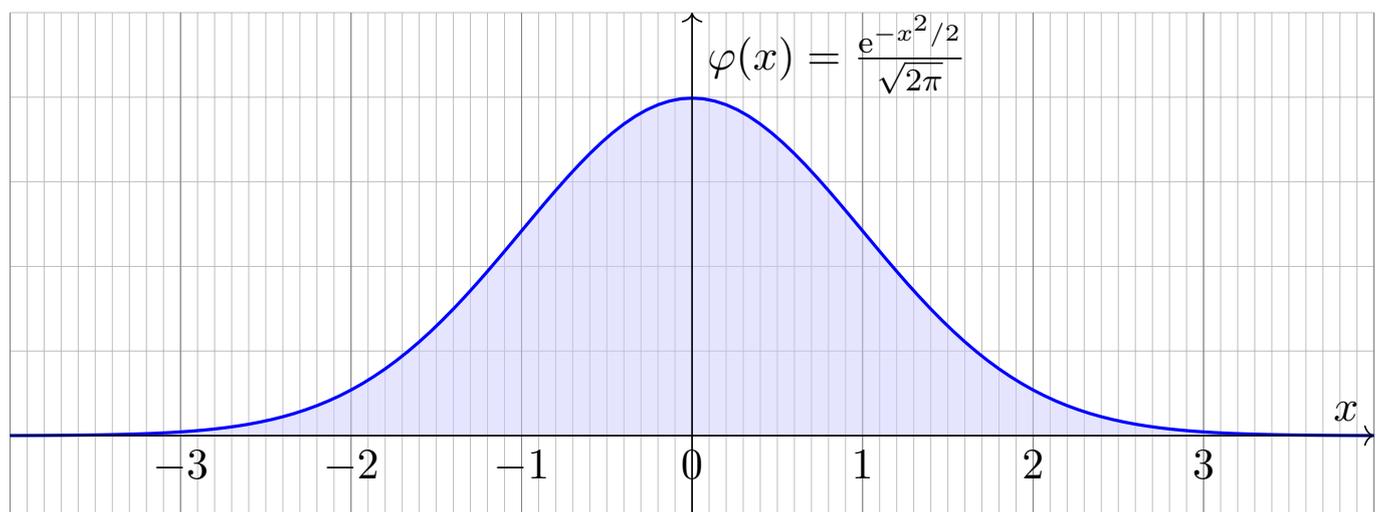
$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \int_{\Omega} f(x) dx = 1.$$

Diese definiert ein **kontinuierliches Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P} : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1] : A \mapsto \mathbf{P}(A) := \int_A f(x) dx.$$

Anschaulich misst $\mathbf{P}(A)$, wieviel Wkt auf die Menge A entfällt.

Beispiel: Die kont. Gleichverteilung auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 < \text{vol}_n(\Omega) < \infty$ entsteht durch Integration über die konstante Dichte $f = 1/\text{vol}_n(\Omega)$. In diesem Falle gilt einfach $\mathbf{P}(A) = \text{vol}_n(A)/\text{vol}_n(\Omega)$ wie in oben.



Zentrales Beispiel ist die **Gaußsche Glockenkurve**

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Dies ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte: Es gilt $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$. Wir nennen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die **Dichte der Standard-Normalverteilung**. Sie hat Erwartung $\int_{\mathbb{R}} x \varphi(x) dx = 0$ und Varianz $\int_{\mathbb{R}} x^2 \varphi(x) dx = 1$.

Definition I2F: bedingte Wkt, Kolmogorov 1933

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und hierin $\mathcal{B} := \{ B \in \mathcal{A} \mid 0 < \mu(B) < \infty \}$. Für $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ definieren wir die **bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$\mathbf{P}(A|B) := \mu(A \cap B) / \mu(B).$$

- (1) Wir haben $\emptyset \notin \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ und hierauf die Abbildung $\mathbf{P} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$.
- (2) Für jedes $B \in \mathcal{B}$ ist $\mathbf{P}(-|B)$ ein WMaß auf (Ω, \mathcal{A}) mit $\mathbf{P}(B|B) = 1$.
- (3) Für alle $A \in \mathcal{A}$ und $B \subseteq C$ in \mathcal{B} gilt $\mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(A \cap B|C)$.

Zum vorgegebenen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nennen wir $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ den kanonischen **bedingten Wahrscheinlichkeitsraum**, kurz **BWRaum**.

In reality every probability is conditional.

Alfréd Rényi (1921–1970), *Foundations of Probability* (1970)

Definition I2G: bedingter WRaum, Rényi 1954

Allgemein ist ein **bedingter Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ ein Messraum (Ω, \mathcal{A}) mit Daten $(\mathcal{B}, \mathbf{P})$ und den Eigenschaften (1–3).

Kolmogorovs Axiome I2E und die darauf aufbauende bedingte Wkt I2F sagen uns nicht, wo die Wkten herkommen oder wie sie zu finden sind, doch sie präzisieren die nötigen Daten und geforderten Eigenschaften.

Rényis Definition I2G ist allgemeiner und flexibler als Kolmogorovs I2F: Allgemein muss \mathcal{B} nicht jede Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbf{P}_\Omega(B) > 0$ enthalten. Darüber hinaus kann \mathcal{B} auch Mengen $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbf{P}_\Omega(B) = 0$ enthalten. Für jedes $B \in \mathcal{B}$ haben wir den WRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_B)$ mit $\mathbf{P}_B = \mathbf{P}(-|B)$, und diese Familie von WMaßen ist kohärent gemäß Eigenschaft (3).

Falls dividiert werden kann, so ergibt $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B|C) / \mathbf{P}(B|C)$ *kanonisch* die bedingte Wkt, sonst ist $\mathbf{P}(A|B)$ ein zusätzliches Datum.

An die Familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ stellen wir keine Forderungen außer $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

In I2F folgt aus $B, C \in \mathcal{B}$ zudem $B \cup C \in \mathcal{B}$. Für jeden σ -endlichen Maßraum existiert eine Familie $B_0, B_1, \dots \in \mathcal{B}$ mit $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \Omega$.

Diese zusätzlichen Eigenschaften betrachten wir später, motiviert durch die Bedürfnisse konkreter Anwendungen und weitreichender Theoreme.

 Alfréd Rényi: *Probability Theory*. Dover Publications 1970
 Alfréd Rényi: *Foundations of Probability*. Dover Publications 1970
 Alfréd Rényi, Maurice Fréchet: *Sur les espaces simples des Probabilités conditionnelles*. Annales de l'Institut Henri Poincaré 1 (1964) 3–21
 Kolmogorovs Axiome I2E und seine Formulierung der bedingten Wkt als Quotient I2F sind klar und einfach und als Grundlage bewährt. Mit einer Einschränkung: Niemals können wir durch 0 oder durch ∞ dividieren. Wir können jedoch mit 0 multiplizieren, daher drehen wir den Spieß um. Rényi kam so zu der grundlegenden und eleganten Erkenntnis, dass die bedingte Wkt das primitive Ausgangsdatum ist, nicht die absolute Wkt. Philosophisch-ästhetisch möchten wir unsere Axiome eleganter und vollständiger formulieren. Pragmatisch-rechnerisch wünschen wir uns eine größere Ausdrucksfähigkeit. Die Wkt 0 kommt tatsächlich vor! Insbesondere in der Spieltheorie treten diese Probleme regelmäßig auf. Die absolute Wkt impliziert die bedingte Wkt, wie oben gesehen. Es gibt allerdings auch Ausnahmen, und gerade auf die kommt es uns hier an.

Die axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die von A.N. Kolmogorov in seiner 1933 erschienenen Arbeit gegeben wurde, war die Grundlage der großartigen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die in den letzten zwei Jahrzehnten stattgefunden hat. Im Zuge der Entwicklung tauchten aber auch solche Probleme auf, die im Rahmen der Kolmogorovschen Theorie nicht behandelt werden konnten. Wir denken in erster Linie [an Maße in wichtigen Anwendungen...], die nicht normiert werden können [...]

So hat es z.B. keinen Sinn, von einer im ganzen n -dimensionalen euklidischen Raum gleichmäßigen Verteilung zu sprechen; ebenso gibt es keine Wahrscheinlichkeitsverteilung, bei der abzählbar unendlich viele Zustände einer Markovschen Kette gleich wahrscheinlich wären. [...]

Kolmogorov selbst [hat] die Idee einer solchen Weiterentwicklung [...] erwähnt, aber über seine disbezüglichen Gedanken nichts veröffentlicht.

Alfréd Rényi, *Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1954)

Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ mit Punktmassen $m = \mathbf{I}_{\{1,2,3,4,5,6\}}$.

(0) Das Ereignis Ω tritt ein. Was sind die Wkten $u(x) = \mathbf{P}(\{x\}|\Omega)$?
Es gilt $u(x) = 1/6$ für $x \in \{1, \dots, 6\}$ und $m(x) = 0$ sonst.

(1) Angenommen, das Ereignis $B = \{1, \dots, 5\}$ tritt ein. Was sind die Wkten $u(x) = \mathbf{P}(\{x\}|B)$? Es gilt $u(x) = 1/5$ für $x \in B$, sonst $u(x) = 0$.

(2) Angenommen, das Ereignis $C = \{7, 8, 9\}$ tritt ein. Was sind die Wkten $u(x) = \mathbf{P}(\{x\}|C)$? Es gilt $u(x) = 0$ für $x \notin C$. Auf C ist jede WVerteilung möglich, etwa $u(7) = 1/2$, $u(8) = 1/3$, $u(9) = 1/6$.

Ist Frage (2) unsinnig? Das kommt auf den Anwendungskontext an!

Erste Interpretation: Wir werfen einen fairen Würfel 1, 2, 3, 4, 5, 6.

In diesem Modell tritt das Ereignis C niemals ein. Es ist nicht nur „absolut unwahrscheinlich“, sondern strenger „logisch unmöglich“.

Zweite Interpretation: Wir ziehen zufällig eine reelle Zahl $\omega \in [0, 1]$ gemäß kontinuierlicher Gleichverteilung. Im irrationalen Falle $\omega \notin \mathbb{Q}$ werfen wir einen fairen Würfel 1, 2, 3, 4, 5, 6, andernfalls 7, 7, 7, 8, 8, 9.

Die Gleichverteilung auf \mathbb{N} und Primzahlsatz

Sei $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$ die Menge der Primzahlen in \mathbb{N} .

Aufgabe: Mit welcher Wkt ist eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ prim?

(1) Warum hat die Frage zunächst keinen Sinn? (2) Wie dann doch?

Lösung: (1) Die Gleichverteilung wird realisiert durch das Zählmaß.

☹️ Wegen $\#\mathbb{N} = \infty$ können wir μ nicht zu einem WMaß normieren.

(2) Wir nutzen die Primzahlfunktion $\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

😊 Für $B = \{1, \dots, n\}$ haben wir die bedingte Wkt $\mathbf{P}(\mathbb{P}|B) = \pi(n)/n$.

Satz I2H: Primzahlsatz, quantitativ nach Dusart 2010

(0) Asymptotisch gilt $\pi(n) \sim n/\ln n$, das bedeutet ausgeschrieben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi(n)}{n/\ln n} \right] = 1$$

(1) Für alle $n \geq 60184$ gelten die expliziten Schranken

$$\frac{n}{\ln n - 1.0} < \pi(n) < \frac{n}{\ln n - 1.1}$$

Beispiel: Jede messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert einen Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ mit der Borel–Algebra \mathcal{A} und hierauf dem Maß

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty] : A \mapsto \mu(A) := \int_A f(x) dx.$$

Daraus erhalten wir gemäß I2F den BWRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ mit $\mathcal{B} := \{ B \in \mathcal{A} \mid 0 < \mu(B) < \infty \}$ und $\mathbf{P}(A|B) = \mu(A \cap B)/\mu(B)$.

Die konstante Funktion $f = 1$ beschreibt die Gleichverteilung auf \mathbb{R}^n , also das Lebesgue–Maß $\mu = \text{vol}_n$. Es ist nicht endlich, daher existiert auf dem euklidischen Raum \mathbb{R}^n kein WMaß für die Gleichverteilung. Doch als Ersatz existiert immerhin das oben erklärte BWMaß \mathbf{P} .

Der Lebesgue–Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ ist unendlich, doch σ –endlich. Somit geht keine Information verloren, die WMaße $\mathbf{P}(-|B)$ mit $B \in \mathcal{B}$ beschreiben das Gesamtmaß μ bis auf einen konstanten Faktor. Übung: Formulieren Sie dies als Satz und beweisen sie ihn.

