

Kapitel G

Soziale Normen und Dilemmata, Koordination und Evolution

Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen.

Max Planck (1858–1947)

Evolutionary game theory deploys the Darwinian notion that good strategies diffuse across populations of players rather than being learned by rational agents.

Herbert Gintis, *Game Theory Evolving* (2009)

Vollversion

• eiserm.de/lehre/Spieltheorie

• 17.08.2022

Inhalt dieses Kapitels G

G002

- 1 Soziale Konventionen
 - Koordination: links oder rechts?
 - Soziokulturelle Kompetenz
 - Zielkonflikte: Nash oder Pareto?

- 2 Soziale Dilemmata
 - Ratio vs Moral: einfache Modellbeispiele
 - Soziales Dilemma und die Tragik der Allmende
 - Paradoxe Verkehrsfluss nach Dietrich Braess

- 3 Evolutionäre Spiele
 - Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra
 - Die Replikatorgleichung zur Populationsdynamik
 - Evolutionär stabile Strategien nach Maynard Smith

Im Kapitel E haben wir **strategische Spiele in Normalform** definiert und dazu den zentralen Begriff des Nash–Gleichgewichts eingeführt. In diesem und den folgenden Kapiteln diskutieren wir erste einfache Anwendungen, Verfeinerungen und Erweiterungen dieser Konzepte.

Dazu untersuchen wir diverse Situationen von Konflikt und Kooperation, etwa ökonomische Konkurrenz, mit unseren spieltheoretischen Mitteln. Unsere ersten Modelle sind meist beschämend simpel, doch sie zeigen bereits interessante Phänomene und illustrieren immerhin das Prinzip.

Reale Anwendungen, in denen etwas Wichtiges auf dem Spiel steht, würde man noch wesentlich genauer und aufwändiger untersuchen. Die erste Aufgabe ist dabei immer die Formulierung eines Modells. Die Begriffe und Methoden dazu führe ich hier exemplarisch vor.

In diesem Kapitel geht es zunächst um soziale Dilemmata, in denen individuelle Nutzenmaximierung und gesellschaftliche Moral kollidieren. Im zweiten Teil untersuchen wir evolutionäre Modelle, in denen Spieler bzw. Populationen ihr Spielverhalten über die Zeit schrittweise ändern.

Die Untersuchung konkreter Beispiele nutzt praktisch und theoretisch: In günstigen Fällen verstehen wir dadurch die betrachtete Anwendung. Meist erkennen wir dabei auch Möglichkeiten und Einschränkungen unseres mathematischen Modells und unserer Methoden.

Daraus ergeben sich Verallgemeinerungen und Verfeinerungen, die wiederum für die Weiterentwicklung der Theorie zuträglich sind. Wie immer gehört die ehrliche Ausführung praktischer Anwendungen untrennbar zusammen mit der sorgfältigen Entwicklung der Theorie.

Dies sind Instanzen des zuvor erklärten Modellierungskreislaufs (A301).

 Als Literatur nenne ich drei Klassiker zur evolutionären Spieltheorie: Robert Axelrod: *The Evolution of Cooperation*. Basic Books 1984, 2006; *The Complexity of Cooperation*. Princeton University Press 1997

Jörgen Weibull: *Evolutionary Game Theory*. MIT Press 1995; auch online unter www.ifn.se/en/publications/working-papers/1990-1999/347

Als spielerisch-interaktive Webseite empfehle ich ncase.me/trust.

Das Spiel „Straßenverkehr“

		B	
		links	rechts
A	links	1, 1	0, 0
	rechts	0, 0	1, 1

Warum fährt man auf den britischen Inseln auf der linken Straßenseite, im restlichen Kontinentaleuropa hingegen auf der rechten Straßenseite?

Beides sind gesellschaftliche Konventionen und weitgehend willkürlich. Die getroffene Wahl ist allein durch Tradition begründet. Klar ist jedoch: Jede der beiden Festlegungen ist besser als keine Übereinkunft!

Ebenso: Schreibrichtung, Händeschütteln, Umarmung, etc.
Solcherart soziale Vereinbarungen umgeben uns überall!

Koordination: links oder rechts?

Heutzutage überwiegt weltweit der Rechtsverkehr, und Linksverkehr gilt hauptsächlich in früheren britischen Kolonien. Historisch scheint jedoch der Linksverkehr vorherrschend gewesen zu sein. Erklärungen gründen meist darauf, dass Menschen mehrheitlich Rechtshänder:innen sind, und dies die Normen für den Straßenverkehr irgendwie beeinflusst.

Im Zuge der Französischen Revolution und der Napoleonischen Kriege stellten Frankreich und besiegte Länder Europas auf Rechtsverkehr um. Durch gegenseitige Verträge wurde dies bis 1927 weiter vereinheitlicht. Ausnahmen bildeten einige Nachfolgestaaten Österreich-Ungarns, die bis 1941 auf Rechtsverkehr umstellten, sowie und Schweden bis 1967.

Fun fact: Fußgänger, Radler, Roller, Skater, etc. wenden die Konvention nicht streng an. Das führt manchmal zu Koordinierungsschwierigkeiten.

Fun fact: Das Gegenstück im Schienenverkehr ist die sog. *Fahrordnung*; sie entspricht in vielen Ländern nicht der Ordnung des Straßenverkehrs. Auch beliebige Mischungen verschiedener Konventionen sind denkbar. Einfache und allgemeine Lösungen sind jedoch fehlerresistenter.

Die meisten Schriftsysteme haben eine bevorzugte Schreibrichtung. Das ist nicht zwingend erforderlich, doch eine Konvention vereinfacht!
Fun fact: In den ältesten lateinischen Schriften ist die Schreibrichtung noch nicht festgelegt. So ist der *Lapis Niger* aus dem 6. Jh. v. Chr. noch *bustrophedonal*, das heißt wörtlich ‘ochsenwendig’, also ‘hin und her wie ein Ochse beim Pflügen’, mit zeilenweise wechselnder Schreibrichtung.

In Kulturen, in denen sich Menschen zur Begrüßung die Hand reichen, bestimmt ganz genau solch eine soziale Norm die dazu gewählte Hand. Eine Kollision der gleichzeitig (!) ausgeführten Bewegung ist auch hier irritierend, wenn auch viel weniger dramatisch als im Straßenverkehr. Für Kinder ist die Konvention zunächst fremd, dann schnell erlernt.

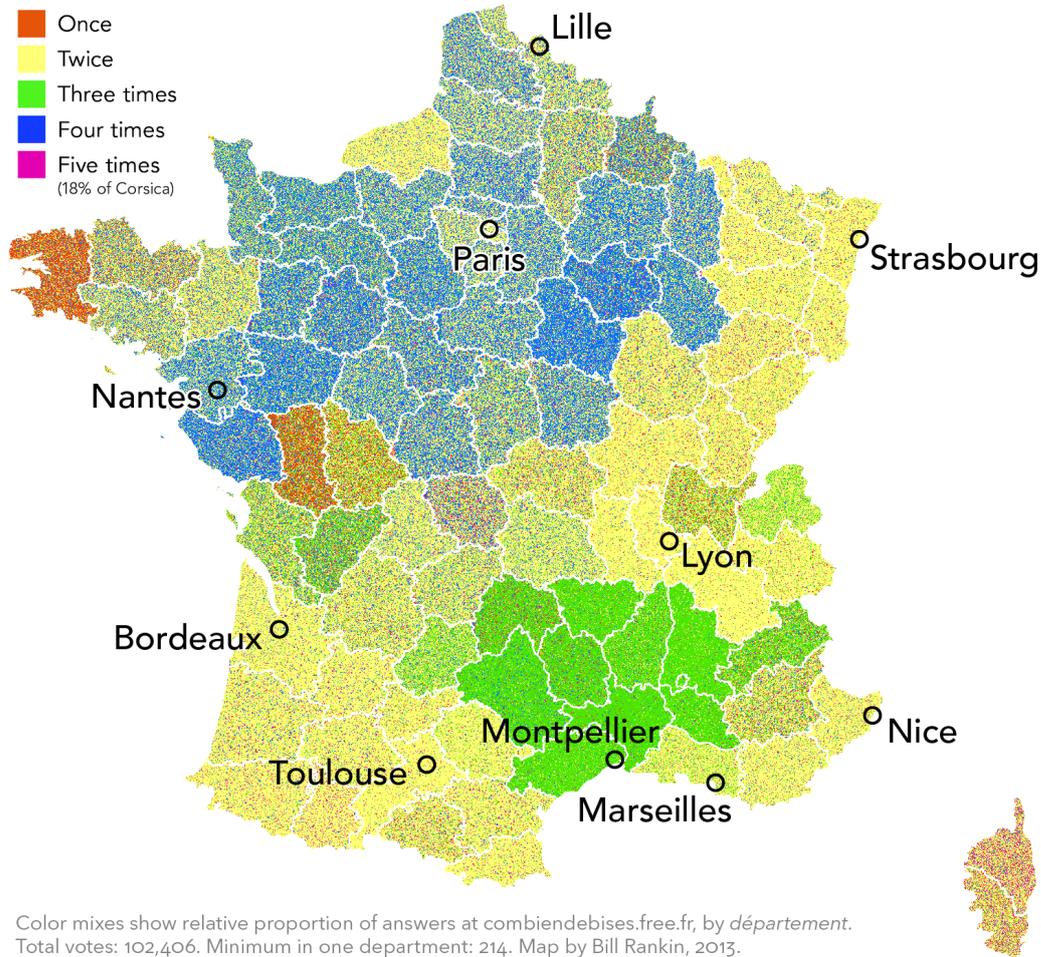
Hierbei ist die vorherrschende Konvention, die rechte Hand zu geben. Eine Erklärung besagt, dass man durch Händeschütteln früher seine friedlichen Absichten bekundete: man kommt unbewaffnet. Etwa 85% bis 90% der Menschen sind Rechtshänder:innen und würden eine Waffe in der rechten Hand führen. Diese wurde also zur Begrüßungshand.

Aus Sicht der Spieltheorie wählt eine gesellschaftliche Norm eines von mehreren Nash–Gleichgewichten und legt es als Standard fest. Kein Akteur hat daraufhin einen Anreiz, einseitig davon abzuweichen, im Falle eines strikten Nash–Gleichgewichts sogar nur Nachteile.

Sobald eine solche Norm in Kraft ist, stabilisiert sie sich von selbst. Extrinsische, übergeordnete Sanktionen sind dazu nicht nötig, da sich jeder Akteur durch Abweichung selbst benachteiligt. Das ist der Zauber von (strikten) Nash–Gleichgewichten.

Abweichungen entstehen höchstens sporadisch durch Fehler: „Mein Rechts oder dein Rechts?“, ebenso „Das andere Links!“ Das erinnert uns daran, dass die Sprache selbst eine Konvention ist, insbesondere auch die willkürliche Zuordnung ihrer Bezeichnungen.

Fun Fact: Einige Menschen haben eine Links-Rechts-Schwäche. Ich kenne jedoch niemanden mit einer Oben-Unten-Schwäche. *Oben* und *unten* sind keine intersubjektiv sozialen Konventionen, sondern hier auf Erden eine objektiv physikalische Wirklichkeit.



Diese detaillierten Umfragedaten wurden seit 2007 online erhoben unter combiendebises.free.fr mit inzwischen über 200 000 Stimmen. Es handelt sich um ein schönes Beispiel von **Bürgerwissenschaft** / Citizen Science, de.wikipedia.org/wiki/Citizen_Science.

Wendet man sich dabei zuerst nach links oder zuerst nach rechts? Ungefähr eine Zwei-Drittel-Mehrheit dreht sich zuerst nach rechts. Das scheint also nicht so stark normiert, wie zu erwarten wäre. Die Lateralität kann wohl leicht spontan koordiniert werden.

Wenn Sie also im nächsten Semester als Erasmus-Student:in nach Toulouse oder Nantes gehen, dann wissen Sie, welche Konventionen Sie dort erwarten. Aktuell stimmt dies leider nicht mehr, denn unser gesellschaftliches Zusammenleben befindet sich in schnellem Wandel:

Diese Daten wurden lange vor der Covid19-Pandemie erhoben. Derzeit müssen viele traditionelle Rituale der Begrüßung pausieren. Es wird interessant zu sehen, wie diese wiederaufgegriffen werden und sich eventuell mit der Zeit weiterentwickeln und verschieben.

	B	1	2	3	4	5
A						
1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1

Dies ist nur eines von vielen spieltheoretischen Modellen zur Erklärung. Hier kommt es uns nur auf die (strikten) Nash-Gleichgewichte an. Die soziale Konvention wählt (willkürlich) eines davon aus.

Dieses übertrieben einfache Modell erklärt die Beobachtung recht gut. Vorsicht: Gemessen / beobachtet / abgestimmt wurde das Verhalten, nicht die zugrundeliegende Gewinnfunktion des gezeigten Modells. Die konkreten Zahlen dieses Bimatrixspiels sind reine Spekulation.

Skurrile regionale Konventionen gibt es häufig, auch in Deutschland. *Anekdote:* An der Uni Stuttgart müssen die Leistungspunkte jedes Moduls durch 3 teilbar sein. Das ist so selbstverständlich, als hätte es Moses vom Berg heruntergebracht, auf der Rückseite der Zehn Gebote.

Das ist zugegeben keine soziale Übereinkunft, sondern wurde verordnet. Dass es eine willkürliche Konvention (zur Vereinfachung?) ist, zeigt ein Blick über den Tellerrand nach Karlsruhe: Dort ist diese Einschränkung unbekannt, und die Bemessung von Leistungspunkten flexibler.

Auch deshalb ist es gut, dass Sie verschiedene Unis und andere Länder kennenlernen. Erasmus und ähnliche Programme unterstützen Sie dazu nach Kräften. Was Sie im Ländle noch für naturgegeben hielten, erweist sich als menschengemacht und willkürlich – und geht auch anders!



Auf Deutsch sagen wir sowohl *Händedruck* als auch *Händeschütteln*, auf Französisch nur *se serrer la main*, auf Englisch nur *to shake hands*. Übersetzt wird nicht nur sprachlich, sondern immer auch interkulturell.



Auf Französisch klingt „secouons-nous les mains“ vollkommen absurd. Das kann die deutsche Übersetzung nicht wiedergeben.

Auf English hingegen klingt „shake me by the hand“ irre. Auch „Let's squeeze hands“ wäre lustig, läuft hier aber der Handlungslogik zuwider.



*Learning another language is not only
learning different words for the same things,
but learning another way to think about things.*

Flora Lewis (1922–2002)

„Die spinnen, die Römer!“, urteilt Obelix und wiegt sich in der zutiefst gallischen Gewissheit, im Mittelpunkt der Welt zu stehen. Welch Cliché! Ironisch überspitzt zeichnen die Comics stereotype kulturelle Eigenarten, die humorvolle Darstellung fördert Reflektion und Selbst/Erkenntnis.

Die Bildungspläne der Länder formulieren explizit die interkulturelle Kompetenz als eines der Lernziele, insbesondere in den Sprachen, aber auch darüber hinaus im Gesamtkonzept schulischer Bildung.
Interkulturelle Erziehung > Lernen > Kompetenz > Kommunikation

Wie beginnt und beendet man einen Brief? eine Email? eine digitale Kurznachricht wie WhatsApp oder ähnliche? Nach Eingewöhnung finden Sie das vielleicht selbstverständlich, doch das ist es ganz und gar nicht, insbesondere in ungewohnten Kontexten und fremden Sprachen!

Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

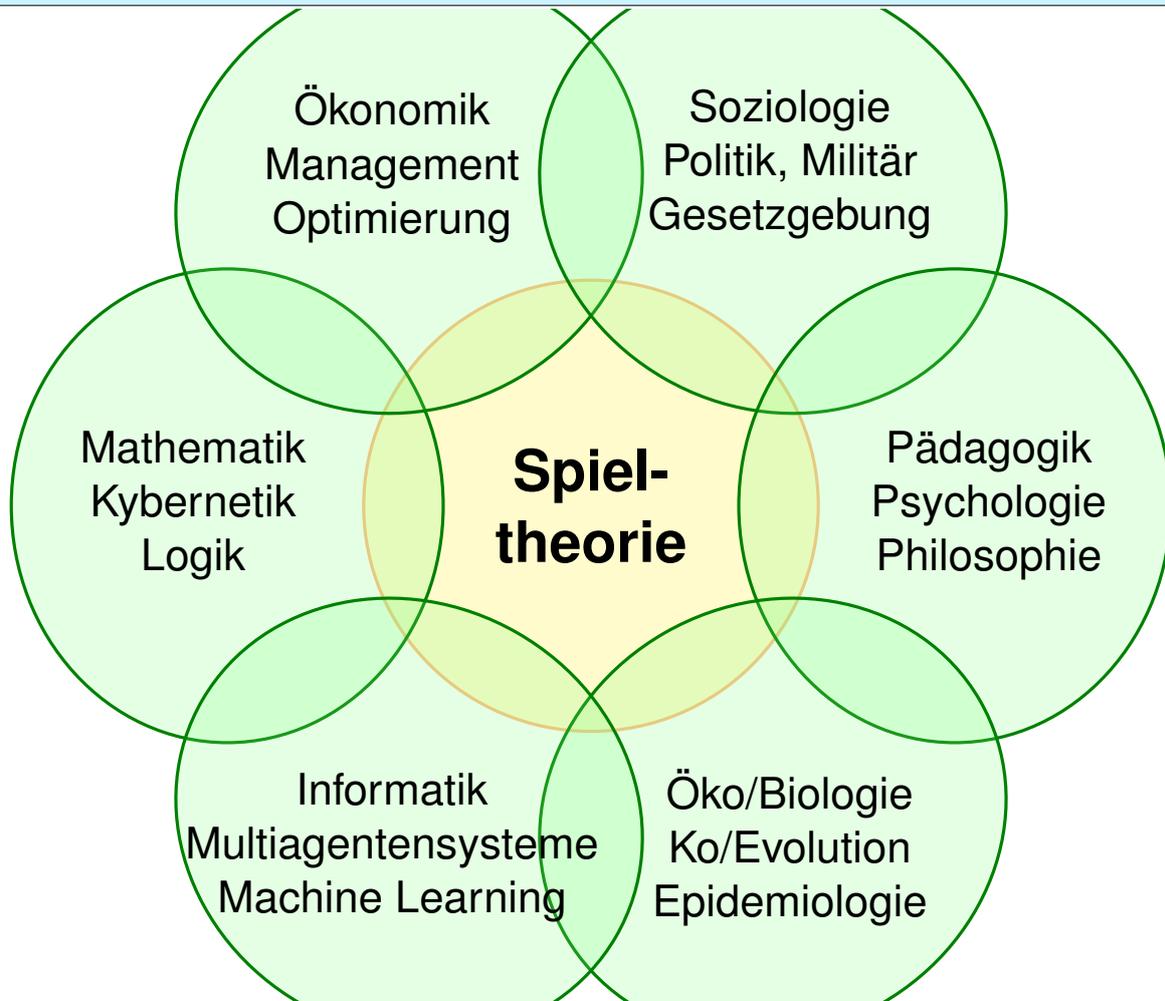
Das Spiel „Wie geht's?“

		B	
		kurz	lang
A	kurz	1	0
	lang	0	1

Die alltägliche Begrüßung kennt eine weitere erstaunliche Konvention:
Deutsch: „Wie geht's?“ – „Gut, danke. Und selbst?“ – „Gut, muss ja.“
Englisch: „How are you?“ – „Fine, thanks. And you?“ – „I'm fine.“
Französisch: „Ça va?“ – „Oui, ça va. Et toi?“ – „Ça va, merci.“

Die konventionelle Höflichkeit sieht vor, sich nach dem Befinden des Gegenübers zu erkundigen, doch im Gegenzug nicht unangemessen ausführlich auf die offene Frage einzugehen. Selbst wo mehr zu sagen wäre, wird das Protokoll dazu nicht genutzt. Es ginge auch anders.

Wer nur einen Hammer hat, sieht überall Nägel.



Wer Spieltheorie versteht, erkennt überall Spiele.

Diese Graphik macht vollmundige Ankündigungen und große Worte: Spieltheorie steht prominent in der Mitte und kommuniziert mit allem! Das ist nicht nur so dahergesagt, sondern soll auch erfüllt werden. Die versprochenen Querbezüge will ich nach und nach einlösen.

Auf der linken Seite dieser Graphik kennen wir bereits erste Beispiele, etwa aus Ökonomik, Mathematik, Informatik und ihren Teilgebieten. In diesem und im nächsten Kapitel möchte ich mir etwas Zeit nehmen und einige Illustrationen auf der rechten Seite wenigstens skizzieren.

Das Gefangenendilemma

	Clyde	schweigen	gestehen
Bonnie			
schweigen	-1	-1	-5
gestehen	0	-5	-4

Dieses Spiel ist berühmt für seinen vermeintlich paradoxen Ausgang. Es illustriert das Grundproblem „Kooperation versus Egoismus“. Nash-Gleichgewichte können das Pareto-Optimum verfehlen. Gut gewählte Mechanismen versuchen, beides zu versöhnen.

Dieses Beispiel reduziert den Konflikt auf das Wesentliche. In vielen realen Situationen steckt eine Variante davon!

Zielkonflikte: Nash oder Pareto?

Als erste Illustration nenne ich Beobachtungen, die zunächst paradox erscheinen: Was nützen dem Pfau seine Federn? Kann ein unnützer Dokortitel dennoch nützlich sein? Auf eine naiv-pessimistische Weise betrachtet handelt es sich um Inkarnationen des Gefangenendilemmas.

Besonders eindrücklich ist die Beobachtung bei Pfauen und hat Charles Darwin lange umgetrieben. Seine Erklärung ist die **sexuelle Selektion!** Hähne und Hennen befinden sich in einem gegenseitigen Dilemma. Keine:r kann einseitig das Verhalten ändern, denn dies wäre nachteilig.

Bei der jährlichen Pfauen-Konferenz zu Toleranz und Antidiskriminierung beschließen alle einstimmig, Hähne nicht auf ihr Äußeres zu reduzieren. Das nützt herzlich wenig: Zur nächsten Paarungszeit sind alle guten Vorsätze schnell vergessen und Hennen denken nur an das Eine.

Pfauen handeln nicht bewusst-planend, sondern genetisch festgelegt. Meine verzerrte Darstellung dient nur der dramatischen Zuspitzung. Zum lehrreichen Kontrast schlage ich Bewerbung und Dokortitel vor. Die Struktur ist genau dieselbe. Unser Lachen verstummt.

Was nützen dem Pfau seine Federn?

Pfauen-Männchen haben ein prachtvolles Gefieder. Für das Überleben ist es leider hinderlich: Tarnung, Flucht, Energie, ... Warum lohnen sich dennoch lange Federn? Wozu dienen sie? Angenommen, es gebe „fitte“ und „unfitte“ Pfauen-Männchen. Letztere werden öfter von Raubtieren gefressen etc. Sowohl fitte als auch unfitte können kurze oder lange Federn haben. Die mit langen Federn werden aufgrund der genannten Nachteile jedenfalls öfter gefressen.

Eine Population von Pfauen-Männchen könnte etwa so aussehen:

Pfauen	fit	unfit
kurze Federn	40%	20%
lange Federn	30%	10%

Das Pfauen-Weibchen sieht nicht die Fitness, sondern nur die Federn!

Aufgabe: Welche Strategie der Partnerwahl ist für sie vorteilhaft?

- Federlänge ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
- Kurze Federn bevorzugen: Trefferquote 40 : 20 (schlechter)
- Lange Federn bevorzugen: Trefferquote 30 : 10 (besser!)

😊 Trotz aller Nachteile zahlen sich lange Federn doch aus!

Visuelles Ornament und sexuelle Selektion

Das auffällige Gefieder der Pfauen-Männchen wird als *visuelles Ornament* bezeichnet. Die lange Schleppe ist zwar hinderlich und vermindert das Flugvermögen, paradoxerweise kann es dennoch ein Indikator für genetische Fitness sein und Pfauen-Weibchen als Indiz für gesunden Nachwuchs dienen. (Siehe unser Zahlenbeispiel.) Wäre es nicht effizienter, Pfauen würden diesen Aufwand sparen und die Energie in bessere Überlebensstrategien stecken? Auf den ersten Blick besehen ja. Aber für ein Weibchen gibt es keine bessere Wahl: Es sieht nicht die tatsächliche Fitness, sondern nur das *Signal* der Federn. Auf Grundlage dieser unvollständigen Information muss es sich für die langen Federn entscheiden, selbst wenn das Überlebensnachteile mit sich bringt, auch für seinen eigenen Nachwuchs! Damit bleibt auch den Männchen keine Wahl, lange Federn werden zum Must-Have. Diese *sexuelle Selektion* ist der Schlussstein in Darwins Evolutionstheorie.

Auch Menschen ist dieses Phänomen vertraut: Manche Männer beeindrucken Frauen, indem sie Geld verschwenden oder andere verrückte Dinge tun. Wäre dieses Verhalten insgesamt nachteilig, so würde man vermuten, dass es auf lange Sicht ausstirbt. Das ist jedoch nicht der Fall, da Frauen dieses Verhalten als Indikator für (gesellschaftlichen) Erfolg interpretieren können und eventuell bei der Partnerwahl belohnen. (All das funktioniert selbstverständlich auch umgekehrt...)

Dieses Phänomen wird *Handicap-Prinzip* genannt. Beispiele gibt es viele: Produktwerbung verschwendet Geld, wird aber vom Käufer belohnt. Manch akademischer Titel ist scheinbar Zeitverschwendung, wird aber vom Arbeitgeber honoriert. Auch Ihr Studium ist nur teilweise für Ihren späteren Beruf relevant, und dennoch wird diese Anstrengung meist belohnt. Zum Beispiel gelten Leistungen in Mathematik als zuverlässiger Indikator für intellektuelle Leistungsfähigkeit. Dazu diskutieren wir den Arbeitsmarkt, extrem vereinfacht, in folgendem Gedankenexperiment.

Kann ein unnützer Dokortitel doch nützlich sein?

Eine Personalchefin sucht für eine Stelle einen Ingenieur (m/w/d). Aus Erfahrung schätzt sie die allgemeine Bewerberlage wie folgt:

Bewerber	geeignet	ungeeignet
Diplom/Master	50%	25%
Promotion	20%	5%

Als individuelle Information hat sie zunächst nur den *Abschluss* laut Bewerbungsunterlagen. Die eigentlich interessante Zielgröße der *tatsächlichen Eignung* kennt sie hingegen nicht. Eine Promotion kostet Zeit und Mühe, bringt aber für *diese* Stelle keinen direkten Nutzen.

Aufgabe: Welche Strategie ist bei ihrer Auswahl vorteilhaft?

- Abschluss ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
 - Master einstellen: Trefferquote 50 : 25 (schlechter)
 - Doktor einstellen: Trefferquote 20 : 5 (besser!)
- 😊 Trotz aller Nachteile kann sich eine Promotion also auszahlen ... selbst wenn sie für die eigentliche Tätigkeit nicht relevant ist!
- ⚠ Ineffizienz ist der Preis für unvollständige Information.

Bedingte Wkt: Vorurteil oder Gerechtigkeit?

Wir untersuchen hier zwei simple, aber frappierende Beispiele: Federn und Dokortitel. Beide sind durchaus realistisch und handfeste Illustrationen für das Konzept der *bedingten Wahrscheinlichkeit*: Diese ist nicht nur eine schöne Theorie, sondern überall tägliche Praxis.

Die Argumente in unserer fiktiven Bewerbungssituation mögen manche für ungerecht halten. In der Tat basieren Sie auf *Vorurteilen* der Arbeitgeberin – ein eher negativ besetzter Ausdruck, aber inhaltlich bedeutet es dasselbe wie bedingte Wahrscheinlichkeit: Sie nutzt ihre Erfahrung. Unter den gegebenen spärlichen Informationen ist das Vorurteil nützlicher als gar kein Urteil.

Das Grundproblem: Die primäre Zielgröße „Eignung“ ist nicht direkt zugänglich.

Der sekundäre Faktor „Ornament“ ist eigentlich unwichtig, dafür aber leicht sichtbar.

In Ermangelung primärer Information muss man sich mit sekundärer Information begnügen. Diese erhält dadurch eine größere Bedeutung als sie eigentlich haben sollte, und das wird als ineffizient oder ungerecht empfunden. Das ist der Preis für unvollständige Information!

