Kapitel G

# Soziale Normen und Dilemmata, Koordination und Evolution

*Evolutionary game theory deploys the Darwinian notion that good strategies diffuse across populations of players rather than being learned by rational agents.*
Herbert Gintis, *Game Theory Evolving* (2009)



## Inhalt dieses Kapitels G




1 Soziale Konventionen
- Koordination: links oder rechts?
- Soziokulturelle Kompetenz
- Zielkonflikte: Nash oder Pareto?
- Ratio vs Moral: einfache Modellbeispiele

2 Soziale Dilemmata
- Soziales Dilemma und die Tragik der Allmende
- Paradoxer Verkehrsfluss nach Dietrich Braess
- In/Effizienz: Wie hoch ist der Preis der Anarchie?
- Potentialspiele: Alle ziehen am selben Strang?

3 Evolutionäre Spiele
- Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra
- Die Replikatorgleichung zur Populationsdynamik
- Evolutionär stabile Strategien nach Maynard Smith
- Klein aber mein allein: Lernen aus sozialem Dilemma

## Motivation und Überblick



Im Kapitel E haben wir **strategische Spiele in Normalform** definiert und dazu den zentralen Begriff des Nash–Gleichgewichts eingeführt. In diesem und den folgenden Kapiteln diskutieren wir erste einfache Anwendungen, Verfeinerungen und Erweiterungen dieser Konzepte.

Dazu untersuchen wir diverse Situationen von Konflikt und Kooperation, etwa ökonomische Konkurrenz, mit unseren spieltheoretischen Mitteln. Unsere ersten Modelle sind meist beschämend simpel, doch sie zeigen bereits interessante Phänomene und illustrieren immerhin das Prinzip.

**Reale Anwendungen**, in denen etwas Wichtiges auf dem Spiel steht, würde man noch wesentlich genauer und aufwändiger untersuchen. Die erste Aufgabe ist dabei immer die Formulierung eines Modells. Die Begriffe und Methoden dazu führe ich hier exemplarisch vor.

Dieses Kapitel diskutiert soziale Konventionen und Dilemmata, in denen individuelle Nutzenmaximierung und gesellschaftliche Moral kollidieren. Im dritten Teil untersuchen wir evolutionäre Modelle, in denen Spieler bzw. Populationen ihr Spielverhalten über die Zeit schrittweise ändern.

## Motivation und Überblick



Die Untersuchung konkreter Beispiele nutzt praktisch und theoretisch: In günstigen Fällen verstehen wir dadurch die betrachtete Anwendung und erkennen die Möglichkeiten und Einschränkungen unseres Modells. Dies sind Instanzen des zuvor erklärten Modellierungskreislaufs (A301).

Daraus ergeben sich meist Verallgemeinerungen und Verfeinerungen, die wiederum für die Weiterentwicklung der Theorie zuträglich sind. Wie immer gehört die ehrliche Ausführung praktischer Anwendungen untrennbar zusammen mit der sorgfältigen Entwicklung der Theorie.

Die evolutionäre Spieltheorie (EGT) begann in den 1970er Jahren, ist seither überall erfolgreich und bereichert die klassische Spieltheorie um dynamische Aspekte. Ich nenne drei populäre Lehrbücher:

📖 Herbert Gintis: *Game Theory Evolving*. PUP 2009

Josef Hofbauer, Karl Sigmund: *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press 1998

William H. Sandholm: *Population Games and Evolutionary Dynamics – Economic Learning and Social Evolution*. MIT Press 2010

## Koordination: links oder rechts?

Das Spiel „Straßenverkehr“

| A \ B | links | rechts |
|---|---|---|
| links | 1, 1 | 0, 0 |
| rechts | 0, 0 | 1, 1 |

Warum fährt man auf den britischen Inseln auf der linken Straßenseite, im restlichen Kontinentaleuropa hingegen auf der rechten Straßenseite?

Beides sind gesellschaftliche Konventionen und weitgehend willkürlich. Die getroffene Wahl ist allein durch Tradition begründet. Klar ist jedoch: Jede der beiden Festlegungen ist besser als keine Übereinkunft!
Dies sind Gleichgewichte: Abweichen lohnt sich nicht.

Ebenso: Schreibrichtung, Händeschütteln, Umarmung, Kuss, etc.
Solcherart soziale Vereinbarungen umgeben uns überall!



## Koordination: links oder rechts?

Heutzutage überwiegt weltweit der Rechtsverkehr, und Linksverkehr gilt hauptsächlich in früheren britischen Kolonien. Historisch scheint jedoch der Linksverkehr vorherrschend gewesen zu sein. Erklärungen gründen meist darauf, dass Menschen wohl mehrheitlich Rechtshänder:innen sind, und dies die Normen für den Straßenverkehr irgendwie beeinflusst.

Im Zuge der Französischen Revolution und der Napoleonischen Kriege stellten Frankreich und besiegte Länder Europas auf Rechtsverkehr um. Durch gegenseitige Verträge wurde dies bis 1927 weiter vereinheitlicht. Ausnahmen bildeten einige Nachfolgestaaten Österreich-Ungarns, die erst bis 1941 auf Rechtsverkehr umstellten, sowie Schweden bis 1967.

*Fun fact:* Fußgänger, Radler, Roller, Skater, etc. wenden die Konvention nicht streng an. Das führt manchmal zu Koordinierungsschwierigkeiten.

*Fun fact:* Das Gegenstück im Schienenverkehr ist die sog. *Fahrordnung*; sie entspricht in vielen Ländern nicht der Ordnung des Straßenverkehrs. Auch beliebige Mischungen verschiedener Konventionen sind denkbar. Einfache und allgemeine Lösungen sind jedoch fehlerresistenter.

## Koordination: links oder rechts?



Die meisten Schriftsysteme haben eine bevorzugte Schreibrichtung. Das ist nicht zwingend erforderlich, doch eine Konvention vereinfacht! *Fun fact:* In den ältesten lateinischen Schriften ist die Schreibrichtung noch nicht festgelegt. So ist der *Lapis Niger* aus dem 6. Jh. v.u.Z. noch *bustrophedonal*, das heißt wörtlich 'ochsenwendig', also 'hin und her wie ein Ochse beim Pflügen', mit zeilenweise wechselnder Schreibrichtung.

In Kulturen, in denen sich Menschen zur Begrüßung die Hand reichen, bestimmt ganz genau solch eine soziale Norm die dazu gewählte Hand. Eine Kollision der gleichzeitig (!) ausgeführten Bewegung ist auch hier irritierend, wenn auch viel weniger dramatisch als im Straßenverkehr. Für Kinder ist die Konvention zunächst fremd, dann schnell erlernt.

Hierbei ist die vorherrschende Konvention, die rechte Hand zu geben. Eine Erklärung besagt, dass man durch Händeschütteln früher seine friedlichen Absichten bekundete: man kommt unbewaffnet. Etwa 85% bis 90% der Menschen sind Rechtshänder:innen und würden eine Waffe in der rechten Hand führen. Diese wurde daher zur Begrüßungshand.

## Koordination: links oder rechts?



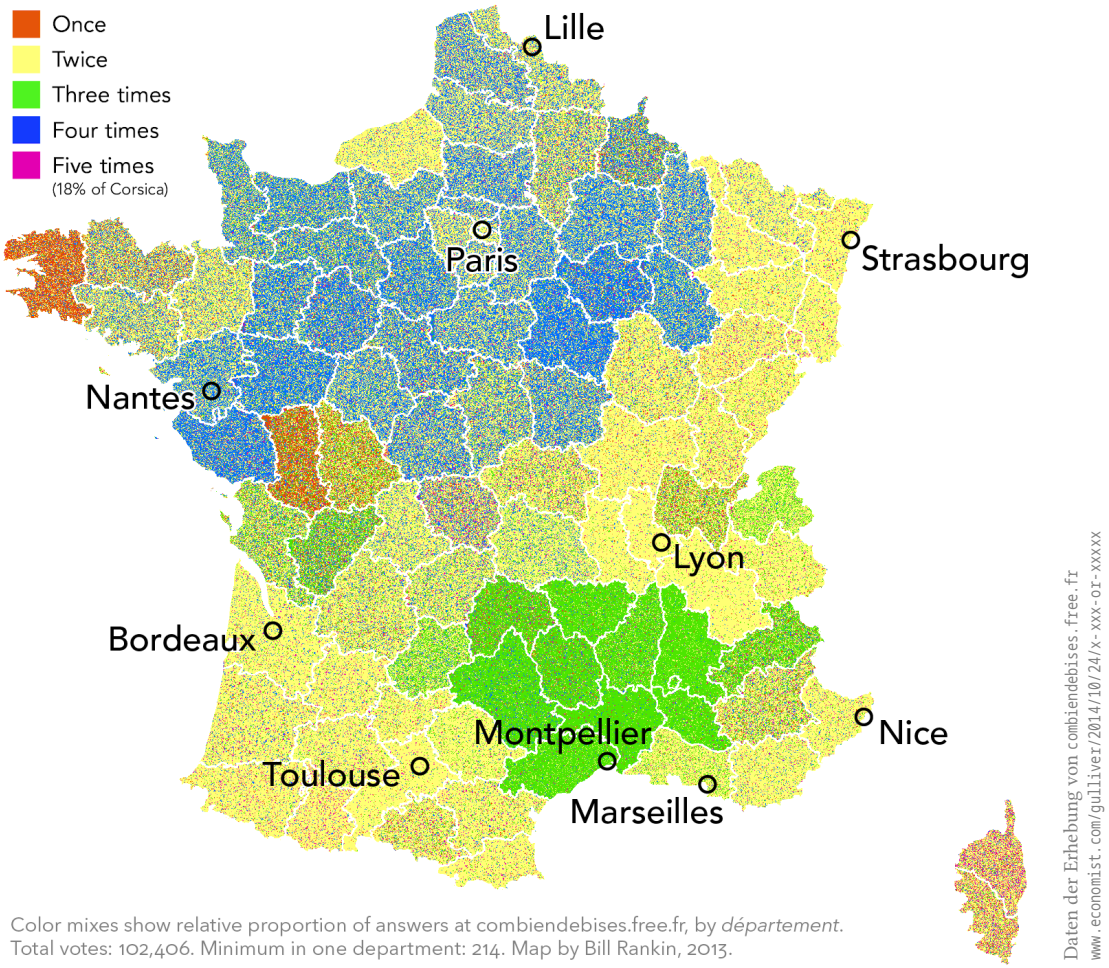
Aus Sicht der Spieltheorie wählt eine gesellschaftliche Norm eines von mehreren Nash–Gleichgewichten und legt es als Standard fest. Kein Akteur hat daraufhin einen Anreiz, einseitig davon abzuweichen, im Falle eines strikten Nach–Gleichgewichts sogar nur Nachteile.

Sobald eine solche Norm in Kraft ist, stabilisiert sie sich von selbst. Extrinsische, übergeordnete Sanktionen sind dazu nicht nötig, da sich jeder Akteur durch Abweichung selbst benachteiligt. Das ist der Zauber von (strikten) Nash–Gleichgewichten.

Abweichungen entstehen höchstens sporadisch durch Fehler: „Mein Rechts oder dein Rechts?", ebenso „Das andere Links!" Das erinnert uns daran, dass die Sprache selbst eine Konvention ist, insbesondere auch die willkürliche Zuordnung ihrer Bezeichnungen.

*Fun Fact:* Einige Menschen haben eine Links-Rechts-Schwäche. Ich kenne jedoch niemanden mit einer Oben-Unten-Schwäche. *Oben* und *unten* sind keine intersubjektiv sozialen Konventionen, sondern hier auf Erden eine objektiv physikalische Wirklichkeit.

# Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*






# Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

Diese detaillierten Umfragedaten wurden seit 2007 online erhoben unter `combiendebises.free.fr` mit inzwischen über 200 000 Stimmen. Es handelt sich um ein schönes Beispiel von **Bürgerwissenschaft** / Citizen Science, `de.wikipedia.org/wiki/Citizen_Science`.

Wendet man sich dabei zuerst nach links oder zuerst nach rechts? Ungefähr eine Zwei-Drittel-Mehrheit dreht sich zuerst nach rechts. Das scheint also nicht so stark normiert, wie zu erwarten wäre. Die Lateralität kann wohl leicht spontan koordiniert werden.

Wenn Sie also im nächsten Semester als Erasmus-Student:in nach Toulouse oder Nantes gehen, dann wissen Sie, welche Konventionen Sie dort erwarten. Aktuell stimmt dies leider nicht mehr, denn unser gesellschaftliches Zusammenleben befindet sich in schnellem Wandel:

Diese Daten wurden lange vor der Covid19-Pandemie erhoben. Während der Pandemie mussten viele traditionelle Begrüßungsrituale pausieren. Es ist interessant zu sehen, wie diese wiederaufgegriffen werden und sich eventuell mit der Zeit weiterentwickeln und verschieben.

## Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*



| A \ B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 / 1 | 0 / 0 | 0 / 0 | 0 / 0 | 0 / 0 |
| 2 | 0 / 0 | 1 / 1 | 0 / 0 | 0 / 0 | 0 / 0 |
| 3 | 0 / 0 | 0 / 0 | 1 / 1 | 0 / 0 | 0 / 0 |
| 4 | 0 / 0 | 0 / 0 | 0 / 0 | 1 / 1 | 0 / 0 |
| 5 | 0 / 0 | 0 / 0 | 0 / 0 | 0 / 0 | 1 / 1 |

Dies ist nur eines von vielen spieltheoretischen Modellen zur Erklärung.
Hier kommt es uns nur auf die (strikten) Nash–Gleichgewichte an.
Die soziale Konvention wählt (willkürlich) eines davon aus.

## Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*



Dieses übertrieben einfache Modell erklärt die Beobachtung recht gut. Vorsicht: Gemessen / beobachtet / abgestimmt wurde das Verhalten, nicht die zugrundeliegende Gewinnfunktion des gezeigten Modells. Die konkreten Zahlen dieses Bimatrixspiels sind reine Spekulation.

Skurrile regionale Konventionen gibt es häufig, auch in Deutschland. *Anekdote:* An der Uni Stuttgart müssen die Leistungspunkte jedes Moduls durch 3 teilbar sein. Das ist so selbstverständlich, als hätte es Moses vom Berg heruntergebracht, auf der Rückseite der Zehn Gebote.

Das ist zugegeben keine soziale Übereinkunft, sondern wurde verordnet. Dass es eine willkürliche Konvention (zur Vereinfachung?) ist, zeigt ein Blick über den Tellerrand nach Karlsruhe: Dort ist diese Einschränkung unbekannt, und die Bemessung von Leistungspunkten flexibler.

Auch deshalb ist es gut, dass Sie verschiedene Unis und andere Länder kennenlernen. Erasmus und ähnliche Programme unterstützen Sie dazu nach Kräften. Was Sie im Ländle noch für naturgegeben hielten, erweist sich als menschengemacht und willkürlich – und geht auch anders!

# Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

Auf Deutsch sagen wir sowohl *Händedruck* als auch *Händeschütteln*, auf Französich nur *se serrer la main*, auf Englisch nur *to shake hands*. Übersetzt wird nicht nur sprachlich, sondern immer auch interkulturell.

# Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

Auf Französisch klingt „secouons-nous les mains“ vollkommen absurd. Das kann die deutsche Übersetzung nicht widergeben.

Auf English hingegen klingt „shake me by the hand“ irre. Auch „Let's squeeze hands“ wäre lustig, läuft aber der Handlungslogik zuwider.

## Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

*Learning another language is not only*
*learning different words for the same things,*
*but learning another way to think about things.*
Flora Lewis (1922–2002)

„Die spinnen, die Römer!“, urteilt Obelix und wiegt sich in der zutiefst gallischen Gewissheit, im Mittelpunkt der Welt zu stehen. Welch Cliché! Ironisch überspitzt zeichnen die Comics stereotype kulturelle Eigenarten, die humorvolle Darstellung fördert Reflektion und Selbst/Erkenntnis.

Die Bildungspläne der Länder formulieren explizit die interkulturelle Kompetenz als eines der Lernziele, insbesondere in den Sprachen, aber auch darüber hinaus im Gesamtkonzept schulischer Bildung.
Interkulturelle Erziehung > Lernen > Kompetenz > Kommunikation

Wie beginnt und beendet man einen Brief? eine Email? eine digitale Kurznachricht wie WhatsApp oder ähnliche? Nach Eingewöhnung finden Sie das vielleicht selbstverständlich, doch das ist es ganz und gar nicht, insbesondere in ungewohnten Kontexten und fremden Sprachen!



## Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

Das Spiel „Wie geht’s?“

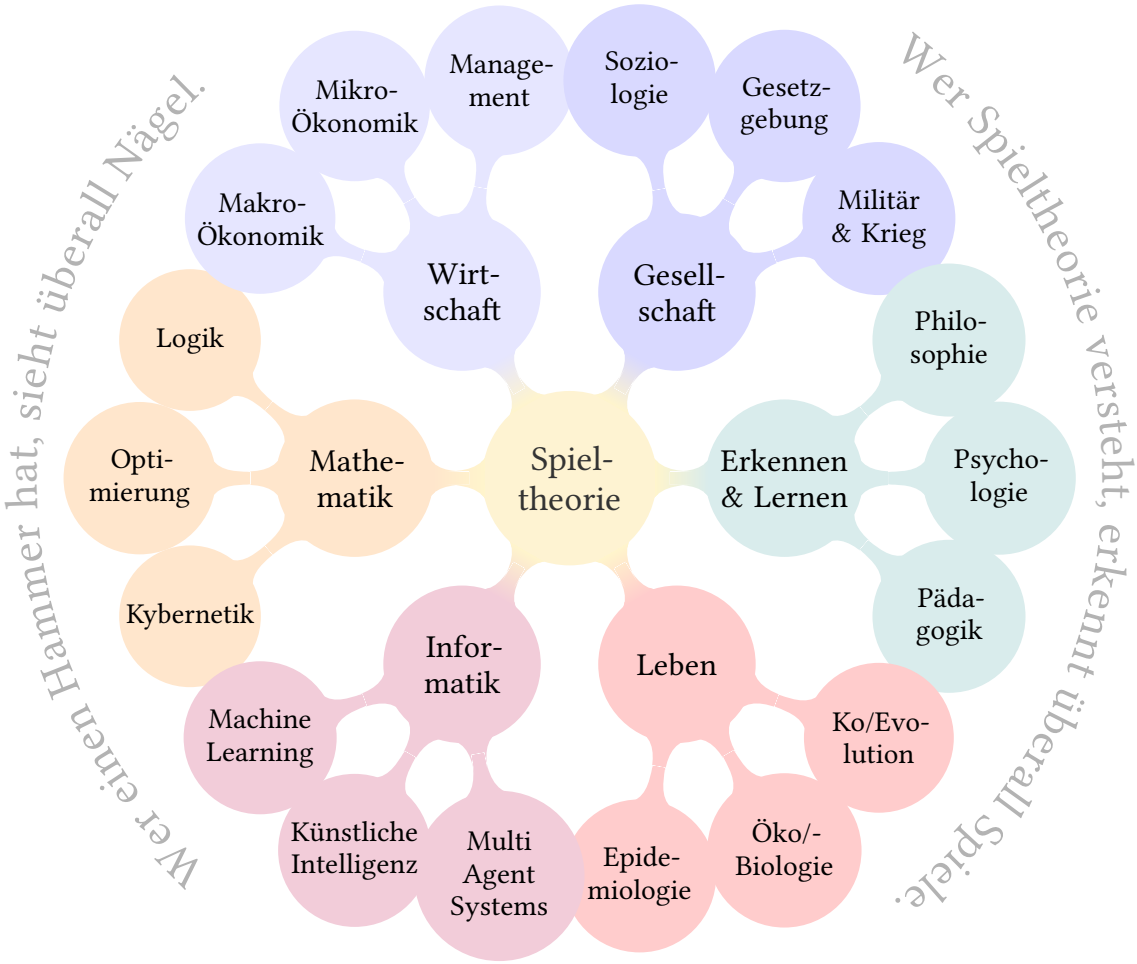
| A \ B | kurz | lang |
|---|---|---|
| kurz | 1 / 1 | 0 / 0 |
| lang | 0 / 0 | 1 / 1 |

Die alltägliche Begrüßung kennt eine weitere erstaunliche Konvention:
Deutsch: „Wie geht’s?“ – „Gut, danke. Und selbst?“ – „Gut, muss ja.“
Englisch: „How are you?“ – „Fine, thanks. And you?“ – „I’m fine.“
Französisch: „Ça va?“ – „Oui, ça va. Et toi?“ – „Ça va, merci.“

Die konventionelle Höflichkeit sieht vor, sich nach dem Befinden des Gegenübers zu erkundigen, doch im Gegenzug nicht unangemessen ausführlich auf die offene Frage einzugehen. Selbst wo mehr zu sagen wäre, wird das Protokoll dazu nicht genutzt. Es ginge auch anders.

## Wer interessiert sich für Spieltheorie?






## Wer interessiert sich für Spieltheorie?



Diese Graphik macht vollmundige Ankündigungen und große Worte: Spieltheorie steht prominent in der Mitte und kommuniziert mit allem! Das ist nicht nur so dahergesagt, sondern soll auch erfüllt werden. Die versprochenen Querbezüge will ich nach und nach einlösen.

Auf der linken Seite dieser Graphik kennen wir bereits erste Beispiele, etwa aus Ökonomik, Mathematik, Informatik und ihren Teilgebieten. In diesem und im nächsten Kapitel möchte ich mir etwas Zeit nehmen und einige Illustrationen auf der rechten Seite wenigstens skizzieren.

Eine extren erfolgreiche Anwendung ist die evolutionäre Spieltheorie G3. Das ist seit den 1970er Jahren zu einem eigenständigen Gebiet gewachsen, das ich hier wenigstens kurz nennen will. Die Biologie nutzt systematisch die Spieltheorie, um Probleme der Evolutionstheorie zu lösen.

Für unser alltägliches Leben ebenso wichtig sind soziale Dilemmata G2. Auch das ist ein weites Forschungsfeld mit faszinierenden Anwendungen, die wir oft spüren und verstehen wollen. Ich begnüge mich mit ein paar Highlights und optionalen Hinweisen zur Vertiefung.

## Zielkonflikte: Nash oder Pareto?



Das Gefangenendilemma

| Bonnie \ Clyde | schweigen | gestehen |
|---|---|---|
| schweigen | −1 / −1 | −5 / 0 |
| gestehen | 0 / −5 | −4 / −4 |

Dieses Spiel ist berühmt für seinen vermeintlich paradoxen Ausgang.
Es illustriert das Grundproblem „Kooperation versus Egoismus“.

Nash–Gleichgewichte können das Pareto–Optimum verfehlen.
Gut gewählte Mechanismen versuchen, beides zu versöhnen.

Dieses Beispiel reduziert den Konflikt auf das Wesentliche.
In vielen realen Situationen steckt eine Variante davon!

## Zielkonflikte: Nash oder Pareto?



Als erste Illustration nenne ich Beobachtungen, die zunächst paradox erscheinen: Was nützen dem Pfau seine Federn? Kann ein unnützer Doktortitel dennoch nützlich sein? Auf eine naiv-pessimistische Weise betrachtet handelt es sich um Inkarnationen des Gefangenendilemmas.

Besonders eindrücklich ist die Beobachtung bei Pfauen und hat Charles Darwin lange umgetrieben. Seine Erklärung ist die **sexuelle Selektion!** Hähne und Hennen befinden sich in einem gegenseitigen Dilemma. Keine:r kann einseitig das Verhalten ändern, denn dies wäre nachteilig.

Bei der jährlichen Pfauenkonferenz zu Toleranz und Antidiskriminierung beschließen alle einstimmig, Hähne nicht auf ihr Äußeres zu reduzieren. Das nützt herzlich wenig: Zur nächsten Paarungszeit sind alle guten Vorsätze schnell vergessen und Hennen denken nur an das Eine.

Pfauen handeln nicht bewusst-planend, sondern genetisch festgelegt. Meine verzerrte Darstellung dient nur der dramatischen Zuspitzung. Zum lehrreichen Kontrast schlage ich Bewerbung und Doktortitel vor. Die Struktur ist genau dieselbe. Unser Lachen verstummt.

## Was nützen dem Pfau seine Federn?



Pfauen-Männchen haben ein prachtvolles Gefieder. Für das Überleben ist es leider hinderlich: Tarnung, Flucht, Energie, … Warum lohnen sich dennoch lange Federn? Wozu dienen sie? Angenommen, es gebe „fitte“ und „unfitte“ Pfauen-Männchen. Letztere werden öfter von Raubtieren gefressen etc. Sowohl fitte als auch unfitte können kurze oder lange Federn haben. Die mit langen Federn werden aufgrund der genannten Nachteile jedenfalls öfter gefressen.

Eine Population von Pfauen-Männchen könnte etwa so aussehen:

| Pfauen | fit | unfit |
|---|---|---|
| kurze Federn | 40% | 20% |
| lange Federn | 30% | 10% |

Das Pfauen-Weibchen sieht nicht die Fitness, sondern nur die Federn!

**Aufgabe:** Welche Strategie der Partnerwahl ist für sie vorteilhaft?

- Federlänge ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
- Kurze Federn bevorzugen: Trefferquote 40 : 20 (schlechter)
- Lange Federn bevorzugen: Trefferquote 30 : 10 (besser!)

☺ Trotz kurzfristiger Nachteile zahlen sich lange Federn dauerhaft aus!

John Maynard Smith: *Handicap principle.* `youtu.be/pOPmlInVej0`

## Visuelles Ornament und sexuelle Selektion



Das auffällige Gefieder der Pfauen-Männchen wird als *visuelles Ornament* bezeichnet. Die lange Schleppe ist zwar hinderlich und vermindert das Flugvermögen, paradoxerweise kann es dennoch ein Indikator für genetische Fitness sein und Pfauen-Weibchen als Indiz für gesunden Nachwuchs dienen; siehe unser Zahlenbeispiel. Wäre es nicht effizienter, Pfauen würden diesen Aufwand sparen und die Energie in bessere Überlebensstrategien stecken? Auf den ersten Blick besehen ja. Aber für ein Weibchen gibt es keine bessere Wahl: Es sieht nicht die tatsächliche Fitness, sondern nur das *Signal* der Federn. Auf Grundlage dieser unvollständigen Information muss es sich für die langen Federn entscheiden, selbst wenn das Überlebensnachteile mit sich bringt, auch für seinen eigenen Nachwuchs! Damit bleibt auch den Männchen keine Wahl, lange Federn werden zum Must-Have. Diese *sexuelle Selektion* ist ein Schlussstein in Darwins Evolutionstheorie.

Auch Menschen ist dieses Phänomen vertraut: Manche Männer beeindrucken Frauen, indem sie Geld verschwenden oder andere verrückte Dinge tun. Wäre dieses Verhalten insgesamt nachteilig, so würde man vermuten, dass es auf lange Sicht ausstirbt. Das ist jedoch nicht der Fall, da Frauen dieses Verhalten als Indikator für (gesellschaftlichen) Erfolg interpretieren können und eventuell bei der Partnerwahl belohnen. (All das funktioniert selbstverständlich auch umgekehrt…)

Dieses Phänomen wird *Handicap-Prinzip* genannt. Beispiele gibt es viele: Produktwerbung verschwendet Geld, wird aber vom Käufer belohnt. Manch akademischer Titel ist scheinbar Zeitverschwendung, wird aber vom Arbeitgeber honoriert. Auch Ihr Studium ist nur teilweise für Ihren späteren Beruf relevant, und dennoch wird diese Anstrengung meist belohnt. Zum Beispiel gelten Leistungen in Mathematik als zuverlässiger Indikator für intellektuelle Leistungsfähigkeit. Dazu diskutieren wir den Arbeitsmarkt, extrem vereinfacht, in folgendem Gedankenexperiment.

## Kann ein unnützer Doktortitel doch nützlich sein?



Eine Personalchefin sucht für eine Stelle einen Kandidaten (m/w/d).
Aus Erfahrung schätzt sie die allgemeine Bewerberlage wie folgt:

| Bewerber | geeignet | ungeeignet |
|---|---|---|
| Diplom/Master | 50% | 25% |
| Promotion | 20% | 5% |

Als individuelle Information hat sie zunächst nur den *Abschluss* laut Bewerbungsunterlagen.
Die eigentlich interessante Zielgröße der *tatsächlichen Eignung* kennt sie hingegen nicht.
Eine Promotion kostet Zeit und Mühe, bringt aber für *diese* Stelle keinen direkten Nutzen.

**Aufgabe:** Welche Strategie ist bei ihrer Auswahl vorteilhaft?

- Abschluss ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
- Master einstellen: Trefferquote 50 : 25 (schlechter)
- Doktor einstellen: Trefferquote 20 : 5 (besser!)

☺ Trotz aller Nachteile kann sich eine Promotion also auszahlen
... selbst wenn sie für die eigentliche Tätigkeit nicht relevant ist!

⚠ Ineffizienz ist der Preis für unvollständige Information.

## Bedingte Wkt: Vorurteil oder Gerechtigkeit?



Wir untersuchen hier zwei simple, aber frappierende Beispiele: Federn und Doktortitel.
Beide sind durchaus realistisch und handfeste Illustrationen für das Konzept der *bedingten Wahrscheinlichkeit*: Diese ist nicht nur eine schöne Theorie, sondern überall tägliche Praxis.
Die Argumente in unserer fiktiven Bewerbungssituation mögen manche für ungerecht halten.
In der Tat basieren Sie auf *Vorurteilen* der Arbeitgeberin – ein eher negativ besetzter Ausdruck, aber inhaltlich bedeutet es dasselbe wie bedingte Wahrscheinlichkeit: Sie nutzt ihre Erfahrung.
Unter den gegebenen spärlichen Informationen ist das Vorurteil nützlicher als gar kein Urteil.

Das Grundproblem: Die primäre Zielgröße „Eignung“ ist nicht direkt zugänglich.
Der sekundäre Faktor „Ornament“ ist eigentlich unwichtig, dafür aber leicht sichtbar.
In Ermangelung primärer Information muss man sich mit sekundärer Information begnügen.
Diese erhält dadurch eine größere Bedeutung als sie eigentlich haben sollte, und das wird als ineffizient oder ungerecht empfunden. Das ist der Preis für unvollständige Information!

Zur Beruhigung der Gemüter: Nichts hält die Arbeitgeberseite davon ab, über die erste grobe Vorinformation hinaus genauere Information zu gewinnen, zum Beispiel durch Gespräche, Tests, Assessment oder eine Probezeit. Genau das wird in der Praxis auch erfolgreich genutzt. Das ist der Vorteil, wenn man Information nicht nur *passiv* beobachtet, sondern *aktiv* herstellen kann.

Schließlich zur Ehrenrettung der Promotion, auch aus persönlicher Erfahrung: Viele Studierende empfinden große Begeisterung für ihr Fach. Dies kann sogar dazu führen, dass sie aus ehrlichem intrinsischem Interesse einer Frage auf den Grund gehen wollen und darüber sogar promovieren.
Das wird durch die obigen, allzu kühl berechnenden Argumente nicht in Zweifel gezogen!

## Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?



Eine **Moral** ist (1) ein Normensystem für das rechte Handeln von (2) vernunftbegabten Wesen mit (3) Anspruch auf Allgemeingültigkeit. Hierzu ist die **Ethik** die wissenschaftliche Beschäftigung mit der Moral.

| Praxis, konkret | Theorie, abstrakt |
|---|---|
| Performanz | Kompetenz |
| (recht) erziehen | Pädagogik |
| (gut) unterrichten | Didaktik |
| (richtig) formulieren | Grammatik |
| (richtig) rechnen | Mathematik |
| (gut) wirtschaften | Ökonomik |
| (moralisch) handeln | Ethik |

*The aim of theory really is, to a great extent, that of systematically organizing past experience in such a way that the next generation [...] will be able to absorb the essential aspects in as painless a way as possible.*

Michael F. Atiyah (1929–2019), *How research is carried out*

## Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?



„Moralisch“ bedeutet demnach so viel wie „sittlich“ oder „anständig“, jeweils relativ zu der zugrundeliegenden gesellschaftlichen Norm, und „ethisch“ bedeutet so viel wie „sittenwissenschaftlich“.

Moralen sind Normensysteme, Ethik ist die Wissenschaft hiervon, gr. ἔθος [éthos]: Charakter, Wesen, Eigenheit, Sitte, Gewohnheit.

Wir sehen hier die allgegenwärtige Dualität von Praxis und Theorie. Beide ergänzen sich und arbeiten zusammen wie linke und rechte Hand. πρᾶγμα [pragma], πρᾶξις [praxis]: Tat, Handlung, Verfahren, Umtriebe. θεωρία [theoria]: Betrachtung, Überlegung, Untersuchung, Erkenntnis.

Meine Liste ist eine praktische Sammlung von Theorien: Theorienpraxis. Ich denke nun über Theorien und ihre Analogien nach: Theorientheorie. Ich erinnere an einen frechen Sinnspruch zu Praxis – Theorie – Lehre:

*Wer etwas kann, der tut es.*
*Wer es nicht kann, der erforscht es.*
*Wer auch das nicht kann, der lehrt es.*
(anonyme Weisheit, eigene Interpretation)

## Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?



Es ist sinnvoll, den Gegenstand und die Untersuchung desselben zu unterscheiden, und genau dazu verhelfen uns präzise Bezeichnungen. In der Umgangssprache geraten diese Begriffspaare oft durcheinander. Hier ein paar einfache doch eindrückliche Beispiele zur Illustration:

Ein moralisches Problem haben Sie, wenn Sie sich um die Richtigkeit Ihres Handelns sorgen. Ethische Probleme hingegen beschäftigen Sie, wenn Sie z.B. versuchen, Kant oder andere Moralphilosophen zu lesen.

Sie haben ein psychisches Problem, wenn Sie unter einer Phobie leiden. Hingegen untersuchen Sie ein psychologisches Problem, wenn Sie sich fragen, wie Phobien mit Kindheitserfahrungen zusammenhängen.

Sie haben ein soziales Problem, wenn Sie sich ausgegrenzt fühlen. Hingegen studieren Sie ein soziologisches Problem, wenn Sie versuchen, Ausgrenzung gesellschaftswissenschaftlich zu erklären.

Sie haben ein rechnerisches Problem, wenn Ihre konkret vorliegende Rechnung nicht aufgeht. Hingegen haben Sie ein mathematisches Problem, wenn Sie Mathematik und ihre Anwendungen erforschen.

## Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?



Die Moral, also rechtes Handeln, basiert auf einem Menschenbild.

*Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser.*
Wladimir Iljitsch Lenin (1870–1924)

*Engagement, Kooperation, Ehrlichkeit, Sorgfalt, etc.*
*erfordern Mut und müssen belohnt werden.*

Hier hilft Erfahrung, individuelle und gesellschaftliche.

*An expert is a person who has made all the mistakes*
*that can be made in a very narrow field.*
Niels Bohr (1885–1962)

*An expert is someone who knows some of the worst mistakes*
*that can be made in his subject, and how to avoid them.*
Werner Heisenberg (1901–1976)

## Wie verhalten sich Ratio und Moral?



⚠ Rationales / ökonomisches / nutzenmaximierendes Verhalten kann moralisch oder unmoralisch sein, das hängt von den (Spiel-)Regeln ab und von den (gesellschaftlich vereinbarten) moralischen Normen.

*Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.*
Immanuel Kant (1724-1804), *Kritik der praktischen Vernunft* (1788)

*Erst kommt das Fressen, dann die Moral.*
Bertolt Brecht (1898-1956), *Dreigroschenoper* (1928)

☺ Gleichsinnige, günstige Ausrichtung [*alignment*]: Ratio = Moral
☹ Gegensinnige Ausrichtung [*misalignment*, Dilemma]: Ratio ≠ Moral

⚠ Unsere Gesellschaft braucht Nachhaltigkeit und Kooperation.
Wir wollen und müssen solche Dilemmata erkennen und lösen.

Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht ändern, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren.

## Wie verhalten sich Ratio und Moral?

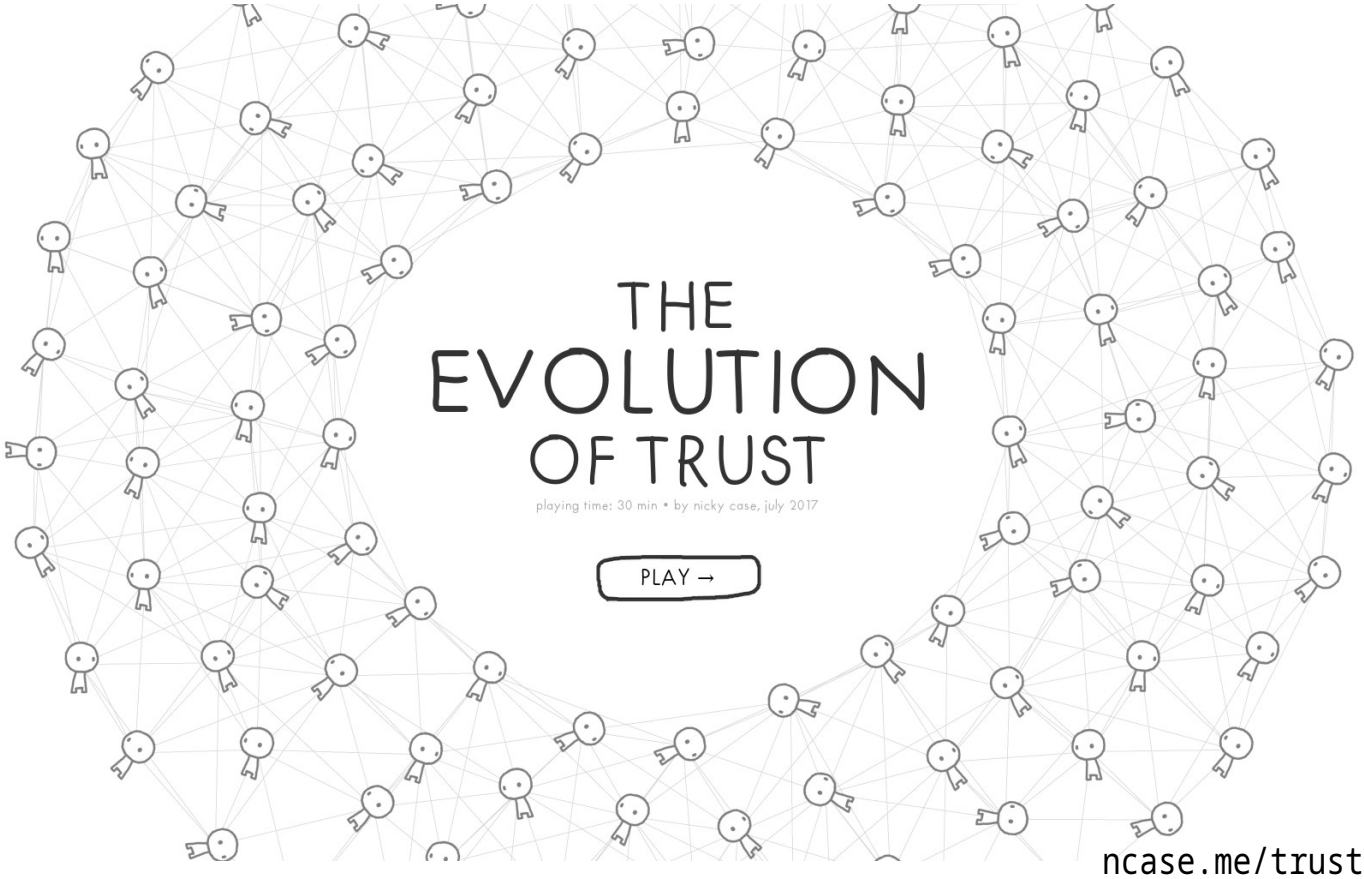


Wie können wir soziale Dilemmata erkennen und eventuell auflösen?
Zunächst einmal müssen wir Spiele verstehen und Muster erkennen:
Die Spielregeln sind vorgegeben, welches Verhalten folgt daraus?
Ist dieses Verhalten gesellschaftlich günstig / erwünscht / moralisch?

Sodann wollen wir geeignete Mechanismen / Spielregeln konstruieren. Das klingt zunächst abstrakt, ist aber absolut konkret. Wir tun es täglich: Wenn wir Prüfungen organisieren, wollen wir Ehrlichkeit belohnen und Betrug bestrafen. Ja, wir müssen dies geradezu, denn alles andere wäre naiv und bald zum Scheitern verurteilt. Das gilt allgemein, nicht nur für Prüfungsordnungen, sondern für alle Gesetze, Kontrollen, Anreize, etc.

