Kapitel H

Ponzi–Betrug vs Rentenmodell: Wie gelingt ein Generationenvertrag?

A man only begins to grasp the true meaning of life when
he plants a tree under whose shade he knows he will never sit.

Elton Trueblood (1900–1994)

Das Geld ist nicht da. Wir leihen es uns aus der Zukunft.

Christian Lindner (1979–) zu Schulden 2022

Inhalt dieses Kapitels H

Motivation und Überblick

In diesem Kapitel geht es um einige große Fragen der Menschheit, für die ich einige (zunächst sehr kleine) Antworten skizzieren möchte. Wir wollen anhand einfacher spieltheoretischer Modelle Gut von Böse unterscheiden, Gleichgewicht von Betrug, Nachhaltigkeit von Illusion.

Wie / Können Sie aus nichts Geld machen? Sie ahnen es bereits, das wird legal wohl nicht möglich sein, dennoch werden solch windige Projekte oft versucht und als bequeme Einkommensquelle angepriesen. Das Internet ist für solche Betrügereien leider ein idealer Nährboden.

In diesem Kapitel werden wir uns solche Modelle genauer anschauen. Sie sind meist nach dem ewig selben, sehr einfachen Muster gebaut, doch dank phantasievoller Verkleidung erkennt man sie nicht sofort. Ich beginne daher mit ein paar lächerlich simplen Illustrationen.

Natürlich will ich Sie nicht zu solchen Aktivitäten anstiften, im Gegenteil! Ich möchte, dass Sie illegale Tricks leichter als solche durchschauen und sich möglichst dauerhaft dagegen immunisieren. Die Erfahrung zeigt, dass dies leider nicht so einfach ist, wie man zunächst hoffen könnte.

Motivation und Überblick

Warum sollten Sie meine Rente zahlen? Diese Frage liegt mir ganz persönlich am Herzen, und ich gebe zu: aus egoistischen Gründen. Aus ebenso egoistischen Gründen wollen Sie das vielleicht nicht. *Full Disclosure.* Soweit die erschütternd ehrliche Ausgangslage.

Ich möchte Sie in diesem Kapitel davon überzeugen, dass es auch für Sie lohnend sein kann, meine Rente zu zahlen! Das glauben Sie nicht? Dann lesen und prüfen Sie alles kritisch und lernen Sie staunend dazu! Sie müssen es demnächst nämlich Ihren Kindern erklären.

Warum sollte Ihre Generation meine Generation verklagen? So ein Generationenvertrag, hier im Beispiel zur Altersversorgung, ist eine feine Sache. Zum Kontrast und als Steigerung möchte ich auf ein grundlegendes Problem eingehen: Was tun, wenn eine Generation Raubbau betreibt und die Lebensgrundlage zukünftiger Generationen vernichtet? Dazu müssten zukünftige Generationen ihre Rechte bereits heute einklagen! Das klingt unmöglich. Gibt es dennoch eine Lösung? *Spoiler:* Ja, das geht, wird aber wohl nicht genutzt. Wir werden sehen.

Tabellenkalkulation und Umordnungsschwindel

Kann man aus nichts Geld machen dank kreativer Tabellenkalkulation?
Behauptung: Es ist egal, ob wir erst Zeilen oder erst Spalten summieren.
Klar, bei endlichen Tabellen! Für unendliche gibt es Überraschungen:
Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a(i,i) = +1$ und $a(i+1,i) = -1$ und sonst $= 0$.

	j					
$\vdots$	0	0	0	0	0	$\iddots$
0	0	0	0	0	$+1$	$\iddots$
0	0	0	0	$+1$	-1	0
0	0	0	$+1$	-1	0	0
0	0	$+1$	-1	0	0	0
0	$+1$	-1	0	0	0	0 i
	$+1$	0	0	0	0	$\cdots$

Zeilen zuerst:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a(i,j) = 0$$

Spalten zuerst:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a(i,j) = 1$$

⚠ Umordnung verlangt absolute Summierbarkeit!

Integrale und Vertauschungsschwindel

Aufgabe: Man skizziere die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\mathbf{I}_{[k,k+1[\times[k,k+1[} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2[\times[k,k+1[} \Big).$$

Man berechne und vergleiche und bestaune die Doppelintegrale

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Widerspricht das Fubini? Was erhält man für f^+ und f^- sowie $|f|$?

Lösung: Zeilen zuerst, d.h. erst nach x und dann nach y integrieren:

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y\in\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y = 0$$

Spalten zuerst, d.h. erst nach y und dann nach x integrieren:

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x\in\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,1[}(x)\,\mathrm{d}x = +1$$

⚠ Das zeigt, dass wir nicht blind drauflosrechnen dürfen!

Umordnung absolut summierbarer Reihen

Wir erinnern an folgenden wichtigen Umordnungssatz der Analysis 1.
Cauchy–Umordnungssatz: Für jede Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k} |a_{ij}|.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist (a_{ij}) absolut summierbar, und dann gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k} a_{ij}.$$

☺ Diese nützliche Rechenregel hat zahlreiche Anwendungen, zum Beispiel die Multiplikation von Reihen, insbesondere Potenzreihen.

⚠ Unser obiges Beispiel ist nicht absolut summierbar, und die Umordnung der Reihe schlägt tatsächlich fehl!

☺ Dasselbe gilt für die Integration und den Satz von Fubini: Absolute Integrierbarkeit ist unsere verlässliche Verbündete!

⚠ Kreativität ist schön, Korrektheit ist unverzichtbar!

Umordnung absolut summierbarer Reihen

☺ Die Umordnung von (Potenz-)Reihen wird überall genutzt!

Aufgabe: Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \text{für alle} \quad z,w\in\mathbb{C}.}$$

Nachrechnen: Dank Umordnungssatz und binomischer Formel gilt:

$$\exp(z)\exp(w) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{w^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+\ell=n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^\ell}{\ell!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w).$$

☺ Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$\mathrm{e}^z := \exp(z) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w.$$

Zusammen mit der wichtigen **Euler–Formel** $\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ erhalten wir hieraus sofort **Additionstheoreme** für $\sin$ und $\cos$.

Kreative Summation nach Guido Grandi

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.
Ziel: Ich will aus nichts Geld machen. Hier mein genialer Businessplan:

$$\begin{array}{rccccccccc}
& 0 \\
\overset{(a)}{=} & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
\overset{(b)}{=} & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & \dots \\
\overset{(c)}{=} & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & \mp & \dots \\
\overset{(d)}{=} & 1 & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & \dots \\
\overset{(e)}{=} & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
\overset{(f)}{=} & 1
\end{array}$$

Der italienische Mönch und Mathematiker Guido Grandi erklärte damit 1703 wie Gott das Universum aus dem Nichts erschaffen haben könnte. Warum sollen wir diesen göttlichen Trick nicht auch ökonomisch nutzen?

Kreative Summation nach Guido Grandi

Aufgabe: Sie misstrauen der Rechnung? Wo genau steckt der Fehler?

Lösung: Bei jeder Gleichung „$A = B$“ müssen wir *drei* Fragen klären: Sind die linke Seite A und die rechte Seite B wohldefinierte Objekte? Erst dann können wir die Gleichheit beider Objekte untersuchen! Meistens beachten wir nur letzteres, doch das scheitert hier.

Die ersten Gleichheitszeichen (a,b) und die letzten (e,f) sind korrekt, doch die mittleren (c,d) haben überhaupt keinen Sinn: Die Summe $S := 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ definiert keinen Wert! Diese Reihe konvergiert nicht. Dennoch verspüren viele Menschen das unbändige Verlangen, auch solchen Reihen irgendwelche Werte zuzuweisen.

Welche Zahl soll S sein? Selbst wenn wir phantasievoll irgendeinen Wert zuweisen / erfinden / definieren, etwa $1/2$, mindestens eine der beiden mittleren Gleichungen (c,d) wird falsch, in den meisten Fällen beide. Zu solch hoffnungslosem Unsinn sagt man auch *not even wrong*.

Dennoch ist dies eine beliebte Betrugsmasche, nach dem Muster „heute arm = ... schwurbel schwurbel schwurbel ... = morgen reich“.

Kreative Summation nach Guido Grandi

Fun fact: Die möglichen Werte $S = 0$ und $S = 1$ wurden oben „erklärt“. Wenn S einen Wert hat, dann gilt $S = 1 - S$, also $2S = 1$, somit $S = 1/2$.

Den Wert $1/2$ erhalten wir auch, wenn wir naiv die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1/(1-z)$ bei $z = -1$ auswerten (unseriös), oder raffiniert die Konvergenz erzwingen, etwa durch Cesàro–Summation (seriös).

Damit noch nicht genug! Wir könnten auch folgende Reihe nutzen:

$$\frac{1+z}{1+z+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} - z^{3k+2} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - z^8 + \dots$$

Ausgewertet bei $z = 1$ erhalten wir den Wert $S = 2/3$. Die Analysis bietet alle nötigen Grundlagen, um genau diesem Schlamassel zu entgehen.

Reihen sind ein wunderbares Werkzeug, sie sind schön und nützlich. Nur konvergent sollten Sie sein, sonst haben sie keinen Wert!

Zur Konvergenz von Reihen bietet die Analysis wirksame Kriterien. Für konvergente Reihen gelten dann überaus nützliche Rechenregeln.

Kreative Summation nach Guido Grandi

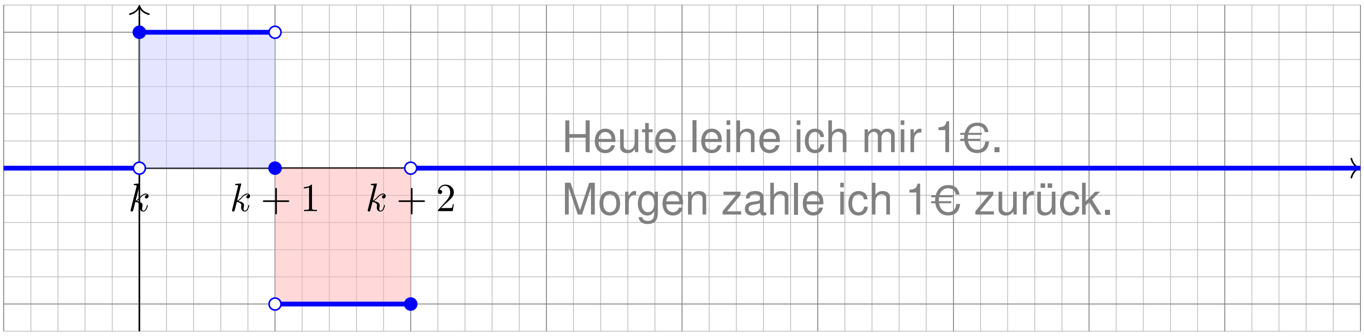
Doch genug von mühsamer Mathematik, von seriösen Rechenregeln, von langweiliger und unnützer Haarspalterei. Wer braucht Korrektheit, wenn Kreativität lockt? Also zurück zu meinem genialen Businessplan! Ist Wissenschaft nicht nur dann gut, wenn sie Profit generiert? Oder wenigstens den oberflächlichen Anschein davon?

Bisher war natürlich alles Schwindel! Hier ist mein verbesserter Plan: Am Tag 1 leihe ich mir 1 Euro, den ich dann am Tag 2 zurückzahle. Auch am Tag 2 leihe ich mir 1 Euro, den ich am Tag 3 zurückzahle. Dies setze ich nun unbegrenzt fort. Was ich leihe, zahle ich zurück… dennoch verschafft mir diese Reihe 1 Euro, den ich nie zurückzahle!

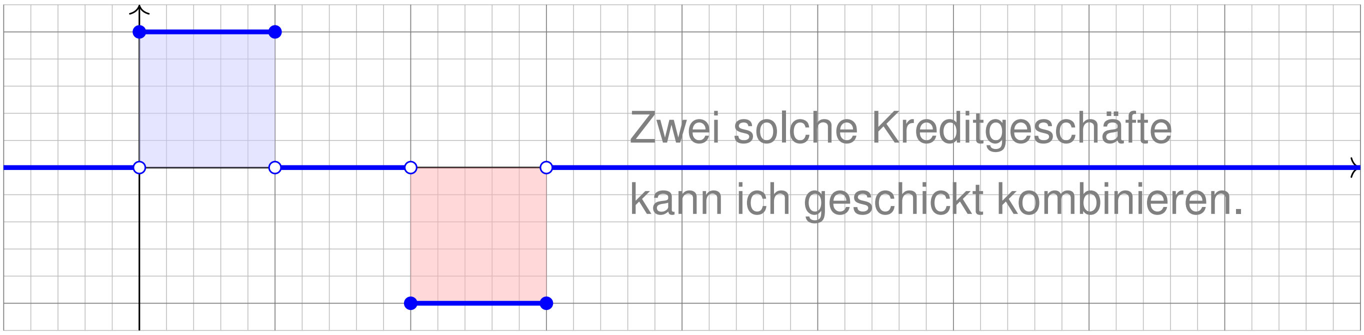
Anschaulich: Die Schulden werden nach Unendlich verschoben. Für manche Menschen bedeutet $t = \infty$ einfach alles nach ihnen. Wie bitte, Sie halten das für unrealistisch, gar verrückt? Ja, sicher. Dennoch wird diese Methode erstaunlich häufig angewendet. Diese Masche gelingt, solange sie akzeptiert wird.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Kredit und Tilgung: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k = \mathbf{I}_{[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]}$.



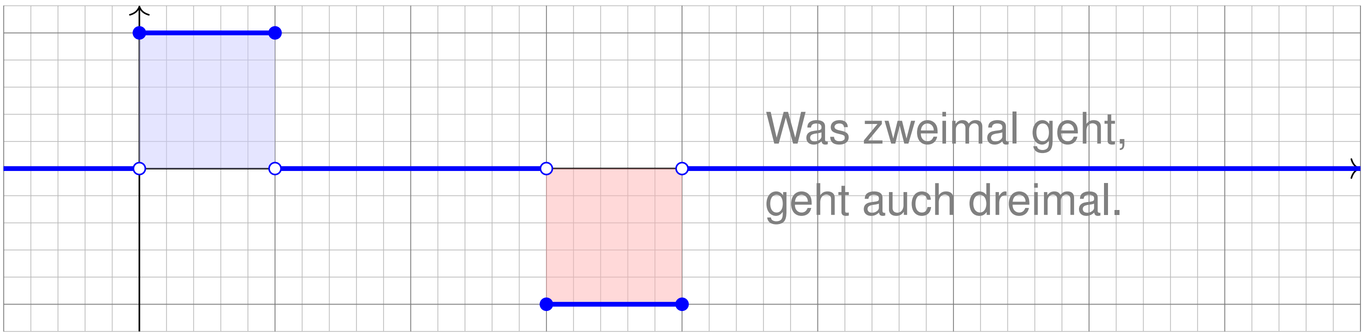
Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$.



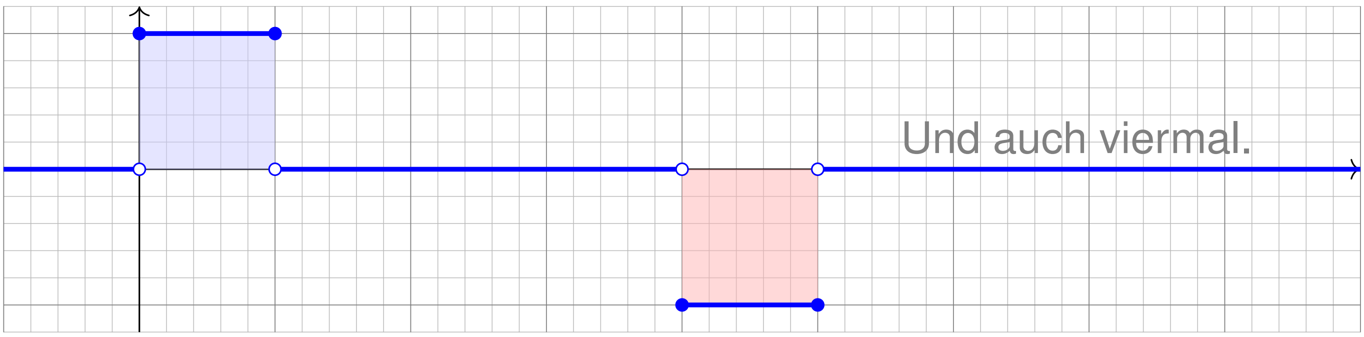
Auch für $g_1 = f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Graph zu $g_2 = f_0 + f_1 + f_2$:



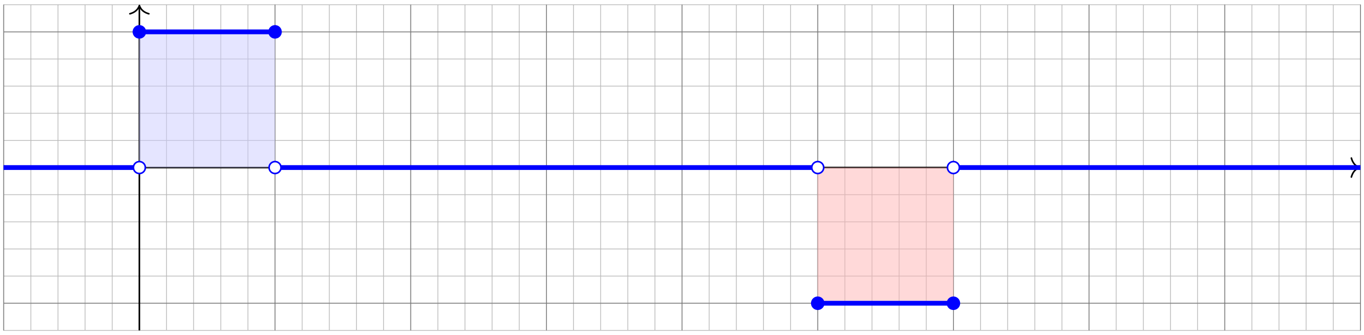
Graph zu $g_3 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$:



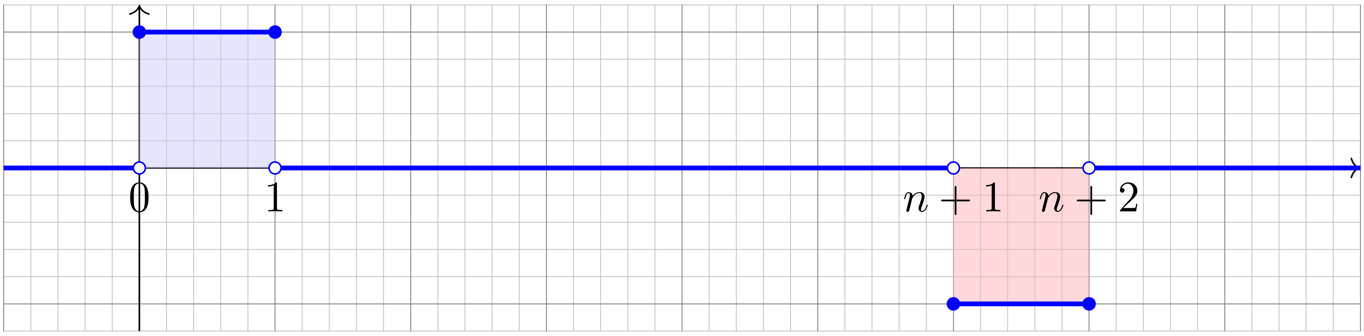
Das Integral ist jeweils Null.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Graph zu $g_4 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$:



Graph zur Teleskopsumme $g_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$:



Das Integral $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ ist jeweils Null. Was passiert für $n \to \infty$?