Zur Beruhigung der Gemüter: Nichts hält die Arbeitgeberseite davon ab, über die erste grobe Vorinformation hinaus genauere Information zu gewinnen, zum Beispiel durch Gespräche, Tests, Assessment oder eine Probezeit. Genau das wird in der Praxis auch erfolgreich genutzt. Das ist der Vorteil, wenn man Information nicht nur *passiv* beobachtet, sondern *aktiv* herstellen kann.

Schließlich zur Ehrenrettung der Promotion, auch aus persönlicher Erfahrung: Viele Studierende empfinden große Begeisterung für ihr Fach. Dies kann sogar dazu führen, dass sie aus ehrlichem intrinsischem Interesse einer Frage auf den Grund gehen wollen und darüber sogar promovieren. Das wird durch die obigen, allzu kühl berechnenden Argumente nicht in Zweifel gezogen!

Eine **Moral** ist (1) ein Normensystem für das rechte Handeln von (2) vernunftbegabten Wesen mit (3) Anspruch auf Allgemeingültigkeit. Hierzu ist die **Ethik** die wissenschaftliche Beschäftigung mit der Moral.

Praxis, konkret	Theorie, abstrakt
Performanz	Kompetenz
(recht) erziehen	Pädagogik
(gut) unterrichten	Didaktik
(sozial) interagieren	Soziologie
(richtig) formulieren	Grammatik
(richtig) rechnen	Mathematik
(gut) wirtschaften	Ökonomik
(moralisch) handeln	Ethik

The aim of theory really is, to a great extent, that of systematically organizing past experience in such a way that the next generation [...] will be able to absorb the essential aspects in as painless a way as possible.

(Michael F. Atiyah, 1929–2019, *How research is carried out*)

„Moralisch“ bedeutet demnach so viel wie „sittlich“ oder „anständig“, jeweils relativ zu der zugrundeliegenden gesellschaftlichen Norm, und „ethisch“ bedeutet so viel wie „sittenwissenschaftlich“.

Moralen sind Normensysteme, Ethik ist die Wissenschaft hiervon, griech. ἦθος [éthos]: Charakter, Wesen, Eigenheit, Sitte, Gewohnheit.

Wir sehen hier die allgegenwärtige Dualität von Praxis und Theorie.

Beide ergänzen sich und arbeiten zusammen wie linke und rechte Hand.

πρᾶγμα [pragma], πρᾶξις [praxis]: Tat, Handlung, Verfahren, Umtriebe.

θεωρίᾱ [theoria]: Betrachtung, Überlegung, Untersuchung, Erkenntnis.

Meine Liste ist eine praktische Sammlung von Theorien: Theorienpraxis.

Ich denke nun über Theorien und ihre Analogien nach: Theorientheorie.

Ich erinnere an einen frechen Sinnspruch zu Praxis – Theorie – Lehre:

Wer etwas kann, der tut es.

Wer es nicht kann, der erforscht es.

Wer auch das nicht kann, der lehrt es.

(anonyme Weisheit, eigene Interpretation)

Es ist sinnvoll, den Gegenstand und die Untersuchung desselben zu unterscheiden, und genau dazu verhelfen uns präzise Bezeichnungen. In der Umgangssprache geraten diese Begriffspaare oft durcheinander. Hier ein paar einfache doch eindruckliche Beispiele zur Illustration:

Ein moralisches Problem haben Sie, wenn Sie sich um die Richtigkeit Ihres Handelns sorgen. Ethische Probleme hingegen beschäftigen Sie, wenn Sie z.B. versuchen, Kant oder andere Moralphilosophen zu lesen.

Sie haben ein psychisches Problem, wenn Sie unter einer Phobie leiden. Hingegen untersuchen Sie ein psychologisches Problem, wenn Sie sich fragen, wie Phobien mit Kindheitserfahrungen zusammenhängen.

Sie haben ein soziales Problem, wenn Sie sich ausgegrenzt fühlen. Hingegen studieren Sie ein soziologisches Problem, wenn Sie versuchen, Ausgrenzung gesellschaftswissenschaftlich zu erklären.

Sie haben ein rechnerisches Problem, wenn Ihre konkret vorliegende Rechnung nicht aufgeht. Hingegen haben Sie ein mathematisches Problem, wenn Sie Mathematik und ihre Anwendungen erforschen.

Die Moral, also rechtes Handeln, basiert auf einem Menschenbild.

Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser.

Wladimir Iljitsch Lenin (1870–1924)

*Engagement, Kooperation, Ehrlichkeit, Sorgfalt, etc.
erfordern Mut und müssen belohnt werden.*

Hier hilft individuelle oder gesellschaftliche Erfahrung.

*An expert is a person who has made all the mistakes
that can be made in a very narrow field.*

Niels Bohr (1885–1962)

*An expert is someone who knows some of the worst mistakes
that can be made in his subject, and how to avoid them.*

Werner Heisenberg (1901–1976)

Wie verhalten sich Ratio und Moral?

 Rationales / ökonomisches / nutzenmaximierendes Verhalten kann moralisch oder unmoralisch sein, das hängt von den (Spiel-)Regeln ab und von den (gesellschaftlich vereinbarten) moralischen Normen.

Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.

Immanuel Kant (1724-1804), *Kritik der praktischen Vernunft* (1788)

Erst kommt das Fressen, dann die Moral.

Bertolt Brecht (1898-1956), *Dreigroschenoper* (1928)

 Gleichsinnige, günstige Ausrichtung [*alignment*]: Ratio = Moral

 Gegensinnige Ausrichtung [*misalignment*, Dilemma]: Ratio \neq Moral

 Unsere Gesellschaft braucht Nachhaltigkeit und Kooperation. Wir wollen und müssen solche Dilemmata erkennen und lösen.

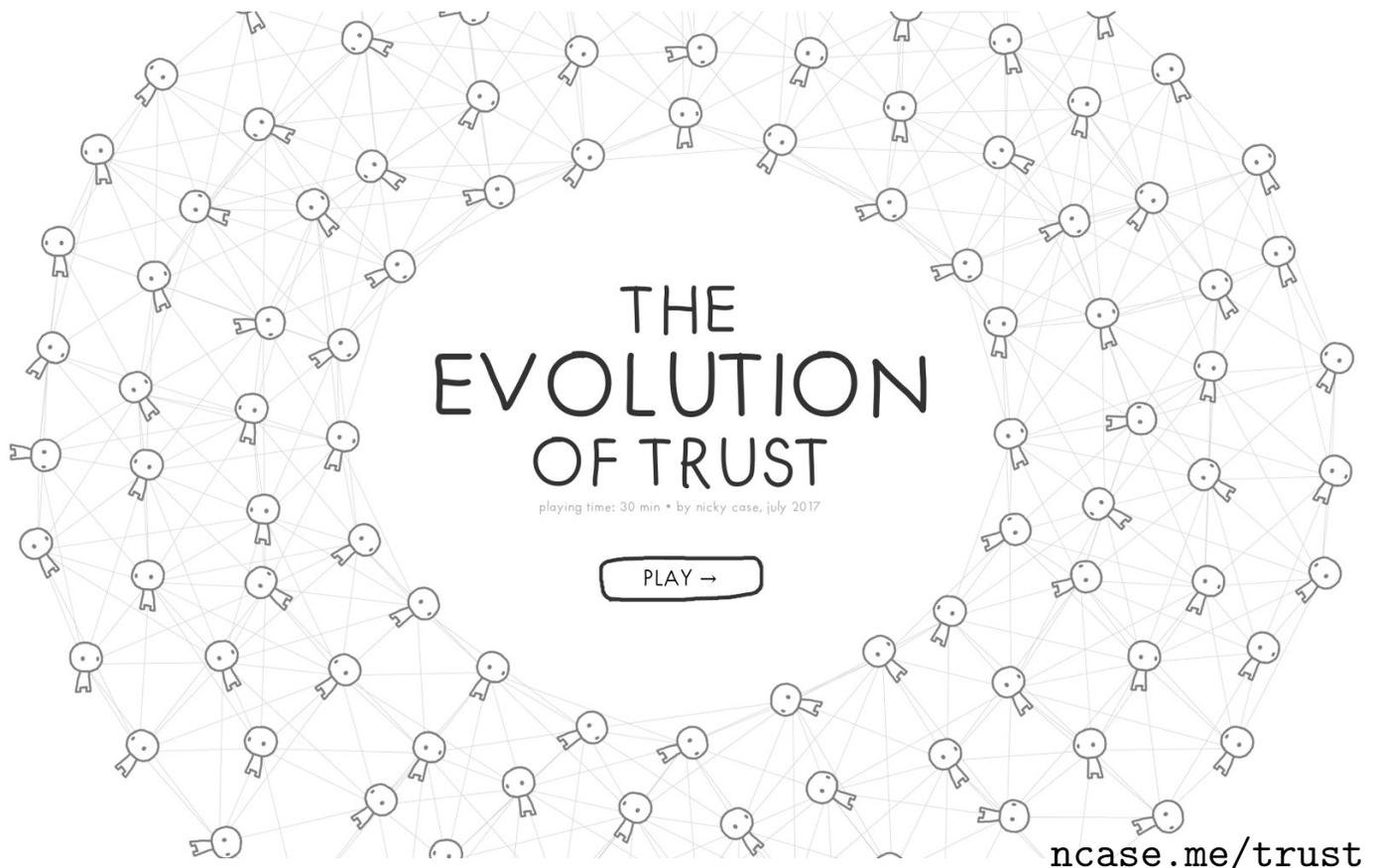
Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht ändern, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren.

Wie verhalten sich Ratio und Moral?

Wie können wir soziale Dilemmata erkennen und eventuell auflösen? Zunächst einmal müssen wir Spiele verstehen und Muster erkennen: Die Spielregeln sind vorgegeben, welches Verhalten folgt daraus? Ist dieses Verhalten gesellschaftlich günstig / erwünscht / moralisch?

Sodann wollen wir geeignete Mechanismen / Spielregeln konstruieren. Das klingt zunächst abstrakt, ist aber absolut konkret. Wir tun es täglich: Wenn wir Prüfungen organisieren, wollen wir Ehrlichkeit belohnen und Betrug bestrafen. Ja, wir müssen dies geradezu, denn alles andere wäre naiv und bald zum Scheitern verurteilt. Das gilt allgemein, nicht nur für Prüfungsordnungen, sondern für alle Gesetze, Kontrollen, Anreize, etc.

Diese Überlegungen führen uns von simplen Spielen zu komplexeren Konflikten, von einfachen Modellen zu gesellschaftlichem Verhalten. Daher betone ich hier das Grundprinzip des Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht direkt ändern oder vorschreiben, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren, die das gewünschte Verhalten ermöglichen, nicht hindern, sondern fördern.



The Evolution of Trust bietet hierzu eine wunderbare Illustration. Was ich Ihnen hier erzähle, können Sie dort spielerisch ausprobieren. Es verbindet wunderschön die beiden Themen dieses Kapitels: soziale Dilemmata und die Evolution gesellschaftlichen Verhaltens. Das Spiel basiert auf Robert Axelrods berühmten Büchern zum Thema: *The Evolution of Cooperation* (Basic Books 1984, revised 2006) und *The Complexity of Cooperation* (Princeton University Press 1997).

Untersucht wird die mögliche Kooperation im **Gefangenendilemma**. Bei einmaligem Spiel ist hier *rational* keine Kooperation möglich. Bei wiederholtem Spiel jedoch kann sich Kooperation lohnen. Ob sich Kooperationsbereitschaft wirklich auszahlt und durchsetzt, hängt vom gesellschaftlichen Kontext ab, und dieser entwickelt sich. Daher der Titel dieser lehrreichen Simulation: *The Evolution of Trust*.

Wir werden die Frage in Kapitel K zu **wiederholten Spielen** erneut aufgreifen und mit verfeinerten Werkzeugen genauer untersuchen.

Das Restaurant-Paradox

Aufgabe: (0) Ein Ensemble von 20 Personen besucht ein Restaurant. Jede darf wählen: ein gutes Menu für 30€ oder ein exzellentes für 50€. Jede zahlt ihre eigene Rechnung und denkt: „10€ mehr wäre es mir wert, aber nicht 20€.“ Daher entscheidet sie sich für das Menu zu 30€.

(1) Das Ensemble beschließt *vor* dem Restaurant, eine gemeinsame Rechnung zu verlangen und alles durch 20 zu teilen. Was passiert?

Lösung: (1) Jede einzelne Person kostet ihr Upgrade nur noch 1€. Sie wählt also für sich das teurere Menu. Am Ende zahlt jede 50€.

Das Ergebnis ist anschaulich klar. Wir üben nochmal den Formalismus und all unsere Begriffe an diesem schönen übersichtlichen Beispiel.

Bistromathics: Numbers written on restaurant checks within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.

Douglas Adams (1952–2001), *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

Das Restaurant-Paradox

Aufgabe: Formulieren Sie explizit beide Spiele $u, u' : S \rightarrow \mathbb{R}^{20}$. Finden Sie alle Gleichgewichte, Dominanzen und Symmetrien.

Lösung: (0) Die Spielermenge ist $I = \{1, 2, \dots, 20\}$. Jeder Spieler $i \in I$ hat die Strategiemenge $S_i = \{0 = \text{gut}, 1 = \text{exzellent}\}$, gemeinsam also $S = \prod_{i \in I} S_i = \{0, 1\}^I$. Die Nutzenfunktion ist laut Aufgabenstellung

$$u_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto 10s_i - 20s_i = -10s_i.$$

Für jeden Spieler ist die Strategie 0 strikt dominant. Somit ist $s = (0, 0, \dots, 0)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

(1) Im zweiten Fall kommt es zur Kopplung durch die Nutzenfunktion

$$u'_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto 10s_i - \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} 20s_j = 10s_i - \sum_{j=1}^{20} s_j.$$

Für jeden Spieler ist die Strategie 1 strikt dominant. Somit ist $s = (1, 1, \dots, 1)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

Beide Spiele sind symmetrisch, also $\text{Sym}(u) = \text{Sym}(u') = \text{Sym}(I)$.

Das zweite ähnelt dem **Gefangenendilemma**, hier für n Spieler.

Ein **soziales Dilemma** liegt vor, wenn individuell rationales Verhalten ein suboptimales / ineffizientes Gesamtergebnis erzeugt, also die Akteure insgesamt schlechter dastehen als durch Absprache möglich wäre, etwa durch sozial kontrollierte Übereinkunft oder einen einklagbaren Vertrag.

Häufig ist ein **Vertrag** zu aufwändig oder schlicht gänzlich unmöglich. Zudem müssten Verstöße kontrolliert und sanktioniert werden können. Auch das liegt oft außerhalb der Reichweite der einzelnen Akteure; hierzu wird eine übergeordnete (z.B. staatliche) Struktur benötigt.

Solidarität versus Unvernunft. Gegenseitige Hilfe ist nicht nur eine urmenschliche Regung, sondern kann durchaus individuell rational sein, zum eigenen Vorteil, etwa bei Versicherungen oder Katastrophenhilfe. Meist geht dies über die spontane Hilfe im konkreten Einzelfall hinaus, dazu soll sie als verlässliche, allgemeine Zusicherung formuliert werden.

Bei **Fehlkonstruktion** kann Solidarität jedoch falsche Anreize setzen, im Extremfall fördert sie (global gesehen) unvernünftiges Verhalten: Tendenz zu unnötigen Risiken oder achtloser Verschwendung.

Der schottische Ökonom **Adam Smith** (1723–1790) prägte in seinem Hauptwerk *Der Wohlstand der Nationen* (1776) die vielzitierte Idee der „unsichtbaren Hand des Marktes“: Sie Sorge dafür, so seine Hoffnung, dass individueller Egoismus automatisch zu kollektiver Wohlfahrt führe.

Bei einem **sozialen Dilemma** jedoch wirkt Egoismus genau umgekehrt: Individuell rationales Verhalten führt für alle zu einer Verschlechterung. Das widerlegt allzu naive Hoffnungen oder kühne Verallgemeinerungen: Die „unsichtbare Hand“ mag manchmal wirken, aber keineswegs immer.

Soziologen sprechen von **sozialen Fallen** oder **paradoxen Effekten**: Individuell rationales Verhalten kann zu irrationalen Ergebnissen führen. Naive Analysen verfallen häufig dem Irrtum, unvernünftige Ergebnisse auf unvernünftiges Handeln zurückzuführen. Das Gegenteil ist der Fall.

Das Ziel des **Mechanismendesign** (engl. *mechanism design*) ist die Schaffung eines Rahmens, der das gewünschte Verhalten ermöglicht. Die individuelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der gemeinsame Rahmen wird gestaltet.

Aufgabe: Nennen, formalisieren und analysieren Sie weitere Beispiele, die ähnlich strukturiert sind und zu sozialen Dilemmata führen können:
(1) zunächst auf lokaler Ebene, etwa in einer Wohngemeinschaft,
(2) auf nationaler bzw. europäischer Ebene, (3) schließlich global.
Welche Mechanismen wären jeweils denkbar, hilfreich, praktikabel?
Das führt schnell zu aktuellen und brisanten politischen Fragen!

Skizze: Hier eine Auswahl möglicher Beispiele, die Liste ist endlos.
(1) Sollte eine WG einen gemeinsamen Getränke Kühlschrank haben?
Ist die WG-Regel „Jeder spült den Abwasch nach Bedarf“ sinnvoll?
Wie bezahlt die WG Strom, Wasser, etc. bei gemeinsamem Zähler?
Sollte der öffentliche Personennahverkehr (ÖPNV) gratis sein?

 Solche Fragen werden meist nur qualitativ-vage diskutiert. Wenn Sie dies genauer ausführen wollen, quantitativ als mathematisches Modell, so müssen Sie zuerst die zu Grunde gelegte Nutzenfunktion klären. Beim ÖPNV können zwar höhere Kosten entstehen, doch dafür die Umwelt geschont werden. Die genaue Zielfunktion ist entscheidend!

(2) Sollte das Studium (vollkommen oder weitgehend) gratis sein?
Sollten wir unsere Finanzämter mit mehr Personal ausstatten?
Wem nützt eine private Kranken- oder eine Bürgerversicherung?
Schafft die Währungsunion Anreize zu achtloser Haushaltsführung?
Gilt dies ebenso für den innerdeutschen Länderfinanzausgleich?

(3) Wie können wir den menschengemachten Klimawandel bremsen?
Wie kann bzw. sollte Emissionsrechtehandel institutionalisiert werden?
Wie können wir Rodung und Abholzung der Urwälder verhindern?
Wie können wir die Überfischung der Weltmeere verhindern?
Wie können wir die Ressourcen der Menschheit schützen?

 Damit zielen wir auf aktuelle, zentrale Probleme der Menschheit. Eine mathematische Analyse scheint möglich, etwa durch Entwicklung geeigneter Mechanismen, eine praktikable Lösung ist hingegen schwer. Es genügt leider nicht, eine vernünftige Lösung auszuklügeln, sie muss auch akzeptiert und umgesetzt werden. Gute Ideen scheitern leider oft. Das von allen gemeinsam gewünschte Ziel wird dem Egoismus geopfert.

Nach obigem Muster funktionieren viele soziale **Konfliktsituationen** wie Schwarzfahren, Versicherungs-/Sozialbetrug, Steuerhinterziehung. Der individuelle Nutzen ist klein, der allgemeine Schaden ist groß, doch durch die große Zahl der Betroffenen wird der Schaden verteilt und dem einzelnen nur zu einem kleinen Bruchteil in Rechnung gestellt.

Das zynische Motto: **Gewinne privatisieren, Verluste sozialisieren.** Das ist insbesondere bei Banken Krisen und -rettungen hochaktuell. Auch die wiederkehrenden Euro Krisen folgen einer ähnlichen Struktur.

Die **Politik der hohen Schornsteine** verteilt Abgase möglichst weit, die Emissionen insgesamt werden jedoch nicht reduziert, im Gegenteil! Jeder Akteur zielt nicht auf das Gesamtergebnis, sondern seinen Vorteil.

Dagegen scheint kein Kraut gewachsen, oft versagen die Mechanismen der sozialen Kontrolle, Religion, Moral, Ethik. Genau hierzu formulierte Immanuel Kant in seiner Ethik den **kategorischen Imperativ**:
„Handle nur nach derjenigen *Maxime*, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.“

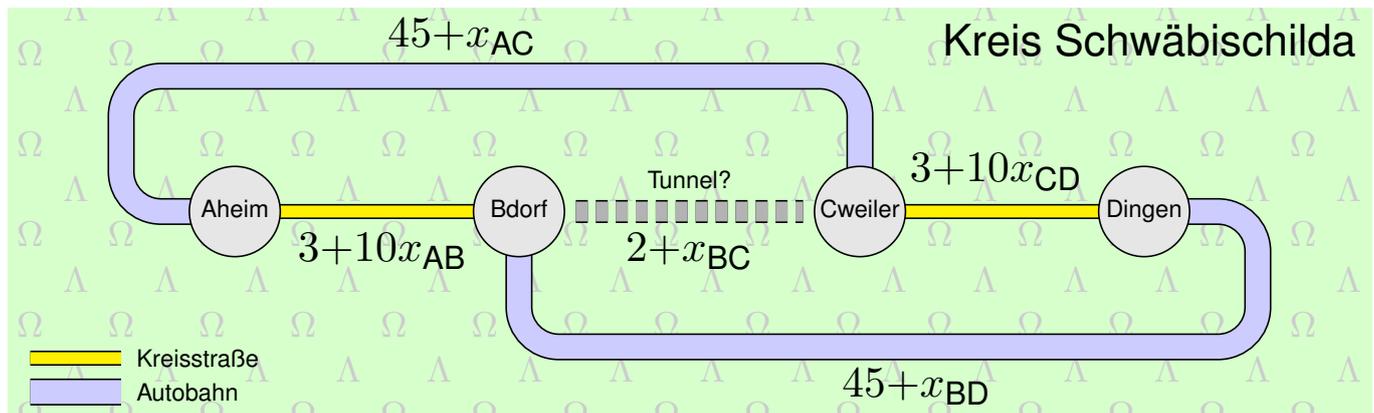
Das Problem heißt **Tragik der Allmende** [*tragedy of the commons*]. Eine *Allmende* ist gemeinschaftlich genutztes Eigentum, zum Beispiel landwirtschaftliche Nutzfläche oder Weidefläche. Allmenden sind heute noch beispielsweise im Schwarzwald und im Alpenraum verbreitet.

Commoners sind Bauern oder Hirten, die gemeinsam Kroneigentum als Allmende bewirtschaften. Der Begriff *tragedy of the commons* wurde 1833 geprägt vom Ökonomen William Forster Lloyd (1794–1852) und 1968 vom Ökologen Garrett Hardin (1915–2003) in *Science* ausgeführt.

Akute Beispiele für die **Ausbeutung natürlicher Ressourcen** sind: Überfischung der Weltmeere, Raubbau an Regenwäldern, Plünderung von Wildtierbeständen, Verschmutzung der Atmosphäre, anthropogene Klimaveränderung. Gemeines Muster: Individueller kurzfristiger Vorteil (Gier) schlägt gemeinsamen langfristigen Nutzen (Nachhaltigkeit).

Die **Spieltheorie** kann solche Mechanismen zunächst nur *erklären*, immerhin. Voraussetzung ist eine ehrliche, kritische, detaillierte Analyse. Die Menschheit wird beweisen müssen, ob sie diesen unvermeidlichen Konflikten gewachsen ist und rechtzeitig wirksame *Lösungen* findet.

Paradoxe Verkehrsfluss nach Braess



Täglich pendeln 6000 Autofahrer von Aheim nach Dingen, entweder über Bdorf (ABD) oder über Cweiler (ACD). Angegeben sind die Fahrzeiten in Minuten, wobei $x_{ij} \in [0, 6]$ jeweils die Autozahl in Tausend ist. **Aufgabe:**

- (0) Erklären Sie dies explizit als strategisches Spiel mit 6000 Spielern.
 (1) Finden Sie alle Gleichgewichte: Welcher Verkehrsfluss stellt sich ein?

Lösung: Aufteilung 3000 : 3000, Fahrzeit jeweils 81 Minuten.

- (2) Zur Verkürzung der Fahrzeit plant der Landkreis einen Autobahntunnel von Bdorf nach Cweiler. Hilft das oder nicht? Rechnen Sie es aus!

Lösung: Aufteilung 2000 : 2000 : 2000, Fahrzeit jeweils 90 Minuten!

Paradoxe Verkehrsfluss nach Braess

Oft hört man pauschal: „Mehr Straßen garantieren schneller ankommen.“ Das kann helfen, aber keineswegs immer: „Zusätzliche Straßen können Staus verstärken.“ Auch das hört man so pauschal. Schauen wir hin!

Unser Beispiel ist zugegeben konstruiert, dafür ist es besonders einfach. Es soll zunächst illustrieren, dass das Phänomen wirklich möglich ist. Echte Problemfälle muss man wesentlich genauer untersuchen.

Die Zahlen sind so angelegt, dass wir die Lösungen leicht überblicken: In beiden Fällen teilen sich die Verkehrsströme jeweils in gleiche Teile.

Unglaublich: Der Tunnel erhöht die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten!

Ohne Absprache gibt es kein Zurück: Nur wenn sich genügend Fahrer für die beiden alten Strecken ABD und ACD entschließen, verringert sich der Stau auf den Landstraßen, und alle sind insgesamt schneller.

Könnten die Pendler nicht ihren alten Strecken folgen und den Tunnel ignorieren? Sicher, doch jeden lockt die Abkürzung mit 68 Minuten.

Das Verrückte ist: Jeder einzelne handelt rational! So stellt sich ein neues Gleichgewicht ein, das paradoxerweise für alle schlechter ist.

Lösung: (0) Spielermenge sei $I = \{1, 2, \dots, 6000\}$. Die Strategiemenge für Fahrer $i \in I$ ist $S_i = \{ABD, ACD\}$ bzw. mit Tunnel $S'_i = S_i \cup \{ABCD\}$. Die Verkehrszählung (in Tsd) ergibt $x_{AC}, x_{BD}, x_{BC}, x_{AB}, x_{CD} : S \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} x_{AC}(s) &:= 10^{-3} \cdot \#\{i \in I \mid s_i = ACD\} &&= x_1 \\ x_{BD}(s) &:= 10^{-3} \cdot \#\{i \in I \mid s_i = ABD\} &&= x_2 \\ x_{BC}(s) &:= 10^{-3} \cdot \#\{i \in I \mid s_i = ABCD\} &&= x_3 \\ x_{AB}(s) &:= 10^{-3} \cdot \#\{i \in I \mid s_i \in \{ABD, ABCD\}\} &&= x_2 + x_3 \\ x_{CD}(s) &:= 10^{-3} \cdot \#\{i \in I \mid s_i \in \{ACD, ABCD\}\} &&= x_1 + x_3 \end{aligned}$$

Hieraus berechnen wir die Fahrzeiten, und diese sind zu minimieren:

$$-u_i : S \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \begin{cases} 48 + x_{AC}(s) + 10x_{CD}(s) & \text{für } s_i = ACD, \\ 48 + 10x_{AB}(s) + x_{BD}(s) & \text{für } s_i = ABD, \\ 8 + 10x_{AB}(s) + x_{BC}(s) + 10x_{CD}(s) & \text{für } s_i = ABCD. \end{cases}$$

☹ Die Strategiemenge $S = S_1 \times \dots \times S_{6000}$ ist astronomisch groß!

😊 Das Spiel u ist spieler-symmetrisch: $\text{Sym}(u) = \text{Sym}(I)$. Statt des Strategievektors $s \in S$ genügen uns die Häufigkeiten der Strategien!

(1) Angenommen, x_1 Tsd wählen ACD, x_2 Tsd wählen ABD.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, & x_1 &\geq 0, & x_2 &\geq 0 \\ z_1(x_1, x_2) &= [45 + x_1] + [3 + 10x_1] \\ z_2(x_1, x_2) &= [3 + 10x_2] + [45 + x_2] \end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2$, also $x_1 = x_2 = 3$ (LGS, Symmetrie). In der Ausgangssituation ist die Fahrzeit somit $z_1 = z_2 = 81$ Minuten.