Diskrete Gleichverteilung auf einer Menge Ω

Beispiel: Sei Ω eine Menge. Jede Funktion $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit der Potenzmenge $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und dem Maß

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty] : A \mapsto \mu(A) := \sum_{x \in \Omega} m(x).$$

Daraus erhalten wir gemäß I2F den BWRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ mit $\mathcal{B} := \{ B \in \mathcal{A} \mid 0 < \mu(B) < \infty \}$ und $\mathbf{P}(A|B) = \mu(A \cap B)/\mu(B)$.

Die konstante Funktion $m = 1$ beschreibt die Gleichverteilung auf Ω , also das Zählmaß $\mu = \sharp$. Es ist endlich gdw Ω endlich ist. Ist die Menge Ω unendlich, so existiert kein WMaß für die Gleichverteilung auf Ω . Doch als Ersatz existiert immerhin das oben erklärte BWMaß \mathbf{P} .

Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist σ –endlich genau dann, wenn der Träger $\text{supp}(m) := \{ x \in \Omega \mid m(x) > 0 \}$ des Maßes abzählbar ist. (Übung!) In diesem Falle geht keine Information verloren, die WMaße $\mathbf{P}(-|B)$ mit $B \in \mathcal{B}$ beschreiben das Gesamtmaß μ bis auf einen konstanten Faktor.

Sei $T : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \nu)$ eine messbare Abbildung von Maßräumen. Eine **Disintegration** des Maßes μ bezüglich (T, ν) ist eine Abbildung $\mu' : \mathcal{A} \times Y \rightarrow [0, \infty] : (A, y) \mapsto \mu'(A | y) = \mu'_y(A)$, sodass gilt:

- 1 Für jedes $y \in Y$ ist $\mu'_y : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty] : A \mapsto \mu'_y(A)$ ein Maß getragen auf $T^{-1}(y)$, also $\mu'_y(A) = 0$ für $A \subseteq X \setminus T^{-1}(y)$.
- 2 Für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist $Y \rightarrow [0, \infty] : y \mapsto \mu'(A | y)$ messbar und erfüllt die Disintegrationsformel $\mu(A) = \int_{y \in Y} \mu'(A | y) d\nu(y)$.

Ist μ ein WMaß, so auch das Bildmaß $\nu := \mu \circ T^{-1}$ und μ'_y für ν -fast alle $y \in Y$. Wir nennen dann μ' die **bedingte Wkt** von μ bezüglich T .

Für jede messbare Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ gilt dann

$$\int_{x \in X} |f(x)| d\mu(x) = \int_{y \in Y} \left[\int_{x \in T^{-1}(y)} |f(x)| d\mu'(x | y) \right] d\nu(y).$$

Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_{x \in X} f(x) d\mu(x) = \int_{y \in Y} \left[\int_{x \in T^{-1}(y)} f(x) d\mu'(x | y) \right] d\nu(y).$$

😊 Für **endliche / diskrete Maße** ist diese Konstruktion elementar: Die bedingte Wkt μ' ist eine stochastische Matrix wie oben erklärt. Wir wollen allgemein bedingte Wkten und Erwartungen erklären. Es lohnt sich, hier möglichst allgemeine Maße zu behandeln.

Zunächst erlauben wir, zwei **beliebige Maße** μ auf (X, \mathcal{A}) und ν auf (Y, \mathcal{B}) zu vergleichen mittels einer beliebigen messbaren Abbildung $T : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$; wir verlangen keine WMaße oder $\nu = \mu \circ T^{-1}$. Die Beispiele zeigen vertraute Situationen der Integrationstheorie!

Besonders interessant sind WMaße $\mu \in [X, \mathcal{A}]$. Wir können dann das Bildmaß $\nu := T_*\mu \in [Y, \mathcal{B}]$ betrachten. Nach Disintegration ist auch μ'_y ein WMaß für ν -fast alle $y \in Y$, nach Korrektur sogar für alle $y \in Y$. Wir nennen dann μ' die **bedingte Wkt** von μ bezüglich T .

Zur Betonung heißt μ' auch der **Erwartungskern** von μ bezüglich T . Dabei ist das WMaß μ'_y eindeutig festgelegt für ν -fast alle $y \in Y$. Disintegrationssatz: Die Existenz von μ' ist gesichert für gutartige Messräume, etwa vollständige metrische Räume mit Borel- σ -Algebra.

Beispiel: Sei $T = \text{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \nu)$ mit Lebesgue–Maß $\nu = \text{vol}_1$ und $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$, etwa mit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \text{AC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann gilt $\mu'_y = f(y) \cdot \delta_y$ mit $f = F'$ für (ν –fast) alle $y \in \mathbb{R}$:

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a) = \int_{y \in]a, b]} f(y) \, dy = \int_{y \in]a, b]} \int_x f(y) \, d\delta_y(x) \, dy$$

😊 Das ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI); ebenso für $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig bezüglich des Lebesgue–Maßes.

Beispiel: Sei $T = \text{id}_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \nu)$ mit $\nu = \text{vol}_n$ und $\mu = f \cdot \nu$, also $\mu(A) = \int_{x \in A} f(x) \, dx$, etwa mit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann gilt $\mu'_y = f(y) \cdot \delta_y$ für (ν –fast) alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\mu(A) = \int_{x \in A} f(x) \, dx = \int_{y \in A} \int_x f(y) \, d\delta_y(x) \, dy$$

😊 Der Satz von Radon–Nikodym klärt den Fall $T = \text{id}$ allgemein; hierzu sei μ absolut stetig bezüglich ν , also $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.

Beispiel: Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $n = p + q$. Wir betrachten die Projektion

$$T : (\mathbb{R}^n, \text{vol}_n) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \text{vol}_p) : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p).$$

Dann gilt $\mu'_y = \text{vol}_q$ für (fast) alle $y \in \mathbb{R}^p$.

😊 Der Satz von Fubini–Tonelli klärt den Produktfall $X \times Y$ allgemein. Bei Abhängigkeit, etwa Markov–Ketten, entsteht ein Erwartungskern.

Beispiel: Wir zerlegen den \mathbb{R}^n in konzentrische Sphären vermöge

$$T : (\mathbb{R}^n, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}, \nu) : x \mapsto r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

mit $\mu = \text{vol}_n$ und $\nu = \text{vol}_1$. Dann ist μ'_r das sphärische Maß auf $r\mathbb{S}^{n-1}$.

😊 Das ist die „Zwiebelintegration“ in sphärischen Koordinaten! Der Transformationssatz klärt \mathcal{C}^1 –Koordinatenwechsel allgemein. Allgemein gilt hierzu die Coflächen-Formel [*coarea formula*].

😊 Die Disintegration fasst zahlreiche vertraute Situationen zusammen. Speziell für die WTheorie und Spiele liefert sie uns bedingte Wkten!

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Zwei Spieler, $I = \{ 1=Alice, 2=Bob \}$, spielen Poker (stark vereinfacht): Der Geber gibt jedem Spieler i verdeckt eine Karte $\omega_i \in \Omega_i := \{0, 1\}$. Das entspricht dem Zufallszug $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega := \{00, 01, 10, 11\}$. Der Mindesteinsatz ist α und der Höchsteinsatz β , wobei $0 < \alpha < \beta$. Spieler i spielt $s_i \in S_i := \{ Lo=Mindesteinsatz, Hi=Höchsteinsatz \}$. Spielen beide verschieden, so gewinnt der Spieler mit Höchsteinsatz. Spielen beide gleich, so wird aufgedeckt, und die höhere Karte gewinnt.

Aufgabe: Explizieren Sie die Auszahlungen u bzw. \bar{u} mit Zufallszug.

Lösung: Wir erhalten $u : \Omega \times S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Auszahlungen

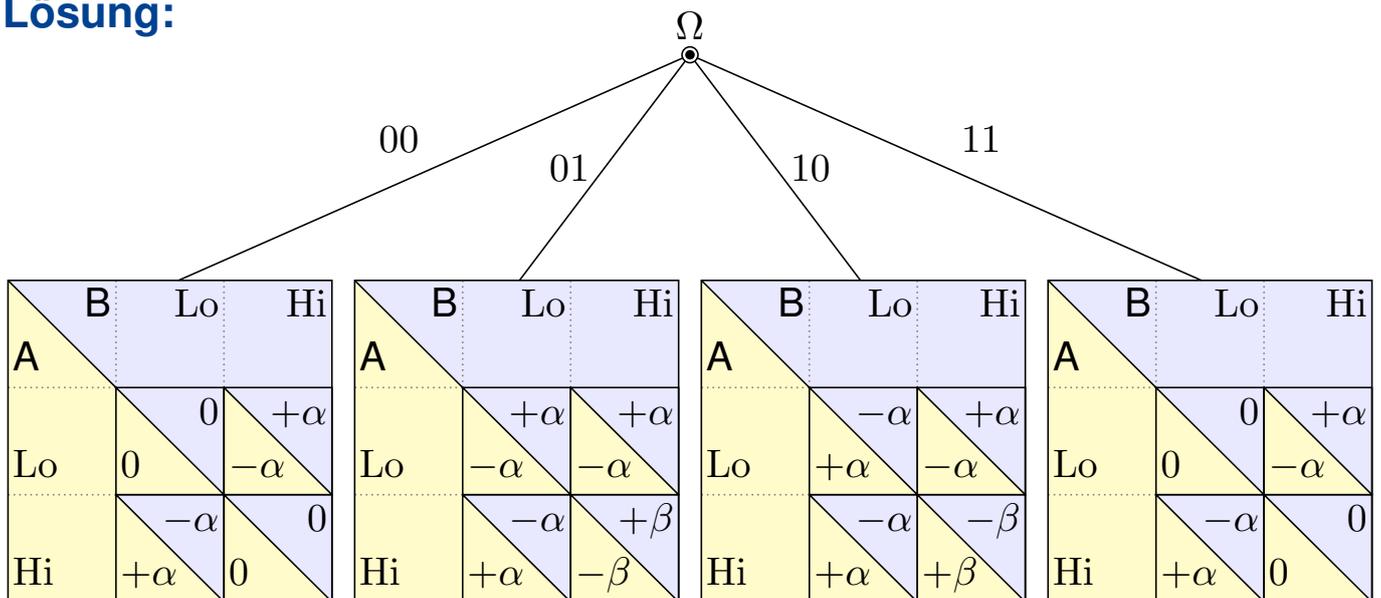
$$u_1(\omega, s_1, s_2) = -u_2(\omega, s_1, s_2) = \begin{cases} +\alpha & \text{falls } (s_1, s_2) = (Hi, Lo), \\ -\alpha & \text{falls } (s_1, s_2) = (Lo, Hi), \\ (\omega_1 - \omega_2)\alpha & \text{falls } (s_1, s_2) = (Lo, Lo), \\ (\omega_1 - \omega_2)\beta & \text{falls } (s_1, s_2) = (Hi, Hi). \end{cases}$$

Wenn die Spieler randomisieren dürfen, so wählt jeder $s_i \in \bar{S}_i = [Lo, Hi]$. Wir erhalten wie üblich die affine Fortsetzung $\bar{u} : \Omega \times \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Aufgabe: Schreiben Sie für jede mögliche Kartenverteilung $\omega \in \Omega$ das Spiel $u^\omega : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto u(\omega, s_1, s_2)$ als Bimatrix.

Lösung:



Dieses Spiel hat unvollständige Information: Die Auszahlungen sind nicht vollständig bekannt. Die Harsanyi–Transformation macht aus u das Spiel \hat{u} mit vollständiger (aber weiterhin imperfekter) Information.

Jeder Spieler wählt seine Strategie $\hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i : \omega_i \mapsto \hat{s}_i(\omega_i)$.

Er nutzt also die erweiterte Strategiemenge $\hat{S}_i := S_i^{\Omega_i} = \{ \hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i \}$.

Jede solche Abbildung $\hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i$ legt fest, wie der Spieler i die von ihm empfangene Karte $\omega_i \in \Omega_i$ in seine Aktion $\hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$ übersetzt.

Für jeden Zufallszug $\omega \in \Omega$ ist damit der Verlauf des Spiels festgelegt.

Aufgabe: Welche Auszahlung $\hat{u}_i(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ erwarten Alice und Bob?

Was sind demnach Gleichgewichte im so gemittelten Spiel \hat{u} ?