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Aufgabe: Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x$$

Lösung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sehen wir (rechnerisch oder graphisch):

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

Andererseits kennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teleskopsumme

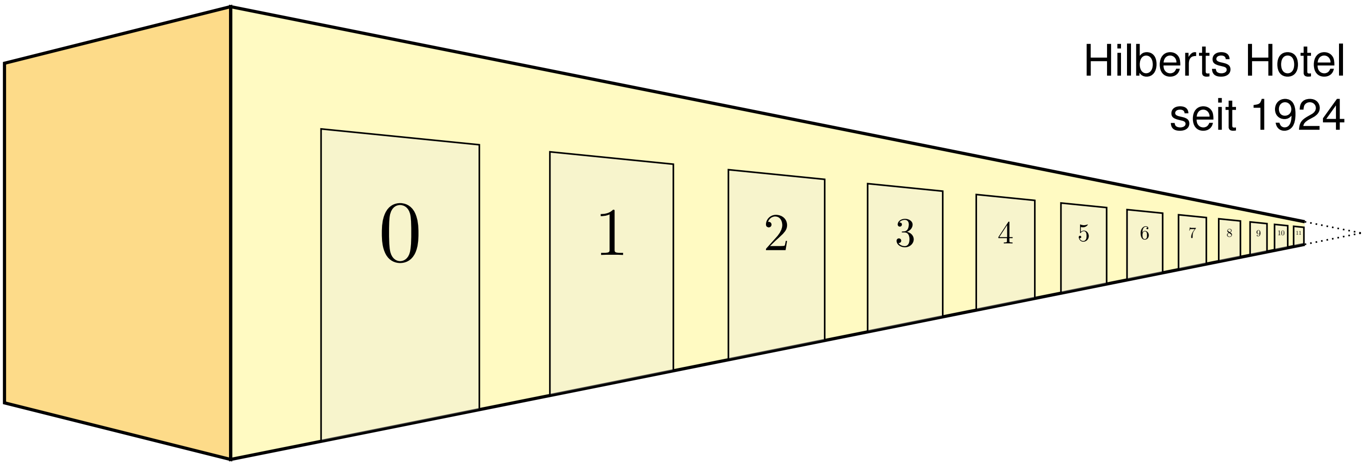
$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x) \quad \to \quad \mathbf{I}_{[0,1]}(x).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ gilt daher punktweise Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x = 1.$$

⚠ Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank



Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können.
David Hilbert (1862–1943)

Über das Unendliche, Mathematische Annalen 95 (1926), 161–190. Diesen Lobpreis der Cantorschen Mengenlehre gegenüber endlicher Arithmetik schrieb Hilbert im Grundlagenstreit mit Brouwer, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Grundlagenkrise_der_Mathematik`.

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

Sie kennen diese wundersame Geschichte aus Ihrem ersten Semester: Wenn in einem **endlichen Hotel** alle Zimmer belegt sind, dann kann kein Gast mehr aufgenommen werden. Das gilt selbst dann noch, wenn die Managerin die Gäste neu auf die Zimmer verteilt. Es hilft alles nichts!

Anders in **Hilberts Hotel** mit unendlich vielen Zimmern $0, 1, 2, 3, \dots$: Sind alle Zimmer belegt, so kann immer noch ein Gast aufgenommen werden: Der Gast aus Zimmer 0 zieht nach 1, der von 1 nach 2, der von 2 nach 3, usw. Wir nutzen hierzu die Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}_{\geq 1} : n \mapsto n+1$.

Ebenso zwei Gäste, oder drei, oder vier… Nun kommt ein Hilbert–Bus mit unendlich vielen neuen Gästen. Die Managerin quartiert die alten Gäste um vermöge der Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$. Die neuen Gäste beziehen ihre Zimmer vermöge $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N}+1 : n \mapsto 2n+1$. Zusammen erhalten wir so die Bijektion $\{0,1\} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} : (i,n) \mapsto 2n+i$.

Schließlich kommen unendliche viele Busse jeweils mit unendlich vielen Gästen. Kein Problem, hierzu finden wir eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$. **Übung:** Explizieren Sie eine solche Bijektion! Wer geht wohin?

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

HOTEL INFINITY, lyrics © 2000 by Lawrence Mark Lesser

On a dark desert highway — not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done —
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

[CHORUS] *"Welcome to the Hotel called Infinity —*
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the Hotel called Infinity —
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number:
that frees the odd-numbered rooms." [CHORUS]

Last thing I remember at the end of my stay —
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

(`www.math.utep.edu/Faculty/lesser/GreatestLesserHits`)

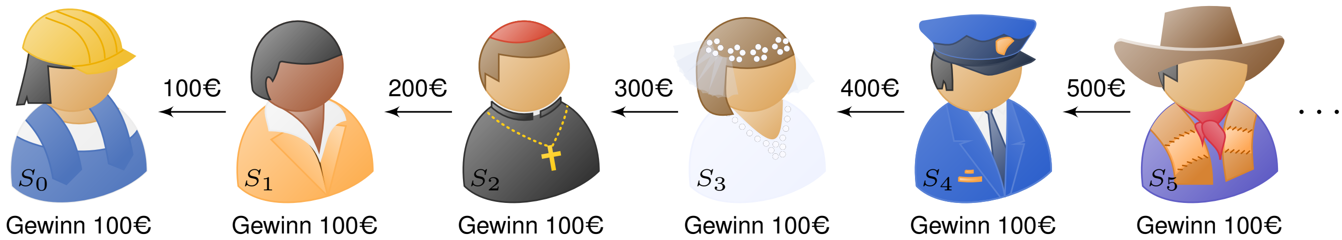
Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

Charles Ponzi: „Investieren Sie jetzt, alle werden gewinnen!“

Absolut verlässliche Garantie

Ich bin ein grundehrlicher Garantieschein und immer verlässlich.
Wer mich für n Euro kauft, darf mich für $n + 100$ Euro verkaufen.
Dank dieser Eigenschaft bringe ich allen Wohlstand und Glück.

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersame Vermehrung des Geldes: *Everyone’s a winner?*
Sie glauben, so naiv kann doch niemand sein? **Greater Fool Theory**:
Denken Sie an Cryptos oder NFTs! J. Geuter, `youtu.be/8ciirqCCqd0`

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

Metamathematische Erfahrung führt zur folgenden provokanten These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen (in gut gemeinten Anwendungen) bzw. ausbeuten (in betrügerischer Absicht).

Letzteres gilt besonders für wenig bekannte Regelmäßigkeiten (Sätze), noch besser eignen sich Unverständnis und weit verbreitete Fehler. Ausgenutzt wird hierbei nicht direkt der mathematische Sachverhalt, sondern vor allem die ungleich verteilte Information darüber.

Einige Indizien sprechen für die häufige Richtigkeit der Vermutung. Glücksspiele, auch und besonders unsere staatlichen Lotterien, verdienen Geld mit der Risikoliebe — und irrationalem Handeln, vermutlich Unwissen. Daher heißen sie auch *Steuer auf Dummheit*.

Neben legaler Ausnutzung mathematisch-logischen Unwissens gibt es auch die illegale, kriminelle Seite: Das nennen wir Betrug. Hier blühen die erstaunlichsten Schöpfungen menschlicher Dreistigkeit, gefördert durch die erstaunlichsten Auswüchse menschlicher Dummheit. Dumm-dreist versprochen wird: *Everyone’s a winner, baby, that’s no lie!*

Wir machen folgendes **Finanzexperiment** – bitte nur in Gedanken!

„Ich darf mich vorstellen, mein Name ist Charles Ponzi, Finanzgenie. Bitte passen Sie gut auf und machen Sie mit, alle werden gewinnen! Ich bin Spieler 0, Sie sind Spieler 1, Ihr Nachbar ist Spieler 2, usw. Spieler 1: Sie geben mir 100€, Ihr Nachbar gibt Ihnen dann 200€, Ihnen bleiben 100€ Gewinn. Spieler 2: Sie haben gerade 200€ gegeben, Ihr Nachbar gibt Ihnen jedoch 300€, also bleiben auch Ihnen 100€ Gewinn. Und so weiter, und so weiter. Jeder Teilnehmer macht so 100€ Gewinn."

Wo genau liegt das Problem? Nicht alle durchschauen es sofort... Als Grundregel helfen **Erhaltungssätze**: Werte kann man nicht mühelos vermehren, das sollte jeden warnen: *There are no free lunches!*

Eine genauere Analyse offenbart das **Problem der Endlichkeit**. $\mathscr{R}_1$: Der letzte Spieler S_n bleibt auf seinen Schulden sitzen. Ist er rational, wird er schon zuvor nichts zahlen. $\mathscr{R}_2$: Ist S_{n-1} rational zweiter Stufe, so sieht er den Zusammenbruch kommen und wird zuvor nichts zahlen... Die frühen Spieler benötigen jedoch Rationalität sehr hoher Stufe!

Schneeballsystem nennt man ein betrügerisches Geschäftsmodell, das zu seinem Betrieb immer neue Teilnehmer benötigt: Es gibt kein profitables Produkt, sondern Gewinne entstehen hauptsächlich oder ausschließlich durch das frisch zufließende Kapitel neuer Teilnehmer.

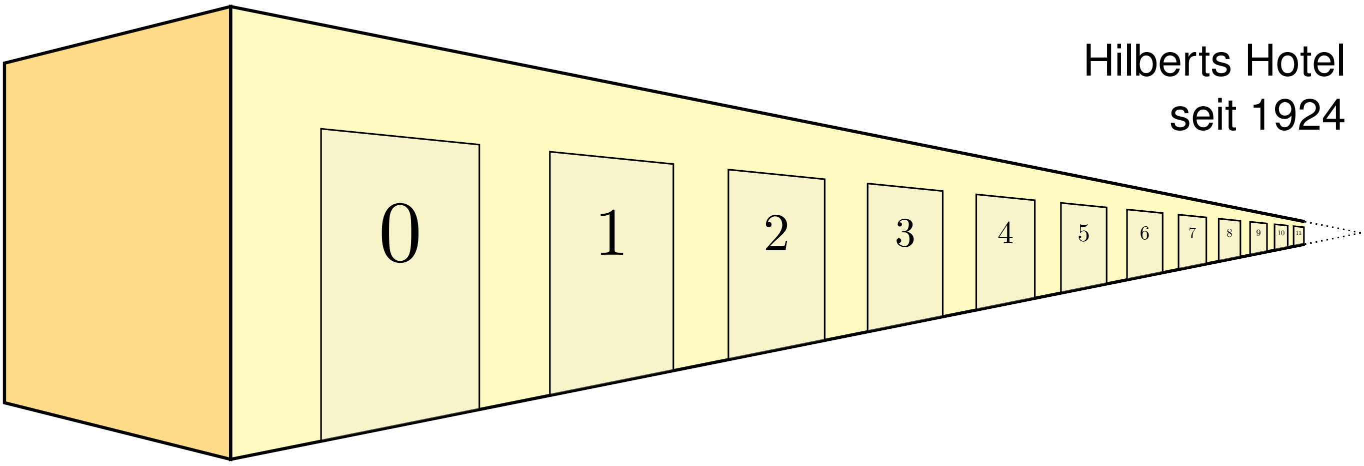
Dies heißt auch **Ponzi–Betrug**, engl. *Ponzi scheme*: Beiträge neuer Teilnehmer bezahlen die Ausschüttungen der vorgehenden Teilnehmer.

Berühmt-berüchtigt wurde diese Betrugsmasche durch **Charles Ponzi**, der in den 1920er Jahren Anleger in den USA um 20Mio Dollar prellte. Er versprach phantastische Renditen und lockte immer neue Investoren. Seine Methode **robbing Peter to pay Paul** flog nach acht Monaten auf.

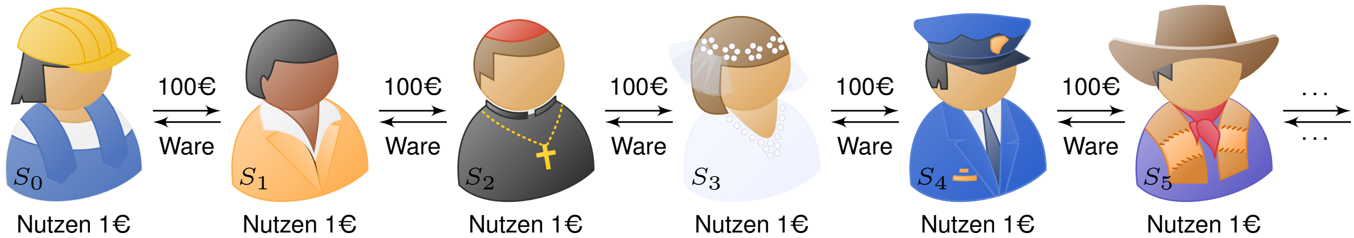
Aktuelles Beispiel eines baugleichen Systems ist der Betrugsskandal des Investmentunternehmens von **Bernard Madoff**. Es brach 2008 in der Bankenkrise zusammen, Investoren verloren etwa 18Mrd Dollar.

Ähnlich funktionieren **Kettenbriefe** und **Pyramidensysteme**, die heute im Internet kursieren: *Make Money Fast*, siehe `youtu.be/VNieth9wBTQ`. Dieser Schwindel versucht, Schulden nach Unendlich zu verschieben.

Wie und warum funktioniert Geld?



These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersamer Nutzen des Geldes: *Everyone's a winner!* Ponzi–Betrug?
Kann Geld aus dem Nichts entstehen? Arte: 42, `youtu.be/NMUFAzV6C5M`

Wie und warum funktioniert Geld?

Als erstes möchte ich ehrlich zugeben: Das gezeigte Modell ist zwar leicht verständlich, aber leider auch extrem vereinfacht und allzu simpel. Komplizierte Geldsysteme versteht vermutlich kaum jemand so recht, oder bestenfalls nur in Analogie zu simplen Fällen wie diesem.

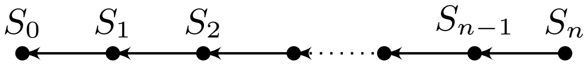
Spieler 0 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 1 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 1 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 2 bezahlen kann. Und tatsächlich:

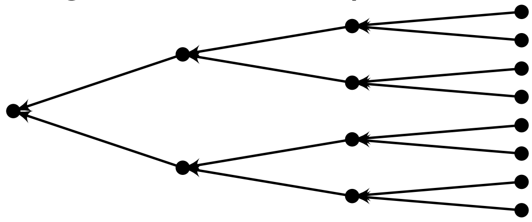
Spieler 1 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 2 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 2 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 3 bezahlen kann. Und tatsächlich: . . .

Jeder Spieler S_n weiß, mit einer kleinen Wkt $\varepsilon_n \in [0, \varepsilon]$ kann das System im nächsten Schritt zusammenbrechen. Der erwartete Verlust $\varepsilon_n \cdot$ 100€ ist jedoch geringer als der erwartete Nutzen, hier beispielhaft 1€. Daher ist es für jeden Spieler lukrativ, dieses Risiko einzugehen.

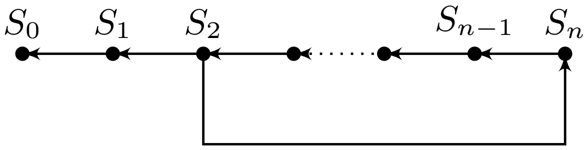
Wie und warum funktioniert Geld?

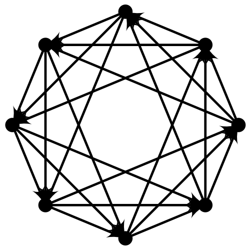
Nutzentransfer in einfachen Beispielen dargestellt als Graph:



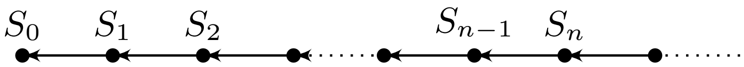


☹ Gleichgewicht unmöglich: Ponzi–Betrug, Schneeballsystem





☺ Gleichgewicht möglich: Geldzirkulation, evtl. Abfluss, Steuern, etc.



