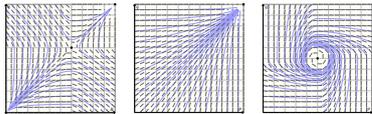


## Kapitel E

## Strategische Spiele und Nash-Gleichgewichte



*L'enfer, c'est les autres.*

[Die Hölle, das sind die anderen.]

Jean-Paul Sartre (1905–1980), *Huis Clos*

## Inhalt dieses Kapitels E

- 1 Strategische Spiele und Nash-Gleichgewichte
  - Strategische Spiele in Normalform
  - Fortsetzung von reinen zu gemischten Strategien
  - Der Existenzsatz für Nash-Gleichgewichte
  - Spiele mit beliebig vielen Spielern
- 2 Sicherheit, Dominanz, Symmetrie
  - Nullsummenspiele und ihr Hauptsatz: Minimax = Maximin
  - Dominierte Strategien und Rationalisierbarkeit
  - Symmetrien von Spielen und Gleichgewichten
- 3 Nash-Gleichgewichte finden und zählen
  - Regularität und Lösung von Bimatrix-Spielen
  - Die lokale Struktur regulärer Nash-Gleichgewichte
  - Der globale Struktursatz von Kohlberg-Mertens
- 4 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
  - Weitere Beispiele zu Gleichgewichten

## Motivation und Überblick

Im letzten Kapitel D über Markov-Spiele ging es nur um einen Akteur, der sein strategisches Handeln optimiert. In diesem Kapitel beginnen wir die Modellierung und systematische Untersuchung von Spielen mit zwei oder mehr Spieler:innen. Das offenbart völlig neue Phänomene.

Wir definieren hierzu zunächst **strategische Spiele in Normalform** und erklären den Begriff des **Nash-Gleichgewichts**. Solche Gleichgewichte beschreiben **möglichst rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele.

Im Allgemeinen hat ein gegebenes Spiel keine Nash-Gleichgewichte. Dies ändert sich durch seine Fortsetzung zu **gemischten Strategien**. **Nashs Existenzsatz** E1E garantiert: Jedes endliche reelle Spiel hat mindestens ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Daraus erhalten wir direkt John von Neumanns berühmten **Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele**: Die Nash-Gleichgewichte entsprechen hier den Min-Maximierern und den Max-Minimierern. Die **eindeutige Gleichgewichtsauszahlung** definiert den Wert des Spiels.

## Motivation und Überblick

Die **Berechnung** gelingt ad hoc in einigen Spezialfällen und allgemein dank Linearer Programmierung, die wir im nächsten Kapitel erklären.

Eine weitere nützliche Berechnungsmethode ist das Erkennen und Eliminieren von (strikt) **dominierten Strategien**. Die Idee ist leicht, doch die Feinheiten sind subtil und müssen sauber ausgeführt werden. Ich betone dies, weil es erfahrungsgemäß oft falsch angewendet wird.

Ein vorrangiges Ziel dieses Kapitels ist daher, eine saubere und tragfähige **Notation** einzuführen. Über viele der beobachteten Phänomene können wir nur damit überhaupt erst sprechen.

Anschließend wollen wir die grundlegenden **Sätze** präzise formulieren und beweisen und als **Rechenregeln** gebrauchsfertig bereitstellen.

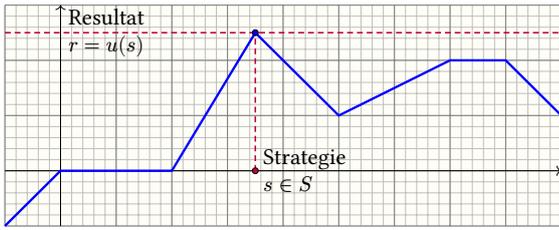
Das ist manchmal mühsam, aber immer lohnend. In der Literatur wird dies unterschiedlich streng gehandhabt. Wir versuchen unser bestes.

Mit dieser Grundausstattung unserer **Werkzeuge** gerüstet untersuchen wir zahlreiche Anwendungen in diesem und allen folgenden Kapiteln und vor allem in den Gruppenübungen. Üben Sie sich daran!

## Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

E101

Abstraktion fragt nach einer *allgemeinen* und *einfachen* Beschreibung. Ein **Spiel** mit nur einer Spieler:in ist eine Funktion  $u : S \rightarrow R : s \mapsto u(s)$ .



Hierbei ist  $S$  die Menge der **Strategien**, die die Spieler:in wählen kann, und  $R$  ist die Menge möglicher **Resultate**, linear geordnet durch  $\leq$ . Wir nennen  $u$  die **Nutzenfunktion**. Meist sind  $R$  die reellen Zahlen. Ebenso nutzbar ist allgemein jede total prägeordnete Menge  $(R, \leq)$ . Jede Spieler:in sucht ihre Strategie  $s \in S$  so, dass ihr Resultat  $r = u(s)$  maximal ist, also  $u(a) \leq u(s)$  für alle alternativen Strategien  $a \in S$  gilt.

## Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

E102  
Erläuterung

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall einer einzigen Spieler:in. Gegeben ist die Menge  $S$  der möglichen Strategien und hierauf die Nutzenfunktion  $u : S \rightarrow R$ . Die Spieler:in will nun  $s \mapsto u(s)$  maximieren. Wenn die Menge  $S$  klein ist, dann genügt ausprobieren. Ist die Menge  $S$  hingegen groß und unübersichtlich, dann kann die Optimierung beliebig schwierig werden, siehe das Problem des Handlungsreisenden (TSP) oder ähnliche.

Sie kennen einfache Beispiele aus der Schule und lernen Optimierung durch Kurvendiskussion. Als Kontrast: Unser Kiosk-Beispiel (A233) ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem; bei einer Lizenz ist es klar und langweilig, bei zweien leicht, bei dreien knifflig und überraschend. Optimierte wurde dort übrigens keine reelle Zahl, sondern das Ergebnis (Marktanteil, Nähe zur Straße) in lexikographischer Ordnung.

Allgemein kann  $u$  alles mögliche messen: Geld, Gewinn maximieren, Kosten minimieren, aber auch Einfluss, Ansehen, soziale Stellung, Gerechtigkeit, Umweltschutz, Tierschutz, Glück, Zufriedenheit, etc. Nahezu jede menschliche Aktivität lässt sich so betrachten!

## Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

E103

		$s_2 \in S_2 =$			
		B	Schere	Stein	Papier
$s_1 \in S_1 =$	A				
	Schere	0	-1	+1	-1
	Stein	+1	0	0	+1
	Papier	-1	+1	-1	0

$u_2(s_1, s_2)$

$u_1(s_1, s_2)$

**Definition E1A:** strategisches Spiel (statisch, in Normalform)

Ein **strategisches Spiel** mit  $n$  Spieler:innen ist eine Funktion

$$u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R_1 \times \dots \times R_n$$

$$s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto (u_1(s), \dots, u_n(s)) = u(s).$$

Hierbei ist  $S_i$  die Menge der **Strategien**, die Spieler:in  $i$  wählen kann, und  $R_i$  die Menge ihrer möglichen **Resultate**, linear geordnet durch  $\leq_i$ .

## Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

E104  
Erläuterung

Wir wollen Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, knapp, präzise. Jede Spieler:in wählt ihre Strategie  $s_i \in S_i$  unabhängig von den anderen. Ihr Gewinn ist  $u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ , diesen versucht sie zu maximieren. Meist sind  $R_i$  die reellen Zahlen, und wir nennen  $u_i$  die **Nutzenfunktion** für Spieler:in  $i$ . Allerdings kontrolliert Spieler:in  $i$  nur ihre Strategie  $s_i$ , nicht die Strategien  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) =: s_{-i}$  ihrer Gegenspieler!

Als konkretes, einfaches Beispiel betrachten wir *Schere-Stein-Papier*. Dies ist ein **Nullsummenspiel**, d.h. stets gilt  $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$ . Es ist zudem **symmetrisch**, d.h.  $S_1 = S_2$  und  $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$ .

**Vorteile** dieses Modells: Unsere Definition fasst alle zuvor betrachteten Spiele zusammen. Wir schaffen damit einen gemeinsamen Rahmen, um allgemeine Begriffe und Werkzeuge zu entwickeln! Gewisse Argumente, Rechnungen und Tricks treten immer wieder auf. Wir können sie nun allgemein erklären, präzise formulieren, und ihre Gültigkeit beweisen.

**Einschränkungen:** Unsere Definition berücksichtigt noch nicht den zeitlichen Verlauf, zufällige Einflüsse oder unvollständige Information.

## Was ist ein Nash-Gleichgewicht?

E105

		Das Spiel „Straßenverkehr“		Feiglingspiel / chicken game		
		B	links	rechts	B	einlenken
A	links	+1	-8	-8	2	5
	rechts	-8	+1	+1	1	-9
	gradaus	5	-9	-9	5	-9

Ein Strategiepaar  $(s_1, s_2)$  ist **instabil** für Spieler  $i$ , falls er sein Ergebnis  $u_i(s_1, s_2)$  verbessern kann, indem er einseitig seine Strategie  $s_i$  ändert.

**Definition E1B:** Nash-Gleichgewichte (vorläufige Formulierung)

Wir nennen  $(s_1, s_2)$  **Nash-Gleichgewicht**, falls kein Spieler aus eigener Kraft sein Ergebnis verbessern kann, indem er seine Strategie ändert.

Nash-Gleichgewichte erklären zunächst nur, was **rational möglich** ist. Manch Spiel hat mehrere Gleichgewichte, erfordert also Koordinierung. Tradition / Konvention / Erziehung / Moral können eine Auswahl treffen.

## Was ist ein Nash-Gleichgewicht?

E106  
Erläuterung

Spiele sind im Allgemeinen sehr komplex. Zum Einsteig betrachten wir zunächst die allereinfachsten: **strategische Spiele in Normalform**. Wir können jedes Spiel in diese Grundform bringen; dabei geht meist Information verloren. Wir betrachten anschließend Verfeinerungen.

Grundlegend für Spiele ist der Begriff des **Nash-Gleichgewichts**.

Für seine bahnbrechenden Arbeiten hierzu aus den 1950er Jahren bekam John Nash 1994 den Wirtschafts-Nobelpreis zusammen mit John Harsanyi (1920–2000) und Reinhard Selten (1930–2016).

Anschauliche Beschreibung: Bob fixiert seine Spalte  $s_2$ , Alice wählt ihre Zeile  $s_1$  mit maximalem Ergebnis  $s_1 \mapsto u_1(s_1, s_2)$ . Alice fixiert ihre Zeile  $s_1$ , Bob wählt seine Spalte  $s_2$  mit maximalem Ergebnis  $s_2 \mapsto u_2(s_1, s_2)$ . Gelingt beides zugleich, so haben wir ein Nash-Gleichgewicht.

Das erklärt auch einen einfachen **Algorithmus**, wie wir in einem endlichen Bimatrix-Spiel alle (reinen) Nash-Gleichgewichte finden: Finde die Maxima in jeder Zeile. Finde die Maxima in jeder Spalte. Wo beides zugleich zusammentrifft, liegt ein Nash-Gleichgewicht.

## Was ist ein Nash-Gleichgewicht?

E107

Vorgelegt sei ein Spiel  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R_1 \times \dots \times R_n$  in Normalform. Wir nennen  $s = (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n := S$  einen **Strategievektor**. Spieler  $i$  kann sich aus eigener Kraft verbessern, falls für ein  $a \in S_i$  gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Andernfalls ist  $u_i(s)$  ein **Maximum** bezüglich aller Alternativen  $a \in S_i$ :

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots, s_n) \leq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Somit ist  $s_i$  eine **beste Antwort** auf  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) =: s_{-i}$ .

**Definition E1B:** Nash-Gleichgewichte eines Spiels

Der Strategievektor  $s \in S$  ist im **Gleichgewicht für Spieler  $i$** , wenn gilt:

$$u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{a \in S_i} u_i(a; s_{-i}), \quad \text{das heißt} \quad s_i \in \text{Arg max}_{a \in S_i} u_i(a; s_{-i}).$$

Hierfür schreiben wir  $\text{NE}_i(u) := \{s \in S \mid s_i \text{ ist beste Antwort auf } s_{-i}\}$ .

Gilt dies für jeden Spieler  $i$ , so nennen wir  $s$  ein **Nash-Gleichgewicht**, kurz  $\text{NE}(u) := \bigcap_i \text{NE}_i(u) = \{s \in S \mid s \text{ ist Nash-Gleichgewicht von } u\}$ .

## Was ist ein Nash-Gleichgewicht?

E108  
Erläuterung

Zunächst ist ein Nash-Gleichgewicht genau das, was die Definition sagt: Für jeden Spieler  $i = 1, \dots, n$  ist seine Strategie  $s_i$  eine beste Antwort auf die gegnerischen Strategien, geschrieben  $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ . Anders gesagt: Kein Spieler hat Anreiz, seine Strategie  $s_i$  zu ändern.

Umgekehrt erwarten wir, rational gesehen, dass ein Ungleichgewicht nicht gespielt wird, zumindest nicht auf Dauer, denn mindestens ein Spieler wird wechseln. Dies interpretieren wir normativ oder deskriptiv:

(1) Gibt es nur genau ein Nash-Gleichgewicht, so wird dieses gespielt. Rationale Interpretation: Sind alle Spieler rational, so werden sie ihr Verhalten auf dieses einzige Nash-Gleichgewicht koordinieren.

(2) Die Nash-Gleichgewichte erklären das beobachtete Spielverhalten. Evolutionäre Sichtweise bei wiederholten Spielen, Schwarmintelligenz bei großen Populationen: Ungleichgewichte bleiben nicht bestehen.

In allen Fällen sind die Nash-Gleichgewichte eines Spiels besondere Strategievektoren, die zur weiteren Analyse dienen: Mögliche rationale Lösungen, beobachtetes Spielverhalten, evolutionäre Entwicklung, etc.

Beispiel: ein Erbe teilen (soft)	E109
<p><b>Aufgabe:</b> Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich <math>x \in \{1, \dots, 9\}</math>, und Bob wünscht sich <math>y \in \{1, \dots, 9\}</math>, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt <math>x + y &gt; 10</math>, so verfällt das Erbe. Gilt <math>x + y \leq 10</math>, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.</p> <p><b>Aufgabe:</b> (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel <math>u</math>. (2) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte dieses Spiels <math>u</math>.</p> <p><b>Lösung:</b> (1) Die Regeln definieren ein Spiel in Normalform:</p> $u : \{1, \dots, 9\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{falls } x + y \leq 10, \\ (0, 0) & \text{falls } x + y > 10. \end{cases}$ <p>(2a) Kein Gleichgewicht ist <math>(x, y)</math> mit <math>x + y &lt; 10</math>, ebensowenig <math>(x, y)</math> mit <math>x + y &gt; 10</math>. Somit bleiben nur noch neun mögliche Kandidaten:</p> $NE(u) \subseteq \{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$ <p>(2b) Jedes dieser Paare ist ein Nash-Gleichgewicht, also gilt auch „<math>\supseteq</math>“.</p> $NE(u) = \{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$	

Beispiel: ein Erbe teilen (soft)	E110 Erläuterung
<p>Wenn der Notar das Paar <math>(x, y)</math> verkündet, könnte er Alice dann Bob separat fragen, ob sie ihren Wunsch ändern möchten. Falls <math>(x, y)</math> kein Gleichgewicht ist, so will mindestens einer wechseln. Ist <math>(x, y)</math> hingegen ein Gleichgewicht, so besteht für keine:n irgendein Anlass zu wechseln.</p> <p>Wenn sich Alice und Bob absprechen können, so können sie jedes der neun Gleichgewichte <math>(x, y) \in NE(u)</math> auswählen und als gemeinsames Vorgehen vereinbaren. Keiner hätte anschließend Anlass, abzuweichen. Welches Paar <math>(x, y)</math> sie auswählen ist frei verhandelbar, siehe Kapitel L.</p> <p><b>Aufgabe:</b> Diskutieren Sie die folgende, recht naheliegende Variante: Alice wünscht sich <math>x \in \{0, \dots, 9\}</math> und Bob wünscht sich <math>y \in \{0, \dots, 9\}</math>.</p> <p><b>Lösung:</b> Die Menge der Nash-Gleichgewichte ändert sich nicht! Alice' Strategie 0 ist strikt dominiert durch 1: Egal, welche Strategie <math>y \in \{0, \dots, 9\}</math> Bob wählt, für Alice ist 1 immer strikt besser als 0. Ebenso wird Bobs Strategie 0 strikt dominiert durch die Strategie 1. Die beiden zusätzlichen Optionen werden also rational nie genutzt. Das ändert sich in der folgenden Aufgabe mit <math>x, y \in \{0, \dots, 10\}</math>.</p>	

Beispiel: ein Erbe teilen (hart)	E111
<p><b>Aufgabe:</b> Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich <math>x \in \{0, \dots, 10\}</math>, Bob wünscht sich <math>y \in \{0, \dots, 10\}</math>, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt <math>x + y &gt; 10</math>, so verfällt das Erbe. Gilt <math>x + y \leq 10</math>, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.</p> <p><b>Aufgabe:</b> (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel <math>u</math>. (2) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte dieses Spiels <math>u</math>.</p> <p><b>Lösung:</b> (1) Die Regeln definieren ein Spiel in Normalform:</p> $u : \{0, \dots, 10\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{falls } x + y \leq 10, \\ (0, 0) & \text{falls } x + y > 10. \end{cases}$ <p>(2) Eine sorgfältige Analyse, wie in der vorigen Aufgabe, ergibt:</p> $NE^1(u) = \{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$ $NE(u) = NE^1(u) \cup \{(0, 10), (10, 0), (10, 10)\} \quad \triangle \text{Überraschung!}$ <p>Nash-Gleichgewichte erklären zunächst nur, was <b>rational möglich</b> ist. Manch Spiel hat mehrere Gleichgewichte, erfordert also Koordinierung!</p>	

Beispiel: ein Erbe teilen (hart)	E112 Erläuterung
<p><b>⚠</b> In diesem Spiel kann man das letzte Gleichgewicht <math>(10, 10)</math> leicht übersehen; es ist nicht intuitiv, aber dennoch ein Nash-Gleichgewicht! Nash-Gleichgewichte zu prüfen ist leicht, eins/alle zu finden ist schwer. Da hilft nur genau lesen, scharf nachdenken, sorgsam ausführen.</p> <p>Angenommen, Alice und Bob können sich absprechen, vor Einreichung ihrer Wünsche. Jedes Nicht-Gleichgewicht <math>(x, y) \in S \setminus NE(u)</math> ist eine unsinnige Vereinbarung, denn mindestens einer hat Anlass, die gerade getroffene Absprache sofort zu brechen. Jede Absprache <math>(x, y) \in NE(u)</math> hingegen ist rational möglich, denn sie ist selbststabilisierend!</p> <p><b>Übung:</b> Diskutieren Sie das entsprechende Spiel mit drei Erben Alice, Bob und Chuck, ebenso mit vier Erben, fünf Erben, sechs Erben, etc. Wenn Sie genauer hinschauen, dann entdecken Sie einige interessante Phänomene. Zum Beispiel sind bei drei Erben manche Gleichgewichte wie <math>(5, 5, 5)</math> nur stabil unter individueller Maximierung, doch eine/jede Zweier-Koalition könnte und würde koordiniert davon abweichen. Was sind hier die koalitions-stabilen Gleichgewichte?</p>	

Empirie: Piraten teilen im Praxistest	E113 Casino
<p>Im <b>Casino Royal</b> (22.04.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere ersten Überlegungen zu Gleichgewichten in der Praxis zu testen. Ich empfehle nachdrücklich praktische <b>Experimente zur Spieltheorie</b>, denn Theorie und Praxis ergänzen und inspirieren sich gegenseitig! Hier mein (stark vereinfachtes) Gedächtnisprotokoll der Ereignisse.</p> <p>Wir haben zunächst das Piratenspiel mit fünf Piraten gespielt, viermal in jeweils wechselnden Rollen. Vorschläge und Argumente gingen bunt durcheinander, und die Ergebnisse waren wieder erstaunlich (A225). Die Capitaine verteilten großzügig, doch zwei gingen über die Planke.</p> <p><b>Erstes Spiel:</b> Auf Vorschlag aus dem Publikum haben wir folgende Spielregeln vereinbart: Vier Piraten A, B, C, D teilen sich 100 Dukaten. Jeder schreibt seinen Wunsch <math>a, b, c, d \in \{0, \dots, 100\}</math> auf einen Zettel. Im Falle <math>a + b + c + d \leq 100</math> wird der Wunsch ausgezahlt, sonst nichts. Gespielt wurde zunächst <i>ohne</i> vorige Absprache. Die Wünsche waren dann <math>(25, 20, 20, 25)</math>. Zwei waren vorsichtig! Es wurden daher nur 90 Dukaten ausgezahlt und 10 Dukaten als Opfergabe ins Meer geworfen.</p>	

Empirie: Piraten teilen im Praxistest	E114 Casino
<p><b>Zweites Spiel:</b> Selbe Spielregeln, doch nun durfte zuvor verhandelt werden. Spieler A nutzte die Gelegenheit, um seinen Zettel sofort und endgültig und für alle sichtbar mit 80 zu beschriften (<i>burning bridges</i>). Seine dreiste Strategie schlug jedoch fehl: Die anderen wollten dies nicht hinnehmen und schrieben eiskalt ebenso überzogene Forderungen auf. So wurden alle 100 Dukaten ins Meer geworfen! Tja, dumm gelaufen. Rational war das sicher nicht. Der fiese Trick, sich früh festzulegen und damit die anderen zu erpressen, hätte (rational) funktionieren müssen, misslang aber dennoch. Vielleicht wäre die Forderung nach 30 Dukaten noch durchgegangen, oder 40, aber eben nicht 80. Versuch macht kluch.</p> <p><b>Drittes Spiel:</b> Selbe Spielregeln, mit Verhandlung. Alle trauerten den vergeudeten 100 Dukaten nach. Sie einigten sich auf <math>(25, 25, 25, 25)</math>, so hat es dann jeder aufgeschrieben, und so wurde es ausgezahlt. „Nach den Erfahrungen von eben, macht alles andere keinen Sinn.“</p> <p>😊 Das ist ein striktes Nash-Gleichgewicht, Abweichen schadet! Nach leidvollen Fehlschlägen hat sich dieses Ergebnis eingependelt.</p>	

Empirie: Piraten teilen im Praxistest	E115 Casino
<p><b>Viertes Spiel:</b> Um die Symmetrie zu brechen werden die 100 Dukaten vorneweg in vier Haufen zu 10, 20, 30, 40 Dukaten aufgeteilt. Jeder Pirat darf sich einen Haufen aussuchen, gleichzeitig per Zettel. Beanspruchen dabei zwei Piraten denselben Haufen, so wird <i>alles</i> ins Meer geworfen.</p> <p>Unsere vier leidgeprüften Piraten wollten rasch zu einem Ergebnis kommen, doch keinerlei Risiko eingehen und haben daher... gelost! Per Schnick-Schnack-Schnuck haben Sie die vier Haufen zugeteilt. Beim Ausfüllen der Zettel ist anschließend keiner (!) abgewichen.</p> <p>😊 Nicht das Ergebnis ist symmetrisch-gerecht, sondern das Verfahren. Es gibt <math>4! = 24</math> solcher Nash-Gleichgewichte. Jedes ist auf seine Weise ungerecht, genau dies haben unsere Piraten durch das Losverfahren „symmetrisiert“ und anschließend das Ergebnis klaglos akzeptiert.</p> <p>😊 Jede Zuteilung ist ein striktes Gleichgewicht, Abweichen schadet! Wurde erst einmal eines der 24 Gleichgewichte willkürlich ausgewählt, so ist diese Vereinbarung selbst-stabilisierend. Damit haben unsere Piraten nebenbei <b>korrelierte Gleichgewichte</b> entdeckt (siehe I3).</p>	

Empirie: Piraten teilen im Praxistest	E116 Casino
<p>Zwei Varianten kamen uns noch in den Sinn, die wir aber nicht spielten:</p> <p><b>Fünftes Spiel:</b> Selbe Spielregeln, aber ohne die Möglichkeit der vorigen Absprache. Wie sollte jeder Pirat nun vorgehen? Jeder möchte einen großen Haufen, aber gleichzeitig Kollisionen verhindern. Knifflig! Übung: Wie wahrscheinlich sind Kollisionen bei zufälliger Wahl?</p> <p>Wie gelingt eine möglichst kollisionsfreie Zuteilung, ein gemeinsamer Symmetriebruch, ohne Gedächtnis, Tradition, vorige Absprache, etc.? Willkürlich, z.B. nach Alter? Nähe zur Tür? Oder eine andere Größe, die allen zugänglich ist und allgemein als Arbitrer anerkannt wird.</p> <p><b>Sechstes Spiel:</b> Fünf Piraten verteilen die Geldhaufen 0, 10, 20, 30, 40. Wie kann oder soll zugeteilt werden? Willkürlich nach Losverfahren? Wie können unsere besorgten Piraten sicherstellen, dass die getroffene Vereinbarung auch wirklich eingehalten wird? „Wer nichts mehr zu verlieren hat, fühlt sich an Abmachungen vielleicht nicht gebunden.“</p> <p>😊 Jede Zuteilung ist ein Gleichgewicht, aber nicht strikt: Abweichung lohnt nicht, doch einer könnte Amok laufen. Fortsetzung auf Seite E260!</p>	

Dieses Spiel ist berühmt für seinen vermeintlich paradoxen Ausgang. Es wurde 1950 von Albert Tucker (1905–1995) vorgestellt und popularisiert.

	Clyde	schweigen	gestehen
Bonnie			
schweigen	-1	-1	-5
gestehen	0	-5	-4

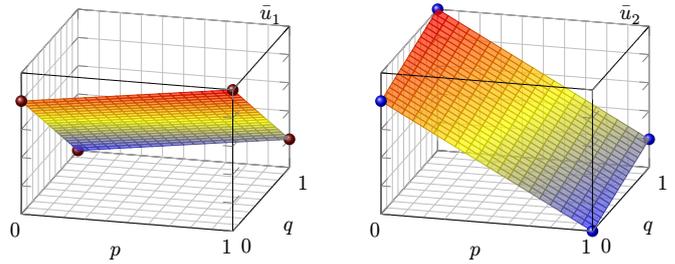
Als Funktion  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  bedeutet das ausgeschrieben:

- (schweigen, schweigen)  $\mapsto (-1, -1)$
- (schweigen, gestehen)  $\mapsto (-5, 0)$
- (gestehen, schweigen)  $\mapsto (0, -5)$
- (gestehen, gestehen)  $\mapsto (-4, -4)$

Nash-Gleichgewicht ist einzig das Strategiepaar (gestehen, gestehen).

Zwei Komplizen werden geschnappt und in getrennten Zellen verhört. Wenn beide schweigen, dann genügen die wenigen Beweise vor Gericht vermutlich zur Verurteilung für ein Jahr Gefängnis. Wenn einer gesteht, so wird ihm die Strafe erlassen, aber der andere wird zu fünf Jahren verurteilt. Gestehen beide, so drohen jedem vier Jahre Gefängnis.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Bonnie wählt  $p \in \{0, 1\}$  und Clyde wählt  $q \in \{0, 1\}$ .



Auch dieses berühmte Spiel wird oft in Konfliktsituationen beobachtet:

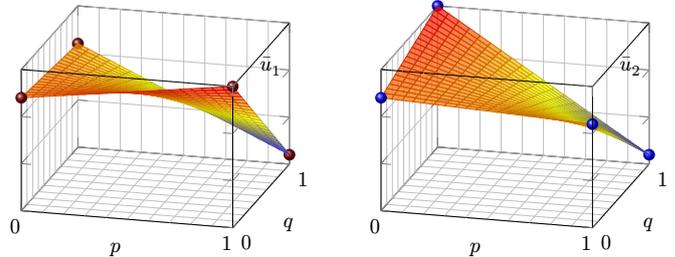
	B	einlenken	gradaus
A			
einlenken	2	2	1
gradaus	5	1	-9

Hier gibt es zwei Nash-Gleichgewichte, aber diese sind asymmetrisch. Beide wollen geradeaus. Wer gibt zuerst nach? Bricht die Symmetrie?

Natürlich ist (gradaus, gradaus) kein Gleichgewicht: Ein Spieler muss ausweichen, beide wissen es, doch keiner will sich als erster bewegen. Auch (einlenken, einlenken) ist hier kein Gleichgewicht: Jeder einzelne könnte dies ausnutzen und gradaus fahren. Die beiden Gleichgewichte sind asymmetrisch. Das macht die Koordinierung schwierig. „Soll doch der andere einlenken!“, sagt jeder. Manchmal kommt es zum Crash.

Das Feiglingspiel beschreibt eine Mutprobe oder gegenseitige Drohung: Zwei Autos rasen aufeinander zu. Wer einlenkt, zeigt Angst und verliert. Weicht keiner aus, beweisen beide Spieler zwar Mut und Durchsetzung, aber durch den Zusammenprall entsteht allseits ein großer Schaden. Dieses Drohszenario findet sich häufig bei Verhandlungen.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Spielerin A wählt  $p \in \{0, 1\}$  und Spieler B wählt  $q \in \{0, 1\}$ .



[The Simpsons, Season 4, Episode 19. youtu.be/b0SokWLkmlU](https://youtu.be/b0SokWLkmlU)

Die mathematische Theorie hinter *Schere-Stein-Papier* ist recht leicht. Die Psychologie von *Schere-Stein-Papier* ist eine eigene Wissenschaft!



Jedes Kind hat vermutlich das Spiel *Schere-Stein-Papier* gespielt, (engl. *Rock-Paper-Scissors*, kurz RPS, en. [wikipedia.org/wiki/Rock\\_paper\\_scissors](https://en.wikipedia.org/wiki/Rock_paper_scissors)) und gelernt, möglichst unvorhersehbar eine der Aktionen zu wählen.

- Lisa: *Look, there is only one reasonable way to settle this – Rock, Paper, Scissors!*
- (Lisa: *Poor predictable Bart. Always takes Rock.*)
- (Bart: *Good old Rock. Nothing beats that!*)
- Bart: *Rock!* – Lisa: *Paper!* – Bart: *Dupe!*

Das erinnert uns an verschiedene Stufen der Rationalität, siehe A2A. Wie funktionieren Witz, Ironie, Humor? Durch gemeinsames Wissen.

In der Spieltheorie wollen wir den Spieler:innen manchmal ganz offiziell die Möglichkeit einräumen, zwischen ihren Aktionen zufällig zu wählen. In vielen Situationen können die Spieler:innen dies *außerhalb* des Spiels ohnehin selbst bewerkstelligen, etwa indem sie *heimlich* randomisieren. Wir integrieren diese Möglichkeit nun *offiziell* und *formal* in das Spiel und erweitern daher  $u : \prod_i S_i \rightarrow \prod_i \mathbb{R}$  zum Spiel  $\tilde{u} : \prod_i \tilde{S}_i \rightarrow \prod_i \mathbb{R}$ .

*Randomization as a service*: Als zusätzliche Ressource stellen wir jeder Spieler:in kostenlos einen individuellen Zufallsgenerator zur Verfügung. Diesen interpretieren wir als Lostopf mit Losen der gewünschten Wkten. Jede Spieler:in kann einfach und verlässlich darauf zugreifen.

*Garantierte Qualität*: Jede Ziehung ist nicht nur völlig zufällig gemäß der geforderten Wkten, sondern auch unabhängig von allen anderen. Diese stillschweigende Annahme wird oft nicht explizit ausgesprochen, ist aber die wesentliche Grundlage aller Anwendungen und Rechnungen.

*Typisches Beispiel*: Viele Computerspiele stellen einen Zufallsgenerator zur Verfügung [*random number generator*, kurz RNG], etwa als fairen Münzwurf „D2“ oder allgemein als fairen  $n$ seitigen Würfel „Dn“. Siehe en. [wikipedia.org/wiki/Random\\_number\\_generation](https://en.wikipedia.org/wiki/Random_number_generation).

Für nahezu jede Anwendung sind Zufallszahlen grundlegend, daher ist kostengünstige und hochwertige Randomisierung ein zentrales Thema. Donald Knuth widmet diesem wichtigen Problem daher ein halbes Buch: *Chapter 3 – Random Numbers in The Art of Computer Programming* (1997).

Beim Ausdenken von Zufallszahlen sind Menschen erstaunlich schlecht. Die meisten folgen einem bewussten oder unbewussten Muster, wohl kaum so extrem wie „predictable“ Bart, doch nicht wirklich zufällig. Das kann in Spielen ausgenutzt werden, genau wie Lisa dies tut.

Spielt Bart bei *Schere-Stein-Papier* zufällig, das heißt gleichverteilt und unabhängig, so kann Lisa nachweislich keinen Vorteil daraus ziehen. Viele menschliche Spieler:innen können jedoch überlistet werden, durch psychologische Effekte oder statistische Muster.

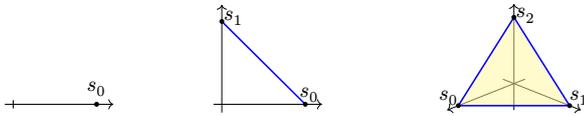
*Contrary to what you might think, RPS is not simply a game of luck or chance. [...] Humans, try as they might, are terrible at trying to be random, in fact often humans in trying to approximate randomness become quite predictable. So knowing that there is always something motivating your opponent's actions, there are a couple of tricks and techniques that you can use to tip the balance in your favour.*

Graham Walker, [www.worldrps.com/?id=256&Itemid=37](http://www.worldrps.com/?id=256&Itemid=37)  
*The Official Rock Paper Scissors Strategy Guide*

Bei *Schere-Stein-Papier* ist es nachteilig, sich auf eine der drei **reinen Strategien** festzulegen. Optimal ist eine zufällige, gleichverteilte Wahl:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Wir schreiben diese **gemischte Strategie**  $s = \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k$  bequem und übersichtlich als Konvexkombination der reinen Strategien  $s_0, \dots, s_{\ell}$ . Mit Wkt  $p_k \in [0, 1]$  wird Strategie  $s_k \in S_i$  ausgewählt. Geometrisch:



☺ Eine gute Notation ist zugleich präzise und bequem, notiert alle wesentlichen Daten, doch meidet übermäßige Redundanz, erleichtert das Lesen und das Rechnen und hilft, Missverständnisse zu vermeiden.

**Definition E1c:** gemischte Strategie, Borel 1921

Sei  $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^{\ell}\}$  die (endliche) Strategiemenge der Spieler:in  $i$ . Eine **gemischte Strategie** ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $S_i$ .

$$s_i = p_0 \cdot s_i^0 + p_1 \cdot s_i^1 + \dots + p_{\ell} \cdot s_i^{\ell}$$

mit Wahrscheinlichkeiten  $p_0, p_1, \dots, p_{\ell} \geq 0$  und  $p_0 + p_1 + \dots + p_{\ell} = 1$ . Konvexkombination erzeugt die **Menge aller gemischten Strategien**

$$\{s_i = \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_i^k \mid p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\ell} p_k = 1\} =: [s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^{\ell}] = [S_i] = \bar{S}_i$$

Die Nutzenfunktion  $u : S = S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  setzen wir fort, von reinen auf gemischte Strategien, zu  $\bar{u} : \bar{S} = \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\bar{u}|_S = u|_S$ , **linear in jeder Koordinate**, entsprechend dem **Erwartungswert**:

$$\bar{u}(\dots, \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_i^k, \dots) = \sum_{k=0}^{\ell} p_k \bar{u}(\dots, s_i^k, \dots)$$

Wir nennen  $\bar{u}$  die **affine Fortsetzung** von  $u$  auf gemischte Strategien. Dies ist eine  $n$ -lineare Abbildung, eingeschränkt auf  $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ .

Wir nennen  $S_i$  die Menge der **reinen Strategien** für Spieler  $i$  und entsprechend  $[S_i] \supseteq S_i$  die Menge seiner **gemischten Strategien**. Wir betrachten hier  $S_i$  als Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{R}S_i$  und schreiben Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Konvexkombination  $s_i = \sum_k p_k s_i^k$ .

Der **Träger** von  $s_i \in [S_i]$  ist die Menge  $\text{supp}(s) := \{s_i^k \mid p_k > 0\} \subseteq S_i$ . Demnach ist die gemischte Strategie  $s_i \in [S_i]$  genau dann rein,  $s_i \in S_i$ , wenn der Träger einpunktig ist, also  $\text{supp}(s_i) = \{s_i\} \subseteq S_i$ . Andernfalls ist  $s_i$  **echt gemischt**, oder im Falle  $\text{supp}(s_i) = S_i$  sogar **voll gemischt**.

Geometrisch ist  $s_i$  eine Konvexkombination der Punkte  $s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^{\ell}$ . Somit ist  $[S_i]$  die konvexe Hülle der Eckpunkte  $s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^{\ell}$ , also eine Strecke ( $\ell = 1$ ) oder ein Dreieck ( $\ell = 2$ ) oder ein Tetraeder ( $\ell = 3$ ) oder allgemein ein  $\ell$ -dimensionales **Simplex** mit  $\ell + 1$  Eckpunkten.

☺ Wir benötigen eine gute Notation, möglichst knapp und doch präzise. Unsere geometrische Sichtweise nutzt Analogien und hat sich bewährt. Das ist in erster Linie nicht nur eine mathematische Frage, sondern vor allem eine der Klarheit, der Bequemlichkeit und der jeweiligen Tradition.