Lösung: Spieler i fixiert seine Annahmen über die Kartenverteilung als ein WMaß \mathbf{P}_i auf der Menge Ω . Die von i erwartete Auszahlung ist dann

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\hat{s}_1, \hat{s}_2) &:= \mathbf{E}_i[\omega \mapsto u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \hat{s}_2(\omega_2))] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \hat{s}_2(\omega_2)) \cdot \mathbf{P}_i(\omega) \end{aligned}$$

Wir erhalten so aus u und $\mathbf{P}_\bullet = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ das strategische Spiel

$$\hat{u} : \hat{S}_1 \times \hat{S}_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (\hat{s}_1, \hat{s}_2) \mapsto (\hat{u}_1(\hat{s}_1, \hat{s}_2), \hat{u}_2(\hat{s}_1, \hat{s}_2))$$

😊 Hier können wir unsere erprobten Lösungsmethoden anwenden, insb. dominante / dominierte Strategien und Nash–Gleichgewichte!

Das Bayes–Spiel u enthält ein Zufallselement $\omega \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$:

Der Zufallszug ω geht entscheidend in die Auszahlungsfunktion u ein.

Daher erweitern wir die Strategiemenge S_i zu $\hat{S}_i := \{ \hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i \}$.

Durch Mittelwertbildung erhalten wir das deterministische Spiel \hat{u} .

Hierzu nutzt und benötigt jeder Spieler $i \in I$ sein WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$.

Zur Vereinfachung der Spieldaten geht man oft von gemeinsamen Überzeugungen aus [*common prior*], also $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$. Das bedeutet anschaulich: Die Spieler sind sich einig, wie die Welt funktioniert.

Das ist jedoch nicht zwingend. Es herrscht Glaubensfreiheit, und ein jeder darf seine Erwartung berechnen wie er will. Wir diskutieren hier nicht, was jeder Spieler glaubt über den Glauben des anderen, etc. Jedes Spiel u^ω ist ein Nullsummenspiel, \hat{u} hingegen nicht immer!

Nash–Gleichgewicht bedeutet hier wie zuvor: Jeder Spieler kann seine Strategie (und seine Überzeugung) ebenso gut öffentlich bekanntgeben. Die gegenseitige Kenntnis der Strategien ändert nicht das Verhalten: Keiner der Spieler hat Anlass, seine Strategie zu ändern.

Beispiel: Alice ist optimistisch und glaubt $P_1(10) = P_1(11) = 1/2$.
 Ebenso ist Bob optimistisch und glaubt $P_2(01) = P_2(11) = 1/2$.

Aufgabe: Schreiben Sie hierzu das Spiel $2\hat{u}$ als Bimatrix. **Lösung:**

		Bob			
		LoLo	LoHi	HiLo	HiHi
Alice	LoLo	$+\alpha$	$+2\alpha$	$+\alpha$	$+2\alpha$
	LoHi	$+2\alpha$	$+\alpha$	$\alpha + \beta$	$+\beta$
	HiLo	$+\alpha$	$\alpha + \beta$	$-\alpha$	$\alpha + \beta$
	HiHi	$+2\alpha$	$+\beta$	$-\alpha$	$+\beta$
	$+\alpha$	0	$-\alpha$	-2α	

Keine gemeinsame Überzeugung, kein Nullsummenspiel mehr!

Beispiel: Alice hofft und glaubt $P_1(00) = P_1(10) = P_1(11) = 1/3$.
 Ebenso hofft Bob und glaubt $P_2(00) = P_2(01) = P_2(11) = 1/3$.

Aufgabe: Schreiben Sie hierzu das Spiel $3\hat{u}$ als Bimatrix. **Lösung:**

		Bob			
		LoLo	LoHi	HiLo	HiHi
Alice	LoLo	$+\alpha$	$+3\alpha$
	LoHi
	HiLo
	HiHi	$+3\alpha$	$+\beta$
	$-\alpha$	$+\beta$	

Keine gemeinsame Überzeugung, kein Nullsummenspiel mehr!

Beispiel: Alice hofft und glaubt $P_1(00) = P_1(10) = P_1(11) = 1/3$.
 Bob ist pessimistisch glaubt $P_2(00) = P_2(10) = P_2(11) = 1/3$.

Aufgabe: Schreiben Sie hierzu das Spiel $3\hat{u}$ als Bimatrix. **Lösung:**

Alice \ Bob	LoLo	LoHi	HiLo	HiHi
LoLo	$-\alpha$	$+3\alpha$
LoHi	$+\alpha$	-3α
HiLo
HiHi

Gemeinsame Überzeugung, wieder Nullsummenspiel!

Beispiel: Beide Spieler glauben $P_1 = P_2 =$ Gleichverteilung auf Ω .
 Das präzisiert, was wir unter einer fairen Kartenverteilung verstehen.

Aufgabe: Schreiben Sie $4\hat{u}$ explizit als Bimatrixspiel aus. **Lösung:**

Alice \ Bob	LoLo	LoHi	HiLo	HiHi
LoLo	0	$+4\alpha$
LoHi	0	-4α
HiLo
HiHi

Gemeinsame Überzeugung, wieder Nullsummenspiel!

Aufgabe: Beide Spieler glauben $P_1 = P_2 =$ Gleichverteilung auf Ω . Jeder Spielertyp $j = (i, \theta)$ spielt eine gemischte Strategie $s_j \in [S_i]$. Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte! Wann / Lohnt sich Bluffen?

Lösung: Wir rechnen im Typenmodell, (A, ω_1) gegen (B, ω_2) :

	Bob	$B0 \mapsto Lo$	$B0 \mapsto Hi$	$B1 \mapsto Lo$	$B1 \mapsto Hi$
Alice					
$A0 \mapsto Lo$	0	0	$+\alpha$	$+\alpha$	$+\alpha$
$A0 \mapsto Hi$	$+\alpha$	$-\alpha$	0	$-\alpha$	$+\beta$
$A1 \mapsto Lo$	$+\alpha$	$-\alpha$	$+\alpha$	0	$+\alpha$
$A1 \mapsto Hi$	$+\alpha$	$-\alpha$	$-\beta$	$-\alpha$	0

Jeder Spielertyp $A\theta$ und $B\theta$ kann eine gemischte Strategie spielen, geschrieben $A\theta \mapsto (1 - p_\theta)Lo + p_\theta Hi$ und $B\theta \mapsto (1 - q_\theta)Lo + q_\theta Hi$.

Wir lassen Spielertypen mit ihren Strategien gegeneinander antreten:

- $A0$ vs $B0$ ergibt: $u_1 = -u_2 = +\alpha p_0 - \alpha q_0$
- $A1$ vs $B1$ ergibt: $u_1 = -u_2 = +\alpha p_1 - \alpha q_1$
- $A0$ vs $B1$ ergibt: $u_1 = -u_2 = +2\alpha p_0 - (\alpha + \beta)p_0 q_1 - \alpha$
- $A1$ vs $B0$ ergibt: $u_1 = -u_2 = -2\alpha q_0 + (\alpha + \beta)p_1 q_0 + \alpha$

Jeder Spielertyp nutzt nun seine bedingte Wkt, hier Gleichverteilung:

- $A1$ vs B ergibt: $2u_1 = p_1[\alpha + (\alpha + \beta)q_0] - 2\alpha q_0 - \alpha q_1 + \alpha$
 Spielertyp $A1$ maximiert u_1 : Wegen $[\alpha + (\alpha + \beta)q_0] > 0$ gilt $p_1 = 1$.
 Anschaulich: Bei guter Hand ist es strikt dominant, hoch zu pokern.
- $A0$ vs B ergibt: $2u_1 = p_0[3\alpha - (\alpha + \beta)q_1] - \alpha q_0 - \alpha$
 Spielertyp $A0$ maximiert u_1 : Wenn $q_1 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{3\alpha}{\alpha + \beta}$, dann $p_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ ? \\ 1 \end{Bmatrix}$.

Dasselbe gilt mit vertauschten Rollen von p und q .

Jeder Spielertyp maximiert seine Auszahlung:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ q_1 \end{array} = 1 \quad \& \quad p_1 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{3\alpha}{\alpha + \beta} \Rightarrow \begin{array}{l} q_0 \\ p_0 \end{array} = \begin{cases} 0 \\ ? \\ 1 \end{cases}$$

Je nach Parameterlage $0 < \alpha < \beta$ unterscheiden wir drei Fälle:

- Sei $2\alpha < \beta$: Aus $p_1 = 1 > \frac{3\alpha}{\alpha + \beta}$ folgt $q_0 = 0$. Aus $q_1 = 1$ folgt $p_0 = 0$. Einziges Gleichgewicht ist $(p_0, p_1; q_0, q_1) = (0, 1; 0, 1)$. *Alle ehrlich!*
- Sei $\beta < 2\alpha$: Aus $p_1 = 1 < \frac{3\alpha}{\alpha + \beta}$ folgt $q_0 = 1$. Aus $q_1 = 1$ folgt $p_0 = 1$. Einziges Gleichgewicht ist $(p_0, p_1; q_0, q_1) = (1, 1; 1, 1)$. *Always hi!*
- Sei $\beta = 2\alpha$. Aus $p_1 = 1 = \frac{3\alpha}{\alpha + \beta}$ folgt $q_0 = ?$. Aus $q_1 = 1$ folgt $p_0 = ?$. Gleichgewichte sind $(p_0, p_1; q_0, q_1) = (?, 1; ?, 1)$. *Bluff ist möglich!*

😊 Das löst Simultan-Poker für zwei Personen und zwei Karten. Das ist zwar nur der allereinfachste Fall, wahrlich noch zu simpel, doch immerhin kennen wir jetzt genau die optimale Strategie!

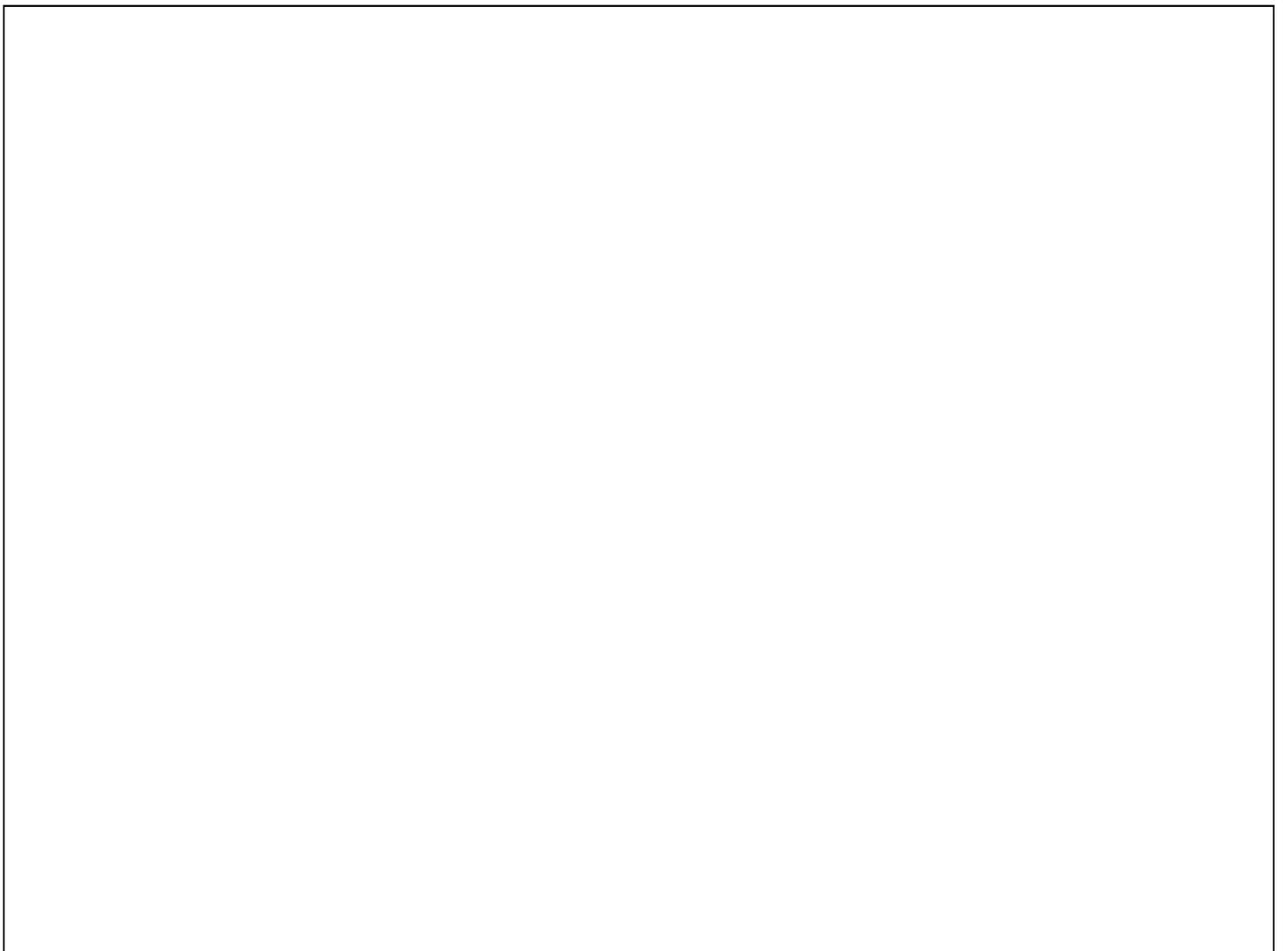
😊 Die Rechnungen sind etwas länglich, aber vollkommen elementar. Die berechneten Antworten sind vermutlich nicht anschaulich erratbar. Versuchen Sie, alles nachzurechnen und anschaulich zu erklären: Wie begründen Sie den Übergang von $\beta < 2\alpha$ zu $\beta > 2\alpha$?