Diese Überlegungen führen uns von simplen Spielen zu komplexeren Konflikten, von einfachen Modellen zu gesellschaftlichem Verhalten. Daher betone ich hier das Grundprinzip des Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht direkt ändern oder vorgeben, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren, die das gewünschte Verhalten ermöglichen, nicht hindern, sondern fördern.

## Wie verhalten sich Ratio und Moral?






## Wie verhalten sich Ratio und Moral?

**The Evolution of Trust** bietet hierzu eine wunderbare Illustration.
Was ich Ihnen hier erzähle, können Sie dort spielerisch ausprobieren.

Es verbindet wunderschön die beiden Themen dieses Kapitels:
soziale Dilemmata und die Evolution gesellschaftlichen Verhaltens.

Das Spiel basiert auf Robert Axelrods berühmten Büchern zum Thema:
*The Evolution of Cooperation* (Basic Books 1984, revised 2006) und
*The Complexity of Cooperation* (Princeton University Press 1997).

Untersucht wird die mögliche Kooperation im **Gefangenendilemma**.
Bei einmaligem Spiel ist hier *rational* keine Kooperation möglich.
Bei wiederholtem Spiel jedoch kann sich Kooperation lohnen.

Ob sich Kooperationsbereitschaft wirklich auszahlt und durchsetzt,
hängt vom gesellschaftlichen Kontext ab, und dieser entwickelt sich.
Daher der Titel dieser lehrreichen Simulation: *The Evolution of Trust*.

Wir werden die Frage in Kapitel K zu **wiederholten Spielen** erneut
aufgreifen und mit verfeinerten Werkzeugen genauer untersuchen.

## Das Restaurant-Paradox



**Aufgabe:** (0) Ein Ensemble von 20 Personen besucht ein Restaurant. Jede darf wählen: ein gutes Menu für 40€ oder ein exzellentes für 60€. Jede zahlt ihre eigene Rechnung und denkt: „10€ mehr wäre es mir wert, aber nicht 20€." Daher entscheidet sie sich für das Menu zu 40€.

(1) Das Ensemble beschließt *vor* dem Restaurant, eine gemeinsame Rechnung zu verlangen und alles durch 20 zu teilen. Was passiert?

**Lösung:** (1) Jede einzelne Person kostet ihr Upgrade nur noch 1€. Sie wählt also für sich das teurere Menu. Am Ende zahlt jede 60€.

Das Ergebnis ist anschaulich klar. Wir üben nochmal den Formalismus und all unsere Begriffe an diesem schönen übersichtlichen Beispiel, insbesondere Nash–Gleichgewichte, Dominanz und Symmetrie.

*Bistromathics: Numbers written on restaurant checks within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.*
Douglas Adams (1952–2001), *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

## Das Restaurant-Paradox



**Aufgabe:** Formulieren Sie explizit beide Spiele $u, u' : S \to \mathbb{R}^{20}$. Finden Sie alle Gleichgewichte, Dominanzen und Symmetrien.

**Lösung:** (0) Die Spielermenge ist $I = \{1, 2, \dots, 20\}$. Jeder Spieler $i \in I$ hat die Strategiemenge $S_i = \{\, 0{=}\text{gut},\ 1{=}\text{exzellent} \,\}$, gemeinsam also $S = \prod_{i \in I} S_i = \{0, 1\}^I$. Die Nutzenfunktion ist laut Aufgabenstellung

$$u_i : S \to \mathbb{R} : s \mapsto 10 s_i - 20 s_i = -10 s_i.$$

Für jeden Spieler ist die Strategie 0 strikt dominant. Somit ist $s = (0, 0, \dots, 0)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

(1) Im zweiten Fall kommt es zur Kopplung durch die Nutzenfunktion

$$u'_i : S \to \mathbb{R} : s \mapsto 10 s_i - \tfrac{1}{20} \textstyle\sum_{j=1}^{20} 20 s_j = 10 s_i - \sum_{j=1}^{20} s_j.$$

Für jeden Spieler ist die Strategie 1 strikt dominant. Somit ist $s = (1, 1, \dots, 1)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

Beide Spiele sind symmetrisch, also $\operatorname{Sym}(u) = \operatorname{Sym}(u') = \operatorname{Sym}(I)$. Das zweite ähnelt dem **Gefangenendilemma**, hier für $n$ Spieler.

## Soziales Dilemma vs unsichtbare Hand

G203
Erläuterung

Der schottische Ökonom **Adam Smith** (1723–1790) prägte in seinem Hauptwerk *Der Wohlstand der Nationen* (1776) die vielzitierte Idee der „unsichtbaren Hand des Marktes“: Sie sorge dafür, so seine Hoffnung, dass individueller Egoismus automatisch zu kollektiver Wohlfahrt führe.

Bei einem **sozialen Dilemma** jedoch wirkt Egoismus genau umgekehrt: Individuell rationales Verhalten führt für alle zu einer Verschlechterung. Das widerlegt allzu naive Hoffnungen oder kühne Verallgemeinerungen: Die „unsichtbare Hand“ mag manchmal wirken, aber keineswegs immer.

Ein **soziales Dilemma** liegt vor, wenn individuell rationales Verhalten ein suboptimales / ineffizientes Gesamtergebnis erzeugt, also die Akteure insgesamt schlechter dastehen als durch Absprache möglich wäre, etwa durch sozial kontrollierte Übereinkunft oder einen einklagbaren Vertrag.

Soziolog:innen sprechen von **sozialen Fallen** oder **paradoxen Effekten**: Individuell rationales Verhalten kann zu irrationalen Ergebnissen führen. Naive Analysen verfallen häufig dem Irrtum, unvernünftige Ergebnisse auf unvernünftiges Handeln zurückzuführen. Das Gegenteil ist der Fall.

## Soziales Dilemma vs Mechanismendesign

G204
Erläuterung

Das Ziel des **Mechanismendesign** (engl. *mechanism design*) ist die Schaffung eines Rahmens, der das gewünschte Verhalten ermöglicht. Die inviduelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der gemeinsame Rahmen wird gestaltet.

Ist unser Ziel, möglichst sparsam zu sein, so ist Variante 0 ratsam. Wenn unser Ziel hingegen ist, ein rauschendes Fest zu feiern, bei dem wir nicht aufs Geld schauen, dann ist Variante 1 besser. Die Wahl des Mechanismus schafft einen Rahmen, in dem das gewünschte Verhalten rational ist.

**Solidarität versus Unvernunft.** Gegenseitige Hilfe ist nicht nur eine urmenschliche Regung, sondern kann durchaus individuell rational sein, zum eigenen Vorteil, etwa bei Versicherungen oder Katastrophenhilfe. Meist geht dies über die spontane Hilfe im konkreten Einzelfall hinaus, dazu soll sie als verlässliche, allgemeine Zusicherung formuliert werden.

Bei **Fehlkonstruktion** kann Solidarität jedoch falsche Anreize setzen, im Extremfall fördert sie (global gesehen) unvernünftiges Verhalten: Tendenz zu unnötigen Risiken oder achtloser Verschwendung.

## Die Tragik des Gemeinguts / *tragedy of the commons*



**Aufgabe:** Nennen, formalisieren und analysieren Sie weitere Beispiele, die ähnlich strukturiert sind und zu sozialen Dilemmata führen können: (1) zunächst auf lokaler Ebene, etwa in einer Wohngemeinschaft, (2) auf nationaler bzw. europäischer Ebene, (3) schließlich global. Welche Mechanismen wären jeweils denkbar, hilfreich, praktikabel? Das führt schnell zu aktuellen und brisanten politischen Fragen!

**Skizze:** Hier eine Auswahl möglicher Beispiele, die Liste ist endlos.

(1) Sollte eine WG einen gemeinsamen Getränkekühlschrank haben? Ist die WG-Regel „Jeder spült den Abwasch nach Bedarf“ sinnvoll? Sollte unser öffentlicher Personennahverkehr (ÖPNV) gratis sein?

⚠ Solche Fragen werden meist nur qualitiativ-vage diskutiert. Wenn Sie dies genauer ausführen wollen, quantitativ als mathematisches Modell, so müssen Sie zuerst die zu Grunde gelegte Nutzenfunktion klären. Beim ÖPNV können zwar höhere Kosten entstehen, doch dafür die Umwelt geschont werden. Die genaue Zielfunktion ist entscheidend! Die Politik hörte diese Vorlesung und versuchte das Deutschlandticket.

## Die Tragik des Gemeinguts / *tragedy of the commons*



(2) Sollte das Studium (vollkommen oder weitgehend) gratis sein? Sollten wir unsere Finanzämter mit mehr Personal ausstatten? Wem nützt eine private Kranken- oder eine Bürgerversicherung? Schafft die Währungsunion Anreize zu achtloser Haushaltsführung? Gilt dies ebenso für den innerdeutschen Länderfinanzausgleich?

(3) Wie können wir den menschengemachten Klimawandel bremsen? Wie kann bzw. sollte Emissionsrechtehandel institutionalisiert werden? Wie können wir Rodung und Abholzung der Urwälder verhindern? Wie können wir die Überfischung der Weltmeere verhindern? Wie können wir die Ressourcen unserer Welt schützen?

⚠ Damit zielen wir auf aktuelle, zentrale Probleme der Menschheit. Eine mathematische Analyse scheint möglich, etwa durch Entwicklung geeigneter Mechanismen, eine praktikable Lösung ist hingegen schwer. Es genügt leider nicht, eine vernünftige Lösung auszuklügeln, sie muss auch akzeptiert und umgesetzt werden. Gute Ideen scheitern leider oft. Das von allen gemeinsam gewünschte Ziel wird dem Egoismus geopfert.

## Die Tragik des Gemeinguts / *tragedy of the commons*



Nach obigem Muster funktionieren viele soziale **Konfliktsituationen** wie Schwarzfahren, Versicherungs-/Sozialbetrug, Steuerhinterziehung.

Der individuelle Nutzen ist klein, der allgemeine Schaden ist groß, doch durch die große Zahl der Betroffenen wird der Schaden verteilt und dem einzelnen nur zu einem kleinen Bruchteil in Rechnung gestellt.

Das zynische Motto: **Gewinne privatisieren, Verluste sozialisieren.** Das ist insbesondere bei Bankenkrisen und -rettungen hochaktuell. Auch die wiederkehrenden Eurokrisen folgen einer ähnlichen Struktur.

Die **Politik der hohen Schornsteine** verteilt Abgase möglichst weit, die Emissionen insgesamt werden jedoch nicht reduziert, im Gegenteil! Jeder Akteur zielt nicht auf das Gesamtergebnis, sondern seinen Vorteil.

Dagegen scheint kein Kraut gewachsen, oft versagen die Mechanismen der sozialen Kontrolle, Religion, Moral, Ethik. Genau hierzu formulierte Immanuel Kant in seiner Ethik den **kategorischen Imperativ**:
*„Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.“*

## Die Tragik des Gemeinguts / *tragedy of the commons*



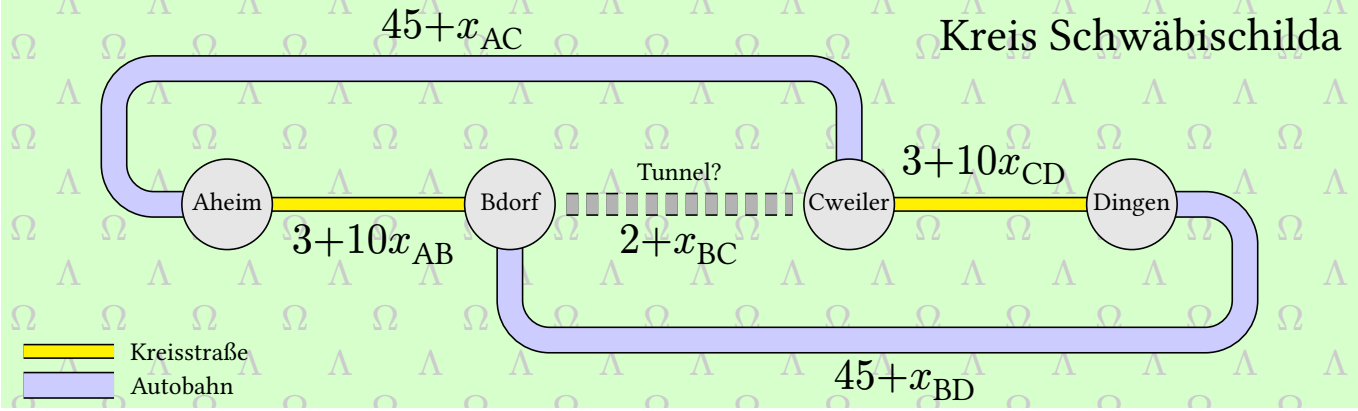
Das Problem heißt **Tragik der Allmende** [*tragedy of the commons*]. Eine *Allmende* ist gemeinschaftlich genutztes Eigentum, zum Beispiel landwirtschaftliche Nutzfläche oder Weidefläche. Allmenden sind heute noch beispielsweise im Schwarzwald und im Alpenraum verbreitet.

**Commoners** sind Bauern oder Hirten, die gemeinsam Kroneigentum als Allmende bewirtschaften. Der Begriff *tragedy of the commons* wurde 1833 geprägt vom Ökonomen William Forster Lloyd (1794–1852) und 1968 vom Ökologen Garrett Hardin (1915–2003) in *Science* ausgeführt.

Akute Beispiele für die **Ausbeutung natürlicher Ressourcen** sind: Überfischung der Weltmeere, Raubbau an Regenwäldern, Plünderung von Wildtierbeständen, Verschmutzung der Atmosphäre, anthropogene Klimaveränderung. Gemeines Muster: Individueller kurzfristiger Vorteil (Gier) schlägt gemeinsamen langfristigen Nutzen (Nachhaltigkeit).

Die **Spieltheorie** kann solche Mechanismen zunächst *erklären*, immerhin. Die Menschheit wird beweisen müssen, ob sie diesen unvermeidlichen Konflikten gewachsen ist und rechtzeitig wirksame *Lösungen* findet.

## Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess




Täglich pendeln 6000 Autofahrer von Aheim nach Dingen, entweder über Bdorf (ABD) oder über Cweiler (ACD). Angegeben sind die Fahrzeiten in Minuten, wobei $x_{ij} \in [0, 6]$ jeweils die Autozahl in Tausend ist. **Aufgabe:**

(0) Erklären Sie dies explizit als strategisches Spiel mit 6000 Spielern.

(1) Finden Sie alle Gleichgewichte: Welcher Verkehrsfluss stellt sich ein?

**Lösung:** Aufteilung 3000 : 3000, Fahrzeit jeweils 81 Minuten.

(2) Zur Verkürzung der Fahrzeit plant der Landkreis einen Autobahntunnel von Bdorf nach Cweiler. Hilft das oder nicht? Rechnen Sie es aus!

**Lösung:** Aufteilung 2000 : 2000 : 2000, Fahrzeit jeweils 90 Minuten!

## Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



Oft hört man pauschal: „Mehr Straßen garantieren schneller ankommen.“ Das kann helfen, aber keineswegs immer: „Zusätzliche Straßen können Staus verstärken.“ Auch das hört man so pauschal. Schauen wir hin!

Unser Beispiel ist zugegeben konstruiert, dafür ist es besonders einfach. Es soll zunächst illustrieren, dass das Phänomen wirklich möglich ist. Echte Problemfälle muss man wesentlich genauer untersuchen.

Die Zahlen sind so angelegt, dass wir die Lösungen leicht überblicken: In beiden Fällen teilen sich die Verkehrsströme jeweils in gleiche Teile.

Unglaublich: Der Tunnel erhöht die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten! Ohne Absprache gibt es kein Zurück: Nur wenn sich genügend Fahrer für die beiden alten Strecken ABD und ACD entschließen, verringert sich der Stau auf den Landstraßen, und alle sind insgesamt schneller.

Könnten die Pendler nicht ihren alten Strecken folgen und den Tunnel ignorieren? Sicher, doch jeden lockt die Abkürzung mit 68 Minuten. Das Verrückte ist: Jeder einzelne handelt rational! So stellt sich ein neues Gleichgewicht ein, das paradoxerweise für alle schlechter ist.

## Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



**Lösung:** (0) Spielermenge sei $I = \{1, 2, \dots, 6000\}$. Die Strategiemenge für Fahrer $i \in I$ ist $S_i = \{\mathrm{ABD}, \mathrm{ACD}\}$ bzw. mit Tunnel $S_i' = S_i \cup \{\mathrm{ABCD}\}$.
Die Verkehrszählung (in Tsd) ergibt $x_{\mathrm{AC}}, x_{\mathrm{BD}}, x_{\mathrm{BC}}, x_{\mathrm{AB}}, x_{\mathrm{CD}} : S \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
x_{\mathrm{AC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathrm{ACD} \,\} &&= x_1 \\
x_{\mathrm{BD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathrm{ABD} \,\} &&= x_2 \\
x_{\mathrm{BC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathrm{ABCD} \,\} &&= x_3 \\
x_{\mathrm{AB}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\mathrm{ABD}, \mathrm{ABCD}\} \,\} &&= x_2 + x_3 \\
x_{\mathrm{CD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\mathrm{ACD}, \mathrm{ABCD}\} \,\} &&= x_1 + x_3
\end{aligned}$$

Hieraus berechnen wie die Fahrzeiten, und diese sind zu minimieren:

$$-u_i : S \to \mathbb{R} : s \mapsto \begin{cases} 48 + x_{\mathrm{AC}}(s) + 10x_{\mathrm{CD}}(s) & \text{für } s_i = \mathrm{ACD}, \\ 48 + 10x_{\mathrm{AB}}(s) + x_{\mathrm{BD}}(s) & \text{für } s_i = \mathrm{ABD}, \\ 8 + 10x_{\mathrm{AB}}(s) + x_{\mathrm{BC}}(s) + 10x_{\mathrm{CD}}(s) & \text{für } s_i = \mathrm{ABCD}. \end{cases}$$

☹ Die Strategiemenge $S = S_1 \times \cdots \times S_{6000}$ ist astronomisch groß!
☺ Das Spiel $u$ ist spieler-symmetrisch: $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(I)$. Statt des Strategievektors $s \in S$ genügen uns die Häufigkeiten der Strategien!

## Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



(1) Angenommen, $x_1$ Tsd wählen ACD, $x_2$ Tsd wählen ABD.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\
z_1(x_1, x_2) = [45 + x_1] + [3 + 10x_1] \\
z_2(x_1, x_2) = [3 + 10x_2] + [45 + x_2]
\end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2$, also $x_1 = x_2 = 3$ (LGS, Symmetrie).
In der Ausgangssituation ist die Fahrzeit somit $z_1 = z_2 = 81$ Minuten.

(2) Angenommen, $x_3$ Tsd fahren ABCD durch den neu eröffneten Tunnel.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\
z_1(x_1, x_2, x_3) = [45 + x_1] + [3 + 10(x_1 + x_3)] \\
z_2(x_1, x_2, x_3) = [3 + 10(x_2 + x_3)] + [45 + x_2] \\
z_3(x_1, x_2, x_3) = [3 + 10(x_2 + x_3)] + [2 + x_3] + [3 + 10(x_1 + x_3)]
\end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2 = z_3$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ (LGS).
Mit Tunnel erhöht sich die Fahrzeit auf $z_1 = z_2 = z_3 = 90$ Minuten!

☺ Spieler-Symmetrie hilft! Die Nash–Gleichgewichte sind strikt!
Zur Vereinfachung betrachten wir $x_i$ als kontinuierlich (*non-atomic*).

## Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Das erstaunliche Ergebnis wird als **Braess–Paradox** bezeichnet: Eine zusätzliche Handlungsoption kann die Situation für alle verschlechtern!

**Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung**

Von D. Braess, Münster [1])

Eingegangen am 28. März 1968

*Zusammenfassung:* Für die Straßenverkehrsplanung möchte man den Verkehrsfluß auf den einzelnen Straßen des Netzes abschätzen, wenn die Zahl der Fahrzeuge bekannt ist, die zwischen den einzelnen Punkten des Straßennetzes verkehren. Welche Wege am günstigsten sind, hängt nun nicht nur von der Beschaffenheit der Straße ab, sondern auch von der Verkehrsdichte. Es ergeben sich nicht immer optimale Fahrzeiten, wenn jeder Fahrer nur für sich den günstigsten Weg heraussucht. In einigen Fällen kann sich durch Erweiterung des Netzes der Verkehrsfluß sogar so umlagern, daß größere Fahrzeiten erforderlich werden.

Dietrich Braess promovierte 1964 an der Universität Hamburg in theoretischer Kernphysik. Er habilitierte 1968 in Mathematik an der Universität Münster. Dort war er Professor, anschließend an der Ruhr-Universität Bochum. Seine Forschungsschwerpunkte lagen in der Numerik partieller Differentialgleichungen, insbesondere elliptische PDE, Approximationstheorie, Mehrgitterverfahren und Finite Elemente.



## Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

📖 *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*, Unternehmensforschung Operations Research 12 (1968), 258–268. Ein Scan der Originalarbeit und eine umfangreiche Literatursammlung finden Sie auf der Homepage von Dietrich Braess, `homepage.ruhr-uni-bochum.de/Dietrich.Braess/#paradox`.

Die Rechnung illustriert wunderbar die Idee des Nash–Gleichgewichts! Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele, darunter auch solch verblüffende Paradoxien. Die genaue Analyse löst dieses Scheinparadox allerdings schnell auf. Bei genauerem Hinsehen ähnelt auch dies dem Gefangenendilemma.

Ist es nur eine psychologische Falle? Eine Charakterschwäche im Sinne von Gier schlägt Geist? Nicht nur, jeder einzelne handelt, wie gesagt, vollkommen rational. Dabei optimieren alle Teilnehmer rein individuell. Die vertrackte Situation provoziert dieses Verhalten, es ist das Resultat individueller Optimierung ohne bindende Absprache oder Koordinierung.

## Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



**Aufgabe:** Entwickeln Sie ein Verkehrsleitsystem, das jedem Fahrer am Ortsausgang von Aheim und Bdorf zufällig eine Route zuweist, sodass die erwartete Fahrzeit für alle gleich ist. Welches Minimum können Sie so erreichen? Hierzu braucht es eine unabhängige Instanz! Muss dieses System Strafen androhen? Erreicht es ein korreliertes Gleichgewicht?

Mehr Straßen erhöhen automatisch den Verkehrsfluss? Nicht immer! Die Planung vor dem Straßenbau ist wichtig, wie oben gesehen, und manchmal erfordert optimaler Betrieb eine aktive zentrale Steuerung

Ähnlich drastisches Beispiel: In manchen Städten ignorieren Fahrer:innen die Ampeln, um sich „noch schnell“ über die Kreuzung zu schummeln. In der Rushhour führt dies zum katastrophalen Gegenteil: Stau!

Das kann übrigens auch für Geschwindigkeitsbeschränkungen gelten: Individuelle Disziplin kann allseitigen Nutzen erzeugen. So weit, so klar. Das ist allerdings unpopulär und schwer zu vermitteln: Preis der Freiheit.

*Freie Fahrt für freie Bürger!* forderte der ADAC 1974 zu Zeiten der Ölpreiskrise, und später die Leipziger Montagsdemonstration 1989.

## Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



Die **Verkehrsströmungslehre** (engl. *traffic flow theory and control*) ist ein ausgedehntes Gebiet und alltäglich nahezu überall relevant. Je nach Trägersystem (Straße, Bahn, Flugzeug, etc) nutzt sie spezielle mathematische Modelle und Methoden: Optimierung (kombinatorisch, numerisch, Simulation) und Stochastik (Warteschlangentheorie) und schließlich Spieltheorie (individuell vs zentral gesteuert).

Den Straßenverkehr kann man dabei kontinuierlich modellieren analog zur Fluiddynamik mit Differentialgleichungen, oder auch mit zellulären Automaten wie im Nagel–Schreckenberg–(NaSch–)Modell, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Schreckenberg-Modell`.

Seit den 1990er Jahren entwickeln sich spieltheoretische Ansätze zu Psychologie und Rationalität, ökonomischen Anreizen, usw. Die Computersimulation wird ergänzt durch Experimente mit menschlichen Teilnehmern wie in der experimentellen Ökonomik. Einen Querschnitt zeigt der Symposiumsband von Schreckenberg, Selten: *Human Behaviour and Traffic Networks*, Springer 2004. Aktuell stellen Elektromobilität und ÖPNV neue Herausforderungen.

# Das Braess–Paradox... im Herzen von Stuttgart!

Das Braess–Paradox ist ebenso simpel wie verblüffend: *Hinzufügen* einer Verbindung kann alle Fahrzeiten *erhöhen* und den Gesamtfluss *senken*. Ist es eine rein akademische Konstruktion, zwar lehrreich, aber fiktiv? Oder lässt sich das Phänomen auch in der Wirklichkeit beobachten? Tatsächlich wird es als urbane Legende tradiert. Was daran ist wahr? Die erste wissenschaftliche Erwähnung stammt... aus Stuttgart!

Das Beispiel von Braess stammt aus dem Frühjahr 1968 und mag konstruiert scheinen, läßt sich aber durch die Erfahrung untermauern. Ende 1968 wurde in Stuttgart das Straßensystem, das am Schloßplatz entstanden war, eröffnet und von den Benützern nicht in der geplanten Weise angenommen. Ein Verkehrschaos zu den Spitzenzeiten war die Folge. Es wurde durch Sperrung der unteren Königstraße, also genau den im Beispiel betrachteten Fall, behoben.

📖 Walter Knödel: *Graphentheoretische Methoden und ihre Anwendungen.* Springer 1969. Dieses Lehrbuch behandelt kürzeste Wege und maximale Flüsse. Auf den Seiten 57–59 wird kurz und prägnant die Problematik der de/zentralen Optimierung unter Last erläutert, dazu das Braess–Paradox mathematisch erklärt und mit dem Stuttgarter Beispiel illustriert.



# Das Braess–Paradox... im Herzen von Stuttgart!

Ein Punkt aber verdient, besonders hervorgehoben zu werden. Überläßt man den individuellen Verkehr sich selbst, dann wird jeder Verkehrsteilnehmer versuchen, die für ihn persönlich günstigsten Wege zu benützen. Ob das im Interesse der Allgemeinheit liegt oder ob er durch Benützen ohnehin schon überlasteter Straßenzüge einer großen Anzahl anderer Verkehrsteilnehmer Schaden zufügt, wird ihm gleichgültig sein oder sich sogar seiner Kenntnis entziehen. Man könnte daher vermuten, daß in einem sich selbst überlassenen individuellen Verkehr sich stets einige wenige Vorteile auf Kosten vieler Verkehrsteilnehmer verschaffen können. Diese Annahme ist nicht in jedem Fall richtig. Es kann der für die Allgemeinheit noch schlimmere Fall eintreten, daß jeder Verkehrsteilnehmer auf dem für ihn optimalen Weg fährt und dabei länger braucht als in einem total gelenkten Verkehr im gleichen Netz, wo es nicht gestattet ist, die optimalen Wege zu benützen, sondern Umwege erzwungen werden. Wir belegen diese Behauptung durch ein Beispiel von Braess [12]. Quintessenz des Beispiels ist: Auf den optimalen Wegen blockieren sich die Verkehrsteilnehmer gegenseitig. Wird der Verkehr durch Zwangsmaßnahmen (Sperren einer Straße) entflochten, dann müssen die Verkehrsteilnehmer, die diese Straße nicht benützen dürfen, Umwege in Kauf nehmen. Sie kommen aber auf den Umwegen rascher voran als vorher auf den optimalen Wegen.

## Das Braess–Paradox… im Herzen von Stuttgart!



Prof. Knödel war und bleibt eine Ikone der Universität Stuttgart. Deshalb male ich die Geschichte mit etwas Lokalkolorit aus.

Walter Knödel (1926–2018) studierte an der Universität Wien Mathematik und Physik. Er promovierte dort 1948 in Zahlentheorie und habilitierte sich 1953. Ab 1961 war er Professor für Informatik an der Universität Stuttgart, damals hieß es „Lehrstuhl für Instrumentelle Mathematik“.

Die 1960er Jahre waren geprägt von Studien- und Verwaltungsreformen. Studierende verdammten den „Muff von 1000 Jahren unter den Talaren“ und forderten „Drittelparität“. Die TH Stuttgart nannte sich seit 1965 Universität und gab sich eine neue Grundordnung: Die drei alten großen Fakultäten wurden aufgelöst und 18 neue Fachbereiche geschaffen.

Prof. Knödel schrieb 1968 ein Memorandum zur Gründung eines eigenen Fachbereichs für Computerwissenschaften an der Universität Stuttgart und initiierte 1970 den Studiengang Informatik. Aus seinem Lehrstuhl entstand 1971 das Institut für Informatik. Der Fachbereich 19 Informatik wurde 1975 eingerichtet und Prof. Knödel zum Gründungsdekan gewählt.

## Das Braess–Paradox… im Herzen von Stuttgart!



Die Süddeutsche Zeitung schreibt in ihrer Ausgabe vom 19. Mai 2010: „So waren die Verkehrsplaner in Stuttgart 1969 überrascht, als nach großen Investitionen ins Straßennetz rund um den Schlossplatz der Verkehrsfluss ins Stocken kam. Die Situation besserte sich erst, nachdem ein Teil der Königsstraße zur Fußgängerzone erklärt wurde.“

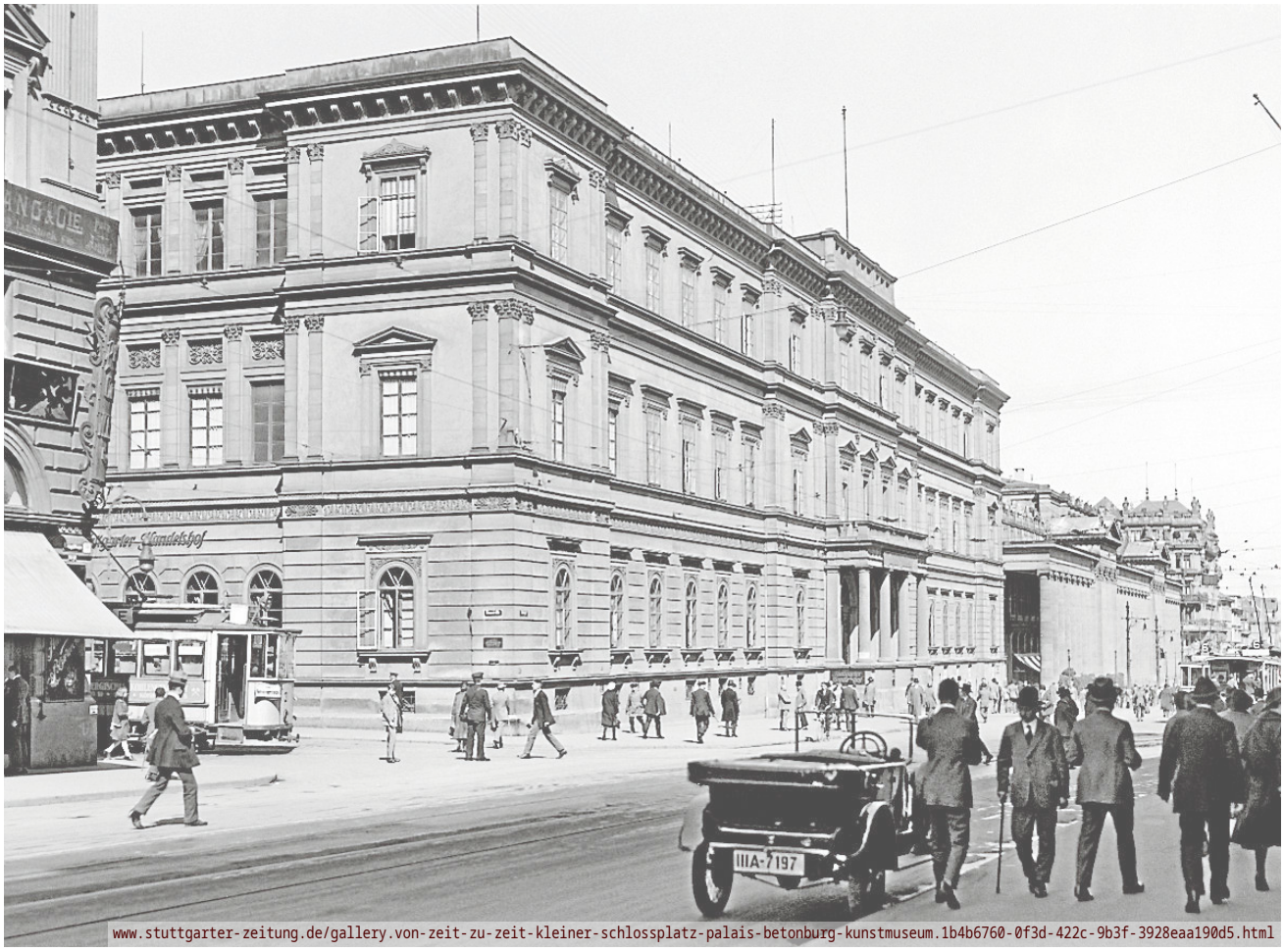
Weitere solche Beispiele werden aus New York und Seoul berichtet; das Problem sei unter Experten inzwischen hinlänglich bekannt, so heißt es. Straßenplaner nutzen geeignete Messdaten und Simulationssoftware zur Optimierung, insbesondere zur frühzeitigen Erkennung und Vermeidung paradoxer Verkehrsflüsse. Denken hilft! Mathematik wirkt!

Es gibt **physikalische Entsprechungen** mit Federn in der Mechanik oder elektrischen Strömen in einer Schaltung, siehe Joel Cohen, Paul Horowitz: *Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks*, Nature 352 (1991), 699–701, online `www.nature.com/articles/352699a0`.

Das Phänomen ist also kein psychologischer Taschenspielertrick. Kommt das Paradox auch in realen Verkehrssituationen vor? Ja!

# Das Braess–Paradox… im Herzen von Stuttgart!

G221




# Das Braess–Paradox… im Herzen von Stuttgart!

G222
Erläuterung

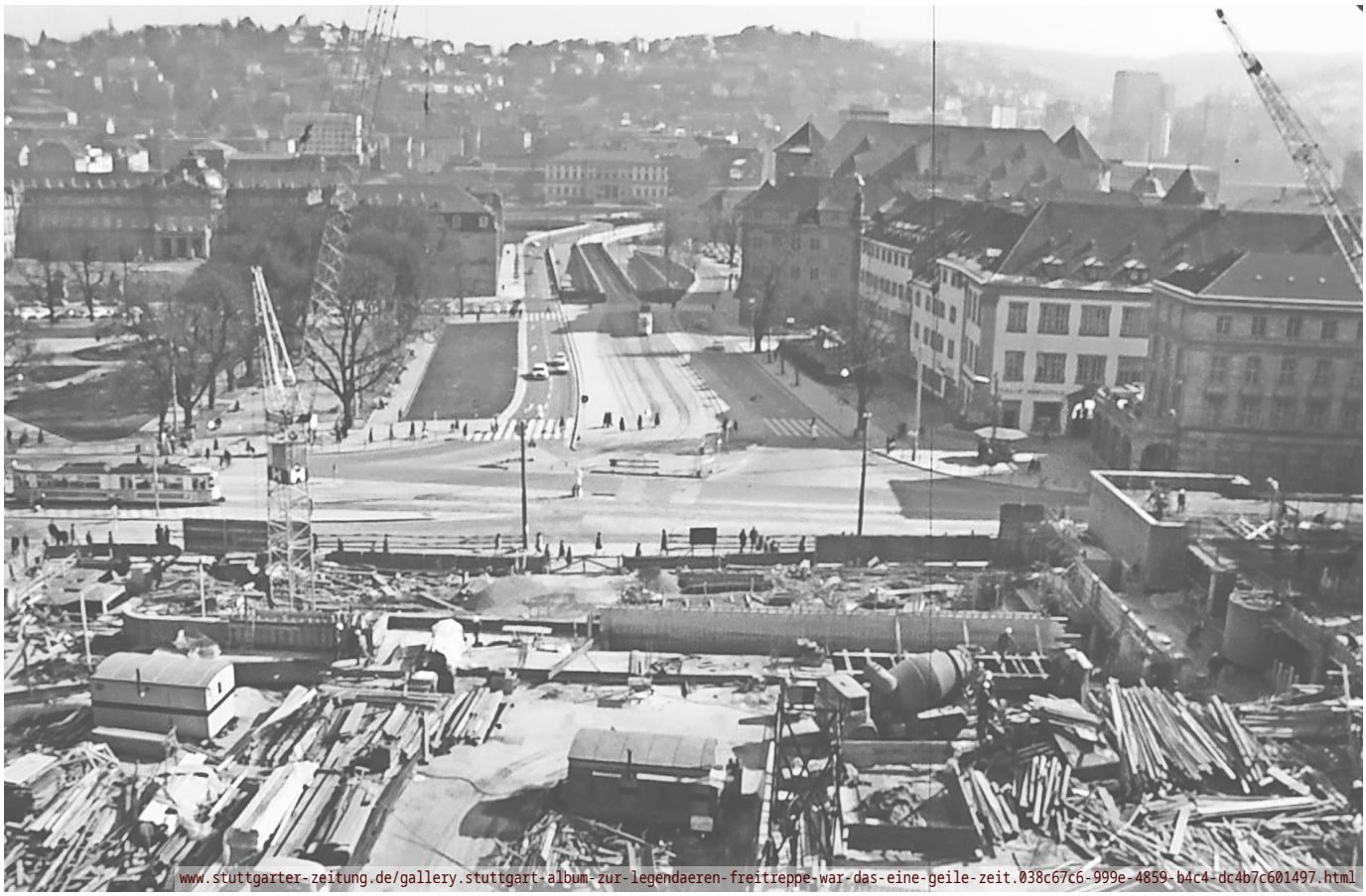
Stuttgarter Verkehrsprojekte sind stets ambitioniert sowie politisch und emotional aufgeladen. Insbesondere der Kleine Schlossplatz gilt als Wahrzeichen für die Irrtümer der Stadtplanung.

Am 04.12.1968 eröffnete Oberbürgermeister Arnulf Klett (1905–1974) den Kleinen Schlossplatz: drei Jahre Bauzeit und 100 Millionen DMark für 6000 Quadratmeter. Als OB war Klett für die Stadtplanung nach dem Zweiten Weltkrieg verantwortlich. Weite Bevölkerungsteile bevorzugten einen Wiederaufbau beschädigter Gebäude, doch Klett wollte den Grundriss der City neu ordnen. Kritiker:innen werfen ihm daher vor, die wenigen Reste des alten Stuttgart voreilig abgerissen zu haben, so etwa 1963 das Kronprinzenpalais, am Platz des heutigen Kunstmuseum Stuttgart.

Die Planungen beginnen sofort nach dem Krieg: Im Sommer 1945 gründet sich an der TH eine Arbeitsgruppe Stadtplanung und Verkehr, 1947 beauftragt Klett einen Generalbebauungsplan. Erklärtes Ziel ist die autofreundliche Stadt. Jahrelang streitet man über das Kronprinzenpalais aus dem Jahre 1854. Bahnhofserbauer Paul Bonatz (1877–1956) plädierte vergeblich für den Erhalt dieses „wichtigen Teils des Stadtgedächtnisses“. Stadt und Land einigen sich 1956 schließlich auf die autogerechte Tunnellösung. Bis 1963 steht die Ruine am Rande des Schlossplatzes, dann muss der historische Bau dem Planiedurchstich weichen – unter großen Protesten in der Bevölkerung.