Dual hierzu können wir  $s_i$  als Abbildung  $p : S_i \rightarrow \mathbb{R} : s_i^k \mapsto p_k$  betrachten, mit Wahrscheinlichkeiten  $p_0, p_1, \dots, p_{\ell} \geq 0$  und  $p_0 + p_1 + \dots + p_{\ell} = 1$ . Interpretation: Die Strategie  $s_i^k \in S_i$  wird mit Wkt  $p_k \in [0, 1]$  ausgewählt. Das definiert das zugehörige WMaß  $P : \mathfrak{P}(S_i) \rightarrow [0, 1] : A \mapsto \sum_{s_i^k \in A} p_k$ .

Für endliche (oder allgemeiner: diskrete) Wahrscheinlichkeitsräume sind alle drei Beschreibungen äquivalent: Konvexkombination, Punktmassen, oder WMaß. In jedem Falle genügt es, Punktmassen zu summieren.

Für allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume  $(S, \mathcal{A}, P)$  nutzen wir später dankend die bewährten Werkzeuge der Maß- und Integrationstheorie. Diese technische Vervollkommnung ist hier zunächst noch nicht nötig.

Die Fortsetzung von den reinen auf die gemischten Strategien haben wir in den vorigen einfachen Spielen bereits durch Graphiken illustriert. Die folgenden Beispiele zeigen dies nochmal ausführlich.

**Übung:** Sei  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Nullsummenspiel, also  $u_1 + u_2 = 0$ . Ist dann die affine Fortsetzung  $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Nullsummenspiel?

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto (u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2))$$

mit Strategiemengen  $S_1 = \{s_1^0, s_1^1, \dots, s_1^m\}$  und  $S_2 = \{s_2^0, s_2^1, \dots, s_2^n\}$ . Die Auszahlungen  $(u_1, u_2)$  entsprechen zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$ .

$$s_1 = \sum_{i=0}^m x_i s_1^i \in \bar{S}_1, \quad x \in \Delta^m = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=0}^m x_i = 1 \right\}$$

$$s_2 = \sum_{j=0}^n y_j s_2^j \in \bar{S}_2, \quad y \in \Delta^n = \left\{ \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_j \geq 0, \sum_{j=0}^n y_j = 1 \right\}$$

$$\bar{u}_1(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n x_i y_j \underbrace{u_1(s_1^i, s_2^j)}_{=: a_{ij}} = x^T A y, \quad A \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$$

$$\bar{u}_2(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n x_i y_j \underbrace{u_2(s_1^i, s_2^j)}_{=: b_{ij}} = x^T B y, \quad B \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$$

Kurzschreibweise  $\bar{u} : \Delta^m \times \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x^T A y, x^T B y)$ . Das erklärt, warum wir im Folgenden mit **Quadricken** zu tun haben!

Die Grundideen der Spieltheorie sind bis hierher noch recht einfach, bedürfen aber bereits präziser Formulierungen und geeigneter Notation. Diese soll klar sein, zudem einfach und bequem, andernfalls verkommen unsere Definitionen und Rechnungen leicht zu heillosen Indexschlachten.

Für **endliche reelle Zwei-Personen-Spiele** kennen Sie Matrizen als besonders bequeme und effiziente Notation aus der Linearen Algebra.

Die Menge  $\Delta^m = [e_0, e_1, \dots, e_m] \subset \mathbb{R}^{m+1}$  ist der **Standardsimplex**, also die konvexe Hülle der Standardbasis  $e_0, e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^{m+1}$ .

Diese **baryzentrischen Koordinaten** nutzen wir zur Parametrisierung für jeden Simplex mit beliebiger Eckenmenge  $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^m\}$  vermöge  $h : \Delta^m \rightarrow [S_i] : (x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto x_0 s_i^0 + x_1 s_i^1 + \dots + x_m s_i^m$ . Wir erhalten so  $\bar{u} = \bar{u} \circ (h_1 \times \dots \times h_n) : \Delta^{m_1} \times \dots \times \Delta^{m_n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Simplizes sind geometrisch-topologisch besonders einfache Räume, daher auch der Name. Sie sind konvex und kompakt und homöomorph zum Ball  $\mathbb{D}^m$  gleicher Dimension (E1f). Genau diese Eigenschaften werden wir im folgenden Existenzsatz von Nash (E1E) ausnutzen!

Sei  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und  $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Der Strategievektor  $s \in \bar{S}$  ist im Gleichgewicht für Spieler  $i$ , wenn gilt:

$$\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) = \max_{a \in S_i} \bar{u}_i(a; s_{-i})$$

**Lemma E1d:** Kriterium für gemischte Nash-Gleichgewichte

Dank Linearität von  $\bar{u}$  wird das Maximum in den Ecken angenommen:

$$\max_{a \in S_i} \bar{u}_i(a; s_{-i}) = \max_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i})$$

Genau dann ist  $s$  für Spieler  $i$  im Gleichgewicht,  $s \in \text{NE}_i(\bar{u})$ , wenn gilt:

$$\text{supp}(s_i) \subseteq \text{Arg max}_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i})$$

Wir erhalten somit ein einfaches Kriterium:

$$\text{NE}_i(\bar{u}) = \{s \in \bar{S} \mid \text{supp}(s_i) \subseteq \text{Arg max}_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i})\}$$

Gilt dies für alle  $i$ , so ist  $s$  ein Nash-Gleichgewicht:  $\text{NE}(\bar{u}) := \bigcap_i \text{NE}_i(\bar{u})$ .

☺ Dieses einfache Kriterium ist notwendig und hinreichend, also eine Charakterisierung aller Nash-Gleichgewichte, dank Linearität von  $\bar{u}$ .

Gegeben sei  $s \in \bar{S}$ . Das Kriterium für  $s \in \text{NE}(\bar{u})$  ist einfach und direkt: Es genügt,  $s$  einzusetzen und endlich viele Ungleichungen zu prüfen! Für jeden Spieler  $i$  prüfen wir folgende Bedingung: Jede reine Strategie im Träger von  $s_i$  ist eine beste Antwort auf die Gegenstrategie  $s_{-i}$ .

Ausführlich: Das Maximum  $\max_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i})$  finden wir leicht, da die reine Strategiemenge  $S_i$  endlich ist. Im selben Durchgang konstruieren wir die Teilmenge  $M_i = \text{Arg max}_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i}) \subseteq S_i$  aller Maximierer. Es bleibt schließlich nur noch  $\text{supp}(s_i) \subseteq M_i$  zu prüfen.

⚠ Das sagt uns noch nicht, wie wir Nash-Gleichgewichte finden! Nash-Gleichgewichte zu prüfen ist leicht, eins/alle zu finden ist schwer.

⚠ Achtung: „supp“ steht hier für den **Träger** [engl./frz. *support*], nicht zu verwechseln mit dem **Supremum** „sup“, beide sind völlig verschieden! Auch aus dem Kontext ist es klar, aber man muss genau hinschauen.

Beispiel: Bach oder Strawinsky?

E133

Ein Paar möchte ein Konzert besuchen: Alice mag lieber Strawinsky, Bob mag lieber Bach. Gar kein Konzert wäre für beide enttäuschend.

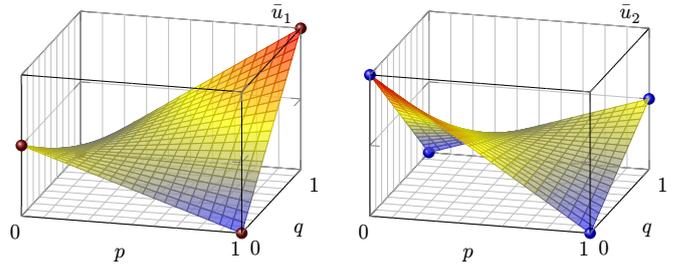
	B	Bach	Strawinsky
A			
Bach	1	2	0
Strawinsky	0	0	1

In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash-Gleichgewichte: Einerseits (Bach, Bach) und andererseits (Strawinsky, Strawinsky). Die Ungleichgewichte (Bach, Strawinsky) und (Strawinsky, Bach) wären nicht rational, sie werden erwartungsgemäß nicht gespielt, oder nur selten, vorübergehend als Ausrutscher, und dann alsbald korrigiert. Hingegen können beide Nash-Gleichgewichte gleichermaßen gespielt werden, hier ist keines bevorzugt. Das Spiel ist hierin symmetrisch.

Beispiel: Bach oder Strawinsky?

E134

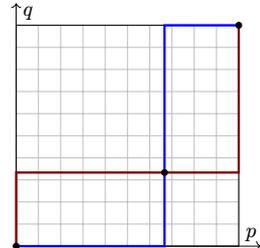
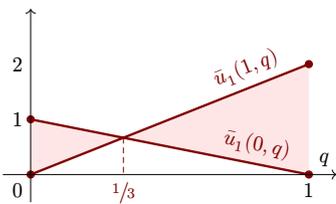
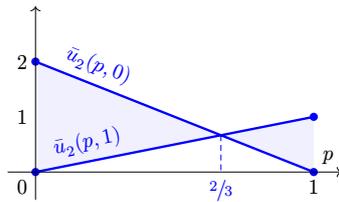
Wir denken an folgendes Szenario: Alice und Bob haben sich vage für das Bach-Konzert verabredet. Sie können nun nicht mehr miteinander kommunizieren, doch jeder muss individuell seine Karte kaufen. Bob will nicht wechseln, er ist wunschlos glücklich. Alice möchte zwar lieber in das Strawinsky-Konzert, aber alleine wird sie nicht wechseln. (Die umgekehrte Situation ist natürlich genauso gut vorstellbar.) Sobald beide eine Einigung erzielt haben, sind sie daran gebunden!



Beispiel: Bach oder Strawinsky?

E135

	B	0	1
A			
0	1	2	0
1	0	0	1



Beispiel: Bach oder Strawinsky?

E136

Erläuterung

Die beiden reinen Strategien bezeichnen wir hier mit  $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$ . Als Erweiterung zu gemischten Strategien nutzen wir dann die beiden Einheitsintervalle  $[S_1] = [S_2] = [0, 1]$  und erhalten das Bimatrix-Spiel

$$\bar{u} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (p, q) \mapsto (\bar{u}_1(p, q), \bar{u}_2(p, q)).$$

Die Graphik für  $\bar{u}_1(0, q)$  und  $\bar{u}_1(1, q)$  zeigt die Fläche  $\bar{u}_1$  von der Seite. Für jede von Bobs Strategien  $q \in [0, 1]$  liest Alice ihre beste Antwort ab:  $p = 0$  für  $q < 1/3$  und  $p = 1$  für  $q > 1/3$  sowie  $p \in [0, 1]$  für  $q = 1/3$ . Die Graphik für  $\bar{u}_2(p, 0)$  und  $\bar{u}_2(p, 1)$  zeigt die Fläche  $\bar{u}_2$  von der Seite. Für jede von Alice' Strategien  $p \in [0, 1]$  liest Bob seine beste Antwort ab:  $q = 0$  für  $p < 2/3$  und  $q = 1$  für  $p > 2/3$  sowie  $q \in [0, 1]$  für  $p = 2/3$ .

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen“ ein:

$$NE_1(\bar{u}) = \{(p, q) \in [0, 1]^2 \mid p \text{ ist eine beste Antwort auf } q\}$$

$$NE_2(\bar{u}) = \{(p, q) \in [0, 1]^2 \mid q \text{ ist eine beste Antwort auf } p\}$$

Genauer gesagt sind dies eigentlich nur Relationen / Korrespondenzen. Ihre Schnittpunkte sind die Nash-Gleichgewichte:  $NE = NE_1 \cap NE_2$ .

Beispiel: bleiben oder gehen?

E137

Sie hören einen schrecklich langweiligen Vortrag zur Spieltheorie und möchten lieber gehen, aber alleine aufzustehen wäre peinlich. Wenn Sie zu zweit aufstehen und gehen, dann wäre alles gut. Leider können Sie sich unter dem strengen Blick des Vortragenden nicht absprechen.

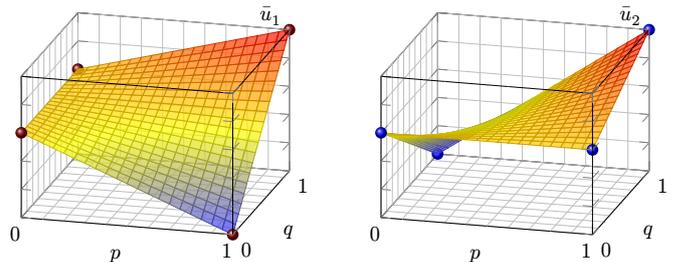
	B	bleiben	gehen
A			
bleiben	-2	-2	-5
gehen	-5	-2	0

In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash-Gleichgewichte: Einerseits (bleiben, bleiben) und andererseits (gehen, gehen). Ihre gute Erziehung versetzt beide Spieler zunächst in die Ausgangslage (bleiben, bleiben). Beide möchten eigentlich lieber gehen, aber ohne Absprache wird keiner den ersten Zug wagen. *Teile und herrsche!*

Beispiel: bleiben oder gehen?

E138

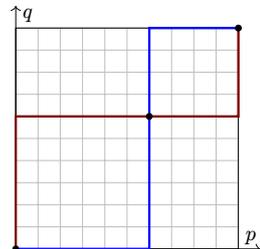
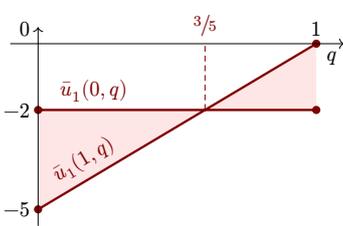
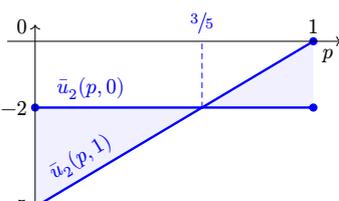
Alternatives Verhalten, je nach Tradition: Als erfahrene Studierende haben Sie zahllose schlechte Vorträge erlitten und sich zu wehren gelernt. Sie wissen: Die Höflichkeit gebietet, zunächst zehn Minuten zu bleiben; wenn der Vortrag grottenschlecht ist, sollte man sofort danach gehen. Sie wissen das, und Sie wissen, dass alle anderen es auch wissen. In diesem Falle ersetzt das gemeinsame Wissen (*common knowledge*) die explizite Absprache: Nach genau zehn Minuten (gefühlte Ewigkeit) stehen alle gemeinsam auf und gehen. *Einigkeit macht stark!*



Beispiel: bleiben oder gehen?

E139

	B	0	1
A			
0	-2	-2	-5
1	-5	0	0



Beispiel: bleiben oder gehen?

E140

Erläuterung

Die Graphik für  $\bar{u}_1(0, q)$  und  $\bar{u}_1(1, q)$  zeigt die Fläche  $\bar{u}_1$  von der Seite. Für jede von Bobs Strategien  $q \in [0, 1]$  liest Alice ihre beste Antwort ab:  $p = 0$  für  $q < 3/5$  und  $p = 1$  für  $q > 3/5$  sowie  $p \in [0, 1]$  für  $q = 3/5$ .

Die Graphik für  $\bar{u}_2(p, 0)$  und  $\bar{u}_2(p, 1)$  zeigt die Fläche  $\bar{u}_2$  von der Seite. Für jede von Alice' Strategien  $p \in [0, 1]$  liest Bob seine beste Antwort ab:  $q = 0$  für  $p < 3/5$  und  $q = 1$  für  $p > 3/5$  sowie  $q \in [0, 1]$  für  $p = 3/5$ .

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen“ ein:

$$NE_1(\bar{u}) = \{(p, q) \in [0, 1]^2 \mid p \text{ ist eine beste Antwort auf } q\}$$

$$NE_2(\bar{u}) = \{(p, q) \in [0, 1]^2 \mid q \text{ ist eine beste Antwort auf } p\}$$

Ihre Schnittpunkte sind die Nash-Gleichgewichte:  $NE = NE_1 \cap NE_2$ .

- 😊 So können Sie graphisch jedes  $2 \times 2$ -Spiel lösen, ebenso  $2 \times n$ .
- 😊 Die reinen Nash-Gleichgewichte sind meist recht offensichtlich. Für die gemischten Gleichgewichte müssen Sie sorgfältig rechnen.
- 😊 Beachten Sie, wie die Symmetrie der Spiele in die Lösung eingeht. Diese Beobachtung illustriert ein allgemeines Prinzip, siehe Satz E20.

Beispiel: Matching Pennies

E141

Alice und Bob legen jeder verdeckt eine Münze auf den Tisch, dann wird aufgedeckt: Bei Gleichheit gewinnt Bob, bei Ungleichheit gewinnt Alice. (Das ähnelt dem Spiel Schere-Stein-Papier, ist aber noch simpler.)

	B	Kopf	Zahl
A			
Kopf	-1	+1	-1
Zahl	+1	-1	+1

In diesem Spiel gibt es kein reines Nash-Gleichgewicht!

Erweiterung: Beide Spieler dürfen nun gemischte Strategien wählen!

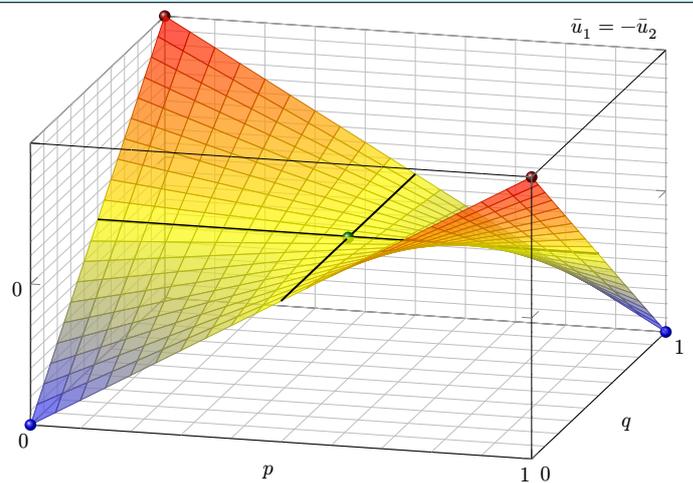
Spieler A:  $[0, 1] \ni p \mapsto s_p = (1-p) \cdot \text{Kopf} + p \cdot \text{Zahl}$

Spieler B:  $[0, 1] \ni q \mapsto s_q = (1-q) \cdot \text{Kopf} + q \cdot \text{Zahl}$

Die Nutzenfunktionen  $u_1 = -u_2$  sind bilinear, ihr Graph ist eine Quadrik.

Beispiel: Matching Pennies

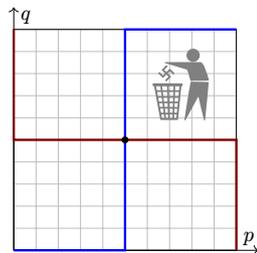
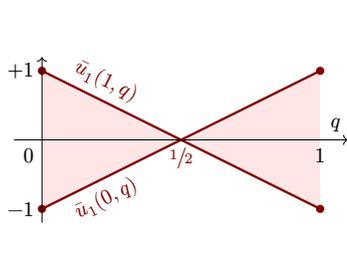
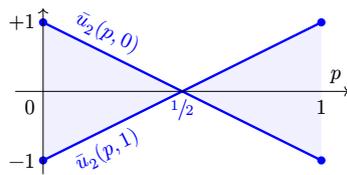
E142



Beispiel: Matching Pennies

E143

	B	0	1
A			
0	-1	+1	-1
1	+1	-1	+1



Beispiel: Matching Pennies

E144

Erläuterung

Wir betrachten hier ein Nullsummenspiel, denn es gilt  $u_1 + u_2 = 0$ .

Für jede von Bobs Strategien  $q \in [0, 1]$  liest Alice ihre beste Antwort ab:  $p = 1$  für  $q < 1/2$  und  $p = 0$  für  $q > 1/2$  sowie  $p \in [0, 1]$  für  $q = 1/2$ .

Für jede von Alice' Strategien  $p \in [0, 1]$  liest Bob seine beste Antwort ab:  $q = 0$  für  $p < 1/2$  und  $q = 1$  für  $p > 1/2$  sowie  $q \in [0, 1]$  für  $p = 1/2$ .

😊 Bob trachtet nach Gleichheit, Alice hingegen wünscht Ungleichheit. Das überträgt sich von reinen auf gemischte Strategien, wie gezeigt.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen“ ein und lesen daran das einzige, hier gemischte Nash-Gleichgewicht ab.

Es ist unglücklich, dass in diesem Beispiel ein Hakenkreuz entsteht, aber diese geometrische Figur tritt hier nun einmal unvermeidlich auf.

Nach der Vorlesung wird es ordnungsgemäß entsorgt. (siehe §86 StGB Verbreiten von Propagandamitteln verfassungswidriger Organisationen)

Das ist nur ein Miniatur(bei)spiel, aber durchaus häufig zu beobachten, etwa im Sport, wenn Angreifer und Verteidiger ihre Strategien wählen: Elfmeter im Fußball, koordinierte Spielzüge in allen Teamsportarten, etc.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

E145



if both basketball teams just worked together they could score so many more points

13:59 · 20. Apr. 2014

Ist das absurd? Oh, keineswegs! Auch Absprachen sind möglich, siehe Schande von Gijón A106.

In den letzten 20 Sekunden liegt das ballführende Team 2 Punkte hinten. Der Coach nimmt eine Auszeit und legt die Strategie für sein Team fest. Sie spielen ihre Zeit zu Ende und lancieren noch genau einen Versuch. Riskant: 3 Punkte werfen und damit sofort gewinnen. Sicher: 2 Punkte werfen und die Verlängerung erzwingen, mit 50-50-Gewinnchance.

Erfolgstatistik (gerundet):

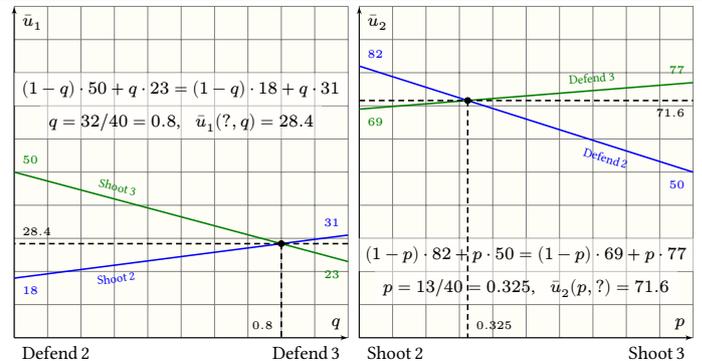
bedrängt 36%, offen 62%

offen 50%, bedrängt 23%

	B	Defend 2	Defend 3
A			
Shoot 2	18	82	69
Shoot 3	50	50	77

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

E146



Verteidigt Team B mehr als 80% auf 3er, sollte Team A auf 2er spielen. Verteidigt B hingegen weniger als 80% auf 3er, sollte A auf 3er spielen. Spielt Team A mehr als 32.5% auf 3er, sollte Team B auf 3er verteidigen. Spielt A hingegen weniger als 32.5% auf 3er, sollte B auf 2er verteidigen.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

E147

Überblick

Diese Endspielanalyse ist stark vereinfacht, aber doch realistisch genug. Sie trifft den Kern des Problems und wird tatsächlich ernsthaft diskutiert, siehe [mindyourdecisions.com/blog/2012/06/19](http://mindyourdecisions.com/blog/2012/06/19), sowie [youtu.be/yolG5WA7n6g](https://youtu.be/yolG5WA7n6g).

Naiv scheint es für das angreifende Team A besser, auf 3er zu spielen, doch die Erfolgchancen hängen stark von Team Bs Verteidigung ab.

Spielte Team A allzu oft und damit vorhersehbar auf den 3er, so würde eine entsprechende 3er-Abwehr die Erfolgchancen stark reduzieren.

Spielte Team A hingegen allzu oft und damit vorhersehbar auf den 2er, so würde eine entsprechende 2er-Abwehr die Chancen reduzieren.

Die Gleichgewichtsstrategie  $p = 32.5\%$  für Team A lässt idealerweise das Team B im Ungewissen, ob sie 2er oder 3er verteidigen sollen.

Für das verteidigende Team B scheint vorrangig, den 3er zu verhindern, doch damit geben sie Team A mehr Raum unterm Korb für den 2er.

Verteidigt Team B zu oft 2er, so geben sie A zu viel Raum für 3er. Die Gleichgewichtsstrategie  $q = 80\%$  für Team B lässt idealerweise das Team A im Ungewissen, ob sie auf 2er oder 3er spielen sollen.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

E148

Überblick

Die Beschreibung des Endspiels in Normalform scheint hier angebracht: Beide Coaches (bzw. Teams) entscheiden in der letzten Auszeit simultan und unabhängig über die zu spielende Strategie. Jedes Team wird sich an diese Absprache halten, kein Spieler sollte egoistisch improvisieren.

Spiele in Normalform, speziell der einfachste Fall einer  $2 \times 2$ -Bimatrix, sind zugegeben extrem vereinfachte Lehrbeispiele. Doch sie illustrieren bereits eine erstaunliche Vielfalt an Phänomenen und erklären typische Muster der Spieltheorie, manchmal auch in ihren realen Anwendungen.

Das Basketball-Endspiel kommt oft genug vor, um interessant zu sein. Die vereinfachte Situation reduziert die relevanten Strategien auf zwei. Hierzu liegen im Basketball umfangreiche Statistiken vor, sodass wir realistische Daten einsetzen können und nicht mutmaßen müssen.

Unser Ergebnis ist intuitiv plausibel. Die Rechnung gibt zudem eine recht präzise Handlungsanweisung an den Trainerstab und dann an das Team. In den letzten Jahren hat die mathematische Analyse im Basketball stark an Akzeptanz gewonnen. Sie kann den Unterschied machen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

E149

- ☹ Schere-Stein-Papier hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien.
- ☺ Hingegen gibt es ein Gleichgewicht  $(s_1, s_2)$  in gemischten Strategien:

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Gleiches gilt für Matching Pennies und das Basketball Endgame!  
In der Fortsetzung auf gemischte Strategien haben die Spieler mehr Möglichkeiten. Wir würden hoffen, so auch Gleichgewichte zu finden.  
Der Satz von Nash besagt genau das und garantiert Gleichgewichte:

**Satz E1E:** Existenzsatz für Gleichgewichte, John Nash 1950

Sei  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und  $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Dann besitzt das Spiel  $\bar{u}$  mindestens ein Nash-Gleichgewicht:  $NE(\bar{u}) \neq \emptyset$ .

- ☺ Nashs Einsicht und Satz waren ein Wendepunkt in der Spieltheorie.
- ☺ Für jedes endliche Spiel ist vernünftiges Verhalten immer möglich.
- ☺ Allgemeine Strukturaussage, darauf können wir weiter aufbauen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

E150  
Erläuterung

Der Existenzsatz von Nash erfüllt zwei wesentliche Aufgaben:

(1) Der Satz garantiert, dass jedes endliche Spiel vernünftiges Verhalten ermöglicht. In jedem Einzelfall kann man dies (leicht) überprüfen und (mühsam) lösen. Die allgemeine Aussage ist bequem und beruhigend: Wir können durch den Satz Rechenzeit sparen, wo sie nicht nötig ist.

Die Existenz einer Lösung ist oft der entscheidende erste Schritt. Wir können sicher sein, dass unsere Suche erfolgreich sein wird. Unsere Mühe wird belohnt. Unsere Hoffnung wird erfüllt.

(2) Darauf aufbauend können wir allgemeine Aussagen ableiten. Ein sehr prominentes Beispiel ist von Neumanns *Minimax-Satz* E2D. Dieser heißt auch der *Hauptsatz* für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele, und von Neumann bewies ihn zuvor (mühsam) auf anderen Wegen.

Manchmal genügt uns zu wissen, dass Gleichgewichte existieren. Dies gelingt *ohne* jedesmal mühsam explizit rechnen zu müssen. Wir müssen nicht befürchten, über die leere Menge zu sprechen: Wir haben eine gemeinsame *Strukturaussage* für all diese Spiele!

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

E151  
Erläuterung

Nashs Existenzsatz besticht durch Eleganz und Allgemeinheit. Dieses Ergebnis ist ein grundlegender erster Schritt der Theorie, er ist gewissermaßen der Ausgangspunkt der modernen Spieltheorie. Für diese und weitere Arbeiten bekam Nash 1994 den Nobelpreis, genauer: Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften.

Umgekehrt gibt es natürlich viele Situationen, in denen wir schließlich explizit rechnen wollen oder müssen. Nashs Satz ist zunächst eine reine Existenzaussage und für die konkrete Rechnung leider wenig hilfreich. Immerhin garantiert der Satz, dass sich unsere Mühe lohnen wird!

Wir wollen rechnen! Für  $2 \times n$ -Spiele gelingt dies wie in E4 erklärt. Speziell für Nullsummenspiele werden wir weitere Techniken entwickeln: Von Neumanns Hauptsatz E2D charakterisiert Nash-Gleichgewichte als Min-Maximierer und Max-Minimierer. Wir haben nun Werkzeuge.

Die explizite Berechnung ist ebenfalls ein extrem spannendes Thema: Es mündet in die Lineare Optimierung, alias Lineare Programmierung, und wird uns viel Freude bereiten. Das alles ist schöne Mathematik!

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

E152  
Erläuterung

Mathematiker John von Neumann und Wirtschaftswissenschaftler Oskar Morgenstern veröffentlichten 1944 ihr bahnbrechendes Buch *Theory of Games and Economic Behavior*. Damit legten sie ein solides Fundament der Spieltheorie, die in den Folgejahren erblühte. Speziell die Analyse von Nullsummenspielen baut auf von Neumanns Minimax-Satz E2D.

*I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved. As far as I can see, there could be no theory of games without that theorem.* (John von Neumann, 1953)

Das ist ein wichtiger Spezialfall, aber bei weitem noch nicht ausreichend, denn die meisten realen Spiele haben nun mal nicht konstante Summe. Für den allgemeinen Fall fehlten daher zunächst Begriffe und Werkzeuge. Das änderte sich mit Nashs allgemeiner Theorie der Gleichgewichte.

Definition und Existenz von Nash-Gleichgewichten stammen aus Nashs Dissertation *Non-cooperative Games* von 1950. Dieses Konzept geht weit über Nullsummenspiele hinaus und ist bis heute grundlegend für die erfolgreiche, geradezu universelle Weiterentwicklung der Spieltheorie.

Nashs Dissertation: *Non-cooperative Games* (1950)

E153  
Erläuterung

*Nash went to see von Neumann a few days after he passed his generals. He wanted, he had told the secretary cockily, to discuss an idea that might be of interest to Professor von Neumann. It was a rather audacious thing for a graduate student to do. [...] But it was typical of Nash, who had gone to see Einstein the year before with the germ of an idea. [...]*

*[Neumann] listened carefully, with his head cocked slightly to one side and his fingers tapping. Nash started to describe the proof he had in mind for an equilibrium in games of more than two players. But before he had gotten out more than a few disjointed sentences, von Neumann interrupted, jumped ahead to the yet unstated conclusion of Nash's argument, and said abruptly, "That's trivial, you know. That's just a fixed point theorem."*

*It is not altogether surprising that the two geniuses should clash. They came at game theory from two opposing views of the way people interact. [...] Von Neumann's rejection of Nash's bid for attention and approval must have hurt, however, and one guesses that it was even more painful than Einstein's earlier but kinder dismissal. [Nash] never approached von Neumann again.*  
Sylvia Nasar: *A Beautiful Mind* (1998) p. 93

Nashs Dissertation: *Non-cooperative Games* (1950)

E154  
Erläuterung

*A few days after the disastrous meeting with von Neumann, Nash accosted David Gale. "I think I've found a way to generalize von Neumann's min-max theorem," he blurted out. [...] "The whole theory is built on it. And it works with any number of people and doesn't have to be a zero-sum game! [...] I'd call this an equilibrium point." [...] Unlike von Neumann, Gale saw Nash's point. "Hmm," he said, "that's quite a thesis." [...] Gale added later, "I certainly knew right away that it was a thesis. I didn't know it was a Nobel."*

Sylvia Nasar: *A Beautiful Mind* (1998) p. 95

Nashs Dissertation *Non-cooperative Games* von 1950 ist ungewöhnlich kurz: 26 Seiten und 2 Referenzen. Sie passt auf die folgenden zwei Folien, zwar verkleinert, aber vollständig. ([gametheory.online/project\\_show/23](http://gametheory.online/project_show/23))

Die Arbeit hätte sogar noch kürzer werden können, doch Nash behandelt neben seinem Existenzsatz zudem Symmetrien und einfache Beispiele.

Trotz ihrer Kürze war Nashs Arbeit extrem einflussreich, manche halten sie gar für die Arbeit mit dem größten Einfluss pro Seite. Zum Vergleich:  
▶ Tibees: *8 science theses that shook the world*. [youtu.be/SMirrL\\_PNU](http://youtu.be/SMirrL_PNU)

Nashs Dissertation: *Non-cooperative Games* (1950)

E155  
Erläuterung


Nashs Dissertation: *Non-cooperative Games* (1950)

E156  
Erläuterung


**Proposition E1F:** Homöomorphie der konvexen Körper

Jede kompakte konvexe Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$  mit nicht-leerem Inneren ist homöomorph zum Einheitsball  $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ . Für  $X \subset \mathbb{R}^n$  konvex kompakt gilt  $X = \emptyset$  oder  $X \cong \mathbb{D}^m$  mit  $0 \leq m \leq n$ .

Homöomorphie  $(g, h) : X \cong \mathbb{D}^n$  ist eine „stetige Umformung“ durch  $g : X \rightarrow \mathbb{D}^n$  und  $h : \mathbb{D}^n \rightarrow X$  stetig mit  $h \circ g = \text{id}_X$  und  $g \circ h = \text{id}_{\mathbb{D}^n}$ .

**Satz E1G:** Fixpunktsatz von Brouwer, 1909

Jede stetige Abbildung  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  hat mindestens einen Fixpunkt, das heißt, es existiert ein Punkt  $a \in \mathbb{D}^n$  mit der Eigenschaft  $f(a) = a$ .

Für  $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$  genügt der Zwischenwertsatz. (Übung! Erstes Semester)  
Allgemein  $n \in \mathbb{N}$ : Sperrers Lemma (Kompaktheit, ab drittem Semester)  
Abbildungsgrad (Algebraische Topologie, ab fünftem Semester)

Jedes konvexe Kompaktum  $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$  hat die Fixpunkteigenschaft!  
Nicht konvex:  $X = \mathbb{S}^n, x \mapsto -x$ . Nicht kompakt:  $X = \mathbb{R}^n, x \mapsto x + v$ .

☺ Können Sie eine Tasse Kaffee so umrühren, dass sie bleibt, wo sie ist, aber kein Punkt, wo er war? Erstaunlich, aber wahr: Das ist unmöglich!  
☺ Fixpunktsätze wie dieser sind wichtige Werkzeuge der Mathematik. Sie fallen, vereinfacht gesagt, in zwei Klassen: Die einen erheben strenge Forderungen an die Abbildung  $f : X \rightarrow X$ , die anderen an den Raum  $X$ . Sie kennen Banachs Fixpunktsatz ?? für kontraktive (!) Abbildungen. Er garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunkts, zudem bietet er eine effiziente Approximation mit expliziter Fehlerschranke.

Der Fixpunktsatz von Brouwer hingegen ist leider nicht konstruktiv: Er garantiert die Existenz eines Fixpunkts, verrät uns aber nicht wo. (Brouwer wurde ein vehementer Verfechter konstruktiver Prinzipien; sein berühmtestes Resultat ist tragischerweise nicht konstruktiv.)

Bitte beachten Sie, dass es durchaus mehrere Fixpunkte geben kann, extrem für  $\text{id} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ . Der Ball  $\mathbb{D}^n$  als Start und Ziel ist wesentlich: Nicht jeder Raum hat die Fixpunkteigenschaft. Hingegen ist der Satz bei der Funktion  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  sehr großzügig: sie muss nur stetig sein.

**Definition E1H:** konvex und sternförmig

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen Punkten  $a, b \in V$  ist die Teilmenge  $[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq V$ . Eine Teilmenge  $X \subseteq V$  heißt **konvex**, falls gilt:  $\forall a, b \in X : [a, b] \subseteq X$ , und **sternförmig** zum Zentrum  $a \in X$ , falls gilt:  $\forall b \in X : [a, b] \subseteq X$ .

**Satz E1I:** Zentralprojektion

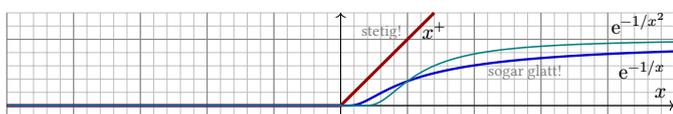
- (0) Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und sternförmig zum Zentrum  $a \in X^\circ$ . Für jeden Randpunkt  $b \in \partial X$  gelte Sichtbarkeit  $[a, b] \cap \partial X = \{b\}$ . Dann existiert ein Homöomorphismus  $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$  mit  $h(X) = \mathbb{D}^n$ .
- (1) Verschärfung zu bilipschitz: Ist  $X \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und sternförmig bezüglich jedes Punktes  $a \in B(a_0, \varepsilon)$  für ein  $a_0 \in X$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , so existiert  $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$  bilipschitz mit  $h(X) = \mathbb{D}^n$ .
- (2) Jeder konvexe Körper  $X \subset \mathbb{R}^n$ , das heißt konvex, kompakt mit nicht-leerem Inneren  $X^\circ \neq \emptyset$ , ist bilipschitz-homöomorph zu  $\mathbb{D}^n$ .