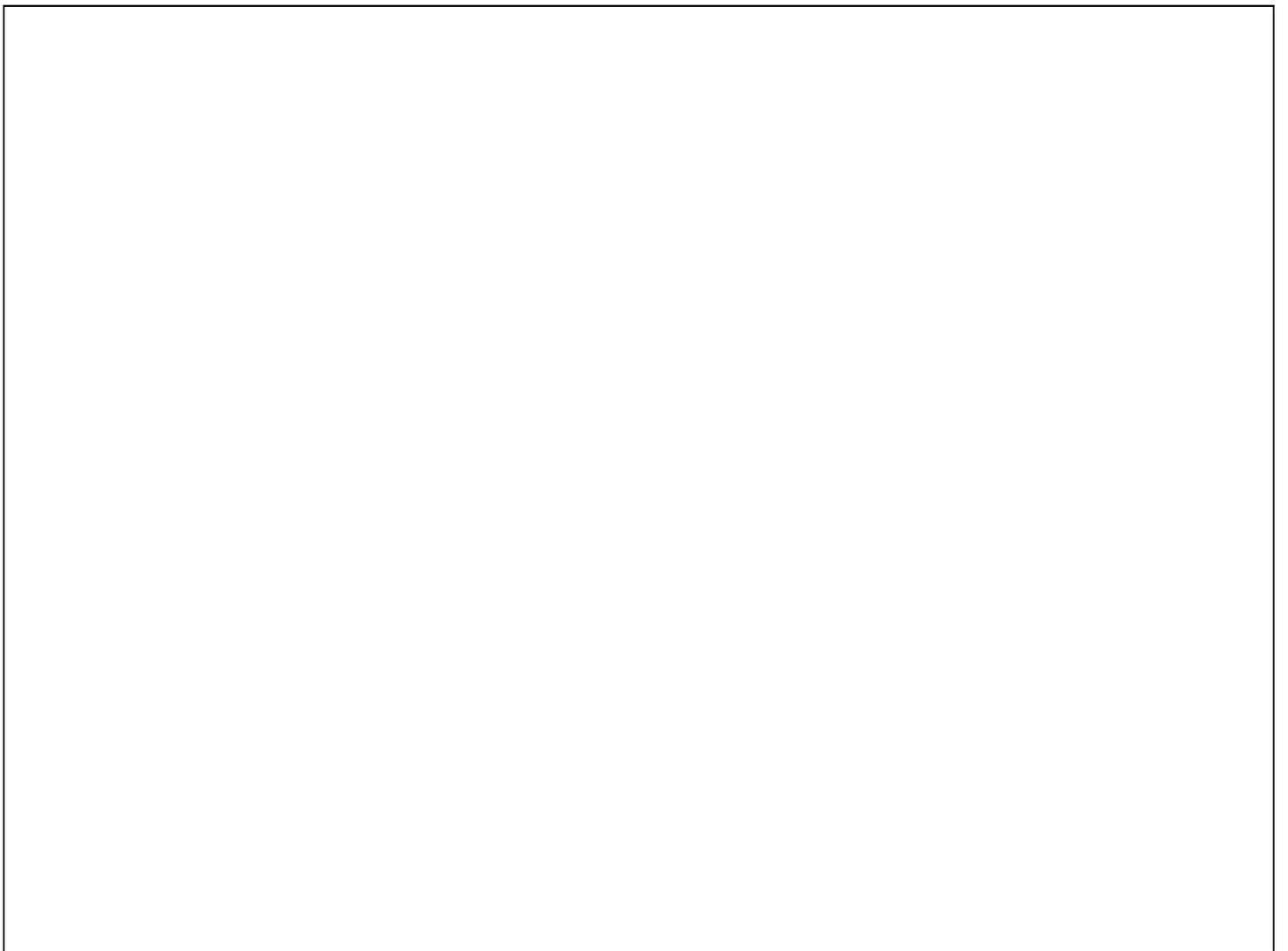
😊 Das Spiel wird wesentlich interessanter mit drei oder mehr Karten, mit Gleichverteilung auf $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, \dots, k\}$ und $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ oder Ziehung ohne Zurücklegen aus der Kartenmenge $\Omega = \{1, 2, \dots, k\}$. Das Modell ähnelt damit immer besser realen Pokerspielen.

😞 Bei Zwei-Karten-Poker ist Bluffen zwar in Spezialfällen möglich, es bringt aber keinen spürbaren Vorteil. Erst bei drei oder mehr Karten ist Bluffen lukrativ, sogar zwingend erforderlich zur Gewinnmaximierung.

Übung: Formulieren Sie die Ungleichungen für Poker mit k Karten. Rechnen Sie Drei-Karten-Poker ($k = 3$) explizit aus, evtl. numerisch.

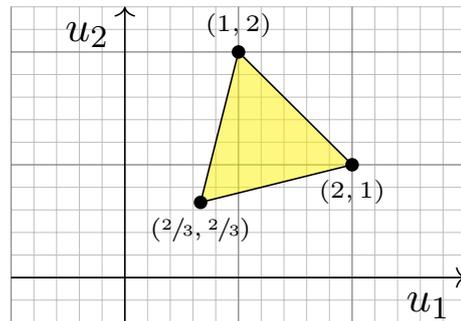
Übung: Untersuchen Sie schließlich das kontinuierliche Pokerspiel mit Gleichverteilung auf Intervallen $\Omega_1 = \Omega_2 = [0, 1]$ und $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.





Bislang nahmen wir an, dass Spieler nicht miteinander kommunizieren dürfen / können / wollen. Nützt Kommunikation vor dem Spiel? Wie?

	B	Bach	Straw
A			
Bach	1	2	0
Straw	0	0	2



	B	Bach	Straw
A		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
Bach	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
Straw	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

Produktmaß: unabhängig

	B	Bach	Straw
A		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Bach	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Straw	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

stochastisch abhängig / korreliert

Korrelierte Strategien: Bach oder Strawinsky

Als erstes, sehr einfaches Beispiel betrachten wir Bach-oder-Strawinsky. Gleichgewichte von \bar{u} sind (Bach, Bach) und (Strawinsky, Strawinsky) sowie gemischt ($\frac{1}{3} \cdot \text{Bach} + \frac{2}{3} \cdot \text{Strawinsky}$, $\frac{2}{3} \cdot \text{Bach} + \frac{1}{3} \cdot \text{Strawinsky}$). Jede dieser Vereinbarung ist stabil [*self enforcing*]: Nash-Gleichgewicht!

Für die Kommunikation vor dem Spiel bedeutet das ganz konkret: Wenn die Spieler sich auf eine solche Vorgehensweise absprechen, dann gibt es während des Spiels keinen Anreiz, davon abzuweichen. Stabile Vereinbarungen sind somit vernünftig und realistisch möglich.

Umgekehrt betrachtet: Alle anderen Vereinbarungen sind unrealistisch, denn alle wissen, sobald die Spieler den Verhandlungstisch verlassen, spürt mindestens einer den Anreiz, die Vereinbarung zu brechen. Instabile Vereinbarungen sind nicht glaubwürdig oder diskussionswürdig.

Einzig mögliche Ausnahme wäre, dass der Anreiz mangels Rationalität nicht erkannt wird. Solche Absprachen kommen real immer wieder vor: Kurzfristig Aufschwätzen ist keine nachhaltig tragfähige Abmachung. (Schönreden, über den Tisch ziehen, Haustürgeschäft, Rücktritt)

Die Spieler können einen Unparteiischen bitten, eine Münze zu werfen, allgemein eine Zufallsvariable $s : (\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow \text{NE}(\bar{u}) : \omega \mapsto (s_1(\omega), s_2(\omega))$. Jedes so ausgeloste Strategiepaar ist stabil, da Nash–Gleichgewicht! Damit erreichen die Spieler die **konvexe Hülle** aller NE-Auszahlungen.

Dasselbe Signal $\omega \in \Omega$ muss hierzu beiden Spielern zugänglich sein, um daraus die vereinbarte Strategie $s_1(\omega)$ und $s_2(\omega)$ zu bestimmen. Wenn die Spieler sich auf eine solche Vorgehensweise absprechen, dann gibt es während des Spiels keinen Anreiz, davon abzuweichen.

Hierzu muss ein verlässlicher Signalgeber gefunden werden, dem beide Spieler vertrauen. Das muss vorab schon in den Verhandlungen geklärt werden, denn jede mögliche Auslosung soll anschließend von beiden akzeptiert werden. Im Zweifel können Abmachungen zerbrechen.

Geht vielleicht noch mehr? Geometrisch gesehen passiert folgendes: Die Strategiemenge S_i wird zum Simplex $\bar{S}_i = [S_i]$, also WMaßen auf S_i ; $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ wird zu $\bar{S} = [S_1] \times \cdots \times [S_n]$, also Produktmaßen; dank Absprache zu $[S_1 \times \cdots \times S_n]$, also beliebigen WMaßen auf S .

 Die **Absprache** vor dem Spiel ist während des Spiels nicht bindend. Das Spiel u bleibt unverändert, insbesondere erweitern wir es hier nicht um eine Belohnung / Bestrafung oder Gerichtsbarkeit für Abmachungen. Absprachen müssen im Spiel stabil sein, also ein Nash–Gleichgewicht.

Was interessiert mich mein törichtes Geschwätz von gestern?

Es kann mich doch niemand daran hindern, jeden Tag klüger zu werden.

Konrad Adenauer (1876–1967) zugeschrieben

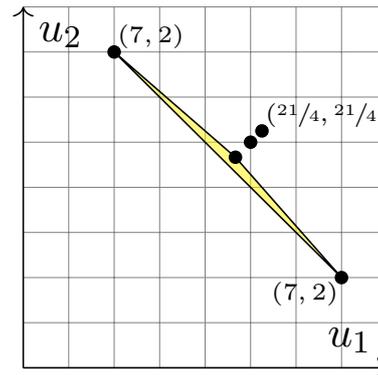
Lässt sich mehr erreichen als die konvexe Hülle $[\text{NE}(\bar{u})]$? Sicher nicht durch ein einziges Signal $\omega \in \Omega$, das für alle gleichermaßen sichtbar ist. Das kann jedoch gelingen, wenn jeder Spieler sein eigenes Signal $T_i(\omega)$ vom Signalgeber erhält. Diese einfache doch geniale Idee stammt von Robert Aumann 1974 und führt zu **korrelierten Gleichgewichten**.

Anschaulich gesagt, besteht Aumanns Idee aus folgendem Trick: Die Spieler können künstlich ein Zufallselement einführen sowie unvollständige Information, und somit neue Gleichgewichte kreieren. Wir zeigen zunächst an Beispielen, dass dies tatsächlich helfen kann!

Aufgabe: Analysieren Sie das *Chicken-Game* / *Feige-oder-mutig*.