(2) Angenommen, x_3 Tsd fahren ABCD durch den neu eröffneten Tunnel.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6, & x_1 &\geq 0, & x_2 &\geq 0, & x_3 &\geq 0 \\ z_1(x_1, x_2, x_3) &= [45 + x_1] + [3 + 10(x_1 + x_3)] \\ z_2(x_1, x_2, x_3) &= [3 + 10(x_2 + x_3)] + [45 + x_2] \\ z_3(x_1, x_2, x_3) &= [3 + 10(x_2 + x_3)] + [2 + x_3] + [3 + 10(x_1 + x_3)] \end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2 = z_3$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ (LGS). Mit Tunnel erhöht sich die Fahrzeit auf $z_1 = z_2 = z_3 = 90$ Minuten!

😊 Spieler-Symmetrie hilft! Die Nash-Gleichgewichte sind strikt!

Zur Vereinfachung betrachten wir x_i als kontinuierlich (*non-atomic*).

Das erstaunliche Ergebnis wird als **Braess–Paradox** bezeichnet: Eine zusätzliche Handlungsoption kann die Situation für alle verschlechtern. Es wurde 1968 von dem Mathematiker Dietrich Braess veröffentlicht: *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*, Unternehmensforschung Operations Research 12 (1968), 258–268, online verfügbar unter homepage.ruhr-uni-bochum.de/Dietrich.Braess/paradox.pdf.

Die Rechnung illustriert wunderbar die Idee des Nash–Gleichgewichts! Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele, darunter auch solch verblüffende Paradoxien. Die genaue Analyse löst dieses Scheinparadox allerdings schnell auf. Bei genauerem Hinsehen ähnelt auch dies dem Gefangenendilemma.

Ist es nur eine psychologische Falle? Eine Charakterschwäche im Sinne von Gier schlägt Geist? Nicht nur, jeder einzelne handelt, wie gesagt, vollkommen rational. Dabei optimieren alle Teilnehmer rein individuell. Die vertrackte Situation provoziert dieses Verhalten, es ist das Resultat individueller Optimierung ohne bindende Absprache oder Koordinierung.

Es gibt **physikalische Entsprechungen** mit Federn in der Mechanik oder elektrischen Strömen in einer Schaltung, siehe Cohen, Horowitz: *Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks*, Nature 352 (1991), 699–701, online www.nature.com/articles/352699a0.

Das Phänomen ist also kein psychologischer Taschenspielertrick. Kommt das Paradox auch in realen Verkehrssituationen vor? Ja!

Die Süddeutsche Zeitung schreibt in ihrer Ausgabe vom 19. Mai 2010: „So waren die Verkehrsplaner in Stuttgart 1969 überrascht, als nach großen Investitionen ins Straßennetz rund um den Schlossplatz der Verkehrsfluss ins Stocken kam. Die Situation besserte sich erst, nachdem ein Teil der Königsstraße zur Fußgängerzone erklärt wurde.“

Weitere solche Beispiele werden aus New York und Seoul berichtet; das Problem sei unter Experten inzwischen hinlänglich bekannt, so heißt es. Straßenplaner nutzen geeignete Messdaten und Simulationssoftware zur Optimierung, insbesondere zur frühzeitigen Erkennung und Vermeidung paradoxer Verkehrsflüsse. Mathematik wirkt!

Aufgabe: Entwickeln Sie ein Verkehrsleitsystem, das jedem Fahrer am Ortsausgang von Aheim und Bdorf zufällig eine Route zuweist, sodass die erwartete Fahrzeit für alle gleich ist. Welches Minimum können Sie so erreichen? Hierzu braucht es eine unabhängige Instanz! Muss dieses System Strafen androhen? Erreicht es ein korreliertes Gleichgewicht?

Mehr Straßen erhöhen automatisch den Verkehrsfluss? Nicht immer! Die Planung vor dem Straßenbau ist wichtig, wie oben gesehen, und manchmal erfordert optimaler Betrieb eine aktive zentrale Steuerung. Ähnlich drastisches Beispiel: In manchen Städten ignorieren Fahrer die Ampeln, um sich „eben noch schnell“ über die Kreuzung zu schummeln. In der Rushhour führt dies zum katastrophalen Gegenteil: Stau!

Das kann übrigens auch für Geschwindigkeitsbeschränkungen gelten: Individuelle Disziplin kann allseitigen Nutzen erzeugen. So weit, so klar. Das ist allerdings unpopulär und schwer zu vermitteln: Preis der Freiheit.

Freie Fahrt für freie Bürger! forderte der ADAC 1974 zu Zeiten der Ölpreiskrise, und später die Leipziger Montagsdemonstration 1989.

Die **Verkehrsströmungslehre** (engl. *traffic flow theory and control*) ist ein ausgedehntes Gebiet und alltäglich nahezu überall relevant.

Je nach Trägersystem (Straße, Bahn, Flugzeug, etc) nutzt sie spezielle mathematische Modelle und Methoden: Optimierung (kombinatorisch, numerisch, Simulation) und Stochastik (Warteschlangentheorie) und schließlich Spieltheorie (individuell vs zentral gesteuert).

Den Straßenverkehr kann man dabei kontinuierlich modellieren analog zur Fluidodynamik mit Differentialgleichungen, oder auch mit zellulären Automaten wie im Nagel–Schreckenberg–(NaSch–)Modell, siehe de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Schreckenberg-Modell.

Seit den 1990er Jahren entwickeln sich spieltheoretische Ansätze zu Psychologie und Rationalität, ökonomischen Anreizen, usw.

Die Computersimulation wird ergänzt durch Experimente mit menschlichen Teilnehmern wie in der experimentellen Ökonomik.

Einen Querschnitt zeigt der Symposiumsband von Schreckenberg, Selten: *Human Behaviour and Traffic Networks*, Springer 2004.

Aktuell stellen Elektromobilität und ÖPNV neue Herausforderungen.



Steve Mould: *The Spring Paradox*, youtu.be/Cg73j3QYRJc
 Up and Atom: *Braess's Paradox*, youtu.be/cALezV_Fwi0

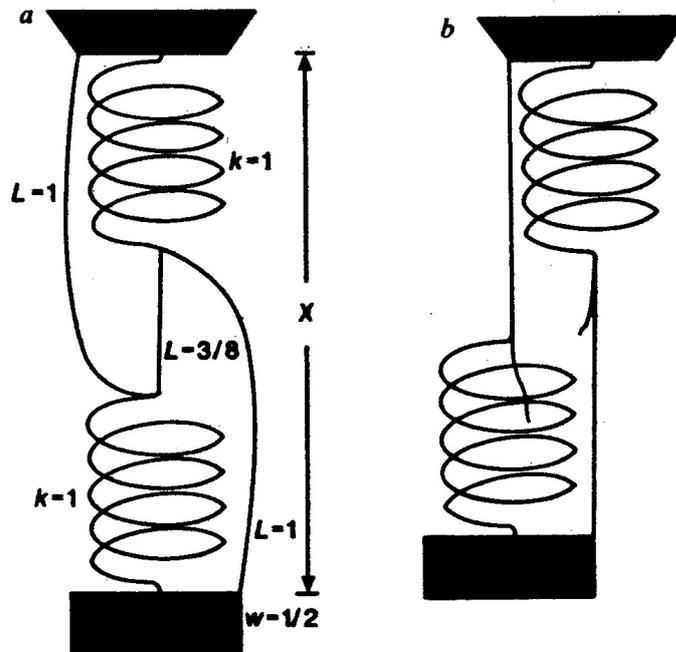


FIG. 1 Mechanical network. Springs have zero unstretched length and spring constant $k=1$. Strings are inelastic. The string that links the two springs has length $\frac{3}{8}$ m. Both safety strings have length 1 m. The weight exerts a force of $\frac{1}{2}$ N. *a*, In the initial network, both safety strings are limp, and the distance X from support to weight is $1\frac{3}{8}$ m. *b*, After the linking string is cut, the weight is higher at equilibrium; the new distance from support to weight is $1\frac{1}{4}$ m.

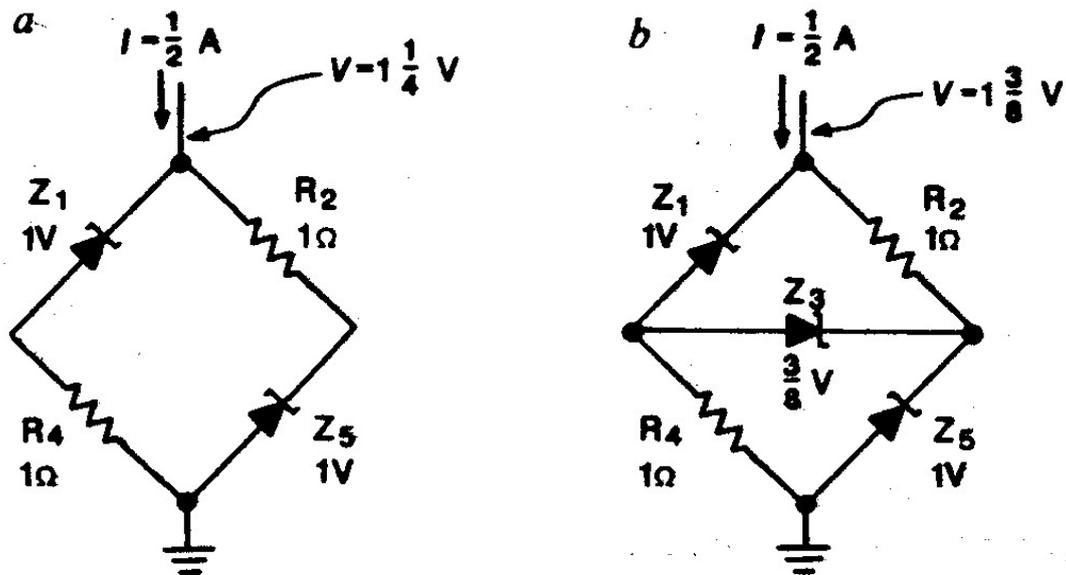


FIG. 3 Electrical network of ideal components. *a*, Initially, current flows symmetrically through left and right branches, and the voltage drop from source to ground is $1\frac{1}{4}$ V. *b*, When a $\frac{3}{8}$ -V Zener diode is introduced across the network, the current through the 1-V Zener diodes drops to zero and all current flows through the 1- Ω resistors and the $\frac{3}{8}$ -V Zener diode, producing a larger voltage drop from source to ground of $1\frac{3}{8}$ V.

Nature 352 (1991), 699–701, www.nature.com/articles/352699a0

Aufgabe: Führen Sie das oben skizzierte mechanische System aus und rechnen Sie das behauptete paradoxe Verhalten sorgfältig nach! Wenn Sie es praktisch-konkret mögen, können Sie es sogar bauen.

Projekt: Wie können Sie dies für Wasser realisieren? oder Wärme? Lässt sich dies ebenso einfach im Experiment demonstrieren?

Projekt: Er/Finden Sie (potentiell) paradoxe Systeme in Ihrem Alltag:

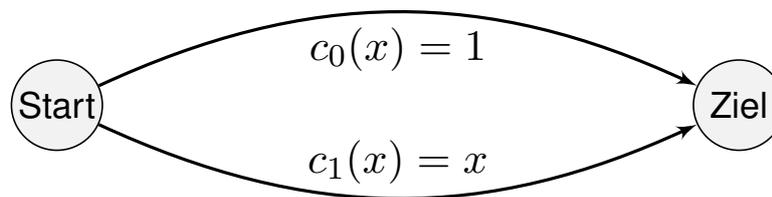
- Nutzung von Aufzügen und Treppen: Warteschlangen?
- In der Mensa: Essensausgabe? Geschirrrückgabe?
- Anmeldung zu Übungsgruppen, Seminaren, etc.

Vermutlich müssen Sie hier geeignete Annahmen / Parameter wählen. Selbst wenn die so konstruierten Beispiele etwas unrealistisch anmuten, so illustrieren sie doch immerhin die Möglichkeit paradoxen Verhaltens.

Pigous Beispiel: schockierend einfach

⚠ *Selfish behavior need not produce a socially optimal outcome.*

Extremes Beispiel von A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, 1920:



Zwei Routen stehen zur Verfügung: Auf der oberen ist die Fahrzeit immer 1 Stunde, auf der unteren x Stunden bei Auslastung $x \in [0, 1]$.

Aufgabe: Was ist das Gleichgewicht bei (1) individueller Optimierung vs (2) zentraler Optimierung durch ein verbindliches Verkehrsleitsystem?

Lösung: (1) Alle wählen den unteren Weg, die Fahrzeit ist 1 Stunde. (2) Jeweils die Hälfte wird (zufällig) nach oben oder unten geleitet. Niemand ist schlechter dran als in (1). Die Hälfte der Fahrer benötigt nur noch $1/2$ Stunde. Die mittlere Fahrzeit sinkt von 1 auf $3/4$ Stunde!

Pigous Beispiel: schockierend einfach

Erfahrungsgemäß akzeptieren Autofahrer:innen nur widerwillig etwaige Eingriffe in ihre Entscheidungsfreiheit, siehe *Freie Fahrt für freie Bürger!* Dennoch kann eine zentrale Koordinierung – mit bindender Wirkung! – die Effizienz für alle steigern, in günstigen Fällen wie oben skizziert.

Solche Fragen stellen sich zum Beispiel auch in digitalen Netzwerken: Datenpakete werden von ihrem Start zum gewünschten Ziel geleitet, und auch hier entstehen Kosten und Wartezeiten. Die Koordination kann zentral organisiert werden, oder aber den Akteuren überlassen werden.

Somit erweisen sich diese paradoxen Beispiele nicht als exotisch, wie es zunächst scheinen mag, sondern eröffnen ein faszinierendes Thema. Sowohl auf unseren „Datenautobahnen“ als auch auf realen Straßen lohnt es, effiziente Mechanismen zu suchen und zu implementieren.

Zum Vergleich und als Kontrast: In der klassischen Logistik transportiert ein Unternehmen die Waren und optimiert dazu zentral alle Abläufe. Das ist bereits eine hohe (mathematische) Kunst. Durch dezentral und egoistisch handelnde Akteure entstehen völlig neue Herausforderungen!

Im obigen Braess–Beispiel wächst die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten, im viel einfacheren Pigou–Beispiel von $3/4$ auf 1 Stunde. Gibt es noch schlimmere Beispiele? Wie groß kann die Ineffizienz maximal werden?

Gefragt und beantwortet wurde dies von T. Roughgarden, E. Tardos: *How bad is selfish routing?* Journal of the ACM 49 (2002) 236-259.

Satz G2A: Preis der Anarchie, Roughgarden–Tardos 2002

Gegeben sei ein Straßennetz. Die Fahrzeit für jede einzelne Strecke e sei affin-linear, also von der Form $c_e(x) = a_e + b_e x_e$ bei Auslastung x_e .

Sei C^* die Fahrzeit bei kollektiver Optimierung und C die Fahrzeit bei individueller Optimierung. Dann gilt die Schranke $C/C^* \leq 4/3$.

Bestenfalls gibt es keine Diskrepanz, schlimmstensfalls führt Egoismus zu 33% Ineffizienz. Diese Schranke hängt von den Kostenfunktionen ab, siehe *Routing Games*, Kapitel 18 in *Algorithmic Game Theory*, CUP 2007; online frei zugänglich unter www.timroughgarden.org.

Es ist erstaunlich, dass es hier eine universelle Schranke gibt! Ebenso erstaunlich ist es, dass dies nahezu einhundert Jahre lang niemandem aufgefallen ist, ja dass nicht einmal die Frage gestellt wurde. Dementsprechend hat das Ergebnis eines neues Gebiet eröffnet.

Individuelles versus zentrales Routing ist ein aktuelles Forschungsthema in der Schnittmenge zwischen Spieltheorie und Algorithmik. Zu diesem Themenkomplex gibt es ein unterhaltsam-informatives Interview mit Tim Roughgarden, youtu.be/w7ddIRFfqM (80min).

Among many recognitions, Tim has received the Gödel Prize for his research in computational game theory, a field that resides in the intersection of two disciplines: economics and computer science. We talk to Tim about one of the central insights of that work: the Prize of Anarchy, which quantifies the loss in efficiency of a system due to selfish behaviour of its agents.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

$$\text{Räuber-Beute-Modell: } \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

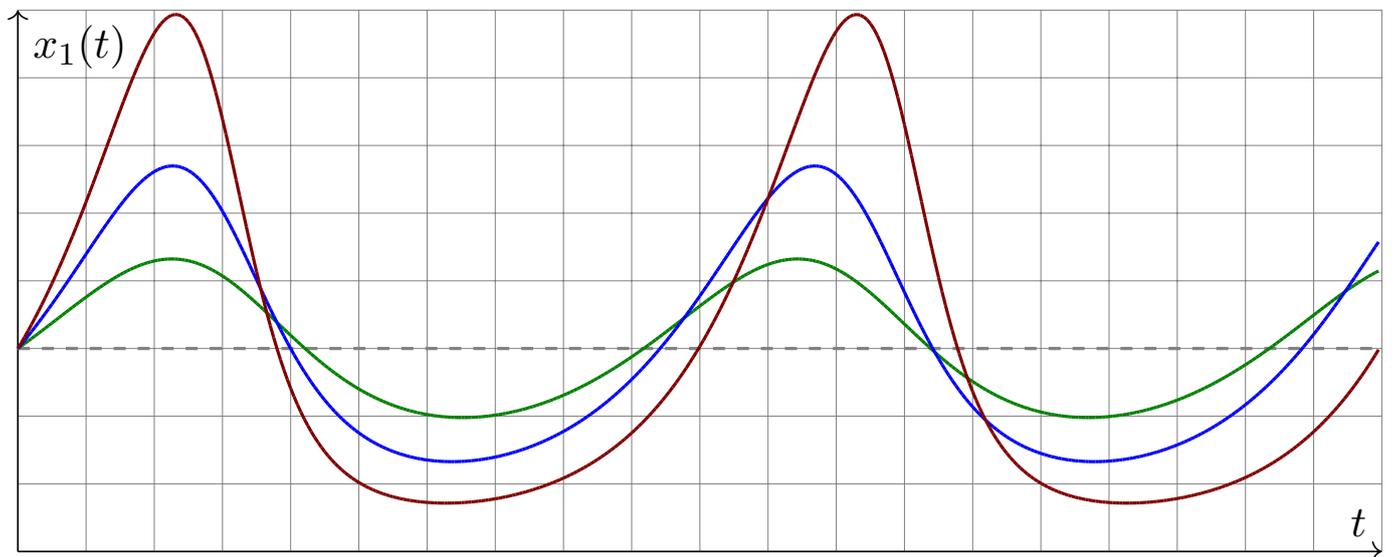
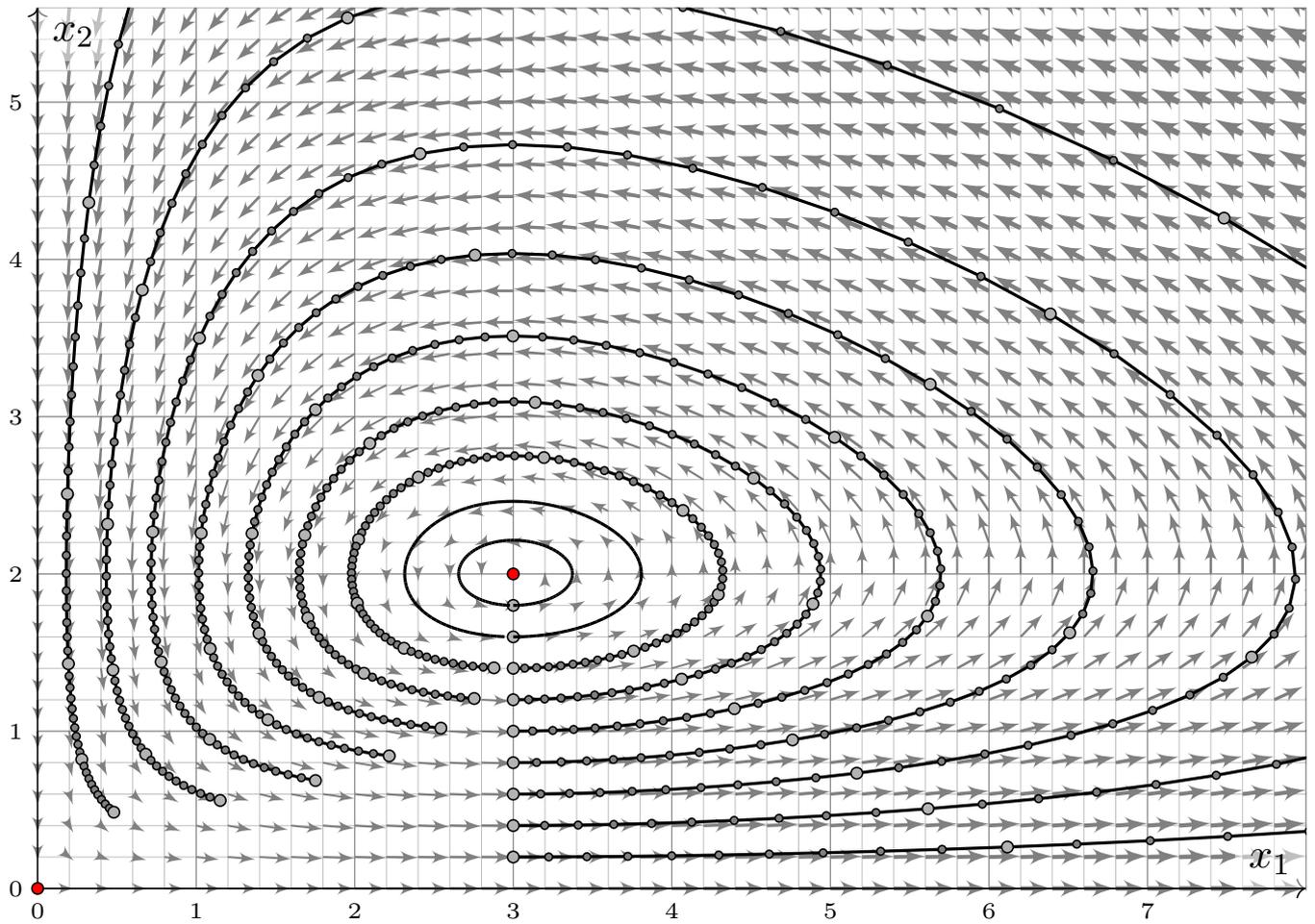
Größe	Bedeutung	Beispiel
$t \geq 0$	Zeit	Jahre
$x_1(t) \geq 0$	Anzahl der Beutetiere	Hasen/Mio
$x_2(t) \geq 0$	Anzahl der Raubtiere	Luchse/Tsd
$\alpha_1 > 0$	Reproduktionsrate der Beute (ohne Räuber)	0.8/Jahr
$\beta_1 > 0$	Sterberate der Beute pro Räuber	0.4/Jahr
$\alpha_2 > 0$	Sterberate der Räuber (ohne Beute)	0.6/Jahr
$\beta_2 > 0$	Reproduktionsrate der Räuber pro Beute	0.2/Jahr

Dieses DGSsystem beschreibt die Entwicklung großer Räube-Beute-Populationen. Beispiel: Fangaufzeichnungen der Hudson Bay Company zeigten über 90 Jahre einen 9jährigen Zyklus. Formuliert und untersucht wurde dieses Modell 1925 von Alfred Lotka und unabhängig 1926 von Vito Volterra, seither ist es das Paradebeispiel einer Populationsdynamik in der Biologie. Die quadratischen Terme entsprechen dem Massenwirkungsgesetz chemischer Reaktionen. Epidemien folgen einer ähnlichen Dynamik, man untersucht und nutzt dies für Maßnahmen. Mechanische Systeme mit nicht-linearen Rückkopplungen gehorchen ähnlichen Gleichungen.

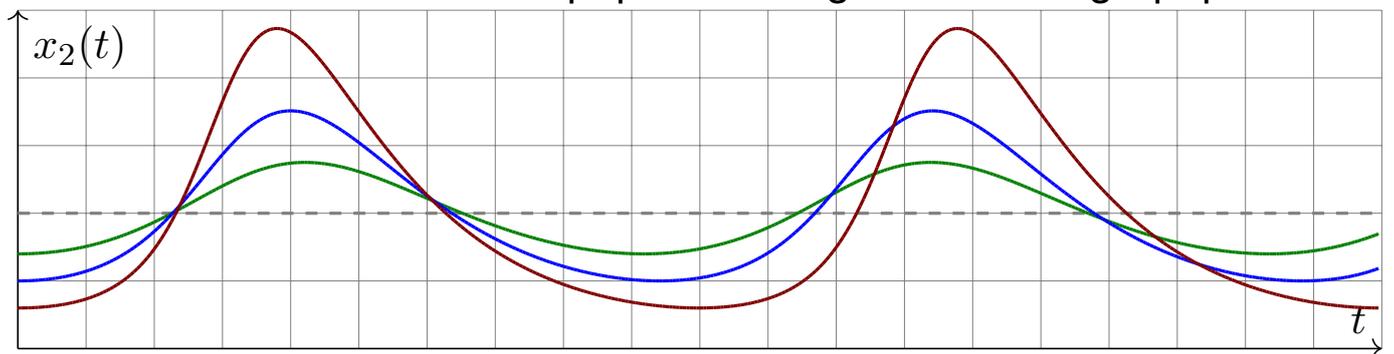
Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

$$\text{Räuber-Beute-Modell: } \begin{cases} \dot{x}_1 = 0.8 x_1 - 0.4 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -0.6 x_2 + 0.2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie den Zustandsraum und das Vektorfeld. Existiert zu jedem Startwert $x(0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung $t \mapsto x(t)$? eindeutig?
- (2) Was folgt aus $x_2(0) = 0$? aus $x_1(0) = 0$? Wo liegen Fixpunkte? Skizzieren Sie Lösungen zu $x_1(0) = 3$ und $x_2(0) = 2.0, 1.8, \dots, 0.0$.
- (3) Ist das System linear? Wie / Können Sie Lösungen berechnen?
- (4) Linearisieren & lösen Sie für kleine Störungen des Gleichgewichts. Wie lange dauert eine Periode? Wie verlässlich ist das lineare Modell?
- (5) Das Potential $\Phi := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.
- (6) Erste Lotka–Volterra–Regel, Periodizität der Lösungen:
Beide Populationsgrößen entwickeln sich periodisch.
- (7) Zweite Lotka–Volterra–Regel, Konstanz der Mittelwerte:
Die zeitlichen Mittelwerte sind $\bar{x}_1 = \alpha_2 / \beta_2$ und $\bar{x}_2 = \alpha_1 / \beta_1$.
- (8) Angenommen, der Mensch hält die Beutetiere für Schädlinge. Im Zustand $(3, 1)$ werden sie gejagt und auf $(1, 1)$ reduziert. Erfolg?



Jedem Maximum der Beutepopulation folgt eins der Jägerpopulation.



Lösung: (1) Wir nutzen den \exists &E-Satz: f ist stetig differenzierbar.

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \\ -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 x_2 & -\beta_1 x_1 \\ \beta_2 x_2 & -\alpha_2 + \beta_2 x_1 \end{pmatrix}$$

😊 Zu jedem $x(0) \in \mathbb{R}^2$ existiert genau eine Lösung mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

(2) Aus $x_2(0) = 0$ folgt $x_2(t) = 0$ und $x_1(t) = e^{\alpha_1 t} x_1(0)$ für alle $t \geq 0$.

Aus $x_1(0) = 0$ folgt $x_1(t) = 0$ und $x_2(t) = e^{-\alpha_2 t} x_2(0)$ für alle $t \geq 0$.

Die Fixpunkte $\dot{x} = f(x) \stackrel{!}{=} 0$ sind $(0, 0)$ und $(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1) = (3, 2)$.

(3) Dieses System ist nicht linear! Lösungen können wir (hier wie meist) nur numerisch berechnen. Wie skizziert, Runge–Kutta sei Dank!