**Beweis:** (0) Nach Translation können wir  $a = 0$  annehmen. Wir haben  $B(0, \varepsilon) \subset X \subseteq \bar{B}(0, R)$  für geeignete Konstanten  $0 < \varepsilon \leq R$  und somit  $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow [\varepsilon, R] : s \mapsto \sup\{r \in \mathbb{R}_{>0} \mid rs \in X\}$ ,  $\delta X \cap \mathbb{R}_{>0} \cdot s = \{\rho(s) \cdot s\}$ . Die Zentralprojektion  $f : \partial X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$  ist wohldefiniert dank  $0 \notin \partial X$ , zudem stetig, bijektiv dank  $f^{-1}(s) = \rho(s) \cdot s$ , dank Kompaktheit also ein Homöomorphismus. Insbesondere ist  $\rho : s \mapsto |f^{-1}(s)|$  stetig. Wir erhalten daraus zueinander inverse Bijektionen

$$h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x/\rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x \cdot \rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beide sind stetig in  $x \neq 0$ , als Komposition stetiger Abbildungen. Stetigkeit im Punkt 0 gilt dank  $|h(x)| \leq |x|/\varepsilon$  und  $|k(x)| \leq |x| \cdot R$ . Demnach gilt  $(h, k) : (\mathbb{R}^n, X) \cong (\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^n)$ . □



Sei  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $h(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $h(x) > 0$  für  $x > 0$ . Wie gelingt dies möglichst oft differenzierbar, vielleicht sogar glatt? Die Funktion  $h(x) = x^\varepsilon$  mit Exponent  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  ist stetig für  $\varepsilon > 0$ , stetig diff'bar für  $\varepsilon > 1$ , gar  $n$ -mal für  $\varepsilon > n$ , aber nicht beliebig oft diff'bar. Zu jedem  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  haben wir die bemerkenswerte **glatte Funktion**

$$h_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

**Aufgabe:** Diese ist überall beliebig oft differenzierbar, also  $\mathcal{C}^\infty$ -glatt. Beweisen Sie diese Aussage per Induktion! Wenn Sie die Ableitungen ausrechnen, entstehen kompliziertere Funktionen. Es lohnt sich daher, eine allgemeinere Aussage zu formulieren und zu beweisen. Welche?

Diese bemerkenswerte Funktion  $h_\alpha$  hat erstaunliche Eigenschaften:  
☺ Sie ist überall auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  analytisch, also lokal um jeden Punkt durch eine Potenzreihe darstellbar. Auf  $\mathbb{R}_{<0}$  ist dies trivial, da konstant Null, und auf  $\mathbb{R}_{>0}$  gilt es dank Komposition analytischer Funktionen. An der Klebestelle 0 ist sie immerhin noch  $\mathcal{C}^\infty$ -glatt, aber nicht mehr analytisch. Diese berühmten Funktionen dienen oft als mahnendes Gegenbeispiel:  
⚠ Nicht jede  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich in eine Potenzreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$  entwickeln: Die zu  $f$  gehörige Taylor-Reihe kann divergieren! Selbst wenn sie konvergiert, so nicht unbedingt gegen  $f$ ! Genau dieses Problem erleben wir für  $h_\alpha$  im Entwicklungspunkt 0.  
☺ Die Analysis nutzt die Funktion  $h_\alpha$  auch konstruktiv als Werkzeug, etwa zur Konstruktion exotischer Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (Andrei Tychonov 1935). Aus  $h_\alpha$  konstruieren wir  $\mathcal{C}^\infty$ -glatte Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto h_\alpha(x-a) \cdot h_\alpha(b-x)$  mit kompaktem Träger  $[a, b]$ . Diese Testfunktionen dienen als Grundlage für die Theorie der Distributionen. Hierfür erhielt Laurent Schwartz 1950 die Fields-Medaille.

☺ Die Funktion  $h_\alpha$  ist schön und wichtig und verdient eine Würdigung. Wir gönnen uns diesen Exkurs für die mathematische Allgemeinbildung.  
**Aufgabe:** Sei  $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := c_1 x^{e_1} + \dots + c_n x^{e_n}$  ein „Signom“ mit Koeffizienten  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  und Exponenten  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}$  sowie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} g(x) e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

(1) Ist  $f$  stetig? in  $x \neq 0$ ? in  $x = 0$ ? differenzierbar? in  $x \neq 0$ ? in  $x = 0$ ? Wie rechnet man die Ableitung aus? in  $x \neq 0$ ? in  $x = 0$ ? Zeigen Sie:

$$f'(x) = \begin{cases} [g'(x) + g(x) \cdot \alpha/x^{\alpha+1}] e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

- (2) Ist  $f$  stetig diff'bar? zweimal? beliebig oft? also  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ?
- (3) Berechnen Sie die Taylor-Reihe der Funktion  $f$  um  $x = 0$ . Konvergiert die Taylor-Reihe? Konvergiert sie gegen  $f$ ? Ist die Funktion  $f$  analytisch? in  $x \neq 0$ ? in  $x = 0$ ?

**Lösung:** (1) In jedem Punkt  $x \neq 0$  ist  $f$  stetig / glatt / analytisch, denn dort ist  $f$  eine Komposition stetiger / glatter / analytischer Funktionen. Die angegebene Ableitung  $f'(x)$  folgt aus Produkt- und Kettenregel. Es bleibt nur noch das Verhalten in  $x = 0$  zu klären. Für  $x \searrow 0$  gilt:

$$f(x) = g(x) \left/ \left( 1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2!x^{2\alpha}} + \frac{1}{3!x^{3\alpha}} + \frac{1}{4!x^{4\alpha}} + \dots \right) \right. \rightarrow 0$$

Für  $x \nearrow 0$  gilt  $f(x) = 0 \rightarrow 0$ . Somit ist  $f$  stetig in 0. Für  $x \searrow 0$  gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)}{x} \left/ \left( 1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2!x^{2\alpha}} + \dots \right) \right. \rightarrow 0$$

Rechtsseitig gilt  $f'(0+) = 0$ . Linksseitig gilt trivialerweise  $f'(0-) = 0$ . Also ist  $f$  tatsächlich differenzierbar in 0, und die Ableitung ist  $f'(0) = 0$ .  
(2) Die Ableitung  $f'$  ist von derselben Form, dank (1) also differenzierbar. Per Induktion ist  $f$  somit beliebig oft differenzierbar, kurz  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .  
(3) Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $f^{(k)}(0) = 0$ . Die Taylor-Reihe in 0 ist also  $T(x) = 0$ . Sie konvergiert, aber nicht gegen  $f \neq 0$ ! Somit ist  $f$  in 0 nicht analytisch.

Zum Strategievektor  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$  sei  $\bar{u}_i^s : \bar{S}_i \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \bar{u}_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n)$  und weiter  $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}$ ,  $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k$ ,  $\delta_i^k := h[\bar{u}_i^s(s_i^k) - \bar{u}_i^s(s_i)] \geq 0$ ,  $\tilde{s}_i := \sum_k \tilde{p}_i^k s_i^k$ ,  $\tilde{p}_i^k := (p_i^k + \delta_i^k) / (1 + \sum_j \delta_i^j) \geq 0$ ,  $\sum_k \tilde{p}_i^k = 1$ .

**Lemma E1J:** Gleichgewichte als Fixpunkte

Zum Spiel  $u$  bzw.  $\bar{u}$  konstruieren wir so die stetige **Nash-Funktion**  $f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n : s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto \tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n)$ . Die Fixpunkte von  $f$  sind genau die Nash-Gleichgewichte von  $\bar{u}$ :

$\text{fix}(f) = \text{NE}(\bar{u})$

**Beweis:** „ $\supseteq$ “: Klar nach Konstruktion. „ $\subseteq$ “: Sei  $s = f(s)$  ein Fixpunkt. Für  $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k$  gilt  $\bar{u}_i^s(s_i) = \sum_k p_i^k \bar{u}_i^s(s_i^k)$  nach Definition von  $\bar{u}$ . Es gibt einen Index  $k$  mit  $p_i^k > 0$  und  $\bar{u}_i^s(s_i^k) \leq \bar{u}_i^s(s_i)$ , somit  $\delta_i^k = 0$ . Aus  $\tilde{p}_i^k = p_i^k$  folgt  $\delta_i^j = 0$  für alle  $j = 0, 1, \dots, \ell$ , also  $\bar{u}_i^s(s_i^j) \leq \bar{u}_i^s(s_i)$ . Demnach gilt  $\bar{u}_i^s(s_i) = \max \bar{u}_i^s$ ; jede Strategie  $s_i$  ist beste Antwort. QED

Dieses Lemma beweist Nashs Existenzsatz E1E für Gleichgewichte!

☺ Sei  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein endliches reelles Spiel. Zur affinen Fortsetzung  $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  suchen wir Nash-Gleichgewichte. Die Nash-Funktion  $f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$  ist stetig und ihre Fixpunkte sind genau die ersehnten Nash-Gleichgewichte. Dank Brouwers Fixpunktsatz E1G existieren solche Fixpunkte.

☺ Warum können wir den Fixpunktsatz von Brouwer auf  $f$  anwenden? Wir setzen hier voraus, dass jede reine Strategiemenge  $S_i$  endlich ist, geschrieben  $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}$ . Die Menge  $\bar{S}_i = [s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell] \cong \mathbb{D}^\ell$  der gemischten Strategien ist ein Simplex, also konvex und kompakt, somit homöomorph zu einem Ball. Das Produkt  $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$  ebenso.

☺ Dieser geniale Beweis ist in wenigen Zeilen hingeschrieben und so gesehen leicht, ich finde ihn dennoch extrem raffiniert. Wenn Sie länger darüber nachdenken, werden Sie ihn schließlich recht natürlich finden: Die Nash-Funktion  $f$  beschreibt eine Optimierung durch *Trial and Error*, die wir in unseren Experimenten beobachten bzw. intuitiv anwenden.

☺ Was bedeutet diese geschickt konstruierte Nash-Funktion? Glücklicherweise können wir die Funktion verstehen und so merken: Die Größe  $\delta_i^k \geq 0$  gibt an, um wie viel sich Spieler  $i$  verbessern kann, wenn er seine gemischte Strategie  $s_i$  durch die reine Strategie  $s_i^k$  ersetzt. Dies entspricht einer der Ecken des Simplex  $\bar{S}_i$ ; im Falle  $\delta_i^k > 0$  ist die Ecke  $s_i^k$  attraktiv. Die verbesserte Strategie  $s \mapsto \tilde{s}$  wird neu gemischt: attraktive Ecken werden stärker gewichtet, unattraktive schwächer.

☺ Falls gewünscht können wir die Nash-Funktionen  $f$  sogar glätten. Statt  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^+$  ist  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x^+)^2$  stetig differenzierbar. Wir können sogar eine beliebig oft differenzierbare Funktion wählen, etwa  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \exp(-1/x^\alpha)$  für  $x > 0$  und  $x \mapsto 0$  für  $x \leq 0$ . Damit wird unsere Nash-Funktion  $f$  sogar  $C^\infty$ -glatt!

☺ Dieser schöne Beweis ist **instruktiv**, aber leider nicht **konstruktiv**. Er garantiert die Existenz von Lösungen, liefert uns aber keine Methode, diese zu finden oder zu approximieren (wie etwa Banachs Fixpunktsatz). Effiziente Algorithmen sind daher ein eigenes Thema für sich.

**Aufgabe:** Illustrieren Sie die Nash-Funktion  $f$  im kleinsten Fall, für zwei Spieler mit je zwei reinen Strategien, also  $S_1 = \{s_1^0, s_1^1\}$  und  $S_2 = \{s_2^0, s_2^1\}$ . Die gemischten Strategien  $s_1 = (1-p)s_1^0 + ps_1^1$  und  $s_2 = (1-q)s_2^0 + qs_2^1$  parametrisieren wir hierbei durch die beiden Parameter  $(p, q) \in [0, 1]^2$ .

**Lösung:** Die Auszahlungsfunktion  $\bar{u} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist gegeben durch

$\bar{u}_1(p, q) = a_{00}(1-p)(1-q) + a_{10}p(1-q) + a_{01}(1-p)q + a_{11}pq$   
 $\bar{u}_2(p, q) = b_{00}(1-p)(1-q) + b_{10}p(1-q) + b_{01}(1-p)q + b_{11}pq$

Die Nash-Funktion  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  aus dem Beweis ist dann:

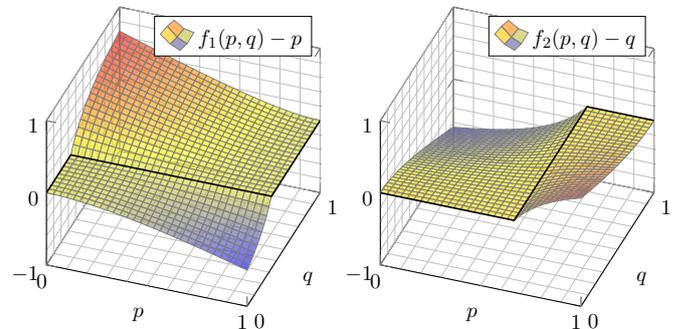
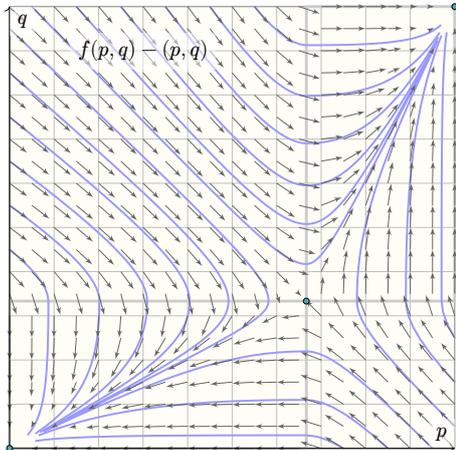
$\tilde{p} = f_1(p, q) = \frac{p + [\bar{u}_1(1, q) - \bar{u}_1(p, q)]^+}{1 + [\bar{u}_1(0, q) - \bar{u}_1(p, q)]^+ + [\bar{u}_1(1, q) - \bar{u}_1(p, q)]^+} \in [0, 1]$   
 $\tilde{q} = f_2(p, q) = \frac{q + [\bar{u}_2(p, 1) - \bar{u}_2(p, q)]^+}{1 + [\bar{u}_2(p, 0) - \bar{u}_2(p, q)]^+ + [\bar{u}_2(p, 1) - \bar{u}_2(p, q)]^+} \in [0, 1]$

Als Komposition stetiger Funktionen ist  $f$  offensichtlich stetig. Die Fixpunkte von  $f$  sind genau die Nash-Gleichgewichte von  $\bar{u}$ .

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky*  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

	B	Bach Strawinsky	
A		2	0
Bach	1	0	0
Strawinsky	0	2	1

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash-Funktion  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  als Vektorfeld  $f(p, q) - (p, q)$ , zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt. Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel  $\bar{u}$  sind dies die drei Nash-Gleichgewichte. Zur Anregung Ihrer Phantasie zeige ich typische Flusslinien.

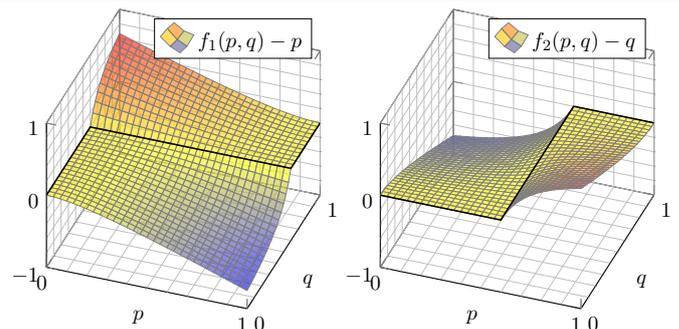
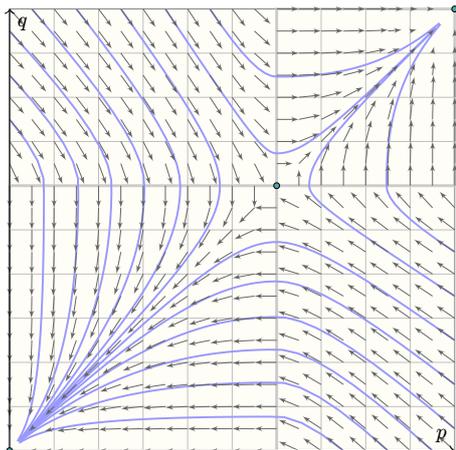


Wir zeigen das Vektorfeld  $(u, v) = f(p, q) - (p, q)$  und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von  $u$  und  $v$  sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle  $u(p, q) = 0$  bedeutet:  $p$  ist eine beste Antwort auf  $q$ . Jede Nullstelle  $v(p, q) = 0$  bedeutet:  $q$  ist eine beste Antwort auf  $p$ . Die Gleichgewichte  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$  sind stabil, aber  $(2/3, 1/3)$  instabil.

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen*  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

	B	bleiben	gehen
A		-2	-5
bleiben	-2	-2	-2
gehen	-5	-2	0

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash-Funktion  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  als Vektorfeld  $f(p, q) - (p, q)$ , zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt. Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel  $\bar{u}$  sind dies die drei Nash-Gleichgewichte.



Wir zeigen das Vektorfeld  $(u, v) = f(p, q) - (p, q)$  und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von  $u$  und  $v$  sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle  $u(p, q) = 0$  bedeutet:  $p$  ist eine beste Antwort auf  $q$ . Jede Nullstelle  $v(p, q) = 0$  bedeutet:  $q$  ist eine beste Antwort auf  $p$ . Die Gleichgewichte  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$  sind stabil, aber  $(0.6, 0.6)$  instabil.

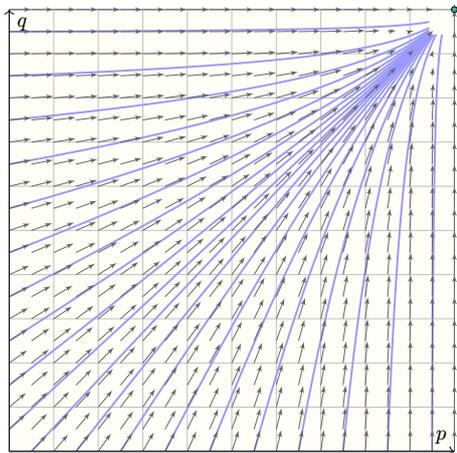
## Nash-Funktion zum Gefangenendilemma

E173

Zur Erinnerung die Daten des **Gefangenendilemmas**  
 $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

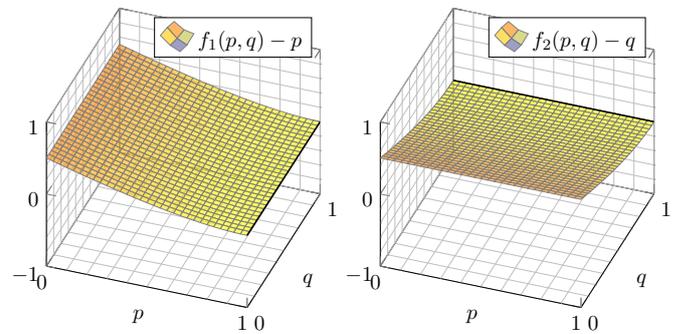
	B	schweigen	gestehen
A			
schweigen	-1	-1	-5
gestehen	0	-5	-4

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash-Funktion  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  als Vektorfeld  $f(p, q) - (p, q)$ , zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt. Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel  $\bar{u}$  ist dies das einzige Nash-Gleichgewicht.



## Nash-Funktion zum Gefangenendilemma

E174



Wir zeigen das Vektorfeld  $(u, v) = f(p, q) - (p, q)$  und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von  $u$  und  $v$  sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle  $u(p, q) = 0$  bedeutet:  $p$  ist eine beste Antwort auf  $q$ . Jede Nullstelle  $v(p, q) = 0$  bedeutet:  $q$  ist eine beste Antwort auf  $p$ . Das Gleichgewicht  $(0, 0)$  ist hier stabil.

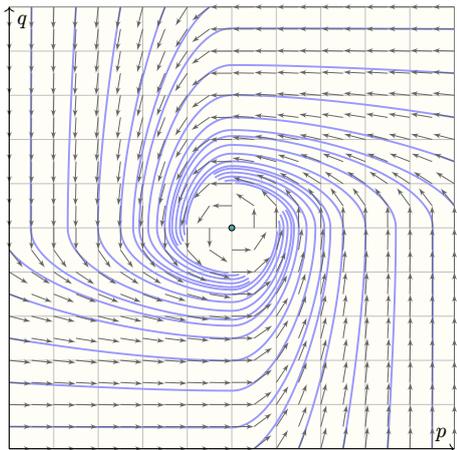
## Nash-Funktion zu Matching Pennies

E175

Zur Erinnerung die Daten des Spiels **Matching Pennies**  
 $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

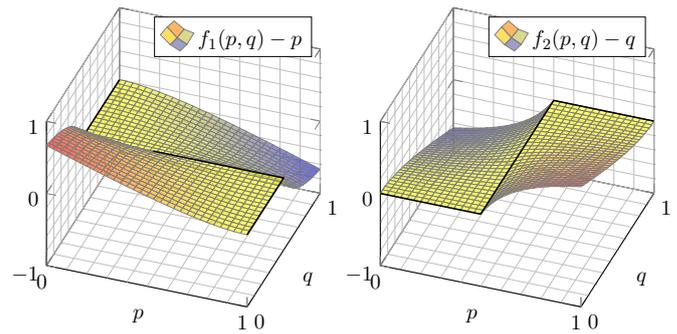
	B	Kopf	Zahl
A			
Kopf	-1	+1	+1
Zahl	+1	-1	+1

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash-Funktion  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  als Vektorfeld  $f(p, q) - (p, q)$ , zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt. Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel  $\bar{u}$  ist dies das einzige Nash-Gleichgewicht.



## Nash-Funktion zu Matching Pennies

E176



Wir zeigen das Vektorfeld  $(u, v) = f(p, q) - (p, q)$  und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von  $u$  und  $v$  sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle  $u(p, q) = 0$  bedeutet:  $p$  ist eine beste Antwort auf  $q$ . Jede Nullstelle  $v(p, q) = 0$  bedeutet:  $q$  ist eine beste Antwort auf  $p$ . Das Gleichgewicht  $(1/2, 1/2)$  ist ein stabiler Strudel Punkt.

## Nash-Funktion und spielendes Lernen

E177  
Erläuterung

Was lehren uns die Nash-Funktion und diese schönen Illustrationen?  
 Eine interessante Interpretation der Gleichgewichte ist die folgende:  
 Die Spieler **wiederholen** immer wieder dasselbe Spiel  $u$  und **lernen**.

Sie starten in einem Zustand  $x(t_0) = (p, q) \in [0, 1]^2$ , beobachten jeweils das Ergebnis und aktualisieren ihre Strategien in kleinen Schritten: Sie spielen erneut und beobachten und aktualisieren, usw.

☺ Das ist im Wesentlichen das hier naheliegende **Euler-Verfahren** zur Konstruktion eines Polygonzuges  $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots$  in  $[0, 1]^2$ . Die Zeitschritte  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  können wir dabei vorgeben.

☺ Im Grenzübergang zu beliebig kleinen Schritten erhalten wir die **Differentialgleichung**  $\dot{x} = g(x)$  zum oben gezeigten Vektorfeld  $g(x) = f(x) - x$ . Hierzu habe ich die Flusslinien gezeichnet.

☺ Das bietet uns konkrete Anschauung und wunderbare Einsichten: Wir haben nicht nur die Gleichgewichte als Fixpunkte, sondern gewinnen zudem einen ersten qualitativen Eindruck außerhalb der Gleichgewichte!

## Nash-Funktion und spielendes Lernen

E178  
Erläuterung

**Aufgabe:** Wie glatt ist das Vektorfeld  $g$  in der Gleichung  $\dot{x} = g(x)$ ? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

**Lösung:** Die Funktion  $h(x) = x^+$  ist lipschitz-stetig, ebenso  $f$ . Wir können also den Satz von Picard-Lindelöf anwenden!

Übung: Schreiben Sie die Dehnungsschranken sorgfältig aus.

☺ Bei der Definition der Nash-Funktion  $f : \bar{S} \rightarrow \bar{S}$  haben wir mit der Hilfsfunktion  $h$  noch einige Freiheiten, wie oben erwähnt. Insbesondere können wir  $f$  nicht nur als stetig konstruieren, sondern auch stetig differenzierbar, sogar **beliebig glatt**.

☺ Wir nutzen dankend alle Werkzeuge der **autonomen dynamischen Systeme**, also der gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme im  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere nutzen wir die Klassifikation der **lokalen Dynamik** um einen Fixpunkt, hier allerdings eher topologisch, da die Jacobi-Matrix mangels Differenzierbarkeit nicht definiert ist oder Null nach Glättung. Hatte ich es schon erwähnt: Das alles ist wunderschöne Mathematik!

## Nash-Funktion und Populationsdynamik

E179  
Erläuterung

Wir sehen in den obigen Beispielen **stabile und instabile Fixpunkte**. Das hat unmittelbare Auswirkungen in der Populationsdynamik.

Statt zweier Spieler können wir uns auch zwei **Populationen**  $A$  und  $B$  vorstellen. In der ersten ist die Mischung der Strategien  $1 - p$  und  $p$ , in der zweiten  $1 - q$  und  $q$ . Jedes Individuum aus Population  $A$  spielt gegen zahlreiche Gegner aus Population  $B$  und aktualisiert aufgrund dieser Erfahrung seine Strategie, falls ihm das profitabel erscheint.

☺ Jedes Individuum spielt in diesem Modell seine fest gewählte **reine** Strategie, randomisiert also nicht! Doch als Mittelwert über die gesamte Population erhalten wir die lineare Fortsetzung  $\bar{u}$  gemäß der Erwartung.

☺ Individuen beider Populationen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer.

☺ Somit beobachten wir im Populationsmittel die obige Dynamik. Bei der Gestaltung der Funktion  $f$  haben wir noch einige Freiheiten, aber das qualitative Verhalten ist bereits sehr aufschlussreich!

## Nash-Funktion und Populationsdynamik

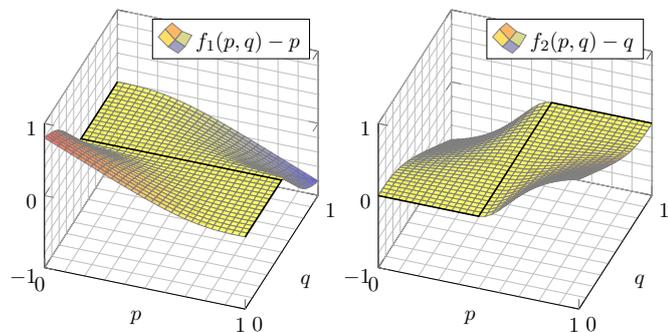
E180  
Erläuterung

Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionärsbiologie** gut anwenden, sogar auf das Verhalten von einfachen Lebewesen, etwa Insekten, die nur geringe Rechenkapazität und keinerlei spieltheoretische Kenntnisse haben (soweit ich weiß).

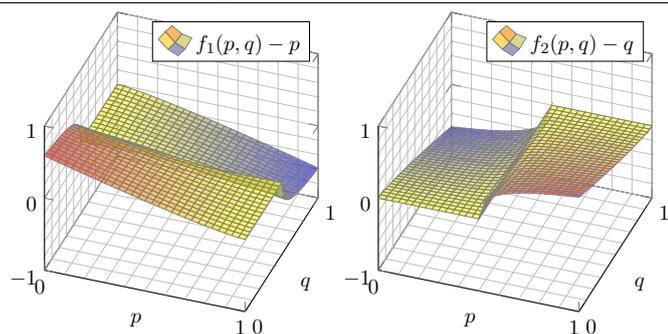
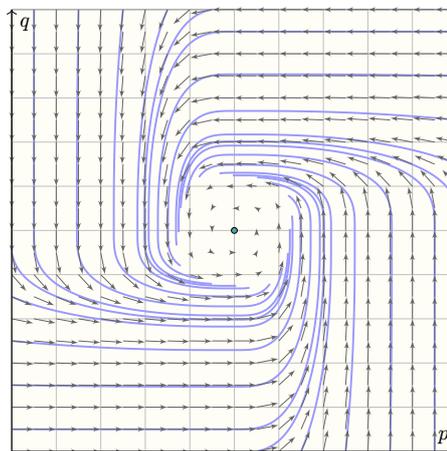
☺ Im Mittel beobachten wir die gerade erklärte **Populationsdynamik**. Sie wird angetrieben durch den Selektionsdruck. Die Dynamik unterliegt im Kleinen zwar erheblichen stochastischen Störungen, doch bei großen Populationen ist die Differentialgleichung eine recht gute Näherung.

☺ Anschaulich strebt sie einem stabilen Fixpunkt zu oder ruht in einem. Instabile Fixpunkte hingegen werden nicht dauerhaft beobachtet: Jede noch so kleine zufällige Abweichung führt uns fort.

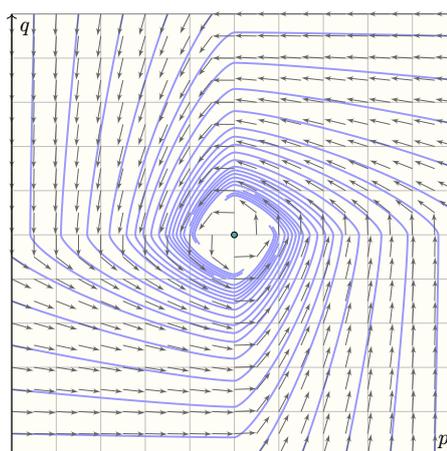
☺ Genauer betrachtet sind die Nash-Gleichgewichte nicht alle gleich, sie haben eine Mikrostruktur (analytisch, geometrisch, topologisch), sie haben lokale Eigenschaften bezüglich der evolutionären Dynamik.



Die Funktion  $x \mapsto x^+$  ist stetig, aber in  $x = 0$  nicht differenzierbar, also  $\mathcal{C}^0$ , aber nicht  $\mathcal{C}^1$ . Ich ersetze sie hier durch die Funktion  $x \mapsto (x^+)^2$ , diese ist  $\mathcal{C}^1$ , aber nicht  $\mathcal{C}^2$ . Die Graphik ist erwartungsgemäß glatter, allerdings sehen wir die Nullstellen nicht mehr so markant als Knicke.



Die Funktion  $x \mapsto x^+$  ist lipschitz-stetig mit Steigung  $\leq 1$ . Ich ersetze sie hier durch die Funktion  $x \mapsto \sqrt{x^+}$ , diese ist immerhin noch hölder-stetig zum Exponenten  $1/2$ . Die Knicke sind erwartungsgemäß noch markanter. Zur Modellierung der Populationsdynamik bestehen viele Möglichkeiten! Die numerischen Parameter passen wir den empirischen Daten an.



**Actions have consequences, more intricately:  
joint actions have individual consequences.**

Was ist ein strategisches Spiel in Normalform? Eine Abbildung

$$u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow (R_1, \leq_1) \times \dots \times (R_n, \leq_n).$$

Was ist ein Nash-Gleichgewicht? Ein Punkt  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  mit

$$s_i \in \text{Arg max}_{a \in S_i} u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Für jede Spieler:in  $i$  ist die von ihr gewählte Strategie  $s_i$  eine beste Antwort auf die Gegenstrategien  $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ . Keine Spieler:in  $i$  hat einen Anreiz, ihre Strategie  $s_i$  zu ändern.

Interpretation und Anwendung: Wie und warum kommen Spieler dazu, tatsächlich ein solches Nash-Gleichgewicht zu spielen? Denkbar sind:

- Rationale Analyse des Spiels (*rational reasoning*)
- Kommunikation vor dem Spiel (*pre-play communication*)
- Evolution durch Versuch und Irrtum (*trial-and-error adjustment*)

Hier ist  $S_i$  die Menge der **Strategien**, die Spieler  $i$  wählen kann, und  $R_i$  ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch  $\leq_i$ . Wir nennen  $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R_i$  die **Nutzenfunktion** für Spieler  $i$ . Meist sind  $R_i$  die reellen Zahlen, wir nennen  $u$  dann ein **reelles Spiel**. So können wir alle Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, präzise. Jeder Spieler  $i$  versucht nun seinen Gewinn  $u_i(s) \in R_i$  zu maximieren. Allerdings kontrolliert Spieler  $i$  nur seine eigene Strategie  $s_i \in S_i$ , aber nicht die Strategien  $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  der anderen Spieler!

Zur Analyse solcher Konfliktsituationen dienen **Nash-Gleichgewichte**. Dies ist ein zentral wichtiges, nützliches und bewährtes Werkzeug. Hierzu beginnen wir, die mathematischen Grundlagen zu legen, in Form von tragfähigen Definitionen, sodann Sätzen und Beweisen.

Dies sind zunächst mathematische Konzepte. Wir wollen sie schließlich auf Anwendungen übertragen. Dabei stellt sich die kritische Frage, ob Nash-Gleichgewichte tatsächlich gespielt werden: wann? wie? warum? Hierzu möchte ich drei mögliche Begründungen darlegen.

**Rationale Analyse des Spiels.** In manchen – nicht allen! – Anwendungen ist es plausibel anzunehmen, dass alle Spieler hinreichend rational sind. Das gilt insbesondere, wenn das Spiel einfach zu analysieren ist und die Spieler ausreichend Zeit dazu haben. Oder wenn das Spiel so wichtig ist, dass alle Spieler die notwendigen Analysen durchführen (müssen).

☺ Gibt es nur ein Nash-Gleichgewicht, so wird genau dieses gespielt. Dank hinreichender Rationalität kennt jeder Spieler das Gleichgewicht, und keiner der Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

☹ Dieses Argument gilt nur bei einem eindeutigen Gleichgewicht. Gibt es mehrere, wie bei Bach-oder-Strawinsky, so ist die Wahl offen.

**Kommunikation vor dem Spiel.** In manchen Anwendungen ist es möglich, dass alle Spieler vor dem Spiel kommunizieren. Sie können dies nutzen und einen gemeinsamen Strategievektor  $(s_1, \dots, s_n)$  verabreden.

☹ Diese Verabredung ist allerdings nicht bindend oder einklagbar.

☺ Ist  $(s_1, \dots, s_n)$  ein Nash-Gleichgewicht, so ist diese Vereinbarung selbst-stabilisierend: Kein Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

**Evolution durch Versuch und Irrtum.** Wir betrachten ein endliches reelles Spiel  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dieses wird nun häufig wiederholt. Jeder Spieler  $i$  beginnt mit einer gemischten Strategie  $s_i \in S_i$  und passt sie nach jedem Spieldurchgang an, etwa vermöge der Nash-Funktion.

☺ Günstigenfalls konvergiert dieser Prozess gegen ein Gleichgewicht: Die Gleichgewichte sind Fixpunkte der Nash-Funktion, und Konvergenz liegt vor, wenn wir im Attraktionsbecken eines Fixpunktes starten.

Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionbiologie** erfolgreich anwenden. Hier spielen **Populationen** gegeneinander. Die Individuen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer. Im Mittel beobachten wir die oben erklärte **Populationsdynamik**.

☺ Die **evolutionäre Spieltheorie** arbeitet diese Ideen aus und untersucht evolutionäre Phänomene mit spieltheoretischen Methoden.

**Definition E1k:** strategisches Spiel in Normalform  
 Ein **strategisches Spiel in Normalform** über  $I$  ist eine Abbildung

$$u : S_I = \prod_{i \in I} S_i \rightarrow R_I = \prod_{i \in I} R_i : s = (s_i)_{i \in I} \mapsto r = (r_i)_{i \in I}.$$

Formal ist dieses Spiel  $(I, S, R, u)$  durch folgende Daten definiert:  
 (1) eine **Spielermenge**  $I = \{1, \dots, n\}$  sowie für jeden Spieler  $i \in I$   
 (2) eine **Strategiemenge**  $S_i \neq \emptyset$  möglicher Strategien / Aktionen / Züge,  
 (3) eine **Ergebnismenge**  $(R_i, \leq_i)$  möglicher Resultate, linear geordnet,  
 (4) eine **Nutzenfunktion**  $u : S \rightarrow R$ , individuell  $u_i : S \rightarrow R_i : s \mapsto r_i$ .