		B	
		feige	mutig
A	feige	$\frac{2}{3}$ 6, $\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$ 2, $\frac{2}{9}$
	mutig	$\frac{1}{3}$ 7, $\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$ 0, $\frac{1}{9}$

Produktmaß: unabhängig



		B	
		feige	mutig
A	feige	$\frac{2}{3}$ 6, $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ 2, $\frac{1}{3}$
	mutig	$\frac{1}{3}$ 7, $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ 0, 0

stochastisch abhängig / korreliert

		B	
		feige	mutig
A	feige	$\frac{3}{4}$ 6, $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ 2, $\frac{1}{4}$
	mutig	$\frac{1}{4}$ 7, $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$ 0, 0

stochastisch abhängig / korreliert

Korrelierte Strategien: Chicken Game

Lösung: (1) Gleichgewichte von \bar{u} sind (feige, mutig) und (mutig, feige) sowie gemischt ($\frac{2}{3}$ feige + $\frac{1}{3}$ mutig, $\frac{2}{3}$ feige + $\frac{1}{3}$ mutig) mit Auszahlungen (2, 7) und (7, 2) sowie ($\frac{14}{3}$, $\frac{14}{3}$). Hier $\frac{14}{3} \approx 4.66 > 4.5 = \frac{7+2}{2}$. Jede dieser Vereinbarung ist selbst-stabilisierend [*self enforcing*], denn keiner hat einen Vorteil davon, einseitig abzuweichen.

(2) Ein unparteiischer Signalgeber [engl. *signalling device*] lost eines von drei Paaren aus gemäß der Gleichverteilung $\frac{1}{3}(f, f) + \frac{1}{3}(f, m) + \frac{1}{3}(m, f)$ und empfiehlt jedem Spieler seine Strategie: nur diese, sonst nichts! Jeder Spieler kennt das WMaß vollständig, die Ziehung nur teilweise.

Behauptung: Es lohnt sich für jeden Spieler, der Empfehlung zu folgen. Genauer gesagt: Es lohnt sich nicht, von der Empfehlung abzuweichen.

Wir betrachten Spieler A: Sein Signal „mutig“ bedeutet B bekam „feige“; dies ist ein Nash-Gleichgewicht. Sein Signal „feige“ bedeutet B bekam „feige“ oder „mutig“ mit bedingter Wkt $\frac{1}{2}$ feige + $\frac{1}{2}$ mutig. Spielt A „feige“, so erwartet er den Gewinn 4, spielt er „mutig“ nur 3.5. Demnach wird A strikt der Empfehlung folgen, genauso auch B. Die Auszahlung ist (5, 5).

😊 Die Spieler überschreiten die konvexe Hülle aller NE-Auszahlungen! Das letzte Beispiel zeigt den Maximalfall mit Auszahlungen $(21/4, 21/4)$. Das werden wir auf Seite I317 mit dem Simplexverfahren nachrechnen.

(3) Ein unparteiischer Signalgeber lost wie zuvor eines von drei Paaren aus, diesmal gemäß der zweiten Verteilung $\frac{1}{2}(f, f) + \frac{1}{4}(f, m) + \frac{1}{4}(m, f)$ und empfiehlt jedem Spieler seine Strategie: nur diese, sonst nichts!

Behauptung: Es lohnt sich für jeden Spieler, der Empfehlung zu folgen. Genauer gesagt: Es lohnt sich nicht, von der Empfehlung abzuweichen.

Wir betrachten Spieler A: Sein Signal „mutig“ bedeutet B bekam „feige“; dies ist ein Nash-Gleichgewicht. Sein Signal „feige“ bedeutet B bekam „feige“ oder „mutig“ mit bedingter Wkt $\frac{2}{3}$ feige + $\frac{1}{3}$ mutig. Spielt A „feige“, so erwartet er den Gewinn $14/3$, spielt er „mutig“ so auch. Demnach kann A der Empfehlung folgen, genauso B. Die Auszahlung ist $(5, 5)$.

😊 Die Probe ist leicht: Es handelt sich um lineare Ungleichungen!

😊 Selbst die Konstruktion ist leicht: als lineares Programm! (I317)

Korrelierte Gleichgewichte scheinen zunächst eine bizarre Konstruktion. Das Gegenteil ist der Fall: Wir nutzen sie ständig im Alltag, zum Beispiel um Symmetrien oder Pattsituationen per Losentscheid aufzulösen.

Beispiel: Wenn sich zwei Personen nicht über ihre Restaurantwahl (chinesisch oder italienisch) einigen, so können sie eine Münze werfen. Das entspricht genau der obigen Situation in Bach-oder-Strawinsky.

Beispiel: Wenn sich zwei Autofahrer an einer Kreuzung nicht einigen können, wer Vorfahrt hat, so können sie die Symmetrie / Pattsituation auflösen durch einen unparteiischen Signalgeber: eine Ampel!

Moment mal, sagen Sie, eine Ampel ist doch mehr als eine Empfehlung. Naja, eigentlich schon. Idealerweise ist der Signalgeber so konstruiert, dass die Empfehlung stabil ist [*self enforcing*]. Genau das ist unser Ziel: „*Vernünftige fahren hier nicht über Rot. Allen anderen ist es verboten.*“

😊 Wir wollen / dürfen / können nicht das Spiel selbst ändern, sondern wir suchen nach Vereinbarungen, die innerhalb des Spiels stabil sind.

Gegeben sei ein endliches Spiel $u : S = \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$ und (Ω, \mathbf{P}, T) , ein endlicher WRaum (Ω, \mathbf{P}) mit Zufallsvariablen $T_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$ für $i \in I$. Jeder Spieler $i \in I$ beobachtet sein Signal $\omega_i = T_i(\omega) \in \Omega_i$ und wählt seine Aktion $s_i(\omega) = \hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$, also $s_i = \hat{s}_i(T_i(\omega))$ mit $\hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i$.

Definition I3A: korrelierte Strategie über einem Signalgeber

Wir nennen $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \rightarrow S$ mit $s_i = \hat{s}_i \circ T_i$ eine **korrelierte Strategie**. Sie ist ein **korreliertes Gleichgewicht**, wenn für jeden Spieler $i \in I$ gilt:

$$\mathbf{E}[u_i(s_i; s_{-i})] \geq \mathbf{E}[u_i(s'_i; s_{-i})]$$

für jede Alternative $s'_i = \hat{s}'_i \circ T_i : \Omega \rightarrow S_i$, die nur vom Signal T_i abhängt.

Dies sind die Nash–Gleichgewichte in der Harsanyi–Transformierten. Ausgeschrieben vergleichen wir hier die erwarteten Auszahlungen

$$\sum_{\omega \in \Omega} u_i(s_i(\omega); s_{-i}(\omega)) \cdot \mathbf{P}(\omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega} u_i(s'_i(\omega); s_{-i}(\omega)) \cdot \mathbf{P}(\omega).$$

Wir gehen dabei von der gemeinsamen Überzeugung $\mathbf{P} \in [\Omega]$ aus.

Die hier vorausgesetzte Endlichkeit dient als technische Vereinfachung. Allgemein haben wir einen WRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ und für jeden Spieler $i \in I$ eine messbare Abbildung $T_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Im diskreten Falle, wie hier angenommen, sind $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathcal{A}_i = \mathfrak{P}(\Omega_i)$ die Potenzmengen.

Die Zufallsvariable $T_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$ codiert die gesamte **Zusatzinformation**, die Spieler i zu Verfügung gestellt wird: Damit und nur damit arbeitet er. Sie definiert die Unteralgebra $\mathcal{B}_i := T_i^* \mathcal{A}_i = \{ T_i^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}_i \} \subseteq \mathcal{A}$: Wir nennen eine Abbildung $s_i : \Omega \rightarrow S_i$ **zulässig** für Spieler i , wenn sie \mathcal{B}_i –messbar ist. Dies ist äquivalent zu $s_i = \hat{s}_i \circ T_i$ mit $\hat{s}_i : (\Omega_i, \mathcal{A}_i) \rightarrow S_i$.

Gegeben sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{B})$, also ein WRaum mit Unteralgebren \mathcal{B}_i . Wir nennen $s : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{B}) \rightarrow S$ eine **korrelierte Strategie**, wenn jede Komponente s_i zulässig ist, also $s_i : (\Omega, \mathcal{B}_i) \rightarrow (S_i, \mathfrak{P}(S_i))$ messbar. Sie ist ein **korreliertes Gleichgewicht**, wenn die Ungleichung

$$\mathbf{E}[u_i(s_i; s_{-i})] \geq \mathbf{E}[u_i(s'_i; s_{-i})]$$

für jede zulässige Alternative $s'_i : \Omega \rightarrow S_i$ gilt. 😊 So geht es auch.

Gegeben sei ein endliches Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und (Ω, \mathbf{P}, T) . Wir erweitern jede Strategiemenge S_i zu $\hat{S}_i := S_i^{\Omega_i} = \{ \hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i \}$. Eine Abbildung $\hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i$ legt fest, wie der Spieler i jedes von ihm empfangene Signal $\omega_i \in \Omega_i$ in eine Strategie $\hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$ übersetzt. Die Auszahlungen sind gegeben durch die obigen Erwartungswerte:

$$\hat{u}_i(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n) := \mathbf{E}[\omega \mapsto u_i(\hat{s}_1(T_1(\omega)), \dots, \hat{s}_n(T_n(\omega)))]$$

Proposition I3B: erweitertes Spiel über einem Signalgeber

Die korrelierten Strategien $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \rightarrow S$ des Spiels u entsprechen den Strategievektoren des erweiterten Spiels $\hat{u} : \hat{S} = \hat{S}_1 \times \dots \times \hat{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Genau dann ist $\hat{s} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n)$ ein Nash–Gleichgewicht für das Spiel \hat{u} , wenn $s = \hat{s} \circ T : (\Omega, \mathbf{P}, T) \rightarrow S$ ein korreliertes Gleichgewicht für u ist.

😊 Nash–Gleichgewichte werden also nicht überflüssig, im Gegenteil, sie erscheinen hier in erweiterter Form: Korrelierte Gleichgewichte sind eine natürliche Erweiterung von Nash–Gleichgewichten. Das wird formal übersetzt, indem wir das ursprüngliche Spiel u zum Spiel \hat{u} erweitern.

Die Spieler dürfen / können / wollen vor dem Spiel **kommunizieren**. Sie vereinbaren hierzu einen gemeinsamen **Signalgeber** (Ω, \mathbf{P}, T) . Jeder Spieler bekommt sein individuelles Signal $T_i : \Omega \rightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$ und übersetzt dies mittels $\hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i$ in seine Aktion $\hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$.

⚠️ Während des Spiels bekommt Spieler i nur **seine Information** ω_i . Recht auf Information? nur auf Teilinformation! Frei nach Thomas de Maizière: „Ein Teil der Antwort würde die Bevölkerung verunsichern.“

⚠️ Die Spieler wollen zwar kommunizieren und in diesem Rahmen kooperieren, aber sie sind nicht naiv und misstrauen einander weiterhin. Während des Spiels ist jeder auf sich gestellt, es gibt keine bindenden Verträge oder verpflichtenden Verabredungen außerhalb des Spiels. Das koordinierende Signal ist daher zunächst nur eine **Empfehlung**.

😊 Die **Gleichgewichtsbedingung** stellt sicher, dass jeder Spieler der Empfehlung des Signalgebers wirklich folgen kann, gar muss. Die Ausformulierung dieser Bedingung für $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \rightarrow S$ führt uns erneut zu Nash–Gleichgewichten, diesmal für das erweiterte Spiel \hat{u} .

Definition I3C: universeller Signalgeber

Wir betrachten weiterhin ein endliches Spiel $u : S = \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$.
 Das Produkt S kommt mit den Projektionen $\text{pr}_i : S \rightarrow S_i : (s_j)_{j \in I} \mapsto s_i$.

Ein **universeller Signalgeber** $(S, \mathbf{P}, \text{pr})$ ist ein WMaß $\mathbf{P} \in [S]$.

Hierzu gehört die korrelierte Strategie $\text{id} : (S, \mathbf{P}, \text{pr}) \rightarrow S$.

Sie ist ein **korreliertes Gleichgewicht**, wenn gilt:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s'_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler i und alle Strategien $s_i, s'_i \in S_i$. Wir schreiben hierfür

$$\text{CE}(u) := \{ \mathbf{P} \in [S] \mid \mathbf{P} \text{ ist ein korreliertes Gleichgewicht von } u \}.$$

😊 Genau so haben wir die eingangs gezeigten Beispiele *ad hoc* gelöst!
 Es handelt sich jeweils um ein einfaches System linearer Ungleichungen.
 Dividiert durch $\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$ erhalten wir die bedingte Erwartung.

Aufgabe: Warum ist die universelle Gleichgewichtsdefinition I3C äquivalent zur allgemeinen Gleichgewichtsdefinition I3A, also

$$(2) \quad \sum_{s \in S} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \geq \sum_{s \in S} u_i(\alpha(s_i); s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$$

für alle Alternativen $\alpha : S_i \rightarrow S_i$ neben der Identität $\text{id} : S_i \rightarrow S_i$?