Bei Eröffnung des „Stadtbalkon“ jubeln Stadthonoratioren und Fachwelt, doch bald schon steht die „Betonburg“ für Drogen, Schmutz und Tristesse. Die Situation bessert sich langsam, als die Königstraße 1977 zur Fußgängerzone wird, dann vor allem als 1993 zur Leichtathletik-WM eine 30 Meter breite Freitreppe von der Königstraße empor den Kleinen Schlossplatz spürbar belebt. Dieses sehr beliebte Provisorium wiederum macht 2002 Platz für das lang ersehnte Kunstmuseum.
Photosammlung: `zeitsprung-stuttgart.de/einzelansicht-zeitsprung/schlossplatz-005`

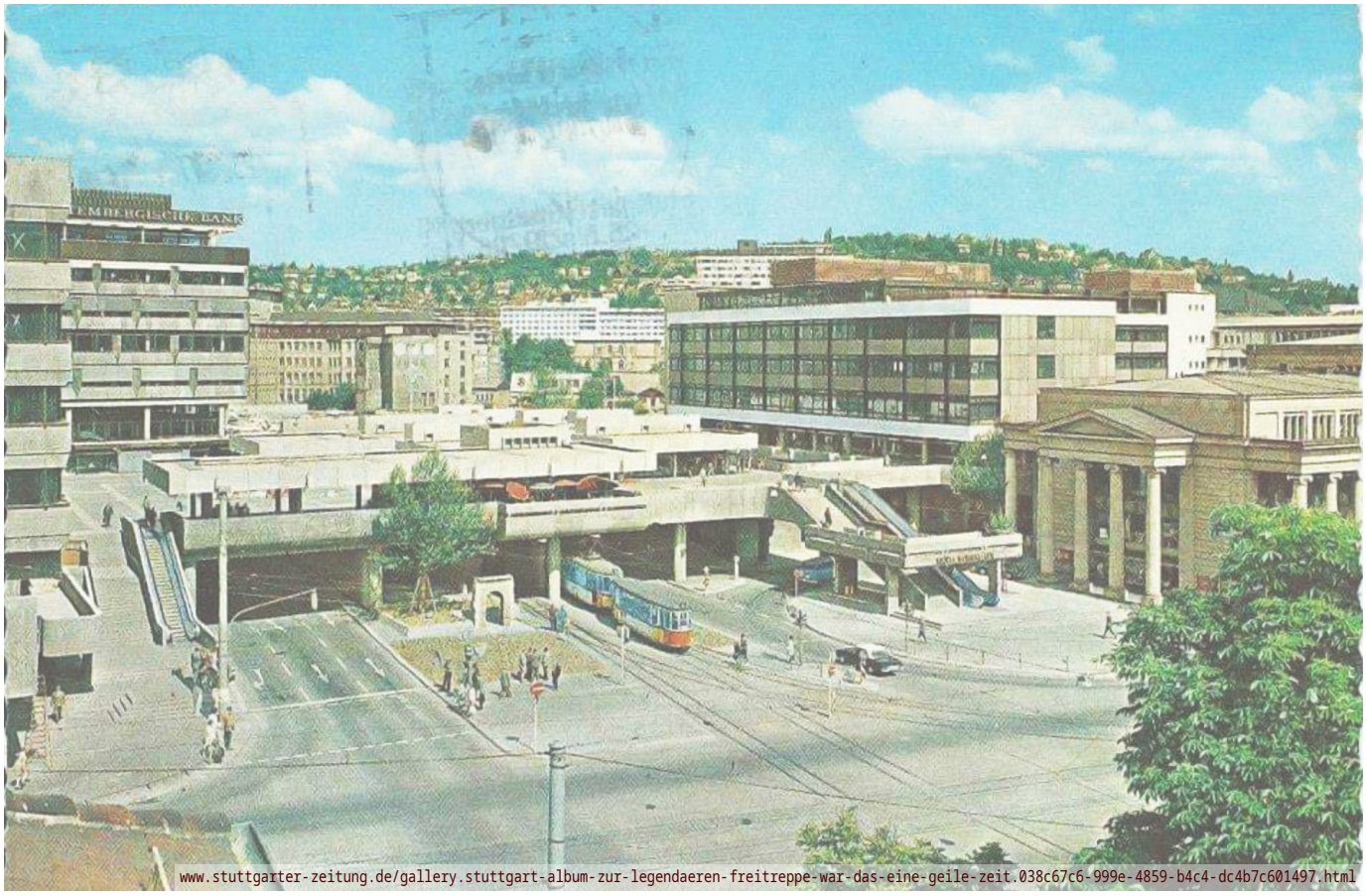
# Das Braess–Paradox... im Herzen von Stuttgart!




1968 Bauarbeiten für den Kleinen Schlossplatz, Blick auf die Planie

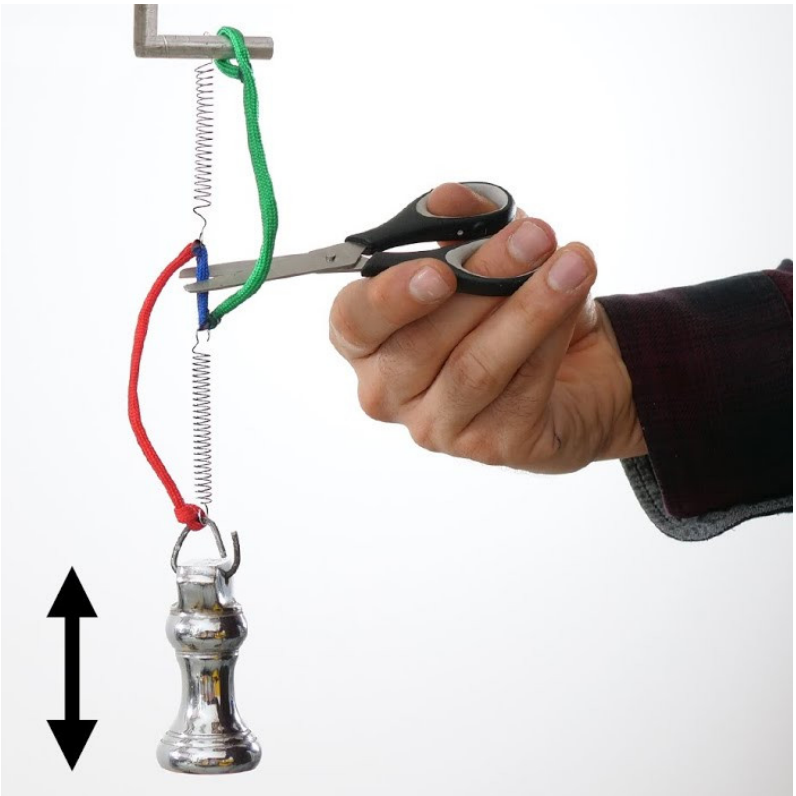


# Das Braess–Paradox... im Herzen von Stuttgart!




1968 Postkarte der „Betonburg“ auf dem Kleinen Schlossplatz

# Paradoxe Systeme in der Physik



- Steve Mould: *The Spring Paradox*, `youtu.be/Cg73j3QYRJc` (9min)
- Up and Atom: *Braess's Paradox*, `youtu.be/cALezV_Fwi0` (17min)



# Paradoxe Systeme in der Physik

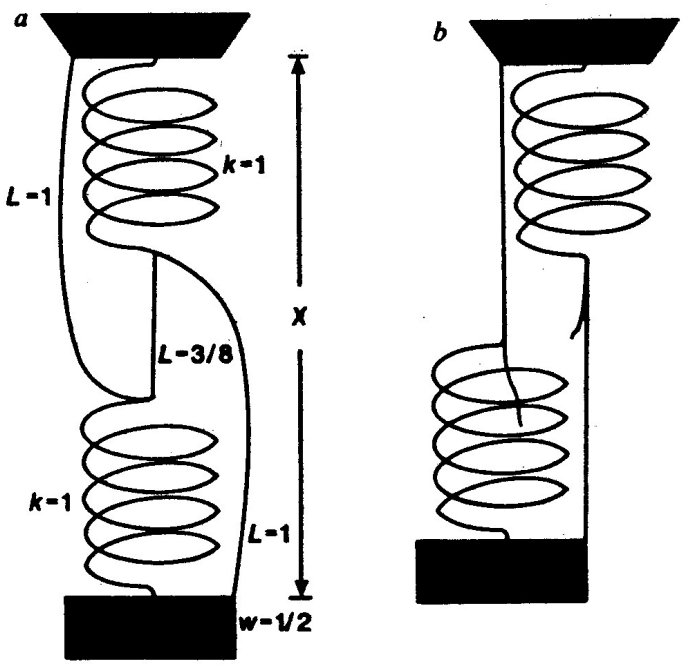



FIG. 1 Mechanical network. Springs have zero unstretched length and spring constant $k=1$. Strings are inelastic. The string that links the two springs has length $\frac{3}{8}$ m. Both safety strings have length 1 m. The weight exerts a force of $\frac{1}{2}$ N. *a*, In the initial network, both safety strings are limp, and the distance $X$ from support to weight is $1\frac{3}{8}$ m. *b*, After the linking string is cut, the weight is higher at equilibrium; the new distance from support to weight is $1\frac{1}{4}$ m.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

## Paradoxe Systeme in der Physik

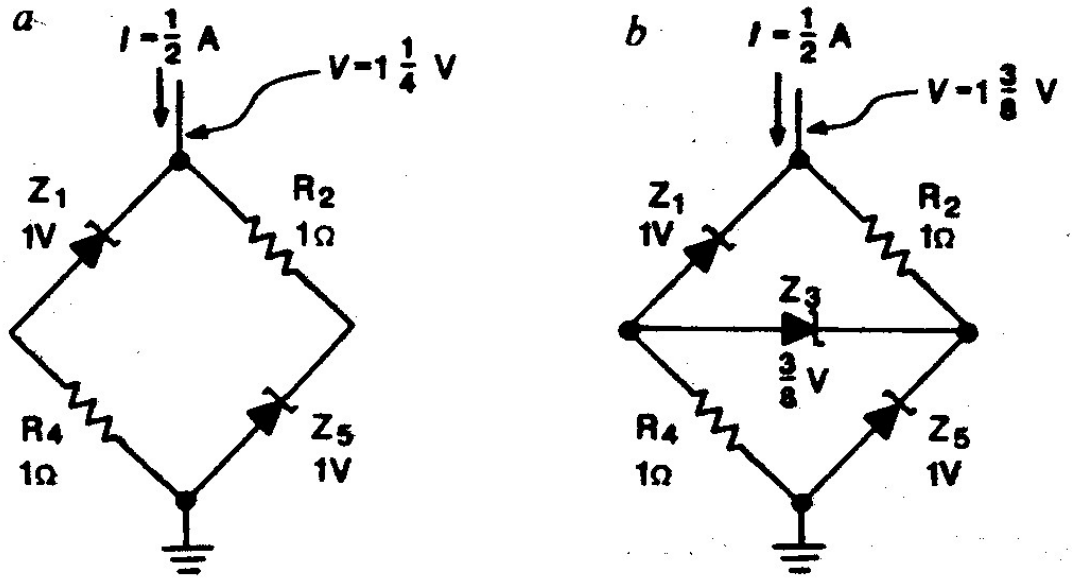



FIG. 3 Electrical network of ideal components. *a*, Initially, current flows symmetrically through left and right branches, and the voltage drop from source to ground is $1\frac{1}{4}$ V. *b*, When a $\frac{3}{8}$-V Zener diode is introduced across the network, the current through the 1-V Zener diodes drops to zero and all current flows through the 1-Ω resistors and the $\frac{3}{8}$-V Zener diode, producing a larger voltage drop from source to ground of $1\frac{3}{8}$ V.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

## Paradoxe Systeme in der Physik



**Aufgabe:** Führen Sie das oben skizzierte mechanische System aus und rechnen Sie das behauptete paradoxe Verhalten sorgfältig nach! Sie können es sogar bauen… und als Party-Trick bewundert vorführen.

**Braess im Stromnetz?** Zur Einbindung regenerativer Energiequellen muss das Stromnetz ausgebaut werden. Hinzufügen neuer Leitungen kann das Netz instabiler machen und Stromausfälle verursachen.

**Mehr Physik?** Können Sie dies für Wasser realisieren? oder Wärme? Welche physikalischen Eigenschaften ermöglichen das Paradox?

**Projekt:** Er/Finden Sie (potentiell) paradoxe Systeme in Ihrem Alltag:

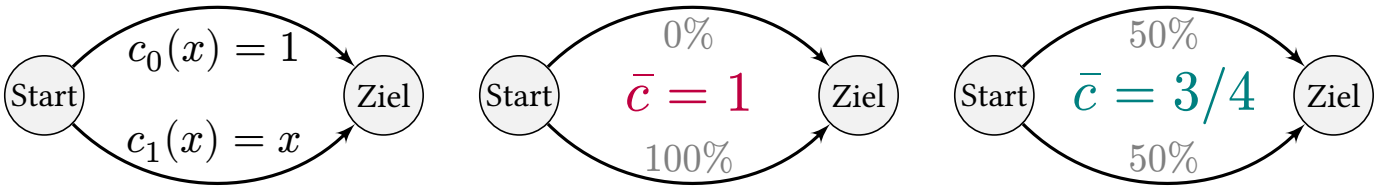
- Nutzung von Aufzügen und Treppen: Warteschlangen?
- In der Mensa: Essensausgabe? Geschirrrückgabe?
- Anmeldung zu Übungsgruppen, Seminaren, etc.

Vermutlich müssen Sie hier geeignete Annahmen / Parameter wählen. Selbst wenn die so konstruierten Beispiele etwas unrealistisch anmuten, so illustrieren sie doch immerhin die Möglichkeit paradoxen Verhaltens.

## Pigous Beispiel: schockierend einfach

? *„[The individual is] led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention.“* (Adam Smith, *The Wealth of Nations*, 1776)

? *„Selfish behavior need not produce a socially optimal outcome.“*
Extremes Beispiel von A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, 1920:




Zwei Routen stehen zur Verfügung: Auf der oberen ist die Fahrzeit immer 1 Stunde, auf der unteren $x$ Stunden bei Auslastung $x \in [0, 1]$.

**Aufgabe:** Was ist das Gleichgewicht bei (1) individueller Optimierung vs (2) zentraler Optimierung durch ein verbindliches Verkehrsleitsystem?

**Lösung:** (1) Alle wählen den unteren Weg, die Fahrzeit ist 1 Stunde. (2) Jeweils die Hälfte wird (zufällig) nach oben oder unten geleitet. Niemand ist schlechter dran als in (1). Die Hälfte der Fahrer benötigt nur noch $1/2$ Stunde. Die mittlere Fahrzeit sinkt von 1 auf $3/4$ Stunde!

## Pigous Beispiel: schockierend einfach



Erfahrungsgemäß akzeptieren Autofahrer:innen nur widerwillig etwaige Eingriffe in ihre Entscheidungsfreiheit, siehe *Freie Fahrt für freie Bürger!* Dennoch kann eine zentrale Koordinierung – mit bindender Wirkung! – die Effizienz für alle steigern, in günstigen Fällen wie oben skizziert.

Solche Fragen stellen sich zum Beispiel auch in digitalen Netzwerken: Datenpakete werden von ihrem Start zum gewünschten Ziel geleitet, und auch hier entstehen Kosten und Wartezeiten. Die Koordination kann zentral organisiert werden, oder aber den Akteuren überlassen werden.

Somit erweisen sich diese paradoxen Beispiele nicht als exotisch, wie es zunächst scheinen mag, sondern eröffnen ein faszinierendes Thema. Sowohl auf unseren „Datenautobahnen“ als auch auf realen Straßen lohnt es, effiziente Mechanismen zu suchen und zu implementieren.

Zum Vergleich und als Kontrast: In der klassischen Logistik transportiert ein Unternehmen die Waren und optimiert dazu zentral alle Abläufe. Das ist bereits eine hohe (mathematische) Kunst. Durch dezentral und egoistisch handelnde Akteure entstehen völlig neue Herausforderungen!

## Wie hoch ist der Preis der Anarchie?



Im obigen Braess–Beispiel wächst die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten, im viel einfacheren Pigou–Beispiel von $3/4$ auf 1 Stunde. Gibt es noch schlimmere Beispiele? Wie groß kann die Ineffizienz maximal werden?

Gefragt und beantwortet haben dies Tim Roughgarden und Éva Tardos: *How bad is selfish routing?* JACM 49 (2002) 236-259. Ihr Ergebnis ist ebenso elegant wie überraschend und erhielt 2012 den Gödel–Preis:

**Satz G2A:** Preis der Anarchie, Roughgarden–Tardos 2002

Gegeben sei ein Straßennetz. Die Fahrzeit für jede einzelne Strecke $e$ sei affin-linear, also von der Form $c_e(x) = a_e + b_e x_e$ bei Auslastung $x_e$.

Sei $C$ die Fahrzeit bei kollektiver Optimierung und $I$ die Fahrzeit bei individueller Optimierung. Dann gilt die Schranke $I/C \leq 4/3$.

Bestenfalls gibt es keine Diskrepanz, schlimmstensfalls führt Egoismus zu 33% Ineffizienz. Diese Schranke hängt von den Kostenfunktionen ab, siehe *Routing Games*, Kapitel 18 in *Algorithmic Game Theory*, CUP 2007; online frei zugänglich unter `www.timroughgarden.org`.

## Wie hoch ist der Preis der Anarchie?



Arthur Cecil Pigou (1877–1959) war ein britischer Ökonom. In seinem berühmtesten Werk *The Economics of Welfare* (1920) entwickelt er das Konzept der Externalitäten seines Lehrers Alfred Marshall (1842–1924).

Es ist erstaunlich, dass es in Satz G2A eine universelle Schranke gibt! Sogar noch erstaunlicher ist, dass dies nahezu einhundert Jahre lang niemandem aufgefallen ist, ja dass nicht einmal die Frage gestellt wurde. Dementsprechend hat das Ergebnis ein neues Forschungsgebiet eröffnet.

Individuelles versus zentrales Routing ist ein aktuelles Forschungsthema in der Schnittmenge von Verkehrsplanung, Spieltheorie und Algorithmik. Zu diesem Themenkomplex gibt es ein unterhaltsam-informatives Interview mit Tim Roughgarden, `youtu.be/w7ddIRFfqM` (80min).

*Among many recognitions, Tim has received the Gödel Prize for his research in computational game theory, a field that resides in the intersection of two disciplines: economics and computer science. We talk to Tim about one of the central insights of that work: the Prize of Anarchy, which quantifies the loss in efficiency of a system due to selfish behaviour of its agents.*

## Potentialspiele: Alle ziehen am selben Strang.



Sei $u : S_I \to R_I$ ein Spiel. Spieler $i \in I$ hat die Auszahlung $u_i : S_I \to R_i$. Können wir diese Funktionen durch ein $\Phi : S_I \to R$ zusammenfassen? Wann ist unser Spiel $u = (u_1, \dots, u_n)$ äquivalent zum Spiel $(\Phi, \dots, \Phi)$?

(o) Wir nennen $\Phi : S_I \to R$ ein **Ordnungspotential** für $u$, falls

$$u_i(x_i; s_{-i}) \leq_i u_i(y_i; s_{-i}) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(x_i; s_{-i}) \leq \Phi(y_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler $i \in I$ und alle Aktionen $x_i, y_i \in S_i$ bei festem $s_{-i} \in S_{-i}$.

(a) Wir betrachten $u : S_I \to \mathbb{R}_I$. Ein **affines Potential** $\Phi : S_I \to \mathbb{R}$ erfüllt

$$u_i(x_i; s_{-i}) - u_i(y_i; s_{-i}) = w_i[\Phi(x_i; s_{-i}) - \Phi(y_i; s_{-i})] \text{ mit } w_i \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Demnach existieren Integrationskonstanten $c_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$, sodass

$$u_i(x_i; s_{-i}) = w_i\, \Phi(x_i; s_{-i}) + c_i(s_{-i}).$$

(e) Für ein **exaktes Potential** verlangen wir zudem $w_i = 1$ für alle $i \in I$.

Somit ist das Spiel $u$ ordnungs- / affin / exakt äquivalent zu $(\Phi, \dots, \Phi)$ gemäß unserer Definition E241, und wir nennen $u$ ein **Potentialspiel**.

## Potentialspiele: Alle ziehen am selben Strang.



🙂 Potentiale sind eine besondere Symmetrie, nicht notwendig in den Spielern, sondern in den Auszahlungen: *Alle ziehen am selben Strang.*

Sei speziell $R = R_i = \mathbb{R}$. Für ein **affines Potential** verlangen wir

$$u_i(x_i; s_{-i}) - u_i(y_i; s_{-i}) = w_i[\Phi(x_i; s_{-i}) - \Phi(y_i; s_{-i})] \text{ mit } w_i \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Dies können wir geschickt umformulieren: Demnach hängt die Differenz

$$c_i(x_i; s_{-i}) := u_i(x_i; s_{-i}) - w_i \Phi(x_i; s_{-i})$$

nicht von $x_i$ ab, also $u_i(x_i; s_{-i}) = w_i \Phi(x_i; s_{-i}) + c_i(s_{-i})$.

**Übung:** Ist $\Phi$ ein affines Potential zu $u$, so ist $\bar{\Phi}$ ein affines Potential zu $\bar{u}$. Diese Fortsetzung ist die Hauptmotivation, affine Potential zu betrachten.

Vage Analogie zu Potentialen in der Physik: Wir betrachten ein stetiges Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Eine diff'bare Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist ein Potential / Stammfunktion, falls $f_i = \partial F / \partial x_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. In Potentialspielen ist die Konstruktion zwar offenkundig verschieden, doch in beiden Fälen vereinfachen wir $n$ Funktionen zu einer einzigen.

## Potentialspiele haben reine Nash–Gleichgewichte.



**Satz G2B:** Rosenthal, 1973

Sei $u : S_I = \prod_{i\in I} \to \prod_{i\in I} R_i = R_I$ ein Spiel mit Potential $\Phi : S_I \to R$. Dann ist $u$ äquivalent zu $v = (\Phi)_{i\in I}$, also $\mathrm{NE}(u) = \mathrm{NE}(v) \supseteq \operatorname{Arg\,max} \Phi$.

(1) Ist $S_I$ endlich, oder $S_I$ kompakt und $\Phi$ stetig, so gilt $\operatorname{Arg\,max} \Phi \neq \emptyset$.

(2) Allgemein gilt $\mathrm{NE}(v) = \{\, s \in S_I \mid \forall i \in I : s_i \in \operatorname{Arg\,max}_{x_i \in S_i} \Phi(x_i; s_{-i}) \,\}$

☺ Nicht alle Spiele haben *reine* Nash–Gleichgewichte, denken Sie an *Matching Pennies* oder *Schere-Stein-Papier*. Allgemeine Existenzsätze hierzu sind entsprechend selten. Das beste Werkzeug sind Potentiale!

📖 Robert W. Rosenthal: *A Class of Games Possessing Pure-Strategy Nash Equilibria.* International Journal of Game Theory 2 (1973) 65–67.

Dov Monderer, Lloyd S. Shapley: *Potential Games.* Games and Economic Behavior 14 (1996) 124–143. Jedes Potentialspiel hat gute Eigenschaften, etwa die *finite improvement property*: Wenn die Spieler reihum ihre Strategien verbessern, so endet dies nach endlich vielen Schritten. Monderer und Shapley zeigen eine geeignete Umkehrung!

## Potentialspiele haben reine Nash–Gleichgewichte.



**Aufgabe:** Welches unserer beiden Restaurantspiele erlaubt ein Potential?

$$u : S = \{0,1\}^I \to \mathbb{R}^I \;:\; u_i(s) = -10 s_i$$
$$u' : S = \{0,1\}^I \to \mathbb{R}^I \;:\; u'_i(s) = 10 s_i - \textstyle\sum_{j\in I} s_j$$

**Lösung:** (1) Für $u$ ist $\Phi(s) = -10 \sum_{i\in I} s_i$ ein (exaktes) Potential:

$$u_i(s) = \Phi(s) + c_i(s_{-i}) \quad \text{mit} \quad c_i(s_{-i}) = 10 \textstyle\sum_{j\neq i} s_j$$

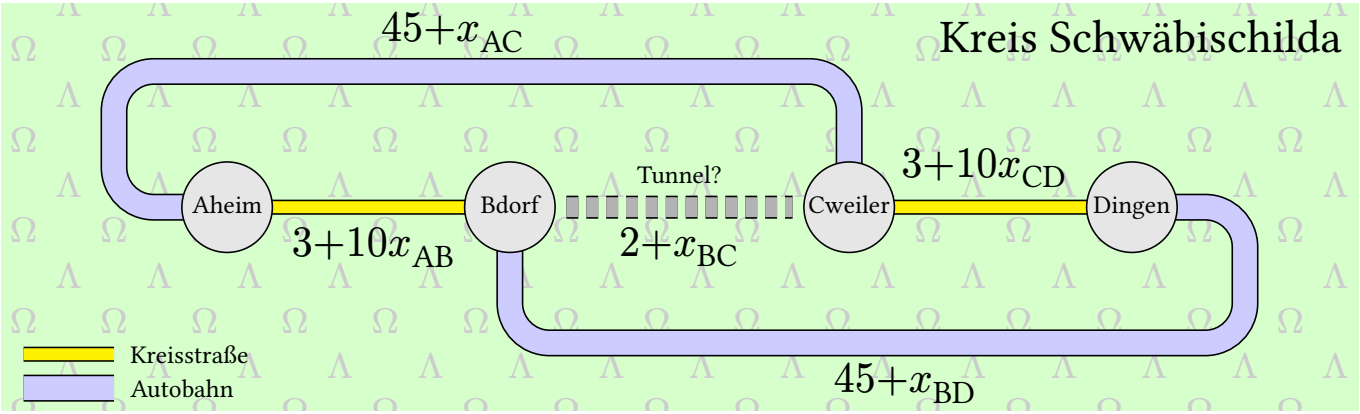
Hier gilt $\mathrm{NE}(u) = \{(0,\dots,0)\} = \operatorname{Arg\,max} \Phi$.

(2) Für $u'$ ist $\Phi'(s) = 9 \sum_{i\in I} s_i$ ein (exaktes) Potential:

$$u'_i(s) = \Phi'(s) + c'_i(s_{-i}) \quad \text{mit} \quad c'_i(s_{-i}) = -10 \textstyle\sum_{j\neq i} s_j$$

Hier gilt $\mathrm{NE}(u') = \{(1,\dots,1)\} = \operatorname{Arg\,max} \Phi'$. Dazu fragen Monderer und Shapley: *This raises the natural question about the economic content (or interpretation) of $\Phi$: What do the firms try to jointly maximize? We do not have an answer to this question. However, it is clear that the mere existence of a potential function helps us (and the players) to better analyze the game.*

## Auslastungsspiele / *congestion games*




**Satz G2c:** Jedes Auslastungsspiel hat ein Potential. Rosenthal, 1973

Sei $I$ die Menge der Spieler und $R$ die Menge der Ressourcen.

Für jeden Spieler $i \in I$ sei $S_i \subseteq \mathfrak{P}(R)$ seine Strategiemenge.
Zu jeder Ressource $r \in R$ seien $c_r(x) \in \mathbb{R}$ die Kosten bei $x$ Nutzern.

Im Strategiebündel $s \in S_I$ nutzen $x_r(s) \in \mathbb{N}$ Spieler die Ressource $r$.
Spieler $i \in I$ hat demnach die Gesamtkosten $u_i(s) := \sum_{r \in R} c_r(x_r(s))$.

Dieses **Auslastungsspiel** $u : S_I \to \mathbb{R}_I$ hat ein Potential $\Phi : S_I \to \mathbb{R}$:
Für $\Phi(s) := \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{x_r(s)} c_r(k)$ gilt $u_i(s_i; s_{-i}) = \Phi(s_i; s_{-i}) - \Phi(s_{-i})$.



## Auslastungsspiele / *congestion games*

☺ Für jedes Auslastungsspiel können wir daher sein Potential und obige Techniken nutzen. Insbesondere existieren *reine* Nash–Gleichgewichte.

⚠ Die *Formel* ist symmetrisch in allen Spielern, die *Funktion* nicht ganz: Genau dann ist $u$ symmetrisch unter Vertauschung $i \leftrightarrow j$, wenn $S_i = S_j$. So können wir leicht die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(u) \leq \mathrm{Sym}(I)$ ablesen.

**Aufgabe:** Formulieren Sie obige Braess–Beispiele als Auslastungsspiele.

**Lösung:** Die Spielermenge ist $I = \{1, \dots, 6000\}$. Jeder Spieler $i \in I$ hat dieselbe Strategiemenge $S_i = \{\{\mathrm{AB}, \mathrm{BD}\}, \{\mathrm{AC}, \mathrm{CD}\}, \{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{BD}\}\}$
Die Ressourcen sind hier die Straßen $R = \{\mathrm{AB}, \mathrm{AC}, \mathrm{BD}, \mathrm{CD}, \mathrm{BC}\}$
Wir zählen $x_r(s) := \sharp\{\, i \in I \mid r \in s_i \,\}/1000$ in Einheiten von Tausend.
Die Kosten, hier also Auszahlungen mit negativem Vorzeichen, sind

$$c_{\mathrm{AB}}(x) = c_{\mathrm{CD}}(x) = 3 + 10x,$$
$$c_{\mathrm{AC}}(x) = c_{\mathrm{BC}}(x) = 45 + x,$$
$$c_{\mathrm{BC}}(x) = 2 + x.$$

☺ Die einheitliche Sprech- und Schreibweise schafft Klarheit!

## Auslastungsspiele / *congestion games*



Damit illustriert unser Verkehrsbeispiel wunderbar Auslastungsspiele, und diese wiederum illustrieren Potentialspiele. Monderer und Shapley zeigen umgekehrt, dass jedes Potentialspiel sich so darstellen lässt.

Alle Spieler $i \in I$ optimieren hier das gemeinsame Potential $s \mapsto \Phi(s)$. Die Interpretation von $\Phi$ ist im Allgemeinen wenig intuitiv-anschaulich, hingegen spüren wir sofort die begrifflich-technische Vereinfachung. Doch Vorsicht: Bei jeder eigenen Verbesserung $(s_i; s_{-i}) \to (s_i'; s_{-i})$ verursacht der Spieler $i$ für andere Spieler eventuell Zusatzkosten, sozusagen als Kollateralschaden, man spricht von **Externalitäten**.

Damit kommen wir auf die Tragik der Allmende zurück: Als **Externalität** oder **externen Effekt** bezeichnet man in der Ökonomik jede Auswirkung einer Handlung, die nicht den Entscheidungsträger selbst trifft, sondern einen anderen. Als typisches Beispiel sind Umweltschäden ein (negativer) externer Effekt. Als Abhilfe versucht man die Kosten zu **internalisieren**, etwa durch gerechte CO2-Steuer oder funktionierenden Emissionshandel. Das folgt dem Verursacherprinzip: „Wer's verbockt, muss es auslöffeln."

## Auslastungsspiele / *congestion games*



Dagegen der perfide Trick: „Profite privatisieren, Verluste sozialisieren." Erfahrungsgemäß ist es schwierig, Effizienz und Fairness zu vereinen. Damit beides gelingt, müssen verzerrte Kostenfaktoren vermieden und die Kostenwahrheit durch Internalisierung hergestellt werden.

Wir spüren die Problematik täglich hautnah bei externen Klimakosten; hier heißen Externalitäten wohlklingend „ökologischer Fußabdruck." Bei Lebensmitteln sind sie am höchsten für Fleischprodukte, gefolgt von Milchprodukten, und am niedrigsten für pflanzliche Biolebensmittel.

Als verzerrende Faktoren sind die Umweltkosten weit unzureichend in die Produkte eingepreist. Moralische Bewertung genügt nicht, so das Argument, wir brauchen stattdessen korrekte monetäre Bewertung, die den Verbrauch reguliert und letztlich die Umweltschäden senkt.

Bei fairer und rationaler Betrachtung leuchtet das wohl fast jedem ein. Das Thema Essen ist allerdings hochemotional, ebenso Autofahren vs ÖPNV, Wirtschaftswachstum vs Ressourcenverbrauch, … kurzum in all unseren alltäglichen Konsumentscheidungen. Vernunft bleibt schwierig!

## Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

Räuber-Beute-Modell: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

| Größe | Bedeutung | Beispiel |
|---|---|---|
| $t \geq 0$ | Zeit | Jahre |
| $x_1(t) \geq 0$ | Anzahl der Beutetiere | Hasen/Mio |
| $x_2(t) \geq 0$ | Anzahl der Raubtiere | Luchse/Tsd |
| $\alpha_1 > 0$ | Reproduktionsrate der Beute (ohne Räuber) | 0.8/Jahr |
| $\beta_1 > 0$ | Sterberate der Beute pro Räuber | 0.4/Jahr |
| $\alpha_2 > 0$ | Sterberate der Räuber (ohne Beute) | 0.6/Jahr |
| $\beta_2 > 0$ | Reproduktionsrate der Räuber pro Beute | 0.2/Jahr |

Dieses DGSystem beschreibt die Entwicklung großer Räube-Beute-Populationen. Beispiel: Fangaufzeichnungen der Hudson Bay Company zeigten über 90 Jahre einen 9jährigen Zyklus. Formuliert und untersucht wurde dieses Modell 1925 von Alfred Lotka und unabhängig 1926 von Vito Volterra, seither ist es das Paradebeispiel einer Populationsdynamik in der Biologie. Die quadratischen Terme entsprechen dem Massenwirkungsgesetz chemischer Reaktionen. Epidemien folgen einer ähnlichen Dynamik, man untersucht und nutzt dies für Maßnahmen. Viele Systeme mit nicht-linearen Rückkopplungen gehorchen ähnlichen Gleichungen.



## Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

Räuber-Beute-Modell: $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.8\, x_1 - 0.4\, x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -0.6\, x_2 + 0.2\, x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie den Zustandsraum und das Vektorfeld. Existiert zu jedem Startwert $x(0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung $t \mapsto x(t)$? eindeutig?

(2) Was folgt aus $x_2(0) = 0$? aus $x_1(0) = 0$? Wo liegen Fixpunkte? Skizzieren Sie Lösungen zu $x_1(0) = 3$ und $x_2(0) = 2.0, 1.8, \ldots, 0.0$.

(3) Ist das System linear? Wie / Können Sie Lösungen berechnen?

(4) Linearisieren & lösen Sie für kleine Störungen des Gleichgewichts. Wie lange dauert eine Periode? Wie verlässlich ist das lineare Modell?

(5) Das Potential $\Phi := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.

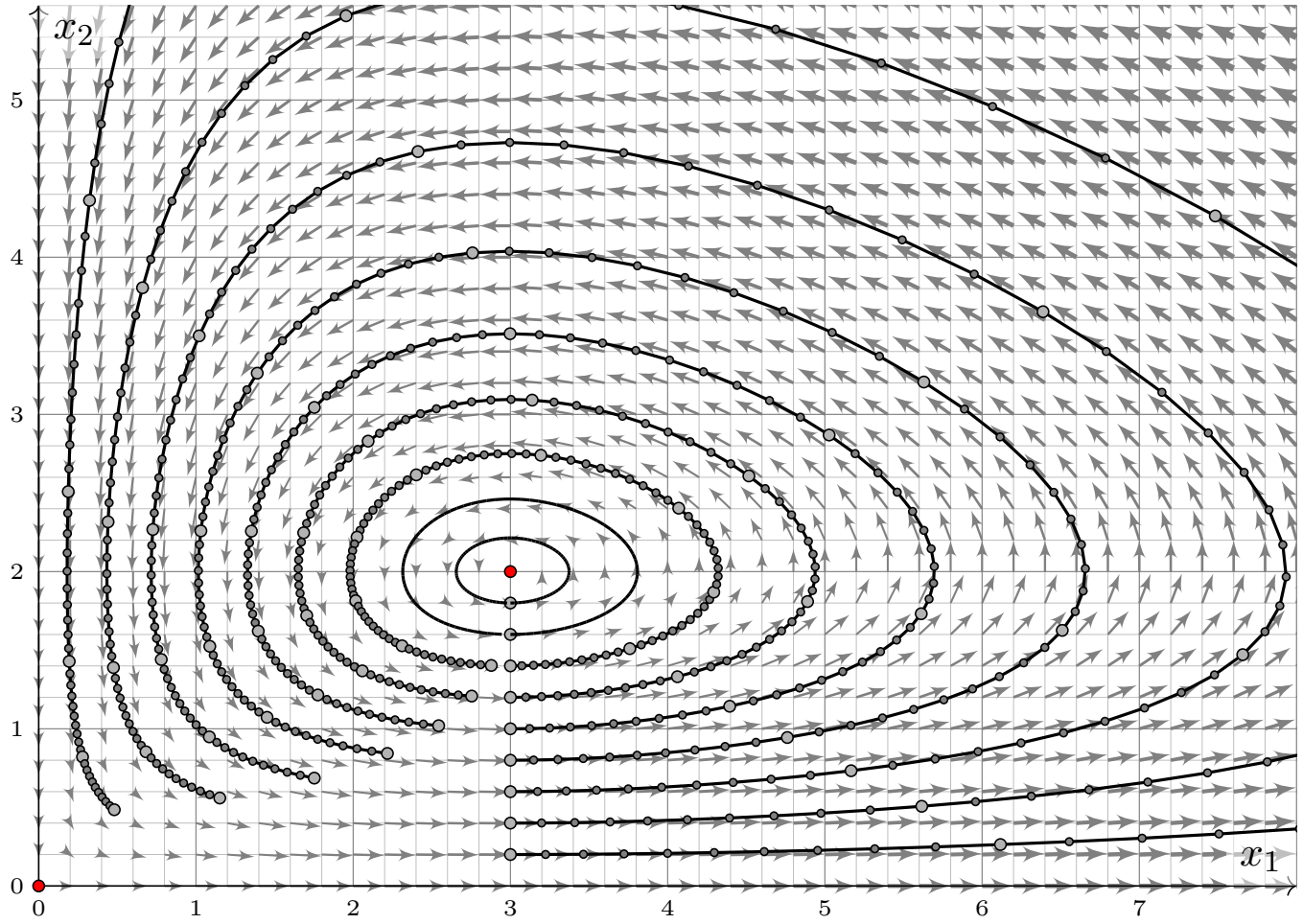
(6) Erste Lotka–Volterra–Regel, Periodizität der Lösungen:
*Beide Populationensgrößen entwickeln sich periodisch.*

(7) Zweite Lotka–Volterra–Regel, Konstanz der Mittelwerte:
*Die zeitlichen Mittelwerte sind* $\overline{x_1} = \alpha_2/\beta_2$ *und* $\overline{x_2} = \alpha_1/\beta_1$.

(8) Angenommen, der Mensch hält die Beutetiere für Schädlinge. Im Zustand $(3, 1)$ werden sie gejagt und auf $(1, 1)$ reduziert. Erfolg?

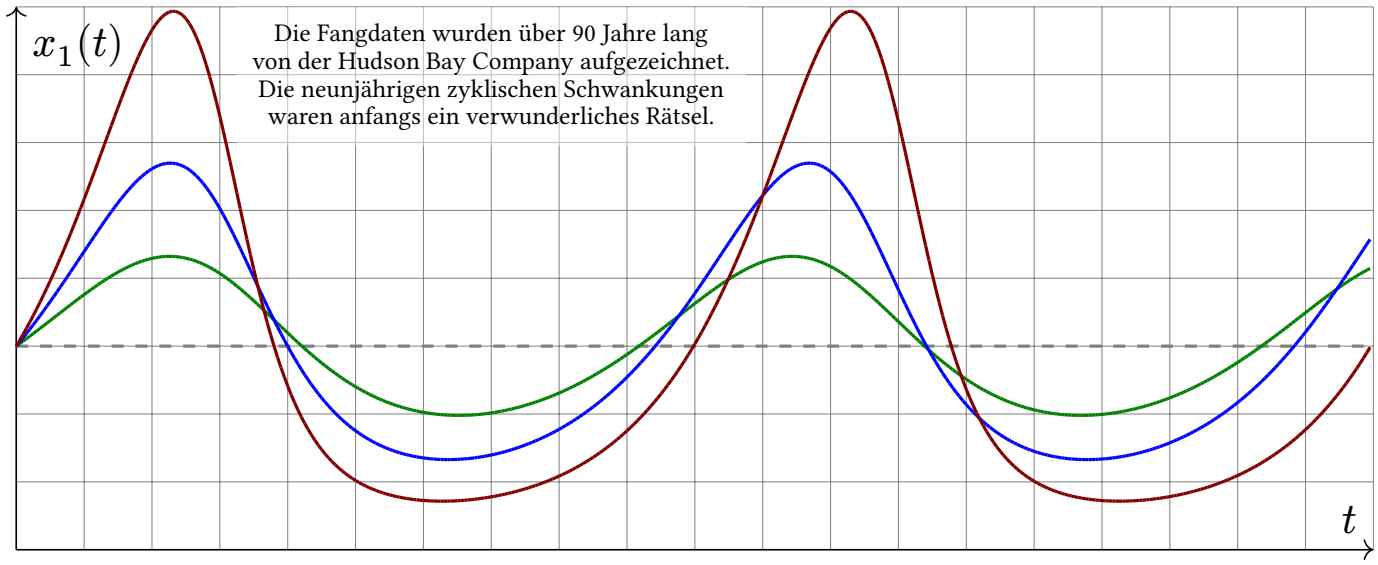
# Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

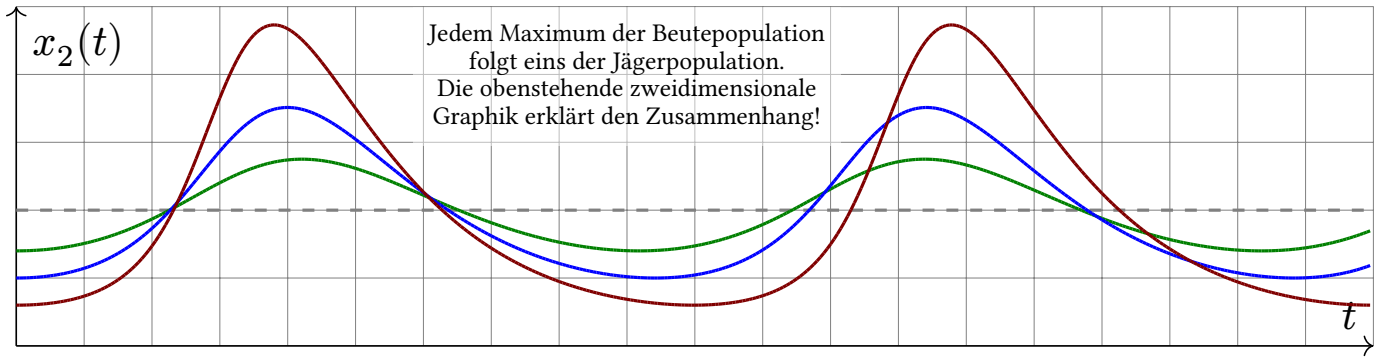
G303




# Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

G304



## Räuber-Beute-Modell: Linearisierung



**Lösung:** (1) Wir nutzen den ∃&E-Satz: $f$ ist stetig differenzierbar.

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2\\ -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2\end{pmatrix} \Rightarrow f'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 - \beta_1 x_2 & -\beta_1 x_1\\ \beta_2 x_2 & -\alpha_2 + \beta_2 x_1\end{pmatrix}$$

☺ Zu jedem $x(0) \in \mathbb{R}^2$ existiert genau eine Lösung mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

(2) Aus $x_2(0) = 0$ folgt $x_2(t) = 0$ und $x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha_1 t}\, x_1(0)$ für alle $t \geq 0$.
Aus $x_1(0) = 0$ folgt $x_1(t) = 0$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_2 t}\, x_2(0)$ für alle $t \geq 0$.
Die Fixpunkte $\dot{x} = f(x) \overset{!}{=} 0$ sind $(0,0)$ und $(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1) = (3,2)$.