Wir nutzen folgende Notation, die ich anschließend genauer erläutere:  
 Koalition  $K \subseteq I$ , Komplement  $-K := I \setminus K$ ,  
 Zerlegung  $I = K \sqcup J$ , statt  $\{i\}, -\{i\}$  kurz  $i, -i$ ,  
 Strategie  $s_i \in S_i \neq \emptyset$ , Ergebnis  $r_i \in (R_i, \leq_i)$ ,  
 Bündel  $s_K \in S_K := \prod_{i \in K} S_i$ , Zerlegung  $s_I = (s_K; s_J)$ ,  
 Nutzen  $u_i : S_i \times S_{-i} \rightarrow R_i : (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$

Jeder Spieler:in  $i \in I$  kann ihre Strategie  $s_i \in S_i$  frei wählen, unabhängig von allen anderen Spielern, und sie hat auch nur auf  $s_i$  direkten Einfluss. Jedes Element  $s \in \prod_{i \in I} S_i$  nennen wir **Strategievektor**:  $s = (i \mapsto s_i)_{i \in I}$ . Wir zerlegen  $S := \prod_{i \in I} S_i$  in die Faktoren  $S_i$  und  $S_{-i} := \prod_{j \in I \setminus \{i\}} S_j$ :

$$S \cong S_i \times S_{-i} : s \mapsto (s_i; s_{-i})$$

Wir schreiben hier  $s_{-i} = s|_{I \setminus \{i\}}$  für die **Einschränkung** auf  $I \setminus \{i\}$  und  $s = (s_i; s_{-i}) = \{i \mapsto s_i\} \cup s_{-i}$  für die **Ergänzung** um  $i \mapsto s_i$ . Das entspricht der Umsortierung, die den Faktor  $S_i$  vorzieht. Besser und konfliktfrei wäre statt  $s_{-i}$  die Notation  $s_{-i} = s|_{I \setminus \{i\}} \in S_{-i}$ . Ich folge hier der üblichen und verbreiteten Schreibweise  $s_{-i} \in S_{-i}$ . Die Nutzenfunktion  $u_i : S \rightarrow R_i$  schreiben wir damit bequem:

$$u_i : S_i \times S_{-i} \rightarrow R_i : (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$$

Die explizite Nennung der Bijektion  $S \cong S_i \times S_{-i} : s \mapsto (s_i; s_{-i})$  unterdrücken wir hierbei und benennen beide Funktionen mit  $u_i$ .

Formal könnten wir unser Spiel als **Quadrupel**  $(I, S, R, u)$  definieren. Das ist wunderbar explizit und ausführlich, scheint mir aber für den praktischen Gebrauch unnötig länglich und übertrieben pedantisch. Implizit enthält die Abbildung  $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$  all diese Daten: Bei Bedarf können wir von der Abbildung  $u$  alle Informationen erfragen bzw. rekonstruieren: Was ist deine Definitionsmenge?  $S!$  Was ist deine Zielmenge?  $R!$  Ebenso können wir  $S$  fragen: Bist du ein Produkt? Ja! Über welcher Menge?  $I!$  Was ist für  $i \in I$  dein Faktor?  $S_i!$  Ebenso  $R$ : Bist du ein Produkt? Ja! Über welcher Menge?  $I!$  Was ist für  $i \in I$  dein Faktor?  $R_i!$  Darunter verstehen wir hier die geordnete Menge  $(R_i, \leq)$ . Ich schreibe also explizit  $u : S_I = \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i = R_I$  oder implizit  $u$ . Ersteres entspricht dem **Quadrupel**  $(I, S, R, u)$ , ist aber noch sinnfälliger. Die Indizes schreiben wir später auch oben: Die Strategiemenge  $S^i$  und die Ergebnismenge  $R^i$  für Spieler  $i \in I$  führen zu den Produkten  $S^I := \prod_{i \in I} S^i$  und  $R^I := \prod_{i \in I} R^i$ , hier besonders raffiniert abgekürzt. Spiele sind dann Abbildungen  $u : S^I \rightarrow R^I$ , reelle Spiele  $u : S^I \rightarrow \mathbb{R}^I$ .

Statt **Strategien**  $s_i \in S_i$  sprechen wir je nach Kontext auch von **Aktionen** und schreiben dann  $a_i \in A_i$  und entsprechend  $u : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$ .  
 Motivation: Allgemein codieren wir jedes **dynamische** Spiel durch einen Graphen  $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ , siehe Definition B11. Wir unterscheiden dann (lokale) Aktionen  $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i$  in jedem aktiven Zustand  $x \in X$  und (globale) Strategien  $S = \prod_{x \in X} A_x$ , individuell  $S^i = \prod_{x \in X} A_x^i$  für  $i \in I$ .  
 In diesem Kapitel betrachten wir nur strategische Spiele in Normalform, ohne zeitliche Dimension. Zur Betonung sagt man daher auch **statisch**. In diesem Falle gibt es nur einen aktiven Zustand, formal  $X^o = \{x\}$ , daher sind Aktionen und Strategien hier dasselbe.  
 Die Aktionsmenge  $A_i$  soll immer nicht-leer sein. Einelementig  $A_i = \{a_i^*\}$  bedeutet, Spieler:in  $i$  hat keine Wahl, sondern muss die Aktion  $a_i^*$  spielen. Allgemein können wir jede Menge  $A_i \neq \emptyset$  mit einem Fußpunkt  $a_i^* \in A_i$  als **default option** ausstatten und fortan das Paar  $(A_i, a_i^*)$  betrachten, ebenso das Produkt  $(A_K, a_K^*)$  mit  $a_K^* = (a_i^*)_{i \in K}$ . Wenn mehrere Spieler zum Handeln aufgerufen werden, so wird Nicht-Meldung als  $a_i^*$  gewertet.

Hier ist  $I = \{1, \dots, n\}$  die Menge der Spieler / Individuen / Akteure / ... Manche Autor:innen schreiben statt  $I$  lieber  $N$  oder  $P$  oder ähnliches. Meist ist die Spielermenge endlich, doch wir nutzen auch unendliche. Für die **Buchhaltung** ist Durchnummerieren bequem, kurz  $I = \{1, \dots, n\}$ . Für das **Story Telling** sind Namen schöner, wie Alice, Bob, Chuck, etc. Es geht auch beides zugleich, wie  $I = \{1=Alice, 2=Bob, 3=Chuck\}$ .  
 Jede Spieler:in  $i \in I$  hat eine nicht-leere Strategiemenge  $S_i$  und eine linear geordnete Ergebnismenge  $(R_i, \leq_i)$ . Jedes Element  $s_i \in S_i$  heißt Strategie / Aktion / Option / ...,  $r_i \in R_i$  heißt Ergebnis / Resultat / Auszahlung / ...  
 Das Produkt über  $K \subseteq I$  schreiben wir konzise, kurz und bequem  $S_K := \prod_{i \in K} S_i$  und  $R_K := \prod_{i \in K} R_i$ . Wir setzen  $S := S_I$  und  $R := R_I$ . Unser Spiel ist demnach eine Abbildung  $u : S \rightarrow R$ . Jede Spieler:in  $i \in I$  wählt ihre Strategie  $s_i \in S_i$  und erhält die Auszahlung  $u_i(s) \in R_i$ .  
 😊 Das ist das wesentliche Punkt: Das Ergebnis  $u_i(s)$  jeder Spieler:in  $i$  hängt nicht nur von ihrer eigenen Aktion  $s_i \in S_i$  ab, sondern auch von den Aktionen  $s_{-i} \in S_{-i}$  aller anderen Spieler:innen  $j \in I \setminus \{i\}$ .

Für ein **endliches Spiel** fordern wir  $I$  und  $S_i$  endlich für jedes  $i \in I$ . Im Falle eines **reellen Spiels** fordern wir zudem  $R_i = \mathbb{R}$  für alle  $i \in I$ . Das Spiel ist die **Auszahlungsfunktion**  $u : S = \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{R} = \mathbb{R}^I$ . Die Funktion  $u_i : S = \prod_{j \in I} S_j \rightarrow \mathbb{R}$  ist die **Auszahlung** für Spieler:in  $i$ .  
 Bislang genügte uns die Spielermenge  $I = \{1, 2\}$  oder  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Wir definieren Spiele nun allgemein für eine beliebige Spielermenge  $I$ . Auf den ersten Blick mag diese Allgemeinheit verwundern; wir können uns ein Spiel mit unendlich vielen Spielern meist nur schwer vorstellen. Dies tritt jedoch tatsächlich natürlich auf, etwa wenn wir Modelle mit zeitlichem Verlauf und mehreren Spielergenerationen untersuchen. Wir wollen daher die nötigen Begriffe und Definitionen vorbereiten, auch wenn unsere Existenzsätze oft endliche Spiele voraussetzen. Dasselbe gilt für allgemeine Definition der Ergebnismenge  $(R_i, \leq)$ . Wir nehmen im Folgenden meist  $(R_i, \leq)$  als Teilmenge von  $(\mathbb{R}, \leq)$  an. Es lohnt, sich zunächst klar zu machen, was minimal benötigt wird. Wir nutzen dankbar weitere Struktur, wo immer sie verfügbar ist!

Die so eingeführte Schreibweise ist bequem und hat sich bewährt. Streng formal jedoch müsste ich  $S_{\{j\}}$  statt  $S_j$  für  $j \in I$  schreiben. Damit gilt  $S_K = \prod_{i \in K} S_{\{i\}}$  für alle  $K \subseteq I$ , auch für  $K = \{j\}$ .  
 Ist das Haarspalterei? Es ist formal korrekt, wenn auch meist übertrieben. Wir gehen stillschweigend davon aus, dass sich Spieler / Elemente  $j \in I$  und Koalitionen / Teilmengen  $K \subseteq I$  stets unterscheiden,  $I \cap \mathfrak{P}(I) = \emptyset$ . Das klingt plausibel und ist möglich, aber weder nötig noch automatisch.  
**Beispiel:** Nach John von Neumann können wir die natürlichen Zahlen als Mengen darstellen durch  $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}$ , usw. .... Für  $I = \{0, \dots, n-1\}$  gilt demnach für  $i \in I$  auch  $i \subseteq I$ . Das ist schlecht: Hier lassen sich Spieler:innen und Koalitionen nicht unterscheiden!  
 Wir schreiben  $-K := I \setminus K$ , sowie statt  $\{i\}$  und  $-\{i\}$  kurz  $i$  und  $-i$ . Diese Schreibweise für das Komplement ist in der Spieltheorie üblich, wirkt aber vielleicht anfangs ungewohnt und etwas abschreckend; sie entspricht der traditionell mathematischen Notation  $\bar{K} = \complement K = I \setminus K$ .

Der **Träger**  $\text{supp}(u) := \{i \in I \mid \#A_i \geq 2\}$  des Spiels  $u : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$  ist die Teilmenge aller Spieler  $i \in I$ , die tatsächlich eine Wahl haben. Meist setzen wir **endlichen** Träger voraus, das heißt, nur endlich viele Spieler  $i \in I$  sind gerade aktiv, die anderen warten (in dieser Runde).  
 Für ein Spiel in Normalform können nicht-aktive Spieler natürlich weggelassen werden, doch im Allgemeinen sind sie dennoch wichtig: Später untersuchen wir Spiele, die über mehrere Runden / Zeitschritte  $t \in \mathbb{N}$  gehen, aber in jeder Runde interagieren nur endlich viele Spieler.

**Nash-Gleichgewichte** E197

**Definition E1L:** Nash-Gleichgewicht

Vorgelegt sei das Spiel  $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$  über der Spielermenge  $I$ . Sei  $s \in S = \prod_{i \in I} S_i$  ein Strategievektor. Bezüglich Spieler  $i \in I$  heißt  $s$

(1) **strikt stabil:**  $\forall a \in S_i \setminus \{s_i\} : u_i(s; s_{-i}) > u_i(a; s_{-i}) \Leftrightarrow s \in NE_i^1(u)$   
 (2) **stabil:**  $\forall a \in S_i \setminus \{s_i\} : u_i(s; s_{-i}) \geq u_i(a; s_{-i}) \Leftrightarrow s \in NE_i(u)$

Gilt dies für alle  $i \in I$  so heißt  $s$  ein (**striktes**) **Nash-Gleichgewicht**, geschrieben  $s \in NE^1(u) := \bigcap_{i \in I} NE_i^1(u)$  und  $s \in NE(u) := \bigcap_{i \in I} NE_i(u)$ .

(3) Sei  $u$  reell und eine Toleranz  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  vorgegeben. Wir nennen  $s$  dann  **$\varepsilon$ -stabil:**  $\forall a \in S_i \setminus \{s_i\} : u_i(s; s_{-i}) \geq u_i(a; s_{-i}) - \varepsilon \Leftrightarrow s \in NE_i^\varepsilon(u)$

Gilt Letzteres für alle  $i \in I$  so heißt  $s$  ein  **$\varepsilon$ -Nash-Gleichgewicht**. Allgemein setzen wir  $NE^\varepsilon(u) := \bigcap_{i \in I} NE_i^\varepsilon(u)$  für  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : i \mapsto \varepsilon_i$ .

😊 Zur Approximation gilt somit  $NE(u) = NE^0(u) = \bigcap_{\varepsilon > 0} NE^\varepsilon(u)$ .  
 😊 Für endliche Spiele erhalten wir formal  $NE^1(u) = \bigcup_{\varepsilon < 0} NE^\varepsilon(u)$ .

**Nash-Gleichgewichte** E198  
Erläuterung

Die **unmittelbare Bedeutung** dieser Definition ist folgende:

(1) Der Spieler  $i$  hat einen Nachteil davon, seine Strategie  $s_i$  zu ändern.  
 (2) Der Spieler  $i$  hat keinen Vorteil / Anreiz, einseitig von  $s_i$  abzuweichen.  
 (3) Der Spieler  $i$  hat bestenfalls einen  $\varepsilon$ -kleinen Vorteil. Dieser kann zum Beispiel unterhalb der Wahrnehmungsschwelle / vernachlässigbar sein.

Die Strategien  $s_{-i}$  aller anderen Spieler werden als konstant betrachtet. Ich erinnere an die Motivation hinter diesem Modell: Spieler  $i$  kontrolliert nur seine Strategie  $s_i \in S_i$ . Er hat auf  $s_{-i}$  keinen direkten Einfluss, etwa durch Absprachen, Verträge, Drohungen, o.ä. außerhalb des Spiels.

Gilt (1) / (2) / (3) für jeden Spieler  $i$ , so nennen wir den Strategievektor  $s$  ein striktes Gleichgewicht / Gleichgewicht /  $\varepsilon$ -Gleichgewicht.

Solche Gleichgewichte beschreiben **mögliches rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung. Hierzu haben wir oben die ersten von zahlreichen Beispielen angeführt. Erweitern und pflegen Sie Ihren Beispielfundus!

**Existenz von Nash-Gleichgewichten** E199  
Erläuterung

Der Satz von Nash garantiert die Existenz von Gleichgewichten. Über strikte Gleichgewichte macht er wohlweislich keine Aussage. Sie sind vielleicht einfacher zu verstehen, aber leider oft zu streng. Insbesondere gibt es keine allgemeine Garantie für ihre Existenz.

**Übung:** Sei  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein endliches reelles Spiel und  $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

(1) Gilt  $NE^1(u) \subseteq NE^1(\bar{u})$ ? und umgekehrt  $NE^1(u) \supseteq NE^1(\bar{u})$ ?  
 (2) Gilt  $NE(u) \subseteq NE(\bar{u})$ ? und umgekehrt  $NE(u) \supseteq NE(\bar{u})$ ?

**Übung:** Sei  $u : S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ein endliches Zwei-Personen-Spiel.

(1) Wenn ein striktes Gleichgewicht existiert, ist es dann eindeutig? Wie viele strikte Gleichgewichte kann  $u$  haben? und  $\bar{u}$ ?  
 (2) Was gilt, wenn  $u$  zudem konstante Summe hat? Oder allgemeiner: wenn  $u$  strikt kompetitiv ist?

**Existenz von Nash-Gleichgewichten** E1100  
Erläuterung

Im Satz von Nash (E1E) wurde das Spiel  $u$  als endlich vorausgesetzt: Die Spielermenge  $I$  und jede Strategiemenge  $S_i$  müssen endlich sein.

**Übung:** In den Übungen nutzen Sie den Fixpunktsatz von Kakutani, um den Satz von Nash erneut zu beweisen und zu verallgemeinern.

**Übung:** Sei  $I = \{1, 2\}$  sowie  $S_i = \{s_i^k \mid k \in \mathbb{N}\}$  abzählbar unendlich. Gibt es zu jedem Spiel  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Nash-Gleichgewicht? Gilt dies für die Fortsetzung  $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf gemischte Strategien? Diskutieren Sie endliche Konvexkombinationen und dann auch Reihen.

**Übung:** Sei  $I = \mathbb{N}$  sowie  $S_i = \{0, 1\}$  für alle  $i \in I$ , also  $\bar{S}_i \cong [0, 1]$ . Gibt es zu jedem Spiel  $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$  ein Nash-Gleichgewicht? Gilt dies für die Fortsetzung  $\bar{u} : \prod_{i \in I} \bar{S}_i \rightarrow \mathbb{R}^I$ ? (Knifflig, siehe E1104)

Der Hilbert-Würfel  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  ist kompakt nach dem Satz von Tychonov. Zudem ist er ein wichtiger Modellraum, etwa beim Metrisierungssatz von Urysohn. Hier nun tritt er als Strategieraum  $\bar{S}$  von Spielen auf.

**Nash-Gleichgewichte zwischen unendlich vielen Spielern** E1101  
Erläuterung

Nashs Satz lässt sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern, etwa auf spieltheoretische Modelle überlappender Generationen (Kapitel H). Hier sind tatsächlich unendlich viele Spieler realistisch. Vereinfachend interagiert dabei jeder Spieler  $i \in I$  nur mit endlich vielen Nachbarn:  $u_i : \prod_{j \in I} S_j \rightarrow \mathbb{R}$  hängt nur von endlich vielen Koordinaten  $j \in I$  ab. Insbesondere ist  $u_i$  dann stetig bezüglich der Produkttopologie.

Allgemein formulieren wir hierzu folgendes Ergebnis:

**Satz E1M:** Satz von Nash für lokal-endliche Spiele

Sei  $I = \mathbb{N}$ . Für jeden Spieler  $i \in I$  sei die Strategiemenge  $S_i \neq \emptyset$  endlich und die Nutzenfunktion  $u_i : \prod_{j \in I} S_j \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in der Produkttopologie. Dann lässt sich  $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$  stetig fortsetzen zu  $\bar{u} : \prod_{i \in I} \bar{S}_i \rightarrow \mathbb{R}^I$ , und das Spiel  $\bar{u}$  erlaubt mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

**Aufgabe:** Versuchen Sie, diesen Verallgemeinerung zu beweisen (wenn Sie mutig sind für eine beliebige Spielermenge  $I$ ).

**Nash-Gleichgewichte zwischen unendlich vielen Spielern** E1102  
Erläuterung

**Lösung:** Wir setzen  $u_i : \prod_{j \in I} S_j \rightarrow \mathbb{R}$  affin fort zu  $\bar{u}_i : \bar{S} = \prod_{j \in I} \bar{S}_j \rightarrow \mathbb{R}$ . Man rechnet sorgsam nach, dass mit  $u_i$  auch  $\bar{u}_i$  stetig ist bezüglich der punktweisen Konvergenz, also der Produkttopologie. (Übung!)

Wir wählen  $s^0 \in \bar{S} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{S}_i$  willkürlich. Zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  variieren wir  $(s_0, \dots, s_{k-1}) \in \prod_{i < k} \bar{S}_i$  und halten  $s_i$  für  $i \geq k$  fest. Dank Nash E1E existiert ein Strategievektor  $s^k \in \bar{S}$ , der für alle Spieler  $i < k$  stabil ist. Dank Kompaktheit des Produktraums  $\bar{S}$  existiert eine konvergente Teilfolge  $(s^{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ . Nach Ummummerierung schreiben wir kurz  $s^k \rightarrow s$ . Weiterhin gilt Eigenschaft (a):  $s^k \in \bar{S}$  ist stabil für alle Spieler  $i < k$ .

Mit diesem Grenzwert haben wir ein Strategiebündel  $s \in \bar{S}$  konstruiert. Wir zeigen nun:  $s$  ist ein Nash-Gleichgewicht für das Spiel  $\bar{u} : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^I$ . Hierzu nutzen wir, dass die Abbildung  $\bar{u} : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^I$  stetig ist. Für jedes  $i \in I$  gilt also (b)  $\bar{u}_i(s^k) \rightarrow \bar{u}_i(s)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**Nash-Gleichgewichte zwischen unendlich vielen Spielern** E1103  
Erläuterung

Sei  $i \in I$  und  $\tilde{s}_i \in \bar{S}_i$  eine alternative Strategie für Spieler  $i$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Für jeden hinreichend großen Index  $k > i$  gilt:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(s; s_{-i}) &\stackrel{(b)}{\geq} \bar{u}_i(s^k; s_{-i}^k) - \varepsilon \\ &\stackrel{(a)}{\geq} \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}^k) - \varepsilon \\ &\stackrel{(b)}{\geq} \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Wir haben also  $\bar{u}_i(s; s_{-i}) \geq \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}) - 2\varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Das bedeutet  $\bar{u}_i(s; s_{-i}) \geq \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i})$ . Dies gilt für alle  $\tilde{s}_i \in \bar{S}_i$ . Demnach ist  $s$  ein Nash-Gleichgewicht, wie behauptet, kurz  $s \in NE(\bar{u})$  und somit insbesondere  $NE(\bar{u}) \neq \emptyset$ .

**Bemerkung:** Ist  $I$  eine beliebige (überabzählbare) Menge, so gelingt der Beweis wörtlich genauso, allerdings müssen wir Folgen durch Filter ersetzen. Der Satz von Tychonov garantiert die Kompaktheit von  $\bar{S}$ . (Die Ausformulierung ist eine Fingerübung in technischer Virtuosität.)

**Nash-Gleichgewichte zwischen unendlich vielen Spielern** E1104  
Erläuterung

Im Forum 2022 wurde erfreulich viel gefragt, Leichtes und Schweres, etwa, ob wir für Satz E1M die geforderte Stetigkeit von  $u$  benötigen. Gibt es ein lokal-endliches Spiel  $u$  ohne gemischte Gleichgewichte? Die Konstruktion erfordert Kreativität, der Nachweis dann Sorgfalt.

$$u : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_i(s) = \begin{cases} 2^{-i} s_i & \text{falls } \#\text{supp}(s) < \infty, \\ -s_i & \text{falls } \#\text{supp}(s) = \infty. \end{cases}$$

**Übung:** (0) Das Spiel  $u$  hat keine Nash-Gleichgewichte,  $NE(u) = \emptyset$ : Zu jedem  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  können sich unendlich viele Spieler verbessern.

(1) Auch die Fortsetzung  $\bar{u} : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  hat keine Nash-Gleichgewichte. Sei  $\bar{s}_i \in [0, 1]$  die Wkt für  $s_i = 1$  und dazu  $p$  die Wkt für  $\#\text{supp}(s) < \infty$ . Eine einzelne Strategie  $\bar{s}_i$  hat auf  $p$  keinen Einfluss. Die Auszahlung ist  $\bar{u}_i(\bar{s}) = (p2^{-i} + p - 1)\bar{s}_i$ . Ist  $p = 1$ , so gilt  $\bar{s}_i < 1$  für unendlich viele  $i \in \mathbb{N}$ , und jeder davon verbessert sich durch  $\bar{s}'_i = 1$ . Ist  $p < 1$ , so gilt  $\bar{s}_i > 0$  für unendlich viele  $i \in \mathbb{N}$ , und fast jeder davon verbessert sich durch  $\bar{s}'_i = 0$ .

Wir betrachten weiterhin ein Spiel  $u : A_I := \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i :=: R_I$ .

**Definition E1n:** starkes Gleichgewicht (Aumann 1959)

Ein Strategiebündel  $a \in A_I$  ist **suboptimal** für die Koalition  $K \subseteq I$ , falls zu  $a_K \in A_K$  eine strikt bessere Alternative  $b_K \in A_K$  existiert:

$$u_K(a_K; a_{-K}) < u_K(b_K; a_{-K})$$

Auf dem Produkt  $R_K$  definieren wir die Relation  $<$  koordinatenweise. Das heißt, für jeden Spieler  $i \in K$  gilt  $u_i(a_K; a_{-K}) < u_i(b_K; a_{-K})$ .

Andernfalls ist  $a \in A_I$  **optimal** für  $K$ : Zu jeder Alternative  $b_K \in A_K$  existiert ein kritischer Spieler  $j \in K$  mit  $u_j(a_K; a_{-K}) \geq u_j(b_K; a_{-K})$ .

Wir nennen  $a \in A_I$  ein **starkes Gleichgewicht** des Spiels  $u$ , falls  $a$  optimal ist für jede Koalition  $K \subseteq I$ .

**Beispiel:** (0) Für  $K = \emptyset$  ist jedes Strategiebündel  $a \in A_I$  optimal.  
 (1) Speziell für  $K = \{i\}$  ist Optimalität die übliche Nash-Bedingung.  
 Jedes starke Gleichgewicht ist demnach auch ein Nash-Gleichgewicht.

Wir untersuchen einige vertraute Beispiele auf starke Gleichgewichte:

	B	0	1
A	1, 2	0, 0	
0	1, 0	0, 2	
1	0, 0	2, 1	

Bach oder Strawinsky

	B	0	1
A	2, 2	5, 1	
0	2, 1	1, -9	
1	5, 1	-9, -1	

Feiglingspiel / chicken game

	B	0	1
A	-2, -2	-5, -5	
0	-2, -2	0, 0	
1	-5, -2	0, 0	

Bleiben oder gehen

	B	0	1
A	-4, -4	0, -5	
0	-4, 0	0, -1	
1	-5, 0	-1, -1	

Gefangenendilemma

□ Robert Aumann: *Acceptable points in general cooperative n-person games*. In: Contributions to the Theory of Games IV, PUP 1959.

**Beispiele:** In den obigen Beispielen sind Nash-Gleichgewichte wie üblich markiert durch das Zusammentreffen von zwei farbigen Dreiecken. Starke Gleichgewichte erhalten zudem einen schwarzen Rahmen.

Bei *Bach oder Strawinsky* und ebenso beim *Feiglingspiel* gibt es genau zwei reine Nash-Gleichgewichte. Beide sind stark, denn keines lässt sich strikt verbessern, egal durch welche Koalition  $K \in \{\{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$ .

Auch *Bleiben oder gehen* hat zwei reine Nash-Gleichgewichte, doch nur das Höhere ist stark. In der Menge  $NE(u)$  aller Nash-Gleichgewichte erhalten wir so eine feinere Unterscheidung. Das nützt manchmal.

Das Gefangenendilemma hat nur ein Nash-Gleichgewicht, und dieses ist nicht stark. Das ist genau der Grund, warum die Lösung nach Nash hier als paradox empfunden wird. Das untersuchen wir gleich noch genauer.

⚠ Für starke Gleichgewichte gilt kein allgemeiner Existenzsatz!

□ Douglas Bernheim, Bezalel Peleg, Michael Whinston: *Coalition-proof Nash equilibria*. J. Econ. Theory 42 (1987) 1–12.  
 Ich zitiere ihr Argument, leicht gekürzt zur besseren Lesbarkeit:

*While Nash defines equilibrium only in terms of unilateral deviations, strong equilibrium allows for deviations by every conceivable coalition. We believe, however, that the strong concept is actually "too strong." [...]*

*In environments with unlimited private communication, however, any meaningful agreement to deviate must also be self-enforcing (i.e., immune to deviations by subcoalitions). [...]*

*As is evident, the consistent application of the notion of self-enforceability involves a recursion. This recursion makes the formal definition of coalition-proof equilibrium which we present below somewhat tricky. However, by consistently applying the requirement of self-enforceability, the coalition-proof concept avoids the inconsistencies of the strong concept.*

Wir betrachten weiterhin ein Spiel  $u : A_I := \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i :=: R_I$ .

**Definition E1o:** koalitions-stabiles Gleichgewicht

Ein Strategiebündel  $a \in A_I$  ist **instabil** für die Koalition  $K \subseteq I$ , falls gilt: Zu  $a_K \in A_K$  existiert eine strikt bessere Alternative  $b_K \in A_K$ , das heißt

$$u_K(a_K; a_{-K}) < u_K(b_K; a_{-K}),$$

und  $(b_K; a_{-K})$  wiederum ist stabil für jede echte Teilkoalition  $J \subsetneq K$ . Andernfalls ist das Strategiebündel  $a$  **stabil** für die Koalition  $K \subseteq I$ .

(0) Jedes Strategiebündel  $a \in A_I$  ist stabil für die leere Koalition  $K = \emptyset$ .

(1) Für  $K = \{i\}$  ist Stabilität die Nash-Bedingung: Spieler  $i$  hat keine strikt bessere Alternative, für alle  $b_i \in A_i$  gilt  $u_i(a_i; a_{-i}) \geq u_i(b_i; a_{-i})$ .

(2) Für die Zwei-Spieler-Koalition  $K = \{i, j\} \subseteq I$  bedeutet Instabilität:  
 (2a) Für die Koalition  $K$  existiert eine strikt bessere Alternative  $b_K \in A_K$ , das heißt  $u_i(a_K; a_{-K}) < u_i(b_K; a_{-K})$  und  $u_j(a_K; a_{-K}) < u_j(b_K; a_{-K})$ ,  
 (2b) und das neue Bündel  $(b_K; a_{-K})$  ist stabil für  $i$  und stabil für  $j$ .

Wir untersuchen einige vertrauten Beispiele auf Koalitions-Stabilität:

	B	0	1
A	1, 2	0, 0	
0	1, 0	0, 2	
1	0, 0	2, 1	

Bach oder Strawinsky

	B	0	1
A	2, 2	5, 1	
0	2, 1	1, -9	
1	5, 1	-9, -1	

Feiglingspiel / chicken game

	B	0	1
A	-2, -2	-5, -5	
0	-2, -2	0, 0	
1	-5, -2	0, 0	

Bleiben oder gehen

	B	0	1
A	-4, -4	0, -5	
0	-4, 0	0, -1	
1	-5, 0	-1, -1	

Gefangenendilemma

**Beispiele:** In den obigen Beispielen sind Nash-Gleichgewichte wie üblich markiert durch das Zusammentreffen von zwei farbigen Dreiecken, koalitions-stabile erhalten zudem einen schwarzen Rahmen.

Bei *Bach oder Strawinsky* und beim *Feiglingspiel* gibt es genau zwei reine Nash-Gleichgewichte. Beide sind koalitions-stabil, denn keines lässt sich strikt verbessern, egal durch welche Koalition  $K \in \{\{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$ .

Auch *Bleiben oder gehen* hat zwei reine Nash-Gleichgewichte, doch nur das Höhere ist koalitions-stabil. Diese Unterscheidung ist nützlich und hilft uns bei der Beschreibung / Analyse / Diskussion solcher Situationen.

Das Gefangenendilemma hat nur ein Nash-Gleichgewicht, und dieses ist koalitions-stabil. Dieses wohlüberlegte Konzept löst in gewisser Weise das Paradox auf: Die Koalition  $\{A, B\}$  kann zwar das Ergebnis für alle strikt verbessern, doch die Vereinbarung dieser Koalition ist nicht stabil.

⚠ Warum nutzen wir dann statt Nash nicht gleich Koalitions-Stabilität? Für koalitions-stabile Gleichgewichte gilt kein allgemeiner Existenzsatz! Die folgende Übung gibt hierzu ein naheliegendes Beispiel.

**Übung:** Alice, Bob und Chuck teilen sich ein (kontinuierliches) Erbe. Jeder schlägt eine Aufteilung  $(a, b, c) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $a + b + c = 1$  vor, alle drei gleichzeitig per Brief an den Notar. Schlagen zwei oder drei dasselbe vor, so wird dies ausgezahlt, andernfalls verfällt das Erbe. Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte. Welche sind koalitions-stabil? Erweiterung: Was passiert beim Übergang zu gemischten Strategien? Herausforderung: Konstruieren Sie endliche Gegenbeispiele dieser Art.

*Thus far, we have been unable to find sufficient conditions which guarantee the existence of coalition-proof Nash equilibria for a reasonably large set of games. It is, of course, easy to see that coalition-proof equilibria exist in any model for which, given any set of actions by any proper subset of players, the game induced on the remaining players has a unique Nash equilibrium. [...]*

*Coalition-proof Nash equilibria certainly exist in a larger number of games than do strong Nash equilibria. Further, examination of a number of examples indicates that coalition-proof equilibria do exist quite frequently, and in such cases provide a valuable tool for refining the Nash equilibrium set.*

Bernheim, Peleg, Whinston: *Coalition-proof Nash equilibria*.

**Definition E2A:** Sicherheitswert und Sicherheitsstrategie

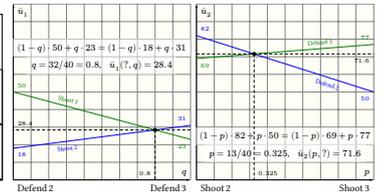
Sei  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n$  ein endliches Spiel, oder allgemein ein reelles Spiel mit  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  kompakt und  $u : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Spieler  $i$  kann mindestens folgende Auszahlung für sich garantieren:

$$\text{val}_i(u) := \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i^*; s_{-i})$$

Hierzu wählt er als **Sicherheitsstrategie**  $s_i^* \in S_i$  einen Min-Maximierer. Wir nennen  $\text{val}_i(u)$  den **Sicherheitswert** des Spiels  $u$  für Spieler  $i$ .

- ☺ Spieler  $i$  maximiert seinen Mindestgewinn durch die Strategie  $s_i^* \in S_i$ . Mögliche Interpretation: Spieler  $i$  zieht zuerst, öffentlich und endgültig. Im Allgemeinen bilden Sicherheitsstrategien ( $s_i^*$ ) kein Gleichgewicht! Das gilt selbst für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele, wie wir gleich sehen: Manchmal bleibt eine Lücke zwischen Maximin und Minimax.
- ☺ Diese verschwindet genau für Nash-Gleichgewichte: Das ist der Inhalt von Neumanns Minimax-Satz E2D.

	B	Defend 2	Defend 3
A			
Shoot 2	18	82	31
Shoot 3	50	23	77



**Aufgabe:** Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien.

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = 23 \quad \text{vs} \quad \max_{y \in S_2} \min_{x \in S_1} u_2(x, y) = 69$$

- ☹ Es gilt die Summe  $u_1 + u_2 = 100$ , aber nur  $23 + 69 = 92 < 100$ .
  - ☹ Die Sicherheitsstrategien ( $s_i^*$ ) bilden kein Nash-Gleichgewicht.
- $$\max_{x \in [S_1]} \min_{y \in [S_2]} \bar{u}_1(x, y) = 28.4 \quad \text{vs} \quad \max_{y \in [S_2]} \min_{x \in [S_1]} \bar{u}_2(x, y) = 71.6$$
- ☺ Dahinter stecken allgemeine Regeln und der Minimax-Satz E2D.
  - ☺ Die Lücke verschwindet genau für Nash-Gleichgewichte!

	B	Kopf	Zahl
A			
Kopf	-1	+1	-1
Zahl	+1	-1	+1

**Aufgabe:** Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien.

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = -1 \quad \text{vs} \quad \max_{y \in S_2} \min_{x \in S_1} u_2(x, y) = -1$$

- ☹ Es gilt die Summe  $u_1 + u_2 = 0$ , doch nur  $(-1) + (-1) = -2 < 0$ .
- ☹ Die Sicherheitsstrategien ( $s_i^*$ ) bilden kein Nash-Gleichgewicht.

$$\max_{x \in [S_1]} \min_{y \in [S_2]} \bar{u}_1(x, y) = 0 \quad \text{vs} \quad \max_{y \in [S_2]} \min_{x \in [S_1]} \bar{u}_2(x, y) = 0$$

- ☺ Dahinter stecken allgemeine Regeln und der Minimax-Satz E2D.
- ☺ Die Lücke verschwindet genau für Nash-Gleichgewichte!

	B	Schere	Stein	Papier
A				
Schere	0	-1	+1	-1
Stein	+1	0	-1	+1
Papier	-1	+1	0	-1

**Aufgabe:** Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien.

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = -1 \quad \text{vs} \quad \max_{y \in S_2} \min_{x \in S_1} u_2(x, y) = -1$$

- ☹ Es gilt die Summe  $u_1 + u_2 = 0$ , doch nur  $(-1) + (-1) = -2 < 0$ .

$$\max_{x \in [S_1]} \min_{y \in [S_2]} \bar{u}_1(x, y) = 0 \quad \text{vs} \quad \max_{y \in [S_2]} \min_{x \in [S_1]} \bar{u}_2(x, y) = 0$$

- ☺ Die Lücke verschwindet genau für Nash-Gleichgewichte!

**Lemma E2B:** Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Sei  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ein Nullsummenspiel, also  $u_1 + u_2 = 0$ . Zudem sei das Spiel endlich oder  $S_1 \times S_2$  kompakt und  $u$  stetig.

(0) Allgemein gilt „Maximin  $\leq$  Minimax“, also ausgeschrieben:

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \leq \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(1) Ist  $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$  ein Nash-Gleichgewicht, so gilt Gleichheit:

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(2) Angenommen, es gilt die ersuchte Gleichheit „Maximin = Minimax“. Wir wählen einen Min-Maximierer  $s_1 \in S_1$  und Max-Minimierer  $s_2 \in S_2$ :

$$v = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y),$$

$$v = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2).$$

Dann ist das Paar  $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$  ein Nash-Gleichgewicht.

**Beweis:** (0) Für alle  $x \in S_1$  und  $y \in S_2$  gilt:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &\stackrel{(a)}{\leq} u_1(x, y) \\ u_1(x, y) &\stackrel{(b)}{\leq} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\ \min_{y \in S_2} u_1(x, y) &\stackrel{(c)}{\leq} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\ \min_{y \in S_2} u_1(x, y) &\stackrel{(d)}{\leq} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\ \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) &\stackrel{(e)}{\leq} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \end{aligned}$$

- ☺ Wir führen inf/sup, hier min/max, in der richtigen Reihenfolge ein! Die Ungleichung (a) ist trivial. Wir nehmen rechts das Maximum über  $x$ , damit wird die rechte Seite höchstens größer, also gilt (b). Wir nehmen links das Minimum über  $y$ , damit wird die linke Seite höchstens kleiner, also gilt (c). Die Ungleichung (c) gilt somit für alle  $x \in S_1$  und  $y \in S_2$ ; dabei hängt allerdings die linke Seite nur noch von  $x$  ab und die rechte Seite nur noch von  $y$ . Hieraus folgen sofort (d) und (e).