(4) Wir linearisieren um $x_0 = (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$. Für $x(t) = x_0 + u(t)$ gilt:

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x) = f(x_0 + u) \approx f(x_0) + f'(x_0) u = A u$$

😊 Die Jacobi–Matrix beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt:

$$A = f'(x_0) = f' \begin{pmatrix} \alpha_2/\beta_2 \\ \alpha_1/\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \beta_1 / \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2 / \beta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nicht-linear ist schwierig, doch **lineare Systeme** lösen wir leicht:

$$p_A(x) = \det(A - xE) = \det \begin{pmatrix} -x & -\alpha_2 \beta_1 / \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2 / \beta_1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + \alpha_1 \alpha_2$$

$$\text{Eigenwerte:} \quad \lambda_1 = +i\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = +i\omega, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = -i\omega$$

$$\text{Eigenvektoren:} \quad v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_2 \beta_1 / \beta_2} \\ -i\sqrt{\alpha_1 \beta_2 / \beta_1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_2 \beta_1 / \beta_2} \\ +i\sqrt{\alpha_1 \beta_2 / \beta_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenfunktionen:} \quad u_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \quad u_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$$

Für unser reelles System verlangen wir **reelle Lösungen**:

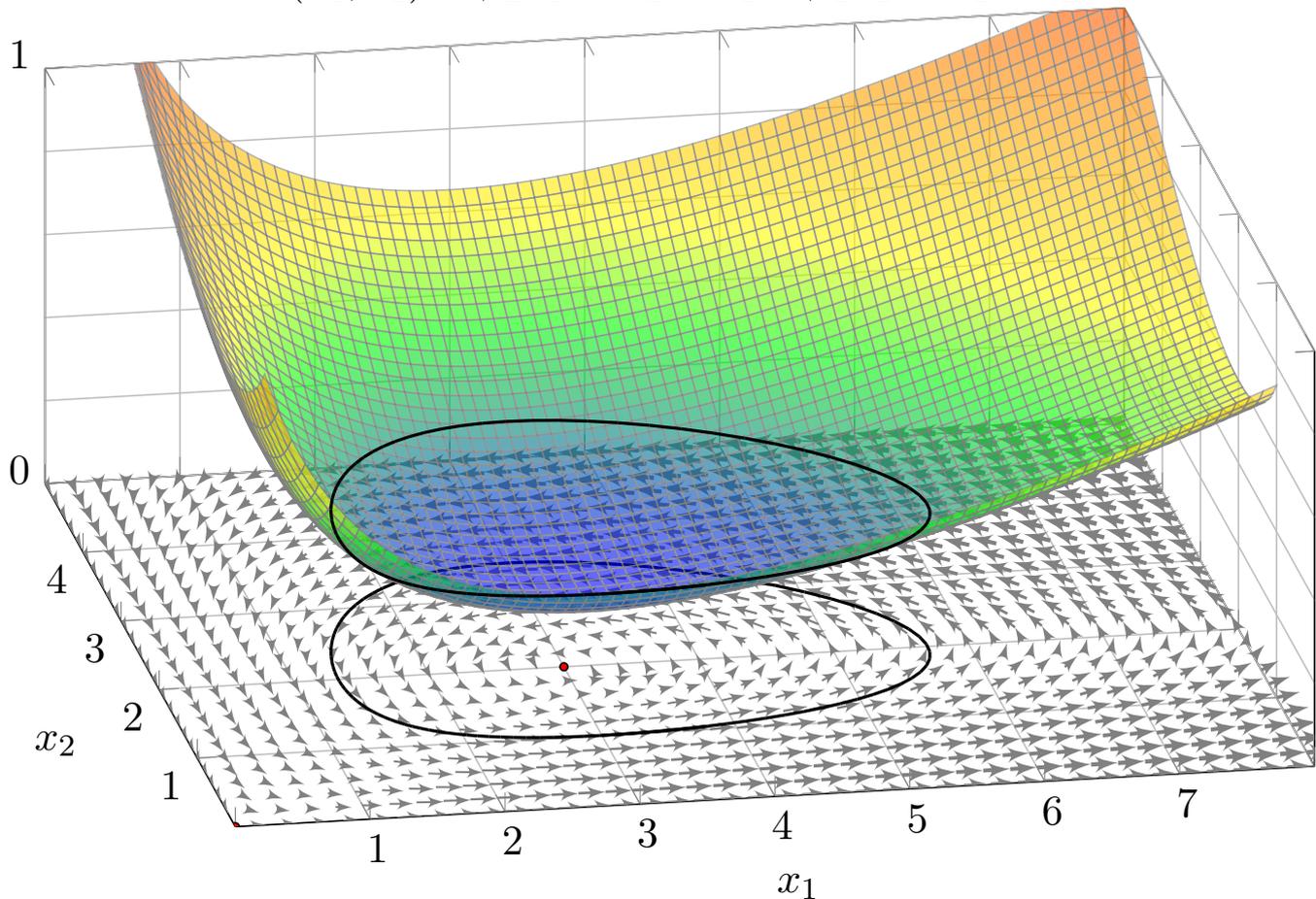
$$\text{Re } u_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \sqrt{\alpha_2 \beta_1 / \beta_2} \\ \sin(\omega t) \sqrt{\alpha_1 \beta_2 / \beta_1} \end{pmatrix}, \quad \text{Im } u_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \sqrt{\alpha_2 \beta_1 / \beta_2} \\ -\cos(\omega t) \sqrt{\alpha_1 \beta_2 / \beta_1} \end{pmatrix}$$

Die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ bedeutet Periodendauer $T = 2\pi/\omega$.

Im Beispiel ist $\alpha_1 = 0.8$ und $\alpha_2 = 0.6$, also $\omega \approx 0.69$ und $T \approx 9.07$.

😊 Plausibel: Für kleine Störungen deckt sich das mit obigen Skizzen. Große Störungen und Langzeitverhalten erfordern weitere Argumente!

Das Potential $\Phi(x_1, x_2) = \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.



Räuber-Beute-Modell: Periodizität

(5) Für das Potential $\Phi(x_1, x_2) := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ gilt

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \beta_2 \dot{x}_1 - \alpha_2 \dot{x}_1 / x_1 + \beta_1 \dot{x}_2 - \alpha_1 \dot{x}_2 / x_2 \\ &= (\beta_2 - \alpha_2 / x_1)(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2) + (\beta_1 - \alpha_1 / x_2)(-\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2) = 0. \end{aligned}$$

(6) Jede Lösung in $\mathbb{R}_{>0}^2$ schließt sich deshalb nach endlicher Zeit $T > 0$:

(7) Die zeitlichen Mittelwerte der Populationsgrößen sind

$$\bar{x}_1 := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x_1(t) dt \quad \text{und} \quad \bar{x}_2 := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x_2(t) dt.$$

Aus den beiden Differentialgleichungen folgt:

$$\begin{aligned} \beta_2 \bar{x}_1 - \alpha_2 &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \beta_2 x_1(t) - \alpha_2 dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} dt = \left[\frac{\ln x_2(t)}{T} \right]_{t=0}^T = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 \bar{x}_2 &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \alpha_1 - \beta_1 x_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} dt = \left[\frac{\ln x_1(t)}{T} \right]_{t=0}^T = 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet $\bar{x}_1 = \alpha_2 / \beta_2$ und $\bar{x}_2 = \alpha_1 / \beta_1$. Erstaunlich: Der Mittelwert \bar{x}_1 der Beutepopulation hängt nicht von deren Reproduktionsrate ab!

Die **evolutionäre Spieltheorie** untersucht die soziale Interaktion in großen Populationen von Spielern. Sie verbindet damit Biologie und Ökonomie auf überraschende Weise und zu beiderseitigem Nutzen.

In den Wirtschaftswissenschaften ist dies ein sehr erfolgreicher Ansatz der **Mikrofundierung**, zur Erklärung und Prognose von sozialen und ökonomischen Phänomenen durch die Interaktion von Individuen.

Die klassische Spieltheorie betrachtet die strategische Analyse durch (idealisiert vollkommen) rationale Spieler, von denen jeder durch planvolles Handeln sein individuelles Ergebnis optimieren will.

Die evolutionäre Spieltheorie verbindet dies mit der zweiten, ebenso einfachen wie grundlegenden Sichtweise der Populationsdynamik: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller als andere.

Der **evolutionäre Ansatz** lässt sich auch dann noch sinnvoll anwenden, wenn die betrachteten Akteure nur über begrenzte Rationalität verfügen, oder im Extremfall überhaupt gar keine individuellen strategischen Entscheidungen treffen können (wie etwa Mikroorganismen).

Zur Erklärung und Deutung von Gleichgewichten nutzen Ökonomen seit jeher Ideen der Evolutionsbiologie: Das gesellschaftlich beobachtete Verhalten pendelt sich durch **trial and error** auf gewisse Fixpunkte ein. In diesem Sinne stützt die biologische Sichtweise die ökonomischen.

Die evolutionäre Spieltheorie nimmt diese Deutung ernst und untersucht damit nicht nur die Fixpunkte, sondern auch die Dynamik drumherum und sogar fernab dieser Gleichgewichtslagen. Damit lassen sich auch Bewegungen abseits der Rationalität erklären, zumindest qualitativ.

Die mathematische Untersuchung evolutionärer Vorgänge erfordert als Grundlage immer ein **Bewegungsgesetz**, um die Dynamik präzise formulieren zu können, etwa diskret als Rekursionsgleichung oder meist kontinuierlich in Form einer Differentialgleichung.

Denken Sie als berühmte **Analogien in der Physik** etwa an Newtons Bewegungsgleichung der Mechanik, an Maxwells Gleichungen der Elektrodynamik, oder an Fouriers Wärmeleitungsgleichung, an die Schrödinger– oder Dirac–Gleichung der Quantenmechanik, etc.

Für die evolutionäre Spieltheorie dient meist die Replikatorgleichung als das grundlegende Modell für die Dynamik. Es gibt weitere Möglichkeiten, wie die Nash–Funktion aus dem Existenzsatz E1F für Gleichgewichte: Diese beschreibt weniger natürliche Selektion als rationale Planung.

Dazu setzen wir im Folgenden voraus, dass die Population so groß ist, dass wir das eigentlich diskrete Modell ohne allzu große Fehler durch ein einfaches, kontinuierlich-differentielles Modell ersetzen können. Wir ignorieren also jedwede mikroskopische Körnigkeit oder Zufälle.

Denselben Grenzübergang haben wir übrigens bereits im obigen Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra stillschweigend vollzogen: Hasen und Luchse sind diskrete Einheiten, nicht kontinuierlich, doch das kontinuierliche Modell ist nah genug an der Realität.

Physikalische Analogie sind Wärmelehre und kinetische Gastheorie: Die erste behandelt makroskopische Phänomene (zumeist Mittelwerte), die zweite untersucht mikroskopische Phänomene (einzelne Teilchen). Im Grenzübergang führt das mikro- zum makroskopischen Modell.

Die Replikatorgleichung

Die Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda x$ beschreibt exponentielles Wachstum: Zum Startwert $x(0)$ ist $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto x(0) e^{\lambda t}$ die eindeutige Lösung. Für gemischte Strategien nutzen wir baryzentrische Koordinaten:

$$s_i \in \bar{S}_i \quad : \quad s_i = \sum_k x_i^k s_i^k, \quad x_i^k \geq 0, \quad \sum_k x_i^k = 1$$

Unsere vorigen Beispiele motivieren folgende Differentialgleichung:

$$\dot{x}_i^k = x_i^k [\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})]$$

Gilt $[\dots] \geq 0$, so hat s_i^k gegenüber s_i einen Fitnessvorteil/nachteil, also wächst/sinkt der Anteil x_i^k dieser Strategie an der Gesamtpopulation.

Aufgabe: (0) Wie glatt ist das Vektorfeld f auf der rechten Seite? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

(1) Als Startwert geben wir $x_i^k(t_0) \geq 0$ und $\sum_k x_i^k(t_0) = 1$ vor. Bleiben diese Normierungsbedingungen für alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten?

(2) Wie verhalten sich Fixpunkte zu Nash-Gleichgewichten? Lässt sich damit die Existenz von Nash-Gleichgewichten zeigen?

Die Replikatorgleichung

G314
Erläuterung

Lösung: (0) Für Bimatrixspiele $\Delta^m \times \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto (x^\top A y, x^\top B y)$:

$$\dot{x}_i = x_i [e_i^\top A y - x^\top A y], \quad \dot{y}_j = y_j [x^\top B e_j - x^\top B y].$$

Allgemein sei $u: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Spiel mit $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^{\ell_i}\}$. Wir setzen u in jeder Koordinate linear fort zu $\bar{u}: \mathbb{R}^{S_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{S_n} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\bar{u}(\dots, \sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k s_i^k, \dots) = \sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k u(\dots, s_i^k, \dots).$$

Das Vektorfeld auf der rechten Seite unserer Gleichung $\dot{x} = f(x)$ ist

$$f: \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1},$$

$$f_i^k(x) = x_i^k [\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})].$$

Jede Koordinate $f_i^k(x)$ ist polynomiell in den Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$, genauer vom Grad 2 in x_i^k und vom Grad 1 in allen anderen Variablen.

😊 Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, mit (1) sogar global.

😊 Da f glatt ist, gilt dies auch für jede Lösung $t \mapsto x(t)$ von $\dot{x} = f(x)$.

😊 Der Satz von Cauchy–Kowalewskaja garantiert, dass jede Lösung $t \mapsto x(t)$ sogar analytisch ist, also lokal eine konvergente Potenzreihe.

Die Replikatorgleichung

(1) Sei $x : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Lösung auf einem Intervall I mit $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$.
Wir zeigen: Gilt $x_i^k(t) \geq 0$ und $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für $t = t_0$, so für alle $t \in I$.
Geometrisch: Auf $X = \Delta^{\ell_1} \times \dots \times \Delta^{\ell_n}$ zeigt das Vektorfeld f nirgends nach außen. Jede Lösung, die in X startet, verbleibt in X . Ausführlich:

(1a) Behauptung: Gilt $x_i^k(t) = 0$ für ein (i, k) und $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$, wobei wir den Funktionswert $\tilde{x}_i^k(t) = 0$ für alle $t \in J$ fest vorgeben.

Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde{x}_i^k(t) = 0 = f_i^k(\tilde{x}(t))$ für alle $t \in J$.

Dank Eindeigkeitssatz folgt $x_i^k(t) = 0$ für alle $t \in I \cap J$.

(1b) Behauptung: Gilt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für ein i und $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$, wobei wir $\tilde{x}_i^0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\ell_i} \tilde{x}_i^k(t)$ für alle $t \in J$ fest vorgeben.

Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde{x}_i^0(t) = f_i^0(\tilde{x}(t))$ für alle $t \in J$, denn

$$f_i^0(\tilde{x}(t)) - \partial_t \tilde{x}_i^0 = \sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k [\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})] = 0.$$

Dank Eindeigkeitssatz folgt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für alle $t \in I \cap J$.

Die Replikatorgleichung

😊 Die behauptete Gleichung gilt lokal um jeden Zeitpunkt $t_0 \in I$.
Dank Zusammenhang gilt sie somit auf dem gesamten Intervall I .

😊 Für jede Auswahl von (abgeschlossenen oder offenen) Teilsimplizes $\Delta_1 \subseteq \Delta^{\ell_1}, \dots, \Delta_n \subseteq \Delta^{\ell_n}$ ist die Menge $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n \subset \mathbb{R}^N$ invariant.

⚠ Wir müssen hier sorgfältig mit dem Eindeigkeitssatz argumentieren. Ein klassisches Gegenbeispiel ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit rechter Seite $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$. Zum Startwert $x(0) = 0$ existieren neben der Lösung $t \mapsto 0$ noch unendlich viele weitere, etwa $t \mapsto t^3/27$. Die Mengen der Zerlegung $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ sind hier nicht invariant!

(2) Jedes Nash–Gleichgewicht ist eine Nullstelle des Vektorfeldes, aber nicht jede Nullstelle des Vektorfeldes ist ein Nash–Gleichgewicht: Diese Äquivalenz gilt nur im Inneren, mit $x_i^k > 0$ für alle i und k .

Z.B. ist jede Ecke eine Nullstelle, aber nicht immer ein Gleichgewicht.

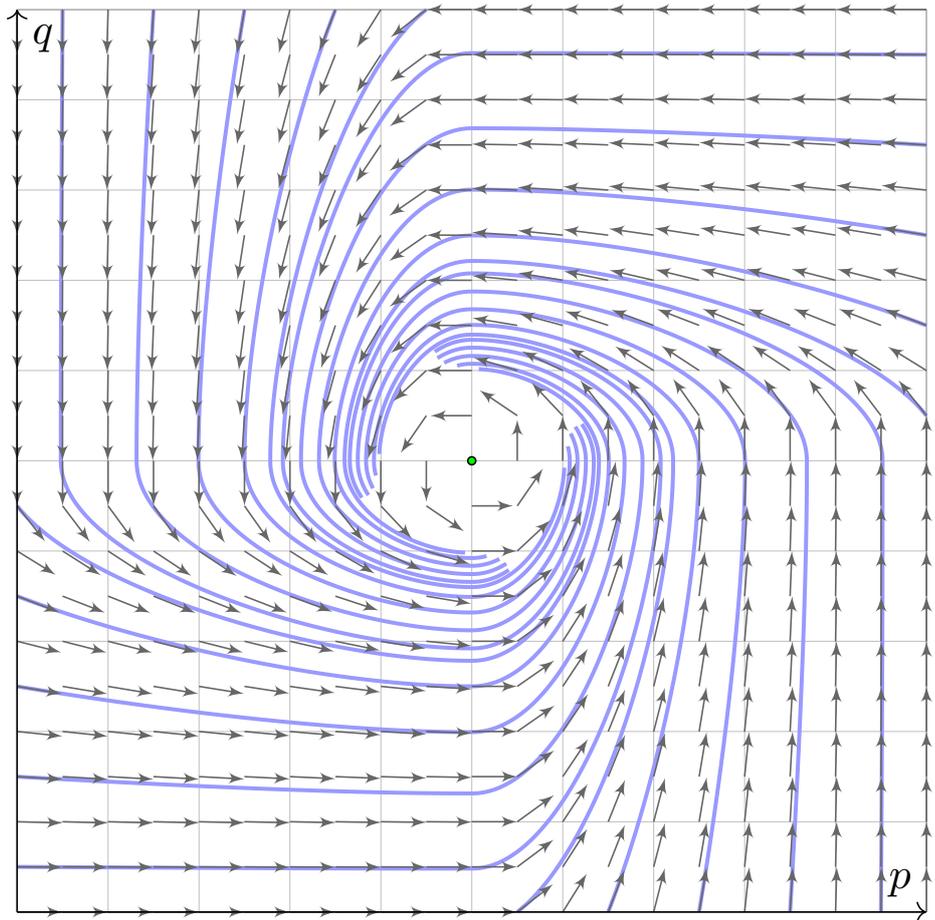
Daher lässt sich die Replikatorgleichung nicht zum Beweis nutzen.

Der Beweis von Satz E1F konstruiert dazu geschickt die Nash–Funktion; dank Lemma E1K sind ihre Fixpunkte genau die Nash–Gleichgewichte.

	B	Kopf	Zahl
A			
Kopf	-1	+1	+1
Zahl	+1	-1	+1

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash-Funktion $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ als Vektorfeld $f(p, q) - (p, q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

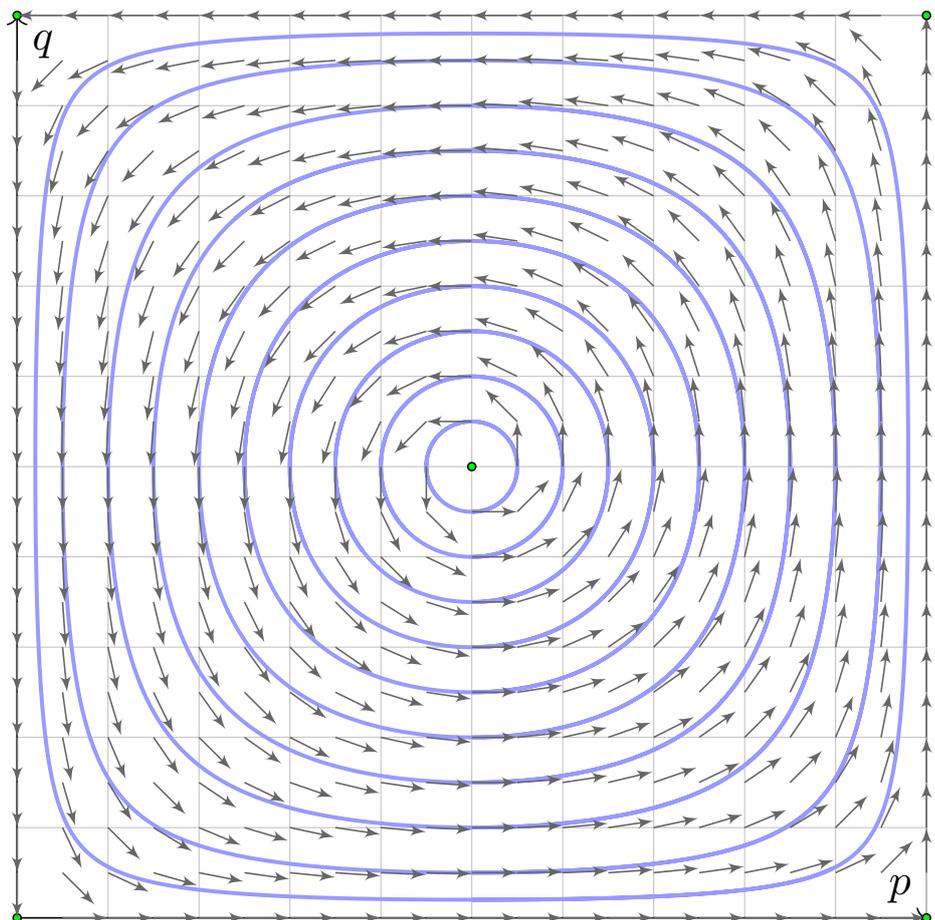
Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel \bar{u} ist dies das einzige Nash-Gleichgewicht.



Replikator-Dynamik zu Matching Pennies

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Matching Pennies*
 $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

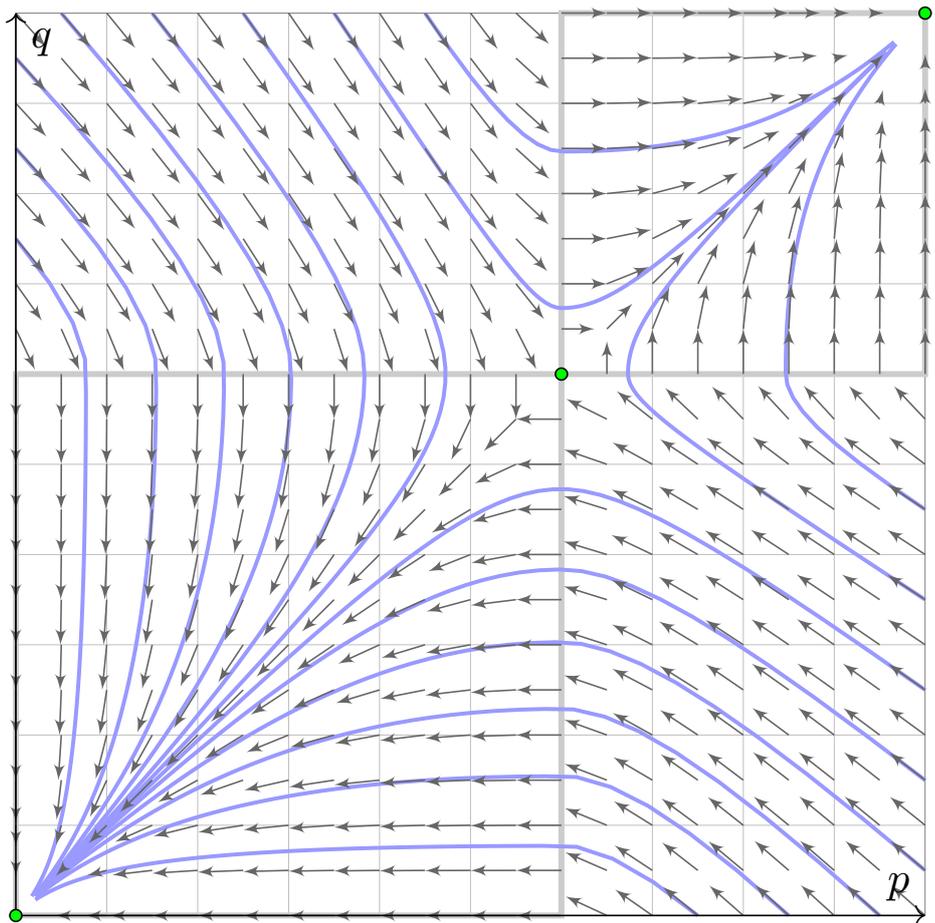
	B	Kopf	Zahl
A			
Kopf	-1	+1	+1
Zahl	+1	-1	+1



		B	
		bleiben	gehen
A	bleiben	-2	-5
	gehen	-5	0

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash-Funktion $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ als Vektorfeld $f(p, q) - (p, q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

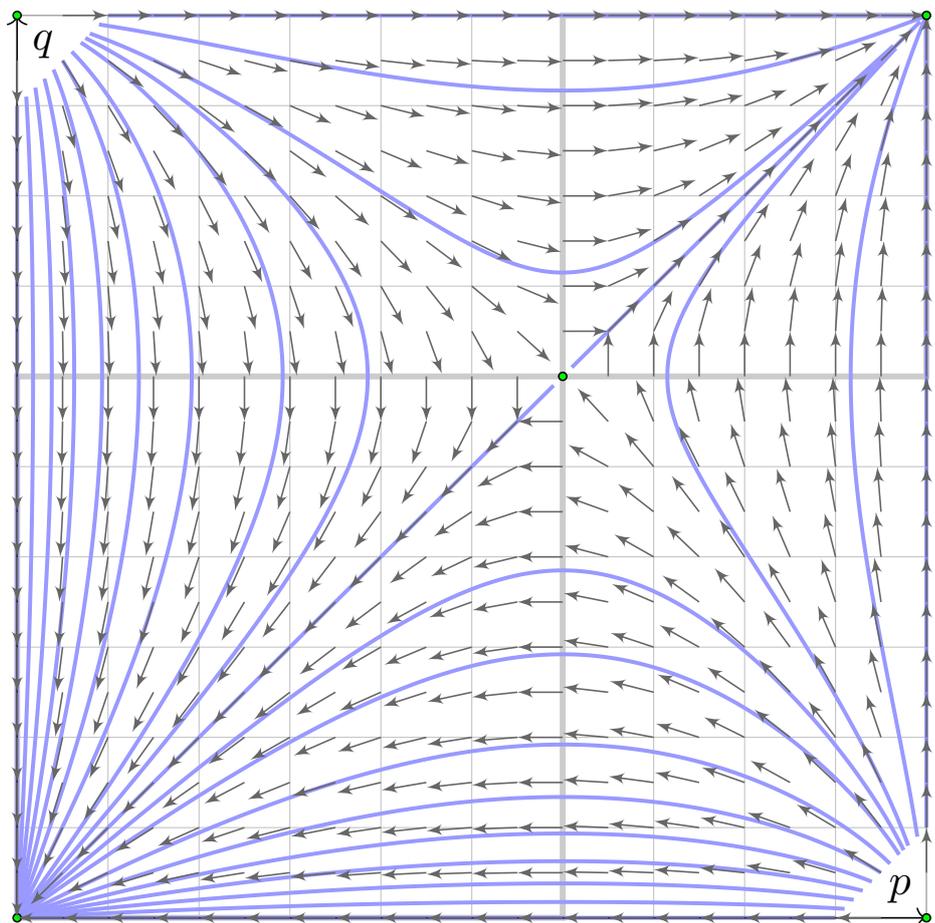
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel \bar{u} sind dies die drei Nash-Gleichgewichte.