(potentiell) unendlich viele Spieler

☺ Gleichgewicht möglich: Generationenvertrag, Rentensystem, etc.
Anders als beim Ponzi–Betrug kann Geldzirkulation überall positiven Nutzen erzeugen. Das sagt noch nichts über un/gerechte Verteilung!

Wie und warum funktioniert Geld?

In unserem simplen Beispiel hat jeder denselben Nutzen / Gewinn 1€. Zur Rationalität genügt, dass jeder positiven Nutzen hat; dieser kann unterschiedlich verteilt sein, gar extrem ungerecht. Solche Phänomene beobachten wir tatsächlich deutlich in der uns umgebenden Ökonomie.

Das herrschende Geldsystem ist das Geldsystem der Herrschenden. Es wird verteidigt mit dem ideologischen Anspruch der Gerechtigkeit. In der Praxis kann es dies oft nicht einlösen. Liegt das am Geldsystem selbst oder an anderen Faktoren? Darüber lohnt es sich zu streiten.

> *Geld ist eine neue Form der Sklaverei, die sich von der alten nur unterscheidet, indem sie unpersönlich ist, dass es keine direkte Beziehung zwischen Herren und Sklaven gibt.*
>
> Leo Tolstoi (1828–1910)

Insgesamt wird der Kapitalismus kritisiert als Variante des Ponzi-Betrugs: Aus marxistischer Sicht zerstört er seine gesellschaftlichen Grundlagen. Aus ökologischer Sicht zerstören wir so unsere natürlichen Ressourcen. Ist die fehlende Nachhaltigkeit korrigierbar oder systematisch?

Wie und warum funktioniert Geld?

Jedes Tauschmittel muss gewisse Bedingungen erfüllen: (0) Es muss praktikabel und haltbar sein, aber nur schwer vermehrbar oder fälschbar. (1) Ausreichend viele Akteure akzeptieren es als Zahlungsmittel: Sie vertrauen darauf, dass ausreichend viele es akzeptieren, usw.

Aufgabe: Wir untersuchen eine einfache Gesellschaft $I = \{1, 2, \dots, N\}$. Spieler handeln mit gewisser Wkt miteinander, etwa gleichverteilt.

A \ B	M	V
M	0 / 0	0 / $-a$
V	$-a$ / 0	b / b

Geldnutzen zwischen Tauschpartnern: Verlust a, Nutzen b, etwa $a = b = 1$.

M: misstraut dem Tauschmittel / Geld und lehnt jeden Handel damit ab.

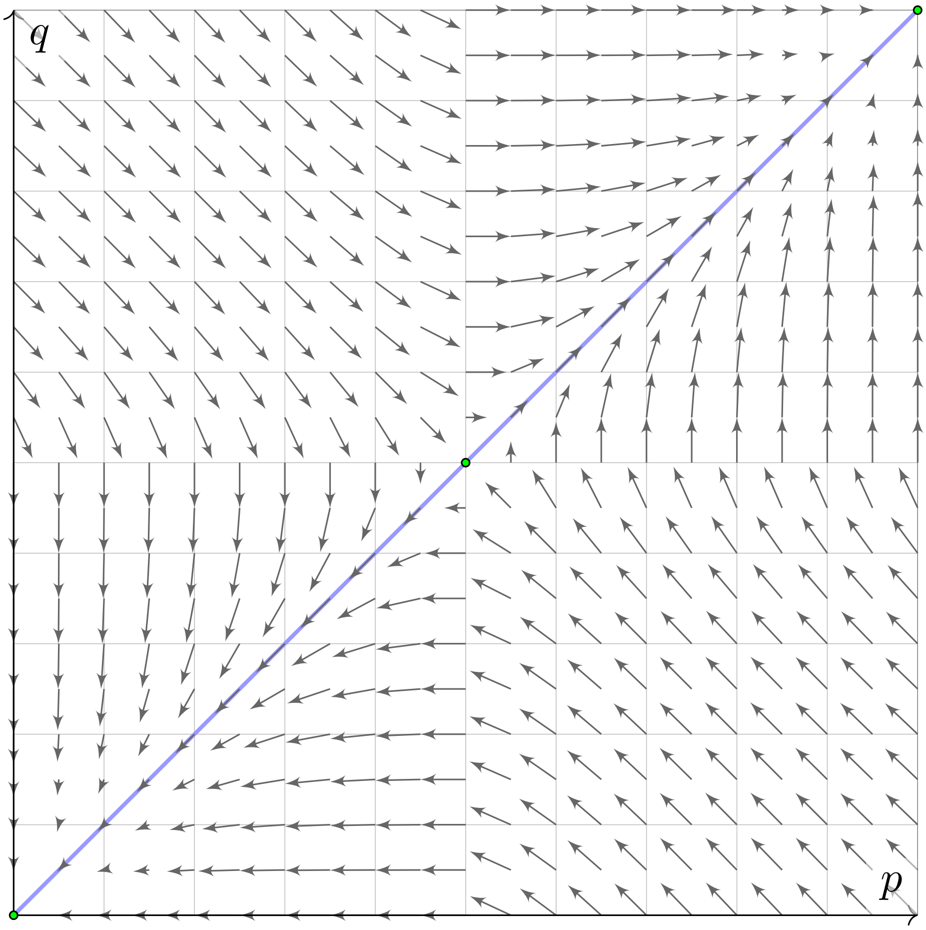
V: vertraut dem Tauschmittel / Geld und akzeptiert jeden Handel damit.

Ab welcher Akzeptanzrate $q \in [0, 1]$ setzt sich das Tauschmittel durch?

Lösung: Der erwartete Nutzen für M-Spieler ist Null. Der erwartete Nutzen für V-Spieler ist $qb - (1-q)a$, also positiv für $q > a/(a+b)$.

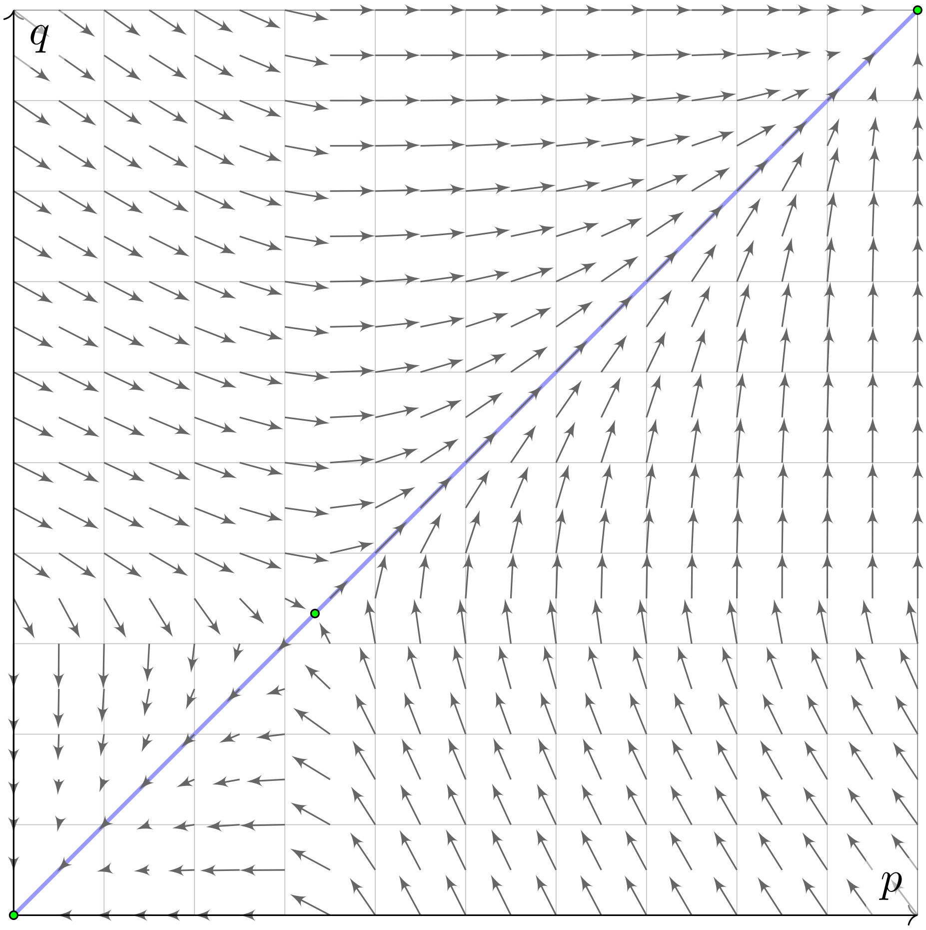
Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 1$



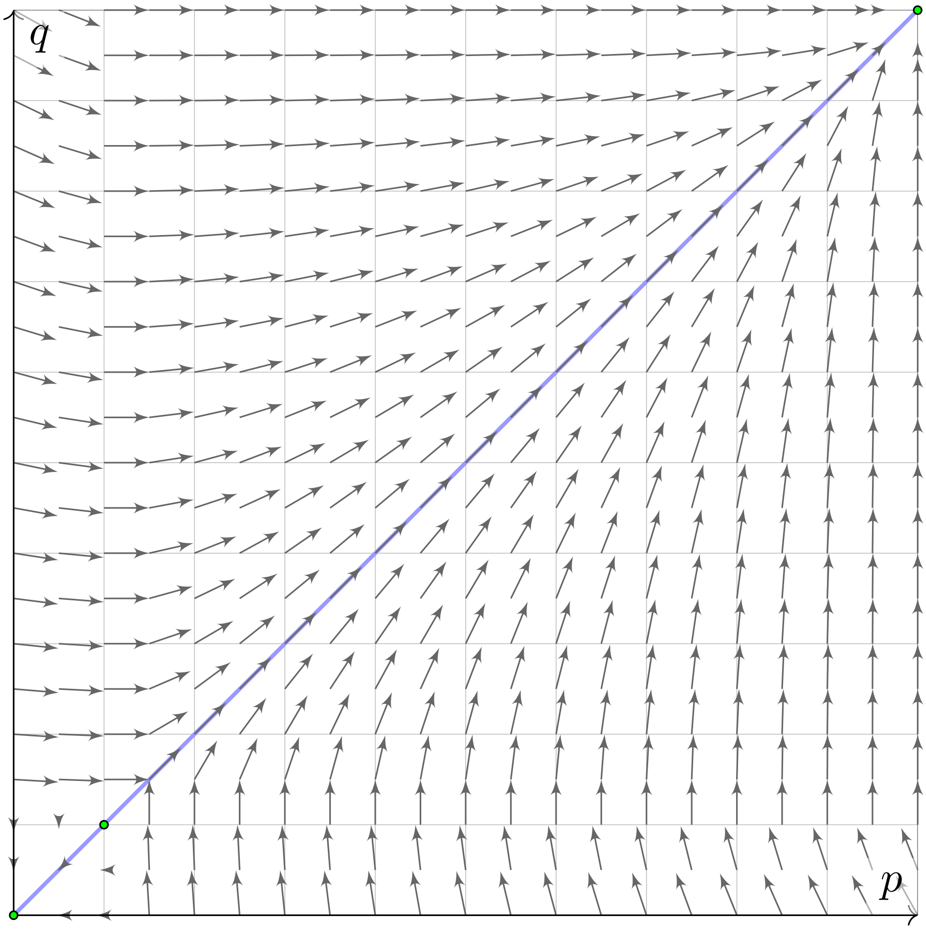
Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 2$



Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 9$



Wie und warum funktioniert Geld?

Jedes Geldsystem beruht auf **Vertrauen**, es ist eine stillschweigende **Vereinbarung** per Tradition oder ein **Gesellschaftsvertrag** per Gesetz. In unserem stark vereinfachten Modellbeispiel entsprechen allseitiges Misstrauen bzw. Vertrauen den beiden stabilen Nash–Gleichgewichten.

Ein Geldsystem funktioniert, solange ausreichend viele Teilnehmer dem System vertrauen und sich ein Nutzengleichgewicht einstellt, also Akzeptanz durch strikt positiven Nutzen für jeden Teilnehmer. Die oben Graphiken zeigen hierzu die Nash–Dynamik.

In schweren **Krisen** (Hyperinflation, Staatsbankrott, Bankenkollaps) übersteigt das Misstrauen (geschätzte Abbruchwkt) den Geldnutzen. Dann bricht das Geldsystem zusammen, und die Akteure flüchten sich in **Sachwerte**, etwa Rohstoffe, Edelmetalle, Immobilien, Aktien, usw. . .

Dies ist ein sich selbst verstärkender (autokatalytischer) Vorgang. Im positiven Falle ist es eine Aufwärtsspirale, die zu einem stabilen Geldsystem führt. Im negativen Falle ist es eine Abwärtsspirale, die alle Geldwerte vernichtet. Beides kommt tatsächlich vor.

Wie und warum funktioniert Geld?

Im **Tauschhandel** entwickeln sich meist bestimmte Güter zur Referenz, etwa nützliche (Getreide, Vieh) oder seltene (Muscheln, Edelmetalle): Sie werden allgemein als wertvoll anerkannt, existieren in ausreichender aber beschränkter Menge, sind praktikabel und haltbar. Sie können als **Tauschmittel** und **Wertspeicher** dienen und erhalten so Geldfunktion.

Anekdote: Auch **Zigaretten** dienten als Währung auf Schwarzmärkten. Warum akzeptiert ein Nichtraucher dieses Zahlungsmittel? Er vertraut auf viele Raucher. . . und auf Nichtraucher, die darauf vertrauen. . . usw. Viele Güter sind dazu geeignet. Der Kernpunkt ist immer das Vertrauen! Eigenschaft (0) ist gegeben, (1) wird gesellschaftlich hergestellt.

Als **Zahlungsmittel** dienen ganz allgemein übertragbare, einheitliche Wertträger. Molluskengeld (Muschelgeld) ist eine vormünzliche Geldform und wird teilweise heute noch als Kleingeld verwendet. **Kaurigeld** aus den Gehäusen von Kaurischnecken war das erste allgemeingültige Geld und förderte maßgeblich den überregionalen Handel. Hier gibt es keine Kontrolle über die Geldmenge, diese wird der Natur überlassen.

Wie und warum funktioniert Geld?

Die Übertragung dieser Funktion auf **Münzen** (China, Indien, Ägäis um 700 v.Chr.) und **Papiergeld** (China um 1000 n.Chr.) ist eine erstaunliche Errungenschaft. Das nötige Vertrauen muss zunächst aufgebaut werden, als Garant dienten meist zentrale Institutionen (König, Staat, Bank).

Sprichwörtlich ist hier König Krösus (ca. 590–541 v.Chr.): Als König von Lydien in Vorderasien prägte er als erster Münzen und verhalf so einer der nachhaltigsten Erfindungen der Geschichte zum Durchbruch.
Er überführte die Gesellschaft in ein neues Gleichgewicht.

Seit jeher müssen diese Institutionen auch **Falschgeld** bekämpfen.
In Deutschland wird bestraft (§146 StGB), wer Geld nachmacht oder verfälscht, sich Falschgeld verschafft und in Verkehr bringt, auch wer gutgläubig Falschgeld erwirbt und wissentlich weitergibt (§147 StGB).

Falschgeld wird staatlicherseits eingezogen und nicht erstattet; solange jedoch niemand die Echtheit prüft, wirkt falsches genau wie echtes Geld. Alles beruht auf diesem Gleichgewicht, **Misstrauen gegen Vertrauen!** Staatliche Institutionen versuchen es zu schützen und zu fördern.

Wie und warum funktioniert Geld?

Der Blick auf die Geschichte zeigt eine Abstraktion vom Tauschhandel über prämonetäre Zahlungsmittel erst zu Münzen, dann Geldscheinen, Plastikgeld, Kryptowährungen, usw. Der Abstraktion scheinen dabei keine Grenzen gesetzt, wir erleben dies gerade in unserem Zeitalter:

Papiergeld wurde lange Zeit mit Gold gedeckt, um das Vertrauen zu stärken. Später stellte sich heraus, dass dieser **Goldstandard** nicht (mehr) nötig war, und so wurde er erst gelockert, dann aufgegeben. **Buchgeld** stand früher im *Bankbuch*, heute wird es auf Girokonten *gebucht*. Es heißt auch **Bankengeld** oder **Giralgeld** (it. *giro*, gr. γυρός [gyrós], ‘Kreis, Umlauf’). Es ist zunächst nur ein **Zahlungsversprechen** oder umgekehrt eine **Geldforderung**, kein gesetzliches Zahlungsmittel. Solange ihm alle Beteiligten vertrauen, übernimmt es Geldfunktion.

Ich betone erneut die unabdingbare Voraussetzung des Vertrauens:
Ein Geldsystem funktioniert, solange ausreichend viele Teilnehmer dem System vertrauen und sich ein Nutzengleichgewicht einstellt, also Akzeptanz durch strikt positiven Nutzen für jeden Teilnehmer.

Wie und warum funktioniert Geld?

Ähnlich verlief seit den 1960er Jahren die Einführung und Akzeptanz von **Kreditkarten** (Plastikgeld). Die Situation ist nicht symmetrisch, der Mechanismus aber ähnlich: Ausreichend viele Händler müssen diese Karte akzeptieren und zugleich müssen ausreichend viele Kunden sie nutzen wollen. In unserem obigen Modell entspräche dies einem Spiel zwischen zwei Populationen $I = \{1, 2, \dots, M\}$ und $J = \{1, 2, \dots, N\}$. Mit genügend Anstrengung kann man ein neues System etablieren. Schwindet das Vertrauen, so kollabiert das System (auf ein voriges).