(3) Dieses System ist nicht linear! Lösungen können wir (hier wie meist) nur numerisch berechnen. Wie skizziert, Runge–Kutta sei Dank!

(4) Wir linearisieren um $x_0 = (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$. Für $x(t) = x_0 + u(t)$ gilt:

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x) = f(x_0 + u) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, u = A\, u$$

☺ Die Jacobi–Matrix beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt:

$$A = f'(x_0) = f'\begin{pmatrix}\alpha_2/\beta_2\\ \alpha_1/\beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\alpha_2\beta_1/\beta_2\\ \alpha_1\beta_2/\beta_1 & 0\end{pmatrix}$$

## Räuber-Beute-Modell: Linearisierung



**Nicht-linear** ist schwierig, doch **lineare Systeme** lösen wir leicht:

$$p_A(x) = \det(A - xE) = \det\begin{pmatrix}-x & -\alpha_2\beta_1/\beta_2\\ \alpha_1\beta_2/\beta_1 & -x\end{pmatrix} = x^2 + \alpha_1\alpha_2$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = +\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\alpha_2} = +\mathrm{i}\omega$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\alpha_2} = -\mathrm{i}\omega$

Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ -\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ +\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}$

Eigenfunktionen: $u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, v_1$, $u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, v_2$

Für unser reelles System verlangen wir **reelle Lösungen**:

$$\operatorname{Re} u_1(t) = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ \sin(\omega t)\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} u_1(t) = \begin{pmatrix}\sin(\omega t)\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ -\cos(\omega t)\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}$$

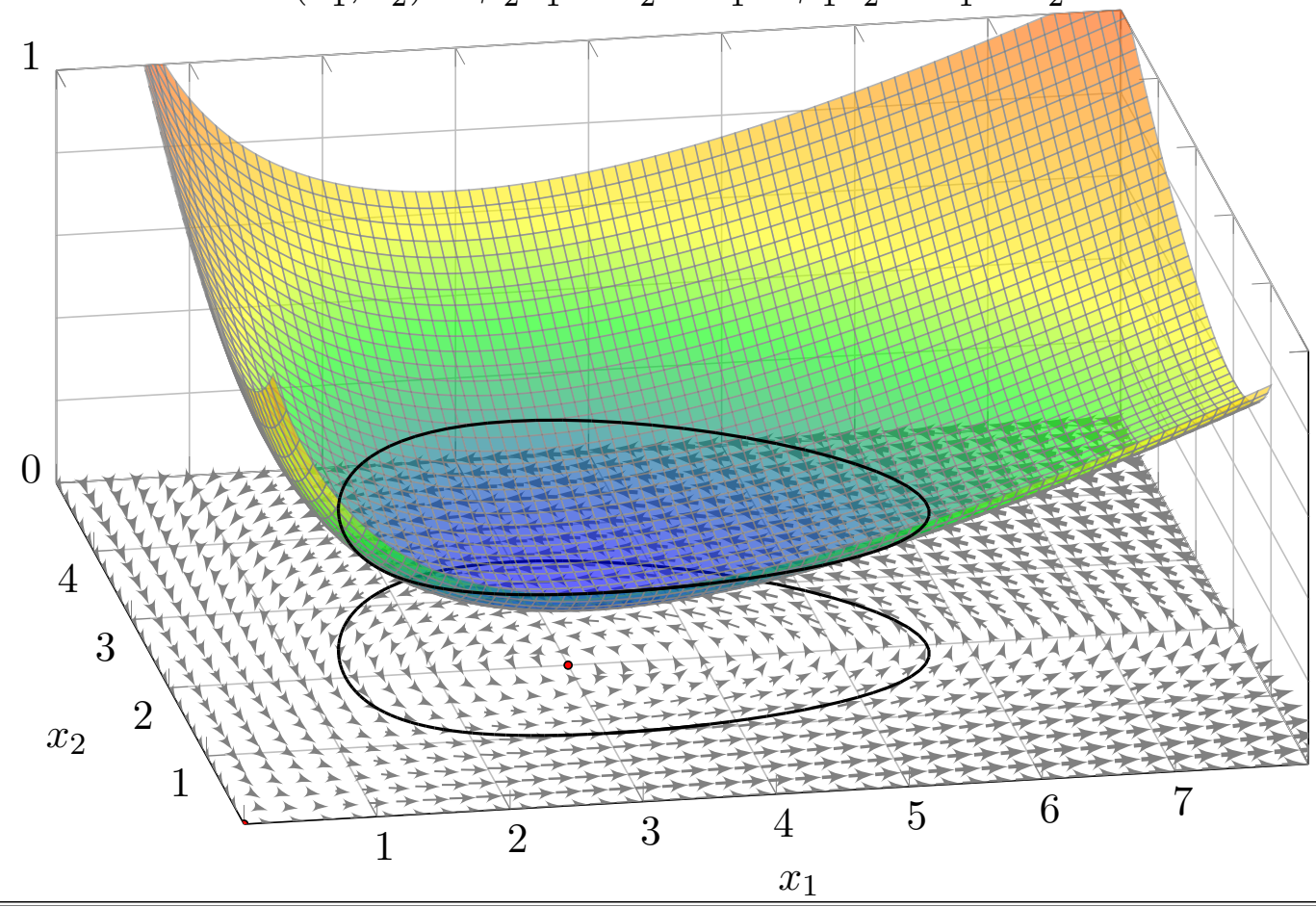
Die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ bedeutet Periodendauer $T = 2\pi/\omega$.
Im Beispiel ist $\alpha_1 = 0.8$ und $\alpha_2 = 0.6$, also $\omega \approx 0.69$ und $T \approx 9.07$.

☺ Plausibel: Für kleine Störungen deckt sich das mit obigen Skizzen.
Große Störungen und Langzeitverhalten erfordern weitere Argumente!

## Räuber-Beute-Modell: Potentialfläche



Das Potential $\Phi(x_1, x_2) = \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.




## Räuber-Beute-Modell: Periodizität



(5) Für das Potential $\Phi(x_1, x_2) := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ gilt

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= \beta_2 \dot{x}_1 - \alpha_2 \dot{x}_1 / x_1 + \beta_1 \dot{x}_2 - \alpha_1 \dot{x}_2 / x_2 \\ &= (\beta_2 - \alpha_2/x_1)(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2) + (\beta_1 - \alpha_1/x_2)(-\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2) = 0.\end{aligned}$$

(6) Jede Lösung in $\mathbb{R}^2_{>0}$ schließt sich deshalb nach endlicher Zeit $T > 0$:

(7) Die zeitlichen Mittelwerte der Populationsgrößen sind

$$\overline{x_1} := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x_1(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \overline{x_2} := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aus den beiden Differentialgleichungen folgt:

$$\beta_2 \overline{x_1} - \alpha_2 = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \beta_2 x_1(t) - \alpha_2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln x_2(t)}{T}\right]_{t=0}^{T} = 0$$

$$\alpha_1 - \beta_1 \overline{x_2} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \alpha_1 - \beta_1 x_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln x_1(t)}{T}\right]_{t=0}^{T} = 0$$

Das bedeutet $\overline{x_1} = \alpha_2/\beta_2$ und $\overline{x_2} = \alpha_1/\beta_1$. Erstaunlich: Der Mittelwert $\overline{x_1}$ der Beutepopulation hängt nicht von deren Reproduktionsrate ab!

## Was ist evolutionäre Spieltheorie?



Die **evolutionäre Spieltheorie** hat mehrere Ursprünge und Ziele:
In der Biologie untersucht sie das Wirken der Evolution (durch Mutation und Selektion) auf Ebene der Akteure (Gene, Individuen, Familien, ...).
In der Ökonomik hingegen untersucht sie die soziale Interaktion in großen Populationen von Spielern. Sie verbindet somit Biologie und Ökonomik auf überraschende Weise und zu beiderseitigem Nutzen.

In den Wirtschaftswissenschaften ist dies ein sehr erfolgreicher Ansatz der **Mikrofundierung**, zur Erklärung und Prognose von sozialen und ökonomischen Phänomenen durch die Interaktion von Individuen.

Die klassische Spieltheorie betrachtet die strategische Analyse durch (idealisiert vollkommen) rationale Spieler, von denen jeder durch planvolles Handeln sein individuelles Ergebnis optimieren will.

Die evolutionäre Spieltheorie verbindet dies mit der zweiten, ebenso einfachen wie grundlegenden Sichtweise der Populationsdynamik: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller als andere.

## Was ist evolutionäre Spieltheorie?



Der **evolutionäre Ansatz** lässt sich auch dann noch sinnvoll anwenden, wenn die betrachteten Akteure nur über begrenzte Rationalität verfügen, oder im Extremfall überhaupt gar keine individuellen strategischen Entscheidungen treffen können (wie etwa Mikroorganismen).

Zur Erklärung und Deutung von Gleichgewichten nutzen Ökonomen seit jeher Ideen der Evolutionsbiologie: Das gesellschaftlich beobachtete Verhalten pendelt sich durch **trial and error** auf gewisse Fixpunkte ein. In diesem Sinne stützt die biologische Sichtweise die ökonomische.

Die evolutionäre Spieltheorie nimmt diese Deutung ernst und untersucht damit nicht nur die Fixpunkte, sondern auch die Dynamik drumherum und sogar fernab dieser Gleichgewichtslagen. Damit lassen sich auch Bewegungen abseits der Rationalität erklären, zumindest qualitativ.

Sie spüren dies sehr eindrücklich, wenn Sie selbst Spiele wiederholt spielen und so Ihre Strategie langsam anpassen, erlernen, optimieren. Erste einfache Beispiele dazu haben wir auch im Casino erlebt.

## Was ist evolutionäre Spieltheorie?



Die mathematische Untersuchung evolutionärer Vorgänge erfordert als Grundlage immer ein **Bewegungsgesetz**, um die Dynamik präzise formulieren zu können, etwa diskret als Rekursionsgleichung oder meist kontinuierlich in Form einer Differentialgleichung.

Denken Sie als berühmte **Analogien in der Physik** etwa an Newtons Bewegungsgleichung der Mechanik, an Maxwells Gleichungen der Elektrodynamik, oder an Fouriers Wärmeleitungsgleichung, an die Schrödinger– oder Dirac–Gleichung der Quantenmechanik, etc.

Für die evolutionäre Spieltheorie dient meist die Replikatorgleichung als das grundlegende Modell für die Dynamik. Es gibt weitere Möglichkeiten, wie die Nash–Funktion aus dem Existenzsatz E1E für Gleichgewichte: Diese beschreibt weniger natürliche Selektion als rationale Planung.

## Was ist evolutionäre Spieltheorie?



Dazu setzen wir im Folgenden voraus, dass die Population so groß ist, dass wir das eigentlich diskrete Modell ohne allzu große Fehler durch ein einfaches, kontinuierlich-differentielles Modell ersetzen können.
Wir ignorieren also jedwede mikroskopische Körnigkeit oder Zufälle.

Denselben Grenzübergang haben wir übrigens bereits im obigen Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra stillschweigend vollzogen: Hasen und Luchse sind diskrete Einheiten, nicht kontinuierlich, doch das kontinuierliche Modell ist nah genug an der Realität.

Physikalische Analogie sind Wärmelehre und kinetische Gastheorie: Die erste behandelt makroskopische Phänomene (zumeist Mittelwerte), die zweite untersucht mikroskopische Phänomene (einzelne Teilchen). Im Grenzübergang führt das mikro- zum makroskopischen Modell.

## Die Replikatorgleichung



Die Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda x$ beschreibt exponentielles Wachstum: Zum Startwert $x(0)$ ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto x(0)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ die eindeutige Lösung.

Für gemischte Strategien nutzen wir baryzentrische Koordinaten:

$$s_i \in \bar{S}_i \quad : \quad s_i = \textstyle\sum_k x_i^k s_i^k, \quad x_i^k \geq 0, \quad \sum_k x_i^k = 1$$

Unsere vorigen Beispiele motivieren folgende Differentialgleichung:

$$\boxed{\dot{x}_i^k = x_i^k \left[\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})\right]}$$

Gilt $[\dots] \gtrless 0$, so hat $s_i^k$ gegenüber $s_i$ einen Fitnessvorteil/nachteil, also wächst/sinkt der Anteil $x_i^k$ dieser Strategie an der Gesamtpopulation.

**Aufgabe:** (0) Wie glatt ist das Vektorfeld $f$ auf der rechten Seite? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

(1) Als Startwert geben wir $x_i^k(t_0) \geq 0$ und $\sum_k x_i^k(t_0) = 1$ vor. Bleiben diese Normierungsbedingungen für alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten?

(2) Wie verhalten sich Fixpunkte zu Nash–Gleichgewichten? Lässt sich damit die Existenz von Nash–Gleichgewichten zeigen?

## Die Replikatorgleichung



**Lösung:** (0) Für Bimatrixspiele $\Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x^\top A\, y, x^\top B\, y)$:

$$\dot{x}_i = x_i[e_i^\top A\, y - x^\top A\, y], \qquad \dot{y}_j = y_j[x^\top B\, e_j - x^\top B\, y].$$

Allgemein sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein Spiel mit $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^{\ell_i}\}$. Wir setzen $u$ in jeder Koordinate linear fort zu $\bar{u} : \mathbb{R}^{S_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^n$,

$$\bar{u}(\dots, \textstyle\sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k s_i^k, \dots) = \sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k u(\dots, s_i^k, \dots).$$

Das Vektorfeld auf der rechten Seite unserer Gleichung $\dot{x} = f(x)$ ist

$$f : \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1} \to \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1},$$
$$f_i^k(x) = x_i^k \left[\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})\right].$$

Jede Koordinate $f_i^k(x)$ ist polynomiell in den Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$, genauer vom Grad 2 in $x_i^k$ und vom Grad 1 in allen anderen Variablen.

☺ Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, mit (1) sogar global.

☺ Da $f$ glatt ist, gilt dies auch für jede Lösung $t \mapsto x(t)$ von $\dot{x} = f(x)$.

☺ Der Satz von Cauchy–Kowalewskaja garantiert, dass jede Lösung $t \mapsto x(t)$ sogar analytisch ist, also lokal eine konvergente Potenzreihe.

## Die Replikatorgleichung



(1) Sei $x : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung auf einem Intervall $I$ mit $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$.
Wir zeigen: Gilt $x_i^k(t) \geq 0$ und $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Geometrisch: Auf $X = \Delta^{\ell_1} \times \cdots \times \Delta^{\ell_n}$ zeigt das Vektorfeld $f$ nirgends nach außen. Jede Lösung, die in $X$ startet, verbleibt in $X$. Ausführlich:

(1a) Behauptung: Gilt $x_i^k(t) = 0$ für ein $(i,k)$ und $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^N$ mit $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$, wobei wir den Funktionswert $\tilde{x}_i^k(t) = 0$ für alle $t \in J$ fest vorgeben.
Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde{x}_i^k(t) = 0 = f_i^k(\tilde{x}(t))$ für alle $t \in J$.
Dank Eindeutigkeitssatz folgt $x_i^k(t) = 0$ für alle $t \in I \cap J$.

(1b) Behauptung: Gilt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für ein $i$ und $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^N$ mit $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$, wobei wir $\tilde{x}_i^0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\ell_i} \tilde{x}_i^k(t)$ für alle $t \in J$ fest vorgeben.
Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde{x}_i^0(t) = f_i^0(\tilde{x}(t))$ für alle $t \in J$, denn

$$f_i^0(\tilde{x}(t)) - \partial_t \tilde{x}_i^0 = \sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k \left[\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})\right] = 0.$$

Dank Eindeutigkeitssatz folgt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für alle $t \in I \cap J$.

## Die Replikatorgleichung



🙂 Die behauptete Gleichung gilt lokal um jeden Zeitpunkt $t_0 \in I$.
Dank Zusammenhang gilt sie somit auf dem gesamten Intervall $I$.

🙂 Für jede Auswahl von (abgeschlossenen oder offenen) Teilsimplizes $\Delta_1 \subseteq \Delta^{\ell_1}, \dots, \Delta_n \subseteq \Delta^{\ell_n}$ ist die Menge $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \subset \mathbb{R}^N$ invariant.

⚠ Wir müssen hier sorgfältig mit dem Eindeutigkeitssatz argumentieren.
Ein klassisches Gegenbeispiel ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit rechter Seite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$. Zum Startwert $x(0) = 0$ existieren neben der Lösung $t \mapsto 0$ noch unendlich viele weitere, etwa $t \mapsto t^3/27$.
Die Mengen der Zerlegung $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ sind hier nicht invariant!

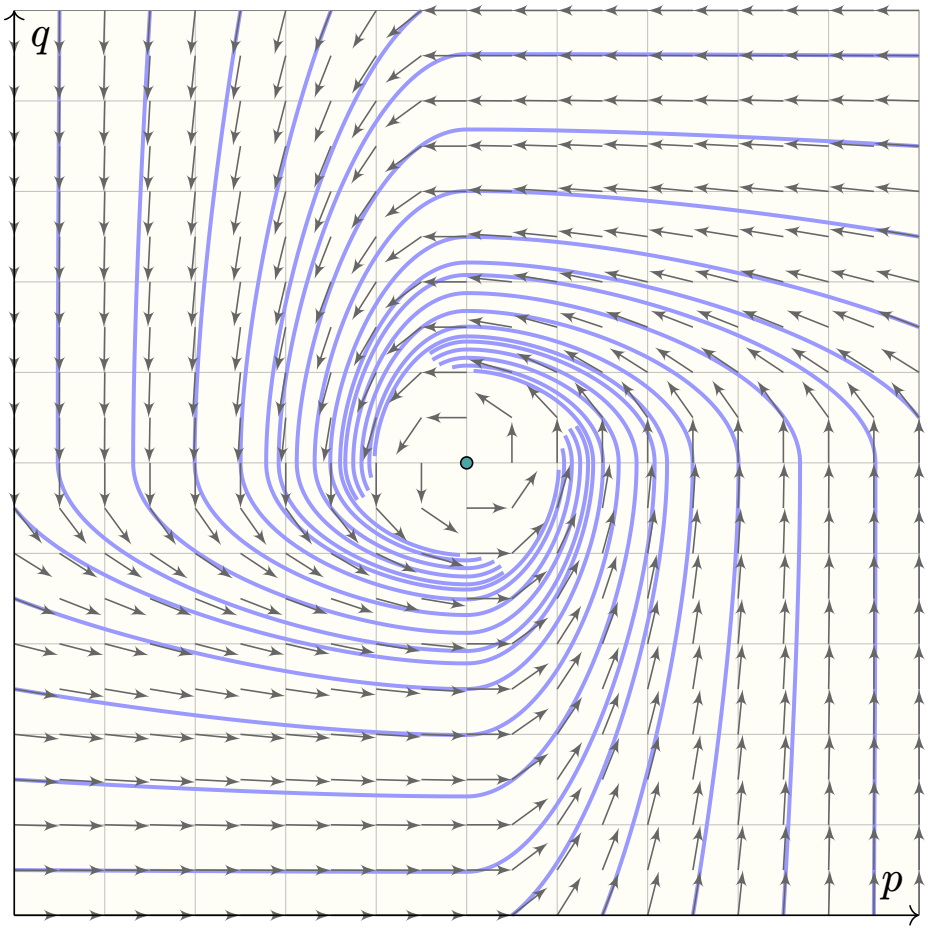
(2) Jedes Nash–Gleichgewicht ist eine Nullstelle des Vektorfeldes,
aber nicht jede Nullstelle des Vektorfeldes ist ein Nash–Gleichgewicht:
Diese Äquivalenz gilt nur im Inneren, mit $x_i^k > 0$ für alle $i$ und $k$.
Z.B. ist jede Ecke eine Nullstelle, aber nicht immer ein Gleichgewicht.

Daher lässt sich die Replikatorgleichung nicht zum Beweis nutzen.
Der Beweis von Satz E1E konstruiert dazu geschickt die Nash–Funktion;
dank Lemma E1J sind ihre Fixpunkte genau die Nash–Gleichgewichte.

# Nash–Dynamik zu Matching Pennies

| A \ B | Kopf | Zahl |
|---|---|---|
| Kopf | $-1$, $+1$ | $+1$, $-1$ |
| Zahl | $+1$, $-1$ | $-1$, $+1$ |

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.

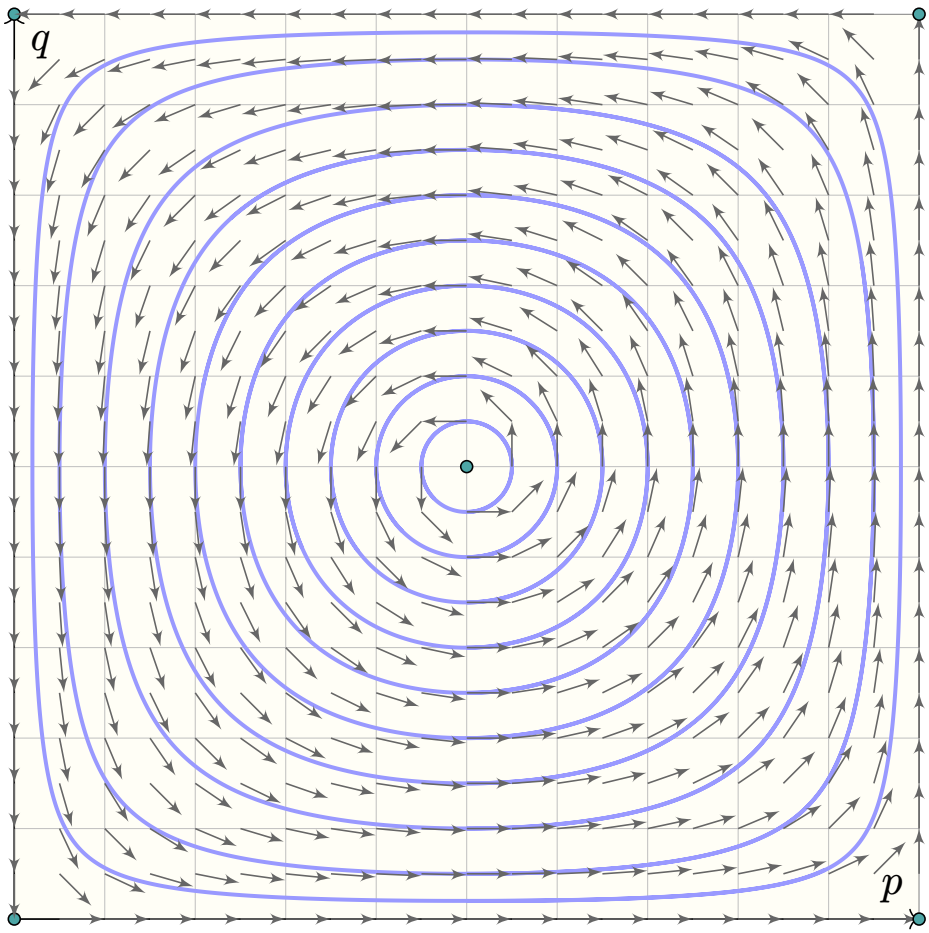





# Replikatordynamik zu Matching Pennies

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Matching Pennies* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

| A \ B | Kopf | Zahl |
|---|---|---|
| Kopf | $-1$, $+1$ | $+1$, $-1$ |
| Zahl | $+1$, $-1$ | $-1$, $+1$ |

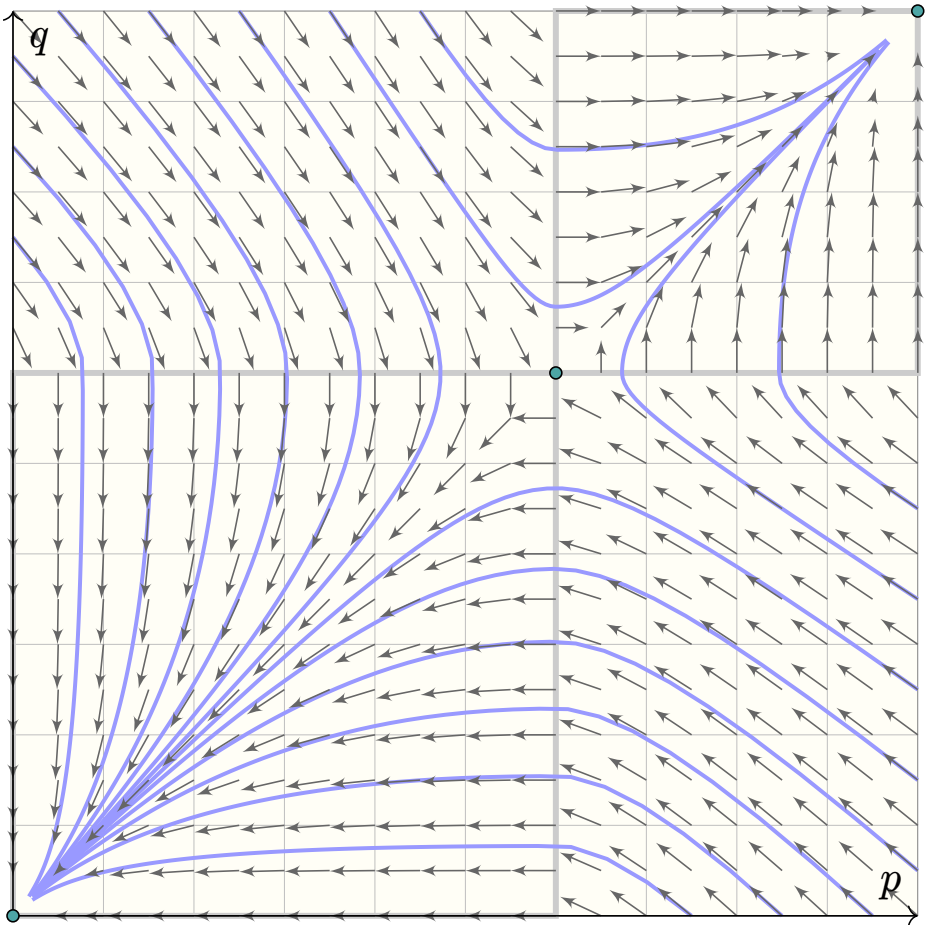


# Nash–Dynamik zu Bleiben-oder-Gehen



| A \ B | bleiben | gehen |
|---|---|---|
| bleiben | $-2$, $-2$ | $-2$, $-5$ |
| gehen | $-5$, $-2$ | $0$, $0$ |

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.

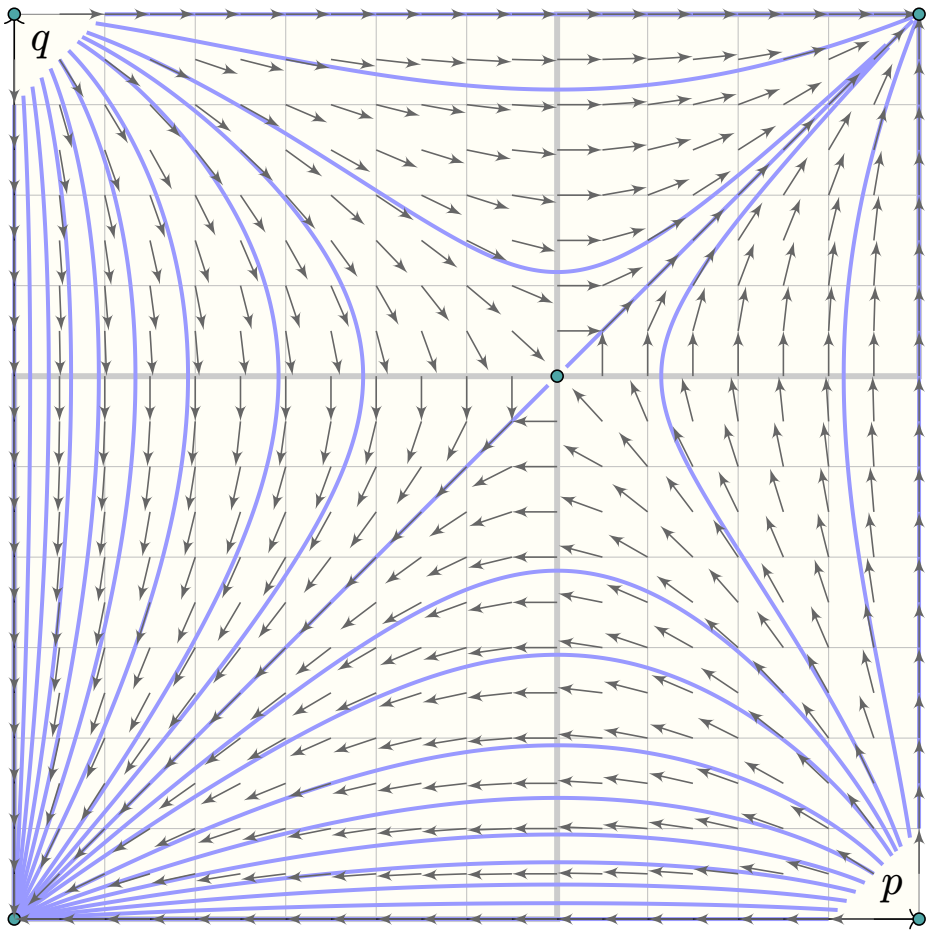



# Replikatordynamik zu Bleiben-oder-Gehen



Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

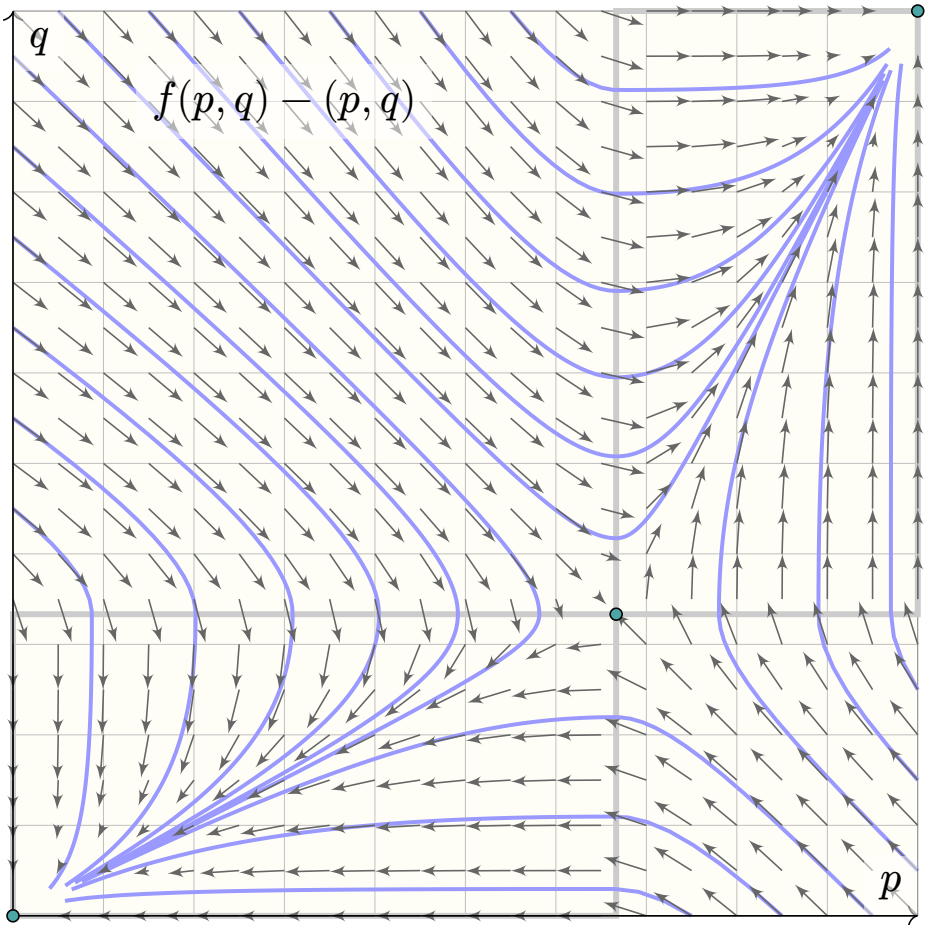
| A \ B | bleiben | gehen |
|---|---|---|
| bleiben | $-2$, $-2$ | $-2$, $-5$ |
| gehen | $-5$, $-2$ | $0$, $0$ |



# Nash–Dynamik zu Bach oder Strawinsky

| A \ B | Bach | Strawinsky |
|---|---|---|
| Bach | 1, 2 | 0, 0 |
| Strawinsky | 0, 0 | 2, 1 |

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes.
Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.
Zur Anregung Ihrer Phantasie zeige ich typische Flusslinien.

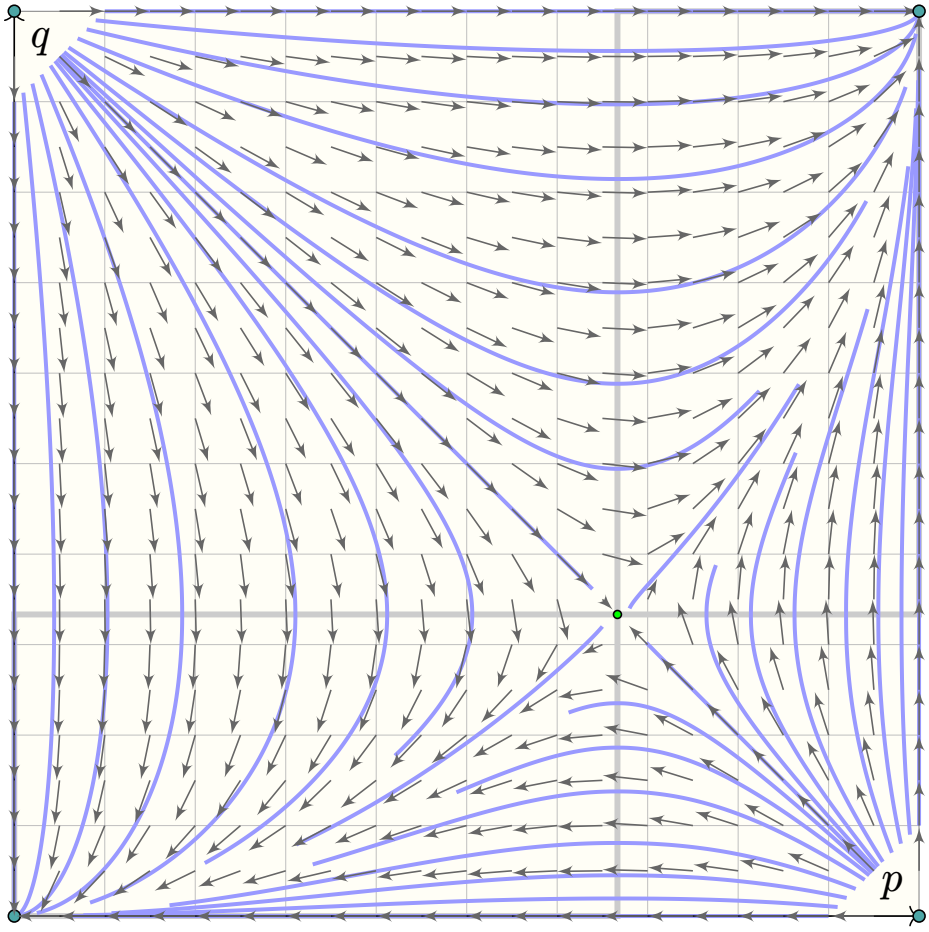





# Replikatordynamik zu Bach oder Strawinsky

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

| A \ B | Bach | Strawinsky |
|---|---|---|
| Bach | 1, 2 | 0, 0 |
| Strawinsky | 0, 0 | 2, 1 |

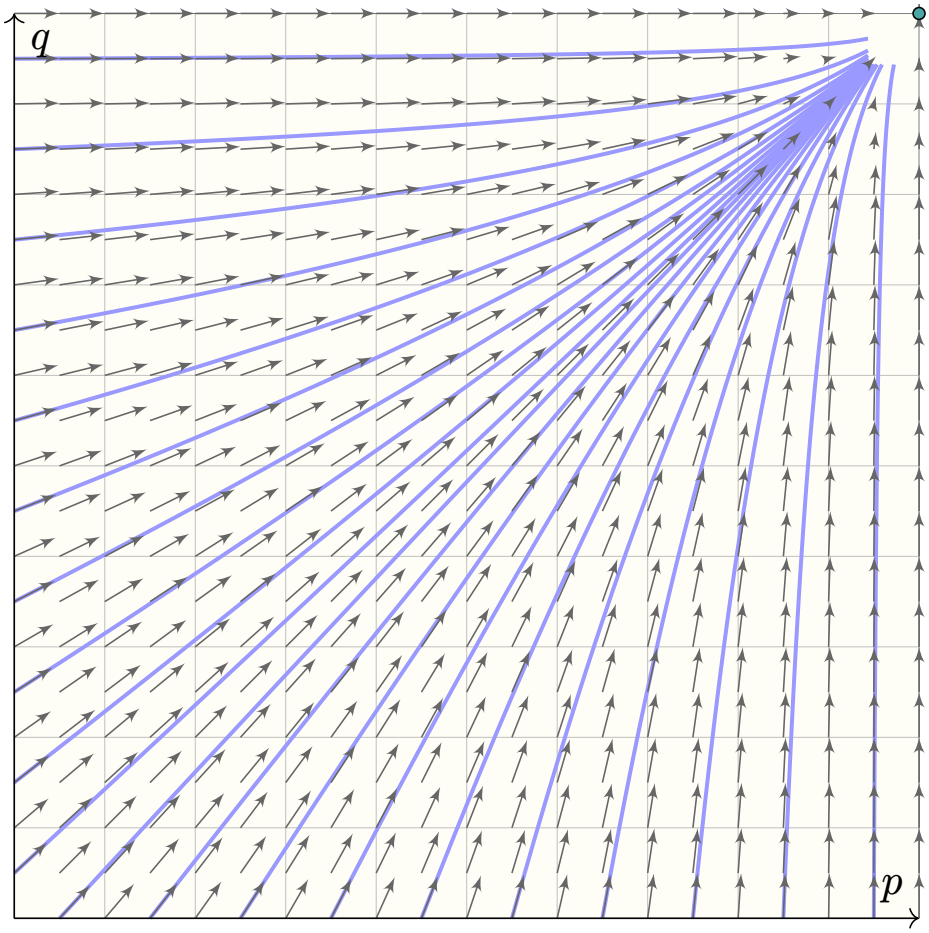


# Nash–Dynamik zum Gefangenendilemma



| A \ B | schweigen | gestehen |
|---|---|---|
| schweigen | $-1$, $-1$ | $-5$, $0$ |
| gestehen | $0$, $-5$ | $-4$, $-4$ |

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.