(1) Für jedes Nash-Gleichgewicht  $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$  gilt:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) &\geq \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\ u_1(s_1, s_2) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) &\leq \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \leq u_1(s_1, s_2) \leq \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y)$$

Dank (0) gilt auch die umgekehrte Ungleichung, hieraus folgt Gleichheit.

(2) Dank der genannten Voraussetzungen gilt:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1(s_1, s_2) &\leq \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) = v \\ u_1(s_1, s_2) &\geq \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = v \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y)$$

Demnach ist  $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$  ein Nash-Gleichgewicht. QED

Hieraus folgen grundlegende Rechenregeln für Nullsummenspiele:

**Satz E2c:** Austauschregel für Nullsummenspiele

- (1) Dualität: Für unser Nullsummenspiel  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt genau dann „Minimax = Maximin“, wenn Nash-Gleichgewichte existieren.
- (2) Auszahlungsgleichheit: Je zwei Nash-Gleichgewichte  $(s_1, s_2)$  und  $(s_1^*, s_2^*)$  des Spiels  $u$  führen zum selben Ergebnis  $u_1(s_1, s_2) = u_1(s_1^*, s_2^*)$ .
- (3) Alle Nash-Gleichgewichte sind austauschbar: Sind  $(s_1, s_2)$  und  $(s_1^*, s_2^*)$  Nash-Gleichgewichte des Spiels  $u$ , dann auch  $(s_1, s_2^*)$  und  $(s_1^*, s_2)$ .
- (4) Sind  $S_1 \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und darauf  $u$  affin-linear, so ist NE(u) das Produkt zweier konvexer Mengen  $K_1 \subseteq S_1$  und  $K_2 \subseteq S_2$ .

- ☺ Die Aussagen (2) und (3) gelten für alle Nash-Gleichgewichte. Das ist eine nützliche Besonderheit von Nullsummenspielen. Es gibt Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele ohne Gleichgewichte, etwa *Matching Pennies* und *Schere-Stein-Papier* und viele weitere. Auch für diese sind die Aussagen (2) und (3) wahr, aber eben *leer*.

Gleichgewichte sind grundlegend. Gibt es sie immer? Ja, oft genug: Dies verdanken wir dem Existenzsatz E1E für Nash-Gleichgewichte. Hieraus folgt der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele:

**Satz E2D:** Minimax-Satz, John von Neumann 1928

Sei  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein endliches Nullsummenspiel, also  $u_1 + u_2 = 0$ , und  $\bar{u} : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dank E1E existiert ein Gleichgewicht  $(s_1^*, s_2^*) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ , und somit gilt

$$\text{val}_1(\bar{u}) := \max_{x \in \bar{S}_1} \min_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_1(x, y) = \bar{u}_1(s_1^*, s_2^*) = \min_{y \in \bar{S}_2} \max_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_1(x, y),$$

$$\text{val}_2(\bar{u}) := \max_{y \in \bar{S}_2} \min_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_2(x, y) = \bar{u}_2(s_1^*, s_2^*) = \min_{x \in \bar{S}_1} \max_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_2(x, y).$$

Das ist der Wert des Spiels  $\bar{u}$  für Spieler  $i$ . Es gilt  $\text{val}_1(\bar{u}) + \text{val}_2(\bar{u}) = 0$ .

☺ Diese Vereinfachung ist eine Besonderheit für Nullsummenspiele, oder allgemein Zwei-Personen-Spiele mit konstanter Summe: Sicherheitsstrategien sind optimal, sobald sich die Lücke schließt, also Min-Maximierer und Max-Minimierer denselben Wert ergeben.

☺ Dieser Wert ist das erwartete Ergebnis bei rationaler Spielweise. Mit diesem Satz begann die Theorie, als erstes substantielles Ergebnis: Jedem Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel wird so ein Wert zugeordnet.

Von Neumann bewies diesen Satz 1928 zunächst auf andere Weise. Nashs allgemeiner Existenzsatz eröffnete 1950 einen kürzeren Weg.

*I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved. As far as I can see, there could be no theory of games without that theorem.* (John von Neumann, 1953)

☺ Von Neumanns Ideen beeinflussten maßgeblich die Entdeckung der ersten Dualitätsprinzipien in der Linearen Optimierung. Wir werden dies im nächsten Kapitel genauer untersuchen.

**Definition E2E:** konstante Summe und strikt kompetitiv

Ein Spiel  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  hat **konstante Summe (Null)**, wenn es die Bedingung  $u_1 + \dots + u_n = \text{const}$  (bzw.  $= 0$ ) erfüllt.

Ein Zwei-Personen-Spiel  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist **strikt kompetitiv**, wenn für alle  $s, s' \in S$  die Äquivalenz  $u_1(s) < u_1(s') \iff u_2(s) > u_2(s')$  gilt.

Für **kompetitive Spiele** verlangen wir diese Äquivalenz nur für alle Strategievektoren  $s, s' \in S$ , die sich in einer Koordinate unterscheiden.

**Übung:** Konstante Summe  $\iff$  strikt kompetitiv  $\iff$  kompetitiv. Gilt das Minimax-Lemma E2B für kompetitive Spiele  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ? Wenn  $u$  kompetitiv ist, gilt dies dann auch für die Fortsetzung  $\bar{u}$ ? Hat  $u$  konstante Summe, dann auch  $\bar{u}$ . (Dies nutzen wir in E2D.)

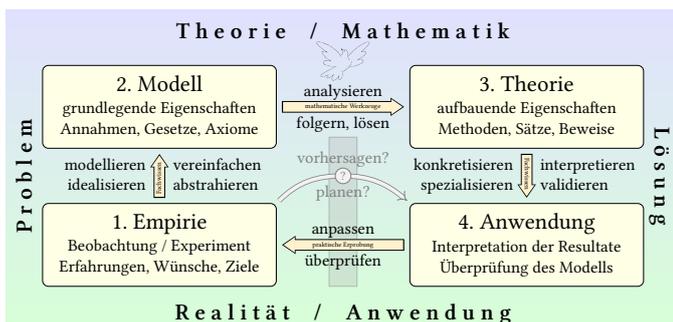
Kompetitive Spiele sind ein sehr spezieller aber durchaus wichtiger Fall. Es lohnt sich daher, hierzu spezielle Sätze und Techniken zu entwickeln. In vielen realistischen Situationen haben Spiele nicht konstante Summe und sind auch nicht kompetitiv. Nash-Gleichgewichte helfen allgemein!

**Beispiel:** Das Spiel *Schere-Stein-Papier* hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien. Auch der Minimax-Satz gilt nicht in reinen Strategien. In gemischten Strategien haben die Spieler viel mehr Möglichkeiten. Der Satz von Nash sagt die Existenz von Gleichgewichten voraus. Hier ist  $\frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$  das einzige Gleichgewicht.

**Aufgabe:** Prüfen Sie sorgfältig nach, dass dies ein Gleichgewicht ist. Wie zeigen Sie geschickt, dass dies das einzige Gleichgewicht ist? Hierbei hilft Ihnen die Austauschregel E2c für Nullsummenspiele.

**Aufgabe:** Untersuchen Sie ebenso alle bisher vorgestellten Spiele. Welche haben konstante Summe, welche sind (strikt) kompetitiv? Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte und vergleichen Sie diese beiderseitig mit Sicherheitsstrategien (also Min-Maximierern).

Alles Leben ist Problemlösen. (Sir Karl Popper, 1902–1994)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich! Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)

Wir erweitern das Spiel *Schere-Stein-Papier*. Beide Spieler haben nun zusätzlich die Strategie *Brunnen*. Die beiden Auszahlungsmatrizen sind:

	B	Schere	Stein	Papier	Brunnen
A					
Schere	0	0	+1	-1	+1
Stein	+1	-1	0	+1	-1
Papier	-1	+1	-1	0	+1
Brunnen	+1	-1	-1	+1	0

**Aufgabe:** Ist dies ein Nullsummenspiel? Was ist sein Wert? Sehen Sie ein Nash-Gleichgewicht dieses Spiels? gar alle?

**Lösung:** Die Strategie Brunnen dominiert schwach Stein. Wir streichen daher Stein und erhalten  $u' : S' \times S' \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit der reduzierten Strategiemenge  $S' = \{\text{Schere, Papier, Brunnen}\}$ . Dieses Spiel Schere-Papier-Brunnen ist **isomorph** zu *Schere-Stein-Papier*.

⚠ Isomorphie und Symmetrie vereinfachen unsere Analyse! Wir kennen daher das Gleichgewicht  $(s', s') \in \text{NE}(\bar{u}')$  mit

$$s' = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier} + \frac{1}{3} \cdot \text{Brunnen}$$

Der untenstehende Satz E2H garantiert  $\text{NE}(\bar{u}') \subseteq \text{NE}(\bar{u})$ , also ist  $(s', s')$  auch ein Nash-Gleichgewicht für *Schere-Stein-Papier-Brunnen*.

⚠ Das Spiel  $u$  könnte durchaus noch weitere Gleichgewichte haben. Das muss man jeweils genauer nachrechnen. Versuchen Sie es! Hierbei hilft Ihnen die Austauschregel E2c für Nullsummenspiele.

😊 Dies ist ein symmetrisches Nullsummenspiel, der Wert ist also 0. Zur Berechnung des Wertes genügt uns ein einziges Gleichgewicht, hier  $(s', s')$ . Alternativ impliziert bereits die Symmetrie den Wert 0.

**Definition E2F:** dominierte Strategien

Sei  $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$  ein strategisches Spiel und  $i \in I$  ein Spieler. Für je zwei seiner Strategien  $x, y \in S_i$  vergleichen wir die Funktionen

$$u_i(x; -), u_i(y; -) : S_{-i} \rightarrow R_i.$$

**Schwache Dominanz**  $x \leq^u y$  bedeutet  $u_i(x; s_{-i}) \leq u_i(y; s_{-i})$ , **starke Dominanz**  $x <^u y$  bedeutet  $u_i(x; s_{-i}) < u_i(y; s_{-i})$  jeweils für alle möglichen Gegenstrategien  $s_{-i} \in S_{-i}$ .

Für Teilmengen  $X, Y \subseteq S_i$  bedeutet Dominanz  $X \leq^u Y$  bzw.  $X <^u Y$ : Zu jedem  $x \in X$  existiert ein  $y \in Y$  mit  $x \leq^u y$  bzw.  $x <^u y$ .

Wir nennen  $x \in S_i$  **dominant in  $u$** , falls  $x \leq^u y$  für ein  $y \in S_i \setminus \{x\}$  gilt. Wir nennen  $y \in S_i$  **dominant in  $u$** , falls  $x \leq^u y$  für alle  $x \in S_i \setminus \{y\}$  gilt.

Wir schreiben  $D_i(u) := \{y \in S_i \mid S_i \setminus \{y\} <^u y\}$  und  $\text{DNE}(u) := \prod_{i \in I} D_i(u)$ . Ebenso für starke Dominanz und  $D_i^!(u) := \{y \in S_i \mid S_i \setminus \{y\} <^! y\}$

⚠ Es gilt  $\text{DNE}(u) \subseteq \text{NE}(u)$ , oft  $\text{DNE}(u) = \emptyset$ , selten  $\text{DNE}(u) = \text{NE}(u)$ .

Schwache und starke Dominanz sind häufig nützlich; dazwischen liegt: **Halbstarke Dominanz**  $x \leq^! y$  bedeutet  $u_i(x; s_{-i}) \leq u_i(y; s_{-i})$  für alle und  $u_i(x; s_{-i}) < u_i(y; s_{-i})$  für mindestens eine Gegenstrategie  $s_{-i} \in S_{-i}$ . Bei Mengen bedeutet Dominanz  $X \leq^! Y$  bzw.  $X <^! Y$ : Es existiert eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $x \leq^! f(x)$  bzw.  $x <^! f(x)$  für alle  $x \in X$ .

Die (schwach) dominanten Strategien  $s_i \in D_i(u)$  bedeuten:  $s_i$  ist immer eine beste Antwort, gegen alle  $s_{-i} \in S_{-i}$ .

Eine stark dominante Strategie  $s_i \in D_i^!(u)$  bedeutet:  $s_i$  ist die eindeutige beste Antwort, gegen alle  $s_{-i} \in S_{-i}$ .

😊 Schwache Dominanz  $x \leq^u y$  bedeutet: Ein rationaler Spieler kann seine Strategie  $x$  jederzeit ersetzen durch eine mindestens ebenso gute Alternative, etwa  $y$ . Er kann  $x$  spielen, er kann es aber auch vermeiden.

😊 Starke Dominanz  $x <^u y$  bedeutet: Ein rationaler Spieler muss seine Strategie  $x$  jederzeit ersetzen durch eine strikt bessere Alternative, etwa  $y$ . Er kann nicht  $x$  spielen, er wird dies in jedem Falle vermeiden.

**Satz E2G:** Streichung dominierter Strategien, reiner Fall

Gegeben sei ein Spiel  $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$  und  $S_i = S'_i \sqcup D_i$  für  $i \in I$ . Löschung von  $D_i$  ergibt die Einschränkung  $u' : \prod_{i \in I} S'_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$ :

(1) Aus starker Dominanz  $S'_i >^u D_i$  folgt  $\text{NE}(u') = \text{NE}(u)$ .

(2) Aus schwacher Dominanz  $S'_i \geq^u D_i$  folgt  $\text{NE}(u') \subseteq \text{NE}(u)$ .

**Beweis:** (2) Sei  $s \in \text{NE}(u')$ , also  $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x' \in S'_i} u_i(x'; s_{-i})$ . Dies ist gleich  $\max_{x \in S_i} u_i(x; s_{-i})$  dank  $S'_i \geq^u D_i$ , also  $s \in \text{NE}(u)$ .

(1) Sei  $s \in \text{NE}(u)$ , also  $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in S_i} u_i(x; s_{-i})$ .

Aus  $S'_i >^u D_i$  folgt  $s_i \in S'_i$ . Also  $s \in S'$  und  $s \in \text{NE}(u')$ . □

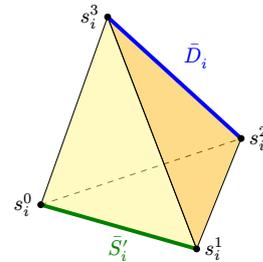
Fortsetzung: Zu  $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$  betrachten wir  $\bar{u} : \prod_{i \in I} \bar{S}_i \rightarrow \mathbb{R}^I$ .

Gilt (starke bzw. schwache) Dominanz E2F bezüglich aller reinen Gegenstrategien  $s_{-i} \in S_{-i}$ , so auch für alle gemischten  $\bar{s}_{-i} \in \bar{S}_{-i}$ .

Aus  $x_0 \leq^u y_0, \dots, x_n \leq^u y_n$  folgt  $\sum_k p_k x_k \leq^u \sum_k p_k y_k$  für alle  $p \in \Delta^n$ .

Gilt für ein  $k$  zudem  $x_k <^u y_k$  und  $p_k > 0$ , so folgt  $\sum_k p_k x_k <^u \sum_k p_k y_k$ .

Geometrisch sieht die Löschung gemischter Strategien etwa so aus:



In diesem Beispiel sei  $S'_i = \{s_i^0, s_i^1\}$  und  $D_i = \{s_i^2, s_i^3\}$ . Wir können nicht nur die Ecken  $s_i^2$  und  $s_i^3$  löschen, sondern müssen auch alle gemischten Strategien löschen, die diese Ecken in ihrem Träger nutzen, also  $\bar{S}_i \setminus S'_i$ .

**Satz E2H:** Streichung dominierter Strategien, gemischter Fall

Sei  $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^I$  und  $u' : \prod_{i \in I} S'_i \rightarrow \mathbb{R}^I$  mit  $S_i = S'_i \sqcup D_i$ . Dann gilt

$$\bar{S}_i = \bar{S}'_i * \bar{D}_i = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1], x \in \bar{S}'_i, y \in \bar{D}_i\}.$$

Die Differenz der gemischten Strategiemengen ist demnach

$$\bar{S}_i \setminus \bar{S}'_i = \{(1-t)x + ty \mid t \in ]0, 1], x \in \bar{S}'_i, y \in \bar{D}_i\}.$$

(1) Aus  $\bar{S}'_i >^u D_i$  folgt  $\bar{S}'_i >^u \bar{S}_i \setminus \bar{S}'_i$  wie zuvor erklärt.

Das bedeutet: Stark dominierte Strategien von  $u$  kommen in keinem Nash-Gleichgewicht von  $\bar{u}$  vor. Bei ihrer Streichung gilt  $\text{NE}(\bar{u}') = \text{NE}(\bar{u})$ .

(2) Aus  $\bar{S}'_i \geq^u D_i$  folgt  $\bar{S}'_i \geq^u \bar{S}_i \setminus \bar{S}'_i$  wie zuvor erklärt.

Bei Streichung schwach dominierter Strategien gilt  $\text{NE}(\bar{u}') \subseteq \text{NE}(\bar{u})$ . Im Allgemeinen können dabei Nash-Gleichgewichte verloren gehen.

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussagen zur Übung sorgfältig nach!

**Beweis:** (2) Sei  $s \in \text{NE}(\bar{u}')$ , also  $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x' \in S'_i} u_i(x'; s_{-i})$ .

Für jedes  $x \in \bar{S}_i$  gilt  $x = (1-t)s'_i + ts$  mit  $t \in [0, 1]$ ,  $s'_i \in \bar{S}'_i$  und  $s \in \bar{D}_i$ .

Es existiert  $s' \in \bar{S}'_i$  mit  $s' \geq^u s$ , also  $x \leq^u s' := (1-t)s'_i + ts' \in \bar{S}'_i$ .

Hieraus folgt  $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} u_i(x; s_{-i})$ , also  $s \in \text{NE}(\bar{u})$ .

(1) Sei  $s \in \text{NE}(\bar{u})$ , also  $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} u_i(x; s_{-i})$  für jedes  $i \in I$ . Wir haben  $s_i = (1-t)s'_i + ts$  mit  $t \in [0, 1]$ ,  $s'_i \in \bar{S}'_i$  und  $s \in \bar{D}_i$ . Es existiert  $s' \in \bar{S}'_i$  mit  $s' \geq^u s$ . Für  $x' = (1-t)s'_i + ts'$  wäre  $x' >^u s_i$  oder  $t = 0$ .

Also gilt  $t = 0$  und somit  $s_i = s'_i \in \bar{S}'_i$ . Das zeigt  $s \in \text{NE}(\bar{u}')$ .

😊 Die Sachlage ist einfach. Warum ist die Notation so detailverliebt? Damit alles klar und einfach wird, müssen wir sorgsam argumentieren!

😊 Das Erkennen und Streichen von (strikt) dominierten Strategien vereinfacht die Spielanalyse. Das ist überaus nützlich und meist leicht, doch die Feinheiten sind subtil und müssen sauber ausgeführt werden. Ich betone dies, weil es erfahrungsgemäß oft falsch angewendet wird.

- ☺ Anschaulich gesagt: (2) Beim Erweitern von  $u'$  zu  $u$  nehmen wir schwach dominierte Strategien hinzu. Diese erhöhen offensichtlich nicht das Maximum für den Spieler  $i \in I$ , also bleiben Gleichgewichte des kleinen Spiels  $u'$  auch Gleichgewichte des großen Spiels  $u$ .
- (1) Stark dominierte Strategien kommen in keinem Gleichgewicht vor. Wir können sie getrost streichen oder hinzufügen, auch hinzumischen.
- ☺ Streichung dominierter Strategien vereinfacht das Spiel  $u$  zu  $u'$ . Das hilft bei der Suche nach einem bzw. allen Gleichgewichten:
- (2) Die Streichung schwach dominierter Strategien löscht vielleicht Gleichgewichte. Die Inklusion  $NE(u') \subseteq NE(u)$  hingegen gilt immer: Haben wir also ein Gleichgewicht für  $u'$  gefunden, so bleibt dies für  $u$ . Das genügt, wenn wir nur *irgendein* Gleichgewicht von  $u$  finden wollen.
- (1) Die Streichung stark dominierter Strategien ändert nichts an den Gleichgewichten: Genau das garantiert unsere obige Rechnung.
- ☺ Dies können wir iterieren, bis keine Streichungen mehr möglich sind. Hierzu benötigen wir (wie immer) Rationalität entsprechend hoher Stufe!

- $\mathcal{R}_1$ : Wer von Ihnen weiß, was „Stufen der Rationalität“ bedeutet?
- $\mathcal{R}_2$ : Wer von Ihnen weiß, dass alle anderen das ebenfalls wissen?
- $\mathcal{R}_3$ : Wer von Ihnen weiß, dass alle wissen, dass alle das wissen? ...

◆ **Definition A2A:** Stufen der Rationalität

Unter (**unbeschränkter**) **Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

- $\mathcal{R}_0$ : Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.
- $\mathcal{R}_1$ : Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.
- $\mathcal{R}_2$ : Es gilt die vorige Aussage  $\mathcal{R}_1$ , und jeder Spieler weiß dies.
- $\mathcal{R}_3$ : Es gilt die vorige Aussage  $\mathcal{R}_2$ , und jeder Spieler weiß dies.
- etc... Genauer definieren wir für jedes  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  die Aussage
- $\mathcal{R}_n$ : Es gilt die Aussage  $\mathcal{R}_{n-1}$ , und jeder Spieler weiß dies.
- $\mathcal{R}_\infty$ : Es gilt die Aussage  $\mathcal{R}_n$  für jede Stufe  $n \in \mathbb{N}$ .

☺ Wir nennen dies *gemeinsames Wissen*, engl. *common knowledge*. Beantworten Sie erneut die obigen Fragen: haben wir  $\mathcal{R}_\infty$  hergestellt?

**Aufgabe:** Konstruieren Sie ein Spiel  $u$ , bei dem die Streichung einer schwach dominierten Strategie *alle* Nash-Gleichgewichte vernichtet.  
**Lösung:** Wir beginnen mit einem Teilspiel  $u'$ , etwa *Matching Pennies*:

	B	$b_0$	$b_1$	$b_2$
A				
$a_0$	-1	+1	-1	-2
$a_1$	+1	-1	+1	+2

Die Strategie  $b_1$  dominiert schwach die neue Strategie  $b_2$  von Spieler B. Die Auszahlungen für Spieler A sind beliebig, wir wählen sie geschickt. Die Strategie  $(a_1, b_2)$  ist ein Nash-Gleichgewicht des Spiels  $u$ . Beim Streichen der dominierten Strategie  $b_2$  wird es vernichtet. Das Spiel  $u'$  hat gar keine Gleichgewichte,  $\bar{u}'$  hingegen schon. Hier gilt  $NE(\bar{u}') \subsetneq NE(\bar{u})$ , im Einklang mit obigem Satz E2H.

**Aufgabe:** Finden Sie alle reinen Gleichgewichte, dann alle gemischten.

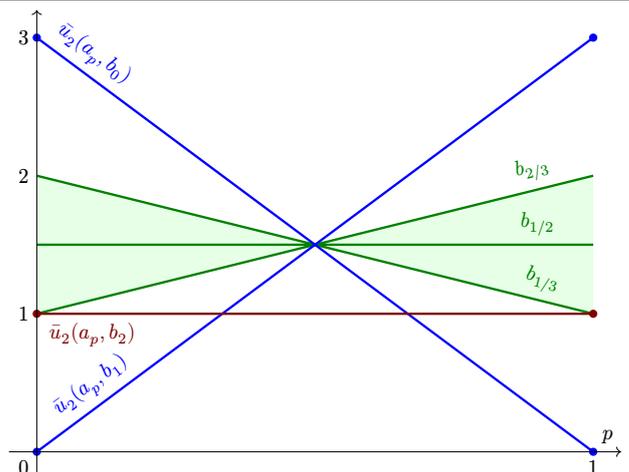
	B	$b_0$	$b_1$	$b_2$
A				
$a_0$	4	1	3	2
$a_1$	3	2	1	0

**Lösung:** Die reinen Gleichgewichte finden wir durch Hinsehen: Hier ist nur  $(a_0, b_1)$  ein Nash-Gleichgewicht, es ist sogar strikt. Die Strategie  $b_1$  dominiert stark  $b_2$ . Im Teilspiel  $u'$  dominiert  $a_0$  stark  $a_1$ . Im Teilspiel  $u''$  dominiert  $b_1$  stark  $b_0$ . Schließlich bleibt nur das triviale Teilspiel  $u'''$  bestehend aus  $(a_0, b_1)$ . Das ist das einzige Gleichgewicht!  
 ⚠ Es ist eine recht seltene Ausnahme, dass sich Spiele so einfach lösen lassen durch iterierte Löschung von (stark) dominierten Strategien. Meist lassen sich nur wenige oder gar keine Strategien ausschließen. Wenn es jedoch möglich ist, bietet dies eine nützliche Vereinfachung.

**Aufgabe:** Gibt es Spiele  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit einer Strategie  $s_2 \in S_2$ , die im Spiel  $u$  nicht dominiert wird, wohl aber in  $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ?  
**Lösung:** Ja, das ist möglich. Wir konstruieren ein einfaches Beispiel:

	B	$b_0$	$b_1$	$b_2$
A				
$a_0$	*	3	0	1
$a_1$	*	0	3	1

Die Strategie  $b_2$  wird von keiner reinen Strategie dominiert: weder  $b_0$  noch  $b_1$ . Dies gelingt jedoch der gemischten Strategie  $\frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}b_1 >_{\frac{1}{2}} b_2$ . (Die Auszahlungen für Spieler 1 sind unerheblich und nicht gezeigt.) Starke Dominanz  $b_t := (1-t)b_0 + tb_1 >_{\frac{1}{2}} b_2$  gilt für alle  $1/3 < t < 2/3$ , und immerhin noch schwache Dominanz in den Fällen  $t \in \{1/3, 2/3\}$ .



**Rationalisierbare Strategien** E233

Rationalität: Eine stark dominierte Strategie sollte nie gespielt werden. Ebensovienig eine Strategie, die nie beste Antwort ist. Ist beides dasselbe?

**Definition E21:** Rationalisierbarkeit

Die Strategie  $s_i \in S_i$  heißt **rationalisierbar** oder **mindestens einmal beste Antwort**, wenn sie beste Antwort ist auf mind. eine (korrelierte) Gegenstrategie  $s_{-i} \in [S_{-i}]$ , also  $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} \bar{u}_i(x; s_{-i})$  erfüllt.

Jedes Nash-Gleichgewicht  $s \in S$  besteht aus rationalisierbaren  $s_i \in S_i$ .

**Satz E2j:** Rationalisierbar ist das Gegenteil von stark dominiert. Genau dann ist  $s_i^*$  stark dominiert, wenn  $s_i^*$  nie beste Antwort ist.

**Beweis:** Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ ist klar: Dominiert  $s_i \in \bar{S}_i$  stark  $s_i^* \in S_i$ , so gilt  $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$  für alle Gegenstrategien  $s_{-i} \in [S_{-i}]$ . Die Implikation „ $\Leftarrow$ “ ist bemerkenswert: Zu jedem  $s_{-i} \in [S_{-i}]$  existiert ein geeignetes  $s_i \in \bar{S}_i$ , das die Ungleichung  $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$  erfüllt. Wir suchen stärker ein  $s_i \in S_i$  für alle  $s_{-i} \in [S_{-i}]$ . „**Einer für alle!**“

**Rationalisierbare Strategien** E234

Wir konstruieren hierzu aus  $u$  ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel  $v : S_1^* \times S_2^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Strategiemengen  $S_1^* = S_1 \setminus \{s_1^*\}$  und  $S_2^* = S_2$  und der Auszahlungsfunktion  $v_1(s_1, s_2) = u_1(s_1; s_2) - u_1(s_1^*; s_2)$ . Sei  $\bar{v} : \bar{S}_1^* \times \bar{S}_2^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Fortsetzung auf gemischte Strategien. Im Spiel  $u$  ist  $s_1^*$  keine beste Antwort auf  $s_{-1}$ , wenn

$$\max_{s_1 \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_1, s_{-1}) > 0.$$

Im Spiel  $u$  ist  $s_1^*$  demnach nie beste Antwort, wenn

$$\min_{s_{-1} \in \bar{S}_2^*} \max_{s_1 \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_1, s_{-1}) > 0.$$

Nach dem Hauptsatz E2d gilt Minimax = Maximin, also

$$\max_{s_1 \in \bar{S}_1^*} \min_{s_{-1} \in \bar{S}_2^*} \bar{v}_1(s_1, s_{-1}) > 0.$$

Es existiert demnach ein  $s_i \in \bar{S}_i^*$  mit  $\min_{s_{-i} \in \bar{S}_{-i}^*} \bar{v}_i(s_i, s_{-i}) > 0$ . Das bedeutet  $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$  für alle  $s_{-i} \in \bar{S}_{-i}$ . □

**Rationalisierbare Strategien** E235  
Erläuterung

Für Spiele mit nur zwei Spielern ist die Konstruktion klar und natürlich. Ab drei Spielern müssen wir etwas genauer hinschauen: Jeder Spieler kann (optimistisch-naiv) all seine Gegenspieler als unabhängig annehmen, oder aber (pessimistisch-paranoid) all seine Gegenspieler als „Achse des Bösen“ zusammenfassen. Für die Strategiemengen bedeutet das:

$$[S_{-i}] = [S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n]$$

$$\supseteq \bar{S}_{-i} = [S_1] \times \dots \times [S_{i-1}] \times [S_{i+1}] \times \dots \times [S_n]$$

Wir gehen in Definition E21 und Satz E2j) vom *worst case* aus, dass sich alle Gegenspieler zu einer Koalition gegen Spieler  $i$  verbünden können. Diese *korrelierten Strategien* untersuchen wir später noch genauer. Sind alle Gegenspieler unabhängig, so ersetzen wir die konvexe Menge  $[S_{-i}]$  durch die nicht-konvexe Menge  $\bar{S}_{-i} \subsetneq [S_{-i}]$ ; die oben bewiesene Implikation gilt dann im Allgemeinen nicht mehr (siehe Übungen).

**Rationalisierbare Strategien** E236  
Erläuterung

Die Begriffe „stark dominiert“ und „nie beste Antwort“ klingen ähnlich, doch der genaue logische Zusammenhang ist raffiniert und faszinierend. Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ ist klar, doch die Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ ist bemerkenswert und keineswegs selbstverständlich. Wir erweitern hier zu gemischte Strategien mit dem Vorteil, dass nun die Dualitätslücke verschwindet! Erst so können wir die ersehnte Äquivalenz beider Begriffe beweisen.

- ☺ Sie suchen *alle* Nash-Gleichgewichte und wollen vereinfachen? Dann streichen Sie guten Gewissens alle *stark* dominierten Strategien. Das sind dank obigem Satz genau solche, die niemals beste Antwort sind.
- ☺ Sie suchen nur *ein* Nash-Gleichgewicht und wollen vereinfachen? Dann können Sie zudem noch *schwach* dominierte Strategien streichen.
- ☺ Rekursiv erklären wir so die iterierte Löschung (stark) dominierter Strategien und ebenso Rationalisierbarkeit der Stufe 1, 2, 3, ... Das ist wie oben gesehen oft nützlich zur Vereinfachung / Reduktion eines Spiels.

**Quantoren tauschen? Aber richtig!** E237

Satz und Beweis erinnern uns an das Problem des Quantorentauschs!

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} p(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} p(x, y)$$

Sei  $p : X \times Y \rightarrow \{0=\text{falsch}, 1=\text{wahr}\}$  :  $(x, y) \mapsto p(x, y)$  eine Aussageform.

$X \ni x \mapsto \forall y \in Y : p(x, y)$	entspricht	$x \mapsto \min_{y \in Y} p(x, y)$
$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x, y)$	entspricht	$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} p(x, y)$
$Y \ni y \mapsto \exists x \in X : p(x, y)$	entspricht	$y \mapsto \max_{x \in X} p(x, y)$
$\forall y \in Y : \exists x \in X : p(x, y)$	entspricht	$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} p(x, y)$

Je zwei Allquantoren vertauschen, ebenso je zwei Existenzquantoren.

$$\forall x \in X : \forall y \in Y : p(x, y) \iff \forall y \in Y : \forall x \in X : p(x, y)$$

$$\exists x \in X : \exists y \in Y : p(x, y) \iff \exists y \in Y : \exists x \in X : p(x, y)$$

Wir dürfen Allquantoren vorziehen (E2b), aber nicht Existenzquantoren:

$$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x, y) \implies \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x, y)$$

**Quantoren tauschen? Aber richtig!** E238  
Erläuterung

Im Allgemeinen können wir Existenzquantoren nicht nach vorne ziehen! Einen Existenzquantor nach vorne ziehen *stärkt* die Aussage, ihn nach hinten zu ziehen *schwächt* die Aussage, sie wird leichter zu beweisen.

**Gegenbeispiel**, zunächst nur informell, dafür leicht zu verstehen: Sei  $p(x, y) =$  „ $x$  ist Mutter von  $y$ “. Zu *jedem* Menschen existiert eine Mutter, aber es existiert keine Mutter zu *allen* Menschen gemeinsam.

**Formales Gegenbeispiel:** Über  $(\mathbb{Z}, <)$  betrachten wir  $p(x, y) = (x < y)$ :

$$\forall y : \exists x : x < y \quad \text{also} \quad \forall y \left( \overbrace{\exists x (x < y)}^{q(y)} \right)$$

$$\exists x : \forall y : x < y \quad \text{also} \quad \exists x \left( \underbrace{\forall y (x < y)}_{r(x)} \right)$$

Die erste Aussage ist wahr, die zweite falsch! Ausführlich: Es gilt  $q(y)$  für *jedes*  $y \in \mathbb{Z}$ , also ist die erste Aussage *wahr* über  $(\mathbb{Z}, <)$ . Es gilt  $r(x)$  für *kein*  $x \in \mathbb{Z}$ , also ist die zweite Aussage *falsch* über  $(\mathbb{Z}, <)$ .

Die Quantoren  $\forall$  und  $\exists$  stehen immer *vor* der Aussage, daher gilt die Klammerung *von rechts nach links*, ebenso für min und max.

**Quantoren tauschen? Aber richtig!** E239

Alle für einen  
und  
einer für alle?

Einer für alle  
impliziert  
für jeden einen!

**Quantoren tauschen? Aber richtig!** E240  
Erläuterung

Ich kann mir die folgende, etwas wilde Assoziation nicht verkneifen.

„Alle für einen, einer für alle“ heißt es in Alexandre Dumas’ berühmtem Roman *Die drei Musketiere* aus dem Jahre 1844. Im französischen Original *Les Trois Mousquetaires* heißt das Motto: „Un pour tous ! Tous pour un !“ Noch dramatischer ausgeführt ist die englische Übersetzung:

*All for one and one for all,  
united we stand, divided we fall.*

Held:innen der Mathematik! In lyrischer Verkleidung schrieb Dumas die Quantorenlogik in die Weltliteratur und die Herzen vieler Leser:innen.

„Unus pro omnibus, omnes pro uno“ heißt die lateinische Redewendung. Ab den 1830er Jahren verbreitete sie sich als inoffizieller Wahlspruch der Schweizer Eidgenossenschaft. Eine antike Quelle ist nicht belegt.

Die wechselnde Reihung scheint dem Klang zu folgen, nicht der Logik. William Shakespeare nutzte die englische Formulierung „One for all, or all for one“ bereits 1594. All is well that... begins with Shakespeare.

(o) Spiele  $u : S_I \rightarrow R_I$  und  $u' : S_I \rightarrow R'_I$  sind **ordnungsäquivalent**, falls

$$u_i(x_i; s_{-i}) \leq_i u_i(y_i; s_{-i}) \iff u'_i(x_i; s_{-i}) \leq'_i u'_i(y_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler  $i \in I$  und alle Aktionen  $x_i, y_i \in S_i$  bei festem  $s_{-i} \in S_{-i}$ . Das erhält individuelle Maximierung, also auch Nash-Gleichgewichte:

$$(o) \implies \text{Arg max}_{x_i \in S_i} u_i(x_i; s_{-i}) = \text{Arg max}_{x_i \in S_i} u'_i(x_i; s_{-i})$$

(a) Zwei Spiele  $u, u' : S_I \rightarrow \mathbb{R}_I$  sind **(schwach) affin äquivalent**, falls

$$u'_i(x_i; s_{-i}) = w_i u_i(x_i; s_{-i}) + c_i(s_{-i})$$

mit positiver Skalierung  $w_i \in \mathbb{R}_{>0}$  und additiver Konstante  $c_i(s_{-i}) \in \mathbb{R}$ . Das ist verträglich mit individuellen Konvexkombinationen in  $[S_i] \supseteq S_i$ .

(e) Sie sind **exakt äquivalent**, falls zudem  $w_i = 1$  für alle  $i \in I$  gilt.

$$u'_i(x_i; s_{-i}) = u_i(x_i; s_{-i}) + c_i(s_{-i})$$

Wir schreiben dann  $u \stackrel{\circ}{\equiv} u'$  bzw.  $u \stackrel{\circ}{\equiv} u'$  bzw.  $u \stackrel{\circ}{\equiv} u'$ , kurz  $u \equiv u'$ .