Wir beobachten parallel, wenn auch in sehr beschränktem Umfang, den umgekehrten Trend zu **Regionalwährungen** und **Tauschringen**. Das funktioniert nur, wenn genügend Leute vertrauensvoll mitmachen, andernfalls bricht diese Form des Tausches wieder zusammen.

Manche:r mag kritisch einwenden, hier wird das **Geld neu erfunden**. Dennoch sind solche lebensgroßen Experimente oft erstaunlich und aufschlussreich, sowohl in ihren Erfolgen wie in ihren Schwierigkeiten. Man versteht etwas erst dann, wenn man es selbst herstellen kann.

Wie und warum funktioniert Geld?

Wir erleben die jüngsten Entwicklungen dieser **Abstraktion** nahezu live: vom einst direkten Warentausch über Tauschmittel, Münzen, Scheine, Buchgeld zum elektronischen Geld und zuletzt **Kryptowährungen**. Ist dies nachhaltig oder ein Ponzi–Betrug? Wie werden sehen.

Auch Kryptowährungen leben vom Vertrauen, von allseitiger Akzeptanz, und benötigen zu diesem Zweck sichernde Institutionen, also eine geeignete und vertrauenswürdige Infrastruktur. Hier ist die dezentral organisierte **Blockchain** eine wesentliche technologische Neuerung.

Der Wert entsteht durch Aushandlung und gegenseitiges Vertrauen, hier gestützt durch technische Vorkehrungen. Die enorme Wertsteigerung entsteht durch spekulative Hoffnungen auf zukünftige Interessenten. Die Grenze zum Ponzi–Betrug ist daher nicht einfach zu ziehen.

In Deutschland sind Kryptowährungen (noch) kein Zahlungsmittel. Die BaFin sieht Bitcoin als Rechnungseinheit, eine Art Privatgeld. El Salvador experimentiert seit Sep. 2021 damit, trotz aller Risiken. *Sind Kryptowährungen das bessere Geld?* `youtu.be/vOLZzlM_pG8`

Wie und warum funktioniert Geld?

Das Spiel *Misstrauen-gegen-Vertrauen* hat drei Gleichgewichte:
Die beiden reinen Gleichgewichte (Misstrauen,Misstrauen) und (Vertrauen,Vertrauen) sind stabil, das gemischte Gleichgewicht dazwischen ist instabil. Wie gelingt der Übergang vom einen (Misstrauen,Misstrauen) zum anderen (Vertrauen,Vertrauen)?
Genau diese Hürde muss jedes Zahlungsmittel überwinden.

Zunächst einmal hilft es, wenn das Zahlungsmittel Vorteile b hat, zudem möglichst große gegenüber den möglichen Nachteilen a.
Genau dies beobachten wir historisch: „Die Vorteile überwiegen.“
Das ist notwendig, genügt aber noch nicht für den Übergang!

Weiterhin ist es anfangs günstig, eine korrelierte Strategie zu verfolgen. In der Praxis kann dies geschehen, indem ein speziell ausgewiesener Markt für die Benutzung des neuen Zahlungsmittels eingerichtet wird. Jeder Teilnehmer entscheidet sich, ob er daran teilnimmt (Vertrauen) oder nicht (Misstrauen). Dadurch werden die beiden Teilpopulationen weitgehend getrennt und verlustreiche Konflikte vermieden.

Was lernen wir aus Modellen?

Wie verhalten sich unsere spieltheoretischen Modelle zur Wirklichkeit?

Good modeling requires a judicious balance between detail and abstraction, between “realism and relevance”, between simplification and tractability.

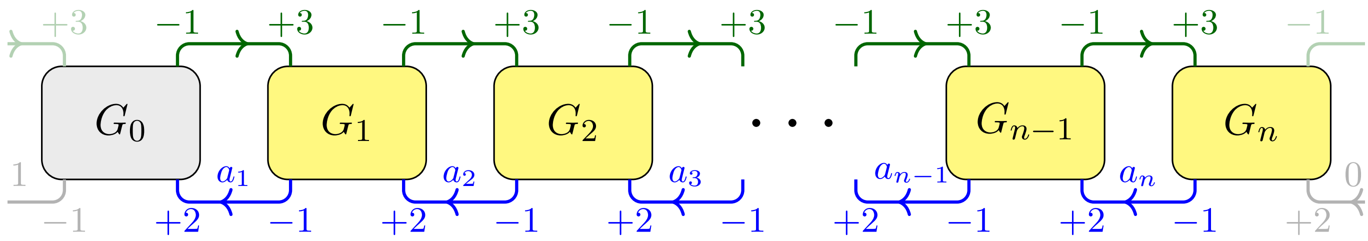
Models should not only be sufficiently well defined to be mathematically analyzable but they should be playable as games (and possibly used as experimental games). This additional gaming criterion provides a “debugging device” and serves as a check on the complexity and ease or difficulty with which the mechanism is run. […]

Critics will feel that the simplifications are gross distortions of “the real world”, while the mathematically oriented theorist may feel that the models are too cluttered up with unnecessary detail. It is possibly helpful to look at the models as playable games which can be analyzed rather than stress immediate realism.

Martin Shubik (1926–2018), *Theory of Money and Institutions*
(in *Handbook of Monetary Economics*, vol. 1, chap. 5, p. 179)

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Die Generationen $G_0, G_1, \dots, G_n$ interagieren nach folgendem Muster:



Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern G_{i-1}. Sie entscheidet sich daraufhin entweder für Egoismus ($a_i = 0$) oder Altersversorgung ($a_i = 1$). Ihre Auszahlung ist $u_i = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Wie skizziert gelten die Randbedingungen $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 0$.

Jede Generation G_i hat demnach vier mögliche Strategien:

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$.

Aufgabe: Untersuchen Sie zunächst den endlichen Fall $n < \infty$. Was sind hier Gleichgewichte? Kann Altersversorgung rational sein?

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

☺ Unser Modell ist extrem vereinfacht, aber es illustriert das Prinzip. Es ist ein Gleichnis, ein einfaches Lehrbeispiel und leicht zu verstehen. Wir suchen alle stabilen Lösungen, also **Nash–Gleichgewichte**.

Zur Vereinfachung nehmen wir hier an, jede Generation G_i investiert automatisch in ihre Kinder G_{i+1}. Auch dies könnten wir als strategische Option untersuchen, ich gehe auf diese Verfeinerung nicht weiter ein.

Konrad Adenauer wird in dieser Frage der Ausspruch zugeschrieben: „Kinder bekommen die Leute immer.“ — Aus heutiger Sicht ein Irrtum.

Die Werteskalen und konkret angesetzten Zahlen sind etwas willkürlich. Uns geht es um die Frage, ob und wie Gleichgewichte möglich sind.

Die Frage mag überraschen: Jeder Akteur, die Generation G_i, trifft nur eine Entscheidung, nämlich die Zuwendung a_i an ihre Elterngeneration G_{i-1}, jedoch **ohne irgendeine Gegenleistung** erhoffen zu können.

Ist diese Zuwendung also irrational im Sinne individueller Maximierung? Oder gibt es doch Mechanismen, die sie materiell belohnen könnten? Genau diesen Fragen gehen wir in den nächsten Aufgaben nach!

Aufgabe: (0) Formulieren Sie dies sorgfältig als strategisches Spiel

$$u \;:\; \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I \;:\; s \mapsto u(s).$$

Lösung: (0) Die Spielermenge ist $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0, 1\}$ ihrer Eltern und muss daraufhin ihre Aktion $a_i \in \{0, 1\}$ wählen. Somit hat sie die vier möglichen Strategien

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 0 \\ 1\mapsto 0 \end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 1 \\ 1\mapsto 1 \end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 1 \\ 1\mapsto 0 \end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 0 \\ 1\mapsto 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Jeder Spieler $i \in I$ hat also die Strategiemenge $S_i = \{E, A, K, N\}$. Der Strategievektor $s \in S := \prod_{i\in I} S_i$ bestimmt den Aktionsvektor $a \in \{0, 1\}^I$: Wir setzen $a_0 = 1$ und rekursiv $a_i = s_i(a_{i-1})$ für $i \in I$ sowie $a_{n+1} = 0$.

Die Auszahlung $u : S \to \mathbb{R}^I$ ist in diesem Modell $u_i(s) = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Für Generation G_1 sind die Strategien $E \equiv K$ und $A \equiv K$ äquivalent, denn jedes Paar führt jeweils zu derselben Aktion a_1 und Auszahlung.

Die Randbedingungen, hier $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 0$, sind etwas willkürlich, aber notwendig. Anschaulich können wir $s_0 = A$ und $s_{n+1} = E$ setzen.

Beobachtbar sind in diesem Spiel nur die Aktionen $a_i \in \{0, 1\}$. Diese allein bestimmen bereits alle Auszahlung $u_i = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Sprichwörtlich sagt hierzu der Volksmund: „Nur die Taten zählen.“ Biblisch: „An ihren Früchten sollt ihr sie erkennen.“ (Matthäus 7,20)

Die **Strategie** s_i ist hier jedoch nicht die Aktion a_i selbst, sondern die Methode (Funktion, Handlungsanweisung), um diese Aktion zu ermitteln. Die auszuführende Aktion a_i ist nämlich nicht konstant vorgeschrieben, sondern hängt ab von der vom Spieler i beobachteten Vorgeschichte.

Dieses raffinierte Modell unterscheidet auf genial-einfache Weise zwischen **Genotyp** $s_i \in \{E, A, K, N\}$, den individuellen Strategien, und **Phänotyp** $a_i \in \{0, 1\}$, den ausgespielten Aktionen abhängig von der Vorgeschichte. Der Phänotyp entsteht aus Genotyp und Umwelt.

Ebenso können wir uns die Strategie s_i von Spieler i als seine **Moral** vorstellen, also seine (explizite) Vorschrift für das „rechte Handeln“. Die Handlung $a_i = s_i(a_{i-1})$ ist seine Reaktion auf die Handlungen anderer, also auf die in der Gesellschaft vorgefundenen Umstände.

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Aufgabe: (1) Finden Sie alle Gleichgewichtsauszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^I$!
(2) Genauer gefragt: Welche Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$ liegen dahinter?

Lösung: (1) Der konstante Strategievektor $s = (E, E, \dots, E)$ führt zu den Aktionen $a = (0, 0, \dots, 0)$ mit den Auszahlungen $u(s) = (2, 2, \dots, 2)$. Hier ist s ein Nash–Gleichgewicht: Kein Spieler kann sich verbessern.

Jedes Nash–Gleichgewicht $s \in S$ führt zu genau demselben Ergebnis: Rückwärtsinduktion: Wäre $a \neq (0, 0, \dots, 0)$, dann existierte ein letzter Spieler $i \in I$ mit $a_i = 1$, also $a_{i+1} = \dots = a_{n+1} = 0$, und i könnte sich aus eigener Kraft verbessern. Somit wäre s kein Gleichgewicht.

🙂 Damit kennen wir alle Gleichgewichtsauszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^I$!

(2) Sei $s \in \mathrm{NE}(u)$. Aus (1) wissen wir bereits $a_i(s) = 0$ für alle $i \in I$. Aufgrund der vorgegebenen Randbedingung $a_0 = 1$ gilt $s_1 \in \{E, K\}$. Für $i \geq 2$ gilt $a_{i-1} = a_i = 0$, also $s_i \in \{E, N\}$. Wäre $s_i = N$, so könnte Spieler $i - 1$ sich aus eigener Kraft verbessern. Also bleibt nur $s_i = E$.

🙂 Damit kennen wir alle Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$!

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Bei nur **endlich vielen Generationen** ist dies ein Ponzi–Betrug: Dieses Umverteilungssystem muss irgendwann zusammenbrechen!

$\mathscr{R}_1$: Die letzte Generation G_n hat kein Interesse an einer Zuwendung an ihre Elterngeneration G_{n-1}. Im Gegenteil schadet sich G_n damit. Bei rationalem Verhalten wird die Generation G_n also $a_n = 0$ wählen.

$\mathscr{R}_2$: Die vorletzte Generation G_{n-1} sieht dies kommen, Rationalität zweiter Stufe vorausgesetzt. Daher wird auch sie $a_{n-1} = 0$ wählen.

So geht es weiter: $a_n = 0$ führt zu $a_{n-1} = 0$ bis schließlich $a_1 = 0$. Bei rationaler Spielweise entstehen hier also keinerlei Zuwendungen.

Diese raffinierte Schlussweise kennen wir als **Rückwärtsinduktion**. Wir eliminieren hierbei schrittweise alle strikt dominierten Strategien

Zu beachten ist hierbei jedoch, dass die Generation G_i Rationalität der Stufe $n - i + 1$ benötigt. Die frühen Generationen benötigen demnach Rationalität sehr hoher Stufe! Das entspricht genau dem Ponzi–Betrug.

Die Schlussweise gilt nicht mehr im Falle unendlich vieler Generationen. Tatsächlich finden wir im unendlichen Falle völlig neue Gleichgewichte.

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Unser Argument beruht auf Rationalität im Sinne der Definition A2A. Dies wird klarer, wenn wir zum Kontrast folgende Alternative betrachten: Generation G_n möchte zwar ihren Nutzen maximieren (Axiom $\mathscr{R}_0$ gilt), ignoriert aber, dass sie die letzte Generation ist (Axiom $\mathscr{R}_1$ ist verletzt).

Aufgabe: Was passiert, wenn die letzte Generation irrational handelt? Im Angesicht des Weltuntergangs verfolgt sie vielleicht andere Ziele und könnte sich für irgendeine Strategie $s_n \in \{E, A, K, N\}$ entscheiden.

Lösung: (3) Wir fixieren $s_n = E$. Das ist die dominante Strategie. Es gelten dieselben Argumente und Ergebnisse wie zuvor in (1,2).

(4) Wir fixieren $s_n = A$. Für alle vorigen Spieler $i = n-1, \dots, 1$ gelten dieselben Argumente wie zuvor: Wir finden $s_i = E$ und $s_1 \in \{E, K\}$.

(5) Wir fixieren $s_n = K$. Für alle vorigen Spieler $i = n-1, \dots, 1$ gelten dieselben Argumente wie zuvor: Wir finden $s_i = E$ und $s_1 \in \{E, K\}$.

(6) Wir fixieren $s_n = N$. Für Spieler $n-1$ ist nun $s_{n-1} = A$ dominant. Für alle Spieler $i = n-2, \dots, 1$ finden wir per Rückwärtsinduktion $s_i = E$ und schließlich $s_1 \in \{E, K\}$. (Siehe unten, das Experiment im Casino.)

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Bei endlich vielen Generationen gibt es nur ein Gleichgewicht (1). Selbst bei irrationalem Verhalten bricht das System irgendwann ein. Selbst wenn die frühen Spieler von diesem System profitieren sollten, so ist doch klar: irgendein späterer Spieler muss die Zeche zahlen.

In der Realität treten Betrugssysteme mit diesem Muster tatsächlich auf. Warum fallen Spieler darauf herein? Mehrere Erklärungen sind denkbar:

Die frühen Spieler können irrational handeln, weil sie das Spielsystem nicht durchschauen oder analysieren können. (Annahme $\mathscr{R}_1$ ist verletzt.)

Es könnte auch sein, dass frühe Spieler durchaus das Spielsystem durchschauen, also für sie die Annahme $\mathscr{R}_1$ gilt, sie aber umgekehrt auf die Naivität späterer Spieler hoffen. (Annahme $\mathscr{R}_2$ ist verletzt.)

Bei beschränkter Rationalität gibt es genug Möglichkeiten, auf solche Betrugssysteme hereinzufallen. Erfahrung lehrt, dass dies geschieht. Das gilt insbesondere, wenn sich Details und Darstellung ändern, und so die erneute Analyse die Kapazitäten der Spieler übersteigt. Zudem ist das Internet ideal zur Verbreitung von Betrügereien.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Im **Casino Royal** (13.05.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die Kooperation überlappender Generationen als Spiel zu erproben. Experimente helfen uns zur Schärfung und Überprüfung der Theorie, getreu den obigen weisen Worten von Martin Shubik auf Seite H136.

Zur Einleitung habe ich die Spielregeln anhand der Folie H201 erklärt sowie die Modalitäten unserer Umsetzung im Hörsaal, siehe unten. Anfangs spielten sechs Studierende, dann sieben und schließlich neun. Einige Casino-Teilnehmer:innen besuchen die Vorlesung, andere nicht.

Zu diesem Zeitpunkt stand die Vorlesung genau *vor* dem Abschnitt zu überlappenden Generationen. Die Teilnehmer:innen hatten das Spiel – zumindest in der Vorlesung – noch nicht gesehen oder analysiert. Auch im Casino fand die Diskussion erst zwischen den Runden statt.

Als Randbedingungungen wurden $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 1$ festgelegt. Der Unterschied von $a_{n+1} = 1$ zu $a_{n+1} = 0$ ist nur psychologisch: Für Spieler n addiert sich eine Konstante zur seiner Auszahlung. Ab dem vierten Spiel haben wir Randeffekte spielerisch getestet.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Erstes Spiel: Sechs Studierende spielten die Generationen $G_1, \dots, G_6$. Dazu bekam jede:r Spieler:in zufällig ihre Generation G_i zugewiesen und notierte dazu ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$ auf einem Zettel. Die Zettel wurden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

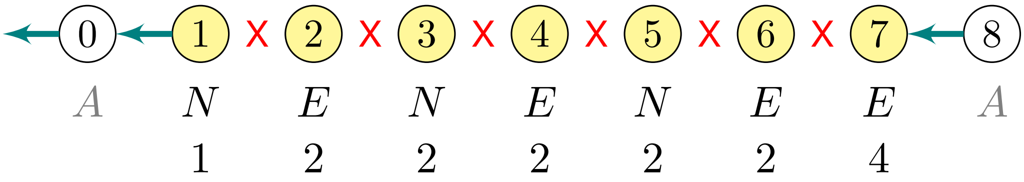
$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\leftarrow & 0 & \leftarrow & 1 & \leftarrow & 2 & \leftarrow & 3 & \times & 4 & \times & 5 & \times & 6 & \leftarrow & 7 \\
 & A & & A & & N & & N & & E & & E & & N & & A \\
 & & & 3 & & 3 & & 1 & & 2 & & 2 & & 4 & &
\end{array}$$

Wie immer gilt Vorsicht: Dies ist kein kontrolliertes Laborexperiment. Wir baten alle, bei der Auswahl ihrer Strategien nicht zu spicken und sich nicht abzusprechen. Strikt durchgesetzt haben wir dies jedoch nicht.