Replikator-Dynamik zu Bleiben-oder-Gehen

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen*
 $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

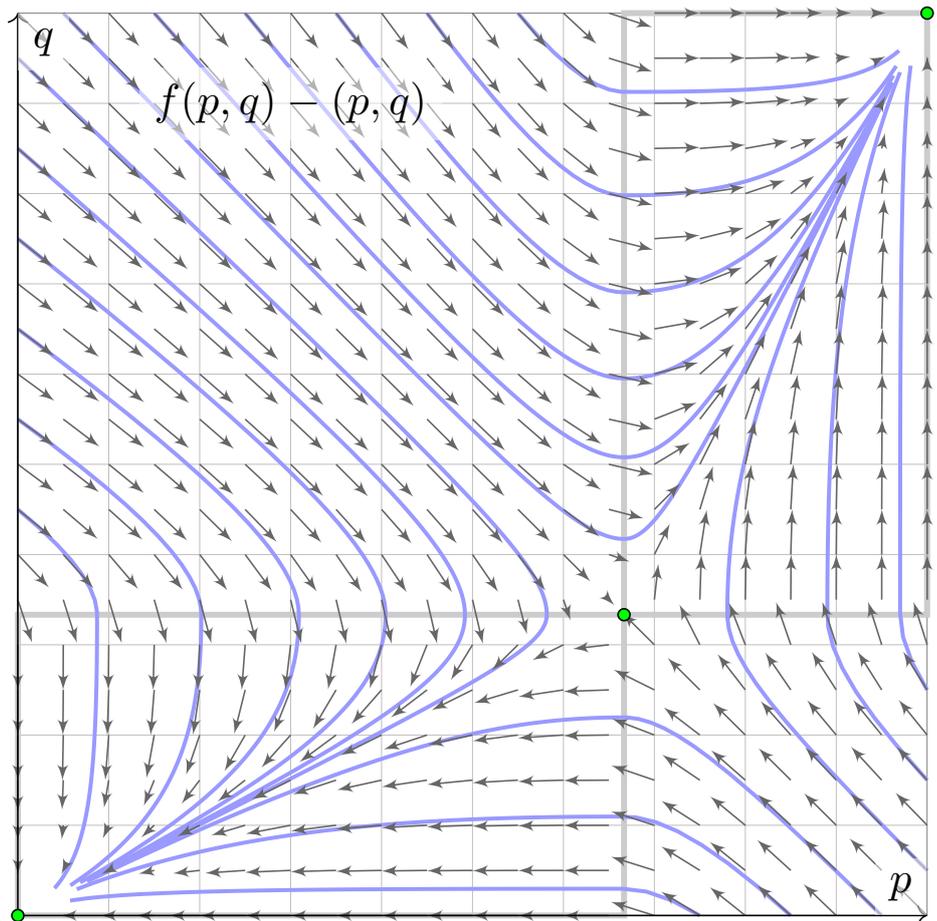
		B	
		bleiben	gehen
A	bleiben	-2	-5
	gehen	-5	0



	B	Bach	Strawinsky
A			
Bach	1	2	0
Strawinsky	0	0	2

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ als Vektorfeld $f(p, q) - (p, q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

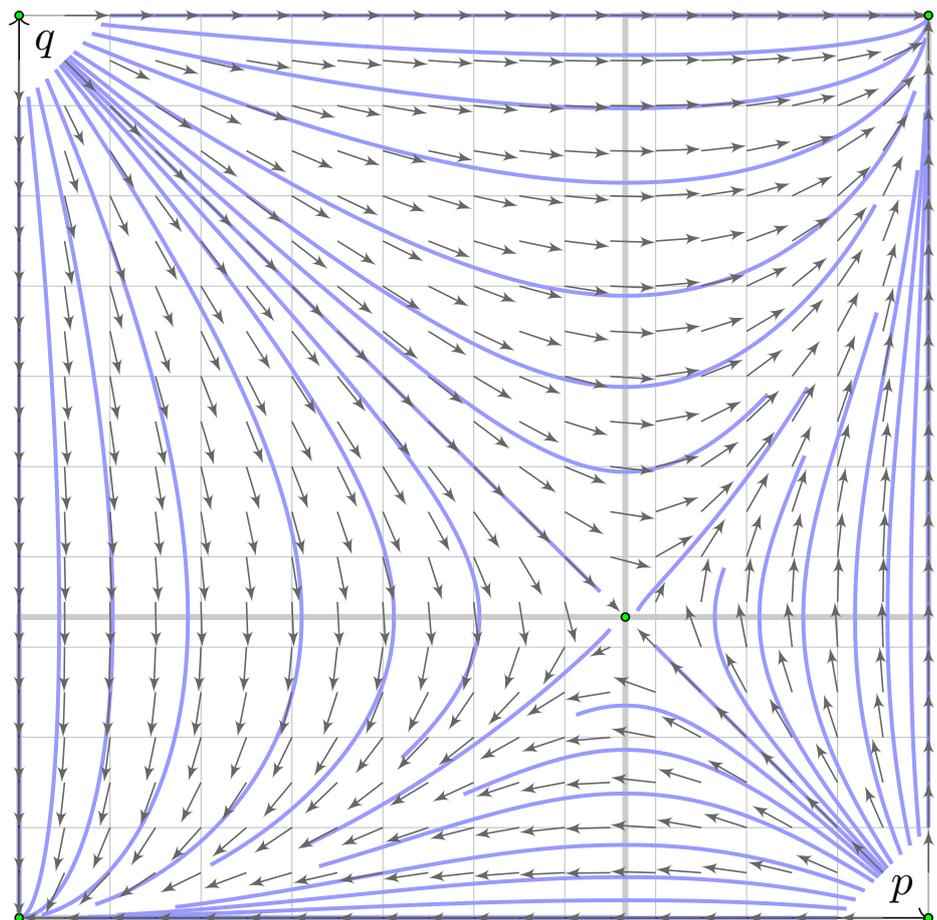
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel \bar{u} sind dies die drei Nash–Gleichgewichte. Zur Anregung Ihrer Phantasie zeige ich typische Flusslinien.



Replikator-Dynamik zu Bach oder Strawinsky

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky* $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

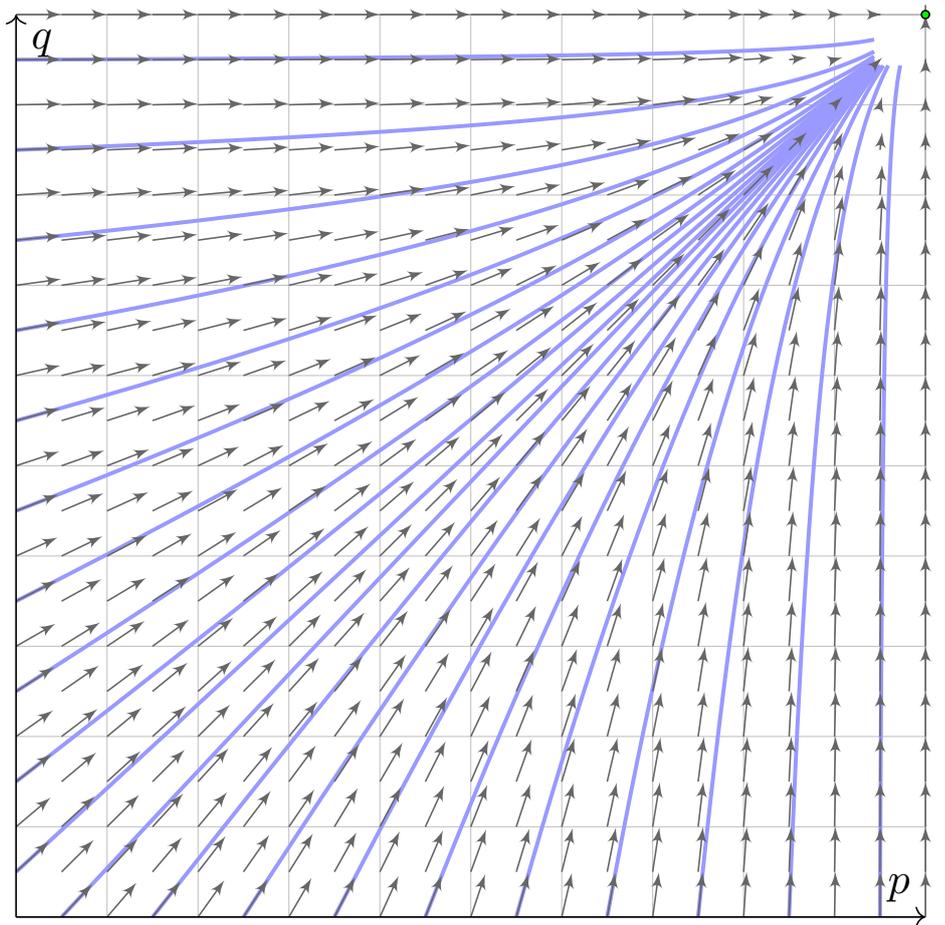
	B	Bach	Strawinsky
A			
Bach	1	2	0
Strawinsky	0	0	2



		B	
		schweigen	gestehen
A	schweigen	-1, -1	0, -5
	gestehen	0, -5	-4, -4

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ als Vektorfeld $f(p, q) - (p, q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

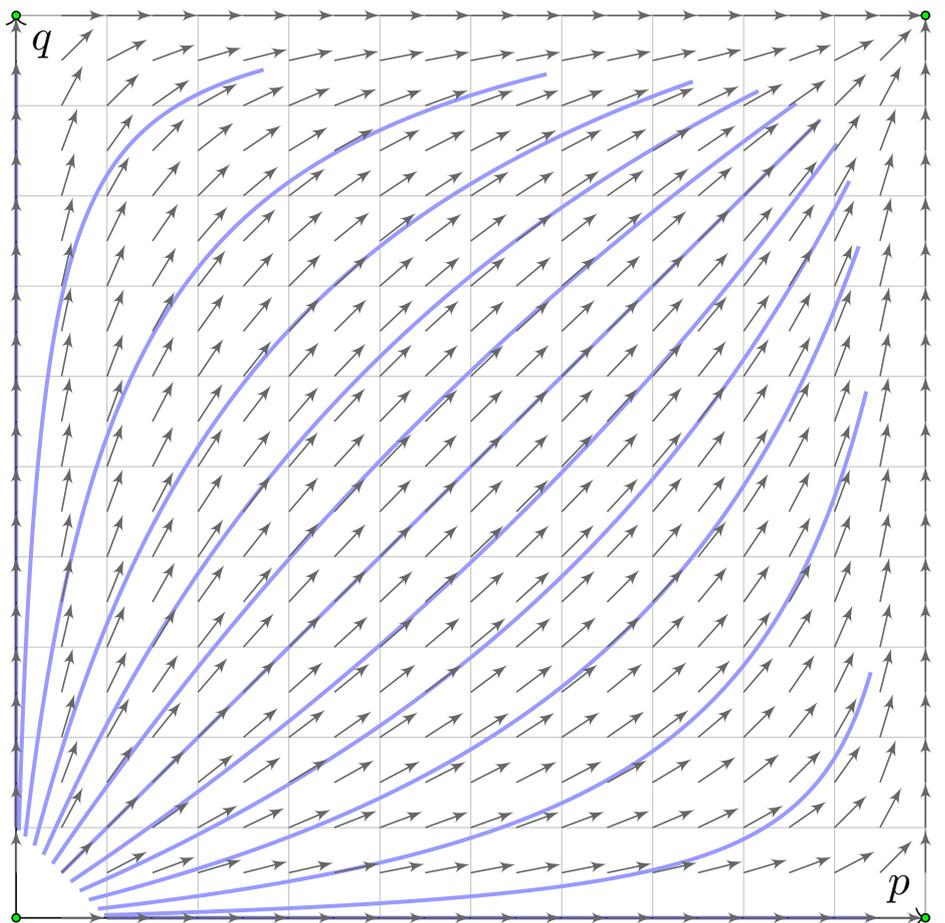
Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel \bar{u} ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Replikator-Dynamik zu Gefangenendilemma

Zur Erinnerung die Daten des Gefangenendilemmas $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

		B	
		schweigen	gestehen
A	schweigen	-1, -1	0, -5
	gestehen	0, -5	-4, -4



Evolutionär stabile Strategien

Gegeben sei ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Seine affine Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ interpretieren wir als Populationsmodell.

Zudem sei u symmetrisch, also $S_1 = S_2 = S$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und somit $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 =: \bar{S}$ und $\bar{u}_1(s_1, s_2) = \bar{u}_2(s_2, s_1) =: v(s_1, s_2)$.

Dank E1F existieren symmetrische Nash-Gleichgewichte $(s, s) \in \text{NE}(\bar{u})$. Das bedeutet, die Strategie $s \in \bar{S}$ erfüllt $v(s, s) \geq v(\tilde{s}, s)$ für alle $\tilde{s} \in \bar{S}$.

Zur Strategie $s \in \bar{S}$ tritt nun eine Mutation $\tilde{s} \in \bar{S}$ mit kleiner Wkt $\varepsilon > 0$. Die Gesamtpopulation verschiebt sich somit von s zu $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Vor diesem Hintergrund s' vergleichen wir die Fitness von s bzw. \tilde{s} :

$$\begin{aligned} f(s) &= v(s, s') = (1 - \varepsilon)v(s, s) + \varepsilon v(s, \tilde{s}) \\ f(\tilde{s}) &= v(\tilde{s}, s') = \underbrace{(1 - \varepsilon)v(\tilde{s}, s)}_{\text{nullte Ordnung}} + \underbrace{\varepsilon v(\tilde{s}, \tilde{s})}_{\text{erste Ordnung}} \end{aligned}$$

Dabei soll $f(s) > f(\tilde{s})$ gelten für alle $\varepsilon \in]0, \delta[$ und ein festes $\delta > 0$. Das führt uns unmittelbar zu der folgenden praktischen Definition.

Evolutionär stabile Strategien

Gegeben sei ein endliches symmetrisches Spiel $u : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und seine Fortsetzung auf gemischte Strategien

$$\bar{u} : \bar{S} \times \bar{S} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto (v(s_1, s_2), v(s_2, s_1)).$$

Definition G3A: evolutionär stabile Strategien

Die Strategie $s \in \bar{S}$ heißt **evolutionär stabil** gegen $\tilde{s} \in \bar{S}$, wenn gilt:

- entweder strikt $v(s, s) > v(\tilde{s}, s)$
- oder schwach $v(s, s) = v(\tilde{s}, s)$, aber $v(s, \tilde{s}) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$.

Gilt dies für alle $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$, so heißt s **evolutionär stabil**, kurz:

$$\text{ESS}(\bar{u}) := \{ s \in \bar{S} \mid s \text{ ist evolutionär stabil} \}$$

Aufgabe: Für jedes reelle symmetrische Spiel u gilt:

$$(s, s) \in \text{NE}^!(\bar{u}) \implies s \in \text{ESS}(\bar{u}) \implies (s, s) \in \text{NE}(\bar{u})$$

Die Umkehrungen gelten i.A. nicht, wie Gegenbeispiele zeigen.

Wir wollen die Formel ausführlicher herleiten und diskutieren.

Sei $S = S_1 = S_2 = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die Strategiemenge. Im Kontext der Evolutionstheorie können wir uns jedes s_k als einen Genotyp vorstellen.

Die aktuelle Population besteht aus einer Mischung $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$, wobei wie immer $p_0, p_1, \dots, p_\ell \geq 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$ gilt.

Das vorgegebene Spiel $u : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_i, s_j) \mapsto (v(s_i, s_j), v(s_j, s_i))$ beschreibt die Interaktion zweier Individuen vom Genotyp s_i und s_j .

Die Spielersymmetrie bedeutet, dass keiner als „erster“ oder „zweiter“ Spieler ausgezeichnet wird. Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$ vorliegenden Häufigkeiten.

Bezüglich der aktuellen Population $s \in \bar{S}$ hat jede reine Strategie $s_i \in S$ die Fitness $f(s_i) = v(s_i, s) = \sum_{j=0}^{\ell} p_j v(s_i, s_j)$, denn s_i spielt gegen s .

Die durchschnittliche Fitness in der Population s ist daher

$$f(s) = v(s, s) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} p_i p_j v(s_i, s_j).$$

Die Mutation \tilde{s} tritt mit einer kleinen Wkt $\varepsilon > 0$ auf. Dies verschiebt die bisherige Population s zur veränderten Mischung $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Bezüglich dieser neuen Gesamtpopulation s' vergleichen wir die durchschnittliche Fitness der alten Population s mit der Mutation \tilde{s} :

$$f(s) = v(s, s') = (1 - \varepsilon)v(s, s) + \varepsilon v(s, \tilde{s})$$

$$f(\tilde{s}) = v(\tilde{s}, s') = (1 - \varepsilon)v(\tilde{s}, s) + \varepsilon v(\tilde{s}, \tilde{s})$$

😊 Entscheidend ist diese vereinfachende Annahme unseres Modells: Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population s' vorliegenden Häufigkeiten. Keiner kann sich sein Gegenüber aussuchen. Das ist realistisch, wenn die Individuen (nahezu) ununterscheidbar sind. Wir nutzen die Linearität von v im zweiten Parameter $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$. Der termweise Vergleich führt zu den oben genannten Ungleichungen.

⚠️ Wir vereinfachen hier radikal. Die Analyse ist komplizierter und verläuft anders, wenn sich die Teilpopulationen nicht zufällig mischen, sondern meiden oder suchen, oder räumlich inhomogen verteilt sind.

Warum ist das beobachtete Geschlechterverhältnis recht stabil 1 : 1? Diese wichtige Feststellung lässt sich spieltheoretisch erklären siehe en.wikipedia.org/wiki/Fisher's_principle. Hier die Kurzfassung:

Angenommen, Männchen würden seltener geboren als Weibchen. Dann hat im Durchschnitt jedes neugeborene Männchen mehr Nachkommen als ein neugeborenes Weibchen. Eltern mit Disposition zu männlichem Nachwuchs haben daher mehr Enkel. Die Gene hierfür verbreiten sich daher etwas schneller und korrigieren so das Geschlechterverhältnis in Richtung 1 : 1, wobei der genannte Vorteil langsam verschwindet. Dasselbe gilt, wenn mehr Weibchen als Männchen geboren werden. Mit anderen Worten: Das 1 : 1 Verhältnis ist evolutionär stabil (ESS).

Probably the most celebrated argument in evolutionary biology.

Heutzutage wird die spieltheoretische Beschreibung selbstverständlich als grundlegendes quantitatives Modell in der Biologie angewendet. Umgekehrt ist die evolutionäre Sichtweise in der Spieltheorie fest verankert, als nützliche Deutung und als Untersuchungsgegenstand.

Evolutionär stabile Strategien

G330
Erläuterung

Übung: Formulieren Sie hierzu ein quantitatives Modell.

Übung: Manche Autoren definieren stabile Gleichgewichte $s \in \bar{S}$ durch leicht abweichende Bedingungen, etwa eines der folgenden:

- (1) $v(s, s) > v(\tilde{s}, s)$ oder $[v(s, s) = v(\tilde{s}, s) \text{ und } v(s, \tilde{s}) > v(\tilde{s}, \tilde{s})]$
- (2) $v(s, s) \geq v(\tilde{s}, s)$ und $v(\tilde{s}, s) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$
- (3) $v(s, s) \geq v(\tilde{s}, s)$ und $v(s, s) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$

für alle Alternativen $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$. Welche Implikationen gelten zwischen diesen drei Definitionen und (strikten) Nash–Gleichgewichten?

Übung: Wir nutzen evolutionäre Stabilität für paarweise Interaktion in einem symmetrischen Zwei-Personen-Spiel. Wie sieht die Bedingung für symmetrische Drei-Personen-Spiele aus? und n –Personen-Spiele?

Übung: Sei $u : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches symmetrisches Spiel.

- (1) Sei $\#S = 2$. Hat \bar{u} immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?
- (2) Sei $\#S = 3$. Hat \bar{u} immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?

NATURE VOL. 246 NOVEMBER 2 1973

The Logic of Animal Conflict

J. MAYNARD SMITH

G. R. PRICE

Conflicts between animals of the same species usually are of "limited war" type, not causing serious injury. This is often explained as due to group or species selection for behaviour benefiting the species rather than individuals. Game theory and computer simulation analyses show, however, that a "limited war" strategy benefits individual animals as well as the species.

Spieltheorie wird erfolgreich in der theoretischen Biologie angewendet, insbesondere der Evolutionstheorie. Hier ist der Hauptmechanismus nicht individuelle Rationalität, sondern die Evolution der Population. Diese wird angetrieben durch Vererbung, Mutation und Selektion.

Evolutionär stabile Strategien (ESS) wurden 1973 eingeführt von John Maynard Smith and George Robert Price: *The logic of animal conflict*, Nature 246 (1973) 15–18. Seither gehören sie zu den allgegenwärtigen Werkzeugen der Spieltheorie, insbesondere in ihren Anwendungen auf evolutionäre Modelle, sowohl in der Biologie als auch in der Ökonomie. Dieses Konzept kann zahlreiche biologische Phänomene beschreiben und logisch begründen: Es bietet rationale Erklärungen für empirische Beobachtungen, die sonst kaum theoretisch zugänglich wären.

Die mathematische Formulierung dieses Konzepts und das Verständnis seiner zahlreichen Anwendungen war ein Meilenstein der theoretischen Biologie und wurde vielfach mit Preisen ausgezeichnet. Im Rückblick ist kaum vorstellbar, wie lang und mühsam der Kristallisationsprozess war.

Taube oder Falke?

Gelegentlich kämpfen zwei Individuen einer Population um eine Beute, vom Wert 2. Jedes agiert als Taube (defensiv) oder als Falke (offensiv). Der Ausdruck *hawk or dove* bezeichnet allgemein solches Verhalten.

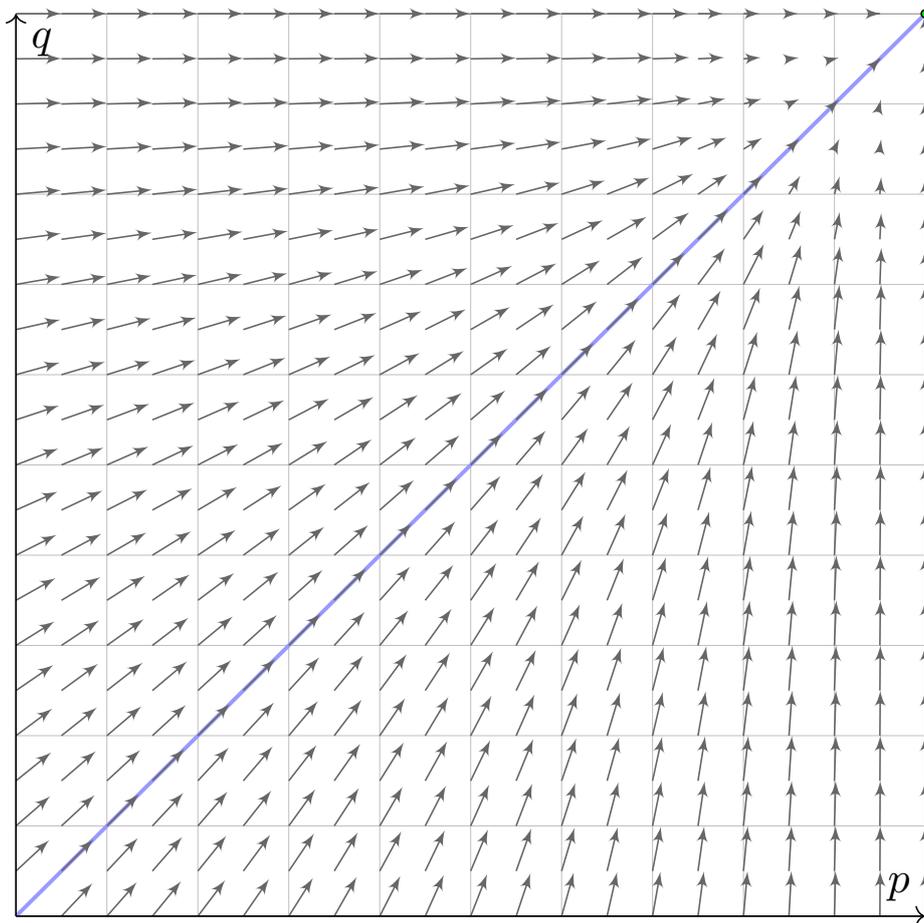
Spiele beide Taube, so teilen sie sich die Beute. Spielt nur einer Falke, so bekommt er die gesamte Beute. Spielen beide Falke, so kämpfen sie, der Wert wird reduziert und geteilt. Das entspricht folgender Normalform:

		B	
		Taube	Falke
A	Taube	1	0
	Falke	2	$1 - a$

Aufgabe: Finden Sie zu $a \in \mathbb{R}$ alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

Taube oder Falke?

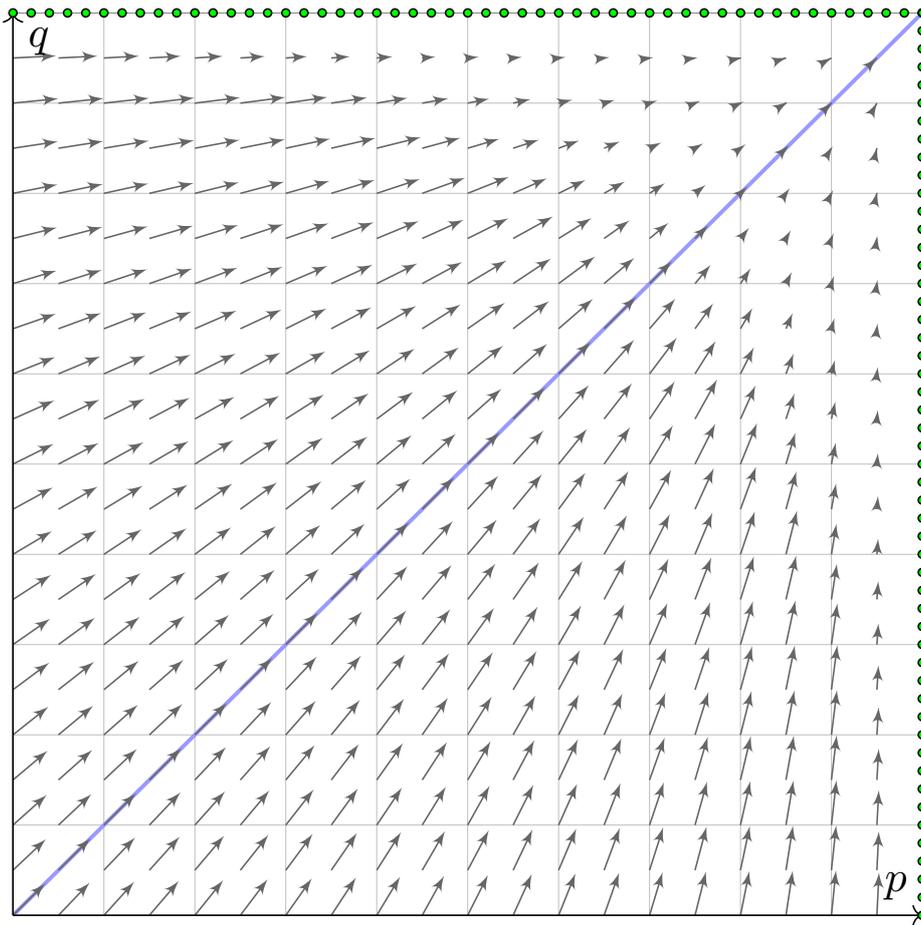
$$a = 1/2$$



Taube oder Falke?