Ordnungsäquivalenz bedeutet, aus Sicht jedes Spielers  $i \in I$ , dass alle Resultate  $u_i(x_i, s_{-i}) \leftarrow x_i \mapsto u'_i(x_i, s_{-i})$  in derselben Ordnung auftreten. Dabei wird das gegnerische Strategiebündel  $s_{-i} \in S_{-i}$  festgehalten; diese Äquivalenz nennen wir daher auch (schwach) monoton.

Meist betrachten wir Auszahlungen in den reellen Zahlen  $R_i = \mathbb{R}$ . In diesem Falle können wir strenger affine Äquivalenz betrachten. Da wir  $w_i > 0$  verlangen, ist dies immer eine Ordnungsäquivalenz. Affine Äquivalenz ist der passende Begriff für affine Fortsetzung:

**Aufgabe:** Zeigen Sie  $u \stackrel{\circ}{\equiv} u' \implies \bar{u} \stackrel{\circ}{\equiv} \bar{u}'$  und  $u \stackrel{\circ}{\equiv} u' \implies \bar{u} \stackrel{\circ}{\equiv} \bar{u}'$ .

**Lösung:** Für  $\bar{x}_i = \sum_k p_k x_i^k \in [S_i]$  und  $\bar{s}_{-i} = \sum_\ell q_\ell s_{-i}^\ell \in [S_{-i}]$  gilt

$$\begin{aligned} \bar{u}'_i(\bar{x}_i; \bar{s}_{-i}) &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_k \sum_\ell p_k q_\ell u'_i(x_i^k; s_{-i}^\ell) \\ &\stackrel{\text{Aff}}{=} \sum_k \sum_\ell p_k q_\ell [w_i u_i(x_i^k; s_{-i}^\ell) + c_i(s_{-i}^\ell)] \\ &\stackrel{\text{Aff}}{=} w_i [\sum_k \sum_\ell p_k q_\ell u_i(x_i^k; s_{-i}^\ell)] + \sum_\ell q_\ell c_i(s_{-i}^\ell) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} w_i \bar{u}_i(\bar{x}_i; \bar{s}_{-i}) + \bar{c}_i(\bar{s}_{-i}). \end{aligned}$$

Vorgelegt seien zwei Spiele  $u : S_I \rightarrow R_I$  und  $u' : S'_I \rightarrow R'_I$ . **Teilspiel**  $u \subseteq u'$  bedeutet Einschränkung  $u = u'|_{S'_I}$  auf  $S_i \subseteq S'_i$  und  $(R_i, \leq_i) \subseteq (R'_i, \leq'_i)$ .

In Worten bedeutet das, aus dem Spiel  $u'$  entsteht das Teilspiel  $u$  durch Einschränkung der Strategiemenge  $S'_i$  auf die Teilmenge  $S_i$  und der Ergebnismenge  $R'_i$  auf die Teilmenge  $R_i$  für jeden Spieler  $i \in I$ .

$$\begin{array}{ccc} I & \prod_{i \in I} S_i = S_I & \xrightarrow{u} R_I = \prod_{i \in I} R_i \\ \parallel \text{id} & \downarrow g & \downarrow h \\ J & \prod_{j \in J} S'_j = S'_J & \xrightarrow{u'} R'_J = \prod_{j \in J} R'_j \end{array}$$

☺ Ein Morphismus ist allgemein eine „strukturerhaltende Abbildung“. Ist das auch für Spiele sinnvoll? Wir beginnen konkret mit Teilspielen.

Wir nutzen die bequeme Schreibweise  $\prod_{i \in I} S_i := S_I \xrightarrow{u} R_I := \prod_{i \in I} R_i$ . Im Spezialfall  $S_i = M$  für alle  $i \in I$  ist  $S_I = M^I$  die übliche Potenz.

Allgemein erlauben wir Teilmengen  $S_i \subseteq M$  und erhalten  $S_I \subseteq M^I$ . Ebenso schreiben wir  $R_I = \prod_{i \in I} R_i$ . Meist gilt  $R_i \subseteq \mathbb{R}$ , also  $R_I \subseteq \mathbb{R}^I$ .

Teilspiele begegnen uns im Folgenden recht häufig. Sie entstehen ganz natürlich immer und überall dort, wo wir die Strategien einschränken, also mögliche Aktionen oder Optionen auf eine Teilmenge reduzieren.

**Aufgabe:** Aus  $u \subseteq u'$  folgt  $\text{NE}(u) \supseteq \text{NE}(u') \cap S_I$ , aber i.A. nicht „ $\subseteq$ “.

**Lösung:** Sei  $s \in S_I$ . Für jeden Spieler  $i \in I$  gilt:

$$\begin{aligned} s \in \text{NE}_i(u') &\stackrel{\text{Def}}{\iff} s_i \in \text{Arg max}_{x_i \in S'_i} u'_i(x_i; s_{-i}) \\ &\stackrel{\text{Teilspiel}}{\implies} s_i \in \text{Arg max}_{x_i \in S_i} u_i(x_i; s_{-i}) \stackrel{\text{Def}}{\iff} s \in \text{NE}_i(u) \end{aligned}$$

Das bedeutet  $\text{NE}_i(u) \supseteq \text{NE}_i(u') \cap S_I$ . Daraus folgt die Behauptung:

$$\text{NE}(u) = \bigcap_{i \in I} \text{NE}_i(u) \supseteq \bigcap_{i \in I} \text{NE}_i(u') \cap S_I = \text{NE}(u') \cap S_I$$

Die Umkehrung „ $\subseteq$ “ gilt offensichtlich nicht: Sei  $u : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$ . Wir können alle Nash-Gleichgewichte von  $u$  zerstören, indem wir jedem Spieler  $i \in I$  eine neue Strategie  $s'_i \notin S_i$  geben, also  $S'_i := S_i \cup \{s'_i\}$ , und eine neue maximale Auszahlung  $r'_i \notin R_i$ , also  $R'_i := R_i \cup \{r'_i\}$  mit  $R_i < r'_i$ . Wir setzen  $u$  fort zu  $u'$  mit  $u'_i(s'_i; -) = r'_i$ . Damit gilt  $\text{NE}(u') = \{s'\}$ .

☺ Wie vergleichen wir zwei Spiele  $u : S_I \rightarrow R_I$  und  $u' : S'_I \rightarrow R'_I$ ? Hierfür sind Morphismen von Spielen der passende Begriff:

$$\begin{array}{ccc} I & \prod_{i \in I} S_i = S_I & \xrightarrow{u} R_I = \prod_{i \in I} R_i \\ \downarrow f & \downarrow g & \downarrow h \\ J & \prod_{j \in J} S'_j = S'_J & \xrightarrow{u'} R'_J = \prod_{j \in J} R'_j \end{array}$$

**Definition E2k:** Spielmorphismus  $u \rightarrow u'$

Ein **Spielmorphismus**  $(f, g, h) : u \rightarrow u'$  erfüllt  $h \circ u = u' \circ g$ .

- Die Spielerabbildung  $f : I \rightarrow J$  ist surjektiv (meist bijektiv): Der Zielspieler  $j \in J$  wird von der Koalition  $f^{-1}(j) \subseteq I$  gesteuert.
- Die Aktionsabbildung  $g : S_I \rightarrow S'_J : s = (s_i)_{i \in I} \mapsto s' = (s'_j)_{j \in J}$  definiert den Steuermechanismus  $s'_j = g_j(s_i)_{i \in f^{-1}(j)}$  für jeden Zielspieler  $j \in J$ .
- Die Resultatsabbildung  $h : R_I \rightarrow R'_J : r = (r_i)_{i \in I} \mapsto r' = (r'_j)_{j \in J}$  mit  $r'_j = h_j(r_i)_{i \in f^{-1}(j)}$  ist strikt monoton für alle  $i \in I$  und  $j = f(i)$ .

Wir haben oben den konkreten Fall von Teilspielen vorangestellt: Für jedes Teilspiel  $u \subseteq u'$  gilt  $(f, g, h) : u \hookrightarrow u'$  mit  $I = J$  und  $f = \text{id}$  sowie  $g_i = \text{inc} : S_i \hookrightarrow S'_i$  und  $h_i = \text{inc} : R_i \hookrightarrow R'_i$  für jeden Spieler  $i \in I$ .

Allgemein können wir Spieler permutieren, das heißt, wir erlauben statt  $f = \text{id}$  nun beliebige Bijektionen  $f : I \cong J$ . Im einfachsten Fall gilt für jeden Startspieler  $i \in I$  und den zugehörigen Zielspieler  $j = f(i)$  dann  $S_i = S'_j$  und  $g_j = \text{id}$  sowie  $R_i = R'_j$  und  $h_j = \text{id}$ . Das bedeutet, nur die Spieler werden permutiert / umbenannt, sonst bleibt alles unverändert.

Vom Startspieler  $i \in I$  zum Zielspieler  $j = f(i)$  können auch Strategien permutiert werden, ebenso Resultate. Allgemein erlauben wir daher Abbildungen  $g_j : S_i \rightarrow S'_j$  und  $h_j : (R_i, \leq_i) \rightarrow (R'_j, \leq'_j)$  strikt monoton. Diese Daten zusammen definieren den Morphismus  $(f, g, h) : u \rightarrow u'$ .

Oft wollen wir die Auszahlungen nicht ändern, in diesem Fall arbeiten wir mit  $R_i = R'_j$  und  $h_j = \text{id}$ . Meist betrachten wir Auszahlungen in den reellen Zahlen, daher bietet sich  $R_i = R'_j = \mathbb{R}$  und  $h_j = \text{id}_{\mathbb{R}}$  an.

Bijektionen  $(f, g, h) : u \cong u'$  untersuchen wir anschließend genauer als Symmetrien; diese Sichtweise ist naheliegend und häufig nützlich. Aus mathematischer Neugier (und guten Erfahrungen mit Kategorien) fragen wir mutig ganz allgemein: Was ist ein Spielmorphismus?

Für Morphismen erlauben wir uns die Freiheit, nicht nur Bijektionen  $f : I \cong J$  zu betrachten, sondern allgemeiner Surjektionen  $f : I \twoheadrightarrow J$ : Jeder Zielspieler  $j \in J$  wird gesteuert durch die Koalition  $K = f^{-1}(j)$  vermöge eines geeigneten Steuermechanismus  $g_j : s \mapsto s'_j = g_j(s_K)$ .

**Beispiel:** Als typische Anwendung denken wir an eine Zerlegung von  $I$  gemäß  $I = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_\ell$  in Koalitionen (Nationen, Firmen, Gruppen, ...). Das detaillierte Spiel  $u : S_I \rightarrow R_I$  reduzieren wir zu  $u' : S'_J \rightarrow R'_J$  mit  $J = \{1, \dots, \ell\}$ , indem wir vereinfachen, zusammenfassen, vergrößern.

Wie jede Koalition intern ihre Entscheidungen trifft, regelt die Abbildung  $g_j : s \mapsto s'_j = g_j(s_K)$ . Auch die Auszahlung  $h_j : r \mapsto r'_j = h_j(r_K)$  ist für  $K = f^{-1}(j)$  gemeinsam, reell etwa  $h_j(r_K) = \sum_{i \in K} r_i$  in  $(\mathbb{R}, +, \leq)$ .

Warum fordern wir eine Surjektion  $f : I \twoheadrightarrow J$  der Spielermengen?

Wir benötigen eine Strategie  $s'_j \in S'_j$  für jeden Zielspieler  $j \in J$ , und das garantieren wir durch die Forderung  $j \in f(I) \subseteq J$ .

Alternativ können wir jede Strategiemenge  $(S'_j, s_j^0)$  mit einer kanonischen Strategie  $s_j^0 \in S'_j$  ausstatten (engl. *default action*). Jeder Spieler  $j \in J \setminus f(I)$  spielt dann diese Strategie  $s_j^0$ .

**Beispiel:** Wenn wir in einer Gruppe eine Entscheidung treffen müssen, so können wir jedes Individuum befragen. Manchmal muss dazu jeder eine Antwort geben. Alternativ können wir das Prozedere vereinfachen und nach Ablauf einer Wartezeit eine kanonische Antwort ansetzen.

Das Produkt  $(S'_J, s_J^0) = \prod_{j \in J} (S'_j, s_j^0)$  besteht aus der Produktmenge  $S'_J = \prod_{j \in J} S'_j$  mit dem kanonischen Strategiebündel  $s_J^0 = (s_j^0)_{j \in J}$ . Neben den Projektionen  $\text{pr}_K : (S'_J, s_J^0) \rightarrow (S'_K, s_K^0)$  für  $K \subseteq J$  haben wir nun zusätzlich die kanonischen Injektionen  $\text{inc}_K : (S'_K, s_K^0) \hookrightarrow (S'_J, s_J^0)$ .

**Aufgabe:** In welchem Sinne sind die folgenden Spiele isomorph?

	B	0	1
A ( $u^1$ )			
0	-1	-5	0
1	0	-5	-4

	B	0	1
A ( $u^2$ )			
0	4	1	0
1	5	-7	1

	B	0	1
A ( $u^3$ )			
0	2	0	3
1	3	0	1

	B	0	1
A ( $u^4$ )			
0	0	1	2
1	3	0	3

**Lösung:**  $u^1 \cong u^2$ : Spieler & Strategien fix, Ergebnisse affin transformiert.  $u^1 \cong u^3$ : nicht affin, nur monoton.  $u^1 \cong u^4$ : nur schwach monoton.

Isomorphismen von Spielen sind mathematisch naheliegend. John Nash hat sie 1950 eingeführt und genutzt (auf Anregung von David Gale), später Harsanyi und Selten: *A general theory of equilibrium selection in games*, MIT 1988. In Kapitel 3 erklären sie affine Isomorphismen:

*A reasonable solution concept should neither be influenced by positive linear payoff transformations nor by renamings of players, agents, and choices. The notion of an isomorphism combines both kinds of operations. We look at invariance with respect to isomorphisms as an indispensable requirement.*

In  $2 \times 2$ -Spiele hat jeder Spieler vier Auszahlungen. Bei Ausschluss von Gleichständen gibt es  $4! = 24$  Anordnungen, dies führt zu  $24^2 = 576$  Spielklassen. Permutation der Strategien reduziert dies auf  $12^2 = 144$ . Alle Spielklassen wurden geduldig aufgelistet von Goforth, Robinson: *The Topology of  $2 \times 2$  Games. A new periodic table*, Routledge 2005.

Unter schwacher Monotonie bleiben sogar nur  $2^4 = 16$  Klassen. Selbst wenn wir Gleichstände erlauben, sind es nur  $3^4 = 81$  Klassen. Nash-Gleichgewichte bleiben unter all diesen Isomorphismen erhalten.

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Symmetriegruppen der folgenden Spiele!

	B	bleiben	gehen
A ( $u^1$ )			
bleiben	-2	-2	-5
gehen	-5	-2	0

	B	B	S
A ( $u^2$ )			
B	1	0	0
S	0	0	2

	G	0	1
U ( $u^3$ )			
0	-1	+1	-1
1	+1	-1	+1

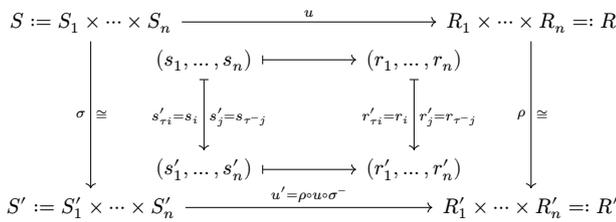
	D	K	L
C ( $u^4$ )			
K	0	1	2
L	2	1	0

Wir permutieren hier kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse. Welche dieser Spiele sind zueinander isomorph? Auf wie viele Weisen?

Wir notieren jede Symmetrie  $(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$  als Bijektion der Spielermenge  $\tau: I \cong I$  sowie der Strategiemengen  $\sigma_1: S_1 \cong S_{\tau_1}$  und  $\sigma_2: S_2 \cong S_{\tau_2}$ .

- ☺ Das erste Spiel *Bleiben-oder-Gehen* hat genau zwei Symmetrien: Die Identität  $g_0 = (\text{id}, \text{id}, \text{id})$  und den Spielertausch  $g_1 = ((A, B), \text{id}, \text{id})$ .
- ☺ Das zweite Spiel *Bach oder Strawinsky* hat genau zwei Symmetrien: Die Identität  $g_0 = (\text{id}, \text{id}, \text{id})$  und den Tausch  $g_1 = ((A, B), (B, S), (B, S))$ . Wir tauschen nicht nur die Spieler, sondern zwingend auch Strategien.
- ☺ Das dritte Spiel *Matching Pennies* hat genau vier Symmetrien: Die Identität  $g_0 = (\text{id}, \text{id}, \text{id})$  und die Drehung  $g_1 = (\text{id}, (0, 1), (0, 1))$ , Spielerflip  $g_2 = ((U, G), \text{id}, (0, 1))$  und Spielerflop  $g_3 = ((U, G), (0, 1), \text{id})$ . Die Gruppe  $G = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ , nicht  $\mathbb{Z}/4$ .
- ☺ Das vierte Spiel hat ebenfalls genau zwei Symmetrien: Die Identität  $g_0 = (\text{id}, \text{id}, \text{id})$  und den Tausch  $g_1 = ((C, D), \text{id}, \text{id})$ . Das zweite und vierte Spiel sind isomorph, sonst keine weiteren.  $\tau: C \mapsto A, D \mapsto B$  sowie  $\sigma_1: K \mapsto B, L \mapsto S$  und  $\sigma_2: K \mapsto S, L \mapsto B$ .  $\tau': C \mapsto B, D \mapsto A$  sowie  $\sigma'_1: K \mapsto S, L \mapsto B$  und  $\sigma'_2: K \mapsto B, L \mapsto S$ .

Jede Permutation  $\tau \in \text{Sym}(I)$  operiert durch Umordnung  $u \mapsto \tau \circ u \circ \tau^{-1}$ :



**Definition E2L:** Spieler-Symmetrie

Ein Spiel  $u$  ist **spieler-symmetrisch** unter der Permutation  $\tau: I \cong I$ , wenn  $u = \tau \circ u \circ \tau^{-1}$  gilt, also  $S_i = S_{\tau_i}$  und  $R_i = R_{\tau_i}$  für alle  $i \in I$  sowie  $u_i(s_1, \dots, s_n) = u_{\tau_i}(s_{\tau^{-1}1}, \dots, s_{\tau^{-1}n})$  für alle  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ . Die Spieler-Symmetrien von  $u$  bilden die Gruppe  $\text{Sym}(u) \leq \text{Sym}(I)$ . Das Spiel  $u$  heißt **spieler-symmetrisch**, falls  $\text{Sym}(u) = \text{Sym}(I)$  gilt.

Sei  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  die Spielermenge. Jede Permutation  $\tau: I \cong I$  definiert Permutationen  $\sigma: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow S'_1 \times \dots \times S'_n$  mit  $S'_{\tau_i} = S_i$  und  $\rho: R_1 \times \dots \times R_n \rightarrow R'_1 \times \dots \times R'_n$  mit  $R'_{\tau_i} = R_i$  wie üblich auf  $n$ -Tupeln.

Wir erhalten das Spiel  $u' = \rho \circ u \circ \sigma^{-1}$  durch **Umordnung der Spieler**. So operiert die symmetrische Gruppe  $\text{Sym}(I)$  auf den Spielern über  $I$ .

Allgemein seien  $I, J$  Spielermengen und  $\tau: I \cong J$  eine Bijektion. Für jedes  $i \in I$  sei  $\sigma_i: S_i \cong S'_{\tau_i}$  eine Bijektion der Strategiemengen. Dies definiert  $\sigma: \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{j \in J} S'_j$  durch  $(s_i)_{i \in I} \mapsto (\sigma_{\tau^{-1}j} s_{\tau^{-1}j})_{j \in J}$ . Im einfachsten Falle denken wir an  $S_i = S'_{\tau_i}$  und  $\sigma_i = \text{id}_{S_i}$  für alle  $i \in I$ .

Für jedes  $i \in I$  sei  $\rho_i: (R_i, \leq) \cong (R'_{\tau_i}, \leq)$  eine monotone Bijektion. Dies definiert  $\rho: \prod_{i \in I} R_i \rightarrow \prod_{j \in J} R'_j$  durch  $(r_i)_{i \in I} \mapsto (\rho_{\tau^{-1}j} r_{\tau^{-1}j})_{j \in J}$ . Im strikten Fall verlangen wir  $R_i = R'_{\tau_i}$  und  $\rho_i = \text{id}_{R_i}$  für alle  $i \in I$ .

Kurzum: Wir permutieren kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse. Das Spiel  $u: S \rightarrow R$  permutieren wir zum Spiel  $u' = \rho \circ u \circ \sigma^{-1}: S' \rightarrow R'$ .

Die folgende Definition präzisiert diese Idee für fünf Szenarien und erklärt strikte, (schwach) monotone, (schwach) affine Isomorphismen.

**Definition E2M:** Isomorphismus von Spielen

Vorgelegt seien zwei strategische Spiele in Normalform

$$u: \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} R_i \quad \text{und} \quad u': \prod_{j \in J} S'_j \rightarrow \prod_{j \in J} R'_j$$

sowie hierzu Bijektionen  $\tau: I \cong J$  und  $\sigma_i: S_i \cong S'_{\tau_i}$  für jedes  $i \in I$ . Das definiert die **Produktbijektion**  $\sigma: S \cong S': (s_i)_{i \in I} \mapsto (\sigma_{\tau^{-1}j} s_{\tau^{-1}j})_{j \in J}$ . Wir nennen  $(\tau, \sigma)$  oder kurz  $\sigma: u \rightarrow u'$  einen **Isomorphismus**, wenn gilt: **Strikt:** Für alle  $i \in I$  und  $s \in S$  gilt  $R_i = R_{\tau_i}$  und  $u'_i(\sigma s) = u_i(s)$ .

**Monoton:** Für alle Spieler  $i \in I$  und alle Strategievektoren  $s, s^* \in S$  gilt die Äquivalenz  $u_i(s) \leq u_i(s^*) \iff u'_i(\sigma s) \leq u'_i(\sigma s^*)$ .

**Schwach monoton:** Wir verlangen Monotonie nur falls  $s_{-i} = s^*_{-i}$ .

**Affin:** Beide Spiele sind reell, also  $R_i = R_j = \mathbb{R}$  für alle  $i \in I$  und  $j \in J$ , und es gilt  $u'_i(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i$  mit Konstanten  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  und  $a_i > 0$ .

**Schwach affin:** Es gilt  $u'_i(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i(s_{-i})$  mit  $b_i: S_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Schwach fordern wir Monotonie / Affinität für jeden Spieler  $i \in I$  und  $s_i \in S_i$  jeweils separat bei festgehaltener Gegenstrategie  $s_{-i} \in S_{-i}$ .

**Proposition E2N:** Abstrakter Nonsense wirkt konkret.

Strategische Spiele und ihre Isomorphismen bilden eine **Kategorie**:

$$\text{Game} = \text{Game}_s, \quad \text{Game}_m, \quad \text{Game}_{wm}, \quad \text{Game}_a, \quad \text{Game}_{wa}.$$

Diese ist jeweils ein **Gruppoid**, denn jeder Morphismus ist invertierbar. Jeder Isomorphismus  $\sigma: u \cong u'$  bewahrt **Gleichgewichte**: Wir erhalten Bijektionen  $\text{NE}(u) \cong \text{NE}(u')$  und  $\text{NE}^1(u) \cong \text{NE}^1(u')$  vermöge  $s \mapsto \sigma(s)$ . Zum Spiel  $u \in \text{Game}_*$  bilden die Automorphismen die **Gruppe**  $\text{Aut}_*(u)$ . Diese Gruppe **operiert** demnach auf den Mengen  $\text{NE}(u)$  und  $\text{NE}^1(u)$ .

**Aufgabe:** Prüfen Sie die behaupteten Eigenschaften sorgfältig nach! Bestimmen Sie diese Gruppen für möglichst viele unserer Beispiele! Symmetrien sind nützlich und geben Auskunft über Gleichgewichte!

**Existenz symmetrischer Gleichgewichte** E256

**Aufgabe:** (0) Seien  $u, u'$  endliche reelle Spiele. Jede Produktbijektion  $\sigma : u \rightsquigarrow u'$  setzt sich eindeutig affin fort zur Produktbijektion  $\bar{\sigma} : \bar{u} \rightsquigarrow \bar{u}'$ .

(1) Die Fortsetzung  $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$  erhält i.A. nicht (schwache) Monotonie!  
 (2) Ist  $\sigma : u \rightsquigarrow u'$  strikt oder (schwach) affin, so auch  $\bar{\sigma} : \bar{u} \rightsquigarrow \bar{u}'$ .  
 Wir erhalten also  $\text{Aut}_*(u) \hookrightarrow \text{Aut}_*(\bar{u}) : \sigma \mapsto \bar{\sigma}$  für  $* \in \{s, a, wa\}$ .  
 (3) Sei  $G \leq \text{Aut}_*(u)$ . Ist  $s \in \bar{S}$  ein Nash-Gleichgewicht, so auch  $\bar{\sigma}(s)$  für alle  $\sigma \in G$ , aber i.A. nicht die Symmetrisierung  $\bar{s} := \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar{\sigma}(s)$ .  
 (4) Nash bewies 1950 folgende Verschärfung seines Existenzsatzes:

**Satz E2o:** Existenzsatz für symmetrische Gleichgewichte, Nash 1950  
 Sei  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und  $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Sei  $G \leq \text{Aut}_*(u)$  eine Symmetriegruppe mit  $* \in \{s, a, wa\}$  wie oben. Dann besitzt  $\bar{u}$  mindestens ein  $G$ -invariantes Nash-Gleichgewicht:  
 Die Menge  $\text{NE}(\bar{u})^G := \{s \in \text{NE}(\bar{u}) \mid \forall \sigma \in G : \bar{\sigma}(s) = s\}$  ist nicht leer.

Folgern Sie dies aus der natürlichen Äquivarianz der Nash-Funktion.

**Existenz symmetrischer Gleichgewichte** E257  
Erläuterung

☺ Dieses schöne Argument führen Sie in unserer Übung aus!  
**Anleitung:** Wiederholen Sie den Beweis von Nashs Existenzsatz E1E, insbesondere die Konstruktion der Nash-Funktion für Lemma E1J. Beweisen Sie genauso (!) den stärkeren Satz E2o, zunächst für strikte Symmetrien  $G \leq \text{Aut}_*(u)$ , indem Sie folgende Fragen beantworten:  
 (4a) Ist die Teilmenge  $\bar{S}^G = \{s \in \bar{S} \mid \forall \sigma \in G : \bar{\sigma}(s) = s\} \subseteq \bar{S}$  der  $G$ -invarianten Strategievektoren nicht leer? konvex? kompakt?  
 (4b) Ist die Nash-Funktion  $f : \bar{S} \rightarrow \bar{S}$  äquivariant unter  $G$ , gilt also  $f(\bar{\sigma}(s)) = \bar{\sigma}(f(s))$  für alle  $\sigma \in G$  und  $s \in \bar{S}$ ?  
 (4c) Wie folgt hieraus die erhsehnte Existenzaussage?

☺ Für schwach affine Symmetrien behelfen wir uns mit einem Trick. Durch einen schwach affinen Isomorphismus normieren wir  $u$  so, dass für jeden Spieler  $i \in I$  bei fester Gegenstrategie  $s_{-i} \in \bar{S}_{-i}$  gilt:  $\min_{s_i \in S_i} u_i(s_i; s_{-i}) = 0$  und  $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i; s_{-i}) \in \{0, 1\}$ . Das vereinfacht unsere Argumente erheblich, da für jedes normierte Spiel  $u$  schwach affine Symmetrien dasselbe sind wie strikte Symmetrien. Voilà!

**Symmetrien von Spielen und Gleichgewichten** E258  
Erläuterung

Für die Untersuchung von Spielen sind die Nash-Gleichgewichte fundamental und haben sich als wesentliches Werkzeug bewährt. Es ist daher interessant, die Menge  $\text{NE}(u) \subseteq S$  bzw.  $\text{NE}(\bar{u}) \subseteq \bar{S}$  aller Nash-Gleichgewichte möglichst explizit zu bestimmen.

In realistischen Fällen ist dies aufwändig. Selbst wenn es theoretisch möglich ist, so ist es doch praktisch oft außerhalb unserer Reichweite. Wir wollen die Menge  $\text{NE}(\bar{u}) \subseteq \bar{S}$  der Gleichgewichte dann wenigstens qualitativ beschreiben (analytisch, geometrisch, topologisch). Sind hier beliebig komplizierte Räume möglich oder gibt es Einschränkungen?

Der Existenzsatz für Nash-Gleichgewichte ist ein erster wichtiger Schritt. Er garantiert allgemein: Für jedes endliche reelle Spiel  $u$  gilt  $\text{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$ . Der obige Satz verallgemeinert dies schmerzfrei zu  $\text{NE}(\bar{u})^G \neq \emptyset$ .

Solcherart Struktursätze sind durchaus auch praktisch relevant, da sie Rechnungen vereinfachen können oder überprüfen helfen. Weitere Fixpunktsätze, etwa von Kakutani oder Glicksberg, liefern Existenzaussagen für Gleichgewichte in allgemeineren Spielen  $u$ .

**Symmetrien von Spielen und Gleichgewichten** E259  
Erläuterung

Nashs Dissertation ist, wie oben bereits geschildert, ungewöhnlich kurz. Auf Anregung von David Gale hat Nash seinen berühmten Existenzsatz zugleich auf symmetrische Spiele und ihre Gleichgewichte ausgedehnt. Das ist nun eine schöne Übung für Sie, fördert Sorgfalt und Kreativität.

Auf Drängen von Alfred Tucker, seinem Betreuer, hat Nash widerwillig auch ein paar einfache Beispiele eingefügt. Kurzfristig wollte Nash das Promotionsprojekt mit Tucker beenden, um an ambitionierteren Themen zu arbeiten, etwa mit Steenrod in der algebraischen Geometrie. Durch beharrliches Drängen konnte Tucker die Promotion zum Ende führen.

*Like many great scientific ideas, [...] Nash's idea seemed initially too simple to be truly interesting, too narrow to be widely applicable, and, later on, so obvious that its discovery by someone was deemed all but inevitable. [...] Its significance was not immediately recognized, not even by the brash twenty-one-year-old author himself, and certainly not by the genius who inspired Nash, von Neumann.*  
 Sylvia Nasar: *A Beautiful Mind* (1998) p. 98

**Empirie: Piraten symmetrisieren im Praxistest** E260  
Casino

Im **Casino Royal** (02.05.2025) hatten wir weitere schöne Gelegenheit, unsere zarte Theorie zu Gleichgewichten in der harten Praxis zu testen.

Vier Pirat:innen teilen sich 500€\$to, wobei 50€\$to der kleinste Schein ist. Jede:r schreibt ihren Wunsch auf und reicht diesen bei der Notarin ein. Ist die Summe  $\leq 500€$to$ , so wird ausgezahlt, sonst gibt es gar nichts. Vier Spieler:innen treten an, pseudonym Rudolf, Franz, Günter und Ben.

**Erstes Spiel:** Absprache ist nicht möglich. Jede:r der vier entscheidet sich unabhängig für 100€\$to, geht somit auf Nummer sicher: Abrunden! Dies wird ausgezahlt, die verbleibenden 100€\$to gehen verloren. Erstaunlich: Niemand hat auf 150€\$to oder mehr spekuliert!

**Zweites Spiel:** Nun ist Absprache erlaubt. Die vier beschließen gerecht zu lösen. Sie schreiben 150, 150, 100, 100 auf vier Zettel, ziehen diese als Lose, und schreiben dann ihre Namen drauf. Das ist ein Gleichgewicht! So wird ausgezahlt, ganz ohne Verlust. Welch elegante Randomisierung! Obwohl das Spiel keinen Zufall enthält, randomisieren die Spieler gerne freiwillig, um Konflikte aufzulösen und Symmetrie zu wahren / erzeugen.

**Empirie: Piraten symmetrisieren im Praxistest** E261  
Casino

**Drittes Spiel:** Um Konflikte zu schüren, lösen wir eine Reihenfolge aus (Franz, Günter, Rudolf, Ben), in der die vier ihre Forderungen öffentlich und unwiderruflich nennen. Das bricht die vorige Symmetrie. Die vier verhandeln, argumentieren, drohen, ..., aber können sich nicht einigen.

Gefühlt hat Franz eine größere Verhandlungsmacht, aber was bedeutet das konkret in €\$to? Sein Privileg des ersten Zugs ist auch eine Bürde! Franz will 200€\$to, Günter 150€\$to, Rudolf macht seine Drohung wahr und fordert 200€\$to, Ben wird nicht mehr gefragt. Alles geht verloren.

Später erklärt Rudolf, man müsse Drohungen konsequent durchziehen, sonst wird man unglaubwürdig. Das ist ein interessantes Argument: Reputation! Der Blick weitet sich von diesem Spiel auf nachfolgende. Was wird hier eigentlich gespielt? nur dieses Spiel? oder viele weitere?

**Viertes Spiel:** Dasselbe Spiel nochmal, nun in der Reihenfolge Günter, Ben, Franz, Rudolf. Auch diese Verhandlungen scheitern. Tragisch. Ist das rational? Nein. Realistisch? Wohl schon. O wie einfach waren Symmetrie und Randomisierung: Freiheit, Gleichheit, Brüderlichkeit!

**Empirie: Piraten symmetrisieren im Praxistest** E262  
Casino

Ein neues Team von vier Pirat:innen tritt an. Diesmal kommt die Beute in vier unteilbaren Stücken im Wert von 50, 100, 150, 200. Wenn alle vier verschiedene Stücke wählen, so wird ausgezahlt, sonst gibt es nichts.

**Erstes Spiel:** Absprache ist nicht möglich. Wie kann eine kollisionsfreie Aufteilung gelingen? Schwierig! Jede:r schreibt ihre Wahl auf und reicht sie bei der Notarin ein. Leider gibt es Kollisionen, alles geht verloren. Das größte Stück wird dreifach beansprucht: ein Nash-Gleichgewicht! Bereuen die Spieler:innen? Individuell nicht. Trotzdem ärgerlich. Nur die Dreier-Koalition hätte den Konflikt auflösen können.

**Zweites Spiel:** Nun ist Absprache erlaubt. Auch diese vier entscheiden sich für Randomisierung, sie werfen eine Münze im Turniersystem. So werden die vier Stücke zufällig zugeteilt, diesmal kollisionsfrei.

**Drittes Spiel:** Dasselbe nochmal, jetzt ohne Absprache! Wortlos schreibt jede:r ihren Wunsch auf. O Wunder, es gelingt! Alle vier haben denselben Gedanken: Jede:r wählt das Komplement des vorigen Spiels. Offenbar spüren alle den Wunsch, ausgleichende Gerechtigkeit zu schaffen.

**Empirie: Piraten symmetrisieren im Praxistest** E263  
Casino

**Viertes Spiel:** Ehrlich gesagt hatten eben alle dieselbe Idee, doch einer hat sich verrechnet. Wir versuchen es nochmal. Diesmal gelingt es. Hier bricht nicht der Zufall die Symmetrie, sondern die Historie.

**Fünftes Spiel:** Ein fünfter Pirat kommt hinzu. Die Beute besteht aus fünf unteilbaren Stücken im Wert von 0, 50, 100, 150, 200. Das ist tückisch! Nach kurzer Beratung erstellen sie fünf passende Lose, ziehen blind, ohne aufzudecken, und jede:r schreibt ihren Namen auf die Rückseite. Doppelblind verhindert hier, dass die Pirat:in mit dem Los 0 Amok läuft.

Ein neues Team von vier Piraten tritt an, vorige werden geblitzdingst. Auf Vorschlag aus dem Publikum spielen wir noch folgende Variante: Die Stücke sind wieder 50, 100, 150, 200. Doch diesmal verfallen nur die strittigen Stücke, also solche, die mehr als einmal beansprucht werden. Hier wirken sich Irrationalität und Drohungen weniger dramatisch aus, denn sie reißen nicht alle anderen Spieler:innen mit in den Abgrund.

**Fazit:** Die genauen Regeln sind wesentlich. Kommunikation kann helfen, muss aber nicht. Symmetrie und Randomisierung sind extrem nützlich.

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto (u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2)),$$

geordnet durch  $S_1 = \{s_1^0 < s_1^1 < \dots < s_1^m\}$  und  $S_2 = \{s_2^0 < s_2^1 < \dots < s_2^n\}$ .

Die Auszahlungen  $(u_1, u_2)$  entsprechen zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$ .

Wir betrachten Untermatrizen zu  $I \subseteq S_1$  und  $J \subseteq S_2$  mit  $\#I = \#J + 1$  und ergänzen zu einer quadratischen  $(I \times J^*)$ -Matrix mit  $J^* = J \cup \{*\}$ :

$$A_{I \times J^*} := \begin{bmatrix} A_{I \times J} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} : (i, j) \mapsto \begin{cases} a_{i,j} & \text{für } i \in I \text{ und } j \in J, \\ 1 & \text{für } i \in I \text{ und } j = *. \end{cases}$$

**Definition E3A:** reguläre Spiele

Die Auszahlungsmatrix  $A \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$  nennen wir (affin) **regulär**, falls  $\det(A_{I \times J^*}) \neq 0$  gilt für alle  $I \subseteq S_1$  und  $J \subseteq S_2$  mit  $\#I = \#J + 1$ . Das Spiel  $u = (A, B)$  heißt **regulär**, wenn  $A$  und  $B^\top$  regulär sind.