Natürlich nahmen alle diese Bitte sehr ernst, schon aus Eigeninteresse, denn jede:r weiß natürlich: Manipulationen des Raum-Zeit-Kontinuums führen zu unkalkulierbaren Risiken . . . und meist zu Kino-Blockbustern.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Zweites Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor. Inzwischen spielten sieben Studierende mit. Jede:r Spieler:in kannte die ihr zugeloste Generation $i \in \{1, \dots, 7\}$ und wählte daraufhin ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$. Die Zettel wurden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

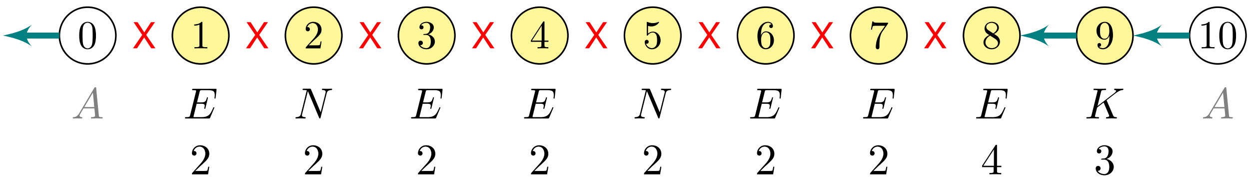


Nach den vorigen Erfahrungen bewegt sich die Gesellschaft in Richtung Egoismus. In einem Kontext von Egoisten fallen die Nachmacher nicht weiter auf, und die Gesellschaft verhält sich insgesamt egoistisch.

Das theoretisch erwartete Nash–Gleichgewicht wird nicht so schnell erreicht. In einer überwiegend egoistischen Gesellschaft ist der Druck gering, von N nach E zu wechseln, siehe G_1 gegenüber G_3, G_5, G_6, G_7.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Drittes Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor. Inzwischen spielten neun Studierende mit. Jede:r Spieler:in kannte die ihr zugeloste Generation $i \in \{1, \dots, 9\}$ und wählte daraufhin ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$. Die Zettel wurden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:



Wir sind nahe am Nash–Gleichgewicht, doch nicht ganz. Die Strategie K ist überraschend. Nehmen die Spieler:innen das Spiel ernst genug? Manche wollten vielleicht zur Abwechslung etwas neues ausprobieren.

Zudem kamen einige Teilnehmer:innen verspätet hinzu und lernten das Spiel nun erst durch *trial and error* und durch Imitation. Das war zwar so nicht geplant, entspricht aber durchaus dem wahren Leben.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Viertes Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor. Als Neuerung haben wir auf Vorschlag der Teilnehmer:innen beschlossen, der Generation G_{n+1} die Strategie N zuzuweisen. Jede:r Spieler:in kannte die ihr zugeloste Generation $i \in \{1, \dots, 9\}$ und wählte ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$.

$\leftarrow 0$	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7	x 8	$\leftarrow 9$	$\leftarrow 10$
A	E	N	N	E	N	N	E	E	A	N
	2	2	2	2	2	2	2	4	3	

Hier wären $n+1$ verschiedene, profitable Nash–Gleichgewichte möglich, nämlich $s^k = (E, \dots, E, A, N, \dots, N)$, also $s^k_k = A$ und $s^k_i = E$ für $i < k$ und $s^k_i = N$ für $i > k$. Wir sehen oben (fast) den einfachsten Fall $k = n$.

Warum wurden weiterreichende Nash–Gleichgewichte s^k nicht gespielt? Sie benötigen Absprachen, doch die Generation $n-1$ hat kein Interesse daran, da ihre Auszahlung dann von 4 auf 3 sinken würde.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Fünftes Spiel: Ab jetzt gab jede Spieler:in *zuerst* ihre Strategie an, *danach* wurde ihr eine Generation per Los zugewiesen. Symmetrie! Auf Vorschlag der Teilnehmer:innen blieb Generation G_{n+1} bei Strategie N, zudem wurde eine mittlere Generation fest auf N gesetzt, hier G_6.

$\leftarrow 0$	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7	x 8	$\leftarrow 9$	$\leftarrow 10$	$\leftarrow 11$
A	E	N	N	E	N	N	E	E	A	A	N
	2	2	2	2	2		2	4	3	3	

Die Gesellschaft blieb vorwiegend egoistisch geprägt, die einzigen zwei Altruisten fanden sich zufällig am Ende, die Nachmacher schlossen sich daher den Egoisten an. Insgesamt blieb es bei geringer Kooperation.

Die Symmetrie hilft, doch noch wurde kein Gleichgewicht erreicht. Kann eine konzertierte Aktion erfolgreich sein? Das erfordert eine Absprache vor dem Spiel! Jedes Nash–Gleichgewicht ist dann selbst-stabilisierend.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Sechstes Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor im fünften Spiel. Weiterhin wurde unter den Spieler:innen keine gemeinsame Absprache getroffen. Das hätte die Strategien koordinieren können, wurde aber weder von der Spielleitung initiiert noch von den Teilnehmer:innen gefordert.

$$\leftarrow 0 \leftarrow 1 \times 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	A	E	A	A	E	N	N	N	N	N	N
	1	4	3	1	2		2	2	2	2	

Wir nähern uns, wenn auch weiterhin nur langsam, dem erwarteten Nash–Gleichgewicht $s^0 = (N, N, \dots, N)$. Die Symmetrie hilft, da keine Spieler:in vorweg ihre Generation weiß, doch das genügt noch nicht.

Leider haben wir hier aufgehört und so die Gelegenheit verpasst, noch einmal mit vorheriger Absprache zu spielen. Kann eine ausgiebige Diskussion zum Nash–Gleichgewicht führen? Es bleibt spannend!

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Übung: Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$ zu den Randbedingungen $s_0 \in \{A, E\}$ und $s_{n+1} \in \{A, E, K, N\}$ Interessant ist insbesondere der obige Fall $s_0 = A$ und $s_{n+1} = N$.

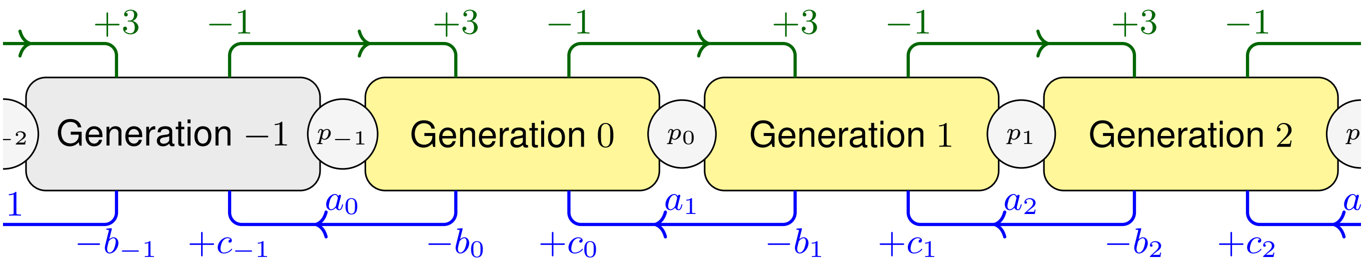
Übung: Überlegen Sie in praktischen Situationen, etwa im obigen Spiel, wie ein solches Gleichgewicht ausgewählt / angesteuert / gefunden werden kann. Versuch und Irrtum? Verhandlung und Absprache?

Übung: Die symmetrisierte Fassung ist ein anderes Spiel $\tilde{u} : S^I \to \mathbb{R}^I$. Formulieren Sie dies aus und bestimmen Sie die Nash–Gleichgewichte. Das beschreibt (und erklärt?) obige Durchgänge vier, fünf und sechs.

Übung: Mischung als Variante: Einige Spieler:innen kennen vorneweg Ihre Generation $i \in I$, andere bekommen nur $*$ als Info und werden erst nach ihrer Strategiewahl zugelost. Das Sein bestimmt das Bewusstsein?

Es ist nicht das Bewusstsein der Menschen, das ihr Sein, sondern umgekehrt ihr gesellschaftliches Sein, das ihr Bewusstsein bestimmt.
Karl Marx und Friedrich Engels, *Kritik der politischen Ökonomie* (1859)

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell



Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0,1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern G_{i-1}. Sie entscheidet sich daraufhin entweder für Egoismus ($a_i = 0$) oder Altersversorgung ($a_i = 1$). Ihre Auszahlung ist $u_i = 2 - b_i a_i + p_i c_i a_{i+1}$.

Aufgabe: Was sind hier Gleichgewichte? Ist Altersversorgung rational?

Lösung: Notwendig ist, dass sich Altersversorgung individuell lohnt:

(0) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m. Per Rückwärtsinduktion folgt dann $a_i = 0$ für alle vorigen $i = 0, 1, \dots, m$.

(1) Gilt hingegen $p_i c_i > b_i$ für alle $i \ge m$, so erscheint Altersversorgung tatsächlich als ein weiteres mögliches Gleichgewicht.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Die graphische Darstellung unseres Modells bedeutet folgendes: Jede Generation G_i wählt ihre Aktion $a_i \in \{0,1\}$: Sie kann ihre Eltern vernachlässigen ($a_i = 0$) oder versorgen ($a_i = 1$). Letzteres kostet b_i, nutzt aber den Eltern c_{i-1}. Mit Wkt $p_i \in [0,1]$ geht alles weiter.

Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern. Sie hat demnach die Strategiemenge $S_i = \{E, A, K, N\}$ mit

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 0 \\ 1\mapsto 0 \end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 1 \\ 1\mapsto 1 \end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 1 \\ 1\mapsto 0 \end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 0 \\ 1\mapsto 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Der Strategievektor $s \in S$ bestimmt den Aktionsvektor $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$: Wir setzen $a_i = 1$ für $i \in \mathbb{Z}_{<0}$ und rekursiv $a_i = s_i(a_{i-1})$ für $i \in \mathbb{N}$. (Randbedingungen sind willkürlich, aber zur Rechnung notwendig.)

Die Auszahlung $u : S \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist dann $u_i(s) = 2 - b_i a_i + p_i c_i a_{i+1}$. Hier wird der Nutzen c_i diskontiert durch die Fortsetzungswkt p_i. Das oben ausgeführte konkrete Basismodell entspricht der Wahl der Modellparameter $b_i = 1$ und $c_i = 2$ sowie $p_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Die Altersversorgung ähnelt oberflächlich einem **Ponzi–Betrug**, führt uns aber tatsächlich zu nicht-trivialen Nash–Gleichgewichten! Das ist der Nutzen konkreter Modelle: Wir können alles ausrechnen.

Der endliche und unendliche Fall werden wunderbar zusammengefasst, verallgemeinert und interpoliert durch die Abbruchwkten $1 - p_i \in [0, 1]$. Der Fall $p_n = 0$ entspricht sicherem Abbruch, also dem endlichen Fall.

Diese Erweiterung unseres Generationenmodells ist mathematisch gesehen eine Verallgemeinerung, vor allem aber eine Vereinfachung! Das erweiterte Modell ist zudem auch wesentlich realistischer.

Die Wkten haben hier keine Erinnerung, somit ist für jede Generation G_i der Vergleich sehr einfach: Den Kosten b_i gegenüber steht die erwartete Altersversorgung $p_i c_i$, also der Nutzen c_i diskontiert durch die Wkt p_i.

Im Falle $p_i c_i < b_i$ ist für G_i nur das egoistische Verhalten stabil / rational. Im Falle $p_i c_i > b_i$ *kann* das altruistische Verhalten für G_i rational sein, *wenn* G_{i+1} und alle nachfolgenden Generationen dies belohnen.

Nash–Gleichgewichte zeigen mögliches, rationales Verhalten.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Das Modell erklärt nicht, was eine **gerechte Altersversorgung** ist. Insbesondere erklärt es noch nicht, *welches* Gleichgewicht gespielt wird. Es zeigt jedoch, dass eine Altersversorgung der Eltern nicht altruistisch begründet sein muss, sondern durchaus egoistisch vorteilhaft sein kann.

Es gibt Menschen, die diesem System **misstrauen**, es ablehnen und seine Wirksamkeit abstreiten. In unserem Modell ist die von ihnen zugrundegelegte Wkt Null oder zu klein, um ein Nash–Gleichgewicht tragen zu können. Auch dieses Misstrauen ist also im Modell abbildbar.

Unsere Modelle sind einfache Beispiele zum **Mechanismen-Design** (engl. *mechanism design*). Das Ziel ist die Schaffung eines Rahmens (als Spiel, Anreiz, Gesetz, etc.), der gewünschtes Verhalten ermöglicht, fördert oder gar erzwingt. Die invidiuelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der Rahmen wird so gestaltet, dass rationale Spieler das gewünschte Verhalten wählen.

Die Spieltheorie ist daher logische Grundlage für jeden **Gesetzgeber**, oder allgemein für jede Gestaltung von Regeln des Zusammenlebens.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

(1) Sei $p_i c_i > b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, etwa $b_i = 1$ sowie $c_i = 2$ und $p_i = 1$.
Zu $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ betrachten wir folgenden Strategievektor $s^n \in S$:

$$
\begin{array}{rcccccccccccl}
i = & & 0, & 1, & \dots, & & & n, & \dots & & & & \\
s^n = & (& E, & E, & \dots, & E, & E, & A, & N, & N, & N, & \dots &) \\
a^n = & (& 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & \dots &) \\
u(s^n) = & (& 2, & 2, & \dots, & 2, & 4, & 3, & 3, & 3, & 3, & \dots &)
\end{array}
$$

Ausgeschrieben gilt $s_i^n = E$ für $i < n$ und $s_n^n = A$ und $s_i^n = N$ für $i > n$.
Dies führt zu $a_i^n = 0$ für $i < n$ und $a_i^n = 1$ für $i \ge n$, also $u(s^n)$ wie oben.

Kann sich irgendein Akteur $i \in \mathbb{N}$ aus eigener Kraft verbessern? Nein!
Also ist der Strategievektor s^n tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht!

Sei $s \in S$ ein beliebiges Nash–Gleichgewicht mit Aktionen $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und Auszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Gälte $a_i = 1$ und $a_{i+1} = 0$, so könnte i sich aus eigener Kraft verbessern. Also gilt $a = a^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Anders gesagt, a kann steigen oder bleiben, aber nicht fallen.
Damit kennen wir bereits alle Gleichgewichtsauszahlungen!

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Übung: Finden Sie alle dahinter liegenden Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$.
Rückwärtsinduktion gilt nicht im Falle unendlich vieler Generationen: Es gibt keine letzte Generation, mit der die Induktion beginnen könnte. Tatsächlich finden wir im unendlichen Falle völlig neue Gleichgewichte.

Das Generationenmodell unterscheidet auf raffinierte Weise zwischen dem **Genotyp** $s_i \in \{E, A, K, N\}$ (Veranlagung, Überzeugung, Moral) und dem **Phänotyp** $a_i \in \{0, 1\}$ (Ausprägung, Erscheinung). Letztere sind die ausgespielten Aktionen, abhängig von der **Vorgeschichte**.

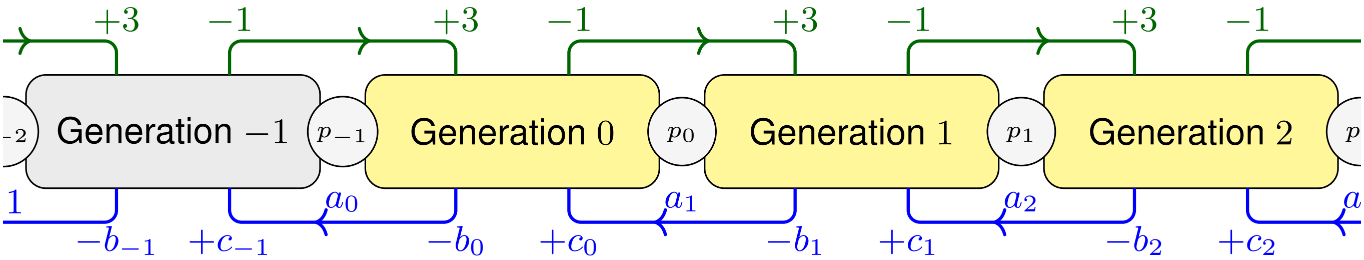
Die Generation G_0 hat nur zwei phänotypisch verschiedene Wahlen: $E \equiv N$ oder $A \equiv K$. Jede Generation G_i für $i \ge 1$ hat vier Strategien.

Jede Generation G_i trifft eine einzige Entscheidung, die Zuwendung a_i an ihre Elterngeneration G_{i-1}. Die Elterngeneration G_{i-1} hat keinerlei Rückwirkung auf G_i, also kein echtes Druckmittel (allenfalls moralische Appelle oder leere Drohungen, die wir in unserem Modell ignorieren).