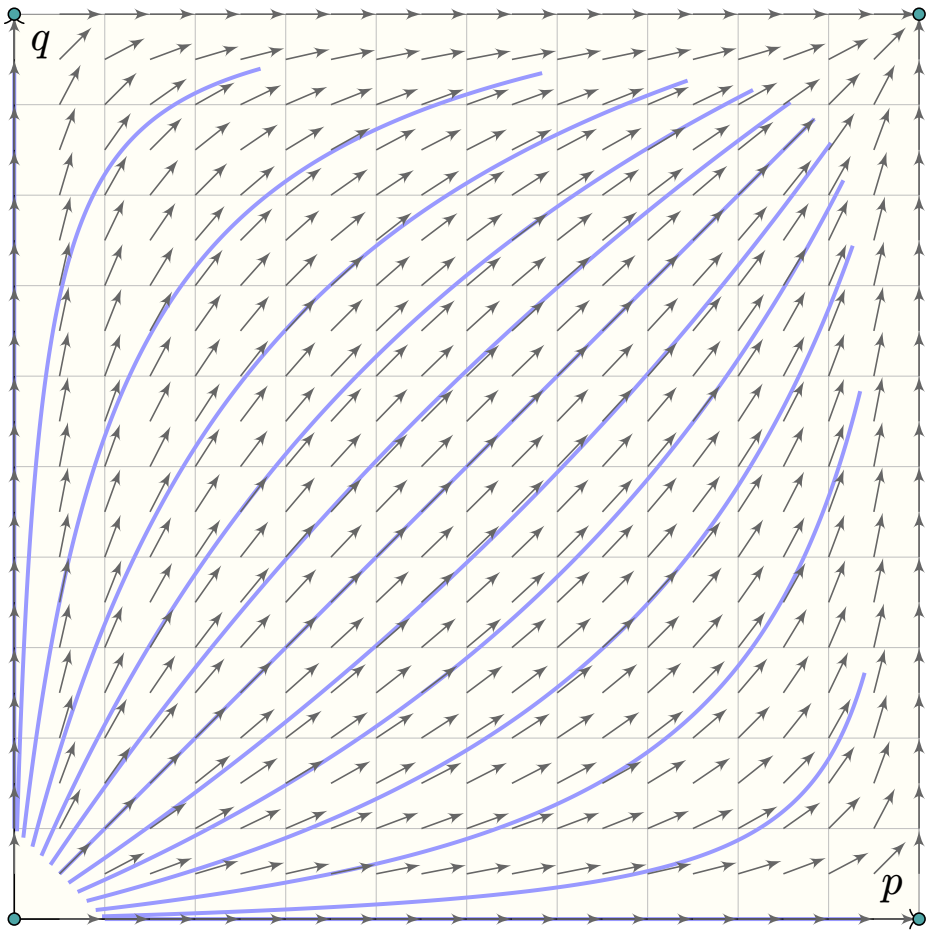



# Replikatordynamik zu Gefangenendilemma



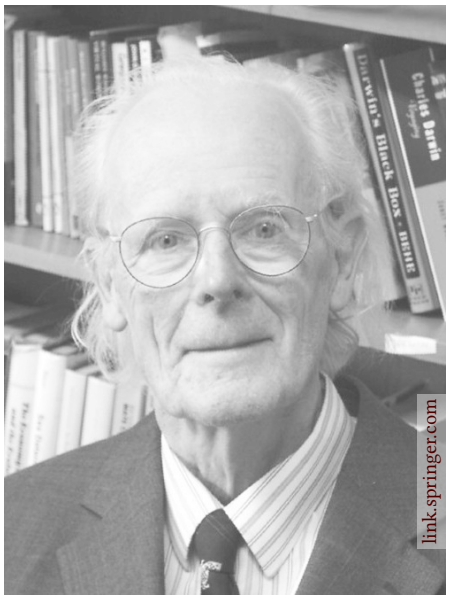
Zur Erinnerung die Daten des *Gefangenendilemmas* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

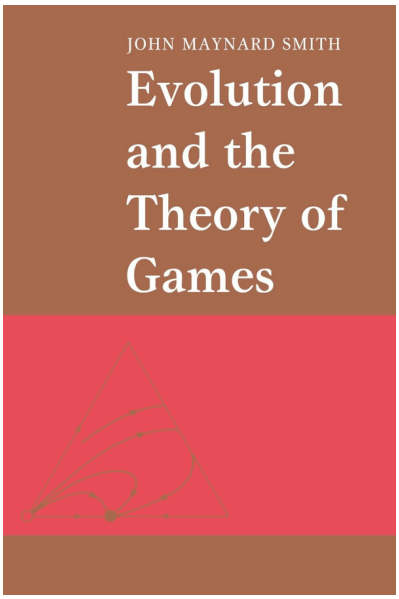
| A \ B | schweigen | gestehen |
|---|---|---|
| schweigen | $-1$, $-1$ | $-5$, $0$ |
| gestehen | $0$, $-5$ | $-4$, $-4$ |

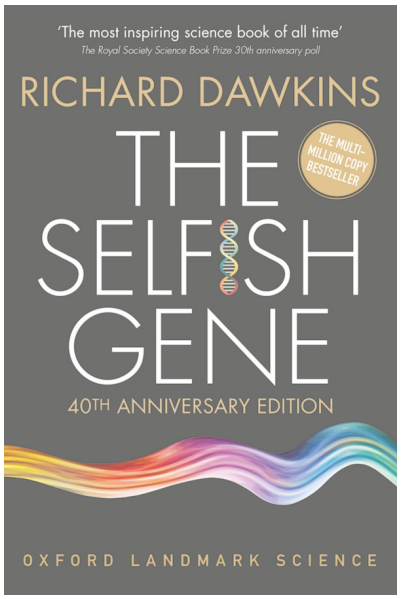


## John Maynard Smith (1920–2004)

G325
Überblick




John Maynard Smith (London 1920 – Lewes, East Sussex 2004) war ein britischer Theoretischer Biologe. Er ist berühmt für seine Beiträge zur Evolutionsbiologie und zur Evolutionären Spieltheorie, etwa das Konzept der evolutionär stabilen Strategien. Er erhielt 1999 den Crafoord–Preis; dieser ehrt järlich seit 1982 Grundlagenforschung in Disziplinen, die der Nobelpreis nicht berücksichtigt, wie Biologie, Mathematik, Astronomie.

## John Maynard Smith (1920–2004)

G326
Überblick

*The last decade has seen a steady increase in the application of concepts from the theory of games to the study of evolution. Fields as diverse as sex ratio theory, animal distribution, contest behaviour and reciprocal altruism have contributed to what is now emerging as a universal way of thinking about phenotypic evolution. […] Paradoxically, it has turned out that game theory is more readily applied to biology than to the field of economic behaviour for which it was originally designed. There are two reasons for this. First, the theory requires that the values of different outcomes (for example, financial rewards, the risks of death and the pleasures of a clear conscience) be measured on a single scale. In human applications, this measure is provided by 'utility' — a somewhat artificial and uncomfortable concept: in biology, Darwinian fitness provides a natural and genuinely one-dimensional scale. Secondly, and more importantly, in seeking the solution of a game, the concept of human rationality is replaced by that of evolutionary stability. The advantage here is that there are good theoretical reasons to expect populations to evolve to stable states, whereas there are grounds for doubting whether human beings always behave rationally.*

John Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games* (1982) p. vii

## John Maynard Smith (1920–2004)



John Maynard Smith war einer der führenden Evolutionsbiologen. Seine Stärke war, Probleme mit mathematischen Modellen zu klären. Wichtige Fragen, die er untersuchte, waren zum Beispiel: Auf welchen Ebenen wirkt die Evolution, und wie stark – Gene, Individuen, Gruppen? Wie entstehen große Transitionen, etwa zu mehrzelligen Organismen? Was sind die Kosten und die Vorteile der sexuellen Vermehrung?

youtu.be/0b0Nm_L3TKg&list=PLVV0r6CmEsFzJSvAc4MBuUP_GrjO1lLHp

Ronald Fisher erklärte 1930 die Stabilität des Geschlechterverhältnisses; sein Argument ist heute als *Fishers Prinzip* weithin bekannt. Schon 1871 hatte Charles Darwin ähnliche Gedanken geäußert, in der ersten Ausgabe seines Buches *The Descent of Man, and Selection in Relation to Sex*, doch schon 1874 nahm er sie in der zweiten Ausgabe zurück mit den Worten:

> *I formerly thought that when a tendency to produce the two sexes in equal numbers was advantageous to the species, it would follow from natural selection, but I now see that the whole problem is so intricate that it is safer to leave its solution for the future.*

## John Maynard Smith (1920–2004)



John Maynard Smith war eine faszinierende Persönlichkeit. Er ging auf das elitäre Eton College, dort war er zwar unglücklich, erhielt aber eine gute Grundbildung in Mathematik, zudem lernte er die Evolutionstheorie kennen, insbesondere die Arbeiten von J.B.S. „Jack“ Haldane (1892–1964).

Entgegen dem Wunsch seiner Familie wurde Smith nicht Börsenmakler, sondern studierte Ingenieurwesen und arbeitete im Flugzeugbau. Erst ab 1947 studierte er Biologie am University College London bei Haldane. Smith wurde 1962 einer der Gründungsprofessoren der University of Sussex und war dort Dekan von 1965 bis zu seiner Emeritierung 1985.

Maynard Smith formalisierte 1973 evolutionär stabile Strategien (ESS) als zentrales Konzept der evolutionären Spielthorie, aufbauend auf einer Idee von George Price (1922–1975). Dies führte zu ihrem berühmten Artikel *The logic of animal conflict* (1973) und zu Smiths Buch *Evolution and the Theory of Games* (1982). Mit diesem mathematischem Werkzeug konnte Smith insbesondere die Stabilität des Geschlechterverhältnisses erklären. Damit wurden ESS zu einem Universalwerkzeug der Evolutionsbiologie!

## Worauf wirkt die Selektion: Gene? Individuen? Gruppen?



Kurzfristig wirkt die Selektion auf Individuen: Bessere Anpassung an die Umweltbedingungen ermöglicht erst Überleben und dann Vermehrung. Langfristig wirkt die Selektion auf die Gene: Erfolgreiche Gene führen zu besserer Anpassung, somit Überleben und Vermehrung der Individuen, die diese Gene tragen. Deshalb verbreiten sich erfolgreiche Gene stärker. Daher die Kurzfassung: Mutation und Selektion treiben die Evolution.

Zwischen diesen beiden Ebenen, individuell kurzfristig und genetisch langfristig, gibt es interessante Spannungen: Gelegentlich opfern sich Individuen für Ihre Familie oder Gruppe, sie sichern nicht das eigene Überleben, aber immerhin das von Verwandten mit ähnlichen Genen. Für das Gen ist dieses Verhalten vorteilhaft, breitet sich also aus.

📖 Richard Dawkins: *The Selfish Gene*. OUP 1976, 40th anniv. ed. 2016. In seiner populären Darstellung evolutionären Denkens rückt Dawkins konsequent die Sicht der Gene in den Mittelpunkt. Nebenbei überträgt er die Prinzipien von Mutation und Selektion auf soziokulturelle „Meme“. In der Ära des Internets wurde dies zum allgegenwärtigen Begriff!

## Wie entwickelt sich komplexes Zusammenleben?



Wie kam es zur Evolution mehrzelligen Lebens? Die einzelne Zelle gibt ihre Eigenständigkeit auf und ordnet sich dem Gesamtorganismus unter. Auch hier herrscht offenkundig eine Spannung zwischen beiden Ebenen. (Krebszellen fügen sich nicht harmonisch ein, sondern laufen Amok.)

Ganz ähnliche Konflikte entstehen bei sozialen Insekten. Diese leben in *Kolonien* zusammen, bei starker sozialer Ausprägung sprechen wir von (Ameisen-)*Staaten* oder (Bienen-)*Völkern*. Diese haben eine Kaste von Arbeiter:innen, die sich selbst nicht mehr fortpflanzen. Warum ordnen sich die Individuen hier unter und geben gar ihre Reproduktion auf? Die eusozialen Insekten sind extrem erfolgreich: Sie stellen nur 2% der Insektenarten, aber die Hälfte der Biomasse. Die Details sind verzwickt, doch Verwandtenselektion (*kin selection*) kann das Phänomen erklären.

Ähnliche Konflikte spüren wir selbst als Individuen in großen Gruppen, oder beim Zusammenfassen kleinerer Einheit zu großen Organisationen. Wann dürfen / können Regionen politische Unabhängigkeit reklamieren? Schottland? Katalonien? Kalifornien? Phantasiestaaten & Mikronationen?

## Die Evolution der sexuellen Vermehrung



Warum gibt es überhaupt Männer? Sind sie nicht ein teurer Luxus? Frauen gebären Nachwuchs, Männer dagegen sind nicht reproduktiv, auf den ersten Blick sicher „nice to have“, aber ansonsten entbehrlich. *Full disclosure:* Ich habe nichts gegen Männer, oft werde ich selbst für einen Mann gehalten. Ich frage rein aus wissenschaftlicher Neugier.

Grundsätzlich gefragt: Was sind die Vorteile sexueller Vermehrung? Sie ist evolutionär erfolgreich, also muss es gute Gründe für sie geben! Zunächst die Nachteile: Zum einen kostet die Paarung Zeit und Energie. Manche halten Sex zwar für die schönste Sache der Welt, doch das ist sicher kein objektives Urteil, sondern genetisch fest einprogrammiert. Großer Vorteil: Sex kombiniert Gene und beschleunigt die Evolution.

Wenn wir schon zwei Geschlechter haben, warum gebiert nur eines? Dadurch wird die Reproduktivität um 50% reduziert. Dieses Paradoxon nannte Maynard Smith 1971 *the twofold cost of sex* und erklärte anhand mathematischer Modelle: Asexuelle Reproduktion ist zwar kurzfristig erfolgreicher, doch sexuelle Reproduktion bietet langfristig Vorteile.

## Die Evolution der sexuellen Vermehrung



Manche Arten nutzen *beide* Methoden der Vermehrung, typischerweise *sexuell* in guten Zeiten und *asexuell* in Notlagen, manche wechseln dann zur *Parthenogenese* (gr. παρθενογένεσις, ‘Jungfernzeugung’). Das deutet auf den obigen Grundkonflikt hin, kurzfristige vs langfristige Vorteile.

*Fun fact:* Ginkgobäume haben zwei Geschlechter, die weiblichen bilden Samen; diese ähneln Mirabellen, sind aber streng besehen keine Frucht. Für uns Menschen stinken die Samen nach Buttersäure, wie Erbrochenes oder ranzige Milch, daher pflanzen wir selbstredend lieber männliche Ginkgos. So wurden 2012 in der Zürcher Europa-Allée 76 *männliche* Ginkgos gepflanzt. Inzwischen stellte sich jedoch heraus, dass Ginkgos ihr Geschlecht wechseln können! So sind einige der ehemals männlich gelesenen Zürcher Ginkgos nun *weiblich* und bilden stinkende Samen.

Die Stadt ließ sich vertraglich zusichern, dass die Baumschule fälschlich gepflanzte weibliche Ginkgos ersetzt. Was passiert nun, wenn männliche Bäume ihre weibliche Seite entdecken? Die juristische Frage bleibt offen. Grundlegende mathematische Fragen hingegen wollen wir nun klären.

## Evolutionär stabile Strategien



Gegeben sei ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$. Seine affine Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ interpretieren wir als Populationsmodell.

Zudem sei $u$ symmetrisch, also $S_1 = S_2 = S$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und somit $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 =: \bar{S}$ und $\bar{u}_1(s_1, s_2) = \bar{u}_2(s_2, s_1) =: v(s_1, s_2)$.

Dank E1E existieren symmetrische Nash–Gleichgewichte $(s, s) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Das bedeutet, die Strategie $s \in \bar{S}$ erfüllt $v(s, s) \geq v(\tilde{s}, s)$ für alle $\tilde{s} \in \bar{S}$.

Zur Strategie $s \in \bar{S}$ tritt nun eine Mutation $\tilde{s} \in \bar{S}$ mit kleiner Wkt $\varepsilon > 0$. Die Gesamtpopulation verschiebt sich somit von $s$ zu $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Vor diesem Hintergrund $s'$ vergleichen wir die Fitness von $s$ bzw. $\tilde{s}$:

$$\begin{aligned} f(s) &= v(s, s') = (1 - \varepsilon)\, v(s, s) + \varepsilon\, v(s, \tilde{s}) \\ f(\tilde{s}) &= v(\tilde{s}, s') = \underbrace{(1 - \varepsilon)\, v(\tilde{s}, s)}_{\text{nullte Ordnung}} + \underbrace{\varepsilon\, v(\tilde{s}, \tilde{s})}_{\text{erste Ordnung}} \end{aligned}$$

Dabei soll $f(s) > f(\tilde{s})$ gelten für alle $\varepsilon \in \,]0, \delta[$ und ein festes $\delta > 0$.
Das führt uns unmittelbar zu der folgenden praktischen Definition.

## Evolutionär stabile Strategien



Gegeben sei ein endliches symmetrisches Spiel $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und seine Fortsetzung auf gemischte Strategien

$$\bar{u} : \bar{S} \times \bar{S} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto \big( v(s_1, s_2),\ v(s_2, s_1) \big).$$

**Definition G3A:** evolutionär stabile Strategien

Die Strategie $s \in \bar{S}$ heißt **evolutionär stabil** gegen $\tilde{s} \in \bar{S}$, wenn gilt:

0 entweder strikt $v(s, s) > v(\tilde{s}, s)$

1 oder schwach $v(s, s) = v(\tilde{s}, s)$, aber $v(s, \tilde{s}) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$.

Gilt dies für alle $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$, so heißt $s$ **evolutionär stabil**, kurz:

$$\mathrm{ESS}(\bar{u}) := \{\, s \in \bar{S} \mid s \text{ ist evolutionär stabil} \,\}$$

**Übung:** Für jedes reelle symmetrische Spiel $u$ gilt:

$$(s, s) \in \mathrm{NE}^!(\bar{u}) \quad \Longrightarrow \quad s \in \mathrm{ESS}(\bar{u}) \quad \Longrightarrow \quad (s, s) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$$

Die Umkehrungen gelten i.A. nicht, wie Gegenbeispiele zeigen.

## Evolutionär stabile Strategien



Wir wollen die Formel ausführlicher herleiten und diskutieren.

Sei $S = S_1 = S_2 = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die Strategiemenge. Im Kontext der Evolutionstheorie können wir uns jedes $s_k$ als einen Genotyp vorstellen.

Die aktuelle Population besteht aus einer Mischung $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$, wobei wie immer $p_0, p_1, \dots, p_\ell \geq 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$ gilt.

Das vorgegebene Spiel $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_i, s_j) \mapsto (v(s_i, s_j), v(s_j, s_i))$ beschreibt die Interaktion zweier Individuen vom Genotyp $s_i$ und $s_j$.

Die Spielersymmetrie bedeutet, dass keiner als „erster“ oder „zweiter“ Spieler ausgezeichnet wird. Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$ vorliegenden Häufigkeiten.

Bezüglich der aktuellen Population $s \in \bar{S}$ hat jede reine Strategie $s_i \in S$ die Fitness $f(s_i) = v(s_i, s) = \sum_{j=0}^{\ell} p_j v(s_i, s_j)$, denn $s_i$ spielt gegen $s$.

Die durchschnittliche Fitness in der Population $s$ ist daher

$$f(s) = v(s, s) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} p_i p_j v(s_i, s_j).$$

## Evolutionär stabile Strategien



Die Mutation $\tilde{s}$ tritt mit einer kleinen Wkt $\varepsilon > 0$ auf. Dies verschiebt die bisherige Population $s$ zur veränderten Mischung $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Bezüglich dieser neuen Gesamtpopulation $s'$ vergleichen wir die durchschnittliche Fitness der alten Population $s$ mit der Mutation $\tilde{s}$:

$$f(s) = v(s, s') = (1 - \varepsilon)\, v(s, s) + \varepsilon\, v(s, \tilde{s})$$
$$f(\tilde{s}) = v(\tilde{s}, s') = (1 - \varepsilon)\, v(\tilde{s}, s) + \varepsilon\, v(\tilde{s}, \tilde{s})$$

🙂 Entscheidend ist diese vereinfachende Annahme unseres Modells: Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population $s'$ vorliegenden Häufigkeiten. Keiner kann sich sein Gegenüber aussuchen. Das ist realistisch, wenn die Individuen (nahezu) ununterscheidbar sind.

Wir nutzen die Linearität von $v$ im zweiten Parameter $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$. Der termweise Vergleich führt zu den oben genannten Ungleichungen.

⚠ Wir vereinfachen hier radikal. Die Analyse ist komplizierter und verläuft anders, wenn sich die Teilpopulationen nicht zufällig mischen, sondern meiden oder suchen, oder räumlich inhomogen verteilt sind.

## Fishers Erklärung der Geschlechterverteilung



Warum ist das beobachtete Geschlechterverhältnis recht stabil $1:1$?

***Fisher's principle – the most celebrated argument in evolutionary biology***

(1) Angenommen, Männchen würden seltener geboren als Weibchen. (2) Dann hat statistisch ein neugeborenes Männchen mehr Nachkommen als ein neugeborenes Weibchen. (3) Eltern mit Disposition zu männlichem Nachwuchs haben daher mehr Enkel. (4) Die Gene hierfür verbreiten sich daher etwas schneller und korrigieren so das Geschlechterverhältnis in Richtung $1:1$. (5) Dadurch verschwindet der genannte Vorteil langsam. (6) Dasselbe gilt, wenn mehr Weibchen als Männchen geboren werden.

Mit anderen Worten: Das $1:1$ Verhältnis ist evolutionär stabil (ESS).

Heutzutage wird die spieltheoretische Beschreibung selbstverständlich als grundlegendes quantitatives Modell in der Biologie angewendet. Umgekehrt prägt die evolutionäre Sichtweise ebenso die Spieltheorie.

## Evolutionär stabile Strategien



**Projekt:** Formulieren Sie zu Fishers Prinzip ein quantitatives Modell.
Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games.* CUP 1982, §2.

**Übung:** Manche Autor:innen definieren stabile Gleichgewichte $s \in \bar{S}$ durch leicht abweichende Bedingungen, etwa eines der folgenden:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & v(s,s) > v(\tilde{s},s) & \text{oder} & \big[v(s,s) = v(\tilde{s},s) \quad \text{und} \quad v(s,\tilde{s}) > v(\tilde{s},\tilde{s})\big] \\
(2) & v(s,s) \geq v(\tilde{s},s) & \text{und} & v(\tilde{s},s) > v(\tilde{s},\tilde{s}) \\
(3) & v(s,s) \geq v(\tilde{s},s) & \text{und} & v(s,s) > v(\tilde{s},\tilde{s})
\end{array}
$$

für alle Alternativen $\tilde{s} \in \bar{S} \smallsetminus \{s\}$. Welche Implikationen gelten zwischen diesen drei Definitionen und (strikten) Nash–Gleichgewichten?

**Übung:** Wir nutzen evolutionäre Stabilität für paarweise Interaktion in einem symmetrischen Zwei-Personen-Spiel. Wie sieht die Bedingung für symmetrische Drei-Personen-Spiele aus? und $n$–Personen-Spiele?

**Übung:** Sei $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches symmetrisches Spiel.
(1) Sei $\sharp S = 2$. Hat $\bar{u}$ immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?
(2) Sei $\sharp S = 3$. Hat $\bar{u}$ immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?

## Evolutionär stabile Strategien



NATURE VOL. 246 NOVEMBER 2 1973

**The Logic of Animal Conflict**

J. MAYNARD SMITH
G. R. PRICE

Conflicts between animals of the same species usually are of "limited war" type, not causing serious injury. This is often explained as due to group or species selection for behaviour benefiting the species rather than individuals. Game theory and computer simulation analyses show, however, that a "limited war" strategy benefits individual animals as well as the species.

John Maynard Smith: *My first encounters with game theory, courtesy of George Price.* youtu.be/YDYwLp7ijwo&list=PLVV0r6CmEsFzJSvAc4MBuUP_GrjO1lLHp

Price' grundlegende Ideen waren genial, doch sein Leben verlief tragisch.

Z.B. Hancock: *Evolution's Fundamental Theorem.* youtu.be/tfMMuI7rQ8E

## Evolutionär stabile Strategien



Spieltheorie wird sehr erfolgreich in der Evolutionsbiologie angewendet. Hier ist der Hauptmechanismus nicht individuelle Rationalität, sondern die Evolution der Population durch Vererbung, Mutation und Selektion.

Evolutionär stabile Strategien (ESS) wurden 1973 eingeführt von John Maynard Smith and George Robert Price: *The logic of animal conflict.* Seither avancierten ESS zu den Universalwerkzeugen der Spieltheorie.

*At first I thought it was pretty trivial.*
*Any idiot could do it in an afternoon. [...]*
*The point of a mathematical model is, really,*
*to make it absolutely clear what is being said.*

Maynard Smith zu evolutionär stabilen Strategien
youtu.be/C7m_Qeo8CE0&t=10, youtu.be/PWJ6Nyysp-M&t=90

Die mathematische Formulierung dieses Konzepts und das Verständnis seiner zahlreichen Anwendungen war ein Meilenstein der theoretischen Biologie und wurde vielfach mit Preisen ausgezeichnet. Im Rückblick ist kaum vorstellbar, wie lang und mühsam der Kristallisationsprozess war.

## Taube oder Falke?



Gelegentlich kämpfen zwei Individuen einer Population um eine Beute, vom Wert 2. Jedes agiert als Taube (defensiv) oder als Falke (offensiv). Der Ausdruck *hawk or dove* bezeichnet allgemein solches Verhalten.

Spielen beide Taube, so teilen sie sich die Beute. Spielt nur einer Falke, so bekommt er die gesamte Beute. Spielen beide Falke, so kämpfen sie, der Wert wird geteilt, aber reduziert um die Kosten $a$ des Kampfes.

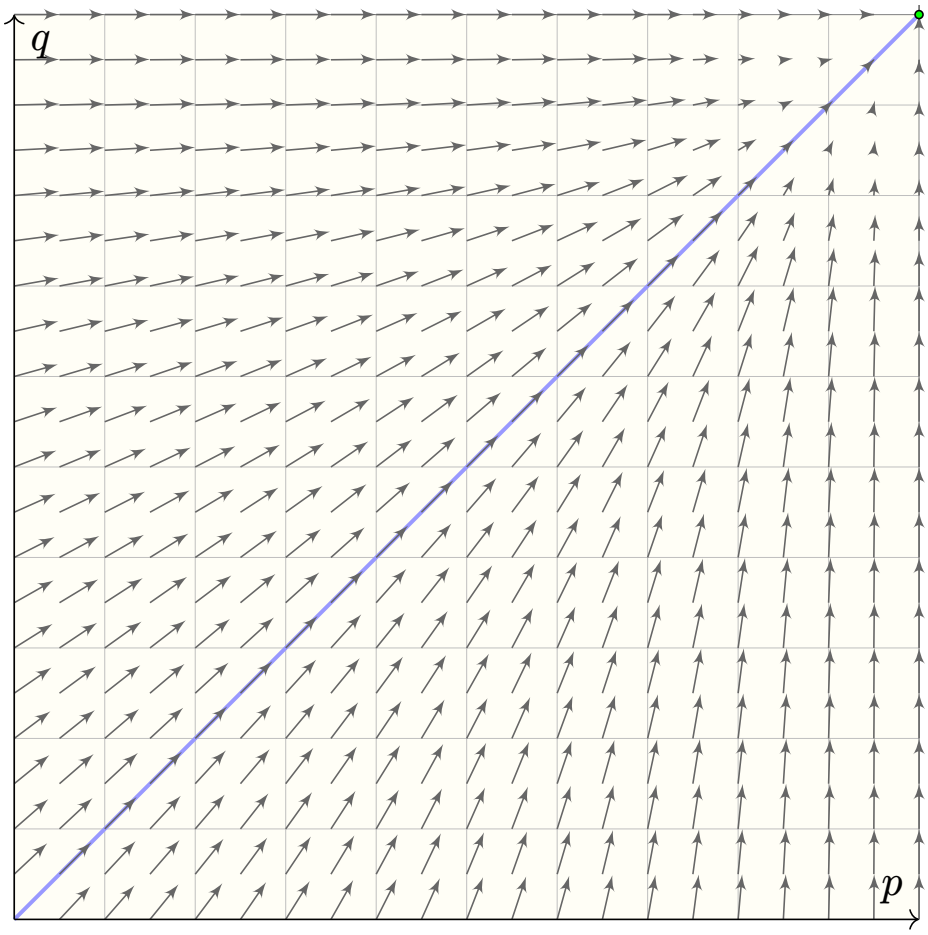
| A \ B | Taube | Falke |
|---|---|---|
| Taube | 1 / 1 | 0 / 2 |
| Falke | 2 / 0 | $1-a$ / $1-a$ |

**Aufgabe:** Finden Sie zu $a \in \mathbb{R}$ alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

## Taube oder Falke?



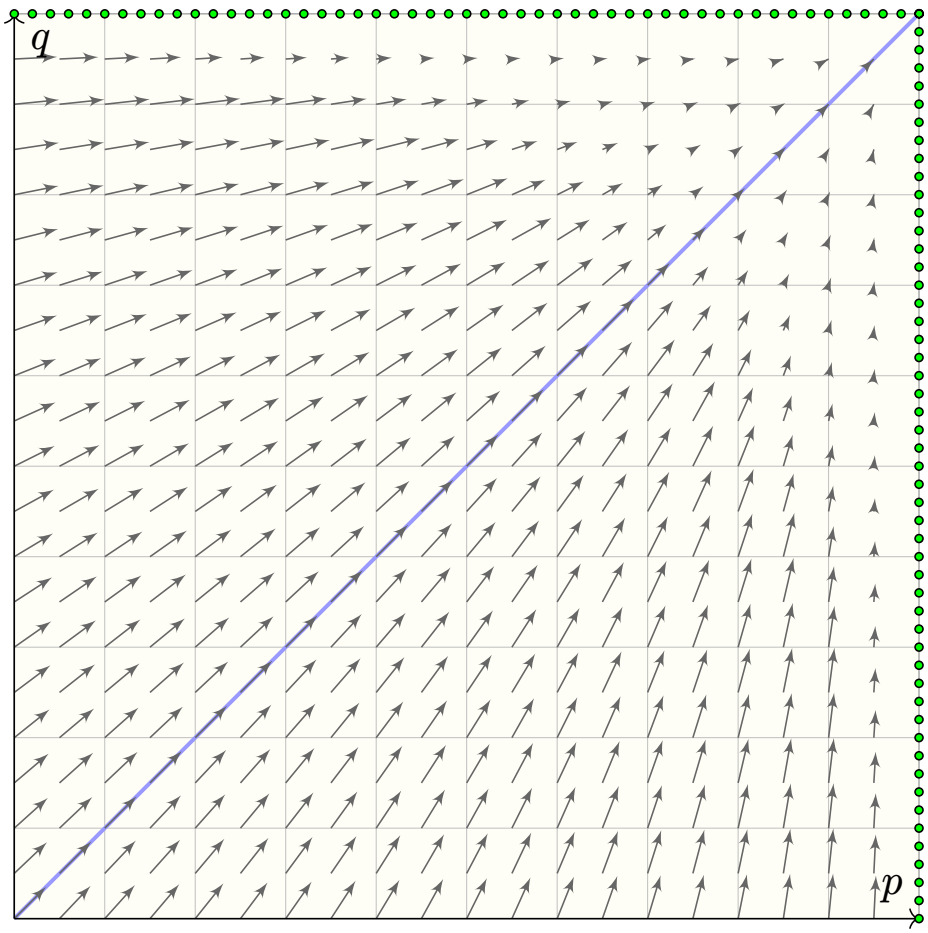
$a = 1/2$



# Taube oder Falke?



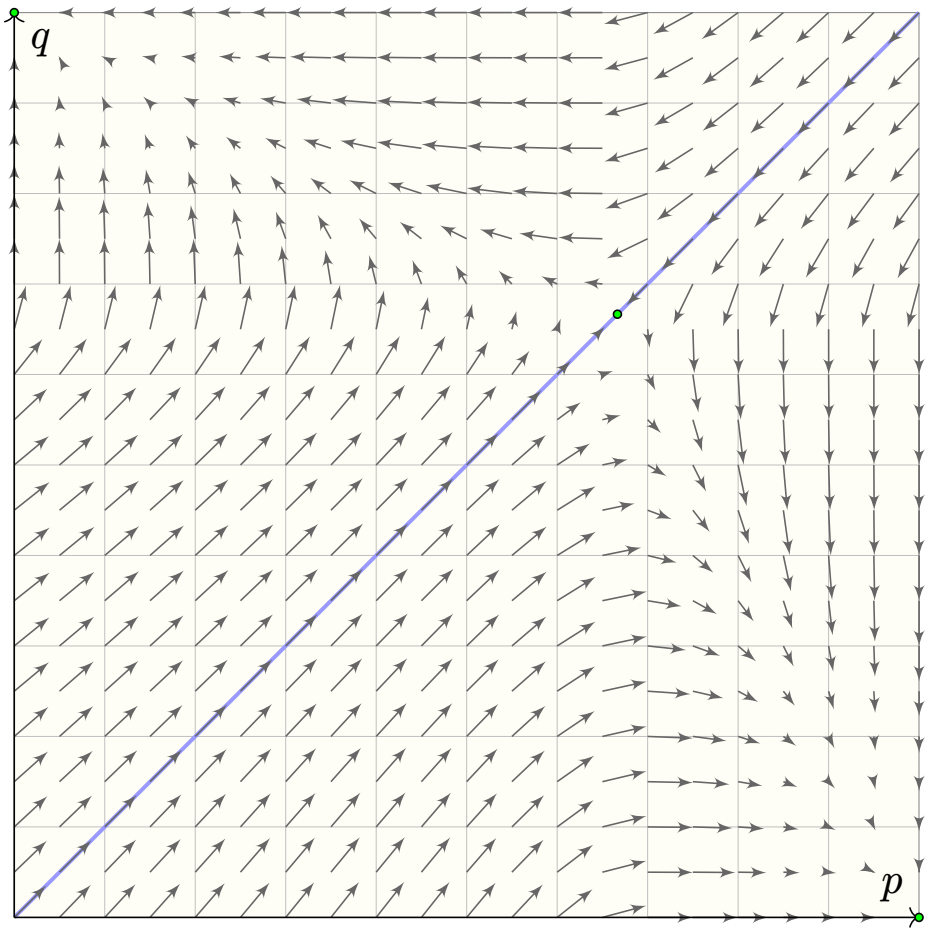
$a = 1$




# Taube oder Falke?



$a = {}^{3}/_{2}$



## Taube oder Falke?



**Lösung:** Für $a < 1$ existiert genau ein Gleichgewicht, (Falke, Falke), denn die Strategie Taube wird strikt dominiert durch die Strategie Falke. Eine Mutation Taube kann sich in dieser reinen Falken–Population nicht durchsetzen, da sie offensichtlich Fitnessnachteile hat.

Im Sonderfall $a = 1$ gibt es unendlich viele gemischte Gleichgewichte, nämlich $(s, \text{Falke})$ und $(\text{Falke}, s)$ für jede gemischte Strategie $s \in \bar{S}$.

Für $a > 1$ hat das Spiel die beiden reinen Gleichgewichte (Taube, Falke) und (Falke, Taube), beide sind strikt, und zudem noch genau ein gemischtes Gleichgewicht $(s, s)$ wie nachfolgend angegeben.

Für $a \geq 1$ hat das Spiel genau ein symmetrisches Gleichgewicht:

$$s = \tfrac{a-1}{a} \cdot \text{Taube} + \tfrac{1}{a} \cdot \text{Falke}.$$

Die folgende Rechnung bestätigt, dass dies ein Gleichgewicht ist.
Ist diese Strategie evolutionär stabil? Wir wenden die Definition an!

## Taube oder Falke?



Wir vergleichen das Gleichgewicht $s$ mit einer alternativen Strategie

$$\tilde{s} = (1-p) \cdot \text{Taube} + p \cdot \text{Falke}.$$

Wir finden durch geduldiges Ausrechnen:

$$\begin{aligned}
v(\text{Taube}, s) &= \tfrac{a-1}{a}, & v(s, \text{Taube}) &= \tfrac{a+1}{a}, & v(\text{Taube}, \tilde{s}) &= 1-p, \\
v(\text{Falke}, s) &= \tfrac{a-1}{a}, & v(s, \text{Falke}) &= \tfrac{1-a}{a}, & v(\text{Falke}, \tilde{s}) &= 2-p-ap, \\
v(\tilde{s}, s) &= \tfrac{a-1}{a}, & v(s, \tilde{s}) &= \tfrac{a+1-2ap}{a}, & v(\tilde{s}, \tilde{s}) &= 1-ap^2.
\end{aligned}$$

Hier gilt $v(s,s) = v(\tilde{s},s) = (a-1)/a$ und $v(s,\tilde{s}) > v(\tilde{s},\tilde{s})$ für $p \neq 1/a$:

$$v(s,\tilde{s}) - v(\tilde{s},\tilde{s}) = \tfrac{a+1-2ap}{a} - (1-ap^2) = a\left(p - \tfrac{1}{a}\right)^2 \geq 0$$

☺ Die Strategie $s$ ist somit evolutionär stabil gegen alle $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$.
⚠ Eine Population nur aus Falken ist instabil, ebenso nur aus Tauben.
Nur eine Population in der richtigen Mischung $s = \frac{a-1}{a} \cdot \text{Taube} + \frac{1}{a} \cdot \text{Falke}$ ist im Nash–Gleichgewicht. Sie ist zudem sogar evolutionär stabil gegen *alle* Eindringlinge / Mutanten $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$, egal ob rein oder gemischt.

## Taube oder Falke?



⚠ Ich betone nochmals, dass wir hier nur symmetrische Spiele und symmetrische Strategien betrachten: Die gesamte Population spielt gegen sich selbst, das ist eine besondere Situation. In den Graphiken bedeutet das: Wir bewegen uns ausschließlich auf der Diagonalen!

⚠ Erlauben wir auch asymmetrische Strategiepaare $(s_1, s_2) \in \bar{S} \times \bar{S}$, so ist das obige Gleichgewicht $(s, s)$ nicht stabil, wie die Graphik zeigt:

Wir betrachten stetig verteilte zufällige Abweichung $(s_1, s_2)$ von $(s, s)$. Fast jede entwickelt sich unter der Dynamik des Nash–Vektorfeldes zu einem der beiden Gleichgewichte $(\text{Taube}, \text{Falke})$ oder $(\text{Falke}, \text{Taube})$.

Diese beiden Nash–Gleichgewichte sind strikt, in diesem Sinne stabil. Die beiden Attraktionsbecken werden durch die Diagonale getrennt.

⚠ Ob ein Nash–Gleichgewicht $(s, s)$ evolutionär stabil ist oder nicht, lässt sich am Nash–Vektorfeld erahnen, aber nicht sicher ablesen. Hierzu benötigen wir die Definition und eine sorgfältige Rechnung! Die vorige Aufgabe führt diese Untersuchung exemplarisch aus.

## Taube oder Falke?



☺ Einen guten Überblick gibt die Klassifikation aller $2 \times 2$–Spiele bis auf schwach monotone Isomorphie. Der Parameter $a$ definiert eine Homotopie von Spielen, wobei wir die Isomorphieklasse wechseln!

Kommt die Strategie Falke in einem evolutionär stabilen Gleichgewicht vor, dann zwingend auch die verlustreiche Konfrontation $(\text{Falke}, \text{Falke})$.

Mit **korrelierten Gleichgewichten** lässt sich dies vermeiden! Hierzu benötigen beide ein einfach zu beobachtendes Signal.

Die **Bourgeois-Strategie** bricht die Symmetrie wie folgt:
Spieler A ist derjenige, der die Beute zuerst besitzt / erjagt / findet.
Spieler B ist derjenige, der als zweites bei der Beute ankommt.

Dann ist die reine Strategie $(\text{Falke}, \text{Taube})$ ein Nash–Gleichgewicht. Es ist statistisch weniger verlustreich als gemischte Gleichgewichte. Dies erklärt zugleich das häufig beobachtete **Revierverhalten**.

Ebenso ist $(\text{Taube}, \text{Falke})$ ein Nash–Gleichgewicht, aber unsinnig. Praktisch hieße das nämlich: Der aktuelle Besitzer gibt bei jedem drohenden Konflikt freiwillig seine Beute auf. Das wäre höchst instabil.