☺ Das ist generisch erfüllt: Fast alle Bimatrix-Spiele sind regulär!

**Kleinstes Beispiel:** Sei  $I = \{i < i'\}$  und  $J = \{j\}$ .

$$A_{I \times J^*} := \begin{bmatrix} a_{i,j} & 1 \\ a_{i',j} & 1 \end{bmatrix}$$

Regularität bedeutet hier  $\det A_{I \times J^*} = a_{i,j} - a_{i',j} \neq 0$ . Das heißt:

In der  $j$ ten Spalte von  $A$  stehen lauter verschiedene Auszahlungen. (Die Ordnung auf  $I$  und  $J$  klärt die Reihenfolge der Zeilen und Spalten; unsortiert können wir  $|\det(A_{I \times J^*})| \in \mathbb{R}_{>0}$  betrachten und  $\neq 0$  fordern.)

☺ Entsprechendes gilt für alle Regularitätsbedingungen  $\det A_{I \times J^*} \neq 0$ : Die Zeilen der Matrix  $A_{I \times J^*}$  sind  $\mathbb{R}$ -linear unabhängig, die Zeilen der Untermatrix  $A_{I \times J}$  also affin unabhängig, daher **affine Regularität**. Das vereinfacht Rechnungen, da alle lästigen Ausnahmen wegfallen.

☺ Generisch bedeutet: Regularität gilt für fast alle Bimatrix-Spiele; die regulären bilden eine offene und dichte Teilmenge mit vollem Maß. Die Menge der singulären Matrizen ist abgeschlossen, nirgends dicht, und hat das Lebesgue-Maß Null. Wenn Sie also zufällig (stetig verteilt) ein Bimatrix-Spiel auswählen, so ist es fast sicher (mit Wkt 1) regulär.

**Satz E3B:** reguläre  $2 \times n$ -Bimatrix-Spiele

Jedes reguläre  $2 \times n$ -Spiel hat höchstens  $1 + n$  Nash-Gleichgewichte, und ihre Anzahl ist ungerade. Jede dieser Möglichkeiten wird realisiert.

**Satz E3c:** lokaler Struktursatz für Gleichgewichte regulärer Spiele

Sei  $2 \leq m \leq n$  und  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ein reguläres  $m \times n$ -Spiel.

(0) Dann folgt  $\#NE(\bar{u}) \leq \binom{m+n}{m} < \infty$ . Das folgt aus der lokalen Struktur:

(1) Jedes Gleichgewicht  $(s_1, s_2) \in NE(\bar{u})$  hat quadratischen Träger, das heißt  $I = \text{supp}(s_1) \subseteq S_1$  und  $J = \text{supp}(s_2) \subseteq S_2$  erfüllen  $\#I = \#J$

(2) Jedes Quadrat  $I \times J \subseteq S_1 \times S_2$  trägt höchstens ein Gleichgewicht; dieses ist eine rationale Funktion à la Cramer der Matrixeinträge von  $u$ .

**Satz E3D:** Paritätstheorem von Wilson, 1971

Fast alle endlichen Spiele  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  haben nur endlich viele Nash-Gleichgewichte, und ihre Anzahl  $\#NE(\bar{u})$  ist ungerade.

Satz E3B ist eine schöne Übung, die wir nachfolgend ausführen.

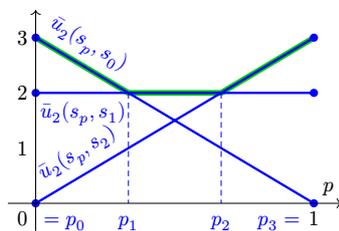
Damit lernen Sie insbesondere, alle kleinen Bimatrix-Spiele zu lösen. Auch Satz E3c können Sie mit den elementaren Mitteln der Linearen Algebra direkt nachrechnen. Ich empfehle dies als ambitionierte Übung.

☐ Robert Wilson: *Computing equilibria of n-person games*. SIAM Journal on Applied Mathematics (1971) 80–87. (Zur historischen Einordnung: Derselbe Robert Wilson und Paul Milgrom erhielten den Wirtschafts-Nobelpreis 2020 für ihre Arbeiten zu Auktionen, mehr dazu in Kapitel P.)

Wilsons Paritätstheorem E3D ist wesentlich allgemeiner als Satz E3B. Eine verblüffende und elegante topologische Erklärung stammt von

☐ Elon Kohlberg und Jean-Francois Mertens: *On the strategic stability of equilibria*. Econometrica (1986) 1003–1037. Ihr Struktursatz E3G inklusive Beweis benötigt dort in §3.2 weniger als eine Seite, muss aber erst einmal sorgsam entpackt werden. Ich skizziere dies unten und folgere daraus das Paritätstheorem. Meine Darstellung entstand 2023 nach inspirierenden Diskussionen mit Mareike Harm im Rahmen ihrer Bachelor-Arbeit.

	B	$s_0$	$s_1$	$s_2$
A				
$s_0$	3	1	5	
$s_1$	2	4	0	



Durch Umsortieren der Menge  $S_2$  erreichen wir  $b_{00} \geq b_{01} \geq \dots \geq b_{0n}$ . Regulär sind Gleichheiten ausgeschlossen, also  $b_{00} > b_{01} > \dots > b_{0n}$ .

In der zweiten Zeile können wir zudem  $b_{10} < b_{11} < \dots < b_{1n}$  annehmen: Gilt  $b_{0i} > b_{0j}$  und  $b_{1i} > b_{1j}$ , so dominiert  $s_i$  strikt  $s_j$ , und wir löschen  $s_j$ .

Wir finden  $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_{n+1} = 1$ , sodass gilt: Auf Alice' Strategie  $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$  mit  $p \in [p_j, p_{j+1}]$  ist Bobs Strategie  $s_j$  beste Antwort.

Für  $p = p_j$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$  mischen wir  $s_q = (1-q)s_{j-1} + qs_j$  so, dass auch umgekehrt Alice' Strategie  $s_p$  zur besten Antwort wird.

☺ Soweit der Lösungsalgorithmus. Bitte probieren Sie es selbst! Am Ende des Kapitels finden Sie hierzu Übungsaufgaben mit Lösungen.

**Aufgabe:** In der Übung gehen Sie folgenden Fragen auf den Grund: Warum kann es hier keine Tripelpunkte geben? Regularität hilft! Wie rechnen Sie damit alle Nash-Gleichgewichte explizit aus? Warum ist ihre Anzahl bei Regularität immer ungerade?

**Skizze zur ungeraden Anzahl:** Wir können  $b_{00} > b_{01} > \dots > b_{0n}$  und  $b_{10} < b_{11} < \dots < b_{1n}$  annehmen, dank Umsortieren und Regularität. Der linke Rand  $p = 0$  gibt ein (reines) NE genau dann, wenn  $a_{01} > a_{11}$ . Der rechte Rand  $p = 1$  gibt ein (reines) NE genau dann, wenn  $a_{0n} < a_{1n}$ . Jede Ordnungsumkehr dazwischen liefert ein gemischtes NE  $p \in ]0, 1[$ .

Nehmen wir beide reinen NE links und rechts an oder keines davon, dann gibt es dazwischen eine ungerade Anzahl von Umkehrungen. Nehmen wir hingegen entweder links oder rechts ein reines NE an, so gibt es dazwischen immer eine gerade Zahl von Umkehrungen. In jedem Falle ist die Anzahl der Nash-Gleichgewichte ungerade.

**Projekt:** (1) Schreiben Sie ein Programm, das reguläre  $2 \times n$ -Spiele löst. Möglich aber mühsam: Lösen Sie ebenso  $2 \times n$ -Spiele ganz allgemein.

(2) Schreiben Sie ein Programm, das ein gegebenes Bimatrix-Spiel auf Regularität prüft und anschließend alle Nash-Gleichgewichte berechnet.

*Hinweis:* Das ist die praktische Anwendung des lokalen Struktursatzes. Sie können die Bedingung der Regularität dazu noch etwas lockern:

(3) Finden Sie alle regulären Gleichgewichte. (Generisch sind dies alle.)

**Projekt:** (4) Erzeugen Sie zufällige Bimatrix-Spiele fester Größe  $m \times n$  (unter einer geeigneten Verteilung) und zählen Sie die Gleichgewichte.

(5) Welche empirisch-statistische Verteilung entsteht daraus? Wie lässt sich diese beschreiben? Was lässt sich hierzu beweisen?

☐ Andrew McLennan: *The Expected Number of Nash Equilibria of a Normal Form Game*. Econometrica 73 (2005) 141–174.

☐ Y. Rinott, M. Scarsini: *On the Number of Pure Strategy Nash Equilibria in Random Games*. Games and Economic Behavior 33 (2000) 274–293.

☺ Ich verorte Spieltheorie auf der angewandten Seite der Mathematik. Zugleich mobilisiert sie, wie hier zur Berechnung von Gleichgewichten, ein bemerkenswert breites Themenspektrum Ihres Mathematikstudiums: Lineare Algebra und Kombinatorik zum lokalen Struktursatz E3c sowie Geometrie und Algebraische Topologie zum globalen Stuktursatz E3G.

Die definierenden Un/Gleichungen für  $NE(\bar{u})$  sind polynomiell und somit eine wunderbar konkrete Anwendung der reell-algebraischen Geometrie. Statt dieser Feinstruktur genügt bereits die viel größere, topologische Sichtweise und Brouwers Fixpunktsatz für Nashs Existenzsatz E1E.

Für Nash-Gleichgewichte wählen die Spieler ihre Strategien unabhängig. Später untersuchen wir gewinnbringend korrelierte Strategien, siehe I3. Algebraisch ist die der Übergang von reinen zu gemischten Tensoren. Algorithmisch führt es uns direkt zur Linearen Programmierung.

Manche:r mag diese Vielfalt abschreckend finden, doch wir bewundern die große Spannweite und Harmonie der verschiedenen Werkzeuge. Wie immer gilt: Mathematik ist wunderschön und nützlich!

**Aufgabe:** Beweisen Sie Aussage (1) des Struktursatzes E3c. – **Lösung:**

Sei  $s_1 = \sum_{i=0}^k p_i s_1^i \in \bar{S}_1$  eine beste Antwort auf  $s_2 = \sum_{j=0}^{\ell} q_j s_2^j \in \bar{S}_2$ .  
Dabei sei  $p_0, \dots, p_k > 0$  und  $q_0, \dots, q_{\ell} > 0$  mit  $\sum_{i=0}^k p_i = \sum_{j=0}^{\ell} q_j = 1$ .

(a) Für  $\lambda := u_1(s_1, s_2)$  gilt demnach  $\lambda = u_1(s_1^0, s_2) = \dots = u_1(s_1^k, s_2)$ .  
Wäre  $u_1(s_1^i) > \lambda$ , so könnten wir alles auf  $s_1^i$  konzentrieren.  
Wäre  $u_1(s_1^i) < \lambda$ , so könnten wir die Strategie  $s_1^i$  löschen.

(b) Wäre  $k > \ell$ , so betrachten wir  $I = \{s_1^0, \dots, s_1^{\ell+1}\}$  und  $J = \{s_2^0, \dots, s_2^{\ell}\}$ .  
Für  $v = (q_0, \dots, q_{\ell}, -\lambda)^T \in \mathbb{R}^{J'}$  gilt  $v \neq 0$  und  $A_{I \times J} \cdot v = 0$  dank (a).  
Das widerspricht der Regularität  $\det A_{I \times J} \neq 0$ . Also gilt  $k \leq \ell$ .

(c) Ist umgekehrt  $s_2$  eine beste Antwort auf  $s_1$ , so folgt  $\ell \leq k$ .  
Hierzu nutzen wir dasselbe Argument, angewendet auf  $B^T$ .

Zusammenfassend zeigt das: In jedem regulären Spiel  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
hat jedes Nash-Gleichgewicht  $(s_1, s_2) \in \text{NE}(\bar{u})$  quadratischen Träger;  
für  $\text{supp}(s_1) = \{s_1^0, \dots, s_1^k\}$  und  $\text{supp}(s_2) = \{s_2^0, \dots, s_2^{\ell}\}$  gilt  $k = \ell$ . QED

**Aufgabe:** Beweisen Sie Aussage (2) des Struktursatzes E3c. – **Lösung:**

Sei  $(s_1, s_2) \in \text{NE}(\bar{u})$  gegeben durch  $s_1 = \sum_{i=0}^k p_i s_1^i$  und  $s_2 = \sum_{j=0}^{\ell} q_j s_2^j$ .  
Wir können und werden  $p_0, \dots, p_k > 0$  und  $q_0, \dots, q_{\ell} > 0$  annehmen,  
also  $I = \text{supp}(s_1) = \{s_1^0, \dots, s_1^k\}$  und  $J = \text{supp}(s_2) = \{s_2^0, \dots, s_2^{\ell}\}$ .  
Dank (1) wissen wir  $k = \ell$ . Zudem löst  $q$  die lineare Gleichung

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{I \times J} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{\ell} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Regulärer Fall:** Gilt  $\det(A_{I \times J}) \neq 0$ , so ist die Lösung  $q$  eindeutig und eine rationale Funktion der Matrixeinträge gemäß Cramerscher Regel:

$$q_i = \det(A_{I \times J}^i) / \det(A_{I \times J})$$

Dabei entsteht die Matrix  $A_{I \times J}^i$  aus  $A_{I \times J}$ , indem wir die  $i$ te Spalte durch die rechte Seite der obigen linearen Gleichung ersetzen.

**Singulärer Fall:** Wir müssen auch den Fall  $\det(A_{I \times J}) = 0$  abfangen.  
Die Untermatrix  $A_{I \times J}$  hat vollen Rang  $k + 1$  dank Regularität E3A.  
Die Matrix  $A_{I \times J}$  ist also entweder regulär, mit vollen Rang  $k + 2$ ,  
oder die letzte Zeile  $(1, \dots, 1, 0)$  ist Linearkombination der vorigen.

In singulären Falle hat unsere Gleichung demnach keine Lösung, wie wir durch Zeilenumformungen der erweiterten Matrix leicht erkennen:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} A_{I \times J} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{c|c|c} A_{I \times J} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Dasselbe Argument gilt für  $p = (p_0, \dots, p_k)$  und die Matrix  $B^T$ .

Fazit: Auf jedem quadratischen Träger  $(I, J)$ , mit  $I \subseteq S_1$  und  $J \subseteq S_2$  und  $\#I = \#J$ , existiert somit entweder kein Nash-Gleichgewicht oder genau eines, und dieses ist eine rationale Funktion der Matrixeinträge. QED

**Aufgabe:** Beweisen Sie die obere Schranke (0) aus Satz E3c. – **Lösung:**

Ein Nash-Gleichgewicht  $(s_1, s_2) \in \text{NE}(\bar{u})$  nennen wir **regulär**, wenn der Träger  $(I, J)$  quadratisch ist und die Matrizen  $A_{I \times J}$  und  $B_{J \times I}^T$  regulär.  
Dank der lokalen Struktur (1) und (2) der Gleichgewichte wissen wir:  
In jedem regulären Spiel  $u$  ist jedes Nash-Gleichgewicht  $(s_1, s_2)$  regulär.  
Die Abbildung  $\text{NE}(\bar{u}) \ni (s_1, s_2) \mapsto (\text{supp}(s_1), \text{supp}(s_2))$  ist also injektiv.

Wie viele Paare  $(I, J) \in \mathfrak{P}(S_1) \times \mathfrak{P}(S_2)$  mit  $\#I = \#J = k > 0$  gibt es?  
Das entspricht  $(I', J)$  mit  $I' = S_1 \setminus I$  und  $\#(I' \sqcup J) = (m - k) + k = m$ .

In  $S_1 \sqcup S_2$  mit  $\#(S_1 \sqcup S_2) = m + n$  betrachten wir also alle Teilmengen  $I' \sqcup J$  mit  $\#(I' \sqcup J) = m$  und  $J \neq \emptyset$ . Deren Anzahl ist  $\binom{m+n}{m} - 1$ . QED

**Bemerkung:** Letzteres ist ein Spezialfall der Vandermonde-Identität:

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{m}{k} \binom{n}{\ell - k} = \binom{m+n}{\ell}$$

**Bemerkung:** Die Anzahl der Nash-Gleichgewichte kann tatsächlich exponentiell wachsen. Ein einfaches Beispiel finden Sie auf Seite E415.

**Aufgabe:** Erklären Sie die *brute force* Lösung für reguläre Bimatrix-Spiele.

**Lösung:** Für jede Größe  $k \in \{0, \dots, \min(m, n)\}$  betrachten wir alle Teilmengen  $I \subseteq \{s_1^0, \dots, s_1^m\}$  und  $J \subseteq \{s_2^0, \dots, s_2^n\}$  der Größe  $k + 1$ .  
Wie oben erklärt berechnen wir  $s_1 = \sum_{i=0}^k p_i s_1^i$  und  $s_2 = \sum_{j=0}^k q_j s_2^j$ :

$$\left[ \begin{array}{c|c} B_{I \times J}^T & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ * \end{matrix} \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_k \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left[ \begin{array}{c|c} A_{I \times J} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ * \end{matrix} \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_k \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dank Regularität existiert jeweils höchstens eine Lösung, siehe (2).  
Wir prüfen Positivität der Lösung, also  $p_0, \dots, p_k > 0$  und  $q_0, \dots, q_k > 0$ .  
Abschließend prüfen wir, ob es sich um ein Nash-Gleichgewicht handelt, indem wir gegen alle anderen *reinen* Strategien vergleichen, siehe E1D.  
Der lokale Struktursatz E3c für Gleichgewichte regulärer Spiele garantiert uns, dass wir so alle Nash-Gleichgewichte finden. QED

**Übung:** Beweisen bzw. wiederholen Sie die folgenden Sätze.

**Satz E3E:** Fast alle Spiele sind regulär.

Wir fixieren die Strategiemengen  $S_1$  und  $S_2$  und setzen  $S = S_1 \times S_2$ .  
Hierzu betrachten wir den Raum  $\mathbb{R}^{\{1,2\} \times S_1 \times S_2}$  aller Bimatrix-Spiele.

In  $\mathbb{R}^{\{1,2\} \times S_1 \times S_2}$  sind die regulären Spiele offen und dicht und haben volles Lebesgue-Maß. Umgekehrt ist die Menge aller singulären Spiele in  $\mathbb{R}^{\{1,2\} \times S_1 \times S_2}$  abgeschlossen, nirgends dicht und haben Lebesgue-Maß 0.

**Satz E3F:** Nullstellenmengen sind dünn.

Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Für jedes Polynom  $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$  ist die Nullstellenmenge  $N = P^{-1}(\{0\})$  in  $\mathbb{K}^n$  abgeschlossen, nirgends dicht und hat das Lebesgue-Maß  $\text{vol}_n(N) = 0$ . Die Nichtnullstellenmenge  $f_P^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{K}^n$  ist offen und dicht und hat volles Lebesgue-Maß.  
Das gilt insbesondere für die Determinante  $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ .

😊 Sie dürfen stolz sein auf Ihr Können in Topologie und Maßtheorie!

Reguläre Bimatrix-Spiele sind besonders sympathisch, da hier alle Nash-Gleichgewichte isoliert liegen und sich vergleichsweise leicht berechnen lassen. Zufällig befüllte Bimatrix-Spiele sind fast immer regulär, daher können wir dies als den typischen Fall betrachten.

Daneben gibt es nicht-reguläre Spiele, und auch diese sind interessant: Nicht jede Matrix ist zufällig, manche haben eine besondere Struktur! Selbst in Klausuren haben wir damit sehr gute Erfahrungen gemacht, natürlich angemessen klein und einfach. Allgemein geht es ebenso:

□□ D. Avis, G.D. Rosenberg, R. Savani, B. von Stengel: *Enumeration of Nash equilibria for two-player games*. Econ Theory 42 (2010) 9–37.  
Online implementiert unter [cgi.csc.liv.ac.uk/~rahu1/bimatrix\\_solver](http://cgi.csc.liv.ac.uk/~rahu1/bimatrix_solver).

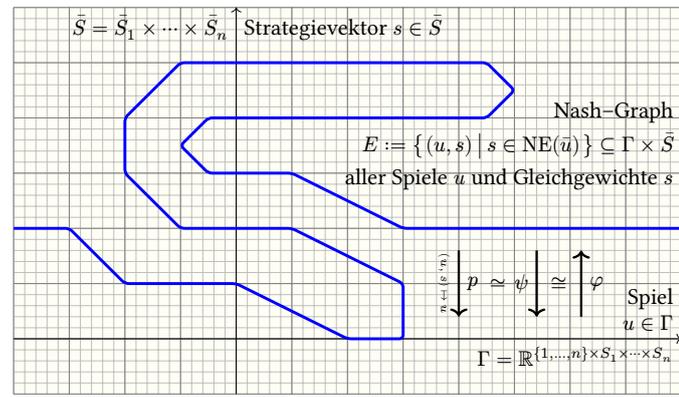
Dies ist inzwischen Teil des *Game Theory Explorer*, [gte.csc.liv.ac.uk](http://gte.csc.liv.ac.uk).  
R. Savani, B. von Stengel: *Game Theory Explorer – Software for the Applied Game Theorist*. Computational Management Science 12 (2015) 5–33.

**Beispiel:** Folgen beide Auszahlungen der Einheitsmatrix  $1_{n \times n}$ , so hat dieses Koordinierungsspiel genau  $2^n - 1$  Nash-Gleichgewichte (E415).

Quint und Shubik vermuteten daraufhin 1997, dass jedes reguläre Bimatrix-Spiel höchstens  $2^n - 1$  Nash-Gleichgewichte hat. Dies ist leicht für  $n = 2$ , siehe den obigen Satz E3B. Auch die Fälle  $n = 3$  und  $n = 4$  wurden bewiesen, der Fall  $n = 5$  erst kürzlich ([arxiv.org/pdf/2411.12385](http://arxiv.org/pdf/2411.12385)).

Für  $n \geq 6$  wurde die Quint-Shubik-Vermutung widerlegt von □□ Bernhard von Stengel: *New Maximal Numbers of Equilibria in Bimatrix Games*. Discrete & Computational Geometry 21 (1999) 557–568.

Als erstes Gegenbeispiel konstruierte Stengel ein  $6 \times 6$  Bimatrix-Spiel mit 75 Nash-Gleichgewichten. Zudem zeigte er die untere Schranke  $2.414^n / \sqrt{n}$  für die maximale Anzahl der Nash-Gleichgewichte. Das liegt nahe der oberen Schranke  $2.6^n / \sqrt{n}$  von P. McMullen: *The maximum number of faces of a convex polytope*. Mathematika 17 (1970) 179–184.



- (1) Wir haben einen Homöomorphismus  $(\psi, \varphi) : E \cong \Gamma$
- (2) und zudem eine eigentliche Homotopie  $H : p \simeq \psi$ .

Nashs Definition E1B von Gleichgewichten, sein Existenzsatz E1E und sein Beweis sind ein Geniestreich. Dasselbe denke ich zum folgenden globalen Struktursatz E3G von Kohlberg–Mertens. Er besagt anschaulich:

*The graph  $E \subseteq \Gamma \times \bar{S}$  of the Nash equilibrium correspondence (when compactified by adding the point  $\infty$ ) is like a deformation of a rubber sphere around the sphere of normal form games (similarly compactified).*

Ich habe dies in der obigen Skizze illustriert. In Wahrheit ist der Raum  $\Gamma$  aller Spiele nicht eindimensional, doch gemäß  $\Gamma \cong \mathbb{R}^{I \times S}$  euklidisch und somit sehr übersichtlich. Dasselbe gilt für  $\bar{S}$ , ein Produkt von Simplex.

Ich schlage vor: Bewundern Sie diesen phantastischen Satz und lassen Sie sich davon inspirieren. Sie dürfen gerne später darauf zurückkommen, wenn die Faszination anhält und die mathematische Neugier Sie leitet.

*We recommend that a reader without an independent interest in the geometry of Nash equilibria skip the precise statement of this theorem and its proof in a first reading of this paper.*

Wir zuvor sei  $I = \{1, \dots, n\}$  die Spielermenge und  $S_1, \dots, S_n$  seien die endlichen Strategiemengen, zusammengefasst zu  $S = \prod_{i \in I} S_i$ . Hierzu sei  $\bar{S} = \prod_{i \in I} \bar{S}_i$  die Menge der gemischten Strategievektoren.

Sei  $\Gamma = \{u : S \rightarrow \mathbb{R}^I\} \cong \mathbb{R}^{I \times S}$  die Menge aller Spiele in Normalform. Darüber betrachten wir den **Nash-Graphen** all ihrer Gleichgewichte:

$$E = \{(u, s) \in \Gamma \times \bar{S} \mid s \in \text{NE}(\bar{u})\}$$

Hierzu gehört die Projektion  $p : E \rightarrow \Gamma : (u, s) \mapsto u$ . Über jedem Spiel  $u \in \Gamma$  liegt also die Menge  $p^{-1}(u) = \{u\} \times \text{NE}(\bar{u})$  seiner Gleichgewichte.

**Satz E3c:** globaler Struktursatz von Kohlberg–Mertens, 1986

- (1) **Homöomorphiesatz:** Es gibt einen Homöomorphismus  $(\psi, \varphi) : E \cong \Gamma$ .
- (2) **Homotopiesatz:** Zudem gibt es eine eigentliche Homotopie  $H : p \simeq \psi$ .

Der Beweis ist trickreich-elegant und benötigt kaum eine Seite (E321). Zum Verständnis muss er allerdings erst sorgsam entpackt werden, das führe ich hier nicht aus. Wenn Sie mutig sind, lesen Sie das Original!

Mit folgenden Erläuterungen will ich den Satz für Sie einordnen:

☺ Der Basisraum  $\Gamma = \{u : S \rightarrow \mathbb{R}^I\} \cong \mathbb{R}^{I \times S}$  ist ein euklidischer Raum. Der darüber liegende Totalraum  $E \subseteq \Gamma \times \bar{S}$  könnte auf den ersten Blick beliebig kompliziert sein. Dank (1) ist  $E$  jedoch homöomorph zu  $\Gamma$  und somit erfreulich einfach, nämlich ebenfalls ein euklidischer Raum  $\mathbb{R}^{I \times S}$ . Das ist das erste Wunder (1) dieses Struktursatzes.

☹ Die Projektion  $p : E \rightarrow \Gamma$  ist offensichtlich kein Homöomorphismus: Über  $u \in \Gamma$ , also einem Spiel  $u : S \rightarrow \mathbb{R}^I$ , liegen im Allgemeinen mehrere Gleichgewichte  $(u, s)$  mit  $s \in \text{NE}(\bar{u})$ , typischerweise nur endlich viele, aber ausnahmsweise sind auch unendlich viele Gleichgewichte möglich. Die Abbildung  $p$  codiert somit die gesamte Komplexität des Problems!

☺ Hier bestaunen wir das zweite Wunder (2) dieses Struktursatzes: Es gibt eine eigentliche Homotopie  $H : p \simeq \psi : E \rightarrow \Gamma$ , also eine stetige Abbildung  $H : [0, 1] \times E \rightarrow \Gamma$ , die  $H_0 = p$  stetig deformiert zu  $H_1 = \psi$ . Diese ist eigentlich, also stetig fortsetzbar zu  $H^* : [0, 1] \times E^* \rightarrow \Gamma^*$  auf die Einpunktkompaktifizierung  $E^* = E \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^N$  mit  $N = n \cdot |S|$ .

**THEOREM 1:**  $\bar{p}$  is homotopic to a homeomorphism. More precisely, there exists a homeomorphism  $\phi$  from  $\Gamma$  to  $E$  such that  $p \circ \phi$  is homotopic to the identity on  $\Gamma$  under a homotopy that extends to  $\bar{E}$ .

**PROOF:** Let  $T_n = \prod_{i \in I} S_i$ ;  $G_n$  is the set of all  $S_n \times T_n$  payoff matrices  $G_n^i$ , but it will be more convenient to use the following reparameterization of  $G_n$ : let  $G_n^i = \bar{G}_n^i + g_n^i$ , where  $\sum_{i \in I} \bar{G}_n^i = 0$ , i.e.,  $g_n^i$  is the average over  $i$  of  $G_n^i$ . Thus  $G_n$  will be considered as the set of all pairs  $(\bar{G}_n, g_n)$ , with  $\sum_{i \in I} \bar{G}_n^i = 0$ .

Let  $z_n^i = \sigma_n^i + \sum_{i \in I} \bar{G}_n^i \cdot \prod_{i \in I} \sigma_n^i$ . The  $z_n^i$  are continuous functions on  $E$ . Conversely, given  $\bar{G}$  and any vector  $z$ , one can recompute the corresponding point of  $E$  in a unique and continuous way, as follows:

First,  $v_n^i = \min\{\alpha \mid \sum_{i \in I} \sigma_n^i(z_n^i - \alpha) \leq 1\}$  (player  $n$ 's equilibrium payoff); next,  $\sigma_n^i = (z_n^i - v_n^i)^+$ ; finally

$$(*) \quad g_n^i = z_n^i - \sigma_n^i - \sum_{i \in I} \bar{G}_n^i \cdot \prod_{i \in I} \sigma_n^i = \sum_{i \in I} g_n^i \cdot \prod_{i \in I} \sigma_n^i.$$

This homeomorphism, from the set of pairs  $(\bar{G}, z)$  to  $E$ , is the homeomorphism of the statement, and  $p \circ \phi$  maps  $(\bar{G}, z)$  to  $(\bar{G}, g)$ .

There only remains to construct the homotopy. Let, for  $t \in [0, 1]$ ,  $q_t(\bar{G}, z) = (\bar{G}, (z + (1-t)g))$  and  $q_t$  (which is the identity) are both continuous, we already know the continuity of  $q$  on  $[0, 1] \times E$ ; so there only remains to show the continuity of  $q$  at all points of  $[0, 1] \times \{\infty\}$ , or equivalently that  $\forall M, \exists K$  such that  $\|(\bar{G}, z)\| \geq K \Rightarrow \forall t, \|q_t(\bar{G}, z)\| \geq M$ .

Note that  $(*)$  implies  $\|z_n^i - g_n^i\| \leq \|\sigma_n^i\| + \sum_{i \in I} \|\bar{G}_n^i\| \cdot \prod_{i \in I} \|\sigma_n^i\|$ ; thus, using the maximum norm throughout,

$$(**) \quad \|z - g\| \leq \|\bar{G}\| + 1.$$

So choosing  $K = 2M + 1$ , if  $\|(\bar{G}, z)\| \geq K$  then either  $\|\bar{G}\| \geq M$ , in which case  $\|q_t(\bar{G}, z)\| \geq M$ , or  $\|\bar{G}\| < M$  and  $\|z\| \geq 2M + 1$ , in which case, by  $(**)$ ,  $\|z + (1-t)g\| \geq M$  so again  $\|q_t(\bar{G}, z)\| \geq M$ . *Q.E.D.*

Für Spieler  $i \in I$  betrachten wir gemischte Strategien als WMaße auf  $S_i$ ,

$$\bar{S}_i = \{\sigma_i : S_i \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}.$$

Darin liegt die Gleichverteilung  $\bar{\sigma}_i(s_i) = 1/|S_i|$  als Schwerpunkt.

Unter dem Produktmaß  $\sigma \in \bar{S} := \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$  wird der Strategievektor  $(s_1, \dots, s_n) \in S := S_1 \times \dots \times S_n$  mit Wkt  $\sigma(s) := \sigma_1(s_1) \dots \sigma_n(s_n)$  gespielt.

Dies ist das Produkt aus  $\sigma_i(s_i)$  und  $\sigma_{-i}(s_{-i}) := \prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j)$ , wobei  $S \cong S_i \times S_{-i}$  mit  $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$  und  $\bar{S} \cong \bar{S}_i \times \bar{S}_{-i}$  mit  $\bar{S}_{-i} = \prod_{j \neq i} \bar{S}_j$

Das Spiel  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \Gamma$  besteht aus den Auszahlungsmatrizen

$$u_i : S_i \times S_{-i} \rightarrow \mathbb{R} : (s_i, s_{-i}) \mapsto u_i(s_i, s_{-i})$$

für jeden Spieler  $i \in I$ . Wir zerlegen  $u_i(s_i, s_{-i}) = \bar{u}_i(s_i) + \tilde{u}_i(s_i, s_{-i})$  in den Mittelwert  $\bar{u}_i : S_i \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\bar{u}_i(s_i) := \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \bar{\sigma}_{-i}(s_{-i})$  und die Exzentrizität  $\tilde{u}_i : S_i \times S_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \tilde{u}_i(s_i, s_{-i}) \bar{\sigma}_{-i}(s_{-i}) = 0$ .

Wir schreiben  $\Gamma \cong \bar{\Gamma} : u \leftrightarrow (\bar{u}, \tilde{u})$  und  $E \cong \bar{E} : (u, \sigma) \leftrightarrow (\bar{u}, \tilde{u}, \sigma)$ .

Wir definieren  $\tilde{\psi} : \bar{E} \rightarrow \bar{\Gamma} : (\bar{u}, \tilde{u}, \sigma) \mapsto (\bar{u}, z)$  mit

$$z_i(s_i) = \sigma_i(s_i) + \bar{u}_i(s_i) + \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \tilde{u}_i(s_i, s_{-i}) \sigma_{-i}(s_{-i}).$$

Umgekehrt definieren wir  $\tilde{\varphi} : \bar{\Gamma} \rightarrow \bar{E} : (\bar{u}, z) \mapsto (\bar{u}, \tilde{u}, \sigma)$ : Wir setzen

$$v_i = \min\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \sum_{s_i \in S_i} [z_i(s_i) - \alpha]^+ \leq 1\}.$$

Daraus erhalten wir zunächst  $\sigma_i(s_i) = [z_i(s_i) - v_i]^+$  und dann

$$\tilde{u}_i(s_i) = z_i(s_i) - \sigma_i(s_i) - \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \tilde{u}_i(s_i, s_{-i}) \sigma_{-i}(s_{-i}).$$

**Lemma E3h:** Kohlberg–Mertens Homöomorphiesatz

Die so definierte Abbildung  $\varphi : \Gamma \rightarrow E : \hat{u} \mapsto (\bar{u}, z) \mapsto (\bar{u}, \tilde{u}, \sigma) \mapsto (u, \sigma)$ , wie oben mit  $\hat{u} = \bar{u} + z$  und  $\hat{u} + \bar{u} = u$ , ist wohldefiniert, also  $\sigma \in \text{NE}(u)$ .

Zudem ist  $(\varphi, \psi) : \Gamma \cong E$  ein Homöomorphismuspaar, d.h.  $\varphi : \Gamma \rightarrow E$  und  $\psi : E \rightarrow \Gamma$  sind stetig und erfüllen  $\psi \circ \varphi = \text{id}_\Gamma$  und  $\varphi \circ \psi = \text{id}_E$ .

**Übung:** Wenn Sie möchten, können Sie dies nun selbst nachrechnen.

**Lemma E3i:** Kohlberg–Mertens Homotopiesatz

Die Projektion  $p : E \rightarrow \Gamma : (u, \sigma) \mapsto u$  ist eigentlich homotop zu unserem Homöomorphismus  $\psi : E \cong \Gamma : (u, \sigma) \mapsto (\bar{u}, \tilde{u}, \sigma) \mapsto (\bar{u}, z) \mapsto \hat{u}$  vermöge der affinen Homotopie  $H : [0, 1] \times E \rightarrow \Gamma$  mit  $H_t(u, \sigma) = (1-t)u + t\hat{u}$ .

**Übung:** Wenn Sie möchten, können Sie dies selbst nachrechnen.

Zur Motivation dieses schönen Projekts zitiere ich einen der Meister selbst aus Srihari Govindan und Robert Wilson: *Direct Proofs of Generic Finiteness of Nash Equilibrium Outcomes*. Econometrica 69 (2001) 765–769.

*Harsanyi (1973), Rosenmuller (1971), and Wilson (1971) showed that for each assignment of generic payoffs to the normal form of a game, the number of Nash equilibria is finite and odd. Nowadays, this result is seen as an immediate corollary of Kohlberg and Mertens' (1986, Theorem 1) structure theorem, which states that the Nash graph is homeomorphic to the space of normal-form payoffs. [sic! Zudem ist die Projektion  $p : E \rightarrow \Gamma$  eigentlich homotop zu einem Homöomorphismus.]*

◆ **Satz E3D:** Paritätstheorem von Wilson, 1971

Fast alle endlichen Spiele  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  haben nur endlich viele Nash-Gleichgewichte, und ihre Anzahl  $\#NE(\bar{u})$  ist ungerade.

Wir nutzen hierzu den Abbildungsgrad  $\deg : [\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^N] \cong \mathbb{Z} : f \mapsto \deg(f)$ . Er ordnet jeder stetigen Abbildung  $f : \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{S}^N$  eine Zahl  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$  zu. Anschaulich zählt  $\deg(f)$ , wie oft  $f$  die Sphäre  $\mathbb{S}^N$  um sich selbst wickelt.

(A) Bei Komposition von  $f, g : \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{S}^N$  gilt  $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$ . Daraus folgt  $\deg(\text{id}_{\mathbb{S}^N}) = 1$  und  $\deg(f) = \pm 1$  für Homöomorphismen.

(B) Aus Homotopie  $H : f \simeq g$  folgt Gleichheit  $\deg(f) = \deg(g)$ .