Allein die Kindergeneration G_{i+1} hat ein mögliches Druckmittel auf G_i.
Bemerkenswerterweise genügt schon dieser schwächere Mechanismus.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Zusammenfassung unserer Ergebnisse zum Rentenmodell:



Satz H2A: Gleichgewichte im Rentenmodell

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0,1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

(1) Ist $s \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist der Aktionsvektor $a = a(s) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wachsend, also $a = a^n := \mathbf{I}_{\mathbb{N}_{\ge n}}$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(2) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m, per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für alle $i = 0, 1, \dots, m$, also $n > m$.

(3) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \ge m$, so lässt sich jeder Aktionsvektor $a = a^n$ mit $n \ge m$ durch ein Nash–Gleichgewicht $s = s^n \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$ realisieren.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Damit dieses filigrane Gleichgewicht bestehen kann, muss es unendlich viele Generationen geben. Der endliche Fall verläuft völlig konträr!

Genauer: Es muss *potentiell* unendlich viele Generationen geben, denn keine Generation darf ernsthaft glauben, die letzte zu sein. Die Maxime „Nach mir die Sintflut!“ führt zu Rücksichtslosigkeit.

Realistischer ist daher folgendes Modell: Jede Generation G_i glaubt, dass die Generationenfolge mit Wkt $p_i \in [0,1]$ weitergeht. Mit Wkt $1 - p_i$ geht die Welt unter, oder Generation G_{i+1} spielt einfach nicht mehr mit.

Im Beispiel vergleicht G_i die Aktion $a_i = 0$ und die Auszahlung $u_i = 2$ mit ihrer Alternative $a_i = 1$ und der Auszahlung $u_i = 1 + 2p_i > 2$. Für $p_i > 1/2$ fällt der Vergleich weiterhin zugunsten der Aktion $a_i = 1$ aus.

Bei Fortsetzungswkt von $p_i = 2/3$ erwarten wir nur drei Generationen. Dennoch lohnt zu jedem Zeitpunkt immer noch der Generationenvertrag!

Fazit: Jede Generation muss ausreichend sicher an den Fortbestand weiterer Generationen glauben und so auf die Fortsetzung des Systems vertrauen. Dann und nur dann sind nicht-triviale Gleichgewichte möglich.

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Im **Casino Royal** (20.05.2022) wollte ich die Erfahrungen der Vorwoche zu einem würdigen Abschluss bringen. Die positive Entwicklung stimmte optimistisch, es fehlte nicht viel. In der Vorlesung am Mittwoch hatten wir das Generationenmodell diskutiert und alle Gleichgewichte bestimmt. Das Kapitel war abgeschlossen. In diesem Sinne schien alles gelöst.

Meine Hoffnung war, das höherwertige Gleichgewicht in einem letzten, kurzen Experiment zu erproben, auch empirisch als „die beste Lösung“ zu etablieren, damit die schöne Theorie zu bestätigen und zu krönen. Allein, es kam alles anders. Jedes Casino ist lehrreich, und manchmal geschieht Spektakuläres, Geschichte wird geschrieben. Dieses Casino lief weitgehend konträr zur Intuition und hat das Zeug zur Legende.

Es kamen 15 Teilnehmer:innen, $1/3$ war schon letzte Woche im Casino, für $2/3$ war das Generationenspiel neu. Eine Teilnehmerin der Vorwoche stellte die Regeln für alle nochmals vor, anhand der obigen Folie H201, so entstand ein hinreißendes Beamer-Karaoke. (Notiz an mich selbst: Ich sollte auch meine Vorlesungen generell auf Karaoke umstellen!)

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Erstes Spiel: Jede:r Spieler:in bekommt eine Generation $G_1, \dots, G_{15}$ zugelost und notiert ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$ auf einem Zettel. Alle Zettel werden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	E	N	E	N	N	N	A	N	A	E	E	N	A	A	N
	1	2	2	2	2	2	4	3	3	1	2	2	4	3	3	

Die Randbedingungen $s_0 = A$ und $s_{16} = N$ sind fix und allen bekannt. Das Ende $\dots, A, A, N$ ist daher unerwartet, rational wäre $\dots, E, A, N$. Andererseits sind viele Spieler:innen noch unerfahren, probieren aus und experimentieren. Gut, dass wir mit dieser Proberunde beginnen!

In diesem Testlauf ohne vorige Aussprache zählen wir 6 Nachmacher, 5 Altruisten, 4 Egoisten. Das ist die nüchterne Ausgangslage, nun sind alle hochmotiviert und bereit zu zivilisatorischen Höchstleistungen. Können unsere wackeren Held:innen die Welt verbessern?

Empirie: It’s a long way to the top… und zum Gleichgewicht!

Nach dem Probelauf kommt der Vorschlag, zur symmetrischen Form überzugehen. Alle stimmen zu. Zudem wünschen die Teilnehmer:innen dringend eine ausführliche Aussprache mit dem Ziel und in der Hoffnung, ein gemeinsames Vorgehen abzustimmen. Das hatte bislang gefehlt!

In flammender Rede erklärt Frau H. ihre Vision, ich paraphrasiere: „Ich war in der Vorlesung und habe zu diesem Spiel alles verstanden. Das Beste ist, wenn wir alle Nachmacher spielen, dann bekommt jede:r von uns die Auszahlung 3. Das ist viel besser als eben und zudem ein Gleichgewicht: Wer davon abweicht, und zum Beispiel E oder K spielt, schadet sich selbst, denn dann bekommt er/sie statt 3 nur 2.“

Ich versuche zu polemisieren: „Ganz egoistisch gesehen wäre es am lukrativsten, altruistische Kinder zu haben und selbst Egoist zu spielen.“ Dieses Störmanöver wird abgeschmettert mit dem Argument, dass noch keine ihre Position kennt, und die anderen ja doch Nachmacher spielen (sollen). Es werden noch Details zu diesem Vorschlag erörtert und an die Autorität appelliert, erstaunlicherweise diesmal nicht an die Moral.

Empirie: It’s a long way to the top… und zum Gleichgewicht!

Zweites Spiel: Die visionäre Rede von Frau H. zeigt Wirkung, fast alle folgen der überzeugend vorgebrachten Argumentation, doch nicht ganz: Neben elf (!) Nachmachern gibt es zwei Altruisten, einen Egoisten und einen Kontraspieler. Die zufällige Zulosung der Generationen ergibt:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	N	N	N	A	N	N	K	N	N	N	N	N	A	N	E	N
	3	3	3	3	3	1	2	2	2	2	2	4	3	1	2	

Beim Auslosen von links nach rechts beginnt alles so vielversprechend! Auch hier ist das Ende unglücklich. Da die Generation zugelost wurde, liegt es diesmal nicht an unkluger Strategie, sondern ist einfach Pech.

Noch tragischer ist die Kontra-Generation 7: Sie schadet nicht nur sich selbst, sondern reißt vier wohlmeinende Nachmacher-Generationen mit ins Verderben. Erst die fünfte hat großes Glück und altruistische Kinder.

Die altruistische Generation 4 hingegen fällt phänotypisch gar nicht auf. Kontrovers: Soll man Altruisten rügen oder loben, bremsen oder fördern?

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Die Enttäuschung ist groß, und manche machen ihrer Wut sofort Luft: „Hätte Generation 7 nicht Kontra gespielt, sondern Nachmacher wie zuvor vereinbart, dann wäre unser Plan wunderbar aufgegangen.“ Hätte, hätte, Generationenkette. *You can’t make this stuff up!*

Herr S. ergreift das Wort: „Ich stimme meiner Vorrednerin voll und ganz zu: Wir sollten alle Nachmacher spielen. Leider sind manche nicht fähig oder nicht willens dazu. Um das auszugleichen, sollten ein paar von uns Altruist spielen, sagen wir mit Wkt $1/4$. Das durchbricht Negativsträhnen.“

Als Advocatus Diaboli versuche ich erneut zu polemisieren. Vorneweg *ad hominem*: „Herr S. hat eben noch Geld verloren, nun spielt er sich als Experte auf.“ Dann populistisch: „Ich als einfacher Mann auf der Straße finde das zu kompliziert. Die Studenten lernen so einen theoretischen Quatsch an der Uni, in der Praxis funktioniert das nie und nimmer!“.
– „Doch, man kann es leicht nachrechnen.“ – „Nein, ich nicht.“

Ich zweifle, ob Anleitung und Begründung wirklich verstanden werden. Allen anderen scheint es klar genug, ihnen genügt die Aussprache.

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Drittes Spiel: Die Ansprache von Herrn S. hat wohl Eindruck gemacht. Neben zehn (!) Nachmachern gibt es einen Altruisten und vier Egoisten. Der gesellschaftliche Zusammenhalt hat sich somit leicht verschlechtert. Die zufällige Zulosung der Generationen ergibt:

A	N	N	E	N	A	E	N	E	E	N	N	N	N	N	N	N
	3	1	2	4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Herr S. ist sichtlich geknickt und sagt später: „Ich frage mich, ob mein Vorschlag nicht mehr geschadet als genutzt hat. Vielleicht haben einige Spieler auf einen ausreichend hohen Anteil von Altruisten spekuliert, und deshalb Egoist gespielt?“ Gelohnt hat sich das jedenfalls nicht!

Der Vorschlag ist gewitzt. Doch als jahrelang erfahrener Spieltheoretiker weiß Herr S. natürlich, dass sein Strategiebündel kein Gleichgewicht ist, also nicht selbst-stabilisierend. Im Gegenteil verlockt es zur Spekulation. Wo kein Gleichgewicht ist, helfen auch keine frommen (Experten-)Worte.

Empirie: It’s a long way to the top. . . und zum Gleichgewicht!

Wieder ist die Enttäuschung groß. Wie kann das sein? Wer ist schuld?

Herr S. improvisiert eine kreative Erklärung: „Manche von uns sind neu, andere haben schon Spielgeld aus den Vorwochen. Sie möchten nicht, dass mehr Spielgeld in Umlauf kommt und sabotieren vielleicht unsere Bemühungen.“ Es ist nur ein kleiner Schritt zum Verschwörungsmythos.

Herr M. proklamiert: „Wir sollten endlich alle zusammenhalten und Prof. Eisermann möglichst viel Geld aus der Tasche ziehen!“ Wo der innere Zusammenhalt fehlt, eint vielleicht ein gemeinsamer äußerer Feind? Das klappt immer. Als zusätzliche Motivation schadet es nie.

Herr A. unterbreitet seine Troll-Vermutung: „Einige Teilnehmer:innen nehmen das Spiel nicht ernst. Statt der Auszahlung in €i$to maximieren sie ihren Spaß am allgemeinen Chaos und an dem Ärger der anderen. Daher sollten wir nicht Spielgeld auszahlen, sondern echtes Geld!“

Nach Rat unserer Rechtsabteilung („Nein!“) willige ich ein, echtes Geld auszuzahlen. Umrechnungskurs $1 \mapsto -50¢$, $2 \mapsto 0¢$, $3 \mapsto 50¢$, $4 \mapsto 100¢$.

Empirie: It’s a long way to the top. . . und zum Gleichgewicht!

Alle Teilnehmer:innen werden über Chancen und Risiken aufgeklärt und ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sie bei diesem Durchgang zwar Geld gewinnen, aber auch Geld verlieren können. Frau Stoll erläutert ausführlich, dass man sicherheitshalber Egoist spielen kann.

Viertes Spiel: Es geht um Geld, sonst echte €i$to, jetzt echte Euro! Ich konferiere mit meiner Bank und hole Bargeld, daher verpasse ich den Großteil der lebhaften Debatte. Das Ergebnis spricht für sich:

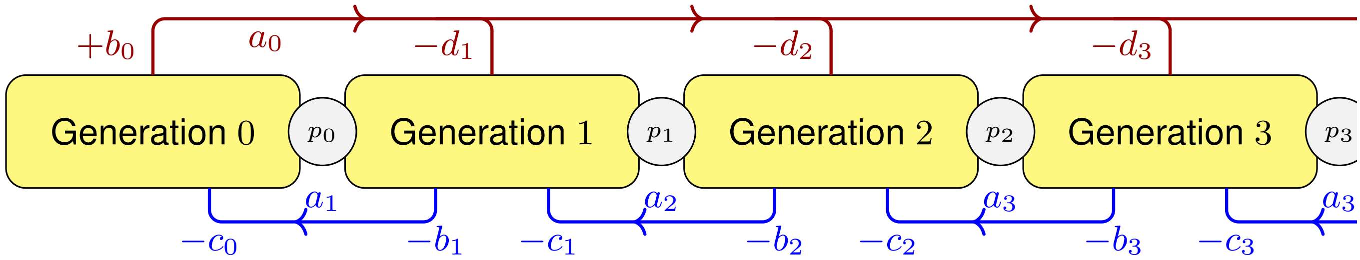
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	N	N	N	N	N	N	N	N	N	A	N	A	N	N	N	N
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	

Yes! Nach intensiven Verhandlungen ist die von allen so lang ersehnte Lösung endlich erreicht, ich um 7.50€ ärmer, alle an Erfahrung reicher.

Wir werden hingewiesen auf StGB §284 *Unerlaubte Veranstaltung eines Glücksspiels*. Ich halte dagegen GG Art. 5.3.1 *Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei.* What happens in Vegas, stays in Vegas.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Können zukünftige Generationen ihre Rechte schon heute einklagen?



Nach uns die Sintflut!
Wo kein Kläger, da kein Richter!

Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt,
sondern von unseren Kindern nur geliehen.

Akteure sind die Generationen G_i für $i \in \mathbb{N}$. Die Generation G_0 wählt ihre Aktion / Strategie $a_0 \in A_0 = \{0 = \text{Nachhaltigkeit}, 1 = \text{Raubbau}\}$.

Jede Generation G_i mit $i \geq 1$ kennt die gesamte Vorgeschichte und folgert daraus ihre Aktion $a_i \in A_i = \{0 = \text{schweigen}, 1 = \text{anklagen}\}$.

Letzteres kostet sie selbst $b_i > 0$ und ihre Elterngeneration $c_{i-1} > 0$. Generation G_i hat somit die Strategiemenge $S_i = \{\, s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} \,\}$.

Mit Wkt $p_i \in [0,1]$ setzt sich das System von Generation G_i zu G_{i+1} fort. Auszahlungen sind $u_0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u_i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

„Nach uns die Sintflut!“ Was tun, wenn eine Generation durchdreht? Kommt sie immer straflos davon? „Wo kein Kläger, da kein Richter!“ Oder können wir **intergenerationelle Schutzmechanismen** entwickeln für den Erhalt der Umwelt und die Rechte zukünftiger Generationen?

Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt,
sondern von unseren Kindern nur geliehen.

Der Autor dieses Sinnspruchs ist unbekannt. Eine frühe Verwendung geht zurück auf Moses Henry Cass, 1974 Autraliens Umweltminister:

We have not inherited this earth from our parents to do with it what we will.
We have borrowed it from our children and we must be careful
to use it in their interests as well as our own.

Die **Generationengerechtigkeit** leidet an ihrer inhärenten Asymmetrie: Zukünftige Generationen können ihre Interessen aktuell nicht vertreten. Gewaltenteilung beruht prinzipiell auf **Checks and Balances**, und diese erfordern gleichzeitige Existenz, Kommunikation und Einflussnahme.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Wir, die aktuelle Generation G_0, sind jetzt verantwortlich für diese Welt. Wenn unser Handeln sich in Generation G_n niederschlägt, kann sie sich nicht wehren: Wir sind lange tot, alle Appelle und Anklagen sind nutzlos. Heute sind wir zwar noch lebendig und belangbar, doch Generation G_n lebt noch nicht und kann uns daher nicht zur Verantwortung ziehen.

Nur Sie, die direkt nachfolgende Generation G_1, könnten uns belangen. Sie stehen also vor Ihrer Entscheidung: schweigen oder anklagen? Sie können unser Verschulden nicht mehr heilen, nur noch ertragen. Anklage kostet Sie Ressourcen: Zeit, Energie, Mühe, Überwindung. Rational würden Sie also die Situation zähneknirschend akzeptieren. Sie werden sich beruhigend einreden, es sei noch nicht so schlimm. Wir, G_0, kommen straflos davon. „Wo kein Kläger, da kein Richter.“

Was werden später Ihre Kinder, die Generation G_2 tun? Sie können uns, die Großeltern G_0 und eigentlichen Verursacher, nicht mehr belangen. Generation G_2 kann nur Sie, die eigene Elterngeneration G_1, anklagen. Werden Ihre Kinder das tun? Vermutlich nicht. Sie werden schweigen, so wie Sie geschwiegen haben. So geht es Generation um Generation.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Ist diese Entwicklung unausweichlich? Oder gibt es Alternativen? **Nachhaltigkeit** ist die Nutzung und Bewahrung von Ressourcen; sie garantiert die Stabilität und die natürliche Regenerationsfähigkeit. Deutschland hat die Ressourcen für 2022 bereits am 4. Mai verbraucht.

Die **Ethnologie** untersucht hierzu traditionell-nachhaltiges Wirtschaften in indigenen Kulturen. Ein typisches Muster: Stabile Systeme verfügen über stabilisierende Mechanismen durch ethisch-moralische Prinzipien. Diese sind meist nicht rational, sondern animistisch-religiös begründet durch Mythen, Rituale, Tabus, etc. Das erschwert die Übertragung auf unsere aktuelle Gesellschaft. Ist hier Rationalität überhaupt möglich?

Hierzu untersuchen wir die Situation spieltheoretisch. Das obige Modell ist wie immer beschämend simpel, aber es illustriert doch das Prinzip. Selbstverständlich können Fehlentscheidungen nicht gänzlich verhindert werden. Aber wir suchen ein ausgewogenes System von *Checks and Balances*, das **erkennbare Fehlentscheidungen** angreifbar macht: Sie können angeklagt werden, ja sie müssen angeklagt werden!

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Aufgabe: Was sind hier Gleichgewichte? Ist Nachhaltigkeit rational? Können Sie ein System von **Checks and Balances** implementieren? Was wird hier kontrolliert? Und wer kontrolliert die Kontrolleure?