## Dynamik von Rock-Paper-Lizards

Wir untersuchen noch einmal das Spiel *Schere-Stein-Papier*, diesmal modifiziert durch die Auszahlung $a \in \mathbb{R}$ bei Gleichstand.

| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|
| $s_1$ | $a$ / $a$ | $+1$ / $-1$ | $-1$ / $+1$ |
| $s_2$ | $-1$ / $+1$ | $a$ / $a$ | $+1$ / $-1$ |
| $s_3$ | $+1$ / $-1$ | $-1$ / $+1$ | $a$ / $a$ |

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & +1 \\ +1 & a & -1 \\ -1 & +1 & a \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** (1) Finden Sie hier alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

(2) Formulieren Sie die Populationsdynamik $\dot{x} = f(x)$ auf $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$ (a) gemäß dem Nash–Feld und (b) gemäß der Replikatorgleichung.



## Dynamik von Rock-Paper-Lizards

**Lösung:** (2a) Das Nash–Feld $f : \Delta^2 \to \mathbb{R}^2$ ist

$$f_i(x) = \frac{x_i + [e_i^\top A\,x - x^\top A\,x]^+}{1 + \sum_{j=0}^{2} [e_j^\top A\,x - x^\top A\,x]^+} - x_i$$

(2b) Die Repliktorgleichung ist gegeben durch $f : \Delta^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_i(x) = x_i [e_i^\top A\,x - x^\top A\,x]$$

Die folgenden Skizzen zeigen die Populationsdynamik für verschiedene Parameterwerte $a \in \mathbb{R}$ sowie einige Flusslinien dieser beiden Felder.

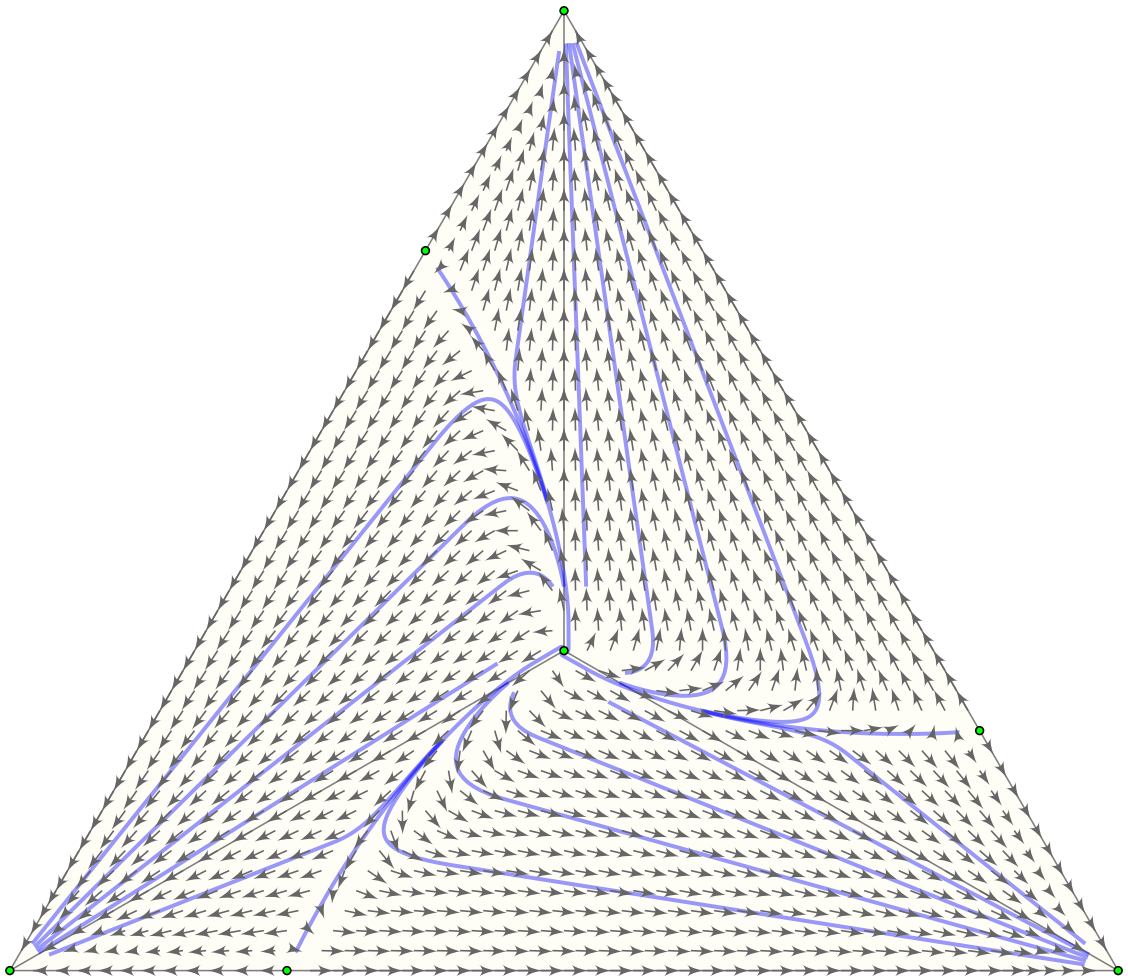
Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $x : \mathbb{R} \supseteq I \to \Delta^2$. Dies gilt sogar global, für maximale Lösungen $x : \mathbb{R} \to \Delta^2$: Alle Flusslinien verlaufen im Simplex $\Delta^2$, denn das Vektorfeld $f$ zeigt nirgends nach außen.

☺ Die zyklische Dynamik für $a = 0$ lässt sich in der Natur beobachten! Der Seitenfleckenleguan [*side-blotched lizard*] tritt in drei Varianten auf, deren Häufigkeit wie bei Schere-Stein-Papier zyklisch wechselt, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Side-blotched_lizard` und `doi.org/10.1038/380240a0`.

## Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



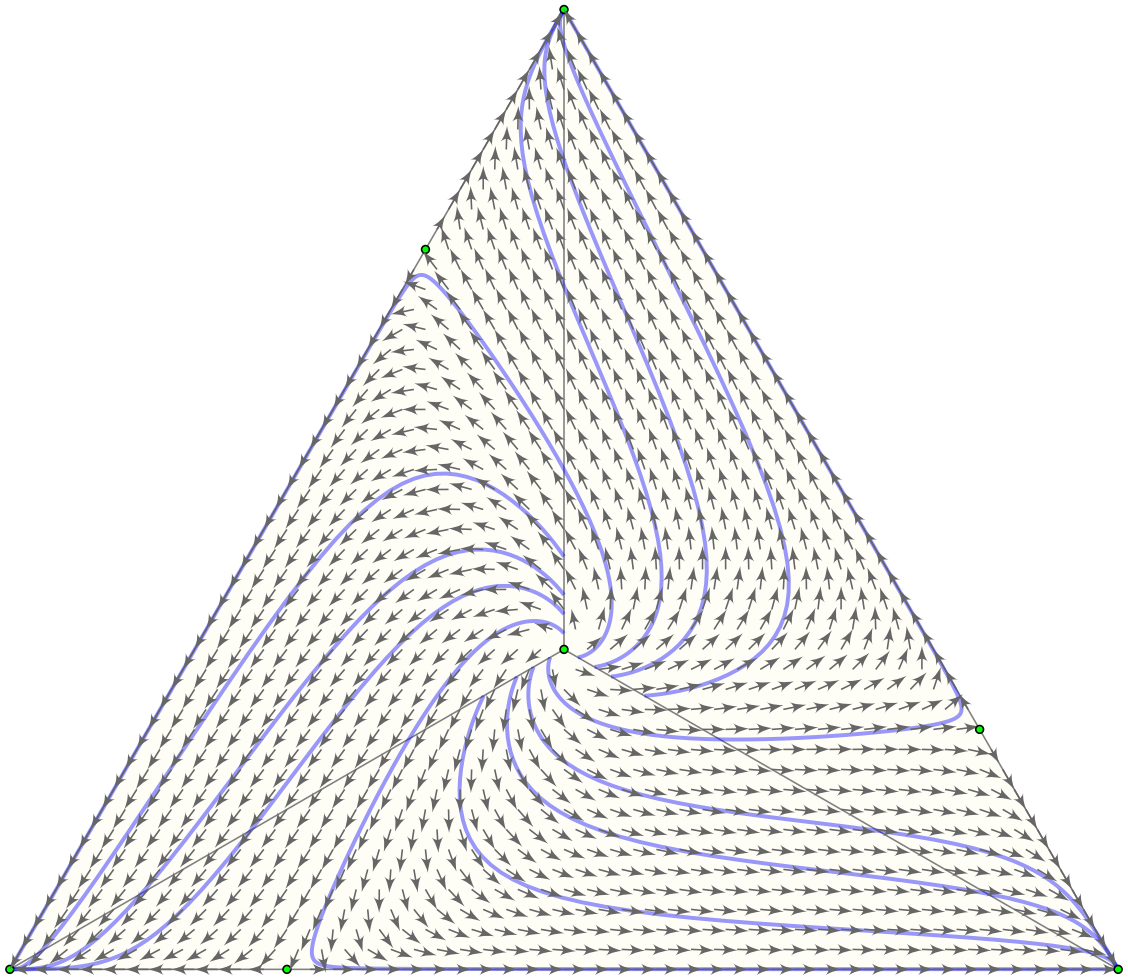
$a = 2$



## Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards



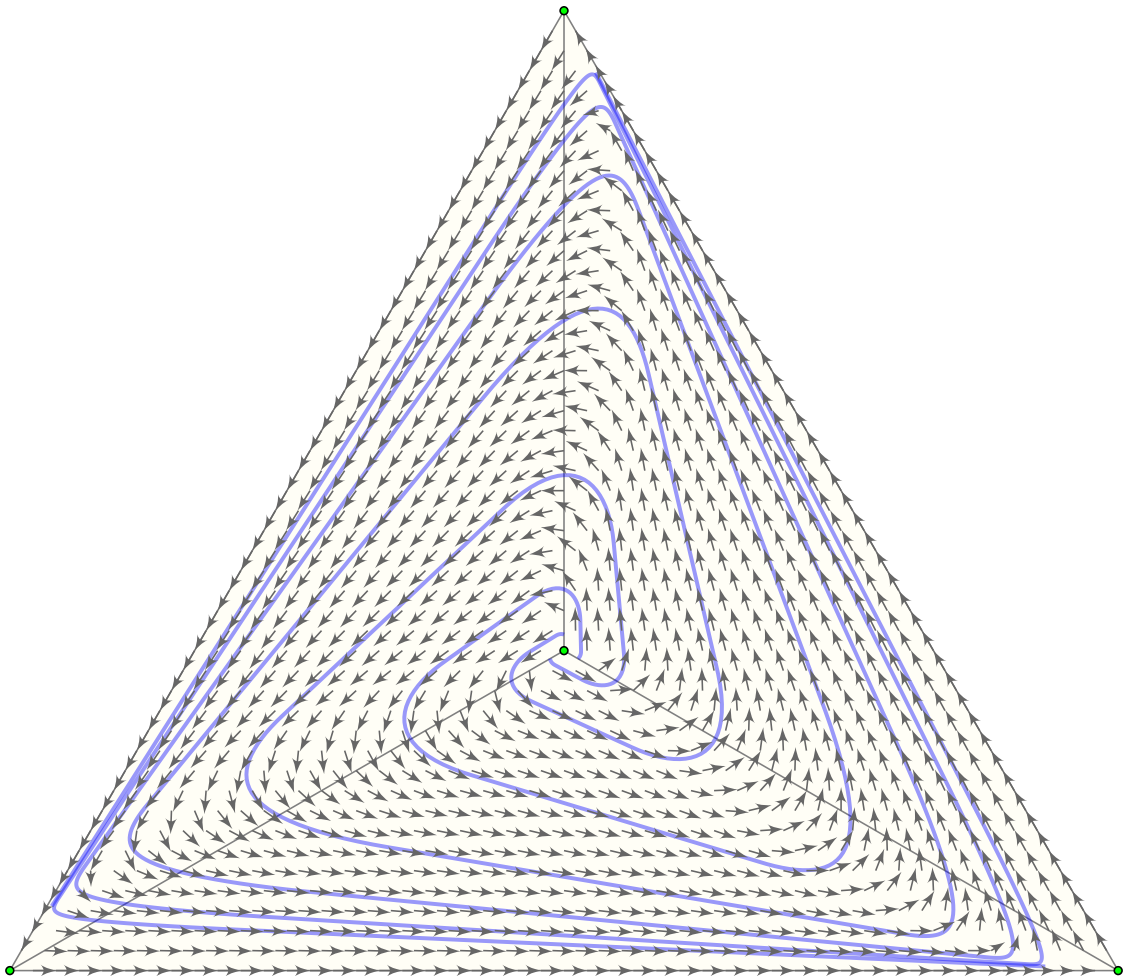
$a = 2$



# Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



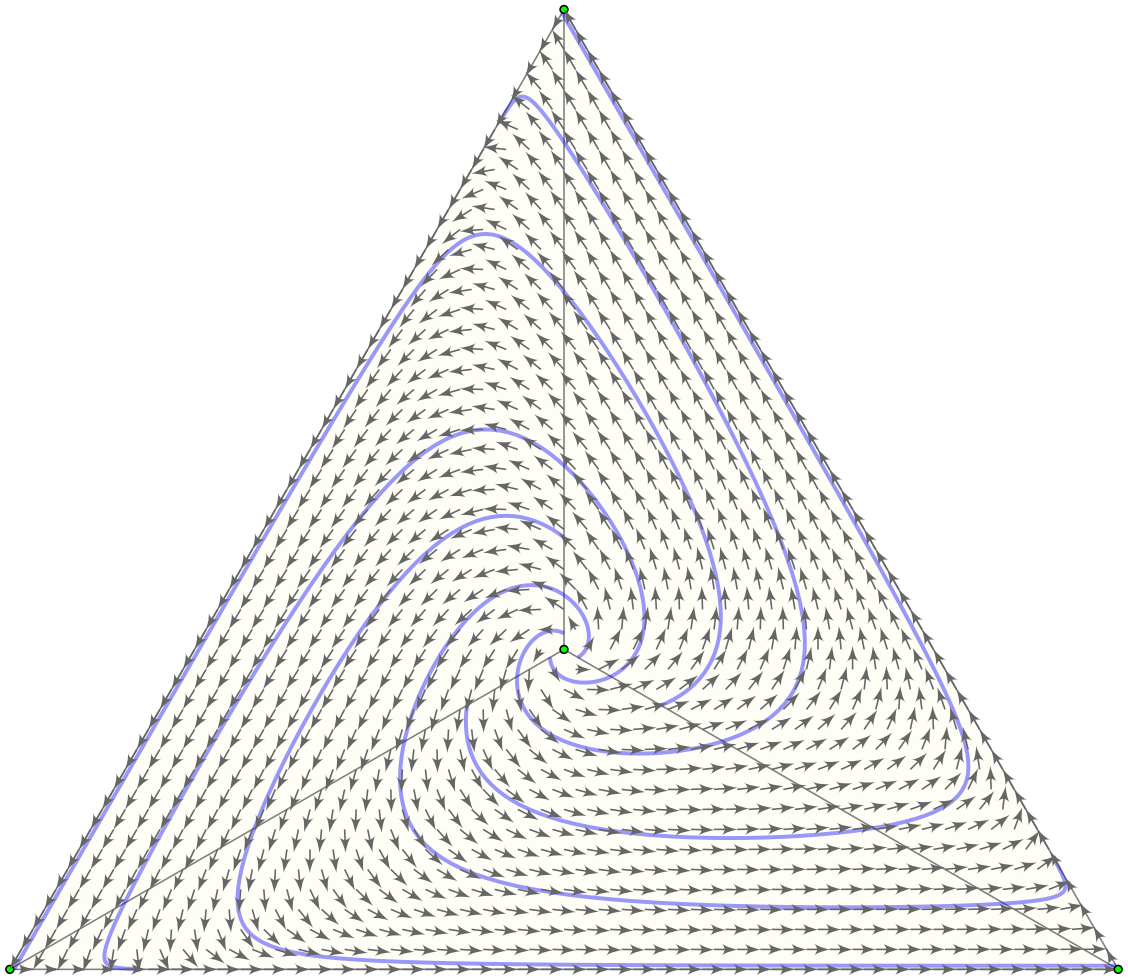
$a = 1$



# Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards



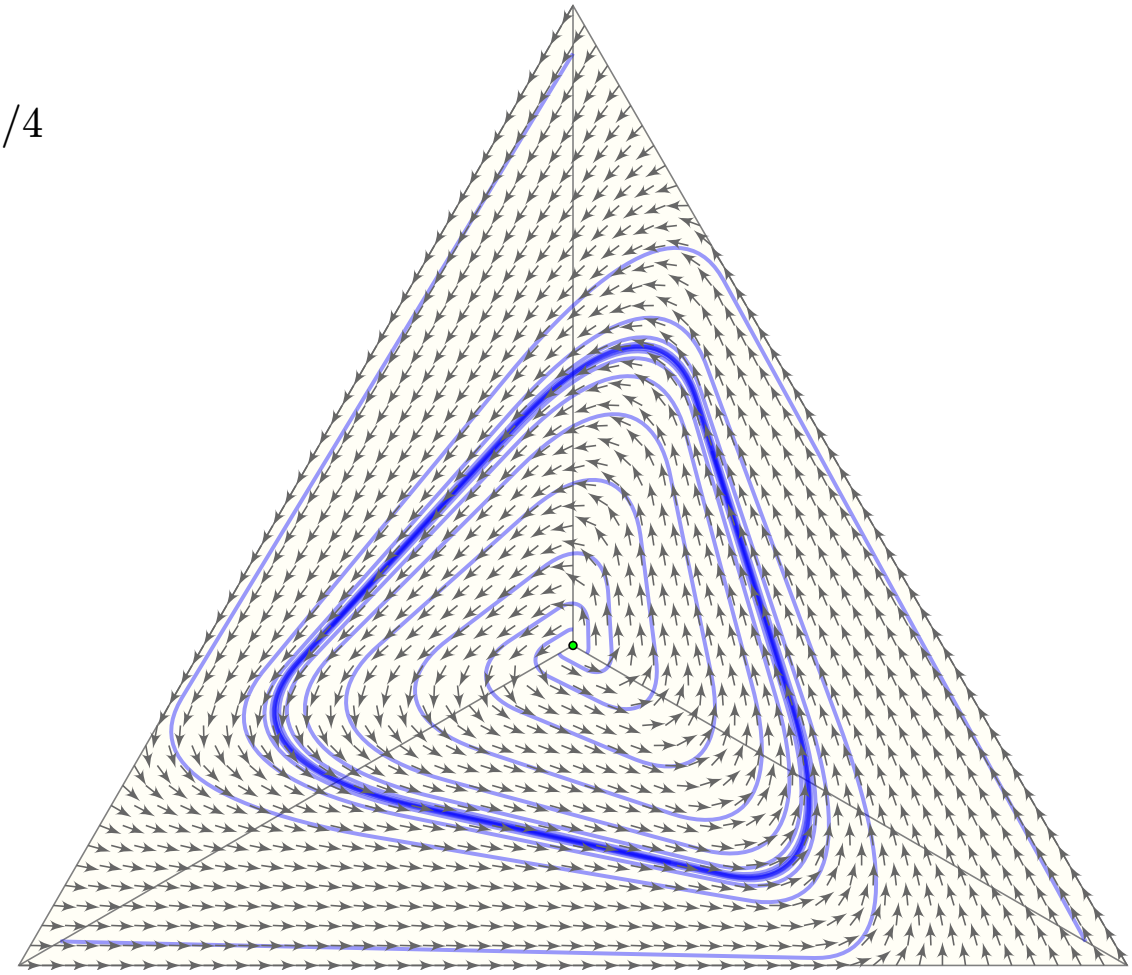
$a = 1$



# Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



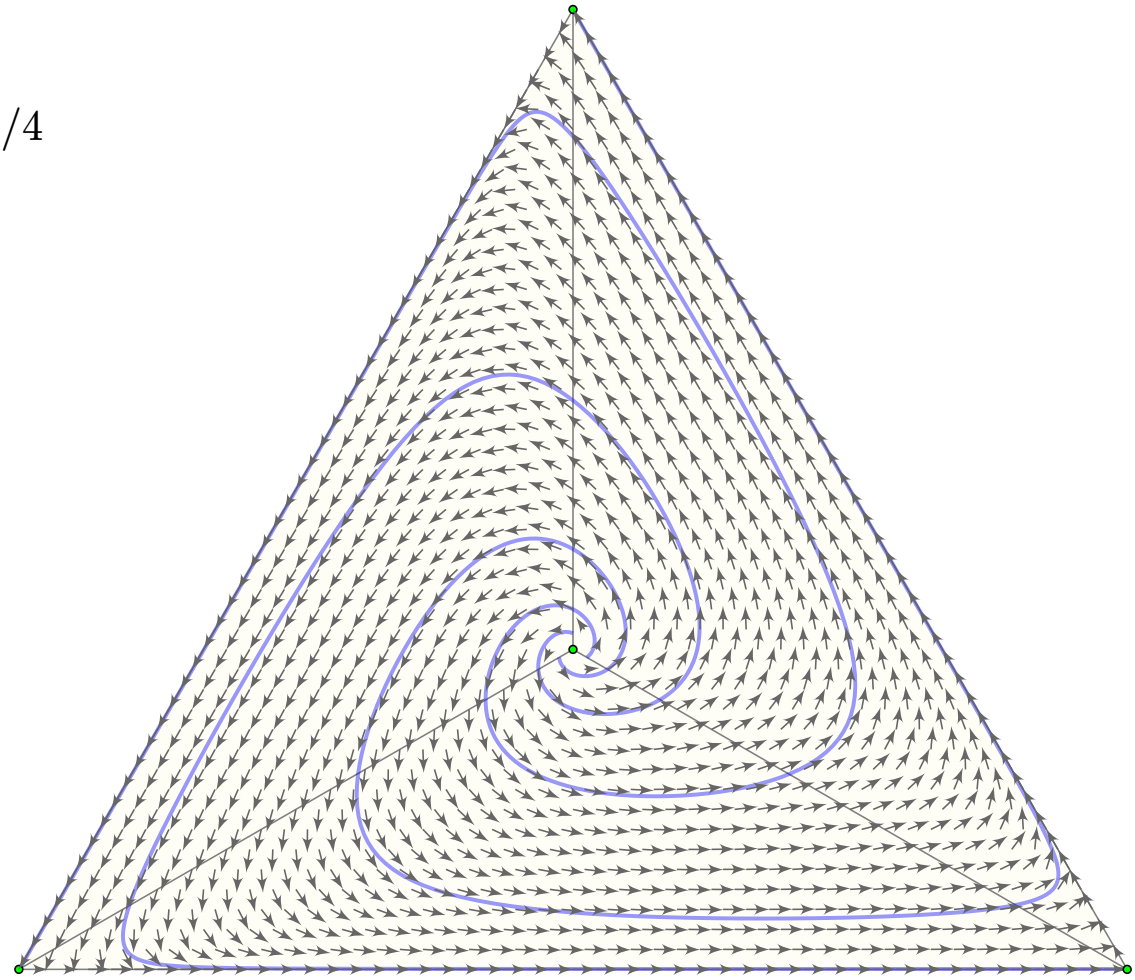
$a = 3/4$



# Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards



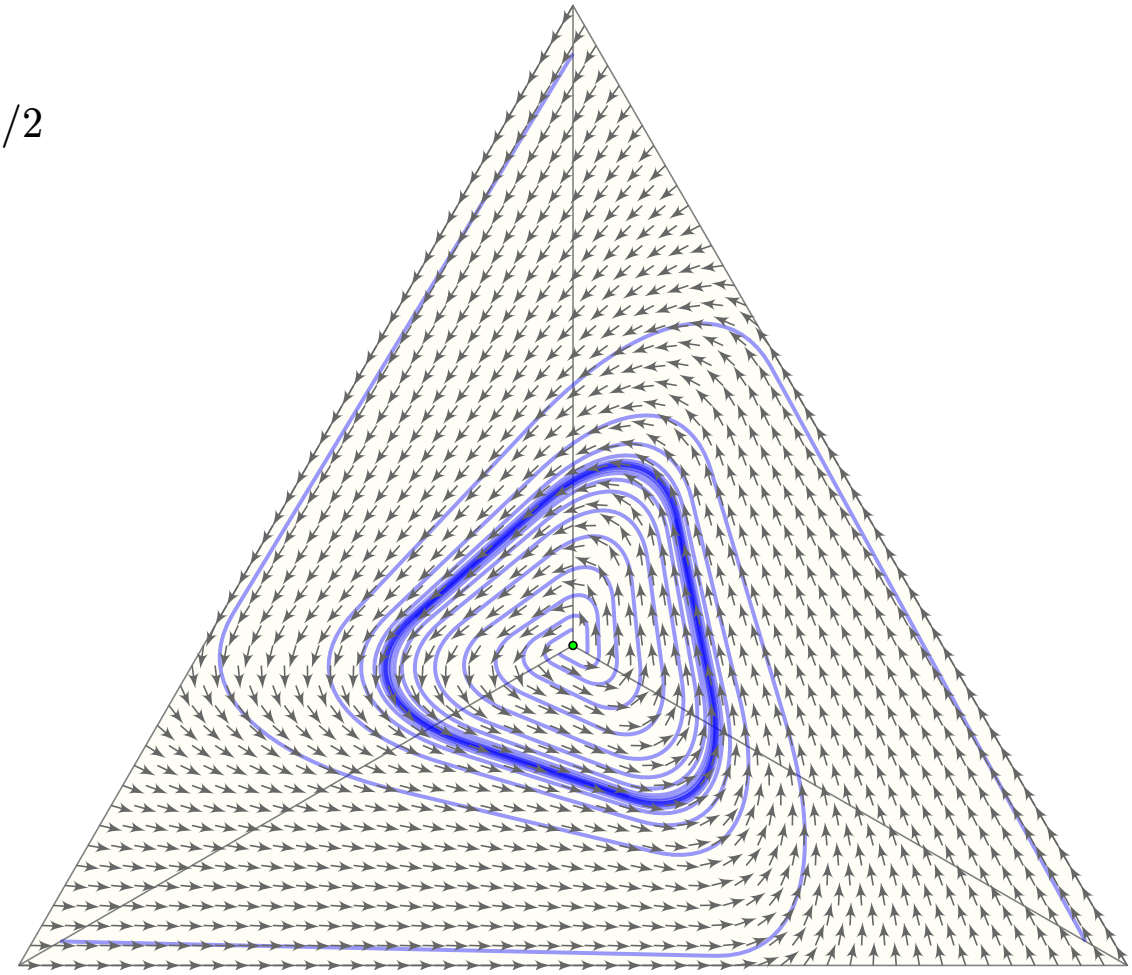
$a = 3/4$



# Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G357
Erläuterung

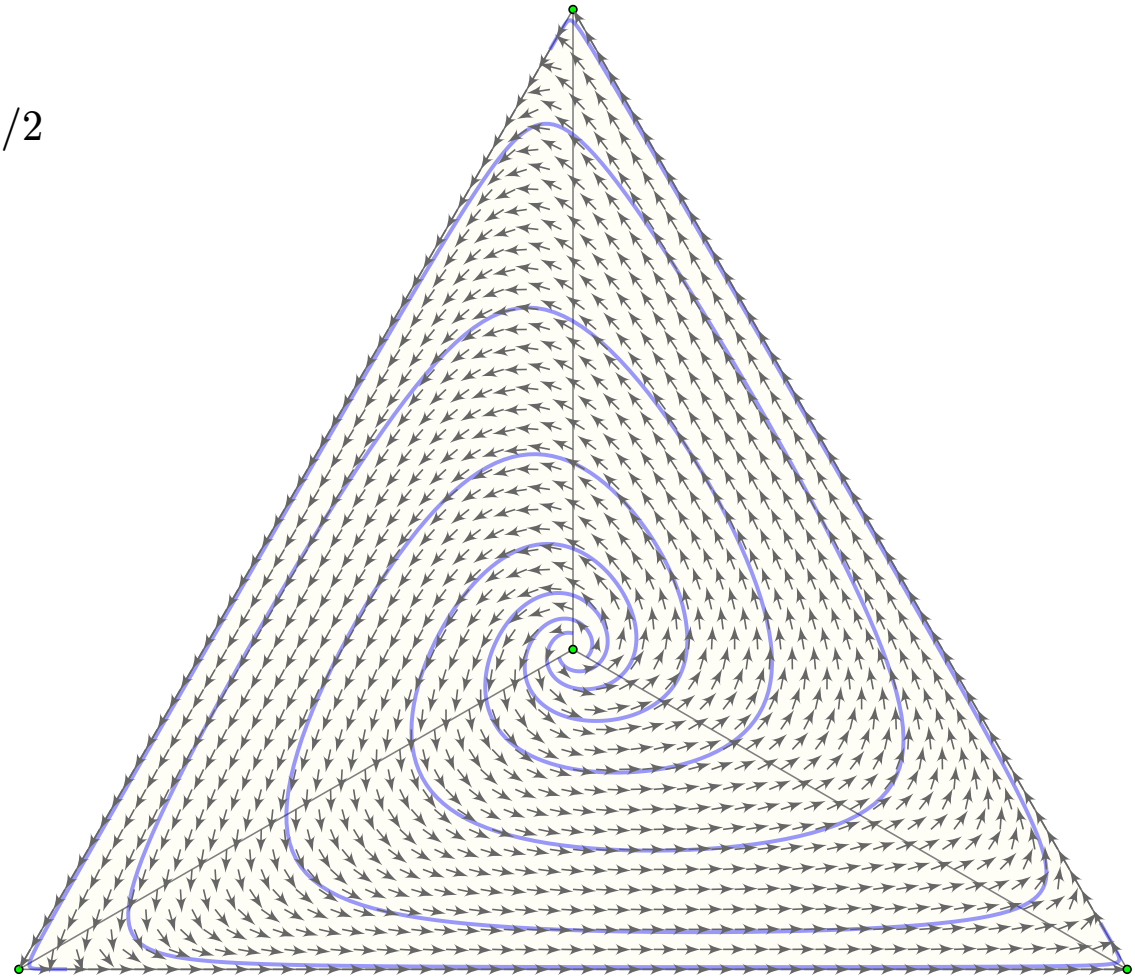
$a = 1/2$



# Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

G358

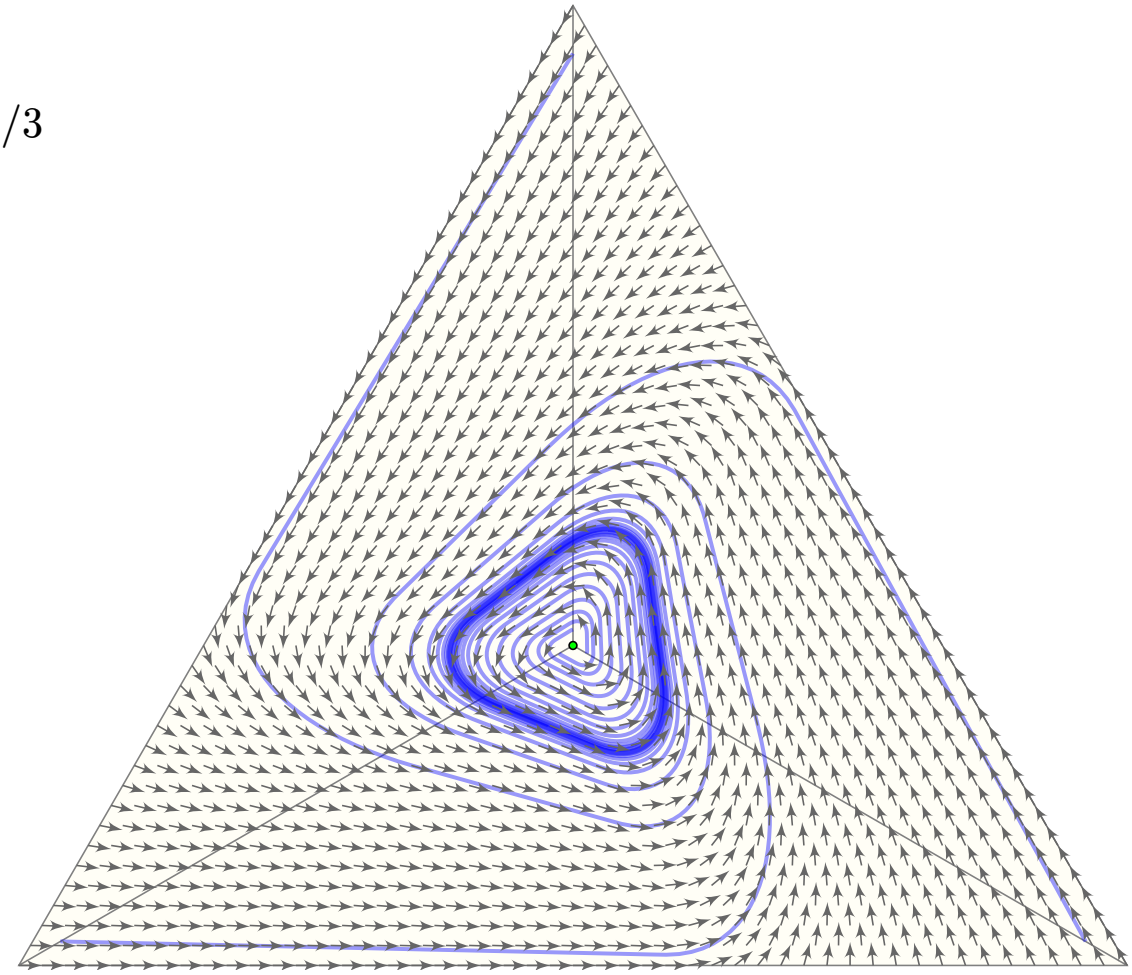
$a = 1/2$



# Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



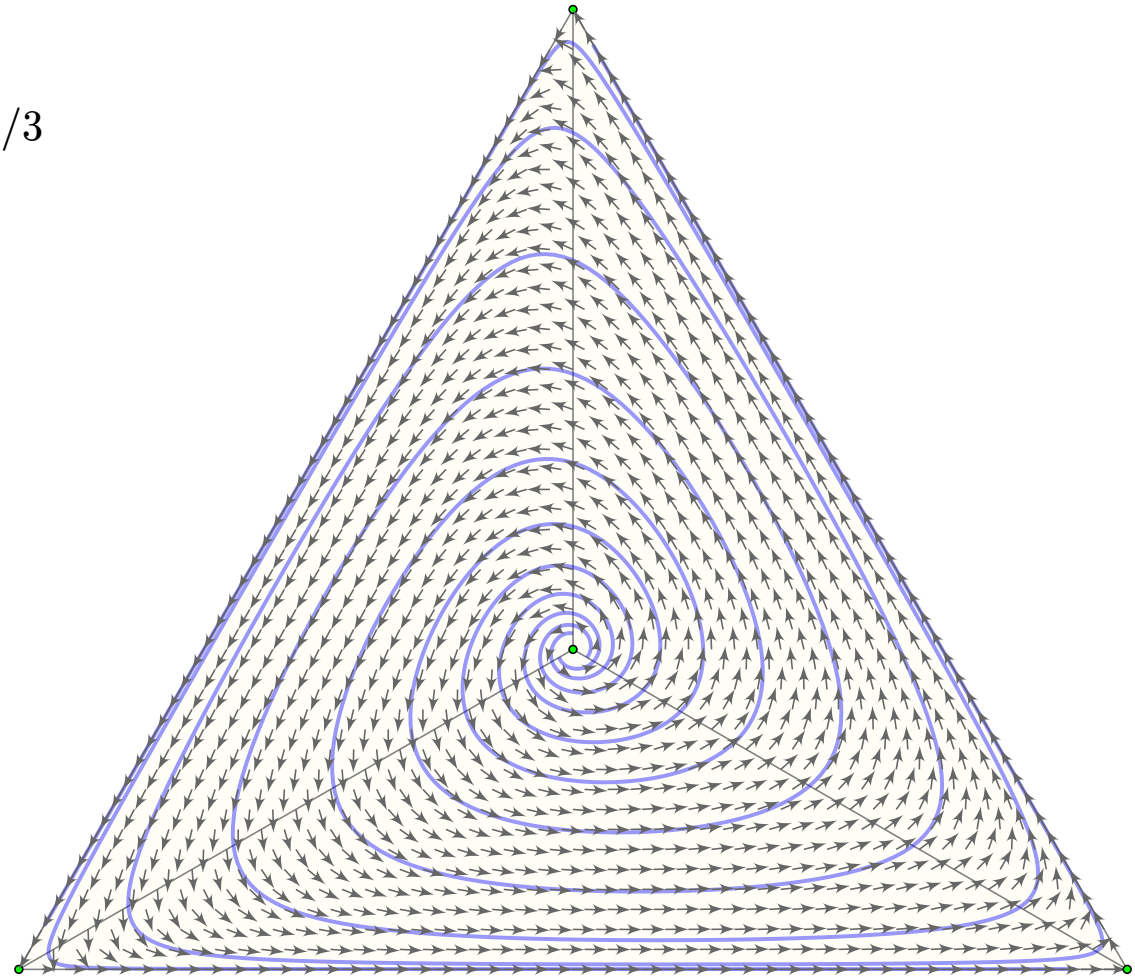
$a = 1/3$



# Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards



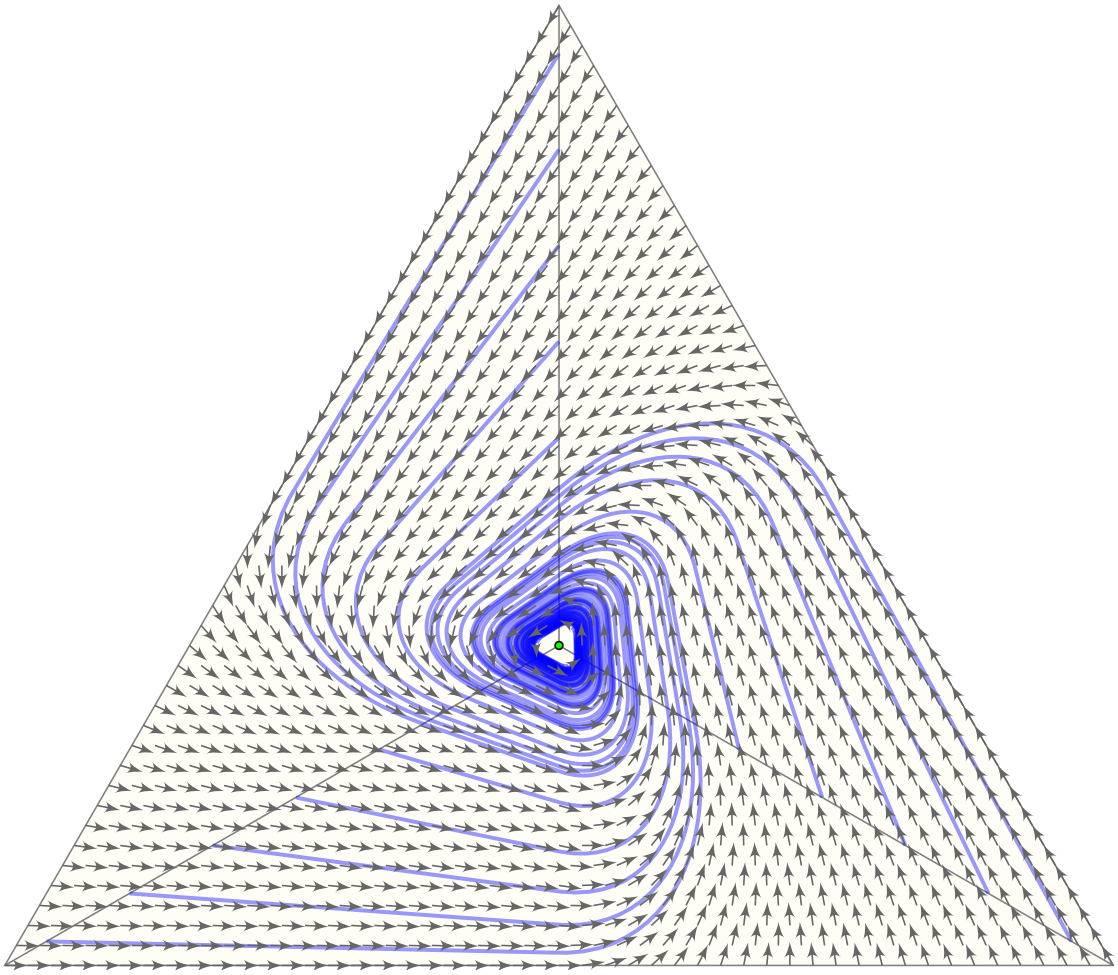
$a = 1/3$



# Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



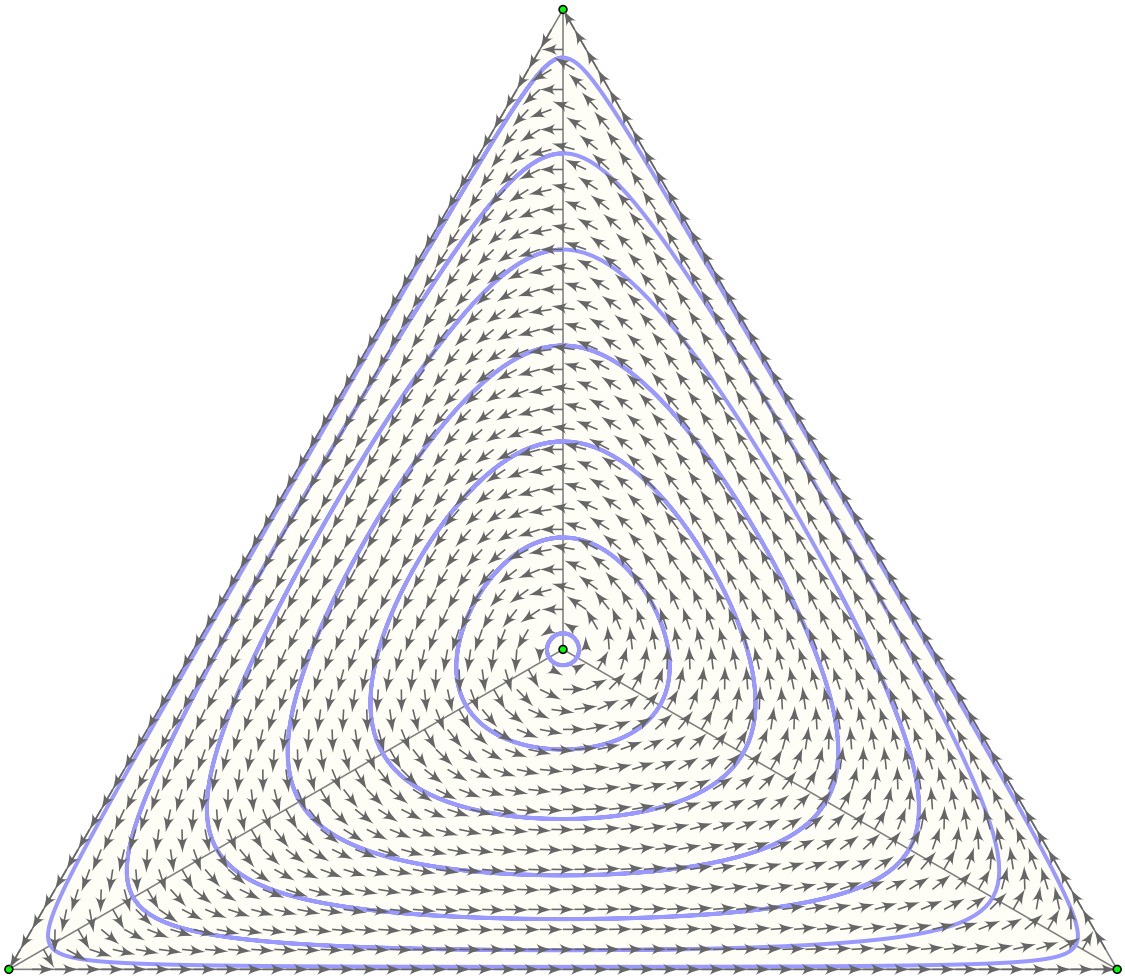
$a = 0$



# Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards



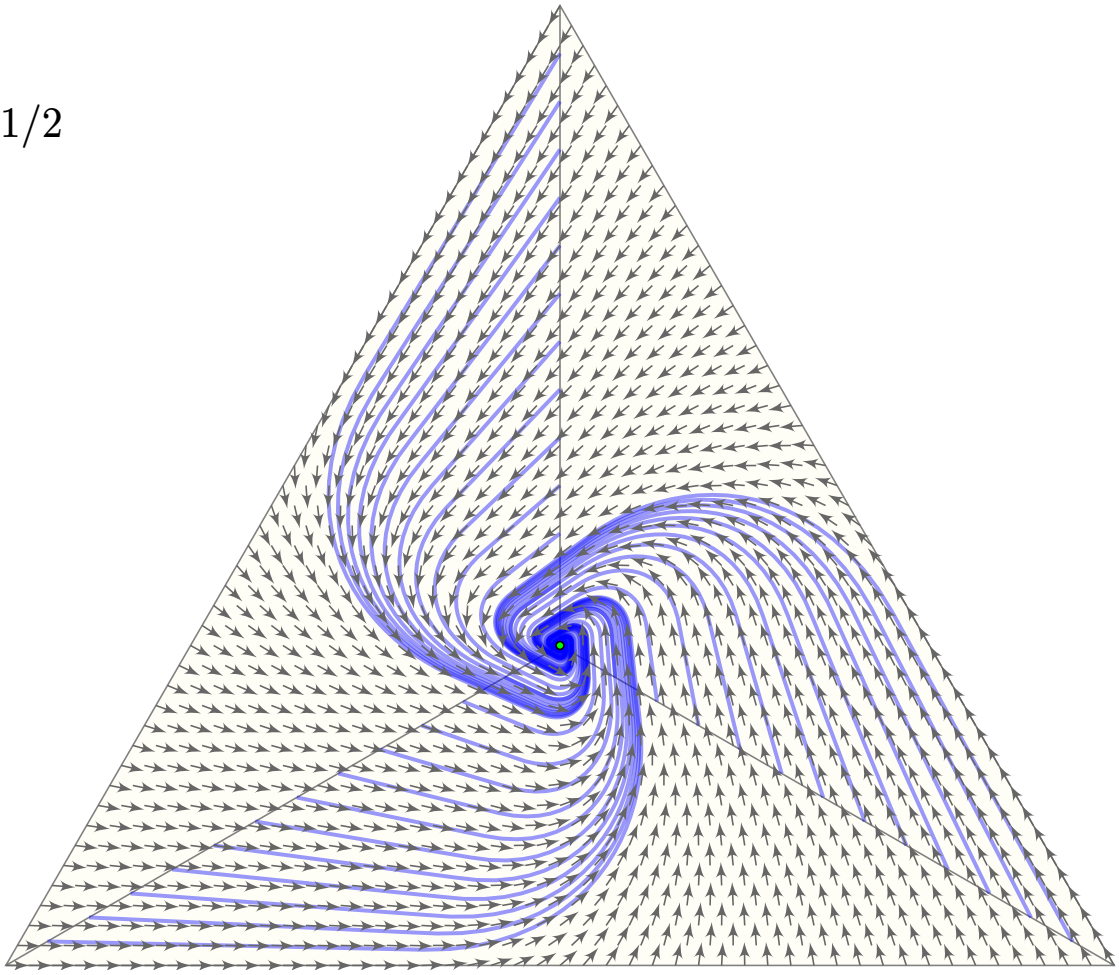
$a = 0$



# Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



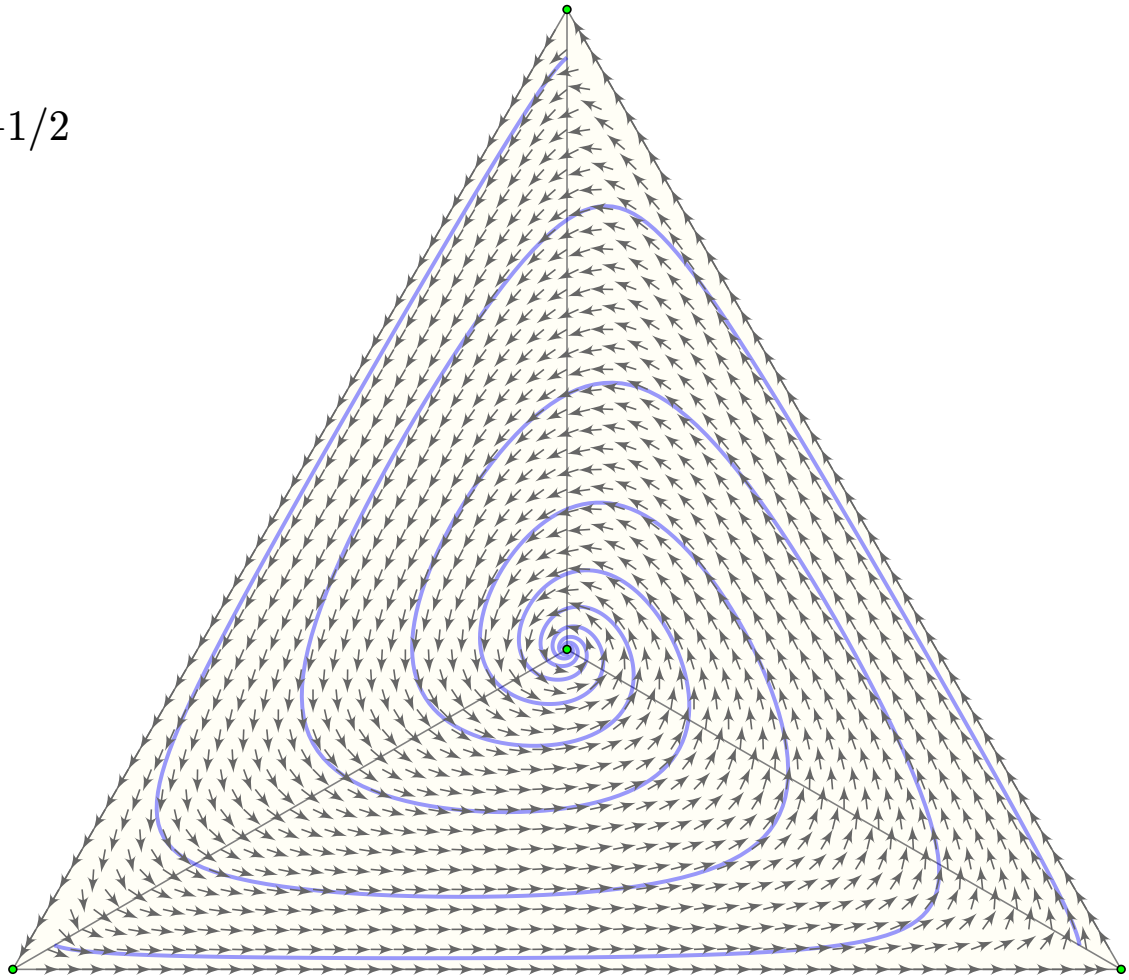
$a = -1/2$



# Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards



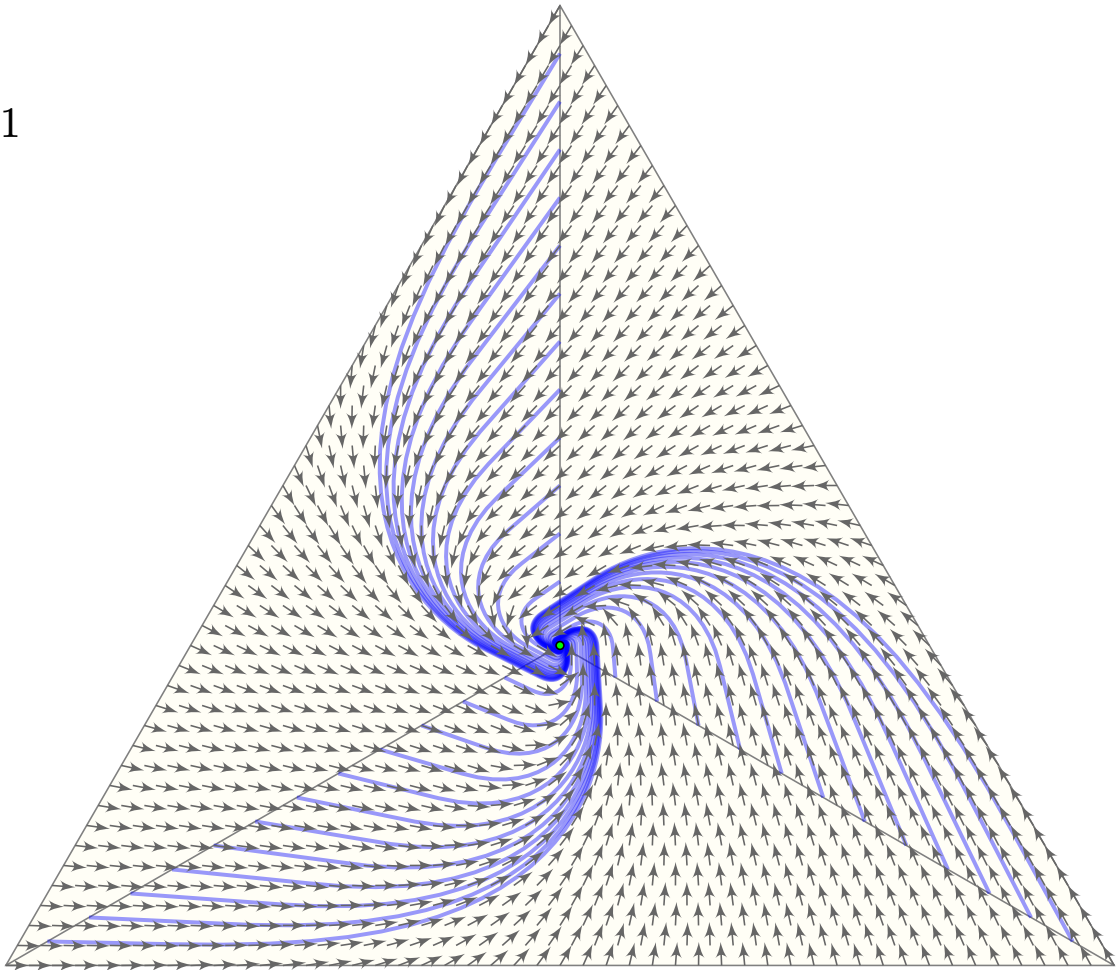
$a = -1/2$



# Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



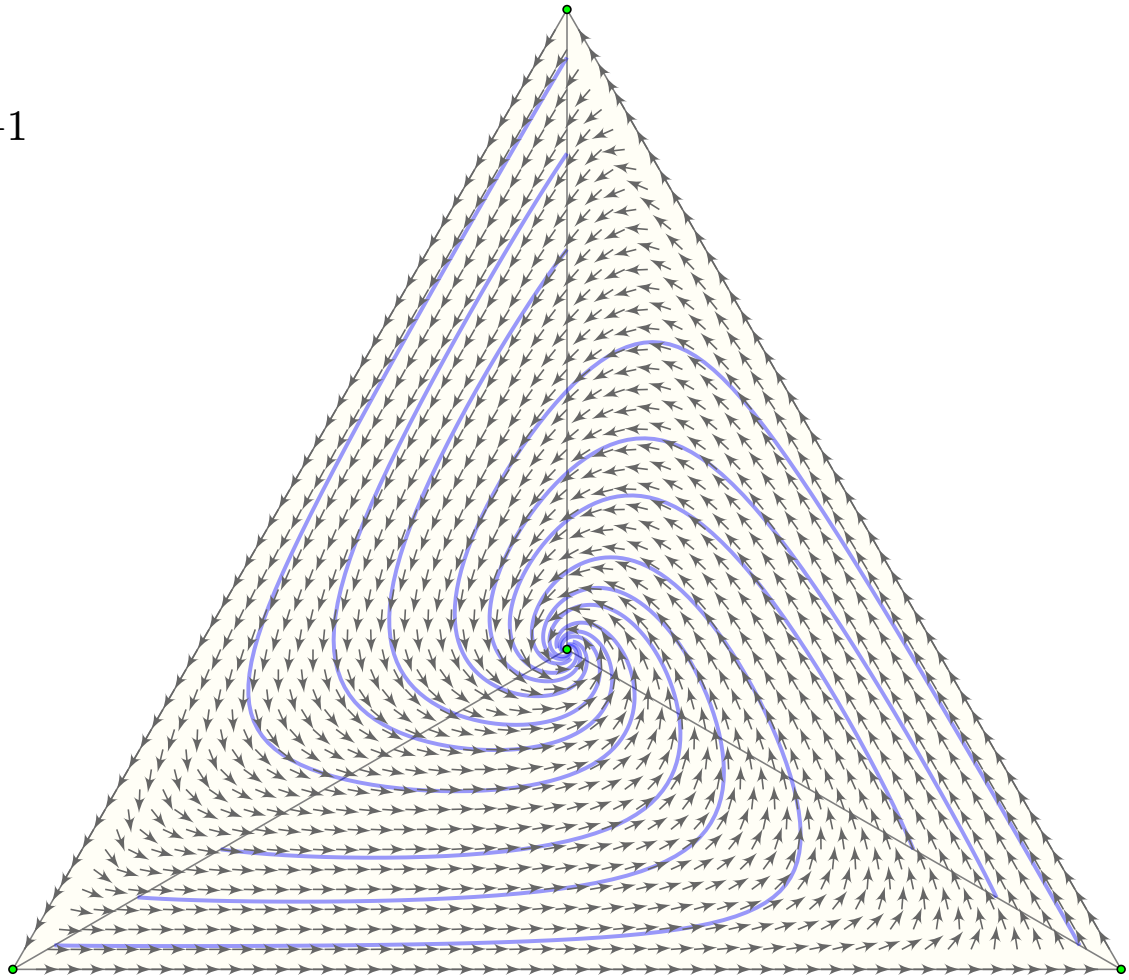
$a = -1$



# Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards



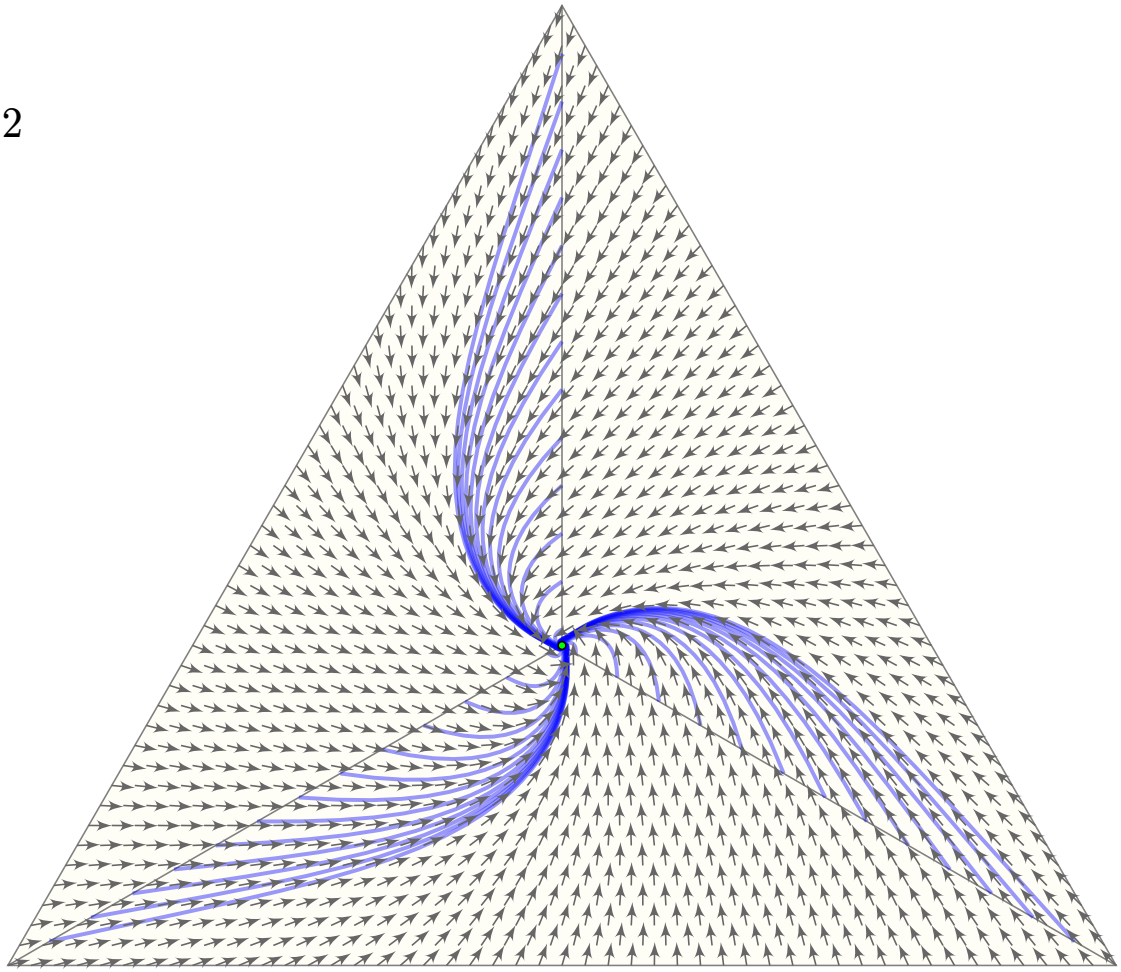
$a = -1$



# Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



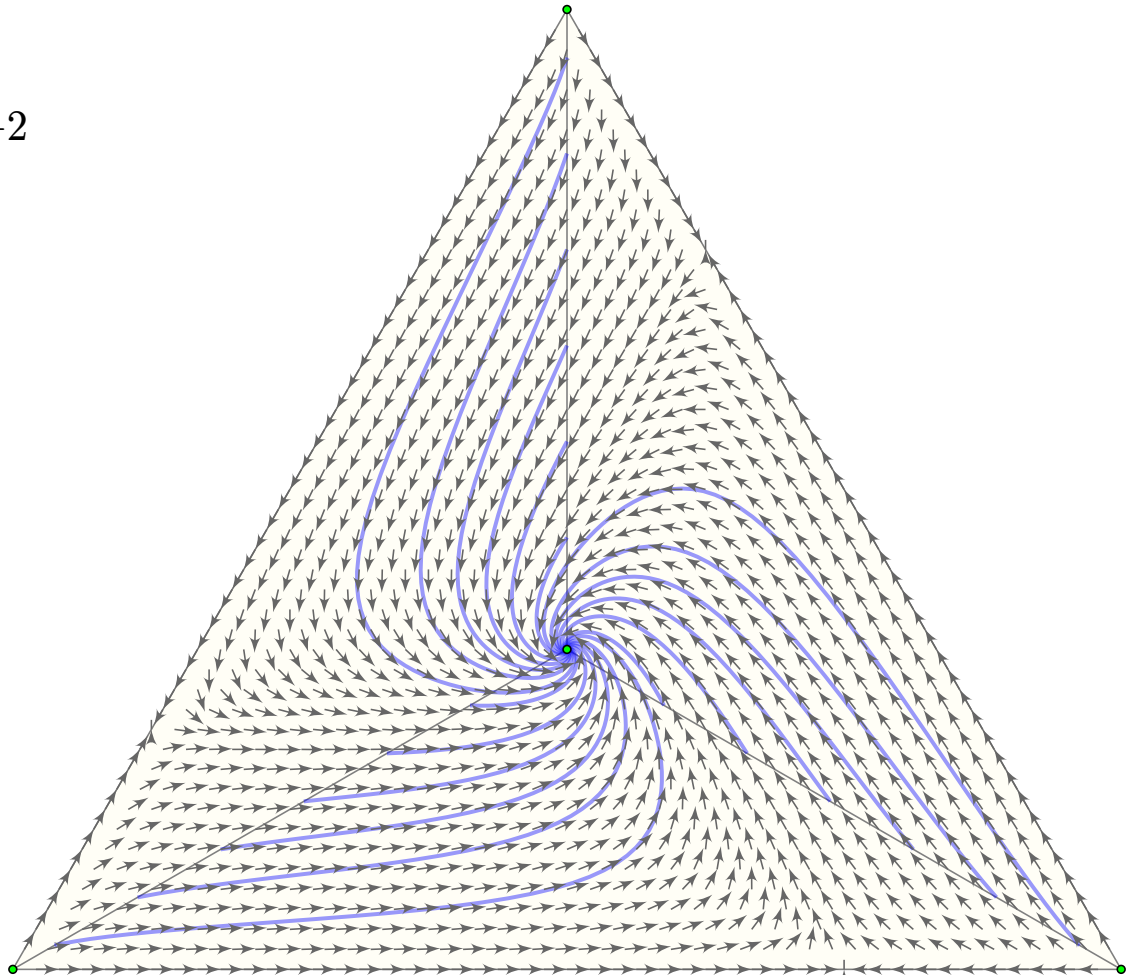
$a = -2$



# Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

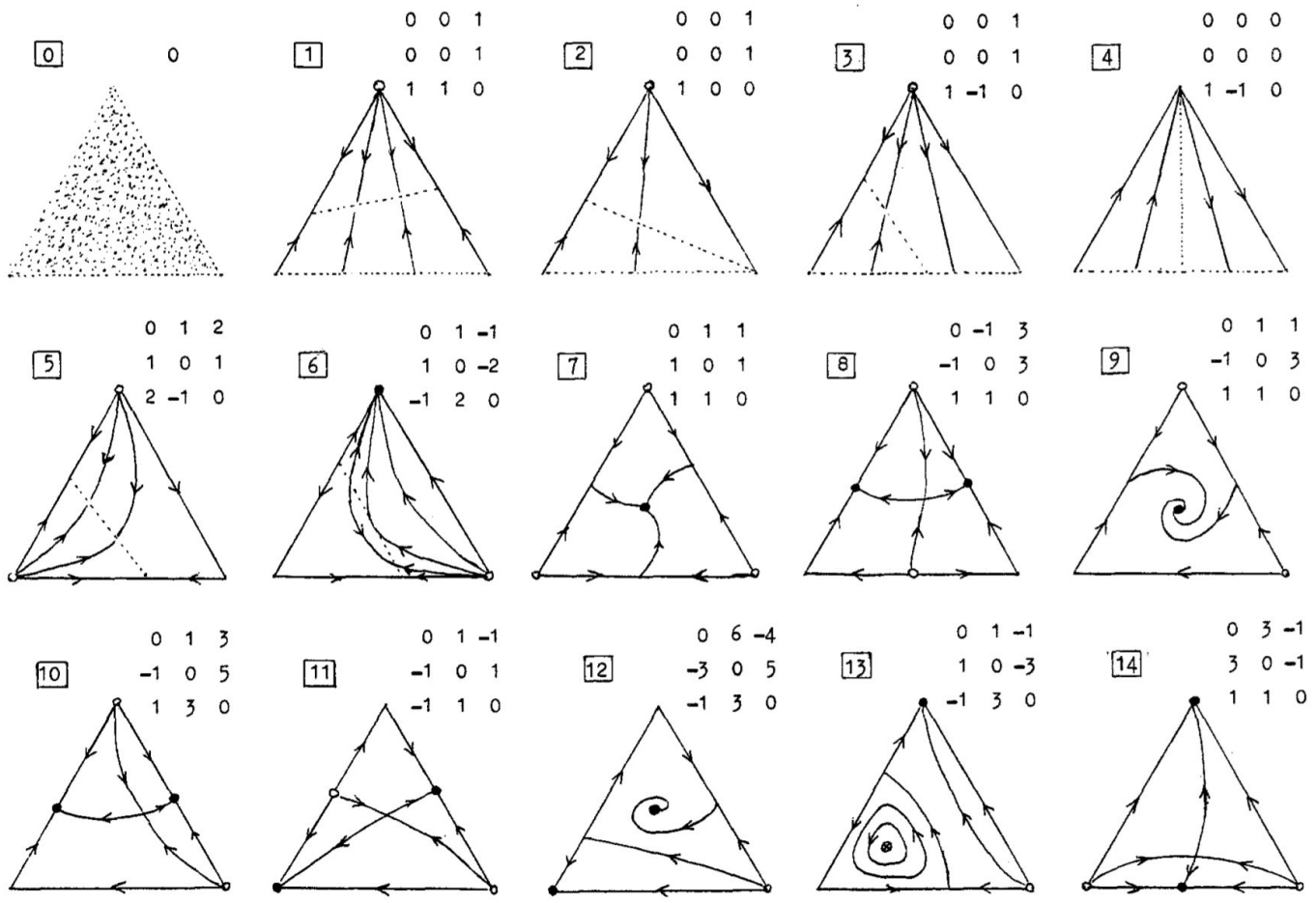


$a = -2$



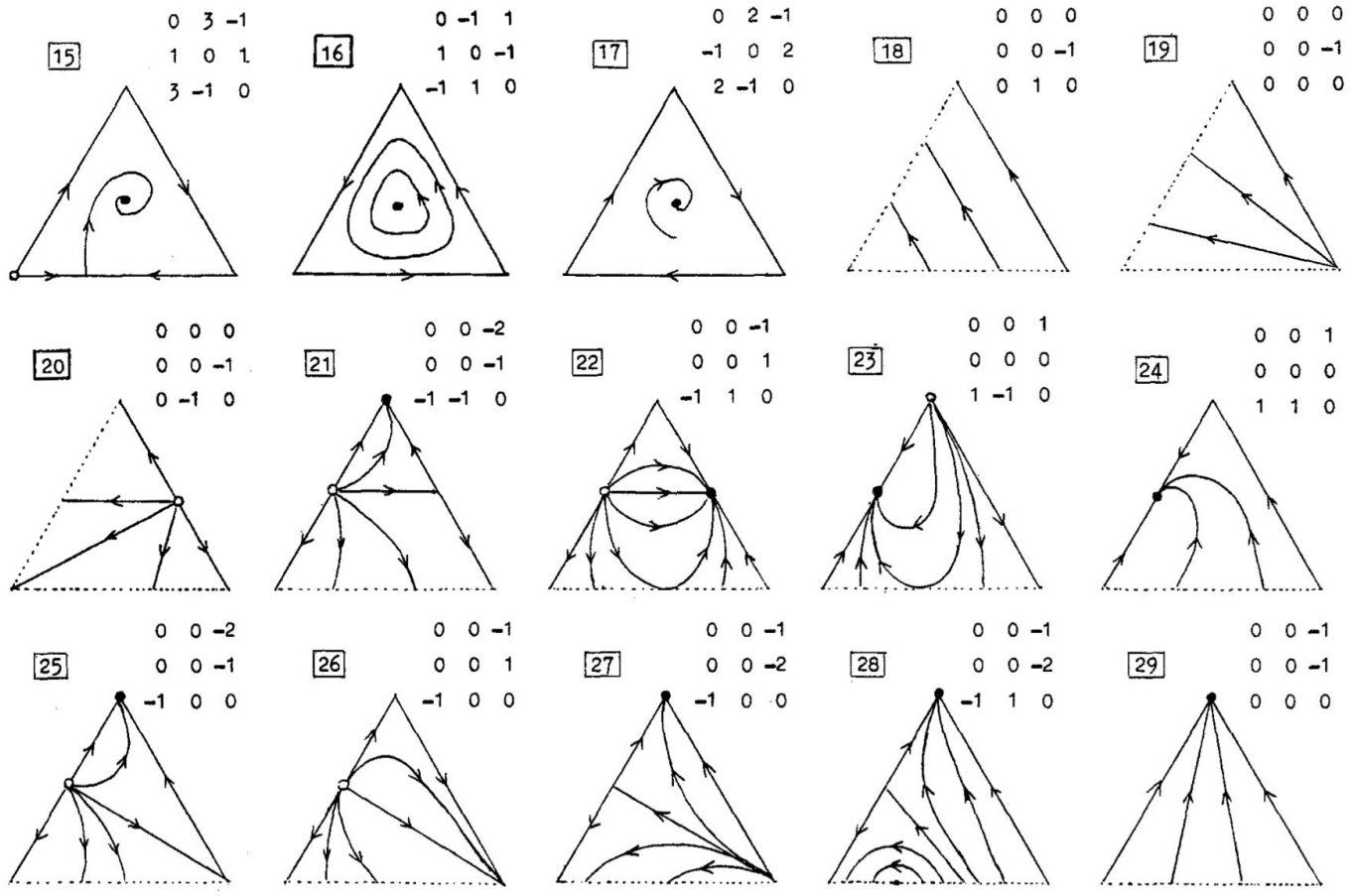
# Mögliche Dynamik der Replikatorgleichung

G369
Erläuterung

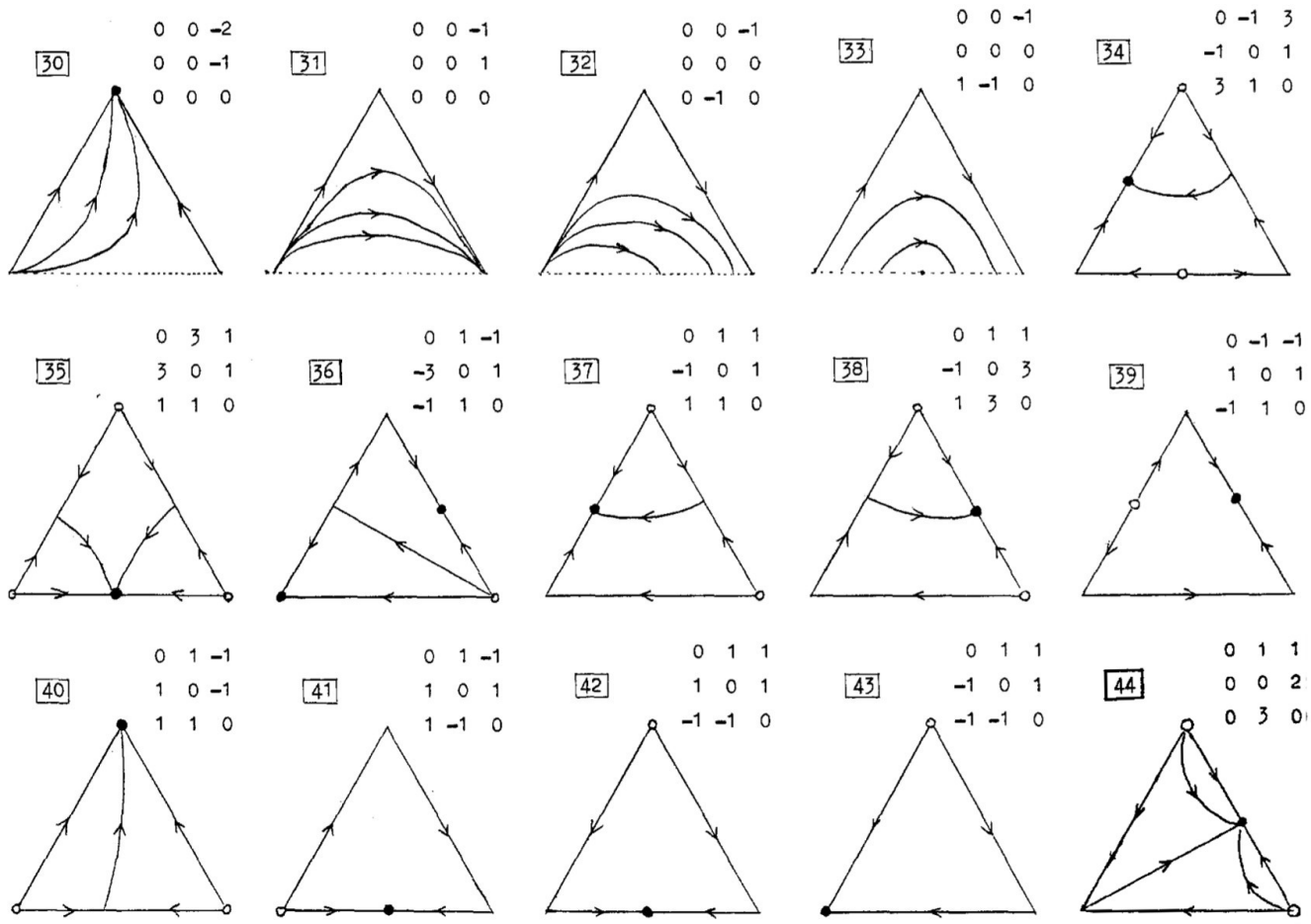



# Mögliche Dynamik der Replikatorgleichung

G370
Erläuterung

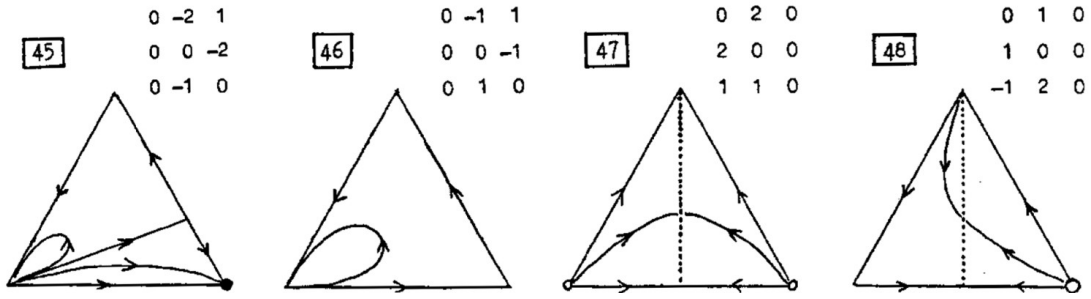


# Mögliche Dynamik der Replikatorgleichung






# Mögliche Dynamik der Replikatorgleichung




Diese Graphiken zeigen die mögliche Dynamik der Replikatorgleichung nach I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification.* Biological Cybernetics 48 (1983), 201–211, mit Korrekturen und Ergänzungen zu den Fällen 16, 20, 44–48 aus I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification.* Biological Cybernetics 72 (1995), 447–453.

**Projekt:** Was wird hier klassifiziert? modulo welcher Äquivalenz?
Wie ist demnach die Aussage des hier zu formulierenden Satzes?
Wie lässt sich das möglichst übersichtlich organisieren und beweisen?
Wie vermeidet man nachweislich alle Auslassungen und Dopplungen?

## Klein aber mein allein: das LUPI-Spiel

G373
Übung

Das folgende schöne Spiel kennen Sie aus dem Mock Exam:
Jede Spieler:in $i \in I := \{1, \dots, n\}$ wählt eine Zahl $x_i \in X \subseteq \mathbb{N}$.
Die kleinste Einzelnennung gewinnt: *least unique positive integer.*
Wir spielen Sie optimal? für $n = 3, 4, 5, \dots$ oder zufällige Spielerzahl?

☺ Dieses Spiel ist ebenso einfach wie faszinierend. Sie können es selbst ausprobieren und mit Freunden spielen. Dabei lassen sich alle Konzepte der Spieltheorie wunderbar beobachten: Rationalität, Gleichgewichte, Evolution, Koalitionen, etc. Zudem war dies ein echtes Gewinnspiel:

*Limbo*, staatliche Lotterie in Schweden vom 29. Januar bis 24. März 2007, $X = \{1, \dots, 99\,999\}$, Spieleinsatz 1€, Auszahlung 18%, mindestens 10 000€. Feiner doch wichtiger Unterschied: Der Gewinn wird immer ausgezahlt, gleich aufgeteilt unter der kleinsten Zahl mit der seltensten Nennung.

Maximales Drama: Die Lotterie wurde gestoppt nachdem am 23. März eine Tageszeitung berichtete, Spieler:innen hätten sich abgesprochen. Das LUPI-Spiel bietet schöne Herausforderungen und Überraschungen. Daher erfreut es sich seit einigen Jahren großer Beliebtheit!

## Klein aber mein allein: das LUPI-Spiel

G374
Übung

*Fun fact:* Im Lateinischen heißt *lupus* ‘Wolf’, der Plural ist *lupi* ‘Wölfe’. Das LUPI-Spiel ist eine Art inverse Auktion und wird in der jüngeren Literatur ausgiebig diskutiert. Ich nenne hierzu nur zwei Artikel:

📖 R. Östling, J.T. Wang, E.Y. Chou, C.F. Camerer: *Testing Game Theory in the Field: Swedish LUPI Lottery Games.* American Economic Journal: Microeconomics 3 (2011) 1–33. doi.org/10.1257/mic.3.3.1

📖 B. Szentes: *The three-player lowest unique number game.* Economics Letters 251 (2025) 112299. doi.org/10.1016/j.econlet.2025.112299

Das LUPI-Spiel eignet sich hervorragend für den schulischen Unterricht, als eine gelungene Verbindung von Mathematik und Gamification (A4). Schüler:innen können daran lernen, mit stochastischen Informationen umzugehen und rational zu entscheiden, dank quantitativer Modelle!

Das LUPI – Projekt
(Dr. Stefanie Schumacher & Dr. Thomas Krohn)

UNIVERSITÄT BIELEFELD
Fakultät für Mathematik

Didaktik der Mathematik
Universität Leipzig

www.mathcs.uni-leipzig.de/math/abteilungen/didaktik-der-mathematik/lupi-spiel

## Klein aber mein allein: das LUPI-Spiel



**Aufgabe:** Formulieren Sie die Gewinnfunktion $u : X^n \to \mathbb{R}^n$.
Finden Sie alle reinen Nash–Gleichgewichte $(x_1 \le \dots \le x_n) \in \mathrm{NE}(u)$.
Gibt es symmetrische Nash–Gleichgewichte $(x, \dots, x) \in \mathrm{NE}(u)$?