Lösung: Es gilt „(1) \Rightarrow (2)“ dank Addition $\sum_{s_i \in S_i}$ der Ungleichungen

$$(1) \quad \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\alpha(s_i); s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}).$$

Wir zeigen die Umkehrung „(2) \Rightarrow (1)“ durch Kontraposition.

Angenommen in I3C gilt „ $<$ “ für mindestens ein Paar $s_i, s'_i \in S_i$.

Wir definieren $\alpha : S_i \rightarrow S_i$ durch $\alpha(s_i) = s'_i$ sowie $\alpha(s_i^*) = s_i^*$

für alle $s_i^* \in S_i \setminus \{s_i\}$. Dann gilt in (2) ebenfalls „ $<$ “.

😊 Wir vermeiden hier geschickt bedingte Wkten und ersparen uns alle Fallunterscheidungen. Falls dies gewünscht ist, so können wir (1) durch $\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) > 0$ dividieren und erhalten die bedingte Erwartung.

Proposition I3D: Emulation durch universellen Signalgeber

Sei $u : S = \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$ ein endliches Spiel. Jede korrelierte Strategie $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \rightarrow S$ können wir emulieren durch die universelle korrelierte Strategie $\text{id} : (S, \mathbf{P}_s, \text{pr}) \rightarrow S$ mit dem Bildmaß $\mathbf{P}_s(A) = \mathbf{P}(s^{-1}(A))$.

Ist $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \rightarrow S$ ein Gleichgewicht, so auch $\text{id} : (S, \mathbf{P}_s, \text{pr}) \rightarrow S$.

Aufgabe: (1) Rechnen Sie diese Aussage sorgfältig nach!
(2) Die Umkehrung gilt nicht. Finden Sie ein Gegenbeispiel!

Lösung: (1) Jede Alternative zu $(\text{pr}_i)_{i \in I}$ liefert eine zu $(s_i)_{i \in I}$.
Ist also $(s_i)_{i \in I}$ ein korreliertes Gleichgewicht, dann auch $(\text{pr}_i)_{i \in I}$.

(2) Wir betrachten $\Omega_i = \Omega$ und $T_i = \text{id}_\Omega$, das heißt, jeder Spieler erhält vollständige Information über die Ziehung. Genau dann ist $s = (s_i)_{i \in I}$ ein korreliertes Gleichgewicht, wenn $s(\omega) \in \text{NE}(u)$ für jedes $\omega \in \Omega$ gilt. Somit ist $\mathbf{P}_s \in [\text{NE}(u)]$ Konvexkombination reiner Nash-Gleichgewichte. Wir haben jedoch oben bereits gesehen: Es gibt durchaus korrelierte Gleichgewichte $\text{id} : (S, \mathbf{P}_s, \text{pr}) \rightarrow S$, die darüber hinaus gehen!

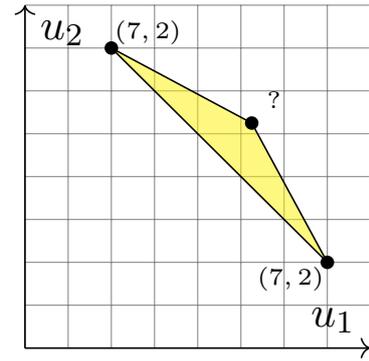
😊 Im Vergleich zu einem allgemeinen Signalgeber (Ω, \mathbf{P}, T) sind im universellen Falle die Ergebnismenge $\Omega = S$ und die Zufallsvariablen $T_i = \text{pr}_i$ festgelegt. Es kommt daher nur noch auf das WMaß \mathbf{P} an. Das vereinfacht die Schreibweise und anschließende Untersuchung. Mit *einer* Rechnung haben wir *alle* erdenklichen Signalgeber abgedeckt.

😊 Die universelle Darstellung ist oft einfacher und übersichtlicher. Beliebige Signalgeber scheinen nur auf den ersten Blick allgemeiner: Wir können nämlich jede korrelierte Strategie $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \rightarrow S$ verlustfrei ersetzen durch die universelle korrelierte Strategie $\text{id} : (S, \mathbf{P}_s, \text{pr}) \rightarrow S$. Dank I3D gehen dabei keine korrelierten Gleichgewichte verloren.

😊 Die allgemeine Formulierung der Signalgeber ist besonders flexibel, daher wollen wir die schöpferische Freiheit nicht unnötig einschränken. Die Umformulierung in das universelle Modell ist dennoch beruhigend, denn sie liefert uns eine klare, einheitliche und effiziente Datenstruktur: Im universellen Modell schreiben wir alle Wkten übersichtlich als Tabelle und überprüfen damit direkt und leicht die Gleichgewichtsbedingungen.

Aufgabe: Analysieren Sie das *Chicken-Game* / *Feige-oder-mutig*.

		B		feige	mutig
		A		6	7
feige	6	x_0	2	x_1	7
	7	x_2	0	0	0



Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ maximieren $u_1 + u_2$?

- (1) Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
- (2) Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Ziel in (1) ist, die Ungleichungen der Definition I3C auszuschreiben. Anschließend löst der Simplex-Algorithmus routiniert das Problem (2). Dank Symmetrie können wir $x_1 = x_2$ setzen und so vereinfachen. Die Zielfunktion ist etwas willkürlich, aber durchaus plausibel. Wir können ebenso u_1 maximieren oder u_2 maximieren.

(1) Wir erhalten folgendes System linearer Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
 u = 12x_0 + 9x_1 + 9x_2 \rightarrow \max!, \quad & x_0 \geq 0, \quad y_0 = -x_0 + 2x_1 \geq 0, \\
 & x_1 \geq 0, \quad y_1 = -x_0 + 2x_2 \geq 0, \\
 & x_2 \geq 0, \quad y_2 = 1 - x_0 - x_1 - x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

(2) Wir schreiben dies als Tableau $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und lösen das LP:

	x_0	x_1	x_2	
y_0	-1	2	0	0
y_1	-1	0	2	0
y_2	-1	-1	-1	1
u	12	9	9	0

 \iff

	y_0	x_1	x_2	
x_0	-1	2	0	0
y_1	1	-2	2	0
y_2	1	-3	-1	1
u	-12	33	9	0

 \iff

	y_0	y_1	x_2	
x_0	0	-1	2	0
x_1	1/2	-1/2	1	0
y_2	-1/2	3/2	-4	1
u	9/2	-33/2	42	0

 \iff

	y_0	y_1	y_2	
x_0	-1/4	-1/4	-1/2	1/2
x_1	3/8	-1/8	-1/4	1/4
x_2	-1/8	3/8	-1/4	1/4
u	-3/4	-3/4	-21/2	21/2

Eine Lösung ist $x = (x_0, x_1, x_2)^T = (1/2, 1/4, 1/4)^T$. Sie ist eindeutig.
Beides können wir bequem am letzten Tableau ablesen: Es ist optimal.

Wurde richtig gerechnet? Zertifikat $y = (y_0, y_1, y_2) = (3/4, 3/4, 21/2)$.
Es gilt $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sowie $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ mit $cx = yb$.

😊 Auch hier können wir das Ergebnis schnell und sicher überprüfen.
Das ist mehr als ein einfacher Plausibilitätscheck, es ist ein Beweis!
Die ausführliche Rechnung benötigen wir, um die Lösung zu *finden*.
Anschließend können wir die Rechnung vergessen, das ist vielleicht schade, aber sie ist entbehrlich: Das Ergebnis ist nachweislich richtig!

Aufgabe: Lösen Sie ebenso folgende Varianten dieses Problems:

- (3) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ minimieren $u_1 + u_2$?
 - (4) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_1 ?
 - (5) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_2 ?
- Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

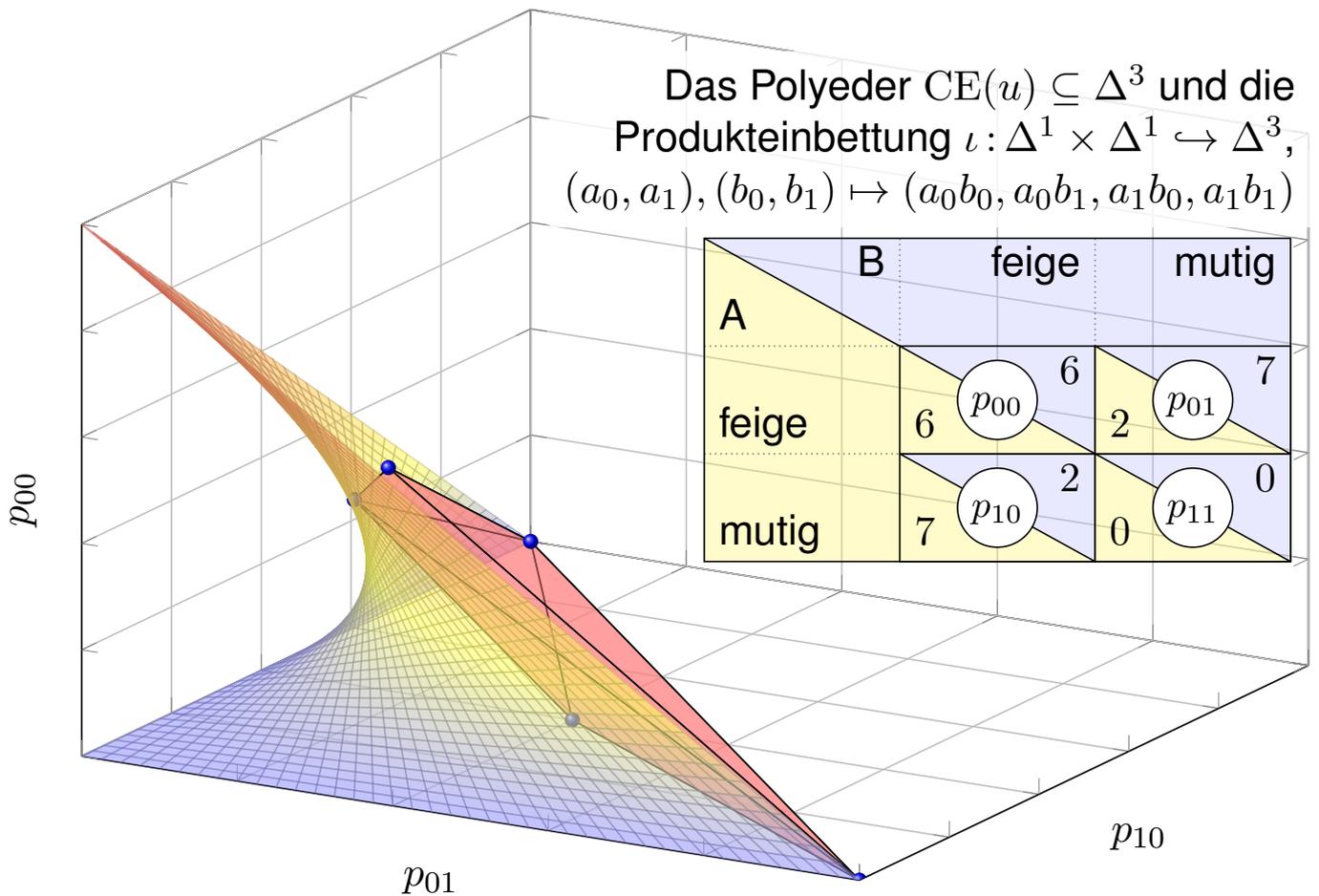
Lösung: Die obige Graphik suggeriert Ihnen jeweils die Lösung(en).
Wirkliche Sicherheit erlangen Sie nur durch eigenes Rechnen.

Wir variieren die vorige Aufgabe, indem wir die Vereinfachung $x_3 = 0$ fallen lassen und das allgemeine Problem untersuchen:

	B	feige	mutig
A			
feige	6	x_0 6	2 x_1 7
mutig	7	x_2 2	0 x_3 0

Übung: Finden Sie alle korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^3$, die
(1) $u_1 + u_2$ max/minimieren, ebenso (2) u_1 und symmetrisch (3) u_2 .
Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Übung: Die Graphik auf Seite I321 zeigt das Polyeder $CE(u) \subseteq \Delta^3$.
Bestimmen Sie explizit alle Ecken dieses Polyeders.