We will have to repent in this generation not merely for the vitriolic words and the violent actions of the bad people, but for the appalling silence and indifference of the good people.

Martin Luther King (1929–1968)

Gesetz zur Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen (GzG):

§0: Jede Generation muss nach ihrem bestem Wissen und Gewissen die berechtigten Interessen aller zukünftigen Generationen wahren.

§1: Jede Generation muss §0 von ihren Eltern einfordern.

§2: Jede Generation muss §1 von ihren Eltern einfordern.

§3: Jede Generation muss §2 von ihren Eltern einfordern.

usw. . . Jede Generation muss diese Prinzipien strengstens einhalten, Forderungen unverzüglich einklagen und jede Säumnis bestrafen.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Lösung: Wann kann sich Nachhaltigkeit individuell lohnen?

(0) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \geq 1$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n, und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ und $a_0 = 1$.

(1) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \geq 1$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein weiteres mögliches Gleichgewicht.

Wie kann das funktionieren? Wird Information von der Zukunft in die Gegenwart übertragen? Nein, natürlich nicht! Aber die gegenwärtige Information wird generationenübergreifend bewertet und vertreten.

Kurz gesagt: Das Anklagerecht wird zur Anklagepflicht aufgewertet. Auch diese Pflicht muss überwacht werden, und das Anklagerecht hierzu zur Anklagepflicht aufgewertet werden, usw. Das erklärt die spezielle rekursive Form des oben skizzierten Gesetzes (GzG).

Die gesamte Konstruktion ist subtil und nicht einfach realisierbar. Aber seien wir ehrlich: Wer erwartet denn hier einfache Lösungen? Die Sachlage ist so verzwickt, dass wir erstaunt und glücklich sind, wenn sich überhaupt eine Lösung abzeichnet. Denken hilft!

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Das Modell erklärt nicht explizit, was **Generationengerechtigkeit** ist, es versucht lediglich, einen **Kontrollmechanismus** zu implementieren. Das ist generationenübergreifend keineswegs trivial, wie wir wissen.

Unser Modell ist ein einfaches Beispiel von **Mechanismendesign** (engl. *mechanism design*). Das Ziel ist die Schaffung eines Rahmens (als Spiel, Anreiz, Gesetz, etc.), der gewünschtes Verhalten ermöglicht, fördert oder gar erzwingt. Die individuelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf nicht direkt eingeschränkt werden, allein der Rahmen wird so gestaltet, dass rationale Spieler das gewünschte Verhalten wählen.

Die Spieltheorie ist daher logische Grundlage für jeden **Gesetzgeber**, oder allgemein für jede Gestaltung von Regeln des Zusammenlebens.

Unsere Modelle sind simpel, aber die Fragen sind ernst. Seit Jahren wird darüber gestritten, in welchem Umfang die menschliche Aktivität das Klima beeinflusst oder gar eine Klimakatastrophe auslösen kann. Das ist nicht nur eine wissenschaftliche, sondern eine politische Frage. Daher müssen wir auch soziale Regeln und Kontrollen bedenken.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Unser Modell versucht, Nachhaltigkeit mit Rationalität zu vereinen. Wem das zu theoretisch ist, der fragt nach praktischen Anwendungen: Lassen sich solche Prinzipien wirklich nutzen oder schon beobachten?

Die **Ethnologie** untersucht hierzu traditionell-nachhaltiges Wirtschaften in indigenen Kulturen. Rekordhalter sind die Ureinwohner Australiens (Aborigines) mit etwa 40 000 Jahren erfolgreicher Anpassung.

Manche Ethnologen interpretieren **Mythen und Riten** derart, dass sie genau diese stabilisierende Aufgabe erfüllen und den Gemeinschaften ermöglichen, sich Umweltveränderungen so weit wie nötig anzupassen und zugleich ihr Ökosystem so wenig wie möglich zu belasten.

Negativbeispiele sind (soweit wir es verstehen) die Bewohner der Osterinseln, die zwischen 1300 und 1700 n.Chr. durch systematische Abholzung ihre eigenen Lebensgrundlagen zerstörten. Gleiches gilt vermutlich für den Untergang der Maya-Kultur in Mittelamerika zwischen 750 und 950 n.Chr. durch natürliche und anthropogene Klimaänderung. Nochmal: Unsere Modelle sind simpel, aber die Fragen sind ernst.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Aufgabe: (0) Formulieren Sie dies als Spiel $u: \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(1) Ist Raubbau $(b_0, -d_1, -d_2, \dots)$ eine Gleichgewichtsauszahlung?
(2) Ist Nachhaltigkeit $(0, 0, 0, \dots)$ eine Gleichgewichtsauszahlung?
(3) Wenn sich $G_0, \dots, G_n$ gegen alle nachfolgenden verbünden?

Lösung: (0) Die Konfliktsituation wurde vollständig als Spiel formalisiert: Auszahlungen sind $u_0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u_i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$. Dies entspricht der obigen Graphik mit den Konstanten $b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}_{>0}$.

Generation G_i hat die Strategiemenge $S_i = \{\, s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} \,\}$. Beispiel: Die konstante Abbildung $s_i = 0$ bedeutet „immer schweigen“. Rekursiv erhalten wir die Aktion $a_i = s_i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1})$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

(1) Der Strategievektor $s = (1, 0, 0, 0, \dots)$ führt zu den Aktionen $a = (1, 0, 0, 0, \dots)$ und den Auszahlungen $u = (b_0, -d_1, -d_2, -d_3, \dots)$.

Dieser Strategievektor s ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht. Keiner der Akteure G_i kann sich aus eigener Kraft verbessern. Das ist zwar traurig, aber ein mögliches Gleichgewicht.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Für die Modellparameter setzen wir $0 < b_i < p_i c_i$ voraus für alle $i \ge 1$. Der angerichtete Schaden $d_i > 0$ spielt dagegen keine weitere Rolle.

(2) Jede Generation G_i prüft §0–§∞ GzG, bis §$(i-1)$ genügt: Hat ihre Elterngeneration G_{i-1} die Rechte zukünftiger Generationen gewahrt?

Falls ja, so schweigt sie: $a_i = 0$. Falls nein, so klagt sie an: $a_i = 1$. Formel $s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$.

Dieser spezielle Strategievektor $s = (s_0, s_1, s_2, s_3, \dots)$ führt zu den Aktionen $a = (0, 0, 0, 0, \dots)$ und den Auszahlungen $u = (0, 0, 0, 0, \dots)$.

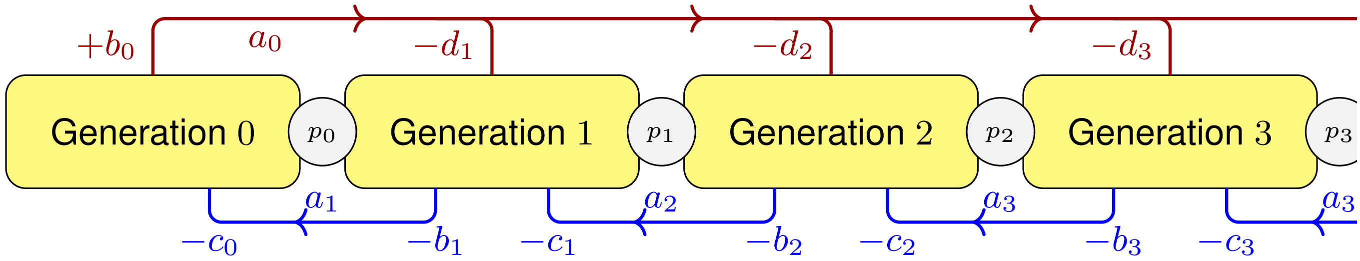
Dieser Strategievektor s ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht. Keiner der Akteure G_i kann sich aus eigener Kraft verbessern.

(3) Das gilt selbst, wenn sich $G_0, G_1, \dots, G_n$ verbünden sollten. Rückwärtsinduktion: Schließlich wird G_n einlenken müssen. Daher lenken vorsorglich auch $G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_0$ ein.

⚠ Wir haben hier starke Voraussetzungen, insbesondere Kenntnis der gesamten Vergangenheit und so umfangreiche Strategiemöglichkeiten.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Zusammenfassung unserer Ergebnisse zum Nachhaltigkeitsmodell:



Satz H2B: Gleichgewichte im Nachhaltigkeitsmodell

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie oben erklärt.

(0) Raubbau $s_0 = 1$ und Schweigen $s_i = 0$ für alle $i \geq 1$ bilden ein Gleichgewicht dieses Spiels. (Das ist zwar traurig, aber wahr.)

(1) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \geq 1$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n, und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $a_0 = 1$.

(2) Gilt $p_n c_n > b_n$ für alle $n \geq 1$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein Gleichgewicht. Explizit als Formel ausgeschrieben:

$$s_i \;:\; \{0,1\}^i \to \{0,1\} \;:\; (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$$

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Dieses Modell ist interessant unter mindestens zwei Blickwinkeln: Als mathematische Miniatur zur spieltheoretischen Modellierung sowie darüber hinaus als Gleichnis, vielleicht Denkanstoß für die Wirklichkeit. Kann es Beobachtungen erklären oder gar unser Verhalten verbessern?

Zunächst die mathematische Seite: Das Modell und der Satz scheinen Ihnen vielleicht bei einer ersten Begegnung noch recht kompliziert. Bei der zweiten Betrachtung erweist es sich jedoch als recht simpel: Mit wenig Aufwand können wir eine komplexe Situation beschreiben.

Die Formel $s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$ mag Sie überraschen und Ihnen übertrieben pedantisch vorkommen. Andererseits ist sie wunderbar explizit, einfach, präzise, narrensicher. Damit haben wir etwas in der Hand und können mathematisch arbeiten.

Sie sehen hier, wie gut gebaute Modelle mathematische Eleganz und argumentative Kraft entfalten können. Sie können uns informieren und vielleicht sogar unser Handeln leiten. Falls Sie noch nicht überzeugt sind, dürfen Sie gerne selbst noch bessere Modelle entwickeln!

Modell und Wirklichkeit

Können zukünftige Generationen ihre Rechte schon heute einklagen? Das war unsere Ausgangsfrage. Die Antwort lautet zusammengefasst: Ja, doch dazu brauchen sie einen Anwalt! Das können nur heutige Generationen leisten, in unserem Modell die heutige Jugend G_1.

Die Wirklichkeit ist natürlich viel komplexer als unser simples Modell; nie sollten wir unsere vereinfachte Abstraktion mit der Realität verwechseln. Dennoch kann unser Modell Strukturen und Mechanismen erklären, es kann als lehrreiches Gleichnis verstanden und genutzt werden.

Die aktuelle Jugend G_1 handelt nicht aus eigennützigen Motiven, im Gegenteil für sie selbst wären Schweigen und Erdulden einfacher. Doch sie ist in der Pflicht, die folgenden Generationen zu vertreten. Genau dies verleiht ihrem Protest Nachdruck und Legitimität.

Wann, wenn nicht jetzt?
Wo, wenn nicht hier?
Wer, wenn nicht wir?
John F. Kennedy (1917–1963)

Modell und Wirklichkeit

Unser Modell vereinfacht jede Generation G_i zu einem einzigen Akteur. Übertragen auf die Menschheit ist das recht unrealistisch: Einerseits ist diese Einteilung willkürlich. Andererseits gibt es Divergenzen innerhalb jeder Generation. Damit wird auch die Schuldfrage juristisch schwierig:

Wer sind hier die handelnden (juristischen) Personen? Zählt nur die Individualschuld? Gibt es Kollektivschuld? Verantwortliche können sich in einer Gruppe verstecken, es droht das Restaurant-Paradox (G209). Reales Handeln erfordert begriffliche Klarheit und Entschlossenheit.

Die gesamte Konstruktion ist subtil und nicht einfach realisierbar. Aber seien wir ehrlich: Wer erwartet denn hier einfache Lösungen? Die Sachlage ist so verzwickt, dass wir erstaunt und glücklich sind, wenn sich überhaupt Lösungen abzeichnen. Denken hilft!

Alternative: Schlägt hier der **große Filter** zu? (engl. *the great filter*) Das Universum ist groß, doch wir kennen bislang keine Zivilisationen außer unserer. Daher dürfen wir spekulieren: warum? Ist das Zufall oder Notwendigkeit? Zerbrechen Zivilisationen systematisch an ihrem Erfolg?

Modell und Wirklichkeit

Ist die Menschheit noch zu retten? Diese Frage ist brisanter denn je! Im SoSe 2018 haben wir erstmals unsere Veranstaltung zur Spieltheorie und ökonomischem Verhalten angeboten und dabei insbesondere auch Generationenmodelle diskutiert. Am 20.08.2018 demonstrierte Greta Thunberg zum ersten Mal für Klimaschutz, damals noch alleine, und begann die Bewegung **Fridays For Future.** Zufall? Ich glaube nicht!

Meine zugespitzte Darstellung suggeriert eine kausale Verbindung, die sicher nicht besteht, auf die ich aber zugegeben sehr stolz wäre. Die wahre Kausalität ist ganz einfach das drängende reale Problem, das Menschen weltweit und auch unsere kleine Vorlesung beeinflusst. Hören Sie vor diesem Hintergrund die verzweifelte Anklage **How dare you?** vom UN-Klimagipfel am 23.09.2019 (`youtu.be/TMrtLsQbaok`).

Der Beitrag spieltheoretischer Modelle bleibt vermutlich unbedeutend, doch immerhin taugen sie als Gleichnisse und vielleicht Denkanstöße. Es lohnt allemal, darüber nachzudenken, daran zu lernen und die Wirklichkeit etwas besser zu verstehen. Es geht um alles.

Modell und Wirklichkeit

Im WiSe 2019 durften wir unsere Veranstaltung erneut anbieten. Darauf haben sich Aktivist:innen in Deutschland und Österreich zum Bündnis **Letzte Generation** zusammengefunden, um durch zivilen Ungehorsam ein entschlosseneres Handeln gegen die Klimakrise zu erzwingen.

Dieser **Aufstand der Letzten Generation** entspringt der Befürchtung, dass im Erdklima kritische Grenzen (sog. Kippelemente) irreversibel überschritten werden und die Erde unbewohnbar machen; dabei sei diese Generation die letzte, die diese Katastrophe abwenden könne.

Relevant ist für unsere Diskussion vor allem die explizit vorgebrachte **Legitimation**, als die letzte Generation die Welt vor dem Untergang bewahren zu können. Von Kritikern wird dieser Anspruch scharf als **Selbstermächtigung** gegeißelt. Das ist die entscheidende Frage!

Jede Demokratie muss angemessen mit zivilem Ungehorsam umgehen, aber Verfassungsfeinde abwehren, soviel ist klar. Zugleich wollen wir rational entscheiden, daher verdienen berechtigte Argumente Gehör. Deshalb nochmal: Wer vertritt die Rechte zukünftiger Generationen?

Egonomics nach Thomas Schelling

Das **Rentenmodell** zur Altersversorgung ist raffiniert, aber noch leicht. Gleichgewichte mussten wir erst suchen und dann sorgsam nachweisen, auch im Experiment erreichen wir das Ziel erst nach mehreren Anläufen. Doch alles in allem ist die Situation noch recht übersichtlich.

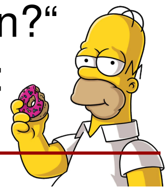
Unser **Nachhaltigkeitsmodell** zur Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen ist naturgemäß etwas schwieriger, sowohl im logischen Aufbau als auch in der praktischen Umsetzung. Die Frage ist überaus wichtig, unsere Verantwortung ist groß, doch unsere Erfahrung gering.

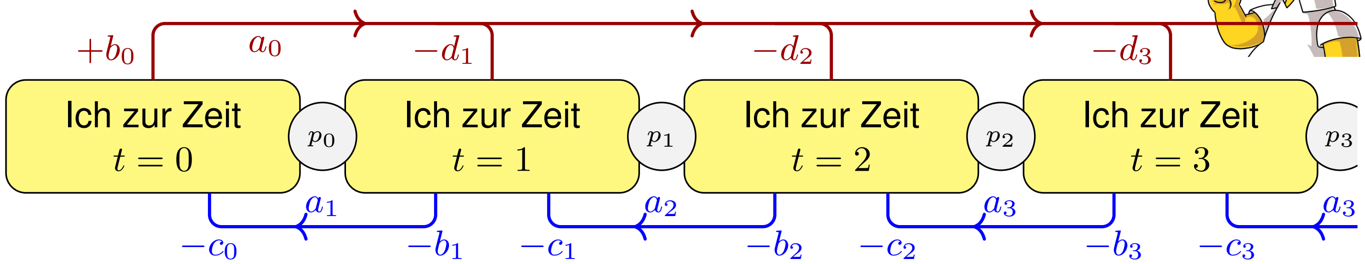
Wenn Ihnen das zu anwendungsfern oder allzu langfristig gedacht ist: Betrachten Sie doch einmal Ihr eigenes Leben als Aneinandereihung von Generationen Ihres Ichs. Das ist eine überaus interessante und sinnvolle Betrachtungsweise, denn nicht alle verfolgen dasselbe Ziel!

Quid rides? Mutato nomine de te fabula narratur.
[Was lachst du? Mit anderem Namen handelt die Geschichte von dir.]
Horaz, Sermones I. 1. 69.

Egonomics nach Thomas Schelling

Manche:r kämpft bei Entscheidungen mit dem inneren Schweinehund:
„Soll ich die Gegenwart genießen oder für die Zukunft vorsorgen?“
Für diesen Balanceakt kennen wir bereits ein einfaches Modell:





Viele Menschen kennen solche **Selbst-Konflikte**: Einerseits möchte ich heute Eis / Schokolade / Chips / Nachtisch essen. Andererseits werde ich mich morgen dafür verfluchen, denn ich will eigentlich abnehmen.