G335

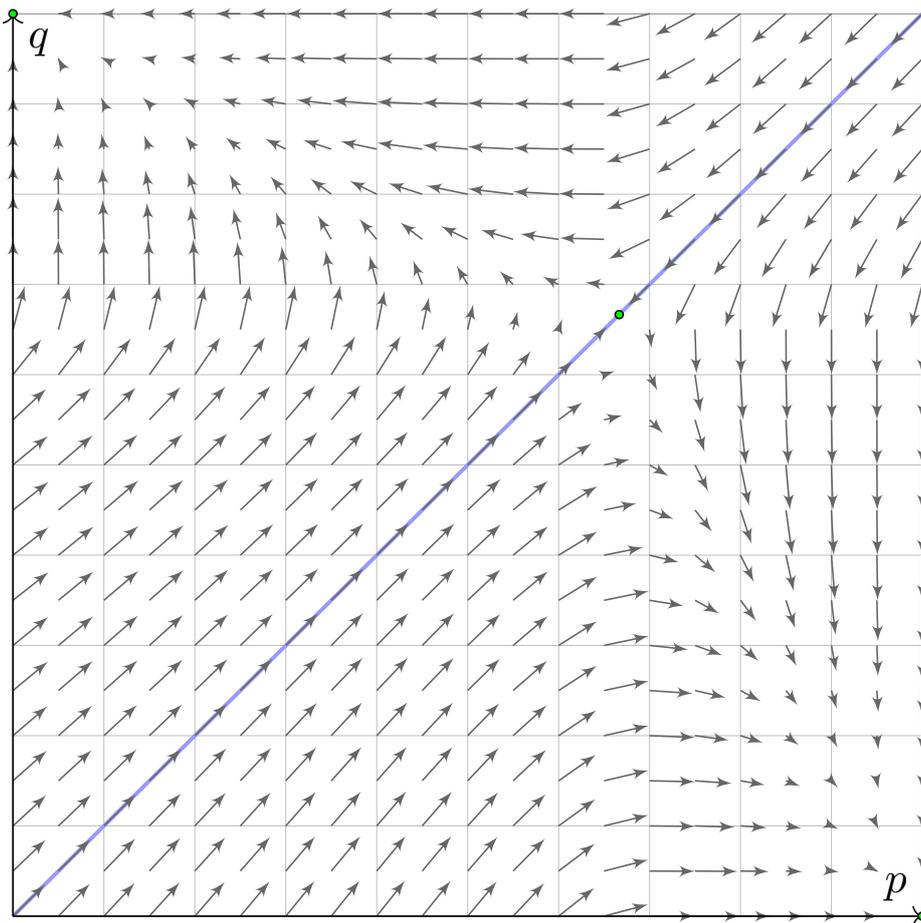
$$a = 1$$



Taube oder Falke?

G336

$$a = 3/2$$



Lösung: Für $a < 1$ existiert genau ein Gleichgewicht, (Falke, Falke), denn die Strategie Taube wird strikt dominiert durch die Strategie Falke. Eine Mutation Taube kann sich in dieser reinen Falken–Population nicht durchsetzen, da sie offensichtlich Fitnessnachteile hat.

Im Sonderfall $a = 1$ gibt es unendlich viele gemischte Gleichgewichte, nämlich (s, Falke) und (Falke, s) für jede gemischte Strategie $s \in \bar{S}$.

Für $a > 1$ hat das Spiel die beiden reinen Gleichgewichte (Taube, Falke) und (Falke, Taube), beide sind strikt, und zudem noch genau ein gemischtes Gleichgewicht (s, s) wie nachfolgend angegeben.

Für $a \geq 1$ hat das Spiel genau ein symmetrisches Gleichgewicht:

$$s = \frac{a-1}{a} \cdot \text{Taube} + \frac{1}{a} \cdot \text{Falke}.$$

Die folgende Rechnung bestätigt, dass dies ein Gleichgewicht ist. Ist diese Strategie evolutionär stabil? Wir wenden die Definition an!

Wir vergleichen das Gleichgewicht s mit einer alternativen Strategie

$$\tilde{s} = (1 - p) \cdot \text{Taube} + p \cdot \text{Falke}.$$

Wir finden durch geduldiges Ausrechnen:

$$\begin{aligned} v(\text{Taube}, s) &= \frac{a-1}{a}, & v(s, \text{Taube}) &= \frac{a+1}{a}, & v(\text{Taube}, \tilde{s}) &= 1 - p, \\ v(\text{Falke}, s) &= \frac{a-1}{a}, & v(s, \text{Falke}) &= \frac{1-a}{a}, & v(\text{Falke}, \tilde{s}) &= 2 - p - ap, \\ v(\tilde{s}, s) &= \frac{a-1}{a}, & v(s, \tilde{s}) &= \frac{a+1-2ap}{a}, & v(\tilde{s}, \tilde{s}) &= 1 - ap^2. \end{aligned}$$

Hier gilt $v(s, s) = v(\tilde{s}, s) = (a - 1)/a$ und $v(s, \tilde{s}) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$ für $p \neq 1/a$:

$$v(s, \tilde{s}) - v(\tilde{s}, \tilde{s}) = \frac{a+1-2ap}{a} - (1 - ap^2) = a\left(p - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0$$

😊 Die Strategie s ist somit evolutionär stabil gegen alle $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$.

⚠️ Eine Population nur aus Falken ist instabil, ebenso nur aus Tauben. Nur eine Population in der richtigen Mischung $s = \frac{a-1}{a} \cdot \text{Taube} + \frac{1}{a} \cdot \text{Falke}$ ist im Nash–Gleichgewicht. Sie ist zudem sogar evolutionär stabil gegen *alle* Eindringlinge / Mutanten $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$, egal ob rein oder gemischt.

⚠ Ich betone nochmals, dass wir hier nur symmetrische Spiele und symmetrische Strategien betrachten: Die gesamte Population spielt gegen sich selbst, das ist eine besondere Situation. In den Graphiken bedeutet das: Wir bewegen uns ausschließlich auf der Diagonalen!

⚠ Erlauben wir auch asymmetrische Strategiepaare $(s_1, s_2) \in \bar{S} \times \bar{S}$, so ist das obige Gleichgewicht (s, s) nicht stabil, wie die Graphik zeigt: Wir betrachten stetig verteilte zufällige Abweichung (s_1, s_2) von (s, s) . Fast jede entwickelt sich unter der Dynamik des Nash–Vektorfeldes zu einem der beiden Gleichgewichte (Taube, Falke) oder (Falke, Taube). Diese beiden Nash–Gleichgewichte sind strikt, in diesem Sinne stabil. Die beiden Attraktionsbecken werden durch die Diagonale getrennt.

⚠ Ob ein Nash–Gleichgewicht (s, s) evolutionär stabil ist oder nicht, lässt sich am Nash–Vektorfeld erahnen, aber nicht sicher ablesen. Hierzu benötigen wir die Definition und eine sorgfältige Rechnung! Die vorige Aufgabe führt diese Untersuchung exemplarisch aus.

😊 Einen guten Überblick gibt die Klassifikation aller 2×2 –Spiele bis auf schwach monotone Isomorphie. Der Parameter α definiert eine Homotopie von Spielen, wobei wir die Isomorphieklasse wechseln!

Kommt die Strategie Falke in einem evolutionär stabilen Gleichgewicht vor, dann zwingend auch die verlustreiche Konfrontation (Falke, Falke).

Mit **korrelierten Gleichgewichten** lässt sich dies vermeiden! Hierzu benötigen beide ein einfach zu beobachtendes Signal.

Die **Bourgeois-Strategie** bricht die Symmetrie wie folgt:

Spieler A ist derjenige, der die Beute zuerst besitzt / erjagt / findet.

Spieler B ist derjenige, der als zweites bei der Beute ankommt.

Dann ist die reine Strategie (Falke, Taube) ein Nash–Gleichgewicht.

Es ist statistisch weniger verlustreich als gemischte Gleichgewichte.

Dies erklärt zugleich das häufig beobachtete **Revierverhalten**.

Ebenso ist (Taube, Falke) ein Nash–Gleichgewicht, aber unsinnig.

Praktisch hieße das nämlich: Der aktuelle Besitzer gibt bei jedem drohenden Konflikt freiwillig seine Beute auf. Das wäre höchst instabil.

Dynamik von Rock-Paper-Lizards

Wir untersuchen noch einmal das Spiel *Schere-Stein-Papier*, diesmal modifiziert durch die Auszahlung $a \in \mathbb{R}$ bei Gleichstand.

	s_1	s_2	s_3
s_1	a	-1	$+1$
s_2	$+1$	a	-1
s_3	-1	$+1$	a

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & +1 \\ +1 & a & -1 \\ -1 & +1 & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe: (1) Finden Sie hier alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

(2) Formulieren Sie die Populationsdynamik $\dot{x} = f(x)$ auf $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$

(a) gemäß dem Nash–Feld und (b) gemäß der Replikatorgleichung.

Dynamik von Rock-Paper-Lizards

Lösung: (2a) Das Nash–Feld $f : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist

$$f_i(x) = \frac{x_i + [e_i^\top A x - x^\top A x]^+}{1 + \sum_{j=0}^2 [e_j^\top A x - x^\top A x]^+} - x_i$$

(2b) Die Replikatorgleichung ist gegeben durch $f : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

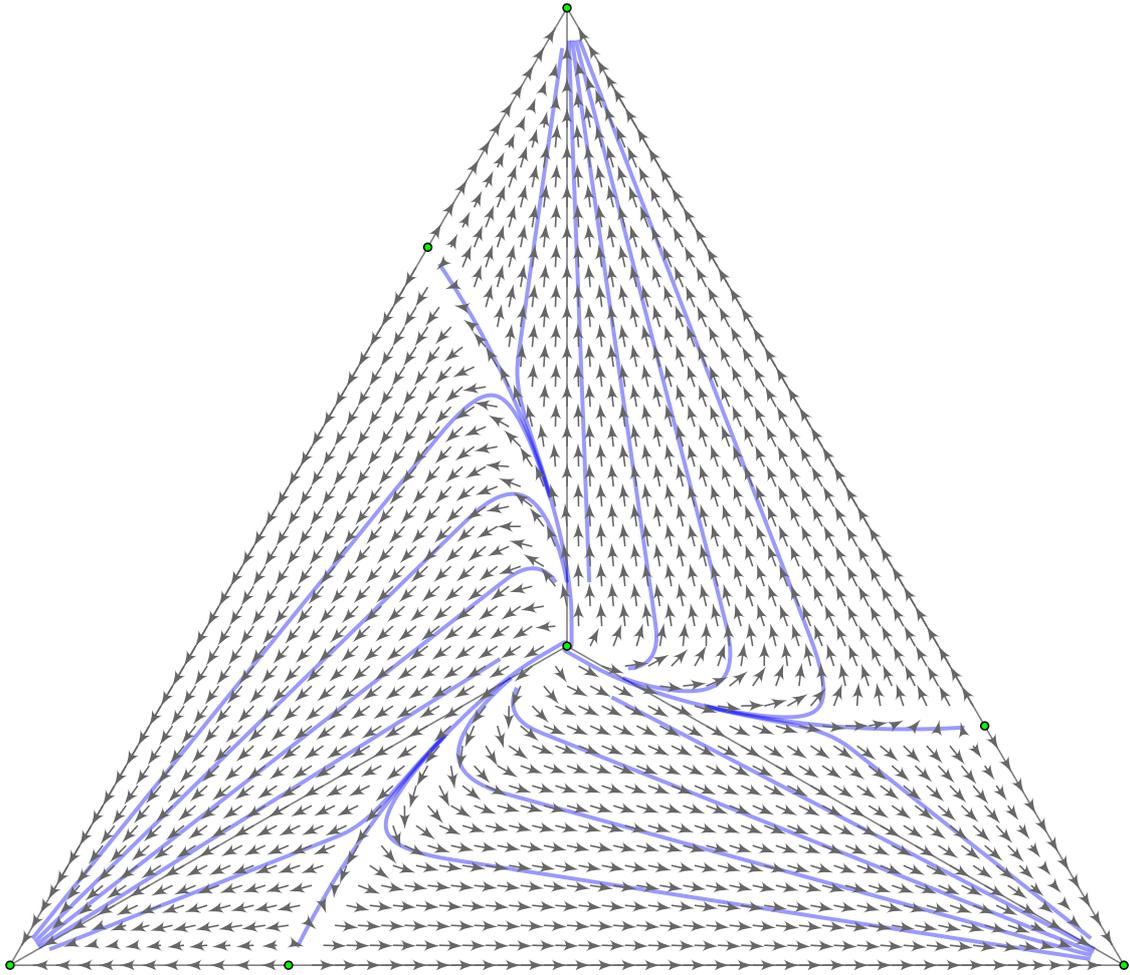
$$f_i(x) = x_i [e_i^\top A x - x^\top A x]$$

Die folgenden Skizzen zeigen die Populationsdynamik für verschiedene Parameterwerte $a \in \mathbb{R}$ sowie einige Flusslinien dieser beiden Felder.

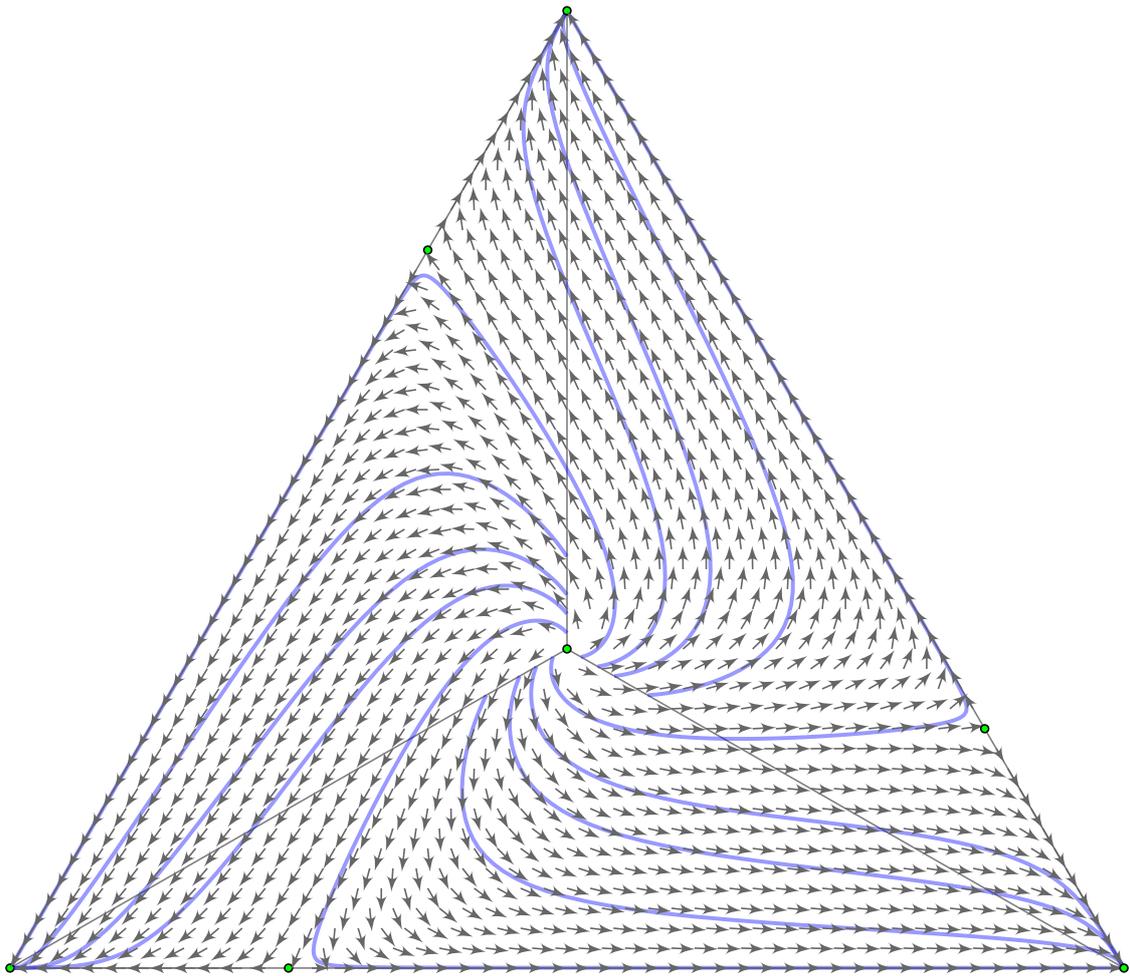
Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $x : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \Delta^2$. Dies gilt sogar global, für maximale Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \Delta^2$: Alle Flusslinien verlaufen im Simplex Δ^2 , denn das Vektorfeld f zeigt nirgends nach außen.

😊 Die zyklische Dynamik für $a = 0$ lässt sich in der Natur beobachten! Der Seitenfleckenguan [*side-blotched lizard*] tritt in drei Varianten auf, deren Häufigkeit wie bei Schere-Stein-Papier zyklisch wechselt, siehe en.wikipedia.org/wiki/Side-blotched_lizard.