(C) Hat  $y \in \mathbb{S}^N$  nur endlich viele Urbilder, also  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}^1$ , so ist  $\deg(f) = \sum_{i=1}^k \deg(f, x_i)$  die Summe der lokalen Abbildungsgrade.

Dasselbe gilt für eigentliche Abbildungen  $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  und eigentliche Homotopien  $H : f \simeq g$ , jeweils dank stetiger Fortsetzung im Punkt  $\infty$ . Mit diesem Werkzeug beweisen wir nun Wilsons Paritätstheorem.

**Beweis von Wilsons Paritätstheorem:** Fast alle Spiele  $u \in \Gamma$  sind regulär. Genauer: Die regulären Spiele bilden eine offene dichte Teilmenge.

Wir nutzen zunächst unseren lokalen Struktursatz E3C:

(0) Über jedem regulären Spiel  $u \in \Gamma$  liegen nur endlich viele, reguläre Nash-Gleichgewichte  $s_1, \dots, s_k \in NE(\bar{u})$ . Um  $(u, s_i) \mapsto u$  ist  $p : E \rightarrow \Gamma$  ein lokaler Homöomorphismus dank Cramers Umkehrformel.

Wir nutzen nun den globalen Struktursatz E3G von Kohlberg-Mertens:

(1) Wie  $p$  hat auch  $f = p \circ \varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  über  $u$  nur endlich viele Urbilder  $x_1, \dots, x_k \in \Gamma$  und ist um jedes davon ein lokaler Homöomorphismus. Für die lokalen Abbildungsgrade gilt demnach  $\deg(f, x_i) \in \{\pm 1\}$ .

(2) Aus eigentlicher Homotopie  $H : f \simeq \text{id}_\Gamma$  folgt schließlich

$$1 \stackrel{(A)}{=} \deg(\text{id}_\Gamma) \stackrel{(B)}{=} \deg(f) \stackrel{(C)}{=} \sum_{i=1}^k \deg(f, x_i).$$

Modulo 2 finden wir  $1 \equiv k \pmod{2}$ . Also ist  $k$  ungerade. □

😊 Theorie und Anwendung arbeiten auch hier bestens zusammen! Der Abbildungsgrad ist ein wunderbares Hilfsmittel, einfach doch wirkungsvoll. Wir haben ihn bereits in der Topologie sehr erfolgreich eingesetzt, zum Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes, des Satzes vom gekämmten Igel und vielen weiteren geometrischen Anwendungen.

Die Beweise sind meist elegant und raffiniert, wie oben gesehen. Freilich muss erst einmal bewiesen werden, dass der Abbildungsgrad existiert und die obigen hilfreichen Eigenschaften besitzt. Das führe ich hier nicht aus, sondern borge mir dieses Werkzeug aus der Algebraischen Topologie. Das ist ein grundehrliches Beispiel von ~~Aneignung~~ Arbeitsteilung.

Es ist schon bemerkenswert, dass die Algebraische Topologie hier in der Spieltheorie durchschlagende Wirkung entfaltet. Erstere gilt gemeinhin als abstrakt, und das ist sie sicher auch; Ignoranten halten sie daher für anwendungsfern, doch das Gegenteil ist wahr: Sie führt uns zu wichtigen Fixpunktsätzen und klärt die geometrische Struktur von Lösungsmengen, wie hier in den Sätzen von Kohlberg-Mertens und Wilson zu bewundern.

**Aufgabe:** Nashs Existenzsatz wurde im Beweis von Kohlberg-Mertens nicht verwendet. Versuchen Sie, Ersteren aus Letzterem zu folgern.

**Lösung:** (1) Wie oben erklärt können wir den globalen Struktursatz von Kohlberg-Mertens nutzen und daraus Wilsons Paritätstheorem ableiten. Für jedes generische Spiel  $u : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist demnach die Anzahl  $\#NE(\bar{u})$  ungerade, also insbesondere größer 0, und somit  $NE(\bar{u}) \neq \emptyset$ .

(2) Das lässt nur noch den Fall nicht-regulärer Spiele offen: Könnte hier die Ausnahme  $NE(\bar{u}) = \emptyset$  entstehen? Dann wäre  $f : p \circ \varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  nicht surjektiv, denn  $u \notin \text{Im}(f)$ . Wir hätten dann die Homotopie

$$\begin{aligned} K &: [0, 1] \times (\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}) \rightarrow \mathbb{R}^N \cup \{\infty\} : (t, x) \mapsto u + (f^*(x) - u)/t, \\ K_0 &= \text{const} : \mathbb{R}^N \cup \{\infty\} \rightarrow \{\infty\} \hookrightarrow \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}, \\ K_1 &= f^* : \mathbb{R}^N \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

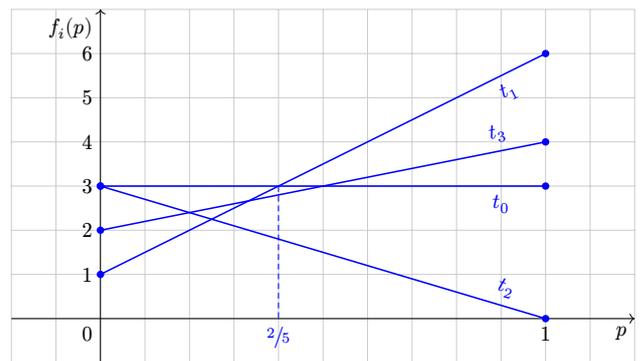
Das führt zur Homotopie  $\text{id}_{\mathbb{S}^N} \simeq f^* \simeq \text{const} : \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{S}^N$ . Eine solche ist jedoch unmöglich, denn  $\deg(\text{id}_{\mathbb{S}^N}) = 1$  und  $\deg(\text{const}) = 0$ . □

**Aufgabe:** Wir untersuchen das folgende Spiel  $g : S \times T \rightarrow \mathbb{R}^2$  und seine Fortsetzung  $\bar{g} : [S] \times [T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf gemischte Strategien.

		Bob	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$
Alice	$s_0$		3	1	3	2
	$s_1$		5	1	0	4
			3	3	3	5

- Nennen Sie alle *reinen* Nash-Gleichgewichte  $(s, t) \in NE(g)$ .
- Alice spielt die Strategie  $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$  für ein  $p \in [0, 1]$ . Zeichnen Sie die Auszahlung  $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$  zu Bobs Strategien  $t_i$ . Eine von Bobs reinen Strategien  $x \in T$  ist nie beste Antwort; nennen Sie  $x$  und eine gemischte Strategie  $y \in [T \setminus \{x\}]$ , die  $x$  strikt dominiert.
- Nennen Sie zu jeder Strategie  $s_p$  Bobs beste Antworten.
- Bestimmen Sie damit alle Nash-Gleichgewichte  $(s, t) \in NE(\bar{g})$ .

- Lösung:** (1) Die reinen Gleichgewichte sind  $NE(g) = \{(s_0, t_0), (s_1, t_1)\}$ .  
 (2) Wir skizzieren die Auszahlungen  $f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  für Bob:



Demnach ist  $t_3$  nie beste Antwort. Sie wird dominiert von  $y = \frac{3}{5}t_0 + \frac{2}{5}t_1$ .

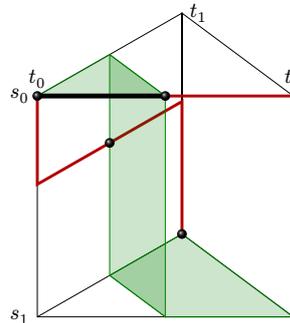
- (3) Graphisch lesen wir zu  $s_p$  jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$p = 0$	$0 < p < 2/5$	$p = 2/5$	$2/5 < p \leq 1$
Antwort	$\{t_0, t_2\}$	$\{t_0\}$	$\{t_0, t_1\}$	$\{t_1\}$

- (4) Alice spielt  $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$  mit  $p \in [0, 1]$ . Fallunterscheidung:

- Fall:** Hier gilt  $p = 0$ . Bob spielt  $t = (1-q)t_0 + qt_2$ . Alice bekommt  $g_A(s_0, t) = (1-q) \cdot 5 + q \cdot 1$ , abweichend  $g_A(s_1, t) = (1-q) \cdot 3 + q \cdot 3$ . Es muss  $g_A(s_0, t) \geq g_A(s_1, t)$  gelten, also  $2(1-q) \geq 2q$ , somit  $q \geq 1/2$ .
- Fall:** Hier gilt  $0 < p < 2/5$ . Bob spielt  $t = t_0$ . Wegen  $g_A(s_0, t_0) = 5 > 3 = g_A(s_1, t_0)$  entsteht hier kein Gleichgewicht.
- Fall:** Hier gilt  $p = 2/5$ . Bob spielt  $t = (1-q)t_0 + qt_1$ . Alice bekommt  $g_A(s_0, t) = (1-q) \cdot 5 + q \cdot 1$  bzw.  $g_A(s_1, t) = (1-q) \cdot 3 + q \cdot 3$ . Es muss  $g_A(s_0, t) = g_A(s_1, t)$  gelten, also  $2(1-q) = 2q$ , somit  $q = 1/2$ .
- Fall:** Hier gilt  $2/5 < p \leq 1$ . Bob spielt  $t = t_1$ . Wegen  $g_A(s_0, t_0) = 1 < 3 = g_A(s_1, t_0)$  muss Alice  $s_1$  spielen.

**Zusammenfassung:** Nash-Gleichgewichte sind die beiden isolierten Punkte  $(s_1, t_1)$  und  $(s, t)$  mit  $s = 3/5 s_0 + 2/5 s_1$  und  $t = 1/2 t_0 + 1/2 t_1$  sowie das Intervall aller Punkte  $(s_0, t)$  mit  $t = (1-q)t_0 + qt_2$  und  $q \in [0, 1/2]$ .



Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus (3). Spielt Bob die Strategie  $t = q_0 t_0 + q_1 t_1 + q_2 t_2$ , dann erhält Alice die Auszahlung  $5q_0 + 1q_1 + 1q_2$ , wenn sie  $s_0$  spielt, und  $3q_0 + 3q_1 + 3q_2$ , wenn sie  $s_1$  spielt. Demnach ist  $s_0$  die beste Antwort, falls  $q_0 > 1/2$ , und  $s_1$  ist die beste Antwort, falls  $q_0 < 1/2$ . Im Fall  $q_0 = 1/2$  ist jede Konvexkombination von  $s_0$  und  $s_1$  eine beste Antwort; dies ist die grüne Reaktionsfläche.

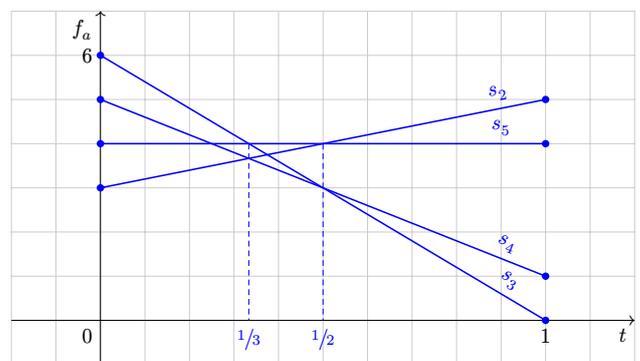
Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen (Kurve / Fläche) ist die Menge der Nash-Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.

**Aufgabe:** Wir untersuchen das folgende Spiel  $g : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}^2$  und seine Fortsetzung  $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf gemischte Strategien.

		Bob	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
Alice	$s_0$		3	6	5	4
	$s_1$		1	3	5	4
			5	0	1	4
			3	3	6	2

- Nennen Sie alle *reinen* Nash-Gleichgewichte  $(s_A, s_B) \in NE(g)$ .
- Alice spielt  $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$  für ein  $t \in [0, 1]$ . Zeichnen Sie die Auszahlung  $f_a(t) := \bar{g}_A(s_t, a)$  zu Bobs Antworten  $a \in \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$ . Eine von Bobs reinen Strategien  $x \in S_B$  ist nie beste Antwort; nennen Sie  $x$  und eine gemischte Strategie  $y \in [S_B \setminus \{x\}]$ , die  $x$  strikt dominiert.
- Nennen Sie zu jeder Strategie  $s_t$  Bobs beste Antworten.
- Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte  $(s_A, s_B) \in NE(\bar{g})$ .

- (1) Die reinen Gleichgewichte sind  $NE(g) = \{(s_0, s_3), (s_1, s_2)\}$ .  
 (2) Wir skizzieren die Auszahlungen  $f_a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  für Bob:



Demnach ist  $s_4$  nie beste Antwort. Sie wird dominiert von  $y = \frac{2}{3}s_3 + \frac{1}{3}s_5$ .

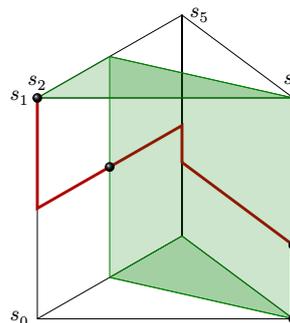
- (3) Graphisch lesen wir zu  $s_t$  jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$0 \leq t < 1/3$	$1/3$	$t < 1/2$	$1/2$	$1/2 < t \leq 1$
Antwort	$\{s_3\}$	$\{s_3, s_5\}$	$\{s_5\}$	$\{s_5, s_2\}$	$\{s_2\}$

- (4) Alice spielt  $s_A = s_t = (1-t)s_0 + ts_1$  mit  $t \in [0, 1]$ . Fallunterscheidung:

- Fall:**  $0 \leq t < 1/3$ . Bob spielt  $s_B = s_3$ . Darauf ist  $s_A \in [s_0, s_1]$  Alice' beste Antwort. Wir finden so die Nash-Gleichgewichte  $(s_t, s_3)$  für  $0 \leq t < 1/3$ .
- Fall:**  $t = 1/3$ . Bob spielt  $s_B \in [s_3, s_5]$ . Nur auf  $s_B = s_3$  ist  $s_A = s_t$  Alice' beste Antwort. Wir finden so das Nash-Gleichgewicht  $(s_t, s_3)$  für  $t = 1/3$ .
- Fall:**  $1/3 < t < 1/2$ . Bob spielt  $s_B = s_5$ . Darauf ist  $s_A = s_0$  Alice' beste Antwort. Wir finden in diesem Intervall keine weiteren Gleichgewichte.
- Fall:**  $t = 1/2$ . Bob spielt  $s_B \in [s_2, s_5]$ . Nur auf  $s_B = 1/2 s_2 + 1/2 s_5$  ist  $s_A = s_t$  Alice' beste Antwort. Wir finden so das Gleichgewicht  $(s_t, s_B)$ .
- Fall:**  $1/2 < t \leq 1$ : Bob spielt  $s_B = s_2$ . Darauf ist  $s_A = s_1$  Alice' beste Antwort. Wir finden so das letzte Nash-Gleichgewicht  $(s_1, s_2)$ .

**Zusammenfassung:** Nash-Gleichgewichte sind die isolierten Punkte  $(s_1, s_2)$  und  $(s_A, s_B)$  mit  $s_A = 1/2 s_0 + 1/2 s_1$  und  $s_B = 1/2 s_2 + 1/2 s_5$  sowie das Intervall aller Punkte  $(s_t, s_3)$  mit  $t \in [0, 1/3]$ .



Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus (3). Spielt Bob die Strategie  $s_B = p_2 s_2 + p_3 s_3 + p_5 s_5$ , dann erhält Alice die Auszahlung  $p_2 + 3p_3 + 4p_5$ , wenn sie  $s_0$  spielt, und  $3p_2 + 3p_3 + 2p_5$ , wenn sie  $s_1$  spielt. Also ist  $s_0$  die beste Antwort falls  $p_2 < p_5$ , und  $s_1$  ist die beste Antwort falls  $p_2 > p_5$ . Im Fall  $p_2 = p_5$  ist jede Konvexkombination von  $s_0$  und  $s_1$  eine beste Antwort. So erhalten wir die grüne Reaktionsfläche für Alice.

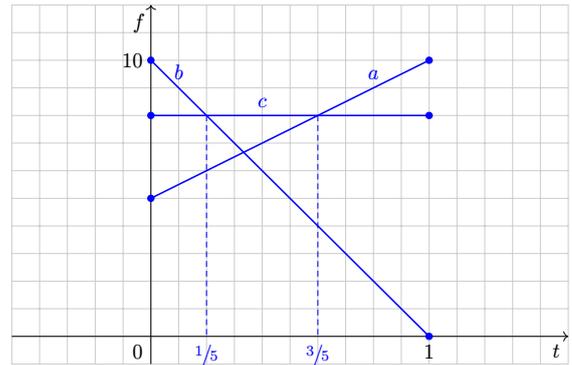
Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen (Kurve / Fläche) ist die Menge der Nash-Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.

**Aufgabe:** Wir untersuchen das folgende Spiel  $g : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}^2$  und seine Fortsetzung  $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf gemischte Strategien.

		Bob		
		a	b	c
Alice	$s_0$	5	10	8
	$s_1$	7	0	8
		a	b	c
		7	4	9

- Nennen Sie alle *reinen* Nash-Gleichgewichte  $(s_A, s_B) \in NE(g)$ .
- Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie  $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$  für ein  $t \in [0, 1]$ . Zeichnen Sie die Auszahlung  $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$  zu Bobs Strategie a, ebenso  $f_b$  und  $f_c$ .
- Nennen Sie zu jeder Strategie  $s_t$  Bobs beste Antworten.
- Bestimmen Sie damit alle Nash-Gleichgewichte  $(s_A, s_B) \in NE(\bar{g})$ .

- Lösung:** (1) Das einzige reine Gleichgewicht ist  $(s_A, s_B) = (s_0, b)$ .  
 (2) Wir skizzieren die Auszahlungen  $f_a, f_b, f_c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  für Bob:



(3) Graphisch lesen wir zu  $s_t$  jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$0 \leq t < 1/5$	$1/5 \leq t < 3/5$	$3/5 \leq t \leq 1$
Antwort	{b}	{b, c}	{a}

(4) Neben dem reinen Gleichgewicht  $(s_0, b)$  finden wir die gemischten  $(s_{1/5}, 2/3b + 1/3c)$  und  $(s_{3/5}, 1/2a + 1/2c)$ .

- ☺ Dies sind *gegenseitig* beste Antworten, wie die Definition es verlangt. Hierzu ist eine kleine Rechnung notwendig: Versuchen Sie es als Übung! (Anleitung: Die beiden vorigen Aufgaben führen dies genauer aus.)
- ☺ Mit dieser Methode können Sie alle  $2 \times n$ -Spiele lösen. Wiederholen / entwickeln Sie den Algorithmus, der zu jedem Spiel  $g : \{0, 1\} \times \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  alle Nash-Gleichgewichte bestimmt. Der generische Fall ist leichter. Wie lösen Sie den allgemeinen Fall? Wenn Sie möchten, können Sie Ihr Lösungsverfahren programmieren!

- Aufgabe:** Hat jedes endliche Spiel  $g : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
 (1) mindestens ein *reines* Nash-Gleichgewicht? (2) ein gemischtes?  
 (3) Hat jedes unendliche Spiel, etwa von der Form  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , mindestens ein *gemischtes* Nash-Gleichgewicht?

- Lösung:** (1) Nein! Ein minimales Gegenbeispiel ist *Matching Pennies*. Etwas größer, dafür aber bekannter ist natürlich *Schere-Stein-Papier*. Diese Spiele erlauben keine reinen Nash-Gleichgewichte.  
 (2) Ja! Genau das garantiert der Existenzsatz E1E von Nash.  
 (3) Nein! Ein mögliches Gegenbeispiel ist *Die höchste Zahl gewinnt*, wobei  $g(s_1, s_2) = (+1, -1)$  falls  $s_1 > s_2$  und  $g(s_1, s_2) = (-1, +1)$  falls  $s_1 < s_2$  sowie  $g(s_1, s_2) = (0, 0)$  falls  $s_1 = s_2$ . Offensichtlich gibt es kein reines Nash-Gleichgewicht, denn jede Strategie kann vom Gegner übertrumpft werden. Ebensovienig gibt es gemischte Gleichgewichte. Das gilt selbst dann, wenn wir unendliche Konvexkombinationen / diskrete WMAße zulassen, also  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} s(n) = 1$ .

**Aufgabe:** Wir untersuchen das folgende Spiel  $g : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  auf der Strategiemenge  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  und seine affine Fortsetzung  $\bar{g} : [S] \times [S] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  auf dem Simplex  $[S] = [s_1, s_2, \dots, s_n]$ .

		Bob			
		$s_1$	$s_2$	...	$s_n$
Alice	$s_1$	1	0	...	0
	$s_2$	0	1	...	0
	...	...	...	...	...
	$s_n$	0	0	...	1

Formal haben wir also  $g : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : g(s_k, s_\ell) = \begin{cases} (1, 1) & \text{falls } k = \ell, \\ (0, 0) & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$

- Nennen Sie alle *reinen* Nash-Gleichgewichte  $(s_A, s_B) \in NE(g)$ .
- Alice spielt  $s_A = \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2$ . Nennen Sie Bobs beste Antworten.
- Bob spielt  $s_B = \frac{2}{3}s_1 + \frac{2}{5}s_2 + \frac{1}{5}s_3$ . Nennen Sie Alice' beste Antworten.
- Nennen Sie alle gemischten Nash-Gleichgewichte  $(s_A, s_B) \in NE(\bar{g})$ .

- Lösung:** (1) Wir sehen sofort  $NE(g) = \{(s_k, s_k) \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ , denn zu jedem  $s_k$  gibt es genau eine beste Antwort, nämlich  $s_k$ .  
 (2) Die besten Antworten auf  $s_A$  sind rein  $\{s_1, s_2\}$  und gemischt  $\{s_1, s_2\}$ .  
 (3) Die besten Antworten auf  $s_B$  sind rein  $\{s_1, s_2\}$  und gemischt  $\{s_1, s_2\}$ .  
 (4) Wir finden hier genau  $2^n - 1$  Nash-Gleichgewichte:

$$NE(\bar{g}) = \left\{ (s_A^X, s_B^X) \mid \emptyset \neq X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, s_A^X = s_B^X = \frac{1}{|X|} \sum_{k \in X} s_k \right\}.$$

- ☺ Jedes dieser Strategiepaare  $(s_A^X, s_B^X)$  ist wirklich ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht  $(s_A, s_B)$  von tatsächlich dieser Form. Der Beweis ist nicht schwer, aber etwas länglich, deshalb genügte in der Klausur die Nennung der Lösung. Versuchen Sie den Beweis als Übung!

☺ Generisch ist die Menge der Nash-Gleichgewichte endlich (Satz E3c). Ihre Anzahl kann exponentiell wachsen, wie wir hier konkret sehen:

**Aufgabe:** Wir untersuchen das folgende Spiel  $g : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

		Bob			
		$s_1$	$s_2$	...	$s_n$
Alice	$s_1$	$b_1$	0	...	0
	$s_2$	0	$b_2$	...	0
	...	...	...	...	...
	$s_n$	0	0	...	$b_n$

Die Konstanten  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$  seien strikt positiv. Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte, rein und gemischt!

**Lösung:** (1) Reine Gleichgewichte sind

$$NE(g) = \{(s_k, s_k) \mid k = 1, 2, \dots, n\},$$

denn zu jedem  $s_k$  gibt es genau eine beste Antwort, nämlich  $s_k$ .  
 (2) Wie zuvor finden wir genau  $2^n - 1$  gemischte Nash-Gleichgewichte,

$$NE(\bar{g}) = \left\{ (s_A^X, s_B^X) \mid \emptyset \neq X \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

**Konstruktion:** Zu  $X$  sei  $s_A^X = \sum_{k \in X} p_k s_k$  und  $s_B^X = \sum_{k \in X} q_k s_k$  mit  $p_k = c_B^X / b_k$  und  $\sum_k p_k = 1$  sowie  $q_k = c_A^X / a_k$  und  $\sum_k q_k = 1$ .

- ⚠ Alice' Wkten sind reziprok zu Bobs Gewinnen, und umgekehrt. Nur so ist Bobs Gewinnerwartung  $c_B^X$  konstant für alle  $s_k$  mit  $k \in X$ . Ebenso ist Alice' Gewinnerwartung  $c_A^X$  konstant für alle  $s_k$  mit  $k \in X$ .
- ☺ Jedes dieser Strategiepaare  $(s_A^X, s_B^X)$  ist wirklich ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht  $(s_A, s_B)$  tatsächlich von dieser Form. Der Beweis ist nicht schwer, erfordert aber etwas Geduld und Sorgfalt. Wenn Sie möchten, führen Sie als Übung den Beweis sorgsam aus!

Eine exzellente Initiative (Klausur 2020)	E417 Übung
<p><b>Aufgabe:</b> Die Universitäten <math>i \in I = \{1, 2, \dots, 9\}</math> leiden unter Geldnot. Ein Wohltäter schreibt 100 Mio Euro aus nach folgendem Verfahren: Jede Universität <math>i \in I</math> verpflichtet sich ihm gegenüber zu Leistungen im Wert von <math>b_i \in \{0, 1, \dots, 100\}</math> Mio Euro. Diese Gebote sind gleichzeitig, verdeckt und unwiderruflich. Das höchste Gebot <math>b_i</math> gewinnt die 100 Mio Euro, genauer: Die Universitäten in der so definierten Gewinnermenge <math>M = \{i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j\}</math> teilen sich die 100 Mio Euro gleich auf:</p> $u_i : \{0, 1, \dots, 100\}^9 \rightarrow \mathbb{R} : b \mapsto u_i(b) = \begin{cases} -b_i & \text{falls } i \notin M, \\ \frac{100}{ M } - b_i & \text{falls } i \in M. \end{cases}$ <p>Das entspricht einer perfiden Auktion, bei der jeder Bieter zahlt (P205). Das klingt zunächst verrückt, kommt aber in der Realität öfters vor.</p> <p>(1) Sie spielen die Universität <math>i \in I</math>. Sei <math>c_i := \max_{j \neq i} b_j</math> das höchste Konkurrenzgebot. Angenommen, es gilt (a) <math>c_i \in \{0, 1, \dots, 98\}</math> oder (b) <math>c_i = 99</math> oder (c) <math>c_i = 100</math>. Was wären dazu Ihre besten Antworten? (2) Bestimmen Sie alle (reinen) Nash-Gleichgewichte dieses Spiels.</p>	

Eine exzellente Initiative (Klausur 2020)	E418 Übung
<p><b>Lösung:</b> (1) Wir gehen die drei Szenarien sorgfältig durch:</p> <p>(1a) Die beste Antwort ist <math>b_i = c_i + 1</math> mit Gewinn <math>100 - b_i = 99 - c_i &gt; 0</math>. Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen: Für <math>b_i \geq c_i + 2</math> ist der Gewinn <math>100 - b_i \leq 98 - c_i \leq 0</math>, also kleiner. Für <math>b_i = c_i</math> ist der Gewinn <math>100/ M  - b_i \leq 50 - c_i</math>, also kleiner. Für <math>b_i &lt; c_i</math> ist der Gewinn <math>-b_i \leq 0</math>, also kleiner.</p> <p>(1b) Die besten Antworten sind <math>b_i = 0</math> oder <math>b_i = 100</math> mit Gewinn 0. Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen: Für <math>b_i = 99</math> ist der Gewinn <math>100/ M  - b_i \leq 50 - 99 &lt; 0</math>, also kleiner. Für <math>1 \leq b_i \leq 98</math> ist der Gewinn <math>-b_i &lt; 0</math>, also kleiner.</p> <p>(1c) Die beste Antwort ist <math>b_i = 0</math> mit Gewinn 0. Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen: Für <math>b_i = 100</math> ist der Gewinn <math>100/ M  - b_i \leq 50 - 100 &lt; 0</math>, also kleiner. Für <math>1 \leq b_i \leq 99</math> ist der Gewinn <math>-b_i &lt; 0</math>, also kleiner.</p>	

Eine exzellente Initiative (Klausur 2020)	E419 Übung
<p>(2) Dieses Spiel hat keine (reinen) Nash-Gleichgewichte! Wir betrachten</p> $u : \{0, 1, \dots, 100\}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9.$ <p>Angenommen <math>b \in \{0, 1, \dots, 100\}^9</math> wäre ein Nash-Gleichgewicht. Wir betrachten die erste Universität <math>i \in I</math> mit dem maximalen Betrag <math>b_i = \max_j b_j</math>. Nach obigem Muster unterscheiden wir drei Fälle (1-3):</p> <p>(2a) Gilt <math>b_i \leq 98</math>, dann kann sich jede andere Universität <math>j \in I \setminus \{i\}</math> verbessern. Also ist <math>b</math>, entgegen unserer Annahme, kein Gleichgewicht.</p> <p>(2b) Gilt <math>b_i = 99</math>, dann wählen alle anderen 0 oder 100, hier also 0. Somit kann <math>i</math> sich verbessern, und <math>b</math> ist keine Gleichgewicht.</p> <p>(2c) Gilt <math>b_i = 100</math>, dann wählen alle anderen Universitäten 0. Somit kann <math>i</math> sich verbessern, und <math>b</math> ist keine Gleichgewicht.</p> <p>☺ Dieses negative Ergebnis ist bemerkenswert, gar erschütternd. Dank guter Notation ist alles klar und präzise nachzurechnen.</p>	

Eine exzellente Initiative (Klausur 2020)	E420 Übung
<p><b>Interpretation:</b> Da es kein Gleichgewicht gibt, ist das Verhalten schwer vorhersehbar. Die Initiative des „Wohltäters“ zielt vielleicht sogar genau darauf ab, die Universitäten in verlustreiche Bietergefechte zu verwickeln, bei dem er mehr gewinnt als der ausgelobte Preis kostet. Umgekehrt ist nach dem Verfahren der Katzenjammer groß: „Hätte ich gewusst..., dann hätte ich...“. Bei Nash-Gleichgewichten passiert das nicht!</p> <p><b>Auktionen:</b> Unser Beispiel zeigt eine perfide Auktion, bei der jeder Bieter bezahlt, selbst wenn er dafür gar nichts bekommt, engl. <i>all pay auction</i>, siehe Seite P205. Zu einer ersten Analyse genügen uns bereits der Begriff des Nash-Gleichgewichts und sorgsame Fallunterscheidungen. Nur so lässt sich das Problem wirklich durchdringen.</p> <p>Kapitel P behandelt Auktionen noch allgemeiner und ausführlicher. Der grundlegende Satz P2c der Auktionstheorie, Vickreys berühmte Erlösäquivalenz, hilft hier leider nicht, denn er setzt die Existenz eines Gleichgewichts voraus! Überhaupt helfen hier keine allgemeinen Sätze, sondern nur präzise Definitionen und sorgfältiges Ausarbeiten.</p>	

Sind Lehrpreise unvernünftig? (Klausur 2022)	E421 Übung
<p>Jede Dozent:in <math>i \in I = \{1, 2, \dots, n\}</math>, <math>n \geq 2</math>, investiert in die Vorbereitung ihrer Lehre den Aufwand <math>b_i \in \{0, 1, \dots, 200\}</math>, gleichzeitig und verdeckt. Die beste Lehre, mit maximalem Aufwand <math>b_i</math>, erhält einen Lehrpreis im Wert von 49.80, bei Gleichstand wird unter den besten geteilt.</p> <p><b>Aufgabe:</b> (0) Geben Sie die Gewinnfunktion <math>u : \{0, 1, \dots, 200\}^n \rightarrow \mathbb{R}^n</math> an.</p> <p>(1) Sie spielen die Dozent:in <math>i \in I</math> und betrachten <math>c_i := \max_{j \neq i} b_j</math>. (1a) Angenommen, es gilt <math>c_i \leq 48</math>. Was sind dazu Ihre besten Antworten? (1b) Angenommen, es gilt <math>c_i \geq 49</math>. Was sind dazu Ihre besten Antworten? (2) Bestimmen Sie alle (reinen) Nash-Gleichgewichte dieses Spiels <math>u</math>. (3) Sind Lehrpreise ein faires Mittel zur Verbesserung der Lehre?</p> <p>Manche:r entgegnet empört: „Gute Lehre ist kein Kosten-Nutzen-Kalkül, sondern entsteht aus Idealismus und Begeisterung.“ Das mag stimmen. Wer jedoch Personen die Entlohnung oder auch Anerkennung verwehrt, sollte nicht auf Idealismus pochen oder altruistische Wunder erhoffen. Sind Lehrpreise als Anreiz sinnvoll oder doch unvernünftig?</p>	

Sind Lehrpreise unvernünftig? (Klausur 2022)	E422 Übung
<p><b>Lösung:</b> (0) Mit <math>M = \{i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j\}</math> gilt</p> $u_i : \{0, 1, \dots, 200\}^n \rightarrow \mathbb{R} : b \mapsto u_i(b) = \begin{cases} -b_i & \text{falls } i \notin M, \\ \frac{49.8}{ M } - b_i & \text{falls } i \in M. \end{cases}$ <p>(1a) Die beste Antwort auf <math>c_i \leq 48</math> ist <math>b_i = c_i + 1</math> mit Gewinn</p> $49.8 - b_i = 48.8 - c_i \geq 0.8.$ <p>Begründung durch Fallunterscheidung aller Alternativen: Für <math>b_i \geq c_i + 2</math> ist der Gewinn <math>49.8 - b_i \leq 47.5 - c_i</math>, also kleiner. Für <math>b_i = c_i</math> ist der Gewinn <math>49.8/ M  - b_i \leq 24.9 - c_i</math>, also kleiner. Für <math>b_i &lt; c_i</math> ist der Gewinn <math>-b_i \leq 0</math>, also kleiner.</p> <p>(1b) Die beste Antwort auf <math>c_i \geq 49</math> ist <math>b_i = 0</math> mit Gewinn <math>u_i(b) = 0</math>. Für <math>b_i = c_i</math> ist der Gewinn <math>49.8/ M  - b_i \leq 24.9 - 49 &lt; 0</math>, also kleiner. Für <math>b_i &gt; c_i</math> ist der Gewinn <math>49.8 - b_i \leq 49.8 - 50 &lt; 0</math>, also kleiner. Für <math>1 \leq b_i &lt; c_i</math> ist der Gewinn <math>-b_i &lt; 0</math>, also kleiner.</p>	

Sind Lehrpreise unvernünftig? (Klausur 2022)	E423 Übung
<p>(2) Wir zeigen, dass es keine (reinen) Nash-Gleichgewichte gibt! Angenommen <math>b \in \{0, 1, \dots, 200\}^n</math> wäre ein Nash-Gleichgewicht von <math>u</math>. Wir betrachten die erste Dozent:in <math>i \in I</math> mit dem maximalen Aufwand <math>b_i = \max_j b_j</math>. Nach obigem Muster unterscheiden wir zwei Fälle:</p> <p>(2a) Gilt <math>b_i \leq 48</math>, dann kann sich jede andere Dozent:in <math>j \in I \setminus \{i\}</math> verbessern durch <math>b'_j = b_j + 1</math> (dank 1a). Also ist <math>b</math> kein Gleichgewicht.</p> <p>(2b) Gilt <math>b_i \geq 49</math>, dann wählen alle anderen Dozent:innen <math>b_j = 0</math> (dank 1b). Somit kann <math>i</math> sich verbessern durch <math>b'_i = 1</math>, und <math>b</math> ist kein Gleichgewicht.</p> <p><b>Erläuterung:</b> Dies ist ein erschütterndes Ergebnis, aber in diesem Modell leicht nachzurechnen. Es zeigt eine perfide Auktion, bei der jeder Bieter bezahlt, selbst wenn er dafür nichts bekommt, engl. <i>all pay auction</i>, siehe Seite P205. Zu einer ersten Analyse genügen uns bereits der Begriff des Nash-Gleichgewichts und sorgsame Fallunterscheidungen.</p> <p>Diese und ähnliche Dilemmata erleben wir manchmal alltäglich um uns herum... vielleicht sogar in der universitären Lehre? Wir haben es auch im Casino in unseren legendären Versteigerungen ausprobiert.</p>	

Sind Lehrpreise unvernünftig? (Klausur 2022)	E424 Übung
<p><b>Interpretation:</b> Da es in diesem Spiel kein Nash-Gleichgewicht gibt, ist rationales Verhalten hier erschwert, Empfehlungen oder Prognosen kaum möglich. Der Anreiz des Lehrpreises soll vielleicht irrationales Verhalten fördern und die Dozent:innen zu unrentabel hohem Aufwand verleiten.</p> <p>Nach dem Semester endet dies gar in Enttäuschung und Verbitterung: „Viel Mühe, wenig Ertrag: Die Lehre ist ein undankbares Geschäft.“ – „Hätte ich das gewusst, dann hätte ich mir nicht so viel Mühe gegeben.“ Hätte..., hätte...! Bei Nash-Gleichgewichten passiert das nicht.</p> <p>Das erinnert uns an die Frage: Was genau sagen uns Gleichgewichte? Sie sind rational bei vorausschauender Planung, etwa beim Verhandeln. Sie minimieren die Reue, auch im Rückblick bleibt jede:r dabei. Sie sind dauerhaft spielbar und somit nachhaltig.</p> <p><b>Kurzum:</b> Der Mechanismus der Lehrpreise klingt zunächst verlockend, erweist sich aber bei genauerem Hinsehen als eine perfide <i>all pay auction</i>. Wer gute Leistung dauerhaft fördern möchte, muss sie auch ausreichend entlohnen und anerkennen. Alles andere ist kurzfristige Augenwischerei.</p>	