Ähnlich ist es mit der Entscheidung, Geld auszugeben oder zu sparen. Manche:r möchte Geld lieber heute verjubeln als für eine ferne Rente zurücklegen. Die Rollen können aber auch umgekehrt verteilt sein: Manche:r zwingt sich durch Sparpläne zu einem langfristigen Handeln. Genauer gesagt: Das heutige Ich zwingt das zukünftige Ich dazu.

Egonomics nach Thomas Schelling

Diese Idee geht zurück auf Thomas Schelling: *Egonomics, or the art of self-management*, American Economic Review 68 (1978) 290–294. Ihr „gegenwärtiges Ich“ spielt gegen Ihr „zukünftiges Ich“.

Bei der Entscheidung kommunizieren glücklicherweise nicht *alle* Generationen zugleich, sondern nur *zwei*: Das heutige Ich, als aktuell handelnde Instanz, und das morgige Ich, als Kontrollinstanz und Anwalt für die Zukunft. Dieser Konflikt wird sinnbildlich oft durch Engelchen und Teufelchen dargestellt.

Das Studentenleben ist geprägt von **Freiheiten und Entscheidungen**. Die Übungen / Hausarbeit / Klausurvorbereitung rechtzeitig anfangen oder doch lieber auf morgen verschieben und heute zur Party gehen?

Was du heute kannst besorgen, das verschiebe nicht auf morgen.

Die alternative Sichtweise lautet, von unbekümmert bis fatalistisch:

Was du morgen kannst besorgen, das kannst du auch noch übermorgen.

Egonomics nach Thomas Schelling

Prokrastination / Aufschieberitis bezeichnet ein extremes Vertagen bzw. häufiges Unterbrechen unangenehmer Arbeiten. Es verursacht meist starken Leidensdruck. Manche:r setzt sich daher selbst Deadlines, um so für planvolle Struktur und Interessenausgleich zu sorgen.

Weitere Selbst-Konflikte sind zum Beispiel die Lust zu rauchen gegen den Wunsch gesund zu bleiben. Manche:r vermeidet, Zigaretten auf Vorrat zu kaufen, um dem zukünftigen Ich den Zugang zu erschweren. Manchmal gelingt es, so „sich selbst auszutricksen“.

Allgemein führt Suchtverhalten zu extremen Selbst-Konflikten dieser Art und ebenso radikalen Versuchen, die Selbst-Kontrolle zurückzuerlangen. Aber auch simple Angewohnheiten folgen oft einem ähnlichen Muster: angenehmes lieber sofort, unangenehmes lieber später. Ist das rational?

Ein mögliches Mittel ist **Selbstbindung**. Ein Beispiel für Sportmuffel ist die Jahresmitgliedschaft im Fitnessstudio oder ein Vertrag mit einem Personal Trainer: Es war teuer, also muss ich jetzt Sport machen. Auch Studiengebühren können diesen positiven Effekt zeitigen.

Odysseus widersteht den Sirenenklängen.

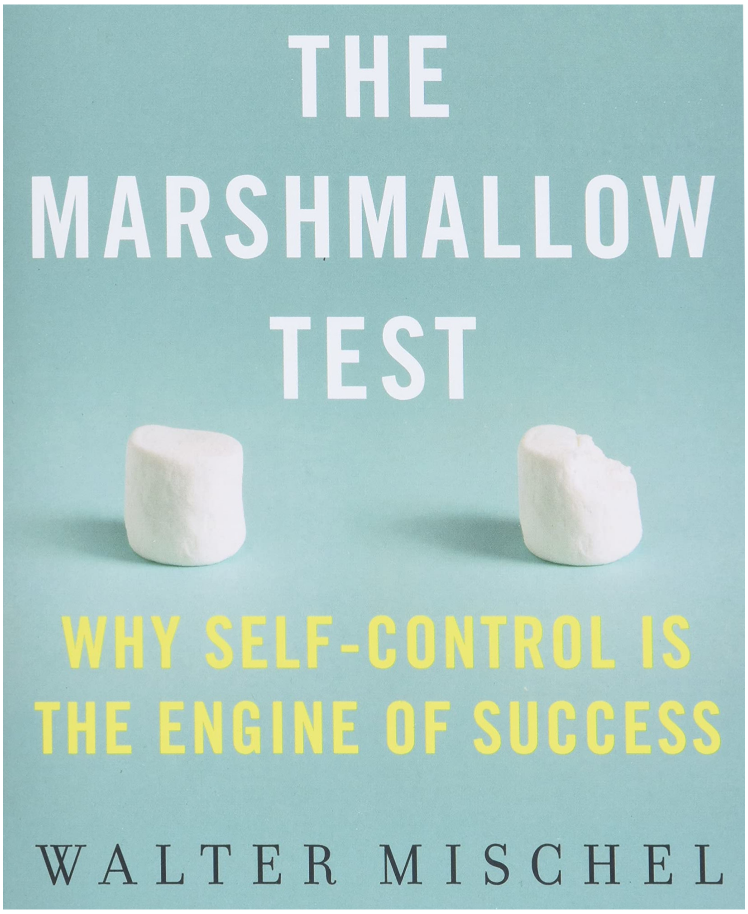
Odysseus und die Sirenen, attische Vasenmalerei, ca. 480–470 v.Chr.

Odysseus widersteht den Sirenenklängen.

Das klassische Beispiel einer Selbstbindung, im ganz wörtlichen Sinne, ist Odysseus, der sich an den Mast binden lässt, um dem betörenden Gesang der Sirenen lauschen und ihnen doch widerstehen zu können.

Homers *Odyssee* (8.Jh.v.Chr.) erzählt wortgewaltig von Irrfahrten und Abenteuern des Odysseus, darunter seine Begegnung mit den Sirenen. „Dieses sind sangreiche Nymphen, die jedermann bezaubern, der auf ihr Lied horcht. [. . .] Ich aber gedachte an das Wort, das Circe, die mir dieses Alles voraussagte, gesprochen hatte. [. . .] Das weiche Wachs strich ich sodann meinen Reisegenossen in die Ohren. Sie aber banden mich auf mein Geheiß aufrecht unten an den Mast; dann setzten sie sich wieder an die Ruder und trieben das Fahrzeug getrost vorwärts. [. . .] Erst als wir glücklich vorübergesteuert und ganz aus dem Bereich der Sirenenstimmen waren, nahmen meine Freunde sich selbst das Wachs aus den Ohren, und mir lösten sie die Fesseln wieder. Ich aber dankte ihnen herzlich für ihre Beharrlichkeit.“ (Zitiert aus Gustav Schwab, *Die schönsten Sagen des klassischen Altertums*, Band 3, Stuttgart 1840, `www.deutschestextarchiv.de/schwab_sagen03_1840?p=182`)

Mischels Marshmallow-Experiment



Mischels Marshmallow-Experiment

Das berühmte **Marshmallow-Experiment** wurde von Walter Mischel in den Jahren 1968 bis 1974 in Stanford durchgeführt. Vierjährige Kinder mussten wählen zwischen einem Marshmallow sofort oder zwei in etwa 15 Minuten, also kleine sofortige Belohnung gegen größere später.

Die Fähigkeit zur Selbstbeherrschung hat wichtige Konsequenzen. Kinder, die länger warten konnten, waren statistisch gesehen auch später als Erwachsene kontrollierter, zudem beruflich erfolgreicher, sie waren seltener übergewichtig und wurden seltener drogensüchtig.

W. Mischel, Y. Shoda, M.L. Rodriguez: *Delay of gratification in children.* Science 244 (1989) 933–938. Dieser und weitere Artikel sind online verfügbar unter `bingschool.stanford.edu/research/publications`.

Wohl kaum ein Experiment der Psychologie ist so bekannt wie dieses. Die faszinierende Geschichte wird wunderbar erzählt von Jonah Lehrer: *DON'T! The secret of self-control*, in The New Yorker vom 18. Mai 2009, online verfügbar `www.newyorker.com/magazine/2009/05/18/dont-2`.

Wie jedes Experiment sollten wir auch dieses kritisch betrachten; da es besonders berühmt ist, nenne ich einige Warnungen und Hinweise.

Die Versuchsgruppe war klein und selektiv: Sie bestand aus Kindern der Bing Nursery School an der Stanford University, und die meisten hatten dementsprechend gut ausgebildete Eltern. Solche sozialen Faktoren beeinflussen das Verhalten. Es ist daher denkbar, dass hier gefundende Zusammenhänge wenig repräsentativ für die Gesamtbevölkerung sind.

In der Längsstudie der Folgejahre konnten erwartungsgemäß immer weniger Studienteilnehmer erreicht und befragt werden, was die Fallzahl weiter verringerte und statistisch verlässliche Aussagen erschwerte.

Eine kritische Studie finden Sie in T.W. Watts, G.J. Duncan, H. Quan: *Revisiting the Marshmallow Test*, Psychological Science (2018) 1–19, `journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/0956797618761661`.
Auch diese neue Studie sollten wir kritisch abwägen.

Belohnungsaufschub (*deferred gratification*) erfordert Selbstdisziplin und Impulskontrolle. Dies ist notwendig für langfristiges planvolles Handeln und ein wichtiger Aspekt der Selbstkontrolle.

Konrad Adenauer wird (sinngemäß) folgender Ausruf zugeschrieben:

Was interessiert mich mein Geschwätz von gestern?

Im Sinne von Gratifikationsaufschub vs sofortiger Belohnung oder Selbstkontrolle vs Prokrastination formulieren wir die Umkehrung:

Was interessiert mich mein Gejammer von morgen?

Wir werden in spieltheoretischen Modellen die zeitliche Struktur noch wesentlich genauer untersuchen, indem wir dynamische Spiele erklären. Die Lösungskonzepte werden ausgehend von Nash–Gleichgewichten noch weiter verfeinert, etwa zu teilspielperfekten Gleichgewichten. Erste wichtige Aspekte und Anwendungen erkennen wir schon hier.

Studium als Investition und als Konsum

Das Leben ist, soweit ich es sagen kann, ein fragiles Gleichgewicht von **Konsum und Investition**. Das gilt insbesondere für ein Studium:

Sie investieren lange Jahre in Ihre Ausbildung. Da ist viel schönes dabei, das kann als sofortige Belohnung dienen, aber auch viel harte Arbeit, die Sie vielleicht gerne vermeiden oder zumindest aufschieben möchten.

Natürlich lohnt sich ein Studium, sowohl kurz- als auch mittel- und langfristig, aber es erfordert doch ein hohes Maß an Selbstdisziplin. Diese Disziplin zu beweisen ist bereits eine beachtliche Leistung.

Bekanntlich brechen einige ihr Studium ab, und das hat viele Gründe. Ein Grund sind mangelnde Information und falsche Vorstellungen: „Das Studium im Fach X habe ich mir ganz anders vorgestellt."

Seit Jahrzehnten versuchen wir daher, junge Menschen zu informieren. Dazu gehören neben den schönen Ziele auch die Schwierigkeiten, kurzfristig und langfristig. Es ist eine komplexe Entscheidung!

Ich denke, wir müssen grundsätzlich anerkennen, dass die Wahl eines Studiums eine schwierige Herausforderung ist und auch misslingen darf.

Studium als Investition und als Konsum

Vielleicht ist Ihr Studium ja eine Art Marshmellow-Experiment, bei dem Sie unter Beweis stellen, wie viel Selbstdisziplin Sie aufbringen können. Tatsächlich ist es – über die eigentlichen Inhalte, speziellen Fähigkeiten und allerlei Kompetenzen hinaus – ganz allgemein ein **guter Prädiktor**:

Wer erfolgreich Mathematik studiert hat, den haut so schnell nichts um. Sie beweisen damit neben mathematischen Fähigkeiten ein hohes Maß an Selbstdisziplin, Frustrationstoleranz und Durchhaltevermögen.

Ganz nebenbei lernen Sie auch noch, mathematische Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden. Für manche steht dies im Vordergrund, für andere eher nicht.

Dasselbe gilt sinngemäß genauso für jeden anderen Studiengang. In hochqualifizierten Berufen benötigen Sie nicht gedrillte Handgriffe, sondern allgemeine Methoden und ein hohes Maß an Lernfähigkeit.

Wir haben dieses scheinbare Paradox bereits in Kapitel G diskutiert: Kann ein Studium auch ein Signal persönlicher Eigenschaften sein? Kann ein unnützer Doktortitel doch nützlich sein? Ja, durchaus!

Studium als Investition und als Konsum

Lohnt sich die Büffelei? (FAZ, Studenten-Spezial, 20.05.2015)

Studium als Investition und als Konsum

Lohnt sich die Büffelei? (FAZ, Studenten-Spezial, 20.05.2015)

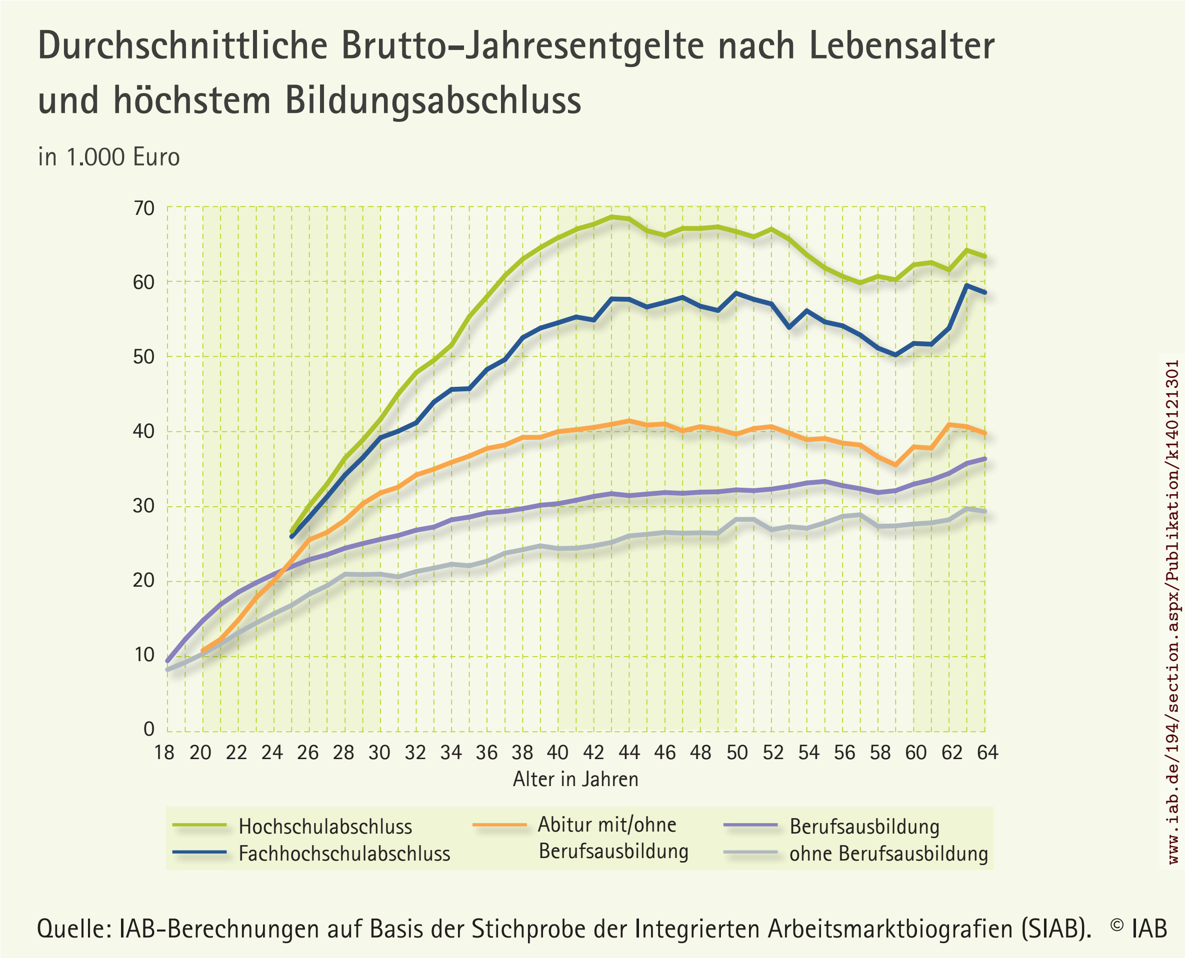
„Studium oder Ausbildung — wer vor dieser Wahl steht, macht folgende Rechnung auf: Eine Lehre ist der erste Schritt in Richtung finanzieller Unabhängigkeit. Zwar ist die Vergütung nicht opulent, doch in Kombination mit Hotel Mama winkt ein bescheidener Luxus. Und nach zwei oder drei Jahren lässt sich mit dem Abschluss in der Tasche richtig Geld verdienen.

Anders beim Studium: Wer nach akademischen Weihen strebt, muss erst einmal investieren. Wenn ein Umzug nötig ist, kann Bildung richtig teuer werden. Bis der Hochschulabsolvent sein erstes Geld verdient, hat die Fachkraft oft schon die ersten Stufen auf der Karriere- und Gehaltsleiter genommen. Lässt sich das im Laufe eines Berufslebens noch aufholen?“

Die folgenden Daten und Graphiken (Stand 2014) stammen vom Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung der Bundesagentur für Arbeit, online verfügbar unter `doku.iab.de/kurzber/2014/kb0114.pdf`. Gruppiert nach Bildungsabschluss zeigen sie die Entgelte jetziger Arbeitnehmer, die in den letzten 40 Jahren ihre Abschlüsse erwarben.

Studium als Investition und als Konsum

H315



Studium als Investition und als Konsum

H316