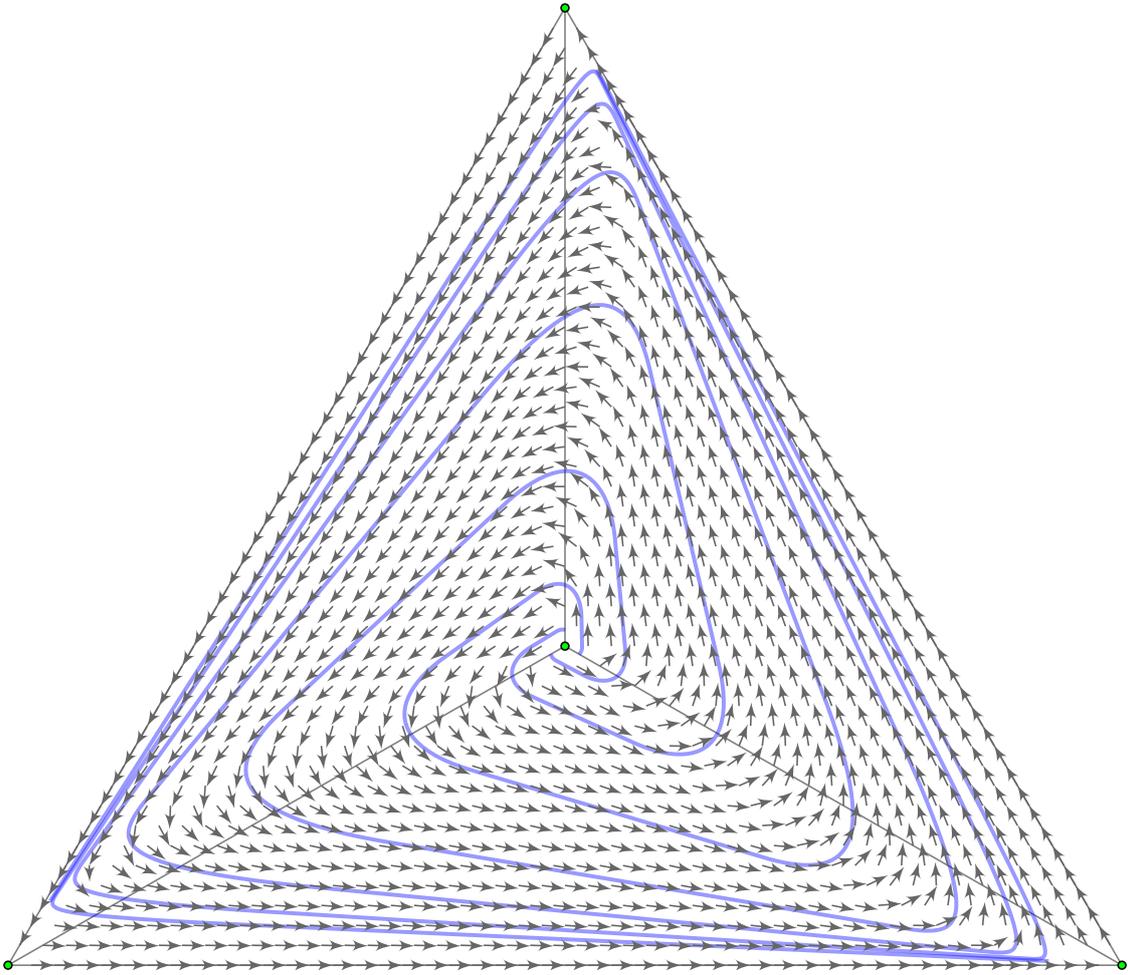
$a = 2$



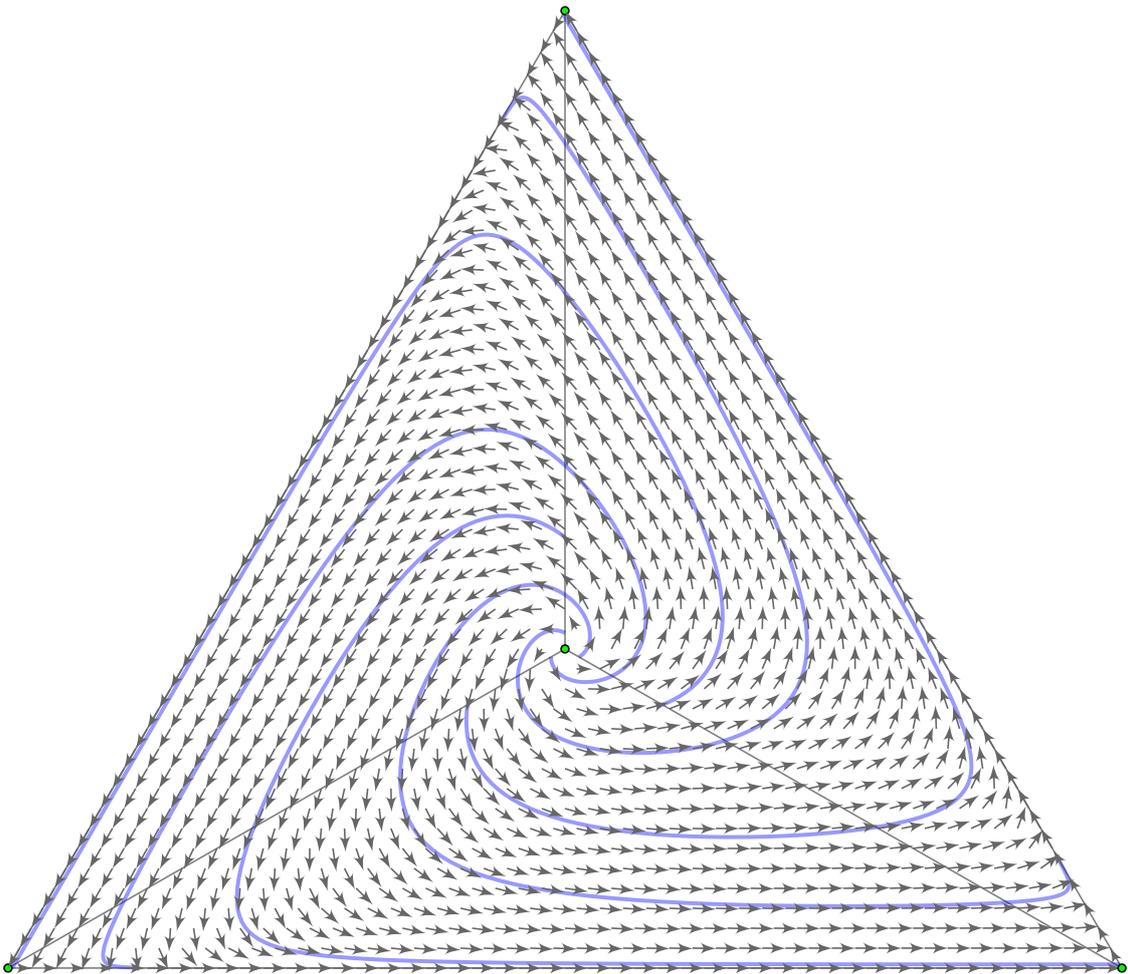
$a = 2$



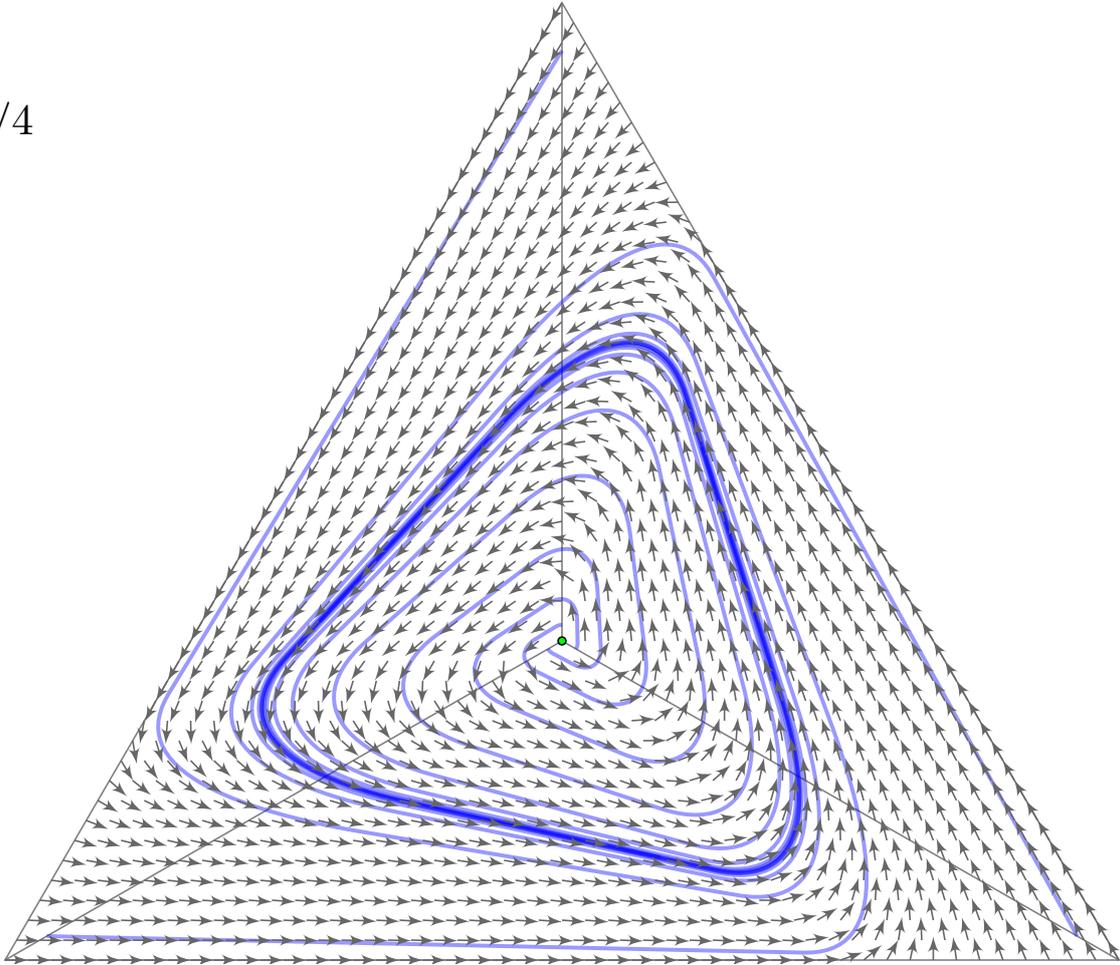
$a = 1$



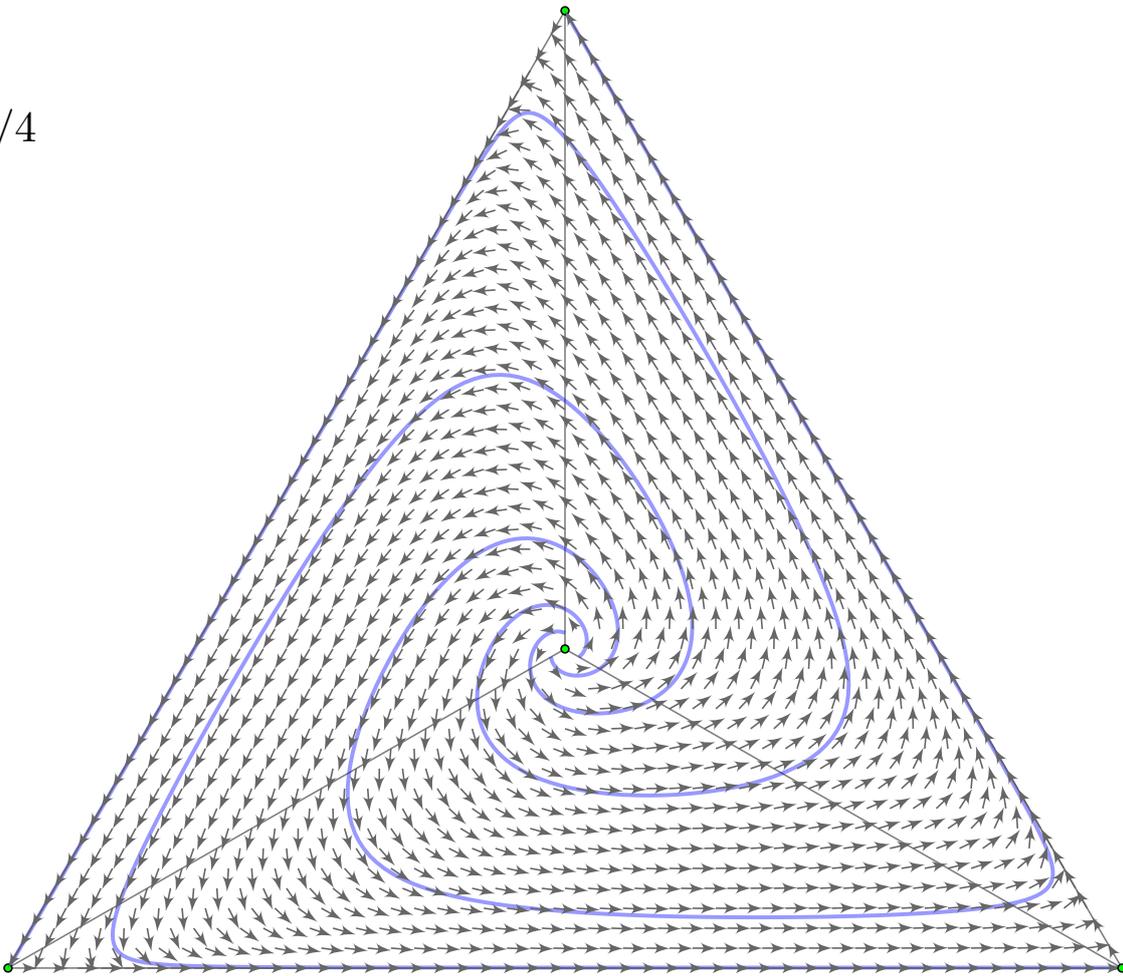
$a = 1$



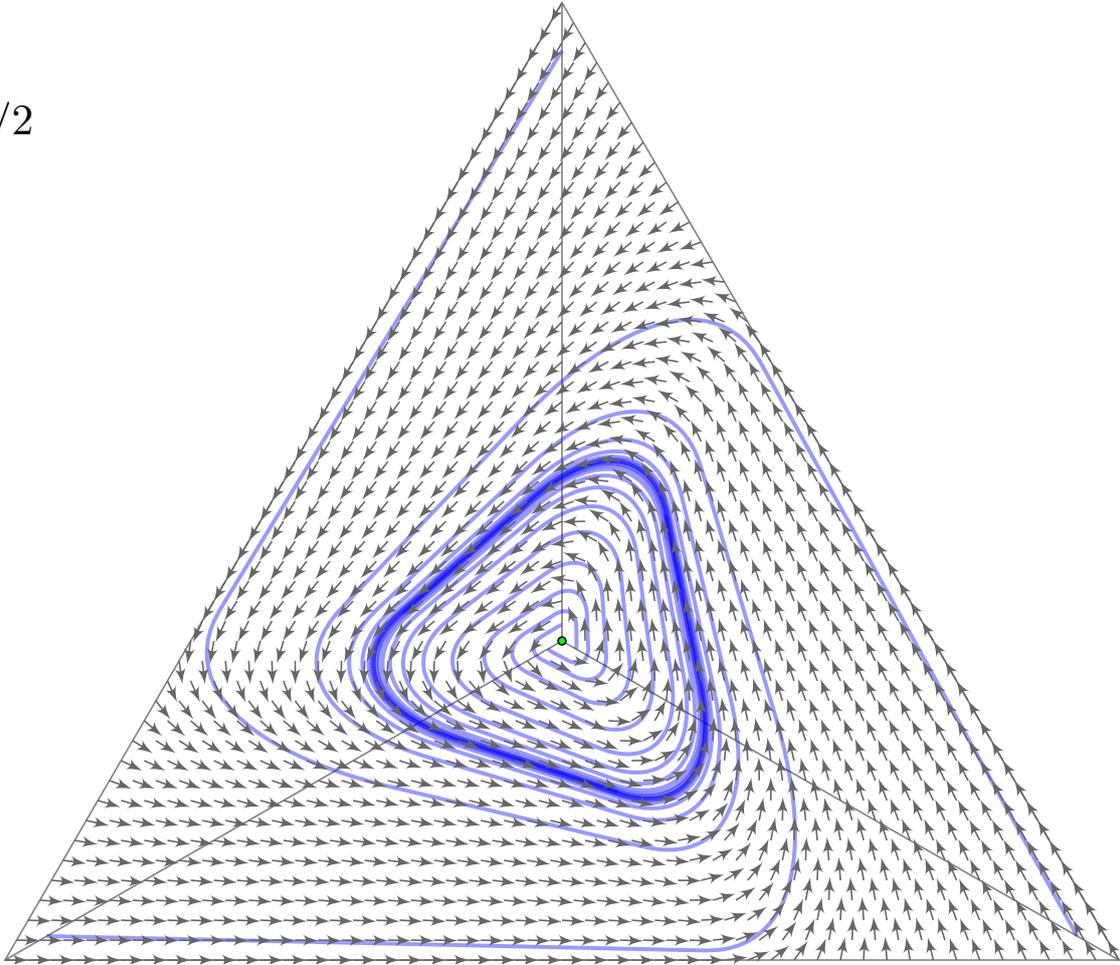
$$a = 3/4$$



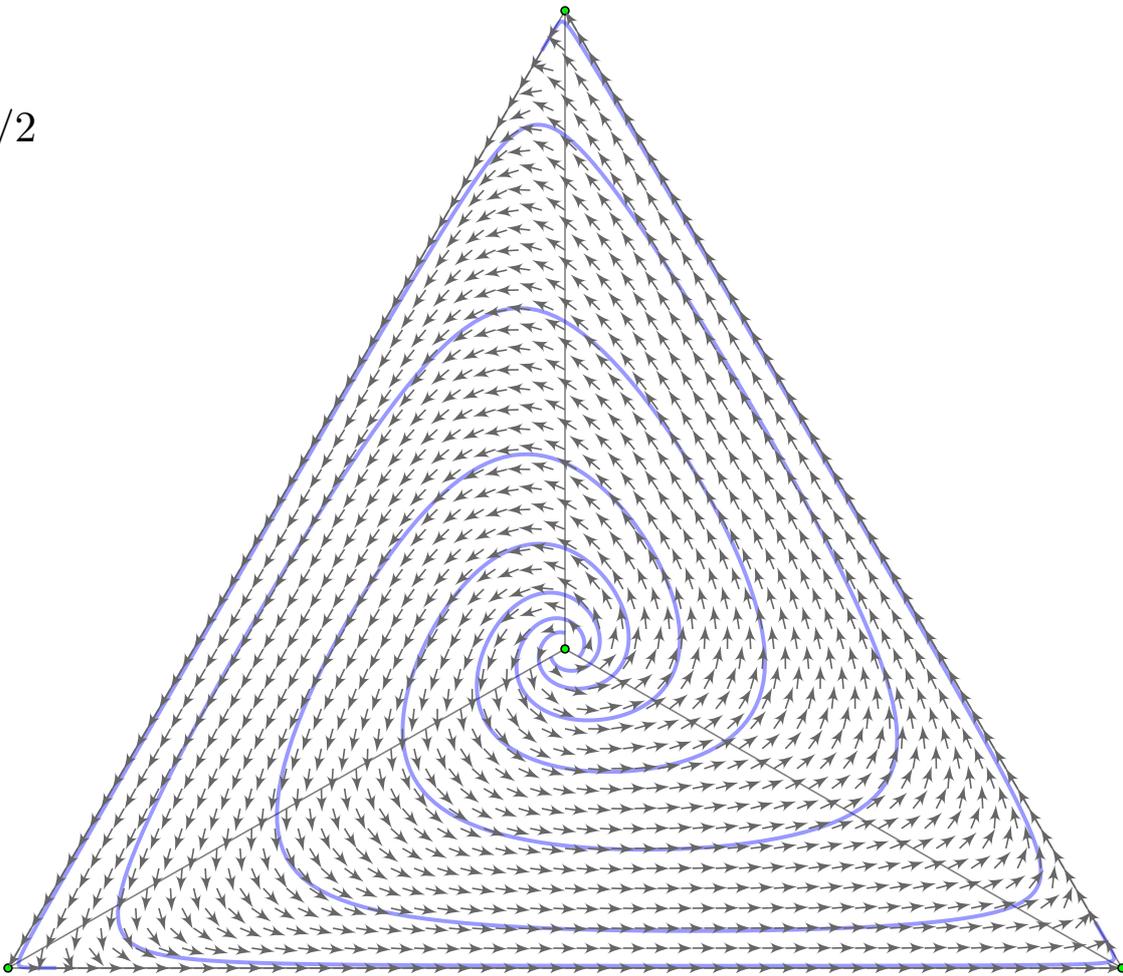
$$a = 3/4$$



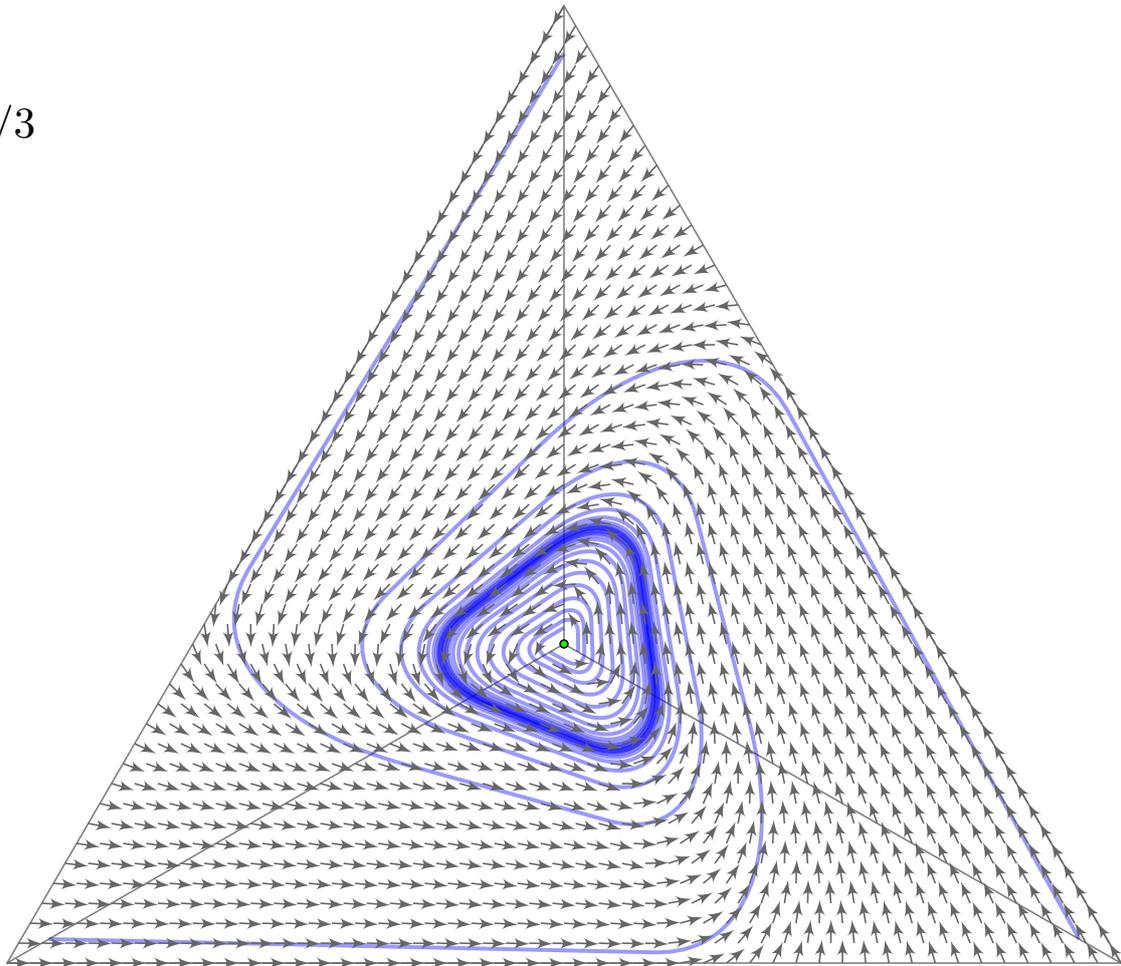
$$a = 1/2$$



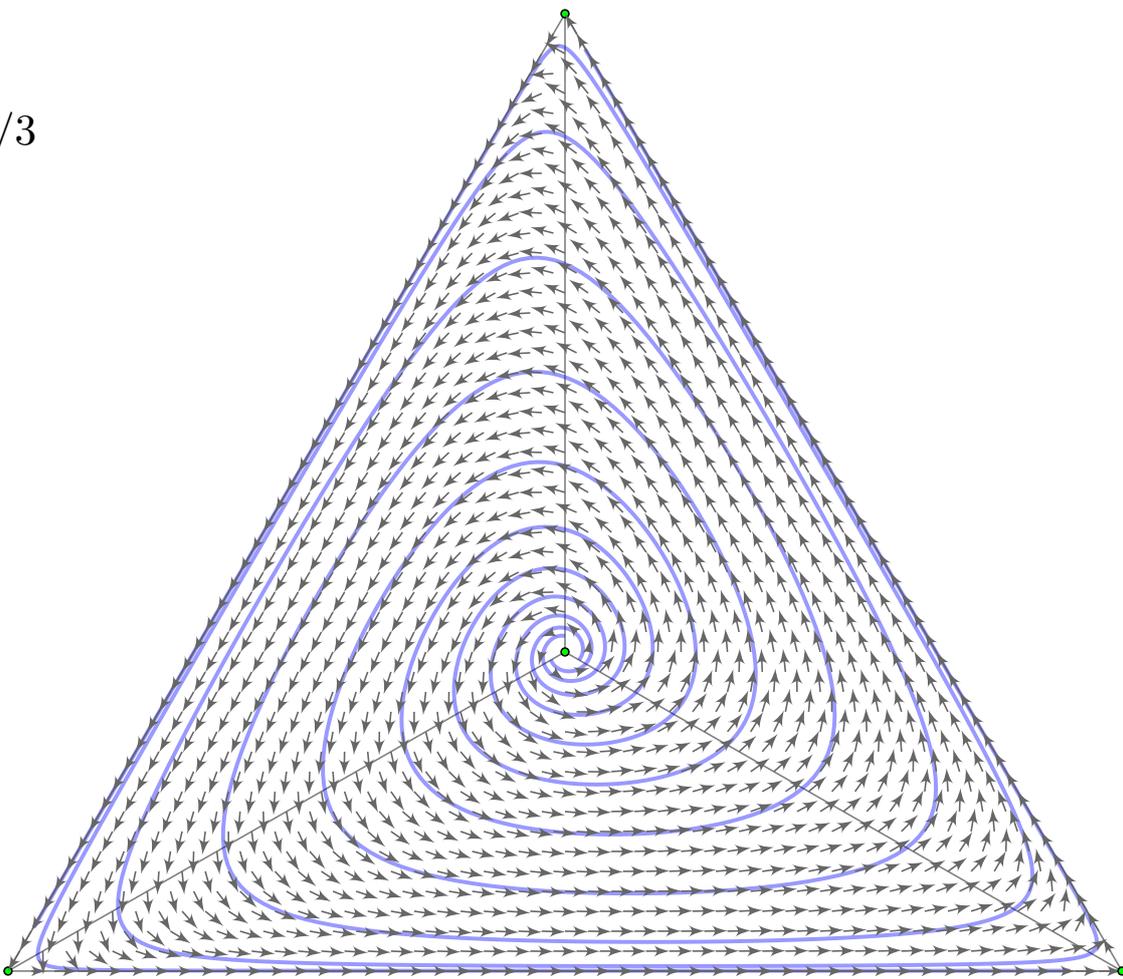
$$a = 1/2$$

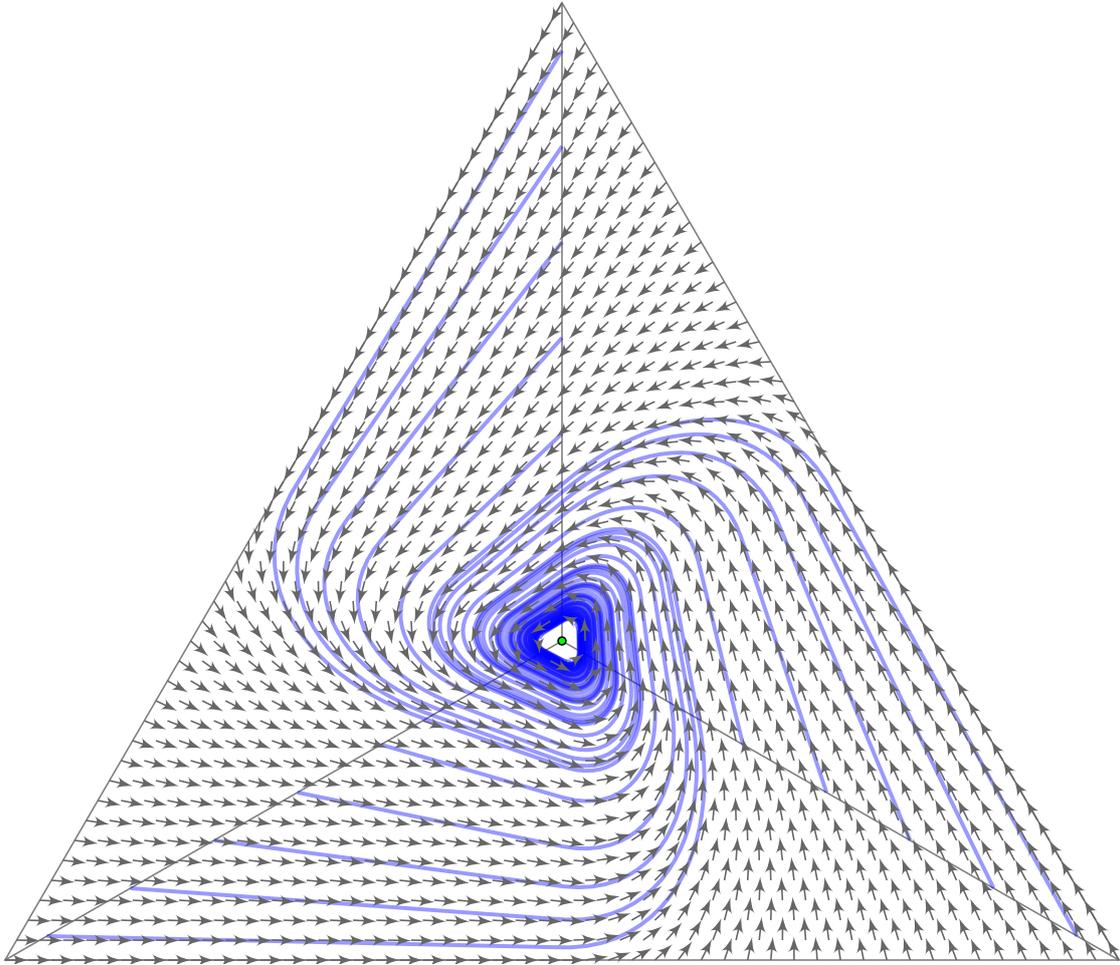
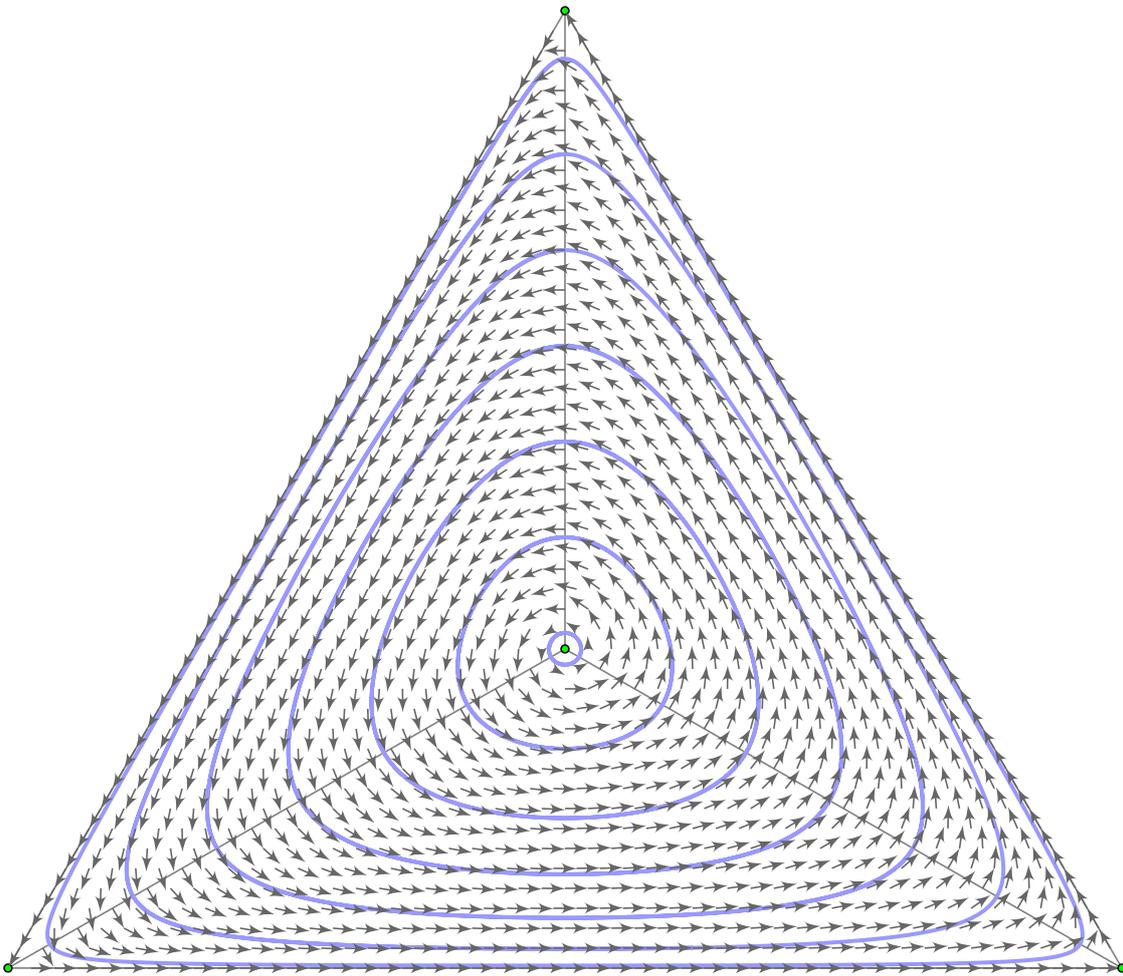