Die Produkteinbettung $\iota: [S_1] \times \dots \times [S_n] \hookrightarrow [S_1 \times \dots \times S_n]$ ist n –linear. Speziell für $n = 2$ Spieler ist die Einbettung $\iota: \Delta^k \times \Delta^\ell \hookrightarrow \Delta^m$, genauer $\iota: \{0, \dots, k\} \times \{0, \dots, \ell\} \hookrightarrow \{0, \dots, k\} \times \{0, \dots, \ell\}$, gegeben durch

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_\ell \end{bmatrix} \mapsto p = a \cdot b^\top = \begin{bmatrix} a_0b_0 & \dots & a_0b_\ell \\ \vdots & & \vdots \\ a_kb_0 & \dots & a_kb_\ell \end{bmatrix}.$$

Sind umgekehrt die Wkten p_{ij} gegeben, dann lassen sich diese genau dann als Produktwkten darstellen, wenn die Matrix (p_{ij}) Rang ≤ 1 hat. Die Bildmenge im Simplex Δ^m erfüllt $p_{ii}p_{jj} - p_{ij}p_{ji} = 0$ für alle i, j .

Die obige Graphik zeigt die Bildmenge von ι für die Wkten p_{00}, p_{01}, p_{10} . Dies ist die Quadrik $p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10} = 0$ mit $p_{11} = 1 - p_{00} - p_{01} - p_{10}$. Die Eigenwerte der darstellenden Matrix sind $0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, es handelt sich also um ein hyperbolisches Paraboloid. *Hasta la álgebra lineal siempre!*

Random fun fact: Diese Konstruktion entspricht genau der Einbettung $\iota: V_1 \times V_2 \hookrightarrow V_1 \otimes V_2$ von reinen Tensoren in das Tensorprodukt.

Nash–Gleichgewichte sind korrelierte Gleichgewichte.

😊 Wir suchen korrelierte Gleichgewichte: Existieren Sie immer? Ja: Im folgenden Sinne enthalten die korrelierten alle Nash–Gleichgewichte! Jeden gemischten Strategievektor $s = (s_1, \dots, s_n) \in \bar{S} = \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ können wir darstellen als (un)korrelierte Strategie $\text{id}: (S, \mathbf{P}_s, T) \rightarrow S$: Jede Familie s gemischter Strategien $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k \in \bar{S}_i$ definiert auf S das Produktmaß $\mathbf{P}_s: \mathfrak{P}(S) \rightarrow [0, 1]$ mit $\{(s_1^{k_1}, \dots, s_n^{k_n})\} \mapsto p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$.

Satz I3E: Nash–Gleichgewichte sind korrelierte Gleichgewichte.

Genau dann ist $s \in \bar{S}$ ein Nash–Gleichgewicht des Spiels \bar{u} , wenn $\text{id}: (\Omega, \mathbf{P}_s, T) \rightarrow S$ ein korreliertes Gleichgewicht von u ist.

😊 Für die Einbettung $\iota: \bar{S} \hookrightarrow [S]: s \mapsto \mathbf{P}_s$ gilt also $\iota^{-1} \text{CE}(u) = \text{NE}(\bar{u})$.

Satz I3F: Konvexität und Auszahlungen

Die Menge $\text{CE}(u) \subseteq [S]$ ist ein Polyeder und enthält $\iota \text{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$. Ihr Bild unter $u: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist das Polyeder $u \text{CE}(u) \subset \mathbb{R}^n$ aller CE–Auszahlungen und umfasst alle NE–Auszahlungen.

Nash–Gleichgewichte sind korrelierte Gleichgewichte.

Aufgabe: Rechnen Sie beide Sätze zur Übung sorgfältig nach!

😊 Korrelierte Gleichgewichte haben technische und praktische Vorteile! Alle Bedingungen sind lineare Un/Gleichungen, sie lassen sich daher durch Lineare Programmierung lösen, etwa per Simplexverfahren.

😞 Dagegen sind Nash–Gleichgewichte leider recht widerspenstig. Zu lösen sind dort nicht-lineare (genauer n –lineare) Un/Gleichungen; dafür ist dann immerhin die Anzahl der freien Variablen deutlich kleiner.

😊 Die Menge $\text{NE}(\bar{u})$ der Nash–Gleichgewichte ist nicht-leer nach dem Existenzsatz von Nash (E1F). Sie ist aber im Allgemeinen nicht konvex, wie bereits einfache Beispiele zeigen, oben etwa *Bach oder Strawinsky*.

😊 Korrelierte Gleichgewichte verhalten sich hier wesentlich besser. Im universellen Modell bilden alle korrelierten Gleichgewichte eine konvexe Menge, somit auch die zugehörigen Auszahlungen (I3F).

Jedes Nash–Gleichgewicht können wir als korreliertes darstellen (I3E). Somit ist auch die Menge der korrelierten Gleichgewichte nicht-leer!

Was lässt sich mit korrelierten Signalgebern erreichen, wenn alle Spieler dasselbe Signal bekommen? Wir nennen dies einen **transparenten Signalgeber** und können (Ω, \mathbf{P}, T) mit $T_i = \text{id}_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$ annehmen.

Satz I3G: transparent korrelierte Gleichgewichte

Die Menge $T \subseteq \text{CE}(u)$ der transparent korrelierten Gleichgewichte ist die konvexe Hülle der reinen Nash–Gleichgewichte, kurz $T = [\text{NE}(u)]$.

Aufgabe: Zeigen Sie beide Inklusionen.

Lösung: „ \supseteq “: Zu jeder Konvexkombination $t_0 s^0 + \dots + t_k s^k$ reiner Nash–Gleichgewichte $s^0, \dots, s^k \in \text{NE}(u)$ konstruieren wir einen transparenten Signalgeber (Ω, \mathbf{P}, T) , der $s^i \in S$ mit Wkt t^i auslost und empfiehlt. Dank $s^i \in \text{NE}(u)$ ist dies ein korreliertes Gleichgewicht.

„ \subseteq “: Wenn ein transparenter Signalgeber ein Strategiebündel $s \in S$ empfiehlt, so muss dies ein Nash–Gleichgewicht sein, also $s \in \text{NE}(u)$. Andernfalls lohnt sich Abweichen für mindestens einen Spieler.

😊 Dieser Satz ist wenig überraschend, dennoch lohnt es sich, ihn hier explizit auszuformulieren: Er betont die Wichtigkeit privater Information. Ohne private Information, mit Signalgebern ohne individuelle Signale, erhalten wir nur Konvexkombinationen reiner Nash–Gleichgewichte. Das allein ist schon nützlich, aber wenig bemerkenswert.

Aumanns geniale Idee beruht auf Zufall *und* unvollständiger Information! Erst dadurch erhalten wir eine wesentliche Erweiterung. Wie wir in den Beispielen sehen, ist diese Menge $\text{CE}(u)$ im Allgemeinen echt größer als $[\text{NE}(u)]$, sogar echt größer als $[\text{NE}(\bar{u})]$, und dies schlägt sich auch in den möglichen Gleichgewichtsauszahlungen $u \text{CE}(u) \subseteq \mathbb{R}^n$ nieder.

⚠️ Echt gemischte Nash–Gleichgewichte $s \in \text{NE}(\bar{u}) \setminus \text{NE}(u)$ können wir durch einen transparenten Signalgeber ebenfalls nicht erreichen: Jeder Spieler randomisiert unabhängig, das ist private Information. Wir denken an Matching Pennies oder Schere-Stein-Papier!

Aufgabe: Was bedeuten korrelierte Gleichgewichte für bedingte Wkten? Warum sollte ein Spieler der ihm signalisierten Empfehlung folgen?

Lösung: Wir betrachten einen universellen Signalgeber $(S, \mathbf{P}, \text{pr})$. Dem Spieler i wird die Strategie $s_i \in S_i$ empfohlen mit der Wkt

$$\mathbf{P}_i(s_i) := \mathbf{P}(\{s \in S \mid \text{pr}_i(s) = s_i\}).$$

Falls diese > 0 ausfällt, so erhalten wir auf S_{-i} die bedingte Wkt

$$\mathbf{P}_i^{s_i}(s_{-i}) := \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) / \mathbf{P}_i(s_i).$$

Die Gleichgewichtsbedingung fordert für alle Alternativen $s'_i \in S_i$:

$$\mathbf{E}_i^{s_i}[u_i(s_i; s_{-i})] \geq \mathbf{E}_i^{s_i}[u_i(s'_i; s_{-i})]$$

Unter der Bedingung, dass Spieler i die Empfehlung $s_i \in S_i$ bekommt, ist es für ihn nicht vorteilhaft, eine andere Strategie $s'_i \in S_i$ zu spielen.

😊 Diese Umformulierung entspricht dem Typenmodell aus Satz I2B.

Aufgabe: Bleiben korrelierte Gleichgewichte unter Isomorphismen erhalten? strikt? monoton? schwach monoton? affin? schwach affin?

Lösung: Schreiben Sie die geforderten Ungleichungen sorgfältig aus: Schwach affine Isomorphismen erhalten korrelierte Gleichgewichte, somit auch affine Isomorphismen, erst recht strikte Isomorphismen. Monotone Isomorphismen hingegen genügen hierzu nicht!

Aufgabe: Wie korrelieren sich schwach dominierte Strategien?

Lösung: Angenommen, es gilt $s'_i \geq_i^u s_i$ für ein Paar $s'_i, s_i \in S_i$, also $u_i(s'_i; s_{-i}) \geq u_i(s_i; s_{-i})$ für alle Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$. Gilt dann für ein $s_{-i} \in S_{-i}$ zudem strikt $u_i(s'_i; s_{-i}) > u_i(s_i; s_{-i})$, so folgt in jedem korrelierten Gleichgewicht $\mathbf{P}(s_i; s_{-i}) = 0$. In Worten: Auf dominierten Strategien liegt kein Gewicht.

Bemerkung: Schlägt der Signalgeber eine strikt dominierte Strategie vor, etwa im Gefangenendilemma, so wird der Spieler/typ zurecht davon abweichen. Die Wkt dieses Signals muss also 0 sein. Um die Diskrepanz zum Typenmodell zu heilen, können wir den Signalgeber trimmen (I203).

Aufgabe: Was ist der (formale / anschauliche) Unterschied zwischen korrelierten Gleichgewichten und Bayes–Gleichgewichten?

Lösung: (1) Ein Bayes–Spiel $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ besteht aus einem Spiel

$$u : \Omega \times S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit Signal $T_i : \Omega \rightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$ und WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ für jeden Spieler i . Die Harsanyi–Transformierte von Γ ist das strategische Spiel

$$\hat{u} : \hat{S}_1 \times \cdots \times \hat{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit den Strategiemengen $\hat{S}_i := \{ \hat{s}_i : \Omega_i \rightarrow S_i \}$ und den Auszahlungen $\hat{u}_i((\hat{s}_k)_{k \in I}) := \mathbf{E}_i[\omega \mapsto u_i(\omega, (\hat{s}_k(\omega_k))_{k \in I})]$ als Erwartung bezüglich \mathbf{P}_i .

Bayes–Gleichgewichte von Γ sind Nash–Gleichgewichte von \hat{u} :

$$\text{BE}(u, T, \mathbf{P}) := \text{NE}(\hat{u})$$

In Worten: Unter der ihm zur Verfügung stehenden Information T_i hat kein Spieler $i \in I$ einen Anlass, seine Strategie \hat{s}_i zu ändern.

(2) Für korrelierte Gleichgewichte betrachten wir ein Spiel

$$u : S = S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dies hängt nicht von irgendwelchen Zufallselementen $\omega \in \Omega$ ab, sondern deterministisch nur von den Aktionen der Spieler!

Der Zufall wird künstlich / willkürlich / zusätzlich in das Spiel eingeführt in Form eines Signalgebers. Ab da greift die Harsanyi–Transformierte (1):

Als Ergebnismenge nutzen wir $\Omega = S$ mit Signalen $T_i = \text{pr}_i : S \rightarrow S_i$.

Als erweiterte Strategie nutzen wir $\text{id}_i : S_i \rightarrow S_i$ für $i \in I$. Dann gilt:

$$\text{CE}(u) = \{ \mathbf{P} \in [S] \mid \text{id} \in \text{BE}(u, \text{pr}, \mathbf{P}) \}$$

Slogan: Korrelierte Gleichgewichte sind die Bayes–Gleichgewichte von Spielen, deren Auszahlung u gar nicht vom Zufall abhängt.

Es ist überaus erstaunlich, dass diese Konstruktion etwas neues bringt. Die Beispiele belegen, dass dies tatsächlich spürbar weiterhelfen kann!