**Lösung:** Genau dann gilt $u_i(x) = 1$, wenn $\sharp\{\, j \in I \mid x_j = x_i \,\} = 1$ und $\sharp\{\, j \in I \mid x_j = v \,\} \neq 1$ für alle $v < x_i$. Andernfalls gilt $u_i(x) = 0$.

Manche Gleichgewichte, wie $x = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 4)$, sind offensichtlich: Eine der Zahlen $x_i$ wurde nur einmal gewählt, aber jede kleinere Zahl $v < x_i$ mindestens zweimal. (Übung: Das ist ein Gleichgewicht.)

Überraschend: Auch $(0, 0, 1, 1, 5)$ ist ein Gleichgewicht. Die höchste Zahl $x_i = \max x$ wurde genau einmal gewählt, $0, \dots, v - 1$ genau zweimal, $v, \dots, x_i - 1$ keinmal. Diese Gleichgewichte werden leicht übersehen!

Für $n \ge 3$ ist jedes Gleichgewicht von obiger Form. (Übung: Warum?)
Im Sonderfall $n = 2$ ist zudem $x = (0, 0)$ ein Nash–Gleichgewicht: Keine Spieler:in kann ihr Ergebnis aus eigener Kraft verbessern.

Für $n \ge 3$ gibt es kein symmetrisches *reines* Nash–Gleichgewicht, denn symmetrisch hieße hier, alle Spieler:innen wählen dieselbe Zahl.

## Klein aber mein allein: das LUPI-Spiel



Diese Analyse der reinen Nash–Gleichgewichte erinnert uns eindringlich an eine allgemeine Erfahrung: Eine vorgelegte Lösung zu *prüfen* ist meist leicht, doch eine oder gar alle Lösungen zu *finden* ist spürbar schwerer. Die Aufgabe ist daher eine gute Fingerübung zur Sorgfalt und Präzision.

Wir erkennen zudem: Reine Strategien sind für dieses Spiel viel zu eng, denn es scheint unsinnig, sich auf eine bestimme Wahl $x \in X$ festzulegen. Wie bei *Schere-Stein-Papier* möchten Spieler:innen hier randomisieren. Daher gehen wir im Folgenden zu gemischten Strategien $p \in \bar{X}$ über.

Besonders interessant sind *symmetrische* Nash–Gleichgewichte $(p, \dots, p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Wie wir gerade gesehen haben, ist dies in reinen Strategien unmöglich. In gemischten Strategien hingegen existiert, wie wir gleich zeigen, genau ein symmetrisches Nash–Gleichgewicht.

Hier können wir wunderbar all unsere spieltheoretischen Werkzeuge erproben und schärfen: theoretisch, rechnerisch und experimentell. Wir lernen damit sowohl die individuelle Randomisierung als auch die Populationsdynamik in evolutionärer Sichtweise besser verstehen.

## Das symmetrische Gleichgewicht im LUPI-Spiel



**Aufgabe:** Formulieren Sie für $n = 3$ die Gewinnfunktion $\bar{u} : \bar{X}^3 \to \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle symmetrischen Gleichgewichte $(p, p, p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$.

**Lösung:** (a) Wir nutzen den Raum der gemischten Strategien

$$\bar{X} = \left\{ p : X \to [0,1] : x \mapsto p_x \;\middle|\; \sum_{x \in X} p_x = 1 \right\}.$$

Hierauf ist die Gewinnfunktion $\bar{u}_1 : \bar{X}^3 \to [0,1]$ gegeben durch

$$\bar{u}_1(p,q,r) = \sum_{x \in X} p_x \left[ \sum_{v<x} q_v r_v + \sum_{y>x} q_y \sum_{z>x} r_z \right].$$

(b) Wir suchen $(p, p, p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Für jede Alternative $q \in \bar{X}$ gilt also

$$\bar{u}_1(q,p,p) = \sum_{x \in X} q_x \hat{p}_x \quad \text{mit} \quad \hat{p}_x := \sum_{v<x} p_v^2 + \Big( \sum_{y>x} p_y \Big)^2.$$

Nash–Gleichgewicht bedeutet hier $\bar{u}_1(q,p,p) \le \bar{u}_1(p,p,p)$ für alle $q \in \bar{X}$. Das gilt gdw $\hat{p}$ konstant ist. Daraus folgt Eindeutigkeit & Existenz von $p$.

## Das symmetrische Gleichgewicht im LUPI-Spiel



**Satz G3B:** Lösung des LUPI-Spiels für 3 Spieler

(0) Voller Träger: Gilt $(p,p,p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$, so folgt $p_x > 0$ für alle $x \in X$.
(1) Konstanz: Es gilt $(p,p,p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$ gdw $\hat{p}_x = \hat{p}_0$ für alle $x \in X$.
(2) ∃&E: Es existiert genau ein Gleichgewicht $(p,p,p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$.
(3) Für dieses gilt $p_x = \alpha^x (1-\alpha)$ mit $0 < \alpha < 1$ und $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1$.

**Beweis:** (0) Induktion über $x$: Es gilt $p_0 > 0$. Andernfalls, für $p_0 = 0$, gilt $\hat{p}_x = 1$; daher wäre $q_0 = 1$ besser, denn $\bar{u}_1(p,p,p) \le 1/3 < 1 = \bar{u}_1(q,p,p)$.
Aus $p_x > 0$ folgt $p_{x+1} > 0$. Andernfalls, für $p_x > 0$ und $p_{x+1} = 0$, gilt $\hat{p}_{x+1} - \hat{p}_x = p_x^2$; daher wäre $q$ besser mit $q_x = 0$ und $q_{x+1} = p_x$.

(1) Nash–Gleichgewicht bedeutet, $p$ maximiert obige Funktion

$$f : \bar{X} \to [0,1] : q \mapsto \bar{u}_1(q,p,p) = \textstyle\sum_{x \in X} q_x \hat{p}_x.$$

„⇐“: Ist $\hat{p}$ konstant, so auch $f : q \mapsto \hat{p}_0$, insbesondere maximiert $p$.
„⇒“: Dank (0) hat $p$ vollen Träger. Gäbe es $x, y \in X$ mit $p_x > p_y > 0$, so wäre $q$ besser nach der Verschiebung $q_x = p_x + p_y$ und $q_y = 0$.

## Das symmetrische Gleichgewicht im LUPI-Spiel



(2) Eindeutigkeit: Die oben erklärte Zuordnung $p \mapsto \hat{p}$ ist injektiv. Wenn wir also $\hat{p}$ kennen, so existiert dazu höchstens eine Lösung $p$.

Es gilt $\hat{p}_0 = (1-p_0)^2$ und $\hat{p}_1 = p_0^2 + (1-p_0-p_1)^2$ etc. Daraus lässt sich $p_0, p_1, \ldots$ rekursiv berechnen. Dadurch wird $p \in \bar{X}$ eindeutig bestimmt.

Die Existenz ist etwas trickreicher; sie folgt aus der expliziten Lösung (3).

(3) Wir machen den geometrischen Ansatz $p_x = \alpha^x(1-\alpha)$ mit $\alpha \in ]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{x+1} - \hat{p}_x &= \textstyle\sum_{v<x+1} p_v^2 + \left[\sum_{y>x+1} p_y\right]^2 - \sum_{v<x} p_v^2 - \left[\sum_{y>x} p_y\right]^2 \\
&= \alpha^{2x}(1-\alpha)^2 + \alpha^{2x+4} - \alpha^{2x+2} \\
&= \alpha^{2x}(1-2\alpha+\alpha^4) \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Genau dann erhalten wir eine Lösung, wenn $1-2\alpha+\alpha^4 = 0$ gilt. Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen, neben 1 noch $\alpha \approx 0.54369$. Letzteres ist die Nullstelle von $x^3+x^2+x-1 = (x^4-2x+1)/(x-1)$.

Damit haben wir gezeigt: Für $n=3$ Spieler und $X=\mathbb{N}$ hat das LUPI-Spiel genau ein symmetrisches Nash–Gleichgewicht, $p_x = \alpha^x(1-\alpha)$. $\boxed{\text{QED}}$

## Das symmetrische Gleichgewicht im LUPI-Spiel



**Bemerkung:** Bereits Aussage (0) ist erstaunlich: Jedes Gleichgewicht hat vollen Träger, das heißt, selbst beliebig große Zahlen $x \in X$ werden mit positiver Wkt gespielt. Warum ist das rational, selbst bei nur 3 Spielern? Das ist keineswegs intuitiv, doch wir können es sorgsam nachrechnen!

(1) Die Konstanz von $\hat{p}$ haben wir oben direkt nachgewiesen. Alternativ gelingt dies mit den Techniken der Analysis: Zu der Nebenbedingung $h(q) := \sum_{x\in X} q_x = 1$ existiert ein Lagrange–Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass

$$\partial f/\partial q_x \overset{!}{=} \lambda \cdot \partial h/\partial q_x \quad \text{also} \quad \hat{p}_x = \lambda.$$

Wiederholen Sie die Methode der Lagrange–Multiplikatoren. Warum lässt sie sich hier anwenden? Wird endliche Dimension benötigt? Gelingt dies hier auch bei unendlich vielen Freiheitsgraden?

(2) Führen Sie Eindeutigkeit und Existenz aus. Wie hilft Monotonie? Wie hilft Nashs Existenzsatz in symmetrisierter Formulierung E2o?

(3) Diese explizite Lösung, als geometrische Verteilung, ist ein Glücksfall speziell für $n=3$. Für $n \geq 4$ gelingt die Lösung nur noch numerisch.

## Replikatordynamik des LUPI-Spiels

**Aufgabe:** Nähern Sie das eindeutige symmetrische Nash–Gleichgewicht für $n = 3$ als Grenzwert der Replikatordynamik $\dot{p}_x = p_x(1 \cdot \hat{p}_x - \sum_y p_y \hat{p}_y)$.

**Numerische Lösung:** Wir berechnen die Gewinnwkt $\hat{p} : X \to [0,1]$:

```
xmax = 13                                   # choose x from X = {0,...,xmax-1}
p = [ 1/xmax for x in range(0, xmax) ]      # our initial strategy p is uniform
def win(p):                                 # winning probabilities with 3 players
    return [ sum( p[v]**2 for v in range(0, x) ) +
             sum( p[y] for y in range(x+1, xmax) )**2 for x in range(0, xmax) ]
```

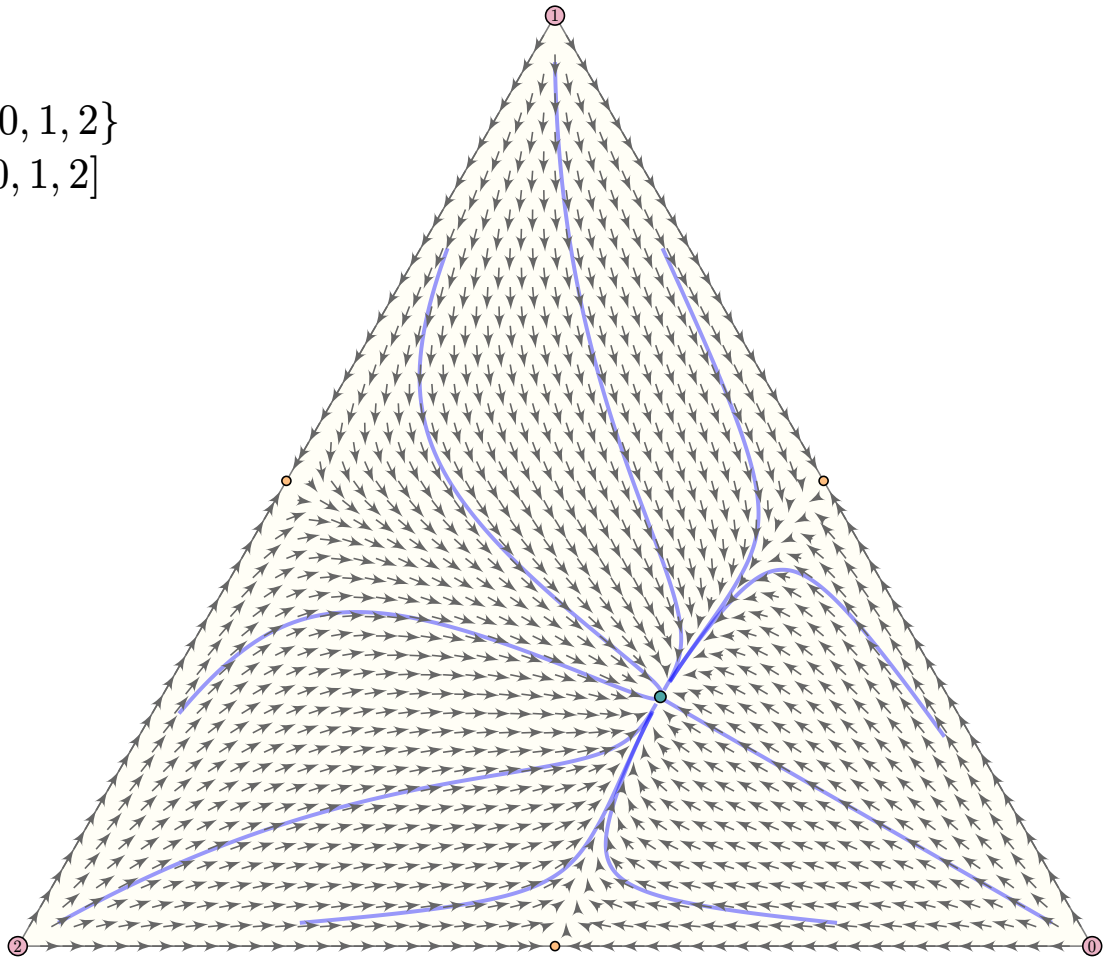
Dann folgen wir der Replikatordynamik (Euler–Verfahren mit $\Delta t = 1$, besser wäre natürlich Runge–Kutta, doch hier genügt *quick and dirty*):

```
step = 1.0; eps = 1e-5                      # time step and tolerated error
def replicator_limit(p):                    # apply the replicator dynamics to p
    while True:                             # repeat until within tolerance
        w = win(p)
        if max( abs( w[0] - w[x] ) for x in range(0, xmax) ) < eps: return p
        average = sum( p[x] * w[x] for x in range(0, xmax) )
        for x in range(0, xmax): p[x] += p[x] * (w[x] - average) * step
```



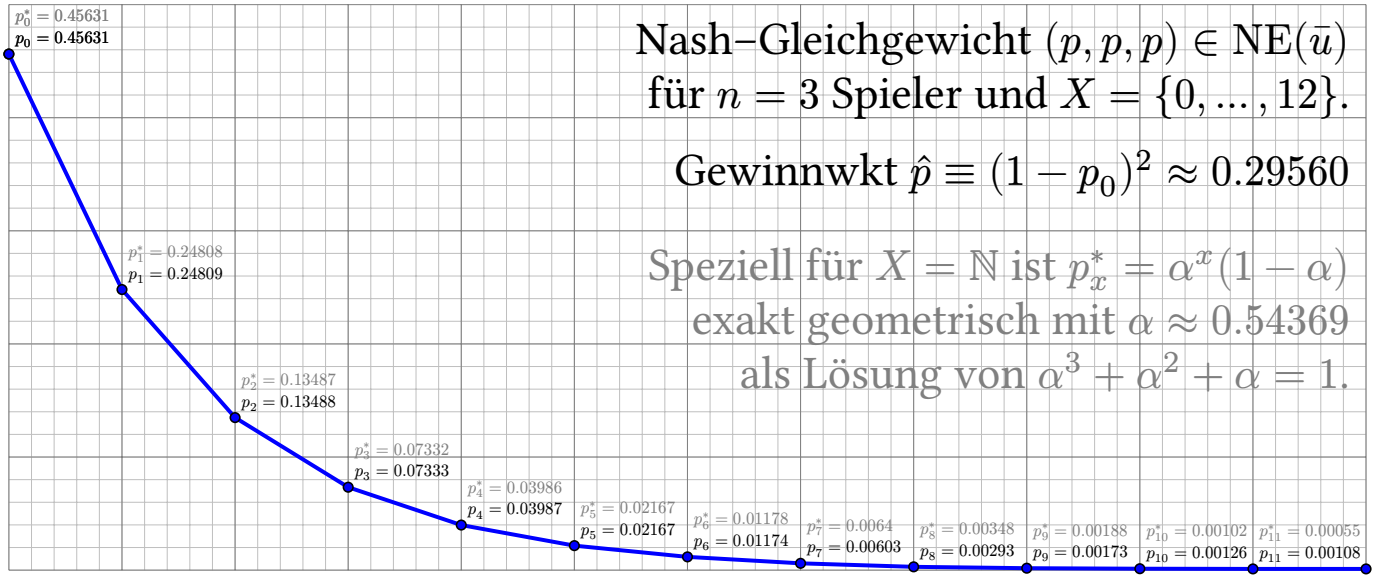
## Replikatordynamik des LUPI-Spiels

$X = \{0, 1, 2\}$
$\bar{X} = [0, 1, 2]$
$n = 3$



## Replikatordynamik des LUPI-Spiels






Die vorige Folie zeigt die Dynamik für drei Optionen, $X = \{0, 1, 2\}$; für mehr Optionen lässt sich dies höherdimensional nur schwer skizzieren. Stattdessen nenne ich das gesuchte Nash–Gleichgewicht als Fixpunkt $p$.

Für $X = \mathbb{N}$ haben wir oben die geometrische Verteilung $p^*$ berechnet. Für $X = \{0, \dots, M\}$ mit wachsendem $M$ nähert sich $p$ schnell an $p^*$ an. Schon für moderat große $M$ wird die numerische Rechnung überflüssig.

## Replikatordynamik des LUPI-Spiels



☺ Speziell für $n = 3$ Spieler auf $X = \mathbb{N}$ ist $p$ eine besonders einfache Verteilung, nämlich geometrisch $p(x) = \alpha^x (1 - \alpha)$. Das ist ein Glücksfall! Nur im Fall $n = 3$ können wir das symmetrische Nash–Gleichgewicht explizit berechnen, in geschlossener Form, numerisch bestätigt.

Die Replikatordynamik konvergiert recht schnell. Anschaulich kann man das LUPI-Spiel und seine Lösung also gut erlernen durch häufiges Spiel. Das unterstützt die praktische Erprobung und unterstreicht noch einmal die Wirksamkeit unserer spieltheoretischen Analysewerkzeuge.

Die Gewinnwkt ist 0.29560 und somit nur geringfügig kleiner als die theoretische Obergrenze $1/3$. Da sich die drei Spieler nicht absprechen, würde man anschaulich größere Verluste durch Kollisionen erwarten. Doch für $n = 3$ ist das Gleichgewicht noch erstaunlich effizient.

Die drei Spieler können ihre Gesamtausbeute erhöhen, indem sie sich absprechen. **Korreliertes Gleichgewicht:** Sie können ein Los entscheiden lassen, wer von den dreien gewinnt, und spielen dann ein dazu gehöriges *reines* Nash–Gleichgewicht, etwa $(0, 1, 1)$ oder $(1, 0, 1)$ oder $(1, 1, 0)$.

## Replikatordynamik des LUPI-Spiels



**Aufgabe:** Nähern Sie das eindeutige symmetrische Nash–Gleichgewicht für $n = 4$ als Grenzwert der Replikatordynamik $\dot{p}_x = p_x(1 \cdot \hat{p}_x - \sum_y p_y \hat{p}_y)$.

**Lösung:** Wir folgen dem obigen Vorbild für $n = 3$ Spieler, nun für $n = 4$. Wir suchen $(p, p, p, p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Für jede Alternative $q \in \bar{X}$ gilt

$$\bar{u}_1(q, p, p, p) = \sum_{x \in X} q_x \hat{p}_x \quad \text{mit} \quad \hat{p}_x := \sum_{v<x} \Big( p_v^3 + 3p_v^2 \sum_{y>x} p_y \Big) + \Big( \sum_{y>x} p_y \Big)^3 .$$

Nash–Gleichgewicht bedeutet $\bar{u}_1(q, p, p, p) \le \bar{u}_1(p, p, p, p)$ für alle $q \in \bar{X}$. Das gilt gdw $\hat{p}$ konstant ist. Daraus folgt Eindeutigkeit & Existenz von $p$.

**Übung:** Beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Satz G3B, Aussage (0–2).

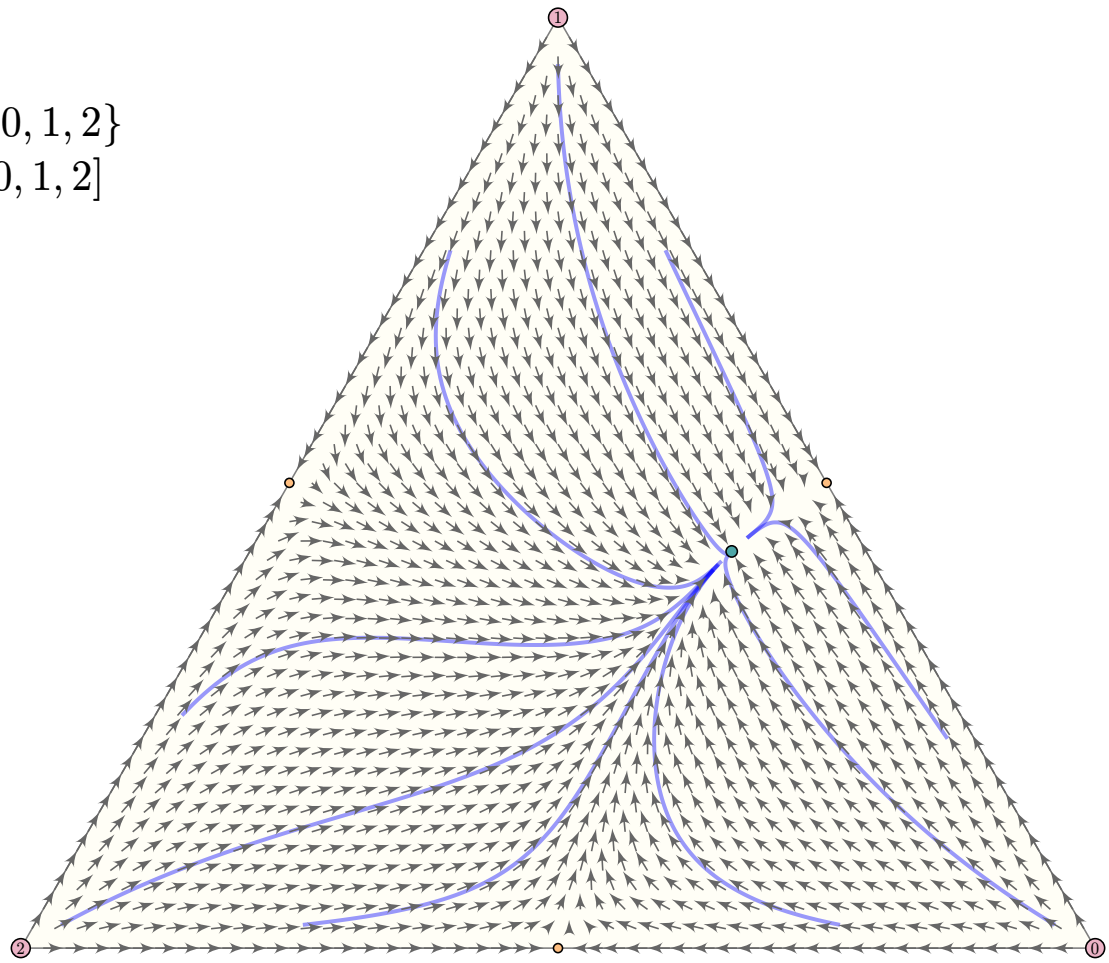
Wir haben die Normierung $\sum_{x \in X} p_x = 1$, also $\sum_{y>x} p_y = 1 - \sum_{v \le x} p_v$. Seien $p_0, \dots, p_{x-1}$ bereits berechnet. Dann ist $\hat{p}_x$ monoton fallend in $p_x$. Somit ist $p \mapsto \hat{p}$ injektiv, also die Lösung $p$ durch $\hat{p}$ eindeutig festgelegt.

Die Existenz hingegen ist etwas kniffliger. Zu unserem Glück garantiert Nashs Existenzsatz E2O mindestens ein symmetrisches Gleichgewicht. Die numerische Optimierung gelingt wie oben dank Replikatordynamik.

## Replikatordynamik des LUPI-Spiels

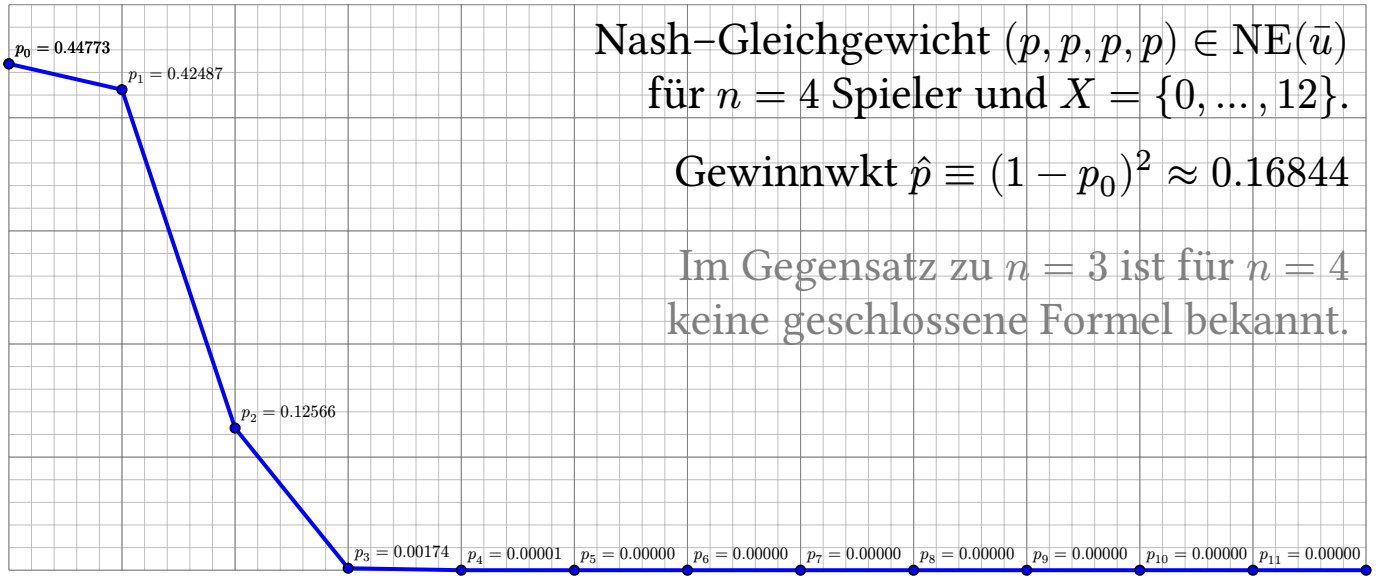


$X = \{0, 1, 2\}$
$\bar{X} = [0, 1, 2]$
$n = 4$



## Replikatordynamik des LUPI-Spiels






Nash–Gleichgewicht $(p, p, p, p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$
für $n = 4$ Spieler und $X = \{0, \dots, 12\}$.

Gewinnwkt $\hat{p} \equiv (1 - p_0)^2 \approx 0.16844$

Im Gegensatz zu $n = 3$ ist für $n = 4$
keine geschlossene Formel bekannt.

Die vorige Folie zeigt die Dynamik für drei Optionen, $X = \{0, 1, 2\}$; für mehr Optionen lässt sich dies höherdimensional nur schwer skizzieren. Stattdessen nenne ich das gesuchte Nash–Gleichgewicht als Fixpunkt $p$.

Erstaunlicherweise konzentriert sich $p$ auf wenige, sehr kleine Werte! Für die numerische Berechnung ist das eine willkommene Abkürzung. Mit dieser Technik lösen Sie Spielerzahlen $n = 4, 5, 6, \dots$ und $X \subseteq \mathbb{N}$.

## Replikatordynamik des LUPI-Spiels



Hier ensteht eine weitere Überraschung, recht unintutitiv, gar paradox: Beim Übergang von 3 auf 4 Spielern werden höhere Zahlen seltener! Anschaulich erwarten wir höhere Zahlen, um dem Populationsdruck zu entgehen. Das passiert tatsächlich, aber erst für $4, 5, 6, \dots$ Spieler.

Die Kollisionswkt steigt und die Gewinnwkt sinkt dramatisch. Je mehr Spieler:innen teilnehmen, desto ineffizienter das Verfahren und desto lukrativer die Absprachen. Nash–Gleichgewichte berücksichtigen dies nicht, dazu untersuchen wir Koalitionen und korrelierte Gleichgewichte.

Bei einer realen Lotterie, etwa beim schwedischen *Limbo* oder auch bei unserem Mock Exam, kennt die Spieler:in nicht die genaue Anzahl $n$ der Konkurrent:innen. In solchen Fällen ist es ratsam, $n$ als Zufallsvariable zu betrachten. Dieser Fall wird von Östling *et al.* elegant gelöst.

Dieser schöne Artikel untersucht auch die Frage des Lernens aus Daten, sowohl in *Limbo* als auch im Laborexperiment. Es entstehen recht starke Übereinstimmungen, aber auch interessante Abweichungen. Daher bleibt das LUPI-Spiel weiter spannend, sowohl theoretisch als auch praktisch.

## Evolutionäre Spielpraxis: Lernen durch Versuch und Irrtum?



Im **Casino Royal** (09.05.2025) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die evolutionäre Sichtweise anzuwenden, hier nicht biologisch (Gene, Fitness, Reproduktion), sondern didaktisch (Versuch, Irrtum, Aha).

**Kartenduell.** Gustav Gleich und Uschi Unterschiedlich erhalten je drei Karten: Gustav ♦A, ♣A, ♣2 und Uschi ♦A, ♣A, ♦2. Jede:r spielt verdeckt eine Karte, dann wird verglichen: Spielen beide die 2, so endet das Spiel unentschieden. Sonst: Sind die Farben gleich, so gewinnt Gustav Gleich; sind die Farben unterschiedlich, so gewinnt Uschi Unterschiedlich. Der Gewinner erhält vom Verlierer den Wert der Siegerkarte, A ↦ 1, 2 ↦ 2.

| G \ U | ♦A | ♣A | ♦2 |
|---|---|---|---|
| ♦A | 1 / −1 | −1 / 1 | 1 / −1 |
| ♣A | −1 / 1 | 1 / −1 | −2 / 2 |
| ♣2 | −1 / 1 | 2 / −2 | 0 / 0 |

Zunächst werden obige Spielregeln in Prosa laut verlesen. Das kann sich aber keine:r so recht merken. Ein Freiwilliger schreibt die Daten an die Tafel. Wie gelingt das übersichtlich? Als Bimatrixspiel, wie links, das hilft: Normalform, bewährt und effizient!

## Evolutionäre Spielpraxis: Lernen durch Versuch und Irrtum?



Wir vereinbaren hierzu, dass in Einheiten von 100€i$to ausgezahlt wird. Teilnehmer:innen bemerken kritisch, dass dies ein Nullsummenspiel ist. Damit sich das Spiel wirklich lohnt, gibt es 100€i$to Startgeld pro Runde. (Am selben Tag wurde dieser Trick morgens in der Vorlesung diskutiert, als Positivierung eines Nullsummenspiels im Simplexverfahren F210.)

| Gustav spielt… | Uschi spielt… | Auszahlung | | Wand | Fenster |
|---|---|---|---|---|---|
| ♦A | ♦A | +100 | −100 | +200 | 0 |
| ♦A | ♦A | +100 | −100 | +200 | 0 |
| ♦A | ♦2 | +100 | −100 | +200 | 0 |
| (100, 0, 0) | (40, 20, 40) | +60 | −60 | +160 | +40 |
| (0, 0, 100) | (10, 50, 40) | +90 | −90 | +190 | +10 |
| (50, 0, 50) | (100, 0, 0) | 0 | 0 | +100 | +100 |
| (0, 100, 0) | (0, 0, 100) | −200 | +200 | +300 | −100 |
| (100, 0, 0) | (0, 0, 100) | +100 | −100 | 0 | +200 |
| (50, 25, 25) | (0, 0, 100) | 0 | 0 | +100 | +100 |

## Evolutionäre Spielpraxis: Lernen durch Versuch und Irrtum?



Die Teilnehmer:innen bilden zwei Teams. Team „Wand“ spielt zunächst Gustav, Team „Fenster“ spielt Uschi, nach fünf Runden wird gewechselt. (Beim nächsten Mal denke ich daran, dass die Teams sich Namen geben. Das ist theoretisch überflüssig, macht aber praktisch viel mehr Spaß.)

In den ersten drei Runden reichen die Teams nur reine Strategien ein. Gustav erwischt (zufällig?) einen guten Start. Alle Teilnehmer:innen fühlen sich an das Spiel *Schere-Stein-Papier* erinnert und versuchen, die Psychologie des Gegenteams zu erahnen. Das scheint schwierig.

Mangels Symmetrie ist das Spiel nicht ganz leicht zu durchschauen. Uschi verliert tendenziell mehr, findet aber kein rechtes Gegenmittel. Schnell kommt der Verdacht auf, Gustav sei systematisch im Vorteil. Das bessert sich, als die Spieler:innen gemischte Strategien einreichen.

*Randomization as a service:* Jede Spieler:in darf nun gemischte Strategien einreichen, Angabe der Wahrscheinlichkeiten in ganzen Prozentpunkten. Zuvor hatten die Teams schon heimlich intern gelost, nun offiziel extern! Wie wird ausgezahlt? Wir berechnen und zahlen den Erwartungswert.

## Evolutionäre Spielpraxis: Lernen durch Versuch und Irrtum?



Nach den ersten fünf Runden wird für die letzten vier Runden getauscht. Obwohl Uschi als strukturell benachteiligt gilt, gewinnt eher Team Wand. Beide Teams nutzen die Randomisierung eher zaghaft und keineswegs systematisch. Annäherung an ein Gleichgewicht ist nicht zu erkennen.

Zum Abschluss kommt es zu einer kurzen Diskussion. Ein Teilnehmer aus Team Wand erklärt: „Jetzt nach dem Spiel kann ich unseren Trick verraten: Für Gustav ist ♣2 immer besser als ♣A.“ — „Sie meinen, die Karte ♣A wird dominiert von ♣2?“ — „Ja, genau! Deshalb haben wir als Gustav niemals ♣A gespielt. Uschi hingegen hat so einen Trick nicht.“ Wirklich? Ich möchte nachfragen und aufklären, doch das übernimmt nächste Woche die Übung. Wir erinnern an die Stufen der Rationalität!

Im Rückblick wird deutlich: Uschi verliert hier recht oft und spürt daher den Druck, ihre Verluste zu minimieren, bislang noch wenig erfolgreich. Genau das würde ihr mit einem Nash–Gleichgewicht gelingen! Das wird in kommender Übung ausgerechnet, war aber im Casino noch unbekannt. Es ist selbst mit Spielerfahrung nicht leicht zu erraten oder zu erspüren.

## Preisduell: Diese lineare Stadt ist zu klein für uns beide!

G393
Casino

Die Teams spielen zwei Familienunternehmen im hart umkämpften Eisbusiness. In ihrer linearen Stadt $[0, L]$ der Länge $L = 10$ wohnen die Kunden kontinuierlich gleichverteilt mit Dichte 1.

Die konkurrierenden Eisläden „€i$bärs €is$tolle“ und „€mil$ €i$diele“ liegen jeweils an den Rändern 0 und $L$. Ihr Eis ist sagenhaft lecker und nach Jahren der Optimierung perfekt produziert und exakt gleich gut. Beide haben feste Produktionskosten von $c = 500$€i$to pro Einheit.

Jede Kundeneinheit kauft eine Eiseinheit zum günstigsten Gesamtpreis, Verkaufspreis $p_i \geq c$ plus Transportkosten $k = 4$€i$to pro Wegeinheit. Jeder Eisladen möchte daher seine Preise hoch ansetzen, um gute Profite zu machen, aber nicht zu hoch, um nicht allzu viele Kunden zu verlieren.

Woche für Woche fixiert jeder Konzern seinen wohlüberlegten Eispreis. Absprachen sind durch die rigorosen Eiskartellgesetze streng verboten. Die Spielleitung berechnet aus den Preisen die Kundenströme sowie für jedes Unternehmen Umsatz und Profit. Am Ende wird ausgezahlt.

## Preisduell: Diese lineare Stadt ist zu klein für uns beide!

G394
Casino

Wie sollen, wie werden die beiden Eisgiganten ihre Preise weise wählen?

| | heißer Preis | | eiskalter Profit | |
|---|---|---|---|---|
| Woche | €is$tolle | €i$diele | €is$tolle | €i$diele |
| 1 | 1000 | 1000 | 2500 | 2500 |
| 2 | 800 | 670 | 0 | 1700 |
| 3 | 540 | 580 | 400 | 0 |
| 4 | 540 | 500 | 0 | 0 |
| 5 | 540 | 540 | 200 | 200 |
| 6 | 540 | 540 | 200 | 200 |
| 7 | 520 | 520 | 100 | 100 |
| 8 | 550 | 550 | 250 | 250 |
| 9 | 662 | 800 | 810 | 0 |

Zum Saisonauftakt in Woche 1 sprechen sich die beiden Teams ab; das ist zwar illegal, aber nicht unmöglich. Ihre Profitgier wird nur gebremst vom Maximalpreis, 1000€i$to. Die Profite sind enorm! Noch heute schwärmen die Clans vom „goldenen Eiszeitalter“. Die Staatsanwaltschaft ermittelt.

## Preisduell: Diese lineare Stadt ist zu klein für uns beide!



Die Gesetzgeber:in reagiert sofort, hat aus der Dönerdebatte 2024 („Olaf, mach Döner wieder 3€!“) gelernt und zieht die Eispreisbremse: 800€i$to. In Woche 2 bröckeln die Eispreise, sind aber noch unverschämt hoch. Da €i$diele deutlich billiger verkauft, gehen alle Kunden dort hin.

Die Mitarbeiter:innen von €is$tolle müssen ihr leckeres Eis selbst essen. Das kann schon mal passieren, doch so geht es nicht weiter! In Woche 3 entbrennt nun der Preiskampf! Diesmal bekommt €is$tolle alle Kunden. In Woche 4 unterbietet €i$diele dann ganz eiskalt zum Selbstkostenpreis: €is$tolle bekommt keine Kunden und €i$diele macht keinen Profit.

Wie wird es weiter gehen in dieser epischen Saga von Kartell und Verrat? Droht ein Unterbietungswettkampf und schließlich gegenseitiger Ruin? Ganz im Gegenteil: In Woche 5 ist mit beiderseitigem Preis von 540€i$to ein Gleichgewicht gefunden: Nochmal zur Probe: in Woche 6 dasselbe!

☺ Diese Einigung wie durch Zauberhand sieht aus wie eine Absprache. Doch entgegen dem Kartell von Woche 1 ist dies nun ein Gleichgewicht, kein illegales Gemauschel, sondern eine inhärente Eigenschaft des Spiels.

## Preisduell: Diese lineare Stadt ist zu klein für uns beide!



Wir testen dieses Gleichgewicht und verändern die Rahmenbedingungen, so können wir die Elastizität dieser magischen Preisfindung beobachten! Zum Beispiel können äußere Einflüsse die Transportkosten beeinflussen, Mindestlohn, Logistikmarkt, Zölle, Pandemie, Zombie-Apokalypse, etc.

In Woche 7 sinken die Transportkosten auf $k = 2$€i$to, doch in Woche 8 steigen sie auf $k = 5$€i$to. Damit sinkt zeitgleich auch der Verkaufspreis auf 520€i$to bzw. steigt auf 550€i$to. Das ist erstaunlich: Natürlich sinkt / steigt der Gesamtpreis, aber verückterweise zudem der Verkaufspreis!

Dieses bemerkenswerte Ergebnis haben die Spieler:innen experimentell erspürt. *Full disclosure:* Einige kannten das Nash–Gleichgewicht im Preis $(c + kL, c + kL)$ aus der Übung. Der zugehörige Profit ist $kL^2/2$ wie oben. Gescheiterte Probe: In Woche 9 spielen wir eine Kleinstadt mit $L = 5$.

? Warum wünschen sich die Firmen möglichst *hohe* Transportkosten? Beide planen vernünftig und spielen das Gleichgewicht mit Profit $kL^2/2$. Je höher $k$, desto stärker nutzt jeder Eismogul sein lokales Monopol. „Können wir unsere Eisdiele verschieben?“ Siehe Strandkiosk A233!