$$a = 1/3$$

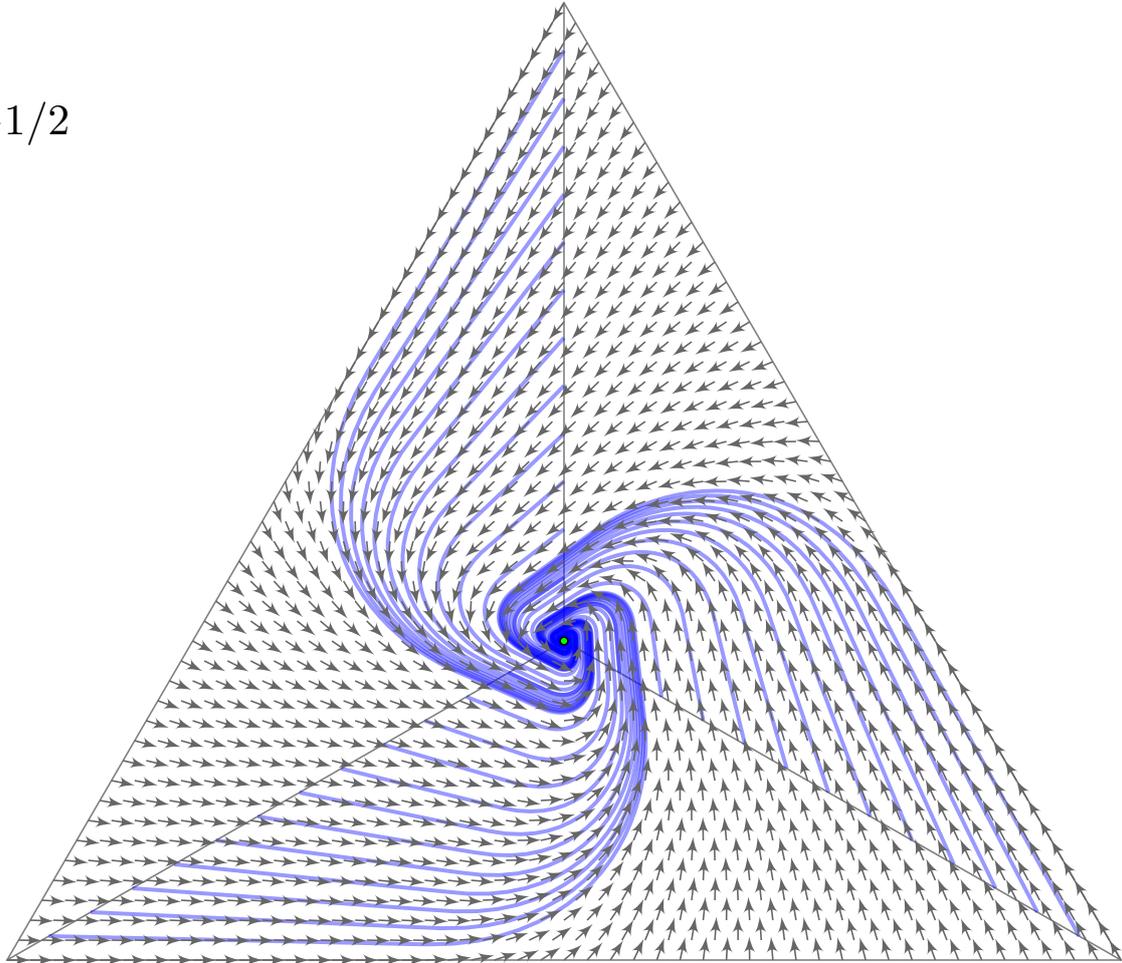


$$a = 1/3$$

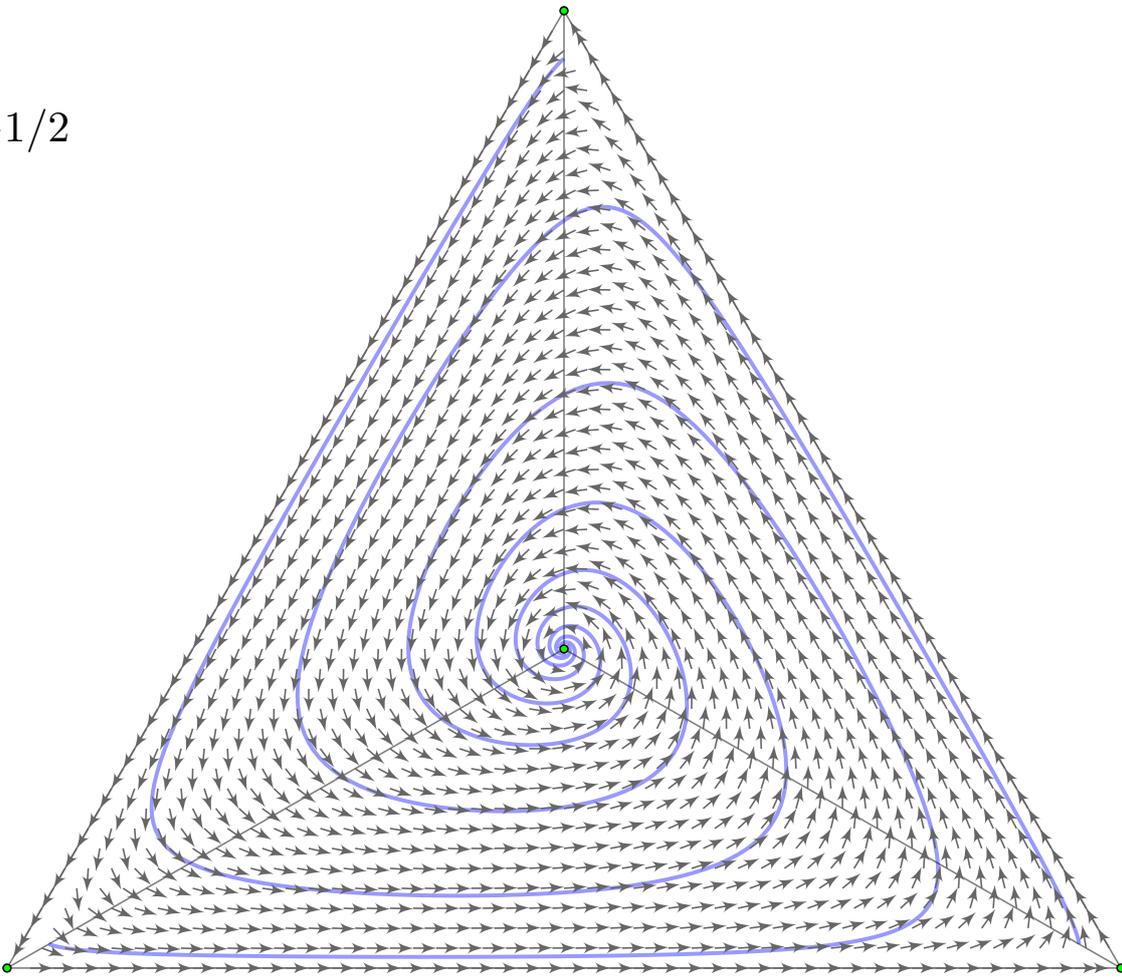


$a = 0$  $a = 0$ 

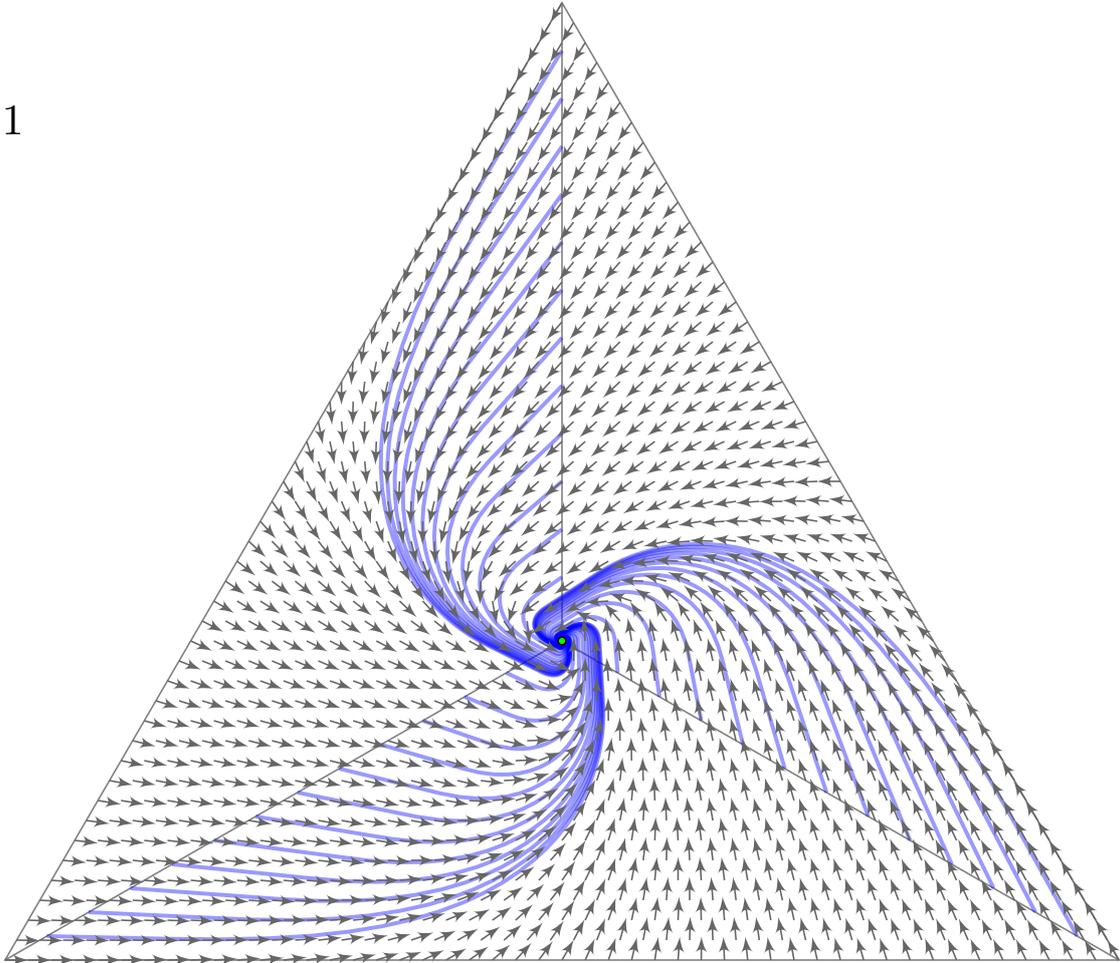
$$a = -1/2$$



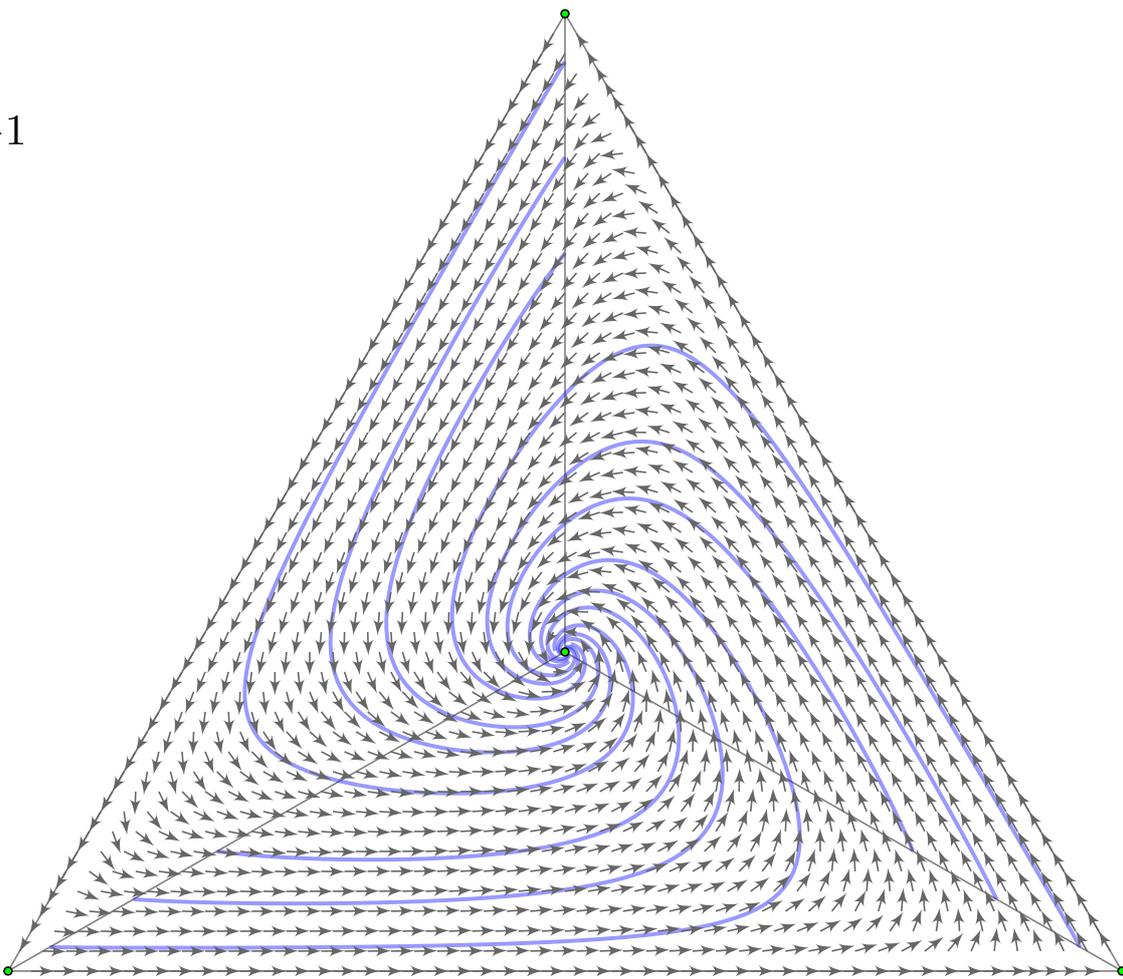
$$a = -1/2$$



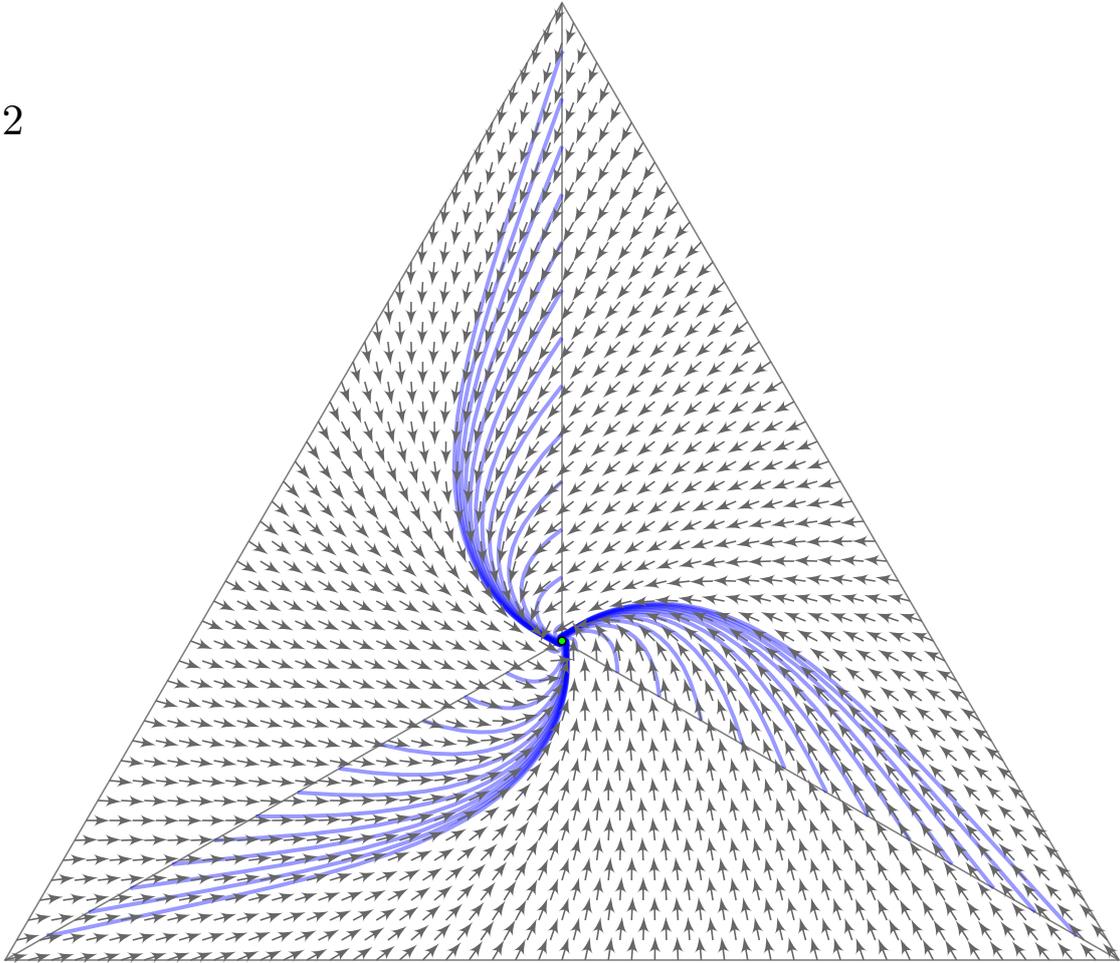
$$a = -1$$



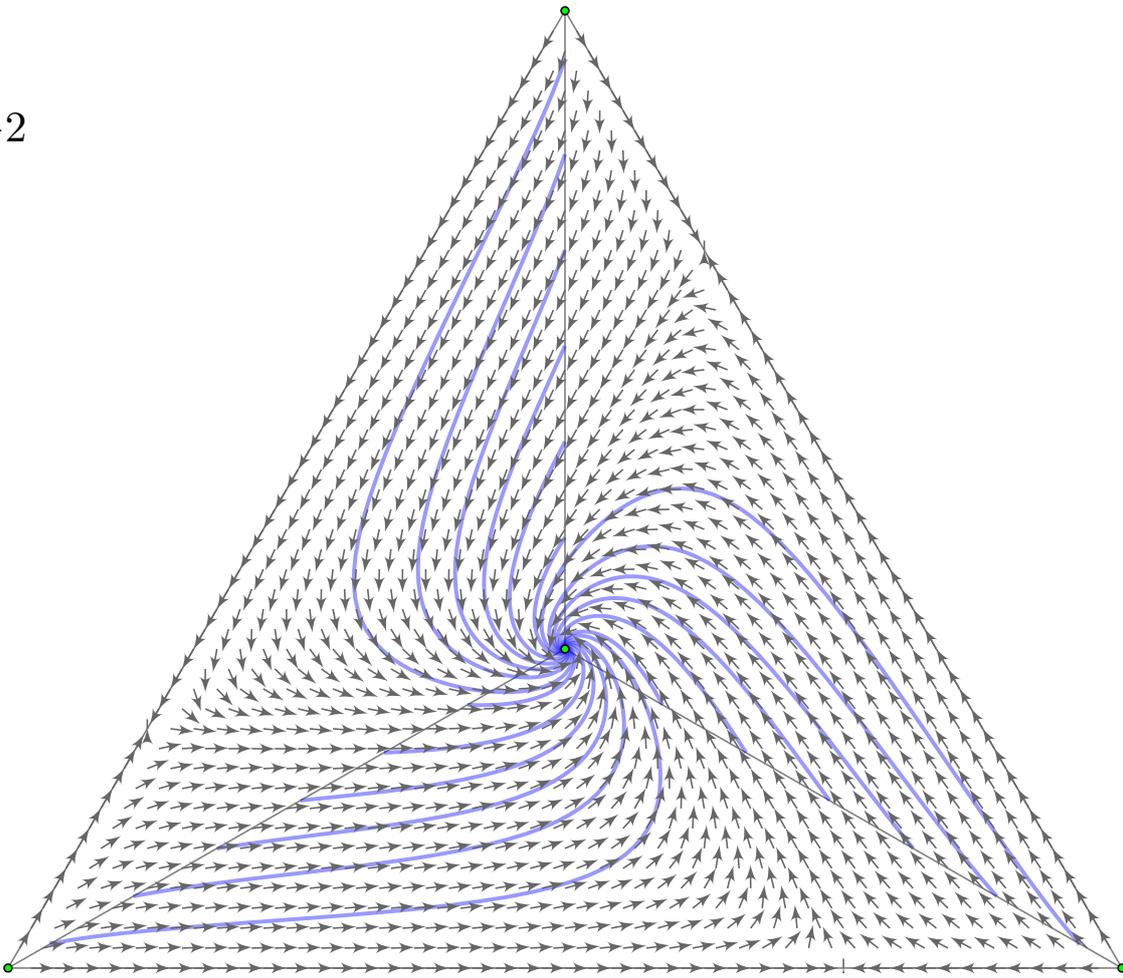
$$a = -1$$



$$a = -2$$

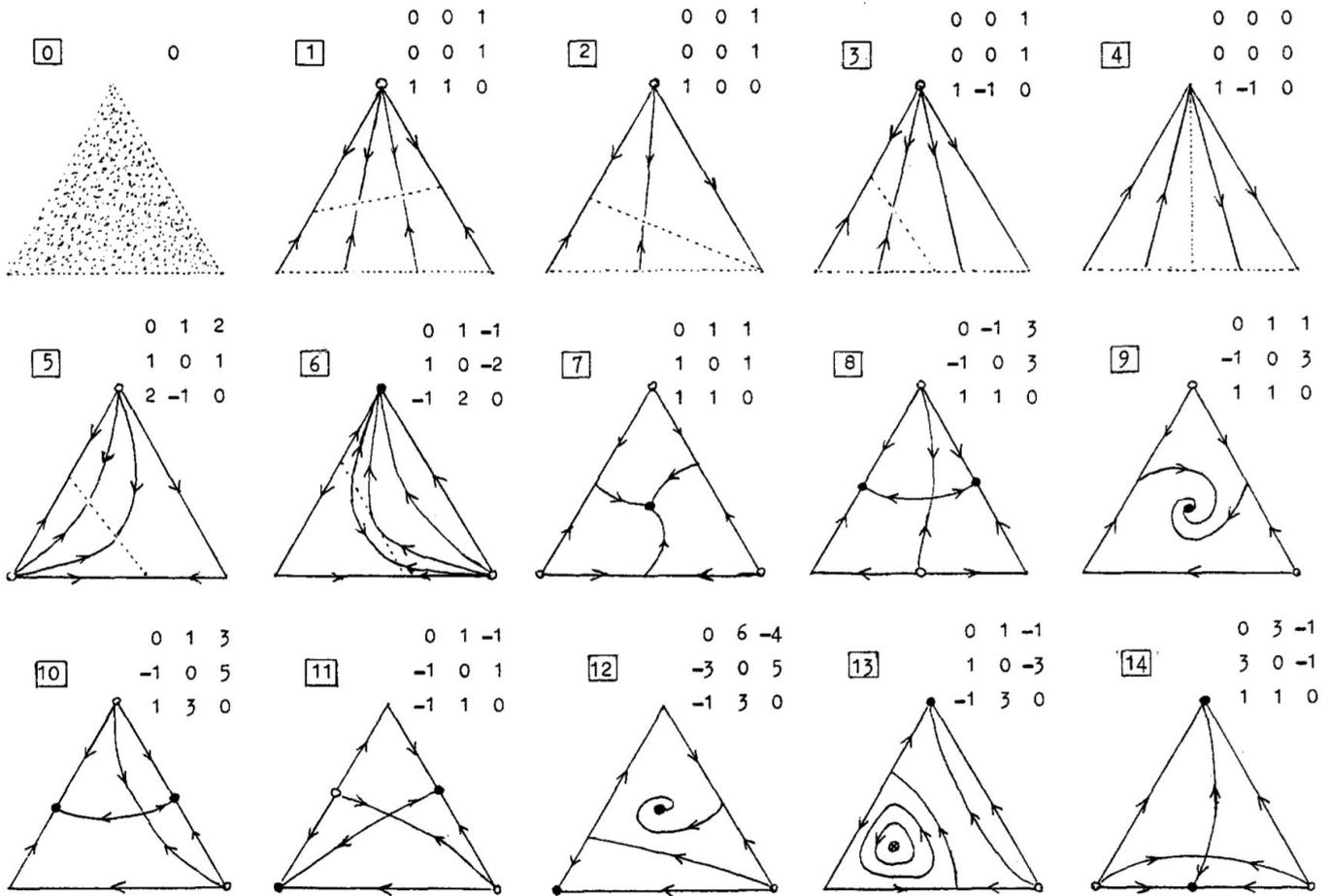


$$a = -2$$



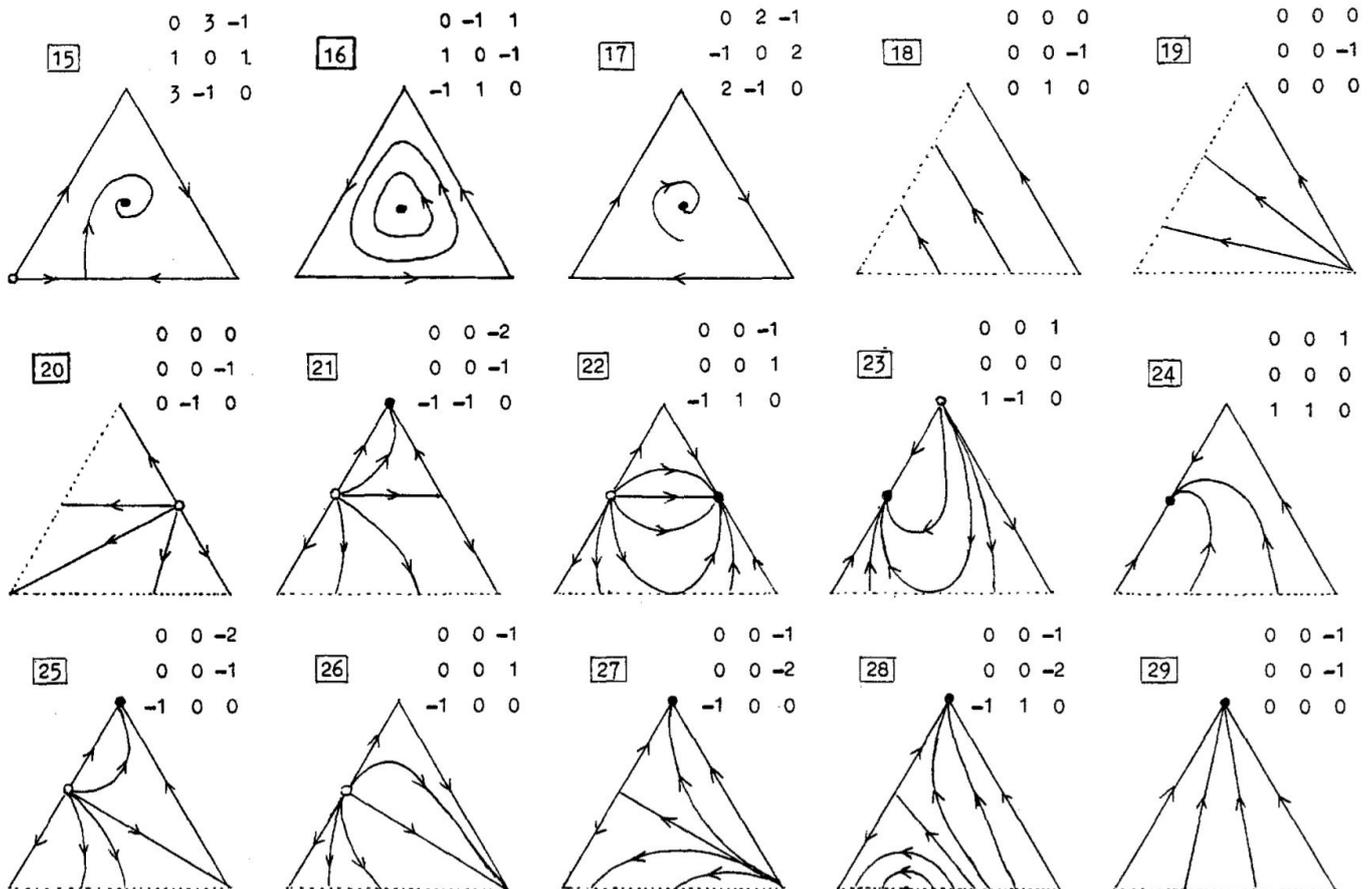
Dynamik der Replikatorgleichung

G361

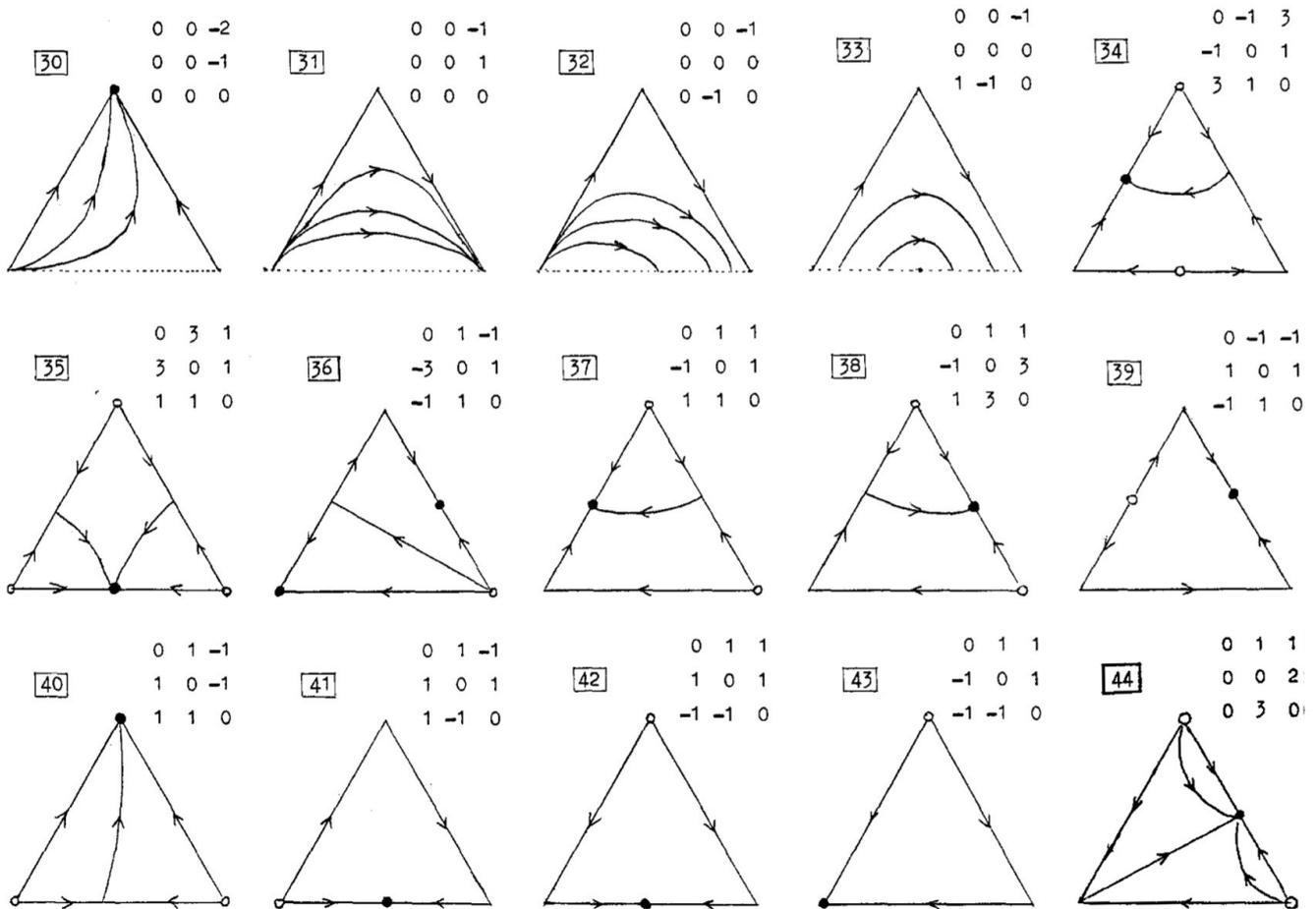


Dynamik der Replikatorgleichung

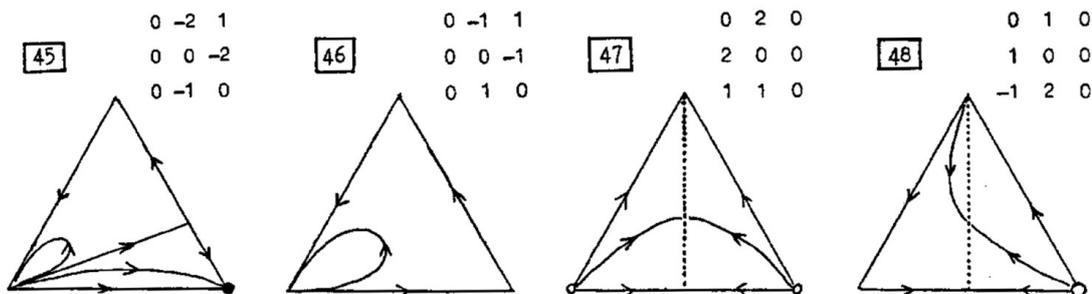
G362



Dynamik der Replikatorgleichung



Dynamik der Replikatorgleichung



Diese Graphiken zeigen die mögliche Dynamik der Replikatorgleichung nach I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification*. *Biological Cybernetics* 48 (1983), 201–211, mit Korrekturen und Ergänzungen zu den Fällen 16, 20, 44–48 aus I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification*. *Biological Cybernetics* 72 (1995), 447–453.

Projekt: Was wird hier klassifiziert? modulo welcher Äquivalenz?
 Wie ist demnach die Aussage des hier zu formulierenden Satzes?
 Wie lässt sich das möglichst übersichtlich organisieren und beweisen?