Bei korrelierten Gleichgewichten nutzen alle Spieler $i \in I$ gemeinsam einen Signalgeber (Ω, \mathbf{P}) und ihre individuellen Signale $T_i \in \Omega \rightarrow \Omega_i$. Dabei gehen wir von einer gemeinsamen Überzeugung \mathbf{P} aus.

Aufgabe: Nennen Sie Argumente (1) dafür und (2) dagegen.

Skizze: (1) Wir können uns vorstellen, dass der Signalgeber (Ω, \mathbf{P}) und die Signale $T_i \in \Omega \rightarrow \Omega_i$ in Gesprächen vor dem Spiel sorgsam ausgehandelt werden: ein Unparteiischer, ein Zufallsgenerator oder geeignete Computersoftware. Es besteht zumindest die realistische *Möglichkeit*, dies für alle Spieler fair und transparent zu gestalten.

(2) Setzt der Signalgeber tatsächlich genau das um, was die Spieler zuvor ausgehandelt haben? Ein Unparteiischer kann bestochen werden. Ein Zufallsgenerator kann manipuliert werden. Computersoftware kann modifiziert / gehackt werden. Vertrauliche Signale können abgefangen / modifiziert / belauscht werden. Bei drei oder mehr Spielern können sich zudem Koalitionen bilden: Bündnis, Pakt, Kartell, Verschwörung, etc.

Sobald der Kenntnisstand der Spieler $i \in I$ über den Signalgeber Ω unterschiedlich ist, müssen wir individuelle WMaße $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ nutzen. Wie im ersten Teil dieses Kapitels erklärt: Das ist der allgemeine Rahmen von Bayes–Spielen ohne gemeinsame Überzeugung,

Wenn Alice die vereinbarte Software des Signalgebers hackt, dann hat sie eine genauere / bessere Kenntnis \mathbf{P}_1 als Bob mit \mathbf{P}_2 . Ebenso, wenn Bob den zuvor vereinbarten Unparteiischen besticht, dann hat er eine genauere / bessere Kenntnis \mathbf{P}_2 als Alice mit \mathbf{P}_1 .

Für korrelierte Gleichgewichte wollen wir gemeinsame Überzeugung. Wir müssen dabei wie immer sehr umsichtig unterscheiden zwischen der mathematischen Möglichkeit und der praktischen Umsetzung. Beide stellen hohe Anforderungen, und es lohnt sich!

Korrelierte Gleichgewichte bieten den Spielern in den Verhandlungen vor dem Spiel neue Möglichkeiten, neue erweiterte Spielräume. Es lohnt sich, diese Möglichkeiten zu kennen und zu nutzen.

Im **Casino Royal** (27.05.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, Erfahrungen zu Spielen mit unvollständiger Information zu sammeln.

Elf wissbegierig-wagemutige Teilnehmer:innen trotzten dem Brückentag nach Himmelfahrt und versammelten sich zum wöchentlichen Casino.

Etwa die Hälfte davon hatte theoretisches Vorwissen aus der Vorlesung, das Kapitel zu Bayes–Spielen war vormittags gerade beendet worden.

Die Spieler:innen bilden zwei Teams und geben sich als erstes seriöse, traditionsreiche Firmennamen, *A: Stark Industries* und *B: LexCorp*. (Crossover MCU & DCEU? You saw it first at the Casino Royal!)

Beide Firmen profitieren von einem öffentlichen Gut, hier der Universität Asgard, die spieltheoretisch hochmotivierten Nachwuchs ausbildet.

Wer die Weltherrschaft anstrebt, braucht fähige Mitarbeiter:innen!

Das öffentliche Gut bringt für jede der beiden Firmen 1000 € Profit.

Er entsteht jedoch nur, wenn mindestens eine zuvor darin investiert.

Die Investitionskosten sind gleichverteilt in $\Omega = \{500, 550, \dots, 1000\}^2$.

Jede Firma kennt nur ihre eigenen Kosten, als private Information.

Zu Beginn jedes Spiels werden die Kosten $(x, y) \in \Omega$ zufällig ausgelost. Jede Firma bekommt geheim ihre Kosten x bzw. y mitgeteilt und wählt ebenso geheim ihre Aktion a bzw. b aus $\{0 = \text{schnorren}, 1 = \text{zahlen}\}$.

Die Auszahlungen sind demnach $((a \vee b)1000 - ax, (a \vee b)1000 - by)$.

Die Anwesenden haben bislang noch wenig Erfahrung in der Führung weltumspannender Firmen, doch die Problemlage ist allen vertraut von gemeinsamen Übungsblättern, allgemein Teamarbeit: Mindestens eine:r muss sich bemühen und Ressourcen investieren, dann profitieren beide.

Wie also soll man sich hier verhalten? Kooperation ist wünschenswert, kostet aber Ressourcen. Wenn die andere zahlt, dann ist es vorteilhaft zu schnorren. Aber es sollten nicht beide schnorren. Die Kosten für die Investition sind unterschiedlich und private Information jeder einzelnen.

Die mathematisch-spieltheoretische Frage wird in einer kommenden Übung analysiert. Zur Zeit des Casinos liegen zu diesem Problem weder theoretische Vorschläge noch empirisch-praktische Erfahrungen vor: ideale Bedingungen zum Experimentieren und Ausprobieren!

Die ersten drei Spiele werden ohne gemeinsame Verhandlung gespielt. Jedes Team soll sich intern absprechen, um eine weise und profitable Entscheidung zu treffen, aber noch nicht die beiden Teams miteinander.

Spiel 1	A :	550,	zahlen	→	450
	B :	700,	schnorren	→	1000
Spiel 2	A :	1000,	schnorren	→	1000
	B :	500,	zahlen	→	500
Spiel 3	A :	750,	schnorren	→	0
	B :	750,	schnorren	→	0

Es entbrennt eine Grundsatzdebatte, ob diese Ziehungen zufällig sind. Wie kann man erkennen, ob eine Ziehung zufällig ist? im Nachhinein? Ist die Spielleiterin vertrauenswürdig? Gibt es den Zufall überhaupt? Das sind sehr gute Fragen zu den Grundlagen der Wahrscheinlichkeit! So leidenschaftlich entflammen sie nur selten in den Vorlesungen zur WTheorie, aber erstaunlich häufig im Casino. Zufall? Ich glaube nicht!

Die ersten Spiele bieten hilfreiche Erfahrungen. Insbesondere versagt im dritten Spiel die „unsichtbare Hand des Marktes“ und entfacht den Wunsch nach einer tragfähigen Absprache zum beiderseitigen Vorteil.

Vor jedem der nächsten Spiele dürfen sich die Firmen nun absprechen. Das gilt nicht während des Spiels! Jede Firma ist auf sich selbst gestellt, sobald ihre Kosten übermittelt sind und ihre Aktion entschieden wird.

Die lebhaften Verhandlungen sind ein bemerkenswertes Schauspiel!
 B : „Wir werden immer schnorren. Wenn ihr etwas verdienen möchtet, dann könnt ihr gerne zahlen.“ Veteranen nutzen ihre Erfahrung. Casino? Vorlesung? Dieses Vorgehen heißt *burning bridges*. . . oder *Erpressung*.

A : „Wir werden auch immer schnorren. Zudem versprechen wir euch hoch und heilig, am Ende die Einnahmen mit euch zu teilen.“ Raffiniert! Dieser Vorschlag öffnet als weitere Option sogenannte *Nebenzahlungen* [*side payments*] außerhalb des Spiels. Man nennt es auch *Bestechung*. Es ist innerhalb des Spiels nicht vorgesehen, also dort noch nicht formal implementiert, daher wird hier „hoch und heilig“ Ehrlichkeit versprochen.

B: „Ich habe heute Morgen in der Vorlesung gelernt, wie es geht: Wir vereinbaren einen Signalgeber! Ich schlage vor, wir lassen einen Münzwurf entscheiden, wer zahlen muss und wer schnorren darf.“
Ich bin erschüttert, dass Vorlesungen tatsächlich *gehört* werden.

Die Verhandlungen bewegen sich rapide, so scheint es, auf eine gerechte und nachhaltige Einigung zu. Die Verhandlungsmacht ist jedoch nicht ganz gleich verteilt. Team *A* zieht daher einen letzten Trumpf aus dem Ärmel, um sich doch noch Vorteile zu erheischen.

A: „Drei aus eurem Team sind in meiner Übungsgruppe zur Analysis. Es wäre doch jammerschade, wenn unsere Zusammenarbeit leidet.“
Eine interessante Option außerhalb des Spiels. . . Ist diese Drohung ernst gemeint oder nur scherzhaft? *You can't make this stuff up!*

B: „Gut, wir kommen euch entgegen. Wir arbeiten ohne Signalgeber, sondern zahlen immer abwechselnd.“ *A*: „Einverstanden. Wir lassen einen Münzwurf entscheiden, wer mit dem Zahlen anfangen muss.“
Chapeau! Die Verhandlungen kommen zügig zu einem Ergebnis.

Auch hier entsteht das Grundsatzproblem, wie man ohne gegenseitiges Vertrauen den Zufall entscheiden lassen kann, hier eine Münze werfen. Beide Teams einigen sich schnell auf eine pragmatische Lösung, Team *A* akzeptiert das (anerkannt zufällige) Ergebnis und geht in Vorleistung.

Spiel 4 *A* : 900, zahlen \longrightarrow 100

B : 550, schnorren \longrightarrow 1000

Spiel 5 *A* : 900, schnorren \longrightarrow 1000

B : 750, zahlen \longrightarrow 250

Spiel 6 *A* : 550, zahlen \longrightarrow 450

B : 900, schnorren \longrightarrow 1000

Spiel 7 *A* : 700, schnorren \longrightarrow 1000

B : 650, zahlen \longrightarrow 350

Die Verhandlungen waren aufschlussreich und erfreulich zielstrebig. Die so gefundene Vereinbarung hat sich anschließend bewährt.

Die Zeiten werden härter. Die Investitionskosten sind nun gleichverteilt in $\Omega = \{0, 50, \dots, 2000\}^2$. Mit Wkt $1/2$ gibt es jeweils eine weitere Runde. Beide Teams wollen die bisher erfolgreiche Zusammenarbeit fortführen.

Spiel 8

A :	1550,	schnorren	\longrightarrow	0
B :	800,	schnorren	\longrightarrow	0

Vertragsbruch! In den Verhandlungen klang alles noch vernünftig, doch als Team A die tatsächlichen Kosten vorliegen, wollen sie nicht zahlen. In Team B kochen die Emotionen hoch, wütende Vorwürfe werden laut: „Unser langjähriges Vertrauen wurde zerstört... Reputation... Moral...“ Ich gebe zu bedenken, dass vielleicht beide Teams gleiche Schuld trifft: Eine schlecht durchdachte Vereinbarung ist leider rational nicht haltbar.

Ein kühler Strategie möchte die Situation retten und schlägt eine weniger ambitionierte Abmachung vor, die dafür einfacher und stabiler sein soll. „Ich habe eben mit Wolfram Alpha die optimale Strategie ausgerechnet. Wer Kosten ≤ 650 hat, der zahlt. Wer Kosten ≥ 700 hat, der schnorrt.“

Die Grenzziehung bedarf der Erklärung. Manche möchten die Rechnung selbst nachvollziehen, geben jedoch aus Zeitgründen auf. Nach kurzer Verhandlung vertrauen beide Teams dem Autoritätsargument.

Spiel 9

A :	150,	zahlen	\longrightarrow	850
-------	------	--------	-------------------	-----

B :	1450,	schnorren	\longrightarrow	1000
-------	-------	-----------	-------------------	------

Spiel 10

A :	1000,	schnorren	\longrightarrow	0
-------	-------	-----------	-------------------	---

B :	1750,	schnorren	\longrightarrow	0
-------	-------	-----------	-------------------	---

Spiel 11

A :	150,	zahlen	\longrightarrow	850
-------	------	--------	-------------------	-----

B :	1050,	schnorren	\longrightarrow	1000
-------	-------	-----------	-------------------	------

Nach Spiel 11 entscheidet der Münzwurf das Ende. (Und die Zeit ist um.) Die Abmachung scheint praktikabel und stabil anwendbar. Leider bleibt dabei noch unklar, ob die Firmen damit wirklich am meisten rausholen. Ist die hier vorgeschlagene Grenze von 700 wirklich optimal gewählt? Ist es grundsätzlich noch besser, sich gemeinsam zu koordinieren?